Mathematisch-
Naturwissenschaftliche
Bibliothek

3

KHINTCHINE

KETTENBRÜCHE

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE
BIBLIOTHEK

3

KETTENBRÜCHE

von

A. KHINTCHINE

Doktor der Mathematischen Wissenschaften
Professor an der Lomonossow-Universität
Moskau

B. G. TEUBNER VERLAGSGESELLSCHAFT · LEIPZIG
1 9 5 6

А. Я. Хинчин, цепные дроби

2. Auflage, erschienen im Staatlichen Verlag
für Technisch-Theoretische Literatur, Moskau 1949

Deutsche Übersetzung: Viktor Ziegler

Liz.-Nr. 294/375/4/56

Printed in Germany

Satz und Druck: (III/18/154) B. G. Teubner, Leipzig C1, Querstr. 17–49

VORWORT ZUR ZWEITEN AUFLAGE

Die vorliegende zweite Auflage ist ein nahezu unveränderter Nachdruck der ersten.

Seit dem Erscheinen der ersten Auflage sind in der russischen Literatur keine weiteren Monographien über Kettenbrüche erschienen. Von allgemeinen Leitfäden der Zahlentheorie, die eine elementare Einführung in die Theorie der Kettenbrüche enthalten, sind die Lehrbücher von *D. A. Grave*, *B. A. Wenkow* und *I. W. Arnold* zu erwähnen.

Moskau, Oktober 1949

A. Khintchine

AUS DEM VORWORT ZUR ERSTEN AUFLAGE

Die Theorie der Kettenbrüche beschäftigt sich mit einem speziellen Algorithmus, der zu den wichtigsten Handwerkszeugen der Analysis, der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der Mechanik und insbesondere der Zahlentheorie gehört. Der vorliegende elementare Leitfaden verfolgt das Ziel, den Leser mit den sog. *einfachsten* Kettenbrüchen der Form

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}}$$

vertraut zu machen. Dabei wird außerdem vorausgesetzt, daß alle „Elemente" $a_i (i \geq 1)$ ganze positive Zahlen sind. Diese wichtigste und zugleich am besten erforschte Klasse der Kettenbrüche liegt nahezu allen arithmetischen und sehr vielen analytischen Anwendungen der Theorie der Kettenbrüche zugrunde.

Die Herausgabe einer elementaren Einzeldarstellung über die Theorie der Kettenbrüche halte ich deshalb für notwendig, weil

diese Theorie, die früher zum Programm des Mathematikunterrichts in der höheren Schule gehörte, dort nicht mehr gelehrt wird und deshalb nicht mehr in den Leitfäden der elementaren Algebra enthalten ist. Andererseits sieht aber auch das Programm der Hochschulen (sogar der mathematischen Abteilungen an den Universitäten) diese Theorie nicht vor, weshalb die Kettenbrüche in den entsprechenden Hochschullehrbüchern naturgemäß ebenfalls nicht behandelt werden. Daher ist ein Spezialist, der diesen elementaren Kalkül erlernen muß, gezwungen, entweder zu alten Lehrbüchern aus der Zeit vor der Revolution oder zu ausländischen Spezialwerken zu greifen.

Der Hauptzweck dieses Bändchens besteht darin, die genannte Lücke in unserer Literatur zu schließen; es muß daher notgedrungen elementar und möglichst leicht faßlich sein. Dadurch ist im wesentlichen auch sein *Stil* bestimmt. Sein *Inhalt* geht dagegen ein wenig über die Grenzen dieses Minimums, das für die verschiedensten Anwendungen absolut notwendig ist, hinaus. Dies bezieht sich vor allem auf den gesamten letzten Abschnitt, der die Grundlagen der metrischen (oder wahrscheinlichkeitstheoretischen) Theorie der Kettenbrüche bringt. Es handelt sich hierbei um ein wichtiges neues Kapitel, das nahezu vollständig von sowjetischen Wissenschaftlern geschaffen wurde. Über das genannte Minimum gehen ferner viele Stellen im Kapitel B hinaus, an denen ich bestrebt war, die grundlegende Rolle der Kettenbrüche für die Untersuchung der arithmetischen Natur der Irrationalitäten soweit zu beleuchten, als es im Rahmen einer derart elementaren Einführung möglich ist. Wenn die Theorie der Kettenbrüche schon einmal in einem gesonderten Bändchen behandelt wird, so wäre es meines Erachtens unzweckmäßig, diejenigen Momente und Querverbindungen dieser Theorie unberücksichtigt zu lassen, die gegenwärtig das wissenschaftliche Denken am meisten beschäftigen.

Was die Gliederung betrifft, so bedarf hier nur die Tatsache einer Erläuterung, daß der „formale" Teil des Stoffes zu einem einführenden Kapitel zusammengefaßt wurde. Dies gilt hauptsächlich für den Teil, in dem die Elemente der Kettenbrüche als beliebige positive (nicht notwendig ganze) Zahlen und mitunter sogar einfach als unabhängige Variable vorausgesetzt werden. Ein Mangel dieser Betrachtungsweise besteht darin, daß die formalen Eigenschaften des zu untersuchenden Apparates früher

an den Leser herangebracht werden als der konkrete Inhalt. Sie werden daher losgelöst von dem letzteren betrachtet, was, pädagogisch gesehen, zweifellos wenig günstig erscheint.

Ganz davon abgesehen, daß auf diesem Wege eine größere methodologische Straffheit erzielt wird (denn der Leser erkennt unmittelbar, welche Eigenschaften der Kettenbrüche der Struktur des Apparates selbst entspringen und welche damit zusammenhängen, daß die Elemente ganzzahlig und positiv vorausgesetzt werden), gestattet diese vorläufige Absonderung des formalen Teiles, die arithmetische Theorie, die den Hauptzweck dieser Lehre ausmacht, auf einer fertigen Basis aufzubauen. Man kann daher die Aufmerksamkeit des Lesers auf den konkreten Inhalt des dargelegten Materials konzentrieren, ohne ihn durch rein formale Betrachtungen ablenken zu müssen.

Moskau, den 12. Februar 1935

A. Khintchine

INHALTSVERZEICHNIS

A. Die Eigenschaften des Kalküls

B. Darstellung von Zahlen durch Kettenbrüche

C. Metrische Theorie der Kettenbrüche

A. DIE EIGENSCHAFTEN DES KALKÜLS

§ 1. Einführung

Als einfachsten Kettenbruch bezeichnet man einen Ausdruck der Form

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}}. \tag{1}$$

Die Buchstaben $a_0, a_1, a_2, \ldots$ bedeuten bei allgemeinster Betrachtung unabhängige Variable. Je nach Bedarf kann man diese Veränderlichen irgendeinen Variabilitätsbereich durchlaufen lassen. So kann man annehmen, daß die $a_0, a_1, a_2, \ldots$ reelle oder komplexe Zahlen, Funktionen einer oder mehrerer Veränderlichen und dgl. sind. Dem Zweck des Bändchens entsprechend sollen die $a_1, a_2, \ldots$ stets *positiv* sein, während a_0 *beliebig reell* sein kann. Diese Zahlen wollen wir die *Elemente* oder *Partialnenner* bzw. *Teilnenner* des betreffenden Kettenbruches nennen. Ihre Anzahl kann entweder endlich oder unendlich sein. Im ersten Falle schreiben wir den Kettenbruch in der Form

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots \cfrac{}{} + \cfrac{1}{a_n}}}. \tag{2}$$

und nennen ihn einen *endlichen* oder, genauer, *n-gliedrigen* Kettenbruch (ein n-gliedriger Kettenbruch besitzt demnach $n + 1$ Elemente). Im zweiten Falle schreiben wir den Kettenbruch in der Gestalt (1) und nennen ihn *unendlich*.

Jeder endliche Kettenbruch ist ein Ergebnis endlich vieler rationaler Operationen mit seinen Elementen. Unter den über diese gemachten Voraussetzungen ist daher jeder endliche Kettenbruch eine reelle Zahl. Sind insbesondere alle Elemente eines solchen Bruches rational, so ist der Bruch selbst eine rationale Zahl.

Im Gegensatz dazu können wir einem unendlichen Kettenbruch nicht ohne weiteres einen Zahlenwert beimessen. Er stellt, wenigstens solange wir keine weiteren Vereinbarungen treffen, ähnlich einer unendlichen Reihe, nach deren Konvergenz nicht gefragt ist, lediglich eine formale Schreibweise dar. Trotzdem kann er selbstverständlich Gegenstand mathematischer Untersuchung sein.

Der einfacheren Schreibweise wegen wollen wir für das Weitere vereinbaren, den unendlichen Kettenbruch (1) in der Form

$$[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots], \tag{3}$$

den endlichen Kettenbruch (2) in der Form

$$[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n] \tag{4}$$

zu schreiben. Somit ist die Anzahl der Glieder eines endlichen Kettenbruches gleich der Anzahl der Symbole (Elemente), die in der Klammer nach dem Semikolon stehen.

Einen Kettenbruch

$$s_k = [a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k]$$

mit $0 \leq k \leq n$ wollen wir einen *Abschnitt* des Kettenbruches (4) nennen. In der gleichen Weise bezeichnen wir für ein beliebiges $k \geq 0$ mit s_k einen Abschnitt des unendlichen Kettenbruches (3). Offenbar ist ein beliebiger Abschnitt eines beliebigen (endlichen oder unendlichen) Kettenbruches ein endlicher Kettenbruch.

Ferner wollen wir vereinbaren, einen Kettenbruch

$$r_k = [a_k;\ a_{k+1},\ \ldots,\ a_n]$$

als *Rest* des endlichen Kettenbruches (4) zu bezeichnen. Analog wollen wir einen Kettenbruch

$$r_k = [a_k;\ a_{k+1},\ a_{k+2},\ \ldots]$$

einen Rest des unendlichen Kettenbruches (3) nennen. Offenbar sind alle Reste eines endlichen Kettenbruches wieder endliche Kettenbrüche, während alle Reste eines unendlichen Kettenbruches unendliche Kettenbrüche darstellen.

Für endliche Kettenbrüche gilt, wie bereits aus ihrer Definition hervorgeht, die Beziehung

$$[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n] = [a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{k-1},\ r_k] \quad (0 \leq k \leq n). \tag{5}$$

Die analoge Beziehung

$$[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots] = [a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{k-1},\ r_k] \qquad (k \geq 0)$$

für unendliche Kettenbrüche kann lediglich die Bedeutung einer (trivialen) formalen Schreibweise haben, da das Element r_k auf der rechten Seite dieser Gleichung als unendlicher Kettenbruch keinen bestimmten Zahlenwert besitzt.

§ 2. Näherungsbrüche

Jeder endliche Kettenbruch

$$[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n]$$

ist als Ergebnis endlich vieler rationaler Operationen mit seinen Elementen eine rationale Funktion dieser Elemente und läßt sich daher als Quotient zweier Polynome

$$\frac{P(a_0, a_1, \ldots, a_n)}{Q(a_0, a_1, \ldots, a_n)}$$

in den $a_0, a_1, \ldots, a_n$ mit ganzzahligen Koeffizienten darstellen. Werden den Elementen Zahlenwerte beigemessen, so läßt sich der betreffende Kettenbruch in Gestalt eines gemeinen Bruches $\frac{p}{q}$ schreiben. Eine solche Darstellung ist aber selbstverständlich nicht eindeutig. Für das weitere ist es jedoch wichtig, eine *bestimmte* Darstellung eines endlichen Kettenbruches in Form eines gemeinen Bruches zu haben, eine Darstellung, die wir als *kanonisch* bezeichnen und induktiv definieren wollen.

Für einen 0-gliedrigen Kettenbruch

$$[a_0] = a_0$$

wählen wir als kanonische Darstellung den Bruch $\frac{a_0}{1}$. Nun seien die kanonischen Darstellungen für Kettenbrüche, bei denen die Anzahl der Elemente kleiner als n ist, bereits definiert. Im n-gliedrigen Kettenbruch $a_0, a_1, \ldots, a_n$ können wir nach Formel (5)

$$[a_0;\ a_1,\ \ldots,\ a_n] = [a_0;\ r_1] = a_0 + \frac{1}{r_1}$$

setzen; dabei ist

$$r_1 = [a_1;\ a_2,\ \ldots,\ a_n]$$

ein $(n-1)$-gliedriger Kettenbruch, für den die kanonische Darstellung also bereits definiert ist. Sie möge die Form

$$r_1 = \frac{p'}{q'}$$

haben; dann ist

$$[a_0;\ a_1,\ \ldots,\ a_n] = a_0 + \frac{q'}{p'} = \frac{a_0 p' + q'}{p'}.$$

Diesen letzten Bruch wollen wir nunmehr künftig als kanonische Darstellung des Kettenbruches $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ verwenden. Setzt man somit

$$[a_0;\ a_1,\ \ldots,\ a_n] = \frac{p}{q},$$

$$r_1 = [a_1; a_2, \ldots, a_n] = \frac{p'}{q'},$$

so erhält man für die Zähler und Nenner dieser kanonischen Darstellung die Beziehungen

$$p = a_0 p' + q', \quad q = p'. \tag{6}$$

Gleichzeitig sehen wir, daß nunmehr die kanonischen Darstellungen für endliche Kettenbrüche mit beliebig vielen Gliedern eindeutig bestimmt sind.

In der Theorie der Kettenbrüche spielen die kanonischen Darstellungen der Abschnitte eines gegebenen (endlichen oder unendlichen) Kettenbruches $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ eine besonders wichtige Rolle.

Die kanonischen Darstellungen des Abschnittes

$$s_k = [a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k]$$

von α wollen wir mit $\frac{p_k}{q_k}$ bezeichnen und sie einen *Näherungsbruch der Ordnung k* von α nennen. Dieser Begriff wird für endliche und für unendliche Kettenbrüche gleich definiert. Der Unterschied besteht lediglich darin, daß ein endlicher Kettenbruch endlich viele Näherungsbrüche besitzt, während bei unendlichen Kettenbrüchen die Anzahl der Näherungsbrüche unendlich ist. Für einen n-gliedrigen Kettenbruch α gilt offenbar

$$\frac{p_n}{q_n} = \alpha.$$

Ein solcher Bruch hat insgesamt $n+1$ Näherungsbrüche (der Ordnungen 0, 1, 2, ..., n).

Satz 1 (Bildungsgesetz der Näherungsbrüche). *Für ein beliebiges* $k \geq 2$ *gilt*

$$\left.\begin{aligned} p_k &= a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \\ q_k &= a_k q_{k-1} + q_{k-2}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Beweis. Im Falle $k = 2$ lassen sich die Formeln (7) leicht direkt verifizieren. Nun wollen wir annehmen, sie seien für alle $k < n$ richtig. Ferner betrachten wir den Kettenbruch

$$[a_1;\ a_2,\ \ldots,\ a_n]$$

und bezeichnen mit $\frac{p_r'}{q_r'}$ seine Näherungsbrüche der Ordnung r. Nach (6) ist

$$\begin{aligned} p_n &= a_0 p_{n-1}' + q_{n-1}', \\ q_n &= p_{n-1}' \end{aligned}$$

und nach unserer Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} p_{n-1}' &= a_n p_{n-2}' + p_{n-3}', \\ q_{n-1}' &= a_n q_{n-2}' + q_{n-3}' \end{aligned}$$

(hier steht a_n und nicht a_{n-1}, da der Bruch $a_1; a_2, \ldots, a_n$ mit a_1 und nicht mit a_0 beginnt). Daher erhalten wir auf Grund der Formeln (6)

$$\begin{aligned} p_n &= a_0 (a_n p_{n-2}' + p_{n-3}') + (a_n q_{n-2}' + q'_{n-3}) \\ &= a_n (a_0 p_{n-2}' + q_{n-2}') + (a_0 p_{n-3}' + q'_{n-3}) \\ &= a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \\ q_n &= a_n p_{n-2}' + p_{n-3}' = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Die aufgestellten Rekursionsformeln (7), die Zähler und Nenner des Näherungsbruches der Ordnung n durch das Element a_n und durch Zähler und Nenner der beiden vorangehenden Näherungsbrüche ausdrücken, dienen als formale Grundlage für die gesamte Theorie der Kettenbrüche.

Anmerkung. Mitunter ist es bequem, auch den Näherungsbruch der Ordnung -1 in die Betrachtung mit einzubeziehen, wobei man $p_{-1} = 1$ und $q_{-1} = 0$ setzt. Bei dieser Vereinbarung (und nur dann) bleiben die Formeln (7) auch für $k = 1$ richtig.

Satz 2. *Für alle* $k \geq 0$ *gilt*

$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k. \tag{8}$$

Beweis. Multiplizieren wir die Formeln (7) mit q_{k-1} bzw. p_{k-1} und ziehen wir dann die erste von der zweiten ab, so erhalten wir

$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = -(q_{k-1} p_{k-2} - p_{k-1} q_{k-2}),$$

womit wegen

$$q_0 p_{-1} - p_0 q_{-1} = 1$$

der Satz bewiesen ist.

Folgerung. *Für alle $k \geq 1$ gilt*

$$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_k q_{k-1}}. \tag{9}$$

Satz 3. *Für alle $k \geq 1$ gilt*

$$q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} = (-1)^{k-1} a_k.$$

Beweis. Multiplizieren wir die Formeln (7) mit q_{k-2} bzw. p_{k-2} und ziehen wir dann die erste von der zweiten ab, so erhalten wir nach Satz 2

$$q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} = a_k (q_{k-1} p_{k-2} - p_{k-1} q_{k-2}) = (-1)^{k-1} a_k,$$

was zu beweisen war.

Folgerung. *Für alle $k \geq 2$ gilt*

$$\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^{k-1} a_k}{q_k q_{k-2}}. \tag{10}$$

Die gewonnenen einfachen Ergebnisse gestatten, äußerst wichtige Schlüsse über die Verteilung der Näherungsbrüche um den betreffenden Kettenbruch zu ziehen. In der Tat zeigt die Gleichung (10), daß die Näherungsbrüche gerader Ordnungen eine zunehmende, die Näherungsbrüche ungerader Ordnungen eine abnehmende Folge bilden, so daß diese beiden Folgen sich einander nähern (all das gilt selbstverständlich nur unter der von uns getroffenen Voraussetzung, daß alle Elemente von a_1 an positiv sind). Da wegen (9) jeder Bruch ungerader Ordnung größer ist als der unmittelbar nachfolgende Bruch gerader Ordnung, ist offenbar auch jeder Näherungsbruch ungerader Ordnung größer als jeder beliebige Näherungsbruch gerader Ordnung. Wir können daher den folgenden Schluß ziehen:

Satz 4. *Die Näherungsbrüche gerader Ordnung bilden eine zunehmende, die Näherungsbrüche ungerader Ordnung eine abnehmende Folge. Dabei ist jeder Näherungsbruch ungerader Ordnung größer als jeder beliebige Näherungsbruch gerader Ordnung.*

Insbesondere ist bei einem endlichen Kettenbruch offenbar jeder Näherungsbruch gerader Ordnung kleiner als α und jeder Näherungsbruch ungerader Ordnung größer als α (eine Ausnahme bildet selbstverständlich der letzte Näherungsbruch, der gleich α ist).

Zum Abschluß dieses Paragraphen beweisen wir zwei einfache doch äußerst wichtige Sätze, die die Zähler und Nenner der Näherungsbrüche betreffen.

Satz 5. *Für ein beliebiges* k $(1 \leq k \leq n)$ *gilt*

$$[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n] = \frac{p_{k-1} r_k + p_{k-2}}{q_{k-1} r_k + q_{k-2}} \tag{11}$$

(hierbei gehören die p_i, q_i und r_i zu dem links in der Gleichung stehenden Kettenbruch).

Beweis. Wegen (5) gilt

$$[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n] = [a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{k-1},\ r_k].$$

Der Kettenbruch, der rechts in dieser Gleichung steht, hat offenbar zum Näherungsbruch der Ordnung $k-1$ den Bruch $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$. Sein Näherungsbruch der Ordnung k, $\frac{p_k}{q_k}$, ist ihm selbst gleich. Den Formeln (7) zufolge ist aber

$$p_k = p_{k-1} r_k + p_{k-2}, \qquad q_k = q_{k-1} r_k + q_{k-2};$$

damit ist unser Satz bewiesen.

Satz 6. *Für ein beliebiges* $k \geq 1$ *ist*

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = [a_k;\ a_{k-1},\ \ldots,\ a_1].$$

Beweis. Für $k = 1$ ist diese Beziehung offenbar richtig; denn sie hat dann die Form

$$\frac{q_1}{q_0} = a_1.$$

Nun sei $k > 1$; ferner sei bereits bewiesen, daß

$$\frac{q_{k-1}}{q_{k-2}} = [a_{k-1};\ a_{k-2},\ \ldots,\ a_1] \tag{12}$$

gilt. Wegen der zweiten der Gleichungen (7)

$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$$

erhalten wir dann

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = a_k + \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} = \left[a_k;\ \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}}\right],$$

und hieraus wegen (5) und (12)

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = [a_k;\ a_{k-1},\ \ldots,\ a_1],$$

was zu beweisen war.

§ 3. Unendliche Kettenbrüche

Jedem unendlichen Kettenbruch

$$[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots] \tag{13}$$

entspricht eine unendliche Folge von Näherungsbrüchen

$$\frac{p_0}{q_0},\ \frac{p_1}{q_1},\ \ldots,\ \frac{p_k}{q_k},\ \ldots. \tag{14}$$

Jeder Näherungsbruch stellt eine gewisse reelle Zahl dar. Für den Fall, daß die Folge (14) konvergiert, d. h., einen bestimmten eindeutigen Grenzwert α besitzt, ist es durchaus natürlich, die Zahl α als den „Wert" des Kettenbruches (13) aufzufassen; man schreibt dafür

$$\alpha = [a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots].$$

Den Kettenbruch (13) selbst nennt man in diesem Falle *konvergent*. Besitzt die Folge (14) jedoch keinen bestimmten Grenzwert, so nennt man (13) einen *divergenten* Kettenbruch.

Die konvergenten unendlichen Kettenbrüche zeigen in ihren Eigenschaften vielfach Analogien zu den endlichen Kettenbrüchen. Ihre Haupteigenschaft, die diese Analogie recht weit zu treiben gestattet, liegt in dem nachstehenden Satz begründet.

Satz 7. *Ist der Kettenbruch* (13) *konvergent, so konvergieren auch seine Reste sämtlich. Konvergiert umgekehrt wenigstens ein Rest des Kettenbruches* (13), *so ist der Bruch selbst konvergent.*

Beweis. Wir wollen mit $\frac{p_k}{q_k}$ die Näherungsbrüche des gegebenen unendlichen Kettenbruches (13) und mit $\frac{p'_k}{q'_k}$ die Näherungsbrüche irgendeines seiner Reste r_n bezeichnen.

Auf Grund der Formel (11) erhalten wir offenbar

$$\frac{p_{n+k}}{q_{n+k}} = [a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n+k}] = \frac{p_{n-1}\dfrac{p'_k}{q'_k} + p_{n-2}}{q_{n-1}\dfrac{p'_k}{q'_k} + q_{n-2}} \quad (k=0,1,\ldots). \tag{15}$$

Konvergiert dann der Rest r_n, d. h., besitzt der Bruch $\frac{p'_k}{q'_k}$ für $k \to \infty$ einen Grenzwert, den wir ebenfalls mit r_n bezeichnen wollen, so folgt hieraus unmittelbar, daß der Bruch $\frac{p_{n+k}}{q_{n+k}}$ hierbei ebenfalls dem Grenzwert α zustrebt, der den Wert

$$\alpha = \frac{p_{n-1}r_n + p_{n-2}}{q_{n-1}r_n + q_{n-2}} \tag{16}$$

hat. Lösen wir nun die Relation (15) nach $\frac{p'_k}{q'_k}$ auf, so überzeugen wir uns auf dem gleichen Wege, daß auch die umgekehrte Schlußweise richtig ist, womit der Satz 7 bewiesen ist.

Wir wollen darauf hinweisen, daß die eben für die konvergenten unendlichen Kettenbrüche bewiesene Formel (16) der Formel (11) völlig analog ist, die wir früher für endliche Kettenbrüche gefunden hatten. Somit gilt für konvergente unendliche Kettenbrüche ein Satz, der dem für endliche Kettenbrüche bewiesenen Satz 5 entspricht.

Für konvergente unendliche Kettenbrüche ergibt sich aus dem Satz 4 des vorhergehenden Paragraphen offenbar der folgende

Satz 8. *Der Wert eines konvergenten unendlichen Kettenbruches ist größer als ein beliebiger Näherungsbruch gerader Ordnung und kleiner als ein beliebiger Näherungsbruch ungerader Ordnung.*

Weiterhin geht aus der Folgerung zum Satz 2 des vorigen Paragraphen auf Grund des Satzes 8 das folgende Ergebnis hervor, das eine wichtige Rolle für die arithmetischen Anwendungen der Theorie der Kettenbrüche spielt:

Satz 9. *Der Wert α eines konvergenten unendlichen Kettenbruches* (13) *genügt bei beliebigem $k \geq 0$ der Ungleichung*[1])

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}}.$$

1) Es sei darauf hingewiesen, daß unter unseren Voraussetzungen $q_k > 0$ für alle $k \geq 0$ gilt; denn es ist $q_0 = 1$ und $q_1 = a_1$; hieraus folgt aber auf Grund der zweiten der Formeln (7) durch vollständige Induktion $q_k > 0$ für alle $k > 1$.

Offenbar gilt der Satz 9 auch für den endlichen Kettenbruch

$$\alpha = [a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n]$$

für alle $k < n$, wobei nur für $k = n - 1$ die Ungleichung zu einer Gleichung wird; denn es ist $\alpha = \frac{p_n}{q_n}$.

Ist α der Wert eines konvergenten unendlichen Kettenbruches (13), so wollen wir die Elemente dieses Bruches auch als die *Elemente der Zahl* α bezeichnen. Analog wollen wir die Näherungsbrüche, Abschnitte und Reste des Kettenbruches (13) als Näherungsbrüche, Abschnitte und Reste der Zahl α auffassen. Nach Satz 7 haben alle Reste eines konvergenten unendlichen Kettenbruches (13) wohlbestimmte reelle Werte.

Bei unendlichen Kettenbrüchen ergibt sich naturgemäß die Frage nach den Konvergenzmerkmalen, ähnlich wie diese Frage auch für unendliche Reihen gestellt wird. In dem hier betrachteten Fall, d. h., wenn für $i \geq 1$ alle $a_i > 0$ sind, läßt sich ein sehr einfaches und bequemes Konvergenzmerkmal angeben.

Satz 10. *Für die Konvergenz eines Kettenbruches* (13) *ist notwendig und hinreichend, daß die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{17}$$

divergent ist.

Beweis. Nach Satz 4 ist für die Konvergenz eines unendlichen Kettenbruches offenbar notwendig und hinreichend, daß die beiden in diesem Satz betrachteten Folgen ein und denselben Grenzwert besitzen (die Existenz eines Grenzwertes für jede einzeln folgt aus dem Satz in jedem Falle). Dies gilt aber, wie die Formel (9) zeigt, dann und nur dann, wenn

$$q_k q_{k+1} \to \infty \quad \text{für} \quad k \to \infty \tag{18}$$

erfüllt ist. Die Bedingung (18) ist somit für die Konvergenz des betreffenden Kettenbruches notwendig und hinreichend.

