Differential- und Integralrechnung II

Von G. M. Fichtenholz

Mit 64 Abbildungen

Zehnte Auflage

VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften
Berlin 1990

Г. М. Фихтенгольц
Курс дифференциального и интегрального исчисления
Том II
Физматгиз, Москва 1959

Die Übersetzung aus dem Russischen und die wissenschaftliche Redaktion besorgten:
Brigitte und Walter Mai

ISBN 3-326-00399-4

ISSN 0073-2842

Verlagslektoren: Brigitte Mai, Erika Arndt
Umschlaggestaltung: Hartwig Hoeftmann

VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, DDR-1080 Berlin, Postfach 1216
Lizenz-Nr. 206 · 435/74/89
Printed in the German Democratic Republic
Gesamtherstellung: VEB Druckhaus „Maxim Gorki", DDR-7400 Altenburg
LSV 1034
Bestellnummer: 5717056
03400

Inhalt

VIII. Die Stammfunktion (Das unbestimmte Integral)

§ 1. Das unbestimmte Integral und die einfachsten Verfahren zu seiner Berechnung

263. Der Begriff der Stammfunktion (und des unbestimmten Integrals). In vielen Fragen von Wissenschaft und Technik hat man nicht zu einer gegebenen Funktion die Ableitung zu bestimmen, sondern umgekehrt eine Funktion zu suchen, deren Ableitung bekannt ist. In Nr. 91 betrachteten wir die bekannte Bewegungsgleichung $s = s(t)$, d. h. das Gesetz der Änderung des Weges mit der Zeit, und gelangten durch Differentiation zunächst zu der Geschwindigkeit $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ und dann zu der Beschleunigung $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. Tatsächlich ist aber oft das umgekehrte Problem zu lösen: Gegeben sei die Beschleunigung a als Funktion von t, also $a = a(t)$; gesucht sind die Geschwindigkeit v und der zurückgelegte Weg s in Abhängigkeit von der Zeit t. Hier ist es also notwendig, zu der Funktion $a = a(t)$ diejenige Funktion $v = v(t)$ zu finden, für welche a die Ableitung ist, und dann bei Kenntnis von v diejenige Funktion $s = s(t)$ zu bestimmen, deren Ableitung die Funktion v ist.

Wir geben nun die folgende

Definition. Eine Funktion $F(x)$ heißt in einem gegebenen Intervall *Stammfunktion*[1]) der Funktion $f(x)$ oder *unbestimmtes Integral* von $f(x)$, wenn $f(x)$ in dem ganzen Intervall die Ableitung von $F(x)$ ist oder, was das gleiche ist, wenn $f(x)\,\mathrm{d}x$ das Differential von $F(x)$ darstellt:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{oder} \quad \mathrm{d}F(x) = f(x)\,\mathrm{d}x.^{2)}$$

Das Aufsuchen aller Stammfunktionen einer Funktion, die sogenannte *Integration*, ist eines der Probleme der *Integralrechnung*; wie wir sehen, ist dieses Problem die Umkehrung des Grundproblems der Differentialrechnung.

Satz. *Ist die Funktion $F(x)$ in einem beliebigen (endlichen oder unendlichen, abgeschlossenen oder nicht abgeschlossenen) Intervall $\mathfrak{X}$ eine Stammfunktion der Funktion $f(x)$, so ist auch die Funktion $F(x) + C$, wobei C eine beliebige Konstante ist, eine Stammfunktion. Umgekehrt läßt sich jede Funktion, welche Stammfunktion von $f(x)$ im Intervall $\mathfrak{X}$ ist, in dieser Form darstellen.*

---

[1]) Oder *primitive Funktion. — Anm. d. Red.*

[2]) In diesem Fall sagt man auch, die Funktion $F(x)$ sei eine Stammfunktion (oder ein unbestimmtes Integral) *für den Differentialausdruck* $f(x)\,\mathrm{d}x$.

Beweis. Die Tatsache, daß außer $F(x)$ auch $F(x) + C$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist, folgt sofort aus $[F(x) + C]' = F'(x) = f(x)$.

Es sei nun $\Phi(x)$ eine *beliebige* Stammfunktion von $f(x)$, so daß im Intervall $\mathfrak{X}$

$$\Phi'(x) = f(x)$$

gilt. Da die Funktionen $F(x)$ und $\Phi(x)$ in dem betrachteten Intervall die gleiche Ableitung besitzen, unterscheiden sie sich nur um eine additive Konstante (vgl. die Folgerung aus Nr. 131); es ist also

$$\Phi(x) = F(x) + C,$$

was zu beweisen war.

Auf Grund des Satzes genügt es, zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ nur eine Stammfunktion $F(x)$ zu bestimmen, um *alle* Stammfunktionen zu erhalten, da sie sich nur um additive Konstanten voneinander unterscheiden. *Also stellt der Ausdruck $F(x) + C$, wobei C eine beliebige Konstante ist, die allgemeine Form einer Funktion dar, die die Ableitung $f(x)$ oder das Differential $f(x)\,\mathrm{d}x$ hat.* Diesen Ausdruck nennen wir das *unbestimmte Integral von $f(x)$* und bezeichnen es mit dem Symbol

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x,$$

in welchem implizit schon eine beliebige Konstante enthalten ist. Die Funktion $f(x)$ heißt der *Integrand.*

Beispiel. Es sei $f(x) = x^2$; dann ist, wie wir sofort sehen, das unbestimmte Integral dieser Funktion gleich

$$\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C.$$

Dies läßt sich leicht durch die umgekehrte Operation, die Differentiation, nachprüfen.

Wir weisen darauf hin, daß unter dem Integralzeichen $\int$ das *Differential* der gesuchten Stammfunktion und nicht ihre Ableitung steht (in dem obigen Beispiel $x^2\,\mathrm{d}x$ und nicht x^2). Diese Schreibweise ist, wie wir in Nr. 294 sehen werden, historisch begründet; außerdem besitzt sie eine Reihe von Vorzügen, so daß es sehr zweckmäßig ist, sie beizubehalten.

Aus der Definition des unbestimmten Integrals ergeben sich unmittelbar die folgenden Eigenschaften:

1. $\mathrm{d}\int f(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x,$

d. h., *die Zeichen* d *und* $\int$ *heben sich gegenseitig auf, wenn das erste vor dem zweiten steht.*

2. Da $F(x)$ eine Stammfunktion von $F'(x)$ ist, gilt

$$\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

oder in anderer Form

$$\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C.$$

Daraus ist ersichtlich, daß *sich die Zeichen* d *und* $\int$, *wenn sie vor $F(x)$ stehen, auch* *dann aufheben, wenn* d *nach* $\int$ *steht; jedoch muß dann zu* $F(x)$ *eine beliebige Konstante addiert werden.*

Kehren wir wieder zu dem Problem aus der Mechanik zurück, das wir eingangs stellten, so können wir jetzt

$$v = \int a(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{und} \quad s = \int v(t)\,\mathrm{d}t$$

schreiben. Wir wollen voraussetzen, daß die Bewegung gleichförmig beschleunigt ist und etwa unter dem Einfluß der Schwerkraft stattfindet; dann ist $a = g$ (wenn die Richtung der Vertikalen nach unten als positiv angenommen wird) und, wie sich leicht erkennen läßt,

$$v = \int g\,\mathrm{d}t = gt + C.$$

Wir erhalten so für die Geschwindigkeit v einen Ausdruck, der außer von der Zeit t noch von einer beliebigen Konstanten C abhängt. Für verschiedene Werte von C ergeben sich auch verschiedene Werte für die Geschwindigkeit zu ein und derselben Zeit; folglich sind die uns bekannten Angaben für die vollständige Lösung des Problems unzureichend. Um zu einer vollständig bestimmten Lösung zu gelangen, genügt es, die Geschwindigkeit in einem beliebigen Zeitpunkt zu kennen. Beispielsweise sei bekannt, daß im Moment $t = t_0$ die Geschwindigkeit $v = v_0$ vorliege; setzen wir diese Werte in den Ausdruck für v ein, so erhalten wir

$$v_0 = gt_0 + C \quad \text{oder} \quad C = v_0 - gt_0,$$

so daß

$$v = g(t - t_0) + v_0$$

die wohlbestimmte Lösung des Problems ist.

Für den Weg s erhalten wir

$$s = \int [g(t - t_0) + v_0]\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,g(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + C'$$

(durch Differentiation läßt sich leicht nachweisen, daß die Stammfunktion von v diese Form haben kann). Die noch unbekannte Konstante C' könnten wir bestimmen, wenn etwa $s = s_0$ für $t = t_0$ angenommen wird; so finden wir $C' = s_0$, und die Lösung hat die endgültige Form

$$s = \frac{1}{2}\,g(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + s_0.$$

Die Werte t_0, s_0, v_0 heißen die *Anfangswerte* für die Größen t, s bzw. v.

Wir wissen, daß die Ableitung der Funktion $y = F(x)$ den Steigungskoeffizienten der Tangente an die entsprechende Kurve angibt. Daher läßt sich das Problem, eine Stammfunktion $F(x)$ zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ zu bestimmen, folgendermaßen erläutern: *Es muß diejenige Kurve* $y = F(x)$ *gefunden werden, deren Steigungskoeffizient dem Gesetz*

$$\tan\alpha = f(x)$$

unterworfen ist.

Ist $y = F(x)$ eine dieser Kurven, so ergeben sich aus ihr alle übrigen Kurven durch eine einfache Verschiebung (um einen beliebigen Abschnitt C) parallel zur y-Achse

(Abb. 1). Um eine Kurve aus dieser Kurvenschar näher zu bestimmen, genügt es, einen Punkt (x_0, y_0) zu wählen, durch den diese Kurve verlaufen soll; der *Anfangswert* $y_0 = F(x_0) + C$ führt auf $C = y_0 - F(x_0)$.

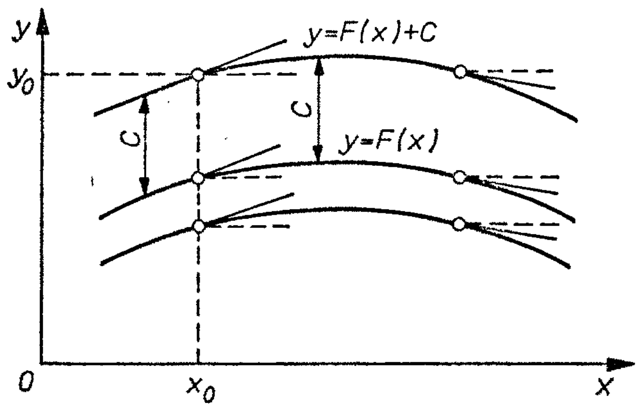

Abb. 1

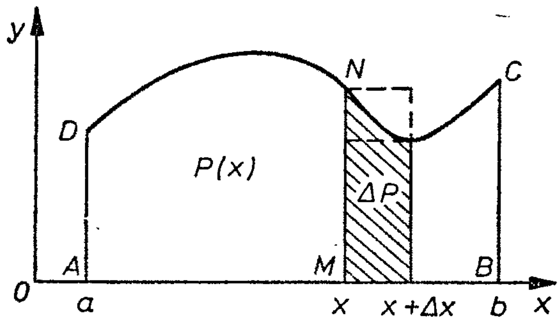

Abb. 2

264. Das Integral und die Bestimmung des Flächeninhalts. Wesentlich wichtiger ist die Deutung der Stammfunktion einer Funktion als Flächeninhalt eines krummlinig begrenzten ebenen Flächenstücks. Da der Begriff der Stammfunktion historisch eng mit der Bestimmung des Flächeninhalts verknüpft ist, wollen wir auf dieses Problem jetzt schon eingehen (wir benutzen die intuitive Vorstellung vom Flächeninhalt einer ebenen Figur und verschieben die genaue Problemstellung bis Kap. X).

Gegeben sei im Intervall $[a, b]$ eine stetige Funktion $y = f(x)$, die nur positive (nichtnegative) Werte annehmen möge, und wir betrachten die Figur $ABCD$ (Abb. 2), die durch die Kurve $y = f(x)$, die beiden Ordinaten $x = a$ und $x = b$ und den entsprechenden Abschnitt auf die x-Achse gebildet wird; die so gebildete Figur nennen wir *krummliniges Trapez*. Um seinen Flächeninhalt P bestimmen zu können, untersuchen wir das Verhalten des Flächeninhalts der veränderlichen Figur $AMND$, die zwischen der Anfangsordinate $x = a$ und derjenigen Ordinate eingeschlossen ist, die einem im Intervall $[a, b]$ beliebig gewählten Wert x entspricht. Bei Änderung von x ändert sich auch der Flächeninhalt von $AMND$ entsprechend, wobei jedem x ein wohlbestimmter Flächeninhalt entspricht, so daß der Inhalt des krummlinigen Trapezes $AMND$ eine Funktion von x ist, die wir mit $P(x)$ bezeichnen wollen.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, *die Ableitung dieser Funktion zu bestimmen.* Zu diesem Zweck addieren wir zu x einen (sagen wir, positiven) Zuwachs Δx; dann erfährt der Flächeninhalt den Zuwachs ΔP.

Mit m bzw. M bezeichnen wir den kleinsten bzw. größten Wert der Funktion $f(x)$ im Intervall $[x, x + \Delta x]$ (Nr. 85) und vergleichen ΔP mit den Flächeninhalten der Rechtecke mit der Basis Δx und den Höhen m bzw. M. Der Anschauung entnehmen wir

$$m \, \Delta x < \Delta P < M \, \Delta x$$

oder

$$m < \frac{\Delta P}{\Delta x} < M.$$

Strebt Δx gegen 0, so streben m und M auf Grund der Stetigkeit gegen $f(x)$, so daß wir

$$P'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = f(x)$$

erhalten. Damit gelangen wir zu dem folgenden bemerkenswerten Satz[1]): *Die Ableitung des variablen Flächeninhalts $P(x)$ nach der Abszisse x ist gleich der Ordinate $y = f(x)$.*

Mit anderen Worten: *Der variable Flächeninhalt ist eine Stammfunktion für die gegebene Funktion $y = f(x)$.* Gegenüber den anderen Stammfunktionen zeichnet sich diese dadurch aus, daß sie für $x = a$ verschwindet. Ist eine *beliebige* Stammfunktion $F(x)$ für $f(x)$ bekannt und ist also nach dem Satz aus Nr. 263

$$P(x) = F(x) + C,$$

so läßt sich C leicht bestimmen, wenn wir $x = a$ setzen. Es ergibt sich dann $0 = F(a) + C$, also $C = -F(a)$, so daß wir schließlich

$$P(x) = F(x) - F(a)$$

erhalten. Insbesondere finden wir für den Flächeninhalt P des ganzen krummlinigen Trapezes $ABCD$, wenn wir $x = b$ setzen,

$$P = F(b) - F(a).$$

Beispiel. Wir wollen den Flächeninhalt der Figur bestimmen, die von der Parabel $y = ax^2$, der zu einer gegebenen Abszisse x gehörenden Odinate y und dem Abschnitt auf der x-Achse berandet wird (Abb. 3); da die Parabel die x-Achse im Ko-

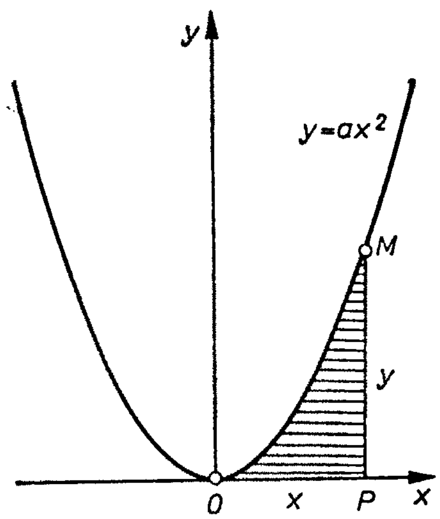

Abb. 3

ordinatenursprung berührt, ist hier der Anfangswert von x gleich 0. Zu der Funktion $f(x) = ax^2$ läßt sich leicht eine Stammfunktion angeben; sie lautet

$$F(x) = \frac{ax^3}{3}.$$

Diese Funktion ist für $x = 0$ ebenfalls gleich 0, so daß wir wegen $C = 0$

$$P(x) = F(x) + 0 = \frac{ax^3}{3} = \frac{xy}{3}$$

erhalten (vgl. Nr. 32, Beispiel 4).

[1]) Dieser Satz wird im allgemeinen *Satz von* NEWTON *und* LEIBNIZ genannt (ISAAC NEWTON, 1643–1727, englischer Mathematiker; GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ, 1646–1716, deutscher Mathematiker). Tatsächlich wurde dieser Satz (jedoch in anderer Gestalt) schon von ISAAC BARROW (1630–1677, englischer Mathematiker, Lehrer NEWTONS) veröffentlicht.

Auf Grund des Zusammenhangs, der zwischen der Berechnung von Integralen und der Bestimmung des Flächeninhalts ebener Figuren (d. h. der Quadratur dieser Figuren) besteht, wird im allgemeinen auch die Berechnung der Integrale *Quadratur* genannt.

Um das oben Gesagte auf Funktionen zu übertragen, die auch negativer Werte fähig sind, genügt es, die Flächeninhalte derjenigen Teile einer Figur, die *unterhalb* der x-Achse liegen, als *negativ* anzunehmen.

Somit läßt sich für jede im Intervall $[a, b]$ stetige Funktion $f(x)$ die Stammfunktion stets als variabler Flächeninhalt der Figur darstellen, die von der durch die Funktion $f(x)$ gegebenen Kurve berandet wird. Jedoch darf diese geometrische *Illustration* selbstverständlich nicht als Beweis der Existenz einer Stammfunktion aufgefaßt werden, solange der Begriff des Flächeninhalts noch nicht begründet ist.

Im folgenden Kapitel (Nr. 305) werden wir einen exakten und dabei rein analytischen Beweis der wichtigen Tatsache geben, daß *jede in einem gegebenen Intervall stetige Funktion $f(x)$ dort eine Stammfunktion besitzt.* Diese Behauptung werden wir jetzt schon benutzen.

In diesem Kapitel werden wir nur über Stammfunktionen stetiger Funktionen sprechen. Ist eine Funktion konkret gegeben und besitzt sie Unstetigkeiten, so werden wir die Funktion nur in den Intervallen betrachten, in denen sie stetig ist. Damit befreien wir uns, wenn wir die oben formulierte Behauptung als bewiesen annehmen, von der Notwendigkeit, jedes Mal von der Existenz der Integrale zu sprechen: *Die von uns betrachteten Integrale existieren.*

265. Tabelle der Grundintegrale. Jede in der Differentialrechnung auftretende Formel, die besagt, daß $f(x)$ die Ableitung einer Funktion $F(x)$ ist, führt unmittelbar zu der entsprechenden Formel

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

aus der Integralrechnung. Übernehmen wir die Formeln aus Nr. 95, nach denen sich die Ableitungen der elementaren Funktionen berechnen ließen, und ebenfalls die in Nr. 99 hergeleiteten Formeln für die hyperbolischen Funktionen, so können wir jetzt die folgenden Integrale zusammenstellen:

1. $\int 0 \cdot dx = C.$
2. $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C.$
3. $\displaystyle\int x^\mu\,dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \qquad (\mu \neq -1).$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C.$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$
7. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

   $\int e^x\,dx = e^x + C.$

8. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$.

9. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$.

10. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$.

11. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$.

12. $\int \sinh x \, dx = \cosh x + C$.

13. $\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$.

14. $\displaystyle\int \frac{1}{\sinh^2 x} \, dx = -\coth x + C$.

15. $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh^2 x} \, dx = \tanh x + C$.

Die Formel 4 wollen wir kurz erläutern. Sie ist in jedem Intervall anwendbar, das nicht den Koordinatenursprung enthält. Liegt nämlich dieses Intervall rechts vom Ursprung, ist also $x > 0$, so folgt aus der Differentiationsregel $[\ln x]' = \frac{1}{x}$ unmittelbar

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$$

Liegt das Intervall links vom Ursprung, ist also $x < 0$, so können wir uns durch Differentiation leicht davon überzeugen, daß $[\ln(-x)]' = \frac{1}{x}$ gilt, so daß

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C$$

folgt. Diese beiden Beziehungen ergeben die Formel 4.

Die oben angegebene Tabelle von Integralen läßt sich mit Hilfe der *Integrationsregeln* erweitern.

266. Die einfachsten Integrationsregeln.

I. Ist a eine Konstante ($a \neq 0$), so gilt

$$\int a \cdot f(x) \, dx = a \cdot \int f(x) \, dx.$$

Differenzieren wir nämlich den rechten Ausdruck, so erhalten wir (vgl. Nr. 105, Regel I)

$$d\left[a \cdot \int f(x) \, dx\right] = a \cdot d\left[\int f(x) \, dx\right] = a \cdot f(x) \, dx,$$

so daß der genannte Ausdruck eine Stammfunktion des Differentials $a \cdot f(x) \, dx$ ist, was zu beweisen war. *Ein konstanter Faktor läßt sich also vor das Integralzeichen ziehen.*

II. Es ist

$$\int [f(x) \pm g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx.$$

Differenzieren wir den rechten Ausdruck, so erhalten wir (vgl. Nr. 105, Regel II)

$$d\left[\int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx\right] = d\int f(x)\,dx \pm d\int g(x)\,dx = [f(x) \pm g(x)]\,dx;$$

der erwähnte Ausdruck ist also eine Stammfunktion für das letzte Differential, was zu beweisen war. *Das unbestimmte Integral einer Summe (Differenz) von Differentialen ist also gleich der Summe (Differenz) der Integrale jedes einzelnen Differentials.*

Zu diesen beiden Formeln ist zu bemerken: Jedes der in ihnen auftretenden unbestimmten Integrale enthält eine willkürliche additive Konstante. Die Gleichungen sind daher so zu verstehen, daß die Differenz ihrer beiden Seiten gleich einer willkürlichen Konstanten ist. Wählt man eine spezielle Stammfunktion auf der einen Seite, so ist die Konstante auf der anderen Seite festgelegt.

III. Ist

$$\int f(t)\,dt = F(t) + C,$$

so gilt

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\cdot F(ax+b) + C'.$$

Die gegebene Beziehung ist, wie wir wissen, gleichwertig mit

$$\frac{d}{dt}F(t) = F'(t) = f(t).$$

Dann ist also

$$\frac{d}{dx}F(ax+b) = F'(ax+b)\cdot a = a\cdot f(ax+b),$$

so daß sich

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{a}\cdot F(ax+b)\right] = f(ax+b)$$

ergibt, d. h., $\frac{1}{a}\cdot F(ax+b)$ ist tatsächlich eine Stammfunktion von $f(ax+b)$.

Besonders häufig trifft man die Fälle $a = 1$ oder $b = 0$ an. Für sie gilt

$$\int f(x+b)\,dx = F(x+b) + C_1,$$

$$\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}\cdot F(ax) + C_2.$$

(Die Regel III ist ein Spezialfall der Regel über die Variablensubstitution in einem unbestimmten Integral; darüber werden wir in Nr. 268 sprechen.)

267. Beispiele.

1. $\int (6x^2 - 3x + 5)\,dx$. Mit Hilfe der Regeln II und I (und der Grundintegrale 3 und 2) folgt

$$\begin{aligned}\int (6x^2 - 3x + 5)\,dx &= \int 6x^2\,dx - \int 3x\,dx + \int 5\,dx\\ &= 6\int x^2\,dx - 3\int x\,dx + 5\int dx\\ &= 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + C.\end{aligned}$$

2. Ein Polynom in allgemeiner Form läßt sich auch leicht integrieren:

$$\int (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n)\, dx$$
$$= a_0 \int x^n\, dx + a_1 \int x^{n-1}\, dx + \cdots + a_{n-1} \int x\, dx + a_n \int dx$$
$$= \frac{a_0}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_1}{n} x^n + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2} x^2 + a_n x + C. \qquad \text{(II, I; 3, 2)}$$

3. $$\int (2x^2+1)^3\, dx = \int (8x^6 + 12x^4 + 6x^2 + 1)\, dx$$
$$= \frac{8}{7} x^7 + \frac{12}{5} x^5 + 2x^3 + x + C. \qquad \text{(Beispiel 2)}$$

4. $$\int (1+\sqrt{x})^4\, dx = \int (1 + 4\sqrt{x} + 6x + 4x\sqrt{x} + x^2)\, dx$$
$$= \int dx + 4\int x^{1/2}\, dx + 6\int x\, dx + 4\int x^{3/2}\, dx + \int x^2\, dx$$
$$= x + \frac{8}{3} x^{3/2} + 3x^2 + \frac{8}{5} x^{5/2} + \frac{1}{3} x^3 + C. \qquad \text{(II, I; 3, 2)}$$

5. $$\int \frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2}\, dx = \int \frac{x^3 + x^2 - 3x - 3}{3x^2}\, dx$$
$$= \int \left(\frac{1}{3} x + \frac{1}{3} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$$
$$= \frac{1}{3}\int x\, dx + \frac{1}{3}\int dx - \int \frac{dx}{x} - \int x^{-2}\, dx$$
$$= \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{3} x - \ln|x| + \frac{1}{x} + C. \qquad \text{(II, I; 3, 2, 4)}$$

6. $$\int \frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}\, dx = \int \frac{x\sqrt{x} - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\, dx$$
$$= \int x^{7/6} dx - \int x^{1/6}\, dx = \frac{6}{13} x^{13/6} - \frac{6}{7} x^{7/6} + C. \qquad \text{(II; 3)}$$

Wir geben nun eine Reihe von Beispielen an, bei denen die Regel III benutzt wird:

7. (a) $$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C. \qquad \text{(III; 4)}$$

(b) $$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \int (x-a)^{-k}\, dx = \frac{1}{-k+1} (x-a)^{-k+1} + C$$
$$= -\frac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C \qquad (k > 1). \qquad \text{(III; 3)}$$

8. (a) $$\int \sin mx\, dx = -\frac{1}{m} \cos mx + C \qquad (m \neq 0). \qquad \text{(III; 8)}$$

(b) $$\int \cos mx\, dx = \frac{1}{m} \sin mx + C \qquad (m \neq 0). \qquad \text{(III; 9)}$$

(c) $$\int e^{-3x}\, dx = -\frac{1}{3} e^{-3x} + C. \qquad \text{(III; 7)}$$

9. (a) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \qquad (a > 0). \qquad \text{(III; 6)}$$

(b) $$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C. \qquad \text{(III; 5)}$$

Beispiele für alle Regeln:

10. $$\int \frac{(e^x - 1)(e^{2x} + 1)}{e^x} dx = \int (e^{2x} - e^x + 1 - e^{-x}) dx$$
$$= \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + x + e^{-x} + C. \qquad \text{(II, III; 7, 2)}$$

11. $\int \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} dx$. Dividieren wir den Zähler durch den Nenner, so können wir den Integranden in der Form

$$\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma} \frac{1}{\gamma x + \delta}$$

schreiben; damit ist das Integral gleich

$$\frac{\alpha}{\gamma} x + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2} \ln |\gamma x + \delta| + C. \qquad \text{(II, I, III; 2, 4)}$$

12. $$\int \frac{2x^2 - 3x + 1}{x + 1} dx = \int \left(2x - 5 + \frac{6}{x + 1}\right) dx = x^2 - 5x + 6 \ln |x + 1| + C.$$

Die Integration eines Bruches mit kompliziertem Nenner wird oft erleichtert, wenn man den Bruch in eine Summe von Brüchen mit einfacheren Nennern zerlegt.[1]) Zum Beispiel ist

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x - a)(x + a)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a}\right).$$

13. Mit Hilfe dieser Bemerkung erhalten wir

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{dx}{x - a} - \int \frac{dx}{x + a}\right] = \frac{1}{2a} \ln \left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C$$

(vgl. Beispiel 7(a)).

Für einen Bruch allgemeinerer Art, z. B.

$$\frac{1}{(x + a)(x + b)}$$

können wir das folgende Verfahren anwenden. Offenbar ist $(x + a) - (x + b) = a - b$. Dann ergibt sich die Identität

$$\frac{1}{(x + a)(x + b)} = \frac{1}{a - b} \frac{(x + a) - (x + b)}{(x + a)(x + b)} = \frac{1}{a - b}\left(\frac{1}{x + b} - \frac{1}{x + a}\right).$$

Damit ist:

14. $$\int \frac{dx}{(x + a)(x + b)} = \frac{1}{a - b} \ln \left|\frac{x + b}{x + a}\right| + C.$$

Insbesondere gilt:

15. (a) $$\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} = \int \frac{dx}{(x - 2)(x - 3)} = \ln \left|\frac{x - 3}{x - 2}\right| + C.$$

[1]) *Partialbruchzerlegung. — Anm. d. Red.*

(b) $$\int \frac{dx}{4x^2 + 4x - 3} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{2x - 1}{2x + 3} \right| + C.$$

16. $\int \frac{dx}{Ax^2 + 2Bx + C}$ (für $B^2 - AC > 0$). Der Nenner läßt sich folgendermaßen in reelle Faktoren zerlegen: $A(x - \alpha)(x - \beta)$ mit

$$\alpha = \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \qquad \beta = \frac{-B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}.$$

Dann erhalten wir, wenn wir das Beispiel 14 berücksichtigen und dort $a = -\beta$, $b = -\alpha$ setzen,

$$\int \frac{dx}{Ax^2 + Bx + C} = \frac{1}{2\sqrt{B^2 - AC}} \ln \left| \frac{Ax + B - \sqrt{B^2 - AC}}{Ax + B + \sqrt{B^2 - AC}} \right| + C'.$$

Einige trigonometrische Ausdrücke lassen sich nach einigen elementaren Umformungen ebenfalls mit Hilfe der einfachsten Verfahren integrieren. Offenbar ist z. B.

$$\cos^2 mx = \frac{1 + \cos 2mx}{2}, \qquad \sin^2 mx = \frac{1 - \cos 2mx}{2};$$

daraus folgt:

17. (a) $$\int \cos^2 mx \, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4m} \sin 2mx + C \qquad (m \neq 0).$$

(b) $$\int \sin^2 mx \, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4m} \sin 2mx + C \qquad (m \neq 0).$$

Analog gilt

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} [\sin (m + n) x + \sin (m - n) x],$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos (m + n) x + \cos (m - n) x],$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [\cos (m - n) x - \cos (m + n) x].$$

Für $m \pm n \neq 0$ erhalten wir also die folgenden Integrale:

18. (a) $\int \sin mx \cos nx \, dx$

$$= -\frac{1}{2(m + n)} \cos (m + n) x - \frac{1}{2(m - n)} \cos (m - n) x + C.$$

(b) $\int \cos mx \cos nx \, dx$

$$= \frac{1}{2(m + n)} \sin (m + n) x + \frac{1}{2(m - n)} \sin (m - n) x + C.$$

(c) $\int \sin mx \sin nx \, dx$

$$= \frac{1}{2(m - n)} \sin (m - n) x - \frac{1}{2(m + n)} \sin (m + n) x + C.$$

Abschließend betrachten wir ein etwas komplizierteres Beispiel:

19. (a) $\int \frac{\sin 2nx}{\sin x} dx$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Wegen

$$\sin 2nx = \sum_{k=1}^{n} [\sin 2kx - \sin (2k - 2) x] = 2 \sin x \sum_{k=1}^{n} \cos (2k - 1) x$$

geht der Integrand in $2 \sum_{k=1}^{n} \cos (2k - 1)\, x$ über, und das gesuchte Integral ist gleich

$$2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin (2k-1)\, x}{2k-1} + C.$$

Analog gilt:

b) $$\int \frac{\sin (2n+1)\, x}{\sin x}\, \mathrm{d}x = x + 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin 2kx}{2k} + C.$$

268. Integration durch Substitution der Veränderlichen. Wir betrachten nun eines der wichtigsten Verfahren zur Integration von Funktionen, die *Variablensubstitution*. Ihr liegt die folgende einfache Bemerkung zugrunde: *Ist die Beziehung*

$$\int g(t)\, \mathrm{d}t = G(t) + C$$

bekannt, so gilt

$$\int g\big(\omega(x)\big)\, \omega'(x)\, \mathrm{d}x = G\big(\omega(x)\big) + C.$$

(Die hier auftretenden Funktionen $g(t)$, $\omega(x)$ und $\omega'(x)$ sind als stetig vorausgesetzt.) Dies folgt direkt aus der Differentiationsregel für eine mittelbare Funktion (Nr. 98)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, G\big(\omega(x)\big) = G'\big(\omega(x)\big)\, \omega'(x) = g\big(\omega(x)\big)\, \omega'(x),$$

wenn man in Betracht zieht, daß $G'(t) = g(t)$ ist. Dasselbe läßt sich auch anders ausdrücken, wenn wir sagen, daß die Beziehung

$$\mathrm{d}\, G(t) = g(t)\, \mathrm{d}t$$

auch gültig bleibt, sofern die unabhängige Veränderliche t durch die Funktion $\omega(x)$ ersetzt wird (Nr. 106).

Wir wollen nun das Integral

$$\int f(x)\, \mathrm{d}x$$

berechnen. In vielen Fällen gelingt es, als neue Veränderliche eine solche Funktion $t = \omega(x)$ zu wählen, daß das Differential in der Form

$$f(x)\, \mathrm{d}x = g\big(\omega(x)\big)\, \omega'(x)\, \mathrm{d}x \tag{1}$$

dargestellt werden kann, wobei $g(t)$ eine für die Integration geeignetere Funktion als $f(x)$ ist. Dann genügt es nach dem oben Gesagten, das Integral

$$\int g(t)\, \mathrm{d}t = G(t) + C$$

zu berechnen, um aus ihm durch die Transformation $t = \omega(x)$ das gesuchte Integral zu erhalten. Gewöhnlich schreibt man einfach

$$\int f(x)\, \mathrm{d}x = \int g(t)\, \mathrm{d}t, \tag{2}$$

wobei die im rechten Integral stehende Funktion von t durch die erwähnte Substitution hervorgegangen ist.

Zum Beispiel wollen wir das Integral

$$\int \sin^3 x \cos x\, \mathrm{d}x$$

auswerten. Da $\mathrm{d}\sin x = \cos x\,\mathrm{d}x$ ist, setzen wir $t = \sin x$ und bringen das Differential auf die Gestalt

$$\sin^3 x \cos x\,\mathrm{d}x = \sin^3 x\,\mathrm{d}\sin x = t^3\,\mathrm{d}t.$$

Das Integral dieses Ausdrucks läßt sich leicht berechnen:

$$\int t^3\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}t^4 + C.$$

Nun brauchen wir nur noch zu der Veränderlichen x zurückzukehren, indem wir t durch $\sin x$ ersetzen:

$$\int \sin^3 x \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sin^4 x + C.$$

Wir weisen darauf hin, daß bei der Wahl der Substitution $t = \omega(x)$, die den Integranden vereinfacht, berücksichtigt werden muß, daß in ihm der Faktor $\omega'(x)\,\mathrm{d}x$ auftreten muß, der das Differential $\mathrm{d}t$ der neuen Veränderlichen ergibt (vgl. (1)). Im vorhergehenden Beispiel wurde die Substitution $t = \sin x$ durch den Faktor $\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ nahegelegt.

Im Zusammenhang damit untersuchen wir das Beispiel

$$\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x.$$

Hier wäre die Substitution $t = \sin x$ unbrauchbar, da der eben erwähnte Faktor fehlt. Wenn wir versuchen, aus dem Differentialausdruck den Faktor $\sin x\,\mathrm{d}x$ oder besser $-\sin x\,\mathrm{d}x$ als Differential der neuen Veränderlichen abzutrennen, so führt dies auf die Substitution $t = \cos x$; da der restliche Ausdruck $-\sin^2 x = \cos^2 x - 1$ durch diese Substitution vereinfacht wird, ist sie gerechtfertigt. Es gilt also

$$\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x = \int (t^2 - 1)\,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.$$

Bei einer gewissen Übung in der Anwendung des Substitutionsverfahrens braucht die Veränderliche t selbst nicht mehr benutzt zu werden. Beispielsweise *denkt* man sich im Integral

$$\int \sin^3 x \cos x\,\mathrm{d}x = \int \sin^3 x\,\mathrm{d}\sin x$$

$\sin x$ als neue Integrationsvariable und gelangt sofort zu dem Resultat. Analog ist

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}\frac{x}{a}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}\frac{x}{a}}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$$

Die Substitution $t = \dfrac{x}{a}$ wurde hier in Gedanken ausgeführt.

Wir sehen jetzt, daß sich die Regel III aus Nr. 266 eigentlich auf eine *lineare* Substitution $t = ax + b$ reduziert:

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\,\mathrm{d}(ax+b) = \frac{1}{a}\int f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Eine Substitution läßt sich auch in einer Form anwenden, die von der hier erwähnten verschieden ist. In dem Ausdruck $f(x)\,\mathrm{d}x$ können wir nämlich unmittelbar statt x die Funktion $x = \varphi(t)$ der neuen Veränderlichen t einsetzen und den Ausdruck

$$f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = g(t)\,\mathrm{d}t$$

erhalten. Offenbar kehren wir wieder zu $f(x)\,\mathrm{d}x$ zurück, wenn wir hier die Substitution $t = \omega(x)$ durchführen, wobei $\omega(x)$ die zu $\varphi(t)$ inverse Funktion ist, sobald diese existiert. Daher gilt wie früher die Gleichung (2), wobei nach der Berechnung des Integrals rechts $t = \omega(x)$ gesetzt werden muß.

Als Beispiel betrachten wir das Integral

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}.$$

Setzen wir $x = t^6$ (um alle Wurzeln zu beseitigen), so erhalten wir $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$, $\mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t$ und

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)} = 6\int \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = 6\left\{\int \mathrm{d}t - \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\right\}$$
$$= 6(t - \arctan t) + C.$$

Jetzt brauchen wir nur noch mit Hilfe der Formel $t = \sqrt[6]{x}$ zur Veränderlichen x überzugehen, und wir finden schließlich

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)} = 6\left(\sqrt[6]{x} - \arctan\sqrt[6]{x}\right) + C.$$

Noch interessanter ist das Beispiel

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Die Differenz der Quadrate im Radikanden (von denen das erste konstant ist) veranlaßt uns, die Substitution $x = a \sin t$ durchzuführen.[1]) Es gilt

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t, \qquad \mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t$$

und

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = a^2 \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t.$$

Das Integral

$$a^2\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = a^2\left[\frac{1}{2}\,t + \frac{1}{4}\sin 2t\right] + C$$

[1]) Es ist angebracht, anzunehmen, daß x zwischen $-a$ und a und t zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ variiert. Dann ist $t = \arcsin\frac{x}{a}$.

ist uns schon bekannt (vgl. Nr. 267, Beispiel 17(a)). Für den Übergang zu x setzen wir $t = \arcsin \frac{x}{a}$ ein; die Umformung des zweiten Summanden wird dadurch erleichtert, daß

$$\frac{a^2}{4} \sin 2t = \frac{1}{2} a \sin t \cdot a \cos t = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2}$$

gilt. Schließlich erhalten wir

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

Die Fähigkeit, vorteilhafte Substitutionen ausfindig zu machen, läßt sich nur durch Übung erlangen. Obgleich es hierfür keine allgemeinen Hinweise gibt, wird der Leser in Nr. 269 einzelne spezielle Bemerkungen finden, die das Aufsuchen erleichtern. Teilweise sind die Substitutionen einfach angegeben.

269. Beispiele.

1. (a) $\int e^{x^2} x\, dx$, (b) $\int \frac{x\, dx}{1 + x^4}$ (c) $\int \frac{x^2}{\cos^2 x^3}\, dx$.

(a) Lösung. Setzen wir $t = x^2$, so ist $dt = 2x\, dx$ und

$$\int e^{x^2} x\, dx = \frac{1}{2} \int e^t\, dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

(b) Hinweis. Dieselbe Substitution. Die Lösung lautet $\frac{1}{2} \arctan x^2 + C$. In beiden Fällen haben die Integrale die Form

$$\int g(x^2)\, x\, dx = \frac{1}{2} \int g(x^2)\, d(x^2),$$

wobei g eine für die Substitution geeignete Funktion ist; für solche Integrale ist die Substitution $t = x^2$ die naturgemäße. Analog benutzt man für Integrale der Gestalt

$$\int g(x^3)\, x^2\, dx = \frac{1}{3} \int g(x^3)\, d(x^3)$$

die Substitution $t = x^3$ usw. Zu diesem Typ gehört das dritte Integral.

(c) Lösung. $\frac{1}{3} \tan x^3 + C$.

2. $\int (\alpha x^2 + \beta)^\mu x\, dx$ $(\mu \neq -1)$. Hier kann man $t = x^2$ setzen; noch einfacher ist es, $u = \alpha x^2 + \beta$ als neue Veränderliche zu wählen, da sich $x\, dx$ nur um einen konstanten Faktor von $du = 2\alpha x\, dx$ unterscheidet. Somit ist

$$\int (\alpha x^2 + \beta)^\mu x\, dx = \frac{1}{2\alpha} \int u^\mu\, du = \frac{u^{\mu+1}}{2\alpha(\mu + 1)} + C = \frac{1}{2\alpha(\mu + 1)} (\alpha x^2 + \beta)^{\mu+1} + C.$$

3. (a) $\int \frac{\ln |x|}{x}\, dx$, (b) $\int \frac{dx}{x \ln |x|}$, (c) $\int \frac{dx}{x \ln^2 |x|}$.

Hinweis. Alle diese Integrale sind von der Gestalt

$$\int g(\ln |x|) \frac{dx}{x} = \int g(\ln |x|)\, d \ln |x|,$$

so daß hier die Substitution $t = \ln |x|$ zweckmäßig ist.

Lösung. (a) $\frac{1}{2}\ln^2|x| + C$, (b) $\ln|\ln|x|| + C$, (c) $-\frac{1}{\ln|x|} + C$.

4. Integrale der Gestalt

$$\int g(\sin x)\cos x\,dx, \qquad \int g(\cos x)\sin x\,dx, \qquad \int g(\tan x)\frac{dx}{\cos^2 x}$$

transformiert man mit Hilfe von

$$t = \sin x, \qquad u = \cos x, \qquad v = \tan x.$$

Beispielsweise ist:

(a) $$\int \frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t + C = \arctan(\sin x) + C.$$

(b) $$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

(c) $$\int \frac{dx}{A^2\sin^2 x + B^2\cos^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{A^2\tan^2 x + B^2} = \int \frac{dv}{A^2v^2 + B^2}$$
$$= \frac{1}{AB}\arctan\frac{Av}{B} + C = \frac{1}{AB}\arctan\left(\frac{A}{B}\tan x\right) + C.$$

5) (a) $\int \frac{2x\,dx}{x^2+1}$, (b) $\int \cot x\,dx$, (c) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx$, (d) $\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$.

Lösung. (a) Setzen wir $t = x^2 + 1$, so ist der Zähler $2x\,dx$ genau gleich dt; das Integral wird also auf

$$\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln(x^2+1) + C$$

zurückgeführt.

Immer dann, wenn das vorgelegte Integral die Gestalt

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{df(x)}{f(x)}$$

hat, so daß also im Integranden der Zähler die Ableitung des Nenners ist, führt die Substitution $t = f(x)$ sofort zum Ziel:

$$\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C.$$

Nach diesem Muster ist

(b) $$\int \cot x\,dx = \int \frac{d\sin x}{\sin x} = \ln|\sin x| + C \qquad \text{(vgl. 4(b)).}$$

(c) $$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(e^{2x}+1)}{e^{2x}+1} = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + C.$$

(d) $$\int \frac{dx}{\sin x\cos x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\tan x} = \ln|\tan x| + C.$$

6. Aus dem Integral 5(d) ergeben sich leicht die beiden nützlichen Integrale

(a) $$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

(b) $$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

7. (a) $$\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}\,dx = \int \sqrt{\arctan x}\,d(\arctan x) = \frac{2}{3}(\arctan x)^{3/2} + C.$$

(b) $$\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1} = \int \frac{de^x}{(e^x)^2+1} = \arctan e^x + C.$$

(c) $$\int \tan\frac{1}{x}\frac{dx}{x^2} = -\int \tan\frac{1}{x}\,d\frac{1}{x} = \ln\left|\cos\frac{1}{x}\right| + C \qquad \text{(vgl. 4(b))}.$$

Wir geben jetzt einige Beispiele an, wie Ausdrücke integriert werden, in denen Glieder der Form $a^2 - x^2$, $x^2 + a^2$ und $x^2 - a^2$ auftreten. In diesen Fällen ist es im allgemeinen nützlich, x durch eine trigonometrische oder hyperbolische Funktion der neuen Veränderlichen t mit Hilfe der Beziehungen

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1, \qquad 1 + \tan^2 t = \sec^2 t = \frac{1}{\cos^2 t},$$

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1, \qquad 1 - \tanh^2 t = \frac{1}{\cosh^2 t}$$

zu ersetzen.

8. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$. Substitution $x = a\tan t$,[1]) $dx = \frac{a\,dt}{\cos^2 t}$, $x^2 + a^2 = \frac{a^2}{\cos^2 t}$; also ist (vgl. Nr. 267, Beispiel 17(a))

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^3}\int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2a^3}(t + \sin t\cos t) + C.$$

Gehen wir jetzt zur Veränderlichen x über, indem wir $t = \arctan\frac{x}{a}$ setzen und $\sin t$ und $\cos t$ durch $\tan t = \frac{x}{a}$ ausdrücken, so erhalten wir schließlich

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\,\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3}\arctan\frac{x}{a} + C.$$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$. Hier ist es günstig, hyperbolische Funktionen zu benutzen. Berücksichtigen wir im Integral das untere Vorzeichen, so setzen wir $x = a\cosh t$ (für $x, t > 0$), $dx = a\sinh t\,dt$ und $\sqrt{x^2 - a^2} = a\sinh t$. Das Integral geht dann einfach in $\int dt = t + C$ über. Für den Übergang zu x erinnern wir an den Ausdruck für die Inverse des hyperboli-

[1]) Dabei muß t zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ variieren.

schen Kosinus (vgl. Nr. 49, Beispiel 3) und erhalten

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}\right) + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + C',$$

wobei C' den Summanden $-\ln a$ einschließt.

10. (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$, (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{3/2}}$, $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$.

In diesem Fall kommt man ebenso einfach mit Hilfe trigonometrischer und hyperbolischer Funktionen zum Ziel. Beim ersten Integral (b) setzen wir $x = a \sec t$, $dx = \dfrac{a \sin t\, dt}{\cos^2 t} = \dfrac{a \tan t\, dt}{\cos t}$; dann ist $x^2 - a^2 = a^2 \tan^2 t$ und

$$\int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \int \frac{\cos t\, dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{a^2}\,\frac{1}{\sin t} + C = -\frac{1}{a^2}\,\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} + C.$$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}}$. Die Substitution $x = a \sin t$, $dx = a \cos t\, dt$ führt dieses Integral über in

$$\frac{1}{a} \int \frac{dt}{\sin t} = \frac{1}{a} \ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| + C$$

(vgl. 6(a)). Wegen

$$\tan\frac{t}{2} = \frac{1 - \cos t}{\sin t} = \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$

ist schließlich

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \ln\left|\frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right| + C.$$

Abschließend betrachten wir noch zwei Beispiele für die Integration durch Substitution, wobei die Substitution nicht so naheliegend ist wie in den vorhergehenden Fällen, dafür aber schnell zum Ziel führt.

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}}$ $(\alpha \lesseqgtr 0)$. Wir setzen $\sqrt{x^2 + \alpha} = t - x$ und wählen t als neue Veränderliche. Quadrieren wir diese Beziehung, so hebt sich x^2 fort, und wir erhalten

$$x = \frac{t^2 - \alpha}{2t},$$

so daß

$$\sqrt{x^2 + \alpha} = t - \frac{t^2 - \alpha}{2t} = \frac{t^2 + \alpha}{2t}, \qquad dx = \frac{t^2 + \alpha}{2t^2}\, dt$$

ist. Schließlich finden wir

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + \alpha}\right| + C \qquad \text{(vgl. 9)}.$$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x - \alpha)(\beta - x)}}$ $(\alpha < x < \beta)$. Wir setzen $x = \alpha \cos^2 \varphi + \beta \sin^2 \varphi$ $\left(0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}\right)$ wobei φ die neue Veränderliche ist. Dann gilt

$$x - \alpha = (\beta - \alpha) \sin^2 \varphi, \qquad \beta - x = (\beta - \alpha) \cos^2 \varphi,$$
$$dx = 2(\beta - \alpha) \sin \varphi \cos \varphi\, d\varphi,$$

also

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} = 2\int d\varphi = 2\varphi + C = 2\arctan\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}} + C.$$

270. Partielle Integration. Sind $u = f(x)$ und $v = g(x)$ zwei Funktionen von x mit stetigen Ableitungen $u' = f'(x)$ bzw. $v' = g'(x)$, so gilt auf Grund der Regel für die Differentiation eines Produkts die Beziehung $d(uv) = u\,dv + v\,du$ oder $u\,dv = d(uv) - v\,du$. Eine Stammfunktion für $d(uv)$ ist offenbar uv; daher ist

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du, \tag{3}$$

wobei die zu uv gehörige Konstante in $\int v\,du$ enthalten ist. Dies ist die *Formel für die partielle Integration.* Sie führt die Integration von $u\,dv = uv'\,dx$ auf die von $v\,du = vu'\,dx$ zurück.

Wollen wir zum Beispiel das Integral $\int x\cos x\,dx$ ermitteln, so setzen wir

$$u = x, \qquad dv = \cos x\,dx;$$

also ist

$$du = dx, \qquad v = \sin x.\text{[1]}$$

Auf Grund von (3) gilt dann

$$\int x\cos x\,dx = \int x\,d\sin x = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C. \tag{4}$$

Somit erlaubt die partielle Integration, den komplizierten Integranden $x\cos x$ durch den einfachen $\sin x$ zu ersetzen. Um v zu erhalten, muß allerdings auch der Ausdruck $\cos x\,dx$ integriert werden (daher der Name *partielle* Integration).

Benutzen wir die Formel (3) zur Berechnung eines gegebenen Integrals, so muß der Differentialausdruck in zwei Faktoren zerlegt werden: in u und $dv = v'\,dx$, von denen wir den ersten differenzieren und den zweiten beim Übergang zum Integral auf der rechten Seite integrieren. Man muß versuchen zu erreichen, daß die Integration des Differentials dv keine Schwierigkeiten bereitet und das Ersetzen von u durch du und von dv durch v zusammen eine Vereinfachung des Integrals nach sich zieht. Es wäre also unvorteilhaft, in dem obigen Beispiel $x\,dx = dv$ und $\cos x = u$ zu setzen.

Bei einiger Geschicklichkeit ist es nicht notwendig, die Bezeichnungen u und v einzuführen (vgl. (4)).

Die partielle Integration hat ein beschränkteres Anwendungsgebiet als die Substitution der Veränderlichen. Es gibt jedoch ganze Klassen von Integralen, z. B.

$$\int x^k \ln^m x\,dx, \qquad \int x^k \sin bx\,dx, \qquad \int x^k \cos bx\,dx, \qquad \int x^k e^{ax}\,dx$$

u. a., die sich speziell mit Hilfe der partiellen Integration berechnen lassen.

Die wiederholte Anwendung der partiellen Integration führt auf die sogenannte *verallgemeinerte Formel für die partielle Integration.* Wir setzen voraus, daß die Funktionen u und v im betrachteten Intervall stetige Ableitungen bis einschließlich $(n+1)$-ter Ordnung besitzen: $u', v', u'', v'', \ldots, u^{(n)}, v^{(n)}, u^{(n+1)}, v^{(n+1)}$. Ersetzen wir in (3) die Größe v durch $v^{(n)}$, so ist

$$\int uv^{(n+1)}\,dx = \int u\,dv^{(n)} = uv^{(n)} - \int v^{(n)}\,du = uv^{(n)} - \int u'v^{(n)}\,dx.$$

[1]) Da es für unsere Zwecke genügt, $\cos x\,dx$ auf *eine* Art in der Form dv darzustellen, brauchen wir für v nicht den allgemeinsten Ausdruck anzugeben, der noch die willkürliche Konstante enthält. Diese Bemerkung müssen wir auch im folgenden beachten.

Analog gilt

$$\int u'v^{(n)}\,dx = u'v^{(n-1)} - \int u''v^{(n-1)}\,dx,$$
$$\int u''v^{(n-1)}\,dx = u''v^{(n-2)} - \int u'''v^{(n-2)}\,dx,$$

$$\int u^{(n)}v'\,dx = u^{(n)}v - \int u^{(n+1)}\,v\,dx.$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen abwechselnd mit $+1$ oder -1 und addieren wir sie, so gelangen wir, da sich die gleichen Integrale auf der linken und der rechten Seite gegeneinander aufheben, zu der Formel

$$\int uv^{(n+1)}\,dx = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \cdots + (-1)^n u^{(n)}v + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}\,v\,dx. \tag{5}$$

Besonders nützlich ist diese Formel, wenn einer der Faktoren des Integranden ein Polynom ist. Stellt u ein Polynom n-ten Grades dar, so ist $u^{(n+1)} \equiv 0$; für das Integral auf der linken Seite ergibt sich dann ein geschlossener Ausdruck.

Wir gehen nun zu Beispielen über.

271. Beispiele.

1. $\int x^3 \ln|x|\,dx$. Die Differentiation von $\ln|x|$ führt zur Vereinfachung; daher setzen wir

$$u = \ln|x|, \qquad dv = x^3\,dx,$$

so daß

$$du = \frac{dx}{x}, \qquad v = \frac{1}{4}x^4$$

ist, und finden

$$\int x^3\ln|x|\,dx = \frac{1}{4}x^4\ln|x| - \frac{1}{4}\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4\ln|x| - \frac{1}{16}x^4 + C.$$

2. (a) $\int \ln|x|\,dx$, (b) $\int \arctan x\,dx$, (c) $\int \arcsin x\,dx$.

Nehmen wir in allen drei Fällen $dx = dv$, so erhalten wir

(a) $$\int \ln|x|\,dx = x\ln|x| - \int x\,d\ln|x| = x\ln|x| - \int dx = x(\ln|x| - 1) + C.$$

(b) $$\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \int x\,d(\arctan x) = x\arctan x - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

(vgl. Nr. 269, Beispiel 5(a)).

(c) $$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int x\,d(\arcsin x) = x\arcsin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

(vgl. Nr. 269, Beispiel 2).

3. $\int x^2 \sin x\,dx$. Es gilt

$$\int x^2\,d(-\cos x) = -x^2\cos x - \int(-\cos x)\,dx^2 = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx.$$

Damit haben wir das gesuchte Integral auf ein schon bekanntes (vgl. (4) aus Nr. 270) zurückgeführt; setzen wir diesen Ausdruck für das Integral ein, so ergibt sich

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) + C.$$

Hier muß die Formel für die partielle Integration zweimal angewendet werden.

Ebenso lassen sich durch wiederholte Anwendung dieser Regel die Integrale

$$\int P(x)\, e^{ax}\, dx, \qquad \int P(x) \sin bx \, dx, \qquad \int P(x) \cos bx \, dx$$

berechnen, wobei $P(x)$ ein Polynom in x bezeichnet.

4. Für Integrale dieser Form kann man mit Hilfe der verallgemeinerten Formel für die partielle Integration sofort allgemeine Ausdrücke erhalten.

Setzen wir $v^{(n+1)} = e^{ax}$, so finden wir

$$v^{(n)} = \frac{e^{ax}}{a}, \qquad v^{(n-1)} = \frac{e^{ax}}{a^2}, \qquad v^{(n-2)} = \frac{e^{ax}}{a^3},$$

Daher ergibt sich aus (5), wenn $P(x)$ ein Polynom n-ten Grades ist,

$$\int P(x)\, e^{ax}\, dx = e^{ax}\left[\frac{P}{a} - \frac{P'}{a^2} + \frac{P''}{a^3} - \cdots\right] + C.$$

Analog ist, wenn wir $v^{(n+1)} = \sin bx$ setzen,

$$v^{(n)} = -\frac{\cos bx}{b}, \qquad v^{(n-1)} = -\frac{\sin bx}{b^2}, \qquad v^{(n-2)} = \frac{\cos bx}{b^3},$$

Damit erhalten wir die Formel

$$\int P(x) \sin bx \, dx = \sin bx \cdot \left[\frac{P'}{b^2} - \frac{P'''}{b^4} + \cdots\right] - \cos bx \cdot \left[\frac{P}{b} - \frac{P''}{b^3} + \cdots\right] + C.$$

Ähnlich läßt sich auch die folgende Beziehung aufstellen:

$$\int P(x) \cos bx \, dx = \sin bx \cdot \left[\frac{P}{b} - \frac{P''}{b^3} + \cdots\right] + \cos bx \cdot \left[\frac{P'}{b^2} - \frac{P'''}{b^4} + \cdots\right] + C.$$

5. $\int x^3 \ln^2 dx$ $(x > 0)$. Dieses Integral können wir wegen

$$\int \ln^2 x \, d\frac{x^4}{4} = \frac{1}{4} x^4 \ln^2 x - \frac{1}{4}\int x^4 \, d\ln^2 x = \frac{1}{4} x^4 \ln^2 x - \frac{1}{2}\int x^3 \ln x \, dx$$

auf das Integral aus Beispiel 1 zurückführen. Die Lösung lautet

$$\int x^3 \ln^2 x \, dx = \frac{1}{4} x^4 \ln^2 x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4\right) + C$$
$$= \frac{1}{4} x^4 \left(\ln^2 x - \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{8}\right) + C.$$

Folglich läßt sich so auch das Integral

$$\int x^k \ln^m x \, dx$$

lösen, wobei k eine beliebige reelle Zahl $(k \neq -1)$ und $m = 1, 2, \ldots$ ist. Integrieren wir dieses Integral partiell, indem wir $u = \ln^m x$ setzen, so erhalten wir die Rekursionsformel

$$\int x^k \ln^m x \, dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1} \ln^m x - \frac{m}{k+1}\int x^k \ln^{m-1} x \, dx,$$

mit deren Hilfe die Berechnung des gegebenen Integrals auf die Berechnung eines Integrals vom gleichen Typ, aber mit einem um 1 kleineren Exponenten bei $\ln x$, zurückgeführt werden kann.

Übrigens bringt die Transformation $t = \ln x$ das betrachtete Integral auf die Form $\int t^m \mathrm{e}^{(k+1)t}\, \mathrm{d}t$, die wir schon in den Beispielen 3 und 4 untersucht haben.

6. Interessante Beispiele sind die Integrale

$$\int \mathrm{e}^{ax} \cos bx\, \mathrm{d}x, \qquad \int \mathrm{e}^{ax} \sin bx\, \mathrm{d}x.$$

Wenn wir sie partiell integrieren (z. B. in beiden Fällen $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x$ und $v = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}$ setzen), so erhalten wir

$$\int \mathrm{e}^{ax} \cos bx\, \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x,$$

$$\int \mathrm{e}^{ax} \sin bx\, \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x.$$

Damit haben wir jedes dieser beiden Integrale durch das andere ausgedrückt.[1])

Ersetzen wir in der ersten Formel das rechte Integral durch die zweite Formel, so gelangen wir zu der Gleichung

$$\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x = \frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax} + C,$$

mit deren Hilfe sich das erste Integral berechnen läßt. Analog ergibt sich für das zweite Integral

$$\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax} + C'.$$

7. Als letztes Beispiel für die Anwendung der partiellen Integration geben wir eine Rekursionsformel zur Berechnung des Integrals

$$J_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Wenden wir hierauf die Formel (3) an, indem wir

$$u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}, \qquad \mathrm{d}v = \mathrm{d}x$$

setzen, so daß

$$\mathrm{d}u = -\frac{2nx\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n+1}}, \qquad v = x$$

ist, so finden wir

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Das letzte Integral läßt sich folgendermaßen umformen:

$$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} - a^2\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n+1}} = J_n - a^2 J_{n+1}.$$

[1]) Sind die Integrale als *bestimmte* Stammfunktionen aufzufassen (vgl. die Bemerkung in Nr. 266), so muß man, wenn man in der zweiten Formel dieselben Funktionen wie in der ersten haben will, strenggenommen noch auf der rechten Seite eine gewisse Konstante hinzufügen; diese Konstante steckt in den Konstanten C und C' der endgültigen Ausdrücke.

Setzen wir diesen Ausdruck in die vorhergehende Gleichung ein, so erhalten wir

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nJ_n - 2na^2 J_{n+1},$$

woraus sich

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\,\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}\,\frac{1}{a^2}\,J_n \tag{6}$$

ergibt. Durch diese Formel wird die Berechnung von J_{n+1} auf die von J_n mit dem um 1 kleineren Index zurückgeführt. Da wir das Integral

$$J_1 = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$$

kennen (vgl. Nr. 267, Beispiel 9(b); wir nehmen einen seiner Werte, nämlich für $C = 0$), so ergibt sich aus (6) für $n = 1$

$$J_2 = \frac{1}{2a^2}\,\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3}\arctan\frac{x}{a}$$

(dies erhielten wir früher auf anderem Wege; vgl. Nr. 269, Beispiel 8). Setzen wir in (6) nun $n = 2$, so folgt

$$J_3 = \frac{1}{4a^2}\,\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{4a^2}J_2 = \frac{1}{4a^2}\,\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{8a^4}\,\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{3}{8a^5}\arctan\frac{x}{a}$$

usw. Auf diese Weise läßt sich das Integral J_n für jeden natürlichen Index n berechnen.

§2. Die Integration rationaler Ausdrücke

272. Problemstellung der Integration in geschlossener Form. Wir wollen uns nun mit den elementaren Verfahren der Berechnung unbestimmter Integrale vertraut machen. Diese Verfahren geben jedoch nicht den einzigen Weg an, den man einschlagen muß, um ein gegebenes Integral auszuwerten; dabei bleibt vieles der Geschicklichkeit des Rechners überlassen. Jetzt und in den folgenden Paragraphen werden wir uns ausführlich mit einigen Klassen von Funktionen beschäftigen und zur Berechnung ihrer Integrale Verfahren entwickeln, die sicher zum Ziel führen.

Bei der Integration von Funktionen der erwähnten Klassen interessiert uns besonders, nach welchem Prinzip ihre Einteilung durchgeführt wird.

In Nr. 51 wurde diejenige Mannigfaltigkeit von Funktionen charakterisiert, auf welche sich in erster Linie die Analysis anwenden läßt; dies sind die sogenannten elementaren Funktionen und die Funktionen, welche sich mit Hilfe endlich vieler arithmetischer Operationen und Verkettungen (ohne Grenzübergänge) durch elementare Funktionen ausdrücken lassen.

In Kapitel III sahen wir, daß alle diese Funktionen differenzierbar sind und ihre Ableitungen zur gleichen Mannigfaltigkeit gehören. Anders verhält es sich mit den Integralen: Häufig zeigt es sich, daß das Integral einer Funktion aus der genannten Klasse selbst dieser Klasse nicht angehört, d. h., daß es nicht mit Hilfe endlich vieler der oben genannten Operationen durch elementare Funktionen ausgedrückt werden kann. Zu den nicht in geschlossener Form darstellbaren Integralen gehören, wie man weiß, z. B.

$$\int e^{-x^2}\,dx, \quad \int \sin x^2\,dx, \quad \int \cos x^2\,dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \int \frac{\cos x}{x}\,dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x};$$

andere Beispiele analoger Art werden weiter unten angegeben (vgl. Nr. 280, 289, 290 u. f.).

Es ist wichtig zu betonen, daß alle diese Integrale wirklich *existieren*.[1]) Sie stellen *völlig neue* Funktionen dar und lassen sich nicht auf die Funktionen zurückführen, die wir elementar nannten.[2])

Es sind verhältnismäßig wenig allgemeine Klassen von Funktionen bekannt, für welche die Integration in geschlossener Form ausführbar ist; mit diesen Klassen wollen wir uns nun näher beschäftigen. An erster Stelle ist die wichtige *Klasse der rationalen Funktionen* zu nennen.

273. Partialbrüche und ihre Integration. Da aus unechten rationalen Brüchen ganze Funktionen abgespalten werden können, deren Integration keine Schwierigkeit bereitet, genügt es, sich mit der Integration *echter Brüche* zu befassen (bei welchen also der Grad des Zählers kleiner ist als der des Nenners).

Wir verweilen nun bei den sogenannten *Partialbrüchen*; das sind Brüche der folgenden vier Typen:

I. $$\frac{A}{x-a},$$

II. $$\frac{A}{(x-a)^k} \quad (k = 2, 3, \ldots),$$

III. $$\frac{Mx+N}{x^2+px+q},$$

IV. $$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m} \quad (m = 2, 3, \ldots),$$

wobei M, N, a, p, q reelle Zahlen sind; außerdem setzen wir bei den Brüchen der Form III und IV voraus, daß der Ausdruck $x^2 + px + q$ keine reellen Nullstellen habe, so daß also

$$\frac{p^2}{4} - q < 0 \qquad \text{oder} \qquad q - \frac{p^2}{4} > 0$$

gilt. Brüche der Form I und II haben wir schon integriert (Nr. 267, Beispiel 7):

$$A \int \frac{dx}{x-a} = A \ln|x-a| + C,$$

$$A \int \frac{dx}{(x-a)^k} = -\frac{A}{k-1} \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$$

---

[1]) Vgl. dazu den Schluß von Nr. 264. Wir kommen auch in Nr. 305 noch darauf zurück.

[2]) Um dem Leser zu helfen, sich mit dieser Tatsache vertraut zu machen, erinnern wir daran, daß die Integrale

$$\int \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dx}{1+x^2}$$

(also Integrale von rationalen Funktionen) selbst keine rationalen Funktionen sind. Wenn also für uns nur rationale Funktionen „elementar" wären, so würden sich die obigen Integrale von „elementaren" Funktionen nicht durch „elementare" Funktionen ausdrücken lassen, da sie „nichtelementare" Funktionen einer neuen Art (nämlich $\ln x$ und $\arctan x$) darstellen.

Die Integration von Brüchen der Form III und IV wird durch folgende Umformung vereinfacht. Wir trennen von dem Ausdruck $x^2 + px + q$ das Quadrat von $x + \frac{p}{2}$ ab und erhalten

$$x^2 + px + q = x^2 + 2\,\frac{p}{2}\,x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left[q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right]$$
$$= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right).$$

Der Ausdruck in der letzten Klammer, der nach Voraussetzung positiv ist, ist gleich a^2, wenn wir

$$a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

setzen. Nun wählen wir die Substitution

$$x + \frac{p}{2} = t, \qquad \mathrm{d}x = \mathrm{d}t,$$

$$x^2 + px + q = t^2 + a^2, \qquad Mx + N = Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right).$$

Im Fall III erhalten wir

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q}\,\mathrm{d}x = \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{t^2 + a^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{M}{2}\int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{t^2 + a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + a^2}$$
$$= \frac{M}{2}\ln\,(t^2 + a^2) + \frac{1}{a}\left(N - \frac{Mp}{2}\right)\arctan\frac{t}{a} + C$$

oder, wenn wir zu x zurückkehren und den Wert von a einsetzen,

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q}\,\mathrm{d}x = \frac{M}{2}\ln\,(x^2 + px + q)$$
$$+ \frac{2N - Mp}{\sqrt{4q - p^2}}\arctan\frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C.$$

Für den Fall IV ergibt dieselbe Substitution

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^m}\,\mathrm{d}x = \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{(t^2 + a^2)^m}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{M}{2}\int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2 + a^2)^m} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2 + a^2)^m}. \quad (1)$$

Das erste dieser Integrale auf der rechten Seite läßt sich mit Hilfe der Substitution

$t^2 + a^2 = u$, $2t\,dt = du$ berechnen:

$$\int \frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^m} = \int \frac{du}{u^m} = -\frac{1}{m-1}\,\frac{1}{u^{m-1}} + C$$
$$= -\frac{1}{m-1}\,\frac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}} + C. \tag{2}$$

Das zweite Integral der rechten Seite kann für jedes m durch die Rekursionsformel (6) aus Nr. 271 gelöst werden. Dann setzen wir zum Schluß in das Resultat den Wert $t = \dfrac{2x+p}{2}$ ein, um zu der Veränderlichen x zurückzukehren.

Damit ist die Frage nach der Integration von Partialbrüchen beantwortet.

274. Die Zerlegung von echten Brüchen in Partialbrüche. Wir beschäftigen uns jetzt mit einem Satz aus der Algebra, der jedoch für die Integration rationaler Brüche von fundamentaler Bedeutung ist: *Jeder echte Bruch*

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

läßt sich als Summe endlich vieler Partialbrüche darstellen.[1])

Diese Zerlegung des echten Bruches in Partialbrüche ist aufs engste mit der Zerlegung seines Nenners $Q(x)$ in Faktoren verknüpft. Bekanntlich läßt sich jedes Polynom mit reellen Koeffizienten (eindeutig) in reelle Faktoren der Gestalt $x - a$ und $x^2 + px + q$ zerlegen; dabei sollen die quadratischen Faktoren keine reellen Nullstellen haben und folglich nicht in reelle Linearfaktoren zerfallen. Fassen wir gleiche Faktoren (sofern solche existieren) zusammen und setzen wir aus Gründen der Einfachheit den höchsten Koeffizienten des Polynoms $Q(x)$ gleich 1, so läßt sich die Zerlegung von $Q(x)$ in der Form

$$Q(x) = (x-a)^{k_1} \cdots (x^2+px+q)^{m_1} \cdots \tag{3}$$

schreiben, wobei $k_1, \ldots, m_1, \ldots$ natürliche Zahlen sind.

Ist der Grad von $Q(x)$ gleich n, so ist die Summe der Exponenten k_i, vermehrt um die doppelte Summe der Exponenten m_j, genau gleich n:

$$\sum_i k_i + 2 \sum_j m_j = n. \tag{4}$$

Für den Beweis des obigen Satzes stellen wir vorerst die folgenden beiden Hilfssätze auf:

1. Wir betrachten ein beliebiges lineares Polynom $x - a$, das in der Faktorzerlegung des Nenners mit dem Exponenten $k \geqq 1$ auftritt, so daß also

$$Q(x) = (x-a)^k\, Q_1(x)$$

gilt, wobei das Polynom $Q_1(x)$ nicht mehr durch $x - a$ teilbar ist. *Dann läßt sich der gegebene Bruch*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)^k\, Q_1(x)}$$

[1]) Satz von der Partialbruchzerlegung der rationalen Funktionen. — *Anm. d. Red.*

als Summe von echten Brüchen darstellen,

$$\frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}\,Q_1(x)},^{1)}$$

von denen der erste Bruch ein *Partialbruch* ist und der Nenner des zweiten Bruches den Faktor $x - a$ in niedrigerer Potenz als vorher enthält.

Zum Beweis genügt es, die Zahl A und das Polynom $P_1(x)$ so zu wählen, daß die *Identität*

$$P(x) - AQ_1(x) = (x-a)\,P_1(x)$$

erfüllt ist. Wir bestimmen zuerst A derart, daß sich die linke Seite dieser Identität durch $x - a$ dividieren läßt. Dafür ist (nach dem bekannten Satz von BEZOUT[2]) hinreichend, daß die linke Seite für $x = a$ gleich 0 ist; dies führt für A auf den Ausdruck

$$A = \frac{P(a)}{Q_1(a)}.$$

Er ist sinnvoll, weil (ebenfalls nach dem Satz von BEZOUT) $Q_1(a) \neq 0$ ist. Bei dieser Wahl von A läßt sich dann das Polynom P_1 mittels Division durch $x - a$ bestimmen.

2. Es sei nun $x^2 + px + q$ ein beliebiges Polynom zweiten Grades, das in der Zerlegung des Nenners mit dem Exponenten $m \geqq 1$ auftritt, so daß wir

$$Q(x) = (x^2 + px + q)^m\,Q_1(x)$$

setzen können, wobei $Q_1(x)$ nicht durch $x^2 + px + q$ teilbar ist. *Dann ist der echte Bruch*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x^2+px+q)^m\,Q_1(x)}$$

als Summe von echten Brüchen darstellbar,

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}\,Q_1(x)},$$

von denen der erste Bruch ein *Partialbruch* ist und der zweite Bruch im Nenner den Ausdruck $x^2 + px + q$, aber mit kleinerem Exponenten als vorher enthält.

Zum Beweis brauchen wir nur die Zahlen M, N und das Polynom $P_1(x)$ so zu wählen daß die *Identität*

$$P(x) - (Mx - N)\,Q_1(x) = (x^2+px+q)\,P_1(x)$$

erfüllt ist. Wir bestimmen M und N so, daß die linke Seite durch $x^2 + px + q$ teilbar ist. Die Reste bei der Division von P bzw. Q_1 durch diesen Ausdruck seien $\alpha x + \beta$ bzw. $\gamma x + \delta$. Damit ist die Aufgabe auf die Frage zurückgeführt, ob der Ausdruck

$$\alpha x + \beta - (Mx + N)(\gamma x + \delta) = -\gamma M x^2 + (\alpha - \delta M - \gamma N)\,x + (\beta - \delta N)$$

---

[1]) Die Buchstaben P, Q (mit verschiedenen Indizes) bezeichnen hier und im folgenden Polynome, die Buchstaben A, M, N konstante Zahlen.

[2]) ETIENNE BEZOUT, 1730—1783, französischer Mathematiker.

durch $x^2 + px + q$ teilbar ist. Führen wir hier die Division aus, so erhalten wir als *Rest*

$$[(p\gamma - \delta) M - \gamma N + \alpha] x + [q\gamma M - \delta N + \beta].$$

Damit dieser Rest identisch verschwindet, müssen wir die beiden eckigen Klammern gleich 0 setzen; wir finden so zur Bestimmung von M und N ein System von zwei linearen Gleichungen. Seine Determinante

$$\begin{vmatrix} p\gamma - \delta & -\gamma \\ q\gamma & -\delta \end{vmatrix} = \delta^2 - p\gamma\delta + q\gamma^2$$

ist von 0 verschieden. Man kann sie nämlich für $\gamma \neq 0$ auf die Gestalt

$$\gamma^2 \left[\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)^2 + p\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right) + q\right]$$

bringen; da der Ausdruck in eckigen Klammern der Wert von $x^2 + px + q$ im Punkt $x = -\frac{\delta}{\gamma}$ ist, kann er nicht verschwinden, denn $x^2 + px + q$ hat keine reellen Nullstellen. Für $\gamma = 0$ reduziert sich die Determinante auf δ^2, und $\delta = 0$ ist unmöglich, da $Q_1(x)$ nicht durch $x^2 + px + q$ teilbar ist.

Sind M und N nach diesem Verfahren berechnet, so können wir auch hier das Polynom $P_1(x)$ mühelos durch Division erhalten.

Wir wollen nun den obigen Satz beweisen. Der Beweis läßt sich auf die wiederholte Anwendung der Sätze 1 und 2 zurückführen, mit deren Hilfe die Partialbruchzerlegung des gegebenen echten Bruches durchgeführt werden kann. Tritt der Faktor $x - a$ in Q nur einmal auf, so ordnen wir ihm auf Grund von Satz 1 (für $k = 1$) einen einzigen Partialbruch der Form

$$\frac{A}{x - a}$$

zu. Tritt der Faktor $x - a$ in einer Potenz k ($k > 1$) auf, so können wir auf Grund des Satzes 1 den Partialbruch

$$\frac{A_k}{(x - a)^k},$$

dann von dem restlichen Bruch (wieder auf Grund von Satz 1) den Partialbruch

$$\frac{A_{k-1}}{(x - a)^{k-1}}$$

abspalten usw., bis der Faktor $x - a$ in der Zerlegung des Nenners nicht mehr auftritt. Somit entspricht in diesem Fall dem Faktor $(x - a)^k$, $k > 1$, die Summe

$$\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x - a)^k} \tag{5}$$

von k Partialbrüchen. Die analoge Überlegung wenden wir auch auf jeden der noch übrigbleibenden Linearfaktoren an, bis der Nenner ausgeschöpft ist oder in seiner Zerlegung nur noch quadratische Faktoren enthalten sind.

Analog ordnen wir vermöge Satz 2 dem quadratischen Faktor $x^2 + px + q$ einen einzigen Partialbruch der Gestalt

$$\frac{Mx + N}{x^2 + px + q}$$

zu, wenn der Faktor in erster Potenz auftritt, bzw. die Summe

$$\frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \cdots + \frac{M_mx + N_m}{(x^2 + px + q)^m} \tag{6}$$

von m Partialbrüchen, wenn der Faktor den Exponenten $m > 1$ hat.

Das gleiche läßt sich auch mit den übrigen quadratischen Faktoren durchführen, sofern es solche gibt. Damit ist der Satz bewiesen.

275. Bestimmung der Koeffizienten. Die Integration von Partialbrüchen. Kennen wir die Zerlegung (3), so kennen wir auch die *Nenner* jener Partialbrüche, in welche sich der gegebene Bruch P/Q zerlegen läßt. Nun bleibt noch die Frage nach der Bestimmung der Zähler, d. h. der Koeffizienten A, N, M offen. Da die Zähler in (5) k Koeffizienten und die Zähler in (6) $2m$ Koeffizienten enthalten, sind wegen (4) genau n Koeffizienten zu bestimmen.

Zur Bestimmung dieser Koeffizienten wird häufig die *Methode der unbestimmten Koeffizienten* benutzt, die in folgendem besteht. Kennen wir die *Form* der Zerlegung von P/Q, so schreiben wir sie mit den Koeffizienten A, M, N in den Zählern auf die rechte Seite der Gleichung. Der Hauptnenner der Partialbrüche ist offenbar gleich Q; bringen wir die Brüche auf den Hauptnenner und addieren wir sie, so erhalten wir einen echten Bruch.[1]) Multiplizieren wir dann beide Seiten der Gleichung mit Q, so erhalten wir eine Beziehung zwischen zwei Polynomen $(n - 1)$-ten Grades, die bezüglich x identisch sind. Die Koeffizienten bei den verschiedenen Potenzen von x auf der rechten Seite sind lineare homogene Polynome in den mit Buchstaben bezeichneten n Koeffizienten; setzen wir sie gleich den entsprechenden Koeffizienten des Polynoms P, so erhalten wir ein System von n linearen Gleichungen, aus denen sich die n unbekannten Koeffizienten bestimmen lassen. Da die Partialbruchzerlegung, wie wir vorher gesehen haben, möglich ist, muß dieses System *widerspruchsfrei* sein.

Überdies ist die Determinante des Gleichungssystems notwendig von 0 verschieden, da es für beliebig gewählte rechte Seiten (die Koeffizienten von P) eine Lösung hat. Mit anderen Worten, das System ist stets *bestimmt*. Diese einfache Bemerkung beweist gleichzeitig die *Eindeutigkeit* der Partialbruchzerlegung eines echten Bruches.

Diese Überlegungen wollen wir an einem Beispiel erklären. Gegeben sei der Bruch

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x - 2)(x^2 + 1)^2}.$$

Auf Grund des Satzes aus Nr. 275 hat er die Zerlegung

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x - 2)(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}.$$

Die Koeffizienten A, B, C, D und E bestimmen wir mit Hilfe der Identität

$$2x^2 + 2x + 13 = A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)(x^2 + 1)(x - 2) + (Dx + E)(x - 2).$$

[1]) Die Summe echter rationaler Brüche ist stets ein echter Bruch.

Durch Vergleich der Koeffizienten bei gleichen Potenzen von x gelangen wir zu dem System der fünf Gleichungen

$$\begin{array}{c|l} x^4 & A + B = 0, \\ x^3 & -2B + C = 0, \\ x^2 & 2A + B - 2C + D = 2, \\ x^1 & -2B + C - 2D + E = 2, \\ x^0 & A - 2C - 2E = 13; \end{array}$$

daraus folgt

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = -2, \quad D = -3, \quad E = -4,$$

so daß wir also

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}$$

erhalten.

Die eben angestellten algebraischen Überlegungen lassen sich unmittelbar auf die *Integration rationaler Brüche* anwenden. Wie wir in Nr. 273 sahen, können Partialbrüche in geschlossener Form integriert werden. Dasselbe können wir jetzt von jedem rationalen Bruch behaupten. Wenn wir diejenigen Funktionen betrachten, durch welche sich die Integrale eines Polynoms oder eines echten Bruches ausdrücken lassen, so können wir das folgende genauere Ergebnis formulieren:

Das Integral einer beliebigen rationalen Funktion läßt sich in geschlossener Form mit Hilfe rationaler Funktionen, des Logarithmus und des Arkustangens ausdrücken.

Zum Beispiel gilt bei dem oben betrachteten Fall, wenn wir die Formeln aus Nr. 273 benutzen,

$$\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{x+2}{x^2+1}\,dx - \int \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{3-4x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1} - 4\arctan x + C.$$

276. Abtrennung des rationalen Teils eines Integrals. Es gibt ein Verfahren das von M. W. Ostrogradski[1]) stammt und mit dessen Hilfe sich das Integral eines echten rationalen Bruches wesentlich leichter berechnen läßt. Dieses Verfahren erlaubt, auf *rein algebraischem Wege* den rationalen Teil des Integrals abzutrennen.

Wir sahen (Nr. 273), daß sich die rationalen Glieder des Integrals bei Integration von Partialbrüchen der Gestalt II und IV ergeben. Im ersten Fall können wir das Integral sofort angeben:

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = -\frac{A}{k-1}\,\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C. \tag{7}$$

Wir wollen nun untersuchen, welche Gestalt der rationale Teil des Integrals

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}\,dx \qquad \left(m > 1, \quad q - \frac{p^2}{4} > 0\right)$$

hat. Dazu führen wir die uns schon bekannte Substitution $x + \frac{p}{2} = t$ durch und be-

[1]) Michail Wassiljewitsch Ostrogradski, 1801—1862, russischer Mathematiker.

nutzen die Gleichungen (1) und (2) sowie die Rekursionsformel (6) aus Nr. 271 für $n = m - 1$. Kehren wir zur Veränderlichen x zurück, so erhalten wir

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}\,dx = \frac{M'x+N'}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \alpha \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-1}}$$

mit konstanten Koeffizienten M', N' und α. Mit Hilfe dieser Formel finden wir, wenn wir m durch $m-1$ ersetzen, für das letzte Integral (für $m > 2$)

$$\int \frac{\alpha\,dx}{(x^2+px+q)^{m-1}} = \frac{M''x+N''}{(x^2+px+q)^{m-2}} + \beta \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-2}}$$

usw., bis der Exponent von x^2+px+q in dem Integral auf der rechten Seite gleich 1 ist. Alle sukzessiv abtrennbaren rationalen Glieder sind echte Brüche. Fassen wir sie zusammen, so erhalten wir das Ergebnis in der Gestalt

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}\,dx = \frac{R(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \lambda \int \frac{dx}{x^2+px+q}; \tag{8}$$

dabei ist $R(x)$ ein Polynom, dessen Grad kleiner als der des Nenners, also kleiner als $m-1$ ist,[1]) und λ eine Konstante.

Gegeben sei nun der echte Bruch P/Q, wobei P und Q teilerfremd seien; der Nenner Q sei in Faktoren zerlegt (vgl. (3)). Dann läßt sich das Integral dieses Bruches als Summe von Integralen von Brüchen der Form (5) oder (6) darstellen. Ist k (oder m) größer als 1, so können wir die Integrale aller Brüche (5) [oder (6)], außer dem ersten, mit Hilfe der Formel (7) [oder (8)] umformen. Fassen wir diese Ergebnisse zusammen, so gelangen wir schließlich zu einer Beziehung der Gestalt

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx. \tag{9}$$

Da der rationale Teil $P_1(x)/Q_1(x)$ dieses Integrals durch Addition aus den oben abgetrennten rationalen Teilen hervorging, ist er vor allen Dingen ein *echter Bruch*, und sein Nenner Q_1 hat die Zerlegung

$$Q_1(x) = (x-a)^{k_1-1} \cdots (x^2+px+q)^{m_1-1} \cdots.$$

Der im Integranden stehende Bruch P_2/Q_2 ergab sich durch Addition von Brüchen des Typs I und III, so daß er ebenfalls *echt* ist, und es ist

$$Q_2(x) = (x-a) \cdots (x^2+px+q) \cdots.$$

Offenbar gilt $Q = Q_1Q_2$ (vgl. (3)).

Die Formel (9) wollen wir die *Ostrogradskische Formel* nennen. Differenzieren wir sie, so können wir ihr die äquivalente Form

$$\frac{P}{Q} = \left[\frac{P_1}{Q_1}\right]' + \frac{P_2}{Q_2} \tag{10}$$

geben.

Wir sahen, daß sich die Polynome Q_1 und Q_2 leicht bestimmen lassen, wenn die Zerlegung (3) von Q bekannt ist; aber ihre Bestimmung ist auch ohne diese Zerlegung

[1]) Vgl. die Fußnote auf S. 41.

möglich. Da nämlich die Ableitung Q' alle Faktoren, in welche sich Q zerlegen läßt, mit um 1 kleineren Exponenten enthält, ist Q_1 der größte gemeinsame Teiler von Q und Q'; Q_1 kann also aus diesen Polynomen z. B. durch Division bestimmt werden. Ist Q_1 bekannt, so läßt sich Q_2 finden, indem Q durch Q_1 dividiert wird.

Wir wenden uns nun der Bestimmung der Zähler P_1 und P_2 in (10) zu. Auch hier benutzen wir wieder die Methode der unbestimmten Koeffizienten. Mit n, n_1 bzw. n_2 bezeichnen wir den Grad von Q, Q_1 bzw. Q_2, so daß also $n_1 + n_2 = n$ ist. Dann ist der Grad von P, P_1 bzw. P_2 nicht größer als $n - 1$, $n_1 - 1$ bzw. $n_2 - 1$. Als P_1 und P_2 nehmen wir Polynome $(n_1 - 1)$-ten bzw. $(n_2 - 1)$-ten Grades mit unbestimmten Koeffizienten; deren Anzahl ist $n_1 + n_2 = n$. Führen wir in (10) die Differentiation aus, so erhalten wir

$$\frac{P_1'Q_1 - P_1Q_1'}{Q_1^2} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P}{Q}.$$

Wir zeigen nun, daß der erste Bruch stets auf den Nenner Q gebracht werden kann, während der Zähler eine ganze Funktion bleibt. Es ist nämlich

$$\frac{P_1'Q_1 - P_1Q_1'}{Q_1^2} = \frac{P_1'Q_2 - P_1\dfrac{Q_1'Q_2}{Q_1}}{Q_1Q_2} = \frac{P_1'Q_2 - P_1H}{Q},$$

wobei H den Quotienten $Q_1'Q_2/Q_1$ bezeichnet. Dieser Quotient ist aber in Wirklichkeit ein Polynom; denn tritt $(x - a)^k$ mit $k \geqq 1$ in Q_1 auf, so kommt $(x - a)^{k-1}$ in Q_1' und $x - a$ in Q_2 vor. Dasselbe können wir von einem Faktor der Gestalt $(x^2 + px + q)^m$ mit $m \geqq 1$ behaupten. Also läßt sich der Zähler von H ohne Rest durch den Nenner teilen, so daß also H ein Polynom (vom Grad $n_2 - 1$) ist.

Entfernen wir den Hauptnenner Q, so gelangen wir zu der Identität

$$P_1'Q_2 - P_1H + P_2Q_1 = P,$$

in der auf beiden Seiten ein Polynom $(n - 1)$-ten Grades steht.

Somit erhalten wir zur Bestimmung der n unbestimmten Koeffizienten ein System von n linearen Gleichungen. Da für ein beliebiges Polynom P eine Zerlegung (10) möglich ist, muß dieses System für beliebige rechte Seite *verträglich* sein. Daraus folgt von selbst, daß die Determinante von 0 verschieden ist, d. h., das System ist notwendig *bestimmt*, und die Zerlegung (10) ist bei den erwähnten Nennern Q_1 und Q_2 *eindeutig*.[1])

Beispiel. Von dem Integral

$$\int \frac{4x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 12x + 8}{(x + 1)^2 (x^2 + 1)^2}\,dx$$

spalte man den rationalen Teil ab. Es ist

$$Q_1 = Q_2 = (x + 1)(x^2 + 1) = x^3 + x^2 + x + 1;$$

daraus folgt

$$\frac{4x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 12x + 8}{(x^3 + x^2 + x + 1)^2} = \left[\frac{ax^2 + bx + c}{x^3 + x^2 + x + 1}\right]' + \frac{dx^2 + ex + f}{x^3 + x^2 + x + 1}.$$

[1]) Vgl. die analoge Bemerkung über die Zerlegung eines echten Bruches in Partialbrüche auf S. 41.

Vergleicht man die Koeffizienten der gleichhohen Potenzen von x auf beiden Seiten, so erhalten wir ein Gleichungssystem für die unbekannten Koeffizienten $a, b, \ldots, f$:

$$\begin{aligned}
&d = 0 \quad \text{(im folgenden können wir also } d \text{ fortlassen)},\\
&-a + e = 4,\\
&-2b + e + f = 4,\\
&a - b - 3c + e + f = 16,\\
&2a - 2c + e + f = 12,\\
&b - c + f = 8.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$a = -1, \qquad b = 1, \qquad c = -4, \qquad d = 0, \qquad e = 3, \qquad f = 3,$$

also

$$\begin{aligned}
\int \frac{4x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 12x + 8}{(x+1)^2\,(x^2+1)^2}\,dx &= -\frac{x^2 - x + 4}{x^3 + x^2 + x + 1} + 3\int \frac{dx}{x^2+1}\\
&= -\frac{x^2 - x + 4}{x^3 + x^2 + x + 1} + 3 \arctan x + C.
\end{aligned}$$

In diesem Beispiel ließ sich das letzte Integral sofort berechnen. Ist dies nicht der Fall, so müssen wir den Integranden in Partialbrüche zerlegen. Dieser Prozeß läßt sich übrigens auch mit dem vorhergehenden vereinigen.

277. Beispiele. Wir geben nun weitere Beispiele für die Integration rationaler Funktionen an.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2}$. Die Zerlegung in Partialbrüche läßt sich durch leichte Umformungen vornehmen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2(1+x^2)^2} &= \frac{(1+x^2) - x^2}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{1}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)^2}\\
&= \frac{(1+x^2) - x^2}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2}.
\end{aligned}$$

Lösung. $\displaystyle -\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\,\frac{x}{1+x^2} - \frac{3}{2}\arctan x + C.$

2. $\displaystyle\int \frac{4x^2 + 4x - 11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}\,dx$. Es ist

$$\begin{aligned}
\frac{4x^2 + 4x - 11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)} &= \frac{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{11}{8}}{\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right)}\\
&= \frac{A}{x - \frac{1}{2}} + \frac{B}{x + \frac{3}{2}} + \frac{C}{x - \frac{5}{2}}.
\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir die Identität

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{11}{8} = A\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right) &+ B\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right)\\
&+ C\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right).
\end{aligned}$$

Statt die Koeffizienten bei gleichen Potenzen von x zu vergleichen, können wir hier anders vorgehen und schneller zum Ziel gelangen. Wir setzen in dieser Identität nacheinander $x = \frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ und erhalten sofort $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{8}$, $C = \frac{3}{8}$ (da jedes Mal auf der rechten Seite nur *ein* Summand stehen bleibt).[1])

Lösung. $\frac{1}{4}\ln\left|x-\frac{1}{2}\right| - \frac{1}{8}\ln\left|x+\frac{3}{2}\right| + \frac{3}{8}\ln\left|x-\frac{5}{2}\right| + C$

$$= \frac{1}{8}\ln\left|\frac{(2x-1)^2(2x-5)^3}{2x+3}\right| + C'.^{2)}$$

3. $\int \frac{dx}{x^4+1}$. Wegen

$$x^4+1 = (x^4+2x^2+1) - 2x^2 = (x^2+1)^2 - \left(x\sqrt{2}\right)^2$$
$$= \left(x^2+x\sqrt{2}+1\right)\left(x^2-x\sqrt{2}+1\right)$$

suchen wir die Zerlegung in der Gestalt

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1}.$$

Aus der Identität

$$1 = (Ax+B)\left(x^2-x\sqrt{2}+1\right) + (Cx+D)\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right)$$

erhalten wir das Gleichungssystem

$$A + C = 0,$$
$$-\sqrt{2}A + B + \sqrt{2}C + D = 0,$$
$$A - \sqrt{2}B + C + \sqrt{2}D = 0,$$
$$B + D = 1,$$

woraus

$$A = -C = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \qquad B = D = \frac{1}{2}$$

folgt. Somit ist

$$\int\frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\,dx - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\,dx$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(x\sqrt{2}+1\right)$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(x\sqrt{2}-1\right) + C.$$

---

[1]) Man beachte, daß die Identität in Wirklichkeit eine Identität in Brüchen darstellt, bei denen gerade bei $\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ die Nenner verschwinden. Die geschilderte Methode ist also im Sinne des *Grenzprozesses* $x \to \frac{1}{2}$, $\to -\frac{3}{2}$, $\to \frac{5}{2}$ aufzufassen. Man spricht daher auch von *Grenzwertmethode*. — *Anm. d. Red.*

[2]) Offenbar unterscheidet sich C' von C nur um $-\frac{1}{2}\ln 2$.

Benutzen wir das Additionstheorem des Arkustangens (Nr. 50), so können wir dem Resultat die Form

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2} + C'$$

geben. Es ist darauf zu achten, daß dieser Ausdruck nur in den Intervallen $(+\infty, -1)$, $(-1, 1)$ und $(1, \infty)$ zu gebrauchen ist, da er in den Punkten $x = \pm 1$ seinen Sinn verliert. Wählt man die Konstante C' in diesen Intervallen gleich

$$C - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \qquad C \qquad \text{bzw.} \qquad C + \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

so kompensiert diese sprunghafte Änderung die Sprünge der Funktion in den Punkten $x = \pm 1$.

4. $\displaystyle\int \frac{2x^4 - 4x^3 + 24x^2 - 40x + 20}{(x-1)(x^2 - 2x + 2)^3}\, dx$. Wir trennen zunächst den rationalen Teil des Integrals ab. Es ist

$$Q_1 = (x^2 - 2x - 2)^2, \qquad Q_2 = (x - 1)(x^2 - 2x + 2).$$

Damit haben wir

$$\frac{2x^4 - 4x^3 + 24x^2 - 40x + 20}{(x-1)(x^2 - 2x + 2)^3} = \left[\frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{(x^2 - 2x + 2)^2}\right]' + \frac{e}{x-1} + \frac{fx + g}{x^2 - 2x + 2},$$

wobei wir auf der rechten Seite gleichzeitig schon den Ausdruck, der noch integriert werden muß, in Partialbrüche zerlegt haben. Die Identität

$$\begin{aligned} &2x^4 - 4x^3 + 24x^2 - 40x + 20 \\ &= (3ax^2 + 2bx + c)(x^2 - 2x + 2)(x - 1) - (ax^3 + bx^2 + cx + d)\, 2(2x - 2)(x - 1) \\ &\quad + e(x^2 - 2x + 2)^3 + (fx + g)(x - 1)(x^2 - 2x + 2)^2 \end{aligned}$$

führt uns auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} &e + f = 0, \\ &-a - 6e - 5f + g = 0, \\ &-a - 2b + 18e + 12f - 5g = 2, \\ &8a + 2b - 3c - 32e - 16f + 12g = -4, \\ &-6a + 4b + 5c - 4d + 36e + 12f - 16g = 24, \\ &-4b + 8d - 24e - 4f + 12g = -40, \\ &-2c - 4d + 8e - 4g = 20, \end{aligned}$$

woraus sich

$$a = 2, \qquad b = -6, \qquad c = 8, \qquad d = -9, \qquad e = 2, \qquad f = -2, \qquad g = 4$$

ergibt.

Lösung. $\displaystyle\frac{2x^3 - 6x^2 + 8x - 9}{(x^2 - 2x - 2)^2} + \ln \frac{(x-1)^2}{x^2 - 2x + 1} + 2 \arctan(x - 1) + C.$

5. $\displaystyle\int \frac{x^6 - x^5 + x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 3x + 3}{(x+1)^2 (x^2 + x + 1)^3}\, dx$. Wir trennen den rationalen Teil ab, setzen dazu

$$Q_1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)^2, \qquad Q_2 = (x + 1)(x^2 + x + 1)$$

und suchen die Zerlegung in der Gestalt

$$\left[\frac{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}{(x+1)(x^2 + x + 1)^2}\right]' + \frac{fx^2 + gx + h}{(x+1)(x^2 + x + 1)}.$$

Aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
&f = 0,\\
&-a + g = 1,\\
&a - 2b + 3g + h = -1,\\
&5a - b - 3c + 5g + 3h = 1,\\
&4a + 3b - 3c - 4d + 5g + 5h = 2,\\
&3b + c - 5d - 5e + 3g + 5h = 3,\\
&2c - d - 7e + g + 3h = 3,\\
&d - 3e + h = 3
\end{aligned}$$

finden wir

$$a = -1, \quad b = 0, \quad c = -2, \quad d = 0, \quad e = -1, \quad f = g = h = 0.$$

Das gegebene Integral führt also auf die rationale Funktion

$$-\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{(x+1)\,(x^2 + x + 1)^2} + C.$$

§ 3. Integration von Wurzelausdrücken

278. Integration von Ausdrücken der Form $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right)$.[1] Beispiele. Nachdem wir gelernt haben, rationale Funktionen geschlossen zu integrieren, wollen wir jetzt ein grundlegendes Integrationsverfahren für verschiedene Klassen von Integranden betrachten, bei denen man Transformationen $t = \omega(x)$ zu finden sucht, die den Integranden in rationale Form bringen und so ermöglichen, das Integral in geschlossener Form als Funktion von t darzustellen. Läßt sich dabei die Funktion $\omega(x)$, die durch t ersetzt wird, selbst durch elementare Funktionen ausdrücken, so ist das Integral in geschlossener Form als Funktion von x darstellbar.

Als erstes Anwendungsbeispiel betrachten wir ein Integral der Gestalt

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right) \mathrm{d}x, \tag{1}$$

wobei R eine *rationale* Funktion von zwei Argumenten bezeichnet, m eine natürliche Zahl ist und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Konstanten sind. Wir setzen

$$t = \omega(x) = \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}, \qquad t^m = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \qquad x = \varphi(t) = \frac{\delta t^m - \beta}{\alpha - \gamma t^m}.$$

Damit geht das Integral über in

$$\int R\big(\varphi(t), t\big)\, \varphi'(t)\, \mathrm{d}t;$$

hier ist das Differential schon rational, da R, φ und φ' rational sind. Haben wir dieses Integral mit Hilfe der Methoden aus § 2 berechnet, so kehren wir zu der alten Veränderlichen zurück, indem wir $t = \omega(x)$ einsetzen.

[1] Mit R bezeichnen wir stets eine rationale Funktion ihrer Argumente.

Auf ein Integral der Gestalt (1) lassen sich auch die allgemeinen Integrale

$$\int R\left(x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^r, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^s, \ldots\right) dx$$

zurückführen, wobei alle Exponenten $r, s, \ldots$ rational sind; man braucht diese Exponenten nur auf den Hauptnenner m zu bringen, damit im Integranden eine rationale Funktion von x und von $\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$ steht.

Beispiele.

1. $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx$. Hier ist speziell die *gebrochene lineare* Funktion $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ eine *lineare* Funktion. Wir setzen $t=\sqrt{x+1}$, $dx = 2t\,dt$. Dann ist

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx = 2\int\frac{t+2}{t^3-1}\,dt = \int\left(\frac{2}{t-1}-\frac{2t+2}{t^2+t+1}\right)dt$$

$$= \ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C,$$

wobei nur noch $t=\sqrt{x+1}$ zu setzen ist.

2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{dx}{x+1}$. Wir setzen

$$t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}, \qquad x = \frac{t^3+1}{t^3-1}, \qquad dx = -\frac{6t^2\,dt}{(t^3-1)^2};$$

dann ist

$$\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{dx}{x+1} = \int\frac{-3dt}{t^3-1} = \int\left(-\frac{1}{t-1}+\frac{t+2}{t^2+t+1}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2} + \sqrt{3}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$$

mit $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$.

279. Integration von binomischen Differentialen. Beispiele. Differentiale der Form

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx,$$

wobei a und b beliebige Konstanten und die Exponenten m, n und p rationale Zahlen sind, nennen wir *binomisch*. Wir wollen untersuchen, wann diese Ausdrücke geschlossen integrierbar sind. Einer dieser Fälle ist unmittelbar klar: Ist p eine *ganze* Zahl (positiv, 0 oder negativ), so gehört der Ausdruck zu dem in Nr. 278 betrachteten Typ. Bezeichnen wir nämlich mit λ das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner von m und n, so haben wir einen Ausdruck der Form $R(\sqrt[\lambda]{x})\,dx$ vor uns, der durch die Funktion $t=\sqrt[\lambda]{x}$ rational gemacht werden kann.

Transformieren wir jetzt den gegebenen Ausdruck mit Hilfe der Substitution $z = x^n$, so ist

$$x^m(a + bx^n)^p\,dx = \frac{1}{n}\,(a + bz)^p\,z^{\frac{m+1}{n}-1}\,dz$$

oder, wenn wir zur Abkürzung $\frac{m+1}{n} - 1 = q$ setzen,

$$\int x^m(a + bx^n)^p\,dx = \frac{1}{n}\int (a + bz)^p\,z^q\,dz. \tag{2}$$

Ist q eine ganze Zahl, so erhalten wir einen schon früher untersuchten Ausdruck. Bezeichnen wir nämlich mit ν den Nenner des Bruches p, so hat der transformierte Ausdruck die Gestalt $R\left(z, \sqrt[\nu]{a + bz}\right)$. Der Integrand läßt sich sofort mit Hilfe von

$$t = \sqrt[\nu]{a + bz} = \sqrt[\nu]{a + bx^n}$$

rational machen.

Nun geben wir dem Integral auf der rechten Seite von (2) die Gestalt

$$\int \left(\frac{a + bz}{z}\right)^p z^{p+q}\,dz;$$

wir sehen sofort, daß wir für *ganzes* $p + q$ ebenfalls zu einem schon betrachteten Fall gelangen; der transformierte Ausdruck hat hier nämlich die Form $R\left(z, \sqrt[\nu]{\frac{a + bz}{z}}\right)$. In diesem Fall läßt sich das gegebene Integral *sofort* durch

$$t = \sqrt[\nu]{\frac{a + bz}{z}} = \sqrt[\nu]{ax^{-n} + b}$$

rational machen.

Beide Integrale in (2) *lassen sich also in geschlossener Form angeben, wenn eine der Zahlen* $p, q, p + q$ *oder* (was das gleiche ist) *eine der Zahlen* p, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n} + p$ *ganz ist.*

Diese Fälle der Integrierbarkeit waren im wesentlichen schon Newton bekannt, jedoch erst in der Mitte des vorigen Jahrhunderts fand Tschebyscheff[1]) die bemerkenswerte Tatsache, daß sich binomische Differentiale in anderen Fällen nicht geschlossen integrieren lassen.

Wir betrachten nun einige **Beispiele**.

1. $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-1/2}(1 + x^{1/4})^{1/3}\,dx$. Hier ist $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{4}$, $p = \frac{1}{3}$; wegen

$$\frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{4}} = 2$$

[1]) Pafnuti Lwowitsch Tschebyscheff, 1821—1894, russischer Mathematiker.

liegt der zweite Fall vor. Ferner ist $\nu = 3$; nach der allgemeinen Regel setzen wir

$$t = \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}, \qquad x = (t^3 - 1)^4, \qquad dx = 12t^2(t^3 - 1)^3\, dt;$$

daraus folgt

$$\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = 12 \int (t^6 - t^3)\, dt = \frac{3}{7} t^4(4t^3 - 7) + C \quad \text{usw.}$$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1 + x^4}} = \int x^0(1 + x^4)^{-1/4}\, dx$. Hier ist $m = 0$, $n = 4$, $p = -\frac{1}{4}$; es liegt der dritte Fall vor, denn es ist

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.$$

Ferner ist $\nu = 4$; wir setzen

$$t = \sqrt[4]{x^{-4} + 1} = \frac{\sqrt[4]{1 + x^4}}{x}, \quad x = (t^4 - 1)^{-1/4}, \quad dx = -t^3(t^4 - 1)^{-5/4}\, dt.$$

Also ist

$$\sqrt[4]{1 + x^4} = tx = t(t^4 - 1)^{-1/4},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1 + x^4}} = -\int \frac{t^2\, dt}{t^4 - 1} = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\right) dt - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{4} \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{2} \arctan t + C \quad \text{usw.}$$

3. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1 + x^5}} = \int x^{-1}(1 + x^5)^{-1/3}\, dx$. Hier ist $m = -1$, $n = 5$, $p = -\frac{1}{3}$; wegen $\frac{m+1}{n} = 0$ liegt der zweite Fall vor, ferner ist $\nu = 3$. Wir setzen

$$t = \sqrt[3]{1 + x^5}, \qquad x = (t^3 - 1)^{1/5}, \qquad dx = \frac{3}{5} t^2(t^3 - 1)^{-4/5}\, dt$$

und erhalten

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1 + x^5}} = \frac{3}{5} \int \frac{t\, dt}{t^3 - 1} = \frac{1}{5} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{t-1}{t^2 + t + 1}\right) dt$$

$$= \frac{1}{10} \ln \frac{(t-1)^2}{t^2 + t + 1} + \frac{\sqrt{3}}{5} \arctan \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C \quad \text{usw.}$$

280. Rekursionsformeln. Da sich das Integral eines binomischen Differentials stets auf die Form

$$J_{p,q} = \int (a + bz)^p z^q\, dz \tag{3}$$

bringen läßt (vgl. (2)), wollen wir uns im folgenden auf die Betrachtung von Integralen der Gestalt (3) beschränken.

Wir werden nun eine Reihe von *Rekursionsformeln* aufstellen, mit deren Hilfe das Integral (3) im allgemeinen durch ein ähnliches Integral $J_{p',q'}$ ausgedrückt werden kann, wobei sich p' und q' nur um beliebige ganze Zahlen von p und q unterscheiden.

Durch Integration der Identitäten

$$(a + bz)^{p+1} z^q = a(a + bz)^p z^q + b(a + bz)^p z^{q+1},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} [(a + bz)^{p+1} z^{q+1}] = (p + 1)\, b(a + bz)^p z^{q+1} + (q + 1)\, (a + bz)^{p+1} z^q$$

erhalten wir

$$J_{p+1,q} = aJ_{p,q} + bJ_{p,q+1},$$

$$(a + bz)^{p+1} z^{q+1} = (p + 1)\, bJ_{p,q+1} + (q + 1)\, J_{p+1,q},$$

woraus sich die ersten beiden Formeln

$$J_{p,q} = -\frac{(a + bz)^{p+1} z^{q+1}}{a(p + 1)} + \frac{p + q + 2}{a(p + 1)} J_{p+1,q} \quad (p \neq -1), \tag{I}$$

$$J_{p,q} = \frac{(a + bz)^{p+1} z^{q+1}}{a(q + 1)} - b\,\frac{p + q + 2}{a(q + 1)} J_{p,q+1} \quad (q \neq -1) \tag{II}$$

ergeben, die es erlauben, den Index p bzw. q um 1 zu *vergrößern* (sofern p bzw. q von -1 verschieden sind).

Lösen wir diese Gleichungen nach $J_{p+1,q}$ bzw. $J_{p,q+1}$ auf und ersetzen wir p und q durch $p - 1$ bzw. $q - 1$, so gelangen wir zu den Formeln

$$J_{p,q} = \frac{(a + bz)^p z^{q+1}}{p + q + 1} + \frac{ap}{p + q + 1} J_{p-1,q} \quad (p + q \neq -1), \tag{III}$$

$$J_{p,q} = \frac{(a + bz)^{p+1} z^q}{b(p + q + 1)} - \frac{aq}{b(p + q + 1)} J_{p,q-1} \quad (p + q \neq -1), \tag{IV}$$

die es erlauben, den Index p bzw. q zu *verkleinern* (sofern $p + q \neq -1$ ist).

Sind weder p noch q ganze Zahlen (so daß sich also das Integral $J_{p,q}$ nicht in geschlossener Form durch elementare Funktionen ausdrücken läßt), so können die Rekursionsformeln ohne jede Einschränkung nacheinander angewendet werden. Mit ihrer Hilfe können die *Parameter* p und q beispielsweise zu echten Brüchen gemacht werden.

Wir verweilen nun bei dem für uns interessanten Fall, daß das Integral in geschlossener Form angegeben werden kann. Dabei können wir voraussetzen, daß nur p oder q ganz ist, da sich der Fall, daß $p + q$ ganz ist, durch die Substitution $z = \frac{1}{u}$ auf den Fall eines ganzen q zurückführen läßt.

Die aufeinanderfolgende Anwendung der hergeleiteten Formeln erlaubt es dann, diesen ganzen Index (p oder q) auf 0, wenn er positiv ist, oder auf -1, wenn er negativ ist, zurückzuführen. Dadurch läßt sich die Integration im allgemeinen entweder schneller durchführen oder (in jedem Fall) bedeutend vereinfachen.

Beispiele.

1. Wir betrachten das Integral[1])

$$H_m = \int \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \quad (m \text{ ganz}).$$

Hier ist $n = 2$, $p = -\frac{1}{2}$; daher ist für ungerades m die Zahl $\frac{m+1}{n} = \frac{m+1}{2}$ und für gerades m die Zahl $\frac{m+1}{n} + p = \frac{m+1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{m}{2}$ ganz, so daß sich das Integral in beiden Fällen in geschlossener Form angeben läßt. Mit Hilfe der Beziehung $z = x^2$ transformieren wir es in das Integral

$$\frac{1}{2}\int (1-z)^{-1/2} z^{(m-1)/2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2} J_{-1/2,\,(m-1)/2}.$$

Setzen wir $m > 1$ und wenden wir die Formel (IV) an, so ergibt sich

$$J_{-1/2,\,(m-1)/2} = -2\,\frac{(1-z)^{1/2} z^{(m-1)/2}}{m} + \frac{m-1}{m} J_{-1/2,\,(m-3)/2}$$

oder, wenn wir zu dem gegebenen Integral zurückkehren,

$$H_m = -\frac{1}{m} x^{m-1}\sqrt{1-x^2} + \frac{m-1}{m} H_{m-2}.$$

Mit Hilfe dieser Formel, in der der Index m um 2 erniedrigt wurde, können wir die Berechnung von H_m entweder auf

$$H_1 = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C$$

für ungerades m oder auf

$$H_0 = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

für gerades m zurückführen.

Es sei nun $m < -1$, also $m = -\mu$, $\mu > 1$. In diesem Fall wenden wir die Formel (II) an und erhalten

$$J_{-1/2,\,(m-1)/2} = 2\,\frac{(1-z)^{1/2} z^{(m+1)/2}}{m+1} + \frac{m+2}{m+1} J_{-1/2,\,(m+1)/2}$$

oder

$$H_{-\mu} = -\frac{x^{-(\mu-1)}\sqrt{1-x^2}}{\mu-1} + \frac{\mu-2}{\mu-1} H_{-(\mu-2)}.$$

Diese Beziehung macht es möglich, den Wert von μ um 2 zu erniedrigen und so die Berechnung von $H_{-\mu}$ entweder auf

$$H_{-1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}} = \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C$$

---

[1]) Analog können wir auch die Integrale

$$\int \frac{x^m}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{x^m}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$$

untersuchen.

für ungerades μ oder auf

$$H_{-2} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C$$

für gerades μ zurückführen.

2. Wenden wir auf das Integral[1])

$$J_{n+1} = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \frac{1}{2}\int (a^2+z)^{-(n+1)} z^{-1/2}\, dz$$
$$= \frac{1}{2} J_{-(n+1),\,-1/2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

die Formel (I) an, so folgt

$$J_{-(n+1),\,-1/2} = \frac{(a^2+z)^{-n} z^{1/2}}{na^2} + \frac{2n-1}{2n}\frac{1}{a^2} J_{-n,\,-1/2},$$

und wir erhalten, wenn wir zu J_n zurückkehren, die schon aus Nr. 271 (vgl. dort Formel (6)) bekannte Rekursionsformel

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}\frac{1}{a^2} J_n.$$

281. Integration von Ausdrücken der Form $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$. Die Eulerschen[2]) Substitutionen. Wir betrachten nun die sehr wichtige Klasse der Integrale

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx \tag{4}$$

und setzen voraus, daß die Nullstellen des Radikanden voneinander verschieden sind, so daß die Quadratwurzel nicht durch einen rationalen Ausdruck ersetzt werden kann. Wir untersuchen drei Substitutionen, die sogenannten *Eulerschen Substitutionen*, mit deren Hilfe der Integrand stets rational gemacht werden kann.

Die *erste Substitution* ist im Fall $a > 0$ anwendbar. Wir setzen dann

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}\,x.\text{[3])}$$

Erheben wir diese Gleichung ins Quadrat, so erhalten wir, da sich die Glieder ax^2 fortheben, $bx + c = t^2 - 2\sqrt{a}\,tx$, so daß

$$x = \frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b}, \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b},$$

$$dx = 2\,\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{\left(2\sqrt{a}\,t+b\right)^2}\,dt$$

ist. Das Wesentliche dieser Transformation besteht darin, daß sich zur Bestimmung von x eine Gleichung ersten Grades ergibt, so daß sich x und gleichzeitig auch der Ausdruck $\sqrt{ax^2+bx+c}$ *rational* durch t ausdrücken lassen.

---

[1]) Analog kann auch das Integral $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}}$ untersucht werden.

[2]) Leonhard Euler, 1707—1783, Schweizer Mathematiker.

[3]) Wir könnten auch $\sqrt{ax^2+bx+c} = t + \sqrt{a}\,x$ setzen.

Setzen wir die erhaltenen Ausdrücke in (4) ein, so haben wir eine rationale Funktion von t zu integrieren. Um zur Veränderlichen x zurückzukehren, brauchen wir nur $t = \sqrt{ax^2+bx+c} + \sqrt{a}\,x$ zu setzen.

Die *zweite Substitution* ist im Fall $c > 0$ anwendbar. Hier setzen wir

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}.$$ [1]

Wenn wir diese Beziehung quadrieren, den Summanden c auf beiden Seiten subtrahieren und durch x dividieren, erhalten wir $ax + b = xt^2 + 2\sqrt{c}\,t$, also wieder eine Gleichung ersten Grades in x. Daraus folgt

$$x = \frac{2\sqrt{c}\,t - b}{a - t^2}, \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{c}\,t^2 - bt + a\sqrt{c}}{a - t^2},$$

$$\mathrm{d}x = 2\,\frac{\sqrt{c}\,t^2 - bt + \sqrt{c}\,a}{(a-t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Setzen wir dies in (4) ein, so ist der Integrand rational gemacht. Nach der Integration setzen wir im Resultat

$$t = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{c}}{x}.$$

Bemerkung 1. Die eben betrachteten Fälle ($a > 0$ und $c > 0$) lassen sich durch die Substitution $x = \frac{1}{z}$ aufeinander zurückführen. Daher kann man stets die Anwendung der zweiten Eulerschen Substitution umgehen.

Die *dritte Substitution* ist dann zweckmäßig, wenn der quadratische Ausdruck $ax^2 + bx + c$ die beiden (verschiedenen) reellen Nullstellen λ und μ hat. Dann läßt sich dieser Ausdruck bekanntlich folgendermaßen in Linearfaktoren zerlegen:

$$ax^2 + bx + c = a(x-\lambda)(x-\mu).$$

Wir setzen

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\lambda).$$

Wenn wir quadrieren und durch $x - \lambda$ dividieren, erhalten wir auch hier eine Gleichung ersten Grades in x,

$$a(x-\mu) = t^2(x-\lambda),$$

so daß

$$x = \frac{-a\mu + \lambda t^2}{t^2 - a}, \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{a(\lambda-\mu)\,t}{t^2-a}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2a(\mu-\lambda)\,t}{(t^2-a)^2}\,\mathrm{d}t$$

usw. ist.

Bemerkung 2. Unter den obigen Voraussetzungen läßt sich die Quadratwurzel $\sqrt{a(x-\lambda)(x-\mu)}$ auf die Gestalt

$$(x-\lambda)\sqrt{a\frac{x-\mu}{x-\lambda}}$$

[1] Oder $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt - \sqrt{c}$.

bringen (wir nehmen, um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben, $x > \lambda$ an), so daß in diesem Fall

$$R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) = R_1\left(x, \sqrt{a\frac{x-\mu}{x-\lambda}}\right)$$

ist und wir es im wesentlichen mit einem Integranden der in Nr. 278 untersuchten Art zu tun haben. Die dritte Eulersche Substitution, die wir auch in der Gestalt

$$t = \sqrt{a\frac{x-\mu}{x-\lambda}}$$

schreiben können, ist mit der schon in Nr. 278 verwendeten Substitution identisch.

Wir zeigen nun, daß die erste und die dritte Eulersche Substitution allein ausreichen, um den Integranden von (4) *in allen Fällen* rational zu machen. Hat nämlich $ax^2 + bx + c$ reelle Nullstellen, so ist, wie wir sahen, die dritte Substitution anwendbar. Existieren keine reellen Nullstellen, d. h., ist $b^2 - 4ac < 0$, so besitzt der Ausdruck

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}\left[(2ax + b)^2 + (4ac - b^2)\right]$$

für alle Werte von x das gleiche Vorzeichen wie a. Der Fall $a < 0$ interessiert uns nicht, da dann die Quadratwurzel keine reellen Werte hat. Im Fall $a > 0$ wenden wir die erste Substitution an.

Diese Überlegungen führen auf die folgende Behauptung: *Die Integrale vom Typ* (4) *lassen sich stets in geschlossener Form darstellen, wobei zu ihrer Darstellung außer den Funktionen, mit deren Hilfe die Integrale rationaler Funktionen ausgedrückt werden, nur noch Quadratwurzeln nötig sind.*

282. Geometrische Behandlung der Eulerschen Substitutionen. Die zunächst künstlich scheinenden Eulerschen Substitutionen ergeben sich auch aus einleuchtenden geometrischen Überlegungen.

Wir betrachten die Gleichung für eine *Kurve zweiten Grades*:

$$y = \pm\sqrt{ax^2 + bx + c} \quad \text{oder} \quad y^2 = ax^2 + bx + c.$$

Wählen wir auf dieser Kurve einen beliebigen Punkt (x_0, y_0), so daß

$$y_0^2 = ax_0^2 + bx_0 + c \tag{5}$$

ist, so schneidet die durch diesen Punkt gehende Sekante $y - y_0 = t(x - x_0)$ die Kurve nur noch in *einem* Punkt (x, y), dessen Koordinaten durch eine einfache Rechnung festgestellt werden können. Eliminieren wir y aus den Gleichungen der Kurve und der Sekante, so erhalten wir unter Berücksichtigung von (5)

$$[y_0 + t(x - x_0)]^2 = a(x^2 - x_0^2) + b(x - x_0) + y_0^2,$$

woraus sich

$$2y_0t(x - x_0) + t^2(x - x_0)^2 = a(x^2 - x_0^2) + b(x - x_0)$$

oder, nach Dividieren beider Seiten durch $x - x_0$,

$$2y_0t + t^2(x - x_0) = a(x + x_0) + b$$

ergibt. Somit läßt sich die Abszisse x (und damit auch die Ordinate y) des zweiten Schnittpunkts durch *rationale Funktionen* des Steigungskoeffizienten t ausdrücken. Wenn t entsprechend variiert wird, beschreibt der Punkt (x, y) die ganze Kurve.

Wir zeigen, daß die Beziehung

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} - y_0 = t(x - x_0)$$

diejenige Substitution definiert, die den Integranden von (4) rational macht. Wir setzen voraus, der Ausdruck $ax^2 + bx + c$ habe die beiden reellen Nullstellen λ und μ; dies bedeutet, daß die oben gegebene Kurve die x-Achse in den Punkten $(\lambda, 0)$ und $(\mu, 0)$ schneidet. Nehmen wir z. B. den ersten von ihnen als Punkt (x_0, y_0), so gelangen wir zu der dritten Eulerschen Substitution

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \lambda).$$

Ist $c > 0$, so schneidet die Kurve die y-Achse in den Punkten $(0, \pm\sqrt{c})$, und nehmen wir einen von ihnen als Punkt (x_0, y_0), so erhalten wir die zweite Eulersche Substitution

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} \pm \sqrt{c} = tx.$$

Schließlich ergibt sich die erste Eulersche Substitution, wenn wir für (x_0, y_0) den *unendlich fernen Punkt* der Kurve wählen. Wir setzen $a > 0$ voraus (dann ist die Kurve eine Hyperbel), betrachten die Asymptoten $y = \pm\sqrt{a}\,x$ der Kurve und bringen die Kurve mit den zu den Asymptoten parallelen Geraden $y = t \pm \sqrt{a}\,x$ zum Schnitt (diese Geraden gehen durch den unendlich fernen Punkt). Jede solche Gerade schneidet die Kurve in einem zweiten Punkt (x, y), dessen Koordinaten rationale Funktionen von t sind. Daraus folgt die Substitution

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm \sqrt{a}\,x.$$

283. Beispiele. Die beiden Grundintegrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,$$

die zu dem betrachteten Typ gehören, sind uns schon bekannt (vgl. Nr. 269, Beispiel 9 und 12, ferner Nr. 268). Ausgehend von ihnen können wir auch die folgenden Integrale lösen.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}}$. Bei der Berechnung dieses Integrals sind zwei Fälle zu unterscheiden: $\alpha > 0$ und $\alpha < 0$. Ist $\alpha > 0$, so läßt sich das Integral sofort auf das erste der obigen Grundintegrale transformieren:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{\beta}{\alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \ln\left|x + \sqrt{x^2 + \frac{\beta}{\alpha}}\right| + C \quad \text{mit} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \pm a^2.$$

Wir können noch das Argument des Logarithmus mit α multiplizieren; dies führt auf den zusätzlichen Summanden $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \ln \alpha$, der sich nur auf die Konstante C auswirkt. Schließlich erhalten wir

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \ln\left|\alpha x + \sqrt{\alpha(\alpha x^2 + \beta)}\right| + C' \qquad (\alpha > 0). \tag{6}$$

Ist $\alpha < 0$, also $\alpha = -|\alpha|$, so geben wir der Quadratwurzel die Form $\sqrt{\beta - |\alpha|\, x^2}$. Damit die Quadratwurzel überhaupt reelle Werte hat, ist es notwendig, $\beta > 0$ vorauszusetzen. Das Integral läßt sich $\left(\text{mit } \frac{\beta}{|\alpha|} = a^2\right)$ auf das zweite der oben angegebenen Grundintegrale transformieren, und es ist

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} = \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}} \arcsin x \sqrt{\frac{|\alpha|}{\beta}} + C \qquad (\alpha < 0). \tag{7}$$

Auf die Integrale (6) und (7) können wir mit Hilfe elementarer Verfahren auch viele andere Integrale zurückführen, wie z. B. das folgende.

2. $\int \sqrt{\alpha x^2 + \beta}\, \mathrm{d}x$ läßt sich partiell integrieren:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\alpha x^2 + \beta}\, \mathrm{d}x &= x\sqrt{\alpha x^2 + \beta} - \int x\, \mathrm{d}\sqrt{\alpha x^2 + \beta} \\
&= x\sqrt{\alpha x^2 + \beta} - \int \frac{\alpha x^2}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}}\, \mathrm{d}x \\
&= x\sqrt{\alpha x^2 + \beta} - \int \frac{(\alpha x^2 + \beta) - \beta}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}}\, \mathrm{d}x \\
&= x\sqrt{\alpha x^2 + \beta} - \int \sqrt{\alpha x^2 + \beta}\, \mathrm{d}x + \beta \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}}.
\end{aligned}$$

Auf der rechten Seite tritt noch einmal das gesuchte Integral auf; bringen wir es auf die linke Seite und dividieren wir durch 2, so finden wir

$$\int \sqrt{\alpha x^2 + \beta}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} x\sqrt{\alpha x^2 + \beta} + \frac{\beta}{2} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}}. \tag{8}$$

Um das endgültige Resultat festzustellen, brauchen wir für das Integral auf der rechten Seite von (8) entweder (6) oder (7) einzusetzen, je nachdem, ob $\alpha > 0$ oder $\alpha < 0$ ist.

3. (a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\alpha x^2 + \beta}}$, (b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{\alpha x^2 + \beta}}$, (c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(\alpha x^2 + \beta)^{3/2}}$.

Diese Integrale werden mit Hilfe der einfachen Substitution $x = \frac{1}{t}$, $\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ auf schon bekannte Integrale zurückgeführt. Wir nehmen $x > 0$, also $t > 0$ an. Dann ist:

(a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\alpha + \beta t^2}}$ (zur weiteren Berechnung wird unter Berücksichtigung des Vorzeichens von β entweder (6) oder (7) verwendet);

(b) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} = -\int \frac{t\, \mathrm{d}t}{\sqrt{\alpha + \beta t^2}} = -\frac{1}{\beta}\sqrt{\alpha + \beta t^2} + C = -\frac{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}}{\beta x} + C;$$

(c) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{(\alpha x^2 + \beta)^{3/2}} = -\int \frac{t\, \mathrm{d}t}{(\alpha + \beta t^2)^{3/2}} = \frac{1}{\beta}\frac{1}{\sqrt{\alpha + \beta t^2}} + C = \frac{1}{\beta}\frac{x}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} + C.$$

4. Identische Umformungen des Integranden führen die folgenden Integrale auf schon berechnete zurück:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2\, \mathrm{d}x}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}}$, (b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}}{x}\, \mathrm{d}x$, (c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(\alpha x^2 + \beta)^{3/2}}\, \mathrm{d}x$.

Es gilt

$$\text{(a)} \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}} = \frac{1}{\alpha}\int \frac{(\alpha x^2+\beta)-\beta}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}\,dx = \frac{1}{\alpha}\int \sqrt{\alpha x^2+\beta}\,dx - \frac{\beta}{\alpha}\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}$$

oder wegen (8)

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}} = \frac{1}{2\alpha}\,x\sqrt{\alpha x^2+\beta} - \frac{\beta}{2\alpha}\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}$$

usw. (vgl. Beispiel 1). Ferner ist

$$\text{(b)} \int \frac{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}{x}\,dx = \int \frac{\alpha x^2+\beta}{x\sqrt{\alpha x^2+\beta}}\,dx = \alpha\int \frac{x\,dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}} + \beta\int \frac{dx}{x\sqrt{\alpha x^2+\beta}};$$

das erste der Integrale läßt sich sofort berechnen, das zweite wurde in Beispiel 3 gelöst. Schließlich ist

$$\text{(c)} \int \frac{x^2}{(\alpha x^2+\beta)^{3/2}}\,dx = \frac{1}{\alpha}\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}} - \frac{\beta}{\alpha}\int \frac{dx}{(\alpha x^2+\beta)^{3/2}}$$

(vgl. die Beispiele 1 und 3).

5. Steht unter der Quadratwurzel der Ausdruck $ax^2 + bx + c$, so ist es oft zweckmäßig, von diesem ein vollständiges Quadrat abzutrennen:

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}\left[(2ax+b)^2 + 4ac - b^2\right].$$

Wir setzen $2ax + b = t$ und erhalten auf diese Weise aus (6) für $a > 0$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}\right| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|ax+\frac{b}{2}+\sqrt{a(ax^2+bx+c)}\right| + C' \tag{6*}$$

bzw. aus (7) für $a < 0$ und $b^2 - 4ac > 0$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = -\frac{1}{\sqrt{|a|}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} + C. \tag{7*}$$

6. Wir wenden uns nun den *Eulerschen Substitutionen* zu. In Beispiel 12 aus Nr. 269 wendeten wir schon die erste Substitution aus Nr. 281 zur Berechnung von

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

an. Obwohl das zweite Grundintegral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

schon aus elementaren Überlegungen bekannt ist, wollen wir es zur Übung mit Hilfe aller Eulerschen Substitutionen berechnen.

(a) Benutzen wir zunächst die dritte Substitution

$$\sqrt{a^2 - x^2} = t(a - x),$$

so ist

$$x = a\frac{t^2-1}{t^2+1}, \qquad dx = \frac{4at\,dt}{(t^2+1)^2}, \qquad \sqrt{a^2-x^2} = \frac{2at}{t^2+1}$$

und

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2\arctan t + C = 2\arctan\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C.$$

Auf Grund der Identität

$$2\arctan\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = \arcsin\frac{x}{a} + \frac{\pi}{2} \qquad (-a < x < a)$$

unterscheidet sich dieses Ergebnis nur in der *Form* von dem schon bekannten.

Wir müssen also darauf hinweisen, daß es möglich ist, für ein Integral Ergebnisse in verschiedener Gestalt zu erhalten; das hängt davon ab, welcher Lösungsweg eingeschlagen wurde.[1])

(b) Wenden wir auf dasselbe Integral die zweite Substitution $\sqrt{a^2-x^2} = xt - a$ an, so erhalten wir analog

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -2\int \frac{dt}{t^2+1} = -2\arctan t + C = -2\arctan\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C.$$

Hier treffen wir auf eine andere interessante Tatsache.[2]) Dieses Resultat gilt nur in dem Intervall $(-a, 0)$ oder $(0, a)$, da im Punkt $x = 0$ der Ausdruck

$$-2\arctan\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$$

seinen Sinn verliert. Die Grenzwerte dieses Ausdrucks für $x \to -0$ und $x \to +0$ sind voneinander *verschieden*, und zwar gleich π bzw. $-\pi$; wählen wir für diese beiden Intervalle zwei verschiedene Werte der Konstanten C derart, daß der zweite um 2π größer ist als der erste, so erhalten wir eine Funktion, die im ganzen Intervall $(-a, a)$ stetig ist, wenn ihr Wert im Punkt $x = 0$ der gemeinsame linksseitige und rechtsseitige Grenzwert ist.

Auch diesmal erhielten wir das frühere Resultat, nur in anderer *Gestalt*, denn es gilt die Identität

$$-2\arctan\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \begin{cases} \arcsin\dfrac{x}{a} - \pi & \text{für } 0 < x < a, \\ \arcsin\dfrac{x}{a} + \pi & \text{für } -a < x < 0. \end{cases}$$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

(a) Zunächst wenden wir die erste Substitution $\sqrt{x^2-x+1} = t - x$ an:

$$x = \frac{t^2-1}{2t-1}, \qquad dx = 2\,\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}\,dt,$$

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} = \int \frac{2t^2-2t+2}{t(2t-1)^2}\,dt = \int \left(\frac{2}{t} - \frac{3}{2t-1} + \frac{3}{(2t-1)^2}\right) dt$$

$$= -\frac{3}{2}\,\frac{1}{2t-1} + 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|2t-1| + C.$$

---

[1]) Diese verschiedenen Ausdrücke für ein Integral müssen sich selbstverständlich stets ineinander überführen lassen, wobei additive Konstanten in der Integrationskonstanten enthalten sein können. — *Anm. d. Red.*

[2]) Vgl. Beispiel 3 aus Nr. 277.

Setzen wir hier $t = x + \sqrt{x^2 - x + 1}$, so erhalten wir schließlich

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} = -\frac{3}{2} \frac{1}{2x + 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}$$

$$- \frac{3}{2} \ln \left| 2x + 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1 \right|$$

$$+ 2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 - x + 1} \right| + C.$$

(b) Wir benutzen nun die zweite Substitution $\sqrt{x^2 - x + 1} = tx - 1$:

$$x = \frac{2t - 1}{t^2 - 1}, \qquad dx = -2 \frac{t^2 - t + 1}{(t^2 - 1)^2} dt,$$

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 - 1}, \qquad x + \sqrt{x^2 - x + 1} = \frac{t}{t - 1},$$

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} = \int \frac{-2t^2 + 2t - 2}{t(t - 1)(t + 1)^2} dt$$

$$= \int \left(\frac{2}{t} - \frac{1}{2} \frac{1}{t - 1} - \frac{3}{2} \frac{1}{t + 1} - \frac{3}{(t + 1)^2} \right) dt$$

$$= \frac{3}{t + 1} + 2 \ln |t| - \frac{1}{2} \ln |t - 1| - \frac{3}{2} \ln |t + 1| + C'.$$

Hier brauchen wir nur noch $t = \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1}{x}$ zu setzen; nach einigen Vereinfachungen ergibt sich

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} = \frac{3x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x + 1} + 2 \ln \left| \sqrt{x^2 - x + 1} + 1 \right|$$

$$- \frac{1}{2} \ln \left| \sqrt{x^2 - x - 1} - x + 1 \right|$$

$$- \frac{3}{2} \ln \left| \sqrt{x^2 - x + 1} + x + 1 \right| + C'.$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich von dem in (a) erhaltenen nur der Gestalt nach und stimmt mit ihm für $C' = C - \frac{3}{2}$ überein.

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$.

(a) Da der Radikand reelle Nullstellen hat, können wir die dritte Substitution $\sqrt{a^2 - x^2} = t(a - x)$ anwenden; hier ist $-a < x < a$ und $t > 0$. Dann gilt

$$x = a \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad dx = \frac{4at \, dt}{(t^2 + 1)^2}, \quad \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{2at}{t^2 + 1}, \quad x^2 + a^2 = \frac{2a^2(t^4 + 1)}{(t^2 + 1)^2}$$

und

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{2a^2} \int \frac{2t^2 + 2}{t^4 + 1} dt$$

$$= \frac{1}{2a^2} \int \left(\frac{1}{t^2 + t\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} \right) dt$$

$$= \frac{1}{a^2 \sqrt{2}} \left[\arctan \left(t\sqrt{2} + 1 \right) + \arctan \left(t\sqrt{2} - 1 \right) \right] + C,$$

wobei für das endgültige Ergebnis nur noch $t = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ zu setzen ist. Benutzen wir die Summenformel für den Arkustangens und die offenbar gültige Beziehung

$$\arctan\frac{1}{\alpha} = -\arctan\alpha \pm \frac{\pi}{2} \qquad (\text{für } \alpha \lessgtr 0),$$

so können wir das Ergebnis in der einfacheren Form

$$\frac{1}{a^2\sqrt{2}}\arctan\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{a^2-x^2}} + C_1 \quad \text{mit} \quad C_1 = C + \frac{\pi}{2a^2\sqrt{2}}$$

schreiben.

(b) Wenden wir auf dasselbe Integral die zweite Substitution $\sqrt{a^2-x^2} = tx - a$ an, so ergibt sich

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a^2\sqrt{2}}\left[\arctan\left(\sqrt{2}+1\right)t + \arctan\left(\sqrt{2}-1\right)t\right] + C'$$

mit $t = \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$. Dieses Resultat gilt einzeln im Intervall $(-a, 0)$ und im Intervall $(0, a)$; ändern wir den Wert der Konstanten C' beim Durchgang von x durch 0, so läßt sich das Resultat für das ganze Intervall $(-a, a)$ angeben. Mit Hilfe der Summenformel für den Arkustangens sehen wir, daß dieses Ergebnis mit dem in (a) erhaltenen übereinstimmt.

9. $\int\frac{dx}{(x^2+\lambda)\sqrt{x^2+\mu}}$. Wir wählen die erste Substitution $\sqrt{x^2+\mu} = t - x$. Dann gilt

$$\int\frac{dx}{(x^2+\lambda)\sqrt{x^2+\mu}} = 2\int\frac{2t\,dt}{t^4+2(2\lambda-\mu)\,t^2+\mu^2} = 2\int\frac{du}{u^2+2(2\lambda-\mu)\,u+\mu^2}.$$

Damit haben wir das Integral auf ein elementares Integral zurückgeführt. Im Ergebnis braucht nur noch

$$u = t^2 = \left(x+\sqrt{x^2+\mu}\right)^2$$

gesetzt zu werden.

284. Andere Verfahren zur Berechnung eines Integrals der Gestalt (4). Die Eulerschen Substitutionen sind prinzipiell in allen Fällen zur Berechnung von Integralen der Gestalt (4) in geschlossener Form anwendbar, jedoch werden dadurch einfache Integranden oft recht kompliziert. Auf Grund der Wichtigkeit dieser Integrale wollen wir noch andere Verfahren zu ihrer Berechnung angeben. Zur Abkürzung setzen wir

$$Y = ax^2 + bx + c \quad \text{und} \quad y = \sqrt{Y}.$$

Eine rationale Funktion $R(x, y)$ kann als Quotient zweier Polynome in x und y dargestellt werden. Ersetzen wir y^2 überall durch Y, so erhält $R(x, y)$ die Gestalt

$$R(x, y) = \frac{P_1(x) + P_2(x)\,y}{P_3(x) + P_4(x)\,y},$$

wobei die $P_i(x)$ Polynome sind. Multiplizieren wir den Zähler und den Nenner dieses Bruches mit $P_3(x) - P_4(x)\,y$ und ersetzen wir wieder y^2 durch Y, so finden wir

$$R(x, y) = R_1(x) + R_2(x)\,y.$$

Der erste Summand läßt sich geschlossen integrieren; also brauchen wir uns nur mit dem zweiten Summanden zu beschäftigen. Erweitern wir ihn mit y, so erhalten wir schließlich den Ausdruck

$$R^*(x)\,\frac{1}{y} = R^*(x)\,\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

mit dessen Integration wir uns nun beschäftigen wollen.

Zuvor trennen wir von der rationalen Funktion $R^*(x)$ den ganzen Teil $P(x)$ ab und zerlegen den restlichen Teil in Partialbrüche (Nr. 274). In diesem Fall führt die Integration des obigen Ausdrucks auf die Berechnung der folgenden drei Arten von Integralen:

I. $$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx.$$

II. $$\int \frac{A}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx.$$

III. $$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx.$$

Dabei sind alle Koeffizienten reell und die Nullstellen von x^2+px+q komplex. Wir betrachten nun jeden Fall einzeln.

I. Wir setzen (für $m = 0, 1, 2, \ldots$)

$$V_m = \int \frac{x^m}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{Y}}.$$

Für solche Integrale läßt sich leicht eine Rekursionsformel angeben. Zu diesem Zweck setzen wir $m \geqq 1$ voraus, nehmen die Ableitung

$$\left(x^{m-1}\sqrt{Y}\right)' = (m-1)\,x^{m-2}\sqrt{Y} + \frac{x^{m-1}Y'}{2\sqrt{Y}}$$
$$= \frac{2(m-1)\,x^{m-2}\,(ax^2+bx+c) + x^{m-1}(2ax+b)}{2\sqrt{Y}}$$
$$= ma\,\frac{x^m}{\sqrt{Y}} + \left(m-\frac{1}{2}\right) b\,\frac{x^{m-1}}{\sqrt{Y}} + (m-1)\,c\,\frac{x^{m-2}}{\sqrt{Y}}$$

und integrieren diese Identität:

$$x^{m-1}\sqrt{Y} = maV_m + \left(m-\frac{1}{2}\right) bV_{m-1} + (m-1)\,cV_{m-2}.$$

Für $m = 1$ folgt hieraus

$$V_1 = \frac{1}{a}\sqrt{Y} - \frac{b}{2a}\,V_0,$$

für $m = 2$ (unter Benutzung des Ausdrucks für V_1)

$$V_2 = \frac{1}{4a^2}\,(2ax-3b)\sqrt{Y} + \frac{1}{8a^2}\,(3b^2-4ac)\,V_0.$$

Fahren wir so fort, so gelangen wir zu der allgemeinen Formel

$$V_m = p_{m-1}(x)\sqrt{Y} + \lambda_m V_0,$$

wobei $p_{m-1}(x)$ ein Polynom $(m - 1)$-ten Grades und $\lambda_m = \text{const}$ ist. *Somit lassen sich alle Integrale V_m auf V_0 zurückführen.*

Hat das Polynom $P(x)$ im Integral I den Grad n, so ist dieses Integral eine Linearkombination der Integrale $V_0, V_1, \ldots, V_n$, und es kann demzufolge auf Grund der vorhergehenden Formel auf die Gestalt

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{Y}}\,\mathrm{d}x = Q(x)\sqrt{Y} + \lambda \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{Y}} \tag{9}$$

gebracht werden, wobei $Q(x)$ ein Polynom $(n - 1)$-ten Grades und $\lambda = \text{const}$ ist.

Das Polynom $Q(x)$ und die Konstante λ lassen sich im allgemeinen mit Hilfe der Methode der unbestimmten Koeffizienten bestimmen. Differenzieren wir (9) und multiplizieren wir die so erhaltene Gleichung mit $\sqrt{Y}$, so finden wir

$$P(x) = Q'(x)\,(ax^2 + bx + c) + \frac{1}{2}\,Q(x)\,(2ax + b) + \lambda.$$

Setzen wir hier statt $Q(x)$ ein Polynom $(n - 1)$-ten Grades mit unbestimmten Koeffizienten ein, so steht auf jeder Seite ein Polynom n-ten Grades. Durch Koeffizientenvergleich gelangen wir zu einem System von $n + 1$ linearen Gleichungen, aus denen sich die n Koeffizienten von $Q(x)$ und die Konstante λ errechnen lassen.[1])

Bemerkung. Die Formel (9) realisiert die Abtrennung des algebraischen Teils des Integrals

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{Y}}\,\mathrm{d}x.$$

Eine ähnliche Abtrennung ließe sich auch bei dem allgemeineren Integral

$$\int \frac{R(x)}{\sqrt{Y}}\,\mathrm{d}x$$

vornehmen, wobei R eine beliebige rationale Funktion ist. Darauf wollen wir aber nicht eingehen.

II. Das Integral

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x - \alpha)^k \sqrt{Y}}$$

kann vermöge der Substitution $x - \alpha = 1/t$ auf den soeben betrachteten Typ zurückgeführt werden. Es gilt nämlich

$$\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2}, \quad ax^2 + bx + c = \frac{(a\alpha^2 + b\alpha + c)\,t^2 + (2a\alpha + b)\,t + a}{t^2},$$

---

[1]) Aus dem Bewiesenen wird klar, daß dieses System für beliebige rechte Seiten verträglich ist; in diesem Fall ist seine Determinante notwendig von 0 verschieden, und das System ist stets bestimmt. Damit läßt sich auch die *Eindeutigkeit* der Darstellung (9) nachweisen. (Vgl. S. 41 und 44.)

so daß (wir nehmen der Einfachheit wegen speziell $x > \alpha$, $t > 0$ an)

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k \sqrt{ax^2+bx+c}} = -\int \frac{t^{k-1}\,dt}{\sqrt{(a\alpha^2+b\alpha+c)\,t^2+(2a\alpha+b)\,t+a}}$$

ist. Wenn $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, d. h. α eine Nullstelle von Y ist, vereinfacht sich dieses Integral noch weiter; wir erhalten dann ein Integral des in Nr. 278 betrachteten Typs.

III. (a) Wir wenden uns dem letzten Integral zu und betrachten zunächst den Fall, daß sich der Ausdruck $ax^2 + bx + c$ nur um den Faktor a von $x^2 + px + q$ unterscheidet. Dann hat das gesuchte Integral die Gestalt

$$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^{(2m+1)/2}}\,dx.$$

Es läßt sich leicht als Summe zweier Integrale schreiben:

$$\frac{M}{2a}\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{(2m+1)/2}}\,dx + \left(N - \frac{Mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{(2m+1)/2}};$$

das erste kann sofort mit Hilfe der Substitution $t = ax^2 + bx + c$ bestimmt werden. Zur Berechnung von

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{(2m+1)/2}} = \int \frac{dx}{Y^{(2m+1)/2}}$$

ist die sogenannte *Abelsche*[1]) *Substitution*

$$t = \left(\sqrt{Y}\right)' = \frac{Y'}{2\sqrt{Y}} = \frac{ax+\dfrac{b}{2}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

zweckmäßig. Quadrieren wir sie und multiplizieren wir mit $4Y$, so erhalten wir die Gleichung

$$4t^2Y = (Y')^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2.$$

Damit finden wir

$$4(a-t^2)\,Y = 4ac - b^2,$$

woraus

$$Y^m = \left(\frac{4ac-b^2}{4}\right)^m \frac{1}{(a-t^2)^m} \tag{10}$$

folgt. Differenzieren wir nun

$$t\sqrt{Y} = ax + \frac{b}{2},$$

so ergibt sich

$$\sqrt{Y}\,dt + t^2\,dx = a\,dx,$$

[1]) Niels Hendrik Abel, 1802—1829, norwegischer Mathematiker.

also

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{Y}} = \frac{\mathrm{d}t}{a - t^2}. \tag{11}$$

Die Beziehungen (10) und (11) liefern

$$\frac{\mathrm{d}x}{Y^{(2m+1)/2}} = \left(\frac{4}{4ac - b^2}\right)^m (a - t^2)^{m-1}\,\mathrm{d}t,$$

und schließlich ist

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{Y^{(2m+1)/2}} = \left(\frac{4}{4ac - b^2}\right)^m \int (a - t^2)^{m-1}\,\mathrm{d}t. \tag{12}$$

Damit ist das Problem auf die Integration eines Polynoms zurückgeführt.

Insbesondere gilt z. B. für $m = 1$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2 + bx + c)^{3/2}} = \frac{2}{4ac - b^2} \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

(b) Im allgemeinen Fall setzen wir

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + p'x + q'),$$

damit in den Bezeichnungen Symmetrie herrscht; jetzt können wir annehmen, daß der Ausdruck in runden Klammern nicht identisch mit $x^2 + px + q$ ist. Wir wollen die Veränderliche x so transformieren, daß in $x^2 + px + q$ und $x^2 + p'x + q'$ die linearen Glieder gleichzeitig verschwinden.

Zunächst sei $p \neq p'$. Dann können wir unser Ziel mit Hilfe der gebrochenen linearen Substitution

$$x = \frac{\mu t + \nu}{t + 1} \tag{13}$$

erreichen, wenn wir die Koeffizienten μ und ν geeignet wählen. Es gilt

$$x^2 + px + q = \frac{(\mu^2 + p\mu + q)\,t^2 + [2\mu\nu + p(\mu + \nu) + 2q]\,t + (\nu^2 + p\nu + q)}{(t + 1)^2}$$

und analog eine zweite Formel für $x^2 + p'x + q'$. Die gesuchten Koeffizienten können aus den Bedingungen

$$2\mu\nu + p(\mu + \nu) + 2q = 0, \qquad 2\mu\nu + p'(\mu + \nu) + 2q' = 0$$

oder

$$\mu + \nu = -2\,\frac{q - q'}{p - p'}, \qquad \mu\nu = \frac{p'q - pq'}{p - p'}$$

bestimmt werden. Damit sind μ und ν die Nullstellen von

$$(p - p')\,z^2 + 2(q - q')\,z + (p'q - pq').$$

Damit diese Nullstellen reell und voneinander verschieden[1]) sind, ist

$$(q - q')^2 - (p - p')\,(p'q - pq') > 0 \tag{14}$$

[1]) Für $\mu = \nu$ verliert die Substitution ihren Sinn, da dann $x = \nu$ ist.

(notwendig und) hinreichend. Um uns davon zu überzeugen, daß die Ungleichung (14) erfüllt ist, schreiben wir sie in der gleichwertigen Form

$$[2(q + q') - pp']^2 > (4q - p^2)(4q' - p'^2). \tag{14*}$$

Nun gilt $4q - p^2 > 0$ (denn $x^2 + px + q$ hat komplexe Nullstellen); daher ist (14*) sicher erfüllt, wenn gleichzeitig $4q' - p'^2 < 0$ ist.

Nun braucht nur noch der Fall $4q' - p'^2 > 0$ untersucht zu werden. Hieraus folgt $q' > 0$, und da auch $q > 0$ und somit $4\sqrt{qq'} > pp'$ ist, gilt folglich[1])

$$\begin{aligned}[2(q + q') - pp']^2 &\geqq \left[4\sqrt{qq'} - pp'\right]^2 \\ &= (4q - p^2)(4q' - p'^2) + 4\left(p\sqrt{q'} - p'\sqrt{q}\right)^2 \\ &\geqq (4q - p^2)(4q' - p'^2).\end{aligned}$$

Hier steht zweimal das Zeichen $\geqq$; das Gleichheitszeichen kann aber nicht in beiden Fällen gleichzeitig angenommen werden: Für $q \neq q'$ tritt nicht das erste und für $q = q'$ nicht das zweite Gleichheitszeichen ein. Damit ist Ungleichung (14*) und infolgedessen auch (14) bewiesen.

Mit Hilfe der Substitution (13) transformieren wir nun das gesuchte Integral auf die Gestalt

$$\int \frac{P(t)\,\mathrm{d}t}{(t^2 + \lambda)^m \sqrt{\alpha t^2 + \beta}},$$

wobei $P(t)$ ein Polynom $(2m - 1)$-ten Grades und $\lambda > 0$ ist. Zerlegen wir (für $m > 1$) den echten Bruch

$$\frac{P(t)}{(t^2 + \lambda)^m}$$

in Partialbrüche, so gelangen wir zu einer Summe von Integralen der Form

$$\int \frac{At + B}{(t^2 + \lambda)^k \sqrt{\alpha t^2 + \beta}}\,\mathrm{d}t \qquad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{*}$$

In dem bis jetzt ausgeschlossenen Fall $p = p'$ erreichen wir das Verschwinden der Glieder ersten Grades noch einfacher, und zwar durch die Substitution $x = t - \frac{p}{2}$; damit gelangen wir *unmittelbar* zu einem Integral der eben erwähnten Art.

Das Integral (*) läßt sich in eine Summe zerlegen,

$$\frac{A}{\alpha} \int \frac{\alpha t\,\mathrm{d}t}{(t^2 + \lambda)^k \sqrt{\alpha t^2 + \beta}} + B \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2 + \lambda)^k \sqrt{\alpha t^2 + \beta}}.$$

Das erste Integral kann sofort mit Hilfe der Substitution $u = \sqrt{\alpha t^2 + \beta}$ berechnet werden; auf das zweite wenden wir die Abelsche Substitution

$$u = \frac{\alpha t}{\sqrt{\alpha t^2 + \beta}}$$

---

[1]) Es ist nämlich $\frac{q + q'}{2} \geqq \sqrt{qq'}$.

an. Auf Grund von (11) ist

$$\frac{dt}{\sqrt{\alpha t^2 + \beta}} = \frac{du}{\alpha - u^2};$$

außerdem gilt, wie sich leicht ausrechnen läßt,

$$t^2 + \lambda = \frac{(\beta - \alpha\lambda)\, u^2 + \lambda\alpha^2}{\alpha(\alpha - u^2)}.$$

Daher ist

$$\int \frac{dt}{(t^2 + \lambda)^m \sqrt{\alpha t^2 + \beta}} = \alpha^m \int \frac{(\alpha - u^2)^{m-1}}{[(\beta - \alpha\lambda)\, u^2 + \lambda\alpha^2]^m}\, du.$$

Wir haben also das betrachtete Integral in ein Integral einer rationalen Funktion übergeführt.

Bemerkung. Abgesehen davon, daß wir in diesem Abschnitt eine Reihe neuer Verfahren zur Berechnung von Integralen der Gestalt (4) aufzeigten, liefert die Gesamtheit dieser Überlegungen einen vom Vorhergehenden unabhängigen Beweis der am Schluß von Nr. 281 formulierten Behauptung.

285. Beispiele.

1. $\int \frac{x^3 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}\, dx$. Wir setzen

$$\int \frac{x^3 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}\, dx = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \delta \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}},$$

woraus

$$x^3 - x + 1 = (2\alpha x + \beta)(x^2 + 2x + 2) + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)(x + 1) + \delta$$

folgt. Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} &3\alpha = 1,\\ &5\alpha + 2\beta = 0,\\ &4\alpha + 3\beta + \gamma = -1,\\ &2\beta + \gamma + \delta = 1 \end{aligned}$$

hat die Lösung $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = -\frac{5}{6}$, $\gamma = \frac{1}{6}$, $\delta = \frac{5}{2}$. Damit erhalten wir schließlich, wenn wir noch das Beispiel 5 aus Nr. 283 heranziehen,

$$\int \frac{x^3 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}\, dx = \frac{1}{6}(2x^2 - 5x + 1)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \frac{5}{2}\ln\left(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right) + C.$$

2. $\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2 - 2x - 1}}$. Die Substitution $x - 1 = \frac{1}{t}$ (es sei $x > 1$, $t > 0$) führt dieses Integral in

$$-\int \frac{t^2\, dt}{\sqrt{1 - 2t^2}}$$

über, das sich leicht mit elementaren Mitteln auswerten läßt (vgl. Nr. 283, Beispiel 4).

Lösung. $\frac{1}{4}t\sqrt{1-2t^2} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\arcsin t\sqrt{2} + C$

$$= \frac{1}{4(x-1)^2}\sqrt{x^2-2x-1} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{x-1} + C.$$

3. $\int \frac{dx}{(2x^2-x+2)^{7/2}}$. Die Abelsche Substitution

$$t = \frac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x+2}}$$

transformiert dieses Integral in

$$\frac{64}{3375}\int (2-t^2)^2\,dt;$$

dabei kann man entweder die allgemeinen Überlegungen aus Nr. 284, III (a), für den Spezialfall wiederholen oder die fertige Formel (12) benutzen.

Lösung. $\frac{64}{3375}\left\{2\frac{4x-1}{(2x^2-x+2)^{1/2}} - \frac{1}{6}\frac{(4x-1)^3}{(2x^2-x+2)^{3/2}} + \frac{1}{160}\frac{(4x-1)^5}{(2x^2-x+2)^{5/2}}\right\} + C.$

4. $\int \frac{(x+3)\,dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$. Die gebrochene lineare Sustitution

$$x = \frac{\mu t + \nu}{t+1}$$

ergibt

$$x^2 \pm x + 1 = \frac{(\mu^2 \pm \mu + 1)\,t^2 + [2\mu\nu \pm (\mu + \nu) + 2]\,t + (\nu^2 \pm \nu + 1)}{(t+1)^2}.$$

Die Forderungen

$$2\mu\nu \pm (\mu + \nu) + 2 = 0$$

oder $\mu + \nu = 0$, $\mu\nu = -1$ sind z. B. für $\mu = 1$, $\nu = -1$ erfüllt. Es ist also

$$x = \frac{t-1}{t+1},\quad dx = \frac{2dt}{(t+1)^2},\quad x+3 = \frac{4t+2}{t+1},\quad x^2-x+1 = \frac{t^2+3}{(t+1)^2}$$

und

$$\sqrt{x^2+x+1} = \frac{\sqrt{3t^2+1}}{t+1},$$

wenn wir $t + 1 > 0$, also $x < 1$ annehmen. Somit ist

$$\int \frac{(x+3)\,dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{(8t+4)\,dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}}.$$

Das erhaltene Integral läßt sich in zwei Summanden zerlegen:

$$8\int \frac{t\,dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}} + 4\int \frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}}.$$

Der erste Summand kann mit Hilfe von $u = \sqrt{3t^2+1}$ berechnet werden und ist gleich

$$\sqrt{8}\arctan\sqrt{\frac{3t^2+1}{8}} + C'.$$

Auf den zweiten wenden wir die Abelsche Substitution

$$u = \frac{3t}{\sqrt{3t^2+1}}$$

an, die das Integral in

$$12\int \frac{\mathrm{d}u}{27-8u^2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left|\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}\,u}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\,u}\right| + C''$$

überführt. Hier brauchen wir nur noch u durch x auszudrücken.

5. $\displaystyle\int \frac{(x^2+1)\sqrt{x^2+x+1}-x^3+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}\,\mathrm{d}x.$

Hinweis. Man schreibe den Integranden in der Form

$$\frac{2x^4+x^3+2x^2+1}{x+1} - \frac{2x^5+2x^4+3x^3-1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= (2x^3-x^2+3x-3) + \frac{4}{x+1} - \frac{2x^4+3x^2+3x+3}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{4}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}};$$

auf den dritten Summanden wende man die Methode I aus Nr. 284, auf den letzten Summanden die Substitution $x+1=\dfrac{1}{t}$ an.

§ 4. Integration von trigonometrischen Funktionen und Exponentialfunktionen

286. Integration von Ausdrücken der Form $R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$. Differentiale dieser Gestalt lassen sich stets mit Hilfe der Substitution $t=\tan\dfrac{x}{2}$ $(-\pi < x < \pi)$ rational machen, denn es ist

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\arctan t, \qquad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

und somit

$$R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x = R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

Integrale vom Typ

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

lassen sich also stets in geschlossener Form angeben. Zu ihrer Darstellung sind außer denjenigen Funktionen, die man bei der Integration rationaler Differentiale antrifft, nur noch trigonometrische Funktionen notwendig.

Die erwähnte Substitution, die man für Integrale von Typ (1) *immer verwenden kann*, führt jedoch manchmal zu komplizierten Ausdrücken. Später werden wir Fälle erwähnen, in denen man mit einfacheren Substitutionen zum Ziel kommt. Vorher wollen wir noch die folgenden Hilfsmittel aus der Algebra bereitstellen.

Bleibt der Wert einer ganzen oder gebrochenen rationalen Funktion $R(u, v)$ unverändert, sobald bei einem Argument, z. B. bei u, das Vorzeichen gewechselt wird, d. h., ist

$$R(-u, v) = R(u, v),$$

so kann $R(u, v)$ in der Gestalt

$$R(u, v) = R_1(u^2, v)$$

geschrieben werden, wobei nur gerade Potenzen von u auftreten.

Wechselt dagegen $R(u, v)$ bei Änderung des Vorzeichens von u ebenfalls sein Vorzeichen, d. h., ist

$$R(-u, v) = -R(u, v),$$

so kann man der Funktion $R(u, v)$ die Gestalt

$$R(u, v) = R_2(u^2, v)\, u$$

geben. Dies folgt sofort aus der vorhergehenden Bemerkung, wenn man sie auf die Funktion $\dfrac{R(u, v)}{u}$ anwendet.

I. Ändert $R(u, v)$ das Vorzeichen, wenn u durch $-u$ ersetzt wird, so ist

$$\begin{aligned} R(\sin x, \cos x)\,dx &= R_0(\sin^2 x, \cos x)\sin x\,dx \\ &= -R_0(1 - \cos^2 x, \cos x)\,d\cos x, \end{aligned}$$

und die Funktion wird mit Hilfe von $t = \cos x$ rational.

II. Analog ist, wenn $R(u, v)$ mit v das Vorzeichen wechselt,

$$\begin{aligned} R(\sin x, \cos x)\,dx &= R_0^*(\sin x, \cos^2 x)\cos x\,dx \\ &= R_0^*(\sin x, 1 - \sin^2 x)\,d\sin x, \end{aligned}$$

so daß hier die Substitution $t = \sin x$ zweckmäßig ist.

III. Schließlich setzen wir voraus, daß die gleichzeitige Änderung der Vorzeichen von u und v keinen Einfluß auf $R(u, v)$ hat, d. h., es sei

$$R(-u, -v) = R(u, v).$$

In diesem Fall ersetzen wir u durch $\dfrac{u}{v}\, v$ und erhalten

$$R(u, v) = R\left(\frac{u}{v}\, v, v\right) = R^*\left(\frac{u}{v}, v\right).$$

Auf Grund der Eigenschaft von R gilt

$$R^*\left(\frac{u}{v}, -v\right) = R^*\left(\frac{u}{v}, v\right),$$

wenn u und v durch $-u$ bzw. $-v$ ersetzt werden (der Ausdruck u/v ändert sich dabei nicht); dann ist, wie wir wissen,

$$R^*\left(\frac{u}{v}, v\right) = R_1^*\left(\frac{u}{v}, v^2\right).$$

Daher gilt

$$R(\sin x, \cos x) = R_1^*(\tan x, \cos^2 x) = R_1^*\left(\tan x, \frac{1}{1+\tan^2 x}\right),$$

also einfach

$$R(\sin x, \cos x) = \tilde{R}(\tan x).$$

Hier erreicht man das Ziel mit Hilfe der Substitution $t = \tan x$ $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$, denn es gilt

$$R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x = \tilde{R}(t)\,\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

Bemerkung. Jeder rationale Ausdruck $R(u, v)$ kann stets als Summe dreier Ausdrücke der eben betrachteten Spezialfälle dargestellt werden. Zum Beispiel können wir

$$R(u, v) = \frac{R(u, v) - R(-u, v)}{2} + \frac{R(-u, v) - R(-u, -v)}{2} + \frac{R(-u, -v) + R(u, v)}{2}$$

schreiben. Der erste Summand ändert sein Vorzeichen mit u, der zweite mit v, der dritte bleibt unverändert, wenn u und v gleichzeitig das Vorzeichen wechseln. Zerlegen wir den Ausdruck $R(\sin x, \cos x)$ in die entsprechenden Summanden, so können wir auf den ersten die Substitution $t = \cos x$, auf den zweiten die Substitution $t = \sin x$ und schließlich auf den dritten die Substitution $t = \tan x$ anwenden. Also genügen zur Berechnung eines Integrals vom Typ (1) diese drei Substitutionen.

287. Integration von Ausdrücken der Form $\sin^\nu x \cos^\mu x$. Die Zahlen ν und μ seien rational, und die Veränderliche x variiere im Intervall $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Dann ergibt die Substitution $z = \sin^2 x$, $\mathrm{d}z = 2\sin x \cos x\,\mathrm{d}x$ die Beziehung

$$\sin^\nu x \cos^\mu x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin^{\nu-1} x(1-\sin^2 x)^{(\mu-1)/2}\, 2\sin x\cos x\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}(1-z)^{(\mu-1)/2} z^{(\nu-1)/2}\,\mathrm{d}z,$$

so daß wir auf ein binomisches Integral (Nr. 279) geführt werden:

$$\int \sin^\nu x \cos^\mu x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1-z)^{(\mu-1)/2} z^{(\nu-1)/2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2} J_{(\mu-1)/2,\,(\nu-1)/2}. \qquad (2)$$

Wir sehen hier, daß das uns interessierende Integral in geschlossener Form angegeben werden kann, wenn a) $\frac{\mu-1}{2}$ $\left(\text{oder } \frac{\nu-1}{2}\right)$ eine ganze Zahl, also μ (oder ν) eine *ungerade* Zahl ist; b) $\frac{\mu+\nu}{2}$ eine ganze Zahl, also $\mu+\nu$ eine *gerade* Zahl ist.

Hierher gehört insbesondere der Fall, daß *beide* Exponenten μ und ν ganz sind. Übrigens ist dann der Ausdruck $\sin^\nu x \cos^\mu x$ rational in $\sin x$ und $\cos x$, d. h., er gehört zu der Klasse der schon in Nr. 286 betrachteten Ausdrücke.

Ist der Exponent ν (oder μ) *ungerade*, so läßt sich der Integrand sofort mit Hilfe von $t = \cos x$ (oder $t = \sin x$) rational machen. Sind beide Exponenten ν und μ *gerade* (oder beide *ungerade*), so kommen wir mit Hilfe der Substitution $t = \tan x$ oder $t = \cot x$ zum Ziel.

Sind beide Exponenten ν und μ *positive ganze* Zahlen, so ist ein anderes Verfahren, das auf der Anwendung der Formeln

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

beruht, zu bevorzugen. Ist nämlich $\nu = 2n$, $\mu = 2m$, so schreiben wir für $\nu \geqq \mu$

$$\sin^{2n} x \cos^{2m} x = (\sin x \cos x)^{2m} \sin^{2(n-m)} x = \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^{2m} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^{n-m}$$

und für $\nu < \mu$

$$\sin^{2n} x \cos^{2m} x = (\sin x \cos x)^{2n} \cos^{2(m-n)} x = \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^{2n} \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^{m-n}$$

Entwickelt man den zweiten Faktor in eine Reihe, so ergibt sich eine Summe von Gliedern der Gestalt $C \sin^{\nu'} 2x \cos^{\mu'} 2x$ mit $\nu' + \mu' \leqq n + m = \frac{\nu+\mu}{2}$. Diejenigen Glieder, bei denen wenigstens einer der Exponenten ν', μ' ungerade ist, lassen sich leicht nach den obigen Methoden integrieren. Die übrigen Glieder werden einer ähnlichen Umformung unterworfen, indem man zu $\sin 4x$ und $\cos 4x$ usw. übergeht. Da bei jeder Umformung die Summe der Exponenten mindestens um die Hälfte verkleinert wird, ist der Prozeß schnell beendet.

Wir kehren nun zu der oben angegebenen Beziehung (2) zurück. Jetzt können wir die Rekursionsformeln für binomische Integrale (Nr. 280) mit $a = 1$, $b = -1$, $p = \frac{\mu-1}{2}$, $q = \frac{\nu-1}{2}$ benutzen, um Rekursionsformeln für die oben betrachteten Integrale aufzustellen. Damit erhalten wir die folgenden Beziehungen (die sich jedoch auch auf andere Art direkt ergeben):

$$\text{(I)} \qquad \int \sin^\nu x \cos^\mu x \, dx = -\frac{\sin^{\nu+1} x \cos^{\mu+1} x}{\mu+1} + \frac{\nu+\mu+2}{\mu+1} \int \sin^\nu x \cos^{\mu+2} x \, dx \qquad (\mu \neq -1),$$

$$\text{(II)} \qquad \int \sin^\nu x \cos^\mu x \, dx = \frac{\sin^{\nu+1} x \cos^{\mu+1} x}{\nu+1} + \frac{\nu+\mu+2}{\nu+1} \int \sin^{\nu+2} x \cos^\mu x \, dx \qquad (\nu \neq -1),$$

$$\text{(III)}\qquad \int \sin^\nu x \cos^\mu x\,dx = \frac{\sin^{\nu+1} x \cos^{\mu-1} x}{\nu+\mu} + \frac{\mu-1}{\nu+\mu}\int \sin^\nu x \cos^{\mu-2} x\,dx \qquad (\nu+\mu \neq 0),$$

$$\text{(IV)}\qquad \int \sin^\nu x \cos^\mu x\,dx = -\frac{\sin^{\nu-1} x \cos^{\mu+1} x}{\nu+\mu} + \frac{\nu-1}{\nu+\mu}\int \sin^{\nu-2} x \cos^{\mu} x\,dx \qquad (\nu+\mu \neq 0).$$

Diese Formeln erlauben im allgemeinen, den Exponenten ν oder μ (unter den erwähnten Einschränkungen) um 2 zu verringern. Sind beide Exponenten ν und μ ganz, so kann das Problem durch aufeinanderfolgende Anwendung der Reduktionsformeln auf eines der folgenden neun Grundintegrale zurückgeführt werden, die den verschiedenen Kombinationen der Werte ν und μ (-1, 0 oder 1) entsprechen:

1. $\int dx = x,$
2. $\int \cos x\,dx = \sin x,$
3. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|,$
4. $\int \sin x\,dx = -\cos x,$
5. $\int \sin x \cos x\,dx = \frac{\sin^2 x}{2},$
6. $\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x|,$
7. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|,$
8. $\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x|,$
9. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln|\tan x|.$

288. Beispiele.

1. $\int \sin^2 x \cos^3 x\,dx$. Der Integrand ändert das Vorzeichen, wenn $\cos x$ durch $-\cos x$ ersetzt wird. Substitution $t = \sin x$:

$$\int \sin^2 x \cos^3 x\,dx = \int t^2(1-t^2)\,dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

2. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}\,dx$. Der Integrand wechselt das Vorzeichen, wenn $\sin x$ durch $-\sin x$ ersetzt wird. Substitution $t = \cos x$:

$$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}\,dx = -\int \frac{t^4-2t^2+1}{t^4}\,dt = -t - \frac{2}{t} + \frac{1}{3t^3} + C$$
$$= -\cos x - \frac{2}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + C.$$

3. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$. Der Integrand ändert sich nicht, wenn gleichzeitig $\sin x$ durch $-\sin x$ und $\cos x$ durch $-\cos x$ ersetzt wird. Substitution $t = \tan x$:

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4}\,dt = t - \frac{2}{t} - \frac{1}{3t^3} + C$$
$$= \tan x - 2\cot x - \frac{1}{3}\cot^3 x + C.$$

4. $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$. Hier ist die gleiche Substitution anwendbar, einfacher ist es jedoch, die Formeln für das doppelte Argument zu benutzen:

$$\sin^2 x \cos^4 x = \frac{1}{8} \sin^2 2x(\cos 2x + 1) = \frac{1}{8} \sin^2 2x \cos 2x + \frac{1}{16}(1 - \cos 4x).$$

Damit ist

$$\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \frac{1}{48} \sin^3 2x + \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + C.$$

5. $\int \frac{dx}{\sin x \sin 2x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}$. Anwendbar ist die Substitution $t = \sin x$, aber einfacher erreichen wir das Ziel, wenn wir die Formel (II) benutzen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} &= -\frac{1}{2 \sin x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos x} \\ &= -\frac{1}{2 \sin x} + \frac{1}{2} \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| + C. \end{aligned}$$

6. $\int \frac{dx}{\cos^5 x}$. Statt der Substitution $t = \sin x$ verwenden wir zweimal die Formel (I); es ist

$$\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{\sin x}{4 \cos^4 x} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{\cos^3 x}$$

und andererseits

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos x} = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| + C,$$

also

$$\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{\sin x}{4 \cos^4 x} + \frac{3 \sin x}{8 \cos^2 x} + \frac{3}{8} \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| + C.$$

7. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx$. Statt der Substitution $t = \cos x$ benutzen wir die Formeln (II) und (III) und erhalten

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx = -\frac{\cos^5 x}{2 \sin^2 x} - \frac{3}{2} \int \frac{\cos^4 x}{\sin x} dx,$$

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin x} dx = \frac{1}{3} \cos^3 x + \int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx = \frac{1}{3} \cos^3 x + \cos x + \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$$

oder (nach vereinfachenden Umformungen)

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} - \cos x - \frac{3}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.$$

8. $\int \frac{dx}{\sin x \cos 2x} = \int \frac{dx}{\sin x(2 \cos^2 x - 1)}$. Substitution $t = \cos x$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x\,(2 \cos^2 x - 1)} &= \int \frac{dt}{(1 - t^2)\,(1 - 2t^2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1 + t\sqrt{2}}{1 - t\sqrt{2}} \right| + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - t}{1 + t} + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{2} \cos x}{1 - \sqrt{2} \cos x} \right| + \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

9. $\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$. Da sich der Integrand nicht ändert, wenn die Vorzeichen von $\sin x$ und $\cos x$ wechseln, ist die Substitution $t = \tan x$ anwendbar:

$$\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x}\,dx = \int \frac{t^2\,dt}{(1+t)(1+t^2)^2}$$
$$= \int \left[\frac{1}{4}\frac{1}{t+1} - \frac{1}{4}\frac{t-1}{t^2+1} + \frac{1}{2}\frac{t-1}{(t^2+1)^2}\right] dt$$
$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}}\right| - \frac{1}{4}\frac{1+t}{1+t^2} + C$$
$$= \frac{1}{4}\ln|\sin x + \cos x| - \frac{1}{4}\cos x(\sin x + \cos x) + C.$$

10. $\int \frac{dx}{A\cos^2 x + 2B\sin x\cos x + C\sin^2 x}$ für $AC - B^2 > 0$. Wir setzen $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ voraus und bringen das Integral mit Hilfe der Substitution $t = \tan x$ auf die Gestalt

$$\int \frac{dt}{A + 2Bt + Ct^2}.$$

Lösung. $\frac{1}{\sqrt{AC - B^2}} \arctan \frac{C\tan x + B}{\sqrt{AC - B^2}} + C'.$

11. $\int \frac{dx}{a + b\tan x} = \int \frac{dt}{(a+bt)(1+t^2)}$ für $t = \tan x$ $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$. Zur Bestimmung der Koeffizienten A, B, C in der Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{(a+bt)(1+t^2)} = \frac{A}{a+bt} + \frac{Bt + C}{1+t^2}$$

ergeben sich die Gleichungen

$$A + bB = 0, \qquad aB + bC = 0, \qquad A + aC = 1,$$

aus denen

$$A = \frac{b^2}{a^2+b^2}, \qquad B = -\frac{b}{a^2+b^2}, \qquad C = \frac{a}{a^2+b^2}$$

folgt.

Lösung. $\frac{a}{a^2+b^2}\arctan t + \frac{b}{a^2+b^2}\ln\left|\frac{a+bt}{\sqrt{1+t^2}}\right| + C'$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\left[ax + b\ln|a\cos x + b\sin x|\right] + C'.$$

12. Auf das Integral aus Beispiel 11 lassen sich die beiden Integrale

$$T_1 = \int \frac{\sin x\,dx}{a\cos x + b\sin x}, \qquad T_2 = \int \frac{\cos x\,dx}{a\cos x + b\sin x}$$

zurückführen. Sie können leicht berechnet werden, indem man die mit ihnen gebildeten Beziehungen

$$bT_1 + aT_2 = \int dx = x + C_1,$$
$$-aT_1 + bT_2 = \int \frac{-a\sin x + b\cos x}{a\cos x + b\sin x}\,dx = \int \frac{d(a\cos x + b\sin x)}{a\cos x + b\sin x}$$
$$= \ln|a\cos x + b\sin x| + C_2$$

benutzt, aus denen sich

$$T_1 = \frac{1}{a^2 + b^2} [bx - a \ln |a \cos x + b \sin x|] + C,$$

$$T_2 = \frac{1}{a^2 + b^2} [ax + b \ln |a \cos x + b \sin x|] + C'$$

ergibt.

13. $\frac{1}{2} \int \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2} dx$ $(0 < r < 1, -\pi < x < \pi)$. Wir wenden hier die universelle Transformation $t = \tan \frac{\pi}{2}$ an und erhalten

$$\frac{1}{2} \int \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2} dx = (1 - r^2) \int \frac{dt}{(1 - r)^2 + (1 + r)^2 t^2}$$

$$= \arctan \left(\frac{1 + r}{1 - r} t\right) + C = \arctan \left(\frac{1 + r}{1 - r} \tan \frac{x}{2}\right) + C.$$

Auf dieses Integral läßt sich auch das folgende zurückführen:

$$\int \frac{1 - r \cos x}{1 - 2r \cos x + r^2} dx = \int \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2}\right] dx$$

$$= \frac{1}{2} x + \arctan \left(\frac{1 + r}{1 - r} \tan \frac{x}{2}\right) + C.$$

14. $\int \frac{dx}{a + b \cos x}$ unter der Voraussetzung $|a| \lessgtr |b|$ $(-\pi < x < \pi)$. Zunächst sei $|a| > |b|$ und (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) $a > 0$. Die Substitution $t = \tan \frac{x}{2}$ ergibt wie in Beispiel 13

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{a - b}{a + b}} \tan \frac{x}{2}\right) + C.$$

Diesen Ausdruck können wir auf die Gestalt

$$\pm \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arccos \frac{a \cos x + b}{a + b \cos x} + C'$$

bringen, wobei das obere Vorzeichen für $0 \leqq x < \pi$ und das untere für $-\pi < x \leqq 0$ gilt und der Wert der Konstanten C' beim Durchgang von x durch 0 um $\frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ zunimmt.

Nun sei $|a| < |b|$ und $b > 0$. Mit der gleichen Substitution erhalten wir

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x} = \int \frac{2dt}{(b + a) - (b - a) t^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{b + a} + \sqrt{b - a}\, t}{\sqrt{b + a} - \sqrt{b - a}\, t} \right| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{b + a} + \sqrt{b - a} \tan \frac{x}{2}}{\sqrt{b + a} - \sqrt{b - a} \tan \frac{x}{2}} \right| + C,$$

also

$$\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \left| \frac{b + a\cos x + \sqrt{b^2-a^2}\sin x}{a + b\cos x} \right| + C.$$

Das Integral $\int \frac{dx}{a + b\sin x}$ läßt sich durch die Substitution $x = \frac{\pi}{2} \pm t$ in das vorhergehende überführen.

15. Auf das Integral in Beispiel 14 kann auch das Integral

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x + c\sin x}$$

zurückgeführt werden. Führen wir einen Winkel α unter der Bedingung

$$\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}, \qquad \sin\alpha = \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

ein, so läßt sich das Integral in der Gestalt

$$\int \frac{dx}{a + \sqrt{b^2+c^2}\cos(x-\alpha)}$$

schreiben. Substitution: $t = x - \alpha$. Hier interessiert nur der Fall $|a| \lessgtr \sqrt{b^2+c^2}$.

289. Überblick über die anderen Fälle. In Nr. 271, Beispiel 4, sahen wir schon, wie sich Ausdrücke der Form

$$P(x)\,e^{ax}\,dx, \qquad P(x)\sin bx\,dx, \qquad P(x)\cos bx\,dx$$

integrieren lassen, wenn $P(x)$ ein Polynom ist. Interessant ist, daß die Ausdrücke

$$\frac{e^x}{x^n}\,dx, \quad \frac{\sin x}{x^n}\,dx, \quad \frac{\cos x}{x^n}\,dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

nicht mehr geschlossen integriert werden können.

Mit Hilfe der partiellen Integration können wir für die Integrale dieser Ausdrücke Rekursionsformeln angeben und sie auf die drei Grundformen zurückführen:

I. $$\int \frac{e^x}{x}\,dx = \int \frac{dy}{\ln y} = \operatorname{li} y \quad \text{(Integrallogarithmus)[1]},$$

II. $$\int \frac{\sin x}{x}\,dx = \operatorname{si} x \quad \text{(Integralsinus)},$$

III. $$\int \frac{\cos x}{x}\,dx = \operatorname{ci} x \quad \text{(Integralkosinus)[2]}.$$

Wir kennen schon (vgl. Nr. 271, Beispiel 6) die Integrale

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}\,e^{ax} + C,$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2}\,e^{ax} + C;$$

---

[1]) Substitution $x = \ln y$.

[2]) Übrigens muß in allen drei Fällen noch die willkürliche Konstante festgelegt werden; dies wollen wir im folgenden tun.

von ihnen ausgehend, können wir die Integrale

$$\int x^n e^{ax} \sin bx \, dx, \quad \int x^n e^{ax} \cos bx \, dx \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

in geschlossener Form angeben. Durch partielle Integration erhalten wir nämlich

$$\int x^n e^{ax} \sin bx \, dx = x^n \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} - \frac{na}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \sin bx \, dx + \frac{nb}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \cos bx \, dx,$$

$$\int x^n e^{ax} \cos bx \, dx = x^n \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} - \frac{nb}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \sin bx \, dx - \frac{na}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \cos bx \, dx.$$

Diese Rekursionsformeln gestatten, die uns interessierenden Integrale auf den Fall $n = 0$ zurückzuführen.

Verstehen wir unter $P(\ldots)$ wie früher ein Polynom, so können wir abschließend behaupten, daß die Integrale

$$\int P(x, e^{a'x}, e^{a''x}, \ldots, \sin b'x, \sin b''x, \ldots, \cos b'x, \cos b''x, \ldots) \, dx,$$

wobei $a', a'', \ldots, b', b'', \ldots$ Konstante sind, in geschlossener Form angegeben werden können. Dies läßt sich offenbar auf die Integration des Ausdruckes

$$x^n e^{ax} \sin^{k'} b'x \sin^{k''} b''x \cdots \cos^{m'} b'x \cdots$$

zurückführen. Benutzt man die elementaren trigonometrischen Formeln

$$\sin^2 bx = \frac{1 - \cos 2bx}{2},$$

$$\sin b'x \sin b''x = \frac{1}{2} [\cos (b' - b'') x - \cos (b' + b'') x]$$

und ähnliche, so kann der Ausdruck in Summanden vom Typ $Ax^n e^{ax} \sin bx$ und $Bx^n e^{ax} \cos bx$ zerlegt werden, mit denen wir uns schon beschäftigt haben.

§ 5. Elliptische Integrale

290. Allgemeine Bemerkungen und Definitionen. Wir betrachten ein Integral der Gestalt

$$\int R(x, y) \, dx, \tag{1}$$

wobei y eine *algebraische Funktion* von x ist, d. h. (vgl. Nr. 205), y genügt einer algebraischen Gleichung

$$P(x, y) = 0 \tag{2}$$

(P ist ein Polynom in x und y). Integrale von dieser Form heißen *Abelsche Integrale.* Zu ihnen gehören auch die in § 3 untersuchten Integrale

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) dx, \qquad \int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx.$$

Die Funktionen

$$y = \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}, \qquad y = \sqrt{ax^2+bx+c}$$

genügen nämlich den algebraischen Gleichungen

$$(\gamma x+\delta)\, y^m + (\alpha x+\beta) = 0, \qquad y^2 - (ax^2+bx+c) = 0.$$

Vom geometrischen Standpunkt aus läßt sich dem Abelschen Integral (1) eine *algebraische Kurve* zuordnen, die durch (2) definiert wird. Zum Beispiel ist das Integral

$$R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx \tag{3}$$

mit der *Kurve zweiter Ordnung* $y^2 = ax^2 + bx + c$ verknüpft.

Besitzt (2) *die Parameterdarstellung*

$$x = r_1(t), \qquad y = r_2(t)$$

mit rationalen Funktionen $r_1(t)$ *und* $r_2(t)$ — in diesem Fall nennen wir die Kurve *unikursal*[1]) —, *so ist es möglich, den Integranden von* (1) *rational zu machen*: Durch die Substitution $x = r_1(t)$ kann er auf die Form

$$R\big(r_1(t), r_2(t)\big)\, r_1'(t)\, dt$$

gebracht werden. Zu dieser Klasse gehören auch die beiden oben angegebenen Fälle. Insbesondere ist die Möglichkeit, den Integranden aus (3) rational zu machen, mit der Tatsache verknüpft, daß *eine Kurve zweiter Ordnung unikursal ist* (Nr. 281, 282).

Offenbar sind die Veränderlichen x und t durch eine algebraische Gleichung miteinander verknüpft, so daß t eine *algebraische Funktion* von x ist. Erweitern wir die Klasse der elementaren Funktionen, indem wir zu ihr auch alle algebraischen Funktionen hinzufügen, *so läßt sich das Integral* (1), *falls die Kurve* (2) *unikursal ist, stets in geschlossener Form durch elementare Funktionen ausdrücken.*

Jedoch ist ein solcher Umstand in gewissem Sinne eine Einschränkung. Im allgemeinen ist (2) nicht unikursal; *dann ist* (1), *wie man zeigen kann, nicht immer*, d. h. *nicht für jede Funktion R, in geschlossener Form darstellbar* (obgleich dies für einzelne spezielle R nicht ausgeschlossen ist).

Damit sind wir schon bei der Betrachtung der wichtigen Klasse der Integrale

$$\left.\begin{aligned} &\int R\left(x, \sqrt{\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}\right) dx, \\ &\int R\left(x, \sqrt{\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon}\right) dx \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

angelangt, in denen Qudratwurzeln aus Polynomen dritten und vierten Grades enthalten sind und die an die Integrale (3) anschließen. *Integrale der Gestalt* (4) *lassen sich*

[1]) Wir könnten auch eine rein geometrische Charakterisierung einer unikursalen Kurve geben; damit werden wir uns jedoch nicht beschäftigen.

im allgemeinen nicht mehr in geschlossener Form durch elementare Funktionen ausdrükken (selbst bei Erweiterung dieses Begriffes nicht). Daher haben wir die Bekanntschaft mit ihnen auf diesen letzten Paragraphen verschoben, um die Darlegungen dieses Kapitels nicht zu unterbrechen, das sich in der Hauptsache mit den Integralen beschäftigte, die in geschlossener Form angegeben werden können.

Die Radikanden in (4) mögen reelle Koeffizienten haben. Außerdem wollen wir stets voraussetzen, daß ihre Nullstellen einfach sind, denn anderenfalls könnten wir einen Linearfaktor unter dem Wurzelzeichen hervorziehen; das Problem würde sich dann auf die Integration von schon früher betrachteten Typen reduzieren, und das Integral könnte in geschlossener Form angegeben werden. Beispielsweise können wir leicht nachprüfen, daß

$$\int \frac{1+x^4}{1-x^4} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} + C,$$

$$\int \frac{5x^3+1}{\sqrt{2x^3+1}} \, dx = x\sqrt{2x^3+1} + C$$

gilt.

Integrale vom Typ (4) heißen im allgemeinen *elliptisch*, da sie zuerst bei der Berechnung der Bogenlänge der Ellipse auftraten (vgl. Nr. 331, Beispiel 8). Übrigens bezieht sich diese Bezeichnung nur auf diejenigen von ihnen, die nicht geschlossen integriert werden können; die anderen heißen *pseudoelliptisch*.

Die Untersuchung und die Tabulierung (d. h. die Zusammenstellung von Tafeln der Werte) von Integralen der Gestalt (4) für verschiedene Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ist verständlicherweise schwierig. Daher ist es wünschenswert, alle diese Integrale auf einige wenige zurückzuführen, bei denen nach Möglichkeit weniger willkürliche Koeffizienten (Parameter) auftreten. Dies läßt sich mit Hilfe von elementaren Umformungen erreichen, die wir nun untersuchen wollen.

291. Hilfstransformationen.

1. Zunächst wollen wir darauf hinweisen, daß es genügt, den Fall zu betrachten, in dem unter der Quadratwurzel ein Polynom vierten Grades steht, denn darauf läßt sich auch leicht der Fall überführen, daß das Polynom von drittem Grad ist. Ein Polynom $ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit reellen Koeffizienten muß nämlich notwendig eine reelle Nullstelle besitzen (Nr. 81), etwa λ; folglich läßt es eine Zerlegung

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x-\lambda)(x^2 + px + q)$$

mit reellen Koeffizienten zu. Mit Hilfe der Substitution $x - \lambda = t^2$ (oder $x - \lambda = -t^2$) gelangen wir zu der gewünschten Umformung

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^3 + \cdots}\right) dx = \int R\left(t^2 + \lambda, t\sqrt{at^4 + \cdots}\right) 2t \, dt.$$

Wir wollen also nur Integrale untersuchen, in denen eine Quadratwurzel aus einem Polynom vierten Grades auftritt.

2. Nach einem bekannten Satz aus der Algebra kann ein Polynom vierten Grades mit reellen Koeffizienten als Produkt zweier Polynome zweiten Grades mit ebenfalls reellen Koeffizienten dargestellt werden:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x^2 + px + q)(x^2 + p'x + q'). \tag{5}$$

Nun wenden wir eine Substitution an, um in den beiden Polynomen zweiten Grades die linearen Glieder zu beseitigen. Mit einem ähnlichen Problem hatten wir es schon in Nr. 284, III (b), zu tun.

Ist $p = p'$, so erreichen wir unser Ziel mit Hilfe der Substitution $x = t - \frac{p}{2}$. Nun sei $p \neq p'$; in diesem Fall benutzen wir wie früher die gebrochene lineare Substitution $x = \frac{\mu t + \nu}{t + 1}$. Die Möglichkeit, für die Koeffizienten μ und ν reelle und außerdem verschiedene Werte zu erhalten, wird, wie wir sahen, durch die Ungleichung

$$(q - q')^2 - (p - p')(p'q - pq') > 0 \tag{6}$$

bedingt. Wir haben diese Ungleichung schon unter der Voraussetzung bewiesen, daß eines der betrachteten Polynome zweiten Grades *komplexe* Nullstellen hat, dies spielte in unseren Überlegungen eine wesentliche Rolle. Nun mögen beide Polynome auf der rechten Seite von (5) reelle Nullstellen haben, das erste Polynom etwa die Nullstellen α und β, das zweite die Nullstellen γ und δ. Setzen wir

$$p = -(\alpha + \beta), \quad q = \alpha\beta, \quad p' = -(\gamma + \delta), \quad q' = \gamma\delta,$$

so erhält (6) die Gestalt

$$(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)(\beta - \delta) > 0. \tag{6'}$$

Damit diese Ungleichung erfüllt ist, braucht man nur dafür zu sorgen, daß die Nullstellen der Polynome zweiten Grades einander nicht trennen (daß z. B. $\alpha > \beta > \gamma > \delta$ ist), was in unserer Macht liegt.[1])

Somit erhalten wir bei geeigneter Wahl von μ und ν mit Hilfe der obigen Substitution die Beziehung

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^4 + \cdots}\right) dx = \int R\left(\frac{\mu t + \nu}{t + 1}, \frac{\sqrt{(M + Nt^2)(M' + N't^2)}}{(t + 1)^2}\right) \frac{\mu - \nu}{(t + 1)^2}\, dt,$$

die wir (wenn wir den Fall ausschließen, daß einige der Koeffizienten M, N, M', N' gleich 0 sind) auf die Gestalt

$$\int \tilde{R}\left(t, \sqrt{A(1 + mt^2)(1 + m't^2)}\right) dt$$

mit von 0 verschiedenen A, m und m' bringen können.

3. Mit Hilfe von Überlegungen, die denen analog sind, die wir am Beginn von Nr. 284 angewendet haben, können wir dieses Integral bis auf ein additives Integral einer rationalen Funktion auf

$$\int \frac{R^*(t)}{\sqrt{A(1 + mt^2)(1 + m't^2)}}\, dt$$

[1]) Wir erwähnen beiläufig, daß die Ungleichung (6) in der Gestalt (6′) auch dann bewiesen werden kann, wenn die Nullstellen $\alpha, \beta, \ldots$ nicht reell sind. Hat nur das erste Polynom komplexe Nullstellen, d. h. die *konjugiert komplexen* Nullstellen α und β, und sind γ und δ reell, so sind die Faktoren $\alpha - \gamma$ und $\beta - \gamma$ *konjugiert komplex*, und ihr Produkt ist, wie wir wissen, eine reelle positive Zahl. Das gleiche trifft auch für die Faktoren $\alpha - \delta$ und $\beta - \delta$ zu. Sind sowohl die Nullstellen α, β als auch die Nullstellen γ, δ *paarweise konjugiert komplex*, so sind die Faktoren $\alpha - \gamma$ und $\beta - \delta$ und ebenfalls $\alpha - \delta$ und $\beta - \gamma$ konjugiert komplex, und ihre Produkte sind wieder reelle positive Zahlen.

zurückführen. Wir zerlegen jetzt die rationale Funktion $R^*(t)$ in die Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion:

$$R^*(t) = \frac{R^*(t) + R^*(-t)}{2} + \frac{R^*(t) - R^*(-t)}{2}.$$

Der erste Summand ändert sich nicht, wenn t durch $-t$ ersetzt wird; folglich stellt er eine rationale Funktion $R_1(t^2)$ von t^2 dar. Der zweite ändert sein Vorzeichen beim Ersetzen von t durch $-t$ und hat deshalb die Form $R_2(t^2)\,t$.[1]) Das betrachtete Integral läßt sich demnach als Summe von Integralen darstellen:

$$\int \frac{R_1(t^2)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}} + \int \frac{R_2(t^2)\,t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}}.$$

Das zweite Integral bringen wir mit Hilfe der Substitution $u = t^2$ sofort auf die elementare Form

$$\frac{1}{2}\int \frac{R_2(u)\,\mathrm{d}u}{\sqrt{A(1+mu)(1+m'u)}}$$

und integrieren es geschlossen. Daher sind die folgenden Untersuchungen nur dem Integral

$$\int \frac{R_1(t^2)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}} \tag{7}$$

gewidmet.

292. Reduktion auf die Normalform. Wir zeigen schließlich, daß jedes Integral vom Typ (7) in der Form

$$\int \frac{R(z^2)\,\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \tag{8}$$

dargestellt werden kann, wobei k ein positiver echter Bruch ist, $0 < k < 1$. Diese Form nennen wir die *Normalform.* Zur Abkürzung setzen wir

$$y = \sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir hier $A = \pm 1$ an; außerdem beschränken wir uns auf positive Werte von t. Wir untersuchen jetzt verschiedene mögliche Kombinationen der Werte A, m, m' und geben für jeden Fall die Substitution an, die das Integral (7) sofort in die Normalform überführt.

1. $A = +1$, $m = -h^2$, $m' = -h'^2$ $(h > h' > 0)$. Damit die Wurzel reelle Werte besitzt, muß entweder $t < \frac{1}{h}$ oder $t > \frac{1}{h'}$ sein. Wir setzen

$$ht = z \quad \text{mit} \quad 0 < z < 1 \quad \text{oder} \quad z > \frac{h}{h'}.$$

[1]) Vgl. die Bemerkungen in Nr. 286.

Dann ist

$$\frac{dt}{y} = \frac{dz}{h\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{h'^2}{h^2}z^2\right)}},$$

so daß hier $k = \frac{h'}{h}$ gewählt werden kann.

2. $A = +1$, $m = -h^2$, $m' = h'^2$ $(h, h' > 0)$. Damit die Quadratwurzel reelle Werte hat, beschränken wir uns auf $t < \frac{1}{h}$. Wir setzen

$$ht = \sqrt{1-z^2} \quad \text{mit} \quad 0 < z \leqq 1.$$

Dann ist

$$\frac{dt}{y} = -\frac{1}{\sqrt{h^2+h'^2}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{h'^2}{h^2+h'^2}z^2\right)}},$$

und wir können $k = \frac{h'}{\sqrt{h^2+h'^2}}$ wählen.

3. $A = +1$, $m = h^2$, $m' = h'^2$ $(h > h' > 0)$; t kann sich beliebig ändern. Wir setzen

$$ht = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \quad \text{mit} \quad 0 < z < 1.$$

In diesem Fall ist

$$\frac{dt}{y} = \frac{dz}{h\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{h^2-h'^2}{h^2}z^2\right)}}$$

und $k = \frac{\sqrt{h^2-h'^2}}{h}$.

4. $A = -1$, $m = -h^2$, $m' = h'^2$ $(h, h' > 0)$. Der Variabilitätsbereich von t wird durch die Ungleichung $t > \frac{1}{h}$ beschränkt. Wir wählen

$$ht = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \quad \text{mit} \quad 0 < z < 1,$$

so daß

$$\frac{dt}{y} = \frac{dz}{\sqrt{h^2+h'^2}\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{h^2}{h^2+h'^2}z^2\right)}}$$

und $k = \frac{h}{\sqrt{h^2+h'^2}}$ ist.

5. $A = -1$, $m = -h^2$, $m' = -h'^2$ $(h > h' > 0)$. Jetzt kann t nur zwischen $\frac{1}{h}$ und $\frac{1}{h'}$ variieren. Wir setzen

$$h't = \sqrt{1 - \frac{h^2 - h'^2}{h^2} z^2} \quad \text{mit} \quad 0 < z < 1,$$

und es ist

$$\frac{dt}{y} = -\frac{dz}{h\sqrt{(1-z^2)\left(1 - \frac{h^2-h'^2}{h^2} z^2\right)}}$$

sowie $k = \frac{\sqrt{h^2 - h'^2}}{h}$.

Damit sind alle *möglichen* Fälle erschöpft, denn im Fall $A = -1$ und $m, m' > 0$ kann die Quadratwurzel überhaupt keine reellen Werte besitzen. Über den Faktor $R_1(t^2)$ haben wir nichts ausgesagt, da er in allen Fällen offenbar in eine rationale Funktion von z^2 transformiert wird.

Wir weisen noch darauf hin, daß wir uns bei der Betrachtung des Integrals (8) auf die Werte $z < 1$ beschränken können; der Fall $z > \frac{1}{k}$ läßt sich hierauf mit Hilfe der Substitution $kz = \frac{1}{\zeta}$ mit $\zeta < 1$ zurückführen.

293. Elliptische Integrale erster, zweiter und dritter Gattung. Jetzt untersuchen wir die einfachsten Integrale der Gestalt (8), auf die wir alle anderen Integrale dieser Gestalt und folglich auch alle elliptischen Integrale reduzieren können.

Wir trennen von der rationalen Funktion $R(x)$, die im Integranden von (8) steht, den ganzen Teil $P(x)$ ab und zerlegen den echt gebrochenen Teil in Partialbrüche. Faßt man nicht (wie in Nr. 274) die konjugiert komplexen Nullstellen des Nenners zusammen, sondern betrachtet man sie einzeln, ähnlich wie die reellen Nullstellen, so läßt sich $R(x)$ als Summe von Potenzen x^n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ und von Brüchen der Gestalt $\frac{1}{(x-a)^m}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ darstellen, die mit Zahlenkoeffizienten versehen sind; dabei kann a auch komplex sein. Daher ist klar, daß das Integral (8) im allgemeinen eine Linearkombination der Integrale

$$I_n = \int \frac{z^{2n}\, dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

und

$$H_m = \int \frac{dz}{(z^2-a)^m \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist. Wir verweilen zunächst bei den Integralen I_n. Integrieren wir die leicht zu verifizierende Identität

$$\begin{aligned}&\left[z^{2n-3}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}\right]'\\&=(2n-3)\,z^{2n-4}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}+z^{2n-3}\,\frac{2k^2z^3-(k^2+1)\,z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\\&=\frac{(2n-1)\,k^2z^{2n}-(2n-2)\,(k^2+1)\,z^{2n-2}+(2n-3)\,z^{2n-4}}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},\end{aligned}$$

so erhalten wir die Rekursionsformel

$$\begin{aligned}&(2n-1)\,k^2I_n-(2n-2)\,(k^2+1)\,I_{n-1}+(2n-3)\,I_{n-2}\\&=z^{2n-3}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)},\end{aligned}\tag{9}$$

durch welche drei aufeinanderfolgende Integrale verknüpft sind. Setzen wir hier $n=2$, so wird I_2 durch I_0 und I_1 ausgedrückt; nehmen wir $n=3$ und ersetzen wir I_2 durch den I_0 und I_1 enthaltenden Ausdruck, so läßt sich auch I_3 durch I_0 und I_1 darstellen. So läßt sich, wie wir uns durch Fortsetzung des Verfahrens leicht überzeugen können, jedes der Integrale I_n $(n \geqq 2)$ durch I_0 und I_1 ausdrücken, und auf Grund von (9) sind sie durch die Beziehung

$$I_n=\alpha_nI_0+\beta_nI_1+q_{2n-3}(z)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$$

miteinander verknüpft, wobei α_n und β_n konstant sind und $q_{2n-3}(z)$ ein *ungerades* Polynom $(2n-3)$-ten Grades ist. Ist also $P_n(x)$ ein Polynom n-ten Gerades in x, so gilt

$$\int\frac{P_n(z^2)\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=\alpha I_0+\beta I_1+zQ_{n-2}(z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)};\tag{10}$$

hier sind α und β konstant, und $Q_{n-2}(x)$ ist ein gewisses Polynom $(n-2)$-ten Grades in x. Die Bestimmung dieser Konstanten und der Koeffizienten von Q kann (wenn P gegeben ist) mit Hilfe der *Methode der unbestimmten Koeffizienten* durchgeführt werden (vgl. Nr. 284, I).

Wir weisen noch darauf hin, daß mit Hilfe von (9) die Integrale I_n auch für *negative* Werte von n $(n=-1,-2,\ldots)$ durch I_0 und I_1 ausgedrückt werden können, so daß wir uns bei den Integralen H_m nur auf den Fall $a \neq 0$ zu beschränken brauchen.

Wir gehen nun zu den Integralen H_m über und stellen (für reelle a) die Rekursionsformel

$$\begin{aligned}&(2m-2)\left[-a+(k^2+1)\,a^2-k^2a^3\right]H_m\\&-(2m-3)\left[1-2a(k^2+1)+3k^2a^2\right]H_{m-1}\\&+(2m-4)\left[(k^2+1)-3k^2a\right]H_{m-2}-(2m-5)\,k^2H_{m-3}\\&=\frac{z}{(z^2-a)^{m-1}}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}\end{aligned}$$

auf, die auch für $m=0,-1,-2,\ldots$ gilt. Damit lassen sich alle H_m durch die drei Integrale

$$H_1=\int\frac{dz}{(z^2-a)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

$$H_0 = \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = I_0,$$

$$H_{-1} = \int \frac{(z^2-a)\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = I_1 - aI_0,$$

also schließlich durch I_0, I_1 und H_1 ausdrücken.

Diese Überlegungen gelten auch für komplexe Werte des Parameters a; dazu verweisen wir aber auf Kapitel XII, § 5.

Alle oben erhaltenen Resultate führen auf den folgenden Schluß: *Alle elliptischen Integrale lassen sich mit Hilfe elementarer Transformationen* (*bis auf einen Summanden, der geschlossen integriert werden kann*) *durch die drei folgenden Normalformen ausdrücken*[1]):

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad \int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

$$\int \frac{dz}{(1+hz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \qquad (0 < k < 1)$$

(das letzte Integral ergibt sich aus H_1 durch Einführung eines neuen Parameters $h = -\frac{1}{a}$; $a \neq 0$). Diese Integrale lassen sich, wie LIOUVILLE[2]) gezeigt hat, nicht mehr in geschlossener Form angeben. Ihre Bezeichnung *elliptische Integrale erster, zweiter* bzw. *dritter Gattung* stammt von LEGENDRE[3]). Die ersten beiden Integrale enthalten nur den Parameter k, das letzte enthält außer k noch den (eventuell auch komplexen) Parameter h.

LEGENDRE vereinfachte diese Integrale, indem er $z = \sin\varphi \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ setzte. Dann geht das erste Integral über in

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \tag{11}$$

das zweite in

$$\int \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{k^2}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - \frac{1}{k^2}\int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

d. h., es läßt sich auf das erste und auf ein neues Integral

$$\int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi \tag{12}$$

zurückführen. Das dritte Integral geht über in

$$\int \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \tag{13}$$

[1]) Obwohl es *prinzipiell* möglich ist, ein beliebiges elliptisches Integral auf eine der drei Normalformen zu bringen, können in der Praxis erhebliche Schwierigkeiten auftreten. In Spezialwerken über elliptische Integrale und verwandte Gebiete lassen sich andere, für die Praxis geeignete Verfahren finden.

[2]) JOSEPH LIOUVILLE, 1809—1882, französischer Mathematiker.

[3]) ADRIEN MARIE LEGENDRE, 1752—1833, französischer Mathematiker.

Die Integrale (11), (12) und (13) heißen auch *elliptische Integrale erster, zweiter* bzw. *dritter Gattung in Legendrescher Form.*

Von besonderer Wichtigkeit sind die ersten beiden Integrale, die häufig angewendet werden. Da die Integrationskonstanten so bestimmt werden können, daß diese Integrale für $\varphi = 0$ verschwinden, ergeben sich zwei vollständig bestimmte Funktionen von φ, die LEGENDRE mit $F(k, \varphi)$ bzw. $E(k, \varphi)$ bezeichnete. In diesen Ausdrücken tritt außer der unabhängigen Veränderlichen φ noch der sogenannte *Modul* k als Parameter auf.

LEGENDRE stellte umfangreiche Tabellen dieser Funktionen für verschiedene φ und k auf. Dort wird das Argument φ als Winkel in Grad angegeben; der Modul k (ein echter Bruch!) wird als Sinus eines Winkels θ angesehen.

Sowohl LEGENDRE als auch andere Mathematiker haben die Haupteigenschaften dieser Funktionen untersucht, zahlreiche Beziehungen aufgestellt usw. Ihnen verdanken wir, daß die Legendreschen Funktionen F und E in die Familie der Funktionen eingegangen sind, die wir in der Analysis und ihren Anwendungen antreffen, und daß sie mit den elementaren Funktionen gleichberechtigt sind.

Der Teil der Integralrechnung, auf den wir uns bis jetzt in der Hauptsache beschränken mußten, beschäftigte sich mit der „Integration in geschlossener Form". Es wäre aber falsch zu denken, daß damit die Probleme der Integralrechnung erschöpft sind: Die elliptischen Integrale F und E sind Beispiele für Funktionen, die sich fruchtbringend untersuchen und mit Erfolg anwenden lassen, obwohl sie nicht durch elementare Funktionen in geschlossener Form darstellbar sind.

Die Integrale F und E werden wir später noch vielfach benutzen.

IX. Das bestimmte Integral

§ 1. Definition und Bedingungen für die Existenz des bestimmten Integrals

294. Ein anderer Weg zur Bestimmung des Flächeninhalts. Wir kehren nun zur Bestimmung des Flächeninhalts P eines krummlinigen Trapezes $ABCD$ (Abb. 4) zurück, mit dem wir uns schon in Nr. 264 beschäftigten. Wir legen nun einen *anderen Lösungsweg* für dieses Problem dar.[1])

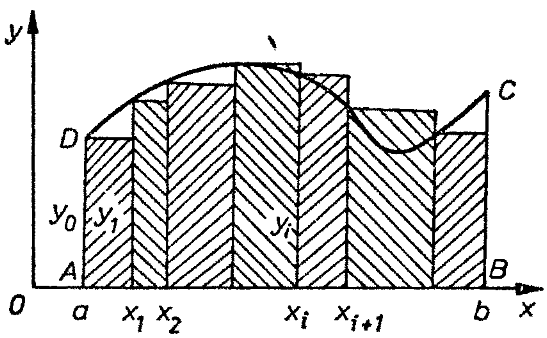

Abb. 4

Wir zerlegen die Grundlinie AB der Figur auf beliebige Art in Teile und ziehen die Ordinaten, die diesen Teilpunkten entsprechen; dadurch wird das krummlinige Trapez in Streifen zerlegt (Abb. 4). Wir ersetzen nun jeden Streifen durch ein Rechteck, dessen Grundlinie mit der des Streifens identisch ist, dessen Höhe jedoch mit einer der Ordinaten des Streifens, etwa mit der linken, übereinstimmt. Dadurch wird die krummlinige Figur durch eine Treppenfigur ersetzt, die aus einzelnen Rechtecken besteht. Die Abszissen der Teilpunkte seien

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b. \tag{1}$$

Die Grundlinie des i-ten Rechtecks ($i = 0, 1, \ldots, n-1$) ist offenbar gleich der Differenz $x_{i+1} - x_i$, die wir mit Δx_i bezeichnen. Seine Höhe ist nach Voraussetzung gleich $y_i = f(x_i)$. Also ist der Flächeninhalt des i-ten Rechtecks gleich

$$y_i \, \Delta x_i = f(x_i) \, \Delta x_i.$$

Addieren wir die Flächeninhalte aller Rechtecke, so erhalten wir einen *angenäherten* Wert für den Flächeninhalt des krummlinigen Trapezes:

$$P \approx \sum_{i=0}^{n-1} y_i \, \Delta x_i \quad \text{oder} \quad P \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \, \Delta x_i.$$

---

[1]) Dabei verallgemeinern wir die Idee, die wir schon einmal in einem Spezialfall angewendet haben (Nr. 32, Beispiel 4).

Wir vermuten, daß der Fehler dieser Näherung bei unbeschränkter Verkleinerung aller Δx_i gegen 0 strebt. Der genaue Wert von P wäre dann der Grenzwert

$$P = \lim \sum y_i \,\Delta x_i = \lim \sum f(x_i)\,\Delta x_i, \tag{2}$$

wenn alle Δx_i gleichzeitig gegen 0 streben.

Das gleiche Verfahren wenden wir auch zur Berechnung des Flächeninhalts $P(x)$ von $AMND$ (Abb. 2) an, nur zerlegen wir hier den Abschnitt AM in Teilabschnitte. Der Fall, daß $y = f(x)$ auch negative Werte annimmt, ist durch die in Nr. 264 angegebene Bedingung berücksichtigt, worin der Flächeninhalt der Teile der Figur unterhalb der x-Achse als negativ angesehen wird.

Zur Bezeichnung einer *Summe* der Gestalt $\sum y\,\Delta x$ (genauer gesagt: des *Grenzwertes* dieser Summe) führte LEIBNIZ das Symbol $\int y\,\mathrm{d}x$ ein, wobei $y\,\mathrm{d}x$ den typischen Summanden der Summe darstellt und $\int$ der stilisierte Buchstabe S, der Anfangsbuchstabe des lateinischen Wortes „summa" ist.[1]) Da der Flächeninhalt, der diesen Grenzwert darstellt, gleichzeitig eine Stammfunktion für die Funktion y ist, läßt sich dieses Symbol auch zur Bezeichnung der Stammfunktion benutzen. Infolgedessen wollen wir, wenn wir $f(x)$ für y einführen,

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

schreiben, wenn es sich um einen veränderlichen Flächeninhalt handelt, oder

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

für den Inhalt der festen Figur $ABCD$, der eine Änderung von x zwischen a und b entspricht.

Wir benutzten die anschauliche Vorstellung vom Flächeninhalt, um auf natürliche Weise zur Betrachtung der Grenzwerte (2) überzugehen (die ursprünglich gerade im Zusammenhang mit der Berechnung des Flächeninhalts eingeführt wurden). Jedoch bedarf der Begriff des Flächeninhalts selbst noch einer Begründung, und dies wird gerade (wenn von einem krummlinigen Trapez gesprochen wird) mit Hilfe der erwähnten Grenzwerte erreicht. Es versteht sich, daß das dem Studium der Grenzwerte (2) vorangehen muß, indem von den anschaulich-geometrischen Überlegungen abstrahiert wird. Dies wird in diesem Kapitel geschehen.

Die Grenzwerte der Art (2) spielen in der Analysis und in verschiedenen ihrer Anwendungen eine äußerst wichtige Rolle. Darauf werden wir in diesem Buch bei verschiedenen Abarten der hier zu entwickelnden Ideen zurückkommen.

295. Definition. Gegeben sei eine Funktion $f(x)$ in einem Intervall $[a, b]$. Dieses Intervall zerlegen wir auf beliebige Art, indem wir zwischen a und b die Teilpunkte (1) einfügen. Die *größte* der Differenzen $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ bezeichnen wir mit λ. In jedem der Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$ wählen wir willkürlich einen Punkt $x = \xi_i$,[2])

$$x_i \leqq \xi_i \leqq x_{i+1} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1),$$

[1]) Der Terminus „Integral" (von dem lateinischen Wort integer = ganz) wurde von JOHANN BERNOULLI (1667–1748, Schweizer Mathematiker, Schüler und Mitarbeiter von LEIBNIZ) verwendet; LEIBNIZ sagte ursprünglich „Summe".

[2]) Oben nahmen wir für ξ_i in allen Fällen den kleinsten Wert x_i.

und bilden die Summe

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\, \Delta x_i .$$

Wir sagen, *die Summe σ habe für $\lambda \to 0$ den (endlichen) Grenzwert I, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine solche Zahl $\delta > 0$ gibt, daß die Ungleichung*

$$|\sigma - I| < \varepsilon \tag{3}$$

für alle Zahlen ξ_i erfüllt ist, sobald $\lambda < \delta$ ist (d. h. das Grundintervall in Teile der Länge $\Delta x_i < \delta$ zerlegt ist).

Dieser Sachverhalt läßt sich folgendermaßen ausdrücken:

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma .$$

Dieser Definition in der „ε-δ-Sprache" wird wie üblich die auf Folgen beruhende Definition gegenübergestellt. Wir stellen uns vor, das Intervall $[a, b]$ sei zunächst auf eine Art zerlegt, dann auf eine zweite, eine dritte, usw. Diese Folge von Zerlegungen nennen wir eine *Fundamentalfolge*, wenn die entsprechende Folge der Werte $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ gegen 0 konvergiert. Die Gleichung (3) kann jetzt auch so verstanden werden, daß *die Folge der Werte von σ, die einer Fundamentalfolge von Zerlegungen des Intervalls entspricht, für alle beliebig gewählten ξ_i gegen den Grenzwert I strebt.*

Die Gleichwertigkeit dieser beiden Definitionen läßt sich genauso wie in Nr. 53 nachweisen. Die zweite Definition erlaubt, die Grundbegriffe und Sätze aus der Theorie der Grenzwerte auch auf diese neue Art des Grenzwertes zu übertragen.

Der endliche Grenzwert I der Summe σ für $\lambda \to 0$ heißt bestimmtes Integral der Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$, in Zeichen

$$I = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x ; \tag{4}$$

existiert dieser Grenzwert, so heißt die Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ *integrierbar* oder *integrabel.*

Die Zahlen a und b sind die *untere* bzw. *obere Integrationsgrenze.* Bei konstanten Integrationsgrenzen definiert das Integral eine Konstante. Diese Definition stammt von B. Riemann[1]), der sie als erster in dieser allgemeinen Form ausgesprochen und ihren Anwendungsbereich untersucht hat. Daher heißt die Summe σ oft auch *Riemannsche Summe*[2]); wir werden sie jedoch Integralsumme nennen, um ihren Zusammenhang mit dem Integral hervorzuheben.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, die Bedingungen zu finden, unter denen die Integralsumme σ einen endlichen Grenzwert hat, d. h. unter denen das bestimmte Integral (4) existiert.

Zuvor bemerken wir, daß die Definition in Wirklichkeit nur auf eine beschränkte Funktion angewendet werden kann. Wäre nämlich die Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ nicht beschränkt, so würde sie bei jeder Zerlegung des Intervalls in mindestens einem der Teilintervalle die gleiche Eigenschaft haben; dann könnten wir durch geeignete Wahl eines Punktes ξ aus diesem Teilintervall den Wert $f(\xi)$ und damit auch

---

[1]) Bernhard Riemann, 1826—1866, deutscher Mathematiker.

[2]) Tatsächlich benutzte schon Cauchy Grenzwerte ähnlicher Summen, aber nur für stetige Funktionen.

die Summe σ beliebig groß machen, so daß unter diesen Bedingungen kein endlicher Grenzwert für σ existieren kann. *Eine integrierbare Funktion ist also notwendig beschränkt.* Daher setzen wir im folgenden stets voraus, daß die betrachtete Funktion $f(x)$ *beschränkt* ist:

$$m \leqq f(x) \leqq M \qquad (\text{für } a \leqq x \leqq b).$$

296. Die Darbouxschen Summen. Als Hilfsmittel zur Untersuchung führen wir nach Darboux[1]) neben den Integralsummen noch andere, ihnen ähnliche, jedoch einfachere Summen ein.

Mit m_i bzw. M_i bezeichnen wir die untere bzw. obere Grenze der Funktion $f(x)$ im i-ten Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ und bilden die Summen

$$x = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \, \Delta x_i, \qquad S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \, \Delta x_i;$$

sie heißen *untere* bzw. *obere Integralsumme* oder *Darbouxsche Summen.* In dem Spezialfall, daß $f(x)$ *stetig* ist, sind sie einfach die kleinste bzw. größte der Integralsummen, die der gewählten Zerlegung entsprechen, da in diesem Fall die Funktion $f(x)$ in jedem Intervall ihre Grenzen *erreicht* und die Punkte ξ_i so gewählt werden können, daß auf Wunsch

$$f(\xi_i) = m_i \quad \text{oder} \quad f(\xi_i) = M_i$$

gilt.

Gehen wir zum allgemeinen Fall über, so folgt aus der Definition der oberen und der unteren Grenze

$$m_i \leqq f(\xi_i) \leqq M_i.$$

Multiplizieren wir die Glieder dieser Ungleichung mit Δx_i (Δx_i ist positiv) und summieren wir über i, so erhalten wir $s \leqq \sigma \leqq S$. Bei einer festen Zerlegung sind die Summen s und S feste Zahlen, während die Summe σ noch variabel bleibt, da die Zahlen ξ_i willkürlich gewählt werden. Man sieht leicht, daß durch geeignete Wahl der ξ_i die Werte $f(\xi_i)$ sowohl nahe bei m_i als auch bei M_i liegen können; also kann man die Summe σ beliebig nahe an s oder an S bringen. Dann führt die letzte Ungleichung auf die folgende allgemeine Bemerkung: *Bei einer gegebenen Zerlegung des Intervalls sind die Darbouxschen Summen s und S die untere bzw. obere Grenze für die Integralsummen.*

Die Darbouxschen Summen besitzen die folgenden einfachen Eigenschaften:

1. *Fügt man zu den schon vorhandenen Teilpunkten neue Punkte hinzu, so kann dadurch die untere Darbouxsche Summe höchstens zunehmen, die obere Darbouxsche Summe höchstens abnehmen.*

Beweis. Zum Beweis dieser Eigenschaften genügt es, zu den schon vorhandenen Teilpunkten noch *einen* Teilpunkt x' hinzuzunehmen. Dieser Punkt falle zwischen die Punkte x_k und x_{k+1}, so daß also

$$x_k < x' < x_{k+1}$$

[1]) Gaston Darboux, 1842—1917, französischer Mathematiker.

ist. Bezeichnen wir mit S' die *neue* obere Summe, so unterscheidet sie sich von S nur dadurch, daß in der Summe S dem Intervall $[x_k, x_{k+1}]$ der Summand

$$M_k(x_{k+1} - x_k),$$

in der neuen Summe S' diesem Intervall die Summe der beiden Summanden

$$\overline{M}_k(x' - x_k) + \overline{\overline{M}}_k(x_{k+1} - x')$$

zugeordnet ist, wobei $\overline{M}_k$ und $\overline{\overline{M}}_k$ die oberen Grenzen der Funktion $f(x)$ in den Intervallen $[x_k, x']$ bzw. $[x', x_{k+1}]$ sind. Da diese Intervalle Teile des Intervalls $[x_k, x_{k+1}]$ sind, gilt

$$\overline{M}_k \leqq M_k, \qquad \overline{\overline{M}}_k \leqq M_k,$$

so daß

$$\overline{M}_k(x' - x_k) \leqq M_k(x' - x_k),$$

$$\overline{\overline{M}}_k(x_{k+1} - x') \leqq M_k(x_{k+1} - x')$$

ist. Addieren wir diese Ungleichungen gliedweise, so erhalten wir

$$\overline{M}_k(x' - x_k) + \overline{\overline{M}}_k(x_{k+1} - x') \leqq M_k(x_{k+1} - x_k).$$

Hieraus folgt $S' \leqq S$. Für die untere Summe wird der Beweis analog geführt.

Bemerkung. Da die Differenzen $M_k - \overline{M}_k$ und $M_k - \overline{\overline{M}}_k$ offenbar die Schwankung Ω der Funktion $f(x)$ im ganzen Intervall $[a, b]$ nicht überschreiten, kann die Differenz $S - S'$ nicht größer als das Produkt $\Omega \Delta x_k$ sein. Dies gilt auch dann, wenn im k-ten Intervall *mehrere* neue Teilpunkte eingeführt werden.

2. *Jede untere Darbouxsche Summe ist nicht größer als jede obere Summe, auch wenn diese einer anderen Zerlegung des Intervalls entspricht.*

Beweis. Wir zerlegen das Intervall $[a, b]$ beliebig und bilden für diese Zerlegung die Darbouxschen Summen

$$s_1 \text{ und } S_1. \tag{I}$$

Einer zweiten Zerlegung von $[a, b]$, die mit der ersten keine Punkte gemeinsam haben soll, mögen die Darbouxschen Summen

$$s_2 \text{ und } S_2 \tag{II}$$

entsprechen. Wir müssen also die Ungleichung $s_1 \leqq S_2$ beweisen. Dazu vereinen wir alle Teilpunkte und gelangen so zu einer dritten Zerlegung, der die Summen

$$s_3 \text{ und } S_3 \tag{III}$$

entsprechen mögen. Da wir die dritte Zerlegung aus der ersten durch Hinzufügen neuer Teilpunkte erhielten, ist auf Grund der bewiesenen Eigenschaft 1 für Darbouxsche Summen $s_1 \leqq s_3$. Vereinen wir dann die zweite und die dritte Zerlegung, so können wir analog auf $S_3 \leqq S_2$ schließen. Wegen $s_3 \leqq S_3$ ergibt sich aus den eben erhaltenen Ungleichungen $s_1 \leqq S_2$, was zu beweisen war.

Aus dem Bewiesenen folgt, daß jede Menge $\{s\}$ unterer Summen von oben, z. B. durch eine beliebige obere Summe S, beschränkt ist. In diesem Fall (vgl. Nr. 11) hat die Menge eine endliche obere Grenze

$$I_* = \sup \{s\},$$

und außerdem ist $I_* \leqq S$ für jede obere Summe S. Da die Menge $\{S\}$ der oberen Summen somit von unten durch die Zahl I_* beschränkt ist, hat sie eine endliche untere Grenze

$$I^* = \inf \{S\},$$

wobei offenbar $I_* \leqq I^*$ ist. Damit folgt

$$s \leqq I_* \leqq I^* \leqq S \tag{5}$$

für alle unteren und oberen Darbouxschen Summen.

Die Zahlen I_* und I^* heißen *unteres* bzw. *oberes Darbouxsches Integral* (vgl. Nr. 301).

297. Bedingung für die Existenz des bestimmten Integrals. Mit Hilfe der Darbouxschen Summen können wir diese Bedingung leicht formulieren.

Satz. *Ein bestimmtes Integral existiert dann und nur dann, wenn*

$$\lim_{\lambda \to 0} (S - s) = 0 \tag{6}$$

gilt.

Das in Nr. 295 Gesagte genügt zur Erklärung des Sinnes dieses Grenzwertes. Beispielsweise bedeutet die Bedingung (6) in der „ε-δ-Sprache“, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß die Ungleichung $S - s < \varepsilon$ gilt, sobald $\lambda < \delta$ ist (d. h. sobald das Intervall in Teilintervalle mit den Längen $\Delta x_i < \delta$ zerlegt wird).

Beweis. Wir zeigen die Notwendigkeit der Bedingung und setzen dazu die Existenz des Integrals (4) voraus. Dann können wir zu jedem $\varepsilon > 0$ ein solches $\delta > 0$ finden, daß, falls alle $\Delta x_i < \delta$ sind,

$$|\sigma - I| < \varepsilon \quad \text{oder} \quad I - \varepsilon < \sigma < I + \varepsilon$$

gilt, unabhängig von der Wahl der ξ_i innerhalb der entsprechenden Intervalle. Nun sind, wie wir sahen, die Summe s und S bei einer gegebenen Zerlegung des Intervalls die untere bzw. die obere Grenze für die Integralsummen; daher gilt für sie

$$I - \varepsilon \leqq s \leqq S \leqq I + \varepsilon,$$

so daß

$$\lim_{\lambda \to 0} s = I, \qquad \lim_{\lambda \to 0} S = I \tag{7}$$

ist, woraus (6) folgt.

Um zu beweisen, daß die Bedingung hinreichend ist, nehmen wir an, (6) sei erfüllt. Dann folgt aus (5) sofort $I_* = I^*$ und, wenn dieser Wert mit I bezeichnet wird,

$$s \leqq I \leqq S. \tag{5*}$$

Ist σ einer der Werte der Integralsummen, die derselben Zerlegung des Intervalls entspricht wie auch die Summen s und S, so ist, wie wir wissen, $s \leqq \sigma \leqq S$.

Infolge von (6) unterscheiden sich die Summen s und S um weniger als ein beliebig gewähltes $\varepsilon > 0$ voneinander, wenn alle Δx_i hinreichend klein vorausgesetzt sind. In diesem Fall gilt dies auch für die zwischen ihnen eingeschlossenen Zahlen σ und I,

$$|\sigma - I| < \varepsilon,$$

so daß I der Grenzwert von σ, d. h. das bestimmte Integral (4) ist.

Bezeichnen wir die Schwankung $M_i - m_i$ der Funktion im i-ten Teilintervall mit ω_i, so gilt

$$S - s = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)\, \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i\, \Delta x_i .$$

Die Bedingung für die Existenz des bestimmten Integrals läßt sich dann in der Form

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i\, \Delta x_i = 0 \tag{8}$$

schreiben, in der sie auch oft verwendet wird.

298. Klassen integrierbarer Funktionen. Das gefundene Kriterium benutzen wir nun dazu, einige Klassen integrierbarer Funktionen anzugeben.

I. *Ist eine Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ stetig, so ist sie dort integrierbar.*

Beweis. Ist die Funktion $f(x)$ stetig, so gibt es auf Grund der Folgerung aus dem Satz von CANTOR[1]) (Nr. 87) zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$ stets ein solches $\delta > 0$, daß alle ω_i kleiner als ε sind, sobald $[a, b]$ in Teilintervalle zerlegt wird, deren Längen Δx_i kleiner als δ sind. Daraus folgt

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i\, \Delta x_i < \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \varepsilon (b - a) .$$

Da $b - a$ eine Konstante und ε beliebig klein ist, ist die Bedingung (8) erfüllt; aus ihr folgt die Existenz des Integrals.

Die bewiesene Behauptung läßt sich noch etwas verallgemeinern.

II. *Hat eine beschränkte Funktion $f(x)$ in $[a, b]$ nur endlich viele Unstetigkeiten, so ist sie dort integrierbar.*

Beweis. Die Unstetigkeiten mögen sich in den Punkten $x', x'', \ldots, x^{(k)}$ befinden. Wir wählen ein beliebiges $\varepsilon > 0$ und schließen die Unstetigkeitsstellen in Intervalle

$$(x' - \varepsilon', x' + \varepsilon'), \quad (x'' - \varepsilon'', x'' + \varepsilon''), \ldots, \quad (x^{(k)} - \varepsilon^{(k)}, x^{(k)} + \varepsilon^{(k)})$$

so ein, daß die Länge jedes Intervalls kleiner als ε ist. In den übrigen (abgeschlossenen) Intervallen ist die Funktion $f(x)$ stetig; wir können also auf jedes dieser Intervalle einzeln die Folgerung aus dem Satz von CANTOR anwenden. Von den zu ε gewählten Zahlen δ sondern wir die kleinste aus (die wir wieder mit δ bezeichnen). Diese ist dann für jedes der oben genannten Intervalle geeignet. Es hindert uns nichts, $\delta < \varepsilon$ anzunehmen. Wir zerlegen nun das Intervall $[a, b]$ so, daß die Längen Δx_i der Teilintervalle kleiner als δ sind. Die erhaltenen Teilintervalle lassen sich in zwei Arten einteilen:

1. in die Intervalle, die ganz außerhalb der Umgebungen der Unstetigkeitsstellen liegen; in ihnen ist die Schwankung ω_i der Funktion kleiner als ε;

2. in die Intervalle, die entweder ganz im Innern der Umgebungen liegen oder diese Umgebungen teilweise überdecken.

---

[1]) GEORG CANTOR, 1845—1918, deutscher Mathematiker.

Da die Funktion $f(x)$ als beschränkt vorausgesetzt wurde, ist ihre Schwankung Ω im ganzen Intervall $[a, b]$ endlich; ihre Schwankung in einem beliebigen Teilintervall ist daher auch nicht größer als Ω.

Die Summe

$$\sum_i \omega_i \, \Delta x_i$$

zerlegen wir in die beiden Summanden

$$\sum_{i'} \omega_{i'} \, \Delta x_{i'} \quad \text{und} \quad \sum_{i''} \omega_{i''} \, \Delta x_{i''},$$

die sich über die Intervalle der ersten bzw. der zweiten Art erstrecken. Für die erste der beiden Summen gilt wie im vorhergehenden Satz

$$\sum_{i'} \omega_{i'} \, \Delta x_{i'} < \varepsilon \sum_{i'} \Delta x_{i'} < \varepsilon(b - a).$$

Zur zweiten Summe müssen wir bemerken, daß die Längen der Intervalle der zweiten Art, die ganz im Innern der Umgebungen liegen, insgesamt kleiner als $k\varepsilon$ sind; die Anzahl der Intervalle, die nur teilweise in den Umgebungen liegen, kann nicht größer als $2k$ sein, und die Summe der Längen dieser Intervalle ist kleiner als $2k\delta$, also erst recht kleiner als $2k\varepsilon$. Damit ist

$$\sum_{i''} \omega_{i''} \, \Delta x_{i''} < \Omega \sum_{i''} \Delta x_{i''} < \Omega \cdot 3k\varepsilon.$$

Also gilt schließlich für $\Delta x_i < \delta$

$$\sum_i \omega_i \, \Delta x_i < \varepsilon[(b - a) + 3k\Omega].$$

Damit ist die Behauptung bewiesen, denn in der eckigen Klammer steht eine von ε unabhängige feste Zahl, und ε ist beliebig klein.

Wir weisen nun noch auf eine einfache Klasse integrierbarer Funktionen hin, die von den vorhergehenden verschieden ist.

III. *Eine monotone beschränkte Funktion $f(x)$ ist stets integrierbar.*

Beweis. Die Funktion $f(x)$ sei etwa monoton *wachsend*. Dann ist ihre Schwankung im Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ gleich

$$\omega_i = f(x_{i+1}) - f(x_i).$$

Wählen wir ein beliebiges $\varepsilon > 0$ und setzen wir

$$\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)},$$

so ist für $\Delta x_i < \delta$

$$\sum \omega_i \, \Delta x_i < \delta \sum [f(x_{i+1}) - f(x_i)] + \delta[f(b) - f(a)] = \varepsilon;$$

daraus folgt die Integrierbarkeit von $f(x)$.

299. Eigenschaften integrierbarer Funktionen. Aus dem Kriterium von Nr. 297 lassen sich eine Reihe allgemeiner Eigenschaften integrierbarer Funktionen ziehen.

I. *Ist eine Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ integrierbar, so sind die Funktionen $|f(x)|$ und $kf(x)$ mit $k = \text{const}$ ebenfalls dort integrierbar.*

Beweis. Wir führen ihn für die Funktion $|f(x)|$. Da für zwei beliebige Punkte x', x'' aus dem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$

$$|f(x'')| - |f(x')| \leqq |f(x'') - f(x')|$$

gilt (Nr. 17), ist die Schwankung ω_i^* der Funktion $|f(x)|$ in diesem Intervall nicht größer als ω_i (Nr. 85). Daraus folgt

$$\sum \omega_i^* \Delta x_i \leqq \sum \omega_i \Delta x_i ;$$

da die rechte Summe (für $\lambda \to 0$) gegen 0 strebt, gilt dies erst recht für die linke Summe. Also ist die Funktion $|f(x)|$ integrierbar. (Die Integrierbarkeit von $kf(x)$ beweise der Leser.)

II. *Sind zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ im Intervall $[a, b]$ integrierbar, so sind ihre Summe, ihre Differenz und ihr Produkt ebenfalls dort integrierbar.*

Beweis. Wir beweisen die Behauptung für das Produkt $f(x)\, g(x)$. Es sei $|f(x)| \leqq K$, $|g(x)| \leqq L$. Wir wählen im Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ zwei beliebige Punkte x', x'' und betrachten die Differenz

$$f(x'')\, g(x'') - f(x')\, g(x') = [f(x'') - f(x')]\, g(x'') + [g(x'') - g(x')]\, f(x').$$

Offenbar ist dann

$$|f(x'')\, g(x'') - f(x')\, g(x')| \leqq L\omega_i + K\overline{\omega}_i ,$$

wobei ω_i, $\overline{\omega}_i$ die Schwankungen von $f(x)$ bzw. $g(x)$ im Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ sind. Daher gilt auch (vgl. Nr. 85) für die Schwankung Ω_i der Funktion $g(x)\, f(x)$ in diesem Intervall

$$\Omega_i \leqq L\omega_i + K\overline{\omega}_i ,$$

woraus

$$\sum \Omega_i \Delta x_i \leqq L \sum \omega_i \Delta x_i + K \sum \overline{\omega}_i \Delta x_i$$

folgt. Da die beiden rechten Summen für $\lambda \to 0$ gegen 0 streben, gilt dies erst recht für die linke Summe. Damit ist die Integrierbarkeit von $f(x)\, g(x)$ bewiesen.

III. *Ist eine Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ integrierbar, so ist sie auch in jedem Teilintervall $[\alpha, \beta]$ von $[a, b]$ integrierbar. Ist umgekehrt $[a, b]$ in Teilintervalle zerlegt und ist die Funktion $f(x)$ in jedem Teilintervall integrierbar, so ist $f(x)$ auch im ganzen Intervall $[a, b]$ integrierbar.*

Beweis. Wir setzen voraus, daß die Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ integrierbar ist, und bilden für dieses Intervall die Summe $\sum \omega_i \Delta x_i$ (die Punkte α und β sollen unter den Teilpunkten auftreten). Die analoge Summe für das Intervall $[\alpha, \beta]$ erhalten wir hieraus, wenn wir (positive) Summanden fortlassen; sie strebt sicher gegen 0, wenn die erste Summe gegen 0 strebt.

Das Intervall $[a, b]$ sei nun in zwei Teile $[a, c]$ und $[c, b]$ mit $a < c < b$ zerlegt, und in jedem dieser beiden Intervalle sei die Funktion $f(x)$ integrierbar. Wir bilden wieder die Summe $\sum \omega_i \Delta x_i$ für das Intervall $[a, b]$; befindet sich c unter den Teilpunkten, so setzt sich diese Summe aus den beiden entsprechenden Summen für die Intervalle $[a, c]$ und $[c, b]$ zusammen und strebt mit ihnen gegen 0. Dies gilt auch dann, wenn c nicht Teilpunkt ist: Fügen wir diesen Punkt hinzu, so ändern wir damit nur *ein* Glied der Summe, das offenbar gegen 0 strebt.

IV. *Ändert man die Werte einer integrierbaren Funktion in k Punkten (k endlich), so wird ihre Integrierbarkeit nicht gestört.*

Der Beweis ist klar, denn die Änderungen der Werte betreffen höchstens k Glieder der Summe $\sum \omega_i \Delta x_i$.

Es ist leicht einzusehen, daß auch der Wert des Integrals selbst dabei keiner Änderung unterliegt. Dies folgt daraus, daß für beide Funktionen (die ursprüngliche und die geänderte) die Punkte ξ_i in der Integralsumme stets so gewählt werden können, daß sie nicht mit denjenigen Punkten übereinstimmen, in denen die Werte verschieden sind.

Bemerkung. Dank dieser Eigenschaft ist es möglich, von dem Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ auch dann zu sprechen, wenn die Funktion $f(x)$ in endlich vielen Punkten des Intervalls $[a, b]$ nicht definiert ist. Dabei kann man der Funktion in diesen Punkten völlig willkürliche Werte zuschreiben und dann das Integral der so im ganzen Intervall definierten Funktionen betrachten. Wie wir sahen, hängen weder die Existenz dieses Integrals noch sein Wert von den willkürlich gewählten Werten der Funktion in den Punkten ab, in denen sie nicht definiert ist.

300. Beispiele und Ergänzungen. Zur Übung betrachten wir die Anwendung des Kriteriums aus Nr. 297 an einigen Beispielen.

1. Wir betrachten wieder die schon in Nr. 70, Beispiel 8, untersuchte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & \text{wenn } x \text{ ein nicht kürzbarer echter Bruch } \dfrac{p}{q} \text{ ist,} \\ 0 & \text{in den übrigen Punkten von } [0, 1]. \end{cases}$$

Das Intervall $[0, 1]$ sei in Teile der Länge $\Delta x_i \leq \lambda$ zerlegt. Wir wählen eine beliebige natürliche Zahl N. Die Teilintervalle bilden zwei Klassen:

(a) Zur ersten Klasse gehören die (abgeschlossenen) Intervalle, in denen die Zahlen $\frac{p}{q}$ liegen, deren Nenner q höchstens gleich N ist; da es nur endlich viele solcher Zahlen gibt, etwa $k = k_N$, gibt es auch nur höchstens $2k_N$ solcher Intervalle; ihre Gesamtlänge ist nicht größer als $2k_N\lambda$.

(b) Zur zweiten Klasse gehören diejenigenI ntervalle, die die in (a) genannten Zahlen nicht enthalten; für sie ist die Schwankung ω_i offenbar kleiner als $\frac{1}{N}$.

Zerlegen wir entsprechend dieser Einteilung die Summe $\sum \omega_i \Delta x_i$ in zwei Summen und schätzen wir jede einzeln ab, so erhalten wir

$$\sum \omega_i \Delta x_i < 2k_N\lambda + \frac{1}{N}.$$

Setzen wir zunächst $N > \frac{2}{\varepsilon}$ und dann $\lambda < \frac{\varepsilon}{4k_N} = \delta$, so finden wir $\sum \omega_i \Delta x < \varepsilon$. Damit ist die Integrierbarkeit von $f(x)$ bewiesen.

Dieses Beispiel ist dadurch interessant, daß die Funktion trotz unendlich vieler Unstetigkeitspunkte integrierbar ist. (Übrigens läßt sich ein Beispiel dieser Art auch mit Hilfe von Satz III aus Nr. 299 konstruieren.)

2. Wir betrachten nochmals die Dirichletsche Funktion

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 \text{ für rationales } x, \\ 0 \text{ für irrationales } x, \end{cases}$$

die wir schon aus Nr. 46 und Nr. 70, Beispiel 7, kennen. Da in jedem Teilintervall von $[0, 1]$ die Schwankung ω dieser Funktion gleich 1 ist, gilt auch $\sum \omega_i \, \Delta x_i = 1$, so daß also die Funktion nicht integrierbar ist.

3. Das in Nr. 297 angegebene Kriterium für die Existenz des bestimmten Integrals läßt sich auch folgendermaßen formulieren:

Das bestimmte Integral existiert genau dann, wenn es zu beliebig gegebenen Zahlen $\varepsilon > 0$ und $\sigma > 0$ ein solches $\delta > 0$ gibt, daß die Summe $\sum\limits_{i'} \Delta x_{i'}$ der Längen aller Intervalle, denen die Schwankungen $\omega_{i'} \geqq \varepsilon$ entsprechen, kleiner als σ ist, sobald alle Δx_i kleiner als δ sind.

Die Notwendigkeit der Bedingung folgt aus der Ungleichung

$$\sum_{i'} \omega_i \, \Delta x_i \geqq \sum_{i'} \omega_{i'} \, \Delta x_{i'} \geqq \varepsilon \sum_{i'} \Delta x_{i'},$$

wenn durch geeignete Wahl von δ die erste Summe kleiner als $\varepsilon\sigma$ gemacht wird. Daß die Bedingung hinreichend ist, folgt aus der Abschätzung

$$\sum_{i} \omega_i \, \Delta x_i = \sum_{i'} \omega_{i'} \, \Delta x_{i'} + \sum_{i''} \omega_{i''} \, \Delta x_{i''} < \Omega \sum_{i'} \Delta x_{i'} + \varepsilon \sum_{i''} \Delta x_{i''} < \Omega\sigma + \varepsilon(b - a)$$

(hier ist Ω wie stets die Schwankung der Funktion im ganzen Intervall; mit i'' werden die Teilintervalle numeriert, in denen $\omega_{i''} < \varepsilon$ ist).

4. Das Kriterium in seiner neuen Form benutzen wir zum Beweis des folgenden Satzes:

Ist eine Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ integrierbar, wobei ihre Werte nicht außerhalb eines Intervalls $[c, d]$ liegen, in dem eine Funktion $\varphi(y)$ stetig ist, so ist die mittelbare Funktion $\varphi(f(x))$ ebenfalls in $[a, b]$ integrierbar.

Wir wählen beliebig zwei Zahlen $\varepsilon > 0$ und $\sigma > 0$. Zu der Zahl ε läßt sich auf Grund der Stetigkeit der Funktion $\varphi(y)$ ein solches $\eta > 0$ angeben, daß in jedem Wertebereich von y, dessen Länge kleiner als η ist, die Schwankung der Funktion φ kleiner als ε ist.

Da $f(x)$ integrierbar ist, können wir zu den Zahlen η und σ eine solche Zahl δ finden, daß dann, wenn das Intervall in Teile der Länge $\Delta x_i < \delta$ zerlegt ist, die Summe $\sum\limits_{i'} \Delta x_{i'}$ der Längen derjenigen Intervalle, in denen die Schwankung $\omega_{i'}[f]$ von f mindestens gleich η ist, selbst kleiner als σ ist (vgl. Punkt 3). In den übrigen Intervallen gilt $\omega_{i''}[f] < \eta$ und folglich $\omega_{i''}[\varphi(f)] < \varepsilon$ auf Grund der Wahl von η. Somit kann die Schwankung der mittelbaren Funktion $\varphi(f(x))$ nur in einigen der Intervalle, bei denen die Summe der Längen kleiner als σ ist, größer oder gleich ε sein. Wenden wir nun das Kriterium aus Punkt 3 auf die mittelbare Funktion an, so können wir uns von ihrer Integrierbarkeit überzeugen.

5. Wird die Funktion φ nur als integrierbar vorausgesetzt, so braucht die mittelbare Funktion nicht integrierbar zu sein: Als $f(x)$ wählen wir die in Beispiel 1 betrachtete Funktion; sie ist im Intervall $[0, 1]$ integrierbar, auch ihre Werte sind in diesem Intervall enthalten. Ferner sei

$$\varphi(y) = 1 \quad \text{für} \quad 0 < y \leqq 1 \quad \text{und} \quad \varphi(0) = 0.$$

Die Funktion $\varphi(y)$ ist ebenfalls in $[0, 1]$ integrierbar. Die mittelbare Funktion $\varphi(f(x))$ stimmt, wie leicht zu erkennen ist, mit der Dirichletschen Funktion überein (vgl. Beispiel 2), und diese ist in $[0, 1]$ nicht integrierbar.

301. Das untere und das obere Integral als Grenzwert. Wir untersuchen nun das untere und das obere Integral, das in Nr. 296 als untere bzw. obere Grenze der Darbouxschen Summen s bzw. S definiert wurde. Wir wollen zeigen, daß diese Integrale zugleich die *Grenzwerte* der Darbouxschen Summen sind.

Satz von Darboux. *Für jede beschränkte Funktion $f(x)$ gilt*

$$I_* = \lim_{\lambda\to 0} s, \qquad I^* = \lim_{\lambda\to 0} S.$$

Beweis. Wir beweisen den Satz für die oberen Summen. Zunächst wählen wir zu einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ eine solche Zerlegung von $[a, b]$, daß für die ihr entsprechende obere Summe S' die Ungleichung

$$S' < I^* + \frac{\varepsilon}{2} \tag{9}$$

gilt; dies ist möglich, da I^* die untere Grenze der Menge aller oberen Summen ist. Diese Zerlegung enthalte m' (innere) Teilpunkte. Wir setzen nun

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2m'\Omega},$$

wobei Ω die Schwankung der Funktion $f(x)$ im ganzen Intervall $[a, b]$ ist, und betrachten eine *beliebige* Zerlegung des Intervalls, bei welcher alle Δx_i kleiner als δ sind. Dieser Zerlegung entspreche die Summe S. Um die Differenz zwischen S und I^* abzuschätzen, führen wir noch eine dritte Zerlegung des Intervalls ein, indem wir die Teilpunkte der ersten beiden Zerlegungen vereinen. Ist S'' die ihr entsprechende Summe, so ist auf Grund der Eigenschaft 1 der Darbouxschen Summen (Nr. 296) $S'' \leqq S'$, also erst recht (vgl. (9))

$$S'' < I^* + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{10}$$

Andererseits ist die Differenz $S - S''$ auf Grund der Bemerkung aus Nr. 296 nicht größer als das Produkt von Ω mit der Summe der Längen Δx_i derjenigen Intervalle der zweiten Zerlegung, in deren Innerem die Teilpunkte der ersten Zerlegung liegen. Es gibt höchstens m' solcher Intervalle, die Länge jedes Intervalls ist kleiner als δ, so daß

$$S - S'' < m'\Omega\delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

ist, woraus in Verbindung mit (10) $S < I^* + \varepsilon$ folgt. Da andererseits $S \geqq I^*$ ist, gilt, sobald $\Delta x_i < \delta$ ist,

$$0 \leqq S - I^* < \varepsilon,$$

also tatsächlich $S \to I^*$

Aus dem bewiesenen Satz ergibt sich sofort, daß stets

$$\lim_{\lambda\to 0} (S - s) = I^* - I_*$$

ist. Diese Beziehung erlaubt, dem Kriterium für die Existenz des bestimmten Integrals auch die folgende Form zu geben (vgl. Nr. 297):

Ein bestimmtes Integral existiert genau dann, wenn das untere und das obere Darbouxsche Integral den gleichen Wert haben:

$$I_* = I^*.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so gibt der gemeinsame Wert das bestimmte Integral an.

Diese neue Form der Bedingung hat vor der alten einige Vorzüge. Um sich von der Gleichheit der Darbouxschen Integrale zu überzeugen, genügt es, daß die Ungleichung $S - s < \varepsilon$ (ε beliebig) von *wenigstens einem* Paar von Summen s und S befriedigt wird; denn wegen (5) aus Nr. 296 gilt dann auch

$$0 \leqq I^* - I_* < \varepsilon,$$

woraus die gewünschte Gleichheit folgt, da ε beliebig ist.

Es läßt sich leicht überlegen, wie entsprechend hierzu auch die Integrierbarkeitsbedingung aus Nr. 300 (vgl. dort Punkt 3) vereinfacht werden kann.

§ 2. Eigenschaften der bestimmten Integrale

302. Das Integral über ein orientiertes Intervall. Bis jetzt nahmen wir, wenn wir von einem „bestimmten Integral von a bis b" sprachen, stets $a < b$ an. Von dieser unbequemen Einschränkung wollen wir uns nun befreien.

Zu diesem Zweck definieren wir zunächst den Begriff des gerichteten oder orientierten Intervalls. Unter einem *orientierten* Intervall $[a, b]$, wobei entweder $a < b$ oder $a > b$ ist, verstehen wir die Menge der Werte x, die den Ungleichungen

$$a \leqq x \leqq b \quad \text{oder} \quad a \geqq x \geqq b$$

genügen und die von a nach b *geordnet* sind, d. h. in wachsender Richtung, wenn $a < b$, oder in fallender Richtung, wenn $a > b$ ist. Somit unterscheiden wir die Intervalle $[a, b]$ und $[b, a]$; obwohl sie (als Zahlenmenge) übereinstimmen, unterscheiden sie sich in ihrer *Richtung*.

Die Definition des Integrals aus Nr. 295 bezieht sich dann nur auf ein orientiertes Intervall $[a, b]$ mit $a < b$.

Wir wenden uns nun der Definition des Integrals in einem orientierten Intervall $[a, b]$ zu und setzen $a > b$ voraus. In diesem Fall läßt sich das Intervall durch Vorgabe von Teilpunkten in der *Richtung* von a nach b zerlegen:

$$x_0 = a > x_1 > x_2 > \cdots > x_i > x_{i+1} > \cdots > x_n = b.$$

Wir wählen in jedem Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$ einen Punkt ξ_i, so daß $x_i \geqq \xi_i \geqq x_{i+1}$ ist, und bilden die *Integralsumme*

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\, \Delta x_i,$$

in der jetzt alle $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ negativ sind. Der Grenzwert dieser Summe für $\lambda = \max |\Delta x_i| \to 0$ führt zu dem Integral

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\lambda \to 0} \sigma.$$

Wählt man für die Intervalle $[a, b]$ und $[b, a]$ (für $a \lessgtr b$) dieselben Teilpunkte und dieselben Punkte ξ_i, so unterscheiden sich die ihnen entsprechenden Integralsummen nur durch das *Vorzeichen*. Gehen wir zu den Grenzwerten über, so erhalten wir den folgenden Satz:

1°. *Ist eine Funktion $f(x)$ im Intervall $[b, a]$ integrierbar, so ist sie auch im Intervall $[a, b]$ integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx.$$

Übrigens könnte man diese Gleichung auch zur *Definition* des Integrals $\int\limits_a^b$ für $a > b$ verwenden, wenn man die Existenz von $\int\limits_b^a$ voraussetzt.

Wir bemerken noch, daß man nunmehr zweckmäßigerweise

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$$

definiert.

303. Eigenschaften, die sich in Gleichungen ausdrücken. Wir zählen nun für bestimmte Integrale weitere Eigenschaften auf, die sich durch Gleichungen ausdrücken lassen.[1])

2°. *Ist eine Funktion $f(x)$ im größten der Intervalle $[a, b]$, $[a, c]$ und $[c, b]$ integrierbar*[2]), *so ist sie auch in den beiden anderen integrierbar, und es gilt die Gleichung*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx,$$

unabhängig von der gegenseitigen Lage der Punkte a, b und c.

Beweis. Wir setzen zuerst $a < c < b$ und nehmen an, $f(x)$ sei im Intervall $[a, b]$ integrierbar. Daß $f(x)$ dann auch in den Intervallen $[a, c]$ und $[c, b]$ integrierbar ist, folgt aus Eigenschaft III von Nr. 299.

Wir betrachten zum weiteren Beweis des Satzes eine Zerlegung von $[a, b]$ in Teilintervalle, wobei c einer der Teilpunkte sei. Bilden wir die Integralsumme, so erhalten wir

$$\sum_a^b f(\xi)\,\Delta x = \sum_a^c f(\xi)\,\Delta x + \sum_c^b f(\xi)\,\Delta x$$

(die Bezeichnungen sind klar); gehen wir für $\lambda \to 0$ zur Grenze über, so finden wir die gesuchte Gleichung.

Die anderen Lagen der Punkte a, b und c lassen sich auf diesen Fall zurückführen. Ist etwa $b < a < c$ und ist die Funktion im Intervall $[c, b]$ oder, was wegen 1° dasselbe ist, im Intervall $[b, c]$ integrierbar, so gilt auf Grund des Bewiesenen

$$\int\limits_b^c f(x)\,dx = \int\limits_b^a f(x)\,dx + \int\limits_a^c f(x)\,dx;$$

damit gelangen wir wieder zu der vorigen Beziehung, wenn wir das linke Integral nach rechts, von rechts das erste Integral nach links bringen und die Integrationsgrenzen (mit Hilfe von 1°) vertauschen.

---

[1]) Wir werden, wenn vom Integral $\int\limits_a^b$ gesprochen wird und spezielle Voraussetzungen fehlen, beide Fälle $a < b$ und $a > b$ für möglich halten.

[2]) Statt dessen könnte man auch voraussetzen, daß die Funktion $f(x)$ in jedem der beiden kleineren Intervalle integrierbar ist; dann würde sie auch in dem großen Intervall integrierbar sein.

