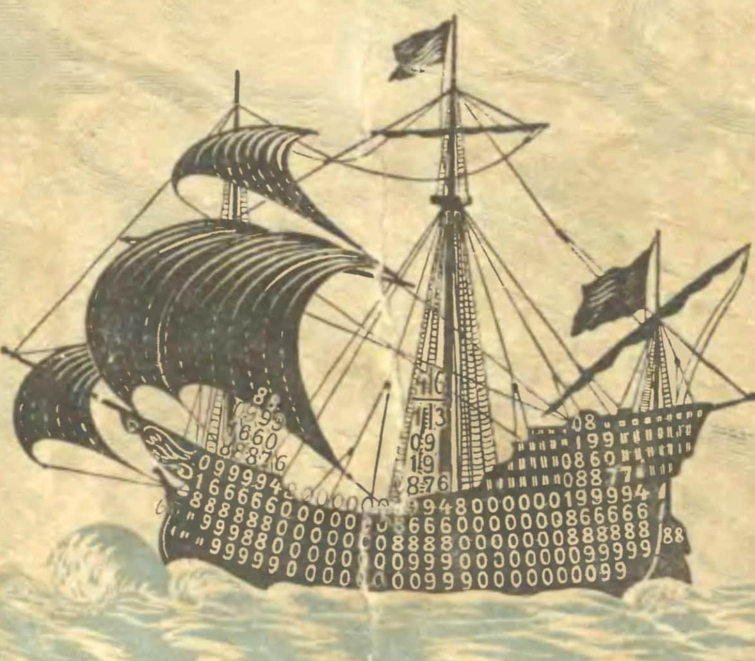
Я. И. ПЕРЕЛЬМАН

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ АРИФМЕТИКА



«ВРЕМЯ»

ПРЕДИСЛОВИЕ

На русском языке имеется целый ряд оригинальных и переводных сборников [1]), преследующих в общем ту же цель, что и настоящая книга: оживить школьную математику введением в нее интересных задач, занимательных упражнений, любопытных теоретических и практических сведений. Знакомым с этой литературой хорошо известно, что большинство подобных книг усердно черпают свой материал из одного и того же ограниченного фонда, накопленного столетиями; отсюда—близкое сходство этих сочинений, разрабатывающих, с различной детальностью, почти одни и те же темы. Но традиционный инвентарь математических развлечений достаточно уже исчерпан в нашей литературе. Новые книги этого рода должны привлекать новые сюжеты.

„Занимательная арифметика“ представляет в большей своей части попытку предложить ряд новых, еще не разрабатывавшихся сюжетов арифметических развлечений. Подыскание новых тем в столь многосторонне обследованной области—дело нелегкое: составитель не может

---

[1]) Среди них известиый сборник Е. И. Игнатьева „В царстве смекалки“ (из трех его книг 2-я и 3-я составлены при участни автора предлагаемого сборннка) почти исчерпывает весь „классический“ материал арифметических развлечений.

здесь пользоваться коллективным трудом длинного ряда известных и безызвестных собирателей, а предоставлен лишь собственным силам. Поэтому к „Занимательной арифметике“, как к первому опыту обновления традиционного материала подобных сборников, не должна прилагаться слишком строгая мерка.

Другая особенность предлагаемого сборника та, что он ограничивается материалом чисто арифметическим, стремясь возможно теснее примкнуть к различным отделам школьной арифметики. Развлечения, хотя бы и занимательные, но не затрагивающие ни одного из ее отделов, не нашли себе места в книге.

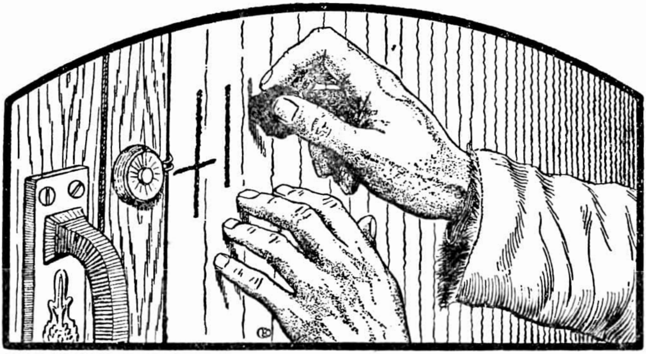
Наконец, заботясь о том, чтобы сборник читался легко, не требуя чрезмерного напряжения, составитель избегал трудных, запутанных вопросов и включал только такой материал, который вполне посилен для большинства читателей. Превращать приятную игру ума в утомительное занятие, чересчур серьезное для развлечения и слишком бесплодное для серьезной работы — значило бы извращать цель и смысл подобного рода литературы.

Хотя книга имеет в виду читателей, знакомых лишь с элементами арифметики, в ней найдутся страницы, небезынтересные, быть может, и для более сведущих. Усердная просьба к таким читателям—не отказать сообщить автору о замеченных ими недостатках книги[1]). За прежде сделанные указания автор приносит своим корреспондентам глубокую признательность.

Я. П.

---

[1]) Адрес для корреспонденции: Ленинград, Стремянная ул., 4. Кооперативное Издательство „Время“. Якову Исидоровичу Перельману.



Глава I

СТАРОЕ И НОВОЕ О ЦИФРАХ И НУМЕРАЦИИ

ТАИНСТВЕННЫЕ ЗНАКИ

Задача № 1.

В первые дни русской революции, в марте 1917 года, жители Ленинграда (тогда — Петрограда) были немало озадачены и даже встревожены таинственными знаками, появившимися, неизвестно как, у дверей многих квартир. Молва приписывала этим знакам разнообразные начертания. Те знаки, которые мне пришлось видеть, имели форму восклицательных знаков, чередующихся с крестами, какие ставились раньше возле фамилий умерших По общему убеждению, они ничего хорошего означать не могли и вселяли страх в растерянных граждан.

По городу пошли зловещие слухи. Заговорили о грабительских шайках, помечающих квартиры своих будущих жертв. „Комиссар города Петрограда", успокаивая население, утверждал, что „таинственные знаки, которые чьей-то невидимой рукой делаются на дверях мирных обывателей в виде крестов, букв, фигур, как выяснилось по произведенному дознанию, делаются провокаторами и германскими шпионами"; он приглашал жителей все эти знаки стирать и уничтожать, „а в случае обнаружения лиц, занимающихся этой работой, задерживать и направлять по назначению".

Таинственные восклицательные знаки и зловещие кресты появились также у дверей моей квартиры и квартир моих соседей. Некоторый опыт в распутывании замысловатых задач помог мне, однако, разгадать нехитрый и нисколько не страшный секрет этой тайнописи.

Решение.

Своим „открытием" я поспешил поделиться с согражданами, поместив в газете следующую заметку[1]):

„Таинственные знаки".

„В связи с таинственными знаками, появившимися на стенах многих петроградских домов, небесполезно разъяснить смысл одной категории подобных знаков, которые, несмотря на зловещее начертание, имеют самое невинное происхождение. Я говорю о знаках такого типа:

†!! ††!!!!! †††!!!

„Подобные знаки замечены во многих домах на черных лестницах у дверей квартир. Обычно знаки этого типа имеются у *всех* дверей данного дома, при чем

---

[1]) Вечерний выпуск газеты „Биржевые Ведомости" от 16 марта 1917 г.

в пределах одного дома двух одинаковых знаков не наблюдается. Их мрачное начертание естественно внушает тревогу жильцам. Между тем, смысл их, вполне невинный, легко раскрывается, если сопоставить их с номерами соответствующих квартир. Так, например, приведенные выше знаки найдены мною у дверей квартир № 12, № 25 и № 33:

†!!	††!!!!!	†††!!!
12	25	33

„Нетрудно догадаться, что кресты означают десятки, а палочки — единицы; так оказалось *во всех без исключения случаях*, которые мне приходилось наблюдать. Своеобразная нумерация эта, очевидно, принадлежит дворникам-китайцам[1]), не понимающим наших цифр. Появились эти знаки, надо думать, еще до революции, но только сейчас обратили на себя внимание встревоженных граждан".

Таинственные знаки такого же очертания, но только не с прямыми, а с *косыми* крестами были обнаружены и в таких домах, где дворниками служили пришедшие из деревень русские крестьяне. Здесь уже нетрудно было выяснить истинных авторов тайнописи, вовсе и не подозревавших, что их безыскусственные обозначения №-ров квартир только теперь были замечены и вызвали такой переполох.

СТАРИННАЯ НАРОДНАЯ НУМЕРАЦИЯ

Откуда взяли ленинградские дворники этот простой способ обозначения чисел: кресты — десятки, палочки —

---

1) Их было много тогда в Ленинграде. Позднее я узнал, что китайский иероглиф для 10 имеет как раз указанную форму креста (китайцы не употребляют наших „арабских" цифр).

единицы? Конечно, не придумали этих знаков в городе, а привезли их из родных деревень. Нумерация эта давно уже в широком употреблении и понятна каждому, даже неграмотному крестьянину в самом глухом углу нашего Союза. Восходит она, без сомнения, к глубокой древности и употребительна не только у нас. Не говоря уже о родстве с китайскими обозначениями, бросается в глаза и сходство этой упрощенной нумерации с римской: и в римских цифрах палочки означают единицы, косые кресты— десятки.

Любопытно, что народная нумерация эта некогда была даже у нас узаконена: по такой именно системе, только более развитой, должны были вестись сборщиками податей записи в податной тетради. „Сборщик, — читаем мы в старом *Своде Законов,*—принимая от кого-либо из домохозяев вносимые к нему деиьги, должен сам, или через писаря, записать в податной тетради против имени того домохозяина, которого числа сколько получено денег, выставляя количество принятой суммы цифрами и *знаками.* Знаки сии для сведения всех и каждого ввести повсеместно одинаковые. а именно:

десять рублей означать знаком . . □
рубль . . . . ○
десять копеек . . . . ×
копейка . . . . |
четверть . . . . —

Например, двадцать восемь рублей пятьдесят семь копеек три четверти:

(□□○○○○○○○○××××× ||||||| ≡)

В другом месте того же тома „Свода Законов“ находим еще раз упоминание об обязательном употреблении народных числовых обозначений. Приводятся особые знаки для тысяч рублей — в виде шестиконечной звезды с крестом в ней, и для ста рублей—в виде колеса с 8 спицами. Но обозначения для рубля и десяти копеек здесь устанавливаются иные, чем в предыдущем законе.