Nun möge die Reihe (17) konvergieren. Auf Grund der zweiten der Formeln (7) ist

$$q_k > q_{k-2} \qquad (k \geq 1).$$

Deshalb gilt für ein beliebiges k entweder $q_k > q_{k-1}$ oder $q_{k-1} > q_{k-2}$. Im ersten Falle liefert die zweite der Formeln (7)

$$q_k < a_k q_k + q_{k-2},$$

woraus für hinreichend große k (wenn $a_k < 1$ ist, was wegen der Konvergenz der Reihe (17) für $k \geq k_0$ gelten muß)

$$q_k < \frac{q_{k-2}}{1 - a_k}$$

folgt. Im zweiten Falle ergibt dieselbe Formel für $a_k < 1$

$$q_k < (1 + a_k)\, q_{k-1} < \frac{q_{k-1}}{1 - a_k}.$$

Für alle $k \geq k_0$ erhalten wir somit

$$q_k < \frac{1}{1 - a_k}\, q_l$$

mit $l < k$. Ist nun $l \geq k_0$, so läßt sich auf q_l dieselbe Ungleichung anwenden. Durch Fortsetzung dieser Überlegungen kommen wir offenbar zur Ungleichung

$$q_k < \frac{q_s}{(1 - a_k)(1 - a_l) \ldots (1 - a_r)}. \tag{19}$$

Dabei ist $k > l > \ldots > r \geq k_0$ und $s < k_0$. Auf Grund der vorausgesetzten Konvergenz der Reihe (17) konvergiert bekanntlich auch das unendliche Produkt

$$\prod_{n=k_0}^{\infty} (1 - a_n),$$

d. h., es besitzt einen positiven Wert, den wir mit λ bezeichnen wollen. Offenbar ist

$$(1 - a_k)(1 - a_l) \ldots (1 - a_r) \geq \prod_{n=k_0}^{k} (1 - a_n) = \lambda.$$

Deshalb können wir, wenn wir mit Q die größte der Zahlen $q_0, q_1, \ldots, q_{k_0-1}$ bezeichnen, auf Grund der Ungleichung (19) schließen, daß

$$q_k < \frac{Q}{\lambda} \qquad (k \geq k_0),$$

gilt. Folglich ist

$$q_{k+1}\, q_k < \frac{Q^2}{\lambda^2} \qquad (k \geq k_0),$$

und die Relation (18) kann daher nicht gelten. Dann muß aber der gegebene Kettenbruch divergent sein.

Nun möge die Reihe (17) divergieren. Da $q_k > q_{k-2}$ für alle $k \geq 2$ gilt, erhalten wir, wenn wir mit c die kleinere der Zahlen q_0

und q_1 bezeichnen, für ein beliebiges $k \geq 0$ die Ungleichung $q_k \geq c$. Daher liefert die zweite der Formeln (7)

$$q_k \geq q_{k-2} + c a_k \qquad (k \geq 2).$$

Durch sukzessive Anwendung dieser Ungleichung erhalten wir

$$q_{2k} \geq q_0 + c \sum_{n=1}^{k} a_{2n}$$

und

$$q_{2k+1} \geq q_1 + c \sum_{n=1}^{k} a_{2n+1},$$

woraus

$$q_{2k} + q_{2k+1} > q_0 + q_1 + c \sum_{n=1}^{2k+1} a_n;$$

oder, mit anderen Worten, für alle k

$$q_k + q_{k-1} > c \sum_{n=1}^{k} a_n$$

folgt. Diese Ungleichung haben wir oben für ungerade k bewiesen, doch ist offensichtlich, daß sie sich auf demselben Wege auch für gerade k ergibt.

Hieraus folgt, daß im Produkt $q_k q_{k-1}$ wenigstens einer der Faktoren größer ist als $\frac{c}{2} \sum_{n=1}^{k} a_n$. Da aber der andere Faktor auf jeden Fall nicht kleiner ist als c, erhalten wir

$$q_k q_{k-1} > \frac{c^2}{2} \sum_{n=1}^{k} a_n.$$

Auf Grund der vorausgesetzten Divergenz der Reihe (17) folgt hieraus die Relation (18) und folglich auch die Konvergenz des gegebenen Kettenbruches. Damit ist der Satz 10 vollständig bewiesen.

§ 4. Kettenbrüche mit natürlichen Elementen

Von diesem Paragraphen an wollen wir bis zum Schluß des Buches annehmen, daß die Elemente $a_1, a_2, \ldots$ eines gegebenen Kettenbruches *natürliche*, d. h. ganze positive Zahlen sind; a_0 soll ebenfalls eine ganze, jedoch nicht notwendig positive Zahl sein. Ist ein solcher Bruch unendlich, so ist er nach Satz 10 stets kon-

vergent. Deshalb können wir ohne jegliche weiteren Hinweise annehmen, daß ein beliebiger unendlicher Kettenbruch konvergiert; wir können also von seinem *Wert* oder seiner *Größe* sprechen.

Ist ein solcher Kettenbruch endlich und ist sein letztes Element $a_n = 1$, so ist offenbar $r_{n-1} = a_{n-1} + 1$ eine ganze Zahl. Wir können daher in diesem Falle einen gegebenen n-gliedrigen Kettenbruch $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, 1]$ in Gestalt des $(n-1)$-gliedrigen Bruches $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} + 1]$ darstellen, wobei in dieser neuen Form das letzte Element auf jeden Fall größer als 1 ist.

Auf Grund der eben festgestellten Tatsache können wir im weiteren alle endlichen Kettenbrüche von der Betrachtung ausschließen, deren letztes Element gleich 1 ist (selbstverständlich mit Ausnahme des nullgliedrigen Bruches [1]). Diese Bemerkung ist äußerst wichtig für die Eindeutigkeit der Darstellung von Zahlen durch Kettenbrüche (vgl. Kapitel B, § 5).

Offenbar sind die Zähler und Nenner der Näherungsbrüche in dem betrachteten Falle ganze Zahlen (für p_{-1}, q_{-1}, p_0, q_0 ist dies unmittelbar ersichtlich, für alle übrigen folgt dies aus den Formeln (7)). Außerdem gilt der folgende äußerst wichtige

Satz 11. *Alle Näherungsbrüche lassen sich nicht kürzen.*

Beweis. Der Satz ergibt sich unmittelbar aus der Formel (8), da jeder gemeinsame Teiler der Zahlen p_n und q_n zugleich auch Teiler des Ausdruckes $q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1}$ ist.

Die zweite der Formeln (7) zeigt, daß für jedes $k \geq 2$ die Ungleichung $q_k > q_{k-1}$ gilt. Somit ist die Folge

$$q_1, q_2, \ldots, q_k \ldots$$

stets zunehmend. Über die Art der Zunahme der q_k läßt sich jedoch eine weit schärfere Aussage machen.

Satz 12. *Für ein beliebiges*[1]) $k \geq 2$ *gilt*

$$q_k \geq 2^{\frac{k-1}{2}}.$$

Beweis. Für $k \geq 2$ gilt

$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \geq q_{k-1} + q_{k-2} \geq 2 q_{k-2}.$$

1) Hier und im weiteren sind im Falle endlicher Kettenbrüche selbstverständlich nur solche k-Werte zu verstehen, für die q_k einen Sinn hat.

Durch sukzessive Anwendung dieser Ungleichung erhalten wir

$$q_{2k} \geq 2^k q_0 = 2^k, \quad q_{2k+1} \geq 2^k q_1 \geq 2^k;$$

damit ist offenbar unser Satz bewiesen.

Die Nenner der Näherungsbrüche wachsen somit nicht langsamer als die Glieder einer gewissen geometrischen Reihe.

Zwischenbrüche. Es sei $k \geq 2$ und i eine beliebige nichtnegative ganze Zahl. Die Differenz

$$\frac{p_{k-1}(i+1)+p_{k-2}}{q_{k-1}(i+1)+q_{k-2}} - \frac{p_{k-1}i+p_{k-2}}{q_{k-1}i+q_{k-2}}$$

ist, wie man leicht erkennt, gleich

$$\frac{(-1)^k}{[q_{k-1}(i+1)+q_{k-2}][q_{k-1}i+q_{k-2}]}$$

und hat für alle $i \geq 0$ das gleiche Vorzeichen, das nur davon abhängt, ob k gerade oder ungerade ist. Hieraus folgt, daß die Brüche

$$\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}, \frac{p_{k-2}+p_{k-1}}{q_{k-2}+q_{k-1}}, \frac{p_{k-2}+2p_{k-1}}{q_{k-2}+2q_{k-1}}, \ldots, \frac{p_{k-2}+a_k p_{k-1}}{q_{k-2}+a_k q_{k-1}} = \frac{p_k}{q_k} \quad (20)$$

bei geradem k eine zunehmende und bei ungeradem k eine abnehmende Folge bilden (vgl. Satz 4). Die Randglieder dieser Folge sind Näherungsbrüche, die entweder beide von gerader oder beide von ungerader Ordnung sind. Die zwischen ihnen stehenden Glieder (falls solche überhaupt existieren, d. h., wenn $a_k > 1$ ist) wollen wir *Zwischenbrüche* nennen. Bei den arithmetischen Anwendungen spielen diese eine bedeutende Rolle, doch sind sie nicht ganz so wichtig wie die Näherungsbrüche. Um ihre Verteilung und das Gesetz ihrer sukzessiven Bildung besser erkennen zu können, ist es zweckmäßig, den Begriff des sog. *Medianwertes* zweier Brüche einzuführen.

Als Medianwert zweier Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ mit positiven Nennern bezeichnet man den Bruch

$$\frac{a+c}{b+d}.$$

Hilfssatz. *Der Medianwert zweier Brüche liegt stets zwischen den beiden Brüchen.*

Beweis. Der Bestimmtheit halber sei $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$; dann ist $bc - ad \geq 0$ und folglich

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{b(b+d)} \geq 0, \quad \frac{a+c}{b+d} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{b(b+d)} \leq 0,$$

was zu beweisen war.

Wir erkennen unmittelbar, daß jeder Zwischenbruch der Folge (20) der Medianwert des vorhergehenden Bruches und des Bruches $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ ist. Gehen wir somit in der Folge (20) weiter, so gelangen wir durch Medianwertbildung zunächst zum Näherungsbruch $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$. Beim letzten Schritt ergibt sich als Medianwert der Bruch $\frac{p_k}{q_k}$. Dieser liegt somit zwischen $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ und $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$, was uns bereits aus dem Satz 4 bekannt ist. Außerdem wissen wir, daß der Wert α des gegebenen Kettenbruches zwischen $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ und $\frac{p_k}{q_k}$ liegt und das die Brüche $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ und $\frac{p_k}{q_k}$, deren Ordnungen entweder beide gerade oder beide ungerade sind, entweder beide größer oder beide kleiner als α sind. Hieraus folgt, daß die Glieder der Folge (20) entweder sämtlich kleiner oder sämtlich größer sind als α. Im ersten Falle ist der Bruch $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ größer, im zweiten Falle kleiner als α. Insbesondere liegen die Brüche $\frac{p_{k-1}+p_{k-2}}{q_{k-1}+q_{k-2}}$ und $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ stets auf verschiedenen Seiten von α. Mit anderen Worten: *Der Wert eines Kettenbruches liegt stets zwischen dem eines beliebigen Näherungsbruches und dem Medianwert, der von diesem und dem vorhergehenden Näherungsbruch gebildet wird.* (Wir empfehlen dem Leser, eine schematische Zeichnung anzulegen, die die Verteilung aller dieser Zahlen wiedergibt.)

Diese Bemerkung gibt uns die Mittel in die Hand, den nachfolgenden Näherungsbruch $\frac{p_k}{q_k}$ zu konstruieren, sobald man die Näherungsbrüche $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ und $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ kennt. Das Element a_k braucht man hierzu nicht zu kennen, doch muß der Wert α des Kettenbruches selbst bekannt sein. In der Tat brauchen wir zunächst nur den Medianwert der beiden gegebenen Brüche zu bilden, dann den Medianwert dieses Medianwertes mit $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ usw., wobei wir jedesmal den Medianwert aus dem eben gewonnenen Median-

wert und dem Bruch $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ bilden. Wir wissen, daß diese nacheinander gebildeten Medianwerte sich zunächst dem Wert α nähern. *Der letzte Medianwert dieser Folge, der auf derselben Seite von α liegt wie der Bruch $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$, von dem wir ausgegangen waren, ist der gesuchte Bruch $\frac{p_k}{q_k}$.* In der Tat, wir wissen bereits, daß $\frac{p_k}{q_k}$ unter den gebildeten Medianwerten vorhanden ist und auf derselben Seite von α liegt wie $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$. Wir brauchen also nur noch zu zeigen, daß der nachfolgende Medianwert schon auf der anderen Seite von α liegen wird; der nächste Medianwert ist aber $\frac{p_k + p_{k-1}}{q_k + q_{k-1}}$ und liegt wirklich auf Grund der vorhin gemachten Bemerkung auf der anderen Seite von α.

Eine weitere und noch wichtigere Folgerung aus der festgestellten gegenseitigen Lage der Zahl α und ihrer Näherungs- und Zwischenbrüche ergibt sich durch folgende Überlegungen. Der Zwischenbruch $\frac{p_k + p_{k+1}}{q_k + q_{k+1}}$ ist zwischen $\frac{p_k}{q_k}$ und α eingeschlossen und liegt zu $\frac{p_k}{q_k}$ näher als α, d. h., es gilt

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| > \left|\frac{p_k + p_{k+1}}{q_k + q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{q_k(q_k + q_{k+1})}$$

(das Gleichheitszeichen ist hier unmöglich; denn dann wäre

$$\alpha = \frac{p_k + p_{k+1}}{q_k + q_{k+1}} = \frac{p_{k+2}}{q_{k+2}}, \quad a_{k+2} = 1,$$

d. h., α wäre ein endlicher Kettenbruch mit dem letzten Element 1; solche Kettenbrüche hatten wir aber von Anfang an von der Betrachtung ausgeschlossen).

Auf diese Weise erhalten wir den folgenden wichtigen

Satz 13. *Für alle $k \geq 0$ gilt*

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{1}{q_k(q_{k+1} + q_k)}. \tag{21}$$

Die Ungleichung (21), die eine *untere* Grenze der Differenz $\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right|$ liefert, ist offenbar eine Ergänzung zu der vorhin festgestellten Ungleichung im Satz 9, die die obere Grenze derselben Differenz angibt.

B. DARSTELLUNG VON ZAHLEN DURCH KETTENBRÜCHE

§ 5. Die Kettenbrüche als Instrument zur Darstellung reeller Zahlen

Satz 14. *Jeder reellen Zahl α entspricht eindeutig ein Kettenbruch, dessen Wert diese Zahl ist. Der zugehörige Kettenbruch ist endlich, wenn α rational ist. Bei irrationalem α ist er unendlich*[1]).

Beweis. Wir bezeichnen mit a_0 die größte ganze Zahl, die den Wert α nicht übersteigt. Ist α nicht ganzzahlig, so gestattet die Relation

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{r_1} \tag{22}$$

die Zahl r_1 zu bestimmen. Dabei ist offenbar $r_1 > 1$; denn es ist

$$\frac{1}{r_1} = \alpha - a_0 < 1.$$

Ganz allgemein wollen wir, wenn r_n nicht ganzzahlig ist, mit a_n die größte ganze Zahl bezeichnen, die r_n nicht übersteigt; die Zahl r_{n+1} bestimmen wir aus der Beziehung

$$r_n = a_n + \frac{1}{r_{n+1}}. \tag{23}$$

Dieser Prozeß läßt sich offenbar solange fortsetzen, bis irgendein r_n eine ganze Zahl ist; dabei ist offenbar $r_n > 1$ $(n \geq 1)$.

Die Gleichung (22) zeigt, daß

$$\alpha = [a_0;\ r_1]$$

ist. Nun sei ganz allgemein

$$\alpha = [a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1},\ r_n]. \tag{24}$$

Dann folgt aus der Beziehung (23) und der Formel (5) des Kapitels A

$$\alpha = [a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n,\ r_{n+1}].$$

---

1) Wir erinnern daran, daß wir Kettenbrüche mit ganzzahligen Elementen betrachten, wobei $a_i > 0$ für $i \geq 1$ und das letzte Element eines jeden endlichen Kettenbruches von 1 verschieden ist.

Die Formel (24) gilt also für alle n (selbstverständlich wird vorausgesetzt, daß die $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ nicht ganzzahlig sind).

Ist die Zahl α rational, so sind es offenbar auch alle r_n. Man erkennt leicht, daß in diesem Falle unser Prozeß nach endlich vielen Schritten abbricht. Denn ist z. B. $r_n = \frac{a}{b}$, so ist in der Tat

$$r_n - a_n = \frac{a - ba_n}{b} = \frac{c}{b}$$

mit $c < b$; denn es ist $r_n - a_n < 1$. Die Gleichung (23) liefert

$$r_{n+1} = \frac{b}{c}$$

(sofern c nicht gleich Null ist, d. h., wenn r_n nicht ganzzahlig ist; in diesem Falle wäre unsere Behauptung bereits bewiesen). Somit hat r_{n+1} einen kleineren Nenner als r_n, weshalb wir nach endlich vielen Schritten in der Folge $r_1, r_2, \ldots$ zu einer ganzen Zahl $r_n = a_n$ gelangen müssen. In diesem Falle zeigt aber die Formel (24), daß die Zahl α durch einen endlichen Kettenbruch dargestellt wird, dessen letztes Element $a_n = r_n > 1$ ist.

Ist die Zahl α irrational, so sind es auch alle r_n, und unser Prozeß läßt sich unbegrenzt fortsetzen. Setzen wir dann

$$[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n] = \frac{p_n}{q_n},$$

wobei die Zahlen p_n und q_n teilerfremd sind und $q_n > 0$ ist, so erhalten wir auf Grund der Formel (24) und der Formel (16) des Kapitels A

$$\alpha = \frac{p_{n-1} r_n + p_{n-2}}{q_{n-1} r_n + q_{n-2}} \qquad (n \geqslant 2).$$

Andererseits ist offenbar

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1} a_n + p_{n-2}}{q_{n-1} a_n + q_{n-2}},$$

woraus

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(p_{n-1} q_{n-2} - q_{n-1} p_{n-2})(r_n - a_n)}{(q_{n-1} r_n + q_{n-2})(q_{n-1} a_n + q_{n-2})},$$

und damit auch

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{(q_{n-1} r_n + q_{n-2})(q_{n-1} a_n + q_{n-2})} < \frac{1}{q_n^2}$$

folgt. Somit geht für $n \longrightarrow \infty$

$$\frac{p_n}{q_n} \longrightarrow \alpha;$$

dies bedeutet aber offenbar, daß der unendliche Kettenbruch $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ den Wert α hat.

Damit haben wir gezeigt, daß die Zahl α stets durch einen Kettenbruch dargestellt werden kann. Dieser ist endlich, wenn α rational ist; bei irrationalem α ist er unendlich. Nun bleibt uns nur noch zu zeigen, daß die gewonnene Entwicklung eindeutig ist. Wir weisen darauf hin, daß diese Eindeutigkeit bereits aus den Betrachtungen in § 4 (Kapitel A) hervorgeht; dort haben wir gesehen, daß wir sukzessiv alle Näherungsbrüche und folglich auch alle Elemente gewinnen können, sobald wir den Wert des gegebenen Kettenbruches kennen. Doch läßt sich die geforderte Eindeutigkeit auch wesentlich einfacher feststellen. Es sei

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots] = [a_0'; a_1', a_2', \ldots],$$

wobei diese Kettenbrüche sowohl endlich als auch unendlich sein können. Wir wollen ganz allgemein mit $[x]$ die größte ganze Zahl bezeichnen, die x nicht übersteigt. Zunächst ist offenbar, $a_0 = [\alpha]$ und $a_0' = [\alpha]$, woraus $a_0 = a_0'$ folgt. Ist ferner bereits festgestellt, daß

$$a_i = a_i' \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

gilt, so ist in einer leicht einzusehenden Bezeichnungsweise

$$\left.\begin{aligned} p_i &= p_i' \\ q_i &= q_i' \end{aligned}\right\} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

und wegen (16)

$$\alpha = \frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}} = \frac{p_n' r_{n+1}' + p_{n-1}'}{q_n' r_{n+1}' + q_{n-1}'} = \frac{p_n r_{n+1}' + p_{n-1}}{q_n r_{n+1}' + q_{n-1}}.$$

Daraus folgt $r_{n+1} = r_{n+1}'$ und wegen $a_{n+1} = [r_{n+1}]$ sowie $a_{n+1}' = [r_{n+1}']$ auch $a_{n+1} = a_{n+1}'$, d. h., die beiden gegebenen Brüche sind miteinander identisch, was zu beweisen war.

Die letzte Überlegung ließe sich nicht anstellen, wenn wir endliche Kettenbrüche zugelassen hätten, deren letztes Element gleich 1 ist. Wäre nämlich etwa $a_{n+1} = 1$ ein derartiges letztes Element, so wäre $r_n = a_n + 1$ und $a_n = [r_n]$.

Wir haben uns also davon überzeugt, daß die reellen Zahlen sich eindeutig durch Kettenbrüche darstellen lassen. Der Hauptwert dieser Darstellung liegt selbstverständlich darin, daß wir, sobald wir den eine reelle Zahl darstellenden Kettenbruch kennen, diese Zahl mit beliebiger vorgegebener Genauigkeit berech-

nen können. Auf Grund dessen darf der Kalkül der Kettenbrüche, wenigstens prinzipiell, den gleichen Anspruch erheben, wie der Kalkül der Dezimalbrüche oder ganz allgemein der systematischen (d. h. nach einem bestimmten Numerationssystem angeordneten) Brüche.

Welches sind nun die wesentlichsten Vorzüge oder Nachteile der Kettenbrüche als eines Hilfsmittels zur Darstellung der reellen Zahlen gegenüber den wesentlich mehr verbreiteten systematischen Brüchen? Um diese Frage beantworten zu können, muß man sich vor allen Dingen darüber im klaren sein, welche Anforderungen an einen Kalkül dieser Art gestellt werden können und müssen. Offenbar muß die erste und wesentlichste *theoretische* Forderung darin bestehen, daß der Apparat möglichst vollständig die Eigenschaften der Zahl widerspiegelt, die er darstellen soll, so, daß diese Eigenschaften sich möglichst einfach erkennen lassen, sobald die Darstellung einer Zahl mit Hilfe dieses Apparates gegeben ist.

Hinsichtlich dieser ersten Forderung gebührt den Kettenbrüchen zweifellos gegenüber den systematischen Brüchen bei weitem der Vorzug (dies gilt insbesondere auch hinsichtlich der Dezimalbrüche). Wir können uns davon bei der Lektüre dieses Abschnittes allmählich überzeugen. Bis zu einem gewissen Grade geht dies bereits aus apriorischen Betrachtungen hervor: Während jeder systematische Bruch an ein bestimmtes Numerationssystem gekoppelt ist und deshalb unweigerlich weniger die absoluten Eigenschaften der dargestellten Zahl als die Wechselbeziehungen dieser Zahl mit dem gewählten Numerationssystem wiedergibt, sind die Kettenbrüche von jeglichem Numerationssystem unabhängig und reproduzieren die Eigenschaften der von ihnen dargestellten Zahlen in reiner Form. Wir haben bereits gesehen, daß die Eigenschaft einer dargestellten Zahl, rational oder irrational zu sein, durch die Endlichkeit oder Unendlichkeit des entsprechenden Kettenbruches wiedergegeben wird. Bekanntlich ist bei systematischen Brüchen das entsprechende Merkmal wesentlich komplizierter: die Endlichkeit oder Unendlichkeit des darstellenden Bruches hängt hier außer von den Eigenschaften der darzustellenden Zahl auch wesentlich davon ab, in welcher Beziehung diese Zahl zum gewählten Numerationssystem steht.

Außer der genannten theoretischen Grundforderung müssen an jeden Kalkül, der zur Darstellung von Zahlen dient, naturgemäß auch Forderungen *praktischer* Art gestellt werden (von

denen einige übrigens auch theoretisch von Bedeutung sein können). So ist sehr wesentlich, daß man die Näherungswerte der darzustellenden Zahlen mit Hilfe des betreffenden Kalküls möglichst einfach bis zu einer vorgegebenen Genauigkeit finden kann. Dieser Forderung genügen die Kettenbrüche in sehr hohem Maße und auf jeden Fall besser als die systematischen Brüche. Darüber hinaus werden wir uns recht bald davon überzeugen können, daß die durch die Kettenbrüche gelieferten Näherungswerte in einem gewissen, äußerst einfachen und wichtigen Sinne die Eigenschaft der *besten Approximationen* aufweisen.

Es gibt aber auch eine andere noch wichtigere praktische Forderung, der die Kettenbrüche aber keineswegs genügen. Die Anforderungen des Rechnens lassen es wünschenswert erscheinen, daß in jedem darstellenden Apparat die Kenntnis einiger Zahlendarstellungen gestattet, auch die Darstellungen der einfachsten Funktionen dieser Zahlen (vor allem ihrer Summe und ihres Produkts) hinreichend einfach zu finden. Mit anderen Worten muß ein in praktischer Hinsicht bequemer Apparat die Möglichkeit bieten, die *arithmetischen Operationen* durch möglichst einfache Regeln wiederzugeben; denn anderenfalls könnte er nicht als Mittel zum Rechnen dienen. Es ist allgemein bekannt, wie bequem in dieser Hinsicht die systematischen Brüche sind. Im Gegensatz dazu gibt es bei den Kettenbrüchen keine praktisch annehmbaren Regeln für die arithmetischen Operationen. Bereits die Aufgabe, den Kettenbruch einer Summe aus den Kettenbruchdarstellungen der Summanden zu finden, ist äußerst kompliziert und in der Praxis unausführbar.

Die genannten Vorzüge und Mängel der Kettenbrüche gegenüber den systematischen Brüchen bestimmen zu einem beträchtlichen Teil von vornherein die Grenzen der Gebiete, innerhalb deren die beiden darstellenden Apparate ihre Anwendung finden. Während man in der Rechenpraxis fast ausschließlich systematische Brüche verwendet, greift man bei theoretischen Untersuchungen der arithmetischen Gesetze des Kontinuums und der arithmetischen Eigenschaften einzelner Irrationalitäten vorzugsweise zu den Kettenbrüchen, die das beste und unersetzliche Werkzeug für diese Art von Untersuchungen darstellen. Die Hauptaufgabe der nachfolgenden Überlegungen besteht nun gerade darin, den Apparat der Kettenbrüche in dieser seiner Bedeutung zu ergründen.

§ 6. Näherungsbrüche als beste Approximationen

Soll eine Irrationalzahl α mit einer bestimmten Genauigkeit durch einen gewöhnlichen rationalen Bruch dargestellt werden, so können wir hierzu naturgemäß die Näherungsbrüche des Kettenbruches verwenden, der die Zahl α darstellt. Der Grad der hierbei zu erreichenden Genauigkeit wird dabei durch die Sätze 9 und 13 des Kapitels A bestimmt; und zwar gilt

$$\frac{1}{q_n (q_n + q_{n+1})} < \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Die Aufgabe, irrationale Zahlen durch rationale Brüche zu approximieren (angenähert darzustellen), wird in ihrer einfachsten Form gewöhnlich so gestellt, daß man den rationalen Bruch mit dem kleinsten (positiven) Nenner sucht, der sich von der gegebenen Irrationalzahl nicht mehr als um eine vorgegebene Größe unterscheidet. Die gestellte Aufgabe kann übrigens auch sinnvoll sein, wenn die Zahl α rational ist. Ist z. B. α ein Bruch, dessen Zähler und Nenner sehr groß sind, so kann es notwendig sein, diese Zahl angenähert durch einen Bruch darzustellen, dessen Zähler und Nenner kleinere Zahlen sind. Rein praktisch gesehen, besteht zwischen diesen beiden Fällen (des rationalen und irrationalen α) eigentlich gar kein Unterschied; denn in der Praxis wird jede Zahl nur bis zu einer gewissen Genauigkeitsgrenze angegeben.