3°. *Ist* $f(x)$ *im Intervall* $[a, b]$ *integrierbar, so ist auch* $kf(x)$, $k = \text{const}$, *dort integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

4°. *Sind* $f(x)$ *und* $g(x)$ *im Intervall* $[a, b]$ *integrierbar, so ist auch* $f(x) \pm g(x)$ *dort integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.^{1)}$$

Beide Fällen lassen sich analog beweisen, indem nämlich von den Integralsummen ausgegangen und dann zum Grenzwert übergegangen wird. Wir wollen dies für 4° zeigen. Dazu zerlegen wir das Intervall $[a, b]$ beliebig und bilden die Integralsummen für alle drei Integrale. Dabei wählen wir die Punkte ξ_i in jedem Teilintervall beliebig, aber für alle Summen gleich. Dann ist

$$\sum [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\,\Delta x_i = \sum f(\xi_i)\,\Delta x_i \pm \sum g(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Nun gehe $\lambda \to 0$; da für beide Summen auf der rechten Seite der Grenzwert existiert, besitzt auch die linke Summe einen Grenzwert. Damit ist die Integrierbarkeit von $f(x) \pm g(x)$ bewiesen. Gehen wir in der letzten Gleichung zu den Grenzwerten über, so erhalten wir die gewünschte Beziehung.

Bemerkung. Zum Beweis der letzten beiden Behauptungen braucht man nicht die Sätze I und II aus Nr. 299 heranzuziehen; die Integrierbarkeit der Funktionen $kf(x)$ und $f(x) \pm g(x)$ wird durch Grenzübergang unmittelbar nachgewiesen.

304. Eigenschaften, die sich in Ungleichungen ausdrücken. Bis jetzt haben wir diejenigen Eigenschaften der Integrale betrachtet, die sich durch Gleichungen ausdrücken lassen; wir gehen nun zu solchen über, die durch *Ungleichungen* darstellbar sind.

5°. *Ist eine im Intervall* $[a, b]$ *integrierbare Funktion* $f(x)$ *nichtnegativ und gilt* $a < b$, *so ist*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqq 0.$$

Der Beweis hierfür ist klar. Schwieriger ist er für die folgende schärfere Aussage: *Ist eine im Intervall* $[a, b]$ *integrierbare Funktion* $f(x)$ *positiv und gilt* $a < b$, *so ist*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0.$$

Beweis. Wir führen ihn indirekt. Es sei also

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

1) Es sei ausdrücklich betont, daß umgekehrt *keineswegs* aus der Existenz des linken Integrals die Existenz der beiden rechten Integrale folgt. — *Anm. d. Red.*

Dann strebt für $\lambda \to 0$ auch die obere Darbouxsche Summe S gegen 0 (vgl. (7) aus Nr. 297). Mit Hilfe eines beliebigen $\varepsilon_1 > 0$ können wir diese Summe kleiner als $\varepsilon_1(b-a)$ machen. Dabei ist wenigstens eine der oberen Grenzen M_i kleiner als ε_1, d. h., es gibt in $[a, b]$ ein solches Teilintervall $[a_1, b_1]$, in dessen Innerem *alle* Werte von $f(x)$ kleiner als ε_1 sind.

Da auch

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x)\,dx = 0$$

gilt[1]), läßt sich analog aus $[a_1, b_1]$ ein Teilintervall $[a_2, b_2]$ auswählen, in dessen Innerem $f(x) < \varepsilon_2$ ist, wobei ε_2 eine beliebige positive Zahl $< \varepsilon_1$ ist, usw.

Nehmen wir also eine gegen 0 konvergierende Folge von positiven Zahlen ε_k, so können wir eine Folge ineinandergeschachtelter Intervalle $[a_k, b_k]$, deren Längen gegen 0 streben, derart bestimmen, daß

$$0 < f(x) < \varepsilon_k \quad \text{für} \quad a_k \leqq x \leqq b_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist. Dann existiert auf Grund des Lemmas aus Nr. 38 ein Punkt c, der in allen diesen Intervallen liegt; für ihn muß

$$0 < f(c) < \varepsilon_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

gelten. Das ist aber nicht möglich, denn es strebt $\varepsilon_k \to 0$. Damit ist der Satz bewiesen.

Eine einfache Folgerung hieraus (und aus 4°) lautet:

6°. *Sind zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ im Intervall $[a, b]$ integrierbar und ist stets $f(x) \leqq g(x)$ bzw. $f(x) < g(x)$, so gilt auch*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx \quad \textit{bzw.} \quad \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$$

für $a < b$.

Man braucht nur die vorhergehende Eigenschaft auf die Differenz $g(x) - f(x)$ anzuwenden, um diesen Satz zu erhalten.

Ebenso leicht ergibt sich die folgende Eigenschaft:

7°. *Ist eine Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ integrierbar und gilt $a < b$, so ist*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Die Existenz des Integrals auf der rechten Seite dieser Ungleichung folgt aus Eigenschaft I von Nr. 299. Dann braucht nur noch die Eigenschaft 6° auf die Funktionen

$$-|f(x)| \leqq f(x) \leqq |f(x)|$$

---

[1]) Auf Grund von 2° ist nämlich $\int_a^b = \int_a^{a_1} + \int_{a_1}^{b_1} + \int_{b_1}^{b}$, also wegen $\int_a^{a_1} \geqq 0, \int_{b_1}^{b} \geqq 0$

$$0 \leqq \int_{a_1}^{b_1} \leqq \int_a^b = 0.$$

angewendet zu werden. Übrigens ergibt sich die Ungleichung auch unmittelbar, wenn man die entsprechenden Integralsummen konstruiert, die Ungleichung

$$\left|\sum f(\xi_i)\,\Delta x_i\right| \leqq \sum |f(\xi_i)| \cdot \Delta x_i$$

beachtet[1]) und zu den Grenzwerten übergeht.

8°. *Ist $f(x)$ in $[a, b]$ integrierbar, wobei $a < b$ sei, und gilt im ganzen Intervall die Ungleichung*

$$m \leqq f(x) \leqq M,$$

so ist

$$m(b-a) \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq M(b-a).$$

Man kann die Eigenschaft 6° auf die Funktionen m, $f(x)$ und M anwenden, aber einfacher ist es, unmittelbar die einleuchtenden Ungleichungen

$$m \sum \Delta x_i \leqq \sum f(\xi_i)\,\Delta x_i \leqq M \sum \Delta x_i$$

zu benutzen[1]) und zu den Grenzwerten überzugehen.

Den bewiesenen Beziehungen können wir die bequemere Gestalt einer Gleichung geben und uns gleichzeitig von der Einschränkung $a < b$ befreien:

9°. Der Mittelwertsatz der Integralrechnung.[2]) *Ist $f(x)$ in $[a, b]$, $a \lesseqgtr b$, integrierbar und gilt $m \leqq f(x) \leqq M$ in diesem ganzen Intervall, so gibt es eine Zahl μ mit $m \leqq \mu \leqq M$, für welche*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)$$

gilt.

Beweis. *Ist $a < b$,* so gilt wegen 8°

$$m(b-a) \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq M(b-a),$$

also

$$m \leqq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqq M.$$

Setzen wir

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \mu,$$

so erhalten wir die geforderte Gleichung.

---

[1]) Wegen $a < b$ sind alle Δx_i positiv.

[2]) Auch *erster Mittelwertsatz der Integralrechnung* genannt. In der Bezeichnung der Mittelwertsätze der Integralrechnung herrscht keine Einheitlichkeit. — *Anm. d. Rred.*

Im Fall $a > b$ stellen wir dieselben Überlegungen für $\int\limits_b^a$ an und gelangen nach Vertauschung der Integrationsgrenzen zu der gesuchten Formel.

Die eben bewiesene Gleichung nimmt eine besonders einfache Gestalt an, *wenn* $f(x)$ *in* $a \leqq x \leqq b$ *bzw.* $a \geqq x \geqq b$ *stetig ist*; denn sind m und M der kleinste bzw. der größte Wert von $f(x)$, die auf Grund des Satzes von WEIERSTRASS[1]) (Nr. 85) existieren, so muß der Zwischenwert μ auf Grund des Satzes von BOLZANO[2])-CAUCHY[3]) (Nr. 82) von der Funktion $f(x)$ in einem gewissen Punkt c aus $[a, b]$ angenommen werden, so daß also

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\,f(c)$$

ist.

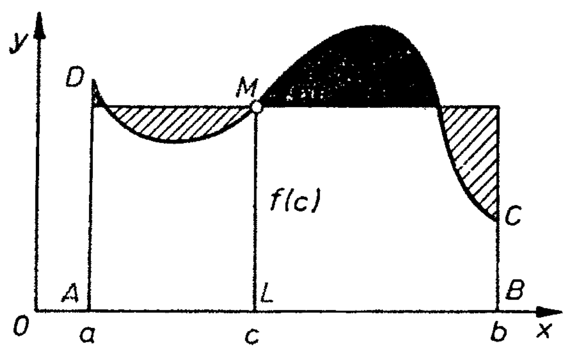

Abb. 5

Die geometrische Bedeutung der letzten Beziehung ist klar. Es sei $f(x) \geqq 0$, und wir betrachten das krummlinige Trapez $ABCD$ (Abb. 5) unterhalb der Kurve $y = f(x)$. Dann ist der Flächeninhalt der Figur $ABCD$ (der sich durch ein bestimmtes Integral ausdrücken läßt) gleich dem des Rechtecks mit der gleichen Basis und mit einer gewissen Ordinate $LM = f(c)$ in einem zwischen a und b liegenden Punkt c als Höhe.

10°. Der verallgemeinerte Mittelwertsatz der Integralrechnung. *Es sei* a) $f(x)$ *und* $g(x)$ *im Intervall* $[a, b]$ *integrierbar,* b) $m \leqq f(x) \leqq M$, c) $g(x) \geqq 0$ (*bzw.* $g(x) \leqq 0$) *in ganz* $[a, b]$. *Dann gibt es eine Zahl* μ *mit* $m \leqq \mu \leqq M$ *derart, daß*

$$\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = \mu \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

ist.[4])

Beweis. Wir setzen zunächst $g(x) \geqq 0$ und $a < b$ voraus; dann ist

$$mg(x) \leqq f(x)\,g(x) \leqq Mg(x).$$

Aus dieser Ungleichung erhalten wir auf Grund von 6° und 3°

$$m \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqq \int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x \leqq M \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

---

[1]) KARL WEIERSTRASS, 1815—1897, deutscher Mathematiker.

[2]) BERNARD BOLZANO, 1781—1848, tschechischer Mathematiker und Philosoph.

[3]) AUGUSTIN LOUIS CAUCHY, 1789—1857, französischer Mathematiker.

[4]) Die Existenz des Integrals von $f(x)\,g(x)$ folgt aus Eigenschaft II von Nr. 299. Übrigens könnte man auch statt der Integrierbarkeit von $f(x)$ gleich die des Produktes $f(x)\,g(x)$ fordern.

Infolge der Voraussetzung über $g(x)$ und der Eigenschaft 5° ist

$$\int_a^b g(x)\,dx \geqq 0.$$

Gilt hier das Gleichheitszeichen, so folgt sofort aus der vorhergehenden Ungleichung

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = 0,$$

die Behauptung des Satzes ist also richtig. Ist das Integral positiv, so können wir die obige Ungleichungskette durch dieses Integral dividieren und erhalten mit

$$\frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} = \mu$$

die Behauptung.

Vom Fall $a < b$ können wir leicht zu $a > b$ und von $g(x) \geqq 0$ zu $g(x) \leqq 0$ übergehen; die Vertauschung der Integrationsgrenzen oder die Vorzeichenänderung von $g(x)$ hat auf die Gültigkeit der Behauptung keinen Einfluß.

Ist $f(x)$ *stetig*, so läßt sich die Formel in der Gestalt

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

schreiben, wobei c in $[a, b]$ enthalten ist.

305. Das bestimmte Integral als Funktion der oberen Grenze. Ist die Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$, $a \gtrless b$, integrierbar, so ist sie auch im Intervall $[a, x]$ integrierbar (vgl. Nr. 299, Eigenschaft III), wobei x ein beliebiger Wert aus $[a, b]$ ist. Ersetzen wir die Grenze b des bestimmten Integrals durch die Veränderliche x, so erhalten wir den Ausdruck

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt,^{1)} \tag{1}$$

der offenbar eine Funktion von x ist. Diese Funktion besitzt die folgenden Eigenschaften:

11°. *Ist die Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ integrierbar, so ist $\Phi(x)$ dort eine stetige Funktion von x.*

Beweis. Wir vergrößern x um einen beliebigen Zuwachs $\Delta x = h$ (aber so, daß $x + h$ nicht aus dem betrachteten Intervall herausführt) und erhalten für die Funk-

[1]) Die Integrationsveränderliche bezeichnen wir hier mit t, um sie nicht mit der oberen Integrationsgrenze x zu verwechseln. Es ist klar, daß die Änderung in der *Bezeichnung* der Integrationsveränderlichen keinen Einfluß auf den Wert des Integrals hat.

tion (1) den entsprechenden Wert

$$\Phi(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt = \int_a^x + \int_x^{x+h}$$

(vgl. 2°), so daß

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

ist. Auf dieses Integral wenden wir den Mittelwertsatz 9° an:

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) = \mu h; \tag{2}$$

hier liegt μ zwischen den Grenzen m' und M' der Funktion $f(x)$ im Intervall $[x, x+h]$ und somit erst recht zwischen den (konstanten) Grenzen m und M im Grundintervall $[a, b]$.[1])

Für $h \to 0$ gilt offenbar

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) \to 0 \quad \text{oder} \quad \Phi(x+h) \to \Phi(x),$$

womit die Stetigkeit von $\Phi(x)$ bewiesen ist.

12°. *Ist die Funktion $f(t)$ im Punkt $t = x$ stetig, so hat die Funktion $\Phi(x)$ in diesem Punkt die Ableitung $f(x)$:*

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Beweis. Aus (2) folgt

$$\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \mu \quad \text{mit} \quad m' \leqq \mu \leqq M'.$$

Da $f(t)$ für $t = x$ stetig ist, läßt sich zu jedem $\varepsilon > 0$ ein solches $\delta > 0$ finden, daß für $|h| < \delta$ und für alle Werte t aus $[x, x+h]$

$$f(x) - \varepsilon < f(t) < f(x) + \varepsilon$$

ist. Dann gelten auch die Ungleichungen

$$f(x) - \varepsilon \leqq m' \leqq \mu \leqq M' \leqq f(x) + \varepsilon;$$

also ist

$$|\mu - f(x)| \leqq \varepsilon,$$

und somit existiert

$$\Phi'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \mu = f(x),$$

was zu beweisen war.

Wir kommen so zu einer Schlußfolgerung, die von prinzipieller Bedeutung ist. Da bekanntlich (Nr. 298, I) eine im ganzen Intervall $[a, b]$ stetige Funktion $f(x)$ dort auch integrierbar ist, läßt sich die vorhergehende Behauptung auf einen *beliebigen* Punkt x aus $[a, b]$ anwenden: *Die Ableitung des Integrals* (1) *nach der variablen oberen*

---

[1]) Eine integrierbare Funktion ist nämlich *beschränkt* (Nr. 295).

Grenze x ist stets gleich dem Wert $f(x)$ des Integranden an dieser Stelle, d. h., zu einer im Intervall $[a, b]$ stetigen Funktion $f(x)$ existiert stets eine Stammfunktion, z. B. das Integral (1) *mit variabler oberer Grenze.*

Damit haben wir den Satz bewiesen, den wir schon in Nr. 264 erwähnten.

Insbesondere lassen sich jetzt die Legendreschen Funktionen F und E (Nr. 293) als bestimmte Integrale schreiben:

$$F(k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \qquad E(k, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}\, d\theta.$$

Nach dem eben Bewiesenen sind dies Stammfunktionen für

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi};$$

F und E verschwinden für $\varphi = 0$.

Bemerkung. Die in Nr. 305 bewiesenen Behauptungen lassen sich leicht auf Integrale mit variabler unterer Grenze übertragen, denn wegen 1° gilt

$$\int_x^b f(t)\, dt = -\int_b^x f(t)\, dt.$$

Die Ableitung dieses Integrals nach x ist offenbar gleich $-f(x)$, wenn die Funktion im Punkt x stetig ist.

306. Der zweite Mittelwertsatz der Integralrechnung. Wir formulieren jetzt noch einen Satz, der das Integral eines Produktes zweier Funktionen betrifft:

$$I = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx.$$

Dieser Satz kann in verschiedenen Formen ausgesprochen werden. Wir beweisen zunächst die folgende Behauptung:

13°. *Ist die Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$, $a < b$, monoton fallend (auch im weiteren Sinne) und nichtnegativ und ist die Funktion $g(x)$ integrierbar, so gilt*

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(a) \int_a^\xi g(x)\, dx, \tag{3}$$

wobei ξ ein wohlbestimmter Wert aus $[a, b]$ ist.

Zunächst bemerkt man, daß wegen der Monotonie (vgl. Nr. 298, III) auch $f(x)$ und somit $f(x)\, g(x)$ integrierbar sind.

Wir zerlegen nun $[a, b]$ mit Hilfe von Teilpunkten $x_i (i = 0, 1, \ldots, n)$, um das Integral I in der folgenden Form darzustellen:

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) g(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)\, dx + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x) - f(x_i)]\, g(x)\, dx = \sigma + \varrho.$$

Mit L bezeichnen wir eine obere Schranke der Funktion $|g(x)|$ und mit ω_i wie üblich die Schwankung der Funktion $f(x)$ im i-ten Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ der Länge Δx_i. Dann ist offenbar mit $\lambda = \max \Delta x_i$

$$|\varrho| \leqq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x) - f(x_i)| \cdot |g(x)| \, dx \leqq L \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \, \Delta x_i \leqq L\lambda\bigl(f(b) - f(a)\bigr).$$

Somit gilt $\lim\limits_{\lambda \to 0} \varrho = 0$ und demnach $I = \lim\limits_{\lambda = 0} \sigma$. Wir führen nun die Funktion

$$G(x) = \int_a^x g(t) \, dt$$

ein und bringen mit ihrer Hilfe die Summe σ auf die Gestalt

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \, [G(x_{i+1}) - G(x_i)]$$

oder, wenn wir die Klammer auflösen und die Summanden anders gruppieren,

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n-1} G(x_i) \, [f(x_{i+1}) - f(x_i)] + G(b) \, f(x_{n-1}).$$

Die wegen 11° aus Nr. 305 stetige Funktion $G(x)$ hat, wenn x zwischen a und b variiert, sowohl einen kleinsten Wert m als auch einen größten Wert M (Nr. 85). Da alle Faktoren

$$f(x_{i-1}) - f(x_i) \quad (\text{für } i = 1, 2, \ldots, n-1) \quad \text{und} \quad f(x_{n-1})$$

auf Grund der bezüglich $f(x)$ gemachten Voraussetzungen nichtnegativ sind, erhalten wir, wenn wir den Wert von G durch m bzw. M ersetzen, zwei Zahlen

$$mf(a) \quad \text{und} \quad Mf(a),$$

zwischen denen die Summe σ eingeschlossen ist. Zwischen diesen beiden Zahlen ist aber auch das Integral I als Grenzwert von σ enthalten, also ist $I = \mu f(a)$ mit $m \leqq \mu \leqq M$. Nun existiert im Intervall $[a, b]$ wegen der Stetigkeit von $G(x)$ ein ξ derart, daß $\mu = G(\xi)$ ist (Nr. 82). Also ist $I = f(a) \, G(\xi)$ in Übereinstimmung mit (3).

Analog gilt die Formel

$$\int_a^b f(x) \, g(x) \, dx = f(b) \int_\xi^b g(x) \, dx \qquad (a \leqq \xi \leqq b),$$

wenn $f(x)$ *nichtnegativ und monoton wachsend ist.* Diese Beziehung heißt im allgemeinen *Bonnetsche*[1]) *Formel.*

Schließlich beweisen wir noch den folgenden Satz:

14°. *Ist die Funktion $f(x)$ nur monoton, so gilt*

$$\int_a^b f(x) \, g(x) \, dx = f(a) \int_a^\xi g(x) \, dx + f(b) \int_\xi^b g(x) \, dx \quad (a \leqq \xi \leqq b). \tag{4}$$

---

[1]) PIERRE OSSIAN BONNET, 1819—1892, französischer Mathematiker und Astronom.

Ist die Funktion $f(x)$ etwa monoton fallend, dann ist offenbar $f(x) - f(b) \geqq 0$, so daß man auf diese Funktion nur die Formel (3) anzuwenden braucht, um nach einigen Umformungen zu (4) zu gelangen. Dieser Satz heißt *zweiter Mittelwertsatz der Integralrechnung* (vgl. 10° aus Nr. 304).

Die folgende einfache Bemerkung erlaubt, diesem Satz eine allgemeinere Form zu geben. Ändert man die Werte der Funktion $f(x)$ in den Punkten a und b, indem man statt dieser Werte beliebige Zahlen A und B wählt, denen nur die Bedingungen

$$A \geqq f(a+0) \quad \text{und} \quad B \leqq f(b-0), \qquad \text{wenn } f \text{ abnimmt,}$$

$$A \leqq f(a+0) \quad \text{und} \quad B \geqq f(b-0), \qquad \text{wenn } f \text{ zunimmt,}$$

auferlegt seien, behält nicht nur das Integral I seinen Wert, sondern auch die Funktion $f(x)$ ihre Monotonie bei, so daß man nach dem Muster von (4)

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = A\int_a^\xi g(x)\,dx + B\int_\xi^b g(x)\,dx \tag{5}$$

behaupten kann. Insbesondere ist

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(a+0)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b-0)\int_\xi^b g(x)\,dx. \tag{5*}$$

Wie oben ist auch hier ξ eine gewisse Zahl aus dem Intervall $[a, b]$, die aber im allgemeinen von der Wahl der Zahlen A und B abhängt.

§ 3. Berechnung und Darstellung bestimmter Integrale

307. Berechnung mit Hilfe der Integralsummen. Wir geben nun eine Reihe von Beispielen an, wie ein bestimmtes Integral (entsprechend seiner Definition) unmittelbar als Grenzwert von Integralsummen berechnet werden kann. Wir wissen, daß das Integral einer stetigen Funktion existiert, und können zu seiner Berechnung eine Zerlegung des Intervalls und Punkte ξ wählen, indem wir uns ausschließlich von Zweckmäßigkeitsgründen leiten lassen.

1. $\int_a^b x^k\,dx$ (a und b seien beliebige reelle Zahlen, k sei eine natürliche Zahl). Zunächst berechnen wir das Integral $\int_0^a x^k\,dx$ $(a \neq 0)$. Das Intervall $[0, a]$ zerlegen wir in n *gleiche* Teile und berechnen die Funktion x^k in jedem dieser Teilintervalle in seinem rechten Endpunkt, wenn $a > 0$, bzw. in seinem linken Endpunkt, wenn $a < 0$ ist. Die Integralsumme lautet dann

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}a\right)^k \cdot \frac{a}{n} = a^{k+1}\,\frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}};$$

mit Rücksicht auf Nr. 33, Beispiel 14, gilt daher

$$\int_0^a x^k\,dx = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \frac{a^{k+1}}{k+1}.$$

Hieraus ergibt sich leicht die allgemeine Formel

$$\int_a^b x^k \, dx = \int_0^b - \int_0^a = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

2. $\int_a^b x^\mu \, dx$ ($b > a > 0$; μ sei eine beliebige reelle Zahl). Jetzt zerlegen wir das Intervall $[a, b]$ in *ungleiche Teile*, und zwar mit Hilfe der Zahlen

$$a, aq, \ldots, aq^i, \ldots, aq^n = b,$$

wobei

$$q = q_n = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$$

sei. Für $n \to \infty$ strebt $q = q_n$ gegen 1, und alle Differenzen $aq^{i+1} - aq^i$ sind kleiner als die gegen 0 strebende Größe $b(q-1)$.

Berechnen wir die Funktion für die *linken* Endpunkte der Teilintervalle, so erhalten wir

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} (aq^i)^\mu (aq^{i+1} - aq^i) = a^{\mu+1}(q-1) \sum_{i=0}^{n-1} (q^{\mu+1})^i.$$

Für $\mu \neq -1$ ergibt sich

$$\sigma_n = a^{\mu+1}(q-1) \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\mu+1} - 1}{q^{\mu+1} - 1} = (b^{\mu+1} - a^{\mu+1}) \frac{q-1}{q^{\mu+1} - 1};$$

benutzen wir den schon bekannten Grenzwert (vgl. Nr. 77, Beispiel 5(c)), so finden wir

$$\int_a^b x^\mu \, dx = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = (b^{\mu+1} - a^{\mu+1}) \lim_{q \to 1} \frac{q-1}{q^{\mu+1} - 1} = \frac{b^{\mu+1} - a^{\mu+1}}{\mu + 1}.$$

Im Fall $\mu = -1$ gilt

$$\sigma_n = n(q_n - 1) = n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\right),$$

also auf Grund eines anderen Ergebnisses (ebenda (b))

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\right) = \ln b - \ln a.$$

3. $\int_a^b \sin x \, dx$. Wir zerlegen das Intervall $[a, b]$ in n gleiche Teile, indem wir $h = \frac{b-a}{n}$ setzen; $\sin x$ wird an den *linken* Endpunkten berechnet, falls $a > b$ ist, an den *rechten* Endpunkten, falls $a < b$ ist. Dann gilt

$$\sigma_n = h \sum_{i=1}^{n} \sin(a + ih).$$

Um die Summe in geschlossener Form darstellen zu können, erweitern wir sie mit $2 \sin \frac{h}{2}$ und schreiben dann alle Summanden als Differenzen des Kosinus; damit finden wir leicht

$$\sum_{i=1}^{n} \sin(a + ih) = \frac{1}{2\sin\frac{h}{2}} \sum_{i=1}^{n} 2\sin(a + ih)\sin\frac{h}{2}$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{h}{2}} \sum_{i=1}^{n} \left(\cos\left[a + \left(i - \frac{1}{2}\right)h\right] - \cos\left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right)h\right]\right)$$

$$= \frac{\cos\left(a + \frac{1}{2}h\right) - \cos\left(a + \left(n + \frac{1}{2}\right)h\right)}{2\sin\frac{h}{2}}. \tag{1}$$

Also gilt

$$\sigma_n = \frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a + \frac{1}{2}h\right) - \cos\left(b + \frac{1}{2}h\right)\right].$$

Da h für $n \to \infty$ gegen 0 strebt, ergibt sich

$$\int_a^b \sin x \, dx = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a + \frac{1}{2}h\right) - \cos\left(b + \frac{1}{2}h\right)\right] = \cos a - \cos b.$$

Analog ist

$$\int_a^b \cos x \, dx = \sin b - \sin a,$$

wenn wir von der elementaren Formel

$$\sum_{i=1}^{n} \cos(a + ih) = \frac{\sin\left(a + \left(n + \frac{1}{2}\right)h\right) - \sin\left(a + \frac{1}{2}h\right)}{2\sin\frac{h}{2}} \tag{2}$$

ausgehen.[1])

4. Um ein weniger triviales Beispiel zu untersuchen, betrachten wir das Integral

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2r\cos x + r^2) \, dx,$$

das im allgemeinen mit dem Namen Poisson[2]) verknüpft ist. Wegen

$$(1 - |r|)^2 = 1 - 2r\cos x + r^2$$

erkennen wir, wenn wir $|r| \neq 1$ voraussetzen, daß der Integrand stetig ist, das Integral also existiert.

[1]) Diese Formel ergibt sich aus (1), wenn dort a durch $a + \pi/2$ ersetzt wird.

[2]) Simeon Denis Poisson, 1781—1840, französischer Mathematiker.

Zerlegen wir das Intervall $[0, \pi]$ in n gleiche Teile, so gilt

$$\sigma_n = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - 2r\cos k\frac{\pi}{n} + r^2\right)$$
$$= \frac{\pi}{n} \ln\left[(1+r)^2 \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - 2r\cos k\frac{\pi}{n} + r^2\right)\right].$$

Nun ist aus der Algebra die Zerlegung

$$z^{2n} - 1 = (z^2 - 1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - 2z\cos\frac{k\pi}{n} + z^2\right)$$

bekannt.[1] Benutzen wir sie für $z = r$, so läßt sich σ_n in der Form

$$\sigma_n = \frac{\pi}{n}\ln\left[\frac{r+1}{r-1}(r^{2n} - 1)\right]$$

darstellen. Für $|r| < 1$ strebt r^{2n} gegen 0, also ist

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2r\cos x + r^2)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sigma_n = 0.$$

Ist $|r| > 1$, so schreiben wir σ_n in der Gestalt

$$\sigma_n = \frac{\pi}{n}\ln\left[\frac{r+1}{r-1}\,\frac{r^{2n}-1}{r^{2n}}\right] + 2\pi\ln|r|;$$

dann ist also

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2r\cos x + r^2)\,dx = 2\pi\ln|r|.$$

Man erkennt, daß die direkte Methode, ein bestimmtes Integral mit Hilfe von Integralsummen zu berechnen, sogar in einfachen Fällen einen großen Aufwand erfordert; daher benutzt man sie selten. Praktischer ist das Verfahren, das wir in Nr. 308 behandeln wollen.

---

[1]) Berücksichtigt man die Werte der $2n$-ten Einheitswurzeln, so hat die Zerlegung von $z^{2n} - 1$ in Linearfaktoren die Gestalt

$$z^{2n} - 1 = \prod_{k=-n}^{n-1}\left(z - \cos\frac{k\pi}{n} - \mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{n}\right),$$

wobei i die imaginäre Einheit ist. Trennt man die Faktoren $z + 1$ und $z - 1$ ab (die den Werten $k = -n$ bzw. $k = 0$ entsprechen) und faßt die konjugiert komplexen Faktoren zusammen, so ist

$$z^{2n} - 1 = (z^2 - 1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(z - \cos\frac{k\pi}{n} - \mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{n}\right)\left(z - \cos\frac{k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{n}\right)$$
$$= (z^2 - 1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - 2z\cos\frac{k\pi}{n} + z^2\right).$$

308. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. In Nr. 305 sahen wir, daß das Integral

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

einer im Intervall $[a, b]$ stetigen Funktion $f(x)$ eine *Stammfunktion* ist. Ist $F(x)$ eine *beliebige*, z. B. eine mit Hilfe der Methoden aus Kap. VIII, § 1—4, gefundene Stammfunktion für $f(x)$, so ist (vgl. Nr. 263)

$$\Phi(x) = F(x) + C.$$

Die Konstante C läßt sich leicht bestimmen, wenn hier $x = a$ gesetzt wird, denn es ist $\Phi(a) = 0$; also gilt

$$0 = \Phi(a) = F(a) + C, \qquad C = -F(a),$$

so daß wir schließlich

$$\Phi(x) = F(x) - F(a)$$

erhalten.

Insbesondere ergibt sich für $x = b$

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a). \tag{A}$$

Dies ist der *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.*[1] *Der Wert eines bestimmten Integrals ist also gleich der Differenz der beiden Werte einer beliebigen Stammfunktion an den Stellen $x = b$ und $x = a$.*

Wenden wir auf das Integral den Mittelwertsatz an (9° aus Nr. 304) und berücksichtigen wir $f(x) = F'(x)$, so finden wir

$$F(b) - F(a) = f(c) \cdot (b - a) = F'(c) \cdot (b - a) \qquad (a \leqq c \leqq b),$$

d. h. den ersten Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Nr. 112) für $F(x)$. Damit haben wir mit Hilfe der Grundformel (A) einen Zusammenhang zwischen den Mittelwertsätzen der Differential- und der Integralrechnung hergestellt.

Die Formel (A) ist ein praktisches und einfaches Mittel zur Berechnung des bestimmten Integrals einer stetigen Funktion $f(x)$. Bei einer Reihe einfacher Klassen solcher Funktionen können wir die Stammfunktion in geschlossener Form durch elementare Funktionen ausdrücken. In diesen Fällen läßt sich das bestimmte Integral unmittelbar mit Hilfe von (A) berechnen. Wir erwähnen nur, daß wir die Differenz auf der rechten Seite von (A) im allgemeinen mit dem Symbol $F(x)|_a^b$ bezeichnen und also

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)|_a^b \tag{A*}$$

[1]) Diese Beziehung wird manchmal auch *Newton-Leibnizsche Formel* genannt. Man sieht, daß hier die Überlegungen vollkommen analog denen sind, die wir in Nr. 264 zur Berechnung der Funktion $P(x)$ und des Flächeninhalts P benutzt haben. Die Formel (A) könnte man auch leicht durch Vereinigung der Resultate aus Nr. 264 und 294 erhalten.

schreiben. So finden wir z. B. sofort

$$1. \int_a^b x^\mu \, dx = \left.\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right|_a^b = \frac{b^{\mu+1} - a^{\mu+1}}{\mu+1} \qquad (\mu \neq -1, a > 0, b > 0),$$

$$2. \int_a^b \frac{dx}{x} = \ln x|_a^b = \ln b - \ln a \qquad (a > 0, b > 0),$$

$$3. \int_a^b \sin x \, dx = -\cos x|_a^b = \cos a - \cos b,$$

$$\int_a^b \cos x \, dx = \sin x|_a^b = \sin b - \sin a,$$

also Resultate, die wir nicht ganz ohne Mühe schon in Nr. 307 erhielten (vgl. dort die Beispiele 1 bis 3).[1]

309. Beispiele. Wir geben noch weitere Beispiele für die Benutzung der Formel (A) an:

$$4. \text{ (a) } \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0 \qquad (n \neq m),$$

$$\text{(b) } \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx \, dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2mx}{2m}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \pi \quad \text{(vgl. Nr. 267, Beispiel 17, 18).}$$

Analog ist

$$\text{(c) } \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0,$$

$$\text{(d) } \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad n \neq m, \\ \pi & \text{für} \quad n = m. \end{cases}$$

5. Man bestimme für natürliche Zahlen n, m den Wert des Integrals

$$\text{(a) } \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2m-1)x}{\sin x} \, dx, \qquad \text{(b) } \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx.$$

Hinweis. (a) Aus (2) folgt, wenn dort $a = 0$, $h = 2x$ und $n = m - 1$ gesetzt wird,

$$\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{m-1} \cos 2ix = \frac{\sin(2m-1)x}{2\sin x}.$$

[1]) Das Beispiel 4 aus Nr. 307 kann nicht so einfach gelöst werden, denn das entsprechende unbestimmte Integral läßt sich nicht in geschlossener Form angeben.

Hieraus folgt sofort, da die einzelnen Summanden unter Verwendung von (A) leicht integriert werden können,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2m-1)x}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

(b) Mit $a = -x$, $h = 2x$ folgt aus (1)

$$\sum_{m=1}^{n} \sin(2m-1)x = \frac{1-\cos 2nx}{2\sin x} = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}$$

und hieraus unter Verwendung des vorhergehenden Resultats

$$\int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx = n\frac{\pi}{2}.$$

6. Man berechne das Integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}\,\sqrt{1-2\beta x+\beta^2}} \qquad (0 < \alpha, \beta < 1).$$

In der Formel

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|ax+\frac{b}{2}+\sqrt{a}\,\sqrt{ax^2+bx+c}\right| + C \qquad (a > 0)$$

(vgl. (6*) aus Nr. 283) setzen wir

$$ax^2+bx+c = (1-2\alpha x+\alpha^2)(1-2\beta x+\beta^2);$$

dann finden wir durch Differentiation der letzten Gleichung

$$ax+\frac{b}{2} = -\alpha(1-2\beta x+\beta^2) - \beta(1-2\alpha x+\alpha^2).$$

Daraus folgt, daß das Argument des Logarithmus für $x = 1$ den Wert

$$\begin{aligned}-\alpha(1-\beta)^2-\beta(1-\alpha)^2+2\sqrt{\alpha\beta}\,(1-\alpha)(1-\beta) &= -\left[\sqrt{\alpha}\,(1-\beta)-\sqrt{\beta}\,(1-\alpha)\right]^2\\ &= -\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)^2\left(1+\sqrt{\alpha\beta}\right)^2,\end{aligned}$$

für $x = -1$ den Wert

$$-\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)^2\left(1-\sqrt{\alpha\beta}\right)^2$$

hat. Damit ergibt sich schließlich für das gesuchte Integral der einfache Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \ln\frac{1+\sqrt{\alpha\beta}}{1-\sqrt{\alpha\beta}},$$

der nur vom Produkt $\alpha\beta$ abhängt.[1])

Wir weisen darauf hin, daß bei der Herleitung der Formel (A) nicht gefordert wurde, daß die Funktion $F(x)$ eine Stammfunktion für $f(x)$ im *abgeschlossenen* Intervall $[a, b]$ ist. Auf

[1]) Unsere Überlegungen sind nur für $\alpha \neq \beta$ einwandfrei, aber wir sehen leicht, daß das Ergebnis auch für $\alpha = \beta$ richtig ist.

Grund der Folgerung aus Nr. 131 würde es genügen, dies für das offene Intervall (a, b) vorauszusetzen, nur müßte die Funktion $F(x)$ in den Punkten a und b stetig bleiben. Daher sind wir berechtigt, die folgende Beziehung aufzuschreiben (vgl. Nr. 268):

7. $$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \left[\frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}\right]\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{\pi a^2}{2},$$

obwohl die Frage nach der Ableitung der gefundenen Stammfunktion in den Punkten $x = \pm a$ noch zu klären wäre.

Einigen Schwierigkeiten begegnen wir bei der Berechnung des folgenden Integrals:

8. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos x + r^2}\, dx$ $(0 < r < 1)$. Hier hat nämlich die in Nr. 288, Beispiel 13, gefundene Stammfunktion

$$F(x) = 2 \arctan \left(\frac{1 + r}{1 - r} \tan \frac{x}{2}\right)$$

für $x = \pm\pi$ keinen Sinn. Jedoch existieren offenbar die Grenzwerte

$$\lim_{x \to -\pi+0} F(x) = -\pi, \qquad \lim_{x \to \pi-0} F(x) = \pi.$$

Setzt man, wie gewöhnlich, $F(-\pi)$ und $F(\pi)$ gleich diesen Grenzwerten, so ist die Funktion $F(x)$ in den Endpunkten des Intervalls nicht nur definiert, sondern auch stetig. Daher ist

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos x + r^2}\, dx = F(x)\big|_{-\pi}^{\pi} = F(\pi) - F(-\pi) = 2\pi.$$

9. Analog läßt sich auch das Integral

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{A\cos^2 x + 2B\cos x \sin x + C\sin^2 x} \qquad (AC - B^2 > 0)$$

berechnen. Für die Stammfunktion hatten wir schon (vgl. Nr. 288, Beispiel 10) den Ausdruck

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{AC - B^2}} \arctan \frac{C\tan x + B}{\sqrt{AC - B^2}}$$

gefunden, der für $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ anwendbar ist. Daraus folgt

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{A\cos^2 x + 2B\cos x \sin x + C\sin^2 x} = F(x)\Big|_{-\pi/2+0}^{\pi/2-0} = \frac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}},$$

wobei die Zeichen $-\dfrac{\pi}{2} + 0$ und $\dfrac{\pi}{2} - 0$ anzeigen, daß die entsprechenden Grenzwerte der Funktion $F(x)$ zu nehmen sind.

10. Gehen wir bei der Berechnung des Integrals

$$\int_{0}^{1} \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1}\, dx$$

von der formal berechneten Stammfunktion

$$-\frac{1}{3}\arctan\frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}$$

aus und setzen wir hier $x = 0$ und $x = 1$, so erhalten wir den paradoxen Wert 0 (das Integral einer positiven Funktion kann aber niemals gleich 0 sein!). Der Fehler besteht darin, daß diese Funktion an der Stelle $x = \sqrt{2-\sqrt{3}} = x_0$ einen Sprung besitzt. Wenn wir die Integrale von 0 bis x_0 und von x_0 bis 1 einzeln berechnen, erhalten wir den richtigen Wert

$$\int_0^1 = \Big|_0^{x_0-0} + \Big|_{x_0+0}^{1} = \frac{\pi}{3}.$$

11. Mit Hilfe der Stammfunktionen lassen sich die Integrale

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2, \qquad \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

leicht berechnen. Da gegen diese Integrale natürlich die entsprechenden Integralsummen streben, ergeben sich z. B. (bei Teilung der Integrationsintervalle in n gleiche Teile) die Beziehungen

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right) = \ln 2,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{2n^2}\right)\cdot n = \frac{\pi}{4}.$$

310. Eine andere Herleitung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung Wir wollen jetzt die Formel (A) unter allgemeineren Voraussetzungen herleiten. Die Funktion $f(x)$ sei im Intervall $[a, b]$ *integrierbar*, und die in $[a, b]$ *stetige* Funktion $F(x)$ sei überall in (a, b) oder überall mit Ausnahme *endlich* vieler Punkte eine Stammfunktion von $f(x)$,

$$F'(x) = f(x). \tag{3}$$

Wir zerlegen das Intervall $[a, b]$ beliebig mit Hilfe der Teilpunkte

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b$$

(wir müssen nur dafür sorgen, daß *sich unter diesen Punkten alle diejenigen befinden, für die die Beziehung* (3) *nicht gilt, falls solche Punkte existieren*). Offenbar gilt

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1}[F(x_{i+1}) - F(x_i)].$$

Wenden wir auf jede der Differenzen unter dem Summenzeichen die Formel der endlichen Zuwächse[1]) an (die Bedingungen für ihre Anwendbarkeit sind erfüllt), so erhalten wir

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} F'(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i),$$

[1]) Dies ist nur ein anderer Name für den Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Vgl. Nr. 112. *Anm. d. Red.*

wobei die ξ_i wohlbestimmte (jedoch uns nicht bekannte) Werte von x zwischen x_i und x_{i+1} sind. Da für jeden dieser Werte $F'(\xi_i) = f(\xi_i)$ ist, können wir

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

schreiben. Auf der rechten Seite steht die Integralsumme σ für die Funktion $f(x)$. Wir setzen voraus, daß die Summe σ für $\lambda \to 0$ einen wohlbestimmten Grenzwert besitzt, der nicht von der Wahl der Zahlen ξ_i abhängt. Folglich strebt insbesondere unsere Summe, die (bei der oben erwähnten Wahl der ξ_i) konstant bleibt, gegen das Integral; daraus ergibt sich

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

In Nr. 309 berechneten wir mit Hilfe der Grundformel das bestimmte Integral. Sie kann aber auch in anderer Richtung benutzt werden. Ersetzen wir in der Grundformel (A) b durch x und $f(x)$ durch $F'(x)$, so erhält sie die Gestalt

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Auf diese Art läßt sich mit Hilfe des Grenzprozesses (denn das bestimmte Integral ist ein *Grenzwert*!) zu einer gegebenen Ableitung $F'(x)$ die Stammfunktion $F(x)$ „aufstellen".

Übrigens setzt dies voraus, daß die Ableitung nicht nur beschränkt, sondern gemäß der Riemannschen Definition auch integrierbar ist, was nicht immer der Fall zu sein braucht.

311. Rekursionsformeln. Wir sahen, daß die Grundformel (A) bei günstigen Bedingungen sofort den Wert des bestimmten Integrals angibt. Andererseits lassen sich mit ihrer Hilfe verschiedene *Rekursionsformeln* aus der Theorie der unbestimmten Integrale in analoge Formeln für bestimmte Integrale überführen, welche die Berechnung eines bestimmten Integrals auf die Berechnung eines anderen (im allgemeinen einfacheren) zurückführen.

Wir betrachten zunächst die Formel für die partielle Integration,

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u,$$

und ihre Verallgemeinerung (vgl. (3) und (5) aus Nr. 270) sowie andere Rekursionsformeln (Nr. 271, Formel (6); Nr. 280; Nr. 287), die auf ihr beruhen. Ihre allgemeine Form lautet

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(x) - \int g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

Ist der Wertebereich einer solchen Formel das Intervall $[a, b]$, so entspricht ihr in bestimmten Integralen die Beziehung

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

Dabei werden die Funktionen f und g als *stetig* vorausgesetzt. Zum Beweis von (5) bezeichnen wir das Integral auf der rechten Seite von (4) mit $\Phi(x)$. Dann ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = [\varphi(x) - \Phi(x)]|_a^b = \varphi(x)|_a^b - \Phi(x)|_a^b.$$

Ferner gilt

$$\int_a^b g(x)\,dx = \Phi(x)|_a^b;$$

also ist (5) richtig.

Insbesondere hat die Formel für die partielle Integration jetzt die Gestalt

$$\int_a^b u\,dv = uv|_a^b - \int_a^b v\,du, \tag{6}$$

und die *verallgemeinerte* Formel lautet

$$\int_a^b uv^{(n+1)}\,dx = [uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + \cdots + (-1)^n u^{(n)} v]|_a^b$$
$$+ (-1)^{n+1} \int_a^b u^{(n+1)} v\,dx. \tag{7}$$

Dabei seien die Funktionen u und v sowie alle ihre Ableitungen *stetig*.

Die Formel (5) ist als Beziehung zwischen *Zahlen* im Prinzip einfacher als Formel (4), in welcher *Funktionen* stehen; sie ist besonders dann vorteilhaft, wenn $\varphi(x)|_a^b = 0$ ist.

312. Beispiele.

1. Man berechne die Integrale

$$J_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m x\,dx, \qquad J'_m = \int_0^{\pi/2} \cos^m x\,dx$$

(für natürliches m). Partielle Integration ergibt

$$J_m = \int_0^{\pi/2} \sin^{m-1} x\,d(-\cos x) = -\sin^{m-1} x \cos x|_0^{\pi/2} + (m-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x \cos^2 x\,dx.$$

Der erste Summand verschwindet beim Einsetzen von $\frac{\pi}{2}$ und 0. Ersetzen wir im zweiten Summanden $\cos^2 x$ durch $1 - \sin^2 x$, so finden wir

$$J_m = (m-1)\,J_{m-2} - (m-1)\,J_m,$$

woraus die *Rekursionsformel*

$$J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2}$$

folgt, mit deren Hilfe das Integral J_m durch J_0 oder J_1 ausgedrückt werden kann. Für $m = 2n$ gilt nämlich

$$J_{2n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

für $m = 2n + 1$

$$J_{2n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx = \frac{2n(2n-2)\cdots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3 \cdot 1}.$$

Genau dieselben Resultate ergeben sich auch für J'_m.

Zur kürzeren Schreibweise dieser Ausdrücke bedienen wir uns des Symbols $m!!$[1]):

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^m x \, dx = \begin{cases} \dfrac{(m-1)!!}{m!!} \cdot \dfrac{\pi}{2} & \text{für gerades } m, \\[2ex] \dfrac{(m-1)!!}{m!!} & \text{für ungerades } m. \end{cases} \tag{8}$$

2. Man beweise die Formeln

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^m x \cos(m+2) x \, dx = 0,$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^m x \sin(m+2) x \, dx = \frac{1}{m+1},$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos(m+2) x \, dx = -\frac{\sin \dfrac{m\pi}{2}}{m+1},$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^m x \sin(m+2) x \, dx = \frac{\cos \dfrac{m\pi}{2}}{m+1}$

(für ein *beliebiges* positives m).

Zum Beweis von (a) betrachten wir das Integral

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{m+2} x \cos(m+2) x \, dx$$

und integrieren *zweimal* partiell:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{m+2} x \cos(m+2) x \, dx$$

$$= \frac{1}{m+2} [\cos^{m+2} x \sin(m+2) x - \cos^{m+1} x \sin x \cos(m+2) x]\Big|_0^{\pi/2}$$

$$+ \frac{1}{m+2} \int_0^{\pi/2} [-(m+1) \cos^m x \sin^2 x + \cos^{m+2} x] \cos(m+2) x \, dx.$$

---

[1]) Das Symbol $m!!$ bezeichnet das Produkt der *geraden* natürlichen Zahlen $\leqq m$, falls m *gerade* ist, oder das Produkt der *ungeraden* natürlichen Zahlen $\leqq m$, falls m *ungerade* ist.

Der erste Summand verschwindet beim Einsetzen von $\frac{\pi}{2}$ und 0. Ersetzen wir im Integral $\sin^2 x$ durch $1 - \cos^2 x$, so gelangen wir zu

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{m+2} x \cos(m+2)x\, dx = -\frac{m+1}{m+2}\int_0^{\pi/2} \cos^m x \cos(m+2)x\, dx + \int_0^{\pi/2} \cos^{m+2} x \cos(m+2)x\, dx,$$

woraus sich sofort (a) ergibt.

Analog können die anderen Formeln bewiesen werden.

3. Man berechne (für natürliches n) die Integrale

$$K_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \sin nx\, dx, \qquad L_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \cos nx\, dx.$$

Partielle Integration des ersten Integrals liefert

$$K_n = \frac{1}{n} - \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x \sin \cos nx\, dx.$$

Fügen wir zu beiden Seiten den Summanden K_n hinzu, so ergibt sich nach Umformung des Integranden leicht

$$2K_n = \frac{1}{n} + K_{n-1} \quad \text{oder} \quad K_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + K_{n-1}\right).$$

Aus dieser *Rekursionsformel* folgt

$$K_n = \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \cdots + \frac{2^n}{n}\right).$$

Analog findet man

$$L_n = \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

4. Man bestimme das Integral

$$H_{k,m} = \int_0^1 x^k \ln^m x\, dx,$$

wobei k eine positive und m eine natürliche Zahl ist. Partielle Integration (vgl. Nr. 271, Beispiel 5) liefert

$$\int_0^1 x^k \ln^m x\, dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1} \ln^m x\Big|_{+0}^{1} - \frac{m}{k+1}\int_0^1 x^k \ln^{m-1} x\, dx$$

und führt auf die Rekursionsformel

$$H_{k,m} = -\frac{m}{k+1} H_{k,m-1},$$

woraus sich

$$H_{k,m} = (-1)^m \frac{m!}{(k+1)^{m+1}}$$

ergibt.

Die Besonderheit bei diesem Beispiel besteht darin, daß im Punkt $x = 0$ sowohl die Werte der Integranden als auch die der Funktionen im ersten Summanden als *Grenzwerte* für $x \to +0$ aufzufassen sind.

5. Auf Grund der Formel (III) aus Nr. 280 gilt (für natürliche Zahlen p und q)

$$\int (1-x)^p x^q \, dx = \frac{(1-x)^p x^{q+1}}{p+q+1} + \frac{p}{p+q+1} \int (1-x)^{p-1} x^q \, dx;$$

dies ergibt beim Übergang zu bestimmten Integralen im Intervall $[0, 1]$ die Beziehung

$$\int_0^1 (1-x)^p x^q \, dx = \frac{p}{p+q+1} \int_0^1 (1-x)^{p-1} x^q \, dx.$$

Wendet man diese Formel hintereinander an, so erhält man

$$\int_0^1 (1-x)^p x^q \, dx = \frac{p(p-1)\cdots 1}{(p+q+1)(p+q)\cdots(q+2)} \int_0^1 x^q \, dx$$

und schließlich

$$\int_0^1 (1-x)^p x^q \, dx = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}.$$

6. Geht man in der Formel (IV) aus Nr. 287 für natürliche μ und ν zu bestimmten Integralen über, so ergibt sich mit Hilfe von Beispiel 1 die allgemeinere Beziehung

$$\int_0^{\pi/2} \sin^\nu x \cos^\mu x \, dx = \begin{cases} \dfrac{(\nu-1)!!\,(\mu-1)!!}{(\nu+\mu)!!} \cdot \dfrac{\pi}{2} & \text{für } \textit{gerade } \mu \text{ und } \nu, \\[2ex] \dfrac{(\nu-1)!!\,(\mu-1)!!}{(\nu+\mu)!!} & \text{in allen anderen Fällen.} \end{cases}$$

313. Die Substitution der Veränderlichen im bestimmten Integral. Die Grundformel (A) gestattet uns, eine Regel für die Substitution der Veränderlichen in einem bestimmten Integral aufzustellen.

Es sei das Integral $\int_a^b f(x)\, dx$ zu berechnen, wobei $f(x)$ eine im Intervall $[a, b]$ stetige Funktion ist. Wir setzen $x = \varphi(t)$ und unterwerfen $\varphi(t)$ den folgenden Bedingungen:

1. Die Funktion $\varphi(t)$ ist definiert und stetig in einem Intervall $[\alpha, \beta]$; ihr Wertebereich ist $[a, b]$[1]), wenn t in $[\alpha, \beta]$ variiert;

2. $\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b$;

3. es existiert in $[\alpha, \beta]$ eine stetige Ableitung $\varphi'(t)$. Dann gilt die Formel

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt. \tag{9}$$

---

[1]) Es kann vorkommen, daß die Funktion $f(x)$ in einem größeren Intervall $[A, B]$ als $[a, b]$ definiert und stetig ist; dann genügt es zu fordern, daß die Werte von $\varphi(t)$ nicht außerhalb von $[A, B]$ liegen.

Da die Integranden als stetig vorausgesetzt wurden, existieren nicht nur diese bestimmten Integrale, sondern auch die ihnen entsprechenden unbestimmten Integrale, und in beiden Fällen kann die Fundamentalformel benutzt werden. Ist $F(x)$ eine der Stammfunktionen von $f(x)\,dx$, so ist $\Phi(t) = F(\varphi(t))$, wie wir wissen, eine Stammfunktion von $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$ (vgl. Nr. 268). Daher gilt gleichzeitig

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

und

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a),$$

woraus sich (9) ergibt.

Bemerkung. Die Formel (9) zeichnet sich durch eine wichtige Besonderheit aus. Während wir bei der Berechnung eines unbestimmten Integrals mit Hilfe der Variablensubstitution, bei der sich die gesuchte Funktion als Funktion von t ergab, zu der Veränderlichen x zurückkehren mußten, besteht dazu bei einem bestimmten Integral kein Anlaß. Haben wir das auf der rechten Seite von (9) stehende bestimmte Integral, das eine *Zahl* darstellt, berechnet, so ist damit auch das linke Integral ausgewertet.

314. Beispiele.

1. Man bestimme das Integral $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ mit Hilfe der Substitution $x = a \sin t$; die Rolle von α und β spielen hier die Werte 0 bzw. $\frac{\pi}{2}$. Dann ist

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{4}$$

(vgl. Nr. 268).

2. Allgemein ergibt sich mit Hilfe derselben Substitution für natürliches n

$$\int_0^0 (a^2 - x^2)^n\,dx = a^{2n+1} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t\,dt = a^{2n+1}\,\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

(vgl. (8) aus Nr. 312) und analog

$$\int_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{2n-1}{2}}\,dx = a^{2n}\,\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{\pi}{2}.$$

3. $\int_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^4}\,dx$. Substitution $x = a \sec t$; den Grenzen a und $2a$ von x entsprechen die Grenzen 0 bzw. $\frac{\pi}{3}$ von t. Wir finden

$$\frac{1}{a^2}\int_0^{\pi/3} \sin^2 t \cos t\,dt = \frac{1}{a^2}\,\frac{\sin^3 t}{3}\Big|_0^{\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{8a^2}.$$

4. Wir betrachten das Integral

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx.$$

Die Substitution $x = \pi - t$ (wobei t von π bis 0 variiert) führt auf die Gleichung

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx = \int_0^\pi \frac{(\pi - t) \sin t}{1 + \cos^2 t}\, dt$$

oder

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx = \pi \int_0^\pi \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t}\, dt - \int_0^\pi \frac{t \sin t}{1 + \cos^2 t}\, dt.$$

Bringen wir das letzte Integral auf die linke Seite, nachdem wir die Integrationsveränderliche t wieder durch x ersetzt haben, so folgt

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t}\, dt = -\frac{\pi}{2} \arctan(\cos t)\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}$$

Vgl. weiter unten das Beispiel 11, wo dieser Fall verallgemeinert wird.

5. Man berechne das Integral

$$J = \int_0^1 \frac{\ln(1 + x)}{1 + x^2}\, dx.$$

Die Substitution $x = \tan\varphi$ $\left(0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{4}\right)$ führt es in $\int\limits_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan\varphi)\, d\varphi$ über. Wegen

$$1 + \tan\varphi = \frac{\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right)}{\cos\varphi}$$

folgt

$$J = \frac{\pi}{8} \ln 2 + \int_0^{\pi/4} \ln \sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) d\varphi - \int_0^{\pi/4} \ln \cos\varphi\, d\varphi.$$

Die beiden hier auftretenden Integrale sind gleich, da sich das zweite auf das erste mit Hilfe der Substitution $\varphi = \frac{\pi}{4} - \psi$ (ψ ändert sich von $\frac{\pi}{4}$ bis 0) zurückführen läßt. Also gilt

$$J = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

Wir weisen darauf hin, daß das Integral

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1 + x}\, dx$$

den gleichen Wert hat; davon kann man sich leicht überzeugen, wenn man partiell integriert.

6. Man beweise die Beziehung

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{t}{\sin t}\,\mathrm{d}t.$$

Hinweis. Substitution $x = \tan\frac{t}{2}$.

7. Man beweise die Beziehung

$$\int_0^\pi \left(x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right)^n \mathrm{d}\varphi = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{\left(x - \sqrt{x^2-1}\cos\theta\right)^{n+1}},$$

wobei $x > 1$ sei und n eine natürliche Zahl bedeute.

Die Veränderliche muß vermöge der Formel

$$\left(x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right)\left(x - \sqrt{x^2-1}\cos\theta\right) = 1$$

transformiert werden. Aus dieser Gleichung folgt

$$\cos\varphi = \frac{-\sqrt{x^2-1} + x\cos\theta}{x - \sqrt{x^2-1}\cos\theta},$$

wobei der Absolutbetrag der rechten Seite nicht größer als 1 ist und jedem θ aus dem Intervall $[0, \pi]$ eindeutig ein gewisses φ aus demselben Intervall entspricht. Für $\theta = 0$ oder π ist auch $\varphi = 0$ oder π. Ferner gilt

$$\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\left(x - \sqrt{x^2-1}\cos\theta\right)^2},$$

und wegen

$$\sin\varphi = \frac{\sin\theta}{x - \sqrt{x^2-1}\cos\theta}$$

ist

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}\theta}{x - \sqrt{x^2-1}\cos\theta},$$

so daß wir schließlich

$$\left(x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right)^n \mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}\theta}{\left(x - \sqrt{x^2-1}\cos\theta\right)^{n+1}}$$

erhalten, woraus die verlangte Beziehung folgt. Beide Integrale drücken (bis auf einen Faktor π) das n-te Legendresche Polynom $P_n(x)$ aus (vgl. Nr. 118, Beispiel 6).

8. Für jede im Intervall $[0, a]$, $a > 0$, stetige Funktion $f(x)$ gilt stets

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(a-t)\,\mathrm{d}t$$

(Substitution $x = a - t$, $a \geqq t \geqq 0$). Insbesondere gilt für jede stetige Funktion $F(u)$ wegen $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\int_0^{\pi/2} F(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} F(\cos x)\,\mathrm{d}x.$$

9. Ist die Funktion $f(x)$ in dem symmetrischen Intervall $[-a, a]$, $a > 0$ stetig, so gilt bei *geradem* $f(x)$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx$$

(vgl. Nr. 99, Beispiel 25), bei *ungeradem* $f(x)$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0.$$

In beiden Fällen ist das Integral $\int_{-a}^{a}$ als Summe der Integrale $\int_{-a}^{0}$ und $\int_{0}^{a}$ darstellbar; auf das erste von ihnen wird dann die Substitution $x = -t$ angewendet.

10. Gegeben sei eine stetige *periodische* Funktion $f(x)$ mit der Periode ω, so daß also $f(x + \omega) = f(x)$ für jedes x ist. Dann hat in *allen* Intervallen der Länge ω das Integral dieser Funktion ein und denselben Wert:

$$\int_{a}^{a+\omega} f(x)\, dx = \int_{0}^{\omega} f(x)\, dx.$$

Zum Beweis schreiben wir

$$\int_{a}^{a+\omega} = \int_{a}^{0} + \int_{0}^{\omega} + \int_{\omega}^{a+\omega};$$

wenden wir auf das dritte Integral die Substitution $x = t + \omega$ an, so sehen wir, daß es sich von dem ersten Integral nur durch das Vorzeichen unterscheidet.

11. Man beweise die Beziehung

$$\int_{0}^{\pi} x\, f(\sin x)\, dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)\, dx,$$

wobei $f(u)$ eine beliebige, im Intervall $[0, 1]$ stetige Funktion ist.

Hinweis. Man benutze die Substitution $x = \pi - t$.

12. Man beweise

$$\int_{0}^{2\pi} \varphi(a\cos\theta + b\sin\theta)\, d\theta = 2\int_{0}^{\pi} \varphi\left(\sqrt{a^2 + b^2}\cos\lambda\right) d\lambda \qquad (a^2 + b^2 > 0),$$

wobei $\varphi(u)$ eine für $|u| \leqq \sqrt{a^2 + b^2}$ stetige Funktion ist. Wir definieren einen Winkel α vermöge der Beziehungen

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

damit gilt

$$a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(\theta - \alpha).$$

Auf Grund von Beispiel 10 können wir

$$\int_{0}^{2\pi} \varphi(a\cos\theta + b\sin\theta)\, d\theta = \int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} \varphi\left(\sqrt{a^2 + b^2}\cos(\theta - \alpha)\right) d\theta$$

oder, wenn wir $\theta - \alpha = \lambda$ setzen und Beispiel 9 benutzen,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi\left(\sqrt{a^2+b^2}\cos\lambda\right) d\lambda = 2\int_{0}^{\pi} \varphi\left(\sqrt{a^2+b^2}\cos\lambda\right) d\lambda$$

schreiben.

13. Man beweise die Beziehung

$$\int_0^{\pi/2} g(\sin 2u)\cos u\, du = \int_0^{\pi/2} g(\cos^2 v)\cos v\, dv,$$

wobei $g(z)$ eine beliebige, im Intervall $[0, 1]$ stetige Funktion von z ist.

Das erste Integral zerlegen wir in die Summe

$$\int_0^{\pi/2} = \int_0^{\pi/4} + \int_{\pi/4}^{\pi/2}$$

und formen hier mit Hilfe der Substitution $u = \frac{\pi}{2} - u'$ das zweite Integral rechts in ein Integral ebenfalls über $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ um; dann ergibt sich auf der rechten Seite

$$\int_0^{\pi/4} g(\sin 2u)(\cos u + \sin u)\, du.$$

Wir substituieren hier eine neue Veränderliche, indem wir $\sin 2u = \cos^2 v$ setzen. Offenbar fällt v von $\frac{\pi}{2}$ bis 0, wenn u von 0 bis $\frac{\pi}{4}$ zunimmt. Durch Differentiation erhalten wir

$$\cos 2u\, du = -\sin v \cos v\, dv,$$

und berücksichtigen wir

$$\cos 2u = \sqrt{1-\sin^2 2u} = \sqrt{1-\cos^4 v} = \sin v\sqrt{1+\cos^2 v}$$

und

$$1 + \cos^2 v = 1 + 2\sin u\cos u = (\sin u + \cos u)^2,$$

so finden wir schließlich

$$(\sin u + \cos u)\, du = -\cos v\, dv.$$

Hieraus folgt leicht das gewünschte Resultat.

14. Zum Schluß kehren wir noch einmal zu dem Poissonschen Integral

$$I(r) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2r\cos x + r^2)\, dx$$

zurück (vgl. Nr. 307, Beispiel 4). Wir wissen bereits, daß der Integrand für $|r| \neq 1$ stetig ist und das Integral existiert. Wir berechnen es jetzt mit Hilfe eines etwas künstlichen Verfahrens, in dem die Variablensubstitution eine wesentliche Rolle spielen wird. Vorbereitend bemerken wir, daß aus der offenbar gültigen Ungleichung

$$(1-|r|)^2 \leqq 1 - 2r\cos x + r^2 \leqq (1+|r|)^2,$$

wenn wir sie logarithmieren und dann von 0 bis π integrieren, für $|r| < 1$

$$2\pi\ln(1-|r|) \leqq I(r) \leqq 2\pi\ln(1+|r|)$$

folgt. Also ist $I(r) \to 0$ für $r \to 0$.

Nun betrachten wir das Integral

$$I(-r) = \int_0^\pi \ln(1 + 2r\cos x + r^2)\,dx.$$

Setzen wir hier $x = \pi - t$, wobei t zwischen π und 0 variiert, so ergibt sich

$$I(-r) = \int_\pi^0 \ln(1 + 2r\cos(\pi - t) + r^2)\,d(\pi - t) = \int_0^\pi \ln(1 - 2r\cos t + r^2)\,dt = I(r).$$

In diesem Fall ist

$$2I(r) = I(r) + I(-r) = \int_0^\pi \ln[(1 - 2r\cos x + r^2)(1 + 2r\cos x + r^2)]\,dx$$

oder

$$2I(r) = \int_0^\pi \ln(1 - 2r^2\cos 2x + r^4)\,dx.$$

Setzen wir $x = \frac{t}{2}\ (0 \leqq t \leqq 2\pi)$, so erhalten wir

$$2I(r) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \ln(1 - 2r^2\cos t + r^4)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi + \frac{1}{2}\int_\pi^{2\pi}.$$

Das zweite der beiden rechten Integrale wird mit Hilfe der Substitution $t = 2\pi - u$ (u ändert sich von π bis 0) in das erste übergeführt. Also ist

$$2I(r) = I(r^2) \quad \text{oder} \quad I(r) = \frac{1}{2} I(r^2).$$

Ersetzen wir hier r durch r^2 usw., so finden wir leicht die allgemeine Formel

$$I(r) = \frac{1}{2^n} I(r^{2^n}) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Es sei nun $|r| < 1$, also $r^{2^n} \to 0$ für $n \to \infty$; dabei ist dann $I(r^{2^n}) \to 0$ (auf Grund des eingangs Gesagten), also muß *identisch*

$$I(r) = 0 \quad \text{für} \quad |r| < 1$$

sein.

Dieses Integral läßt sich auch für $|r| > 1$ leicht berechnen. Es ist nämlich

$$1 - 2r\cos x + r^2 = r^2\left(1 - 2\frac{1}{r}\cos x + \frac{1}{r^2}\right)$$

und

$$\ln(1 - 2r\cos x + r^2) = 2\ln|r| + \ln\left(1 - 2\frac{1}{r}\cos x + \frac{1}{r^2}\right),$$

so daß nach Integration von 0 bis π

$$I(r) = 2\pi\ln|r| + I\left(\frac{1}{r}\right)$$

gilt. Nun ist nach dem Vorhergehenden $I\left(\frac{1}{r}\right) = 0$, also gilt für $|r| > 1$

$$I(r) = 2\pi\ln|r|.$$

Das gleiche Resultat erhielten wir auch in Nr. 307.

315. Die Gaußsche[1]) Formel. Die Landensche[2]) Transformation. Als weiteres Beispiel für die Substitution einer Veränderlichen wollen wir die Formel betrachten, die vom C. F. GAUSS zur Transformation des Integrals

$$G = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \qquad (a > b > 0)$$

benutzt wurde. Wir setzen hier

$$\sin \varphi = \frac{2a \sin \theta}{(a + b) + (a - b) \sin^2 \theta}$$

(ändert sich θ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, so wächst auch φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$). Differenzieren ergibt

$$\cos \varphi \, d\varphi = 2a \frac{(a + b) - (a - b) \sin^2 \theta}{[(a + b) + (a - b) \sin^2 \theta]^2} \cos \theta \, d\theta.$$

Nun ist

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{(a + b)^2 - (a - b)^2 \sin^2 \theta}}{(a + b) + (a - b) \sin^2 \theta} \cos \theta,$$

also

$$d\varphi = 2a \frac{(a + b) - (a - b) \sin^2 \theta}{(a + b) + (a - b) \sin^2 \theta} \frac{d\theta}{\sqrt{(a + b)^2 - (a - b)^2 \sin^2 \theta}}.$$

Andererseits gilt

$$\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} = a \frac{(a + b) - (a - b) \sin^2 \theta}{(a + b) + (a - b) \sin^2 \theta},$$

also schließlich

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{d\theta}{\sqrt{\left(\frac{a + b}{2}\right)^2 \cos^2 \theta + ab \sin^2 \theta}}.$$

Setzen wir $a_1 = \frac{a + b}{2}$, $b_1 = \sqrt{ab}$, so erhalten wir die *Gaußsche Formel*

$$G = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a_1^2 \cos^2 \theta + b_1^2 \sin^2 \theta}}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Transformation gelangen wir zu

$$G = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \varphi + b_n^2 \sin^2 \varphi}} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

wobei die Folgen der Zahlen a_n und b_n durch die Rekursionsformeln

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \qquad b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}$$

bestimmt sind. Wir wissen bereits (vgl. Nr. 35, Beispiel 4), daß diese Zahlen zwei Folgen bilden, die gegen einen gemeinsamen Grenzwert $\mu(a, b)$, das *arithmetisch-geometrische Mittel* der Zahlen

[1]) CARL FRIEDRICHS GAUSS, 1777—1855, deutscher Mathematiker.
[2]) JOHN LANDEN, 1719—1790, englischer Mathematiker.

a und b streben. Aus den leicht zu verifizierenden Ungleichungen

$$\frac{\pi}{2a_n} < G < \frac{\pi}{2b_n}$$

finden wir, wenn wir zur Grenze übergehen,

$$G = \frac{\pi}{2\mu(a, b)};$$

daraus folgt $\mu(a, b) = \dfrac{\pi}{2G}$, d. h., jede der beiden Zahlen G und μ läßt sich einfach durch die andere ausdrücken.

Mit Hilfe dieser eben erklärten Methode wollen wir das Integral

$$G = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \cos^2\theta}} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{2\cos^2\theta + \sin^2\theta}}$$

berechnen. Hier ist $a = \sqrt{2}$ und $b = 1$; die Zahlenfolgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ streben hier *schnell* gegen μ, denn schon a_4 und b_4 sind beide etwa gleich 1,198154. Also können wir $\mu \approx 1{,}198154$ setzen. Dann erhalten wir näherungsweise

$$G = \frac{\pi}{2\mu} \approx 1{,}3110138.$$

Führen wir das Integral G auf ein *vollständiges*[1]) elliptisches Integral erster Gattung

$$G = \frac{1}{a}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \dfrac{a^2 - b^2}{a^2}\sin^2\varphi}} = \frac{1}{a}\,\mathrm{K}\left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right)$$

zurück, so läßt es sich leicht mit Hilfe von Tafeln berechnen.

Wir betrachten nun das vollständige elliptische Integral erster Gattung

$$\mathrm{K}(k) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}};$$

für jeden Wert des *Moduls* k ergibt es sich aus G, wenn dort $a = 1$ und $b = \sqrt{1 - k^2} = k'$ gesetzt wird. Will man auf dieses Integral die Gaußsche Formel anwenden, so berechnet man zunächst

$$a_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - k^2}}{2} = \frac{1 + k'}{2}, \qquad b_1 = \sqrt{k'},$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}}{a_1} = \frac{1 - k'}{1 + k'}, \qquad \frac{1}{a_1} = 1 + k_1,$$

so daß

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = (1 + k_1)\int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k_1^2\sin^2\theta}}$$

[1]) Vollständig heißen die (in Nr. 293 und 305 behandelten) Funktionen $F(k, \varphi)$ und $E(k, \varphi)$ für $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$; in diesem Fall läßt man bei ihrer Bezeichnung im allgemeinen das zweite Argument fort und schreibt $\mathrm{K}(k)$ bzw. $\mathrm{E}(k)$. Für die vollständigen Integrale gibt es spezielle Tafeln (vgl. E. Jahnke, F. Emde und F. Lösch, Tafeln höherer Funktionen, 6. Auflage, Stuttgart 1960. — *Anm. d. Red.*).

oder

$$K(k) = (1 + k_1) K(k_1)$$

ist. Diese Formel, die der Gaußschen äquivalent ist, war schon vor GAUSS bekannt und ist ein Spezialfall der sogenannten *Landenschen Transformation.*[1])

Durch aufeinanderfolgende Anwendung dieser Formel finden wir

$$K(k) = (1 + k_1)(1 + k_2) \cdots (1 + k_n) K(k_n),$$

wobei die Folge der Zahlen k_n, wie man durch vollständige Induktion beweisen kann, durch

$$k_n = \frac{1 - \sqrt{1 - k_{n-1}^2}}{1 + \sqrt{1 - k_{n-1}^2}}$$

definiert ist, so daß

$$0 < k_n < 1 \quad \text{und} \quad k_n < k_{n-1}^2$$

ist; diese Ungleichungen gewährleisten, daß die Folge der k_n für $n \to \infty$ schnell gegen 0 strebt. Gleichzeitig gilt

$$0 < K(k_n) - \frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_n^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{\pi}{2}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \sqrt{1 - k_n^2 \sin^2 \varphi}}{\sqrt{1 - k_n^2 \sin^2 \varphi}}\, d\varphi < \frac{\pi\left(1 - \sqrt{1 - k_n^2}\right)}{2\sqrt{1 - k_n^2}}.$$

Daraus folgt

$$K(k_n) \to \frac{\pi}{2} \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

und schließlich

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \lim_{n\to\infty} (1 + k_1)(1 + k_2) \cdots (1 + k_n). \tag{10}$$

Hierauf gründet sich die Methode zur angenäherten Berechnung des Integrals $K(k)$, das (für hinreichend großes n) durch

$$K(k) \approx \frac{\pi}{2}(1 + k_1)(1 + k_2) \cdots (1 + k_n)$$

ausgedrückt wird.

316. Eine andere Herleitung der Formel für die Substitution der Veränderlichen. Wir geben nun eine andere Herleitung der Formel (9) aus Nr. 313 unter geänderten Voraussetzungen an.

Vor allem (und das ist das wichtigste) setzen wir die Funktion $f(x)$ nicht als stetig, sondern nur als *integrierbar* voraus. Dafür verlangen wir von der Funktion $\varphi(t)$ zusätzlich, daß sie sich bei Änderung von $t = \alpha$ bis $t = \beta$ zwischen den Werten $a = \varphi(\alpha)$ und $b = \varphi(\beta)$ *monoton* ändert.

Wir wollen $a < b$ und $\alpha < \beta$ annehmen, so daß also die Funktion $\varphi(t)$ monoton *wächst.* Das Intervall $[\alpha, \beta]$ zerlegen wir mit Hilfe der Punkte

$$t_0 = \alpha < t_1 < t_2 < \cdots < t_i < t_{i+1} < \cdots < t_n = \beta$$

---

[1]) Die Landensche Transformation ist für die numerische Berechnung elliptischer Integrale von großer Bedeutung, da sie eines der bequemsten und genauesten Verfahren für diesen Zweck liefert. — *Anm. d. Red.*

in Teilintervalle; setzen wir $x_i = \varphi(t_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, so ist gleichzeitig

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b.$$

Strebt die größte der Längen $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ (wir bezeichnen sie mit λ) gegen 0, so gilt dies auf Grund der (gleichmäßigen) Stetigkeit der Funktion $x = \varphi(t)$ auch für die größte der Längen

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)$$

(vgl. Nr. 87).

Wir wählen nun in jedem Intervall $[t_i, t_{i+1}]$ eine beliebige Zahl τ_i und bilden die Integralsumme für das zweite Integral (9):

$$\sigma = \sum_i f(\varphi(\tau_i))\, \varphi'(\tau_i)\, \Delta t_i .$$

Es sei $\xi_i = \varphi(\tau_i)$, so daß $x_i \leqq \xi_i \leqq x_{i+1}$ ist. Wenden wir auf die Funktion $\varphi(t)$ im Intervall $[t_i, t_{i+1}]$ die Formel der endlichen Zuwächse an, so erhalten wir

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = \varphi'(\bar{\tau}_i)\, \Delta t_i ,$$

wobei $t_i < \bar{\tau}_i < t_{i+1}$ gilt, aber (das uns bekannte) $\bar{\tau}_i$ im allgemeinen von dem vorgegebenen Wert τ_i verschieden ist. Damit können wir der Integralsumme für das erste der Integrale (9),

$$\bar{\sigma} = \sum_i f(\xi_i)\, \Delta x_i ,$$

jetzt die Form

$$\bar{\sigma} = \sum_i f(\varphi(\tau_i))\, \varphi'(\bar{\tau}_i)\, \Delta t_i$$

geben. Diese Summe hat offenbar für $\lambda \to 0$ das Integral $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ als Grenzwert Um zu zeigen, daß auch σ gegen dieses Integral strebt, braucht nur nachgewiesen zu werden, daß die Differenz $\sigma - \bar{\sigma}$ gegen 0 strebt. Dazu geben wir uns eine beliebige Zahl $\varepsilon > 0$ vor; auf Grund der (gleichmäßigen) Stetigkeit der Funktion $\varphi'(t)$ läßt sich ein $\delta > 0$ finden derart, daß für $\lambda < \delta$ die Ungleichung $|\varphi'(\tau_i) - \varphi'(\bar{\tau}_i)| < \varepsilon$ gilt (vgl. die Folgerung aus Nr. 87). Dann ist

$$|\sigma - \bar{\sigma}| \leqq \sum_i |f(\varphi(\tau_i))| \cdot |\varphi'(\tau_i) - \varphi'(\bar{\tau}_i)|\, \Delta t_i < L(\beta - \alpha)\, \varepsilon ,$$

wenn L eine obere Schranke für $|f(x)|$ bezeichnet und $\sum\limits_i \Delta t_i$ durch $\beta - \alpha$ ersetzt wird. Daraus ist ersichtlich, daß die Summe σ für $\lambda \to 0$ gegen den Grenzwert $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ strebt. Also existiert das Integral

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt ,$$

und es gilt (9). Damit ist der Beweis beendet.

Bemerkung. Wir betonen besonders, daß auf Grund des Bewiesenen die in den Beispielen 8 bis 10 aus Nr. 314 aufgestellten einfachen und oft nützlichen Formeln jetzt auf eine beliebige *integrierbare* Funktion $f(x)$ übertragen werden können.

§ 4. Einige Anwendungen der bestimmten Integrale

317. Die Wallissche[1]) Formel. Aus der Beziehung (8) aus Nr. 312 läßt sich leicht die bekannte Wallissche Formel herleiten.

Wir setzen $0 < x < \frac{\pi}{2}$ voraus; für diese x gelten die Ungleichungen

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x.$$

Integrieren wir sie im Intervall von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, so erhalten wir

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,dx < \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx < \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x\,dx$$

und hieraus auf Grund von (8) aus Nr. 312

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

oder

$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n}.$$

Da die Differenz zwischen den beiden äußeren Ausdrücken gleich

$$\frac{1}{2n(2n+1)}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 < \frac{1}{2n}\frac{\pi}{2}$$

ist und infolgedessen für $n \to \infty$ gegen 0 strebt, ist $\frac{\pi}{2}$ der gemeinsame Grenzwert dieser beiden Ausdrücke. Also gilt

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1}$$

oder

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4 \cdots 2n\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1)}.$$

Dies ist die *Wallissche Formel*. Sie besitzt vorwiegend historisches Interesse, und zwar ist sie die erste Darstellung der Zahl π als Grenzwert einer leicht berechenbaren rationalen Zahlenfolge. In theoretischen Untersuchungen wird sie auch heute noch benutzt (vgl. etwa Nr. 406). Zur praktischen Berechnung der Zahl π bedient man sich aber jetzt solcher Methoden, die wesentlich schneller zum Ziel führen (vgl. Nr. 410).

318. Die Taylorsche[2]) Formel mit Restglied. In der verallgemeinerten Formel (7) aus Nr. 311 für die partielle Integration setzen wir $v = (b-x)^n$. Dann ist

$$v' = -n(b-x)^{n-1}, \qquad v'' = n(n-1)(b-x)^{n-2}, \qquad \ldots,$$
$$v^{(n)} = (-1)^n n(n-1)\cdots 1, \qquad v^{(n+1)} = 0;$$

---

[1]) John Wallis, 1616—1703, englischer Mathematiker.

[2]) Brook Taylor, 1685—1731, englischer Mathematiker.

für $x = b$ ist $v = v' = \cdots = v^{(n-1)} = 0$. Benutzen wir für $u, u', u'', \ldots$ die Bezeichnungen $f(x), f'(x), f''(x), \ldots$, so kann (7) aus Nr. 311 in der Gestalt

$$0 = (-1)^n \left[n!\, f(b) - n!\, f(a) - n!\, f'(a)\,(b-a) - \frac{n!}{2!} f''(a)\,(b-a)^2 - \cdots - f^{(n)}(a)\,(b-a)^n\right] + (-1)^{n+1} \int_a^b f^{(n+1)}(x)\,(b-x)^n\,dx$$

geschrieben werden. Hieraus ergibt sich die Taylorsche Formel mit einem Restglied, das die Gestalt eines bestimmten Integrals hat:

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(x)\,(b-x)^n\,dx.$$

Gehen wir zu den Bezeichnungen aus Nr. 124 bis 126 über, ersetzen wir also b durch x und a durch x_0, so finden wir

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n\,dt.$$

Der neue Ausdruck für das Restglied enthält zum Unterschied von den in Nr. 124 und 126 untersuchten Ausdrücken keine unbekannten Zahlen.

Aus diesem Ausdruck lassen sich die uns schon bekannten Formen des Restgliedes herleiten. Berücksichtigen wir, daß der Faktor $(x-t)^n$ im Integranden nicht sein Vorzeichen ändert, so können wir den verallgemeinerten Mittelwertsatz der Integralrechnung (vgl. 10° aus Nr. 304) auf das Integral anwenden:

$$\frac{1}{n!}\int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n\,dt = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(c) \int_{x_0}^x (x-t)^n\,dt = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1};$$

dabei liegt c im Intervall $[x_0, x]$. Auf diese Weise sind wir von neuem zu den Restglied in Lagrangescher Form gelangt.

319. Die Transzendenz der Zahl e. Die Formel (7) aus Nr. 311 kann auch als Ausgangspunkt für den Beweis eines bemerkenswerten Satzes von Hermite[1]) über die Zahl e dienen.

Alle reellen (und, allgemeiner, auch komplexen) Zahlen lassen sich in zwei Klassen einteilen, in die der algebraischen und die der transzendenten Zahlen.

Eine Zahl heißt *algebraisch*, wenn sie Wurzel einer algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten ist (offenbar können diese Koeffizienten ohne Beschränkung der Allgemeinheit als ganz angenommen werden); anderenfalls heißt die Zahl *transzendent*.

Eine algebraische Zahl ist z. B. eine beliebige rationale oder irrationale Zahl, die durch rationale Zahlen und Radikale ausgedrückt wird: Die Zahl $-\frac{11}{17}$ ist Wurzel der Gleichung $17x + 11 = 0$, die Zahl $\sqrt{1 + \sqrt[3]{2}}$ Wurzel der Gleichung $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 3 = 0$, usw.

---

[1]) Charles Hermite, 1822—1901, französischer Mathematiker.

Hermite bewies 1873, daß e *eine transzendente Zahl ist.*[1]) Wir wollen einen Beweis hier angeben, und zwar führen wir ihn indirekt. Wir nehmen an, e sei Wurzel einer algebraischen Gleichung,

$$c_0 + c_1 \mathrm{e} + c_2 \mathrm{e}^2 + \cdots + c_m \mathrm{e}^m = 0, \tag{1}$$

und alle Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots, c_m$ seien ganze Zahlen. In Formel (7) aus Nr. 311 sei $u = f(x)$ ein beliebiges Polynom n-ten Grades; ferner sei $v = (-1)^{n+1}\,\mathrm{e}^{-x}$. Dann liefert diese Formel, wenn wir $a = 0$ setzen,

$$\int_0^b f(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x}[f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(n)}(x)]\Big|_0^b;$$

denn es ist $f^{(n+1)}(x) = 0$. Zur Abkürzung schreiben wir

$$f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(n)}(x) = F(x).$$

Dann ist

$$\mathrm{e}^b F(0) = F(b) + \mathrm{e}^b \int_0^b f(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Hier setzen wir nacheinander $b = 0, 1, 2, \ldots, m$, multiplizieren die so erhaltenen Gleichungen mit $c_0, c_1, c_2, \ldots$ bzw. c_m, addieren sie und erhalten mit Hilfe von (1) die Beziehung

$$0 = c_0 F(0) + c_1 F(1) + \cdots + c_m F(m) + \sum_{i=0}^{m} c_i \mathrm{e}^i \int_0^i f(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x, \tag{2}$$

die, gemäß unserer Annahme, für *jedes* Polynom $f(x)$ erfüllt sein muß. Wir weisen nach, daß doch ein $f(x)$ existiert, für welches (2) nicht gilt; damit wird dann der Satz bewiesen sein. Zu diesem Zweck setzen wir

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!}\,x^{p-1}(x-1)^p\,(x-2)^p \cdots (x-m)^p$$

mit einer Primzahl p, die größer als m und $|c_0|$ ist. Die p-ten und höheren Ableitungen dieses Polynoms haben ganze, durch p teilbare Koeffizienten; dies folgt unmittelbar daraus, daß das Produkt von p aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen durch $p!$ teilbar ist. Daher sind alle diese Ableitungen für jedes ganze x ganzzahlige Vielfache von p. Da das Polynom $f(x)$ und seine ersten $p-1$ Ableitungen für $x = 1, 2, \ldots, m$ verschwinden, sind $F(1), F(2), \ldots, F(m)$ ganzzahlige Vielfache von p. Anders verhält es sich jedoch mit $F(0)$. Für $x = 0$ verschwinden außer $f(x)$ nur $p-2$ Ableitungen, so daß

$$F(0) = f^{(p-1)}(0) + f^{(p)}(0) + \cdots$$

ist. Alle Summanden vom zweiten ab sind ganzzahlige Vielfache von p; aber wegen $f^{(p-1)}(0) = [(-1)^m m!]^p$ ist $F(0)$ nicht durch p teilbar. Da bei den bezüglich p gemachten Voraussetzungen auch c_0 nicht durch p teilbar ist, kommen wir zu dem Schluß, daß die erste auf der rechten Seite von (2) stehende Summe eine nicht durch p teilbare Zahl ist und *folglich nicht gleich* 0 *sein kann*. Wir wenden uns nun der zweiten Summe in (2) zu. Im Intervall $[0, m]$ ist offenbar

$$|f(x)| < \frac{1}{(p-1)!}\,m^{p-1} m^p m^p \cdots = \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!}.$$

[1]) Bald danach (1882) bewies Ferdinand Lindemann (1852—1939, deutscher Mathematiker) die Transzendenz der Zahl π; er konnte damit zum ersten Mal zeigen, daß das schon im Altertum bekannte Problem der Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal nicht lösbar ist.

Daher gilt

$$\left|\int\limits_0^i f(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\right| < \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!}\int\limits_0^i \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x < \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!}$$

und, wenn wir die Summe $|c_0| + |c_1| + \cdots + |c_m|$ mit C bezeichnen,

$$\left|\sum_{i=0}^{m} c_i\,\mathrm{e}^i \int\limits_0^i f(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\right| < C\,\mathrm{e}^m \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!} = C\,\mathrm{e}^m m^m \frac{(m^{m+1})^{p-1}}{(p-1)!}.$$

Aus Nr. 35, Beispiel 1, wissen wir, daß der letzte Faktor für $p \to \infty$ verschwindet, so daß der Absolutbetrag der zweiten Summe in (2) für hinreichend großes p kleiner ist als die erste Summe. In diesem Fall kann die rechte Seite von (2) nicht gleich 0 sein. Wir sind also auf einen Widerspruch gestoßen.

320. Die Legendreschen Polynome. Wir wollen uns nun die Aufgabe stellen, ein Polynom $X_n(x)$ vom Grad n derart zu bestimmen, daß für *jedes* Polynom $Q(x)$ von kleinerem als n-tem Grad die Beziehung

$$\int\limits_a^b X_n(x)\,Q(x)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{3}$$

mit beliebigen, aber *festen* Zahlen a und b erfüllt ist.

Jedes Polynom $X_n(x)$ vom Grad n kann als n-te Ableitung eines Polynoms $R(x)$ vom Grad $2n$ aufgefaßt werden, das aus $X_n(x)$ durch n aufeinanderfolgende Integrationen entsteht. Wird bei jeder Integration die willkürliche Konstante so gewählt, daß das Integral für $x = a$ verschwindet, so sind für das Polynom $R(x)$ noch die Bedingungen

$$R(a) = 0, \qquad R'(a) = 0, \ldots, \qquad R^{(n-1)}(a) = 0 \tag{4}$$

erfüllt. Die Aufgabe besagt also, daß ein Polynom $R(x)$ vom Grad $2n$ derart bestimmt werden soll, daß für jedes Polynom $Q(x)$ von kleinerem als n-tem Grad

$$\int\limits_a^b R^{(n)}(x)\,Q(x)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{5}$$

gilt und außerdem die Beziehungen (4) erfüllt sind. Auf Grund der Formel (7) aus Nr. 311 ist, wenn man in ihr n durch $n-1$ ersetzt,

$$\int\limits_a^b R^{(n)}(x)\,Q(x)\,\mathrm{d}x = [Q(x)\,R^{(n-1)}(x) - Q'(x)\,R^{(n-2)}(x) + \cdots \pm Q^{(n-1)}(x)\,R(x)]\Big|_a^b$$
$$\mp \int\limits_a^b Q^{(n)}(x)\,R(x)\,\mathrm{d}x.$$

Wegen (4) und $Q^{(n)}(x) \equiv 0$ nimmt (5) die Gestalt

$$Q(b)\,R^{(n-1)}(b) - Q'(b)\,R^{(n-2)}(b) + \cdots \pm Q^{(n-1)}(b)\,R(b) = 0 \tag{6}$$

an. Da das Polynom $Q(x)$ vom Grad $n-1$ völlig willkürlich ist, können wir die Werte $Q(b)$ $Q'(b), \ldots, Q^{(n-1)}(b)$ dieses Polynoms und seiner aufeinanderfolgenden Ableitungen an der Stelle $x = b$ als *beliebige* Zahlen auffassen; dann ist die Bedingung (6) gleichwertig mit

$$R(b) = 0, \qquad R'(b) = 0, \qquad \ldots, \qquad R^{(n-1)}(b) = 0. \tag{7}$$

Aus (4) und (7) sehen wir, daß das Polynom $R(x)$ die Zahlen a und b als n-fache Nullstellen besitzt und sich folglich nur um einen konstanten Faktor von dem Produkt $(x-a)^n\,(x-b)^n$ unterscheidet. Also ist schließlich

$$X_n(x) = c_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x-a)^n\,(x-b)^n].$$

Nehmen wir insbesondere $a = -1$ und $b = 1$, so stoßen wir auf die schon bekannten *Legendreschen Polynome*

$$X_n(x) = c_n \frac{\mathrm{d}^n(x^2-1)^n}{\mathrm{d}x^n}.$$

In Nr. 118, Beispiel 6, bezeichneten wir die Legendreschen Polynome mit $P_n(x)$, wenn

$$c_n = \frac{1}{2^n \cdot n!} = \frac{1}{(2n)!!}$$

für die Konstanten gewählt wurde; für diese Polynome gilt $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$. Gewöhnlich setzt man noch $P_0(x) = 1$. Alle Exponenten der Glieder von $P_n(x)$ sind entweder gerade oder ungerade, je nachdem, ob n gerade oder ungerade ist.

Der höchste Koeffizient ist offenbar gleich

$$\frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{(2n)!!} = \frac{(2n-1)!!}{n!}.$$

Nach Definition der Legendreschen Polynome ist stets

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, Q(x)\, \mathrm{d}x = 0 \tag{8}$$

für jedes Polynom $Q(x)$ von kleinerem Grad als n. Insbesondere gilt, wenn n und m zwei voneinander verschiedene nichtnegative ganze Zahlen sind,

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_m(x)\, \mathrm{d}x = 0. \tag{8a}$$

Wir wollen nun das Integral $\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, \mathrm{d}x$ berechnen; es unterscheidet sich von

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^n(x^2-1)^n}{\mathrm{d}x^n} \frac{\mathrm{d}^n(x^2-1)^n}{\mathrm{d}x^n}\, \mathrm{d}x$$

nur um den Faktor $c_n^2 = \frac{1}{((2n)!!)^2}$. Wenden wir auf das letzte Integral wieder die Formel (7) aus Nr. 311 an, nachdem wir dort n durch $n-1$ ersetzt und

$$u = \frac{\mathrm{d}^n(x^2-1)^n}{\mathrm{d}x^n}, \qquad v = (x^2-1)^n$$

gesetzt haben, so gelangen wir zu

$$(-1)^n \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{2n}(x^2-1)^n}{\mathrm{d}x^{2n}} (x^2-1)^n\, \mathrm{d}x = 2(2n)! \int_{0}^{1} (1-x^2)^n\, \mathrm{d}x$$

(alle integralfreien Glieder verschwinden, da die Funktion v und ihre Ableitungen einschließlich $(n-1)$-ter Ordnung für $x = \pm 1$ gleich 0 sind). Setzen wir $x = \sin t$ (vgl. Nr. 314, Beispiel 2), so finden wir

$$2(2n)! \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{2}{2n+1} ((2n)!!)^2,$$

so daß sich schließlich

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, \mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1} \tag{9}$$

ergibt.

Abschließend wollen wir mit Hilfe der Eigenschaften der Legendreschen Polynome eine Rekursionsformel herleiten, die drei aufeinanderfolgende Legendresche Polynome verknüpft.

Vorbereitend bemerken wir, daß die Potenz x^n als lineare homogene Funktion der $P_0, P_1, \ldots, P_n$ mit konstanten Koeffizienten dargestellt werden kann; dies gilt dann für jedes Polynom n-ten Grades. Daher ist

$$xP_n = a_0P_{n+1} + a_1P_n + a_2P_{n-1} + a_3P_{n-2} + \cdots \tag{10}$$

mit konstanten Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Wir können leicht zeigen, daß $a_3 = a_4 = \cdots = 0$ ist. Um beispielsweise a_3 zu bestimmen, multiplizieren wir beide Seiten der obigen Gleichung mit P_{n-2} und integrieren von -1 bis 1:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P_n \cdot xP_{n-2}\,dx &= a_0 \int_{-1}^{1} P_{n+1}P_{n-2}\,dx + a_1 \int_{-1}^{1} P_nP_{n-2}\,dx \\ &\quad + a_2 \int_{-1}^{1} P_{n-1}P_{n-2}\,dx + a_3 \int_{-1}^{1} P_{n-2}^2\,dx + \cdots.\end{aligned}$$

Wegen (8) und (8a) sind alle Integrale außer einem gleich 0, also auch

$$a_3 \int_{-1}^{1} P_{n-2}^2\,dx = 0,$$

woraus $a_3 = 0$ folgt. Der Koeffizient a_1 verschwindet ebenfalls, denn die linke Seite der Gleichung (10) enthält kein Glied mit x^n. Zur Bestimmung von a_0 vergleichen wir die Koeffizienten von x^{n+1} auf beiden Seiten und erhalten

$$\frac{(2n-1)!!}{n!} = a_0 \frac{(2n+1)!!}{(n+1)!} \quad \text{oder} \quad a_0 = \frac{n+1}{2n+1}.$$

Schließlich vergleichen wir, um a_2 zu erhalten, beide Seiten für $x = 1$:

$$1 = a_0 + a_2, \quad \text{also} \quad a_2 = 1 - a_0 = \frac{n}{2n+1}.$$

Setzen wir die gefundenen Werte für die Koeffizienten ein, so folgt

$$(n+1)\,P_{n+1} - (2n+1)\,xP_n + nP_{n-1} = 0. \tag{11}$$

Dies ist die gesuchte Rekursionsformel, die uns erlaubt, die einzelnen Legendreschen Polynome, ausgehend von $P_0 = 1$ und $P_1 = x$, zu berechnen:

$$P_2 = \frac{3x^2-1}{2}, \qquad P_3 = \frac{5x^3-3x}{2}, \qquad P_4 = \frac{35x^4-30x^2+3}{8},$$

321. Ungleichungen zwischen Integralen. In Nr. 133 und Nr. 144 wurde eine Reihe von Ungleichungen für *Summen* hergeleitet; jetzt zeigen wir, daß analoge Ungleichungen auch für Integrale aufgestellt werden können. Alle im folgenden auftretenden Funktionen $p(x), \varphi(x)$ und $\psi(x)$ seien *integrierbar*.[1])

1. Die Ungleichung (4) aus Nr. 133 schreiben wir in der Gestalt

$$\exp \frac{\sum p_i \ln a_i}{\sum p_i} \leqq \frac{\sum p_i a_i}{\sum p_i}. \tag{12}$$

Im Intervall $[a, b]$ untersuchen wir die positiven Funktionen $p(x)$ und $\varphi(x)$. Wir zerlegen $[a, b]$ mit Hilfe der Punkte

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b$$

[1]) Aus dieser Voraussetzung folgt schon die Integrierbarkeit aller anderen im folgenden auftretenden Funktionen; dies ergibt sich aus Nr. 299, Satz II, und Nr. 300, Beispiel 4.

in Teilintervalle mit den Längen $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, setzen dann in (12) $p_i = p(x_i) \cdot \Delta x_i$, $a_i = \varphi(x_i)$ und erhalten

$$\exp \frac{\sum p(x_i) \ln \varphi(x_i) \cdot \Delta x_i}{\sum p(x_i) \cdot \Delta x_i} \leqq \frac{\sum p(x_i)\, \varphi(x_i)\, \Delta x_i}{\sum p(x_i)\, \Delta x_i}.$$

Hier haben alle Summen die Gestalt von *Integralsummen* und streben für $\Delta x_i \to 0$ gegen die entsprechenden Integrale. Deshalb erhalten wir beim Grenzübergang als Analogon zu (12) die Ungleichung

$$\exp \frac{\int_a^b p(x) \ln \varphi(x)\, dx}{\int_a^b p(x)\, dx} \leqq \frac{\int_a^b p(x)\, \varphi(x)\, dx}{\int_a^b p(x)\, dx}.$$

Insbesondere erhalten wir für $p(x) \equiv 1$

$$\exp \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln \varphi(x)\, dx\right] \leqq \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(x)\, dx.$$

Den rechten Ausdruck nennen wir das „arithmetische Mittel“ der Werte von $\varphi(x)$ im Intervall $[a, b]$, den linken das „geometrische Mittel“.

2. Wir wollen nun die Analoga zu der Hölderschen[1]) und der Minkowskischen[2]) Ungleichung (Nr. 133, Formel (5) bzw. (7)) für Integrale herleiten:

$$\sum a_i b_i \leqq \{\sum a_i^k\}^{1/k}\ \{\sum b_i^{k'}\}^{1/k'} \tag{13}$$

und

$$\{\sum (a_i + b_i)^k\}^{1/k} \leqq \{\sum a_i^k\}^{1/k} + \{\sum b_i^k\}^{1/k} \tag{14}$$

$$\left(k,\ k' > 1;\ \frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1\right).$$

Im Intervall $[a, b]$ seien zwei positive Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ gegeben; zerlegen wir das Intervall wie oben in Punkt 1 und setzen wir in (13)

$$a_i = \varphi(x_i)\, (\Delta x_i)^{1/k}, \qquad b_i = \psi(x_i)\, (\Delta x_i)^{1/k'},$$

in (14)

$$a_i = \varphi(x_i)\, (\Delta x_i)^{1/k}, \qquad b_i = \psi(x_i)\, (\Delta x_i)^{1/k},$$

so erhalten wir

$$\sum \varphi(x_i)\, \psi(x_i)\, \Delta x_i \leqq \{\sum [\varphi(x_i)]^k \cdot \Delta x_i\}^{1/k} \cdot \{\sum [\psi(x_i)]^{k'} \cdot \Delta x_i\}^{1/k'}$$

bzw.

$$\{\sum [\varphi(x_i) + \psi(x_i)]^k\, \Delta x_i\}^{1/k} \leqq \{\sum [\varphi(x_i)]^k \cdot \Delta x_i\}^{1/k} + \{\sum [\psi(x_i)]^k \cdot \Delta x_i\}^{1/k}.$$

Für $\Delta x_i \to 0$ ergibt sich schließlich

$$\int_a^b \varphi \cdot \psi\, dx \leqq \left\{\int_a^b \varphi^k\, dx\right\}^{1/k} \cdot \left\{\int_a^b \psi^{k'}\, dx\right\}^{1/k'} \tag{13*}$$

bzw.

$$\left\{\int_a^b [\varphi + \psi]^k\, dx\right\}^{1/k} \leqq \left\{\int_a^b \varphi^k\, dx\right\}^{1/k} + \left\{\int_a^b \psi^k\, dx\right\}^{1/k} \tag{14*}$$

---

[1]) Otto Hölder, 1859—1937, deutscher Mathematiker.

[2]) Hermann Minkowski, 1864—1909, deutscher Mathematiker.

Wir erwähnen noch die Spezialfälle dieser Ungleichungen für $k = k' = 2$:

$$\int_a^b \varphi \cdot \psi \, dx \leqq \sqrt{\int_a^b \varphi^2 \, dx} \cdot \sqrt{\int_a^b \psi^2 \, dx}\,, \tag{13'}$$

$$\sqrt{\int_a^b [\varphi + \psi]^2 \, dx} \leqq \sqrt{\int_a^b \varphi^2 \, dx} + \sqrt{\int_a^b \psi^2 \, dx}\,. \tag{14'}$$

(13′) ist die *Schwarzsche Ungleichung*[1]). Die zweite läßt sich leicht auf die erste zurückführen, indem man sie quadriert.

3. Abschließend kommen wir zur Jensenschen[2]) Ungleichung (Nr. 144, Formel (12*))

$$f\left(\frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}\right) \leqq \frac{\sum p_i f(x_i)}{\sum p_i}\,. \tag{15}$$

Hier sei die Funktion $f(x)$ in einem Intervall $\mathscr{X}$, in dem der Punkt x_i liegt, *konvex*; die Zahlen p_i seien positiv. In einem Intervall $[a, b]$ seien eine Funktion $\varphi(x)$ mit dem Wertebereich $\mathscr{X}$ und eine *positive* Funktion $p(x)$ gegeben. Jetzt bezeichnen wir mit x_i die Teilpunkte des Intervalls $[a, b]$; die x_i in (15) ersetzen wir durch $\varphi(x_i)$, die p_i durch $p(x_i) \cdot \Delta x_i$. Gehen wir wie oben von den Integralsummen zu den Integralen über, so erhalten wir die *Jensensche Ungleichung für Integrale*:

$$f\left(\frac{\int_a^b p(x)\,\varphi(x)\,dx}{\int_a^b p(x)\,dx}\right) \leqq \frac{\int_a^b p(x)\,f(\varphi(x))\,dx}{\int_a^b p(x)\,dx}\,.$$

§ 5. Näherungsweise Berechnung von Integralen

322. Problemstellung. Rechteckformel und Trapezformel. Wir wollen das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ berechnen, wobei $f(x)$ eine im Intervall $[a, b]$ stetige Funktion sei. In § 3 wurden solche Integrale berechnet, und zwar entweder mit Hilfe einer Stammfunktion, wenn diese sich in geschlossener Form angeben ließ, oder (falls keine Stammfunktion gefunden werden konnte) mit Hilfe verschiedener, größtenteils gekünstelt anmutender Verfahren. Jedoch sind diese Verfahren nur auf ziemlich wenig Integrale anwendbar; für die meisten Integrale muß man zu verschiedenen *Näherungsmethoden* Zuflucht nehmen.

In diesem Paragraphen werden wir die einfachsten dieser Methoden kennenlernen, bei denen die Näherungsausdrücke aus den Werten des Integranden an mehreren (im allgemeinen äquidistanten) Stellen der unabhängigen Veränderlichen zusammengesetzt sind. Die ersten hierzu gehörenden Formeln lassen sich einfach aus geometrischen Überlegungen gewinnen. Fassen wir das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ als Inhalt der Fläche auf, die durch die Kurve $y = f(x)$ begrenzt ist (Nr. 294), so haben wir also diesen Flächeninhalt zu bestimmen. Vor allem können wir, wenn wir wieder den Gedankengang benutzen, der zum Begriff des bestimmten Integrals

---

[1]) Im Original *Bunjakowskische Ungleichung* genannt (Hermann Amandus Schwarz, 1843 bis 1921, deutscher Mathematiker; Viktor Jakowlewitsch Bunjakowski, 1804—1889, russischer Mathematiker). — *Anm. d. Red.*

[2]) J. L. Jensen, 1859—1925, dänischer Ingenieur und Mathematiker.

führte, die ganze Figur (Abb. 6) in Streifen zerlegen, etwa von der gleichen Breite $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$,[1] und dann jeden Streifen näherungsweise durch ein Rechteck ersetzen, dessen Höhe gleich einer der im Teilintervall vorkommenden Ordinaten ist. Dies führt auf die Formel

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\,[f(\xi_0) + f(\xi_1) + \cdots + f(\xi_{n-1})]$$

mit $x_i \leqq \xi_i \leqq x_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. Hier ist der gesuchte Flächeninhalt der krummlinigen Figur durch den Flächeninhalt einer gewissen, aus *Rechtecken* bestehenden Treppenfigur ersetzt (oder, anders ausgedrückt, das bestimmte Integral wird durch die *Integralsumme* ersetzt). Dies ist die sogenannte *Rechteckformel.*

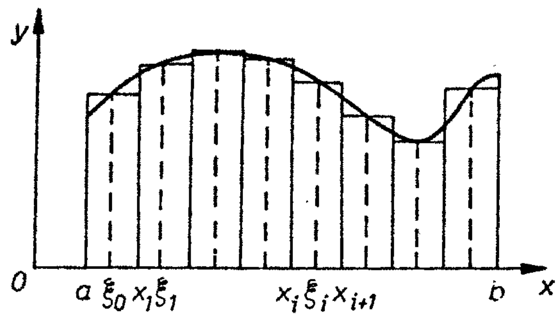

Abb. 6

In der Praxis setzt man im allgemeinen $\xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} = x_{i+1/2}$; bezeichnen wir die diesem Wert entsprechende mittlere Ordinate $f(\xi_i) = f(x_{i+1/2})$ mit $y_{i+1/2}$, so erhält die Rechteckformel die Form

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\,(y_{1/2} + y_{3/2} + \cdots + y_{n-1/2}), \tag{1}$$

in der wir sie auch benutzen werden.

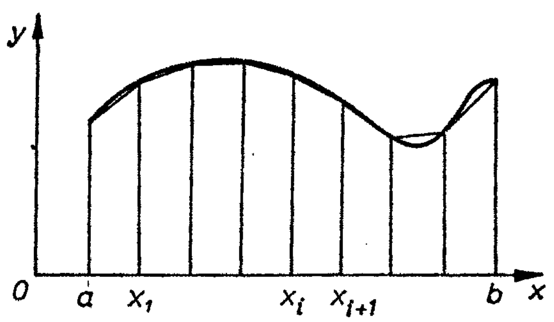

Abb. 7

Die geometrische Anschauung führt auf natürliche Weise auch zu einer anderen oft anwendbaren Näherungsformel. Ersetzen wir die gegebene Kurve durch einen ihr einbeschriebenen Polygonzug, dessen Ecken in den Punkten (x_i, y_i) liegen mögen, wobei $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, sei, so wird die gegebene krummlinige Figur durch eine aus mehreren Trapezen bestehende Figur angenähert (Abb. 7). Nehmen wir an, daß das Intervall $[a, b]$ in gleiche Teile zerlegt ist, so sind die Flächeninhalte dieser Trapeze gleich

$$\frac{b-a}{n}\frac{y_0 + y_1}{2}, \quad \frac{b-a}{n}\frac{y_1 + y_2}{2}, \quad \ldots, \quad \frac{b-a}{n}\frac{y_{n-1} + y_n}{2}.$$

[1]) Wir behalten die Bezeichnungen aus Nr. 294 bei.

Durch Addition dieser Werte gelangen wir zu einer neuen Näherungsformel, der sogenannten *Trapezformel*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right). \tag{2}$$

Man kann zeigen, daß die Differenz zwischen den von der Rechteck- und der Trapezformel gelieferten Werten für $n \to \infty$ verschwindet. Daher geben diese beiden Formeln für hinreichend großes n den gesuchten Wert des Integrals mit beliebiger Genauigkeit an.

Als Beispiel wählen wir das uns schon bekannte Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} = 0{,}785398\ldots$$

und wenden darauf beide Näherungsformeln an. Wir setzen $n = 10$ und geben die Werte bis zur vierten Dezimale an.

Nach der Rechteckformel (1) gilt

$$\begin{array}{ll}
x_{1/2} = 0{,}05 & y_{1/2} = 0{,}9975\\
x_{3/2} = 0{,}15 & y_{3/2} = 0{,}9780\\
x_{5/2} = 0{,}25 & y_{5/2} = 0{,}9412\\
x_{7/2} = 0{,}35 & y_{7/2} = 0{,}8909\\
x_{9/2} = 0{,}45 & y_{9/2} = 0{,}8316\\
x_{11/2} = 0{,}55 & y_{11/2} = 0{,}7678\\
x_{13/2} = 0{,}65 & y_{13/2} = 0{,}7030\\
x_{15/2} = 0{,}75 & y_{15/2} = 0{,}6400\\
x_{17/2} = 0{,}85 & y_{17/2} = 0{,}5806\\
x_{19/2} = 0{,}95 & y_{19/2} = 0{,}5256\\
\hline
 & \text{Summe } 7{,}8562, \text{ also } \dfrac{7{,}8562}{10} = 0{,}78562.
\end{array}$$

Nach der Trapezformel (2) gilt

$$\begin{array}{llll}
x_0 = 0{,}0 & y_0 = 1{,}0000 & x_1 = 0{,}1 & y_1 = 0{,}9901\\
x_{10} = 1{,}0 & y_{10} = 0{,}5000 & x_2 = 0{,}2 & y_2 = 0{,}9615\\
 & \text{Summe } 1{,}5000 & x_3 = 0{,}3 & y_3 = 0{,}9174\\
 & & x_4 = 0{,}4 & y_4 = 0{,}8621\\
 & & x_5 = 0{,}5 & y_5 = 0{,}8000\\
 & & x_6 = 0{,}6 & y_6 = 0{,}7353\\
 & & x_7 = 0{,}7 & y_7 = 0{,}6711\\
 & & x_8 = 0{,}8 & y_8 = 0{,}6098\\
 & & x_9 = 0{,}9 & y_9 = 0{,}5525\\
 & & & \text{Summe } 7{,}0998
\end{array}$$

und somit

$$\frac{1}{10}\left(\frac{1{,}5000}{2} + 7{,}0998\right) = 0{,}78498.$$

Beide Näherungswerte sind etwa von gleicher Genauigkeit; sie unterscheiden sich von dem genauen Wert um weniger als $\pm 0{,}0005$.

Der Leser wird bemerkt haben, daß wir hier den Fehler nur deshalb abschätzen konnten, weil wir den genauen Wert des Integrals vorher kannten. Damit die Formeln tatsächlich zu näherungsweisen Berechnungen geeignet sind, müssen wir für den Fehler einen bequemen Ausdruck finden, der uns nicht nur erlaubt, den Fehler für ein gegebenes n abzuschätzen, sondern auch dasjenige n zu bestimmen, das dem geforderten Genauigkeitsgrad entspricht. Auf diese Frage werden wir in Nr. 325 zurückkommen.

323. Parabolische Interpolation. Zur näherungsweisen Berechnung des Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ kann man auch versuchen, die Funktion $f(x)$ durch das Polynom

$$y = P_k(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_{k-1}x + a_k \tag{3}$$

anzunähern, und wird dann

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b P_k(x)\,dx$$

setzen. Mit anderen Worten, hier wird zur Berechnung des Flächeninhalts die gegebene „Kurve“ $y = f(x)$ durch eine „Parabel k-ter Ordnung“ (3) ersetzt; daher heißt dieser Prozeß *parabolische Interpolation.*

Das Interpolationspolynom $P_k(x)$ wird am häufigsten wie folgt gewählt. Im Intervall $[a, b]$ nehmen wir $k + 1$ Werte $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_k$ der unabhängigen Veränderlichen x und wählen das Polynom $P_k(x)$ derart, daß seine Werte für diese x mit denen der Funktion $f(x)$ übereinstimmen. Durch diese Bedingung ist das Polynom $P_k(x)$, wie wir aus Nr. 128 wissen, eindeutig bestimmt, und wird durch die *Lagrangesche Interpolationsformel* gegeben:

$$P_k(x) = \frac{(x-\xi_1)(x-\xi_2)\cdots(x-\xi_k)}{(\xi_0-\xi_1)(\xi_0-\xi_2)\cdots(\xi_0-\xi_k)} f(\xi_0) + \frac{(x-\xi_0)(x-\xi_2)\cdots(x-\xi_k)}{(\xi_1-\xi_0)(\xi_1-\xi_2)\cdots(\xi_1-\xi_k)}$$
$$\times f(\xi_1) + \cdots + \frac{(x-\xi_0)(x-\xi_1)\cdots(x-\xi_{k-1})}{(\xi_k-\xi_0)(\xi_k-\xi_1)\cdots(\xi_k-\xi_{k-1})} f(\xi_k).$$

Bei der Integration ergibt sich ein in den Werten $f(\xi_0), \ldots, f(\xi_k)$ *linearer* Ausdruck, dessen Koeffizienten nicht von diesen Werten abhängen. Berechnen wir diese Koeffizienten ein für allemal, so können wir sie für jede Funktion $f(x)$ im gegebenen Intervall $[a, b]$ verwenden.

Im einfachsten Fall $k = 0$ wird $f(x)$ einfach durch die *Konstante* $f(\xi_0)$ ersetzt, wobei ξ_0 ein beliebiger Punkt aus $[a, b]$, etwa der Mittelpunkt $\xi_0 = \frac{a+b}{2}$ ist. Dann ist näherungsweise

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right). \tag{4}$$

Geometrisch gesehen, wurde hier der Flächeninhalt der krummlinigen Figur durch den eines Rechtecks ersetzt, dessen Höhe gleich der mittleren Ordinate ist.

Für $k = 1$ wird $f(x)$ durch die lineare Funktion $P_1(x)$ ersetzt, deren Werte in den Punkten $x = \xi_0$ und $x = \xi_1$ mit denen von $f(x)$ übereinstimmen. Nehmen wir $\xi_0 = a$ und $\xi_1 = b$, so ist

$$P_1(x) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) \tag{5}$$

und, wie wir leicht ausrechnen können,

$$\int_a^b P_1(x)\,dx = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Damit erhalten wir näherungsweise

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{6}$$

Hier wurde der Flächeninhalt der krummlinigen Figur durch den eines Trapezes ersetzt: Statt der Kurve wurde die ihre Endpunkte verbindende Sehne genommen.

Ein weniger einfaches Resultat ergibt sich für $k = 2$. Setzen wir $\xi_0 = a$, $\xi_1 = \frac{a+b}{2}$, $\xi_2 = b$, so hat das Interpolationspolynom $P_2(x)$ die Gestalt

$$P_2(x) = \frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)(a-b)}\,f(a) + \frac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)}\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$+\frac{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)}\,f(b). \tag{7}$$

Mit Hilfe einer leichten Umformung finden wir

$$\int_a^b \frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)(a-b)}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b \left[(x-b)+\frac{b-a}{2}\right](x-b)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{2}{(b-a)^2}\left[\frac{(x-b)^3}{3}+\frac{b-a}{2}\,\frac{(x-b)^2}{2}\right]\Bigg|_a^b = \frac{b-a}{6}$$

und analog

$$\int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)}\,\mathrm{d}x = 4\,\frac{b-a}{6},$$

$$\int_a^b \frac{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)}\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6}.$$

So gelangen wir zu der Näherungsformel

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]. \tag{8}$$

Hier ist der Inhalt der Fläche unterhalb der gegebenen Kurve durch den derjenigen Fläche ersetzt, welche durch eine Parabel (mit vertikaler Achse) begrenzt wird, die durch die beiden Endpunkte und den Mittelpunkt der Kurve verläuft.

Wird der Grad k des Interpolationspolynoms vergrößert, d. h. wird die Parabel (3) durch noch mehr Punkte der gegebenen Kurve gelegt, so läßt sich eine größere Genauigkeit erreichen. Praktischer ist aber ein anderer Weg, der die parabolische Interpolation und die Zerlegung des betrachteten Intervalls verbindet.

324. Die Zerlegung des Integrationsintervalls. Bei der Berechnung des Integrals $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ kann man folgendermaßen vorgehen. Wir zerlegen etwa das Intervall $[a, b]$ in n gleiche Teile,

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n] \qquad (x_0 = a, x_n = b),$$

und geben dem gesuchten Integral die Form

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx. \tag{9}$$

Jetzt wenden wir auf jedes dieser Intervalle die parabolische Interpolation an, d. h., wir berechnen die Integrale in (9) nach einer der Näherungsformeln (4), (6), (8) usw.

Gehen wir von (4) oder (6) aus, so erhalten wir auf diese Weise wieder die uns schon bekannte Rechteckformel (1) bzw. die Trapezformel (2).

Wir wenden nun auf die Integrale in (9) die Formel (8) an; dabei setzen wir wie oben zur Abkürzung

$$f(x_i) = y_i, \qquad \frac{x_i + x_{i+1}}{2} = x_{i+1/2}, \qquad f(x_{i+1/2}) = y_{i+1/2}$$

und finden

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}(y_0 + 4y_{1/2} + y_1),$$

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}(y_1 + 4y_{3/2} + y_2),$$

$$\int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}(y_{n-1} + 4y_{n-1/2} + y_n)$$

oder nach Addition dieser Formeln

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}[(y_0 + y_n) + 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})$$
$$+ 4(y_{1/2} + y_{3/2} + \cdots + y_{n-1/2})]. \tag{10}$$

Dies ist die *Simpsonsche*[1]) *Regel.* Sie wird öfter als die Rechteck- oder die Trapezformel benutzt, denn sie liefert bei genau demselben Schwierigkeitsgrad im allgemeinen ein viel genaueres Resultat.

Zum Vergleich berechnen wir nochmals das Integral

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$$

[1]) Thomas Simpson, 1710—1761, englischer Mathematiker.

(vgl. Nr. 322) nach der Simpsonschen Regel. Wir setzen $n = 2$, so daß die Anzahl der benutzten Ordinaten jetzt sogar kleiner als früher ist. Wir berechnen auf fünf Dezimalstellen und erhalten:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 & y_0 &= 1{,}00000 \\ x_{1/2} &= \frac{1}{4} & 4y_{1/2} &= 3{,}76471 \\ x_1 &= \frac{1}{2} & 2y_1 &= 1{,}60000 \\ x_{3/2} &= \frac{3}{4} & 4y_{3/2} &= 2{,}56000 \\ x_2 &= 1 & y_2 &= 0{,}500000 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{12}(1 + 3{,}76471 + 1{,}6 + 2{,}56 + 0{,}5) = 0{,}78539\ldots$$

Alle fünf Dezimalstellen sind also genau!

Auch bezüglich (10) muß man die Schlußbemerkungen von Nr. 322 beherzigen. Wir wollen jetzt zur Abschätzung des Fehlers der Näherungsformeln übergehen.

325. Der Fehler bei der Rechteckformel. Wir gehen von Nr. 323, Formel (4), aus und nehmen an, im Intervall $[a, b]$ habe die Funktion $f(x)$ stetige erste und zweite Ableitungen. Entwickeln wir $f(x)$ mit Hilfe der Taylorschen Formel (13) aus Nr. 126 nach Potenzen von $x - \frac{a+b}{2}$ bis zum quadratischen Glied, so gilt dann für alle x aus $[a, b]$

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2!}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\xi),$$

wobei ξ zwischen x und $\frac{a+b}{2}$ liegt und von x abhängt. Integrieren wir von a bis b, so verschwindet das zweite Glied auf der rechten Seite wegen

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx = 0. \tag{11}$$

Also ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx,$$

so daß der Fehler von (4) gegenüber $\int_a^b f(x)\,dx$ die Gestalt

$$\varrho = \frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx$$

hat.

Bezeichnen wir mit m bzw. M den kleinsten bzw. den größten Wert der *stetigen* Funktion $f''(x)$ im Intervall $[a, b]$ (vgl. Nr. 85) und berücksichtigen wir, daß *der zweite Faktor im Integranden nicht das Vorzeichen wechselt*, so können wir auf Grund des verallgemeinerten Mittelwertsatzes (10° aus Nr. 304)

$$\varrho = \frac{1}{2}\mu\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{(b-a)^3}{24}\cdot\mu$$

schreiben, wobei μ zwischen m und M liegt. Nach einer bekannten Eigenschaft der stetigen Funktionen (Nr. 82) läßt sich in $[a, b]$ ein Punkt ξ^* bestimmen, für den $\mu = f''(\xi^*)$ gilt; also ist

$$\varrho = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi^*). \tag{12}$$

Bemerkung. Es wäre natürlich, die Entwicklung der Funktion $f(x)$ nach Potenzen von $x - \frac{a+b}{2}$ schon bei der ersten Potenz von $x - \frac{a+b}{2}$ abzubrechen, d. h. die Formel

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'(\bar{\xi})$$

zu benutzen. Dies führt nach Integration auf die Gleichung

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \int_a^b f'(\bar{\xi}) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx,$$

so daß das Restglied die Gestalt

$$\varrho = \int_a^b f'(\bar{\xi}) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx$$

hat, also nur die erste Ableitung $f'(x)$ enthält. Aber hier wechselt der zweite Faktor des Integranden im Intervall $[a, b]$ das Vorzeichen, so daß der verallgemeinerte Mittelwertsatz zur Berechnung von ϱ nicht anwendbar ist. Das Hinzunehmen des nächsten Gliedes der Taylorschen Entwicklung führte wegen (11) zum Erfolg.

Zerlegen wir das Intervall $[a, b]$ in n gleiche Teile, so gilt für jedes Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$ *exakt* die Beziehung

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \frac{b-a}{n} f(x_{i+(1/2)}) + \frac{(b-a)^3}{24 n^3} f''(\xi_i^*) \qquad (x_i \leqq \xi_i^* \leqq x_{i+1}).$$

Addieren wir diese Gleichungen (für $i = 0, 1, \ldots, n-1$) gliedweise, so erhalten wir (mit den gewöhnlichen Abkürzungen)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n} (y_{1/2} + y_{3/2} + \cdots + y_{n-(1/2)}) + R_n,$$

wobei der Ausdruck

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24 n^2} \, \frac{f''(\xi_0^*) + f''(\xi_1^*) + \cdots + f''(\xi_{n-1}^*)}{n}$$

den Fehler der Rechteckformel (1) angibt. Da der Quotient

$$\frac{f''(\xi_0^*) + \cdots + f''(\xi_{n-1}^*)}{n}$$

ebenfalls zwischen m und M liegt, stellt er einen der Werte von $f''(x)$ dar. Also ist schließlich

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24 n^2} f''(\xi) \qquad (a \leqq \xi \leqq b). \tag{13}$$

Für wachsendes n nimmt dieses Restglied *ungefähr* wie $\frac{1}{n^2}$ ab.[1])

---

[1]) Wir sagen „ungefähr", denn auch ξ kann sich noch mit n ändern. Daran müssen wir auch im folgenden denken.

Wir kehren nun wieder zur Berechnung des Integrals

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

zurück (vgl. Nr. 322). Die zweite Ableitung des Integranden $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ ist $f''(x) = 2\dfrac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}$; sie wechselt im Intervall $[0, 1]$ das Vorzeichen, ihr Absolutbetrag ist kleiner als 2. Also ist auf Grund von (13)

$$|R_{10}| < 0{,}85 \cdot 10^{-3}.$$

Wir berechneten in Nr. 322 die Ordinaten bis zur vierten Dezimalstelle mit der Genauigkeit $\pm 0{,}00005$; wie wir sehen, liegt der durch die Rundung der Ordinaten entstandene Fehler in den oben angegebenen Schranken. Der wahre Fehler ist tatsächlich kleiner als diese Schranke.

326. Der Fehler bei der Trapezformel. Wir beschäftigen uns nun mit der Formel (6) aus Nr. 323 unter den vorigen Voraussetzungen für die Funktion $f(x)$. Benutzen wir die Lagrangesche Interpolationsformel mit Restglied (Nr. 129, Formel (7)), so können wir

$$f(x) = P_1(x) + \frac{1}{2} f''(\bar\eta)(x-a)(x-b) \qquad (a \leqq \bar\eta < b)$$

schreiben (vgl. (5) aus Nr. 322). Integrieren wir diese Formel von a bis b, so finden wir

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{1}{2}\int_a^b f''(\bar\eta)(x-a)(x-b)\,dx;$$

der Fehler der Formel (6) lautet also

$$\varrho = \frac{1}{2}\int_a^b f''(\bar\eta)(x-a)(x-b)\,dx.$$

Da $(x-a)(x-b)$ im Intervall $[a, b]$ nicht das Vorzeichen wechselt, finden wir mit Hilfe der gleichen Überlegungen wie oben

$$\varrho = \frac{1}{2} f''(\eta^*) \int_a^b (x-a)(x-b)\,dx = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta^*) \qquad (a \leqq \eta^* \leqq b).$$

Schließlich ergibt sich, wenn das Intervall in n gleiche Teile zerlegt wird,

$$R_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\eta) \qquad (a \leqq \eta \leqq b). \tag{14}$$

Dies ist das *Restglied der Trapezformel* (2). Für wachsendes n nimmt es ebenfalls *ungefähr* wie $\dfrac{1}{n^2}$ ab.[1]) Die Anwendung der Trapezformel verursacht also einen Fehler von der gleichen Größenordnung wie die Anwendung der Rechteckformel.

---

[1]) Vgl. die Fußnote auf S. 149. — *Anm. d. Red.*

327. Der Fehler bei der Simpsonschen Regel. Wir wenden uns zum Schluß der Formel (8) aus Nr. 323 zu und könnten analog zu Nr. 326 die Lagrangesche Interpolationsformel mit Restglied (Nr. 129, Formel (7)) benutzen und

$$f(x) = P_2(x) + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b) \qquad (a < \xi < b) \tag{15}$$

setzen (vgl. (7) aus Nr. 323). Hier würden wir aber wieder auf die Ergebnisse aus Nr. 325 stoßen (vgl. dort die Bemerkung). Integrieren wir nämlich (15), so könnten wir die Integraldarstellung des Restgliedes nicht mit Hilfe des Mittelwertsatzes beseitigen, da der Ausdruck $(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)$ im Intervall $[a, b]$ das Vorzeichen wechselt. Deshalb gehen wir anders vor.

Der Ausdruck

$$P_2(z) + K(z-a)\left(z - \frac{a+b}{2}\right)(z-b)$$

nimmt für jede Zahl K in den Punkten $z = a, \frac{a+b}{2}, b$ die gleichen Werte wie $f(z)$ an. Die Zahl K werde nun, was keine Schwierigkeiten macht, durch die Bedingung bestimmt, daß die Ableitung des obigen Ausdrucks für $\frac{a+b}{2}$ mit der Ableitung $f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$ übereinstimmen soll. Damit ist bei diesem Wert von K der obige Ausdruck nichts anderes als das Hermitesche Interpolationspolynom (Nr. 130), das den einfachen Interpolationspunkten a, b und dem zweifachen Interpolationspunkt $\frac{a+b}{2}$ entspricht. Benutzen wir die Hermitesche Formel mit Restglied (Nr. 130, Formel (11)), so erhalten wir unter der Voraussetzung, daß die Funktion $f(x)$ Ableitungen bis einschließlich vierter Ordnung besitzt,

$$f(x) = P_2(x) + K(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)$$
$$+ \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2(x-b) \qquad (a < \xi < b).$$

Die Integration dieser Gleichung von a bis b liefert

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$
$$+ \frac{1}{24}\int_a^b f^{(4)}(\xi)(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)\,dx,$$

denn es gilt

$$\int_a^b (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)\,dx$$
$$= \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\left[\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{(b-a)^2}{4}\right]dx = 0.$$

Ist $f^{(4)}(x)$ stetig, so ist wie in den vorhergehenden Fällen

$$\varrho = \frac{1}{24}\int_a^b f^{(4)}(\xi)(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)\,dx$$

das Fehlerglied für die Formel (8) aus Nr. 323. Da das Produkt der letzten drei Faktoren des Integranden nicht sein Vorzeichen wechselt, können wir dem Restglied die Gestalt

$$\varrho = \frac{1}{24} f^{(4)}(\zeta^*) \int_a^b (x - a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x - b)\,dx$$

$$= \frac{1}{24} f^{(4)}(\zeta^*) \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \left[\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{(b-a)^2}{4}\right] dx = -\frac{(b-a)^5}{180 \cdot 2^4} f^{(4)}(\zeta^*)$$

geben.[1]) Zerlegen wir das Intervall $[a, b]$ in n gleiche Teile, so ergibt sich

$$R_n = -\frac{(b-a)^5}{180 \cdot (2n)^4} f^{(4)}(\zeta) \qquad (a \leqq \zeta \leqq b) \tag{16}$$

für den Fehler bei der Simpsonschen Regel (10) aus Nr. 324.

Für wachsendes n nimmt dieser Ausdruck *ungefähr* wie $\frac{1}{n^4}$ ab;[2]) die Simpsonsche Regel ist also tatsächlich vorteilhafter als die beiden vorher betrachteten Näherungsformeln.

Wir wollen noch einmal das Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$$

bestimmen. Zur Berechnung der vierten Ableitung für (16) überlegen wir, daß die Funktion $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ selbst schon die Ableitung von $y = \arctan x$ ist, so daß wir die fertige Formel aus Nr. 116, Beispiel 8, verwenden können. Mit ihr erhalten wir

$$f^{(4)}(x) = y^{(5)} = 24 \cos^5 y \sin 5\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = 24 \cos^5 y \cos 5y;$$

der Absolutbetrag dieses Ausdrucks ist höchstens gleich 24, so daß auf Grund von (16)

$$|R_2| < \frac{1}{1920} < 0{,}0006$$

gilt. Der wahre Fehler ist, wie wir sahen, bedeutend kleiner als diese Schranke.

Bemerkung. Bei diesem Beispiel fällt auf, daß die Fehlerschranken ziemlich grob sind. Leider ist dies, und darin besteht praktisch der Mangel der betrachteten Formeln, recht oft anzutreffen.

Trotzdem läßt sich gerade mit Hilfe dieser Formeln, die es überdies erlauben, den Fehler im voraus abzuschätzen, die näherungsweise Berechnung bestimmter Integrale gut durchführen.

328. Beispiele.

1. Wir berechnen das Integral $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$ mit einer Genauigkeit von $\pm 0{,}001$ unter Benutzung der Rechteckformel.

Wegen $f(x) = \frac{1}{x}$ gilt $0 < f''(x) = \frac{2}{x^3} \leqq 2$ (für $1 \leqq x \leqq 2$); also ist auf Grund von (13) aus Nr. 325

$$0 < R_n < \frac{1}{12n^2}.$$

[1]) Ist $f(x)$ ein Polynom von höchstens drittem Grad, so ist offenbar $\varrho = 0$. Das bedeutet, daß für ein solches Polynom die Formel (8) exakt ist (davon kann man sich leicht überzeugen).

[2]) Vgl. die Fußnote auf S. 149. — *Anm. d. Red.*

Setzen wir $n = 10$, so lautet die Abschätzung für das Fehlerglied

$$R_{10} < \frac{1}{1200} < 0{,}84 \cdot 10^{-3}.$$

Es tritt noch ein Fehler bei der Rundung der Funktionswerte auf; wir nehmen an, daß die Schranken für den neuen Fehler sich um weniger als $0{,}16 \cdot 10^{-3}$ unterscheiden. Dazu genügt es, die Werte der Funktion $\frac{1}{x}$ mit vier Dezimalstellen und einer Genauigkeit von $\pm 0{,}00005$ anzugeben. Dann ist

$$\begin{array}{ll}
x_{1/2} = 1{,}05 & y_{1/2} = 0{,}9524 \\
x_{3/2} = 1{,}15 & y_{3/2} = 0{,}8696 \\
x_{5/2} = 1{,}25 & y_{5/2} = 0{,}8000 \\
x_{7/2} = 1{,}35 & y_{7/2} = 0{,}7407 \\
x_{9/2} = 1{,}45 & y_{9/2} = 0{,}6897 \\
x_{11/2} = 1{,}55 & y_{11/2} = 0{,}6452 \\
x_{13/2} = 1{,}65 & y_{13/2} = 0{,}6061 \\
x_{15/2} = 1{,}75 & y_{15/2} = 0{,}5714 \\
x_{17/2} = 1{,}85 & y_{17/2} = 0{,}5405 \\
x_{19/2} = 1{,}95 & \underline{y_{19/2} = 0{,}5128} \\
 & \text{Summe } 6{,}9284
\end{array}$$

$$\frac{6{,}9284}{10} = 0{,}69284.$$

Nehmen wir an, die Korrektur an jeder Ordinate (und folglich auch an ihrem arithmetischen Mittel) liege zwischen $\pm 0{,}00005$, und beachten wir die Abschätzung des Restgliedes R_{10}, so finden wir, daß ln 2 zwischen

$$0{,}69279 = 0{,}69284 - 0{,}00005$$

und

$$0{,}69373 = 0{,}69284 + 0{,}00005 + 0{,}00084,$$

also erst recht zwischen 0,692 und 0,694 liegt. Auf diese Weise erhalten wir

$$\ln 2 = 0{,}693 \pm 0{,}001.$$

2. Wir wollen nun dasselbe Integral nach der Trapezformel berechnen. In diesem Fall ist nach Formel (14)

$$R_n < 0, \qquad |R_n| < \frac{1}{6n^2}.$$

Wir nehmen auch hier $n = 10$, obwohl dann nur

$$|R_{10}| < \frac{1}{600} < 1{,}7 \cdot 10^{-3}$$

garantiert ist. Die (mit der gleichen Genauigkeit wie in Beispiel 1 berechneten) Ordinaten sind

$$\begin{array}{llll}
x_0 = 1{,}0 & y_0 = 1{,}0 & x_1 = 1{,}1 & y_1 = 0{,}9091 \\
x_{10} = 2{,}0 & \underline{y_{10} = 0{,}5} & x_2 = 1{,}2 & y_2 = 0{,}8333 \\
 & \text{Summe } 1{,}5 & x_3 = 1{,}3 & y_3 = 0{,}7692 \\
 & & x_4 = 1{,}4 & y_4 = 0{,}7143 \\
 & & x_5 = 1{,}5 & y_5 = 0{,}6667 \\
 & & x_6 = 1{,}6 & y_6 = 0{,}6250 \\
 & & x_7 = 1{,}7 & y_7 = 0{,}5882 \\
 & & x_8 = 1{,}8 & y_8 = 0{,}5556 \\
 & & x_9 = 1{,}9 & \underline{y_9 = 0{,}5263} \\
 & & & \text{Summe } 6{,}1877
\end{array}$$

$$\frac{1}{10}\left(\frac{1{,}5}{2} + 6{,}1877\right) = 0{,}69377.$$

Berücksichtigen wir alle Korrekturen, so sehen wir, daß ln 2 zwischen

$$0{,}69202 = 0{,}69377 - 0{,}00005 - 0{,}00170$$

und

$$0{,}69382 = 0{,}69377 + 0{,}00005,$$

also wieder zwischen 0,692 und 0,694 liegt, usw.

3. Mit Hilfe der Simpsonschen Regel kann man bei gleicher Anzahl der Ordinaten ein genaueres Ergebnis erhalten. Da die vierte Ableitung des Integranden gleich $\frac{24}{x^5}$ ist, gilt nach (16) $R_n < 0$ und

$$|R_n| \leqq \frac{24}{180 \cdot (2n)^4} = \frac{2}{15 \cdot (2n)^4}.$$

Für $n = 5$ (dann ist die Anzahl der Ordinaten die gleiche wie im vorhergehenden Fall) ist

$$|R_5| < 1{,}4 \cdot 10^{-5}.$$

Wir berechnen die Werte bis zur fünften Dezimalstelle mit einer Genauigkeit von $\pm 0{,}000005$:

$x_0 = 1{,}0$	$y_0 = 1{,}0$	$x_1 = 1{,}2$	$y_1 = 0{,}83333$	$x_{1/2} = 1{,}1$	$y_{1/2} = 0{,}90909$
$x_5 = 2{,}0$	$y_5 = 0{,}5$	$x_2 = 1{,}4$	$y_2 = 0{,}71429$	$x_{3/2} = 1{,}3$	$y_{3/2} = 0{,}76923$
	Summe 1,5	$x_3 = 1{,}6$	$y_3 = 0{,}62500$	$x_{5/2} = 1{,}5$	$y_{5/2} = 0{,}66667$
		$x_4 = 1{,}8$	$y_4 = 0{,}55556$	$x_{7/2} = 1{,}7$	$y_{7/2} = 0{,}58824$
			Summe 2,72818	$x_{9/2} = 1{,}9$	$y_{9/2} = 0{,}52632$
					Summe 3,45955

$$\frac{1}{30}(1{,}5 + 2 \cdot 2{,}72818 + 4 \cdot 3{,}45955) = \frac{1}{30}(1{,}5 + 5{,}45636 + 13{,}83820) = 0{,}693152.$$

Daraus folgt, daß ln 2 zwischen

$$0{,}693133 = 0{,}693152 - 0{,}000005 - 0{,}000014$$

und

$$0{,}693157 = 0{,}693152 + 0{,}000005$$

liegt, so daß wir beispielsweise $\ln 2 = 0{,}693315 \pm 0{,}00002$ setzen können.

Tatsächlich ist $\ln 2 = 0{,}69314718\ldots$, und der wahre Fehler ist kleiner als 0,000005 (vgl. die Bemerkung am Schluß von Nr. 327).

4. Wir stellen uns die Aufgabe, das *vollständige elliptische Integral zweiter Gattung*[1])

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 x}\, dx$$

mit einer Genauigkeit von $\pm 0{,}001$ unter Benutzung der Simpsonschen Regel zu berechnen. Für die Funktion $f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 x}$, wobei x zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ variiert, gilt $|f^{(4)}(x)| < 12$.[2]) Daher ist (vgl. (16) aus Nr. 327)

$$|R_n| < \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{180 \cdot (2n)^4} \cdot 12 < \frac{2}{3}\,\frac{1}{(2n)^4}$$

---

[1]) Vgl. die Fußnote auf S. 132.

[2]) Offenbar ist $y = f(x) \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}$; differenzieren wir die Identität $y^2 = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 x$, so erhalten wir leicht nacheinander obere Schranken für die Absolutbeträge der Ableitungen y', y'', y''', $y^{(4)}$.

wegen $\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 < 10$. Wir nehmen $n = 3$, so daß $|R_3| < 0{,}00052$ ist. Dann gilt:

$$\begin{array}{llll}
x_0 = 0\ (= 0°) & & y_0 = 1{,}0000 & \\
x_{1/2} = \frac{\pi}{12}\ (= 15°) & & 4y_{1/2} = \sqrt{12 + \sqrt{12}} & = 3{,}9324 \\
x_1 = \frac{\pi}{6}\ (= 30°) & & 2y_1 = \frac{\sqrt{14}}{2} & = 1{,}8708 \\
x_{3/2} = \frac{\pi}{4}\ (= 45°) & & 4y_{3/2} = \sqrt{12} & = 3{,}4641 \\
x_2 = \frac{\pi}{3}\ (= 60°) & & 2y_2 = \frac{\sqrt{10}}{2} & = 1{,}5811 \\
x_{5/2} = \frac{5\pi}{12}\ (= 75°) & & 4y_{5/2} = \sqrt{12 - \sqrt{12}} & = 2{,}9216 \\
x_3 = \frac{\pi}{2}\ (= 90°) & & y_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} & = 0{,}7071 \\
\hline
 & & \text{Summe} & 15{,}4771
\end{array}$$

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{15{,}4771}{18} = 1{,}35063\ldots$$

Zu dem erhaltenen Resultat muß außer der Korrektur R_3 noch eine (nichtnegative) Rundungskorrektur zugefügt werden, die nicht größer ist als $\frac{0{,}0003 \cdot \pi}{36} < 0{,}00003$. Damit gilt

$$1{,}35011 < \mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 1{,}35118,$$

und wir können behaupten, daß $\mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1{,}351 \pm 0{,}001$ ist. (Tatsächlich sind in diesem Ergebnis alle Dezimalstellen richtig.)

5. Man berechne mit Hilfe der Simpsonschen Regel das Integral

$$W = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

mit einer Genauigkeit von $\pm 0{,}0001$.

Die vierte Ableitung des Integranden läßt sich unmittelbar berechnen; ihr Absolutbetrag ist höchstens gleich 12. Deshalb gilt

$$|R_n| < \frac{12}{180 \cdot (2n)^4}.$$

Es genügt, $n = 5$ zu setzen, denn es ist $|R_5| < 0{,}7 \cdot 10^{-5}$. Dann ist

$$\begin{array}{ll}
x_0 = 0{,}0 & y_0 = 1{,}00000 \\
x_5 = 1{,}0 & y_5 = 0{,}36788 \\
\hline
 & \text{Summe}\ \ 1{,}36788
\end{array}$$

$x_1 = 0{,}2$	$y_1 = 0{,}96079$	$x_{1/2} = 0{,}1$	$y_{1/2} = 0{,}99005$
$x_2 = 0{,}4$	$y_2 = 0{,}85214$	$x_{3/2} = 0{,}3$	$y_{3/2} = 0{,}91393$
$x_3 = 0{,}6$	$y_3 = 0{,}69768$	$x_{5/2} = 0{,}5$	$y_{5/2} = 0{,}77880$
$x_4 = 0{,}8$	$y_4 = 0{,}52729$	$x_{7/2} = 0{,}7$	$y_{7/2} = 0{,}61263$
	Summe 3,03790	$x_{9/2} = 0{,}9$	$y_{9/2} = 0{,}44486$
			Summe 3,74027

$$\frac{1}{30}(1{,}36788 + 2 \cdot 3{,}03790 + 4 \cdot 3{,}74027)$$

$$= \frac{1}{30}(1{,}36788 + 6{,}07580 + 14{,}96108) = 0{,}746825,$$

$$0{,}746813 < W < 0{,}746837,$$

$$W = 0{,}7468 + 0{,}00005.^{1})$$

(In diesem Resultat sind alle Dezimalstellen richtig.)

6. Man bestimme das Integral

$$G = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\, dx$$

(vgl. Nr. 314, Beispiel 6) mit Hilfe der Simpsonschen Regel für $n = 5$ und berechne es auf fünf Dezimalstellen:

$y_0 = 1{,}00000$	$y_1 = 0{,}98698$	$y_{1/2} = 0{,}99668$
$y_5 = 0{,}78540$	$y_2 = 0{,}95127$	$y_{3/2} = 0{,}97152$
Summe 1,78540	$y_3 = 0{,}90070$	$y_{5/2} = 0{,}92730$
	$y_4 = 0{,}84343$	$y_{7/2} = 0{,}87246$
	Summe 3,68238	$y_{9/2} = 0{,}81424$
		Summe 4,58220

$$\frac{1}{30}(1{,}78540 + 2 \cdot 3{,}68238 + 4 \cdot 4{,}58220)$$

$$= \frac{1}{30}(1{,}78540 + 7{,}36476 + 18{,}32880) = 0{,}915965.$$

Alle Dezimalstellen sind richtig. Wir überlassen es dem Leser, den Fehler nach Formel (16) abzuschätzen.

Der Wert G ist die *Catalansche*[2]) *Konstante* (vgl. auch Nr. 440, Beispiel 6(a)).

Bemerkung. Die letzten drei Beispiele sind deshalb interessant, weil die entsprechenden Stammfunktionen nicht in geschlossener Form darstellbar sind, so daß sie zur Berechnung der bestimmten Integrale nicht verwendet werden können.

Da Stammfunktionen als bestimmte Integrale mit variabler oberer Grenze darstellbar sind, kann man mit den angegebenen Methoden diese Integrale angenähert als Funktion der oberen Grenze berechnen. Damit ist prinzipiell die Möglichkeit geschaffen, für die nur durch Integrale gegebenen Funktionen solche Tabellen zusammenzustellen, wie sie für die elementaren Funktionen bekannt sind.

Auf diesem Wege können für die erwähnten Funktionen auch Näherungsformeln gefunden werden.

[1]) Statt $\pm$ steht hier nur $+$, weil das Minuszeichen auf Grund der vorhergehenden Ungleichung nicht eintreten kann. — *Anm. d. Red.*

[2]) Eugène Charles Catalan, 1814—1894, belgischer Mathematiker.

X. Anwendungen der Integralrechnung in Geometrie, Mechanik und Physik

§ 1. Die Länge einer Kurve

329. Berechnung der Länge einer Kurve. Es sei

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t) \qquad (t_0 \leqq t \leqq T) \tag{1}$$

die Parameterdarstellung einer ebenen stetigen doppelpunktfreien Kurve (Jordankurve[1])) $\overset{\frown}{AB}$. In Nr. 247 wurde der Begriff der *Länge einer Kurve* als die obere Grenze S der Längen einbeschriebener Polygonzüge definiert:

$$S = \sup\{p\}. \tag{2}$$

Unter der Voraussetzung, daß die Funktionen (1) stetige Ableitungen besitzen, wurde in Nr. 248 bewiesen, daß die Kurve *rektifizierbar*, d. h. die Bogenlänge *endlich* ist. Ferner wurde festgestellt, daß die Länge s eines veränderlichen Bogens $\overset{\frown}{AM}$, wobei M ein beliebiger Punkt der Kurve ist, dem der Parameterwert t entspricht, eine differenzierbare Funktion von t ist:

$$s = s(t).$$

Die Ableitung dieser Funktion besitzt die Form

$$s'(t) = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$$

oder

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2} \tag{3}$$

(vgl. Nr. 248, Formel (10)) und ist offenbar auch stetig.

Da wir mit dem Integralbegriff vertraut sind, können wir jetzt zur *Berechnung* der Länge S der Kurve $\overset{\frown}{AB}$ übergehen. Auf Grund des Hauptsatzes[2]) der Integralrechnung erhalten wir sofort

$$s(T) - s(t_0) = \int_{t_0}^{T} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$$

oder

$$S = \int_{t_0}^{T} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{T} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t. \tag{4}$$

---

[1]) Camille Jordan, 1838–1922, französischer Mathematiker.

[2]) Vgl. Nr. 308. — *Anm. d. Red.*

Für die veränderliche Bogenlänge s von $\widehat{AM}$, von welcher oben die Rede war, erhalten wir, wie wir leicht sehen,

$$s = s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t. \tag{5}$$

Es kann vorkommen, daß man als Anfangspunkt einen beliebigen *inneren* Punkt M_0 des Bogens wählt. Wenn wie oben t_0 diesen Punkt charakterisiert (in diesem Fall ist t_0 nicht der Endpunkt des Intervalls, da t variabel ist), so gibt die Formel (5) offenbar die Länge des Bogens $\widehat{AM}$ *mit Vorzeichen* an. Das Vorzeichen ist positiv, wenn $t > t_0$ ist und M auf der positiven Seite der Bogenzählung (von M_0 an gerechnet) liegt, dagegen negativ, wenn $t < t_0$ ist und der Punkt M sich auf der negativen Seite von M_0 befindet.

Ist die Kurve in rechtwinkligen Koordinaten in *expliziter* Form

$$y = f(x) \qquad (x_0 \leqq x \leqq X)$$

gegeben, so erhalten wir, wenn wir x als Parameter ansehen, aus (4) als Spezialfall

$$S = \int_{x_0}^{X} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{X} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x. \tag{4a}$$

Ist schließlich die Kurve in *Polarkoordinaten* durch die Gleichung

$$r = g(\theta) \qquad (\theta_0 < \theta \leqq \Theta)$$

gegeben, so können wir die üblichen Transformationsformeln

$$x = r\cos\theta = g(\theta)\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta = g(\theta)\sin\theta$$

als Parameterdarstellung der Kurve auffassen. Die Rolle des Parameters spielt hier θ. In diesem Fall ist

$$S = \int_{\theta_0}^{\Theta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta = \int_{\theta_0}^{\Theta} \sqrt{[g(\theta)]^2 + [g'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta. \tag{4b}$$

Bei diesen beiden Spezialfällen der Kurvendarstellung kann man leicht die Bogenlänge s für den veränderlichen Bogen $\widehat{AM}$ angeben, wenn M der Abszisse x oder dem Azimut θ entspricht:

$$s = s(x) = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}\right)^2}\,\mathrm{d}\xi \tag{5a}$$

oder

$$s = s(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x. \tag{5b}$$

330. Ein anderer Weg zur Definition und zur Berechnung der Länge einer Kurve. Bei der Definition der Länge der stetigen doppelpunktfreien Kurve (1) gingen wir von der Beziehung (2) aus. Wir beweisen nun, daß *die Länge S einer nicht geschlossenen Kurve nicht nur die obere Grenze der Menge der Längen $\{p\}$ der einbeschriebenen Polygonzüge ist, sondern einfach der Grenzwert von p ist, wenn die Längen aller Seiten des Polygons (p) gegen 0 streben (oder genauer die Länge λ^* der längsten Seite)*:

$$S = \lim_{\lambda^* \to 0} p. \tag{6}$$

Dazu gehen wir am bequemsten von folgenden Werten des Parameters t aus:

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_i < t_{i+1} < \cdots < t_n = T; \tag{7}$$

durch diese Werte ist die Lage der Ecken des Polygons (p) auf der Kurve definiert. Ferner setzen wir voraus, daß alle $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ (oder genauer, der größte von ihnen, $\lambda = \max \Delta t_i$) gegen 0 streben. Die beiden Hilfssätze aus Nr. 245 gewährleisten die Äquivalenz der beiden Arten des Grenzübergangs. Also brauchen wir nur die Beziehung

$$S = \lim_{\lambda \to 0} P \tag{6*}$$

zu beweisen. Zuerst heben wir folgende wichtige Eigenschaft des Polygons (p) hervor: Dieses Polygon entspreche einer gewissen Zerlegung (7) des Intervalls $[t_0, T]$. Nehmen wir noch einen Teilpunkt $\bar{t}$ hinzu,

$$t_k < \bar{t} < t_{k+1},$$

so verlängert sich das Polygon (p), wobei die Vergrößerung die zweifache Summe der Schwankungen von $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ im Intervall $[t_k, t_{k+1}]$ nicht überschreitet. Durch das Hinzufügen des neuen Punktes $\bar{t}$ wird nämlich in der Summe p der eine Summand

$$\sqrt{[\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)]^2 + [\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)]^2} \tag{8}$$

(die Länge einer Seite) durch die Summe zweier Summanden

$$\sqrt{[\varphi(\bar{t}) - \varphi(t_k)]^2 + [\psi(\bar{t}) - \psi(t_k)]^2} + \sqrt{[\varphi(t_{k+1}) - \varphi(\bar{t})]^2 + [\psi(t_{k+1}) - \psi(\bar{t})]^2} \tag{9}$$

(die Summe der Längen zweier Seiten) ersetzt, welche in keinem Fall kleiner als der Summand (8) ist.

Andererseits ist die ganze Summe (9) nicht größer als

$$|\varphi(\bar{t}) - \varphi(t_k)| + |\psi(\bar{t}) - \psi(t_k)| + |\varphi(t_{k+1}) - \varphi(\bar{t})| + |\psi(t_{k+1}) - \psi(\bar{t})|;$$

folglich ist die Vergrößerung von p erst recht nicht größer als diese Zahl, die offenbar kleiner als die erwähnte zweifache Summe der Schwankungen ist.

Im folgenden beschränken sich die Überlegungen auf den Fall eines endlichen S. Für eine beliebig kleine Zahl $\varepsilon > 0$ findet sich nach Definition der oberen Grenze eine solche Zerlegung des Intervalls $[t_0, T]$ mit Hilfe der Punkte

$$t_0^* = t_0 < t_1^* < t_2^* < \cdots < t_m^* = T, \tag{10}$$

daß die entsprechende Polygonlänge p^* die Ungleichung

$$p^* > S - \frac{\varepsilon}{2} \tag{11}$$

erfüllt. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit der Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ in $t_0 \leqq t \leqq T$ existiert eine beliebig kleine Zahl $\delta > 0$ derart, daß

$$|\varphi(t'') - \varphi(t')| < \frac{\varepsilon}{8m}, \qquad |\psi(t'') - \psi(t')| < \frac{\varepsilon}{8m}$$

für alle Punktepaare t', t'' aus $[t_0, T]$ gilt, sobald $|t'' - t'| < \delta$ ist. Wir zerlegen also das Intervall $[t_0, T]$ mit Hilfe von (7) unter der einzigen Bedingung, daß $\lambda < \delta$ gilt (d. h., daß alle $\Delta t_i < \delta$), und bilden die entsprechende Summe p.

Wir betrachten noch eine dritte Zerlegung des Intervalls $[t_0, T]$, für welche als Teilpunkte sowohl alle Punkte t_i der Zerlegung (7) als auch alle Punkte t_k^* der Zerlegung (10) verwendet werden. Die zugehörige Polygonlänge sei p_0. Da diese Zerlegung aus (10) durch Hinzunahme neuer Punkte erhalten wird, gilt

$$p_0 \geqq p^*. \tag{12}$$

Andererseits ergibt sich diese Zerlegung aus (7) unter Hinzunahme der Punkte t_k^*. Die Hinzunahme jedes einzelnen Punktes t_k^* vergrößert p um nicht mehr als die zweifache Summe der entsprechenden Schwankungen der Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$, d. h. um weniger als $\frac{\varepsilon}{2m}$. Da sich dieser Prozeß höchstens m-mal wiederholt, ist p_0 um höchstens $\frac{\varepsilon}{2}$ größer als p:

$$p_0 \leqq p + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{13}$$

Aus den Ungleichungen (13), (12) und (11) folgt $p > S - \varepsilon$, so daß $0 < S - p < \varepsilon$ gilt, woraus sich die Behauptung (6*) und damit auch (6) ergibt. Da umgekehrt (2) aus (6) folgt, kann die Gleichung (6) als neue Definition der Bogenlänge angesehen werden, die der früheren äquivalent ist.

Bemerkung. Wie leicht zu sehen ist, kann man im Fall einer *geschlossenen* Kurve eine solche Definition nicht vorbehaltlos verwenden, da nämlich der Polygonzug, wenn die genannte Bedingung erfüllt ist, auf einen Punkt zusammengezogen werden kann und somit sein Umfang gegen 0 und nicht gegen die Länge der Kurve strebt (Abb. 8). Das Wesentliche ist dabei, daß für *nichtgeschlossene* Kurven eine Abnahme aller Glieder des Polygons (p) auf 0 schon ein Anschmiegen an die entsprechenden Teilbogen gewährleistet; dann nimmt man natürlich den Grenzwert der Polygonlänge als Länge des Bogens. Bei einer geschlossenen Kurve geht das nicht in jedem Fall.

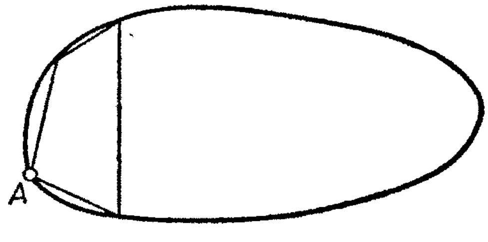

Abb. 8

Wenn anstelle des Verschwindens aller *Seiten* des Polygons dasselbe für die Durchmesser der entsprechenden *Bogen* gefordert wird, kann die neue Definition im gleichen Maße für nichtgeschlossene und für geschlossene Kurven verwendet werden.

Wir zeigen jetzt, wie aus der Definition (6) oder (6*) unmittelbar die Beziehung (4) für die Bogenlänge S folgt. Dazu gehen wir von dem Ausdruck für die Polygonlänge p

aus (vgl. Nr. 248, Formel (7)):

$$p = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\bar{\tau}_i)]^2}\, \Delta t_i;$$

hier sind τ_i, $\bar{\tau}_i$ gewisse Werte von t im Intervall $[t_i, t_{i+1}]$. Wenn wir im zweiten Summanden unter dem Wurzelzeichen überall $\bar{\tau}_i$ durch τ_i ersetzen, so stellt der geänderte Ausdruck

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i)]^2}\, \Delta t_i$$

offenbar die *Integralsumme* für das Integral (4) dar. Wenn λ gegen 0 strebt, hat diese Summe den Wert des erwähnten Integrals.[1]) Um zu zeigen, daß der Grenzwert gegen die Länge p des Polygons strebt, genügt es zu beweisen, daß die Differenz $p - \sigma$ verschwindet. Zum Beweis nehmen wir die folgende Abschätzung vor:

$$|p - \sigma| \leqq \sum_i \left| \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\bar{\tau}_i)]^2} - \sqrt{[\varphi'(\tau_i)^2 + [\psi'(\tau_i)]^2} \right| \Delta t_i .$$

Wenden wir die elementare Ungleichung[2])

$$\left| \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + b_1^2} \right| \leqq |b - b_1|$$

auf jeden einzelnen Summanden der obigen Summe an, so erhalten wir

$$|p - \sigma| \leqq \sum_i |\psi'(\tau_i) - \psi'(\bar{\tau}_i)|\, \Delta t_i .$$

Auf Grund der Stetigkeit der Funktion $\psi'(t)$ existiert zu einem beliebig gegebenen $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, daß

$$|\psi'(t) - \psi'(\bar{t})| < \varepsilon$$

ist, sobald $|t - \bar{t}| < \delta$ ist. Wenn wir nun $\lambda < \delta$ wählen (d. h. alle $\Delta t_i < \delta$), so ist auch $|\tau_i - \bar{\tau}_i| < \delta$, also

$$|\psi'(\tau_i) - \psi'(\bar{\tau}_i)| < \varepsilon$$

und

$$|p - \sigma| \leqq \varepsilon \sum_i \Delta \tau_i = \varepsilon (T - t_0) .$$

Damit ist die Formel (4) bewiesen.

331. Beispiele.

1. Die *Kettenlinie* $y = a \cosh \frac{x}{a}$ (Abb. 9). Wir erhielten schon in Nr. 252, Beispiel 1,

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \cosh \frac{x}{a} .$$

[1]) Es existiert sicher, wenn der Integrand eine stetige Funktion ist (vgl. Nr. 298, Beispiel 1).

[2]) Die Ungleichung ist trivial für $a = 0$; für $a \neq 0$ folgt sie unmittelbar aus der Identität

$$\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + b_1^2} = \frac{b + b_1}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b_1^2}} (b - b_1) ,$$

da der Absolutbetrag des Faktors bei $b - b_1$ kleiner als 1 ist.

Damit folgt aus (5a), wenn wir als Anfangspunkt der Zählung den Scheitelpunkt A nehmen,

$$s = \widehat{AM} = \int_0^x \cosh \frac{\xi}{a} \, \mathrm{d}\xi = a \sinh \frac{x}{a}.$$

Wegen $\tan \alpha = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sinh \frac{x}{a}$ erhalten wir auch $s = a \tan \alpha$. Somit ist im Dreieck MPS (Abb. 9) die Kathete $MS = a \tan \alpha$ genau gleich der Bogenlänge s. Wir erhalten damit ein einfaches graphisches Verfahren zur Bestimmung der Bogenlänge der Kettenlinie.

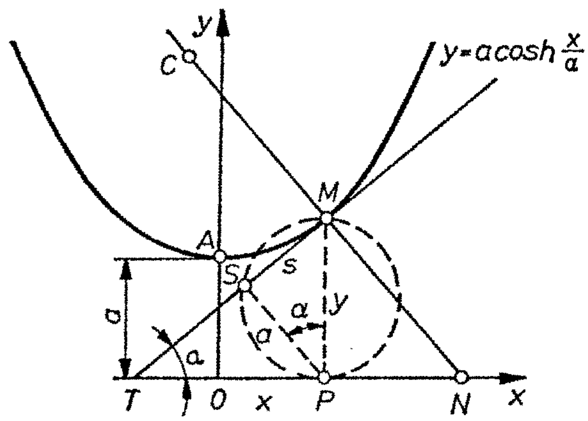

Abb. 9

2. Die *Parabel* $y = \frac{x^2}{2p}$ $(p > 0)$. Nehmen wir als Anfangspunkt des Bogens den Scheitelpunkt O $(x = 0)$, so erhalten wir für einen beliebigen Punkt M mit der Abszisse x

$$\begin{aligned} s = \widehat{OM} &= \frac{1}{p} \int_0^x \sqrt{\xi^2 + p^2} \, \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{p} \left[\frac{1}{2} \xi \sqrt{\xi^2 + p^2} + \frac{p^2}{2} \ln \left(\xi + \sqrt{\xi^2 + p^2} \right) \right] \Bigg|_0^x \\ &= \frac{x}{2p} \sqrt{x^2 + p^2} + \frac{p}{2} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + p^2}}{p}. \end{aligned}$$

3. Die *Astroide* $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ $(a > 0)$. Wir benutzen die in Nr. 224, Beispiel 4, berechneten Werte $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ und $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ und erhalten

$$\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2} = 3a \sin t \cos t \qquad \left(\text{für } 0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right).$$

Die Länge eines Viertels der Astroide zwischen den Punkten $A(a, 0)$ und $B(0, a)$ ist nach Formel (4) gleich

$$\widehat{AB} = 3a \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t \, \mathrm{d}t = \frac{3a}{2} \sin^2 t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3a}{2},$$

so daß die vollständige Bogenlänge gleich $6a$ ist.

4. Die *Zykloide* $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $a > 0$. Hier ist (für $0 \leqq t \leqq 2\pi$)

$$\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2} = a \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = 2a \sin \frac{t}{2}.$$

Die Länge einer Schleife der Zykloide ist also nach (4) gleich

$$2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\, dt = -4a \cos \frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

5. Die *Kreisevolvente*:

$$x = a(t \sin t + \cos t), \quad y = a(\sin t - t \cos t), \quad a > 0.$$

Hier ist (für $t > 0$)

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = a\sqrt{(t \cos t)^2 + (t \sin t)^2} = at,$$

so daß die Länge des Bogens $\widehat{AM}$ vom Punkt A ($t = 0$) bis zu einem beliebigen Punkt M ($t > 0$) gleich

$$\widehat{AM} = s = \frac{at^2}{2}$$

ist. Für $t < 0$ muß die rechte Seite dieser Formel mit dem negativen Vorzeichen versehen werden.

6. Die *Archimedische Spirale* $r = a\theta$ ($a > 0$). Aus (5b) erhalten wir für die Bogenlänge vom Ursprung O bis zu einem beliebigen Punkt M (der dem Winkel θ entspricht)

$$\widehat{OM} = a \int_0^{\theta} \sqrt{1 + \chi^2}\, d\chi = \frac{a}{2}\left[\theta\sqrt{1 + \theta^2} + \ln\left(\theta + \sqrt{1 + \theta^2}\right)\right].$$

Setzt man hier $\theta = \frac{r}{a}$ ein, so erhält man formal denselben Ausdruck wie für die Bogenlänge der Parabel (vgl. Beispiel 2).

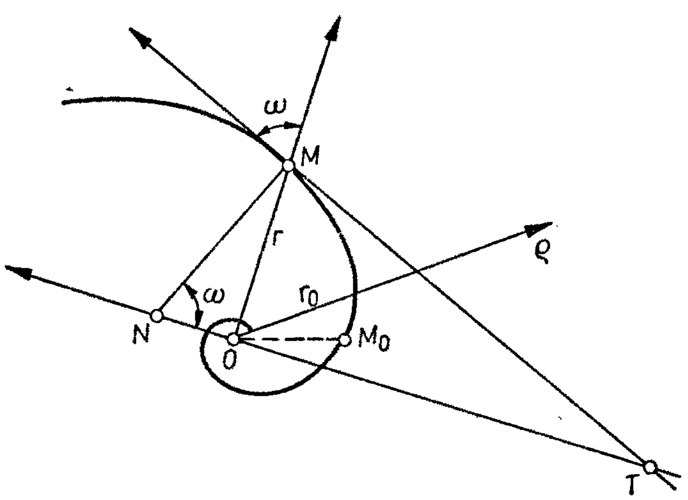

Abb. 10

7. Die *logarithmische Spirale* $r = ae^{m\theta}$ ($m \neq 0$) (Abb. 10). Wegen $\frac{dr}{d\theta} = mr$, also $r = \frac{1}{m}\frac{dr}{d\theta}$, erhalten wir nach (5b) für die Bogenlänge zwischen zwei Punkten M_0 und M mit den Koordinaten (r_0, θ_0) bzw. (r, θ)

$$s = \widehat{M_0M} = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\chi}\right)^2}\, d\chi = \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{dr}{d\chi}\, d\chi = \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}}\,(r - r_0).$$

Da für die logarithmische Spirale $\tan\omega = \frac{1}{m}$ gilt (vgl. Nr. 233, Beispiel 3), können wir das obige Resultat auch in der Form

$$s = \widehat{M_0M} = \frac{r - r_0}{\cos\omega}$$

schreiben. Lassen wir den Punkt M_0 gegen den Pol O streben, so geht r_0 gegen 0, und wir finden für die Bogenlänge von OM die einfachere Formel

$$s = \widehat{OM} = \frac{t}{\cos\omega}.$$

Mit ihrer Hilfe erkennt man leicht aus dem Dreieck MOT (vgl. Abb. 10), daß die Bogenlänge s gleich dem Abschnitt auf der Polartangente ist:

$$\widehat{OM} = TM.$$[1]

Wir haben damit ein höchst einfaches graphisches Verfahren zur Rektifizierung dieser Kurve erhalten.

8. Die *Ellipse* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Es ist hier zweckmäßiger, die Ellipse in der Parameterform $x = a\sin t$, $y = b\cos t$ darzustellen. Offenbar gilt

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} = \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\sin^2 t} = a\sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2 t},$$

wobei $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ die numerische Exzentrizität der Ellipse ist. Für die Bogenlänge der Ellipse vom oberen Endpunkt der kleinen Achse bis zu einem beliebigen Punkt im ersten Quadranten finden wir

$$s = a\int_0^t \sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2\tau}\, d\tau = aE(\varepsilon, t).$$

Damit ist die Bogenlänge der Ellipse durch das *elliptische Integral zweiter Gattung* (Nr. 293; vgl. auch Nr. 305) ausgedrückt worden. Offenbar war diese Tatsache der Anlaß für die Bezeichnung „elliptisch".

Insbesondere wird die Länge eines Viertelbogens der Ellipse durch das vollständige elliptische Integral zweiter Gattung[2] ausgedrückt:

$$a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2 t}\, dt = a\mathrm{E}(\varepsilon).$$

Die Länge des ganzen Umfangs ist also

$$S = 4a\mathrm{E}(\varepsilon).$$

Es ist interessant, daß man für die Länge einer Welle der Kurve $y = c\sin\frac{x}{b}$ mit $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ dasselbe Resultat erhält. Geometrisch läßt sich diese Übereinstimmung leicht erklären. Denkt man sich einen geraden Kreiszylinder, der von einer Ebene geschnitten wird, die gegenüber den Erzeugenden des Zylinders geneigt ist, so erhält man als Schnittlinie eine Ellipse.

---

[1] Aus dieser Eigenschaft der logarithmischen Spirale ergibt sich leicht der folgende Satz: Wird diese Kurve ohne Gleiten auf der Geraden MT abgerollt, so beschreibt der Pol O (wenn man sich ihn mit der Kurve starr verbunden denkt) eine Gerade. Der Beweis sei dem Leser überlassen.

[2] Vgl. die Fußnote auf S. 132.

Wenn man nun den Kreiszylinder längs der Erzeugenden, die durch den Endpunkt der kleinen Achse der Ellipse geht, aufschneidet und den Zylinder auf die Ebene abwickelt, so geht die Ellipse in eine sinusförmige Kurve über.

Analog führt auch die Berechnung der Bogenlänge der *Hyperbel* auf *elliptische Integrale* (beider Gattungen).

9. Die *Schnecke* $r = a\cos\theta + b$. Hier ist $\dfrac{dr}{d\theta} = -a\sin\theta$ und

$$r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = a^2 + 2ab\cos\theta + b^2 = (a+b)^2\left[1 - \frac{4ab}{(a+b)^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right].$$

Damit erhalten wir für die Bogenlänge vom Punkt $\theta = 0$ bis zu einem beliebigen Punkt $\theta < \pi$ das folgende elliptische Integral zweiter Gattung:

$$s = (a+b)\int_0^\theta \sqrt{1 - \frac{4ab}{(a+b)^2}\sin^2\frac{\chi}{2}}\,d\chi$$

$$= 2(a+b)\int_0^{\theta/2} \sqrt{1 - \frac{4ab}{(a+b)^2}\sin^2 t}\,dt = 2(a+b)\,E\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}, \frac{\theta}{2}\right).$$

Die Länge der ganzen Kurve läßt sich als vollständiges elliptisches Integral ausdrücken:

$$S = 4(a+b)\,\mathrm{E}\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right).$$

Für den Spezialfall der *Kardioide* ($b = a$) vereinfacht sich jedoch die Rechnung bedeutend. In diesem Fall gilt

$$r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = 4a^2\cos^2\frac{\theta}{2},$$

also für ($0 < \theta \leqq \pi$)

$$s = 2a\int_0^\theta \cos\frac{\chi}{2}\,d\chi = 4a\sin\frac{\theta}{2}.$$

Wenn man den um den Pol O mit dem Radius $2a$ gezogenen Kreisbogen durch A mit der Verlängerung des Radiusvektors OM zum Schnitt bringt (Abb. 11), so sieht man sofort, daß die *Sehne* AL gleich der Bogenlänge s von $\overset{\frown}{AM}$ ist.

Die Länge der ganzen Kardioide ist gleich $8a$.

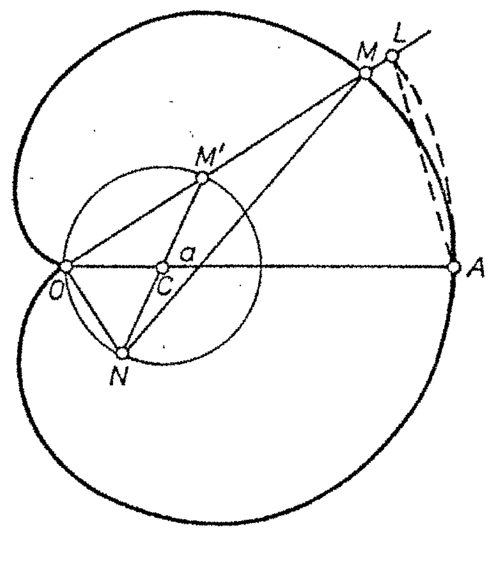

Abb. 11

10. Die *Lemniskate* $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$. Wir berechnen die Bogenlänge der Lemniskate vom Scheitelpunkt $\theta = 0$ bis zu einem beliebigen Punkt mit einem Polarwinkel $\theta < \frac{\pi}{4}$. Es gilt

$$r \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -2a^2 \sin 2\theta;$$

daraus folgt

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{2a^2 \sin 2\theta}{r}, \qquad \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2} = \frac{2a^2}{r} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

und auf Grund von (5b)

$$s = a\sqrt{2} \int_0^\theta \frac{\mathrm{d}\chi}{\sqrt{\cos 2\chi}} = a\sqrt{2} \int_0^\theta \frac{\mathrm{d}\chi}{\sqrt{1 - 2\sin^2\chi}}.$$

Damit sind wir wieder zu einem elliptischen Integral (erster Gattung) gelangt. Da in den Tabellen zur Berechnung dieser Integrale der Faktor k^2 bei $\sin^2\theta$ kleiner als 1 ist, müssen wir eine neue Variable einführen. Wir wählen die Substitution $2\sin^2\theta = \sin^2\varphi$ (wegen $\theta < \frac{\pi}{4}$ ist $2\sin^2\theta < 1$, also läßt sich der Winkel φ tatsächlich berechnen); dann gilt

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\varphi, \qquad \cos\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\varphi \,\mathrm{d}\varphi,$$

$$\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cos\varphi \,\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}, \qquad \sqrt{1 - 2\sin^2\theta} = \cos\varphi$$

und schließlich

$$s = a \int_0^\varphi \frac{\mathrm{d}\chi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\chi}} = aF\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi\right).$$

Im Grenzfall[1]) $\theta = \frac{\pi}{4}$, also $\varphi = \frac{\pi}{2}$, erhalten wir für die Bogenlänge eines Viertels der Lemniskate das *vollständige* elliptische Integral

$$s = a \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = a\mathrm{K}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Die Länge der ganzen Lemniskate ist also $S = 4a\mathrm{K}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Es ist bemerkenswert, daß die Rektifizierung von Kurven häufig gerade auf elliptische Integrale führt.

---

[1]) Man muß diesen Fall als Grenzfall behandeln, indem man in dem Ausdruck für s den Grenzübergang $\theta \to \frac{\pi}{4}$ oder $\varphi \to \frac{\pi}{2}$ vornimmt; für $\theta \to \frac{\pi}{4}$ bleibt nämlich die Ableitung $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$ nicht beschränkt, und die Formel (5b) ist nicht unmittelbar anwendbar.

11. Zum Schluß zeigen wir, wie mit Hilfe der Formel für die Bogenlänge die *Evolvente einer Kurve* konstruiert werden kann (Nr. 256).

Wir betrachten die *Kettenlinie*. Die laufenden Koordinaten ihrer Punkte seien ξ, η (gemäß der Bezeichnungen in Nr. 256); ihre Bogenlänge, gezählt vom Scheitelpunkt, sei σ. Dann hat die Gleichung der Kurve die Form

$$\eta = a \cosh \frac{\xi}{a},$$

und die Bogenlänge ist gleich

$$\sigma = a \sinh \frac{\xi}{a}$$

(vgl. Beispiel 1). Daraus kann man unmittelbar ξ und η als Funktion von σ darstellen:

$$\xi = a\left[\ln\left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + a^2}\right) - \ln a\right], \qquad \eta = \sqrt{\sigma^2 + a^2}.$$

Nun kann man auf Grund von (17) aus Nr. 256 und unter Beachtung, daß hier

$$\cos\beta = \frac{a}{\sqrt{\sigma^2 + a^2}}, \qquad \sin\beta = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + a^2}}$$

gilt (vgl. Nr. 256, Formel (18)), die Parameterdarstellung einer beliebigen Evolvente in der Form

$$x = a\left[\ln\left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + a^2}\right) - \ln a\right] + (c - \sigma)\frac{a}{\sqrt{\sigma^2 + a^2}},$$

$$y = \sqrt{\sigma^2 + a^2} + (c - \sigma)\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + a^2}}$$

angeben. Wir betrachten diejenige der Evolventen, welche dem Wert $c = 0$ entspricht. Sie geht vom Scheitelpunkt der Kettenlinie aus und besitzt dort einen Rückkehrpunkt (Abb. 12). Eliminiert man σ, so wird diese Kurve, die sogenannte *Traktrix*, durch

$$x = \pm\left[a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}\right]$$

dargestellt.

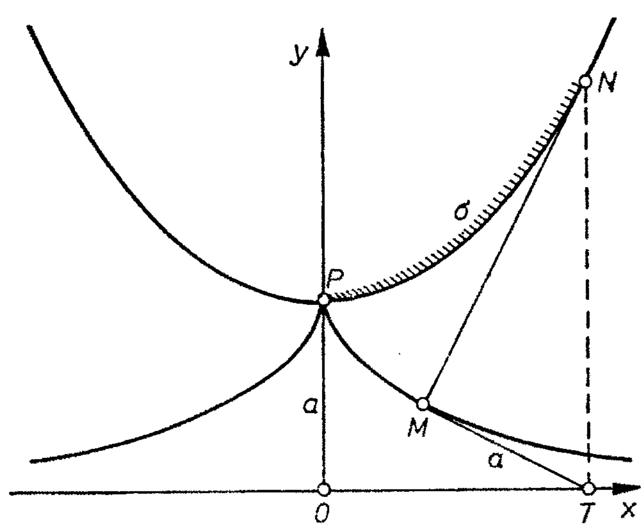

Abb. 12

Wenn wir den Ausdruck

$$t = \left| \frac{y}{\frac{dy}{dx}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \right| = y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

für den Tangentenabschnitt (vgl. Nr. 230, Formel 4)) betrachten, so folgt daraus leicht $t = a$. Dadurch zeigt sich folgende bemerkenswerte Eigenschaft der Traktrix: *Der Tangentenabschnitt zwischen dem Berührungspunkt und der x-Achse hat konstante Länge.*[1])

Dieses Resultat erhält man auch leicht unmittelbar aus den Eigenschaften der Kettenlinie (siehe ihre Rektifizierung in Beispiel 1; Abb. 9).

332. Die natürliche Gleichung einer ebenen Kurve. Die Darstellung einer Kurve mit Hilfe einer Gleichung zwischen den Koordinaten ihrer Punkte (in einem beliebigen Koordinatensystem) sieht oft künstlich und unelegant aus, da die Koordinaten keine wesentlichen geometrischen Elemente der Kurve sind. Solche wesentlichen Elemente einer Kurve sind dagegen die *Bogenlänge* s (in einer bestimmten Richtung von einem beliebigen Anfangspunkt gezählt) und der *Krümmungsradius* R (oder die *Krümmung* $k = \frac{1}{R}$ selbst); vgl. Nr. 250, 251.

Für jede Kurve besteht zwischen diesen Elementen eine Abhängigkeit in der Form

$$F(s, R) = 0,$$

welche auch die *natürliche Gleichung* der Kurve[2]) genannt wird. Wir beweisen nun, daß die Kurven, die derselben natürlichen Gleichung genügen, sich nur durch ihre Lage in der Ebene unterscheiden und daß die Form der Kurve durch die natürliche Gleichung eindeutig bestimmt wird. Es seien (I) und (II) zwei Kurven mit derselben natürlichen Gleichung, die die Form

$$\frac{1}{R} = g(s) \tag{14}$$

habe. Um zu zeigen, daß diese Kurven kongruent sind, verschieben wir zunächst eine der Kurven so, daß die Kurvenpunkte, von denen aus die Bogenlängen gezählt werden, sich decken. Dann drehen wir diese Kurve so, bis die positiven Tangentenrichtungen in diesen Punkten übereinstimmen.

Die ein und demselben Wert von s entsprechenden Elemente der beiden Kurven versehen wir mit den Indizes 1 bzw. 2:

Koordinaten eines variablen Punktes:	(x_1, y_1) bzw. (x_2, y_2),
Winkel der Tangente mit der x-Achse:	α_1 bzw. α_2,
Krümmungsradius:	R_1 bzw. R_2.

Auf Grund von (14) gilt für alle s die Beziehung $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2}$, d. h.

$$\frac{d\alpha_1}{ds} = \frac{d\alpha_2}{ds}. \tag{15}$$

---

[1]) Damit hängt auch der Name *Traktrix* zusammen (von lat. trahere — ziehen, schleppen): Wenn der horizontal bewegende Punkt T mit Hilfe eines Fadens TM den Punkt M nach sich zieht, so beschreibt M eine *Traktrix*.

[2]) Franz. équation intrinsèque; russ. натуральное oder внутреннее уравнение.

(vgl. Nr. 250, Formel (2)). Außerdem ist nach Voraussetzung für $s = 0$

$$x_1 = x_2, \qquad y_1 = y_2 \tag{16}$$

und

$$\alpha_1 = \alpha_2. \tag{17}$$

Aus (15) folgt auf Grund von Nr. 131, daß sich α_1 und α_2 nur um eine Konstante unterscheiden. Da diese Größen für $s = 0$ übereinstimmen, gilt die Gleichung (17) überall. In diesem Fall ist für alle Werte von s (vgl. Nr. 249, Formel (15))

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s} = \cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}s}, \qquad \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}s} = \sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 = \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}s},$$

woraus wir in analoger Weise schließen können, daß (16) überall gilt, d. h., die Kurven sind kongruent.

Wir zeigen nun, wie man von der natürlichen Gleichung (14) einer Kurve zu ihrer Koordinatendarstellung übergeht. Zunächst folgt aus (14) $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = g(s)$, so daß sich

$$\alpha = \int_0^s g(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma + \alpha_0 \tag{18}$$

ergibt, wobei α_0 eine Konstante ist. Dann erhalten wir, ausgehend von den Gleichungen

$$\mathrm{d}x = \cos\alpha\,\mathrm{d}s, \qquad \mathrm{d}y = \sin\alpha\,\mathrm{d}s, \tag{19}$$

die Integrale

$$x = \int_0^s \cos\alpha\,\mathrm{d}\sigma + x_0, \qquad y = \int_0^s \sin\alpha\,\mathrm{d}\sigma + y_0, \tag{20}$$

wobei x_0 und y_0 neue Konstanten sind. Nun sieht man leicht, daß die Drehung der Kurve eine Änderung der Konstanten α_0 nach sich zieht und entsprechend eine Parallelverschiebung mit einer Änderung der Konstanten x_0, y_0 verknüpft ist.[1]) Sind diese Konstanten gleich 0, so liegt die Kurve so, daß der Anfangspunkt der Zählung der Bogenlänge mit dem Koordinatenursprung übereinstimmt und die positive Richtung der Tangente mit der positiven Richtung der x-Achse zusammenfällt.

Es sei jetzt (14) eine beliebige Gleichung (wobei die Funktion $g(s)$ *stetig* sei). Dann bestimmen wir zunächst α aus Formel (18) und dann x und y aus (20) und erhalten damit die Parameterdarstellung einer gewissen Kurve. Die Differentiation von (20) führt auf (19), woraus unmittelbar

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$$

folgt, so daß $\mathrm{d}s$ tatsächlich das Differential der Bogenlänge und s die Bogenlänge dieser Kurve darstellt (bei entsprechend gewähltem Anfangspunkt der Zählung). Aus Gleichung (19) sieht man, daß α der Winkel zwischen der Tangente an diese Kurve und der x-Achse ist. Schließlich erhalten wir durch Differentiation von (18) die Krümmung

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = g(s).$$

---

[1]) Kehren wir diese Behauptung um, so erhalten wir leicht einen neuen Beweis des oben ausgesprochenen Satzes.

Das bedeutet, daß (14) tatsächlich die *natürliche Gleichung* der gegebenen Kurve darstellt. *Also kann jede Gleichung der Form* (14) *mit stetiger Funktion* $g(s)$ *als natürliche Gleichung einer Kurve angesehen werden.*

Wir machen den Leser darauf aufmerksam, daß man durch eine andere Wahl des Anfangspunktes und der Richtung der Zählung des Bogens einer Kurve deren natürliche Gleichung ändern kann; diese Änderung ist aber unwesentlich.

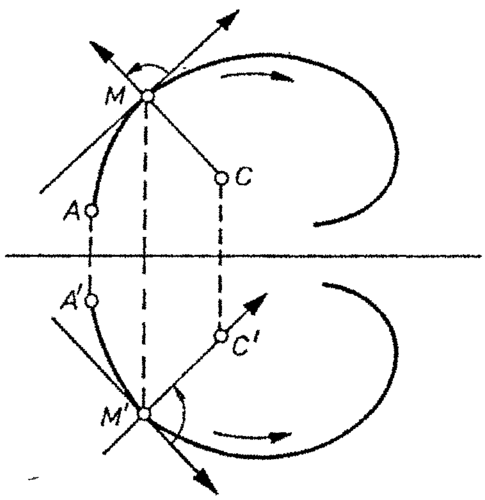

Abb. 13

Schließlich bemerken wir noch, daß die natürlichen Gleichungen zweier *symmetrisch* angeordneter Kurven[1]) (Abb. 13) sich nur durch verschiedene Vorzeichen auf der rechten Seite unterscheiden:

$$\frac{1}{R} = g(s) \quad \text{und} \quad \frac{1}{R} = -g(s). \tag{21}$$

Bei gleichem Anfangspunkt und gleicher Richtung der Zählung des Bogens der beiden Kurven haben nämlich die Krümmungsradien entgegengesetztes Vorzeichen. Umgekehrt können zwei Kurven, die den Gleichungen (21) genügen, durch Verschiebung in der Ebene symmetrisch angeordnet werden. Zwei solche Kurven sind im Wesen nicht voneinander verschieden.

333. Beispiele.

1. Man bestimme die Kurve, die der natürlichen Gleichung $R^2 = 2as$ entspricht. Es ist hier

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2as}}, \qquad \alpha = \sqrt{\frac{2s}{a}},^{2)} \qquad s = \frac{a}{2}\alpha^2,$$

so daß $ds = a\alpha\, d\alpha$ folgt. Wir wählen α als Parameter und erhalten

$$dx = \cos\alpha\, ds = a\alpha\cos\alpha\, d\alpha, \qquad dy = \sin\alpha\, ds = a\alpha\sin\alpha\, d\alpha;$$

daraus folgt

$$x = a(\cos\alpha + \alpha\sin\alpha), \qquad y = a(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha),$$

die *Kreisevolvente* (vgl. Nr. 225, Beispiel 8).

---

[1]) Man kann sie durch Verschiebungen in der Ebene nicht zur Deckung bringen; dazu ist noch eine räumliche Drehung (Spiegelung) erforderlich.

[2]) Da wir die Gleichung einer einzigen Kurve aufstellen wollen, wählen wir die Integrationskonstanten so, wie sie für die Rechnung am zweckmäßigsten sind. Dies werden wir auch im folgenden berücksichtigen.

2. Man bestimme die Kurve, die der natürlichen Gleichung $R^2 + s^2 = 16a^2$ entspricht. Hier ist

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\sqrt{16a^2 - s^2}}, \quad \alpha = \arcsin\frac{s}{4a}, \quad s = 4a\sin\alpha, \quad ds = 4a\cos\alpha\, d\alpha$$

und damit

$$dx = \cos\alpha\, ds = 4a\cos^2\alpha\, d\alpha, \quad dy = \sin\alpha\, ds = 4a\sin\alpha\cos\alpha\, d\alpha.$$

Hieraus folgt nach Integration

$$x = 2a\left(\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right) = a(2\alpha + \sin 2\alpha),$$

$$y = -a\cos 2\alpha = a - a(1 + \cos 2\alpha).$$

Wenn wir zu dem Parameter $t = 2\alpha - \pi$ übergehen, nimmt die Gleichung der Kurve die Form

$$x = \pi a + a(t - \sin t), \quad y = a - a(1 - \cos t)$$

an. Wir erhalten eine *Zykloide* (vgl. Nr. 225, Beispiel 6), nur ist sie gegenüber ihrer normalen Lage verschoben und gedreht.

3. Man bestimme die Kurve, die zu der natürlichen Gleichung $R = ms$ gehört. Offenbar ist

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{ms}, \quad \alpha = \frac{\ln s}{m}, \quad s = e^{m\alpha}, \quad ds = m\, e^{m\alpha}\, d\alpha,$$

$$dx = \cos\alpha \cdot m\, e^{m\alpha}\, d\alpha, \quad dy = \sin\alpha \cdot m\, e^{m\alpha}\, d\alpha$$

und schließlich

$$x = \frac{m}{1 + m^2}(m\cos\alpha + \sin\alpha)\, e^{m\alpha}, \quad y = \frac{m}{1 + m^2}(m\sin\alpha - \cos\alpha)\, e^{m\alpha}.$$

Wir gehen noch zu Polarkoordinaten über. Zunächst gilt

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{m}{\sqrt{1 + m^2}}\, e^{m\alpha}.$$

Führen wir dann den konstanten Winkel ω mit Hilfe der Beziehung $\tan\omega = \frac{1}{m}$ ein, so erhalten wir

$$\frac{y}{x} = \frac{m\sin\alpha - \cos\alpha}{m\cos\alpha + \sin\alpha} = \frac{\tan\alpha - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}\tan\alpha} = \tan(\alpha - \omega),$$

so daß wir den Polarwinkel θ gleich $\alpha - \omega$ setzen können, woraus $\alpha = \omega + \theta$ folgt. Die Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten hat schließlich die Gestalt

$$r = \frac{m}{\sqrt{1 + m^2}}\, e^{m\omega}\, e^{m\theta};$$

dies ist eine *logarithmische Spirale* (vgl. Nr. 226, Beispiel 3). Die Größe des Koeffizienten von $e^{m\theta}$ spielt keine Rolle; man kann ihn durch Drehung der Achse $\theta = 0$ zu 1 machen.

4. Wir beschäftigen uns nun mit einer Aufgabe anderer Art, und zwar wollen wir zu einer gegebenen Kurve die natürliche Gleichung aufstellen.

(a) Für die *Kettenlinie* $y = a\cosh\frac{x}{a}$ erhielten wir

$$s = a\sinh\frac{x}{a} = \sqrt{y^2 - a^2}, \quad R = \frac{y^2}{a}$$

(vgl. Nr. 331, Beispiel 1; Nr. 252, Beispiel 1); daraus folgt

$$R = a + \frac{s^2}{a}.$$

(b) Für die *Astroide* $x = a\cos^2 t$, $y = a\sin^3 t$ wird, wenn wir als Anfang der Bogenzählung den Mittelpunkt ihres Astes im ersten Quadranten wählen,

$$s = \frac{3a}{2}\sin^2 t - \frac{3a}{4}, \qquad R = 3a\sin t\cos t$$

(vgl. Nr. 331, Beispiel 3). Deshalb gilt

$$R^2 = 4\cdot\frac{3a}{2}\sin^2 t\cdot\frac{3a}{2}\cos^2 t = 4\left(\frac{3a}{4} + s\right)\left(\frac{3a}{4} - s\right) = \frac{9a^2}{4} - 4s^2,$$

und man kann die natürliche Gleichung der Astroide schließlich in der Form $R^2 + 4s^2 = \frac{9a^2}{4}$ schreiben.

(c) Im Fall der *Kardioide* $r = a(1 + \cos\theta)$ galt

$$s = 4a\sin\frac{\theta}{2}, \qquad R = \frac{4}{3}a\cos\frac{\theta}{2}$$

(vgl. Nr. 331, Beispiel 9; Nr. 252, Beispiel 6); also ist offenbar $9R^2 + s^2 = 16a^2$.

(d) Die letzten beiden Resultate sind als Spezialfälle im folgenden enthalten. Für die *Epizykloide* und die *Hypozykloide* (vgl. Nr. 225, Beispiel 7) lautet die natürliche Gleichung

$$(1 + 2m)^2 R^2 + s^2 = 16m^2(1 + m)^2 a^2.$$

(e) Auf diese Weise ergeben sich auch leicht die natürlichen Gleichungen der *Kreisevolvente*, der *Zykloide* und der *logarithmischen Spirale*, die uns schon aus den Beispielen 1 bis 3 bekannt sind.

5. Zu der natürlichen Gleichung einer Kurve kann man die natürliche Gleichung ihrer Evolute aufstellen. Wir erhielten in Nr. 255, Formel (15), die Beziehung

$$\varrho = R\frac{dR}{ds}. \tag{22}$$

Wenn wir den Anfangspunkt der Bogenzählung auf der Evolute so wählen, daß $R = \sigma$ ist (vgl. Nr. 255, 2°), dann führt uns die Elimination von R und s aus diesen beiden Beziehungen und der natürlichen Gleichung der gegebenen Kurve zu einer Abhängigkeit zwischen ϱ und σ, d. h. zu der *natürlichen Gleichung der Evolute.*

(a) Für die *logarithmische Spirale* $R = ms$ gilt dann $\varrho = mR = m\sigma$. Wir kommen genau auf die Ausgangsgleichung zurück, d. h., die Evolute ist wieder eine logarithmische Spirale, welche sich von der Ausgangskurve nur durch ihre Lage unterscheidet (vgl. Nr. 254, Beispiel 5).

(b) Für die *Kreisevolvente* erhält man, wie zu erwarten ist,

$$\sigma = R = \sqrt{2as}, \qquad s = \frac{\sigma^2}{2a},$$

$$\frac{dR}{ds} = \sqrt{\frac{a}{2}}\frac{1}{\sqrt{s}} = \frac{a}{\sigma}, \qquad \varrho = \sigma\cdot\frac{a}{\sigma} = a.$$

(c) Hat die natürliche Gleichung einer Kurve die Gestalt $R^2 + k^2s^2 = c^2$, so ist die Evolute die gleiche Kurve, nur um das k-fache gedehnt. Es ist nämlich

$$\sigma = R = \sqrt{c^2 - k^2s^2}, \qquad ks = \sqrt{c^2 - \sigma^2},$$

$$\frac{dR}{ds} = -\frac{k^2 s}{\sqrt{c^2 - k^2s^2}} = -\frac{k\sqrt{c^2 - \sigma^2}}{\sigma}$$

und damit

$$\varrho = -\sigma \cdot \frac{k\sqrt{c^2 - \sigma^2}}{\sigma} = -k\sqrt{c^2 - \sigma^2} \quad \text{oder} \quad \varrho^2 + k^2\sigma^2 = (kc)^2.$$

Daraus folgt die Behauptung.

Dieses Resultat können wir auf die Zykloide (vgl. Nr. 254, Beispiel 4), auf die Epizykloide und die Hypozykloide (insbesondere auf die Kardioide und die Astroide; vgl. Nr. 254, Beispiel 3) anwenden.

Bemerkung. Mit der obigen Methode kann man stets nur die *Form*, nicht aber die Lage der Evolute bestimmen.

334. Die Bogenlänge einer Raumkurve. Für eine doppelpunktfreie *Raumkurve*

$$x = \varphi(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \chi(t)$$

kann die Bogenlänge genau so wie für eine ebene Kurve definiert werden (vgl. die Bemerkung aus Nr. 249). Wir erhalten hier für die Bogenlänge die zu (4) analoge Formel

$$s = \widehat{AB} = \int_{t_0}^{T} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

usw. Auf diesen Fall läßt sich das über eine ebene Kurve Gesagte fast ohne Änderung übertragen. Wir halten uns deshalb nicht damit auf, sondern gehen gleich zu Beispielen über.

1. Die *Schraubenlinie* $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = ct$. Da hier

$$\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} = \sqrt{a + c^2}$$

gilt, ist die Bogenlänge vom Punkt A ($t = 0$) bis zum Punkt M (t beliebig) gleich

$$s = \widehat{AM} = \int_0^t \sqrt{a^2 + c^2}\,\mathrm{d}\tau = \sqrt{a^2 + c^2}\,t.$$

Das Resultat ist klar, wenn man bedenkt, daß bei der Abwicklung eines Zylinders die auf ihm liegende Schraubenlinie in eine geneigte Gerade übergeht.

2. Die *Vivianische*[1]) *Kurve* $x = R\sin^2 t$, $y = R\sin t\cos t$, $z = R\cos t$. Hier ist

$$\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} = R\sqrt{1 + \sin^2 t}.$$

In diesem Fall wird die Länge der ganzen Kurve durch ein *vollständiges elliptisches Integral zweiter Gattung* ausgedrückt:

$$S = 4R\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t = 4R\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$= 4\sqrt{2}\,R\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = 4\sqrt{2}\,R\mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

---

[1]) Vincenzo Viviani, 1622—1703, italienischer Mathematiker.

§ 2. Flächeninhalte und Volumina

335. Definition des Flächeninhalts und seine Additivität. Beliebige endliche (eventuell auch nichtzusammenhängende) ebene Figuren, die von einem oder von mehreren geschlossenen doppelpunktfreien Polygonzügen begrenzt werden, nennen wir *Vielecke.* Für eine solche Figur wurde der Begriff des Flächeninhalts im Geometrieunterricht ausführlich studiert. Wir setzen ihn also hier voraus.

Wir nehmen jetzt eine beliebige ebene Figur (P), die einen *endlichen und abgeschlossenen Bereich* bedeckt. Ihren *Rand* (K) werden wir uns immer als geschlossene Kurve (oder mehrere solcher Kurven) vorstellen.[1]

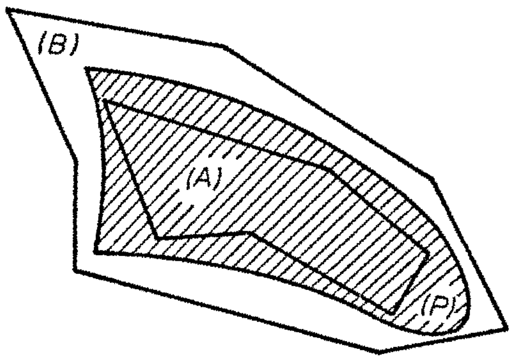

Abb. 14

Wir betrachten nun alle möglichen Vielecke (A), die ganz in (P) enthalten sind, und Vielecke (B), die (P) ganz enthalten (Abb. 14). Bezeichnet A bzw. B den Flächeninhalt von (A) bzw. (B), so ist stets $A \leqq B$. Die Menge $\{A\}$ der Zahlen A, die nach oben durch ein beliebiges B beschränkt ist, hat die obere Grenze P_* (Nr. 11), wobei $P_* \leqq B$ ist. Genau so hat die Menge der Zahlen B, die nach unten durch die Zahl P_* beschränkt ist, die untere Grenze $P^* \geqq P_*$. Diese Grenzen könnten wir den „inneren" bzw. den „äußeren" Flächeninhalt der Figur (P) nennen.

Wenn die beiden Grenzen

$$P_* = \sup\{A\} \quad \text{und} \quad P^* = \inf\{B\}$$

übereinstimmen, so nennen wir ihren gemeinsamen Wert P den *Flächeninhalt* der Figur (P). In diesem Fall heißt die Figur (P) *quadrierbar.*

Wie man leicht sieht, *existiert der Flächeninhalt genau dann, wenn man zu jedem* $\varepsilon > 0$ *zwei Vielecke* (A) *und* (B) *derart findet, daß* $B - A < \varepsilon$ *ist.*

Die Notwendigkeit dieser Bedingung folgt nämlich aus den besonderen Eigenschaften der Grenzen (Nr. 11): Wenn der Flächeninhalt P existiert, so gibt es ein $A > P - \frac{\varepsilon}{2}$ und ein $B < P + \frac{\varepsilon}{2}$. Daß die Bedingung hinreichend ist, folgt sofort aus den Ungleichungen $A \leqq P_* \leqq P^* \leqq B$.

Die Figur (P) sei nun in zwei Figuren (P_1) und (P_2) zerlegt.[2] Man kann sich z. B. vorstellen, daß dies mit Hilfe einer Kurve geschieht, die zwei Punkte des Randes

[1] In diesem Paragraphen werden wir es stets mit stetigen Kurven zu tun haben, die eine Parameterdarstellung besitzen. C. JORDAN hat bewiesen, daß eine geschlossene Kurve dieses Typs die Ebene stets in zwei Gebiete zerlegt, und zwar in ein inneres und ein äußeres, deren gemeinsamer Rand von dieser Kurve gebildet wird.

[2] Ein Teil ihrer Berandung kann beiden gemeinsam sein; (P_1) und (P_2) sollen sich aber nicht überlappen, d. h., sie sollen keine gemeinsamen inneren Punkte besitzen.

verbindet (und somit nur innere Punkte enthält) oder aber vollständig in (P) liegt (Abb. 15a, b). Wir beweisen nun, daß *die Quadrierbarkeit von je zwei der drei Figuren* (P), (P_1), (P_2) *die Quadrierbarkeit der dritten Figur nach sich zieht, wobei stets*

$$P = P_1 + P_2 \tag{1}$$

gilt, d. h., der Flächeninhalt ist *additiv*.

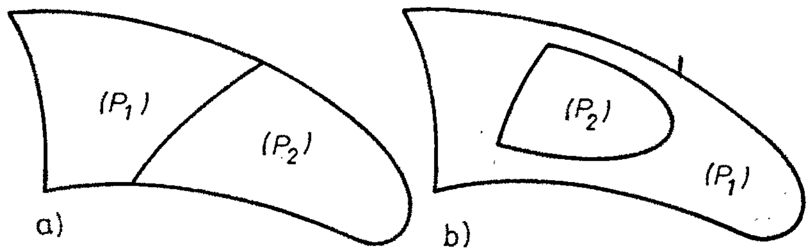

Abb. 15

Wir setzen voraus, daß der Flächeninhalt der Figuren (P_1) und (P_2) existiert, und betrachten die ihnen entsprechenden einbeschriebenen bzw. umbeschriebenen Vielecke (A_1), (B_1) und (A_2), (B_2). Aus den sich gegenseitig nicht überdeckenden Vielecken (A_1), (A_2) setze sich das Vieleck (A) mit dem Flächeninhalt $A = A_1 + A_2$ zusammen, das sich ganz in (P) befindet. Aus den sich möglicherweise überdeckenden Vielecken (B_1), (B_2) bilden wir den Bereich (B) mit dem Flächeninhalt $B \leqq B_1 + B_2$. Er enthält den Bereich (P). Offenbar gilt damit

$$A_1 + A_2 = A \leqq B \leqq B_1 + B_2 .$$

Da sich B_1 von A_1 und B_2 von A_2 beliebig wenig unterscheiden können, muß das offenbar auch für B und A zutreffen; daraus folgt die Quadrierbarkeit des Bereiches (P). Andererseits gilt gleichzeitig

$$A_1 + A_2 = A \leqq P \leqq B \leqq B_1 + B_2$$

und

$$A_1 + A_2 \leqq P_1 + P_2 \leqq B_1 + B_2 ,$$

so daß die Zahlen P und $P_1 + P_2$ zwischen denselben Grenzen $A_1 + A_2$ und $B_1 + B_2$ liegen, die sich beliebig wenig voneinander unterscheiden. Folglich ist $P = P_1 + P_2$, was zu beweisen war.

Wir bemerken insbesondere, daß *hieraus* $P_1 < P$ *folgt, so daß ein Teil einer Figur stets einen kleineren Flächeninhalt hat als die ganze Figur.*

336. Der Flächeninhalt als Grenzwert. Die in Nr. 335 formulierte Bedingung für die Quadrierbarkeit kann man auch anders ausdrücken:

1. *Für die Quadrierbarkeit der Figur* (P) *ist notwendig und hinreichend, daß zwei Folgen von Vielecken* (A_n), *die ganz in* (P) *enthalten sind, und* (B_n), *die* (P) *enthalten, existieren, deren Flächeninhalte einen gemeinsamen Grenzwert haben:*

$$\lim A_n = \lim B_n = P . \tag{2}$$

Dieser Grenzwert ist offenbar der *Flächeninhalt* der Figur (P).

Mitunter ist es zweckmäßig, statt der Vielecke andere Figuren zu benutzen, deren Quadrierbarkeit bekannt ist:

2. *Lassen sich zu einer Figur* (P) *zwei Folgen quadrierbarer Figuren* (Q_n) *und* (R_n) *bilden, die vollständig in* (P) *enthalten sind bzw.* (P) *vollständig enthalten, und haben ihre Flächeninhalte einen gemeinsamen Grenzwert,*

$$\lim Q_n = \lim R_n = P, \tag{3}$$

dann ist die Figur (P) *quadrierbar, und der Grenzwert* P *ist ihr Flächeninhalt.*

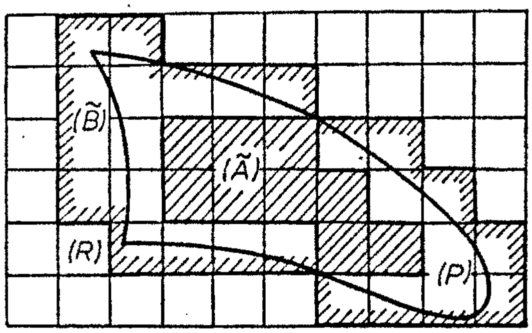

Abb. 16

Dies ergibt sich sofort aus dem vorhergehenden Satz, wenn man jede Figur (Q_n) durch ein in ihr enthaltenes Vieleck (A_n) und die Figur (R_n) durch ein sie enthaltendes Vieleck (B_n) ersetzt. Dabei sollen sich die Flächeninhalte von (A_n) und (B_n) so wenig von denen von (Q_n) bzw. (R_n) unterscheiden, daß beim Grenzübergang gleichzeitig (2) erfüllt ist. Obwohl in der Praxis die Wahl der Figuren (A_n), (B_n), (Q_n), (R_n), die in den beiden oben formulierten Kriterien erwähnt werden, keine Schwierigkeit bereitet, besteht ein prinzipielles Interesse, die mit dieser Wahl verknüpfte *Willkür* zu beseitigen. Zu diesem Zweck können wir z. B. folgendermaßen vorgehen:

Wir schließen die zu betrachtende Figur (P) in ein Rechteck (R) ein, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen liegen, und unterteilen es mit Hilfe von Parallelen zu den Seiten. Aus den Rechtecken, die ganz in (P) enthalten sind, setzen wir die Figur $(\tilde{A})$ zusammen (in Abb. 16 schraffiert), und aus den Rechtecken, die mit (P) gemeinsame innere Punkte haben, aber teilweise auch außerhalb von (P) liegen können, bilden wir die Figur $(\tilde{B})$. Diese Figuren sind offenbar ein Spezialfall der Vielecke (A) und (B), von denen bei der Definition des Flächeninhalts die Rede war. Ihre Flächeninhalte $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ hängen von der Art und Weise der Unterteilung des Rechtecks (R) ab. Es werde mit d die Länge der größten Diagonale der Teilrechtecke bezeichnet.

3. *Genau dann, wenn für* $d \to 0$ *beide Flächeninhalte* $\tilde{A}$ *und* $\tilde{B}$ *gegen einen gemeinsamen Grenzwert* P *streben, ist der Bereich* (P) *quadrierbar. Ist diese Bedingung erfüllt, dann ist der erwähnte Grenzwert der Flächeninhalt der Figur* (P).

Der Leser kann selbst leicht den Begriff des Grenzwertes, wie er hier auftritt, sowohl mit Hilfe der „ε-δ-Sprache" als auch mit Hilfe konvergenter Folgen ausdrücken.

Im Beweis wird nur die *Notwendigkeit* der angegebenen Bedingungen benötigt. Wir nehmen an, der Flächeninhalt P existiere, und beweisen dann die Beziehung

$$\lim_{d \to 0} \tilde{A} = \lim_{d \to 0} \tilde{B} = P. \tag{4}$$

Für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ lassen sich solche Vielecke (A) und (B) finden, daß $B - A < \varepsilon$ ist (Nr. 335); dabei können wir voraussetzen, daß *ihr Rand keine Punkte mit dem Rand* (K) *der Figur* (P) *gemeinsam hat.* Wir bezeichnen nun mit δ den *kleinsten* Abstand zwischen den Randpunkten der beiden Vielecke und den Punkten der Kurve (K).[1] Wenn wir $d < \delta$ nehmen, so liegt jedes Teilrechteck, das in wenigstens einem Punkt die Kurve (K) trifft, gewiß außerhalb des Vielecks (A) und innerhalb des Vielecks (B). Hieraus folgt

$$A \leqq \tilde{A} \leqq P \leqq \tilde{B} \leqq B,$$

so daß $P - \tilde{A} < \varepsilon$ und $\tilde{B} - P < \varepsilon$ gilt. Daraus ergibt sich (4).

Offenbar kann man auch auf Gleichung (4) eine Definition des Flächeninhalts aufbauen, die der obigen äquivalent ist. Eine solche Definition ist zwar höchst einfach und natürlich; ihre Schwäche ist jedoch ihre (nur scheinbare) Abhängigkeit von der Orientierung der Koordinatenachsen.

337. Klassen quadrierbarer Gebiete. Die Kurve (K), die das Gebiet (P) berandet, spielt bei der Frage nach der *Quadrierbarkeit* dieses Gebietes eine wesentliche Rolle. Ist das Gebiet quadrierbar, dann kann, wie wir in Nr. 335 sahen, die Kurve in ein Vieleck $(B - A)$ eingeschlossen werden (vgl. Abb. 14), das zwischen den Berandungen der beiden Vielecke (A) und (B) liegt und den Flächeninhalt $B - A < \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ besitzt.

Wir nehmen nun umgekehrt an, der Rand (K) lasse sich in ein Vieleck (C) mit dem Flächeninhalt $C < \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ beliebig einschließen. Dann können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß (C) die Figur (P) nicht vollständig bedeckt. Wir bilden aus den Punkten von (P), die nicht zu (C) gehören, ein Vieleck (A), das ganz in (P) enthalten ist. Wenn wir zu (A) das Gebiet (C) hinzufügen, so erhalten wir ein Vieleck (B), das (P) in sich enthält. Da nun $B - A = C$ und nach Voraussetzung $C < \varepsilon$ gilt, folgt mit dem Kriterium aus Nr. 335 die Quadrierbarkeit von (P).

Wir wollen der Einfachheit wegen sagen, *die Kurve* (K) *habe den Flächeninhalt* 0, wenn sie von einem Vieleck mit beliebig kleinem Flächeninhalt bedeckt werden kann. Damit können wir auf Grund der oben durchgeführten Überlegungen die Bedingung für die Quadrierbarkeit folgendermaßen formulieren: *Die Figur* (P) *ist dann und nur dann quadrierbar, wenn ihr Rand* (K) *den Flächeninhalt* 0 *besitzt.*

Im Zusammenhang damit sind die Klassen der Kurven mit dem Flächeninhalt 0 von Bedeutung. Es läßt sich vor allem leicht beweisen, daß jede stetige Kurve, die

---

[1] Gegeben seien zwei stetige endliche Kurven in der Ebene; sie mögen die Parameterdarstellungen

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t) \qquad (t_0 \leqq t \leqq T) \tag{I}$$

und

$$x = \varphi^*(u), \qquad y = \psi^*(u) \qquad (u_0 \leqq u \leqq U) \tag{II}$$

besitzen, wobei $\varphi, \psi, \varphi^*, \psi^*$ stetige Funktionen ihres Arguments sind. Dann ist der Abstand

$$\sqrt{[\varphi(t) - \varphi^*(u)]^2 + [\psi(t) - \psi^*(u)]^2}$$

zwischen zwei beliebigen Punkten dieser Kurven eine stetige Funktion von (t, u) in dem abgeschlossenen Bereich $[t_0, T; u_0, U]$ und besitzt dort folglich ein Minimum (Nr. 173). Wenn sich diese Kurven nicht schneiden, so ist dieses Minimum von 0 verschieden.

sich in der *expliziten* Form

$$y = f(x) \qquad (a \leqq x \leqq b) \quad \text{oder} \quad x = g(y) \qquad (c \leqq y \leqq d) \tag{5}$$

mit stetigen Funktionen f und g darstellen läßt, diese Eigenschaft besitzt.

Wir betrachten z. B. die erste dieser Gleichungen und zerlegen das Intervall $[a, b]$ so in Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, daß dort für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ die Schwankung ω_i der Funktion f kleiner als $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$ ist (Nr. 87). Wenn wir nun wie gewöhnlich den kleinsten bzw. den größten Wert der Funktion f im i-ten Intervall mit m_i bzw. M_i bezeichnen, dann wird die Kurve vollständig durch eine Figur bedeckt, die aus den Rechtecken

$$[x_i, x_{i+1}; m_i, M_i] \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

(vgl. Abb. 17) besteht und den Flächeninhalt

$$\sum_i (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_i \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_i \Delta x_i = \varepsilon$$

besitzt, d. h., die Kurve (5) hat den Flächeninhalt 0. Daraus folgt:

Wenn die Figur (P) *von mehreren stetigen Kurven begrenzt wird, deren jede sich explizit durch eine der Gleichungen* (5) *darstellen läßt, so ist* (P) *quadrierbar.*

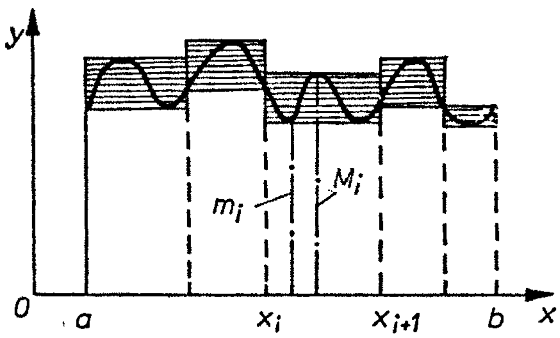

Abb. 17

Hat nämlich jede einzelne Kurve den Flächeninhalt 0, so hat auch der ganze Rand den Flächeninhalt 0. Aus diesem Kriterium kann man weitere speziellere Kriterien herleiten, die sich für die Praxis als zweckmäßiger erweisen.

Wir nennen eine Kurve, die durch die Parametergleichungen

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t) \qquad (t_0 \leqq t \leqq T) \tag{6}$$

gegeben ist, *glatt*, wenn a) die Funktionen φ und ψ im ganzen Intervall $[t_0, T]$ stetige Ableitungen haben und b) die Kurve weder Doppelpunkte noch singuläre Punkte besitzt $\big((\varphi')^2 + (\psi')^2 > 0\big)$. Im Fall einer *geschlossenen* glatten Kurve sind noch die Gleichungen

$$\varphi'(t_0) = \varphi'(T), \qquad \psi'(t_0) = \psi'(T)$$

erforderlich.

Wir zeigen nun, daß eine glatte Kurve den Flächeninhalt 0 hat. Dazu wählen wir auf der Kurve einen beliebigen Punkt $\overline{M}$, der dem Parameterwert $\bar{t}$ entspricht. Da $\overline{M}$ ein regulärer Punkt ist, existiert, wie wir in Nr. 223 sahen, ein Intervall

$$\bar{\sigma} = (\bar{t} - \bar{\delta}, \bar{t} + \bar{\delta}),$$

in dem das entsprechende Kurvenstück durch eine explizite Gleichung ausgedrückt werden kann. Wir wenden jetzt den Überdeckungssatz (Nr. 88) auf das Intervall $[t_0, T]$ und das dieses Intervall überdeckende System $\Sigma = \{\sigma\}$ von solchen Umgebungen an. Das ganze Intervall wird von endlich vielen solcher Umgebungen bedeckt, deren jede sich durch eine der expliziten Gleichungen (5) ausdrücken läßt. Nach dem vorigen Satz folgt also:

Jede Figur (P), die von einer oder von mehreren glatten Kurven begrenzt wird, ist quadrierbar.

Dieser Satz gilt auch für den Fall, daß die Kurve *endlich* viele singuläre Punkte besitzt. Denn schließen wir diese Punkte durch beliebig kleine Umgebungen aus, so haben wir es wieder mit glatten Kurven zu tun.

338. Die Darstellung des Flächeninhalts durch ein Integral. Wir wenden uns nun der Berechnung der Flächeninhalte ebener Figuren mit Hilfe von Integralen zu.

Wir wollen zunächst den Flächeninhalt p eines *krummlinigen Trapezes* $ABCD$ (Abb. 18) *exakt* berechnen. Dieser Aufgabe sind wir früher schon begegnet. Die Figur ist von oben durch die Kurve DC begrenzt, die der Gleichung $y = f(x)$ genügt, wobei $f(x)$ eine im Intervall $[a, b]$ positive und stetige Funktion ist. Von unten ist die Figur durch den Abschnitt AB der x-Achse und seitlich durch die beiden Ordinaten AD und BC begrenzt (jede der letzteren kann sich auch auf einen Punkt reduzieren). Die Existenz des Flächeninhalts folgt aus Nr. 337. Hier soll nur von seiner Berechnung die Rede sein.

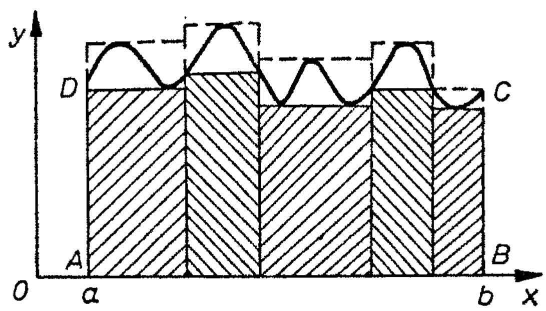

Abb. 18

Zu diesem Zweck unterteilen wir das Intervall $[a, b]$ durch eine Reihe von Punkten

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b.$$

Wir bezeichnen mit m_i bzw. M_i den kleinsten bzw. den größten Wert der Funktion $f(x)$ im i-ten Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ und bilden die Summen (nach Darboux)

$$s = \sum_i m_i \Delta x_i, \qquad S = \sum_i M_i \Delta x_i.$$

Sie stellen offenbar die Flächeninhalte der Treppenfiguren dar, die sich aus den einbeschriebenen bzw. den umbeschriebenen Rechtecken zusammensetzen (vgl. Abb. 18). Deshalb gilt $s < P < S$. Strebt nun die größte der Differenzen Δx_i gegen 0, so haben die beiden Summen das Integral

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

als Grenzwert[1]), das folglich gleich dem gesuchten Flächeninhalt P ist:

$$P = \int_a^b y\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{7}$$

Ist das krummlinige Trapez $CDFE$ von unten und oben durch Kurven begrenzt (Abb. 19), die den Gleichungen

$$y_1 = f_1(x) \quad \text{und} \quad y_2 = f_2(x) \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

genügen, so betrachten wir es als Differenz der beiden Figuren $ABFE$ und $ABDC$ und erhalten somit den Flächeninhalt von $CDFE$ in der Form

$$P = \int_a^b (y_2 - y_1)\,\mathrm{d}x = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,\mathrm{d}x. \tag{8}$$

Gegeben sei nun ein *Sektor* AOB (Abb. 20), der durch die Kurve AB und die beiden Radiusvektoren OA und OB begrenzt wird (jeder der Radiusvektoren kann sich auch auf einen Punkt zusammenziehen). Die Kurve sei in Polarkoordinaten durch die Gleichung $r = g(\theta)$ gegeben; dabei sei $g(\theta)$ eine im Intervall $[\alpha, \beta]$ positive und stetige Funktion. Hier wird nur die Frage nach der Berechnung des Flächeninhalts P des Sektors gestellt, da die Existenz des Flächeninhalts durch die Eigenschaften der Berandung der Figur schon gesichert ist.

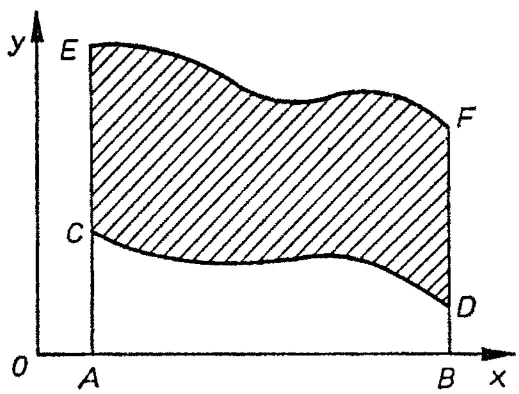

Abb. 19

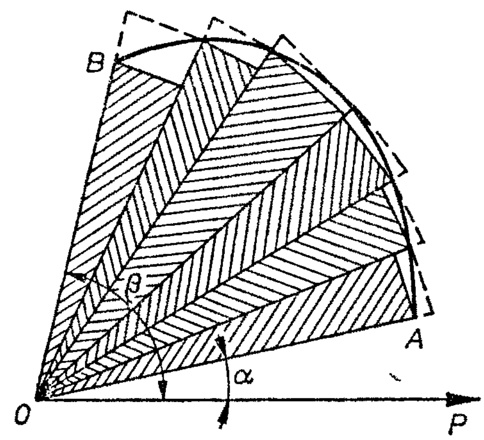

Abb. 20

Wir bringen zwischen α und β die Winkel

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_i < \theta_{i+1} < \cdots < \theta_n = \beta$$

an (vgl. Abb. 20) und ziehen die entsprechenden Radiusvektoren. Wenn wir hier wieder den kleinsten bzw. den größten Wert der Funktion $g(\theta)$ im Intervall $[\theta_i, \theta_{i+1}]$ mit m_i bzw. M_i bezeichnen, so werden die durch diese Radien definierten Kreissektoren der Figur ein- bzw. umbeschrieben. Die beiden aus den einzelnen ein- bzw. umbeschriebenen Sektoren zusammengesetzten Figuren besitzen den Flächeninhalt

$$\sigma = \frac{1}{2} \sum_i m_i^2 \Delta\theta_i \quad \text{bzw.} \quad \Sigma = \frac{1}{2} \sum M_i^2 \Delta\theta_i,$$

[1]) Auf Grund von Satz 1 aus Nr. 336 ist das krummlinige Trapez $ABCD$ quadrierbar. Um die dort erwähnten Folgen von Figuren zu erhalten, kann man z. B. das Intervall in gleiche Teile zerlegen.

und es gilt offenbar $\sigma < P < \Sigma$. Man sieht leicht, daß die Summen σ und Σ die Darbouxschen Summen für das Integral

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} [g(\theta)]^2 \, d\theta$$

sind. Strebt die größte der Differenzen $\Delta\theta_i$ gegen 0, so haben sowohl σ als auch Σ dieses Integral als Grenzwert;[1]) also gilt

$$P = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2 \, d\theta = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} [g(\theta)]^2 \, d\theta. \tag{9}$$

339. Beispiele.

1. Man bestimme den Flächeninhalt P der Figur, die von der Kettenlinie $y = a \cosh \frac{x}{a}$, der x-Achse und den beiden Ordinaten in den Abszissen 0 und x begrenzt wird (vgl. Abb. 9, S. 162). Es gilt

$$P = \int\limits_0^x a \cosh \frac{\xi}{a} \, d\xi = a^2 \sinh \frac{x}{a} = as,$$

wobei s die Länge des Bogens AM der Kettenlinie ist (vgl. Nr. 331, Beispiel 1). Der gesuchte Flächeninhalt von $AOPM$ ist also gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks, das aus den Seiten PS und SM gebildet wird (denn es ist $SM = AM$).

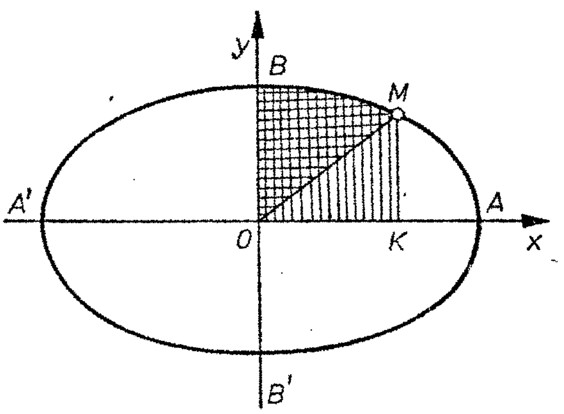

Abb. 21

2. Gegeben sei die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ und auf ihr ein Punkt $M(x, y)$ (Abb. 21). Man bestimme den Flächeninhalt des krummlinigen Trapezes $BOKM$ und des Sektors OMB.

Aus der Ellipsengleichung folgt $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, so daß auf Grund von (7) der Flächeninhalt von $BOKM$ gleich

$$P_1 = \int\limits_0^x \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \xi^2} \, d\xi = \frac{ab}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{b}{2a} x \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{ab}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{xy}{2}$$

[1]) Hier könnte man eine zu der Fußnote auf S. 180 analoge Bemerkung machen, jedoch mit dem Verweis auf Satz 2 aus Nr. 336.

ist. Da der letzte Summand den Flächeninhalt des Dreiecks OKM darstellt, erhalten wir für den Flächeninhalt des Sektors OMB den Ausdruck

$$P_2 = \frac{ab}{2} \arcsin \frac{x}{a}.$$

Im Fall $x = a$ finden wir für den Flächeninhalt einer Viertelellipse den Wert $\frac{\pi ab}{4}$, so daß für die ganze Ellipse $P = \pi ab$ gilt. Für den Kreis ($a = b = r$) ergibt sich die bekannte Formel $P = \pi r^2$.

3. Gegeben sei die Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ und auf ihr ein Punkt $M(x, y)$ (Abb. 22). Man bestimme den Flächeninhalt der Figuren AKM, OAM und $OAML$.

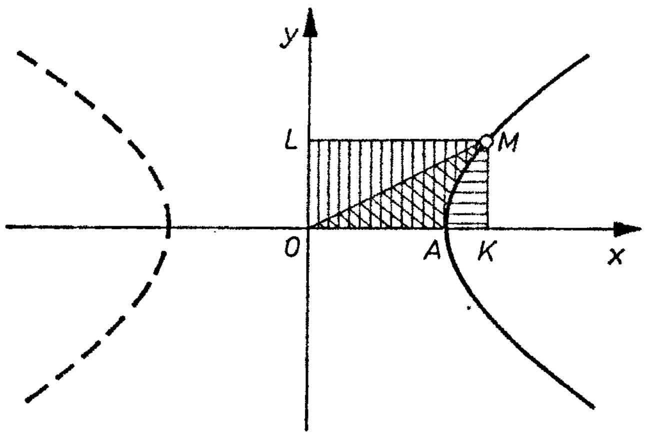

Abb. 22

Aus der Hyperbelgleichung folgt $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, und nach Formel (7) gilt für den Flächeninhalt der Figur AKM

$$P_1 = \frac{b}{a}\int_a^x \sqrt{\xi^2 - a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{b}{a}\left[\frac{1}{2}\xi\sqrt{\xi^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - a^2}\right)\right]\Bigg|_a^x$$

$$= \frac{1}{2}xy - \frac{ab}{2}\ln\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}.$$

Wegen $\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} = \frac{y}{b}$ kann man diesen Ausdruck in der symmetrischen Form

$$P_1 = \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}ab\ln\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$$

schreiben. Hieraus ergibt sich leicht für den Flächeninhalt von OAM

$$P_2 = \frac{ab}{2}\ln\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right),$$

für den Flächeninhalt von $OAML$

$$P_3 = \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}ab\ln\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$$

Bemerkung. Auf Grund der eben erhaltenen Resultate kann man eine Analogie zwischen den trigonometrischen und den hyberbolischen Funktionen herstellen. Wir vergleichen dazu den Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ und die gleichseitige Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ (Abb. 23a, b). Diese Kurven haben die Parameterdarstellung:

Kreis: $\overline{OP} = x = \cos t, \quad \overline{PM} = y = \sin t;$

Hyperbel: $\overline{OP} = x = \cosh t, \quad \overline{PM} = y = \sinh t.$

Während beim Kreis die geometrische Bedeutung von t klar ist ($t = \sphericalangle MOA$), ist bei der Hyperbel eine geometrische Deutung des Parameters t nicht möglich. Man kann jedoch für den Kreis auch eine andere Erklärung des Parameters geben: *t ist gleich dem doppelten Flächeninhalt des Sektors MOA* (oder des Sektors $M'OM$). Es zeigt sich, daß sich diese Deutung auch auf den Fall der Hyperbel übertragen läßt. Sind nämlich die Koordinaten des Punktes M gleich

$$x = \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \qquad y = \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2},$$

so ist $x + y = e^t$ und $t = \ln(x + y)$. Wenn wir in der obigen Formel für P_2 nun $a = b = 1$ setzen, so sehen wir, daß *t gleich dem doppelten Flächeninhalt des Sektors MOA ist* (wie beim Kreis).

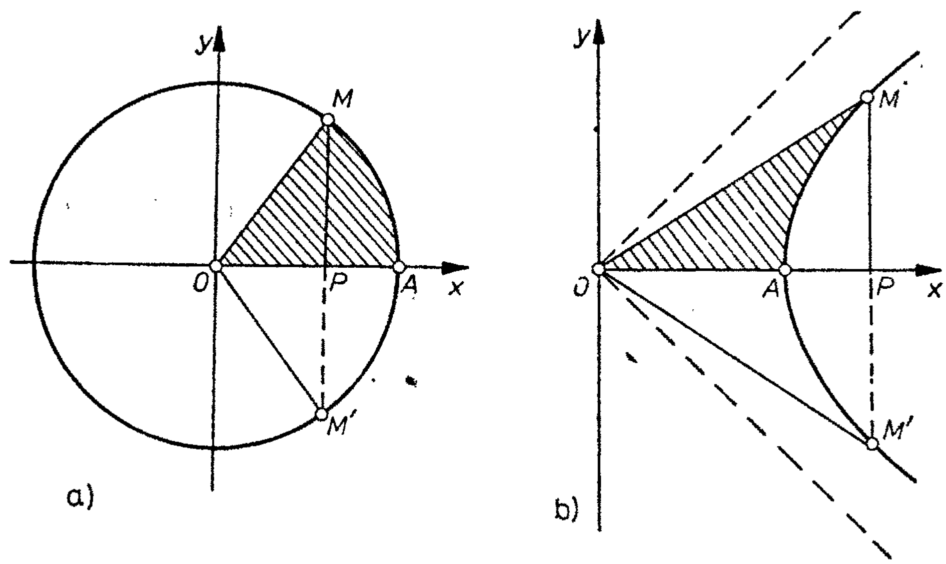

Abb. 23

Die Abschnitte PM und OP stellen also beim Kreis den Sinus bzw. den Kosinus des doppelten Flächeninhalts des Kreissektors MOA dar; bei der Hyperbel drücken die entsprechenden Abschnitte den *hyperbolischen Sinus* bzw. *Kosinus* des doppelten Flächeninhalts des Hyperbelsektors MOA aus. Die hyperbolischen Funktionen spielen also bezüglich der Hyperbel die entsprechende Rolle wie die trigonometrischen Funktionen (Kreisfunktionen) in bezug auf den Kreis.

Mit der Deutung des Arguments der hyperbolischen Funktionen als *Flächeninhalt* ist auch die Bezeichnung ihrer Umkehrfunktionen (vgl. Nr. 49, Beispiel 3 und 4)

$$\operatorname{Arsinh} x, \operatorname{Arcosh} x, \ldots$$

verknüpft. Die Buchstaben Ar bedeuteten die Anfangsbuchstaben des lateinischen Wortes area (= Fläche).

4. Man bestimme den Flächeninhalt P der Figur, die von den Koordinatenachsen und der Parabel $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ $(a > 0)$ begrenzt wird.

Lösung. $P = \int\limits_0^a y\,dx = \frac{1}{6}a^2$. (Der Leser möge sich selbst eine Zeichnung anfertigen.)

5. Man bestimme den Flächeninhalt der Figur, die zwischen den beiden kongruenten Parabeln $y^2 = 2px$ und $x^2 = 2py$ liegt (Abb. 24).

Offenbar muß man die Formel (8) benutzen, wobei hier

$$y_1 = \frac{x^2}{2p}, \qquad y^2 = \sqrt{2px}$$

gilt. Zur Bestimmung des Integrationsintervalls müssen wir die Abszisse des Schnittpunkts M der beiden Parabeln kennen, der von dem Schnittpunkt im Koordinatenursprung verschieden ist; sie ist gleich $2p$. Es gilt also

$$P = \int_0^{2p} \left(\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p}\right) \mathrm{d}x = \left(\frac{2}{3}\sqrt{2p}\, x^{3/2} - \frac{x^3}{6p}\right)\Bigg|_0^{2p} = \frac{4}{3}\, p^2.$$

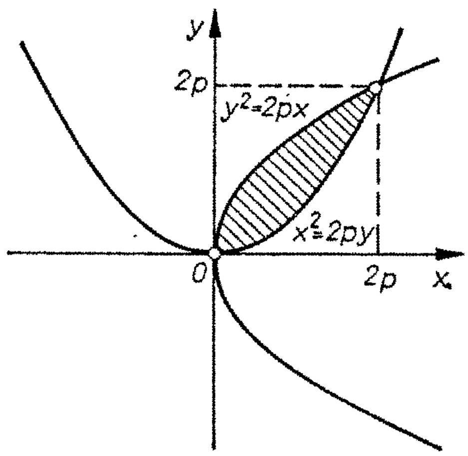

Abb. 24

6. Man bestimme den Flächeninhalt P der *Ellipse*

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1 \qquad (AC - B^2 > 0,\ C > 0). \tag{10}$$

Lösung. Aus (10) folgt

$$y_1 = \frac{-Bx - \sqrt{B^2x^2 - C(Ax^2 - 1)}}{C},$$

$$y^2 = \frac{-Bx + \sqrt{B^2x^2 - C(Ax^2 - 1)}}{C},$$

wobei y_1 und y_2 nur dann reelle Werte besitzen, wenn x die Ungleichung $C - (AC - B^2)\, x^2 \geqq 0$ erfüllt, d. h., wenn sich x im Intervall $[-\alpha, \alpha]$, $\alpha = \dfrac{\sqrt{C}}{\sqrt{AC - B^2}}$, befindet. Der gesuchte Flächeninhalt ist gleich

$$P = \int_{-\alpha}^{\alpha} (y_2 - y_1)\, \mathrm{d}x = \frac{2}{C} \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{C - (AC - B^2)\, x^2}\, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{C}\sqrt{AC - B^2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{2}{C}\sqrt{AC - B^2} \cdot \frac{1}{2}\, \pi\alpha^2 = \frac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}}.$$

7. Zum Schluß sei eine Ellipse durch die *allgemeine* Gleichung

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

gegeben; man bestimme ihren Flächeninhalt P.

Diese Aufgabe kann auf die vorhergehende zurückgeführt werden. Wenn wir den Nullpunkt des Koordinatensystems in den Mittelpunkt (ξ, η) der Ellipse verschieben, der sich bekanntlich aus den Beziehungen

$$\begin{aligned} a\xi + b\eta + d &= 0, \\ b\xi + c\eta + e &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

bestimmen läßt, so erhält die Ellipsengleichung die Gestalt

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + f' = 0$$

mit

$$d\xi + e\eta + f = f'. \tag{12}$$

Eliminieren wir ξ und η aus (11) und (12), so finden wir

$$\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f - f' \end{vmatrix} = 0;$$

daraus folgt

$$f' = \frac{\Delta}{ac - b^2} \quad \text{mit} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}.^{1)}$$

Die erhaltene Gleichung läßt sich leicht auf die in Beispiel 6 benutzte Form bringen; man braucht nur

$$A = -\frac{a}{f'}, \qquad B = -\frac{b}{f'}, \qquad C = -\frac{c}{f'}$$

zu setzen. Der Flächeninhalt der Ellipse ist also gleich

$$P = \frac{\pi\,|f'|}{\sqrt{ac - b^2}} = -\frac{\pi\Delta}{(ac - b^2)^{3/2}}.$$

8. Die Formel (7) kann auch dann verwendet werden, wenn die Kurve, die das krummlinige Trapez begrenzt, in Parameterdarstellung durch Gleichungen der Form (6) gegeben ist. Ersetzt man im Integral (7) die Variable, so erhält man (unter der Voraussetzung, daß $x = a$ für $t = t_0$ und $x = b$ für $t = T$ ist)

$$P = \int_{t_0}^{T} y \frac{dx}{dt}\, dt = \int_{t_0}^{T} \psi(t)\, \varphi'(t)\, dt. \tag{13}$$

Wenn man z. B. bei der Berechnung des Flächeninhalts einer *Ellipse* von der Parameterdarstellung

$$x = a \cos t, \qquad y = b \sin t$$

ausgeht und berücksichtigt, daß t von π bis 0 abnimmt, wenn x von $-a$ bis $+a$ zunimmt, so ergibt sich, da dort $y \geqq 0$ ist,

$$P = 2 \int_{\pi}^{0} b \sin t \cdot (-a \sin t)\, dt = 2ab \int_{0}^{\pi} \sin^2 t\, dt = \pi ab.$$

(Wir haben hier die obere Hälfte der Ellipsenfläche berechnet und dann verdoppelt.)

---

1) Offenbar sind f' und Δ negativ (sonst wird durch die Gleichung keine reelle Kurve dargestellt).

9. Analog läßt sich auch der Flächeninhalt der Figur berechnen, die von der *Zykloide* $x = a \times (t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$ begrenzt wird. Nach Formel (13) gilt

$$P = \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2\,dt = a^2\left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.$$

Der gesuchte Flächeninhalt ist also gleich dem dreifachen Flächeninhalt des erzeugenden Kreises.

10. Man bestimme den Flächeninhalt einer Schleife der *Archimedischen Spirale* $r = a\theta$ (Abb. 25).
Nach Formel (9) gilt

$$P_1 = \frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}\theta^2\,d\theta = \frac{a^2}{6}\,\theta^3\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2.$$

Nun ist der Flächeninhalt eines Kreises mit dem Radius $2\pi a$ gleich $4\pi^3 a^2$. *Der Flächeninhalt einer Schleife der Spirale ist also gleich einem Drittel des Flächeninhalts dieses Kreises.* (Dieses Resultat war schon ARCHIMEDES[1]) bekannt.)

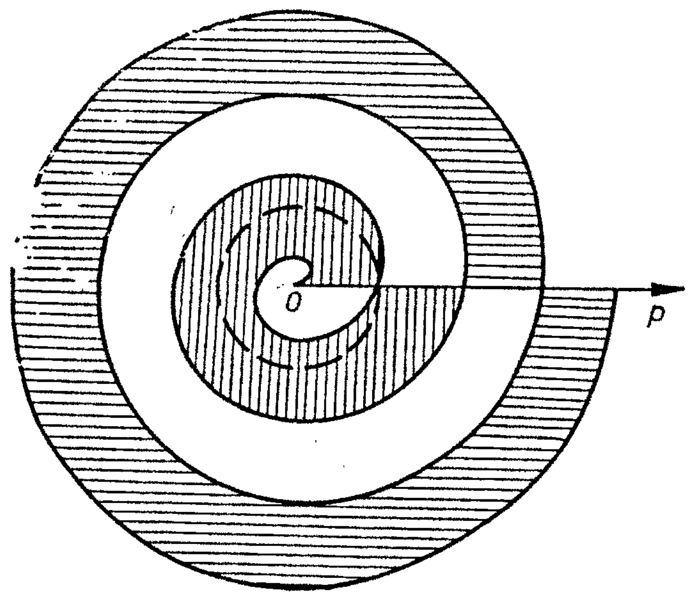

Abb. 25

Ferner läßt sich beweisen, daß die Flächeninhalte der Figuren, die zwischen aufeinanderfolgenden Schleifen der Spirale eingeschlossen sind, eine arithmetische Folge mit der Differenz $8\pi^3 a^2$ bilden.

11. Man bestimme den Flächeninhalt der *Schnecke* $r = a\cos\theta + b$ für $b \leq a$.
Nach Formel (9) gilt

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos\theta + b)^2\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}a^2 + b^2\right)\theta + \frac{1}{4}a^2\sin 2\theta + 2ab\sin\theta\right]\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}\,(a^2 + 2b^2).$$

Insbesondere ist der Flächeninhalt der *Kardioide* ($b = a$) gleich $\frac{3}{2}\pi a^2$.

1) ARCHIMEDES, um 250 v. u. Z., griechischer Mathematiker und Naturforscher.

12. Man berechne den Flächeninhalt der *Lemniskate* $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$. Er ist gleich dem doppelten Flächeninhalt der rechten Schleife, der einer Änderung des Winkels θ von $-\frac{\pi}{4}$ bis $+\frac{\pi}{4}$ entspricht:

$$P = 2 \cdot \frac{1}{2} 2a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\theta \, d\theta = 4a^2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta \, d\theta = 2a^2.$$

13. Man bestimme den Flächeninhalt des *Cartesischen*[1]) *Blattes* $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. Dazu gehen wir zu Polarkoordinaten über. Setzen wir in die gegebene Gleichung die Transformation $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ein und dividieren wir durch r^2, so erhalten wir die Gleichung in Polarkoordinaten:

$$r = \frac{3a \sin \theta \cos \theta}{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}.$$

Da der Winkel θ im ersten Quadranten von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ variiert, gilt nach (9)

$$P = \frac{9a^2}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{(\sin^3 \theta + \cos^3 \theta)^2} \, d\theta.$$

Ersetzen wir $\sin \theta$ durch $\tan \theta \cos \theta$, so nimmt der Ausdruck unter dem Integral die Gestalt

$$\frac{\tan^2 \theta \, d \tan \theta}{(1 + \tan^3 \theta)^2}$$

an, woraus sich sofort die Stammfunktion

$$-\frac{1}{3} \frac{1}{1 + \tan^3 \theta} = -\frac{1}{3} \frac{\cos^3 \theta}{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}$$

ergibt. Also ist

$$P = -\frac{3a^2}{2} \frac{\cos^3 \theta}{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta} \Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{3a^2}{2}.$$

14. Man löse die Aufgabe 6 unter Verwendung von Polarkoordinaten.

Lösung. Führen wir Polarkoordinaten ein, so erhält (10) die Form

$$r^2 = \frac{1}{A \cos^2 \theta + 2B \cos \theta \sin \theta + C \sin^2 \theta}.$$

Dann ergibt sich mit Hilfe von (9) sofort (vgl. Nr. 309, Beispiel 9)

$$P = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{A \cos^2 \theta + 2B \cos \theta \sin \theta + C \sin^2 \theta} = \frac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}}.$$

Der Flächeninhalt der ganzen Ellipse ist hier als doppelter Flächeninhalt der im ersten und vierten Quadranten liegenden Teile dargestellt. Welche Schwierigkeiten treten auf, wenn man das Ergebnis aus Nr. 288, Beispiel 10, zur unmittelbaren Berechnung des Flächeninhaltes der Ellipse verwendet?

---

[1]) René Descartes (Renatus Cartesius), 1596—1650, französischer Philosoph, Mathematiker und Physiker.

15. Man kann die Formel (9) auch dann verwenden, wenn die Kurve in Parameterdarstellung (6) gegeben ist. Wegen

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \theta = \arctan \frac{y}{x} \quad \text{und} \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{x \frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} y}{x^2 + y^2}$$

gilt

$$\frac{1}{2} r^2 \, d\theta = \frac{1}{2} \left(x \frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} y \right) dt.$$

Wenn einer Änderung von θ zwischen α und β eine Änderung von t zwischen t_0 und T entspricht, so ist

$$P = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{T} \left(x \frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} y \right) dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{T} [\varphi(t)\, \psi'(t) - \varphi'(t)\, \psi(t)] \, dt. \tag{14}$$

Diese Formel wird wegen ihrer Symmetrie häufig für kompliziertere Rechnungen benutzt. Wenn man mit ihrer Hilfe z. B. den Flächeninhalt der Ellipse aus der Parameterdarstellung $x = a \cos t$, $y = a \sin t$ berechnet, so ergibt sich

$$P = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t \cdot \mathrm{b} \cos t + a \sin t \cdot b \sin t) \, dt = \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

16. Wir berechnen mit Hilfe der Formel (14) noch einmal den Flächeninhalt der *Astroide* $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$. Wir erhalten

$$P = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [a \cos^3 t \cdot 3a \sin^2 t \cos t + 3a \cos^2 t \sin t \cdot a \sin^3 t] \, dt$$

$$= \frac{3}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t \, dt = \frac{3}{16} a^2 \left(t - \frac{\sin 4t}{4} \right) \Bigg|_0^{2\pi} = \frac{3}{8} \pi a^2.$$

340. Definition des Volumens. Seine Eigenschaften. Wir gehen jetzt, ähnlich wie in Nr. 335, wo wir zur Definition des Flächeninhalts einer beliebigen ebenen Figur von dem Begriff des Flächeninhalts eines Vielecks ausgingen, zur Definition des Volumens eines Körpers von dem Volumen eines Polyeders aus.

Gegeben sei ein beliebig geformter Körper (V), d. h. ein bechränkter abgeschlossener Bereich im dreidimensionalen Raum. Die Berandung (S) des Körpers sei eine geschlossene Fläche[1]) (oder mehrere solcher Flächen). Wir betrachten nun ganz im Körper (V) enthaltene Polyeder (X) mit dem Volumen X und den Körper (V) vollständig enthaltende Polyeder (Y) mit dem Volumen Y. Es existiert stets eine obere Grenze V_* von X und eine untere Grenze V^* von Y derart, daß $V_* \leqq V^*$ ist. Diese beiden Werte könnten auch *inneres* bzw. *äußeres* Volumen des Körpers heißen. Wenn die beiden Grenzen

$$V_* = \sup \{X\} \quad \text{und} \quad V^* = \inf \{Y\}$$

übereinstimmen, so nennen wir ihren gemeinsamen Wert V das *Volumen des Körpers* (V). In diesem Fall nennt man den Körper (V) oft auch *kubierbar*.

Hieraus sehen wir leicht, daß *das Volumen genau dann existiert, wenn zwei Polyeder* (X) und (Y) *derart existieren, daß* $Y - X < \varepsilon$ *für jedes positive* ε *ist.*

[1]) Wir meinen damit eine stetige Fläche, die eine Parameterdarstellung zuläßt.

Ferner gilt: *Wenn ein Körper* (V) *in zwei Körper* (V_1) *und* (V_2) *zerlegt wird, dann folgt aus der Existenz der Volumina von nur zwei dieser Körper die Existenz des Volumens des dritten Körpers. Dabei ist*

$$V = V_1 + V_2,$$

d. h., das Volumen ist *additiv.*

Die Sätze 1 bis 3, die in Nr. 336 für den Flächeninhalt bewiesen wurden, lassen sich ohne weiteres auf Volumina übertragen:

1. *Der Körper* (V) *hat dann und nur dann ein Volumen, wenn zwei Folgen von Polyedern* (X_n) *und* (Y_n) *derart existieren, daß die erste Folge vollständig in* (V) *enthalten ist, die zweite Folge den Körper* (V) *ganz enthält und beide Folgen gegen einen gemeinsamen Grenzwert streben:*

$$\lim X_n = \lim Y_n = V.$$

Dieser Grenzwert ist das *Volumen* des Körpers (V).

Es ist auch zweckmäßig, den Satz zu erwähnen, in dem an Stelle von Polyedern beliebige Körper mit bekannten Volumina verwendet werden:

2. *Können für den Körper* (V) *zwei Folgen von Körpern* (T_n) *und* (U_n), *die ein Volumen besitzen, derart konstruiert werden, daß die erste Folge vollständig in* (V) *enthalten ist, die zweite den Körper* (V) *ganz enthält und beide Folgen gegen einen gemeinsamen Grenzwert streben,*

$$\lim T_n = \lim U_n = V,$$

dann hat der Körper (V) *ein Volumen, und dieses ist gleich dem genannten Grenzwert.*

Zum Schluß erinnern wir an die Möglichkeit, Polyeder zu wählen, mit deren Hilfe sich der betrachtete Körper besonders bequem annähern läßt. Wir schließen den Körper in ein Rechtflach (W) ein, dessen Seiten zu den Koordinatenebenen parallel sind, und zerlegen es durch ein System von Ebenen, die den Seiten des Rechtflachs parallel sind. Aus den Rechtflachen, die in (V) liegen, bilden wir den Körper (X) und durch Hinzufügen der Rechtflache, die aus dem Körper teilweise herausragen, den Körper (Y). Diese Körper sind Spezialfälle der Polyeder (X) und (Y), von denen oben die Rede war. Mit d bezeichnen wir die größte Diagonale aller Rechtflache, in die das Rechtflach (W) zerlegt wurde.

3. *Der Körper* (V) *besitzt dann und nur dann ein Volumen, wenn die Volumina* X *und* Y *für* $d \to 0$ *gegen einen gemeinsamen Grenzwert* V *streben. Ist diese Bedingung erfüllt, so stellt dieser Grenzwert das Volumen des Körpers* (V) *dar.*

Die Beweise dieser Sätze überlassen wir dem Leser. Sie können leicht durch ähnliche Überlegungen wie in Nr. 336 geführt werden.

341. Die Klassen der Körper, die ein Volumen besitzen. Wie beim Flächeninhalt hängt die Existenz des Volumens eines Körpers ganz von den Eigenschaften seiner Begrenzung (S) ab. Man kann leicht das folgende Kriterium aufstellen (vgl. Nr. 338): *Das Volumen des Körpers* (V) *existiert dann und nur dann, wenn seine Grenzflächen* (S) *das Volumen* 0 *besitzen, d. h., wenn man die Grenzflächen in ein Polyeder mit beliebig kleinem Volumen einschließen kann.*

Zu den Flächen mit dem Volumen 0 gehören vor allem die Flächen, die sich durch eine der drei expliziten Gleichungen

$$z = f(x, y), \qquad y = g(z, x), \qquad x = h(y, z)$$

darstellen lassen, wobei f, g, h *stetige* Funktionen beider Argumente in gewissen beschränkten Bereichen sind.

Es sei etwa in einem Bereich (P), der sich in einem Rechteck (R) befinde, die erste Gleichung gegeben. Nach dem Satz aus Nr. 174 kann dieses Rechteck in so kleine Rechtecke (R_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, zerlegt werden, daß die Schwankung der Funktion f in den Teilen (P_i) von (P), die in (R_i) liegen, kleiner als $\frac{\varepsilon}{R}$ ist (ε beliebig positiv). Wenn m_i bzw. M_i der kleinste bzw. der größte Wert der Funktion f in (P_i) ist, so kann die ganze Fläche in ein Polyeder eingeschlossen werden, das aus den Rechtflachen mit den Grundflächen R_i und den Höhen $\omega_i = M_i - m_i$ besteht. Das Volumen dieses Polyeders ist gleich

$$\sum \omega_i R_i < \frac{\varepsilon}{R} \sum R_i = \varepsilon,$$

was zu beweisen war.

Hieraus folgt: *Wird ein Körper (V) von stetigen Flächen begrenzt, deren jede sich durch eine explizite Gleichung (eines der drei Typen) ausdrücken läßt, so hat dieser Körper ein Volumen.*

Um ein speziell in der Praxis anwendbares Kriterium anzugeben, definieren wir den Begriff der glatten Fläche.