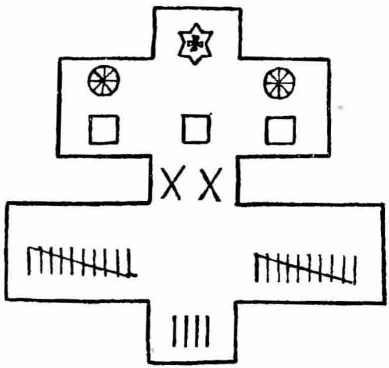
Вот текст закона об этих так наз. „ясачных знаках“:

„Чтобы на каждой квитанции, выдаваемой Родовитому Старосте, от которого внесен будет ясак, кроме изложения словами, было показываемо особыми знаками число внесенных рублей и копеек так, чтобы сдающие простым счетом сего числа могли быть уверены в справедливости показания [1]). Употребляемые в квитанции знаки означают:

(звезда) тысяча руб.,
(колесо) сто рублей,
□ десять рублей,
× один рубль,
|||||||||| десять коп.
| копейку.

„Дабы не можно было сделать здесь никаких прибавлений, все таковые знаки очерчивать кругом прямыми линиями. Например:

1232 р. 24 к. изображают так: (см. рис.)“.



Как видите, употребляемые нами арабские и римские цифры — не единственный способ обозначения чисел,

---

1) Это показывает, что описываемые знаки были в широком употреблении среди населения.

В старину применялись у нас, да и еще теперь по деревням применяются другие системы письменного счисления, отдаленно сходные с римскими и совсем не сходные с арабскими цифрами.

Но и это еще не все способы изображения чисел, употребляющиеся в наши дни: многие торговцы, например, имеют свои секретные знаки для числовых обозначений, — так наз. торговые „меты". О них побеседуем сейчас подробнее.

СЕКРЕТНЫЕ ТОРГОВЫЕ МЕТЫ

На вещах, купленных у офеней или в частных магазинах, особенно провинциальных—вы, вероятно, замечали иногда непонятные буквенные обозначения вроде

а ве   *в уо.*

Это не что иное, как цена вещи без запроса, которую торговец для памяти обозначает на товаре, но так, однако, чтобы ее не мог разгадать покупатель. Бросив взгляд на эти буквы, торговец сразу проникает в их скрытый смысл и, сделав надбавку, называет покупателю цену с запросом.

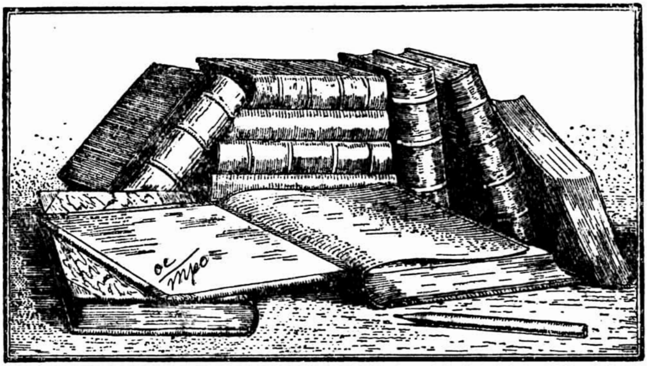
Такая система обозначения весьма проста, — если только знать „ключ" к ней. Торговец выбирал какое-нибудь слово, составленное из 10 различных букв; чаще всего останавливали выбор на словах: *трудолюбие*, *правосудие*, *ярославец*, *миролюбец*, *Миралюбов*. Первая буква слова означает—1, вторая—2, третья—3 и т. д.; десятою буквою обозначается нуль. Помощью этих условных букв-цифр торговец и обозначает на товарах их цену, храня в строгом секрете „ключ" к своей системе обозначения, Если, например, выбрано слово:

п р а в о с у д и е
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

то цена 4 р. 75 к. будет обозначена так:

в уо

Знак „*пое*“ означает 1 р. 50 к. (150), *пее*—1 рубль (100) и т. п.



Иногда цена на товаре бывает написана в виде дроби; например, на одной из купленных мною книг имеется обозначение

$$\frac{\textit{ое}}{\textit{тро}}$$

Это значит, при ключе „трудолюбие“, что надо запросить 1 р. 25 коп., себе же книга стоила 50 коп.

Секрет своей меты торговцы строго берегут. Но если купить в одном и том же магазине несколько вещей, то, сопоставляя названную торговцем цену с соответствующими обозначениями, нетрудно догадаться о значении букв. Особенно легко разгадывать меты дешевых товаров, где запрашивают немного, так что первые цифры уплаченных сумм отвечают начальным буквам обозначения. Разгадав же несколько букв, легко доискаться значения остальных. При некоторой проницательности может быть разгадан „ключ“ любой меты.

Допустим, например, что вы купили несколько вещей и заплатили за первую 25, за вторую—22, за третью—28 копеек. В уголках этих предметов вы находите такие обозначения

ро, рр, рд.

Ясно, что буква *р* означает 2. Отгадав, по другим товарам, еще одну букву,—например, *с*=6, вы уже догадаетесь, что ключ—*правосудие*. Число подходящих слов, надо заметить, ограничено, и выбор не бывает черезчур затруднительным.

АРИФМЕТИКА ЗА ЗАВТРАКОМ

После сказанного легко сообразить, что числа можно изображать не только помощью цифр, но и помощью любых иных знаков или даже предметов—карандашей, перьев, линеек, резинок и т. п.; надо только условиться приписывать каждому предмету значение какой-нибудь определенной цифры. Можно даже, ради курьеза, помощью таких цифр-предметов изображать *действия* над числами—складывать, вычитать, умножать, делить. Вот, например, ряд действий над числами, обозначенный предметами сервировки стола (см. рис.). Вилка, ложка, нож, кувшинчик, чайник, тарелка—все это знаки, каждый из которых заменяет определенную цифру.

Задача № 2.

Глядя на эту группу ножей, вилок, посуды и т. п., попробуйте угадать: какие именно числа здесь обозначены?

С первого взгляда такая задача кажется очень трудной: приходится разгадывать настоящие иероглифы, как сделал некогда француз Шамполион. Но ваша задача гораздо легче: вы ведь знаете, что числа здесь, хотя обозначены вилками, ножами, ложками и т. п., написаны по десятичной системе счисления, т.-е. вам известно, что тарелка, стоящая на втором месте (считая справа), есть цифра десятков, что предмет направо от нее — цифра единиц, а по левую сторону — цифра сотен. Кроме того, вы знаете, что расположение всех этих предметов имеет определенный смысл, который вытекает из сущности арифметических действий, производимых над обозначенными ими числами. Все это может значительно облегчить вам решение предложенной задачи

Решение.

Вот как можно доискаться значения расставленных здесь предметов. Рассматривая первые три ряда на нашем рисунке, вы видите, что „ложка“, умноженная на „ложку“, дает „нож“. А из следующих рядов видно, что „нож“ без „ложки“ дает „ложку“, или что „ложка“ + „ложка“ = = „ножу“. Какая же цифра дает одно и то же и при удвоении и при умножении само на себя? Это может быть только 2, потому что $2 \times 2 = 2 + 2$. Таким образом узнаем, что „ложка“ = 2, и, следовательно, „нож“ = 4.

Теперь идем дальше. Какая цифра обозначена „вилкой“? Попробуем разгадать это, присмотревшись к первым трем рядам, где „вилка“ участвует в умножении, и к рядам III, IV и V, где та же „вилка“ фигурирует в действии вычитания. Из группы вычитания вы видите, что отнимая, в разряде десятков, „вилку“ от „ложки“ получаем в результате „вилку“, т. е. при вычитании два минус „вилка“ получается „вилка“. Это может быть в двух случаях: либо „вилка“ = 1, и тогда $2 - 1 = 1$; либо же „вилка“ = = 6, и тогда, вычитая 6 из 12 (единица высшего разряда занимается у „чашки“), получаем 6.

Что же выбрать: 1 или 6? Испытаем, годится ли 6 для „вилки“ в других действиях. Обратите внимание на сложение V и VI рядов: „вилка“ (т.-е. 6) + „чашка“ = = „тарелке“; значит, „чашка“ должна быть меньше 4 (потому что в рядах VII и VIII „тарелка“ минус „вилка“ = = „чашке“). Но „чашка“ не может равняться двойке, так как двойка обозначена уже „ложкой“; не может „чашка“ быть и единицей—иначе вычитание IV ряда из III не могло бы дать трехзначного числа в V ряду. Не может, наконец, „чашка“ обозначать и 3—вот почему: если „чашка“ = 3, то „бокальчик“ (см. ряды IV и V) должен обозначать единицу; потому что $1+1=2$, т. е. „бокальчик“ + „бокальчик“ = „чашке“, убавленной на единицу, которая была занята у него при вычитании в разряде десятков; „бокальчик“ же равняться единице не может, потому что тогда „тарелка“ в VII ряду будет обозначать в одном случае цифру 5 („бокальчик“ + „нож“), а в другом цифру 6 („вилка“ + „чашка“), чего быть не может. Значит, нельзя было допустить, что „вилка“ = 6, а надо было принять ее равной единице.

Узнав путем таких, — довольно, правда, долгих — поисков, что „вилка“ обозначает цифру 1, мы дальше уже идем более уверенно и быстро. Из действия вычитания в III и IV рядах видим, что „чашка“ обозначает либо 6, либо 8. Но 8 приходится отвергнуть, потому что тогда вышло бы, что „бокальчик“ = 4, а мы знаем, что цифра 4 обозначена „ножом“. Итак, „чашка“ обозначает цифру 6, а следовательно, „бокальчик“ — цифру 3.

Какая же цифра обозначена „кувшинчиком“ в I ряду? Это легко узнать, раз нам известно произведение (III ряд, 624) и один из множителей (II ряд, 12). Разделив 624 на 12, получаем 52. Следовательно, „кувшинчик“ = 5.

Значение „тарелки“ определяется просто: в VII ряду „тарелка“ = „вилке“ + „чашка“ = „бокальчику“ + „нож“; т. е. „тарелка“ $= 1 + 6 = 3 + 4 = 7$.