Man erkennt unmittelbar, daß zur Lösung dieser Aufgabe die systematischen Brüche völlig ungeeignet sind; denn die dabei auftretenden Näherungsbrüche weisen Nenner auf, die ausschließlich durch das gewählte Numerationssystem bestimmt werden (im Falle der Dezimalbrüche sind es die Potenzen der Zahl 10) und überhaupt nicht von der arithmetischen Natur der darzustellenden Zahl abhängen. Im Gegensatz dazu werden die Nenner der Näherungsbrüche im Falle der Kettenbrüche vollkommen durch die darzustellende Zahl bestimmt. Wir haben daher allen Grund, anzunehmen, daß diese Näherungsbrüche, die auf natürliche Weise eng mit der darzustellenden Zahl verknüpft sind und durch diese eindeutig bestimmt werden, bei der Aufgabe, die beste Approximation dieser Zahl durch rationale Brüche zu finden, eine wesentliche Rolle spielen.

Wir wollen einen rationalen Bruch $\frac{a}{b}$ $(b > 0)$ als *beste Approximation* einer reellen Zahl α bezeichnen, wenn jeder andere rationale Bruch mit dem gleichen oder einem kleineren Nenner von dieser Zahl mehr abweicht als $\frac{a}{b}$, mit anderen Worten, wenn aus $0 < d \leq b$, $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$ notwendig folgt

$$\left|\alpha - \frac{c}{d}\right| > \left|\alpha - \frac{a}{b}\right|.$$

Satz 15. *Jede beste Approximation der Zahl α ist entweder ein Näherungsbruch oder ein Zwischenbruch des diese Zahl darstellenden Kettenbruches.*

Vorbemerkung. Soll dieser Satz ausnahmslos gültig sein, so müssen wir, wie wir das in § 2 vereinbart hatten, auch Näherungsbrüche der Ordnung -1 in die Betrachtung mit einbeziehen; dabei setzen wir $p_{-1} = 1$ und $q_{-1} = 0$. In der Tat ist z. B. der Bruch $\frac{1}{3}$ eine beste Approximation der Zahl $\frac{1}{4}$, gehört aber nicht zur Zahl der Näherungs- bzw. Zwischenbrüche, da die Menge dieser Brüche, sofern man mit dem Näherungsbruch der Ordnung 0 beginnt, nur die zwei Zahlen $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{4}$ enthält. Setzt man jedoch den Bruch $\frac{1}{0}$ als Näherungsbruch der Ordnung -1 ein, so erhält man als Menge der Näherungs- und Zwischenbrüche die Folge

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4},$$

die den Bruch $\frac{1}{3}$ enthält.

Beweis. Es sei $\frac{a}{b}$ eine beste Approximation der Zahl α. Dann ist zunächst $\frac{a}{b} \geq a_0$. In der Tat würde im Falle $\frac{a}{b} < a_0$ der Bruch $\frac{a_0}{1}$, der von $\frac{a}{b}$ verschieden ist und dessen Nenner nicht größer ist als b, näher zu α liegen als $\frac{a}{b}$. Dann wäre aber $\frac{a}{b}$ keine beste Approximation.

Durch völlig analoge Überlegungen können wir zeigen, daß

$$\frac{a}{b} \leq a_0 + 1$$

gilt. Wir dürfen daher annehmen, daß $a_0 < \frac{a}{b} < a_0 + 1$ ist (im Falle $\frac{a}{b} = a_0$ oder $\frac{a}{b} = a_0 + 1$ wäre der Satz bereits bewiesen; denn $\frac{a}{1} = \frac{p_0}{q_0}$ ist ein Näherungsbruch und $\frac{a_0+1}{1} = \frac{p_0+p_{-1}}{q_0+q_{-1}}$ ein Zwischenbruch der Zahl α).

Ist der Bruch $\frac{a}{b}$ mit keinem der Näherungsbrüche oder Zwischenbrüche der Zahl α identisch, so muß er zwischen zwei aufeinanderfolgenden dieser Brüche liegen, d. h., er liegt bei geeignet gewählten k und r ($k > 0$, $0 \leq r < a_{k+1}$ oder $k = 0$, $1 \leq r < a_1$) zwischen den Brüchen

$$\frac{p_k r + p_{k-1}}{q_k r + q_{k-1}} \quad \text{und} \quad \frac{p_k (r+1) + p_{k-1}}{q_k (r+1) + q_{k-1}},$$

woraus

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{p_k r + p_{k-1}}{q_k r + q_{k-1}} \right| < \left| \frac{p_k (r+1) + p_{k-1}}{q_k (r+1) + q_{k-1}} - \frac{p_k r + p_{k-1}}{q_k r + q_{k-1}} \right| = \frac{1}{\{q_k (r+1) + q_{k-1}\}\{q_k r + q_{k-1}\}}$$

folgt. Andererseits ist aber offenbar

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{p_k r + p_{k-1}}{q_k r + q_{k-1}} \right| = \frac{m}{b (q_k r + q_{k-1})};$$

dabei ist m eine ganze positive Zahl und somit wenigstens gleich 1. Folglich ist

$$\frac{1}{b (q_k r + q_{k-1})} < \frac{1}{\{q_k (r+1) + q_{k-1}\}\{q_k r + q_{k-1}\}},$$

woraus

$$q_k (r+1) + q_{k-1} < b$$

folgt. Der Bruch

$$\frac{p_k (r+1) + p_{k-1}}{q_k (r+1) + q_{k-1}}, \tag{25}$$

dessen Nenner kleiner ist als beim Bruch $\frac{a}{b}$, liegt somit näher zur Zahl α als der Bruch

$$\frac{p_k r + p_{k-1}}{q_k r + q_{k-1}} \tag{26}$$

(denn ganz allgemein liegt nach den Ergebnissen von § 4 jeder nachfolgende Zwischenbruch näher zu α als der vorhergehende). Er muß daher auch näher zu α liegen als der Bruch $\frac{a}{b}$, der zwi-

schen (25) und (26) eingeschlossen ist. Dies widerspricht aber der Definition der besten Approximation. Der Satz 15 ist damit bewiesen.

Bei der Definition des Begriffes der besten Approximation, der unserem Satz zugrunde liegt, haben wir die Annäherung des rationalen Bruches $\frac{a}{b}$ an die Zahl α abgeschätzt, indem wir festgestellt hatten, wie groß, absolut genommen, die Differenz $\alpha - \frac{a}{b}$ ist. Diese Betrachtungsweise erscheint wohl am natürlichsten, doch ist es in der Zahlentheorie häufig wichtiger oder günstiger, zu diesem Zweck die Differenz $b\alpha - a$ zu betrachten, die sich nur durch den Faktor b von der vorhin betrachteten unterscheidet und deren Größe (absolut genommen) daher ebenfalls als Kriterium dafür dienen kann, wie weit der Bruch $\frac{a}{b}$ von α abweicht. Dieser Übergang von dem einen Merkmal zum anderen mag auf den ersten Blick trivial erscheinen. In vielen Fällen ist dies auch in der Tat richtig. Doch werden wir uns sofort davon überzeugen können, daß dies keineswegs immer der Fall sein muß. Das liegt daran, daß der Faktor b, um den sich die beiden Differenzen voneinander unterscheiden, keine konstante Größe darstellt, sondern mit dem Approximationsbruch verknüpft ist und sich mit diesem ändert.

Von nun an wollen wir die besten Approximationen, von denen die Rede im Satz 15 war, als *beste Approximationen erster Art* bezeichnen. Ferner wollen wir den rationalen Bruch $\frac{a}{b}$ $(b > 0)$ als *beste Approximation zweiter Art* für die Zahl α bezeichnen, wenn aus $\frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}$, $0 < d \leq b$ notwendig

$$|d\alpha - c| > |b\alpha - a|$$

folgt. Die besten Approximationen zweiter Art werden somit durch das Charakteristikum $|b\alpha - a|$ bestimmt, ähnlich, wie die besten Approximationen erster Art mit Hilfe des Charakteristikums $\left|\alpha - \frac{a}{b}\right|$ bestimmt werden.

Es ist leicht zu zeigen, daß jede *beste Approximationen* zweiter Art zugleich auch eine beste Approximation erster Art ist.

Würde nämlich

$$\left|\alpha - \frac{c}{d}\right| \leq \left|\alpha - \frac{a}{b}\right|, \quad \left(\frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}, \quad d \leq b\right)$$

gelten, so erhielten wir in der Tat, wenn wir die linke Seite dieser Ungleichung gliedweise mit d und die rechte Seite mit b multiplizieren

$$|d\alpha - c| \leq |b\alpha - a|.$$

Wäre also der Bruch $\frac{a}{b}$ nicht eine beste Approximation erster Art, so könnte er auch nicht eine beste Approximation zweiter Art sein. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Die Umkehrung dieser Behauptung wäre jedoch falsch: eine beste Approximation erster Art braucht nicht zugleich eine beste Approximation zweiter Art zu sein. In der Tat überzeugt man sich leicht z. B. davon, daß der Bruch $\frac{1}{3}$ eine beste Approximation erster Art für die Zahl $\frac{1}{5}$ ist. Doch ist er keine beste Approximation zweiter Art; man erkennt dies aus den Ungleichungen

$$\left|1 \cdot \frac{1}{5} - 0\right| < \left|3 \cdot \frac{1}{5} - 1\right|, \quad 1 < 3.$$

Aus unseren Bemerkungen und aus dem Satz 15 geht hervor, daß alle besten Approximationen zweiter Art entweder Näherungs- oder Zwischenbrüche sind. Doch können wir, und darin liegt hauptsächlich die Rolle begründet, die die Kettenbrüche für die besten Approximationen zweiter Art spielen, einen weit schärferen Satz formulieren.

Satz 16. *Jede beste Approximation zweiter Art ist ein Näherungsbruch.*

Beweis. Es sei der Bruch $\frac{a}{b}$ eine beste Approximation zweiter Art für die Zahl

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots],$$

deren Näherungsbrüche wir mit $\frac{p_k}{q_k}$ bezeichnen wollen. Wäre dann $\frac{a}{b} < a_0$, so hätten wir

$$|1 \cdot \alpha - a_0| < \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \leq |b\alpha - a|, \quad 1 \leq b,$$

d. h., $\frac{a}{b}$ wäre nicht eine beste Approximation zweiter Art. Es ist also $\frac{a}{b} \geq a_0$. Aber in diesem Falle müßte der Bruch $\frac{a}{b}$, falls er nicht mit einem der Näherungsbrüche identisch ist, entweder

zwischen zwei Näherungsbrüchen $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ und $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ liegen, die beide entweder gerader oder ungerader Ordnung sind, oder größer als $\frac{p_1}{q_1}$ sein. Im ersten Falle ist

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| \geq \left|\frac{1}{b\,q_{k-1}}\right|$$

und

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| < \left|\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| = \frac{1}{q_k\,q_{k-1}},$$

woraus

$$b > q_k \tag{27}$$

folgt. Andererseits ist

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \geq \left|\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{a}{b}\right| \geq \frac{1}{b\,q_{k+1}}$$

und folglich

$$|\,b\alpha - a\,| \geq \frac{1}{q_{k+1}},$$

während

$$|\,q_k\alpha - p_k\,| \leq \frac{1}{q_{k+1}}$$

ist. Daraus folgt

$$|\,q_k\alpha - p_k\,| \leq |\,b\alpha - a\,|. \tag{28}$$

Die Relationen (27) und (28) zeigen, daß $\frac{a}{b}$ keine beste Approximation zweiter Art ist.

Im zweiten Falle $\left(\text{d. h. für } \frac{a}{b} > \frac{p_1}{q_1}\right)$ gilt

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| > \left|\frac{p_1}{q_1} - \frac{a}{b}\right| \geq \frac{1}{b\,q_1}$$

woraus

$$\left|\,b\alpha - a\,\right| > \frac{1}{q_1} = \frac{1}{a_1}$$

folgt. Andererseits ist offenbar

$$|\,1\cdot\alpha - a_0\,| \leq \frac{1}{a_1},$$

so daß

$$|\,b\alpha - a\,| > |\,1\cdot\alpha - a_0\,|, \qquad 1 \leq b$$

ist. Dies widerspricht aber wiederum der Definition der besten Approximationen zweiter Art. Damit ist der Satz 16 vollständig bewiesen.

Nun wollen wir sehen, ob es möglich ist, die Sätze 15 und 16 umzukehren. Zunächst ist, wie man leicht sieht, der Satz 15 nicht reversibel; die Zwischenbrüche brauchen nicht beste Approximationen erster Art zu sein. So ist für die Zahl $\alpha = \frac{4}{5}$ der Bruch $\frac{1}{2}$, wie man leicht erkennt, ein Zwischenbruch, doch ist er keine beste Approximation, denn es gilt

$$\left|\frac{4}{5} - \frac{1}{1}\right| < \left|\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\right|, \quad 1 < 2.$$

Beispiele dieser Art lassen sich nach Belieben konstruieren, wovon sich der Leser mühelos selbst überzeugen kann.

Der Satz 16 dagegen läßt eine nahezu vollständige Umkehrung zu; dadurch gewinnt er erheblich an Bedeutung.

Satz 17. *Jeder Näherungsbruch ist eine beste Approximation zweiter Art. Die einzige* (triviale) *Ausnahme bildet*

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{2}, \quad \frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}.$$

Vorbemerkung. Im Falle $\alpha = a_0 + \frac{1}{2}$ ist der Bruch $\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}$ in der Tat keine beste Approximation zweiter Art; denn es ist

$$|1 \cdot \alpha - (a_0 + 1)| = 1\,|1 \cdot \alpha - a_0|.$$

Beweis. Wir betrachten die Form

$$|y\alpha - x|, \tag{29}$$

in der y die Werte $1, 2, \ldots, q_k$ durchläuft, während x beliebige ganzzahlige Werte annehmen kann. Wir bezeichnen mit y_0 den Wert von y, für den die Form (29) nach geeigneter Wahl von x den kleinstmöglichen Wert annimmt (gibt es mehrere y-Werte mit dieser Eigenschaft, so wählen wir für y_0 den *kleinsten von ihnen*). Den Wert von x, für den $|y_0\alpha - x|$ den kleinsten Wert annimmt, bezeichnen wir mit x_0. Man überzeugt sich leicht davon, daß dieser Wert *eindeutig* ist. Denn hätten wir

$$\left|\alpha - \frac{x_0}{y_0}\right| = \left|\alpha - \frac{x_0'}{y_0}\right| \qquad (x_0 \neq x_0'),$$

so wäre offenbar

$$\alpha = \frac{x_0 + x_0'}{2y_0}.$$

Nun behaupten wir, daß dieser Bruch sich nicht kürzen läßt. Ist nämlich $x_0 + x_0' = lp$, $2y_0 = lq$ $(l > 1)$, so erhalten wir im Falle $l > 2$

$$q < y_0, \quad \alpha = \frac{p}{q}, \quad |q\alpha - p| = 0,$$

was der Definition von y_0 widerspricht. Ist jedoch $l = 2$, so ist $q = y_0$ und

$$|q\alpha - p| = |y_0\alpha - p| = 0 < |y_0\alpha - x_0|,$$

was der Definition von x_0 widerspricht.

Entwickeln wir daher eine rationale Zahl α in einen Kettenbruch, so erhalten wir

$$\alpha = \frac{p_n}{q_n}, \quad p_n = x_0 + x_0', \quad q_n = 2y_0 = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \quad a_n \geq 2.$$

Ist also entweder $a_n > 2$ oder $a_n = 2$, $n > 1$, so haben wir $q_{n-1} < y_0$, doch gilt

$$|q_{n-1}\alpha - p_{n-1}| = \frac{1}{q_n} = \frac{1}{2y_0} \leq \frac{1}{2} \leq |y_0\alpha - x_0|.$$

Dies wiederum widerspricht aber der Definition von y_0. Für $n = 1$, $a_n = 2$ ist $\alpha = a_0 + \frac{1}{2}$, $y_0 = 1$, und wir erhalten gerade den ausgeschlossenen Fall.

Die Werte von y_0 und x_0 werden also durch die angegebenen Bedingungen eindeutig bestimmt. Hieraus folgt unmittelbar, daß $\frac{x_0}{y_0}$ eine beste Approximation zweiter Art für die Zahl α ist; denn die Ungleichungen

$$|b\alpha - a| \leq |y_0\alpha - x_0| \qquad \left(\frac{a}{b} \neq \frac{x_0}{y_0}, \quad b \leq y_0\right)$$

würden offenbar der Definition von x_0 und y_0 widersprechen. Nach Satz 16 gilt daher

$$x_0 = p_s, \; y_0 = q_s \qquad (s \leq k).$$

Ist $s = k$, so ist der Satz bewiesen. Wäre jedoch $s < k$, so hätten wir

$$|q_s\alpha - p_s| > \frac{1}{q_s + q_{s+1}} \geq \frac{1}{q_{k-1} + q_k},$$

$$|q_k\alpha - p_k| \leq \frac{1}{q_{k+1}}.$$

Da aber auf Grund der Definition von $p_s = x_0$ und $q_s = y_0$

$$|q_s\alpha - p_s| \leq |q_k\alpha - p_k|$$

gilt, ist

$$\frac{1}{q_{k-1}+q_k} < \frac{1}{q_{k+1}},$$

d. h.

$$q_{k+1} < q_k + q_{k-1},$$

was auf Grund des Bildungsgesetzes der q_k unmöglich ist. Damit ist der Satz 17 bewiesen.

Die Eigenschaften der Kettenbrüche, die wir in diesem Paragraphen festgestellt haben, waren geschichtlich gesehen der erste Anlaß zur Entdeckung und Erforschung des Kettenbruchkalküls. *Huygens*, der sich die Aufgabe stellte, ein Zahnradmodell des Sonnensystems herzustellen, mußte die Anzahl der Zähne so bestimmen, daß ihr Verhältnis für zwei gekoppelte Zahnräder (die gleich dem Verhältnis der Umlaufszeiten beider Räder ist) möglichst wenig von dem Verhältnis α der Umlaufszeiten der entsprechenden Planeten abwich. Gleichzeitig durfte die Anzahl der Zähne aus technischen Gründen selbstverständlich nicht übermäßig groß sein. Es mußte daher ein rationaler Bruch bestimmt werden, dessen Zähler und Nenner eine bestimmte Grenze nicht überschritten und der zugleich möglichst wenig von der gegebenen Zahl α abweicht (diese Zahl kann theoretisch auch irrational sein, in der Praxis wird sie jedoch in diesem Falle durch einen rationalen Bruch mit sehr großem Zähler und Nenner wiedergegeben.) Wir haben bereits gesehen, daß die Theorie der Kettenbrüche die Möglichkeit gibt, diese Aufgabe vollständig zu lösen.

§ 7. Ordnung der Annäherung

Im vorhergehenden Paragraphen haben wir die Größe der Differenz $\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right|$ im Vergleich zu anderen Differenzen desselben Typs abgeschätzt. Hier wollen wir diese Differenz als solche abschätzen statt sie mit anderen Differenzen dieser Art zu vergleichen. Um nun abschätzen zu können, wie klein $\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right|$ ist, geht man naturgemäß so vor, daß man diesen Betrag mit irgendeiner fallenden Funktion von q_k vergleicht. In dieser Richtung

liefert der Satz 9 aus dem ersten Kapitel unmittelbar die Ungleichung[1])

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q^2_k}. \tag{30}$$

Daher ergibt sich zunächst die Frage, ob man diese Ungleichung verschärfen kann, d. h., ob man ihre rechte Seite durch eine andere Funktion $f(q_k)$ des Nenners q_k ersetzen kann, die für alle $n \geq 1$ der Ungleichung

$$f(n) < \frac{1}{n^2}$$

genügen würde.

Wollen wir erreichen, daß die so verschärfte Ungleichung (30) bei beliebigem α für alle Werte von k erfüllt ist, so ist, wie man leicht erkennt, eine weitere Verschärfung in diesem Sinne nicht mehr möglich. Mit anderen Worten: wie klein $\varepsilon > 0$ auch sein möge, so läßt sich stets ein Fall angeben, für den

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{1-\varepsilon}{q_k^2}$$

gilt. Um sich davon zu überzeugen, genügt es, die Zahl

$$\alpha = [0;\, n,\, 1,\, n] = \frac{n+1}{n\,(n+2)}$$

zu betrachten, für die

$$p_1 = 1, \quad q_1 = n, \quad p_3 = n+1, \quad q_3 = n\,(n+2)$$

und daher

$$\left|\alpha - \frac{p_1}{q_1}\right| = \left|\frac{p_3}{q_3} - \frac{p_1}{q_1}\right| = \frac{1}{n\,(n+2)} = \frac{1}{\left(q_1^2\left(1+\frac{2}{n}\right)\right)}$$

gilt. Es genügt daher, n nach der Ungleichung

$$\frac{1}{1+\frac{2}{n}} > 1-\varepsilon$$

zu wählen, und wir erhalten dann

$$\left|\alpha - \frac{p_1}{q_1}\right| > \frac{1-\varepsilon}{q_1^2}.$$

---

1) Im Falle $\alpha = \frac{p_k}{q_k}$ (in dem der Satz 9 wegen des Fehlens von q_{k+1} nicht anwendbar ist) wird die Ungleichung (30) trivial.

Verzichtet man jedoch auf die Forderung, daß die verschärfte Ungleichung bei beliebigem α für alle k-Werte ausnahmslos erfüllt ist, so erhält man, wie wir anschließend zeigen wollen, eine Reihe interessanter und wichtiger Sätze.

Satz 18. *Besitzt eine Zahl α einen Näherungsbruch der Ordnung $k > 0$, so gilt notwendig wenigstens eine der beiden nachstehenden Ungleichungen*

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{2q_k^2},$$

$$\left|\alpha - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| < \frac{1}{2q_{k-1}^2}.$$

Beweis. Da α zwischen den Werten $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ und $\frac{p_k}{q_k}$ eingeschlossen ist, gilt

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| + \left|\alpha - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| = \left|\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| = \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{2q_k^2} + \frac{1}{2q_{k-1}^2}$$

(die letzte Ungleichung drückt die Tatsache aus, daß das geometrische Mittel der Größen $\frac{1}{q_k^2}$ und $\frac{1}{q_{k-1}^2}$ kleiner ist als deren arithmetisches Mittel; das Gleichheitszeichen wäre nur für $q_k = q_{k-1}$ möglich). Hieraus folgt offenbar direkt die Behauptung unseres Satzes.

Der eben bewiesene Satz ist deshalb von besonderem Interesse, weil er in einem gewissen Sinne eine Umkehrung zuläßt.

Satz 19. *Jeder unkürzbare Bruch $\frac{a}{b}$, der der Ungleichung*

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2b^2}$$

genügt, ist ein Näherungsbruch der Zahl α.

Beweis. Nach Satz 16 genügt es zu beweisen, daß der Bruch $\frac{a}{b}$ für die Zahl α eine beste Approximation zweiter Art ist. Es sei

$$|d\alpha - c| \leq |b\alpha - a| < \frac{1}{2b} \qquad \left(d > 0, \quad \frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}\right).$$

Dann ist

$$\left|\alpha - \frac{c}{d}\right| < \frac{1}{2bd}$$

und folglich

$$\left|\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right| \leq \left|\alpha - \frac{c}{d}\right| + \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2bd} + \frac{1}{2b^2} = \frac{b+d}{2b^2d}. \qquad (31)$$

Andererseits ist wegen $\frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}$

$$\left| \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \right| \geq \frac{1}{bd};$$

daher ergibt die Ungleichung (31)

$$\frac{1}{bd} < \frac{b+d}{2b^2d},$$

woraus $d > b$ folgt. Der Bruch $\frac{a}{b}$ ist daher in der Tat für die Zahl α eine beste Approximation zweiter Art, womit der Satz 19 bewiesen ist.

Eine weitere Verschärfung des Satzes 18 ist der nachstehende, wesentlich tiefer liegende

Satz 20. *Besitzt die Zahl α einen Näherungsbruch der Ordnung $k > 1$, so gilt notwendig wenigstens eine der drei folgenden Ungleichungen:*

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}\, q_k^2},$$

$$\left| \alpha - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}\, q_{k-1}^2},$$

$$\left| \alpha - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}\, q_{k-2}^2}.$$

Beweis. Wir setzen für $k \geq 1$

$$\frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} = \varphi_k, \quad \varphi_k + r_k = \psi_k.$$

Hilfssatz. *Ist $k \geq 2$, $\psi_k \leq \sqrt{5}$, $\psi_{k-1} \leq \sqrt{5}$, so gilt*

$$\varphi_k > \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

In der Tat, wegen

$$\frac{1}{\varphi_{n+1}} = \frac{q_n}{q_{n-1}} = a_n + \varphi_n$$

und

$$r_n = a_n + \frac{1}{r_{n+1}}$$

gilt

$$\frac{1}{\varphi_{n+1}} + \frac{1}{r_{n+1}} = \varphi_n + r_n = \psi_n.$$

Auf Grund der Bedingungen des Hilfssatzes ist daher

$$\varphi_k + r_k \leq \sqrt{5}, \quad \frac{1}{\varphi_k} + \frac{1}{r_k} \leq \sqrt{5},$$

woraus

$$(\sqrt{5} - \varphi_k)\left(\sqrt{5} - \frac{1}{\varphi_k}\right) \geq 1,$$

oder, da φ_k eine rationale Zahl ist,

$$5 - \sqrt{5}\left(\varphi_k + \frac{1}{\varphi_k}\right) > 0$$

folgt. Hieraus erhalten wir wegen $\varphi_k > 0$

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \varphi_k\right)^2 < \frac{1}{4}$$

und folglich

$$\frac{\sqrt{5}}{2} - \varphi_k < \frac{1}{2},$$

$$\varphi_k > \frac{\sqrt{5} - 1}{2},$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Nun wollen wir annehmen, daß entgegen unserer Behauptung

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{5}\, q_n^2} \quad (n = k, \quad k-1, \quad k-2)$$

gilt. Nach der Formel (16) des Kapitels A ist

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n}\right|$$

$$= \frac{1}{q_n (q_n r_{n+1} + q_{n-1})} = \frac{1}{q_n^2 (r_{n+1} + \varphi_{n+1})} = \frac{1}{q_n^2 \psi_{n+1}}$$

und somit

$$\psi_{n+1} \leq \sqrt{5} \quad (n = k, k-1, k-2).$$

Auf Grund unseres Hilfssatzes schließen wir hieraus, daß

$$\varphi_k > \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \quad \varphi_{k+1} > \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

und somit

$$a_k = \frac{1}{\varphi_{k+1}} - \varphi_k < \frac{2}{\sqrt{5} - 1} - \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 1$$

gilt, was offenbar unmöglich ist. Der gewonnene Widerspruch liefert den Beweis des Satzes 20.