Gegeben sei eine Fläche durch die Parametergleichungen

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v), \qquad z = \chi(u, v),$$

wobei die Funktionen φ, ψ, χ und ihre partiellen Ableitungen in einem gewissen abgeschlossenen Bereich (Q) der u,v-Ebene stetig sein sollen. Die Berandung (L) dieses Bereiches bestehe aus glatten Kurven. Schließlich setzen wir voraus, daß die Fläche keine mehrfachen oder anderen singulären Punkte hat. Sind diese Bedingungen erfüllt, so heißt die Fläche *glatt.*

Es sei $\overline{M}$ ein beliebiger Flächenpunkt, der durch die Parameterwerte $u = \bar{u}$ und $v = \bar{v}$ bestimmt sei. Da er nach Voraussetzung nicht singulär ist, kann man (vgl. Nr. 228[1])) in der $\bar{u},\bar{v}$-Ebene eine Umgebung

$$\bar{\sigma} = (\bar{u} - \bar{\delta}, \bar{u} + \bar{\delta}; \bar{v} - \bar{\delta}, \bar{v} + \bar{\delta})$$

derart finden, daß der entsprechende Teil der Fläche durch eine explizite Gleichung ausgedrückt werden kann. Nun läßt sich nach dem Überdeckungssatz (Nr. 175) ein abgeschlossener Bereich (Q) durch ein System $\Sigma = \{\bar{\sigma}\}$ von endlich vielen solcher Umgebungen überdecken. Es ist also möglich, die betrachtete glatte Fläche in endliche viele Teile zu zerlegen, von denen jeder einzelne durch eine explizite Gleichung (eines der drei Typen) ausgedrückt werden kann. Hieraus folgt, daß *eine glatte Fläche das Volumen 0 hat.*

Damit ist bewiesen, daß *Körper, die von einer oder von mehreren glatten Flächen begrenzt sind, ein Volumen besitzen.*

[1]) Liegt der Punkt $(\bar{u}, \bar{v})$ auf dem Rand (L) des Bereichs (Q), so ist das in Nr. 282 Gesagte zu betrachten.

Wir können übrigens auf den den Körper begrenzenden Flächen endlich viele singuläre Punkte zulassen, die in Umgebungen mit beliebig kleinem Volumen eingeschlossen werden können.

342. Die Berechnung des Volumens mit Hilfe eines Integrals. Wir beginnen mit dem beinahe trivialen Satz: *Das Volumen eines geraden Zylinders mit der Höhe H und einer quadrierbaren Grundfläche (P) ist gleich dem Produkt aus Grundfläche und Höhe:* $V = PH$.

Wir wählen Folgen von Vielecken (A_n) und (B_n) (vgl. Nr. 336, Beispiel 1), die ganz in (P) enthalten sind bzw. (P) ganz enthalten, so daß ihre Flächeninhalte A_n und B_n für $n \to \infty$ gegen P streben. Errichtet man auf diesen Vielecken gerade Prismen (X_n) und (Y_n) mit der Höhe H, so streben ihre Volumina

$$X_n = A_n H, \qquad Y_n = B_n H$$

gegen den gemeinsamen Grenzwert $V = PH$, welcher auf Grund von Satz 1 aus Nr. 340 gleich dem Volumen des Zylinders ist.

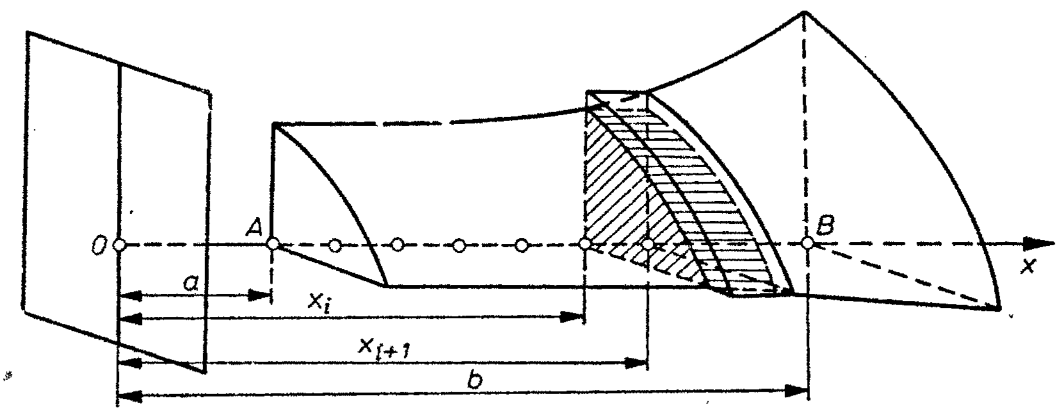

Abb. 26

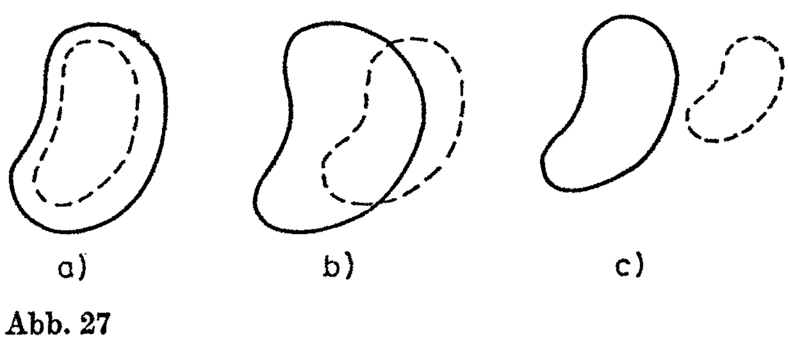

Abb. 27

Wir betrachten jetzt einen Körper (V), der zwischen den beiden Ebenen $x = a$ und $x = b$ liegt, und unterteilen ihn durch Ebenen, die senkrecht zur x-Achse liegen (Abb. 26). Die Schnittfiguren seien quadrierbar, und der Flächeninhalt $P(x)$ des Schnittes bei der Abszisse x sei eine stetige Funktion von x (für $a \leqq x \leqq b$). Werden zwei beliebige Schnittfiguren unverzerrt auf eine beliebige, zur x-Achse senkrechte Ebene projiziert, so wird entweder eine Projektion die andere enthalten (wie in Abb. 27a), oder sie werden einander teilweise bedecken oder nebeneinander liegen (Abb. 27b, c).

Wir betrachten zunächst den Fall, daß eine der beiden Projektionen die andere vollständig enthält. Unter dieser Voraussetzung kann man behaupten, daß der Körper (V) ein Volumen besitzt, welches sich durch die Formel

$$V = \int_a^b P(x)\,dx \tag{15}$$

ausdrücken läßt. Zum Beweis unterteilen wir das Intervall $[a, b]$ auf der x-Achse durch die Punkte

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b$$

und zerlegen den Körper in Schichten, indem wir in jedem Teilpunkt x_i eine Ebene $x = x_i$ anbringen. Wir betrachten die i-te Schicht, die zwischen den Ebenen $x = x_i$ und $x = x_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ liegt. Im Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ habe die Funktion $P(x)$ den größten Wert M_i und den kleinsten Wert m_i. Wenn man alle Schnitte, die verschiedenen Werten von x aus diesem Intervall entsprechen, auf eine Ebene, etwa $x = x_i$, projiziert, so sind sie (nach Voraussetzung) alle in dem größten Schnitt mit dem Flächeninhalt M_i enthalten, und andererseits enthält jeder Schnitt denjenigen mit dem kleinsten Flächeninhalt m_i. Wenn über dem größten und dem kleinsten Schnitt gerade Zylinder mit der Höhe $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ errichtet werden, so enthält der größere der beiden die ganze Schicht, und der kleinere ist ganz in der Schicht enthalten. Auf Grund der eingangs gemachten Bemerkung ist das Volumen dieser beiden Zylinder gleich $M_i\,\Delta x_i$ bzw. $m_i\,\Delta x_i$.

Aus den umbeschriebenen Zylindern bilden wir den Körper (U), aus den einbeschriebenen den Körper (T); die Volumina dieser Körper sind

$$\sum_i M_i\,\Delta x_i \quad \text{bzw.} \quad \sum_i m_i\,\Delta x_i\,.$$

Geht $\lambda = \max \Delta x_i$ gegen 0, so streben beide Volumina dem gemeinsamen Grenzwert (15) zu. Wegen Satz 2 aus Nr. 340 ist dies das Volumen des Körpers (V).[1])

Einen wichtigen Spezialfall, bei dem die obigen Bedingungen über die Anordnung der Projektionen der Schnitte erfüllt sind, bilden die *Rotationskörper*. Wir nehmen an, in der x,y-Ebene sei eine Kurve $y = f(x)$, $a \leqq x \leqq b$, gegeben, wobei $f(x)$ stetig und nichtnegativ sein soll, und lassen das entsprechende beschränkte krummlinige Trapez um die x-Achse rotieren (Abb. 28a, b). Der Körper, den man erhält, gehört offenbar zu dem Fall, den wir betrachten wollen, denn die Projektionen der Schnitte auf eine zur x-Achse senkrechte Ebene sind konzentrische Kreise. Hier ist

$$P(x) = \pi y^2 = \pi [f(x)]^2,$$

also

$$V = \pi \int_a^b y^2\,dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx. \tag{16}$$

Wenn ein krummliniges Trapez von unten bzw. von oben durch die Kurven $y_1 = f_1(x)$ bzw. $y_2 = f_2(x)$ begrenzt ist, so gilt offenbar

$$V = \pi \int_a^b [y_2^2 - y_1^2]\,dx = \pi \int_a^b \{[f_2(x)]^2 - [f_1(x)]^2\}\,dx, \tag{17}$$

[1]) Teilt man z. B. das Intervall in gleiche Teile, so kann man leicht jene Folgen von einbeschriebenen und umbeschriebenen Körpern auswählen, von denen in dem zitierten Satz gesprochen wurde.

obwohl hier die Voraussetzung über die Schnitte nicht erfüllt zu sein braucht. Im allgemeinen läßt sich das bewiesene Resultat leicht auf Körper erweitern, die man durch Addition oder Subtraktion von Körpern erhält, welche die angegebene Voraussetzung erfüllen.

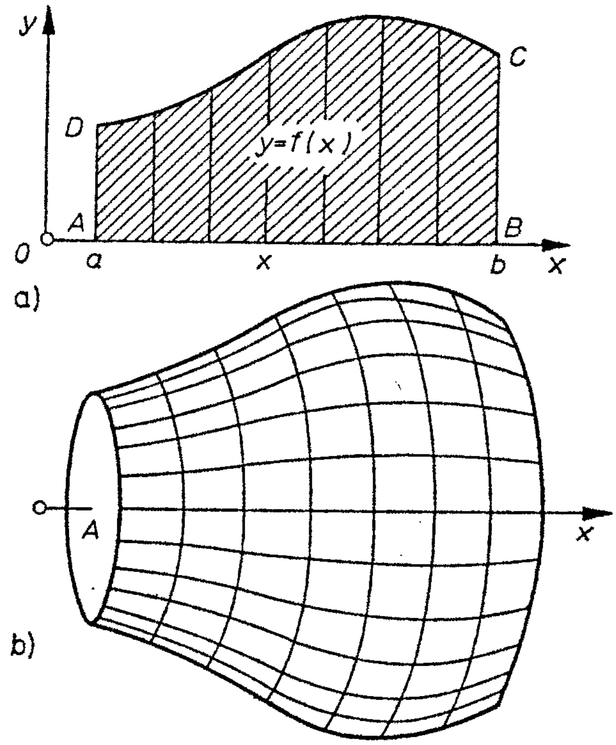

Abb. 28

Im allgemeinen Fall kann man nur folgendes behaupten: *Besitzt der Körper* (V) *ein Volumen*[1]), *dann läßt es sich durch die Formel* (15) *ausdrücken.*

Für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ lassen sich nämlich zwischen den Ebenen $x = a$ und $x = b$ zwei aus Parallelepipeden zusammengesetzte Körper $(\tilde{X})$ und $(\tilde{Y})$ so legen, daß der erste in (V) enthalten ist, der zweite (V) enthält und außerdem $Y - \tilde{X} < \varepsilon$ ist. Da wir auf diese Körper offenbar die obige Formel anwenden können, gilt

$$\tilde{X} = \int_a^b A(x)\,dx, \qquad \tilde{Y} = \int_a^b B(x)\,dx,$$

wobei $A(x)$ und $B(x)$ die Flächeninhalte ihrer Querschnitte bezeichnen. Andererseits gilt wegen $A(x) \leqq P(x) \leqq B(x)$

$$\tilde{X} = \int_a^b A(x)\,dx \leqq \int_a^b P(x)\,dx \leqq \int_a^b B(x)\,dx = \tilde{Y},$$

so daß das Volumen V, d. h. das Integral $\int_a^b P(x)\,dx$, zwischen den beiden Grenzen $\tilde{X}$ und $\tilde{Y}$ liegt, die sich um weniger als ε voneinander unterscheiden. Daraus folgt die Behauptung.

---

[1]) Dies ist z. B. der Fall, wenn der Körper von einer oder von mehreren *glatten* Flächen begrenzt wird.

343. Beispiele.

1. Man berechne das Volumen V eines *Kreiskegels* mit dem Grundflächenradius r und der Höhe h. Dazu legen wir durch die Achse des Kegels eine Ebene und wählen in dieser Ebene das Koordinatensystem so, daß die x-Achse mit der Achse des Kegels übereinstimmt und die y-Achse senkrecht zur Kegelachse durch die Kegelspitze verläuft (Abb. 29). Die Gleichung der Erzeugenden dieses Kegels lautet dann

$$y = \frac{r}{h}\, x,$$

und nach Formel (16) erhalten wir

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}\, x\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi r^2}{h^2} \frac{x^3}{3}\bigg|_0^h = \frac{1}{3}\, \pi r^2 h.$$

Dieses Resultat ist aus der Schule bekannt.

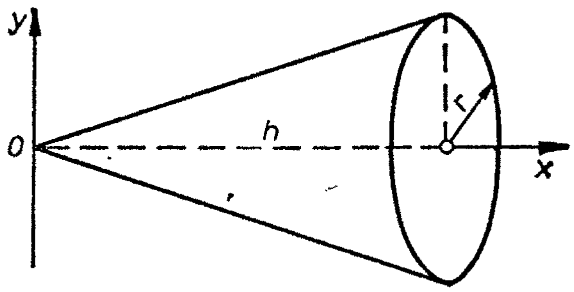

Abb. 29

2. Man drehe die *Ellipse* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ um die x-Achse. Wegen $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ erhalten wir für das Volumen des *Rotationsellipsoids*

$$V = \pi \int_{-a}^{a} \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\, \mathrm{d}x = 2\pi\, \frac{b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2)\, \mathrm{d}x = 2\pi\, \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 x - \frac{x^2}{3}\right)\bigg|_0^a = \frac{4}{3}\, \pi a b^2.$$

Analog ergibt sich für das Volumen des Körpers, der durch Drehung um die y-Achse entsteht, $\frac{4}{3}\, \pi a^2 b$. Setzen wir in diesen Formeln $a = b = r$, so finden wir für das Volumen der Kugel mit dem Radius r den bekannten Wert $\frac{4}{3}\, \pi r^3$.

3. Man bestimme das Volumen des Körpers, der durch Drehung der *Kettenlinie* $y = a \cosh \frac{x}{a}$ entsteht und zwischen den Schnitten bei 0 und x liegt. Wir erhalten

$$V = \pi a^2 \int_0^x \cosh^2 \frac{\xi}{a}\, \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2}\, \pi a^2 \int_0^x \left(1 + \cosh \frac{2\xi}{a}\right) \mathrm{d}\xi$$

$$= \frac{1}{2}\, \pi a^2 \left(x + \frac{a}{2} \sinh \frac{2x}{a}\right) = \frac{1}{2}\, \pi a \left(a x + a \cosh \frac{x}{a} \cdot a \sinh \frac{x}{a}\right).$$

In Nr. 331, Beispiel 1, wurde gezeigt, daß $a \sinh \frac{x}{a}$ die Länge des Bogens s der Kettenlinie darstellt. Damit ergibt sich schließlich

$$V = \frac{1}{2}\, \pi a (a x + s y).$$

4. Man bestimme das Volumen des Körpers, der durch Drehung eines Bogens der *Zykloide*

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t) \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

um die x-Achse entsteht. Die Parameterdarstellung der Kurve erleichtert uns die Einführung der Substitution

$$x = a(t - \sin t), \qquad dx = a(1 - \cos t)\, dt$$

in die Formel

$$V = \pi \int_0^{2\pi} y^2\, dx.$$

Damit gilt

$$V = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3\, dt = \pi a^3 \left(\frac{5}{2} t - 4 \sin t + \frac{3}{4} \sin 2t + \frac{1}{3} \sin^3 t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3.$$

5. Man bestimme das Volumen des Körpers, der durch Drehung der Astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ um die x-Achse entsteht. Hier erhalten wir

$$y = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}, \qquad V = \pi \int_{-a}^{a} (a^{2/3} - x^{2/3})^3\, dx = \frac{32}{105} \pi a^3.$$

Als Übung kann die Rechnung wiederholt werden, indem man von der Parameterdarstellung der Astroide ausgeht (man verfahre wie in Beispiel 4).

6. Man bestimme das Volumen des Körpers, der durch Schnitt des *Paraboloids* $2az = x^2 + y^2$ mit der *Kugel* $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ entsteht.

Lösung. Sowohl diese beiden Körper als auch ihr Schnittkörper sind *Rotationskörper* um die z-Achse. Die Schnittkurve der beiden Oberflächen liegt in der Ebene $z = a$.

Die zur z-Achse senkrechten Ebenen schneiden den betrachteten Körper in Kreisen. Die Quadrate der Radien dieser Kreise sind gleich $2az$ für $z \leqq a$ und gleich $3a^2 - z^2$ für $z \geqq a$. Mit einer zu (16) analogen Formel erhalten wir

$$V = 2\pi a \int_0^a z\, dz + \pi \int_a^{a\sqrt{3}} (3a^2 - z^2)\, dz = \frac{\pi a^3}{3} \left(6\sqrt{3} - 5\right).$$

7. Man bestimme das Volumen des Körpers, der durch Schnitt der *Kugel* $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ mit dem *Kegel* $x^2 = y^2 + z^2$ $(x \geqq 0)$ entsteht.

Hinweis. Die beiden Flächen schneiden sich in der Ebene $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$. Wir erhalten also

$$V = \pi \int_0^{R/\sqrt{2}} x^2\, dx + \pi \int_{R/\sqrt{2}}^{R} (R^2 - x^2)\, dx = \frac{\pi R^3}{3} \left(2 - \sqrt{2}\right).$$

Bis jetzt betrachteten wir Beispiele für die Anwendung der speziellen Formel (16). Wir gehen nun zur allgemeinen Formel (15) über. Da die Existenz des Volumens in allen Fällen z. B. mit Hilfe der Überlegungen aus Nr. 341 leicht bewiesen werden kann, halten wir uns damit nicht auf, sondern beschäftigen uns nur mit der *Berechnung* des Volumens.

8. Man bestimme das Volumen eines *Zylinderabschnitts*, d. h. des geometrischen Körpers, der von einem geraden Kreiszylinder mit Hilfe einer Ebene durch den Durchmesser des Grundkreises abgeschnitten wird (Abb. 30).

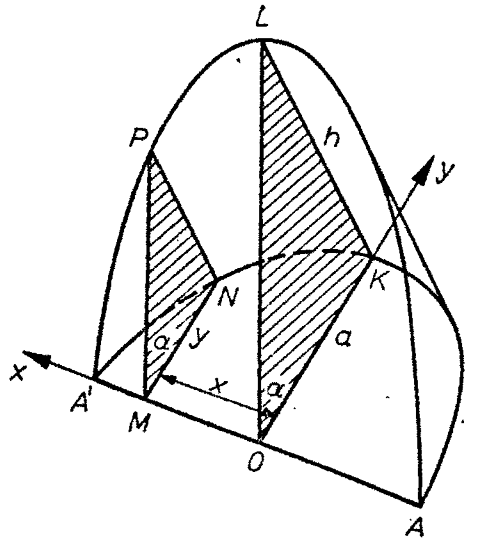

Abb. 30

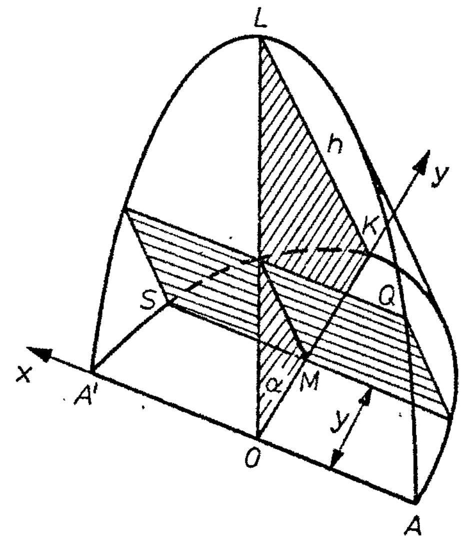

Abb. 31

Der Zylinder habe einen Grundkreis mit dem Radius a: $x^2 + y^2 \leqq a^2$. Die Schnittebene enthalte den Durchmesser $\overline{AA'}$ und bilde mit der Ebene des Grundkreises den Winkel α. Wir bestimmen den Inhalt einer Schnittfläche, die auf der x-Achse senkrecht steht und diese in einem Punkt M schneidet. Diese Schnittfläche ist ein rechtwinkliges Dreieck; offenbar gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks MNP

$$P(x) = \frac{1}{2} y^2 \tan\alpha = \frac{1}{2} (a^2 - x^2) \tan\alpha,$$

so daß nach Formel (15)

$$V = \frac{1}{2} \tan\alpha \int\limits_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\, dx = \frac{2}{3} a^3 \tan\alpha = \frac{2}{3} a^2 h$$

folgt, wobei $h = \overline{KL}$ die Höhe des Zylinderabschnitts ist.

Natürlich erhält man dasselbe Resultat, wenn man von den Inhalten der zur y-Achse senkrechten Schnittflächen ausgeht (Abb. 31). Jede Ebene durch einen Punkt M mit der Ordinate y schneidet den Körper in einem Rechteck mit dem Flächeninhalt

$$P(y) = 2xy \tan\alpha = 2 \tan\alpha \cdot y \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Daher ist analog zu (15)

$$V = 2 \tan\alpha \int\limits_{0}^{a} y \sqrt{a^2 - y^2}\, dy = -\frac{2}{3} \tan\alpha \cdot (a^2 - y^2)^{3/2}\Big|_0^a = \frac{2}{3} a^3 \tan\alpha.$$

9. Man bestimme das Volumen des *Ellipsoids*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(Abb. 32). Die Ebene, die in einem Punkt $M(x)$ auf der x-Achse senkrecht steht, schneidet das Ellipsoid in einer Ellipse, deren gerade Projektion auf die y,z-Ebene durch die Gleichung

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1 \qquad (x=\text{const})$$

gegeben ist. Ihre Halbachsen sind also

$$b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \quad \text{bzw.} \quad c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

und ihr Flächeninhalt (vgl. Nr. 339, Beispiele 2, 8 und 15) ist

$$P(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=\frac{\pi bc}{a^2}(a^2-x^2).$$

Mit (15) folgt also für das gesuchte Volumen

$$V=\frac{\pi bc}{a^2}\int\limits_{-a}^{a}(a^2-x^2)\,dx=\frac{4}{3}\pi abc.$$

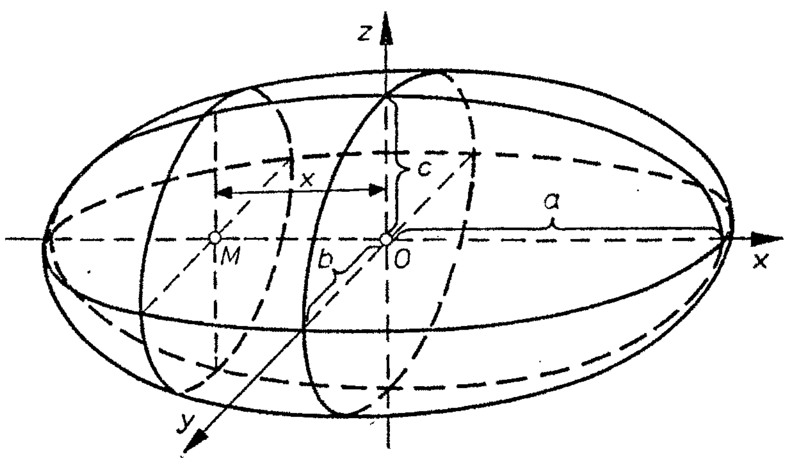

Abb. 32

10. Man bestimme das Volumen des Ellipsoids mit der Mittelpunktsgleichung

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Fyz+2Gzx+2Hxy=1.$$

Lösung. Für ein bestimmtes z lautet die Gleichung des entsprechenden Schnittes (oder genauer seiner Projektion auf die x,y-Ebene)

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0,$$

wobei

$$a=A,\quad b=H,\quad c=B,\quad d=Gz,\quad e=Fz,\quad f=Cz^2-1$$

gesetzt wurde. Nach Nr. 339, Beispiel 7, ist der Inhalt dieser Schnittfläche gleich

$$P(z)=-\frac{\pi\Delta^*}{(AB-H^2)^{3/2}},$$

wenn Δ^* die Determinante

$$\begin{vmatrix} A & H & Gz \\ H & B & Fz \\ Gz & Fz & Cz^2-1 \end{vmatrix}=\Delta z^2-(AB-H^2), \qquad \Delta=\begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix},$$

bezeichnet. Setzt man dies ein, so erhält man

$$P(z) = -\frac{\pi}{(AB - H^2)^{3/2}}[\Delta z^2 - (AB - H^2)].$$

Da z offenbar nur zwischen

$$-\sqrt{\frac{AB - H^2}{\Delta}} \quad \text{und} \quad +\sqrt{\frac{AB - H^2}{\Delta}}$$

liegen kann, erhält man durch Integration in diesen Grenzen schließlich

$$V = \frac{4}{3}\pi\frac{1}{\sqrt{\Delta}}.$$

11. Wir wollen nun das Volumen des Körpers berechnen, der von zwei sich schneidenden Kreiszylindern mit dem Radius r begrenzt wird, deren Achsen aufeinander senkrecht stehen.

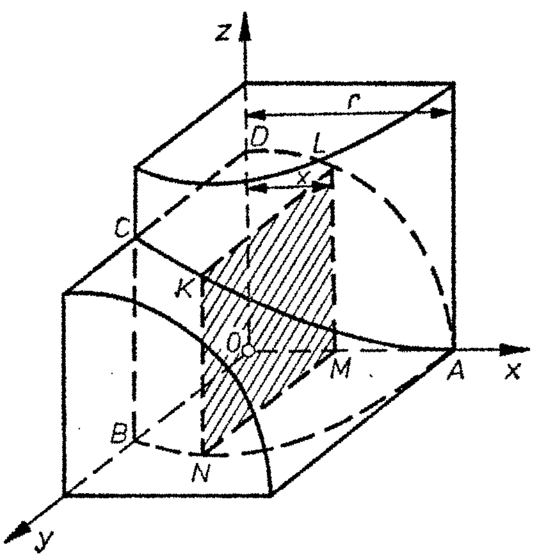

Abb. 33

Der Körper $OABCD$ in Abb. 33 ist der achte Teil dieses Körpers. Wir legen die x-Achse durch den Schnittpunkt O der beiden Zylinderachsen und senkrecht zu diesen. Dann erhalten wir als Schnittfigur des Körpers $OABCD$ mit der Ebene, die die x-Achse im Abstand x vom Nullpunkt senkrecht schneidet, das Quadrat $KLMN$ mit der Seitenlänge $\sqrt{r^2 - x^2}$, so daß $P(x) = r^2 - x^2$ ist. Mit Formel (15) folgt dann

$$V = 8\int_0^r (r^2 - x^2)\,dx = \frac{16}{3}r^3.$$

12. Zum Schluß lösen wir die Aufgabe 11 unter der Voraussetzung, daß die beiden Zylinder *verschiedene* Radien r und $R > r$ besitzen.

Der Unterschied zur vorigen Aufgabe besteht nur darin, daß die Schnittfigur des Körpers mit der Ebene im Abstand x vom Nullpunkt kein Quadrat, sondern ein Rechteck mit den Seiten $\sqrt{r^2 - x^2}$ und $\sqrt{R^2 - x^2}$ ist. Wir erhalten deshalb als Volumen V das elliptische Integral

$$V = 8\int_0^r \sqrt{(R^2 - x^2)\,(r^2 - x^2)}\,dx$$

oder, mit der Substitution $x = r\sin\varphi$ und $k = \frac{r}{R}$,

$$V = 8Rr^2\int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi \cdot \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = 8Rr^2 I.$$

Wir führen das Integral I auf vollständige elliptische Integrale erster und zweiter Gattung zurück. Es gilt

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi - k^2\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi = I_1 + I_2.$$

Nun ist

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi = \frac{k^2-1}{k^2}\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + \frac{1}{k^2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$
$$= \left(1-\frac{1}{k^2}\right)\mathrm{K}(k) + \frac{1}{k^2}\,\mathrm{E}(k).$$

Für I_2 folgt durch partielle Integration

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi \cdot d\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$$
$$= \frac{1}{2}\sin 2\varphi\cdot\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\cos 2\varphi\cdot\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$
$$= \int_0^{\pi/2}(1-2\cos^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = \mathrm{E}(k) - 2I.$$

Damit ergibt sich

$$I = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{k^2}+1\right)\mathrm{E}(k) - \left(\frac{1}{k^2}-1\right)\mathrm{K}(k)\right].$$

Man erhält also schließlich

$$V = \frac{8R^3}{3}\left[(1+k^2)\,\mathrm{E}(k) - (1-k^2)\,\mathrm{K}(k)\right].$$

344. Der Inhalt einer Rotationsfläche. In der x,y-Ebene (etwa in der oberen Halbebene) sei eine Kurve AB (Abb. 34) durch Gleichungen der Form (6) gegeben, wobei φ und ψ stetig differenzierbare Funktionen sein sollen. Unter der Voraussetzung, daß die Kurve keine mehrfachen und singulären Punkte besitzt, können wir die Bogenlänge s als Parameter einführen. Die Zählung von s beginne beim Punkt $A(t_0)$. Die

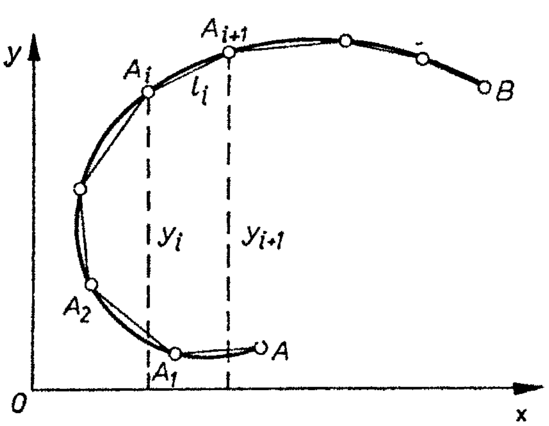

Abb. 34

Kurve wird dann durch die Gleichungen

$$x = \Phi(s), \qquad y = \Psi(s) \tag{18}$$

dargestellt. Der Parameter s variiert hier zwischen 0 und S, wenn mit S die Länge der ganzen Kurve AB bezeichnet wird.

Wird die Kurve um die x-Achse gedreht, so erzeugt sie eine *Rotationsfläche*. Wir stellen uns nun das Problem, den *Inhalt* dieser Fläche zu berechnen.

Wir können hier nicht den Inhalt einer gekrümmten (d. h. *nicht ebenen*) Fläche in ganz allgemeiner Form definieren; dies werden wir uns für Band III vorbehalten. Hier definieren wir diesen Begriff nur für Rotationsflächen und berechnen ihren Flächeninhalt. Dazu gehen wir von der aus der Schule bekannten Berechnung der Mantelflächen des Zylinders, des Kegels und des Kegelstumpfes aus. *Danach überzeugen wir uns davon, daß die Formel, die wir erhalten werden, als Spezialfall in der allgemeinen Formel für den Inhalt einer gekrümmten Fläche enthalten ist.*

Wir wählen auf der Kurve AB in der Richtung von A nach B die Punkte

$$A_0 = A, A_1, A_2, \ldots, A_i, A_{i+1}, \ldots, A_{n-1}, A_n = B \tag{19}$$

und betrachten den der Kurve einbeschriebenen Polygonzug $A_0A_1 \ldots A_{n-1}B$. Wird dieser Polygonzug mit der Kurve um die x-Achse gedreht, so erzeugt er eine bestimmte Fläche, deren Inhalt mit den Mitteln der Elementargeometrie bestimmt werden kann.

Wir wollen unter dem Inhalt der Fläche, die durch eine Kurve erzeugt wird, den Grenzwert P verstehen, dem der Inhalt Q derjenigen Fläche zustrebt, die von dem der Kurve einbeschriebenen Polygonzug erzeugt wird, wenn die größte Seite dieses Polygonzuges gegen 0 *strebt.* Diese Definition des Inhalts einer Rotationsfläche liefert uns den Schlüssel zu seiner Berechnung.

Die Punkte (19) entsprechen einer Folge zunehmender Werte von s, die zwischen 0 und S liegen:

$$0 = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_i < s_{i+1} < \cdots < s_{n-1} < s_n = S.$$

Bei der Drehung um die x-Achse erzeugt jede Seite des Polygonzuges die Mantelfläche eines Kugelstumpfes.[1]) Bezeichnen wir die Ordinaten der Punkte A_i und A_{i+1} mit y_i bzw. y_{i+1} und die Länge der Seite A_iA_{i+1} mit l_i, so ist der Inhalt der Fläche, die durch die i-te Seite erzeugt wird, gleich

$$2\pi \frac{y_i + y_{i+1}}{2} l_i.$$

Als Inhalt der Fläche, die durch den ganzen Polygonzug erzeugt wird, finden wir

$$Q = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} l_i.$$

Wir zerlegen diese Summe folgendermaßen in zwei Summen:

$$Q = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} y_i l_i + \pi \sum_{i=0}^{n-1} (y_{i+1} - y_i) l_i.$$

---

[1]) Diese Fläche kann zu Kegeln oder Zylindern ausarten. Ihr Flächeninhalt kann aber auch in diesen Fällen aus der allgemeinen Formel für die Mantelfläche des Kegelstumpfes berechnet werden.

Wegen der Stetigkeit der Funktion $y = \Psi(s)$ kann die Kurve so zerlegt werden, daß der Absolutbetrag der Differenzen $y_{i+1} - y_i$ eine beliebig kleine positive Zahl ε nicht überschreitet. Damit gilt

$$\left|\pi \sum_{i=0}^{n-1} (y_{i+1} - y_i)\, l_i\right| \leqq \varepsilon\pi \sum_{i=0}^{n-1} l_i \leqq \varepsilon\pi S\ ;$$

daraus folgt, daß diese Summe für $\max \Delta s_i \to 0$ verschwindet. Die Summe

$$2\pi \sum_{i=0}^{n-1} y_i l_i$$

kann wieder in zwei Summen zerlegt werden:

$$2\pi \sum_{i=0}^{n-1} y_i\, \Delta s_i - 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} y_i(\Delta s_i - l_i).$$

Da die Funktion $\Psi(s)$ stetig ist, ist sie auch beschränkt, so daß alle $|y_i| \leqq M$ sind, wobei M eine positive Zahl ist. Bezeichnen wir die letzte Summe mit τ, so gilt

$$|\tau| = 2\pi \left|\sum_{i=0}^{n-1} y_i(\Delta s_i - l_i)\right| \leqq 2\pi M \left(S - \sum_{i=0}^{n-1} l_i\right).$$

Unterteilt man die Kurve in immer kleinere Teile, so muß die Differenz $S - \sum_{i=0}^{n-1} l_i$ wegen der Definition der Bogenlänge als Grenzwert der Länge des einbeschriebenen Polygonzuges[1]) gegen 0 streben. Also strebt auch τ gegen 0. Die übrigbleibende Summe $\sigma = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} y_i\, \Delta s_i$ ist die Integralsumme für das Integral $2\pi \int_0^S y\, \mathrm{d}s$, das infolge der Stetigkeit der Funktion $y = \Psi(s)$ existiert, so daß die Summe σ für $\max \Delta s_i \to 0$ gegen dieses Integral strebt. Dies bedeutet, daß unter den gegebenen Voraussetzungen der Inhalt der Rotationsfläche existiert und sich durch die Formel

$$P = 2\pi \int_0^S y\, \mathrm{d}s = 2\pi \int_0^S \Psi(s)\, \mathrm{d}s \tag{20}$$

ausdrücken läßt.

Kehren wir zu der Parameterdarstellung (6) der Kurve zurück, so müssen wir in diesem Integral eine Variablensubstitution durchführen (vgl. Nr. 313, Formel (9)). Es erhält dann die Form

$$P = 2\pi \int_{t_0}^{T} y \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\, \mathrm{d}t = 2\pi \int_{t_0}^{T} \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, \mathrm{d}t. \tag{21}$$

Ist insbesondere die Kurve durch die explizite Gleichung $y = f(x)$, $a \leqq x \leqq b$, gegeben, so daß x selbst die Rolle des Parameters spielt, so erhalten wir

$$P = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\, \mathrm{d}x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, \mathrm{d}x. \tag{22}$$

---

[1]) Dies folgt nur für *nichtgeschlossene* doppelpunktfreie Kurven unmittelbar aus der Definition. Für *geschlossene* doppelpunktfreie Kurven erhält man es leicht, indem man sie in zwei nichtgeschlossene Kurven zerlegt.

345. Beispiele.

1. Man bestimme den Flächeninhalt einer *Kugelzone.* Es werde ein Halbkreis mit dem Radius r um die x-Achse gedreht. Aus der Gleichung des Kreises folgt $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, also gilt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \qquad \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \qquad y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = r.$$

In diesem Fall ist der Flächeninhalt der Kugelzone, die von einem Bogen, dessen Endpunkte die Abszissen x_1 und $x_2 > x_1$ haben, beschrieben wird, nach Formel (22) gleich

$$P = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} r\,dx = 2\pi r(x_2 - x_1) = 2\pi r h,$$

wobei h die Höhe der Zone angibt. Der Flächeninhalt einer Kugelzone ist also gleich dem Produkt aus dem Umfang eines Großkreises und der Höhe der Zone.

Insbesondere erhält man für $x_1 = -r$, $x_2 = r$, d. h. für $h = 2r$, den Inhalt der ganzen Kugeloberfläche: $P = 4\pi r^2$.

2. Man bestimme zwischen den Abszissen 0 und x den Inhalt der Fläche, die durch die Drehung der *Kettenlinie* $y = a \cosh \dfrac{x}{a}$ um die x-Achse entsteht.

Wegen $\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2} = \cosh \dfrac{x}{a}$ folgt aus (22)

$$P = 2\pi a \int_0^x \cosh^2 \frac{\xi}{a}\,d\xi = \frac{2}{a} V;$$

dabei ist V das Volumen des zugehörigen Rotationskörpers (vgl. Nr. 343, Beispiel 3).

3. Man löse die gleiche Aufgabe für die *Astroide*

$$x = a\cos^3 t, \qquad y = a \sin^3 t.$$

Es genügt hier, den Inhalt der Fläche zu bestimmen, die von dem Bogen der Astroide erzeugt wird, der im ersten Quadranten $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ liegt, und diesen mit 2 zu multiplizieren. Wir erhielten früher schon

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = 3a \sin t \cos t;$$

jetzt ergibt sich nach Formel (21)

$$P = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\pi/2} a \sin^3 t \cdot 3a \sin t \cos t\,dt$$

$$= 12\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos t\,dt = 12\pi a^2 \frac{\sin^5 t}{5}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{12}{5}\pi a^2.$$

4. Man löse die gleiche Aufgabe für die *Zykloide*

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t).$$

Wegen $y = 2a \sin^2 \dfrac{t}{2}$, $ds = 2a \sin \dfrac{t}{2}\,dt$ folgt

$$P = 2\pi \int_0^{2\pi} 4a^2 \sin^3 \frac{t}{2}\,dt = 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^3 u\,du = 16\pi a^2 \left(\frac{\cos^3 u}{3} - \cos u\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{64}{3}\pi a^2.$$

5. Man bestimme den Inhalt der Fläche, die durch Drehung der *Kardioide* $r = a(1 + \cos\theta)$ um die Polachse (Achse $\theta = 0$) erzeugt wird. Aus der Hauptformel (20) folgt, wenn man zu Polarkoordinaten übergeht,

$$P = 2\pi \int_0^S y \, ds = 2\pi \int_\alpha^\beta r \sin\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \, d\theta. \tag{23}$$

In unserem Fall ist

$$\alpha = 0, \qquad \beta = \pi,$$

$$y = r \sin\theta = a(1 + \cos\theta) \sin\theta = 4a \cos^3\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2},$$

$$ds = 2a \cos\frac{\theta}{2} \, d\theta$$

und damit

$$P = 2\pi \cdot 8a^2 \int_0^\pi \cos^4\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2} \, d\theta = \frac{32}{5}\pi a^2.$$

6. Man löse die gleiche Aufgabe für die *Lemniskate* $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$.

Hier ist $y = a\sqrt{2}\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta$, $ds = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\theta}}\,d\theta$, nach Formel (23) also

$$P = 2 \cdot 2\pi \cdot 2a^2 \int_0^{\pi/4} \sin\theta \, d\theta = 8\pi a^2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 7{,}361 a^2.$$

7. Man bestimme den Inhalt der Oberfläche eines *verlängerten* und eines *abgeplatteten Rotationsellipsoids.*

Das verlängerte Ellipsoid entsteht durch Drehung der Ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 (a > b)$ um die x-Achse. Wir erhalten folglich

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2, \qquad yy' = -\frac{b^2}{a^2}x,$$

$$y\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{y^2 + (yy')^2} = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 + \frac{b^4}{a^4}x^2} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2}.$$

Nun ist $a^2 - b^2 = e^2$, wobei e der Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkt und $\dfrac{e}{a}$ die numerische Exzentrizität ε der Ellipse ist. Damit gilt

$$y\sqrt{1 + y'^2} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2}$$

und

$$P = 2\pi \frac{b}{a} \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2} \, dx = 4\pi \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2} \, dx$$

$$= 4\pi \frac{b}{a} \left(\frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2} + \frac{a^2}{2\varepsilon} \arcsin\frac{\varepsilon x}{a}\right)\Bigg|_0^a$$

$$= 2\pi \frac{b}{a} \left(a\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 a^2} + \frac{a^2}{\varepsilon} \arcsin\varepsilon\right);$$

wegen $a^2 - \varepsilon^2 a^2 = a^2 - e^2 = b^2$ ergibt sich schließlich

$$P = 2\pi b \left(b + \frac{a}{\varepsilon} \arcsin \varepsilon\right).$$

Wenn die Ellipse um die kleine Achse gedreht wird, so entsteht das abgeplattete Ellipsoid (*Sphäroid*). Man kann hier die eben durchgeführte Rechnung benutzen, wenn man annimmt, daß die kleine Achse der Ellipse auf die x-Achse liegt. Man braucht dann in dem Ausdruck $y\sqrt{1 + y'^2}$ nur noch a und b zu vertauschen und erhält so

$$y\sqrt{1 + y'^2} = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} x^2} = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + \frac{e^2}{b^2} x^2}.$$

In diesem Fall ist also

$$P = 2\pi \frac{a}{b} \int_{-b}^{b} \sqrt{b^2 + \frac{e^2}{b^2} x^2}\, dx$$

$$= 2\pi \frac{a}{b}\left[\frac{1}{2} x \sqrt{b^2 + \frac{e^2}{b^2} x^2} + \frac{b^3}{2e} \ln\left(\frac{e}{b} x + \sqrt{b^2 + \frac{e^2}{b^2} x^2}\right)\right]\Bigg|_{-b}^{b}$$

$$= 2\pi a \left(\sqrt{b^2 + e^2} + \frac{b^2}{2e} \ln \frac{\sqrt{b^2 + e^2} + e}{\sqrt{b^2 + e^2} - e}\right).$$

Wegen $\sqrt{b^2 + e^2} = a$ und $e = \varepsilon a$ folgt für den Flächeninhalt

$$P = 2\pi a \left(a + \frac{b^2}{2e} \ln \frac{a + e}{a - e}\right) = 2\pi a \left(a + \frac{b^2}{2a} \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}\right).$$

346. Der Inhalt einer Zylinderfläche. Wir betrachten noch einen speziellen Flächentyp, nämlich die *Zylinderflächen*, für die wir den Begriff des Flächeninhalts definieren wollen (die allgemeine Definition folgt erst später).

Wir gehen wieder von der Kurve AB in der x,y-Ebene aus, von der schon in Nr. 344 die Rede war, und errichten auf ihr eine Zylinderfläche, deren Erzeugende Parallel zur z-Achse liegen (Abb. 35). Auf dieser Fläche ziehen wir die Kurve CD,

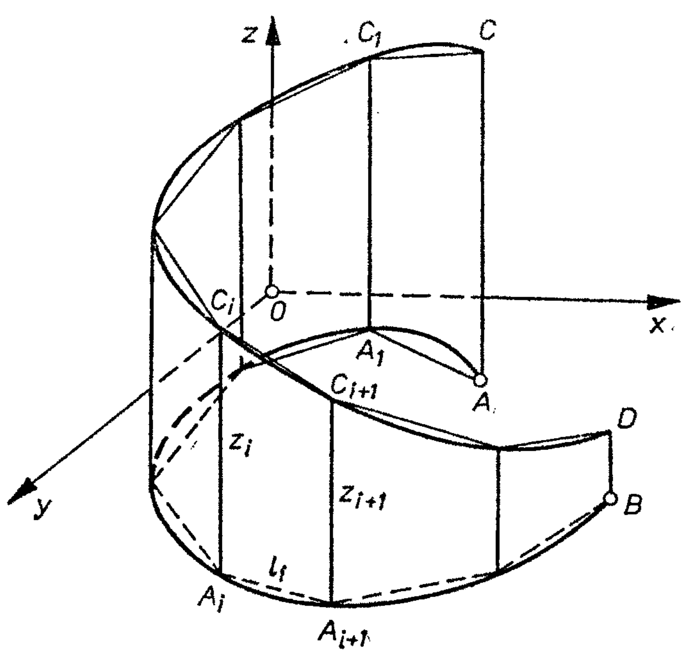

Abb. 35

die jede Erzeugende in einem Punkt schneidet. Diese Kurve läßt sich durch die Gleichungen (6) und eine dritte Gleichung

$$z = \chi(t) \qquad (\chi > 0) \tag{24}$$

beschreiben. Es soll nun der Inhalt P der Fläche bestimmt werden, die „unterhalb dieser Kurve“ liegt.

Wie in Nr. 344 führen wir die Bogenlänge s als Parameter ein. Dann werden die Gleichungen (6) durch (18) ersetzt, und (24) geht über in $z = X(s)$.

Wir beschreiben jetzt der Kurve AB einen Polygonzug $AA_1 \ldots A_{n-1}B$ und entsprechend der Kurve CD den Polygonzug $CC_1 \ldots C_{n-1}D$ ein (vgl. Abb. 35).

Die Trapeze $A_iA_{i+1}C_{i+1}C_i$ bilden eine Prismenfläche, die der betrachteten Zylinderfläche einbeschrieben ist. *Unter dem Inhalt der Zylinderfläche wollen wir den Grenzwert P verstehen, dem der Inhalt Q der Prismenfläche zustrebt, wenn die größte der Polygonseiten gegen 0 geht.*

Setzen wir $z_i = A_iC_i$, so ist (wir behalten die früheren Bezeichnungen bei)

$$Q = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{z_i + z_{i+1}}{2} l_i .$$

Mit Hilfe der Überlegungen aus Nr. 344 — der Leser möge sie selbst noch einmal durchführen — braucht man nur noch den Grenzwert der Summe $\sum_{i=0}^{n-1} z_i \,\Delta s_i$ auszurechnen, die man leicht als Integralsumme erkennt. Es gilt also

$$P = \int_0^S z\,\mathrm{d}s = \int_0^S X(s)\,\mathrm{d}s .^{1)}$$

Kehren wir zu dem beliebigen Parameter t zurück, so erhalten wir leicht die allgemeine Formel

$$P = \int_{t_0}^{T} z \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{T} \chi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t . \tag{25}$$

Ist die Kurve AB durch die explizite Gleichung $y = f(x)$, $a \leqq x \leqq b$, gegeben, so erhält diese Formel die Gestalt

$$P = \int_a^b z \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \chi(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x . \tag{26}$$

347. Beispiele.

1. In Abb. 36 ist die Kurve AB eine Parabel, deren Scheitel im Punkt B liegt. Ihre Gleichung lautet (mit den Bezeichnungen aus Abb. 36)

$$y = b - \frac{bx^2}{a^2} .$$

[1] Dieses Resultat wird vollkommen klar, wenn man sich den Zylinder auf die Ebene abgewickelt denkt, da dann die betrachtete Figur in ein krummliniges Trapez übergeht.

Über der Parabel errichten wir einen Zylinder und schneiden diesen mit der Ebene durch O, B und C. Die Gleichung der Ebene lautet offenbar $z = \frac{c}{a}x$. Man bestimme den Inhalt P des Teils ABC der Zylinderfläche.

Lösung. Nach Formel (26) gilt

$$P = \int_0^a z \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{c}{a^3}\int_0^a x\sqrt{a^4 + 4b^2x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{c}{12b^2}\left[(a^2 + 4b^2)^{3/2} - a^3\right].$$

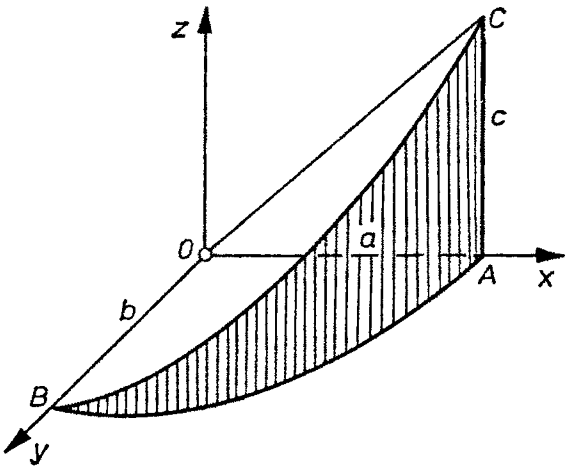

Abb. 36

2. Ist die Kurve AB ein Viertel des Kreises $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $0 \leqq x \leqq a$, so kann man die Formel (26) nicht ohne weiteres anwenden, da die Ableitung y' bei $x = a$ unendlich wird. Wir verwenden deshalb die Parameterdarstellung

$$x = a\cos t, \qquad y = a\sin t \qquad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

und erhalten nach der allgemeinen Formel (25)

$$P = \int_0^{\pi/2} z\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t = ac\int_0^{\pi/2}\cos t\,\mathrm{d}t = ac.$$

Aus diesem Ergebnis folgt, daß die Mantelfläche des in Nr. 343, Beispiel 8, betrachteten Zylinderabschnitts gleich $2ah$ ($c = h$) ist.

3. Die Kurve AB sei nun ein Viertel der Ellipse

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t \qquad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right).$$

Die explizite Gleichung kann man hier aus demselben Grund wie in Beispiel 2 nicht verwenden.

(a) Es sei zunächst $a > b$. Mit der numerischen Exzentrizität $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ folgt aus (25)

$$P = c\int_0^{\pi/2}\cos t\cdot\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{c}{a}\int_0^a\sqrt{b^2 + \varepsilon^2u^2}\,\mathrm{d}u$$

(Substitution $u = a\sin t$) und schließlich

$$P = \frac{1}{2}ac\left(1 + \frac{1 - \varepsilon^2}{2\varepsilon}\ln\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}\right).$$

(b) Im Fall $a < b$ ist $\varepsilon = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$ die numerische Exzentrizität, und es gilt

$$P = bc \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} \cos t \, dt = \frac{bc}{2} \left(\sqrt{1 - \varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} \arcsin \varepsilon \right).$$

4. Wir betrachten den Teil der Zylinderfläche $x^2 + y^2 = Rx$, der von der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ausgeschnitten wird. Die Schnittkurve (*Vivianische Kurve*; Nr. 229, Beispiel 1) hat, wie wir wissen, die Parameterdarstellung

$$x = R \sin^2 t, \qquad y = R \sin t \cos t, \qquad z = R \cos t.$$

Beschränken wir uns auf den ersten Quadranten, so variiert t zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$. Die ersten beiden Gleichungen entsprechen offenbar den Gleichungen (6), die letzte der Gleichung (24).

Der Inhalt der erwähnten Fläche ist also nach (25) gleich

$$P = 4R^2 \int_0^{\pi/2} \cos t \, dt = 4R^2.$$

5. Man bestimme den Inhalt der Oberfläche des Körpers, der durch Schnitt zweier Zylinder mit den Radien r entsteht, deren Achsen senkrecht aufeinander stehen (vgl. Nr. 343, Beispiel 11). Wir führen ein Koordinatensystem wie in Abb. 33 ein. Beschränken wir uns wieder auf den ersten Oktanten, so erhalten wir für die eine der Zylinderflächen

$$x = r \cos t, \qquad y = r \sin t,$$

also

$$z = \sqrt{r^2 - x^2} = r \sin t \qquad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right).$$

Nach der Formel (25) ist die Hälfte der gesuchten Fläche gleich

$$\frac{1}{2} P = 8r^2 \int_0^{\pi/2} \sin t \, dt = 8r^2;$$

daraus folgt $P = 16r^2$.

6. Man löse die gleiche Aufgabe für den Fall, daß die Zylinder verschiedene Radien r und $R > r$ haben (vgl. Nr. 343, Beispiel 12).

Wir berechnen zunächst den Anteil, den der Zylinder mit dem Radius r zur Oberfläche liefert. Es ist

$$x = r \sin t, \qquad y = r \cos t \qquad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right).$$

$$z = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 t} = R \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} \qquad \left(k = \frac{r}{R}\right).$$

Nach (25) ist also

$$P_1 = 8Rr \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} \, dt = 8Rr\mathrm{E}(k).$$

Um den Anteil des Zylinders mit dem Radius R leicht berechnen zu können, vertauschen wir die y-Achse mit der z-Achse. Dann gilt

$$x = R \sin t, \qquad z = R \cos t,$$

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2 - R^2 \sin^2 t} = r \sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \sin^2 t} \qquad \left(k = \frac{r}{R}\right),$$

wobei t nur die Werte von 0 bis $\arcsin k$ durchlaufen kann (wenn wir uns, wie immer, auf den ersten Oktanten beschränken). Mit Hilfe der Formel (25), in der natürlich die Vertauschung ebenfalls durchgeführt werden muß, erhalten wir

$$P_2 = 8\int_0^{\arcsin k} y\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = 8Rr\int_0^{\arcsin k}\sqrt{1-\frac{1}{k^2}\sin^2 t}\,dt.$$

Die Substitution

$$\sin t = k\sin\varphi, \qquad dt = \frac{k\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

wobei φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ läuft, liefert

$$\int_0^{\arcsin k}\sqrt{1-\frac{1}{k^2}\sin^2 t}\,dt = k\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Dem letzten Integral begegneten wir schon in Nr. 343, Beispiel 12; es ist gleich

$$\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\mathrm{K}(k) + \frac{1}{k^2}\mathrm{E}(k).$$

Damit ist

$$P_2 = 8R^2[\mathrm{E}(k) - (1-k^2)\,\mathrm{K}(k)]$$

und schließlich

$$P = P_1 + P_2 = 8R(R+r)\,[\mathrm{E}(k) - (1-k)\,\mathrm{K}(k)].$$

Damit sind die einfachsten geometrischen Anwendungen des Integralbegriffs behandelt. Mit der Berechnung von komplizierteren und allgemeineren geometrischen Gebilden beschäftigen wir uns im dritten Band.

§ 3. Die Berechnung mechanischer und physikalischer Größen

348. Die Anwendung des bestimmten Integrals. Ehe man zur Anwendung des bestimmten Integrals in der Mechanik, Physik und Technik übergeht, ist es zweckmäßig, sich über die Wege klar zu werden, die bei diesen Disziplinen im allgemeinen auf bestimmte Integrale führen. Wir entwerfen daher ein allgemeines Schema für die Anwendung des Integralbegriffs und erläutern es an Hand der schon untersuchten geometrischen Aufgaben.

Es werde etwa eine dem Intervall $[a, b]$ zugeordnete Zahl Q gesucht. Dabei möge jedem Teilintervall $[\alpha, \beta]$ von $[a, b]$ ein gewisser Teil der Größe Q so zugeordnet sein, daß eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ in Teilintervalle eine Zerlegung der Größe Q in entsprechende Teile nach sich zieht.

Es handelt sich also um eine additive Intervallfunktion[1] $Q([\alpha, \beta])$, d. h., besteht das Intervall $[\alpha, \beta]$ aus den Teilintervallen $[\alpha, \gamma]$ und $[\gamma, \beta]$, so gilt

[1]) Siehe auch F. Riesz und B. Sz.-Nagy, Vorlesungen über Funktionalanalysis, 4. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin/Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt/M. 1982 (Übersetzung aus dem Französischen), Kap. I, Nr. 4. — *Anm. d. Red.*

dann auch

$$Q([\alpha, \beta]) = Q([\alpha, \gamma]) + Q([\gamma, \beta]).$$

Das Problem besteht darin, den dem ganzen Intervall $[a, b]$ entsprechenden Wert von Q zu berechnen.

Als Beispiel wählen wir die ebene Kurve $y = f(x)$, $a \leqq x \leqq b$ (Abb. 37).[1]) Größen der erwähnten Art sind hier a) die Länge S der Kurve AB, b) der Flächeninhalt P des krummlinigen Trapezes $AA'B'B$ und c) das Volumen V des Körpers, den man durch Drehung des Trapezes um die x-Achse erhält. Man sieht leicht, welche „Intervallfunktionen" hier entstehen.

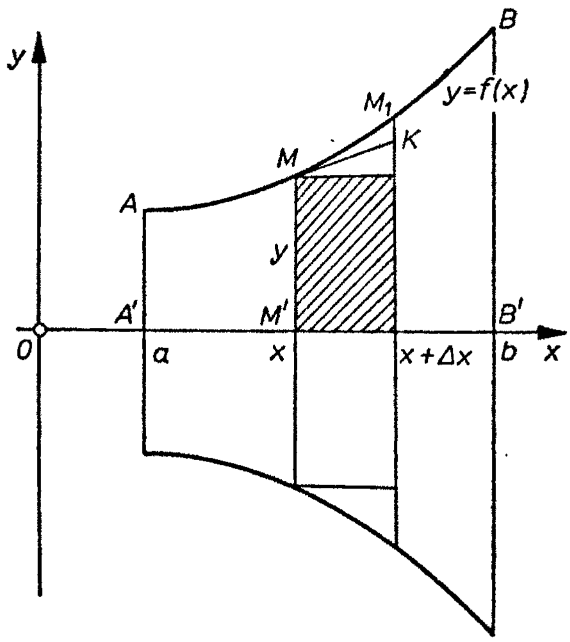

Abb. 37

Wir betrachten ein „Element" ΔQ der Größe Q, das dem „Elementarintervall" $[x, x + \Delta x]$ entspricht. Ausgehend von den Bedingungen des Problems wollen wir uns bemühen, für ΔQ einen Näherungswert der Form $q(x)\,\Delta x$ (*linear in* Δx) zu finden, der sich von ΔQ um eine Größe unterscheidet, die von höherer Ordnung als Δx klein ist. Mit anderen Worten, *von der (für $\Delta x \to 0$) unendlich kleinen Größe ΔQ trennen wir den Hauptteil ab.* Der relative Fehler der Näherungsgleichung

$$\Delta Q \approx q(x)\,\Delta x \tag{1}$$

strebt dann offenbar mit Δx gegen 0.

In Beispiel a) kann das Bogenelement MM_1 durch den Tangentenabschnitt MK ersetzt werden (Abb. 37), so daß der lineare Teil von ΔS gleich

$$\sqrt{1 + y'^2}\,\Delta x = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\Delta x$$

ist. In Beispiel b) wird man natürlich das Streifenelement ΔP durch das darin einbeschriebene Rechteck mit dem Flächeninhalt

$$y\,\Delta x = f(x)\,\Delta x$$

[1]) Die Funktion $f(x)$ sei stetig differenzierbar. Der Einfachheit wegen nehmen wir an, daß die Kurve monoton wächst und nach unten konvex ist.

ersetzen. In Beispiel c) läßt sich der Hauptteil des Schichtelements ΔV in Form des darin einbeschriebenen Kreiszylinders mit dem Volumen

$$\pi y^2 \Delta x = \pi[f(x)]^2 \Delta x$$

abtrennen.

In allen drei Fällen kann man leicht zeigen, daß der Fehler, der durch die Ersetzung gemacht wird, von höherer Ordnung als die Größe Δx klein ist.[1]) Im Fall a) ist er nämlich kleiner als $KM_1 = \Delta y - \mathrm{d}y$, im Fall b) kleiner als $\Delta x \, \Delta y$ und im Fall c) kleiner als $\pi(2y + \Delta y) \, \Delta x \, \Delta y$.

Wir behaupten, daß die gesuchte Größe Q exakt durch das Integral

$$Q = \int_a^b q(x) \, \mathrm{d}x \tag{2}$$

ausgedrückt wird.

Zum Beweis zerlegen wir das Intervall $[a, b]$ durch die Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ in die Elementarintervalle

$$[a, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_i, x_{i+1}], \ldots, [x_{n-1}, b].$$

Da jedem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ oder $[x_i, x_i + \Delta x_i]$ ein Elementarteil von Q entspricht, der angenähert gleich $q(x_i) \, \Delta x_i$ ist, wird die ganze gesuchte Größe Q angenähert gleich der Summe

$$Q \approx \sum_i q(x_i) \, \Delta x_i .$$

Die Genauigkeit des erhaltenen Wertes ist um so größer, je kleiner die Teilintervalle sind, so daß Q offenbar der Grenzwert der betrachteten Summe ist, d. h., Q läßt sich tatsächlich durch das Integral $\int_a^b q(x) \, \mathrm{d}x$ ausdrücken.

Dies gilt in vollem Umfang für alle drei betrachteten Beispiele. Daß die obigen Beziehungen für S, P und V eine etwas andere Gestalt hatten, lag daran, daß dort nicht nur nach ihrer *Berechnung* gefragt war, sondern auch ihre *Existenz* (gemäß ihren früher gegebenen Definitionen) bewiesen werden mußte.

Es kommt also stets darauf an, die Näherungsgleichung (1) aufzustellen, aus der sich unmittelbar das Resultat (2) ergibt.

Im allgemeinen schreibt man $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}Q$ statt Δx und ΔQ und die Gleichung für das „Element" $\mathrm{d}Q$ der Größe Q in der Form

$$\mathrm{d}Q = q(x) \, \mathrm{d}x. \tag{3}$$

Deshalb führt die „Summierung" dieser „Elemente" (in Wirklichkeit ist es eine Integration) zu der Formel (2) für die Größe Q.

Wir betonen, daß hier die Verwendung des *Integrals* statt der gewöhnlichen *Summe* sehr wesentlich ist. Die Summe gab nur den angenäherten Wert für Q an, denn in ihr wirkten sich die Fehler der einzelnen Gleichungen (3) aus. Der Grenzübergang, durch den man aus der Summe das Integral erhält, läßt den Fehler gegen 0 gehen und führt zu dem exakten Resultat. Anfangs werden also im Interesse der Einfachheit in dem Ausdruck für $\mathrm{d}Q$ die unendlich kleinen Größen höherer Ordnung vernachlässigt,

---

[1]) Unter den Voraussetzungen, die in der Fußnote auf S. 209 gemacht wurden.

dann wird im Interesse der Strenge die Summation durch die Integration ersetzt, und es ergibt sich das *exakte* Resultat.

Übrigens könnte man auch anders an die Frage herangehen. Bezeichnen wir nämlich mit $Q(x)$ die veränderliche Größe Q, die dem Intervall $[a, x]$ entspricht, wobei natürlich $Q(a) = 0$ vorausgesetzt ist, dann wird die oben betrachtete „Intervallfunktion" $Q([\alpha, \beta])$ durch die „Punktfunktion"[1] $Q(x)$ in der Form

$$Q([\alpha, \beta]) = Q(\beta) - Q(\alpha)$$

ausgedrückt.

In unseren Beispielen ist die „Punktfunktion" a) der veränderliche Bogen AM, b) der Flächeninhalt des veränderlichen Trapezes $AA'M'M$ und schließlich c) das Volumen des Körpers, den man durch Drehung dieses Trapezes um die x-Achse erhält.

Die Größe ΔQ ist einfach der Zuwachs der Funktion $Q(x)$, und das Produkt $q(x)\,\Delta x$, das den Hauptteil von ΔQ darstellt, ist nichts anderes als das Differential von $Q(x)$; vgl. Nr. 103 und 104. Deshalb ist die Gleichung (3) in der differentiellen Schreibweise keine Näherungsgleichung, sondern exakt, wenn man unter $\mathrm{d}Q$ die Größe $\mathrm{d}Q(x)$ versteht. Daraus folgt sofort das gewünschte Resultat

$$\int_a^b q(x)\,\mathrm{d}x = Q(b) - Q(a) = Q([a, b]) = Q.$$

Wir weisen noch darauf hin, daß bei Anwendungen die Summierung unendlich kleiner Größen zweckmäßiger sein kann.

349. Die Berechnung des statischen Moments und des Schwerpunktes einer mit Masse belegten Kurve. Bekanntlich ist das statische Moment M eines Massenpunktes mit der Masse m bezüglich einer Achse gleich dem Produkt aus der Masse m und dem Abstand d dieses Punktes von der Achse. Bei einem System von n Massenpunkten mit den Massen $m_1, m_2, \ldots, m_n$, die mit der Achse in einer Ebene liegen und deren Abstände von der Achse entsprechend $d_1, d_2, \ldots, d_n$ sind, wird das statische Moment durch die Summe

$$M = \sum_i m_i d_i$$

ausgedrückt. Dabei werden die Abstände derjenigen Punkte, die auf einer Seite der Achse liegen, mit dem positiven Vorzeichen, und die Abstände derjenigen Punkte, die auf der anderen Seite liegen, mit dem negativen Vorzeichen versehen.

Wenn die Masse nicht in einzelnen Punkten konzentriert, sondern längs einer ebenen Kurve oder auf einem ebenen Flächenstück verteilt ist, so ist in dem Ausdruck für das statische Moment statt der Summe ein *Integral* erforderlich.

Wir wollen nun das statische Moment M einer mit Masse belegten Kurve AB (Abb. 38) bezüglich der x-Achse bestimmen. Dazu setzen wir eine homogene Massenbelegung voraus, so daß die *lineare Dichte* ϱ (d. h. Masse pro Längeneinheit) konstant ist; der Einfachheit halber setzen wir $\varrho = 1$ voraus (anderenfalls muß das erhaltene Resultat mit ϱ multipliziert werden). Unter diesen Voraussetzungen entspricht die Masse eines beliebigen Bogens der Kurve der Maßzahl nach einfach seiner Länge, und der Begriff des statischen Moments erhält dadurch einen rein geometrischen Charakter. Wir wollen noch auf folgendes hinweisen: Wenn über das statische Moment (oder den Schwerpunkt) einer Kurve ohne Angabe der Massenverteilung gesprochen wird, dann ist immer das statische Moment (oder der Schwerpunkt) unter den hier genannten Voraussetzungen gemeint.

[1]) Der Ausdruck „Punktfunktion" ist hier nur zur klaren Unterscheidung zum Begriff „Intervallfunktion" verwendet worden. Es handelt sich natürlich um eine Funktion von x im klassischen Sinne. — *Anm. d. Red.*

Wir betrachten nun ein Element ds (seine Masse läßt sich ebenfalls durch die Zahl ds ausdrücken). Dieses Element werde als Massenpunkt mit dem Abstand y von der x-Achse aufgefaßt; sein statisches Moment ist dann gleich

$$dM_x = y\,ds.$$

Summieren wir diese statischen Momente, wobei wir als Veränderliche die Bogenlänge s (mit dem Punkt A als Anfangspunkt) nehmen, so erhalten wir

$$M_x = \int_0^S y\,ds. \tag{4}$$

Analog läßt sich das Moment bezüglich der y-Achse ausdrücken:

$$M_y = \int_0^S x\,ds. \tag{5}$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß y (oder x) durch s ausgedrückt werden kann. In der Praxis läßt sich oft s durch diejenige Veränderliche (t, x oder θ) ausdrücken, die die Rolle der unabhängigen Veränderlichen in der Kurvengleichung spielt.

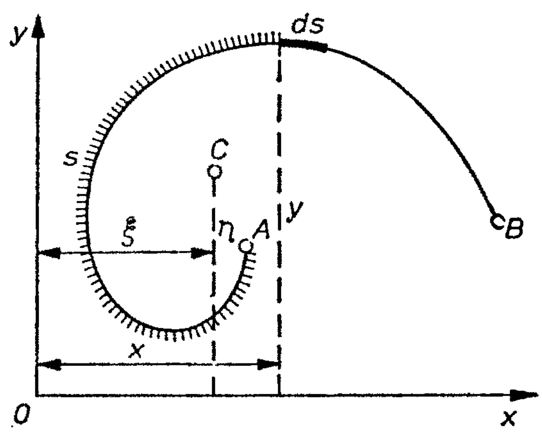

Abb. 38

Mit Hilfe der statischen Momente M_x und M_y einer Kurve kann man leicht die Lage ihres Schwerpunktes $C(\xi, \eta)$ bestimmen. Der Punkt C besitzt folgende Eigenschaft: Wenn in ihm die gesamte Masse S der Kurve konzentriert ist (die Masse läßt sich durch die gleiche Zahl wie die Bogenlänge ausdrücken), so ist das Moment dieser Masse bezüglich einer beliebigen Achse gleich dem Moment der Kurve bezüglich der gleichen Achse. Betrachtet man insbesondere die Momente der Kurve bezüglich der Koordinatenachsen, so gilt

$$S\xi = M_y = \int_0^S x\,ds, \qquad S\eta = M_x = \int_0^S y\,ds;$$

daraus folgt

$$\xi = \frac{M_y}{S} = \frac{1}{S}\int_0^S x\,ds, \qquad \eta = \frac{M_x}{S} = \frac{1}{S}\int_0^S y\,ds. \tag{6}$$

Aus der Formel für die Ordinate η des Schwerpunktes können wir eine bemerkenswerte geometrische Folgerung ziehen. Es gilt

$$\eta S = \int_0^S y\,ds,$$

also

$$2\pi\eta S = 2\pi \int_0^S y\,ds$$

Der rechte Teil dieser Beziehung ist gleich dem Inhalt P der Fläche, die man durch Drehung der Kurve AB um die x-Achse erhält (vgl. Nr. 344, Formel (20)). Auf der linken Seite der Gleichung ist $2\pi\eta$ gleich dem Umfang des Kreises, der vom Schwerpunkt bei einer Drehung um die x-Achse beschrieben wird. Wir erhalten so die *erste Guldinsche*[1]) *Regel*:

Der Inhalt P der Fläche, die durch Drehung einer Kurve um eine die Kurve nicht schneidende Achse entsteht, ist gleich dem Produkt aus der Bogenlänge der Kurve und dem Umfang des Kreises, den der Schwerpunkt C der Kurve bei der Drehung beschreibt (Abb. 38):

$$P = S \cdot 2\pi\eta.$$

Mit Hilfe dieser Regel kann man die Koordinate η des Schwerpunktes einer Kurve bestimmen, wenn ihre Länge S und der Inhalt P der von ihr beschriebenen Rotationsfläche bekannt sind.

350. Beispiele.

1. Man bestimme das statische Moment der Halbellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ bezüglich der x-Achse ($a > b$).

Für die obere (oder untere) Halbellipse ist das Moment nur um den Faktor $\frac{1}{2\pi}$ von dem Inhalt der entsprechenden Rotationsfläche verschieden. Deshalb gilt (vgl. Nr. 345, Beispiel 7)

$$M_x = b\left(b + \frac{a}{\varepsilon} \arcsin \varepsilon\right).$$

2. Betrachtet man einen zu einer Geraden symmetrisch gelegenen Bogen, so liegt der Schwerpunkt des Bogens stets auf dieser Geraden.

Zum Beweis benutzen wir als Symmetrieachse die y-Achse; ihr Schnittpunkt mit der Kurve sei der Anfangspunkt für die Zählung des Bogens. Dann ist die Funktion $x = \Phi(s)$ eine ungerade Funktion von s, und man erhält, wenn man die Länge der ganzen Kurve mit $2S$ bezeichnet,

$$M_y = \int_{-S}^{S} x \, ds = 0$$

(vgl. Nr. 319, Beispiel 9), woraus sofort $\xi = 0$ folgt.

3. Man bestimme mit Hilfe der Guldinschen Regel den Schwerpunkt des Kreisbogens $\overset{\frown}{AB}$ mit dem Radius r (Abb. 39).

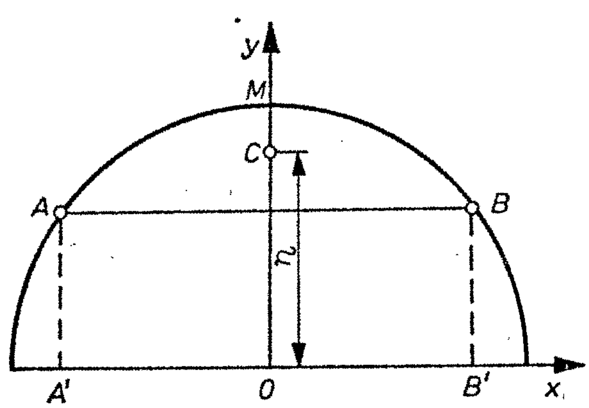

Abb. 39

Da der Bogen symmetrisch zur y-Achse liegt, muß der Schwerpunkt C auf dem Radius OM liegen, wobei M der Schnittpunkt des Bogens mit der y-Achse ist. Man braucht also nur noch den Abstand η des Schwerpunktes vom Nullpunkt O zu bestimmen. Wir bezeichnen die Länge des Bogens $\overset{\frown}{AB}$ mit s und die Sehne AB ($= A'B'$) mit d. Dreht man den Bogen $\overset{\frown}{AB}$ um die x-Achse, so erhält man eine Kugelzone, deren Oberfläche, wie in Nr. 345, Beispiel 1, her-

[1]) Paul Guldin, 1577—1643, Schweizer Mathematiker.

geleitet wurde, gleich $2\pi rd$ ist. Nach der Guldinschen Regel ist der Inhalt der Oberfläche gleich $2\pi\eta s$, so daß $s\eta = rd$ und $\eta = \frac{rd}{s}$ gilt.

Insbesondere ist für einen Halbkreis $d = 2r$, $s = \pi r$ und

$$\eta = \frac{2}{\pi} r \approx 0{,}637r.$$

4. Man bestimme den Schwerpunkt eines Bogens der Zykloide

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t) \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi).$$

Wegen der Symmetrie ist offenbar $\xi = \pi a$; mit Hilfe des Ergebnisses aus Nr. 345, Beispiel 4, folgt dann leicht $\eta = \frac{4}{3} a$.

5. Falls die Lage des Schwerpunkts bekannt ist, kann man mit Hilfe der Guldinschen Regel den Inhalt der Oberfläche eines Rotationskörpers bestimmen. Es soll z. B. die Oberfläche eines *Torus* berechnet werden, der bekanntlich durch Drehung eines Kreises um eine ihn nicht schneidende Achse entsteht (Abb. 40). Der Schwerpunkt einer Kreislinie ist offenbar der Mittelpunkt selbst; also gilt (mit den Bezeichnungen aus Abb. 40)

$$P = 2\pi r \cdot 2\pi d = 4\pi^2 rd.$$

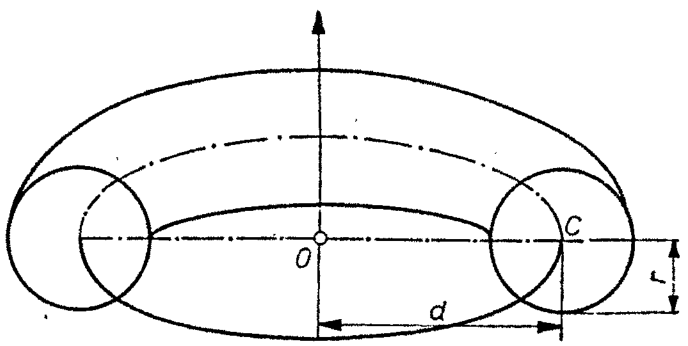

Abb. 40

351. Berechnung des statischen Moments und des Schwerpunktes einer ebenen Figur. Wir betrachten eine ebene Figur $AA'B'B$ (Abb. 41), die von oben durch die Kurve AB begrenzt werde. Die Gleichung der Kurve sei $y = f(x)$. Wir setzen voraus, daß diese Figur homogen mit Masse belegt sei, so daß die *Flächendichte* ϱ (d. h. Masse pro Flächeneinheit) konstant ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man dann $\varrho = 1$ voraussetzen, d. h., die Masse eines beliebigen Teils der Figur wird der Maßzahl nach durch seinen Flächeninhalt angegeben. Diese Voraussetzungen sollen stets gelten, wenn schlechthin vom statischen Moment (oder vom Schwerpunkt) einer ebenen Figur gesprochen wird.

Zur Bestimmung der statischen Momente M_x, M_y dieser Figur bezüglich der Koordinatenachsen betrachten wir ein Element der Figur, das die Form eines vertikalen Streifens der Breite dx habe (vgl. Abb. 41). Wir können diesen Streifen angenähert als Rechteck ansehen, so daß

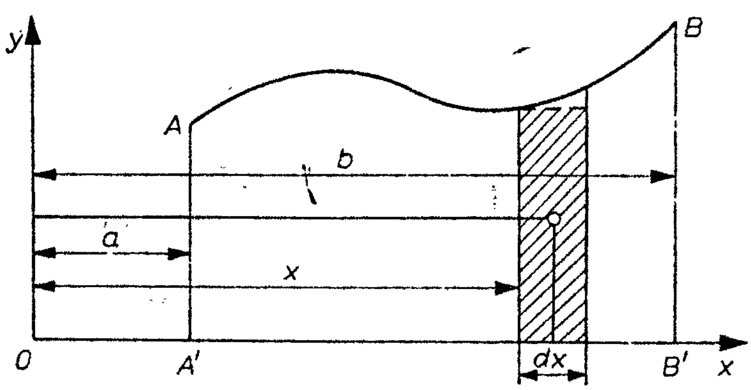

Abb. 41

seine Masse (die sich durch die gleiche Zahl wie der Flächeninhalt ausdrücken läßt) gleich $y\,dx$ wird. Zur Bestimmung der entsprechenden „Elementarmomente" dM_x, dM_y denken wir uns die gesamte Masse des Streifens im Schwerpunkt konzentriert (d. h. im Mittelpunkt des Rechtecks). Der Abstand des Schwerpunktes von der x-Achse ist geich $\frac{1}{2}\,y$, von der y-Achse gleich $x + \frac{1}{2}\,dx$. Der letzte Ausdruck kann durch x ersetzt werden, da $\frac{1}{2}\,dx$ nach Multiplikation mit der Masse $y\,dx$ von höherer als erster Ordnung klein wird. Wir erhalten also

$$dM_x = \frac{1}{2}\,y^2\,dx, \qquad dM_y = xy\,dx.$$

Summieren wir diese „Elementarmomente", so finden wir

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx, \qquad M_y = \int_a^b xy\,dx, \tag{7}$$

wobei unter y die Funktion $f(x)$ zu verstehen ist, durch die die Kurve AB gegeben ist.

Wie im Fall einer Kurve kann man auch hier mit Hilfe der statischen Momente der Figur bezüglich der Koordinatenachsen leicht die Koordinaten ξ und η ihres Schwerpunktes bestimmen. Bezeichnen wir mit P den Flächeninhalt (und damit auch die Masse) der Figur, dann gilt auf Grund der Definition des Schwerpunktes

$$P\xi = M_y = \int_a^b xy\,dx, \qquad P\eta = M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx;$$

daraus folgt

$$\xi = \frac{M_y}{P} = \frac{1}{P}\int_a^b xy\,dx, \qquad \eta = \frac{M_x}{P} = \frac{1}{2P}\int_a^b y^2\,dx. \tag{8}$$

Wir können auch in diesem Fall aus der Formel für die Ordinate η des Schwerpunktes eine wichtige geometrische Folgerung ziehen. Aus der Formel für η folgt

$$2\pi\eta P = \pi\int_a^b y^2\,dx.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung drückt das Volumen V des Körpers aus, der durch Drehung der Figur $AA'B'B$ um die x-Achse erzeugt wird (vgl. Nr. 342, Formel (16)). Die linke Seite ist gleich dem Produkt aus dem Flächeninhalt P dieser Figur und dem Umfang $2\pi\eta$ des Kreises, den der Schwerpunkt bei der Drehung um die x-Achse beschreibt. Hieraus folgt die *zweite Guldinsche Regel:*

Das Volumen V eines Körpers, der durch Drehung einer ebenen Figur um eine sie nicht schneidende Achse entsteht, ist gleich dem Produkt aus dem Flächeninhalt dieser Figur und dem Umfang des Kreises, den der Schwerpunkt der Figur bei der Drehung beschreibt:

$$V = P \cdot 2\pi\eta.$$

Die Formeln (7) und (8) können auf den Fall übertragen werden, daß die Figur sowohl von unten als auch von oben durch Kurven begrenzt wird (vgl. Abb. 19). Offenbar gilt dann

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\,dx, \qquad M_y = \int_a^b x(y_2 - y_1)\,dx; \tag{7a}$$

die Formeln (8) ändern sich entsprechend. Berücksichtigt man die Beziehung (8) aus Nr. 338, so sieht man leicht, daß die Guldinsche Regel auch in diesem Fall gilt.

352. Beispiele.

1. Man bestimme die statischen Momente M_x, M_y und die Koordinaten des Schwerpunktes der Figur, die von der *Parabel* $y^2 = 2px$, der x-Achse und der Ordinate im Punkt x begrenzt wird.

Mit $y = \sqrt{2px}$ folgt aus (7)

$$M_x = \frac{1}{2} \cdot 2p \int_0^x \xi \, d\xi = \frac{1}{2} px^2, \qquad M_y = \sqrt{2p} \int_0^x \xi^{3/2} \, d\xi = \frac{2\sqrt{2p}}{5} x^{5/2}.$$

Ferner ist (vgl. Nr. 338, Formeln (7))

$$P = \sqrt{2p} \int_0^x \xi^{1/2} \, d\xi = \frac{2\sqrt{2p}}{3} x^{3/2}$$

der Flächeninhalt. Dann gilt auf Grund der Formel (8)

$$\xi = \frac{3}{5} x, \qquad \eta = \frac{3}{8} \sqrt{2px} = \frac{3}{8} y.$$

Sind die Werte von ξ und η bekannt, so findet man mit Hilfe der Guldinschen Regel leicht das Volumen des Körpers, der durch Drehung der Figur um eine Koordinatenachse oder um eine im Endlichen liegende Parallele zur y-Achse entsteht. Zum Beispiel ist im obigen Fall das Volumen des Rotationskörpers, dessen Achse vom Schwerpunkt den Abstand $\frac{2}{5} x$ hat, gleich $V = \frac{8}{15} \pi x^2 y$.

2. Man bestimme den Schwerpunkt des ersten Quadranten der *Ellipse* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ unter Verwendung der Resultate von Nr. 339, Beispiel 2, und Nr. 343, Beispiel 2.

Nach der zweiten Guldinschen Regel folgt

$$\xi = \frac{4a}{3\pi}, \qquad \eta = \frac{4b}{3\pi}.$$

3. Besitzt eine Figur eine Symmetrieachse, so liegt der Schwerpunkt stets auf dieser Achse.

Wir beweisen diesen Satz für eine Figur, die von unten durch die Kurve $y_1 = f_1(x)$, von oben durch die Kurve $y_2 = f_2(x)$ begrenzt wird. Nehmen wir die y-Achse als Symmetrieachse, dann sind f_1 und f_2 gerade Funktionen. Das Intervall für die Veränderliche x ist in diesem Fall $[-a, a]$. Aus der zweiten Beziehung (7a) folgt dann (vgl. Nr. 314, Beispiel 9)

$$M_y = \int_{-a}^{a} x(y_2 - y_1) \, dx = 0;$$

also ist $\xi = 0$.

4. Man bestimme den Schwerpunkt der Figur, die von einem vollen Bogen der *Zykloide* $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ und der x-Achse begrenzt wird.

Verwendet man Beispiel 9 aus Nr. 339 und Beispiel 4 aus Nr. 343, so folgt mit Hilfe der Guldinschen Regel $\eta = \frac{5}{6} a$. Aus Symmetriegründen ist $\xi = \pi a$.

5. Man bestimme den Schwerpunkt der Figur, die von den beiden *Parabeln* $y^2 = 2px$ und $x^2 = 2py$ begrenzt wird (vgl. Abb. 24).

Mit Hilfe des Beispiels 5 aus Nr. 339 und der Formeln (7a) folgt

$$\eta = \xi = \frac{1}{P} \int_0^{2p} x \left(\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p} \right) dx = \frac{\frac{6}{5} p^3}{\frac{4}{3} p^2} = \frac{9}{10} p.$$

6. Mit Hilfe der zweiten Guldinschen Regel kann man, wenn die Lage des Schwerpunktes bekannt ist, das Volumen des entsprechenden Rotationskörpers bestimmen. Wir wählen als Beispiel, wie bei den entsprechenden Überlegungen mit der ersten Guldinschen Regel (vgl. Nr. 350, Beispiel 5), den *Torus* (Abb. 40). Sein Volumen ergibt sich zu $V = 2\pi^2 r^2 d$.

353. Der Begriff der mechanischen Arbeit. Aus der elementaren Mechanik ist bekannt, daß die Arbeit A, die durch eine konstante Kraft F geleistet wird, welche an einem Punkt M unter einem konstanten Winkel zu seiner Bewegungsrichtung s angreift, durch das Produkt $F \cdot \cos(F, s) \cdot s$ ausgedrückt wird; dabei bezeichnet (F, s) den Winkel zwischen der Angriffsrichtung der Kraft und der Bewegungsrichtung des Punktes. Das Produkt $F_s = F \cdot \cos(F, s)$ ist offenbar die Projektion von F auf die Richtung der Verschiebung. Führt man diese Projektion ein, so erhält der Ausdruck für die Arbeit die Gestalt $A = F_s \cdot s$. Wenn die Richtung der Kraft mit der Richtung der Verschiebung übereinstimmt, dann gilt $A = F \cdot s$. Wenn sich beide Richtungen um den Winkel π unterscheiden, gilt $A = -F \cdot s$.

Im allgemeinen sind jedoch sowohl die Kraft F als auch der Winkel (F, s) nicht konstant. Ändert sich auch nur eine der beiden Größen stetig, so muß man, um einen Ausdruck für die Arbeit zu erhalten, wieder das bestimmte Integral verwenden.

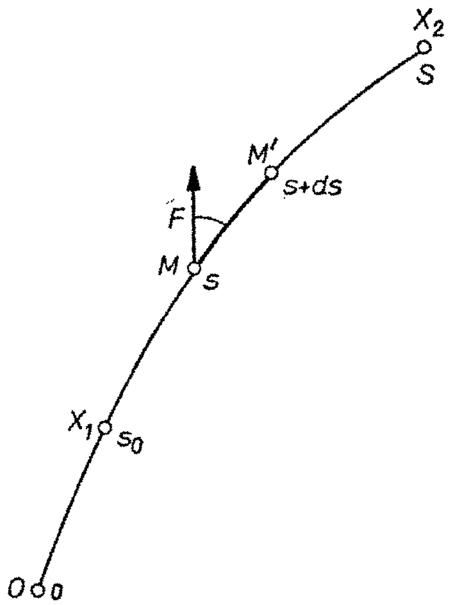

Abb. 42

Der Weg s, der von dem Punkt durchlaufen werde, sei die unabhängige Veränderliche; wir setzen dabei voraus, daß die Ausgangslage X_1 des Punktes M dem Wert $s = s_0$, die Endlage X_2 dem Wert $s = S$ entspreche (Abb. 42). Jedem Wert s aus dem Intervall (s_0, S) entsprechen eine bestimmte Lage des sich bewegenden Punktes und bestimmte Werte der Größen $\cos(F, s)$ und F, die deshalb als Funktionen von s betrachtet werden müssen. Es sei nun M der Punkt, der dem Wert s entspreche. Wir stellen eine Näherungsgleichung für das Element $\mathrm{d}A$ auf, das einem Zuwachs $\mathrm{d}s$ des Weges von s nach $s + \mathrm{d}s$ entspricht und durch welches der Punkt M in den Nachbarpunkt M' übergeht (vgl. Abb. 42). In der Lage M wirkt auf den Punkt eine bestimmte Kraft F unter einem bestimmten Winkel (F, s); da die Änderung dieser Größen beim Übergang des Punktes von der Lage M in die Lage M' unendlich klein ist, vernachlässigen wir diese Änderung, d. h., wir betrachten die Kraft F und den Winkel (F, s) in diesem Intervall als annähernd konstant. Dann erhalten wir für $\mathrm{d}A$ bei der Änderung $\mathrm{d}s$ den Ausdruck

$$\mathrm{d}A = F \cos(F, s)\, \mathrm{d}s,$$

so daß die Arbeit A durch das Integral

$$A = \int_{s_0}^{S} F \cos(F, s)\, \mathrm{d}s \tag{9}$$

dargestellt werden kann.

Aus diesem allgemeinen Ausdruck für die Arbeit der Kraft F folgt, daß die Arbeit, falls für alle s in $[s_0, S]$ die Beziehung $(F, s) = \frac{\pi}{2}$ gilt, gleich 0 ist, da dann $\cos(F, s)$ und somit auch der Integrand gleich 0 ist. Das bedeutet, daß *eine Kraft*, die *senkrecht zur Bewegungsrichtung angreift, keine mechanische Arbeit leistet.*

Wenn die in einem Punkt angreifende Kraft F nach der Parallelogrammregel in zwei Komponenten zerlegt wird, und zwar in eine Komponente in Richtung der Bahntangente, d. h. der Bewegungsrichtung, und in eine dazu senkrechte Komponente, dann leistet nach den eben durchgeführten Überlegungen nur die Komponente $F_s = F \cdot \cos(F, s)$ in Richtung der Bahntangente Arbeit:

$$A = \int_{s_0}^{S} F_s \, ds. \tag{9a}$$

Wir nehmen nun an, daß F die Resultante aller in einem Punkt angreifenden Kräfte ist; dann ist nach dem Newtonschen Bewegungsgesetz die Komponente F_s in Richtung der Bahntangente gleich dem Produkt aus der Masse m des Punktes und seiner Beschleunigung a. Der Ausdruck für die Arbeit A lautet dann

$$A = \int_{s_0}^{S} ma \, ds.$$

Wegen

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \text{und} \quad v = \frac{ds}{dt},$$

also

$$a = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} v,$$

folgt in diesem Fall

$$A = \int_{s_0}^{S} mv \frac{dv}{ds} ds = \int_{s_0}^{S} d\left(\frac{1}{2} mv^2\right) = \frac{1}{2} mv^2\Big|_{s_0}^{S} = \frac{1}{2} mV^2 - \frac{1}{2} mv_0^2,$$

wobei v_0 und V die Geschwindigkeiten am Anfangs- bzw. Endpunkt bezeichnen.

Bekanntlich ist $\frac{1}{2} mv^2$ die *kinetische Energie* (die ältere Bezeichnung ist „lebendige Kraft") des Punktes. Damit haben wir den folgenden wichtigen Satz bewiesen: *Die mechanische Arbeit A, die von einer in einem Massenpunkt angreifenden Kraft geleistet wird, ist gleich dem Zuwachs der kinetischen Energie des Punktes.* (Selbstverständlich können die mechanische Arbeit und der Zuwachs der kinetischen Energie gleichzeitig auch negativ sein.) Dieses Prinzip, das auf Systeme von Massenpunkten und starre Körper erweitert werden kann, spielt in der Mechanik und der Physik eine sehr wichtige Rolle.

354. Beispiele.

1. Man berechne mit Hilfe der Formel (9) die bei Dehnung (oder Stauchung) einer an einem Ende befestigten Feder geleistete Arbeit. Dieses Problem tritt z. B. bei der Berechnung von Puffern auf.

Bekanntlich bewirkt eine Dehnung s der Feder (wenn die Feder nicht überlastet wird) eine Spannung p, die der Dehnung proportional ist: $p = cs$ (Abb. 43). Dabei ist c eine für die Feder charakteristische Konstante, die sogenannte *Federkonstante*. Die die Feder dehnende Kraft muß diese Spannung überwinden. Wenn man nur den Teil der wirkenden Kraft betrachtet, der dazu erforderlich ist, so wird die Arbeit, die zu einer Dehnung der Feder von 0 bis S notwendig ist, durch

$$A = \int_0^S p \, \mathrm{d}s = c \int_0^S s \, \mathrm{d}s = c \, \frac{s^2}{2}\Big|_0^S = \frac{cS^2}{2}$$

ausgedrückt. Bezeichnen wir den größten Wert der Spannung, der der Dehnung S der Feder entspricht (und gleich cS ist), mit P, so können wir den Ausdruck für die Arbeit in der Form

$$A = \frac{1}{2} PS$$

schreiben.

Würde auf das freie Ende der Feder die Kraft P wirken (z. B. als Gewicht), so wäre die Arbeit für die Dehnung S doppelt so groß, also PS. Wie wir sehen, wird nur die eine Hälfte der Arbeit zur Dehnung der Feder aufgewendet; die andere Hälfte verleiht der belasteten Feder kinetische Energie.

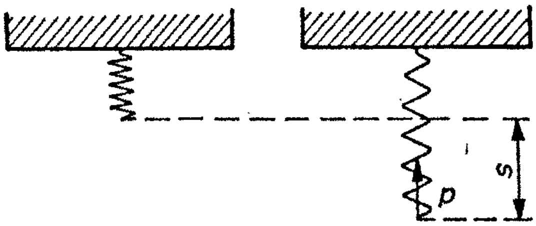

Abb. 43

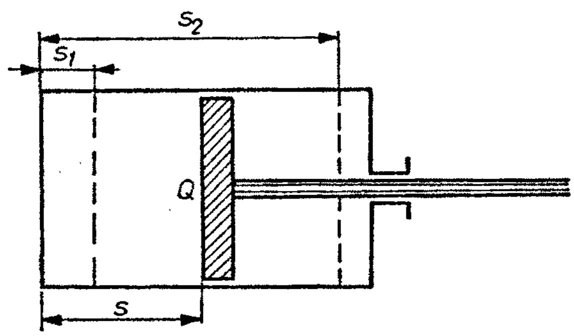

Abb. 44

2. In einem Zylinder befinde sich auf der einen Seite des Kolbens ein Gas (Abb. 44). Wir nehmen an, das Gas dehne sich aus und bewege den Kolben nach rechts. Wir wollen die von dem Gas geleistete Arbeit berechnen. Wenn die Anfangs- bzw. die Endlage des Kolbens mit s_1 bzw. s_2, der Druck (Kraft pro Einheit der Kolbenfläche) mit p und der Inhalt der Kolbenfläche mit Q bezeichnet wird, dann ist die auf den Kolben wirkende Kraft gleich pQ, und die Arbeit wird durch das Integral

$$A = Q \int_{s_1}^{s_2} p \, \mathrm{d}s$$

ausgedrückt. Ist V das Volumen des betrachteten Gases, so ist offenbar $V = Qs$. Führt man statt s als neue Veränderliche das Volumen V ein, so erhält man leicht

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p \, \mathrm{d}V, \tag{10}$$

wobei V_1 das Anfangs- und V_2 das Endvolumen darstellt.

Wenn der Druck als Funktion des Volumens V bekannt ist, kann man die Arbeit A bestimmen. Setzt man voraus, daß die Temperatur des Gases bei der Ausdehnung konstant bleibt, so muß dem Gas zur Ausdehnung von außen Energie in Form von Wärme zugeführt werden. In diesem Fall heißt der Prozeß *isotherm*. Für ein ideales Gas gilt dann das Boyle-Mariottesche[1])

[1]) Robert Boyle, 1627—1691, englischer Physiker; Edmé Mariotte, 1620—1684, französischer Physiker.

Gesetz $pV = c = \text{const}$; also ist $p = \frac{c}{V}$. Für die Arbeit erhalten wir den Wert

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{c}{V}\,\mathrm{d}V = c \ln V\big|_{V_1}^{V_2} = c \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Wenn wir mit p_1 bzw. p_2 den Anfangs- bzw. den Enddruck bezeichnen, so gilt $p_1V_1 = p_2V_2$ oder $\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}$. Damit findet man für die Arbeit, die von dem Gas bei der Ausdehnung geleistet wird und die mit einer Druckänderung von p_1 auf $p_2 < p_1$ verknüpft ist, den Ausdruck

$$A = c \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Schließlich kann in diesen Formeln die Konstante c durch das Produkt p_1V_1 ersetzt werden. Es kommt jedoch öfter vor, daß während der Ausdehnung des Gases kein Wärmeaustausch zwischen dem Gas und der Umgebung stattfindet. Die für die Arbeit notwendige Energie stammt dann aus der Energie des Gases; die Temperatur des Gases nimmt dabei ab. Solche Prozesse heißen *adiabatisch*. In diesem Fall besteht zwischen dem Druck p und dem Volumen V des Gases die Beziehung

$$pV^k = c = \text{const}$$

(sie wird später hergeleitet werden; vgl. Nr. 361, Aufgabe 3); dabei ist k eine für das Gas charakteristische Konstante, die stets größer als 1 ist. Hieraus folgt $p = cV^{-k}$ und damit

$$A = \int_{V_1}^{V_2} cV^{-k}\,\mathrm{d}V = \frac{c}{1-k} V^{1-k}\big|_{V_1}^{V_2} = \frac{c}{1-k}\left(V_2^{1-k} - V_1^{1-k}\right) = \frac{c}{1-k}\left(\frac{1}{V_2^{k-1}} - \frac{1}{V_1^{k-1}}\right).$$

Dieses Resultat läßt sich auf eine etwas übersichtlichere Form bringen, wenn man die Beziehungen $cV_1^{-k} = p_1$, $cV_2^{-k} = p_2$ benutzt. Setzt man sie ein, so erhält man für die Arbeit den Ausdruck

$$A = \frac{p_1V_1 - p_2V_2}{k-1}.$$

Wir hatten nur der Einfachheit und Übersichtlichkeit wegen vorausgesetzt, daß das sich ausbreitende Gas in einem Zylinder befinde. Sowohl die Hauptformel (10) als auch die aus ihr erhaltenen speziellen Formeln bleiben gültig, unabhängig davon, welche Form das zu betrachtende Gas in jedem gegebenen Moment besitzt. Es versteht sich, daß diese Formeln auch die Arbeit angeben, die bei der Kompression des Gases vom Volumen V_2 auf das Volumen $V_1 < V_2$ geleistet wird (diese Kompression wird von einer Erhöhung des Druckes von p_2 auf $p_1 > p_2$ begleitet), d. h. die Arbeit einer äußeren Kraft, die das Gas zusammenpreßt. Die Arbeit des Gases ist in diesem Fall negativ.

355. Die Arbeit der Reibungskraft in einem flachen Zapfen. Im allgemeinen werden die Führungsteile vertikal laufender Wellen *Zapfen* genannt. Die feste Stütze, in der sich der Zapfen dreht, ist das *Stützzapfenlager* oder *Widerlager*. In diesem Abschnitt untersuchen wir die Reibungskräfte für den einfachen Fall eines flachen Zapfens.

Ein *flacher* Zapfen ist ein zylindrischer Körper, der sich mit seiner *ebenen* Grundfläche auf das Zapfenlager stützt (Abb. 45). Diese Grundfläche hat im allgemeinen die Form eines Kreisringes mit dem äußeren Radius R und dem inneren Radius r_0. Im Spezialfall $r_0 = 0$ erhalten wir einen Kreis als Grundfläche.

Wir bezeichnen mit P den Druck des Zapfens, mit ω die Winkelgeschwindigkeit der Welle, mit μ den Reibungskoeffizienten und mit p den Druck auf den Zapfen (p ist eine Funktion des Ortes). Wir haben bisher noch nicht die Frage nach der *Druckverteilung* gestellt; wir erwähnen nur die an sich selbstverständliche Tatsache, daß die Punkte des Zapfens, die vom

Mittelpunkt O den gleichen Abstand besitzen, auch dem gleichen Druck ausgesetzt sind, d. h., p ist im allgemeinen eine Funktion des Abstandes r vom Mittelpunkt. Weiter unten werden wir die Voraussetzungen angeben, die bezüglich dieser Funktion gemacht werden. Einer Bedingung muß sie jedoch in jedem Fall genügen; und zwar muß der vom Zapfenlager auf den Zapfen übertragene Gesamtdruck mit dem von der Welle ausgeübten Druck P im Gleichgewicht stehen.

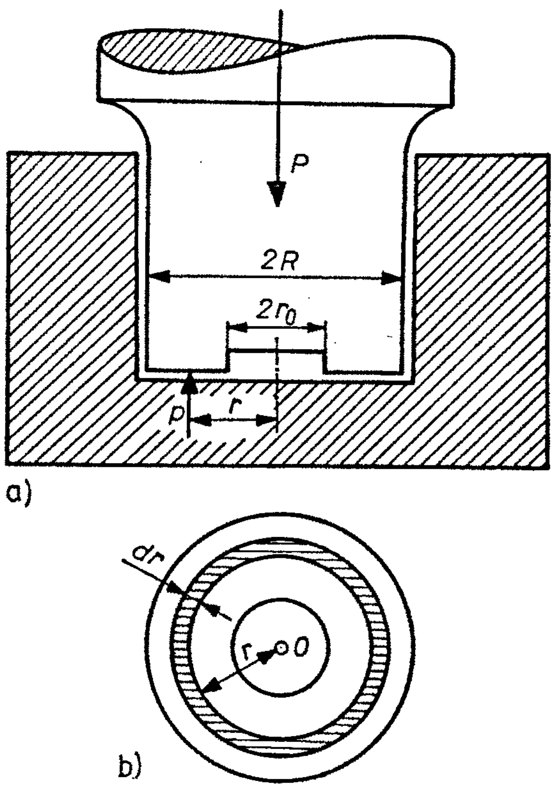

Abb. 45

Wir berechnen diesen Gesamtdruck durch Summierung unendlich kleiner Größen (nach dem Schema in Nr. 348), wobei wir als unabhängige Veränderliche den Radius r nehmen, der von r_0 bis R variiert. Dazu zerlegen wir dieses Intervall in Teilintervalle, was einer Zerlegung des Kreisringes in konzentrische Kreisringe entspricht. Die Belastung P setzt sich dann aus den „Elementarbelastungen" dieser Kreisringe zusammen. Wir betrachten nun den Kreisring, der von den Kreisen mit den Radien r und $r + dr$ begrenzt wird (in Abb. 45b schraffiert). Der Flächeninhalt dieses Kreisringes ist gleich

$$\pi(r + dr)^2 - \pi r^2 = 2\pi r\, dr + \pi(dr)^2;$$

vernachlässigen wir noch die von zweiter Ordnung kleine Größe $\pi(dr)^2$, so ist der Flächeninhalt ungefähr gleich $2\pi r\, dr$. Ist p der Druck (Kraft pro Flächeneinheit) in einem Punkt mit der Entfernung r vom Nullpunkt, so ist die dem betrachteten Kreisring entsprechende Elementarbelastung gleich

$$dP = p \cdot 2\pi r\, dr.$$

Nach Integration folgt daraus

$$P = 2\pi \int_{r_0}^{R} pr\, dr. \tag{11}$$

Diese Formel drückt gerade die oben angegebene Gleichgewichtsbedingung aus.

Wir bestimmen nun das Moment M der Reibungskraft des sich drehenden Zapfens bezüglich der Rotationsachse. Dazu betrachten wir den Kreisring mit dem äußeren Radius $r + dr$ und dem inneren Radius r. Die von diesem Kreisring entwickelte Reibungskraft, die der Drehung entgegenwirkt, ist gleich

$$\mu \, \mathrm{d}P = 2\pi\mu p r \, \mathrm{d}r;$$

das ihr entsprechende „Elementarmoment“ dM erhalten wir also einfach durch Multiplikation dieser Kraft mit dem (für alle Punkte des Kreisringes gleichen) Abstand r:

$$\mathrm{d}M = 2\pi\mu p r^2 \, \mathrm{d}r.$$

Daraus folgt für das Reibungsmoment

$$M = 2\pi\mu \int_{r_0}^{R} p r^2 \, \mathrm{d}r. \tag{12}$$

Aus der elementaren Mechanik ist bekannt, daß die Arbeit, die einem durch konstante Drehung erzeugten Moment pro Sekunde entspricht, gleich dem Produkt aus dem Moment M und der Winkelgeschwindigkeit ω ist:

$$A = M\omega.$$

Um die Arbeit, die an dem Ring geleistet wird, berechnen zu können, müssen wir einige Annahmen bezüglich der Verteilung der Funktion p über die Reibungsfläche machen.

Am einfachsten ist die Voraussetzung, daß sich der Druck homogen über die ganze Fläche verteilt, also $p = c = \text{const}$ ist. Die Größe dieser Konstanten läßt sich aus der Gleichung (11) bestimmen. In diesem Fall ist der Druck p bei einer gleichmäßigen Verteilung der Belastung P über den Kreisring mit dem Flächeninhalt $\pi(R^2 - r_0^2)$ gleich $c = \dfrac{P}{\pi(R^2 - r_0^2)}$. Setzen wir diesen Wert von p in die Gleichung (12) ein, so folgt

$$M = 2\pi\mu \frac{P}{\pi(R^2 - r_0^2)} \int_{r_0}^{R} r^2 \, \mathrm{d}r = \frac{2}{3} \mu P \frac{R^3 - r_0^3}{R^2 - r_0^2}.$$

Insbesondere gilt für einen vollen Zapfen $M = \dfrac{2}{3} \mu P R$.

Diese Resultate beziehen sich jedoch nur auf noch nicht abgenutzte Zapfen. Bei der Drehung der Welle bewegen sich diejenigen Punkte des Zapfens, die weiter vom Mittelpunkt O entfernt sind, mit einer größeren Geschwindigkeit als die näher an O liegenden Punkte. Dementsprechend groß ist die Arbeit und damit die Abnutzung sowohl des Zapfens als auch des Zapfenlagers. Dadurch wird sich ein Teil des Druckes zum Mittelpunkt des Zapfens verlagern. Bei alten Zapfen stellt sich die Druckverteilung im allgemeinen so ein, daß die Reibungsarbeit (pro Flächeneinheit) und damit auch die Abnutzung überall auf der Reibungsfläche konstant ist. Dividieren wir die „Elementararbeit“ $\mathrm{d}A = \omega \, \mathrm{d}M$ durch den Flächeninhalt $2\pi r \, \mathrm{d}r$ des Ringes, so können wir die Bedingung in der Form

$$\omega\mu p r = \text{const}$$

schreiben; daraus folgt $pr = c^* = \text{const}$.

Wir setzen also voraus, daß der Druck p umgekehrt proportional der Entfernung vom Zentrum O ist. Ersetzt man in der Bedingung (11) pr durch c^*, so kann man diese Konstante bestimmen:

$$P = 2\pi c^* \int_{r_0}^{R} \mathrm{d}r = 2\pi c^* (R - r_0),$$

also

$$c^* = \frac{P}{2\pi(R - r_0)}.$$

Ersetzen wir schließlich in (12) pr durch diesen Ausruck, so finden wir

$$M = 2\pi\mu \frac{P}{2\pi(R - r_0)} \int_{r_0}^{R} r \, dr = \frac{1}{2} \mu P(R + r_0).$$

Für den vollen Zapfen ist $M = \frac{1}{2} \mu P R$.

Man sieht leicht, daß der Leistungsverlust durch Reibung bei alten Zapfen kleiner ist als bei neuen.

356. Aufgaben zur Summierung unendlich kleiner Größen. Wir bringen nun eine Reihe von Aufgaben, die mit Hilfe der Summierung unendlich kleiner Größen lösbar sind.

1. Man leite eine Formel für das statische Moment M eines Körpers (V) bezüglich einer gegebenen Ebene her, wenn die Flächeninhalte der zu dieser Ebene parallelen Querschnitte des Körpers (als Funktion des Abstandes x von ihr) bekannt sind. Die Dichte sei gleich 1.

Mit den Bezeichnungen von Nr. 342 ist die Masse (das Volumen) eines Schichtelements des Körpers im Abstand x von der Ebene gleich $P(x)\,dx$, sein statisches Moment $dM = xP(x)\,dx$, so daß durch Summierung

$$M = \int_a^b xP(x)\,dx$$

folgt. Der Abstand ξ des Schwerpunktes des Körpers von der gegebenen Ebene ist gleich

$$\xi = \frac{M}{V} = \frac{\int_a^b xP(x)\,dx}{\int_a^b P(x)\,dx}.$$

Insbesondere gilt für einen Rotationskörper

$$\xi = \frac{\int_a^b xy^2\,dx}{\int_a^b y^2\,dx}.$$

Wenn man dieses Resultat a) auf einen Kreiskegel, b) auf eine Halbkugel anwendet, erhält man für den Abstand des Schwerpunktes von der Grundfläche a) $\frac{1}{4}$ der Höhe, b) $\frac{3}{8}$ des Radius.

2. Man leite die Formel für das statische Moment M einer Rotationsfläche bezüglich einer zur Rotationsachse senkrechten Ebene her. Die „Flächendichte" sei gleich 1.

Wir wählen die x-Achse als Rotationsachse und legen den Nullpunkt in ihren Schnittpunkt mit der betrachteten Fläche. Mit den Bezeichnungen aus Nr. 344 ist die Masse (der Flächeninhalt) eines ringförmigen Schichtelements mit dem Abstand s vom Anfangspunkt der Bogenzählung gleich $2\pi y\,ds$, sein statisches Moment also gleich $dM = 2\pi xy\,ds$ und damit

$$M = 2\pi \int_0^S xy\,ds = 2\pi \int_0^S \Phi(s)\,\Psi(s)\,ds.$$

Wenn die Kurve, durch deren Drehung um die x-Achse die Rotationsfläche erzeugt wird, explizit durch $y = f(x)$, $a \leqq x \leqq b$, gegeben ist, gilt speziell

$$M = 2\pi \int_a^b xy\sqrt{1 + y'^2}\,dx = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

Der Abstand ξ des Schwerpunktes von der gegebenen Ebene ist gleich

$$\xi = \frac{M}{P} = \frac{\int_0^S xy\,ds}{\int_0^S y\,ds} = \frac{\int_a^b xy\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx}.$$

Man wende diese Formel a) auf einen Kreiskegel, b) für eine Halbkugel an.

Lösung. Der Abstand des Schwerpunktes von der Grundfläche ist a) $\frac{1}{3}$ der Höhe, b) $\frac{1}{2}$ des Radius.

3. Man bestimme die statischen Momente M_{yz}, M_{zx}, M_{xy} einer Zylinderfläche (Nr. 346; Abb. 35) bezüglich der Koordinatenebenen und die Lage des Schwerpunktes. Man verwende dazu die Formeln für die Mantelfläche eines Zylinderabschnitts (vgl. Nr. 347, Beispiel 2, und Nr. 343, Beispiel 8).

Lösung. Die allgemeinen Formeln lauten

$$M_{yz} = \int_0^S xz\,ds, \qquad M_{zx} = \int_0^S yz\,ds, \qquad M_{xy} = \frac{1}{2}\int_0^S z^2\,ds,$$

$$\xi = \frac{M_{yz}}{P}, \qquad \eta = \frac{M_{zx}}{P}, \qquad \zeta = \frac{M_{xy}}{P}.$$

wobei P der Inhalt der Fläche ist. Beim vorliegenden Beispiel ist $\xi = 0$, $\eta = \frac{1}{4}a$, $\zeta = \frac{\pi}{8}h$.

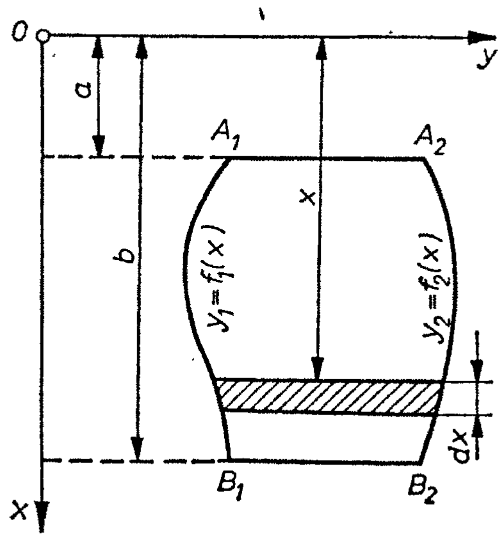

Abb. 46

4. Das *Trägheitsmoment* (oder Moment zweiten Grades) eines Massepunktes mit der Masse m bezüglich einer beliebigen Achse (oder Ebene) ist gleich dem Produkt aus der Masse m und dem *Quadrat* des Abstandes d des Punktes von der Achse (oder der Ebene). Man bestimme, ausgehend von dieser Definition, den Ausdruck für das Trägheitsmoment I_y der ebenen Figur $A_1B_1B_2A_2$ (Abb. 46) bezüglich der y-Achse. Die „Flächendichte" der Masse sei gleich 1.

$$dI_y = x^2(y_2 - y_1)\,dx, \qquad I_y = \int_a^b x^2(y_2 - y_1)\,dx.$$

Für die in Abb. 47 gezeigten Figuren erhalten wir z. B. im Fall a)

$$y_2 - y_1 = b, \qquad I_y = b \int\limits_{c-(h/2)}^{c+(h/2)} x^2 \, dx = bc^2h + \frac{bh^3}{12},$$

insbesondere ist $I_y = \dfrac{bh^3}{12}$ für $c = 0$; im Fall b) ist

$$y_2 - y_1 = 2\sqrt{r^2 - (x-c)^2}, \qquad I_y = 2 \int\limits_{c-r}^{c+r} x^2 \sqrt{r^2 - (x-c)^2} \, dx = \pi r^2 c^2 + \frac{\pi r^4}{4},$$

insbesondere ist hier $I_y = \dfrac{\pi r^4}{4}$ für $c = 0$.

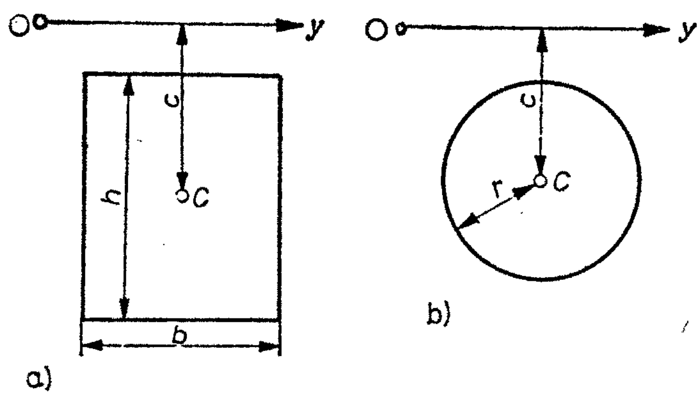

Abb. 47

5. Man bestimme das Trägheitsmoment des Körpers (V) von Aufgabe 1 bezüglich der dort erwähnten Ebene. Die erhaltene Formel verwendet man zur Berechnung des Trägheitsmomentes a) eines Kreiskegels, b) einer Halbkugel bezüglich der Grundfläche.

Lösung:

$$I = \int\limits_a^b x^2 P(x) \, dx;$$

damit ist

$$\text{a) } I = \frac{\pi}{30} R^2 h^3, \qquad \text{b) } I = \frac{2\pi}{15} R^5.$$

6. Die Kraft, mit der eine Flüssigkeit auf ein in einer Tiefe h liegendes Flächenstück drückt, ist gleich dem Gewicht der Flüssigkeitssäule der Höhe h, die über dem Flächenstück steht. Der Druck in der Tiefe h ist dann gleich $h\varrho g$, wobei ϱ die Dichte der Flüssigkeit und g die am betrachteten Ort vorliegende Erdbeschleunigung ist.

Wir nehmen an, daß eine ebene Figur $A_1B_1B_2A_2$ (Abb. 46) vertikal in die Flüssigkeit eintaucht.[1] Man bestimme den hydrostatischen Druck W auf diese Figur und sein statisches Moment M (bezüglich der Oberfläche der Flüssigkeit).

Auf das Flächenelement $dP = (y_2 - y_1)\,dx$ wird der Druck

$$dW = \varrho g x (y_2 - y_1) \, dx$$

ausgeübt, dessen Moment bezüglich der y-Achse gleich

$$dM = \varrho g x^2 (y_2 - y_1) \, dx$$

ist. Daraus folgt

$$W = \varrho g \int\limits_a^b x(y_2 - y_1) \, dx, \qquad M = \varrho g \int\limits_a^b x^2 (y_2 - y_1) \, dx.$$

[1]) Wir wählen die y-Achse so, daß sie auf der Oberfläche der Flüssigkeit liegt.

Das erste Integral stellt offenbar das *statische Moment* M_y der Figur bezüglich der y-Achse dar. Das zweite gibt das *Trägheitsmoment* I_y der Figur bezüglich derselben Achse an.

Ist ξ der Abstand des Schwerpunktes C der Figur von der Flüssigkeitsoberfläche und P ihr Flächeninhalt, so gilt offenbar $W = \varrho g P \xi$. Das Druckzentrum (d. h. der Punkt, in dem die Resultierende des hydrostatischen Druckes anzubringen ist) hat von der Oberfläche den Abstand

$$\xi^* = \frac{M}{W} = \frac{I_y}{P\xi}.$$

Wir wenden diese Formel auf die in Abb. 47 dargestellten Fälle an. In Abb. 47a gilt $\xi = c$, $P = bh$ und $W = \varrho gbhc$. In Aufgabe 4 hatten wir schon $I_y = bc^2h + \frac{bh^3}{12}$ berechnet. Damit gilt

$$\xi^* = c + \frac{h^2}{12c}.$$

Ist speziell $c = \frac{h}{2}$ (d. h., die obere Seite des Rechtecks liegt an der Flüssigkeitsoberfläche), so folgt

$$W = \frac{1}{2}\varrho gbh^2, \qquad \xi^* = \frac{2}{3}c.$$

In Abb. 47b gilt $\xi = c$, $P = \pi r^2$ und $W = \varrho gc\pi r^2$. Hier ist $I_y = \pi r^2c^2 + \frac{\pi r^4}{4}$ (vgl. Aufgabe 4) und damit

$$\xi^* = c + \frac{r^2}{4c}.$$

7. Wenn ein mit Wasser gefülltes Bassin an einer Seite im Abstand h unterhalb der Wasseroberfläche einen horizontalen Spalt besitzt, so strömt durch diesen Spalt Wasser mit der Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2gh}$$

aus.[1] Die Seite habe nun eine rechteckige Öffnung (Abb. 48). Man bestimme das Volumen Q des pro Sekunde ausströmenden Wassers.

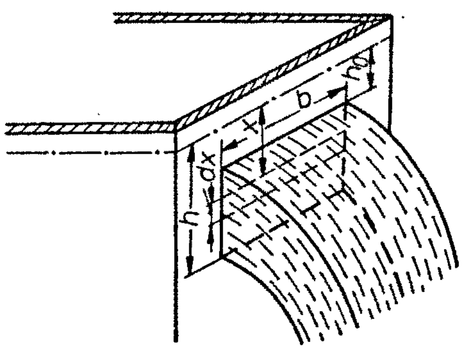

Abb. 48

In einem Streifenelement der Breite dx im Abstand x von der Oberfläche ist die Geschwindigkeit v gleich $\sqrt{2gx}$; da der Flächeninhalt gleich $b\,dx$ ist, fließt pro Sekunde durch dieses Streifenelement das Volumen $dQ = \sqrt{2gx}\,b\,dx$. Die Summierung ergibt

$$Q = \sqrt{2g}\,b\int_{h_0}^{h} x^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{2g}\,b(h^{3/2} - h_0^{3/2}).$$

[1] Diese Formel aus der Hydrodynamik ist unter dem Namen *Toricellische Formel* bekannt (Evangelista Toricelli, 1608–1647, italienischer Mathematiker und Naturforscher). Sie hat dieselbe Gestalt wie die Formel für die Geschwindigkeit eines Massenpunktes beim freien Fall aus der Höhe h.

Das tatsächliche Volumen der ausströmenden Flüssigkeit ist wegen der Reibung und der Kompression des Strahls etwas kleiner als das berechnete. Der Einfluß dieser Faktoren wird im allgemeinen durch Einführung eines empirischen Koeffizienten $\mu < 1$ berücksichtigt. Dann hat der obige Ausdruck die Form

$$Q = \frac{2}{3}\,\mu\,\sqrt{2g}\,b(h^{3/2} - h_0^{3/2}).$$

Für $h_0 = 0$ ergibt sich hieraus die Formel für die durch eine rechteckige Wasserrinne abfließende Menge:

$$Q = \frac{2}{3}\,\mu\,\sqrt{2g}\,bh^{3/2}.$$

8. Bei der Untersuchung des Magnetfeldes eines stromdurchflossenen Leiters stellten Biot[1]) und Savart[2]) fest, daß die Kraft dieses Magnetfeldes auf einen Magnetpol als Resultierende der entsprechenden Kräfte beliebig kleiner stromdurchflossener Leiterelemente betrachtet werden kann. Dementsprechend wirkt das Magnetfeld des Leiterelementes ds (Abb. 49) auf den im Punkt O liegenden Magnetpol der Polstärke m mit der Kraft

$$\mathrm{d}F = \frac{Im \sin\varphi\,\mathrm{d}s}{4\pi r^2},$$

wobei I die Stromstärke, r der Abstand OM und φ der Winkel (ds, r) ist.

Diese Kraft steht senkrecht auf der Ebene durch ds und O, und zwar zeigt sie in dem in Abb. 49 angegebenen Fall in die Zeichenebene hinein.

Will man die Kraft ermitteln, die ein endliches stromdurchflossenes Leiterstück auf einen Magnetpol ausübt, so muß man die Kräfte der Leiterelemente summieren.

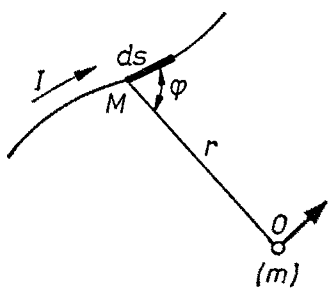

Abb. 49

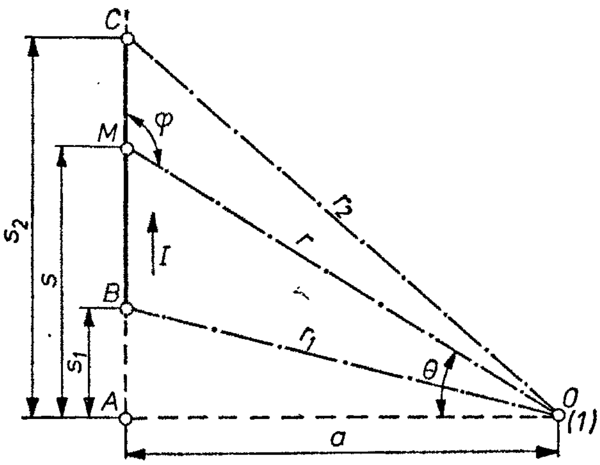

Abb. 50

Wir wollen nun die Kraft bestimmen, die von einem geradlinigen Leiterstück BC (Abb. 50) auf einen im Punkt O liegenden Magnetpol der Polstärke 1 wirkt (dabei werden die Bezeichnungen der Abb. 50 entnommen). Wegen $\sin\varphi = \sin \sphericalangle OMA = \frac{a}{r}$ hat dF die Form

$$\mathrm{d}F = \frac{aI\,\mathrm{d}s}{4\pi r^3} = \frac{aI\,\mathrm{d}s}{4\pi(a^2 + s^2)^{3/2}}.$$

[1]) Jean Baptiste Biot, 1774—1862, französischer Gelehrter.

[2]) Félix Savart, 1791—1841, französischer Physiker.

Die Kräfte der Leiterelemente können hier ohne weiteres summiert werden, da sie alle dieselbe Richtung besitzen. Deshalb gilt

$$F = \frac{aI}{4\pi}\int_{s_1}^{s_2}\frac{ds}{(a^2+s^2)^{3/2}} = \frac{I}{4\pi a}\frac{s}{\sqrt{s^2+a^2}}\Bigg|_{s_1}^{s_2} = \frac{I}{4\pi a}\left(\frac{s_2}{r_2}-\frac{s_1}{r_1}\right).$$

§ 4. Die einfachsten Differentialgleichungen

357. Grundbegriffe. Differentialgleichungen erster Ordnung. In Kapitel VIII haben wir die Funktion $y = y(x)$ aus ihrer Ableitung

$$y' = f(x) \tag{1}$$

(oder, was dasselbe ist, aus dem Differential $dy = f(x)\,dx$) durch Integration oder Quadratur bestimmt. Wir erhielten

$$y = \int f(x)\,dx + C.^{1)} \tag{2}$$

In dieser allgemeinen Lösung ist eine Konstante C enthalten. Wie wir an Hand von Beispielen sahen (Nr. 263 und 264), hat die Konstante einen bestimmten Wert $C = C_0$, wenn *Anfangsbedingungen*

$$y = y_0 \quad \text{für} \quad x = x_0 \tag{3}$$

gegeben sind. Setzen wir die Konstante C_0 in (2) ein, so erhalten wir eine *Partikularlösung* des Problems, d. h. eine wohlbestimmte Funktion $y = y(x)$, die nicht nur die gegebene Ableitung besitzt, sondern auch die Anfangsbedingungen (3) erfüllt.

Oft ist jedoch die Funktion $y = y(x)$ aus einem komplizierteren Ausdruck der Gestalt

$$F(x, y, y', y'', \ldots) = 0$$

zu bestimmen, in dem die unabhängige Variable x, die gesuchte Funktion y und ihre Ableitungen $y', y'', \ldots$ auftreten. Eine derartige Beziehung nennt man im allgemeinen eine *gewöhnliche Differentialgleichung.*

Wir beschäftigen uns nun mit der Differentialgleichung erster Ordnung[2])

$$F(x, y, y') = 0. \tag{4}$$

Eine *Lösung* nennen wir jede Funktion $y = y(x)$, die dieser Gleichung für alle x genügt. Man kann (unter den bekannten Voraussetzungen über die Funktion F) beweisen, daß ihre *allgemeine Lösung* der Lösung des eingangs erwähnten einfachen Falles analog ist (vgl. (2)). Sie enthält auch hier eine beliebige Konstante, d. h., sie hat die Gestalt

$$y = \varphi(x, C). \tag{5}$$

---

[1]) In diesem Paragraphen wollen wir unter dem Symbol $\int f(x)\,dx$ eine zwar beliebige, aber *wohlbestimmte* Stammfunktion verstehen, so daß wir die Integrationskonstante nicht in dieses Symbol einschließen, sondern getrennt schreiben.

[2]) Eine Differentialgleichung *erster Ordnung* ist eine Beziehung zwischen einer gesuchten Funktion, der unabhängigen Veränderlichen und der *ersten* Ableitung der gesuchten Funktion. — *Anm. d. Red.*

Manchmal erhält man auch die Lösung in impliziter Form

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad \text{oder} \quad \psi(x, y) = C. \tag{6}$$

Das Aufsuchen der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung nennt man *Integration der Differentialgleichung.*

Als Beispiel betrachten wir die folgende Aufgabe: *Man bestimme diejenigen Kurven, deren Subnormale konstant ist.* Jede der Kurven werde durch eine explizite Gleichung $y = y(x)$ dargestellt; dann läßt sich das Problem auf das Aufsuchen solcher Funktionen zurückführen, die der Bedingung $yy' = p$ mit konstantem $p > 0$ genügen (vgl. Nr. 230, Formel (3)). Schreiben wir diese Bedingung in der Form $(y^2)' = 2p$, so sehen wir sofort, daß die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung die Gestalt

$$y^2 = 2px + C \quad \text{oder} \quad y = \pm\sqrt{2px + C} \tag{7}$$

hat. Die oben gestellte Forderung wird also von einer Parabelschar erfüllt, die sich durch Verschiebung einer Parabel parallel zur x-Achse ergibt.

Hier ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung auch die Lösung unserer Aufgabe, da nach *allen* Kurven mit der erwähnten Eigenschaft gefragt war. Wenn in der Aufgabe zusätzlich gefordert wird, daß die Kurve durch den Punkt (x_0, y_0) gehen soll, dann kann man, wenn man diese Werte in die Gleichung eingesetzt hat, den Wert von C bestimmen:

$$C_0 = y_0^2 - 2px_0.$$

Setzen wir in (7) $C = C_0$, so gelangen wir zu der *Partikularlösung*

$$y^2 = 2px + C_0,$$

die eine bestimmte Kurve darstellt.

In vielen Fällen wird als Lösung eines Problems, das auf eine Differentialgleichung führt, eine bestimmte *Partikularlösung* gesucht. Sie wird im allgemeinen aus Anfangsbedingungen der Form (3) bestimmt, die sich aus dem Problem ergeben. Mit Hilfe dieser Bedingungen wird, wie eben, ein bestimmter Wert $C = C_0$ ermittelt. Er läßt sich aus der Gleichung bestimmen, die sich aus der allgemeinen Lösung (5) oder (6) durch Einsetzen von $x = x_0$, $y = y_0$ ergibt. Setzen wir dann in die allgemeine Lösung die Konstante C_0 statt C ein, so erhalten wir eine Partikularlösung, die das vorgelegte Problem löst.

358. Differentialgleichungen ersten Grades. Trennung der Veränderlichen. Wir setzen nun voraus, daß in der Gleichung (4) die Ableitung y' höchstens in der *ersten Potenz* auftritt, d. h., die Gleichung habe die Form

$$P(x, y) + Q(x, y)\, y' = 0,$$

wobei P und Q Funktionen von x und y sind. Wegen $y' = \frac{dy}{dx}$ können wir die Gleichung in der oft zweckmäßigeren Form

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0 \tag{8}$$

schreiben.

Wir beschäftigen uns hier nur mit den einfachsten Spezialfällen der Gleichung (8), bei denen die Integration auf eine einfache Quadratur hinausläuft. Die Betrachtung dieser Fälle ist deshalb eine Ergänzung zu Kapitel VIII.

Wenn in (8) der Koeffizient P nur von x und der Koeffizient Q nur von y abhängt, d. h., wenn die Gleichung (8) die Form

$$P(x)\,\mathrm{d}x + Q(y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{9}$$

hat, so sagt man, *die Variablen seien getrennt*. In diesem Fall ist die Integration sehr einfach.

Die Funktionen $P(x)$ und $Q(y)$ seien stetig (in den entsprechenden Intervallen). Dann ist $P(x)\,\mathrm{d}x$ das Differential der Funktion $\boldsymbol{P}(x) = \int P(x)\,\mathrm{d}x$ und $Q(y)\,\mathrm{d}y$ das der Funktion $\boldsymbol{Q}(y) = \int Q(y)\,\mathrm{d}y$, selbst wenn unter y die Funktion $y(x)$ verstanden wird, die der Gleichung (9) genügt.[1]) In diesem Fall stellt also die linke Seite von (9) das Differential der Summe $\boldsymbol{P}(x) + \boldsymbol{Q}(y)$ dar. Da dieses Differential auf Grund von (9) gleich 0 ist, muß die Funktion selbst konstant sein:

$$\boldsymbol{P}(x) + \boldsymbol{Q}(y) = C. \tag{10}$$

Man sieht leicht, daß umgekehrt auch (9) erfüllt ist, wenn die Funktion $y = y(x)$ für jedes x der Gleichung (10) genügt. (10) ist also die *allgemeine Lösung* von (9).

Zur Lösung von (9) bringt man mitunter die Glieder mit $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ auf verschiedene Seiten der Gleichung:

$$Q(y)\,\mathrm{d}y = -P(x)\,\mathrm{d}x. \tag{11}$$

Integriert man jede Seite für sich und fügt man an eines der Integrale die Konstante, so erhält man

$$\int Q(y)\,\mathrm{d}y = -\int P(x)\,\mathrm{d}x + C;$$

dieses Resultat stimmt mit dem obigen überein.

Sollen nun die Anfangsbedingungen der Form (3) erfüllt werden, kann man zunächst die allgemeine Lösung aufstellen und dann die Konstante C mit Hilfe dieser Bedingungen bestimmen. Einfacher ist jedoch das folgende Verfahren: Man integriert die Gleichung (11), und zwar die linke Seite von y_0 bis y und die rechte Seite von x_0 bis x. Man erhält dann die Gleichung

$$\int_{y_0}^{y} Q(\eta)\,\mathrm{d}\eta = -\int_{x_0}^{x} P(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

die die gewünschte Partikularlösung darstellt. Aus der impliziten Form der Lösung sieht man sofort, daß für $x = x_0$ tatsächlich $y = y_0$ ist. Der Leser kann sich selbst leicht überlegen, daß sich dieses Verfahren nur formal von dem vorigen unterscheidet.

Beispiel 1. Gegeben sei die Gleichung $\sin x\,\mathrm{d}x + \dfrac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} = 0$. Durch Integration folgt

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} = C \quad \text{oder} \quad -\cos x + 2\sqrt{y} = C$$

und damit

$$y = \frac{(\cos x + C)^2}{4}.$$

Dies ist die allgemeine Lösung der gegebenen Gleichung. Wenn eine Anfangsbedingung gegeben ist, etwa

$$y = 1 \quad \text{für} \quad x = 0,$$

[1]) Wegen der Invarianz des Differentials (Nr. 106).

so folgt durch Einsetzen dieser Werte $C = 1$, so daß sich die Partikularlösung

$$y = \frac{(1 + \cos x)^2}{4}$$

ergibt. Man kann hier allerdings auch die allgemeine Lösung umgehen, indem man sofort

$$\int_1^y \frac{d\eta}{\sqrt{\eta}} = -\int_0^x \sin \xi \, d\xi,$$

also $2\left(\sqrt{y} - 1\right) = \cos x - 1$ schreibt; daraus folgt

$$\sqrt{y} = \frac{1 + \cos x}{2}, \qquad y = \left(\frac{1 + \cos x}{2}\right)^2.$$

Oft hat die gegebene Gleichung (8) nicht die Form (9), sondern muß erst in diese leicht zu integrierende Form gebracht werden. Eine solche Umformung heißt *Trennung der Veränderlichen* (*Separation der Variablen*). Diese Trennung ist sehr einfach, wenn die Koeffizienten P und Q aus dem Produkt zweier Faktoren bestehen und jeder Faktor nur von einer Veränderlichen abhängt, d. h., wenn

$$P(x, y) = P_1(x)\, P_2(y) \quad \text{und} \quad Q(x, y) = Q_1(x)\, Q_2(y)$$

ist. Dividiert man nämlich beide Seiten der Gleichung

$$P_1(x)\, P_2(y)\, dx + Q_1(x)\, Q_2(x)\, dy = 0 \tag{12}$$

durch $P_2(y)\, Q_1(x)$ $\left(P_2(y), Q_1(x) \neq 0\right)$, so sind die Veränderlichen schon getrennt:

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\, dx + \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}\, dx = 0.$$

Beispiel 2. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y \sin \frac{x}{2}\, dx - \cos \frac{x}{2}\, dy = 0.$$

Sie hat die Form (12). Wir trennen die Veränderlichen,

$$\frac{dy}{y} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}\, dx,$$

integrieren und erhalten

$$\ln |y| = -2 \ln \left|\cos \frac{x}{2}\right| + c$$

oder

$$y = \frac{e^c}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2e^c}{1 + \cos x}.$$

Wir führen noch eine neue Konstante $C = 2e^c$ ein und erhalten damit die allgemeine Lösung in der Form

$$y = \frac{C}{1 + \cos x}.$$

359. Aufgaben. Wir betrachten nun eine Reihe von Aufgaben aus verschiedenen Gebieten; diese Aufgaben führen auf Differentialgleichungen, bei denen die Variablen getrennt werden können.

1. Man bestimme diejenigen Kurven, bei denen die Abschnitte n der Normalen (bis zum Schnittpunkt mit der x-Achse) die konstante Länge r haben.

Unter Berücksichtigung des Ausdrucks für n (vgl. Nr. 230, Formel (4)) schreiben wir diese Bedingung, der die gesuchte Funktion $y(x)$ genügen muß, in Form der Differentialgleichung

$$\left|y\sqrt{1+y'^2}\right| = r \quad \text{oder} \quad y^2(1+y'^2) = r^2.$$

Daraus folgt

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm\frac{\sqrt{r^2-y^2}}{y} \quad \text{oder} \quad \frac{y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{r^2-y^2}} = \pm\mathrm{d}x.$$

Die Integration ergibt

$$-\sqrt{r^2-y^2} = \pm(x+C) \quad \text{oder} \quad (x+C)^2+y^2 = r^2.$$

Wie zu erwarten war, erhält man eine Schar von Kreisen mit dem Radius r, deren Mittelpunkte auf der x-Achse liegen.

2. Man bestimme diejenigen Kurven, deren Tangentenabschnitt bis zum Schnittpunkt mit der x-Achse die konstante Größe a hat.

Auf Grund von Nr. 230, Formel (4), hat die Differentialgleichung für dieses Problem die Gestalt

$$\left|\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}\right| = a.$$

Setzen wir $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ein, so können wir die Gleichung leicht umformen:

$$\left|y\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\right| = a$$

oder

$$\mathrm{d}x = \pm\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}\,\mathrm{d}y.$$

Nach Integration folgt

$$x+C = \pm\left[\sqrt{a^2-y^2} - a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right].$$

Wir erhalten eine Traktrixschar (vgl. Nr. 331, Beispiel 11).

3. *Das Abkühlungsgesetz.* Ein Körper habe die Temperatur θ in °C. Er befinde sich in einer Umgebung mit der Temperatur 0°C. Nach dem Newtonschen Abkühlungsgesetz ist die Abkühlungsgeschwindigkeit proportional der Temperatur θ des Körpers, d. h.

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -k\theta.$$

Dabei ist k eine positive Konstante. Man bestimme das Gesetz, nach dem der Körper abkühlt; die Abkühlung beginne zur Zeit $t = 0$. Es gilt

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\theta} = -k\,\mathrm{d}t;$$

daraus folgt durch Integration[1])

$$\ln \theta = -kt + \ln C \quad \text{oder} \quad \theta = C\,\mathrm{e}^{-kt}.$$

Zur Zeit $t = 0$ sei die Temperatur des Körpers gleich θ_0. Offenbar ist dann $C = \theta_0$. Damit erhalten wir schließlich die Formel

$$\theta = \theta_0\,\mathrm{e}^{-kt},$$

die die Temperatur eines Körpers zu einer beliebigen Zeit angibt, wenn die Anfangstemperatur θ_0 bekannt ist. Der Koeffizient k hängt von den Eigenschaften des Körpers und seiner Umgebung ab; er läßt sich experimentell bestimmen.

4. *Aus- und Einschaltvorgänge.* Ein elektrischer Strom besitze die konstante Spannung V; der Widerstand des Leiters sei R, die Stromstärke sei I. Dann gilt, bei passender Wahl der Einheiten, nach dem Ohmschen Gesetz $V = IR$. Wenn sich die Spannung ändert (und beim Ein- oder Ausschalten eines Gleichstroms), tritt in vielen Fällen Selbstinduktion auf, durch die eine zusätzliche elektromotorische Kraft entsteht, die der zeitlichen Änderung der Stromstärke, also $\frac{dI}{dt}$ proportional ist, aber das entgegengesetzte Vorzeichen besitzt. Man kann also die elektromotorische Kraft der Selbstinduktion in der Form

$$-L\frac{dI}{dt}$$

darstellen; dabei ist L ($L > 0$) der Selbstinduktionskoeffizient.

Tritt Selbstinduktion auf, so verschwindet beim Ausschalten der Strom nicht sofort, und beim Einschalten erreicht der Strom nicht unmittelbar seine normale Größe. Wir wollen versuchen, diese Erscheinungen mathematisch auszudrücken. Das Ohmsche Gesetz nimmt hier die folgende Gestalt an:

$$V - L\frac{dI}{dt} = RI \quad \text{oder} \quad \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{V}{L}. \tag{13}$$

(a) Im Moment $t = 0$ werde ein Gleichstrom mit der Stromstärke I_0 ausgeschaltet. Da dann $V = 0$ ist, gilt

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}\,dt$$

und damit (analog zu Aufgabe 3)

$$I = I_0\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}.$$

Dieser Strom, der nur auf Grund der durch Selbstinduktion auftretenden elektromotorischen Kraft entsteht, heißt *Ausschaltstrom.* Seine Stromstärke geht mit wachsendem t schnell gegen 0 und ist nach kurzer Zeit ganz verschwunden.

(b) Wenn in einem Leiter im Moment $t = 0$ ein Gleichstrom mit der Spannung V eingeschaltet wird, so gilt die Gleichung (13); man erhält aus ihr durch Trennung der Veränderlichen

$$\frac{-R\,dI}{V - RI} = -\frac{R}{L}\,dt, \qquad \ln(V - RI) = -\frac{R}{L}t + \ln C,$$

$$V - RI = C\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}.$$

[1]) Da diese Gleichung entlogarithmiert wird, ist es zweckmäßig, die Konstante gleich in der Form $\ln C$ zu schreiben.

Die Konstante C bestimmen wir aus der Anfangsbedingung $I = 0$ für $t = 0$. Offenbar ist $C = V$, so daß schließlich

$$I = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

folgt. Man sieht, daß außer dem (dem Ohmschen Gesetz entsprechenden) Strom mit der Stromstärke $\frac{V}{R}$ ein zusätzlicher Strom der Stärke

$$\frac{V}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$

in entgegengesetzter Richtung fließt. Dies ist der *Einschaltstrom*. Seine Stromstärke nimmt mit wachsendem r sehr schnell ab.

5. *Die Gleichung einer chemischen Reaktion.* Wir betrachten einen chemischen Prozeß, der darin besteht, miteinander reagierende Stoffe A, B, ... in Stoffe M, N, ... umzuwandeln. Die Stoffmengen, die an der Reaktion teilnehmen, werden in Grammolekülen oder Molen ausgedrückt. Ein Mol eines Stoffes ist diejenige Menge dieses Stoffes in Gramm, die sein Molekulargewicht angibt. In einem Mol eines jeden Stoffes ist, unabhängig von der Art des Stoffes, stets die gleiche Anzahl von Molekülen enthalten.

Wenn wir voraussetzen, daß bei der Reaktion ein Molekül des einen Stoffes mit nur einem Molekül des anderen Stoffes reagiert, so braucht man für jedes Mol des einen Stoffes je ein Mol des anderen Stoffes. Nach der Zeit t (vom Beginn der Reaktion an) habe von jedem Stoff, der an der Reaktion beteiligt ist, die gleiche Anzahl x von Molen reagiert. Die Änderung von x in der Zeiteinheit, also $\frac{dx}{dt}$, heißt die *chemische Reaktionsgeschwindigkeit.*

Es seien an dem Prozeß zwei Stoffe A und B beteiligt. Wir bezeichnen ihre Ausgangsmengen (in Mol) mit a bzw. b (dabei sei etwa $b > a$). Nach der Zeit t existiere noch die Menge $a - x$ des Stoffes A und die Menge $b - x$ des Stoffes B. Nun können wir annehmen, daß die chemische Reaktionsgeschwindigkeit zur Zeit t proportional ist dem Produkt der reagierenden Mengen, d. h. dem Produkt der noch nicht umgewandelten Mengen. Dies führt auf die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x) \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{(a - x)(b - x)} = k\,dt.$$

Nach Integration erhalten wir

$$\frac{1}{b - a} \ln \frac{a - x}{b - x} = -kt + C.$$

Da für $t = 0$ notwendig $x = 0$ sein muß, folgt

$$C = \frac{1}{b - a} \ln \frac{a}{b}.$$

Setzen wir diesen Wert ein, so ergibt sich

$$\ln \frac{(a - x)\,b}{(b - x)\,a} = -k(b - a)\,t;$$

daraus folgt durch eine leichte Umformung

$$x = ab\,\frac{1 - e^{-k(b-a)t}}{b - a\,e^{-k(b-a)t}}.$$

Mit wachsendem t gehen die Exponentialausdrücke gegen 0. Sie sind nach einer gewissen endlichen Zeit so klein, daß sich x praktisch nicht mehr von a unterscheidet und die Reaktion beendet ist.

6. *Das mathematische Pendel.* Ein Massenpunkt der Masse m hänge an einem nicht dehnbaren masselosen Faden oder Stab der Länge l und bewege sich auf einem Kreisbogen (Abb. 51). Ein solches System nennt man ein *mathematisches Pendel.* Bringt man das Pendel aus der Gleichgewichtslage OA in die Lage OB $\left(\alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ und läßt es los, ohne ihm eine von 0 verschiedene Anfangsgeschwindigkeit zu erteilen, so schwingt das Pendel bis zu der symmetrischen Lage OB', kehrt wieder in die Lage OB zurück usw. Das Problem besteht darin, eine Abhängigkeit zwischen dem Winkel $\theta = \sphericalangle AOM$ und der Zeit t zu finden. Dazu betrachten wir die Bewegung eines Punktes M auf dem Bogen AB. Der zurückgelegte Weg $s = AM = l\theta$ wird vom Punkt A aus gezählt und die Zeit t von dem Moment an, in dem das Pendel durch die Gleichgewichtslage geht.

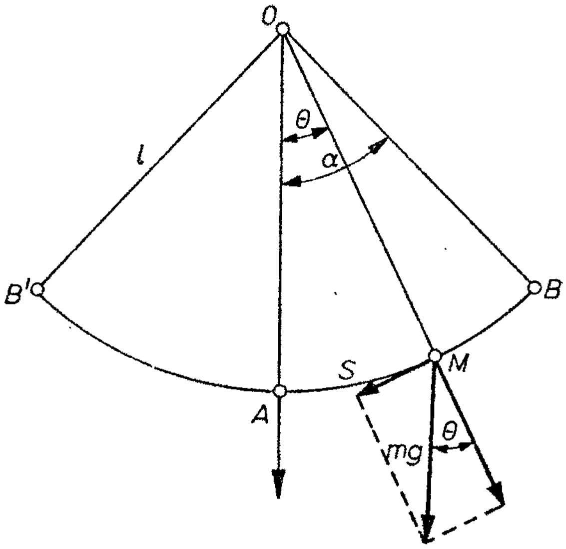

Abb. 51

Zerlegen wir die auf den Punkt M wirkende Schwerkraft $F = mg$ (vgl. Abb. 51), so sehen wir, daß ihre Tangentialkomponente gleich $F_s = -mg \sin\theta$ ist,[1]) während ihre Normalkomponente durch die Gegenwirkung des Fadens oder Stabes aufgehoben wird. Ist v die Geschwindigkeit im Punkt M, so ist die kinetische Energie in diesem Punkt gleich $\frac{1}{2} mv^2$. Sie wird gleich 0, wenn M den Punkt B erreicht. Andererseits ist die Arbeit A, die von der Kraft F_s auf dem Weg MB geleistet wird (vgl. Nr. 353, Formel (9a)), gleich

$$A = -\int\limits_s^S mg \sin\theta \, d\sigma$$

(hier ist $S = \overset{\frown}{AB}$) oder, wenn man zur Veränderlichen θ übergeht,

$$A = -mgl \int\limits_\theta^\alpha \sin\chi \, d\chi = -mgl\,(\cos\theta - \cos\alpha).$$

Also gilt nach dem Satz aus Nr. 353

$$\frac{1}{2} mv^2 = mgl(\cos\theta - \cos\alpha), \qquad v = \sqrt{gl}\sqrt{2(\cos\theta - \cos\alpha)}.$$

Wegen $v = \frac{ds}{dt} = l\frac{d\theta}{dt}$ erhalten wir daraus eine Beziehung θ und t in Gestalt der Differentialgleichung

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{2(\cos\theta - \cos\alpha)}$$

[1]) Kraftkomponente *entgegen* der Bewegungsrichtung!

oder

$$dt = \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\alpha)}},$$

wobei die Variablen schon getrennt sind.

Integriert man links von 0 bis t und rechts von 0 bis θ, so folgt die gesuchte Abhängigkeit

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\theta \frac{d\chi}{\sqrt{2(\cos\chi - \cos\alpha)}}. \tag{14}$$

Die Integration kann allerdings nicht in geschlossener Form vorgenommen werden, denn wir sehen sofort, daß das rechte Integral auf ein elliptisches Integral erster Gattung zurückgeführt werden kann. Dazu schreiben wir (14) in der Form

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\theta \frac{d\chi}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\chi}{2}}},$$

setzen $\sin\frac{\alpha}{2} = k$ $(0 < k < 1)$ und führen eine neue Veränderliche mit Hilfe der Beziehungen

$$\sin\frac{\theta}{2} = k\sin\varphi, \qquad \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = k\cos\varphi\,d\varphi \tag{15}$$

ein. Wenn θ von 0 bis α läuft, ändert sich φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$. Dann gilt

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\varphi \frac{d\chi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\chi}} = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot F(k, \varphi). \tag{16}$$

Da man φ auf Grund der ersten Formel (15) leicht durch θ ausdrücken kann, ist (16) eine Beziehung zwischen t und θ.

Will man θ als Funktion von t darstellen, muß man die *Umkehrfunktion* des elliptischen Integrals

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\chi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\chi}}$$

kennen; u ist eine im Intervall $(-\infty, +\infty)$ monoton wachsende, stetige (und sogar differenzierbare) Funktion von φ, deren Wertebereich ebenfalls das Intervall $(-\infty, +\infty)$ ist. In diesem Fall (Nr. 83) ist die Veränderliche φ eine im Intervall $(-\infty, +\infty)$ eindeutige Funktion von u. Jacobi[1]) bezeichnete sie mit am u.[2]) Aus (16) folgt also

$$\varphi = \operatorname{am}\sqrt{\frac{g}{l}}\,t$$

und damit

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\operatorname{am}\sqrt{\frac{g}{l}}\,t.$$

---

[1]) Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804—1851, deutscher Mathematiker.

[2]) am sind die Anfangsbuchstaben des Wortes amplitudo (Amplitude).

Die Funktion sin am u (Sinus amplitudinis) wird allgemein mit sn u bezeichnet.[1]) Damit lautet die Abhängigkeit zwischen θ und t

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\cdot \operatorname{sn}\sqrt{\frac{g}{l}}\,t.$$

Wir bestimmen zum Schluß noch die Dauer T einer Schwingung des Pendels aus der Lage OB' in die Lage OB. Sie ist doppelt so groß wie die Zeit, die das Pendel zum Übergang von OA nach OB benötigt. Setzen wir in (14) $\theta = \alpha$ oder in (16) $\varphi = \frac{\pi}{2}$,[2]) so erhalten wir als Ausdruck für T das vollständige elliptische Normintegral erster Gattung:

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot \mathrm{K}(k).$$

T hängt also vom Ausschlagwinkel α des Pendels ab, da k von α abhängt. Für kleine Werte von α kann man k gleich 0 setzen, und man erhält die einfache Näherungsformel

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Sie wird im allgemeinen schon im Physikunterricht hergeleitet.

360. Bemerkungen zur Aufstellung von Differentialgleichungen. Wir wollen uns nun mit der Aufstellung einer Differentialgleichung erster Ordnung beschäftigen, die der Gleichung (8) analog ist. Der Leser möge diese Ausführungen mit dem in Nr. 348 über die Gleichung $dQ = q(x)\,dx$ Gesagten vergleichen.

Im allgemeinen betrachtet man bei der Aufstellung von Differentialgleichungen geeignete unendlich kleine Elemente von Körpern oder unendlich kleine Zuwächse der zu betrachtenden Größen. In den Problemen aus Nr. 359 konnten wir dies vermeiden, da schon fertige Ausdrücke für den Steigungskoeffizienten der Tangente, für die Geschwindigkeit, mit der sich eine Größe ändert, usw. existierten, die selbst durch Betrachtung unendlich kleiner Elemente entstanden sind.

Bei der Aufstellung einer Beziehung zwischen unendlich kleinen Elementen empfiehlt es sich, alle möglichen vereinfachenden Vernachlässigungen und Näherungen zu berücksichtigen, bei denen im wesentlichen unendlich kleine Größen höherer Ordnung vernachlässigt werden. Insbesondere ist es zweckmäßig, alle unendlich kleinen Zuwächse der zu betrachtenden Größen durch Differentiale dieser Größen darzustellen; bekanntlich führt auch dies dazu, die unendlich kleinen Größen höherer Ordnung zu vernachlässigen. Der Sinn dieser Hinweise wird erst bei der Betrachtung von Beispielen klar werden (vgl. Nr. 361).

Wir zeigen nun noch, daß die als Resultat jener Vereinfachungen und Vernachlässigungen erhaltene Differentialgleichung der Form (8)

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$$

keineswegs eine Näherungsgleichung, sondern exakt ist.[3])

[1]) Die Funktion sn u ist als Funktion eines komplexen Arguments eine der einfachsten von Abel und Jacobi eingeführten *elliptischen Funktionen.*

[2]) Wird die obere Grenze des Integrals (14) gleich α, so wird das Integral *uneigentlich* (vgl. Nr. 479), da für diese Grenze der Integrand gegen ∞ geht. Diese Schwierigkeit verschwindet, wenn man das Integral (16) benutzt.

[3]) Dies ist analog dem, was wir am Schluß von Nr. 348 über die Gleichung $dQ = q(x)\,dx$ sagten.

Wir setzen voraus, daß wir zu der Differentialgleichung (8) gelangt sind, indem wir die Zuwächse Δx und Δy durch die Differentiale $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ ersetzten und eventuell Summanden von höherer Ordnung als Δx vernachlässigten. Führen wir dies nicht durch, sondern fassen wir alle Summanden, die von höherer als erster Ordnung klein sind, zusammen, bringen sie auf die rechte Seite und bezeichnen dann diesen Ausdruck mit α (α ist also von höherer Ordnung als Δx klein), so erhalten wir den nun exakten Ausdruck

$$P(x, y)\,\Delta x + Q(x, y)\,\Delta y = \alpha.$$

Dividieren wir nun beide Seiten durch Δx,

$$P(x, y) + Q(x, y)\,\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\alpha}{\Delta x},$$

und lassen wir Δx gegen 0 streben, so geht auch $\frac{\alpha}{\Delta x}$ gegen 0; wir erhalten nach Grenzübergang die Gleichung

$$P(x, y) + Q(x, y)\,y' = 0 \quad \text{oder} \quad P(x, y) + Q(x, y)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0,$$

die mit (8) übereinstimmt. Die Gleichung (8) ist also exakt.

Obwohl wir bei der üblichen Aufstellung einer Differentialgleichung den Grenzübergang nicht explizit durchführen, wird er doch bei der Vernachlässigung der Glieder, die von höherer Ordnung klein sind, und beim Ersetzen der Zuwächse durch die Differentiale stillschweigend vollzogen.

Wir machen darauf aufmerksam, daß wir nicht behaupten, jede Vernachlässigung der von höherer Ordnung kleinen Größen führe zu einem exakten Resultat. Nur in dem Fall, daß die Vernachlässigung auf eine Gleichung der Gestalt (8) führt, d. h. auf eine bezüglich der Differentiale lineare und homogene Gleichung, ist die Exaktheit gewährleistet (wieder analog zu Nr. 348).

361. Aufgaben.

1. *Die barometrische Höhenformel.* Man leite eine Beziehung zwischen der Höhe h über dem Meeresspiegel und dem Luftdruck p her.

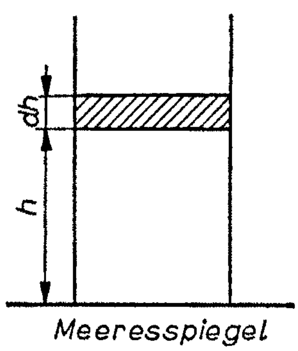

Abb. 52

Wir denken uns in Höhe des Meeresspiegels eine Fläche von 1 m² und betrachten die auf dieser Fläche ruhenden Luftsäule. Der Luftdruck p auf eine parallele Schnittfläche dieser Säule in der Höhe h wird durch das Gewicht des Teils der Säule hervorgerufen, der sich oberhalb der erwähnten Schnittfläche befindet. Vergrößert man die Höhe h um $\mathrm{d}h$, so bedingt dies eine Abnahme des Druckes um $\mathrm{d}p$, d. h. um das Gewicht der Luftschicht zwischen den Flächen in den Höhen h und $h + \mathrm{d}h$ (Abb. 52):

$$-\mathrm{d}p = s\,\mathrm{d}h;$$

dabei ist s das Gewicht eines Kubikmeters Luft unter dem Druck p. Wir vernachlässigen hier die Änderung von s mit der Höhe.

Nach dem Boyle-Mariotteschen Gesetz ist die Dichte s dem Druck p proportional, $s = kp$, so daß wir schließlich die Gleichung

$$dp = -kp\,dh \quad \text{oder} \quad \frac{dp}{p} = -k\,dh$$

finden, deren Typ uns schon bekannt ist (vgl. Nr. 359, Aufgabe 3 und 4(a)). Aus ihr folgt $p = p_0\,e^{-kh}$. Löst man diese Gleichung nach h auf, so erhält man die Formel

$$h = \frac{1}{k} \ln \frac{p_0}{p},$$

mit deren Hilfe man die Höhe h über dem Meeresspiegel aus dem Luftdruck p bestimmen kann.

2. *Reibung von Seilen und Riemen.* Es werde ein Seil (Riemen oder dergleichen) über eine unbeweglich befestigte zylindrische Trommel geführt. Das Seil schmiegt sich längs des Bogens $\overset{\frown}{AB}$, der einem Zentriwinkel ω (Anschmiegungswinkel) entspricht, an die Trommel an. Im Punkt A wirke die Kraft S_0, im Punkt B die Kraft S_1.

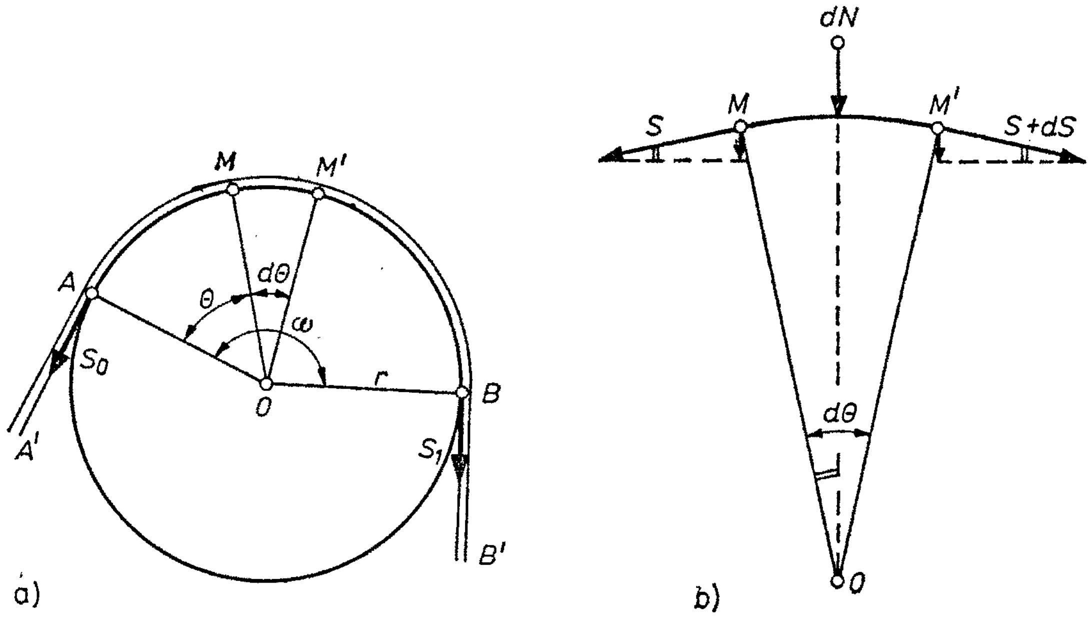

Abb. 53

Existiert zwischen dem Seil und der Trommel eine bestimmte Reibung, so kann die Kraft S_0 mit einer am anderen Ende wirkenden und sogar größeren Kraft ins Gleichgewicht gebracht werden. Wie groß muß nun die Kraft S_1 sein, die im Fall, daß Reibung vorhanden ist, der gegebenen Kraft S_0 das Gleichgewicht halten kann?

Zur Lösung dieser Aufgabe untersuchen wir zunächst, wie die Spannung des Seils längs des Bogens $\overset{\frown}{AB}$ in dem Augenblick verteilt ist, in dem das Seil zu gleiten beginnt. Sie ist sicher nicht konstant, denn in den Punkten A und B ist sie gleich S_0 bzw. S_1. Wir nehmen auf dem Bogen $\overset{\frown}{AB}$ einen beliebigen Punkt M an, dessen Lage durch den Winkel $\theta = \sphericalangle AOM$ festgelegt sei, und bestimmen die Kraft, die auf das Element $\overset{\frown}{MM'}$ des Seils wirkt. Dem Element $\overset{\frown}{MM'}$ entspricht der Zentriwinkel $d\theta$. Im Punkt M wirkt die Spannung $S = S(\theta)$, im Punkt M' die Spannung $S + dS$ (Abb. 53b). Beide Spannungen haben die Richtung der Tangente an den Umfang der Trommel (in M bzw. M'). Um die Reibungskraft bestimmen zu können, die an dem Element wirkt, müssen wir die Normalkraft dN kennen, mit der das Element auf die Oberfläche der Trommel drückt. Sie setzt sich aus den Radialkomponenten der beiden Spannungen zusammen:

$$dN = S \sin\frac{d\theta}{2} + (S + dS)\sin\frac{d\theta}{2}.$$

Hierin können wir das Produkt $dS \sin \frac{d\theta}{2}$ vernachlässigen, da es von höherer Ordnung klein ist. Ferner können wir $\sin \frac{d\theta}{2}$ durch $\frac{d\theta}{2}$ ersetzen (man entwickelt $\sin \frac{d\theta}{2}$ in eine Potenzreihe und vernachlässigt alle Glieder, die von höherer Ordnung als $d\theta$ klein sind). So erhalten wir schließlich

$$dN = S\, d\theta.$$

Da die Reibungskraft der Normalkraft proportional ist, gilt, wenn wir den Proportionalitätsfaktor (Reibungskoeffizient) mit μ bezeichnen,

$$dR = \mu\, dN = \mu S\, d\theta.$$

Die Reibung wirkt der beginnenden Drehung entgegen. Also muß die Summe aus der Kraft dR und der Spannung S im Punkt M der Spannung $S + dS$ im Punkt M' das Gleichgewicht halten. Somit gilt

$$dS = \mu S\, d\theta.$$

Wir erhalten wieder eine Differentialgleichung des schon bekannten Typs. Ihre Lösung können wir sofort angeben (mit der Anfangsbedingung $S = S_0$ für $\theta = 0$):

$$S = S_0\, e^{\mu\theta}.$$

Zum Schluß setzen wir $\theta = \omega$ und erhalten das gesuchte Resultat

$$S_1 = S_0\, e^{\mu\omega}.$$

Diese wichtige Formel stammt von EULER.

3. *Die Poissonsche Formel.* Wir wollen eine Beziehung zwischen dem Volumen V und dem Druck p eines Mols eines idealen Gases bei einem *adiabatischen* Prozeß aufstellen (d. h. bei einem Prozeß, der ohne Wärmeaustausch mit der Umgebung vor sich geht).

Der Zustand eines Gases wird durch zwei Größen V, p und T (absolute Temperatur des Gases) charakterisiert, die voneinander abhängig sind. Zwischen ihnen gilt die bekannte *Clapeyronsche*[1]) *Formel*

$$pV = RT \tag{17}$$

(R ist die Gaskonstante).

Wir wollen nun die Energie dU bestimmen, die notwendig ist, um das Gas aus dem Zustand (p, V, T) in den beliebig nahe benachbarten Zustand $(p + dp,\ V + dV,\ T + dT)$ überzuführen.

Den Übergangsprozeß können wir uns aus zwei Schritten zusammengesetzt denken. Erstens läßt sich das Volumen V um dV und zweitens die Temperatur T um dT vergrößern. Zur Berechnung der Arbeit, die bei der Ausdehnung des Gases geleistet wird, setzen wir der Einfachheit wegen voraus, daß sich das betrachtete Gas in einem Zylinder befinde, der an einer Seite einen Kolben besitzt (vgl. Nr. 354, Beispiel 2). Die Kraft, mit der das Gas auf die eine Seite des Kolbens drückt, ist gleich pQ, wobei Q der Inhalt der Kolbenfläche ist. Wenn bei der Ausdehnung des Gases der Kolben um die Strecke ds verschoben wird, so ist die Arbeit, die das Gas geleistet hat, gleich $pQ\, ds$ oder $p\, dV$ (denn es ist $Q\, ds = dV$).

Die Änderung der Temperatur um dT erfordert die Energieänderung $c_v\, dT$, wobei c_v die spezifische Wärmekapazität des Gases bei konstantem Volumen ist. Durch Addition erhalten wir

$$dU = c_v\, dT + p\, dV. \tag{18}$$

Hieraus läßt sich dT leicht eliminieren. Differenzieren wir die Formel (17), so ergibt sich

$$p\, dV + V\, dp = R\, dT \tag{19}$$

[1]) EMILE CLAPEYRON, 1799–1864, französischer Ingenieur.

oder

$$dT = \frac{1}{R}(p\,dV + V\,dp)$$

und damit aus (18)

$$dU = \frac{c_v}{R} V\,dp + \frac{c_v + R}{R} p\,dV.$$

Man kann zeigen, daß $c_v + R$ gleich der spezifischen Wärmekapazität c_p des Gases *bei konstantem Druck* ist,[1]) so daß sich schließlich

$$dU = \frac{c_v}{R} V\,dp + \frac{c_p}{R} p\,dV$$

ergibt.

Wir hatten vorausgesetzt, daß der Prozeß adiabatisch verlaufen soll; dann muß $dU = 0$ sein. Wir erhalten also eine Differentialgleichung zwischen p und V:

$$c_v V\,dp + c_p\,p\,dV = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dp}{p} + \varkappa \frac{dV}{V} = 0 \quad \left(\text{mit } \varkappa = \frac{c_p}{c_i} > 1\right).$$

Durch Integration finden wir

$$\ln p + \varkappa \ln V = \ln C$$

oder

$$pV^{\varkappa} = C.$$

Dies ist die *Poissonsche Formel.*

---

[1]) Wenn wir aus (19) $p\,dV = R\,dT - V\,dp$ bestimmen und in (18) einsetzen, so erhalten wir

$$dU = (c_v + R)\,dT - V\,dp.$$

Nehmen wir $p = \text{const}$ an, also $dp = 0$, so gelangen wir zu der Gleichung

$$dU = (c_v + R)\,dT,$$

aus der sofort $c_v + R = c_p$ folgt.

XI. Unendliche Reihen mit konstanten Gliedern

§ 1. Einführung

362. Grundbegriffe. Gegeben sei eine unendliche Folge von Zahlen

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \tag{1}$$

Das aus ihnen gebildete Symbol

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \tag{2}$$

heißt *unendliche Reihe,* die Zahlen (1) sind die *Glieder* dieser Reihe. Statt (2) benutzt man oft das Summenzeichen und schreibt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n; \tag{2a}$$

der Summationsindex durchläuft hier die Werte von 1 bis ∞.[1])

Die (unendlich vielen) Summen

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= a_1, \\ A_2 &= a_1 + a_2, \\ A_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ A_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

heißen *Partialsummen*[2]), *Teilsummen* oder *Abschnitte der Reihe* (2).[3]) Wir werden in Zukunft stets die Folge $\{A_n\}$ dieser Partialsummen dem Symbol (2) bzw. (2a) zuordnen; man kann auch sagen, daß dieses Symbol die Folge der A_n erzeugt.

Der endliche oder unendliche Grenzwert A der Partialsumme A_n von (2) für $n \to \infty$,

$$A = \lim A_n,$$

---

[1]) Übrigens ist es manchmal zweckmäßiger, die Numerierung der Glieder der Reihe nicht mit 1, sondern mit 0 oder mit einer anderen natürlichen Zahl > 1 zu beginnen.

[2]) Eigentlich *erste, zweite, dritte, ..., n-te, ... Partialsumme. — Anm. d. Red.*

[3]) Für den Summationsindex kann natürlich jeder andere Buchstabe verwendet werden; die Symbole

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu, \qquad a_0 + \sum_{\varkappa=1}^{\infty} a_\varkappa$$

stellen also dieselbe Zahlenfolge wie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ dar. — *Anm. d. Red.*

heißt *Summe* oder *Wert der Reihe* (2); man schreibt

$$A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

und ordnet damit dem Symbol (2) oder (2a) einen Zahlenwert zu. Hat die Reihe eine endliche Summe, so heißt sie *konvergent*, anderenfalls (d. h., wenn die Summe gleich ∞ ist oder keine Summe existiert) *divergent*.[1])

Die Frage nach der Konvergenz der Reihe (2) ist also, nach Definition, gleichwertig mit der Frage nach der Existenz eines endlichen Grenzwertes für die Folge (3). Umgekehrt kann für eine beliebig gewählte Folge von Zahlen x_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) die Frage nach dem endlichen Grenzwert dieser Folge auf die Frage nach der Konvergenz der Reihe

$$x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) + \cdots \tag{4}$$

zurückgeführt werden, deren n-te Partialsumme genau das n-te Glied der Folge

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

ist. Die Summe der Reihe stimmt dabei mit dem Grenzwert der Folge überein.

Mit anderen Worten, die Betrachtung einer unendlichen Reihe und ihrer Summe ist nur eine *neue Art* der Untersuchung einer Zahlenfolge und ihres Grenzwertes. Aber diese Art ist, wie wir im folgenden sehen werden, sowohl für den Beweis der Existenz eines Grenzwertes als auch für seine Berechnung sehr wertvoll. Diese Tatsache macht die unendlichen Reihen zu einem wichtigen Hilfsmittel in der Analysis und ihren Anwendungen.

363. Beispiele.

1. Das einfachste Beispiel für eine unendliche Reihe ist die schon bekannte geometrische Reihe

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots.$$

Ihre n-te Partialsumme ist (für $q \neq 1$) gleich

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

Ist der Absolutbetrag des Quotienten q der Reihe kleiner als 1, so hat s_n, wie wir aus Nr. 25, Beispiel 7, schon wissen, den endlichen Grenzwert

$$s = \frac{a}{1 - q},$$

d. h., die Reihe konvergiert, und s ist ihre Summe.

Für $|q| \geqq 1$ divergiert die Reihe. Ist $q \geqq 1$, so ist ihre Summe gleich $+\infty$ oder $-\infty$; in den anderen Fällen existiert keine Summe. Insbesondere weisen wir auf die interessante Reihe

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \equiv 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots$$

hin[2]), die sich für $a = 1$ und $q = -1$ ergibt. Ihre Partialsummen sind abwechselnd gleich 1 und 0.

---

[1]) Davon sprachen wir schon in Nr. 25, Beispiel 9.

[2]) Ist ein Glied a einer Reihe eine *negative* Zahl, $a = -b$ (mit $b > 0$), so kann man statt $\cdots + (-b) + \cdots$ auch $\cdots - b + \cdots$ schreiben. Wir betonen ausdrücklich, daß auch bei dieser Schreibweise $-b$ und nicht b das Glied der Reihe ist.

2. Eine in einen unendlichen Dezimalbruch

$$C_0, c_1 c_2 c_3 \ldots c_n \ldots$$

entwickelte reelle Zahl α (Nr. 9) stellt offenbar die Summe der Reihe

$$\alpha = C_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \frac{c_3}{10^3} + \cdots + \frac{c_n}{10^n} + \cdots$$

dar.

3. Die nach dem Muster von (4) konstruierte Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} [\ln(n+1) - \ln n]$$

ist divergent, denn es ist $\ln(n+1) \to \infty$.

4. Auf die gleiche Art sind die folgenden Reihen konstruiert (α ist eine beliebige, von -1, -2, $-3, \ldots$ verschiedene Zahl):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\alpha+n} - \frac{1}{\alpha+n+1}\right] = \frac{1}{\alpha+1},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)} - \frac{1}{(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)}\right] = \frac{1}{2(\alpha+1)(\alpha+2)};$$

allgemein gilt für jedes ganze $p \geqq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)\cdots(\alpha+n+p)} = \frac{1}{p(\alpha+1)\cdots(\alpha+p)}.$$

5. Analog läßt sich die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-x^{2^{n-1}}} - \frac{1}{1-x^{2^n}}\right)$$

behandeln; x ist eine beliebige, aber feste, von ± 1 verschiedene Zahl. Da die n-te Partialsumme gleich

$$\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{2^n}}$$

ist, konvergiert die Reihe für $|x| < 1$ gegen die Summe $\frac{x}{1-x}$, für $|x| > 1$ gegen $\frac{1}{1-x}$.

6. Die Divergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$$

ist leicht festzustellen. Da ihre Glieder eine abnehmende Folge bilden, ist ihre n-te Partialsumme

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

größer als

$$n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

und strebt demnach mit n gegen ∞.

7. Ein weniger einfaches Beispiel ist die schon bekannte Entwicklung der Zahl e (vgl. Nr. 37):

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Erinnern wir uns der näherungsweisen Berechnung der Zahl e in Nr. 37, so können wir an diesem Beispiel den Vorteil erkennen, den das Anbringen der mit wachsendem n immer kleiner werdenden Korrekturglieder mit sich bringt, welche die mit den Partialsummen übereinstimmenden Näherungswerte von e verbessern.

364. Hauptsätze. Entfernt man in (2) die ersten m Glieder, so ergibt sich die Reihe

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+k} + \cdots = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n, \tag{5}$$

der sogenannte *Rest der Reihe* (2) *nach dem m-ten Glied.*

1°. *Konvergiert die Reihe* (2), *so konvergiert auch jeder Rest* (5); *umgekehrt folgt aus der Konvergenz von* (5) *die der Reihe* (2).

Zum Beweis wählen wir ein festes m und bezeichnen die k-te Partialsumme der Reihe (5) mit A'_k:

$$A'_k = a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+k}.$$

Dann ist offenbar

$$A'_k = A_{m+k} - A_m. \tag{6}$$

Konvergiert die Reihe (2), so daß A_n gegen A strebt, so existiert für $k \to \infty$ auch für die Summe A'_k ein endlicher Grenzwert

$$A' = A - A_m; \tag{7}$$

dies sichert die Konvergenz von (5).

Ist umgekehrt die Reihe (5) konvergent, also $A'_k \to A'$, so schreiben wir (6) für $k = n - m$ $(n > m)$ in der Form

$$A_n = A_m + A'_{n-m};$$

daraus können wir ablesen, daß die Partialsumme A_k für $k \to \infty$ den Grenzwert

$$A = A_m + A' \tag{8}$$

hat, d. h., die Reihe (2) konvergiert.

Wenn man also endlich viele Anfangsglieder einer Reihe entfernt oder endlich viele Glieder am Anfang hinzufügt, so hat dies auf das Verhalten der Reihe (bezüglich ihrer Konvergenz oder Divergenz) *keinen Einfluß.*

Die Summe von (5) bezeichnen wir nun, falls (5) konvergiert, mit α_m statt mit A' (der Index gibt an, nach welchem Glied der Rest beginnt). Dann erhalten die Formeln (8) und (7) die Gestalt

$$A = A_m + \alpha_m, \qquad \alpha_m = A - A_m. \tag{9}$$

Für $m \to \infty$ strebt A_m gegen A und α_m gegen 0. Also gilt

2°. *Ist die Reihe* (2) *konvergent, so strebt die Summe α_m ihres Restes nach dem m-ten Glied für $m \to \infty$ gegen* 0.

Wir erwähnen noch die folgenden Eigenschaften konvergenter Reihen:

3°. *Werden die Glieder der konvergenten Reihe* (2) *mit einem Faktor c multipliziert, so wird die Konvergenz von* (2) *nicht gestört* (*die Summe wird nur mit c multipliziert*).[1])

Die Partialsumme $\bar{A}_n$ der Reihe

$$ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n + \cdots$$

ist nämlich gleich

$$\bar{A}_n = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = cA_n$$

und hat infolgedessen den Grenzwert cA.

4°. *Zwei konvergente Reihen*

$$A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad \textit{und} \quad B = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots$$

lassen sich gliedweise addieren (*oder subtrahieren*), *so daß die Reihe*

$$(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \cdots + (a_n \pm b_n) + \cdots$$

ebenfalls konvergiert und ihre Summe gleich $A \pm B$ ist.

Bezeichnen wir mit A_n, B_n und C_n die n-ten Partialsummen der genannten Reihen, so ist offenbar

$$\begin{aligned} C_n &= (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \cdots + (a_n \pm b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \pm (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = A_n \pm B_n; \end{aligned}$$

gehen wir zur Grenze über, so finden wir

$$\lim C_n = \lim A_n \pm \lim B_n.$$

Damit ist 4° bewiesen.[2])

Zum Schluß bemerken wir noch folgendes:

5°. *Das allgemeine Glied a_n einer konvergenten Reihe strebt gegen* 0.

Dies kann ganz elementar gezeigt werden: Die Partialsumme A_n (und damit auch A_{n-1}) hat den endlichen Grenzwert A; also ist

$$a_n = A_n - A_{n-1} \to 0.$$

Wir haben damit eine *notwendige* Bedingung erhalten, die wir oft benutzen werden. *Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so ist die Reihe stets divergent.* Es ist jedoch wichtig zu wissen, daß diese Bedingung allein *nicht hinreichend* ist für die Konvergenz einer Reihe, d. h., auch, wenn sie erfüllt ist, kann die Reihe divergieren. Beispiele dafür sind die schon in Nr. 363, Beispiel 3 und 6, betrachteten Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}};$$

zahlreiche andere Beispiele dieser Art sind im folgenden zu finden.

---

[1]) Dieser Satz ist das sogenannte *Distributiogesetz.* — *Anm. d. Red.*

[2]) Man beachte, daß aus $A_n \to A$ und $B_n \to B$ zwar $C_n \to C$ folgt; die Umkehrung gilt jedoch nicht. — *Anm. d. Red.*

§ 2. Die Konvergenz positiver Reihen

365. Bedingung für die Konvergenz einer positiven Reihe. Wir beschäftigen uns nun damit, die Konvergenz oder Divergenz einer Reihe festzustellen. Dies läßt sich äußerst einfach bei Reihen durchführen, deren Glieder nichtnegativ sind; zur Abkürzung nennen wir solche Reihen *positiv*.

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{A}$$

sei positiv, also $a_n \geqq 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Dann ist offenbar

$$A_{n+1} = A_n + a_{n+1} \geqq A_n,$$

d. h., die Zahlen A_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ bilden eine *wachsende* Folge. Auf Grund des Satzes über den Grenzwert einer monotonen Zahlenfolge (Nr. 34) gelangen wir unmittelbar zu dem folgenden, für die Theorie der positiven Reihen grundlegenden Satz:

Die positive Reihe (A) *besitzt stets eine Summe. Diese Summe ist endlich* (*und die Reihe folglich konvergent*), *wenn die Partialsummen von* (A) *eine obere Schranke haben*; *anderenfalls ist sie unendlich* (*und die Reihe divergent*).

Alle Kriterien für Konvergenz (und Divergenz) positiver Reihen beruhen ausschließlich auf diesem einfachen Satz. Seine unmittelbare Anwendung gibt aber nur selten Aufschluß über den Charakter einer Reihe. Hierzu betrachten wir einige Beispiele.

1. Wir betrachten die *harmonische Reihe*[1])

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots. \tag{1}$$

Offenbar gilt die Ungleichung

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}. \tag{1*}$$

Entfernen wir die ersten beiden Glieder der harmonischen Reihe, so lassen sich die übrigen Glieder in aufeinanderfolgende Gruppen zu $2, 4, 8, \ldots, 2^{k-1}, \ldots$ Gliedern einteilen:

$$\underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{2}; \quad \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{2^2}; \quad \underbrace{\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}}_{2^3}; \quad \underbrace{\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}}_{2^{k-1}};$$

Jede dieser Summen ist größer als $1/2$; davon können wir uns schnell überzeugen, wenn wir in (1*) nacheinander $n = 2, 4, 8, \ldots, 2^{k-1}, \ldots$ setzen. Bezeichnen wir die n-te Partialsumme der harmonischen Reihe mit H_n, so ist offenbar

$$H_{2^k} > k \cdot \frac{1}{2}.$$

Die Partialsummen können also keine beschränkte Folge bilden: Die Reihe hat die Summe ∞.

---

[1]) Jedes Glied dieser Reihe, vom zweiten ab, ist das harmonische Mittel der beiden benachbarten Glieder; dabei heißt eine Zahl c das *harmonische Mittel* zweier Zahlen a und b, wenn $\frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ ist.

Wir erwähnen schon jetzt, daß H_n für $n \to \infty$ nur sehr langsam wächst. EULER berechnete z. B.

$$H_{1000} = 7{,}48, \ldots, \qquad H_{1\,000\,000} = 14{,}39\ldots, \quad \text{usw.}$$

Infolgedessen werden wir das Verhalten der Summen H_n noch genauer zu charakterisieren haben (vgl. Nr. 367, Beispiel 10).

2. Wir betrachten nun die allgemeinere Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \cdots, \tag{2}$$

wobei s eine beliebige reelle Zahl ist. Diese Reihe enthält als Spezialfall (für $s = 1$) die vorhergehende Reihe. Auf Grund der Ähnlichkeit mit der Reihe aus Beispiel 1 nennen wir auch diese Reihe *harmonisch.*

Da die Glieder der zu untersuchenden Reihe für $s < 1$ größer sind als die entsprechenden Glieder von (1), sind die Partialsummen erst recht nicht von oben beschränkt, so daß die Reihe (2) in diesem Fall *divergiert.*

Wir beschäftigen uns nun mit dem Fall $s > 1$ und setzen aus Gründen der Zweckmäßigkeit $s = 1 + \sigma$, $\sigma > 0$. Es gilt hier

$$\frac{1}{(n+1)^s} + \frac{1}{(n+2)^s} + \cdots + \frac{1}{(2n)^s} < n \cdot \frac{1}{n^s} = \frac{1}{n^\sigma}. \tag{2*}$$

Trennen wir, wie oben, von (2) die Gruppen

$$\underbrace{\frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s}}_{2}; \quad \underbrace{\frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{8^s}}_{2^2}; \quad \underbrace{\frac{1}{9^s} + \cdots + \frac{1}{16^s}}_{2^3}; \quad \ldots;$$

$$\underbrace{\frac{1}{(2^{k-1}+1)^s} + \cdots + \frac{1}{(2^k)^s}}_{2^{k-1}}; \ldots$$

ab, so können wir mit Hilfe von (2*) leicht zeigen, daß jede dieser Summen kleiner ist als das entsprechende Glied der Folge

$$\frac{1}{2^\sigma},\ \frac{1}{4^\sigma} = \frac{1}{(2^\sigma)^2},\ \frac{1}{8^\sigma} = \frac{1}{(2^\sigma)^3}, \ldots, \frac{1}{(2^{k-1})^\sigma} = \frac{1}{(2^\sigma)^{k-1}}, \ldots$$

In diesem Fall ist klar, daß jede beliebige Partialsumme von (2) kleiner ist als die konstante Zahl

$$L = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{\frac{1}{2^\sigma}}{1 - \frac{1}{2^\sigma}};$$

folglich ist die Reihe (2) *konvergent.* Ihre von s abhängige Summe stellt die *Riemannsche Zetafunktion* $\zeta(s)$ dar, die in der Zahlentheorie eine wichtige Rolle spielt.

366. Vergleichskriterien. Die Konvergenz oder Divergenz einer positiven Reihe wird oft durch Vergleich dieser Reihe mit einer anderen festgestellt, von der schon bekannt ist, ob sie konvergiert oder divergiert. Einem solchen Vergleich liegt der folgende einfache Satz zugrunde:

Satz 1. *Gegeben seien zwei positive Reihen*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{A}$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots. \tag{B}$$

Ist die Ungleichung $a_n \leqq b_n$ von einem bestimmten n ab, etwa für $n > N$, erfüllt, so folgt aus der Konvergenz von (B) die Konvergenz von (A) *und aus der Divergenz von* (A) *die Divergenz von* (B).[1])

Beweis. Infolge der Tatsache, daß das Fortlassen endlich vieler Anfangsglieder einer Reihe auf das Konvergenzverhalten der Reihe keinen Einfluß hat (vgl. Nr. 364, 1°), können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, es sei $a_n \leqq b_n$ für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$ Bezeichnen wir die n-ten Partialsummen von (A) und (B) mit A_n bzw. B_n, so ist auch

$$A_n \leqq B_n.$$

Die Reihe (B) sei konvergent; dann sind nach dem grundlegenden Satz aus Nr. 365 die Summen B_n beschränkt:

$$B_n \leqq L \qquad (L = \text{const}; n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Aber dann ist wegen $A_n \leqq B_n$ erst recht

$$A_n \leqq L,$$

und dies zieht (auf Grund desselben Satzes) die Konvergenz von (A) nach sich. Entsprechend ergibt sich der zweite Teil der Behauptung.

Für die Praxis ist oft das folgende Kriterium geeigneter, das sich aus Satz 1 ergibt:

Satz 2. *Existiert der Grenzwert*[2])

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K \qquad (0 \leqq K \leqq \infty),$$

so folgt aus der Konvergenz der Reihe (B) *für $K < \infty$ die Konvergenz von* (A) *und aus der Divergenz von* (A) *für $K > 0$ die Divergenz von* (B).

Für $0 < K < \infty$ sind also gleichzeitig beide Reihen konvergent oder divergent.

Beweis. Die Reihe (B) konvergiere, und es sei $K < +\infty$. Wir wählen eine beliebige Zahl $\varepsilon > 0$; nach Definition des Grenzwertes gilt für hinreichend große n

$$\frac{a_n}{b_n} < K + \varepsilon,$$

woraus

$$a_n < (K + \varepsilon)\, b_n$$

---

[1]) Satz 1 ist in der Literatur auch als *Majoranten-* bzw. *Minorantenkriterium* bekannt, je nachdem, ob er als Kriterium für die Konvergenz oder für die Divergenz von Reihen benutzt wird. Im ersten Fall ist nämlich die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine *Majorante* für $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, im zweiten Fall ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine *Minorante* für $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. — *Anm. d. Red.*

[2]) Dabei setzen wir $b_n \neq 0$ voraus.

folgt. Wegen 3° aus Nr. 364 ist dann gleichzeitig mit (B) auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (K + \varepsilon)\, b_n$ konvergent, die aus den mit der Konstanten $K + \varepsilon$ multiplizierten Gliedern von (B) besteht. Daraus folgt mit Hilfe von Satz 1 die Konvergenz von (A).

Divergiert die Reihe (B) und ist $K > 0$, so hat der Quotient b_n/a_n einen endlichen Grenzwert; die Reihe (A) muß divergieren, denn wäre sie konvergent, so müßte nach dem Bewiesenen auch die Reihe (B) konvergieren.

Abschließend geben wir noch ein Vergleichskriterium an, das ebenfalls eine Folgerung aus Satz 1 ist.

Satz 3. *Ist von einem gewissen b ab, etwa für* $n > N$, *die Ungleichung*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq \frac{b_{n+1}}{b_n} \tag{3}$$

erfüllt,[1]) *so folgt aus der Konvergenz der Reihe* (B) *die Konvergenz der Reihe* (A) *und aus der Divergenz der Reihe* (A) *die Divergenz der Reihe* (B).

Beweis. Wie beim Beweis von Satz 1 können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, (3) sei für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$ erfüllt. Dann ist

$$\frac{a_2}{a_1} \leqq \frac{b_2}{b_1},\ \frac{a_3}{a_2} \leqq \frac{b_3}{b_2},\ \ldots,\ \frac{a_n}{a_{n-1}} \leqq \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

Multiplizieren wir diese Ungleichungen gliedweise, so erhalten wir

$$\frac{a_n}{a_1} \leqq \frac{b_n}{b_1} \quad \text{oder} \quad a_n \leqq \frac{a_1}{b_1}\, b_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ist die Reihe (B) konvergent, so konvergiert auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_1}{b_1} b_n$, die sich aus den mit dem konstanten Faktor a_1/b_1 multiplizierten Gliedern von (B) ergibt. Dann ist auf Grund von Satz 1 auch (A) konvergent, was zu beweisen war. Entsprechend folgert man den zweiten Teil der Behauptung.

Wir gehen nun zu Beispielen über, bei denen sich die Konvergenz oder Divergenz von Reihen durch unmittelbare Anwendung der Vergleichskriterien feststellen läßt.

367. Beispiele.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + a^n}$ $(a > 0)$. Im Fall $a \leqq 1$ ist die notwendige Bedingung 5° aus Nr. 364 für die Konvergenz nicht erfüllt, d. h., die Reihe divergiert. Für $a > 1$ sind die Glieder der Reihe kleiner als die Glieder der konvergenten Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^n$, d. h., die Reihe konvergiert (nach Satz 1).

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ ist konvergent, denn es gilt

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{n!}{2^n(2n-1)!!} \leqq \frac{1}{2^n}$$

(Satz 1).

[1]) Dabei sei $a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}$ $(0 < x < 3\pi)$. Wegen

$$2^n \cdot \sin \frac{x}{3^n} < x \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

und der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ist auch die gegebene Reihe konvergent (Satz 1).

4. Wir betrachten wieder die *harmonische* Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ und stellen sie (unter Benutzung von Satz 2) der bekannten divergenten Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\ln (n + 1) - \ln n] = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

(vgl. Nr. 363, Beispiel 3) gegenüber. Aus

$$\lim \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

(vgl. Nr. 77, Beispiel 5(a)) folgt schon die Divergenz der harmonischen Reihe.

Wir können auch anders vorgehen: Wenden wir auf die Funktion $\ln x$ im Intervall $[n, n + 1]$ den Mittelwertsatz der Differentialrechnung an, so finden wir

$$\ln (n + 1) - \ln n = \frac{1}{n + \theta} \quad (0 < \theta < 1).$$

In diesem Fall ist die harmonische Reihe, deren Glieder größer sind, erst recht divergent (Satz 1).

5. Analog läßt sich von neuem die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\sigma}}$ (für $\sigma > 0$) nachweisen, wenn wir diese Reihe mit der als konvergent bekannten Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{(n - 1)^\sigma} - \frac{1}{n^\sigma}\right]$$

vergleichen. Wenden wir auf die Funktion $1/x^\sigma$ im Intervall $[n - 1, n]$ den Mittelwertsatz der Differentialrechnung an, so finden wir

$$\frac{1}{(n - 1)^\sigma} - \frac{1}{n^\sigma} = \frac{\sigma}{(n - \theta)^{1+\sigma}} \quad (0 < \theta < 1).$$

Somit ist für $n \geqq 2$

$$\frac{1}{n^{1+\sigma}} < \frac{1}{\sigma} \left[\frac{1}{(n - 1)^\sigma} - \frac{1}{n^\sigma}\right];$$

daraus folgt nach Satz 1 die Konvergenz der betrachteten Reihe.

6. Um mit Hilfe eines ähnlichen Verfahrens ein neues Ergebnis zu erhalten, betrachten wir die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ (ihre Glieder sind von $n = 3$ ab kleiner als die entsprechenden Glieder der harmonischen Reihe). Wir vergleichen sie mit der als divergent bekannten Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} [\ln \ln (n + 1) - \ln \ln n]$$

(vgl. Nr. 362, Formel (4)). Wenden wir den Mittelwertsatz der Differentialrechnung auf die

Funktion $\ln \ln x$ im Intervall $[n, n+1]$ an, so erhalten wir

$$\ln \ln (n+1) - \ln \ln n = \frac{1}{(n+\theta)\ln(n+\theta)} \quad (0 < \theta < 1).$$

Also ist nach Satz 1 die gegebene Reihe, deren Glieder größer sind, esrt recht divergent.

7. Durch Vergleich mit den harmonischen Reihen aus den Beispielen 4 und 5 läßt sich auf das Verhalten vieler Reihen schließen. Auf Grund von Satz 1 ist

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ divergent: $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1}$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ konvergent: $\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} < \frac{1}{n^{3/2}}$;

(c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p}$ $(p > 0)$ divergent: $(\ln n)^p < n$ (für hinreichend große n);

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ konvergent: $\frac{n!}{n^n} < \frac{2}{n^2}$ (für $n > 3$);

(e) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ konvergent: $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{n^{\ln \ln n}} < \frac{1}{n^2}$ (für hinreichend große n);

(f) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}}$ konvergent: $\frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{n^{\ln \ln \ln n}} < \frac{1}{n^2}$ (für hinreichend große n);

(g) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$ divergent: $\frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}} = \frac{1}{e^{(\ln \ln n)^2}} > \frac{1}{e^{\ln n}} = \frac{1}{n}$ (für hinreichend große n).

8. Auf Grund von Satz 2 ist

(a) $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{(a+bn)^s}$ $(b > 0)$ konvergent für $s > 1$, divergent für $s \leqq 1$ wegen

$$\frac{1}{(a+bn)^s} : \frac{1}{n^s} \to \frac{1}{b^s};$$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ divergent: $\frac{1}{n\sqrt[n]{n}} : \frac{1}{n} \to 1$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{x}{n}$ $(0 < x < \pi)$ divergent: $\sin\frac{x}{n} : \frac{1}{n} \to x$. Analog divergieren auch die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \quad (x > 0) \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{a} - 1\right) \quad (a \neq 1).$$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$ konvergent: $\left(1-\cos\frac{x}{n}\right) : \frac{1}{n^2} \to \frac{x^2}{2}$.

9. Kompliziertere Beispiele dieser Art sind

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n$. Mit x_n bezeichnen wir den Quotienten aus dem allgemeinen Glied dieser Reihe und $\frac{1}{n}$. Dann ist

$$\ln x_n = \ln n + n \ln\left(1-\frac{\ln n}{n}\right).$$

Benutzen wir die Entwicklung von $\ln(1+x)$, die wir in Nr. 125, Beispiel 5, betrachteten, so können wir

$$\ln\left(1-\frac{\ln n}{n}\right) = -\frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 + \alpha_n \left(\frac{\ln n}{n}\right)^2$$

schreiben; dabei ist $\alpha_n \to 0$ für $n \to \infty$. Also gilt

$$\ln x_n = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln^2 n}{n} + \alpha_n\cdot\frac{\ln^2 n}{n} \to 0$$

und demzufolge $x_n \to 1$, d. h., die Reihe divergiert.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n\ln\frac{2n+1}{2n-1} - 1\right)$. Benutzen wir wieder die Entwicklung von $\ln(1+x)$, so erhalten wir

$$\ln\frac{2n+1}{2n-1} = \ln\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)$$

$$= \frac{2}{2n-1} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2n-1}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{2n-1}\right)^3 + \beta_n\left(\frac{2}{2n-1}\right)^3$$

mit $\beta_n \to 0$ für $n \to \infty$, d. h.

$$n\ln\frac{2n+1}{2n-1} - 1 = \frac{2n+3}{3(2n-1)}\left(\frac{1}{2n-1}\right)^2 + \beta_n\cdot\frac{8n}{2n-1}\left(\frac{1}{2n-1}\right)^2.$$

Der Grenzwert des Quotienten aus dem allgemeinen Glied der betrachteten Reihe und $\frac{1}{(2n-1)^2}$ ist also gleich $1/3$, d. h., die Reihe konvergiert.

10. Abschließend betrachten wir die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n}\right).$$

Wir kennen aus Nr. 133, Beispiel 4, die Ungleichung

$$\ln(1+x) < x \qquad (x \neq 0;\ -1 < x < \infty).$$

Mit ihrer Hilfe können wir

$$\ln\frac{n+1}{n} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

schreiben; gleichzeitig ist

$$\ln\frac{n+1}{n} = -\ln\frac{n}{n+1} = -\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) > \frac{1}{n+1}.$$

Also gilt

$$0 < \frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2},$$

d. h., jedes Glied der gegebenen Reihe ist positiv und kleiner als das entsprechende Glied der Reihe $\sum\frac{1}{n^2}$ (vgl. Nr. 365, Beispiel 2); folglich ist die gegebene Reihe konvergent.

Bezeichnen wir ihren Wert mit C, so strebt die Folge der Partialsummen

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \ln\frac{k+1}{k}\right) = H_n - \ln(n+1)$$

gegen C (hier bezeichnet H_n wie stets die n-te Partialsumme der harmonischen Reihe). Wir dürfen $\ln(n+1)$ durch $\ln n$ ersetzen, da ihre Differenz $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ für $n \to \infty$ gegen 0 strebt. Bezeichnen wir schließlich mit γ_n eine gewisse unendlich kleine Größe, so gelangen wir zu der bemerkenswerten Formel

$$H_n = \ln n + C + \gamma_n. \tag{4}$$

Sie zeigt, daß für $n \to \infty$ die n-te Partialsumme H_n der harmonischen Reihe wie $\ln n$ wächst.

Die in (4) auftretende Zahl C ist die *Eulersche Konstante*[1]). Ihr Zahlenwert, der sich mit Hilfe anderer Überlegungen berechnen läßt, ist

$$C = 0{,}577215664 90\ldots \tag{5}$$

368. Das Cauchysche und das d'Alembertsche[2]) Kriterium. Der Vergleich einer gegebenen positiven Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{A}$$

mit verschiedenen Standardreihen, die schon als konvergent oder divergent erkannt sind, kann auch in anderer, sozusagen „organisierter" Form durchgeführt werden.

Wir nehmen als Vergleichsreihe (B) einerseits die *konvergente* geometrische Reihe

$$\sum q^n = q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots \qquad (0 < q < 1),$$

andererseits die *divergente* Reihe

$$\sum 1 = 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots.$$

Vergleichen wir die zu untersuchende Reihe (A) mit diesen Reihen nach dem Schema von Satz 1, so gelangen wir zu dem folgenden Kriterium:

Cauchysches Kriterium.[3]). *Erfüllt die aus den Gliedern der Reihe* (A) *gebildete Zahlenfolge*[4])

$$\mathscr{C}_n = \sqrt[n]{a_n}$$

für hinreichend große n die Ungleichung

$$\mathscr{C}_n \leqq q,$$

wobei q eine konstante Zahl < 1 *ist, so ist die Reihe* (A) *konvergent. Gilt von einem* $n > N$ *ab*

$$\mathscr{C}_n \geqq 1,$$

so ist die Reihe (A) *divergent.*

Die Ungleichungen $\sqrt[n]{a_n} \leqq q$ oder $\sqrt[n]{a_n} \geqq 1$ sind nämlich mit $a_n \leqq q^n$ bzw. $a_n \geqq 1$ gleichwertig, und hierauf brauchen wir nur Satz 1 aus Nr. 366 anzuwenden.[5])

Einfacher läßt sich dieses Kriterium in der folgenden Limesform verwenden, wobei

---

[1]) Oder *Mascheronische Konstante* (LORENZO MASCHERONI, 1750—1800, italienischer Mathematiker). — *Anm. d. Red.*

[2]) JEAN LE ROND D'ALEMBERT, 1717—1783, französischer Mathematiker.

[3]) Oder *Wurzelkriterium.* — *Anm. d. Red.*

[4]) Wir wollen aus Gründen der Einfachheit die Zahlenfolge und das allgemeine Glied mit demselben Symbol bezeichnen. — *Anm. d. Red.*

[5]) Die Divergenz der Reihe kann auch einfach durch Anwendung der notwendigen, hier nicht erfüllten Bedingungen für die Konvergenz (Nr. 364, 5°) festgestellt werden. (Man ersieht daraus, daß $\sqrt[n]{a_n} \geqq 1$ nur für unendlich viele n, nicht aber für *alle* $n > N$ erfüllt zu sein braucht, um die Divergenz zu sichern. — *Anm. d. Red.*)

freilich mehr verlangt wird:

Hat die Folge der Zahlen $\mathcal{C}_n$ einen (endlichen oder unendlichen) Grenzwert

$$\lim \mathcal{C}_n = \mathcal{C},$$

so ist die betrachtete Reihe für $\mathcal{C} < 1$ konvergent, für $\mathcal{C} > 1$ divergent.

Ist $\mathcal{C} < 1$, so wählen wir eine positive Zahl $\varepsilon < 1 - \mathcal{C}$, so daß $\mathcal{C} + \varepsilon < 1$ ist. Nach Definition des Grenzwertes gilt für $n > N$

$$\mathcal{C} - \varepsilon < \mathcal{C}_n < \mathcal{C} + \varepsilon.$$

Die Zahl $\mathcal{C} + \varepsilon$ spielt die Rolle von q in der vorhergehenden Formulierung; die Reihe ist also konvergent.

Ist $\mathcal{C} > 1$ (und endlich), so gilt, wenn wir $\varepsilon = \mathcal{C} - 1$, also $\mathcal{C} - \varepsilon = 1$ wählen, für hinreichend große n jetzt $\mathcal{C}_n > 1$, d. h., die Reihe divergiert. Ein analoges Resultat gilt auch für $\mathcal{C} = +\infty$.

Im Fall $\mathcal{C} = 1$ gibt dieses Kriterium keinen Aufschluß über das Verhalten einer Reihe.

Die Folge $\mathcal{C}_n$ nennen wir die *Cauchysche Zahlenfolge.*

Wird der Vergleich der Reihe (A) mit einer der Standardreihen nach Satz 3 vorgenommen, so gelangen wir zu dem folgenden Kriterium:

d'Alembertsches Kriterium.[1]) *Erfüllt die Folge der aus den Gliedern der Reihe* (A) *gebildeten Zahlen*

$$\mathcal{D}_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

für hinreichend große n die Ungleichung

$$\mathcal{D}_n \leqq q,$$

wobei q eine konstante Zahl mit $0 < q < 1$ ist, so konvergiert die Reihe (A)*; ist für alle $n > N$*

$$\mathcal{D}_n \geqq 1,$$

so ist (A) *divergent.*[2])

Auch in diesem Fall ist es zweckmäßiger, den Satz in der Limesform zu benutzen, wobei auch hier wieder mehr vorausgesetzt wird:

Hat die Folge der Zahlen $\mathcal{D}_n$ einen (endlichen oder unendlichen) Grenzwert,

$$\lim \mathcal{D}_n = \mathcal{D},$$

so ist die Reihe (A) *für $\mathcal{D} < 1$ konvergent, für $\mathcal{D} > 1$ divergent.*

Der Beweis verläuft genauso wie beim Gauchyschen Kriterium.

Dieses Kriterium führt ebenfalls nicht zum Ziel, wenn $\mathcal{D} = 1$ ist.

Die Folge der $\mathcal{D}_n$ nennen wir die *d'Alembertsche Zahlenfolge.*

In Nr. 77, Beispiel 4, sahen wir, daß aus der Existenz des Grenzwerts für $\mathcal{D}_n$ auch schon die Existenz des Grenzwerts für $\mathcal{C}_n$ folgt, wobei beide Grenzwerte überein-

---

[1]) Oder *Quotientenkriterium. — Anm. d. Red.*

[2]) Auch hier folgt die Divergenz direkt daraus, daß die notwendige Bedingung für die Konvergenz nicht erfüllt ist (hier muß allerdings $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqq 1$ für alle $n > N$ gelten): Ist $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqq 1$, also $a_{n+1} \geqq a_n$, so kann a_n nicht gegen 0 streben.

stimmen. Also kann dann, wenn das d'Alembertsche Kriterium Aufschluß über eine Reihe gibt, dieser Aufschluß schon aus dem Cauchyschen Kriterium erhalten werden. In den Beispielen aus Nr. 370 werden wir sehen, daß die umgekehrte Behauptung nicht gilt, daß also das Cauchysche Kriterium stärker ist als das d'Alembertsche. Jedoch wird in der Praxis das d'Alembertsche Kriterium öfter benutzt.

369. Das Raabesche[1]) Kriterium. Geben die eben betrachteten einfachen Kriterien keine Antwort, so muß man zu komplizierteren Kriterien greifen, die auf dem Vergleich der zu untersuchenden Reihe mit anderen Standardreihen beruhen, die sozusagen „langsamer" konvergieren oder „langsamer" divergieren als die gegebene Reihe.[2])

Wir behandeln hier das Raabesche Kriterium. Es vergleicht die gegebene Reihe (A) mit der konvergenten harmonischen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \cdots \qquad (s > 1) \tag{H$_s$}$$

oder der divergenten harmonischen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \tag{H}$$

unter Verwendung von Satz 3. Dabei wird die *Raabesche Zahlenfolge*

$$\mathcal{R}_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$$

betrachtet.

Raabesches Kriterium. *Ist für hinreichend große n die Ungleichung*

$$\mathcal{R}_n \geqq r$$

erfüllt, wobei r eine konstante Zahl > 1 ist, so konvergiert die Reihe (A). *Ist für alle $n > N$*

$$\mathcal{R}_n \leqq 1,$$

so ist die Reihe (A) *divergent.*

Für hinreichend große n gelte

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > r > 1 \quad \text{oder} \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \frac{r}{n}.$$

Wir wählen eine beliebige Zahl s mit $r > s > 1$. Da bekanntlich (vgl. Nr. 77, Beispiel 5) die Limesbeziehung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s - 1}{\frac{1}{n}} = s$$

[1]) J. L. Raabe, 1801—1859, wirkte in Zürich.
[2]) Vgl. Nr. 375, Beispiel 7.

gilt, erhalten wir für hinreichend große n

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s - 1}{\frac{1}{n}} < r \quad \text{oder} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^s < 1 + \frac{r}{n}$$

und folglich

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^s.$$

Dieser Ungleichung können wir die Form

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^s = \frac{\frac{1}{(n+1)^s}}{\frac{1}{n^s}}$$

geben. Auf der rechten Seite steht der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder der Reihe (H_s). Mit Hilfe von Satz 3 finden wir, daß die Reihe (A) konvergiert.

Ist von einem gewissen N ab

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leqq 1,$$

so folgt daraus sofort

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqq \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}.$$

Wenden wir auf die Reihe (A) und (H) den Satz 3 an, so erkennen wir, daß (A) divergiert.

Auch das Raabesche Kriterium wird vorzugsweise in der Limesform angewendet. *Hat die Zahlenfolge $\mathfrak{R}_n$ den (endlichen oder unendlichen) Grenzwert*

$$\lim \mathfrak{R}_n = \mathfrak{R},$$

so ist die Reihe (A) *für $\mathfrak{R} > 1$ konvergent, für $\mathfrak{R} < 1$ divergent.*

Vergleichen wir das d'Alembertsche und das Raabesche Kriterium, so sehen wir, daß das letzte stärker ist als das erste. Existiert nämlich der Grenzwert $\mathfrak{D} = \lim \mathfrak{D}_n$ und ist er von 1 verschieden, so gibt es zu $\mathfrak{R}_n = n\left(\frac{1}{\mathfrak{D}_n} - 1\right)$ einen Grenzwert $\mathfrak{R}$, der für $\mathfrak{D} < 1$ gleich $+\infty$, für $\mathfrak{D} > 1$ gleich $-\infty$ ist. Gibt also das d'Alembertsche Kriterium Aufschluß über das Verhalten einer Reihe, so erhält man dies auch schon aus dem Raabeschen Kriterium; alle diese Fälle lassen sich sogar durch *zwei* der möglichen Werte von $\mathfrak{R}$, nämlich durch $\pm\infty$, erfassen. Alle übrigen Werte von $\mathfrak{R}$ (mit Ausnahme von $\mathfrak{R} = 1$), die ebenfalls auf das Verhalten der Reihe schließen lassen, entsprechen also den Fällen, über die das d'Alembertsche Kriterium nichts aussagen kann, also dem Fall $\mathfrak{D} = 1$.

Aber auch hier erhalten wir für $\mathfrak{R} = 1$ keine Antwort auf die Frage nach dem Verhalten einer Reihe; in solchen Fällen, die sehr selten auftreten, muß zu noch schärferen und komplizierteren Kriterien gegriffen werden (vgl. etwa Nr. 371).

Wir wenden uns nun Beispielen zu.

370. Beispiele.

1) Man wende auf die folgenden Reihen das Cauchysche Kriterium an:

(a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$, $\mathscr{C}_n = \frac{1}{\ln n}$, $\mathscr{C} = 0$: die Reihe konvergiert;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n$ $(x > 0)$, $\mathscr{C}_n = \frac{x}{n}$, $\mathscr{C} = 0$: die Reihe konvergiert;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{a_n}\right)^n$ $(x > 0$; a_n seien Elemente einer positiven Folge mit dem Grenzwert $a)$, $\mathscr{C}_n = \frac{x}{a_n}$. Für $a = 0$ ist $\mathscr{C} = +\infty$, so daß die Reihe divergiert; für $a = +\infty$ ist $\mathscr{C} = 0$, die Reihe konvergiert. Für $0 < a < +\infty$ ist $\mathscr{C} = \frac{x}{a}$; hier hängt das Verhalten der Reihe von x ab: Sie konvergiert für $x < a$, divergiert für $x > a$. Bei $x = a$ läßt sich im allgemeinen nichts aussagen; das Verhalten der Reihe hängt dann davon ab, wie die Folge der a_n gegen a strebt.

2. Man wende auf die folgenden Reihen das d'Alembertsche Kriterium an:

(a) $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $(x > 0)$, $\mathscr{D}_n = \frac{x}{n+1}$, $\mathscr{D} = 0$: die Reihe konvergiert;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ $(x > 0)$, $\mathscr{D}_n = x \cdot \frac{n+1}{n}$, $\mathscr{D} = x$: die Reihe konvergiert für $x < 1$ und divergiert für $x \geqq 1$ (für $x = 1$ können wir uns unmittelbar davon überzeugen).

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^s}$ $(x > 0, s > 0)$, $\mathscr{D}_n = x\left(\frac{n}{n+1}\right)^s$, $\mathscr{D} = x$: die Reihe konvergiert für $x < 1$ und divergiert für $x > 1$; für $x = 1$ ergibt sich eine harmonische Reihe, deren Verhalten, wie wir bereits wissen, von s abhängt.

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{x}{n}\right)^n$ $(x > 0)$, $\mathscr{D}_n = \frac{x}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$, $\mathscr{D} = \frac{x}{\mathrm{e}}$: für $x < \mathrm{e}$ ist die Reihe konvergent für $x > \mathrm{e}$ divergent; für $x = \mathrm{e}$ sagt das d'Alembertsche Kriterium in der Limesform nichts aus, aber die ursprüngliche Form des Kriteriums gestattet, auf Divergenz der Reihe zu schließen, da $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sich von unten gegen e nähert, so daß $\mathscr{D}_n > 1$ ist.

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$ $(x > 0)$, $\mathscr{D}_n = x\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $\mathscr{D} = x\mathrm{e}$: für $x < \frac{1}{\mathrm{e}}$ ist die Reihe konvergent, für $x > \frac{1}{\mathrm{e}}$ divergent; für $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$ können wir hier das d'Alembertsche Kriterium nicht verwenden, da $\mathscr{D}_n$ von unten gegen $\mathscr{D} = 1$ strebt. Auf diesen Fall werden wir noch in Beispiel 5(d) zurückkommen.

3. Wir betrachten die Reihe

$$1 + a + ab + a^2b + a^2b^2 + \cdots + a^nb^{n-1} + a^nb^n + \cdots,$$

wobei a und b zwei voneinander verschiedene positive Zahlen sind. Hier ist $\mathscr{D}_{2n-1} = a$, $\mathscr{D}_{2n} = b$, und das d'Alembertsche Kriterium (in der ursprünglichen Form) sagt aus, daß die Reihe konvergiert oder divergiert, je nachdem, ob die Zahlen a und b beide kleiner oder beide größer als 1 sind.

Gleichzeitig ist

$$\mathscr{C}_{2n-1} = \sqrt[2n-1]{a^{n-1}b^{n-1}} \quad \text{und} \quad \mathscr{C}_{2n} = \sqrt[2n]{a^n b^{n-1}},$$

also $\mathscr{C} = \sqrt{ab}$; nach dem Cauchyschen Kriterium ist die Reihe für $ab < 1$ konvergent, für $ab > 1$ (und offenbar auch für $ab = 1$) divergent.

4. Wir untersuchen die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tau(n)\, x^n$, wobei x positiv sei und $\tau(n)$ die Anzahl der Teiler der natürlichen Zahl n bezeichne. Da die Funktion $\tau(n)$ eine Sprungfunktion ist, besteht keine Möglichkeit, das d'Alembertsche Kriterium anzuwenden. Dagegen läßt sich das Cauchysche Kriterium durchaus anwenden:

$$x \leqq \mathscr{C}_n = \sqrt[n]{\tau(n)} \cdot x \leqq \sqrt[n]{n}\, x.$$

Also ist $\mathscr{C} = x$; die Reihe ist demnach für $x < 1$ konvergent, für $x > 1$ (und offenbar auch für $x = 1$) divergent.

5. Auf die folgenden Reihen wende man das Raabesche Kriterium an:

(a) $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \dfrac{1}{2n+1}$. Das d'Alembertsche Kriterium ist wegen

$$\mathscr{D}_n = \frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)} \to 1$$

(und dabei $\mathscr{D}_n < 1$) nicht anwendbar. Wir bilden deshalb die Raabesche Folge

$$\mathscr{R}_n = n\left(\frac{2n(2n+1)}{(2n-1)^2} - 1\right) = \frac{(6n-1)\,n}{(2n-1)^2}.$$

Wegen $\mathscr{R} = \lim \mathscr{R}_n = \dfrac{3}{2} > 1$ ist die Reihe konvergent.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{(x+1)\cdots(x+n)}$ $(x > 0)$. Hier ist

$$\mathscr{D}_n = \frac{n+1}{x+n+1}, \quad \mathscr{D} = 1,$$

das d'Alembertsche Kriterium also wieder nicht anwendbar. Deshalb nehmen wir

$$\mathscr{R}_n = \frac{n}{n+1}\, x,$$

so daß $\mathscr{R} = x$ ist. Die Reihe ist also für $x < 1$ divergent, für $x > 1$ konvergent; für $x = 1$ ergibt sich die divergente harmonische Reihe (ohne erstes Glied).

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!x^n}{(x+a_1)(2x+a_2)\cdots(nx+a_n)}$; dabei sei $x > 0$, und die a_n mögen eine positive Zahlenfolge mit dem endlichen Grenzwert a bilden. Auch hier ist $\mathscr{D} = 1$ wegen

$$\mathscr{D}_n = \frac{(n+1)\,x}{(n+1)\,x + a_{n+1}}.$$

Ferner ist

$$\mathscr{R}_n = \frac{n a_{n+1}}{(n+1)\,x}, \quad \mathscr{R} = \frac{a}{x},$$

d. h., die Folge ist für $x < a$ konvergent, für $x > a$ divergent. Für $x = a$ läßt sich im allgemeinen nichts feststellen: Das Verhalten der Reihe hängt dann davon ab, wie die a_n gegen a streben.

(d) Zum Schluß untersuchen wir die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Für sie gilt

$$\mathfrak{R}_n = n\left[\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} - 1\right].$$

Um den Grenzwert dieser Zahlenfolge bestimmen zu können, ersetzen wir sie durch die Funktion

$$\frac{1}{x}\left[\frac{e}{(1+x)^{1/x}} - 1\right] \quad (x \to 0),$$

auf die wir die Methoden der Differentialrechnung anwenden können. Nach der l'Hospitalschen Regel differenzieren wir Zähler und Nenner und erhalten

$$-\frac{e}{[(1+x)]^{1/x}]^2}\left[(1+x)^{1/x}\cdot \ln(1+x)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x}\cdot(1+x)^{(1/x)-1}\right]$$

$$= \frac{e}{(1+x)^{1/x}}\,\frac{\ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}}{x^2}.$$

Setzen wir

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \quad \frac{x}{1+x} = x - x^2 + o(x^2),$$

so finden wir sofort, daß der gesuchte Grenzwert gleich 1/2 ist. Die Reihe ist also divergent.

371. Das Kummersche Kriterium. Wir geben nun ein überaus wichtiges Kriterium an, das von E. E. Kummer[1]) stammt. Es läßt sich als das allgemeine Kriterium auffassen, aus dem sich die behandelten Kriterien als Spezialfälle ergeben.

Kummersches Kriterium. *Es sei*

$$c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$$

eine beliebige Folge positiver Zahlen derart, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$$

divergiert[2]), *und wir bilden für die betrachtete Reihe* (A) *die Zahlenfolge*

$$\mathcal{K}_n = c_n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}.$$

Gilt (für $n > N$) die Ungleichung

$$\mathcal{K}_n \geqq \delta,$$

wobei δ eine konstante positive Zahl ist, so konvergiert die Reihe. Ist (für $n > N$)

$$\mathcal{K}_n \leqq 0,$$

so ist die Reihe (A) *divergent.*

---

[1]) Ernst Eduard Kummer, 1810–1893, deutscher Mathematiker.

[2]) Wir weisen darauf hin, daß wir die letzte Voraussetzung nur beim Nachweis der *Divergenz* benötigen. Für das Konvergenzkriterium wird sie nicht gebraucht.

Beweis. Es sei

$$\mathcal{K}_n = c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geqq \delta > 0$$

(offenbar können wir diese Ungleichungen für *alle* n als erfüllt ansehen). Durch Multiplikation beider Seiten dieser Ungleichung mit a_{n+1} folgt

$$c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} \geqq \delta a_{n+1}; \tag{6}$$

das bedeutet

$$c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} > 0 \quad \text{oder} \quad c_n a_n > c_{n+1} a_{n+1}.$$

Daraus ergibt sich, daß die Folge der $c_n a_n$ monoton fällt und demzufolge gegen einen endlichen Grenzwert strebt (da sie von unten durch 0 beschränkt ist).

Also ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1})$$

konvergent, denn die Summe ihrer ersten n Glieder,

$$c_1 a_1 - c_{n+1} a_{n+1},$$

hat einen endlichen Grenzwert. Dann folgt aus (6) mit Hilfe von Satz 1 aus Nr. 366 die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta a_{n+1}$ und damit die der gegebenen Reihe (A).

Gilt für $n > N$

$$\mathcal{K}_n = c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leqq 0,$$

so ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqq \frac{\dfrac{1}{c_{n+1}}}{\dfrac{1}{c_n}}.$$

Da die Reihe $\sum \dfrac{1}{c_n}$ als divergent vorausgesetzt wurde, ist auf Grund von Satz 3 aus Nr. 366 auch die Reihe (A) divergent, was zu beweisen war.

Die Limesform des Kummerschen Kriteriums lautet folgendermaßen:

Die Zahlenfolge $\mathcal{K}_n$ besitze einen (endlichen oder unendlichen) Grenzwert:

$$\lim \mathcal{K}_n = \mathcal{K}.$$

Dann ist die Reihe für $\mathcal{K} > 0$ konvergent, für $\mathcal{K} < 0$ divergent.

Wir zeigen nun, daß sich aus dem Kummerschen Kriterium einige wichtige Konvergenzkriterien als Spezialfälle ergeben:

a) Wir setzen beispielsweise $c_n = 1$; die Bedingung, daß die Reihe $\sum \dfrac{1}{c_n}$ divergiert, ist erfüllt. Ferner gilt

$$\mathcal{K}_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{1}{\mathcal{D}_n} - 1.$$

Strebt $\mathcal{D}_n$ gegen $\mathcal{D}$, so strebt $\mathcal{K}_n$ gegen $\mathcal{K} = \dfrac{1}{\mathcal{D}} - 1$ ($\mathcal{K} = +\infty$ im Fall $\mathcal{D} = 0$; $\mathcal{K} = -1$ im Fall $\mathcal{D} = +\infty$). Für $\mathcal{D} > 1$ ist offenbar $\mathcal{K} < 0$, d. h., nach dem Kummerschen Kriterium ist die Reihe divergent; für $\mathcal{D} < 1$ ist $\mathcal{K} > 0$, also konvergiert die Reihe. Damit sind wir von neuem zum d'Alembertschen Kriterium gelangt.

b) Wir setzen nun $c_n = n$ und erhalten die Reihe $\sum \frac{1}{n}$, von der wir wissen, daß sie divergiert. Der Ausdruck für $\mathcal{K}_n$ erhält die Form

$$\mathcal{K}_n = n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) = \mathcal{R}_n - 1.$$

Strebt $\mathcal{R}_n$ gegen $\mathcal{R}$, so strebt $\mathcal{K}_n$ gegen den Grenzwert $\mathcal{K} = \mathcal{R} - 1$ ($\mathcal{K} = \pm\infty$ für $\mathcal{R} = \pm\infty$). Im Fall $\mathcal{R} > 1$ ist $\mathcal{K} > 0$, auf Grund des Kummerschen Kriteriums ist die Reihe konvergent; im Fall $\mathcal{R} < 1$ ist $\mathcal{K} < 0$, die Reihe also divergent. Somit sind wir wieder zum Raabeschen Kriterium gelangt.

c) Schließlich setzen wir $c_n = n \ln n$ ($n \geqq 2$); dies ist zulässig, denn die Reihe $\sum \frac{1}{n \ln n}$ ist divergent (vgl. Nr. 367, Beispiel 6). In diesem Fall gilt

$$\mathcal{K}_n = n \ln n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \ln (n+1).$$

Diese Beziehung läßt sich auch in der Gestalt

$$\mathcal{K}_n = \ln n \cdot \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right] - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \mathcal{B}_n - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

schreiben, wenn wir mit $\mathcal{B}_n$ die neue Zahlenfolge

$$\mathcal{B}_n = \ln n \cdot \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right] = \ln n \cdot (\mathcal{R}_n - 1)$$

bezeichnen. Daraus ergibt sich ein neues Kriterium:

Bertrandsches[1]) ***Kriterium.*** *Die Zahlenfolge $\mathcal{B}_n$ habe den (endlichen oder unendlichen) Grenzwert*

$$\mathcal{B} = \lim \mathcal{B}_n.$$

Dann ist die Reihe für $\mathcal{B} > 1$ konvergent, für $\mathcal{B} < 1$ divergent.

Wegen $\lim \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \ln \mathrm{e} = 1$ strebt nämlich die Kummersche Zahlenfolge $\mathcal{K}_n$ gegen den Grenzwert $\mathcal{K} = \mathcal{B} - 1$ ($\mathcal{K} = \pm\infty$ für $\mathcal{B} = \pm\infty$). Nun braucht man nur noch das Kummersche Kriterium zu benutzen.

Kombiniert man die Kriterien von Raabe und Bertrand, so könnte man dieselben Bemerkungen wiederholen, die oben über das d'Alembertsche und das Raabesche Kriterium gemacht wurden (Nr. 369). Diese Kette immer feinerer (und auch komplizierterer!) Kriterien kann unbeschränkt fortgesetzt werden.

372. Das Gaußsche Kriterium. Aus den Kriterien von d'Alembert, Raabe und Bertrand ergibt sich leicht das folgende, nach Gauss benannte Kriterium:

Gaußsches Kriterium. *Bei der gegebenen Reihe* (A) *lasse sich der Quotient $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ in der Gestalt*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}$$

darstellen, wobei λ und μ Konstante sind und θ_n eine beschränkte Größe ist, $|\theta_n| \leqq L$. Dann ist die Reihe (A) *konvergent für $\lambda > 1$ oder $\lambda = 1$, $\mu > 1$ und divergent für $\lambda < 1$ oder $\lambda = 1$, $\mu \leqq 1$.*

Der Fall $\lambda \lessgtr 1$ führt auf das d'Alembertsche Kriterium; denn es ist $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\lambda}$. Nun

---

[1]) Joseph Bertrand, 1822—1900, französischer Mathematiker.

sei $\lambda = 1$; dann ist

$$\mathfrak{R}_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \mu + \frac{\theta_n}{n}, \quad \mathfrak{R} = \mu,$$

d. h., der Fall $\mu \lesseqgtr 1$ wird durch das Raabesche Kriterium erschöpft. Ist schließlich $\mu = 1$, so gilt

$$\mathfrak{B}_n = \ln n(\mathfrak{R}_n - 1) = \frac{\ln n}{n} \cdot \theta_n.$$

Da $\frac{\ln n}{n}$ bekanntlich für $n \to \infty$ gegen 0 strebt und θ_n beschränkt ist, finden wir $\mathfrak{B} = \lim \mathfrak{B}_n = 0$; nach dem Bertrandschen Kriterium ist die Reihe also divergent.

Beispiele.

1. Wir betrachten die sogenannte *Gaußsche hypergeometrische Reihe*

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} x^n \\ &= 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\,\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \cdots \end{aligned}$$

und setzen zunächst $\alpha, \beta, \gamma, x > 0$ voraus. Hier ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)} x \to x,$$

so daß sich mit Hilfe des d'Alembertschen Kriteriums sofort im Fall $x < 1$ die Konvergenz und im Fall $x > 1$ die Divergenz erkennen läßt. Ist $x = 1$, so nehmen wir den Quotienten

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(1+n)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)}$$

und stellen ihn mit Hilfe der Zerlegungen

$$\frac{1}{1+\frac{\alpha}{n}} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha^2}{1+\frac{\alpha}{n}} \frac{1}{n^2}, \quad \frac{1}{1+\frac{\beta}{n}} = 1 - \frac{\beta}{n} + \frac{\beta^2}{1+\frac{\beta}{n}} \frac{1}{n^2}$$

in der Form

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\gamma - \alpha - \beta + 1}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}$$

dar, wobei θ_n beschränkt ist. Bei Verwendung des Gaußschen Kriteriums sehen wir, daß die Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ für $\gamma - \alpha - \beta > 0$ konvergiert und für $\gamma - \alpha - \beta \leqq 0$ divergiert. Später werden wir noch einmal auf die hypergeometrische Reihe unter allgemeineren Voraussetzungen für α, β, γ, x zurückkommen.

2. Als zweites Beispiel für die Anwendung des Gaußschen Kriteriums kann die Reihe

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^p + \cdots + \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p + \cdots \qquad (p > 0)$$

dienen, die für $p > 2$ konvergiert und für $p \leqq 2$ divergiert. Hier ist nämlich, auf Grund der

Taylorschen Formel,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{2n}{2n-1}\right)^p = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{-p} = 1 + \frac{p}{2n} + \frac{p(p+1)}{1\cdot 2}\,\frac{1}{(2n)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right);$$

daraus folgt

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\frac{p}{2}}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}$$

(θ_n beschränkt) usw.

373. Das Maclaurin[1])-Cauchysche Integralkriterium. Dieses Kriterium unterscheidet sich in seiner Form von allen vorhergehenden Kriterien. Es basiert auf der Idee, eine Reihe mit einem Integral zu vergleichen, und ist eine Verallgemeinerung jenes Verfahrens, das wir schon in den Beispielen 4 und 6 aus Nr. 367 benutzten, um die Konvergenz oder die Divergenz einer Reihe festzustellen.

Die gegebene Reihe habe die Gestalt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} f(n), \tag{7}$$

wobei $f(n)$ der Wert einer für $x \geqq 1$ definierten Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = n$ ist.[2]) Diese Funktion sei stetig, positiv und monoton fallend.

Wir betrachten eine beliebige Stammfunktion $F(x)$ zu $f(x)$; da für ihre Ableitung $F'(x) = f(x) > 0$ gilt, nimmt $F(x)$ mit x zu und hat für $x \to \infty$ einen endlichen oder unendlichen Grenzwert. Im ersten Fall ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} [F(n+1) - F(n)] \tag{8}$$

konvergent, im zweiten divergent. Mit dieser Reihe wollen wir die gegebene Reihe vergleichen.

Mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung läßt sich das allgemeine Glied von (8) auf die Gestalt

$$F(n+1) - F(n) = f(n+\theta) \qquad (0 < \theta < 1)$$

bringen, so daß infolge der Monotonie der Funktion $f(x)$

$$a_{n+1} = f(n+1) < F(n+1) - F(n) < f(n) = a_n \tag{9}$$

gilt. Ist die Reihe (8) konvergent, so konvergiert auf Grund von Satz 1 aus Nr. 366 auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} f(n+1)$, deren Glieder kleiner sind als die entsprechenden Glieder von (8). Das bedeutet, daß auch die gegebene Reihe (7) konvergiert. Ist (8) divergent, so ist auch die gegebene Reihe (7) divergent, denn ihre Glieder sind größer als die entsprechenden Glieder der Reihe (8).

---

1) Colin Maclaurin, 1698—1746, schottischer Mathematiker.

2) Der erste Wert von n kann statt 1 auch eine beliebige andere natürliche Zahl n_0 sein; dann muß man auch die Funktion $f(x)$ für $x \geqq n_0$ betrachten.

Damit gelangen wir zu dem folgenden interessanten Kriterium (es wurde zuerst in geometrischer Form von MACLAURIN gefunden, aber vergessen und später erst von CAUCHY wiederentdeckt):

Integralkriterium. *Die Reihe* (7) *ist unter den obigen Voraussetzungen konvergent* oder *divergent, je nachdem, ob die Funktion*

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

für $x \to \infty$ einen endlichen Grenzwert hat oder nicht.

Wir geben nun einige Beispiele für die Anwendung dieses Kriteriums (neben den in Nr. 367 betrachteten Kriterien) an:

1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot \ln^{1+\sigma} n}$ $(\sigma > 0)$. Hier ist

$$f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln^{1+\sigma} x}, \quad F(x) = -\frac{1}{\sigma \cdot \ln^{\sigma} x} \to 0 \quad \text{für} \quad x \to +\infty;$$

die Reihe ist konvergent.

2. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln\ln n}$. Hier ist

$$f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln\ln x}, \quad F(x) = \ln\ln\ln x \to +\infty;$$

die Reihe ist divergent.

3. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot \ln n \cdot (\ln\ln n)^{1+\sigma}}$ $(\sigma > 0)$. In diesem Fall ist

$$f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot (\ln\ln x)^{1+\sigma}}, \quad F(x) = -\frac{1}{\sigma \cdot (\ln\ln x)^{\sigma}} \to 0;$$

die Reihe ist konvergent.

Die Stammfunktion $F(x)$ kann man auch in Form des bestimmten Integrals

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$$

benutzen. Ihr Grenzwert für $x \to +\infty$ heißt *Integral von* 1 *bis* $+\infty$,[1]) und man schreibt

$$F(+\infty) = \int_1^{+\infty} f(t)\,dt.$$

Die gegebene Reihe (7) *konvergiert oder divergiert, je nachdem, ob dieses Integral einen endlichen Grenzwert besitzt oder nicht.*[2])

---

[1]) Dies ist ein sogenanntes *uneigentliches* Integral. Mit diesen Integralen werden wir uns in Kap. XIII beschäftigen.

[2]) In dieser Formulierung können wir das Kriterium leicht beweisen, ohne die Stetigkeit von $f(x)$ vorauszusetzen; wir brauchen nur das bestimmte Integral zu benutzen (das für eine monotone Funktion existiert; vgl. Nr. 298, Satz III).

Das Integralkriterium in dieser Form läßt eine einfache geometrische Deutung zu, die der Maclaurinschen Idee verwandt ist. Stellt man die Funktion $f(x)$ graphisch dar (Abb. 54), so läßt sich das Integral $F(x)$ als Flächeninhalt derjenigen Figur ausdrücken, die von dieser Kurve, der x-Achse und zwei Ordinaten begrenzt wird. Das Integral $F(+\infty)$ kann als Ausdruck für den Inhalt der *ganzen*, nach rechts ins Unendliche erstreckten Fläche unter der Kurve aufgefaßt werden. Andererseits geben die Glieder $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ der Reihe (7) die Ordinaten in den Punkten $x = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ oder, was das gleiche ist, die Flächeninhalte der Rechtecke mit den Grundlinien 1 und den Ordinaten als Höhen an.

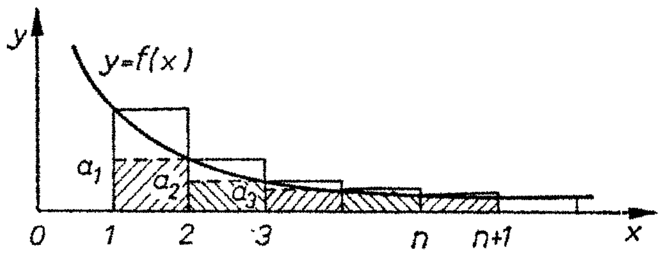

Abb. 54

Somit ist die Summe der Reihe (7) nichts anderes als die Summe der Flächeninhalte der *umbeschriebenen* Rechtecke; sie unterscheidet sich nur durch das erste Glied von der Summe der Flächeninhalte der *einbeschriebenen* Rechtecke. Dadurch ist das oben angegebene Resultat vollkommen anschaulich: Ist der Flächeninhalt einer krummlinigen Figur endlich, so ist der Flächeninhalt der in diese Figur eingeschlossenen Treppenfigur erst recht endlich, und die gegebene Reihe konvergiert; ist der Flächeninhalt der krummlinigen Figur unendlich groß, so ist auch der Inhalt der sie enthaltenden Treppenfigur unendlich groß, so daß in diesem Fall die Reihe divergiert.

Wir geben nun an, wie die Ungleichungen (9) weiter benutzt werden können:

a) Existiert der endliche Grenzwert

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = F(+\infty),$$

so können wir eine bequeme *Abschätzung für den Rest* der gegebenen Reihe angeben. Summieren wir die Ungleichungen

$$a_k < F(k) - F(k-1) < a_{k-1}$$

für $k = n+1, \ldots, n+m$, so erhalten wir

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k < F(n+m) - F(n) < \sum_{k=n}^{n+m-1} a_k$$

und, wenn wir zum Grenzwert für $m \to +\infty$ übergehen,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leqq F(+\infty) - F(n) \leqq \sum_{k=n}^{\infty} a_k$$

oder

$$F(+\infty) - F(n+1) \leqq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leqq F(+\infty) - F(n). \tag{10}$$

Dies ist die gesuchte Abschätzung nach oben bzw. nach unten.[1])

Für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\sigma}}$ $(\sigma > 0)$ ist z. B.

$$f(x) = \frac{1}{x^{1+\sigma}}, \quad F(x) = -\frac{1}{\sigma \cdot x^{\sigma}}, \quad F(+\infty) = 0$$

und

$$\frac{1}{\sigma}\frac{1}{(n+1)^{\sigma}} \leqq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\sigma}} \leqq \frac{1}{\sigma}\frac{1}{n^{\sigma}}. \tag{11}$$

b) Wächst die Funktion $F(x)$ mit x über alle Grenzen, so gestattet sie, die Geschwindigkeit zu beurteilen, mit der eine Partialsumme der gegebenen Reihe wächst. Wir betrachten die Ungleichungen

$$0 < f(k) - [F(k+1) - F(k)] < f(k) - f(k+1);$$

aus ihnen erhalten wir, wenn wir sie für $k = 1, \ldots, n$ summieren, eine wachsende, aber beschränkte Zahlenfolge:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - [F(n+1) - F(1)] < f(1) - f(n+1) < f(1).$$

Sie konvergiert gegen einen endlichen Grenzwert. Dasselbe gilt auch für die Folge der Zahlen

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - F(n+1).$$

Ist C ihr Grenzwert und bezeichnet α_n eine mit wachsendem n unendlich klein werdende Größe, durch die sich die Glieder dieser Folge von dem Grenzwert unterscheiden, so gelangen wir zu der Formel

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = F(n+1) + C + \alpha_n.$$

Beispielsweise ist $F(x) = \ln x$ im Fall $f(x) = \frac{1}{x}$; damit erhalten wir wieder die Formel (4) aus Nr. 367.

---

[1]) Aus $F(n+m) - F(n) = \int_n^{n+m} f(t)\,dt$ folgt für $m \to \infty$ das uneigentliche Integral

$$F(+\infty) - F(n) = \int_n^{+\infty} f(t)\,dt.$$

Daher läßt sich (10) auch folgendermaßen schreiben:

$$\int_{n+1}^{\infty} f(t)\,dt \leqq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \equiv \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leqq \int_n^{\infty} f(t)\,dt. \tag{10a}$$

374. Das Ermakoffsche Kriterium. Den annähernd gleichen Anwendungsbereich wie das Integralkriterium hat auch das originelle Kriterium, das von W. P. Ermakoff[1]) stammt. Dieses Kriterium enthält in seiner Formulierung keine Begriffe der Integralrechnung.

Ermakoffsches Kriterium. *Die Funktion $f(x)$ sei stetig*[2]), *positiv und monoton fallend für $x > 1$.*[3]) *Dann ist die Reihe* (7) *konvergent, wenn für hinreichend große x (etwa für $x \geqq x_0$) die Ungleichung*

$$\frac{f(e^x)\cdot e^x}{f(x)} \leqq q < 1$$

gilt, und divergent, wenn (für $x \geqq x_0$)

$$\frac{f(e^x)\cdot e^x}{f(x)} \geqq 1$$

gilt.

Beweis. Die erste Ungleichung sei erfüllt. Für jedes $x \geqq x_0$ gilt dann (Sustitution $t = e^u$)

$$\int\limits_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)\,dt = \int\limits_{x_0}^{x} f(e^u)\,e^u\,du \leqq q\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt;$$

daraus folgt

$$(1-q)\int\limits_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)\,dt \leqq q\left[\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \int\limits_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)\,dt\right]$$

$$= q\left[\int\limits_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)\,dt - \int\limits_{x}^{e^x} f(t)\,dt\right] \leqq q\int\limits_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)\,dt,$$

denn es ist

$$e^x > x, \tag{12}$$

der Subtrahend in der zweiten eckigen Klammer also positiv. In diesem Fall gilt

$$\int\limits_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)\,dt \leqq \frac{q}{1-q}\int\limits_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)\,dt;$$

fügen wir zu beiden Seiten das Integral $\int\limits_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)\,dt$ hinzu, so erhalten wir

$$\int\limits_{x_0}^{e^x} f(t)\,dt \leqq \frac{1}{1-q}\int\limits_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)\,dt = L$$

und daraus, unter Berücksichtigung von (12),

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt \leqq L \qquad (x \geqq x_0).$$

Da mit wachsendem x auch das Integral wächst, besitzt es für $x \to \infty$ einen endlichen

[1]) Wassili Petrowitsch Ermakoff, 1845—1922, russischer Mathematiker.

[2]) Auf die Forderung nach Stetigkeit kann eigentlich verzichtet werden. Vgl. die Fußnote 2 auf S. 265.

[3]) Vgl. die Fußnote 2 auf S. 264.

Grenzwert

$$\int_{x_0}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t;$$

nach dem Integralkriterium ist die Reihe (7) also konvergent.

Nun sei die zweite Ungleichung erfüllt. Dann ist

$$\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)\,\mathrm{d}t \geqq \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

und, wenn zu beiden Seiten das Integral $\int_{x}^{e^{x_0}} f(t)\,\mathrm{d}t$ addiert wird,

$$\int_{x}^{e^x} f(t)\,\mathrm{d}t \geqq \int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)\,\mathrm{d}t = \gamma > 0$$

(denn wegen (12) ist $x_0 < e^{x_0}$). Jetzt bilden wir eine Zahlenfolge $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n, \ldots$ durch die Festsetzung $x_n = e^{x_{n-1}}$; nach dem Bewiesenen ist

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t)\,\mathrm{d}t \geqq \gamma,$$

also

$$\int_{x_0}^{x_n} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t \geqq n\gamma.$$

Damit ist klar, daß

$$\int_{x_0}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$$

gilt, d. h., nach dem Integralkriterium ist die Reihe (7) divergent.

Die Beispiele aus Nr. 373 lassen sich auch leicht mit Hilfe des eben bewiesenen Kriteriums behandeln:

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^{1+\sigma} n}$ $(\sigma > 0)$. In diesem Fall ist $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln^{1+\sigma} x}$ und

$$\frac{f(e^x)\cdot e^x}{f(x)} = \frac{\ln^{1+\sigma} x}{x^\sigma} \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \infty,$$

d. h., dieser Ausdruck ist für hinreichend große x kleiner als jeder echte Bruch q; die Reihe ist also konvergent.

2. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln\ln n}$. Hier ist $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln\ln x}$ und

$$\frac{f(e^x)\cdot e^x}{f(x)} = \ln\ln x \to \infty \quad \text{für} \quad x \to \infty;$$

dieser Ausdruck ist also für hinreichend große x größer als 1, d. h., die Reihe divergiert.

3. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot (\ln \ln n)^{1+\sigma}}$ $(\sigma > 0)$. Hier ist

$$f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot (\ln \ln x)^{1+\sigma}},$$

$$\frac{f(e^x) \cdot e^x}{f(x)} = \frac{(\ln \ln x)^{1+\sigma}}{\ln^\sigma x} \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \infty,$$

d. h., die Reihe konvergiert.

Abschließend bemerken wir, daß die im Ermakoffschen Kriterium auftretende Funktion e^x auch durch jede andere Funktion $\varphi(x)$ ersetzt werden kann; $\varphi(x)$ muß nur monoton wachsen, positiv sein, eine stetige Ableitung haben und der Ungleichung

$$\varphi(x) > x \tag{12*}$$

genügen, durch die (12) ersetzt wird. Der Beweis verläuft ganz analog dem obigen. Somit ist das Ermakoffsche Kriterium in seiner allgemeinen Form eine Quelle, aus der man zahlreiche Kriterien, entsprechend der Wahl von $\varphi(x)$, schöpfen kann.

375. Ergänzungen.

1. Wir benutzen die Abschätzungen (11), um das Verhalten der *Riemannschen Zetafunktion*

$$\zeta(1 + \sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\sigma}}$$

(vgl. Nr. 365, Beispiel 2), die nur für $\sigma > 0$ definiert ist, im Fall $\sigma \to 0$ zu untersuchen.

Zunächst setzen wir $n = 0$ in der ersten und $n = 1$ in der zweiten der Ungleichungen (11) und erhalten sofort

$$1 \leqq \sigma \cdot \zeta(1 + \sigma) \leqq 1 + \sigma$$

oder

$$\lim_{\sigma \to 0} \sigma \cdot \zeta(1 + \sigma) = 1.$$

Zu einem schärferen Resultat kommen wir, wenn wir von der offenbar gültigen Gleichung

$$\zeta(1 + \sigma) = 1 + \frac{1}{2^{1+\sigma}} + \cdots + \frac{1}{n^{1+\sigma}} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\sigma}}$$

ausgehen und die Gleichungen (11) für ein beliebiges n anwenden:

$$1 + \frac{1}{2^{1+\sigma}} + \cdots + \frac{1}{n^{1+\sigma}} + \frac{1}{\sigma}\left[\frac{1}{(n+1)^\sigma} - 1\right]$$
$$< \zeta(1 + \sigma) - \frac{1}{\sigma} < 1 + \frac{1}{2^{1+\sigma}} + \cdots + \frac{1}{n^{1+\sigma}} + \frac{1}{\sigma}\left[\frac{1}{n^\sigma} - 1\right].$$

Daraus erhalten wir für $\sigma \to 0$

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1) \leqq \varliminf_{\sigma \to 0}\left[\zeta(1+\sigma) - \frac{1}{\sigma}\right] \leqq \varlimsup_{\sigma \to 0}\left[\zeta(1+\sigma) - \frac{1}{\sigma}\right]$$
$$\leqq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$$[1]

---

[1] Wir wissen bis jetzt nicht, ob ein Grenzwert des Ausdrucks $\zeta(1 + \sigma) - \frac{1}{\sigma}$ für $\sigma \to 0$ existiert; deshalb benutzen wir den lim sup und den lim inf (Nr. 42). Die Grenzwerte von $\frac{1}{\sigma}\left[\frac{1}{n^\sigma} - 1\right]$ und $\frac{1}{\sigma}\left[\frac{1}{(n+1)^\sigma} - 1\right]$ finden wir mit Hilfe der Formel aus Nr. 77, Beispiel 5 (b).

Hier können wir n gegen ∞ streben lassen. Da der erste und der letzte Ausdruck dabei wegen (4) aus Nr. 367 gegen die Eulersche Konstante C streben, stimmen der obere und der untere Grenzwert überein, so daß ein gemeinsamer Grenzwert existiert und

$$\lim_{\sigma\to 0}\left[\zeta(1+\sigma)-\frac{1}{\sigma}\right]=C$$

ist (diese Resultate stammen von DIRICHLET[1])).

2. *Die Glieder der Reihe* (A) *aus Nr.* 368 *mögen monoton abnehmen; dann ist die Reihe* (A) *konvergent oder divergent, je nachdem, ob die Reihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ *konvergiert oder divergiert* (A. CAUCHY).

Einerseits ist nämlich

$$A_{2^k} < a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) < a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k},$$

andererseits

$$A_{2^k} = a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k})$$
$$> \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + \cdots + a^{k-1}a_{2^k} = \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^k a_{2^k}).$$

Daraus folgt sofort die Behauptung.

Zum Beispiel stimmt das Verhalten der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ mit dem der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k\cdot\frac{1}{2^k}=\sum 1$ überein, die offenbar divergiert. Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\sigma}}$ $(\sigma>0)$ konvergiert wie die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k\cdot\frac{1}{2^{k(1+\sigma)}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k\sigma}}$. Die Reihe $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ divergiert, denn die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k\cdot\frac{1}{2^k\ln 2^k}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot\ln 2}$ ist divergent, usw.

In diesem Satz kann die Vergleichsreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ auch durch die allgemeinere Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} m^k a_{m^k}$ ersetzt werden, wobei m eine beliebige natürliche Zahl bedeutet.

3. Es sei (A) eine beliebige *konvergente* Reihe. Welche Schlußfolgerungen können über die Größenordnung des allgemeinen Gliedes a_n im Vergleich zu $1/n$ gezogen werden?

Vor allem ist klar: Sind diese unendlich kleinen Größen überhaupt miteinander vergleichbar (Nr. 60), d. h. existiert ein Grenzwert

$$\lim\frac{a_n}{\frac{1}{n}}=\lim na_n=c,$$

so ist notwendig $c=0$, also

$$a_n=o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{13}$$

Würde nämlich (13) nicht gelten, so wäre infolge der Divergenz der harmonischen Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ auch die gegebene Reihe divergent (vgl. Nr. 366, Satz 2).

Ein solcher Grenzwert existiert jedoch im allgemeinen nicht, wie am Beispiel der Reihe

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10^2}+\cdots$$

ersichtlich ist. Die Konvergenz dieser Reihe ist klar nach Gegenüberstellung mit der Reihe

[1]) PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET, 1805—1859, deutscher Mathematiker.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Ist n keine Quadratzahl, so ist für dieses n

$$na_n = \frac{1}{n},$$

anderenfalls $na_n = 1$.

Nehmen die Glieder einer Reihe monoton ab, so ist für die Konvergenz dieser Reihe die Bedingung (13) *notwendig*. Für alle m und n mit $n > m$ gilt nämlich

$$(n - m)\, a_n < a_{m+1} + \cdots + a_n < \alpha_m,$$

wobei α_m der Rest der Reihe nach dem m-ten Glied ist. Daraus folgt

$$na_n < \frac{n}{n - m}\, \alpha_m.$$

Wir wählen m zunächst so, daß α_m kleiner als eine beliebig vorgegebene Zahl $\varepsilon > 0$ ist. Setzen wir jetzt n so groß voraus, daß

$$\frac{n}{n - m} < \frac{\varepsilon}{\alpha_m}$$

gilt, so ist gleichzeitig $na_n < \varepsilon$, was zu beweisen war.

Wir weisen abschließend darauf hin, daß die Bedingung (13) sogar bei Reihen mit monoton abnehmenden Gliedern *keineswegs hinreichend* für die Konvergenz ist. Dies sehen wir am Beispiel der Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

4. *Ist eine Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ *divergent und bezeichnet* D_n *ihre* n*-te Partialsumme, so ist die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{D_n}$ *ebenfalls divergent, während die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{D_n^{1+\sigma}}$ $(\sigma > 0)$ *konvergiert* (N. H. Abel und U. Dini[1])).

Es gilt

$$\frac{d_{n+1}}{D_{n+1}} + \cdots + \frac{d_{n+m}}{D_{n+m}} > \frac{d_{n+1} + \cdots + d_{n+m}}{D_{n+m}} = 1 - \frac{D_n}{D_{n+m}}.$$

Zu jedem noch so großen n läßt sich stets ein m derart finden, daß $\frac{D_n}{D_{n+m}} < \frac{1}{2}$ und folglich

$$\frac{d_{n+1}}{D_{n+1}} + \cdots + \frac{d_{n+m}}{D_{n+m}} > \frac{1}{2}$$

ist. Bei der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{D_n}$ ist also die Bedingung 2° aus Nr. 364 für die Konvergenz nicht erfüllt; die Reihe ist somit divergent.

Zum Beweis der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{D_n^{1+\sigma}}$ benutzen wir ein Verfahren, das dem von Cauchy angewendeten ähnlich ist (Nr. 373).