Остается разгадать цифровое значение „чайника“ и „сахарницы“ в VII ряду. Так как для цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 предметы уже найдены, то остается выбирать только между 8, 9 и 0. Подставим в действие деления, изображенное в последних трех рядах *), соответствующие

---

*) Расположение чисел здесь такое, какое принято теперь в Англии и Америке (а в прежнее время употреблялось и в русских учебных книгах): частное и делитель пишутся по обе стороны делимого.

цифры вместо предметов. Получим такое расположение (буквами *ч* и *с* обозначены „чайник“ и „сахарница“).

$$
\begin{array}{r}
чс)\ 774\ (ч \\
\underline{712} \\
62
\end{array}
$$

Число 712, мы видим, есть произведение двух неизвестных чисел *чс* и *ч*, которые, конечно, не могут быть ни нулем, ии оканчиваться нулем: значит, ни *ч*, ни *с* не есть нуль. Остается два предположения: $ч = 8$ и $с = 9$, или же, наоборот, $ч = 9$ и $с = 8$. Но перемножив 98 на 8, мы не получаем 712; следовательно, „чайник“ обозначает 8, а „сахарница“ 9 (действительно: $89 \times 8 = 712$).

Итак, мы разгадали иероглифическую надпись из предметов столовой сервировки:

кувшин = 5
ложка = 2
вилка = 1
чашка = 6
бокальчик = 3
чайник = 8
сахарница = 9
тарелка = 7

А весь ряд арифметических действий, изображенный этой оргинальной сервировкой, приобретает такой смысл:

$$
\begin{array}{r}
52 \times 12 \\
12 \\
\hline
624 - 312 \\
312 \\
\hline
312 + 462 \\
462 \\
\hline
89)\ 774\ (8 \\
712 \\
\hline
62
\end{array}
$$

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ РЕБУСЫ.

То, что я предлагаю назвать арифметическими ребусами — занимательная игра американских школьников, у нас пока еще совершенно неизвестная [1]). Она состоит в отгадывании задуманного слова посредством решения задачи вроде той, какую мы решили в предыдущей статье. Загадывающий задумывает слово, состоящее из 10 неповторяющихся букв, — напр., „трудолюбие“, „специально“, „просвещать“. Приняв буквы задуманного слова за цифры, загадывающий изображает посредством этих букв какой-нибудь случай деления. Если задумано слово „просвещать“, то можно взять такой пример деления:

п	р	о	с	в	е	щ	а	т	ь
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

делимое — *провес*... 123564
делитель — *овса*..... 1548

```
123564 | 1548        провес | овса
10836  |-----        пьесс  |-----
------ | 79          ------ | ос
 15204                пщпрс
 13932                пcпmр
 -----                -----
  1272                 pmoр
```

Можно взять и другие слова:

делимое — *восстать*, 53449890
делитель — *свет*, 4569

```
восстать | свет
свет     |-----
-----    | ппета
 щщвт
 свет
 -----
 оптьа
 рщспс
 -----
  сстст
  спnрп
  -----
   оараь
   оеввр
   -----
   пщра
```

1) Английское название игры „div-al-et“ — сокращение от „division by letters“, т. е. деление помощью букв

Буквенное изображение определенного случая деления вручается отгадчику, который и должен по этому бессмысленному, казалось бы, набору букв угадать задуманное слово. Как следует в подобных случаях доискиваться числового значения букв, — читатель уже знает: мы объяснили это, когда решали задачу предыдущей статьи. При некотором терпении можно успешно разгадывать эти арифметические ребусы, если только пример достаточно длинен и дает необходимый материал для догадок и испытаний. Если же выбраны слова, дающие черезчур короткий случай деления, например:

т р у д о л ю б и е
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
делимое — *блюдо,* 86745
делитель — *труд,* 1234

блюдо | *труд*
блуб — *юе*
уло

— то разгадывание очень трудно. В подобных случаях надо просить загадывающего продолжить деление до сотых или тысячных долей, т. е. получить в частном еще 2 или 3 десятичных знака. Вот пример деления до сотых долей:

с п е ц и а л ь н о
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
делимое — *палец,* 26734
делитель — *пила* 2576

палец | *пила*
пила — *со,па*
алцо
исип
сиьо
сициа
цип

Если бы в этом случае мы остановились на целом частном (*со*), отгадка задуманного слова едва ли была бы возможна.

Задачи №№ 3—5.

Для читателя, который пожелал бы испытать свои силы в разрешении подобных арифметических ребусов, привожу еще три примера:

I.		II.		III.	
давние	*дни*	*постная*	*репа*	*уравнить*	*ниву*
доес	*ипи*	*репа*	*капп*	*уурер*	*русс*
ввеи		*рркнн*		*уьиаи*	
осад		*рккпк*		*ниву*	
дове		*кяпта*		*вллнт*	
доес		*асас*		*внуре*	
ои		*кянея*		*верль*	
		асас		*внуре*	
		кпеп		*ауир*	

По этим образцам читатель сможет самостоятельно составить множество других примеров.

(Решения этих задач—см. далее, стр. 39, внизу).

ДЕСЯТИЧНАЯ СИСТЕМА В КНИЖНЫХ ШКАФАХ

Особенность десятичной системы счисления остроумно используется даже в такой области, где с первого взгляда этого и ожидать не приходится,—именно, при распределении книг в библиотеке.

Обычно, желая указать библиотекарю номер нужной вам книги, вы просите дать вам каталог и предварительно справляетесь в нем,—потому что в каждом книгохранилище имеется обыкновенно своя нумерация книг. Существует, однако, и такая система распределения книг по номерам, при которой одна и та же книга должна иметь одинаковый номер во всякой библиотеке. Это так называемая „десятичная система классификации книг“.

Система эта (к сожалению, принятая пока еще далеко не всюду) чрезвычайно удобна и весьма несложна. Сущность ее в том, что каждая отрасль знания обозначается определенным числом и притом так, что цифровой состав этого числа сам говорит о месте данного предмета в общей системе знаний.

Книги прежде всего разбиваются на десять обширных классов, обозначенных цифрами от 0 до 9.

0. Сочинения общего характера.
1. Философия.
2. Религия.
3. Общественные науки. Право.
4. Филология. Языки.
5. Физико-математические и естественные науки.
6. Прикладные науки (медицина, техника, сельское хозяйство и т. п.).
7. Изящные искусства.
8. Литература.
9. История, география, биографии.

В обозначении №-ра книги по этой системе первая цифра прямо указывает на ее принадлежность к тому или иному классу из перечисленных выше: каждая книга по философии имеет №, начинающийся с 1, по математике—с 5, по технике—с 6. И, наоборот, если № книги начинается, например. с 4, то, еще не раскрывая книги, мы можем утверждать, что перед нами сочинение из области языкознания.

Далее, каждый из десяти перечисленных классов книг подразделяется на 10 главных отделов, тоже отмеченных цифрами; эти цифры ставят в обозначении №-ра на втором месте. Так, 5-й класс, включающий физико-математические и естественно-научные книги, разделяется на следующие отделы:

50. Общие сочинения по физ.-мат. и естественным наукам.
51. Математика.
52. Астрономия. Геодезия.
53. Физика. Механика теоретическая.
54. Химия. Минералогия.
55. Геология.
56. Палеонтология.
57. Биология. Антропология.
58. Ботаника.
59. Зоология.

Сходным образом разбиваются по отделам и остальные классы. Например, в классе прикладных наук (6) отдел медицины обозначается цифрой 1 после 6-ти, т. е. числом 61; по сельскому хозяйству—63, по домоводству—64; торговле и путям сообщения—65, химической промышленности и технологии—66 и т. п. Точно так же в 9-м классе все книги по географии и путешествиям относятся к отделу № 91, и т. п.

Присоединение к двум первым цифрам третьей характеризует ее содержание еще точнее, указывая, к какому именно подотделу данного отдела она относится. Например, в отделе математики (51) присоединение на третьем месте цифры 1 указывает, что книга относится к арифметике (511), цифры 2—к алгебре (512), цифры 3—к геометрии (513) и т. д. Точно так же и отдел физики (53) разбивается на 10 подотделов: книги по электричеству обозначаются № 537, по свету—№ 535, по теплоте—536 и т. д.

Затем следует дальнейшее дробление подотдела на разряды, обозначаемые четвертой цифрой №-ра и т. д.

В библиотеке, устроенной по десятичной системе, нахождение нужной книги упрощается до крайности. Если, например, вы интересуетесь геометрией, вы прямо идете к шкафам, где №-ра начинаются с 5-ти, отыскиваете тот шкаф, где хранятся книги № 51... и пересматриваете в нем только те полки, где стоят книги № 513... здесь собраны все книги по геометрии, имеющиеся в данной библиотеке. Точно так же, ища книги по социализму и коммунизму, вы обратитесь к книгам № 333..., не заглядывая в каталог и никого не затрудняя расспросами.

Как бы обширна ни была библиотека, никогда не может случиться недостатка в числах для нумерации книг [1]).

[1]) Желающие применить эту систему на практике при устройстве библиотеки найдут все необходимые сведения в книге Международного Библиографического Института: „Десятичная классификация". Перевод под редакцией проф. А. М. Ловягина (Ленинград, 1923).

КРУГЛЫЕ ЧИСЛА

Вероятно все замечали на себе и на окружающих, что среди цифр есть излюбленные, к которым мы питаем особенное пристрастие. Мы, например, очень любим „круглые числа", т. е. оканчивающиеся на 0 или 5. Пристрастие к определенным числам, предпочтение их другим, заложено в человеческой натуре гораздо глубже, чем обыкновенно думают. В этом отношении сходятся вкусы не только европейцев и их предков, напр., древних римлян,—но даже первобытных народов других частей света.

При каждой переписи населения обычно наблюдается чрезмерное обилие людей, возраст которых оканчивается на 5 или на 0; их гораздо больше, чем должно бы быть. Причина кроется, конечно, в том, что люди не помнят, твердо, сколько им лет и, показывая возраст, невольно „округляют" годы. Замечательно, что подобное же преобладание „круглых" возрастов наблюдается и на могильных памятниках древних римлян.