Die Sätze 18 und 20 erwecken den Eindruck, als bildeten sie den Anfang in einer Kette von Sätzen, die eine weitere Fortsetzung zuläßt. Dies ist jedoch falsch. Um das einzusehen, betrachten wir die Zahl

$$\alpha = [1; 1, 1, \ldots].$$

Setzen wir wie üblich $\alpha = 1 + \frac{1}{r_1}$, so erhalten wir offenbar $r_1 = \alpha$, woraus

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha^2 - \alpha - 1 = 0,$$

und damit

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

folgt.

Da offenbar $r_n = \alpha$ bei beliebigem n gilt, ist

$$\alpha = \frac{p_k \alpha + p_{k-1}}{q_k \alpha + q_{k-1}}$$

und folglich

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| = \frac{1}{q_k (q_k \alpha + q_{k-1})} = \frac{1}{q_k^2 \left(\alpha + \frac{q_{k-1}}{q_k} \right)}.$$

Nach Satz 6 im Kapitel A gilt aber

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = [1; 1, 1, \ldots, 1] \longrightarrow \alpha \quad (k \longrightarrow \infty).$$

Daraus folgt

$$\frac{q_{k-1}}{q_k} = \frac{1}{\alpha} + \varepsilon_k = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + \varepsilon_k \quad (\varepsilon_k \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad k \longrightarrow \infty).$$

Somit ist

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| = \frac{1}{q_k^2 \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + \varepsilon_k \right)} = \frac{1}{q_k^2 (\sqrt{5} + \varepsilon_k)}.$$

Dies zeigt, daß bei beliebiger Beschaffenheit der Zahl $c < \frac{1}{\sqrt{5}}$ für hinreichend große k sich notwendig

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| > \frac{c}{q_k^2}$$

ergibt. Die Konstante $\frac{1}{\sqrt{5}}$ im Satz 20 läßt sich daher durch keine kleinere Konstante ersetzen, falls wir erreichen wollen, daß die

entsprechende Ungleichung für unendlich viele Werte von k bei beliebigem α erfüllt ist. Zu jeder kleineren Konstanten läßt sich stets ein α $\left(\text{und zwar } \alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$ derart finden, daß es der geforderten Ungleichung nur für endlich viele k-Werte genügt. Insbesondere reißt die Kette der Sätze, die mit den Sätzen 18 und 20 beginnt, mit dem Satz 20 ab; sie läßt sich nicht weiter fortsetzen.

§ 8. Allgemeine Approximationsgesetze

Bisher haben wir uns nur für Approximationen interessiert, die durch Näherungsbrüche gegeben werden. Dabei gelang es uns, eine Reihe von Problemen zu lösen, die mit dieser Aufgabe im Zusammenhang stehen. Da wir uns dabei überzeugen konnten, daß die Näherungsbrüche in einem gewissen Sinne die besten Approximationen sind, dürfen wir damit rechnen, daß die gewonnenen Ergebnisse gestatten werden, die Gesetze zu erforschen, durch die die Approximation der Irrationalitäten durch rationale Brüche bestimmt wird. Gleichzeitig können wir erwarten, daß dabei keine Abhängigkeit von irgendeinem speziellen darstellenden Apparat zutage tritt. Diesem Problemkreis wollen wir uns nunmehr zuwenden. Im Rahmen unserer elementaren Einführung können wir selbstverständlich keine vollständige Darlegung der Grundlagen der betreffenden Theorie vermitteln. Dies hat seinen Grund nicht nur im Raummangel, sondern auch darin, daß diese Dinge keine unmittelbare Beziehung zu unserer Aufgabe haben. Wir werden uns selbstverständlich darauf beschränken, eine Reihe elementarer Sätze aufzuführen, an denen die Anwendung der Kettenbrüche zur Untersuchung der arithmetischen Natur der Irrationalitäten illustriert werden soll.

Die erste im Anschluß an die Ergebnisse des vorhergehenden Paragraphen dabei auftretende Aufgabe läßt sich wie folgt formulieren: für welche Konstanten c besitzt die Ungleichung

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{c}{q^2} \tag{33}$$

bei beliebigem reellem α unendlich viele Lösungen in ganzzahligen p und q $(q > 0)$? Das abschließende Ergebnis des letzten Paragraphen führt uns leicht zu dem folgenden

Satz 21. *Die Ungleichung* (33) *hat bei beliebigem reellem* α *unendlich viele Lösungen in ganzzahligen* p *und* q $(q > 0)$, *wenn* $c \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$ *ist. Ist jedoch* $c < \frac{1}{\sqrt{5}}$, *so hat die Ungleichung* (33) *bei geeignet gewähltem* α *nicht mehr als endlich viele Lösungen dieser Art.*

In der Tat ist die erste Behauptung eine unmittelbare Folgerung aus dem Satz 20 (für den Fall, daß $\alpha = \frac{a}{b}$ rational ist und daher nur endlich viele Näherungsbrüche besitzt, läßt sich die erste Behauptung des Satzes 20 völlig trivial beweisen, wenn man $q = nb$, $p = na$, $n = 1, 2, \ldots$, setzt). Daher sei $c < \frac{1}{\sqrt{5}}$. Wie in § 7 setzen wir

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1;\ 1, 1, \ldots].$$

Genügen die ganzen Zahlen p und q $(q > 0)$ der Ungleichung (33), so ist nach Satz 19 $\frac{p}{q}$ ein Näherungsbruch der Zahl α. Am Ende des § 7 haben wir aber gesehen, daß unter diesen Näherungsbrüchen höchstens endlich viele der Ungleichung (33) genügen, wenn, wie vorausgesetzt, $c < \frac{1}{\sqrt{5}}$ ist. Damit ist unsere Behauptung offenbar vollständig bewiesen.

Somit läßt sich im allgemeinen, wenn man alle möglichen reellen α berücksichtigt, die Ordnung der Approximation. die durch die Größe $\frac{1}{\sqrt{5}q^2}$ charakterisiert wird, nicht mehr verbessern. Das soll jedoch nicht bedeuten, daß bei einzelnen Irrationalitäten auch Approximationen wesentlich höherer Ordnung möglich sind. Ganz im Gegenteil, die Möglichkeiten hierzu sind völlig unbegrenzt; davon überzeugt man sich am besten mit Hilfe der Kettenbrüche selbst.

Satz 22. *Wie auch eine positive Funktion* $\varphi(q)$ *der natürlichen Variablen* q *beschaffen sein möge, so läßt sich stets eine irrationale Zahl* α *finden, für die die Ungleichung*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \varphi(q)$$

unendlich viele Lösungen in ganzzahligen p *und* q $(q > 0)$ *besitzt.*

Beweis. Wir konstruieren den unendlichen Kettenbruch α,

indem wir seine Elemente sukzessiv so wählen, daß sie den Ungleichungen

$$a_{k+1} > \frac{1}{q_k^2\,\varphi(q_k)} \qquad (k \geq 0)$$

genügen, was selbstverständlich auf unendlich viele Arten zu erreichen ist (a_0 kann hierbei beliebig gewählt werden). Für ein beliebiges $k \geq 0$ ist dann

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}} = \frac{1}{q_k\,(a_{k+1}\,q_k + q_{k-1})} \leq \frac{1}{a_{k+1}\,q_k^2} < \varphi(q_k),$$

womit unser Satz bewiesen ist.

Wir wollen darauf hinweisen, daß im allgemeinsten Falle die Ungleichungen

$$\frac{1}{q_k\,(q_k + q_{k+1})} < \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| \leq \frac{1}{q_k q_{k+1}},$$

oder, was dasselbe bedeutet,

$$\frac{1}{q_k^2\left(a_{k+1} + 1 + \frac{q_{k-1}}{q_k}\right)} < \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| \leq \frac{1}{\left(q_k^2\,a_{k+1} + \frac{q_{k-1}}{q_k}\right)}$$

die Ungleichung

$$\frac{1}{q_k^2\,(a_{k+1} + 2)} < \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| \leq \frac{1}{q_k^2\,a_{k+1}} \tag{34}$$

liefern. Aus dieser ist zu ersehen, daß bei gegebenen $a_0, a_1, \ldots, a_k$ der Bruch $\frac{p_k}{q_k}$ um so besser die Zahl α approximiert, je größer das nachfolgende Element a_{k+1} ist. Da aber die Näherungsbrüche in jedem Falle die besten Approximationen sind, schließen wir, daß die Irrationalitäten sich gut durch rationale Brüche annähern lassen, unter deren Elementen große Zahlen auftreten. Diese Aussage qualitativer Natur findet ihren quantitativen Ausdruck in den Ungleichungen (34). Insbesondere lassen sich diejenigen Irrationalitäten am schlechtesten approximieren, deren Elemente beschränkt sind. Nun wird uns klar, warum wir mehrfach die Zahl

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = [1;\ 1, 1, \ldots]$$

gewählt hatten, wenn wir nach einer irrationalen Zahl suchten, die keine bessere Annäherung zuließe als die einer gewissen vorgegebenen Ordnung. Von allen Irrationalitäten besitzt sie offen-

bar die kleinstmöglichen Elemente (falls man a_0 nicht mitrechnet, das hier keinerlei Bedeutung hat) und läßt sich daher am schlechtesten durch rationale Brüche approximieren.

Die spezifischen Besonderheiten der Approximation, die den Zahlen mit beschränkten Elementen eigen sind, spiegeln sich vollständig im nachstehenden Satz wider, der uns nach unseren bisherigen Betrachtungen nahezu trivial erscheint.

Satz 23. *Für jede Irrationalzahl α mit beschränkten Elementen hat die Ungleichung*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{c}{q^2} \tag{33}$$

bei hinreichend kleinem c keine Lösungen in ganzzahligen p und q ($q > 0$). Umgekehrt ist für jede Zahl α mit unbeschränkten Elementen die Ungleichung (33) *bei beliebigem $c < 0$ für unendlich viele ganzzahlige Werte von p und q erfüllt.*

Mit anderen Worten: Irrationalitäten mit beschränkten Elementen lassen Approximationen von nicht höherer Ordnung als $\frac{1}{q^2}$ zu. Demgegenüber läßt sich jede Irrationalität mit unbeschränkten Elementen besser approximieren.

Beweis. Gibt es unter den Elementen eines Kettenbruches, der die Zahl α darstellt, beliebig große, so lassen sich bei beliebigem $c > 0$ unendlich viele Werte von k finden, für die

$$a_{k+1} > \frac{1}{c}$$

gilt. Daher haben wir auf Grund der zweiten der Ungleichungen (34) für unendlich viele k-Werte

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{c}{q_k^2},$$

womit die zweite Behauptung unseres Satzes bewiesen ist.

Existiert nun ein $M > 0$ derart, daß

$$a_k < M \ (k = 1, 2, \ldots)$$

ist, so erhalten wir auf Grund der ersten der Ungleichungen (34) für ein beliebiges $k \geq 0$

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{1}{q_k^2 (M + 2)}.$$

Hieraus ergibt sich für ein beliebiges Paar ganzer Zahlen p und q $(q > 0)$, wenn man den Index k aus den Ungleichungen

$$q_{-1} < q_k \leq q_k$$

bestimmt und berücksichtigt, daß alle Näherungsbrüche beste Approximationen erster Art sind,

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{1}{q_k^2\,(M+2)}$$

$$= \frac{1}{q^2\,(M+2)}\left(\frac{q}{q_k}\right)^2 > \frac{1}{q^2\,(M+2)}\left(\frac{q_{k-1}}{q_k}\right)^2$$

$$= \frac{1}{q^2\,(M+2)}\left(\frac{q_{k-1}}{a_k\,q_{k-1}+q_{k-2}}\right)^2$$

$$> \frac{1}{q^2\,(M+2)}\,\frac{1}{(a_k+1)^2} > \frac{1}{(M+2)\,(M+1)^2\,q_2}.$$

Wählen wir nun

$$c < \frac{1}{(M+2)\,(M+1)^2},$$

so kann die Ungleichung (33) für kein ganzzahliges Paar p und q $(q > 0)$ erfüllt sein. Damit ist auch die erste Behauptung des Satzes (23) bewiesen.

Bisher haben wir stets die Approximation durch die Größe der Differenz $\alpha - \frac{p}{q}$ abgeschätzt. Ebenso wie in § 6 könnten wir jedoch auch hier in allen bewiesenen Sätzen statt dessen die Differenz $q\alpha - p$ abschätzen und in allen bewiesenen Formulierungen entsprechende Änderungen vornehmen. Diese einfache Bemerkung führt unmittelbar zu einem neuen und äußerst wichtigen Gesichtspunkt in dem betrachteten Problem.

Die einfachste homogene lineare Gleichung in den unbekannten x und y

$$\alpha x - y = 0, \tag{35}$$

in der α eine gegebene irrationale Zahl ist, läßt sich selbstverständlich nicht exakt in ganzen Zahlen lösen.[1]) Doch kann man von einer Näherungslösung dieser Aufgabe sprechen, d. h. von der Wahl ganzzahliger x und y derart, daß die Differenz $\alpha x - y$ einen bestimmten kleinen Betrag nicht überschreitet. Offenbar lassen sich alle vorhergehenden Sätze dieses Paragraphen als Aussagen über Gesetzmäßigkeiten deuten, denen die Näherungs-

1) Abgesehen von der trivialen Lösung $x = y = 0$.

lösungen der Gleichung (35) in ganzen Zahlen unterliegen. So zeigt z. B. der Satz 21, daß stets unendlich viele ganze Zahlen x und y $(x > 0)$ derart existieren, daß

$$|\alpha x - y| < \frac{C}{x} \tag{36}$$

gilt, wenn C eine positive Zahl darstellt, die nicht kleiner ist als $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Von diesem neuen Gesichtspunkt aus erscheint es durchaus natürlich, von der homogenen Gleichung (35) zu der inhomogenen Gleichung

$$\alpha x - y = \beta \tag{37}$$

überzugehen (dabei ist β eine beliebige vorgegebene reelle Zahl) und die Möglichkeit sowie die Art ihrer Lösung in ganzzahligen x und y zu untersuchen. Man hat mit anderen Worten die Gesetzmäßigkeiten zu untersuchen, die sich bei dem Versuch ergeben, die Differenz $\alpha x - y - \beta$ durch geeignete Wahl der ganzen Zahlen x und y möglichst klein werden zu lassen.

Dieses Problem wurde erstmalig von dem großen russischen Mathematiker *P. L. Tschebyschew* aufgeworfen, der auch die ersten damit verknüpften wichtigen Ergebnisse gewonnen hat. Gegenwärtig wird an der Weiterentwicklung dieses Problems intensiv weitergearbeitet, woran die sowjetische arithmetische Schule maßgeblich beteiligt ist.

Die erste wichtige Besonderheit, die den inhomogenen Fall vom homogenen unterscheidet, besteht darin, daß die Zahl α *irrational* sein muß, wenn es möglich sein soll, die Größe $|\alpha x - y - \beta|$ bei beliebigem β durch geeignete Wahl der ganzen Zahlen x und y beliebig klein werden zu lassen (im homogenen Fall dagegen kann dies für die Größe $|\alpha x - y|$ bei *beliebigem* α erreicht werden).

In der Tat erhalten wir, wenn $\alpha = \frac{a}{b}$ mit ganzzahligen $b > 0$ und a ist und wir $\beta = \frac{1}{2b}$ setzen, für beliebige ganzzahlige x und y

$$|\alpha x - y - \beta| = \left|\frac{2(ax - by) - 1}{2b}\right| \geq \frac{1}{2b},$$

da $|2(ax - by) - 1|$ als ungerade ganze Zahl wenigstens gleich Eins ist.

Bei unseren weiteren Betrachtungen wollen wir daher die Zahl α irrational annehmen. Unter dieser Bedingung kann man nicht nur, wie wir uns sogleich überzeugen werden, die Größe $|\alpha x - y - \beta|$ beliebig klein machen, sondern feststellen, daß die Analogie zum homogenen Fall noch viel weiter geht.

Satz 24 *(Tschebyschew). Für eine beliebige Irrationalzahl α und für eine beliebige reelle Zahl β hat die Ungleichung*

$$|\alpha x - y - \beta| < \frac{3}{x}$$

unendlich viele Lösungen in ganzzahligen x und y $(x > 0)$.

Vorbemerkung. Offenbar entspricht dieses Ergebnis völlig der Eigenschaft der homogenen Gleichungen, die ihren Ausdruck in Satz 21 gefunden hat. Der Unterschied besteht nur darin, daß hier an Stelle der Konstanten $\frac{1}{\sqrt{5}}$ die Zahl 3 auftritt. Die Ordnung der Approximation bleibt jedoch dieselbe. Es sei noch erwähnt, daß die Zahl 3 hier keineswegs die kleinstmögliche ist: die untere Grenze der Zahlen, durch die sie ersetzt werden kann, ohne die Gültigkeit des Satzes 24 zu stören, ist beträchtlich kleiner.

Beweis. Es sei $\frac{p}{q}$ ein beliebiger Näherungsbruch der Zahl α. Dann gilt

$$\alpha = \frac{p}{q} + \frac{\delta}{q^2} \qquad (0 < \delta < 1). \tag{38}$$

Bei beliebiger Beschaffenheit einer reellen Zahl β läßt sich ferner eine ganze Zahl t derart finden, daß

$$|q\beta - t| \leq \frac{1}{2}$$

ist, daraus folgt:

$$\beta = \frac{t}{q} + \frac{\delta'}{2q} \qquad (|\delta'| \leq 1). \tag{39}$$

Da p und q teilerfremd sind, existiert ein Paar ganzer Zahlen x und y, das den Bedingungen genügt:[1])

$$\frac{q}{2} \leq x < \frac{3q}{2}, \quad px - qy = t.$$

---

1) Hier der Beweis: Ist $\frac{r}{s}$ ein Näherungsbruch der Zahl α, der dem Bruch $\frac{p}{q}$ unmittelbar vorausgeht, so gilt

$$qr - ps = \varepsilon = \pm 1, \qquad q(\varepsilon r t) - p(\varepsilon s t) = t\varepsilon^2 = t$$

In einem solchen Falle gilt aber auf Grund von (38) und (39)

$$|\alpha x - y - \beta| = \left|\frac{xp}{q} + \frac{x\delta}{q^2} - y - \frac{t}{q} - \frac{\delta'}{2q}\right|$$
$$= \left|\frac{x\delta}{q^2} - \frac{\delta'}{2q}\right| < \frac{x}{q^2} + \frac{1}{2q},$$

und wegen

$$q > \frac{2}{3}x$$

gilt dann

$$|\alpha x - y - \beta| < \frac{9}{4x} + \frac{3}{4x} = \frac{3}{x}.$$

Schließlich kann die Zahl q beliebig groß gewählt werden. Da aber $x \geq \frac{q}{2}$ ist, ist auch x beliebig groß; damit ist offenbar der Satz bewiesen.

Die Aufgabe, die Gleichung (37) angenähert in ganzen Zahlen zu lösen, kann jedoch auch in einer Form gestellt werden, die vielleicht sogar etwas natürlicher erscheint. Da das Wesen des Problems darin besteht, die Größe $|\alpha x - y - \beta|$ möglichst klein werden zu lassen, indem man die Zahlen x und y möglichst klein wählt, erscheint es am natürlichsten, die Aufgabe wie folgt zu formulieren: Ist eine beliebig große positive Zahl n gegeben, so wissen wir (auf Grund des eben bewiesenen Satzes 24), daß bei beliebigem irrationalem α und bei beliebigem reellem β ganze Zahlen $x > 0$ und y sich finden lassen, für die die Ungleichung

$$|\alpha x - y - \beta| < \frac{1}{n} \tag{40}$$

erfüllt ist. Doch gibt uns der Satz 24 im allgemeinen keine Auskunft darüber, innerhalb welcher Grenzen wir diese Zahlen suchen müssen, damit die durch die Zahl $\frac{1}{n}$ charakterisierte Genauigkeit erreicht wird. Dieses Ziel ließe sich z. B. erreichen, wenn man eine Zahl N, die zwar von n, nicht aber von α und β abhängt.

---

und bei beliebigem ganzzahligen k

$$p(kq - \varepsilon st) - q(kp - \varepsilon rt) = t.$$

k läßt sich aber so wählen, daß

$$\frac{q}{2} \leq x = kq - \varepsilon st < \frac{3q}{2}$$

gilt.

mit der Eigenschaft angeben könnte, daß die Ungleichung (40) unter der zusätzlichen Bedingung $|x| \leq N$ stets erfüllt werden kann.

Offenbar unterscheidet sich diese neue Art der Problemstellung sehr wesentlich von der, mit der wir es bisher zu tun hatten. Wurde bisher (wie im Satz 24) die Genauigkeit der Approximation in Abhängigkeit von der Größe der Zahl x bestimmt, so geben wir uns jetzt diese Genauigkeit vor und fragen umgekehrt, wie groß die Zahl x gewählt werden muß, damit diese Genauigkeit erreicht wird. Diesem Unterschied in der Problemstellung entsprechend ist auch ihre Lösung ganz anderer Art. Insbesondere erhalten wir für den homogenen und inhomogenen Fall völlig verschiedene Ergebnisse.

Im Falle der homogenen Gleichung ($\beta = 0$) findet unser Problem eine sehr einfache Lösung.

Satz 25. *Wie auch die reellen Zahlen $n \geq 1$ und α beschaffen sein mögen, stets lassen sich ganze Zahlen x und y finden, die den Ungleichungen*

$$0 < x \leq n, \quad |\alpha x - y| < \frac{1}{n}$$

genügen.

Beweis. Ist α rational, $\alpha = \frac{a}{b}$ und $0 < b \leq n$, so läßt sich der Satz trivial beweisen, wenn man $x = b$ und $y = a$ setzt. Läßt sich α nicht in dieser Form darstellen, d. h., ist α entweder irrational oder ein rationaler Bruch, dessen Nenner n übersteigt, so erhalten wir, wenn wir den Index k aus der Relation

$$q_k \leq n < q_{k+1}$$

(hier bezeichnen wir mit $\frac{p_k}{q_k}$ die Näherungsbrüche der Zahl α) bestimmen,

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| \leq \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{q_k n}$$

und folglich

$$|\alpha q_k - p_k| < \frac{1}{n}, \quad 0 < q_k \leq n,$$

womit unser Satz bewiesen ist.

Nun müssen wir naturgemäß danach fragen, ob im Falle der inhomogenen Gleichung (37) die gleiche Ordnung der Approxi-

mation sich festlegen läßt, d. h., ob man behaupten kann, daß zu einer beliebigen Irrationalzahl α sich eine positive Zahl C derart finden läßt, daß bei beliebiger Beschaffenheit der Zahlen $n \geq 1$ und β ganze Zahlen x und y existieren, die den folgenden Ungleichungen genügen:

$$0 < x \leq Cn, \quad |\alpha x - y - \beta| < \frac{1}{n}.$$

(Offenbar fordern wir hierbei weniger als das, was wir für den homogenen Fall bewiesen hatten; denn wir lassen zu, daß C von α abhängt, während im homogenen Falle $C = 1$ eine absolute Konstante ist.) Es ist nicht schwer, eine solche Annahme durch einige Vorbetrachtungen als unwahrscheinlich zu erkennen. Zunächst ist sie für rationale α von vornherein falsch; denn in diesem Falle kann die Größe $|\alpha x - y - \beta|$, wie wir gesehen haben, im allgemeinen (d. h. bei beliebigem β) nicht einmal beliebig klein gemacht werden. Dieser Umstand läßt erwarten, daß bei einem zwar irrationalen, jedoch durch rationale Brüche sehr stark approximierbaren α die Größe $|\alpha x - y - \beta|$, obwohl sie nach Satz 24 beliebig klein gemacht werden kann, dennoch bei geeignet gewähltem β und vorgegebener Genauigkeit verhältnismäßig großer Werte von x und y bedarf. Die gleichen Überlegungen lassen weiterhin vermuten, daß die Annäherung der Differenz $\alpha x - y$ an eine beliebige reelle Zahl β sich um so leichter erreichen lassen wird, je schlechter sich die Zahl α durch rationale Brüche approximieren läßt, d. h., je schwieriger die Annäherung der Größe $\alpha x - y$ an die Null vollzogen werden kann. Hierzu dürfen ihrerseits, wie wir bereits wissen, die Elemente der Zahl α nicht zu rasch zunehmen.

Alle diese Vorbetrachtungen werden durch den nachstehenden Satz bestätigt und quantitativ exakt ausgedrückt.

Satz 26. *Soll eine positive Zahl C mit der Eigenschaft existieren, daß bei beliebigen reellen $n \geq 1$ und β ganze Zahlen x und y sich finden lassen ($x > 0$), die den Ungleichungen*

$$x \leq Cn, \quad |\alpha x - y - \beta| < \frac{1}{n}$$

genügen, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß die irrationale Zahl α durch einen Kettenbruch mit beschränkten Elementen dargestellt wird.

Beweis. Es sei

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$$

und $a_i < M$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Ferner sei $m \geq 1$ und β eine beliebige reelle Zahl. Wir bezeichnen mit $\frac{p_k}{q_k}$ die Näherungsbrüche der Zahl α und bestimmen den Index k aus den Ungleichungen

$$q_k \leq m < q_{k+1}.$$

Dann ist

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{m q_k}$$

oder

$$\alpha = \frac{p_k}{q_k} + \frac{\delta}{m q_k} \quad (|\delta| \leq 1). \tag{41}$$

Ferner wählen wir die ganze Zahl t so, daß

$$|\beta q_k - t| \leq \frac{1}{2}$$

ist, woraus

$$\beta = \frac{t}{q_k} + \frac{\delta'}{2 q_k} \quad (|\delta'| \leq 1) \tag{42}$$

folgt.

Schließlich bestimmen wir wie beim Beweis des Satzes 24 ein paar ganzer Zahlen x und y, die den Beziehungen

$$x p_k - y q_k = t, \quad 0 < x \leq q_k \tag{43}$$

genügen. Aus (41), (42) und (43) folgt

$$\begin{aligned} |\alpha x - y - \beta| &= \left| \frac{x p_k}{q_k} - y - \frac{t}{q_k} + \frac{x\delta}{m q_k} - \frac{\delta'}{2 q_k} \right| \\ &= \left| \frac{x\delta}{m q_k} - \frac{\delta'}{2 q_k} \right| < \frac{x}{m q_k} + \frac{1}{2 q_k} \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{2 q_{k+1}} \left(\frac{q_{k+1}}{q_k} \right) \\ &< \frac{1}{m} + \frac{1}{2m} (a_{k+1} + 1) < \frac{1}{m} + \frac{M+1}{2m} = \frac{M+3}{2m}. \end{aligned}$$

Bisher konnte die Zahl $m \geq 1$ ganz beliebig gewählt werden. Setzen wir nunmehr, bei gegebenem $n \geq 1$, $m = \frac{M+3}{2} n$, so erhalten wir offenbar $m > 1$ und folglich auf Grund des vorhergehenden

$$0 < x \leq q_k \leq m = \frac{M+3}{2} n,$$

$$|\alpha x - y - \beta| < \frac{1}{n},$$

wenn man die Zahlen x und y in der angegebenen Weise wählt. Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

Zum Beweis des zweiten Teiles wollen wir annehmen, daß unter den Elementen a_k der Zahl α beliebig große auftreten. In diesem Falle lassen sich nach Satz 23, wie klein die positive Zahl ε auch gewählt sein möge, stets ganze Zahlen $q > 0$ und p finden, die der Ungleichung

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{\varepsilon^2}{q^2}$$

genügen. Daraus folgt

$$\alpha = \frac{p}{q} + \frac{\delta\varepsilon^2}{q^2} \qquad (|\delta| < 1).$$

Nun setzen wir $n = \frac{q}{\varepsilon}$ und $\beta = \frac{1}{2q}$. Dann erhalten wir bei beliebigen ganzzahligen x und y $(0 < x \leq Cn)$

$$|\alpha x - y - \beta| = \left|\frac{xp}{q} - y - \frac{1}{2q} + \frac{x\delta\varepsilon^2}{q^2}\right| = \left|\frac{2(xp - yq) - 1}{2q} + \frac{x\delta\varepsilon^2}{q^2}\right|$$

$$> \frac{|2(xp - yq) - 1|}{2q} - \frac{x\varepsilon^2}{q^2} \geq \frac{1}{2q} - \frac{C\varepsilon}{q} = \frac{1 - 2C\varepsilon}{2q} = \frac{1 - 2C\varepsilon}{2\varepsilon} \cdot \frac{1}{n}.$$

Wie groß aber C auch sein möge, so erhalten wir bei hinreichend kleinem ε stets $\frac{1 - 2C\varepsilon}{2\varepsilon} > 1$ und folglich für beliebige ganzzahlige x und y $(0 < x \leq Cn)$

$$|\alpha x - y - \beta| > \frac{1}{n},$$

womit auch der zweite Teil des Satzes bewiesen ist.