Wir wenden auf die Funktion $\int \frac{dx}{x^{1+\sigma}} = -\frac{1}{\sigma} \frac{1}{x^\sigma}$ im Intervall $[D_{n-1}, D_n]$ den Mittelwertsatz der Differentialrechnung an:

$$\frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{D_{n-1}^\sigma} - \frac{1}{D_n^\sigma}\right) = \frac{d_n}{\bar{D}_n^{1+\sigma}} \quad (D_{n-1} < \bar{D}_n < D_n).$$

---

[1]) Ulisse Dini, 1845—1918, italienischer Mathematiker.

Da die Glieder der betrachteten Reihe kleiner sind als die entsprechenden Glieder der konvergenten Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{D_{n-1}^{\sigma}} - \frac{1}{D_n^{\sigma}}\right)$, ist damit die Behauptung bewiesen.

5. *Ist eine Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *konvergent und bezeichnet* γ_n *ihren Rest nach dem n-ten Glied, so ist die Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\gamma_{n-1}}$ *divergent, während die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\gamma_{n-1}^{1-\sigma}} \qquad (0 < \sigma < 1)$$

konvergiert (U. Dini).

Der Beweis verläuft analog zum vorhergehenden.

6. Das folgende Konvergenzkriterium wurde von N. A. Sapogow[1]) angegeben: *Ist* u_n *eine positive, monoton wachsende Zahlenfolge, so konvergiert die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{u_n}{u_{n+1}}\right) \qquad \left[\textit{sowie}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1\right)\right],$$

wenn diese Zahlenfolge beschränkt ist; anderenfalls ist die Reihe divergent.

Wir setzen (für $n = 1, 2, 3, \ldots$)

$$d_n = u_{n+1} - u_n, \qquad D_n = \sum_{k=1}^{n} d_k = u_{n+1} - u_1.$$

Dann kann die gegebene Reihe in der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{D_n + u_1}$$

geschrieben werden; ihr Verhalten stimmt mit dem von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{D_n},$$

also auch mit dem von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ überein (ist die letzte Reihe divergent, so kann man auf das Resultat von Abel und Dini verweisen; vgl. S. 272). Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ ist konvergent oder divergent, je nachdem, ob die Folge der Zahlen u_n beschränkt ist oder nicht.

7. Gegeben seien zwei konvergente Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n'.$$

Man sagt, die zweite Reihe *konvergiere langsamer* als die erste, wenn der Rest γ_n' der zweiten Reihe von niedrigerer Ordnung gegen 0 strebt als der Rest γ_n der ersten Reihe:

$$\lim \frac{\gamma_n}{\gamma_n'} = 0.$$

Zu jeder konvergenten Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *läßt sich eine langsamer konvergierende Reihe konstruieren.*

---

[1]) Nikolai Alexandrowitsch Sapogow, geb. 1915, sowjetischer Mathematiker.

Zum Beispiel brauchen wir nur die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c'_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\gamma_{n-1}} - \sqrt{\gamma_n}\right)$$

zu betrachten,[1]) da in diesem Fall $\gamma'_n = \sqrt{\gamma_n}$ ist.

Wir untersuchen nun zwei divergente Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} d'_n .$$

Man sagt, die zweite Reihe *divergiere langsamer* als die erste, wenn ihre Partialsumme D'_n von niedrigerer Ordnung unendlich groß wird als die Partialsumme D_n der ersten Reihe:

$$\lim \frac{D'_n}{D_n} = 0 .$$

Zu jeder divergenten Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ *läßt sich eine langsamer divergierende Reihe konstruieren.* Zu diesem Zweck braucht man z. B. nur die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} d'_n = \sqrt{D_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{D_n} - \sqrt{D_{n-1}}\right)$$

zu nehmen; hier ist $D'_n = \sqrt{D_n}$.

Analoge Schlüsse lassen sich auch mit Hilfe der in Punkt 4 und 5 betrachteten Reihen ziehen.

Die angegebenen Beispiele führen auf die folgende Behauptung von grundlegender Wichtigkeit: *Es gibt keine konvergente (divergente) Reihe, die stets als Vergleichsreihe*[2]) *zur Bestimmung der Konvergenz (Divergenz) einer Reihe herangezogen werden kann.* Dies ist klar ersichtlich aus den Beziehungen

$$\frac{c_n}{c'_n} = \frac{\gamma_{n-1} - \gamma_n}{\sqrt{\gamma_{n-1}} - \sqrt{\gamma_n}} = \sqrt{\gamma_{n-1}} + \sqrt{\gamma_n} \to 0$$

und

$$\frac{d_n}{d'_n} = \frac{D_n - D_{n-1}}{\sqrt{D_n} - \sqrt{D_{n-1}}} = \sqrt{D_n} + \sqrt{D_{n-1}} \to \infty .$$

8. Gegeben seien zwei Folgen positiver Zahlen

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \quad \text{und} \quad b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

Für jedes n genügen die ersten n Zahlen dieser Folgen der Hölderschen Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right\}^{1/k} \cdot \left\{\sum_{i=1}^{n} b_i^{k'}\right\}^{1/k'}$$

und der Minkowskischen Ungleichung

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^k\right\}^{1/k} \leq \left\{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^k\right\}^{1/k} + \left\{\sum_{i=1}^{\infty} b_i^k\right\}^{1/k}$$

(vgl. Nr. 133, Formel (5) und (7)). Hier ist k eine beliebige Zahl > 1; k' ist eine andere Zahl > 1, die mit k durch

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$$

---

[1]) Für γ_0 nehmen wir die ganze Summe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

[2]) Zum Vergleich mit Hilfe eines beliebigen der Sätze aus Nr. 366.

verknüpft ist. Für $n \to \infty$ erhalten wir ähnliche Ungleichungen für unendliche Reihen:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \leqq \left\{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^k\right\}^{1/k} \cdot \left\{\sum_{i=1}^{\infty} b_i^{k'}\right\}^{1/k'}$$

und

$$\left\{\sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i)^k\right\}^{1/k} \leqq \left\{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^k\right\}^{1/k} + \left\{\sum_{i=1}^{\infty} b_i^k\right\}^{1/k};$$

dabei zieht die Konvergenz der Reihen auf den rechten Seiten die der Reihen auf den linken Seiten nach sich.

§ 3. Die Konvergenz beliebiger Reihen

376. Allgemeine Bedingung für die Konvergenz einer Reihe. Wir wenden uns nun der Frage nach der Konvergenz von Reihen zu, deren Glieder beliebiges Vorzeichen haben. Da sich nach Definition die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{A}$$

auf die Konvergenz der aus den *Partialsummen* von (A) gebildeten Folge

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots, A_{n+m}, \ldots \tag{1}$$

zurückführen läßt, kann auf diese Folge das *allgemeine Konvergenzprinzip* (Nr. 39) angewendet werden. Von den beiden Indizes n und n', die dort auftreten, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $n' > n$ annehmen und $n' = n + m$ setzen, wobei m eine beliebige natürliche Zahl ist. Berücksichtigen wir noch die Beziehung

$$A_{n+m} - A_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m},$$

so können wir das allgemeine Konvergenzprinzip in bezug auf eine Reihe folgendermaßen formulieren:

Die Reihe (A) *ist genau dann konvergent, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N derart gibt, daß für $n > N$ die Ungleichung*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}| < \varepsilon \tag{2}$$

für $m = 1, 2, 3, \ldots$ erfüllt ist.[1])

Mit anderen Worten: *Die Summe beliebig vieler Glieder, denen hinreichend viele Glieder vorausgehen, muß beliebig klein sein.*

Setzen wir die Reihe als konvergent voraus und nehmen wir in (2) insbesondere $m = 1$ an, so erhalten wir

$$|a_{n+1}| < \varepsilon \qquad (\text{für } n > N),$$

so daß a_{n+1} oder, was dasselbe ist, a_n gegen 0 strebt; damit gelangen wir von neuem zu der bekannten notwendigen Bedingung für die Konvergenz einer Reihe (vgl. 5° aus

1) Bolzano und Cauchy formulierten das Konvergenzprinzip gerade als Bedingung für die Konvergenz einer unendlichen Reihe.

Nr. 364). Diese Bedingung fordert wesentlich weniger als das Konvergenzprinzip: Notwendig ist, daß nicht nur die weiter entfernten Glieder einzeln klein sind, sondern auch die Summe beliebig vieler weiter entfernter Glieder muß klein sein! In diesem Zusammenhang ist es lehrreich, zu der harmonischen Reihe (vgl. Nr. 365, Beispiel 1) und zu der für ihre Glieder geltenden Ungleichung (1*) aus Nr. 365 zurückzukehren. Obwohl hier das allgemeine Glied gegen 0 strebt, ist die obige Ungleichung (2) für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und $m = n$ für kein n erfüllt; die harmonische Reihe ist also divergent.

Man muß jedoch erwähnen, daß die Nachprüfung, ob die angegebene allgemeine Bedingung für die Konvergenz einer Reihe erfüllt ist, in konkreten Fällen gewöhnlich sehr schwierig ist. Deshalb untersuchen wir eine Reihe von Fällen, bei denen das Problem mit Hilfe einfacher Mittel gelöst werden kann.

377. Die absolute Konvergenz. Wir sahen in § 2, daß sich bei positiven Reihen die Konvergenz dank geeigneter Kriterien meistens leicht feststellen läßt. Deshalb beginnen wir natürlich mit jenen Fällen, bei denen die Frage nach der Konvergenz einer Reihe auf die Frage nach der Konvergenz einer positiven Reihe führt.

Wenn die Glieder einer Reihe nicht alle positiv sind, sondern erst von einer gewissen Stelle an, so läßt man hinreichend viele Anfangsglieder der Reihe fort (vgl. 1° aus Nr. 364) und führt so das Problem auf die Untersuchung einer positiven Reihe zurück. Sind die Glieder der Reihe von einer gewissen Stelle an negativ, so gelangen wir durch Änderung der Vorzeichen aller Glieder zu dem schon betrachteten Fall (vgl. 3° aus Nr. 364). Deshalb ist wesentlich neu nur der Fall, daß unter den Gliedern der Reihe sowohl unendlich viele positive als auch unendlich viele negative Glieder auftreten. Hier ist oft der folgende allgemeine Satz nützlich:

Satz. *Die Glieder der Reihe* (A) *mögen verschiedene Vorzeichen besitzen. Konvergiert die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots, \tag{A*}$$

die sich aus den Absolutbeträgen der Glieder von (A) *zusammensetzt, so konvergiert auch die gegebene Reihe.*

Beweis. Er ergibt sich sofort aus dem Konvergenzprinzip: Die Ungleichung

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}| \leqq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+m}|$$

zeigt, daß die Konvergenzbedingung erst recht für die Reihe (A) erfüllt ist, wenn sie für die Reihe (A*) gilt.

Man kann auch anders schließen. Aus den positiven Gliedern von (A) bilden wir unter Beibehaltung der Reihenfolge die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = p_1 + p_2 + \cdots + p_k + \cdots. \tag{P}$$

Ebenso verfahren wir mit den negativen Gliedern und bilden die Reihe aus ihren absoluten Größen:

$$\sum_{m=1}^{\infty} q_m = q_1 + q_2 + \cdots + q_m + \cdots. \tag{Q}$$

Wieviel Glieder der einen oder anderen Reihe man auch nimmt, sie befinden sich alle unter den Gliedern der konvergenten Reihe (A*), und für alle Partialsummen P_k und Q_m sind die Ungleichungen

$$P_k \leqq A^*, \qquad Q_m \leqq A^*$$

erfüllt, so daß beide Reihen (P) und (Q) konvergieren (Nr. 365). Wir bezeichnen ihre Summen mit P bzw. Q.

Wenn wir n Glieder der Reihe (A) betrachten, so befinden sich k positive und m negative unter ihnen, so daß

$$A_n = P_k - Q_m$$

ist. Hierin hängen die Zahlen k und m von n ab. Sind in (A) sowohl unendlich viele positive als auch unendlich viele negative Glieder enthalten, so ist für $n \to \infty$ gleichzeitig $k \to \infty$ und $m \to \infty$.

Geht man in dieser Gleichung zur Grenze über, so gelangt man aufs neue zu der Schlußfolgerung, daß die Reihe (A) konvergiert, wobei ihre Summe gleich

$$A = P - Q \tag{3}$$

ist. Man kann sagen: *Unter den obigen Voraussetzungen ist die Summe einer gegebenen Reihe gleich der Differenz zwischen der Summe der Reihe aus ihren positiven Gliedern und der Summe der Reihe aus den absoluten Größen ihrer negativen Glieder.* Dies werden wir im folgenden benutzen.

Konvergiert die Reihe (A) zusammen mit der Reihe (A*), die aus den Absolutbeträgen der Glieder von (A) gebildet ist, dann sagen wir, die Reihe (A) *konvergiere absolut*. Nach dem bewiesenen Satz ist für die absolute Konvergenz der Reihe (A) allein die Konvergenz der Reihe (A*) hinreichend.

Wie wir weiter unten sehen werden, gibt es Fälle, bei denen die Reihe (A) konvergiert, die Reihe (A*) aber nicht. Dann heißt die Reihe (A) *nicht-absolut* (oder *bedingt*) *konvergent*.

Zum Nachweis der absoluten Konvergenz der Reihe (A) können auf die positive Reihe (A*) alle in § 2 studierten Konvergenzkriterien angewendet werden. Man muß jedoch mit den Divergenzkriterien vorsichtig sein: Selbst wenn die Reihe (A*) divergiert, kann die Reihe (A) doch konvergieren (nicht-absolut). Ausnahmen stellen nur die Kriterien von CAUCHY und D'ALEMBERT dar; denn wenn man mit ihrer Hilfe die Divergenz der Reihe (A*) feststellt, so bedeutet dies, daß das allgemeine Glied $|a_n|$ der Reihe (A*) nicht gegen 0 strebt;[1]) damit strebt auch a_n nicht gegen 0, so daß auch die Reihe (A) divergiert. Deshalb können die genannten Kriterien umgeschrieben und auf beliebige Reihen angewendet werden: Das d'Alembertsche Kriterium, welches in der Praxis am häufigsten benutzt wird, lautet dann:

d'Alembertsches Kriterium. *Für die Folge der Zahlen* $\mathfrak{D}_n^* = \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ *existiere ein bestimmter Grenzwert*

$$\mathfrak{D}^* = \lim \mathfrak{D}_n^*;$$

dann ist die Reihe (A) *für* $\mathfrak{D}^* < 1$ *absolut konvergent, für* $\mathfrak{D}^* > 1$ *divergent.*

378. Beispiele.

1. Man wende das d'Alembertsche Kriterium auf die Reihen (a) bis (e) aus Nr. 370, Beispiel 2, an und lasse die Forderung $x > 0$ fallen. Wir erhalten, daß

(a) die Reihe für alle x absolut konvergiert;

[1]) Siehe S. 254, Fußnote 5, und S. 255, Fußnote 2.

(b) die Reihe für $-1 < x < 1$ absolut konvergiert, für $x \geqq 1$ und $x \leqq -1$ divergiert (für $x = \pm 1$ ist die notwendige Bedingung für die Konvergenz nicht erfüllt);

(c) die Reihe für $-1 < x < 1$ absolut konvergiert, für $x > 1$ und $x < -1$ divergiert; im Fall $s > 1$ ist die Reihe für $x = \pm 1$ ebenfalls absolut konvergent; im Fall $0 < s \leqq 1$ divergiert die Reihe offenbar für $x = 1$, für $x = -1$ bleibt diese Frage offen;

(d) die Reihe für $-\mathrm{e} < x < \mathrm{e}$ absolut konvergiert und für $x \geqq \mathrm{e}$ und $x \leqq -\mathrm{e}$ divergiert (im Fall $x = \pm \mathrm{e}$ ist die notwendige Bedingung für die Konvergenz nicht erfüllt);

(e) die Reihe für $-\frac{1}{\mathrm{e}} < x < \frac{1}{\mathrm{e}}$ absolut konvergiert, für $x \geqq \frac{1}{\mathrm{e}}$ und $x < -\frac{1}{\mathrm{e}}$ divergiert (für $x = -\frac{1}{\mathrm{e}}$ bleibt die Frage vorläufig offen).

2. $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$ $(x \neq -1)$. Hier ist

$$\mathfrak{D}_n^* = \frac{|x|}{|1+x^n|}, \quad \mathfrak{D}^* = \begin{cases} |x| & \text{für} \quad -1 < x < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{für} \quad x = 1, \\ 0 & \text{für} \quad x < -1 \text{ oder } x > 1; \end{cases}$$

damit konvergiert die gegebene Reihe absolut für alle Werte $x \neq -1$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ $(x \neq \pm 1)$. Hier ist

$$\mathfrak{D}_n^* = \left|\frac{x - x^{n+1}}{1 - x^{n+1}}\right|, \quad \mathfrak{D}^* = \begin{cases} |x| & \text{für} \quad -1 < x < 1, \\ 1 & \text{für} \quad x > 1 \text{ oder } x < -1. \end{cases}$$

Für $|x| < 1$ konvergiert die Reihe absolut; für $|x| > 1$ gibt das d'Alembertsche Kriterium keine Auskunft, man kann aber sagen, daß die Reihe divergiert, denn die notwendige Bedingung ($a_n \to 0$) für die Konvergenz ist nicht erfüllt.

4. Wir betrachten nun noch einmal die hypergeometrische Reihe (Nr. 372)

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} x^n$$

für beliebige α, β, γ, x zurück (die Parameter α, β, γ sollen von 0 und allen negativen ganzen Zahlen verschieden sein).

Verwenden wir das d'Alembertsche Kriterium in der neuen Form, so können wir uns leicht überzeugen, daß diese Reihe für $|x| < 1$ absolut konvergiert, für $|x| > 1$ divergiert.

Es sei nun $x = 1$; da der Quotient

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\gamma - \alpha - \beta + 1}{n} + \frac{\theta_n}{n^2} \qquad (|\theta_n| \leqq L)$$

für hinreichend große n positiv ist, haben die Glieder der Reihe von einer gewissen Stelle ab ein und dasselbe Vorzeichen. Wir wenden dann auf sie (oder ihre Absolutbeträge) wie früher das Gaußsche Kriterium an und erhalten, daß die Reihe für $\gamma - \alpha - \beta > 0$ konvergiert (selbstverständlich *absolut*) und für $\gamma - \alpha - \beta \leqq 0$ divergiert.

Schließlich sei $x = -1$. Aus dem eben Gesagten ist klar, daß die Reihe aus den absoluten Beträgen der Glieder von $F(\alpha, \beta, \gamma, -1)$ für $\gamma - \alpha - \beta > 0$ konvergiert, so daß die gegebene Reihe an diesem Fall absolut konvergiert. Für $\gamma - \alpha - \beta < -1$ gilt von einer gewissen Stelle an

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| < 1, \quad \text{also} \quad |a_n| < |a_{n+1}|;$$

a_n strebt nicht gegen 0, die Reihe ist also divergent. Im Fall $x = -1$ und $-1 \leqq \gamma - \alpha - \beta \leqq 0$ bleibt die Frage nach der Konvergenz der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, -1)$ einstweilen offen.

379. Die Potenzreihe und ihr Konvergenzbereich. Wir betrachten eine Potenzreihe, d. h. eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x + \cdots + a_n x^n + \cdots, \tag{4}$$

also ein „unendliches Polynom“, das nach wachsenden Potenzen von x geordnet ist ($a_0, a_1, a_2, \ldots$ sind hier konstante Koeffizienten). Wir hatten schon früher zuweilen mit solchen Potenzreihen zu tun (vgl. z. B. Nr. 378, Beispiel 1 (a)—(e)).

Wir wollen nun klären, welche Form der Konvergenzbereich einer Potenzreihe hat, d. h., wir suchen die Menge $\mathscr{X} = \{x\}$ jener Werte der Veränderlichen, für welche die Reihe (4) konvergiert.

Hilfssatz. *Ist die Reihe* (4) *für einen von* 0 *verschiedenen Wert* $x = \bar{x}$ *konvergent, so konvergiert sie absolut für jedes* x, *das der Ungleichung* $|x| < |\bar{x}|$ *genügt.*

Aus der Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{x}^n = a_0 + a_1 \bar{x} + a_2 \bar{x}^2 + \cdots + a_n \bar{x}^n + \cdots$$

folgt, daß ihr allgemeines Glied gegen 0 strebt (vgl. 5° aus Nr. 364) und folglich erst recht bezüglich n beschränkt ist (vgl. Satz 4 aus Nr. 26):

$$|a_n \bar{x}^n| \leqq M \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Wir betrachten jetzt ein beliebiges x, für welches $|x| < |\bar{x}|$ gilt, und bilden die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \cdots + |a_n x^n| + \cdots. \tag{6}$$

Wegen

$$|a_n x^n| = |a_n \bar{x}^n| \cdot \left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^n \leqq M \cdot \left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^n$$

(vgl. (5)) sind die Glieder der Reihe (6) kleiner als die entsprechenden Glieder der konvergenten geometrischen Reihe (mit dem Quotienten $\left|\frac{x}{\bar{x}}\right| < 1$)

$$M + M \cdot \left|\frac{x}{\bar{x}}\right| + M \cdot \left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^2 + \cdots + M \cdot \left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^n + \cdots.$$

Auf Grund von Satz 1 aus Nr. 366 konvergiert dann die Reihe (6). In diesem Fall konvergiert, wie wir wissen, die Reihe (4) *absolut*, was zu beweisen war.

Für $x = 0$ konvergiert offenbar jede Reihe (4). Es gibt jedoch Potenzreihen, die, abgesehen von $x = 0$, für keinen anderen Wert von x konvergieren. Als Beispiel für eine derartige „überall divergente“ Reihe kann die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$ dienen, wie man mit Hilfe des d'Alembertschen Kriteriums leicht zeigen kann. Solche Reihen sind für uns ohne Interesse.

Wir setzen nun voraus, daß für die Reihe (4) im allgemeinen solche von 0 verschiedenen Werte $x = \bar{x}$ existieren, für die (4) konvergiert, und betrachten die Menge $\{|\bar{x}|\}$. Diese Menge kann entweder von oben beschränkt sein oder nicht. Im zweiten Fall läßt sich zu jedem x notwendig ein $\bar{x}$ derart finden, daß $|x| < |\bar{x}|$ ist;

dann ist die Reihe (4) auf Grund des Hilfssatzes für das gewählte x absolut konvergent. Eine solche Reihe heißt *überall konvergent* oder *beständig konvergent*.

Nun sei die Menge $\{|\bar{x}|\}$ von oben beschränkt; ihre obere Grenze sei R. Im Fall $|x| > R$ ist sofort klar, daß (4) für diesen Wert von x divergiert. Wir wählen nun ein x mit $|x| < R$. Nach Definition der oberen Grenze gibt es dann notwendig ein $\bar{x}$ mit $|x| < |\bar{x}| \leqq R$; dies zieht jedoch auf Grund des Hilfssatzes wieder die *absolute* Konvergenz der Reihe (4) nach sich.

Im offenen Intervall $(-R, R)$ ist also die Reihe (4) absolut konvergent; für $x > R$ und $x < -R$ ist dann die Reihe offenbar divergent. Nur über die Endpunkte $x = \pm R$ des Intervalls läßt sich im allgemeinen nichts aussagen; dort kann entweder Konvergenz oder Divergenz eintreten. Damit ist (abgesehen von $x = \pm R$) das gestellte Problem gelöst.

Der Konvergenzbereich $\mathfrak{X}$ einer Potenzreihe der Gestalt (4) *ist, wenn diese Reihe nicht überall divergiert, das ganze Intervall von $-R$ bis R* (*einschließlich der Endpunkte oder nicht*); *dieses Intervall kann auch unendlich sein. Im Innern des Intervalls ist die Reihe absolut konvergent.*

Das erwähnte Intervall nennen wir das *Konvergenzintervall*; die Zahl R $(0 < R \leqq +\infty)$ heißt *Konvergenzradius* der Reihe. Bei den Beispielen 1(a)—(e) aus Nr. 378 gilt, wie man leicht sieht, in den einzelnen Fällen:

$$\text{(a) } R = +\infty; \quad \text{(b), (c) } R = 1; \quad \text{(d) } R = \mathrm{e}; \quad \text{(e) } R = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Für eine überall divergente Reihe nimmt man $R = 0$ an; ihr „Konvergenzbereich" reduziert sich auf den einen Punkt $x = 0$.

380. Der Konvergenzradius in Abhängigkeit von den Koeffizienten. Wir beweisen nun einen schärferen Satz, in dem nicht nur behauptet wird, daß ein Konvergenzradius existiert, sondern auch die Größe des Konvergenzradius aus den Koeffizienten der Reihe (4) bestimmt wird.

Wir betrachten die Folge

$$\varrho_1 = |a_1|, \quad \varrho_2 = \sqrt{|a_2|}, \quad \ldots, \quad \varrho_n = \sqrt[n]{|a_n|},$$

Den *oberen Limes* dieser Folge (der stets existiert; vgl. Nr. 42) bezeichnen wir mit ϱ:

$$\varrho = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \varrho_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Satz von Cauchy-Hadamard. *Der Konvergenzradius der Reihe* (4) *ist das Reziproke des oberen Limes ϱ der Folge der Zahlen $\varrho_n = \sqrt[n]{|a_n|}$*:

$$R = \frac{1}{\varrho}$$

dabei ist $R = \infty$ für $\varrho = 0$ und $R = 0$ für $\varrho = \infty$).

Dieser Satz wurde von Cauchy gefunden, geriet aber in Vergessenheit; erst J. Hadamard[1]) entdeckte ihn von neuem und wies auf wichtige Anwendungen hin.

Beweis. Fall I: $\varrho = 0$. Wir zeigen, daß in diesem Fall $R = +\infty$, d. h. die Reihe (4) für jedes x absolut konvergent ist.

---

[1]) Jacques Hadamard, 1865—1963, französischer Mathematiker.

Da die Folge der $\sqrt[n]{|a_n|}$ aus positiven Elementen besteht, ergibt sich aus $\varrho = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0;$$

die Cauchysche Zahlenfolge

$$\mathscr{C}_n = \sqrt[n]{|a_n| \cdot |x|^n} = |x| \cdot \sqrt[n]{|a_n|}$$

strebt für $n \to \infty$ gegen 0 bei beliebigem x. Demzufolge ist nach dem Cauchyschen Kriterium (Nr. 368) die aus den Absolutbeträgen der Glieder von (1) gebildete Reihe konvergent. Die Reihe (1) selbst ist also absolut konvergent.

Fall II: $\varrho = +\infty$. Wir zeigen, daß in diesem Fall $R = 0$ gilt, d. h. die Reihe (1) für jedes $x \neq 0$ divergiert.

Wegen

$$\varrho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$$

gibt es offenbar eine Teilfolge $\{n_i\}$ derart, daß

$$\lim_{i\to\infty} \sqrt[n_i]{|a_{n_i}|} = \infty$$

ist. Folglich kann man zu jedem $x \neq 0$ eine Zahl i_0 derart finden, daß für alle $i > i_0$ die Ungleichung

$$\sqrt[n_i]{|a_{n_i}|} > \frac{1}{|x|} \quad \text{oder} \quad |a_{n_i} x^{n_i}| > 1$$

erfüllt ist. Wir sehen, daß in diesem Fall die wichtigste notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Reihe nicht erfüllt ist (das allgemeine Glied der Reihe strebt nicht gegen 0). Also ist die Reihe (4) divergent.

Fall III: ϱ eine endliche positive Zahl, $0 < \varrho < +\infty$. Wir zeigen, daß in diesem Fall $R = \frac{1}{\varrho}$ ist, d. h., für $|x| < \frac{1}{\varrho}$ ist die Reihe absolut konvergent, für $|x| > \frac{1}{\varrho}$ divergent. Wir wählen zunächst ein beliebiges x mit $|x| < \frac{1}{\varrho}$. Ferner nehmen wir ein so kleines positives ε, daß die Ungleichung

$$|x| < \frac{1}{\varrho + \varepsilon}$$

noch erfüllt ist. Zu diesem ε läßt sich offenbar stets eine solche Zahl N_ε finden, daß für alle $n > N_\varepsilon$

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \varrho + \varepsilon$$

gilt (auf Grund der ersten Eigenschaft des oberen Limes einer Folge; Nr. 42). Daraus ergibt sich, daß die Cauchysche Zahlenfolge der folgenden Ungleichung genügt:

$$\mathscr{C}_n = \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \cdot \sqrt[n]{|a_n|} < |x| \cdot (\varrho + \varepsilon) < 1 \quad \text{für alle} \quad n > N_\varepsilon.$$

Nach dem Cauchyschen Kriterium ist die aus den Absolutbeträgen der Glieder von (4) gebildete Reihe konvergent; das bedeutet, die Reihe (4) selbst konvergiert *absolut*.

Wir nehmen jetzt ein beliebiges x mit $|x| > \frac{1}{\varrho}$ und wählen ε so klein, daß

$$|x| > \frac{1}{\varrho - \varepsilon}$$

gilt. Auf Grund der zweiten Eigenschaft des oberen Limes (Nr. 42) ist für beliebig große n die

Ungleichung

$$\sqrt[n]{|a_n|} > \varrho - \varepsilon$$

erfüllt, so daß

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} > |x| \cdot (\varrho - \varepsilon) > 1$$

gilt. Folglich ist für beliebig große n das allgemeine Glied $|a_n x^n|$ der Reihe größer als 1, d. h., die Reihe (4) divergiert.

381. Alternierende Reihen. Eine Reihe heißt *alternierend*, wenn die Glieder der Reihe abwechselnd positives und negatives Vorzeichen besitzen. Man schreibt eine alternierende Reihe am besten so, daß die Vorzeichen der Glieder erkennbar sind, z. B.

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \cdots + (-1)^{n-1} c_n + \cdots \qquad (c_n > 0). \tag{7}$$

Für die alternierenden Reihen gilt der folgende einfache Satz:

Satz von Leibniz. *Wenn die Glieder der alternierenden Reihe* (7) *ihrem absoluten Betrage nach monoton abnehmen,*

$$c_{n+1} < c_n \qquad (n > 1, 2, 3, \ldots), \tag{8}$$

und gegen 0 *streben,*

$$\lim c_n = 0,$$

so ist die Reihe konvergent.

Beweis. Die Partialsumme C_{2m} mit einer geraden Anzahl von Gliedern kann man in der Form

$$C_{2m} = (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \cdots + (c_{2m-1} - c_{2m})$$

schreiben. Da wegen (8) jede Klammer positiv ist, wächst offenbar die Summe C_{2m} mit wachsendem m. Andererseits sieht man leicht, wenn man C_{2m} auf die Form

$$C_{2m} = c_1 - (c_2 - c_3) - \cdots - (c_{2m-2} - c_{2m-1}) - c_{2m}$$

bringt, daß C_{2m} nach oben beschränkt ist:

$$C_{2m} < c_1.$$

Nach dem Satz über monotone Zahlenfolgen (Nr. 34) hat in diesem Fall die Partialsumme C_{2m} für $m \to \infty$ einen endlichen Grenzwert:

$$\lim_{m\to\infty} C_{2m} = C.$$

Geht man zu der Partialsumme C_{2m-1} mit einer ungeraden Anzahl von Gliedern über, so gilt offenbar $C_{2m-1} = C_{2m} - c_{2m}$. Da das allgemeine Glied gegen 0 strebt, gilt

$$\lim_{m\to\infty} C_{2m-1} = C.$$

Daraus folgt, daß C die Summe der gegebenen Reihe ist.

Bemerkung. Wir sahen, daß sich die Partialsummen mit einer geraden Anzahl von Gliedern *von unten* der Summe C der Reihe nähern. Schreiben wir C_{2m-1} in der

Form

$$C_{2m-1} = c_1 - (c_2 - c_3) - \cdots - (c_{2m-2} - c_{2m-1}),$$

so erkennen wir leicht, daß die Partialsummen mit einer ungeraden Anzahl von Gliedern *von oben* gegen C streben. Deshalb gilt stets

$$C_{2m} < C < C_{2m-1}.$$

Insbesondere kann man behaupten, daß

$$0 < C < c_1$$

gilt.

Auf Grund dieser Beziehungen kann man eine höchst einfache und bequeme Abschätzung für den *Rest* der zu betrachtenden Reihe angeben. (Dieser Rest ist selbst wieder eine alternierende Reihe.) Für

$$\gamma_{2m} = c_{2m+1} - c_{2m+2} + \cdots$$

gilt offenbar

$$0 < \gamma_{2m} < c_{2m+1};$$

umgekehrt ist

$$\gamma_{2m-1} < 0, \qquad |\gamma_{2m-1}| < c_{2m}$$

für

$$\gamma_{2m-1} = -c_{2m} + c_{2m+1} - \cdots = -(c_{2m} - c_{2m+1} + \cdots).$$

Deshalb hat der Rest einer Reihe *vom Leibnizschen Typ*[1]) das Vorzeichen des ersten Gliedes und ist kleiner als der absolute Betrag dieses Gliedes. Dieser Umstand wird oft für Näherungsrechnungen mit Hilfe von Reihen ausgenutzt (vgl. Nr. 409).

382. Beispiele.

1. Einfache Beispiele für Reihen vom Leibnizschen Typ sind

$$\text{(a)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots$$

und

$$\text{(b)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} + \cdots.$$

Die Konvergenz der beiden Reihen folgt aus dem bewiesenen Satz.

Die Reihen, die aus den absoluten Beträgen ihrer Glieder bestehen, divergieren jedoch. Für die Reihe (a) ist dies die harmonische Reihe, für die Reihe (*b*) ergibt sich die Reihe

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \cdots,$$

deren Divergenz offenbar ist, da ihre n-te Partialsumme der Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} H_k$$

---

[1]) Wir bezeichnen so jene alternierenden Reihen, die den Bedingungen des Satzes von Leibniz genügen.

genügt; (a) und (b) sind also erste Beispiele für *nicht-absolut konvergente* Reihen. (Wir werden später sehen, daß die Summe der ersten Reihe gleich $\ln 2$, die Summe der zweiten gleich $\pi/4$ ist; vgl. Nr. 388, Beispiel 2, sowie Nr. 405 und 404).

2. Nach dem Satz von Leibniz konvergieren die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^s n}, \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln n\, (\ln \ln n)^s} \quad (s > 0).$$

Wenn wir alle Glieder durch ihre absoluten Beträge ersetzen, so erhalten wir bekanntlich für $s > 1$ konvergente und für $s \leqq 1$ divergente Reihen. Deshalb sind die Reihen, von denen wir ausgegangen sind, für $s > 1$ *absolut* konvergent und für $s \leqq 1$ *nicht-absolut* konvergent.

Insbesondere kann man jetzt über die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^s}$, die wir in Nr. 370 und 378 betrachtet haben, sagen, daß sie am Endpunkt $x = -1$ ihres Konvergenzintervalls für $s \leqq 1$ noch konvergiert, jedoch nicht-absolut.

3. Wir betrachten die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{x}{n}$ für beliebige $x \neq 0$. Wir können hier den Satz von Leibniz nicht auf die Reihe selbst, jedoch auf einen gewissen Rest anwenden. Für ein hinreichend großes n besitzt $\sin \frac{x}{n}$ dasselbe Vorzeichen wie x, und sein absoluter Betrag nimmt mit wachsendem n ab. Somit konvergiert die Reihe (und zwar nicht-absolut; vgl. Nr. 367, Beispiel 8(c)).

4. Um zu zeigen, daß im Satz von Leibniz die Forderung nach dem monotonen Abnehmen der Zahlen c_n nicht überflüssig ist, betrachten wir die alternierende Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \cdots,$$

deren allgemeines Glied gegen 0 strebt. Die Summe ihrer ersten $2n$ Glieder ist gleich

$$\sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{k}-1} - \frac{1}{\sqrt{k}+1} \right) = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{2}{k-1} = 2H_n$$

und strebt mit n gegen ∞, d. h., die Reihe divergiert. Man kann leicht nachprüfen, daß beim Übergang von dem Glied $-\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ zu dem Glied $\frac{1}{\sqrt{n+1}-1}$ die *Monotonie* jedesmal gestört ist.

Dem gleichen Zweck kann auch die divergente Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right)$$

dienen. Wir überlassen es dem Leser, sich davon zu überzeugen.

5. Die letzte Reihe gibt Anlaß zu der folgenden Bemerkung. Wenn man die Reihe mit der konvergenten Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ vergleicht, so bemerkt man, daß der Quotient der allgemeinen Glieder gegen 1 strebt. Deshalb hat der Satz 2 aus Nr. 366 in der Theorie der Reihen mit beliebigem Vorzeichen kein Analogon.

6. Wenn man mit divergenten Reihen formal wie mit endlichen Summen rechnet, so kann dies zu Widersprüchen führen. Ein Beispiel dafür ist

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right)$$
$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\right) = 0.$$

Führt man dieselbe Umformung bei der konvergenten Reihe

$$p = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots \quad (s > 0)$$

durch, so ergibt sich

$$p = \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right) q$$

mit

$$q = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots.$$

Für $s < 1$ (in diesem Fall divergiert die letzte Reihe!) erhält man den Widerspruch $p < 0$ (vgl. die Bemerkung aus Nr. 381). Für $s > 1$ hat man es mit konvergenten Reihen zu tun, und man erhält ein richtiges Resultat.

383. Die Abelsche partielle Summation. Oft hat man es mit Reihen zu tun, deren Glieder aus dem Produkt zweier Größen bestehen und deren Partialsummen die Gestalt

$$S = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \cdots + \alpha_m \beta_m \tag{9}$$

haben. In vielen Fällen erweist sich dabei die folgende elementare, nach N. H. ABEL benannte Transformation als zweckmäßig.

Wir führen die Summen

$$B_1 = \beta_1, \quad B_2 = \beta_1 + \beta_2, \quad B_3 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3, \ldots,$$
$$B_m = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_m$$

ein. Drücken wir die Faktoren β_i durch diese Summen aus,

$$\beta_1 = B_1, \quad \beta_2 = B_2 - B_1, \quad \beta_3 = B_3 - B_2, \ldots, \quad \beta_m = B_m - B_{m-1},$$

so können wir S in der Form

$$S = \alpha_1 B_1 + \alpha_2 (B_2 - B_1) + \alpha_3 (B_3 - B_2) + \cdots + \alpha_m (B_m - B_{m-1})$$

schreiben. Lassen wir die Klammern fort und ordnen wir die Glieder anders an, so erhalten wir schließlich die Formel

$$S = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i = (\alpha_1 - \alpha_2) B_1 + (\alpha_2 - \alpha_3) B_2 + \cdots + (\alpha_{m-1} - \alpha_m) B_{m-1} + \alpha_m B_m$$
$$= \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) B_i + \alpha_m B_m. \text{[1]} \tag{10}$$

(Wenn man sie auf die Gestalt

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i = \alpha_m B_m - \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) B_i$$

bringt, so sieht man, daß sie der Formel für die partielle Integration in der Integralrechnung analog ist. Das Differential ist hier durch eine Differenz, das Integral durch eine Summe ersetzt.)

---

[1]) Im Grunde genommen haben wir schon eine ähnliche Transformation beim Beweis des zweiten Mittelwertsatzes der Integralrechnung benutzt.

Stützen wir uns auf die Formel (10), so können wir die folgende Abschätzung für Summen der betrachteten Art herleiten.

Hilfssatz. *Wenn die Faktoren α_i nicht zunehmen (oder nicht abnehmen) und die absoluten Beträge aller Summen B_i nicht größer als eine Zahl L sind,*

$$|B_i| \leqq L \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

so gilt

$$|S| = \left|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\beta_i\right| \leqq L \cdot (|\alpha_1| + 2\,|\alpha_m|).$$

Da nämlich in (10) alle Differenzen dasselbe Vorzeichen besitzen, gilt

$$|S| \leqq \sum_{i=1}^{m-1} |\alpha_i - \alpha_{i+1}| \cdot L + |\alpha_m| \cdot L$$
$$= L(|\alpha_1 - \alpha_m| + |\alpha_m|) \leqq L(|\alpha_1| + 2\,|\alpha_m|).$$

Wenn die Faktoren α_i nicht zunehmen und positiv sind, dann sieht man leicht, daß man die Abschätzung vereinfachen kann:

$$|S| = \left|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\beta_i\right| \leqq L \cdot \alpha_1. \tag{11}$$

Diese Abschätzungen werden wir später mehrmals benutzen. Jetzt verwenden wir sie zur Einführung von Konvergenzkriterien, die allgemeiner sind als das oben angegebene Leibnizsche Kriterium.

384. Die Kriterien von Abel und Dirichlet. Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n + \cdots, \tag{W}$$

wobei $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ zwei reelle Zahlenfolgen sind.

Die folgenden Voraussetzungen über jede einzelne von ihnen sichern die Konvergenz dieser Reihe.

Abelsches Kriterium. *Wenn die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots \tag{B}$$

konvergiert und die Zahlen a_n eine monotone und beschränkte Folge bilden,

$$|a_n| \leqq K \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

so ist die Reihe (W) konvergent.

Dirichletsches Kriterium. *Wenn alle Partialsummen der Reihe* (B) *beschränkt sind,*[1])

$$|B_n| \leqq M \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

[1]) Diese Forderung ist nicht so scharf wie die Forderung nach der Konvergenz von (B).

und die aus den Zahlen a_n gebildete monotone Zahlenfolge eine Nullfolge ist,

$$\lim a_n = 0,$$

so ist die Reihe (W) *konvergent.*

Zum Beweis der Konvergenz der Reihe (W) greifen wir in beiden Fällen auf das Konvergenzprinzip (Nr. 376) zurück. Wir betrachten dazu die Summe

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k b_k = \sum_{i=1}^{m} a_{n+i} b_{n+i};$$

setzen wir $\alpha_i = a_{n+i}$, $\beta_i = b_{n+i}$, dann hat sie die Form (9). Wir wollen versuchen, diese Summe mit Hilfe des Satzes aus Nr. 383 abzuschätzen. Nach den Voraussetzungen des Abelschen Kriteriums gibt es zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$ eine solche Zahl N, daß für alle $n > N$ und beliebiges p die Ungleichung

$$|b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{n+p}| < \varepsilon$$

erfüllt ist (*Konvergenzprinzip*). Folglich können wir für das in dem Hilfssatz auftretende L die Zahl ε verwenden. Es ergibt sich also für $n > N$ und $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k b_k\right| \leqq \varepsilon \cdot (|a_{n+1}| + 2\,|a_{n+m}|) \leqq 3K \cdot \varepsilon;$$

damit ist die Konvergenz der Reihe (W) bewiesen.

Nach den Voraussetzungen des Dirichletschen Kriteriums können wir zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$ eine Zahl N finden derart, daß für alle $n > N$

$$|a_n| < \varepsilon$$

gilt. Außerdem ist offenbar

$$|b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{n+p}| = |B_{n+p} - B_n| \leqq 2M,$$

und wir können im Hilfssatz $L = 2M$ setzen. Dann ist für alle $n > N$ und $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k b_k\right| \leqq 2M \cdot (|a_{n+1}| + 2\,|a_{n+m}| \leqq 6M \cdot \varepsilon;$$

damit ist die Konvergenz der Reihe (W) bewiesen.

B e m e r k u n g. Das Abelsche Kriterium folgt aus dem Dirichletschen. Aus den Abelschen Voraussetzungen ergibt sich nämlich, daß die a_n den endlichen Grenzwert a besitzen. Wenn man nun die Reihe (W) als Summe von zwei Reihen schreibt,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a)\, b_n + a \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

dann konvergiert die zweite Reihe nach Voraussetzung, und auf der erste wendet man das Dirichletsche Kriterium an.

385. Beispiele.

1. Bilden die a_n eine monotone Nullfolge und ist $b_n = (-1)^{n-1}$, so sind die Bedingungen des Dirichletschen Kriteriums offenbar erfüllt. Folglich ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{n-1} a_n + \cdots$$

konvergent. Damit erweist sich der Leibnizsche Satz als Spezialfall des Dirichletschen Satzes.

2. Unter derselben Voraussetzung bezüglich der a_n betrachten wir die Reihen (x beliebig)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Setzen wir in den Identitäten (1) und (2) aus Nr. 307 jetzt $a = 0$ und $h = x$, so erhalten wir unter der Voraussetzung $x \neq 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) die Beziehungen

$$\sum_{i=1}^{n} \sin ix = \frac{\cos \frac{1}{2} x - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{1}{2} x},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \cos ix = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right) x - \sin \frac{1}{2} x}{2 \sin \frac{1}{2} x}.$$

Also sind, sobald $x \neq 2k\pi$ ist, für jedes n die absoluten Beträge der beiden Summen kleiner als die Zahl $\dfrac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}$.

Nach dem Dirichletschen Kriterium konvergieren also beide Reihen für beliebige Werte von x, ausgenommen $x = 2k\pi$. Übrigens konvergiert die erste Reihe auch für $x = 2k\pi$, da dann alle Glieder verschwinden.

Insbesondere konvergieren z. B. die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \frac{\sin nx}{n} \text{ usw.}$$

3. Von großem Interesse sind Reihen der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}, \tag{12}$$

wobei $\{a_n\}$ eine beliebige Folge reeller Zahlen ist; man nennt sie *Dirichletsche Reihen.*

Für sie kann man einen Satz beweisen, der eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Hilfssatz über Potenzreihen (Nr. 379) besitzt:

Ist die Reihe (12) *für ein gewisses $x = \bar{x}$ konvergent, so konvergiert sie auch für alle $x > \bar{x}$.*

Dies folgt sofort aus dem Satz von Abel, da sich für $x > \bar{x}$ die Reihe (12) aus der konvergenten Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\bar{x}}}$$

ergibt, wenn man deren Glieder mit dem monoton abnehmenden positiven Faktor $\dfrac{1}{n^{x-\bar{x}}}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) multipliziert.

Es existieren Reihen der Form (12), die „überall konvergent" sind, z. B. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} \dfrac{1}{n^x}$, und Reihen, die „überall divergent" sind, z. B. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n^x}$. Schließt man diese Fälle aus, so kann man mit Hilfe der angegebenen Sätze leicht die Existenz einer *endlichen Konvergenzabszisse* λ nachweisen, so daß die Reihe (12) für $x > \lambda$ konvergiert und für $x < \lambda$ divergiert. Beispielsweise ist offenbar $\lambda = 1$ für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^x}$ und $\lambda = 0$ für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$. Man kann für

„überall konvergente" Reihen $\lambda = -\infty$ und für „überall divergente" Reihen $\lambda = +\infty$ annehmen.

Der Leser erkennt leicht die Ähnlichkeit mit Potenzreihen: In beiden Fällen ist der Konvergenzbereich ein ganzes Intervall. Manche Eigenschaften weichen jedoch ab, z. B.: Der Bereich der absoluten Konvergenz braucht hier nicht mit dem gewöhnlichen Konvergenzbereich übereinzustimmen. So haben wir eben gezeigt, daß die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ für $x > 0$ konvergiert, aber *absolut* konvergiert sie nur für $x > 1$.

4. Mit der Dirichletschen Reihe (12) vergleichen wir die *Fakultätenreihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{x(x+1)\cdots(x+n)} \tag{13}$$

mit denselben Koeffizienten a_n. Dabei müssen wir natürlich $x \neq 0, -1, -2, \ldots$ annehmen. Unter diesen Einschränkungen gilt der Satz von E. LANDAU[1]): *Die Reihen* (12) *und* (13) *konvergieren für ein und dieselben Werte von* x.

Die Reihe (13) ergibt sich aus der Dirichletschen Reihe (12), indem man deren Glieder mit dem Faktor

$$\frac{n!\, n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{14}$$

multipliziert. Für hinreichend große Werte von n ändert dieser Faktor sein Vorzeichen nicht. Außerdem ändert er sich noch von einer gewissen Stelle ab monoton.

Das Verhältnis des $(n+1)$-ten Faktors zum n-ten Faktor lautet nämlich

$$\frac{(n+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^x}{x+n+1} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x+1}}{1+\frac{x+1}{n}};$$

nun ist (vgl. Nr. 125, Beispiel 4)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x+1} = 1 + \frac{x+1}{n} + \frac{(x+1)\,x}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

und analog

$$\frac{1}{1+\frac{x+1}{n}} = 1 - \frac{x+1}{n} + \frac{(x+1)^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right);$$

daraus folgt

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x+1}}{1+\frac{x+1}{n}} = 1 + \frac{(x+1)\,x}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Die letzte Formel besagt schließlich für hinreichend große n, daß für $(x+1)\,x > 0$ das erwähnte Verhältnis größer als 1, für $(x+1)\,x < 0$ kleiner als 1 ist.

Bei dem Nachweis, daß die Faktoren (14) beschränkt sind, berufen wir uns darauf, daß (wie wir in Nr. 402, Beispiel 10, zeigen werden) der Ausdruck (14) für $n \to \infty$ einen *endlichen* Grenzwert besitzt. Nach dem Abelschen Kriterium zieht also die Konvergenz von (12) die Konvergenz von (13) nach sich.

Da der genannte Grenzwert (wie wir sehen werden) stets von 0 verschieden ist, können wir ähnliche Schlußfolgerungen auf den reziproken Wert von (14) anwenden. Nach demselben Satz folgt also aus der Konvergenz von (13) die von (12). Damit ist der Satz bewiesen.

---

[1]) EDMUND LANDAU, 1877–1938, deutscher Mathematiker.

5. Ähnliche Beziehungen kann man zwischen der nach J. H. LAMBERT[1]) benannten Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} \tag{15}$$

und der Potenzreihe (Nr. 379)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \tag{16}$$

mit denselben Koeffizienten a_n herstellen (die Werte $x = \pm 1$ sind natürlich ausgeschlossen). Genauer gesagt:

Ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{A}$$

konvergent, so konvergiert die Lambertsche Reihe (15) *für alle Werte von x; anderenfalls konvergiert sie für diejenigen Werte von x, für die die Potenzreihe* (16) *konvergiert* (K. KNOPP[2])).

(a) Zunächst sei die Reihe (A) *divergent*, so daß der Konvergenzradius R von (A) höchstens gleich 1 ist.[3]) Wir zeigen, daß für $|x| < 1$ die Reihen (15) und (16) das gleiche Verhalten zeigen.

Wenn die Reihe (15) konvergiert, so konvergiert auch die Reihe, die sich durch Multiplikation der Glieder von (15) mit x^n ergibt, und folglich auch die Reihe (16), die gleich der Differenz beider Reihen ist (vgl. 4° aus Nr. 364):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \frac{x^n}{1-x^n} - a_n \frac{x^n}{1-x^n} x^n\right].$$

Wir setzen nun voraus, die Reihe (16) konvergiere. Dann konvergiert nach dem Abelschen Kriterium auch die Reihe, die sich durch Multiplikation der Glieder von (16) mit dem monoton abnehmenden Faktor $\dfrac{1}{1-x^{2n}}$ ergibt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \frac{1}{1-x^{2n}}, \quad \text{und ebenso auch} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \frac{x^n}{1-x^{2n}}.$$

Folglich konvergiert auch die Reihe (15), die gleich der Summe dieser Reihen ist (vgl. 4° aus Nr. 364):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n x^n \frac{1}{1-x^{2n}} + a_n x^n \frac{x^n}{1-x^{2n}}\right].$$

Für $|x| > 1$ ist die Reihe (16) bekanntlich divergent. Wir behaupten, daß für diese Werte von x auch die Reihe (15) divergiert. Anderenfalls würde aus der Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{1-\left(\dfrac{1}{x}\right)^n}$$

---

[1]) JOHANN HEINRICH LAMBERT, 1728—1777, deutscher Mathematiker.

[2]) KONRAD KNOPP, 1882—1957, deutscher Mathematiker.

[3]) Wenn eine beliebige Reihe, etwa $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, konvergiert, so bedeutet dies, daß die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ für $x = 1$ konvergiert; damit konvergiert nach dem Satz aus Nr. 379 diese Reihe erst recht für jedes x mit $|x| < 1$. Diesen Umstand werden wir bei unseren Überlegungen noch zweimal verwenden.

die der Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n} - a_n \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n} \right]$$

folgen (vgl. 4° aus Nr. 364), was der Voraussetzung widerspricht.

(b) Wenn die Reihe (A) *konvergiert* (so daß $R \geqq 1$ ist), so konvergiert für $|x| < 1$ die Reihe (16), und die Konvergenz von (15) wird wie oben bewiesen. Es bleibt zu zeigen, daß (15) auch für $|x| > 1$ konvergiert. Dies ist tatsächlich der Fall: Da $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$ ist und die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n},$$

wie erwähnt, konvergiert, ist folglich auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n + a_n \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n} \right]$$

konvergent (vgl. 4° aus Nr. 364).

6. Zum Schluß leiten wir als Beispiel für die unmittelbare Anwendung der Abelschen partiellen Summation (10) die Identität

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n-1}^{\infty} A_n x^n$$

mit

$$A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

her. Dabei wird $|x|$ nicht nur kleiner als der Konvergenzradius R der ersten Reihe, sondern auch kleiner als 1 vorausgesetzt.

Aus der Beziehung

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} A_i (x^i - x^{i+1}) + A_n x^n$$

folgt für $n \to \infty$ die behauptete Identität, sobald bewiesen ist, daß $A_n x^n$ gegen 0 strebt. Dazu wählen wir eine Zahl r, die den Bedingungen

$$|x| < r < R, \qquad r \neq 1$$

genügt. Dann ist $|a_i| \, r^i \leqq L$ (für $i = 0, 1, 2, \ldots$) und

$$|A_n x^n| \leqq L \left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{1}{r^n}\right) \cdot |x|^n = \frac{L}{1-r} \left(\frac{|x|}{r}\right)^n - \frac{Lr}{1-r} |x|^n.$$

Der ganz rechte Ausdruck strebt unter den obigen Voraussetzungen gegen 0.

§ 4. Eigenschaften konvergenter Reihen

386. Das Assoziativgesetz. Der Begriff der Summe einer unendlichen Reihe ist wesentlich verschieden von dem Begriff der Summe endlich vieler Summanden (wie er in der Arithmetik und Algebra betrachtet wird), da er einen Grenzübergang einschließt. Wenn sich auch einige Eigenschaften der gewöhnlichen Summen auf Summen unendlicher Reihen übertragen lassen, so ist dies doch im allgemeinen nur der Fall, wenn gewisse Bedingungen erfüllt sind, die untersucht werden müssen. In manchen Fällen werden die gewohnten Eigenschaften der Summen verletzt, so daß man im allgemeinen bei dieser Frage sorgfältig vorgehen muß.

Wir betrachten die konvergente Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{A}$$

und fassen ihre Glieder zu beliebigen Gruppen zusammen, ohne die Anordnung der Glieder zu ändern:

$$a_1 + \cdots + a_{n_1}, \quad a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}, \quad \ldots, \quad a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}, \ldots$$

Dabei ist $\{n_i\}$ eine aus der Folge der natürlichen Zahlen ausgewählte Teilfolge von Indizes.

Satz. *Die aus diesen Summen gebildete Reihe*

$$(a_1 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}) + \cdots + (a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}) + \cdots \tag{$\tilde{\text{A}}$}$$

konvergiert stets und hat dieselbe Summe wie die Reihe (A).

Mit anderen Worten: *Für konvergente Reihen gilt das Assoziativgesetz,* d. h., man darf Klammern setzen.

Beweis. Die Folge

$$\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \ldots, \tilde{A}_k, \ldots$$

der Partialsummen von ($\tilde{\text{A}}$) ist nichts anderes als die Teilfolge

$$A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_k}, \ldots$$

der Partialsummen von (A). Damit (Nr. 40) ist die Behauptung bewiesen.

Wir sehen zunächst völlige Übereinstimmung mit gewöhnlichen Summen. Diese Analogie wird aber gestört, wenn wir versuchen, dieses Verfahren in umgekehrter Richtung anzuwenden. Ist nämlich eine konvergente Reihe ($\tilde{\text{A}}$) gegeben, in der jedes einzelne Glied aus endlich vielen Summanden besteht, so erhalten wir durch Fortlassen der Klammern eine neue Reihe (A), die sich als divergent erweisen kann.

Einfache Beispiele dafür sind die Reihen

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots \equiv 0 + 0 + 0 = \cdots = 0$$

und

$$1 - (1-1) - (1-1) - \cdots \equiv 1 - 0 - 0 - \cdots = 1,$$

die offenbar konvergieren, während die durch Fortlassen der Klammern aus ihnen entstehende Reihe

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

divergiert.

Aus dem oben Gesagten folgt: *Wenn man durch Fortlassen der Klammern in* ($\tilde{\text{A}}$) *eine konvergente Reihe* (A) *erhält, so stimmt deren Summe mit der Summe von* ($\tilde{\text{A}}$) *überein.*

Unter gewissen Bedingungen kann man von vornherein garantieren, daß die Reihe (A) konvergiert. Der einfachste Fall ist der, daß bei allen Summanden von (Ã) sämtliche Glieder in einer Klammer das gleiche Vorzeichen haben.[1])

Da sich nämlich bei Änderung von n zwischen n_{k-1} und n_k die Partialsumme A_n monoton ändert, liegt sie zwischen $A_{n_{k-1}} = \tilde{A}_{k-1}$ und $A_{n_k} = \tilde{A}_k$. Für ein hinreichend großes k unterscheiden sich diese letzten Summen beliebig wenig von der Summe $\tilde{A}$ der Reihe (Ã). Folglich gilt dies auch bei hinreichend großem n für die Summe A_n; also strebt $A_n \to \tilde{A}$.

Diese Bemerkung werden wir im folgenden mehrmals verwenden.

Wir betrachten nun das folgende Beispiel: Man weise die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$$

nach.[2]) Hier sind die ersten drei Glieder negativ, die nächsten fünf positiv usw. Wenn wir jede solche Gruppe von Gliedern eines Vorzeichens vereinigen, so erhalten wir die alternieren Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \cdots + \frac{1}{(k+1)^2-1}\right]. \tag{1}$$

Nun gilt, wie man leicht beweisen kann, die Ungleichung

$$\frac{2}{k+1} < \overbrace{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \cdots +}^{k} \overbrace{\frac{1}{k^2+k} + \cdots + \frac{1}{(k+1)^2-1}}^{k+1} < \frac{2}{k};$$

denn z. B. ist die Summe der ersten k Glieder kleiner als $k\,\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k}$ und die Summe der letzten $k+1$ Glieder kleiner als $(k+1)\,\frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k}$, die ganze Summe ist also tatsächlich kleiner als $\frac{2}{k}$. Hieraus schließen wir, daß die Glieder der Reihe (1) gegen 0 streben, da ihre Absolutbeträge monoton abnehmen. Damit ist nach dem Satz von LEIBNIZ die Reihe (1) und auf Grund der obigen Bemerkung folglich auch die gegebene Reihe konvergent.

387. Die Umordnungseigenschaft absolut konvergenter Reihen. Gegeben sei die konvergente Reihe (A) mit der Summe A. Durch willkürliche Umordnung ihrer Glieder erhalten wir eine neue Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a'_k = a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_k + \cdots. \tag{A'}$$

Jedes Glied a'_k dieser Reihe ist mit einem bestimmten Glied a_{n_k} der Reihe (A) identisch.[3])

Es ergibt sich die Frage, ob die Reihe (A') konvergiert und ob bei Konvergenz ihre Summe mit der Summe von (A) übereinstimmt. Bei der Untersuchung dieser Fragen muß man, wie wir sehen werden, scharf zwischen *absolut* und *nicht-absolut* (*bedingt*) konvergenten Reihen unterscheiden.

---

[1]) Dieses Vorzeichen kann von Klammer zu Klammer wechseln.

[2]) Hier bedeutet $[x]$ wie üblich die größte Zahl, die höchstens gleich x ist. — *Anm. d. Red.*

[3]) Dabei erzeugt die Folge $\{n_k\}$ ohne Lücken und Wiederholungen (bis auf die Reihenfolge) die natürlichen Zahlen.

Satz. *Wenn die Reihe* (A) *absolut konvergiert, so ist auch die aus ihr durch Umordnung der Glieder hervorgegangene Reihe* (A′) *konvergent und hat dieselbe Summe A wie die Ausgangsreihe.*

Mit anderen Worten: *Absolut konvergente Reihen darf man umordnen.*

Beweis. (a) Wir führen den Beweis in zwei Schritten. Wir setzen zunächst voraus, daß die Reihe (A) positiv sei, und betrachten eine beliebige Partialsumme A_k' der Reihe (A′). Wegen

$$a_1' = a_{n_1}, \qquad a_2' = a_{n_2}, \qquad \ldots, \qquad a_k' = a_{n_k}$$

ist für ein n', das größer als jede der Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ist, offenbar $A_k' < A_{n'}$ und folglich erst recht

$$A_k' \leqq A.$$

In diesem Fall ist die Reihe (A′) konvergent (Nr. 365) und ihre Summe A' nicht größer als A:

$$A' \leqq A.$$

Nun ergibt sich aber auch die Reihe (A) aus (A′) durch Umordnung der Glieder; deshalb ist analog

$$A \leqq A'.$$

Durch Vergleich der beiden Resultate gelangt man zu der geforderten Gleichung $A' = A$.

(b) Es sei nun (A) eine beliebige absolut konvergente Reihe. Da die konvergente *positive* Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots, \tag{A*}$$

wie bewiesen, bei jeder Umordnung der Glieder konvergiert, bleibt auf Grund des Satzes aus Nr. 377 auch nach Umordnung die (absolute) Konvergenz der Reihe (A) erhalten.

Wir sahen ferner in Nr. 377, daß sich bei der *absoluten* Konvergenz der Reihe (A) ihre Summe durch

$$A = P - Q$$

ausdrücken läßt, wobei P und Q die Summen der positiven Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k \tag{P}$$

bzw.

$$\sum_{m=1}^{\infty} q_m \tag{Q}$$

sind, die sich aus den positiven Gliedern bzw. aus den absoluten Beträgen der negativen Glieder von (A) zusammensetzen.

Die Umordnung der Glieder in (A) ruft nun eine Umordnung der Glieder in diesen beiden Reihen hervor, die sich (wie bewiesen) aber nicht auf die Summen P und Q

auswirkt. Folglich bleibt auch die Summe der Reihe (A) ungeändert, was zu beweisen war.

388. Nicht-absolut konvergente Reihen. Wir wenden uns nun der Untersuchung nicht-absolut konvergenter Reihen zu und behaupten, daß *sie die Umordnungseigenschaft nicht besitzen*: Bei jeder nicht-absolut konvergenten Reihe kann man durch Umordnen ihrer Glieder die Summe verändern oder sogar die Konvergenz verletzen.

Wir setzen voraus, daß die Reihe nicht-absolut konvergiert. Aus der Konvergenz folgt $\lim a_n = 0$ (vgl. 5° aus Nr. 364). Die in Nr. 387 erwähnten Reihen (P) und (Q) divergieren aber in diesem Fall, obgleich offenbar

$$\lim_{k\to\infty} p_k = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{m\to\infty} q_m = 0 \tag{2}$$

gilt.

Es gelten nämlich, wenn unter den ersten n-Gliedern der Reihe (A) k positive und m negative Glieder auftreten, die Gleichungen

$$A_n = P_k - Q_m, \qquad A_n^* = P_k + Q_m. \tag{3}$$

Wir betonen, daß eine der drei Zahlen n, k, m beliebig gewählt werden kann, daß aber die anderen beiden zu ihr passen müssen. Aus der Konvergenz einer der Reihen (P) und (Q) würde, wegen der ersten Gleichung (3), notwendig die Konvergenz der zweiten Reihe folgen, und aus der Konvergenz beider würde sich, wegen der zweiten Gleichung (3), die Konvergenz der Reihe (A*), d. h. die absolute Konvergenz, ergeben, entgegen unserer Voraussetzung.

Wir beweisen nun den folgenden bedeutenden Satz, der von B. RIEMANN stammt:

Umordnungssatz von RIEMANN. *Wenn die Reihe* (A) *nicht-absolut konvergiert, so können für jede vorgegebene Zahl B (endlich oder gleich ∞) die Glieder dieser Reihe so umgeordnet werden, daß die Summe der umgeordneten Reihe genau gleich B ist.*

Beweis. Wir behandeln zuerst den Fall, daß B endlich ist, und bemerken, daß (wegen 1° aus Nr. 364) aus der Divergenz der Reihen (P) und (Q) die Divergenz aller ihrer Reste folgt, so daß man in jeder dieser Reihen von einer beliebigen Stelle an so viel Glieder zusammenfassen kann, daß ihre Summe größer wird als jede beliebige Zahl.

Auf Grund dieser Bemerkung ordnen wir die Glieder von (A) folgendermaßen um. Zuerst nehmen wir so viel positive Glieder von (A) — in der Reihenfolge, in der sie in (A) angeordnet sind —, daß ihre Summe größer wird als die Zahl B:

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1} > B.$$

Danach addieren wir so viel negative Glieder dazu — in der Reihenfolge, in der sie in (A) angeordnet sind —, daß die gemeinsame Summe kleiner als B wird:

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - q_2 - \cdots - q_{m_1} < B.$$

Dann bringen wir wieder so viel positive Glieder (aus den übriggebliebenen) in der gegebenen Anordnung an, daß

$$p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - \cdots - q_{m_1} + p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2} > B$$

ist. Danach sammeln wir wieder so viel negative Glieder, daß

$$p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - \cdots - q_{m_1} + p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2} - q_{m_1+1} - \cdots - q_{m_2} < B$$

gilt usw. Diesen Prozeß setzen wir in Gedanken bis ins Unendliche fort. Offenbar erhält jedes Glied der Reihe (A) unter Berücksichtigung seines Vorzeichens einen bestimmten Platz. Wenn man jedesmal beim Addieren der Glieder p_i oder q_i ihre Anzahl nicht größer wählt, als unbedingt zur Realisierung der geforderten Ungleichung notwendig ist, dann ist die Abweichung von der Zahl B nach der einen oder der anderen Seite dem absoluten Betrag nach nicht größer als das letzte aufgeschriebene Glied. Dann folgt aber mit (2), daß die Reihe

$$(p_1 + \cdots + p_{k_1})\,(q_1 + \cdots + q_{m_1}) + \cdots$$
$$\cdots + (p_{k_{i-1}+1} + \cdots + p_{k_i}) - (q_{m_{i-1}+1} + \cdots + q_{m_i}) + \cdots$$

die Summe B besitzt. Auf Grund der Bemerkung aus Nr. 386 gilt dies auch dann, wenn man die Klammern fortläßt.

Ist $B = \infty$, so kann man etwa, indem man eine gegen ∞ strebende Folge von Zahlen B_i nimmt, die positiven Glieder so anordnen, daß ihre Summen nacheinander größer als $B_1, B_2, B_3, \ldots$ werden, und die negativen Glieder einzeln nach jeder Gruppe positiver Glieder anbringen. Auf diese Weise erhält man offenbar eine Reihe, deren Summe gleich ∞ ist. Analog kann man auch eine Reihe mit der Summe $-\infty$ erhalten.[1])

Das erhaltene Resultat unterstreicht die Tatsache, daß die *nicht-absolute* Konvergenz nur durch die gegenseitige Aufhebung der positiven und der negativen Glieder bewirkt wird und deshalb *wesentlich von der Reihenfolge der Glieder* abhängt, während die absolute Konvergenz nur darauf beruht, wie schnell die Glieder abnehmen, aber von ihrer Reihenfolge unabhängig ist.

Beispiele.

1. Wir betrachten die als nicht-absolut konvergent bekannte Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \cdots, \tag{4}$$

deren Summe, wie sich leicht zeigen läßt (vgl. das folgende Beispiel 2), gleich $\ln 2$ ist. Wir ordnen die Glieder von (4) so um, daß auf ein positives Glied zwei negative Glieder folgen:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} + \cdots. \tag{5}$$

Wir behaupten, daß die Summe der Reihe (5) halb so groß ist wie die Summe der Reihe (4).

Zum Beweis betrachten wir die Partialsummen A_n und A'_n von (4) bzw. (5). Für sie gilt

$$A'_{3m} = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right)$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2} A_{2m},$$

so daß A'_{3m} gegen $\frac{1}{2} \ln 2$ strebt. Da auch

$$A'_{3m-1} = A'_{3m} + \frac{1}{4m} \quad \text{und} \quad A'_{3m-2} = A'_{3m-1} + \frac{1}{4m-2}$$

[1]) Der Leser überlegt leicht, wie die Glieder der gegebenen Reihe anzuordnen sind, damit eine Partialsumme der umgeordneten Reihe als lim inf bzw. lim sup zwei vorgegebene Zahlen B und $C > B$ hat.

gegen denselben Grenzwert $\frac{1}{2}\ln 2$ streben, konvergiert die Reihe (5) und hat als Summe eben diese Zahl.

2. Ein allgemeineres Resultat kann man erhalten, wenn man von der Formel für die Partialsummen H_n der harmonischen Reihe ausgeht (vgl. Nr. 367, Formel (4)),

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \gamma_n,$$

wobei C die Eulersche Konstante und γ_n eine unendlich kleine Größe ist. Hieraus folgt sofort

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}H_m = \frac{1}{2}\ln m + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}\gamma_m,$$

$$1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2k-1} = H_{2k} - \frac{1}{2}H_k = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln k + \frac{1}{2}C + \gamma_{2k} - \frac{1}{2}\gamma_k.$$

Wir ordnen jetzt die Glieder der Reihe (4) so an, daß am Anfang p positive und q negative Glieder, dann wieder p positive und q negative Glieder usw. stehen. Um die Summe der Reihe

$$1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{2q} + \frac{1}{2p+1} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{4p-1} - \frac{1}{2q+2} - \cdots \tag{6}$$

bestimmen zu können, ist es zweckmäßiger, die Glieder zu Gruppen mit p oder q Gliedern zusammenzufassen. Die Partialsumme $\tilde{A}_{2n}$ der so erhaltenen Reihe ist gleich

$$\tilde{A}_{2n} = \ln\left(2\sqrt{\frac{p}{q}}\right) + \alpha_n \qquad (\alpha_n \to 0)$$

und strebt gegen den Grenzwert $\ln\left(2\sqrt{\frac{p}{q}}\right)$; gegen den gleichen Grenzwert strebt auch die Summe $\tilde{A}_{2n-1}$. Also hat auf Grund der Bemerkung aus Nr. 386 auch die Reihe (6) diesen Grenzwert als Summe.

Insbesondere ergibt sich für die Reihe (4) die Summe $\ln 2$ ($p = q = 1$), für die Reihe (5) wie in Beispiel 1, die Summe $\frac{1}{2}\ln 2$ ($p = 1, q = 2$). Analog folgt

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots = \frac{3}{2}\ln 2 \qquad (p = 2, q = 1),$$

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} - \cdots = 0$$
$$(p = 1, q = 4)$$

usw.

Wenn wir die Anzahl der positiven und negativen Glieder noch von Gruppe zu Gruppe ändern, so können wir leicht eine Gesetzmäßigkeit dafür finden, daß die umgeordnete Reihe eine beliebig vorgegebene Summe besitzt. Wir überlassen es dem Leser, sich davon zu überzeugen.

389. Die Multiplikation von Reihen. Von der gliedweisen Addition (oder Subtraktion) zweier konvergenter Reihen und der gliedweisen Multiplikation einer konvergenten Reihe mit einem konstanten Faktor war schon in Nr. 364, 3° und 4°, die Rede.

Gegeben seien zwei konvergente Reihen

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{A}$$

und

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots. \tag{B}$$

Wir bilden, indem wir das Multiplikationsgesetz für endliche Summen nachahmen, alle möglichen Produkte $a_i b_k$ von zwei Gliedern dieser Reihen. Aus diesen Produkten bilden wir die unendliche rechteckige Matrix

$$\begin{array}{cccc}
a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & a_ib_1 \\
a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & a_ib_2 \\
a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & a_ib_3 \\
 & & & \\
a_1b_k & a_2b_k & a_3b_k & a_ib_k
\end{array} \tag{7}$$

Diese Produkte können auf verschiedene Arten als einfache Folgen angeordnet werden; z. B. können die Produkte längs der Diagonale oder längs zweier Seiten eines Quadrates aus (7) entnommen werden:

$$\begin{array}{ccc}
a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 \\
a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 \\
a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 \\
\multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|c|c|}
a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 \\ \cline{1-1}
a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 \\ \cline{1-2}
a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 \\ \hline
\end{array}$$

Dies führt auf die Folgen

$$a_1b_1;\quad a_1b_2,\quad a_2b_1;\quad a_1b_3,\quad a_2b_2,\quad a_3b_1; \tag{8}$$

bzw.

$$a_1b_1;\quad a_1b_2,\quad a_2b_2,\quad a_2b_1;\quad a_1b_3,\quad a_2b_3,\quad a_3b_3,\quad a_3b_2,\quad a_3b_1; \tag{9}$$

Die aus einer solchen Folge gebildete Reihe heißt das *Produkt der Reihen* (A) *und* (B) *bezüglich der verwendeten Folge.*

Satz von Cauchy. *Sind die Reihen* (A) *und* (B) *beide absolut konvergent, so konvergiert auch jedes ihrer Produkte; seine Summe ist gleich dem Produkt der Summen A und B.*

Beweis. Nach Voraussetzung sind die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots \tag{A*}$$

und

$$\sum_{m=1}^{\infty} |b_m| = |b_1| + |b_2| + \cdots + |b_m| + \cdots \tag{B*}$$

konvergent, d. h., sie haben endliche Summen, etwa A^* bzw. B^*. Wir ordnen die Produkte (7) in beliebiger Weise als Folge an und bilden aus dieser Folge die Reihe

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_{i_s} b_{k_s} = a_{i_1} b_{k_1} + a_{i_2} b_{k_2} + \cdots + a_{i_s} b_{k_s} + \cdots. \tag{10}$$

Um die Konvergenz der zugehörigen, aus den absoluten Beträgen gebildeten Reihe

$$\sum_{s=1}^{\infty} |a_{i_s} b_{k_s}| = |a_{i_1} b_{k_1}| + |a_{i_2} b_{k_2}| + \cdots + |a_{i_s} b_{k_s}| + \cdots \tag{11}$$

zu beweisen, betrachten wir ihre s-te Partialsumme. Bezeichnet ν den größten der Indizes $i_1, k_1, i_2, k_2, \ldots, i_s, k_s$, so ist offenbar

$$|a_{i_1} b_{k_1}| + \cdots + |a_{i_s} b_{k_s}| \leqq (|a_1| + \cdots + |a_\nu|)(|b_1| + \cdots + |b_\nu|) \leqq A^* B^*.$$

Daraus (Nr. 365) ergibt sich die Konvergenz der Reihe (11) und folglich die absolute Konvergenz der Reihe (10).

Wir müssen nun noch die Summe der Reihe (10) bestimmen. Wir können die Glieder von (10) in eine dafür geeignete Reihenfolge bringen, da sich die Reihe wegen ihrer absoluten Konvergenz beliebig umordnen läßt (Nr. 387). Wenn wir die Glieder wie in (9) anordnen, so erhalten wir aufeinanderfolgende Gruppen, die aus den einzelnen Quadraten stammen:

$$a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_3 + a_3 b_3 + a_3 b_2 + a_3 b_1) + \cdots. \tag{12}$$

Werden wie üblich die Partialsummen von (A) bzw. (B) mit A_n bzw. B_m bezeichnet, so sind die Partialsummen der Reihe (12) gleich

$$A_1 B_1, \quad A_2 B_2, \quad A_3 B_3, \quad \ldots, \quad A_k B_k, \quad \ldots;$$

sie streben gegen das Produkt AB, welches also nicht nur gleich der Summe von (12), sondern auch gleich der Summe von (10) ist.

Für die praktische Multiplikation ist es oft zweckmäßiger, die Produkte (7) wie in (8) anzuordnen. Dafür werden die Glieder, die auf einer Diagonalen liegen, zusammengefaßt.

$$AB = a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \cdots. \tag{13}$$

Genau in dieser Form stellte CAUCHY zum ersten Mal das Produkt zweier Reihen auf. Wir werden künftig eine so geschriebene Reihe als *Cauchysche Produktreihe der Reihen* (A) *und* (B) bezeichnen.

Sind z. B. zwei Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m + \cdots$$

zu multiplizieren (x soll dabei innerhalb des Konvergenzintervalls liegen; vgl. Nr. 379), so hat, wie man sich leicht überlegt, das Produkt die Gestalt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)\, x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)\, x^2 + \cdots.$$

Die Cauchysche Produktreihe zweier Potenzreihen ist also ebenfalls eine Potenzreihe.

390. Beispiele. In allen Beispielen außer dem letzten nehmen wir für das Produkt die Cauchysche Produktreihe.

1. Multiplizieren wir die Reihe

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \qquad (|x| < 1)$$

mit sich selbst, so erhalten wir

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + n x^{n-1} + \cdots.$$

2. Die Multiplikation der Reihen

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^m}{m} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^m}{m} + \cdots \tag{14}$$

(mit $|x| < 1$) führt zu

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} H_k x^k = x - \left(1 + \frac{1}{2}\right) x^2 + \cdots + (-1)^{k-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}\right) x^k + \cdots.$$

Später (Nr. 405) werden wir sehen, daß die Summe der Reihe (14) gleich $\ln(1 + x)$ ist, so daß das Resultat also die Funktion $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ darstellt.

3. Man berechne den Ausdruck

$$\left[1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu} \frac{z^{2\mu}}{2^{2\mu} \cdot (\mu!)^2}\right]^2 \qquad (z \text{ beliebig}).$$

Hinweis. Man benutze die elementar beweisbare Formel

$$\sum_{\mu=0}^{\nu} \left[\binom{\nu}{\mu}\right]^2 = \binom{2\nu}{\nu} = \frac{(2\nu)!}{(\nu!)^2}.$$

Lösung: $1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \dfrac{(2\nu)! \cdot z^{2\nu}}{2^{2\nu} \cdot (\nu!)^4}$.

4. Die Identität

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = \frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

oder

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \qquad (\text{mit } A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n)$$

(vgl. Nr. 385, Beispiel 6) kann man leicht mit Hilfe gliedweiser Multiplikation beweisen.

Wenn in einem Intervall $(-R, R)$, $0 < R \leqq 1$, eine der beiden Reihen konvergiert, so folgt daraus auch schon die Konvergenz der anderen Reihe in diesem Intervall.

5. Man beweise die Identität ($a > 0$)

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{a+2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^2}{a+4} + \cdots\right)\cdot\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \cdots\right)$$
$$= \frac{1}{a}\left[1 + \frac{a+1}{a+2}x + \frac{(a+1)(a+3)}{(a+2)(a+4)}x^2 + \cdots\right].$$

6. Wie wir schon wissen (vgl. Nr. 378, Beispiel 1 (a)), ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

für alle Werte von x absolut konvergent; ihre Summe bezeichnen wir mit $E(x)$.

Ersetzen wir x durch y, so erhalten wir eine analoge Reihe mit der Summe $E(y)$. Die Cauchysche Produktreihe beider Reihen hat das allgemeine Glied

$$1\cdot\frac{y^n}{n!} + \frac{x}{1!}\cdot\frac{y^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^2}{2!}\cdot\frac{y^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + \frac{x^k}{k!}\cdot\frac{y^{n-k}}{(n-k)!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\cdot 1$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Wir erhalten so für die uns noch unbekannte Funktion $E(x)$ die Funktionalgleichung

$$E(x)\cdot E(y) = E(x+y)$$

für alle reellen x und y. Damit können wir später herleiten, daß $E(x)$ die *Exponentialfunktion* ist (vgl. Nr. 439, Beispiel 3; Nr. 75, 1).

7. Mit Hilfe des d'Alembertschen Kriteriums kann man leicht beweisen, daß die Reihen

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots,$$
$$S(x) = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} - \cdots$$

für alle Werte von x absolut konvergieren. Durch Multiplikation dieser beiden Reihen kann man die folgenden Beziehungen herleiten:

$$C(x+y) = C(x)\,C(y) - S(x)\,S(y),$$
$$S(x+y) = S(x)\,C(y) + C(x)\,S(y).$$

Da $S(x)$ und $C(x)$ tatsächlich nichts anderes als $\sin x$ bzw. $\cos x$ sind (vgl. Nr. 404), erkennen wir in diesen Beziehungen die bekannten Additionstheoreme dieser Funktionen.

8. Wir betrachten schließlich die positive Reihe

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x},$$

die für $x > 1$ konvergiert (vgl. Nr. 365, Beispiel 2) und die Riemannsche Zetafunktion darstellt. Wir berechnen durch Reihenmultiplikation ihr Quadrat.

Wir ordnen dazu alle möglichen Produkte

$$\frac{1}{n^x}\frac{1}{m^x} = \frac{1}{(nm)^x}$$

mit ein und derselben Zahl $k = nm$ im Nenner so an, daß sie nebeneinanderstehen, und fassen sie zusammen. Jedem k entsprechen so viel (einander gleiche) Glieder, wie Teiler n der Zahl k existieren, also $\tau(k)$. Damit gilt schließlich

$$[\zeta(x)^2] = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tau(k)}{k^x}.$$

391. Ein allgemeiner Satz aus der Theorie der Grenzwerte. Zur Vereinfachung der Ausführungen in den folgenden Abschnitten beweisen wir hier einen Grenzwertsatz, der eine Verallgemeinerung der bekannten Sätze von CAUCHY und STOLZ (Nr. 33) darstellt. Diese Verallgemeinerung stammt von O. TOEPLITZ[1]). Wir beweisen sie auf zwei Arten.

I. *Wir setzen voraus, daß die Glieder* t_{nm} $(1 \leqq m \leqq n)$ *der unendlichen Dreiecksmatrix*

$$\begin{array}{lllll} t_{11} \\ t_{21} & t_{22} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \\ & \cdot \\ t_{n1} & t_{n2} & t_{n3} & \cdots & t_{nn} \end{array} \tag{15}$$

den beiden folgenden Bedingungen genügen:

(a) *Die Elemente jeder Spalte streben gegen* 0:

$$t_{nm} \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty \quad (m \text{ fest});$$

(b) *die Summen der absoluten Beträge aller Glieder jeder Zeile sind nicht größer als eine Konstante K:*

$$|t_{n1}| + |t_{n2}| + \cdots + |t_{nn}| \leqq K = \text{const}.$$

Bilden dann Elemente x_n *eine Nullfolge, so ist die Folge der aus den Elementen* x_n *mit Hilfe der Glieder von* (15) *gebildeten Elemente*

$$x_n' = t_{n1}x_1 + t_{n2}x_2 + \cdots + t_{nn}x_n$$

ebenfalls eine Nullfolge.

Beweis. Zu einem $\varepsilon > 0$ existiert ein m derart, daß $|x_n| < \dfrac{\varepsilon}{2K}$ für $n > m$ ist; für diese n gilt wegen (b)

$$|x_n'| < |t_{n1}x_1 + \cdots + t_{nm}x_m| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da m hier festgehalten wird, existiert wegen (a) ein $N \geqq m$ derart, daß für $n > N$ auch der erste Summand der rechten Seite kleiner als $\varepsilon/2$ ist; demzufolge ist $|x_n'| < \varepsilon$, was zu beweisen war.

II. *Die Koeffizienten* t_{nm} *sollen außer* (a) *und* (b) *noch die Bedingung*

(c) $T_n = t_{n1} + t_{n2} + \cdots + t_{nn} \to 1 \quad$ *für* $\quad n \to \infty$

erfüllen.[2]) *Wenn dann die Folge der* x_n *gegen* a (a *endlich*) *geht, so strebt auch*

$$x_n' = t_{n1}x_1 + t_{n2}x_2 + \cdots + t_{nn}x_n$$

gegen a.

Beweis. Man kann den Ausdruck für x_n' offenbar auch in der Form

$$x_n' = t_{n1}(x_1 - a) + t_{n2}(x_2 - a) + \cdots + t_{nn}(x_n - a) + T_n a$$

schreiben. Wendet man den Satz I auf die Folge der $x_n - a$ an und benutzt die Bedingung (c), so erhält man unmittelbar die Behauptung.

1°. Der Satz von CAUCHY (Nr. 33) ergibt sich hieraus, wenn man

$$t_{n1} = t_{n2} = \cdots = t_{nn} = \frac{1}{n}$$

setzt. Die Bedingungen (a), (b) und (c) sind offenbar erfüllt.

2°. Wir wenden uns nun dem Satz von STOLZ (Nr. 33) zu und behalten die früheren Bezeichnungen bei. Es seien also zwei Folgen von Elementen x_n und y_n gegeben, von denen die

[1]) OTTO TOEPLITZ, 1881—1940, deutscher Mathematiker.

[2]) Bei vielen Anwendungen ist $T_n \equiv 1$.

zweite monoton gegen $+\infty$ strebt. Wir setzen voraus, daß die Folge der

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots;\ x_0 = y_0 = 0)$$

gegen a strebt, und wenden auf sie den Satz II an, indem wir

$$t_{nm} = \frac{y_m - y_{m-1}}{y_n}$$

nehmen. Es läßt sich leicht nachprüfen, daß die Bedingungen (a), (b) und (c) erfüllt sind. Damit erhalten wir, daß die Folge der

$$\frac{x_n}{y_n} = \sum_{m=1}^{\infty} t_{nm} \frac{x_m - x_{m-1}}{y_m - y_{m-1}}$$

gegen a strebt, was zu beweisen war.

Wir geben noch andere nützliche Folgerungen aus dem Satz von Toeplitz an:

3°. *Gegeben seien zwei Nullfolgen x_n und y_n, wobei die zweite von ihnen die Bedingung*

$$|y_1| + |y_2| + \cdots + |y_n| \leqq K \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots;\ K = \text{const})$$

erfülle. Dann ist auch die Folge der

$$z_n = x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1$$

eine Nullfolge.

Man verwende einfach den Satz I mit $t_{nm} = y_{n-m+1}$.

4°. *Wenn die Folge der x_n gegen a und die Folge der y_n gegen b strebt, so strebt die Folge der*

$$z_n = \frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1}{n}$$

gegen ab.

Es sei zunächst $a = 0$; dann ist zu beweisen, daß die z_n eine Nullfolge bilden. Dies ergibt sich einfach aus 3°, wenn man dort y_n durch y_n/n ersetzt. Die Bedingung, die in 3° von y_n erfüllt werden muß, wird hierbei nicht verletzt, da die y_n beschränkt sind: $|y_n| \leqq K$.

Wir wenden uns nun dem allgemeinen Fall zu; dazu schreiben wir z_n in der Form

$$z_n = \frac{(x_1 - a)\, y_n + (x_2 - a)\, y_{n-1} + \cdots + (x_n - a)\, y_1}{n} + a\, \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}.$$

Der erste Summand der rechten Seite strebt, wie soeben bewiesen wurde, gegen 0. Der zweite Summand strebt gegen ab, denn der Faktor von a hat nach dem Satz von Cauchy (1°) den Grenzwert b.

5°. *Wenn die Folge der x_n gegen a strebt, so gilt das gleiche auch für die Folge der*

$$x_n' = \frac{1 \cdot x_0 + \binom{n}{1} \cdot x_1 + \binom{n}{2} \cdot x_2 + \cdots + \binom{n}{n} \cdot x_n}{2^n}.[1]$$

Wir verwenden den Satz II und setzen

$$t_{nm} = \frac{\binom{n}{m}}{2^n}.$$

[1]) Es ist natürlich unwesentlich, ob wir die Numerierung der Glieder der Folge mit 0 statt mit 1 beginnen.

Wegen $\binom{n}{m} < n^m$ und $\frac{n^m}{2^n} \to 0$ (vgl. Nr. 32, Beispiel 9) ist die Bedingung (a) erfüllt. Daß die Bedingungen (b) und (c) erfüllt sind, folgt unmittelbar aus der Beziehung

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} = (1+1)^n = 2^n.$$

6°. *Wenn die x_n gegen a streben und* $z = \text{const}$ $(z > 0)$ *ist, so gilt auch*

$$x_n' = \frac{1 \cdot x_0 + \binom{n}{1} z \cdot x_1 + \binom{n}{2} z^2 \cdot x_2 + \cdots + \binom{n}{n} z^n \cdot x_n}{(1+z)^n} \to a.$$

Dies ist eine einfache Verallgemeinerung der vorhergehenden Behauptung und läßt sich analog beweisen. Man kann die Koeffizienten auch in der umgekehrten Reihenfolge anordnen, so daß auch

$$x_n'' = \frac{z^n \cdot x_0 + \binom{n}{1} z^{n-1} \cdot x_1 + \binom{n}{2} z^{n-2} \cdot x_2 + \cdots + 1 \cdot x_n}{(1+z)^n} \to a$$

gilt.

392. Weitere Sätze über die Multiplikation von Reihen. Wie F. Mertens[1]) gezeigt hat, kann die Aussage des Satzes von Cauchy auf einen allgemeineren Fall erweitert werden.

Satz von Mertens. *Konvergieren die Reihen* (A) *und* (B) *und konvergiert wenigstens eine der beiden Reihen absolut, so gilt die Entwicklung* (13).

Beweis. Es konvergiere o. B. d. A. die Reihe (A) absolut, d. h., die Reihe (A*) sei konvergent. Wenn wir die Glieder der n-ten Diagonale zusammenfassen, so erhalten wir

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_2 + a_n b_1.$$

Bilden wir nun $C_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$, so müssen wir beweisen, daß C_n gegen AB strebt. Wir sehen zunächst, daß

$$C_n = a_1 B_n + a_2 B_{n-1} + \cdots + a_{n-1} B_2 + a_n B_1 \tag{16}$$

ist. Führen wir nun $B_m = B - \beta_m$ ein (wobei der Rest β_m für $m \to \infty$ gegen 0 strebt), so können wir die Summe C_n auf die Gestalt $C_n = A_n B - \gamma_n$ mit

$$\gamma_n = a_1 \beta_n + a_2 \beta_{n-1} + \cdots + a_{n-1} \beta_2 + a_n \beta_1$$

bringen. Wegen $A_n \to A$ bleibt nur noch die Beziehung $\lim \gamma_n = 0$ zu beweisen.

Diese Behauptung folgt unmittelbar aus Nr. 391, Satz 3° (für $x_n = \beta_n$ und $y_n = a_n$), wenn man

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \leqq A^*$$

berücksichtigt, wobei A^* die Summe der als konvergent vorausgesetzten Reihe (A*) bezeichnet.

Zur Anwendung dieses Satzes benutzen wir das Beispiel 4 aus Nr. 390. Die dort angegebene Gleichung gilt, wie wir jetzt sehen, auch in den Endpunkten $x = \pm R$ des Konvergenzintervalls der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, wenn $R < 1$ ist und die Reihe in den Endpunkten überhaupt konvergiert (selbst wenn sie dort *nicht-absolut* konvergiert).

---

[1]) Franz Carl Josef Mertens, 1840—1927, deutscher Mathematiker.

Bemerkung. *Würden beide Reihen nur nicht-absolut konvergieren, so kann man über die Konvergenz der Reihe* (13) *nicht entscheiden.* Zum Beispiel wollen wir versuchen, die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$$

mit sich selbst zu multiplizieren (wie wir aus Nr. 382, Beispiel 2, wissen, ist diese Reihe nicht-absolut konvergent). In diesem Fall ist

$$c_n = (-1)^{n-1} \left[\frac{1}{1 \cdot \sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{n-1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{i} \cdot \sqrt{n-i+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n} \cdot 1} \right];$$

da jeder Summand in der Klammer größer als $1/n$ ist, gilt $|c_n| > 1$ (für $n > 1$), und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ divergiert (vgl. 5° aus Nr. 364).

Wenn wir jedoch dasselbe mit der ebenfalls nicht-absolut konvergenten Reihe

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots$$

(vgl. Nr. 382, Beispiel 1) durchführen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} c_n &= (-1)^{n-1} \left[\frac{1}{1 \cdot n} + \frac{1}{2 \cdot (n-1)} + \cdots + \frac{1}{i \cdot (n-i+1)} + \cdots + \frac{1}{n \cdot 1} \right] \\ &= (-1)^{n-1} \frac{2}{n+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

Hier strebt $|c_n|$ mit wachsendem n monoton gegen 0, so daß nach dem Satz von Leibniz (Nr. 381) die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ doch konvergiert. Ob die Summe gleich $(\ln 2)^2$ ist, beantwortet der folgende Satz:

Satz von Abel. *Sobald die Cauchysche Produktreihe zweier konvergenter Reihen* (A) *und* (B) *konvergiert, ist ihre Summe C notwendig gleich AB.*

Beweis. Behalten wir die frühere Bezeichnung bei, so finden wir aus (16) leicht

$$C_1 + C_2 + \cdots + C_n = A_1 B_n + A_2 B_{n-1} + \cdots + A_n B_1.$$

Wir dividieren diese Beziehung gliedweise durch n und gehen zur Grenze ($n \to \infty$) über. Wegen $C_n \to C$ folgt nach dem Satz von Cauchy (Nr. 33; vgl. auch Nr. 391, 1°) für das arithmetische Mittel ebenfalls

$$\frac{C_1 + C_2 + \cdots + C_n}{n} \to C.$$

Andererseits gilt auf Grund von 4° aus Nr. 391, wenn man dort $x_n = A_n$ und $y_n = B_n$ setzt,

$$\frac{A_1 B_n + A_2 B_{n-1} + \cdots + A_n B_1}{n} \to AB.$$

Daraus folgt $C = AB$, was zu beweisen war.

§ 5. Zweifache Reihen und Doppelreihen

393. Zweifache Reihen. Es sei eine Menge von unendlich vielen Zahlen

$$a_i^{(k)} \; (i = 1, 2, 3, \ldots; k = 1, 2, 3, \ldots)$$

gegeben, die durch *zwei* Indizes gekennzeichnet sind. Wir können uns diese Zahlen in einer unendlichen rechteckigen Matrix angeordnet denken:

$$\begin{array}{llll} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & a_i^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & a_i^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} & a_i^{(3)} \\ & \cdot & & \cdot \\ a_1^{(k)} & a_2^{(k)} & a_3^{(k)} & a_i^{(k)} \end{array} \tag{1}$$

Derartige Matrizen heißen *unendliche Rechteckmatrizen mit zwei Eingängen.*

Wir beschäftigen uns nun mit einem Begriff, der mit der Matrix (1) zusammenhängt, und zwar mit dem Begriff der zweifachen Reihe.

Wenn wir die Elemente jeder Zeile der unendlichen Rechteckmatrix (1) addieren, so erhalten wir eine unendliche Folge von Reihen der Form

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}. \tag{2}$$

Summieren wir nun die Glieder dieser Folge, so erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}. \tag{3}$$

Das so erhaltene Symbol wollen wir eine *zweifache Reihe* nennen. Wenn wir die Zeilen und Spalten vertauschen, d. h., wenn wir die Glieder aus den Spalten der unendlichen Matrix (1) addieren, so erhalten wir eine andere zweifache Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_i^{(k)}. \tag{4}$$

Die zweifache Reihe (3) heißt *konvergent,* wenn erstens alle Zeilenreihen (2) konvergieren (ihre Summen bezeichnen wir entsprechend mit $A^{(k)}$) und zweitens die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)}$$

konvergiert; die Summe dieser Reihe ist dann auch die Summe der zweifachen Reihe (3). Man kann dies auch leicht für die Reihe (4) formulieren.

Die Elemente der Matrix (1) lassen sich auf viele Arten als gewöhnliche Folge

$$u_1, u_2, \ldots, u_r, \ldots \tag{5}$$

anordnen, und aus ihr kann man die *einfache* Reihe

$$\sum_{r=1}^{\infty} u_r \tag{6}$$

bilden. (Darüber sprachen wir schon im Zusammenhang mit der speziellen Matrix (7) in Nr. 389.) Ist umgekehrt eine gewöhnliche Folge (5) gegeben, so kann man sie, indem man ihre Glieder (unabhängig von ihrem Platz) in unendlich viele Gruppen mit unendlich vielen Gliedern einteilt, in Form der Matrix (1) mit zwei Eingängen darstellen; aus dieser Matrix läßt sich dann die zweifache Reihe (3) bilden. Es ergibt sich natürlich die Frage, welcher Zusammenhang zwischen den Reihen (6) und (3) besteht, die aus ein und denselben Gliedern gebildet sind.

Satz 1. *Wenn die Reihe* (6) *absolut konvergiert und die Summe U besitzt, so konvergiert auch die zweifache Reihe* (3), *unabhängig davon, wie ihre Glieder in Form der Matrix* (1) *angeordnet sind, und zwar gegen dieselbe Summe.*

Beweis. Die Reihe

$$\sum_{r=1}^{\infty} |u_r| \tag{6*}$$

konvergiert nach Voraussetzung; wir bezeichnen ihre Summe mit U^*. Da für beliebige n und k die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i^{(k)}| \leqq U^*$$

gilt, ist die Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i^{(k)}|$ (Nr. 365) und folglich auch die Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}$ (Nr. 377) konvergent (für jedes k). Ferner kann man zu einer beliebigen Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl r_0 finden, für welche

$$\sum_{r=r_0+1}^{\infty} |u_r| < \varepsilon \tag{7}$$

und damit erst recht

$$\left|\sum_{r=r_0+1}^{\infty} u_r\right| = \left|U - \sum_{r=1}^{r_0} u_r\right| < \varepsilon \tag{8}$$

ist. Die Glieder $u_1, u_2, \ldots, u_{r_0}$ der Reihe (6) befinden sich in den ersten n Zeilen und den ersten m Spalten der Matrix (1), sobald n und m hinreichend groß, etwa $n > n_0$ und $m > m_0$ gewählt werden. Der Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_i^{(k)} - \sum_{r=1}^{r_0} u_r$$

ist für die erwähnten n und m gleich der Summe derjenigen u_r, deren Indizes größer als r_0 sind und die in den ersten n Zeilen und den ersten m Spalten der Matrix (1) enthalten sind. Wegen (7) ist der absolute Betrag dieses Ausdrucks kleiner als ε. Durch den Grenzübergang $m \to \infty$ erhalten wir (für $n > n_0$)

$$\left|\sum_{k=1}^{n} A^{(k)} - \sum_{r=1}^{r_0} u_r\right| \leqq \varepsilon,$$

also mit (8)

$$\left|\sum_{k=1}^{n} A^{(k)} - U\right| < 2\varepsilon,$$

woraus die Konvergenz der zweifachen Reihe (3) gegen die Summe U folgt.

Bemerkung. Einige Zeilen der Matrix (1) können auch aus endlich vielen Gliedern bestehen. Man kann das Resultat leicht auf diesen Fall übertragen.

Erinnert man sich, daß in Nr. 386 die Glieder einer einfachen Reihe nur in Gruppen zu endlich vielen Gliedern eingeteilt wurden, ohne dabei ihren Platz zu ändern, so sieht man, daß in Satz 1 das Assoziativ- und das Kommutativgesetz auf absolut konvergente Reihen weitgehend verallgemeinert sind.

Die Umkehrung des Satzes gilt nur unter schärferen Voraussetzungen über die zweifache Reihe.

Satz 2. *Gegeben sei die zweifache Reihe* (3). *Konvergiert diejenige Reihe, die man erhält, wenn man die Glieder von* (3) *durch ihre absoluten Beträge ersetzt, so konvergiert nicht nur die Reihe* (3), *sondern auch die einfache Reihe* (6), *deren Glieder bis auf die Reihenfolge mit denen der Reihe* (3) *übereinstimmen. Ferner haben beide Reihen dieselbe Summe.*

Beweis. Nach Voraussetzung konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |a_i^{(k)}|;$$

ihre Summe sei A^*. Für alle n und m gilt

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} |a_i^{(k)}| < A^*. \tag{9}$$

Wir betrachten nun eine *beliebige* Partialsumme der Reihe (6*):

$$U_r^* = |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_r|.$$

Für hinreichend große n und m sind die Glieder $u_1, u_2, \ldots, u_r$ in den ersten n Zeilen und den ersten m Spalten der Matrix (1) enthalten. Dann folgt aus (9)

$$U_r^* < A^*;$$

also ist die Reihe (6*) konvergent, d. h., die Reihe (6) konvergiert absolut.

Jetzt braucht nur noch der Satz 1 angewendet zu werden.

Da offenbar alles über die zweifache Reihe (3) Gesagte auch für die zweifache Reihe (4) gilt, folgt aus den bewiesenen Sätzen der sogenannte *große Umordnungssatz*:

Satz 3. *Gegeben sei die Matrix* (1). *Konvergiert die Reihe aus den absoluten Beträgen der Glieder von* (3), *so konvergieren auch die beiden zweifachen Reihen* (3) *und* (4) *und besitzen dieselbe Summe:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_i^{(k)}.$$

394. Doppelreihen. Mit der unendlichen Rechteckmatrix (1) ist auch der Begriff der *Doppelreihe* verknüpft; so wird das Symbol

$$\begin{array}{l} \quad a_1^{(1)} + a_2^{(1)} + a_3^{(1)} + \cdots + a_i^{(1)} + \cdots \\ + a_1^{(2)} + a_2^{(2)} + a_3^{(2)} + \cdots + a_i^{(2)} + \cdots \\ + \cdot\ \cdot \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ + a_1^{(k)} + a_2^{(k)} + a_3^{(k)} + \cdots + a_i^{(k)} + \cdots \\ + \cdot\ \cdot \qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \equiv \sum_{i,k=1}^{\infty} a_i^{(k)} \end{array} \tag{10}$$

genannt. Wir beschränken uns auf die ersten m Spalten und die ersten n Zeilen und betrachten die endliche Summe

$$A_m^{(n)} = \sum_{i,k=1}^{i=m,k=n} a_i^{(k)};$$

Sie heißt *Partialsumme* der gegebenen Doppelreihe. Wir lassen nun die Zahlen n und m gleichzeitig, aber unabhängig voneinander, gegen ∞ gehen. Der (endliche oder unendliche) Grenzwert

$$A = \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} A_m^{(n)}$$

heißt die *Summe* der Doppelreihe, und man schreibt

$$A = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_i^{(k)}.$$

Wenn die Reihe (10) eine endliche Summe besitzt, so heißt (10) *konvergent*, anderenfalls *divergent*.

Wir kehren nun zu der Matrix (7) aus Nr. 389 mit dem allgemeinen Glied

$$c_i^{(k)} = a_i b_k$$

zurück. Hier ist die Partialsumme, wenn man die frühere Bezeichnung beibehält, offenbar gleich

$$C_m^{(n)} = A_m B_n,$$

so daß die Doppelreihe, die der erwähnten Matrix entspricht, stets konvergiert und die Summe

$$C = \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} A_m B_n = AB$$

besitzt.[1])

Auf Doppelreihen kann man leicht die Sätze 3° und 4° aus Nr. 364 über die Multiplikation einer konvergenten Reihe mit einer Konstanten bzw. über die gliedweise Addition oder Subtraktion zweier konvergenter Reihen übertragen. Wir überlassen dies jedoch dem Leser.

Für die Konvergenz einer Doppelreihe ist *notwendig*, daß das allgemeine Glied gegen 0 geht:

$$\lim_{\substack{i\to\infty \\ k\to\infty}} a_i^{(k)} = 0$$

(vgl. 5° aus Nr. 364). Dies folgt sofort aus der Beziehung

$$a_i^{(k)} = A_i^{(k)} - A_{i-1}^{(k)} - A_i^{(k-1)} + A_{i-1}^{(k-1)}.$$

---

[1]) Wenn man somit das Produkt zweier konvergenter einfacher Reihen in Form einer *zweifachen* Reihe darstellt, so ist die Summe der letzten stets gleich dem Produkt AB. Die Schwierigkeit besteht darin, dies für ein Produkt von Reihen zu beweisen, wenn es als einfache Reihe dargestellt wird.

Natürlich kann man die Doppelreihe (10) mit den oben betrachteten zweifachen Reihen (3) und (4) vergleichen. Wegen

$$A_m^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \left\{\sum_{i=1}^{m} a_i^{(k)}\right\}$$

erhalten wir durch den Grenzübergang $m \to \infty$ bei festem n (unter der Voraussetzung, daß die Zeilenreihen konvergieren)

$$\lim_{m\to\infty} A_m^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} A^{(k)}.$$

Damit ist klar, daß die Summe der zweifachen Reihe (3) nichts anderes ist als der *zweifache Limes*

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} A_m^{(n)}.$$

Die Frage, wann die Summen der beiden zweifachen Reihen (3) und (4) gleich sind, ist also ein Spezialfall der Frage nach der Gleichheit zweier zweifacher Grenzwerte.

Mit Hilfe des allgemeinen Satzes aus Nr. 168 über zweifache und iterierte Grenzwerte[1]) gelangen wir zu dem folgenden Resultat:

Satz 4. *Wenn erstens die Doppelreihe* (10) *konvergiert und zweitens alle Zeilenreihen konvergieren, so konvergiert auch die zweifache Reihe* (3) *und hat dieselbe Summe wie die Doppelreihe:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} = A = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_i^{(k)}.$$

Ein analoger Satz gilt für die andere zweifache Reihe (4).

Die Frage nach der Konvergenz der Doppelreihe (10) kann für positive Reihen, d. h. für Reihen mit nichtnegativen Gliedern, $a_i^{(k)} \geqq 0$, leicht beantwortet werden:

Satz 5. *Sind die Glieder der Reihe* (10) *nichtnegativ, $a_i^{(k)} \geqq 0$, so ist die Reihe genau dann konvergent, wenn ihre Partialsummen beschränkt sind.*

Beweis. Die Notwendigkeit dieser Bedingung ist klar. Wir beweisen, daß sie auch hinreichend ist. Es sei $A_m^{(n)} \leqq L$. Wir zeigen, daß die obere Grenze

$$A = \sup \{A_m^{(n)}\}$$

der Menge aller Summen $A_m^{(n)}$ auch die Summe der Reihe (10) ist. Dazu geben wir ein beliebiges $\varepsilon > 0$ vor. Nach Definition der oberen Grenze können wir eine Partialsumme $A_{m_0}^{(n_0)}$ mit

$$A_{m_0}^{(n_0)} > A - \varepsilon$$

finden. Für alle $m > m_0$ und $n > n_0$ gilt dann erst recht

$$A_m^{(n)} > A - \varepsilon,$$

da die $A_m^{(n)}$ mit wachsenden n und m offenbar zunehmen.

---

[1]) Hier spielen m und n die Rolle der unabhängigen Veränderlichen und die Partialsumme $A_m^{(n)}$ die Rolle der von ihnen abhängigen Funktion.

Da keine Partialsumme größer als A ist, können wir

$$|A_m^{(n)} - A| < \varepsilon \qquad (\text{für } m > m_0,\, n > n_0)$$

schreiben; das bedeutet

$$A = \lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} A_m^{(n)},$$

d. h., die Reihe (10) konvergiert.

Auf Grund dieses Satzes kann man analog zu Satz 1 aus Nr. 366 ein Vergleichskriterium für positive Doppelreihen aufstellen.

Wir betrachten nun die Doppelreihe aus einer Matrix, in der nicht alle Elemente positiv sind. Offenbar können wir wie bei den einfachen Reihen die Fälle, daß alle Elemente negativ sind oder daß nur endlich viele Elemente positiv oder negativ sind, ausschließen, da sie unmittelbar auf den eben behandelten Fall zurückgeführt werden können. Wir setzen deshalb voraus, daß die betrachtete Matrix (1) und damit auch die Reihe (10) sowohl unendlich viele positive als auch negative Glieder enthält.

Außer der Matrix (1) stellen wir noch die Matrix aus den absoluten Beträgen der Elemente von (1) auf:

$$\begin{array}{llll}
|a_1^{(1)}| & |a_2^{(1)}| & \cdots & |a_i^{(1)}| \\
|a_1^{(2)}| & |a_2^{(2)}| & \cdots & |a_i^{(2)}| \\
\cdot\ \cdot & & & \cdot \\
|a_1^{(k)}| & |a_2^{(k)}| & \cdots & |a_i^{(k)}|
\end{array}$$

Mit dieser Matrix bilden wir die Doppelreihe

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} |a_i^{(k)}|. \tag{10*}$$

Analog zum Satz aus Nr. 377 über einfache Reihen gilt hier der

Satz 6. *Wenn die Reihe* (10*), *die aus den absoluten Beträgen der Glieder der gegebenen Reihe* (10) *besteht, konvergiert, so ist auch* (10) *konvergent.*

Beweis. Wir stellen $a_i^{(k)}$ in der Form

$$a_i^{(k)} = p_i^{(k)} - q_i^{(k)}$$

dar, wobei

$$p_i^{(k)} = \frac{|a_i^{(k)}| + a_i^{(k)}}{2}, \qquad q_i^{(k)} = \frac{|a_i^{(k)}| - a_i^{(k)}}{2}$$

ist. Wegen $p_i^{(k)} \leqq |a_i^{(k)}|$, $q_i^{(k)} \leqq |a_i^{(k)}|$ folgt aus der Konvergenz der Doppelreihe (10*) die Konvergenz der Doppelreihen

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} p_i^{(k)} = P, \qquad \sum_{i,k=1}^{\infty} q_i^{(k)} = Q.$$

Dann konvergiert aber auch die Reihe

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} a_i^{(k)} \equiv \sum_{i,k=1}^{\infty} (p_i^{(k)} - q_i^{(k)}),$$

und zwar hat sie die Summe $A = P - Q$.

Wenn gleichzeitig mit (10) auch die Reihe (10*) konvergiert, so heißt die Reihe (10) *absolut konvergent.* Ist die Reihe (10) konvergent, die Reihe (10*) aber divergent, so heißt (10) *nicht-absolut* (oder *bedingt*) *konvergent.*

Wir beweisen nun einen zu den Sätzen 1 und 2 aus Nr. 393 analogen Satz über den Zusammenhang zwischen der Doppelreihe (10) und der einfachen Reihe (6), die beide aus denselben Gliedern bestehen:

Satz 7. *Gegeben seien die Doppelreihe* (10) *und die einfache Reihe* (6), *die beide aus ein und denselben Gliedern bestehen. Ist eine der beiden Reihen absolut konvergent, so konvergiert auch die andere absolut, und beide haben dieselbe Summe.*

Beweis. Wir setzen zunächst voraus, daß die Reihe (10) absolut konvergiert, d. h., daß die Reihe (10*) konvergent ist. Die Summe von (10*) bezeichnen wir mit A^*. Wir bilden dann für eine beliebig vorgegebene natürliche Zahl r die Partialsumme

$$U_r^* = |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_r|$$

der Reihe (6*). Wie beim Beweis von Satz 2 folgt auch hier die Ungleichung $U_r^* < A^*$. woraus sich die absolute Konvergenz der Reihe (6) ergibt.

Wir setzen nun die absolute Konvergenz der einfachen Reihe (6), also die Konvergenz von (6*) voraus. Die Summe von (6*) bezeichnen wir mit U^*. Nun läßt sich stets eine solche Zahl r finden, daß sich alle Summanden einer beliebigen Partialsumme

$$A_m^{*(n)} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} |a_i^{(k)}|$$

der Reihe (10*) unter den ersten r Gliedern von (6*) befinden, so daß

$$A_m^{*(n)} < U^*$$

gilt. Nach Satz 5 konvergiert also (10*); folglich ist die Reihe (10) absolut konvergent.

Um schließlich die Summe U der Reihe (6) berechnen zu können, bringen wir ihre Glieder in eine dafür günstige Reihenfolge; das ist wegen der absoluten Konvergenz der Reihe (6) gestattet (Nr. 387). Wir ordnen die Glieder nach dem quadratischen Schema (1). Wenn wir nun noch die Glieder zusammenfassen, durch die sich ein Quadrat von dem nächsten unterscheidet, so erhalten wir

$$U = \lim_{n \to \infty} A_n^{(n)} = A.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Durch Vergleich der Sätze 1, 2 und 7 gelangen wir zu der

Folgerung. *Bestehen die Matrix* (1) *und die Folge* (5) *aus denselben Gliedern, so sind die Doppelreihe* (10), *die zweifachen Reihen* (3) *und* (4) *und schließlich die einfache Reihe* (6) *konvergent und besitzen dieselbe Summe, falls wenigstens eine dieser*

Reihen auch dann noch konvergiert, wenn ihre Glieder durch ihre absoluten Beträge ersetzt werden.

Bei positiven Reihen (d. h. im Fall $a_i^{(k)} \geqq 0$) ist offenbar die Konvergenz hinreichend dafür, daß alle vier Reihen konvergieren und dabei dieselbe Summe besitzen.

395. Beispiele.

1. Ein interessantes Beispiel ist die folgende Matrix ($0 < x < 1$):

$$\begin{array}{lllll}
x & -x^2 & x^2 & -x^3 & x^3 \\
x(1-x) & -x^2(1-x^2) & x^2(1-x^2) & -x^3(1-x^3) & x^3(1-x^3) \\
x(1-x)^2 & -x^2(1-x^2)^2 & x^2(1-x^2)^2 & -x^3(1-x^3)^2 & x^3(1-x^3)^2
\end{array}$$

Hier konvergieren die einzelnen Zeilenreihen absolut und haben entsprechend die Summen $x, x(1-x), x(1-x)^2, \ldots$ Die Reihe, die aus diesen Summen besteht, konvergiert ebenfalls absolut; ihre Summe ist gleich 1. Die andere zweifache Reihe konvergiert jedoch nicht, da die Spaltenreihen abwechselnd die Summen $+1$ und -1 haben.

Diese Tatsache widerspricht nicht dem Satz 2, denn für die Matrix aus den absoluten Beträgen konvergiert keine der beiden zweifachen Reihen. Wir sehen also: Die Voraussetzung der absoluten Konvergenz der Zeilenreihen (Spaltenreihen) und der absoluten Konvergenz der Reihe, die aus deren Summen besteht, ersetzt nicht die Forderung, daß die zweifache Reihe für die Matrix aus den absoluten Beträgen der Glieder konvergiert.

2. Wir betrachten das bekannte, nach Joh. Bernoulli benannte Paradoxon. Zu untersuchen ist die positive Matrix

$$\begin{array}{cccc}
\frac{1}{1\cdot 2} & \frac{1}{2\cdot 3} & \frac{1}{3\cdot 4} & \frac{1}{4\cdot 5} \\
 & \frac{1}{2\cdot 3} & \frac{1}{3\cdot 4} & \frac{1}{4\cdot 5} \\
 & & \frac{1}{3\cdot 4} & \frac{1}{4\cdot 5} \\
 & & & \frac{1}{4\cdot 5}
\end{array}$$

(die fehlenden Glieder sind gleich 0), und wir vergleichen die Summen der beiden ihr zugeordneten zweifachen Reihen. Wenn wir zuerst die Zeilen summieren, so finden wir die Summen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ (vgl. Nr. 25, Beispiel 9), aus denen sich die harmonische Reihe zusammensetzt; ihre Summe bezeichnen wir mit s. Summieren wir nun die Spalten (sie enthalten alle endlich viele Glieder), so gelangen wir zu den Resultaten $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$; aus ihnen setzt sich die harmonische Reihe ohne erstes Glied zusammen, so daß ihre Summe $s-1$ ergibt. Also ist $s = s - 1$.

Natürlich ist dieses Paradoxon nur ein Beweis dafür, daß s nicht endlich sein kann, d. h., daß die harmonische Reihe divergiert.

3. Es durchlaufe q ohne Wiederholung alle möglichen Potenzen mit natürlichen Grundzahlen und natürlichen Exponenten (>1). Man beweise die Beziehung

$$G = \sum_q \frac{1}{q-1} = 1$$

(CH. GOLDBACH[1])).

Wenn m alle natürlichen Zahlen (>1) durchläuft, *die keine Potenzen sind*, so gilt

$$\begin{aligned} G &= \sum_m \frac{1}{m^2-1} + \sum_m \frac{1}{m^3-1} + \cdots = \sum_m \left\{\frac{1}{m^2-1} + \frac{1}{m^3-1} + \cdots\right\} \\ &= \sum_m \left\{\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^4} + \frac{1}{m^6} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{m^3} + \frac{1}{m^6} + \frac{1}{m^9} + \cdots\right) + \cdots\right\} \\ &= \sum_m \left\{\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{m^4} + \frac{1}{m^6} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{m^6} + \frac{1}{m^9} + \cdots\right) + \cdots\right\} \\ &= \sum_m \left\{\frac{1}{m(m-1)} + \frac{1}{m^2(m^2-1)} + \frac{1}{m^3(m^3-1)} + \cdots\right\}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$G = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)},$$

worin nun n alle natürlichen Zahlen >1 durchläuft, so daß tatsächlich $G = 1$ ist (vgl. Nr. 25, Beispiel 9).

(Eine Begründung mit Hilfe der bewiesenen Sätze überlassen wir dem Leser.)

Interessant ist der Vergleich dieses Resultats mit dem Ergebnis von J. STEINER[2]):

$$\sum_{m=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{m^k} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m(m-1)} = 1.$$

(Hier können die Potenzen mehrmals auftreten!)

4. Wir betrachten die Matrix mit dem allgemeinen Glied

$$a_i^{(k)} = \frac{(k-1)!}{i(i+1)\cdots(i+k)} = \frac{(i-1)!}{k(k+1)\cdots(k+i)}.$$

Benutzen wir die in Nr. 363, Beispiel 4, aufgestellte Beziehung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)\cdots(\alpha+n+p)} = \frac{1}{p(\alpha+1)\cdots(\alpha+p)} \tag{11}$$

(für $\alpha = 0$, $p = k$), so lassen sich die Glieder der k-ten Zeile leicht summieren:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} = \frac{(k-1)!}{k \cdot k!} = \frac{1}{k^2}.$$

Daraus folgt für die Summe der zweifachen Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}. \tag{12}$$

Da die Ausdrücke $a_i^{(k)}$ bezüglich i und k symmetrisch sind, ist die zweite zweifache Reihe mit der ersten identisch; also sind auch ihre Summen gleich.

Wir ändern nun die Matrix folgendermaßen: in der m-ten Zeile bleiben die ersten $m-1$ Glieder erhalten, das m-te Glied wird durch die Summe r_m der Glieder der m-ten Zeile, be-

1) CHRISTIAN GOLDBACH, 1690—1764, deutsch-russischer Mathematiker.

2) JAKOB STEINER, 1796—1863, Schweizer Mathematiker.

ginnend mit dem m-ten Glied, ersetzt, alle übrigen Glieder werden durch 0 ersetzt. Die neue Matrix

$$\begin{array}{llllll}
r_1 & & & & & \\
a_1^{(2)} & r_2 & & & & \\
a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & r_3 & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
a_1^{(m)} & a_2^{(m)} & a_3^{(m)} & a_{m-1}^{(m)} & r_m & \\
a_1^{(m+1)} & a_2^{(m+1)} & a_3^{(m+1)} & a_{m-1}^{(m+1)} & a_m^{(m+1)} & r_{m+1}
\end{array}$$

besitzt dieselben Zeilensummen und damit dieselbe Summe der ersten zweifachen Reihe wie früher (vgl. (12)). Für die Summierung der Spaltenreihen berechnen wir zunächst

$$\begin{aligned}
r_m &= \sum_{i=m}^{\infty} \frac{(m-1)!}{i(i+1)\cdots(i+m)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(m-1)!}{(m-1+n)\cdots(2m-1+n)} = \frac{(m-1)!}{m^2(m+1)\cdots(2m-1)};
\end{aligned}$$

wir verwenden hier erneut die Beziehung (11) für $\alpha = m - 1$, $p = m$. Die Summe der übrigen Glieder der m-ten Spalte ist gleich

$$\begin{aligned}
\sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{(m-1)!}{i(i+1)\cdots(i+m)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(m-1)!}{(m+n)(m+n+1)\cdots(2m+n)} \\
&= \frac{(m-1)!}{m(m+1)\cdots 2m}
\end{aligned}$$

(in (11) setzen wir $\alpha = p = m$). Die Summe aller Glieder der m-ten Spalten ist also gleich

$$3\,\frac{(m-1)!}{m(m+1)\cdots(2m-1)\,2m} = 3\,\frac{[(m-1)!]^2}{(2m)!}.$$

Auf Grund des Satzes 3 können wir die Summen der beiden zweifachen Reihen gleichsetzen; damit erhalten wir die Beziehung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 3 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[(m-1)!]^2}{(2m)!}. \tag{13}$$

Da die Reihe auf der rechten Seite von (13) sehr schnell konvergiert, erleichtert sie die näherungsweise Berechnung der Summe der linken, sehr wichtigen Reihe. Darüberhinaus werden wir in Nr. 440, Beispiel 7, sehen, daß die hergeleitete Beziehung erlaubt, die Summe der linken Reihe in geschlossener Form auszudrücken; sie ist gleich $\pi^2/6$ (dieses Ergebnis stammt von Euler).

5. Wir beschäftigen uns nun mit der Lambertschen Reihe

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{x^k}{1-x^k},$$

wobei wir $|x| < 1$ voraussetzen. In Nr. 385, Beispiel 5, sahen wir, daß unter dieser Voraussetzung die Lambertsche Reihe für diejenigen Werte von x konvergiert, für welche auch die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$

konvergent ist. Wir nehmen an, daß der Konvergenzradius R dieser Reihe positiv ist (vgl. Nr. 379) und $|x| < R$ gilt.

Offenbar ist

$$\frac{x^k}{1-x^k} = x^k + x^{2k} + \cdots + x^{ik} + \cdots.$$

Wir bilden nun aus diesen Gliedern, die wir noch mit a_k multiplizieren, eine Matrix, indem wir die Potenzen von x mit gleichen Exponenten in einer Spalte anordnen (die fortgelassenen Elemente sind durch Null zu ersetzen):

$$\begin{array}{cccccccccc}
a_1x & a_1x^2 & a_1x^3 & a_1x^4 & a_1x^5 & a_1x^6 & a_1x^7 & a_1x^8 & a_1x^9 & a_1x^{10} \\
 & a_2x^2 & & a_2x^4 & & a_2x^6 & & a_2x^8 & & a_2x^{10} \\
 & & a_3x^3 & & & a_3x^6 & & & a_3x^9 & \\
 & & & a_4x^4 & & & & a_4x^8 & & \\
 & & & & a_5x^5 & & & & & a_5x^{10} \\
 & & & & & a_6x^6 & & & & \\
 & & & & & & a_7x^7 & & & \\
 & & & & & & & a_8x^8 & & \\
 & & & & & & & & a_9x^9 & \\
 & & & & & & & & & a_{10}x^{10} \\
\multicolumn{10}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}
\end{array}$$

Die zweifache Reihe aus den Zeilenreihen hat genau die Summe $\varphi(x)$. Da die Potenzreihe und damit auch die Lambertsche Reihe konvergiert, wenn wir x durch $|x|$ und a_k durch $|a_k|$ ersetzen, können wir Satz 3 anwenden und die Spalten summieren. Wir erhalten die Entwicklung von $\varphi(x)$ in eine Potenzreihe:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^n \quad \text{mit} \quad \alpha_n = \sum_{k|n}^{\infty} a_k;$$

das Symbol $k \mid n$ bedeutet, daß die Summe nur über die Teiler k von n zu erstrecken ist.

Setzen wir etwa $a_k = 1$ bzw. $a_k = k$,[1]) so erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \cdot x^n, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) \cdot x^n,$$

wobei $\tau(n)$ die *Anzahl* und $\sigma(n)$ die *Summe* aller Teiler von n bezeichnet.

6. Ordnen wir nun die Glieder in der Matrix aus Beispiel 5 ohne Lücken an,

$$\begin{array}{cccc}
a_1x & a_1x^2 & a_1x^3 & a_1x^4 \\
a_2x^2 & a_2x^4 & a_2x^6 & a_2x^8 \\
a_3x^3 & a_3x^6 & a_3x^9 & a_3x^{12} \\
a_4x^4 & a_4x^8 & a_4x^{12} & a_4x^{16}
\end{array}$$

dann bleiben die Summen der Zeilen erhalten, und für die Summen der Spalten ergibt sich der Reihe nach $f(x), f(x^2), f(x^3), \ldots$ Wir finden so eine Beziehung zwischen den Funktionen φ und f:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(x^n).$$

---

[1]) In beiden Fällen ist, wie man leicht zeigt, $R = 1$, so daß es genügt, $|x| < 1$ anzunehmen.

Nehmen wir etwa $a_k = a^k$ mit $|a| \leqq 1$, so gelangen wir zu

$$f(x) = \frac{ax}{1 - ax};$$

damit ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ax)^k}{1 - x^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ax^n}{1 - ax^n} \quad (|a| \leqq 1, |x| < 1).$$

7. Wir können das Ergebnis aus Beispiel 6 verallgemeinern. Es seien zwei Potenzreihen

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad \text{und} \quad g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m$$

gegeben. Beschränken wir uns auf die Werte von x, für die $|x| < 1$ gilt, so konvergieren beide Reihen absolut.

Wir bilden eine Matrix aus den Elementen $a_n b_m x^{mn}$. Wegen $mn \geqq m + n$ für $m > 1$ und $n > 1$ gilt

$$|a_n b_m x^{mn}| \leqq |a_n x^n| \cdot |b_m x^m|.$$

Daraus folgt leicht, daß die dieser Matrix entsprechende Doppelreihe absolut konvergiert. Setzen wir auf Grund der Folgerung aus Nr. 394 die Summen der zweifachen Reihe gleich, so finden wir die Identität

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m f(x^m) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g(x^n).$$

Hieraus ergibt sich die Identität von Beispiel 6 für $b_m = 1$ (also $g(x) = \frac{x}{1 - x}$).

8. Die Reihe

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} x^i y^k$$

entsteht durch Multiplikation der Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$ und $\sum_{k=0}^{\infty} y^k$, die für $|x| < 1$ bzw. $|y| < 1$ (absolut) konvergieren; für diese Werte konvergiert auch die Doppelreihe (absolut).

Ist $|x| > 1$ oder $|y| > 1$, so ist die notwendige Bedingung für die Konvergenz verletzt: Das allgemeine Glied geht nicht gegen 0, die Reihe divergiert. Man verifiziert leicht, daß die Reihe auch für $|x| = 1$ oder $|y| = 1$ divergiert.

9. Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} \frac{1}{i^\alpha k^\beta} \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

Auch sie ergibt sich durch Multiplikation der Reihen $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^\alpha}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\beta}$, die für $\alpha > 1$ bzw. $\beta > 1$ konvergieren, so daß auch die Doppelreihe unter diesen Voraussetzungen konvergiert.

Ist umgekehrt $\alpha \leqq 1$ (oder $\beta \leqq 1$), so divergiert die Doppelreihe, da dann alle Zeilenreihen (oder Spaltenreihen) divergieren (vgl. die Folgerung aus Nr. 394).

10. Wir untersuchen die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} \frac{1}{(i + k)^\sigma} \quad (\sigma > 0).$$

Dazu stellen wir sie in Form einer einfachen Reihe dar, indem wir ihre Glieder „diagonal" anordnen. Da die Glieder, die auf einer Diagonalen liegen, gleich sind, erhalten wir, wenn wir sie zur Vereinfachung der Rechnung zusammenfassen, die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\frac{1}{n^{\sigma}}.$$

Dividieren wir die Ungleichungen

$$\frac{1}{2}n \leqq n-1 < n$$

durch n^{σ}, so finden wir

$$\frac{1}{2}\frac{1}{n^{\sigma-1}} \leqq (n-1)\frac{1}{n^{\sigma}} < \frac{1}{n^{\sigma-1}}.$$

Hieraus sehen wir, daß die erhaltene einfache Reihe für $\sigma > 2$ konvergiert und für $\sigma \leqq 2$ divergiert. Nach Satz 7 aus Nr. 394 gilt dies auch für die Doppelreihe.

11. Wir betrachten nun die kompliziertere Reihe

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} a_i^{(k)} \equiv \sum_{i,k=1}^{\infty} \frac{1}{(Ai^2+2Bik+Ck^2)^{\varrho}} \quad (\varrho > 0),$$

wobei die *Form* $Ax^2+2Bxy+Cy^2$ *positiv definit* sein soll, so daß $\Delta = AC - B^2 > 0$ ist, ferner sei $A > 0$, $C > 0$.

Ist L die größte der Zahlen $|A|$, $|B|$, $|C|$, so gilt offenbar

$$Ai^2+2Bik+Ck^2 \leqq L(i+k)^2, \quad a_i^{(k)} \geqq \frac{1}{L^{\sigma}}\frac{1}{(i+k)^{2\varrho}}.$$

Aus Beispiel 10 folgt, daß die Reihe in diesem Fall für $\varrho \leqq 1$ divergiert.

Andererseits gilt

$$Ai^2+2Bik+Ck^2 = \frac{1}{C}[(AC-B^2)\,i^2+(Bi+Ck)^2] \geqq \frac{\Delta}{C}\,i^2$$

so daß

$$a_i^{(k)} \leqq \frac{C^{\varrho}}{\Delta^{\varrho}}\frac{1}{i^{2\varrho}}$$

und analog

$$a_i^{(k)} \leqq \frac{A^{\varrho}}{\Delta^{\varrho}}\frac{1}{k^{2\varrho}}$$

ist. Hieraus ergibt sich leicht

$$a_i^{(k)} \leqq \left(\frac{\sqrt{AC}}{\Delta}\right)^{\varrho}\frac{1}{i^{\varrho}\cdot k^{\varrho}}.$$

Durch Vergleich mit Beispiel 9 sehen wir, daß die Reihe für $\varrho > 1$ konvergiert.

12. In Satz 4 wird neben der Konvergenz der Doppelreihe insbesondere die Konvergenz aller Zeilenreihen vorausgesetzt. An dem folgenden einfachen Beispiel wird gezeigt, daß man ohne die zweite Voraussetzung nicht auskommt; sie folgt nicht aus der ersten. Die Doppelreihe

des Schemas

$$\begin{array}{cccc}
1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & 1 & -1 & 1 \\
\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\
-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\
-\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}
\end{array}$$

konvergiert, ihre Summe ist gleich 0. Jedoch divergieren alle Zeilenreihen.

13. Man verifiziere die Summen der folgenden Doppelreihen:

(a) $\sum_{m,n=2}^{\infty} \frac{1}{(p+n)^m} = \frac{1}{p+1} \quad (p > -1);$

(b) $\sum_{m=2,n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^m} = \ln 2;$

(c) $\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)^{2m+1}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \ln 2;$

(d) $\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)^{2m}} = \frac{1}{4} \ln 2;$

(e) $\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-2)^{2m}} = \frac{\pi}{8}.$

Hinweis. Man gehe zu der zweifachen Reihe über und summiere zunächst über m. Man verwende die bekannten Entwicklungen

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2,$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

14. Wir betrachten die Funktion zweier Veränderlicher

$$\varphi(x, z) = e^{(x/2)(z-z^{-1})} \qquad (z \neq 0).$$

Multiplizieren wir die absolut konvergenten Reihen

$$e^{(x/2)z} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^i \cdot \frac{z^i}{i!}, \qquad e^{(-x/2)z^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^k \frac{(-1)^k}{k!} \cdot z^{-k},$$

so erhalten wir für diese Funktion die (ebenfalls konvergente) Doppelreihe

$$\varphi(x, z) = \sum_{i,k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{i+k} \frac{(-1)^k}{i!\,k!} z^{i-k}.$$

Wenn wir die Glieder mit gleichen Potenzen von z zusammenfassen (vgl. die Folgerung aus Nr. 394), so können wir sie zu der zweifachen Reihe

$$\varphi(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \cdot z^n$$

umordnen;[1]) dabei ist für $n \geqq 0$

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

und für $n < 0$

$$J_n(x) = \sum_{k=-n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

Hieraus findet man übrigens leicht die Beziehung

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

Die Funktionen J_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ heißen *Besselfunktionen n-ter Ordnung*; diese Funktionen spielen in der mathematischen Physik, der Himmelsmechanik usw. eine bedeutende Rolle. Die Funktion $\varphi(x, z)$, aus deren Entwicklung sie folgten, heißt *erzeugende Funktion* der Besselfunktionen.

396. Potenzreihen in zwei Veränderlichen. Der Konvergenzbereich. Eine *Potenzreihe in zwei Veränderlichen x und y* ist eine Doppelreihe der Form

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} a_{ik} x^i y^k, \tag{14}$$

die nach den ganzen positiven Exponenten der Veränderlichen x und y geordnet ist.

Wie bei der Behandlung der einfachen Potenzreihen in Nr. 379 stellen wir auch hier die Frage nach der Gestalt des Konvergenzbereichs der Reihe (14), d. h. nach der Menge $\mathcal{M} = \{M(x, y)\}$ jener Punkte, für welche die Reihe konvergiert.

Hilfssatz. *Wenn die Reihe* (14) *in einem gewissen Punkt $\overline{M}(\bar{x}, \bar{y})$ konvergiert, dessen Koordinaten beide von* 0 *verschieden sind, dann konvergiert sie in allen Punkten $M(x, y)$ für die die Ungleichungen $|x| < |\bar{x}|$, $|y| < |\bar{y}|$ erfüllt sind* (d. h. in einem offenen Rechteck mit dem Mittelpunkt im Koordinatenanfangspunkt und einer Ecke im Punkt $\overline{M}$).

Der Beweis wird völlig analog zum Beweis des Hilfssatzes aus Nr. 379 geführt. Da die Glieder der Reihe (14) für $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$ beschränkt sind,

$$|a_{ik} \bar{x}^i \bar{y}^k| \leqq L \qquad (i, k = 0, 1, 2, \ldots),$$

folgt

$$|a_{ik} x^i y^k| \leqq L \cdot \left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^i \cdot \left|\frac{y}{\bar{y}}\right|^k,$$

so daß rechts das allgemeine Glied einer konvergenten Reihe steht, sobald $|x| < |\bar{x}|$, $|y| < |\bar{y}|$ ist (vgl. Nr. 395, Beispiel 8); daraus folgt sofort die absolute Konvergenz der Reihe (14).

Wir werden uns nun nur noch mit solchen Reihen beschäftigen, für die ein solcher Punkt $\overline{M}$ existiert; andere Reihen sind für uns nicht von Interesse.

---

[1]) Die Summe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ ist, *per definitionem*, gleich der Summe der beiden Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}$.

Der Charakter des Hilfssatzes erlaubt eine Beschränkung auf die Untersuchung des ersten Quadranten. Wegen der Symmetrie können die Resultate auf die übrigen Quadranten übertragen werden.

Wir betrachten nun im ersten Quadranten den Strahl OL, der vom Koordinatenanfangspunkt ausgeht und mit der x-Achse den Winkel θ bildet (vgl. Abb. 55). Wie in Nr. 379 läßt sich mit dem Hilfssatz beweisen: Man kann stets eine solche positive Zahl $R(\theta)$ finden (sie kann auch unendlich sein), daß für alle Punkte M auf diesem Strahl OL, für die

$$\overline{OM} < R(\theta)$$

ist, die Reihe (14) absolut konvergiert und für jene Punkte, die die Bedingung

$$\overline{OM} > R(\theta)$$

erfüllen, die Reihe divergiert.

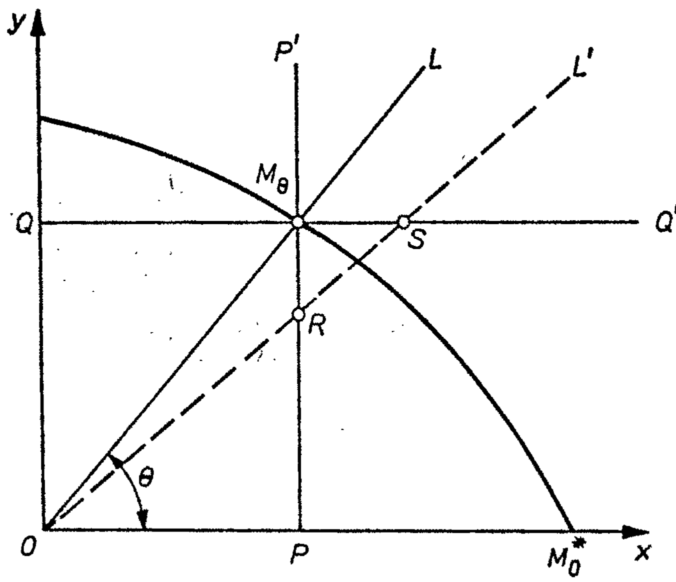

Abb. 55

Wenn für einen Strahl sogar $R(\theta) = \infty$ ist, so folgt aus dem Hilfssatz, daß *die Reihe in der ganzen Ebene konvergiert* (*und sogar absolut*). Hier ist die ganze Ebene der Konvergenzbereich $\mathcal{M}$.

Wir schließen nun den Fall, daß die Reihe *überall* konvergiert, aus. Dann ist $R(\theta)$ eine beschränkte Funktion von θ, und auf jedem Strahl OL existiert ein *Trennpunkt* M_θ, für den

$$\overline{OM_\theta} = R(\theta)$$

ist; er trennt die Punkte des Strahls, in denen die Reihe (absolut) konvergiert, von den Punkten, in denen sie divergiert. Im Punkt M_θ selbst wird die Reihe in manchen Fällen konvergieren, in anderen divergieren.

Legen wir durch M_θ Parallelen zur y- und zur x-Achse, so ist die Reihe im Innern des Rechtecks $OPM_\theta Q$ konvergent und (nach dem Hilfssatz) innerhalb des Winkels $Q'M_\theta P'$ divergent (vgl. Abb. 55). Auf einem anderen Strahl OL', der einem beliebigen Winkel θ' mit der x-Achse entspricht, konvergiert also die Reihe für alle Punkte auf OR und divergiert für Punkte außerhalb von S. Folglich liegt der Trennpunkt $M_{\theta'}$ auf diesem Strahl zwischen R und S. Daraus sieht man leicht, daß sich $R(\theta)$ *stetig* ändert, wenn sich θ von 0 bis $\pi/2$ ändert, so daß der Punkt M_θ im ersten Quadranten eine stetige Trennkurve beschreibt.

Da bei Verkleinerung des Winkels θ die Abszisse x_θ des Punktes M_θ nicht abnimmt und seine Ordinate y_θ nicht zunimmt, besitzen beide für $\theta \to 0$ Grenzwerte. Dann besitzt aber auch $R(\theta)$ einen Grenzwert. Ist dieser Grenzwert

$$\lim_{\theta \to 0} R(\theta) = R_0$$

endlich, dann strebt der Punkt M_θ gegen einen gewissen Grenzpunkt $M_0^*(R_0, 0)$ auf der x-Achse; anderenfalls besitzt die Trennkurve eine zur x-Achse parallele Asymptote (die auch mit der x-Achse übereinstimmen kann). Man kann das Gesagte leicht auf den Fall $\theta \to \pi/2$ übertragen, indem man die x- mit der y-Achse vertauscht.

Bemerkung. Man darf jedoch nicht denken, daß der Grenzpunkt M_0^*, von dem eben die Rede war, auf der x-Achse notwendig mit dem Trennpunkt M_0 zusammenfallen muß. Der Punkt M_0 kann rechts von M_0^* (sogar im Unendlichen) liegen. Diese Möglichkeit darf den Leser nicht wundern, denn der Hilfssatz und die auf ihm aufgebauten Überlegungen beziehen sich nur auf Punkte, die nicht auf den Koordinatenachsen liegen.

Wir ergänzen jetzt die im ersten Quadranten konstruierte Kurve durch die zu ihr (bezüglich beider Achsen und des Koordinatenanfangspunktes) symmetrischen Kurven in den übrigen Quadranten. Dadurch erhalten wir die Kurve, die im wesentlichen den uns interessierenden Konvergenzbereich $\mathcal{M}$ bestimmt: *In dem Teil der Ebene, der von außen durch diese Kurve begrenzt wird, ist die Reihe* (14) *konvergent* (*und zwar absolut*), *in dem Teil der Ebene außerhalb dieser Kurve divergiert die Reihe,*[1]) *auf der Kurve selbst kann die Reihe entweder konvergieren oder divergieren.*

397. Beispiele.

1. Der Konvergenzbereich $\mathcal{M}$ der Reihe

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} x^i y^k$$

ist, wie wir in Nr. 395, Beispiel 8, sahen, das Innere des offenen Quadrats $(-1, 1;\ -1, 1)$ (Abb. 56); ihre Summe ist dort gleich $\frac{1}{1-x}\,\frac{1}{1-y}$.

2. Für die analoge Reihe

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} x^i y^k,$$

bei der die Zählung der Exponenten i, k erst bei 1 beginnt, ist der Konvergenzbereich dassselbe Quadrat, dazu kommen aber noch die beiden Koordinatenachsen. Obwohl in diesem Fall der Trennpunkt M_θ, von dem oben die Rede war, für $\theta \to 0$ gegen den Grenzpunkt $M_0^*(1, 0)$ auf der x-Achse strebt, konvergiert die Reihe auf der *ganzen* x-Achse (vgl. die Bemerkung in Nr. 396).

3. Die Reihe

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} \frac{x^i y^k}{i!\,k!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}$$

konvergiert offenbar in der ganzen Ebene absolut.

---

[1]) Wenn man die Koordinatenachsen ausnimmt, auf denen, wie erwähnt wurde, die Reihe auch außerhalb dieser Kurve konvergieren kann.

4. Für die *absolute* Konvergenz der Reihe

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} \frac{(i+k)!}{i!\,k!} x^i y^k,$$

d. h. für die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} \frac{(i+k)!}{i!\,k!} |x|^i\,|y|^k,$$

ist *notwendig und hinreichend*, daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (|x|+|y|)^n = \frac{1}{1-(|x|+|y|)}$$

konvergiert, die sich aus der vorhergehenden durch Summierung längs der Diagonalen ergibt. Dies führt uns auf die Bedingung $|x| + |y| < 1$. Folglich ist der Konvergenzbereich das auf einer Ecke stehende Quadrat mit den Ecken $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$; vgl. Abb. 57.

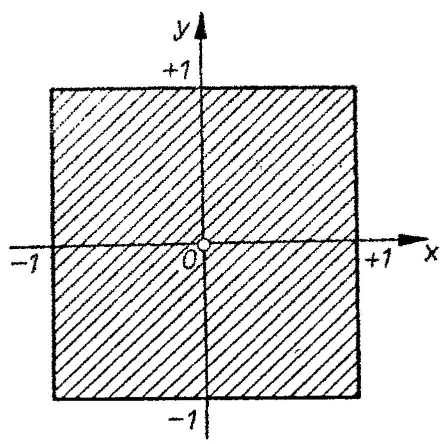

Abb. 56

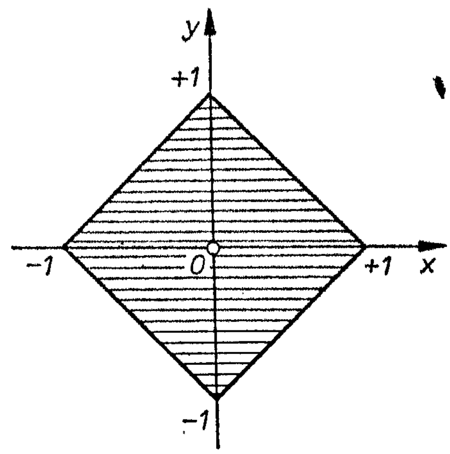

Abb. 57

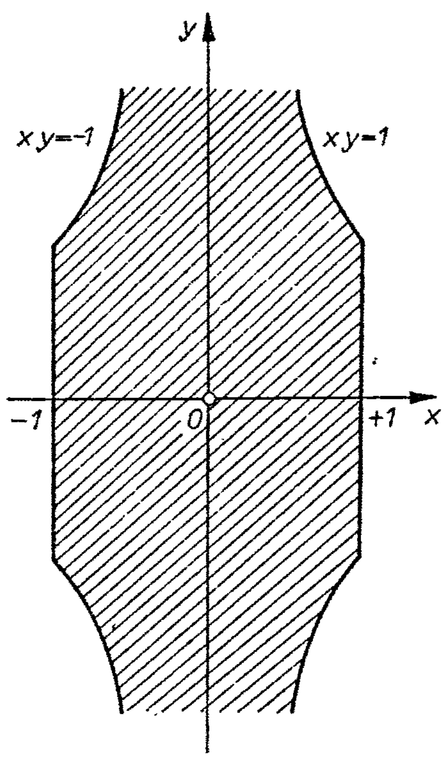

Abb. 58

5. Wir betrachten zum Schluß die Doppelreihe

$$\sum_{i\geqq k}^{\infty} x^i y^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^m + \cdots + xy + x^2 y + \cdots + x^m y + \cdots$$
$$+ x^2 y^2 + \cdots + x^m y^2 + \cdots + x^m y^m + \cdots.$$

Wenn wir sie, vorausgesetzt, sie konvergiert absolut, zeilenweise summieren, so erhalten wir

$$(1 + x + x^2 + \cdots)\,[1 + xy + (xy)^2 + \cdots] = \frac{1}{1-x}\,\frac{1}{1-xy}.$$

Daraus folgt, daß für die absolute Konvergenz der Reihe die Bedingung $|x| < 1$, $|xy| < 1$ *notwendig* ist; diese Bedingung ist gleichzeitig auch *hinreichend*. Der Konvergenzbereich ist in Abb. 58 angegeben. Die Kurven sind gleichseitige Hyperbeln.

398. Mehrfache Reihen. Die folgende Erweiterung des Begriffs einer unendlichen Reihe geht vollkommen natürlich vor sich. Es sei ein unendliches *System von Zahlen* $u_{ik\ldots l}$ gegeben, deren s Indizes unabhängig voneinander alle natürlichen Zahlen durchlaufen ($s \geqq 2$). Dann heißt das Symbol

$$\sum_{i,k,\ldots,l=1}^{\infty} u_{ik\ldots l}$$

mehrfache (genauer *s-fache*) *Reihe.*

Der (endliche oder unendliche) Grenzwert der Partialsumme

$$U_{nm\ldots p} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \cdots \sum_{l=1}^{p} u_{ik\ldots l}$$

für $n \to \infty$, $m \to \infty, \ldots, p \to \infty$ ist die *Summe* der Reihe. Die Reihe heißt *konvergent*, wenn sie eine endliche Summe besitzt.

Ein wichtiger Spezialfall der mehrfachen Reihen sind die *Potenzreihen in mehreren Veränderlichen*:

$$\sum_{i,k,\ldots,l=0}^{\infty} a_{ik\ldots l}\, x^i y^k \cdots z^l.$$

Die grundlegenden Begriffe und Sätze der oben dargelegten Theorie lassen sich auch auf mehrfache Reihen verallgemeinern.

§ 6. Unendliche Produkte

399. Grundbegriffe. Ist

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \ldots \tag{1}$$

eine vorgegebene Zahlenfolge, so heißt das aus ihr gebildete Symbol

$$p_1 p_2 p_3 \cdots p_n \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n \tag{2}$$

ein *unendliches Produkt.*[1])

[1]) Wir begegneten schon früher einem solchen Symbol für ein Produkt, jedoch nur mit endlich vielen Faktoren.

Wir bilden durch sukzessive Multiplikation der Zahlen (1) die *Teilprodukte* (oder *Abschnitte*)

$$P_1 = p_1, \quad P_2 = p_1 p_2, \quad P_3 = p_1 p_2 p_3, \quad \ldots, \quad P_n = p_1 p_2 \cdots p_n, \tag{3}$$

Wir werden in Zukunft stets die Folge $\{P_n\}$ dieser Teilprodukte dem Symbol (2) zuordnen.

Der (endliche oder unendliche) Grenzwert P der Produkte P_n, $\lim P_n = P$, heißt *Wert* des Produktes (2), und man schreibt

$$P = p_1 p_2 \cdots p_n \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n .$$

Wenn das unendliche Produkt einen *von* 0 *verschiedenen endlichen* Wert P besitzt, so heißt das Produkt *konvergent*, anderenfalls *divergent*.[1])

Für das Verschwinden eines endlichen Produkts ist hinreichend, daß einer seiner Faktoren gleich 0 ist. Wir schließen bei einem unendlichen Produkt in den weiteren Betrachtungen diesen Fall aus, so daß bei uns *stets* $p_n \neq 0$ ist.

Wir erkennen leicht die Analogie mit den unendlichen Reihen (Nr. 362) und können uns klarmachen, daß — ähnlich wie bei den Reihen — auch die Betrachtung eines unendlichen Produktes nur eine spezielle Methode ist, eine Zahlenfolge (oder andere Folge) und ihren Grenzwert zu untersuchen. Es ist nützlich, diese Methode zu beherrschen, da sie in manchen Fällen bequemer ist als andere.

400. Beispiele.

1. $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$. Wegen

$$P_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{n+1}{n} \to \frac{1}{2}$$

konvergiert das unendliche Produkt, und sein Wert ist gleich 1/2.

2. Die Wallissche Formel (Nr. 317)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdots 2n \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1)}$$

ist offenbar gleichbedeutend mit der folgenden Darstellung von $\pi/2$ als unendliches Produkt:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdots .$$

Sie führt auf die Formeln

$$\prod_{m=1}^{\infty}\left[1 - \frac{1}{(2m+1)^2}\right] = \frac{\pi}{4}, \quad \prod_{m=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{4m^2}\right) = \frac{2}{\pi}.$$

3. Man beweise, daß (für $|x| < 1$)

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdots (1+x^{2^{n-1}}) \cdots = \frac{1}{1-x}$$

[1]) Ist also $P = 0$, so ist für uns das Produkt *divergent*. Obwohl diese Definition nicht mit der Definition der Divergenz unendlicher Reihen in Einklang zu bringen ist, so ist sie doch üblich, da sie die Formulierung vieler Sätze erleichtert.

gilt. Wie man sich leicht überzeugen kann, gilt für die Folge der Teilprodukte

$$(1 - x)\,P_n = (1 - x)(1 + x)(1 + x^2) \cdots (1 + x^{2^{n-1}}) = 1 - x^{2^n},$$

$$P_n = \frac{1 - x^{2^n}}{1 - x}.$$

Daraus folgt nach Grenzübergang die geforderte Gleichung.

4. Wir erhielten in Nr. 54, Beispiel 7a, den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2^2}\cdots\cos\frac{\varphi}{2^n} = \frac{\sin\varphi}{\varphi} \qquad (\varphi \neq 0).$$

Jetzt können wir ihn wie folgt schreiben:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\varphi}{2^n} = \frac{\sin\varphi}{\varphi}.$$

Insbesondere erhalten wir für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ die Zerlegung

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdots\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\cdots.$$

Wegen

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\alpha}$$

kann diese Zerlegung auch in der Form

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

geschrieben werden (F. Vieta[1]). Diese Formel und die Wallissche Formel sind die ersten Beispiele für unendliche Produkte in der Geschichte der Analysis.

5. In Nr. 350, Formel (10), stellten wir für das vollständige elliptische Integral erster Gattung die Formel

$$\mathrm{K}(k) = \frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}(1 + k_1)(1 + k_2)\cdots(1 + k_n)$$

auf, wobei sich die Zahlenfolge $\{k_n\}$ aus der Rekursionsformel

$$k_n = \frac{1 - \sqrt{1 - k_{n-1}^2}}{1 + \sqrt{1 - k_{n-1}^2}} \qquad (k_0 = k)$$

bestimmen läßt. Die obige Formel ist die Zerlegung von $\mathrm{K}(k)$ in ein unendliches Produkt:

$$\mathrm{K}(k) = \frac{\pi}{2}\cdot\prod_{n=1}^{\infty}(1 + k_n).$$

6. Wir betrachten noch das unendliche Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1/n}}{1 + \frac{1}{n}}.$$

---

[1]) François Viète (auch Vieta), 1540—1603, französischer Jurist und Mathematiker.

Die Teilprodukte haben hier die Form

$$P_n = \frac{e^{1+1/2+\cdots+1/n}}{n+1} = \frac{e^{\ln n + C + \gamma_n}}{n+1} = \frac{n}{n+1}\, e^C e^{\gamma_n},$$

wobei C die Eulersche Konstante und γ_n eine unendlich kleine Größe ist (vgl. (4) aus Nr. 367). Das Produkt konvergiert also, und sein Wert ist gleich $P = e^C$.

401. Grundlegende Sätze. Der Zusammenhang mit den unendlichen Reihen. Wenn wir die ersten m Glieder des unendlichen Produktes (2) fortlassen, so erhalten wir das *Restprodukt*

$$\pi_m = p_{m+1} p_{m+2} \cdots p_{m+k} \cdots = \prod_{n=m+1}^{\infty} p_n, \tag{4}$$

das dem Rest einer unendlichen Reihe entspricht.

1°. *Ist das Produkt* (2) *konvergent, so konvergiert für jedes* m *auch das Produkt* (4); *aus der Konvergenz des Produktes* (4) *folgt umgekehrt die Konvergenz von* (2).[1])

Den Beweis überlassen wir dem Leser (vgl. 1° aus Nr. 364).

Für das Verhalten eines unendlichen Produktes ist also das Fortlassen oder Hinzufügen endlich vieler Anfangsfaktoren nicht von Bedeutung.

2°. *Ist das unendliche Produkt* (2) *konvergent, so gilt*

$$\lim_{m\to\infty} \pi_m = 1$$

(vgl. (4)).

Dies folgt aus der Gleichung

$$\pi_m = \frac{P}{P_m}$$

und aus der Tatsache, daß P_m gegen $P \neq 0$ strebt.

3°. *Ist das unendliche Produkt* (2) *konvergent, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 1.$$

Mit P_n strebt nämlich auch P_{n-1} gegen P; also ist

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{\lim P_n}{\lim P_{n-1}} = \frac{P}{P} = 1$$

(vgl. 5° aus Nr. 364).

Nach diesen Eigenschaften der unendlichen Produkte, die den Eigenschaften der unendlichen Reihen analog sind, wollen wir uns damit beschäftigen, Zusammenhänge zwischen der Konvergenz unendlicher Produkte und gewisser unendlicher Reihen festzustellen, die uns erlauben, die für unendliche Reihen ausführlich entwickelte Theorie unmittelbar für die unendlichen Produkte zu verwenden.

In einem konvergenten Produkt sind (von einer gewissen Stelle an) alle p_n positiv (vgl. 3°). Auf Grund von 1° können wir also, soweit lediglich das Konvergenzverhalten betrachtet wird, ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß alle p_n positiv sind.

---

[1]) Wir erinnern daran, daß wir alle $p_n \neq 0$ vorausgesetzt hatten.

4°. *Für die Konvergenz des unendlichen Produktes* (2) *ist notwendig und hinreichend, daß die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n \tag{5}$$

konvergiert.

Ist diese Bedingung erfüllt und L die Summe dieser Reihe, so gilt

$$P = e^L.$$

Wenn wir die Patialsummen der Reihe (5) mit L_n bezeichnen, ist

$$L_n = \ln P_n, \qquad P_n = e^{L_n}.$$

Aus der Stetigkeit des Logarithmus und der Exponentialfunktion folgt, daß L_n gegen $\ln P$ strebt, wenn P_n gegen den endlichen positiven Grenzwert P konvergiert, und daß umgekehrt der Grenzwert für P_n gleich e^L ist, wenn L_n den endlichen Grenzwert L besitzt.

Für die Untersuchung der Konvergenz des unendlichen Produktes (2) ist es oft zweckmäßiger, $p_n = 1 + a_n$ zu setzen und damit (2) in der Form

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \tag{2*}$$

und die Reihe (5) in der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln (1 + a_n) \tag{5*}$$

zu schreiben.

Mit diesen Bezeichnungen gilt der folgende einfache Satz:

5°. *Gilt zumindest für alle hinreichend großen n*

$$a_n > 0 \qquad (\textit{oder } a_n < 0),$$

dann ist das Produkt (2*) *genau dann konvergent, wenn die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{6}$$

konvergiert.

Da für die Konvergenz sowohl des Produktes (2) als auch der Reihe (6) in jedem Fall notwendig

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{7}$$

gelten muß (vgl. 3°), setzen wir diese Bedingung als erfüllt voraus. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln (1 + a_n)}{a_n} = 1$$

(vgl. Nr. 77, Beispiel 5a). Das bedeutet, daß die Glieder der beiden Reihen (5*) und (6), von einer gewissen Stelle an, ein bestimmtes Vorzeichen beibehalten. Nach Satz 2 aus Nr. 366 konvergieren oder divergieren dann diese beiden Reihen gleichzeitig. Daraus folgt im Zusammenhang mit Satz 4° die Behauptung.

Wir kehren zu dem allgemeinen Fall $a_n \lesseqgtr 0$ zurück und beweisen den folgenden Satz:

6°. *Ist neben der Reihe* (6) *auch die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \tag{8}$$

konvergent, so konvergiert auch das unendliche Produkt (2*).

Zunächst folgt (7) aus (8). Mit Hilfe der Entwicklung der Funktion $\ln(1+x)$ nach der Taylorschen Formel (vgl. Nr. 125, Beispiel 5) erhalten wir

$$\ln(1+a_n) = a_n - \frac{1}{2} a_n^2 + o(a_n^2)$$

und damit

$$\lim \frac{a_n - \ln(1+a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2}. \tag{9}$$

Hieraus und aus Satz 2 von Nr. 366 folgt, daß die Konvergenz von (8) auch die der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} [a_n - \ln(1+a_n)] \tag{10}$$

nach sich zieht. Da wir die Reihe (6) als konvergent vorausgesetzt haben, folgt daraus die Konvergenz der Reihe (5*) als Differenz zweier konvergenter Reihen. Nun ist nur noch der Satz 4° anzuwenden.

Wir behandeln noch kurz den Fall, daß das unendliche Produkt gegen 0 „divergiert".

7°. *Ein unendliches Produkt* (2) [*oder* (2*)] *hat dann und nur dann den Wert* 0, *wenn die Reihe* (5) [*oder* (5*)] *die Summe* $-\infty$ *besitzt.*

Insbesondere ist dies der Fall, wenn $a_n < 0$ *und die Reihe* (6) *divergiert oder wenn die Reihe* (6) *konvergiert, die Reihe* (8) *aber divergiert.*

Den Beweis überlassen wir dem Leser. Nur bezüglich der letzten Voraussetzung bemerken wir, daß aus der Divergenz der Reihe (8) auf Grund von (9) die Divergenz der Reihe (10) folgt, die dann die Summe $+\infty$ besitzt. Dann ist wegen der Konvergenz der Reihe (6) klar, daß die Summe der Reihe (5*) gleich $-\infty$ ist.

Zum Schluß benutzen wir den Zusammenhang zwischen dem Produkt (2) [oder (2*)] und der Reihe (5) [oder (5*)] für die Definition des Begriffs der absoluten Konvergenz eines unendlichen Produkts. Ein Produkt heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe, die aus den Logarithmen seiner Faktoren gebildet wird, absolut konvergiert.

Die Untersuchungen in Nr. 387 und 388 erlauben sofort den Schluß, daß absolut konvergente Produkte die Umordnungseigenschaft besitzen, während dies bei nichtabsolut konvergenten Produkten nicht der Fall ist.

Nach dem Muster von Satz 5° kann man leicht den folgenden Satz beweisen:

8°. *Ein unendliches Produkt* (2*) *ist dann und nur dann absolut konvergent, wenn die Reihe* (6) *absolut konvergiert.*

402. Beispiele.

1. Wir wenden die bewiesenen Sätze auf die folgenden unendlichen Produkte an:

(a) $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^x}\right)$, $x > 0$, konvergiert für $x > 1$ und divergiert für $x \leqq 1$, entsprechend dem

Verhalten der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ (vgl. 5°); analog dazu konvergiert $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^x}\right)$ für $x > 1$ (vgl. 5°) und divergiert gegen 0 für $0 < x \leqq 1$ (vgl. 7°).

(b) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right]$ konvergiert für $x > \frac{1}{2}$, und zwar konvergiert für $x > 1$ das Produkt absolut, denn die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ ist konvergent (vgl. 8°); für $\frac{1}{2} < x \leqq 1$ konvergiert das Produkt nicht-absolut, da die Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2x}}$ konvergieren (vgl. 6°); für $0 < x \leqq \frac{1}{2}$ ist der Wert des Produkts gleich 0, da zwar die erste dieser Reihen konvergiert, die zweite aber nicht (vgl. 7°).

2. Es sei $\{x_n\}$ eine beliebige Zahlenfolge aus dem Intervall $(0, \pi/2)$. Dann sind die Produkte

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos x_n \quad \text{und} \quad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x_n}{x_n}$$

konvergent oder nicht, je nachdem, ob die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2$ konvergiert oder nicht.

Wir setzen zunächst voraus, die Zahlenfolge sei eine Nullfolge; dann ergibt sich die Behauptung aus 5° und 7°, wenn man die Entwicklungen

$$\cos x_n = 1 - \frac{x_n^2}{2} + o(x_n^2), \quad \frac{\sin x_n}{x_n} = 1 - \frac{x_n^2}{6} + o(x_n^2)$$

(vgl. Nr. 125, Beispiel 2 und 3) benutzt.

Wenn die x_n keine Nullfolge bilden, dann ist gleichzeitig auch die Reihe divergent, und beide Produkte haben den Wert 0.[1])

3. Aus der Theorie der unendlichen Produkte erhält man leicht den Satz von ABEL: *Wenn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ eine gegebene positive Reihe ist und mit A_n ihre n-te Partialsumme bezeichnet wird, so konvergiert oder divergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{A_n}$ gleichzeitig mit der gegebenen Reihe* (vgl. Nr. 375, Beispiel 4). Zu beweisen brauchen wir nur die Divergenz. Geht $A_n \to \infty$, so divergiert das unendliche Produkt

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{a_n}{A_n}\right) = \prod_{n=2}^{\infty} \frac{A_{n-1}}{A_n}$$

gegen 0; dann divergiert (wegen 5°) auch die Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{A_n}$.

4. Wir betrachten das wichtige Produkt

$$x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

(später in Nr. 408 werden wir sehen, daß es die Funktion $\sin x$ darstellt). Es sei $x \neq k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Die (absolute) Konvergenz dieses Produktes folgt sofort aus der Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2\pi^2}$. Wird jeder Faktor in zwei Faktoren zerlegt, so kann das Produkt auch in der Gestalt

$$x\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{n\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{n\pi}\right) \cdots$$

[1]) Daß diese Produkte einen endlichen Wert besitzen, folgt daraus, daß alle ihre Faktoren echte Brüche sind; ihr Wert kann jedoch nicht von 0 verschieden sein, da die notwendige Bedingung für die Konvergenz (Satz 3°) verletzt ist.

geschrieben werden, so daß wegen $1 - \frac{x}{n\pi} \to 1$ die Konvergenz *bei der durchgeführten Zerlegung der Faktoren* erhalten bleibt; ebenso bleibt der Wert des Produktes erhalten. Hier ist aber die Konvergenz nicht absolut, da die Reihe

$$-\frac{x}{\pi} + \frac{x}{\pi} - \frac{x}{2\pi} + \frac{x}{2\pi} - \cdots - \frac{x}{n\pi} + \frac{x}{n\pi} - \cdots$$

nicht-absolut konvergiert, so daß die Faktoren nicht beliebig umgeordnet werden dürfen. Wir ersetzen nun alle Faktoren $1 \mp \frac{x}{n\pi}$ durch

$$\left(1 \mp \frac{x}{n\pi}\right) e^{\pm\frac{x}{n\pi}}.$$

Wir sehen leicht, daß dies weder einen Einfluß auf die Konvergenz noch auf den Wert des Produktes hat. Das neue Produkt ist jedoch auch absolut konvergent, denn es ist (vgl. Nr. 125, Beispiel 1)

$$e^{\pm\frac{x}{n\pi}} = 1 \pm \frac{x}{n\pi} + \frac{x^2}{2n^2\pi^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\left(1 \pm \frac{x}{n\pi}\right) e^{\pm\frac{x}{n\pi}} = 1 - \frac{x^2}{2n^2\pi^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

und die Faktoren sind (von einer gewissen Stelle an) echte positive Brüche.

5. Man beweise (für $0 < q < 1$) die Identität

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots = \frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots}$$

(Euler).

Hinweis. Die Konvergenz beider Produkte ergibt sich mit Hilfe von Satz 5°. Man schreibe das erste Produkt in der Gestalt

$$\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdots}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots}.$$

6. Man beweise (für $\alpha > \beta$)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)} = 0.$$

Dafür ist hinreichend, die Divergenz des unendlichen Produktes

$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{\beta+n}{\alpha+n} \equiv \prod_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{\alpha-\beta}{\alpha+n}\right)$$

oder (vgl. 7°) die Divergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha-\beta}{\alpha+n}$$

zu zeigen. Dies folgt leicht durch Vergleich dieser Reihe mit der harmonischen Reihe.

Bemerkung. Dieses Beispiel und die folgenden Beispiele zeigen, daß es zur Bestimmung des Grenzwertes einer Zahlenfolge (oder einer anderen Folge) oft nützlich ist, die Theorie der unendlichen Produkte zu benutzen.

7. Wir kommen nun auf die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$ zurück, die wir schon in Nr. 370, Beispiel 2(e), und Nr. 378, Beispiel 1(e), betrachtet haben. Wir ließen dort die Frage nach ihrem Verhalten

im Endpunkt $x = -\frac{1}{e}$ ihres Konvergenzintervalls offen. In diesem Punkt ergibt sich die alternierende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{n!} \frac{1}{e^n},$$

deren Glieder dem Betrage nach monoton abnehmen. Nach dem Satz von LEIBNIZ (Nr. 381) konvergiert die Reihe, wenn die Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} \frac{1}{e^n} = 0$$

erfüllt ist. Da das Verhältnis des $(n + 1)$-ten Gliedes dieser Zahlenfolge zum n-ten Glied gleich

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e}$$

ist, kann man diese Frage auf die Berechnung des Wertes des unendlichen Produktes

$$\frac{1}{e} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e}$$

zurückführen. Durch Logarithmieren erhält man (vgl. Nr. 125, Beispiel 5)

$$\ln \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e} = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 = n\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] - 1$$
$$= -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

so daß die Reihe der Logarithmen (vom Typ der Reihe (5)) divergiert und die Summe $-\infty$ besitzt. Der Wert des unendlichen Produktes (und mit ihm der gesuchte Grenzwert) ist also (vgl. 7°) gleich 0. Die Reihe konvergiert.

8. Wir untersuchen nun das Verhalten der hypergeometrischen Reihe

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + n - 1)\, \beta(\beta + 1) \cdots (\beta + n - 1)}{n!\, \gamma(\gamma + 1) \cdots (\gamma + n - 1)} x^n$$

(vgl. Nr. 372 und Nr. 378, Beispiel 4) für $x = -1$, und zwar jetzt unter der Voraussetzung $-1 \leqq \gamma - \alpha - \beta \leqq 0$ (dieser Fall wurde nämlich noch nicht betrachtet).

Das Verhältnis des $(n + 1)$-ten Koeffizienten zum n-ten ist hier gleich

$$\frac{(\alpha + n)(\beta + n)}{(1 + n)(\gamma + n)} = 1 - \frac{\gamma - \alpha - \beta + 1}{n} + \frac{\lambda_n}{n^2} \quad (|\lambda_n| \leqq L). \tag{11}$$

Für hinreichend große Werte von n ist es positiv; es sei $\gamma - \alpha - \beta > -1$, dann ist es sicher kleiner als 1. Die Reihe

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + n - 1)\, \beta(\beta + 1) \cdots (\beta + n - 1)}{n!\, \gamma(\gamma + 1) \cdots (\gamma + n - 1)} \tag{12}$$

ist also (bis auf einige Anfangsglieder) alternierend, und die Beträge ihrer Glieder nehmen monoton ab. Auch hier ist es zweckmäßiger, die Bestimmung des Grenzwertes (des absoluten Betrages) des allgemeinen Gliedes auf die Bestimmung des Wertes des unendlichen Produktes

$$\prod_{n=n_0}^{\infty} \frac{(\alpha + n)(\beta + n)}{(1 + n)(\gamma + n)}$$

zurückzuführen.[1]) Ist $\gamma - \alpha - \beta > -1$ (wie vorausgesetzt), so folgt aus (11) infolge von Satz 7°, daß das Produkt den Wert 0 besitzt: Die Reihe konvergiert.

Im Fall $\gamma - \alpha - \beta = -1$ hat (11) die Gestalt

$$\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)} = 1 + \frac{\lambda_n}{n^2} \quad (|\lambda_n| \leqq L).$$

Nach Satz 5° ist der Wert des unendlichen Produktes von 0 verschieden; für die Reihe (12) ist daher die notwendige Bedingung für die Konvergenz nicht erfüllt; die Reihe divergiert.

Damit ist die Untersuchung des Verhaltens der hypergeometrischen Reihe abgeschlossen. Das Resultat ist in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

$\lvert x\rvert < 1$		absolut konvergent
$\lvert x\rvert > 1$		divergent
$x = 1$	$\gamma - \alpha - \beta > 0$ $\gamma - \alpha - \beta \leqq 0$	absolut konvergent divergent
$x = -1$	$\gamma - \alpha - \beta > 0$ $0 \geqq \gamma - \alpha - \beta > -1$ $\gamma - \alpha - \beta \leqq -1$	absolut konvergent nicht-absolut konvergent divergent

9. Man beweise, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x^2 - 1)(x^2 - 2^2) \cdots (x^2 - n^2)$$

für *alle* Werte von x konvergiert, wenn sie für wenigstens einen *nicht ganzen* Wert $x = x_0$ konvergiert (Stirling[2])).

Die Glieder dieser Reihe unterscheiden sich von den Gliedern der konvergenten Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x_0^2 - 1)(x_0^2 - 2^2) \cdots (x_0^2 - n^2)$$

um die Faktoren

$$\frac{(x^2-1)(x^2-2^2)\cdots(x^2-n^2)}{(x_0^2-1)(x_0^2-2^2)\cdots(x_0^2-n^2)},$$

die sich für hinreichend große n monoton ändern.

Wir müssen noch die *Beschränktheit* der Faktoren nachweisen (da dann das Abelsche Kriterium angewendet werden kann); dafür ist es am einfachsten, sich von der Konvergenz des Produktes

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{x^2 - n^2}{x_0^2 - n^2}$$

zu überzeugen; wir überlassen es dem Leser.

---

1) Der Anfangswert $n = n_0$ muß hinreichend groß gewählt werden, damit alle Faktoren positiv sind.

2) James Stirling, 1692—1770, englischer Mathematiker.

10. Wir betrachten das unendliche Produkt

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x}{1 + \frac{x}{n}} \tag{13}$$

(Euler); x soll von 0 und allen negativen ganzen Zahlen verschieden sein.

Den allgemeinen Faktor dieses Produktes kann man leicht durch

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x}{1 + \frac{x}{n}} = 1 + \frac{x(x-1)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

darstellen, woraus wegen Satz 8° folgt, daß das Produkt (absolut) konvergiert. Die dadurch definierte Funktion $\Gamma(x)$ ist (neben den elementaren Funktionen) eine der wichtigsten Funktionen aus der Analysis. In Kap. XIV, § 5, werden wir eine andere Darstellung dieser Funktion angeben und eingehender ihre Eigenschaften studieren.

Da das n-te Teilprodukt die Gestalt

$$\frac{(n+1)^x}{x(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^x \frac{n!\, n^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

besitzt, kann man auch

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \tag{14}$$

schreiben. Mit der Formel für $\Gamma(x+1)$ folgt leicht

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{x+1+n} = x;$$

daraus ergibt sich die einfache, aber wichtige Beziehung

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x). \tag{15}$$

Ist x eine *natürliche* Zahl m, so erhält man die Rekursionsformel

$$\Gamma(m+1) = m \cdot \Gamma(m).$$

Wegen $\Gamma(1) = 1$ (was man leicht verifiziert) folgt

$$\Gamma(m+1) = m!.$$

Eine andere wichtige Formel für die Γ-Funktion findet man, wenn man die entsprechenden Seiten der Gleichungen

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x}{1 + \frac{x}{n}}$$

und

$$e^{Cx} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{x/n}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x}$$

gliedweise miteinander multipliziert (die erste Gleichung folgt aus (13) und (15), die zweite ergibt sich leicht aus Nr. 400, Beispiel 6). Man erhält

$$e^{Cx} \cdot \Gamma(x+1) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{x/n}}{1+\frac{x}{n}}$$

oder

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)} = e^{Cx} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right) e^{-x/n}, \tag{16}$$

die sogenannte *Weierstraßsche Produktdarstellung.*

11. Wir bringen nun ein von EULER stammendes wichtiges Beispiel für die Transformation eines unendlichen Produktes in eine Reihe. Wenn wir die Primzahlen der Reihe nach numerieren,

$$p_1 = 2, \qquad p_2 = 3, \qquad p_3 = 5, \qquad \ldots, \qquad p_k, \qquad \ldots,$$

so gilt für $x > 1$ die Identität

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^x}\right)\left(1-\frac{1}{3^x}\right)\left(1-\frac{1}{5^x}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k^x}\right)\cdots}$$
$$= 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \cdots + \frac{1}{n^x} + \cdots$$

oder

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^x}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x},$$

so daß das Produkt die Riemannsche ζ-Funktion darstellt (vgl. Nr. 365, Beispiel 2).

B e w e i s d e r I d e n t i t ä t. Nach der Formel für die geometrische Reihe gilt

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^x}} = \frac{1}{p_k^x} + \frac{1}{(p_k^2)^x} + \cdots + \frac{1}{(p_k^m)^x} + \cdots.$$

Multiplizieren wir die *endlich vielen* Reihen miteinander, die denjenigen Primzahlen entsprechen, die kleiner als eine gewisse natürliche Zahl N sind, so ist das Teilprodukt gleich

$$P_x^{(N)} = \prod_{p_k \leqq N} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^x}} = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{\infty}{}' \frac{1}{n^x}, \tag{17}$$

wobei der Strich am Summenzeichen anzeigen soll, daß die Summierung nicht über alle natürlichen Zahlen zu erstrecken ist, sondern nur über jene (1 nicht mitgerechnet), die in ihrer Primzahlzerlegung nur Primzahlen $\leqq N$ enthalten (die ersten N natürlichen Zahlen besitzen natürlich diese Eigenschaft). Daraus folgt

$$0 < P_x^{(N)} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} < \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Auf Grund der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ strebt der Ausdruck auf der rechten Seite, der ihren *Rest* nach dem N-ten Glied darstellt, für $N \to \infty$ gegen 0. Der Grenzübergang führt also zu dem geforderten Resultat.

12. Die Beziehung (17) gilt auch für $x = 1$; daraus folgt

$$P_1^{(N)} = \prod_{p_k \leqq N}' \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} > \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = H_N,$$

so daß für $N \to \infty$ jetzt $P_1^{(N)} \to \infty$ geht, d. h., das Produkt

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)\cdots} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}$$

divergiert und hat den Wert $+\infty$.

Darin besteht der von EULER angegebene Beweis für die Unendlichkeit der Menge der Primzahlen (was wir in der durchgeführten Überlegung nicht benutzten!); denn bei Endlichkeit dieser Menge müßte auch das Produkt einen endlichen Wert haben. Wenn man das erhaltene Resultat in der Form

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)\cdots = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = 0$$

schreibt, so kann man im Zusammenhang mit Satz 5° schließen, daß die Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{p_k} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k}$$

divergiert.

Dieser wichtige Satz gibt außerdem noch eine gewisse Charakterisierung des Wachstums der Primzahlen. (Dieser Satz ist bei weitem stärker als die Behauptung, daß die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert; denn hier haben wir es nur mit einem *Teil* ihrer Glieder zu tun.)

13. Analog kann man (für $x > 1$) die Identität

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{3^x}\right)\left(1 - \frac{1}{5^x}\right)\left(1 + \frac{1}{7^x}\right)\left(1 + \frac{1}{11^x}\right)\cdots\left(1 \pm \frac{1}{p_{k+1}^x}\right)\cdots}$$
$$= 1 - \frac{1}{3^x} + \frac{1}{5^x} - \frac{1}{7^x} + \frac{1}{9^x} - \cdots$$

aufstellen, wobei im Nenner der linken Seite das Plus- oder das Minuszeichen steht, je nachdem, ob die (ungerade) Primzahl die Form $4n - 1$ oder $4n + 1$ besitzt.

§ 7. Die Entwicklungen der elementaren Funktionen

403. Die Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe. Die Taylorsche Reihe. Wir betrachteten schon in Nr. 379 Reihen der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \tag{1}$$

also Entwicklungen nach Potenzen von x. Wenn man die „überall divergenten" Reihen ausschließt, dann existiert für jede derartige Reihe ein *Konvergenzintervall* $(-R, R)$ mit dem Mittelpunkt $x = 0$ und dem *Konvergenzradius* $R > 0$, der auch unendlich sein kann. Ob die Endpunkte zum Konvergenzintervall gehören, ist von Fall zu Fall verschieden.

Man betrachtet auch die Potenzreihe in der allgemeineren Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots, \tag{2}$$

eine Entwicklung nach Potenzen der Differenz $x - x_0$ (statt x). Eine derartige Reihe ist nicht wesentlich von der Reihe (1) verschieden, da sie durch die einfache Variablensubstitution $x - x_0 = y$ in jene übergeführt werden kann (bis auf die *Bezeichnung* der Variablen). Auch für die Reihe (2) existiert, wenn sie nicht „überall divergiert", ein *Konvergenzintervall* $(x_0 - R, x_0 + R)$ mit dem Mittelpunkt x_0. Die Endpunkte des Intervalls können wie bei (1) dazugehören oder auch nicht.

In den folgenden Abschnitten werden wir die Eigenschaften der Potenzreihen eingehend studieren. Potenzreihen sind in vielem den Polynomen vergleichbar. Zum Beispiel sind die Potenzreihenabschnitte Polynome. Dadurch werden die Potenzreihen zu einem geeigneten Hilfsmittel für Näherungsrechnungen. Große Bedeutung gewinnt in diesem Zusammenhang die Frage nach der Möglichkeit, eine gegebene Funktion nach Potenzen von $x - x_0$ (insbesondere nach Potenzen von x) zu entwickeln, d. h., sie in Form einer Reihe der Art (2) oder (1) darzustellen.

Wir wollen uns hier mit Entwicklungen der elementaren Funktionen beschäftigen, wobei die Taylorsche Formel, die wir in Nr. 124 bis 126 ausführlich behandelt haben, den Lösungsweg für das gestellte Problem öffnet. Setzen wir voraus, daß die betrachtete Funktion $f(x)$ im Intervall $[x_0, x_0 + H]$ oder $[x_0 - H, x_0]$ mit $H > 0$ beliebig oft stetig differenzierbar ist, dann gilt, wie wir in Nr. 126 sahen, für alle Werte von x in diesem Intervall die Formel

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x), \tag{3}$$

wobei das *Restglied* $r_n(x)$ in einer der in Nr. 126 angegebenen Formen dargestellt werden kann. Dabei können wir n hinreichend groß wählen, d. h., wir können die Entwicklung bis zu jeder beliebigen Potenz von $x - x_0$ durchführen. Dies führt natürlich auf eine unendliche Entwicklung

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots. \tag{4}$$

Diese Reihe heißt *Taylorsche Reihe* der Funktion $f(x)$, unabhängig davon, ob sie konvergiert und ob sie die Summe $f(x)$ besitzt. Sie hat die Form (2), wobei ihre Koeffizienten

$$a_0 = f(x_0), \quad a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \quad \ldots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},$$

Taylorsche Koeffizienten heißen.

Da die Differenz zwischen $f(x)$ und der Summe der ersten $n + 1$ Glieder der Taylorschen Reihe auf Grund von (3) gleich $r_n(x)$ ist, gilt offenbar: *Die Entwicklung* (4) *ist* *genau dann in einem beliebigen Punkt x gültig, wenn das Restglied $r_n(x)$ der Taylorschen Formel für diesen Wert von x mit wachsendem n gegen 0 strebt:*

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0. \tag{5}$$

Für die Untersuchung, ob diese Gleichung gilt und für welche Werte von x sie gilt, werden wir verschiedene Formen des Restgliedes $r_n(x)$ verwenden, auf deren *Abhängigkeit von n* wir ausdrücklich hinweisen.

Am häufigsten begegnet man dem Fall, daß $x_0 = 0$ ist und $f(x)$ nach Potenzen von x entwickelt werden kann:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \cdots;^{1)} \tag{6}$$

diese Reihe hat die Form (1) mit den Koeffizienten

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = \frac{f'(0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \quad \ldots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \tag{7}$$

Wir geben nun das Restglied $r_n(x)$ unter der speziellen Voraussetzung $x_0 = 0$ an (vgl. Nr. 126):

Restglied von LAGRANGE[2]: $r_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}\,x^{n+1}$, (8)

Restglied von CAUCHY: $r_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}\,(1-\theta)^n\,x^{n+1}$. (9)

Dabei kann über den Faktor θ nur ausgesagt werden, daß er zwischen 0 und 1 liegt. Er kann sich aber mit x und n ändern (und auch bei beiden Restgliedern verschieden sein).

Wir gehen nun zu konkreten Entwicklungen über.

404. Die Entwicklung der trigonometrischen Funktionen und anderer Funktionen in eine Potenzreihe. Wir beweisen zunächst den folgenden einfachen Satz, mit dem sofort eine Reihe wichtiger Fälle erledigt wird:

Wenn die Funktion $f(x)$ im Intervall $[0, H]$ oder $[-H, 0]$ Ableitungen beliebig hoher Ordnung besitzt und alle Ableitungen für alle Werte von x in dem betrachteten Intervall dem Betrag nach höchstens gleich einer bestimmten endlichen Zahl sind,

$$|f^{(n)}(x)| \leqq L \tag{10}$$

(*wobei L nicht von n abhängen soll*), *so gilt im ganzen Intervall die Entwicklung* (6).

Beweis. Für das Lagrangesche Restglied gilt auf Grund von (10)

$$|r_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\theta x)|}{(n+1)!}\,|x|^{n+1} \leqq L\,\frac{H^{n+1}}{(n+1)!}.$$

[1]) Diese Reihe heißt im allgemeinen *Maclaurinsche Reihe*; vgl. die Fußnoten in Band I, S. 230 und 234.

[2]) JOSEPH LOUIS LAGRANGE, 1736–1813, französischer Mathematiker.

Mit wachsendem n strebt der Ausdruck $\frac{H^{n+1}}{(n+1)!}$, wie wir in Nr. 35, Beispiel 1, gesehen haben, gegen 0; übrigens folgt dies (auf Grund von Nr. 364, Satz 5°) auch aus der Konvergenz der Reihe

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H^{n+1}}{(n+1)!}$$

(vgl. Nr. 370, Beispiel 2(a)). In diesem Fall hat aber auch $r_n(x)$ den Grenzwert 0, womit die Behauptung bewiesen ist.

(a) Diese Voraussetzungen sind in *jedem* Intervall $[-H, H]$ auf die Funktionen

$$f(x) = e^x, \qquad \sin x, \qquad \cos x$$

anwendbar, da der absolute Betrag ihrer Ableitungen

$$f^{(n)}(x) = e^x, \qquad \sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right), \qquad \cos\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right)$$

in diesem Intervall durch e^H (bei der Funktion e^x) und durch 1 (bei $\sin x$ und $\cos x$) nach oben begrenzt wird.

Da wir für diese Funktionen die Taylorschen Koeffizienten schon in Nr. 125, Beispiel 1 bis 3, berechnet haben, können wir die Entwicklungen sofort angeben:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \tag{11}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \cdots, \tag{12}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots. \tag{13}$$

Sie alle gelten für *jeden* Wert von x.

(b) Auf ähnliche Weise erhält man leicht die Entwicklungen für die *Hyperbelfunktionen*. Einfacher findet man sie jedoch mit Hilfe ihrer Definitionsgleichungen

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

die man erhält, indem man die Reihe (11) und die Reihe

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

die sich aus (11) ergibt, wenn man x durch $-x$ ersetzt, gliedweise subtrahiert bzw. addiert. Wir erhalten

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \cdots,$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots.$$

(c) Auf die Funktion $y = \arctan x$ ist der bewiesene Satz nicht anwendbar. Der allgemeine Ausdruck für die n-te Ableitung dieser Funktion ist (vgl. Nr. 116, Beispiel 8)

$$y^{(n)} = (n-1)!\cos^n y \cdot \sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right). \tag{14}$$

Es existiert also keine *gemeinsame* obere Grenze für alle $y^{(n)}$.

Da die entsprechende Taylorsche Reihe (vgl. Nr. 125, Beispiel 6)

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \cdots$$

nur im Intervall $[-1, +1]$ konvergiert[1]), wird außerhalb dieses Intervalls die Funktion $\arctan x$ sicher nicht durch diese Reihe dargestellt.

Für $|x| \leqq 1$ gilt nach der Lagrangeschen Restform (8) [mit (14)]

$$|r_n(x)| = \frac{\left|\cos^{n+1} y_\theta \cdot \sin(n+1)\left(y_\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right|}{n+1}|x|^{n+1} \leqq \frac{1}{n+1};$$

dabei ist $y_\theta = \arctan \theta x$. Daraus wird klar, daß $r_n(x)$ gegen 0 strebt. Also gilt für alle Werte von x im Intervall $[-1, +1]$ die Entwicklung

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \cdots. \tag{15}$$

Wir betonen noch einmal, daß die Entwicklung (15) außerhalb von $[-1, +1]$ nicht gilt (obwohl $\arctan x$ auch außerhalb von $[-1, +1]$ definiert ist), da die Reihe keine Summe besitzt.

Aus der Reihe (15) ergibt sich für $x = 1$ die Leibnizsche Reihe

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1} + \cdots, \tag{16}$$

die erste Reihe, die eine Entwicklung der Zahl π angab.

405. Die logarithmische Reihe. Wenn wir für $f(x)$ die Funktion $\ln(1+x)$, $x > -1$, nehmen, dann lautet die entsprechende Taylorsche Reihe (vgl. Nr. 125, Beispiel 5)

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots.$$

Sie konvergiert nur für Werte von x aus dem Intervall $(-1, +1]$;[2]) das bedeutet, nur für diese Werte ist es sinnvoll, das Verhalten des Restgliedes $r_n(x)$ zu untersuchen.

Wir benutzen zunächst die Lagrangesche Form (8). Wegen

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

[1]) Mit Hilfe des d'Alembertschen Kriteriums (Nr. 377) überzeugt man sich leicht, daß die Reihe für $|x| < 1$ (absolut) konvergiert und für $|x| > 1$ divergiert. Die (nicht absolute) Konvergenz für $x = \pm 1$ folgt aus dem Satz von Leibniz (Nr. 381).

[2]) Vgl. die vorhergehende Fußnote; für $x = -1$ ergibt sich (bis auf das Vorzeichen) die *divergente* harmonische Reihe.

(vgl. Nr. 116, Beispiel 3) gilt

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{1}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} \quad (0 < \theta < 1).$$

Für $0 \leqq x \leqq 1$ ist der letzte Faktor nicht größer als 1; daraus folgt

$$|r_n(x)| \leqq \frac{1}{n+1}, \quad \text{also} \quad r_n(x) \to 0 \quad (\text{für } n \to \infty).$$

Für $x < 0$ ist das Verhalten dieses Faktors unklar; es ist deshalb zweckmäßig, die Cauchysche Form des Restgliedes zu verwenden (vgl. (9)). Es gilt

$$r_n(x) = (-1)^n x^{n+1} \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} \quad (0 < \theta < 1),$$

also

$$|r_n(x)| \leqq \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \cdot \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n.$$

Da für $x > -1$ stets $1 + \theta x > 1 - \theta$ gilt, ist der letzte Faktor kleiner als 1; folglich geht $r_n(x) \to 0$, sobald $|x| < 1$ ist.

Obwohl mit dem Cauchyschen Restglied das Problem für alle Werte von x zwischen -1 und $+1$ gelöst wird, führt es doch für $x = 1$ nicht zum Ziel. Wir erhalten in diesem Fall

$$|r_n(1)| < (1-\theta)^n;$$

da sich jedoch θ mit n ändert, kann man daraus nicht schließen, daß $(1-\theta)^n$ gegen 0 strebt.

Zusammenfassend kann man sagen, daß für alle Werte im Intervall $(-1, +1]$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots \tag{17}$$

gilt. Insbesondere erhält man für $x = 1$ die bekannte Reihe

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots. \tag{18}$$

Aus der Reihe (17) kann man auch andere nützliche Entwicklungen herleiten. Ersetzt man z. B. x durch $-x$ und subtrahiert die erhaltene Reihe gliedweise von (17) (dafür muß man $|x| < 1$ annehmen), so erhält man

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2x \left(1 + \frac{1}{3} x^2 + \frac{1}{5} x^4 + \cdots + \frac{1}{2m+1} x^{2m} + \cdots\right). \tag{19}$$

406. Die Stirlingsche Formel. Als Anwendungsbeispiel zeigen wir, wie mit (19) eine der wichtigsten Formeln der Analysis, die *Stirlingsche Formel,* hergeleitet werden kann.

Wir setzen in (19) $x = \frac{1}{2n+1}$, wobei n eine beliebige natürliche Zahl sei. Wegen

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}} = \frac{n+1}{n}$$

erhalten wir die Entwicklung

$$\ln\frac{n+1}{n} = \frac{2}{2n+1}\left[1 + \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots\right], \tag{20}$$

die wir auch in der Form

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots$$

schreiben können. Dieser Ausdruck ist offenbar größer als 1, aber kleiner als

$$1 + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots\right] = 1 + \frac{1}{12n(n+1)}.$$

Somit gilt

$$1 < \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{12n(n+1)},$$

woraus durch Entlogarithmieren

$$\mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < \mathrm{e}^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}$$

folgt.

Wir führen nun die Folge der Zahlen $a_n = \dfrac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ ein. Dann ist

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}},$$

und aus den obigen Ungleichungen folgt

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < \mathrm{e}^{\frac{1}{12n(n+1)}} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{12n}}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{12(n+1)}}},$$

so daß einerseits $a_n > a_{n+1}$, andererseits

$$a_n \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{12n}} < a_{n+1} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{12(n+1)}}$$

gilt. Somit nimmt mit wachsendem n die Zahlenfolge a_n ab (es existiert eine untere Schranke, etwa 0) und strebt gegen einen endlichen Grenzwert a; die Zahlenfolge $a_n \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{12n}}$ wächst und strebt offenbar auch gegen den Grenzwert a (wegen $\mathrm{e}^{-\frac{1}{12n}} \to 1$). Da für jedes n die Ungleichung

$$a_n \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{12n}} < a < a_n$$

gilt, kann man eine solche Zahl θ $(0 < \theta < 1)$ finden, daß

$$a = a_n \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\theta}{12n}} \quad \text{oder} \quad a_n = a \cdot \mathrm{e}^{\frac{\theta}{12n}}$$

ist. (Wir erwähnen, daß θ im allgemeinen von n abhängt.) Mit der Definitionsgleichung für a_n folgt

$$n! = a \cdot \sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \cdot \mathrm{e}^{\frac{\theta}{12n}} \qquad (0 < \theta < 1). \tag{21}$$

Es bleibt nun noch übrig, die Konstante a zu bestimmen. Dazu verwenden wir die Wallissche Formel (Nr. 317), die in der Gestalt

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2$$

geschrieben werden kann. Den Ausdruck in der eckigen Klammer formen wir wie folgt um:

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{[(2n)!!]^2}{(2n)!} = \frac{2n\cdot(n!)^2}{(2n)!}.$$

Wenn wir $n!$ durch den Ausdruck (21) und $(2n)!$ durch den analogen Ausdruck

$$(2n)! = a\cdot\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}\cdot \mathrm{e}^{\frac{\theta'}{24n}} \qquad (0 < \theta' < 1)$$

ersetzen, so erhalten wir nach einigen elementaren Umformungen

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = a\cdot\sqrt{\frac{n}{2}}\cdot \mathrm{e}^{\frac{4\theta-\theta'}{24n}};$$

also ist

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}a^2\cdot\frac{n}{2}\cdot \mathrm{e}^{\frac{4\theta-\theta'}{12n}} = \frac{a^2}{4}.$$

Daraus folgt

$$a^2 = 2\pi \quad\text{oder}\quad a = \sqrt{2\pi}.$$

Setzen wir diesen Wert in (21) ein, so erhalten wir die *Stirlingsche Formel*

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\cdot \mathrm{e}^{\frac{\theta}{12n}} \qquad (0 < \theta < 1),$$

mit welcher man $n!$ leicht für große n abschätzen kann.

Zur Übung schlagen wir dem Leser vor, die Summe der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[n \ln\frac{2n+1}{2n-1} - 1\right]$$

zu bestimmen, deren Konvergenz in Nr. 367, Beispiel 9(b), festgestellt wurde.

Hinweis. Man berechne die n-te Partialsumme und gehe, nachdem man sie mit Hilfe der Stirlingschen Formel umgeformt hat, zur Grenze über. Lösung: $\frac{1}{2}(1 - \ln 2)$.

407. Die binomische Reihe. Wir setzen nun $f(x) = (1+x)^m$, wobei m eine beliebige reelle, von 0 und allen natürlichen Zahlen verschiedene Zahl sein soll (für eine natürliche Zahl ergibt sich die bekannte endliche Entwicklung nach dem binomischen Satz). In diesem Fall hat die Taylorsche Reihe die Gestalt

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}x^n + \cdots$$

(vgl. Nr. 125, Beispiel 4) und heißt *binomische Reihe*; ihre Koeffizienten sind die *Binomialkoeffizienten*. Wegen der Voraussetzung bezüglich m sind alle Koeffizienten von 0 verschieden (ist dagegen m eine natürliche Zahl, dann sind der Koeffizient von x^{m+1} und alle folgenden gleich 0). Mit Hilfe des d'Alembertschen Kriteriums (Nr. 377) ergibt sich, daß die binomische Reihe für $|x| < 1$ absolut konvergiert und für $|x| > 1$

divergiert. Wir untersuchen das Restglied $r_n(x)$ unter der Voraussetzung $|x| < 1$ und verwenden die Cauchysche Form (9); das Lagrangesche Restglied kann auch hier nicht für alle x verwendet werden.

Wegen

$$f^{n+1}(x) = m(m-1)\cdots(m-n+1)(m-n)(1+x)^{m-n-1}$$

gilt für das Restglied

$$r_n(x) = \frac{m(m-1)\cdots(m-n)(1+\theta x)^{m-n-1}}{1\cdot 2\cdots n}(1-\theta)^n x^{n+1}.$$

Durch Umstellung einiger Faktoren bringen wir es auf die Form

$$r_n(x) = \frac{(m-1)(m-2)\cdots([m-1]-n+1)}{1\cdot 2\cdots n} \times x^n\cdot mx(1+\theta x)^{m-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$$

Der erste der drei Faktoren stellt das allgemeine Glied der binomischen Reihe mit dem Exponenten $m-1$ dar; da die binomische Reihe im Fall $|x| < 1$ für jeden Exponenten konvergiert, geht dieser Faktor mit $n\to\infty$ gegen 0. Der zweite Faktor liegt dem Betrage nach zwischen den Grenzen

$$|mx|\cdot(1-|x|)^{m-1} \quad \text{und} \quad |mx|\cdot(1+|x|)^{m-1},$$

die sich mit n nicht ändern; der dritte Faktor ist wie in Nr. 405 kleiner als 1. Also gilt $r_n(x)\to 0$, d. h., für $|x| < 1$ gilt die Entwicklung

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}x^n + \cdots, \tag{22}$$

die ebenfalls mit dem Namen Newton verknüpft ist.

Wir haben noch nicht die Frage behandelt, inwieweit die Reihe für die Werte $x = \pm 1$ zu verwenden ist. Man sieht leicht, daß die binomische Reihe ein Spezialfall der hypergeometrischen Reihe ist und aus dieser für $\alpha = -m$, $\beta = \gamma$ und durch Ersetzen von x durch $-x$ folgt. Infolgedessen kann man (entsprechend der Tabelle in Nr. 402, Beispiel 8) eine Tabelle aufstellen, die das Verhalten der binomischen Reihe in den Endpunkten $x = \pm 1$ des Konvergenzintervalls charakterisiert:

$x = 1$	$m > 0$	absolut konvergent
	$0 > m > -1$	nicht-absolut konvergent
	$m \leqq -1$	divergent
$x = -1$	$m > 0$	absolut konvergent
	$m < 0$	divergent

Man kann zeigen, daß bei Konvergenz der binomischen Reihe ihre Summe gleich $(1+x)^m$ ist. Um komplizierte Restgliduntersuchungen zu vermeiden, halten wir uns hier aber nicht damit auf. Das Ergebnis folgt sehr einfach aus einem allgemeinen Satz, den wir später beweisen werden (vgl. Nr. 437, Satz 6°).

Wir geben noch einige spezielle binomische Reihen an, z. B. für $m = -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^{n-1} x^n + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

(die gewöhnliche geometrische Reihe):

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n + \cdots \\ \qquad\qquad (-1 \leqq x \leqq 1);\end{array}\right\} \tag{23}$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \cdots + (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + \cdots \\ \qquad\qquad (-1 < x \leqq 1).\end{array}\right\} \tag{24}$$

Wir betonen, daß die Summe der binomischen Reihe im Fall eines rationalen m stets den positiven Wert der Wurzel liefert.

Bemerkungen.

I. Darauf beruht z. B. die folgende interessante Entwicklung, die von O. Schlömilch stammt. Setzen wir in (23) $x = -y^2$ (mit $-1 \leqq y \leqq 1$), so erhalten wir

$$\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} y^{2n-1}.$$

Dann ersetzen wir y durch den Ausdruck $\frac{2z}{1+z^2}$, wo z zwischen $-\infty$ und $+\infty$ variiert. Es folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^{2n-1} = \begin{cases} z & \text{für } |z| \leqq 1, \\ \frac{1}{z} & \text{für } |z| \geqq 1. \end{cases}$$

Dieses Beispiel ist deshalb interessant, weil für die Funktion, die in verschiedenen Intervallen durch die *verschiedenen* analytischen Ausdrücke z und $\frac{1}{z}$ definiert ist, ein *einziger* analytischer Ausdruck als Summe einer Reihe existiert (vgl. Nr. 40; Nr. 363, Beispiel 5).

II. In allen oben betrachteten Beispielen wurde die Entwicklung einer Funktion in eine Taylorsche Reihe vorgenommen, bei der für alle Werte von x, für welche die Reihe konvergiert, die Summe gleich jener Funktion ist, für welche die Reihe hergeleitet wurde. Beim Leser könnte die Vermutung entstehen, daß es hinreicht, die Konvergenz der Reihe nachzuweisen, ohne die Bedingung (5) nachzuprüfen, durch die die Entwicklung (4) oder (6) gewährleistet wird. In Wirklichkeit ist dies aber nicht hinreichend. Wenn wir z. B. zu der in der Bemerkung aus Nr. 138 betrachteten Funktion

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (\text{für } x \neq 0), \qquad f(0) = 0,$$

zurückkehren, so existieren für sie, wie wir sahen, sogar für $x = 0$ Ableitungen beliebig hoher Ordnung, jedoch sind sie alle gleich 0. Eine Taylorsche Reihe der Form (6), deren Koeffizienten alle verschwinden, konvergiert natürlich überall, aber sie gibt für keinen Wert von x (außer für $x = 0$) den Wert der Ausgangsfunktion an.

408. Die Zerlegung von Sinus und Kosinus in unendliche Produkte. Wir lernten oben die Entwicklungen der wichtigsten elementaren Funktionen in unendliche Reihen nach Potenzen von x kennen, d. h. die Darstellung dieser Funktionen als „unendliche Polynome". Zum Abschluß dieses Paragraphen stellen wir die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ in Form von unendlichen Produkten dar, die man durch Zerlegung des entsprechenden „unendlichen Polynoms" in Faktoren erhalten kann.

Wir beginnen mit der Herleitung einer Hilfsformel. Aus der Algebra kennen wir die *Moivresche*[1]) *Formel*[2])

$$(\cos z + i \sin z)^m = \cos mz + i \sin mz;$$

dabei ist m eine natürliche Zahl. Rechnen wir den Ausdruck auf der linken Seite aus und vergleichen wir die Koeffizienten von $i = \sqrt{-1}$ auf beiden Seiten, so erhalten wir

$$\sin mz = m \cos^{m-1} z \cdot \sin z - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{m-3} z \cdot \sin^3 z + \cdots.$$

Ist $m = 2n + 1$, so können wir, wenn wir die geraden Potenzen von $\cos x$ mit Hilfe der Formel $\cos^{2k} z = (1 - \sin^2 z)^k$ ersetzen, das Resultat in der Form

$$\sin (2n + 1) z = \sin z P(\sin^2 z) \tag{25}$$

schreiben; dabei ist $P(u)$ ein Polynom n-ten Grades.

Dieses Polynom kann, wenn $u_1, u_2, \ldots, u_n$ seine Nullstellen sind, in der folgenden Weise in Faktoren zerlegt werden:

$$P(u) = a(u - u_1) \cdots (u - u_n) = A\left(1 - \frac{u}{u_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{u}{u_n}\right).$$

Die Nullstellen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ lassen sich leicht aus (25) bestimmen. Bezeichnet man nämlich mit z diejenigen Nullstellen von $\sin (2n + 1) z$, für die $\sin z$ von 0 verschieden ist, dann ist $\sin^2 z$ notwendig Nullstelle des Polynoms $P(u)$. Offenbar entsprechen den Werten $z = \frac{\pi}{2n+1}$, $2\frac{\pi}{2n+1}, \ldots, n\frac{\pi}{2n+1}$, die zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegen und in der angegebenen Reihenfolge wachsen, die entsprechend wachsenden (und folglich voneinander verschiedenen) Nullstellen

$$u_1 = \sin^2 \frac{\pi}{2n+1}, \quad u_2 = \sin^2 2\frac{\pi}{2n+1}, \quad \ldots, \quad u_n = \sin^2 n\frac{\pi}{2n+1}.$$

Ferner kann man $A = P(0)$ als Grenzwert des Ausdrucks $\frac{\sin (2n+1) z}{\sin z}$ für $z \to 0$ bestimmen; es folgt $A = 2n + 1$.

Wir erhalten somit die Formel

$$\sin (2n + 1) z = (2n + 1) \sin z \left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2 \frac{\pi}{2n+1}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2 n\frac{\pi}{2n+1}}\right)$$

oder, wenn wir $z = \frac{x}{2n+1}$ setzen,

$$\sin x = (2n + 1) \sin \frac{x}{2n+1} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi}{2n+1}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 n\frac{\pi}{2n+1}}\right). \tag{26}$$

Wir werden x verschieden von $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ wählen, so daß $\sin x \neq 0$ ist. Ferner wählen wir eine natürliche Zahl k, die der Bedingung $(k + 1)\pi > |x|$ genügt. Schließlich sei noch $n > k$. Wir stellen jetzt $\sin x$ in Form eines Produktes

$$\sin x = U_k^{(n)} \cdot V_k^{(n)} \tag{27}$$

[1]) Abraham de Moivre, 1667—1754, französischer Mathematiker.

[2]) Vgl. etwa Nr. 453.

dar, wobei

$$U_k^{(n)} = (2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2\dfrac{\pi}{2n+1}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2 k\dfrac{\pi}{2n+1}}\right)$$

nur k Klammerfaktoren enthält und

$$V_k^{(n)} = \left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2 (k+1)\dfrac{\pi}{2n+1}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2 n\dfrac{\pi}{2n+1}}\right)$$

alle übrigen umfaßt.

Zunächst sei k fest; dann kann leicht der Grenzwert von $U_k^{(n)}$ für $n \to \infty$ bestimmt werden, da dieser Ausdruck aus endlich vielen Faktoren besteht. Wegen

$$\lim_{n\to\infty} (2n+1)\sin\frac{x}{2n+1} = x,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2 h\dfrac{\pi}{2n+1}} = \frac{x^2}{h^2\pi^2} \qquad (h = 1, 2, \ldots, k)$$

ist

$$U_k = \lim_{n\to\infty} U_k^{(n)} = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Wegen (27) existiert auch der Grenzwert

$$V_k = \lim_{n\to\infty} V_k^{(n)},$$

wobei $\sin x = U_k \cdot V_k$ ist.

Wir beschäftigen uns nun mit der *Abschätzung* des Grenzwertes V_k. Offenbar gilt für $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ die Ungleichung $\frac{2}{\pi}\varphi < \sin\varphi < \varphi$ (vgl. Nr. 54, Formel (9); Nr. 133, 1). Daher ist

$$\sin^2\frac{x}{2n+1} < \frac{x^2}{(2n+1)^2}$$

und

$$\sin^2 h\frac{\pi}{2n+1} > \frac{4}{\pi^2}\,\frac{h^2\pi^2}{(2n+1)^2} \qquad (h = k+1, \ldots, n),$$

also

$$1 > V_k^{(n)} > \left(1-\frac{x^2}{4(k+1)^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{4n^2}\right). \tag{28}$$

Das unendliche Produkt

$$\prod_{h=h_0}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{4h^2}\right)$$

(wo h_0 so gewählt wurde, daß $4h_0^2 > x^2$ ist) konvergiert, denn die Reihe $\sum_{h=h_0}^{\infty}\frac{x^2}{4h^2}$ ist konvergent (vgl. Satz 5° aus Nr. 401). Deshalb strebt das Restprodukt

$$\overline{V}_k = \prod_{h=k+1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{4h^2}\right)$$

für $k \to \infty$ gegen 1 (vgl. Satz 2° aus Nr. 401). Offenbar bleibt die zweite der Ungleichungen (28) richtig, wenn wir

$$1 > V_k^{(n)} > \overline{V}_k$$

schreiben; lassen wir (bei festem k) $n \to \infty$ streben, so erhalten wir

$$1 > V_k \geqq \overline{V}_k.$$

Daraus folgt

$$\lim_{k\to\infty} V_k = 1, \quad \text{also} \quad \lim_{k\to\infty} U_k = \sin x,$$

und wir gelangen schließlich zu der wichtigen Produktdarstellung

$$\sin x = x \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\cdots, \tag{29}$$

die zuerst von Euler angegeben wurde.

Sie gilt natürlich auch für die früher ausgeschlossenen Werte $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$, da dann beide Seiten dieser Gleichung gleich 0 sind. Man sieht leicht, daß die einzelnen Faktoren genau den einzelnen Nullstellen von $\sin x$ entsprechen.[1])

Wenn wir in der Zerlegung (29) $x = \frac{\pi}{2}$ setzen, so erhalten wir

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{4n^2}\right),$$

woraus wieder die Wallissche Formel (Nr. 317; Nr. 400, Beispiel 2) folgt.

Wir weisen noch auf eine interessante Anwendung dieser Zerlegung hin, die wir, wenn wir x durch πx ersetzen, auch in der Form

$$\sin \pi x = \pi x \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

darstellen können. Wir erinnern uns an die Definition der Γ-Funktion (vgl. Nr. 402, Formel (13)):

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x}{1 + \frac{x}{n}}$$

und an die Beziehung $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$ (vgl. Nr. 402, Formel (15)); dann gilt

$$\Gamma(1-x) = -x \cdot \Gamma(-x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-x}}{1 - \frac{x}{n}}.$$

Durch Multiplikation gelangen wir sofort zu dem Ergänzungssatz

$$\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \tag{30}$$

der ebenfalls von Euler gefunden wurde; er gilt für alle *nichtganzen* Werte von x.[2])

---

[1]) Über die Möglichkeit, die Faktoren umzustellen, vgl. Nr. 402, Beispiel 4.

[2]) Setzt man insbesondere $x = \frac{1}{2}$, so findet man $\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi$; da für $x > 0$ auch $\Gamma(x)$ positiv ist, folgt $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Analog der Zerlegung von $\sin x$ läßt sich die Zerlegung

$$\cos x = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2}\right)$$

mit den Nullstellen $\pm\frac{2n-1}{2}\pi$ von $\cos x$ herleiten. Sie kann übrigens auch aus der Zerlegung von $\sin x$ hergeleitet werden, indem man die Beziehung

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{oder} \quad \cos x = \frac{\sin 2x}{2\sin x}$$

benutzt.

Schließlich erwähnen wir noch die Zerlegungen

$$\sinh x = x \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right), \qquad \cosh x = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{x^2}{\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2}\right), \tag{31}$$

die mit Hilfe ähnlicher Überlegungen aufgestellt werden können.

§ 8. Näherungsrechnungen mit Hilfe von Reihen. Reihentransformation

409. Allgemeine Bemerkungen. Am Beispiel der erhaltenen konkreten Entwicklungen erläutern wir, wie unendliche Reihen zu Näherungsrechnungen verwendet werden können. Wir schicken einige allgemeine Bemerkungen voraus.

Ist eine unbekannte Zahl A als Reihe

$$A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

darstellbar, wobei $a_1, a_2, a_3, \ldots$ leicht berechenbare (im allgemeinen) rationale Zahlen sind, und ersetzen wir A näherungsweise durch

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

dann ist der begangene Fehler höchstens gleich dem Rest

$$\alpha_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots.$$

Für hinreichend große n wird dieser Fehler immer kleiner, so daß man ein A_n finden kann, das einer gegebenen Genauigkeit entspricht.

Wir interessieren uns nun für die Möglichkeit, eine Abschätzung des Restes α_n vorzunehmen. Dies würde uns erlauben, die Berechnung der aufeinanderfolgenden Partialsummen rechtzeitig abzubrechen, wenn die geforderte Genauigkeit bei der erhaltenen Näherung erreicht ist.

Ist die zu betrachtende Reihe alternierend und nehmen die absoluten Beträge ihrer Glieder monoton ab (Leibnizscher Typ), so besitzt, wie wir sahen (vgl. die Bemerkung in Nr. 381), der Rest das Vorzeichen seines ersten Gliedes, und sein absoluter Betrag ist kleiner als der seines ersten Gliedes. Diese Abschätzung läßt an Einfachheit nichts zu wünschen übrig.

Etwas komplizierter ist es bei einer positiven Reihe. Man versucht dann im allgemeinen, eine leicht berechenbare positive Reihe zu finden, deren Glieder *größer* sind als die Glieder des uns interessierenden Reihenrestes, und mit Hilfe dieser Majorante den Rest der gegebenen Reihe abzuschätzen. Zum Beispiel kann man für die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}$

$$\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{m^2} < \sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{m(m-1)} = \sum_{m=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{n}$$

erhalten (diese Abschätzung stimmt mit der in Nr. 373, Formel (11), durch Integration erhaltenen Abschätzung überein), und für die Reihe $1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!}$ ergibt sich

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m!} = \frac{1}{n!} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\cdots m} < \frac{1}{n!} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{m-n}} = \frac{1}{n!\,n}$$

(diese Abschätzung benutzten wir praktisch schon bei der Berechnung der Zahl e in Nr. 37).

Im allgemeinen wird eine auf eine gewisse Potenz von 10 genaue Berechnung der Zahl A gesucht, obwohl die Glieder der Reihe nicht durch Dezimalbrüche ausgedrückt zu sein brauchen. Bei ihrer Verwandlung in Dezimalbrüche treten Rundungsfehler auf, die berücksichtigt werden müssen.

Zum Schluß erwähnen wir noch, daß sich bei weitem nicht alle Reihen, die als Summe die uns interessierende Zahl A besitzen, zur praktischen Berechnung dieser Zahl eignen (selbst wenn die Glieder der Reihe einfach aussehen und der Rest leicht abzuschätzen ist). Entscheidend ist die Konvergenzgeschwindigkeit, d. h. die Geschwindigkeit, mit der die Partialsummen sich der Zahl A nähern. Wir nehmen als Beispiel die Reihen

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \quad \text{und} \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

(vgl. Nr. 404, Formel (16), und Nr. 405, Formel (18)), die die Entwicklung der Zahl $\frac{\pi}{4}$ bzw. ln 2 angeben. Um mit Hilfe der Reihen diese Zahlen mit einer Genauigkeit von 10^{-5} angeben zu können, muß man im ersten Fall 50000 und im zweiten Fall 100000 Glieder berechnen. Man müßte also schnellrechnende Maschinen heranziehen.

Im folgenden werden wir die erwähnten Zahlen ohne besondere Schwierigkeit mit großer Genauigkeit berechnen, allerdings mit Hilfe geeigneterer Reihen.

410. Berechnung der Zahl π. Wir verwenden die bekannte Reihe

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

vgl. Nr. 404, Formel (15)). Für $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist $\arctan x = \frac{\pi}{6}$, und wir erhalten die Reihe

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^2} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^3} + \cdots\right),$$

die sich schon zur Berechnung eignet. Benutzen wir das Additionstheorem[1])

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\frac{x+y}{1-xy}$$

und wählen wir für x und y zwei echte Brüche, die der Beziehung

$$\frac{x+y}{1-xy} = 1 \quad \text{oder} \quad (x+1)(y+1) = 2$$

genügen, so erhalten wir

$$\frac{\pi}{4} = \arctan x + \arctan y = \left(x - \frac{x^3}{3} + \cdots\right) + \left(y - \frac{y^3}{3} + \cdots\right).$$

Setzen wir zum Beispiel $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$, so finden wir

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5} - \cdots\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} - \cdots\right).$$

[1]) Es gilt in dieser Form nur unter der Voraussetzung, daß die Summe der Winkel dem Betrag nach kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist (vgl. Nr. 50).

Es existiert jedoch eine Reihe, die zur Berechnung der Zahl π noch geeigneter ist. Setzen wir $\alpha = \arctan\frac{1}{5}$, so gilt

$$\tan\alpha = \frac{1}{5},\quad \tan 2\alpha = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \frac{5}{12},\quad \tan 4\alpha = \frac{\frac{10}{12}}{1-\frac{25}{144}} = \frac{120}{119}.$$

Da die letzte Zahl in der Nähe von 1 liegt, liegt der Winkel 4α in der Nähe von $\frac{\pi}{4}$. Setzen wir $\beta = 4\alpha - \frac{\pi}{4}$, so erhalten wir

$$\tan\beta = \frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}} = \frac{1}{239},\quad \text{also}\quad \beta = \arctan\frac{1}{239}.$$

Daraus folgt

$$\pi = 16\alpha - 4\beta = 16\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{5^9} - \frac{1}{11}\cdot\frac{1}{5^{11}} + \cdots\right)$$
$$- 4\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{239^3} + \cdots\right).$$

Dies ist die *Machinsche*[1]) *Formel.*

Wir wollen hiermit π auf sieben Dezimalstellen berechnen. Dafür reichen die oben angeschriebenen Glieder der Formel aus. Da die Reihe von Leibnizschem Typ ist, muß die Korrektur kleiner als das erste fortgelassene Glied sein; also gilt

$$0 < \Delta_1 < \frac{16}{13\cdot 5^{13}} < \frac{1}{10^8} \quad\text{und}\quad 0 < \Delta_2 < \frac{4}{5\cdot 239^5} < \frac{1}{10^8}.$$

Die stehengebliebenen Glieder verwandeln wir in Dezimalbrüche, wobei wir sie auf acht Dezimalstellen runden. Die Rechnung ist im folgenden angegeben (in den Klammern stehen die Vorzeichen der Korrekturglieder):

$$\frac{16}{5} = 3{,}20000000 \qquad \frac{16}{3\cdot 5^3} = 0{,}04266667(-)$$
$$\frac{16}{5\cdot 5^5} = 0{,}00102400 \qquad \frac{16}{7\cdot 5^7} = 0{,}00002926(-)$$
$$\frac{16}{9\cdot 5^9} = 0{,}00000091(+) \qquad \frac{16}{11\cdot 5^{11}} = 0{,}00000003(-)$$
$$3{,}20102491 \qquad 0{,}04269596$$

$$\begin{array}{r} 3{,}20102491 \\ -0{,}04269596 \\ \hline 3{,}15832895 \end{array}$$

$$\frac{4}{239} = 0{,}01673640(+)$$
$$\frac{4}{3\cdot 239^3} = 0{,}00000010(-)$$
$$0{,}01673630$$

[1]) John Machin, 1685—1751, englischer Mathematiker und Astronom.

Unter Berücksichtigung aller Korrekturen gilt

$$3{,}15832895 < 16\alpha < 3{,}15832898,$$

$$-0{,}01673632 < -4\beta < -0{,}01673630,$$

also

$$3{,}14159263 < \pi < 3{,}14159268.$$

Damit ist schließlich $\pi = 3{,}1415926\ldots$, wobei alle angegebenen Dezimalstellen genau sind.

411. Berechnung von Logarithmen. Der Berechnung liegt die Reihe

$$\ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n = \frac{2}{2n+1}\left[1 + \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots\right] \tag{1}$$

zugrunde, die wir schon in Nr. 406 (vgl. dort Formel (20)) bei der Herleitung der Stirlingschen Formel benutzten. Für $n = 1$ ergibt sich die Entwicklung von $\ln 2$:

$$\ln 2 = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9^2} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{9^3} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9^4} + \frac{1}{11}\cdot\frac{1}{9^5} + \frac{1}{13}\cdot\frac{1}{9^6}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{15}\cdot\frac{1}{9^7} + \frac{1}{17}\cdot\frac{1}{9^8} + \cdots\right).$$

Die Reihe reicht zur Berechnung aus. Beschränken wir uns z. B. auf die angegebenen Glieder, so können wir $\ln 2$ auf neun Dezimalstellen genau bestimmen.

Wenn wir nämlich die Reihe nach dem neunten Glied abbrechen, so entspricht dies einer Korrektur

$$\Delta = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{19}\cdot\frac{1}{9^9} + \frac{1}{21}\cdot\frac{1}{9^{10}} + \cdots\right) < \frac{2}{3\cdot 19\cdot 9^9}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \cdots\right)$$
$$= \frac{1}{12\cdot 19\cdot 9^8} < \frac{2}{10^{10}}.$$

Die Berechnung auf 10 Stellen ist im folgenden angegeben:

$$\frac{2}{3} = 0{,}6666666667\,(-)$$
$$\frac{2}{3\cdot 3\cdot 9} = 0{,}0246913580\,(+)$$
$$\frac{2}{3\cdot 5\cdot 9^2} = 0{,}0016460905\,(+)$$
$$\frac{2}{3\cdot 7\cdot 9^3} = 0{,}0001306421\,(+)$$
$$\frac{2}{3\cdot 9\cdot 9^4} = 0{,}0000112901\,(-)$$
$$\frac{2}{3\cdot 11\cdot 9^5} = 0{,}0000010264\,(-)$$
$$\frac{2}{3\cdot 13\cdot 9^6} = 0{,}0000000965\,(-)$$
$$\frac{2}{3\cdot 15\cdot 9^7} = 0{,}0000000093\,(-)$$
$$\frac{2}{3\cdot 17\cdot 9^8} = 0{,}0000000009\,(+)$$

$$\overline{0{,}6931471805}$$

Unter Berücksichtigung aller Korrekturen gilt

$$0{,}6931471802 < \ln 2 < 0{,}6931471809,$$

also

$$\ln 2 = 0{,}693147180\ldots;$$

alle angegebenen neun Dezimalstellen sind genau.

Setzen wir nun in (1) $n = 4$, so erhalten wir

$$\ln 5 = 2 \ln 2 + \frac{2}{9}\left(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{81} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{81^2} + \cdots\right).$$

Unter Verwendung des schon berechneten Wertes von $\ln 2$ können wir in $\ln 5$ mit Hilfe dieser Formel und dann auch $\ln 10 = \ln 2 + \ln 5$ leicht berechnen. Damit sind wir in der Lage, den Modul

$$M = \frac{1}{\ln 10}$$

für den Übergang von natürlichen zu dekadischen Logarithmen beliebig genau anzugeben. Er ist gleich $M = 0{,}434294481\ldots$ Durch Multiplikation mit dem Modul erhalten wir die dekadischen Logarithmen $\log 2$ und $\log 5$.

Wir gehen nun auch in der Ausgangsformel (1) zu *dekadischen* Logarithmen über:

$$\log(n+1) - \log n = \frac{2M}{2n+1}\left[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots\right]. \tag{2}$$

Setzen wir hier $n = 80 = 2^3 \cdot 10$ und berücksichtigen wir, daß $n + 1 = 81 = 3^4$ ist, so gilt

$$4 \log 3 - 3 \log 2 - 1 = \frac{2M}{161}\left[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{25921} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{25921^2} + \cdots\right],$$

woraus leicht $\log 3$ folgt. Setzen wir ferner in (2) $n = 2400 = 3 \cdot 2^3 \cdot 10^2$, so wird

$$n + 1 = 2401 = 7^4$$

und

$$4 \log 7 - 3 \log 2 - \log 3 - 2 = \frac{2M}{4801}\left[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{23049601} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{23049601^2} + \cdots\right],$$

so daß wir auch $\log 7$ erhalten.

Mit Hilfe ähnlicher Zahlenkombinationen kann man die Logarithmen der Primzahlen und durch Multiplikation mit natürlichen Zahlen und Addition auch die Logarithmen zusammengesetzter Zahlen mit beliebiger Genauigkeit bestimmen.

Man könnte auch anders vorgehen, indem man die Logarithmen der aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen berechnet und von $\ln n$ zu $\ln(n+1)$ mit Hilfe der Formel (2) übergeht. Wir benötigen so für die Berechnung der Logarithmen der Zahlen von 1000 bis 10000 in (2) nur ein Glied, d. h., wir erhalten näherungsweise

$$\log(n+1) - \log n = \frac{2M}{2n+1} \qquad (10^3 \leqq n \leqq 10^4).$$

Die Korrektur wird dabei gleich

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{2M}{2n+1}\left[\frac{1}{3}\,\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots\right] \\ &< \frac{2M}{3(2n+1)^3}\left[1 + \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots\right] \\ &= \frac{2M}{3(2n+1)\cdot 2n\cdot(2n+2)} < \frac{2M}{24n^3}. \end{aligned}$$

Wegen $n \geqq 10^3$ und $2M < 1$ folgt

$$\Delta < \frac{1}{24 \cdot 10^9} < \frac{1}{2 \cdot 10^{10}}.$$

Würden wir alle Fehler summieren, so würde der Fehler im allgemeinen kleiner als $\frac{10^4}{2 \cdot 10^{10}} = \frac{1}{2 \cdot 10^6}$ werden. Wir können aber eine derartige Überlagerung der Fehler vermeiden, indem wir mit der ersten Methode mehrere Kontrollrechnungen durchführen. Wir können also eine wesentlich höhere Genauigkeit erzielen, wenn wir gleichzeitig die für die automatische Berechnung geeignete Methode beibehalten (die besonders für die Aufstellung umfangreicher Tabellen geeignet ist).

412. Berechnung von Wurzeln. Wurzeln lassen sich am einfachsten mit Hilfe von Logarithmentafeln berechnen. Sollen jedoch einzelne Wurzeln größere Genauigkeit haben, so ist es zweckmäßig, die binomische Reihe

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots$$

(vgl. Nr. 407, Formel (22)) zu verwenden.

Wir nehmen an, es sei $\sqrt[k]{A}$ zu berechnen, wobei der Näherungswert a dieser Wurzel (der kleiner oder größer als der tatsächliche Wert sein kann) noch unbekannt sei und festgestellt werden soll. Ist etwa

$$\frac{A}{a^k} = 1 + x,$$

wobei $|x|$ ein nahe bei 0 liegender echter Bruch sei, so können wir die Wurzel auf die Gestalt

$$\sqrt[k]{A} = a \sqrt[k]{\frac{A}{a^k}} = a(1 + x)^{1/k}$$

bringen und die binomische Reihe für $m = \frac{1}{k}$ benutzen. Oft ist es günstiger, von der Beziehung

$$\frac{a^k}{A} = 1 + x'$$

auszugehen, wobei $|x'|$ ebenfalls ein echter Bruch $\ll$ (d. h. sehr viel kleiner als) 1 sei, die Umformung

$$\sqrt[k]{A} = \frac{a}{\sqrt[k]{\frac{a^k}{A}}} = a(1 + x')^{-1/k}$$

vorzunehmen und die binomische Reihe für $m = -\frac{1}{k}$ anzuwenden.

Als Beispiel wollen wir $\sqrt{2}$ mit großer Genauigkeit berechnen, indem wir von dem Näherungswert 1,4 ausgehen. Dazu formen wir die Wurzel nach einer der beiden Arten um:

$$\sqrt{2} = 1{,}4 \sqrt{\frac{2}{1{,}96}} = 1{,}4 \sqrt{1 + \frac{0{,}04}{1{,}96}} = 1{,}4 \left(1 + \frac{1}{49}\right)^{1/2}$$

oder

$$\sqrt{2} = \frac{1{,}4}{\sqrt{\frac{1{,}96}{2}}} = \frac{1{,}4}{\sqrt{1 - \frac{0{,}04}{2}}} = 1{,}4 \left(1 - \frac{1}{50}\right)^{-1/2}$$

Zur Erleichterung der Rechnungen wählen wir den zweiten Weg und erhalten

$$\sqrt{2} = 1{,}4\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{50} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{50^2} + \frac{5}{16}\cdot\frac{1}{50^3} + \frac{35}{128}\cdot\frac{1}{50^4} + \frac{63}{256}\cdot\frac{1}{50^5} + \cdots\right).$$

Wir beschränken uns auf die notierten Glieder; sie alle lassen sich durch endliche Dezimalbrüche darstellen:

$$1 + \cdots + \frac{5}{16}\cdot\frac{1}{50^3} = 1{,}0101525$$

$$\frac{35}{128}\cdot\frac{1}{50^4} = 0{,}00000004375$$

$$\frac{63}{256}\cdot\frac{1}{50^5} = 0{,}0000000007875$$

$$1{,}0101525445375 \cdot 1{,}4 = 1{,}414213562352 50.$$

Da die Koeffizienten bei den Potenzen von $\frac{1}{50}$ abnehmen, kann die Korrektur wie üblich abgeschätzt werden:

$$\varDelta < 1{,}4\frac{231}{1024\cdot 50^6}\left(1 + \frac{1}{50} + \frac{1}{50^2} + \cdots\right) = \frac{1{,}4\cdot 231}{1024\cdot 50^5\cdot 49} < \frac{2{,}1}{10^{11}}.$$

Daher ist

$$1{,}414213562352 < \sqrt{2} < 1{,}414213562373, \qquad \sqrt{2} = 1{,}4142135623\ldots;$$

alle zehn Dezimalstellen sind genau.

Benutzen wir die Umformung

$$\sqrt{2} = 1{,}41\left(1 - \frac{119}{20000}\right)^{-1/2},$$

so erhalten wir leicht bedeutend mehr Stellen.

Wir geben noch einige Beispiele für solche Umformungen an:

$$\sqrt{3} = 1{,}73\left(1 - \frac{71}{30000}\right)^{-1/2}, \qquad \sqrt{11} = \frac{10}{3}\left(1 - \frac{1}{100}\right)^{1/2},$$

$$\sqrt[3]{2} = \frac{5}{4}\left(1 + \frac{3}{125}\right)^{1/3}, \qquad \sqrt[3]{3} = \frac{10}{7}\left(1 + \frac{29}{1000}\right)^{1/3}$$

(ihre Berechnung mit Hilfe der binomischen Reihe überlassen wir dem Leser).

413. Die Eulersche Reihentransformation. Vor Benutzung einer Reihe zur näherungsweisen Berechnung erweist sich oft eine *Reihentransformation* als zweckmäßig, durch die eine gegebene Reihe (nach der einen oder anderen Vorschrift) durch eine andere Reihe mit der gleichen Summe ersetzt wird. Eine solche Transformation ist natürlich nur dann günstig, wenn die neue Reihe schneller konvergiert oder zu Berechnungen geeigneter ist.

Wir leiten nun die Formel für die klassische Eulersche Reihentransformation her. Gegeben sei die *konvergente* Reihe

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k x^k = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - \cdots + (-1)^k a_k x^k + \cdots; \tag{3}$$

dabei sei $x > 0$. Nur aus Gründen der Zweckmäßigkeit stellen wir den k-ten Koeffizienten in der Form $(-1)^k a_k$ dar und setzen keineswegs alle a_k als positiv voraus. Für die Folge der Zahlen a_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ führen wir die aufeinanderfolgenden Differenzen

$$\varDelta a_k = a_{k+1} - a_k, \qquad \varDelta^2 a_k = \varDelta a_{k+1} - \varDelta a_k = a_{k+2} - 2a_{k+1} + a_k, \ldots$$

ein (ähnlich wie in Nr. 122 für eine Funktion $f(x)$ von stetig veränderlichem Argument x). Allgemein ist

$$\Delta^p a_k = \Delta^{p-1} a_{k+1} - \Delta^{p-1} a_k = a_{k+p} - \binom{p}{1} a_{k+p-1} + \binom{p}{2} a_{k+p-2} - \cdots + (-1)^p a_k. \quad (4)$$

Wir schreiben die gegebene Reihe in der Gestalt

$$S(x) = \frac{a_0}{1+x} - \frac{a_1 x - a_0 x}{1+x} + \frac{a_2 x^2 - a_1 x^2}{1+x} - \frac{a_3 x^3 - a_2 x^3}{1+x} + \cdots.$$

Dies ist erlaubt, da sich die k-te Partialsumme der neuen Reihe von der k-ten Partialsumme der Reihe (3) nur um den Summanden

$$\frac{1}{1+x}(-1)^{k+1} a_{k+1} x^{k+1}$$

unterscheidet, der für $k \to \infty$ wegen der Konvergenz der gegebenen Reihe verschwindet (vgl. 5° aus Nr. 364). Zur Vereinfachung der Schreibweise führen wir nun die obigen Differenzen ein:

$$S(x) = \frac{1}{1+x}(a_0 - \Delta a_0 \cdot x + \Delta a_1 \cdot x^2 - \Delta a_2 \cdot x^3 + \cdots).$$

Die nach dem ersten Glied $\frac{a_0}{1+x}$ übrigbleibende Reihe

$$-\frac{x}{1+x}(\Delta a_0 - \Delta a_1 \cdot x + \Delta a_2 \cdot x^2 - \cdots)$$

schreiben wir wie $S(x)$ in der Form

$$-\frac{x}{1+x}\frac{1}{1+x}(\Delta a_0 - \Delta^2 a_0 \cdot x + \Delta^2 a_1 \cdot x^2 - \cdots),$$

so daß wir, wenn wir wieder das erste Glied abtrennen,

$$S(x) = \frac{a_0}{1+x} - \frac{\Delta a_0}{(1+x)^2} \cdot x + \frac{x^2}{(1+x)^2}(\Delta^2 a_0 - \Delta^2 a_1 \cdot x + \cdots)$$

erhalten. Setzen wir dieses Verfahren fort, so ist nach p Schritten

$$S(x) = \frac{a_0}{1+x} - \frac{\Delta a_0}{(1+x)^2} \cdot x + \frac{\Delta^2 a_0}{(1+x)^3} \cdot x^2 - \cdots$$
$$+ (-1)^{p-1} \frac{\Delta^{p-1} a_0}{(1+x)^p} \cdot x^{p-1} + R_p(x), \quad (5)$$

wobei

$$R_p(x) = (-1)^p \frac{x^p}{(1+x)^p}(\Delta^p a_0 - \Delta^p a_1 \cdot x + \Delta^p a_2 \cdot x^2 - \cdots)$$
$$= (-1)^p \frac{x^p}{(1+x)^p} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Delta^p a_k \cdot x^k$$

gilt. Wir beweisen nun, daß $R_p(x)$ für $p \to \infty$ verschwindet. Dazu ersetzen wir die p-te Differenz $\Delta^p a_k$ durch ihre Entwicklung (4) und summieren:

$$R_p(x) = \frac{1}{(1+x)^p} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+p} x^{k+p} \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \binom{p}{i} a_{k+p-i}$$
$$= \frac{1}{(1+x)^p} \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} x^i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+p-i} a_{k+p-i} x^{k+p-i}.$$

Führen wir die Bezeichnung für den *Rest* der Reihe (3) ein, indem wir

$$r_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+n} a_{k+n} x^{k+n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

setzen, so geht der Ausdruck für $R_p(x)$ über in

$$R_p(x) = \frac{1}{(1+x)^p} \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} x^i \cdot r_{p-i}(x) = \frac{1}{(1+x)^p} \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} x^{p-i} \cdot r_i(x).$$

Wegen $r_n(x) \to 0$ gilt auf Grund von 6° aus Nr. 391 auch $R_p(x) \to 0$.

Gehen wir in (5) mit p gegen ∞, so finden wir

$$S(x) = \frac{1}{1+x}\left(a_0 - \Delta a_0 \cdot \frac{x}{1+x} + \Delta^2 a_0 \cdot \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 - \cdots + (-1)^p \Delta^p a_0 \cdot \left(\frac{x}{1+x}\right)^p + \cdots\right).$$

Durch Vergleich dieses Ausdrucks mit (3) gelangen wir zu der *Eulerschen Reihentransformation*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k x^k = \frac{1}{1+x} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \Delta^p a_0 \cdot \left(\frac{1}{1+x}\right)^p. \tag{6}$$

Sie wird oft für $x = 1$ benutzt; dann stellt sie die Transformation einer Zahlenreihe in eine andere dar:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \Delta^p a_0}{2^{p+1}}. \tag{7}$$

414. Beispiele.

1. Wir setzen $a_k = \dfrac{1}{z+k}$, wobei z eine beliebige, von $0, -1, -2, \ldots$ verschiedene Konstante ist. Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z+k}$$

ist, wenn in ihr hinreichend viele Anfangsglieder entfernt werden, eine Reihe vom Leibnizschen Typ und demzufolge konvergent.

Die aufeinanderfolgenden Differenzen $\Delta a_k, \Delta^2 a_k, \ldots$ lassen sich leicht berechnen, und durch vollständige Induktion finden wir

$$\Delta^p a_k = (-1)^p \frac{p!}{(z+k)(z+k+1)\cdots(z+k+p)},$$

insbesondere

$$\Delta^p a_0 = (-1)^p \frac{p!}{z(z+1)\cdots(z+p)}.$$

Somit ist auf Grund von (7)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z+k} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2^{p+1}} \frac{p!}{z(z+1)\cdots(z+p)}.$$

Setzen wir hier $z = 1$, so ergibt sich die Transformation der bekannten Reihe für ln 2:

$$\ln 2 = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{1}{m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}.$$

Dem Leser ist klar, daß zur näherungsweisen Berechnung von ln 2 die zweite Reihe wesentlich günstiger ist. Um ln 2 mit einer Genauigkeit von 0,01 zu berechnen, wären bei der ersten Reihe 99 Glieder notwendig, während bei der zweiten Reihe 5 Glieder genügen!

2. Es sei $a_k = \dfrac{1}{z+2k}$ $(z \neq 0, -2, -4, \ldots)$. Schreiben wir a_k in der Gestalt $a_k = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\dfrac{z}{2}+k}$, so können wir für den Ausdruck $\Delta^p a_0$ die vorige Formel benutzen:

$$\Delta^p a_0 = (-1)^p \frac{1}{2} \frac{p!}{\dfrac{z}{2}\left(\dfrac{z}{2}+1\right)\cdots\left(\dfrac{z}{2}+p\right)} = (-1)^p \frac{1}{2} \frac{2^{p+1}\, p!}{z(z+2)\cdots(z+2p)}.$$

In diesem Fall hat die Eulersche Transformation die Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{z+2k} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{p!}{z(z+2)\cdots(z+2p)}.$$

Insbesondere ergibt sich hieraus im Fall $z = 1$ die Transformation der Leibnizschen Reihe für $\dfrac{\pi}{4}$:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{p!}{(2p+1)!!}.$$

3. Für $0 \leqq x \leqq 1$ erhielten wir in Nr. 404, (c) die Entwicklung

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}.$$

Wollen wir auf diese allgemeine Reihe die Eulersche Transformation anwenden, so setzen wir in (6) $a_k = \dfrac{1}{2k+1}$. Dann können wir für $\Delta^p a_0$ die Formel aus Beispiel 2 (für $z = 1$) benutzen:

$$\Delta^p a_0 = (-1)^p \frac{(2p)!!}{(2p+1)!!}.$$

Außerdem ersetzen wir in (6) x durch x^2 und multiplizieren noch beide Seiten der Gleichung mit x. Dadurch erhalten wir

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} x^{2k+1} = \frac{x}{1+x^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2p)!!}{(2p+1)!!} \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^p. \tag{8}$$

4. Man darf aber nicht annehmen, daß die Eulersche Transformation einer konvergenten Reihe stets zu einer Verbesserung der Konvergenz führt. [Vergleichen wir die Konvergenz zweier Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c'_k$, deren Glieder beliebiges Vorzeichen besitzen, so gehen wir davon aus, wie sich das Verhältnis der entsprechenden Reihenreste γ_n und γ'_n verhält: Gilt $\left|\dfrac{\gamma_n}{\gamma'_n}\right| \to 0$, so konvergiert die erste Reihe *schneller*, die zweite *langsamer*.]

Beispielsweise geht

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2^k} \text{ in die \textit{schneller} konvergierende Reihe } \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^p}$$

und

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \text{ in die \textit{langsamer} konvergierende Reihe } \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^p$$

über.

5. Bei der Benutzung der Reihentransformation zu Berechnungen ist es oft zweckmäßig, *etliche Anfangsglieder der Reihe unmittelbar zu berechnen und nur den Reihenrest zu transformieren.* Wir wollen dies an einem Beispiel erklären, und zwar berechnen wir die Zahl π mit Hilfe der in Beispiel 2 hergeleiteten Reihe

$$\pi = 2\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1\cdot 2}{3\cdot 5} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7} + \cdots + \frac{1\cdot 2\cdots p}{3\cdot 5\cdots(2p+1)} + \cdots\right).$$

Da das Verhältnis eines Gliedes zum vorhergehenden gleich $\frac{p}{2p+1} < \frac{1}{2}$ ist, *bleibt der zu entfernende Reihenrest stets kleiner als das letzte berechnete Glied.* Beispielsweise erhalten wir für π sechs richtige Dezimalstellen, wenn wir 21 Glieder der obigen Reihe berechnen, denn das einundzwanzigste Glied ist gleich

$$2\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots 20}{1\cdot 3\cdot 5\cdots 41} = 0{,}00000037\cdots < 0{,}0000005.$$

Berechnen wir aber die ersten sieben Glieder der Leibnizschen Reihe unmittelbar und transformieren wir nur den Reihenrest nach dem siebenten Glied, so erhalten wir

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right)$$
$$- 2\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{15\cdot 17} + \frac{1\cdot 2}{15\cdot 17\cdot 19} + \cdots + \frac{1\cdot 2\cdots p}{15\cdot 17\cdots(15+2p)} + \cdots\right).$$

Hier ist schon das achte Glied der Reihe in der zweiten Klammer kleiner als die geforderte Schranke:

$$2\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{15\cdot 17\cdots 29} = 0{,}0000002\ldots$$

Zur Erreichung der Genauigkeit genügt es also, außer den sieben unveränderten Gliedern noch acht, d. h. im ganzen 15 Glieder statt (wie vorher) 21 zu berechnen.

415. Die Kummersche Reihentransformation. Wir sahen, daß die Eulersche Transformation auf der Grundlage einer genau formulierten Regel zu einem eindeutigen, jedoch nicht immer günstigen Resultat führt (vgl. Nr. 414, Beispiel 4). Die Kummersche Methode, eine Reihe zu transformieren, ist willkürlicher und überläßt vieles der Geschicklichkeit des Rechners, führt aber hinsichtlich der Näherungsrechnung schneller zum Ziel. Wir beschränken uns auf die Darlegung der dieser Methode zugrunde liegenden Ideen und bringen dann einige Beispiele zu ihrer Erläuterung.

Gegeben sei die *konvergente* Reihe

$$A^{(1)} + A^{(2)} + \cdots + A^{(k)} + \cdots; \tag{9}$$

berechnet werden soll ihre Summe mit vorgegebener Genauigkeit. Offenbar ist $A^{(k)} \to 0$ für $k \to \infty$. Wir wählen eine andere unendlich kleine Größe $a_1^{(k)}$, die zu $A^{(k)}$ äquivalent ist (Nr. 62) und für $k \to \infty$ dasselbe Verhalten wie $A^{(k)}$ zeigt, und zwar so, daß erstens die Reihe

$$a_1^{(1)} + a_1^{(2)} + \cdots + a_1^{(k)} + \cdots$$

gegen eine endliche Summe A_1 strebt und zweitens sich diese Summe auch leicht berechnen läßt. Setzen wir

$$A^{(k)} - a_1^{(k)} = \alpha_1^{(k)},$$

so ist

$$\alpha_1^{(k)} = o(A^{(k)}), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)} = A_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_1^{(k)},$$

und die Berechnung der Summe der gegebenen Reihe läßt sich auf die Berechnung der Summe der transformierten Reihe zurückführen, deren Glieder schneller gegen 0 streben.

Wollen wir z. B. die Summe der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ berechnen, so erinnern wir uns an die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ mit der Summe 1 (vgl. Nr. 25, Beispiel 9) und bemerken, daß (für $k \to \infty$)

$$\frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{k(k+1)}$$

gilt. Wegen

$$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k^2(k+1)}$$

ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)};$$

die transformierte Reihe ist für die Rechnung geeigneter.

Diesen Prozeß können wir wiederholen. Wir nehmen eine neue, zu $\alpha_1^{(k)}$ äquivalente Größe $a_2^{(k)}$ derart, daß die Reihe

$$a_2^{(1)} + a_2^{(2)} + \cdots + a_2^{(k)} + \cdots$$

gegen die endliche und leicht berechenbare Summe A_2 konvergiert, und führen die Berechnung der Summe der gegebenen Reihe auf Grund der Formel

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)} = A_1 + A_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_2^{(k)}$$

auf die Berechnung der Summe der letzten Reihe zurück, deren Glieder

$$\alpha_2^{(k)} = \alpha_1^{(k)} - a_2^{(k)} = o(\alpha_1^{(k)})$$

schneller als $\alpha_1^{(k)}$ gegen 0 streben.

Wiederholen wir diesen Prozeß p-mal, so gelangen wir zu

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)} = A_1 + A_2 + \cdots + A_p + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_p^{(k)}, \tag{10}$$

wobei

$$A_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_i^{(k)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

die bekannten Summen der sukzessiv abgetrennten Reihen sind, und haben so das Problem auf die Berechnung der Summe von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_p^{(k)}$ zurückgeführt.

Bei dem oben angegebenen Beispiel, in dem die Summe der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ berechnet werden sollte, kann man ferner

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + 2! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)(k+2)}$$

schreiben, so daß also

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + 2! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)(k+2)}$$

ist. Weiterhin erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + 3! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)(k+2)(k+3)}$$

usw. Nach p Schritten ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{p^2} + p! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)\cdots(k+p)}. \tag{10a}$$

Dabei haben wir stets die schon bekannte Formel

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)\cdots(k+p-1)(k+p)} = \frac{1}{p \cdot p!}$$

benutzt (sie geht aus der in Nr. 363, Beispiel 4, hergeleiteten Beziehung für $\alpha = 0$ hervor).

Somit haben wir die Berechnung der Summe der langsam konvergierenden Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ auf die Berechnung der Summe ihrer ersten p Glieder und der Summe einer transformierten und schon für kleine p schnell konvergierenden Reihe zurückgeführt.

Wir geben nun noch ein komplizierteres Beispiel an. Mit S_p (p eine natürliche Zahl) bezeichnen wir die Summe von

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)^2\cdots(k+p-1)^2}.$$

Für ein noch unbestimmtes y ist

$$\frac{k+y}{k^2(k+1)^2\cdots(k+p-1)^2}-\frac{k+1+y}{(k+1)^2(k+2)^2\cdots(k+p)^2}$$
$$=\frac{(2p-1)k^2+p(p+2y)k+yp^2}{k^2(k+1)^2\cdots(k+p-1)^2(k+p)^2}.$$

Daraus ist ersichtlich, daß (für $k\to\infty$)

$$\frac{1}{2p-1}\left[\frac{k+y}{k^2(k+1)^2\cdots(k+p-1)^2}-\frac{k+1+y}{(k+1)^2(k+2)^2\cdots(k+p)^2}\right]$$
$$\sim\frac{1}{k^2(k+1)^2\cdots(k+p-1)^2}$$

gilt. Ersetzen wir die Glieder der Reihe S_p durch diese ihnen äquivalenten Differenzen, so ergibt sich eine Reihe mit der leicht zu berechnenden Summe

$$\frac{1}{2p-1}\,\frac{1+y}{(1\cdot2\cdot3\cdots p)^2}.$$

Die ergänzende („transformierte“) Reihe hat das allgemeine Glied

$$\frac{\left[2p-\frac{p}{2p-1}(p+2y)\right]k+\left[p^2-\frac{yp^2}{2p-1}\right]}{k^2(k+1)^2\cdots(k+p)^2}.$$

Hier benutzen wir jetzt, daß y willkürlich ist, und wählen y so, daß im Zähler der Koeffizient von k verschwindet, also

$$y=\frac{3p}{2}-1.$$

Damit erhalten wir für die Reihe S_p die Transformationsformel

$$S_p=\frac{3p}{2(2p-1)(p!)^2}+\frac{p^3}{2(2p-1)}S_{p+1}. \tag{11}$$

Setzen wir hier statt p nacheinander die Werte $1, 2, \ldots, p$ ein, so ergibt sich hieraus

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=S_1=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}S_2,$$

$$\frac{1}{2}S_2=\frac{3}{2\cdot2^2}\,\frac{1}{3}+\frac{(2!)^3}{2^2\cdot3!!}S_3,$$

$$\frac{[(p-1)!]^3}{2^{p-1}(2p-3)!!}S_p=\frac{3}{p\cdot2^p}\,\frac{(p-1)!}{(2p-1)!!}+\frac{(p!)^3}{2^p(2p-1)!!}S_{p+1}. \tag{11*}$$

Durch sukzessives Einsetzen gelangen wir zu dem Resultat

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2^2}\,\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 2^3}\,\frac{2!}{5!!} + \cdots + \frac{1}{p\cdot 2^p}\,\frac{(p-1)!}{(2p-1)!!}\right)$$
$$+ \frac{(p!)^3}{2^p(2p-1)!!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2\cdots(k+p)^2}. \tag{10b}$$

Nehmen wir etwa $p = 5$ und behalten wir in der transformierten Reihe ebenfalls fünf Glieder bei, so können wir die Summe der gegebenen Reihe mit einer Genauigkeit von 10^{-7} berechnen.

416. Die Markoffsche Reihentransformation. Das von A. A. Markoff[1]) entwickelte Verfahren zur Transformation einer gegebenen *konvergenten* Reihe (9),

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)} = A,$$

überläßt ebenfalls vieles der Willkür des Rechners. Entwickelt man jedes Glied $A^{(k)}$ irgendwie in eine ebenfalls konvergente Reihe

$$A^{(k)} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}$$

und bildet man aus den Gliedern dieser Reihen eine „unendliche rechteckige Matrix mit zwei Eingängen“ (vgl. Nr. 393, (1)),

$$\begin{array}{c|cccc} A^{(1)} & a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & a_i^{(1)} \\ A^{(2)} & a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & a_i^{(2)} \\ A^{(3)} & a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} & a_i^{(3)} \\ & & & & \\ A^{(k)} & a_1^{(k)} & a_2^{(k)} & a_3^{(k)} & a_i^{(k)} \end{array} \tag{12}$$

so erweist sich die gesuchte Zahl A einfach als Summe der zweifachen Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)},$$

die dieser Matrix zugeordnet ist. Ferner setzte Markoff noch die Konvergenz aller Spaltenreihen voraus,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_i^{(k)} = A_i,$$

und stellte eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür auf, daß die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ gegen dieselbe Summe A konvergiert. Die *Markoffsche Reihentransformation* besteht also aus dem Ersetzen einer zweifachen Reihe durch eine andere:

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)} = \sum_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Hinreichende Bedingungen für die Anwendbarkeit der Markoffschen Reihentransformation sind z. B. in Satz 3 aus Nr. 393 genannt. (Der Markoffsche Satz ist jedoch bedeutend stärker, da er auf die dort geforderte *absolute* Konvergenz der Reihen verzichtet.)

[1]) Andrej Andrejewitsch Markoff, 1856—1922, russischer Mathematiker.

Als Beispiel für die Anwendung der Markoffschen Transformation kann die Beziehung (13) aus Nr. 395 dienen. Gemeint ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$; ihr k-tes Glied läßt sich jetzt als Summe *endlich* vieler Glieder darstellen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{k^2} &= a_1^{(k)} + a_2^{(k)} + \cdots + a_{k-1}^{(k)} + r_k = (k-1)!\\ &\times \left[\frac{1}{1 \cdot 2 \cdots (k+1)} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdots (k+2)} + \cdots + \frac{1}{(k-1)\,k \cdots (2k-1)}\right]\\ &+ \frac{(k-1)!}{k^2(k+1)\cdots(2k-1)}.\end{aligned}$$

Wird dann über die Spalten summiert, so führt dies auf die erwähnte Beziehung (vgl. Nr. 395, Beispiel 4).

Interessant ist, daß die Markoffsche Transformation, wie schon in Nr. 395, Beispiel 4, betont wurde, nichts Neues ergibt, wenn die Entwicklung

$$\frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} a_1^{(k)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{i(i+1)\cdots(i+k)}$$

benutzt wird; denn hier führt die Transformation einfach auf die gegebene Reihe.