Эта одинаковость числовых пристрастий идет еще дальше. Один германский психолог (проф. К. Марбе) подсчитал, как часто встречается в обозначениях возраста на древне-римских могильных плитах та или иная цифра, и сравнил эти результаты с повторяемостью цифр в обозначениях возраста по переписи в американском штате Алабама, где живут преимущественно негры. Получилось удивительное согласие: древние римляне и современные нам негры до малейших подробностей сходятся в числовых пристрастиях! Конечные цифры возраста, по частоте их повторяемости, располагались в обоих случаях в одинаковой последовательности, а именно:

0, 5, 8, 2, 3, 7, 6, 4, 9 и 1.

Но и это не все. Чтобы выяснить числовые пристрастия современных европейцев, упомянутый ученый производил такого рода опыты: он предлагал множеству лиц определить „на-глаз“, сколько миллиметров заключает в себе полоска бумаги, например, в палец длиною, и записывал ответы. Подсчитав затем частоту повторения одних и тех же конечных цифр, ученый получил снова тот же самый ряд:

0, 5, 8, 2, 3, 7, 6, 4, 9 и 1.

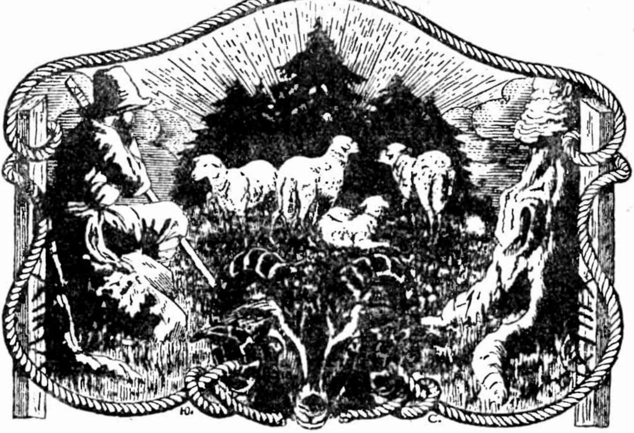
Нельзя считать случайностью, что народы, столь отдаленные друг от друга и антропологически, и географически,—обнаруживают полную одинаковость числовых симпатий, т. е. явное пристрастие к „круглым“ числам, оканчивающимся на 0 или 5, и заметную неприязнь к числам не-круглым.

Любовь к пятеркам и десяткам находится, без сомнения, в прямой связи с десятичным основанием нашей системы счисления, т.-е. в конечном итоге—с числом пальцев на обеих руках. Остается неразгаданной лишь та правильность, с какой слабеет эта симпатия по мере удаления от 5 и 10.

Это пристрастие к округленным числам обходится нам, надо заметить, довольно дорого. Товарные цены в розничной продаже всегда тяготеют к этим круглым числам: некруглое число, получающееся при исчислении продажной стоимости товара, дополняется до большего круглого числа. Цена книги редко бывает 57 коп., 63 коп., 84 коп.,— а чаще 60 коп., 65 коп., 85 коп. Но округленность цены достигается обычно за счет покупателя, а не продавца. Общая сумма, которую потребители переплачивают за удовольствие приобретать товары по круглым ценам, накопляется весьма внушительная. Кто-то дал себе труд, задолго до последней войны, приблизительно подсчитать ее, и оказалось, что население прежней России ежегодно переплачивало в виде разницы между круглыми и некруглыми товарными ценами не менее 30 миллионов рублей. Не слишком ли дорогая дань невинной слабости к округлениям?

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ КУРЬЕЗЫ:

$$
100 = \left\{
\begin{array}{c}
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \times 9 \\
12 + 3 - 4 + 5 + 67 + 8 + 9 \\
12 - 3 - 4 + 5 - 6 + 7 + 89 \\
123 + 4 - 5 + 67 - 89 \\
123 - 45 - 67 + 89
\end{array}
\right.
$$



Глава II

ПОТОМОК ДРЕВНЕГО АБАКА

ЧЕХОВСКАЯ ГОЛОВОЛОМКА

Задача № 6.

Припомним ту, в своем роде знаменитую арифметическую задачу, которая так смутила семиклассника Зиберова из Чеховского рассказа „Репетитор“:

„Купец купил 138 аршин черного и синего сукна за 540 руб. Спрашивается, сколько аршин купил он того и другого, если синее стоило 5 руб. за аршин, а черное 3 руб.?“

С тонким юмором описывает Чехов, как беспомощно трудились над этой задачей и семиклассник-репетитор, и его ученик, двенадцатилетний Петя, пока не выручил их Петин отец, Удодов:

„Петя повторяет задачу и тотчас же, ни слова не говоря, начинает делить 540 на 138.

„— Для чего же вы делите? Постойте! Впрочем, так... продолжайте. Остаток получается? Здесь не может быть остатка. Дайте-ка, я разделю!

„Зиберов [репетитор] делит, получает 3 с остатком и быстро стирает.

„— Странно...—думает он, ероша волосы и краснея.— Как же она решается? Гм!.. Это задача на неопределенные уравнения, а вовсе не арифметическая.

„Учитель глядит в ответы и видит 75 и 63.

„— Гм!... странно... Сложить 5 и 3, а потом делить 540 на 8? Так, что ли? Нет, не то!

„— Решайте же!—говорит он Пете.

„— Ну, чего думаешь? Задача-то ведь пустяковая,— говорит Удодов Пете.—Экий ты дурак, братец! Решите уже вы ему, Егор Алексеич.

„Егор Алексеич [репетитор] берет в руки грифель и начинает решать. Он заикается, краснеет, бледнеет.

„— Эта задача, собственно говоря, алгебраическая,— говорит он.—Ее с иксом и игреком решить можно.. Впрочем, можно и так решить. Я вот разделил... Понимаете? Или, вот что. Решите мне эту задачу к завтрему... Подумайте...

„Петя ехидно улыбается, Удодов тоже улыбается. Оба они понимают замешательство учителя. Ученик VII класса еще пуще конфузится, встает и начинает ходить из угла в угол.

„— И без алгебры решить можно,—говорит Удодов, протягивая руку к счетам и вздыхая.—Вот, извольте видеть...

„Он щелкает на счетах, и у него получается 75 и 63, что и нужно было.

„— Вот-с... по-нашему, по-неученому".

Эта сценка с задачей, заставляющая нас смеяться над конфузом злосчастного репетитора, задает нам сама три новых задачи. А именно:

1. Как намеревался репетитор решить задачу алгебраически?

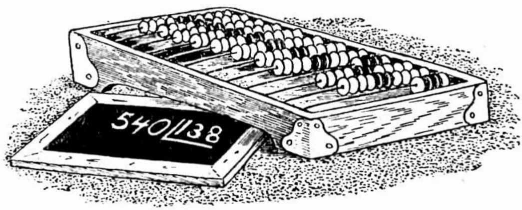
2. Как должен был решить ее Петя?

3. Как решил ее отец Пети на счетах „по-неученому"?

Решение.

На первые два вопроса, вероятно, без труда ответят если не все, то во всяком случае,—многие читатели нашей книжки. Третий вопрос не так прост. Но рассмотрим наши задачи по порядку.

1. Семиклассник-репетитор готов был решать задачу „с иксом и игреком“, будучи уверен, что задача—„собственно говоря, алгебраическая“. И он, надо думать, легко справился бы с ней, прибегнув к помощи системы уравнений (только не неопределенных, как ему казалось).



Составить два уравнения с двумя неизвестными для данной задачи очень нетрудно; вот они:

$$x+y=138 \qquad 5x+3y=540,$$

где x — число аршин синего, а y — черного сукна.

2. Однако, задача легко решается и арифметически. Если бы вам пришлось решать ее, она, конечно, не затруднила бы вас. Вы начали бы с предположения, что все купленное сукно было синее,—тогда за всю партию в 138 аршин синего сукна пришлось бы уплатить $5 \times 138 = 690$ рублей; это на $690 - 540 = 150$ рублей больше того, что было заплачено в действительности. Разница в 150 рублей указывает, что в партии имелось и более дешевое, черное сукно по 3 рубля аршин. Дешевого сукна было столько, что из двухрублевой разницы на каждом аршине составилось 150 рублей: очевидно, число аршин черного сукна определится, если разделить 150 на 2.

Получаем ответ—75; вычтя эти 75 аршин из общего числа 138 аршин, узнаем, сколько было синего сукна: $138 - 75 = 63$. Так и должен был решать задачу Петя.

---

3. На очереди третий вопрос: как решил задачу Удодов-старший?

В рассказе говорится об этом очень кратко: „он щелкает на счетах, и у него получается 75 и 63, что и нужно было".

В чем же, однако, состояло это „щелканье на счетах"? Каков способ решения задачи с помощью счетов?

Разгадка такова: злополучная задача решается на счетах тем же приемом, что и на бумаге,—теми же арифметическими действиями. Но выполнение их значительно упрощается, благодаря преимуществам, которые наши русские счеты предоставляют всякому, умеющему с ними обращаться. Очевидно, „отставной губернский секретарь" Удодов хорошо умел считать на счетах, потому что их косточки быстро, без помощи алгебры, открыли ему то, чего репетитор-семиклассник добивался узнать „с иксом и игреком". Проследим же, какие действия должен был проделать на счетах Петин отец.

Прежде всего ему нужно было, как мы знаем, умножить 138 на 5. Для этого он, по правилам действий на счетах, умножил сначала 138 на 10, — т. е. просто перенес 138 одной проволокой выше,—а затем разделил это число пополам, опять-таки на счетах же. Деление начинают снизу: откидывают половину косточек, отложенных на каждой проволоке; если число косточек на данной проволоке нечетное, то выходят из затруднения, „раздробляя" одну косточку этой проволоки на 10 нижних.

В нашем, например, случае делят 1.380 пополам так: на нижней проволоке, где отложено 8 косточек, откидывают 4 косточки (4 десятка), на средней проволоке из 3 косточек откидывают 1, а оставшуюся 1 косточку заменяют мысленно 10-ю нижними и делят пополам, добавляя 5 десятков к косточкам нижней; на верхней проволоке раздробляют одну косточку, прибавляя 5 сотен к косточкам средней проволоки. В результате на верхней проволоке совсем не остается косточек; на средней $1+5=$ $=6$ сотен, на нижней $4+5=9$ десятков. Итого, 690 единиц. Выполняется все это быстро, автоматически.