Nun wollen wir die gewonnenen Ergebnisse zusammenfassen. Bei der Untersuchung der Näherungslösung der Gleichung (37) in ganzen Zahlen müssen wir als Normalfall den betrachten, bei dem die Genauigkeit, die durch die Größe $\frac{1}{n}$ charakterisiert wird, für ein gewisses $x < Cn$ bei beliebigem $n \geq 1$ erreicht werden kann. Dabei ist C eine Konstante, die von α abhängen kann. Die homogene (d. h. für $\beta = 0$ sich ergebende) Gleichung läßt stets eine normale Lösung zu (Satz 25). Der Satz 26 zeigt, daß die allgemeine (inhomogene) Gleichung eine normale Lösung dann und nur dann zuläßt, wenn die zugehörige homogene Gleichung keine „übernormale" Lösung besitzt, d. h., wenn sie nicht bei

beliebigem $\varepsilon > 0$ und geeignet gewähltem n bis auf $\frac{1}{n}$ genau durch ganzzahlige $x > 0$ und y erfüllt werden kann, wobei $x < \varepsilon n$ ist. Von diesem Gesichtspunkt aus betrachtet kann das Ergebnis unserer Untersuchung als ein Spezialfall des allgemeinen Gesetzes zur Lösung linearer Gleichungen (algebraischer Gleichungen, Integralgleichungen u. dgl.) aufgefaßt werden: *Eine inhomogene Gleichung läßt sich im allgemeinen Falle „normal" lösen, wenn die entsprechende homogene Gleichung keine „übernormale" Lösung zuläßt.*

Es sei noch erwähnt, daß wir im Satz 26 die Unabhängigkeit der Größe C von β gefordert hatten. Man könnte unter Beibehaltung des gleichen Ergebnisses zulassen, daß C eine Funktion von β ist. Allerdings wäre dann der Beweis (in seinem zweiten Teil) erheblich schwieriger geworden.

§ 9. Approximation algebraischer Irrationalitäten. Liouvillesche transzendente Zahlen

Es sei

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \tag{44}$$

ein Polynom n-ten Grades mit *ganzzahligen* Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Eine Zahl α, die Wurzel eines solchen Polynoms ist, wird *algebraisch* genannt. Da jede rationale Zahl $\alpha = \frac{a}{b}$ als Wurzel der Gleichung ersten Grades $bx - a = 0$ definiert werden kann, ist der Begriff der algebraischen Zahl offenbar eine natürliche Verallgemeinerung des Begriffes der rationalen Zahl. Genügt eine gegebene algebraische Zahl der Gleichung n-ten Grades $f(x) = 0$ und genügt sie keiner Gleichung geringeren Grades (mit ganzzahligen Koeffizienten), so nennt man sie eine *algebraische Zahl n-ten Grades.* Insbesondere lassen sich die rationalen Zahlen als algebraische Zahlen ersten Grades definieren. Die Zahl $\sqrt{2}$ ist als Wurzel des Polynoms $x^2 - 2$ eine algebraische Zahl zweiten Grades oder, wie man auch sagt, eine *quadratische Irrationalität.* In ähnlicher Weise werden kubische Irrationalitäten, Irrationalitäten vierten Grades usw. definiert. Alle nichtalgebraischen Zahlen werden *transzendent* genannt. Zu diesen gehören z. B. e und π. Auf Grund der großen Rolle, die die algebraischen

Zahlen in der modernen Zahlentheorie spielen, wurden ihren Eigenschaften in bezug auf die Approximationen durch rationale Brüche viele spezielle Untersuchungen gewidmet. Das erste bedeutende Ergebnis in dieser Richtung war der nachstehende sog. *Liouvillesche Satz.*

Satz 27. *Zu jeder irrationalen algebraischen Zahl α n-ten Grades existiert eine positive Zahl C derart, daß für beliebige ganzzahlige p und $q\,(q>0)$*

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|>\frac{C}{q^n}$$

gilt.

Beweis. Es sei α Wurzel des Polynoms (44). Wie wir aus der Algebra wissen, können wir

$$f(x)=(x-\alpha)f_1(x) \tag{45}$$

schreiben. Dabei ist $f_1(x)$ ein Polynom vom Grade $n-1$. Man erkennt leicht, daß $f_1(\alpha)\neq 0$ ist. In der Tat wäre im Falle $f_1(\alpha)=0$ das Polynom $f_1(x)$ ohne Rest durch $x-\alpha$ teilbar, d. h., $(x-\alpha)^2$ wäre ein Teiler des Polynoms $f(x)$. In diesem Falle ließe sich aber auch das abgeleitete Polynom $f'(x)$ durch $x-\alpha$ teilen, d. h., es wäre $f'(\alpha)=0$, was unmöglich ist; denn $f'(x)$ ist ein Polynom $(n-1)$-ten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten und α eine algebraische Zahl n-ten Grades. Es gilt somit

$$f_1(\alpha)\neq 0;$$

folglich läßt sich eine positive Zahl δ finden, für die

$$f_1(x)\neq 0 \quad (\alpha-\delta\leq x\leq\alpha+\delta)$$

gilt.

Es sei p und q $(q>0)$ ein beliebiges Paar ganzer Zahlen. Ist dann $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\leq\delta$, so ist $f_1\left(\frac{p}{q}\right)=0$. Setzen wir daher in die Identität (45) $x=\frac{p}{q}$ ein, so erhalten wir

$$\frac{p}{q}-\alpha=\frac{f\left(\frac{p}{q}\right)}{f_1\left(\frac{p}{q}\right)}=\frac{a_0+a_1\left(\frac{p}{q}\right)+\cdots+a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n}{f_1\left(\frac{p}{q}\right)}$$

$$=\frac{a_0q^n+a_1pq^{n-1}+\cdots+a_np^n}{q^nf_1\left(\frac{p}{q}\right)}.$$

Der Zähler des letzten Bruches ist eine ganze und von Null verschiedene Zahl, denn andernfalls hätten wir $\alpha = \frac{p}{q}$, während α nach der Voraussetzung unseres Satzes eine Irrationalzahl ist. Infolgedessen ist dieser Zähler absolut genommen wenigstens gleich 1. Bezeichnen wir nun mit M die obere Grenze der Funktion $f_1(x)$ im Intervall $(\alpha - \delta,\ \alpha + \delta)$, so erhalten wir aus der letzten Gleichung

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{Mq^n}.$$

Im Falle

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \delta$$

gilt jedoch a fortiori

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{\delta}{q^n}.$$

Bezeichnen wir daher mit C eine beliebige positive Zahl, die kleiner als δ und $\frac{1}{M}$ ist, so gilt in allen Fällen (d. h. für beliebige ganzzahlige $q > 0$ und p)

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{C}{q^n},$$

womit der Satz 27 bewiesen ist.

Der Satz von *Liouville* behauptet offenbar, daß die algebraischen Zahlen keine Approximation durch rationale Brüche zulassen, die in ihrer Genauigkeit eine bestimmte Ordnung übersteigen würde. Diese hängt im wesentlichen vom Grad der gegebenen algebraischen Zahl ab. Die historische Hauptbedeutung dieses Satzes bestand darin, daß er erstmalig gestattete, die Existenz transzendenter Zahlen zu beweisen und konkrete Beispiele solcher Zahlen anzugeben. Hierzu genügt es, wie wir sehen, eine Zahl zu konstruieren, die als Irrationalzahl sich außerordentlich gut durch rationale Brüche approximieren läßt. In dieser Hinsicht sind aber, wie wir aus dem Satz 22 wissen, unsere Möglichkeiten unbeschränkt.

Existieren für ein beliebiges $C > 0$ und für ein beliebiges natürliches n ganze Zahlen p und q $(q > 0)$, die der Ungleichung

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{C}{q^n} \tag{46}$$

genügen, so zeigt der Satz 27, daß die Zahl α transzendent ist. Mit Hilfe der Kettenbrüche lassen sich beliebig viele derartige Zahlen konstruieren. Hierzu genügt es, nachdem man die Elemente $a_0, a_1, \ldots, a_k$ gewählt hat, den Näherungsbruch $\frac{p_k}{q_k}$ zu konstruieren und

$$a_{k+1} > q_k^{k-1}$$

zu setzen. Dann ist nämlich

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{q_k^2 a_{k+1}} < \frac{1}{q_k^{k+1}},$$

weshalb die Ungleichung (46) offenbar für alle hinreichend großen Werte von k erfüllt ist, wie auch die Konstante $C > 0$ und die natürliche Zahl n gewählt sein mögen.

§ 10. Quadratische Irrationalitäten und periodische Kettenbrüche

Für quadratische Irrationalitäten α zeigt der Satz 27, daß eine (von α abhängende) positive Zahl C existiert, für die die Ungleichung

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{C}{q^2}$$

keine Lösungen in ganzzahligen p und q ($q > 0$) haben kann. Nach Satz 23 folgt hieraus, daß die Elemente einer jeden quadratischen Irrationalität beschränkt sind. Doch lange vor *Liouville* hat *Lagrange* eine wesentlich tiefer gehende Eigenschaft der die quadratischen Irrationalitäten darstellenden Kettenbrüche entdeckt. Diese Eigenschaft ist zugleich charakteristisch. Es stellt sich heraus, daß die Folge der Elemente einer quadratischen Irrationalität stets periodisch ist und daß umgekehrt jeder periodische Kettenbruch eine quadratische Irrationalität darstellt. Dem Beweis des Satzes soll dieser Paragraph gewidmet sein.

Wir wollen den Kettenbruch

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$$

periodisch nennen, wenn ganzzahlige k_0 und h derart existieren, daß für ein beliebiges $k \geq k_0$

$$a_{k+h} = a_k$$

ist. Ähnlich wie bei Dezimalbrüchen wollen wir einen solchen periodischen Bruch durch

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k_0-1}, \overline{a_{k_0}, a_{k_0+1}, \ldots, a_{k_0+h-1}}] \tag{47}$$

bezeichnen.

Satz 28. *Jeder periodische Kettenbruch stellt eine quadratische Irrationalität dar. Umgekehrt läßt sich jede quadratische Irrationalität durch einen periodischen Kettenbruch wiedergeben.*

Beweis. Die erste Behauptung läßt sich in wenigen Worten beweisen. In der Tat genügen die Reste des periodischen Kettenbruches (47) offenbar der Bedingung

$$r_{k+h} = r_k \quad (k \geq k_0).$$

Nach Formel (16) des Kapitels A gilt für $k \geq k_0$ daher

$$\alpha = \frac{p_{k-1} r_k + p_{k-2}}{q_{k-1} r_k + q_{k-2}} = \frac{p_{k+h-1} r_{k+h} + p_{k+h-2}}{q_{k+h-1} r_{k+h} + q_{k+h-2}} = \frac{p_{k+h-1} r_k + p_{k+h-2}}{q_{k+h-1} r_k + q_{k+h-2}}, \tag{48}$$

woraus

$$\frac{p_{k-1} r_k + p_{k-2}}{q_{k-1} r_k + q_{k-2}} = \frac{p_{k+h-1} r_k + p_{k+h-2}}{q_{k+h-1} r_k + q_{k+h-2}}$$

folgt. Somit genügt die Zahl r_k einer quadratischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten und ist als solche eine quadratische Irrationalität. In diesem Falle zeigt aber die erste der Gleichungen (48), daß auch α eine quadratische Irrationalität sein muß.

Die Umkehrung dieser Behauptung läßt sich nicht ganz so einfach beweisen. Die Zahl α genüge der quadratischen Gleichung

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \tag{49}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten. Setzen wir in diese an Stelle von α den Ausdruck

$$\alpha = \frac{p_{n-1} r_n + p_{n-2}}{q_{n-1} r_n + q_{n-2}}$$

ein, der α durch den Rest n-ter Ordnung darstellt, so sehen wir, daß r_n der Gleichung

$$A_n r_n^2 + B_n r_n + C_n = 0 \tag{50}$$

genügt, in der A_n, B_n und C_n durch die Formeln

$$\left.\begin{aligned} A_n &= a p^2_{n-1} + b p_{n-1} q_{n-1} + c q^2_{n-1} \\ B_n &= 2a p_{n-1} p_{n-2} + b (p_{n-1} q_{n-2} + p_{n-2} q_{n-1}) + 2c q_{n-1} q_{n-2} \\ C_n &= a p^2_{n-2} + b p_{n-2} p_{n-2} + c p^2_{n-2} \end{aligned}\right\} \quad (51)$$

bestimmte ganze Zahlen sind. Daraus folgt insbesondere

$$C_n = A_{n-1}. \quad (52)$$

Mit Hilfe dieser Formeln verifiziert man leicht unmittelbar, daß

$$B_n^2 - 4 A_n C_n = (b^2 - 4ac)\,(p_{n-1} q_{n-2} - q_{n-1} p_{n-2})^2 = b^2 - 4ac \quad (53)$$

ist, d. h., die Diskriminante der Gleichung (50) ist für alle n dieselbe und gleich der Diskriminante der Gleichung (49).

Wegen

$$\left| \alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| < \frac{1}{q^2_{n-1}},$$

ist ferner

$$p_{n-1} = \alpha q_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}} \qquad (|\delta_{n-1}| < 1).$$

Die erste der Formeln (51) liefert daher

$$\begin{aligned} A_n &= a\left(\alpha q_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}}\right)^2 + b\left(\alpha q_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}}\right) q_{n-1} + c q^2_{n-1} \\ &= (a\alpha^2 + b\alpha + c)\, q^2_{n-1} + 2a\alpha\delta_{n-1} + a\frac{\delta^2_{n-1}}{q^2_{n-1}} + b\delta_{n-1}, \end{aligned}$$

woraus nach Gleichung (49)

$$|A_n| = \left| 2a\alpha\delta_{n-1} + a\frac{\delta^2_{n-1}}{q^2_{n-1}} + b\delta_{n-1} \right| < 2|a\alpha| + |a| + |b|$$

und auf Grund der Gleichung (52)

$$|C_n| = |A_{n-1}| < 2|a\alpha| + |a| + |b|$$

folgt.

Die Koeffizienten A_n und C_n der Gleichung (50) sind also absolut beschränkt, weshalb sie bei Änderung von n nur endlich viele verschiedene Werte annehmen können. Auf Grund der Gleichung (53) folgt hieraus, daß auch B_n nur endlich viele verschiedene Werte annehmen kann.

Wächst nun n von 1 bis ∞, so können nur endlich viele verschiedene Gleichungen (50) auftreten. In diesem Falle kann aber

r_n nur endlich viele verschiedene Werte haben, so daß für geeignet gewählte k und h

$$r_k = r_{k+h}$$

ist. Dies zeigt, daß der α darstellende Kettenbruch periodisch ist. Damit ist auch die zweite Behauptung unseres Satzes bewiesen.

Für algebraische Irrationalitäten höherer Grade kennt man keine Eigenschaften der darstellenden Kettenbrüche, die etwa der eben bewiesenen analog wären. Ganz allgemein wird alles, was über die Approximation algebraischer Irrationalitäten höherer Grade durch rationale Brüche bekannt ist, durch elementare Folgerungen aus dem Liouvilleschen Satz und einige Sätze neueren Datums erschöpft, die eine Verschärfung des Satzes von Liouville darstellen. Es ist interessant zu bemerken, daß man bis heute keine Zerlegung irgendeiner Irrationalität höheren als zweiten Grades in einen Kettenbruch kennt. Es ist nicht bekannt, ob eine derartige Zerlegung beschränkte Elemente haben kann. Unbekannt ist ferner, ob sie auch unbeschränkt sein können und dergleichen mehr. Im allgemeinen sind die Probleme, die mit der Entwicklung algebraischer Zahlen höheren als zweiten Grades in Kettenbrüche zusammenhängen, außerordentlich schwierig und bisher nahezu unerforscht.

C. METRISCHE THEORIE DER KETTENBRÜCHE

§ 11. Einführung

Im gesamten vorigen Kapitel haben wir gesehen, daß die reellen Zahlen hinsichtlich ihrer arithmetischen Eigenschaften ganz verschieden sein können. Außer den Grundeinteilungen der reellen Zahlen in rationale und irrationale sowie algebraische und transzendente, lassen sich viele feinere Unterteilungen dieser Zahlen nach einer Reihe von Merkmalen treffen, die deren arithmetische Natur charakterisieren. Vor allem kann man sie nach dem Grad der Approximation klassifizieren, den diese Zahlen bei Darstellung durch rationale Brüche zulassen. In allen diesen Fällen haben wir uns bisher damit begnügt, einfach die Tatsache festzustellen, daß Zahlen mit diesen oder jenen arithmetischen Eigenschaften auch wirklich existieren. So wissen wir, daß es Zahlen gibt, die eine angenäherte Darstellung durch rationale Brüche $\frac{p}{q}$ nur mit einer Genauigkeit zulassen, deren Ordnung nicht höher ist als $\frac{1}{q^2}$ (dieser Art sind z. B. alle quadratischen Irrationalitäten). Doch wissen wir, daß es Zahlen gibt, die eine Approximation höherer Ordnung zulassen (Satz 22, Kapitel B). Es ergibt sich naturgemäß die Frage, welche dieser beiden gegensätzlichen Eigenschaften wir für die *allgemeinere* halten müssen, welche der beiden Typen reeller Zahlen *häufiger auftritt.*

Wollen wir dem eben aufgeworfenen Problem eine exakte Formulierung geben, so müssen wir beachten, daß jedes Mal, sobald wir über irgendeine Eigenschaft reeller Zahlen (etwa Irrationalität oder Transzendenz oder das Vorhandensein beschränkter Elemente usw.) eine Aussage machen, die Gesamtheit aller reellen Zahlen hinsichtlich dieser Eigenschaft in zwei Mengen zerlegt wird. Einmal ist es die Menge der Zahlen, die diese Eigenschaft aufweisen, zum anderen die Menge der Zahlen, denen diese Eigenschaft nicht zukommt.

Das Problem, das wir uns gestellt haben, läuft offenbar auf die Aufgabe hinaus, diese beiden Mengen miteinander zu vergleichen und festzustellen, welche größer und welche kleiner ist. Die Mengen reeller Zahlen können jedoch von verschiedenen Gesichtspunkten aus und mit Hilfe verschiedener Charakteristika miteinander verglichen werden. Man kann nach ihrer Mächtigkeit, nach ihrem Maß und nach anderen Merkmalen fragen. Am interessantesten sowohl in ihren Methoden als auch in ihren Ergebnissen ist die *metrische* Problematik, die das Maß der Zahlenmengen untersucht, die durch eine bestimmte Eigenschaft der in ihnen enthaltenen Zahlen festgelegt werden. Die entsprechende Lehre, die man als die *metrische Arithmetik des Kontinuums* bezeichnen könnte, hat sich in der letzten Zeit sehr stark entwickelt und viele einfache und interessante Gesetzmäßigkeiten zutage treten lassen. Wie bei jeder Untersuchung der arithmetischen Natur der Irrationalitäten ist auch hier der Apparat der Kettenbrüche das beste und natürlichste Untersuchungsmittel. Soll jedoch dieser Apparat zu einem Werkzeug der *metrischen* Arithmetik werden, d. h., soll er auf die Untersuchung des Maßes einer Menge angewendet werden, die durch irgendwelche arithmetischen Eigenschaften der zur Menge gehörenden Zahlen definiert wird, so müssen wir vor allem diesen Apparat selbst einer eingehenden und allseitigen metrischen Analyse unterwerfen. Mit anderen Worten, wir müssen lernen, *das Maß einer Menge von Zahlen zu bestimmen, deren Kettenbruchentwicklungen diese oder jene vorgegebene Eigenschaft aufweisen.* Probleme dieser Art können ganz verschiedener Natur sein. So können wir nach dem Maß der Menge der Zahlen fragen, für die $a_4 = 2$ oder $q_{10} < 1000$ ist, die eine beschränkte Folge von Elementen haben oder unter deren Elementen keine geraden Zahlen auftreten usw. Die Gesamtheit der Methoden, die der Lösung derartiger Aufgaben dienen, bildet die *metrische Theorie der Kettenbrüche*, deren Anfangsgründen und elementaren Anwendungen dieses Kapitel gewidmet ist. Da die arithmetischen Grundeigenschaften einer Zahl sich nicht ändern, wenn man zu dieser eine beliebige ganze Zahl addiert, wollen wir im weiteren nur reelle Zahlen betrachten, die zwischen 0 und 1 liegen (d. h., wir setzen stets $a_0 = 0$ voraus). Bei der metrischen Theorie ist diese Beschränkung auf ein endliches Intervall übrigens sogar notwendig, wenn wir wollen, daß das Maß einer Menge nicht im allgemeinen Falle unendlich wird.

Beim Leser setzen wir die Kenntnis der Grundbegriffe der Maßtheorie der linearen Mengen voraus.[1])

§ 12. Die Elemente als Funktionen der darzustellenden Zahl

Jede reelle Zahl α läßt sich *nur auf eine Art* in einen Kettenbruch

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$$

entwickeln. Jedes Element a_n ist daher eindeutig durch die Angabe der Zahl α festgelegt, d. h., es ist eine *eindeutige Funktion von* α:

$$a_n = a_n(\alpha).$$

Beim Aufbau der metrischen Theorie der Kettenbrüche muß der erste Schritt eine Untersuchung der Natur dieser Funktion sein, der uns gestattet, sich wenigstens eine erste Vorstellung von ihrem allgemeinen Verlauf zu verschaffen. Dies soll in diesem Paragraphen geschehen.

Wie wir bereits in § 11 bemerkt hatten, setzen wir stets $a_0 = 0$ voraus. Der kürzeren Schreibweise halber wollen wir hierbei

$$\alpha = [a_1, a_2, \ldots]$$

an Stelle von

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$$

schreiben. Wir setzen also

$$[a_1, a_2, \ldots] = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ldots}}.$$

Zunächst wollen wir das erste Element a_1 als Funktion von α untersuchen. Wegen

$$\frac{1}{\alpha} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \ldots}$$

1) Zum Verständnis dieses Kapitels ist der in dem Lehrbuch von *P. S. Alexandroff* und *A. N. Kolmogorow* über die Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen (Moskau 1933) im 6. Kapitel vermittelte Stoff mehr als ausreichend. Ferner sei hierzu der Leser auf *E. Kamke*, Das Lebesgue-Stieltjes Integral (Leipzig 1956) bzw. auf *I. P. Natanson*, Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen (Berlin 1954), verwiesen.

ist offenbar $a_1 = \left[\frac{1}{\alpha}\right]$, d. h., a_1 ist die kleinste ganze Zahl, die den Bruch $\frac{1}{\alpha}$ nicht übersteigt. Somit ist

$$a_1 = 1 \text{ für } 1 \leq \frac{1}{\alpha} < 2, \quad \text{d. h. } \frac{1}{2} < \alpha \leq 1,$$

$$a_1 = 2 \text{ für } 2 \leq \frac{1}{\alpha} < 3, \quad \text{d. h. } \frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{1}{2},$$

$$a_1 = 3 \text{ für } 3 \leq \frac{1}{\alpha} < 4, \quad \text{d. h. } \frac{1}{4} < \alpha \leq \frac{1}{3}, \quad \text{usw.}$$

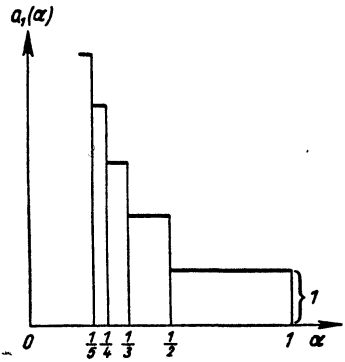

Abb. 1

Ganz allgemein gilt

$$a_1 = k \text{ für } k \leq \frac{1}{\alpha} < k+1,$$

$$\text{d. h. } \frac{1}{k+1} < \alpha \leq \frac{1}{k}.$$

Die Funktion $a_1 = a_1(\alpha)$ hat somit für alle die α-Werte eine Unstetigkeitsstelle, für die $\frac{1}{\alpha}$ eine ganze Zahl ist; ferner wächst sie für $\alpha \to 0$ über alle Grenzen. Ihr Kurvenbild zeigt die Abb. 1.

Wir wollen noch darauf hinweisen, daß a_1 in jedem der Intervalle $\left(\frac{1}{k+1} < \alpha \leq \frac{1}{k}\right)$ konstant ist. Diese Intervalle wollen wir *Intervalle vom Rang eins* nennen. Ferner ist

$$\int_0^1 a_1(\alpha)\, d\alpha = +\infty,$$

da dieses Integral offenbar der divergenten Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$$

äquivalent ist.

Nun gehen wir zur Untersuchung der Funktion $a_2(\alpha)$ über. Hierzu betrachten wir zunächst irgendein festes Intervall vom Rang eins

$$\frac{1}{k+1} < \alpha \leq \frac{1}{k}.$$

In diesem Intervall ist überall $a_1 = k$ und folglich

$$\alpha = \frac{1}{k + \frac{1}{r_2}},$$

wobei $1 \leq r_2 < \infty$ und $a_2 = [r_2]$ ist. Wächst r_2 von 1 bis ∞, so wächst α von $\frac{1}{k+1}$ bis $\frac{1}{k}$ und durchläuft somit das vorgegebene Intervall vom Rang eins. Dabei ist offenbar

$$a_2 = 1 \text{ für } 1 \leq r_2 < 2, \quad \text{d. h. } \frac{1}{k+1} \leq \alpha < \frac{1}{k+\frac{1}{2}},$$

$$a_2 = 2 \text{ für } 2 \leq r_2 < 3, \quad \text{d. h. } \frac{1}{k+\frac{1}{2}} \leq \alpha < \frac{1}{k+\frac{1}{3}},$$

$$a_2 = 3 \text{ für } 3 \leq r_2 < 4, \quad \text{d. h. } \frac{1}{k+\frac{1}{3}} \leq \alpha < \frac{1}{k+\frac{1}{4}},$$

und ganz allgemein

$$a_2 = l \text{ für } l \leq r_2 < l+1, \quad \text{d. h. } \frac{1}{k+\frac{1}{l}} \leq \alpha < \frac{1}{k+\frac{1}{l+1}}.$$

Das Kurvenbild der Funktion $a_2(\alpha)$ hat somit in dem von uns festgelegten Intervall vom Rang eins die in Abb. 2 dargestellte Form.