Die Konstruktion der Matrix (12) läßt sich mit einer wiederholten Anwendung der Kummerschen Reihentransformation in Zusammenhang bringen. Davon haben wir schon in Nr. 415 gesprochen (vgl. (10)); dort wurde aber der Kummersche Prozeß nur endlich oft wiederholt, hier denken wir uns diesen Prozeß unendlich oft fortgesetzt. Dabei muß nur jedes Mal nachgeprüft werden, ob das „Zusatzglied" in (10) für $p \to \infty$ gegen 0 strebt:

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_p^{(k)} = 0.$$

Um uns davon z. B. in bezug auf (10b) überzeugen zu können, bemerken wir, daß die im Zusatzglied auftretende Summe nicht größer als

$$\frac{1}{(p!)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

ist; also ist das ganze Zusatzglied höchstens gleich

$$\frac{p!}{2^p(2p-1)!!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

und strebt offenbar für $p \to \infty$ gegen 0. Gehen wir in (10b) zur Grenze über, so gelangen wir zu der Gleichung

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} &= 3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2}\,\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 2^3}\,\frac{1!}{5!!} + \cdots + \frac{1}{p \cdot 2^p}\,\frac{(p-1)!}{(2p-1)!!} + \cdots\right)\\ &= 3 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p \cdot 2^p}\,\frac{(p-1)!}{(2p-1)!!},\end{aligned}$$

die, wie man leicht sieht, mit (13) aus Nr. 395 identisch ist.

Jedoch führt ein Grenzübergang nicht immer zu einem nützlichen Resultat: Nehmen wir den Grenzübergang z. B. in (10a) vor, so erhalten wir einfach die Identität

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2}.$$

Das von Markoff dargelegte Verfahren ist also ein sehr allgemeines Schema, das dem Rechner viele Möglichkeiten bietet, jedoch große Anforderungen an seine Geschicklichkeit stellt.

§ 9. Summierung divergenter Reihen

417. Einführung. Bis jetzt haben wir im Laufe dieses Kapitels einer gegebenen Zahlenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{A}$$

den Grenzwert ihrer Partialsummen,

$$A = \lim A_n,$$

als Summe zugeschrieben, und zwar unter der Voraussetzung, daß dieser Grenzwert existiert und endlich (oder $\pm\infty$) ist. „Oszillierende" divergente Reihen hatten für uns keine Summen, und wir haben solche Reihen systematisch aus unseren Untersuchungen ausgeschlossen.

Durch verschiedene Tatsachen aus der Analysis, wie z. B. die Divergenz des Produktes zweier konvergenter Reihen (Nr. 392), ergab sich in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts die Frage nach der *Summierung divergenter Reihen* in einem gewissen neuen Sinne, der von dem üblichen natürlich verschieden war. Einige Methoden dieser „Summierung" erwiesen sich als besonders fruchtbar; mit ihnen wollen wir uns eingehender beschäftigen.

Ehe Cauchy seine exakte Grenzwerttheorie (und im Zusammenhang damit die Reihentheorie) schuf, begegnete man in der mathematischen Praxis nicht selten divergenten Reihen. Obwohl ihre Anwendung bei Beweisen angefochten wurde, gab es Versuche, ihnen sogar einen Zahlenwert zuzuordnen. So schrieb man z. B. der oszillierenden Reihe

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

noch zu Leibniz' Zeiten die Zahl $\frac{1}{2}$ als Summe zu. Euler motivierte dies damit, daß aus der Entwicklung

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots$$

(die in Wirklichkeit nur für $|x| < 1$ gilt) für $x = 1$ sofort

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

folgt. Hierin steckt ein weiterführender Gedanke, aber die Fragestellung bedarf der Präzisierung; die Willkür in der Wahl der Entwicklung läßt die Möglichkeit offen, etwa aus der Entwicklung

$$\frac{1 + x + \cdots + x^{m-1}}{1 + x + \cdots + x^{n-1}} = \frac{1 - x^m}{1 - x^n} = 1 - x^m + x^n - x^{n+m} + x^{2n} - \cdots$$

(wobei n und m beliebig, aber $m < n$ sei) gleichzeitig

$$\frac{m}{n} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots$$

zu erhalten.

Die moderne Analysis stellt die Frage anders. Zugrunde gelegt wird eine exakt formulierte Definition der „verallgemeinerten Summe“ einer Reihe; diese Definition ist nicht allein für eine einzige uns konkret interessierende Zahlenreihe gedacht, sondern soll auf ganze Reihenklassen anwendbar sein. Über die Zulässigkeit einer solchen Definition können keine Zweifel bestehen: Der Leser muß daran denken, daß sogar der übliche Begriff der „Summe einer Reihe“, so einfach und natürlich er auch scheinen mag, durch eine formal aufgestellte und nur durch Zweckmäßigkeit gerechtfertigte Definition eingeführt wurde. Die Definition der „verallgemeinerten Summe“ wird im allgemeinen zwei Forderungen unterworfen:

1. *Wird der Reihe* $\sum a_n$ *die „verallgemeinerte Summe“* A *und der Reihe* $\sum b_n$ *die „verallgemeinerte Summe“* B *zugeschrieben, so muß die Reihe* $\sum (pa_n + qb_n)$, *wobei* p *und* q *zwei beliebige Konstanten sind, als „verallgemeinerte Summe“ die Zahl* $pA + qB$ *haben.* Eine dieser Forderung genügende Summierungsmethode heißt *linear.*

2. Die neue Definition muß die übliche Definition als Spezialfall enthalten, d. h., *eine im üblichen Sinne konvergente Reihe mit der Summe* A *muß auch eine „verallgemeinerte Summe“ besitzen, die ebenfalls gleich* A *ist.* Eine dieser Forderung genügende Summierungsmethode heißt *regulär.*[1]) Es versteht sich, saß uns nur solche regulären Methoden interessieren, die es erlauben, die „Summe“ in einer umfassenderen Klasse von Fällen festzustellen als die bisher übliche Summierungsmethode: Nur dann kann man mit vollem Recht von „verallgemeinerter Summierung“ sprechen.[2])

Wir betrachten jetzt die beiden, für die Anwendungen besonders wichtigen Methoden der „verallgemeinerten Summierung“.

418. Die Potenzreihenmethode. Diese Methode stammt im wesentlichen von S.-D. Poisson, der als erster den Versuch machte, sie auf trigonometrische Reihen anzuwenden; sie besteht in folgendem:

Zu einer gegebenen Zahlenreihe (A) *läßt sich die Potenzreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{1}$$

konstruieren; ist diese Reihe für $0 < x < 1$ *konvergent und hat ihre Summe* $f(x)$ *für* $x \to 1 - 0$ *den Grenzwert* A,

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = A,$$

so heißt A *auch die „(im Poissonschen Sinne) verallgemeinerte Summe“ der gegebenen Reihe.*

Beispiele.

1. Die von Euler untersuchte Reihe

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

führt hier auf Grund derselben Definition auf eine Potenzreihe, deren Summe $\frac{1}{1+x}$ für $x \to 1 - 0$ gegen den Grenzwert $\frac{1}{2}$ strebt. Das bedeutet, daß die Zahl $\frac{1}{2}$ tatsächlich die „verallgemeinerte Summe“ der gegebenen Reihe in dem hier angegebenen Sinne ist.

---

[1]) Für diese Forderung findet man in der deutschen Literatur den Ausdruck „Permanenzbedingung“. — *Anm. d. Red.*

[2]) Nach Knopp, Unendliche Reihen: umfassenderes Wirkungsfeld. — *Anm. d. Red.*

2. Wir betrachten ein allgemeineres Beispiel: Die trigonometrische Reihe

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta \tag{2}$$

ist für alle $\theta(-\pi \leqq \theta \leqq \pi)$ *divergent.* Hat nämlich θ die Form $\frac{p}{q}\pi$ mit natürlichen Zahlen p und q, so ist für diejenigen Werte von n, welche ganzzahlige Vielfache von q sind,

$$\cos n\theta = \pm 1,$$

so daß die notwendige Bedingung für die Konvergenz der Reihe verletzt ist. Ist der Quotient $\frac{\theta}{\pi}$ irrational, so gilt bekanntlich, wenn wir ihn in einen unendlichen Kettenbruch entwickeln und geeignete Brüche $\frac{m}{n}$ bilden,

$$\left|\frac{\theta}{\pi} - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n^2},$$

also

$$|n\theta - m\pi| < \frac{\pi}{n}.$$

Somit gilt für unendlich viele Werte von n

$$|\cos n\theta \pm 1| < \frac{\pi}{n}$$

und demzufolge

$$|\cos n\theta| > 1 - \frac{\pi}{n}.$$

Hiermit ist auch gezeigt, daß die notwendige Bedingung für die Konvergenz nicht erfüllt ist.

Bildet man die Potenzreihe

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta \qquad (0 < r < 1)$$

(hier steht r anstelle von x), so ist ihre Summe für von 0 verschiedene Werte von θ gleich

$$\frac{1}{2} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2} \tag{3}$$

(vgl. Nr. 440, Formel (5)), die für $r \to 1 - 0$ verschwindet. Somit ist für $\theta \neq 0$ die „verallgemeinerte Summe" der Reihe gleich 0. Ist $\theta = 0$, so hat (2) offenbar die Summe $+\infty$; übrigens hat auch der Ausdruck (3), der sich in diesem Fall auf $\frac{1}{2}\frac{1+r}{1-r}$ reduziert, den Grenzwert $+\infty$.

3. Analog führt die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta \qquad (-\pi \leqq \theta \leqq \pi),$$

die nur für $\theta = 0$ oder $\pm\pi$ konvergiert, auf die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\theta = \frac{r\sin\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

(vgl. Nr. 461, Beispiel 6(a)), so daß hier die „verallgemeinerte Summe" gleich $\frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2}$ für $\theta \neq 0$ und gleich 0 für $\theta = 0$ ist.

Es ist unmittelbar klar, daß die zu betrachtende Methode der „verallgemeinerten Summierung" *linear* ist. Daß diese Methode auch *regulär* ist, ergibt sich aus dem folgenden, von ABEL stammenden Satz:

Ist die Reihe (A) *konvergent und hat sie die Summe A (im üblichen Sinne), so ist die Potenzreihe* (1) *für $0 < x < 1$ konvergent, und ihre Summe strebt für $x \to 1 - 0$ gegen den Grenzwert A.*[1])

Zunächst ist klar (Nr. 379), daß der Konvergenzradius der Reihe (1) nicht kleiner als 1 ist, so daß die Reihe (1) für $0 < x < 1$ tatsächlich konvergiert. Ferner gilt die Identität

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$

mit $A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ (vgl. Nr. 385, Beispiel 6, oder Nr. 390, Beispiel 4); subtrahieren wir sie gliedweise von der offenbar gültigen Identität

$$A = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} A x^n$$

und setzen wir $A - A_n = \alpha_n$, so gelangen wir zu

$$A - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n. \tag{4}$$

Wegen $\alpha_n \to 0$ läßt sich zu einem beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein N derart finden, daß $|\alpha_n| < \frac{1}{2}\varepsilon$ gilt, sobald $n > N$ ist.

Wir zerlegen die Summe der Reihe auf der rechten Seite von (4) in die beiden Summen

$$(1-x) \sum_{n=0}^{N} \alpha_n x^n \quad \text{und} \quad (1-x) \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n x^n.$$

Die zweite läßt sich sofort und unabhängig von x abschätzen:

$$\left|(1-x) \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n x^n\right| \leqq (1-x) \sum_{n=N+1}^{\infty} |\alpha_n|\, x^n < \frac{\varepsilon}{2}(1-x) \sum_{n=N+1}^{\infty} x^n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Die erste verschwindet für $x \to 1$, so daß für hinreichend nahe bei 1 liegende x

$$\left|(1-x) \sum_{n=0}^{N} \alpha_n x^n\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

---

[1]) Dieser Satz wurde von ABEL in seinen Untersuchungen über die binomische Reihe bewiesen; wir werden auf ihn in Nr. 437 (Satz 6°) zurückkommen. Es ist nicht zu bezweifeln, daß gerade dieser Satz auf die allgemeine Formulierung der Methode der „verallgemeinerten Summierung" führte, die von POISSON nur in einem Spezialfall angewendet wurde. Im Zusammenhang damit heißt die Methode selbst oft Abelsche Methode, obwohl ABEL die Idee der „Summierung" divergenter Reihen fremd war. Wir werden diese Methode im folgenden die *Abel-Poissonsche Methode* nennen.

gilt. Also ist schließlich

$$\left|A - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right| < \varepsilon.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

419. Der Taubersche Satz. Hat die Reihe (A) nach der Abel-Poissonschen Methode die Summe A, so braucht sie im gewöhnlichen Sinne, wie wir sahen, keine Summe zu besitzen; d. h., aus der Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A \tag{5}$$

folgt im allgemeinen nicht die Konvergenz der Reihe (A). Es ergibt sich natürlich die Frage, welche Zusatzbedingungen dem Verhalten der Glieder dieser Reihe auferlegt werden müssen, um aus (5) auf die Konvergenz von (A), d. h. auf die Existenz der Summe A von (A) im gewöhnlichen Sinne schließen zu können.

Der erste Satz in dieser Richtung wurde von A. TAUBER[1]) bewiesen und lautet:

Die Reihe (1) *konvergiere für* $0 < x < 1$, *und es gelte die Limesbeziehung* (5). *Sind die Glieder der Reihe* (A) *so beschaffen, daß*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = 0 \tag{6}$$

gilt, so ist auch

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A.$$

Beweis. Wir beweisen den Satz in zwei Schritten. Zunächst setzen wir

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0 \quad \text{oder} \quad a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

voraus.[2]) Schreiben wir

$$\delta_n = \max_{k\geqq n} |ka_k|,$$

so bilden die δ_n für $n \to \infty$ eine monotone Nullfolge.

Für jedes natürliche N gilt

$$\sum_{n=0}^{N} a_n - A = \sum_{n=0}^{N} a_n(1-x^n) - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n + \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - A\right],$$

also[3])

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n - A\right| \leqq \sum_{n=0}^{N} |na_n|(1-x) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|na_n|\, x^n}{n} + \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - A\right|$$
$$\leqq (1-x) N\delta_0 + \frac{\delta_{N+1}}{(N+1)(1-x)} + \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - A\right|.$$

---

[1]) ALFRED TAUBER (1866—?), österreichischer Mathematiker.

[2]) Hieraus folgt nach dem bekannten Satz von CAUCHY (vgl. Nr. 33, Beispiel 13) schon das Erfülltsein der Gleichung (6), das Umgekehrte gilt jedoch nicht, so daß wir jetzt von einer *spezielleren* Voraussetzung als (6) ausgehen.

[3]) Wir benutzen die für $0 < x < 1$ offenbar gültigen Ungleichungen

$$1 - x^n = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) < n(1-x)$$

und

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} x^n = \frac{x^{N+1}}{1-x} < \frac{1}{1-x}.$$

Wir wählen eine beliebig kleine Zahl $\varepsilon > 0$ und setzen

$$(1-x)\,N = \varepsilon \quad \text{oder} \quad x = 1 - \frac{\varepsilon}{N},$$

so daß x für $N \to \infty$ gegen 1 strebt. Nun sei N so groß, daß erstens die Ungleichung $\delta_{N+1} < \varepsilon^2$ erfüllt ist und zweitens das entsprechende x so nahe bei 1 liegt, daß

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - A\right| < \varepsilon$$

gilt. Dann ist

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n - A\right| < (2 + \delta_0)\cdot\varepsilon.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Auf den betrachteten Spezialfall läßt sich auch der allgemeine Fall zurückführen. Wir setzen

$$v_n = a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n \qquad (n \geqq 1), \qquad v_0 = 0,$$

so daß

$$a_n = \frac{1}{n}(v_n - v_{n-1}) \qquad (n \geqq 1)$$

und demzufolge

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{n-1}}{n} x^n \\ &= a_0 + (1-x)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n(n+1)} x^{n+1}\end{aligned} \tag{7}$$

ist. Aus der Voraussetzung des Satzes, d. h. aus $\frac{v_n}{n} \to 0$ für $n \to \infty$, ergibt sich nun leicht

$$\lim_{x=1-0} (1-x)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n} x^n = 0. \tag{8}$$

Für den Beweis hiervon genügt es, die Summe in

$$(1-x)\sum_{1}^{N} + (1-x)\sum_{N+1}^{\infty}$$

zu zerlegen und N so zu wählen, daß in dem zweiten Summanden alle Faktoren $\frac{v_n}{n}$ dem absoluten Betrag nach kleiner sind als eine vorgegebene Zahl $\varepsilon > 0$; dann ist für alle x auch die zweite Summe dem absoluten Betrag nach kleiner als ε; bei dem ersten Summanden, der aus endlich vielen Gliedern besteht, kann man das gleiche erreichen, wenn man x gegen 1 streben läßt. Somit ist auf Grund von (7), (5) und (8)

$$\lim_{x\to 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n(n+1)} x^{n+1} = A - a_0.$$

Wenden wir noch den bewiesenen Spezialfall des Satzes an, so gilt auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n(n+1)} = A - a_0.$$

Andererseits ist

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{v_m}{m(m+1)} = \sum_{m=1}^{n} \frac{v_m}{m} - \sum_{n=1}^{n} \frac{v_m}{m+1} = \sum_{m=1}^{n} \frac{v_m}{m} - \sum_{m=1}^{n+1} \frac{v_{m-1}}{m} = -\frac{v_n}{n+1} + \sum_{m=1}^{n} a_m.$$

Da der erste Summand auf der rechten Seite gegen 0 strebt, erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} a_m = A - a_0.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Nach TAUBER stellten verschiedene Mathematiker eine ganze Reihe schärferer Sätze ähnlicher Art auf (die sogenannten *Tauberschen Sätze* oder *Sätze vom Tauberschen Typ*), in denen die Taubersche Bedingung abgeändert und erweitert wurde. Bei diesen Sätzen wollen wir jedoch nicht verweilen.

420. Die Methode der arithmetischen Mittel. Die Idee zu dieser Methode stammt in ihrer einfachsten Realisierung von G. FROBENIUS[1]), wird jedoch häufig mit den Namen von E. CESÀRO[2]) und O. HÖLDER verknüpft, die diese Methode weiterentwickelten. Die Methode besteht in folgendem:

Aus den Partialsummen A_n einer gegebenen Zahlenreihe (A) *lassen sich die aufeinanderfolgenden arithmetischen Mittel*

$$\alpha_0 = A_0,\ \alpha_1 = \frac{A_0 + A_1}{2}, \ldots, \alpha_n = \frac{A_0 + A_1 + \cdots + A_n}{n+1}, \ldots$$

konstruieren; hat die Folge der Zahlen α_n für $n \to \infty$ den Grenzwert A, so heißt diese Zahl auch die „(im Cesàroschen Sinne) verallgemeinerte Summe“ der gegebenen Reihe.

Beispiele.

1. Wir kehren zur Reihe

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

zurück; hier ist

$$\alpha_{2k} = \frac{k+1}{2k+1}, \qquad \alpha_{2k-1} = \frac{1}{2},$$

also $\alpha_n \to \frac{1}{2}$. Damit gelangen wir zu demselben Resultat wie auch mit Hilfe der Abel-Poissonschen Methode (vgl. Nr. 418, Beispiel 1).

2. Die Reihe

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta \qquad (-\pi \leqq \theta \leqq \pi)$$

hat (sobald $\theta \neq 0$ ist) die Partialsummen

$$A_n = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{2 \sin \frac{1}{2}\theta}.$$

[1]) GEORG FROBENIUS, 1849—1917, deutscher Mathematiker.
[2]) ERNESTO CESÀRO, 1859—1906, italienischer Mathematiker.

Hieraus lassen sich leicht die arithmetischen Mittel berechnen:

$$(n+1)\,\alpha_n = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\theta}\sum_{m=0}^{n}\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\theta$$

$$= \frac{1}{4\sin^2\frac{1}{2}\theta}\sum_{m=0}^{n}[\cos m\theta - \cos(m+1)\,\theta]$$

$$= \frac{1-\cos(n+1)\,\theta}{4\sin^2\frac{1}{2}\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2.$$

Also ist schließlich

$$\alpha_n = \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2.$$

Offenbar gilt $\alpha_n \to 0$; also ist die „verallgemeinerte Summe" für $\theta \neq 0$ auch hier gleich 0 (vgl. Nr. 418, Beispiel 2).

3. Schließlich betrachten wir noch einmal die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\theta \qquad (-\pi \leqq \theta \leqq \pi).$$

Für $\theta \neq 0$ erhalten wir

$$A_n = \frac{\cos\frac{1}{2}\theta - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta}$$

und damit

$$(n+1)\,\alpha_n = \frac{n+1}{2}\cot\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4\sin^2\frac{1}{2}\theta}\sum_{m=1}^{n+1}[\sin(m+1)\,\theta - \sin m\theta]$$

$$= \frac{n+1}{2}\cot\frac{1}{2}\theta - \frac{\sin(n+2)\,\theta - \sin\theta}{4\sin^2\frac{1}{2}\theta},$$

also

$$\alpha_n \to \frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}\theta.$$

In allen Fällen erhielten wir nach der Cesàroschen Methode dieselbe „verallgemeinerte Summe" wie früher nach der Abel-Poissonschen Methode. Später (Nr. 421) werden wir sehen, daß dies kein Zufall ist.

Auch hier ist unmittelbar klar, daß die Methode *linear* ist. Der bekannte Satz von Cauchy (vgl. Nr. 33, Beispiel 13) sichert im Fall der Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A,$$

daß auch die arithmetischen Mittel α_n diesen Grenzwert haben. Also ist die Cesàrosche Methode *regulär.*

421. Die Wechselbeziehung zwischen der Abel-Poissonschen und der Cesàroschen Methode. Wir beginnen mit der folgenden einfachen Bemerkung: *Ist die Reihe* (A) *nach der Methode der arithmetischen Mittel gegen die endliche „Summe" A summierbar, so ist notwendig*

$$a_n = o(n).$$

Aus

$$\alpha_{n-1} \to A \quad \text{und} \quad \frac{n+1}{n}\alpha_n \to A$$

folgt nämlich

$$\frac{(n+1)\,\alpha_n - n\alpha_{n-1}}{n} = \frac{A_n}{n} \to 0$$

und damit auch

$$\frac{a_n}{n} = \frac{A_n}{n} - \frac{n-1}{n}\,\frac{A_{n-1}}{n-1} \to 0,$$

was zu beweisen war.

Die Wechselbeziehung zwischen den beiden Methoden bringt der folgende Satz von Frobenius zum Ausdruck:

Ist die Reihe (A) *nach der Methode der arithmetischen Mittel summierbar und hat sie die endliche „Summe" A, so ist sie gleichzeitig auch nach der Abel-Poissonschen Methode summierbar und besitzt dieselbe Summe.*

Zum Beweis nehmen wir an, es sei $\alpha_n \to A$. Infolge der obigen Bemerkung ist offenbar die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

für $0 < x < 1$ konvergent. Führen wir *zweimal* die Abelsche partielle Summation aus (vgl. Nr. 383 und besonders Nr. 385, Beispiel 6), so erhalten wir

$$f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,\alpha_n x^n;^{1)}$$

---

1) Von der Gültigkeit dieser Identität kann man sich auch unmittelbar leicht überzeugen, wenn man von der wegen der Beschränktheit der α_n sicher konvergenten rechten Reihe ausgeht:

$$\begin{aligned}(1-2x+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,\alpha_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)\,\alpha_n - 2n\alpha_{n-1} + (n-1)\,\alpha_{n-2}]\,x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\{[(n+1)\,\alpha_n - n\alpha_{n-1}] - [n\alpha_{n-1} - (n-1)\,\alpha_{n-2}]\}\,x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(A_n - A_{n-1})\,x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.\end{aligned}$$

(Dabei setzen wir $\alpha_{-1} = \alpha_{-2} = A_{-1} = 0$.) Die Konvergenz der letzten Reihe ergibt sich hier von selbst.

dabei ist, wie wir uns erinnern, $A_0 + A_1 + \cdots + A_n = (n+1)\,\alpha_n$. Bekanntlich gilt (für $0 < x < 1$)

$$(1-x)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,x^n \quad \text{oder} \quad 1 = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,x^n.$$

Beide Seiten dieser Identität multiplizieren wir mit A und subtrahieren von ihr gliedweise die obige Identität:

$$A - f(x) = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,(A - \alpha_n)\,x^n.$$

Die Summe auf der rechten Seite zerlegen wir in zwei Summanden,

$$(1-x^2) \sum_{0}^{N-1} + (1-x^2) \sum_{N}^{\infty},$$

wobei die Zahl N so gewählt wird, daß für $n > N$

$$|A - \alpha_n| < \varepsilon$$

gilt, wenn ε eine beliebig vorgegebene positive Zahl ist. Dann ist die zweite Summe ihrem absoluten Betrag nach kleiner als ε (unabhängig von x); bei der ersten Summe läßt sich das gleiche erreichen, wenn x gegen 1 strebt. Damit ist der Satz bewiesen (vgl. den Beweis des Abelschen Satzes in Nr. 418).

Damit haben wir festgestellt, daß in allen Fällen, in denen die Cesàrosche Methode anwendbar ist, sich auch die Abel-Poissonsche Methode anwenden läßt und das gleiche Resultat angibt. Die Umkehrung gilt nicht: Es existieren Reihen, die nach der Abel-Poissonschen Methode summierbar sind, aber im Cesàroschen Sinne keine „verallgemeinerte Summe" besitzen.

Als Beispiel betrachten wir die Reihe

$$1 - 2 + 3 - 4 + \cdots.$$

Da hier offenbar die eingangs erwähnte notwendige Bedingung für die Summierung nach der Methode der arithmetischen Mittel nicht erfüllt ist, kann diese Methode nicht angewendet werden. Dagegen hat die Reihe

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots$$

(für $0 < x < 1$) die Summe $\dfrac{1}{(1+x)^2}$, die für $x \to 1 - 0$ gegen den Grenzwert $\dfrac{1}{4}$ strebt. Dies ist auch die „verallgemeinerte Summe" der Zahlenreihe nach der Abel-Poissonschen Methode.

Also ist die Abel-Poissonsche Methode umfassender, d. h. auf mehr Fälle anwendbar als die Cesàrosche Methode; die beiden Methoden widersprechen sich jedoch nicht, wenn sie sich beide als anwendbar erweisen.

422. Der Hardy-Landausche Satz. Wie bei der Abel-Poissonschen Methode können auch bei der Cesàroschen Methode Sätze vom Tauberschen Typ bewiesen werden, die für die Glieder einer Reihe jene Zusatzbedingungen angeben, bei deren Erfülltsein aus der Summierbarkeit der Reihe nach der Methode der arithmetischen Mittel ihre Konvergenz im üblichen Sinne folgt.

Auf Grund des Satzes von Frobenius ist klar, daß jeder Taubersche Satz für die Abel-Poissonsche Methode insbesondere auf einen solchen Satz für die Cesàrosche Methode führt.

Beispielsweise läßt sich ein Tauberscher Satz jetzt folgendermaßen formulieren: *Strebt* $\alpha_n \to A$ *und ist die Bedingung*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = 0 \tag{9}$$

erfüllt, so strebt gleichzeitig auch A_n *gegen* A. Übrigens folgt hier der Satz unmittelbar aus der leicht zu verifizierenden Identität

$$A_n - \alpha_n = \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n+1},[1]$$

die in dem gegebenen Fall sogar auf die *Notwendigkeit* der Bedingung (9) hinweist.

G. H. Hardy[2]) wies nach, daß der Schluß von $\alpha_n \to A$ auf $A_n \to A$ nicht nur dann gezogen werden kann, wenn $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ ist (dies ist im vorhergehenden enthalten!), sondern auch unter der schwächeren Voraussetzung

$$|ma_m| < C \qquad (C = \text{const}; m = 1, 2, 3, \ldots), \quad \text{d. h.} \quad a_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

E. Landau zeigte, daß man sich sogar damit begnügen kann, wenn diese Beziehung nur „einseitig" erfüllt ist:

Die Reihe (A) *sei summierbar und habe nach der Methode der arithmetischen Mittel die „Summe"* A. *Ist dabei die Bedingung*

$$ma_m > -C \qquad (C = \text{const} > 0; m = 1, 2, 3, \ldots)$$

erfüllt, so ist gleichzeitig auch

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A.$$

(Ändern wir die Vorzeichen aller Glieder der Reihe, so sehen wir, daß es auch genügt, die Ungleichung in anderer Richtung vorauszusetzen: $ma_m < C$. Insbesondere ist der Satz offenbar auf Reihen mit Gliedern *gleichen* Vorzeichens anwendbar.)

Zum Beweis betrachten wir zunächst die Reihe

$$S = \sum_{m=n+1}^{n+k} A_m$$

mit beliebigen natürlichen Zahlen n und k. Durch identische Umformung läßt sie sich leicht auf die Gestalt

$$\begin{aligned} S &= \sum_{m=0}^{n+k} A_m - \sum_{m=0}^{n} A_m = (n+k+1)\,\alpha_{n+k} - (n+1)\,\alpha_n \\ &= k\alpha_{n+k} + (n+1)\,(\alpha_{n+k} - \alpha_n) \end{aligned} \tag{10}$$

bringen. Jedes A_m $(n < m \leqq n + k)$ kann man, wenn man die Voraussetzung $a_m > -\frac{C}{m}$ benutzt, nach unten abschätzen:

$$A_m = A_n + (a_{n+1} + \cdots + a_m) > A_n - \frac{k}{n} C..$$

---

[1]) Es ist

$$\begin{aligned} (n+1)\,A_n - (n+1)\,\alpha_n &= (n+1)\,A_n - (A_0 + A_1 + \cdots + A_n) \\ &= (A_n - A_0) + (A_n - A_1) + \cdots + (A_n - A_{n-1}) \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (a_2 + \cdots + a_n) + \cdots + a_n \\ &= a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n. \end{aligned}$$

[2]) Godefrey Herold Hardy, 1877—1947, englischer Mathematiker.

Daraus folgt, über m summiert,

$$S > kA_n - \frac{k^2}{n} C.$$

Setzen wir dies in (10) ein, so kommen wir zu der Ungleichung

$$A_n < \alpha_{n+k} + \frac{n+1}{k}(\alpha_{n+k} - \alpha_n) + \frac{k}{n} C. \tag{11}$$

Jetzt lassen wir $n \to \infty$ wachsen; die Änderung von k unterwerfen wir der Forderung, daß das Verhältnis $\frac{k}{n}$ gegen eine vorgegebene Zahl $\varepsilon > 0$ strebt. Dann strebt die rechte Seite von (11) gegen den Grenzwert $A + \varepsilon C$, so daß für hinreichend große Werte von n

$$A_n < A + 2\varepsilon C \tag{12}$$

gilt.

Analog gelangen wir zu der Ungleichung

$$S' < kA_n + \frac{k^2}{n-k} C,$$

wenn wir die Summe

$$S' = \sum_{m=n-k+1}^{n} A_m = k\alpha_{n-k} + (n+1)(\alpha_n - \alpha_{n-k})$$

betrachten und A_m (für $n - k < m < n$) nach oben abschätzen,

$$A_m = A_n - (a_{m+1} + \cdots + a_n) < A_n + \frac{k}{n-k} C.$$

Damit folgt

$$A_n > \alpha_{n-k} + \frac{n+1}{k}(\alpha_n - \alpha_{n-k}) - \frac{k}{n-k} C.$$

Wenn n gegen ∞ und gleichzeitig $\frac{k}{n}$ wie eben gegen ε geht (nur sei hier $\varepsilon < \frac{1}{2}$), so strebt die rechte Seite dieser Ungleichung gegen den Grenzwert

$$A - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} C > A - 2\varepsilon C.$$

Folglich ist für hinreichend große n

$$A_n > A - 2\varepsilon C. \tag{13}$$

Vergleichen wir (12) und (13), so sehen wir, daß tatsächlich $\lim A_n = A$ ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkung. Danach wurde auch für die Summierung nach Abel und Poisson ein ähnlicher Tauberscher Satz aufgestellt, von dem der eben bewiesene Satz nur eine spezielle Folgerung ist. Da der Beweis kompliziert ist, wollen wir auf ihn verzichten.

423. Anwendung der verallgemeinerten Summierung auf die Reihenmultiplikation. Wir verweilen nun bei der Anwendung der verallgemeinerten Summierung auf die Multiplikation von Reihen nach der *Cauchyschen Produktregel* (Nr. 389). Außer der Reihe (A) sei noch die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n + \cdots \tag{B}$$

gegeben; dann heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0) \tag{C}$$

Cauchysche Produktreihe der Reihen (A) *und* (B). Sind die gegebenen Reihen konvergent und haben sie im üblichen Sinne die Summen A bzw. B, so kann sich trotzdem die Reihe (C) als nicht konvergent erweisen (ein Beispiel dafür haben wir in Nr. 392 angegeben).

Jedoch ist die Reihe (C) *in allen Fällen nach der Abel-Poissonschen Methode summierbar, und zwar hat sie die Summe AB.*

Beweis. Für $0 < x < 1$ ist sowohl die Reihe (1) als auch die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots$$

absolut konvergent (Nr. 379); ihre Summen bezeichnen wir mit $f(x)$ bzw. $g(x)$. Das Produkt dieser Reihen, d. h. die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0)\, x^n,$$

ist nach dem klassischen Satz von Cauchy (Nr. 389) ebenfalls konvergent und hat als Summe das Produkt $f(x)\, g(x)$. Diese Summe strebt für $x \to 1 - 0$ gegen AB, denn, wie wir sahen, ist einzeln

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = A, \qquad \lim_{x \to 1-0} g(x) = B.$$

Also ist die „(im Abel-Poissonschen Sinne) verallgemeinerte Summe" der Reihe (C) tatsächlich gleich AB, was zu beweisen war.

Als Schlußfolgerung hieraus ergibt sich der Abelsche Satz über die Multiplikation von Reihen (Nr. 392). Aus dem eben besprochenen Beweis wird nämlich klar, daß *die Schlußfolgerung gültig bleibt, wenn die Reihen* (A) *und* (*B*) — statt im üblichen Sinne zu konvergieren — *nur nach der Abel-Poissonschen Methode summierbar sind und die Summen A bzw. B besitzen.*

In diesem Fall kann man unter Berücksichtigung des Satzes von Frobenius (Nr. 421) auch folgendes behaupten:

Sind die Reihen (A), (B) *und* (C) *im Cesàroschen Sinne summierbar und haben sie die „verallgemeinerten Summen" A, B bzw. C, so ist notwendig*

$$C = AB.$$

Als Beispiel wollen wir das Quadrat der Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \cdots + (-1)^m \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} + \cdots$$

berechnen, die sich aus der Binomialentwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2} x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 - \cdots + (-1)^m \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} x^m + \cdots$$

für $x = 1$ ergibt. Multiplizieren wir die Zahlenreihe mit sich selbst, so gelangen wir zu der wohlbekannten Reihe

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots,$$ [1]

deren „verallgemeinerte Summe" sowohl nach der Abel-Poissonschen als auch nach der Cesàroschen Methode gleich $\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ ist.

---

[1] Wir benutzen hier die Identität

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \, \frac{(2n-2m-1)!!}{(2n-2m)!!} = 1,$$

wobei $(-1)!!$ und $0!!$ gleich 1 gesetzt werden.

Ferner erhalten wir durch Multiplikation dieser divergenten Reihe mit sich selbst die Reihe

$$1 - 2 + 3 - 4 + \cdots,$$

deren „verallgemeinerte Summe" im Abel-Poissonschen Sinne gleich $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ ist (im Cesàroschen Sinne ist sie nicht summierbar!).

424. Andere Methoden zur verallgemeinerten Summierung von Reihen.

1. *Die Woronoischen*[1]) *Methoden.* Gegeben sei eine positive Zahlenfolge $\{p_n\}$, und es sei

$$P_0 = p_0, \qquad P_n = p_0 + p_1 + \cdots + p_n \qquad (n > 0).$$

Aus den Partialsummen A_n der Reihe (A) bilden wir den Ausdruck

$$w_n = \frac{p_n A_0 + p_{n-1} A_1 + \cdots + p_0 A_n}{P_n}.$$

Wenn w_n für $n \to \infty$ gegen A strebt, nennen wir A die „verallgemeinerte Summe" der Reihe (A) im Woronoischen Sinne (bei einer gegebenen Folge $\{p_n\}$).

Diese Methode ist sowohl in diesem Fall als auch in den nächsten Fällen offenbar *linear.*

Für die Regularität der Woronoischen Methode ist die Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{P_n} = 0$$

notwendig und hinreichend.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, die Methode sei regulär, d. h., aus $A_n \to A$ möge auch $w_n \to A$ folgen. Wählen wir insbesondere die Reihe

$$1 - 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots,$$

für welche $A_0 = 1$ ist und die übrigen A_n verschwinden (so daß auch $A = 0$ gilt), so ist notwendig

$$w_n = \frac{p_n}{P_n} \to 0.$$

Zum Beweis, daß die Bedingung hinreichend ist, setzen wir voraus, daß sie erfüllt ist, und zeigen, daß $w_n \to A$ aus $A_n \to A$ folgt. Im Satz von Toeplitz (Nr. 391) ersetzen wir x_n durch A_n und t_{nm} durch $\frac{p_{n-m}}{P_n}$. Die Bedingung (a) des Satzes ist erfüllt, denn es gilt

$$t_{nm} = \frac{p_{n-m}}{P_n} < \frac{p_{n-m}}{P_{n-m}} \to 0.$$

Wegen

$$\sum_{m=0}^{n} |t_{nm}| = \sum_{m=0}^{n} t_{nm} = 1$$

sind auch die Bedingungen (b) und (c) erfüllt. Also strebt w_n gegen A, was zu beweisen war.

2. *Die verallgemeinerten Cesàroschen Methoden.* Wir kennen schon die Methode der arithmetischen Mittel (Nr. 420); sie ist die einfachste der Cesàroschen Summierungsmethoden. Mit einer festen natürlichen Zahl k führt Cesàro die Zahlenfolge

$$\gamma_n^{(k)} = \frac{S_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}} = \frac{\binom{n+k-1}{k-1} A_0 + \binom{n+k-2}{k-1} A_1 + \cdots + \binom{k-1}{k-1} A_n}{\binom{n+k}{k}}$$

---

[1]) Georgi Feodosjewitsch Woronoi, 1868—1908, russischer Mathematiker.

ein und betrachtet ihren Grenzwert für $n \to \infty$ als „verallgemeinerte Summe" (k-ter Ordnung) der Reihe (A). Für $k = 1$ erhalten wir die Methode der arithmetischen Mittel.

Im folgenden werden wir öfter die Beziehung

$$\binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \binom{k+1}{k-1} + \cdots + \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k}{k} \tag{14}$$

benötigen; sie läßt sich leicht durch vollständige Induktion nach n beweisen, wenn man von der bekannten Relation

$$\binom{n+k}{k} = \binom{(n-1)+k}{k} + \binom{n+(k-1)}{k-1}$$

ausgeht.

Zunächst werden wir zeigen, daß die *Cesàroschen Methoden jeder Ordnung Spezialfälle der regulären Woronoischen Methoden sind.* Dazu genügt es, $p_n = \binom{n+k-1}{k-1}$ zu setzen, denn aus (14) folgt dann $P_n = \binom{n+k}{k}$; offenbar ist

$$\frac{p_n}{P_n} = \frac{k}{n+k} \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Mit Hilfe von (14) ergibt sich, wenn wir die Definition der Größen $S_n^{(k)}$ benutzen,

$$S_0^{(k-1)} + S_1^{(k-1)} + \cdots + S_n^{(k-1)} = S_n^{(k)}.[1] \tag{15}$$

Damit ist es möglich, eine Wechselbeziehung zwischen der Cesàroschen Summierungsmethode k-ter und $(k-1)$-ter Ordnung herzustellen. Die Reihe (A) gestatte eine Summierung $(k-1)$-ter Ordnung, so daß $\gamma_n^{(k-1)}$ gegen A strebt. Auf Grund von (14) und (15) gilt

$$\gamma_n^{(k)} = \frac{S_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}} = \frac{S_0^{(k-1)} + S_1^{(k-1)} + \cdots + S_n^{(k-1)}}{\binom{n+k}{k}}$$
$$= \frac{\binom{k-1}{k-1}\gamma_0^{(k-1)} + \binom{k}{k-1}\gamma_1^{(k-1)} + \cdots + \binom{n+k-1}{k-1}\gamma_n^{(k-1)}}{\binom{n+k}{k}}.$$

Wenden wir hierauf den Satz von TOEPLITZ (Nr. 391) an, wobei wir

$$x_n = \gamma_n^{(k-1)} \quad \text{und} \quad t_{nm} = \frac{\binom{m+k-1}{k-1}}{\binom{n+k}{k}} \qquad (m = 0, 1, \ldots, n)$$

setzen, so können wir schließen, daß auch $\gamma_n^{(k)}$ gegen A strebt. *Gestattet demnach die Reihe* (A) *die Summierung nach der Cesàroschen Methode irgendeiner Ordnung, so gestattet sie auch die Summierung jeder höheren Ordnung, und zwar mit der gleichen Summe.*

Wir wollen nun den schon bekannten Satz von FROBENIUS (Nr. 421) verallgemeinern: *Ist die Reihe* (A) *summierbar mit Hilfe einer der Cesàroschen Methoden (etwa k-ter Ordnung), so hat sie auch nach der Abel-Poissonschen Methode diese Summe.*

Es sei

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n^{(k)} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}} = A. \tag{16}$$

---

[1]) Unter $S_n^{(0)}$ verstehen wir A_n.

Daraus läßt sich leicht schließen, daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)} x^n \tag{17}$$

für $-1 < x < 1$ konvergiert; wegen $\binom{n+k}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$ folgt nämlich aus (16)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|S_n^{(k)}|}{n^k} = \frac{|A|}{k!}.$$

Im Fall $A \neq 0$ ist

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|S_n^{(k)}|} = 1,$$

so daß nach dem Satz von CAUCHY-HADAMARD der Konvergenzradius von (17) gleich 1 ist. Er ist in jedem Fall *nicht kleiner* als 1, wenn $A = 0$ ist.

Wir betrachten nun die Identitäten

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(0)} x^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(0)} x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(1)} x^n,$$ [1]

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k-1)} x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)} x^n.$$

Früher haben wir die Konvergenz der letzten Reihe im Intervall $(-1, 1)$ nachgewiesen; daraus folgt (vgl. Nr. 390, Beispiel 4) auch die Konvergenz aller vorhergehenden Reihen. Außerdem ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)} x^n = (1-x)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^{(k)} \binom{n+k}{k} x^n. \tag{18}$$

Wir vergleichen (18) mit der Identität

$$1 = (1-x)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n, \tag{19}$$

die in demselben Intervall $(-1, 1)$ gilt; sie ergibt sich durch k-malige Differentiation der Reihe

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Multiplizieren wir beide Seiten von (19) mit A und subtrahieren wir dann gliedweise die Gleichung (18), so finden wir

$$A - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x = (1-x)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} [A - \gamma_n^{(k)}] \binom{n+k}{k} x^n.$$

Die weiteren Überlegungen (unter Berücksichtigung von (16)) sind denjenigen vollkommen analog, die wir beim Beweis des Satzes von ABEL (Nr. 418) und von FROBENIUS (Nr. 421) anstellten; wir können sie deshalb dem Leser überlassen. Das Ergebnis lautet

$$\lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A,$$

was zu beweisen war.

Wir erwähnen, daß divergente Reihen existieren, die nach der Abel-Poissonschen Methode, jedoch nicht nach einer der verallgemeinerten Cesàroschen Methoden summierbar sind. Die erste Methode ist also stärker als alle anderen hier behandelten Methoden.

---

[1]) Hier und im folgenden benutzen wir Beziehungen der Art (15).

3. *Die Hölderschen Methoden.* Diese Methoden bestehen einfach aus einer wiederholten Anwendung der Methode der arithmetischen Mittel. Alle Fragen nach ihrer Regularität und der Wechselbeziehung lassen sich durch Hinweis auf den Satz von CAUCHY erledigen.

Man kann zeigen, daß *die k-malige Anwendung der Methode der arithmetischen Mittel vollkommen äquivalent ist der Anwendung der Cesàroschen Methode k-ter Ordnung.*[1])

4. *Die Borelsche*[2]) *Methode.* Sie besteht in folgendem: Zu der Reihe (A) und ihren Partialsummen A_n läßt sich der Ausdruck

$$\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}} = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!}$$

konstruieren. *Ist diese Reihe (wenigstens für hinreichend große Werte von x) konvergent und hat ihre Summe für $x \to \infty$ den Grenzwert A, so nennen wir diese Zahl die „verallgemeinerte Summe" im Borelschen Sinne für die gegebene Reihe* (A).

Wir beweisen, daß die Borelsche Methode regulär ist. Die Reihe (A) sei konvergent; ihre Summe bezeichnen wir mit A und die Reste $A - A_n$ mit α_n. Für hinreichend große x gilt

$$A - e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!} = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} A \frac{x^n}{n!} - e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{x^x}{n!} = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{x^n}{n!}.$$

Zu einem beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ läßt sich eine Zahl N derart finden, daß $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n > N$ gilt. Bringen wir die ganz rechte Reihe auf die Form

$$e^{-x} \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \frac{x^n}{n!} + e^{-x} \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n \frac{x^n}{n!},$$

so sehen wir, daß der zweite Summand für jedes x dem absoluten Betrag nach kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ ist und der erste Summand als Produkt von e^{-x} mit einem Polynom in x für hinreichend große x dem absoluten Betrag nach ebenfalls kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ bleibt. Damit ist der Satz bewiesen.[3])

5. *Die Eulersche Methode.* Für die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$$

fanden wir in Nr. 413 (vgl. Formel (7)) die Beziehung

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\Delta^p a_0}{2^{p+1}}, \tag{20}$$

die *Eulersche Reihentransformation. Dabei folgt,* wie bewiesen wurde, *aus der Konvergenz der linken Seite schon die der rechten Reihe und damit die Gleichheit ihrer Summen.*

Jedoch kann auch bei *Divergenz* der ersten Reihe die zweite Reihe konvergieren; in diesem Fall sah EULER ihre Summe als „verallgemeinerte Summe" der ersten Reihe an. Darin besteht eigentlich die Eulersche Methode; diese Bemerkung garantiert die Regularität der Methode.

Schreiben wir die zu betrachtende Reihe in der üblichen Form (A), d. h. ohne die Vorzeichen der a_n hervorzuheben, und erinnern wir uns an die Formel (4) aus Nr. 413 für die p-te Differenz, so können wir sagen, daß nach der Eulerschen Methode als „verallgemeinerte Summe" von (A)

---

[1]) Satz von KNOPP und SCHNEE (WALTER SCHNEE, 1885—1958, deutscher Mathematiker). — *Anm. d. Red.*

[2]) EMILE BOREL, 1871—1956, französischer Mathematiker.

[3]) Der Leser erkennt die Ähnlichkeit dieses Beweises mit dem des Satzes von ABEL (Nr. 418) und der anderen Sätze.

die gewöhnliche Summe der Reihe

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_0 + \binom{p}{1} a_1 + \binom{p}{2} a_2 + \cdots + \binom{p}{p} a_p}{2^{p+1}}$$

genommen werden kann (vorausgesetzt, die letzte Reihe konvergiert).

Hiermit schließen wir den Überblick über die verschiedenen Methoden zur Summierung divergenter Reihen ab, da die hier angegebenen Methoden genügen, um dem Leser einen Eindruck davon zu vermitteln, wie vielfältig man an diese Frage herangehen kann. Ob eine Methode regulär war, haben wir in allen Fällen nachgeprüft. Leider konnten wir uns nicht immer in die Wechselbeziehungen zwischen den verschiedenen Methoden vertiefen. Es kann durchaus vorkommen, daß die Anwendungsbereiche zweier Methoden sich *überschneiden* (jedoch nicht übereinstimmen); auch können zwei Methoden ein und derselben divergenten Reihe *verschiedene* „verallgemeinerte Summen" zuordnen.

425. Beispiele.

1. Gegeben sei eine positive monotone Nullfolge $\{a_n\}$. Wir setzen

$$A_0 = a_0, \qquad A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \qquad (n > 0).$$

Zu zeigen ist, daß *die alternierende Reihe*

$$A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + \cdots$$

mit Hilfe der Cesàroschen Methode (*erster Ordnung*) *summierbar und ihre Summe gleich der halben Summe der konvergenten Reihe*

$$\alpha = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots$$

(*vom Leibnizschen Typ*) *ist* (G. H. Hardy).

Hinweis. Man berechne das arithmetische Mittel der ersten $2m$ Partialsummen der gegebenen Reihe; es läßt sich in der Form

$$\frac{1}{2} \frac{(a_0 - a_1) + (a_0 - a_1 + a_2 - a_3) + \cdots + (a_0 - a_1 + \cdots + a_{2m-2} - a_{2m-1})}{m}$$

darstellen und strebt nach dem Satz von Cauchy (vgl. Nr. 33, Beispiel 13) gegen $\frac{1}{2}\alpha$. Dann kann man leicht zeigen, daß auch das arithmetische Mittel der ersten $2m + 1$ Partialsummen gegen denselben Grenzwert strebt.

2. Setzen wir $a_n = \frac{1}{n+1}$ oder $a_n = \ln \frac{n+2}{n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, so können wir auf Grund des obigen Satzes von Hardy feststellen, daß die divergenten Reihen

$$H_1 - H_2 + H_3 - H_4 + \cdots$$ [1]

und

$$\ln 2 - \ln 3 + \ln 4 - \ln 5 + \cdots$$

beide nach der Cesàroschen Methode summierbar sind und ihre „verallgemeinerten Summen" gleich $\frac{1}{2} \ln 2$ bzw. $\frac{1}{2} \ln \frac{\pi}{2}$ sind.

Hinweis. Im zweiten Fall benutze man die Wallissche Formel (Nr. 317).

3. Mit Hilfe desselben Satzes beweise man nun, daß die für $-1 < x < 0$ divergente Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{\xi} \qquad (\xi = -x;\ 0 < \xi < 1)$$

mit Hilfe der Cesàroschen Methode summierbar ist.

---

[1]) H_n bezeichnet (wie gewöhnlich) die n-te Partialsumme der harmonischen Reihe.

Hinweis. Man gebe n^ξ die Gestalt

$$n^\xi = (1 - 0) + (2^\xi - 1) + \cdots + (n^\xi - (n - 1)^\xi)$$

und zeige mit Hilfe der Differentialrechnung, daß die Folge der Zahlen $n^\xi - (n - 1)^\xi$ mit wachsendem n abnimmt (dabei strebt sie wegen Nr. 32, Beispiel 5, gegen 0).

4. Wenn wir zwischen die Glieder einer konvergenten Reihe Nullen schieben, so spiegelt sich dies weder in der Konvergenz der Reihe noch in ihrer Summe wieder. Wie wir an den folgenden Beispielen sehen werden, braucht dies bei der verallgemeinerten Summierung einer divergenten Reihe nicht der Fall zu sein.

Wir betrachten die Reihen

$$\text{(a)}\quad \underset{0}{1} - \underset{1}{1} + \underset{2}{1} - \underset{3}{1} + \underset{4}{1} - \underset{5}{1} + \cdots,$$

$$\text{(b)}\quad \underset{0}{1} - \underset{1}{1} + \underset{2}{0} + \underset{3}{1} - \underset{4}{1} + \underset{5}{0} + \underset{6}{1} - \underset{7}{1} + \underset{8}{0} + \cdots,$$

$$\text{(c)}\quad \underset{0}{0} + \underset{1}{1} - \underset{2}{1} + \underset{3}{0} + \underset{4}{1} + \underset{5}{0} + \underset{6}{0} + \underset{7}{0} - \underset{8}{1} + \cdots.$$ [1]

Von der ersten Reihe wissen wir, daß ihre „verallgemeinerte Summe" nach CESÀRO gleich $\frac{1}{2}$ ist. Zu zeigen ist, daß die Reihe (b) schon eine andere Summe hat, nämlich $\frac{1}{3}$, und die Reihe (c) nach CESÀRO überhaupt nicht summierbar ist.

Hinweis. Bei der Reihe (c) schwankt das arithmetische Mittel der ersten $n + 1$ Glieder

$$\text{zwischen}\quad \frac{1}{3}\,\frac{2^{2m} - 1}{2^{2m-1} + 1} \to \frac{2}{3} \quad\text{und}\quad \frac{1}{3}\,\frac{2^{2m} - 1}{2^{2m}} \to \frac{1}{3},$$

wenn n sich von 2^{2m-1} bis $2^{2m} - 1$ ändert.

Es sei k eine natürliche Zahl. Wir betrachten die Reihe

$$\Sigma_k = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n + k}{k}$$

und beweisen, daß Σ_k nach der Cesàroschen Methode k-ter Ordnung nicht summierbar ist, sich jedoch nach der Cesàroschen Methode $(k + 1)$-ter Ordnung summieren läßt und die „verallgemeinerte Summe" $\frac{1}{2^{k+1}}$ besitzt.

Benutzen wir (18) und wenden wir zweimal die Gleichung (19) an (beim ersten Mal ersetzen wir x durch $-x$, beim zweiten Mal x und x^2), so erhalten wir nacheinander

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)} x^n = \frac{1}{(1 - x)^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n + k}{k} x^n = \frac{1}{(1 - x^2)^{k+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m + k}{k} x^{2m}.$$ [2]

Vergleichen wir die Koeffizienten bei gleichen Potenzen von x in der ersten und in der letzten Reihe (wir benutzen dazu den Satz über die Identität von Potenzreihen, den wir später beweisen werden; vgl. Nr. 437, Satz 3°), so gelangen wir zu

$$S_{2m}^{(k)} = \binom{m + k}{k}, \qquad S_{2m+1}^{(k)} = 0 \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{21}$$

[1] Das in (a) an m-ter Stelle ($m = 0, 1, 2, \ldots$) stehende Glied ± 1 ist in (c) auf die 2^m-te Stelle verschoben; die übrigen Plätze sind mit Nullen besetzt.

[2] Die Konvergenz der letzten Reihe im Intervall $(-1, 1)$ läßt sich leicht mit Hilfe des Satzes von CAUCHY-HADAMARD nachweisen; daraus folgt sofort die Konvergenz der ersten Reihe.

Also ist

$$\gamma_{2m}^{(k)} = \frac{\binom{m+k}{k}}{\binom{2m+k}{k}} \to \frac{1}{2^k}, \qquad \gamma_{2m+1}^{(k)} = 0,$$

so daß die gegebene Reihe nach der Cesàroschen Methode k-ter Ordnung keine „verallgemeinerte Summe“ besitzt.

Andererseits ist infolge der Beziehungen (21), (15) und (14) sowohl für $n = 2m$ als auch für $n = 2m + 1$

$$S_n^{(k+1)} = \binom{k}{k} + \binom{1+k}{k} + \cdots + \binom{m+k}{k} = \binom{m+k+1}{k}.$$

Daraus folgt

$$\gamma_{2m}^{(k+1)} = \frac{\binom{m+k+1}{k+1}}{\binom{2m+k+1}{k+1}} \to \frac{1}{2^{k+1}};$$

dasselbe gilt auch für $\gamma_{2m+1}^{(k+1)}$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

6. Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)^k,$$

wobei k eine beliebige natürliche Zahl ist, läßt sich ebenfalls nach der Cesàroschen Methode $(k+1)$-ter Ordnung summieren. Dies kann man feststellen, indem man sich auf das vorhergehende Resultat stützt.

Zunächst entwickeln wir $\binom{n+k}{k}$ nach Potenzen von $n+1$:

$$\binom{n+k}{k} = \frac{1}{k!}(n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)$$

$$= \alpha_1^{(k)}(n+1)^k + \alpha_2^{(k)}(n+1)^{k-1} + \cdots + \alpha_k^{(k)}(n+1).$$

Hier sind die $\alpha_i^{(k)}$ konstante Koeffizienten und

$$\alpha_1^{(k)} = \frac{1}{k!} \neq 0.$$

Schreiben wir noch die Gleichungen auf, die wir erhalten, wenn wir k nacheinander durch $k-1$, $k-2, \ldots, 1$ ersetzen, so können wir umgekehrt $(n+1)^k$ als Summe

$$(n+1)^k = \beta_1^{(k)}\binom{n+k}{k} + \beta_2^{(k)}\binom{n+k-1}{k-1} + \cdots + \beta_k^{(k)}\binom{n+1}{1}$$

mit konstanten Koeffizienten $\beta_j^{(k)}$ darstellen. Dann ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)^k = \beta_1^{(k)}\Sigma_k + \beta_2^{(k)}\Sigma_{k-1} + \cdots + \beta_k^{(k)}\Sigma_1.$$

Da alle Reihen Σ_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ nach der Cesàroschen Methode $(k+1)$-ter Ordnung summierbar sind (wir berücksichtigen hier die Eigenschaften der Cesàroschen Methoden aufeinanderfolgender Ordnungen), gilt dies auf Grund der Linearität dieser Methode auch für die gegebene Reihe.

Erst später (Nr. 449) werden wir in der Lage sein, ihre „verallgemeinerte Summe“ selbst zu berechnen.

Wir geben nun noch einige einfache Beispiele für die unmittelbare Anwendung der Hölderschen, Borelschen und Eulerschen Methode an.

7. Nach der Hölderschen Methode summiere man die Reihen

(a) $1 - 2 + 3 - 4 + \cdots$,

(b) $1 - 3 + 6 - 10 + \cdots$.

Lösung. (a) eine zweifache Mittelung ergibt $\frac{1}{4}$.

(b) Eine dreifache Mittelung ergibt $\frac{1}{8}$.

8. Man summiere die Reihe

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

nach der Borelschen Methode.

Lösung. $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \dfrac{1}{2}$.

9. Nach der Eulerschen Methode summiere man die Reihen

(a) $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$,

(b) $1 - 2 + 3 - 4 + \cdots$,

(c) $1 - 2 + 2^2 - 2^4 + \cdots$,

(d) $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \cdots$,

Hinweis. In allen Fällen ist es günstig, die Eulersche Reihentransformation in der Gestalt (20) zu benutzen.

Lösung. (a) $A = \frac{1}{2}$;

(b) $\Delta^0 a_0 = 1, \quad \Delta^1 a_0 = 1, \quad \Delta^p a_0 = 0$ für $p > 1, \quad A = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$;

(c) $\Delta^p a_0 = 1, \quad A = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \cdots = \frac{1}{3}$;

(d) $\Delta^0 a_0 = 1, \quad \Delta^1 a_0 = 7, \quad \Delta^2 a_0 = 12, \quad \Delta^3 a_0 = 6$,

$$\Delta^p a_0 = 0 \quad \text{für} \quad p > 3, \quad A = \frac{1}{2} - \frac{7}{4} + \frac{12}{8} - \frac{6}{16} = -\frac{1}{8}.$$

426. Die allgemeine Klasse der linearen und regulären Summierungsmethoden. Wir geben zum Schluß ein allgemeines Schema zur Konstruktion der Klasse der linearen und regulären Summierungsmethoden an, die insbesondere alle oben erwähnten Methoden enthält.

In einem Variationsbereich $\mathfrak{X}$ des Parameters x sei eine Folge von Funktionen

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots \tag{Φ}$$

gegeben. Der Bereich $\mathfrak{X}$ habe die endliche oder unendliche Zahl ω als Häufungspunkt. *Zu einer gegebenen Zahlenreihe* (A) *läßt sich eine Reihe* (Φ) *aus den Funktionen* $\varphi_i(x)$ ($i = 0, \ldots, n$) *bilden:*

$$A_0\varphi_0(x) + A_1\varphi_1(x) + \cdots + A_n\varphi_n(x) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\varphi_n(x) \tag{22}$$

(mit $A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$). *Wenn diese Reihe wenigstens für ein hinreichend nahe bei* ω *liegendes* x *konvergiert und ihre Summe für* $x \to \omega$ *gegen den Grenzwert* A *strebt, dann ist diese Zahl die „verallgemeinerte Summe" der gegebenen Reihe.*

Wir erhaltenen damit eine Summierungsmethode, die mit der Wahl der Folge (Φ) und des Häufungspunktes ω verknüpft ist. Aus der Konstruktionsmethode folgt ihre *Linearität.* Wir setzen nun voraus, daß *die Funktionen* $\varphi_n(x)$ *die folgenden drei Forderungen erfüllen:*

(a) *Für ein beliebiges, aber festes n sei*

$$\lim_{x\to\omega} \varphi_n(x) = 0;$$

(b) *für hinreichend nahe bei* ω *gelegene* x *gelte*[1])

$$\sum_{n=0}^{\infty} |(\varphi_n x)| \leqq K \qquad (K = \text{const});$$

(c) *schließlich sei*

$$\lim_{x\to\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = 1.$$

Dann ist die Summierungsmethode regulär.

Beweis. Es sei also $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$. Dann existiert für ein beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$ eine Zahl n' derart, daß für alle $n > n'$

$$|A_n - A| < \frac{\varepsilon}{3K} \tag{23}$$

gilt. Wegen der Endlichkeit der A_n und der absoluten Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$ konvergiert wenigstens für $|x - \omega| < \delta'$ $(x > \Delta')$ auch die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n\varphi_n(x)$. Dann ist offenbar

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n\varphi_n(x) - A = \sum_{n=0}^{n'} [A_n - A]\,\varphi_n(x) + \sum_{n=n'+1}^{\infty} [A_n - A]\,\varphi_n(x) + A\left[\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) - 1\right],$$

so daß wir nach Übergang zu den absoluten Beträgen

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} A_n\varphi_n(x) - A\right| \leqq \left|\sum_{n=0}^{n'} [A_n - A]\,\varphi_n(x)\right| + \sum_{n=n'+1}^{\infty} |A_n - A| \cdot |\varphi_n(x)| + |A| \cdot \left|\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) - 1\right|$$

erhalten. Der zweite Summand auf der rechten Seite ist auf Grund von (23) und der Bedingung (b) kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$. Sowohl der erste als auch der dritte Summand kann auf Grund der Bedingungen (a) und (c) für hinreichend nahe bei ω liegende x kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$ gemacht werden. Folglich ist

$$\lim_{x\to\omega} \sum_{n=0}^{\infty} A_n\varphi_n(x) = A,$$

d. h., die „verallgemeinerte Summe" existiert und ist gleich der gewöhnlichen Summe.

Ist x eine natürliche Zahl m, d. h. $\mathcal{X}$ die Menge der natürlichen Zahlen (also $\omega = \infty$), so läßt sich die Folge der Funktionen (Φ) durch die Rechtecksmatrix

$$\begin{array}{cccc} t_{00} & t_{01} & t_{02} & t_{0m} \\ t_{10} & t_{11} & t_{12} & t_{1m} \\ t_{20} & t_{21} & t_{22} & t_{2m} \\ & & & \\ t_{n0} & t_{n1} & t_{n2} & t_{nm} \end{array} \tag{T}$$

[1]) Das heißt für $|x - \omega| < \delta'$, wenn ω endlich, oder für $x > \Delta'$, wenn $\omega = +\infty$ ist.

ersetzen. Als „verallgemeinerte Summe" der Reihe (A) wird dann der Grenzwert der Folge der Zahlen

$$T_m = A_0 t_{0m} + A_1 t_{1m} + \cdots + A_n t_{nm} + \cdots$$

für $m \to \infty$ benutzt, vorausgesetzt, daß diese Reihe wenigstens für hinreichend große m konvergiert.

Die Bedingungen für die *Regularität* lassen sich in diesem Fall folgendermaßen formulieren:

(a) *Für ein beliebiges, aber festes n ist* $\lim\limits_{m\to\infty} t_{nm} = 0$;

(b) *für hinreichend große m gilt* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |t_{nm}| \leqq K \qquad (K = \text{const})$;

(c) *schließlich ist* $\lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{\infty} t_{nm} = 1$.

Diese Überlegungen stammen im wesentlichen von O. Toeplitz (vgl. Nr. 391), der, wie der Leser sich erinnern wird, die Matrix nur als Dreiecksmatrix vorausgesetzt hat. Dieser Spezialfall war auch für uns größtenteils ausreichend. Wir erwähnen noch, daß unter das angegebene Schema unmittelbar sowohl die Abel-Poissonsche als auch die Borelsche Summierung fallen. Im ersten Fall gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)\, x^n A_n,$$

so daß die Rolle der $\varphi_n(x)$ in $\mathcal{X} = (0, 1)$ $(\omega = 1)$ der Faktor $(1-x)\,x^n$ spielt. Im zweiten Fall ist

$$\varphi_n(x) = e^{-x}\frac{x^n}{n!}$$

in $\mathcal{X} = (0, +\infty)$ $(\omega = +\infty)$. Man verifiziert leicht, daß die Bedingungen (a), (b) und (c) erfüllt sind, woraus auf Grund der oben bewiesenen allgemeinen Sätze die *Regularität* dieser Methoden folgt.

Die oben angegebene allgemeine Definition einer Summierungsmethode und der Satz über ihre Regularität lassen sich leicht so umformen, daß in ihnen nicht die Partialsummen A_n, sondern unmittelbar die Glieder der zu summierenden Reihe (A) auftreten. Wir werden uns damit aber nicht beschäftigen.

XII. Funktionenfolgen und Funktionenreihen

§ 1. Gleichmäßige Konvergenz

427. Einleitende Bemerkungen. Wir untersuchten schon früher unendliche Folgen und ihre Grenzwerte, unendliche Reihen und und ihre Summen; die Glieder dieser Folgen oder Reihen waren konstante Zahlen. Es traten zwar auch Veränderliche als Parameter auf, jedoch wurden ihnen wärend der Untersuchung bestimmte konstante Werte zugeordnet. Als wir z. B. feststellten, daß die Folge

$$1+\frac{x}{1},\quad \left(1+\frac{x}{2}\right)^2,\quad \left(1+\frac{x}{3}\right)^3,\ \ldots,\quad \left(1+\frac{x}{n}\right)^n,$$

den Grenzwert e^x oder daß die Reihe

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$$

die Summe $\ln(1+x)$ hat, hatten wir x als konstante Zahl angesehen. Daß die Elemente der Folge und ihr Grenzwert oder die Glieder der Reihe und ihre Summe im Grunde genommen Funktionen sind, haben wir überhaupt nicht berücksichtigt; deshalb wollen wir uns jetzt damit beschäftigen.

Gegeben sei eine Folge, deren Elemente die Funktionen

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots \tag{1}$$

einer Veränderlichen x mit dem Definitionsbereich $\mathscr{X}=\{x\}$ sind.[1]) Für jedes $x\in\mathscr{X}$ habe diese Folge einen endlichen Grenzwert; er ist ebenfalls eine Funktion von $x\in\mathscr{X}$, da er durch den Wert x vollständig bestimmt ist:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x); \tag{2}$$

wir nennen diese Funktion die *Grenzfunktion für die Folge* (1) bzw. für die Funktionen $f_n(x)$.

Wir werden uns nicht nur für die Existenz des Grenzwerts interessieren, sondern auch für die Eigenschaften der Grenzfunktion. Um gleich zu erklären, welchen Charakter die neuen Probleme haben, nennen wir eines dieser Probleme: Die Elemente der Folge (1) seien stetige Funktionen von x in einem gewissen Intervall $\mathscr{X}=[a,b]$; ist dadurch die Stetigkeit der Grenzfunktion gewährleistet? Wie aus den folgenden Beispielen ersichtlich ist, ergibt sich manchmal die Stetigkeit der Grenzfunktion, manchmal jedoch nicht.

---

[1]) Am häufigsten ist der Definitionsbereich ein Intervall; aber wir wollen, um die Allgemeinheit nicht zu beschränken, unter $\mathscr{X}$ eine beliebige unendliche Zahlenmenge verstehen.

Beispiele. In allen Fällen sei $\mathscr{X} = [0, 1]$.

1. $f_n(x) = x^n$, $f(x) = 0$ für $x < 1$ und $f(1) = 1$ (Unstetigkeit im Punkt $x = 1$);
2. $f_n(x) = \frac{1}{1 + nx}$, $f(x) = 0$ für $x > 0$ und $f(0) = 1$ (Unstetigkeit in $x = 0$);
3. $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$, $f(x) = 0$ für alle x (überall stetig);
4. $f_n(x) = 2n^2x \cdot e^{-n^2x^2}$, $f(x) = 0$ für alle x (überall stetig).

Natürlich ergibt sich das Problem, Bedingungen aufzustellen, unter denen die Grenzfunktion stetig ist; damit werden wir uns in Nr. 431 (und Nr. 432) beschäftigen.

Wir sahen schon in Nr. 362, daß die Betrachtung einer Zahlenreihe und ihrer Summe nur eine andere Form ist, eine Folge und ihren Grenzwert zu untersuchen. Wir betrachten jetzt eine Reihe, deren Glieder Funktionen einer Veränderlichen $x \in \mathscr{X}$ sind:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots. \tag{3}$$

Diese Reihe konvergiere für jeden Wert $x \in \mathscr{X}$; dann ist ihre Summe ebenfalls eine Funktion von x, etwa $f(x)$. Diese Summe ist durch eine Limesgleichung der Gestalt (2) bestimmt, wenn mit $f_n(x)$ die n-te Partialsumme von (3) bezeichnet wird:

$$f_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x). \tag{4}$$

Umgekehrt läßt sich die Frage nach der Grenzfunktion einer beliebig vorgegebenen Folge (1) vom Standpunkt der Summierung einer Reihe (3) betrachten, wenn man

$$u_1(x) = f_1(x),$$
$$u_2(x) = f_2(x) - f_1(x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

setzt. Wir werden uns insbesondere mit Funktionenreihen beschäftigen, da diese Art, die Grenzfunktion zu untersuchen, in der Praxis im allgemeinen zweckmäßiger ist.

Auch hier muß betont werden, daß nicht allein die Konvergenz der Reihe (3), sondern auch die Eigenschaften der Summe von (3) ein Hilfsmittel für die nächsten Untersuchungen sind. Ein Beispiel hierfür ist die Frage nach der Stetigkeit der Summe einer Reihe, deren sämtliche Glieder stetig sind; dies ist das gleiche Problem, an das wir schon früher erinnerten.

Wie es sich erweist, hängen die Eigenschaften der Grenzfunktion (oder, was das gleiche ist, der Summe) $f(x)$ der Reihe wesentlich von dem Charakter ab, mit dem sich $f_n(x)$ der Funktion $f(x)$ bei verschiedenen x nähert. Mit dem Studium der hier auftretenden typischen Möglichkeiten beschäftigen wir uns im nächsten Abschnitt.

428. Gleichmäßige und ungleichmäßige Konvergenz. Wir nehmen an, daß für alle $x \in \mathscr{X}$ die Gleichung (2) gelte. Nach Definition des Grenzwerts bedeutet dies folgendes: *Greifen wir ein festes $x \in \mathscr{X}$ heraus* (damit wir es mit einer bestimmten Zahlenfolge zu tun haben), so läßt sich zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ eine solche Zahl N

finden, daß für alle $n > N$ die Ungleichung

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{5}$$

erfüllt ist, *wobei unter x der oben festgelegte Wert zu verstehen ist.*

Wählen wir einen anderen Wert x, so ergibt sich eine andere Zahlenfolge, und die (vorher zum gleichen ε) gefundene Zahl N kann hier versagen; sie müßte dann durch eine größere ersetzt werden. Schließlich nimmt x unendlich viele Werte an, so daß also unendlich viele Zahlenfolgen vorliegen, die gegen einen Grenzwert konvergieren. Zu jeder dieser Folgen läßt sich ein spezielles N finden; es ergibt sich die Frage, *ob eine Zahl N existiert, die* (bei vorgegebenem ε) *für alle diese Folgen geeignet wäre.*

An Beispielen wollen wir zeigen, daß in einigen Fällen eine solche Zahl N existiert, in anderen aber nicht.

1. Es sei zunächst

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x^2}, \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad (0 \leqq x \leqq 1).$$

Da hier

$$0 \leqq f_n(x) = \frac{1}{2n}\,\frac{2nx}{1 + n^2x^2} \leqq \frac{1}{2n}$$

gilt, ist sofort klar, daß es bei beliebigem x zur Realisierung der Ungleichung $f_n(x) < \varepsilon$ genügt, $n > \frac{1}{2\varepsilon}$ zu nehmen. Also ist z. B. die Zahl $N = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$ in diesem Fall *gleichzeitig für alle x* geeignet.

2. Wir setzen jetzt (vgl. Nr. 427, Beispiel 3)

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}, \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad (0 \leqq x \leqq 1).$$

Für jedes *feste* $x > 0$ genügt es, $n > \left[\frac{1}{x\varepsilon}\right]$ zu wählen, damit $f_n(x) < \frac{1}{nx} < \varepsilon$ gilt. Andererseits läßt sich, wie groß n auch sei, für die Funktion $f_n(x)$ im Intervall $[0, 1]$ stets ein Punkt finden, nämlich der Punkt $x = \frac{1}{n}$, in welchem ihr Wert gleich $\frac{1}{2}$ ist:

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Also ist es nicht möglich, durch Vergrößerung von n die Ungleichung $f_n(x) < \frac{1}{2}$ *gleichzeitig für alle Werte von x* zwischen 0 und 1 zu erhalten. Mit anderen Worten, schon für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ gibt es keine Zahl N, die für alle x gleichzeitig verwendbar wäre.

In Abb. 59 sind die graphischen Darstellungen dieser Funktion für $n = 4$ bzw. $n = 40$ angegeben. Charakteristisch ist der Buckel von der Höhe $\frac{1}{2}$, der sich mit wachsendem n von rechts nach links verlagert. Obwohl sich die aufeinanderfolgenden

Kurven mit wachsendem n der x-Achse beliebig nähern, schmiegt sich keine Kurve auf der ganzen Strecke von $x = 0$ bis $x = 1$ an diese Achse an.[1])

Anders verhält es sich mit den Funktionen aus Beispiel 1; wir geben ihre graphischen Darstellungen nicht an, denn sie ergeben sich z. B. für $n = 4$ und $n = 40$ aus Abb. 59 durch Verkleinerung aller Ordinaten auf ein Viertel bzw. Vierzigstel. In diesem Fall schmiegen sich die Kurven sofort in ihrem ganzen Verlauf an die x-Achse an.

Wir geben nun eine grundlegende Definition:

Hat die Folge (1) in $\mathfrak{X}$ eine Grenzfunktion $f(x)$ und existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine solche *von x unabhängige* Zahl N, daß im Fall $n > N$ die Ungleichung (5) für alle $x \in \mathfrak{X}$ *gleichzeitig* erfüllt ist, so sagt man, *die Folge* (1) *konvergiere* [oder *die Funktion* $f_n(x)$ *strebe*] *gleichmäßig* bezüglich $x \in \mathfrak{X}$ gegen die Funktion $f(x)$.

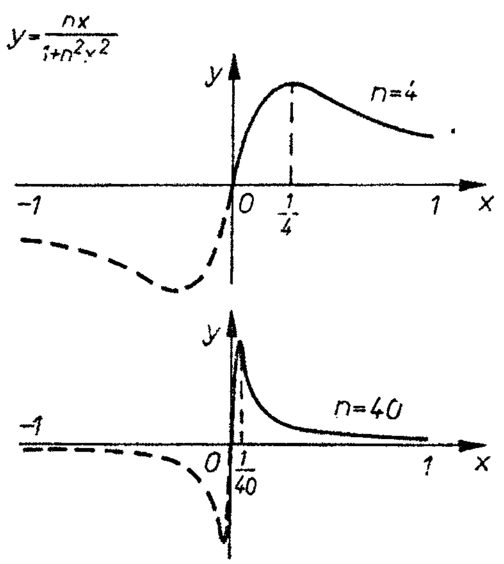

Abb. 59

Somit strebt im ersten der beiden obigen Beispiele die Funktion $f_n(x)$ im Intervall $[0, 1]$ *gleichmäßig* gegen 0, im zweiten Beispiel jedoch nicht.

Auch bei den einfacheren Funktionen, die wir in Nr. 427 betrachteten, ist die Konvergenz *nicht gleichmäßig*. Nämlich:

3. Es ist unmöglich, für die Funktion $f_n(x) = x^n$ (vgl. Nr. 427, Beispiel 1) die Ungleichung $x^n < \varepsilon$ (mit $\varepsilon < 1$) *gleichzeitig für alle* $x < 1$ zu erfüllen, denn strebt x (bei festem n) gegen 1, so ist $x^n \to 1$. Abb. 60 zeigt, aus welchem Grunde die gleichmäßige Konvergenz gestört ist: Hier macht die Grenzfunktion einen Sprung, und das Maximum ist stets das gleiche.

Es sei nun

$$4.\ f_n(x) = \frac{1}{1 + nx} \quad \text{bzw.} \quad 5.\ f_n(x) = 2n^2x \cdot e^{-n^2x^2}.$$

Daß im Intervall $[0, 1]$ die gleichmäßige Konvergenz gegen die Grenzfunktion, die für $x > 0$ in beiden Fällen gleich 0 ist, nicht möglich ist, folgt daraus, daß

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{bzw.} \quad f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2n}{e}$$

[1]) Vgl. K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 4. Auflage, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg 1947, S. 340—341. — *Anm. d. Red.*

gilt. Im zweiten Fall wird die Höhe der Buckel, die die gleichmäßige Konvergenz gegen 0 stören, obendrein noch unendlich groß.

An den Beispielen der Funktionen x^n und $\dfrac{1}{1+nx}$ zeigen wir noch einen anderen Weg zur Behandlung dieses Problems. Die Ungleichungen

$$x^n < \varepsilon \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{1+nx} < \varepsilon$$

sind äquivalent mit

$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} \quad \text{und} \quad n > \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) \qquad (0 < x < 1; 0 < \varepsilon < 1).$$

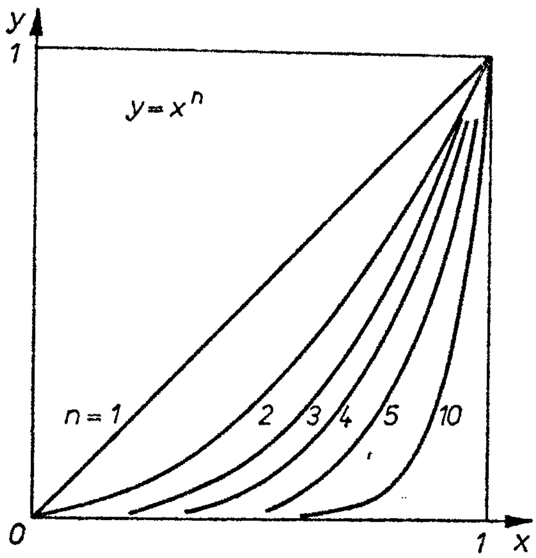

Abb. 60

Da die Ausdrücke auf den rechten Seiten unbeschränkt wachsen (der erste für $x \to 1$, der zweite für $x \to 0$), ist klar, daß keine Zahl n für alle x gleichzeitig diese Ungleichungen erfüllen kann.

Wir übertragen nun alles oben über die Konvergenz von Funktionenfolgen Gesagte auf die Funktionenreihe (3).

Wir setzen die Reihe als *konvergent* voraus und betrachten ihre Summe $f(x)$, ihre n-te Partialsumme $f_n(x)$ [vgl. (4)] und schließlich ihren Rest nach dem n-ten Glied,

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = f(x) - f_n(x).$$

Für jedes feste $x \in \mathscr{X}$ sei

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0.$$

Strebt die Partialsumme $f_n(x)$ gleichmäßig im Gebiet $\mathscr{X}$ gegen die Summe $f(x)$ der Reihe (oder, was dasselbe ist, strebt der Reihenrest $\varphi_n(x)$ gleichmäßig gegen 0), so sagt man, *die Reihe* (3) *konvergiere gleichmäßig* in diesem Gebiet.

Diese Definition ist offenbar der folgenden gleichwertig:

Die für alle x aus dem Gebiet $\mathscr{X}$ konvergente Reihe (3) heißt *gleichmäßig konvergent* in diesem Gebiet, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine von x unabhängige Zahl N derart existiert, daß für $n > N$ die Ungleichung

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{oder} \quad |\varphi_n(x)| < \varepsilon \tag{6}$$

erfüllt ist, *und zwar für alle $x \in \mathscr{X}$ gleichzeitig.*[1])

Beispiele für gleichmäßig und ungleichmäßig konvergente Reihen kann man erhalten, indem man die oben angegebenen Beispiele für Folgen in Reihen umformt. Ihnen wollen wir noch einige neue Beispiele hinzufügen.

6. Wir betrachten die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$. Diese Reihe konvergiert offenbar im offenen Intervall $\mathscr{X} = (-1, 1)$. Für jedes $x \in \mathscr{X}$ hat der Rest nach dem n-ten Glied die Form

$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{1-x}.$$

Ist n beliebig, aber *fest*, so ist offenbar

$$\lim_{x\to-1+0} |\varphi_n(x)| = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to1-0} \varphi_n(x) = \infty.$$

Das beweist, daß das Bestehen der Ungleichung

$$|\varphi_n(x)| < \varepsilon \qquad (\text{mit } \varepsilon < \tfrac{1}{2})$$

bei ein und demselben n für alle x gleichzeitig *nicht* möglich ist. Die Reihe ist also im Intervall $(-1, 1)$ nicht gleichmäßig konvergent. Dies trifft auch für die Intervalle $(-1, 0]$ und $[0, 1)$ einzeln zu.

7. Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$ ist für jeden Wert von x aus $\mathscr{X} = (-\infty, \infty)$ konvergent, denn für sie sind die Voraussetzungen des Satzes von Leibniz (Nr. 381) erfüllt. Auf Grund der Bemerkung auf S. 282 läßt sich der Absolutbetrag des Reihenrestes durch dessen erstes Glied abschätzen:

$$|\varphi_n(x)| < \frac{1}{x^2+n+1} < \frac{1}{n+1}.$$

Daraus ist ersichtlich, daß die Reihe im ganzen Intervall gleichmäßig konvergiert.

8. Analog konvergiert auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^2}{(1+x^2)^n}$ gleichmäßig in $\mathscr{X} = (-\infty, \infty)$, denn für $x \neq 0$ ist

$$|\varphi_n(x)| < \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \frac{x^2}{1+nx^2+\cdots} < \frac{1}{n}.$$

Es ist interessant, daß die Reihe aus den Absolutbeträgen, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, zwar konvergiert, aber nicht gleichmäßig. Ihr Reihenrest für $x \neq 0$ lautet nämlich

$$\varphi_n(x) = \frac{\dfrac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

und strebt bei jedem festen n für $x \to 0$ gegen 1.

---

[1]) Der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz wurde (im Jahre 1848) gleichzeitig von von Seidel und Stokes (Philipp Ludwig von Seidel, 1821—1896, deutscher Mathematiker; George Gabriel Stokes, 1819—1903, englischer Mathematiker) in die Literatur eingeführt, aber noch vor ihnen wurde er von Weierstrass in seinen Vorlesungen verwendet.

Bemerkung. Wird im Beispiel 2 statt des Intervalls $[0, 1]$ ein beliebiges Intervall $[a, 1]$ mit $0 < a < 1$ betrachtet, so ist dort die Konvergenz bereits gleichmäßig, denn für alle $x \geqq a$ gilt

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2} \leqq \frac{n}{1 + n^2a^2} < \frac{1}{na^2}.$$

In einem beliebigen Intervall $[0, a]$ ist die Konvergenz offenbar nicht gleichmäßig. Also sieht es so aus, als ob sich um den Punkt $x = 0$ die Ungleichmäßigkeit „verdichtet" habe, so daß wir diesen Punkt den „Ungleichmäßigkeitspunkt" nennen wollen. Dasselbe trifft für die Beispiele 4, 5 und 8 zu. Die analoge Rolle spielen im Beispiel 3 der Punkt $x = 1$, im Beispiel 6 die beiden Punkte $x = -1$ und $x = 1$.

In komplizierteren Fällen kann man auch unendlich viele solcher Punkte antreffen.

429. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die gleichmäßige Konvergenz.

Der Satz von Bolzano-Cauchy (Nr. 39), der eine Bedingung für die Existenz eines endlichen Grenzwertes einer gegebenen Zahlenfolge angibt („Konvergenzprinzip"), führt auf natürliche Weise zu der folgenden Bedingung für die gleichmäßige Konvergenz der in einem Gebiet $\mathcal{X}$ gegebenen Funktionenfolge (1):

Die Folge (1) *konvergiert genau dann gleichmäßig in $x \in \mathcal{X}$ gegen eine Grenzfunktion, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine nicht von x abhängige Zahl N derart existiert, daß für $n > N$ und jedes $m = 1, 2, 3, \ldots$ die Ungleichung*

$$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \tag{7}$$

gilt, und zwar für alle $x \in \mathcal{X}$ gleichzeitig.

(Diese Forderung kann kurz folgendermaßen formuliert werden: Das Konvergenzprinzip für die Folge (1) muß *gleichmäßig* für alle $x \in \mathcal{X}$ erfüllt sein.)

Beweis. Wir zeigen zuerst die Notwendigkeit der Bedingung. Hat die Folge (1) die Grenzfunktion $f(x)$ und konvergiert sie gegen diese gleichmäßig in $\mathcal{X}$, so gibt es zu einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ eine von x unabhängige Zahl N derart, daß für $n > N$ die Ungleichung

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2}\,\varepsilon$$

für alle x erfüllt ist. Analog ist auch

$$|f_{n+m}(x) - f(x)| < \frac{1}{2}\,\varepsilon \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots);$$

aus diesen beiden Ungleichungen folgt (7).

Wir zeigen nun, daß die Bedingung hinreichend ist. Die im Satz genannte Bedingung sei also erfüllt. Dann erhalten wir, wenn x ein beliebiger, aber *fester* Wert aus $\mathcal{X}$ ist, als Folge (1) eine *Zahlenfolge*, für die der Satz von Bolzano-Cauchy gilt. Demnach gibt es für diese Folge einen endlichen Grenzwert, womit die Existenz einer Grenzfunktion $f(x)$ für die Folge (1) bewiesen ist. Nun nehmen wir willkürlich ein $n > N$ und ein $x \in \mathcal{X}$ und lassen m in der Ungleichung (7) unbeschränkt wachsen (bei konstanten n und x). Beim Grenzübergang $m \to \infty$ erhalten wir

$$|f(x) - f_n(x)| \leqq \varepsilon.$$

Damit ist die gleichmäßige Konvergenz von $f_n(x)$ gegen $f(x)$ bewiesen.

Es ist leicht, das Bewiesene für eine Funktionenreihe zu formulieren:

Die Reihe (3) *konvergiert genau dann gleichmäßig im Gebiet* $\mathcal{X}$, *wenn es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *eine von* x *unabhängige Zahl* N *derart gibt, daß für* $n > N$ *und jedes* $m = 1, 2, 3, \ldots$ *die Ungleichung*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x)\right| = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+m}(x)| < \varepsilon \tag{8}$$

gilt, und zwar für alle $x \in \mathcal{X}$ *gleichzeitig.*

Hieraus ergibt sich insbesondere die nützliche

Folgerung. *Werden alle Glieder der Reihe* (3), *die im Gebiet* $\mathcal{X}$ *gleichmäßig konvergiert, mit ein und derselben in* $\mathcal{X}$ *beschränkten Funktion* $v(x)$ *multipliziert,* $|v(x)| \leqq M$, *so bleibt die gleichmäßige Konvergenz erhalten.*

Um die gleichmäßige Konvergenz konkreter Folgen und Reihen praktisch feststellen zu können, sind die angegebenen Bedingungen meistens wenig zweckmäßig. Deshalb benutzen wir hinreichende Kriterien, die auf diesen Bedingungen beruhen, für die Anwendungen aber geeigneter sind; sie werden im allgemeinen vorzugsweise für Reihen formuliert.

430. Kriterien für die gleichmäßige Konvergenz. Wir geben hier das einfachste und in den meisten Fällen anwendbare Kriterium an:

Weierstraßsches Kriterium. *Wenn die Glieder der Funktionenreihe* (3) *im Gebiet* $\mathcal{X}$ *die Ungleichungen*

$$|u_n(x)| \leqq c_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{9}$$

erfüllen, wobei c_n *das allgemeine Glied einer gewissen konvergenten Zahlenreihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n + \cdots \tag{C}$$

ist, so konvergiert die Reihe (3) *in* $\mathcal{X}$ *gleichmäßig.*

Sind die Ungleichungen (9) erfüllt, so sagt man, die Reihe (3) werde *durch die Reihe* (C) *majorisiert,* oder (C) sei eine *Majorantenreihe* (*Majorante*) für (3).

Aus (9) folgt nämlich die Ungleichung

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+m}(x)| \leqq c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots + c_{n+m},$$

die für alle x aus dem Gebiet $\mathcal{X}$ gilt. Gemäß dem allgemeinen Konvergenzprinzip, das wir auf die Zahlenreihe (C) anwenden, existiert für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ eine Zahl N derart, daß für alle $n > N$ die rechte Seite der obigen Ungleichungen kleiner als ε wird; folglich gilt dies erst recht für die linke Seite, und zwar für alle x gleichzeitig. Damit ist auf Grund der Bedingung aus Nr. 429 die Behauptung bewiesen.

Also sind z. B. die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

in jedem Intervall *gleichmäßig* konvergent, sobald die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut* konvergiert. Es gilt nämlich

$$|a_n \sin nx| \leqq |a_n|, \qquad |a_n \cos nx| \leqq |a_n|,$$

so daß hier die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ die Rolle der Majorantenreihe spielt.

Bemerkung. *Jede im Gebiet $\mathfrak{X}$ gleichmäßig konvergente Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ kann durch Anbringen von Klammern in eine Reihe umgewandelt werden, auf welche sich das Weierstraßsche Kriterium anwenden läßt.*

Zum Beweis betrachten wir eine beliebige konvergente Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ mit positiven Gliedern c_k. Zu der Zahl c_1 (vgl. Nr. 429) läßt sich ein Index m_1 angeben, so daß in $\mathfrak{X}$ für $n > m_1$

$$|u_{m_1+1}(x) + \cdots + u_n(x)| < c_1$$

gilt. Ferner können wir zu der Zahl c_2 einen Index $m_2 > m_1$ finden, so daß in $\mathfrak{X}$ für $n > m_2$

$$|u_{m_2+1}(x) + \cdots + u_n(x)| < c_2$$

usw. gilt. Fassen wir dann die Glieder der gegebenen Reihe wie folgt zusammen,

$$[u_1(x) + \cdots + u_{m_1}(x)] + [u_{m_1+1}(x) + \cdots + u_{m_2}(x)]$$
$$+ [u_{m_2+1}(x) + \cdots + u_{m_3}(x)] + \cdots,$$

so erhalten wir eine Reihe, deren Glieder (vom zweiten Glied ab) in $\mathfrak{X}$ dem absoluten Betrag nach nicht größer sind als die Glieder der betrachteten Zahlenreihe.

Wenn sich auf eine gegebene Reihe (3) das Weierstraßsche Kriterium anwenden läßt, dann ist die Reihe (3) notwendig absolut konvergent. Es ist also gleichzeitig mit (3) auch diejenige Reihe gleichmäßig konvergent, die aus den absoluten Beträgen der Glieder von (3) besteht:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|. \tag{10}$$

Es ist jedoch möglich, daß die Reihe (3) gleichmäßig konvergiert, ohne absolut zu konvergieren. Ein Beispiel hierfür ist die Reihe aus Nr. 428, Beispiel 7 (daß diese Reihe nicht absolut konvergiert, läßt sich durch Vergleich mit der harmonischen Reihe feststellen). Ferner kann auch der Fall eintreten, daß die Reihe (3) absolut und gleichmäßig konvergiert, die Reihe (10) jedoch nicht gleichmäßig konvergent ist (vgl. die Reihe aus Nr. 428, Beispiel 8). Diese Fälle werden vom Weierstraßschen Kriterium nicht erfaßt; zu ihrer Behandlung sind feinere Kriterien notwendig.

Wir stellen nun zwei Kriterien auf, die sich auf Funktionenreihen der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x) = a_1(x)\, b_1(x) + a_2(x)\, b_2(x) + \cdots + a_n(x)\, b_n(x) + \cdots \tag{W}$$

beziehen, wobei $a_n(x)$, $b_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ Funktionen von x sind. Wir formulieren diese Kriterien nach dem Muster des Abelschen und des Dirichletschen Kriteriums (Nr. 384) aus der Theorie der Zahlenreihen; wir benennen sie aus diesem Grunde ebenfalls nach diesen beiden Mathematikern.

Abelsches Kriterium. *Die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) = b_1(x) + b_2(x) + \cdots + b_n(x) + \cdots \tag{B}$$

konvergiere gleichmäßig im Gebiet $\mathfrak{X}$; die Funktionen $a_n(x)$ mögen (für jedes x) eine monotone Folge bilden und für alle x und n beschränkt sein:

$$|a_n(x)| \leqq K.$$

Dann konvergiert die Reihe (W) *im Gebiet $\mathfrak{X}$ gleichmäßig.*

Der Beweis ist dem vorigen analog. Da die Reihe (B) gleichmäßig konvergiert, kann man auf Grund der Bedingung aus Nr. 429 (statt des allgemeinen Konvergenzprinzips) eine von x unabhängige Zahl N finden, für die auf Grund des Hilfssatzes von Abel (Nr. 383) wie oben (für $n > N$) die Ungleichung

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k(x)\, b_k(x)\right| \leqq \varepsilon(|a_{n+1}(x)| + 2\,|a_{n+m}(x)|) \leqq 3K\varepsilon$$

für alle x aus $\mathfrak{X}$ gleichzeitig gilt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Dirichletsches Kriterium. *Die Partialsummen $B_n(x)$ der Reihe* (B) *seien für alle x und n beschränkt:*

$$|B_n(x)| \leqq M;$$

die Funktionen $a_n(x)$ mögen (für jedes x) eine monotone Folge bilden, welche im Gebiet $\mathfrak{X}$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert. Dann konvergiert in diesem Gebiet auch die Reihe (W) *gleichmäßig.*

Auch hier wird der Beweis so wie in Nr. 384 geführt. Wir erwähnen nur, daß die Zahl N von x unabhängig sein muß, da die $a_n(x)$ gleichmäßig gegen 0 streben.

In der Praxis liegt anstelle der Funktionenfolge $\{a_n(x)\}$ oft die gewöhnliche Zahlenfolge $\{a_n\}$ vor oder anstelle der Funktionenreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ die gewöhnliche Zahlenreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Dies ist als Spezialfall in dem oben betrachteten Fall enthalten, da die konvergente Folge $\{a_n\}$ und die konvergente Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ als gleichmäßig konvergent (von x unabhängig) angesehen werden können.

Wenn etwa $\{a_n\}$ eine Folge positiver Zahlen ist, die eine monotone Nullfolge bilden, so sind die beiden Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

nach dem Dirichletschen Kriterium in jedem abgeschlossenen Intervall, das nicht die Punkte $2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) enthält, gleichmäßig konvergent. Dies folgt z. B. daraus (vgl. Nr. 385, Beispiel 2), daß

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \sin ix\right| = \left|\frac{\cos\frac{1}{2}x - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}\right| \leqq \frac{1}{\left|\sin\frac{1}{2}x\right|}$$

und $\sin \frac{1}{2} x$ in dem angegebenen Intervall stets von 0 verschieden ist; also kann man für die Summe eine von x unabhängige Grenze finden.

Weitere Anwendungsbeispiele der Kriterien für die gleichmäßige Konvergenz findet der Leser in Nr. 439ff.

§ 2. Eigenschaften der Summe einer Reihe

431. Die Stetigkeit der Summe einer Reihe. Wir wollen hier die Eigenschaften der Summe einer Reihe im Zusammenhang mit den Eigenschaften derjenigen Funktionen studieren, aus denen sich die Reihe zusammensetzt. Wir wiesen oben schon auf die Äquivalenz von Folgen und unendlichen Reihen hin. Im folgenden werden wir diesen Standpunkt verlassen, da in den Anwendungen fast ausschließlich unendliche Reihen anzutreffen sind. Der Übertragung des über Funktionenreihen Gesagten auf Folgen von Funktionen ist besonders Nr. 436 gewidmet.

Der oben eingeführte Begriff der gleichmäßigen Konvergenz spielt im folgenden eine entscheidende Rolle.

Wir beginnen mit der schon in Nr. 427 erwähnten Frage nach der Stetigkeit der Summe einer Reihe.

Satz 1. *Die Funktionen $u_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ seien im Intervall $\mathcal{X} = [a, b]$ definiert und in einem gewissen Punkt $x = x_0$ dieses Intervalls stetig. Wenn die Reihe* (3) *in $\mathcal{X}$ gleichmäßig konvergiert, so ist auch die Summe $f(x)$ der Reihe im Punkt $x = x_0$ stetig.*

(Eine ähnliche Behauptung wurde zuerst von Cauchy formuliert; er gab ihr jedoch eine zu allgemeine Form und forderte nicht explizit die Gleichmäßigkeit der Konvergenz, ohne die man nicht auskommt.)

Beweis. Mit den früheren Bezeichnungen gilt für jedes $n = 1, 2, 3, \ldots$ und jedes x

$$f(x) = f_n(x) + \varphi_n(x) \tag{11}$$

und insbesondere

$$f(x_0) = f_n(x_0) + \varphi_n(x_0),$$

woraus

$$|f(x) - f(x_0)| \leqq |f_n(x) - f_n(x_0)| + |\varphi_n(x)| + |\varphi_n(x_0)| \tag{12}$$

folgt. Wir wählen nun ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Da die Reihe gleichmäßig konvergiert, können wir eine *feste* Zahl n derart finden, daß die Ungleichung

$$|\varphi_n(x)| < \varepsilon \tag{13}$$

für *alle* Werte von x im Intervall $\mathcal{X}$ (und damit auch für $x = x_0$) erfüllt ist. Für ein festes n ist die Funktion $f_n(x)$ die Summe endlich vieler Funktionen $u_k(x)$, die im Punkt $x = x_0$ stetig sind. Deshalb ist auch $f_n(x)$ in diesem Punkt stetig, und zu dem gegebenen $\varepsilon > 0$ läßt sich ein $\delta > 0$ derart angeben, daß für $|x - x_0| < \delta$

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon \tag{14}$$

gilt. Wegen (12), (13) und (14) zieht $|x - x_0| < \delta$ die Ungleichung

$$|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon$$

nach sich, womit der Satz bewiesen ist.

Wenn die Funktionen $u_n(x)$ im ganzen Intervall $\mathscr{X} = [a, b]$ stetig sind, so ist, falls die Reihe (3) *gleichmäßig konvergiert, auch $f(x)$, die Summe von* (3), *im ganzen Intervall stetig.*

Daß die Forderung nach *gleichmäßiger* Konvergenz im obigen Satz nicht fortgelassen werden kann, zeigt z. B. die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

(vgl. Nr. 428, Beispiel 8), deren Summe für $x \neq 0$ gleich 1 und für $x = 0$ gleich 0 ist. Zwar stellt die gleichmäßige Konvergenz in dem Satz eine hinreichende Bedingung dar; man darf aber nicht annehmen, daß diese Bedingung für die Stetigkeit der Summe einer Reihe auch notwendig ist.[1]) Zum Beispiel haben die Reihen

$$\begin{gathered}\sum_{n=1}^{\infty} 2x[n^2 \,\mathrm{e}^{-n^2x^2} - (n-1)^2 \,\mathrm{e}^{-(n-1)^2x^2}], \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)\,x}{1+(n-1)^2\,x^2}\right]\end{gathered} \tag{15}$$

(vgl. Nr. 428, Beispiele 5 und 2) im Intervall $[0, 1]$ die stetige Summe 0, obwohl dort beide *nicht gleichmäßig* konvergieren.

Übrigens gibt es ganze Klassen von Fällen, bei denen sich die gleichmäßige Konvergenz als notwendig erweist. Dazu beweisen wir den folgenden, von U. Dini stammenden Satz:

Satz 2. *Die Glieder der Reihe* (3) *seien im ganzen Intervall $\mathscr{X} = [a, b]$ stetig und positiv. Besitzt die Reihe die ebenfalls im ganzen Intervall stetige Summe $f(x)$, dann konvergiert sie in diesem Intervall gleichmäßig.*

Beweis. Wir betrachten den Rest der Reihe (3):

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = f(x) - f_n(x).$$

Die Funktionen $\varphi_n(x)$ sind als Differenz zweier stetiger Funktionen ebenfalls stetig. Da die Glieder der Reihe positiv sein sollen, bilden die $\varphi_n(x)$ bei festem x eine fallende (nicht zunehmende) Folge

$$\varphi_1(x) \geqq \varphi_2(x) \geqq \cdots \geqq \varphi_n(x) \geqq \varphi_{n+1}(x) \geqq \cdots$$

Schließlich gilt wegen der Konvergenz der Reihe (3) im Intervall $\mathscr{X}$ für ein beliebiges, aber festes x

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0.$$

Dafür, daß die Reihe gleichmäßig konvergiert, ist es hinreichend, zu zeigen, daß zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ wenigstens ein Index n existiert, für den im ganzen Intervall die Ungleichung $\varphi_n(x) < \varepsilon$ gilt (natürlich ist dann für alle Indizes $> n$ diese Ungleichung erst recht erfüllt).

Der Beweis wird indirekt geführt. Wir setzen voraus, es existiere für ein *gewisses* $\varepsilon > 0$ kein derartiger Index. Dann können wir für jedes $n = 1, 2, 3, \ldots$ im Intervall $\mathscr{X}$

[1]) Vgl. Nr. 432.

einen Wert $x = x_n$ finden, für den $\varphi_n(x_n) \geqq \varepsilon$ ist. Auf die Folge $\{x_n\}$, deren Elemente alle in dem endlichen Intervall $\mathcal{X}$ liegen, wenden wir den Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS (Nr. 41) an und bilden eine Teilfolge $\{x_{nk}\}$, die gegen den Grenzwert x_0 konvergiert.

Wegen der Stetigkeit der $\varphi_m(x)$ gilt $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_m(x_{n_k}) = \varphi_m(x_0)$ für jedes m. Andererseits ist $n_k \geqq m$, also $\varphi_m(x_{n_k}) \geqq \varphi_{n_k}(x_{n_k}) \geqq \varepsilon$ für jedes m und hinreichend große k. Geht man zum Grenzwert für $k \to \infty$ über, so folgt

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_m(x_{n_k}) = \varphi_m(x_0) \geqq \varepsilon\,.$$

Diese Ungleichung, die für jedes m gilt, steht jedoch im Widerspruch zu der Gleichung

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_m(x_0) = 0\,.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

432. Bemerkung über die quasi-gleichmäßige Konvergenz. Wenn die Funktionenreihe (3) aus im Intervall $\mathcal{X} = [a, b]$ stetigen Funktionen besteht und in diesem Intervall gegen die Summe $f(x)$ konvergiert, dann ist die gleichmäßige Konvergenz der Reihe für die Stetigkeit dieser Summe hinreichend, aber im allgemeinen nicht notwendig. DINI u. a. stellten fest, daß schon eine gewisse „abgeschwächte" Gleichmäßigkeit der Konvergenz eine hinreichende Bedingung ist: Diese Gleichmäßigkeit besteht darin, daß für jede Zahl $\varepsilon > 0$ und jeden Index N' *mindestens ein* von x unabhängiger Index $n > N'$ derart existiert, daß die Ungleichung (6) für alle x aus $\mathcal{X}$ gleichzeitig erfüllt ist. Bei dem Beweis von Satz 1 benutzten wir tatsächlich nur einen Index n, für welchen die Ungleichung (13) für alle x aus $\mathcal{X}$ erfüllt war.

Jedoch ist sogar diese „abgeschwächte" Gleichmäßigkeit nicht notwendig für die Stetigkeit der Summe $f(x)$ von (3). Sie gilt z. B. nicht bei den Reihen (15), die gegen die stetige Summe $f(x) \equiv 0$ konvergieren.

C. ARZELÀ[1]) führte 1883 einen besonderen Typ von Konvergenzen ein (später quasi-gleichmäßige Konvergenz genannt), bei dem die Konvergenz einer Reihe mit Hilfe der Stetigkeit ihrer Summe genau charakterisiert werden kann.

Man sagt, die im Intervall $\mathcal{X} = [a, b]$ konvergente Reihe (3) konvergiere in $\mathcal{X}$ *quasi-gleichmäßig* gegen die Summe $f(x)$, wenn für jede Zahl $\varepsilon > 0$ und jeden Index N' das Intervall $\mathcal{X}$ mit endlich vielen offenen Intervallen

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_i, b_i), \ldots, (a_k, b_k)$$

überdeckt werden kann und diesen Intervallen k Indizes

$$n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots, n_k \; (> N')$$

zugeordnet werden können, so daß für alle in (a_i, b_i), $i = 1, 2, \ldots, k$, liegenden x gleichzeitig die Ungleichung

$$|f(x) - f_{n_i}(x)| = |\varphi n_i(x)| < \varepsilon$$

erfüllt ist.

Bei der oben erwähnten „abgeschwächten" gleichmäßigen Konvergenz wurde allen Werten x aus $\mathcal{X}$ ein und derselbe Index n zugeordnet, während hier alle x in Gruppen eingeteilt werden, denen verschiedene (endlich viele) Werte von n entsprechen.

Unter Benutzung dieses Begriffes stellte ARZELÀ den folgenden Satz auf:

Satz 3. *Die Funktionen $u_n(x)$ seien im Intervall $\mathcal{X} = [a, b]$ definiert und stetig, und die Reihe* (3) *konvergiere in diesem Intervall. Unter diesen Voraussetzungen ist die Summe $f(x)$ der Reihe in $\mathcal{X}$ genau dann stetig, wenn die Reihe in $\mathcal{X}$ quasi-gleichmäßig konvergiert.*

---

[1]) CESARE ARZELÀ, 1847—1912, italienischer Mathematiker.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Notwendigkeit. Dazu setzen wir die Stetigkeit der Funktion $f(x)$ und damit auch die aller Reste $\varphi_n(x)$ voraus. Wir wählen in $\mathfrak{X}$ einen beliebigen Punkt x'. Für gegebene Zahlen ε und N können wir dann stets einen Index $n' > N$ derart angeben, daß

$$|\varphi_{n'}(x')| < \varepsilon$$

ist. Wegen der Stetigkeit der Funktionen $\varphi_{n'}(x)$ ist auch in einer gewissen Umgebung $\sigma' = (x' - \delta', x' + \delta')$ des Punktes x' die Ungleichung

$$|\varphi_{n'}(x)| > \varepsilon$$

erfüllt. Aus allen diesen offenen Intervallen σ', die wir für alle möglichen x' aus $\mathfrak{X}$ konstruieren können, bilden wir ein gewisses *unendliches* System Σ, welches das Intervall $\mathfrak{X}$ überdeckt. Hieraus können wir nach dem Überdeckungssatz (Nr. 88) ein *endliches* Teilsystem

$$\Sigma^* = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k\}$$

von Intervallen aussondern, das $\mathfrak{X}$ ebenfalls überdeckt. Diese betrachten wir dann als jene Intervalle, von denen bei der Definition der quasi-gleichmäßigen Konvergenz die Rede war.

Wir zeigen nun, daß die Bedingung hinreichend ist. Dazu nehmen wir an, die Reihe (3) konvergiere quasi-gleichmäßig gegen ihre Summe $f(x)$. Zu vorgegebenen Zahlen ε und N' konstruieren wir Intervalle (a_i, b_i) und wählen Indizes n_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ mit den in der Definition genannten Eigenschaften. Wir nehmen ferner einen beliebigen Punkt $x_0 \in \mathfrak{X}$; er liege im Intervall (a_{i_0}, b_{i_0}). Wie beim Beweis von Satz 1 (vgl. (12) aus Nr. 431) können wir hier

$$|f(x) - f(x_0)| \leqq |f_{n_i}(x) - f_{n_i}(x_0)| + |\varphi_{n_i}(x)| + |\varphi_{n_i}(x_0)| \tag{12a}$$

schreiben. Hier ist offenbar $|\varphi_{n_i}(x_0)| < \varepsilon$; liegt x ebenfalls im Intervall (a_{i_0}, b_{i_0}), so gilt auch $|\varphi_{n_i}(x)| < \varepsilon$. Nun kann man eine Zahl $\delta > 0$ derart finden, daß (für $|x - x_0| < \delta$) nicht nur x in diesem Intervall liegt, sondern auch der erste Summand auf der rechten Seite von (12a) kleiner als ε wird. Also gilt

$$|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon,$$

womit die Stetigkeit von $f(x)$ im Punkt x_0 bewiesen ist.[1])

Aus diesem Satz ergibt sich leicht der Satz von Dini (Nr. 431). Wenn nämlich die Reihe (3) aus positiven stetigen Funktionen besteht und gegen eine ebenfalls stetige Summe konvergiert, dann ist, wie wir sahen, die Konvergenz notwendig quasi-gleichmäßig.

Da in unserem Fall die Reste $\varphi_n(x)$ mit wachsendem n kleiner werden, genügt es, eine Zahl N zu wählen, die größer als alle n_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ ist, so daß für alle $n > N$ die Ungleichung (6) für alle x aus $\mathfrak{X}$ gleichzeitig erfüllt ist. Die Konvergenz ist also gleichmäßig.

433. Gliedweiser Übergang zum Grenzwert. Wir bringen noch einen Satz, der eine Verallgemeinerung des Satzes 1 darstellt. In ihm ist $\mathfrak{X} = \{x\}$ eine beliebige unendliche Menge mit einem (im Endlichen oder Unendlichen liegenden) Häufungspunkt a (vgl. Nr. 52); dieser Punkt braucht nicht zu der Menge zu gehören.

Satz 4. *Jede der Funktionen $u_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, sei im Gebiet $\mathfrak{X}$ definiert und besitze, wenn x gegen a strebt, einen endlichen Grenzwert:*

$$\lim_{x \to a} u_n(x) = c_n. \tag{16}$$

Wenn die Reihe (3) im Gebiet $\mathfrak{X}$ gleichmäßig konvergiert, dann konvergiert auch die aus diesen Grenzwerten bestehende Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = C,$$

[1]) Wie der Leser bemerkt haben wird, wurde die Voraussetzung, daß alle Indizes n_i beliebig groß gewählt werden können, eigentlich nirgends benutzt.

und die Summe $f(x)$ der Reihe (3) *besitzt ebenfalls für $x \to a$ einen Grenzwert, und zwar*

$$\lim_{x \to a} f(x) = C. \tag{17}$$

Beweis. Auf Grund der Bedingung für die gleichmäßige Konvergenz (vgl. Nr. 429) existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl N derart, daß für $n > N$ und $m = 1, 2, 3, \ldots$ die Ungleichung (8) für alle $x \in \mathscr{X}$ erfüllt ist. Gehen wir unter Benutzung von (16) zum Grenzwert für $x \to a$ über, so erhalten wir

$$|c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots + c_{n+m}| \leqq \varepsilon;$$

die Reihe (C) erfüllt also die Bedingung für die Konvergenz (Nr. 376).

Bezeichnen wir mit C, C_n und γ_n wie gewöhnlich Summe, Partialsumme bzw. Rest von (C), so gilt $C = C_n + \gamma_n$. Subtrahieren wir die Glieder dieser Gleichung von den entsprechenden Gliedern der Gleichung (11), so erhalten wir leicht

$$|f(x) - C| \leqq |f_n(x) - C_n| + |\varphi_n(x)| + |\gamma_n|. \tag{18}$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (3) und der Konvergenz der Reihe (C) können wir für jedes $\varepsilon > 0$ ein so großes *festes* n angeben, daß für alle x aus $\mathscr{X}$

$$|\varphi_n(x)| < \varepsilon \quad \text{und auch} \quad |\gamma_n| < \varepsilon \tag{19}$$

ist. Da offenbar

$$\lim_{x \to a} f_n(x) = \lim_{x \to a} \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k = C_n$$

gilt, können wir, wenn wir uns auf den Fall beschränken, daß a im Endlichen liegt, ein solches $\delta > 0$ finden, daß

$$|f_n(x) - C_n| < \varepsilon \tag{20}$$

für $|x - a| < \delta$ ist. Für diese Werte von x gilt also auf Grund von (18), (19) und (20) die Ungleichung

$$|f(x) - C| < 3\varepsilon,$$

woraus (17) folgt.[1])

Die Gleichung (17) kann auch in der Form

$$\lim_{x \to a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\lim_{x \to a} u_n(x)\right\}$$

geschrieben werden (vgl. (16)); d. h., *ist eine Reihe gleichmäßig konvergent, dann ist der Grenzwert der Summe der Reihe gleich der Summe der Reihe aus den Grenzwerten der Glieder*, oder, mit anderen Worten, *in dieser Reihe ist der gliedweise Grenzübergang erlaubt.*

434. Gliedweise Integration von Reihen. Wir betrachten nun die Integration der Summe einer konvergenten Funktionenreihe.

Satz 5. *Sind die Funktionen $u_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, im Intervall $[a, b]$ stetig und konvergiert die aus ihnen gebildete Reihe* (3) *in diesem Intervall gleichmäßig, so ist das*

[1]) Wir erkennen, daß diese Überlegung schon beim Beweis von Satz 1 verwendet wurde.

Integral der Summe $f(x)$ von (3) in der folgenden Art darstellbar:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx$$
$$= \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \cdots + \int_a^b u_n(x)\,dx + \cdots. \tag{21}$$

Beweis. Wegen der Stetigkeit der Funktionen $u_n(x)$ und $f(x)$ (vgl. Nr. 431, Satz 1) existieren offenbar alle diese Integrale. Durch Integration der Identität

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \varphi_n(x)$$

über das Intervall $[a, b]$ erhalten wir

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \cdots + \int_a^b u_n(x)\,dx + \int_a^b \varphi_n(x)\,dx.$$

Die Summe der ersten n Glieder der Reihe (21) unterscheidet sich somit von dem Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ durch das Restglied $\int_a^b \varphi_n(x)\,dx$. Zum Beweis der Gleichung (21) müssen wir also zeigen, daß

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx = 0 \tag{22}$$

gilt. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (3) gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index N derart, daß für $n > N$

$$|\varphi_n(x)| < \varepsilon$$

gleichzeitig für alle x in dem betrachteten Intervall gilt. Es folgt dann für jene Werte von n

$$\left|\int_a^b \varphi_n(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |\varphi_n(x)|\,dx < (b-a)\,\varepsilon,$$

womit die Relation (22) bewiesen ist.

Die Gleichung (21) kann auch in der Form

$$\int_a^b \left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right\} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\int_a^b u_n(x)\,dx\right\}$$

geschrieben werden, so daß *im Fall der gleichmäßigen Konvergenz einer Reihe das Integral der Summe der Reihe gleich der Summe der Reihe aus den Integralen der Glieder ist,* d. h., *die gliedweise Integration einer Reihe ist erlaubt.*

Wie bei Satz 1 ist die Forderung der gleichmäßigen Konvergenz für die Richtigkeit der Beziehung (21) wesentlich, d. h., sie kann nicht einfach fortgelassen werden; es ist jedoch keine notwendige Bedingung. Die in Nr. 431 betrachteten Reihen (15) sind hierfür ein Beispiel. Beide konvergieren im Intervall $[0, 1]$ ungleichmäßig gegen die Funktion $f(x) = 0$. Integrieren wir die erste Reihe gliedweise, so erhalten wir als Summe der integrierten Reihe

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 2n^2x \cdot e^{-n^2x^2}\, dx = \lim_{n\to\infty} (1 - e^{-n^2}) = 1,$$

obwohl

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 0$$

ist; für die zweite Reihe finden wir analog

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+n^2)}{2n} = 0 = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

Ein interessantes Beispiel dafür, daß die gleichmäßige Konvergenz nicht notwendig ist, ist die Reihe

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \qquad (0 \leqq x < 1).$$

Hier gilt

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots,$$

so daß die Reihe gliedweise integriert werden kann, obwohl sie für $x = 1$ divergiert und in $0 \leqq x < 1$ nicht gleichmäßig konvergiert.

Wir beweisen nun eine Verallgemeinerung von Satz 5, in der auf die Forderung nach der Stetigkeit der zu betrachtenden Funktionen verzichtet wird.

Satz 6. *Sind die Funktionen $u_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, im Intervall $\mathcal{X} = [a, b]$ integrierbar*[1]) *und konvergiert die aus ihnen gebildete Reihe* (3) *gleichmäßig, dann ist die Summe $f(x)$ der Reihe ebenfalls integrierbar, und es gilt die Beziehung* (21).

Beweis. Wir zeigen zunächst die Integrierbarkeit der Funktion $f(x)$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe können wir für ein vorgegebenes ε ein hinreichend großes *festes* n derart wählen, daß für alle Punkte des Intervalls $[a, b]$

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{oder} \quad f_n(x) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f_n(x) + \frac{\varepsilon}{2} \tag{23}$$

gilt. Wir betrachten ein Teilintervall $[\alpha, \beta]$ des Intervalls $[a, b]$, und m bzw. M seien die untere bzw. die obere Grenze der Funktion $f_n(x)$ in $[\alpha, \beta]$, $\omega = M - m$ sei ihre Schwankung; die entsprechende Schwankung der Funktion $f(x)$ bezeichnen wir mit Ω. Wegen (23) gilt im Intervall $[\alpha, \beta]$

$$m - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < M + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{also} \quad \Omega \leqq \omega + \varepsilon.$$

Wir zerlegen nun das Intervall $[a, b]$ in der gewohnten Weise in Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$ und versehen die zum i-ten Intervall gehörigen Schwankungen mit dem Index i. Dann ist $\Omega_i \leqq \omega_i + \varepsilon$ und

$$\sum_i \Omega_i \cdot \Delta x_i \leqq \sum_i \omega_i \cdot \Delta x_i + \varepsilon(b - a).$$

[1]) Im Sinne von Nr. 295.

Da der zweite Summand auf der rechten Seite beliebig klein ist und der erste mit $\lambda = \max \Delta x_i$ gegen 0 strebt, gilt dies erst recht für den Ausdruck auf der linken Seite, woraus die Integrierbarkeit der Funktion $f(x)$ folgt (vgl. Nr. 297, Formel (8)).

Die Gültigkeit der Relation (21) wird genau so wie oben bewiesen.

Wir zeigen als Beispiel, daß eine aus integrierbaren Funktionen bestehende, aber nicht gleichmäßig konvergente Reihe eine nichtintegrierbare Summe besitzen kann. Wir setzen $u_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, gleich 1, wenn x durch einen echten Bruch $\frac{m}{n}$ (m, n teilerfremd) ausgedrückt werden kann, und gleich 0 in den übrigen Punkten des Intervalls $[0, 1]$. Diese Funktionen, die nur endlich viele Unstetigkeiten besitzen, sind in $[0, 1]$ integrierbar, aber die Summe der Reihe ist bekanntlich die nichtintegrierbare Dirichletsche Funktion (vgl. Nr. 300, Beispiel 2).

Gleichzeitig ist natürlich (wir zeigten dies an Beispielen) die gleichmäßige Konvergenz keine notwendige Bedingung für die Integrierbarkeit der Summe einer Reihe, die aus integrierbaren Funktionen besteht. Auch für diesen Fall stellte Arzelà eine Bedingung auf, die gleichzeitig notwendig und hinreichend ist („quasi-gleichmäßige Konvergenz im Großen"); vgl. Nr. 432.

435. Gliedweise Differentiation von Reihen. Mit Hilfe von Satz 5 aus Nr. 434 kann man leicht den folgenden Satz beweisen.

Satz 7. *Die Funktionen $u_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, seien im Intervall $\mathscr{X} = [a, b]$ definiert und mögen dort stetige Ableitungen $u_n'(x)$ besitzen. Wenn in diesem Intervall nicht nur die Reihe* (3) *konvergiert, sondern auch die aus den Ableitungen bestehende Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + \cdots + u_n'(x) + \cdots \tag{24}$$

gleichmäßig konvergiert, so besitzt auch die Summe $f(x)$ der Reihe (3) *in $\mathscr{X}$ eine Ableitung, und es gilt*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \tag{25}$$

Beweis. Wir bezeichnen mit $f^*(x)$ die Summe der Reihe (24); wegen Satz 1 ist dies eine stetige Funktion von x. Auf Grund von Satz 5 kann die Reihe (24) gliedweise von a bis zu einem beliebigen Wert x aus $\mathscr{X}$ integriert werden. Wir erhalten

$$\int_a^x f^*(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n'(t)\,dt.$$

Nun ist offenbar

$$\int_a^x u_n'(t)\,dt = u_n(x) - u_n(a),$$

also

$$\int_a^x f^*(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(a)] = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) = f(x) - f(a).$$

(Diese Umformung ist erlaubt, da die Konvergenz der Reihen $\sum u_n(x)$ und $\sum u_n(a)$ von vornherein bekannt ist; vgl. 4° aus Nr. 364). Da das Integral auf der linken Seite wegen der Stetigkeit des Integranden eine Ableitung besitzt, und zwar $f^*(x)$ (vgl. 12° aus Nr. 305), hat auch die Funktion $f(x)$, da sie sich von dem Integral nur durch eine additive Konstante unterscheidet, diese Ableitung.

Die Gleichung (25) können wir (wenn wir nach CAUCHY die Ableitung durch D kennzeichnen) auch in der Gestalt

$$D\left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} Du_n(x)$$

schreiben. *Damit ist* (unter den angegebenen Bedingungen) *die Ableitung der Summe einer Reihe gleich der Summe der Reihe aus den Ableitungen ihrer Glieder*, oder, mit anderen Worten, *die gliedweise Differentiation der Reihe ist erlaubt.*

Wir betrachten die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} [e^{-(n-1)^2x^2} - e^{-n^2x^2}]$$

und

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{2n}\ln(1+n^2x^2) - \frac{1}{2(n-1)}\ln\left(1+(n-1)^2x^2\right)\right].$$

Die erste Reihe reduziert sich auf 0 für $x = 0$ und auf 1 für die übrigen Punkte; die Summe der zweiten Reihe ist überall gleich 0. Wenn wir die Reihen gliedweise differenzieren, so erhalten wir die uns schon bekannten Reihen (15) aus Nr. 431, die im ganzen Intervall $[0, 1]$ gegen 0 konvergieren, obwohl beide nicht gleichmäßig konvergieren. Im ersten Fall konvergiert die Reihe aus den Ableitungen auch für $x = 0$, wo die ursprüngliche Reihe keine Ableitung besitzt, da sie dort unstetig ist. Im zweiten Fall führt dagegen die gliedweise Differentiation überall zu einem richtigen Resultat. Diese Beispiele zeigen, daß die Forderung nach der gleichmäßigen Konvergenz der differenzierten Reihe *wesentlich*, aber *nicht notwendig* ist.

Der Satz 7 kann von gewissen überflüssigen Voraussetzungen befreit werden; dadurch wird der Beweis etwas komplizierter.

Satz 8. *Die Funktionen $u_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, seien im Intervall $\mathcal{X} = [a, b]$ definiert und mögen dort endliche Ableitung $u_n'(x)$ besitzen. Wenn die Reihe* (3) *in wenigstens einem Punkt, z. B. für $x = a$, konvergiert und die Reihe* (24) *aus den Ableitungen im ganzen Intervall $\mathcal{X}$ gleichmäßig konvergiert, so ist die Reihe* (3) *im ganzen Intervall gleichmäßig konvergent, und ihre Summe $f(x)$ hat in $\mathcal{X}$ eine Ableitung, die sich durch* (25) *ausdrücken läßt.*

Beweis. Wir wählen im Intervall $[a, b]$ zwei voneinander verschiedene Punkte x_0 und x und bilden die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x) - u_n(x_0)}{x - x_0}. \tag{26}$$

Wir beweisen, daß für ein beliebiges, aber festes x_0 diese Reihe für alle $x \neq x_0$ konvergiert, und zwar *gleichmäßig* in x.

Auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (24) können wir zu einem beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ einen Index N derart finden, daß für $n > N$ und $m = 1, 2, 3, \ldots$ die Ungleichung

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} u_n'(x)\right| < \varepsilon \tag{27}$$

für alle Werte von x gleichzeitig erfüllt ist. Wir halten nun n und m fest und betrachten die Funktion

$$U(x) = \sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x);$$

ihre Ableitung

$$U'(x) = \sum_{k=n+1}^{n+m} u_k'(x)$$

ist wegen (27) dem absoluten Betrage nach stets kleiner als ε. Nun gilt offenbar

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{u_n(x) - u_n(x_0)}{x - x_0} = \frac{U(x) - U(x_0)}{x - x_0} = U'(c),$$

wobei c zwischen x_0 und x liegt (nach dem Mittelwertsatz aus Nr. 112). Damit folgt schließlich für alle $x \neq x_0$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{u_n(x) - u_n(x_0)}{x - x_0} \right| < \varepsilon;$$

da diese Ungleichung für alle $m = 1, 2, 3, \ldots$ gilt, sobald $n > N$ ist, haben wir damit die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (26) bewiesen. Hieraus ergeben sich schon alle für uns notwendigen Schlußfolgerungen.

Zunächst erhalten wir, indem wir $x_0 = a$ wählen, aus der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x) - u_n(a)}{x - a}$$

(mit ihr ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(a)]$ gleichmäßig konvergent; vgl. die Folgerung in Nr. 429) und der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)$ die *gleichmäßige* Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Bezeichnen wir deren Summe mit $f(x)$, so ist die Summe der Reihe (26) offenbar gleich

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

wobei x_0 ein beliebiger Wert von x im Intervall $[a, b]$ ist. Da in einer gleichmäßig konvergenten Reihe gliedweise zur Grenze übergegangen werden kann (nach Satz 4), erhalten wir, wenn x gegen x_0 strebt,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lim_{x \to x_0} \frac{u_n(x) - u_n(x_0)}{x - x_0} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x_0),$$

was zu beweisen war.

Bemerkung. Alle diese Sätze über den gliedweisen Grenzübergang, die gliedweise Integration und Differentiation stellen eine Analogie zwischen den Funktionenreihen und den Summen endlich vieler Funktionen her. Diese Analogie wird jedoch durch die bekannten Bedingungen für die gleichmäßige Konvergenz von Reihen eingeengt.

436. Betrachtung vom Standpunkt der Theorie der Folgen. Wir wollen nun die erhaltenen Resultate vom Standpunkt der Funktionenfolgen aus betrachten. Dies erlaubt, einen Zusammenhang zwischen den zu betrachtenden Fragen und dem Problem der Vertauschung zweier Grenzprozesse herzustellen, das in der Analysis eine wichtige Rolle spielt. Außerdem öffnet sich ein Weg zur Verallgemeinerung dieser Resultate.

Wir stellen wieder die Funktionenfolge (1) und die Funktionenreihe (3) einander gegenüber und beachten, daß sie durch die Beziehungen

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

oder

$$u_1(x) = f_1(x), \qquad u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x) \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

verknüpft sind. Die Grenzfunktion der Folge ist nichts anderes als die Summe der entsprechenden Reihe. Also müssen Folge und Reihe beide gleichzeitig konvergent sein.

I. Wir untersuchen zuerst die Frage nach dem *Grenzwert* der erwähnten Grenzfunktion. Die Menge $\mathscr{X} = \{x\}$, in der alle zu betrachtenden Funktionen definiert sind, besitze einen Häufungspunkt a. Dann kann der Satz 4 aus Nr. 433 wie folgt formuliert werden:

Satz 4*. *Besitzen die Funktionen $f_n(x)$ die Grenzwerte*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad (x \in \mathscr{X}) \tag{28}$$

und

$$\lim_{x\to a} f_n(x) = C_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{29}$$

wobei im ersten Fall der Grenzübergang bezüglich x (aus $\mathscr{X}$) gleichmäßig ist, dann existieren die beiden endlichen Grenzwerte

$$\lim_{x\to a} f(x) \quad \textit{und} \quad \lim_{n\to\infty} C_n$$

und sind einander gleich.

Die Gleichung

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to\infty} C_n$$

kann, wenn man (28) und (29) beachtet, folgendermaßen geschrieben werden:

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right).$$

Also liefert dieser Satz für die Funktion $f_n(x)$ der beiden Veränderlichen x und n eine Bedingung für die Existenz und die Gleichheit der beiden iterierten Grenzwerte und schließt unmittelbar an die Untersuchungen aus Nr. 168 an.

Wir überlassen es dem Leser, auch die beiden Sätze aus Nr. 431 für Folgen zu formulieren.

II. Nun sei $\mathscr{X}$ das Intervall $[a, b]$, und wir untersuchen die Frage nach dem *Integral* der Grenzfunktion. Analog zu Satz 6 aus Nr. 434 gilt

Satz 6*. *Wenn die Folge $\{f_n(x)\}$ aus Funktionen besteht, die im Intervall $[a, b]$ integrierbar sind, und gleichmäßig bezüglich x aus $[a, b]$ gegen die Grenzfunktion $f(x)$ konvergiert, so ist die Funktion $f(x)$ in $[a, b]$ integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Die letzte Gleichung kann auch in der Form

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \left\{\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right\} dx \tag{30}$$

geschrieben werden, so daß der Grenzwert des Integrals unmittelbar auf den Integranden bezogen werden kann. Man sagt in diesem Fall, daß *der Grenzübergang unter dem Integralzeichen erlaubt sei.*

In (30) lassen sich Grenzübergang und Integration vertauschen. Da sich auch das bestimmte Integral durch einen Grenzprozeß ergibt, ist die hier zu behandelnde Frage derjenigen aus Nr. 168 verwandt.

III. Schließlich gehen wir zu der Frage nach der *Ableitung* der Grenzfunktion über. Wir formulieren Satz 8 aus Nr. 435 nun wie folgt:

Satz 8*. *Die Funktionen $f_n(x)$ seien im Intervall $[a, b]$ differenzierbar, und die Folge der Ableitungen $f'_n(x)$ konvergiere in diesem Intervall gleichmäßig bezüglich x. Konvergiert die Funktionenfolge $\{f_n(x)\}$ in wenigstens einem Punkt des Intervalls $[a, b]$, so konvergiert diese Folge im ganzen Intervall, und zwar gleichmäßig, und die Grenzfunktion ist differenzierbar, wobei*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x).$$

gilt.

Schreibt man diese Gleichung in der übersichtlicheren Form

$$D\left\{\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right\} = \lim_{n\to\infty} \{D f_n(x)\}$$

so sieht man sofort, daß hier von der Vertauschung von *Grenzübergang* und *Differentiation* die Rede ist. Da auch die Ableitung ein Grenzwert ist, ist dieses Problem mit der Vertauschung zweier Grenzübergänge verknüpft.

Zum Schluß sei noch folgendes bemerkt. Vom Standpunkt der unendlichen Reihen aus kann der natürliche Parameter n nicht durch einen allgemeineren ersetzt werden. Anders verhält es sich bei einer Funktionenfolge. Hier kann die Funktion $f_n(x)$ durch eine Funktion $f(x, y)$ von zwei Veränderlichen ersetzt werden, wobei y in dem Gebiet $\mathcal{Y} = \{y\}$ variiert, das den (im Endlichen oder Unendlichen liegenden) Häufungspunkt y_0 besitzt. Der Grenzübergang $n \to \infty$ wird durch den Grenzübergang $y \to y_0$ ersetzt. Die Formulierung und der Beweis der Sätze, die sich auf jenen verallgemeinerten Fall beziehen, sind nicht schwierig. Auf einige dieser Verallgemeinerungen werden wir in Kapitel XIV zurückkommen.

437. Die Stetigkeit der Summe einer Potenzreihe. Das wichtigste Beispiel für die Anwendung der dargelegten Theorie ist die Untersuchung der Eigenschaften der Potenzreihen. Wir beschränken uns auf Potenzreihen der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \tag{31}$$

da, wie wir in Nr. 403 sahen, Reihen der allgemeineren Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots \tag{31*}$$

durch eine einfache Variablensubstitution unmittelbar auf die Form (31) gebracht werden können.

Die Reihe (31) habe den Konvergenzradius $R > 0$ (vgl. Nr. 379).

1°. *Für jede positive Zahl* $r < R$ *konvergiert die Reihe* (31) *im Intervall* $[-r, r]$ *gleichmäßig bezüglich* x.

Wegen $r < R$ konvergiert nämlich die Reihe (31) für $x = r$ absolut, d. h., es konvergiert die positive Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, r^n = |a_0| + |a_1|\, r + |a_2|\, r^2 + \cdots + |a_n|\, r^n + \cdots. \tag{32}$$

Für $|x| \leqq r$ sind die Glieder von (31) dem absoluten Betrag nach nicht größer als die entsprechenden Glieder dieser Reihe, die also die Rolle einer Majorante spielt. Nach dem Kriterium von WEIERSTRASS konvergiert die Reihe (31) für diese Werte von x gleichmäßig.

Obwohl die Zahl r beliebig nahe bei R liegen kann, läßt sich aus dem Bewiesenen *nicht* auf die gleichmäßige Konvergenz im Intervall $(-R, R)$ schließen. Am Beispiel der Reihe aus Nr. 428, Beispiel 6, sehen wir, daß sich die Endpunkte des Konvergenzintervalls als „Ungleichmäßigkeitspunkte" erweisen können. Wir erhalten also als Folgerung aus Satz 1:

2°. *Die Summe* $f(x)$ *der Potenzreihe* (31) *ist für alle Werte von* x *aus dem Intervall* $(-R, R)$ *eine stetige Funktion von* x.

Für jeden Wert $x = x_0$ aus dem Konvergenzintervall können wir eine solche Zahl $r < R$ finden, daß $|x_0| < r$ ist. Wenden wir den Satz 1 aus Nr. 431 auf das Intervall $[-r, r]$ an, so folgt auf Grund von 1° die Stetigkeit der Funktion $f(x)$ im Intervall $[-r, r]$ und damit insbesondere für $x = x_0$.

(Wir machen den Leser darauf aufmerksam, daß wir den Satz 1 nicht auf das Intervall $(-R, R]$ anwenden, da dort die gleichmäßige Konvergenz nicht garantiert werden kann.)

Die Stetigkeit der Summe einer Potenzreihe kann zum Beweis des *Identitätssatzes für Potenzreihen* verwendet werden (wir erinnern an den ähnlichen Satz für Polynome):

3°. *Wenn zwei Potenzreihen*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots$$

in der Umgebung von $x = 0$[1]) *ein und dieselbe Summe besitzen, dann sind diese Reihen identisch, d. h., die entsprechenden Koeffizienten stimmen überein:*

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad \ldots, \quad a_n = b_n,$$

[1]) Es braucht sich hierbei nicht nur um eine *zweiseitige* Umgebung $(-\delta, \delta)$ des Punktes $x = 0$ zu handeln, sondern kann auch eine *einseitige* Umgebung der Form $[0, \delta)$ oder $(-\delta, 0]$ sein.

Setzen wir nämlich in der Identität

$$a_0 + a_1 x + \cdots = b_0 + b_1 x + \cdots$$

$x = 0$, so erhalten wir sofort $a_0 = b_0$. Dadurch heben sich diese Glieder in der Identität fort; dividieren wir beide Seiten durch x (*hier müssen wir natürlich* $x \neq 0$ *voraussetzen*), so ergibt sich die neue Identität

$$a_1 + a_2 x + \cdots = b_1 + b_2 x + \cdots,$$

die auch in der Umgebung des Punktes $x = 0$ gilt, *mit Ausnahme dieses Punktes selbst.* Wir können hier also nicht $x = 0$ setzen, wir können jedoch x gegen 0 streben lassen. Nach Grenzübergang erhalten wir, wenn wir die Stetigkeit benutzen, $a_1 = b_1$. Wir können wieder diese Glieder entfernen und durch $x \neq 0$ dividieren; so finden wir für $x \to 0$ die Gleichung $a_2 = b_2$, usw.

Dieser einfache Satz, der die *Eindeutigkeit* der Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe beweist, wird oft angewendet. Mit ihm ergibt sich z. B. sofort, daß *die Entwicklung von geraden* (*ungeraden*) *Funktionen in Potenzreihen der Form* (31) *nur gerade* (*ungerade*) *Potenzen von x enthält.*

Wir wenden uns nun der spezielleren Frage nach dem Verhalten einer Reihe in der Nähe der Randpunkte $x = \pm R$ ihres Konvergenzintervalls zu (wobei wir von nun ab das Konvergenzintervall als endlich annehmen). Wir können uns auf den rechten Endpunkt $x = R$ beschränken; alles hierüber Gesagte kann auf den linken Endpunkt $x = -R$ übertragen werden, indem man einfach x durch $-x$ ersetzt.

Zunächst gilt offenbar der folgende Satz:

4°. *Wenn die Potenzreihe* (31) *im Endpunkt* $x = R$ *ihres Konvergenzintervalls divergiert, dann kann die Reihe im Intervall* $[0, R]$ *nicht gleichmäßig konvergieren.*

Denn wäre die Reihe gleichmäßig konvergent, so könnten wir in ihr nach Satz 3 gliedweise zum Grenzwert für $x \to R - 0$ übergehen, und die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = a_0 + a_1 R + a_2 R^2 + \cdots + a_n R^n + \cdots$$

aus den Grenzwerten würde entgegen der Voraussetzung konvergieren.

Ferner gilt der (in gewissem Sinne umgekehrte) Satz:

5°. *Wenn die Potenzreihe* (31) *auch für* $x = R$ (*nicht notwendig absolut*) *konvergiert, so konvergiert die Reihe im ganzen Intervall* $[0, R]$ *gleichmäßig.*

Wenn wir nämlich die Reihe (31) in der Gestalt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n \qquad (0 \leqq x \leqq R)$$

darstellen, dann folgt die Behauptung unmittelbar mit Hilfe des Abelschen Kriteriums, da die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ konvergiert und die Faktoren $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ die monotone und gleichmäßig beschränkte Folge

$$1 \geqq \frac{x}{R} \geqq \left(\frac{x}{R}\right)^2 \geqq \cdots \geqq \left(\frac{x}{R}\right)^n \geqq \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} \geqq \cdots > 0$$

bilden.

Dieser Satz erlaubt es, den Satz 1 aus Nr. 431 auf das ganze Intervall $[0, R]$ anzuwenden. Damit erhalten wir als Ergänzung zu Satz 2° über die Stetigkeit der Summe im offenen Intervall $(-R, R)$ den folgenden Satz (er stammt von ABEL)[1]:

6°. Satz von ABEL. *Konvergiert die Potenzreihe* (31) *für* $x = R$, *so ist ihre Summe auch für diesen Wert von* x (*von links*) *stetig, d. h., es ist*

$$\lim_{x\to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n .$$

Der Satz von ABEL wird oft angewendet.

Ist eine Funktion $f(x)$ nur im offenen Intervall $(-R, R)$ durch eine Potenzreihenentwicklung

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (-R < x < R)$$

gegeben, bleibt die Funktion aber stetig und die Reihe konvergent in einem der Endpunkte des Intervalls, etwa im Punkt $x = R$, dann gilt die Entwicklung für diese Funktion auch in diesem Endpunkt des Intervalls. Davon überzeugt man sich leicht, indem man in der angegebenen Gleichung den Grenzübergang $x \to R - 0$ vornimmt.

Zum Beispiel erhalten wir im Intervall $-1 < x < 1$ die Entwicklung

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots;$$

da wir aber wissen, daß die Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots$$

konvergiert, so können wir jetzt schließen, daß ihre Summe gleich ln 2 ist. Genauso rechtfertigt sich nun die Behauptung aus Nr. 407, daß die binomische Reihe

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}x^n + \cdots$$

für $x = \pm 1$ die Summe $(1 - x)^m$ besitzt, sobald die Reihe konvergiert.

438. Integration und Differentiation von Potenzreihen. Wir wenden nun die Sätze aus Nr. 434 und 435 auf Potenzreihen an. Wenn wir die in 1° und 5° bewiesenen Eigenschaften mit Satz 5 aus Nr. 434 vergleichen, so erhalten wir:

7°. *Die Potenzreihe* (31) *kann im Intervall* $[0, x]$ *mit* $|x| < R$ *stets gliedweise integriert werden:*

$$\int_0^x f(t)\,dt = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \cdots; \tag{33}$$

x kann hier auch mit einem der Endpunkte des Konvergenzintervalls zusammenfallen, wenn die Reihe (31) *in diesem Punkt konvergiert.*

Wir gehen nun zur Differentiation von Potenzreihen über.

---

[1]) Einen anderen Beweis dieses Satzes führten wir (unter der Voraussetzung $R = 1$) in Nr. 418 im Zusammenhang mit der Frage nach der Regularität der Abel-Poissonschen Methode bei der Summierung divergenter Reihen.

8°. *Die Potenzreihe* (31) *kann innerhalb ihres Konvergenzintervalls gliedweise differenziert werden:*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots. \tag{34}$$

Diese Behauptung gilt auch in den Endpunkten des Konvergenzintervalls, wenn dort die Reihe konvergiert.

Wir nehmen ein beliebiges x aus dem Innern des Konvergenzintervalls der Ausgangsreihe, so daß $|x| < R$ ist, und wählen eine Zahl r' zwischen $|x|$ und R, also $|x| < r' < R$. Wegen der Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n r'^n = a_0 + a_1 r' + a_2 r'^2 + \cdots + a_n r'^n + \cdots$$

ist das allgemeine Glied beschränkt:

$$|a_n|\, r'^n \leqq L \qquad (L = \text{const}; n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Wir erhalten damit für den absoluten Betrag des n-ten Gliedes von (34) die Abschätzung

$$n\,|a_n| \cdot |x|^{n-1} = n\,|a_n| \cdot r'^n \cdot \left|\frac{x}{r'}\right|^{n-1} \cdot \frac{1}{r'} \leqq \frac{L}{r'}\, n \left|\frac{x}{r'}\right|^{n-1}$$

Die Reihe

$$\frac{L}{r'} \sum_{n=1}^{\infty} n \left|\frac{x}{r'}\right|^{n-1} = \frac{L}{r'} \left\{1 + 2\left|\frac{x}{r'}\right| + \cdots + n \left|\frac{x}{r'}\right|^{n-1} + \cdots\right\}$$

konvergiert; davon überzeugt man sich leicht mit Hilfe des d'Alembertschen Kriteriums (Nr. 368), wenn man berücksichtigt, daß $\left|\frac{x}{r'}\right| < 1$ ist. Damit konvergiert die Reihe (34) absolut. Daraus folgt, daß *der Konvergenzradius R' dieser Reihe nicht kleiner als R ist.*

Nehmen wir nun ein *beliebiges* $r < R$, so ist gleichzeitig $r < R'$; wegen 1° konvergiert die Reihe (34) im Intervall $[-r, r]$ gleichmäßig, so daß (nach Satz 7 aus Nr. 435) in diesem Intervall die gliedweise Differentiation der Reihe (31) zulässig ist. Da $r < R$ beliebig gewählt wurde, ist die wesentliche Behauptung des Satzes bewiesen.

Falls die Reihe (34) etwa bei $x = R$ konvergiert, dann konvergiert sie im Intervall $[0, R]$ gleichmäßig (vgl. 5°). Damit ist also Satz 7 auf dieses ganze Intervall anwendbar; die gliedweise Differentiation ist somit für $x = R$ erlaubt.

Bemerkung. Wir überzeugten uns davon, daß $R' \geqq R$ ist. Andererseits sind die Glieder der Reihe (31), absolut genommen, nicht größer als die entsprechenden Glieder der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = a_1 x + 2a_2 x^2 + \cdots + n a_n x^n + \cdots,$$

die wie die Reihe (34) den Konvergenzradius R' besitzt. Folglich gilt $R \geqq R'$. Also ist schließlich $R' = R$, d. h., *die Konvergenzradien der Reihe* (31) *und der Reihe* (34), *die aus* (31) *durch gliedweise Differentiation folgt, stimmen überein.* Dies folgt übrigens auch leicht mit Hilfe des Satzes von CAUCHY-HADAMARD (Nr. 380), wenn wir bedenken, daß $\sqrt[n]{n}$ für $n \to \infty$ gegen 1 strebt (vgl. Nr. 32, Beispiel 10).

Da sich die Reihe (31) durch gliedweise Differentiation von (33) ergibt, besitzen auch diese Reihen also denselben Konvergenzradius.

Der Satz 8° eröffnet uns die Möglichkeit, eine Potenzreihe *mehrmals* zu differenzieren. Wir bezeichnen wie früher mit $f(x)$ die Funktion, die durch die Potenzreihe (31) in ihrem Konvergenzintervall dargestellt wird. Innerhalb dieses Intervalls gilt also

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

$$f'(x) = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 x + 3 \cdot a_3 x^2 + \cdots + n \cdot a_n x^{n-1} + \cdots,$$

$$f''(x) = 1 \cdot 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3 x + \cdots + (n-1) \cdot n \cdot a_n x^{n-2} + \cdots,$$

$$f'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 + \cdots + (n-2) \cdot (n-1) \cdot n \cdot a_n x^{n-3} + \cdots,$$

$$f^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n \cdot a_n + \cdots.$$

Wenn wir in diesen Gleichungen $x = 0$ setzen, so erhalten wir die Ausdrücke für die Koeffizienten einer Potenzreihe:

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = f'(0), \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}, \quad \ldots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

(vgl. (7) aus Nr. 403). Läge die Reihe in der allgemeineren Form (31*) vor, so müßten wir $x = x_0$ statt $x = 0$ setzen. Es gilt also:

9°. *Eine Funktion, die innerhalb ihres Konvergenzintervalls durch eine Potenzreihe darstellbar ist, besitzt innerhalb dieses Intervalls Ableitungen beliebig hoher Ordnung. Die Reihe selbst ist nichts anderes als die Taylorsche Reihe dieser Funktion.*

Dieser bemerkenswerte Satz beleuchtet das Problem der schon in Kapitel XI betrachteten Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe. Wir sehen: Wenn sich eine Funktion in eine Potenzreihe entwickeln läßt, so ist diese Entwicklung notwendig eine Taylorsche Reihe; wir beschränkten uns deshalb auch auf die Untersuchung, ob es möglich ist, eine Funktion durch ihre Taylorsche Reihe darstellen zu können. Eine Funktion, die sich in eine Taylorsche Reihe nach Potenzen von $x - x_0$ entwickeln läßt, heißt *im Punkt x_0 analytisch.*

Die dargelegte Theorie läßt sich auch auf mehrfache Potenzreihen übertragen. Wir beschäftigen uns aber nur mit Potenzreihen von zwei Veränderlichen:

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} a_{ik}(x - x_0)^i (y - y_0)^k.$$

Innerhalb des Konvergenzbereichs (Nr. 396) kann diese Reihe ebenfalls beliebig oft gliedweise nach jeder Veränderlichen differenziert werden. Damit ergeben sich wie oben für die Koeffizienten leicht die Ausdrücke

$$a_{00} = f(x_0, y_0), \quad a_{10} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad a_{01} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad a_{20} = \frac{1}{2!}\,\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2},$$

und allgemein

$$a_{ik} = \frac{1}{i!\,k!}\,\frac{\partial^{i+k} f(x_0, y_0)}{\partial x^i\,\partial y^k}.$$

Damit hat die Entwicklung von $f(x)$, wenn sie überhaupt möglich ist, notwendig die Form

$$f(x, y) = \sum_{i,k=0}^{\infty} \frac{1}{i!\,k!} \frac{\partial^{i+k} f(x_0, y_0)}{\partial x^i\, \partial y^k} (x - x_0)^i\, (y - y_0)^k.$$

Auch diese Reihe heißt *Taylorsche Reihe*; sie knüpft natürlich an die Taylorsche Formel an, von der wir in Nr. 195 sprachen. Existiert für eine Funktion $f(x, y)$ eine solche Entwicklung, so heißt die Funktion *im Punkt* (x_0, y_0) *analytisch.*

§ 3. Anwendungen

439. Beispiele für die Stetigkeit der Summe einer Reihe und für den gliedweisen Übergang zum Grenzwert.

1. Man untersuche die Stetigkeit der Summe der Reihe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^p + x^2 n^q}$$

unter der Voraussetzung, daß $p, q \geqq 0$ und einer dieser Exponenten > 1 ist (womit die Konvergenz der Reihe für alle Werte von x gewährleistet ist). Offenbar kann man sich auf nichtnegative x beschränken.

Im Fall $p > 1$ ist nämlich für $x \leqq x_0$ (x_0 ist eine *beliebige* positive Zahl) die konvergente Reihe

$$x_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

eine Majorante der gegebenen Reihe; folglich konvergiert die Reihe nach dem Weierstraßschen Kriterium gleichmäßig, und ihre Summe ist im Intervall $[0, x_0]$ stetig. Da x_0 beliebig gewählt war, bezieht sich dies auf das ganze Intervall $[0, \infty)$.

Ist $p \leqq 1$, aber $q > 1$, dann kann man, wenn man für $x > 0$ die Reihe in der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{x}}{n^q + \left(\frac{1}{x}\right)^2 n^p}$$

schreibt, wie im vorigen Fall auf die Stetigkeit der Summe für alle $x > 0$ schließen. Man braucht also nur noch für $x = 0$ die Frage zu lösen.

Mit den Methoden der Differentialrechnung findet man, daß das n-te Glied der Reihe seinen größten Wert bei $x = n^{(p-q)/2}$ erreicht und daß dieser Wert gleich

$$\frac{1}{2} \frac{1}{n^{(p+q)/2}}$$

ist. Für $p + q > 2$ ist die konvergente Reihe

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(p+q)/2}}$$

eine Majorante der gegebenen Reihe, womit die Stetigkeit der Funktion $f(x)$ für alle x, *einschließlich des Punktes* $x = 0$, gewährleistet ist.

Es bleibt noch die Frage nach der Stetigkeit der Funktion $f(x)$ bei $x = 0$ offen, falls $p < 1$, $q > 1$, aber $p + q \leqq 2$ ist. In Nr. 491, Beispiel 13, wird gezeigt werden, daß die Funktion $f(x)$ unter diesen Bedingungen im Punkt $x = 0$ unstetig ist.

2. Wir betrachten die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

(vgl. Nr. 385, Beispiel 3), wobei $\{a_n\}$ eine gewisse Folge positiver Zahlen ist. Wir setzen voraus, daß die Reihe nicht „überall divergiert", so daß für sie eine endliche Konvergenzabszisse $\lambda < +\infty$ existiert. Für jede Zahl $x_0 > \lambda$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}.$$

Hieraus folgt, daß die betrachtete Reihe für alle $x \geqq x_0$ gleichmäßig konvergiert (Analogon zu Satz 1° aus Nr. 437). Diese Behauptung folgt aus dem Abelschen Kriterium, wenn wir die Reihe in der Gestalt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} \frac{1}{n^{x-x_0}}$$

schreiben und beachten, daß der Faktor $\frac{1}{n^{x-x_0}}$, der höchstens gleich 1 ist, mit wachsendem n abnimmt. Nach Satz 1 aus Nr. 431 ist die Summe der Reihe für alle $x > x_0$ und folglich (da x_0 beliebig ist) für alle $x > \lambda$ stetig (Analogon zu Satz 2° aus Nr. 437).

Ist λ endlich und die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\lambda}}$$

konvergent, so können wir uns auf die gleiche Art von der gleichmäßigen Konvergenz der betrachteten Reihe für $x \geqq \lambda$ (5° aus Nr. 437) und von der rechtsseitigen Stetigkeit ihrer Summe im Punkt $x = \lambda$ (6° aus Nr. 437)überzeugen.

3. In Beispiel 6 aus Nr. 390 überzeugten wir uns davon, daß die durch die Gleichung

$$E(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

definierte Funktion der Beziehung

$$E(x + y) = E(x)\, E(y) \tag{1}$$

genügt. Mit Satz 2° aus Nr. 437 sehen wir jetzt, daß die Funktion $E(x)$ im ganzen Intervall $(-\infty, +\infty)$ stetig ist. Auf Grund des in Nr. 75, 1, Bewiesenen hat eine stetige Lösung der Gleichung (1) die Form $E(x) = a^x$. Schließlich läßt sich die Basis a offenbar aus der Beziehung

$$a = E(1) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$$

bestimmen. Somit gilt $E(x) = \mathrm{e}^x$ (vgl. (11) aus Nr. 404).

4. Wir untersuchen noch einmal die binomische Reihe

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \cdots + \frac{m(m-1) \cdots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdots n} x^n + \cdots$$

(vgl. (22) aus Nr. 407), die im Fall $|x| < 1$ für jedes m absolut konvergiert. Wir wollen ihre Summe bestimmen. Dazu bezeichnen wir diese Summe als Funktion von m mit $\varphi(m)$ (bei festem x, $|x| < 1$).

Aus der Algebra wissen wir, daß für jede *natürliche* Zahl m (die Reihe bricht dann mit dem $(m+1)$-ten Glied ab) die Beziehung $\varphi(m) = (1 + x)^m$ gilt; wir beweisen nun, daß dies auch für alle m der Fall ist.

Wir wählen ein beliebiges k und betrachten die Reihe

$$1 + kx + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{1 \cdot 2 \cdots n} x^n + \cdots$$

mit der Summe $\varphi(k)$. Aus den beiden Reihen bilden wir die Cauchysche Produktreihe

$$\begin{aligned}\varphi(m) \cdot \varphi(k) &= 1 + (m+k)x + \left[\frac{m(m-1)}{2} + mk + \frac{k(k-1)}{2}\right] x^2 + \cdots \\ &= 1 + (m+k)x + \frac{(m+k)(m+k-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \cdots .\end{aligned}$$

Der Koeffizient von $\frac{x^n}{n!}$ ist offenbar ein Polynom n-ten Grades bezüglich m und k. Sind m und k beliebige *natürliche* Zahlen $> n$, dann folgt aus elementaren Überlegungen, daß dieser Koeffizient die Form

$$(m+k)(m+k-1)\cdots(m+k-m+1)$$

hat. Folglich hat er (wie dies aus dem Satz über die Identität von Polynomen zweier Veränderlicher folgt) auch für *alle* m und k diese Form. Die gesuchte Funktion $\varphi(m)$ erfüllt also die Funktionalgleichung

$$\varphi(m) \cdot \varphi(k) = \varphi(m+k).$$

Wir beweisen nun die *Stetigkeit* der Funktion $\varphi(m)$. Sie folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz der binomischen Reihe für alle Werte von m, die dem Betrage nach nicht größer als eine beliebige Zahl $m_0 > 0$ sind; für diese Werte wird nämlich die binomische Reihe durch die konvergente Reihe

$$1 + m_0|x| + \frac{m_0(m_0+1)}{1 \cdot 2}|x|^2 + \frac{m_0(m_0+1)(m_0+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}|x|^3 + \cdots$$

majorisiert. Für dieses m gilt aber, wie wir wissen (vgl. 1 aus Nr. 75), notwendig $\varphi(m) = a^m$. Wegen $a = \varphi(1) = 1 + x$ folgt schließlich $\varphi(m) = (1+x)^m$.

5. Die schon bekannte logarithmische Reihe (vgl. (17) aus Nr. 405) können wir aus der binomischen Reihe (vgl. (22) aus Nr. 407) mit Hilfe der Beziehung

$$\ln a = \lim_{k \to \infty} k\left(\sqrt[k]{a} - 1\right) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

(vgl. Nr. 77, Beispiel 5b) erhalten.

Wir setzen $a = 1 + x$ (wobei $|x| < 1$ sei) und entwickeln $(1+x)^{1/k}$ in eine Potenzreihe:

$$\begin{aligned}(1+x)^{1/k} = 1 + \frac{1}{k}x + \frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)}{1 \cdot 2} x^2 + \cdots \\ + \frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{k}-n+1\right)}{1 \cdot 2 \cdots n} x^n + \cdots .\end{aligned}$$

Dann erhalten wir $\ln(1+x)$ als Grenzwert des Ausdrucks

$$\begin{aligned}k[(1+x)^{1/k} - 1] = x - \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{1}{k}\right) + \frac{x^3}{3}\left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 - \frac{1}{2k}\right) - \cdots \\ + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 - \frac{1}{2k}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{(n-1)k}\right) + \cdots \quad (2)\end{aligned}$$

für $k \to \infty$. Die Glieder dieser Reihe enthalten (bei festem x) den natürlichen Parameter k als Veränderliche. In seinem ganzen Wertebereich konvergiert die Reihe (2) bezüglich k gleichmäßig; dies folgt (nach dem Weierstraßschen Kriterium) daraus, daß in der Majorante

$$|x| + \frac{|x|^2}{2} + \frac{|x|^3}{3} + \cdots + \frac{|x|^n}{n} + \cdots \qquad (x = \text{const}; |x| < 1)$$

k nicht enthalten ist. Damit können wir auf Grund von Satz 4 aus Nr. 433[1]) in der Reihe (2) gliedweise zur Grenze für $k \to \infty$ übergehen, was zur logarithmischen Reihe führt.

6. Ein in diesem Zusammenhang sehr interessantes Beispiel ist die Herleitung der in Nr. 404, Formel (11), angegebenen Exponentialreihe aus der Beziehung

$$e^x = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Wir erhalten, wenn wir das Binom nach der Newtonschen Formel entwickeln,

$$\left(1 + \frac{x}{k}\right)^k = 1 + k \cdot \frac{x}{k} + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2}\left(\frac{x}{k}\right)^2 + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{1 \cdot 2 \cdots n}\left(\frac{x}{k}\right)^n + \cdots$$

$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}\left(1 - \frac{1}{k}\right) + \cdots + \frac{x^n}{n!}\left(1 - \frac{1}{k}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{k}\right) + \cdots. \quad (3)$$

Nun sind natürlich für jedes k nur endlich viele (nämlich $k + 1$) Glieder vorhanden; wir können aber von einer „unendlichen Reihe" sprechen, wenn wir die restlichen Glieder als 0 annehmen. Diese „Reihe" konvergiert gleichmäßig für alle k, da sie offenbar von der Reihe

$$1 + \frac{|x|}{1!} + \frac{|x|^2}{2!} + \cdots + \frac{|x|^n}{n!} + \cdots \qquad (x = \text{const})$$

majorisiert wird. Wir können somit nach Satz 4 aus Nr. 433 in der „Reihe" (3) *gliedweise* zum Grenzwert für $k \to \infty$ übergehen. Das $(n + 1)$-te Glied ist gleich 0, solange $k < n$ ist. Für $k \geqq n$ hat es die Form

$$\frac{x^n}{n!}\left(1 - \frac{1}{k}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{k}\right),$$

und sein Grenzwert für $k \to \infty$ ist $\frac{x^n}{n!}$. Wir erhalten somit auf diesem Wege wieder die Entwicklung der Exponentialfunktion e^x.

7. Ausgehend von der Moivreschen Formel leiteten wir in Nr. 408 die Formel

$$\sin mz = m \cos^{m-1} z \sin z - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{m-3} z \sin^3 z + \cdots$$

her. Wir zeigen jetzt, wie sich hieraus die Entwicklung der Funktion $\sin x$ in eine Potenzreihe ergibt. Dazu setzen wir $z = \frac{x}{m}$ und ziehen $\cos^m \frac{x}{m}$ vor die Klammer; die Formel lautet damit

$$\sin x = \cos^m \frac{x}{m}\left[m \tan \frac{x}{m} - \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\frac{\left(m \tan \frac{x}{m}\right)^3}{3!} + \cdots\right].$$

---

[1]) Wir erinnern daran, daß der Wertebereich $\mathcal{X}$ der Veränderlichen x, von dem im Satz 4 aus Nr. 433 die Rede war, passend gewählt werden konnte; insbesondere konnte er die Folge der natürlichen Zahlen sein (damit $a = +\infty$ ist).

Nun gehen wir zunächst formal bei festem x zum Grenzwert für $m \to \infty$ über. Wegen $\cos^m \frac{x}{m} \to 1$ (vgl. etwa Nr. 79, Beispiel 4, für $\lambda = 0$) und $m \tan \frac{x}{m} \to x$ ergibt sich als Grenzwert tatsächlich die geforderte Entwicklung

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

(vgl. (12) aus Nr. 404).

Es bleibt noch zu beweisen, daß der Grenzübergang in der Klammer erlaubt ist, da zwar die Anzahl der Glieder für jedes m endlich ist, aber mit m gegen unendlich geht (vgl. Beispiel 6).

Wir wählen einen Wert x zwischen $-\frac{1}{2} m_0 \pi$ und $\frac{1}{2} m_0 \pi$; ferner sei $m > m_0$. Es läßt sich nun leicht zeigen, daß der absolute Betrag von $m \tan \frac{x}{m}$ mit wachsendem m abnimmt und folglich beschränkt ist:

$$\left| m \tan \frac{x}{m} \right| \leqq L = m_0 \tan \frac{|x|}{m_0} \qquad (m > m_0).$$

Damit wird der Ausdruck in der eckigen Klammer durch die konvergente Reihe

$$L + \frac{L^3}{3!} + \cdots$$

majorisiert. Die Überlegungen werden dann wie in Beispiel 6 weitergeführt.

Analog kann man die Entwicklung von $\cos x$ in eine Potenzreihe finden.

Bemerkung. Die Beispiele 5 bis 7 wurden unter Verbesserung der Beweise für die Entwicklungen der elementaren Funktionen dem Buch von L. Euler, „Introductio in analysin infinitorum" (1748) entnommen.

8. Man beweise die folgenden Beziehungen:

(a) $$\lim_{x \to 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{x^n}{1 + x^n} = \frac{1}{2} \ln 2,$$

(b) $$\lim_{x \to 1-0} (1 - x) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{1 - x^{2n}} = \frac{1}{2} \ln 2.$$

(a) Es sei $0 < x < 1$; da die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

konvergiert und der nach oben durch 1 beschränkte Faktor $\frac{x^n}{1 + x^n}$ mit wachsendem n monoton abnimmt, konvergiert auf Grund des Abelschen Kriteriums die Reihe im Intervall (0, 1) gleichmäßig. Gehen wir in ihr gliedweise (Satz 4 aus Nr. 433) zum Grenzwert für $x \to 1 - 0$ über, so erhalten wir das geforderte Resultat.

(b) Es sei auch hier $0 < x < 1$; nun gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(1 - x) x^n}{1 - x^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{1 + x + x^2 + \cdots + x^{2n-1}}.$$

Hier konvergiert zwar die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ nicht, aber ihre Partialsummen sind beschränkt. Dafür nehmen jedoch die Faktoren $\frac{x^n}{1 + x + x^2 + \cdots + x^{2n-1}}$ nicht nur monoton ab, sondern streben auch für alle x aus $(0, 1)$ gleichmäßig gegen 0, denn es ist

$$\frac{x^n}{1 + x + \cdots + x^{2n-1}} < \frac{x^n}{1 + x + \cdots + x^{n-1}} < \frac{x^n}{nx^n} = \frac{1}{n}.$$

Damit konvergiert auf Grund des Dirichletschen Kriteriums die Reihe gleichmäßig, so daß der gliedweise Grenzübergang für $x \to 1 - 0$ gestattet ist, usw.

9. Sprechen wir von Potenzreihen, so verstehen wir darunter stets Reihen, deren Glieder nach wachsenden Exponenten geordnet sind. Dies hat innerhalb des Konvergenzintervalls keine Bedeutung, da dort die Reihe absolut konvergiert, doch bleibt z. B. der Satz von Abel ohne diese Einschränkung nicht gültig.

Man verifiziere dies an der Reihe

$$x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^8}{8} + \cdots,$$

die sich durch Umordnen der Glieder der logarithmischen Reihe ergibt (vgl. Nr. 388, Beispiel 1).

10. Wir beweisen nun den Satz über die Multiplikation von Reihen (Nr. 392) mit Hilfe des Satzes von Abel (Nr. 437). Dazu betrachten wir die beiden konvergenten Reihen

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{A}$$

und

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{B}$$

und setzen voraus, daß die Cauchysche Produktreihe

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \tag{C}$$

wobei $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1$ ist, ebenfalls konvergiert. Man beweise die Relation $AB = C$.

Aus der Konvergenz von (A) können wir wegen des Hilfssatzes aus Nr. 379 sofort schließen, daß die Reihe

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \tag{A*}$$

für $|x| < 1$ absolut konvergiert, so daß der Konvergenzradius R dieser Reihe sicher $\geqq 1$ ist. Damit gilt in jedem Fall die Beziehung

$$\lim_{x \to 1-0} A(x) = A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

und zwar für $R = 1$ (nach dem Satz von Abel; Nr. 437) und für $R > 1$ (nach Satz 2° aus Nr. 437). Betrachten wir analog (für $|x| < 1$) die Reihen

$$B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n, \tag{B*}$$

$$C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n, \tag{C*}$$

so folgt für sie dasselbe wie für die Reihe (A*). Wenden wir nun auf die absolut konvergenten Reihen (B*) und (C*) den Satz von Cauchy (Nr. 389) an, so erhalten wir

$$A(x)\, B(x) = C(x).$$

Wir brauchen hier nur noch zum Grenzwert für $x \to 1 - 0$ überzugehen, um das geforderte Resultat zu erhalten:

$$AB = C.$$

440. Beispiele für die gliedweise Integration von Reihen.

1. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ können wir folgendermaßen summieren:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} &= \lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1} \\
&= \lim_{x\to 1-0} \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n}\, dx = \lim_{x\to 1-0} \int_0^x \frac{dx}{1+x^3} \\
&= \lim_{x\to 1-0} \left[\frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right] \\
&= \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Wir verwendeten zunächst den Satz von Abel (6° aus Nr. 437) und dann den Satz über die gliedweise Integration einer Reihe (7° aus Nr. 438).

2. Die gliedweise Integration der Reihen

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \cdots,$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^{n-1} x^{2(n-1)} + \cdots$$

im Intervall $[0, x]$ (mit $|x| < 1$) liefert sofort die Entwicklungen

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots,$$

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots,$$

die wir in Nr. 405, (17), und Nr. 404, (15), auf komplizierterem Wege erhielten. Die Gültigkeit der ersten Entwicklung für $x = 1$ und der zweiten für $x = \pm 1$ ergibt sich zusätzlich mit Hilfe des Satzes von Abel (Nr. 437, 6°).

3. Wie wir wissen, ist die Ableitung der Funktion $\arcsin x$ gleich

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Für sie gilt die Entwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \qquad (-1 < x < 1)$$

(vgl. (24) aus Nr. 407). Wir erhalten durch gliedweise Integration dieser Reihe die für uns neue Entwicklung

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (-1 < x < 1).$$

Da diese Reihe für $x = \pm 1$ konvergiert (vgl. Nr. 370, Beispiel 5(a)),[1]) gilt die Entwicklung nach dem Satz von Abel auch in diesen Punkten. Für $x = 1$ finden wir insbesondere eine Reihe für die Zahl π:

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1}.$$

Analog ergibt sich, wenn wir die Ableitung

$$\left[\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right]' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

in eine Reihe entwickeln und diese gliedweise integrieren, die Entwicklung

$$\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (-1 \leqq x \leqq 1),$$

d. h. die Funktion Arsinh x, die Umkehrfunktion von sinh x (vgl. Nr. 49, Beispiel 4, sowie die Bemerkung aus Nr. 339).

4. Mit Hilfe der gliedweisen Integration von Reihen ergeben sich die Potenzreihenentwicklungen gewisser Integrale, die sich nicht in geschlossener Form durch elementare Funktionen ausdrücken lassen (vgl. Nr. 272). So erhalten wir, wenn wir von der bekannten Entwicklung

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots$$

(vgl. (11) aus Nr. 404), ausgehen,

$$\int_0^x e^{-t^2}\, dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!}\frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots.$$

Wir stellen uns die Aufgabe, mit einer Genauigkeit von 0,0001 das Integral

$$W = \int_0^1 e^{-x^2}\, dx$$

---

[1]) Übrigens kann jetzt die Konvergenz der Reihe

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1}$$

einfacher bewiesen werden. Für jedes m gilt nämlich

$$x + \sum_{n=1}^{m} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} < \arcsin x < \frac{\pi}{2},$$

und durch Übergang zum Grenzwert für $x \to 1$ erhalten wir

$$1 + \sum_{n=1}^{m} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1} \leqq \frac{\pi}{2},$$

woraus (vgl. Nr. 365) das Gewünschte folgt.

zu berechnen. Dadurch, daß wir für die obere Grenze des Integrals den Wert 1 gewählt haben, erhalten wir für W eine alternierende Zahlenreihe, deren Glieder dem absoluten Betrag nach abnehmen:

$$W = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} - \frac{1}{75600} + \cdots.$$

Da das achte Glied schon beträchtlich unter der gegebenen Genauigkeitsgrenze liegt, beschränken wir uns auf die ersten sieben Glieder. Die entsprechende (negative) Korrektur Δ läßt sich leicht abschätzen:

$$|\Delta| < \frac{1}{75600} < \frac{1{,}5}{10^5}.$$

Die Berechnung der angegebenen Glieder auf fünf Stellen nach dem Komma ergibt

$$\begin{array}{rlrl}
1 + \frac{1}{10} = & 1{,}10000 & \frac{1}{3} = & 0{,}33333\ (+) \\[1ex]
\frac{1}{216} = & 0{,}00463\ (-) & \frac{1}{42} = & 0{,}02381\ (-) \\[1ex]
\frac{1}{9360} = & 0{,}00011\ (-) & \frac{1}{1320} = & 0{,}00076\ (-) \\
\hline
& 1{,}10474 & & 0{,}35790
\end{array}$$

$$1{,}10474 - 0{,}35790 = 0{,}74684.$$

Berücksichtigen wir alle Korrekturen, so ergibt sich

$$0{,}74681 < W < 0{,}74685, \qquad W = 0{,}7468\ldots;$$

alle angegebenen Dezimalstellen sind genau (vgl. Nr. 328, Beispiel 5).

5. Analog ist

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = x - \frac{x^3}{3!\,3} + \frac{x^5}{5!\,5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!\,(2n-1)} + \cdots$$

wegen

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} + \cdots$$

(vgl. (12) aus Nr. 404). Wir wollen nun mit Hilfe dieser Entwicklung das Integral

$$\mu = \int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx$$

mit einer Genauigkeit von 0,001 berechnen.

Es ergibt sich, wenn wir $x = \pi$ setzen,

$$I_2 = \pi - \frac{1}{18}\pi^3 + \frac{1}{600}\pi^5 - \frac{1}{35280}\pi^7 + \frac{1}{3265920}\pi^9 - \frac{1}{439084800}\pi^{11} + \cdots,$$

d. h. wieder eine alternierende Reihe, deren Glieder dem absoluten Betrag nach abnehmen.

Da das sechste Glied kleiner als 0,0007 ist, beschränken wir uns auf fünf Glieder. Die Rechnung liefert:

$$\pi = 3{,}1416\ (-)$$

$$\frac{1}{600}\pi^5 = 0{,}5100\ (+) \qquad \frac{1}{18}\pi^3 = 1{,}7226\ (-)$$

$$\frac{1}{3265920}\pi^9 = 0{,}0091\ (+) \qquad \frac{1}{35280}\pi^7 = 0{,}0856\ (+)$$

$$3{,}6607 \qquad\qquad 1{,}8082$$

$$3{,}6607 - 1{,}8082 = 1{,}8525.$$

Berücksichtigen wir die Korrekturen, so folgt schließlich

$$1{,}8517 < \mu < 1{,}8527, \qquad \mu = 1{,}852 \pm 0{,}001.$$

6. Man bestimme die Reihendarstellungen der Integrale

$$\text{(a)}\ \int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\,dx, \qquad \text{(b)}\ \int_0^1 x^{-x}\,dx.$$

(a) Mit der Entwicklung des Arkustangens ergibt sich

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\,dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{7}x^6 + \cdots\right)dx$$

$$= 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots.$$

Da die Reihe unter dem Integralzeichen für $x = 1$ konvergiert, ist die gliedweise Integration erlaubt (7° aus Nr. 438).

Wir erwähnten schon (vgl. Nr. 328, Beispiel 6), daß der Wert

$$G = 0{,}915965\ldots$$

dieses Integrals unter dem Namen *Catalansche Konstante* bekannt ist. Wir sehen nun, daß

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}$$

gilt.

(b) Wir schreiben den Integranden in der Form $e^{-x\ln x}$ und entwickeln ihn in die Exponentialreihe

$$x^{-x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n \ln^n x}{n!},^{1)}$$

die für $0 < x \leqq 1$ gleichmäßig konvergiert, da das Maximum der Funktion $|x \ln x|$ gleich $\frac{1}{e}$ ist (wie sich mit Hilfe der Differentialrechnung leicht beweisen läßt). Die Reihe besitzt also die Majorante

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{e}\right)^n.$$

[1]) Für $x = 0$ ersetzen wir die Glieder der mit $n = 1$ beginnenden Reihe durch ihre Grenzwerte, d. h. durch 0.

Somit ist die gliedweise Integration erlaubt. Wegen

$$\int_0^1 x^n \ln^n x \, dx = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$$

(vgl. Nr. 312, Beispiel 4) folgt schließlich

$$\int_0^1 x^{-x} \, dx = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^m}.$$

7. In Nr. 414 hatten wir die Entwicklung

$$\arctan x = \frac{x}{1+x^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2p)!!}{(2p+1)!!} \left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)^p \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

(vgl. dort Formel (8)) hergeleitet. Setzen wir nun $x = \dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ und verwenden wir die Relation (Nr. 50)

$$\arctan \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin y,$$

so finden wir

$$\frac{\arcsin y}{\sqrt{1-y^2}} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2p)!!}{(2p+1)!!} y^{2p+1} \qquad \left(0 \leqq y \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Wir integrieren diese Gleichung von 0 bis y, wobei wir die Integration rechts gliedweise durchführen:

$$\frac{1}{2} (\arcsin y)^2 = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2p)!!}{(2p+1)!!} \frac{y^{2p+2}}{2p+2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[2(m-1)]!!}{(2m-1)!!} \frac{y^{2m}}{2m}.$$

Dieses Resultat kann man auch in der Gestalt

$$2(\arcsin y)^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[(m-1)!]^2}{2m!} (2y)^{2m}$$

schreiben. Für $y = \dfrac{1}{2}$ erhalten wir hieraus

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{[(m-1)!]^2}{2m!} = \frac{\pi^2}{18}.$$

Nun sahen wir früher (vgl. (13) aus Nr. 395; auch Nr. 416), daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 3 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[(m-1)!]^2}{2m!}$$

ist, so daß schließlich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{4}$$

gilt. Auf dieses interessante, von Euler gefundene Resultat werden wir noch mehrmals zurückkommen.

8. Man berechne das Integral

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} \, dx.$$

Mit Hilfe der logarithmischen Reihe (vgl. (17) aus Nr. 405) erhalten wir für den Integranden die Entwicklung

$$1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{n-1} + \cdots,$$

die im ganzen Intervall [0, 1] gilt. Durch gliedweise Integration finden wir

$$I = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}.$$

Mit Hilfe der obigen Beziehung (4) folgt hieraus

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Damit gelangen wir zu einem Ausdruck für das gesuchte Integral I in geschlossener Form:

$$I = \frac{\pi^2}{12}.$$

9. Man berechne das Integral ($|a| < 1$)

$$\int_0^{\pi}\frac{\ln(1 + a\cos x)}{\cos x}\,dx.$$

(Bei $x = \frac{\pi}{2}$ ist für den Integranden der Wert a, d. h., sein Grenzwert für $x \to \frac{\pi}{2}$, zu schreiben.)

Bei Benutzung der logarithmischen Reihe erhalten wir

$$\frac{\ln(1 + a\cos x)}{\cos x} = a + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a^{n+1}}{n+1}\cos^n x.$$

Diese Reihe konvergiert im Intervall $[0, \pi]$ gleichmäßig. Nun gilt (vgl. (8) aus Nr. 312)

$$\int_0^{\pi}\cos^{2m-1}x\,dx = 0, \qquad \int_0^{\pi}\cos^{2m}x\,dx = 2\int_0^{\pi/2}\cos^{2m}x\,dx = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\pi;$$

damit ergibt sich durch gliedweise Integration

$$\int_0^{\pi}\frac{\ln(1 + a\cos x)}{\cos x}\,dx = \pi\left[a + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\,\frac{a^{2m+1}}{2m+1}\right].$$

Diese Reihe ist uns als Entwicklung für den Arkussinus bekannt (vgl. Beispiel 3). Also folgt schließlich (in geschlossener Form)

$$\int_0^{\pi}\frac{\ln(1 + a\cos x)}{\cos x}\,dx = \pi\arcsin a.$$

10. Wir betrachten für $|r| < 1$ die Entwicklung

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos x + r^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos nx. \tag{5}$$

Sie läßt sich leicht verifizieren, wenn wir die rechte Seite mit $1-2r\cos x + r^2$ multiplizieren; dann erhalten wir nämlich

$$1 - 2r\cos x + r^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx - 2\sum_{n=1}^{\infty} r^{n+1}\, 2\cos nx \cos x + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^{n+2}\cos nx .$$

Ersetzen wir nun $2\cos nx \cos x$ durch $\cos(n+1)\,x + \cos(n-1)\,x$ und zerlegen wir die zweite Summe entsprechend in zwei Summanden, so heben sich alle Glieder bis auf $1 - r^2$ fort, was zu beweisen war.

Da die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |r|^n$ (für $|r| < 1$) konvergiert, ist die Reihe auf der rechten Seite von (5) im Intervall $[-\pi, \pi]$ gleichmäßig konvergent. Wir integrieren nun links und rechts von $-\pi$ bis π, wobei die Integration der Reihe gliedweise durchgeführt werden kann. Wegen

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \,\mathrm{d}x = 0$$

erhalten wir

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi$$

(vgl. Nr. 309, Beispiel 8).

Analog ergibt sich, wenn wir beide Seiten der Identität (5) mit $\cos mx$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ multiplizieren und gliedweise integrieren,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos mx}{1-2r\cos x + r^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi\,\frac{r^m}{1-r^2}.$$

Dabei benutzen wir die aus Nr. 304, Beispiel 4(d), bekannten Beziehungen

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad m \neq n, \\ \pi & \text{für} \quad m = n. \end{cases}$$

11. Wenn wir in der Identität (5) den Summanden 1 auf die linke Seite bringen und dann (5) durch $2r$ dividieren, so erhalten wir

$$\frac{\cos x - r}{1 - 2r\cos x + r^2} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}\cos nx .$$

Nun sei x beliebig, aber fest, und r variiere im Intervall $(-1, 1)$. Wir integrieren beide Seiten der Gleichung nach r von 0 bis zu einem beliebigen r aus diesem Intervall, wobei wir die Potenzreihe auf der rechten Seite gliedweise integrieren; da auf der linken Seite der Zähler (bis auf einen Zahlenfaktor) die Ableitung des Nenners ist, finden wir

$$\ln(1 - 2r\cos x + r^2) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n}\cos nx \qquad (|r| < 1).$$

Nun nehmen wir r als konstant an und lassen x von 0 bis π variieren. Wie wir leicht sehen, konvergiert die Reihe auf der rechten Seite bezüglich x in diesem Intervall gleichmäßig, so daß wir gliedweise integrieren können (Satz 5 aus Nr. 434). Nach Integration gelangen wir zu

$$\int_{0}^{\pi} \ln(1 - 2r\cos x + r^2)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (|r| < 1)$$

(vgl. Nr. 307, Beispiel 4; Nr. 314, Beispiel 14). Hieraus erhalten wir, wie wir schon sahen, auch leicht den Wert des Integrals für $|r| > 1$.

12. Die von x abhängenden Integrale

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin\theta)\, d\theta,$$

$$J_n(x) = \frac{2x^n}{(2n-1)!!\,\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x\sin\theta) \cos^{2n}\theta\, d\theta \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

stellen die sogenannten *Besselfunktionen*[1]) dar (vgl. Nr. 395, Beispiel 14). Durch Entwicklung der Integranden nach Potenzen von $x \sin\theta$ und gliedweise Integration erhalten wir leicht die schon bekannte Entwicklung dieser Funktionen nach Potenzen von x.

Zum Beispiel führt die Integration der Reihe

$$\cos(x\sin\theta) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}\sin^{2k}\theta}{(2k)!}$$

unter Berücksichtigung der Formel

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2k}\theta\, d\theta = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,\frac{\pi}{2} \tag{6}$$

(vgl. (8) aus Nr. 312) auf die Besselfunktion *nullter* Ordnung

$$J_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(k!)^2\, 2^{2k}}.$$

13. Wir begegneten schon den sogenannten *vollständigen elliptischen Integralen erster* und *zweiter Gattung* (vgl. etwa Nr. 315):

$$\mathrm{K}(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \qquad \mathrm{E}(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi.$$

Wir wollen sie nun nach Potenzen des Moduls k entwickeln $(0 < k < 1)$.

Setzen wir $x = -k^2\sin^2\varphi$ in (24) aus Nr. 407, so erhalten wir

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \sin^{2n}\varphi.$$

Diese Reihe konvergiert bezüglich φ gleichmäßig, da sie für alle Werte von φ durch die konvergente Reihe

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n}$$

majorisiert wird. Folglich ist nach Satz 5 aus Nr. 434 die gliedweise Integration erlaubt. Führen wir die gliedweise Integration durch und benutzen wir wieder die Formel (6), so finden wir

$$\mathrm{K}(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 k^{2n}\right].$$

[1]) Friedrich Wilhelm Bessel, 1784—1846, deutscher Astronom.

Analog ergibt sich, wenn wir von (23) aus Nr. 407 ausgehen,

$$\mathrm{E}(k) = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 \frac{k^{2n}}{2n-1}\right].$$

Diese Reihen können auch zu Näherungsrechnungen benutzt werden. Als Beispiel betrachten wir die Reihe

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{8} - \frac{3}{256} - \frac{5}{2048} - \frac{175}{262144} - \frac{441}{2097152} - \cdots\right).$$

Wenn wir uns auf die angegebenen Glieder beschränken, so ist die entsprechende Korrektur negativ und kann wie folgt abgeschätzt werden:

$$|\Delta| < \left(\frac{11!!}{12!!}\right)^2 \frac{1}{11 \cdot 2^6}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots\right) < 0{,}00024.$$

Wir können also drei richtige Stellen nach dem Komma erwarten. Das ist auch tatsächlich der Fall; denn rechnen wir mit fünf Dezimalstellen, so erhalten wir:

$$\frac{\pi}{2} = 1{,}57080\ (-) \qquad \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{8} = 0{,}19635\ (-)$$

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{3}{256} = 0{,}01841\ (-)$$

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{5}{2048} = 0{,}00383\ (+)$$

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{175}{262144} = 0{,}00105\ (-)$$

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{441}{2097152} = 0{,}00033\ (+)$$

$$\overline{0{,}21997}$$

$$1{,}57080 - 0{,}21997 = 1{,}35083,$$

$$1{,}35057 < \mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 1{,}35085,$$

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1{,}350\ldots$$

(vgl. Nr. 328, Beispiel 4).

Wir betonen, daß sich die obigen Reihen eigentlich nur für kleine Werte von k zur Berechnung der vollständigen elliptischen Integrale $\mathrm{K}(k)$ und $\mathrm{E}(k)$ eignen. Es existieren jedoch Transformationen, durch die die Berechnung der Integrale auf die Berechnung solcher mit kleinem k zurückgeführt werden kann (vgl. Nr. 315).

14. Man kann die Entwicklung der Funktion $\mathrm{E}(k)$ zur Berechnung des Integrals

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{E}(h \sin \theta)}{1 - h^2 \sin^2 \theta} \sin \theta\, d\theta \qquad (0 < h < 1)$$

benutzen. Zunächst verifiziert man leicht, daß die Entwicklung

$$\frac{\mathrm{E}(k)}{1-k^2} = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 3k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 5k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 7k^6 + \cdots\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 (2n+1)\,k^{2n}\right]$$

gilt, indem man die Gleichung mit $1 - k^2$ multipliziert.

Setzen wir nun $k = h \sin\theta$ und multiplizieren wir noch mit $\sin\theta$, so können wir gliedweise nach θ (von 0 bis $\frac{\pi}{2}$) integrieren, da die erhaltene Reihe innerhalb dieser Grenzen gleichmäßig konvergiert (sie hat. z. B. die vorhergehende Reihe für $k = h$ als Majorante).

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}\theta\, d\theta = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

(vgl. (8) aus Nr. 312) finden wir

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{E}(h\sin\theta)}{1-h^2\sin^2\theta}\sin\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1\cdot 3}{1\cdot 4}h^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}h^6 + \cdots\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}h^{2n}\right].$$

Vergleichen wir den Ausdruck in den Klammern mit der Formel (24) aus Nr. 407, so erhalten wir für das gesuchte Integral sogar einen Ausdruck in geschlossener Form:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{E}(h\sin\theta)}{1-h^2\sin^2\theta}\sin\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1-h^2}}.$$

15. Zum Schluß betrachten wir die Entwicklung der Funktion $y = \arcsin(1-x)$ nach (nicht ganzen!) Potenzen von x für $x \geqq 0$.[1])

Wir erhalten (mit Hilfe der binomischen Reihe)

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2x}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}x}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2x}}\left[1 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{32}x^2 + \cdots\right]$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}x^{-1/2} - \frac{1}{4\sqrt{2}}x^{1/2} - \frac{3}{32\sqrt{2}}x^{3/2} - \cdots.$$

Hierbei konvergiert die Reihe, wenn man das erste Glied, das für $x = 0$ unendlich wird, fortläßt, im Intervall $[0, x]$, wobei $0 < x < 2$ ist, gleichmäßig. Die Stammfunktion des ersten Gliedes ist $-\sqrt{2}\,x^{1/2}$; für die übrige Reihe ergibt sich die Stammfunktion durch gliedweise Integration. Da für $x = 0$ offenbar $y = \frac{\pi}{2}$ sein muß, finden wir schließlich die folgende (für

[1]) Es kann sich hier nicht um die übliche Entwicklung nach ganzen positiven Potenzen von x handeln, da sonst (nach Satz 9° aus Nr. 438) unsere Funktion auch für $x = 0$ eine endliche Ableitung besäße, was in Wirklichkeit nicht der Fall ist.

$0 \leqq x < 2$ gültige) Entwicklung nach *gebrochenen* Potenzen von x:

$$y = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\, x^{1/2} - \frac{1}{6\sqrt{2}}\, x^{3/2} - \frac{3}{80\sqrt{2}}\, x^{5/2} - \cdots.$$

Analog ergibt sich auch die Entwicklung

$$\arcsin \sqrt{\frac{2x}{1+x^2}} = \sqrt{2}\left[x^{1/2} + \frac{1}{3} x^{3/2} - \frac{1}{5} x^{5/2} - \frac{1}{7} x^{7/2} + \cdots\right]$$

für $0 \leqq x < 1$.

441. Beispiele für die gliedweise Differentiation von Reihen.

1. Wir betrachten wieder die Funktion

$$y = E(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(vgl. Nr. 390, Beispiel 6; Nr. 439, Beispiel 3). Wir können jetzt leicht ihre Ableitung bestimmen; dazu brauchen wir nur diese Reihe gliedweise zu differenzieren (8° aus Nr. 438). Wir erhalten die Relation $E'(x) = E(x)$, so daß die zu betrachtende Funktion die Differentialgleichung $y' = y$ erfüllt. Hieraus folgt $y = C\,e^x$; da für $x = 0$ offenbar $y = 1$ ist, finden wir schließlich $E(x) = e^x$.

2. Ein analoges Verfahren führt uns zur Summe der binomischen Reihe

$$y = f(x) = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdots n} x^n + \cdots$$

(hier ist m fest, und x variiert im Intervall $(-1, 1)$; vgl. Nr. 439, Beispiel 4). Differenzieren wir die Reihe gliedweise, so erhalten wir

$$f'(x) = m\left[1 + (m-1)\,x + \frac{(m-1)\,(m-2)}{1\cdot 2} x^2 + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{(m-1)\,(m-2)\cdots(m-n)}{1\cdot 2\cdots n} x^n + \cdots\right].$$

Wir können uns leicht davon überzeugen, daß die Beziehung $(1+x)\,f'(x) = m f(x)$ gilt.[1]) Die Funktion y genügt also der Differentialgleichung $(1+x)\,y' = my$. Hieraus folgt $y = C(1+x)^m$. Da für $x = 0$ offenbar $y = 1$ ist, wird die Konstante C gleich 1, also schließlich

$$y = f(x) = (1+x)^m.$$

3. Wir wissen schon, daß die Summe der Dirichletschen Reihe

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

(vgl. Nr. 385, Beispiel 3) für $x > \lambda$ (wobei die Konvergenzabszisse λ endlich ist, $\lambda < +\infty$) eine stetige Funktion ist (vgl. Nr. 439, Beispiel 2).

---

[1]) Bei Multiplikation von $f'(x)$ mit $1 + x$ ist die Eigenschaft

$$\frac{(m-1)\,(m-2)\cdots(m-n)}{1\cdot 2\cdots n} + \frac{(m-1)\,(m-2)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}$$
$$= \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}$$

der Binomialkoeffizienten zu benutzen; diese Eigenschaft ist ein Spezialfall der bekannten Beziehung

$$\binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1} = \binom{m}{n}.$$

Durch gliedweise Differentiation finden wir die Ableitung dieser Funktion:

$$\varphi'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} \ln n \qquad (x > \lambda).$$

Wir erhalten zunächst dieses Resultat rein formal. Um es zu verifizieren, brauchen wir uns nur zu vergewissern, daß die letzte Reihe für alle $x \geqq x_0$, wobei x_0 eine beliebige (aber feste) Zahl $> \lambda$ ist, gleichmäßig konvergiert. Dies ergibt sich wie in Nr. 439, Beispiel 2, mit Hilfe des Abelschen Kriteriums, wenn wir beachten, daß die Faktoren $\frac{\ln n}{n^{x-x_0}}$ ab $n = 2$ mit wachsendem n abnehmen, wobei sie alle durch die Zahl ln 2 beschränkt sind. Jeder Wert $x > \lambda$ kann zwischen $x' > \lambda$ und $x'' > x'$ eingeschlossen werden, und auf das Intervall $[x', x'']$ läßt sich der Satz 7 aus Nr. 435 anwenden.

Auf diese Art können wir uns auch von der Existenz beliebig hoher Ableitungen der Funktion $\varphi(x)$ überzeugen; wir erhalten sie in Gestalt einer Reihe. Dies gilt auch insbesondere für die Riemannsche ζ-Funktion

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

für $x > 0$.

4. Wir beschäftigten uns schon mit der Potenzreihenentwicklung der Besselfunktion nullter Ordnung

$$J_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(k!)^2 \cdot 2^{2k}}$$

(vgl. Nr. 395, Beispiel 14; Nr. 440, Beispiel 12).

Wir zeigen nun, daß diese Funktion die *Besselsche Differentialgleichung*

$$xu'' + u' + xu = 0$$

erfüllt. Wir erhalten mit $u = J_0(x)$

$$xu = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(2k)^2}{(k!)^2 \cdot 2^{2k}} x^{2k-1}$$

und dann durch zweimalige gliedweise Differentiation der Entwicklung von u

$$u' = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k}{(k!)^2 \cdot 2^{2k}} x^{2k-1},$$

$$xu'' = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k(2k-1)}{(k!)^2 \cdot 2^{2k}} x^{2k-1}.$$

Addieren wir diese drei Gleichungen, so finden wir als Koeffizienten von x^{2k-1} den Ausdruck

$$\frac{(-1)^k}{(k!)^2 \cdot 2^{2k}} [2k(2k-1) + 2k - (2k)^2] = 0,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Analog kann man zeigen, daß die Besselfunktion $J_n(x)$ mit beliebigem natürlichem Index, von der oben schon die Rede war, die *allgemeine Besselsche Differentialgleichung*

$$x^2u'' + xu' + (x^2 - n^2)\, u = 0$$

erfüllt.

5. Lehrreicher ist eine andere Aufgabenstellung: Man bestimme diejenige Funktion, die sich für alle x in eine Reihe entwickeln läßt und die Besselsche Differentialgleichung erfüllt. Wir führen dies z. B. für den einfachsten Fall $n = 0$ durch. Dazu schreiben wir die gesuchte

Funktion als Reihe mit unbestimmten Koeffizienten,

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m,$$

und nehmen an, daß sie überall konvergiere, so daß wir zweimal gliedweise differenzieren können. Setzen wir diese Entwicklungen in die Differentialgleichung ein, so erhalten wir

$$a_1 + \sum_{m=2}^{\infty} (m^2 a_m + a_{m-2})\, x^{m-1} = 0.$$

Nach Satz 3° aus Nr. 437 folgt daraus $a_1 = 0$, $m^2 a_m + a_{m-2} = 0$ $(m = 2, 3, \ldots)$. Wir sehen sofort, daß die Koeffizienten mit ungeradem Index verschwinden, d. h. $a_{2k-1} = 0$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ ist, und daß sich alle Koeffizienten mit geradem Index, also a_{2k}, mit Hilfe einer Rekursionsformel durch a_0 ausdrücken lassen:

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{(k!)^2 \cdot 2^{2k}}.$$

Wir gelangen also (abgesehen von dem beliebigen Faktor a_0) wieder zu der Funktion $J_0(x)$.

Daß die erhaltene Reihe tatsächlich überall konvergiert, läßt sich unmittelbar nachprüfen, und aus der Methode ihrer Herleitung wird sofort klar, daß die durch sie dargestellte Funktion die Differentialgleichung erfüllt.

(Wir machen den Leser auf die eigenartige Verwendung der Methode der unbestimmten Koeffizienten aufmerksam; wir hatten hier unendlich viele Koeffizienten und mußten damit den Identitätssatz für Potenzreihen statt des Identitätssatzes für Polynome verwenden.)

6. Gauss führte die Funktion

$$u = F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} x^n$$

ein, die sogenannte *hypergeometrische Reihe* (vgl. Nr. 372; Nr. 378, Beispiel 4). Differenzieren wir sie zweimal gliedweise unter der Annahme $|x| < 1$, so können wir zeigen, daß die Funktion die sogenannte *hypergeometrische Differentialgleichung*

$$x(x-1)\,u'' - [\gamma - (\alpha + \beta + 1)\,x]\,u' + \alpha\beta u = 0$$

erfüllt. Wir überlassen diese umfangreichen, aber leichten Rechnungen dem Leser. Auch hier kann die Aufgabenstellung wie in Beispiel 5 verändert werden.

7. Wir definieren für $0 \leqq x \leqq 1$ eine Funktion $f(x)$ durch die Beziehung

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Wir wollen zeigen, daß diese Funktion für $0 < x < 1$ der interessanten Funktionalgleichung

$$f(x) + f(1-x) + \ln x \cdot \ln(1-x) = C = \text{const}$$

genügt. Dazu brauchen wir nur zu beweisen, daß die Ableitung der linken Seite identisch verschwindet:

$$f'(x) - f'(1-x) + \frac{1}{x}\ln(1-x) - \frac{1}{1-x}\ln x = 0.$$

Differenzieren wir die Reihe, durch die die Funktion $f(x)$ definiert ist, gliedweise, so finden wir

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = -\frac{1}{x}\ln(1-x);$$

ersetzen wir x durch $1 - x$, so erhalten wir

$$f'(1 - x) = -\frac{1}{1 - x} \ln x.$$

Damit ist der Beweis beendet.

Den Wert der Konstanten C können wir leicht bestimmen, indem wir in der bewiesenen Relation x gegen 1 streben lassen. Nach dem Satz von ABEL besitzt ihre linke Seite den Grenzwert

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(vgl. Nr. 440, (4)). Folglich ist $C = \frac{\pi^2}{6}$.

8. In Nr. 400, Beispiel 4, betrachteten wir das unendliche Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\varphi}{2^n} = \frac{\sin \varphi}{\varphi} \qquad (\varphi \neq 0).$$

Setzen wir $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ voraus, so folgt durch Logarithmieren dieser Gleichung (vgl. 4° aus Nr. 401)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \cos \frac{\varphi}{2^n} = \ln \sin \varphi - \ln \varphi$$

und durch gliedweise Differentiation der Reihe die Beziehung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{\varphi}{2^n} = \frac{1}{\varphi} - \cot \varphi.$$

Da die differenzierte Reihe die konvergente geometrische Reihe als Majorante besitzt, waren wir berechtigt, gliedweise zu differenzieren.

9. In Nr. 408 leiteten wir die Entwicklung von $\sin x$ in ein unendliches Produkt her:

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Durch Übergang zum Absolutbetrag erhalten wir

$$|\sin x| = |x| \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left|1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right|.$$

Ist x verschieden von $k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), so gelangen wir durch Logarithmieren zu der unendlichen Reihe

$$\ln |\sin x| = \ln |x| + \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left|1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right|.$$

Gliedweise Differentiation liefert die Entwicklung

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}.$$

Zum Beweis ihrer Richtigkeit genügt es, wenn wir uns davon überzeugen, daß die erhaltene Reihe in jedem endlichen abgeschlossenen Intervall, das Punkte der Form $k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) nicht enthält, gleichmäßig konvergiert. Nun ist in einem solchen Intervall der absolute Betrag von x beschränkt: $|x| < M$, so daß für alle $n > \frac{M}{\pi}$

$$\left|\frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}\right| = \frac{2|x|}{n^2\pi^2 - |x|^2} < \frac{2M}{n^2\pi^2 - M^2}$$

gilt. Da die Reihe

$$\sum_{n>M/\pi} \frac{2M}{n^2\pi^2 - M^2}$$

konvergiert, ergibt sich das geforderte Resultat mit Hilfe des Weierstraßschen Kriteriums.

Wir können die Entwicklung von $\cot x$ auch in der folgenden Form schreiben:

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x - n\pi} + \frac{1}{x + n\pi}\right);$$

dies ist die Partialbruchzerlegung der Funktion $\cot x$, die den einzelnen Nullstellen 0 und $\pm n\pi$ des Nenners $\sin x$ entspricht.

Mit Hilfe der Formel $\tan x = -\cot\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ ergibt sich die Partialbruchzerlegung der Funktion $\tan x$:

$$\tan x = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x - \frac{2n-1}{2}\pi} + \frac{1}{x + \frac{2n-1}{2}\pi}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}}.$$

Benutzen wir die Beziehung

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2}\left(\cot\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2}\right),$$

so können wir auch die Partialbruchzerlegung für $\frac{1}{\sin x}$ angeben:

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{x - n\pi} + \frac{1}{x + n\pi}\right) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}.$$

Durch gliedweise Differentiation der Partialbruchzerlegung von $\cot x$ (wir überlassen es dem Leser, sich davon zu überzeugen, daß dies erlaubt ist) erhalten wir noch eine sehr nützliche Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(x - n\pi)^2} + \frac{1}{(x + n\pi)^2}\right].$$

10. Gehen wir von der Produktdarstellung der Funktion $\sinh x$ aus (Nr. 408), so finden wir analog die Partialbruchzerlegungen

$$\coth x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + n^2\pi^2}, \qquad \frac{1}{\sinh x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 + n^2\pi^2}, \quad \text{usw.}$$

11. Für die Funktion $\Gamma(x)$ erhielten wir in Nr. 402 die Weierstraßsche Produktdarstellung (vgl. dort (16))

$$\frac{1}{\Gamma(x + 1)} = e^{Cx} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x/n};$$

beachten wir, daß $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ ist, und logarithmieren wir beide Seiten, so erhalten wir leicht, wenn x von 0 und allen negativen Zahlen verschieden ist,

$$\ln|\Gamma(x)| = -\ln|x| - Cx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln\left|1 + \frac{x}{n}\right|\right).$$

Gliedweise Differentiation liefert rein formal

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\frac{1}{x} - C + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x + n}\right).$$

Wir beweisen nun, daß die Reihe auf der rechten Seite in jedem endlichen Intervall, das keine negative ganze Zahl enthält, gleichmäßig konvergiert. Ist x beschränkt, $|x| < M$, so gilt für alle $n > M$

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}\right| = \frac{|x|}{n(n+x)} < \frac{M}{n(n-M)}.$$

Da die Reihe

$$\sum_{n>M} \frac{M}{n(n-M)}$$

konvergiert, ist nach dem Weierstraßschen Kriterium die gleichmäßige Konvergenz gewährleistet. Auf Grund von Satz 7 aus Nr. 435 existiert also die Entwicklung der Ableitung von $\ln|\Gamma(x)|$ und folglich auch die von $\Gamma(x)$, usw.

Addieren wir zu der rechten Seite der Formel die Reihe

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) = 0,$$

so können wir sie auf die Gestalt

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -C + \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{x+\nu}\right)$$

bringen. Wir können leicht feststellen, daß für die Funktion $\Gamma(x)$ Ableitungen beliebig hoher Ordnung existieren.

442. Die Methode der sukzessiven Approximation in der Theorie der impliziten Funktionen. Um eine Anwendung der Theorie der Funktionenreihen (oder Funktionenfolgen) zu zeigen, betrachten wir noch einmal die Frage nach der Existenz impliziter Funktionen (vgl. Nr. 206ff.). Wir beschränken uns der Einfachheit wegen auf den Fall einer Gleichung

$$F(x, y) = 0, \tag{7}$$

aus welcher eine eindeutige Funktion von x bestimmt werden soll. Jetzt verwenden wir die Methode der sukzessiven Approximation, die uns nicht nur die Existenz dieser Funktion beweist, sondern auch Hinweise zu ihrer tatsächlichen Berechnung gibt.

Die Funktion $F(x, y)$ sei nebst ihrer Ableitung $F_y(x, y)$ in einem Quadrat

$$\mathfrak{D} = [x_0 - \Delta, x_0 + \Delta; y_0 - \Delta, y_0 + \Delta]$$

mit dem Mittelpunkt im Punkt (x_0, y_0) stetig; dabei sei

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad \text{aber} \quad F_y(x_0, y_0) \neq 0. \tag{8}$$

Dann ist y durch die Gleichung (7) in der Umgebung des Punktes (x_0, y_0) als endeutige und stetige Funktion von x definiert, die für $x = x_0$ den Wert y_0 besitzt.

Wir betrachten zunächst den *Spezialfall*, daß die Gleichung (7) die Form

$$y = y_0 + \varphi(x, y) \tag{7*}$$

besitzt, wobei die Funktion φ nebst ihrer Ableitung φ_y dieselben Stetigkeitsbedingungen wie F, aber statt (8) die Bedingungen

$$\varphi(x_0, y_0) = 0, \qquad |\varphi_y(x_0, y_0)| < 1 \tag{8*}$$

erfüllt. Auf Grund der Stetigkeit der Ableitung können wir von Anfang an das Gebiet $\mathfrak{D}$ so klein annehmen, daß in seinem Innern allgemein

$$|\varphi_y(x, y)| < \lambda \tag{9}$$

gilt, wobei λ eine gewisse Konstante < 1 ist. Dann müssen wir noch (unter Beibehaltung des Intervalls, in dem y variiert) das Intervall, in dem x variiert, durch ein so kleines Intervall

$[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ersetzen, daß in seinem Innern die in x stetige Funktion $\varphi(x, y_0)$, die für $x = x_0$ verschwindet, die Ungleichung

$$|\varphi(x, y)| < (1 - \lambda)\,\Delta \tag{10}$$

erfüllt. Wir haben damit ein Gebiet

$$\mathcal{D}^* = [x_0 - \delta, x_0 + \delta; y_0 - \Delta, y_0 + \Delta]$$

erhalten, auf das wir unsere weiteren Untersuchungen beziehen werden.

Ersetzen wir auf der rechten Seite der Gleichung (7*) y durch die Konstante y_0, so erhalten wir eine gewisse Funktion von x:

$$y_1 = y_1(x) = y_0 + \varphi(x, y_0).$$

Analog setzen wir nacheinander

$$y_2 = y_2(x) = y_0 + \varphi(x, y_1),$$
$$y_3 = y_3(x) = y_0 + \varphi(x, y_2),$$

und allgemein

$$y_n = y_n(x) = y_0 + \varphi(x, y_{n-1}). \tag{11}$$

Diese Funktionen $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), \ldots$ bilden eine Folge von Näherungen für die gesuchte Funktion $y(x)$. Um dies zu beweisen, brauchen wir nur zu zeigen, daß sie alle im Intervall $[y_0 - \Delta, y_0 + \Delta]$ liegen, denn würde eine von ihnen im Äußeren dieses Intervalls liegen, so dürften wir sie ja nicht auf der rechten Seite der Gleichung (7*) für y einsetzen.

Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion. Es gelte etwa

$$y_0 - \Delta \leqq y_{n-1} \leqq y_0 + \Delta.$$

Aus (11) folgt

$$y_n - y_0 = \varphi(x, y_{n-1}).$$

Nun gilt

$$|\varphi(x, y_{n-1})| \leqq |\varphi(x, y_{n-1}) - \varphi(x, y_0)| + |\varphi(x, y_0)|.$$

Der erste Summand auf der rechten Seite kann mit Hilfe des Mittelwertsatzes und der Beziehung (9) in

$$|\varphi(x, y_{n-1}) - \varphi(x, y_0)| = |\varphi_y(x, \eta) \cdot (y_{n-1} - y_0)| < \lambda\Delta$$

umgeformt werden; der zweite Summand ist wegen (10) kleiner als $(1 - \lambda)\,\Delta$, so daß insgesamt

$$|y_n - y_0| < \lambda\Delta + (1 - \lambda)\,\Delta = \Delta$$

folgt, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Gleichzeitig läßt sich induktiv beweisen, daß alle auf diese Art konstruierten Funktionen *stetig* sind.

Wir wenden uns nun der Frage nach dem *Grenzwert* der Funktionenfolge $\{y_n\}$ zu. Dazu ist es bequemer, die Reihe

$$y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (y_n - y_{n-1}) \tag{12}$$

zu betrachten. Aus der Konstruktion der Folge ergibt sich

$$y_n - y_{n-1} = \varphi(x, y_{n-1}) - \varphi(x, y_{n-2}).$$

Verwenden wir nun wieder den Mittelwertsatz und die Ungleichung (9), so finden wir

$$|y_n - y_{n-1}| < \lambda |y_{n-1} - y_{n-2}|.$$

Hieraus erhalten wir schließlich, wenn wir n nacheinander durch $n-1$, $n-2, \ldots$ ersetzen, wegen (10)

$$|y_n - y_{n-1}| < \lambda^{n-1} |y_1 - y_0| \leqq \lambda^{n-1}(1-\lambda)\Delta.$$

Die Reihe (12) besitzt also die geometrische Reihe

$$y_0 + (1-\lambda)\Delta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \tag{13}$$

als Majorante und konvergiert demzufolge im Intervall $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ gleichmäßig in x. Damit ist nach Satz 1 aus Nr. 431 auch die Grenzfunktion

$$y = y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$$

in diesem Intervall stetig.

Gehen wir in der Gleichung (11) zur Grenze über, so können wir uns leicht davon überzeugen, daß y der Ausgangsgleichung genügt. Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß außer dem konstruierten y keine weiteren existieren, die die Gleichung (7*) erfüllen. Wäre dies für gewisse x der Fall, so würde neben (7*) noch $\tilde{y} = y_0 + \varphi(x, \tilde{y})$ gelten. Subtrahieren wir beide Gleichungen und schätzen wir die Differenz der φ-Werte wie üblich ab, so erhalten wir

$$|y - \tilde{y}| = |\varphi(x, y) - \varphi(x, \tilde{y})| < \lambda |y - \tilde{y}|,$$

was aber für $y \neq \tilde{y}$ unmöglich ist.

Hieraus folgt auch

$$y(x_0) = y_0;$$

dies ergibt sich übrigens auch unmittelbar daraus, daß alle $y_n(x_0)$ gleich y_0 sind.

Damit ist der Satz für den betrachteten Spezialfall bewiesen. Der allgemeine Fall läßt sich leicht auf den Spezialfall zurückführen; die Gleichung (7) kann nämlich in der Form

$$y = y_0 + \left[y - y_0 - \frac{F(x, y)}{F_y(x_0, y_0)}\right]$$

geschrieben werden. Sie ist, wenn wir

$$\varphi(x, y) = y - y_0 - \frac{F(x, y)}{F_y(x_0, y_0)}$$

setzen, mit (7*) identisch. Diese Funktion erfüllt die Forderung (8*), insbesondere die zweite, da $\varphi_y(x_0, y_0)$ verschwindet.

Wie wir schon erwähnten, gestattet das Beweisverfahren auch die praktische näherungsweise Berechnung der gesuchten Funktion $y(x)$. Die Abweichung der Funktionen $y(x)$ und $y_n(x)$ voneinander kann leicht abgeschätzt werden, da der Rest der Reihe (12) nach dem n-ten Glied höchstens gleich dem entsprechenden Rest der geometrischen Reihe (13) ist. Hieraus folgt auch

$$|y(x) - y_n(x)| < \Delta\lambda^n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Es ist sehr interessant, diesen Beweis des Satzes über implizite Funktionen mit dem in Nr. 206 geführten Beweis zu vergleichen. Dort haben wir es mit einem reinen „Existenzbeweis" zu tun, hier dagegen mit der *Konstruktion* der gesuchten Funktion.

Ähnlich lassen sich auch die allgemeinen Sätze aus Nr. 208 konstruktiv beweisen. Wir beschränkten uns auf den einfachsten Fall, um die Beweismethode klarer herausarbeiten zu können.

443. Analytische Definition der trigonometrischen Funktionen. Wir haben gesehen, welche wichtige Rolle die trigonometrischen Funktionen in der Analysis spielen. Sie wurden indessen auf Grund rein geometrischer Überlegungen eingeführt, die der Analysis nicht angemessen sind. Es ist deshalb von prinzipieller Bedeutung, ob die trigonometrischen Funktionen aus ihren Grundeigenschaften ausschließlich mit den Mitteln der Analysis hergeleitet werden können. Die unendlichen Reihen sind das Werkzeug, mit dessen Hilfe diese Untersuchung durchgeführt werden kann. Wir beschäftigen uns also jetzt mit einer neuen Anwendung der oben dargelegten Theorie, mit der analytischen Definition der trigonometrischen Funktionen.

Wir betrachten die beiden Funktionen $C(x)$ und $S(x)$, die formal durch die für reelle x überall konvergenten Reihen

$$C(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

definiert seien und die wir einstweilen nicht mit den schon bekannten Funktionen $\cos x$ bzw. $\sin x$ identifizieren. Wir hatten schon früher mit den so definierten Funktionen zu tun (vgl. Nr. 390, Beispiel 7); mit Hilfe der Reihenmultiplikation haben wir dort gezeigt, daß für sie zwei grundlegende Formeln gelten:

$$C(x+y) = C(x)\,C(y) - S(x)\,S(y), \tag{14}$$

$$S(x+y) = S(x)\,C(y) + C(x)\,S(y), \tag{15}$$

und zwar für alle Werte von x und y.

Wir setzen die Untersuchung der Eigenschaften von $C(x)$ und $S(x)$ fort. Ersetzen wir x durch $-x$, so sehen wir sofort, daß $C(x)$ eine gerade und $S(x)$ eine ungerade Funktion ist:

$$C(-x) = C(x), \qquad S(-x) = -S(x).$$

Setzen wir $x = 0$, so finden wir

$$C(0) = 1, \qquad S(0) = 0.$$

Behalten wir in (14) die Veränderliche x bei und nehmen wir $y = -x$, so erhalten wir unter Berücksichtigung der eben aufgestellten Gleichungen eine algebraische Beziehung zwischen beiden Funktionen:

$$C^2(x) + S^2(x) = 1. \tag{16}$$

Ebenso leicht ergeben sich auch die Formeln für die Verdoppelung oder die Halbierung des Arguments.

Aus Satz 2° (Nr. 437) und 9°(Nr. 438) schließen wir, daß die beiden Funktionen $C(x)$ und $S(x)$ stetig und beliebig oft differenzierbar sind. Differenzieren wir die Reihen, durch die die Funktionen definiert sind, gliedweise, so können wir uns leicht davon überzeugen, daß

$$C'(x) = -S(x), \qquad S'(x) = C(x) \tag{17}$$

ist. Die eben aufgezählten Eigenschaften ergeben sich sehr leicht. Etwas schwieriger ist der Beweis der *Periodizität* dieser Funktionen, dem wir uns jetzt zuwenden wollen. Wir wollen zunächst zeigen, daß im Intervall $(0, 2)$ eine einfache Nullstelle der Funktion $C(x)$ liegt. Zunächst wissen wir nämlich, daß $C(0) = 1$ ist; der Wert von $C(2)$ kann, wenn wir die ersten drei Glieder der entsprechenden Reihe abtrennen und die übrigen Glieder paarweise zusammenfassen, in der Form

$$C(2) = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \left(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!}\right) - \cdots$$

geschrieben werden. Da alle Klammern positiv sind,

$$\frac{2^{2n}}{2n!} - \frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!} = \frac{2^{2n}}{2n!}\left(1 - \frac{2\cdot 2}{(2n+1)\,(2n+2)}\right) > 0,$$

und die Summe der ersten drei Glieder gleich $-\frac{1}{3}$ ist, gilt $C(2) < -\frac{1}{3}$, d. h., $C(2)$ ist offenbar negativ. Wegen der Stetigkeit der Funktion $C(x)$ folgt hieraus, daß im Intervall $(0, 2)$ tatsächlich mindestens eine Nullstelle dieser Funktion liegt.

Andererseits bleibt in diesem Intervall die Funktion

$$S(x) = x\left(1 - \frac{x^2}{2\cdot 3}\right) + \frac{x^5}{5!}\left(1 - \frac{x^2}{6\cdot 7}\right) + \cdots$$

stets positiv und also die Ableitung $C'(x) = -S(x)$ negativ; folglich fällt die Funktion $C(x)$, wenn sich x von 0 bis 2 ändert, und hat dort nur eine einfache Nullstelle.

Wir bezeichnen nun die erwähnte Nullstelle der Funktion $C(x)$ mit $\frac{\pi}{2}$, wobei wir hier die Zahl π zunächst vollkommen formal einführen, ohne sie mit dem Verhältnis von Umfang zu Durchmesser eines Kreises zu identifizieren.

Nun gilt also

$$C\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \qquad S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1;$$

die letzte Gleichung folgt aus (16) und der Tatsache, daß $S(x)$ für $0 < x \leqq 2$ positiv ist.

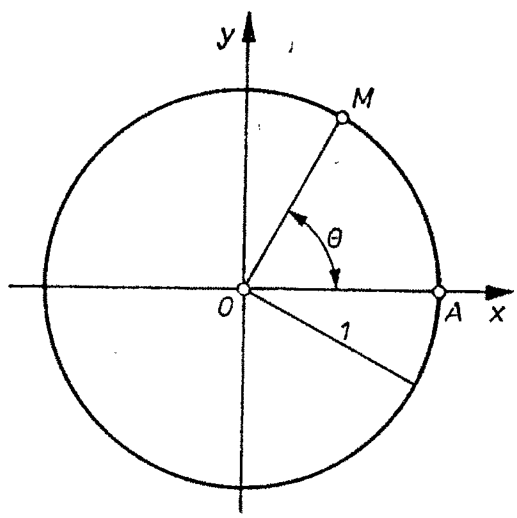

Abb. 61

Setzen wir in den Formeln (14) und (15) zunächst $x = y = \frac{\pi}{2}$ und dann $x = y = \pi$, so finden wir

$$C(\pi) = -1, \qquad S(\pi) = 0, \qquad C(2\pi) = 1, \qquad S(2\pi) = 0.$$

Lassen wir in (14) und (15) x variabel und setzen wir $y = \pi$ bzw. $y = 2\pi$, so erhalten wir

$$C(x + \pi) = -C(x), \qquad S(x + \pi) = -S(x) \tag{18}$$

und schließlich

$$C(x + 2\pi) = C(x), \qquad S(x + 2\pi) = S(x).$$

Diese Gleichungen zeigen, daß die Funktionen $C(x)$ und $S(x)$ die Periode 2π besitzen.

Wir könnten leicht weitere „Rekursionsformeln" herleiten, überlassen dies jedoch dem Leser.

Wir versuchen nun, die Übereinstimmung der betrachteten Funktionen $C(x)$ und $S(x)$ mit den trigonometrischen Funktionen $\cos x$ und $\sin x$ zu beweisen und die formal eingeführte Zahl π mit der Zahl π zu identifizieren, die eine so wichtige Rolle in der Geometrie spielt.

Zu diesem Zweck betrachten wir die Kurve mit der Parameterdarstellung

$$x = C(t), \qquad y = S(t),$$

wobei der Parameter t zwischen 0 und 2π variiert. Wegen (16) genügen die Punkte dieser Kurve der Beziehung $x^2 + y^2 = 1$, d. h., sie liegen auf einem Kreis mit dem Radius 1 um den Koordinatenanfangspunkt (Abb. 61), also auf dem Einheitskreis. Wir zeigen, daß dabei *jeder* ihrer Punkte nur einmal auftritt; ausgeschlossen ist natürlich der Anfangspunkt A der Kurve, der den Werten $t = 0$ und $t = 2\pi$ entspricht.

Wir sahen, daß $S(t)$ für $0 < t \leqq 2$ und folglich erst recht $0 < t \leqq \frac{\pi}{2}$ positiv ist. Ersetzen wir in der zweiten Formel (18) x durch $-t$, so erhalten wir

$$S(\pi - t) = S(t);$$

hieraus erkennen wir, daß $S(t)$ auch für $\frac{\pi}{2} \leqq t < \pi$ positiv ist, d. h., die Funktion $C(t)$, deren Ableitung gleich $-S(t)$ ist, nimmt monoton ab, wenn sich t von 0 bis π ändert, und zwar durchläuft sie genau einmal alle Werte von $+1$ bis -1. Daraus folgt, daß dem Wertebereich $[0, \pi]$ des Parameters t eineindeutig der obere Halbkreis entspricht. Eine entsprechende Aussage können wir über dem Wertebereich $[\pi, 2\pi]$ des Parameters t und den unteren Halbkreis machen, denn es ist (vgl. (18))

$$C(t+\pi) = -C(t), \qquad S(t+\pi) = -S(t).$$

Nun berechnen wir mit Hilfe der Formel (4) aus Nr. 329 die Länge des Bogens $\widehat{AM}$, wobei wir annehmen, daß der Punkt M dem Parameterwert t entspricht. Mit (17) und (16) erhalten wir

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{[C'(t)]^2 + [S'(t)]^2}\, dt = t.$$

Dies beweist, daß t dem Winkel $\theta = \sphericalangle AOM$ (im Bogenmaß) entspricht. Damit gilt

$$C(\theta) = x = \cos\theta, \qquad S(\theta) = y = \sin\theta.$$

Gleichzeitig ist nach der obigen Formel die Länge des *ganzen* Umfangs gleich 2π; folglich ist die von uns eingeführte Zahl π mit der Zahl π identisch, die in der Geometrie betrachtet wird.

444. Beispiel einer stetigen Funktion ohne Ableitung. Das erste bekannt gewordene Beispiel einer stetigen, nirgends differenzierbaren Funktion stammt von WEIERSTRASS (eine frühere Arbeit von BOLZANO wurde erst sehr viel später zugänglich); er definierte die Funktion durch die Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

wobei $0 < a < 1$ ist und b eine ungerade natürliche Zahl (mit $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$) bezeichnet. Diese Reihe wird von der konvergenten Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ majorisiert und konvergiert folglich *gleichmäßig* (vgl. Nr. 430; Nr. 431, Satz 1); ihre Summe ist eine überall *stetige* Funktion von x. Durch eine mühsame Untersuchung gelang es WEIERSTRASS, zu zeigen, daß diese Funktion nirgends eine endliche Ableitung besitzt.

Wir geben noch ein einfacheres Beispiel von VAN DER WAERDEN[1]) an, das im wesentlichen nach derselben Idee konstruiert wurde; nur sind hier die Schwingungskurven $y = \cos \omega x$ durch Polygonzüge ersetzt.

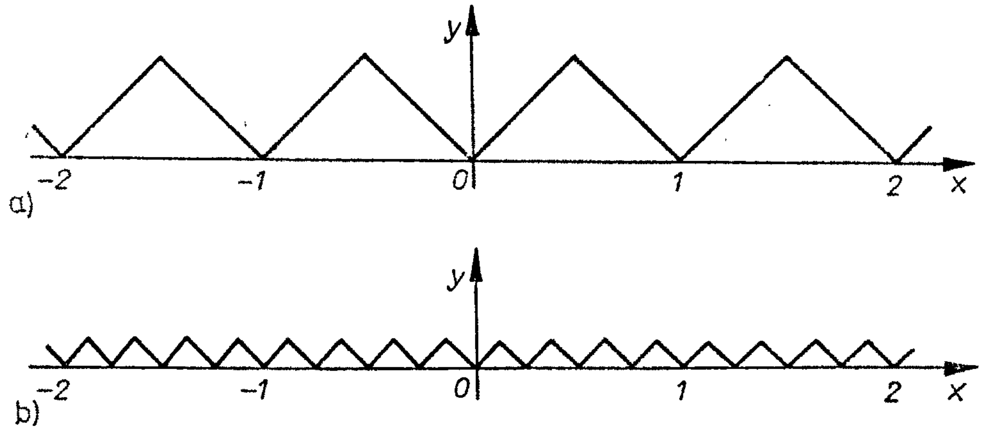

Abb. 62

[1]) BARTEL LEENDERT VAN DER WAERDEN, geb. 1903, holländischer Mathematiker.

Wir bezeichnen mit $u_0(x)$ den Absolutbetrag der Differenz zwischen der Zahl x und der ihr am nächsten liegenden ganzen Zahl. Diese Funktion ist in jedem Intervall $\left[\frac{s}{2}, \frac{s+1}{2}\right]$, wobei s eine ganze Zahl ist, *linear*; sie ist ferner stetig und hat die Periode 1. Ihre graphische Darstellung ist ein Polygonzug (vgl. Abb. 62a); die einzelnen Strecken dieses Polygonzugs haben den Steigungskoeffizienten ± 1.

Für $k = 1, 2, 3, \ldots$ setzen wir dann

$$u_k(x) = \frac{u_0(4^k x)}{4^k}.$$

Diese Funktion ist in Intervallen der Form $\left[\frac{s}{2 \cdot 4^k}, \frac{s+1}{2 \cdot 4^k}\right]$ linear; sie ist stetig und hat die Periode $\frac{1}{4^k}$. Ihre graphische Darstellung ist ebenfalls ein Polygonzug, jedoch mit kleineren „Zähnchen". In Abb. 62b ist z. B. die Funktion $u_1(x)$ angegeben. In allen Fällen sind die Steigungskoeffizienten der einzelnen Strecken gleich ± 1.

Wir definieren jetzt für alle reellen x eine Funktion $f(x)$ durch

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x).$$

Da offenbar $0 \leqq u_k(x) \leqq \frac{1}{2 \cdot 4^k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ ist, die Reihe also durch die konvergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 4^k}$ majorisiert wird, ist (ebenso wie im Fall der Weierstraßschen Funktion) die Reihe *gleichmäßig* konvergent und die Funktion $f(x)$ überall *stetig*.

Wir betrachten nun einen beliebigen Wert $x = x_0$. Berechnen wir ihn mit einer Genauigkeit von $\frac{1}{2 \cdot 4^n}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, so können wir ihn folgendermaßen zwischen zwei Zahlen einschließen:

$$\frac{s_n}{2 \cdot 4^n} \leqq x_0 < \frac{s_n + 1}{2 \cdot 4^n}.$$

Dabei ist s_n eine ganze Zahl. Offenbar sind die abgeschlossenen Intervalle

$$\Delta_n = \left[\frac{s_n}{2 \cdot 4^n}, \frac{s_n + 1}{2 \cdot 4^n}\right] \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

ineinander enthalten. In jedem von ihnen läßt sich ein Punkt x_n derart angeben, daß sein Abstand vom Punkt x_0 gleich der Hälfte der Intervallänge ist:

$$|x_n - x_0| = \frac{1}{4^{n+1}};$$

damit ist klar, daß die Folge der x_n mit $n \to \infty$ gegen x_0 strebt.

Wir bilden nun den Differenzenquotienten

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k(x_n) - u_k(x_0)}{x_n - x_0}.$$

Für $k > n$ ist die Zahl $\frac{1}{4^{n+1}}$ ein ganzzahliges Vielfaches der Periode $\frac{1}{4^k}$ von $u_k(x)$, so daß $u_k(x_n) = u_k(x_0)$ ist, die entsprechenden Glieder also verschwinden und fortgelassen werden können. Im Fall $k \leqq n$ ist die im Intervall Δ_k lineare Funktion $u_k(x)$ auch in dem in Δ_k enthaltenen Intervall Δ_n linear, wobei

$$\frac{u_k(x_n) - u_k(x_0)}{x_n - x_0} = \pm 1 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

ist. Wir finden schließlich

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \sum_{k=0}^{n} (\pm 1),$$

d. h., dieser Quotient ist gleich einer geraden ganzen Zahl, wenn n ungerade, und gleich einer ungeraden ganzen Zahl, wenn n gerade ist. Also kann der Differenzenquotient für $n \to \infty$ keinen endlichen Grenzwert besitzen, so daß die Funktion $f(x)$ für $x = x_0$ keine endliche Ableitung hat.

§ 4. Ergänzende Ausführungen über Potenzreihen

445. Operationen mit Potenzreihen. Dieser Abschnitt ist den (in den Grundzügen schon bekannten) Operationen mit Potenzreihen gewidmet und Ausgangspunkt für weitere Überlegungen.

Wir betrachten die beiden Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \tag{1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots; \tag{2}$$

ihre Konvergenzradien seien von 0 verschieden, und den kleineren von beiden bezeichnen wir mit r. Dann können für $|x| < r$, wie wir wissen (vgl. 4° aus Nr. 364; Nr. 389), diese Reihen gliedweise addiert, subtrahiert und multipliziert werden, wobei sich die Resultate wieder als Potenzreihe in x schreiben lassen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)\, x^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0)\, x^n. \tag{3}$$

Nehmen wir an, die Reihe (2) sei identisch mit (1), so erhalten wir, daß eine Potenzreihe innerhalb ihres Konvergenzintervalls folgendermaßen ins Quadrat erhoben werden kann:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \cdots + a_n a_0) x^n.$$

Wenn die letzte Reihe nach der oben angegebenen Regel nochmals mit der Reihe (1) multipliziert und dies beliebig oft wiederholt wird, so kommen wir zu dem Schluß, daß eine Potenzreihe innerhalb ihres Konvergenzintervalls ganz allgemein in die m-te Potenz erhoben werden kann, wobei m eine beliebige natürliche Zahl ist; das Ergebnis ist ebenfalls eine Potenzreihe:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(m)} x^n \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots). \tag{4}$$

Der Koeffizient $a_n^{(m)}$ hängt von den Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ der Ausgangsreihe ab und ergibt sich, wie aus (3) folgt, nur durch Addieren und Multiplizieren. Diese Bemerkung werden wir später verwenden.

Wir beschäftigen uns nun besonders mit der *Addition unendlich vieler Potenzreihen*, mit der wir noch oft zu tun haben werden. Gegeben sei eine unendliche Folge von Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{nm} x^n \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots);$$

aus ihnen bilden wir die zweifache Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_{nm} x^n \right\}. \tag{5}$$

Ist für einen bestimmten Wert x die entsprechende Reihe aus den Absolutbeträgen konvergent, so konvergiert auch die Reihe (5), und ihre Summe $A(x)$ kann einfach durch Zusammenfassen der Glieder mit gleichen Potenzen von x als Potenzreihe geschrieben werden:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \quad \textit{mit} \quad A_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Der Beweis erledigt sich durch Verweis auf Satz 3 aus Nr. 393.

Die Wichtigkeit dieses Satzes erläutern wir an Beispielen.

1. Man entwickle die Funktionen

$$\text{(a)}\ f_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{a^m}{1 + a^{2m} x^2}, \qquad \text{(b)}\ f_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{a^m}{1 + a^{2m} x^2}$$

($|x| < 1$, $0 < a < 1$) nach Potenzen von x.

(a) Es gilt

$$\frac{a^m}{1 + a^{2m} x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^{m(2n+1)} x^{2n}$$

und damit (durch Einsetzen und Änderung der Reihenfolge der Summierung)

$$f_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^{(2n+1)m} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{(2n+1)m}}{m!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{a^{2n+1}} x^{2n}.$$

Da die zweifache Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} a^{(2n+1)m} x^{2n}$$

wegen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} a^{(2n+1)m} x^{2n} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} \frac{1}{1 - a^{2m} x^2} < \frac{1}{1 - x^2} e^a$$

konvergiert, ist die Änderung der Reihenfolge der Summierung erlaubt.

(b) Analog ist

$$f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-a^{2n+1}} x^{2n}.$$

2. Gehen wir von der Zerlegung der Funktion $x \cot x$ in Partialbrüche aus (vgl. Nr. 441, Beispiel 9), so können wir diese Funktion jetzt in eine Potenzreihe entwickeln. Zur Vereinfachung

ersetzen wir x durch πx, so daß

$$\pi x \cot \pi x = 1 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^2}{m^2 - x^2}$$

ist. Im Fall $|x| < 1$ gilt für jedes $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$\frac{x^2}{m^2 - x^2} = \frac{\frac{x^2}{m^2}}{1 - \frac{x^2}{m^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{m^2}\right)^n.$$

Da alle Glieder positiv sind, erhalten wir auf Grund des Satzes sofort

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^2}{m^2 - x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} s_{2n} x^{2n} \quad \text{mit} \quad s_{2n} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2n}} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Somit ist für $|x| < 1$

$$\pi x \cot \pi x = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} s_{2n} x^{2n}.$$

3. Vollkommen analog erhalten wir, wenn wir von der Zerlegung der Funktion $x \coth x$ in Partialbrüche ausgehen (vgl. Nr. 441, Beispiel 10), die Entwicklung in eine Potenzreihe

$$\pi x \coth \pi x = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} s_{2n} x^{2n} \qquad (|x| < 1).$$

In Nr. 449 wird noch ein anderer Ausdruck für die Koeffizienten der Entwicklungen in Beispiel 1 und 2 angegeben werden.

4. Der Satz gilt auch dann, wenn die unendlich vielen zu addierenden Reihen in gewöhnliche Polynome ausarten. Als Beispiel leiten wir die logarithmische Reihe her, indem wir von der binomischen Reihe und der Exponentialreihe ausgehen.

Für $|x| < 1$ und beliebiges α gilt

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots$$

(vgl. (22) aus Nr. 407). Für ein festes x können wir die Glieder dieser Reihe als Polynome in α auffassen. Da die Reihe

$$1 + |\alpha| \cdot |x| + \frac{|\alpha|(|\alpha| + 1)}{1 \cdot 2} |x|^2 + \frac{|\alpha|(|\alpha| + 1)(|\alpha| + 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} |x|^3 + \cdots$$

konvergiert (davon können wir uns mit Hilfe des d'Alembertschen Kriteriums leicht überzeugen), lassen sich in der vorhergehenden Reihe die Glieder mit gleichen Potenzen von α zusammenfassen:

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\right) + \cdots.$$

Nun ist offenbar

$$(1 + x)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+x)} = 1 + \alpha \ln(1 + x) + \cdots.$$

Da beide Entwicklungen identisch sein müssen, erhalten wir, wenn wir die Koeffizienten bei α vergleichen,

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots.$$

Der bewiesene Satz läßt sich unmittelbar auch auf mehrfache Reihen übertragen, z. B. auf die Reihe

$$\sum_{k=0,\, m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_{nkm}\, x^n \right\}.$$

Man braucht nämlich nur die Doppelreihe durch eine einfache Reihe zu ersetzen, um zu dem schon betrachteten Fall zu gelangen.

446. Substitution einer Reihe in eine andere. Wir betrachten die Funktion $y = f(x)$, die sich im Intervall $(-R, R)$ in eine Potenzreihe (1) entwickeln läßt. Außerdem sei eine Funktion $\varphi(y)$ gegeben, die ebenfalls in eine Potenzreihe

$$\varphi(y) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m y^m = h_0 + h_1 y + h_2 y^2 + \cdots + h_m y^m + \cdots \tag{6}$$

für y-Werte aus $(-\varrho, \varrho)$ entwickelt werden kann.

Ist $|a_0| = |f(0)| < \varrho$, so ist auch $|f(\chi)|$ für hinreichend kleines x kleiner als ϱ, so daß die *mittelbare* Funktion $\varphi(f(x))$ einen Sinn hat.

Unter der einzigen Bedingung $|a_0| < \varrho$ *läßt sich die Funktion* $\varphi\big(f(x)\big)$ *in der Umgebung des Punktes* $x = 0$ *als Potenzreihe in* x *schreiben, wenn man in* (6) *statt* y *die Reihe* (1) *einsetzt und dann, nachdem man für die Potenzen die Beziehung* (4) *verwendet hat, Glieder mit gleichen Potenzen von* x *zusammenfaßt.*

Beweis. Unter der Annahme $|x| < R$ betrachten wir die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1| \cdot |x| + |a_2| \cdot |x|^2 + \cdots + |a_n| \cdot |x|^n + \cdots;$$

auf Grund der Stetigkeit ihrer Summe (vgl. 2° aus Nr. 437) ist wegen $|a_0| < \varrho$ für hinreichend kleine x die Ungleichung

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| < \varrho \tag{7}$$

erfüllt, so daß die Reihe

$$|h_0| + \sum_{m=1}^{\infty} |h_m| \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |x|^n \right)^m$$

konvergiert.

Wir setzen analog zu (4)

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |x|^n \right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(m)}\, |x|$$

und können damit die vorhergehende Reihe in der Gestalt

$$|h_0| + \sum_{m=1}^{\infty} |h_m| \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(m)}\, |x|^n \right)$$

schreiben. Da sich die $\alpha_n^{(m)}$ aus $|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_n|$ genau so wie die $a_n^{(m)}$ aus $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *durch Addieren und Multiplizieren* (Nr. 445) ergeben, ist offenbar $|a_n^{(m)}| \leqq \alpha_n^{(m)}$. Infolgedessen ist für alle $|x| < R$ auch die Reihe

$$|h_0| + \sum_{m=1}^{\infty} |h_m| \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n^{(m)}| \cdot |x|^n \right)$$

konvergent, und auf die Reihe

$$h_0 + \sum_{m=1}^{\infty} h_m \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^m = h_0 + \sum_{m=1}^{\infty} h_m \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(m)} x^n \right)$$

läßt sich die letzte Behauptung aus Nr. 445 anwenden. Damit ist der Satz bewiesen.

Der Wertebereich der Veränderlichen x, in dem die Entwicklung der Funktion $\varphi(f(x))$ nach Potenzen von x möglich ist, läßt sich also außer durch die selbstverständliche Ungleichung $|x| < R$ noch durch (7) charakterisieren. Für $R = +\infty$ braucht man die erste Einschränkung nicht, für $\varrho = +\infty$ entfällt die zweite.

Bei den meisten Anwendungen des Satzes genügt es zu wissen, daß die Entwicklung für *kleine* Werte von $|x|$ gilt. Interessiert man sich für den ganzen Anwendungsbereich einer Reihe, so bedarf es einer eingehenderen Untersuchung.

Wir wenden z. B. den Satz in einem einfachen Fall an. Wir betrachten die Funktion

$$\varphi(y) = \sum_{m=0}^{\infty} y^m$$

im Intervall $(-1, 1)$, $\varrho = 1$, und setzen statt y die Funktion $f(x) = 2x - x^2$ $(R = +\infty)$ ein. Die mittelbare Funktion

$$\varphi(f(x)) = \frac{1}{1 - (2x - x^2)} = \frac{1}{(1 - x)^2}$$

ist nur dann sinnvoll, wenn

$$-1 < 2x - x^2 < 1, \quad \text{d. h.} \quad 1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}, \quad \text{aber} \quad x \neq 1$$

ist. Ihre Entwicklung nach Potenzen von x lautet bekanntlich[1])

$$\frac{1}{(1 - x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots.$$

Diese Reihe konvergiert für $-1 < x < 1$. Also gilt die Gleichung

$$\sum_{m=0}^{\infty} (2x - x^2)^m = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots$$

unter der Bedingung

$$1 - \sqrt{2} < x < 1.$$

Es ist interessant, dies dem Ergebnis unserer obigen Überlegungen gegenüberzustellen. Damit müßten wir

$$2|x| + |x|^2 < 1 \quad \text{oder} \quad 1 - \sqrt{2} < x < \sqrt{2} - 1$$

fordern (vgl. (7)). Wie wir sehen, ist jedoch die obige Gleichung in einem größeren Bereich gültig.

---

[1]) Vgl. Nr. 390, Beispiel 1. Sie ergibt sich auch durch gliedweise Differentiation (8° aus Nr. 438) der Reihe

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots.$$

Auch hier sei noch darauf hingewiesen, daß der Satz weiter verallgemeinert werden kann. Gegeben seien z. B. die für $|y| < \varrho$, $|z| < \varrho$ konvergente Doppelreihe

$$\varphi(y, z) = \sum_{k,m=0}^{\infty} h_{km} y^k z^m$$

und die beiden für $|x| < R$ konvergenten Reihen

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad z = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Dann kann unter der Bedingung $|a_0| < \varrho$, $|b_0| < \varrho$ die mittelbare Funktion $\varphi(f(x), g(x))$ in der Umgebung von $x = 0$ als Potenzreihe in x geschrieben werden, wenn wir statt y und z die entsprechenden Reihen einsetzen und nach Potenzieren und Multiplizieren die Glieder mit gleichen Potenzen von x zusammenfassen.

447. Beispiele.

1. Man bestimme die Anfangsglieder der Entwicklung von $\frac{1}{\mathrm{e}}(1 + x)^{1/x}$ nach Potenzen von x.

Für $|x| < 1$ ist

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mathrm{e}}(1 + x)^{1/x} &= \frac{1}{\mathrm{e}} \exp\left[\frac{1}{x} \ln(1 + x)\right] = \exp\left[-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \cdots\right] \\
&= 1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^5}{6} + \cdots\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} - \cdots\right)^2 + \frac{1}{6}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \cdots\right)^3 \\
&\quad + \frac{1}{24}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \cdots\right)^4 + \frac{1}{120}\left(-\frac{x}{2} + \cdots\right)^5 \\
&= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + \frac{2447}{5760}x^4 - \frac{959}{2304}x^5 + \cdots.
\end{aligned}$$

(Von ähnlichem Typ sind die schon in Nr. 125 betrachteten Aufgaben.)

2. Man leite die binomische Reihe her, indem man von der logarithmischen Reihe und der Exponentialreihe ausgeht.

Für $|x| < 1$ und ein beliebiges α ist offenbar

$$\begin{aligned}
(1 + x)^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(1+x)} &= \exp\left[\alpha\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\right)\right] \\
&= 1 + \alpha\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\right) + \frac{\alpha^2}{2!}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\right)^2 + \cdots \\
&= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{1 \cdot 2}x^2 + \cdots.
\end{aligned}$$

Die Gestalt der ersten Koeffizienten läßt sich sofort angeben. Den Koeffizienten von x^n kann man mit Hilfe folgender Überlegungen errechnen. Es ist unmittelbar klar, daß er ein Polynom n-ten Grades in α ist, etwa $Q_n(\alpha)$. Da für $\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$ in der Entwicklung kein x^n auftritt, muß dieses Polynom in diesen Punkten verschwinden und demzufolge die Gestalt

$$Q_n(\alpha) = c\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)$$

haben. Für $\alpha = n$ ist der Koeffizient von x^n gleich 1,

$$Q_n(n) = 1.$$

Daraus folgt $c = \frac{1}{n!}$ und schließlich

$$Q_n(\alpha) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}.$$

3. Es sei $f(x)$ eine Funktion, die sich in eine Reihe ohne absolutes Glied entwickeln lasse:

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots;$$

dann kann man nach dem allgemeinen Satz für die gleichen x-Werte die Funktion $g(x) = e^{f(x)}$ in eine Reihe entwickeln, deren absolutes Glied offenbar gleich 1 ist. Man gebe diese Entwicklung an.

Wir zeigen, daß hierzu die *Methode der unbestimmten Koeffizienten* benutzt werden kann. Es sei

$$g(x) = e^{f(x)} = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots + b_n x^n + \cdots.$$

Durch Differenzieren erhalten wir

$$e^{f(x)} \cdot f'(x) = b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 + \cdots + n b_n x^{n-1} + \cdots$$

oder, wenn wir auf der linken Seite die Entwicklungen einsetzen,

$$(1 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots)(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots) = b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 + \cdots.$$

Damit gelangen wir zu dem Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= b_1,\\ 2a_2 + a_1 b_1 &= 2b_2,\\ 3a_3 + 2a_2 b_1 + a_1 b_2 &= 3b_3,\\ &\;\;\vdots\\ n a_n + (n-1)\,a_{n-1} b_1 + \cdots + 2a_2 b_{n-2} + a_1 b_{n-1} &= n b_n, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

aus dem sich die unbekannten Koeffizienten b_i sukzessiv bestimmen lassen.

Dieses Verfahren verwenden wir zur Lösung des folgenden Problems (WEIERSTRASS). Wir wollen beweisen, daß die Entwicklung der Funktion

$$g(x) = (1-x)\exp\left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{m-1}}{m-1}\right)$$

mit $1 - \frac{x^m}{m} + \cdots$ beginnt und alle Koeffizienten dem absoluten Betrage nach kleiner als 1 sind.

Schreiben wir $g(x)$ in der Gestalt

$$\begin{aligned} g(x) &= \exp\left(\ln(1-x) + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{m-1}}{m-1}\right)\\ &= \exp\left(-\frac{x^m}{m} - \frac{x^{m+1}}{m+1} - \cdots\right), \end{aligned}$$

so ist der erste Teil der Behauptung klar. Der zweite Teil kann durch Induktion nachgewiesen werden. Alle Koeffizienten b_k mit $k < n$ seien dem absoluten Betrag nach kleiner als 1. Da in diesem Fall

$$a_k = 0 \quad \text{für} \quad k < m \quad \text{und} \quad a_k = -\frac{1}{k} \quad (k a_k = -1) \quad \text{für} \quad k \geqq m$$

gilt, zeigt die n-te der Gleichungen (8), daß auch $|b_n| < 1$ ist.

(Die hier erwähnte Methode wende man zur Übung auf die Beispiele 1 und 2 an.)

4. Die Gleichungen (8) können auch bei einem anderen Problem benutzt werden. *Gegeben* sei die Entwicklung

$$g(x) = 1 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots + b_nx^n + \cdots,$$

gesucht ist

$$f(x) = \ln g(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots.$$

Es ist leicht einzusehen, daß die Koeffizienten a_i und b_k durch dieselben Beziehungen (8) verknüpft sind, nur müssen hier die Koeffizienten a_i bestimmt werden.

5. Man zeige, daß das unendliche Produkt

$$F(x) = \prod_{m=1}^{\infty} (1 + q^mx) = (1 + qx)(1 + q^2x)(1 + q^3x) \cdots \qquad (|q| < 1)$$

für hinreichend kleine x nach Potenzen von x entwickelt werden kann, und bestimme die Koeffizienten dieser Entwicklung.

Für $|x| < 1$ konvergiert das Produkt und hat einen positiven Wert. Durch Logarithmieren finden wir

$$\ln F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \ln(1 + q^mx) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(q^mx - \frac{1}{2} q^2x^{2m} + \cdots\right).$$

Insbesondere konvergiert diese Reihe, wenn alle Glieder in den Klammern durch ihre absoluten Beträge ersetzt werden. Daraus folgt (vgl. Nr. 445), daß $\ln F(x)$ in der Umgebung des Nullpunktes nach Potenzen von x entwickelt werden kann und damit (nach dem Satz auf S. 445) auch der Ausdruck

$$F(x) = e^{\ln F(x)}.$$

Für hinreichend kleine x gilt

$$F(x) = 1 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + \cdots$$

mit noch zu bestimmenden Koeffizienten $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ Am einfachsten ist es, von der offenbar gültigen Relation

$$F(x) = (1 + qx)\, F(qx)$$

auszugehen, die auch mit Hilfe der Entwicklung in der Gestalt

$$\begin{aligned}&(1 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + \cdots\\&= (1 + qx)(1 + b_1qx + b_2q^2x^2 + \cdots + b_nq^nx^n + \cdots)\end{aligned}$$

geschrieben werden kann. Nach dem Satz über die Identität von Potenzreihen folgt hieraus

$$\begin{aligned}b_1q + q &= b_1,\\ b_2q^2 + b_1q^2 &= b_2,\\ &\\ b_nq^n + b_{n-1}q^n &= b_n,\end{aligned}$$

oder

$$b_1 = \frac{q}{1-q}, \qquad b_2 = \frac{b_1q^2}{1-q^2}, \ldots, b_n - \frac{b_{n-1}q^n}{1-q^n}, \ldots$$

und schließlich

$$b_1 = \frac{q}{1-q}, \quad b_2 = \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)}, \ldots, \quad b_n = \frac{q^{n(n+1)/2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}, \ldots$$

6. Wir betrachten die Zerlegung der Funktion $\frac{\sin x}{x}$ in ein unendliches Produkt (Nr. 408) und die Entwicklung in eine unendliche Reihe (vgl. Nr. 404, (12)) und vergleichen ihre Logarithmen (4° aus Nr. 401):

$$\ln\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = \ln\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\cdots\right)$$

oder

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{n^2\pi^2}+\frac{1}{2}\frac{x^4}{n^4\pi^4}+\cdots\right) = \left(\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{120}+\cdots\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{6}-\frac{x_4}{120}+\cdots\right)^2+\cdots.$$

Entwickeln wir beide Seiten nach Potenzen von x (Nr. 445, 446) und vergleichen wir die Koeffizienten, so gelangen wir zu den Gleichungen

$$\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{2\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{1}{180}, \ldots;$$

daraus folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},^{1)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}, \ldots$$

Diese Formeln werden wir übrigens später (Nr. 449) durch andere Überlegungen herleiten.

7. *Läßt sich eine Funktion $f(x)$ im Intervall $(-R, R)$ in eine Potenzreihe* (1) *entwickeln und ist $\bar{x}$ ein beliebiger Punkt dieses Intervalls, so ist in seiner Umgebung die Funktion nach Potenzen von $x - \bar{x}$ entwickelbar.*

Setzen wir nämlich in (1) $x = \bar{x} + y$, so können wir nach dem allgemeinen Satz (wenn wir x und y vertauschen) für $|\bar{x}| + |y| < R$ oder $|y| < R - |\bar{x}|$ zur Entwicklung nach Potenzen von y, d. h. nach Potenzen von $x - \bar{x}$ übergehen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k y^k = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (x-\bar{x})^k.$$

Rechnen wir in der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\bar{x}+y)^n$ die Glieder aus und ordnen wir sie nach Potenzen von y, so können die Koeffizienten dieser Entwicklung leicht bestimmt werden; es ist also

$$A_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{x}^n = f(\bar{x})$$

und allgemein

$$A_k = \sum_{n=k}^{\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}\,a_n\bar{x}^{n-k}$$
$$= \frac{1}{k!}\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\,a_n\bar{x}^{n-k} = \frac{f^{(k)}(\bar{x})}{k!}.$$

Dieses Resultat war wegen 9° aus Nr. 438 zu erwarten.

Nur aus Gründen der Einfachheit entwickelten wir die Ausgangsreihe nach Potenzen von x; es würde sich nichts geändert haben, wenn die Funktion $f(x)$ nach Potenzen von $x - x_0$ entwickelt gewesen wäre.

Wie wir wissen, heißt eine Funktion $f(x)$, die sich in der Umgebung des Punktes $x = x_0$ nach Potenzen von $x - x_0$ entwickeln läßt,[2] *in diesem Punkt analytisch.*

---

[1]) Dieses Resultat ist uns schon bekannt (vgl. (4) aus Nr. 440).
[2]) Diese Entwicklung ist notwendig die Taylorsche Reihe von $f(x)$; vgl. 9° aus Nr. 438.

Wir haben also bewiesen, daß *eine in einem beliebigen Punkt analytische Funktion auch in einer gewissen Umgebung dieses Punktes analytisch ist.*

Diese Behauptung kann auch auf eine Funktion mehrerer Veränderlicher übertragen werden.

8. Als letztes Beispiel betrachten wir die Entwicklung der Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{1-2x\alpha+\alpha^2}} = [1+(\alpha^2-2x\alpha)]^{-1/2}$$

nach Potenzen von α bei beliebigem, aber festem x. Eine solche Entwicklung wird durch den obigen Satz garantiert, sobald $|\alpha|^2 + 2\,|x|\cdot|\alpha| < 1$ ist. Der Koeffizient von α^n $(n \geqq 1)$ ist, wie wir leicht sehen, ein gewisses Polynom $P_n = P_n(x)$ vom Grad n, so daß

$$\frac{1}{\sqrt{1-2x\alpha+\alpha^2}} = 1 + P_1\alpha + P_1\alpha^2 + \cdots + P_n\alpha^n + \cdots \tag{9}$$

ist. Zur Bestimmung dieser Koeffizienten differenzieren wir (9) nach α:

$$\frac{x-\alpha}{\left(\sqrt{1-2x\alpha+\alpha^2}\right)^3} = P_1 + 2P_2\alpha + \cdots + nP_n\alpha^{n-1} + \cdots.$$

Ein Vergleich mit (9) ergibt leicht

$$\begin{aligned}&(1-2x\alpha+\alpha^2)\,(P_1 + 2P_2\alpha + \cdots + nP_n\alpha^{n-1} + \cdots)\\ &= (x-\alpha)\,(1 + P_1\alpha + P_2\alpha^2 + \cdots + P_n\alpha^n + \cdots).\end{aligned}$$

Wir vergleichen nun die Koeffizienten bei gleichen Potenzen von α. Zunächst finden wir

$$P_1 = x, \quad 2P_2 - 2xP_1 = -1 + xP_1, \quad \text{also} \quad P_2 = \frac{3x^2-1}{2}.$$

Allgemein ist

$$(n+1)\,P_{n+1} - 2nxP_n + (n-1)\,P_{n-1} = xP_n - P_{n-1}$$

oder

$$(n+1)\,P_{n+1} - (2n+1)\,xP_n + nP_{n-1} = 0.$$

Kennen wir die ersten beiden Polynome, so können wir mit Hilfe dieser Rekursionsformel die übrigen sukzessiv berechnen.