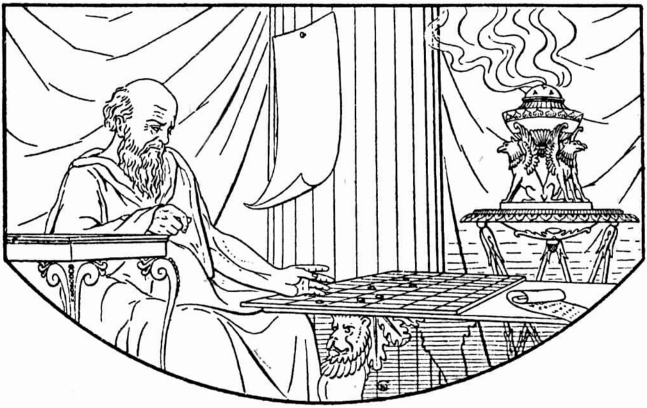
Далее Удодову-старшему нужно было из 690 вычесть 540. Как проделывается это на счетах—всем известно.

Наконец, полученную разность, 150, оставалось разделить пополам: Удодов откинул из 5 косточек (десятков) 2, отдав 5 единиц нижнему ряду косточек; потом из 1 косточки на проволоке сотен отдал 5 десятков нижнему ряду: получилось 7 десятков и 5 единиц, т. е. 75.

Все эти простые действия выполняются на счетах, конечно, гораздо скорее, чем тут описано.

РУССКИЕ СЧЕТЫ

Есть много полезных вещей, которых мы не ценим только потому, что, постоянно находясь у нас под руками, они превратились в слишком обыкновенный предмет домашнего обихода. К числу таких недостаточно ценимых вещей принадлежат и наши конторские счеты—русская народная счетная машина, представляющая собою видоизменение знаменитого „абака", или „счетной доски" наших отдаленных предков. Древние народы—египтяне, греки, римляне—употребляли при вычислениях счетный прибор „абак", очень походивший на наши десятикосточковые счеты. Это была доска (стол), разграфленная на полосы, по которым передвигали особые шашки, игравшие роль косточек наших счетов. Такой вид имел греческий абак. Абак римский имел форму медной доски с желобами (прорезами), в которых передвигались кнопки. Родственен абаку перуанский „квипос“—ряд ремней или бечевок с завязанными на них узлами; этот счетный прибор получил особенное распространение среди первоначальных обитателей Ю. Америки, но, без сомнения, был



в употреблении также и в Европе (см. далее, статью „Отголоски старины“). В средние века вплоть до XVI в. подобные приспособления были широко распространены в Европе. Но в наши дни видоизмененный абак—счеты—сохранился, кажется, только у нас, да в Китае (семикосточковые счеты, „суан-пан“ *). Запад не знает десяти-

*) Семикосточковые счеты в Китае чрезвычайно распространены; они изготовляются всевозможных размеров, до самых миниатюрных (у меня имеется привезенный из Китая экземпляр в 17 *мм* длины и 8 *мм* ширины).

косточковых счетов,—вы не найдете их ни в одном магазине Европы. Быть может, потому-то мы и не ценим этого счетного прибора так высоко, как он заслуживает, смотрим на него, как на какую-то наивную кустарную самодельщину в области счетных приборов.

Между тем, мы вправе были бы гордиться нашими конторскими счетами, так как при изумительной простоте устройства они, по достигаемым на них результатам могут соперничать в некоторых отношениях даже со сложными, дорого стоющими счетными машинами западных стран. В умелых руках этот нехитрый прибор делает порою настоящие чудеса, Иностранцы, впервые знакомящиеся с нашими счетами, охотно признают это и ценят их выше, нежели мы сами. Специалист, заведывавший одной из крупных русских фирм по продаже счетных машин, рассказывал мне, что ему не раз приходилось изумлять русскими счетами иностранцев, привозивших ему в контору образцы сложных счетных механизмов. Он устраивал состязания между двумя счетчиками, из которых один работал на дорогой заграничной „аддиционной“ машине (т. е. машине для сложения), другой же пользовался обыкновенными счетами. И случалось, что последний,—правда, большой мастер своего дела,—брал верх над обладателем заморской диковинки в быстроте и точности вычислений. Бывало и так, что иностранец, пораженный быстротой работы на счетах, сразу же сдавался и складывал свою машину обратно в чемодан, не надеясь продать в России ни одного экземпляра.

— К чему вам дорогие счетные машины, если вы так искусно считаете при помощи ваших дешевых счетов!— говорили нередко представители иностранных фирм.

Правда, на русских счетах нельзя производить всех тех действий, которые выполняются машинами. Но во многом,—например, в сложении и вычитании,—счеты могут соперничать со сложными приборами. Впрочем, в искусных руках умножение и деление также значительно ускоряются на счетах, если знать приемы выполнения этих действий.

Познакомимся же с некоторыми из них.

УМНОЖЕНИЕ НА СЧЕТАХ

Вот несколько приемов, пользуясь которыми всякий, умеющий быстро складывать на счетах, сможет проворно выполнять встречающиеся на практике примеры умножения.

Умножение ва 2 и на 3 заменяется двукратным и троекратным сложением.

При умножении на 4 умножают сначала на 2 и складывают этот результат с самим собою.

Умножение числа на 5 выполняется на счетах так: переносят все число одной проволокой выше,—т. е. умножают его на 10, а затем делят это 10-кратное число пополам (как делить на 2 помощью счетов—мы уже объяснили выше, на стр. 30).

Вместо умножения на 6, умножают на 5 и прибавляют умножаемое.

Вместо умножения на 7, множат на 10 и отнимают умножаемое три раза.

Умиожение на 8 заменяют умножением на 10 без 2-х.

Точно так же множат на 9: заменяют умножением на 10 без 1.

При умножении на 10—переносят, как мы уже сказали, все число одной проволокой выше.

Читатель, вероятно, уже и сам сообразит, как надо поступать при умножении на числа больше 10-ти, и какого рода замены тут окажутся наиболее удобными. Множитель 11 надо, конечно, заменить $10+1$. Множитель 12 заменяют $10+2$, или практически $2+10$, т.-е. сначала откладывают удвоенное число, а затем прибавляют удесятеренное. Множитель 13 заменяется $10+3$ и т. д.

Рассмотрим несколько особых случаев для множителей первой сотни:

$20=10\times 2$	$32=22+10$
$22=11\times 2$	$42=22+20$
$25=(100:2):2$	$43=33+10$
$26=25-1$	$45=50-\ 5$
$27=30-3$	$63=33+30$ и т. д.

Легко видеть, между прочим, что помощью счетов очень удобно умножать на такие числа, как на 22, 33, 44, 55 и т. п.; поэтому надо стремиться при разбивке множителей пользоваться подобными числами с одинаковыми цифрами.

К сходным приемам прибегают и при умножении на числа, большие 100. Если подобные искусственные приемы утомительны, мы всегда, конечно, можем умножить помощью счетоз по общему правилу, умножая каждую цифру множителя и записывая частные произведения—это все же дает некоторое сокращение времени.

ДЕЛЕНИЕ НА СЧЕТАХ

Выполнять деление помощью конторских счетов гораздо труднее, чем умножать; для этого нужно запомнить целый ряд особых приемов, подчас довольно замысловатых. Интересующимся ими придется обратиться к специальным руководствам. Здесь укажу лишь, ради примера, удобные приемы деления помощью счетов на числа первого десятка (кроме числа 7, способ деления на которое черезчур сложен).

Как делить на 2, мы уже знаем (стр. 30)—способ этот очень прост.

Гораздо сложнее прием деления на 3: он состоит в замене деления умножением на бесконечную периодическую дробь 3,3333... (известно, что $0{,}333... = \frac{1}{3}$). Умножать помощью счетов на 3 мы умеем; уменьшать в 10 раз тоже несложно: надо лишь переносить делимое одной проволокой ниже. После недолгого упражнения этот прием деления на 3, на первый взгляд длинноватый, оказывается довольно удобным на практике.

Деление на 4, конечно, заменяется двукратным делением на 2.

Еще проще деление на 5: его заменяют делением на 10 и удвоением результата.

На 6 делят помощью счетов в два приема: сначала делят на 2, потом полученное делят на 3.

Деление на 7, как мы уже сказали, выполняется помощью счетов черезчур сложно, и потому здесь излагать его не будем.

На 8 делят в три приема: сначала на 2, потом полученное вновь на 2, и затем еще раз на 2.

Очень интересен прием деления на 9. Он основан на том, что $\frac{1}{9}=0{,}1111...$ Отсюда ясно, что, вместо деления на 9, можно последовательно складывать 0,1 делимого $+$ 0,1 его $+$ 0,01 его и т. д. *).

Всего проще, как видим, делить на 2, 10 и 5,—и, конечно, на такие кратные им числа, как 4, 8, 16, 20, 25, 40, 50, 75, 80, 100. Эти случаи деления не представляют трудности и для малоопытного счетчика.

УЛУЧШЕНИЕ СЧЕТОВ

Задача № 7.

Какие косточки на наших конторских счетах являются совершенно излишними?

Решение.

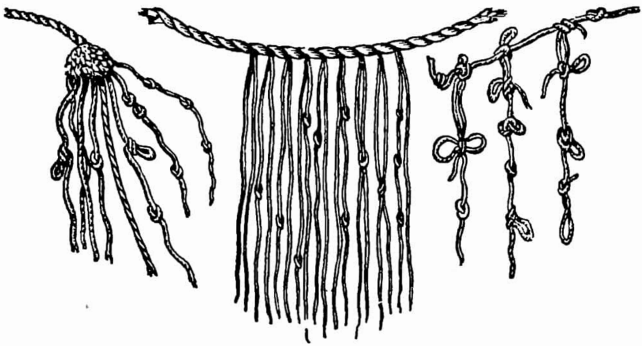
Совершенно излишни десятые косточки каждого ряда; можно вполне обойтись 9-ю косточками на проволоке. В самом деле: когда надо отложить 10-ю косточку, вы отодвигаете все 9 косточек назад, а на следующей проволоке откидываете одну косточку. Другими словами, десятая косточка на счетах так же не нужна, как не нужна особая цифра для обозначения 10-ти: $9+1$ есть единица высшего разряда, и ее можно сразу же так и записать.