Die Funktion $a_2(\alpha)$ ist in jedem der Intervalle

$$\left(\frac{1}{k+\frac{1}{l}}, \quad \frac{1}{k+\frac{1}{l+1}}\right),$$

die wir als Intervalle *vom Rang zwei* bezeichnen wollen, konstant. Jedes Intervall vom Rang eins zerfällt also in eine abzählbare Menge von Intervallen vom Rang zwei, die von links nach rechts fortschreiten (wir erinnern daran, daß die Intervalle vom

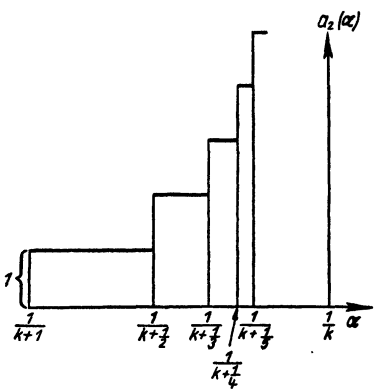

Abb. 2

Rang eins eine von rechts nach links fortschreitende Folge bilden). Die Punktmenge, für die $a_1 = k$ ist, ist ein Intervall vom Rang eins; die Menge, für die $a_2 = 1$ gilt, ist eine abzählbare Menge von Intervallen vom Rang zwei (je eines in jedem Intervall vom Rang eins). Jedes Intervall vom Rang eins wird durch eine Bedingung der Form $a_1 = k$, jedes Intervall vom Rang zwei durch Bedingungen der Form $a_1 = k$ und $a_2 = 1$ festgelegt.

Nun wollen wir annehmen, wir hätten bereits die Intervalle vom Rang n allgemein definiert und den Verlauf der Funktionen $a_1(\alpha), a_2(\alpha), \ldots, a_n(\alpha)$ untersucht. Jedes Wertsystem

$$a_1 = k_1, \quad a_2 = k_2, \ldots, a_n = k_n \tag{54}$$

bestimmt ein Intervall J_n vom Rang n. Um den Verlauf der Funktion $a_{n+1}(\alpha)$ im Intervall J_n zu untersuchen, bemerken wir, daß eine beliebige Zahl α dieses Intervalls in der Form

$$\alpha = [k_1, k_2, \ldots, k_n, r_{n+1}] \tag{55}$$

dargestellt werden kann. Dabei nimmt r_{n+1} alle möglichen Werte zwischen 1 und ∞ an. Umgekehrt liefert bei beliebigem r_{n+1} $(1 < r_{n+1} < \infty)$ der Ausdruck (55) die Zahl α, für die die Bedingungen (54) erfüllt sind und die somit dem Intervall J_n angehört. Da aber $a_{n+1} = [r_{n+1}]$ ist, sehen wir, daß im Innern eines jeden Intervalls vom Rang n die Funktion $a_{n+1}(\alpha)$ alle ganzzahligen Werte zwischen 1 und ∞ annimmt. Um sich ein genaueres Bild zu verschaffen, wollen wir, wie üblich, mit $\frac{p_k}{q_k}$ die Näherungsbrüche der Zahl α bezeichnen. Dann ist

$$\alpha = \frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}},$$

wobei, wenn α das betreffende Intervall J_n durchläuft, r_{n+1} von 1 bis ∞ wächst, während die p_n, q_n, p_{n-1} und q_{n-1} konstant bleiben, da sie vollständig durch die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bestimmt sind, die in allen Punkten des Intervalls J_n ein und denselben Wert beibehalten. Setzen wir insbesondere $r_{n+1} = 1$ bzw. lassen wir $r_{n+1} \to \infty$ gehen, so erhalten wir als Endpunkte des Intervalls J_n die Punkte

$$\frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{p_n}{q_n}.$$

Wegen

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n (q_n r_{n+1} + q_{n-1})}$$

ist dann α eine monotone Funktion von r_{n+1} im Intervall $(1, \infty)$. Folglich ist auch umgekehrt r_{n+1} und damit a_{n+1} eine monotone Funktion von α im Intervall

$$J_n = \left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}\right).$$

Durchläuft somit α das Intervall J_n, so durchläuft $a_{n+1}(\alpha)$ sukzessiv die Werte 1, 2, 3 ... und zerlegt das Intervall J_n in abzählbar unendlich viele Intervalle vom Range $(n+1)$. Diese Folge verläuft von rechts nach links bei geradem n und von links nach rechts bei ungeradem n.

Damit ist die Struktur der Funktion $a_n(\alpha)$ wenigstens von der qualitativen Seite her völlig geklärt. Wir vereinbaren zunächst, das Intervall $(0, 1)$ (Einheitsintervall) als Intervall vom Rang Null zu bezeichnen und überdecken es mit einem Netz immer kleiner werdender Intervalle, indem wir in jedem bereits konstruierten Intervall vom Rang n eine Folge von Intervallen vom Rang $n+1$ unterbringen. Diese Folge verläuft von rechts nach links bei geradem n und von links nach rechts bei ungeradem n. Die Funktion $a_{n+1}(\alpha)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ ist in jedem dieser Intervalle vom Rang $n+1$ konstant. Sie ist monoton und nimmt in jedem Intervall vom Rang n die Werte von 1 bis ∞ an. Jedem Wertsystem

$$a_1 = k_1, \; a_2 = k_2, \; \ldots, \; a_n = k_n$$

entspricht ein eindeutig bestimmtes Intervall vom Rang n und umgekehrt. Das allgemeinere Wertsystem

$$a_{m_1} = k_1, \; a_{m_2} = k_2, \; \ldots, \; a_{m_s} = k_s$$

bestimmt im allgemeinen eine abzählbare Intervallmenge.

Das erste Problem, das man sich naturgemäß in der metrischen Theorie der Kettenbrüche stellt, besteht darin, das Maß der Menge der Punkte des Intervalls $(0, 1)$ zu bestimmen, für die $a_n = k$ ist. Wir wissen bereits, daß diese Menge stets ein System von Intervallen bildet. Es geht daher darum, die Summe der Längen dieser Intervalle zu bestimmen. Diese Aufgabe läßt sich in erster Näherung sehr leicht lösen.

Für das Weitere wollen wir vereinbaren, mit

$$E\begin{pmatrix} n_1, & n_2, & \ldots, & n_s \\ k_1, & k_2, & \ldots, & k_s \end{pmatrix}$$

die Menge der Punkte des Intervalls $(0, 1)$ zu bezeichnen, für die die Bedingungen

$$a_{n_1} = k_1,\ a_{n_2} = k_2, \ldots, a_{n_s} = k_s$$

erfüllt sind. Hierbei sind selbstverständlich alle n_i und k_i natürliche Zahlen; die n_i sind dabei alle voneinander verschieden. Wir wissen bereits, daß eine solche Menge stets ein Intervallsystem darstellt. Insbesondere ist die Menge

$$E\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ k_1, & k_2, & \ldots, & k_n \end{pmatrix}$$

wie uns ebenfalls bereits bekannt ist, ein Intervall vom Rang n, das durch die Beziehungen

$$a_i = k_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

charakterisiert wird.

Offenbar gilt stets

$$\sum_{k_l=1}^{\infty} E\begin{pmatrix} n_1, & \ldots, & n_{l-1}, & n_l, & n_{l+1}, & \ldots, & n_s \\ k_1, & \ldots, & k_{l-1}, & k_l, & k_{l+1}, & \ldots, & k_s \end{pmatrix}$$

$$= E\begin{pmatrix} n_1, & \ldots, & n_{l-1}, & n_{l+1}, & \ldots, & n_s \\ k_1, & \ldots, & k_{l-1}, & k_{l+1}, & \ldots, & k_s \end{pmatrix}. \qquad (56)$$

Schließlich vereinbaren wir, mit $\mathfrak{M}E$ das Maß der Menge E zu bezeichnen.

Nun betrachten wir ein beliebiges Intervall

$$J_n = E\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ k_1, & k_2, & \ldots, & k_n \end{pmatrix}$$

vom Rang n und das darin enthaltene Intervall

$$J_{n+1}^{(s)} = E\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n, & n+1 \\ k_1, & k_2, & \ldots, & k_n, & s \end{pmatrix}$$

vom Rang $n+1$. Wir wissen bereits, daß als Endpunkte des Intervalls J_n die Punkte

$$\frac{p_n}{q_n} \quad \text{und} \quad \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}$$

dienen, wobei allgemein durch $\frac{p_k}{q_k}$ der Näherungsbruch der Ordnung k des Kettenbruchs

$$[k_1, k_2, \ldots, k_n]$$

bezeichnet wird. Andererseits gilt für alle Punkte des Intervalls $J_{n+1}^{(s)}$

$$a_{n+1} = [r_{n+1}] = s,$$

woraus

$$s \leq r_{n+1} < s+1$$

folgt. Somit gehören unter allen Punkten

$$\alpha = \frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}}$$

des Intervalls J_n diejenigen Punkte dem Intervall $J_{n+1}^{(s)}$ an, für die $s \leq r_{n+1} < s+1$ gilt, woraus insbesondere folgt, daß die Punkte

$$\frac{p_n s + p_{n-1}}{q_n s + q_{n-1}} \quad \text{und} \quad \frac{p_n (s+1) + p_{n-1}}{q_n (s+1) + q_{n-1}}$$

die Endpunkte des Intervalls $J_{n+1}^{(s)}$ sind.

Hieraus folgt

$$\mathfrak{M} J_n = \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} \right| = \frac{1}{q_n (q_n + q_{n-1})} = \frac{1}{q_n^2 \left(1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)},$$

$$\mathfrak{M} J_{n+1}^{(s)} = \left| \frac{p_n s + p_{n-1}}{q_n s + q_{n-1}} - \frac{p_n (s+1) + p_{n-1}}{q_n (s+1) + q_{n-1}} \right|$$

$$= \frac{1}{[q_n s + q_{n-1}]\,[q_n (s+1) + q_{n-1}]}$$

$$= \left| \frac{1}{q_n^2 s^2 \left(1 + \frac{q_{n-1}}{s q_n}\right)\left(1 + \frac{1}{s} + \frac{q_{n-1}}{s q_n}\right)} \right|$$

und damit

$$\frac{\mathfrak{M} J_{n+1}^{(s)}}{\mathfrak{M} J_n} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}}{\left(1 + \frac{q_{n-1}}{s q_n}\right)\left(1 + \frac{1}{s} + \frac{q_{n-1}}{s q_n}\right)}.$$

Hierbei ist offenbar der zweite Faktor auf der rechten Seite stets kleiner als 2 und größer als $\frac{1}{3}$ (das letztere wegen $\frac{1+\frac{q_{n-1}}{q_n}}{1+\frac{q_{n-1}}{sq_n}} \geq 1$ und $1+\frac{1}{s}+\frac{q_{n-1}}{sq_n} < 3$). Daher erhalten wir

$$\frac{1}{3s^2} < \frac{\mathfrak{M} J_{n+1}^{(s)}}{\mathfrak{M} J_n} < \frac{2}{s^2}. \tag{57}$$

Dies zeigt, daß in einem beliebigen Intervall vom Rang n das Intervall vom Rang $n+1$, das durch den Wert $a_{n+1} = s$ charakterisiert wird, einen Teil der Größenordnung $\frac{1}{s^2}$ des gegebenen Intervalls einnimmt. Äußerst wichtig ist die Tatsache, daß die durch die Ungleichungen (57) festgelegten Grenzen nicht nur von den Zahlen $k_1, k_2, \ldots, k_n$, sondern sogar vom Rang n völlig unabhängig sind und ausschließlich durch die Zahl s bestimmt werden. Stellt man diese Ungleichungen in der Form

$$\frac{\mathfrak{M} J_n}{3s^2} < \mathfrak{M} J_{n+1}^{(s)} < \frac{2\,\mathfrak{M} J_n}{s^2}$$

dar, summiert man über alle Intervalle J_n vom Rang n (oder, was dasselbe bedeutet, über $k_1, k_2, \ldots, k_n$ von 1 bis ∞) und bemerkt man schließlich, daß hierbei offenbar

$$\sum \mathfrak{M} J_n = 1 \quad \text{und} \quad \sum \mathfrak{M} J_{n+1}^{(s)} = \mathfrak{M} E\left(\begin{matrix} n+1 \\ s \end{matrix}\right)$$

gilt, so erhält man

$$\frac{1}{3s^2} < \mathfrak{M} E\left(\begin{matrix} n+1 \\ s \end{matrix}\right) < \frac{2}{s^2},$$

womit die gestellte Aufgabe in erster Näherung gelöst ist. Wir sehen, daß das Maß der Menge der Punkte, in denen ein bestimmtes Element den vorgegebenen Wert s besitzt, stets zwischen $\frac{1}{3s^2}$ und $\frac{2}{s^2}$ eingeschlossen ist (es ist folglich eine Größe der Ordnung $\frac{1}{s^2}$).

§ 13. Metrische Abschätzung des Wachstums der Elemente

Wir verfügen bereits über hinreichende Mittel, um die Aufgabe über das Maß von Mengen zu lösen, in deren Definition unendlich viele Elemente eingehen. Als erstes Beispiel einer solchen Aufgabe beweisen wir den folgenden einfachen

Satz 29. *Die Menge aller Zahlen mit beschränkten Elementen im Intervall* (0, 1) *hat das Maß Null.*

Beweis. Wir bezeichnen mit E_M die Menge der Zahlen des Intervalls (0, 1), deren Elemente kleiner als M sind. Es sei J_n irgendein Intervall vom Rang n, dessen Punkte den Bedingungen

$$\alpha_i < M \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{58}$$

genügen. Die Punkte des Intervalls J_n, die zusätzlich die Bedingung $a_{n+1} = k$ erfüllen, bilden ein Intervall vom Rang $n+1$, das wir mit $J_{n+1}^{(k)}$ bezeichnen wollen. Nach der ersten der Ungleichungen (57) ist

$$\mathfrak{M} J_{n+1}^{(k)} > \frac{1}{3k^2} \mathfrak{M} J_n,$$

woraus

$$\mathfrak{M} \sum_{k \geq M} J_{n+1}^{(k)} > \frac{1}{3} \mathfrak{M} J_n \sum_{k \geq M} \frac{1}{k^2}$$

$$> \frac{1}{3} \mathfrak{M} J_n \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(M+i)_2} > \frac{1}{3} \mathfrak{M} J_n \int_{M+1}^{\infty} \frac{du}{u} = \frac{1}{3(M+1)} \mathfrak{M} J_n$$

und wegen

$$\sum_{k=1}^{\infty} J_{n+1}^{(k)} = J_n$$

infolgedessen auch

$$\mathfrak{M} \sum_{k < M} J_{n+1}^{(k)} > \left\{ 1 - \frac{1}{3(M+1)} \right\} \mathfrak{M} J_n = \tau \mathfrak{M} J_n \tag{59}$$

folgt. Dabei wurde

$$\tau = 1 - \frac{1}{3(M+1)}$$

gesetzt, wobei offenbar $\tau < 1$ für $M > 0$ ist.

Bezeichnen wir mit $E_M^{(n)}$ die Menge der Zahlen des Intervalls $(0, 1)$, die durch die Bedingungen (58) charakterisiert werden, so erkennen wir aus der Ungleichung (59), daß der Teil der Menge $E_M^{(n+1)}$, der in einem gewissen Intervall J_n vom Rang n eingeschlossen ist, ein geringeres Maß hat als $\tau \mathfrak{M} J_n$. Da offenbar ein Intervall vom Rang n, das nicht zur Menge $E_M^{(n)}$ gehört (d. h., das den Bedingungen (58) nicht genügt) keinen Punkt der Menge $E_M^{(n+1)}$ enthalten kann, ergibt sich, wenn wir die Ungleichung (59) über alle zur Menge $E_M^{(n)}$ gehörenden Intervalle vom Rang n summieren,

$$\mathfrak{M} E_M^{(n+1)} < \tau \mathfrak{M} E_M^{(n)}. \tag{60}$$

Die sukzessive Anwendung dieser Ungleichung liefert offenbar

$$\mathfrak{M} E_M^{(n+1)} < \tau^n \mathfrak{M} E_M^{(1)} \qquad (n \geq 1),$$

woraus

$$\mathfrak{M} E_M^{(n)} \longrightarrow 0 \qquad (n \longrightarrow \infty)$$

folgt, denn es ist $\tau < 1$. Die vorhin definierte Menge E_M ist aber offenbar in jeder der Mengen $E_M^{(n)}$ enthalten, weshalb

$$\mathfrak{M} E_M = 0$$

ist. Setzen wir nunmehr

$$\sum_{M=1}^{\infty} E_M = E,$$

so erhalten wir

$$\mathfrak{M} E \leq \sum_{M=1}^{\infty} \mathfrak{M} E_M = 0.$$

Jede Zahl mit beschränkten Elementen gehört aber offenbar bei hinreichend großem M der Menge E_M und somit der Menge E an, womit unser Satz bewiesen ist.

Wir wissen bereits (Satz 23, Kapitel B), daß die Zahlen mit beschränkten Elementen solche Zahlen α sind, die keine bessere angenäherte Darstellung durch rationale Brüche zulassen, als nach dem Gesetz

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{C}{q^2} \tag{61}$$

(zu diesen Zahlen gehören u. a. alle quadratischen Irrationalitäten). Wir sehen nun, daß alle diese Zahlen eine Menge vom Maß Null bilden. Mit anderen Worten, *fast alle* Zahlen (d. h. alle

Zahlen mit Ausnahme einer Menge vom Maß Null) lassen eine bessere Approximation durch rationale Brüche zu. Offenbar besteht die Hauptaufgabe der metrischen Approximationstheorie in dem Problem, festzustellen, welches Maß eine Menge von Zahlen hat, die eine vorgegebene Approximation durch rationale Brüche zulassen. Insbesondere fragt man nach dem besten Approximationsgesetz, das für fast alle (d. h. alle bis auf eine Menge vom Maß Null) Zahlen gilt, d. h., innerhalb welcher Grenzen das Gesetz, das durch die Ungleichung (61) festgelegt wird, verbessert werden kann, wenn man vereinbart, eine Menge von Zahlen α vom Maß Null zu vernachlässigen.

Die Lösung dieses Problems behandeln wir im nächsten Paragraphen. Hier beweisen wir den folgenden

Satz 30. *Es sei $\varphi(n)$ eine beliebige positive Funktion der natürlichen Variablen n. Die Ungleichung*

$$a_n = a_n(\alpha) \geq \varphi(n) \tag{62}$$

ist für fast alle α unendlich oft erfüllt, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)}$ divergiert. Umgekehrt ist die Ungleichung (62) für fast alle α höchstens endlich oft erfüllt, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)}$ konvergiert.

Vorbemerkung. Setzt man insbesondere die Funktion $\varphi(n)$ einer konstanten positiven Zahl M gleich, so kann man aus dem Satz 30 schließen, daß die Menge E_M, die wir beim Beweis des Satzes 29 verwendet hatten, eine Menge vom Maß Null ist. Man kann daher den Satz 29 als einen der einfachsten Spezialfälle des Satzes 30 auffassen.

Beweis. Die erste Behauptung wird ebenso bewiesen wie der Satz 29. Es sei J_{m+n} ein Intervall vom Rang $m+n$, für dessen sämtliche Punkte die Ungleichung

$$a_{m+i} < \varphi(m+i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{63}$$

erfüllt ist (den $a_1, a_2, \ldots, a_m$ legen wir keinerlei Bedingungen auf). Unter Beibehaltung der Bezeichnungsweise, die wir beim Beweis des Satzes 29 eingeführt hatten, finden wir analog der Ungleichung (59)

$$\mathfrak{M} \sum_{k<\varphi(m+n+1)} J_{m+n+1}^{(k)} < \left\{1 - \frac{1}{3(1+\varphi(m+n+1))}\right\} \mathfrak{M} J_{m+n}.$$

Summieren wir diese Ungleichung über alle Intervalle vom Rang $m+n$, die der Bedingung (63) genügen, und bezeichnen wir die Menge aller Zahlen des Intervalls $(0, 1)$, die diese Bedingung erfüllen, mit $E_{m,n}$, so erhalten wir offenbar

$$\mathfrak{M}E_{m,n+1} < \left\{1 - \frac{1}{3(1+\varphi(m+n+1))}\right\}\mathfrak{M}E_{m,n}.$$

Die sukzessive Anwendung dieser Ungleichung ergibt

$$\mathfrak{M}E_{m,n} < \mathfrak{M}E_{m,1}\prod_{i=2}^{n}\left\{1 - \frac{1}{3(1+\varphi(m+i))}\right\}.$$

Divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\varphi(n)}$, so divergiert offenbar auch die Reihe

$$\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{3(1+\varphi(m+i))}$$

bei beliebigem m. Hieraus folgt, wie wir aus der Theorie der unendlichen Produkte wissen, daß

$$\prod_{i=2}^{n}\left\{1 - \frac{1}{3(1+\varphi(m+i))}\right\}$$

für $n \to \infty$ gegen Null strebt. Bei beliebigem m gilt daher

$$\mathfrak{M}E_{m,n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Jede Zahl α aber, für die

$$a_{m+i} < \varphi(m+i) \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

gilt, gehört offenbar allen Mengen

$$E_{m,n} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

an. Daher muß die Menge aller solchen Zahlen, die wir mit E_m bezeichnen wollen, das Maß Null haben. Setzen wir schließlich

$$E_1 + E_2 + \cdots + E_m + \cdots = E,$$

so sehen wir, daß $\mathfrak{M}E = 0$ ist. Jede Zahl α aber, für die die Ungleichung (62) nicht mehr als endlich oft erfüllt ist, muß offenbar bei hinreichend großem m der Menge E_m und folglich auch der Menge E angehören. Damit ist die erste Behauptung unseres Satzes bewiesen.

Nun möge die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)}$ konvergieren. J_n sei ein Intervall vom Rang n und $J_{n+1}^{(k)}$ ein Intervall vom Rang $n+1$, das in J_n enthalten und durch die Zusatzbedingung $a_{n+1} = k$ bestimmt wird. Auf Grund der zweiten der Ungleichungen (57) gilt

$$\mathfrak{M} J_{n+1}^{(k)} < \frac{2}{k^2} \mathfrak{M} J_n;$$

daraus folgt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M} \sum_{k \geq \varphi(n+1)} J_{n+1}^{(k)} &< 2 J \mathfrak{M}_n \sum_{k \geq \varphi(n+1)} \frac{1}{k^2} \\
&\leq 2 \mathfrak{M} J_n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\{\varphi(n+1)+i\}^2} \\
&< 2 \mathfrak{M} J_n \left\{ \frac{1}{\varphi(n+1)} + \int_{\varphi(n+1)}^{\infty} \frac{du}{u^2} \right\} = \frac{4 \mathfrak{M} J_n}{\varphi(n+1)}.
\end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit F_n die Menge der Zahlen des Intervalls $(0,1)$, für die $a_n \geq \varphi(n)$ gilt, und summieren wir die gewonnene Ungleichung über alle Intervalle J_n vom Rang n, so erhalten wir

$$\mathfrak{M} F_{n+1} < \frac{4}{\varphi(n+1)};$$

denn es ist $\Sigma \mathfrak{M} J_n = 1$. Somit bilden die Maße der Mengen F_1, $F_2, \ldots, F_n, \ldots$ eine konvergente Reihe. Bezeichnen wir daher mit F die Menge aller der Zahlen des Intervalls $(0,1)$, die unendlich vielen Mengen F_n angehören, so erhalten wir[1])

$$\mathfrak{M} F = 0.$$

Die Menge F ist aber offenbar gerade die Menge der Zahlen, für die die Ungleichung (62) unendlich oft erfüllt ist. Damit ist auch die zweite Behauptung des Satzes bewiesen.

---

1) Dies ist ein bekannter Satz aus der metrischen Mengenlehre. Hier sein Beweis: Offenbar ist die Menge F bei beliebigem m in der Menge $\sum_{n=m}^{\infty} F_n$ enthalten, deren Maß $\sum_{n=m}^{\infty} \mathfrak{M} F_n$ nicht übersteigt und folglich bei hinreichend großem m beliebig klein gemacht werden kann.

§ 14. Metrische Abschätzung für das Wachstum der Nenner der Näherungsbrüche. Hauptsatz der metrischen Approximationstheorie

Satz 31. *Es existiert eine absolut konstante positive Zahl B derart, daß bei hinreichend großem n fast überall die Ungleichung gilt*

$$q_n = q_n(\alpha) < e^{Bn}.$$

Vorbemerkung. Im Kapitel A, § 4 (Satz 12), haben wir gesehen, daß die Nenner q_n für *alle* Zahlen α nicht langsamer mit n zunehmen als eine gewisse geometrische Reihe mit absolut konstantem Quotienten. Der Satz 31 zeigt, daß für *fast alle* α die Zahlen q_n nicht rascher wachsen, als eine andere geometrische Reihe mit ebenfalls absolut konstantem Quotienten. Diese Sachlage läßt sich auch wie folgt ausdrücken: Es existieren zwei absolute Konstanten a und A $(1 < a < A)$ derart, daß für fast alle Zahlen α des Intervalls $(0, 1)$ die Ungleichung

$$a < \sqrt[n]{q_n} < A$$

bei hinreichend großem n gilt.

In Wirklichkeit gilt ein bei weitem schärferer Satz: Es existiert eine absolute Konstante γ derart, daß fast überall

$$\sqrt[n]{q_n} \longrightarrow \gamma \qquad (n \longrightarrow \infty)$$

gilt. Doch ist der Beweis dieses Satzes erheblich schwieriger und erfordert für seine Durchführung jene viel tiefer gehenden Mittel, die wir erst in § 15 und § 16 kennenlernen werden. Leider gestattet es der Rahmen dieses Bändchens nicht, diesen Beweis mit unterzubringen. Im übrigen ist für unser nächstes Hauptziel, den Beweis des Satzes 32, die Eigenschaft der Zahlen q_n, von der im Satz 31 die Rede ist, völlig ausreichend.

Beweis. Wir bezeichnen mit $E_n(g)$ $(n > 0,\ g \geq 1)$ die Menge der Zahlen des Intervalls $(0, 1)$, für die

$$a_1 a_2 \ldots a_n \geq g$$

gilt. Offenbar stellt diese Menge ein System von Intervallen vom Rang n dar. Die Länge irgendeines dieser Intervalle ist, wie wir bereits von § 12 her wissen, gleich

$$\left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}\right| = \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})} < \frac{1}{q_n^2} < \frac{1}{(a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1)^2},$$

da die sukzessive Anwendung der selbstverständlichen Ungleichung

$$q_n > a_n q_{n-1}$$

die Ungleichung

$$q_n > a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1$$

liefert. Deshalb ist

$$\mathfrak{M} E_n(g) < \sum_{a_1 a_2 \cdots a_n \geq g} \frac{1}{a_n^2 a_{n-1}^2 \cdots a_2^2 a_2^2}, \tag{64}$$

wobei die Summation über alle Kombinationen der natürlichen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ erstreckt wird, die der Ungleichung $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq g$ genügen. Um diese Summe abzuschätzen, bemerken wir, daß

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2} = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{a_i}\right) \frac{1}{a_i(a_i+1)} \leq 2^n \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i(a_i+1)}$$

$$= 2^n \prod_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{a_i+1} \frac{dx_i}{x_i^2} = 2^n \int_{a_1}^{a_1+1} \int_{a_2}^{a_2+1} \cdots \int_{a_n}^{a_n+1} \frac{dx_1\, dx_2 \ldots dx_n}{x_1^2 x_2^2 \ldots x_n^2}$$

und folglich

$$\sum_{a_1, a_2, \ldots a_n \geq g} \left\{ \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2} \right\} \leq 2^n J_n(g)$$

gilt. $J_n(g)$ ist dabei das n-fache Integral

$$\int\int \cdots \int \frac{dx_1\, dx_2 \ldots dx_n}{x_1^2 x_2^2 \ldots x_n^2},$$

das über das Gebiet

$$x_i \geq 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$x_1 x_2 \ldots x_n \geq g$$

erstreckt wird.