Es fällt auf, daß P_1 und P_2 mit den ersten beiden Legendreschen Polynomen übereinstimmen und die eben angegebene Formel mit der analogen Beziehung (11) aus Nr. 320 identisch ist, aus der sich die Legendreschen Polynome berechnen lassen. Daraus schließen wir, daß *die Koeffizienten der Entwicklung* (9) *genau die Legendreschen Polynome sind.*

Die von den beiden Veränderlichen α und x abhängige Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{1-2x\alpha+\alpha^2}}$$

heißt die *erzeugende Funktion der Legendreschen Polynome.* Die Entwicklung (9) kann bei der Untersuchung der Eigenschaften dieser Polynome mit Erfolg verwendet werden.

448. Division von Potenzreihen. Ein wichtiges Beispiel für die Anwendung des Satzes von der Substitution einer Reihe in eine andere ist die Division von Potenzreihen.

Das absolute Glied a_0 der Reihe (1) sei von 0 verschieden; wir können dann (1) in der Gestalt

$$a_0\left(1 + \frac{a_1}{a_0}\,x + \frac{a_2}{a_0}\,x^2 + \cdots + \frac{a_n}{a_0}\,x^n + \cdots\right) = a_0(1+y)$$

schreiben, wenn wir

$$y = \frac{a_1}{a_0} x + \frac{a_2}{a_0} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{a_0} x^n + \cdots$$

setzen. Damit ist

$$\frac{1}{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots} = \frac{1}{a_0} \frac{1}{1+y}$$

$$= \frac{1}{a_0} \left(1 - y + y^2 - \cdots + (-1)^m y^m + \cdots\right).$$

Die letzte Reihe spielt die Rolle von (6), wobei hier $\varrho = 1$ ist. Auf Grund des allgemeinen Satzes kann dieser Ausdruck nach Potenzen von x entwickelt werden:

$$\frac{1}{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots} = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \cdots,$$

und zwar mindestens für hinreichend kleine x, z. B. für jene, die der Ungleichung

$$\left|\frac{a_1}{a_0}\right| \cdot |x| + \left|\frac{a_2}{a_0}\right| \cdot |x|^2 + \cdots + \left|\frac{a_n}{a_0}\right| \cdot |x|^n + \cdots < 1$$

genügen.

Wir betrachten eine zweite Potenzreihe

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots$$

mit von 0 verschiedenem Konvergenzradius. Dann kann der Quotient

$$\frac{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + \cdots}{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots}$$

für hinreichend kleine y durch das Produkt

$$(b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + \cdots)(c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \cdots)$$

ersetzt und foglich als Potenzreihe

$$d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \cdots + d_n x^n + \cdots$$

dargestellt werden. Die Koeffizienten dieser Reihe lassen sich am einfachsten mit Hilfe der Methode der unbestimmten Koeffizienten bestimmen, wenn von der Beziehung

$$(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots)(d_0 + d_1 x + \cdots + d_n x^n + \cdots)$$
$$= b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + \cdots$$

ausgegangen wird, in der die Koeffizienten a_i und b_k bekannt sind. Multiplizieren wir die Reihen auf der linken Seite nach der allgemeinen Regel (Nr. 445) und vergleichen wir dann die Koeffizienten bei gleichen Potenzen von x, so gelangen wir zu den unendlich vielen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} a_0 d_0 &= b_0, \\ a_0 d_1 + a_1 d_0 &= b_1, \\ a_0 d_2 + a_1 d_1 + a_2 d_0 &= b_2, \\ &\ \, \vdots \\ a_0 d_n + a_1 d_{n-1} + \cdots + a_{n-1} d_1 + a_n d_0 &= b_n. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Wegen $a_0 \neq 0$ erhalten wir aus der ersten Gleichung sofort $d_0 = \frac{b_0}{a_0}$, die zweite ergibt

$$d_1 = \frac{b_1 - a_1 d_0}{a_0} = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{a_0^2}$$

usw. Sind im allgemeinen Fall schon n Koeffizienten $d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}$ gefunden, so erlaubt die $(n+1)$-te Gleichung, die die einzige Unbekannte d_n enthält, den Wert von d_n zu berechnen. So lassen sich durch die Gleichungen (10) alle Koeffizienten des Quotienten sukzessiv bestimmen, und zwar eindeutig.

Beispiele.

1. Man bestimme den Anfang der Entwicklung des Quotienten

$$\frac{x}{\ln\frac{1}{1-x}} = \frac{x}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} +} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \cdots}.$$

Die Gleichungen (10) nehmen hier die Gestalt

$$\begin{aligned} d_0 &= 1, \\ d_1 + \frac{1}{2} d_0 &= 0, \\ d_2 + \frac{1}{2} d_1 + \frac{1}{3} d_0 &= 0, \\ d_3 + \frac{1}{2} d_2 + \frac{1}{3} d_1 + \frac{1}{4} d_0 &= 0, \\ &\ \, \vdots \end{aligned}$$

an; daraus folgt $d_0 = 1$, $d_1 = -\frac{1}{2}$, $d_2 = -\frac{1}{12}$, $d_3 = -\frac{1}{24}, \ldots$ Also ist

$$\frac{x}{\ln\frac{1}{1-x}} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{24}x^3 - \cdots.$$

2. Man bestimme die Entwicklung von $\tan x$ in der Umgebung des Nullpunktes und benutze dazu die Darstellung von $\tan x$ als Quotient von $\sin x$ und $\cos x$, deren Entwicklungen bekannt sind (vgl. (12), (13) aus Nr. 404).

Die Existenz dieser Entwicklung ist auf Grund des allgemeinen Satzes von vornherein gesichert. Da $\tan x$ eine ungerade Funktion ist, enthält die Entwicklung nur ungerade Potenzen von x. Den Koeffizienten von x^{2n-1} in der gesuchten Entwicklung setzt man zweckmäßig in der

Form $\frac{T_n}{(2n-1)!}$ an. Dann ist

$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n}{(2n-1)!} x^{2n-1} \tag{11}$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Offenbar ist $T_1 = 1$. Zur Bestimmung der übrigen T_n vergleichen wir die Koeffizienten bei x^{2n-1} und erhalten eine Folge von Gleichungen

$$\frac{T_n}{(2n-1)!} - \frac{T_{n-1}}{(2n-3)!}\frac{1}{2!} + \frac{T_{n-2}}{(2n-5)!}\frac{1}{4!} - \cdots = (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}$$
$$(n = 2, 3, \ldots)$$

oder, nach Multiplikation mit $(2n-1)!$,

$$T_n - \binom{2n-1}{2} T_{n-1} + \binom{2n-1}{4} T_{n-2} - \cdots = (-1)^{n-1}.$$

Da alle $\binom{2n-1}{k}$ ganze Zahlen sind, können wir uns sukzessiv davon überzeugen, daß auch die Koeffizienten T_n ganz sind. Die ersten Koeffizienten lauten

$$T_1 = 1, \quad T_2 = 2, \quad T_3 = 16, \quad T_4 = 272, \quad T_5 = 7936,$$

Damit ist

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \cdots.$$

Im nächsten Abschnitt werden wir eine andere Methode zur Berechnung der Koeffizienten dieser Entwicklung und den genauen Anwendungsbereich angeben.

449. Die Bernoullischen Zahlen. Entwicklungen, in denen sie auftreten. Wir untersuchen noch ein Beispiel für die Division, das für die Anwendungen wichtig ist:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \cdots}.$$

Gemäß der allgemeinen Behauptung aus Nr. 448, läßt sich dieser Quotient mindestens für hinreichend kleine x-Werte als Potenzreihe

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} x^n \tag{12}$$

darstellen. Ihren Koeffizienten geben wir die Form $\beta_n/n!$, da dies für ihre sukzessive Berechnung zweckmäßiger ist.

In der Beziehung

$$\left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \cdots\right)\left(1 + \frac{\beta_1}{1!}x + \frac{\beta_2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\beta_n}{n!}x^n + \cdots\right) = 1$$

vergleichen wir die Koeffizienten bei den verschiedenen Potenzen x^n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Wir erhalten dann Gleichungen der Gestalt

$$\frac{\beta_n}{n!\,1!} + \frac{\beta_{n-1}}{(n-1)!\,2!} + \cdots + \frac{\beta_{n-k+1}}{(n-k+1)!\,k!} + \cdots + \frac{\beta_1}{1!\,n!} + \frac{1}{(n+1)!} = 0$$

oder, nach Multiplikation mit $(n+1)!$,

$$\binom{n+1}{1}\beta_n + \binom{n+1}{2}\beta_{n-1} + \cdots + \binom{n+1}{k}\beta_{n+1-k} + \cdots + \binom{n+1}{n}\beta_1 + 1 = 0.$$

Diese Gleichungen können wir *symbolisch* als

$$(\beta+1)^{n+1} - \beta^{n+1} = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

schreiben, wenn wir die Ähnlichkeit mit der binomischen Formel ausnutzen. Nach Ausrechnen der ersten Potenz mit Hilfe der üblichen Regel (β^{n+1} hebt sich fort) müssen die Potenzen β^k hier durch die Koeffizienten β_k ersetzt werden. Damit erhält man zur Bestimmung der Zahlen β_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ das unendliche Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2\beta_1 + 1 &= 0,\\ 3\beta_2 + 3\beta_1 + 1 &= 0,\\ 4\beta_3 + 6\beta_2 + 4\beta_1 + 1 &= 0,\\ 5\beta_4 + 10\beta_3 + 10\beta_2 + 5\beta_1 + 1 &= 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Aus ihm finden wir

$$\beta_1 = -\frac{1}{2},\quad \beta_2 = \frac{1}{6},\quad \beta_3 = 0,\quad \beta_4 = -\frac{1}{30},\quad \beta_5 = 0,$$

$$\beta_6 = \frac{1}{42},\quad \beta_7 = 0,\quad \beta_8 = -\frac{1}{30},\quad \beta_9 = 0,\quad \beta_{10} = \frac{5}{66},$$

$$\beta_{11} = 0,\quad \beta_{12} = -\frac{691}{2730},\quad \beta_{13} = 0,\quad \beta_{14} = \frac{7}{6},\quad \beta_{15} = 0,$$

$$\beta_{16} = -\frac{3617}{510},\quad \beta_{17} = 0,\quad \beta_{18} = \frac{43867}{798},\quad \beta_{19} = 0,\quad \beta_{20} = -\frac{174611}{330},\ \ldots$$

Die Zahlen β_k sind sämtlich rational, denn sie sind durch lineare Gleichungen mit ganzen Koeffizienten definiert. Daß alle β_k mit ungeradem Index (außer β_1) verschwinden, läßt sich leicht allgemein feststellen. Bringen wir nämlich in (12) das Glied $-\frac{x}{2}$ auf die linke Seite, so steht links offenbar die gerade Funktion

$$\frac{x}{e^x-1} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2}\,\frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{x}{2}\,\frac{e^{x/2}+e^{-x/2}}{e^{x/2}-e^{-x/2}} = \frac{x}{2}\coth\frac{x}{2}.$$

In diesem Fall kann ihre Entwicklung keine ungerade Potenzen von x enthalten, was zu beweisen war.

Für die Zahlen β_k mit geradem Index führen wir nun eine gewohntere Schreibweise ein, indem wir

$$\beta_{2n} = (-1)^{n-1} B_n$$

setzen;[1]) dann ist

$$B_1 = \frac{1}{6},\quad B_2 = \frac{1}{30},\quad B_3 = \frac{1}{42},\quad B_4 = \frac{1}{30},\quad B_5 = \frac{5}{66},\quad B_6 = \frac{691}{2730},$$

$$B_7 = \frac{7}{6},\quad B_8 = \frac{3617}{510},\quad B_9 = \frac{43867}{798},\quad B_{10} = \frac{174611}{330},\ \ldots$$

[1]) Wir können uns schnell davon überzeugen, daß alle B_n positiv sind.

Die Zahlen B_n werden die *Bernoullischen Zahlen*[1]) genannt (nach JACOB BERNOULLI[2]), der als erster auf sie stieß, als er Summen von Potenzen aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen mit ebenfalls natürlichen Exponenten untersuchte). Die Bernoullischen Zahlen spielen in vielen Problemen der Analysis eine wichtige Rolle.

Ersetzen wir also aus Gründen der Zweckmäßigkeit noch x durch $2x$, so erhalten wir schließlich die für hinreichend kleine x gültige Entwicklung

$$x \coth x = 1 + \frac{2^2 B_1}{2!} x^2 - \frac{2^4 B_2}{4!} x^4 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!} x^{2n} + \cdots$$
$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!} x^{2n}. \tag{13}$$

Aus Nr. 445, Beispiel 3, kennen wir schon die Entwicklung

$$\pi x \coth \pi x = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} s_{2n} x^{2n},$$

in der mit s_{2n} die Summe der Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2n}}$ bezeichnet ist. Ersetzen wir auch in (13) x durch πx,

$$\pi x \coth \pi x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2\pi)^{2n} B_n}{(2n)!} x^{2n},$$

so finden wir, da beide Ausdrücke identisch sein müssen, die Beziehung

$$B_n = \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} s_{2n},$$

so daß sich alle B_n als *positiv* erweisen. Da für $n \to \infty$ offenbar s_{2n} gegen 1 geht, ist aus dieser Formel ersichtlich, daß die Bernoullischen Zahlen mit wachsendem n unbeschränkt wachsen.[3])

Wir erwähnen noch einige nützliche Ausdrücke für die Summen s_{2n}:

$$s_{2n} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2n}} = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_n,$$

insbesondere (vgl. Nr. 447, Beispiel 6)

$$s_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad s_4 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Wir erinnern nun daran, daß auch für $\pi x \cot \pi x$ eine Entwicklung existiert (vgl. Nr. 445, Beispiel 2), deren Koeffizienten ebenfalls von den s_{2n} abhängen:

$$\pi x \cot \pi x = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} s_{2n} x^{2n}. \tag{14}$$

Ersetzen wir hier πx durch x und s_{2n} durch den obigen Ausdruck, so erhalten wir

$$x \cot x = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!} x^{2n}. \tag{15}$$

Da wir von der Entwicklung (14) wissen, daß sie für $|x| < 1$ richtig ist, muß (15) für $|x| < \pi$ gelten. Nun wächst für $x \to \pm\pi$ die linke Seite von (15) unbeschränkt; folglich kann die Reihe

---

[1]) Die Bernoullischen Zahlen werden in der Literatur unterschiedlich definiert; vgl. K. KNOPP, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 4. Auflage, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg 1947, S. 145f. — *Anm. d. Red.*

[2]) JACOB BERNOULLI, 1654—1705, Schweizer Mathematiker.

[3]) Jedoch wachsen sie, wir wir sahen, nicht monoton, sondern nach einem überaus undurchsichtigen Gesetz.

rechts für $x = \pm\pi$ (und erst recht für $|x| > \pi$) nicht konvergieren. Ihr Konvergrenzradius ist also genau gleich π.[1])

Hieraus folgt unter anderem, daß auch der Konvergenzradius von (13) gleich π ist, während die ursprüngliche Reihe (12) den Konvergenzradius 2π hat.

Mit der Identität

$$\tan x = \cot x - 2 \cot 2x$$

erhalten wir aus (15) wieder eine Entwicklung für $\tan x$:

$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!} B_n x^{2n-1}. \tag{16}$$

Sie stimmt mit der früher erhaltenen überein (vgl. (11)), aber sie wird bevorzugt in dieser Form geschrieben, da die Bernoullischen Zahlen eingehend studiert wurden und für sie umfangreiche Tabellen existieren. Der Konvergenzradius der Reihe für $\tan x$ ist $\frac{\pi}{2}$. Dies wird aus der Art ihrer Herleitung klar.

Mit den Bernoullischen Zahlen sind auch viele andere nützliche Entwicklungen verknüpft. Zum Beispiel erhalten wir durch gliedweise Integration der Reihe

$$\left(\ln \frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(x \cot x - 1) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!} x^{2n-1}$$

(für $|x| < \pi$) die Beziehung

$$\ln \frac{\sin x}{x} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!} \frac{x^{2n}}{2n}.$$

Analog ergibt sich aus (16) durch gliedweise Integration $\left(\text{für } |x| < \frac{\pi}{2}\right)$

$$\ln \cos x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1) B_n}{(2n)!} \frac{x^{2n}}{2n}.$$

Diese Formeln liefern leicht die Entwicklung für $\ln \frac{\tan x}{x}$. Überhaupt sind diese Reihen sehr nützlich für die Aufstellung von Tafeln für die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen.

Wir kommen zum Schluß auf die in Nr. 425, Beispiel 6, betrachtete divergente Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)^k$$

zurück. In Nr. 425 zeigten wir, daß diese Reihe mit Hilfe der Cesàroschen Methode k-ter Ordnung summierbar ist, aber ihre „verallgemeinerte Summe" (wir bezeichnen sie mit $A^{(k)}$) hatten wir nicht bestimmt; wir wollen dies jetzt durchführen. Übrigens werden wir die Reihe mit Hilfe der Abel-Poissonschen Methode summieren, was, wir wie wissen (vgl. Nr. 424, 2), zu demselben Resultat führen muß.

---

[1]) Übrigens lassen sich alle Fragen, die mit der Bestimmung des Konvergenzradius einer Potenzreihe verknüpft sind, mit Hilfe des Satzes von Cauchy-Hadamard (Nr. 380) beantworten. Zum Beispiel gilt für die Reihe (15)

$$\varrho_{2n-1} = 0, \qquad \varrho_{2n} = \sqrt[2n]{\frac{2^{2n} B_n}{(2n)!}} = \sqrt[2n]{\frac{2^{2n}}{(2n)!} \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} s_{2n}} = \frac{1}{\pi} \sqrt[2n]{2 s_{2n}},$$

$$\varrho = \overline{\lim_{m\to\infty}} \varrho_m = \frac{1}{\pi}, \qquad R = \frac{1}{\varrho} = \pi.$$

Für $t > 0$ ist $0 < e^{-t} < 1$, und durch Summierung erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-(n+1)t} = \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}} = \frac{1}{e^t+1} = \frac{1}{e^t-1} - \frac{2}{e^{2t}-1}$$
$$= \frac{1}{t}\frac{t}{e^t-1} - \frac{1}{t}\frac{2t}{e^{2t}-1}.$$

Mit Hilfe von (12) finden wir für hinreichend kleine t

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-(n+1)t} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2^{2n}-1)\beta_n}{n!}t^{n-1}.$$

Wir differenzieren nun beide Reihen k-mal gliedweise. Bei der Potenzreihe auf der rechten Seite stützen wir uns auf Satz 8° aus Nr. 438; er dient uns als Grundlage für die Differentiation der Reihe auf der linken Seite, die auch in eine Potenzreihe übergeht, wenn wir die Veränderliche $x = e^{-t}$ einführen. Das Resultat lautet

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (n+1)^k e^{-(n+1)t} = (-1)^{k+1}\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{(2^{2n}-1)\beta_n}{n!}(n-1)\cdots(n-k)\,t^{n-k-1}.$$

Lassen wir nun t gegen 0 (also x gegen 1) streben, so erhalten wir auf der linken Seite das gesuchte $A^{(k)}$ und rechts das absolute Glied

$$(-1)^{k+1}\frac{(2^{2(k+1)}-1)\beta_{k+1}}{k+1}.$$

Beachten wir, daß die Zahlen β_i mit ungeradem Index >1 alle verschwinden und mit geradem Index auf die Bernoullischen Zahlen führen, so gelangen wir schließlich zu den Formeln

$$A^{(2m)} = 0, \qquad A^{(2m-1)} = (-1)^{m-1}\frac{2^{4m}-1}{2m}B_m \qquad (m \geqq 1).$$

450. Das Lösen von Gleichungen mit Hilfe von Reihen. Wir kehren zu dem Problem der Bestimmung der Veränderlichen y als Funktion von x aus der Gleichung

$$F(x, y) = 0 \tag{17}$$

(vgl. Nr. 206 und 442) zurück, aber in anderer Aufgabenstellung:

Wir setzen voraus, daß sich die Funktion $F(x, y)$ in der Umgebung des Punktes (x_0, y_0) in eine Reihe nach Potenzen von $x - x_0$ und $y - y_0$ entwickeln lasse, deren konstantes Glied gleich 0 und deren Koeffizient von $y - y_0$ von 0 verschieden ist.[1]) *Dann läßt sich auch die aus (17) zu bestimmende Funktion $y = y(x)$ in der Umgebung des genannten Punktes in eine Reihe nach Potenzen von $x - x_0$ entwickeln.*

Mit anderen Worten, *wenn die auf der linken Seite der Gleichung (17) stehende Funktion F im Punkt (x_0, y_0) analytisch ist, so erweist sich auch die aus dieser Gleichung zu bestimmende Funktion $y = y(x)$ im Punkt x_0 als analytisch.* Es ist also hier nicht nur von der Existenz oder der Berechnung des Wertes der gesuchten Funktion die Rede, sondern auch von ihrer *Analytizität.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $x_0 = y_0 = 0$ annehmen; dies läuft darauf hinaus, daß wir als neue Veränderliche die Differenzen $x - x_0$ und $y - y_0$ wählen, aber die alten Bezeichnungen beibehalten. Bringen wir

[1]) Dies entspricht genau der üblichen Forderung

$$F(x_0, y_0) = 0, \qquad F_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

das Glied mit der ersten Potenz von y (in der Entwicklung von F) auf die andere Seite und dividieren wir durch den Koeffizienten von y, so können wir die gegebene Gleichung in der Form

$$y = c_{10}x + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2 + c_{30}x^3 + c_{21}x^2y + c_{12}xy^2 + c_{03}y^3 + \cdots \tag{18}$$

schreiben. Die Reihe für die Funktion y von x suchen wir in der Gestalt

$$y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots. \tag{19}$$

Zunächst ist folgendes klar: Existiert in der Umgebung des Nullpunkts eine solche Entwicklung, dann werden ihre Koeffizienten durch die Beziehung (18) eindeutig bestimmt.

Ersetzen wir nämlich in ihr y (unter den angegebenen Voraussetzungen) durch die Entwicklung (19), so erhalten wir

$$\begin{aligned} a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots = {} & c_{10}x + c_{20}x^2 + c_{11}x(a_1x + a_2x^2 + \cdots) \\ & + c_{02}(a_1x + a_2x^2 + \cdots)^2 + c_{30}x^3 \\ & + c_{21}x^2(a_1x + \cdots) + c_{12}x(a_1x + \cdots)^2 \\ & + c_{03}(a_1x + \cdots)^3 + \cdots. \end{aligned} \tag{18a}$$

Nach dem Satz auf S. 445 können wir für hinreichend kleine x rechts alle Potenzierungen ausführen und Glieder mit gleichen Potenzen von x zusammenfassen. Verwenden wir danach den Identitätssatz für Potenzreihen und setzen wir die Koeffizienten bei gleichen Potenzen von x links und rechts gleich, so gelangen wir zu dem (unendlichen) Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= c_{10}, \\ a_2 &= c_{20} + c_{11}a_1 + c_{02}a_1^2, \\ a_3 &= c_{11}a_2 + 2c_{02}a_1a_2 + c_{30} + c_{21}a_1 + c_{12}a_1^2 + c_{03}a_1^3, \\ & \cdots \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

für die gesuchten Koeffizienten $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ Da in (18) alle Glieder auf der rechten Seite, die y enthalten, mindestens die Dimension 2 besitzen (d. h., sie enthalten entweder höhere Potenzen von y oder y in der ersten Potenz, aber multipliziert mit einer beliebigen Potenz $\geqq 1$ von x), wird in der n-ten Gleichung des Systems (20) der Koeffizient a_n durch die Koeffizienten mit kleinerem Index $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ (und bekannte Koeffizienten c_{ik}) ausgedrückt. Damit ist die Möglichkeit gegeben, die Koeffizienten a_j sukzessiv zu bestimmen:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= c_{10}, \\ a_2 &= c_{20} + c_{11}c_{10} + c_{02}c_{10}^2, \\ a_3 &= (c_{11} + 2c_{02}c_{10})(c_{20} + c_{11}c_{10} + c_{02}c_{10}^2) \\ &\quad + c_{30} + c_{21}c_{10} + c_{12}c_{10}^2 + c_{03}c_{10}^3, \\ & \cdots \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

In diesem Zusammenhang machen wir eine für das Folgende wichtige Bemerkung. Da bei der Auflösung der Klammern in (18a) zwischen den a_i und den c_{ik} keine anderen Operationen als Addition und Multiplikation vorgenommen werden, treten auf den rechten Seiten von (20) diese Koeffizienten als Polynome mit bekannten positiven (sogar natürlichen) Koeffizienten auf. Damit sind also auch die rechten Seiten von (21) bezüglich der c_{ik} Polynome mit ebenfalls positiven Koeffizienten.

Wir bilden nun die Reihe (19) mit den aus diesen Formeln berechneten Koeffizienten a_j. Diese erfüllen formal die Beziehung (18a). Wenn wir die Konvergenz dieser Reihe für hinreichend kleine x bewiesen hätten, so brauchten wir nicht mehr zu zeigen, daß die durch sie dargestellte Funktion die Bedingung (18) erfüllt, denn in diesem Fall wären die Gleichungen (20), denen die Koeffizienten dieser Reihe genügen, völlig gleichwertig mit (18a). *Es kommt also nur darauf an, zu beweisen, daß die Reihe* (19), *deren Koeffizienten durch* (21) *bestimmt werden, in einer gewissen Umgebung von* $x = 0$ *konvergiert.*

Wir betrachten zusammen mit (18) die analoge Beziehung

$$y = \gamma_{10}x + \gamma_{20}x^2 + \gamma_{11}xy + \gamma_{02}y^2 + \gamma_{30}x^3 + \gamma_{21}x^2y + \gamma_{12}xy^2 + \gamma_{03}y^3 + \cdots, \tag{18*}$$

deren Koeffizienten γ_{ik} alle positiv sind und außerdem die Ungleichung

$$|c_{ik}| \geqq \gamma_{ik} \tag{22}$$

erfüllen. Für sie konstruieren wir nach dem formal gleichen Bildungsgesetz analog zu (19) die Reihe

$$y = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \cdots + \alpha_n x^n + \cdots, \tag{19*}$$

wobei also die zu (21) ähnlichen Koeffizienten durch

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \gamma_{10},\\ \alpha_2 &= \gamma_{20} + \gamma_{11}\gamma_{10} + \gamma_{02}\gamma_{10}^2,\\ \alpha_3 &= (\gamma_{11} + 2\gamma_{02}\gamma_{10})(\gamma_{20} + \gamma_{11}\gamma_{10} + \gamma_{02}\gamma_{10}^2)\\ &\quad + \gamma_{30} + \gamma_{21}\gamma_{10} + \gamma_{12}\gamma_{10}^2 + \gamma_{03}\gamma_{10}^3, \end{aligned}\right\} \tag{21*}$$

bestimmt werden. Nach dem oben Gesagten sind die α_j auf Grund ihres Bildungsgesetzes positiv. Außerdem sehen wir, indem wir sie mit (21) vergleichen und (22) beachten, daß auch (für alle n)

$$|a_n| \leqq \alpha_n \tag{23}$$

ist. Wenn wir die positiven Koeffizienten γ_{ik} so finden könnten, daß sie nicht nur die Bedingungen (22) erfüllen, sondern daß auch die entsprechend konstruierte Reihe (19*) einen von 0 verschiedenen Konvergenzradius besitzt, so wäre dies wegen (23) auch für die Reihe (19) der Fall, und der Satz wäre bewiesen. Wir beschäftigen uns nun mit der Wahl der Zahlen γ_{ik}.

Es existieren positive Zahlen r und ϱ derart, daß die Doppelreihe

$$|c_{10}|\, r + |c_{20}|\, r^2 + |c_{11}|\, r\varrho + |c_{02}|\, \varrho^2 + \cdots$$

konvergiert, so daß also ihr allgemeines Glied $|c_{ik}|\, r^i\varrho^k$ gegen 0 strebt und folglich beschränkt ist: $|c_{ik}|\, r^i\varrho^k \leqq M$; daraus folgt $|c_{ik}| \leqq \dfrac{M}{r^i\varrho^k}$. Wir setzen $\gamma_{ik} = \dfrac{M}{r^i\varrho^k}$ und betrachten, entsprechend dem oben Gesagten, die Beziehung

$$y = \frac{M}{r} x + \frac{M}{r^2} x^2 + \frac{M}{r\varrho} xy + \frac{M}{\varrho^2} y^2 + \cdots$$
$$= \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{y}{\varrho}\right)} - M - \frac{M}{\varrho} y$$

und schließlich

$$y^2 - \frac{\varrho^2}{\varrho + M} y + \frac{M\varrho^2}{\varrho + M} \frac{x}{r - x} = 0.$$

Hier haben wir die Möglichkeit, tatsächlich eine Funktion $y = y(x)$ anzugeben, die die Gleichung erfüllt, insbesondere jenen Zweig, der für $x = 0$ verschwindet. Lösen wir die quadratische Gleichung (für $|x| < r$), so erhalten wir

$$y = \frac{\varrho^2}{2(\varrho + M)} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4M(\varrho + M)}{\varrho^2} \frac{x}{r - x}}\right].$$ [1]

Führen wir zur Vereinfachung die Beziehung

$$r_1 = r \left(\frac{\varrho}{\varrho + 2M}\right)^2 \tag{24}$$

ein, so erhält der Ausdruck für y die Gestalt

$$y = \frac{\varrho^2}{2(\varrho + M)} \left[1 - \left(1 - \frac{x}{r_1}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{x}{r}\right)^{-1/2}\right],$$

woraus sofort klar wird, daß er mit Hilfe der binomischen Reihe für $|x| < r_1 < r$ nach Potenzen von x entwickelt werden kann. Da die erwähnte Entwicklung mit (19*) identisch sein muß, ist damit die Konvergenz der Reihe (19*) und folglich auch der Reihe (19), zumindest für $|x| < r_1$, bewiesen.

Wir bemerken, daß dieser Satz nur die Entwicklung von y nach Potenzen von x (oder im allgemeinen Fall nach Potenzen von $x - x_0$) in der Nähe von $x = 0$ (bzw. $x = x_0$) gewährleistet. Die genaue Bestimmung des Konvergenzintervalls dieser Entwicklung erfordert eine besondere Untersuchung.

Auf ähnliche Art kann der allgemeine Fall behandelt werden, bei dem sich das Funktionensystem aus einem Gleichungssystem bestimmen läßt.

Die hier verwendete bemerkenswerte Methode geht auf Cauchy zurück. Sie besteht im wesentlichen in der Ersetzung gegebener Potenzreihen mit einer oder mehreren Veränderlichen durch Majorantenreihen, die sich für die Untersuchung besser eignen und deren Koeffizienten alle positiv und größer als die absoluten Beträge der entsprechenden Koeffizienten der gegebenen Reihe sind. Deshalb trägt diese Methode den Namen *Methode der Majorantenreihen.* Sie wird in der Theorie der Differentialgleichungen oft benutzt.

451. Umkehrung von Potenzreihen. Als Spezialfall des eben gelösten Problems untersuchen wir nun die Frage nach der Umkehrung von Potenzreihen. Die Funktion

[1] Hier muß vor der Wurzel das Minuszeichen stehen, damit für $x = 0$ auch $y = 0$ ist.

$y = f(x)$ werde in einer gewissen Umgebung des Punktes $x = x_0$ durch eine Reihe dargestellt, die nach Potenzen von $x - x_0$ geordnet ist. Wir bezeichnen das absolute Glied, das den Wert von y an der Stelle $x = x_0$ angibt, mit y_0 und schreiben die Entwicklung in der Gestalt

$$y - y_0 = a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots.$$

Für $a_1 \neq 0$ kann x in der Umgebung von $y = y_0$ als Funktion von y bestimmt werden, die sich ihrerseits wieder in eine Reihe nach Potenzen von $y - y_0$ entwickeln läßt; d. h., ist y im Punkt x_0 eine analytische Funktion von x, so ist (unter den gemachten Voraussetzungen) auch die Umkehrfunktion in dem entsprechenden Punkt y_0 analytisch.

Dies folgt unmittelbar aus dem bewiesenen Satz. Setzen wir zur Vereinfachung $x_0 = y_0 = 0$ und schreiben wir die Beziehung (18) zwischen x und y in der Form

$$x = by + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \cdots,$$ [1])

so können die Koeffizienten der gesuchten Entwicklung

$$x = b_1y + b_2y^2 + b_3y^3 + \cdots$$

sukzessiv aus den folgenden Gleichungen bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
b_1 &= b, \\
b_2 &= c_2b_1^2, \\
b_3 &= 2c_2b_1b_2 + c_3b_1^3, \\
b_4 &= c_2(2b_1b_3 + b_2^2) + 3c_3b_1^2b_2 + c_4b_1^4, \\
b_5 &= 2c_2(b_1b_4 + b_2b_3) + 3c_3(b_1^2b_3 + b_1b_2^2) + 4c_4b_1^3b_2 + c_5b_1^5,
\end{aligned}$$

Zum Beispiel können wir aus der bekannten Entwicklung des Sinus

$$y = \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots$$

die Entwicklung

$$x = \arcsin y = y + b_3y^3 + b_5y^5 + \cdots$$

herleiten (wir brauchen nur die ungeraden Potenzen von y aufzuschreiben; denn da die Funktion $y = \sin x$ ungerade ist, muß offenbar auch die Umkehrfunktion eine ungerade Funktion sein). Die Gleichungen für die Koeffizienten b_i haben hier die Form

$$b_1 = 1, \quad b_3 = \frac{1}{6}b_1^3 = \frac{1}{6}, \quad b_5 = \frac{1}{2}b_1^2b_3 - \frac{1}{120}b_1^5 = \frac{3}{40}, \ldots$$

Wir geben noch ein zweites Beispiel an. Es sei

$$y = e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

woraus

$$x = \ln(1 + y) = b_1y + b_2y^2 + b_3y^3 + \cdots$$

---

[1]) Wir beachten, daß (im Vergleich zu Nr. 450) x und y ihre Rollen vertauscht haben.

folgt. Die Koeffizienten b_i lassen sich sukzessiv bestimmen:

$$b_1 = 1, \quad b_2 = -\frac{1}{2} b_1^2 = -\frac{1}{2}, \quad b_3 = -b_1 b_2 - \frac{1}{6} b_1^3 = \frac{1}{3},$$

$$b_4 = -\frac{1}{2}(2b_1 b_3 + b_2^2) - \frac{1}{2} b_1^2 b_2 - \frac{1}{24} b_1^4 = -\frac{1}{4},$$

$$b_5 = -(b_1 b_4 + b_2 b_3) - \frac{1}{2}(b_1^2 b_3 + b_1 b_2^2) - \frac{1}{6} b_1^3 b_2 - \frac{1}{120} b_1^5 = \frac{1}{5},$$

Also ist

$$\ln(1+y) = y - \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{4} y^4 + \frac{1}{5} y^5 - \cdots.$$

Der Variationsbereich von y, in dem die Umkehrfunktion existiert und ihre Entwicklung tatsächlich möglich ist, kann aus den Überlegungen von Nr. 450 errechnet werden, erweist sich aber oft als zu eng. Wenn wir etwa in dem ersten Beispiel die Gleichung zwischen x und y in der Form (18) schreiben,

$$x = y + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + \cdots,$$

und x und y so beschränken, daß sie die Ungleichungen $|x| \leqq \frac{\pi}{2}$, $|y| \leqq 1$ erfülllen, d. h. $\varrho = \frac{\pi}{2}$, $r = 1$ wählen, so erhalten wir $M = 1$ und nach Formel (24)

$$r_1 = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2} \frac{\pi}{2}\right)^2 < 0,2,$$

wogegen der wirkliche Variationsbereich für das erhaltene Resultat das Intervall $[-1, 1]$ ist.

Bemerkung. Es ist sehr nützlich, sich über die Bedeutung der Bedingung $a_1 \neq 0$ klarzuwerden, unter der allein die oben formulierte Behauptung richtig ist. Es sei $a_1 = 0$, aber $a_2 \neq 0$, etwa $a_2 > 0$; in der Nähe von $x = 0$ (wir setzen zur Vereinfachung $x_0 = y_0 = 0$) gilt dann

$$y = a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots,$$

so daß dort $y > 0$ ist. Bezeichnen wir mit $y^{1/2}$ den positiven Wert der Wurzel, so sehen wir, daß

$$\sqrt{y} = \sqrt{a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots} = \pm x \sqrt{a_2} \sqrt{1 + \frac{a_3}{a_2} x + \frac{a_4}{a_2} x^2 + \cdots}$$

gilt, wobei das positive oder das negative Vorzeichen gewählt wird, je nachdem, ob x positiv oder negativ ist. Nach dem Satz aus Nr. 450 kann die letzte Wurzel in der Nähe von $x = 0$ als Potenzreihe mit dem absoluten Glied 1 dargestellt werden. Wir erhalten also schließlich, wenn $\pm$ nach links gebracht wird,

$$\pm\sqrt{y} = a_1' x + a_2' x^2 + \cdots,$$

wobei $a_1' = \sqrt{a_2} > 0$ ist. Auf Grund des Satzes von S. 458 (hier spielt die Größe $\pm\sqrt{y}$ die Rolle von y) erhalten wir zwei verschiedene Entwicklungen für x, je nach der Wahl des Vorzeichens:

$$x_1 = b_1 y^{1/2} + b_2 y + b_3 y^{3/2} + b_4 y^2 + \cdots > 0 \qquad \left(b_1 = \frac{1}{\sqrt{a_2}} > 0\right)$$

und

$$x_2 = -b_1 y^{1/2} + b_2 y - b_3 y^{3/2} + b_4 y^2 - \cdots < 0.$$

Wir betonen, daß die Umkehrfunktion *zweideutig* und daß jeder ihrer Äste nicht nach ganzen, sondern nach *gebrochenen* Potenzen der Veränderlichen y entwickelt ist.

452. Die Lagrangesche Reihe. Wir wenden den Satz aus Nr. 450 auf die spezielle Gleichung

$$y = a + x\varphi(y) \tag{25}$$

an, wobei die Funktion $\varphi(y)$ im Punkt $y = a$ analytisch sein soll. Dann ist, wie wir wissen, für hinreichend kleine Werte von x die durch (25) definierte Funktion $y(x)$ im Punkt $x = 0$ analytisch und in diesem Punkt gleich a.

Es sei ferner $u = f(y)$ eine im Punkt $y = a$ analytische Funktion. Wenn wir hier statt y die erwähnte Funktion von x einsetzen, so ist u eine Funktion von x, die auch für $x = 0$ analytisch ist. Wir stellen uns nun die Aufgabe, die Entwicklung von u nach Potenzen von x, also Ausdrücke für die Koeffizienten dieser Entwicklung zu finden.

Wir bemerken zunächst, daß sich y bei veränderlichem a aus (25) als Funktion der beiden Veränderlichen x und a schreiben läßt, die im Punkt $(0, a)$ analytisch ist.[1] Dann ist auch die Veränderliche u eine Funktion von x und a.

Differenzieren wir (25) nach x bzw. a, so finden wir

$$[1 - x\varphi'(y)]\frac{\partial y}{\partial x} = \varphi(y), \qquad [1 - x\varphi'(y)]\frac{\partial y}{\partial a} = 1;$$

daraus ergibt sich offenbar

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \varphi(y)\frac{\partial y}{\partial a}, \tag{26}$$

und für $u = f(y)$ folgt allgemein

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(y)\frac{\partial u}{\partial a}. \tag{26a}$$

Andererseits gilt für jede Funktion $F(y)$, für die eine Ableitung nach y existiert,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[F(y)\frac{\partial u}{\partial a}\right] = \frac{\partial}{\partial a}\left[F(y)\frac{\partial u}{\partial x}\right]. \tag{27}$$

Hiervon können wir uns unmittelbar durch Differenzieren und Verwendung der Identitäten (26) und (26a) überzeugen.

All diese Beziehungen benötigen wir zum Beweis der für das Weitere wichtigen Formel

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\left[\varphi^n(y)\frac{\partial u}{\partial a}\right]. \tag{28}$$

Für $n = 1$ führt sie auf (26a). Wir nehmen nun an, sie sei für einen gewissen Wert $n \geqq 1$ richtig, und beweisen ihre Gültigkeit für die $(n + 1)$-te Ableitung. Differenzieren wir (28) nach x und vertauschen wir rechts die Reihenfolge der Differentiation (vgl. Nr. 190), so erhalten wir

$$\frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi^n(y)\frac{\partial u}{\partial a}\right].$$

Wegen (27) und (26a) gilt

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi^n(y)\frac{\partial u}{\partial a}\right] = \frac{\partial}{\partial a}\left[\varphi^n(y)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{\partial u}{\partial a}\left[\varphi^{n+1}(y)\frac{\partial u}{\partial a}\right].$$

---

[1]) Diese Behauptung setzt voraus, daß sich der Satz aus Nr. 450 auf den Fall übertragen läßt, daß in der Gleichung drei Veränderliche auftreten und eine von ihnen als Funktion der beiden übrigen bestimmt werden kann.

Setzen wir dies in die vorhergehende Beziehung ein, so finden wir

$$\frac{\partial^{n+1}u}{\partial x^{n+1}} = \frac{\partial^n}{\partial a^n}\left[\varphi^{n+1}(y)\,\frac{\partial u}{\partial a}\right].$$

Damit ist (28) durch vollständige Induktion bewiesen.

Wir wenden uns nun schließlich der uns interessierenden Entwicklung der Funktion u nach Potenzen von x zu. Bei konstantem a hat sie notwendig die Form einer Taylorschen Entwicklung (vgl. 9° aus Nr. 438)

$$u = u_0 + x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + \frac{x^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 + \cdots + \frac{x^n}{n!}\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)_0 + \cdots,$$

wobei der Index 0 andeutet, daß die Funktion und ihre Ableitungen an der Stelle $x = 0$ genommen sind. Ferner wird y bei $x = 0$ gleich a, also $u_0 = f(a)$, und mit (28) folgt

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)_0 = \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}a^{n-1}}\,[\varphi^n(a)\,f'(a)].$$

Setzen wir diese Werte für die Koeffizienten ein, so gelangen wir zu der Entwicklung

$$f(y) = f(a) + x\varphi(a)\,f'(a) + \frac{x^2}{2!}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\,[\varphi^2(a)\,f'(a)] + \cdots + \frac{x^n}{n!}\,\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}a^{n-1}}\,[\varphi^n(a)\,f'(a)] + \cdots, \tag{29}$$

die unter dem Namen *Lagrangesche Reihe* bekannt ist. Sie ist deshalb bemerkenswert, weil ihre Koeffizienten explizite Funktionen von a sind.

Ist insbesondere $f(y) \equiv y$, so ergibt sich

$$y = a + x\varphi(a) + \frac{x^2}{2!}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\,[\varphi^2(a)] + \cdots + \frac{x^n}{n!}\,\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}a^{n-1}}\,[\varphi^n(a)] + \cdots. \tag{29a}$$

Zwischen dem hier behandelten Problem und dem Problem der Umkehrung von Potenzreihen besteht ein enger Zusammenhang. Schreiben wir unter der Voraussetzung $\varphi(a) \neq 0$ die Gleichung (25) in der Form

$$x = \frac{y - a}{\varphi(y)} = b_0 + b_1(y - a) + b_2(y - a)^2 + \cdots,$$

so ist das Lagrangesche Problem gleichbedeutend mit der Umkehrung dieser Potenzreihe in $y - a$. Wenn umgekehrt die Aufgabe gestellt ist, die Potenzreihe

$$y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots \qquad (a_1 \neq 0)$$

umzukehren, so geben wir dieser Beziehung zunächst die Gestalt

$$y = x(a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots)$$

und bezeichnen die Summe der Reihe in den Klammern mit $\psi(x)$. Das liefert eine Gleichung vom Typ (25)

$$x = y\,\frac{1}{\psi(x)};$$

hier ist $a = 0$ und $\varphi(x) = \dfrac{1}{\psi(x)}$, und außerdem sind x und y vertauscht. Die letzte Bemerkung ist wichtig, da sie erlaubt, sofort die allgemeine Formel für die Umkehrung gemäß (29a) anzugeben:

$$x = y\,\frac{1}{\psi(0)} + \frac{y^2}{2!}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\frac{1}{\psi^2(x)}\right]_{x=0} + \cdots + \frac{y^n}{n!}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\,\frac{1}{\psi^n(x)}\right]_{x=0} + \cdots \tag{30}$$

Beispiele.

1. Wir beginnen mit der Anwendung der Formel (30). Gegeben sei die Gleichung

$$y = x(a + x) \qquad (a \neq 0) \qquad \text{oder} \quad x = y\,\frac{1}{a + x}.$$

Wegen

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\,\frac{1}{(a+x)^n} = \frac{(-1)^{n-1}\,n(n+1)\cdots(2n-2)}{(a+x)^{2n-1}}$$

gelangen wir zu der Entwicklung

$$x = \frac{y}{a} - \frac{y^2}{a^3} + \cdots + (-1)^{n-1}\,\frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,n!}\,\frac{y^n}{a^{2n-1}} + \cdots.$$

Dieselbe Entwicklung finden wir, wenn wir die quadratische Gleichung in x lösen, indem wir jenen Wert wählen, der mit y verschwindet.

2. Wir gehen von einer Gleichung vom Typ (25) aus:

$$y = a + \frac{x}{y}.$$

Hier ist $\varphi(y) = \frac{1}{y}$. Setzen wir $f(y) = y^{-k}$, so finden wir nach der Lagrangeschen Reihe (29)

$$\frac{1}{y^k} = \frac{1}{a^k} - x\,\frac{k}{a^{k+2}} + \frac{x^2}{2!}\,\frac{k(k+3)}{a^{k+4}} - \frac{x^3}{3!}\,\frac{k(k+4)\,(k+5)}{a^{k+6}}$$
$$+ \frac{x^4}{4!}\,\frac{k(k+5)\,(k+6)\,(k+7)}{a^{k+8}} - \cdots.$$

Da die gegebene Gleichung auf die quadratische Gleichung

$$y^2 - ay - x = 0$$

führt, ist offenbar

$$y = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + x}.\ ^{1)}$$

Ist zum Beispiel $a = 2$, so ergibt sich nach Multiplikation mit 2^k die Entwicklung

$$\left(\frac{2}{1+\sqrt{1+x}}\right)^k = 1 - k\,\frac{x}{4} + \frac{k(k+3)}{2!}\left(\frac{x}{4}\right)^2 - \frac{k(k+4)\,(k+5)}{3!}\left(\frac{x}{4}\right)^3 + \cdots.$$

3. In der theoretischen Astronomie spielt die *Keplersche*[2]) *Gleichung*

$$E = M + \varepsilon \cdot \sin E$$

eine wichtige Rolle; dabei ist E die *exzentrische Anomalie* des Planeten, M seine *mittlere Anomalie* und ε die *Exzentrizität* der Planetenbahn. Mit Hilfe der Lagrangeschen Reihe (29a) können wir E nach Potenzen der Exzentrizität entwickeln, wobei die Koeffizienten Funktionen von M sind:

$$E = M + \varepsilon \cdot \sin M + \frac{\varepsilon^2}{2!}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}M}\sin^2 M + \cdots + \frac{\varepsilon^n}{n!}\,\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}M^{n-1}}\sin^n M + \cdots.$$

Hier ist es wichtig, den genauen Wert des Konvergenzradius zu kennen: Laplace[3]) stellte als erster fest, daß diese Reihe für $\varepsilon < 0{,}6627\ldots$ konvergiert.

---

[1]) Vor der Wurzel muß das positive Vorzeichen stehen, denn für $x = 0$ muß $y = a$ sein.

[2]) Johannes Kepler, 1571—1630, deutscher Naturforscher und Astronom.

[3]) Pierre Simon Laplace, 1749—1827, französischer Mathematiker.

4. Zum Schluß betrachten wir die Gleichung

$$y = x + \frac{\alpha}{2}(y^2 - 1).$$ [1]

Ihre Lösung, die für $\alpha = 0$ gleich x ist, lautet

$$y = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}}{\alpha} = \frac{2x - \alpha}{1 + \sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}}.$$

Die Entwicklung dieser Funktion nach Potenzen von α hat die Gestalt

$$y = x + \frac{\alpha}{2}(x^2 - 1) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \frac{d(x^2-1)^2}{dx} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n \frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}} +$$

Differenzieren wir beide Seiten dieser Beziehung nach x (wobei wir aus dem analytischen Charakter von y als Funktion der beiden Veränderlichen α und x schließen können, daß die *gliedweise* Differentiation der Reihe zulässig ist), so erhalten wir

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}} = 1 + \alpha \frac{1}{2} \frac{d(x^2-1)}{dx} + \alpha^2 \frac{1}{2!\,2^2} \frac{d^2(x^2-1)^2}{dx^2} + \cdots$$
$$+ \alpha^n \frac{1}{n!\,2^n} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} + \cdots.$$

Ihre Koeffizienten sind, wie wir in diesem Fall *unmittelbar* sehen (vgl. Nr. 447, Beispiel 8), die Legendreschen Polynome

$$P_n = \frac{1}{n!\,2^n} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

§ 5. Elementare Funktionen einer komplexen Veränderlichen

453. Komplexe Zahlen. Obwohl dieses Buch an sich den reellen Veränderlichen und reellen Funktionen gewidmet ist, wollen wir uns doch in diesem Paragraphen mit den elementaren *Funktionen einer komplexen Veränderlichen* beschäftigen. Die Untersuchung dieser Fragen schließt an die Theorie der Potenzreihen an, da sie ihrerseits gewisse prinzipielle Aspekte hervorhebt. Außerdem ist die Bekanntschaft mit den Funktionen einer komplexen Veränderlichen für die reelle Analysis auch in rechnerischer Hinsicht nützlich (vgl. die Beispiele in Nr. 461 und das Kapitel XIX in Band III, das den Fourierreihen gewidmet ist).

Wir setzen voraus, daß die komplexen Zahlen schon aus der Algebra bekannt sind, und beschränken uns deshalb auf einen kurzen Überblick über die grundlegenden Eigenschaften dieser Zahlen.

Eine *komplexe Zahl* z hat die Form $z = x + iy$, wobei $i = \sqrt{-1}$ die *imaginäre Einheit* ist und x und y reelle Zahlen sind; x heißt der *Realteil* und y der *Imaginärteil* der Zahl z, in Zeichen

$$x = \operatorname{Re} z, \qquad y = \operatorname{Im} z.$$

Zwei komplexe Zahlen $x + iy$ und $x' + iy'$ sind dann (und nur dann) gleich, wenn jeweils $x = x'$ und $y = y'$ ist.[2] *Addition* und *Multiplikation* komplexer Zahlen wird nach folgenden

---

[1]) Hier spielt x die Rolle von a und α die Rolle von x.

[2]) Mit anderen Worten: Auch hier läßt sich die Gleichung auf eine einfache Identität zurückführen (vgl. Nr. 2).

Formeln durchgeführt:

$$(x + \mathrm{i}y) + (x' + \mathrm{i}y') = (x + x') + \mathrm{i}(y + y'),$$
$$(x + \mathrm{i}y)\,(x' + \mathrm{i}y') = (xx' - yy') + \mathrm{i}(xy' + x'y).$$

Auch läßt sich leicht nachprüfen, daß für die *Differenz* bzw. den *Quotienten*

$$(x + \mathrm{i}y) - (x' + \mathrm{i}y') = (x - x') + \mathrm{i}(y - y'),$$
$$\frac{x + \mathrm{i}y}{x' + \mathrm{i}y'} = \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} + \mathrm{i}\,\frac{x'y - xy'}{x'^2 + y'^2}$$

gilt, und zwar die zweite Beziehung unter der Voraussetzung

$$x' + \mathrm{i}y' \neq 0, \quad \text{d. h.} \quad x'^2 + y'^2 > 0.$$

Daher gelten für die komplexen Zahlen alle Rechengesetze, die nicht mit den Begriffen „größer" oder „kleiner" zusammenhängen (diese Begriffe existieren für komplexe Zahlen nicht). Genauer gesagt, es gelten die Eigenschaften 2a)—d) aus Nr. 3 und 3a)—e) aus Nr. 4.

Legen wir in die Ebene ein rechtwinkliges x,y-Koordinatensystem (Abb. 63), so kann jeder komplexen Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ ein Punkt $M(x, y)$ dieser Ebene zugeordnet werden, wobei die

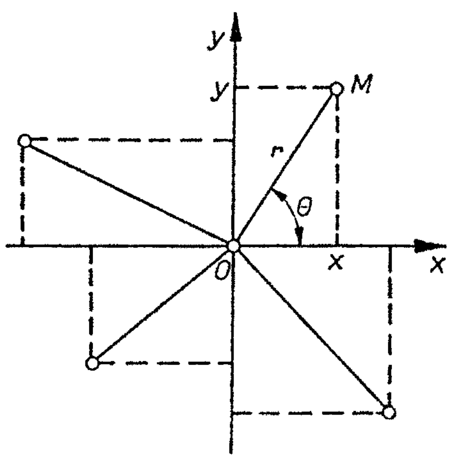

Abb. 63

Koordinaten dieses Punktes der Real- bzw. der Imaginärteil dieser Zahl sind. Offenbar wird auch umgekehrt durch jeden Punkt der Ebene eine komplexe Zahl vollständig bestimmt. Die in diesem Zusammenhang betrachtete Ebene heißt die *Ebene der komplexen Veränderlichen z* oder kurz die *komplexe Ebene.*[1])

Den reellen Zahlen $x = x + \mathrm{i}0$ entsprechen die Punkte der x-Achse (denn für sie ist $y = 0$) und den rein imaginären Zahlen $\mathrm{i}y = 0 + \mathrm{i}y$ $(x = 0)$ die Punkte der y-Achse. Diese Achsen heißen auch *reelle* bzw. *imaginäre Achse.*

Eine wichtige Rolle bei der Darstellung der Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ spielen die *Polarkoordinaten* r, Θ (vgl. Abb. 63). Die nichtnegative Zahl r nennen wir den *absoluten Betrag* oder *Modul* der komplexen Zahl z und schreiben $r = |z|$. Der absolute Betrag ist durch die komplexe Zahl z eindeutig bestimmt,

$$|z| = +\sqrt{x^2 + y^2},$$

und verschwindet genau dann, wenn $z = 0$ ist. Der Winkel Θ heißt das *Argument* der komplexen Zahl z, in Zeichen $\Theta = \operatorname{Arg} z$. Für $z \neq 0$ läßt es sich aus den Gleichungen

$$\cos\Theta = \frac{x}{r}, \qquad \sin\Theta = \frac{y}{r}$$

---

[1]) Sie wird auch oft als *Gaußsche Ebene* bezeichnet, da C. F. Gauss als erster die komplexen Zahlen entscheidend verwendete, obwohl es vor Gauss noch andere Mathematiker gab, die sich mit komplexen Zahlen beschäftigten. — *Anm. d. Red.*

bestimmen, jedoch nur bis auf einen Summanden $2k\pi$ (k ganz). Für $z = 0$ ist das Argument nicht definiert. Schließt man diesen Fall aus, so existiert für jede Zahl z genau ein Argument θ, das die Ungleichung $-\pi < \theta \leqq \pi$ erfüllt; es heißt der *Hauptwert des Arguments* und wird mit $\arg z$ bezeichnet. Ist $\theta < \pi$, so gilt

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{r\sin\theta}{r + r\cos\theta} = \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}},$$

und der Winkel $\arg z$ kann durch die Gleichung

$$\arg z = 2\arctan\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$$

definiert werden; sie gilt für alle komplexen Zahlen außer den reellen negativen Zahlen (und der Null).

Wir erwähnen noch, daß die absoluten Beträge der komplexen Zahlen $z = x + iy$ und $z' = x' + iy'$ der Ungleichung

$$|z + z'| \leqq |z| + |z'|$$

genügen, die auch für die absoluten Beträge reeller Zahlen gilt. Im vorliegenden Fall führt sie nämlich auf die bekannte Ungleichung

$$\sqrt{(x+x')^2 + (y+y')^2} \leqq \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x'^2+y'^2},$$

die einen Spezialfall der Minkowskischen Ungleichung (vgl. (7) aus Nr. 133) darstellt; vgl. auch die Fußnote auf S. 324 von Band I. Richtig sind auch die aus ihr gezogenen Folgerungen (vgl. Nr. 17).

Setzen wir in der komplexen Zahl $z = x + iy$

$$x = r\cos\Theta, \qquad y = r\sin\Theta,$$

so erhalten wir die sogenannte *trigonometrische Form einer komplexen Zahl*:

$$z = r(\cos\Theta + i\sin\Theta).$$

Wählen wir eine zweite komplexe Zahl z', ebenfalls in trigonometrischer Form

$$z' = r'(\cos\Theta' + i\sin\Theta'),$$

dann lautet das *Produkt* zz' in trigonometrischer Form

$$zz' = rr'[\cos(\Theta+\Theta') + i\sin(\Theta+\Theta')];$$

dies folgt unmittelbar aus den Additionstheoremen des Kosinus und des Sinus. Hieraus ergibt sich

$$|zz|' = |z|\cdot|z'|, \qquad \operatorname{Arg} zz' = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} z'.$$

Analog finden wir für den Quotienten der Zahlen z und z' (unter der Voraussetzung $z' \neq 0$)

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}, \qquad \operatorname{Arg}\frac{z}{z'} = \operatorname{Arg} z - \operatorname{Arg} z'.$$

Aus der Formel für das Produkt ergibt sich die Formel für die Potenz mit natürlichem Exponenten n:

$$z^n = r^n(\cos n\Theta + i\sin n\Theta);$$

der Spezialfall $r = 1$ liefert die *Moivresche Formel*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

Schließlich gilt für die n-te *Wurzel* aus z

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\Theta}{n} + i\sin\frac{\Theta}{n}\right),$$

wobei $\sqrt[n]{r}$ der *positive* Wert der Wurzel aus r ist. Setzt man hier der Reihe nach

$$\Theta = \theta, \quad \theta + 2\pi, \quad \theta + 4\pi, \quad \theta + 2(n-1)\pi,$$

so erhält man n *verschiedene* Werte der Wurzel $\sqrt[n]{z}$ (natürlich unter der Voraussetzung $z \neq 0$); für andere Werte von Θ werden diese Werte der Wurzel nur wiederholt.

454. Die komplexe Zahlenfolge und ihr Grenzwert. Wir betrachten eine Folge $\{z_n\}$ von *komplexen* Zahlen $z_n = x_n + iy_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, und die Veränderliche z durchlaufe diese Werte in der Reihenfolge wachsender Indizes.

Der Grenzwert dieser komplexen Zahlenfolge wird mit denselben Bezeichnungen definiert wie bei einer reellen Zahlenfolge (vgl. Nr. 23):

Die konstante Zahl $c = a + ib$ heißt *Grenzwert* der Zahlenfolge $\{z = z_n\}$, wenn für jede beliebig kleine Zahl $\varepsilon > 0$ eine solche Zahl N existiert, daß alle Werte z_n mit $n > N$ die Ungleichung

$$|z_n - c| < \varepsilon$$

erfüllen. Man schreibt dafür

$$\lim z_n = c \quad \text{oder} \quad z_n \to c.$$

Genauso lassen sich auf den zu betrachtenden Fall die Definitionen der dem Betrage nach *unendlich kleinen* und der *unendlich großen Größen* übertragen.

Wir heben hervor, daß man jetzt nicht mehr sagen kann, eine Zahlenfolge strebe mit einem *bestimmten* Vorzeichen gegen ∞, da komplexe Zahlen kein Vorzeichen besitzen. Wenn z_n über alle Grenzen wächst, d. h. $|z_n| \to +\infty$, dann sagt man, z_n strebe gegen ∞ (ohne Vorzeichen!).

Wir betrachten als Beispiel die Folge der Zahlen $z_n = z^n$, wobei z eine komplexe Zahl sei. Wenn $|z| < 1$ ist, so strebt z_n gegen 0, aber im Fall $|z| > 1$ gilt $z_n \to \infty$. Man sieht leicht, daß die Zahlenfolge für $|z| = 1$ (aber $z \neq 1$) keinen Grenzwert besitzt.

Für komplexe Zahlenfolgen kann man leicht die grundlegenden Sätze aus der Theorie der Grenzwerte beweisen, indem man die früheren Überlegungen fast wörtlich wiederholt. Andererseits lassen sich alle diese Behauptungen auf Grund des folgenden einfachen Satzes automatisch auf komplexe Zahlenfolgen übernehmen:

Eine Folge komplexer Zahlen $z_n = x_n + iy_n$ strebt dann und nur dann gegen den Grenzwert $c = a + ib$, wenn die reellen Zahlenfolgen $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ gegen die Grenzwerte a bzw. b streben.

Der Beweis folgt sofort aus den Ungleichungen

$$\left.\begin{array}{l} |x_n - a| \\ |y_n - b| \end{array}\right\} \leqq |z_n - c| = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} \leqq |x_n - a| + |y_n - b|.$$

Damit kann die Untersuchung einer komplexen Zahlenfolge durch die Untersuchung zweier reeller Zahlenfolgen ersetzt werden. Insbesondere läßt sich auf diesem Wege das Konvergenzprinzip (Nr. 39) für eine komplexe Zahlenfolge beweisen.

Wir betrachten jetzt die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n + \cdots$$

mit den komplexen Gliedern $c_n = a_n + ib_n$. Der Grenzwert der Partialsummen

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$$

heißt auch hier, falls er existiert, die *Summe* der Reihe. Da z. B. für die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} + \cdots$$

(wobei z eine komplexe Zahl $\neq 1$ sei) die n-te Partialsumme

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1 - z^k}{1 - z}$$

ist, sehen wir sofort, daß die Reihe für $|z| < 1$ die Summe

$$C = \frac{1}{1 - z}$$

und für $|z| \geqq 1$ keine (endliche) Summe besitzt.

Alle Grundbegriffe und Sätze aus Nr. 362 und 364 (sowie deren Beweise) bleiben erhalten.

Die Untersuchung einer komplexen Reihe kann nach dem folgenden grundlegenden Satz durch die Untersuchung zweier reeller Reihen ersetzt werden:

Die Konvergenz der komplexen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) \tag{C}$$

gegen die Summe $C = A + iB$ ist gleichbedeutend mit der Konvergenz der beiden reellen Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{A}$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{B}$$

gegen ihre Summen A bzw. B.

Diese Behauptung ist offenbar nur eine Übertragung des oben in der Terminologie der Zahlenfolgen bewiesenen Satzes.

Wir beweisen nun einen Satz, der dem aus Nr. 377 entspricht:

Ist die positive Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \tag{C*}$$

aus den absoluten Beträgen der Glieder von (C) konvergent, so konvergiert auch die Reihe (C).

Wegen der offenbar gültigen Ungleichungen

$$\left.\begin{matrix}|a_n| \\ |b_n|\end{matrix}\right\} \leqq |c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

zieht nämlich die Konvergenz der Reihe (C*) die der beiden Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$$

nach sich. Hieraus folgt (vgl. Nr. 377), daß die Reihen (A) und (B) konvergieren. Damit ist (auf Grund des vorhergehenden Satzes) auch die Reihe (C) konvergent.

Falls die Reihe (C*) konvergiert, heißt die Reihe (C) *absolut konvergent.* Dann konvergieren auch, wie wir eben sahen, die Reihen (A) und (B) absolut.

Dank dieses Satzes gilt z. B. das d'Alembertsche Kriterium (Nr. 377) auch für komplexe Reihen. Für absolut konvergente komplexe Reihen bleiben auch der Satz aus Nr. 387 über die Vertauschbarkeit der Glieder und der Satz aus Nr. 389 über die gliedweise Multiplikation von Reihen gültig. Im ersten Fall ergibt sich der Beweis durch Zurückführung auf reelle Reihen, im zweiten Fall kann man sich im Prinzip an den früheren Beweis halten.

Schließlich können in analoger Weise die grundlegenden Begriffe und Sätze aus der Theorie der Doppelreihen auf den komplexen Fall übertragen werden.

455. Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Die komplexe Veränderliche $z = x + iy$ nehme alle Werte einer gewissen Menge $\mathfrak{X} = \{z\}$ an, die sich geometrisch als Gebiet (oder Bereich) in der komplexen Ebene interpretieren läßt. Sind jedem Wert z aus dem Gebiet $\mathfrak{X}$ *ein* oder *mehrere* Werte einer anderen komplexen Veränderlichen $w = u + iv$ zugeordnet, so heißt w die (*eindeutige* oder *mehrdeutige*) Funktion von z im Gebiet $\mathfrak{X}$, und man schreibt

$$w = f(z) \quad \text{oder} \quad w = g(z)$$

usw. Beispielsweise sind die Funktionen $|z|$ und z^n (n natürliche Zahl) oder allgemein die *ganzen rationalen Funktionen*, d. h. die Polynome

$$c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_{n-1} z + c_n$$

mit beliebigen komplexen Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots, c_n$ eindeutige Funktionen (in der ganzen komplexen Ebene). *Gebrochene rationale Funktionen*, d. h. unkürzbare Quotienten zweier Polynome, sind ebenfalls in der ganzen komplexen Ebene definierte eindeutige Funktionen, die aber in den Punkten, die den Nullstellen des Nenners entsprechen, über alle Grenzen wachsen. Beispiele für mehrdeutige Funktionen sind $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$. In Nr. 457 bis 460 werden wir weitere wichtige Funktionen einer komplexen Veränderlichen kennenlernen.

Im folgenden werden wir, wenn nichts anderes gesagt ist, stets *eindeutige* Funktionen betrachten.

Ist $w = u + iv$ im Gebiet $\mathfrak{X} = \{z\}$ eine Funktion von $z = x + iy$, so sind offenbar auch u und v Funktionen von z oder, was dasselbe ist, in einem entsprechenden Gebiet $\mathfrak{X}^* = \{(x, y)\}$ Funktionen von x, y (geometrisch wird dieses Gebiet durch dieselbe Figur wie $\mathfrak{X}$ dargestellt):

$$u = u(x, y), \qquad v = v(x, y).$$

Zum Beispiel gilt für die reellen Funktionen $w = |z|$ und $w = \arg z$

$$u = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{bzw.} \quad u = 2 \arctan \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \qquad (v = 0);$$

für die Funktion $w = z^n = (x + iy)^n$ ist offenbar

$$u = x^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} y^2 + \cdots,$$

$$v = n x^{n-1} y - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3} y^3 + \cdots.$$

Es sei nun c ein Häufungspunkt des Gebietes $\mathfrak{X}$. Wir sagen, *die Funktion $w = f(z)$ besitze, wenn z gegen c strebt, den Grenzwert C,*[1]) falls für jede Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ derart existiert, daß $|f(z) - C| < \varepsilon$ ist, sobald $|z - c| < \delta$ (und $z \neq c$) gilt. Man schreibt diese Tatsache wie üblich in der Gestalt

$$\lim_{z \to c} w = \lim_{z \to c} f(z) = C.$$

Diese Definition läßt sich auch leicht für den Fall formulieren, daß c (oder C) unendlich ist; man kann dies auch in der „Sprache der Zahlenfolgen" ausdrücken.

Ist $c = a + ib$ und $C = A + iB$, so ist (wie aus Nr. 454 leicht folgt) die letzte Beziehung gleichbedeutend mit

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} u(x, y) = A, \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} v(x, y) = B.$$

Die Stetigkeit der Funktion $f(z)$ in einem beliebigen Punkt $z_0 = x_0 + iy_0$ des Gebietes wird durch die Gleichung

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

---

[1]) Hier sind c und C komplexe Zahlen.

definiert. Sie ist offenbar gleichbedeutend mit der Stetigkeit der beiden Komponenten $u(x, y)$, $v(x, y)$ im Punkt (x_0, y_0).

Aus den eben hergeleiteten Ausdrücken für $|z|$ und die Komponenten von z^n sehen wir also, daß diese Funktionen in allen Punkten der komplexen Ebene stetig sind. Analog ist arg z überall mit Ausnahme der negativen reellen Achse und $z = 0$ stetig.

Schließlich kann die Stetigkeit auch unmittelbar aus der komplexen Darstellung nachgewiesen werden. Zum Beispiel folgt sie für die Funktion $|z|$ sofort aus der Ungleichung

$$||z| - |z_0|| \leqq |z - z_0|.$$

Für die Funktion z^n gilt

$$z^n - z_0^n = (z - z_0)(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \cdots + z_0^{n-1});$$

liegt z hinreichend nahe bei z_0, so sind die Beträge von z beschränkt, $|z| \leqq M$ (M endlich, konstant), so daß

$$|z^n - z_0^n| \leqq n M^{n-1} |z - z_0|$$

ist, woraus das Geforderte sofort folgt.

Es läßt sich hier leicht zeigen, daß Polynome (ganze Funktionen) und gebrochene rationale Funktionen (diese bis auf die Stellen, an denen ihr Nenner verschwindet) stetige Funktionen sind.

Die Definition der Ableitung der Funktion $w = f(z)$ im Punkt $z = z_0$ hat dieselbe Form wie in der gewöhnlichen Differentialrechnung:

$$w' = f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Zum Beispiel ist für die Funktion $w = z^n$

$$\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \cdots + z_0^{n-1},$$

so daß der Grenzübergang für $z \to z_0$ wieder die bekannte Formel

$$w' = n z_0^{n-1}$$

liefert.

Die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion (Nr. 94) und alle Differentiationsregeln (Nr. 97, 98) können ungeändert übernommen werden. Analog wird auch der Begriff der höheren Ableitungen definiert.

Wir erinnern uns noch der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots,$$

deren Glieder jetzt komplexe Funktionen der komplexen Veränderlichen z aus $\mathfrak{T}$ sind. Hier kann zunächst die gleichmäßige Konvergenz wie in Nr. 428 definiert werden. Bei komplexen Funktionenreihen überzeugt man sich von der absoluten Konvergenz, indem man die Existenz einer positiven Majorantenreihe nachweist, da auch hier das Weierstraßsche Kriterium gilt. Von den Sätzen über Funktionenreihen benötigen wir für das Folgende den Satz 4 aus Nr. 433 über den gliedweisen Grenzübergang bei gleichmäßig konvergenten Reihen, dessen Beweis wie oben geführt wird.

Wir betrachten nun Potenzreihen, die in der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen eine äußerst wichtige Rolle spielen. Ihnen widmen wir den nächsten Abschnitt.

456. Potenzreihen. Gegeben sei die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \tag{1}$$

wobei $c_0, c_1, c_2, \ldots$ konstante komplexe Koeffizienten sind und die Veränderliche z in der ganzen komplexen Ebene variieren möge. Ganz genau so wie in Nr. 379 oder 380 kann man auch hier eine solche nichtnegative Zahl R finden, daß die Reihe (1) für $|z| < R$ $(R > 0)$ absolut konvergiert und für $|z| > R$ $(R < +\infty)$ divergiert. Schließt man den Fall $R = 0$ aus, so konvergiert die Reihe für $R = +\infty$ in der ganzen komplexen Ebene und für ein endliches R innerhalb des Kreises mit dem Radius R. Außerhalb dieses Kreises divergiert die Reihe. Statt von einem Konvergenzintervall spricht man hier von einem *Konvergenzkreis*, und der Ausdruck „Radius" ist zum ersten Mal begründet.

Zum Beispiel ergibt sich mit Hilfe des d'Alembertschen Kriteriums, daß die Reihe

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

für jeden komplexen Wert z absolut konvergiert, während die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

den Konvergenzradius $R = 1$ besitzen.

Auf dem Konvergenzkreis verhält sich jede Potenzreihe anders. Zum Beispiel divergiert von den drei gegebenen Reihen die erste in allen Punkten des Kreises $|z| = 1$, da die notwendige Konvergenzbedingung verletzt ist (das allgemeine Glied strebt nicht gegen 0); die zweite Reihe konvergiert in allen Punkten dieses Kreises absolut, da die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

konvergiert; schließlich sieht man, daß die dritte Reihe, wenn man $z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ setzt und sie in der Gestalt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n} + \mathrm{i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$$

schreibt, nicht-absolut konvergiert, mit Ausnahme des Punktes $\theta = 0$, d. h. $z = 1$ (vgl. Nr. 385, Beispiel 2).

Bemerkung. Sind (wie in den genannten Beispielen) die Koeffizienten einer Potenzreihe reelle Zahlen, so ist klar, daß der Radius R des „Konvergenzkreises" in der komplexen Ebene mit dem früheren Radius des „Konvergenzintervalls" auf der reellen Achse übereinstimmt.

Wir geben nun weitere Sätze über Potenzreihen an, die sich auf komplexe Potenzreihen übertragen lassen.

Die Sätze 1° und 2° aus Nr. 437 bleiben gültig, so daß *im Innern des Konvergenzkreises die Summe der Potenzreihe* (1) *eine stetige Funktion von z ist.*

Den schon erwähnten Satz von Abel (6° aus Nr. 437) kann man jetzt in der folgenden Form schreiben:

Konvergiert die Reihe (1) *in jedem Punkt z_0 des Kreises $|z| = R$, so gilt, wenn sich z längs des Radius von innen dem Punkt z_0 nähert,*

$$\lim_{z \to z_0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n. \text{[1]}$$

Das soll jetzt gezeigt werden.

Ist speziell $z_0 = R$, so kann man annehmen, daß $z = r$ eine reelle positive Veränderliche ist, und die zu beweisende Gleichung in der Gestalt

$$\lim_{r \to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n$$

[1]) Man kann diese Gleichung auch dann beweisen, wenn sich z nach einem allgemeineren Gesetz dem Punkt z_0 nähert; wir wollen uns jedoch damit nicht aufhalten.

darstellen. Setzt man $c_n = a_n + ib_n$, dann zerfällt sie in die beiden Gleichungen

$$\lim_{r\to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n, \qquad \lim_{r\to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n R^n.$$

Da die Reihen auf den rechten Seiten wegen der vorausgesetzten Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) R^n$$

ebenfalls konvergent sind, braucht man sich für den Beweis dieser Gleichungen nur auf den früheren Satz von Abel zu berufen.

Im allgemeinen Fall bezeichnen wir das Argument der Zahl z_0 mit θ_0. Dann können wir

$$z_0 = R(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0), \qquad z = r(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)$$

setzen und die zu beweisende Gleichung in der Form

$$\lim_{r\to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\cos n\theta_0 + i\sin n\theta_0)\, r^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\cos n\theta_0 + i\sin n\theta_0)\, R^n$$

schreiben. Fassen wir die Faktoren in den Klammern mit den Koeffizienten zusammen, so führt dieses Problem offenbar auf den schon behandelten Fall.

Wir können nun (ohne auf den allgemeinen Satz über die Differenzierbarkeit zu verweisen) sofort zeigen, daß *eine Potenzreihe innerhalb ihres Konvergenzkreises gliedweise differenziert werden kann,* d. h., setzt man für $|z| < R$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

so ist

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}.$$

Wir sehen zunächst (z. B. mit Hilfe des Satzes von Cauchy-Hadamard), daß auch der Konvergenzradius der zweiten Reihe gleich R ist.

Ist $z = z_0$ ein beliebiger, aber fester Punkt und $|z_0| < R$, so gilt

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \cdots + z_0^{n-1}). \tag{2}$$

Wählen wir ein ϱ zwischen $|z_0|$ und R, so können wir auch $|z| < \varrho$ annehmen; dann ist

$$|c_n(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \cdots + z_0^{n-1})| < n\,|c_n|\,\varrho^{n-1}.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n\,|c_n|\,\varrho^{n-1}$ konvergiert, da ϱ kleiner als die Zahl R ist, die, wie wir schon bewiesen haben, auch für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ Konvergenzradius ist. Nach dem Weierstraßschen Kriterium ist also die Reihe (2) gleichmäßig konvergent; der Grenzübergang $z \to z_0$ kann demnach *gliedweise* durchgeführt werden, was zu dem geforderten Resultat führt. Hieraus folgt schon, daß die Sätze 8 und 9 aus Nr. 438 auch ohne Änderung auf den komplexen Fall übertragen werden können. Das bedeutet, daß die Summe einer Potenzreihe nebst ihren Ableitungen innerhalb ihres Konvergenzkreises stetig ist. Mit anderen Worten, entwickelt man eine Funktion nach Potenzen von z, dann ist der Abstand vom Koordinatenanfangspunkt zum nächstliegenden Unstetigkeitspunkt der Funktion (oder einer ihrer Ableitungen) die natürliche Schranke für den Konvergenzradius dieser Entwicklung.

Für die Entwicklung

$$1 - z + z^2 - \cdots + (-1)^n z^n + \cdots = \frac{1}{1+z}$$

ist $z = -1$ ein solcher Punkt Er liegt auf der *reellen* Achse; deshalb war auch schon früher klar, daß der Konvergenzradius der Entwicklung von $\frac{1}{1+z}$ nicht größer als 1 sein kann. Anders verhält es sich mit der Entwicklung

$$1 - z^2 + z^4 - \cdots + (-1)^n z^{2n} + \cdots = \frac{1}{1+z^2}.$$

Ihre Summe ist in den Punkten $z = \pm i$, also auf der *imaginären* Achse im Abstand 1 vom Koordinatenanfangspunkt, unstetig; beschränkt man sich auf die reelle Achse, längs der die Funktion $\frac{1}{1+x^2}$ nebst allen ihren Ableitungen stetig ist, so kann man es sich nicht erklären, weshalb der Konvergenzradius ihrer Entwicklung gleich 1 ist.

Wir werden später ähnlichen Beispielen begegnen, bei denen der Übergang zum Komplexen die wahre Ursache der Divergenz der Entwicklung einer reellen Funktion einer reellen Veränderlichen erklärt.

Zum Schluß sei noch erwähnt, daß alle Rechenvorschriften für Potenzreihen (Nr. 445), alle Sätze über die Substitution einer Reihe in eine andere (Nr. 446), über die Division von Reihen (Nr. 448) und schließlich über die Umkehrung von Potenzreihen (Nr. 451) auch hier ihre Gültigkeit behalten; die Beweise, die nur formalen Charakter haben, gelten auch für komplexe Potenzreihen.

457. Die Exponentialfunktion. In Nr. 404 sahen wir, daß für jedes reelle x die Entwicklung

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

gilt (vgl. dort Formel (11)). Ersetzen wir in dieser Reihe die reelle Veränderliche x durch die komplexe Veränderliche $z = x + iy$, so ergibt sich die Reihe $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, von der wir schon wissen (vgl. Nr. 456), daß sie für alle z konvergiert, d. h. in der ganzen komplexen Ebene eine bestimmte endliche Summe besitzt. *Ihre Summe kann man per definitionem als Wert der Exponentialfunktion* e^z *für jedes komplexe* z *nehmen*, d. h., man setzt

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots. \tag{3}$$

Diese Definition widerspricht, wie wir sahen, nicht der gewöhnlichen Definition für einen reellen Exponenten, ist also ihre natürliche Verallgemeinerung.

Verwenden wir die Multiplikationsregel für Potenzreihen, so können wir uns wie in Nr. 390, Beispiel 6, leicht überzeugen, daß für alle *komplexen* z und z'

$$e^z e^{z'} = e^{z+z'} \tag{4}$$

gilt, *so daß auch die charakteristische Eigenschaft der Exponentialfunktion im Komplexen erhalten bleibt.*

Die Funktion e^z ist in der ganzen Ebene stetig und besitzt überdies Ableitungen beliebig hoher Ordnung. Durch gliedweise Differentiation der ihr entsprechenden Reihe erhalten wir wie früher

$$(e^z)' = e^z.$$

Es sei nun $z = x + iy$ mit reellen Zahlen x und y. Ersetzen wir in (4) z durch x und z' durch iy, so ergibt sich

$$e^z = e^x e^{iy}.$$

Wir beschäftigen uns nun mit der Potenz e^{iy}, deren Exponent rein imaginär ist. Ersetzen wir in der Definition (3) z durch iy, so finden wir

$$e^{iy} = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + (-1)^n i \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

oder, indem wir Real- und Imaginärteil trennen,

$$\mathrm{e}^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{y^{2n}}{2n!} + \cdots\right)$$
$$+ \mathrm{i}\left(y - \frac{y^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right).$$

In diesen Reihen erkennen wir die Entwicklungen von $\cos y$ bzw. $\sin y$ (vgl. (12) und (13) aus Nr. 404) und gelangen somit zu der wichtigen, zuerst von EULER aufgestellten Formel

$$\mathrm{e}^{iy} = \cos y + \mathrm{i} \sin y. \tag{5}$$

Aus ihr folgt z. B.

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{i}, \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1, \qquad \mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}/2} = -\mathrm{i}, \qquad \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1.$$

Es gilt somit für $z = x + \mathrm{i}y$

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x (\cos y + \mathrm{i} \sin y);^{1)} \tag{6}$$

hieraus ergibt sich sofort

$$\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\, z} = |\mathrm{e}^z|, \qquad y = \mathrm{Im}\, z = \mathrm{Arg}\, \mathrm{e}^z.$$

Wegen $\mathrm{e}^x > 0$ für jedes *reelle* x ist e^z für jedes *komplexe* z von 0 verschieden.

Ersetzen wir in (5) y durch $-y$, so erhalten wir durch Addition bzw. Subtraktion der beiden Formeln die Beziehungen

$$\cos y = \frac{\mathrm{e}^{iy} + \mathrm{e}^{-iy}}{2}, \qquad \sin y = \frac{\mathrm{e}^{iy} - \mathrm{e}^{-iy}}{2\mathrm{i}}, \tag{7}$$

welche die trigonometrischen Funktionen mit *reellem* Argument durch Exponentialfunktionen mit *rein imaginärem* Argument ausdrücken. Wir kommen auf diese bemerkenswerte Tatsache später noch einmal zurück.

Ersetzen wir in (6) y durch $y + 2\pi$, dann bleibt der Ausdruck auf der rechten Seite (und damit auch der auf der linken Seite) unverändert; mit anderen Worten, es ist

$$\mathrm{e}^{z+2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^z,$$

d. h., *die Exponentialfunktion ist periodisch mit der rein imaginären Periode* $2\pi\mathrm{i}$.

Es läßt sich leicht beweisen, daß die Funktion e^z außer den Perioden der Form $2k\pi\mathrm{i}$ (k ganz) keine anderen Perioden besitzt; denn wegen $\mathrm{e}^{z+\omega} = \mathrm{e}^z$ ist, wenn wir $z = 0$ setzen, $e^{\omega} = 1$. Es sei etwa $\omega = \alpha + \mathrm{i}\beta$, also (vgl. (6))

$$\mathrm{e}^{\alpha}(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta) = 1;$$

hieraus folgt $\mathrm{e}^{\alpha} = 1$, also $\alpha = 0$, ferner $\cos\beta = 1$, $\sin\beta = 0$, d. h., $\beta = 2k\pi$, was zu beweisen war.

Da wir nun wissen, daß $\mathrm{e}^{\pm 2\pi\mathrm{i}} = 1$ ist, verstehen wir jetzt auch, weshalb die Entwicklung der Funktion $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ in eine Potenzreihe (vgl. (12) aus Nr. 449) den Konvergenzradius 2π besitzt, obwohl die Funktion $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ auf der *reellen* Achse keine Singularität aufweist, die dieses motivieren könnte; auf der imaginären Achse existieren jedoch Punkte, in denen die Funktion singulär ist, und die dem Koordinatenanfangspunkt am nächsten liegenden Punkte sind die Punkte $z = \pm 2\pi\mathrm{i}$, die von O den Abstand 2π haben.

Im Zusammenhang mit der Verallgemeinerung der Exponentialfunktion für beliebige komplexe Exponenten erinnern wir uns an eine interessante Funktion, die wir in Nr. 138 und 407 betrachteten:

$$f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2} \quad (x \neq 0), \qquad f(0) = 0.$$

---

1) Man könnte diese Gleichung auch als Definitionsgleichung für die Exponentialfunktion mit komplexem Argument ansehen; dann ergäbe sich (4) aus den Additionstheoremen des Kosinus und des Sinus.

Die Unmöglichkeit, sie in irgendeiner Umgebung des Nullpunktes nach Potenzen von x entwickeln zu können, wird ungeachtet ihrer Stetigkeit und der aller ihrer Ableitungen im Punkt $x = 0$ unmittelbar durch den Übergang zu der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$ klar. Die Funktion e^{-1/z^2} $(z \neq 0)$ besitzt für $z \to 0$ nicht einmal einen Grenzwert, denn es ist z. B., wenn z längs der imaginären Achse gegen 0 strebt, also $z = iy$ und $y \to 0$ gilt,

$$e^{-1/z^2} = e^{1/y^2} \to \infty.$$

458. Die logarithmische Funktion. Wir wählen eine beliebige, von 0 verschiedene komplexe Zahl w und stellen uns die Aufgabe, diejenige Zahl z zu finden, welche die Gleichung

$$e^z = w \tag{8}$$

erfüllt (für $w = 0$ hat diese Gleichung, wie wir wissen, keine Lösung). Die Zahl z nennen wir den (*natürlichen*) *Logarithmus* von w, und man schreibt

$$z = \mathrm{Ln}\, w.$$

Ist $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ und setzen wir $z = x + iy$, so zerfällt (8) wegen (6) in die Gleichungen

$$e^x = r, \qquad \cos y = \cos\theta, \qquad \sin y = \sin\theta,$$

aus denen sich

$$x = \ln r,\text{[1]} \qquad y = \theta + 2k\pi \quad (k \text{ beliebig ganz})$$

ergibt. Wir können hieraus schließen, daß der Logarithmus von w (für $w \neq 0$) stets existiert. Er ist gleich

$$\mathrm{Ln}\, w = \ln|w| + i\,\mathrm{Arg}\, w = \ln|w| + i\arg w + 2k\pi i \tag{9}$$

und folglich mehrdeutig, sogar unendlich vieldeutig. Übrigens war dies wegen der Periodizität der Exponentialfunktion leicht vorauszusehen. Für $k = 0$ erhalten wir den sogenannten *Hauptwert des Logarithmus*,

$$\ln w = \ln|w| + i\arg w, \tag{10}$$

der dadurch charakterisiert ist, daß sein Imaginärteil im Intervall $(-\pi, \pi]$ liegt:

$$-\pi < \mathrm{Im}\,(\ln w) \leqq \pi.$$

Zum Beispiel gilt

$$\ln 1 = 0, \qquad \mathrm{Ln}\, 1 = 2k\pi i;$$
$$\ln(-1) = \pi i, \qquad \mathrm{Ln}\,(-1) = (2k+1)\pi i;$$
$$\ln i = \frac{\pi}{2} i, \qquad \mathrm{Ln}\, i = \frac{4k+1}{2}\pi i, \quad \text{usw.}$$

Für veränderliches w stellt die Formel (10) den *Hauptzweig* der mehrdeutigen logarithmischen Funktion $\mathrm{Ln}\, w$ dar. Die anderen Zweige ergeben sich für beliebige ganzzahlige Werte von k $(\neq 0)$ aus der Formel

$$\mathrm{Ln}\, w = \ln w + 2k\pi i.$$

Es ist leicht zu sehen, daß die Funktion (10) in der ganzen komplexen w-Ebene mit Ausnahme des Koordinatenanfangspunktes und der negativen reellen Achse stetig ist. Die Unstetigkeit bei $w = 0$ ist nicht hebbar, da für $w \to 0$ offenbar $\ln w \to \infty$ ist. Anders ist das Verhalten in den negativen reellen Werten $w_0 = u_0 < 0$. Hier entsteht die Unstetigkeit künstlich aus unserer Bedingung, daß $\arg w$ im Intervall $(-\pi, \pi]$ liegen soll. Ist $w = u + iv \to w_0$ für $v > 0$, so strebt $\arg w$ gegen $\pi = \arg w_0$; ist aber $v < 0$, so strebt $\arg w$ gegen $-\pi$. Würden wir vom Hauptzweig $\ln w$ im zweiten Quadranten zum nächsten Zweig $\ln w + 2\pi i$ im dritten Qua-

[1]) Hiermit meinen wir den *gewöhnlichen* natürlichen Logarithmus der positiven Zahl r.

dranten übergehen, so wäre die Stetigkeit wieder hergestellt. Wir zerstückeln also, um der Mehrdeutigkeit zu entgehen, die mehrdeutige Funktion in einzelne eindeutige, unstetige Zweige. Andererseits geht aber jeder Zweig in den anderen stetig über. Die verschiedenen Zweige dieser mehrdeutigen Funktion stellen also eine bemerkenswerte Besonderheit der komplexen Ebene dar, die bei den mehrdeutigen reellen Funktionen, die auf der reellen Achse definiert sind, kein Analogon besitzt.

Nach dem allgemeinen Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion gilt (mit Ausnahme der Unstetigkeitspunkte)

$$(\ln w)' = \frac{1}{(e^z)'} = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{w}. \tag{11}$$

Wir ersetzen w durch $1 + w$ und betrachten die Funktion $z = \ln(1 + w)$, $w \neq -1$. Dann gilt

$$e^z = e^{\ln(1+w)} = 1 + w = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \text{also} \quad w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Hieraus folgt, daß sich die Funktion $z = \ln(1 + w)$ für (dem Betrag nach) hinreichend kleine Werte von w in eine Reihe nach Potenzen von w entwickeln läßt:

$$z = w + c_2 w^2 + c_3 w^3 + \cdots + c_n w^n + \cdots.$$

Die Ableitung dieser Funktion nach w kann durch die Reihe

$$[\ln(1 + w)]' = 1 + 2c_2 w + 3c_3 w^2 + \cdots + nc_n w^{n-1} + \cdots$$

dargestellt werden; andererseits gilt wegen (11)

$$[\ln(1 + w)]' = \frac{1}{1 + w} = 1 - w + w^2 - \cdots + (-1)^{n-1} w^{n-1} + \cdots.$$

Ein Vergleich dieser beiden Reihen ergibt

$$2c_2 = -1, \qquad 3c_3 = 1, \qquad \ldots, \qquad nc_n = (-1)^{n-1}, \qquad \ldots,$$

woraus

$$c_2 = -\frac{1}{2}, \qquad c_3 = \frac{1}{3}, \qquad \ldots, \qquad c_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n},$$

folgt. Somit gilt schließlich in der Umgebung des Nullpunktes die Entwicklung

$$\ln(1 + w) = w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{w^n}{n} + \cdots. \tag{12}$$

Wir überzeugen uns leicht davon, daß diese Reihe den Konvergenzradius 1 hat. Wir sahen schon, daß ihre Summe für hinreichend kleine z der Hauptwert des Logarithmus ist: $\ln(1 + w)$. Interessant ist nun, ob dies im ganzen Kreis $|w| < 1$ der Fall ist.

Da die Reihe (12) formal die Gleichung

$$\exp\left(w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} - \cdots\right) = 1 + w$$

erfüllt, wird sie, solange sie konvergiert, diese Gleichung auch tatsächlich erfüllen. Die Summe der Reihe (12) stellt also im ganzen Kreis $|w| < 1$ einen der Werte von $\operatorname{Ln}(1 + w)$ dar. Die Frage lautet nun, ob dieser Wert stets gerade der Hauptwert ist.

Ist $|w| < 1$, so daß sich also der Punkt, der die Zahl $1 + w$ darstellt, innerhalb des Kreises mit dem Radius 1 um den Punkt $w = 1$ befindet, so liegt $\arg(1 + w)$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$; die anderen Werte $\operatorname{Arg}(1 + w)$ liegen in den Intervallen

$$\left(-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right), \quad \left(-\frac{9\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}\right), \ldots$$

oder

$$\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right), \qquad \left(\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\right),$$

Der Imaginärteil der Summe von (12) ist (vgl. (9)) ebenfalls gleich Arg $(1 + w)$. Für hinreichend kleine $w = u + iv$ gibt er den Hauptwert arg $(1 + w)$, d. h., er liegt zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$; als stetige Funktion von u und v kann er nicht gleichzeitig in den anderen angegebenen Intervallen liegen, folglich ist er *für alle* $|w| < 1$ gleich diesem Hauptwert. Damit ist bewiesen, daß die Gleichung (12) im ganzen Kreis $|w| < 1$ gilt.

Ersetzen wir in (12) w durch $-w$ und subtrahieren wir die so erhaltene Reihe von der Reihe (12), so finden wir die für $|w| < 1$ geltende nützliche Entwicklung[1])

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1 + w}{1 - w} = w + \frac{w^3}{3} + \cdots + \frac{w^{2n-1}}{2n - 1} + \cdots. \tag{13}$$

459. Die trigonometrischen Funktionen und ihre Umkehrfunktionen. Wir wissen (vgl. (12) und (13) aus Nr. 404), daß für *reelles* x die Funktionen $\cos x$ und $\sin x$ durch folgende Reihen dargestellt werden:

$$\cos x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!}, \qquad \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n - 1)!}.$$

Die Funktionen $\cos z$ und $\sin z$ (z *komplex*) werden mit Hilfe der analogen Reihen

$$\cos z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sin z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n - 1)!} \tag{14}$$

definiert, die in der ganzen z-Ebene konvergieren.

Diese Art der Einführung der trigonometrischen Funktionen ist für uns nicht neu; in Nr. 443 benutzten wir sie auch im Reellen (um die für die Analysis wichtigen Funktionen ohne Verwendung der Geometrie herzuleiten). Durch Wiederholung der dortigen Überlegungen könnten wir auch hier die Additionstheoreme, die Rekursionsformeln, die Periodizitätseigenschaft und die Differentiationsregeln für den Kosinus und den Sinus einer komplexen unabhängigen Veränderlichen herleiten.

Diese Resultate lassen sich aber auch auf einem anderen Weg erhalten, indem wir nämlich den Zusammenhang zwischen den trigonometrischen Funktionen und der Exponentialfunktion ausnutzen. Wir können nämlich das in Nr. 457 für $z = iy$ Gesagte auf ein beliebiges komplexes z verallgemeinern und erhalten also (vgl. (5))

$$e^{\pm zi} = \cos z \pm i \sin z$$

und hieraus (vgl. (7))

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}. \tag{15}$$

Diese Formeln reduzieren das Studium der trigonometrischen Funktionen auf das der Exponentialfunktion (sie könnten auch statt (14) als Definition der trigonometrischen Funktionen verwendet werden). Wir empfehlen dem Leser, die oben erwähnten Eigenschaften des Kosinus und des Sinus noch einmal zu beweisen, indem er von der Formel (15) ausgeht, und ferner nachzuweisen, daß a) $\cos z$ und $\sin z$ keine anderen Perioden als $2k\pi$ (k ganz) besitzen, b) alle Nullstellen dieser Funktionen reell sind.

[1]) Da der Imaginärteil der Differenz $\ln(1 + w) - \ln(1 - w)$ zwischen $-\pi$ und π liegt, gibt diese Differenz den *Hauptwert* $\ln \frac{1 + w}{1 - w}$ an.

Setzen wir in (15) $z = iy$ (y reell), so erhalten wir

$$\cos iy = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \cosh y, \qquad \sin iy = \frac{e^y - e^{-y}}{2} i = i \sinh y. \tag{16}$$

Hiermit haben wir einen unmittelbaren Zusammenhang zwischen den hyperbolischen Funktionen mit reellem Argument und den trigonometrischen Funktionen mit rein imaginärem Argument hergestellt. Es ist interessant, daß $\cos iy$ eine reelle Zahl darstellt, die stets $\geqq 1$ ist.

Mit Hilfe der Additionstheoreme können wir jetzt

$$\cos(x + iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy,$$

$$\sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy$$

oder unter Verwendung von (16)

$$\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y,$$

$$\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

schreiben. Damit haben wir den Kosinus und den Sinus in ihren Real- und Imaginärteil zerlegt.

Die Funktionen $\tan z$ und $\cot z$ werden durch die Formeln

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i} \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{e^{zi} + e^{-zi}}, \qquad z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi,$$

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = i \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{e^{zi} - e^{-zi}}, \qquad z \neq k\pi,$$

definiert, woraus sich für beide die Periode π ergibt.

Die Entwicklungen, die wir in Nr. 449 für $\tan x$ und $x \cot x$ erhielten, gelten auch, wenn wir die reelle Veränderliche x durch die komplexe Variable z ersetzen.

Die Ähnlichkeit der Zerlegungen von $x \cot x$ und $x \coth x$ wird verständlich, wenn wir die aus (16) folgenden Beziehungen

$$\tan iy = i \tanh y, \qquad \cot iy = -i \coth y$$

berücksichtigen.

Bei der Betrachtung der Umkehrfunktionen zu den trigonometrischen Funktionen beschränken wir uns auf den Arkustangens und den Arkussinus.

Da die trigonometrischen Funktionen auf die Exponentialfunktion führen, werden ihre Umkehrfunktionen naturgemäß mit dem Logarithmus in Zusammenhang stehen.

Wir beginnen mit dem Hinweis, daß $w = \tan z$ niemals die Werte $\pm i$ annimmt (man kann sich davon leicht durch indirekten Beweis überzeugen). Es sei also $w \neq \pm i$; dann kann die Gleichung

$$\tan z = \frac{1}{i} \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{e^{zi} + e^{-zi}} = \frac{1}{i} \frac{e^{2zi} - 1}{e^{2zi} + 1} = w$$

nach z aufgelöst werden:

$$e^{2zi} = \frac{1 + wi}{1 - wi}, \qquad z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1 + wi}{1 - wi}.$$

Dieser Ausdruck für die Umkehrfunktion Arctan w ist wie Ln offenbar *unendlich vieldeutig*.

Nehmen wir den Hauptwert des Logarithmus, so erhalten wir den *Hauptwert des Arkustangens*:

$$\arctan w = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + wi}{1 - wi} \qquad (w \neq \pm i).$$

Er wird dadurch charakterisiert, daß sein Realteil im Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ liegt:

$$-\frac{\pi}{2} < \mathrm{Re}\,(\arctan w) < \frac{\pi}{2}.$$

Die übrigen Werte ergeben sich aus der Formel

$$\mathrm{Arctan}\, w = \arctan w + k\pi \qquad (k \text{ ganz}).$$

Ersetzen wir in der Reihe (13) w durch $\mathrm{i}w$, so erhalten wir die Entwicklung des Hauptwertes des Arkustangens:

$$\arctan w = w - \frac{w^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{w^{2n-1}}{2n-1} + \cdots;$$

sie gilt für $|w| < 1$.[1])

Zum Schluß wollen wir noch die Gleichung

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = w$$

nach z auflösen:

$$e^{2iz} - 2wi\, e^{iz} - 1 = 0, \qquad e^{iz} = wi \pm \sqrt{1 - w^2};$$

hieraus folgt

$$z = \mathrm{Arcsin}\, w = \frac{1}{i}\,\mathrm{Ln}\left(wi \pm \sqrt{1 - w^2}\right).$$

Auch hier erhalten wir eine *unendlich vieldeutige* Funktion. Beschränken wir uns beim Logarithmus auf den Hauptwert, so ist

$$z = \frac{1}{i}\ln\left(wi \pm \sqrt{1 - w^2}\right).$$

Für $w = 1$ und $w = -1$ verschwindet der Radikand, und wir erhalten $z = \frac{\pi}{2}$ bzw. $z = -\frac{\pi}{2}$.

Es sei nun $w \neq \pm 1$; dann müssen wir zwischen zwei z-Werten wählen. Nun gilt offenbar

$$\left(wi + \sqrt{1 - w^2}\right)\left(wi - \sqrt{1 - w^2}\right) = -1,$$

also

$$\frac{1}{i}\ln\left(wi + \sqrt{1 - w^2}\right) + \frac{1}{i}\ln\left(wi - \sqrt{1 - w^2}\right) = \pm\pi$$

und folglich auch

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{i}\ln\left(wi + \sqrt{1 - w^2}\right)\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{1}{i}\ln\left(wi - \sqrt{1 - w^2}\right)\right) = \pm\pi,$$

während sich die Imaginärteile nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Da keiner der Realteile außerhalb des Intervalls $(-\pi, \pi]$ liegt, kann nur einer von ihnen zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegen; den entsprechenden Wert des Arkussinus nehmen wir als Hauptwert. Ausnahmen sind nur die Fälle, in denen beide Realteile gleich $\frac{\pi}{2}$ oder $-\frac{\pi}{2}$ werden; dann nehmen wir als

[1]) Für $w = \pm i$ wird $\arctan w$ gleich ∞.

Hauptwert jenen Wert, dem ein positiver Imaginärteile entspricht.[1]) Mit dieser Einschränkung können wir sagen, daß der *Hauptwert des Arcussinus* durch die Bedingung

$$-\frac{\pi}{2} \leqq \operatorname{Re}(\arcsin w) \leqq \frac{\pi}{2}$$

definiert wird.

Die übrigen Werte ergeben sich, wie man leicht nachprüfen kann, aus den Formeln

$$\operatorname{Arcsin} w = \arcsin w + 2k\pi,$$

$$\operatorname{Arcsin} w = (2k+1)\pi - \arcsin w \qquad (k \text{ ganz}).$$

Abschließend betrachten wir noch die Entwicklung von $\arcsin w$ nach Potenzen von w. Für reelle Veränderliche sahen wir schon, daß die Reihe

$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots,$$

durch die $\sin x$ dargestellt wird, als Umkehrung die Reihe

$$x = y + \frac{1}{2}\frac{y^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{y^5}{5} + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{y^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

besitzt, durch die $\arcsin y$ dargestellt wird (vgl. Nr. 440, Beispiel 3). Da sich auch für komplexe Veränderliche die Koeffizienten völlig eindeutig bestimmen lassen, ist klar, daß sich als Umkehrung von

$$w = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

notwendig die Reihe

$$z = w + \frac{1}{2}\frac{w^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{w^5}{5} + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{w^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

ergibt. Ihr Konvergenzradius ist gleich 1.[2]) Für $|w| < 1$ gibt sie einen der Werte von $\operatorname{Arcsin} w$ an. Wir zeigen, daß dies genau der Hauptwert $\arcsin w$ ist: $|\operatorname{Re} z|$ wird nämlich niemals größer als

$$|z| < 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{5} + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1} + \cdots = \frac{\pi}{2},$$

woraus schon die Behauptung folgt.

460. Die Potenzfunktion. Es seien a und b zwei komplexe Zahlen, und es sei $a \neq 0$. Dann wird die Potenz a^b ganz allgemein durch

$$a^b = e^{b \operatorname{Ln} a} = e^{b(\ln a + 2k\pi i)} \qquad (k \text{ ganz})$$

definiert, so daß die Potenz im allgemeinen *mehrdeutig* ist. Für $k = 0$ erhalten wir den sogenannten *Hauptwert der Potenz*:

$$a^b = e^{b \ln a}.$$

Zur Unterscheidung bezeichnet man bisweilen die allgemeine Potenz nach CAUCHY mit $((a))^b$. Es gilt also

$$((a))^b = a^b\, e^{2k\pi b i} \qquad (k \text{ ganz}).$$

[1]) Beispielsweise $\arcsin 2 = \frac{\pi}{2} + i \ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$.

[2]) Für $w = \pm 1$ ist die *Ableitung* des Arkussinus, $\frac{1}{\sqrt{1-w^2}}$, unstetig.

Ist b eine ganze Zahl, so ist der zweite Faktor gleich 1. In diesem Fall hat die Potenz nur einen Wert. Ist b eine rationale Zahl $\frac{p}{q}$ ($q > 1$; p und q teilerfremd); dann hat die Potenz genau q verschiedene Werte. Für alle übrigen Werte von b hat die Potenz unendlich viele Werte.

Zum Beispiel ist

$$2^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln 2} = \cos(\ln 2) + \mathrm{i}\sin(\ln 2), \qquad ((2))^{\mathrm{i}} = 2^{\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^{-2k\pi} \qquad (k \text{ ganz});$$

$$\mathrm{i}^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln \mathrm{i}} = \mathrm{e}^{-\pi/2}, \qquad ((\mathrm{i}))^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{-(4k+1)\pi/2} \qquad (k \text{ ganz}).$$

Ist m eine beliebige konstante komplexe Zahl, so ist die Potenzfunktion $((z))^m$ im allgemeinen mehrdeutig. Ihr Hauptzweig ist ($z \neq 0$)[1])

$$z^m = \mathrm{e}^{m \ln z}.$$

Aus der Beziehung

$$(1 + z)^m = \mathrm{e}^{m \ln(1+z)}$$

erhalten wir genau wie in Nr. 447, Beispiel 2, die *binomische Reihe*

$$(1 + z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} z^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdots n} z^n + \cdots.$$

Diese Reihe konvergiert für jedes komplexe m, wenn $|z| < 1$[2]) ist, und stellt, wie aus ihrer Herleitung ersichtlich ist, genau den Hauptwert der Potenz des Binoms dar. Mit der Untersuchung dieser Reihe beschäftigte sich ABEL.

461. Beispiele. In diesem Abschnitt zeigen wir an einigen Beispielen, wie wertvoll die komplexe Veränderliche und die elementaren Funktionen einer komplexen Veränderlichen für die reelle Analysis sind.

1. Die aufeinanderfolgenden Ableitungen der Funktion $y = \frac{1}{1 + x^2}$ lassen sich leicht berechnen, wenn man die Funktion in der Form

$$y = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{x - \mathrm{i}} - \frac{1}{x + \mathrm{i}}\right)$$

schreibt. Man erhält nämlich

$$\begin{aligned} y^{(n-1)} &= \frac{1}{2\mathrm{i}}(-1)^{n-1}(n-1)!\left(\frac{1}{(x-\mathrm{i})^n} - \frac{1}{(x+\mathrm{i})^n}\right) \\ &= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2\mathrm{i}}\,\frac{(x+\mathrm{i})^n - (x-\mathrm{i})^n}{(x^2+1)^n} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x^2+1)^n}\left(nx^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3} + \cdots\right). \end{aligned}$$

Zum Beispiel ist

$$\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)^{(4)} = 24\,\frac{5x^4 - 10x^2 + 1}{(x^2 + 1)^5}.$$

Gleichzeitig ergeben sich offenbar auch die aufeinanderfolgenden Ableitungen der Funktion $\arctan x$ (vgl. Nr. 116, Beispiel 8, und Nr. 118, Beispiel 4).

[1]) Zuweilen setzt man $z^m = 0$ für $z = 0$, wenn $\operatorname{Re} m$ positiv ist.

[2]) Für $z = -1$ (d. h., wo also die Funktion $(1 + z)^m$ selbst nicht unstetig ist, falls man die Annahme aus der vorhergehenden Fußnote macht) sind hinreichend hohe Ableitungen dieser Funktion unstetig; eine Ausnahme hiervon bildet der Fall, daß m gleich 0 oder gleich einer natürlichen Zahl ist.

2. Die Eulerschen Formeln, die den Kosinus und den Sinus durch die Exponentialfunktion ausdrücken, können vielfältig angewendet werden. Will man z. B. einen geschlossenen Ausdruck für die Summe

$$s = \sum_{k=1}^{n} \cos kx$$

finden, so kann man dieses Problem einfach auf die Summierung einer endlichen geometrischen Reihe zurückführen:

$$s = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} e^{kxi} + \sum_{k=1}^{n} e^{-kxi}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{xi} - e^{(n+1)xi}}{1 - e^{xi}} + \frac{e^{-xi} - e^{-(n+1)xi}}{1 - e^{-xi}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{\frac{1}{2}xi} - e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)xi}}{e^{-\frac{1}{2}xi} - e^{\frac{1}{2}xi}} + \frac{e^{-\frac{1}{2}xi} - e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)xi}}{e^{\frac{1}{2}xi} - e^{-\frac{1}{2}xi}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{2i}\left(e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)xi} - e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)xi}\right) - \frac{1}{2i}\left(e^{\frac{1}{2}xi} - e^{-\frac{1}{2}xi}\right)}{\frac{1}{2i}\left(e^{\frac{1}{2}xi} - e^{-\frac{1}{2}xi}\right)} = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}.$$

3. Die ganzzahligen positiven Potenzen von $\sin x$ und $\cos x$ und auch die Produkte dieser Potenzen lassen sich als Kombinationen von Sinus und Kosinus mehrfacher Winkel darstellen. Man kann dies leicht mit Hilfe der Eulerschen Formeln nachweisen, indem man die Ausdrücke

$$\sin^n x = \left(\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}\right)^n, \qquad \cos^n x = \left(\frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}\right)^n$$

nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt. Zum Beispiel gilt

$$\sin^5 x = \frac{1}{32i}\left(e^{5xi} - 5e^{3xi} + 10e^{xi} - 10e^{-xi} + 5e^{-3xi} - e^{-5xi}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x\right),$$

$$\cos^4 x \sin^3 x = \left(\frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}\right)^4 \left(\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{128i}\left(e^{2xi} - e^{-2xi}\right)^3 \left(e^{xi} + e^{-xi}\right)$$

$$= -\frac{1}{128i}\left(e^{6xi} - 3e^{2xi} + 3e^{-2xi} - e^{-6xi}\right)\left(e^{xi} + e^{-xi}\right)$$

$$= -\frac{1}{128i}\left(e^{7xi} + e^{5xi} - 3e^{3xi} - 3e^{xi} + 3e^{-xi} + 3e^{-3xi} - e^{-5xi} - e^{7xi}\right)$$

$$= -\frac{1}{64}\left(\sin 7x + \sin 5x - 3\sin 3x - 3\sin x\right).$$

Man kann auch die folgenden allgemeinen Formeln aufstellen:

$$\text{(a)}\quad \sin^{2\nu} x = \frac{(-1)^\nu}{2^{2\nu-1}}\left[\cos 2\nu x - 2\nu\cos(2\nu-2)\,x + \frac{2\nu(2\nu-1)}{1\cdot 2}\cos(2\nu-4)\,x - \cdots + \frac{(-1)^\nu}{2}\,\frac{2\nu(2\nu-1)\cdots(\nu+1)}{1\cdot 2\cdots\nu}\right],$$

(b) $\sin^{2\nu+1} x = \frac{(-1)^\nu}{2^{2\nu}} \Big[\sin(2\nu+1)x - (2\nu+1)\sin(2\nu-1)x + \frac{(2\nu+1)\,2\nu}{1\cdot 2}\sin(2\nu-3)x$

$+ \cdots + (-1)^\nu \frac{(2\nu+1)\,2\nu\cdots(\nu+2)}{1\cdot 2\cdots\nu}\sin x\Big],$

(c) $\cos^n x = \frac{1}{2^{n-1}}\left[\cos nx + n\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos(n-4)x + \cdots\right];$

dabei besitzt in der Formel (c) das letzte Glied die Form

$$\frac{1}{2}\,\frac{2\nu(2\nu-1)\cdots(\nu+1)}{1\cdot 2\cdots\nu} \quad \text{oder} \quad \frac{(2\nu+1)\,2\nu\cdots(\nu+2)}{1\cdot 2\cdots\nu}\cos x,$$

je nachdem, ob $n = 2\nu$ oder $n = 2\nu + 1$ ist.

Derartige Umformungen sind z. B. bei unbestimmter Integration zweckmäßig (vgl. Nr. 287).

4. Auch die einfachsten Formeln der Integralrechnung (zur Berechnung der Stammfunktion) lassen sich auf komplexe Funktionen einer reellen oder einer komplexen Veränderlichen übertragen.

Es seien die Integrale

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx, \qquad \int e^{ax}\sin bx\,dx$$

zu berechnen. Diese Aufgabe ist gleichbedeutend mit der Bestimmung des Integrals

$$\int e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)\,dx = \int e^{(a+ib)x}\,dx,$$

welches (nach der elementaren Formel) gleich

$$\frac{1}{a+ib}e^{(a+ib)x} = \frac{\cos bx + i\sin bx}{a+ib}e^{ax}$$

$$= \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax} + i\,\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}$$

ist. Durch Vergleich der Real- und Imaginärteile erhalten wir die gesuchten Integrale (vgl. Nr. 271, Beispiel 6).

Die Formel zur Berechnung eines Integrals vom Typ

$$\int P(x)\,e^{ax}\,dx,$$

wobei $P(x)$ ein Polynom ist (vgl. Nr. 271, Beispiel 4), läßt sich auch auf komplexes a erweitern Damit werden nicht nur die Integrale

$$\int P(x)\cos bx\,dx, \qquad \int P(x)\sin bx\,dx,$$

sondern auch die Integrale

$$\int P(x)\,e^{ax}\cos bx\,dx, \qquad \int P(x)\,e^{ax}\sin bx\,dx$$

erfaßt (vgl. Nr. 271, Beispiel 4; Nr. 289).

5. Die Beziehung zwischen dem Logarithmus und den Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen faßt viele oft sehr verschieden aussehende Formeln der Integralrechnung zusammen und gestattet die Aufstellung neuer Formeln. Zum Beispiel gehen die Integrale

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a} \quad \text{und} \quad \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$$

oder

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) \quad \text{und} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$$

auseinander hervor, wenn man x durch ix ersetzt.

6. Zerlegt man bekannte komplexe Entwicklungen in Real- und Imaginärteil, so kann man oft sehr einfach die gesuchte Entwicklung im Reellen erhalten.

(a) Wir wählen für $|z| < 1$ die Entwicklung

$$\frac{z}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

und setzen $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$. Rechts steht dann die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta)$$

und links der Ausdruck

$$\frac{r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)}{(1 - r\cos\theta) - \mathrm{i}r\sin\theta} = \frac{r\cos\theta - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2} + \mathrm{i}\,\frac{r\sin\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}.$$

Ein Vergleich von Real- und Imaginärteil auf beiden Seiten (und Division durch r) führt auf die Entwicklungen

$$\frac{\cos\theta - r}{1 - 2r\cos\theta + r^2} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}\cos n\theta, \qquad \frac{\sin\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}\sin n\theta.$$

(Vgl. Nr. 440, Beispiel 11.)

(b) Verfahren wir analog mit der logarithmischen Reihe

$$\ln(1 - z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \qquad (|z| < 1),$$

so erhalten wir für $r < 1$ (vgl. Nr. 440, Beispiel 11)

$$\frac{1}{2}\ln(1 - 2r\cos\theta + r^2) = -\sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\cos n\theta}{n}, \qquad \arctan\frac{r\sin\theta}{1 - r\cos\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\sin n\theta}{n}.$$

Es sei $0 < \theta \leqq \pi$; da die Reihen auf den rechten Seiten für $r = 1$ konvergieren (vgl. Nr. 385, Beispiel 2), können wir hier auf Grund des Satzes von Abel (Nr. 437, 6°) zum Grenzwert für $r \to 1 - 0$ übergehen. Links erhalten wir im ersten Fall

$$\frac{1}{2}\ln(2 - 2\cos\theta) = \ln 2\sin\frac{\theta}{2},$$

im zweiten Fall

$$\arctan\left(\cot\frac{\theta}{2}\right) = \arctan\left(\tan\frac{\pi - \theta}{2}\right) = \frac{\pi - \theta}{2}.$$

Es ist also

$$\ln 2\sin\frac{\theta}{2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n}, \qquad \frac{\pi - \theta}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} \qquad (0 < \theta \leqq \pi).$$

(Im dritten Band werden wir viele wichtige trigonometrische Entwicklungen kennenlernen.)

7. In Nr. 447, Beispiel 8, fanden wir die Entwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)\,\alpha^n,$$

wobei die $P_n(x)$ die Legendreschen Polynome sind. Nun liege x zwischen -1 und $+1$. Dann können wir $x = \cos\theta$ setzen:

$$(1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\cos\theta)\,\alpha^n.$$

Ersetzen wir jetzt $2\cos\theta$ durch $e^{i\theta} + e^{-i\theta}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
&(1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2)^{-1/2} \\
&= [1 - \alpha(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + \alpha^2]^{-1/2} = (1 - \alpha\, e^{i\theta})^{-1/2}\,(1 - \alpha\, e^{-i\theta})^{-1/2} \\
&= \left(1 + \frac{1}{2}\alpha\, e^{i\theta} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\alpha^2\, e^{2i\theta} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{2}\alpha\, e^{-i\theta} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\alpha^2\, e^{-2i\theta} + \cdots\right).
\end{aligned}$$

Wir multiplizieren diese beiden Reihen nach der üblichen Multiplikationsregel, vergleichen in beiden Reihen die Koeffizienten von α^n und gelangen so zu dem folgenden Ausdruck für $P_n(\cos\theta)$:

$$\begin{aligned}
P_n(\cos\theta) &= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(e^{ni\theta} + e^{-ni\theta}) + \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\,\frac{1}{2}\,(e^{(n-1)i\theta} + e^{-(n-1)i\theta}) \\
&\quad + \frac{(2n-5)!!}{(2n-4)!!}\,\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,(e^{(n-2)i\theta} + e^{-(n-2)i\theta}) + \cdots.
\end{aligned}$$

Die Klammern können hier noch durch $2\cos n\theta$, $2\cos(n-1)\theta$, $2\cos(n-2)\theta$ usw. ersetzt werden. Da alle Koeffizienten positiv sind, erreicht dieser Ausdruck offenbar für $\theta = 0$, d. h. für $x = \cos\theta = 1$ sein Maximum. Wir haben also mit Hilfe von Überlegungen der komplexen Funktionentheorie den folgenden, im Reellen geltenden Satz erhalten: *Liegt x im Intervall $[-1, +1]$, so erreichen alle Legendreschen Polynome ihren größten Wert im Endpunkt $x = 1$.*

§ 6. Asymptotische Reihen. Die Eulersche Summenformel

462. Beispiele. In Kapitel XI, § 9, haben wir einige der wichtigsten Definitionen „verallgemeinerter Summen" divergenter Reihen eingeführt, wobei die Partialsummen der Reihen im allgemeinen für die näherungsweise Berechnung jener „Summen" nicht geeignet waren. Wir beschäftigen uns nun wieder mit divergenten Reihen, aber nach einem ganz anderen Plan. Wir wollen zeigen, daß *unter bestimmten Bedingungen und in bestimmten Grenzen gerade die Partialsummen einer divergenten Reihe ausgezeichnet zur Berechnung des Wertes derjenigen Funktion benutzt werden können, die diese Reihe „erzeugt"*. Damit der Leser die Wichtigkeit der Anwendung divergenter Reihen bei der praktischen Näherungsrechnung begreift, weisen wir darauf hin, daß mit dieser Methode in der Astronomie die Bahn von Himmelskörpern vorausberechnet wird, wobei die Genauigkeit der Resultate völlig ausreicht.

Wir wollen uns diese Idee zunächst an zwei einfachen Beispielen klar machen.

1. Wir betrachten die logarithmische Reihe

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots. \tag{1}$$

Bekanntlich (vgl. Nr. 405) konvergiert diese Reihe nur für $-1 < x \leqq 1$ und stellt in $(-1, +1]$ die Funktion $\ln(1+x)$ dar. Außerhalb dieses Intervalls, z. B. für $x > 1$, divergiert sie und besitzt keine Summe. Aber auch für $x > 1$ bleibt die Funktion $\ln(1+x)$ mit den Partialsummen dieser divergenten Reihe verknüpft, denn nach der Taylorschen Formel gilt

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + r_n(x),$$

wobei das „Restglied" $r_n(x)$ etwa in der Lagrangeschen Form (Nr. 126)

$$r_n(x) = \frac{1}{(1+\theta_1 x)^{n+1}}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} = \theta\cdot(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (0 < \theta, \theta_1 < 1)$$

gewählt werden kann. *Der absolute Betrag des Restgliedes ist kleiner als das erste vernachlässigte Glied der Reihe; ferner besitzt das Restglied dasselbe Vorzeichen wie dieses Glied* (dies ist auch bei einer konvergenten Reihe vom Leibnizschen Typ der Fall). Ersetzen wir nun für $x > 1$ den

Wert $(\ln 1 + x)$ durch eine Partialsumme der divergenten Reihe (1), so erhalten wir eine geeignete Abschätzung des Fehlers (und kennen sogar sein Vorzeichen). Dies ist aber dafür hinreichend, daß *die erwähnte Partialsumme zur näherungsweisen Berechnung der Zahl* $\ln(1 + x)$ *verwendet werden kann.*

Für $0 < x \leqq 1$ strebt der Fehler mit unbeschränkt wachsendem n gegen 0, und bei gegebenem n, aber $x \to 0$, muß sogar

$$\frac{r_n(x)}{x^n} \to 0, \quad \text{also} \quad r_n(x) = o(x^n)$$

gelten, d. h., der Fehler geht von höherer als n-ter Ordnung gegen 0. Für jedes feste $x > 1$ strebt das Restglied mit unbeschränkt wachsendem n gegen ∞, und es wird (für ein gegebenes x) nicht beliebig klein. Wie jedoch die Abschätzung

$$|r_n(x)| < \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

falls x hinreichend nahe bei 1 liegt, zeigt, kann der Fehler beliebig klein gemacht werden! Für ein festes, nahe bei 1 liegendes x nehmen die Absolutbeträge der Glieder von (1) sogar für $x > 1$ anfangs ab, solange nämlich die Beziehung

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} : \frac{x^n}{n} = \frac{n}{n+1} x < 1 \quad \text{oder} \quad n < \frac{1}{x-1}$$

gilt; danach steigen sie an. Es ist deshalb vorteilhaft, die Reihe bei dem Glied mit dem Index $n = \left[\frac{1}{x-1}\right]$ abzubrechen; man erhält auf diese Art die *beste Näherung* für die Zahl $\ln(1 + x)$ bei gegebenem x.

In diesem Beispiel war die betrachtete Reihe (1) immerhin für $-1 < x \leqq 1$ konvergent. Das zweite Beispiel ist dadurch lehrreich, daß die hier betrachtete Reihe überall divergiert.

2. Wir setzen nun (für $x > 0$)

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^k}{x+k}$$

mit $0 < c < 1$ (in diesem Fall ist die Reihe konvergent). Für $k < x$ gilt

$$\frac{1}{x+k} = \frac{1}{x} - \frac{k}{x^2} + \frac{k^2}{x^3} - \frac{k^3}{x^4} + \cdots;$$

ist dagegen $k \geqq x$, so divergiert diese Reihe. Setzen wir sie trotzdem rein formal in die Reihe für $F(x)$ ein und fassen wir alle Glieder mit gleichem Exponenten von x zusammen, so erhalten wir

$$\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \cdots + \frac{A_n}{x^n} + \cdots \tag{2}$$

mit

$$A_n = (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} k^{n-1} c^k.$$

Wir können uns leicht davon überzeugen, daß die Reihen, die die Koeffizienten A_n definieren, überall konvergieren. Aber die Reihe (2) divergiert offenbar, denn es gilt

$$|A_n| \geqq n^{n-1} c^n \quad \text{und} \quad \left|\frac{A_n}{x^n}\right| \geqq \frac{n^{n-1} c^n}{x^n},$$

und der letzte Ausdruck strebt mit n gegen ∞.

Für die ersten n Glieder der divergenten Reihe (2) gilt

$$S_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_\nu}{x^\nu} = \sum_{k=1}^{\infty} c^k \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(-1)^{\nu-1} k^{\nu-1}}{x^\nu} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 + (-1)^{n+1} \frac{k^n}{x^n}\right] \frac{c^k}{x+k},$$

so daß das „Restglied" die Form

$$r_n(x) = F(x) - S_n(x) = (-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n c^k}{(x+k)\, x^n}$$

hat. Auch hier ist

$$r_n(x) = \theta \cdot (-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} k^n c^k \frac{1}{x^{n+1}} = \theta \cdot \frac{A_{n+1}}{x^{n+1}} \qquad (0 < \theta < 1).$$

Wieder haben wir dieselben Verhältnisse wie bei einer Reihe vom Leibnizschen Typ, obwohl die Reihe (2) divergiert. Setzt man $F(x)$ näherungsweise gleich der Partialsumme $S_n(x)$, so erzielt man für ein festes x bewußt keine beliebig große Genauigkeit; *man kann jedoch für hinreichend große x jede Genauigkeit erreichen.* Auch in diesem Fall ist es (zur Verbesserung der Genauigkeit) zweckmäßig, nur jene Glieder zu verwenden, die die Relation $\left|\frac{A_{n+1}}{A_n}\right| < x$ erfüllen.

Offenbar strebt bei festem n das Restglied $r_n(x)$ für $x \to \infty$ gegen 0. Da darüber hinaus

$$x^n r_n(x) = \theta \cdot \frac{A_{n+1}}{x} \to 0$$

gilt, ist

$$r_n(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right) \tag{3}$$

und somit $r_n(x)$ von höherer als n-ter Ordnung klein. Je mehr Glieder der divergenten Reihe (2) man bei der näherungsweisen Darstellung der Funktion $F(x)$ fortläßt, desto höher wird die Ordnung, mit der der Fehler dieser Näherung für $x \to \infty$ verschwindet.

463. Definitionen. Wir gehen nun zu allgemeineren Formulierungen und Definitionen über. Gegeben sei eine Zahlenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots. \tag{4}$$

(a) Sind ihre aufeinanderfolgenden Partialsummen abwechselnd kleiner und größer als eine gewisse Zahl A, d. h. hat das durch

$$A = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + r_n \tag{5}$$

definierte Restglied abwechselnd positives und negatives Vorzeichen, so sagen wir, die Reihe (4) *alterniere um die Zahl A.*[1])

Die einfache Beziehung

$$r_n = a_{n+1} + r_{n+1}$$

führt auf die folgende gleichwertige Definition:

(b) Die Reihe (4) heißt *um die Zahl A alternierend,* wenn (4) eine (im Vorzeichen) alternierende Reihe ist und das Restglied r_n in (5) dem Betrage nach kleiner als die Zahl a_{n+1} ist und dasselbe Vorzeichen wie diese besitzt.[2])

---

[1]) Vgl. G. H. Hardy, Divergent series, Oxford 1949, S. 328. Die *um eine Zahl alternierende* Reihe darf nicht mit der schon bekannten, *im Vorzeichen alternierenden* Reihe verwechselt werden. — *Anm. d. Red.*

[2]) Wir behalten den Terminus „alternierend um eine Zahl" auch dann bei, wenn die Voraussetzung in der Definition nur für hinreichend große n (etwa für $n \geqq n_0 > 1$) erfüllt ist.

In Nr. 462 sind wir schon solchen Reihen begegnet: Die Reihe (1) alterniert offenbar um die Zahl $\ln(1 + x)$ für jedes $x > 0$, die Reihe (2) um die in Beispiel 2 definierte Funktion $F(x)$ ebenfalls für $x > 0$.

Ist die Reihe (4) divergent, so kann sie gleichzeitig um unendlich viele Zahlen A alternieren. Zum Beispiel alterniert die Reihe

$$1 - 2 + 2 - 2 + 2 - \cdots$$

mit den Partialsummen $1, -1, 1, -1, 1, \ldots$ offenbar um jede Zahl aus dem Intervall $(-1, 1)$.

Die in der Definition (b) formulierte Eigenschaft der um die Zahl A alternierenden Reihe dient häufig zur näherungsweisen Berechnung der Zahl A, jedoch kann selbstverständlich nicht jede um die Zahl A alternierende Reihe dazu dienen.

Gegeben sei nun statt der Reihe (4) mit konstanten Gliedern und statt der Zahl A die Funktionenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) = a_0(x) + a_1(x) + \cdots + a_n(x) + \cdots \tag{6}$$

und eine gewisse Funktion $A(x)$, wobei alle Funktionen $a_n(x)$ und $A(x)$ in einem Gebiet $\mathscr{X}$ definiert seien. Die eben angegebenen Definitionen einer um eine gegebene Zahl alternierenden Zahlenreihen kann natürlich auf den Fall einer um eine gegebene Funktion alternierenden Funktionenreihe erweitert werden. Wir können noch weiter gehen und eine neue Definition für den Fall angeben, daß die Glieder einer zur Reihe (6) ähnlichen Reihe einen Parameter x enthalten, dessen Wertebereich $\mathscr{X}$ einen Häufungspunkt ω im Endlichen oder Unendlichen besitzt. Wie immer wird das Restglied $r_n(x)$ durch

$$A(x) = a_0(x) + a_1(x) + \cdots + a_n(x) + r_n(x)$$

definiert.

(c) Die Reihe (6) heißt *asymptotische Entwicklung* der Funktion $A(x)$ in der Umgebung von $x = \omega$, wenn für jedes feste n

$$\lim_{x \to \omega} \frac{r_n(x)}{a_n(x)} = 0 \tag{7}$$

gilt,[1]) und man schreibt

$$A(x) \sim a_0(x) + a_1(x) + \cdots + a_n(x) + \cdots.$$

Wegen

$$r_n(x) = a_{n+1}(x) + r_{n+1}(x)$$

und

$$\frac{r_n(x)}{a_n(x)} = \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \left[1 + \frac{r_{n+1}(x)}{a_{n+1}(x)}\right]$$

folgt aus der Bedingung (7)

$$\lim_{x \to \omega} \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = 0. \tag{8}$$

Nun können wir leicht den folgenden Satz beweisen:

Alterniert die Reihe (6) *um die Funktion* $A(x)$ *und ist* (8) *erfüllt, so dient* (6) *auch in der Umgebung von* $x = \omega$ *als asymptotische Entwicklung der Funktion* $A(x)$.

Es gilt nämlich

$$|r_n(x)| \leqq |a_{n+1}(x)|, \qquad \text{also} \qquad \left|\frac{r_n(x)}{a_n(x)}\right| \leqq \left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right|.$$

Damit folgt aus der Voraussetzung (8) unmittelbar (7).

---

[1]) Dabei ist natürlich vorausgesetzt, daß $a_n(x) \neq 0$ ist (zumindest für hinreichend nahe bei ω liegende x).

Die beiden oben als Beispiele angeführten Reihen (1) und (2) sind asymptotische Entwicklungen der entsprechenden Funktionen, die erste in der Umgebung von $x = 0$, die zweite in der Umgebung von $x = \infty$.

Im folgenden werden wir uns stets mit asymptotischen Entwicklungen der Form

$$A(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \cdots \tag{9}$$

befassen, die in der Umgebung von $x = \infty$ gelten. Die Beziehung (9) ist, wie wir wissen, so aufzufassen, daß für jedes feste n stets

$$r_n(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

oder genauer

$$\lim_{x\to\infty} \left[A(x) - a_0 - \frac{a_1}{x} - \frac{a_2}{x^2} - \cdots - \frac{a_n}{x^n}\right] x^n = 0 \tag{10}$$

gilt. Für alle „großen“ x besteht also die Näherungsformel

$$A(x) \approx a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n},$$

deren „Güte“ durch (10) charakterisiert wird.

Schreiben wir (10) in der Gestalt

$$\lim_{x\to\infty} \left[A(x) - a_0 - \frac{a_1}{x} - \frac{a_2}{x^2} - \cdots - \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}\right] x^n = a_n, \tag{10*}$$

so folgt hieraus sofort die *Eindeutigkeit* der asymptotischen Entwicklung von $A(x)$ in der Form (9), natürlich unter der Voraussetzung, daß $A(x)$ überhaupt eine derartige Entwicklung zuläßt. Mit Hilfe von (10*) lassen sich sukzessive alle Koeffizienten eindeutig bestimmen.

Die Umkehrung der Behauptung ist jedoch nicht richtig: *Verschiedene* Funktionen können *ein und dieselbe* asymptotische Entwicklung besitzen. Zum Beispiel gilt bekanntlich

$$e^{-x} x^n \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \infty;$$

deshalb haben offenbar alle Funktionen der Form $A(x) + C\,e^{-x}$ dieselbe asymptotische Entwicklung wie die Funktion (Ax).

Bemerkung. Manchmal werden wir aus Gründen der Bequemlichkeit

$$B(x) \sim \varphi(x) + \psi(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}$$

schreiben, wobei $B(x)$, $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ in $\mathfrak{X}$ definierte Funktionen sind, und verstehen darunter

$$\frac{B(x) - \varphi(x)}{\psi(x)} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}.$$

464. Die grundlegenden Eigenschaften asymptotischer Entwicklungen. Unter asymptotischen Entwicklungen wollen wir hier und im folgenden stets Entwicklungen von der Form (9) verstehen.[1]) Alle zu betrachtenden Funktionen seien im Gebiet $\mathfrak{X}$ mit dem Häufungspunkt im Unendlichen definiert.

---

[1]) Die Theorie dieser Entwicklungen stammt von HENRI POINCARÉ (1854—1912, französischer Mathematiker), der sie auch auf Differentialgleichungen und in der Himmelsmechanik angewendet hat.

1°. Ist

$$A(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \qquad B(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{x^n}, \tag{11}$$

so gilt offenbar auch

$$A(x) \pm B(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \pm b_n}{x^n},$$

d. h., *asymptotische Entwicklungen können gliedweise addiert bzw. subtrahiert werden.*

2°. *Zu der asymptotischen Entwicklung des Produkts $A(x)\,B(x)$ gelangt man durch formale Bildung des Cauchyschen Produkts aus den Entwicklungen* (11).

Für jedes n gilt

$$A(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

und

$$B(x) = b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \cdots + \frac{b_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

Durch Multiplikation erhalten wir

$$A(x)\,B(x) = c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots + \frac{c_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right) \quad \text{mit} \quad c_m = \sum_{i=0}^{m} a_i b_{m-i}.$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$A(x)\,B(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{x^n},$$

was zu beweisen war.

Setzen wir $B(x) = A(x)$, so erhalten wir die asymptotische Entwicklung des Quadrats $[A(x)]^2$. Ebenso kann man die asymptotische Entwicklung der Funktion $[A(x)]^m$ erhalten, wobei m eine beliebige natürliche Zahl ist.

3°. Gegeben sei eine Funktion $F(y)$, die im Punkt $y = 0$ analytisch sei, d. h., sie lasse sich in der Umgebung dieses Punktes in eine Potenzreihe entwickeln:

$$F(y) = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m y^m = \beta_0 + \beta_1 y + \beta_2 y^2 + \cdots + \beta_m y^m + \cdots.$$

Wir betrachten außerdem die Funktion $A(x)$, die eine asymptotische Entwicklung *ohne Absolutglied* besitze:

$$A(x) \sim \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \cdots, \tag{12}$$

so daß $A(x)$ für $x \to \infty$ gegen 0 strebt. In diesem Fall hat, zumindest für hinreichend große x, die mittelbare Funktionen

$$F(A(x)) = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m [A(x)]^m$$

einen Sinn.

Die Funktion $F(A(x))$ besitzt ebenfalls eine asymptotische Entwicklung, die aus der vorhergehenden Entwicklung folgt, wenn man für jede Potenz $[A(x)]^m$ die entsprechende asymptotische Entwicklung einsetzt und formal die Koeffizienten bei gleichen Potenzen von x zusammenfaßt (vgl. Nr. 446).

Um dies zu zeigen, bemerken wir zunächst, daß die Funktion $F(y)$ in der Umgebung des Punktes $y = 0$ eine stetige (und folglich beschränkte) Ableitung besitzt und also für zwei beliebige Punkte y und $\bar{y}$ dieser Umgebung die Ungleichung

$$|F(\bar{y}) - F(y)| \leqq L\,|\bar{y} - y| \qquad (L \text{ konstant})$$

erfüllt.

Die n-te Partialsumme der Reihe (12) bezeichnen wir mit $A_n(x)$:

$$A_n(x) = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}.$$

Für ein festes n und für hinreichend große x stimmen die beiden Funktionen $A(x)$ und $A_n(x)$ in der oben erwähnten Umgebung überein, so daß für $x \to \infty$

$$\left|x^n[F(A(x)) - F(A_n(x))]\right| \leqq Lx^n\,|A(x) - A_n(x)| = Lx^n\,|r_n(x)| \to 0$$

und damit

$$F(A(x)) = F(A_n(x)) + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

ist. Andererseits gilt auf Grund des aus Nr. 446 bekannten Satzes für hinreichend große x

$$\begin{aligned} F(A_n(x)) &= \beta_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m[A_n(x)]^m \\ &= \beta_0 + \frac{\beta_1 a_1}{x} + \frac{\beta_1 a_2 + \beta_2 a_1^2}{x^2} + \frac{\beta_1 a_3 + 2\beta_2 a_1 a_2 + \beta_3 a_1^3}{x^3} + \cdots \\ &\quad + \frac{\beta_1 a_n + \cdots + \beta_n a_1^n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right); \end{aligned}$$

wegen der vorhergehenden Beziehung kann dieselbe Gleichung auch für $F(A(x))$ aufgeschrieben werden, womit die Richtigkeit der asymptotischen Entwicklung

$$F(A(x)) \sim \beta_0 + \frac{\beta_1 a_1}{x} + \frac{\beta_1 a_2 + \beta_2 a_1^2}{x^2} + \cdots + \frac{\beta_1 a_n + \cdots + \beta_n a_1^n}{x^n} + \cdots$$

bewiesen ist.

Wählen wir z. B.

$$F(y) = e^y = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y^m}{m!},$$

so folgt

$$\begin{aligned} e^{A(x)} \sim 1 &+ \frac{a_1}{x} + \left[\frac{a_2}{1!} + \frac{a_1^2}{2!}\right]\frac{1}{x^2} + \left[\frac{a_3}{1!} + \frac{2a_1a_2}{2!} + \frac{a_1^3}{3!}\right]\frac{1}{x^3} \\ &+ \cdots + \left[\frac{a_n}{1!} + \cdots + \frac{a_1^n}{n!}\right]\frac{1}{x^n} + \cdots. \end{aligned}$$

Eine interessante Anwendung dieses Satzes über die Substitution einer Reihe in eine andere ist (wie bei den konvergenten Potenzreihen; Nr. 448) die Division der asymptotischen Entwicklungen der Funktionen $B(x)$ und $A(x)$ unter der Voraussetzung, daß das Absolutglied a_0 von $A(x)$ von 0 verschieden ist. Da hier im Vergleich zu Nr. 448 keine neuen Gedanken eingeführt werden müssen, wollen wir auf die Durchführung verzichten.

4°. Wir kommen nun zur *Integration* asymptotischer Entwicklungen.

Die Funktion $A(x)$ sei stetig im Intervall $\mathscr{X} = [a, \infty)$ und lasse eine asymptotische Entwicklung

$$A(x) \sim \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \cdots \tag{13}$$

zu, die also mit dem Glied beginnt, das $\frac{1}{x^2}$ enthält. Dann existiert für diese Funktion ein endliches

Integral von einem beliebigen $x \geqq a$ bis ∞,[1]) *und dieses Integral besitzt seinerseits (als Funktion von x) eine asymptotische Entwicklung*

$$\int_x^\infty A(x)\,dx \sim \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{2}\frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}} + \cdots, \tag{14}$$

die aus (13) *formal durch gliedweise Integration folgt.*

Setzen wir nämlich

$$A_n(x) = \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{x^k}, \qquad r_n(x) = A(x) - A_n(x),$$

dann gilt bei beliebigem $\varepsilon > 0$ und beliebigem festem n für hinreichend große x

$$x^n\,|r_n(x)| < \varepsilon. \tag{15}$$

Für ein $X > x$ ist

$$\int_x^X A(x)\,dx = \int_x^X A_n(x)\,dx + \int_x^X r_n(x)\,dx = \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{k-1}\left[\frac{1}{x^{k-1}} - \frac{1}{X^{k-1}}\right] + \int_x^X r_n(x)\,dx.$$

Für $X \to \infty$ erhalten wir

$$\int_x^\infty A(x)\,dx = \frac{a_2}{1}\frac{1}{x} + \frac{a_3}{2}\frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}} + R_{n-1}(x) \tag{16}$$

mit

$$R_{n-1}(x) = \lim_{X\to\infty} \int_x^X r_n(x)\,dx = \int_x^\infty r_n(x)\,dx.$$

Da wegen (15) für hinreichend große x

$$\left|\int_x^X r_n(x)\,dx\right| \leqq \int_x^X |r_n(x)|\,dx < \varepsilon \int_x^X \frac{dx}{x^n} = \frac{\varepsilon}{n-1}\left[\frac{1}{x^{n-1}} - \frac{1}{X^{n-1}}\right]$$

ist, erhalten wir (für diese x) durch den Grenzübergang $X \to \infty$

$$|R_{n-1}(x)| < \frac{\varepsilon}{x^{n-1}},$$

so daß

$$\lim_{x\to\infty} x^{n-1} R_{n-1}(x) = 0$$

ist, wodurch zusammen mit (16) die Richtigkeit der Entwicklung (14) bewiesen ist.

Enthält die asymptotische Entwicklung einer Funktion $A(x)$ das Glied $\frac{a_1}{x}$ (mit $a_1 \neq 0$), so kann man zeigen, daß für diese Funktion kein endliches Integral zwischen x und ∞ existiert (vgl. Nr. 474).

[1]) Wir erinnern uns (vgl. S. 265), daß unter dem Integral der Funktion $f(x)$ von a bis ∞ der Grenzwert

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x)\,dx$$

zu verstehen ist.

Bemerkung. Es ist interessant, daß die formale gliedweise Differentiation einer asymptotischen Entwicklung im allgemeinen nicht erlaubt ist. Als Beispiel betrachten wir die Funktion $F(x) = e^{-x} \sin e^x$. Da für jedes n

$$\lim_{x\to\infty} F(x)\, x^n = 0$$

ist, gilt $F(x) \sim 0$, d. h., die asymptotische Entwicklung der Funktion $F(x)$ besteht nur aus Nullen. Indessen ist für die Ableitung

$$F'(x) = -e^{-x} \sin e^x + \cos e^x$$

eine derartige Entwicklung gar nicht möglich, da sogar der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} F'(x)$ nicht existiert.

465. Die Herleitung der Eulerschen Summenformel. Diese Formel spielt in der Analysis eine wichtige Rolle und wird insbesondere oft zur Herleitung konkreter asymptotischer Entwicklungen benutzt. Wir wollen nun diese Formel herleiten und einige Anwendungen zeigen.

Wir gehen von der Taylorschen Formel mit dem Restglied in Integralform (Nr. 318) aus:[1])

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) = h f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{h^m}{m!} f^{(m)}(x_0) + \varrho,$$

$$\varrho = \frac{1}{m!} \int_{x_0}^{x_0+h} f^{(m+1)}(t) \cdot (x_0 + h - t)^m \, dt = \int_0^h f^{(m+1)}(x_0 + h - z) \frac{z^m}{m!} \, dz.$$

Wir nehmen nun für f der Reihe nach die Funktionen

$$\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt, \qquad f(x), \qquad h f'(x), \qquad h^2 f''(x), \qquad h^{m-2} f^{(m-2)}(x)$$

und ersetzen gleichzeitig m entsprechend durch

$$m, \qquad m-1, \qquad m-2, \qquad m-3, \qquad \ldots, \qquad 1.$$

Wir erhalten damit ein System von m Gleichungen:

$$\begin{array}{rl|l}
\dfrac{1}{h} \displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\, dt = & f(x_0) + \dfrac{h}{2!} f'(x_0) + \dfrac{h^2}{3!} f''(x_0) + \cdots + \dfrac{h^{m-1}}{m!} f^{(m-1)}(x_0) + \varrho_0 & 1 \\[2ex]
\Delta f(x_0) = & h f'(x_0) + \dfrac{h^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \dfrac{h^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(x_0) + \varrho_1 & A_1 \\[2ex]
h \Delta f'(x_0) = & h^2 f''(x_0) + \cdots + \dfrac{h^{m-1}}{(m-2)!} f^{(m-1)}(x_0) + \varrho_2 & A_2 \\[2ex]
\cdots & & \\[2ex]
h^{m-2} \Delta f^{(m-2)}(x_0) = & \dfrac{h^{m-1}}{1!} f^{(m-1)}(x_0) + \varrho_{m-1} & A_{m-1}
\end{array}$$

Aus den rechten Seiten dieses Systems eliminieren wir alle Ableitungen; dazu addieren wir zur ersten Gleichung gliedweise die entsprechend mit den Zahlen $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$ multiplizierten

[1]) Wir setzen hier und im folgenden die Existenz und die Stetigkeit aller verwendeten Ableitungen voraus, ohne dies jedesmal speziell zu betonen.

restlichen Gleichungen, wobei diese Zahlen die Bedingungen

$$\begin{gathered}\frac{1}{2!}+A_1=0, \qquad \frac{1}{3!}+\frac{1}{2!}A_1+A_2=0,\ldots\\ \frac{1}{m!}+\frac{1}{(m-1)!}A_1+\frac{1}{(m-2)!}A_2+\cdots+A_{m-1}=0\end{gathered} \tag{17}$$

erfüllen sollen. Als Ergebnis erhalten wir

$$f(x_0)=\frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t+A_1\Delta f(x_0)+A_2h\Delta f'(x_0)+\cdots+A_{m-1}h^{m-2}\Delta f^{(m-2)}(x_0)+r \tag{18}$$

mit

$$\begin{aligned} r&=-\varrho_0-A_1\varrho_1-A_2\varrho_2-\cdots-A_{m-1}\varrho_{m-1}\\ &=-\frac{1}{h}\int\limits_0^h f^{(m)}(x_0+h-z)\left[\frac{z^m}{m!}+A_1\frac{hz^{m-1}}{(m-1)!}\right.\\ &\qquad\left.+A_2\frac{h^2z^{m-2}}{(m-2)!}+\cdots+A_{m-1}h^{m-1}z\right]\mathrm{d}z\end{aligned}$$

oder kürzer

$$r=-\frac{1}{h}\int\limits_0^h f^{(m)}(x_0+h-z)\,\varphi_m(z)\,\mathrm{d}z \tag{18*}$$

mit

$$\varphi_m(z)=\frac{z^m}{m!}+A_1\frac{hz^{m-1}}{(m-1)!}+A_2\frac{h^2z^{m-2}}{(m-2)!}+\cdots+A_{m-1}h^{m-1}z. \tag{19}$$

Offenbar können wir aus dem linearen Gleichungssystem (17) die Koeffizienten $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$ sukzessive eindeutig bestimmen. Sie sind außerdem von der Wahl der Funktion f und der Zahlen x_0 und h unabhängig. Übrigens sind uns diese Koeffizienten schon bekannt; es sind die Koeffizienten $\frac{\beta_k}{k!}$ der Entwicklung von $\frac{x}{e^x-1}$ nach Potenzen von x (vgl. Nr. 449, Formel (12)). Erinnern wir uns nämlich der symbolischen Gleichung

$$(\beta+1)^k-\beta^k=0,$$

der die Zahlen β_k genügen, so können wir uns leicht davon überzeugen, daß die Lösungen der Gleichungen (17) genau die Zahlen $\frac{\beta_k}{k!}$ sind. Aus dem in Nr. 449 über die β_k Gesagten folgt

$$\begin{gathered} A_1=\frac{\beta_1}{1!}=-\frac{1}{2}, \qquad A_{2p-1}=\frac{\beta_{2p-1}}{(2p-1)!}=0 \quad \text{für} \quad p>1,\\ A_{2p}=\frac{\beta_{2p}}{(2p)!}=(-1)^{p-1}\frac{B_p}{(2p)!},\end{gathered} \tag{20}$$

wobei B_p die p-te Bernoullische Zahl ist.

Die Funktion $f(x)$ werde nun in dem endlichen Intervall $[a, b]$ betrachtet. Wir setzen $h=\frac{b-a}{n}$, wobei n eine natürliche Zahl sei, und schreiben, indem wir für x_0 der Reihe nach die Zahlen

$$a,\ a+h,\ a+2h,\ \ldots,\ a+(n-1)\,h=b-h$$

wählen, für jedes Intervall $[a + (i - 1)h, a + ih]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ einzeln eine Gleichung vom Typ (18) mit dem Restglied (18*) auf. Die Addition dieser Gleichungen ergibt

$$\sum_{i=1}^{n} f(a + (i-1)h) = \sum_{a}^{b} f(x)$$
$$= \frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx + A_1[f(b) - f(a)] + A_2 h[f'(b) - f'(a)] + \cdots$$
$$+ A_{m-1}h^{m-2}[f^{(m-2)}(b) - f^{(m-2)}(a)] + R \qquad (21)$$

mit dem Restglied

$$R = -\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n}\int_0^h f^{(m)}(a + ih - z)\,\varphi_m(z)\,dz = -\frac{1}{h}\sum_{a}^{b}\int_0^h f^{(m)}(x + h - z)\,\varphi_m(z)\,dz. \qquad (21')$$

Dies ist die *Eulersche Summenformel* (oft auch *Euler-Maclaurinsche Formel*) mit Restglied (welches Euler und Maclaurin natürlich noch nicht angaben). Die Zahl m kann beliebige natürliche Werte $\geqq 2$ annehmen.

466. Untersuchung des Restgliedes. Zunächst machen wir einige Bemerkungen über die Funktion $\varphi_m(z)$. Durch Differentiation von (19) finden wir

$$\varphi_m'(z) = \varphi_{m-1}(z) + A_{m-1}h^{m-1}. \qquad (22)$$

Ferner gilt für jedes $m \geqq 2$

$$\varphi_m(0) = 0, \qquad \varphi_m(h) = 0. \qquad (23)$$

Die erste Beziehung folgt aus der speziellen Form des Polynoms $\varphi_m(z)$; vgl. (19). Die zweite erhalten wir aus der letzten Gleichung des Systems (17).

Wir beweisen nun die folgende Behauptung: *Die Funktion $\varphi_{2k}(z)$ (von gerader Ordnung) kann im Intervall $[0, h]$ keinen Wert mehr als zweimal annehmen.* Setzen wir zum Beweis das Gegenteil voraus, so würde die Ableitung $\varphi_{2k}'(z) = \varphi_{2k-1}(z)$ (diese Beziehung folgt aus (22) und $A_{2k-1} = 0$) nach dem Satz von Rolle[1]) im Innern des Intervalls $[0, h]$ mindestens zweimal verschwinden. Dann müßte aber nach demselben Satz die Ableitung

$$\varphi_{2k-1}'(z) = \varphi_{2k-2}(z) + A_{2k-2}h^{2k-2}$$

im Innern des Intervalls $[0, h]$ mindestens dreimal verschwinden, d. h., dieFunktion $\varphi_{2k-2}(z)$ würde im Innern dieses Intervalls den Wert $-A_{2k-2}h^{2k-2}$ mindestens dreimal annehmen. Dies bedeutet, wenn wir die Ordnung der Funkton φ_{2k} immer stufenweise um 2 verkleinern, daß schließlich die Funktion

$$\varphi_2(z) = \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}$$

(Polynom *zweiten* Grades) einen gewissen Wert mindestens dreimal annehmen müßte, was jedoch unmöglich ist. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Hieraus ergibt sich die wichtige Folgerung: *Die Funktion $\varphi_{2k}(z)$ wechselt im Intervall $(0, h)$ nie ihr Vorzeichen.* Da sie nämlich an den Endpunkten des Intervalls verschwindet (vgl. (23)), kann sie im Innern des Intervalls nicht ebenfalls gleich 0 werden.

Es läßt sich nun leicht feststellen, welches Vorzeichen die Funktion $\varphi_{2k}(z)$ besitzt: Für kleine Werte von z (und folglich auch überall zwischen 0 und h) hat dieses Polynom das Vorzeichen des kleinsten Gliedes $A_{2k-2}h^{2k-2}z^2 (A_{2k-1} = 0)$, d. h. $(-1)^k$ wegen

$$A_{2k-2} = (-1)^{k-2}\frac{B_{k-1}}{(2k-2)!}.$$

---

[1]) Michel Rolle, 1652—1719, französischer Mathematiker.

Zwei aufeinanderfolgende Funktionen $\varphi_{2k}(z)$ und $\varphi_{2k+2}(z)$ gerader Ordnung sind also in $(0, h)$ von entgegengesetztem Vorzeichen, wobei das Vorzeichen in diesem Intervall nicht wechselt. Diese Bemerkung werden wir sofort benutzen.

Wir kommen nun auf das Restglied R zurück. Es sei m eine gerade Zahl, $m = 2k$, und wir setzen ferner voraus, daß die Ableitungen $f^{(2k)}(z)$ und $f^{(2k+2)}(z)$ im Intervall $[a, b]$ beide positiv oder beide negativ sind. Aus dem Ausdruck für R erhalten wir durch zweimalige partielle Integration unter Beachtung von (22) und (23)

$$\begin{aligned}
R &= \underline{-\frac{1}{h} \sum_a^b \int_0^h \varphi_{2k}(z)\, f^{(2k)}(x + h - z)\, dz} \\
&= \frac{1}{h} \sum_a^b \int_0^h \left(A_{2k} h^{2k} - \varphi'_{2k+1}(z)\right) f^{(2k)}(x + h - z)\, dz \\
&= \frac{1}{h} A_{2k} h^{2k} \sum_a^b [f^{(2k-1)}(x + h) - f^{(2k-1)}(x)] \\
&\quad - \frac{1}{h} \sum_a^b \int_0^h \varphi_{2k+1}(z)\, f^{(2k+1)}(x + h - z)\, dz \\
&= A_{2k} h^{2k-1}[f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] - \frac{1}{h} \sum_a^b \int_0^h \varphi'_{2k+2}(z)\, f^{(2k+1)}(x + h - z)\, dz \\
&= A_{2k} h^{2k-1}[f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] \underline{- \frac{1}{h} \sum_a^b \int_0^h \varphi_{2k+2}(z)\, f^{(2k+2)}(x + h - z)\, dz}.
\end{aligned}$$

Da die unterstrichenen Summen auf Grund der Voraussetzungen entgegengesetzte Vorzeichen besitzen, hat die erste von ihnen dasselbe Vorzeichen wie der Ausdruck

$$A_{2k} h^{2k-1}[f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)]$$

und ist dem absoluten Betrag nach kleiner als dieser. Somit gilt schließlich

$$\begin{aligned}
R = R_{2k} &= \theta \cdot A_{2k} h^{2k-1}[f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] \\
&= \theta \cdot (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k)!} h^{2k-1}[f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] \qquad (0 < \theta < 1).
\end{aligned} \tag{21*}$$

Wenn wir nun voraussetzen, daß alle geraden Ableitungen $f^{(2k)}(z)$ im Intervall $[a, b]$ dasselbe Vorzeichen besitzen, und statt des geschlossenen Ausdrucks (21) die unendliche Reihe schreiben (wobei wir außerdem für die Koeffizienten A_m die Werte (20) berücksichtigen), so erhalten wir die *unendliche Euler-Maclaurinsche Reihe*

$$\begin{aligned}
\sum_a^b f(x) = \frac{1}{h} \int_a^b f(x)\, dx &- \frac{1}{2}[f(b) - f(a)] + \frac{B_1}{2!} h[f'(b) - f'(a)] \\
&- \frac{B_2}{4!} h^3[f'''(b) - f'''(a)] + \cdots + (-1)^{k-2} \frac{B_{k-1}}{(2k-2)!} h^{2k-3}[f^{(2k-3)}(b) - f^{(2k-3)}(a)] \\
&+ (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k)!} h^{2k-1}[f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] + \cdots.
\end{aligned} \tag{24}$$

Diese Reihe ist im allgemeinen *divergent* (so daß das Gleichheitszeichen nur bedingt gilt). Auf Grund der Voraussetzungen ist die Reihe (zumindest vom dritten Glied ab) alternierend. Berücksichtigen wir noch (21*), so können wir sagen, daß *diese Reihe um die linksstehende Summe*

$\sum\limits_a^b f(x)$ *alterniert*. Lösen wir (24) nach dem Integral auf, so gelangen wir zu einer Reihe, *die um diese Integral alterniert.*

Die Partialsummen dieser Reihen gestatten manchmal eine ziemlich genaue Berechnung der Summe $\sum\limits_a^b$, falls das Integral bekannt ist, oder des Integrals $\frac{1}{h}\int\limits_a^b$, falls die Summe bekannt ist. Natürlich muß hierbei grundsätzlich die Abschätzung des Restgliedes bekannt sein.

467. Beispiele für die Anwendung der Eulerschen Summenformel.

1. Wir wollen die Summe des 900 (!) Glieder umfassenden Ausdrucks

$$\sum_{i=100}^{999} \frac{1}{i} = \sum_{100}^{1000} \frac{1}{x}$$

näherungsweise berechnen. Hier ist $f(z) = \frac{1}{z}$, $a = 100$, $b = 1000$, $h = 1$. Wegen

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2}, \quad f''(z) = \frac{2}{z^3}, \quad f'''(z) = -\frac{6}{z^4}, \quad f^{(4)}(z) = \frac{24}{z^5}, \quad f^{(5)}(z) = -\frac{120}{z^6}$$

und allgemein

$$f^{(2k)}(z) = \frac{(2k)!}{z^{2k+1}}$$

sind die Bedingungen bezüglich der Ableitungen gerader Ordnung erfüllt.

Wir setzen die Entwicklung bis zu dem Glied fort, das f''' enthält, so daß im Restglied schon $f^{(5)}$ auftritt. Somit lautet in diesem Fall die Eulersche Summenformel

$$\sum_{100}^{1000} \frac{1}{x} = \int\limits_{100}^{1000} \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{100} - \frac{1}{1000}\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{100^2} - \frac{1}{1000^2}\right)$$
$$- \frac{6}{720}\left(\frac{1}{100^4} - \frac{1}{1000^4}\right) + \theta \cdot \frac{12}{3024}\left(\frac{1}{100^6} - \frac{1}{1000^6}\right) \quad (0 < \theta < 1).$$

Wegen

$$\int\limits_{100}^{1000} \frac{dx}{x} = \ln 10 = \quad 2{,}302\,585\,092\,994\,045\,\ldots$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{100} - \frac{1}{1000}\right) = \quad 0{,}0045$$
$$\frac{1}{12}\left(\frac{1}{100^2} - \frac{1}{1000^2}\right) = \quad 0{,}000\,008\,25$$
$$-\frac{6}{720}\left(\frac{1}{100^4} - \frac{1}{1000^4}\right) = \underline{-0{,}000\,000\,000\,083\,325}$$
$$2{,}307\,093\,342\,910\,720$$
$$\theta \cdot \frac{12}{3024}\left(\frac{1}{100^6} - \frac{1}{1000^6}\right) < 0{,}000\,000\,000\,000\,004$$

können wir mit einer Genauigkeit von 10^{-14}

$$\sum_{100}^{1000} \frac{1}{x} = 2{,}307\,093\,342\,910\,72$$

schreiben.

2. Wir berechnen nun das Integral $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$. Hier ist $f(z) = \frac{1}{1+z}$, $a = 0$, $b = 1$; wir wählen $h = \frac{1}{10}$ $(n = 10)$. Es gilt

$$f'(z) = -\frac{1}{(1+z)^2}, \quad f''(z) = \frac{2}{(1+z)^3}, \quad f'''(z) = -\frac{6}{(1+z)^4},$$

$$f^{(4)}(z) = \frac{24}{(1+z)^5}, \qquad f^{(5)}(z) = -\frac{120}{(1+z)^6}$$

und allgemein

$$f^{(2k)}(z) = \frac{(2k)!}{(1+z)^{2k+1}},$$

so daß unsere Bedingungen wieder erfüllt sind. Die Eulersche Summenformel brechen wir jetzt bei dem Glied ab, das f''' enthält:

$$\int\limits_0^1 \frac{dz}{1+z} = \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \frac{1}{19} - \frac{1}{20}\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$
$$- \frac{1}{1200}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{6}{7200000}\left(1 - \frac{1}{16}\right) - \theta \cdot \frac{12}{3024000000}\left(1 - \frac{1}{64}\right)$$

$(0 < \theta < 1)$.

Mit den Werten

$$\begin{aligned}
\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{19} &= 0{,}718771403 \\
-\frac{1}{20}\left(1 - \frac{1}{2}\right) &= -0{,}025 \\
-\frac{1}{1200}\left(1 - \frac{1}{4}\right) &= -0{,}000625 \\
\frac{6}{7200000}\left(1 - \frac{1}{16}\right) &= 0{,}000000781 \\
& \overline{0{,}693147184} \\
\theta \cdot \frac{12}{324000000}\left(1 - \frac{1}{64}\right) &< 0{,}000000004
\end{aligned}$$

erhalten wir mit einer Genauigkeit von $\frac{1}{2 \cdot 10^8}$

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 = 0{,}69314718.$$

3. Wir zeigen zum Schluß am Beispiel der Reihe

$$\pi^2 = 6 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2},$$

wie mit Hilfe der Eulerschen Summenformel der Wert einer langsam konvergierenden unendlichen Reihe näherungsweise berechnet werden kann. Wir setzen in der allgemeinen Formel (21) [und (21*)]

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad h = 1, \qquad b = a + nh,$$

wobei a und n vorläufig beliebige natürliche Zahlen sein sollen. Das Integral und die Ableitung lassen sich leicht berechnen. Setzen wir die Ausdrücke für die A_m ein, so finden wir

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(a+i)^2} = -\left[\frac{1}{a+n} - \frac{1}{a}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(a+n)^2} - \frac{1}{a^2}\right] - B_1\left[\frac{1}{(a+n)^3} - \frac{1}{a^3}\right]$$

$$+ B_2\left[\frac{1}{(a+n)^5} - \frac{1}{a^5}\right] - \cdots - (-1)^{k-2} B_{k-1}\left[\frac{1}{(a+n)^{2k-1}} - \frac{1}{a^{2k-1}}\right]$$

$$- \theta_n(-1)^{k-1} B_k\left[\frac{1}{(a+n)^{2k+1}} - \frac{1}{a^{2k+1}}\right] \qquad (0 < \theta_n < 1).$$

Für feste a und k gehen wir zum Grenzwert für $n \to \infty$ über. Dabei strebt der Faktor θ_n gegen einen gewissen Grenzwert θ $(0 \leqq \theta \leqq 1)$, und wir erhalten

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(a+i)^2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{2}\frac{1}{a^2} + B_1\frac{1}{a^3} - B_2\frac{1}{a^5} + B_3\frac{1}{a^7}$$

$$- \cdots + (-1)^{k-2} B_{k-1}\frac{1}{a^{2k-1}} + \theta \cdot (-1)^{k-1} B_k \frac{1}{a^{2k+1}}.$$

Wir wählen nun $a = 10$, $k = 10$. Mit den bekannten Bernoullischen Zahlen (Nr. 449) folgt schließlich

$$\pi^2 = 6\sum_{i=1}^{9} \frac{1}{i^2} + \frac{6}{10} + \frac{3}{100} + \frac{1}{1000} - \frac{1}{5\cdot 10^5} + \frac{1}{7\cdot 10^7} - \frac{1}{5\cdot 10^9} + \frac{5}{11\cdot 10^{11}}$$

$$- \frac{691}{455\cdot 10^{13}} + \frac{7}{10^{15}} - \frac{3617}{85\cdot 10^{17}} + \frac{43867}{133\cdot 10^{19}} - \theta\cdot\frac{174611}{55\cdot 10^{21}}.$$

Die Werte berechnen wir auf 19 Dezimalstellen:

$$\begin{aligned}
6\sum_{i=1}^{9}\frac{1}{i^2} &= 9{,}238\,606\,386\,999\,244\,1421\\
\frac{6}{10}+\frac{3}{100}+\frac{1}{1000} &= 0{,}631\\
-\frac{1}{5\cdot 10^5} &= -0{,}000\,002\\
\frac{1}{7\cdot 10^7} &= 0{,}000\,000\,014\,285\,714\,2857\\
-\frac{1}{5\cdot 10^9} &= -0{,}000\,000\,000\,2\\
\frac{5}{11\cdot 10^{11}} &= 0{,}000\,000\,000\,004\,545\,4545\\
-\frac{691}{455\cdot 10^{13}} &= -0{,}000\,000\,000\,000\,151\,8681\\
\frac{7}{10^{15}} &= 0{,}000\,000\,000\,000\,007\\
-\frac{3617}{85\cdot 10^{17}} &= -0{,}000\,000\,000\,000\,000\,4255\\
\frac{43867}{133\cdot 10^{19}} &= 0{,}000\,000\,000\,000\,000\,0330\\
\hline
& 9{,}869\,604\,401\,089\,358\,6217.
\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Rundungsfehler und des Restgliedes erhalten wir

$$\pi^2 = 9{,}869\,604\,401\,089\,358\,62$$

mit einer Genauigkeit von $\dfrac{1}{2 \cdot 10^{17}}$.

Dieses Beispiel ist sehr lehrreich: Wir haben die Summe π^2 einer *konvergenten* Reihe mit hoher Genauigkeit nach der Eulerschen Summenformel berechnet, indem wir also im Grunde genommen auf die Partialsumme einer *divergenten* Reihe zurückgriffen, die um die Zahl π^2 alterniert. Hätten wir dies mit der konvergenten Reihe erreichen wollen, so hätten wir mehr als eine Milliarde Glieder verwenden müssen!

468. Eine andere Gestalt der Eulerschen Summenformel. Wir kehren zu den Formeln (21) und (21′) zurück, setzen aber voraus, daß in dem unendlichen Intervall $[a, \infty)$ beliebig hohe Ableitungen der Funktion $f(x)$ existieren und folgende Bedingungen erfüllen:

(a) Alle geraden Ableitungen $f^{(2k)}(z)$ besitzen in diesem Intervall das gleiche Vorzeichen.

(b) Alle ungeraden Ableitungen $f^{(2k-1)}(z)$ streben für $z \to \infty$ gegen 0.

Es sei m eine gerade Zahl, $m = 2k$. Die Zahlen a und h seien fest, und $b = a + nh$ sei (mit n) variabel. Das Restglied R (vgl. (21′)) schreiben wir in der Form

$$-\frac{1}{h} \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^h \varphi_{2k}(z)\, f^{(2k)}(a + ih - z)\, dz + \frac{1}{h} \sum_{i=n+1}^{\infty} \int_0^h \varphi_{2k}(z)\, f^{(2k)}(a + ih - z)\, dz$$

$$= -\frac{1}{h} \sum_{a}^{\infty} \int_0^h \varphi_{2k}(z)\, f^{(2k)}(x + h - z)\, dz + \frac{1}{h} \sum_{b}^{\infty} \int_0^h \varphi_{2k}(z)\, f^{(2k)}(x + h - z)\, dz.$$

Wir fassen die erste dieser Summen mit jenen Gliedern aus (21), die a enthalten, zu einer *Konstanten* zusammen,

$$C_k = -A_1 f(a) - A_2 h f'(a) - \cdots - A_{2k-2} h^{2k-3} f^{(2k-3)}(a) - \frac{1}{h} \sum_{a}^{\infty} \int_0^h,$$

die offenbar von b unabhängig ist, und können damit der Formel (21) die Gestalt

$$\sum_a^b f(x) = C_k + \frac{1}{h} \int_a^b f(x)\, dx + A_1 f(b) + A_2 h f'(b) + \cdots + A_{2k-2} h^{2k-3} f^{(2k-3)}(b) + R' \tag{25}$$

geben; dabei ist

$$R' = \frac{1}{h} \sum_{i=n+1}^{\infty} \int_0^h \varphi_{2k}(z)\, f^{(2k)}(a + ih - z)\, dz = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^h \varphi_{2k}(z)\, f^{(2k)}(b + ih - z)\, dz$$

$$= \frac{1}{h} \sum_{b}^{\infty} \int_0^h \varphi_{2k}(z)\, f^{(2k)}(x + h - z)\, dz.$$

Diese Umformung ist nur zulässig, wenn die verwendeten unendlichen Reihen konvergieren. Davon wollen wir uns jetzt überzeugen. Aus (24) folgt

$$0 < \frac{\dfrac{1}{h} \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \int_0^h \varphi_{2k}(z)\, f^{(2k)}(a + ih - z)\, dz}{A_{2k} h^{2k-1} [f^{(2k-1)}(a) - f^{(2k-1)}(a + nh)]} < 1.$$

Auf Grund der Eigenschaft der Funktion $\varphi_{2k}(z)$ aus Nr. 466 und der Voraussetzung (a) haben alle Summanden im Zähler dasselbe Vorzeichen, das mit dem des Nenners übereinstimmt. Hieraus folgt, wenn wir zur Grenze für $n \to \infty$ übergehen und die Voraussetzung (b) berücksichtigen, die Konvergenz der Reihe

$$\frac{1}{h} \sum_{a}^{\infty} \int_{0}^{h} \varphi_{2k}(z)\, f^{(2k)}(x + h - z)\, dz \equiv \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{0}^{h} \varphi_{2k}(z)\, f^{(2k)}(a + ih - z)\, dz,$$

wobei ihre Summe dasselbe Vorzeichen besitzt wie der Ausdruck $A_{2k} h^{2k-1} f^{(2k-1)}(a)$ und ihr absoluter Betrag nicht größer ist als dieser. Ersetzen wir in den eben durchgeführten Überlegungen a durch b, so können wir uns von der Konvergenz der Reihe

$$\frac{1}{h} \sum_{b}^{\infty} \int_{0}^{h} \varphi_{2k}(z)\, f^{(2k)}(x + h - z)\, dz \equiv \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{0}^{h} \varphi_{2k}(z)\, f^{(2k)}(b + ih - z)\, dz$$

überzeugen; ferner sehen wir, daß ihre Summe dasselbe Vorzeichen besitzt wie der Ausdruck $A_{2k} h^{2k-1} f^{(2k-1)}(b)$ und daß ihr absoluter Betrag nicht größer als dieser ist.

Wir haben damit nicht nur die Konvergenz der verwendeten unendlichen Reihen nachgewiesen, sondern nebenbei auch gezeigt, daß das Restglied R' aus (25) in der Form

$$R' = \theta \cdot A_{2k} h^{2k-1} f^{(2k-1)}(b) = \theta \cdot (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k)!} h^{2k-1} f^{(2k-1)}(b) \qquad (0 < \theta < 1) \qquad (25^*)$$

geschrieben werden kann.

Außerordentlich interessant ist, daß *die in* (25) *auftretende Konstante* C_k, die auf Grund ihrer Zusammensetzung sehr wohl von k abhängen könnte, *in Wirklichkeit von k unabhängig ist.* Wollen wir uns davon überzeugen, so brauchen wir nur (25) und (25*) mit den entsprechenden Formeln für $k = 1$ zu vergleichen:

$$\sum_{a}^{b} f(x) = C_1 + \frac{1}{h} \int_{a}^{b} f(x)\, dx + A_1 f(b) + \overline{R'}$$

mit

$$\overline{R'} = \overline{\theta} \cdot A_2 h f'(b) \qquad (0 < \overline{\theta} < 1).$$

Wir erhalten

$$C_1 + \overline{\theta} \cdot A_2 h f'(b) = C_k + A_2 h f'(b) + \cdots + A_{2k-2} h^{2k-3} f^{(2k-3)}(b) + \theta \cdot A_{2k} h^{2k-1} f^{(2k-1)}(b).$$

Lassen wir b gegen ∞ streben, so gelangen wir unter Berücksichtigung der Voraussetzung (b) zu

$$C_k = C_2 = C.$$

Die Konstante C, die wir die *Euler-Maclaurinsche Konstante für die Funktion $f(x)$* nennen wollen, hängt (außer von dieser Funktion) noch von der Wahl von a und h ab.

Bemerkung. Gehen wir in den Ungleichungen zur Grenze über, so müßten wir an sich zum Ungleichheitszeichen das Gleichheitszeichen hinzufügen und den Faktor θ in (25*) der Bedingung $0 \leqq \theta \leqq 1$ unterwerfen. Daß $\theta = 0$ entfällt, ist sofort klar: Die Summe einer unendlichen Reihe, deren Glieder das gleiche Vorzeichen haben, kann nicht gleich Null sein. Setzen wir $\theta = 1$, so wäre, wenn k in (25) um 1 vergrößert wird, $R' = 0$; das ist aber, wie wir eben erklärt haben, unmöglich. Also ist tatsächlich $0 < \theta < 1$.

Wir schreiben nun statt der endlichen Summe (25) die unendliche Reihe auf und erhalten die

Euler-Maclaurinsche Reihe in der Gestalt

$$\sum_a^b f(x) = C + \frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{2}f(b) + \frac{B_1}{2!}hf'(b) - \frac{B_2}{4!}h^3 f'''(b) + \cdots$$
$$+ (-1)^{k-2}\frac{B_{k-1}}{(2k-2)!}h^{2k-3}f^{(2k-3)}(b) + (-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k)!}h^{2k-1}f^{(2k-1)}(b) + \cdots.$$

(Das Gleichheitszeichen ist auch hier nur bedingt richtig!) Auf Grund der Voraussetzung (a) ändern sich alle Ableitungen $f^{(2k-1)}(b)$ mit wachsendem b in der gleichen Richtung; da sie wegen Voraussetzung (b) für $b \to \infty$ gegen 0 streben, sind sie alle vom gleichen Vorzeichen. Hieraus und aus (25*) folgt, daß die Euler-Maclaurinsche Reihe auch in der neuen Gestalt um die Summe $\sum_a^b f(x)$ alterniert.

Bemerkung. Zum Schluß wollen wir erläutern, wie die in den obigen Überlegungen auftretende Konstante C bestimmt werden kann. Wählen wir ein $b > a$, für welches sich sowohl die Summe als auch das Intergral mühelos berechnen läßt, so können wir für die Zahl C die um sie alternierende Reihe

$$C = \sum_a^b f(x) - \frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx + \frac{1}{2}f(b) - \frac{B_1}{2!}hf'(b) + \frac{B_2}{4!}h^3 f'''(b) - \cdots$$

erhalten, die in vielen Fällen gestattet, einen Näherungswert für C zu finden.

469. Stirlingsche Formel und Stirlingsche Reihe. Die Überlegungen aus Nr. 468 lassen sich auf ein wichtiges Beispiel, und zwar auf die Berechnung von

$$\ln n! = \ln n + \sum_{i=1}^{n-1} \ln i$$

anwenden. Wir setzen $a = 1$, $h = 1$ und (wenn n durch $n-1$ ersetzt wird) $b = n$ und erhalten $f(z) = \ln z$, also

$$f^{(m)}(z) = (-1)^{m-1}\frac{(m-1)!}{z^m};$$

die Bedingungen (a) und (b) sind erfüllt. Wir gelangen somit zu der asymptotischen Entwicklung für $\ln n!$:[1])

$$\ln n! \sim C + \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n + \frac{B_1}{1\cdot 2}\frac{1}{n} - \frac{B_2}{3\cdot 4}\frac{1}{n^3}$$
$$+ \cdots + (-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k-1)\,2k}\frac{1}{n^{2k-1}} + \cdots. \tag{26}$$

Dies ist die sogenannte *Stirlingsche Reihe*; sie ist divergent, denn der absolute Betrag des allgemeinen Gliedes (vgl. Nr. 449)

$$\frac{s_{2k}}{2\pi^2 n}\,\frac{(2k-2)!}{(2\pi n)^{2k-2}}$$

strebt gegen ∞.

Von der asymptotischen Entwicklung für $\ln n!$ kann man, wie schon in Nr. 464, 3°, erwähnt wurde, auch zur Entwicklung der Fakultät selbst gelangen. Setzen wir nämlich für die B_k

[1]) Das einzelne Glied $\ln n$ wurde zur Summe der Logarithmen hinzugefügt; der bei der Integration auftretende Summand 1 ist in C enthalten.

die Zahlenwerte ein, so finden wir

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left[1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}-\frac{139}{51840n^3}-\frac{571}{2488320n^4}+\cdots\right].$$

Wenn wir uns bei der Reihe (26) mit den angegebenen Gliedern begnügen, aber das Restglied hinzufügen, so erhalten wir die *Stirlingsche Formel*

$$\ln n! = C + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + \frac{B_1}{1\cdot 2}\frac{1}{n} - \frac{B_2}{3\cdot 4}\frac{1}{n^3}$$
$$+ \cdots + (-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k-1)\,2k}\frac{1}{n^{2k-1}} + \theta\cdot(-1)^k\frac{B_{k+1}}{(2k+1)\,(2k+2)}\frac{1}{n^{2k+1}}, \qquad (27)$$

die, wie wir sehen werden, zu Näherungsrechnungen vollkommen ausreicht.

Setzen wir $k = 0$, so erhalten wir den einfachen und wichtigen Spezialfall der Stirlingschen Formel

$$\ln n! = C + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + \frac{\theta}{12n}.$$

Durch Entlogarithmieren gelangen wir zu der gebräuchlichen Form

$$n! = e^C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\theta/12n},$$

die wir schon in Nr. 406 auf anderem Wege hergeleitet hatten. Dort fanden wir auch, daß $e^C = a = \sqrt{2\pi}$ ist, so daß die bis jetzt noch unbekannte Konstante C den Wert $\frac{1}{2}\ln 2\pi$ erhält.

Wir wollen nun nach Formel (27) den Wert von ln 100! auf zehn Dezimalstellen berechnen. Dazu wählen wir $k = 2$. Durch Addition der ersten fünf Zahlen

$$\frac{1}{2}\ln 2\pi = 0{,}918938533204$$

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n = 100{,}5\ln 100 = 462{,}819603691803$$

$$-n = -100 = -100$$

$$\frac{B_1}{2n} = \frac{1}{1200} = 0{,}000833333333$$

$$-\frac{B_2}{12n^3} = -\frac{1}{36\cdot 10^7} = -0{,}000000002777$$

ergibt sich für ln 100! der Wert 363,7393755556 mit einer Genauigkeit von $\frac{1}{2\cdot 10^{10}}$ (unter Berücksichtigung des Restgliedes und der Rundungsfehler). Die Genauigkeit der Näherung kann noch wesentlich verbessert werden, wenn man mehr Glieder und noch mehr Dezimalstellen nimmt. Sie wächst im vorliegenden Fall ungefähr bis zum dreihundertsten Glied an (solange die Glieder dem absoluten Betrag nach abnehmen).

Bemerkung. Wir haben an einer Reihe von Beispielen gesehen, daß die Partialsummen einer als divergent bekannten Reihe manchmal gestatten, gesuchte Größen zu berechnen, und zwar sogar mit großer Genauigkeit. Solche Reihen wurden früher und werden auch heute noch oft *semikonvergent* genannt. Wir ziehen es jedoch vor, diesen Ausdruck nicht zu verwenden, da seine allgemeine und gleichzeitig exakte Definition Schwierigkeiten bereitet.

XIII. Uneigentliche Integrale

§ 1. Uneigentliche Integrale mit unendlichen Grenzen

470. Definition des Integrals mit unendlichen Grenzen. In Kapitel IX wurde der Begriff des bestimmten Integrals $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ in dem Fall untersucht, daß das Intervall $[a, b]$ *endlich* und die Funktion $f(x)$ *beschränkt* ist. Das vorliegende Kapitel ist der Verallgemeinerung des Integralbegriffs in verschiedenen Richtungen gewidmet. Wir betrachten zunächst das über ein *unendliches* Intervall erstreckte Integral.

Die Funktion $f(x)$ sei im Intervall $[a, \infty)$, also für $x \geqq a$ definiert und in jedem endlichen Teilintervall $[a, A]$ integrierbar, so daß das Integral $\int\limits_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$ für jedes $A > a$ sinnvoll ist.

Der (endliche oder unendliche) Grenzwert dieses Integrals für $A \to \infty$, falls er existiert, heißt das *Integral der Funktion* $f(x)$ *von* a *bis* ∞, und man schreibt

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty} \int\limits_a^A f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Ist dieser Grenzwert endlich, so sagt man, das Integral (1) *konvergiere*, und die Funktion $f(x)$ heißt *integrierbar* in dem unendlichen Intervall $[a, \infty)$. Ist der Grenzwert (1) unendlich oder existiert er überhaupt nicht, so nennt man das Integral (1) *divergent*. Zum Unterschied von dem früher untersuchten gewöhnlichen („eigentlichen") Integral heißt das eben definierte Integral (1) *uneigentlich*.[1])

Beispiele.

1. Die Funktion $\dfrac{1}{1 + x^2}$ ist in jedem endlichen Intervall $[0, A]$, $A > 0$, integrierbar, wobei

$$\int\limits_0^A \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = \arctan x \Big|_0^A = \arctan A$$

gilt. Da dieses Integral für $A \to \infty$ gegen den endlichen Grenzwert $\pi/2$ strebt, ist das Integral von 0 bis ∞ konvergent und hat den Wert

$$\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = \lim_{A\to\infty} \int\limits_0^A = \frac{\pi}{2}.$$

---

[1]) Dem Begriff des uneigentlichen Integrals begegneten wir schon in Nr. 373.

2. Wir wollen die Frage untersuchen, für welche Werte des Exponenten $\lambda > 0$ das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\lambda} \qquad (a > 0) \tag{2}$$

existiert. Ist $\lambda \neq 1$, so gilt

$$\int_a^A \frac{dx}{x^\lambda} = \frac{1}{1-\lambda} x^{1-\lambda}\Big|_a^A = \frac{1}{1-\lambda}(A^{1-\lambda} - a^{1-\lambda}).$$

Dieser Ausdruck hat für $A \to \infty$ entweder den Grenzwert ∞ oder $\frac{1}{\lambda - 1} a^{1-\lambda}$, je nachdem, ob $\lambda < 1$ oder $\lambda > 1$ ist. Für $\lambda = 1$ gilt

$$\int_a^A \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_a^A = \ln A - \ln a;$$

für $A \to \infty$ ergibt sich ∞. Also ist das Integral (2) für $\lambda > 1$ konvergent (und hat den Wert $\frac{1}{\lambda - 1} a^{1-\lambda}$), für $\lambda \leqq 1$ divergent.

Analog zu (1) definiert man sowohl das *Integral der Funktion $f(x)$ von $-\infty$ bis a* durch

$$\int_{-\infty}^a f(x)\, dx = \lim_{A' \to -\infty} \int_{A'}^a f(x)\, dx \qquad (A' < a) \tag{3}$$

als auch das *Integral der Funktion $f(x)$ von $-\infty$ bis ∞* durch

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx = \lim_{\substack{A' \to -\infty \\ A \to \infty}} \int_{A'}^A f(x)\, dx.$$

Dabei bleibt die für das Integral (1) eingeführte Terminologie erhalten.

Im letzten Fall können wir mit Hilfe eines beliebigen a

$$\int_{A'}^A f(x)\, dx = \int_{A'}^a f(x)\, dx + \int_a^A f(x)\, dx \qquad (A' < a < A)$$

schreiben. Die Existenz der zwei getrennten Grenzwerte für $A' \to -\infty$, $A \to \infty$ auf der linken Seite ist offenbar gleichbedeutend mit der Existenz jedes der Grenzwerte (1) und (3) für die Integrale auf der rechten Seite.[1]) Somit kann ein Integral von $-\infty$ bis ∞ auch durch

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx = \int_{-\infty}^a f(x)\, dx + \int_a^\infty f(x)\, dx$$

definiert werden, unter der Voraussetzung, daß die Integrale auf der rechten Seite einzeln existieren. Diese Definition ist tatsächlich von der Wahl des Punktes a unabhängig.

---

[1]) Divergieren die Integrale bestimmt, so ist der Fall ausgeschlossen, daß diese beiden Integrale den Grenzwert ∞, aber mit verschiedenem Vorzeichen haben.

Beispiele.

3. $$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A' \to -\infty} \int_{A'}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \to -\infty} (-\arctan A') = \frac{\pi}{2};$$

4. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{0}^{\infty} + \int_{-\infty}^{0} = \pi.$$

471. Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. In den obigen Beispielen berechneten wir das Integral zuerst über ein endliches Intervall mit Hilfe einer Stammfunktion und gingen dann zum Grenzwert über. Diese beiden Vor gänge lassen sich in einer Formel zusammenfassen.

Eine Funktion $f(x)$ sei z. B. im Intervall $[a, \infty)$ definiert und in jedem endlichen Teilintervall $[a, A]$ integrierbar. Existiert dabei für $f(x)$ eine Stammfunktion $F(x)$ im ganzen Intervall $[a, \infty)$, so gilt auf Grund des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (Nr. 308)

$$\int_{a}^{A} f(x)\,dx = F(A) - F(a) = F(x)\Big|_{a}^{A}.$$

Das uneigentliche Integral (1) existiert also genau dann, wenn ein endlicher Grenzwert

$$\lim_{A \to \infty} F(A) = F(\infty)$$

existiert. Dann ist

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = F(\infty) - F(a) = F(x)\Big|_{a}^{\infty}$$

Analog gilt

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{a}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{\infty},$$

wenn man unter $F(-\infty)$ den Grenzwert $\lim\limits_{A' \to -\infty} F(A')$ versteht. Existiert der bei der Berechnung des Integrals an der oberen und der unteren Grenze auftretende Grenzwert, so ist das Integral konvergent.

472. Beispiele.

1. $\int_{0}^{\infty} e^{-ax} \sin bx\,dx$ $(a > 0)$. Da

$$F(x) = -\frac{a \sin bx + b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{-ax}$$

eine Stammfunktion, also $F(0) = -\dfrac{b}{a^2 + b^2}$ und $F(\infty) = 0$ ist, gilt

$$\int_{0}^{\infty} e^{-ax} \sin bx\,dx = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Analog ist

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{b \sin bx - a \cos bx}{a^2 + b^2} e^{-ax} \Big|_0^\infty = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

2. $$\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^4} = \left[\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \left(x\sqrt{2} + 1\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \left(x\sqrt{2} - 1\right)\right]\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

3. $$\int_{2/\pi}^\infty \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \, dx = \cos \frac{1}{x} \Big|_{2/\pi}^\infty = 1.$$

4. $\int_0^\infty \sin x \, dx$. Eine Stammfunktion ist hier $-\cos x$, aber das Glied $-\cos x \Big|_0^\infty$ hat keinen Sinn, da $\cos x$ für $x \to \infty$ keinem Grenzwert zustrebt; das Integral existiert also nicht.

5. $\int_0^\infty \frac{x \ln x}{(1 + x^2)^3} \, dx$. Mit Hilfe partieller Integration und Partialbruchzerlegung finden wir

$$F(x) = \int \frac{x \ln x}{(1 + x^2)^3} \, dx = -\frac{1}{4} \frac{\ln x}{(1 + x^2)^2} + \frac{1}{4} \ln x - \frac{1}{8} \ln (1 + x^2) + \frac{1}{8} \frac{1}{1 + x^2}$$

als Stammfunktion. Für $x \to 0$ ist $\lim F(x) = \frac{1}{8}$; diesen Grenzwert nehmen wir als Wert der Funktion im Punkt $x = 0$. Andererseits ist $F(\infty) = 0$. Also ist das Integral gleich $-\frac{1}{8}$.

6. Bei dem Körper, der durch Rotation der Hyperbel $xy = 1$ um die x-Achse entsteht, berechne man das Volumen und die Mantelfläche des Teils, der durch die Ungleichung $x \geqq 1$ bestimmt wird.

Der endliche Teil, der einer Änderung von x zwischen 1 und A ($A > 1$) entspricht, hat das Volumen

$$V_A = \pi \int_1^A \frac{dx}{x^2}$$

und die Mantelfläche

$$S_A = 2\pi \int_1^A \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \, dx.$$

Für das Volumen V und die Mantelfläche S des ganzen (sich ins Unendliche erstreckenden) Körpers hat man die Grenzwerte dieser Größen zu nehmen, d. h.

$$V = \pi \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}, \qquad S = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \, dx$$

zu setzen. Während das erste Integral konvergiert (vgl. Nr. 470, Beispiel 2) und das Volumen gleich dem endlichen Wert π ist, divergiert das zweite Integral, so daß also die Mantelfläche unendlich groß wird. Davon können wir uns überzeugen, wenn wir überlegen, daß

$$S_A > 2\pi \int_1^A \frac{\mathrm{d}x}{x} = 2\pi \ln A$$

ist, S_A also für $A \to \infty$ gegen ∞ strebt.

7. Im Koordinatenanfangspunkt O befinde sich eine Masse m, die einen Punkt M mit der Masse 1, der sich auf der x-Achse im Abstand x vom Punkt O befinde, mit der Kraft

$$F = \frac{m}{x^2}$$

anziehe (Newtonsches Gesetz). Wie groß ist bei dieser Kraft F die Arbeit A, die geleistet werden muß, um den Punkt M längs der x-Achse aus der Lage $x = r$ ins Unendliche zu verschieben?

Die Arbeit ist offenbar *negativ*, da die Kraft entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung wirkt. Übertragen wird die Formel (9) aus Nr. 353 auf diesen Fall, so erhalten wir

$$A = -\int_r^\infty \frac{m}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{m}{x}\Big|_r^\infty = -\frac{m}{r}.$$

Wird dagegen M vom Unendlichen in den Punkt $x = r$ gebracht, so ruft die Anziehungskraft die *positive* Arbeit $\frac{m}{r}$ hervor. Diese Größe heißt das *Potential* der auf den Punkt M wirkenden Kraft und dient als Maß für die in diesem Punkt angehäufte *potentielle Energie.*

8. Für die Arbeit, die ein Gas bei seiner Ausdehnung von einem Volumen V_1 auf ein Volumen V_2 ($V_2 > V_1$) zu leisten hat, gilt

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V$$

(vgl. (10) aus Nr. 354).

Gegeben sei ein ideales Gas, das beim Druck p_1 das Volumen V_1 einnimmt. Wir setzen voraus, dieses Gas dehne sich unendlich aus, und zwar adiabatisch, d. h. ohne Wärmeaustausch mit seiner Umgebung. Unter diesen Bedingungen gilt bekanntlich (vgl. Nr. 361, Beispiel 3) die Poissonsche Formel

$$pV^\varkappa = c \qquad \left(\varkappa = \frac{c_p}{c_v} > 1\right).$$

Dann ist die Arbeit, die bei dieser Ausdehnung vom Gas geleistet werden müßte, gleich

$$A_{\max} = \int_{V_1}^\infty cV^{-\varkappa}\,\mathrm{d}V = \frac{c}{1-\varkappa}\,\frac{1}{V^{\varkappa-1}}\Big|_{V_1}^\infty = \frac{c}{\varkappa-1}\,\frac{1}{V_1^{\varkappa-1}}.$$

Wegen $c = p_1 V_1^\varkappa$ erhalten wir schließlich

$$A_{\max} = \frac{p_1 V_1}{\varkappa - 1}.$$

9. In Nr. 356, Beispiel 8, berechneten wir die Kraft F, mit welcher ein endlicher geradliniger stromdurchflossener Leiter auf einen Magnetpol der „Polstärke" 1 wirkt:

$$F = \int_{s_1}^{s_2} \frac{aI}{(a^2 + s^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}s.$$

Wir untersuchen jetzt den Fall, daß der Leiter (nach beiden Seiten) unendlich lang ist, d. h., wir setzen $s_1 = -\infty$, $s_2 = \infty$. Dann ist

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{aI}{(a^2 + s^2)^{3/2}}\, ds = \frac{I}{a} \frac{s}{\sqrt{a^2 + s^2}}\bigg|_{-\infty}^{\infty} = \frac{2I}{a}.$$

Natürlich ist ein unendlicher Leiter eine Fiktion, aber trotzdem kann das erhaltene Resultat nützlich sein. Es ist nämlich zweckmäßig, einen sehr langen Leiter näherungsweise als unendlich lang anzunehmen; man erreicht dadurch eine bedeutende Vereinfachung der Formel.

10. Wird in einem Stromkreis mit Selbstinduktion im Moment $t = 0$ ein Strom der Stärke I_0 ausgeschaltet, so tritt ein Ausschaltstrom auf, der dem Gesetz

$$I = I_0\, e^{-\frac{Rt}{L}}$$

unterliegt (vgl. Nr. 359, Beispiel 4 (a); wir behalten die dort verwendeten Bezeichnungen bei). Wir wollen nun die gesamte Joulesche Wärme (oder Stromwärme) Q berechnen, die durch diesen Strom hervorgerufen werden kann.

Das Wärmeelement für das Zeitintervall $[t, t + dt]$ ist offenbar

$$dQ = I^2 R\, dt.$$

Die Summierung über das ganze unendliche Intervall liefert die Beziehung

$$Q = \int_0^{\infty} I^2 R\, dt = R I_0^2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{2Rt}{L}}\, dt = \frac{1}{2} L I_0^2.$$

Obwohl der Strom praktisch während eines endlichen Zeitintervalls nicht bemerkbar ist, muß trotzdem über ein unendliches Intervall integriert werden, wenn die Gesamtenergie des Stroms bestimmt werden soll.

473. Die Analogie zu Reihen. Die einfachsten Sätze. Im folgenden beschränken wir uns auf Integrale der Form (1); die Fälle (2) und (3) lassen sich analog behandeln. Dabei werden wir stets voraussetzen, daß die Funktion $f(x)$ zwischen beliebigen Grenzen a und $A > a$ im „eigentlichen" Sinne integrierbar sei, so daß nur nach dem *uneigentlichen* Integral von a bis ∞ gefragt ist.

Zwischen uneigentlichen Integralen $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ und Zahlenreihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bestehen Analogien, deren Herausarbeitung sehr nützlich ist.

Wird die *Summierung über n* durch die *Integration nach x* ersetzt, so ergeben sich folgende Analogien:

Allgemeines Glied der Reihe: a_n;	Integrand: $f(x)$;
Partialsumme der Reihe: $\sum_{n=1}^{N} a_n$;	„eigentliches" Integral: $\int_a^{A} f(x)\, dx$;
Summe der Reihe: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	uneigentliches Integral: $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$

als Grenzwert der Partialsummen für $N \to \infty$;	als Grenzwert des vorhergehenden Integrals für $A \to \infty$;
Reihenrest: $\sum_{N+1}^{\infty} a_n$	Integral: $\int_A^{\infty} f(x)\,dx$

Wir zählen nun die einfachsten Sätze über uneigentliche Integrale auf, die denen aus Nr. 364 über Reihen ähnlich sind. Ihre Beweise (mit Hilfe der eben erkannten Analogien) überlassen wir dem Leser.

1°. *Ist das Integral* $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ *konvergent, so konvergiert auch das Integral* $\int_A^{\infty} f(x)\,dx$ $(A > a)$, *und umgekehrt. Dabei ist*

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \int_a^{A} f(x)\,dx + \int_A^{\infty} f(x)\,dx.$$

2°. *Bei Konvergenz des Integrals* $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ *gilt*

$$\lim_{A\to\infty} \int_A^{\infty} f(x)\,dx = 0.$$

3°. *Aus der Konvergenz des Integrals* $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ *folgt die des Integrals* $\int_a^{\infty} cf(x)\,dx$ $(c = \text{const})$; *dabei ist*

$$\int_a^{\infty} cf(x)\,dx = c\int_a^{\infty} f(x)\,dx.$$

4°. *Sind die beiden Integrale* $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ und $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ *konvergent, so konvergiert das Integral* $\int_a^{\infty} [f(x) \pm g(x)]\,dx$, *und es gilt*

$$\int_a^{\infty} [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^{\infty} f(x)\,dx \pm \int_a^{\infty} g(x)\,dx.$$

474. Die Konvergenz eines Integrals im Fall einer positiven Funktion. Ist die Funktion $f(x)$ *positiv* (nichtnegativ), so stellt das Integral

$$\Phi(A) = \int_a^{A} f(x)\,dx \tag{4}$$

eine monoton *wachsende* Funktion der Veränderlichen A dar. Ob sie für $A \to \infty$ einen endlichen Grenzwert besitzt, läßt sich leicht feststellen, und zwar mit Hilfe des Satzes über den Grenzwert einer monotonen Funktion (Nr. 57):

Das uneigentliche Integral (1) *ist bei positivem* $f(x)$ *dann und nur dann konvergent, wenn das Integral* (4) *für wachsendes* A *nach oben beschränkt ist:*

$$\int_a^A f(x)\,dx \leqq L \qquad (L = \text{const}).$$

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so hat das Integral (1) den Wert ∞ (Nr. 365).

Auf diesem Satz beruht das folgende „Vergleichskriterium" für Integrale positiver Funktionen:

Satz 1. *Gilt mindestens für* $x \geqq A$ $(A \geqq a)$ *die Ungleichung* $f(x) \leqq g(x)$, *so folgt aus der Konvergenz von* $\int_a^\infty g(x)\,dx$ *die von* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *oder aus der Divergenz von* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *die von* $\int_a^\infty g(x)\,dx$.

Der Beweis verläuft genauso wie der von Satz 1 aus Nr. 366.

Aus Satz 1 ergibt sich als Folgerung der oft nützliche

Satz 2. *Existiert der Grenzwert*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K \qquad (0 \leqq K \leqq \infty),$$

so folgt aus der Konvergenz von $\int_a^\infty g(x)\,dx$ *(für* $K < \infty$*) die von* $\int_a^\infty f(x)\,dx$, *und aus der Divergenz des ersten Integrals (für* $K > 0$*) folgt die des zweiten Integrals.* (Also sind für $0 < K < \infty$ entweder beide Integrale konvergent oder beide divergent.)

Der Beweis ist der gleiche wie bei dem analogen Satz 2 aus Nr. 366; vgl. Satz 3° aus Nr. 473.

Nimmt man zum Vergleich eine konkrete Funktion, so findet man spezielle Kriterien für die Konvergenz oder Divergenz des Integrals $\int_a^\infty f(x)\,dx$. Praktisch recht wertvoll ist der Vergleich mit der Funktion $\frac{1}{x^\lambda}$, die für $\lambda > 1$ zwischen $a > 0$ und ∞ integrierbar und für $\lambda \leqq 1$ nicht integrierbar ist (vgl. Nr. 470, Beispiel 2). Darauf beruht das folgende *Cauchysche Kriterium*:

Für hinreichend große x *habe die Funktion* $f(x)$ *die Gestalt*

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^\lambda} \qquad (\lambda > 0).$$

Dann ist

a) *das Integral* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *für* $\lambda > 1$ *und* $\varphi(x) \leqq c < \infty$ *konvergent;*

b) *das Integral* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *für* $\lambda \leqq 1$ *und* $\varphi(x) \geqq c > 0$ *divergent.*

Zum Beweis benötigen wir den Satz 1; die Vergleichsfunktion ist $\frac{c}{x^\lambda}$ (vgl. Satz 3° aus Nr. 473).

Wird die Funktion $f(x)$ für $x \to \infty$ (im Vergleich zu $\frac{1}{x}$) von der Ordnung $\lambda > 0$ klein, *so ist das Integral* $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *konvergent oder divergent, je nachdem, ob* $\lambda > 1$ *oder* $\lambda \leqq 1$ *ist.*

Hier muß auf Satz 2 mit $\frac{1}{x^\lambda}$ statt $g(x)$ verwiesen werden.

Beispiele.

1. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{3/2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, $\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$. Die Integranden werden für $x \to \infty$ von der Ordnung $\frac{1}{2}$ bzw. 2 klein; folglich ist das erste Integral divergent, das zweite konvergent.

2. $\int\limits_a^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$; dabei sei $P(x)$ ein Polynom m-ten Grades und $Q(x)$ ein Polynom n-ten Grades ($n > m$) ohne Nullstellen im Intervall $[a, \infty)$.

Für hinreichend große x behält der Integrand ein bestimmtes Vorzeichen bei. Deshalb können die obigen Kriterien angewendet werden (wenn notfalls das Vorzeichen geändert wird). Der Integrand wird (für $x \to \infty$) von der Ordnung $n - m$ klein. Also ist das Integral für $n = m + 1$ divergent, für $n \geqq m + 2$ konvergent. (Für $n \leqq m$ divergiert es offenbar.)

475. Allgemeine Konvergenzkriterien. Die Frage nach der Existenz des uneigentlichen Integrals $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ führt gemäß der Definition (1) auf die Frage nach der Existenz eines endlichen Grenzwerts der Funktion

$$\Phi(A) = \int\limits_a^A f(x)\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

im Fall $A \to \infty$. Wenden wir auf diese Funktion das Kriterium von Bolzano-Cauchy (Nr. 58) an, so können wir die Bedingung für die Existenz eines uneigentlichen Integrals wie folgt formulieren:

Ein uneigentliches Integral $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *ist genau dann konvergent,*[1]) *wenn jeder Zahl* $\varepsilon > 0$ *eine Zahl* $A_0 > a$ *derart entspricht, daß für* $A > A_0$ *und* $A' > A_0$ *die Ungleichung*

$$|\Phi(A') - \Phi(A)| = \left|\int\limits_a^{A'} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^{A} f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int\limits_A^{A'} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

erfüllt ist.

Dieses Kriterium gestattet es, sofort den folgenden Satz anzugeben:

Ist das Integral $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$ *konvergent, so konvergiert*[1]) *erst recht das Integral* $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$.

[1]) Unter der Voraussetzung, daß die Funktion $f(x)$ in jedem Intervall $[a, A]$, $A > a$, im „eigentlichen" Sinne integrierbar ist.

Wenden wir nämlich das obige Kriterium auf das als konvergent vorausgesetzte Integral $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$ an, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $A_0 > a$ derart, daß die Ungleichung

$$\int\limits_A^{A'} |f(x)|\,dx < \varepsilon$$

erfüllt ist, sobald $A' > A > A_0$ ist. Nun ist offenbar

$$\left|\int\limits_A^{A'} f(x)\,dx\right| \leqq \int\limits_A^{A'} |f(x)|\,dx$$

und folglich erst recht für alle A, A' die Ungleichung

$$\left|\int\limits_A^{A'} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

erfüllt, woraus auf Grund des Kriteriums die Konvergenz des Integrals $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ folgt.

Aus der Konvergenz des Integrals $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ ergibt sich aber im allgemeinen noch nicht die Konvergenz von $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$. Wir setzen fest: Konvergiert neben $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ auch noch das Integral $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$, so heißt das Integral $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ *absolut konvergent* und die Funktion $f(x)$ *absolut integrierbar* im Intervall $[a, \infty)$. Ein Beispiel für ein nicht-absolut konvergentes Integral werden wir in Nr. 476 finden.

In bezug auf eine Funktion $f(x)$, *die ihr Vorzeichen wechselt*, können die Kriterien aus Nr. 474 nicht unmittelbar angewendet werden. Man kann aber mit ihrer Hilfe festzustellen versuchen, ob das Integral der positiven Funktion $|f(x)|$ konvergiert: Ist diese Funktion integrierbar, so ist $f(x)$ ebenfalls integrierbar und sogar absolut.

Hieraus ergibt sich der folgende, oft nützliche Satz:

Ist eine Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, \infty)$ absolut integrierbar und eine Funktion $g(x)$ beschränkt, so ist ihr Produkt $f(x)\,g(x)$ eine im Intervall $[a, \infty)$ absolut integrierbare Funktion.

Der Beweis folgt sofort aus der Ungleichung

$$|f(x)\,g(x)| \leqq L|f(x)|\,.$$

Gegeben sei z. B. das Integral $\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax}{k^2 + x^2}\,dx$. Hier ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{k^2 + x^2}$ (absolut) integrierbar, während $g(x) = \cos ax$ offenbar beschränkt ist. Daraus folgt die Konvergenz des gegebenen Integrals.

Wie wir sehen, kann im Fall einer Funktion mit wechselndem Vorzeichen mit Hilfe der hier durchgeführten Überlegungen nur die *absolute* Konvergenz festgestellt werden. Ist das Integral einer gegebenen Funktion nicht absolut konvergent, so ist es nicht möglich, diese Fälle mit Hilfe der hier angegebenen Kriterien zu untersuchen.

476. Das Abelsche und das Dirichletsche Kriterium. Wir geben nun einige Kriterien anderer Art an, die auf der Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes (Nr. 306) beruhen. Sie sind Analoga zu den Kriterien von ABEL und DIRICHLET für die Konvergenz unendlicher Reihen (Nr. 384); aus diesem Grunde wollen wir ihnen die gleichen Namen geben. Diese Kriterien erlauben es, die Konvergenz uneigentlicher Integrale festzustellen, wenn keine absolute Konvergenz vorliegt.

Abelsches Kriterium. *Sind zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ im Intervall $[a, \infty)$ definiert, wobei*

a) *die Funktion $f(x)$ in diesem Intervall integrierbar, das Integral* (1) *also (wenigstens nicht-absolut) konvergent ist;*

b) *die Funktion $g(x)$ monoton und beschränkt ist,*

$$|g(x)| \leqq L \qquad (L = \text{const}; a \leqq x < \infty),$$

so ist das Integral

$$\int_a^\infty f(x)\, g(x)\, dx \tag{5}$$

konvergent.

Beweis. Auf Grund des zweiten Mittelwertsatzes gilt für alle $A' > A > a$

$$\int_A^{A'} f(x)\, g(x)\, dx = g(A) \int_A^{\xi} f(x)\, dx + g(A') \int_{\xi}^{A'} f(x)\, dx \tag{6}$$

mit $A \leqq \xi \leqq A'$. Wegen der Definition (1) gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $A_0 > a$ derart, daß für $A > A_0$

$$\left|\int_A^{\xi} f(x)\, dx\right| < \frac{\varepsilon}{2L}, \qquad \left|\int_{\xi}^{A'} f(x)\, dx\right| < \frac{\varepsilon}{2L}$$

ist. Mit Hilfe der Voraussetzung b) folgen also für $A' > A > A_0$ die Ungleichungen

$$\left|\int_A^{A'} f(x)\, g(x)\, dx\right| \leqq |g(A)| \cdot \left|\int_A^{\xi} f(x)\, dx\right| + |g(A')| \cdot \left|\int_{\xi}^{A'} f(x)\, dx\right|$$

$$< L\frac{\varepsilon}{2L} + L\frac{\varepsilon}{2L} = \varepsilon,$$

die die Konvergenz von (5) nach sich ziehen (Nr. 475).

Man kann auch im Fall von Integralen die Voraussetzungen bezüglich $f(x)$ und $g(x)$, unter denen das Integral $f(x)\, g(x)$ konvergiert, anders kombinieren:

Dirichletsches Kriterium.

a) *Die Funktion $f(x)$ sei in jedem endlichen Intervall $[a, A]$, $A > a$, integrierbar, und das Integral* (4) *sei beschränkt:*

$$\left|\int_a^A f(x)\, dx\right| \leqq K \qquad (K = \text{const}; a \leqq A < \infty);$$

b) *die Funktion* $g(x)$ *strebe für* $x \to \infty$ *monoton gegen* 0:

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0.$$

Dann ist das Integral (5) *konvergent.*

(Wie wir sehen, ist die frühere Bedingung a) etwas abgeschwächt, denn wir fordern hier nicht die Konvergenz des Integrals (1); dafür ist die Bedingung b) durch eine stärkere ersetzt!)

Der Beweis verläuft analog wie oben. Man geht von der Gleichung (6) aus, aber in diesem Fall können die ersten Faktoren $g(A)$ und $g(A')$ beliebig klein gemacht werden, wenn man hinreichend große A und A' wählt; die zweiten Faktoren sind durch die Zahl $2K$ beschränkt.

Bemerkung. Auch hier ist das Abelsche Kriterium eine Folgerung aus dem Dirichletschen Kriterium. Es existiert nämlich für die beschränkte monotone Funktion $g(x)$ notwendig ein endlicher Grenzwert

$$g(\infty) = \lim_{x\to\infty} g(x);$$

setzt man $f(x)\,g(x)$ in der Form

$$f(x)\,g(x) = f(x)\,g(\infty) + f(x)\,[g(x) - g(\infty)]$$

an, so sind für das zweite Produkt schon die Voraussetzungen des Dirichletschen Kriteriums erfüllt (vgl. Nr. 473, Satz 3° und 4°).

Es ist z. B. leicht zu sehen, daß für $\lambda > 0$ die Integrale

$$\int_a^\infty \frac{\sin x}{x^\lambda}\,dx \quad \text{und} \quad \int_a^\infty \frac{\cos x}{x^\lambda}\,dx \qquad (a > 0)$$

konvergieren. Wir setzen $f(x) = \sin x$ oder $\cos x$ und $g(x) = \dfrac{1}{x^\lambda}$ und wenden das Dirichletsche Kriterium an. Die Voraussetzungen a) und b) sind erfüllt, denn es ist

$$\left|\int_a^A \sin x\,dx\right| = |\cos a - \cos A| \leqq 2$$

und analog

$$\left|\int_a^A \cos x\,dx\right| \leqq 2,$$

ferner strebt die Funktion $\dfrac{1}{x^\lambda}$ für $x \to \infty$ monoton fallend gegen 0. Insbesondere erkennen wir hieraus für $\lambda = 1$ die Konvergenz des Integrals

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

(Wir können hier $a = 0$ setzen, da der Integrand für $x \to 0$ einen endlichen Grenzwert besitzt.) Es läßt sich zeigen, daß dieses Integral *nicht-absolut* konvergiert, d. h., daß das Integral

$$\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx$$

divergiert. Würde nämlich dieses Integral konvergieren, so wäre nach Satz 1 aus Nr. 474 auch das Integral

$$\int_a^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,dx \qquad (a > 0)$$

konvergent, denn es ist $\sin^2 x \leqq |\sin x|$. Mit anderen Worten, es wäre das Integral

$$\frac{1}{2}\int_a^\infty \frac{1-\cos 2x}{x}\,dx$$

konvergent. Würden wir es dann zu dem als konvergent bekannten Integral

$$\frac{1}{2}\int_a^\infty \frac{\cos 2x}{x}\,dx$$

addieren, so kämen wir zu dem Schluß, daß auch das Integral

$$\frac{1}{2}\int_a^\infty \frac{dx}{x}$$

konvergieren müßte, was jedoch nicht der Fall ist (vgl. Nr. 470, Beispiel 2).

Bemerkung. Nachdem wir festgestellt haben, daß die Integrale

$$\int_a^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx \quad \text{und} \quad \int_a^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx$$

konvergieren, können wir schließlich die aus Nr. 289 bekannten nicht-elementaren Funktionen $\operatorname{si} x$ (Integralsinus) und $\operatorname{ci} x$ (Integralkosinus) *genauer* definieren. Setzen wir nämlich

$$\operatorname{si} x = -\int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt \qquad (x \geqq 0), \qquad \operatorname{ci} x = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt \qquad (x > 0)$$

und schreiben wir z. B. die zweite Formel in der Gestalt

$$\operatorname{ci} x = \int_1^x \frac{\cos t}{t}\,dt - \int_1^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt,$$

so ist auf Grund der bekannten Eigenschaft des bestimmten Integrals (vgl. Nr. 305, Satz 12°) klar, daß die Ableitung von $\operatorname{ci} x$ tatsächlich gleich $\frac{\cos x}{x}$ ist.

477. Zurückführung eines uneigentlichen Integrals auf eine unendliche Reihe. Wir wissen, daß der Begriff des Grenzwerts einer Funktion auf zwei Arten erklärt werden kann, und zwar mit Hilfe der „Epsilontik" und mit Hilfe von Folgen (Nr. 52, 53). Wird auf die Funktion $\Phi(A)$ aus (4) die zweite Definition des Grenzwerts angewendet, so kann die Definition (1) des uneigentlichen Integrals folgendermaßen formuliert werden: Für jede Folge beliebig wachsender Zahlen A_n $(A_n > a)$ soll die Folge der

Integrale $\int\limits_a^{A_n} f(x)\,dx$ gegen ein und denselben endlichen Grenzwert[1]) streben, der den Wert des uneigentlichen Integrals $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ angibt.

Andererseits ist die Frage nach dem Grenzwert der Folge $\left\{\int\limits_a^{A_n} f(x)\,dx\right\}$ identisch mit der Frage nach der Summe der Reihe

$$\int\limits_a^{A_1} + \left\{\int\limits_a^{A_2} - \int\limits_a^{A_1}\right\} + \left\{\int\limits_a^{A_3} - \int\limits_a^{A_2}\right\} + \cdots = \int\limits_a^{A_1} + \int\limits_{A_1}^{A_2} + \int\limits_{A_2}^{A_3} + \cdots$$

(Nr. 362). Also können wir behaupten: *Das uneigentliche Integral* $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ *existiert genau dann, wenn für jede Folge unbeschränkt wachsender Zahlen* A_n $(A_n > a)$ *die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)\,dx \qquad (A_0 = a)$$

gegen ein und dieselbe Summe konvergiert, die den Wert des uneigentlichen Integrals angibt.

Bemerkung. Im Fall einer *positiven* (nichtnegativen) Funktion $f(x)$ genügt es für die Existenz des Integrals, wenn die obige Reihe für eine *spezielle Folge* unbeschränkt wachsender Zahlen A_n konvergiert. Die von A abhängige wachsende Funktion (4) ist dann nämlich durch die Summe dieser Reihe beschränkt und hat folglich für $A \to \infty$ einen endlichen Grenzwert (Nr. 474).

Es ist oft sehr zweckmäßig, die Untersuchung der Konvergenz eines Integrals auf die der Konvergenz einer Reihe zurückzuführen, da es dann möglich ist, die zahlreichen Konvergenz- und Divergenzkriterien für Reihen zu benutzen.

Zum Beispiel betrachten wir nochmals das Integral

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

mit dem wir uns schon in Nr. 476 beschäftigt haben. Da die Funktion $\sin x$ mit wachsendem x abwechselnd positive und negative Werte annimmt, indem sie ihr Vorzeichen in den Punkten $n\pi$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ändert, bieten sich diese Zahlen auf natürliche Weise für die Folge $\{A_n\}$ an, so daß wir die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx \tag{7}$$

betrachten. Führen wir in dem allgemeinen Glied

$$v_n = \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

[1]) Es genügt vorauszusetzen, daß alle Folgen $\left\{\int\limits_a^{A_n} f(x)\,dx\right\}$ konvergieren; daraus kann dann geschlossen werden, daß sie ein und denselben Grenzwert besitzen (Nr. 53).

die Substitution $x = n\pi + t$ durch, so erhalten wir

$$v_n = (-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin t}{n\pi + t}\, dt.$$

Die Glieder der Reihe sind also von wechselndem Vorzeichen und ihrem absoluten Betrag nach monoton fallend. Ferner ist für $n > 0$

$$|v_n| = \int_0^\pi \frac{\sin t}{n\pi + t}\, dt < \int_0^\pi \frac{1}{n\pi}\, dt = \frac{1}{n};$$

demzufolge strebt der absolute Betrag der Glieder mit wachsendem Index gegen 0. Die Reihe (7) ist eine Reihe vom Leibnizschen Typ und auf Grund des bekannten Satzes aus Nr. 381 konvergent. Ihre Summe bezeichnen wir mit I. Somit gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N derart, daß für $n \geqq N$ die Ungleichung

$$\left| \int_0^{n\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx - I \right| < \varepsilon \tag{8}$$

gilt. Nun ist es einfacher, den Beweis der Existenz des Integrals mit Hilfe der „Epsilontik" zu beenden. Es sei $A > N\pi$; dann existiert eine natürliche Zahl n_0 derart, daß $n_0\pi \leqq A < (n_0 + 1)\pi$ gilt, wobei offenbar $n_0 \geqq N$ ist. Da zwischen $n_0\pi$ und $(n_0 + 1)\pi$ die Funktion $\sin x$ ihr Vorzeichen nicht wechselt, ist das Integral $\int_0^A$ zwischen den Integralen $\int_0^{n_0\pi}$ und $\int_0^{(n_0+1)\pi}$ eingeschlossen, die sämtlich wegen (8) zwischen $I - \varepsilon$ und $I + \varepsilon$ liegen. Folglich trifft das gleiche auch für das Integral $\int_0^A$ zu. Also ist schließlich für $A > N\pi$

$$\left| \int_0^{A} \frac{\sin x}{x}\, dx - I \right| < \varepsilon,$$

so daß das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{A\to\infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x}\, dx = I$$

existiert.[1])

Bekanntlich (Nr. 476) ist dieses Integral *nicht-absolut* konvergent, d. h., das Integral $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\, dx$ divergiert. Dies ist auch leicht festzustellen, wenn man das Integral als Reihe darstellt. Würde nämlich das letzte Integral konvergieren, so wäre wie oben

$$\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\, dx = \sum_{n=0}^\infty \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\pi \frac{\sin t}{n\pi + t}\, dt.$$

---

[1]) Hier (wie auch in Nr. 476) interessiert uns nur die Frage nach der Konvergenz dieses Integrals. Später werden wir sehen, daß es den Wert $\frac{\pi}{2}$ hat.

Nun ist $n\pi + t \leqq (n+1)\pi$, so daß

$$\int_0^\pi \frac{\sin t}{n\pi + t}\,\mathrm{d}t \geqq \frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^\pi \sin t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{(n+1)\pi}$$

folgt, während die Reihe $\frac{2}{\pi}\sum \frac{1}{n+1}$ divergiert (vgl. Nr. 365, Beispiel 1).

478. Beispiele.

1. Man untersuche die folgenden Integrale auf Konvergenz:

$$\text{(a)}\quad \int_0^\infty \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(b)}\quad \int_{z_0}^\infty \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z(z-a)(z-b)}} \qquad (z_0 > a > b > 0),$$

$$\text{(c)}\quad \int_0^\infty \left[\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{x^2}} - \mathrm{e}^{-\frac{b^2}{x^2}}\right]\mathrm{d}x, \qquad \text{(d)}\quad \int_0^\infty \left[\frac{x}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{2}\right]\frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

Lösung. (a) Der Integrand wird für $x \to \infty$ von erster Ordnung klein; das Integral divergiert.

(b) Der Integrand wird für $t \to \infty$ von der Ordnung $\frac{3}{2}$ klein; das Integral konvergiert.

(c) Der Integrand verschwindet für $x \to 0$. Entwickeln wir ihn in eine Reihe, so sehen wir, daß der Ausdruck

$$\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{x^2}} - \mathrm{e}^{-\frac{b^2}{x^2}} = \frac{b^2 - a^2}{x^2} + \cdots$$

für $x \to \infty$ von zweiter Ordnung klein wird; das Integral konvergiert.

(d) Wenn wir $\mathrm{e}^{\pm x}$ in eine Reihe entwickeln, so finden wir leicht

$$\frac{x}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{2} = -\frac{x^2}{12} + \ldots,$$

der Integrand strebt also für $x \to 0$ gegen $-\frac{1}{12}$. Für $x \to \infty$ wird er von zweiter Ordnung klein; das Integral konvergiert.

2. Man stelle fest, ob die folgenden Integrale konvergieren:

$$\text{(a)}\quad \int_a^\infty x^\mu\,\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x \;(\mu, a > 0), \qquad \text{(b)}\quad \int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x} - 1}}, \qquad \text{(c)}\quad \int_1^\infty \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2 - 1}}\,\mathrm{d}x.$$

Lösung. (a) Für jedes $\lambda > 1$ ist

$$\frac{x^\mu\,\mathrm{e}^{-ax}}{\frac{1}{x^\lambda}} = \frac{x^{\lambda+\mu}}{\mathrm{e}^{ax}} \to 0.$$

Das Integral ist also konvergent.

(b) Wir bemerken zunächst, daß der Integrand für $x \to 0$ verschwindet. Nehmen wir jetzt ein beliebiges $\lambda > 1$, so finden wir

$$\frac{x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x} - 1}} : \frac{1}{x^\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}x^{-(2\lambda+2)} - x^{-(2\lambda+2)}}} \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \infty;$$

das Integral ist konvergent.

(c) Für $x \to 1$ verschwindet der Integrand. Für ein λ mit $1 < \lambda < 2$ läßt sich der Quotient aus dieser Funktion und $\frac{1}{x^\lambda}$ in der Form

$$\frac{x^\lambda \ln x}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\ln x}{x^{2-\lambda}} : \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \infty$$

darstellen; das Integral konvergiert.

3. Man untersuche die Konvergenz der folgenden Integrale:

$$\text{(a)} \int_0^\infty \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}(a+x)}\,dx \quad (a > 0), \qquad \text{(b)} \int_0^\infty x^\mu e^{-ax} \cos x\,dx \qquad (\mu, a > 0).$$

Hinweis. In beiden Fällen liegt ein Produkt einer beschränkten und einer (absolut) integrierbaren Funktion vor.

4. Man untersuche, ob das Integral

$$\int_1^\infty dx \int_0^\alpha \sin(\beta^2 x^3)\,d\beta = \int_1^\infty \left\{\int_0^\alpha \sin(\beta^2 x^3)\,d\beta\right\} dx$$

($\alpha > 0$) konvergiert.[1])

Wir versuchen abzuschätzen, wie das „innere" Integral für $x \to \infty$ abnimmt. Setzen wir $\beta^2 x^3 = z$, so finden wir

$$\int_0^\alpha \sin(\beta^2 x^3)\,d\beta = \frac{1}{2x^{3/2}} \int_0^{\alpha^2 x^3} \frac{\sin z}{\sqrt{z}}\,dz.$$

Da das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin z}{\sqrt{z}}\,dz$ konvergiert (Nr. 476), gibt es eine Konstante L derart, daß für alle $A > 0$

$$\left|\int_0^A \frac{\sin z}{\sqrt{z}}\,dz\right| \leqq 2L$$

ist. Folglich ist das Integral $\int_0^\alpha \sin(\beta^2 x^3)\,d\beta$ dem absoluten Betrag nach nicht größer als der Ausdruck $\frac{L}{x^{3/2}}$. Daraus folgt die absolute Konvergenz des gegebenen Integrals.

5. Man bestimme die Konvergenz der folgenden Integrale ($a, k, \lambda > 0$):

$$\text{(a)} \int_0^\infty \frac{x \sin ax}{k^2 + x^2}\,dx, \qquad \text{(b)} \int_0^\infty e^{\sin x} \cdot \frac{\sin 2x}{x^\lambda}\,dx,$$

$$\text{(c)} \int_a^\infty |\ln x|^\lambda \frac{\sin x}{x}\,dx, \qquad \text{(d)} \int_0^\infty \frac{\sin(x+x^2)}{x^\lambda}\,dx.$$

[1]) Wir geben ohne Beweis an, daß rechts das „innere" Integral eine stetige Funktion von x ist.

Lösung. In allen Fällen wende man das Dirichletsche Kriterium an.

(a) Die Funktion $g(x) = \dfrac{x}{k^2 + x^2}$ fällt monoton für hinreichend große x und verschwindet für $x \to \infty$; das Integral $\int\limits_0^A \sin ax \, dx$ ist offenbar beschränkt.

(b) Die Funktion $g(x) = \dfrac{1}{x^\lambda}$ fällt monoton und verschwindet für $x \to \infty$; $f(x)$ ist gleich $e^{\sin x} \sin 2x$; also ergibt sich, wenn man $\sin x = t$ setzt,

$$\left| \int\limits_0^A f(x) \, dx \right| = 2 \left| \int\limits_0^{\sin A} t\, e^t \, dt \right| < 2e.$$

(c) $g(x) = |\ln x|^\lambda \dfrac{1}{x}$; für hinreichend große x ist

$$g'(x) = \frac{(\ln x)^{\lambda-1}}{x^2} (\lambda - \ln x) < 0,$$

so daß $g(x)$ offenbar fällt und gegen 0 strebt, usw.

(d) $g(x) = \dfrac{1}{x^\lambda}$, $f(x) = \sin (x + x^2)$; also ist, wenn man $z = x + x^2$ setzt,

$$\int\limits_a^A \sin (x + x^2) \, dx = \int\limits_{a+a^2}^{A+A^2} \frac{\sin z}{\sqrt{1 + 4z}} \, dz.$$

Der absolute Betrag dieses Ausdrucks ist beschränkt, da das Integral $\int\limits_{a+a^2}^{\infty} \dfrac{\sin z}{\sqrt{1 + 4z}} \, dz$ konvergiert (davon kann man sich leicht mit Hilfe des Dirichletschen Kriteriums überzeugen).

6. Man beweise den Satz: *Gegeben seien im Intervall* $[a, \infty)$ *eine Funktion mit der Periode* $\omega > 0$ *und eine monotone Funktion* $g(x)$, *die für* $x \to \infty$ *verschwindet. Ist das* („*eigentliche*") *Integral*

$$\int\limits_a^{a+\omega} f(x) \, dx = 0, \tag{9}$$

so ist das (*uneigentliche*) *Integral*

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)\, g(x) \, dx \tag{5}$$

konvergent. Ist dagegen

$$\int\limits_a^{a+\omega} f(x) \, dx = K \neq 0, \tag*{*)}$$

so ist (5) *konvergent oder divergent, je nachdem, ob das Integral*

$$\int\limits_a^{\infty} g(x) \, dx \tag{10}$$

konvergiert oder divergiert.

(a) Zum Beweis setzen wir zunächst voraus, die Bedingung (9) sei erfüllt, und zeigen, daß das Integral

$$\int_a^A f(x)\,dx$$

in diesem Fall für alle $A > a$ *beschränkt* ist.

Auf Grund von Nr. 314, Beispiel 10, und der Bemerkung aus Nr. 316 ist offenbar auch

$$\int_a^{a+k\omega} f(x)\,dx = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots);$$

wir erhalten dann für jedes $A > a$, wenn wir $k = \left[\dfrac{A-a}{\omega}\right]$ nehmen,

$$\left|\int_a^A f(x)\,dx\right| = \left|\int_{a+k\omega}^A\right| = \left|\int_a^{A-k\omega}\right| \leqq \int_a^{a+\omega} |f(x)|\,dx = L.$$

Die Konvergenz von (5) ergibt sich dann unmittelbar aus dem Dirichletschen Kriterium.

(b) In der Voraussetzung (9*) ersetzen wir $f(x)$ durch $f(x) - \dfrac{K}{\omega}$. Da diese Funktion einer Bedingung der Gestalt (9) genügt, ist das Integral

$$\int_a^\infty \left[f(x) - \frac{K}{\omega}\right] g(x)\,dx \tag{5*}$$

auf Grund des Bewiesenen konvergent. Damit ist schon klar, daß die Integrale (5) und (10) beide gleichzeitig konvergieren (oder divergieren).

7. Setzen wir etwa $f(x) = \sin^2 x$ im Intervall $[0, \infty)$ und $\omega = \pi$, so *ist wegen*

$$\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{2} \neq 0$$

das Integral

$$\int_0^\infty \sin^2 x \cdot g(x)\,dx$$

(*unter den obigen Voraussetzungen bezüglich* g) *konvergent oder divergent, sobald das Integral* (10) *konvergiert oder divergiert.*

Dagegen ist das Integral

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \sin^2 x\right) g(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \cos 2x \cdot g(x)\,dx$$

stets, d. h. unabhängig vom Verhalten des Integrals (10), konvergent.

8. Man untersuche die Konvergenz der Integrale

(a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{\cos x} \sin(\sin x)\,\frac{dx}{x}$, (b) $\displaystyle\int_0^\infty e^{\sin x} \sin(\sin x)\,\frac{dx}{x}$

Lösung. (a) Es ist

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x} \sin(\sin x)\,dx = \int_0^\pi + \int_\pi^{2\pi} = 0,$$

denn das zweite der letzten beiden Integrale unterscheidet sich von dem ersten nur durch das Vorzeichen (Substitution $z = 2\pi - x$). Auf Grund des Satzes auf S. 524 ist das Integral (a) konvergent.

(b) Hier ist

$$\int_0^\infty e^{\sin x} \sin(\sin x)\,dx > 0,$$

so daß (vgl. Beispiel 6) das Integral (b) wegen der Divergenz von

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} \qquad (a > 0)$$

divergiert.

9. Man untersuche, für welche Werte des Parameters $\mu > 0$ das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\mu + \sin x}\,dx$$

konvergiert.

Es gilt die Identität

$$\frac{\sin x}{x^\mu + \sin x} = \frac{\sin x}{x^\mu} - \frac{\sin^2 x}{x^\mu(x^\mu + \sin x)}.$$

Das Integral des ersten Gliedes auf der rechten Seite,

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\mu}\,dx,$$

ist bekanntlich (Nr. 476) stets konvergent. Wir betrachten nun das Integral des zweiten Gliedes,

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^\mu(x^\mu + \sin x)}\,dx. \tag{11}$$

Wegen

$$\frac{\sin^2 x}{x^\mu(x^\mu + 1)} < \frac{\sin^2 x}{x^\mu(x^\mu + \sin x)} < \frac{1}{x^\mu(x^\mu - 1)}$$

ist mit

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^\mu(x^\mu - 1)}$$

auch das Integral (11) für $\mu > \frac{1}{2}$ konvergent. Für $\mu \leq \frac{1}{2}$ verhält sich

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x\,dx}{x^\mu(x^\mu + 1)}$$

auf Grund von Beispiel 7 wie

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\mu(x^\mu + 1)} \qquad (a > 0),$$

d. h., es divergiert, und mit ihm ist auch (11) divergent. Das gegebene Integral ist somit für $\mu > \frac{1}{2}$ konvergent, für $\mu \leqq \frac{1}{2}$ divergent.

Es ist interessant, dieses Beispiel im Fall $\mu \leqq \frac{1}{2}$ im Zusammenhang mit dem Dirichletschen Kriterium zu betrachten. Das Integral des Faktors $\sin x$ ist beschränkt, während der zweite Faktor

$$\frac{1}{x^\mu + \sin x}$$

für $x \to \infty$ verschwindet. Verletzt ist nur die Forderung nach der Monotonie des Faktors; das gegebene Integral ist auch, wie wir wissen, divergent!

10. Man untersuche, für welche Werte der Parameter $\alpha, \beta > 0$ das Integral

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha \, dx}{1 + x^\beta \sin^2 x}$$

konvergiert.

Wir bezeichnen den Integranden mit $f(x)$; wenn x zwischen $n\pi$ und $(n + 1)\pi$ variiert, ist

$$\frac{(n\pi)^\alpha}{1 + [(n+1)\pi]^\beta \sin^2 x} \leqq f(x) \leqq \frac{[(n+1)\pi]^\alpha}{1 + (n\pi)^\beta \sin^2 x}.$$

Die Integration dieser Ungleichungen liefert

$$\frac{n^\alpha \pi^{\alpha+1}}{\sqrt{1 + (n+1)^\beta \pi^\beta}} \leqq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x) \, dx \leqq \frac{(n+1)^\alpha \pi^{\alpha+1}}{\sqrt{1 + n^\beta \pi^\beta}},$$

wenn die Beziehung

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{1 + A \sin^2 x} = \int_0^\pi \frac{dx}{1 + A \sin^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{1 + A}} \tag{12}$$

berücksichtigt wird,[1]) und durch Summierung über n von 0 bis ∞ ergibt sich

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{n^\alpha \pi^{\alpha+1}}{\sqrt{1 + (n+1)^\beta \pi^\beta}} \leqq \int_0^\infty f(x) \, dx \leqq \sum_{n=0}^\infty \frac{(n+1)^\alpha \pi^{\alpha+1}}{\sqrt{1 + n^\beta \pi^\beta}}.$$

Da die beiden äußeren Reihen gleichzeitig mit

$$\sum_{n=0}^\infty n^{\alpha - \frac{\beta}{2}}$$

konvergieren oder divergieren, trifft dies auch für das zwischen ihnen eingeschlossene Integral zu. Das gegebene Integral ist also für $\beta > 2(\alpha + 1)$ konvergent, für $\beta \leqq 2(\alpha + 1)$ divergent.

11. Man bestimme, für welche Werte der Parameter $\alpha, \beta > 0$ das Integral

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha \, dx}{1 + x^\beta \, |\sin x|}$$

konvergiert.

---

[1]) Diese Beziehung folgt leicht aus Nr. 285, Beispiel 10, oder Nr. 309, Beispiel 9.

Die Methode ist die gleiche wie in Beispiel 10. Statt des Integrals (12) ist hier das Integral

$$\int_0^\pi \frac{dx}{1 + A \sin x} = 2\,\frac{\ln\left(A + \sqrt{A^2 - 1}\right)}{\sqrt{A^2 - 1}} \qquad (A > 1)$$

zu betrachten (vgl. Nr. 288, Beispiel 14). Da für $A \to \infty$ der Ausdruck

$$\frac{\ln\left(A + \sqrt{A^2 - 1}\right)}{\sqrt{A^2 - 1}} : \frac{\ln A}{A}$$

gegen 1 strebt, genügt es, das gegebene Integral mit den Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha \frac{\ln (n+1)^\beta}{(n+1)^\beta} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^\alpha \frac{\ln n^\beta}{n^\beta},$$

d. h. letzten Endes mit der Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\beta-\alpha}}$$

zu vergleichen.

Lösung. Das Integral ist für $\beta > \alpha + 1$ konvergent, für $\beta \leqq \alpha + 1$ divergent.

Die Beispiele 6, 7, 9, 10 und 11 stammen von G. H. Hardy.

12. Man untersuche alle Fälle, in denen das Integral

$$J = \int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^\alpha |\sin x|^\beta}$$

konvergiert oder divergiert, in Abhängigkeit von den Werten der Parameter α und β ($\alpha, \beta > 0$).

(a) Es sei $\alpha \leqq 1$. Wegen

$$\frac{1}{1 + x^\alpha |\sin x|^\beta} \geqq \frac{1}{1 + x^\alpha}$$

ist das Integral in diesem Fall divergent (Nr. 474).

(b) Es sei $\alpha \leqq \beta$. Gehen wir zu der entsprechenden Reihe über (Nr. 477), so finden wir unter dieser Voraussetzung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{1 + x^\alpha |\sin x|^\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\pi \frac{dz}{1 + (n\pi + z)^\alpha \sin^\beta z} \geqq \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{1/(n+1)\pi}$$

Nun ist für $0 < z < \dfrac{1}{(n+1)\pi}$

$$(n\pi + z)^\alpha \sin^\beta z < (n+1)^\alpha \pi^\alpha z^\beta < (n+1)^\beta \pi^\beta \left[\frac{1}{(n+1)\pi}\right]^\beta = 1,$$

so daß die Glieder der letzten Reihe größer als die Glieder der divergenten Reihe

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

sind. Also ist das Integral auch in diesem Fall divergent.

(c) Es sei $\alpha > \beta > 1$. Wir stellen J als Summe $J_1 + J_2$ dar, wobei

$$J_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{dz}{1 + (n\pi + z)^\alpha \sin^\beta z}, \quad J_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{dz}{1 + (n\pi - z)^\alpha \sin^\beta z}$$

sei. Dann ist für $0 < z < \frac{\pi}{2}$ und $n \geqq 1$

$$(n\pi + z)^\alpha \sin^\beta z \geqq (n\pi)^\alpha \left(\frac{2}{\pi} z\right)^\beta = n^\alpha c^\beta z^\beta \quad \text{mit} \quad c = 2\pi^{\alpha/\beta - 1}.$$

Damit folgt

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dz}{1 + (n\pi + z)^\alpha \sin^\beta z} \leqq \int_0^{\pi/2} \frac{dz}{1 + n^\alpha c^\beta z^\beta} = \frac{1}{n^{\alpha/\beta} c} \int_0^{n^{\alpha/\beta} c\pi/2} \frac{dt}{1 + t^\beta} \leqq \frac{c^*}{n^{\alpha/\beta}}$$

mit

$$c^* = \frac{1}{c} \int_0^\infty \frac{dt}{1 + t^\beta}.$$

Also ist

$$J_1 \leqq \frac{\pi}{2} + c^* \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{\alpha/\beta}} < \infty.$$

Analog ist auch $J_2 < \infty$, so daß das Integral J konvergiert.

(d) Auf $\alpha > \beta > 1$ führt auch der allgemeine Fall, daß gleichzeitig $\alpha > 1$ und $\alpha > \beta$ ist. Dann gibt es nämlich ein $\beta' \geqq \beta$ derart, daß $\alpha > \beta' > 1$ gilt. Da bei Verkleinerung von β die Konvergenz beschleunigt wird, liegt auch in dem allgemeinen Fall Konvergenz vor.

Zusammenfassend können wir sagen, das Integral J ist konvergent, wenn gleichzeitig die Bedingung $\alpha > 1$ und $\alpha > \beta$ erfüllt sind, und divergent in allen übrigen Fällen, d. h., das Integral konvergiert für $\alpha > \max(1, \beta)$ und divergiert für $\alpha \leqq \max(1, \beta)$.

§ 2. Uneigentliche Integrale nichtbeschränkter Funktionen

479. Definition des Integrals einer nichtbeschränkten Funktion. Wir betrachten nun eine in einem endlichen Intervall $[a, b]$ *nichtbeschränkte* Funktion $f(x)$. Wir setzen genauer voraus, daß $f(x)$ in jedem Intervall $[a, b - \eta]$, $0 < \eta < b - a$, beschränkt und integrierbar, aber in jedem Intervall $[b - \eta, b]$ nichtbeschränkt sei. In diesem Fall heißt der Punkt b eine *singuläre Stelle* der Funktion $f(x)$.

Der (endliche oder unendliche) Grenzwert des Integrals $\int_a^{b-\eta} f(x)\,dx$ für $\eta \to 0$ heißt das (*uneigentliche*) *Integral der Funktion* $f(x)$ *von* a *bis* b, in Zeichen

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta \to 0} \int_a^{b-\eta} f(x)\,dx. \tag{1}$$

Ist dieser Grenzwert endlich, so heißt das Integral (1) *konvergent* und die Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ *integrierbar*. Ist der Grenzwert (1) unendlich oder existiert er überhaupt nicht, so sagt man, das Integral *divergiere*.

Beispiel.

1. Die Funktion $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ ist beschränkt und integrierbar in jedem Intervall $[0, 1 - \eta]$, $0 < \eta < 1$, und es gilt

$$\int_0^{1-\eta} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x \Big|_0^{1-\eta} = \arcsin(1 - \eta).$$

Für $x \to 1 - 0$ strebt der Integrand gegen ∞. Offenbar ist er in jedem Intervall $(1 - \eta, 1)$ nichtbeschränkt, d. h., der Punkt $x = 1$ ist eine singuläre Stelle der Funktion $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. In der Praxis begegnet man oft gerade dieser Art von Singularitäten.

Da das berechnete Integral für $\eta \to 0$ dem Grenzwert $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ zustrebt, existiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \lim_{\eta \to 0} \int_0^{1-\eta} = \frac{\pi}{2}.$$

Gegeben sei nun eine in jedem Intervall $[a + \eta', b]$, $0 < \eta' < b - a$, beschränkte und integrierbare Funktion $f(x)$, die aber in jedem Intervall $[a, a + \eta']$ rechts vom Punkt a (singuläre Stelle von $f(x)$) nicht beschränkt sei. Dann wird das (*uneigentliche*) *Integral der Funktion* $f(x)$ *von* a *bis* b durch

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\eta' \to 0} \int_{a+\eta'}^b f(x)\, dx \tag{2}$$

definiert.

Allgemein können im Intervall $[a, b]$ endlich viele singuläre Stellen $c_0, c_1, \ldots, c_{m-1}, c_m$ liegen, in deren Umgebung die Funktion $f(x)$ nicht beschränkt ist, während in jedem abgeschlossenen Teilintervall von $[a, b]$, das keine singulären Stellen enthält, $f(x)$ beschränkt und integrierbar ist.

Wir nehmen (zur Vereinfachung der Schreibweise) an, daß es drei singuläre Stellen gibt, wobei zwei von ihnen mit den Endpunkten a und b übereinstimmen mögen und die dritte, c, zwischen ihnen liege. Dann ist das Integral über $f(x)$ von a bis b durch

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\substack{\eta_1 \to 0 \\ \cdots \\ \eta_4 \to 0}} \left\{ \int_{a+\eta_1}^{c-\eta_2} - \int_{c+\eta_3}^{b-\eta_4} \right\} \tag{3}$$

definiert.[1])

Wählen wir aus dem Intervall $[a, c]$ einen Punkt d und aus $[c, b]$ einen Punkt e, so ist

$$\int_{a+\eta_1}^{c-\eta_2} = \int_{a+\eta_1}^{d} + \int_{d}^{c-\eta_2}, \qquad \int_{c+\eta_3}^{b-\eta_4} = \int_{c+\eta_3}^{e} + \int_{e}^{b-\eta_4}$$

Die Existenz des Grenzwertes (3) ist äquivalent mit der Existenz jedes einzelnen dieser vier Integrale, so daß (3) durch

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^d f(x)\, dx + \int_d^c f(x)\, dx + \int_c^e f(x)\, dx + \int_e^b f(x)\, dx$$

ersetzt werden kann, unter der Voraussetzung, daß alle uneigentlichen Integrale auf der rechten Seite existieren.[2]) Diese Definition hängt nicht von der Wahl der Punkte d und e ab.

Für die uneigentlichen Integrale (2) und (3) bleibt die obige Terminologie erhalten.

---

[1]) Es handelt sich hier um vier getrennte Grenzprozesse. — *Anm. d. Red.*

[2]) Mit Ausnahme des Falls, daß zwei dieser Integrale divergieren, und zwar das eine gegen $-\infty$, das andere gegen ∞.

Beispiele.

2. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; singuläre Stelle im Punkt $x = -1$,

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta' \to 0} \int\limits_{-1+\eta'}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta' \to 0} [-\arcsin(-1+\eta')] = \frac{\pi}{2}.$$

3. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; zwei singuläre Stellen $x = -1$ und $x = 1$,

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_{-1}^{0} + \int\limits_{0}^{1} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

4. Man untersuche, für welche Werte des Exponenten $\lambda > 0$ das uneigentliche Integral

$$\int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{(x-a)^\lambda} \qquad (b > a) \tag{4}$$

konvergiert.

Im Fall $\lambda \neq 1$ hat das Integral

$$\int\limits_{a+\eta}^{b} \frac{dx}{(x-a)^\lambda} = \frac{1}{1-\lambda} [(b-a)^{1-\lambda} - \eta^{1-\lambda}]$$

für $\eta \to 0$ den Grenzwert ∞ oder den endlichen Wert $\frac{1}{1-\lambda}(b-a)^{1-\lambda}$, je nachdem, ob $\lambda > 1$ oder $\lambda < 1$ ist. Im Fall $\lambda = 1$ gilt

$$\int\limits_{a+\eta}^{b} \frac{dx}{x-a} = \ln(b-a) - \ln \eta \to \infty \qquad (\text{für } \eta \to 0).$$

Das Integral (4) ist also für $\lambda < 1$ konvergent (sein Wert ist dann $\frac{1}{1-\lambda}(b-a)^{1-\lambda}$), für $\lambda \geqq 1$ divergent (vgl. Nr. 470, Beispiel 2).

5. Ein analoges Resultat, das sich von dem vorhergehenden nicht wesentlich unterscheidet, kann für das Integral

$$\int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{(b-x)^\lambda} \qquad (b > a;\ \lambda > 0)$$

angegeben werden.

Bemerkung. Ist die Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ im „eigentlichen“ Sinne integrierbar (so daß also das Integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ schon definiert ist), so ist die Limesbeziehung (1) [(2) oder (3)] natürlich trotzdem gültig. Sie folgt unmittelbar aus der Stetigkeit des Integrals bezüglich seiner variablen oberen (bzw. unteren) Grenze (vgl. Nr. 305, Satz 11°). Damit haben wir das uneigentliche Integral durch Forderungen definiert, die für das „eigentliche“ Integral von selbst erfüllt sind.

Zum Schluß betrachten wir eine in einem unendlichen Intervall, etwa in $[a, \infty)$ gegebene Funktion $f(x)$, die in diesem Intervall endlich viele singuläre Stellen[1]) habe, in deren Umgebung $f(x)$ nicht beschränkt ist. Wir setzen voraus, in jedem endlichen Intervall $[a, A]$ existiere das Integral $\int\limits_a^A f(x)\,dx$, das gemäß der obigen Definition entweder „eigentlich" oder uneigentlich ist. Dann kann für $A \to \infty$ mit Hilfe der Gleichung (1) aus Nr. 470 das uneigentliche Integral im Intervall $[a, \infty)$ definiert werden.

Bei einem unendlichen Intervall spielt der Punkt $\pm\infty$ die gleiche Rolle wie die singulären Stellen, wenn man einen ihm entsprechenden zusätzlichen Grenzübergang fordert. Aus diesem Grunde kann auch der Punkt $\pm\infty$ eine *singuläre Stelle* genannt werden, unabhängig davon, ob die Funktion $f(x)$ für $x \to \infty$ beschränkt bleibt oder nicht.

480. Eine Bemerkung über die singulären Stellen. Wir betrachten eine in einem endlichen Intervall $[a, b]$ definierte Funktion $f(x)$ und setzen voraus, sie sei in diesem Intervall im „eigentlichen" Sinne nicht integrierbar. *Dann gibt es im Intervall $[a, b]$ notwendig einen Punkt c, in dessen Umgebung die Funktion (im „eigentlichen" Sinne) nicht integrierbar ist.*

Gäbe es einen solchen Punkt nicht, so könnte jeder Punkt x des Intervalls $[a, b]$ in eine solche Umgebung σ eingeschlossen werden, daß innerhalb von σ die Funktion integrierbar ist. Wenden wir auf das System $\Sigma = \{\sigma\}$, durch das das Intervall $[a, b]$ überdeckt wird, den Überdeckungssatz (Nr. 88) an, so läßt sich das Intervall $[a, b]$ so in endlich viele Teilintervalle zerlegen, daß in jedem von ihnen die Funktion integrierbar ist. Daraus würde folgen, daß sie in ganz $[a, b]$ integrierbar ist, was der Voraussetzung widerspricht.

Der Punkt c wird ebenfalls *singulär* genannt: Es ist so, als ob sich in ihm die Eigenschaft einer Funktion, nicht integrierbar zu sein, „verdichtet". Es kann mehrere, sogar unendlich viele singuläre Stellen geben. Bei der Dirichletschen Funktion (Nr. 300, Beispiel 2) liegen z. B. die singulären Stellen im ganzen Intervall $[0, 1]$ dicht.

Wir beschränken uns nun auf den Fall *endlich* vieler singulärer Stellen $c_0, c_1, \ldots, c_m$. In diesem Fall ist die Art der Singularität, die in diesen Stellen auftritt, leicht zu erkennen: In der Umgebung jeder dieser Stellen ist die Funktion nicht beschränkt (die bedeutet, daß auch die *Nichtbeschränktheit* ein Grund für die *Nichtintegrierbarkeit* im „eigentlichen" Sinne ist). Um sich davon zu überzeugen, braucht man nur eine einzige singuläre Stelle b zu betrachten. Die Funktion $f(x)$ sei für jedes $\eta > 0$ $(\eta < b - a)$ im Intervall $[a, b - \eta]$ integrierbar (also notwendig auch beschränkt), sie sei aber nicht integrierbar im Intervall $[b - \eta, b]$. Man muß zeigen, daß *unter diesen Voraussetzungen die Funktion in der Umgebung von b nicht beschränkt bleiben kann.* Den Beweis führen wir indirekt. Für alle x aus $[a, b]$ gelte

$$|f(x)| \leqq L \qquad (L = \text{const}).$$

Wir geben eine beliebige Zahl $\varepsilon > 0$ vor und wählen $\eta < \dfrac{\varepsilon}{6L}$. Für das Intervall $[a, b - \eta]$, in dem $f(x)$ integrierbar ist, läßt sich zu der Zahl $\dfrac{\varepsilon}{3}$ ein solches $\delta > 0$ finden, daß bei Zerlegung des Intervalls in Teilintervalle der Länge $\Delta x_{i'} < \delta$ die Ungleichung

$$\sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} < \frac{\varepsilon}{3}$$

erfüllt ist; die $\omega_{i'}$ bezeichnen wie früher die entsprechenden Schwankungen der Funktion (vgl. Nr. 297). Darüber hinaus können wir noch $\delta < \eta$ voraussetzen. Wir zerlegen nun das ganze Intervall $[a, b]$ in Teilintervalle der Länge $\Delta x_i < \delta$; dabei entspreche $\Delta x_{i'}$ den Teilintervallen, die innerhalb von $[a, b - \eta]$ liegen, und $\Delta x_{i''}$ den übrigen. Von diesen kann nur eins teilweise

[1]) Es kann auch unendlich viele singuläre Stellen geben, sobald in jedem endlichen Intervall $[a, A]$, $A > a$, eine endliche Anzahl enthalten ist (die mit A unendlich groß werden kann).

außerhalb von $[a, b - \eta]$ liegen, und zwar dann, wenn der Punkt $b - \eta$ selbst nicht zu den Teilpunkten gehört. Dann ist wie oben

$$\sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} < \frac{\varepsilon}{3};$$

andererseits gilt

$$\sum_{i''} \omega_{i''} \Delta x_{i''} < 2L \sum_{i''} \Delta x_{i''} < 2L(\eta + \delta) < 4L\eta < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Also ist schließlich

$$\sum \omega_i \Delta x_i = \sum_{i'} + \sum_{i''} < \varepsilon.$$

Die Funktion $f(x)$ ist also im ganzen Intervall $[a, b]$ integrierbar (vgl. Nr. 297) und der Punkt b nicht singulär, im Gegensatz zur Voraussetzung. Damit ist der Beweis beendet.

Im Fall endlich vieler singulärer Stellen sind diese dadurch charakterisiert, daß in ihrer Nähe die Funktion aufhört, beschränkt zu sein; dies führten wir auch in der Definition der singulären Stellen in Nr. 479 an.