ОТГОЛОСКИ СТАРИНЫ

С отдаленными предками наших конторских счетов связаны некоторые пережитки старины в языке и обычаях.

*) Этот прием полезен и для устного деления на 9.

Мало кто подозревает, например, что собственно мы делаем, завязывая „для памяти“ узелок на носовом платке. Мы повторяем то, что некогда с бо́льшим смыслом делали наши предки, „записывая“ таким образом итог счета на шнурках. Веревка с узлами представляла собой некогда счетный прибор, в принципе аналогичный нашим счетам и, без сомнения, связанный с ними общностью происхождения: это—„веревочный абак“.



Образцы перуанских „квипосов“—узловая запись чисел.

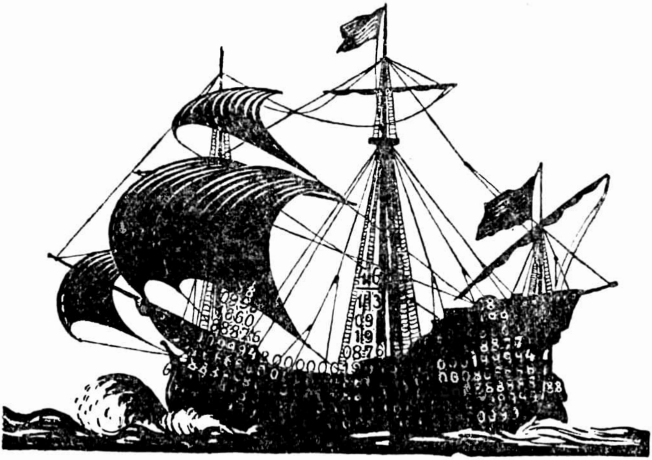
С абаком же связаны и такие распространенные теперь слова, как „банк“ и „чек“. „Банк“ по-немецки означает скамья. Что же общего между финансовыми учреждением,—„банком“ в современном смысле слова,—и скамьей? Оказывается, здесь далеко не простое совпадение названий. Абак в форме скамьи был широко распространен в торговых кругах Германии в XV—XVI веках; каждая меняльная лавка или банкирская контора характеризовалась присутствием „счетной скамьи“,—естественно, что скамья стала синонимом банка.

Более косвенное отношение к абаку имеет слово „чек“. Оно английского происхождения и производится от глагола „чекер“ (checker)—графить; „чекеред“ (графленный) называли разграфленную в форме абака кожаную салфетку, которую в XVI—XVII веке английские коммерсанты носили с собою в свернутом виде и, в случае надобности произвести подсчет, развертывали на столе. Бланки для расчетов графились по образцу этих свертывающихся абаков, и неудивительно, что на них перенесено было, в сокращенном виде, самое название этих счетных приборов: от слова „чекеред“ произошло слово „чек“.

Любопытно, откуда произошло выражение „остаться на бобах“, которое мы применяем теперь к человеку, проигравшему все свои деньги. Оно также древнего происхождения и относится к тому времени, когда все денежные расчеты—в том числе и расчеты между игроками—производились на абаке, на счетном столе или скамье, помощью б о б о в, заменявших косточки наших счетов. „Один считает на камешках, другой—на бобах“, читаем у Кампанеллы в „Государстве Солнца“ (1602). Человек, проигравший свои деньги, оставался с одними бобами, выражавшими сумму его проигрыша—отсюда и соответствующий оборот речи.

Решение числовых ребусов, предложенных на стр. 19-й:

I – „совпадение“; II—„крепостная“;
—III—„уравнитель“



Глава III

НЕМНОГО ИСТОРИИ

„ТРУДНОЕ ДЕЛО—ДЕЛЕНИЕ"

Зажигая привычным движением спичку, мы иной раз еще задумываемся над тем, каких трудов стоило добывание огня нашим предкам, даже не очень отдаленным. Но мало кто подозревает, что и нынешние способы выполнения арифметических действий тоже не всегда были так просты и удобны, так прямо и быстро приводили к результату. Предки наши пользовались гораздо более громоздкими и медленными приемами. И если бы школьник XX века мог перенестись за четыре, за три века назад, он поразил бы наших предков быстротой и безошибочностью своих арифметических выкладок. Молва о нем облетела бы окрестные школы и монастыри, затмив славу искуснейших счетчиков той эпохи, и со всех сторон приезжали бы учиться у нового великого мастера счетного дела.

Особенно сложны и трудны были в старину действия умножения и деления—последнее всего больше. Тогда не существовало еще, как теперь, одного выработанного практикой приема для каждого действия. Напротив, в ходу была одновременно чуть не дюжина различных способов умножения и деления—приемы один другого запутаннее, твердо запомнить которые не в силах был человек средних способностей. Каждый учитель счетного дела держался своего излюбленного приема, каждый „магистр деления“ (были такие специалисты) восхваляя собственный способ выполнения этого действия. И все эти приемы умножения—„шахматами, или органчиком“, „загибанием“, „по частям, или в разрыв“, „крестиком“, „решеткой“, „задом наперед“, „ромбом“, „треугольником“, „кубком или чашей“, „алмазом“ и прочие [1]), а также все способы деления, носившие не менее затейливые наименования, соперничали друг с другом в громоздкости и сложности. Усваивались они с большим трудом и лишь после продолжительной практики. Признавалось даже, что для овладения искусством быстрого и безошибочного умножения и деления многозначных чисел нужно особое природное дарование, исключительные способности; рядовым людям премудрость эта недоступна. „Трудное дело—деление“ гласила старинная латинская поговорка; оно и в самом деле было трудно, если принять во внимание утомительные методы, какими выполнялось тогда это

---

[1]) Перечисленные приемы умножения указаны в старинной „Арифметике“ Николая Тартальи. Наш современный способ умножения описывается там под названием „шахматного“.

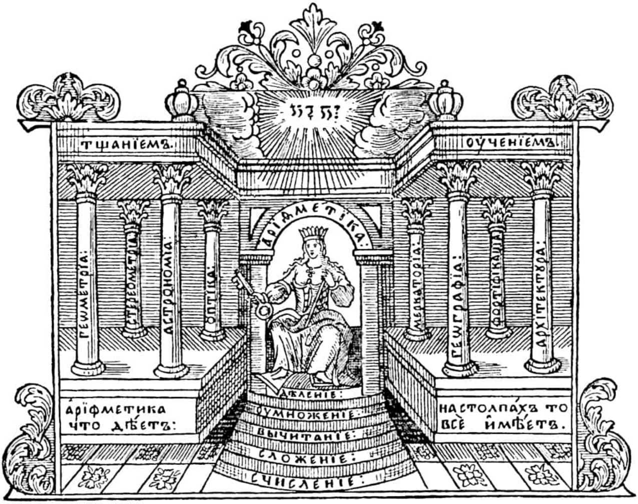
действие. Нужды нет, что способы эти носили подчас довольно игривые названия: под веселым названием скрывался длиннейший ряд запутанных манипуляций. В XVI веке кратчайшим и удобнейшим способом считалось, например, деление „лодкой, или галерой". Знаменитый итальянский математик того времени Николай Тарталья (XVI век в своем обширном учебнике арифметики писал о нем следующее.

„Второй способ деления называется в Венеции *) лодкой или галерой, вследствие некоторого сходства фигуры, получающейся при этом, потому что при делении некоторых родов чисел составляется фигура, похожая на лодку, а в других—на галеру, которая в самом деле красиво выглядит; галера получается иной раз хорошо отделанная и снабженная всеми принадлежностями—выкладывается из чисел так, что она действительно представляется в виде галеры с кормою и носом, мачтою, парусами и веслами".

Читается это очень весело: так и настраиваешься скользить по числовому морю на парусах арифметической галеры. Но хотя старинный математик и рекомендует этот способ как—„самый изящный, самый легкий, самый верный, самый употребительный и самый общий из существующих, пригодный для деления всех возможных чисел",—я не решаюсь все же его изложить здесь из опасения, что даже терпеливый читатель закроет книгу в этом скучном месте и не станет читать дальше. Между

*) Венеция и некоторые другие государства Италии в XIV—XVI столетиях вели обширную морскую торговлю, и потому в этих странах приемы счета были, ради коммерческих надобностей, разработаны раньше, чем в других. Лучшие труды по арифметике появились в Венеции. Многие итальянские термины коммерческой арифметики сохранились еще в настоящее время.

тем, этот утомительный способ действительно был самым лучшим в ту эпоху, а у нас в России употреблялся до середины XVIII века: в „Арифметике“ Леонтия Магниц-



Заставка из „Арифметики“ Магницкого (XVIII в.).

По экземпляру, принадлежащему Я. И. Перельману.

кого [1]) он описан в числе шести предлагаемых там способов (из которых ни один не похож на современный)

---

[1]) Старинный русский учебник математики, охватывающий все ее отделы. Это—одна из тех двух книг, которые Ломоносов назвал „вратами своей учености“. Подробное заглавие ее таково:

„Арифметика, сиречь наука числительная, повелением царя Петра Алексеевича в великом граде Москве типографским тиснением ради обучения мудролюбивых российских отроков и всякого чина и возраста людей на свет произведена в лето от рождества бога слова 1703“.

и особенно рекомендуется автором; на протяжении своей объемистой книги—640 страниц большого формата— Магницкий пользуется исключительно „способом галеры", не употребляя, впрочем, этого наименования.

В заключение покажем читателю эту числовую „галеру", воспользовавшись примером из упомянутой книги Тартальи:

```
                    4 | 6
                    -----
        88          1 | 3          08
      0999           09           199
      1660           19          0860
      88876         0876         08877
      099994800000019948000000199994
      166666000000086660000000866666
Делимое—888880000000888800000008888888(88—частное
Делитель [1])—9999900000000999000000009999
         9999900000000999000000099
```

МУДРЫЙ ОБЫЧАЙ СТАРИНЫ

Добравшись после утомительных трудов до желанного конца арифметического действия, предки наши считали необходимым непременно проверить этот в поте лица добытый итог. Громоздкие приемы вызывали недоверие к их результатам. На длинном, извилистом пути легче заблудиться, чем на прямой дороге современных приемов. Отсюда естественно возник старинный обычай п р о в е р я т ь каждое выполняемое арифметическое действие—похвальное правило, которому не мешало бы и нам следовать.