Für $g \leq 1$ wird dieses Gebiet offenbar zum Gebiet $1 \leq x_i < \infty$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, und wir erhalten

$$J_n(g) = \left\{ \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} \right\}^n = 1 \qquad (g \leq 1). \tag{65}$$

Nun zeigen wir, daß für $g > 1$

$$J_n(g) = \frac{1}{g} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lg g)^i}{i!} \tag{66}$$

gilt. In der Tat erhält diese Gleichung für $n = 1$ die Gestalt

$$\int_g^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{g},$$

d. h., sie ist richtig. Nehmen wir nun an, sie wäre für $n = k$ erfüllt, so erhalten wir

$$J_{k+1}(g) = \int_1^\infty \frac{dx_{k+1}}{x_{k+1}^2} J_k\left(\frac{g}{x_{k+1}}\right) = \frac{1}{g} \int_0^g J_k(u)\, du$$

$$= \frac{1}{g} \left\{ \int_0^1 J_k(u)\, du + \int_1^g J_k(u)\, du \right\}.$$

Drücken wir $J_k(u)$ im ersten Integral nach der Formel (65), im zweiten nach der Formel (66) aus, die wir für $n = k$, $g \geq 1$ als bereits bewiesen vorausgesetzt hatten, so finden wir

$$J_{k+1}(g) = \frac{1}{g} \left\{ 1 + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lg g)^{i+1}}{(i+1)!} \right\} = \frac{1}{g} \sum_{i=0}^{k} \frac{(\lg g)^i}{i!},$$

was zu beweisen war.

Somit ist

$$\mathfrak{M} E_n(g) < \frac{2^n}{g} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lg g)^i}{i!}.$$

Setzen wir insbesondere $g = e^{An}$, wobei $A > 1$ konstant ist, so erhalten wir

$$\mathfrak{M} E_n(e^{An}) < e^{n(\lg 2 - A)} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(An)^i}{i!}.$$

In der gewonnenen Summe ist, wie man leicht sieht, jedes Glied kleiner als

$$\frac{(An)^n}{n!}.$$

Verwenden wir daher zur Abschätzung von $n!$ die Stirlingsche Formel und bezeichnen im weiteren mit C_1 und C_2 positive absolute Konstanten, so erhalten wir

$$\mathfrak{M}E_n(e^{An}) < e^{n(\lg 2 - A)}\, n\, \frac{(An)^n}{n!}$$

$$< C_1 e^{n(\lg 2 - A)}\, \frac{n(An)^n}{n^n e^{-n}\sqrt{n}} < C_2 \sqrt{n}\, e^{-n(A - \lg A - \lg 2 - 1)}.$$

Ist jedoch A hinreichend groß, so ist

$$A - \lg A - \lg 2 - 1 > 0$$

und folglich $\mathfrak{M}E_n(e^{An})$ kleiner als das n-te Glied einer gewissen konvergenten Reihe. Da demnach die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}E_n(e^{An})$$

konvergiert, ist jede Zahl des Intervalls $(0, 1)$, mit Ausnahme einer Menge vom Maß Null, Element höchstens endlich vieler Mengen $E_n(e^{An})$. Dies bedeutet aber, daß für fast alle Zahlen des Intervalls $(0, 1)$ bei hinreichend großem n

$$a_1 a_2 \ldots a_n < e^{An}$$

gelten muß. Da aber

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} < 2 a_n q_{n-1}$$

und folglich

$$q_n < 2^n a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1$$

ist, gilt fast überall bei hinreichend großem n

$$q_n < 2^n e^{An} = e^{An},$$

wobei $B = A + \lg 2$ gesetzt wurde. Damit ist der Satz 31 bewiesen.

Das gewonnene Ergebnis, das auch an sich von Interesse ist, ist für uns im Augenblick deshalb besonders wichtig, weil wir mit seiner Hilfe das Hauptproblem der metrischen Approximationstheorie, das wir bereits im vorigen Paragraphen aufgeworfen hatten, recht einfach lösen können.

Satz 32. *Es sei $f(x)$ eine positive stetige Funktion der positiven Variablen x derart, daß $xf(x)$ eine nicht zunehmende Funktion ist. Dann hat die Ungleichung*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{f(q)}{q} \tag{67}$$

für fast alle α unendlich viele Lösungen in ganzzahligen p und q $(q > 0)$, wenn das Integral

$$\int_0^\infty f(x)\,dx \tag{68}$$

divergiert. Umgekehrt besitzt die Ungleichung (67) *für fast alle α höchstens endlich viele Lösungen in ganzzahligen p und q $(q > 0,)$ wenn das Integral* (68) *konvergiert.*

Vorbemerkung. Nach Satz 32 hat z. B. die Ungleichung

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2 \lg q}$$

fast überall unendlich viele Lösungen, während dagegen die Ungleichung

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2 \lg^{1+\varepsilon} q}$$

bei jedem konstanten $\varepsilon > 0$ fast überall nicht mehr als endlich viele Lösungen besitzt. Danach können wir uns eine vorläufige Vorstellung davon verschaffen, inwieweit sich das allgemeine Approximationsgesetz ändert, wenn wir eine Menge vom Maß Null vernachlässigen wollen.

Beweis. 1. Das Integral (68) möge divergieren. Wir setzen

$$\varphi(x) = e^{Bx} f(e^{Bx}),$$

wobei B die Konstante ist, die bereits im Satz 31 aufgetreten war. Dann wächst das Integral

$$\int_a^A \varphi(x)\,dx = \frac{1}{B}\int_{Ba}^{BA} f(u)\,du,$$

in dem $A > a > 0$ ist, für $A \to \infty$ unbegrenzt. Da aber die Funktion $\varphi(x)$ nach den Bedingungen des Satzes nicht zunimmt, ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)$$

divergent. Nach Satz 30 schließen wir hieraus, daß die Ungleichung

$$a_{i+1} \geq \frac{1}{\varphi(i)}$$

fast überall für unendlich viele Werte von i erfüllt ist. Bei Gültigkeit dieser Ungleichung ist aber

$$\left|\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right| \leq \frac{1}{q_i q_{i+1}} \leq \frac{1}{a_{i+1} q_i^2} \leq \frac{\varphi(i)}{q_i^2}. \tag{69}$$

Nach Satz 31 gilt bei hinreichend großem i fast überall

$$q_i < e^{Bi},$$

woraus

$$i > \frac{\lg q_i}{B}$$

folgt. Deshalb führt die Ungleichung (69) bei hinreichend großem i fast überall zu der Ungleichung

$$\left|\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right| \leq \frac{\varphi\left(\frac{\lg q_i}{B}\right)}{q_i^2} = \frac{f(q_i)}{q_i}.$$

Diese letzte Ungleichung ist somit fast überall für unendlich viele i-Werte erfüllt, womit die erste Behauptung des Satzes bewiesen ist.

2. Nun nehmen wir an, daß das Integral (68) und folglich auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

konvergiert. Wir bezeichnen mit E_n die Menge der Zahlen α des Intervalls $(0, 1)$, die bei geeignet gewähltem ganzzahligem k der Ungleichung

$$\left|\alpha - \frac{k}{n}\right| < \frac{f(n)}{n}$$

genügen (offenbar besteht die Menge E_n einfach aus den Intervallen der Länge $\frac{2f(n)}{n}$, deren Zentren in den Punkten

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$$

liegen, sowie den Intervallen $\left(0, \frac{f(n)}{n}\right)$ und $\left(1 - \frac{f(n)}{n}, 1\right)$.

Es gilt $$\mathfrak{M}E_n \leq 2f(n)$$
(das Zeichen $<$ gilt im Falle $f(n) > \frac{1}{2}$). Somit ist die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}E_n$$
konvergent. Hieraus schließen wir, wie wir das bereits mehrfach getan hatten, daß fast jede Zahl α des Intervalls $(0, 1)$ höchstens endlich vielen Mengen E_n angehören kann. Dies bedeutet aber offenbar, daß fast alle Zahlen α des Intervalls $(0, 1)$ bei hinreichend großem ganzzahligem und positivem q und beliebigem ganzzahligem p der Ungleichung
$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{f(q)}{q}$$
genügen, womit auch die zweite Behauptung des Satzes bewiesen ist.

Im nächsten Paragraphen werden wir eine Methode kennen lernen, die es gestattet, wesentlich tiefer liegende Probleme der metrischen Theorie der Kettenbrüche zu lösen.

§ 15. Das Gaußsche Problem und der Satz von Kusmin

In diesem Paragraphen betrachten wir ein Problem, das geschichtlich gesehen die erste Aufgabe der metrischen Theorie der Kettenbrüche war. Dieses Problem, das bereits von *Gauß* aufgeworfen wurde, fand erst 1928 seine Lösung.

Wir setzen wie üblich
$$\alpha = [0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots],$$
$$r_n = r_n(\alpha) = [a_n; a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots]$$
und bezeichnen mit $z_n = z_n(\alpha)$ den Wert des Kettenbruches
$$[0: a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots],$$
d. h., wir setzen
$$z_n = r_n - a_n.$$
Offenbar ist stets
$$0 \leq z_n < 1.$$
Wir bezeichnen mit $m_n(x)$ das Maß der Menge der Zahlen α im Intervall $(0, 1)$, für die gilt
$$z_n(\alpha) < x.$$

In einem seiner Briefe an *Laplace* behauptete *Gauß*, daß es ihm gelungen sei, den Beweis des Satzes zu finden, demzufolge

$$\lim_{n\to\infty} m_n(x) = \frac{\lg(1+x)}{\lg 2} \qquad (0 \leq x \leq 1)$$

ist. In demselben Brief wies er darauf hin, daß es äußerst wünschenswert wäre, die Differenz

$$m_n(x) - \frac{\lg(1+x)}{\lg 2} \tag{70}$$

für große n abzuschätzen, was ihm nach seinen Worten nicht gelungen war. Der Gaußsche Beweis ist augenscheinlich nirgends veröffentlicht worden. Andere Beweise für diesen Satz waren bis zum Jahre 1928 unbekannt. In diesem Jahre erschien der von *R. O. Kusmin* entdeckte Beweis für die Gaußsche Behauptung. Gleichzeitig fand *Kusmin* eine sehr gute Abschätzung für die Differenz (70). Die Aufgabe dieses Paragraphen besteht in der Darlegung der Kusminschen Ergebnisse sowie einiger Verallgemeinerungen, die wir im weiteren benötigen werden.[1])

Bereits *Gauß* war es bekannt, daß die Funktionenfolge

$$m_0(x),\ m_1(x),\ m_2(x),\ \ldots,\ m_n(x),\ \ldots$$

der Funktionalgleichung

$$m_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ m_n\left(\frac{1}{k}\right) - m_n\left(\frac{1}{k+x}\right) \right\} \quad (0 \leq x \leq 1,\ n \geq 0) \tag{71}$$

genügt. In der Tat ist die Ungleichung

$$z_{n+1} < x$$

wegen der selbstverständlichen Beziehung

$$z_n = \frac{1}{a_{n+1} + z_{n+1}}$$

dann und nur dann erfüllt, wenn bei geeignet gewähltem ganzzahligem positivem k die Ungleichungen

$$\frac{1}{k+x} < z_n \leq \frac{1}{k}$$

1) *Kusmin* formuliert ähnlich wie *Gauß* die von ihm gewonnenen Ergebnisse in der Sprache der Wahrscheinlichkeitsrechnung, was selbstverständlich nichts an ihrem metrischen Inhalt ändert.

erfüllt werden. Da aber das Maß der Menge der Zahlen, die diesen Ungleichungen genügen, offenbar gleich

$$m_n\left(\frac{1}{k}\right) - m_n\left(\frac{1}{k+x}\right)$$

ist, folgt hieraus die Beziehung (71).

Leicht verifiziert man unmittelbar, daß die Funktion

$$\varphi(x) = C \lg (1+x)$$

bei beliebigem konstantem C der Relation

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \varphi\left(\frac{1}{k}\right) - \varphi\left(\frac{1}{k+x}\right) \right\}$$

genügt. Diese Tatsache war anscheinend für *Gauß* der Fingerzeig, um den richtigen Ausdruck für den Grenzwert der Funktion $m_n(x)$ für $n \to \infty$ zu finden.

Die formale Differentiation der Gleichung (71) liefert

$$m'_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^2} m'_n\left(\frac{1}{k+x}\right). \tag{72}$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Gleichung (72) auch sachlich erfüllt ist; denn wegen $z_0(\alpha) = \alpha$ ist $m_0(x) = x$ und folglich $m'_0(x) = 1$. Wenn überhaupt bei irgendeinem n die Funktion $m'_n(x)$ beschränkt und stetig ist, so ist ganz allgemein die auf der rechten Seite von (72) stehende Reihe im Intervall $(0, 1)$ gleichmäßig konvergent. Die Summe dieser Reihe ist daher ebenfalls beschränkt, stetig und gleich $m'_{n+1}(x)$, was aus dem bekannten Satz über die gliedweise Differentiation von Reihen hervorgeht. Die Relation (72) wird somit induktiv bewiesen.

Die Gleichung (72) ist für Untersuchungen erheblich bequemer als die Gleichung (71). Auf sie bezieht sich das Hauptergebnis von *Kusmin*, zu dessen Beweis wir nunmehr übergehen.

Satz 33. *Es sei* $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ *eine Folge reeller Funktionen, die im Intervall* $(0, 1)$ *definiert sind und in diesem Intervall der Relation*

$$f_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^2} f_n\left(\frac{1}{k+x}\right) \qquad (n \geq 0) \tag{73}$$

genügen.

Gilt für $0 \leq x \leq 1$

$$0 < f_0(x) < M \quad \text{und} \quad |f_0(x)| < \mu,$$

so ist

$$f_n(x) = \frac{a}{1+x} + \theta A e^{-\lambda\sqrt{n}} \qquad (0 \leq x \leq 1)$$

mit

$$a = \frac{1}{\lg 2}\int_0^1 f_0(z)\,dz, \qquad |\theta| < 1.$$

Dabei ist λ eine absolute positive Konstante und A eine positive Konstante, die nur von M und μ abhängt.

Da es sich hier um einen komplizierten Beweisgang handelt, wollen wir zunächst einige elementare Hilfssätze vorausschicken.

Hilfssatz 1. *Für ein beliebiges $n \geq 0$ gilt*

$$f_n(x) = \sum^{(n)} f_0\left(\frac{p_n + x p_{n-1}}{q_n + x q_{n-1}}\right) \frac{1}{(q_n + x q_{n-1})^2}; \tag{74}$$

dabei ist $\left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}\right)$ ein beliebiges Intervall vom Rang n, die Summation wird über alle Intervalle vom Rang n (oder, was dasselbe bedeutet, über die Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in den Grenzen von 1 bis ∞) erstreckt.

Beweis.. Für $n = 0$ wird die Gleichung (74) trivial, da in diesem Falle nur das eine Intervall $(0, 1)$ vorliegt, wobei $p_0 = 0$, $q_0 = 1$, $p_{-1} = 1$ und $q_{-1} = 0$ ist. Nehmen wir nun an, die Relation (74) sei für ein gewisses n erfüllt. Wegen der Grundgleichung (73) gilt dann

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^2} f_n\left(\frac{1}{k+x}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \sum^{(n)} f_0\left(\frac{p_n + \frac{1}{k+x} p_{n-1}}{q_n + \frac{1}{k+x} q_{n-1}}\right) \frac{1}{\left(q_n + \frac{1}{k+x} q_{n-1}\right)^2} \\ &= \sum^{(n)} \sum_{k=1}^{\infty} f_0\left\{\frac{(p_n k + p_{n-1}) + x p_n}{(q_n k + q_{n-1}) + x q_n}\right\} \frac{1}{\{(q_n k + q_{n-1}) + x q_n\}^2} \\ &= \sum^{(n+1)} f_0\left(\frac{p_{n+1} + x p_n}{q_{n+1} + x q_n}\right) \frac{1}{(q_{n+1} + x q_n)^2}, \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Hilfssatz 2. *Unter den Voraussetzungen des Satzes* 33 *gilt für* $n \geq 0$

$$|f_n'(x)| < \frac{\mu}{2^{n-3}} + 4M.$$

Beweis. Differenzieren wir die Gleichung (74) gliedweise, so erhalten wir

$$f_n'(x) = \sum^{(n)} f_0'(u) \frac{(-1)^{n-1}}{(q_n + x q_{n-1})^4} - 2 \sum^{(n)} f_0(u) \frac{q_{n-1}}{(q_n + x q_{n-1})^3}.$$

Dabei wurde

$$u = \frac{p_n + x p_{n-1}}{q_n + x q_{n-1}}$$

gesetzt. Die Berechtigung zur gliedweisen Differentiation entnehmen wir der gleichmäßigen Konvergenz beider Summen auf der rechten Seite für $0 \leq x \leq 1$. Beachten wir, daß

$$\frac{1}{(q_n + x q_{n-1})^2} < \frac{2}{q_n (q_n + q_{n-1})}$$

und auf Grund des Satzes 12 (Kapitel A)

$$q_n (q_n + q_{n-1}) > q_n^2 > 2^{n-1}$$

gilt, und ziehen wir die selbstverständliche Relation

$$\sum^{(n)} \frac{1}{q_n (q_n + q_{n-1})} = \sum^{(n)} \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} \right| = 1$$

in Betracht, so erhalten wir auf Grund der Bedingungen des Satzes 33

$$|f_n'(x)| < \frac{\mu}{2^{n-3}} + 4M,$$

was zu beweisen war.

Hilfssatz 3. *Ist*

$$\frac{t}{1+x} < f_n(x) < \frac{T}{1+x} \quad (0 \leq x \leq 1),$$

so gilt auch

$$\frac{t}{1+x} < f_{n+1}(x) < \frac{T}{1+x} \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Beweis. Unter den Voraussetzungen des Hilfssatzes liefert die Grundbeziehung (73)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t}{1 + \frac{1}{k+x}} \frac{1}{(k+x)^2} < f_{n+1}(x) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T}{1 + \frac{1}{k+x}} \frac{1}{(k+x)^2}$$

oder

$$t\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+x)(k+x+1)}<f_{n+1}(x)<T\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+x)(k+x+1)}$$

oder

$$t\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+x}-\frac{1}{k+x+1}\right)<f_{n+1}(x)<T\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+x}-\frac{1}{k+x+1}\right)$$

oder schließlich

$$\frac{t}{1+x}<f_{n+1}(x)<\frac{T}{1+x},$$

was zu beweisen war.

Hilfssatz 4.

$$\int_0^1 f_n(z)\,dz=\int_0^1 f_0(z)\,dz \qquad (n=0,\,1,\,2,\,\ldots).$$

Beweis. Wegen der Grundgleichung (73) gilt für $n>0$

$$\int_0^1 f_n(z)\,dz=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1 f_{n-1}\left(\frac{1}{k+z}\right)\frac{dz}{(k+z)^2}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} f_{n-1}(u)\,du=\int_0^1 f_{n-1}(u)\,du,$$

woraus durch Induktion die Behauptung des Hilfssatzes 4 folgt.

Beweis des Satzes 33. Die Funktion $f_0(x)$ ist laut Voraussetzung differenzierbar und daher für $0\le x\le 1$ stetig. Da sie außerdem in diesem Intervall nach Voraussetzung positiv ist, besitzt sie dort ein positives Minimum, das wir mit m bezeichnen wollen. Aus den Bedingungen $m\le f_0(x)<M$ $(0\le x\le 1)$ geht offenbar

$$\frac{m}{2(1+x)}<f_0(x)<\frac{2M}{1+x} \qquad (0\le x\le 1)$$

oder

$$\frac{g}{1+x}<f_0(x)<\frac{G}{1+x} \qquad (0\le x\le 1)$$

hervor; dabei wurde

$$g=\frac{m}{2},\quad G=2M$$

gesetzt. Nunmehr setzen wir

$$f_n(x) - \frac{g}{1+x} = \varphi_n(x) \quad (0 \leq x \leq 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Nach Hilfssatz 3 genügt die Funktion $F(x) = \frac{g}{1+x}$ der Gleichung

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F\left(\frac{1}{k+x}\right) \frac{1}{(k+x)^2}$$

(was man übrigens auch unmittelbar leicht verifiziert). Hieraus folgt offenbar, daß die Funktionenfolge

$$\varphi_0(x), \ \varphi_1(x), \ \ldots, \ \varphi_n(x), \ \ldots$$

der Gleichung (73) genügt, weshalb für diese alle Folgerungen gelten, die wir aus dieser Gleichung gezogen hatten. Insbesondere gilt auch die Gleichung (74). Setzen wir daher wie vorhin der Kürze halber

$$u = \frac{p_n + x p_{n-1}}{q_n + x q_{n-1}},$$

so erhalten wir

$$\varphi_n(x) = \sum^{(n)} \varphi_0(u) \frac{1}{(q_n + x q_{n-1})^2}.$$

Daraus folgt wegen der selbstverständlichen Ungleichungen

$$q_n + x q_{n-1} \leq q_n + q_{n-1} < 2 q_n \quad \text{und} \quad \varphi_0(u) > 0$$

schließlich

$$\varphi_n(x) > \frac{1}{2} \sum^{(n)} \varphi_0(u) \frac{1}{q_n (q_n + q_{n-1})}. \tag{75}$$

Andererseits liefert der Mittelwertsatz

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \varphi_0(z)\, dz = \frac{1}{2} \sum^{(n)} \varphi_0(u') \frac{1}{q_n (q_n + q_{n-1})}, \tag{76}$$

worin u' ein Punkt des Intervalls $\left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}\right)$ und $\frac{1}{q_n (q_n + q_{n-1})}$ die Länge dieses Intervalls ist. Die Beziehungen (75) und (76) ergeben

$$\varphi_n(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi_0(z)\, dz > \frac{1}{2} \sum^{(n)} \{ \varphi_0(u) - \varphi_0(u') \} \frac{1}{q_n (q_n + q_{n-1})}. \tag{77}$$

Da aber offenbar

$$|\varphi_0(x)| \leq |f_0'(x)| + g < \mu + g \quad (0 \leq x \leq 1)$$

ist, gilt

$$|\varphi_0(u) - \varphi_0(u')| < (\mu + g)\,|u - u'| < \frac{\mu + g}{q_n(q_n + q_{n-1})}$$
$$< \frac{\mu + g}{q_n^2} < \frac{\mu + g}{2^{n-1}},$$

weswegen aus der Ungleichung (77)

$$\varphi_n(x) > \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi_0(z)\,dz - \frac{\mu + g}{2^n} = l - \frac{\mu + g}{2^n}$$

folgt. Dabei wurde

$$l = \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi_0(z)\,dz$$

gesetzt. Wir erhalten also

$$f_n(x) > \frac{g}{1+x} + l - \frac{\mu + g}{2^n} > \frac{g + l - 2^{-n+1}(\mu + g)}{1+x} = \frac{g_1}{1+x}.$$

Völlig analog ergibt sich, wenn wir die Funktionenfolge

$$\psi_n(x) = \frac{G}{1+x} - f_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

in die Betrachtung mit einbeziehen und ähnliche Überlegungen wie vorhin anstellen, die Ungleichung

$$f_n(x) < \frac{G - l' + 2^{-n+1}(\mu + G)}{1+x} = \frac{G_1}{1+x},$$

wobei

$$l' = \frac{1}{2}\int_0^1 \psi_0(z)\,dz$$

gesetzt wurde. Wegen $l > 0$ und $l' > 0$ ist bei hinreichend großem n

$$g < g_1 < G_1 < G$$

und

$$G_1 - g_1 < G - g - (l + l') + 2^{-n+2}(\mu + G).$$

Auf Grund von

$$l + l' = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{G - g}{1+z}\,dz = (G - g)\,\frac{\lg 2}{2}$$

ist aber $$G_1 - g_1 < (G - g)\,\delta + 2^{-n+2}(\mu + G),$$

wobei $$\delta = 1 - \frac{\lg 2}{2} < 1$$

eine absolute positive Konstante ist.

Wir wollen das gewonnene Ergebnis zusammenfassen: *Aus den Bedingungen*

$$\frac{g}{1+x} < f_0(x) < \frac{G}{1+x}, \quad |f_0'(x)| < \mu$$

erhalten wir bei hinreichend großem n

$$\frac{g_1}{1+x} < f_n(x) < \frac{G_1}{1+x},$$

wobei $g < g_1 < G_1 < G$ *und* $G_1 - g_1 < (G - g)\,\delta + 2^{-n+2}(\mu + G)$ *ist.*

Nehmen wir nun statt $f_0(x)$ als Ausgangsfunktion $f_n(x)$, und wiederholen die angestellten Überlegungen, so kommen wir offenbar zu der Ungleichung

$$\frac{g_2}{1+x} < f_{2n}(x) < \frac{G_2}{1+x}.$$

Dabei ist

$$\begin{cases} g_1 < g_2 < G_2 < G_1, \\ G_2 - g_2 < \delta(G_1 - g_1) + 2^{-n+2}(\mu_1 + G_1) \end{cases}$$

und μ_1 eine positive Zahl, für die

$$|f_n'(x)| < \mu_1 \quad (0 \le x \le 1)$$

gilt. Setzen wir diesen Prozeß fort, so gelangen wir ganz allgemein zu der Beziehung

$$\frac{g_r}{1+x} < f_{rn}(x) < \frac{G_r}{1+x} \quad (0 \le x \le 1; \quad r = 0, 1, 2, \ldots),$$

wobei für $r > 0$

$$\begin{cases} g_{r-1} < g_r < G_r < G_{r-1}, \\ G_r - g_r < \delta(G_{r-1} - g_{r-1}) + 2^{-n+2}(\mu_{r-1} + G_{r-1}) \end{cases} \tag{78}$$

gilt. Dabei ist μ_{r-1} eine positive Zahl, die die Bedingung

$$|f_{(r-1)n}'(x)| < \mu_{r-1} \quad (0 \le x \le 1)$$

erfüllt. Nach Hilfssatz 2 können wir

$$\mu_r = \frac{\mu}{2^{rn-3}} + 4M \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots)$$

und folglich, falls n hinreichend groß gewählt ist,

$$\mu_r < 5M \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

setzen. Die sukzessive Anwendung der Ungleichung (78) liefert daher für $r = 1, 2, \ldots, n$

$$G_n - g_n < (G - g)\,\delta^n + 2^{-n+2}\{(\mu + 2M)\,\delta^{n-1} + 7M\delta^{n-2} + 7M\delta^{n-3} + \cdots + 7M\delta + 7M\}.$$

Da $\delta < 1$ eine absolute Konstante ist, folgt hieraus

$$G_n - g_n < Be^{-\lambda n}$$

mit $\lambda > 0$ als absoluter Konstanten, während $B > 0$ nur von M und μ abhängt.