481. Anwendung des Hauptsatzes der Integralrechnung. Beispiele. Eine Funktion $f(x)$ sei im Intervall $[a, b]$ definiert und in jedem Intervall $[a, b - \eta]$ im „eigentlichen" Sinne intergrierbar, während b eine singuläre Stelle der Funktion $f(x)$ ist. Wenn es zu $f(x)$ im Intervall $[a, b)$, d. h. für $a \leqq x < b$ eine Stammfunktion $F(x)$ gibt, so ist

$$\int_a^{b-\eta} f(x)\, dx = F(b - \eta) - F(a) = F(x)\Big|_a^{b-\eta},$$

und die Existenz des uneigentlichen Integrals (1) ist der Existenz des endlichen Grenzwerts $\lim\limits_{\eta \to 0} F(b - \eta)$ äquivalent. Wenn dieser Grenzwert existiert, so kann man ihn natürlich als Wert $F(b)$ der Stammfunktion an der Stelle $x = b$ nehmen, wodurch die Stetigkeit von $F(x)$ im ganzen Intervall $[a, b]$ erreicht ist. Zur Berechnung des Integrals (1) erhalten wir dann die übliche Formel

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b. \tag{5}$$

Sie gilt auch dann, wenn die singuläre Stelle im Innern des Intervalls liegt oder wenn es mehrere singuläre Stellen gibt, aber — und darauf muß besonders hingewiesen werden — unter der Bedingung, daß die Stammfunktion $F(x)$, deren Ableitung überall mit Ausnahme der singulären Stellen die Funktion $f(x)$ ist, auch *in diesen singulären Stellen stetig* ist. Die Existenz einer solchen Stammfunktion gewährleistet die Existenz des uneigentlichen Integrals.

Bemerkung. Sprechen wir von einer „Stammfunktion" $F(x)$, so können wir sie in einem weiteren Sinne verstehen: $F(x)$ muß überall, mit Ausnahme der singulären Stellen und auch eventuell mit Ausnahme endlich vieler weiterer Punkte (*sofern in diesen die Funktion $F(x)$ stetig ist*) die Ableitung $f(x)$ haben (vgl. Nr. 310).

Ersetzen wir in der grundlegenden Formel (5) b durch x und $f(x)$ durch $F'(x)$, so können wir (5) wie in Nr. 310 in der Form

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(x)\, dx$$

schreiben. Somit läßt sich zu jeder gegebenen Ableitung $F'(x)$ eine Stammfunktion $F(x)$ aufstellen, sobald die Ableitung (wenigstens uneigentlich) integrierbar ist.

Beispiele.

1. $\int\limits_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; singuläre Stelle $x = 0$. Da die Stammfunktion $\frac{3}{2}\, x^{3/2}$ in diesem Punkt stetig ist, existiert das Integral:

$$\int\limits_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2} x^{2/3} \Big|_{-1}^{8} = \frac{9}{2}.$$

2. $\int\limits_{-2}^{2} \frac{2x\, dx}{x^2 - 1}$ existiert nicht, da die Stammfunktion $\ln |x^2 - 1|$ in den singulären Punkten $x = \pm 1$ des Integranden unendlich wird.

3. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$; singuläre Stelle $x = 1$. Hier ist die Stammfunktion $\frac{1}{2}\, (\arcsin x)^2$ für $x = 1$ stetig; folglich existiert das Integral (und ist gleich $\frac{\pi^2}{8}$).

4. $\int\limits_{0}^{1} \ln x\, dx$; singuläre Stelle $x = 0$. Die Stammfunktion $x \ln x - x$ strebt für $x \to 0$ gegen den Grenzwert 0. Schreiben wir ihr für $x = 0$ diesen Wert zu, so ist

$$\int\limits_{0}^{1} \ln x\, dx = (x \ln x - x) \Big|_{0}^{1} = -1.$$

5. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x \sqrt{3x^2 - 2x - 1}}$; singuläre Stelle $x = 1$; es gilt

$$\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x \sqrt{3x^2 - 2x - 1}} = -\arcsin \frac{x + 1}{2x} \Big|_{1}^{2} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{3}{4}.$$

6. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x \ln x}$; singuläre Stelle $x = 1$. Das Integral existiert nicht, da die Stammfunktion $\ln \ln x$ für $x \to 1$ gegen ∞ strebt.

482. Bedingungen und Kriterien für die Existenz eines Integrals. Wir beschäftigen uns nur mit dem Fall, der mit der Definition (1) verknüpft ist, da er auf die anderen Fälle ohne Schwierigkeiten übertragen werden kann. Dabei beschränken wir uns wegen der Analogie zu den uneigentlichen Integralen über ein unendliches Intervall $[a, \infty)$ auf die Formulierung einiger grundlegender Sätze. Die Beweise werden so wie oben geführt.

Das uneigentliche Integral (1) *ist, falls* $f(x)$ *eine positive Funktion ist, genau dann konvergent, wenn für alle* $\eta > 0$ *die Ungleichung*

$$\int_a^{b-\eta} f(x)\,\mathrm{d}x \leqq L \qquad (L = \text{const})$$

erfüllt ist.

Die Vergleichskriterien aus Nr. 474 lassen sich in diesem Fall mit fast den gleichen Ausdrücken formulieren und beweisen. Wir geben ohne Beweis die daraus resultierenden Cauchyschen Kriterien an.

Für einen hinreichend nahe bei b liegenden Wert x habe die Funktion $f(x)$ *die Gestalt*

$$f(x) = \frac{g(x)}{(b-x)^\lambda} \qquad (\lambda > 0).$$

Dann ist das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

a) *konvergent für* $\lambda < 1$ *und* $g(x) \leqq c < \infty$;
b) *divergent für* $\lambda \geqq 1$ *und* $g(x) \geqq c > 0$.

Die häufigere und für die Praxis geeignetere Form des Kriteriums lautet:

Wird die Funktion $f(x)$ *für* $x \to b$ *von der Ordnung* $\lambda > 0$ *unendlich groß (im Vergleich zu* $\frac{1}{b-x}$*), so ist das Integral* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *konvergent oder divergent, je nachdem ob* $\lambda < 1$ *oder* $\lambda \geqq 1$ *ist.*

Beispiele.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1-x^4}}$. Der Integrand wächst für $x \to 1$ von der Ordnung $\frac{1}{4}$ über alle Grenzen:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}} : \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1+x+x^2+x^3}} \to \frac{1}{\sqrt[4]{4}} \quad \text{für} \quad x \to 1.$$

Folglich ist das Integral konvergent.

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ $(k^2 < 1)$. Der Integrand wächst von der Ordnung $\frac{1}{2}$ gegen ∞; das Integral ist konvergent.

3. $\displaystyle\int_0^1 x^\mu \ln x\,\mathrm{d}x$. Im Fall $\mu > 0$ strebt $f(x) = x^\mu \ln x$ mit x gegen 0, so daß das Integral im „eigentlichen" Sinne existiert. Im Fall $\mu \leqq 0$ ist der Integrand für $x = 0$ unendlich groß.

Im Fall $0 > \mu > -1$ ist, wenn λ die Forderung $1 > \lambda > |\mu| = -\mu$ erfüllt,

$$\frac{x^\mu \ln x}{\frac{1}{x^\lambda}} = x^{\lambda+\mu} \ln x \to 0 \quad \text{für} \quad x \to 0;$$

Da das Integral $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\lambda}$ konvergiert, ist auch das gegebene Integral konvergent (nach einem zu Satz 2 aus Nr. 474 analogen Satz).[1])

Im Fall $\mu \leqq -1$ ist das Integral $\int\limits_0^1 x^\mu \,\mathrm{d}x$ und damit erst recht das gegebene Integral divergent, denn es gilt

$$\frac{x^\mu \ln x}{x^\mu} = \ln x \to \infty \quad \text{für} \quad x \to 0$$

(nach dem gleichen Satz).

Weitere Beispiele sind in Nr. 483 zu finden.

Wenden wir das Kriterium von BOLZANO-CAUCHY an, so erhalten wir das folgende allgemeine Konvergenzkriterium:

Ein uneigentliches Integral $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, wobei b ein singulärer Punkt des Integranden sei, ist genau dann konvergent, wenn jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ derart entspricht, daß für alle η, η' mit $0 < \eta < \delta$ und $0 < \eta' < \delta$ die Ungleichung

$$\left| \int\limits_{b-\eta}^{b-\eta'} f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon$$

erfüllt ist.

Daraus folgt wie oben:

Wenn das Integral $\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ konvergiert, so ist[2]) *das Integral $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ erst recht konvergent.*

Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht. Daher ist auch hier der Fall gesondert zu betrachten, daß außer dem Integral $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ auch das Integral $\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ konvergiert; das erste Integral heißt dann *absolut konvergent* und die Funktion $f(x)$ *absolut integrierbar* im Intervall $[a, b]$.

Auch hier läßt sich eine der letzten Behauptung aus Nr. 476 analoge Behauptung beweisen:

Ist eine Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ absolut integrierbar und eine Funktion $g(x)$ in $[a, b]$ im „eigentlichen" Sinne integrierbar, so ist die Funktion $f(x)\,g(x)$ ebenfalls in $[a, b]$ absolut integrierbar.

Der Zusammenhang mit unendlichen Reihen wird durch den folgenden Satz hergestellt:

Ein uneigentliches Integral $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (wobei b ein singulärer Punkt des Integranden ist)

---

[1]) Wir wenden auf die Funktion $x^\mu \ln x$ die Kriterien an, die für positive Funktionen definiert sind, denn sie läßt sich einfach durch Änderung des Vorzeichens auf eine positive Funktion zuückführen.

[2]) Unter der Voraussetzung, daß die Funktion $f(x)$ in jedem Intervall $[a, b - \eta]$, $\eta > 0$, im „eigentlichen" Sinne integrierbar ist.

ist genau dann konvergent, wenn für jede gegen b strebende Folge von Zahlen a_n die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx \qquad (a_0 = a;\, a \leqq a_n < b)$$

gegen ein und dieselbe Summe konvergiert; diese Summe ist der Wert des uneigentlichen Integrals.

Wir geben als Beispiel ein Integral an, das zwar konvergent, aber nicht absolut konvergent ist. Für $0 < x \leqq 2$ setzen wir

$$f(x) = 2x \sin\frac{\pi}{x^2} - \frac{2\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x^2}.$$

Diese Funktion ist für $x > 0$ stetig. Ihr einziger singulärer Punkt im Intervall $[0, 2]$ liegt im Punkt $x = 0$. Ihre Stammfunktion lautet, wie man leicht nachprüfen kann,

$$F(x) = x^2 \sin\frac{\pi}{x^2}$$

und hat für $x \to 0$ den Grenzwert $F(+0) = 0$. Also ist das Integral konvergent:

$$\int_0^2 f(x)\,dx = x^2 \sin\frac{\pi}{x^2}\bigg|_0^2 = 2\sqrt{2}.$$

Um zu erkennen, daß das Integral $\int_0^2 |f(x)|\,dx$ divergiert, muß man es als Reihe schreiben. Zu diesem Zweck wählen wir eine Nullfolge $\{a_n\}$, indem wir

$$a_0 = 2, \qquad a_{2k-1} = \sqrt{\frac{2}{2k-1}}, \qquad a_{2k} = \frac{1}{\sqrt{k}} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

setzen. Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} |f(x)|\,dx \geqq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_{2k}}^{a_{2k-1}} |f(x)|\,dx.$$

Im Intervall $[a_{2k}, a_{2k-1}]$, d. h. für $k\pi \geqq \frac{\pi}{x^2} \geqq k\pi - \frac{\pi}{2}$, haben $\sin\frac{\pi}{x^2}$ und $\cos\frac{\pi}{x^2}$ entgegengesetztes Vorzeichen, so daß $f(x)$ sein Vorzeichen beibehält; deshalb gilt

$$\int_{a_{2k}}^{a_{2k-1}} |f(x)|\,dx = \left|\int_{a_{2k}}^{a_{2k-1}} f(x)\,dx\right| = |F(a_{2k-1}) - F(a_{2k})| = \frac{2}{2k-1} > \frac{1}{k}.$$

Auf Grund der Divergenz der harmonischen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ divergiert die gegebene Reihe und somit auch das gegebene Integral.

483. Beispiele.

1. Man untersuche die folgenden Integrale auf Konvergenz:

(a) $\displaystyle\int_0^{\theta} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\theta}}$, (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x - e^{-x})}}$, (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$,

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\tan x)^p\,dx$, (e) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}\right)^p d\theta.$

Lösung. (a) Der singuläre Punkt ist $\varphi = \theta$. Da die Ableitung

$$\lim_{\varphi \to \theta} \frac{\cos\varphi - \cos\theta}{\varphi - \theta} = -\sin\theta$$

existiert, wächst der Integrand (für $\varphi \to \theta$) von der Ordnung $\frac{1}{2}$ (bezüglich $\frac{1}{\theta - \varphi}$) gegen ∞. Das Integral konvergiert.

(b) Singulärer Punkt ist $x = 0$. Wegen

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = 2$$

ist die Ordnung des Integranden (bezüglich $\frac{1}{x}$) gleich $\frac{2}{3}$. Das Integral konvergiert.

(c) Hier ist

$$\frac{\ln x}{x-1} \to 1 \quad \text{für} \quad x \to 1,$$

die Ordnung (bezüglich $\frac{1}{1-x}$) also gleich 1. Das Integral divergiert.

(d) Für $p > 0$ ist $\frac{\pi}{2}$, für $p < 0$ ist 0 der singuläre Punkt. In beidenFällen wächst der Integrand von der Ordnung $|p|$ gegen ∞. Also ist das Integral für $|p| < 1$ konvergent, für $|p| > 1$ divergent.

(e) Für $p > 0$ ist $-\frac{\pi}{4}$, für $p < 0$ ist $\frac{\pi}{4}$ der singuläre Punkt. Weiter vgl. (d).

2. Man untersuche das Verhalten der folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{b-1} - x^{a-1}}{\ln x}\,dx \quad (a, b > 0)$,

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx$, (d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln|\sin^2\theta - k^2|\,d\theta \quad (k^2 < 1)$.

Lösung. (a) Für $x \to 1$ strebt der Integrand gegen 0. Der singuläre Punkt ist $x = 0$. Es sei $0 < \lambda < 1$; dann ist

$$\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} : \frac{1}{x^\lambda} = \frac{x^\lambda \ln x}{\sqrt{1-x^2}} \to 0 \quad \text{für} \quad x \to 0.$$

Konvergenz.

(b) Für $x \to 1$ finden wir nach der l'Hospitalschen Regel, daß der Integrand einen endlichen Grenzwert hat (der gleich $b - a$ ist.) Der singuläre Punkt ist $x = 0$ (wenn mindestens eine der Zahlen a und b kleiner als 1 ist, was wir auch voraussetzen wollen). Der Quotient aus Integrand und Zähler ist gleich $\frac{1}{\ln x}$ und strebt mit x gegen 0. Auf Grund der Konvergenz des Integrals $\int_0^1 (x^{b-1} - x^{a-1})\,dx$ ist auch das gegebene Integral konvergent.

(c) Singulärer Punkt: $x = 0$. Es sei $0 < \lambda < 1$; dann ist

$$\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{x^\lambda}} = \left(\frac{x}{\sin x}\right)^\lambda \sin^\lambda x \cdot \ln\sin x \to 0 \quad \text{für} \quad x \to 0.$$

Konvergenz.

(d) Wir setzen $k = \sin\omega$ $\left(0 < \omega \leqq \frac{\pi}{2}\right)$, der singuläre Punkt liegt dann in $\theta = \omega$. Es sei wieder $0 < \lambda < 1$. Dann strebt

$$\frac{\ln|\sin^2\theta - \sin^2\omega|}{\frac{1}{|\theta-\omega|^\lambda}} = \left|\frac{\theta-\omega}{\sin\theta - \sin\omega}\right|^\lambda |\sin\theta - \sin\omega|^\lambda \{\ln|\sin\theta - \sin\omega| + \ln(\sin\theta + \sin\omega)\}$$

für $\theta \to \omega$ gegen 0. Konvergenz.

3. Man untersuche das Verhalten der Integrale

$$\text{(a)} \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx, \qquad \text{(b)} \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\ln x\,dx.$$

Lösung. (a) Für $a < 1$ ist 0, für $b < 1$ ist 1 die singuläre Stelle. Wir zerlegen das Integral etwa wie folgt: $\int\limits_0^1 = \int\limits_0^{1/2} + \int\limits_{1/2}^1$. Da der Integrand für $x \to 0$ (im Fall $a < 1$) von der Ordnung $1 - a$ unendlich groß wird, konvergiert das erste Integral nur unter der Bedingung $1 - a < 1$, also $a > 0$. Analog konvergiert das zweite Integral für $b > 0$. Das gegebene Integral ist also genau dann konvergent, wenn gleichzeitig $a > 0$ und $b > 0$ gilt.

(b) In bezug auf den Punkt $x = 0$ gilt dasselbe wie in (a). Es genügt, das Integral $\int\limits_0^{1/2}$ unter der Voraussetzung $a \leqq 1$ zu betrachten (für $a > 1$ existiert es im „eigentlichen" Sinne). Die Untersuchung verläuft wie in Beispiel 3 aus Nr. 482. Das Integral konvergiert wie in (a) für $a > 0$.

In bezug auf den Punkt $x = 1$ verhält es sich hier anders als in (a), da $\ln x$ für $x \to 1$ von erster Ordnung verschwindet. Das Integral $\int\limits_{1/2}^1$ existiert für $b > -1$.

Die Bedingungen für die Konvergenz des gegebenen Integrals lauten also $a > 0$, $b > -1$.

4. $$\int_0^\pi \frac{\sin^{n-1}\varphi\,d\varphi}{|1 + k\cos\varphi|^n}.$$

Lösung. Da der Fall $k < 0$ auf den Fall $k > 0$ durch die Substitution $\varphi = \pi - \varphi_1$ zurückgeführt werden kann, beschränken wir uns auf $k \geqq 0$. Außerdem ist in jedem Fall für die Konvergenz des Integrals notwendig $n > 0$; sonst würde der Integrand für $\varphi \to 0$ (oder $\varphi \to \pi$) von der Ordnung $\geqq 1$ unendlich groß werden.

Für $k < 1$ ist diese Bedingung auch hinreichend. Für $k = 1$ kann das Integral nicht konvergieren, da dann der Integrand für $\varphi \to \pi$ von n-ter Ordnung unendlich groß wird.

Schließlich sei $k > 1$. Dann gibt es noch die singuläre Stelle $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{k}\right)$. Für $\varphi \to \alpha$ strebt der Integrand von n-ter Ordnung gegen ∞; das bedeutet, daß zur Konvergenz des Integrals noch $n < 1$ gefordert werden muß.

Das Integral konvergiert also erstens für $0 \leqq k < 1$ und $n > 0$ oder zweitens für $k > 1$ und $0 < n < 1$; in allen übrigen Fällen ist es divergent.

5. Man untersuche die folgenden Integrale:

$$\text{(a)} \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx, \qquad \text{(b)} \int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx, \qquad \text{(c)} \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx.$$

Lösung. (a) Singuläre Stellen sind ∞ und (für $a < 1$) auch 0. Wenn wir das Integral in zwei Integrale zerlegen, $\int\limits_0^\infty = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^\infty$, so konvergiert das erste für $a > 0$ (es wird unendlich groß von der Ordnung $1 - a < 1$ bezüglich x), das zweite für $a < 1$ (es verschwindet von der Ordnung $2 - a > 1$ bezüglich $\frac{1}{x}$). Also ist das Integral für $0 < a < 1$ konvergent.

(b) Singuläre Punkte: ∞ und 0. Zerlegung des Integrals: $\int\limits_0^\infty = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^\infty$. Wählen wir $0 < \lambda < 1$, so gilt

$$\frac{\ln x}{1 + x^2} : \frac{1}{x^\lambda} = \frac{x^\lambda \ln x}{1 + x^2} \to 0 \quad \text{für} \quad x \to 0,$$

das Integral $\int\limits_0^1$ konvergiert. Nun sei $1 < \mu < 2$; dann gilt

$$\frac{\ln x}{1 + x^2} : \frac{1}{x^\mu} = \frac{x^2}{1 + x^2} \frac{\ln x}{x^{2-\mu}} \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \infty,$$

d. h., auch $\int\limits_1^\infty$ konvergiert. Daraus folgt die Konvergenz von $\int\limits_0^\infty$.

(c) Singuläre Punkte: ∞ und 0 (für $p < 1$). $\int\limits_0^1$ existiert nur für $p > 0$ (es verschwindet von $(1 - p)$-ter Ordnung bezüglich $\frac{1}{x}$). $\int\limits_1^\infty$ existiert für jedes p, denn es ist, wenn wir ein $\lambda > 1$ wählen,

$$\frac{x^{p-1} e^{-x}}{\frac{1}{x^\lambda}} = \frac{x^{\lambda+p-1}}{e^x} \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \infty.$$

Also existiert $\int\limits_0^\infty$ für $p > 0$.

In den beiden folgenden Beispielen setzen wir voraus, die in einem endlichen (oder unendlichen) Intervall $[a, b]$ zu betrachtenden Funktionen mögen dort (oder, falls das Intervall unendlich ist, in jedem endlichen Teilintervall) höchstens endlich viele singuläre Stellen haben.

6. Man beweise:

(a) Ist die Funktion f^2 integrierbar, so ist die Funktion f selbst notwendig absolut integrierbar (eine solche Funktion heißt quadratisch integrierbar).

(b) Sind zwei Funktionen f und g quadratisch integrierbar, so ist auch ihre Summe $f + g$ quadratisch integrierbar.

(c) Unter denselben Voraussetzungen ist das Produkt fg eine (absolut) integrierbare Funktion.

Auf Grund des Vergleichskriteriums folgen diese Behauptungen leicht aus den Ungleichungen

$$|f| \leqq \frac{1 + f^2}{2}, \qquad (f + g)^2 \leqq 2(f^2 + g^2), \qquad |fg| \leqq \frac{f^2 + g^2}{2}.$$

7. Für Funktionen mit dieser Eigenschaft können dieselben Ungleichungen aufgestellt werden wie in Nr. 321 für Funktionen, die im „eigentlichen" Sinne integrierbar sind. Ist in allen Fällen b ein singulärer Punkt (b kann auch ∞ sein), so braucht man jede Ungleichung nur für das Intervall $[a, x_0]$ mit $a < x_0 < b$ aufzuschreiben und dann x_0 gegen b streben zu lassen, um die Gültigkeit dieser Ungleichung auch für uneigentliche Integrale nachzuweisen. Dabei folgt aus der Konvergenz der Integrale auf der rechten Seite der Ungleichung die der Integrale auf der linken Seite, ähnlich wie in Nr. 375, Ergänzung 8, bei den unendlichen Reihen.

484. Die Hauptwerte uneigentlicher Integrale. Im Intervall $[a, b]$ sei eine Funktion $f(x)$ gegeben, die nur einen singulären Punkt c im Innern von $[a, b]$ habe und in jedem Teilintervall, das c nicht enthält, (im „eigentlichen" Sinne) integrierbar sei. Das uneigentliche Integral von a bis b wird dann, wie wir sahen, definiert durch

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\eta\to 0\\ \eta'\to 0}} \left\{\int_a^{c-\eta} + \int_{c+\eta'}^b\right\},$$

wobei der Grenzwert bei *voneinander unabhängigem* Grenzübergang bezüglich η und η' existieren muß. Existieren diese beiden Grenzwerte nicht, so erweist es sich als nützlich, den Grenzwert dieses Ausdrucks zu betrachten, wenn η und η' gleich sind und gegen 0 streben: $\eta = \eta' \to 0$. Existiert dann dieser Grenzwert, so nennen wir ihn, wie schon CAUCHY es getan hat, den *Hauptwert des uneigentlichen Integrals* $\int_a^b f(x)\,dx$ und schreiben

$$\text{V. p.} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta\to 0} \left\{\int_a^{c-\eta} + \int_{c+\eta}^b\right\}$$

(V. p. ist die Abkürzung für valeur principale (franz.) = Hauptwert). In diesem Fall sagt man, *das Integral* $\int_a^b f(x)\,dx$ *existiere im Sinne des Hauptwerts*. Existiert $\int_a^b f(x)\,dx$ als uneigentliches Integral, so existiert es offenbar auch im Sinne des Hauptwerts; die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht.

Beispiele.

1. Das Integral $\int_a^b \frac{dx}{x-c}$ $(a < c < b)$ existiert nicht als uneigentliches Integral, denn der Ausdruck

$$\int_a^{c-\eta} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\eta'}^b \frac{dx}{x-c} = \ln\frac{b-c}{c-a} + \ln\frac{\eta}{\eta'}$$

hat keinen bestimmten Grenzwert, wenn η und η' unabhängig voneinander gegen 0 streben. Verknüpfen wir aber η und η' durch die Forderung $\eta' = \eta$, so erhalten wir den in Wirklichkeit von η unabhängigen Ausdruck

$$\int_a^{c-\eta} + \int_{c+\eta}^b = \ln\frac{b-c}{c-a},$$

so daß der Hauptwert des Integrals existiert:

$$\text{V. p.} \int_a^b \frac{dx}{x-c} = \ln\frac{b-c}{c-a}.$$

2. Das Integral $\int_a^b \frac{dx}{(x-c)^n}$ $(a < c < b;\ n \geqq 2)$ wächst für gerades n über alle Grenzen; für ungerades n existiert es nicht als uneigentliches Integral.

Wir betrachten den Ausdruck

$$\int_a^{c-\eta} \frac{dx}{(x-c)^n} + \int_{c+\eta}^b \frac{dx}{(x-c)^n} = \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{(a-c)^{n-1}} - \frac{1}{(b-c)^{n-1}} + \frac{1}{\eta^{n-1}} + (-1)^n \frac{1}{\eta^{n-1}}\right],$$

der für ungerades n von η unabhängig ist. So lautet in diesem Fall auch der Hauptwert:

$$\text{V.p.} \int_a^b \frac{dx}{(x-c)^n} = \frac{1}{n-1} \left[\frac{1}{(a-c)^{n-1}} - \frac{1}{(b-c)^{n-1}}\right] \qquad (n \text{ ungerade}).$$

3. Wir betrachten nun das divergente Integral $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{k - \sin\theta}$ $(0 < k < 1)$. Der Integrand hat eine singuläre Stelle für $\alpha = \arcsin k$, und für $\theta \to \alpha$ strebt er von erster Ordnung gegen ∞. Es gilt

$$\int \frac{d\theta}{k-\sin\theta} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \ln \left| \frac{k - \sin\theta}{1 - k\sin\theta - \sqrt{1-k^2}\cos\theta} \right|$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \ln \left| \frac{\sin\alpha - \sin\theta}{1 - \cos(\alpha - \theta)} \right|$$

und daher

$$\int_0^{\alpha-\eta} + \int_{\alpha+\eta}^{\pi/2} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \left[\ln \frac{\sin\alpha - \sin(\alpha-\eta)}{\sin(\alpha+\eta) - \sin\alpha} + \ln \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right].$$

Für $\eta \to 0$ strebt das Argument des ersten Logarithmus gegen 1 (davon kann man sich leicht überzeugen, wenn man die Unbestimmtheit mit Hilfe der l'Hospitalschen Regel beseitigt). Schließlich erhalten wir

$$\text{V.p.} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{k-\sin\theta} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \ln \frac{1-\sqrt{1-k^2}}{k} \qquad (0 < k < 1).$$

In einigen Fällen kann man im voraus feststellen, ob der Hauptwert eines Integrals existiert. Wir wollen so einen Fall betrachten. Gegeben sei das Integral

$$\int_a^b \frac{dx}{f(x)},$$

wobei die Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ stetig sei und nur in einem Punkt c aus dem Innern dieses Intervalls verschwinde. Wir setzen voraus, es existiere in der Umgebung des Punktes c die erste Ableitung $f'(x)$, die für $x = c$ von 0 verschieden sei; ferner existiere in diesem Punkt die zweite Ableitung $f''(c)$.

Da $\frac{1}{f(x)}$ für $x \to c$ von erster Ordnung gegen ∞ strebt und dabei das Vorzeichen beim Durchgang von x durch c wechselt, existiert das gegebene Integral nicht. Wir wollen nun zeigen, daß es im Sinne des Hauptwertes existiert.

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f'(x)(x-c)} + \varphi(x);$$

diese Funktion ist für $x \neq c$ stetig. In der Umgebung von $x = c$ gilt auf Grund der Taylorschen Formel mit dem Peanoschen Restglied (Nr. 124)

$$f(x) = f'(c)(x-c) + [f''(c) + \alpha(x)] \frac{(x-c)^2}{2},$$

wobei $\alpha(x)$ für $x \to c$ verschwindet. Dann ist offenbar

$$\varphi(x) = -\frac{\frac{1}{2}\,[f''(c) + \alpha(x)]}{f'(c)\left[f'(c) + \frac{f''(c) + \alpha(x)}{2}\,(x - c)\right]},$$

so daß $\varphi(x)$ in der Umgebung von $x = c$ beschränkt bleibt und folglich sogar im „eigentlichen" Sinne integrierbar ist. Da für $\frac{1}{f'(c)\,(x - c)}$ das Integral im Sinne des Hauptwerts existiert (vgl. Beispiel 1), gilt dies auch für das gegebene Integral.

Mit Hilfe dieses Kriteriums läßt sich z. B. leicht der Hauptwert in Beispiel 3 nachweisen.

Ein anderes Beispiel kann zur Definition einer wichtigen nicht-elementaren Funktion dienen, des sogenannten *Integrallogarithmus* oder *Logarithmus integralis*:

$$\operatorname{li} a = \int_0^a \frac{dx}{\ln x}.$$

Dieses Integral konvergiert nur für $0 < a < 1$; für $a > 1$ ist es im Sinne des Hauptwerts zu verstehen.

Es ist leicht, den Begriff des Hauptwerts auch auf den Fall beliebig vieler, aber endlich vieler singulärer Punkte im Innern des zu betrachtenden Intervalls zu übertragen.

Bis jetzt haben wir die Möglichkeit einer singulären Stelle in den Endpunkten des Intervalls ausgeschlossen; dies brauchen wir aber nicht zu tun, wenn diese Singularitäten im normalen Sinne integrierbar sind.

4. Zum Beispiel sei das als divergent bekannte Integral

$$\int_0^2 \frac{x^{a-1}}{1-x}\,dx \qquad (a > 0)$$

gegeben. Hier sind der Punkt $x = 1$ und (für $a < 1$) der Randpunkt $x = 0$ singuläre Stellen. In diesem Fall läßt sich

$$\text{V. p.} \int_0^2 \frac{x^{a-1}}{1-x}\,dx = \lim_{\eta \to 0} \left\{ \int_0^{1-\eta} + \int_{1+\eta}^2 \right\}$$

leicht auf das (für $a < 1$ uneigentliche) Integral

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{a-1} - (1+t)^{a-1}}{t}\,dt$$

zurückführen.

Zum Schluß betrachten wir noch eine Abart des Hauptwerts, die oft benutzt werden kann. Ein Integral, das sich über das nach beiden Seiten unendliche Intervall $(-\infty, \infty)$ erstreckt, wobei wir im Innern des Intervalls keine singulären Punkte voraussetzen, kann bekanntlich durch die Limesbeziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{A \to \infty \\ A' \to -\infty}} \int_{A'}^{A} f(x)\,dx$$

definiert werden; *dabei muß angenommen werden, daß die Grenzübergänge bezüglich A und A' voneinander unabhängig sind.* Es kann sich jedoch erweisen, daß in diesem Sinne kein Grenzwert existiert, daß es aber einen Grenzwert gibt, der der speziellen Voraussetzung $A' = -A$ entspricht. Auch er heißt *Hauptwert* des Integrals $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, und man schreibt

$$\text{V. p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx.$$

Ist z. B. die Funktion $f(x)$ *ungerade*, so ist ihr Integral über das zum Nullpunkt symmetrische Intervall $(-A, A)$ gleich 0, so daß auch

$$\text{V. p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 0$$

ist, obwohl das uneigentliche Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ nicht zu existieren braucht (wie z. B. für die Funktion $\sin x$).

Ist die Funktion $f(x)$ *gerade*, so gilt

$$\int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{A} f(x)\,dx;$$

der Grenzwert dieses Integrals existiert genau dann, wenn $\lim\limits_{A\to\infty} \int\limits_{0}^{A} f(x)\,dx$ existiert, d. h., es existiert das uneigentliche Integral $\int\limits_{0}^{\infty} f(x)\,dx$ und damit auch $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$. Der Hauptwert des Integrals im Fall einer geraden Funktion existiert also nur gleichzeitig mit dem uneigentlichen Integral (und ist diesem natürlich gleich).

Jede (in einem endlichen Intervall integrierbare) Funktion $f(x)$ kann als Summe einer geraden und einer ungeraden integrierbaren Funktion dargestellt werden:

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Aus dem oben Gesagten ist jetzt klar, daß

$$\text{V. p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx$$

gilt, wenn das rechte uneigentliche Integral existiert.

Die Funktion $\dfrac{1+x}{1+x^2}$ besteht z. B. aus dem geraden Anteil $\dfrac{1}{1+x^2}$ und dem ungeraden Anteil $\dfrac{x}{1+x^2}$. Wir können sofort den Hauptwert angeben:

$$\text{V. p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

485. Eine Bemerkung über verallgemeinerte Werte divergenter Integrale. In Kapitel XI, § 9, beschäftigten wir uns mit divergenten Reihen und schrieben ihnen mit Hilfe verschiedener Regeln eine „verallgemeinerte Summe" zu. In ähnlicher Weise gibt es Methoden, die auch den divergenten Integralen einen „verallgemeinerten Wert" zuordnen. In Nr. 484 taten wir dies schon, und zwar dadurch, daß wir einige vereinfachende spezielle Forderungen beim Grenzübergang einführten, die die Konvergenz erzwangen. Jetzt meinen wir aber wesentlich andere Prozesse, ähnlich denjenigen, die wir bei divergenten Reihen benutzten. Wir beschränken uns auf zwei Beispiele für solche Prozesse, und zwar auf Analoga zur Cesàroschen und zur Abel-Poissonschen Methode für Reihen.

I. Eine Funktion $f(x)$ sei definiert für $x \geqq 0$ und in jedem endlichen Intervall $[0, x]$ im „eigentlichen" Sinne integrierbar, aber nicht integrierbar im Intervall $[0, \infty)$. Wir definieren eine Funktion $F(x)$ durch

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

und bilden den Mittelwert $\frac{1}{x}\int_0^x F(u)\,du$. Existiert für ihn ein endlicher Grenzwert,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x F(u)\,du = I,$$

so wählen wir diese Zahl als „verallgemeinerten Wert" des Integrals.

Wir wenden diesen Prozeß z. B. auf das uns bekannte divergente Integral

$$\int_0^\infty \sin x\,dx \tag{6}$$

an (vgl. Nr. 472, Beispiel 4). Hierbei ist $f(x) = \sin x$, $F(x) = 1 - \cos x$ und

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x F(u)\,du = \lim_{x\to\infty} \frac{x - \sin x}{x} = 1.$$

Der „verallgemeinerte Wert" des divergenten Integrals (6) ist also gleich 1.

Auch hier ergibt sich natürlich die Frage nach der *Regularität* dieser Methode, d. h., ob diese Methode dem konvergenten Integral

$$\int_0^\infty f(x)\,dx, \tag{7}$$

das nach der Definition aus Nr. 470 einen endlichen Wert, etwa I, hat, dieselbe Zahl I auch als „verallgemeinerten Wert" zuschreibt. Wir wollen zeigen, daß dies der Fall ist.

Zu einer beliebigen Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es infolge der Konvergenz des Integrals (7) ein $x_0 > 0$ derart, daß für $x \geqq x_0$ die Ungleichung

$$|F(x) - I| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{mit} \quad F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

erfüllt ist. Setzen wir $x > x_0$ voraus, so gilt

$$\frac{1}{x}\int_0^x F(u)\,du - I = \frac{1}{x}\int_0^x [F(u) - I]\,du$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^{x_0} [F(u) - I]\,du + \left(1 - \frac{x_0}{x}\right)\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x [F(u) - I]\,du,$$

also

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x F(u)\,du - I\right| < \frac{1}{x}\left|\int_0^{x_0} [F(u) - I]\,du\right| + \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x |F(u) - I|\,du.$$

Der zweite Summand auf der rechten Seite ist kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ (auf Grund der Wahl von x_0), für den ersten gilt für hinreichend große x das gleiche; damit haben wir

$$\left| \frac{1}{x} \int_0^x F(u)\, du - I \right| < \varepsilon,$$

so daß tatsächlich

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_0^x F(u)\, du = I$$

ist, was zu beweisen war.

II. Jetzt ordnen wir einer gegebenen Funktion $f(x)$, für die das Integral (7) nicht existiert, ein anderes Integral

$$\int_0^\infty e^{-kx} f(x)\, dx$$

zu. Ist dieses Integral für $k > 0$ konvergent und besitzt es einen endlichen Grenzwert,

$$\lim_{k\to 0} \int_0^\infty e^{-kx} f(x)\, dx = I,$$

so läßt sich dieser Grenzwert auch als „verallgemeinerter Wert" des divergenten Integrals (7) auffassen.

Zum Beispiel betrachten wir wieder das Integral (6). Da

$$\int_0^\infty e^{-kx} \sin x\, dx = \frac{1}{k^2+1}$$

(vgl. Nr. 472, Beispiel 1) für $k \to +0$ gegen 1 strebt, ergibt sich hier auch als „verallgemeinerter Wert" von (6) die Zahl 1.

§ 3. Eigenschaften und Umformung uneigentlicher Integrale

486. Die einfachsten Eigenschaften. Wir wollen Funktionen betrachten, die (im „eigentlichen" oder uneigentlichen Sinne) in einem endlichen oder unendlichen Intervall $[a, b]$ integrierbar sind; a und b brauchen also nicht nur endliche Zahlen zu sein, sondern können auch $-\infty$ oder ∞ bedeuten. Die einfachsten Eigenschaften uneigentlicher Integrale sind denjenigen vollkommen analog, die für „eigentliche" Integrale gelten (Nr. 302—306), und lassen sich aus ihnen durch ein einheitliches Verfahren herleiten. Da die uneigentlichen Integrale Grenzwerte „eigentlicher" Integrale sind, genügt es im allgemeinen, in den Gleichungen und Ungleichungen für „eigentliche" Integrale zum Grenzwert überzugehen.

Zunächst wollen wir den Begriff des *Integrals über ein orientiertes Intervall* einführen:

1°. *Ist eine Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ integrierbar, so ist sie auch im Intervall $[b, a]$ integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

(Diese Formel kann man einfach zur *Definition* des Integrals $\int_a^b$ im Fall $a > b$ verwenden.)

Ferner gilt:

2°. *Eine Funktion $f(x)$ sei im größten*[1] *der Intervalle $[a,b]$, $[a,c]$ und $[c,b]$ integrierbar. Dann ist sie auch in den beiden anderen Intervallen integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

3°. *Ist eine Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ integrierbar und ist c eine Konstante, so ist $cf(x)$ ebenfalls dort integrierbar, und es ist*

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

4°. *Sind zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ im Intervall $[a,b]$ integrierbar, so ist $f(x) \pm g(x)$ ebenfalls integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

Zum Beweis[2] dieser (und der folgenden) Eigenschaft muß die Bemerkung aus Nr. 479 berücksichtigt werden. Es sei etwa b der einzige singuläre Punkt einer der beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$. Dann kann man aus der Beziehung

$$\int_a^{x_0} [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^{x_0} f(x)\,dx \pm \int_a^{x_0} g(x)\,dx \qquad (a < x_0 < b)$$

die vorhergehende herleiten, indem man x_0 gegen b streben läßt, und zwar sowohl dann, wenn beide Integrale von a bis b „eigentlich" sind, als auch dann, wenn eines der Integrale uneigentlich ist.

5°. *Ist für zwei im Intervall $[a, b]$ integrierbare Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ die Ungleichung $f(x) \leqq g(x)$ erfüllt, so gilt für $a < b$*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx.$$

[1]) Genauer: in demjenigen Intervall, das die beiden anderen enthält.

[2]) In bezug auf Integrale mit einer unendlichen Integrationsgrenze erwähnten wir die Eigenschaften 3° und 4° schon in Nr. 473 und benutzten sie auch schon in den letzten Nummern. Hier werden sie in allgemeinerer Formulierung hergeleitet.

6°. *Ist $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ absolut integrierbar, so gilt für $a < b$*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

7°. *Ist $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ integrierbar, so existiert für jedes x aus $[a, b]$ das Integral*

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{1}$$

und stellt eine stetige Funktion von x dar.

Beweis. Es sei $a < x_0 \leqq b$. Wir wollen zeigen, daß die Funktion $\Phi(x)$ für $x = x_0$ beispielsweise von links stetig ist. Dazu wählen wir einen Punkt c zwischen a und x_0 derart, daß sich im Intervall $[c, x_0]$ keine singulären Stellen befinden, außer eventuell x_0. Dann ist für $c < x \leqq x_0$

$$\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^x f(t)\,dt, \tag{2}$$

und es genügt zu beweisen, daß

$$\lim_{x\to x_0-0} \int_c^x f(t)\,dt = \int_c^{x_0} f(t)\,dt$$

ist. Diese Gleichung gilt aber (vgl. die Bemerkung aus Nr. 479) unabhängig davon, ob das rechte Integral uneigentlich ist oder nicht.

Im Fall $x_0 = b = \infty$ ist die Stetigkeit der Funktion $\Phi(x)$ für $x = \infty$ in folgendem Sinne zu verstehen:

$$\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = \Phi(\infty) = \int_a^\infty f(t)\,dt.$$

8°. *Unter denselben Voraussetzungen existiert, wenn die Funktion $f(x)$ im Punkt $x = x_0$ stetig ist, eine Ableitung der Funktion* (1) *an der Stelle $x = x_0$, und es gilt*

$$\Phi'(x_0) = f(x_0).$$

Zum Beweis wird die Zerlegung (2) benutzt und auf die analoge Eigenschaft des „eigentlichen" Integrals verwiesen.

Die Eigenschaften 7° und 8° lassen sich auch dann leicht formulieren, wenn die untere Grenze des Integrals variabel ist.

487. Mittelwertsätze. Der erste Mittelwertsatz in seiner ursprünglichen Form (Nr. 304, Satz 9°) setzt wesentlich die Beschränktheit der Funktion $f(x)$ und die Endlichkeit des Intervalls voraus; deshalb kann man ihn nicht einfach für uneigentliche Integrale verwenden. Bei der verallgemeinerten Form (Nr. 304, Satz 10°) ist jedoch eine Übertragung möglich:

Erster Mittelwertsatz. *Zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ seien im Intervall $[a, b]$ integrierbar, $f(x)$ sei beschränkt,*

$$m \leqq f(x) \leqq M,$$

und $g(x)$ ändere nicht das Vorzeichen. Dann ist auch die Funktion $f(x)\,g(x)$ integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

mit $m \leqq \mu \leqq M$.

Die Existenz des Integrals linkerhand folgt aus dem letzten Satz von Nr. 475 und dem ihm analogen Satz von Nr. 482. Die Gleichheit selbst wird formal genau so bewiesen wie in Nr. 304.

Ist die Funktion $f(x)$ im abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ *stetig*, so kann man für m und M den kleinsten bzw. größten Wert von $f(x)$ in $[a, b]$ nehmen; der Faktor μ ist dann gleich einem der Werte von $f(x)$:

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = f(c) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{mit} \quad c \in [a, b].$$

Dies gilt auch dann, wenn das Intervall $[a, b]$ unendlich ist, denn die Sätze von Weierstrass und Bolzano-Cauchy (Nr. 85 und 82) sind auch in diesem Fall gültig, wovon der Leser sich selbst überzeugen möge.

Es gilt auch der folgende Satz (vgl. 14° aus Nr. 306):

Zweiter Mittelwertsatz. *Die Funktion $f(x)$ sei in $[a, b]$ monoton und beschränkt, und $g(x)$ sei in $[a, b]$ integrierbar. Dann ist auch die Funktion $f(x)\,g(x)$ integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = f(a) \int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x + f(b) \int_\xi^b g(x)\,\mathrm{d}x \qquad (a \leqq \xi \leqq b).$$

Beim Beweis wollen wir uns auf den Fall beschränken, daß a endlich, $b = \infty$ ist und $g(x)$ keine anderen singulären Punkte besitzt. Die Existenz des Integrals folgt aus dem Abelschen Kriterium.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir die Funktion $f(x)$ als fallend annehmen. Infolge ihrer Beschränktheit existiert der endliche Grenzwert

$$f(\infty) = \lim_{x\to\infty} f(x).$$

Dann ist $f^*(x) = f(x) - f(\infty) \geqq 0$. In einem endlichen Intervall $[a, A]$ gilt (vgl. 13° aus Nr. 306)

$$\int_a^A f^*(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = f^*(a) \int_a^\eta g(x)\,\mathrm{d}x \qquad (a \leqq \eta \leqq A). \tag{3}$$

Die im Intervall $[a, \infty)$ stetige Funktion $\int_a^A g(x)\,\mathrm{d}x$ von A hat die endlichen Schranken m und M, so daß (vgl. (3))

$$m f^*(a) \leqq \int_a^A f^*(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x \leqq M f^*(a)$$

und für $A \to \infty$

$$mf^*(a) \leqq \int_a^\infty f^*(x)\, g(x)\, dx \leqq Mf^*(a)$$

gilt. Daraus folgt

$$\int_a^\infty f^*(x)\, g(x)\, dx = \mu f^*(a) \qquad (m \leqq \mu \leqq M). \tag{4}$$

Die stetige Funktion $\int_a^A g(x)\, dx$ erreicht ihre Schranken m und M und nimmt jeden zwischen m und M liegenden Wert an, d. h., es ist

$$\mu = \int_a^\xi g(x)\, dx \qquad (a \leqq \xi \leqq \infty).$$

Setzen wir in (4) $f^*(x) = f(x) - f(\infty)$ und substituieren wir den eben gefundenen Ausdruck für μ, so gelangen wir zu der zu beweisenden Formel.

488. Partielle Integration bei uneigentlichen Integralen. Zwei Funktionen $u = u(x)$ und $v = v(x)$ seien in allen Punkten des Intervalls $[a, b]$ definiert und dort nebst ihren ersten Ableitungen stetig, mit Ausnahme des Punktes b (der auch ∞ sein kann). Dann gilt die Gleichung

$$\int_a^b u\, dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\, du, \tag{*}$$

wenn man unter dem ersten Glied auf der rechten Seite den Ausdruck

$$\lim_{x \to b} u(x)\, v(x) - u(a)\, v(a)$$

versteht. Dabei wird vorausgesetzt, daß von den drei in der Gleichung (*) auftretenden Gliedern zwei Glieder existieren; die Existenz des dritten Gliedes folgt daraus von selbst.

Wir wählen ein x_0 mit $a < x_0 < b$ und schreiben die allgemeine Formel für die partielle Integration im Intervall $[a, x_0]$ auf:

$$\int_a^{x_0} u\, dv = [u(x_0)\, v(x_0) - u(a)\, v(a)] - \int_a^{x_0} v\, du.$$

Jetzt möge hier x_0 gegen b streben. Nach Voraussetzung haben zwei Glieder endliche Grenzwerte für $x \to x_0$.[1]) Folglich hat auch der dritte Ausdruck einen endlichen Grenzwert. Die obige Beziehung ist damit durch Grenzübergang bewiesen.

489. Beispiele.

1. $$\int_0^{\pi/2} \ln \sin x\, dx = x \ln \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} x \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = -\int_0^{\pi/2} \frac{x \cdot}{\tan x}\, dx.$$

---

[1]) Vgl. die Bemerkung in Nr. 477.

Durch partielle Integration gelingt es hier, das uneigentliche Integral auf ein „eigentliches" zurückzuführen und damit die Existenz des uneigentlichen Integrals zu beweisen (vgl. Nr. 483, Beispiel 2(c)). Die gleiche Besonderheit tritt auch bei den folgenden Integralen auf.

2. (a) $$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \ln x \, d\,(\arctan x)$$

$$= \ln x \cdot \arctan x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\,dx = -\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\,dx.$$

(b) Analog ist

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x}\,dx.$$

3. $$\int_a^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = -\int_a^\infty \frac{d(\cos x)}{x} = -\frac{\cos x}{x}\Big|_a^\infty - \int_a^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx \qquad (a > 0).$$

Da beide Glieder der rechten Seite einen Sinn haben, ist damit die Existenz des links stehenden Integrals bewiesen (vgl. Nr. 476 und 477).

Ganz analog läßt sich die Existenz des Integrals

$$\int_a^\infty \frac{f(x)}{x^\lambda}\,dx \qquad (a, \lambda > 0)$$

nachweisen, wenn $f(x)$ stetig und das Integral $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ für $x > a$ beschränkt ist. (Das folgt aus dem Dirichletschen Kriterium.)

Durch partielle Integration kann man oft Rekursionsformeln herleiten, mit deren Hilfe sich die gegebenen Integrale leicht berechnen lassen. Wir wollen dies am folgenden Beispiel erläutern (n und k seien natürliche Zahlen):

4. $I_n = \int_0^\infty e^{-t} t^n \,dt$. Es ist

$$I_n = -e^{-t} t^n \Big|_0^\infty + n \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1}\,dt = n I_{n-1},$$

also $I_n = n!$.

Das Verschwinden des ersten Gliedes auf der rechten Seite hier (und in den folgenden Beispielen) zeigt, wie vorteilhaft es ist, die Formel für die partielle Integration gerade auf bestimmte (und nicht auf unbestimmte) Integrale anzuwenden.

5. $E_n = \int_0^\infty e^{-ax} \sin^n x \,dx$ $(a > 0)$. Partielle Integration ergibt

$$E_n = -\frac{1}{a} e^{-ax} \sin^n x \Big|_0^\infty + \frac{n}{a} \int_0^\infty e^{-ax} \sin^{n-1} x \cos x \,dx.$$

Da das erste Glied auf der rechten Seite verschwindet, finden wir, wenn wir wieder partiell integrieren,

$$E_n = -\frac{n}{a^2}\, e^{-ax} \sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^\infty + \frac{n(n-1)}{a^2} \int_0^\infty e^{-ax} \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx$$

$$- \frac{n}{a^2} \int_0^\infty e^{-ax} \sin^n x \, dx.$$

Ersetzen wir hier $\cos^2 x$ durch $1 - \sin^2 x$, so gelangen wir leicht zu der Rekursionsformel

$$E_n = \frac{n(n-1)}{n^2 + a^2} E_{n-2}.$$

Wegen $E_0 = \frac{1}{a}$ und $E_1 = \frac{1}{1 + a^2}$ erhalten wir schließlich für ungerades bzw. für gerades n

$$E_{2k-1} = \frac{(2k-1)!}{(1 + a^2)(3^2 + a^2) \cdots ((2k-1)^2 + a^2)}$$

bzw.

$$E_{2k} = \frac{(2k)!}{a(2^2 + a^2)(4^2 + a^2) \cdots ((2k)^2 + a^2)}.$$

6. Die verallgemeinerte Formel der partiellen Integration (Formel (7) aus Nr. 311) läßt sich leicht für uneigentliche Integrale angeben:

Gegeben sei z. B. das Integral

$$K = \int_0^\infty e^{-(p+1)x} L_n(x) \, dx \qquad (p > 0).$$

Dabei bezeichne $L_n(x)$ das n-te Laguerresche[1]) Polynom

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Mit Hilfe der oben genannten Formel ergibt sich

$$K = \int_0^\infty e^{-px} \frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n} \, dx$$

$$= \left[e^{-px} \frac{d^{n-1}(x^n e^{-x})}{dx^{n-1}} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1} e^{-px}}{dx^{n-1}} x^n e^{-x} \right] \Bigg|_0^\infty$$

$$+ (-1)^n \int_0^\infty x^n e^{-x} \frac{d^n e^{-px}}{dx^n} \, dx$$

$$= p^n \int_0^\infty x^n e^{-(p+1)x} \, dx$$

und schließlich (vgl. (4))

$$K = \frac{p^n}{(p+1)^{n+1}} n!.$$

---

[1]) Edmond Laguerre, 1834—1886, französischer Mathematiker.

Analog findet man das Resultat

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_k(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad k \neq n, \\ (n!)^2 & \text{für} \quad k = n. \end{cases}$$

490. Variablensubstitution in uneigentlichen Integralen. Eine Funktion $f(x)$ sei definiert und stetig in einem endlichen oder unendlichen Intervall $[a, b)$; folglich ist sie im „eigentlichen" Sinne in jedem Teilintervall von $[a, b)$, das den Punkt b nicht enthält (der eventuell ∞ ist), integrierbar. Dieser Punkt ist nach Voraussetzung der einzige singuläre Punkt der Funktion $f(x)$.

Wir betrachten nun eine *monoton wachsende* Funktion $x = \varphi(t)$, die nebst ihrer Ableitung $\varphi'(t)$ im Intervall $[\alpha, \beta)$, wobei β auch ∞ sein kann, stetig ist, und nehmen an, daß $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ ist. Dabei haben wir $\varphi(\beta) = b$ im Sinne des Grenzwerts $\lim\limits_{t\to\beta} \varphi(t) = b$ zu verstehen.

Unter diesen Bedingungen gilt die Gleichung

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt, \tag{5}$$

wenn eins der beiden Integrale existiert (die Existenz des anderen folgt dann von selbst). Das zweite Integral ist entweder nicht uneigentlich oder uneigentlich mit dem einzigen singulären Punkt β.

Auf Grund des Satzes über die Umkehrfunktion (Nr. 83) ist klar, daß auch t als monoton wachsende und stetige Funktion von x in $[a, b)$ aufgefaßt werden kann: $t = \theta(x)$, wobei $\lim \theta(x) = \beta$ für $x \to b$ ist.

Es seien nun x_0 und t_0 beliebige, aber einander entsprechende Werte von x bzw. t aus den Intervallen (a, b) bzw. (α, β). Dann erhalten wir, wenn wir wie in einem „eigentlichen" Integral die Integrationsvariable ändern,

$$\int_a^{x_0} f(x)\,dx = \int_\alpha^{t_0} f(\varphi, (t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Existiert etwa das Integral auf der rechten Seite von (5), so kann sich x_0 *beliebig* gegen b nähern; dabei strebt $t_0 = \theta(x_0)$ gegen β, und die Existenz des linken Integrals sowie die Formel (5) sind bewiesen.

Unsere Überlegungen lassen sich genauso auf *monoton fallende* Funktionen $\varphi(t)$, wenn $\alpha > \beta$ ist, anwenden.

Genauso lassen sich auch die anderen möglichen Fälle der singulären Punkte erledigen. Bei der Bestimmung der Grenzen des umgeformten Integrals muß man sich stets daran erinnern, daß *die untere Grenze α der unteren Grenze a und die obere Grenze β der oberen Grenze b entsprechen muß, unabhängig davon, ob $\alpha < \beta$ oder $\alpha > \beta$ ist.*

491. Beispiele.

1. Das Integral $\displaystyle\int_{x_0}^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-k^2)}}$ $(k^2 < 1 < x_0)$ kann mit Hilfe der Substitution $x = \dfrac{1}{t^2}$, $dx = -\dfrac{2}{t^3}\,dt$ in

$$-2\int_{1/\sqrt{x_0}}^{0} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = 2\int_0^{1/\sqrt{x_0}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

übergeführt werden. Hier ist $a = x_0$, $b = \infty$, $\alpha = \frac{1}{\sqrt{x_0}}$, $\beta = 0$. Das uneigentliche Integral ist somit in ein „eigentliches" umgeformt worden.

2. Man berechne das Integral $\int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, indem man $x = a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi$ substituiert.

Hinweis. Hier ist $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$; die Substitution ergibt also das „eigentliche" Integral

$$2\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi = \pi.$$

3. Zum Nachweis der Konvergenz des Integrals $\int\limits_0^\infty \sin x^2\, dx$ ersetzen wir in ihm x durch $\sqrt{t}$, also dx durch $\frac{dt}{2\sqrt{t}}$. Ferner ist $a = \alpha = 0$, $b = \beta = \infty$. Dadurch erhalten wir das als konvergent bekannte (vgl. Nr. 476 oder Nr. 489, Beispiel 3) Integral

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt;$$

folglich konvergiert auch das gegebene Integral. Es ist interessant, daß sein Integrand für $x \to \infty$ nicht gegen einen bestimmten Grenzwert strebt, sondern zwischen -1 und 1 schwankt.[1])

Analog wird die Frage nach der Konvergenz von $\int\limits_0^\infty \cos x^2\, dx$ behandelt.

Im folgenden Beispiel stellen wir ein allgemeineres Resultat auf.

4. Man beweise, daß die Integrale

$$\int\limits_a^\infty \sin(f(x))\, dx, \qquad \int\limits_a^\infty \cos(f(x))\, dx$$

konvergieren, wenn $f'(x)$ monoton wächst und mit x gegen ∞ strebt.

Zunächst sei bemerkt, daß $f'(x)$ für hinreichend große x positiv ist und $f(x)$ monoton wächst. Wir wollen voraussetzen, dies sei schon für $x = a$ der Fall. Mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung erhalten wir

$$f(x+1) = f(x) + f'(x+\theta) \geqq f(a) + f'(x) \qquad (0 < \theta < 1);$$

folglich strebt auch die Funktion $f(x)$ mit x gegen ∞. Wir führen nun eine neue Veränderliche $t = f(x)$ ein, so daß

$$x = g(t), \qquad dx = g'(t)\, dt \qquad [\alpha = f(a), \beta = \infty]$$

ist, wenn mit g die zu f inverse Funktion bezeichnet wird. Da die Ableitung $g'(t) = \frac{1}{f'(x)}$ monoton fällt und für $t \to \infty$ gegen 0 strebt, sind die umgeformten Integrale

$$\int\limits_{f(a)}^\infty \sin t \cdot g'(t)\, dt, \qquad \int\limits_{f(a)}^\infty \cos t \cdot g'(t)\, dt$$

auf Grund des Dirichletschen Kriteriums und mit ihnen auch die gegebenen Integrale konvergent.

---

[1]) Es braucht also bei $\int\limits_0^\infty f(x)\, dx$ nicht notwendig $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ zu sein, wie man wegen der Analogie zu den unendlichen Reihen denken könnte. — *Anm. d. Red.*

5. Zur Berechnung des Integrals $\int\limits_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$ (seine Konvergenz haben wir schon in Nr. 483, Beispiel 5(b), nachgewiesen) führen wir die Zerlegung $\int\limits_0^\infty = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^\infty$ durch. Im zweiten Integral setzen wir $x = \frac{1}{t}$ $(a = 1, b = \infty, \alpha = 1, \beta = 0)$ und gelangen zu

$$\int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = \int\limits_1^0 \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt = -\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx;$$

daraus folgt, daß das gegebene Integral gleich 0 ist.

6. Gegeben sei das uneigentliche Integral

$$\int\limits_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Die Substitution $x = \sin t$ $\left(a = 0, b = 1, \alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}\right)$ führte es über in das „eigentliche" Integral

$$\int\limits_0^{\pi/2} e^{\sin t}\,dt.$$

7. Die Berechnung von

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$$

(vgl. Nr. 472, Beispiel 2) kann durch Anwendung zweckmäßiger Substitutionen sehr vereinfacht werden. Zunächst läßt sich das Integral

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^2\,dx}{1+x^4}$$

durch die Substitution $x = \frac{1}{t}$ $(a = 0, b = \infty, \alpha = \infty, \beta = 0)$ auf das gegebene Integral zurückführen, so daß wir

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{(1+x^2)\,dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx}{x^2+\frac{1}{x^2}}$$

schreiben können. Hieraus erhalten wir durch die Substitution $x - \frac{1}{x} = z$ $(a = 0, b = \infty, \alpha = -\infty, \beta = \infty)$ sofort

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dz}{z^2+2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{z}{\sqrt{2}}\Bigg|_{-\infty}^\infty = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

8. Zur Berechnung des Integrals $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\tan\theta}}$ setzt man natürlich $t = \sqrt{\tan\theta}$, d. h. $\theta =$ arctan t^2 $\left(a = 0, b = \frac{\pi}{2}, \alpha = 0, \beta = \infty\right)$. Dadurch gelangt man zu dem eben berechneten Integral:

$$2\int\limits_0^\infty \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

9. Man bestätige die folgenden Formeln:

(a) $$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(\alpha^2 - x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\alpha\sqrt{\alpha^2-1}} \qquad (\alpha > 1),$$

(b) $$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - \alpha^2)\sqrt{x^2-1}} = \frac{\arcsin\alpha}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}} \qquad (0 < \alpha < 1),$$

(c) $$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(x^2 + \alpha^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\alpha\sqrt{1+\alpha^2}} \qquad (\alpha > 0),$$

(d) $$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + \alpha^2)\sqrt{x^2-1}} = \frac{\ln\left(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2}\right)}{\alpha\sqrt{1+\alpha^2}} \qquad (\alpha > 0),$$

(e) $$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + \alpha^2)\sqrt{x^2+1}} = \begin{cases} \dfrac{\ln\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}\right)}{\alpha\sqrt{\alpha^2-1}} & \text{für } \alpha > 1, \\ 1 & \text{für } \alpha = 1, \\ \dfrac{\arccos\alpha}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}} & \text{für } 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Hinweis. Man benutze in allen Fällen die Abelsche Substitution (Nr. 284).

10. Die Frage nach der Konvergenz der Integrale

$$\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x \ln^\lambda x}, \qquad \int\limits_A^\infty \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln^\lambda(\ln x)} \qquad (\lambda > 0, a > 1, A > e)$$

kann sofort beantwortet werden, wenn die Integrale mit Hilfe der Substitution $t = \ln x$, $u = \ln(\ln x)$ in

$$\int\limits_{\ln a}^\infty \frac{dt}{t^\lambda}, \qquad \int\limits_{\ln(\ln A)}^\infty \frac{du}{u^\lambda}$$

übergeführt werden. Beide Integrale sind für $\lambda > 1$ konvergent, für $\lambda \leqq 1$ divergent.

In den folgenden Übungen wollen wir unter $f(u)$ stets eine beliebige, für $u \geqq 0$ stetige Funktion verstehen.

11. Man zeige, daß

$$\int_0^\infty f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\ln x\,\frac{dx}{x}=\ln a\int_0^\infty f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{dx}{x}\qquad (a>0)$$

gilt, sobald die Integrale konvergieren.

Hinweis. Man wähle die Substitution $x = ae^u$ ($\alpha = -\infty$, $\beta = \infty$).

12. Man beweise (für $p > 0$) die Beziehungen

$$\text{(a)}\ \int_0^\infty f(x^p + x^{-p})\ln x\,\frac{dx}{x}=0,\qquad \text{(b)}\ \int_0^\infty f(x^p+x^{-p})\ln x\,\frac{dx}{1+x^2}=0,$$

die gelten, sobald die Integrale konvergieren.

Beispielsweise ist beim Integral (a) $\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$, aber $\int_1^\infty = -\int_0^1$, wie man sich leicht mit Hilfe der Substitution $x = \frac{1}{t}$ klarmachen kann.

13. Unter der Voraussetzung, daß das Integral auf der rechten Seite konvergiere, beweise man die Formel

$$\int_0^\infty f\left[\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^2\right]dx=\frac{1}{A}\int_0^\infty f(y^2)\,dy\qquad (A, B>0).$$

Die Substitution $y = Ax - \frac{B}{x}$ ($a = -\infty$, $b = \infty$, $\alpha = 0$, $\beta = \infty$) ergibt

$$\int_{-\infty}^\infty f(y^2)\,dy=\int_0^\infty f\left[\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^2\right]\left(A+\frac{B}{x^2}\right)dx$$

$$=A\int_0^\infty f\left[\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^2\right]dx+B\int_0^\infty f\left[\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^2\right]\frac{dx}{x^2}.$$

Das letzte Integral geht durch die Substitution $x = -\frac{B}{At}$ ($a = 0$, $b = \infty$, $\alpha = -\infty$, $\beta = 0$) in

$$A\int_{-\infty}^0 f\left[\left(At-\frac{B}{t}\right)^2\right]dt$$

über, so daß

$$\int_{-\infty}^\infty f(y^2)\,dy=A\int_{-\infty}^\infty f\left[\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^2\right]dx$$

folgt. Daraus erhalten wir, da der Integrand eine gerade Funktion ist, die gesuchte Formel.

14. Zum Schluß kehren wir zu einer bis jetzt noch nicht beantworteten Frage zurück, da wir nun die Variablensubstitution in uneigentlichen Integralen beherrschen. In Nr. 439, Beispiel 1, untersuchten wir die Funktion

$$f(x)=\sum_{n=1}^\infty\frac{x}{n^p+x^2n^q}$$

auf Stetigkeit, hatten aber nicht ihr Verhalten im Punkt $x = 0$ in dem Fall angegeben, daß $0 \leqq p < 1$, $q > 1$ und $p + q \geqq 2$ ist.

Benutzen wir die Formel (10a) von S. 267, so können wir die Summe der Reihe mit Hilfe eines Integrals nach unten abschätzen:

$$f(x) \geqq \int_1^\infty \frac{x\,\mathrm{d}t}{t^p + t^q x^2}.$$

Setzen wir hier $t = x^{-2/(q-p)}\,v$, so geht die Ungleichung in

$$f(x) \geqq x^{(p+q-2)/(q-p)} \int_{x^{2/(q-p)}}^\infty \frac{\mathrm{d}v}{v^p + v^q}$$

über; für $x \to +0$ strebt das Integral gegen den endlichen positiven Grenzwert

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}v}{x^p + v^q},$$

und der Faktor vor dem Integral ist entweder gleich 1 (für $p + q = 2$) oder strebt für $x \to +0$ gegen ∞ (für $p + q < 2$). Wegen $f(0) = 0$ ist die Funktion $f(x)$ bei $x = 0$ in jedem Fall rechtsseitig unstetig. Analoge Betrachtungen zeigen die linksseitige Unstetigkeit.

Bemerkung. Das Integral $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$, in dem nur eine Grenze unendlich ist, kann stets durch eine zweckmäßige Substitution in ein Integral mit endlichen Grenzen übergeführt werden (es kann aber uneigentlich sein). Im Fall $a > 0$ setzen wir beispielsweise $x = \frac{1}{t}$ und erhalten

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/a} f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

Umgekehrt läßt sich das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ mit dem einzigen singulären Punkt b stets in ein Integral mit unendlichen Grenzen (ohne andere singuläre Punkte) überführen. Zum Beispiel erhalten wir, wenn wir $x = b - \frac{1}{t}$ setzen,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1/(b-a)}^\infty f\left(b - \frac{1}{t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

§ 4. Spezielle Verfahren zur Berechnung uneigentlicher Integrale

492. Einige bemerkenswerte Integrale. Wir beginnen mit der Berechnung einiger wichtiger Integrale mit Hilfe spezieller Verfahren.

1°. Von der Existenz des (Eulerschen) Integrals

$$J = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x\,\mathrm{d}x$$

haben wir uns schon früher überzeugt. Zu seiner Berechnung müssen wir eine Variablensubstitution vornehmen. Wir setzen $x = 2t$ und erhalten

$$J = 2\int_0^{\pi/4} \ln \sin 2t \, dt = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2\int_0^{\pi/4} \ln \sin t \, dt + 2\int_0^{\pi/4} \ln \cos t \, dt.$$

Das letzte Integral läßt sich mit Hilfe der Substitution $t = \frac{\pi}{2} - u$ auf die Gestalt

$$2\int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln \sin u \, du$$

bringen, so daß sich schließlich $J = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2J$, also $J = -\frac{\pi}{2} \ln 2$ ergibt.

Auf dieses Integral J kann man, vom Vorzeichen abgesehen, die uneigentlichen Integrale

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\tan x} \, dx, \qquad \int_0^1 \frac{\arcsin x}{x} \, dx$$

(vgl. Nr. 489, Beispiel 1 und 2(b)) zurückführen.

2°. Wir wollen nun das in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und in der mathematischen Statistik auftretende (Euler-Poissonsche) Integral

$$K = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx$$

berechnen, müssen aber dazu vorher einige Ungleichungen herleiten.

Mit den in der Differentialrechnung üblichen Methoden läßt sich leicht zeigen, daß die Funktion $(1 + t)\, e^{-t}$ ihren größten Wert 1 für $t = 0$ annimmt. Folglich ist für $t \lessgtr 0$

$$(1 + t)\, e^{-t} < 1.$$

Mit $t = \pm x^2$ erhalten wir

$$(1 - x^2)\, e^{x^2} < 1 \quad \text{bzw.} \quad (1 + x^2)\, e^{-x^2} < 1,$$

also

$$1 - x^2 < e^{-x^2} < \frac{1}{1 + x^2} \qquad (x > 0).$$

Wir beschränken uns in der ersten Ungleichung auf x-Werte aus dem Intervall $(0, 1)$, so daß $1 - x^2 > 0$ ist, und in der zweiten auf beliebige $x > 0$. Dann können wir diese Ausdrücke in die n-te Potenz erheben (n eine beliebige natürliche Zahl):[1]

$$(1 - x^2)^n < e^{-nx^2} \qquad (0 < x < 1)$$

und

$$e^{-nx^2} < \frac{1}{(1 + x^2)^n} \qquad (x > 0).$$

[1]) Bei Ungleichungen mit *positiven* Seiten ist es erlaubt, jede Seite einzeln in eine Potenz mit einem natürlichen Exponenten zu erheben.

Die Integration der ersten Ungleichung im Intervall (0, 1) und der zweiten im Intervall (0, ∞) ergibt

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx < \int_0^1 e^{-nx^2}\,dx < \int_0^\infty e^{-nx^2}\,dx < \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

Nun ist

$$\int_0^\infty e^{-nx^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{n}}\,K \qquad (\text{Substitution } u = \sqrt{n}\,x),$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t\,dt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \qquad (\text{Substitution } x = \cos t)$$

und schließlich

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} t\,dt = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\,\frac{\pi}{2} \qquad (\text{Substitution } x = \cot t).$$

(Wir haben hier die bekannten Ausdrücke für $\int_0^{\pi/2} \sin^m x\,dx$ verwendet; vgl. (8) aus Nr. 312.) Also kann der uns unbekannte Wert von K wie folgt abgeschätzt werden:

$$\sqrt{n}\,\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < K < \sqrt{n}\,\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\,\frac{\pi}{2}.$$

Durch Quadrieren und Umformen erhalten wir

$$\frac{n}{2n+1}\,\frac{[(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2\,(2n+1)} < K^2 < \frac{n}{2n-1}\,\frac{[(2n-3)!!]^2\,(2n-1)}{[(2n-2)!!]^2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

Mit Hilfe der Wallisschen Formel (Nr. 317)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{[(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2\,(2n+1)}$$

erkennen wir, daß die beiden äußeren Ausdrücke für $n \to \infty$ gegen denselben Grenzwert $\frac{\pi}{4}$ streben. Also ist $K^2 = \frac{\pi}{4}$, d. h.

$$K = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (\text{denn } K \text{ ist positiv}).$$

3°. Zum Schluß betrachten wir das Integral

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

das uns schon als konvergent bekannt ist (vgl. Nr. 476, 477 und 489, Beispiel 3). Wir schreiben das Integral als Summe einer Reihe,

$$I = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{\nu\pi/2}^{(\nu+1)\pi/2},$$

setzen $\nu = 2\mu$ bzw. $\nu = 2\mu - 1$ und führen im ersten Fall die Substitution $x = \mu\pi + t$, im zweiten Fall die Substitution $x = \mu\pi - t$ durch. Damit erhalten wir

$$\int_{2\mu\pi/2}^{(2\mu+1)\pi/2} = (-1)^\mu \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\mu\pi + t}\, dt$$

und

$$\int_{(2\mu-1)\pi/2}^{2\mu\pi/2} = (-1)^{\mu-1} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\mu\pi - t}\, dt.$$

Daraus folgt

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{t}\, dt + \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_0^{\pi/2} (-1)^\mu \left(\frac{1}{t + \mu\pi} + \frac{1}{t - \mu\pi}\right) \sin t\, dt.$$

Da die Reihe

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^\mu \left(\frac{1}{t + \mu\pi} + \frac{1}{t - \mu\pi}\right) \sin t$$

in Intervall $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ gleichmäßig konvergiert (ihre Majorante $\frac{1}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^2 - \frac{1}{4}}$ ist nämlich konvergent), kann sie gliedweise integriert werden. Also läßt sich I in der Gestalt

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin t \left[\frac{1}{t} + \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^\mu \left(\frac{1}{t + \mu\pi} + \frac{1}{t - \mu\pi}\right)\right] dt$$

schreiben. Der Ausdruck in den eckigen Klammern ist die Partialbruchzerlegung der Funktion $\frac{1}{\sin t}$ (vgl. Nr. 441, Beispiel 9). Damit ist schließlich

$$I = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Diese elegante Berechnung des Integrals stammt von LOBATSCHEWSKI[1]), der als erster auf die Unexaktheit der Verfahren aufmerksam wurde, mit denen dieses wichtige Integral früher berechnet wurde.

---

[1]) NIKOLAI IWANOWITSCH LOBATSCHEWSKI, 1792—1856, russischer Mathematiker.

493. Berechnung uneigentlicher Integrale mit Hilfe von Integralsummen. Integrale mit endlichen Grenzen. Ist eine Funktion $f(x)$ in einem Intervall $[a, b]$ nicht beschränkt, so sind beliebige (Riemannsche) Integralsummen zur Berechnung der Integrale von $f(x)$ verständlicherweise nicht geeignet. Jedoch kann man diese Summen stets so wählen, daß sie (bei Zerlegung des Intervalls) gegen den Wert des uneigentlichen Integrals streben. Wir wollen dies am einfachsten Beispiel, an einer monotonen Funktion, veranschaulichen.

Gegeben sei eine im Intervall $[0, a]$, $a > 0$, positive und monton fallende Funktion, die für $x \to 0$ gegen ∞ strebt; das uneigentliche Integral dieser Funktion von 0 bis a möge existieren. Zerlegen wir das Intervall $[0, a]$ in n gleiche Teile, so ist

$$\int_0^a f(x)\,dx = \sum_{\nu=0}^{n-1} \int_{\nu a/n}^{(\nu+1)a/n} f(x)\,dx < \int_0^{a/n} f(x)\,dx + \sum_{\nu=1}^{n-1} f\left(\frac{\nu}{n} a\right) \frac{a}{n}$$

und erst recht

$$\int_0^a f(x)\,dx < \int_0^{a/n} f(x)\,dx + \sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{\nu}{n} a\right) \frac{a}{n}.$$

Gleichzeitig ist offenbar

$$\int_0^a f(x)\,dx > \sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{\nu}{n} a\right) \frac{a}{n},$$

so daß insgesamt

$$0 < \int_0^a f(x)\,dx - \frac{a}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{\nu}{n} a\right) < \int_0^{a/n} f(x)\,dx$$

gilt. Da das letzte Integral für $n \to \infty$ verschwindet,[1]) ist schließlich

$$\int_0^a f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{\nu}{n} a\right).$$

Für eine positive, monoton wachsende Funktion, die für $x \to a$ gegen ∞ strebt, gilt analog

$$\int_0^a f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} f\left(\frac{\nu}{n} a\right).$$

Ändern wir das Vorzeichen von $f(x)$, so erhalten wir leicht die entsprechenden Formeln für eine negative monotone Funktion.

---

[1]) Es ist nämlich gleich der Differenz zwischen dem uneigentlichen Integral $\int_0^a$ und dem gegen $\int_0^a$ strebenden „eigentlichen" Integral $\int_{a/n}^a$.

Beispiele.

1. Zur Berechnung des Integrals $\int_0^1 \ln x \, dx$ (mit dem singulären Punkt 0) schreiben wir

$$\int_0^1 \ln x \, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \ln \frac{\nu}{n} = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$ (vgl. Nr. 77, Beispiel 4) ist der letzte Grenzwert gleich -1, und das ist auch der Wert des gegebenen Integrals.

2. Wir beschäftigen uns nun mit dem komplizierten Integral $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx$. In diesem Fall ist

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} \sum_{\nu=1}^{n-1} \ln \sin \frac{\nu\pi}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} \ln \prod_{\nu=1}^{n-1} \sin \frac{\nu\pi}{2n}.$$

Um einen einfachen Ausdruck für das letzte Produkt zu erhalten, betrachten wir das Polynom, das sich nach Division von $z^{2n}-1$ durch z^2-1 ergibt, und zerlegen es in Linearfaktoren, indem wir die Faktoren, die konjugiert komplexen Nullstellen entsprechen, zusammenfassen. Wir erhalten somit (für ein beliebiges reelles, von ± 1 verschiedenes z)[1])

$$\frac{z^{2n}-1}{z^2-1} = \prod_{\nu=1}^{n-1} \left[\left(z - \cos\frac{\nu\pi}{n}\right)^2 + \sin^2\frac{\nu\pi}{n}\right].$$

Für $z \to 1$ finden wir hieraus

$$n = \prod_{\nu=1}^{n-1} \left[\left(1 - \cos\frac{\nu\pi}{n}\right)^2 + \sin^2\frac{\nu\pi}{n}\right] = 4^{n-1} \prod_{\nu=1}^{n-1} \sin^2\frac{\nu\pi}{2n},$$

so daß schließlich

$$\prod_{\nu=1}^{n-1} \sin\frac{\nu\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

ist. Daher ist das gesuchte Integral gleich

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2} \frac{\frac{1}{2}\ln n - (n-1)\ln 2}{n} = -\frac{\pi}{2} \ln 2$$

(vgl. 1° aus Nr. 492).

494. Integrale mit unendlichen Grenzen. Gegeben sei eine im Intervall $[0, \infty)$ integrierbare Funktion $f(x)$. Wir zerlegen dieses Intervall in unendlich viele gleiche Teile der Länge $h > 0$ und bilden die Summe $\sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu h)\, h$, die in ihrer Konstruktion an die Riemannsche Integralsumme erinnert. Ob diese Reihe konvergiert, ob ihre Summe für $h \to 0$ gegen das uneigentliche Integral $\int_0^{\infty} f(x)\, dx$ strebt — das sind die Fragen, mit denen wir uns unter speziellen Voraussetzungen bezüglich $f(x)$ beschäftigen wollen.

---

[1]) Vgl. die Fußnote auf S. 114.

Zunächst setzen wir voraus, daß $f(x)$ positiv sei und für $x \to \infty$ monoton fallend gegen 0 strebe. Dann ist

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \sum_{\nu=0}^\infty \int_{\nu h}^{(\nu+1)h} f(x)\,dx < h \sum_{\nu=0}^\infty f(\nu h);$$

andererseits ist offenbar

$$\int_0^\infty f(x)\,dx > h \sum_{\nu=1}^\infty f(\nu h) = h \sum_{\nu=0}^\infty f(\nu h) - h f(0).$$

Also gilt

$$0 < h \sum_{\nu=0}^\infty f(\nu h) - \int_0^\infty f(x)\,dx < h f(0)$$

und

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{h\to 0} h \sum_{\nu=0}^\infty f(\nu h). \tag{1}$$

Beispiele.

1. Wir setzen $f(x) = e^{-x}$. Dann ist

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{h\to 0} h \sum_{\nu=0}^\infty e^{-\nu h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{1 - e^{-h}} = 1.$$

2. Das Integral

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ist uns schon aus früheren Überlegungen bekannt; wir wenden die eben hergeleitete Formel an und erhalten

$$\lim_{h\to 0} h \sum_{\nu=0}^\infty e^{-\nu^2 h^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Setzen wir $e^{-h^2} = t$, so ist

$$h = \sqrt{\ln \frac{1}{t}} \sim \sqrt{1-t} \quad \text{für} \quad t \to 1 - 0.$$

Daraus ergibt sich die interessante Limesbeziehung

$$\lim_{t\to 1-0} \sqrt{1-t}\,(1 + t + t^4 + t^9 + t^{16} + \cdots) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Es kann der Fall eintreten, daß die Forderung, die Funktion $f(x)$ sei monoton fallend, nur für $x \geqq A > 0$ erfüllt ist. Dies stört zwar nicht das für monotone Funktionen entwickelte Verfahren, aber man muß dafür sorgen, daß der Quotient $\frac{A}{h}$ eine ganze Zahl ist. Dann gilt

$$\lim_{h\to 0} \sum_{\nu=0}^{(A/h)-1} f(\nu h)\, h = \int_0^A f(x)\,dx \tag{2}$$

nach Definition des eigentlichen Integrals;[1]) ferner ist

$$\lim_{h\to 0} \sum_{\nu=A/h}^{\infty} f(\nu h)\, h = \int_A^{\infty} f(x)\, \mathrm{d}x$$

auf Grund des oben Bewiesenen.

Beispiel.

3. Es sei $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$. Diese Funktion beginnt bei $x = 1$ monoton zu fallen. Nichtsdestoweniger ist

$$\int_0^{\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{h\to 0} h^2(\mathrm{e}^{-h} + 2\mathrm{e}^{-2h} + 3\mathrm{e}^{-3h} + \cdots)$$

$$= \lim_{h\to 0} h^2\,\mathrm{e}^{-h}(1 - \mathrm{e}^{-h})^{-2} = \lim_{h\to 0} \mathrm{e}^{h}\left(\frac{h}{\mathrm{e}^{h} - 1}\right)^2 = 1,$$

was sich auch durch partielle Integration leicht nachweisen läßt.

Wir gehen nun zu einem allgemeineren Fall über, indem wir von $f(x)$ nur Integrierbarkeit fordern. Es gilt

$$\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{A} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_A^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Für hinreichend großes A ist das letzte Integral dem absoluten Betrag nach beliebig klein.[2]) Für ein beliebiges A müssen wir auch hier h so wählen, daß $\dfrac{A}{h}$ ganz ist.[3]) Dann ist, wie eben, für $A = \text{const}$ die Beziehung (2) erfüllt.

Offenbar ist für das Erfülltsein von (1) hinreichend, daß noch die Bedingung

$$\lim_{\substack{A\to\infty \\ h\to 0}} \sum_{\nu=A/h}^{\infty} f(\nu h)\, h = 0 \tag{3}$$

erfüllt ist. Alle Summanden der rechten Seite von

$$\int_0^{\infty} - \sum_{\nu=0}^{\infty} = \left[\int_0^{A} - \sum_{\nu=0}^{A/h-1}\right] + \int_A^{\infty} - \sum_{\nu=A/h}^{\infty}$$

sind nämlich für hinreichend großes A und hinreichend kleines h beliebig klein.

---

[1]) Beim Grenzprozeß $h \to 0$ durchläuft h nur Werte $\dfrac{A}{n}$ mit $n \to \infty$ (n ganz). — *Anm. d. Red.*

[2]) Es ist gleich der Differenz zwischen dem uneigentlichen Integral $\int_0^{\infty}$ und dem für $A \to \infty$ gegen $\int_0^{\infty}$ strebenden „eigentlichen" Integral $\int_0^{A}$.

[3]) In diesem Sinne ist auch der Grenzprozeß in (3) zu verstehen. — *Anm. d. Red.*

Die Bedingung (3) ist unter den früheren Voraussetzungen bezüglich $f(x)$ erfüllt, denn es gilt

$$0 < \sum_{\nu=A/h}^{\infty} f(\nu h)\, h < \int_A^{\infty} f(x)\, dx.$$

Sie ist auch dann erfüllt, wenn $f(x) = \varphi(x)\,\psi(x)$ ist, wobei $\varphi(x)$, mindestens für $x \geqq x_0 > 0$, denselben Bedingungen wie $f(x)$ unterworfen und $\psi(x)$ beschränkt sei, $|\psi(x)| \leqq L$. In diesem Fall ist

$$\left|\sum_{\nu=A/h}^{\infty} \varphi(\nu h)\,\psi(\nu h)\right| \leqq L \sum_{\nu=A/h}^{\infty} \varphi(\nu h)\, h < L \int_A^{\infty} \varphi(x)\, dx,$$

usw.

Beispiele.

4. Im Integral $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx$ ist $\varphi(x) = \frac{1}{x^2}$, $\psi(x) = \sin^2 x$. Es gilt

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = \lim_{h \to 0} h \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \nu h}{(\nu h)^2} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \nu h}{\nu^2}.$$

Zur Berechnung der letzten Summe überlegen wir zunächst, daß

$$\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \nu h}{\nu^2}\right\}_h' = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin 2\nu h}{\nu} = \frac{\pi - 2h}{2} = \frac{\pi}{2} - h$$

ist (vgl. Nr. 461, Beispiel 6(b)). Die gliedweise Integration für $h \neq 0$ ist auf Grund von Satz 7 aus Nr. 435 erlaubt, und zwar wegen der gleichmäßigen Konvergenz der aus den Ableitungen gebildeten Reihe (vgl. das Dirichletsche Kriterium; Nr. 430). Durch Integration finden wir den Ausdruck für die uns interessierende Summe; er lautet $\frac{\pi - h}{2}\, h$. Daraus folgt schließlich

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = \lim_{h\to 0} \frac{\pi - h}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

In anderen Fällen kann das Erfülltsein von (3) unmittelbar nachgeprüft werden.

5. Gegeben sei z. B. das Integral $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$. Wir beschränken uns (dazu sind wir offenbar berechtigt) auf die Werte $h = \frac{\pi}{k}$ und $A = m\pi$, wobei k und m natürliche Zahlen sind.

Der uns interessierenden Reihe geben wir die Gestalt

$$\sum_{n=km}^{\infty} \frac{\sin nh}{nh}\, h = \sum_{n=km}^{k(m+1)-1} + \sum_{n=k(m+1)}^{k(m+2)-1} + \cdots.$$

Wir können uns davon überzeugen, daß die Summanden innerhalb jeder der endlichen Summen auf der rechten Seite von gleichem Vorzeichen sind, das sich beim Übergang zur nächsten Reihe ändert. Im allgemeinen ist die Reihe auf der rechten Seite vom Leibnizschen Typ. Daher ist ihre Summe betragsmäßig kleiner als der absolute Betrag des ersten Summanden. Andererseits ist wegen $kmh = m\pi = A$

$$\left|\sum_{n=km}^{k(m+1)-1} \frac{\sin nh}{nh}\, h\right| = \sum_{n=km}^{k(m+1)-1} \frac{|\sin nh|}{nh}\, h < \frac{1}{A} \sum_{n=km}^{k(m+1)-1} |\sin nh|\, h = \frac{1}{A} \sum_{i=0}^{k-1} \sin ih \cdot h.$$

Die letzte Summe ist, als Integralsumme für $\int\limits_0^\pi \sin x\, dx = 2$, bei hinreichend kleinem h kleiner als eine beliebige Zahl $C > 2$; also ist

$$\left|\sum_{n=km}^{\infty} \frac{\sin nh}{nh}\, h\right| < \frac{C}{A}.$$

Damit ist die Bedingung (3) erfüllt.

Das gegebene Integral kann nun ganz einfach berechnet werden (vgl. Nr. 461, Beispiel 6(b)):

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{h\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nh}{n} = \lim_{h\to 0} \frac{\pi - h}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Dasselbe Ergebnis erhielten wir schon früher (Nr. 492, 3°) auf anderem Wege.

495. Die Frullanischen[1]) Integrale. Wir wollen nun die Existenz einer speziellen Art uneigentlicher Integrale, der sogenannten *Frullanischen Integrale*

$$\int\limits_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx \qquad (a, b > 0),$$

untersuchen und zeigen, wie man diese Integrale berechnet.

I. An $f(x)$ stellen wir die folgenden Forderungen:

1°. Die Funktion $f(x)$ sei definiert und stetig für $x \geqq 0$.

2°. Es existiere der endliche Grenzwert $f(\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Aus 1° folgt die Existenz des Integrals

$$\int\limits_\delta^\Delta \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx = \int\limits_\delta^\Delta \frac{f(ax)}{x}\, dx - \int\limits_\delta^\Delta \frac{f(bx)}{x}\, dx$$

$$= \int\limits_{a\delta}^{a\Delta} \frac{f(z)}{z}\, dz - \int\limits_{b\delta}^{b\Delta} \frac{f(z)}{z}\, dz = \int\limits_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(z)}{z}\, dz - \int\limits_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(z)}{z}\, dz$$

für $0 < \delta < \Delta < \infty$. Das gegebene Integral wird durch

$$\int\limits_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx = \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(z)}{z}\, dz - \lim_{\Delta\to\infty} \int\limits_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(z)}{z}\, dz \qquad (*)$$

definiert. Wenden wir auf die beiden rechtsstehenden Integrale den verallgemeinerten Mittelwertsatz an, so erhalten wir

$$\int\limits_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(z)}{z}\, dz = f(\xi) \int\limits_{a\delta}^{b\delta} \frac{dz}{z} = f(\xi) \ln \frac{b}{a} \qquad (a\delta \leqq \xi \leqq b\delta)$$

[1]) Giuliano Frullani, 1795—1834, italienischer Mathematiker.

und analog

$$\int_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(z)}{z}\, dz = f(\eta) \ln \frac{b}{a} \qquad (a\Delta \leqq \eta \leqq b\Delta).$$

Hieraus folgt, da offenbar $\xi \to 0$ (für $\delta \to 0$) und $\eta \to \infty$ (für $\Delta \to \infty$) ist,

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx = [f(0) - f(\infty)] \ln \frac{b}{a}. \tag{4}$$

Beispiele.

1. Im Fall des Integrals

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx$$

ist $f(x) = e^{-x}$, $f(0) = 1$, $f(\infty) = 0$, der Wert des Integrals also gleich $\ln \frac{b}{a}$.

2. Gegeben sei das Integral

$$\int_0^\infty \ln \frac{p + q\,e^{-ax}}{p + q\,e^{-bx}} \frac{dx}{x} \qquad (p, q > 0).$$

Ersetzen wir den Logarithmus des Quotienten durch die Differenz der Logarithmen, so erhalten wir hier

$$f(x) = \ln(p + q\,e^{-x}),$$

also

$$f(0) = \ln(p + q), \qquad f(\infty) = \ln p.$$

Der Wert des Integrals ist gleich $\ln\left(1 + \frac{q}{p}\right) \cdot \ln \frac{b}{a}$.

3. Man berechne das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\arctan ax - \arctan bx}{x}\, dx.$$

In diesem Fall ist $f(x) = \arctan x$, $f(0) = 0$, $f(\infty) = \frac{\pi}{2}$; der Wert des Integrals ist gleich $\frac{\pi}{2} \ln \frac{a}{b}$.

II. Jetzt habe die Funktion $f(x)$ keinen endlichen Grenzwert für $x \to \infty$, aber dafür existiere das Integral

$$\int_A^\infty \frac{f(z)}{z}\, dz.$$

In (*) ist dann der zweite Grenzwert gleich 0, und wir erhalten statt (4) das Ergebnis

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx = f(0) \ln \frac{b}{a}. \tag{4a}$$

Beispiel.

4. Es ist

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,dx = \ln\frac{b}{a},$$

denn das Integral $\int_A^\infty \frac{\cos z}{z}\,dz$ existiert, wie wir wissen.

III. Analog gilt, wenn die Stetigkeit von $f(x)$ für $x = 0$ gestört ist, aber das Integral

$$\int_0^A \frac{f(z)}{z}\,dz \qquad (A < \infty)$$

existiert, die Beziehung

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,dx = f(\infty)\ln\frac{a}{b}. \tag{4b}$$

Übrigens läßt sich dieser Fall durch die Substitution $x = \frac{1}{t}$ auf den vorhergehenden zurückführen.

496. Integrale rationaler Funktionen zwischen unendlichen Grenzen. Abschließend betrachten wir noch einen speziellen Typ eines Integrals mit unendlichen Grenzen:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx;$$

$P(x)$ und $Q(x)$ sind Polynome. Wir setzen voraus, das Polynom $Q(x)$ habe keine reellen Nullstellen, und der Grad von $P(x)$ sei mindestens um 2 kleiner als der Grad von $Q(x)$. Unter diesen Bedingungen existiert das Integral (vgl. Nr. 474, Beispiel 2); die Frage ist nur, wie man es berechnet.

Sind $x_\lambda = \alpha_\lambda + i\beta_\lambda$ ($\beta_\lambda \lessgtr 0$; $\lambda = 1, 2, \ldots$) die voneinander verschiedenen Nullstellen des Polynoms $Q(x)$, so kann $\frac{P(x)}{Q(x)}$ wie folgt in Partialbrüche zerlegt werden:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_\lambda \left[\frac{A_\lambda}{x - x_\lambda} + \frac{A'_\lambda}{(x - x_\lambda)^2} + \cdots\right]. \tag{5}$$

Dabei ist die Anzahl der Brüche in jeder eckigen Klammer gleich der Vielfachheit der entsprechenden Nullstelle.[1])

Übertragen wir die elementaren Methoden zur Berechnung von Integralen auf den

[1]) In Kapitel VIII, Nr. 274, hatten wir eine ähnliche Zerlegung, nur bemühten wir uns dort, im Reellen zu bleiben, und betrachteten im Fall komplexer Nullstellen Brüche, deren Nenner Potenzen von $x^2 + px + q$ mit reellen Koeffizienten waren. Hier behandeln wir die komplexen Nullstellen genauso wie die reellen.

Fall einer komplexwertigen Funktion einer reellen Veränderlichen, so sehen wir sofort, daß für $m > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x - x_\lambda)^{m+1}} = -\frac{1}{m} \frac{1}{(x - x_\lambda)^m}\bigg|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

und folglich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_\lambda \frac{A_\lambda}{x - x_\lambda}\, dx = \lim_{h\to\infty} \int_{-h}^{h} \sum_\lambda \frac{A_\lambda}{x - x_\lambda}\, dx$$

gilt. Andererseits ist

$$\frac{1}{x - x_\lambda} = \frac{1}{x - \alpha_\lambda - \beta_\lambda i} = \frac{x - \alpha_\lambda}{(x - \alpha_\lambda)^2 + \beta_\lambda^2} + i\, \frac{\beta_\lambda}{(x - \alpha_\lambda)^2 + \beta_\lambda^2}$$

und

$$\int_{-h}^{h} \frac{dx}{x - x_\lambda} = \left\{\frac{1}{2} \ln\left[(x - \alpha_\lambda)^2 + \beta_\lambda^2\right] + i \arctan \frac{x - \alpha_\lambda}{\beta_\lambda}\right\}\bigg|_{-h}^{h}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{(h - \alpha_\lambda)^2 + \beta_\lambda^2}{(h + \alpha_\lambda)^2 + \beta_\lambda^2} + i \left[\arctan \frac{h - \alpha_\lambda}{\beta_\lambda} + \arctan \frac{h + \alpha_\lambda}{\beta_\lambda}\right].$$

Für $h \to \infty$ strebt der erste Summand im letzten Ausdruck gegen 0 und der zweite gegen πi bzw. $-\pi i$, je nachdem, ob $\beta_\lambda > 0$ oder $\beta_\lambda < 0$ ist. Damit gelangen wir zu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = \pi i \sum_\lambda (\pm A_\lambda),$$

wobei das Plus- oder das Minuszeichen zu nehmen ist, je nachdem, ob $\beta_\lambda > 0$ oder $\beta_\lambda < 0$ ist. Diese Formel läßt sich durch die folgenden Überlegungen noch etwas ändern. Wir multiplizieren beide Seiten der Identität (5) mit x. Dann verschwindet die linke Seite für $x \to \infty$, da der Grad von $xP(x)$ kleiner als der Grad von $Q(x)$ ist. Auf der rechten Seite verschwinden für $x \to \infty$ alle Glieder mit nichtlinearem Nenner, so daß die Summe der übrigen Glieder für $x \to \infty$ ebenfalls 0 ist. Daraus folgt $\sum\limits_\lambda A_\lambda = 0$, also $\sum^{(+)} A_\lambda = -\sum^{(-)} A_\lambda$, wenn mit $(+)$ bzw. $(-)$ die Summen der A_λ bezeichnet werden, die $\beta_\lambda > 0$ bzw. $\beta_\lambda < 0$ entsprechen. Jetzt können wir die erhaltene Formel in der Gestalt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = 2\pi i \sum_\lambda{}^{(+)} A_\lambda \tag{6}$$

schreiben.

Bei der Berechnung der Koeffizienten A_λ beschränken wir uns auf den Fall einer einfachen Nullstelle x_λ, für welche also $Q(x_\lambda) = 0$, aber $Q'(x_\lambda) \neq 0$ ist. Ihr entspricht in der Zerlegung (5) ein einziges Glied $\dfrac{A_\lambda}{x - x_\lambda}$. Nach Multiplikation beider Seiten von (5) mit $x - x_\lambda$ ergibt sich

$$\frac{P(x)}{\dfrac{Q(x) - Q(x_\lambda)}{x - x_\lambda}} = A_\lambda + (x - x_\lambda)\, R(x),$$

wobei in $R(x)$ diejenigen Glieder zusammengefaßt sind, die bei Annäherung von x gegen x_λ endlich bleiben. Hieraus folgt für $x \to x_\lambda$

$$A_\lambda = \frac{P(x_\lambda)}{Q'(x_\lambda)}. \tag{7}$$

Wir zeigen nun an einigen Beispielen die Anwendung der Formeln (6) und (7).

1. Wir betrachten das Integral

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}}{1 + x^{2n}}\, dx$$

mit natürlichen Zahlen m und n ($m < n$). Alle Bedingungen für die Anwendung der hergeleiteten Formel sind hier erfüllt. Nullstellen des Nenners sind die Zahlen

$$x_\lambda = \cos \frac{(2\lambda + 1)\pi}{2n} + \mathrm{i} \sin \frac{(2\lambda + 1)\pi}{2n} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, n - 1; n, \ldots, 2n - 1),$$

aber nur die ersten n dieser Nullstellen haben positive Imaginärteile. Offenbar ist $x_\lambda = x_0^{2\lambda+1}$ mit $x_0 = \cos \dfrac{\pi}{2n} + \mathrm{i} \sin \dfrac{\pi}{2n}$. Mit Hilfe von (7) erhalten wir für $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$

$$A_\lambda = \frac{x_\lambda^{2m}}{2n x_\lambda^{2n-1}} = -\frac{1}{2n}\, x_\lambda^{2m+1} = -\frac{1}{2n}\, x_0^{(2m+1)(2\lambda+1)},$$

wenn man die Beziehung $x_\lambda^{2n} = -1$ berücksichtigt. Die Summierung der A_λ ergibt

$$\sum\nolimits^{(+)} A_\lambda = -\frac{1}{2n} \sum_{\lambda=0}^{n-1} x^{(2m+1)(2\lambda+1)} = -\frac{1}{2n}\, \frac{x_0^{2m+1} - x_0^{(2m+1)(2n+1)}}{1 - x_0^{2(2m+1)}}$$

oder (wegen $x_0^{2n} = -1$)

$$\sum\nolimits^{(+)} A_\lambda = -\frac{1}{n}\, \frac{x_0^{2m+1}}{1 - x_0^{2(2m+1)}} = \frac{1}{n}\, \frac{1}{x_0^{2m+1} - x_0^{-(2m+1)}}.$$

Setzen wir hier

$$x_0^{\pm(2m+1)} = \cos \frac{2m + 1}{2n}\pi \pm \mathrm{i} \sin \frac{2m + 1}{2n}\pi$$

ein, so können wir schließlich die gesuchte Summe in der Gestalt

$$\frac{1}{2n\mathrm{i}}\, \frac{1}{\sin \dfrac{2m + 1}{2n}\pi}$$

schreiben. Daraus folgt mit Hilfe von (6)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}}{1 + x^{2n}}\, dx = \frac{\pi}{n}\, \frac{1}{\sin \dfrac{2m + 1}{2n}\pi} \qquad (m < n).$$

2. Ein allgemeineres Beispiel ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m} - x^{2m'}}{1 - x^{2n}}\, dx$$

mit natürlichen Zahlen n, m und m' (dabei sei $m, m' < n$).

Die Bedingungen sind erfüllt, wenn man davon absieht, daß der Nenner die reellen Nullstellen ± 1 hat. Das ist jedoch unwesentlich, da auch der Zähler diese Nullstellen hat, so daß der Bruch durch $x^2 - 1$ gekürzt werden könnte. Diese beiden Nullstellen werden wir im folgenden nicht beachten.

Die übrigen Nullstellen des Nenners sind

$$x_\lambda = \cos\frac{\lambda\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\lambda\pi}{n} = x_1^\lambda \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n-1; n+1, \ldots, 2n-1).$$

Die ersten $n - 1$ haben positive Imaginärteile. Auf Grund von (7) ist

$$A_\lambda = \frac{x_\lambda^{2m} - x_\lambda^{2m'}}{-2n x_\lambda^{2n-1}} = \frac{1}{2n}\left(x_\lambda^{2m'+1} - x_\lambda^{2m+1}\right),$$

also

$$\sum^{(+)} A_\lambda = \frac{1}{2n}\sum_{\lambda=1}^{n-1}\left(x_\lambda^{2m'+1} - x_\lambda^{2m+1}\right) = \frac{1}{2n}\sum_{\lambda=1}^{n-1}\left(x_1^{\lambda(2m'+1)} - x_1^{\lambda(2m+1)}\right).$$

Dieser Ausdruck läßt sich folgendermaßen umformen[1]):

$$\begin{aligned}
\sum^{(+)} A_\lambda &= \frac{1}{2n}\left[\frac{x_1^{n(2m'+1)} - x_1^{2m'+1}}{x_1^{2m'+1} - 1} - \frac{x_1^{n(2m+1)} - x_1^{2m+1}}{x_1^{2m+1} - 1}\right] \\
&= \frac{1}{2n}\left[\frac{1 + x_1^{2m'+1}}{1 - x_1^{2m'+1}} - \frac{1 + x_1^{2m+1}}{1 - x_1^{2m+1}}\right] \\
&= \frac{1}{2n}\left[\frac{x_1^{(2m+1)/2} + x_1^{-(2m+1)/2}}{x_1^{(2m+1)/2} - x_1^{-(2m+1)/2}} - \frac{x_1^{(2m'+1)/2} + x_1^{-(2m'+1)/2}}{x_1^{(2m'+1)/2} - x_1^{-(2m'+1)/2}}\right] \\
&= \frac{1}{2n\mathrm{i}}\left[\cot\frac{2m+1}{2n}\pi - \cot\frac{2m'+1}{2n}\pi\right].
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m} - x^{2m'}}{1 - x^{2n}}\, dx = \frac{\pi}{n}\left[\cot\frac{2m+1}{2n}\pi - \cot\frac{2m'+1}{2n}\pi\right] \quad (m, m' < n).$$

Aus dieser Beziehung ließe sich leicht das vorhergehende Resultat herleiten, wenn man n durch $2n$ ersetzen und $m' = m + n$ (für $m < n$) setzen würde.

3. Abschließend betrachten wir das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}}{x^{4n} + 2x^{2n}\cos\theta + 1}\, dx \quad (m < n; -\pi < \theta < \pi).$$

Wir führen den Winkel $\theta' = \pi - \theta$ ($0 < \theta' < 2\pi$) ein und können damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}}{x^{4n} - 2x^{2n}\cos\theta' + 1}\, dx$$

[1]) Dabei berücksichtigen wir, daß $x_1^n = -1$ ist.

schreiben. Zur Berechnung der Nullstellen des Nenners setzen wir $x^{2n} = z$; dann ist z aus der Gleichung $z^2 - 2z\cos\theta' + 1 = 0$ zu bestimmen, und zwar ist

$$z = \cos\theta' \pm \mathrm{i}\sin\theta'.$$

Für x erhalten wir zwei Gruppen von Werten:

$$x_\nu = x_0\varepsilon^\nu \quad \text{mit} \quad x_0 = \cos\frac{\theta'}{2n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta'}{2n}, \qquad \varepsilon = \cos\frac{\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{n}$$

und

$$\overline{x_\nu} = \overline{x_0}\bar\varepsilon^\nu \quad \text{mit} \quad \overline{x_0} = \cos\frac{\theta'}{2n} - \mathrm{i}\sin\frac{\theta'}{2n}, \quad \bar\varepsilon = \cos\frac{\pi}{n} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{n}$$

$$(\nu = 0, 1, \ldots, n-1; n, \ldots, 2n-1).$$

Dabei haben die ersten n Werte der ersten Gruppe und die letzten n Werte der zweiten Gruppe positive Imaginärteile.

Die den Nullstellen x_ν $(\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$ entsprechenden Koeffizienten A_ν lassen sich mit Hilfe von (7) berechnen:

$$A_\nu = \frac{x_\nu^{2m}}{4n(x_\nu^{4n-1} - x_\nu^{2n-1}\cos\theta')} = \frac{1}{4n}\,\frac{x_\nu^{2m+1}}{x_\nu^{2n}(x_\nu^{2n} - \cos\theta')}$$
$$= \frac{1}{4n}\,\frac{x_0^{2m+1}\varepsilon^{(2m+1)\nu}}{(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta')\sin\theta'}.$$

Die Summierung dieser A_ν und Multiplikation mit $2\pi\mathrm{i}$ ergeben[1])

$$\frac{\pi}{2n}\,\frac{\cos\left(\frac{2m+1}{2n} - 1\right)\theta' + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2m+1}{2n} - 1\right)\theta'}{\sin\theta'}\,\frac{1 - (\varepsilon^n)^{2m+1}}{1 - \varepsilon^{2m+1}}$$
$$= \frac{\pi}{n}\,\frac{\cos\left(1 - \frac{2m+1}{2n}\right)\theta' - \mathrm{i}\sin\left(1 - \frac{2m+1}{2n}\right)\theta'}{\sin\theta'}$$
$$\times \frac{1}{\left(1 - \cos\frac{2m+1}{n}\pi\right) - \mathrm{i}\sin\frac{2m+1}{n}\pi}.$$

Für die Nullstellen $\overline{x_\nu}$ $(\nu = n, n+1, \ldots, 2n-1)$ gibt es analog einen hierzu konjugiert komplexen Ausdruck. Die Summe beider Ausdrücke ergibt den doppelten Realteil. Nach elementaren Umformungen kann diese Summe in

$$\frac{\pi}{n}\,\frac{\sin\left[\left(1 - \frac{2m+1}{2n}\right)\theta' + \frac{2m+1}{2n}\pi\right]}{\sin\theta'\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}$$

übergeführt werden. Kehren wir zu $\theta = \pi - \theta'$ zurück, so erhalten wir schließlich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}}{x^{4n} + 2x^{2n}\cos\theta + 1}\,dx = \frac{\pi}{n}\,\frac{\sin\left(1 - \frac{2m+1}{2n}\right)\theta}{\sin\theta\sin\frac{2m+1}{2n}\pi} \qquad (m < n;\ -\pi < \theta < \pi).$$

---

[1]) Es ist $\varepsilon^n = -1$.

497. Beispiele und Übungen.

1. Man beweise die Existenz des Integrals

$$I = \int_{\pi}^{\infty} \frac{dx}{x^2 (\sin x)^{2/3}}.$$

Es gibt unendlich viele singuläre Punkte: $x = n\pi$ $(n = 1, 2, \ldots)$. In jedem endlichen Intervall liegen endlich viele; das Integral ist über jedes endliche Intervall konvergent. Die Frage ist, ob es auch in dem unendlichen Intervall konvergiert. Das ist tatsächlich der Fall, denn es gilt

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0}^{\pi} \frac{dx}{(x + n\pi)^2 (\sin x)^{2/3}} < \int_{0}^{\pi} \frac{dx}{(\sin x)^{2/3}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} < \infty.$$

2. Nehmen wir in dem konvergenten Integral

$$\int_{0}^{\infty} |\ln t|^{\lambda} \frac{\sin t}{t}\, dt \qquad (\lambda > 0)$$

(vgl. Nr. 478, Beispiel 5(c)) die Substitution $t = e^x$, $x = \ln t$ vor, so gelangen wir zu dem Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{\lambda} \sin e^x\, dx,$$

das also konvergiert, ungeachtet dessen, daß der Integrand für unbeschränkt wachsendes $|x|$ zwischen $-\infty$ und ∞ schwankt.

3. Wir sahen eben, daß für die Konvergenz des Integrals

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\, dx \tag{8}$$

das Erfülltsein der Bedingung

$$f(x) = o(1) \qquad (\text{für } x \to \infty) \tag{9}$$

keineswegs notwendig ist. Man zeige jedoch:

(a) Wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existiert, so ist er (bei Konvergenz von (8)) notwendig gleich 0.

(b) Wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x)$ existiert, so ist auch er notwendig gleich 0, d. h.

$$f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right). \tag{10}$$

(c) Wenn eine im Intervall $[a, \infty)$ integrierbare Funktion monoton fällt, so ist (10) notwendig erfüllt.

Der Beweis für (b) und (c) stimmt mit dem der analogen Sätze für positive Reihen (Nr. 375, Ergänzung 3) überein.

Wir bemerken noch (ebenfalls in Analogie zu den Reihen), daß sogar für eine monoton fallende Funktion $f(x)$ das Erfülltsein von (10) noch nicht die Konvergenz von (8) garantiert. Ein Beispiel hierfür ist das divergente Integral

$$\int_{a}^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} \qquad (a > 1).$$

4. Den in Nr. 478, Beispiel 6, ausgesprochenen Satz wollen wir nun auf den Fall übertragen, daß die Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, a + \omega]$ im uneigentlichen Sinne integrierbar ist (wenn die übrigen Forderungen erfüllt sind). Damit behaupten wir, daß (unter der Voraussetzung, $g(x)$ strebe für $x \to \infty$ monoton gegen 0) das Integral

$$\int_0^\infty \ln|\sin x| \cdot g(x)\, dx$$

konvergiert oder divergiert, je nachdem, ob das Integral

$$\int_0^\infty g(x)\, dx$$

konvergent oder divergent ist, während das Integral

$$\int_0^\infty \ln 2\,|\sin x| \cdot g(x)\, dx$$

in jedem Fall konvergiert.

5. Man berechne die Integrale

$$\text{(a)} \int_0^\pi x \ln \sin x\, dx, \quad \text{(b)} \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx, \quad \text{(c)} \int_0^\infty \frac{x\, dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}}.$$

Hinweis. (a) Durch die Substitution $x = \pi - t$ läßt sich das Integral auf

$$\int_0^\pi \ln \sin x\, dx = 2 \int_0^{\pi/2} \ln \sin t\, dt$$

zurückführen.

(b), (c) Die Integrale lassen sich durch die Substitutionen $x = \sin t$ bzw. $x = \ln \dfrac{1}{\sin t}$ auf $\int_0^{\pi/2} \ln \sin t\, dt$ zurückführen.

6. Man berechne das Integral

$$J = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \ln \left| 1 - \frac{1}{x^2} \right| dx.$$

Lösung. Es ist (mit $x = \sin \theta$)

$$J = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \cdot \ln \cot \theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos 2\theta \cdot \ln \cot \theta\, d\theta,$$

Partielle Integration ergibt dann

$$J = \frac{1}{2} \sin 2\theta \cdot \ln \cot \theta \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta \cdot \frac{1}{\cot \theta} \frac{1}{\sin^2 \theta}\, d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

7. Man bestimme das Integral

$$K = \int_0^{\pi/2} \ln |\sin^2 \theta - a^2|\, d\theta \qquad (a^2 \leqq 1).$$

Setzen wir $a = \sin \omega$, so ergibt sich mit Hilfe der Identität

$$\sin^2 \theta - \sin^2 \omega = \sin(\theta - \omega) \sin(\theta + \omega)$$

die Beziehung

$$K = \int\limits_{\omega-\pi/2}^{\omega+\pi/2} \ln |\sin \theta| \, d\theta = \int\limits_0^\pi \ln \sin \theta \, d\theta = -\pi \ln 2 .$$

8. Man berechne das Integral

$$L = \int\limits_0^\infty e^{-ax^2-(b/x^2)} \, dx \qquad (a, b > 0).$$

Lösung. Unter Benutzung der Formel aus Nr. 491, Beispiel 13, finden wir

$$L = e^{-2\sqrt{ab}} \int\limits_0^\infty e^{-\left(\sqrt{a}\,x - \frac{\sqrt{b}}{x}\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-2\sqrt{ab}} \int\limits_0^\infty e^{-y^2} \, dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \, e^{-2\sqrt{ab}} .$$

(Dabei wurde das Ergebnis aus Nr. 492, 2°, verwendet.)

9. Man berechne die Integrale

$$J_0 = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\theta \frac{\cos \frac{1}{2} \varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \theta)}} \, d\varphi, \quad J_1 = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\theta \frac{\cos \frac{3}{2} \varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \theta)}} \, d\varphi .$$

Lösung. Wir setzen $\cos \theta = x$ und $\cos \varphi = z$. Dann ist

$$\cos \frac{1}{2} \varphi = \sqrt{\frac{1+z}{2}}, \qquad \cos \frac{3}{2} \varphi = \sqrt{\frac{1+z}{2}} \, (2z - 1)$$

und

$$J_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_x^1 \frac{dz}{\sqrt{(z-x)(1-z)}}, \qquad J_1 = \frac{1}{\pi} \int\limits_x^1 \frac{(2z-1) \, dz}{\sqrt{(z-x)(1-z)}} .$$

Führen wir durch

$$\sqrt{(z-x)(1-z)} = t(1-z)$$

eine neue Veränderliche t ein, so erhalten wir

$$J_0 = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{dt}{t^2+1} = 1,$$

$$J_1 = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{t^2 + 2x - 1}{(t^2+1)^2} \, dt = \frac{2}{\pi} \left[\int\limits_0^\infty \frac{dt}{t^2+1} + 2(x-1) \int\limits_0^\infty \frac{dt}{(t^2+1)^2} \right] = x .$$

Also ist $J_0 = 1$, $J_1 = \cos \theta$. Später (in Nr. 511, Beispiel 3) werden wir ein allgemeineres Resultat herleiten.

10. Man beweise die folgenden Beziehungen durch partielle Integration:

(a) $$\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}(b-a),$$

(b) $$\int_0^\infty \frac{e^{-a^2x^2} - e^{-b^2x^2}}{x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,(b-a),$$

(c) $$\int_0^\infty \frac{\ln(1+a^2x^2) - \ln(1+b^2x^2)}{x^2}\,dx = \pi(a-b).$$

11. Man erkennt leicht, daß

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}\,dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{für} \quad \alpha > 0, \\ 0 & \text{für} \quad \alpha = 0, \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{für} \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

gilt (Nr. 492, 3°; Nr. 494, Beispiel 5). Daraus folgt wegen

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}\cos\beta x\,dx = \frac{1}{2}\left[\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha+\beta)x}{x}\,dx + \int_0^\infty \frac{\sin(\alpha-\beta)x}{x}\,dx\right]$$

offenbar (wenn wir der Einfachheit halber α und β als positiv annehmen)

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}\cos\beta x\,dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{für} \quad \beta < \alpha, \\ \dfrac{\pi}{4} & \text{für} \quad \beta = \alpha, \\ 0 & \text{für} \quad \beta > \alpha. \end{cases}$$

Dieses Integral wurde mehrfach von Dirichlet verwendet; deshalb wird es oft *Dirichletscher Diskontinuitätsfaktor* genannt.

Auf ihn lassen sich viele andere Integrale zurückführen, z. B. (für positive Zahlen α, β, γ mit $\alpha > \beta, \alpha > \gamma$)

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x\sin\beta x\sin\gamma x}{x}\,dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} & \text{für} \quad \alpha < \beta+\gamma, \\ \dfrac{\pi}{8} & \text{für} \quad \alpha = \beta+\gamma, \\ 0 & \text{für} \quad \alpha > \beta+\gamma \end{cases}$$

(wenn man das Produkt zweier Sinusausdrücke durch die Differenz von Kosinusausdrücken ersetzt) oder (wieder für $\alpha, \beta > 0$)

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}\,\frac{\sin\beta x}{x}\,dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\beta & \text{für} \quad \beta \leqq \alpha, \\ \dfrac{\pi}{2}\alpha & \text{für} \quad \beta \geqq \alpha \end{cases}$$

(durch partielle Integration).

Das letzte Resultat kann folgendermaßen verallgemeinert werden: Sind $a, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ positive Zahlen und ist $a > \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, so gilt

$$J = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} \frac{\sin \alpha_1 x}{x} \cdots \frac{\sin \alpha_n x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2} \alpha_1 \alpha_2 \ldots$$

Der Beweis wird mit Hilfe vollständiger Induktion (und partieller Integration) geführt.

12. Man berechne das Integral

$$\int_0^\infty (\sin ax - \sin bx)^2 \frac{dx}{x^2}.$$

Lösung. Durch partielle Integration und Benutzung des Dirichletschen Diskontinuitätsfaktors ergibt sich $\frac{\pi}{2} |a - b|$.

13. Man berechne

$$\text{V.p.} \int_0^\infty \frac{2x \sin \alpha x}{x^2 - r^2} \, dx \qquad (\alpha, r > 0).$$

Lösung. Singulärer Punkt: $x = r$. Mit Hilfe der Identität

$$\frac{2x}{x^2 - r^2} = \frac{1}{x + r} + \frac{1}{x - r}$$

können wir sofort ein konvergentes Integral abspalten:

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x + r} \, dx = \cos \alpha r \int_r^\infty \frac{\sin \alpha y}{y} \, dy - \sin \alpha r \int_r^\infty \frac{\cos \alpha y}{y} \, dy.$$

Dann ist

$$\left(\int_0^{r-\varepsilon} + \int_{r+\varepsilon}^\infty \right) \frac{\sin \alpha x}{x - r} \, dx = \cos \alpha r \int_r^\infty \frac{\sin \alpha y}{y} \, dy$$

$$+ \sin \alpha r \int_r^\infty \frac{\cos \alpha y}{y} \, dy + 2 \cos \alpha r \int_\varepsilon^r \frac{\sin \alpha y}{y} \, dy;$$

also ergibt sich

$$\text{V.p.} \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x - r} \, dx,$$

wenn wir im letzten Integral einfach $\varepsilon = 0$ setzen. Das Ergebnis lautet

$$\text{V.p.} \int_0^\infty \frac{2x \sin \alpha x}{x^2 - r^2} \, dx = 2 \cos \alpha r \int_0^\infty \frac{\sin \alpha y}{y} \, dy = \pi \cos \alpha r.$$

14. Eine Funktion $f(x)$ mit $0 \leqq x < \infty$ genüge den Bedingungen

$$f(x + \pi) = f(x) \quad \text{und} \quad f(\pi - x) = f(x).$$

Man beweise dann die Formel

$$\int_0^\infty f(x)\,\frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$$

unter der Voraussetzung, daß das linke Integral existiert. (Diese Formel stammt von LOBATSCHEWSKI und läßt sich mit Hilfe der Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{\sin x}$ genauso beweisen wie im Spezialfall $f(x) \equiv 1$; vgl. Nr. 492. 3°.)

Ferner benutze man diese Formel zur Berechnung der folgenden Integrale:

(a) $$\int_0^\infty \frac{\sin^{2\nu+1} x}{x}\,dx = \int_0^\infty \sin^{2\nu} x\,\frac{\sin x}{x}\,dx \qquad (\nu = 1, 2, \ldots);$$

(b) $$\int_0^\infty \arctan\,(a \sin x)\,\frac{dx}{x} = \int_0^\infty \frac{\arctan\,(a \sin x)}{\sin x}\,\frac{\sin x}{x}\,dx \qquad (a > 0).$$

Das Integral (a) läßt sich auf das schon bekannte Integral

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2\nu} x\,dx = \frac{\pi}{2}\,\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!}$$

(Nr. 312, Formel (8)) und das Integral (b) auf

$$\int_0^1 \frac{\arctan at}{t\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

(durch die Substitution $t = \sin x$) zurückführen. Der Wert des letzten Integrals,

$$\frac{\pi}{2} \ln\left(a + \sqrt{1+a^2}\right)$$

wird später berechnet werden (vgl. Nr. 511, Beispiel 9).

15. Mit denselben Voraussetzungen für $f(x)$ weise man die Beziehung

$$\int_0^\infty f(x)\,\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$$

nach (wieder unter der Annahme, das linke Integral existiere).

Hinweis. Auch hier verwenden wir die Lobatschewskische Methode, nur müssen wir die Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{\sin^2 x}$ (Nr. 441, Beispiel 9) benutzen.

Für $f(x) \equiv 1$ erhalten wir wieder das schon bekannte Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

(vgl. Nr. 494, Beispiel 4).

16. Man bestimme die folgenden Integrale ($a, b > 0$):

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx}{x}\,dx$, (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos ax}{x}\cos bx\,dx$, (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{\ln x}\,dx$.

Hinweis. Sie lassen sich auf Frullanische Integrale zurückführen; die ersten beiden Integrale sind für $a = b$ divergent.

Lösung. (a) $\ln \sqrt{\dfrac{a+b}{|a-b|}}$, (b) $\ln \dfrac{\sqrt{|a^2-b^2|}}{b}$, (c) $\ln \dfrac{a}{b}$.

17. Man berechne die folgenden Integrale $(a, b > 0)$:

(a) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{b \sin ax - a \sin bx}{x^2}\, dx$, (b) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{b \ln(1+ax) - a \ln(1+bx)}{x^2}\, dx$,

(c) $\displaystyle\int\limits_0^\infty (e^{-ax} - e^{-bx})^2 \frac{dx}{x^2}$.

Hinweis. Durch partielle Integration lassen sie sich auf Frullanische Integrale zurückführen.

18. Man bestimme das Integral

$$\int\limits_0^\infty \left[\frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2}\right] \frac{dx}{x^2}.$$

Hinweis. Es gilt die Identität

$$\frac{1}{x^2}\left[\frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2}\right] = -\frac{1}{2x}(e^{-x} - e^{-2x}) + \frac{1}{x}\left[\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} e^{-x}\right]$$
$$- \frac{1}{x}\left[\frac{1}{e^{2x} - 1} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2} e^{-2x}\right].$$

Die Integrale des zweiten und dritten Ausdrucks auf der rechten Seite heben sich gegenseitig auf (wovon man sich durch Variablensubstitution leicht überzeugen kann). Man gelangt also zu einem Frullanischen Integral.

Lösung. $-\dfrac{1}{2} \ln 2$.

19. Man bestimme das Integral

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx} + x(a-b)\, e^{-bx}}{x^2}\, dx \quad (a, b > 0).$$

Lösung. Es gilt (für $\eta > 0$)

$$\int\limits_\eta^\infty = \int\limits_\eta^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x^2}\, dx + (a-b) \int\limits_\eta^\infty \frac{e^{-bx}}{x}\, dx.\text{[1]}$$

Das erste der beiden rechten Integrale formen wir durch partielle Integration um in

$$\int\limits_\eta^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x^2}\, dx = -\left.\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\right|_\eta^\infty + \int\limits_\eta^\infty \frac{b\, e^{-bx} - a\, e^{-ax}}{x}\, dx,$$

[1]) Keines dieser Integrale ist für $\eta = 0$ konvergent.

so daß schließlich

$$\int_\eta^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx} + x(a-b)\,e^{-bx}}{x^2}\,dx = \frac{e^{-a\eta} - e^{-b\eta}}{\eta} + a\int_\eta^\infty \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x}\,dx$$

ist. Für $\eta \to 0$ strebt der erste Ausdruck auf der rechten Seite gegen $b - a$, der zweite gegen das Frullanische Integral

$$a\int_0^\infty \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x}\,dx = a \ln \frac{a}{b}.$$

20. Man bestätige die Beziehung

$$\int_0^\infty \frac{A\cos ax + B\cos bx + \cdots + K\cos kx}{x}\,dx = -\{A\ln a + B\ln b + \cdots + K\ln k\} \tag{*}$$

unter den Voraussetzungen $a, b, \ldots, k > 0$ und $A + B + \cdots + K = 0$ (die zweite Bedingung ist offenbar für die Existenz des Integrals notwendig).

Hinweis. Man schreibe $K = -A - B - \cdots$ und benutze die Formeln

$$\int \frac{A\cos ax - A\cos kx}{x}\,dx = -A\ln a + A\ln k \quad \text{usw.}$$

Die Beziehung (*) läßt sich leicht auf den Fall einer beliebigen Funktion $f(x)$ verallgemeinern, die den Bedingungen aus Nr. 495, II, genügt.

21. Man gebe einen Ausdruck für das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin^n x}{x^m}\,dx$$

(m, n natürliche Zahlen; $n \geqq m \geqq 2$) an.

Lösung. Erweitern wir die verallgemeinerte Formel für die partielle Integration (Nr. 311) auf ein unendliches Intervall, so erhalten wir sofort

$$\int_0^\infty \frac{\sin^n x}{x^m}\,dx = \frac{1}{(m-1)!}\int_0^\infty \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} \sin^n x\,\frac{dx}{x}. \tag{11}$$

Zur Berechnung dieses Integrals benutzen wir zweckmäßigerweise die schon bekannten Entwicklungen von $\sin^n x$ nach dem Sinus und Kosinus der Vielfachen von x (Nr. 461, Beispiel 3(a) und (b)) und untersuchen die verschiedenen hier möglichen Fälle:

(a) $n = 2\nu + 1$, $m = 2\mu + 1$. Dann ist

$$\frac{d^{2\mu}}{dx^{2\mu}} \sin^{2\nu+1} x = \frac{(-1)^{\nu+\mu}}{2^{2\nu}} \Big[(2\nu+1)^{2\mu} \sin(2\nu+1)\,x$$
$$-(2\nu+1)(2\nu-1)^{2\mu}\sin(2\nu-1)\,x$$
$$+\frac{(2\nu+1)\,2\nu}{1\cdot 2}(2\nu-3)^{2\mu}\sin(2\nu-3)\,x - \cdots\Big]$$

und nach (11)

$$\int_0^\infty \frac{\sin^{2\nu+1} x}{x^{2\mu+1}}\,dx = \frac{(-1)^{\nu+\mu}}{2^{2\nu}(2\mu)!}\,\frac{\pi}{2}\Big[(2\nu-1)^{2\mu} - (2\nu+1)(2\nu-1)^{2\mu}$$
$$+\frac{(2\nu+1)\,2\nu}{1\cdot 2}(2\nu-3)^{2\mu} - \cdots\Big].$$

(b) $n = 2\nu$, $m = 2\mu + 1$. In diesem Fall ist

$$\frac{d^{2\mu}}{dx^{2\mu}} \sin^{2\nu} x = \frac{(-1)^{\nu+\mu}}{2^{2\nu-1}} \Big[(2\nu)^{2\mu} \cos 2\nu x - 2\nu(2\nu-2)^{2\mu} \cos(2\nu-2)\,x + \frac{2\nu(2\nu-1)}{1\cdot 2}(2\nu-4)^{2\mu}\cos(2\nu-4)\,x - \cdots\Big].$$

Man sieht leicht, daß die linke Seite (wegen $\nu > \mu$) für $x = 0$ verschwindet, so daß die Summe der Koeffizienten bei den Kosinusgliedern gleich 0 wird und wir das Ergebnis aus Beispiel 20 anwenden können. Daraus folgt

$$\int_0^\infty \frac{\sin^{2\nu} x}{x^{2\mu+1}}\,dx = \frac{(-1)^{\nu+\mu+1}}{2^{2\nu-1}(2\mu)!} \Big[(2\nu)^{2\mu}\ln 2\nu - 2\nu(2\nu-2)^{2\mu}\ln(2\nu-2) + \frac{2\nu(2\nu-1)}{1\cdot 2}(2\nu-4)^{2\mu}\ln(2\nu-4) - \cdots\Big].$$

Analog lassen sich die Formeln in den Fällen (c) $n = 2\nu + 1$, $m = 2\mu$ und (d) $n = 2\nu$, $m = 2\mu$ aufstellen. Insbesondere ist für jedes $n \geqq 2$

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx = \frac{\pi}{2^n(n-1)!}\Big[n^{n-1} - n(n-2)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(n-4)^{n-1} - \cdots\Big].$$

22. Mit Hilfe derselben Entwicklung aus Nr. 461, Beispiel 3(b), erhält man leicht (für $p > 0$)

$$\int_0^\infty \frac{\sin^{2\nu+1} px}{x}\,dx = \frac{(-1)^\nu \pi}{2^{2\nu+1}}\Big[1 - (2\nu+1) + \frac{(2\nu+1)\,2\nu}{1\cdot 2} - \cdots + (-1)^\nu \frac{(2\nu+1)\,2\nu\cdots(\nu+2)}{1\cdot 2\cdots \nu}\Big].$$

Übrigens kann dieser Ausdruck durch elementare Umformungen auf die einfachere Gestalt $\frac{\pi}{2}\,\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!}$ gebracht werden. Das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin^{2\nu} px}{x}\,dx$ divergiert. Das Frullanische Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin^{2\nu} px - \sin^{2\nu} qx}{x}\,dx \qquad (p, q > 0)$$

genügt nicht den Bedingungen aus Nr. 495, aber mit Hilfe der Entwicklung aus Nr. 461, Beispiel 3(a), läßt sich leicht feststellen, daß es auf den Fall II des Frullanischen Integrals zurückgeführt werden kann, wenn $\sin^{2\nu} x$ durch

$$\sin^{2\nu} x - \frac{1}{2^\nu}\,\frac{2\nu(2\nu-1)\cdots(\nu+1)}{1\cdot 2\cdots\nu}$$

ersetzt wird. Schließlich ist auf Grund von Gleichung (4a) aus Nr. 495

$$\int_0^\infty \frac{\sin^{2\nu} px - \sin^{2\nu} qx}{x}\,dx = \frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!}\ln\frac{q}{p}.$$

Es gibt keine natürliche Zahl n, für welche das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\cos^n x}{x}\,dx$$

konvergiert. Für $n = 2\nu + 1$ ist jedoch $\int\limits_A^\infty$ konvergent, und wir erhalten sofort auf Grund von (4a) aus Nr. 495

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos^{2\nu+1} px - \cos^{2\nu+1} qx}{x}\, dx = \ln\frac{q}{p}.$$

Für $n = 2\nu$ benutzen wir die Entwicklung aus Nr. 461, Beispiel 3(c), und finden

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos^{2\nu} px - \cos^{2\nu} qx}{x}\, dx = \left(1 - \frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!}\right)\ln\frac{q}{p}.$$

23. Man bestätige die folgenden Beziehungen[1]):

(a) $$\int\limits_0^\infty \cos\gamma x\, dx \int\limits_x^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2\gamma} & \text{für } |\gamma| > 1, \\ \dfrac{\pi}{4} & \text{für } |\gamma| = 1, \\ 0 & \text{für } |\gamma| < 1; \end{cases}$$

(b) $$\int\limits_0^\infty \sin\gamma x\, dx \int\limits_x^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2\gamma} & \text{für } |\gamma| > 1, \\ \dfrac{\pi}{4} & \text{für } |\gamma| = 1, \\ 0 & \text{für } |\gamma| < 1; \end{cases}$$

(c) $$\int\limits_0^\infty \cos\gamma x\, dx \int\limits_x^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt = \begin{cases} \dfrac{1}{2\gamma}\ln\left|\dfrac{1+\gamma}{1-\gamma}\right| & \text{für } \gamma \neq 0, \pm 1, \\ 1 & \text{für } \gamma = 0;^{2)} \end{cases}$$

(d) $$\int\limits_0^\infty \sin\gamma x\, dx \int\limits_x^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt = \begin{cases} \dfrac{1}{\gamma}\ln|1-\gamma^2| & \text{für } \gamma \neq 0, \pm 1, \\ 0 & \text{für } \gamma = 0;^{2)} \end{cases}$$

(e) $$\int\limits_0^\infty e^{-\gamma x}\, dx \int\limits_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt = \begin{cases} \dfrac{1}{\gamma}\ln(1+\gamma) & \text{für } \gamma > 0, \\ 1 & \text{für } \gamma = 0. \end{cases}$$

Beweis. (a) Wir setzen $\gamma \lessgtr 0$ voraus und integrieren partiell:

$$\int\limits_0^\infty \cos\gamma x\, dx \int\limits_x^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt = \frac{1}{\gamma}\sin\gamma x \int\limits_x^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt\,\Bigg|_0^\infty + \frac{1}{\gamma}\int\limits_0^\infty \frac{\sin\gamma x}{x}\cos x\, dx.$$

---

[1]) Die Integrale

$$-\int\limits_x^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt \quad\text{und}\quad -\int\limits_x^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt$$

stellen den Integralsinus (si x) bzw. den Integralkosinus (ci x) dar, denen wir schon in Nr. 289 begegneten.

[2]) Für $\gamma = \pm 1$ ist das Integral divergent.

Das erste Glied auf der rechten Seite verschwindet wegen

$$\left|\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt\right| \leqq \left|\int_1^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt\right| + \left|\int_x^1 \frac{dt}{t}\right| = c + |\ln x|;$$

das Integral geht in den Dirichletschen Diskontinuitätsfaktor über.

Den Fall $\gamma = 0$ betrachten wir gesondert. Für jedes $A > 0$ erhalten wir, wenn wir wiederholt partiell integrieren,

$$\int_0^A dx \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt = x \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt\Big|_0^A + \int_0^A \cos x\,dx = A \int_A^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt + \sin A$$

$$= A\,\frac{\sin t}{t}\Big|_A^\infty + A \int_A^\infty \frac{\sin t}{t^2}\,dt + \sin A = A \int_A^\infty \frac{\sin t}{t^2}\,dt.$$

Nach dem zweiten Mittelwertsatz (Nr. 478) erhält der letzte Ausdruck die Form

$$\int_A^{\bar{A}} \frac{\sin t}{t}\,dt \qquad (\bar{A} > A).$$

Dieses Integral verschwindet für $A \to \infty$ auf Grund des Kriteriums von Bolzano-Cauchy (Nr. 475), angewendet auf das konvergente Integral $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$. Also ist

$$\int_0^\infty dx \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt = 0.$$

In den anderen Fällen verlaufen die Beweise analog.

24. Man beweise die folgenden Formeln ($\alpha, \beta > 0$):

(a) $$\int_0^\infty dx \left[\int_{\alpha x}^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt \int_{\beta x}^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt\right] = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2\alpha} & \text{für } \alpha \geqq \beta, \\[2ex] \dfrac{\pi}{2\beta} & \text{für } \alpha \leqq \beta; \end{cases}$$

(b) $$\int_0^\infty dx \left[\int_{\alpha x}^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt \int_{\beta x}^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt\right] = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2\alpha} & \text{für } \alpha \geqq \beta, \\[2ex] \dfrac{\pi}{2\beta} & \text{für } \alpha \leqq \beta; \end{cases}$$

(c) $$\int_0^\infty dx \left[\int_{\alpha x}^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt \int_{\beta x}^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{2\alpha} \ln \left|\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right| + \dfrac{1}{2\beta} \ln \dfrac{|\alpha^2-\beta^2|}{\alpha^2} & \text{für } \alpha \neq \beta, \\[2ex] \dfrac{1}{\alpha} \ln 2 & \text{für } \alpha = \beta; \end{cases}$$

(d) $$\int_0^\infty dx \left[\int_{\alpha x}^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt \int_{\beta x}^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt\right] = \ln \frac{(\alpha+\beta)^{1/\alpha+1/\beta}}{\alpha^{1/\beta}\beta^{1/\alpha}}.$$

Beweis. (a) Durch partielle Integration des gegebenen Integrals gelangen wir zu Integralen des schon in Beispiel 23 (a) betrachteten Typs:

$$\int_0^\infty dx \left[\int_{\alpha x}^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt \int_{\beta x}^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt\right]$$

$$= x \int_{\alpha x}^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt \int_{\beta x}^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt \Bigg|_0^\infty + \int_0^\infty \cos \alpha x\, dx \int_{\beta x}^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt + \int_0^\infty \cos \beta x\, dx \int_{\alpha x}^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt$$

$$= \frac{1}{\beta} \int_0^\infty \cos \frac{\alpha}{\beta} x\, dx \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt + \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \cos \frac{\beta}{\alpha} x\, dx \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2\alpha} & \text{für} \quad \alpha \geqq \beta, \\[2ex] \dfrac{\pi}{2\beta} & \text{für} \quad \alpha < \beta. \end{cases}$$

Das Verschwinden des Ausdrucks

$$x \int_{\alpha x}^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt \int_{\beta x}^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt \Bigg|_0^\infty$$

läßt sich folgendermaßen erklären: Aus der schon bekannten Abschätzung

$$\left| \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt \right| < c + |\ln x|$$

(vgl. S. 584) ist ersichtlich, daß der Ausdruck mit x verschwindet. Andererseits ist

$$\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt = \frac{\sin t}{t}\Bigg|_x^\infty + \int_x^\infty \frac{\sin t}{t^2}\, dt, \qquad \left| \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt \right| < \frac{2}{x}.$$

Daraus folgt, daß der Ausdruck auch für $x \to \infty$ verschwindet.

Der Beweis der übrigen Formeln verläuft analog zu Beispiel 23 (b), (c) und (d), (e).

§ 5. Angenäherte Berechnung uneigentlicher Integrale

498. Integrale mit endlichen Grenzen. Abspaltung der Singularitäten. In Nr. 322 bis 328 wurden verschiedene Methoden zur angenäherten Berechnung bestimmter („eigentlicher") Integrale studiert. Auf uneigentliche Integrale sind diese Verfahren und die für sie hergeleiteten Fehlerabschätzungen nicht unmittelbar zu übertragen. Manchmal gelingt es, durch Variablensubstitution und partielle Integration das uneigentliche Integral in ein „eigentliches" umzuformen. Dann läßt sich auch die angenäherte Berechnung des uneigentlichen Integrals auf ein schon bekanntes Problem zurückführen.

In vielen Fällen wird die angenäherte Berechnung eines uneigentlichen Integrals $\int_a^b f(x)\, dx$ (mit endlichen Grenzen) durch die *Abspaltung der Singularitäten*[1]) erleichtert. Dieses Verfahren besteht darin, eine Funktion $g(x)$ einfacher Bauart mit den gleichen Singularitäten zu suchen, so daß die Differenz $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ keine singulären Stellen mehr hat, d. h. im „eigentlichen" Sinne integrierbar ist. Bei der Wahl der Funktion $g(x)$ müssen wir anstreben, daß $g(x)$ in geschlossener Form integrierbar ist und $\varphi(x)$ die notwendige Anzahl von Ableitungen

[1]) Dieses Verfahren stammt von KANTOROWITSCH (LEONID WITALJEWITSCH KANTOROWITSCH, geb. 1912, sowjetischer Mathematiker).

besitzt, so daß wir bei angenäherter Berechnung des Integrals von $\varphi(x)$ die schon vorhandenen Formeln für den Fehler benutzen können.

Die Funktion $g(x)$ wird auf verschiedene Arten, je nach Problem, gewählt. Als Beispiel wollen wir eine allgemeinere Regel zur Konstruktion dieser Funktion für eine häufig anzutreffende Klasse von Integralen angeben. Der Integrand habe die Form

$$f(x) = |x - x_0|^{-\alpha} h(x) \qquad (a \leqq x_0 \leqq b; 0 < \alpha < 1),$$

wobei $h(x)$ für $a \leqq x \leqq b$ in die Potenzreihe

$$h(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots + c_n(x - x_0)^n + \cdots$$

entwickelbar sei. Dann setzen wir

$$g(x) = |x - x_0|^{-\alpha} [c_0 + c_1(x - x_0) + \cdots + c_n(x - x_0)^n]$$

und

$$\varphi(x) = |x - x_0|^{-\alpha} [c_{n+1}(x - x_0)^{n+1} + \cdots] = |x - x_0|^{n+(1-\alpha)} [c_{n+1} + \cdots].$$

Das Integral von $g(x)$ läßt sich leicht berechnen; $\varphi(x)$ hat offenbar im Intervall $[a, b]$, auch im Punkt x_0, n stetige Ableitungen.

499. Beispiele.

1. Man berechne das Integral

$$\int_0^1 x^{-1/2}(1 - x)^{-1/2}\, dx = 2 \int_0^{1/2} x^{-1/2}(1 - x)^{-1/2}\, dx.$$

Im rechten Integral ist 0 der einzige singuläre Punkt.

Wir entwickeln $(1 - x)^{-1/2}$ nach Potenzen von x, brechen die Reihe nach x^4 ab und setzen

$$g(x) = x^{-1/2} \left(1 + \frac{1}{2} x + \frac{3}{8} x^2 + \frac{5}{16} x^3 + \frac{35}{128} x^4\right),$$

$$\varphi(x) = x^{-1/2} \left[(1 - x)^{-1/2} - \left(1 + \cdots + \frac{35}{128} x^4\right)\right] = \frac{63}{256} x^{9/2} + \cdots.$$

Dann ist

$$I = \int_0^{1/2} x^{-1/2}(1 - x)^{-1/2}\, dx = \int_0^{1/2} g(x)\, dx + \int_0^{1/2} \varphi(x)\, dx = I_1 + I_2.$$

Der Wert von I_1 ist leicht zu berechnen:

$$I_1 = \frac{715801}{645120} \sqrt{2} = 1{,}5691585\ldots$$

Zur Bestimmung von I_2 benutzen wir die Simpsonsche Formel. Wir zerlegen das Intervall $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ in $2n = 10$ Teile und berechnen die einzelnen Werte auf sechs Dezimalen:

$$y_0 = y_{1/2} = 0 \qquad \begin{aligned} 2y_1 &= 0{,}000018 \\ 4y_{3/2} &= 0{,}000225 \\ 2y_2 &= 0{,}000431 \\ 4y_{5/2} &= 0{,}002496 \\ 2y_3 &= 0{,}003017 \\ 4y_{7/2} &= 0.012901 \\ 2y_4 &= 0{,}012632 \\ 4y_{9/2} &= 0{,}046350 \\ y_5 &= 0{,}020239 \\ \hline & 0{,}098309 : 60 = 0{,}0016385 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &\approx 1{,}5691585 \\ I_2 &\approx 0{,}0016385 \\ \hline I &\approx 1{,}5707970. \end{aligned}$$

Der wahre Wert von I ist (wie aus der Theorie der Betafunktion folgt; vgl. Nr. 529, Formel (5a))

$$\frac{\pi}{2} = 1{,}5707963\ldots$$

Wir wollen nun so tun, als ob wir den genauen Wert des Integrals nicht schon (aus anderen Überlegungen) kennen, und den Fehler abschätzen. Es ist

$$\varphi^{(4)}(x) = \frac{63}{256}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot x^{1/2} + \cdots > 0;$$

$\varphi^{(4)}$ nimmt also mit x zu, so daß der größte Wert für $x = \frac{1}{2}$ erreicht wird. Daraus ergibt sich leicht $\max \varphi^{(4)}(x) = 288$.

Der Fehler bei der Simpsonschen Formel läßt sich durch die aus Nr. 327 bekannte Beziehung

$$R = -\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{10^4}\,\frac{\varphi^{(4)}(\zeta)}{180}$$

ausdrücken. Also ist

$$R < 0, \qquad |R| < \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{10^4}\,\frac{288}{180} = \frac{5}{10^6}.$$

Außerdem ist der bei I_2 entstandene Rundungsfehler dem absoluten Betrag nach kleiner als $\frac{5\cdot 10^{-6}}{60} < 10^{-7}$. Genauso groß ist der absolute Fehler von I_1. Der Gesamtfehler liegt zwischen $-5{,}2\cdot 10^{-6}$ und $0{,}2\cdot 10^{-6}$, also ist

$$1{,}5707918 < I < 1{,}5707972 \quad \text{oder} \quad 1{,}570791 < I < 1{,}570798.$$

Wir erhalten schließlich

$$I = 1{,}57079_{+0{,}00001}.$$

2. Bei dem Integral

$$I = \int_0^1 x^{-1/2}(1-x)^{-3/4}\,dx$$

sind 0 und 1 singuläre Punkte; entsprechend zerlegen wir es:

$$I = \int_0^1 = \int_0^{1/2} + \int_{1/2}^1 = I_1 + I_2.$$

Zur Berechnung von I_1 setzen wir

$$g(x) = x^{-1/2}\left(1 + \frac{3}{4}x + \frac{21}{32}x^2 + \frac{77}{128}x^3 + \frac{1155}{2048}x^4\right),$$

$$\varphi(x) = x^{-1/2}\left[(1-x)^{-3/4} - \left(1 + \cdots + \frac{1155}{2048}x^4\right)\right];$$

also ist

$$I_1 = \int_0^{1/2} g(x)\,dx + \int_0^{1/2}\varphi(x)\,dx = I_{11} + I_{12}.$$

Für I_{11} ergibt sich sofort

$$I_{11} = \frac{576293}{491520}\sqrt{2} \approx 1{,}6581248.$$

Das Integral I_{12} bestimmen wir mit Hilfe der Simpsonschen Formel. Wieder sei $2n = 10$, und wir erhalten auf sechs Dezimalstellen genau $I_{12} \approx 0{,}003813$. Daraus folgt $I_1 \approx 1{,}661938$. Mit der gleichen Fehlerabschätzung wie in Beispiel 1 ist

$$I_1 = 1{,}66193_{+0{,}00001}.$$

Analog gilt

$$I_2 = \int_{1/2}^{1} x^{-1/2}(1-x)^{-3/4}\,dx = \int_{0}^{1/2} x^{-3/4}(1-x)^{-1/2}\,dx$$

$$= \int_0^{1/2} x^{-3/4}\left(1 + \frac{1}{2}x + \cdots + \frac{35}{128}x^4\right)dx + \int_0^{1/2} x^{-3/4}\,[(1-x)^{-1/2} - (1+\cdots)]\,dx$$

$$= I_{21} + I_{22}.$$

Wir finden

$$I_{21} \approx 3{,}580291, \qquad I_{22} \approx 0{,}002033, \qquad I_2 \approx 3{,}582324$$

und nach Fehlerabschätzung

$$I_2 = 3{,}58232_{+0{,}000005}.$$

Also ist insgesamt

$$I = 5{,}24425_{+0{,}000015} \quad \text{oder} \quad I = 5{,}24426_{+0{,}00001}.$$

3. Gegeben sei das Integral $I = \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,dx$; singuläre Stelle im Punkt $x = 0$. Zur Abspaltung der Singularität wollen wir ein Verfahren benutzen, das dem eben verwendeten sehr ähnlich ist. Wir setzen

$$I = \int_0^1 (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)\ln x\,dx + \int_0^1 \frac{x^5 \ln x}{1-x}\,dx = I_1 + I_2.$$

Durch partielle Integration finden wir sofort $I_1 = -1{,}46361\ldots$ Das Integral I_2 bestimmen wir wieder nach der Simpsonschen Formel ($2n = 10$; fünf Dezimalen): $I_2 \approx -0{,}18135$. Also ist $I \approx -1{,}64496$. Der genaue Wert des gesuchten Integrals ist $-\frac{\pi^2}{6} = -1{,}644934\ldots$

Bei der Fehlerabschätzung wird $\varphi^{(4)}(x)$ mit Hilfe der Leibnizschen Formel (Nr. 117) berechnet. Dabei ist es zweckmäßig, die leicht zu beweisende Beziehung

$$\left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right]^{(k)} = \frac{1}{k+1} f^{(k+1)}(c),$$

wobei c zwischen a und b liegt, zu benutzen. In ihr setzen wir $f(x) = \ln x$ und $a = 1$. Eine grobe Abschätzung liefert $|\varphi^{(4)}(x)| < 200$; damit ist

$$|R| < \frac{1}{10^4}\,\frac{200}{180} \approx 0{,}00011.$$

Der Gesamtfehler ist $\pm 0{,}00013$. Damit ist schließlich

$$|I| = 1{,}645_{\pm 0{,}0002}.$$

4. Wir betrachten zum Schluß noch ein Integral anderen Typs:

$$I = \int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx;$$

$x = 0$ ist singulärer Punkt des Integranden.

Wir vergleichen den Integranden mit der Funktion $g(x) = \log x$, deren Integral leicht berechnet werden kann[1]):

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \log x \, dx = M \int_0^{\pi/2} \ln x \, dx = Mx (\ln x - 1)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}\left(\log \frac{\pi}{2} - M\right) \approx -0{,}374123.$$

Das Integral I_2 mit dem Integranden $\varphi(x) = \log \frac{\sin x}{x}$ wird nach der Simpsonschen Formel berechnet ($2n = 18$; sechs Dezimalen):

$$I_2 = -\int_0^{\pi/2} (\log x - \log \sin x) \, dx \approx -0{,}098733.$$

Daraus folgt

$$I = I_1 + I_2 \approx -0{,}472856.$$

Das Integral I unterscheidet sich tatsächlich nur durch den Faktor M von dem schon bekannten (Nr. 492, 1°) Integral

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2;$$

folglich ist

$$I = -\frac{\pi}{2} \log 2 = -0{,}4728568\ldots$$

Wir sehen, daß in dem oben erhaltenen Wert alle sechs Dezimalstellen genau sind.

Kennt man den genauen Wert nicht, so muß der Fehler abgeschätzt werden. Hier ist

$$\varphi(x) = M(\ln x - \ln \sin x), \qquad \varphi^{(4)}(x) = M \frac{6(x^4 - \sin^4 x) - 4x^4 \sin^2 x}{x^4 \sin^4 x}.$$

Man kann zeigen, daß $0 < \varphi^{(4)}(x) < \frac{\pi^4}{12} M < 3{,}6$ gilt, woraus $R < 0$ und $|R| < 0{,}000002$ folgt. Unter Berücksichtigung der Rundungsfehler würde man nur

$$|I| \approx 0{,}47285_{+0{,}00001}$$

erhalten.

500. Eine Bemerkung zur angenäherten Berechnung „eigentlicher" Integrale. Die Methode der Abspaltung der Singularitäten kann sich oft auch bei der Berechnung „eigentlicher" Integrale als nützlich erweisen, wenn nämlich der Integrand zwar stetig ist, aber nicht die notwendige Anzahl stetiger Ableitungen besitzt (was die Fehlerabschätzung erschwert). Wir wollen dies an einem Beispiel erläutern.

---

[1]) Mit M wird der *Modul des dekadischen Logarithmensystems* bezeichnet $\left(M = \frac{1}{\ln 10} = 0{,}43429\ldots\right)$.

Wir betrachten das Integral

$$I = \int_0^1 \ln x \cdot \ln (1 + x)\, dx.$$

Der Integrand verschwindet für $x \to 0$, so daß man ihn im ganzen Integrationsintervall als stetig voraussetzen kann. Doch schon seine erste Ableitung strebt für $x \to 0$ gegen ∞. Benutzen wir die Entwicklung des Logarithmus, so können wir den Integranden als Summe der beiden Funktionen

$$g(x) = \ln x \cdot \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right),$$

$$\varphi(x) = \ln x \cdot \left[\ln (1 + x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\right]$$

darstellen. Das Integral von $g(x)$ hat den Wert $-0{,}20528\ldots$ Das Integral der Funktion $\varphi(x)$, die schon vier stetige Ableitungen besitzt, müssen wir mit Hilfe der Simpsonschen Formel berechnen ($2n = 10$; fünf Dezimalstellen). Wir erhalten $-0{,}00348$, so daß $-0{,}20876$ das Resultat ist.

Wegen $|\varphi^{(4)}(x)| < 36$ gilt $|R| < 0{,}00002$. Damit ist schließlich

$$|I| = 0{,}20876_{\pm 0{,}00003} = 0{,}2087_{+0{,}0001}.$$

(Die in diesem Näherungswert angegebenen Dezimalstellen sind genau, denn der wahre Wert von I ist $-0{,}2087618\ldots$)

Es ist interessant, daß wir $I \approx -0{,}2080$, also nur drei richtige Dezimalstellen erhalten, wenn wir die Simpsonsche Formel (ebenfalls mit $2n = 10$ und fünf Dezimalen) auf den Integranden anwenden, ohne vorher die Singularität abgetrennt zu haben.

Wenn wir also die Singularität nicht abtrennen, so erschweren wir damit nicht nur die Fehlerabschätzung, sondern können auch die Genauigkeit des Resultats herabsetzen.

501. Angenäherte Berechnung uneigentlicher Integrale mit unendlichen Grenzen. Es gelingt selten, das Integral $\int_a^\infty f(x)\, dx$ auf Grund seiner Definition als Grenzwert des Integrals $\int_a^A f(x)\, dx$ zu berechnen, indem man (für hinreichend großes A) näherungsweise $\int_a^\infty \approx \int_a^A$ setzt, wobei sich das rechte Integral mit Hilfe schon bekannter Methoden bestimmen läßt. Dies erweist sich allenfalls nur dann als zweckmäßig, wenn der Integrand mit wachsendem x sehr schnell abnimmt, so daß diese Näherungsgleichung (sogar bei nicht großem A) schon hinreichend genau ist.

1. Dies ist z. B. beim Integral $I = \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$ der Fall. Aus der Ungleichung $x^2 \geqq 2Ax - A^2$ folgt

$$e^{-x^2} \leqq e^{A^2} e^{-2Ax}$$

und

$$\int_A^\infty e^{-x^2}\, dx \leqq e^{A^2} \int_A^\infty e^{-2Ax}\, dx = \frac{1}{2A} e^{-A^2}.$$

Für $A = 3$ ist

$$\int_3^\infty e^{-x^2}\, dx < 0{,}00002.$$

Das Integral $\int\limits_0^3 e^{-x^2}\,dx$ berechnen wir nach der Simpsonschen Formel ($n = 30$; fünf Dezimalen); das ergibt 0,88621. Bei der Fehlerabschätzung erhalten wir

$$|(e^{-x^2})^{(4)}| \leqq 12, \qquad |R| < 2 \cdot 10^{-5}.$$

Der Gesamtfehler liegt also zwischen $-0{,}00004$ und $0{,}00006$. Damit ist

$$0{,}88617 < I < 0{,}88627, \qquad I = 0{,}8862_{\pm 0{,}0001}.$$

Der genaue Wert von I ist, wie wir aus Nr. 492, 2°, wissen, gleich $\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0{,}886226\ldots$

Oft ist es zweckmäßig, das Integral $\int\limits_a^\infty$ entweder auf endliche Grenzen umzuformen oder es in $\int\limits_a^A + \int\limits_A^\infty$ zu zerlegen und das zweite Integral auf endliche Grenzen zu bringen.

2. Wir betrachten noch einmal das Integral

$$I = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

und schreiben es jetzt in der Form

$$\int\limits_0^\infty = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^\infty = I_1 + I_2.$$

I_1 berechnen wir nach der Simpsonschen Formel ($2n = 10$; fünf Dezimalen; $|R| < 0{,}00001$) und erhalten $I_1 = 0{,}74683_{\pm 0{,}00002}$. Das Integral I_2 wird mit Hilfe der Substitution $x = \frac{1}{t}$ auf die Form

$$I_2 = \int\limits_0^1 \frac{1}{t^2}\, e^{-1/t^2}\,dt$$

gebracht. Auf dem üblichen Wege finden wir $I_2 \approx 0{,}13945$, also $I \approx 0{,}88628$.

Auf eine Fehlerabschätzung wollen wir hier verzichten.

Hat ein Integral mit einer unendlichen Grenze auch noch im Endlichen eine Singularität, so muß man es so in zwei Integrale zerlegen, daß jedes Integral nur eine Singularität enthält.

3. Wir betrachten für $0 < a < 1$ das Integral

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \int\limits_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx + \int\limits_1^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = I_1 + I_2.$$

I_1 läßt sich durch Abspaltung der Singularitäten bestimmen:

$$I_1 = \int\limits_0^1 (x^{a-1} - x^a + x^{a+1} - x^{a+2} + x^{a+3})\,dx - \int\limits_0^1 \frac{x^{a+4}}{1+x}\,dx = I_{11} - I_{12}.$$

Dabei ist

$$I_{11} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} - \frac{1}{a+3} + \frac{1}{a+4},$$

während I_{12} nach der Simpsonschen Formel berechnet werden muß.

Ist etwa $a = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7071068\ldots$, so erhalten wir $I_{11} = 1{,}14052\ldots$; für I_{12} ergibt sich ($2n = 10$; fünf Dezimalen) 0,09518. Also ist $I_1 \approx 1{,}04534$.

Das Integral I_2 formen wir durch die Substitution $x = \frac{1}{t}$ in

$$I_2 = \int_0^1 \frac{t^{b-1}}{1+t}\, dt$$

um; dabei ist $b = 1 - a = 0{,}2928931\ldots$ Analog dem Vorhergehenden finden wir $I_2 \approx 2{,}90289$, also schließlich $I \approx 3{,}94823$. In Nr. 522, 1°, werden wir sehen, daß der genaue Wert von I gleich $\frac{\pi}{\sin \pi a} = 3{,}948246\ldots$ ist.

Bei einem langsam konvergierenden Integral $\int_a^\infty f(x)\, dx$ gelingt es manchmal (z. B. durch wiederholte partielle Integration), die leicht zu berechnenden Glieder so abzutrennen, daß das übrigbleibende Integral möglichst klein wird.

4. Gegeben sei das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Wir schreiben es als Summe $\int_0^A + \int_A^\infty$, jedoch nicht mit der Absicht, das zweite Integral möglichst klein zu machen. Integrieren wir es partiell, so finden wir

$$\int_A^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \left\{-\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} + 2\,\frac{\cos x}{x^3} + 6\,\frac{\sin x}{x^4} - 24\,\frac{\cos x}{x^5} - 120\,\frac{\sin x}{x^6}\right\}\Bigg|_A^\infty$$
$$+ 720 \int_A^\infty \frac{\sin x}{x^7}\, dx.$$

Nehmen wir beispielsweise $A = 2\pi$, so ist

$$\int_{2\pi}^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{1}{2\pi} - \frac{2}{(2\pi)^3} + \frac{23}{(2\pi)^5} + 720 \int_{2\pi}^\infty \frac{\sin x}{x^7}\, dx.$$

Die Summe der ersten drei Glieder ist $0{,}15354\ldots$; das Integral wird folgendermaßen abgeschätzt:

$$0 < 720 \int_{2\pi}^\infty \frac{\sin x}{x^7}\, dx < 720 \int_{2\pi}^\infty \frac{dx}{x^7} = \frac{120}{(2\pi)^6} < 0{,}002.$$

Das Integral $\int_0^{2\pi}$ berechnen wir nach der Simpsonschen Formel ($2n = 40$; vier Dezimalen) und finden 1,4182.

Fehlerabschätzung:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m+1)!}, \qquad f^{(4)}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!\,(2m+5)},$$

$$|f^{(4)}(x)| < \frac{1}{5} \cosh 2\pi < 54, \qquad |R| < 0{,}0012.$$

Daraus folgt bei Berücksichtigung des Gesamtfehlers

$$1{,}5702 < I < 1{,}5752, \qquad I = 1{,}57_{\pm 0{,}01}.$$

Wie wir aus Nr. 492, 3°, wissen, ist $I = \frac{\pi}{2} = 1{,}5707\ldots$

502. Verwendung der asymptotischen Entwicklungen. Bei der näherungsweisen Berechnung von Integralen der Form $\int\limits_x^{\infty} f(t)\,dt$ erweist es sich häufig als zweckmäßig, ihre asymptotischen Entwicklungen zu verwenden. Wir wollen dies an Beispielen demonstrieren.

1. *Der Integrallogarithmus.* Für $0 < a < 1$ ist der Integrallogarithmus li a durch

$$\operatorname{li} a = \int_0^a \frac{du}{\ln u} \tag{12}$$

definiert. Für $a > 1$ ist dieses Integral divergent, und man hat es im Sinne seines Hauptwertes (Nr. 484) zu verstehen:

$$\operatorname{li} a = \text{V.p.} \int_0^a \frac{du}{\ln u} = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^{a} \right) \frac{du}{\ln u}. \tag{12*}$$

Zunächst sei $a < 1$. Wir setzen $a = e^{-x}$ für $x > 0$ und nehmen in (12) die Substitution $u = e^{-t}$ vor:

$$\operatorname{li}(e^{-x}) = -\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt. \tag{13}$$

Mit $t = x + v$ gelangen wir zu

$$\operatorname{li}(e^{-x}) = -e^{-x} \int_0^{\infty} \frac{e^{-v}\,dv}{x+v}. \tag{14}$$

Wegen

$$\frac{1}{x+v} = \frac{1}{x} - \frac{v}{x^2} + \frac{v^2}{x^3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{v^{n-1}}{x^n} + (-1)^n \frac{v^n}{x^n(x+v)}$$

gewinnen wir aus (14)

$$\operatorname{li}(e^{-x}) = -e^{-x} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} + r_n(x) \right] \tag{15}$$

(vgl. Nr. 489, Beispiel 4) mit dem Restglied

$$r_n(x) = (-1)^n \int_0^{\infty} \frac{v^n e^{-v}\,dv}{x^n(x+v)}. \tag{15a}$$

Ohne dieses Restglied können wir

$$\operatorname{li}(e^{-x}) \sim -e^{-x}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n} + \cdots\right] \tag{16}$$

schreiben; diese Reihe ist offenbar divergent, denn der Quotient aus dem letzten und dem vorhergehenden Glied, $\frac{n}{x}$, strebt mit n gegen ∞. Aus (15a) ist ersichtlich, daß das Restglied das Vorzeichen des ersten vernachlässigten Gliedes der Reihe hat und dem absoluten Betrag nach kleiner als dieses Glied ist[1]):

$$|r_n(x)| < \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^\infty e^{-v} v^n \, dv = \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Die Reihe (16) alterniert also um die Funktion li (e^{-x}) und ist gleichzeitig die asymptotische Darstellung der Funktion (vgl. Nr. 463). Aus Kapitel XII, § 6, wissen wir, daß eine solche Reihe zu näherungsweisen Berechnungen benutzt werden kann; das beste Resultat ergibt sich, wenn $n = [x]$ ist.

Der Fall $a > 1$ und $x < 0$ ist bedeutend komplizierter. Auch hier kann man die Formeln (13) bis (16) aufstellen, jedoch sind alle Integrale nur im Sinne ihres Hauptwertes zu verstehen. Der Ausdruck (16) erweist sich in diesem Fall als nicht alternierend (es ist nämlich $x < 0$). Die Abschätzung des Restgliedes ist mit großen Schwierigkeiten verknüpft. Mit Hilfe ausführlicher Untersuchungen gelang es STIELTJES[2]) zu zeigen, daß für ein gegebenes $x < 0$ die Zahl li (e^{-x}) am besten approximiert wird, wenn man $n = [|x|]$ nimmt; dabei wird die Ordnung der Approximation durch $\sqrt{\frac{2\pi}{|x|}}$ abgeschätzt.

Für die Funktion li (e^{-x}) können wir eine für alle reellen x gültige Entwicklung nach ganzen wachsenden Potenzen von x herleiten. Zu diesem Zweck schreiben wir (13) in der Gestalt

$$\operatorname{li}(e^{-x}) = \int_0^1 (1 - e^{-t})\frac{dt}{t} - \int_1^\infty e^{-t}\frac{dt}{t} + \int_1^x \frac{dt}{t} - \int_0^x (1 - e^{-t})\frac{dt}{t}.$$

Das Integral $\int_1^x \frac{dt}{t}$ ist für $x < 0$ divergent, so daß sein Hauptwert genommen werden muß; er ist gleich

$$\lim_{\varepsilon \to +0}\left(\int_1^{\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{0}\right)\frac{dt}{t} = \lim_{\varepsilon \to +0}\left[\ln \varepsilon + \ln \frac{-x}{\varepsilon}\right] = \ln(-x) = \ln |x|.$$

Die Summe der beiden ersten Integrale ist eine von x unabhängige Konstante C.[3]) Wir brauchen nun nur noch das letzte Integral nach Potenzen von x zu entwickeln, um das geforderte Resultat zu erhalten:

$$\operatorname{li}(e^{-x}) = C + \ln|x| - x + \frac{x^2}{2!\,2} - \frac{x^3}{3!\,3} + \frac{x^4}{4!\,4} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!\,n} - + \cdots. \tag{17}$$

---

[1]) Im betrachteten Fall $a < 1$ können die asymptotische Entwicklung (16) und der Ausdruck für das Restglied durch mehrmalige partielle Integration von (13) hergeleitet werden. Dieser Weg ist uns jedoch im Fall $a > 1$ verschlossen.

[2]) THOMAS JEAN STIELTJES, 1856—1894, holländischer Mathematiker.

[3]) In Nr. 538, Beispiel 3, werden wir sehen, daß C mit der Eulerschen Konstanten identisch ist.

Es ist jedoch nicht ratsam, diese Entwicklung bei großen Werten von $|x|$ zu verwenden; der divergenten Entwicklung (16) ist in diesem Fall entschieden der Vorzug zu geben. So fand STIELTJES mit 23 Gliedern der Reihe (16) den Wert

$$\mathrm{li}\, 10^{10} = 455055614{,}586;$$

bei der Reihe (17) würden wir mehr als 10^{10} Glieder benötigen, um die gleiche Genauigkeit zu erzielen!

2. *Integralkosinus und Integralsinus:*

$$P = \mathrm{ci}\, x = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt, \qquad Q = \mathrm{si}\, x = -\int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

Zur Vereinfachung der Betrachtung führen wir das Integral einer komplexwertigen Funktion einer reellen Veränderlichen ein:

$$P + \mathrm{i}Q = -\int_x^\infty \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{t}\, dt = \mathrm{i}\int_x^\infty \frac{d\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{t}.$$

Durch partielle Integration ergibt sich die Formel

$$P + \mathrm{i}Q = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\mathrm{i}x} + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{(\mathrm{i}x)^2} + 2!\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{(\mathrm{i}x)^3} + 3!\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{(\mathrm{i}x)^4} + \cdots + (n-1)!\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{(\mathrm{i}x)^n} + r_n(x)$$

mit dem Restglied

$$r_n(x) = (-1)^{n-1}\, \mathrm{i}^n n! \int_x^\infty \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{t^{n+1}}\, dt.$$

Dividieren wir die erhaltene Formel gliedweise durch $-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ und vergleichen wir die Real- und Imaginärteile auf beiden Seiten, so gelangen wir zu den für Berechnungen geeigneteren Beziehungen[1])

$$\begin{aligned}\int_x^\infty \frac{\cos(t-x)}{t}\, dt &= -P\cos x - Q\sin x \\ &= \frac{1}{x}\left[\frac{1}{x} - \frac{3!}{x^3} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{(2m-1)!}{x^{2m-1}}\right] + r'_{2m-1}(x)\end{aligned} \tag{18}$$

und

$$\begin{aligned}\int_x^\infty \frac{\sin(t-x)}{t}\, dt &= P\sin x - Q\cos x \\ &= \frac{1}{x}\left[1 - \frac{2!}{x^2} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{(2m-2)!}{x^{2m-2}}\right] + r''_{2m-2}(x).\end{aligned} \tag{19}$$

Dabei ist

$$r'_{2m-1}(x) = (-1)^m (2m+1)! \int_x^\infty \frac{\sin(t-x)}{t^{2m+2}}\, dt$$

und

$$r''_{2m-2}(x) = (-1)^m (2m)! \int_x^\infty \frac{\sin(t-x)}{t^{2m+1}}\, dt.$$

---

[1]) Es ist interessant, daß die Glieder in den eckigen Klammern zu den Gliedern der bekannten Potenzreihen für den Sinus bzw. den Kosinus (Nr. 404, (12) bzw. (13)) *invers* sind.

Es läßt sich leicht zeigen (z. B. mit Hilfe der Bonnetschen Formel; Nr. 306, (3)), daß

$$\left| \int_x^X \frac{\sin(t-x)}{t^n}\, dt \right| \leqq \frac{2}{x^n}$$

gilt. Für $X \to \infty$ sehen wir, daß das Restglied in (18) bzw. (19) dem absoluten Betrag nach nicht größer ist als das Doppelte des ersten vernachlässigten Gliedes (der entsprechenden Entwicklung). Setzen wir also die Entwicklungen (18) und (19) bis ins Unendliche fort, so gelangen wir zu den asymptotischen Entwicklungen der Integrale auf den linken Seiten.

Zum Beispiel finden wir aus (19), wenn wir dort $x = k\pi$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ setzen,

$$\varrho_k = \operatorname{si} k\pi = -\int_{k\pi}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt \approx (-1)^{k+1} \left\{ \frac{1}{k\pi} - \frac{2!}{(k\pi)^3} + \frac{4!}{(k\pi)^5} - \cdots \right\}$$

und hieraus für $k > 2$ leicht die Näherungswerte

$$\varrho_3 \approx 0{,}1040, \quad \varrho_4 \approx -0{,}0786, \quad \varrho_5 \approx 0{,}0631, \quad \varrho_6 \approx -0{,}0528,$$

Beispielsweise genügen zur Berechnung von ϱ_4 drei Glieder aus der geschweiften Klammer:

$$0{,}07958 - 0{,}00101 + 0{,}00008 = 0{,}07865;$$

da der Fehler dem absoluten Betrag nach kleiner als

$$2 \cdot 0{,}000015 = 0{,}00003$$

ist, liegt $|\varrho_4|$ zwischen 0,07862 und 0,07868. Also ist

$$\varrho_4 = -0{,}0786\ldots$$

XIV. Integrale, die von einem Parameter abhängen

§ 1. Elementare Theorie

503. Aufgabenstellung. Wir betrachten eine Funktion $f(x, y)$ zweier unabhängiger Veränderlicher; $f(x, y)$ sei für alle Werte von x aus einem gewissen Intervall $[a, b]$ und alle Werte von y einer Menge $\mathcal{Y} = \{y\}$ definiert und für jeden konstanten Wert y aus $\mathcal{Y}$ im Intervall $[a, b]$ im „eigentlichen“ oder uneigentlichen Sinne integrierbar. Dann ist das Integral

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx \tag{1}$$

offenbar eine Funktion der „Hilfsvariablen“ oder des Parameters y.

Bei den Funktionenfolgen $\{f_n(x)\}$ in Nr. 436 betrachteten wir die Integrale

$$I_n = \int_a^b f_n(x)\, dx,$$

die einen Spezialfall der Integrale (1) darstellen: Der Parameter ist hier der Index n.

Bezüglich der Funktion $I(y)$ entstehen natürlich eine Reihe von Fragen, etwa nach der Existenz und dem Aussehen des Grenzwerts bei einem bestimmten Grenzübergang, insbesondere nach ihrer Stetigkeit bezüglich y, nach ihrer Differenzierbarkeit und dem Ausdruck für ihre Ableitung und schließlich nach ihren Integralen. Diesen Fragen ist das vorliegende Kapitel gewidmet.

Das Studium der Eigenschaften von Funktionen, die von einem Parameter abhängen und durch das Integral (1) dargestellt werden, ist auch unabhängig von dem eben Gesagten von Interesse (vgl. etwa § 5). So finden ihre Eigenschaften, wie wir sehen werden, vielseitige Anwendung, insbesondere bei der Berechnung uneigentlicher Integrale.

504. Gleichmäßige Annäherung an die Grenzfunktion. Die entscheidende Rolle wird in den folgenden Überlegungen der Begriffe der gleichmäßigen Annäherung an die Grenzfunktion spielen. Die Funktion $f(x, y)$ sei im allgemeinen Fall in der zweidimensionalen Menge $\mathcal{M} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ definiert; dabei bezeichnen $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ die Mengen der Variablen x bzw. y, und $\mathcal{Y}$ besitze einen Häufungspunkt, etwa die *endliche* Zahl y_0.

Wenn a) die Funktion $f(x, y)$ für $y \to y_0$ eine endliche Grenzfunktion

$$\lim_{y \to y_0} f(x, y) = \varphi(x) \qquad (x \text{ aus } \mathcal{X}) \tag{2}$$

besitzt und b) für $\varepsilon > 0$ eine nicht von x abhängige Zahl $\delta > 0$ derart existiert, daß im Fall $|y - y_0| < \delta$

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon \tag{3}$$

gleichzeitig für alle x aus $\mathfrak{X}$ gilt, so sagen wir, daß *die Funktion $f(x, y)$ gleichmäßig für alle x aus $\mathfrak{X}$ gegen die Grenzfunktion $\varphi(x)$ strebt.*

Diese Definition läßt sich auch leicht für den Fall formulieren, daß y_0 keine endliche Zahl, sondern z. B. ∞ ist; dabei braucht die Ungleichung $|y - y_0| < \delta$ nur durch eine Ungleichung der Form $y > \Delta$ ersetzt werden. In Kapitel XII, Nr. 428, hatten wir es schon mit einem Spezialfall einer gleichmäßigen Annäherung an die Grenzfunktion zu tun; dort war von der Funktion $f_n(x)$ die Rede, die als Parameter den natürlichen Index n enthält.

In Nr. 429 (bei den Funktionenfolgen) hatten wir festgestellt, daß die Konvergenz genau dann gleichmäßig ist, wenn das Konvergenzprinzip gleichmäßig erfüllt ist. Entsprechendes ergibt sich auch im allgemeinen Fall; es gilt nämlich (wenn wir voraussetzen, y_0 sei endlich):

1°. *Die Funktion $f(x, y)$ hat genau dann eine Grenzfunktion und strebt gegen diese genau dann gleichmäßig bezüglich x aus $\mathfrak{X}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine nicht von x abhängige Zahl $\delta > 0$ derart gibt, daß die Ungleichung*

$$|f(x, y') - f(x, y)| < \varepsilon \tag{4}$$

für alle x aus $\mathfrak{X}$ gleichzeitig erfüllt ist, sobald

$$|y - y_0| < \delta, \qquad |y' - y_0| < \delta \qquad (x, y_0 \text{ aus } \mathfrak{Y}) \tag{5}$$

gilt.

(Im Fall $y_0 = \infty$ sind die Ungleichungen (5) durch $y > \Delta$, $y'\,\Gamma > \Delta$ zu ersetzen.)

Beweis. Zum Nachweis, daß die Bedingung notwendig ist, nehmen wir an, die Konvergenz sei gleichmäßig. Wir ersetzen ε durch $\varepsilon/2$, wählen δ entsprechend und nehmen zwei Werte y und y' aus $\mathfrak{Y}$, so daß (5) erfüllt ist. Dann gilt für jedes x

$$|f(x, y') - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad |\varphi(x) - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

woraus sich (4) ergibt.

Wir zeigen nun, daß die Bedingung hinreichend ist. Ist sie erfüllt, so existiert offenbar die Grenzfunktion (2). Gehen wir in (4) mit $y' \to y_0$ zur Grenze über (y sei so gewählt, daß $|y - y_0| < \delta$ ist), so erhalten wir

$$|\varphi(x) - f(x, y)| < \varepsilon.$$

Dadurch ist die *gleichmäßige* Annäherung von $f(x, y)$ an die Grenzfunktion $\varphi(x)$ bewiesen.

Wir zeigen nun, wie sich dieses Problem auf die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen zurückführen läßt:

2°. *Die Funktion $f(x, y)$ strebt für $y \to y_0$ genau dann gleichmäßig (bezüglich x aus $\mathfrak{X}$) gegen die Grenzfunktion $\varphi(x)$, wenn jede Folge $\{f(x, y_n)\}$ gleichmäßig gegen $\varphi(x)$ konvergiert, unabhängig davon, wie die Zahlenfolge $\{y_n\}$ (mit Werten aus $\mathfrak{Y}$) gegen y_0 strebt.*

Beim Beweis beschränken wir uns auf endliches y_0.

Beweis. Strebt $f(x, y)$ gleichmäßig gegen $\varphi(x)$, so gibt es per definitionem zu jedem $\varepsilon > 0$ eine entsprechende Zahl $\delta > 0$ (vgl. (3)). Zu jeder gegen y_0 strebenden

Zahlenfolge $\{y_n\}$ existiert eine Zahl N derart, daß für $n > N$

$$|y_n - y_0| < \delta$$

ist. Für diese Werte von n ist dann auf Grund von (3) die Ungleichung

$$|f(x, y_n) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

für alle x gleichzeitig erfüllt. Damit ist die gleichmäßige Konvergenz der Folge $\{f(x, y_n)\}$ bewiesen.

Nun konvergiere jede solche Folge gleichmäßig gegen $\varphi(x)$. Daß die Funktion $f(x, y)$ gleichmäßig gegen $\varphi(x)$ strebt, beweisen wir indirekt. Angenommen also, $f(x, y)$ strebe nicht gleichmäßig gegen $\varphi(x)$, dann gibt es, welches $\delta = \delta' > 0$ wir auch wählen, zu einem gewissen $\varepsilon > 0$ einen Wert $y = y'$ mit $|y' - y_0| < \delta'$ aus $\mathcal{Y}$ derart, daß mindestens für einen Wert $x = x'$ aus $\mathcal{X}$ die Ungleichung

$$|f(x', y') - \varphi(x')| \geqq \varepsilon$$

erfüllt ist. Wir nehmen nun eine Nullfolge $\{\delta_n\}$ positiver Zahlen. Jedem δ_n können wir, wie gesagt, zwei Werte y_n und x_n derart zuordnen, daß zwar $|y_n - y_0| < \delta_n$, aber

$$|f(x_n, y_n) - \varphi(x_n)| \geqq \varepsilon \tag{6}$$

ist. Offenbar strebt y_n gegen y_0 (wegen $\delta_n \to 0$), aber die Folge $\{f(x, y_n)\}$ kann wegen (6) nicht gleichmäßig gegen $\varphi(x)$ konvergieren. Wir sind damit auf einen Widerspruch gestoßen.

Die Menge $\mathcal{X}$ stelle nun das endliche Intervall $[a, b]$ dar. Wir wissen aus Nr. 436: Wenn eine Folge stetiger (oder im „eigentlichen“ Sinne integrierbarer) Funktionen $f_n(x)$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion konvergiert, so muß auch diese Grenzfunktion notwendig stetig (oder integrierbar) sein. Auf Grund von Satz 2° ist klar, daß sich das eben Gesagte auch auf unseren allgemeinen Fall übertragen läßt:

3° *Ist eine Funktion $f(x, y)$ für jedes y aus $\mathcal{Y}$ stetig (integrierbar) bezüglich x aus dem Intervall $\mathcal{X} = [a, b]$ und strebt $f(x, y)$ für $y \to y_0$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $\varphi(x)$, so ist auch $\varphi(x)$ stetig (integrierbar).*

Im Interesse der weiteren Darlegungen beweisen wir die folgende Verallgemeinerung des Satzes von Dini (Nr. 431). Dabei wollen wir voraussetzen, daß alle y kleiner als y_0 sind.

4°. *Ist die Funktion $f(x, y)$ für jedes y aus $\mathcal{Y}$ stetig bezüglich x aus dem Intervall $\mathcal{X} = [a, b]$ und strebt sie für wachsendes y monoton wachsend gegen die ebenfalls stetige Grenzfunktion $\varphi(x)$, so ist diese Konvergenz notwendig gleichmäßig bezüglich x aus $\mathcal{X}$.*

Beweis. Wir wählen aus $\mathcal{Y}$ eine monoton wachsende, gegen y_0 strebende Folge $\{y_n\}$ aus und betrachten die entsprechende Funktionenfolge $\{f(x, y_n)\}$, die offenbar ebenfalls mit n monoton wächst. Da die Reihe

$$f(x, y_1) + \sum_{n=2}^{\infty} [f(x, y_n) - f(x, y_{n-1})] = \varphi(x)$$

aus positiven Gliedern besteht (eventuell mit Ausnahme des ersten Gliedes), können wir auf Grund des Satzes von Dini behaupten, daß diese Reihe gleichmäßig bezüglich x aus dem Intervall $\mathcal{X}$ konvergiert. Folglich existiert zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$ eine solche Zahl n_0, daß die Ungleichung

$$|\varphi(x) - f(x, y_{n_0})| < \varepsilon$$

für alle x aus $\mathcal{X}$ gleichzeitig erfüllt ist. Da f mit y monoton wächst, ist erst recht die Ungleichung

$$|\varphi(x) - f(x, y)| < \varepsilon$$

erfüllt, sobald $y > y_{n_0}$ ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Obgleich dieses spezielle Kriterium sehr eng erscheint, kann es doch oft nützlich sein, da es uns von der Notwendigkeit befreit, uns auf anderem Wege von der gleichmäßigen Konvergenz zu überzeugen.

505. Vertauschung zweier Grenzübergänge. Dieses Kapitel ist der *Vertauschbarkeit zweier Grenzübergänge* gewidmet. Dieser Frage in ihrer einfachsten Form begegneten wir schon in Nr. 168, als von der Existenz und der Gleichheit der iterierten Grenzwerte

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x, y) \quad \text{und} \quad \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x, y) \tag{7}$$

unter der Voraussetzung, daß der zweifache Grenzwert

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)$$

existiert, die Rede war. Danach sahen wir in Nr. 436, daß der Satz über den gliedweisen Grenzübergang in einer gleichmäßig konvergenten Funktionenreihe in ähnlicher Form ausgedrückt werden konnte:

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x).$$

Dabei wurde vorausgesetzt, daß die Funktion $f_n(x)$ für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen ihre Grenzfunktion strebt.

Wir benutzen nun den in Nr. 504 eingeführten Begriff der gleichmäßigen Konvergenz, um einen allgemeinen Satz dieser Art zu formulieren. Vorausgesetzt sei, daß die Funktion $f(x, y)$ in der zweidimensionalen Menge $\mathcal{M} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ definiert sei, wobei die Mengen $\mathcal{X} = \{x\}$ und $\mathcal{Y} = \{y\}$ den (endlichen oder unendlichen) Häufungspunkt x_0 bzw. y_0 haben mögen.

Für jedes x aus $\mathcal{X}$ und jedes y aus $\mathcal{Y}$ mögen die einfachen Grenzwerte

$$\lim_{y\to y_0} f(x, y) = \varphi(x) \quad \textit{und} \quad \lim_{x\to x_0} f(x, y) = \psi(y)$$

existieren. Strebt für $y \to y_0$ die Funktion $f(x, y)$ gleichmäßig bezüglich x aus $\mathcal{X}$ gegen die Grenzfunktion $\varphi(x)$, so existieren die iterierten Grenzwerte (7) *und sind einander gleich.*

Wir können diesen Satz leicht auf seinen oben erwähnten Spezialfall zurückführen, aber wir ziehen es der Deutlichkeit wegen vor, diesen Satz unabhängig von seinem Spezialfall zu beweisen (wir nehmen dabei an, daß beide Zahlen x_0 und y_0 endlich sind).

Wir geben eine beliebige Zahl $\varepsilon > 0$ vor und finden auf Grund von Satz 1° aus Nr. 504 eine ihr zugeordnete Zahl $\delta > 0$ derart, daß die Ungleichungen (5) die Ungleichung (4) für jedes x aus $\mathcal{X}$ nach sich ziehen. Die den Ungleichungen (5) genügen-den Werte y und y' seien fest, und es strebe x gegen x_0. Gehen wir in (4) zum Grenzwert über, so erhalten wir

$$|\psi(y') - \psi(y)| \leqq \varepsilon. \tag{8}$$

Damit ist für die Funktion $\psi(y)$ beim Grenzübergang $y \to y_0$ die klassische Bedingung von Bolzano-Cauchy (Nr. 58) erfüllt, woraus sich die Existenz des endlichen Grenzwerts

$$\lim_{y \to y_0} \psi(y) = A$$

ergibt. Nun ist klar, daß für jedes x aus $\mathscr{X}$

$$|\varphi(x) - f(x, y)| \leqq \varepsilon \quad \text{und} \quad |\psi(y) - A| \leqq \varepsilon$$

gilt, sobald $|y - y_0| < \delta$ ist. Dies sehen wir sofort, wenn wir in (4) und (8) zum Grenzwert für $y' \to y_0$ und bei festgehaltenen x und y übergehen. Zu diesem festen y können wir ein $\delta' > 0$ derart finden, daß

$$|f(x, y) - \psi(y)| < \varepsilon$$

ist, sobald $|x - x_0| < \delta'$ gilt. Dann folgt aus allen diesen Ungleichungen, daß für diese x-Werte auch

$$|\varphi(x) - A| < 3\varepsilon$$

ist. Also gilt

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = A.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkung. Man kann zeigen, daß die Zahl A gleichzeitig auch der zweifache Grenzwert der Funktion $f(x, y)$ ist (vgl. S. 600), wenn gleichzeitig x gegen x_0 und y gegen y_0 streben. Dadurch wird eine Verbindung zwischen dem eben bewiesenen Satz und dem Satz aus Nr. 168 hergestellt.

506. Grenzübergang unter dem Integralzeichen. Wir betrachten nun das vom Parameter y abhängige Integral (1) und beschränken uns zunächst auf ein endliches Intervall $[a, b]$ und eine im „eigentlichen" Sinne integrierbare Funktion.

Wir nehmen an, der Wertebereich $\mathscr{Y}$ des Parameters y habe den Häufungspunkt y_0, und fragen nach dem Grenzwert der Funktion (1) für $y \to y_0$.

Satz 1. *Ist die Funktion $f(x, y)$ bei konstantem y nach x im Intervall $[a, b)$ integrierbar und strebt sie für $y \to y_0$ gleichmäßig bezüglich x gegen die Grenzfunktion* (2), *so gilt*

$$\lim_{y \to y_0} I(y) = \lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \varphi(x)\, dx. \tag{9}$$

Beweis.[1] Die Integrierbarkeit der Grenzfunktion $\varphi(x)$ ist bekannt (Nr. 504, Satz 3°). Geben wir eine beliebige Zahl $\varepsilon > 0$ vor, so läßt sich zu ihr ein $\delta > 0$ derart

[1]) Wir nehmen y_0 als endlich an.

finden, daß (3) für alle x mit $a \leqq x \leqq b$ gilt, sobald $|y - y_0| < \delta$ ist. Dann ist

$$\left|\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b [f(x, y) - \varphi(x)]\,\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqq \int_a^b |f(x, y) - \varphi(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon(b - a)$$

für $|y - y_0| < \delta$. Damit ist (9) bewiesen.

Die Formel (9) können wir auch in der Gestalt

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{y \to y_0} f(x, y)\,\mathrm{d}x$$

schreiben; der Grenzübergang nach dem Parameter ist also auch unter dem Integralzeichen erlaubt.

Setzen wir voraus, daß alle y kleiner als y_0 sind, so gilt die

Folgerung. *Ist die Funktion $f(x, y)$ bei konstantem y stetig bezüglich x aus $[a, b]$ und strebt sie mit wachsendem y monoton wachsend gegen die ebenfalls stetige Grenzfunktion, so gilt* (9).

Zum Beweis muß der verallgemeinerte Satz von Dini (Nr. 504, Satz 4°) herangezogen werden.

Unter der Voraussetzung, daß $\mathcal{Y}$ ein endliches Intervall $[c, d]$ ist, betrachten wir zum Schluß noch die Stetigkeit der Funktion (1).

Satz 2. *Ist $f(x, y)$ als Funktion zweier Veränderlicher in dem Rechteck $[a, b; c, d]$ definiert und stetig, so ist das Integral* (1) *eine stetige Funktion des Parameters y im Intervall $[c, d]$.*

Beweis. Da $f(x, y)$ gleichmäßig stetig ist (vgl. Nr. 174), existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, daß für alle (x', y') und (x'', y'') aus den Ungleichungen $|x'' - x'| < \delta$, $|y'' - y'| < \delta$ die Ungleichung $|f(x'', y'') - f(x', y')| < \varepsilon$ folgt. Setzen wir insbesondere $x' = x'' = x$, $y' = y_0$, $y'' = y$, so gilt für $|y - y_0| < \delta$ und beliebiges x

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon .$$

Daher konvergiert $f(x, y)$ gleichmäßig bezüglich x gegen $f(x, y_0)$, wenn y gegen einen beliebigen speziellen Wert y_0 strebt. Auf Grund von Satz 1 ist dann

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x, y_0)\,\mathrm{d}x$$

oder

$$\lim_{y \to y_0} I(y) = I(y_0),$$

womit der Satz 2 bewiesen ist.

Ohne z. B. die Integrale

$$\int_0^1 \arctan \frac{x}{y}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^1 \ln (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x$$

zu berechnen, sehen wir sofort, daß sie für alle positiven Werte des Parameters y stetige Funktionen von y sind.

507. Differentiation unter dem Integralzeichen. Beim Studium der Funktion (1), die durch ein Integral mit dem Parameter y dargestellt wird, hat die Frage nach der Ableitung dieser Funktion nach dem Parameter eine große Bedeutung.

Unter der Voraussetzung, die partielle Ableitung $f_y(x, y)$ existiere, gab LEIBNIZ zur Berechnung der Ableitung $I'(y)$ eine Regel an, die in der Lagrangeschen Schreibweise die Form

$$I'(y) = \int_a^b f_y(x, y)\,dx, \tag{10}$$

in der ausdrucksvolleren Cauchyschen Schreibweise die Form

$$D_y \int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b D_y f(x, y)\,dx$$

hat. Wenn diese Vertauschung der Differentiation (nach y) mit der Integration (nach x) zulässig ist, so sagt man, die Funktion (1) könne *unter dem Integralzeichen nach dem Parameter differenziert* werden.

Die Berechnung der Ableitung nach der obigen Formel trägt den Namen *Leibnizsche Regel.*

Im folgenden Satz geben wir einfache hinreichende Bedingungen für die Anwendbarkeit der Leibnizschen Regel an.

Satz 3. *Die Funktion $f(x, y)$ sei in dem Rechteck $[a, b; c, d]$ definiert und für jedes konstante y aus $[c, d]$ stetig bezüglich x aus $[a, b]$. Ferner existiere im ganzen Bereich die partielle Ableitung $f_y(x, y)$, die als Funktion zweier Veränderlicher stetig ist.*[1] *Dann gilt für jedes y aus $[c, d]$ die Formel* (10).

Die Stetigkeit der Funktion $f(x, y)$ bezüglich x zieht die Existenz des Integrals (1) nach sich.

Wir wählen y fest, $y = y_0$, und geben ihm den Zuwachs $\Delta y = k$. Dann ist

$$I(y_0) = \int_a^b f(x, y_0)\,dx, \qquad I(y_0 + k) = \int_a^b f(x, y_0 + k)\,dx,$$

also

$$\frac{I(y_0 + k) - I(y_0)}{k} = \int_a^b \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k}\,dx. \tag{11}$$

Das Integral auf der rechten Seite hängt von dem Parameter k ab. Wir müssen zeigen, daß hier der Grenzübergang $k \to 0$ unter dem Integralzeichen ausgeführt werden darf. Damit ist dann auch die Existenz der Ableitung

$$I'(y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{I(y_0 + k) - I(y_0)}{k}$$

---

[1]) Aus diesen Bedingungen folgt auch die Stetigkeit von $f(x, y)$ in beiden Argumenten; wir werden sie jedoch nicht benutzen.

und die Gültigkeit der Gleichung

$$I'(y_0) = \lim_{k\to 0} \int_a^b \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k}\, dx$$

$$= \int_a^b \lim_{k\to 0} \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k}\, dx = \int_a^b f_y(x, y_0)\, dx$$

bewiesen.

Mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung schreiben wir

$$\frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k} = f_y(x, y_0 + \theta k) \qquad (0 < \theta < 1). \tag{12}$$

Da $f_y(x, y)$ gleichmäßig stetig ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, daß für $|x'' - x'| < \delta$ und $|y'' - y'| < \delta$ die Ungleichung

$$|f_y(x'', y'') - f_y(x', y')| < \varepsilon$$

erfüllt ist. Setzen wir hier $x' = x'' = x$, $y' = y_0$, $y'' = y_0 + \theta k$ und nehmen wir $|k| < \delta$, so erhalten wir auf Grund von (12) für alle x gleichzeitig

$$\left|\frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k} - f_y(x, y_0)\right| < \varepsilon.$$

Daraus folgt, daß der Integrand (12) für $k \to 0$ gleichmäßig bezüglich x gegen die Grenzfunktion $f_y(x, y_0)$ strebt. Daher ist auf Grund von Satz 1 auch in (11) der Grenzübergang unter dem Integralzeichen erlaubt.

Als Beispiele betrachten wir die schon in Nr. 506 angegebenen Integrale. Offenbar ist für $y > 0$

$$D_y \int_0^1 \arctan\frac{x}{y}\, dx = \int_0^1 D_y \arctan\frac{x}{y}\, dx = -\int_0^1 \frac{x\, dx}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{y^2}{1 + y^2},$$

$$D_y \int_0^1 \ln(x^2 + y^2)\, dx = \int_0^1 D_y \ln(x^2 + y^2)\, dx = \int_0^1 \frac{2y}{x^2 + y^2}\, dx = 2\arctan\frac{1}{y}.$$

Diese Resultate können wir leicht nachprüfen, indem wir die Integrale in geschlossener Form angeben,

$$I_1(y) = \int_0^1 \arctan\frac{x}{y}\, dx = \arctan\frac{1}{y} + \frac{1}{2}\, y \ln\frac{y^2}{1 + y^2},$$

$$I_2(y) = \int_0^1 \ln(x^2 + y^2)\, dx = \ln(1 + y^2) - 2 + 2y\arctan\frac{1}{y},$$

und dann nach y differenzieren.

Für $y = 0$ sind die Bedingungen aus Satz 3 nicht erfüllt. Wir wollen untersuchen, wie sich die Ableitungen der Funktionen $I_1(y)$ und $I_2(y)$ für $y = 0$ verhalten. Schreiben wir dem Integranden von $I_1(y)$, um seine Stetigkeit zu bewahren, für $y = 0$ und $x > 0$ den Wert $\pi/2$ zu, so erhalten wir $I_1(0) = \frac{\pi}{2}$, so daß $I_1(y)$ auch für $y = 0$ bezüglich y stetig ist. Nun ist jedoch

$$\frac{I_1(y) - I_1(0)}{y} = \frac{1}{2} \ln \frac{y^2}{1 + y^2} - \frac{\arctan y}{y} \to -\infty$$

für $y \to 0$, so daß für $y = 0$ keine endliche Ableitung existiert. Bei der zweiten Funktion $I_2(y)$ ist

$$I_2(0) = -2, \qquad \frac{I_2(y) - I_2(0)}{y} = \frac{\ln(1 + y^2)}{y} + 2 \arctan \frac{1}{y} \to \pi$$

für $y \to 0$, also $I_2'(0) = \pi$, während die Ableitung des Integranden nach y für $y = 0$ verschwindet, so daß ihr Integral ebenfalls gleich 0 ist. Wir sehen also, daß die Leibnizsche Regel hier versagt.

508. Integration unter dem Integralzeichen. Wir wollen nun das Integral der Funktion (1) nach y, etwa über das Intervall $[c, d]$, untersuchen.

Uns interessiert besonders der Fall, daß dieses Integral durch die Beziehung

$$\int_c^d I(y)\, dy = \int_c^d \left\{\int_a^b f(x, y)\, dx\right\} dy = \int_a^b \left\{\int_c^d f(x, y)\, dy\right\} dx$$

ausgedrückt wird, die auch ohne Klammern häufig in der Form

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx$$

oder

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy \tag{13}$$

geschrieben wird. Gilt diese Beziehung, so sagt man, *die Funktion* (1) *könne unter dem Integralzeichen* (für die Integration nach x) *auch nach dem Parameter y integriert werden.*

Die einfachste Bedingung, die für die Gleichheit der beiden Doppelintegrale (13) hinreichend ist, gibt der folgende Satz an:

Satz 4. *Ist die Funktion $f(x, y)$ bezüglich beider Argumente im Rechteck* $[a, b;\ c, d]$ *stetig, so gilt* (13).

Wir wollen die allgemeinere Gleichung

$$\int_c^\eta dy \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b dx \int_c^\eta f(x, y)\, dy \tag{13*}$$

beweisen, wobei $c \leqq \eta \leqq d$ ist.

Auf jeder Seite steht eine Funktion des Parameters η. Wir wollen ihre Ableitung nach η berechnen.

Das äußere Integral auf der linken Seite hat als Integranden die Funktion (1), die auf Grund von Satz 2 bezüglich y stetig ist. Daher ist ihre Ableitung nach der variablen oberen Grenze η gleich dem Integranden an der Stelle $y = \eta$, d. h. gleich dem Integral

$$I(\eta) = \int_a^b f(x, \eta)\, dx.$$

Auf der rechten Seite von (13*) steht das Integral

$$\int_a^b \varphi(x, \eta)\, dx \quad \text{mit} \quad \varphi(x, \eta) = \int_c^\eta f(x, y)\, dy .$$

Die Funktion $\varphi(x, \eta)$ genügt den Bedingungen von Satz 3, denn sie ist auf Grund von Satz 2 bezüglich x stetig.[1]) Dann ist $\varphi_\eta(x, \eta) = f(x, \eta)$ als Funktion zweier Veränderlicher stetig. Auf das Integral kann also die Leibnizsche Regel angewendet werden:

$$D_\eta \int_a^b \varphi(x, \eta)\, dx = \int_a^b \varphi_\eta(x, \eta)\, dx = \int_a^b f(x, \eta)\, dx = I(\eta).$$

Die linke und die rechte Seite von (13*) haben also als Funktionen von η gleiche Ableitungen und können sich folglich nur um eine additive Konstante unterscheiden. Da aber für $\eta = c$ beide Seiten offenbar verschwinden, sind sie auch für alle Werte von η identisch. Damit ist (13*) bewiesen.

Für $\eta = d$ folgt aus (13*) insbesondere die Gleichung (13).

Beispiele.

1. Es sei $f(x, y) = x^y$ im Rechteck $[0, 1; a, b]$, $0 < a < b$. Die Bedingungen des Satzes sind erfüllt. Hier ist

$$\int_a^b dy \int_0^1 x^y\, dx = \int_0^1 dx \int_a^b x^y\, dy.$$

Auf der linken Seite ergibt sich sofort

$$\int_a^b \frac{dy}{1 + y} = \ln \frac{1 + b}{1 + a},$$

rechts gelangen wir zum Integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx$. Durch Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen erhalten wir damit den Wert des Integrals in Nr. 497, Beispiel 16 (c).

2. Bei der Funktion $f(x, y) = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ im Rechteck $[0, 1; 0, 1]$ sind die Bedingungen des Satzes nicht erfüllt, da die Funktion im Punkt $(0, 0)$ unstetig ist. Hier gilt

$$\int_0^1 f(x, y)\, dx = \frac{x}{x^2 + y^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{1 + y^2} \quad (y > 0), \quad \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y)\, dx = \arctan y\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4},$$

während

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)\, dy = -\frac{\pi}{4}$$

ist.

509. Übertragung auf den Fall veränderlicher Integrationsgrenzen. Wir wollen nun den komplizierteren Fall untersuchen, daß nicht nur der Integrand, sondern auch die

[1]) Hier spielt x die Rolle des Parameters.

Integrationsgrenzen von einem Parameter abhängen. In diesem Fall hat das Integral die Gestalt

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x. \tag{14}$$

Wir wollen die Stetigkeit und Differenzierbarkeit dieses Integrals bezüglich des Parameters überprüfen.

Satz 5. *Die Funktion $f(x, y)$ sei definiert und stetig im Rechteck $[a, b; c, d]$, und die Kurven*

$$x = \alpha(y), \qquad x = \beta(y) \qquad (c \leqq y \leqq d)$$

seien stetig und mögen nicht außerhalb des Rechtecks liegen. Dann ist das Integral (14) *eine stetige Funktion von y in $[c, d]$.*

Beweis. Ist y_0 ein beliebiger spezieller Wert von y, so kann (14) in der Gestalt

$$I(y) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y)\,\mathrm{d}x + \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x - \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x \tag{15}$$

geschrieben werden. Das erste Integral mit konstanten Grenzen strebt für $y \to y_0$ gegen

$$I(y_0) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0)\,\mathrm{d}x$$

auf Grund von Satz 2. Die anderen beiden Integrale lassen die Abschätzungen

$$\left|\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\right| \leqq M\,|\beta(y) - \beta(y_0)|, \qquad \left|\int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\right| \leqq M\,|\alpha(y) - \alpha(y_0)|$$

zu, wobei $M = \max|f(x, y)|$ ist, und streben wegen der Stetigkeit von $\alpha(y)$ und $\beta(y)$ für $y \to y_0$ gegen 0. Also ist schließlich

$$\lim_{y \to y_0} I(y) = I(y_0).$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 6. *Hat die Funktion $f(x, y)$ außer den obigen Voraussetzungen im Rechteck $[a, b; c, d]$ eine stetige Ableitung $f_y(x, y)$ und existieren auch die Ableitungen $\alpha'(y)$ und $\beta'(y)$, so läßt sich das Integral* (14) *nach dem Parameter differenzieren. Die Ableitung lautet*

$$I'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f_y(x, y)\,\mathrm{d}x + \beta'(y)\,f(\beta(y), y) - \alpha'(y)\,f(\alpha(y), y). \tag{16}$$

Beweis. Hier gehen wir von (15) aus. Das erste Integral hat für $y = y_0$ eine Ableitung, die auf Grund von Satz 3 durch das Integral der Ableitung darstellbar ist:

$$\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f_y(x, y_0)\,\mathrm{d}x.$$

Für das zweite Integral (dessen Wert für $y = y_0$ gleich 0 ist) gilt nach dem Mittelwertsatz

$$\frac{1}{y-y_0}\int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \frac{\beta(y)-\beta(y_0)}{y-y_0}\, f(\bar{x},y),$$

wobei $\bar{x}$ zwischen $\beta(y_0)$ und $\beta(y)$ liegt. Daher ist die Ableitung des zweiten Integrals für $y = y_0$ (sie stimmt mit dem Grenzwert des linken Ausdrucks für $y \to y_0$ überein) gleich

$$\beta'(y_0)\, f\big(\beta(y_0), y_0\big).$$

Analog erhalten wir für das dritte Integral für $y = y_0$

$$-\alpha'(y_0)\, f\big(\alpha(y_0), y_0\big).$$

Fassen wir diese Resultate zusammen, so sehen wir, daß $I'(y_0)$ existiert und durch die obige Formel gegeben ist.

Bemerkung. Die letzten beiden Sätze behalten auch dann ihre Gültigkeit, wenn die Funktion $f(x, y)$ nur in dem zwischen den Kurven $x = \alpha(y)$ und $x = \beta(y)$ liegenden Gebiet gegeben ist (und dort die angegebenen Eigenschaften hat). Wir haben jedoch die Funktion in dem Gebiet $[a, b;\ c, d]$, das größer ist als $[\alpha(y), \beta(y);\ c, d]$, betrachtet, weil sich dadurch die Überlegungen vereinfachten.

Es ist interessant, die erhaltenen Resultate noch von einem anderen Gesichtspunkt aus zu betrachten. Das Integral $I(y)$ ergibt sich aus dem von *drei* Parametern y, u, v abhängigen Integral

$$I(y, u, v) = \int\limits_u^v f(x, y)\,\mathrm{d}x$$

durch die Substitution $u = \alpha(y)$, $v = \beta(y)$. In diesem Fall müssen wir die allgemeinen Sätze über Stetigkeit und Differenzierbarkeit einer mittelbaren Funktion anwenden. Insbesondere lautet dann (16) in der klassischen Schreibweise

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}y} = \frac{\partial I}{\partial y} + \frac{\partial I}{\partial u}\cdot\alpha'(y) + \frac{\partial I}{\partial v}\cdot\beta'(y).$$

510. Einführung eines nur von x abhängigen Faktors. Durch analoge Überlegungen erhalten wir leicht eine Verallgemeinerung der obigen Resultate. Wir können nämlich statt (1) das Integral

$$I(y) = \int\limits_a^b f(x, y)\, g(x)\,\mathrm{d}x \tag{1*}$$

betrachten, wobei $g(x)$ eine im Intervall $[a, b]$ (eventuell auch im uneigentlichen Sinne) absolut integrierbare Funktion von x sei. Dadurch gelingt es, die hier dargelegte elementare Theorie teilweise auch auf uneigentliche Integrale zu übertragen.

Wir formulieren nun die zu den Sätzen 1 bis 4 analogen Sätze:

Satz 1*. *Unter den Voraussetzungen über $f(x, y)$ von Satz 1 gilt*

$$\lim_{y\to y_0}\int\limits_a^b f(x, y)\, g(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \varphi(x)\, g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Wir weisen zunächst darauf hin, daß alle auftretenden Integrale existieren. Die Integrierbarkeit der Grenzfunktion $\varphi(x)$ wurde schon bewiesen. Die Existenz der im allgemeinen uneigentlichen Integrale von fg und φg folgt aus Nr. 482.

Zu einer vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es infolge der gleichmäßigen Konvergenz von $f(x, y)$ gegen $\varphi(x)$ eine Zahl $\delta > 0$ derart, daß (3) gilt, sobald die Ungleichung $|y - y_0| < \delta$ erfüllt ist.[1] Dann gilt

$$\left|\int_a^b f(x, y)\, g(x)\, dx - \int_a^b \varphi(x)\, g(x)\, dx\right| \leqq \int_a^b |f(x, y) - \varphi(x)| \cdot |g(x)|\, dx$$

$$< \varepsilon \int_a^b |g(x)|\, dx$$

für $|y - y_0| < \delta$. Damit ist die obige Beziehung bewiesen, denn auf der rechten Seite steht das Produkt aus der beliebig kleinen Zahl ε und der konstanten Zahl $\int_a^b |g(x)|\, dx$.

Insbesondere gilt dieser Satz auch für eine Funktionenfolge $\{f_n(x)\}$, in der n die Rolle des Parameters spielt. Wir formulieren dieses Resultat jetzt für unendliche Reihen, da es in dieser Form oft verwendet wird:

Folgerung. *Sind die Glieder der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ im Intervall $[a, b]$ im „eigentlichen" Sinne integrierbare Funktionen, ist die Reihe gleichmäßig konvergent und ist $g(x)$ eine im Intervall $[a, b]$ (eventuell auch uneigentlich) integrierbare Funktion, so läßt sich die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\, g(x)$$

gliedweise integrieren.

Die folgenden Sätze 2* und 3* können genauso wie die Sätze 2 und 3 bewiesen werden (nur unter Zuhilfenahme von Satz 1* statt 1):

Satz 2*. *Unter den Voraussetzungen von Satz 2 ist das Integral (1*) eine stetige Funktion von y im Intervall $[c, d]$.*

Satz 3*. *Unter den Voraussetzungen von Satz 3 ist die Funktion (1*) nach dem Parameter differenzierbar, und es gilt*

$$I'(y) = \int_a^b f_y(x, y)\, g(x)\, dx.$$

Schließlich haben wir noch den

Satz 4*. *Unter den Voraussetzungen von Satz 4 ist die Gleichung*

$$\int_c^d I(y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, g(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx \int_c^d f(x, y)\, dy$$

erfüllt.

[1] Wir betrachten auch hier wie stets ein endliches y_0; die Verallgemeinerung auf den Fall $y_0 = \infty$ bereitet keine Schwierigkeit.

Der Beweis verläuft genauso wie bei Satz 4 (nur hier unter Zuhilfenahme der Sätze 2* und 3* statt 2 und 3).

Zahlreiche Beispiele für die Anwendung dieser (und der vorhergehenden) Sätze findet der Leser in Nr. 511.

511. Beispiele.

1. Mit Hilfe der Reihenentwicklung der Funktion e^x stelle man die folgenden Integrale als Summe einer Reihe dar:

$$\text{(a)}\ \int_0^1 e^x \ln x\, dx, \qquad \text{(b)}\ \int_0^1 \frac{e^x - 1}{\sqrt{x^3}}\, dx.$$

Lösung. Auf Grund der Folgerung aus Satz 1* ist

$$\text{(a)}\ \int_0^1 e^x \ln x\, dx = \int_0^1 \ln x \left\{1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m!}\right\} dx = \int_0^1 \ln x\, dx + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_0^1 x^m \ln x\, dx$$
$$= -\left\{1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m+1)!\,(m+1)}\right\};$$

$$\text{(b)}\ \int_0^1 \frac{e^x - 1}{\sqrt{x^3}}\, dx = \int_0^1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} x^{m-3/2}\, dx = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)\cdot m!}.$$

2. Wir wollen das Integral

$$I = \int_0^1 \ln x \cdot \ln(1+x)\, dx$$

mit Hilfe seiner Reihenentwicklung berechnen.

Nach Satz 5° aus Nr. 437 ist die Reihe

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

im Intervall [0, 1] gleichmäßig konvergent. Da $\ln x$ in diesem Intervall absolut integrierbar ist, gilt nach der Folgerung aus Satz 1*

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_0^1 x^n \ln x\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)^2}.$$

Mit Hilfe der Identität

$$\frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

und der bekannten Entwicklungen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} = \ln 2, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu^2} = \frac{\pi^2}{12},$$ [1])

läßt sich I in der Gestalt

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] = 2 - 2\ln 2 - \frac{\pi^2}{12}$$

[1]) Vgl. Nr. 405, Formel (18), und Nr. 440, Beispiel 8.

darstellen. Hier erhalten wir für I einen Wert in geschlossener Form; das ist jedoch verständlicherweise nicht immer möglich.

3. Bezeichnet $P_n(x)$ das n-te Legendresche Polynom, so gilt

$$P_n(\cos\theta) = \frac{2}{\pi}\int_0^\theta \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\, d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\theta)}}.$$

Wir erinnern uns daran, daß die Legendreschen Polynome $P_n(x)$ die Koeffizienten der Entwicklung von $\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}$ nach Potenzen von α sind (vgl. Nr. 447, Beispiel 8). Um dies noch einmal zu verifizieren, genügt es, die Reihe

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n \int_0^\theta \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\, d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\theta)}} \tag{17}$$

zu betrachten und zu beweisen, daß ihre Summe für $x = \cos\theta$ gleich $\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}$ ist.

Da für $|\alpha| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi = (1-\alpha)\frac{\cos\frac{1}{2}\varphi}{1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2}$$

gilt (vgl. Nr. 461, Beispiel 6(a)) und diese Reihe gleichmäßig bezüglich φ konvergiert (sie wird von der geometrischen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha|^n$ majorisiert), kann (17) mit Hilfe der Folgerung aus Satz 1* in der Gestalt

$$2\frac{1-\alpha}{\pi}\int_0^\theta \frac{\cos\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\theta)}}\frac{d\varphi}{1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2}$$

geschrieben werden. Führen wir jetzt dieselben Substitutionen aus wie in Nr. 497, Beispiel 9 (dort wurde das Resultat für $n = 0$ und $n = 1$ hergeleitet), so erhalten wir

$$\frac{1-\alpha}{\pi}\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{(z-x)(1-z)}}\frac{dz}{1-2\alpha z+\alpha^2}$$

$$= \frac{2}{\pi}(1-\alpha)\int_0^\infty \frac{dt}{(1-\alpha)^2 t^2 + (1-2\alpha x+\alpha^2)} = \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}},$$

womit der Beweis erbracht ist.

4. Wir zeigen nun eines der Verfahren, mit deren Hilfe EULER das Resultat

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

fand. Wir berechnen das Integral

$$E = \int_0^1 \arcsin x\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 \arcsin x\, d(\arcsin x) = \frac{\pi^2}{8}$$

einmal anders, indem wir die bekannte Entwicklung

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

benutzen, die im Intervall [0, 1] gleichmäßig konvergiert. Wir finden

$$E = \int_0^1 \left\{x + \sum_{n=1}^{\infty} \cdots\right\} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)} \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Wegen

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}\varphi\,d\varphi = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

ergibt sich

$$E = \frac{\pi^2}{8} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2},$$

woraus leicht die zu Beginn angegebene Formel folgt.

5. Man zeige, daß das Lobatschewskische Verfahren, mit dessen Hilfe in Nr. 497, Beispiel 14 und 15, die Formeln

$$\int_0^{\infty} f(x) \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{\pi/2} f(x)\,dx, \qquad \int_0^{\infty} f(x) \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$$

hergeleitet wurden, auch dann anwendbar ist, wenn (unter Beibehaltung der übrigen Bedingungen) die Funktion $f(x)$ im Intervall $[0, \pi/2]$ im uneigentlichen Sinne integrierbar ist.

Mit Hilfe dieser Formeln ergeben sich z. B. die folgenden Beziehungen:

(a) $$\int_0^{\infty} \ln|\sin x| \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2;$$

(b) $$\int_0^{\infty} \frac{\ln|\cos x|}{x^2}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{\ln|\cos x|}{\sin^2 x} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}\,dx = -\frac{\pi}{2}$$

(partielle Integration);

(c) $$\int_0^{\infty} \frac{\ln^2|\cos x|}{x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln^2\cos x}{\sin^2 x}\,dx = -\pi\ln 2$$

(partielle Integration).

6. Man zeige unmittelbar, daß bei den Integralen

(a) $$\int_0^1 \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx, \qquad \text{(b)} \int_0^1 \frac{x^3}{y^2} e^{-x^2/y}\,dx$$

(mit $y > 0$) der Grenzübergang $y \to 0$ unter dem Integralzeichen nicht gestattet ist, und überzeuge sich davon, daß die Voraussetzungen von Satz 2 nicht erfüllt sind.

7. Wir wenden nun die Leibnizsche Regel zur Berechnung der Ableitung des Integrals

$$I(a) = \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 - \sin^2\theta)\, d\theta \qquad (a > 1)$$

nach dem Parameter an.

Die Voraussetzungen von Satz 3 sind hier erfüllt. Es gilt

$$I'(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{2a\, d\theta}{a^2 - \sin^2\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Hieraus erhalten wir, wenn wir nach a integrieren,

$$I(a) = \pi \ln\left(a + \sqrt{a^2 - 1}\right) + C.$$

Zur Bestimmung der Konstanten C stellen wir das Integral in der Gestalt

$$I(a) = \pi \ln a + \int_0^{\pi/2} \ln\left(1 - \frac{1}{a^2}\sin^2\theta\right) d\theta$$

dar, so daß wir, wenn wir hier den eben gefundenen Ausdruck für $I(a)$ einsetzen,

$$C = \int_0^{\pi/2} \ln\left(1 - \frac{1}{a^2}\sin^2\theta\right) d\theta - \pi \ln\frac{a + \sqrt{a^2 - 1}}{a}$$

finden. Wir lassen jetzt a gegen ∞ streben. Wegen

$$\left|\ln\left(1 - \frac{1}{a^2}\sin^2\theta\right)\right| \leqq \left|\ln\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)\right|$$

verschwindet das Integral, und es folgt $C = -\pi \ln 2$. Damit ist für $a > 1$ (vgl. Nr. 497, Beispiel 7)

$$I(a) = \pi \ln\frac{a + \sqrt{a^2 - 1}}{2}.$$

Bemerkenswert ist, daß die Differentiation nach der Leibnizschen Regel es gestattet, einen geschlossenen Ausdruck für das Integral anzugeben. Diese Methode führt oft zum Ziel.

8. Noch einfacher läßt sich das uns schon aus Nr. 307, Beispiel 4, Nr. 314, Beispiel 14, und Nr. 440, Beispiel 11, bekannte Integral

$$I(r) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2r\cos x + r^2)\, dx \qquad (|r| < 1)$$

berechnen.

Nach der Leibnizschen Regel ergibt sich

$$I'(r) = \int_0^{\pi} \frac{-2\cos x + 2r}{1 - 2r\cos x + r^2}\, dx.$$

Mit Hilfe der Substitution $t = \tan\frac{x}{2}$ läßt sich zeigen, daß dieses Integral gleich 0 und somit

$$I(r) = C = \text{const}$$

ist. Wegen $I(0) = 0$ ist also auch $C = 0$. Damit gilt $I(r) = 0$ für $|r| < 1$.

9. Wir berechnen das Integral

$$I = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Wir führen einen Parameter ein und betrachten das allgemeinere Integral

$$I(y) = \int_0^1 \frac{\arctan xy}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad (y \geqq 0),$$

aus dem das gegebene Integral für $y = 1$ folgt. Die Voraussetzungen von Satz 3* sind erfüllt, wenn wir

$$f(x, y) = \frac{\arctan xy}{x} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

setzen. Durch Differentiation nach y (unter dem Integralzeichen) ergibt sich

$$I'(y) = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Dieses Integral läßt sich z. B. mit Hilfe der Substitution $x = \cos\theta$ leicht berechnen:

$$I'(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+y^2\cos^2\theta} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \arctan \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+y^2}}\bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Hieraus finden wir durch Integration

$$I(y) = \frac{\pi}{2} \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right) + C.$$

Wegen $I(0) = 0$ ist $C = 0$. Für $y = 1$ erhalten wir schließlich das gesuchte Integral

$$I = I(1) = \frac{\pi}{2} \ln\left(1 + \sqrt{2}\right).$$

10. Wir zeigen, daß die Ausdrücke

$$\text{(a)}\ \ u = x^n \int_0^\pi \cos(x\cos\theta)\sin^{2n}\theta\,d\theta \quad \text{und} \quad \text{(b)}\ \ u = \int_0^\pi \cos(n\theta - x\sin\theta)\,d\theta$$

(für ganzes $n \geqq 0$) der Besselschen Differentialgleichung

$$x^2u'' + xu' + (x^2 - n^2)\,u = 0$$

genügen.

Hier spielt x die Rolle des Parameters. Differenzieren wir zweimal unter dem Integralzeichen (Satz 3) und setzen wir die Ausdrücke für u, u' und u'' in die linke Seite der Differentialgleichung ein, so finden wir:

$$\text{(a)}\ \ x^{n+1} \int_0^\pi [x\cos(x\cos\theta)\sin^{2n+2}\theta - (2n+1)\sin(x\cos\theta)\cos\theta\sin^{2n}\theta]\,d\theta$$

$$= -x^{n+1}\sin^{2n+1}\theta \cdot \sin(x\cos\theta)\big|_0^\pi = 0,$$

(b) $-\int_0^\pi [(x^2 \sin^2\theta + n^2 - x^2)\cos(n\theta - x\sin\theta) - x\sin\theta\cdot\sin(n\theta - x\sin\theta)]\,\mathrm{d}\theta$

$= -(n + x\cos\theta)\sin(n\theta - x\sin\theta)\Big|_0^\pi = 0.$

11. Die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} - n^2u = 0 \qquad (n \text{ ganz})$$

wird von der Funktion $Au_1 + Bu_2$, wobei A, B beliebige Konstante sind und

$$u_1 = \int_0^\pi e^{nr\cos\theta}\mathrm{d}\theta, \qquad u_2 = \int_0^\pi e^{nr\cos\theta}\ln(r\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

ist, erfüllt. Zum Beweis genügt es offenbar, zu zeigen, daß der Differentialgleichung jede einzelne der Funktionen u_1 und u_2 genügt. Dazu brauchen wir nur u_1 und u_2 unter dem Integralzeichen zu differenzieren, wobei auf die Funktion u_1 der Satz 3 und auf die Funktion

$$u_2 = \ln r\int_0^\pi e^{nr\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta + 2\int_0^\pi e^{nr\cos\theta}\ln\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

noch der Satz 3* angewendet wird.

12. Wir bestimmen nun die Ableitungen der vollständigen elliptischen Integrale

$$\mathrm{E}(k) = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi, \qquad \mathrm{K}(k) = \int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}$$

nach dem Modul k $(0 < k < 1)$. Es gilt

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}k} = -\int_0^{\pi/2} k\sin^2\varphi\cdot(1 - k^2\sin^2\varphi)^{-1/2}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{1}{k}\left\{\int_0^{\pi/2}(1 - k^2\sin^2\varphi)^{1/2}\,\mathrm{d}\varphi - \int_0^{\pi/2}(1 - k^2\sin^2\varphi)^{-1/2}\,\mathrm{d}\varphi\right\} = \frac{\mathrm{E} - \mathrm{K}}{k}$$

und analog

$$\frac{\mathrm{dK}}{\mathrm{d}k} = \frac{1}{k}\left\{\int_0^{\pi/2}(1 - k^2\sin^2\varphi)^{-3/2}\,\mathrm{d}\varphi - \int_0^{\pi/2}(1 - k^2\sin^2\varphi)^{-1/2}\,\mathrm{d}\varphi\right\}.$$

Nun ist[1])

$$\int_0^{\pi/2}(1 - k^2\sin^2\varphi)^{-3/2}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{1 - k^2}\int_0^{\pi/2}(1 - k^2\sin^2\varphi)^{-1/2}\,\mathrm{d}\varphi,$$

also

$$\frac{\mathrm{dK}}{\mathrm{d}k} = \frac{\mathrm{E}}{k(1 - k^2)} - \frac{\mathrm{K}}{k}.$$

[1]) Dies folgt aus der leicht zu verifizierenden Identität

$$(1 - k^2\sin^2\varphi)^{-3/2} = \frac{1}{1 - k^2}(1 - k^2\sin^2\varphi)^{1/2} - \frac{k^2}{1 - k^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}[\sin\varphi\cos\varphi(1 - k^2\sin^2\varphi)^{-1/2}].$$

Diese Formel gestattet interessante Anwendungen. Führen wir z. B. den *Komplementärmodul* $k' = \sqrt{1-k^2}$ und die Funktionen

$$\mathrm{E}'(k) = \mathrm{E}(k') \quad \text{und} \quad \mathrm{K}'(k) = \mathrm{K}(k')$$

ein, so erhalten wir leicht

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}(\mathrm{E}\mathrm{K}' + \mathrm{E}'\mathrm{K} - \mathrm{K}\mathrm{K}') = 0;$$

daraus folgt

$$\mathrm{E}\mathrm{K}' + \mathrm{E}'\mathrm{K} - \mathrm{K}\mathrm{K}' = c = \text{const}.$$

Zur Bestimmung von c betrachten wir den Grenzwert der linken Seite für $k \to 0$ ($k' \to 1$). Dieser Grenzwert ist offenbar ebenfalls gleich c. Zunächst ergibt sich leicht

$$\lim_{k\to 0} \mathrm{K} = \lim_{k\to 0} \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{k\to 0} \mathrm{E}' = \lim_{k'\to 1} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi/2} \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 1$$

(auf Grund von Satz 2 aus Nr. 506). Dann ist

$$\mathrm{K}' = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}} < \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-k'^2}} = \frac{\pi}{2k},$$

$$|\mathrm{E}-\mathrm{K}| = \mathrm{K}-\mathrm{E} = \int_0^{\pi/2} \frac{k^2\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi < \frac{\pi}{2}k^2,$$

also

$$|\mathrm{K}'(\mathrm{E}-\mathrm{K})| < \frac{\pi^2}{4}k \quad \text{und} \quad \lim_{k\to 0}\mathrm{K}'(\mathrm{E}-\mathrm{K}) = 0.$$

Der gesuchte Grenzwert ist gleich $\pi/2$. Damit gelangen wir zu der bekannten *Legendreschen Relation*

$$\mathrm{E}\mathrm{K}' + \mathrm{E}'\mathrm{K} - \mathrm{K}\mathrm{K}' = \frac{\pi}{2}.$$

13. Man beweise die Identität

$$\underbrace{\int_a^x \mathrm{d}t_{n-1} \int_a^{t_{n-1}} \mathrm{d}t_{n-2} \cdots \int_a^{t_1} f(t)\,\mathrm{d}t}_{n} = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

wobei $f(t)$ eine beliebige, im Intervall $[a, b]$ stetige Funktion ist und $a \leqq x \leqq b$ gilt.

Lösung. Wir greifen zur Methode der vollständigen Induktion. Für $n = 1$ gilt die Identität offenbar. Wir nehmen nun an, sie sei auch für ein $n \geqq 1$ erfüllt, und zeigen ihre Gültigkeit für $n + 1$.

Zur Abkürzung schreiben wir

$$I_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Wir differenzieren die Beziehung

$$I_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f(t)\,dt$$

nach x unter Anwendung von Satz 6. Da die untere Integrationsgrenze konstant ist und der Integrand an der oberen Grenze, d. h. für $t = x$ verschwindet, sind die integralfreien Glieder in (16) gleich 0, und wir erhalten

$$\frac{dI_{n+1}(x)}{dx} = I_n(x).$$

Daraus folgt wegen $I_n(a) = 0$ die Beziehung

$$I_{n+1}(x) = \int_a^x I_n(t_n)\,dt_n.$$

Setzen wir nun statt I_n das mehrfache Integral ein, so gelangen wir zu dem entsprechenden Ausdruck für I_{n+1}. Analog läßt sich auch das allgemeinere Resultat

$$\int_0^x \varphi'(t_{n-1})\,dt_{n-1}\int_a^{t_{n-1}} \varphi'(t_{n-2})\,dt_{n-2}\cdots\int_a^{t_1} f(t)\,dt = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x [\varphi(x)-\varphi(t)]^{n-1} f(t)\,dt$$

beweisen, wobei f und φ im Intervall $[a, b]$ stetige Funktionen sind und φ außerdem eine stetige Ableitung hat.

14. Wir bestimmen nun die Ableitung des Integrals

$$I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{\alpha - x}}$$

nach dem Parameter α. Die Funktion $\varphi(x)$ sowie ihre Ableitung $\varphi'(x)$ seien im Intervall $[0, a]$ stetig, und es sei $0 < \alpha \leqq a$.

Die Formel (16) läßt sich nicht unmittelbar anwenden, da der Integrand für $x = \alpha$ im allgemeinen ∞ ist. Wir schlagen deshalb einen Umweg ein, und zwar bringen wir das Integral durch die Substitution $x = \alpha t$ auf die Gestalt

$$I(\alpha) = \sqrt{\alpha}\int_0^1 \frac{\varphi(\alpha t)}{\sqrt{1-t}}\,dt.$$

Auf dieses Integral ist Satz 3* anwendbar. Mit Hilfe der Leibnizschen Regel finden wir

$$I'(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\int_0^1 \frac{\varphi(\alpha t)}{\sqrt{1-t}}\,dt + \sqrt{\alpha}\int_0^1 \frac{t\varphi'(\alpha t)}{\sqrt{1-t}}\,dt$$

oder, wenn wir zur Veränderlichen x zurückkehren,

$$I'(\alpha) = \frac{1}{2\alpha}\int_0^\alpha \frac{\varphi(x)}{\sqrt{\alpha - x}}\,dx + \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \frac{x\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha - x}}\,dx.$$

Formen wir das erste der beiden Integrale durch partielle Integration um, so können wir diese

Beziehung in der einfacheren Gestalt

$$I'(\alpha) = \frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}} + \int_0^\alpha \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha - x}}\, dx$$

schreiben.

15. Es sei

$$f(x, y) = \arctan \frac{y}{x} - \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{für} \quad 0 < x \leqq 1, \quad 0 \leqq y \leqq 1, \quad f(0, y) = \frac{\pi}{2}.$$

Man zeige unmittelbar, daß auf das Integral $\int_0^1 f(x, y)\, dx$ die Leibnizsche Regel für $y = 0$ nicht anwendbar ist.

Das gleiche weise man bei der Funktion

$$f(x, y) = x\, e^{-x^2/y} \quad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq 1, \quad 0 < y \leqq 1, \qquad f(x, 0) = 0$$

nach.

16. Wir wollen jetzt das Integral

$$I = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x\sqrt{1 - x^2}}\, dx,$$

das wir in Beispiel 9 durch Differentiation nach dem Parameter lösten, auf anderem Wege berechnen.

Im Integranden ersetzen wir den Ausdruck $\frac{\arctan x}{x}$ durch das ihm entsprechende Integral

$$\frac{\arctan x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1 + x^2 y^2};$$

dadurch ergibt sich für I das Doppelintegral

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \int_0^1 \frac{dy}{1 + x^2 y^2}.$$

Auf Grund von Satz 4* ist die Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen gestattet, und wir finden

$$I = \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dx}{(1 + x^2 y^2)\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 + y^2}} = \frac{\pi}{2} \ln\left(1 + \sqrt{2}\right).$$

17. Durch Integration unter dem Integralzeichen berechne man

$$K = \int_0^{\pi/2} \ln \frac{a + b \sin x}{a - b \sin x} \frac{dx}{\sin x} \qquad (a > b > 0).$$

Den Integranden schreiben wir in der Gestalt

$$\frac{1}{\sin x} \ln \frac{a + b \sin x}{a - b \sin x} = 2ab \int_0^1 \frac{dy}{a^2 - b^2 y^2 \sin^2 x};$$

dann ist

$$K = 2ab \int_0^{\pi/2} dx \int_0^1 \frac{dy}{a^2 - b^2y^2 \sin^2 x}.$$

Die Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen (nach Satz 4) ergibt

$$K = 2ab \int_0^1 dy \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 - b^2y^2 \sin^2 x}.$$

Wegen

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 - b^2y^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{2a\sqrt{a^2 - b^2y^2}}$$

erhalten wir schließlich

$$K = \pi b \int_0^{\pi} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - b^2y^2}} = \pi \arcsin \frac{b}{a}.$$

18. Bei den folgenden Integralen ist die Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen nicht zulässig:

$$\text{(a)} \quad \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{y - x}{(x + y)^3}\, dx = \frac{1}{2}, \qquad \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y - x}{(x + y)^3}\, dy = -\frac{1}{2};$$

$$\text{(b)} \quad \int_0^1 dy \int_0^1 \left(\frac{x^5}{y^4} - \frac{2x^3}{y^3}\right) e^{-x^2/y}\, dx = -\frac{1}{e}, \qquad \int_0^1 dx \int_0^1 \left(\frac{x^5}{y^4} - \frac{2x^3}{y^3}\right) e^{-x^2/y}\, dy = -\frac{1}{e} + \frac{1}{2}.$$

Es sei darauf hingewiesen, daß in diesen Fällen die Voraussetzungen des entsprechenden Satzes nicht erfüllt sind: Der Integrand ist im Punkt (0, 0) unstetig.[1])

512. Einer der vier Gaußschen Beweise für den Fundamentalsatz der Algebra. Mit Hilfe des Satzes, der in Nr. 508 als Satz 4 zitiert ist, gab Gauss den folgenden originellen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra an.

Dieser Satz besagt, daß *jede ganze rationale Funktion*

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \qquad (n > 0)$$

mit reellen oder komplexen Koeffizienten mindestens eine reelle oder komplexe Nullstelle hat.

Wir setzen $x = r(\cos\theta + i\sin\theta)$; dann ist

$$x^k = r^k(\cos k\theta + i \sin k\theta),$$

also

$$f(x) = P + iQ \quad \text{mit} \quad P = r^n \cos n\theta + \cdots, \qquad Q = r^n \sin n\theta + \cdots,$$

wobei die weiteren Glieder von P und Q nur niedrigere Potenzen von r enthalten und die von r freien Glieder konstant sind.

Der Satz ist offenbar bewiesen, wenn wir gezeigt haben, daß der Ausdruck $P^2 + Q^2$ für ein gewisses Wertepaar r und θ gleich 0 ist.

---

[1]) Im Fall (b) kann man den Integranden für $y = 0$, aber $x \neq 0$, als stetig auffassen, wenn man ihn an dieser Stelle gleich 0 setzt.

Wir führen die Funktion

$$U = \arctan \frac{P}{Q}$$

ein. Dann ist

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\frac{\partial P}{\partial r} Q - P \frac{\partial Q}{\partial r}}{P^2 + Q^2}, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\frac{\partial P}{\partial \theta} Q - P \frac{\partial Q}{\partial \theta}}{P^2 + Q^2},$$

also

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r\, \partial \theta} = \frac{H(r, \theta)}{(P^2 + Q^2)^2}.$$

Hier ist $H(r, \theta)$ eine in beiden Argumenten stetige Funktion, deren genaues Aussehen für uns ohne Interesse ist.

Wir benötigen schließlich die Doppelintegrale

$$I_1 = \int_0^R \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial r\, \partial \theta} \mathrm{d}\theta \quad \text{und} \quad I_2 = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \frac{\partial^2 U}{\partial r\, \partial \theta} \mathrm{d}r;$$

R ist eine positive Konstante, deren Wert wir später bestimmen werden.

Würde die Funktion $P^2 + Q^2$ nirgends verschwinden, so wäre der Integrand stetig und auf Grund von Satz 4 notwendig $I_1 = I_2$. Wir zeigen jedoch, daß diese Gleichung für hinreichend großes R nicht erfüllt ist. Das bedeutet aber, daß die Funktion $P^2 + Q^2$ innerhalb des Kreises mit dem Radius R um den Koordinatenursprung genau den Wert 0 annehmen muß, womit der Satz bewiesen sein wird.

Wir berechnen in I_1 das innere Integral und erhalten

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 U}{\partial r\, \partial \theta} \mathrm{d}\theta = \left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_0^{2\pi} = 0,$$

da offenbar $\frac{\partial U}{\partial r}$ eine von θ abhängige Funktion mit der Periode 2π ist. Daraus folgt $I_1 = 0$.

Wir wenden uns nun dem Integral I_2 zu. Hier ist

$$\int_0^R \frac{\partial^2 U}{\partial r\, \partial \theta} \mathrm{d}r = \left. \frac{\partial U}{\partial \theta} \right|_0^R.$$

Für das Folgende ist es wichtig, jetzt die höchsten Potenzen von r in Zähler und Nenner von $\frac{\partial U}{\partial \theta}$ zu betrachten. Wegen

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = -n r^n \sin n\theta + \cdots, \qquad \frac{\partial Q}{\partial \theta} = n r^n \cos n\theta + \cdots$$

ist

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} Q - P \frac{\partial Q}{\partial \theta} = -n r^{2n} + \cdots.$$

Andererseits gilt $P^2 + Q^2 = r^{2n} + \cdots$, also schließlich

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{-n r^{2n} + \cdots}{r^{2n} + \cdots}.$$

Da die übrigen Glieder in Zähler und Nenner niedrigere Potenzen von r enthalten, deren Koeffizienten beschränkte Funktionen von θ sind, gilt nicht nur

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\partial U}{\partial \theta} = -n,$$

sondern es ist außerdem die Konvergenz gegen $-n$ gleichmäßig bezüglich θ.

Da für $r = 0$ auch $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$ ist (in diesem Fall ist nämlich $\frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{\partial Q}{\partial \theta} = 0$), führt das innere Integral von I_2 auf den Wert $\frac{\partial U}{\partial \theta}$ für $r = R$. Im Fall $R \to \infty$ strebt dieser Wert gleichmäßig bezüglich θ gegen $-n$. Also ist auf Grund von Satz 1

$$\lim_{R\to\infty} I_2 = -2\pi n.$$

Wir sehen, daß das Integral I_2 für hinreichend große R negativ ist. Daher kann die Gleichung $I_1 = I_2$ nicht erfüllt sein.

§ 2. Gleichmäßige Konvergenz

513. Die Definition der gleichmäßigen Konvergenz. Bei der Übertragung der Theorie der Integrale, die von einem Parameter abhängen, auf uneigentliche Integrale spielt der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz dieser Integrale eine besondere Rolle. Dies wollen wir nun erklären.

Gegeben sei eine Funktion $f(x, y)$ für alle $x \geqq a$ und alle y aus einem gewissen Bereich $\mathcal{Y}$. Ferner existiere für jedes y aus $\mathcal{Y}$ das Integral

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\, dx. \tag{1}$$

Nach Definition des uneigentlichen Integrals mit einer unendlichen Grenze (Nr. 470) gilt

$$\int_a^\infty f(x, y)\, dx = \lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x, y)\, dx.$$

Somit stellt das Integral

$$F(A, y) = \int_a^A f(x, y)\, dx \tag{2}$$

eine Funktion von A und y dar, die für $y = \text{const}$ und $A \to \infty$ den Grenzwert $I(y)$ besitzt. Strebt das Integral (2) gleichmäßig bezüglich y aus $\mathcal{Y}$ gegen $I(y)$, so heißt das Integral $I(y)$ *gleichmäßig konvergent* bezüglich y für die erwähnten Werte des Parameters.

Dies bedeutet: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine von y unabhängige Zahl $A_0 \geqq a$ derart, daß die Ungleichung

$$\left| \int_a^\infty f(x, y)\, dx - \int_a^A f(x, y)\, dx \right| = \left| \int_A^\infty f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon$$

für alle y aus $\mathcal{Y}$ gleichzeitig erfüllt ist, sobald $A > A_0$ gilt.

Wir betrachten z. B. das für jedes feste $y \geqq 0$ konvergente Integral

$$\int_0^\infty y\, e^{-xy}\, dx.$$

Das Integral

$$\int_A^\infty y\, e^{-xy}\, dx$$

können wir unmittelbar berechnen. Im Fall $y = 0$ ist es für alle A gleich 0; ist $y > 0$, so folgt mit Hilfe der Substitution $xy = t$ leicht

$$\int_A^\infty y\, e^{-xy}\, dx = \int_{Ay}^\infty e^{-t}\, dt = e^{-Ay}.$$

Ist y fest, so verschwindet dieser Ausdruck offenbar für $A \to \infty$, und für jedes $\varepsilon > 0$ ist die Ungleichung

$$e^{-Ay} < \varepsilon \tag{3}$$

für alle $A > A_0(y)$ erfüllt, wobei

$$A_0(y) = \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{y}$$

von y abhängt.

Variiert y in einem Intervall $[c, d]$, $c > 0$, so gibt es auch eine nicht von y abhängige Zahl A_0 derart, daß für $A > A_0$ die Ungleichung (3) für alle y gleichzeitig erfüllt ist; es genügt, für A_0 ein $A_0(c)$ zu wählen, denn für $A > A_0$ ist dann

$$e^{-Ay} \leqq e^{-Ac} < \varepsilon \qquad (c \leqq y \leqq d).$$

Das Integral ist also bezüglich y aus dem Intervall $[c, d]$ gleichmäßig konvergent.

Variiert der Parameter y im Intervall $[0, d]$, $d > 0$, so verhält sich das Integral anders. In diesem Fall existiert kein solches A_0 (wenigstens nicht für $\varepsilon < 1$). Dies ist schon daraus ersichtlich, daß für noch so große A der Ausdruck e^{-Ay} für $y \to 0$ gegen 1 strebt, so daß er für hinreichend kleine y größer als jede Zahl $\varepsilon < 1$ wird. Das Integral ist also für y aus dem Intervall $[0, d]$, $d > 0$, nicht gleichmäßig konvergent.

514. Ein Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz. Der Zusammenhang mit unendlichen Reihen. Das in Nr. 504 angegebene allgemeine Kriterium 1° für die gleichmäßige Konvergenz einer Funktion gegen ihren Grenzwert kann im vorliegenden Fall folgendermaßen formuliert werden:

Das Integral (1) *ist genau dann gleichmäßig konvergent bezüglich y aus $\mathcal{Y}$, wenn zu jedem gegebenen $\varepsilon > 0$ eine nicht von y abhängige Zahl A_0 derart existiert, daß die Ungleichung*

$$\left|\int_a^{A'} f(x, y)\, dx - \int_a^{A} f(x, y)\, dx\right| = \left|\int_A^{A'} f(x, y)\, dx\right| < \varepsilon$$

für alle y aus $\mathcal{Y}$ gleichzeitig erfüllt ist, sobald $A' > A > A_0$ gilt.

Auch hier kann man, wie üblich, die Betrachtungen darauf zurückführen, daß für alle zu betrachtenden y-Werte das Konvergenzprinzip (Nr. 475) gleichmäßig erfüllt ist.

Das uneigentliche Integral mit einer unendlichen Grenze haben wir schon in Nr. 473 der unendlichen Reihe gegenübergestellt. Den Zusammenhang mit unendlichen Reihen gibt es auch bei der Frage nach der gleichmäßigen Konvergenz des Integrals (1).

Wie wir aus Nr. 504, Satz 2°, wissen, konvergiert die Funktion (2), nämlich $F(A, y)$, für $A \to \infty$ genau dann gleichmäßig (bezüglich y) gegen das Integral (1), wenn die Funktionenfolge $\{F(A_n, y)\}$ für jede gegen ∞ strebende Zahlenfolge $\{A_n\}$ gleichmäßig gegen (1) konvergiert.

Gehen wir schließlich von Folgen zu Reihen über, so gelangen wir zu dem Schluß, daß *die (bezüglich y) gleichmäßige Konvergenz des Integrals* (1) *mit der gleichmäßigen Konvergenz von Reihen der Form*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x, y)\, dx \qquad (A_0 = a, A_n \geqq a),$$

wobei $\{A_n\}$ eine gegen ∞ strebende Zahlenfolge ist, vollkommen gleichwertig ist.

515. Hinreichende Kriterien für die gleichmäßige Konvergenz. Wir geben einige Kriterien an, mit deren Hilfe allgemein über die gleichmäßige Konvergenz entschieden werden kann.

Sie sind nach dem Vorbild des Weierstraßschen, Abelschen und Dirichletschen Kriteriums für die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen (Nr. 430) konstruiert und ähneln den für uneigentliche Integrale geltenden Konvergenzkriterien (Nr. 476), die wir ebenfalls nach Abel und Dirichlet benannten.

1°. *Gegeben sei eine in jedem endlichen Intervall $[a, A]$, $A \geqq a$, nach x integrierbare Funktion $f(x, y)$. Existiert dann eine nur von x abhängige und im unendlichen Intervall $[a, \infty)$ integrierbare Funktion $\varphi(x)$ derart, daß für alle y aus $\mathcal{Y}$*

$$|f(x, y)| \leqq \varphi(x) \qquad (\textit{für } x \geqq a)$$

gilt, so ist das Integral (1) *bezüglich y aus $\mathcal{Y}$ gleichmäßig konvergent.*

Diese Behauptung folgt unmittelbar aus der Ungleichung

$$\left| \int_A^{A'} f(x, y)\, dx \right| \leqq \int_A^{A'} \varphi(x)\, dx,$$

wenn man das Kriterium aus Nr. 514 benutzt.

Man sagt auch, daß die Funktion $f(x, y)$ unter den obigen Bedingungen die integrierbare *Majorante* $\varphi(x)$ habe oder daß das Integral (1) durch das konvergente Integral

$$\int_a^{\infty} \varphi(x)\, dx,$$

das den Parameter nicht enthält, *majorisiert* werde.

2°. Empfindlichere Kriterien findet man wie auch in Nr. 476 durch Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes.

Wir setzen voraus, $f(x, y)$ sei in jedem Intervall $[a, A]$ nach x integrierbar und

$g(x, y)$ bezüglich x monoton, und betrachten dann das Integral

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\, g(x, y)\, dx. \tag{4}$$

Ist das Integral

$$\int_a^\infty f(x, y)\, dx$$

bezüglich y aus $\mathcal{Y}$ gleichmäßig konvergent und die Funktion $g(x, y)$ gleichmäßig beschränkt,

$$|g(x, y)| \leqq L \qquad (L = \text{const}; x \geqq a; y \textit{ aus } \mathcal{Y}),$$

so ist das Integral (4) *bezüglich y aus $\mathcal{Y}$ gleichmäßig konvergent.*

Statt (6) aus Nr. 476 gilt in diesem Fall

$$\int_A^{A'} f(x, y)\, g(x, y)\, dx = g(A, y) \int_A^\xi f(x, y)\, dx + g(A', y) \int_\xi^{A'} f(x, y)\, dx.$$

Wählen wir auf Grund von Nr. 514 die Zahl A_0 so groß, daß für $A' > A > A_0$ die Ungleichung

$$\left| \int_A^{A'} f(x, y)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2L}$$

für alle y aus $\mathcal{Y}$ gleichzeitig erfüllt ist, so erhalten wir leicht (wie in Nr. 476) die Abschätzung

$$\left| \int_A^{A'} f(x, y)\, g(x, y)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Damit (vgl. Nr. 514) ist die Behauptung bewiesen.

3°. Analog zu Nr. 476 können die Voraussetzungen über die Funktionen f und g auch anders kombiniert werden.

Ist das Integral

$$\int_a^A f(x, y)\, dx$$

als Funktion von A und y gleichmäßig beschränkt,

$$\left| \int_a^A f(x, y)\, dx \right| \leqq K \qquad (K = \text{const}; A \geqq a; y \textit{ aus } \mathcal{Y}),$$

und strebt $g(x, y)$ für $x \to \infty$ gleichmäßig bezüglich y (aus $\mathcal{Y}$) gegen 0, *so ist das Integral* (4) *gleichmäßig konvergent bezüglich y aus $\mathcal{Y}$.*

Den Beweis überlassen wir dem Leser.

4°. Zum Schluß erwähnen wir, daß man in der Praxis oft Fällen begegnen kann, in denen von zwei Faktoren f und g nur einer den Parameter y enthält. Also gibt es zu jedem der Kriterien 2° und 3° zwei spezielle Kriterien (in Abhängigkeit davon, welcher der beiden Faktoren den Parameter y enthält).

Wir wollen eins dieser aus 2° folgenden Kriterien angeben, das am häufigsten verwendet wird:

Ist das Integral

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

konvergent und die bezüglich x monotone Funktion $g(x, y)$ gleichmäßig beschränkt, so ist das Integral

$$\int_a^\infty f(x)\,g(x, y)\,dx$$

gleichmäßig konvergent bezüglich y.

Daraus folgt z. B. die bezüglich y ($y \geqq 0$) gleichmäßige Konvergenz der Integrale vom Typ

$$\int_a^\infty e^{-xy} f(x)\,dx, \qquad \int_a^\infty e^{-x^2y} f(x)\,dx, \qquad (a \geqq 0)$$

unter der Voraussetzung, daß das Integral $\int_a^A f(x)\,dx$ konvergiert. Die bezüglich x monoton fallenden Funktionen e^{-xy} und e^{-x^2y} sind nämlich durch die Zahl 1 beschränkt.

Diese Bemerkung wird uns im folgenden oft von Nutzen sein.

516. Ein anderer Fall von gleichmäßiger Konvergenz. Wir betrachten nun eine Funktion $f(x, y)$, die für x-Werte aus einem endlichen Intervall $[a, b]$ und y-Werte aus einem gewissen Bereich $\mathcal{Y}$ definiert und für $y = \text{const}$ zwischen a und b nach x integrierbar sei (im „eigentlichen" oder uneigentlichen Sinne). Dann ist das Integral

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx, \tag{5}$$

unabhängig davon, ob es bei b „eigentlich" oder uneigentlich ist, der Grenzwert des Integrals

$$\varphi(\eta, y) = \int_a^{b-\eta} f(x, y)\,dx \tag{6}$$

für $\eta \to 0$.

Strebt dieses Integral für $\eta \to 0$ gleichmäßig bezüglich y aus $\mathcal{Y}$ gegen den Grenzwert $I(y)$, so sagt man, (5) *konvergiere gleichmäßig* bezüglich y aus $\mathcal{Y}$.

Das bedeutet: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine von y unabhängige Zahl $\delta > 0$ derart, daß die Ungleichung

$$\left|\int_a^b f(x, y)\,dx - \int_a^{b-\eta} f(x, y)\,dx\right| = \left|\int_{b-\eta}^b f(x, y)\,dx\right| < \varepsilon$$

für alle y aus $\mathcal{Y}$ gleichzeitig erfüllt ist, sobald $\eta < \delta$ ist.

Es ist nicht schwierig, in diesem Fall ein *notwendiges und hinreichendes* Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz anzugeben. Auch hier läßt es sich auf das gleichmäßige Erfülltsein des Konvergenzprinzips zurückführen: *Zu einer Zahl $\varepsilon > 0$ muß es eine von y unabhängige Zahl $\delta > 0$ geben derart, daß für $0 < \eta' < \eta < \delta$ die Un-*

gleichung

$$\left|\int_{b-\eta}^{b-\eta'} f(x, y)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

für alle y aus $\mathcal{Y}$ gilt.

Genauso können wir hier die Frage nach der gleichmäßigen Konvergenz des Integrals (5) auf die Frage nach der gleichmäßigen Konvergenz einer unendlichen Reihe zurückführen: Es gilt

$$\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x, y)\,\mathrm{d}x \qquad (a_0 = a;\, a \leqq a_n \leqq b)$$

für eine beliebige, gegen b strebende Folge von Zahlen a_n (Nr. 514).

Auch hier lassen sich die hinreichenden Kriterien aus Nr. 515 auf diesen Fall übertragen; wir überlassen das jedoch dem Leser.

Wir betrachteten das Integral (5) zwischen a und b als Grenzwert des Integrals (6) zwischen a und $b - \eta$; uns interessierte dabei der Charakter der Annäherung von (6) an (5). Eine besondere Rolle spielt hier also der Punkt $x = b$ (wie in Nr. 513 der Punkt $x = \infty$). Es kann (aus Gründen, die wir später erklären werden) notwendig sein, einem anderen Punkt aus dem Intervall diese Rolle zuzuweisen. Zum Beispiel kann (5) auch Grenzwert des Integrals

$$\int_{a+\eta}^{b} f(x, y)\,\mathrm{d}x$$

für $\eta \to 0$ sein. Strebt dieses Integral für $\eta \to 0$ gleichmäßig bezüglich y gegen seinen Grenzwert, so spricht man auch hier von gleichmäßiger Konvergenz. Alles oben Gesagte kann auf diesen Fall übertragen werden.

Falls Zweifel darüber auftreten, von welcher gleichmäßigen Konvergenz die Rede ist, werden wir sagen, das Integral *konvergiere gleichmäßig* (bezüglich y aus einem bestimmten Bereich) *für $x = \infty$, für $x = b$* bzw. *für $x = a$* usw.

Wir bemerken noch, daß uns im allgemeinen die gleichmäßige Konvergenz von (5) etwa für $x = b$ gerade dann interessiert, wenn $x = b$ (im Sinne von Nr. 479) ein singulärer Punkt von $f(x, y)$ für gewisse Werte von y ist.

Die Definition bleibt nicht nur formal gültig, wenn (5) für alle y ein „eigentliches" Integral ist, sondern kann sich als sehr nützlich erweisen, wie wir sehen werden.

Beispielsweise existiert das Integral

$$\int_0^1 \frac{y}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x$$

für jedes y aus $[0, d]$, $d > 0$, im „eigentlichen" Sinne. Jedoch ist seine Konvergenz für die y aus diesem Intervall für $x = 0$ nicht gleichmäßig. Die Ungleichung

$$\int_0^\eta \frac{y}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x = \arctan\frac{\eta}{y} < \varepsilon$$

kann nämlich, sobald $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$ ist, nicht gleichzeitig für alle $y > 0$ erfüllt sein, denn ihre linke

Seite strebt, so klein man η auch wählt, für $y \to 0$ gegen $\frac{\pi}{2}$ und ist also für hinreichend kleine y größer als ε.