---

[1]) Последние две девятки приписаны к делителю в процессе деления.

Любимым приемом поверки был так называемый „способ 9“. Этот изящный прием, который полезно и теперь знать каждому, нередко описывается и в современных арифметических учебниках, особенно иностранных. Правда он почему-то мало теперь употребляется на практике но это нисколько не умаляет его достоинств.

Поверка девяткой основана на „правиле остатков“, гласящем: остаток от деления суммы на какое-либо число равен сумме остатков от деления каждого слагаемого на то же число. Точно так же, остаток произведения равен произведению остатков множителей. С другой стороны, известно также [1]), что при делении числа на 9 получается тот же остаток, что и при делении на 9 суммы цифр этого числа; например, 758 при делении на 9 дает 2, и то же получается в остатке от деления (7+5+ +8) на 9. Сопоставив оба указанных свойства, мы и приходим к приему поверки девяткой, т. е. делением на 9. Покажем на примере, в чем он состоит.

Пусть требуется проверить правильность **сложения** следующего столбца:

$$\begin{array}{r l}
38932 \ldots\ldots & 7 \\
1096 \ldots\ldots & 7 \\
+4710043 \ldots\ldots & 1 \\
589106 \ldots\ldots & 2 \\
\hline
5339177 \ldots\ldots & 8
\end{array}$$

Составляем в уме сумму цифр каждого слагаемого, при чем в получающихся попутно числах также складываем цифры (делается это в самом процессе сложения

[1]) Выясняется попутно при выводе признака делимости на 9 (читатель найдет вывод в моей „Хрестоматии-задачнике по начальной математике“).

цифр), пока, в конечном результате, не получим однозначного числа. Результаты эти (остатки от деления на 9) записываем, как показано на примере, рядом с соответствующим слагаемым. Складываем все остатки ($7+7+$ $+1+2=17$; $1+7=8$),—получаем 8. Такова же должна быть сумма цифр итога (5339177), если действие выполнено верно: $5+3+3+9+1+7+7$, после всех упрощений, равно 8.

Поверка в ы ч и т а н и я выполняется точно так же, если принять уменьшаемое за сумму, а вычитаемое и разность—за слагаемые. Например:

$$\begin{array}{r@{\quad}r} 6913 \;.\;.\;.\;.\times & 1 \\ -\,2587 \;.\;.\;.\;.\;. & \underline{4} \\ \hline 4326 & 6 \end{array}$$

$$4+6=10;\; 1+0=1.$$

Несложна и поверка у м н о ж е н и я, как видно из следующего примера:

$$\begin{array}{r@{\quad}r} 8713 \;.\;.\;.\;.\;. & 1 \\ \times\; 264 \;.\;.\;.\;.\;.\times & \underline{3} \\ \hline 34852 & 3 \\ 52278 & \\ 17426 & \\ \hline 2300232 \;.\;.\;.\;.\;. & 3 \end{array}$$

Если при такой поверке умножения обнаружена будет ошибочность результата, то, чтобы определить, г д е именно кроется ошибка, можно поверить способом 9-ки каждое частное произведение отдельно; а если здесь ошибки не окажется, надо поверить еще и с л о ж е н и е частных произведений. Такая поверка сберегает время и труд только при умножении многозначных чисел; при малых числах проще, конечно, выполнить действие заново.

Как поверять по этому способу деление? Если у нас случай деления без остатка, то делимое рассматривается, как произведение делителя на частное. В случае же деления с остатком, пользуются тем, что делимое = делителю × частное + остаток. Например:

$$\underbrace{16201387}_{} : \underbrace{4457}_{} = \underbrace{3635}_{};\ \text{остаток}\ \underbrace{192}_{}$$

сумма цифр: 1 2 8 3

$$2 \times 8 + 3 = 19;\ 1 + 9 = 10;\ 1 + 0 = 1.$$

Выписываю из „Арифметики“ Магницкого предлагаемое там для поверки девяткой удобное расположение:

Для умножения:

$$\begin{array}{r} \times\ 365 \\ 24 \\ \hline 1460 \\ 730 \\ \hline 8760 \end{array} \qquad \text{„Сие}\ 3 \begin{array}{c} 5 \\ | \\ \hline | \\ 6 \\ \hline 30 \end{array} 3\ \text{сему согласно, убо добре есть“}$$

Для деления:

$$\begin{array}{lcl} & \text{Частного} & \\ & 8 & \\ & | & \\ \text{Делимого}\ 1 & \text{———} & 1\ \text{„Согласно добре делил“} \\ & | & \\ \text{Делителя} & 2 & \\ & \overline{16} & \\ \text{Остатка} & 3 & \\ \text{Всех} & \overline{1} & \end{array}$$

Подобная поверка действий, без сомнения, не оставляет желать лучшей в смысле быстроты и удобства. Нельзя сказать того же о ее **надежности**: ошибка может и ускользнуть от нее. Действительно, ведь одну и ту же сумму цифр могут иметь разные числа; не только перестановка цифр, но иной раз даже и замена одних другими остаются при такой поверке необнаруженными. Укрываются от контроля также лишние девятки и нули, потому что не влияют на сумму цифр. Всецело полагаться поэтому на такой прием поверки было бы неосмотрительно. Предки наши сознавали это и не ограничивались одною лишь поверкой помощью девятки, но производили еще дополнительную поверку—чаще всего помощью семерки. Этот прием основан на том же „правиле остатков“ (стр. 45), но не так удобен, как способ девятки, потому что деление на 7 приходится выполнять полностью, чтобы найти остатки (а при этом легко возможны ошибки в действиях самой поверки). Две поверки—девяткой и семеркой—уже являются гораздо более надежным контролем: что ускользнет от одной, будет уловлено другою. Ошибка не обнаружится лишь в том случае, если разность истинного и полученного результатов кратна числа $7 \times 9 = 63$. Так как подобная случайность все же возможна, то и двойная поверка не дает полной уверенности в правильности результата.

Впрочем, для обычных вычислений, где ошибаются чаще всего на 1 или 2 единицы, можно ограничиться только поверкою девяткой. Дополнительная поверка семеркой черезчур обременительна. Только тот контроль хорош, который не мешает работе.

ХОРОШО ЛИ МЫ МНОЖИМ?

Старинные способы умножения были неуклюжи и неудобны,—но так ли хорош наш нынешний способ, чтобы в нем невозможны были уже никакие дальнейшие улучшения? Нет, наш способ безусловно не является совершенным; можно придумать еще более быстрые или еще более надежные. Из нескольких предложенных улучшений (ср. гл. VII) укажем пока одно, увеличивающее не быстроту выполнения действия, а его надежность. Оно состоит в том, что при многозначном множителе начинают с умножения не на последнюю, а на **первую** цифру множителя. Выполненное на стр. 46-й умножение 8713×264 примет при этом такой вид:

```
   8713
    264
-------
17426
 52278
  34852
-------
2300232
```

Преимущество подобного расположения в том, что цифры частных произведений, от которых зависят первые, наиболее ответственные цифры результата, получаются в **начале** действия, когда внимание еще не утомлено и, следовательно, вероятность сделать ошибку наименьшая. (Кроме того, способ этот упрощает применение так наз. „сокращенного" умножения, о котором мы здесь распространяться не можем *).

РУССКИЙ СПОСОБ УМНОЖЕНИЯ

Вы не можете выполнить умножения многозначных чисел—хотя бы даже двузначных—если не помните наизусть всех результатов умножения однозначных чисел, т. е. того, что называется таблицей умножения. В старинной „Арифметике" Магницкого, о которой мы раньше упоминали, необходимость твердого знания таблицы умно-

*) См. составленные мною „Таблицы и правила для вычислений". Изд. Промбюро. Ленинград, 1926 г.

жения воспета в таких—надо сознаться, чуждых для современного слуха—стихах:

Аще кто не твердит
таблицы и гордит,
Не может познати
числом что множати
И во всей науки,
несвобод от муки,
Колико не учит
туне ся удручит
И в пользу не будет
аще ю забудет.

Автор этих стихов, очевидно, не знал или упустил из виду, что существует способ перемножать числа и без знания таблицы умножения. Способ этот, ие похожий на наши школьные приемы, употребителен в обиходе великорусских крестьян и унаследован ими от глубокой древности. Сущность его в том, что умножение любых двух чисел сводится к ряду последовательных делений одного числа пополам при одновременном удвоений другого числа.

Вот пример:

$$\begin{array}{r}32 \times 13\\ 16 \times 26\\ 8 \times 52\\ 4 \times 104\\ 2 \times 208\\ 1 \times 416\end{array}$$

Деление пополам продолжают до тех пор, пока в частном не получится 1, параллельно удваивая другое число. Последнее удвоенное число и дает искомый результат. Нетрудно понять, на чем этот способ основан: произведение не изменяется, если один множитель уменьшить вдвое, а другой вдвое же увеличить. Ясно поэтому, что в результате многократного повторения этой операции получается искомое произведение:

$$32 \times 13 = 1 \times 416.$$

Задача № 8.

Однако, как поступить, если при этом приходится делить пополам число нечетное?

Народный способ легко выходит из этого затруднения. Надо—гласит правило,—в случае нечетного числа откинуть единицу и делить остаток пополам; но зато к последнему числу правого столбца нужно будет **прибавить** все те числа этого столбца, которые стоят против *нечетных* чисел левого столбца: сумма и будет искомым произведением. Практически это делают так, что все строки с четными левыми числами зачеркивают; остаются только те, которые содержат налево нечетное число. Приведем пример (звездочка указывает, что данную строку надо зачеркнуть):

$$
\begin{array}{rcr}
19 & \times & 17 \\
9 & \times & 34 \\
4 & \times & 68^* \\
2 & \times & 136^* \\
1 & \times & 272
\end{array}
$$

Сложив незачеркнутые числа, получаем вполне правильный результат: $17 + 34 + 272 = 323$.