Hieraus geht zunächst hervor, daß ein gemeinsamer Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} G_n = \lim_{n\to\infty} g_n = a$$

existiert und daß

$$\left| f_{n2}(x) - \frac{a}{1+x} \right| < Be^{-\lambda n} \qquad (0 \le x \le 1) \tag{79}$$

gilt, woraus insbesondere

$$\int_0^1 f_{n2}(z)\,dz \longrightarrow a \lg 2 \qquad (n \longrightarrow \infty)$$

und daher nach Hilfssatz 4

$$a = \frac{1}{\lg 2} \int_0^1 f_0(z)\,dz$$

folgt. Schließlich sei $n^2 \le N < (n+1)^2$. Da auf Grund der Ungleichung (79)

$$\frac{a - 2Be^{-\lambda n}}{1+x} < f_{n2}(x) < \frac{a + 2Be^{-\lambda n}}{1+x}$$

ist, ergibt sich nach Hilfssatz 3

$$\frac{a - 2Be^{-\lambda n}}{1+x} < f_N(x) < \frac{a + 2Be^{-\lambda n}}{1+x}$$

oder

$$\left| f_N(x) - \frac{a}{1+x} \right| < 2Be^{-\lambda n} = Ae^{-\lambda(n+1)} < Ae^{-\lambda\sqrt{N}},$$

worin $A = 2Be^{\lambda}$ gesetzt wurde. Diese Ungleichung, die wir für hinreichend große N gewonnen haben, läßt sich offenbar durch geeignete Vergrößerung der Konstanten A so erweitern, daß sie für alle $N \geq 0$ gültig ist, womit der Satz 33 vollständig bewiesen ist.

Nun kehren wir zum Gaußschen Problem zurück und setzen

$$f_n(x) = m_n'(x) \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Dann gilt $f_0(x) \equiv 1$; alle Bedingungen des Satzes 33 sind daher erfüllt, und wir erhalten

$$\left| m_n'(x) - \frac{1}{(1+x)\lg 2} \right| < A e^{-\lambda\sqrt{n}} \quad (0 \leq x \leq 1), \tag{80}$$

woraus durch Integration

$$\left| m_n(x) - \frac{\lg(1+x)}{\lg 2} \right| < A e^{-\lambda\sqrt{n}} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

folgt. A und λ sind dabei absolute positive Konstanten. Damit ist offenbar nicht nur die Gaußsche Behauptung bewiesen, sondern auch eine gute Abschätzung des Restgliedes gefunden.

Dieses Ergebnis wollen wir nun zur Abschätzung des Maßes der Menge der Punkte verwenden, für die $a_n = k$ bei großen n-Werten ist.

Da die Bedingung $a_n = k$ offenbar den Ungleichungen

$$\frac{1}{k+1} < z_{n-1} \leq \frac{1}{k}$$

gleichwertig ist, gilt

$$\mathfrak{M}E\binom{n}{k} = m_{n-1}\left(\frac{1}{k}\right) - m_{n-1}\left(\frac{1}{k+1}\right) = \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} m_{n-1}'(x)\,dx,$$

woraus wegen der Ungleichung (80)

$$\left| \mathfrak{M}E\binom{n}{k} - \frac{\lg\left\{1 + \frac{1}{k(k+2)}\right\}}{\lg 2} \right| < \frac{A}{k(k+1)} e^{-\lambda\sqrt{n-1}} \tag{81}$$

folgt. Aus dieser Ungleichung erhalten wir für die Größe $\mathfrak{M}E\binom{n}{k}$, für die wir in § 13 nur recht grobe Ungleichungen aufgestellt hatten, nunmehr die exakte Grenzwertbeziehung

$$\mathfrak{M}E\binom{n}{k} \longrightarrow \frac{\lg\left\{1 + \frac{1}{k(k+2)}\right\}}{\lg 2} \qquad (n \longrightarrow \infty).$$

So strebt z. B. das Maß der Menge der Punkte, für die $a_n = 1$ ist, für $n \to \infty$ gegen die Größe

$$\frac{\lg 4 - \lg 3}{\lg 2}.$$

Der Satz 33 gestattet, neben dem Beweis der Gaußschen Behauptung, ein weiteres, allgemeineres und sehr wichtiges Ergebnis zu gewinnen, das wir künftig werden verwenden müssen. Wir bezeichnen mit $M_n(x)$ das Maß der Menge der Zahlen, die einem festen Intervall vom Rang k angehören und außerdem der Bedingung $z_{k-n} < x$ genügen. Mit anderen Worten, $M_n(x)$ ist das Maß der Menge der Zahlen im Intervall $(0, 1)$, die die Bedingungen

$$a_1 = r_1,\ a_2 = r_2,\ \ldots,\ a_k = r_k;\ z_{k+n} < x \tag{82}$$

erfüllen. Dabei sind die $r_1, r_2, \ldots, r_k$ gewisse feste natürliche Zahlen, während $n \geq 0$ und x $(0 \leq x \leq 1)$ beliebig variieren können.

Sollen die Bedingungen (82) erfüllt sein, so ist offenbar notwendig und hinreichend, daß die Bedingungen

$$a_1 = r_1,\quad a_2 = r_2,\ \ldots,\quad a_k = r_k;\quad \frac{1}{r+x} < z_{k+n-1} \leq \frac{1}{r}$$

gelten; r ist dabei eine natürliche Zahl. Hieraus folgt

$$M_n(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ M_{n-1}\left(\frac{1}{r}\right) - M_{n-1}\left(\frac{1}{r+x}\right) \right\} \quad (n \geq 1,\ 0 \leq x \leq 1),$$

weshalb die Funktionenfolge $M_0'(x)$, $M_1'(x)$, $\ldots$, $M_n'(x)$, $\ldots$ der Gleichung (73) genügt.

Eine beliebige Zahl α des Intervalls $\left(\frac{p_k}{q_k}, \frac{p_k + p_{k+1}}{q_k + q_{k-1}}\right)$ läßt sich in der Form

$$\alpha = \frac{p_k r_{k+1} + p_{k-1}}{q_k r_{k+1} + q_{k-1}}$$

oder wegen $z_k = \frac{1}{r_{k+1}}$ in der Form

$$\alpha = \frac{p_k + z_k p_{k-1}}{q_k + z_k q_{k-1}}$$

darstellen. Für $z_k < x$ muß die Zahl α zwischen $\frac{p_k}{q_k}$ und $\frac{p_k + x p_{k-1}}{q_k + x q_{k-1}}$ eingeschlossen sein; deshalb ist

$$M_0(x) = \left| \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_k + x p_{k-1}}{q_k + x q_{k-1}} \right| = \frac{x}{q_k (q_k + x q_{k-1})}. \tag{83}$$

Setzen wir nunmehr

$$M_n(x) = \mathfrak{M} E \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & k \\ r_1, & r_2, & \ldots, & r_k \end{pmatrix} \chi_n(x) \quad (n \geq 0,\ 0 \leq x \leq 1),$$

so erhalten wir eine neue Funktionenfolge

$$\chi_0(x),\ \chi_1(x),\ \ldots,\ \chi_n(x),\ \ldots;$$

hierbei genügen die Funktionen $\chi_n'(x)$, die sich von den entsprechenden Funktionen $M_n'(x)$ nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden, ebenfalls der Gleichung (73). Da offenbar

$$\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1,\ 2,\ \ldots,\ k\\ r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_k\end{pmatrix} = \left|\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_k + p_{k-1}}{q_k + q_{k-1}}\right| = \frac{1}{q_k(q_k + q_{k-1})}$$

ist, liefert die Gleichung (83)

$$\chi_0(x) = \frac{(q_k + q_{k-1})\,x}{q_k + q_{k-1}x},$$

woraus

$$\chi_0'(x) = \frac{q_k(q_k + q_{k-1})}{(q_k + q_{k-1}x)^2}$$

und

$$\chi_0''(x) = -\frac{2q_k q_{k-1}(q_k + q_{k-1})}{(q_k + q_{k-1}x)^3}$$

folgt. Somit ist

$$\frac{1}{2} < \chi_0'(x) < 2, \quad |\chi_0''(x)| < 4 \quad (0 \le x \le 1).$$

Dies zeigt, daß die Funktionenfolge der $\chi_n'(x)$ die Anwendung des Satzes 33 zuläßt. Dabei erweisen sich die Zahlen A und λ als absolute Konstanten, d. h., sie hängen insbesondere nicht von den $r_1, r_2, \ldots, r_k$ ab. Wir erhalten daher

$$\chi_n'(x) = \frac{M_n'(x)}{\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1,\ 2,\ \ldots,\ k\\ r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_k\end{pmatrix}} = \frac{1}{(1+x)\lg 2} + \theta A e^{-\lambda\sqrt{n}}, \quad |\theta| < 1.$$

Integrieren wir diese Beziehung zwischen den Grenzen $\frac{1}{r+1}$ und $\frac{1}{r}$ (r ist dabei eine beliebige natürliche Zahl), so erhalten wir für $|\theta'| < 1$

$$\frac{M_n\left(\frac{1}{r}\right) - M_n\left(\frac{1}{r+1}\right)}{\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1,\ 2,\ \ldots,\ k\\ r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_k\end{pmatrix}} = \frac{\lg\left\{1 + \frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\lg 2} + \frac{\theta' A}{r(r+1)} e^{-\lambda\sqrt{n}}.$$

Da aber offenbar

$$M_n\left(\frac{1}{r}\right) - M_n\left(\frac{1}{r+1}\right) = \mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1,\ 2,\ \ldots,\ k,\ k+n+1\\ r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_k,\ r\end{pmatrix}$$

ist, gilt

$$\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, 2, \ldots, k, k+n+1\\ r_1, r_2, \ldots, r_k, r\end{pmatrix}$$
$$=\left(\frac{\lg\left\{1+\frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\lg 2}+\frac{\theta' A e^{-\lambda\sqrt{n}}}{r(r+1)}\right)\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, 2, \ldots, k\\ r_1, r_2, \ldots, r_k\end{pmatrix}.$$

Schließlich können wir diese Beziehung über einige (beliebige) der Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_k$ zwischen den Grenzen 1 und ∞ summieren. Dadurch verschwinden einfach die entsprechenden Indizes auf beiden Seiten der Relation; dann erhalten wir an Stelle der sukzessiven Indizes $1, 2, \ldots, k$ eine Reihe völlig willkürlicher Indizes $n_1, n_2, \ldots, n_t$, wobei die Beziehung in ihren übrigen Wesenszügen völlig ungeändert bleibt. Wir erhalten auf diese Weise den

Satz 34. *Es existieren zwei absolute positive Konstanten A und λ derart, daß für $n_1 < n_2 < \ldots < n_t < n_{t+1}$ und bei beliebigen ganzzahligen und positiven $r_1, r_2, \ldots, r_t, r$ die Ungleichung gilt*

$$\left|\frac{\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}n_1, n_2, \ldots, n_t, n_{t+1}\\ r_1, r_2, \ldots, r_t, r\end{pmatrix}}{\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}n_1, n_2, \ldots, n_t\\ r_1, r_2, \ldots, r_t\end{pmatrix}}-\frac{\lg\left\{1+\frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\lg 2}\right|$$
$$<\frac{A}{r(r+1)}e^{-\lambda\sqrt{n_{t+1}-n_t-1}}.$$

Dieses Ergebnis zeigt, daß nicht nur das Maß der Menge der Zahlen im Intervall $(0, 1)$, für die $a_n = r$ gilt, für $n \to \infty$ gegen einen bestimmten Grenzwert konvergiert, sondern, daß den gleichen Grenzwert auch das relative Maß der Menge der Zahlen besitzt, die diesen Bedingungen bei beliebigen fixierten Werten einer beliebigen Gruppe vorangehender Elemente genügen.

§ 16. Mittelwerte

Die Ergebnisse des vorigen Paragraphen geben uns die Möglichkeit, den nachstehenden allgemeinen Satz zu beweisen.

Satz 35. *Es sei $f(r)$ eine nicht negative Funktion der natürlichen Variablen r. Ferner mögen positive Konstanten C und δ derart existieren, daß*

$$f(r) < C r^{\frac{1}{2}-\delta} \qquad (r = 1, 2. \ldots)$$

ist. Dann gilt für alle Zahlen des Intervalls $(0, 1)$ *mit Ausnahme höchstens einer Menge vom Maß Null die Gleichung*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k) = \sum_{r=1}^{\infty} f(r)\,\frac{\lg\left\{1+\frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\lg 2}. \tag{84}$$

Vorbemerkung. Die Konvergenz der Reihe auf der rechten Seite der Gleichung (84) geht selbstverständlich aus der Bedingung hervor, die der Funktion $f(r)$ auferlegt wurde.

Beweis. Wir setzen

$$\int_0^1 f(a_k)\,d\alpha = u_k, \quad \int_0^1 \{f(a_k) - u_k\}^2\,d\alpha = b_k,$$

$$\int_0^1 \{f(a_i) - u_i\}\,\{f(a_k) - u_k\}\,d\alpha = g_{ik},$$

$$\sum_{k=1}^{n}\{f(a_k) - u_k\} = s_n = s_n(\alpha).$$

Die Existenz aller aufgeschriebenen Integrale folgt leicht aus den vorausgesetzten Eigenschaften der Funktion $f(r)$. Wegen

$$\{f(r)\}^2 < C^2 r^{1-2x}$$

hat in der Tat das Integral

$$\int_0^1 \{f(a_k)\}^2\,d\alpha = \sum_{r=1}^{\infty}\{f(r)\}^2\,\mathfrak{M}E\left(\frac{k}{r}\right) < 2C^2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{r^{1-2\delta}}{r^2} = C_1$$

einen Sinn, so daß auf Grund der Schwarzschen Ungleichung leicht die Existenz der genannten Integrale folgt. Insbesondere ergibt sich hieraus

$$\left.\begin{aligned} b_k &= \int_0^1 \{f(a_k)\}^2\,d\alpha - u_k < C_1, \\ u_k &= \int_0^1 f(a_k)\,d\alpha < \sqrt{\int_0^1 \{f(a_k)\}^2\,d\alpha} < \sqrt{C_1} \end{aligned}\right\}. \tag{85}$$

Ferner gilt für $k > i$ offenbar

$$g_{ik} = \int_0^1 f(a_i)\, f(a_k)\, d\alpha - u_i u_k$$

$$= \sum_{r,s=1}^{\infty} f(r)\, f(s)\, \mathfrak{M}E\binom{i,\ k}{r,\ s} - u_i u_k. \qquad (86)$$

Auf Grund des Satzes 34 und der abschließenden Ungleichungen von § 12 ist aber

$$\left| \mathfrak{M}E\binom{i,\ k}{r,\ s} - \frac{\lg\left\{1 + \frac{1}{s(s+2)}\right\}}{\lg 2}\, \mathfrak{M}E\binom{i}{r} \right|$$

$$< \frac{A e^{-\lambda\sqrt{k-i-1}}}{s(s+1)}\, \mathfrak{M}E\binom{i}{r}$$

$$< 3A e^{-\lambda\sqrt{k-i-1}}\, \mathfrak{M}E\binom{i}{r}\, \mathfrak{M}E\binom{k}{s} \qquad (87)$$

und

$$\left| \mathfrak{M}E\binom{k}{s} - \frac{\lg\left\{1 + \frac{1}{s(s+2)}\right\}}{\lg 2} \right|$$

$$< \frac{A e^{-\lambda\sqrt{k-1}}}{s(s+1)} < 3A e^{-\lambda\sqrt{k-1}}\, \mathfrak{M}E\binom{k}{s}. \qquad (88)$$

Multiplizieren wir nun die Ungleichung (88) mit $\mathfrak{M}E\binom{i}{r}$ und vergleichen das gewonnene Ergebnis mit der Ungleichung (87), so erhalten wir

$$\left| \mathfrak{M}E\binom{i,\ k}{r,\ s} - \mathfrak{M}E\binom{i}{r}\, \mathfrak{M}E\binom{k}{s} \right|$$

$$< 6A e^{-\lambda\sqrt{k-i-1}}\, \mathfrak{M}E\binom{i}{r}\, \mathfrak{M}E\binom{k}{s},$$

weshalb die Relation (86) die Ungleichung

$$\left| g_{ik} - \sum_{r,s=1}^{\infty} f(r)\, f(s)\, \mathfrak{M}E\binom{i}{r}\, \mathfrak{M}E\binom{k}{s} + u_i u_k \right|$$

$$< 6A e^{-\lambda\sqrt{k-i-1}} \sum_{r,s=1}^{\infty} f(r)\, f(s)\, \mathfrak{M}E\binom{i}{r}\, \mathfrak{M}E\binom{k}{s}$$

liefert. Beachten wir, daß

$$\sum_{r,s=1}^{\infty} f(r)\, f(s)\, \mathfrak{M}E\binom{i}{r}\, \mathfrak{M}E\binom{k}{s} = u_i u_k$$

ist und verwenden zur Abschätzung der rechten Seite die zweite der Ungleichungen (85), so erhalten wir hieraus

$$|g_{ik}| < 6A e^{-\lambda\sqrt{k-i-1}} u_i u_k < 6A C_1 e^{-\lambda\sqrt{k-i-1}}. \tag{89}$$

Unter Verwendung der Abschätzungen (85) und (89) finden wir für $n > m > 0$

$$\begin{aligned}\int_0^1 (s_n - s_m)^2 \, d\alpha &= \int_0^1 \left\{ \sum_{k=m+1}^{n} (f(a_k) - u_k) \right\}^2 d\alpha \\ &= \sum_{k=m+1}^{n} \int_0^1 \{f(a_k) - u_k\}^2 \, d\alpha \\ &+ 2 \sum_{i=m+1}^{n} \sum_{k=i+1}^{n} \int_0^1 \{f(a_i) - u_i\} \{f(a_k) - u_k\} \, d\alpha \\ &= \sum_{k=m+1}^{n} b_k + 2 \sum_{i=m+1}^{n} \sum_{k=i+1}^{n} g_{ik} < C_1 (n - m) \\ &+ 12 A C_1 \sum_{i=m+1}^{n} \sum_{k=i+1}^{\infty} e^{-\lambda\sqrt{k-i-1}} < C_2 (n - m), \end{aligned} \tag{90}$$

wobei C_2 eine neue positive Konstante ist.

Nun bezeichnen wir mit e_n die Menge der Zahlen im Intervall $(0, 1)$, für die

$$|s_n| \geq \varepsilon n$$

gilt; dabei ist ε eine beliebig vorgegebene positive Zahl. Offenbar ist

$$\int_0^1 s_n^2 \, d\alpha \geq \int_{e_n} s_n^2 \, d\alpha \geq \varepsilon^2 n^2 \mathfrak{M} e_n,$$

weshalb die Ungleichung (90) (für $m = 0$)

$$\mathfrak{M} e_n \leq \frac{\int_0^1 s_n^2 \, d\alpha}{\varepsilon^2 n^2} < \frac{C_2}{\varepsilon^2 n}$$

liefert. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M} e_n^2$$

konvergiert somit, und infolgedessen gehören, wie wir wissen, fast alle Zahlen des Intervalls (0, 1) höchstens endlich vielen Mengen e_{n^2} $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ an. Dies bedeutet, daß für fast alle Zahlen des Intervalls (0, 1) bei hinreichend großem n die Abschätzung

$$\frac{s_{n^2}}{n^2} < \varepsilon$$

gilt. Da aber ε beliebig klein ist, gilt fast überall

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_{n^2}}{n^2} = 0. \tag{91}$$

Ferner liefert die Formel (90) für $n^2 \leq N < (n+1)^2$

$$\int_0^1 (s_N - s_{n^2})\, d\alpha < C_2 (N - n^2) < C_2 (2n + 1) \leq 3 C_2 n.$$

Bezeichnen wir mit $e_{n,N}$ die Menge der Zahlen des Intervalls (0, 1), für die $|s_N - s_{n^2}| \geq \varepsilon n^2$ gilt, und setzen wir

$$\sum_{N=n^2}^{(n+1)^2-1} e_{n,N} = E_n,$$

so erhalten wir für $n^2 \leq N < (n+1)^2$

$$\int_0^1 (s_N - s_{n^2})^2\, d\alpha \geq \int_{e_{n,N}} (s_N - s_{n^2})^2\, d\alpha > \varepsilon^2 n^4 \mathfrak{M} e_{n,N},$$

$$\mathfrak{M} e_{n,N} < \frac{3 C_2}{\varepsilon^2 n^3},$$

$$\mathfrak{M} E_n \leq \sum_{N=n^2}^{(n+1)^2-1} \mathfrak{M} e_{n,N} < \frac{3 C_2 (2n+1)}{\varepsilon^2 n^3} \leq \frac{9 C_2}{\varepsilon^2 n^2},$$

weshalb die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M} E_n$ konvergent ist. Fast jede Zahl des Intervalls (0, 1) gehört daher, wie wir wissen, höchstens endlich vielen Mengen E_n und damit auch höchstens endlich vielen Mengen $e_{n,N}$ an. Dies bedeutet aber, daß fast alle Zahlen des Intervalls (0,1) bei hinreichend großem n und für $n^2 \leq N \leq (n+1)^2$ der Ungleichung

$$|s_N - s_{n^2}| < \varepsilon n^2$$

genügen. Mit anderen Worten: bei hinreichend großem n und für $n^2 \leq N \leq (n+1)^2$ gilt fast überall

$$\frac{|s_N - s_{n^2}|}{n^2} < \varepsilon$$

und, da ε beliebig klein ist, auch

$$\frac{s_N}{n^2} - \frac{s_{n^2}}{n^2} \longrightarrow 0 \qquad [n \longrightarrow \infty, \quad n^2 \leq N < (n+1)^2].$$

Auf Grund der Relation (91) folgt hieraus offenbar, daß fast überall

$$\frac{s_N}{n^2} \longrightarrow 0 \qquad [n \longrightarrow \infty, \quad n^2 \leq N < (n+1)^2],$$

und somit erst recht

$$\frac{s_N}{N} \longrightarrow 0 \qquad (N \longrightarrow \infty)$$

gilt. Mit anderen Worten: es gilt fast überall

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(a_k) - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} u_k \longrightarrow 0 \qquad (N \longrightarrow \infty). \tag{92}$$

Nach der im vorigen Paragraphen aufgestellten Formel (81) ist aber

$$\left| u_k - \sum_{r=1}^{\infty} f(r) \frac{\lg\left\{1 + \frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\lg 2} \right|$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} f(r) \left| \mathfrak{M}E\left(\frac{k}{r}\right) - \frac{\lg\left(1 + \frac{1}{r(r+2)}\right)}{\lg 2} \right|$$

$$< A e^{-\lambda\sqrt{k-1}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(r)}{r(r+1)} < A_1 e^{-\lambda\sqrt{k}},$$

worin A_1 eine neue positive Konstante bedeutet. Daher strebt

$$u_k \longrightarrow \sum_{r=1}^{\infty} f(r) \frac{\lg\left\{1 + \frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\lg 2} \quad \text{für } (k \longrightarrow \infty)$$

und folglich auch

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} u_k \longrightarrow \sum_{r=1}^{\infty} f(r) \frac{\lg\left\{1 + \frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\lg 2} \quad \text{für } (N \longrightarrow \infty).$$

Auf Grund dessen ergibt die Relation (92), daß fast überall

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(a_k) \longrightarrow \sum_{r=1}^{\infty} f(r)\,\frac{\lg\left\{1+\frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\lg 2}$$

im Intervall $(0, 1)$ gilt, womit der Satz 35 bewiesen ist.

Der bewiesene Satz gestattet es, eine Reihe von Eigenschaften der Kettenbrüche zu erkennen, die für fast alle Irrationalitäten gelten. Wir setzen z. B.

$$f(r) = 1 \quad \text{für} \quad r = k \quad \text{und} \quad f(r) = 0 \quad \text{für} \quad r \neq k,$$

worin k eine (beliebige) natürliche Zahl bedeutet. Offenbar stellt in diesem Falle die Summe

$$\psi_n(k) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i)$$

eine Zahl dar, die angibt, wie oft die Zahl k unter den ersten n-Elementen des betreffenden Kettenbruches auftritt. Der Quotient

$$\frac{\psi_n(k)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i)$$

gibt gleichsam die *Dichte* der Zahl k unter den ersten n-Elementen dieses Kettenbruches an. Schließlich läßt sich der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\psi_n(k)}{n} = d(k),$$

falls er überhaupt existiert, naturgemäß als *die Dichte der Zahl k in der gesamten Elementenfolge des betreffenden Kettenbruches* interpretieren.

Da die von uns definierte Funktion $f(r)$ offenbar allen Voraussetzungen des Satzes 35 genügt, können wir auf Grund dieses Satzes schließen, daß *für ein beliebiges k diese Dichte fast überall existiert und fast überall die gleiche bleibt.* Darüber hinaus gibt der gleiche Satz die Möglichkeit, den Wert dieser Dichte zu berechnen: offenbar gilt fast überall

$$d(1) = \frac{\lg 4 - \lg 3}{\lg 2}, \quad d(2) = \frac{\lg 9 - \lg 8}{\lg 2}, \quad d(3) = \frac{\lg 16 - \lg 15}{\lg 2}$$

usw. Somit tritt jede natürliche Zahl als Element in den Entwicklungen fast aller Zahlen im Mittel gleich häufig auf.

Ein anderes interessantes Ergebnis erhalten wir, wenn wir

$$f(r) = \lg r \quad (r = 1, 2, 3, \ldots)$$

setzen. Offenbar sind alle Bedingungen des Satzes 35 hierbei erfüllt. Deshalb finden wir, daß fast überall

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lg a_i \longrightarrow \sum_{r=1}^{\infty}\lg r\,\frac{\lg\left\{1+\frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\lg 2} \qquad (n\longrightarrow\infty)$$

gilt oder, was dasselbe bedeutet,

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \longrightarrow \prod_{r=1}^{\infty}\left\{1+\frac{1}{r(r+2)}\right\}^{\frac{\lg r}{\lg 2}}.$$

Somit strebt das geometrische Mittel der ersten n Elemente für $n\to\infty$ *fast überall gegen die absolute Konstante*

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left\{1+\frac{1}{r(r+2)}\right\}^{\frac{\lg r}{\lg 2}} = 2,\,6\dots$$

Offenbar gestattet der Satz 35, ähnliche Ergebnisse auch für eine ganze Reihe anderer Mittelwerte zu gewinnen. Was jedoch das arithmetische Mittel

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \tag{93}$$

betrifft, so ist dessen Untersuchung nach dieser Methode unmöglich, da die entsprechende Funktion $f(r)=r$ die Voraussetzungen des Satzes 35 nicht erfüllt. Doch läßt sich mit Hilfe elementarerer Überlegungen erkennen, daß der Ausdruck (93) fast nirgends einen endlichen Grenzwert besitzen kann. In der Tat gilt auf Grund des Satzes 30 (§ 13) fast überall für unendlich viele Werte von n

$$a_n > n\lg n$$

und damit erst recht

$$\sum_{i=1}^{n} a_i > n\lg n;$$

daraus folgt

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i > \lg n\,.$$

Somit ist die Größe (93) fast überall unbeschränkt, weshalb sie, wie wir bereits behauptet hatten, keinen endlichen Grenzwert besitzen kann.