517. Beispiele.

1. Die gleichmäßige Konvergenz des Integrals

$$\int_1^\infty \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dx$$

bezüglich y läßt sich (für alle y) unmittelbar nachweisen, und zwar folgt dies aus

$$\left| \int_A^\infty \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dx \right| = \frac{A}{A^2 + y^2} \leqq \frac{1}{A}.$$

2. Man zeige mit Hilfe einer Majorante, daß das Integral

$$\text{(a)} \int_0^\infty e^{-tx^2}\, dx, \qquad \text{(b)} \int_0^\infty e^{-tx}\, x^a \cos x\, dx \qquad (a \geqq 0)$$

bezüglich t ($t \geqq t_0 > 0$) gleichmäßig konvergiert.

Hinweis. Für (a) ist $e^{-t_0 x^2}$, für (b) $e^{-t_0 x}\, x^a$ Majorante.

3. Man zeige unmittelbar, daß das Integral

$$\int_1^\infty \frac{n}{x^3}\, e^{-n/2x^2}\, dx$$

bezüglich n, wenn n die Werte 1, 2, 3, ... durchläuft, nicht gleichmäßig konvergiert.

Dies folgt aus der für jedes $A = \text{const}$ gültigen Beziehung

$$\int_A^\infty \frac{n}{x^3}\, e^{-n/2x^2}\, dx = e^{-n/2x^2}\Big|_A^\infty = 1 - e^{-n/2A^2} \to 1 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

4. Man zeige unmittelbar, daß das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx$$

bezüglich α für $\alpha \geqq \alpha_0 > 0$ gleichmäßig, jedoch für $\alpha \geqq 0$ nicht gleichmäßig konvergiert.

Ist A_0 so groß, daß für $A > A_0$

$$\left| \int_A^\infty \frac{\sin z}{z}\, dz \right| < \varepsilon$$

gilt (ε ist eine beliebig vorgegebene positive Zahl), so ist

$$\int_A^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = \int_{A\alpha}^\infty \frac{\sin z}{z}\, dz \tag{7}$$

dem absoluten Betrag nach kleiner als ε für alle $\alpha \geqq \alpha_0 > 0$, sobald $A > \frac{A_0}{\alpha_0}$ gilt. Damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen. Der zweite Teil der Behauptung folgt daraus, daß (7) für jedes A = const gegen den Grenzwert

$$\int_0^\infty \frac{\sin z}{z}\,dz = \frac{\pi}{2}$$

konvergiert, wenn α gegen 0 strebt.

5. Man beweise die bezüglich α gleichmäßige Konvergenz des Integrals

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} \cos x\,dx$$

in jedem abgeschlossenen, ± 1 nicht enthaltenden Intervall.

Hinweis. Dazu bringe man das Integral auf die Gestalt

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(a+1)\,x + \sin(a-1)\,x}{x}\,dx.$$

6. Man untersuche das Integral

$$\int_0^\infty x \sin x^3 \sin tx\,dx$$

auf gleichmäßige Konvergenz bezüglich t.

Hinweis. Mit Hilfe zweimaliger partieller Integration läßt sich $\int_A^\infty$ in

$$-\frac{\cos x^3 \cdot \sin tx}{3x} + \frac{t}{3}\,\frac{\sin x^3 \cdot \cos tx}{3x^3}\Bigg|_A^\infty$$

$$-\frac{1}{3}\int_A^\infty \frac{\cos x^3 \cdot \sin tx}{x^2}\,dx + \frac{t}{3}\int_A^\infty \frac{\sin x^3 \cdot \cos tx}{x^4}\,dx$$

$$+\frac{t^2}{9}\int_A^\infty \frac{\sin x^3 \cdot \sin tx}{x^3}\,dx$$

überführen. Hieraus ist die gleichmäßige Konvergenz bezüglich t in jedem *endlichen* Intervall ersichtlich.

7. Man zeige, daß die Integrale

$$\text{(a)}\ \int_0^1 x^{p-1}\,dx, \qquad \text{(b)}\ \int_0^1 x^{p-1} \ln^m x\,dx$$

(m eine natürliche Zahl) im Bereich $p \geqq p_0 > 0$ gleichmäßig (für $x = 0$) und im Bereich $p > 0$ nicht gleichmäßig bezüglich p konvergieren.

Majoranten sind (a) x^{p_0-1}, (b) $x^{p_0-1}\,|\ln x|^m$ (im Bereich $p \geqq p_0 > 0$). Andererseits gilt für jedes η = const

$$\int_0^\eta x^{p-1}\,dx = \frac{\eta^p}{p} \to \infty \quad \text{für} \quad p \to 0.$$

8. Analog läßt sich die gleichmäßige Konvergenz des Integrals

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

bezüglich p im Bereich $p \geqq p_0 > 0$ (für $x = 0$) und bezüglich q im Bereich $q \geqq q_0 > 0$ (für $x = 1$) nachweisen.

9. Man zeige, daß die Konvergenz des Integrals

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^y}\,dx$$

(für $x = 0$) bezüglich y im Bereich $y \leqq y_0 < 2$ gleichmäßig und im Bereich $y \leqq 2$ nicht gleichmäßig ist.

Im Fall $y \leqq y_0 < 2$ ist $\dfrac{1}{x^{y_0-1}}$ eine Majorante. Ferner wählen wir ein beliebiges, aber festes $\eta > 0$, das so klein sei, daß für $x \leqq \eta$ die Ungleichung

$$\frac{\sin x}{x} \geqq \frac{1}{2}$$

erfüllt ist. Dann gilt

$$\int_0^\eta \frac{\sin x}{x^y}\,dx > \frac{1}{2}\int_0^\eta \frac{dx}{x^{y-1}} = \frac{1}{2(2-y)}\,\eta^{2-y} \to \infty \quad \text{für} \quad y \to 2.$$

10. Man beweise, daß das Integral

$$\int_0^1 (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) \sqrt{\ln\frac{1}{x}}\,dx$$

gleichmäßig konvergent bezüglich n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) ist (sowohl für $x = 0$ als auch für $x = 1$).

Wegen $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} < \dfrac{1}{1-x}$ kann die im Intrvall $[0, 1]$ integrierbare Funktion $\dfrac{1}{1-x}\sqrt{\ln\dfrac{1}{x}}$ als Majorante dienen.

11. Es läßt sich unmittelbar zeigen, daß das Integral

$$\int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\,dx$$

(für $x = 0$) bezüglich y aus dem Intervall $[0, 1]$ nicht gleichmäßig konvergiert.

Für ein beliebiges $\eta = \text{const}$ gilt nämlich

$$\int_0^\eta \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\,dx = \frac{x}{x^2 + y^2}\Bigg|_0^\eta = \frac{\eta}{\eta^2 + y^2} \to \frac{1}{\eta} \quad \text{für} \quad y \to 0.$$

12. Das gleiche weise man für das Integral

$$\int_0^1 \frac{8x^3y - 8xy^3}{(x^2 + y^2)^3}\,dx$$

nach. Hier geht das Integral

$$\int_0^\eta = -\frac{4\eta^2 y}{(\eta^2+y^2)^2}$$

für $y = \eta$ in $-1/\eta$ über.

13. Man zeige, daß das Integral

$$\int_0^\infty e^{-xy}\frac{\cos x}{x^a}\,dx \qquad (0 < a < 1)$$

(sowohl für $x = 0$ als auch für $x = \infty$) bezüglich y ($y \geqq 0$) gleichmäßig konvergiert.

Für $x = 0$ ist es klar, da nämlich die Majorante $1/x^a$ existiert; für $x = \infty$ folgt die Behauptung aus der Konvergenz des Integrals

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^a}\,dx$$

(Nr. 476) im Zusammenhang mit der abschließenden Bemerkung aus Nr. 515.

14. Ist das Integral

$$\int_0^\infty t^\lambda f(t)\,dt,$$

wobei $f(t)$ eine für $t > 0$ stetige Funktion ist, für $\lambda = \alpha$ und $\lambda = \beta$ ($\alpha < \beta$) konvergent, so konvergiert es auch für alle λ mit $\alpha < \lambda < \beta$, und sogar gleichmäßig bezüglich λ (für $t = 0$ und $t = \infty$).

Beweis. Das Integral $\int_0^1 t^\alpha f(t)\,dt$ konvergiert, und $t^{\lambda-\alpha}$ ist für $\lambda \geqq \alpha$ eine monotone Funktion von t und durch die Zahl 1 beschränkt. Daher konvergiert das Integral

$$\int_0^1 t^\lambda f(t)\,dt = \int_0^1 t^{\lambda-\alpha} t^\alpha f(t)\,dt$$

für diese λ gleichmäßig (für $t = 0$). Analog kann man sich davon überzeugen, daß das Integral

$$\int_1^\infty t^\lambda f(t)\,dt = \int_1^\infty t^{\lambda-\beta} t^\beta f(t)\,dt$$

bezüglich λ mit $\lambda \leqq \beta$ gleichmäßig konvergiert (für $t = \infty$).

15. Wir wollen nun zeigen, daß das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\cos xy}{x^a}\,dx \qquad (0 < a < 1)$$

(für $x = \infty$) gleichmäßig bezüglich y ($y \geqq y_0 > 0$) konvergiert und daß die gleichmäßige Konvergenz gestört ist, wenn y im Bereich $y \geqq 0$ variiert.

Der erste Teil der Behauptung ist bewiesen, wenn wir das Kriterium 3° (vgl. 4°) aus Nr. 515 benutzen, da für alle $A \geqq 0$ und $y \geqq y_0$

$$\left|\int_0^A \cos xy\,dx\right| = \left|\frac{\sin Ay}{y}\right| \leqq \frac{1}{y_0}$$

gilt und die Funktion $1/x^a$ für $x \to \infty$ monoton fallend gegen 0 strebt.

Die erste Behauptung wird auch klar, wenn wir unmittelbar den Ausdruck

$$\int_A^\infty \frac{\cos xy}{x^a}\,dx = y^{a-1}\int_{Ay}^\infty \frac{\cos z}{z}\,dz \tag{*}$$

betrachten.

Der zweite Teil der Behauptung folgt daraus, daß der Ausdruck (*) für $A = \frac{1}{y}$ und $y \to 0$ gegen ∞ strebt.

(Wir sehen leicht, daß das Integral für $x = 0$ gleichmäßig bezüglich beliebiger y konvergiert.)

16. Das Integral

$$\int_0^\infty \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2}\,dx \qquad (\alpha, \beta > 0)$$

konvergiert gleichmäßig bezüglich β ($\beta \geqq \beta_0 > 0$). Dies folgt aus Nr. 515, Satz 3°. Für $\beta \geqq \beta_0$ gilt nämlich

$$\left|\int_0^A \sin \beta x\,dx\right| = \frac{1 - \cos A\beta}{\beta} \leqq \frac{2}{\beta_0},$$

und der Ausdruck $\frac{x}{\alpha^2 + x^2}$, der β nicht enthält, nimmt mit wachsendem x (mindestens für $x \geqq \alpha$) ab und verschwindet für $x \to \infty$.

§ 3. Die Anwendung der gleichmäßigen Konvergenz

518. Grenzübergang unter dem Integralzeichen. Wir beschäftigen uns jetzt in der Hauptsache mit dem Grenzübergang unter dem Integralzeichen bei uneigentlichen Integralen mit unendlichen Grenzen. Der Satz 1 aus Nr. 506 läßt sich auf diesen Fall nicht übertragen: Auch wenn die Funktion $f(x, y)$ im ganzen unendlichen Intervall für $y \to y_0$ gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $\varphi(x)$ strebt, braucht der Grenzübergang unter dem Integralzeichen nicht erlaubt zu sein.

Wir betrachten z. B. die Funktion

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{x^3}\,e^{-n/2x^2} & \text{für} \quad x > 0, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

($n = 1, 2, 3, \ldots$). Mit den gewöhnlichen Methoden der Differentialrechnung können wir leicht zeigen, daß diese Funktion ihren größten Wert für $x = \sqrt{\frac{n}{3}}$ erreicht und dieser Wert gleich $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\,e^{-3/2}$ ist. Da er für $n \to \infty$ verschwindet, strebt die Funktion $f_n(x)$ offenbar für $n \to \infty$ im ganzen Intervall $[0, \infty)$ gleichmäßig gegen $\varphi(x) = 0$. Das Integral

$$\int_0^\infty f_n(x)\,dx = 1$$

strebt jedoch für $n \to \infty$ nicht gegen 0.

Eine für den Grenzübergang unter dem Integralzeichen hinreichende Bedingung liefert der folgende Satz:

Satz 1. *Gegeben sei eine Funktion $f(x, y)$, die für y aus $\mathcal{Y}$ (im „eigentlichen" Sinne) im Intervall $[a, A]$, $A > 0$, nach x integrierbar sei und in jedem solchen Intervall für $y \to y_0$ gleichmäßig bezüglich x gegen ihre Grenzfunktion $\varphi(x)$ konvergiere. Ist darüberhinaus das Integral*

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\, dx \tag{1}$$

gleichmäßig konvergent bezüglich y (aus $\mathcal{Y}$), so gilt die Beziehung

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^\infty f(x, y)\, dx = \int_a^\infty \varphi(x)\, dx. \tag{2}$$

Wir setzen wie oben

$$F(A, y) = \int_a^A f(x, y)\, dx. \tag{3}$$

Für $F(A, y)$ sind die Voraussetzungen von Satz 1 aus Nr. 506 erfüllt; daher gilt

$$\lim_{y \to y_0} F(A, y) = \int_a^A \varphi(x)\, dx. \tag{4}$$

Andererseits ist

$$\lim_{A \to \infty} F(A, y) = \int_a^\infty f(x, y)\, dx, \tag{5}$$

d. h., die Funktion $F(A, y)$ strebt gleichmäßig bezüglich y gegen ihre Grenzfunktion. In diesem Fall dürfen wir auf den allgemeinen Satz aus Nr. 505 über die Vertauschung von Grenzübergängen verweisen. Aus der Existenz und der Gleichheit der iterierten Grenzwerte folgt unmittelbar die Beziehung (2).

Hieraus erhalten wir, wenn wir den verallgemeinerten Satz von Dini (Nr. 504, Satz 4°) anwenden, die

Folgerung.[1] *Ist die nichtnegative Funktion $f(x, y)$ im Intervall $[a, \infty)$ bezüglich x stetig und strebt sie, wachsend für wachsendes y, gegen ihre Grenzfunktion $\varphi(x)$, die ebenfalls in $[a, \infty)$ stetig ist, so folgt aus der Existenz des Integrals*

$$\int_a^\infty \varphi(x)\, dx \tag{6}$$

sowohl die Existenz von (1) als auch die Gültigkeit von (2).

Auf Grund des verallgemeinerten Satzes von Dini strebt $f(x, y)$ gleichmäßig bezüglich x in jedem endlichen Intervall gegen $\varphi(x)$. Ferner existiert auf Grund von Satz 1 aus Nr. 474 das Integral (1), denn es ist

$$f(x, y) \leqq \varphi(x).$$

[1]) Wir wollen annehmen, hier seien alle y kleiner als y_0.

Die Funktion $\varphi(x)$ spielt gleichzeitig die Rolle einer Majorante (Nr. 515), welche die (bezüglich y) gleichmäßige Konvergenz des Integrals (1) gewährleistet. Damit sind alle Voraussetzungen für die Anwendung des vorhergehenden Satzes erfüllt.

Der Leser kann leicht zeigen, daß *die Voraussetzung, das Integral* (6) *der Grenzfunktion existiere, sich hier durch die Voraussetzung, der endliche Grenzwert*

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^\infty f(x, y)\, dx$$

existiere, ersetzen läßt. Daraus folgt sowohl die Existenz von (6) als auch die Gültigkeit von (2).

Auch hier können wir, wie in Nr. 510, eine Verallgemeinerung von Satz 1 aus Nr. 505 angeben, der sich auf ein endliches Intervall bezieht:

Satz 1′. *Die Funktion $f(x, y)$ sei für y aus $\mathcal{Y}$ im Intervall $[a, b - \eta]$ (im „eigentlichen" Sinne) integrierbar; dabei sei $\eta > 0$, aber $\eta < b - a$. Ferner strebe sie in jedem solchen Intervall für $y \to y_0$ gleichmäßig bezüglich x gegen ihre Grenzfunktion $\varphi(x)$. Ist außerdem das Integral*

$$\int_a^b f(x, y)\, dx$$

(für $x = b$) bezüglich y aus $\mathcal{Y}$ gleichmäßig konvergent, so gilt

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \varphi(x)\, dx.$$

Der Beweis unterscheidet sich nicht von dem oben geführten. Auch in diesem Fall läßt sich leicht die Folgerung übertragen.

Die Rolle des Punktes b kann auch jeder andere Punkt des Intervalls spielen. Auch kann es mehrere solcher Punkte im Intervall geben.

Wie früher haben wir es bei dem Grenzübergang unter dem Integralzeichen am häufigsten mit Funktionenfolgen $\{f_n(x)\}$ zu tun. Gehen wir von Folgen zu unendlichen Reihen über, so können wir neue Sätze über die gliedweise Integration von Funktionenreihen aufstellen.

Die Folgerung lautet:

Die aus positiven und für $x \geqq a$ (oder $a \leqq x < b$) stetigen Funktionen $u_n(x)$ gebildete Reihe

$$\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$$

habe für diese x-Werte eine ebenfalls stetige Summe $\varphi(x)$. Ist diese Summe im Intervall $[a, \infty)$ (oder $[a, b]$) integrierbar, so kann die gegebene Reihe in diesem Intervall gliedweise integriert werden. Auch hier könnte, wie früher, statt der Integrierbarkeit der Summe gefordert werden, daß die Reihe der Integrale konvergiere:

$$\sum_{n=1}^\infty \int_a^\infty u_n(x)\, dx \quad \left[\text{oder} \quad \sum_{n=1}^\infty \int_a^b u_n(x)\, dx\right].$$

Dieser Satz gilt offenbar auch dann, wenn alle Glieder der Reihe negativ sind; man braucht dann nur einfach das Vorzeichen zu wechseln.

519. Beispiele.

1. Mit Hilfe der entsprechenden Reihenentwicklung berechne man die Integrale

$$\text{(a)} \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx, \qquad \text{(b)} \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,dx.$$

Lösung. (a) Der Integrand besitzt die Entwicklung

$$\frac{\ln(1-x)}{x} = -1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} - \cdots,$$

deren Glieder sämtlich negatives Vorzeichen haben. Die gleichmäßige Konvergenz ist in der Umgebung von $x = 1$ gestört. Dieser Punkt ist auch für die Summe der Reihe eine singuläre Stelle; die Summe ist jedoch im Intervall $[0, 1]$ integrierbar. Wenden wir den letzten Satz aus Nr. 518 an, so können wir gliedweise integrieren:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 x^{n-1}\,dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}$$

(vgl. Nr. 440, Formel (4)).

(b) Dieses Integral läßt sich durch die Substitution $x = 1 - z$ auf das erste zurückführen. Zur Übung wollen wir es jedoch unabhängig davon berechnen, indem wir $\frac{1}{1-x}$ in eine Reihe entwickeln:

$$\frac{\ln x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \ln x;$$

alle Glieder sind negativ. Die gleichmäßige Konvergenz ist hier in der Umgebung der beiden Punkte $x = 0$ und $x = 1$ gestört, so daß der erwähnte Satz z. B. auf die Intervalle $[0, 1/2]$ und $[1/2, 1]$ anzuwenden ist. Schließlich folgt

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^n \ln x\,dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

2. Man berechne die Summe der Reihe (1)

$$\sigma = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \cdots,$$

indem man von der Beziehung

$$\frac{1}{2n+1} = \int_0^1 x^{2n}\,dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

ausgeht.

Lösung. Es gilt

$$\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 (x^{4n} + x^{4n+2})\,dx = \int_0^1 dx \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n}(1 + x^2)$$

$$= \int_0^1 \frac{1 + x^2}{1 + x^4}\,dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

Obwohl die Summe der Reihe keine singulären Stellen hat, ist die gleichmäßige Konvergenz für $x = 1$ trotzdem gestört. Da aber für eine Partialsumme der Reihe die Ungleichungen

$$0 \leqq \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu x^{4\nu} (1 + x^2) = \frac{1 \pm x^{4n}}{1 + x^4} (1 + x^2) \leqq 2 \frac{1 + x^2}{1 + x^4} \leqq 4$$

gelten, ist die Majorante einfach eine Konstante, und das Integral dieser Summe konvergiert (für $x = 1$) gleichmäßig bezüglich n. Dadurch ist die gliedweise Integration gerechtfertigt (Satz 1′).

(b) Analog beweise man die Beziehung

$$1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \cdots = \frac{\pi}{4} \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

3. Mit Hilfe der Formel

$$\frac{1}{p(p+1)\cdots(p+n)} = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n x^{p-1}\, dx$$

berechne man die Summe der Reihe

(a) $\dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots$, (b) $\dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \dfrac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8} + \cdots$,

(c) $\dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \dfrac{1}{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} + \cdots$.

Lösung. (a) $\dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{1-x^2}\, dx = \ln 2 - \frac{1}{2}$, (b) $\dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^2 x}{1-x^2}\, dx = \frac{3}{4} - \ln 2$,

(c) $\dfrac{1}{6} \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^3}{1-x^3}\, dx = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} \ln 3 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{\pi}{6}$.

4. Man bestimme die Integrale

(a) $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\, dx \quad (0 < a < 1)$, (b) $K = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{1-x}\, dx \quad (a, b > 0)$.

Lösung. (a) Wir zerlegen I in

$$I = \int_0^1 + \int_1^\infty = I_1 + I_2$$

und berechnen I_1 und I_2 einzeln.

Für $0 < x < 1$ gilt die Reihenentwicklung

$$\frac{x^{a-1}}{1+x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu x^{a+\nu-1},$$

die gleichmäßig konvergiert, sobald $0 < \varepsilon \leqq x \leqq 1 - \varepsilon' < 1$ ist. Da die Partialsumme eine im Intervall $[0, 1]$ integrierbare Majorante besitzt,

$$0 \leqq \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu x^{a+\nu-1} = \frac{x^{a-1}[1 - (-x)^n]}{1+x} < x^{a-1},$$

ist das Integral dieser Partialsumme (sowohl für $x = 0$ als auch für $x = 1$) gleichmäßig konvergent. Durch gliedweise Integration finden wir nach Satz 1

$$I_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^\nu x^{a+\nu-1}\, dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{a+\nu}.$$

Das Integral I_2 kann durch die Substitution $x = 1/z$ auf die Form

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x^{-a}}{1+x}\, dx = \int_0^1 \frac{x^{(1-a)-1}}{1+x}\, dx$$

gebracht werden. Mit der oben angegebenen Entwicklung erhalten wir

$$I_2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{a-\nu}.$$

Also ist

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{a} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \left(\frac{1}{a+\nu} + \frac{1}{a-\nu}\right).$$

Wir erkennen in diesem Ausdruck die Partialbruchzerlegung der Funktion $\frac{\pi}{\sin \pi a}$ (Nr. 441, Beispiel 9). Damit ist

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\, dx = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

(b) Zerlegen wir das Integral wieder in zwei Integrale und führen wir im zweiten Integral wieder die Substitution $x = 1/z$ aus, so erhalten wir

$$K = \int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1-x}\, dx - \int_0^1 \frac{x^{b-1} - x^{-b}}{1-x}\, dx = K_1 - K_2.$$ [1]

Offenbar genügt es, nur K_1 zu berechnen. Durch Entwicklung des Integranden in eine Reihe finden wir analog zu (a)

$$K_1 = \frac{1}{a} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a+\nu} + \frac{1}{a-\nu}\right).$$

Dies ist die Partialbruchzerlegung der Funktion $\pi \cot \pi a$ (Nr. 441, Beispiel 9). Das Ergebnis lautet also

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{1-x}\, dx = \pi(\cot \pi a - \cot \pi b).$$

5. Man bestimme die Werte der Integrale

(a) $I_1 = \int_0^\infty \frac{1 - r\cos\beta x}{(1+x^2)(1-2r\cos\beta x + r^2)}\, dx$, (b) $I_2 = \int_0^\infty \frac{\ln(1-2r\cos\beta x + r^2)}{1+x^2}\, dx$

[1] Beide Integranden haben für $x = 1$ keine singuläre Stelle, sondern für $x = 0$; die Integrale konvergieren.

(für $|r| < 1$) unter der Voraussetzung, daß das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\cos kx}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,e^{-k} \qquad (k > 0)$$

bekannt sei (vgl. Nr. 522, 4°, oder Nr. 523, Beispiel 9).

Lösung. (a) Wir gehen von der Entwicklung

$$\frac{1 - r\cos\beta x}{1 - 2r\cos\beta x + r^2} = \sum_{\nu=0}^\infty r^\nu \cos\nu\beta x$$

aus.[1]) Wir multiplizieren mit $\frac{1}{1+x^2}$ und integrieren gliedweise:

$$I_1 = \sum_{\nu=0}^\infty r^\nu \int_0^\infty \frac{\cos\nu\beta x}{1+x^2}\,dx.$$

Da die Ausgangsreihe (nach Multiplikation mit $\frac{1}{1+x^2}$) sogar im unendlichen Intervall bezüglich x gleichmäßig konvergiert und die Partialsummen eine Majorante der Form $\frac{c}{1+x^2}$ haben, ist die gliedweise Integration erlaubt (Satz 1).

Benutzen wir noch den Wert des als bekannt vorausgesetzten Integrals, so finden wir

$$I_1 = \frac{\pi}{2}\sum_{\nu=0}^\infty r^\nu e^{-\nu\beta} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{1 - r e^{-\beta}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{e^\beta}{e^\beta - r}.$$

(b) Hier haben wir von der Entwicklung

$$\ln(1 - 2r\cos\beta x + r^2) = -2\sum_{\nu=1}^\infty \frac{r^\nu}{\nu}\cos\nu\beta x$$

(vgl. Nr. 461, Beispiel 6(b)) auszugehen. Die Lösung ist

$$I_2 = \pi\ln(1 - r e^{-\beta}).$$

5. Man entwickle die (Laplaceschen) Integrale

$$\text{(a)} \int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx\,dx, \qquad \text{(b)} \int_0^\infty e^{-x^2}\cosh 2bx\,dx, \qquad \text{(c)} \int_0^\infty e^{-x^2}\sin 2bx\,dx$$

nach Potenzen von b ($b > 0$), wobei in allen Fällen das Integral

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

als bekannt vorausgesetzt sei (Nr. 492, 2°).

Lösung. (a) Benutzt man die Entwicklung des Kosinus und integriert gliedweise, so ergibt sich

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = \int_0^\infty e^{-x^2}\sum_{\nu=0}^\infty \frac{(-1)^\nu (2bx)^{2\nu}}{(2\nu)!}\,dx$$

$$= \sum_{\nu=0}^\infty \frac{(-1)^\nu (2b)^{2\nu}}{(2\nu)!}\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2\nu}\,dx.$$

[1]) Sie folgt leicht aus den Entwicklungen in Nr. 440, Beispiel 10 und 11.

Die Reihe unter dem Integralzeichen des zweiten Ausdrucks ist in jedem endlichen Intervall $[0, A]$ gleichmäßig konvergent. Ihre Partialsumme hat die Majorante

$$e^{-x^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(2bx)^\nu}{(2\nu)!} = e^{-x^2} \cosh 2bx,$$

die im Intervall $[0, \infty)$ integrierbar ist. Daher ist die gliedweise Integration gestattet.

Es bleibt noch das Integral

$$\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2\nu} \, dx = I_\nu$$

zu berechnen. Partielle Integration führt leicht auf die Rekursionsformel

$$I_\nu = \frac{2\nu - 1}{2} I_{\nu-1}.$$

Daraus folgt

$$I_\nu = \frac{(2\nu - 1)!!}{2^{\nu+1}} \sqrt{\pi}.$$

Setzt man dies in die oben erhaltene Entwicklung ein, so findet man schließlich

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2bx \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu (2b)^{2\nu}}{(2\nu)!} \frac{(2\nu - 1)!!}{2^\nu} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left\{1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-b^2)^\nu}{\nu!}\right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}.\text{[1]}$$

(b) Die Lösung lautet hier $\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{b^2}$.

(c) Analog ergibt sich die Entwicklung

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \sin 2bx \, dx = b \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu - 1)!!} (-2b^2)^{\nu-1},$$

die sich aber in diesem Fall nicht in geschlossener Form schreiben läßt. Wir werden später auf anderem Wege eine neue (nicht mehr elementare) Funktion einführen, die zur Darstellung des Integrals notwendig ist (vgl. Nr. 523, Beispiel 5(b)).

7. Man bestimme den Wert des Integrals

$$I_k = \int_0^\infty \frac{x^{2k-1}}{e^{2\pi x} - 1} \, dx \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Lösung. Durch Entwicklung von

$$\frac{1}{e^{2\pi x} - 1} = \frac{e^{-2\pi x}}{1 - e^{-2\pi x}}$$

---

[1] Hierbei wurde die offenbar gültige Umformung

$$(2\nu)! = (2\nu)!!\,(2\nu - 1)!! = 2^\nu \nu!(2\nu - 1)!!$$

verwendet.

gelangt man zu der positiven Reihe

$$\frac{x^{2k-1}}{e^{2\pi x}-1}=\sum_{n=1}^{\infty} x^{2k-1}\,e^{-2n\pi x},$$

die in jedem Intervall $[\eta, A]$, $0<\eta<A<\infty$, gleichmäßig konvergent ist. Da die Summe der Reihe im Intervall $[0, \infty)$ integriert werden kann, ist die gliedweise Integration erlaubt:[1])

$$I_k=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} x^{2k-1}\,e^{-2n\pi x}\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!}{(2n\pi)^{2k}}=\frac{(2k-1)!}{(2\pi)^{2k}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}.$$

Da die k-te Bernoullische Zahl die Form

$$B_k=\frac{2\cdot(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}$$

hat (Nr. 449), ergibt sich schließlich

$$I_k=\frac{B_k}{4k}.$$

8. Man bestimme die Werte der (Legendreschen) Integrale

$$\text{(a)}\ \int_0^{\infty}\frac{\sin mx}{e^{2\pi x}-1}\,dx,\qquad \text{(b)}\ \int_0^{\infty}\frac{\sin mx}{e^{2\pi x}+1}\,dx\qquad (m \gtrless 0).$$

Lösung. (a) Die Entwicklung

$$\frac{\sin mx}{e^{2\pi x}-1}=\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{2\nu\pi x}\sin mx$$

ist ebenfalls in jedem Intervall $[\eta, A]$ gleichmäßig konvergent; ihre Partialsummen werden durch die Funktion

$$\frac{|\sin mx|}{e^{2\pi x}-1}$$

majorisiert. Daher ist die gliedweise Integration zulässig:[1])

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin mx}{e^{2\pi x}-1}\,dx=\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-2\nu\pi x}\sin mx\,dx$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{m}{m^2+4\nu^2\pi^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^m-1}-\frac{1}{m}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\,\frac{e^m+1}{e^m-1}-\frac{1}{2m}.$$

(b) Analog ergibt sich (mit Hilfe derselben Majorante)[2])

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin mx}{e^{2\pi x}+1}\,dx=\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{m}{m^2+4\nu^2\pi^2}=\frac{1}{2m}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{e^{m/2}-e^{-m/2}}.$$

Bemerkung. Man könnte natürlich den Wert der gegebenen Integrale auch durch Entwicklung von $\sin mx$ in eine Reihe gewinnen. Im Fall (a) würde man z. B. zu den in Beispiel 7

[1]) Hier (und im folgenden Beispiel) wird sowohl Satz 1 als auch Satz 1′ aus Nr. 518 benutzt, die etwa auf die Intervalle $[1, \infty)$ und $[0, 1]$ einzeln angewendet werden.

[2]) Diese Resultate ergeben sich aus den Partialbruchzerlegungen von $\coth x$ und $\dfrac{1}{\sinh x}$ (Nr. 441, Beispiel 10).

untersuchten Integralen gelangen, und zur Darstellung der Resultate in geschlossener Form könnte man die bekannte Entwicklung

$$\frac{1}{e^m - 1} - \frac{1}{m} + \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k)!} m^{2k-1}$$

(Nr. 449) heranziehen, usw. Diese Methode hat jedoch einen prinzipiellen Mangel; sie verlangt die Voraussetzung $m < 2\pi$, während das obige Resultat für jedes m gilt.

9. Setzt man in der elementaren Formel

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2}$$

(Nr. 492, 2°) $x = \frac{z}{\sqrt{n}}$, so ergibt sich

$$\int_0^\infty \frac{dz}{\left(1+\frac{z^2}{n}\right)^n} = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \sqrt{n}\, \frac{\pi}{2}.$$

Die mit wachsendem n monoton fallende Funktion $\frac{1}{\left(1+\frac{z^2}{n}\right)^n}$ strebt gegen den Grenzwert e^{-z^2}. Stützt man sich auf die Folgerung in Nr. 518 (die auch für monoton fallende Funktionen ihre Gültigkeit behält), so kann man unter dem Integralzeichen den Grenzübergang $n \to \infty$ vornehmen. Benutzt man zur Bestimmung des Grenzwertes der rechten Seite die Wallissche Formel (Nr. 317), so lautet schließlich das Resultat

$$\int_0^\infty e^{-z^2} dz = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{dz}{\left(1+\frac{z^2}{n}\right)^n} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(vgl. Nr. 492, 2°).

10. Das bekannte Fejérsche[1]) Integral

$$\frac{1}{n} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin nz}{\sin z}\right)^2 dz = \frac{\pi}{2}$$

(Nr. 309, Beispiel 5(b)) läßt sich, wenn $z = \frac{x}{n}$ gesetzt wird, auf die Gestalt

$$\int_0^{n\pi/2} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \left(\frac{\frac{x}{n}}{\sin \frac{x}{n}}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$$

bringen. Der Grenzübergang $n \to \infty$ wird hier dadurch erschwert, daß nicht nur der Integrand, sondern auch die obere Integrationsgrenze vom Parameter n abhängt. Wir setzen

---

[1]) Leopold Fejér, 1880—1959, ungarischer Mathematiker.

jedoch

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 \left(\dfrac{\dfrac{x}{n}}{\sin \dfrac{x}{n}}\right)^2 & \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq n\,\dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{für die übrigen } x \end{cases}$$

und können damit

$$\int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \tag{7}$$

schreiben. Offenbar ist für jedes $x > 0$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2,$$

wobei die Annäherung der Funktion $f_n(x)$ an ihren Grenzwert in jedem endlichen Intervall $[0, A]$ gleichmäßig ist. Andererseits gilt bekanntlich für $0 < z \leqq \dfrac{\pi}{2}$

$$\frac{\sin z}{z} \geqq \frac{2}{\pi}$$

und daher für $0 < x \leqq n\,\dfrac{\pi}{2}$

$$f_n(x) \leqq \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{\pi^2}{4}.$$

Diese Ungleichung ist erst recht für $x > n\,\dfrac{\pi}{2}$ erfüllt, denn dann ist $f_n(x) = 0$.

Mit Hilfe von Satz 1 aus Nr. 518 kann man in (7) unter dem Integralzeichen den Grenzübergang $n \to \infty$ vornehmen. Daraus folgt

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

(vgl. Nr. 494, Beispiel 4, und Nr. 497, Beispiel 15).

11. Es sei noch ein Beispiel der gleichen Art angegeben. Bekanntlich (vgl. Nr. 440, Beispiel 10) gilt

$$\int_0^\pi \frac{\cos mx}{1 - 2r\cos x + r^2}\,\mathrm{d}x = \pi\,\frac{r^m}{1 - r^2},$$

wobei m eine natürliche Zahl und $|r| < 1$ ist. Setzen wir hier $x = \dfrac{z}{m}$ und $r = 1 - \dfrac{h}{m}$ $(h > 0)$

und nehmen wir $m > h$ an, so finden wir

$$\int_0^{m\pi} \frac{\cos z\, dz}{h^2 + 2m^2\left(1 - \cos\frac{z}{m}\right)\left(1 - \frac{h}{m}\right)}$$

$$= \int_0^{m\pi} \frac{\cos z\, dz}{h^2 + z^2\left(\frac{\sin\left(\frac{z}{2m}\right)}{\frac{z}{2m}}\right)^2\left(1 - \frac{h}{m}\right)} = \frac{\pi}{h}\,\frac{\left(1 - \frac{h}{m}\right)^m}{2 - \frac{h}{m}}.$$

Lassen wir m unter dem Integralzeichen gegen ∞ streben, ohne uns daran zu stoßen, daß auch die obere Integrationsgrenze mit m wächst (wir ersetzen sie durch ∞), so ergibt sich

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos z}{h^2 + z^2}\, dz = \frac{\pi}{2h}\, e^{-h}.$$

Aber ist dieses Resultat richtig? Um uns darüber ein Urteil erlauben zu können, müssen wir den ausgeführten Grenzübergang begründen.

Wir führen die Funktion

$$f_m(z) = \begin{cases} \dfrac{\cos z}{h^2 + z^2\left(\frac{\sin\frac{z}{2m}}{\frac{z}{2m}}\right)^2\left(1 - \frac{h}{m}\right)} & \text{für} \quad 0 \leqq z \leqq m\pi, \\ 0 & \text{für} \quad z > m\pi \end{cases}$$

ein, so daß die linke Seite der uns interessierenden Gleichung in der Gestalt $\int_0^{\infty} f_m(z)\, dz$ geschrieben werden kann. Offenbar ist

$$\lim_{m\to\infty} f_m(z) = \frac{\cos z}{h^2 + z^2},$$

wobei die Konvergenz in einem endlichen Intervall gleichmäßig ist. Als Majorante kann schließlich die Funktion

$$\frac{1}{h^2 + \frac{4}{\pi^2} z^2\left(1 - \frac{h}{m_0}\right)}$$

dienen, wenn $m_0 > h$ ist und nur die Werte $m \geqq m_0$ betrachtet werden. Jetzt brauchen wir nur noch Satz 1 aus Nr. 518 anzuwenden.

12. Die Notwendigkeit, in den Beispielen 10 und 11 den Grenzübergang zu begründen, wird durch das folgende, ihnen ähnliche Beispiel unterstrichen; das Ergebnis des folgenden (nicht begründeten) Grenzübergangs erweist sich nämlich als falsch!

Wir betrachten das Integral

$$I_n = \int_0^{n} \frac{n}{n^2 + x^2}\, dx.$$

Verfahren wir mit ihm im Fall $n \to \infty$ wie in den vorhergehenden Beispielen, so ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \int_0^\infty 0\,\mathrm{d}x = 0.$$

In Wirklichkeit ist I_n (wovon wir uns mit Hilfe einer Variablensubstitution überzeugen können) gleich $\pi/4$.

Wir geben noch zwei Beispiele an, die, wie wir sehen werden, auch in anderer Beziehung interessant sind.

13. Wir wollen das Integral

$$I = \int_0^\infty \mathrm{e}^{a\cos x} \sin(a \sin x) \frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \text{(a beliebig)}$$

(vgl. Nr. 478, Beispiel 8(a)) unter der Voraussetzung berechnen, daß das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

bekannt sei (vgl. Nr. 492, 3°, und Nr. 494, Beispiel 5).

Es ist zweckmäßig, die komplexe Veränderliche $z = a(\cos x + \mathrm{i} \sin x)$ einzuführen. Dann ist (nach Nr. 457, Formel (6))

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{a\cos x}[\cos(a \sin x) + \mathrm{i} \sin(a \sin x)];$$

dies läßt sich in die Reihe

$$1 + \sum_{n=1}^\infty \frac{a^n(\cos nx + \mathrm{i} \sin nx)}{n!}$$

entwickeln. Vergleichen wir die Imaginärteile, so erhalten wir die Entwicklung des Faktors $\mathrm{e}^{a\cos x} \times \sin(a \sin x)$ im Integranden:

$$\mathrm{e}^{a\cos x} \sin(a \sin x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{a^n}{n!} \sin nx.$$

Daraus folgt

$$I = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{a^n}{n!} \frac{\sin nx}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Könnten wir diesen Ausdruck gliedweise integrieren, so würden wir sofort

$$I = \sum_{n=1}^\infty \frac{a^n}{n!} \int_0^\infty \frac{\sin nx}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^\infty \frac{a^n}{n!} = \frac{\pi}{2}(\mathrm{e}^a - 1)$$

finden.

Die Begründung dafür, daß die gliedweise Integration in diesem Fall gestattet ist, ist recht originell. Da die im Integranden stehende Reihe durch die Reihe mit konstanten Gliedern $|a| \sum_{\nu=0}^\infty \frac{|a|^\nu}{\nu!}$ majorisiert wird, darf in einem endlichen Intervall $[0, A]$ gliedweise integriert werden:

$$\int_0^A \sum_{n=1}^\infty \frac{a^n}{n!} \frac{\sin nx}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^\infty \frac{a^n}{n!} \int_0^A \frac{\sin nx}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^\infty \frac{a^n}{n!} \int_0^{nA} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t. \tag{8}$$

Wir müssen hier A gegen ∞ streben lassen. Nun ist, wie wir leicht sehen, das Integral $\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt$ auf Grund der Existenz von $\int\limits_0^{t_0} \frac{\sin t}{t}\, dt$ für *alle* $t_0 \geqq 0$ gleichmäßig beschränkt:

$$\left|\int\limits_0^{t_0} \frac{\sin t}{t}\, dt\right| \leqq L.$$

Dann wird die Reihe (8), deren Glieder von der Veränderlichen A abhängen, durch die Reihe mit konstanten Gliedern $L \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|a|^n}{n!}$ majorisiert, und sie konvergiert daher gleichmäßig bezüglich A. In diesem Fall darf (auf Grund des bekannten Satzes aus Nr. 433) in der Reihe gliedweise zum Grenzwert für $A \to \infty$ übergegangen werden, was zu beweisen war.

14. Wir zeigen noch ein Beispiel der gleichen Art. Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = s$ sei konvergent, und wir setzen für $x \geqq 0$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Auch diese Reihe ist konvergent, und (nach den Kriterien von Abel und Dirichlet; Nr. 430) sogar gleichmäßig konvergent bezüglich x in jedem endlichen Intervall $[0, A]$, da der Faktor $\frac{x^n}{n!}$ (mindestens für $n > A$) mit wachsendem n abnimmt. Wir wollen zeigen, daß dann

$$\int\limits_0^\infty e^{-x} g(x)\, dx = s \tag{9}$$

gilt. Das Resultat ergibt sich sofort durch gliedweise Integration:

$$\int\limits_0^\infty e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \int\limits_0^\infty e^{-x} x^n\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s,$$

denn es ist $\int\limits_0^\infty e^{-x} x^n\, dx = n!$! (vgl. Nr. 489, Beispiel 4).

Wir müssen jetzt nur noch begründen, weshalb die gliedweise Integration gestattet ist. Genau wie vorher ist die gliedweise Integration in einem endlichen Intervall zulässig:

$$\int\limits_0^A e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{n!} \int\limits_0^A e^{-x} x^n\, dx. \tag{10}$$

Mit Hilfe partieller Integration folgt leicht

$$\frac{1}{n!} \int\limits_0^A e^{-x} x^n\, dx < \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_0^A e^{-x} x^{n-1}\, dx < 1,$$

so daß die von A und n abhängigen Faktoren $\frac{1}{n!} \int\limits_0^A e^{-x} x^n\, dx$ (für $A = \mathrm{const}$) mit wachsendem n monoton abnehmen und dabei gleichmäßig beschränkt bleiben. In diesem Fall ist die Reihe auf der rechten Seite von (10) auf Grund des eben erwähnten Kriteriums gleichmäßig konvergent bezüglich A; das bedeutet, daß in ihr gliedweise der Grenzübergang $A \to \infty$ vorgenommen werden kann, usw.

Wir zeigen nun an zwei Beispielen die Anwendung der eleganten Formel (9).

(a) Wir betrachten den Integralsinus

$$-\operatorname{si} x = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3!\cdot 3} - \frac{x^5}{5!\cdot 5} + \cdots.^{1)}$$

Diese Reihe ist vom Typ $g(x)$, wenn man von der Reihe

$$\frac{\pi}{2} - 1 + 0 + \frac{1}{3} + 0 - \frac{1}{5} + \cdots$$

ausgeht. Nach Formel (9) ist dann

$$-\int_0^\infty e^{-x} \operatorname{si} x\,dx = \frac{\pi}{2} - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

(b) Eine andere interessante Funktion, die Bessselfunktion nullter Ordnung, hat die Entwicklung

$$J_0(x) = 1 + \sum_{\nu=1}^\infty (-1)^\nu \frac{x^{2\nu}}{(\nu!)^2\cdot 2^{2\nu}}$$

(vgl. Nr. 441, Beispiel 4 und 5), die nach der Art von $g(x)$ zusammengesetzt ist, wenn man

$$a_0 = 1, \qquad a_{2\nu} = (-1)^\nu \frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!}, \qquad a_{2\nu-1} = 0$$

setzt. Dann gilt auf Grund von (9)

$$\int_0^\infty e^{-x} J_0(x)\,dx = \sum_{\nu=0}^\infty (-1)^\nu \frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Das letzte Resultat ergibt sich hier, wenn wir uns an die Entwicklung der Funktion $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ in die binomische Reihe erinnern (Nr. 407, Formel (24)) und in ihr $x = 1$ setzen.

Bemerkung. Es ist recht lehrreich, zu untersuchen, worin die Besonderheit der bei den letzten beiden Beispielen angewandten Überlegungen besteht (im Vergleich zu den übrigen Beispielen für die gliedweise Integration von Reihen in einem unendlichen Intervall). Die allgemeine Frage nach der Vertauschbarkeit des Grenzübergangs mit einem Integral, dessen eine Grenze gleich ∞ ist (Nr. 518), ist äquivalent der Frage nach Existenz und Gleichheit der beiden iterierten Grenzwerte einer gewissen Funktion $F(A, y)$ zweier Veränderlicher (vgl. Nr. 518, Formel (3)). Gemäß dem allgemeinen Satz aus Nr. 505 ist in diesem Fall (wenn die beiden einfachen Grenzwerte (4) oder (5) aus Nr. 518 existieren) die gleichmäßige Konvergenz der Funktion gegen einen dieser Grenzwerte und die Gleichheit der Funktion $F(A, y)$ mit diesem Grenzwert eine hinreichende Bedingung. Im allgemeinen setzen wir diese Gleichmäßigkeit bezüglich des Grenzwertes (5) voraus, was auch der gleichmäßigen Konvergenz des Integrals mit einer

---

1) Diese Entwicklung ergibt sich leicht, wenn man

$$-\operatorname{si} x = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt - \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$$

schreibt, im zweiten Integral den Sinus durch seine Reihenentwicklung ersetzt und dann gliedweise integriert.

unendlichen Grenze entspricht. *Aber diese Schlußfolgerung würde auch dann gültig bleiben, wenn stattdessen die Funktion F gleichmäßig gegen den Grenzwert* (4) *streben würde!*

Im Fall der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ mit den Partialsummen $f_n(x)$ kann man somit entweder die (bezüglich n) gleichmäßige Konvergenz der Funktion

$$F_n(A) = \int_a^A f_n(x)\,dx$$

für $A \to \infty$ gegen

$$\int_a^\infty f_n(x)\,dx$$

nachweisen, d. h. die gleichmäßige Konvergenz dieser Integrale, wie wir es auch im allgemeinen taten, oder aber sich von der (bezüglich A) gleichmäßigen Annäherung der genannten Funktion für $n \to \infty$ an den Grenzwert

$$\int_a^A \varphi(x)\,dx,$$

d. h. von der (bezüglich A) gleichmäßigen Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^A u_n(x)\,dx = \int_a^{A} \varphi(x)\,dx$$

überzeugen, was in den Beispielen 13 und 14 zweckmäßiger schien.

520. Stetigkeit und Differenzierbarkeit eines Integrals bezüglich des Parameters. Wir beschäftigen uns zunächst mit der Übertragung der Sätze 2 und 3 aus Nr. 506 bzw. 507 auf den Fall eines unendlichen Intervalls.

Satz 2. *Eine Funktion $f(x, y)$ sei definiert und stetig (in beiden Veränderlichen) für $x \geqq a$ und y aus dem Intervall $[c, d]$. Ist das Integral*

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\,dx \tag{1}$$

gleichmäßig konvergent bezüglich y aus $[c, d]$, so stellt es in diesem Intervall eine stetige Funktion des Parameters y dar.

Dies ist eine Folgerung aus Satz 1 (Nr. 506). Wie wir nämlich in Nr. 506 sahen, strebt die Funktion $f(x, y)$, wenn x in einem beliebigen Intervall $[a, A]$ variiert, für $y \to y_0$ (wobei y_0 ein spezieller Wert von y ist) gleichmäßig bezüglich x gegen die Grenzfunktion $f(x, y_0)$. Dann können wir auf Grund von Satz 1 aus Nr. 518 im Integral (1) unter dem Integralzeichen zur Grenze übergehen:

$$\lim_{y \to y_0} I(y) = \lim_{y \to y_0} \int_a^\infty f(x, y)\,dx = \int_a^\infty f(x, y_0)\,dx = I(y_0).$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

In Nr. 485 beschrieben wir Methoden, mit deren Hilfe divergenten Integralen „verallgemeinerte Werte“ zugeschrieben werden können; bei der zweiten dieser Methoden blieb die Frage nach der Regularität unbeantwortet. Der eben bewiesene Satz befähigt uns jetzt, diese

Lücke zu schließen. Wenn $\int\limits_0^\infty f(x)\,dx$ konvergiert, so ist das Integral $\int\limits_0^\infty e^{-kx} f(x)\,dx$ gleichmäßig konvergent bezüglich k ($k \geqq 0$); vgl. die Bemerkung am Schluß von Nr. 515. Folglich stellt es, mindestens für stetiges $f(x)$, eine stetige Funktion des Parameters k für $k \geqq 0$ dar. Insbesondere gilt

$$\lim_{k\to+0} \int\limits_0^\infty e^{-kx} f(x)\,dx = \int\limits_0^\infty f(x)\,dx.$$

Der Wert des konvergenten Integrals stimmt also mit seinem „verallgemeinerten Wert" überein; darin besteht die erwähnte Regularität.

Bemerkung. Ist $f(x, y)$ eine nichtnegative Funktion, $f(x, y) \geqq 0$, so gilt in gewissem Sinne eine Umkehrung des Satzes: *Aus der Stetigkeit des Integrals* (1) *als Funktion des Parameters folgt die gleichmäßige Konvergenz von* (1).

In diesem Fall ist die in y stetige Funktion

$$F(A, y) = \int\limits_a^A f(x, y)\,dx \tag{3}$$

für wachsendes A zunehmend; infolgedessen strebt sie (auf Grund des verallgemeinerten Satzes von Dini; Nr. 504, 4°) gleichmäßig bezüglich y gegen ihren Grenzwert (1), was zu beweisen war.

Satz 3. *Eine Funktion $f(x, y)$ sei definiert und stetig für $x \geqq a$ und y aus dem Intervall $[c, d]$ und habe außerdem für diese Werte von x und y eine in beiden Veränderlichen stetige Ableitung $f_y(x, y)$. Setzen wir ferner voraus, daß* (1) *für alle y aus $[c, d]$ konvergiert und daß das Integral*

$$\int\limits_a^\infty f_y(x, y)\,dx \tag{11}$$

gleichmäßig konvergiert, so gilt für jedes y aus $[c, d]$

$$I'(y) = \int\limits_a^\infty f_y(x, y)\,dx.^{1)}$$

Wir wählen einen speziellen Wert $y = y_0$, betrachten den Quotienten

$$\frac{I(y_0 + k) - I(y_0)}{k} = \int\limits_a^\infty \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k}\,dx \tag{12}$$

und zeigen, daß hier unter dem Integralzeichen der Grenzübergang $k \to 0$ gestattet ist. In Nr. 507 sahen wir schon, daß der Integrand

$$\frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k}$$

für $k \to 0$ gleichmäßig bezüglich x gegen die Grenzfunktion $f_y(x, y_0)$ strebt, wenn x in einem beliebigen Intervall $[a, A]$ variiert. Ehe wir den Satz 1 anwenden, müssen wir uns noch von der gleichmäßigen Konvergenz des Integrals (12) bezüglich k überzeugen.

1) Die Berechnung der Ableitung nach dieser Formel heißt hier ebenfalls *Leibnizsche Regel.*

Auf Grund der vorausgesetzten gleichmäßigen Konvergenz von (11) gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $A_0 \geqq a$ derart, daß

$$\left| \int_A^{A'} f_y(x, y)\, dx \right| < \varepsilon \tag{13}$$

für alle x gleichzeitig erfüllt ist, sobald $A' > A > A_0$ gilt (Nr. 514). Wir zeigen, daß gleichzeitig auch

$$\left| \int_A^{A'} \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k}\, dx \right| < \varepsilon \tag{14}$$

für alle möglichen Werte von k gilt. Zu diesem Zweck halten wir A und A' fest und betrachten die Funktion

$$\Phi(y) = \int_A^{A'} f(x, y)\, dx.$$

Ihre Ableitung kann auf Grund von Satz 3 aus Nr. 507 nach der Leibnizschen Regel berechnet werden,

$$\Phi'(y) = \int_A^{A'} f_y(x, y)\, dx,$$

und ist wegen (13) dem absoluten Betrage nach stets kleiner als ε. Dann ist aber auch der Quotient

$$\frac{\Phi(y_0 + k) - \Phi(y_0)}{k} = \int_A^{A'} \frac{f(x, y_0 + k) - g(x, y_0)}{k}\, dx,$$

der auf Grund des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung gleich $\Phi'(y_0 + \theta k)$, $0 < \theta < 1$, ist, dem absoluten Betrage nach kleiner als ε, d. h., (14) ist erfüllt. Daraus folgt mit Hilfe des Kriteriums aus Nr. 514 die gleichmäßige Konvergenz von (12). Damit ist der Satz bewiesen.

Man erhält auch leicht die Verallgemeinerungen der Sätze 2* und 3* aus Nr. 510 für ein endliches Intervall $[a, b]$; man braucht nur, ohne die Formulierungen und Überlegungen in ihrem Wesen zu ändern, den Punkt $x = \infty$ durch den Punkt $x = b$ zu ersetzen (wie es z. B. beim Übergang von Satz 1 zu Satz 1' getan wurde).

Bemerkung. In der hier dargelegten Theorie benutzten wir nicht den Zusammenhang zwischen Integralen und unendlichen Reihen, sondern wir bevorzugten überall die Idee, die in Wirklichkeit die Grundlage aller Schlußfolgerungen ist, nämlich die gleichmäßige Konvergenz gegen die Grenzfunktion. Jedoch könnte in anderen Fällen der Hinweis auf die schon entwickelte Theorie der Reihen eine formale Vereinfachung der Überlegungen mit sich bringen. Wir wollen dies an einem neuen Beweis von Satz 3 erläutern (wobei bedeutende Vereinfachungen auftreten).

Wir ersetzen das Integral $I(y)$ durch eine Reihe (Nr. 477):

$$I(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x, y)\, dx;$$

$\{A_n\}$ ist dabei eine Folge unbeschränkt wachsender Zahlen. Die Glieder

$$u_n(y) = \int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x, y)\, dx$$

der Reihe sind auf Grund der Sätze 2 und 3 aus Nr. 506 bzw. Nr. 507 stetig und haben ebenfalls stetige Ableitungen

$$u'_n(y) = \int_{A_{n-1}}^{A_n} f_y(x, y)\, dx.$$

Zudem konvergiert die aus diesen Ableitungen gebildete Reihe gleichmäßig bezüglich y aus dem Intervall $[c, d]$, wie aus der gleichmäßigen Konvergenz des Integrals (11) folgt (Nr. 514). Dann existiert nach dem Satz über die gliedweise Differentiation einer Reihe (Nr. 435) die Ableitung

$$I'(y) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_{n-1}}^{A_n} f_y(x, y)\, dx = \int_a^{\infty} f_y(x, y)\, dx,$$

was zu beweisen war.

Dasselbe Verfahren kann auch zum Beweis der Sätze 1 und 2 aus Nr. 518 bzw. Nr. 520 (und ebenfalls des Satzes 4 aus Nr. 521) mit dem Hinweis auf die entsprechenden Sätze aus der Theorie der Funktionenreihen verwendet werden. Die Durchführung dieser Beweise überlassen wir dem Leser.

521. Integration eines Integrals nach dem Parameter. Zunächst beweisen wir den folgenden Satz:

Satz 4. *Unter den Voraussetzungen von Satz 2 gilt*

$$\int_c^d I(y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^{\infty} f(x, y)\, dx = \int_a^{\infty} dx \int_c^d f(x, y)\, dy. \tag{15}$$

Beweis. Auf Grund von Satz 4 aus Nr. 508 gilt für jedes endliche $A \geqq a$

$$\int_c^d dy \int_a^A f(x, y)\, dx = \int_a^A dx \int_c^d f(x, y)\, dy.$$

Nun strebt nach Voraussetzung die in y stetige Funktion (3) für $A \to \infty$ gleichmäßig bezüglich y gegen ihren Grenzwert (1). Folglich kann (Nr. 506, Satz 1) im Integral auf der linken Seite unter dem Integralzeichen der Grenzübergang $A \to \infty$ vorgenommen werden, d. h.

$$\lim_{A \to \infty} \int_c^d dy \int_a^A f(x, y)\, dx = \int_c^d dy \int_a^{\infty} f(x, y)\, dx.$$

In diesem Fall existiert auch der Grenzwert des rechten Integrals für $A \to \infty$, d. h.

$$\int_a^{\infty} dx \int_c^d f(x, y)\, dy,$$

und er hat den gleichen Wert, was zu beweisen war.

Benutzen wir die Bemerkung zu Satz 2 aus Nr. 520, so ergibt sich hieraus leicht die

Folgerung. *Ist die Funktion $f(x, y)$ nichtnegativ, so zieht die Stetigkeit des Integrals* (1) *in y die Gültigkeit von* (15) *nach sich.*

Damit sind wir (unter den genannten Bedingungen) berechtigt, zwei Integrale miteinander zu vertauschen, von denen sich nur das eine über ein unendliches, das andere aber über ein endliches Intervall erstreckt.

Dagegen können wir in vielen Fällen sofort die Integrale vertauschen, wenn sich *beide* über unendliche Intervalle erstrecken:

$$\int_c^\infty dy \int_a^\infty f(x, y)\, dx = \int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x, y)\, dy. \tag{16}$$

Diese Vertauschung zu rechtfertigen ist jedoch oft kompliziert und mühsam, wofür der Leser viele Beispiele finden wird.

Nur für wenige Funktionenklassen gelingt es, die Formel (16) allgemein zu beweisen:

Satz 5. *Eine Funktion $f(x, y)$ sei definiert und stetig für $x \geqq a$ und $y \geqq c$. Ferner seien die beiden Integrale*

$$\int_a^\infty f(x, y)\, dx \quad \textit{und} \quad \int_c^\infty f(x, y)\, dy \tag{17}$$

gleichmäßig konvergent: das erste bezüglich y, das zweite bezüglich x (in jedem endlichen Intervall). Wenn dann mindestens eines der beiden Doppelintegrale

$$\int_c^\infty dy \int_a^\infty |f(x, y)|\, dx, \qquad \int_a^\infty dx \int_c^\infty |f(x, y)|\, dy \tag{18}$$

existiert, so existieren auch die Doppelintegrale (16) *und sind einander gleich.*

Beweis: Wir nehmen an, das zweite der Integrale (18) existiere. Auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz des Integrals $\int_a^\infty f\, dx$ gilt (vgl. den vorhergehenden Satz) für jedes *endliche $C > c$*

$$\int_c^C dy \int_a^\infty f(x, y)\, dx = \int_a^\infty dx \int_c^C f(x, y)\, dy.$$

Es muß gezeigt werden, daß im rechten Integral für $C \to \infty$ der Grenzübergang unter dem Integralzeichen zulässig ist; ist dies gezeigt, so gilt

$$\int_c^\infty dy \int_a^\infty f(x, y)\, dx = \lim_{C\to\infty} \int_c^C dy \int_a^\infty f(x, y)\, dx = \lim_{C\to\infty} \int_a^\infty dx \int_c^C f(x, y)\, dy$$

$$= \int_a^\infty dx \lim_{C\to\infty} \int_c^C f(x, y)\, dy = \int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x, y)\, dy.$$

Den Grenzübergang zu rechtfertigen ist möglich, wenn wir uns auf Satz 1 aus Nr. 518 stützen. Die von x und C abhängige Funktion $\int_c^C f(x, y)\, dy$, die in x stetig ist (Nr. 506, Satz 2), strebt für $C \to \infty$ gleichmäßig bezüglich x aus einem beliebigen endlichen Intervall gegen die Grenzfunktion $\int_c^\infty f(x, y)\,dy$. Das Integral $\int_a^\infty dx \int_c^C f(x, y)\,dy$ konvergiert gleichmäßig bezüglich C, da es von dem zweiten Integral (18) majorisiert wird, denn es ist

$$\left|\int_c^C f(x, y)\,dy\right| \leqq \int_c^\infty |f(x, y)|\,dy.$$

Also sind hier sämtliche Voraussetzungen von Satz 1 (Nr. 518) erfüllt, und die Behauptung ist bewiesen.

Etwas einfacher verhält es sich im Fall einer Funktion, die nicht ihr Vorzeichen wechselt. Für eine nichtnegative Funktion (es genügt, sich auf diesen Fall zu beschränken) gilt z. B. die

Folgerung. *Für eine nichtnegative stetige Funktion $f(x, y)$ seien die beiden Integrale* (17) *ebenfalls stetig, und zwar das erste Integral in y, das zweite in x. Existiert dann eines der beiden Doppelintegrale* (16), *so existiert auch das andere und ist dabei dem ersten Integral gleich.*

Auf Grund von Satz 2 und der Bemerkung zu ihm ist klar, daß die Voraussetzung über die Stetigkeit der Integrale (17) mit der Forderung nach ihrer gleichmäßigen Konvergenz äquivalent ist. Man braucht nur den vorhergehenden Satz anzuwenden und dabei zu berücksichtigen, daß in diesem Fall $|f(x, y)| = f(x, y)$ ist.

Die Sätze aus Nr. 521 können auch für endliche Intervalle formuliert werden: Dabei ist nur der singuläre Punkt $x = \infty$ durch den endlichen singulären Punkt $x = b$ und (falls notwendig) $y = \infty$ durch $y = d$ zu ersetzen.

522. Die Berechnung einiger Integrale. Die soeben dargelegte Theorie wollen wir nun zur Berechnung einiger wichtiger Integrale verwenden.

1°. Wir untersuchen die (Eulerschen) Integrale

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx \qquad (0 < a < 1),$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{1-x}\,dx \qquad (0 < a, b < 1),$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{x^2 + 2x\cos\theta + 1} \qquad (0 < a < 1;\ -\pi < \theta < \pi).$$

Aus den Ergebnissen von Nr. 496, Beispiel 1, folgt sofort

$$\int_0^\infty \frac{z^{2m}}{1+z^{2n}}\,dz = \frac{\pi}{2n}\,\frac{1}{\sin\dfrac{2m+1}{2n}\pi} \qquad (m < n).$$

Setzen wir hier $z = x^{1/2n}$, so finden wir das erste Integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x} x^{\frac{2m+1}{2n}-1} dx = \frac{\pi}{\sin \frac{2m+1}{2n}\pi} \tag{19}$$

für den speziellen Wert $a = \dfrac{2m+1}{2n}$.

Damit wir hieraus den Wert des gesuchten Integrals für ein beliebiges a erhalten, das der Bedingung $0 < a < 1$ genügt, müssen wir uns davon überzeugen, daß dieses Integral eine in a $(0 < a < 1)$ stetige Funktion ist.

Für $0 < x < \infty$ und $0 < a < 1$ ist der Integrand in beiden Veränderlichen stetig. Ferner konvergiert das Integral gleichmäßig bezüglich a, und zwar im Fall $x = 0$ für $a \geqq a_0 > 0$, im Fall $x = \infty$ für $a < a_1 < 1$. Zerlegen wir nämlich $\int_0^\infty$ in $\int_0^1 + \int_1^\infty$, so sehen wir, daß diese beiden Integrale von

$$\int_0^1 \frac{x^{a_0-1}}{1+x} dx \quad \text{bzw.} \quad \int_1^\infty \frac{x^{a_1-1}}{1+x} dx$$

majorisiert werden.

Wenden wir auf $\int_1^\infty$ den Satz 2 und auf $\int_0^1$ den dazu analogen Satz für ein endliches Intervall an, so können wir schließen, daß beide Integrale in bezug auf den Parameter stetig sind.

Jeden Wert a $(0 < a < 1)$ können wir mit Hilfe von Größen der Gestalt $\dfrac{2m+1}{2n}$ (m und n natürliche Zahlen; $m < n$) beliebig approximieren. Lassen wir in (19) $\dfrac{2m+1}{2n}$ gegen a streben und berücksichtigen wir, daß das Integral stetig ist, so erhalten wir schließlich

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi a}$$

(vgl. Nr. 519, Beispiel 4 (a)).

Ganz analog folgt aus Nr. 496, Beispiel 2 und 3,

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{1-x} dx = \pi(\cot a\pi - \cot b\pi)$$

und

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\, dx}{x^2 + 2x\cos\theta + 1} = \pi \frac{\sin(1-a)\theta}{\sin\theta \cdot \sin a\pi}.$$

2°. Das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

kennen wir schon aus Nr. 492, 3°. Wir betrachten zunächst das Integral

$$I_0 = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx \qquad (\alpha > 0).$$

Wir wollen es durch Differentiation nach dem Parameter α berechnen. Die unmittelbare Anwendung der Leibnizschen Regel führt jedoch hier auf das divergente Integral $\int_0^\infty \cos \alpha x\,dx$. Daher führen wir einen „konvergenzerzeugenden" Faktor e^{-kx} ($k > 0$) ein und suchen den Wert des Integrals

$$I = \int_0^\infty e^{-kx}\frac{\sin \alpha x}{x}\,dx \qquad (\alpha \geqq 0). \tag{*}$$

Hier ist die Vertauschung der Differentiation nach α mit der Integration nach x erlaubt, denn die Voraussetzungen von Satz 3 sind erfüllt: Der Integrand und seine partielle Ableitung nach α sind in x und α für $x \geqq 0$ und $\alpha \geqq 0$ stetig, und das durch Differentiation entstandene Integral

$$\int_0^\infty e^{-kx}\cos \alpha x\,dx = \frac{k}{\alpha^2 + k^2}$$

konvergiert gleichmäßig bezüglich α, da es von dem den Parameter α nicht enthaltenden Integral $\int_0^\infty e^{-kx}\,dx$ majorisiert wird. Also ist für $\alpha \geqq 0$

$$\frac{dI}{d\alpha} = \frac{k}{\alpha^2 + k^2}.$$

Hieraus folgt durch Integration nach α

$$I = \arctan\frac{\alpha}{k}$$

(die additive Integrationskonstante brauchen wir gar nicht erst anzugeben, da (*) und $\arctan\frac{\alpha}{k}$ für $\alpha = 0$ verschwinden).

Diese Formel wurde unter der Voraussetzung $k > 0$ hergeleitet. Im Fall $\alpha = \text{const}$ ist aber I auch für $k = 0$ eine in k stetige Funktion; dies folgt wegen Satz 2 (Nr. 520) aus der gleichmäßigen Konvergenz von I bezüglich k für $k \geqq 0$ (vgl. Nr. 515, 4°). Mit anderen Worten, es ist $I_0 = \lim\limits_{k\to+0} I$. Für $\alpha > 0$ gilt

$$I_0 = \lim_{k\to+0}\arctan\frac{\alpha}{k} = \arctan\infty = \frac{\pi}{2}.$$

Insbesondere ist (für $\alpha = 1$)

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

3°. In dem (Euler-Poissonschen) Integral

$$J = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

(vgl. Nr. 492, 2°) ersetzen wir x durch ut, wobei u eine beliebige positive Zahl ist, und erhalten somit

$$J = u\int_0^\infty e^{-u^2t^2}\,dt.$$

Wir multiplizieren nun beide Seiten dieser Gleichung mit e^{-u^2} und integrieren nach u von 0 bis ∞:

$$J\cdot\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = J^2 = \int_0^\infty e^{-u^2}u\,du\int_0^\infty e^{-u^2t^2}\,dt.$$

Die Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen führt hier, wie leicht zu sehen ist, überaus schnell zum Ziel. Nach der Vertauschung ergibt sich nämlich

$$J^2 = \int_0^\infty dt\int_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2}\,u\,du = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4},$$

woraus

$$J = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

folgt (denn offenbar ist $J > 0$).

Die Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen ist auf Grund der Folgerung aus Satz 5 von Nr. 521 gerechtfertigt. Während

$$\int_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2}\,u\,du = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+t^2}$$

für alle $t \geqq 0$ in t stetig ist, ist das Integral

$$\int_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2}\,u\,dt = e^{-u^2}J$$

nur für $u > 0$ stetig: für $u = 0$ ist es gleich 0, da es in diesem Punkt einen Sprung erleidet. Daher ist die oben genannte Folgerung auf das Rechteck $[0, \infty; 0, \infty]$ nicht unmittelbar anwendbar! Wir wenden sie auf das Rechteck $[u_0, \infty; 0, \infty]$, $u_0 > 0$, an, indem wir die Tatsache benutzen, daß

$$\int_{u_0}^{\infty} e^{-(1+t^2)u^2} u\,du = \frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2} e^{-(1+t^2)u_0}$$

für alle $t \geqq 0$ eine in t stetige Funktion ist. Damit ist die Beziehung

$$\int_{u_0}^{\infty} du \int_0^{\infty} e^{-(1+t^2)u^2} u\,dt = \int_0^{\infty} dt \int_{u_0}^{\infty} e^{-(1+t^2)u^2} u\,du$$

bewiesen. Wir brauchen nun nur noch u_0 von positiven Werten her gegen 0 streben zu lassen, was auf Grund der Folgerung aus Nr. 518 auf der rechten Seite unter dem Integralzeichen zulässig ist.

4°. In dem ersten der (Laplaceschen) Integrale

$$y = \int_0^{\infty} \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2}\,dx, \qquad z = \int_0^{\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2}\,dx \qquad (\alpha, \beta > 0)$$

setzen wir

$$\frac{1}{\alpha^2 + x^2} = \int_0^{\infty} e^{-t(\alpha^2 + x^2)}\,dt$$

und erhalten

$$y = \int_0^{\infty} \cos \beta x\,dx \int_0^{\infty} e^{-t(\alpha^2+x^2)}\,dt.$$

Wir vertauschen hier auf Grund von Satz 5 die Integration nach x mit der nach t:

$$y = \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 t}\,dt \int_0^{\infty} e^{-tx^2} \cos \beta x\,dx.$$

Das innere Integral kennen wir aus Nr. 519, Beispiel 6(a):

$$\int_0^{\infty} e^{-tx^2} \cos \beta x\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\, e^{-\beta^2/4t}.$$

Damit ist

$$y = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 t - \frac{\beta^2}{4t}} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 z^2 - \frac{\beta^2}{4z^2}} \qquad (t = z^2).$$

Erinnern wir uns an Nr. 497, Beispiel 8, so finden wir schließlich

$$y = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha\beta}.$$

Das zweite Integral ergibt sich aus dem ersten durch Differentiation nach β:

$$z = -\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\beta} = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-\alpha\beta}.$$

Die Anwendung der Leibnizschen Regel ist erlaubt, da das Integral für $\beta \geqq \beta_0 > 0$ gleichmäßig bezüglich β konvergiert (vgl. Nr. 517, Beispiel 16).

5°. Wir betrachten die Fresnelschen[1]) Integrale

$$\int_0^\infty \sin x^2\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^\infty \cos x^2\,\mathrm{d}x.$$

Die Substitution $x^2 = t$ ergibt

$$\int_0^\infty \sin x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t, \qquad \int_0^\infty \cos x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

Wir wollen das erste Integral berechnen. Wir ersetzen dazu im Integranden den Faktor $\frac{1}{\sqrt{t}}$ durch das ihm gleiche Integral

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-tu^2}\,\mathrm{d}u;$$

dadurch erhält das gesuchte Integral die Gestalt

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \sin t\,\mathrm{d}t \int_0^\infty \mathrm{e}^{-tu^2}\,\mathrm{d}u.$$

Hier würde eine Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen sofort auf das Resultat führen:

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \mathrm{d}u \int_0^\infty \mathrm{e}^{-tu^2}\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$ [2])

Da die Begründung für diese Vertauschung mühsame Umformungen und Abschätzungen erfordert, ziehen wir es auch hier vor, den „konvergenzerzeugenden“ Faktor

[1]) Augustin Jean Fresnel, 1788—1827, französischer Mathematiker und Physiker.
[2]) Vgl. Nr. 472, Beispiel 2, oder Nr. 491, Beispiel 7.

e^{-kt} $(k > 0)$ zu verwenden (vgl. 2°). Es gilt

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} e^{-kt}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-kt} \sin t\,dt \int_0^\infty e^{-tu^2}\,du$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty du \int_0^\infty e^{-(k+u^2)t} \sin t\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{du}{1+(k+u^2)^2}.$$

Hier ist die Vertauschung der Integrale mit Hilfe von Satz 5 möglich. Nun brauchen wir nur noch k gegen 0 streben zu lassen, was unter dem Integralzeichen gestattet ist, wie wir leicht nachprüfen können. Damit ist schließlich

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Derselbe Wert ergibt sich auch für $\int\limits_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt$. Daraus folgt

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx = \int_0^\infty \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

523. Beispiele für die Differentiation unter dem Integralzeichen.

1. Aus den bekannten Integralen

$$\text{(a)} \int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad \text{(b)} \int_0^\infty \frac{dx}{a+x^2} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\sqrt{a}}, \quad \text{(c)} \int_0^1 x^{a-1}\,dx = \frac{1}{a}$$

$(a > 0)$ leite man durch mehrfache Differentiation nach dem Parameter neue Integrale her.

(a) Mit Hilfe der Leibnizschen Regel erhalten wir nach n-facher Differentiation

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} x^{2n}\,dx = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Da alle so erhaltenen Integrale gleichmäßig konvergent sind bezüglich a für $a \geqq a_0 > 0$ (z. B. läßt sich das angegebene Integral durch

$$\int_0^\infty e^{-a_0x^2} x^{2n}\,dx$$

majorisieren), ist die Anwendung der Leibnizschen Regel erlaubt.

(b) Lösung: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(a+x^2)^{n+1}} = \frac{1}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{a^n}\frac{\pi}{\sqrt{a}}.$

(c) Lösung: $\displaystyle\int_0^1 x^{a-1}\log^n x\,dx = (-1)^n \frac{n!}{a^{n+1}}.$

2. Durch Differentiation nach dem Parameter berechne man die Integrale

$$\text{(a)}\quad J = \int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha x}{x} \, \mathrm{e}^{-kx} \, \mathrm{d}x \qquad (\alpha, k > 0),$$

$$\text{(b)}\quad H = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} \frac{\sin \beta x}{x} \, \mathrm{e}^{-kx} \, \mathrm{d}x \qquad (\alpha, \beta, k > 0).$$

Lösung. (a) Die Ableitung von J nach α kann durch das (bezüglich α gleichmäßig konvergente) Integral

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\alpha} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-kx} \sin \alpha x \, \mathrm{d}x = \frac{\alpha}{\alpha^2 + k^2}$$

ausgedrückt werden; aus ihm folgt

$$J = \frac{1}{2} \ln (\alpha^2 + k^2) + C.$$

Da $J = 0$ für $\alpha = 0$ ist, ergibt sich $C = -\frac{1}{2} \ln k^2$ und damit schließlich

$$J = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\alpha^2}{k^2}\right).$$

(b) Wir differenzieren H nach α und erhalten

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\alpha} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-kx} \frac{\sin \beta x \cos \alpha x}{x} \, \mathrm{d}x. \tag{*}$$

Die Anwendung der Leibnizschen Regel ist zulässig, denn die Voraussetzungen von Satz 3 sind, wie wir leicht feststellen können, erfüllt.

Benutzen wir zur Umformung des Ausdrucks $\sin \beta x \cos \alpha x$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \sin \beta x \cos \alpha x &= \frac{1}{2} [\sin (\beta + \alpha) x + \sin (\beta - \alpha) x] \\ &= \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) x - \sin (\alpha - \beta) x], \end{aligned}$$

so können wir das Integral (*) auf bekannte Integrale zurückführen (vgl. Nr. 522, 2°):

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\alpha} &= \frac{1}{2} \left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-kx} \frac{\sin (\alpha + \beta) x}{x} \, \mathrm{d}x - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-kx} \frac{\sin (\alpha - \beta) x}{x} \, \mathrm{d}x \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\arctan \frac{\alpha + \beta}{k} - \arctan \frac{\alpha - \beta}{k} \right). \end{aligned}$$

Integration nach α liefert

$$H = \frac{\alpha + \beta}{2} \arctan \frac{\alpha + \beta}{k} - \frac{\alpha - \beta}{2} \arctan \frac{\alpha - \beta}{k} + \frac{k}{4} \ln \frac{k^2 + (\alpha - \beta)^2}{k^2 + (\alpha + \beta)^2} + C.$$

Dabei ist $C = 0$, denn es ist $H = 0$ für $\alpha = 0$.

3. Man berechne das Integral

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-t}}{t} \cos t \, dt.$$

Hinweis. Man betrachte das allgemeinere Integral

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-\alpha t}}{t} \cos t \, dt,$$

berechne es durch Differentiation unter dem Integralzeichen und setze dann $\alpha = 1$. Die Lösung lautet $\ln \sqrt{2}$.

4. Man berechne die Integrale

(a) $J_1 = \int_0^\infty \frac{\ln(1+a^2x^2)}{b^2+x^2} dx \quad (a, b > 0)$; (b) $J_2 = \int_0^\infty \frac{\arctan rx}{x(1+x^2)} dx \quad (r \geqq 0)$;

(c) $J_3 = \int_0^\infty \frac{\arctan ax \arctan bx}{x^2} dx \quad (a, b > 0)$.

Lösung. (a) J_1 ist in a $(a \geqq 0)$ stetig; Majorante ist $\frac{\ln(1+a_1^2x^2)}{b^2+x^2}$ für $0 \leqq a \leqq a_1$. Die Ableitung lautet (für $a > 0$)

$$\frac{dJ_1}{da} = \int_0^\infty \frac{2ax^2}{(b^2+x^2)(1+a^2x^2)} dx = \frac{\pi}{ab+1}$$

und hat für $0 < a_0 \leqq a \leqq a_1$ die Majorante $\frac{2a_1x^2}{(b^2+x^2)(1+a_0^2x^2)}$. Das Ergebnis lautet

$$J_1 = \frac{\pi}{b} \ln(ab+1).$$

(b) Die Ableitung für $r \geqq 0$ lautet

$$\frac{dJ_2}{dr} = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+r^2x^2)(1+x^2)} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+r},$$

die Majorante $\frac{1}{1+x^2}$. Das Ergebnis hat die Gestalt

$$J_2 = \frac{\pi}{2} \ln(1+r).$$

(c) Die Ableitung nach a führt auf ein Integral der Gestalt J_2:

$$\frac{dJ_3}{da} = \int_0^\infty \frac{1}{1+a^2x^2} \frac{\arctan bx}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\arctan \frac{b}{a} t}{t(1+t^2)} dt = \frac{\pi}{2} \ln \frac{a+b}{a} \qquad (a > 0).$$

Es ergibt sich

$$J_3 = \frac{\pi}{2} \ln \frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b}.$$

Bemerkung. Aus J_2 ergibt sich für $r = 1$ mit Hilfe der Substitution $x = \tan t$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{t}{\tan t} \, dt = \frac{\pi}{2} \ln 2,$$

und hieraus finden wir durch partielle Integration wieder

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin t \, dt = -\frac{\pi}{2} \ln 2$$

(vgl. Nr. 492, 1°).

5. (a) Man berechne $J = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2bx \, dx$.

Lösung. Es ist

$$\frac{dJ}{db} = -\int_0^\infty e^{-x^2} 2x \sin 2bx \, dx.$$

Daraus folgt nach partieller Integration

$$\frac{dJ}{db} = -2b \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2bx \, dx = -2bJ.$$

Somit ergibt sich zur Bestimmung von J eine einfache Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen (Nr. 358). Ihre Lösung ist $J = C e^{-b^2}$. Da für $b = 0$ aber $J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ sein muß, ist also $C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Daraus folgt schließlich

$$J = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}$$

(vgl. Nr. 519, Beispiel 6 (a)).

(b) Verwenden wir zur Berechnung von

$$H = \int_0^\infty e^{-x^2} \sin 2bx \, dx$$

das gleiche Verfahren, so gelangen wir zu der Differentialgleichung

$$\frac{dH}{db} + 2bH = 1.$$

Multiplizieren wir beide Seiten mit e^{b^2}, so erhalten wir offenbar links die Ableitung des Produkts $e^{b^2}H$ nach b. Damit ist, wenn wir beide Seiten von 0 bis b integrieren,

$$e^{b^2} H = \int_0^b e^{t^2} \, dt$$

(denn es ist $H = 0$ für $b = 0$). Also gilt

$$H = e^{-b^2} \int_0^b e^{t^2} \, dt .$$

Hier haben wir, um H ausdrücken zu können, die neue, nichtelementare Funktion

$$\varphi(x) = \int_0^x e^{t^2} \, dt$$

eingeführt (vgl. Nr. 519, Beispiel (6c)).

6. Man berechne das Integral

$$\int_0^\infty e^{-ax^2 - \frac{b}{x^2}} \, dx \qquad (a, b > 0).$$

Lösung. Das gesuchte Integral unterscheidet sich von

$$J = \int_0^\infty e^{-y^2 - \frac{c^2}{y^2}} \, dy \qquad (c^2 = ab)$$

(Substitution $y = \sqrt{a}\; x$) nur um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{a}}$. Es gilt

$$\frac{dJ}{dc} = -2c \int_0^\infty e^{-y^2 - \frac{c^2}{y^2}} \frac{dy}{y^2} = -2 \int_0^\infty e^{-z^2 - \frac{c^2}{z^2}} \, dz = -2J$$

(Substitution $y = \frac{c}{z}$). Daraus folgt

$$J = A\, e^{-2c}, \qquad A = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Das gesuchte Integral hat also den Wert $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-2\sqrt{ab}}$ (vgl. Nr. 497, Beispiel 8).

7. Man berechne das Integral

$$J = \int_0^\infty \frac{e^{-at} \cos bt - e^{-a_1 t} \cos b_1 t}{t} \, dt \qquad (a, a_1 > 0).$$

Lösung. Wir differenzieren partiell nach a bzw. nach b:

$$\frac{\partial J}{\partial a} = -\int_0^\infty e^{-at} \cos bt \, dt = -\frac{a}{a^2 + b^2}, \qquad \frac{\partial J}{\partial b} = -\int_0^\infty e^{-at} \sin bt \, dt = -\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Daraus läßt sich leicht die Funktion J selbst konstruieren[1]), und zwar

$$J = -\frac{1}{2} \ln (a^2 + b^2) + C,$$

[1]) Später werden wir uns mit diesem Problem systematisch beschäftigen; hier läßt sich eine Stammfunktion durch Probieren angeben.

wobei C weder von a noch von b abhängt. Da J für $a = a_1$ und $b = b_1$ gleich 0 ist, gilt

$$C = \frac{1}{2} \ln (a_1^2 + b_1^2), \quad \text{also} \quad J = \frac{1}{2} \ln \frac{a_1^2 + b_1^2}{a^2 + b^2}.$$

8. Man berechne die Integrale

$$u = \int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bx^2 \, dx, \qquad v = \int_0^\infty e^{-ax^2} \sin bx^2 \, dx \qquad (a > 0; b \geqq 0).$$

Lösung. Wir differenzieren diese Integrale nach dem Parameter b mit Hilfe der Leibnizschen Regel und erhalten

$$\frac{du}{db} = -\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} \sin bx^2 \, dx, \qquad \frac{dv}{db} = \int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} \cos bx^2 \, dx.$$

Durch partielle Integration folgt hieraus leicht

$$\frac{du}{db} = -\frac{1}{2a} v - \frac{b}{a} \frac{dv}{db}, \qquad \frac{dv}{db} = \frac{1}{2a} u + \frac{b}{a} \frac{du}{db}$$

oder, wenn wir diese Gleichungen nach den Ableitungen auflösen,

$$\frac{du}{db} = -\frac{bu + av}{2(a^2 + b^2)}, \qquad \frac{dv}{db} = \frac{au - bv}{2(a^2 + b^2)}. \tag{20}$$

Damit haben wir zur Bestimmung der von b abhängigen unbekannten Funktionen u, v ein System zweier Differentialgleichungen erhalten. Führen wir die komplexe Funktion $w = u + iv$ der reellen Veränderlichen b ein, so können wir (20) auf eine Gleichung (mit getrennten Veränderlichen) zurückführen. Multiplizieren wir nämlich die zweite Gleichung in (20) mit i und addieren wir sie zur ersten, so gelangen wir zur Differentialgleichung

$$\frac{dw}{db} = \frac{-b + ia}{2(a^2 + b^2)} w = \frac{i}{2} \frac{w}{a - ib}.$$

Diese können wir wie üblich durch Trennung der Veränderlichen integrieren. Um die Verwendung von Logarithmen komplexer Zahlen zu vermeiden, überzeugen wir uns unmittelbar davon, daß

$$\frac{d}{db}\left(w \sqrt{a - ib}\right) = 0$$

auf Grund der Differentialgleichung ist; daraus folgt

$$w \sqrt{a - ib} = c = \text{const}.$$

Setzen wir $b = 0$, so finden wir leicht $c = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, also

$$w = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{a - ib}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\sqrt{a + ib}}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Dabei ist unter dem Symbol $\sqrt{a \pm ib}$ stets der Zweig der Wurzel gemeint, der für $b = 0$ auf den positiven Wert $\sqrt{a}$ führt.

Bekanntlich gilt[1])

$$\sqrt{a+ib} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}},$$

also ist

$$w = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}}\right) + i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}}.$$

Ein Vergleich der Real- und Imaginärteile auf beiden Seiten ergibt schließlich

$$u = \int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bx^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}},$$

$$v = \int_0^\infty e^{-ax^2}\sin bx^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}}.$$

Diese Formeln wurden unter der wesentlichen Voraussetzung $a > 0$ hergeleitet. Da aber beide Integrale, wie der Satz 2 leicht zeigt (vgl. auch Nr. 515, 4°), auch für $a = 0$ stetige Funktionen (von a) sind, erhalten wir, wenn wir a gegen 0 streben lassen, für $b > 0$

$$\int_0^\infty \cos bx^2\,dx = \int_0^\infty \sin bx^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2b}},$$

d. h. die Fresnelschen Integrale (vgl. Nr. 522, 5°).

9. Die Integrale

$$y = \int_0^\infty \frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}\,dx \quad \text{und} \quad z = \int_0^\infty \frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}\,dx \qquad (\alpha, \beta > 0)$$

(vgl. Nr. 522, 4°) können leicht mit Hilfe einer Differentialgleichung berechnet werden. Wir kennen schon die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{d\beta} = -z.$$

Eine weitere Differentiation nach β unter dem Integralzeichen ist nicht möglich, denn dann würde sich schon ein divergentes Integral ergeben. Addieren wir jedoch zu dieser Differentialgleichung die Beziehung

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{\sin\beta x}{x}\,dx$$

---

[1]) Setzen wir $\sqrt{a+ib} = x + iy$, so ist $a = x^2 - y^2$, $b = 2xy$. Daraus folgt

$$x = \pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}, \qquad y = \pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}},$$

wobei hier beide Wurzeln unter Berücksichtigung der oben genannten Forderung und der Tatsache, daß $xy = \frac{1}{2}b > 0$ ist, positiv gewählt werden.

(vgl. Nr. 522, 2°),[1]) so ist

$$\frac{dy}{d\beta} + \frac{\pi}{2} = \alpha^2 \int_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x(\alpha^2 + x^2)}\, dx.$$

Hier ist die Differentiation unter dem Integralzeichen wieder möglich:

$$\frac{d^2y}{d\beta^2} = \alpha^2 \int_0^\infty \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2}\, dx.$$

Also ist

$$\frac{d^2y}{d\beta^2} = \alpha^2 y.$$

Da die charakteristische Gleichung dieser einfachen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten die Wurzeln $\pm\alpha$ hat, lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y = C_1\, e^{\alpha\beta} + C_2\, e^{-\alpha\beta},$$

wobei C_1 und C_2 Konstante sind. Für alle β ist y beschränkt:

$$|y| \leqq \int_0^\infty \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{\pi}{2\alpha}.$$

Das bedeutet, daß C_1 notwendig gleich 0 ist (denn anderenfalls würde y mit β unbeschränkt wachsen). Zur Bestimmung von C_2 setzen wir $\beta = 0$ und erhalten $C_2 = \pi/2\alpha$. Damit ist schließlich

$$y = \frac{\pi}{2\alpha}\, e^{-\alpha\beta}.$$

Hieraus ergibt sich z durch Differentiation.

10. Man berechne die Integrale

$$u = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos \frac{\alpha^2}{x^2}\, dx, \qquad v = \int_0^\infty e^{-x^2} \sin \frac{\alpha^2}{x^2}\, dx.$$

Die Existenz und die Stetigkeit dieser Integrale für alle α wird durch das Vorhandensein der Majorante e^{-x^2} gewährleistet. Nach der Leibnizschen Regel ist

$$\frac{du}{d\alpha} = -\int_0^\infty e^{-x^2} \sin \frac{\alpha^2}{x^2} \frac{2\alpha}{x^2}\, dx = -2 \int_0^\infty e^{-\alpha^2/y^2} \sin y^2\, dy \qquad \left(y = \frac{\alpha}{x}\right).$$

Dieses Integral konvergiert (sowohl für $y = 0$ als auch für $y = \infty$) gleichmäßig bezüglich α $(-\infty < \alpha < \infty)$; das bedeutet, daß das vorhergehende Integral (sowohl für $x = \infty$ als auch für $x = 0$) gleichmäßig konvergiert bezüglich α mit $0 < \alpha_0 \leqq \alpha \leqq A < \infty$. Also ist für $\alpha > 0$ die Anwendung der Leibnizschen Regel gestattet.

---

[1]) Übrigens benötigen wir eigentlich den genauen Wert dieses Integrals im folgenden gar nicht. Es genügt zu wissen, daß er für alle $\beta > 0$ konstant bleibt; das können wir mit Hilfe der Substitution $t = \beta x$ leicht feststellen.

Die weitere Differentiation nach α (deren Zulässigkeit sich analog beweisen läßt) ergibt

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2} = -2\int_0^\infty e^{-\alpha^2/y^2}\sin y^2\,\frac{-2\alpha}{y^2}\,dy = 4\int_0^\infty e^{-x^2}\sin\frac{\alpha^2}{x^2}\,dx = 4v.$$

Genauso folgt

$$\frac{d^2v}{d\alpha^2} = -4u.$$

Setzen wir $w = u + iv$, so finden wir zur Bestimmung von w die Differentialgleichung

$$\frac{d^2w}{d\alpha^2} = -4iw.$$

Ihre charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 4i = 0$ besitzt die Wurzeln $\lambda = \pm\sqrt{2} \mp \sqrt{2}\,i$, so daß die allgemeine Lösung der Differentialgleichung die Gestalt

$$w = u + iv = A\,e^{-\alpha\sqrt{2}}\left(\cos\alpha\sqrt{2} + i\sin\alpha\sqrt{2}\right) + B\,e^{\alpha\sqrt{2}}\left(\cos\alpha\sqrt{2} - i\sin\alpha\sqrt{2}\right)$$

hat. Da die Funktion w für alle α beschränkt ist, muß notwendig $B = 0$ sein. Für $\alpha = 0$ muß $w = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ gelten, so daß $A = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ist. Damit folgt schließlich

$$u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-\alpha\sqrt{2}}\cos\alpha\sqrt{2}, \qquad v = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-\alpha\sqrt{2}}\sin\alpha\sqrt{2}.$$

11. Wir verifizieren nun die Identität

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}x\,dx}{\sqrt{x^2+\alpha^2}} = \frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}\,dx}{x^2+a^2} \qquad (a > 0).$$

Dazu bezeichnen wir das linke Integral mit u, das rechte mit v. In u setzen wir $x^2 + a^2 = y^2$ und erhalten

$$u = e^{a^2}\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy.$$

Auch in v führen wir eine neue Integrationsvariable ein, indem wir $x = az$ setzen. Dadurch ergibt sich

$$v = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-a^2z^2}\,dz}{z^2+1}.$$

Wir differenzieren v mit Hilfe der Leibnizschen Regel nach a, formen das Ergebnis in

$$\frac{dv}{da} = -\frac{2a}{\sqrt{\pi}}\left\{\int_0^\infty e^{-a^2z^2}\,dz - \int_0^\infty \frac{e^{-a^2z^2}}{z^2+1}\,dz\right\}$$

um und erhalten daraus zur Bestimmung von v die lineare Differentialgleichung

$$\frac{dv}{da} - 2av = -1.$$

Nach Multiplikation beider Seiten mit dem integrierenden Faktor e^{-a^2} gelangen wir zur Differentialgleichung

$$\frac{d}{da}[v\, e^{-a^2}] = -e^{-a^2};$$

integrieren wir nach a zwischen 0 und a, so ergibt sich

$$v\, e^{-a^2} = v_0 - \int_0^a e^{-t^2}\, dt,$$

wobei unter v_0 der Grenzwert

$$v_0 = \lim_{a\to 0} v = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{dz}{z^2+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

zu verstehen ist. Da diese Zahl auch der Wert des Integrals $\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt$ ist, finden wir für v schließlich

$$v = e^{a^2} \int_a^\infty e^{-t^2}\, dt,$$

d. h. denselben Ausdruck wie für u.

12. Wir beweisen (für $k > 0$) die Identität

$$\int_0^\infty \frac{e^{-kx}}{1+x^2}\, dx = \int_k^\infty \frac{\sin(x-k)}{x}\, dx.$$

Beide Integrale genügen (als Funktionen von k) der Differentialgleichung

$$y'' + y = \frac{1}{k}.$$

Beim ersten Integral können wir uns leicht davon überzeugen, wenn wir zweimal die Leibnizsche Regel anwenden. Beim zweiten Integral ist es einfacher, von seiner Darstellung

$$\cos k \int_k^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt - \sin k \int_k^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt$$

auszugehen. Die Differenz $z(k)$ der beiden Integrale genügt der homogenen Differentialgleichung $z'' + z = 0$ und hat daher die Gestalt

$$z = c_1 \sin(k + c_2) \qquad (c_1, c_2 = \text{const}).$$

Nun streben die beiden Integrale und mit ihnen auch ihre Differenz z für $k \to \infty$ gegen 0. Daraus folgt $c_1 = 0$, also $z(k) \equiv 0$. Damit ist die Identität bewiesen.

524. Beispiele für die Integration unter dem Integralzeichen.

1. Man bestimme den Wert der Integrale

$$\text{(a)} \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx, \qquad \text{(b)} \int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\, dx \qquad (a, b > 0)$$

durch Integration unter dem Integralzeichen.

Lösung. (a) Das Integral

$$\int_0^\infty e^{-yx}\,dx = \frac{1}{y} \qquad (y > 0)$$

konvergiert gleichmäßig bezüglich y für $y \geqq y_0 > 0$. Integrieren wir diese Beziehung nach y zwischen a und b, wobei links unter dem Integralzeichen integriert werden darf, so erhalten wir

$$\int_0^\infty dx \int_a^b e^{-yx}\,dy = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx = \int_a^b \frac{dy}{y} = \ln\frac{b}{a}$$

(vgl. Nr. 495, Beispiel 1).

(b) Gehen wir von dem Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin xy}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \qquad (y > 0)$$

aus, das ebenfalls gleichmäßig konvergent bezüglich y für $y \geqq y_0 \geqq 0$ ist, so finden wir analog

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} \int_a^b \sin yx\,dy = \int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}(b - a)$$

(vgl. Nr. 497, Beispiel 10(a)).

2. Wir betrachten das vollständige elliptische Integral erster Gattung

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$$

als Funktion des Moduls k und werden das Integral dieser Funktion im Intervall $[0, 1]$ berechnen.

Es gilt

$$\int_0^1 K(k)\,dk = \int_0^1 dk \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \frac{dk}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi;$$

dieses Integral geht durch die Substitution $x = \tan\dfrac{\varphi}{2}$ in das Doppelte des Integrals

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\,dx = G = 0{,}915965\ldots$$

über (G ist die Catalansche Konstante; vgl. Nr. 328, Beispiel 6, und Nr. 440, Beispiel 6(a)).

Die Änderung der Reihenfolge der Integrationen ist auf Grund der Folgerung aus Satz 5 (die etwas geändert werden muß) gestattet. Der Integrand ist überall im Rechteck $\left[0, \frac{\pi}{2}; 0, 1\right]$

positiv und stetig, mit Ausnahme des Punktes $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$, wo er ∞ ist. Das Integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

ist für $k < 1$ eine in k stetige, das Integral

$$\int_0^1 \frac{dk}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

für $\varphi < \frac{\pi}{2}$ eine in φ stetige Funktion. Ferner existiert offenbar das zweite Doppelintegral. Also sind alle Voraussetzungen der genannten Folgerung erfüllt.

In den nächsten Beispielen werden wir es wieder mit der schon bekannten Besselfunktion nullter Ordnung

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin\theta)\, d\theta$$

(vgl. Nr. 440, Beispiel 12, und Nr. 441, Beispiel 4) zu tun haben; wir legen aber nun unseren Überlegungen eine „asymptotische" Formel zugrunde, die wir ohne Beweis angeben:

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\varphi_0(x)}{x^{3/2}}; \tag{21}$$

$\varphi_0(x)$ ist dabei für $x \to \infty$ beschränkt:

$$|\varphi_0(x)| \leqq L.$$

3. Wir berechnen das Integral

$$A = \int_0^\infty e^{-ax} J_0(x)\, dx \qquad (a > 0).$$

Es gilt

$$A = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-ax}\, dx \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin\theta)\, d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^\infty e^{-ax} \cos(x \sin\theta)\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{a}{a^2 + \sin^2\theta}\, d\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Die Vertauschung der Integrale ist zulässig, da das Integral

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos(x \sin\theta)\, dx$$

gleichmäßig (bezüglich θ) konvergiert (Majorante: e^{-ax}).

Aus (21) ist zu erkennen, daß

$$\int_0^\infty J_0(x)\, dx$$

konvergiert;[1]) also ist das Integral A auch für $a = 0$ eine in a stetige Funktion (Nr. 520, Satz 2; Nr. 515, 4°). Aus diesem Grund ergibt sich $\int\limits^{\infty} J_0(x)\,\mathrm{d}x$ aus A durch den Grenzübergang $a \to 0$. Damit ist

$$\int\limits_0^{\infty} J_0(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

4. Man berechne das Integral

$$B = \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} J_0(x)\,\mathrm{d}x \qquad (a > 0),$$

das auch in der Form

$$B = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x}\,\mathrm{d}x \int\limits_0^{\pi/2} \cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x}\cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}x$$

geschrieben werden kann. Das innere Integral ist der Dirichletsche Diskontinuitätsfaktor

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x}\cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{für} \quad \sin\theta < a, \\ 0 & \text{für} \quad \sin\theta > a \end{cases}$$

(vgl. Nr. 497, Beispiel 11). Daher ist

$$B = \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} J_0(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{für} \quad a \geqq 1, \\ \arcsin a & \text{für} \quad a < 1. \end{cases}$$

Wir müssen noch zeigen, daß die Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen zulässig ist. Es gilt für endliches A

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{A} \frac{\sin ax}{x}\,\mathrm{d}x \int\limits_0^{\pi/2} \cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int\limits_0^{A} \frac{\sin ax}{x}\cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}x.$$

Nun können wir dem inneren Integral die Gestalt

$$\begin{aligned} \int\limits_0^{A} \frac{\sin ax}{x}\cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\left\{\int\limits_0^{A} \frac{\sin(a+\sin\theta)\,x}{x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^{A} \frac{\sin(a-\sin\theta)\,x}{x}\,\mathrm{d}x\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\int\limits_0^{A(a+\sin\theta)} \frac{\sin z}{z}\,\mathrm{d}z + \int\limits_0^{A(a-\sin\theta)} \frac{\sin z}{z}\,\mathrm{d}z\right\} \end{aligned} \tag{22}$$

[1]) Dies ist sofort klar, wenn wir den ersten Summanden auf der rechten Seite von (21) in der Gestalt

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\cos x \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \sin x \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)$$

schreiben.

geben. Im Fall $a > 1$, also $a - \sin\theta > a - 1 > 0$ strebt dieser Ausdruck für $A \to \infty$ gleichmäßig bezüglich θ gegen seinen Grenzwert; mit anderen Worten, das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} \cos(x \sin\theta)\, d\theta$$

konvergiert gleichmäßig, die Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen ist also gerechtfertigt. Im Fall $a \leqq 1$ ist die gleichmäßige Konvergenz in der Umgebung von $\theta = \arcsin a$ gestört. Da aber der Ausdruck (22) für alle A und θ gleichmäßig beschränkt ist (er wird durch eine Konstante majorisiert!), ist das äußere Integral bei $\theta = \arcsin a$ gleichmäßig konvergent bezüglich A, so daß der Grenzübergang $A \to \infty$ unter dem Integralzeichen erlaubt ist; damit ist in diesem Fall die Vertauschbarkeit der Integrale bewiesen.

5. Differenzieren wir das Integral B nach dem Parameter a, so erhalten wir noch ein interessantes Integral:

$$C = \int_0^\infty J_0(x) \cos ax\, dx = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad a > 1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{1-a^2}} & \text{für} \quad a < 1. \end{cases}$$

Zur Differentiation unter dem Integralzeichen sind wir berechtigt, denn C konvergiert gleichmäßig bezüglich a in jedem abgeschlossenen Intervall, das den Punkt $a = 1$ nicht enthält. Dies folgt aus der asymptotischen Formel (21). Wir schreiben sie in der Form[1])

$$J_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} (\cos x + \sin x) + \frac{\varphi_0(x)}{x^{3/2}}$$

und multiplizieren beide Seiten mit $\cos ax$:

$$J_0(x) \cos ax = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\cos(1+a)x + \cos(1-a)x + \sin(1+a)x + \sin(1-a)x}{\sqrt{x}} + \frac{\varphi_0(x)\cos ax}{x^{3/2}}.$$

Der zweite Summand wird durch die Funktion $\dfrac{L}{x^{3/2}}$ majorisiert. Auch das Integral des ersten Summanden ist gleichmäßig konvergent, und zwar für $|1 - a| \geqq \delta > 0$.

Aus dieser Beziehung ist auch ersichtlich, daß C für $a = 1$ divergiert.

6. Man berechne das Integral

$$D = \int_0^\infty \frac{1 - \cos ax}{x} J_0(x)\, dx \qquad (a > 0).$$

Es ist

$$D = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos ax}{x}\, dx \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^\infty \frac{1 - \cos ax}{x} \cos(x \sin\theta)\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[\ln \sqrt{|a^2 - \sin^2\theta|} - \ln \sin\theta\right] d\theta$$

[1]) Vgl. die Fußnote auf S. 669.

(vgl. Nr. 497, Beispiel 16 (b)). Damit ergibt sich (vgl. Nr. 497, Beispiel 7, und Nr. 511, Beispiel 7)

$$D = \int_0^\infty \frac{1 - \cos ax}{x} J_0(x)\, dx = \begin{cases} \ln\left(a + \sqrt{a^2 - 1}\right) & \text{für} \quad a \geqq 1, \\ 0 & \text{für} \quad a < 1. \end{cases}$$

Um die Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen zu begründen, geht man von der für endliches A gültigen Beziehung

$$\frac{2}{\pi} \int_0^A \frac{1 - \cos ax}{x}\, dx \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin\theta)\, d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^A \frac{1 - \cos ax}{x} \cos(x \sin\theta)\, dx$$

aus. Es ist hier zu untersuchen, ob auf der rechten Seite der Grenzübergang $A \to \infty$ unter dem Integralzeichen gestattet ist.

Will man erkennen, wie das innere Integral gegen seinen Grenzwert strebt, so muß man das Integral

$$\int_A^{A'} \frac{1 - \cos ax}{x} \cos(x \sin\theta)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_A^{A'} \frac{dx}{x} \left[2 \cos(x \sin\theta) - \cos(a + \sin\theta)\, x - \cos|a - \sin\theta|\, x\right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[2 \int_{A \sin\theta}^{A' \sin\theta} - \int_{A(a+\sin\theta)}^{A'(a+\sin\theta)} - \int_{A|a-\sin\theta|}^{A'|a-\sin\theta|}\right] \frac{\cos z}{z}\, dz$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_{A \sin\theta}^{A(a+\sin\theta)} - \int_{A' \sin\theta}^{A'(a+\sin\theta)} + \int_{A \sin\theta}^{A|a-\sin\theta|} - \int_{A' \sin\theta}^{A'|a-\sin\theta|}\right] \frac{\cos z}{z}\, dz$$

betrachten. Da das Integral $\int_{z_0}^\infty \frac{\cos z}{z}\, dz \ (z_0 > 0)$ existiert, kann man diese Summe, wenn man A und A' hinreichend groß wählt, für alle θ aus einem beliebigen abgeschlossenen Intervall, das weder 0 noch $\arcsin a$ $(a \leqq 1)$ enthält, beliebig klein machen. Damit ist die Gleichmäßigkeit der Konvergenz des inneren Integrals für $A \to \infty$ nur in der Umgebung von $\theta = 0$ und $\theta = \arcsin a$ $(a \leqq 1)$ gestört.

Andererseits kann dieses innere Integral durch die Funktion

$$\ln \sqrt{|a^2 - \sin^2\theta|} - \ln \sin\theta$$

majorisiert werden, die im Intervall $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ integrierbar ist. Das bedeutet, daß das äußere Integral sowohl für $\theta = 0$ als auch für $\theta = \arcsin a$ $(a \leqq 1)$ gleichmäßig konvergiert. Dann ist auf Grund von Satz 1′ aus Nr. 518 der fragliche Grenzübergang gestattet.

7. Hieraus ergibt sich durch Differentiation nach dem Parameter das Integral

$$E = \int_0^\infty J_0(x) \sin ax\, dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - 1}} & \text{für} \quad a > 1, \\ 0 & \text{für} \quad a < 1. \end{cases}$$

Die Begründung für die Differentiation unter dem Integralzeichen verläuft ähnlich wie in Beispiel 5 mit Hilfe von (21). Für $a = 1$ ist E divergent.

8. (a) Man prüfe unmittelbar nach, ob im Integral

$$J = \int_1^\infty dy \int_1^\infty \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \, dx$$

die Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen gestattet ist.

Lösung. Es gilt

$$\int_1^\infty \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \, dx = \frac{x}{x^2 + y^2}\Bigg|_1^\infty = -\frac{1}{1 + y^2},$$

also

$$J = -\int_1^\infty \frac{dy}{1 + y^2} = -\arctan y \Bigg|_1^\infty = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4},$$

während man für das andere Doppelintegral

$$\tilde{J} = -\int_1^\infty dx \int_1^\infty \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \, dy$$

den Wert $\tilde{J} = \pi/4$ erhält. Die Vertauschung ist also nicht erlaubt.

Es ist interessant, daß (vgl. Nr. 517, Beispiel 1) das Integral

$$\int_1^\infty \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \, dx$$

gleichmäßig bezüglich y für alle $y \geqq 1$ konvergiert; analog läßt sich auch die bezüglich x (für $x \geqq 1$) gleichmäßige Konvergenz von

$$\int_1^\infty \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \, dy$$

zeigen.

Satz 5 ist hier deshalb nicht anwendbar, weil (wie sich leicht nachprüfen läßt) die Integrale

$$\int_1^\infty dx \int_1^\infty \frac{|y^2 - x^2|}{(x^2 + y^2)^2} \, dy, \qquad \int_1^\infty dy \int_1^\infty \frac{|y^2 - x^2|}{(x^2 + y^2)^2} \, dx$$

divergieren.

(b) Im Fall der Doppelintegrale

$$\int_1^\infty dx \int_0^1 \frac{y - x}{(x + y)^3} \, dy = -1, \qquad \int_0^1 dy \int_1^\infty \frac{y - x}{(x + y)^3} \, dx = -\frac{1}{2}$$

ist leicht zu zeigen, daß die Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen nicht zulässig ist.

Hier kann das Integral

$$\int_1^\infty \frac{y-x}{(x+y)^3}\,dx$$

(wie schon aus Satz 4 bekannt) nicht gleichmäßig konvergent sein bezüglich y aus dem Intervall $[0, 1]$ (davon kann man sich auch leicht unmittelbar überzeugen).

(c) Ein elegantes Beispiel dieser Art stammt von HARDY: Die Differenz

$$\int_0^1 dx \int_1^\infty (p\,e^{-pxy} - q\,e^{-qxy})\,dy - \int_1^\infty dy \int_0^1 (p\,e^{-pxy} - q\,e^{-qxy})\,dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-px} - e^{-qx}}{x}\,dx = \ln \frac{q}{p}\,{}^{1)}$$

ist niemals gleich 0, wenn $p > 0$, $q > 0$ und $p \neq q$ ist.

9. Wir zeigen nun zwei neue Verfahren zur Berechnung des Integrals

$$J = \int_0^\infty \frac{\cos \beta x}{1+x^2}\,dx$$

(vgl. Nr. 522, 4°). Wegen

$$\frac{1}{1+x^2} = \int_0^\infty e^{-xy} \sin y\,dy$$

können wir J auf die Form

$$J = \int_0^\infty \cos \beta x\,dx \int_0^\infty e^{-xy} \sin y\,dy$$

bringen. Durch Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen erhalten wir

$$J = \int_0^\infty \sin y\,dy \int_0^\infty e^{-xy} \cos \beta x\,dx = \int_0^\infty \frac{y \sin y}{\beta^2 + y^2}\,dy = \int_0^\infty \frac{x \sin \beta x}{1+x^2}\,dx.$$

Nun ist das letzte Integral, abgesehen vom Vorzeichen, gleich $\frac{dJ}{d\beta}$, so daß J der einfachen Differentialgleichung

$$\frac{dJ}{d\beta} = -J$$

genügt. Daraus folgt $J = C\,e^{-\beta}$. Da $J = C = \frac{\pi}{2}$ für $\beta = 0$ gilt, ist schließlich $J = \frac{\pi}{2}\,e^{-\beta}$.

Wir müssen noch zeigen, daß die Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen gestattet

[1] Frullanisches Integral (Nr. 495, Beispiel 1).

ist. Ist $0 < a < A < \infty$, so können wir uns von der Gültigkeit der Beziehungen

$$\int_a^A \frac{\cos\beta x}{1+x^2}\,dx = \int_a^A \cos\beta x\,dx \int_0^\infty e^{-xy}\sin y\,dy = \int_0^\infty \sin y\,dy \int_a^A e^{-xy}\cos\beta x\,dx$$

$$= \int_0^\infty \sin y\,dy \left[\frac{\beta\sin\beta A - y\cos\beta A}{y^2+\beta^2}\,e^{-Ay} - \frac{\beta\sin\beta a - y\cos\beta a}{y^2+\beta^2}\,e^{-ay}\right]$$

$$= \beta\sin\beta A \int_0^\infty \frac{\sin y}{y^2+\beta^2}\,e^{-Ay}\,dy - \cos\beta A \int_0^\infty \frac{y\sin y}{y^2+\beta^2}\,e^{-Ay}\,dy$$

$$- \beta\sin\beta a \int_0^\infty \frac{\sin y}{y^2+\beta^2}\,e^{-ay}\,dy + \cos\beta a \int_0^\infty \frac{y\sin y}{y^2+\beta^2}\,e^{-ay}\,dy$$

leicht überzeugen. Die gleichmäßige Konvergenz aller Integrale bezüglich a bzw. A gestattet es, unter dem Integralzeichen zum Grenzwert für $a \to 0$ bzw. $A \to \infty$ überzugehen. Der betrachtete Ausdruck strebt also bei diesem doppelten Grenzübergang tatsächlich gegen den Grenzwert

$$\int_0^\infty \frac{y\sin y}{y^2+\beta^2}\,dy.$$

10. Mit Hilfe der anderen Identität

$$\frac{x}{1+x^2} = \int_0^\infty e^{-y}\sin xy\,dy$$

können wir das Integral aus Beispiel 9 in der Gestalt

$$J = \int_0^\infty \frac{\cos\beta x}{x}\,dx \int_0^\infty e^{-y}\sin xy\,dy$$

schreiben. Vertauschen wir hier die Reihenfolge der Integrationen,

$$J = \int_0^\infty e^{-y}\,dy \int_0^\infty \frac{\sin xy}{x}\cos\beta x\,dx,$$

so erhalten wir als inneres Integral den Dirichletschen Diskontinuitätsfaktor

$$\int_0^\infty \frac{\sin xy}{x}\cos\beta x\,dy = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < y < \beta, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{für } 0 < \beta < y \end{cases}$$

(vgl. Nr. 497, Beispiel 11). Damit gilt

$$J = \frac{\pi}{2}\int_\beta^\infty e^{-y}\,dy = \frac{\pi}{2}e^{-\beta}.$$

Wir zeigen noch, daß die Reihenfolge der Integrationen vertauscht werden kann. Da das Integral

$$\int_0^\infty e^{-y} \frac{\sin xy}{x} \cos \beta x \, dy$$

gleichmäßig bezüglich x konvergiert (Majorante: $y\,e^{-y}$), gilt

$$\int_0^A \frac{\cos \beta x}{1+x^2} \, dx = \int_0^A \frac{\cos \beta x}{x} \, dx \int_0^\infty e^{-y} \sin xy \, dy = \int_0^\infty e^{-y} \, dy \int_0^A \frac{\sin xy}{x} \cos \beta x \, dx.$$

Wir müssen untersuchen, ob im letzten Integral der Grenzübergang $A \to \infty$ (bezüglich y) unter dem Integralzeichen vorgenommen werden darf. Der Integrand ist das Produkt aus e^{-y} und

$$\int_0^A \frac{\sin xy}{x} \cos \beta x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^A \frac{\sin (y+\beta)\,x + \sin (y-\beta)\,x}{x} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{(y+\beta)A} \frac{\sin z}{z} \, dz + \int_0^{(y-\beta)A} \frac{\sin z}{z} \, dz \right\}$$

und strebt für $A \to \infty$ gleichmäßig bezüglich y (mit Ausnahme der Umgebung des Punktes $y = \beta$) gegen seinen Grenzwert. Da der zweite Faktor für alle A und y gleichmäßig beschränkt ist, hat der Integrand eine Majorante der Form $C\,e^{-y}$, so daß das äußere Integral für $y = \beta$ und $y = \infty$ gleichmäßig bezüglich A konvergiert. Also ist der Grenzübergang unter dem Integralzeichen und damit auch die Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen gestattet.

11. Zum Abschluß zeigen wir noch, wie der Wert des Integrals

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx$$

elegant berechnet werden kann.

Wegen

$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xy} \, dx$$

ist

$$I = \int_0^\infty \sin x \, dx \int_0^\infty e^{-xy} \, dy = \int_0^\infty dy \int_0^\infty e^{-xy} \sin x \, dx = \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Auch hier müssen wir wieder die Vertauschung der Integrationsreihenfolge rechtfertigen. Wählen wir $0 < a < A < \infty$, so können wir leicht die Gültigkeit der folgenden Beziehungen verifizieren:

$$\int_a^A \frac{\sin x}{x} \, dx = \int_a^A \sin x \, dx \int_0^\infty e^{-xy} \, dy = \int_0^\infty dy \int_a^A e^{-xy} \sin x \, dx$$

$$= \int_0^\infty dy \left[\frac{y \sin a + \cos a}{1+y^2} \, e^{-ay} - \frac{y \sin A + \cos A}{1+y^2} \, e^{-Ay} \right]$$

$$= \sin a \int_0^\infty \frac{y}{1+y^2} e^{-ay}\, dy + \cos a \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2} e^{-ay}\, dy$$

$$- \sin A \int_0^\infty \frac{y}{1+y^2} e^{-Ay}\, dy - \cos A \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2} e^{-Ay}\, dy.$$

Da die letzten beiden Integrale (für $A \geqq A_0 > 0$) gleichmäßig bezüglich A konvergieren, sehen wir, wenn wir unter dem Integralzeichen den Grenzübergang $A \to \infty$ vornehmen, daß beide Integrale verschwinden. Das zweite Integral, das (für $a \geqq 0$) gleichmäßig bezüglich a konvergiert, strebt offenbar für $a \to 0$ gegen $\frac{\pi}{2}$. Es bleibt nun zu untersuchen, ob das erste, mit $\sin a$ multiplizierte Integral bei diesem Grenzübergang gegen 0 strebt. Das ist auch tatsächlich der Fall, denn es gilt

$$\int_0^\infty \frac{y}{1+y^2} e^{-ay}\, dy = \int_0^\infty \frac{t}{a^2+t^2} e^{-t}\, dt = \int_0^1 + \int_1^\infty,$$

$$\int_0^1 < \int_0^1 \frac{t}{a^2+t^2}\, dt = \frac{1}{2} \ln (1+a^2) - \ln a, \qquad \int_1^\infty < \int_1^\infty \frac{dt}{t\, e^t} = C.$$

§ 4. Ergänzungen

525. Der Satz von Arzelà. Obwohl für numerische Zwecke häufig das in den ersten drei Paragraphen dieses Kapitels dargelegte Material genügt, werden in theoretischen Untersuchungen schärfere Sätze benötigt, die, nebenbei bemerkt, einfachere Kriterien für die Anwendbarkeit der betrachteten Prozesse liefern.

Wir beginnen mit dem Beweis eines Satzes über Systeme von Intervallen; er stammt von C. Arzelà.

Satz von Arzelà. *Ein endliches Intervall $[a, b]$ enthalte die Systeme $D_1, D_2, \ldots, D_k, \ldots$* von *Intervallen, und jedes System bestehe aus endlich vielen einander nicht überlappenden abgeschlossenen Intervallen. Ist die Summe der Intervallängen bei jedem System D_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) größer als eine gewisse konstante positive Zahl δ, so gibt es mindestens einen Punkt $x = c$, der unendlich vielen Systemen D_k angehört.*

Beweis. Überlappt ein Intervall eines beliebigen Systems D_k ($k > 1$) die Intervalle der vorhergehenden Systeme $D_1, \ldots, D_{k-1}$ und wird es durch deren Endpunkte in Teilintervalle zerlegt, so werden wir von nun an diese Teilintervalle als einzelne Intervalle des Systems D_k auffassen. Ist also d' ein Intervall von $D_{k'}$ und d'' ein Intervall von $D_{k''}$ und ist $k' < k''$, so überlappen sich entweder d' und d'' nicht, oder d'' ist in d' enthalten.

Das System D_{k+1} braucht natürlich nicht ganz in dem vorhergehenden System D_k enthalten zu sein. Da dies unbequem ist, ersetzen wir die Systeme D_k folgendermaßen durch andere Systeme Δ_k. Um Δ_k zu erhalten, gehen wir von D_k aus, fügen zu D_k die nicht in D_k enthaltenen Intervalle von D_{k+1}, dann die nicht in D_k und D_{k+1} enthaltenen Intervalle von D_{k+2}, usw. hinzu.

Das so konstruierte System Δ_k kann dabei aus unendlich vielen Intervallen bestehen. Aber dafür ist a) *jedes Intervall des Systems Δ_{k+1} in genau einem der Intervalle von Δ_k enthalten*; zudem ist b) *die Summe der Längen* (oder genauer die Summe der Reihe der Längen) *der Intervalle, die das System Δ_k bilden, erst recht größer als δ* (wie es auch bei D_k der Fall war).

Der folgende Schritt besteht darin, daß wir nunmehr diese Systeme Δ_k durch endliche Teil-systeme $\Delta^{(k)}$ ersetzen, indem wir jedoch dabei die erste der eben genannten Eigenschaften von Δ_k beibehalten. Das geht folgendermaßen vor sich.

Ist die Anzahl der Intervalle von Δ_1 endlich, so setzen wir einfach $\Delta' = \Delta_1$. Anderenfalls trennen wir von Δ_1 ein endliches System Δ' von Intervallen $d_1', d_2', \ldots, d_r'$ derart ab, daß die Summe der Längen der übrigen Intervalle $d_{r+1}', d_{r+2}', \ldots$ von Δ_1 kleiner als δ ist.[1]) Einige der Intervalle von Δ_2 sind in den Intervallen von Δ' enthalten, denn wären sie alle in den Intervallen $d_{r+1}', d_{r+2}', \ldots$ enthalten, so wäre die Summe ihrer Längen kleiner als δ, entgegen der Eigenschaft b) der Systeme Δ_k. Ist die Anzahl der Intervalle des Systems Δ_2, die in Δ' enthalten sind, endlich, so kann aus ihnen ein System Δ'' gebildet werden. Anderenfalls trennen wir von ihnen ein endliches System Δ'' derart ab, daß die Summe der Längen aller übrigen Intervalle von Δ_2 (nebst denjenigen, die nicht in Δ' enthalten sind) kleiner als δ ist.[1]) Wir setzen diesen Prozeß beliebig weit fort, indem wir von Δ_3 ein endliches System Δ''', ..., von Δ_k ein endliches System $\Delta^{(k)}$, ... abtrennen. Dabei ist jedes der Intervalle von $\Delta^{(k+1)}$ in einem der Intervalle von $\Delta^{(k)}$ enthalten. (Die Eigenschaft b) des Systems Δ_k ist zwar verlorengegangen, aber dafür sind die Systeme, ähnlich wie D_k, endlich.)

Die letzte Etappe besteht darin, von den Systemen $\Delta^{(k)}$ je ein Intervall $d^{(k)}$ derart abzutrennen, daß jedes von ihnen in dem vorhergehenden enthalten ist. Wir gehen dabei folgendermaßen vor:

In Δ' gibt es mindestens ein Intervall (wir bezeichnen es mit d'), in dem die Intervalle unendlich vieler darauffolgender Systeme enthalten sind. Wäre dies nämlich nicht der Fall, würden also in jedem Intervall von Δ' nur Intervalle endlich vieler darauffolgender Systeme enthalten sein, so würde dies auch für das ganze System Δ' gelten (weil nämlich Δ' aus endlich vielen Intervallen besteht). Mit anderen Worten, es gäbe eine so große Zahl k_0, daß kein Intervall von $\Delta^{(k_0)}$ in Δ' enthalten wäre; dies würde aber der Eigenschaft a) der Systeme $\Delta^{(k)}$ widersprechen.

In d' sind gewisse Intervalle des Systems Δ'' enthalten (denn anderenfalls könnten in ihm keine Intervalle aus Δ''' auftreten, usw.). Darüber hinaus muß mindestens eines der in d' enthaltenen Intervalle aus Δ'' (wir bezeichnen es mit d'') die soeben hervorgehobene Eigenschaft von d' besitzen, d. h. Intervalle von unendlich vielen darauffolgenden Systemen enthalten, denn sonst könnte auch d' nicht diese Eigenschaft haben (hier spielt wieder die Endlichkeit des Systems Δ'' eine Rolle). Setzen wir diesen Prozeß beliebig weit fort, so trennen wir nacheinander von jedem System $\Delta^{(k)}$ ein Intervall $d^{(k)}$ ab, so daß in dem zuvor abgetrennten Intervall $d^{(k-1)}$ enthalten ist.

Damit haben wir eine Folge von ineinandergeschachtelten Intervallen $d^{(k)} = [a_k, b_k]$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) erhalten. Wie auch beim Beweis des bekannten elementaren Satzes (Nr. 38) existieren für die monotonen Veränderlichen a_k und b_k Grenzwerte:

$$\lim a_k = \alpha \leqq \beta = \lim b_k.$$

Da uns über die Längen der Intervalle $d^{(k)}$ nichts bekannt ist, können wir hier nicht behaupten, daß diese Grenzwerte einander gleich sind. Jeder Punkt c, der der Bedingung $\alpha \leqq c \leqq \beta$ genügt, gehört offenbar allen Intervallen $d^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) an. Außerdem liegt c in jedem System Δ_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Das bedeutet, daß der Punkt c für jedes k notwendig auch zu einem gewissen System $D_{k'}$ ($k' \geqq k$) gehören muß (wenn wir die Art der Konstruktion der Δ_k berücksichtigen). Damit ist klar, daß c unendlich vielen Systemen D_k angehört, was zu beweisen war.

526. Der Grenzübergang unter dem Integralzeichen. Statt Satz 6* aus Nr. 436 werden wir jetzt den folgenden Satz beweisen, in dem die Forderung nach der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionen $f_n(x)$ gegen ihren Grenzwert durch die allgemeinere Bedingung ihrer Beschränktheit ersetzt ist.

Satz 1 (Arzelà). *Gegeben sei eine Folge von Funktionen $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), die im Intervall $[a, b]$ (im „eigentlichen“ Sinne) integrierbar und in ihrer Gesamtheit beschränkt sind:*

$$|f_n(x)| \leqq L \qquad (L = \text{const};\ a \leqq x \leqq b;\ n = 1, 2, 3, \ldots).$$

[1]) Dies ist auf Grund der Eigenschaft des Restes einer konvergenten Reihe möglich.

Existiert für alle x aus $[a, b]$ der Grenzwert

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

und ist $\varphi(x)$ ebenfalls integrierbar, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Beweis. Wir beschränken uns zunächst auf die spezielle Voraussetzung, daß die Funktionen $f_n(x)$ nichtnegativ sind,

$$f_n(x) \geqq 0,$$

und den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \tag{1}$$

haben. Unter diesen Voraussetzungen ist zu zeigen, daß

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = 0 \tag{2}$$

gilt. Wir können das Intervall $[a, b]$ für jedes n derart in Teilintervalle $d_i^{(n)}$ $(i = 1, 2, \ldots, h_n)$ zerlegen, daß die entsprechende untere Darbouxsche Summe[1])

$$s_n = \sum_{i=1}^{h_n} m_i^{(n)} d_i^{(n)}$$

der Ungleichung

$$0 \leqq \int_a^b f_n(x)\,dx - s_n < \eta_n$$

genügt, wobei die positiven Zahlen η_n eine Nullfolge bilden. Dann ist offenbar

$$\lim_{n\to\infty} \left[\int_a^b f_n(x)\,dx - s_n\right] = 0,$$

und zum Beweis von (2) genügt es zu zeigen, daß

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 0 \tag{3}$$

gilt. Zu diesem Zweck wählen wir beliebig kleine Zahlen $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ und beweisen zunächst, daß es eine Zahl N derart gibt, daß die Summe der Längen derjenigen Intervalle $d_i^{(n)}$ der n-ten Zerlegung, denen untere Grenzen $m_i^{(n)} \geqq \varepsilon$ entsprechen, für $n \geqq N$ höchstens gleich δ ist.

Den Beweis führen wir indirekt. Für unendlich viele Werte von n,

$$n = n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$$

---

[1]) Mit $d_i^{(n)}$ bezeichnen wir sowohl das Teilintervall selbst als auch seine Länge; $m_i^{(n)}$ ist gleich $\inf f(x)$ im Intervall $d_i^{(n)}$.

sei also die Summe der Längen derjenigen Intervalle $d_i^{(n_k)}$, für welche $m_i^{(n_k)} \geqq \varepsilon$ ist, größer als δ. Auf die aus diesen Intervallen gebildeten Systeme D_k wenden wir den Satz aus Nr. 525 an. Danach gibt es also in $[a, b]$ einen Punkt c, der unendlich vielen Systemen D_k angehört. Damit ist für die unendlich vielen Werte n die Ungleichung

$$f_n(c) \geqq \varepsilon$$

erfüllt. Das widerspricht aber der Voraussetzung (1), die auch für $x = c$ erfüllt sein muß.

Also existiert eine solche Zahl N; es sei nun $n \geqq N$. Wir numerieren mit i' bzw. i'' diejenigen Intervalle der n-ten Zerlegung, für die $m_{i'}^{(n)} < \varepsilon$ bzw. $m_{i''}^{(n)} \geqq \varepsilon$ gilt. Entsprechend zerlegen wir auch die Summe

$$s_n = \sum_i m_i^{(n)} d_i^{(n)} = \sum_{i'} m_{i'}^{(n)} d_{i'}^{(n)} + \sum_{i''} m_{i''}^{(n)} d_{i''}^{(n)}.$$

Jetzt sehen wir leicht, daß

$$\sum_{i'} m_{i'}^{(n)} d_{i'}^{(n)} < \varepsilon \sum_{i'} d_{i'}^{(n)} < \varepsilon(b-a), \qquad \sum_{i''} m_{i''}^{(n)} d_{i''}^{(n)} \leqq L \sum_{i''} d_{i''}^{(n)} < L\delta$$

ist, denn es gilt $m_i^{(n)} \leqq L$ (nach Voraussetzung). Daraus folgt

$$s_n < \varepsilon(b-a) + L\delta.$$

Da ε und δ beliebig sind, ist damit (3) bewiesen.

Der allgemeine Fall läßt sich leicht auf den eben bewiesenen Spezialfall zurückführen. Da die Ungleichung

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx \right| \leqq \int_a^b |f_n(x) - \varphi(x)|\,dx$$

gilt, genügt es nämlich, das Bewiesene auf die nichtnegative, gegen 0 strebende Funktion $|f_n(x) - \varphi(x)|$ anzuwenden.

Folgerung. Sind alle Voraussetzungen des Satzes, außer der, daß die Grenzfunktion integrierbar ist, erfüllt, so existiert in jedem Fall der endliche Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Zum Beweis genügt es (vgl. Nr. 39) zu zeigen, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl N derart gibt, daß für $n'' > n' > N$ die Ungleichung

$$\left| \int_a^b f_{n''}(x)\,dx - \int_a^b f_{n'}(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b [f_{n''}(x) - f_{n'}(x)]\,dx \right| < \varepsilon$$

erfüllt ist.

Wir nehmen das Gegenteil an. Dann existieren eine Zahl $\varepsilon_0 > 0$ und zwei Folgen unbeschränkt wachsender Zahlen n'_m und n''_m $(m = 1, 2, 3, \ldots;\ n''_m > n'_m)$ derart, daß stets

$$\left| \int_a^b \left[f_{n''_m}(x) - f_{n'_m}(x)\right] dx \right| \geqq \varepsilon_0 \tag{4}$$

gilt. Andererseits ist

$$|f_{n''_m}(x) - f_{n'_m}(x)| \leqq 2L \quad \text{und} \quad \lim_{m\to\infty} \left[f_{n''_m}(x) - f_{n'_m}(x)\right] = 0.$$

Wenden wir auf die Funktion $f_m^*(x) = f_{n_m''}(x) - f_{n_m'}(x)$ den Satz 1 an, so erhalten wir

$$\lim_{m\to\infty} \int_a^b f_m^*(x)\, dx = \lim_{m\to\infty} \int_a^b \left[f_{n_m''}(x) - f_{n_m'}(x)\right] dx = 0;$$

das widerspricht aber der Beziehung (4). Damit ist die Behauptung bewiesen.

Vom Parameter n, der nur natürliche Werte annimmt, können wir leicht zu einem beliebigen Parameter y übergehen (vgl. Nr. 506, Satz 1).

Satz 2. *Es sei $f(x, y)$ eine für x aus $[a, b]$ und y aus $\mathcal{Y}$ definierte Funktion, die (bei konstantem y) nach x aus $[a, b]$ integrierbar ist und ferner für alle diese Werte x und y gleichmäßig beschränkt ist,*

$$|f(x, y)| \leqq L \qquad (L = \text{const}).$$

Existiert für alle x die ebenfalls in $[a, b]$ integrierbare Grenzfunktion

$$\varphi(x) = \lim_{y\to y_0} f(x, y),^{1)}$$

so gilt

$$\lim_{y\to y_0} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \varphi(x)\, dx. \tag{5}$$

Zum Beweis genügt es, den Satz 1 auf die Funktion $f_n(x) = f(x, y_n)$ anzuwenden, wobei $\{y_n\}$ eine beliebige Folge von Werten aus $\mathcal{Y}$ ist, die gegen y_0 konvergiert. Die so erhaltene Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x, y_n)\, dx = \int_a^b \varphi(x)\, dx$$

ist zu (5) äquivalent.

527. Die Differentiation unter dem Integralzeichen. Mit Hilfe des Satzes von Arzelà ergibt sich auch leicht das folgende Resultat, ein Analogon und eine Verallgemeinerung von Satz 3 aus Nr. 507.

Satz 3. *Es sei $f(x, y)$ eine im Rechteck $[a, b; c, d]$ definierte Funktion, die für jedes konstante y aus $[c, d]$ nach x aus $[a, b]$ integrierbar sei. Wir setzen weiter voraus, daß im ganzen Rechteck die partielle Ableitung $f_y(x, y)$ existiert, die ebenfalls nach x integrierbar ist. Ist $f_y(x, y)$ als Funktion zweier Veränderlicher beschränkt,*

$$|f_y(x, y)| \leqq L \qquad (L = \text{const};\, a \leqq x \leqq b;\, c \leqq y \leqq d),$$

so gilt für die Funktion

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

(y beliebig aus $[c, d]$) die Formel

$$I'(y) = \int_a^b f_y(x, y)\, dx.$$

---

1) Dabei ist vorausgesetzt, daß der Bereich $\mathcal{Y}$ den Grenzübergang $y \to y_0$ zuläßt, d. h., daß $\mathcal{Y}$ einen Häufungspunkt besitzt.

Beweis. Wie auch beim Beweis in Nr. 507 (vgl. dort Formel (11)) wählen wir einen beliebigen Wert $y = y_0$ und erhalten

$$\frac{I(y_0 + k) - I(y_0)}{k} = \int_a^b \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k} \, dx.$$

Da nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$\frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k} = f_y(x, y_0 + \theta k) \qquad (0 < \theta < 1)$$

gilt, ist der von x und k abhängige Integrand für alle Werte dieser Veränderlichen (dem absoluten Betrage nach) durch die Konstante L beschränkt. Wenden wir auf diesen Fall den Satz 2 an, so können wir unter dem Integralzeichen den Grenzübergang $k \to 0$ vornehmen. Damit ergibt sich das geforderte Resultat.

528. Die Integration unter dem Integralzeichen. Hierfür gilt ein Satz, der den Satz 4 aus Nr. 508 bedeutend verallgemeinert.

Satz 4. *Es sei $f(x, y)$ eine im Rechteck $[a, b; c, d]$ definierte Funktion, die (bei konstantem y) nach x aus $[a, b]$ und (bei konstantem x) nach y aus $[c, d]$ integrierbar sei. Ist $f(x, y)$ außerdem für alle diese x und y beschränkt,*

$$|f(x, y)| \leqq L \qquad (L = \text{const}),$$

so existieren die beiden Doppelintegrale

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) \, dx, \qquad \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) \, dy$$

und sind einander gleich.

Beweis. Es sei

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) \, dx, \qquad K(x) = \int_c^d f(x, y) \, dy.$$

Wir betrachten eine beliebige Folge von Zerlegungen des Intervalls $[c, d]$ in Teilintervalle mit den Längen $\delta_1^{(n)}, \delta_2^{(n)}, \ldots, \delta_{h_n}^{(n)}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, die nur der Forderung unterworfen seien, daß $\max\{\delta_i^{(n)}\}$ mit wachsendem n gegen 0 strebt. In jedem i-ten Intervall $(i = 1, 2, \ldots, h_n)$ der n-ten Zerlegung wählen wir beliebig einen Wert $y = y_i^{(n)}$ und bilden die Integralsumme für $I(y)$:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{h_n} I\left(y_i^{(n)}\right) \delta_i^{(n)} = \sum_{i=1}^{h_n} \left\{\int_a^b f\left(x, y_i^{(n)}\right) dx\right\} \delta_i^{(n)} = \int_a^b \left\{\sum_{i=1}^{h_n} f\left(x, y_i^{(n)}\right) \cdot \delta_i^{(n)}\right\} dx.$$

Setzen wir $\sum_{i=1}^{h_n} f\left(x, y_i^{(n)}\right) \cdot \delta_i^{(n)} = f_n^*(x)$, so erhält σ_n die Gestalt

$$\sigma_n = \int_a^b f_n^*(x) \, dx.$$

Da offenbar der Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} f_n^*(x) = \int_c^d f(x, y) \, dy = K(x) \tag{6}$$

existiert und außerdem für alle x und n die Ungleichung $|f_n^*(x)| \leqq L(d - c)$ gilt, können wir auf Grund der Folgerung aus Nr. 526 schließen, daß der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$ existiert.

Dieser Grenzwert existiert also unabhängig davon, wie das Intervall zerlegt wird (nur muß die größte der Längen der Teilintervalle gegen 0 streben) und wie in diesen Teilintervallen die Werte $y_i^{(n)}$ gewählt werden. Damit ist klar, daß dieser Grenzwert in allen Fällen denselben Wert haben muß, d. h., daß das Integral

$$\int_c^d I(y)\,dy = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n^*(x)\,dx$$

existiert.

Auf dieselbe Art können wir auch die Existenz des Integrals $\int_a^b K(x)\,dx$ nachweisen, d. h. die Integrierbarkeit der zu $f_n^*(x)$ gehörenden Grenzfunktion (vgl. (6)). Dann erhalten wir schließlich, wenn wir auf $f_n^*(x)$ den Satz 1 anwenden,

$$\int_c^d I(y)\,dy = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n^*(x)\,dx = \int_a^b K(x)\,dx,$$

also

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy,$$

was zu beweisen war.

Wir beschränken uns hier auf „eigentliche“ Integrale, wir könnten aber auch die Resultate verallgemeinern, die sich auf uneigentliche Integrale beziehen, wenn wir die für sie bewiesenen Sätze zugrunde legen; damit werden wir uns jedoch nicht beschäftigen.

§ 5. Die Eulerschen Integrale

529. Das Eulersche Integral erster Gattung. Diese Bezeichnung trägt (nach einem Vorschlag von Legendre) das Integral

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1 - x)^{b-1}\,dx. \tag{1}$$

Es ist eine Funktion der beiden variablen Parameter a und b und wird auch *Funktion B* oder *Betafunktion* genannt.

Das zu betrachtende Integral ist, wie wir aus Nr. 483, Beispiel 3(a), wissen, für positive Werte von a und b (selbst wenn $a, b < 1$ sein sollte) konvergent[1]) und kann infolgedessen der Definition der Betafunktion zugrunde gelegt werden.

Wir geben nun einige Eigenschaften der Betafunktion an:

1°. Zunächst ergibt sich, wenn wir die Substitution $x = 1 - t$ benutzen, unmittelbar

$$B(a, b) = B(b, a),$$

d. h., *die Betafunktion ist in a und b symmetrisch.*

---

[1]) Dagegen ist das Integral divergent, wenn wenigstens einer der Parameter a und b kleiner als 0 ist oder verschwindet.

2°. Mit Hilfe der partiellen Integration erhalten wir aus (1) für $b > 1$ die Beziehungen[1])

$$B(a,b) = \int_0^1 (1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}\,\frac{x^a}{a} = \frac{x^a(1-x)^{b-1}}{a}\bigg|_0^1 + \frac{b-1}{a}\int_0^1 x^a(1-x)^{b-2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-2}\,\mathrm{d}x - \frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{b-1}{a}B(a,b-1) - \frac{b-1}{a}B(a,b);$$

daraus folgt

$$B(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1}B(a,b-1). \tag{2}$$

Diese Formel kann dann angewendet werden, wenn b größer als 1 ist und um eine Einheit verkleinert werden soll. Durch wiederholte Anwendung von (2) läßt sich stets erreichen, daß das zweite Argument höchstens gleich 1 ist. Übrigens gelingt dies auch beim ersten Argument, da auf Grund der Symmetrie der Betafunktion auch die andere Rekursionsformel

$$B(a,b) = \frac{a-1}{a+b-1}B(a-1,b) \qquad (a > 1) \tag{2'}$$

gilt. Ist b gleich einer natürlichen Zahl n, so finden wir, wenn wir (2) mehrmals anwenden,

$$B(a,n) = \frac{n-1}{a+n-1}\,\frac{n-2}{a+n-2}\cdots\frac{1}{a+1}B(a,1).$$

Nun gilt

$$B(a,1) = \int_0^1 x^{a-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}.$$

Daher ergibt sich für $B(a,n)$ und gleichzeitig auch für $B(n,a)$ der Ausdruck

$$B(a,n) = B(n,a) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)}. \tag{3}$$

Ist außerdem a eine natürliche Zahl m, so gilt

$$B(m,n) = \frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

Diese Formel kann auch für $m = 1$ oder $n = 1$ verwendet werden, da unter dem Symbol $0!$ die Zahl 1 zu verstehen ist.

[1]) Wir benutzen dabei die Identität $x^a = x^{a-1} - x^{a-1}(1-x)$.

3°. Wir wollen nun für die Betafunktion eine andere analytische Darstellung angeben, die oft nützlich ist: Setzen wir in (1) $x = \frac{y}{1+y}$, wobei die neue Veränderliche zwischen 0 und ∞ variiert, so erhalten wir

$$B(a, b) = \int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}\, dy. \tag{4}$$

4°. Wir setzen in (4) $b = 1 - a$, wobei $0 < a < 1$ sei, und erhalten

$$B(a, 1-a) = \int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{1+y}\, dy.$$

Dieses Integral ist uns schon bekannt (vgl. Nr. 519, Beispiel 4(a), und Nr. 522, 1°). Setzen wir seinen Wert hier ein, so finden wir

$$B(a, 1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi} \qquad (0 < a < 1). \tag{5}$$

Wählen wir insbesondere $a = 1 - a = \frac{1}{2}$, so gelangen wir zu

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi. \tag{5a}$$

Wir wollen uns auf diese wenigen Eigenschaften der Betafunktion beschränken, weil sich diese, wie wir sofort sehen werden, sehr einfach durch eine andere Funktion, und zwar durch die Gammafunktion ausdrücken läßt, mit der wir uns in diesem Paragraphen in der Hauptsache beschäftigen werden.

530. Das Eulersche Integral zweiter Gattung. Mit diesem Namen belegte LEGENDRE das bemerkenswerte Integral

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx, \tag{6}$$

das für jedes $a > 0$ konvergiert[1]) (vgl. Nr. 483, Beispiel 5(c)). Die durch dieses Integral definierte Funktion heißt die *Funktion Γ* oder *Gammafunktion*. Neben den elementaren Funktionen ist die Gammafunktion eine der wichtigsten Funktionen der Analysis und deren Anwendungen. Das ausführliche Studium der Eigenschaften der Gammafunktion dient, wenn wir von der Integraldarstellung (6) ausgehen, gleichzeitig auch als ausgezeichnetes Beispiel für die Anwendung der oben dargelegten Theorie der von einem Parameter abhängigen Integrale.

In den Kapitel XI und XII (Nr. 402, Beispiel 10; Nr. 408; Nr. 441, Beispiel 11) sind wir schon der Gammafunktion begegnet, haben sie dort aber anders definiert. Wir wollen zunächst zeigen, daß die beiden Definitionen einander äquivalent sind (natürlich für $a > 0$).

---

[1]) Für $a \leqq 0$ ist das Integral divergent.

Setzen wir in (6) $x = \ln \frac{1}{z}$, so folgt

$$\Gamma(a) = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{z}\right)^{a-1} dz. \tag{*}$$

Bekanntlich ist (vgl. Nr. 77, Beispiel 5(b))

$$\ln \frac{1}{z} = \lim_{n\to\infty} n(1 - z^{1/n}),$$

wobei der Ausdruck $n(1 - z^{1/n})$ für $n \to \infty$ wachsend gegen seinen Grenzwert strebt.[1]) Setzen wir dies in (*) ein, so gilt auf Grund von Nr. 518

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} n^{a-1} \int_0^1 (1 - z^{1/n})^{a-1} dz$$

oder, wenn wir z durch y^n ersetzen,

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} n^a \int_0^1 y^{n-1} (1 - y)^{a-1} dy.$$

Nun ist wegen (3)

$$\int_0^1 y^{n-1}(1 - y)^{a-1} dy = B(n, a) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)}{a(a+1)(a+2) \cdots (a+n-1)}.$$

Damit gelangen wir für $a > 0$ zu der berühmten *Gaußschen Produktdarstellung* der Gammafunktion,

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} n^a \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)}{a(a+1)(a+2) \cdots (a+n-1)}, \tag{7}$$

die uns früher als Ausgangspunkt diente (vgl. Nr. 402, Formel (14)).

Im folgenden werden wir die Eigenschaften der Gammafunktion aus ihrer Integraldarstellung (6) herleiten.

531. Die einfachsten Eigenschaften der Gammafunktion.

1°. *Für alle $a > 0$ ist die Funktion $\Gamma(a)$ stetig und hat stetige Ableitungen beliebig hoher Ordnung.*

Wir brauchen nur die Existenz der Ableitungen nachzuweisen. Differenzieren wir (6) unter dem Integralzeichen, so erhalten wir

$$\Gamma'(a) = \int_0^\infty x^{a-1} \cdot \ln x \cdot e^{-x} dx. \tag{8}$$

---

[1]) Davon können wir uns mit Hilfe der Methoden der Differentialrechnung überzeugen, wenn wir den Ausdruck $\frac{1 - z^\alpha}{\alpha}$ als Funktion von α betrachten.

Die Anwendung der Leibnizschen Regel ist gestattet, weil die beiden Integrale

$$\int_0^1 x^{a-1} \cdot \ln x \cdot e^{-x}\,dx \quad \text{und} \quad \int_1^\infty x^{a-1} \cdot \ln x \cdot e^{-x}\,dx$$

bezüglich a gleichmäßig konvergent sind, und zwar das erste bei $x = 0$ für $a \geqq a_0 > 0$ (Majorante: $x^{a_0-1}\,|\ln x|$), das zweite $x = \infty$ für $a \leqq A < \infty$ (Majorante: $x^A\,e^{-x}$)[1].

Auf dieselbe Art können wir uns von der Existenz der zweiten Ableitung

$$\Gamma''(a) = \int_0^\infty x^{a-1}\,(\ln x)^2\,e^{-x}\,dx \tag{8*}$$

und der folgenden Ableitungen überzeugen.

2°. Aus (6) ergibt sich durch partielle Integration sofort

$$a \int_0^\infty x^{a-1}\,e^{-x}\,dx = x^a\,e^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty x^a\,e^{-x}\,dx,$$

d. h. (vgl. Nr. 402, Formel (15)) die Funktionalgleichung

$$\Gamma(a+1) = a \cdot \Gamma(a). \tag{9}$$

Mehrmalige Anwendung dieser Formel ergibt

$$\Gamma(a+n) = (a+n-1)\,(a+n-2)\cdots(a+1)\,a \cdot \Gamma(a). \tag{10}$$

Damit kann die Berechnung von Γ für große Werte des Arguments auf die Berechnung von Γ für ein Argument < 1 zurückgeführt werden. Setzen wir in (10) $a = 1$ und beachten wir, daß

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1 \tag{11}$$

ist, so finden wir die Beziehung

$$\Gamma(n+1) = n!. \tag{12}$$

Die Gammafunktion ist (im Bereich aller positiven Werte des Arguments) die natürliche Verallgemeinerung der nur für natürliche n definierten Fakultät $n!$.

3°. *Verlauf der Funktion $\Gamma(a)$ für $a > 0$.* Wir können nun den Verlauf der Funktion $\Gamma(a)$ für wachsendes a zwischen 0 und ∞ allgemein angeben. Aus (11) und (12) folgt

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1,$$

so daß nach dem Satz von Rolle zwischen $a = 1$ und $a = 2$ eine Nullstelle a_0 der Ableitung $\Gamma'(a)$ liegen muß. Diese Ableitung wächst ständig, denn die zweite Ableitung $\Gamma''(a)$ ist stets positiv, wie wir aus (8*) erkennen. Folglich ist $\Gamma'(a)$ für $0 < a < a_0$ negativ, und $\Gamma(a)$ nimmt dort ab; dagegen ist $\Gamma'(a)$ positiv für $a_0 < a < \infty$, so daß $\Gamma(a)$ für diese a zunimmt. Im Punkt $a = a_0$ hat also $\Gamma(a)$ ein *Minimum*. Die Berechnung von a_0, die wir nicht im einzelnen durchführen wollen, ergibt

$$a_0 = 1{,}4616\ldots;$$

[1]) Für $x > 0$ ist offenbar $\ln x < x$.

also ist

$$\min \Gamma(a) = \Gamma(a_0) = 0{,}8856\ldots$$

Es ist interessant, den Grenzwert von $\Gamma(a)$ für $a \to 0$ oder $a \to \infty$ aufzusuchen. Aus (11) und der Eigenschaft 1° folgt

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+1)}{a} \to \infty \quad \text{für} \quad a \to 0.$$

Andererseits ist auf Grund von (12) $\Gamma(a) > n!$, sobald $a > n + 1$ ist, d. h., $\Gamma(a) \to \infty$ auch für $a \to \infty$.

In Abb. 64 ist die Gammafunktion graphisch dargestellt (hier interessierte uns nur der im ersten Quadranten liegende Ast der Kurve).

4°. *Der Zusammenhang zwischen den Funktionen B und Γ.* Um diesen Zusammenhang herzustellen, formen wir (6) mit Hilfe der Substitution $x = ty$ $(t > 0)$ in

$$\frac{\Gamma(a)}{t^a} = \int_0^\infty y^{a-1}\, e^{-ty}\, dy \tag{13}$$

um. Ersetzen wir hier a durch $a + b$ und gleichzeitig t durch $1 + t$, so ergibt sich

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+t)^{a+b}} = \int_0^\infty y^{a+b-1}\, e^{-(1+t)y}\, dy.$$

Beide Seiten multiplizieren wir mit t^{a-1} und integrieren nach t von 0 bis ∞:

$$\Gamma(a+b) \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}\, dt = \int_0^\infty t^{a-1}\, dt \int_0^\infty y^{a+b-1}\, e^{-(1+t)y}\, dy. \tag{*}$$

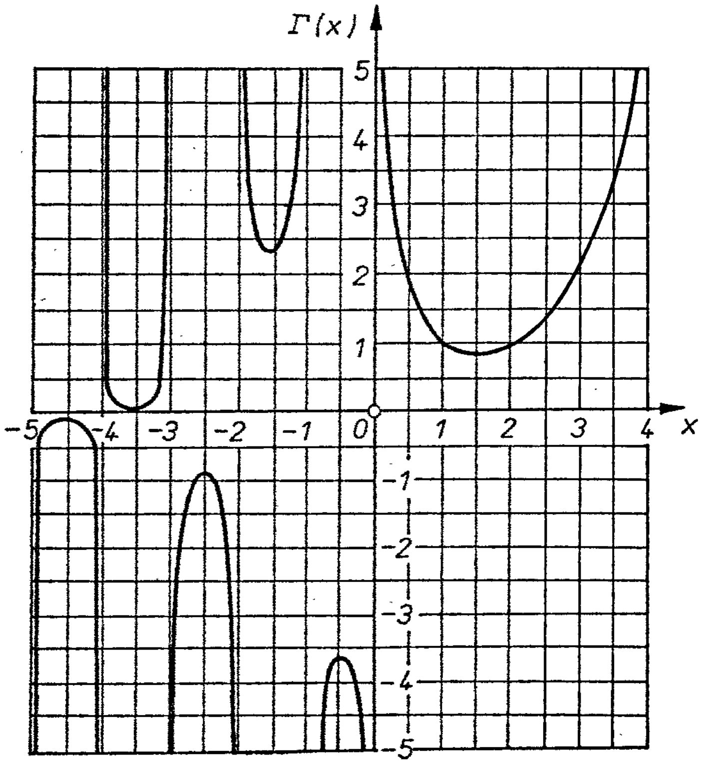

Abb. 64

In dem Integral auf der linken Seite erkennen wir die Betafunktion wieder (vgl. (4)); rechts vertauschen wir die Reihenfolge der Integrationen. Das ergibt, wenn wir (13) und (6) berücksichtigen,

$$\Gamma(a+b)\,B(a,b) = \int_0^\infty y^{a+b-1}\,e^{-y}\,dy \int_0^\infty t^{a-1}\,e^{-ty}\,dt = \int_0^\infty y^{a+b-1}\,e^{-y}\,\frac{\Gamma(a)}{y^a}\,dy$$

$$= \Gamma(a)\int_0^\infty y^{b-1}\,e^{-y}\,dy = \Gamma(a)\,\Gamma(b).$$

Daraus folgt schließlich

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \tag{14}$$

Diese elegante Herleitung stammt von DIRICHLET.

Wir müssen übrigens noch zeigen, daß die Reihenfolge der Integrationen in (*) vertauscht werden kann. Dazu beschränken wir uns zunächst auf den Fall $a > 1$, $b > 1$. Dann sind für die Funktion

$$t^{a-1} y^{a+b-1}\,e^{-(1+t)y}$$

alle Voraussetzungen der Folgerung aus Nr. 521 erfüllt; diese Funktion ist stetig (und dabei positiv) für $y \geqq 0$ und $t \geqq 0$. Auch die Integrale

$$t^{a-1}\int_0^\infty y^{a+b-1}\,e^{-(1+t)y}\,dy = \Gamma(a+b)\,\frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}$$

und

$$t^{a+b-1}\,e^{-y}\int_0^\infty t^{a-1}\,e^{-ty}\,dt = \Gamma(a)\,y^{b-1}\,e^{-y}$$

sind stetige Funktionen (das erste in t für $t \geqq 0$, das zweite in y für $y \geqq 0$). Auf Grund der oben genannten Folgerung ist somit die Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen erlaubt und folglich die Relation (14) für den Fall $a > 1$, $b > 1$ bewiesen.

Ist nur bekannt, daß a und b positiv sind, so gilt (auf Grund des Bewiesenen)

$$B(a+1, b+1) = \frac{\Gamma(a+1)\,\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)}.$$

Daraus erhalten wir, wenn wir die Rekursionsformeln (2) und (2′) für die Betafunktion und (9) für die Gammafunktion benutzen, wieder die Beziehung (14), aber ohne die unnötigen Beschränkungen.

5°. *Der Ergänzungssatz.* Setzen wir in (14) $b = 1 - a$ $(0 < a < 1)$, so gelangen wir zu dem sogenannten *Ergänzungssatz*

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi} \tag{15}$$

(vgl. Nr. 408, Formel (30)). Für $a = \frac{1}{2}$ folgt hieraus

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \tag{16}$$

denn es ist $\Gamma(a) > 0$. Setzen wir in

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}}\, dz = \sqrt{\pi}$$

$z = x^2$, so gelangen wir wieder zu dem Integral

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

6°. Wir wenden den Ergänzungssatz (wie auch EULER es getan hat) an, um das Produkt

$$E = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

(n eine beliebige natürliche Zahl) zu berechnen. Wir schreiben die Faktoren in der umgekehrten Reihenfolge,

$$E = \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right),$$

und multiplizieren die beiden Ausdrücke für E:

$$E^2 = \prod_{\nu=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{\nu}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-\nu}{n}\right).$$

Wenden wir auf jedes Paar $\Gamma\left(\frac{\nu}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-\nu}{n}\right)$ den Ergänzungssatz an, so finden wir

$$E^2 = \frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}\sin 2\frac{\pi}{n}\cdots\sin(n-1)\frac{\pi}{n}}.$$

Zur Berechnung des Nenners (vgl. S. 563) betrachten wir die Identität

$$\frac{z^n-1}{z-1} = \prod_{\nu=1}^{n-1}\left(z - \cos\frac{2\nu\pi}{n} - i\sin\frac{2\nu\pi}{n}\right),$$

in der wir z gegen 1 streben lassen:

$$n = \prod_{\nu=1}^{n-1}\left(1 - \cos\frac{2\nu\pi}{n} - i\sin\frac{2\nu\pi}{n}\right).$$

Vergleichen wir die Absolutbeträge

$$n = \prod_{\nu=1}^{n-1}\left|1 - \cos\frac{2\nu\pi}{n} - i\sin\frac{2\nu\pi}{n}\right| = 2^{n-1}\prod_{\nu=1}^{n-1}\sin\frac{\nu\pi}{n},$$

so ist

$$\prod_{\nu=1}^{n-1} \sin\frac{\nu\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Wir setzen diesen Ausdruck in E^2 ein und erhalten schließlich

$$E = \prod_{\nu=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{\nu}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{(n-1)/2}}{\sqrt{n}}. \tag{17}$$

7°. *Das Raabesche Integral.* Mit dem Ergänzungssatz ist die Berechnung des wichtigen Integrals

$$R_0 = \int_0^1 \ln\Gamma(a)\,da$$

verknüpft, das offenbar wegen

$$\ln\Gamma(a) = \ln\Gamma(a+1) - \ln a$$

(vgl. (9)) existiert. Ersetzen wir in R_0 nun a durch $1-a$, so können wir

$$R_0 = \int_0^1 \ln\Gamma(1-a)\,da$$

schreiben. Diese beiden Ausdrücke für R_0 addieren wir und erhalten

$$2R_0 = \int_0^1 \ln\Gamma(a)\,\Gamma(1-a)\,da = \int_0^1 \ln\frac{\pi}{\sin a\pi}\,da$$

$$= \ln\pi - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \ln\sin x\,dx = \ln\pi - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx.$$

Setzen wir hier den Wert des schon aus Nr. 492, 1°, bekannten Integrals ein, so folgt

$$R_0 = \int_0^1 \ln\Gamma(a)\,da = \ln\sqrt{2\pi}. \tag{18}$$

Raabe betrachtete (für $a > 0$) das Integral

$$R(a) = \int_a^{a+1} \ln\Gamma(a)\,da = \int_0^{a+1} - \int_0^a.$$

Da offenbar

$$R'(a) = \ln\Gamma(a+1) - \ln\Gamma(a) = \ln a$$

ist (vgl. (9)), finden wir nach Integration für $a > 0$

$$R(a) = a(\ln a - 1) + C.$$

$R(a)$ bleibt auch für $a = 0$ stetig. Lassen wir a gegen 0 streben, so sehen wir, daß $C = R_0$ ist. Setzen wir den Wert (18) ein, so erhalten wir die *Raabesche Formel*

$$R(a) = \int_a^{a+1} \ln\Gamma(a)\,da = a\,(\ln a - 1) + \ln\sqrt{2\pi}. \tag{19}$$

8°. *Der Legendresche Verdoppelungssatz.* Das Integral

$$B(a, a) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{a-1}\,dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2\right]^{a-1} dx$$

$$= 2\int_0^{1/2} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2\right]^{a-1} dx$$

kann durch die Substitution $\frac{1}{2} - x = \frac{1}{2}\sqrt{t}$ in

$$B(a, a) = \frac{1}{2^{2a-1}} \int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^{a-1}\,dt = \frac{1}{2^{2a-1}} B\left(\frac{1}{2}, a\right)$$

übergeführt werden. Ersetzen wir die Betafunktion auf beiden Seiten mit Hilfe von (14) durch die Gammafunktion, so erhalten wir

$$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(a)}{\Gamma(2a)} = \frac{1}{2^{2a-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(a)}{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right)}.$$

Dividieren wir beide Seiten durch $\Gamma(a)$ und setzen wir für $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ den Wert $\sqrt{\pi}$ ein (vgl. (16)), so folgt der *Legendresche Verdoppelungssatz*

$$\Gamma(a)\,\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\,\Gamma(2a). \tag{20}$$

532. Die eindeutige Definition der Gammafunktion durch ihre Eigenschaften. Wir wissen, daß die Funktion $\Gamma(a)$ nebst ihrer Ableitung für positive Werte von a stetig ist. Außerdem genügt sie (vgl. (9), (20) und (15)) den Funktionalgleichungen

(I) $\qquad \Phi(a+1) = a\Phi(a)$,

(II) $\qquad \Phi(a)\,\Phi\left(a + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\,\Phi(2a)$,

(III) $\qquad \Phi(a)\,\Phi(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$.

Wir zeigen, daß *die Gammafunktion durch diese drei Eigenschaften in ihrer Gesamtheit vollständig charakterisiert ist* (so daß jede Funktion, die diese drei Eigenschaften besitzt, mit Γ identisch ist).

Die Eigenschaften (I) und (II) allein genügen dazu nicht, da ihnen neben Γ auch noch die Funktion

$$\Phi(a) = \Gamma(a)\,[4 \sin^2 a\pi]^{\mu} \qquad (\text{für } \mu > 0)$$

genügt. Ebenso reichen auch (II) und (III) allein nicht, denn auch

$$\Phi(a) = \Gamma(a) \cdot z^{a - \frac{1}{2}} \qquad (\text{für } z > 0)$$

besitzt diese Eigenschaften. Schließlich lassen offenbar die Eigenschaften (I) und (III) beliebige Werte der Funktion $\Phi(a)$ für $0 < a < \frac{1}{2}$ zu. Anders verhält es sich, wenn alle drei Eigenschaften gelten. Übrigens kann (III) durch die schwächere Forderung ersetzt werden, daß die Funktion $\Phi(a)$ für $a > 0$ nicht verschwindet[1]) (was auch bei (III) der Fall ist).

Ist also $\Phi(a)$ für $a > 0$ eine nebst ihrer Ableitung stetige Funktion, die nicht verschwindet und den Beziehungen (I) *und* (II) *genügt, so muß $\Phi(a) \equiv \Gamma(a)$ sein.*

Zum Beweis setzen wir $\Phi(a) = M(a)\,\Gamma(a)$. Offenbar ist die Funktion $M(a)$ ebenfalls nebst ihrer Ableitung stetig und von 0 verschieden. Außerdem genügt $M(a)$ den Bedingungen

$$(\mathrm{I}')\quad M(a+1) = M(a), \qquad (\mathrm{II}')\quad M(a)\,M\left(a+\frac{1}{2}\right) = M(2a),$$

da sowohl $\Phi(a)$ als auch $\Gamma(a)$ die Forderungen (I) und (II) erfüllen. Aus (I′) ist ersichtlich, daß $M(a)$ für $a \to +0$ einen endlichen Grenzwert besitzt. Nehmen wir ihn als Wert für $M(0)$, so ist $M(a)$ nebst der Ableitung auch für $a = 0$ stetig. Setzen wir in (II′) $a = \frac{1}{2}$, so folgt $M\left(\frac{1}{2}\right) = 1$; d. h. $M(a)$ ist für alle $a \geqq 0$ positiv. Das gestattet uns, die Funktion $L(a) = \ln M(a)$ zu betrachten, die ebenfalls nebst ihrer Ableitung für $a \geqq 0$ stetig ist, aber den Bedingungen

$$(\mathrm{I}'')\quad L(a+1) = L(a), \qquad (\mathrm{II}'')\quad L(a) + L\left(a+\frac{1}{2}\right) = L(2a)$$

genügt. Schließlich führen wir noch die stetige Funktion $\Delta(a) = L'(a)$ ein; sie erfüllt die Bedingungen

$$(\mathrm{I}''')\quad \Delta(a+1) = \Delta(a), \qquad (\mathrm{II}''')\quad \Delta(a) + \Delta\left(a+\frac{1}{2}\right) = 2\Delta(2a).$$

Aus (II‴) folgt, wenn wir a durch $\frac{a}{2}$ ersetzen,

$$\frac{1}{2}\left\{\Delta\left(\frac{a}{2}\right) + \Delta\left(\frac{a+1}{2}\right)\right\} = \Delta(a).$$

Wenn wir hier zuerst wieder a durch $\frac{a}{2}$ und dann durch $\frac{a+1}{2}$ ersetzen und die Resultate addieren, so finden wir

$$\frac{1}{4}\left\{\Delta\left(\frac{a}{4}\right) + \Delta\left(\frac{a+1}{4}\right) + \Delta\left(\frac{a+2}{4}\right) + \Delta\left(\frac{a+3}{4}\right)\right\} = \Delta(a).$$

Mit Hilfe der vollständigen Induktion läßt sich leicht die allgemeine Beziehung

$$\frac{1}{2^n}\sum_{\nu=0}^{2^n-1} \Delta\left(\frac{a+\nu}{2^n}\right) = \Delta(a)$$

beweisen. Unabhängig davon, wie a gewählt wird, kann die Summe als Integralsumme für

$$\int_0^1 \Delta(x)\,dx$$

aufgefaßt werden.[2]) Deshalb gilt

$$\Delta(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}\sum_{\nu=0}^{2^n-1} \Delta\left(\frac{a+\nu}{2^n}\right) = \int_0^1 \Delta(x)\,dx = L(1) - L(0) = 0$$

[1]) Für $0 < a < 1$; die Gültigkeit dieser Forderung für die übrigen Werte von a folgt dann aus (I).

[2]) Dabei berücksichtigen wir, daß die Funktion $\Delta(a)$ wegen (I‴) *periodisch* ist.

auf Grund von (I″). Demnach ist $L(a) = \text{const}$, also auch $M(a) = \text{const}$. Da nun, wie wir sahen, $M\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ ist, muß $M(a) \equiv 1$ und $\Phi(a) \equiv \Gamma(a)$ sein, was zu beweisen war.

Abschließend bemerken wir noch, daß die Forderung nach Differenzierbarkeit eine wesentliche Rolle spielt und nicht fortgelassen werden darf. Setzen wir z. B.

$$L(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin(2^n \pi a),$$

so ist $L(a)$ eine stetige Funktion, die den Bedingungen (I″) und (II″) genügt. Gleichzeitig ist $L(0) = 0$ und $L\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, so daß $L(a)$ nicht konstant sein kann!

533. Eine andere Funktionaleigenschaft der Gammafunktion. In Nr. 532 haben wir die Funktion $\Gamma(a)$ als die Funktion charakterisiert, die (für $a > 0$) nebst ihrer Ableitung stetig ist, den Funktionalgleichungen (I) und (II) genügt und nicht verschwindet. Jetzt wollen wir eine einfachere Charakterisierung der Gammafunktion vornehmen, wobei wir uns nur auf die eine Funktionalgleichung (I) stützen, aber zusätzlich fordern, daß die Funktion logarithmisch konvex ist. Den Begriff der logarithmischen Konvexität werden wir sofort erklären.

In Nr. 141 wurde der Begriff der konvexen Funktion eingeführt. Eine im Intervall $\mathcal{X}$ definierte positive Funktion $f(x)$ heißt *logarithmisch konvex* in $\mathcal{X}$, wenn $\ln f(x)$ eine konvexe Funktion ist. Da

$$f(x) = e^{\ln f(x)}$$

ist, folgt aus der logarithmischen Konvexität der Funktion $f(x)$ auf Grund von Nr. 142, Satz 3, die Konvexität von $f(x)$. Die Umkehrung ist im allgemeinen nicht richtig. Daher bilden die logarithmisch konvexen Funktionen nur einen Teil der Klasse der konvexen Funktionen.

Mit Hilfe von Satz 2 aus Nr. 143 können wir ein Kriterium für die logarithmische Konvexität angeben: *Ist eine positive Funktion $f(x)$ nebst ihrer Ableitung $f'(x)$ im Intervall $\mathcal{X}$ stetig und hat sie im Innern von $\mathcal{X}$ eine endliche zweite Ableitung $f''(x)$, so ist $f(x)$ genau dann in $\mathcal{X}$ logarithmisch konvex, wenn im Innern von $\mathcal{X}$*

$$f(x)\, f''(x) - [f'(x)]^2 \geqq 0$$

gilt. Zum Beweis ist der oben erwähnte Satz auf die Funktion $\ln f(x)$ anzuwenden.

Wir kehren nun zur Gammafunktion zurück. Ihre ersten beiden Ableitungen sind durch (8) und (8*) gegeben. Auf Grund der Schwarzschen Ungleichung (vgl. Nr. 321, Formel (13′), und Nr. 483, Beispiel 7)

$$\int_a^b [\varphi(x)]^2\, dx \cdot \int_a^b [\psi(x)]^2\, dx - \left[\int_a^b \varphi(x)\, \psi(x)\, dx\right]^2 \geqq 0$$

gilt, wenn wir hier

$$a = 0, \qquad b = \infty; \qquad \varphi(x) = \sqrt{x^{a-1}\, e^{-x}}, \qquad \psi(x) = \sqrt{x^{a-1}\, e^{-x}} \ln x$$

setzen,

$$\Gamma(a)\, \Gamma''(a) - [\Gamma'(a)]^2 \geqq 0,$$

d. h., *die Funktion $\Gamma(a)$ ist im Intervall* $(0, \infty)$ *logarithmisch konvex.* Durch diese Eigenschaft und die Beziehung (I) ist die Gammafunktion bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. Mit anderen Worten: *Ist*

a) *im Intervall* $(0, \infty)$ *für* $\Phi(a)$ *die Gleichung* (I) *erfüllt,*

$$\Phi(a + 1) = a\Phi(a),$$

b) $\Phi(a)$ *logarithmisch konvex,*

c) $\Phi(1) = 1$,

so gilt $\Phi(a) \equiv \Gamma(a)$.

Wir nehmen an, für $\Phi(a)$ seien diese drei Bedingungen erfüllt. Wenden wir mehrmals die Gleichung (I) an, so gelangen wir zu

$$\Phi(a+n) = (a+n-1)(a+n-2)\cdots(a+1)\,a\cdot\Phi(a), \tag{21}$$

wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist. Daraus folgt, wenn wir $a = 1$ setzen (vgl. die Voraussetzung c)) und n durch $n-1$ ersetzen,

$$\Phi(n) = (n-1)!. \tag{22}$$

Es genügt zu zeigen, daß $\Phi(a)$ und $\Gamma(a)$ im Intervall $(0, 1]$ übereinstimmen, denn dann sind diese beiden Funktionen auf Grund von (I) überall identisch. Es sei also $0 < a \leqq 1$.

Wir benutzen jetzt die Ungleichung (6) aus Nr. 143,

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} \leqq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x},$$

die für eine konvexe Funktion $f(x)$ unter der einzigen Voraussetzung $x_1 < x_2$ gilt,[1] und wenden sie zweimal auf die wegen der Voraussetzung b) konvexe Funktion $\ln\Phi(a)$ für jedes $n \geqq 2$ an; so erhalten wir

$$\frac{\ln\Phi(-1+n)-\ln\Phi(n)}{(-1+n)-n} \leqq \frac{\ln\Phi(a+n)-\ln\Phi(n)}{(a+n)-n} \leqq \frac{\ln\Phi(1+n)-\ln\Phi(n)}{(1+n)-n}$$

oder auf Grund von (22)

$$\ln(n-1) \leqq \frac{\ln\Phi(a+n)-\ln(n-1)!}{a} \leqq \ln n.$$

Daraus folgt

$$\ln(n-1)^a\cdot(n-1)! \leqq \ln\Phi(a+n) \leqq \ln n^a\cdot(n-1)!,$$

also

$$(n-1)^a\,(n-1)! \leqq \Phi(a+n) \leqq n^a(n-1)!.$$

Gehen wir nun mit Hilfe von (21) zum Wert von $\Phi(a)$ selbst über, so gelangen wir zu den Ungleichungen

$$\frac{(n-1)^a\,(n-1)!}{a(a+1)\cdots(a+n-1)} \leqq \Phi(a) \leqq \frac{n^a(n-1)!}{a(a+1)\cdots(a+n-1)}.$$

Wir ersetzen schließlich noch links n durch $n+1$ und bringen die Ungleichungen auf die Form

$$\Phi(a) \leqq n^a\,\frac{1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)}{a(a+1)\cdots(a+n-1)} \leqq \Phi(a)\,\frac{a+n}{n}.$$

Daraus folgt sofort

$$\Phi(a) = \lim_{n\to\infty} n^a\,\frac{1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)}{a(a+1)\cdots(a+n-1)} = \Gamma(a),$$

wenn wir die Gaußsche Produktdarstellung (7) benutzen.

534. Beispiele.

1. Man bestimme das Integral

$$\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}\,dx \qquad (p, q, m > 0).$$

[1] In Nr. 143 wurde zwar $x_1 < x < x_2$ vorausgesetzt, jedoch können wir uns leicht davon überzeugen, daß die Ungleichung für jeden Punkt gilt, der nicht mit x_1 oder x_2 übereinstimmt.

Hinweis. Mit Hilfe der Substitution $x^m = y$ läßt es sich auf das Eulersche Integral erster Gattung zurückführen. Die Lösung lautet

$$\frac{1}{m} B\left(\frac{p}{m}, q\right) = \frac{1}{m} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{m}\right) \Gamma(q)}{\Gamma\left(\frac{p}{m} + q\right)}.$$

Mit Hilfe dieses Resultats kann man z. B. zeigen, daß für jedes natürliche n die Beziehung

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^{2n}}} \cdot \int_0^1 \frac{x^n \, dx}{\sqrt{1 - x^{2n}}} = \frac{\pi}{2n}$$

(Euler) gilt.

2. Man berechne das Integral

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{[\alpha x + \beta(1-x) + \gamma]^{p+q}} \, dx \qquad (\alpha, \beta \geqq 0; \gamma, p, q > 0).$$

Lösung. Die Substitution

$$\frac{(\alpha + \gamma) x}{\alpha x + \beta(1-x) + \gamma} = t, \qquad \frac{(\beta + \gamma)(1-x)}{\alpha x + \beta(1-x) + \gamma} = 1 - t,$$

$$\frac{(\alpha + \gamma)(\beta + \gamma) \, dx}{[\alpha x + \beta(1-x) + \gamma]^2} = dt$$

führt das Integral über in

$$\frac{1}{(\alpha + \gamma)^p (\beta + \gamma)^q} \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} \, dt = \frac{B(p, q)}{(\alpha + \gamma)^p (\beta + \gamma)^q}.$$

3. Man bestimme den Wert der Integrale

(a) $$\int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{(x+p)^{a+b}} \, dx \qquad (a, b, p > 0),$$

(b) $$\int_{-1}^1 \frac{(1+x)^{2m-1}(1-x)^{2n-1}}{(1+x^2)^{m+n}} \, dx \qquad (m, n > 0).$$

Hinweis. (a) Mit der Substitution

$$y = (1 + p) \frac{x}{x + p}$$

gelangt man zu der Lösung

$$\frac{1}{(1+p)^a p^b} B(a, b).$$

(b) Substitution: $u = \frac{1}{2} \frac{(1+x)^2}{1+x^2}$; Lösung: $2^{m+n-2} B(m, n)$.

Hieraus kann man eine Reihe interessanter Integrale erhalten. Zum Beispiel ergibt sich, wenn wir im zweiten Integral $n = 1 - m$ und $2m - 1 = \cos 2\alpha$ setzen und die Substitution

$x = \tan\varphi$ benutzen,

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}\right)^{\cos 2\alpha} d\varphi = \frac{\pi}{2\sin(\pi\cos^2\alpha)}.$$

4. Man bestimme die Integrale

(a) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{a-1}\varphi\cos^{b-1}\varphi\, d\varphi \qquad (a, b > 0)$, (b) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{a-1}\varphi\, d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{a-1}\varphi\, d\varphi \qquad (a > 0)$,

(c) $\int\limits_0^{\pi/2} \tan^c\varphi\, d\varphi \qquad (|c| < 1)$.

Lösung. (a) Man setze $\sin\varphi = x$, um das Integral auf die Gestalt

$$\int_0^1 x^{a-1}(1 - x^2)^{(b/2)-1}\, dx$$

zu bringen, und wende das Ergebnis aus Beispiel 1 an. Damit folgt

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{a-1}\varphi\cos^{b-1}\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2} B\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)}.$$

(b) Insbesondere erhält man daraus für $b = 1$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{a-1}\varphi\, d\varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}.^{1)}$$

Mit Hilfe des Legendreschen Verdoppelungssatzes kann man dieses Resultat in der Form

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{a-1}\varphi\, d\varphi = 2^{a-2}\,\frac{\left[\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(a)} = 2^{a-2} B\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$$

schreiben.

(c) Setzt man schließlich in (a) $a = 1 + c$ und $b = 1 - c$ mit $|c| < 1$, so findet man (mit Hilfe des Ergänzungssatzes)

$$\int_0^{\pi/2} \tan^c\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+c}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-c}{2}\right) = \frac{\pi}{2\cos\frac{c\pi}{2}}.$$

5. Man berechne den Inhalt P der von der Kurve $r^4 = \sin^3\theta\cos\theta$ eingeschlossenen Fläche.

Lösung. Die Kurve hat je eine Schleife im ersten und im dritten Quadranten; es genügt, den Flächeninhalt einer Schleife zu bestimmen und dann zu verdoppeln. Die Formel für den

[1]) Man kann leicht nachprüfen, daß diese Formel als Spezialfall die beiden Beziehungen (8) aus Nr. 312 enthält.

Flächeninhalt in Polarkoordinaten (Nr. 338, Formel (9)) lautet hier

$$P = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^{3/2}\theta \cos^{1/2}\theta \, d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{2\Gamma(2)} = \frac{1}{8}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$$

(vgl. Beispiel (4a) und die Beziehungen (9), (12) und (15)).

6. Man berechne (a) den Inhalt P der von einer Schleife der Kurve $r^m = a^m \cos m\theta$ begrenzten Fläche und (b) die Länge S dieser Schleife.

Lösung. (a) Es ist

$$P = 2\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2m} \cos^{2/m} m\theta \, d\theta = \frac{a^2}{m}\int_0^{\pi/2} \cos^{2/m}\varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{a^2}{m}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)} = \frac{\pi a^2}{\sqrt[m]{4}}\frac{\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\right]^2}$$

(vgl. Beispiel 4(b) und die Beziehungen (9) und (20)).

(b) Auf Grund der Formel (4b) aus Nr. 329 für die Bogenlänge in Polarkoordinaten gilt

$$S = 2a\int_0^{\pi/2m} \cos^{(1/m)-1} m\theta \, d\theta = \frac{2a}{m}\int_0^{\pi/2} \cos^{(1/m)-1}\varphi \, d\varphi = \frac{a}{m}\, 2^{(1/m)-1}\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2m}\right)\right]^2}{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}$$

(vgl. Beispiel 4(b)).

7. Man berechne die Integrale

$$\text{(a)} \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{3-\cos\theta}}, \qquad \text{(b)} \int_0^\pi \left(\frac{\sin\varphi}{1+k\cos\varphi}\right)^{a-1}\frac{d\varphi}{1+k\cos\varphi} \qquad (a > 0; 0 < k < 1).$$

Lösung. (a) Substitution: $\cos\theta = 1 - 2\sqrt{x}$; das Ergebnis lautet

$$\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2.$$

(b) Substitution: $\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\tan\frac{\varphi}{2}$; Ergebnis:

$$\frac{2^{a-1}}{(1-k^2)^{a/2}}\frac{\left[\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(a)}.$$

8. Man verifiziere die Gleichung

$$\int_{-\infty}^1 (1-x^3)^{-1/2}\,dx = \sqrt{3}\int_1^\infty (x^3-1)^{-1/2}\,dx.$$

Lösung. Setzt man

$$\int_0^1 (1-x^3)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = I_1, \qquad \int_1^\infty (x^3-1)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = I_2,$$

$$\int_{-\infty}^0 (1-x^3)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty (1+x^3)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = I_3,$$

so lautet die gegebene Gleichung

$$I_1 + I_3 = \sqrt{3}\,I_2.$$

In diesen Integralen setzt man $x = t^{1/3}$, $x = t^{-1/3}$ bzw. $x = (t^{-1}-1)^{1/3}$ und führt sie dadurch auf Eulersche Integrale erster Gattung zurück. Danach braucht man nur noch den Ergänzungssatz anzuwenden.

9. Man beweise die (von Dirichlet stammende) Formel

$$\Gamma(r)\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-fx}x^{s-1}}{(g+x)^r}\,\mathrm{d}x = \Gamma(s)\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-gy}y^{r-1}}{(f+y)^s}\,\mathrm{d}y \qquad (f, s, g, r > 0).$$

Hinweis. Man setze

$$\frac{\Gamma(r)}{(g+x)^s} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(g+x)y}\,y^{r-1}\,\mathrm{d}y, \qquad \frac{\Gamma(s)}{(f+y)^s} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(f+y)x}\,x^{s-1}\,\mathrm{d}x$$

in die Formel ein und vertausche die Reihenfolge der Integrationen (positive Funktionen!).

10. In Nr. 511, Beispiel 12, bewiesen wir die Identität

$$\mathrm{E}\mathrm{K}' + \mathrm{E}'\mathrm{K} - \mathrm{K}\mathrm{K}' = c = \text{const}$$

(bezüglich der Bezeichnungen vgl. Nr. 511). Mit Hilfe eines Grenzübergangs fanden wir den Wert $c = \frac{\pi}{2}$. Denselben Wert erhalten wir auch dann, wenn wir die Größen auf der linken Seite der Identität für ein spezielles k berechnen.

Es sei $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dann ist $k' = k$, $\mathrm{E}' = \mathrm{E}$, $\mathrm{K}' = \mathrm{K}$, und die Identität lautet

$$2\mathrm{E}\mathrm{K} - \mathrm{K}^2 = (2\mathrm{E} - \mathrm{K})\,\mathrm{K} = c.$$

Die Integrale

$$\mathrm{K} = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}, \qquad \mathrm{E} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$$

lassen sich durch Einsetzen von $\cos\varphi = t$ und dann von $t^4 = x$ auf Eulersche Integrale erster Gattung zurückführen:

$$\mathrm{K} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 x^{-3/4}(1-x)^{-1/2}\,\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{E} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left\{\int_0^1 x^{-3/4}(1-x)^{-1/2}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^{-1/4}(1-x)^{-1/2}\,\mathrm{d}x\right\}.$$

Also ist

$$2\mathrm{E} - \mathrm{K} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^1 x^{-1/4}(1-x)^{-1/2}\,dx.$$

Daraus folgt für die gesuchte Konstante

$$c = \frac{1}{8}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{\pi}{2}.$$

11. Man entwickle die beiden folgenden Integrale in Reihen:

$$\text{(a)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\,dx \quad (s > 1), \qquad \text{(b)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x + 1}\,dx \quad (s > 0).$$

Lösung. (a) Es ist

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\,dx = \int_0^\infty x^{s-1} \sum_{n=1}^\infty e^{-nx}\,dx = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x^{s-1} e^{-nx}\,dx = \Gamma(s) \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} = \Gamma(x)\,\zeta(s),$$

wenn, wie üblich, mit $\zeta(s)$ die Summe der letzten Reihe bezeichnet wird (Riemannsche Zetafunktion). Wir benutzten hierbei den Satz über die Integrierbarkeit einer positiven Reihe (Nr. 518) und die Formel (13).

$$\text{(b)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x + 1}\,dx = \Gamma(s) \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^s};$$

Majorante: $\dfrac{2x^{s-1}}{e^x + 1}$.

Für $s > 1$ läßt sich dieses Ergebnis in der Gestalt $\Gamma(s)\,(1 - 2^{1-s})\,\zeta(s)$ darstellen, denn es ist

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}(1 - 2^{1-s}) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} - 2\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n)^s} = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}.$$

12. Die folgenden Entwicklungen stellen eine gewisse Verallgemeinerung des Beispiels 11 dar:

$$\text{(a)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,e^{-ax}}{1 - e^{-x}}\,dx = \Gamma(x) \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(a+n)^s} \qquad (s > 1;\ a > 0)$$

(das Beispiel 11 (a) ergibt sich hieraus für $a = 1$);

$$\text{(b)} \int_0^\infty \frac{zx^{s-1}}{e^x - z}\,dx = \Gamma(s) \sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n^s} \qquad (-1 \leqq z < 1,\ s > 0 \quad \text{oder} \quad z = 1,\ s > 1)$$

(hieraus ergibt sich für $z = 1$ das Beispiel 11 (a), für $z = -1$ das Beispiel 11 (b)).

13. Wir bezeichnen die Summe der hypergeometrischen Reihe

$$1 + \sum_{n=1}^\infty \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1\cdot 2\cdots n\cdot\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}\,x^n$$

(vgl. Nr. 441, Beispiel 6) mit $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ und beweisen die Beziehung

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}$$

(Gauss). Wir wählen $\alpha > 0$ und $\gamma - \alpha > 0$ und betrachten das Integral

$$I(x) = \int_0^1 z^{\alpha-1}(1-z)^{\gamma-\alpha-1}\,(1-zx)^{-\beta}\,\mathrm{d}z$$

für $0 < x < 1$. Da die Reihe

$$(1-zx)^{-\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1\cdot 2\cdots n}\, x^n z^n$$

(bei festem x) bezüglich z im Intervall $[0, 1]$ gleichmäßig konvergiert, kann die Reihe, die aus ihr durch Multiplikation mit der in diesem Intervall integrierbaren Funktion $z^{\alpha-1}(1-z)^{\gamma-\alpha-1}$ hervorgeht, gliedweise integriert werden. Wir gelangen so zu der Entwicklung

$$I(x) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n x^n$$

mit

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1\cdot 2\cdots n}\,\frac{\Gamma(\alpha+n)\,\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma+n)} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}\,\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1\cdot 2\cdots n\cdot\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} \end{aligned}$$

(vgl. (10)). Damit ist

$$I(x) = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}\,F(\alpha, \beta, \gamma, x).$$

Um die gesuchte Formel zu erhalten, brauchen wir hier nur x gegen 1 streben zu lassen (unter der Voraussetzung $\gamma - \alpha - \beta > 0$). In der Reihe kann auf Grund des Satzes von Abel (Nr. 437, 6°) gliedweise zum Grenzwert übergegangen werden. Im Integral können die Prozesse der Integration und des Grenzübergangs vertauscht werden, da eine Majorante existiert, und zwar

$$z^{\alpha-1}(1-z)^{\gamma-\alpha-1}\ (\text{für } \beta \leqq 0) \quad \text{oder} \quad z^{\alpha-1}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta-1}\ (\text{für } \beta > 0).$$

Das Ergebnis lautet (vgl. (14))

$$\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)} = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}\,F(\alpha, \beta, \gamma, 1),$$

woraus sich die zu beweisende Formel ergibt.

Aus ihr folgt insbesondere für $\gamma = 1$, $\beta = -\alpha$ (unter Berücksichtigung von (11), (9) und (15)) die interessante Entwicklung[1])

$$\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi} = 1 - \frac{\alpha^2}{1} + \frac{\alpha^2(\alpha^2-1)}{(1\cdot 2)^2} - \frac{\alpha^2(\alpha^2-1)\,(\alpha^2-4)}{(1\cdot 2\cdot 3)^2} + \cdots \qquad (0 < \alpha < 1).$$

535. Die logarithmische Ableitung der Gammafunktion. Wir setzen das Studium der Gammafunktion fort, indem wir ihre *logarithmische Ableitung* betrachten, d. h. den Ausdruck

$$\frac{\mathrm{d}\ln\Gamma(a)}{\mathrm{d}a} = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}.$$

---

[1]) Sie läßt sich übrigens auch durch Umformung des bekannten unendlichen Produkts des Sinus (Nr. 408) herleiten.

9°. Verschiedene Integraldarstellungen dieses Ausdrucks ergeben sich auch aus Formel (8), aber einfacher geht man von folgenden Überlegungen aus. Es gilt

$$\Gamma(b) - B(a, b) = \Gamma(b) - \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \frac{\Gamma(b)\cdot b}{\Gamma(a+b)}\,\frac{\Gamma(a+b) - \Gamma(a)}{b}$$

$$= \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b)}\,\frac{\Gamma(a+b) - \Gamma(a)}{b},$$

so daß wir, wenn wir b gegen 0 streben lassen,

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \lim_{b\to 0}\,[\Gamma(b) - B(a, b)]$$

erhalten. Wir schreiben zunächst (vgl. (4) und (6))

$$\Gamma(b) = \int_0^\infty x^{b-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x, \qquad B(a, b) = \int_0^\infty \frac{x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\,\mathrm{d}x.$$

Dann ist

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \lim_{b\to+0}\int_0^\infty x^{b-1}\left[\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{(1+x)^{a+b}}\right]\mathrm{d}x,$$

und es ergibt sich, nachdem Grenzübergang und Integration vertauscht wurden, die *Cauchysche Formel*

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^\infty \left[\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{(1+x)^{a}}\right]\frac{\mathrm{d}x}{x}. \tag{23}$$

Der Grenzübergang unter dem Integralzeichen ist gestattet, denn in der Umgebung von $x = 0$ und $b = 0$ ist

$$\frac{1}{x}\left[\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{(1+x)^{a+b}}\right]$$

eine in x und b stetige Funktion, es gilt dort $x^b < 1$, und für hinreichend große x und für $b \leqq b_0$ existiert die Majorante

$$x^{b_0-1}\left[\frac{1}{(1+x)^{a}} - \mathrm{e}^{-x}\right].$$

Wenn wir im Ausdruck (1) für die Betafunktion x durch e^{-t} ersetzen,

$$B(a, b) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-at}(1 - \mathrm{e}^{-t})^{b-1}\,\mathrm{d}t,$$

so können wir

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \lim_{b\to+0}\int_0^\infty [\mathrm{e}^{-x}x^{b-1} - \mathrm{e}^{-ax}(1 - \mathrm{e}^{-x})^{b-1}]\,\mathrm{d}x$$

schreiben. Hier führt der Grenzübergang unter dem Integralzeichen (der sich analog rechtfertigen läßt) zu einer anderen Formel:

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int\limits_0^\infty \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-ax}}{1-e^{-x}}\right) dx. \tag{24}$$

Übrigens lassen sich die Exponentialausdrücke aus dem Integranden entfernen. Zu diesem Zweck setzen wir in (23) $a = 1$ und erhalten

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \Gamma'(1) = \int\limits_0^\infty \left[e^{-x} - \frac{1}{1+x}\right] \frac{dx}{x} = -C;$$

dabei ist C die *Eulersche Konstante*.[1]) Ziehen wir diese Gleichung von (23) ab, so folgt

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + C = \int\limits_0^\infty \left[\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^a}\right] \frac{dx}{x}.$$

Die Substitution $t = \dfrac{1}{1+x}$ führt uns schließlich auf die *Gaußsche Formel*

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + C = \int\limits_0^1 \frac{1-t^{a-1}}{1-t}\, dt. \tag{25}$$

536. Der Multiplikationssatz für die Gammafunktion.

10°. Wir stützen uns auf die Darstellung (25) der logarithmischen Ableitung und wollen mit ihrer Hilfe die bemerkenswerte, ebenfalls von Gauss angegebene Formel

$$\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right) = \frac{2\pi^{(n-1)/2}}{n^{na-(1/2)}}\,\Gamma(na) \tag{26}$$

beweisen; n ist eine beliebige natürliche Zahl. (26) stellt den *Multiplikationssatz für die Gammafunktion* dar.

Setzen wir in (25) $t = u^n$, so folgt

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + C = n \int\limits_0^1 \frac{u^{n-1} - u^{na-1}}{1-u^n}\, du,$$

woraus sich, wenn a durch $a + \dfrac{\nu}{n}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$ ersetzt wird,

$$\frac{\Gamma'\left(a+\frac{\nu}{n}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{\nu}{n}\right)} + C = n \int\limits_0^1 \frac{u^{n-1} - u^{na+\nu-1}}{1-u^n}\, du$$

---

[1]) In Kapitel XI, Nr. 367, Beispiel 10, definierten wir diese Konstante auf andere Art. Wir werden später zeigen, daß diese beiden Definitionen äquivalent sind.

ergibt. Wir summieren über ν von 0 bis $n-1$; den so entstehenden Ausdruck

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\Gamma'\left(a+\frac{\nu}{n}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{\nu}{n}\right)} + nC = n\int_0^1 \left[\frac{nu^{n-1}}{1-u^n} - \frac{u^{na-1}}{1-u}\right] du$$

wollen wir mit der Gleichung

$$\frac{\Gamma'(na)}{\Gamma(na)} + C = \int_0^1 \frac{1-u^{na-1}}{1-u}\, du$$

in Verbindung bringen. Wir multiplizieren diese mit n, subtrahieren sie von der vorhergehenden Beziehung und erhalten

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\Gamma'\left(a+\frac{\nu}{n}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{\nu}{n}\right)} - n\frac{\Gamma'(na)}{\Gamma(na)} = n\int_0^1 \left[\frac{nu^{n-1}}{1-u^n} - \frac{1}{1-u}\right] du$$

$$= -n \ln \frac{1-u^n}{1-u}\bigg|_0^1 = -n\ln n$$

oder in anderer Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} \ln \frac{\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(na)} = -n\ln n.$$

Nach Integration folgt[1])

$$\ln \frac{\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(na)} = -an\ln n + \ln C$$

oder

$$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(na)} = \frac{C}{n^{na}}.$$

Zur Bestimmung von C setzen wir $a=\frac{1}{n}$. Offenbar ist $C = nE$, wobei E das in Nr. 531, 6°, berechnete Produkt ist. Setzen wir seinen Wert aus (17) ein, so erhalten wir (26).

Ein Spezialfall von (26) ist der früher unabhängig hiervon hergeleitete Legendresche Verdoppelungssatz (20). Setzen wir nämlich in (26) $n=2$, so ergibt sich die zu (20) äquivalente Beziehung

$$\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2^{2a-(1/2)}}\,\Gamma(2a).$$

---

[1]) Da wir die Lösung nachher entlogarithmieren werden, schreiben wir die Konstante gleich in der Gestalt $\ln C$.

537. Einige Reihenentwicklungen und Produktzerlegungen.

11°. Den folgenden Ausführungen legen wir die Formel (25) zugrunde. Ihren Integranden entwickeln wir in eine Reihe:

$$\frac{1-t^{a-1}}{1-t} = (1-t^{a-1})\sum_{\nu=0}^{\infty} t^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty}(t^\nu - t^{a+\nu-1}),$$

deren Glieder alle von ein und demselben Vorzeichen sind. Die gliedweise Integration ergibt

$$D\ln\Gamma(a) + C = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{a+\nu}\right). \tag{27}$$

Diese Reihe konvergiert gleichmäßig für $0 < a \leqq a_0$, denn sie wird von der Reihe $(a_0+1)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}$ majorisiert.

Differenzieren wir sie gliedweise nach a, so erhalten wir das bemerkenswert einfache Resultat

$$D^2\ln\Gamma(a) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(a+\nu)^2}. \tag{28}$$

Da auch diese Reihe für $a > 0$ gleichmäßig konvergiert (sie wird von der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}$ majorisiert), ist die gliedweise Differentiation erlaubt.

12°. Wird (27) gliedweise nach a von 1 bis $a > 0$ integriert (das ist auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe zulässig), so ergibt sich

$$\ln\Gamma(a) + C(a-1) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{a-1}{\nu+1} - \ln\frac{a+\nu}{\nu+1}\right). \tag{29}$$

Wir ersetzen hier a durch $a+1$ (für $a > -1$) und schreiben

$$\ln\Gamma(a+1) + Ca = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{n} - \ln\frac{a+n}{n}\right)$$

oder

$$\ln\frac{1}{\Gamma(a+1)} = Ca + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\left(1+\frac{a}{n}\right) - \frac{a}{n}\right].$$

Daraus folgt, wenn wir entlogarithmieren, die Weierstraßsche Produktdarstellung (vgl. Nr. 402, Formel (16))

$$\frac{1}{\Gamma(a+1)}\, e^{Ca}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)e^{-a/n} \qquad (a > -1), \tag{30}$$

die die Entwicklung von $\frac{1}{\Gamma(a+1)}$ in ein unendliches Produkt angibt.

13°. Wir kehren nun zur Formel (29) zurück und setzen $a = 2$. Wegen $\ln\Gamma(2) = \ln 1 = 0$ ergibt sich

$$C = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu+1} - \ln\frac{\nu+2}{\nu+1}\right). \tag{31}$$

Bei dieser Gelegenheit bemerken wir, daß hieraus

$$C = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=L}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n+1)\right]$$

folgt und wir so zu der schon bekannten Definition der Eulerschen Konstanten gelangen (vgl. Nr. 367, Beispiel 10).

Schließlich können wir C eliminieren, wenn wir (31) mit $a - 1$ multiplizieren und in (29) einsetzen; wir erhalten

$$\ln\Gamma(a) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[(a-1)\ln\frac{\nu+2}{\nu+1} - \ln\frac{a+\nu}{\nu+1}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\ln\left[n^{a-1}\frac{1\cdot 2\cdots(n-1)}{a(a+1)\cdots(a+n-2)}\right]$$

oder, was das gleiche ist,

$$\ln\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty}\ln\left[n^{a}\frac{1\cdot 2\cdots(n-1)}{a(a+1)\cdots(a+n-1)}\right].$$

Hieraus folgt, wenn wir entlogarithmieren, wieder die Gaußsche Produktdarstellung (7), die wir früher auf anderem Wege fanden.

538. Beispiele und Ergänzungen.

1. Mit Hilfe der Beziehung $e^{-t} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ beweise man, daß für $a >$

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1}\,e^{-t}\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^n t^{a-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$$

gilt, und leite hieraus die Formel (7) her.

Hinweis. Die Limesbeziehung wird genauso bewiesen wie in Nr. 519, Beispiel 10 und 11. Mit Hilfe der Substitution $\tau = \frac{t}{n}$ forme man dann das Integral um,

$$\int_0^n t^{a-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt = n^a\int_0^1 \tau^{a-1}(1-\tau)^n\,d\tau = n^a B(a, n+1),$$

und benutze (3).

2. Aus der Beziehung

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^\infty\left[e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^a}\right]\frac{dx}{x}$$

(vgl. (23)) leite man *unmittelbar*

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^\infty\left[\frac{e^{-u}}{u} - \frac{e^{-au}}{1-e^{-u}}\right]du$$

(vgl. (24)) her.

Die Schwierigkeit besteht hier darin, daß das Integral (24) nicht als Differenz zweier Integrale aufgefaßt werden kann (sonst wäre das Problem durch Umformung des zweiten Integrals mit Hilfe der Substitution $x = e^u - 1$ gelöst).

Wir müssen deshalb folgendermaßen vorgehen:

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}\,dx - \int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{dx}{(1+x)^a x}\right\} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,du - \int\limits_{\ln(1+\varepsilon)}^{\infty}\frac{e^{-au}}{1-e^{-u}}\,du\right\}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\left[\frac{e^{-u}}{u} - \frac{e^{-au}}{1-e^{-u}}\right]du = \int\limits_{0}^{\infty}\left[\frac{e^{-u}}{u} - \frac{e^{-au}}{1-e^{-u}}\right]du;$$

der letzte Schritt ist möglich, denn es gilt

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\ln(1+\varepsilon)}^{\varepsilon}\frac{e^{-au}}{1-e^{-u}}\,du = 0$$

(dies folgt daraus, daß das Integral

$$\int\limits_{\ln(1+\varepsilon)}^{\varepsilon}\frac{e^{-au}}{1-e^{-u}}\,du$$

durch den Ausdruck

$$\frac{\varepsilon - \ln(1+\varepsilon)}{\varepsilon(1+\varepsilon)^{a-1}} < \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)^{a-1}}$$

abgeschätzt werden kann).

3. Ausgehend von der Definitionsgleichung

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu} - \ln n\right)$$

für die Eulersche Konstante beweise man die Integraldarstellungen

$$\text{(a)}\ C = \int\limits_{0}^{1}(1-e^{-x})\frac{dx}{x} - \int\limits_{1}^{\infty}e^{-x}\frac{dx}{x}, \qquad \text{(b)}\ C = \int\limits_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+u} - e^{-u}\right)\frac{du}{u}.$$

Wegen

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu} = \int\limits_{0}^{1}\sum_{\nu=1}^{n}t^{\nu-1}\,dt = \int\limits_{0}^{1}\frac{1-t^n}{1-t}\,dt = \int\limits_{0}^{1}\frac{1-(1-s)^n}{s}\,ds$$

und

$$\ln n = \int\limits_{1}^{n}\frac{ds}{s}$$

ist nämlich

$$C = \lim_{n\to\infty}\left[\int\limits_{0}^{1}\frac{1-(1-s)^n}{s}\,ds - \int\limits_{1}^{n}\frac{ds}{s}\right] = \lim_{n\to\infty}\left\{\int\limits_{0}^{n}\left[1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right]\frac{dx}{x} - \int\limits_{1}^{n}\frac{dx}{x}\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\int\limits_{0}^{1}\left[1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right]\frac{dx}{x} - \int\limits_{1}^{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\frac{dx}{x}\right\}.$$

Der Grenzübergang im zweiten Integral kann genauso wie in Beispiel 1 durchgeführt werden. Bezüglich der Umformung von (a) in (b) vgl. Beispiel 2.

4. Wir setzen (für $a > 0$ und $s > 1$)

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^s}$$

und zeigen, daß

$$\lim_{s \to 1+0} \left[\zeta(s, a) - \frac{1}{s-1}\right] = -\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$$

gilt. In Nr. 534, Beispiel 12 (a), war

$$\zeta(s, a) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}\, \mathrm{e}^{-ax}}{1 - \mathrm{e}^{-x}}\, \mathrm{d}x.$$

Daher ist

$$\zeta(s, a) - \frac{1}{s-1} = \frac{1}{\Gamma(s)} \left[\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}\, \mathrm{e}^{-ax}}{1 - \mathrm{e}^{-x}}\, \mathrm{d}x - \Gamma(s-1)\right]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} x^{s-1} \left[\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{1 - \mathrm{e}^{-x}} - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\right] \mathrm{d}x.$$

Der Grenzübergang $s \to 1$ unter dem Integralzeichen ist gestattet, da der Integrand in jedem der Intervalle $[0, 1]$ und $[1, \infty)$ monoton gegen seinen Grenzwert strebt (Nr. 518). Dann benutze man die Formel (24). Für $a = 1$ ergibt sich insbesondere

$$\lim_{s \to 1+0} \left[\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right] = C$$

(vgl. Nr. 375, Ergänzung 1).

5. Man berechne die Größe des unendlichen Produkts

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} u_n,$$

wobei

$$u_n = \frac{(n + a_1)(n + a_2) \cdots (n + a_k)}{(n + b_1)(n + b_2) \cdots (n + b_k)} \qquad (a_i, b_i > -1)$$

ist (Euler).

Hinweis. Wegen

$$u_n = \left(1 + \frac{a_1}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{a_k}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{b_1}{n}\right)^{-1} \cdots \left(1 + \frac{b_k}{n}\right)^{-1}$$

$$= 1 + \frac{(a_1 + \cdots + a_k) - (b_1 + \cdots + b_k)}{n} + \frac{A_k}{n^2} \qquad (|A_n| \leqq A < \infty)$$

konvergiert das unendliche Produkt nur unter der Bedingung $a_1 + \cdots + a_k = b_1 + \cdots + b_k$; unter dieser Voraussetzung ist P zu bestimmen. Stellt man u_n in der Gestalt

$$u_n = \frac{\left(1 + \frac{a_1}{n}\right) \mathrm{e}^{-a_1/n} \cdots \left(1 + \frac{a_k}{n}\right) \mathrm{e}^{-a_k/n}}{\left(1 + \frac{b_1}{n}\right) \mathrm{e}^{-b_1/n} \cdots \left(1 + \frac{b_k}{n}\right) \mathrm{e}^{-b_k/n}}$$

dar, so kann man die Weierstraßsche Produktdarstellung (30) benutzen. Die Lösung lautet

$$P = \frac{\Gamma(1+b_1)\,\Gamma(1+b_2)\cdots\Gamma(1+b_k)}{\Gamma(1+a_1)\,\Gamma(1+a_2)\cdots\Gamma(1+a_k)}.$$

6. Unter der Voraussetzung $0 < |a_i|, |b_i| < 1$ leite man aus Beispiel 5 ein anderes Resultat von Euler her, nämlich

$$\prod_{n=-\infty}^{\infty} u_n = \frac{\sin a_1\pi \sin a_2\pi \cdots \sin a_k\pi}{\sin b_1\pi \sin b_2\pi \cdots \sin b_k\pi}.$$

Hinweis. Man benutze dazu die Formel

$$\Gamma(1+c)\,\Gamma(1-c) = \frac{\pi c}{\sin \pi c} \qquad (0 < |c| < 1),$$

die sich aus (9) und (15) ergibt.

7. Wir kehren zu der Gaußschen Beziehung

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}$$

zurück, die wir in Nr. 534, Beispiel 13, unter der Voraussetzung $\alpha > 0, \gamma - \alpha > 0, \gamma - \alpha - \beta > 0$ bewiesen haben. Wir wollen sie jetzt auf andere Art beweisen, indem wir die Argumente der Gammafunktion auf der rechten Seite der Beziehung als positiv voraussetzen, die notwendige Bedingung $\alpha > 0$ aber fallenlassen.

Der Beweis wird folgendermaßen verlaufen. Wir bezeichnen mit a_n, b_n bzw. c_n die allgemeinen Glieder der hypergeometrischen Reihen

$$A = F(\alpha, \beta, \gamma, 1), \qquad B = F(\alpha-1, \beta, \gamma, 1), \qquad C = F(\alpha, \beta, \gamma+1, 1).$$

Dann können wir sofort die Relationen

$$a_n - a_{n+1} = \left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right) c_n - b_{n+1},$$

$$(\gamma-\alpha)(a_n - b_n) = \beta a_{n-1} + (n-1)\,a_{n-1} - n a_n$$

verifizieren und zeigen, daß $n a_n$ für $n \to \infty$ verschwindet. Addieren wir diese Relationen bei Änderung des Index von 1 bis n und gehen wir zum Grenzwert über, so erhalten wir

$$\gamma B = (\gamma-\beta)\,C, \qquad (\gamma-\alpha)(A-B) = \beta A;$$

daraus folgt

$$A = \frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma-\alpha-\beta)}\,C.$$

Wir betrachten jetzt den Ausdruck

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1)\,\frac{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}; \tag{32}$$

die vorhergehende Beziehung zusammen mit (9) gibt an, daß sich der Wert von (32) bei Übergang von γ zu $\gamma + 1$ nicht ändert. Damit ist

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1)\,\frac{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)} = F(\alpha, \beta, \gamma+m, 1)\,\frac{\Gamma(\gamma+m-\alpha)\,\Gamma(\gamma+m-\beta)}{\Gamma(\gamma+m)\,\Gamma(\gamma+m-\alpha-\beta)}.$$

Nun lassen wir m gegen ∞ streben. Aus der bezüglich m gleichmäßigen Konvergenz der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma+m, 1)$ folgt (Nr. 433), daß ihre Summe gegen 1 strebt. Gegen denselben Wert strebt auch der Faktor

$$\frac{\Gamma(\gamma+m-\alpha)\,\Gamma(\gamma+m-\beta)}{\Gamma(\gamma+m)\,\Gamma(\gamma+m-\alpha-\beta)},$$

da er bei dem (auf Grund von Beispiel 5) konvergenten Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(\gamma - \alpha + n)(\gamma - \beta + n)}{(\gamma + n)(\gamma - \alpha - \beta + n)}$$

das Restprodukt ist. In diesem Fall ist der Ausdruck (32) gleich 1, d. h., es gilt die zu beweisende Beziehung. Aus dieser Beziehung können wir jetzt, wenn wir $\gamma = 1$, $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ setzen, die Entwicklung

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\right)^2 + \cdots = \frac{1}{\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2} = \frac{4}{\pi}$$

herleiten. Wir können auch das allgemeinere Resultat beweisen, daß die Summe der Binomialkoeffizienten, die dem Exponenten m eines Binoms entsprechen, für $m > -\frac{1}{2}$ gleich

$$\frac{\Gamma(1 + 2m)}{[\Gamma(1 + m)]^2} \qquad (\gamma = 1, \alpha = \beta = -m)$$

ist. Früher war dieser Beweis wegen der Einschränkung $\alpha > 0$ nicht möglich.

8. *Die Verallgemeinerung der Gammafunktion auf negative a.* Aus (9) folgt

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a + 1)}{a},$$

so daß der Wert von $\Gamma(a)$ durch den Wert von $\Gamma(a + 1)$ bestimmt ist. Gilt $-1 < a < 0$, also $a + 1 > 0$, so hat $\Gamma(a + 1)$ einen Sinn. Wir *definieren* $\Gamma(a)$ durch die vorhergehende Beziehung und haben damit die Definition der Funktion $\Gamma(a)$ auf den Fall $-1 < a < 0$ ausgedehnt. Ist allgemein $-n < a < -(n - 1)$, so *definieren* wir, indem wir die Formel (10) anwenden, die Funktion $\Gamma(a)$ durch

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a + n)}{a(a + 1) \cdots (a + n - 1)}. \tag{33}$$

Setzen wir hier der Deutlichkeit wegen $a = -n + \alpha$ $(0 < \alpha < 1)$, so nimmt die Definitionsgleichung (33) die Gestalt

$$\Gamma(\alpha - n) = (-1)^n \frac{\Gamma(\alpha)}{(1 - \alpha)(2 - \alpha) \cdots (n - \alpha)} \tag{34}$$

an. Daraus ist sofort ersichtlich, daß das Vorzeichen von $\Gamma(a)$ für $-n < a < -(n - 1)$ durch den Faktor $(-1)^n$ bestimmt wird. Bei Annäherung von a an $-n$ oder $-(n - 1)$, d. h. bei Annäherung von α an 0 oder 1, strebt $\Gamma(a)$ von erster Ordnung gegen ∞.

9. Man versuche (mit Hilfe von Beispiel 8), die Formeln (7), (9), (15), (20), (26) und (30) auf beliebige reelle Argumente zu verallgemeinern (dabei sollen die negativen ganzen Argumente und 0 vermieden werden).

Hinweis. Bei Verallgemeinerung von (30) verwendet man (33).

Benutzt man die Verallgemeinerung von $\Gamma(a)$ auf negative a, so gilt auch die in Beispiel 7 bewiesene Beziehung unter der natürlichen Voraussetzung $\gamma - \alpha - \beta > 0$, die für die Konvergenz der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ notwendig ist (vgl. Nr. 378, Beispiel 4).

10. Unter Zugrundelegung von (34) beweise man, daß die Ableitung $\Gamma'(\alpha - n)$ einmal (etwa für $\alpha = \alpha_n$) durch 0 geht und das Vorzeichen von $(-1)^{n+1}$ auf $(-1)^n$ wechselt, wenn α von 0 bis 1 läuft. Für den entsprechenden Wert $a = \alpha_n - n$ hat somit die Funktion $\Gamma(a)$ entweder ein positives Minimum (für gerades n) oder ein negatives Maximum (für ungerades n); vgl. Abb. 64.

Man versuche ferner zu zeigen, daß (für wachsendes n) sowohl α_n als auch $\Gamma_n = |\Gamma(\alpha_n - n)|$ monoton fallend gegen 0 streben.

Hinweis. Als Grundlage für diese Überlegungen dienen die für $0 < \alpha < 1$ geltenden Gleichungen

$$|\Gamma(\alpha - (n+1))| = \frac{|\Gamma(\alpha - n)|}{n + 1 - \alpha},$$

$$|\Gamma(\alpha - (n+1))|' = \frac{|\Gamma(\alpha - n)|'}{n+1-\alpha} + \frac{|\Gamma(\alpha - n)|}{(n+1-\alpha)^2}$$

sowie die Beziehung

$$\frac{\Gamma'(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_n)} = -\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu - \alpha_n}.$$

11. Man zeige, daß sich die Funktion $\Gamma(a)$ für $-n < a < -(n-1)$ durch das Integral

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}\left(e^{-x} - 1 + \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right) dx$$

ausdrücken läßt.

Hinweis. Man wende partielle Integration an; vgl. Beispiel 8.

12. In Kapitel XI (Nr. 402, Beispiel 10) bewiesen wir einige einfachste Eigenschaften der Gammafunktion (vgl. auch Nr. 408), indem wir von der Gaußschen Produktdarstellung (7) ausgingen, die für beliebige reelle Werte des Arguments mit Ausnahme von 0 und den negativen ganzen Zahlen verwendet wurde. Das gleiche können wir auch bei den anderen untersuchten Eigenschaften tun.

Genauso kann die Reihe

$$D^2 \ln \Gamma(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^2}$$

unter der zusätzlichen Forderung $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ als Ausgangspunkt für das Studium der Funktion $\Gamma(a)$ bei beliebigen reellen a (mit Ausnahme von 0 und den negativen ganzen Zahlen) dienen.

13. Zum Schluß weisen wir darauf hin, daß die Funktion $\Gamma(a)$ als eindeutige analytische Funktion in der ganzen Ebene einer *komplexen* Veränderlichen a definiert werden kann.[1])

Dies gelingt, wenn wir von der Integraldarstellung (6) ausgehen und das Integral $\int_0^\infty$ wie folgt zerlegen:

$$\int_0^1 + \int_1^\infty = P(a) + Q(a).$$

Dann läßt sich die Funktion

$$P(a) = \int_0^1 x^{a-1} e^{-x}\, dx = \int_0^1 x^{a-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}\, dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^{a+n-1}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{a+n}$$

auf natürliche Weise auf die ganze komplexe Zahlenebene übertragen (und zwar als meromorphe Funktion, die in den Punkten $0, -1, -2, \ldots, -n, \ldots$ einfache Pole besitzt, denen die Resi-

[1]) Diese Bemerkung ist nur demjenigen verständlich, der mit den Grundbegriffen und den Termini aus der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen vertraut ist.

duen $1, -1, \frac{1}{2!}, \ldots (-1)^n \frac{1}{n!}, \ldots$ entsprechen. Die Funktion

$$Q(a) = \int_1^\infty x^{a-1}\, e^{-x}\, dx$$

jedoch ist auch für komplexe a sinnvoll und stellt eine ganze Funktion dar.

Die für positive reelle a bewiesenen Eigenschaften von $\Gamma(a)$ lasssen sich mit Hilfe des bekannten Satzes über analytische Funktionen automatisch auf die ganze Ebene übertragen (wir meinen die Eigenschaften, die mit Hilfe von Gleichungen zwischen analytischen Funktionen ausgedrückt werden können). Insbesondere folgt aus dem Ergänzungssatz (15), den wir auch in der Form

$$\frac{1}{\Gamma(1-a)} = \frac{1}{\pi} \sin a\pi \cdot \Gamma(a) = \frac{1}{\pi} \sin a\pi [P(a) + Q(a)]$$

schreiben können,[1]) daß die Funktion $\frac{1}{\Gamma(a)}$ in der ganzen komplexen Ebene holomorph ist. Also hat $\Gamma(a)$ keine Nullstellen.

Abschließend erwähnen wir, daß sowohl die Gaußsche Produktdarstellung (7) als auch die Weierstraßsche Produktdarstellung (30) mit Erfolg der Definition der Funktion $\Gamma(a)$ in der ganzen komplexen Ebene zugrunde gelegt werden kann.

539. Berechnung einiger bestimmter Integrale. Wir wenden uns nun der Betrachtung einiger Integrale zu, zu deren Berechnung die Gammafunktion und ihre Eigenschaften benutzt werden können.

1. Wir erhielten in Nr. 531, 1°, als wir

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}\, e^{-x}\, dx$$

nach a differenzierten, die Beziehung (8):

$$\Gamma'(a) = \int_0^\infty x^{a-1}\, e^{-x} \ln x\, dx.$$

Setzen wir hier $a = 1$, so erhalten wir wegen $\Gamma'(1) = -C$

$$\int_0^\infty e^{-x} \ln x\, dx = -C.$$

Die Substitution $x = -\ln u$ führt auf das interessante Integral

$$\int_0^1 \ln(-\ln u)\, du = -C.$$

Wählen wir dagegen $a = \frac{1}{2}$ und setzen wir $x = t^2$, so gelangen wir zu

$$\int_0^\infty e^{-t^2} \ln t\, dt = \frac{1}{4} \Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{\pi}}{4}(C + 2\ln 2),$$

wie sich leicht aus der Entwicklung (27) unter Berücksichtigung der logarithmischen Ableitung ergibt.

[1]) In den Punkten, in denen $P(a)$ Pole besitzt, verschwindet $\sin a\pi$.

Wir differenzierten noch einmal nach a und erhielten die Gleichung (8'):

$$\Gamma''(a) = \int_0^\infty x^{a-1}\,e^{-x}\ln^2 x\,dx.$$

Für $a = 1$ folgt hieraus

$$\int_0^\infty e^{-x}\ln^2 x\,dx = \Gamma''(1) = C^2 + \frac{\pi^2}{6}.$$

Dieses Resultat ergibt sich aus (28), wenn dabei die bekannte Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ verwendet wird. Schließlich setzen wir auch hier $a = \frac{1}{2}$ und $x = t^2$ und finden ein weiteres Integral

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\ln^2 t\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{8}\left[(C + 2\ln 2)^2 + \frac{\pi^2}{2}\right]$$

usw.

2. Man berechne das Integral

$$J = \int_0^\infty \frac{\sin^p x}{x}\,dx,$$

wobei p ein rationaler Bruch mit ungeradem Zähler und Nenner ist.

Hinweis. Man benutze die Lobatschewskische Formel (vgl. Nr 497, Beispiel 14); in Übereinstimmung mit ihr gilt

$$J = \int_0^{\pi/2} \sin^{p-1} x\,dx$$

(vgl. Nr. 534, Beispiel 4(b)). Die Lösung ist

$$J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} = 2^{p-2}\,\frac{\left[\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(p)}.$$

3. Man berechne die Integrale ($b > 0$)

$$A = \int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^s}\,dx \qquad (0 < s < 1), \qquad B = \int_0^\infty \frac{\sin bx}{x^s}\,dx \qquad (0 < s < 2).$$

Lösung. Es gilt (vgl. (13))

$$\frac{1}{x^s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty z^{s-1}\,e^{-zx}\,dz, \quad \text{also} \quad A = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \cos bx\,dx \int_0^\infty z^{s-1}\,e^{-zx}\,dz.$$

Durch Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen folgt

$$A = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty z^{s-1}\,dz \int_0^\infty e^{-zx}\cos bx\,dx = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{z^s\,dz}{z^2+b^2}$$

oder mit $b^2 t = z^2$

$$A = \frac{b^{s-1}}{2\Gamma(s)} \int\limits_0^\infty \frac{1}{1+t} t^{(s-1)/2}\, dt = \frac{b^{s-1}}{2\Gamma(x)} B\left(\frac{s+1}{2}, \frac{1-s}{2}\right)$$

$$= \frac{b^{s-1}}{2\Gamma(s)} \frac{\pi}{\sin \dfrac{s+1}{2}\pi} = \frac{\pi b^{s-1}}{2\Gamma(s)\cos \dfrac{s\pi}{2}}$$

(vgl. (4) und (5)). Analog ist

$$B = \frac{\pi b^{s-1}}{2\Gamma(s)\sin \dfrac{s\pi}{2}}.$$

Die Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen läßt sich hier genauso begründen wie bei dem Integral $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ in Nr. 524, Beispiel 11.

4. Wir berechnen nun die Integrale

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} \ln x \, dx, \qquad \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} \ln^2 x \, dx.$$

Auf Grund von Beispiel 3 gilt

$$J = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x^s}\, dx = \frac{\pi}{2\Gamma(s)\sin \dfrac{s\pi}{2}} \qquad (0 < s < 2).$$

Wird dieses Integral (mit Hilfe der Leibnizschen Regel; Nr. 520) nach dem Parameter s differenziert, so folgt

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x^s} \ln x \, dx = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\left[\Gamma(s)\sin \dfrac{s\pi}{2}\right]^2} \left\{\Gamma'(s) \sin \frac{s\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\Gamma(s)\cos\frac{s\pi}{2}\right\}.$$

Die Anwendung der Leibnizschen Regel ist erlaubt, da das erhaltene Integral gleichmäßig bezüglich s konvergiert, und zwar sowohl im Fall $x = \infty$ (für $s \geqq s_0 > 0$; vgl. Nr. 515, 4°) als auch im Fall $x = 0$ (für $s \leqq s_1$; Majorante $|\ln x| : x^{s_1 - 1}$).

Differenzieren wir die erhaltene Beziehung noch einmal (was analog gerechtfertigt werden kann), so finden wir

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x^s} \ln^2 x \, dx = \frac{\pi}{\left[\Gamma(s)\sin \dfrac{s\pi}{2}\right]^3} \left\{\Gamma'(s) \sin \frac{s\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\Gamma(s)\cos\frac{s\pi}{2}\right\}^2$$

$$- \frac{\pi}{2} \frac{1}{\left[\Gamma(s)\sin \dfrac{s\pi}{2}\right]^2} \left\{\Gamma''(s)\sin\frac{s\pi}{2} + \pi\Gamma'(s)\cos\frac{s\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4}\Gamma(s)\sin\frac{s\pi}{2}\right\}.$$

Wir setzen in den beiden Gleichungen $s = 1$ und erhalten so die Werte der gesuchten Integrale:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \ln x \, dx = \frac{\pi}{2} \Gamma'(1), \qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \ln^2 x \, dx = \pi[\Gamma'(1)]^2 - \frac{\pi}{2} \Gamma''(1) + \frac{\pi^3}{8}.$$

Berücksichtigen wir noch (vgl. Beispiel 1) die Beziehungen

$$\Gamma'(1) = -C, \qquad \Gamma''(1) = C^2 + \frac{\pi^2}{6},$$

so ergibt sich schließlich

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \ln x \, dx = -\frac{\pi}{2} C, \qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \ln^2 x \, dx = \frac{\pi}{2} C^2 + \frac{\pi^3}{24}.$$

5. Wir fanden schon früher (Nr. 534, Beispiel 4 (b)) die Formel

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2a-1} \varphi \, d\varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(a)}{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right)} \qquad (a > 0).$$

Differenzieren wir sie (mit Hilfe der Leibnizschen Regel; Nr. 520) nach a, so gelangen wir zu

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2a-1} \varphi \cdot \ln \sin \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(a)}{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right)} \left[\frac{d \ln \Gamma(a)}{da} - \frac{d \ln \Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right)}{da} \right].$$

Auf Grund der Gaußschen Formel (25) läßt sich der Ausdruck in eckigen Klammern auf die Gestalt

$$\int_0^1 \frac{t^{a-(1/2)} - t^{a-1}}{1 - t} \, dt$$

bringen. Setzen wir hier $2a - 1 = 2n$, wobei n eine beliebige ganze Zahl $\geqq 0$ ist, und ferner $t = u^2$, so finden wir

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \varphi \cdot \ln \sin \varphi \, d\varphi = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n + 1)} \int_0^1 \frac{u^{2n}}{1 + u} \, du.$$

Für $n = 0$ liefert diese Beziehung das schon bekannte Integral

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin \varphi \, d\varphi = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

Für $n \geqq 1$ gelangen wir zu dem neuen Integral

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \varphi \ln \sin \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2n} - \ln 2\right).$$

6. Wir wollen nun die Integrale

$$u = \int_0^\infty e^{-ax} x^{p-1} \cos bx \, dx, \qquad v = \int_0^\infty e^{-ax} x^{p-1} \sin bx \, dx$$

$(a > 0, p > 0)$ berechnen.

Die Lösung läßt sich analog zu Nr. 523, Beispiel 8, durchführen. Für die von b abhängige Funktion $w = u + iv$ ergibt sich wie dort die Differentialgleichung

$$\frac{dw}{db} = -\frac{p}{a^2 + b^2}(b - ia)\, w,$$

die wir auch in der Form

$$\frac{dw}{db} = pw \frac{i}{a - ib}$$

schreiben können. Es läßt sich leicht zeigen, daß dann

$$w(a - ib)^p = c = \text{const}$$

ist.[1] Setzen wir hier $b = 0$, so ist $c = \Gamma(p)$. Damit lautet die Lösung

$$w = \frac{\Gamma(p)}{(a - ib)^p} = \frac{\Gamma(p)}{(a^2 + b^2)^p}(a + ib)^p$$

$$= \frac{\Gamma(p)}{(a^2 + b^2)^{p/2}} \left\{ \cos\left(p \arctan \frac{b}{a}\right) + i \sin\left(p \arctan \frac{b}{a}\right) \right\}.$$

Schließlich erhalten wir, wenn wir Real- und Imaginärteil vergleichen,

$$u = \frac{\Gamma(p)}{(a^2 + b^2)^{p/2}} \cos p\theta, \qquad v = \frac{\Gamma(p)}{(a^2 + b^2)^{p/2}} \sin p\theta,$$

wobei wir zur Abkürzung $\theta = \arctan \frac{b}{a}$ geschrieben haben.

Ersetzen wir $\sqrt{a^2 + b^2}$ durch $\frac{b}{\sin \theta}$ bzw. $\frac{a}{\cos \theta}$, so lautet das Resultat

$$u = \frac{\Gamma(p)}{b^p} \sin^p \theta \cos p\theta = \frac{\Gamma(p)}{a^p} \cos^p \theta \cos p\theta,$$

$$v = \frac{\Gamma(p)}{b^p} \sin^p \theta \sin p\theta = \frac{\Gamma(p)}{a^p} \cos^p \theta \sin p\theta.$$

Man versuche, hieraus die Integrale A und B aus Beispiel 3 zu erhalten, indem man $p = 1 - s$ setzt und $a \to 0$ streben läßt (für $b > 0$ strebt dann der Winkel $\theta = \arctan \frac{b}{a}$ gegen $\frac{\pi}{2}$).

Differenziert man die Integrale u und v nach p, so kann man eine Reihe neuer Integrale erhalten; wir überlassen dies jedoch dem Leser.

7. Die für die Integrale u und v erhaltenen Werte erlauben uns, andere interessante Integrale zu berechnen. Multiplizieren wir beide Seiten von

$$\frac{\Gamma(p)}{a^p} \cos^p \theta \cos p\theta = \int_0^\infty e^{-ax} x^{p-1} \cos bx \, dx$$

---

[1]) Unter $(a \pm ib)^p$ verstehen wir hier und im folgenden denjenigen Zweig der Potenzfunktion, der für $b = 0$ in die positive reelle Zahl a^p übergeht.

mit

$$a^q \tan^{q-1}\theta \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = b^{q-1}\,db$$

(unter der Voraussetzung $0 < q < p$ und $q < 1$) und integrieren wir links nach θ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ und rechts nach b von 0 bis ∞,[1]) so gelangen wir zu

$$J_1 = \int_0^{\pi/2} \cos^{p-q-1}\theta \sin^{q-1}\theta \cos p\theta\, d\theta = \frac{a^{p-q}}{\Gamma(p)} \int_0^\infty b^{q-1}\,db \int_0^\infty e^{-ax} x^{p-1} \cos bx\, dx.$$

Die Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen führt hier sofort zum Wert von J_1. Zunächst ist

$$J_1 = \frac{a^{p-q}}{\Gamma(p)} \int_0^\infty e^{-ax} x^{p-1}\,dx \int_0^\infty \frac{\cos bx}{b^{1-q}}\,db;$$

aus Beispiel 3 läßt sich für das innere Integral leicht der Wert $\Gamma(q)\cos\frac{q\pi}{2}\cdot x^{-q}$ herleiten, so daß

$$J_1 = \frac{a^{p-q}\Gamma(q)\cos\frac{q\pi}{2}}{\Gamma(p)} \int_0^\infty e^{-ax} x^{p-q-1}\,dx$$

und schließlich

$$J_1 = \int_0^{\pi/2} \cos^{p-q-1}\theta \sin^{q-1}\theta \cos p\theta\, d\theta = \frac{\Gamma(q)\,\Gamma(p-q)}{\Gamma(p)} \cos\frac{q\pi}{2}$$

ist. Analog gilt

$$J_2 = \int_0^{\pi/2} \cos^{p-q-1}\theta \sin^{q-1}\theta \sin p\theta\, d\theta = \frac{\Gamma(q)\,\Gamma(p-q)}{\Gamma(p)} \sin\frac{q\pi}{2}.$$

Wir zeigen nun, daß die Änderung der Reihenfolge der Integrationen gestattet ist, ohne die selbstverständlich das Resultat nicht hätte hergeleitet werden können. Da das Integral

$$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-ax} b^{q-1} \cos bx\, dx$$

für $0 < b_0 \leqq b \leqq B < \infty$ gleichmäßig konvergiert, gilt

$$\int_{b_0}^{B} b^{q-1}\,db \int_0^\infty x^{p-1} e^{-ax} \cos bx\, dx = \int_0^\infty e^{-ax} x^{p-1}\,dx \int_{b_0}^{B} b^{q-1} \cos bx\, db$$

$$= \int_0^\infty e^{-ax} x^{p-q-1}\,dx \int_{b_0 x}^{Bx} u^{q-1} \cos u\, du.$$

[1]) Der Zusammenhang zwischen den Veränderlichen b und θ wird durch die Beziehung $b = a \times \tan\theta$ ($a = \text{const}$) hergestellt.

Das innere Integral strebt für $b_0 \to 0$ und $B \to \infty$ gegen das Integral $\int\limits_0^\infty u^{q-1} \cos u \, du$, das existiert und dabei beschränkt bleibt:

$$\left| \int\limits_{b_0 x}^{Bx} u^{q-1} \cos u \, du \right| \leqq L.$$

Also wird der ganze Integrand von der Funktion $L\, e^{-ax} x^{p-q-1}$ majorisiert, der Grenzübergang $b_0 \to 0$ und $B \to \infty$ ist unter dem Integralzeichen zulässig, usw.

8. Wir setzen

$$\psi(t) = D \ln \Gamma(t) = \int\limits_0^1 \frac{1 - x^{t-1}}{1 - x} \, dx - C$$

(vgl. (25)). Dann ist

$$\int\limits_0^1 \frac{x^p - x^q}{1 - x} \, dx = \psi(q + 1) - \psi(p + 1)$$

(für $p + 1 > 0$, $q + 1 > 0$). Mit Hilfe dieser Formeln wollen wir das Integral

$$J = \int\limits_0^1 \frac{(1 - x^\alpha)(1 - x^\beta)}{(1 - x) \ln x} \, dx \qquad (\alpha > -1, \beta > -1, \alpha + \beta > -1)$$

berechnen. Seine Ableitung nach α lautet

$$\frac{dJ}{d\alpha} = -\int\limits_0^1 \frac{x^\alpha(1 - x^\beta)}{1 - x} \, dx = \psi(\alpha + 1) - \psi(\alpha + \beta + 1) = \frac{d}{d\alpha} \ln \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)}.$$

Daher ist

$$J = \ln \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} + C.$$

Wegen $J = 0$ für $\alpha = 0$ muß notwendig $C = \ln \Gamma(\beta + 1)$ sein und demzufolge

$$J = \ln \frac{\Gamma(\alpha + 1)\, \Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)}.$$

Analog lassen sich die folgenden Integrale und ähnliche berechnen (dabei ist $\alpha > -1$, $\alpha + \beta > -1$, $\alpha + \gamma > -1$, $\alpha + \beta + \gamma > -1$):

$$K = \int\limits_0^1 \frac{x^\alpha(1 - x^\beta)(1 - x^\gamma)}{(1 - x) \ln x} \, dx = \ln \frac{\Gamma(\alpha + \gamma + 1)\, \Gamma(\alpha + \beta + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)\, \Gamma(\alpha + \beta + \gamma + 1)},$$

$$L = \int\limits_0^1 \frac{(1 - x^\alpha)(1 - x^\beta)(1 - x^\gamma)}{(1 - x) \ln x} \, dx$$

$$= \ln \frac{\Gamma(\alpha + 1)\, \Gamma(\beta + 1)\, \Gamma(\gamma + 1)\, \Gamma(\alpha + \beta + \gamma + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)\, \Gamma(\alpha + \gamma + 1)\, \Gamma(\beta + \gamma + 1)}.$$

Setzen wir in K

$$\gamma = \frac{1}{2}, \qquad \alpha = \frac{a}{2} - 1, \qquad \beta = \frac{b - a}{2}, \qquad x = t^2,$$

so gelangen wir zu

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1} - t^{b-1}}{(1+t)\ln t}\,dt = \ln \frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)} \qquad (a, b > 0);$$

für $b = 1 - a$ erhalten wir hieraus das interessante Integral

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1} - t^{-a}}{(1+t)\ln t}\,dt = \ln \tan \frac{a\pi}{2} \qquad (0 < a < 1).$$

Die angegebenen Beispiele genügen, um zu zeigen, wie sich unsere Möglichkeiten, Integrale in geschlossener Form darzustellen, dank der Einführung der Gammafunktion erweitern lassen. Sogar in den Fällen, in denen die geschlossene Form keine anderen als elementare Funktionen enthält, wird ihr Auffinden häufig (mindestens in den Zwischenrechnungen) durch Benutzung der Gammafunktion erleichtert.

540. Die Stirlingsche Formel. Wir wenden uns nun der Herleitung von Näherungsformeln für $\ln \Gamma(a)$ und der Frage nach der Berechnung der Werte von $\ln \Gamma(a)$ und der Gammafunktion selbst zu. Als Ausgangspunkt dient die Beziehung (24) für die logarithmische Ableitung von $\Gamma(a)$:

$$\mathrm{D} \ln \Gamma(a) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-ax}}{1 - e^{-x}}\right) dx.$$

Da der Integrand für $x \geqq 0$ und $a > 0$ in x und a stetig ist (für $x = 0$ kann man sich durch Reihenentwicklung davon überzeugen) und das Integral im Fall $x = \infty$ gleichmäßig bezüglich a für $a \geqq a_0 > 0$ konvergiert (Majorante $\frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^{-a_0 x}}{1 - e^{-x}}$), darf unter dem Integralzeichen nach a von 1 bis a integriert werden:

$$\ln \Gamma(a) = \int_0^\infty \left[(a-1)\,e^{-x} - \frac{e^{-x} - e^{-ax}}{1 - e^{-x}}\right] \frac{dx}{x} \qquad (a > 0).$$

Wir ändern nun das Vorzeichen der Integrationsvariablen, d. h., wir gehen zum Intervall $(-\infty, 0]$ über:

$$\ln \Gamma(a) = \int_{-\infty}^0 \left[\frac{e^{ax} - e^x}{e^x - 1} - (a-1)\,e^x\right] \frac{dx}{x}. \tag{35}$$

Auch dieses Integral konvergiert im Fall $x = -\infty$ gleichmäßig für $0 < a_0 \leqq a \leqq A < \infty$; integrieren wir wieder unter dem Integralzeichen nach a, jetzt von a bis $a + 1$, so folgt

$$R(a) = \int_a^{a+1} \ln \Gamma(a)\,da = \int_{-\infty}^0 \left[\frac{e^{ax}}{x} - \frac{e^x}{e^x - 1} - \left(a - \frac{1}{2}\right) e^x\right] \frac{dx}{x}. \tag{36}$$

Zur Vereinfachung von (35) benutzen wir das eben erhaltene Integral sowie das elementare Frullanische Integral (Nr. 495):

$$\frac{1}{2} \ln a = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-ax}}{2} \frac{dx}{x} = \int_{-\infty}^0 \frac{e^{ax} - e^x}{2} \frac{dx}{x}. \tag{37}$$

Subtrahieren wir (36) von (35) und addieren wir dazu (37), so finden wir

$$\ln \Gamma(a) - R(a) + \frac{1}{2} \ln a = \int_{-\infty}^{0} \left[\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right] \frac{e^{ax}\, dx}{x},$$

und setzen wir zur Abkürzung

$$\int_{-\infty}^{0} \left[\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right] \frac{e^{ax}\, dx}{x} = \omega(a) \tag{38}$$

sowie statt $R(a)$ den schon bekannten Ausdruck (19) des Raabeschen Integrals ein, so erhalten wir

$$\ln \Gamma(a) = \ln \sqrt{2\pi} + \left(a - \frac{1}{2}\right) \ln a - a + \omega(a). \tag{39}$$

In Kapitel XII (Nr. 441, Beispiel 10) fanden wir die für alle $x \neq 0$ gültige Partialbruchzerlegung

$$\coth x = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + k^2\pi^2}.$$

Ersetzen wir hier x durch $\frac{x}{2}$, so folgt (vgl. Nr. 449)

$$\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 4k^2\pi^2}$$

oder schließlich

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4k^2\pi^2}.$$

In $f(x)$ erkennen wir die Funktion wieder, die im Integranden von (38) steht.

Wir wählen nun eine beliebige nichtnegative ganze Zahl m und ersetzen jedes Glied der Reihe durch die entsprechende Summe:

$$\frac{1}{x^2 + 4k^2\pi^2} = \frac{1}{4k^2\pi^2} - \frac{x^2}{(4k^2\pi^2)^2} + \frac{x^4}{(4k^2\pi^2)^3} - \cdots$$
$$+ (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-2}}{(4k^2\pi^2)^m} + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(4k^2\pi^2)^{m+1}} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{x^2}{4k^2\pi^2}}.$$

Die Summanden der Gestalt

$$(-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(4k^2\pi^2)^n} \qquad (1 \leqq n \leqq m)$$

summieren wir über k ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Setzen wir wie üblich $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = s_{2n}$, so gelangen wir zu dem Resultat

$$(-1)^{n-1} \frac{1}{(2\pi)^{2n}} s_{2n} x^{2n-2}.$$

Führen wir noch die n-te Bernoullische Zahl

$$B_n = \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} s_{2n} \tag{40}$$

ein (Nr. 449), so nimmt es die Gestalt

$$(-1)^{n-1} \frac{B_n}{2(2n)!} x^{2n-2}$$

an. Summieren wir die letzten Summanden, die mit dem Faktor $\dfrac{1}{1 + \dfrac{x^2}{4k^2\pi^2}}$ versehen sind (diese Faktoren sind positive echte Brüche), so gelangen wir zu dem Glied

$$(-1)^m \tilde{\theta} \frac{B_{m+1}}{2(2m+2)!} x^{2m},$$

wobei $\tilde{\theta}$ ein positiver echter Bruch ist. Für $f(x)$ ergibt sich damit

$$f(x) = \frac{B_1}{2!} - \frac{B_2}{4!} x^2 + \frac{B_3}{6!} x^4 - \cdots + (-1)^{m-1} \frac{B_m}{(2m)!} x^{2m-2}$$
$$+ (-1)^m \tilde{\theta} \frac{B_{m+1}}{(2m+2)!} x^{2m} \qquad (0 < \tilde{\theta} < 1).$$

Diesen Ausdruck setzen wir in (36) ein und integrieren gliedweise. Wegen

$$\int_{-\infty}^{0} e^{ax} x^{2n} \, dx = \int_{0}^{\infty} e^{-ax} x^{2n} \, dx = \frac{(2n)!}{a^{2n+1}}$$

und

$$\int_{-\infty}^{0} e^{ax} \tilde{\theta} x^{2m} \, dx = \theta \int_{-\infty}^{0} e^{ax} x^{2m} \, dx = \frac{(2m)!}{a^{2m+1}} \qquad (0 < \theta < 1)^{1)}$$

finden wir

$$\omega(a) = \frac{B_1}{1 \cdot 2} \frac{1}{a} - \frac{B_2}{3 \cdot 4} \frac{1}{a^3} + \frac{B_3}{5 \cdot 6} \frac{1}{a^5} - \cdots + (-1)^{m-1} \frac{B_m}{(2m-1)\,2m} \frac{1}{a^{2m-1}}$$
$$+ (-1)^m \theta \frac{B_{m+1}}{(2m+1)(2m+2)} \frac{1}{a^{2m+1}} \qquad (0 < \theta < 1).$$

Wenn wir schließlich in (39) für $\Gamma(a)$ diesen Ausdruck einsetzen, so erhalten wir die *Stirlingsche Formel*

$$\ln \Gamma(a) = \ln \sqrt{2\pi} + \left(a - \frac{1}{2}\right) \ln a - a + \frac{B_1}{1 \cdot 2} \frac{1}{a} - \frac{B_2}{3 \cdot 4} \frac{1}{a^3} + \cdots$$
$$+ (-1)^{m-1} \frac{B_m}{(2m-1)\,2m} \frac{1}{a^{2m-1}}$$
$$+ (-1)^m \theta \frac{B_{m+1}}{(2m+1)(2m+2)} \frac{1}{a^{2m+1}} \qquad (0 < \theta < 1). \tag{41}$$

Im einfachsten Fall $m = 0$ nimmt sie die Gestalt

$$\ln \Gamma(a) = \ln \sqrt{2\pi} + \left(a - \frac{1}{2}\right) \ln a - a + \frac{\theta}{12a} \qquad (0 < \theta < 1)$$

an.

---

[1]) Wir weisen darauf hin, daß $\tilde{\theta}$ von x abhängt, θ jedoch nicht.

Wenn wir statt des Restgliedes, das den Faktor θ enthält, die Glieder der unendlichen Reihe aufschreiben, so ergibt sich die sogenannte *Stirlingsche Reihe*:

$$\ln \Gamma(a) \sim \ln \sqrt{2\pi} + \left(a - \frac{1}{2}\right) \ln a - a + \frac{B_1}{1 \cdot 2} \frac{1}{a} - \frac{B_2}{3 \cdot 4} \frac{1}{a^3} + \cdots$$
$$+ (-1)^{m-1} \frac{B_m}{(2m-1)\, 2m} \frac{1}{a^{2m-1}} + \cdots. \tag{41a}$$

Diese Reihe ist divergent; auf Grund von (40) strebt nämlich der absolute Betrag des allgemeinen Gliedes der Stirlingschen Reihe mit n über alle Grenzen:

$$\frac{B_n}{(2n-1)\, 2n} \frac{1}{a^{2n-1}} = \frac{1}{\pi} \frac{(2n-2)!}{(2\pi a)^{2n-1}} s_{2n} \to \infty \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Trotzdem ist diese Reihe für die angenäherte Berechnung der Funktion $\ln \Gamma(a)$ oft sehr nützlich, da sie die asymptotische Entwicklung dieser Funktion ist und gleichzeitig um diese Funktion alterniert. Wir stießen schon früher sowohl auf die Stirlingsche Formel als auch auf die Stirlingsche Reihe für $\ln (n!)$; vgl. Nr. 469, Formel (26) und (27). Die eben erhaltenen Entwicklungen sind jedoch allgemeiner. Wollen wir aus ihnen die Resultate von Nr. 469 erhalten, so müssen wir $a = n$ setzen und außerdem $\ln n$ hinzufügen, da $\Gamma(n) = (n-1)!$ und nicht $n!$ ist. Auch in dem hier betrachteten allgemeinen Fall ergibt sich, wenn wir entlogarithmieren (vgl. Nr. 464, 3°), die asymptotische Entwicklung der Funktion $\Gamma(a)$ selbst (vgl. Nr. 469).

541. Berechnung der Eulerschen Konstanten. Wir kehren zur Formel (39) zurück und differenzieren sie nach a:

$$\mathrm{D} \ln \Gamma(a) = \ln a - \frac{1}{2a} + \omega'(a).$$

Dabei ist

$$\omega'(a) = \int_{-\infty}^{0} x\, \mathrm{e}^{ax} f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Mit Hilfe der Überlegungen aus Nr. 540 erhalten wir

$$\omega'(a) = -\frac{B_1}{2} \frac{1}{a_2} + \frac{B_2}{4} \frac{1}{a^4} - \cdots - (-1)^m \frac{B_m}{2m} \frac{1}{a^{2m}}$$
$$+ (-1)^{m+1} \theta' \frac{B_{m+1}}{2m+2} \frac{1}{a^{2m+2}} \qquad (0 < \theta' < 1). \tag{42}$$

Hieraus folgt die asymptotische Entwicklung

$$\mathrm{D} \ln \Gamma(a) \sim \ln a - \frac{1}{2a} - \frac{B_1}{2} \frac{1}{a^2} + \frac{B_2}{4} \frac{1}{a^4} - \cdots + (-1)^n \frac{B_n}{2n} \frac{1}{a^{2n}} + \cdots.$$

Formal kann sie durch gliedweise Differentiation der Stirlingschen Reihe (41a) hergeleitet werden.[1])

Aus (42) kann ein zweckmäßiges Verfahren zur Berechnung der Eulerschen Konstanten C gewonnen werden. Ersetzen wir in der Gaußschen Formel (25) die Konstante a durch eine natürliche Zahl k, so finden wir

$$C = \int_0^1 \frac{1 - t^{k-1}}{1 - t}\, \mathrm{d}t - \mathrm{D} \ln \Gamma(k).$$

---

[1]) Somit ist *im vorliegenden Fall* die gliedweise Differentiation der asymptotischen Entwicklung gestattet (vgl. die Bemerkung in Nr. 464, S. 496).

Nun ist $\frac{1-t^{k-1}}{1-t} = 1 + t + \cdots + t^{k-2}$, also

$$\int_0^1 \frac{1-t^{k-1}}{1-t}\,dt = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k-1}.$$

Benutzen wir (42) für $a = k$, so ergibt sich schließlich

$$C = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{1-k} - \ln k + \frac{1}{2k} + \frac{1}{12k^2} - \frac{1}{120k^4} + \frac{1}{252k^6}$$
$$- \frac{1}{240k^8} + \cdots + (-1)^n \frac{B_n}{2n}\frac{1}{k^{2n}} + (-1)^{n+1}\theta' \frac{B_{n+1}}{2n+2}\frac{1}{k^{2n+2}} \qquad (0 < \theta' < 1).$$

Mit Hilfe dieser Formel errechnete EULER, indem er $k = 10$ setzte und die Glieder bis einschließlich k^{12} berücksichtigte, den Wert von C auf 15 Dezimalen:

$$C = 0{,}577\,215\,664\,901\,532\ldots$$

542. Aufstellung von Tafeln für die dekadischen Logarithmen der Gammafunktion. Wir wollen noch ganz kurz angeben, wie man solche Tafeln aufstellt.

Wir kehren zu der Formel (27) zurück, die wir, nachdem wir a durch $a + 1$ ersetzt haben, in der Gestalt

$$\frac{d \ln \Gamma(1+a)}{da} = -C + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{a+k}\right)$$

schreiben. Durch $(n-1)$-malige Differentiation gelangen wir zu der n-ten Ableitung

$$\frac{d^n \ln \Gamma(1+a)}{da^n} = (-1)^n (n-1)! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(a+k)^n}$$

(die gleichmäßige Konvergenz rechtfertigt die gliedweise Differentiation).

Auf diese Weise erhalten wir die Koeffizienten der Taylorschen Reihe:

$$\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n \ln \Gamma(1+a)}{da^n}\right]_{a=0} = (-1)^n \frac{s_n}{n} \quad \text{mit} \quad s_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}.$$

Für $|a| < 1$ gilt dann

$$\ln \Gamma(1+a) = -Ca + \frac{1}{2} s_2 a^2 - \frac{1}{3} s_3 a^3 + \frac{1}{4} s_4 a^4 - \cdots.$$

Da die Zahlen s_k (für große k) in der Nähe von 1 liegen, ist es zweckmäßig, zu dieser Reihe die (ebenfalls für $|a| < 1$ gültige) Beziehung

$$\ln(1+a) = a - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{4}a^4 + \cdots$$

zu addieren. Damit ist

$$\ln \Gamma(1+a) = -\ln(1+a) + (1-C)\,a + \frac{1}{2}(s_2 - 1)\,a^2 - \frac{1}{3}(s_3 - 1)\,a^3 + \cdots.$$

Wir multiplizieren nun mit dem Modul M, setzen

$$M(1-C) = C_1, \qquad \frac{1}{2}M(s_2 - 1) = C_2, \qquad \frac{1}{3}M(s_3 - 1) = C_3, \ldots$$

und finden

$$\ln \Gamma(1+a) = -\ln(1+a) + C_1 a + C_2 a^2 - C_3 a^3 + C_4 a^4 - \cdots. \tag{43}$$

Wir ersetzen hier a durch $-a$ und subtrahieren die so erhaltene Entwicklung

$$\ln \Gamma(1-a) = -\ln(1-a) - C_1 a + C_2 a^2 + C_3 a^3 + C_4 a^4 + \cdots$$

von (43.) Da auf Grund des Ergänzungssatzes

$$\Gamma(1-a)\,\Gamma(1+a) = \frac{a\pi}{\sin a\pi}$$

und demnach

$$\ln \Gamma(1-a) = -\ln \Gamma(1+a) + \ln \frac{a\pi}{\sin a\pi}$$

gilt, gelangen wir zu

$$\ln \Gamma(1+a) = \frac{1}{2} \ln \frac{a\pi}{\sin a\pi} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+a}{1-a} + C_1 a - C_3 a^3 - C_5 a^5 - \cdots. \tag{44}$$

Legendre gab die Werte der Koeffizienten C_n (für $n \leqq 15$) und deren Logarithmen an und berechnete mit Hilfe der Beziehungen (43) und (44) die dekadischen Logarithmen von $\Gamma(a)$ für $1 \leqq a \leqq 2$ mit der Schrittweite 0,001, und zwar zuerst auf sieben und dann auf zwölf Dezimalstellen.

Damit schließen wir das Studium der Gammafunktion ab. Wir sehen, daß wir, ausgehend von ihrer den Parameter a enthaltenden Integraldarstellung, nicht nur mit ihren Eigenschaften vertraut wurden, sondern auch lernten, die Funktion zu berechnen. Diese neue Funktion beherrschen wir nun genauso wie die elementaren Funktionen.

Namen- und Sachverzeichnis