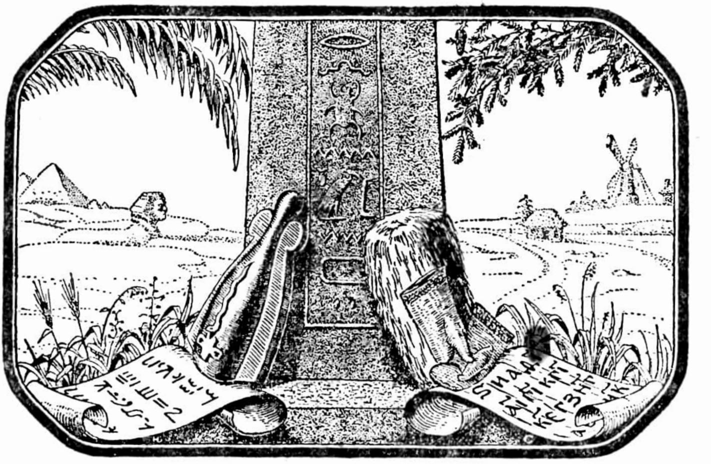
На чем основан этот прием?

Решение.

Обоснованность приема станет ясна, если принять во внимание, что

$$19 \times 17 = (18 + 1)\ 17 = 18 \times 17 + 17$$
$$9 \times 34 = (\ 8 + 1)\ 34 = \ 8 \times 34 + 34, \text{ и т. п.}$$

Ясно, что числа 17, 34 и т. п., утрачиваемые при делении нечетного числа пополам, необходимо прибавить к результату последнего умножения, чтобы получить произведение.



ИЗ СТРАНЫ ПИРАМИД

Весьма вероятно, что сейчас описанный способ дошел до нас из глубочайшей древности и из отдаленной страны—из Египта. Мы мало знаем, как производили действия обитатели древней Страны Пирамид. Но сохранился любопытный документ—папирус, на котором записаны арифметические упражнения ученика одной из землемерных школ древнего Египта; это так называемый „папирус Ринда", относящийся ко времени между 200 и 1700 гг. до нашей эры [1]) и представляющий собою копию еще более древней рукописи, переписанную неким

[1]) Папирус был разыскан английским египтологом Генри Риндом, он оказался заключенным в металлический футляр. В развернутом виде имеет 20 метров длины, при 30 сантиметрах ширины. Хранится в Британском Музее, в Лондоне.

Аамесом. Писец [1]) Аамес, найдя „ученическую тетрадку“ этой отдаленнейшей эпохи, тщательно переписал все арифметические упражнения будущего землемера, — вместе с их ошибками и исправлениями учителя,— и дал своему списку торжественное заглавие, которое дошло до нас в следующем неполном виде:

„Наставление, как достигнуть знания всех темных вещей... всех тайн, сокрытых в вещах.

„Составлено при царе Верхнего и Нижнего Египта Ра-а-усе, дающем жизнь, по образцу древних сочинений времен царя Ра-ен-мата писцом Аамесом“.

В этом интересном документе, насчитывающем за собою около 40 веков и свидетельствующем о еще более глубокой древности, мы находим четыре примера умножения, выполненные по способу, живо напоминающему наш русский народный способ. Вот эти примеры (точки впереди чисел обозначают число единиц множителя; знаком + мы отметили числа, подлежащие сложению):

(8 × 8)
. 8
. . 16
. . . . 32
: : : : 64

(9 × 9)
. 9 +
. . 18
. . . . 36
: : : : 72 +

Итог. . . . 81

(8 × 365)
. 365
. . 730
. . . . 1460
: : : : 2920

(7 × 2801)
. 2801 +
. . 5602 +
. . . . 11204 +

Итог. . 19607

[1]) Звание „писец“ прииадлежало третьему классу египетских жрецов; в заведывании их иаходилось „все отиосившееся к строительиой части храма и к его земельиой собствеиности“. Математические, астрономические и географические знания составляли их главную специальиость (В. Бобынин)

Вы видите из этих примеров, что еще за тысячелетия до нас египтяне пользовались приемом умножения, довольно сходным с нашим крестьянским, и что неведомыми путями он как бы перекочевал из древней Страны Пирамид в современную русскую деревню. Если бы обитателю земли фараонов предложили перемножить, например, 19×17, он произвел бы это действие следующим образом: написал бы ряд последовательных удвоений числа 17,

1	17 +
2	34 +
4	68
8	136
16	272 +

и затем сложил бы те числа, которые отмечены здесь знаком +, т. е. $17 + 34 + 272$. Он получил бы, конечно, вполне правильный результат: $17 + (2 \times 17) + (16 \times 17) = 19 \times 17$. Легко видеть, что подобный прием по существу весьма близок к нашему „крестьянскому" (замена умножения рядом последовательных удвоений).

Трудно сказать, у одних ли наших крестьян сохранился в настоящее время такой древний способ умножения; английские авторы называют его именно „русским крестьянским способом"; в Германии простой народ коегде хотя и пользуется им, но также называет его „русским".

Чрезвычайно интересно было бы получить от читателей сведения о том, применяется ли в их местности этот древний способ умножения, имеющий за собой такое долгое и оригинальное прошлое [1]).

---

[1]) Составитель был бы весьма признателен за письменные сообщения (по адресу, указанному в предисловии).

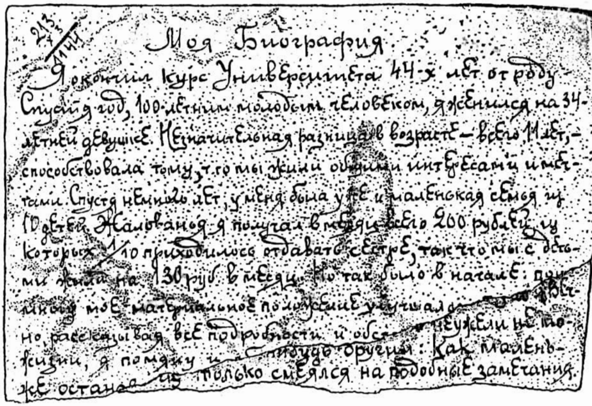
Следовало бы вообще с бо́льшим вниманием относиться к народной математике: вникать в употребляемые народом приемы счета и измерений, собирать и записывать эти памятники народного математического творчества, дошедшие до нашего времени из глубин седой старины. На это уже давно указывал историк математики В. В. Бобынин, предложивший даже краткую программу собирания памятников народной математики. Нелишним будет привести здесь составленный им перечень того, что именно следует собирать и записывать: 1) Счисление и счет. 2) Приемы меры и веса. 3) Геометрические сведения и их выражение в постройках, нарядах и украшениях. 4) Способы межевания. 5) Народные задачи. 6) Пословицы, загадки и вообще произведения народной словесности, имеющие отношение к математическим знаниям. 7) Памятники древней народной математики, находящиеся в рукописях, музеях, коллекциях и т. д., или находимые при раскопках курганов, могил, городищ и пр.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ КУРЬЕЗЫ

$$91+\frac{5823}{647}=100$$

$$94+\frac{1578}{263}=100$$

$$96+\frac{1428}{357}=100$$


Моя Биография
Я окончил курс Университета 44-х лет от роду. Спустя год, 100-летним молодым человеком, я женился на 34-летней девушке. Незначительная разница в возрасте — всего 11 лет, — способствовала тому, что мы жили общими интересами и мечтами. Спустя немного лет, у меня была уже и маленькая семья из 10 детей. Жалованья я получал в месяц всего 200 рублей, из которых 1/10 приходилось отдавать сестре, так что мы с детьми жили на 130 руб. в месяц. Но так было в начале:

Глава IV
НЕДЕСЯТИЧНЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ
ЗАГАДОЧНАЯ АВТОБИОГРАФИЯ

Эту главу позволю себе начать с задачи, которую я придумал когда-то для читателей одного распространенного тогда журнала [1] в качестве „задачи на премию". Вот она:

Задача № 9.

„Загадочная автобиография".

„В бумагах одного чудака-математика найдена была его автобиография. Она началась следующими строками:

„Я окончил курс университета 44 лет от роду. Спустя год, 100-летним молодым человеком, я женился

*) „Природа и Люди" (потом она была перепечатана мною в сборнике Е. И. Игнатьева „В царстве смекалки").

на 34-летней девушке. Незначительная разница в возрасте—всего 11 лет,—способствовала тому, что мы жили общими интересами и мечтами. Спустя немного лет, у меня была уже и маленькая семья из 10 детей. Жалованья я получал в месяц всего 200 рублей, из которых 1/10 приходилось отдавать сестре, так что мы с детьми жили на 130 руб. в месяц" и т. д.

„Чем объяснить странные противоречия в числах этого отрывка?"

Решение.

Решение задачи подсказывается названием этой главы: недесятичная система счисления—вот единственная причина кажущейся противоречивости приведенных чисел. Напав на эту мысль, нетрудно догадаться, в какой именно системе счисления изображены числа чудаком-математиком. Секрет выдается фразой: „спустя год (после 44-летнего возраста), 100-летним молодым человеком..." Если от прибавления одной единицы число 44 преображается в 100, то, значит, цифра 4—наибольшая в этой системе (как 9—в десятичной), а следовательно, основанием системы является 5. Чудаку-математику пришла фантазия написать все числа своей биографии по пятиричной системе счисления, т.-е. по такой, в которой единица высшего разряда не в 10, а в 5 раз больше единицы низшего; на первом справа месте стоят в ней простые единицы (не свыше четырех), на втором—не десятки, а пятерки; на третьем не сотни а „двадцатипятерки" и т. д. Поэтому число, изображенное в тексте записки „44", означает не $4 \times 10 + 4$, как в десятичной системе, а $4 \times 5 + 4$, т.-е. двадцать четыре. Точно так же число „100" в автобиографии означает одну единицу третьего разряда в пятиричной системе, т.-е. 25. Остальные числа записки соответственно означают:

$$
\begin{array}{lcll}
\text{„ } 34 \text{ „} & = & 3\times 5+4 & =19 \\
\text{„ } 11 \text{ „} & = & 5+1 & =6 \\
\text{„ } 200 \text{ „} & = & 2\times 25 & =50 \\
\text{„ } 10 \text{ „} & = & & 5 \\
\text{„ } {}^1/_{10} \text{ „} & = & & {}^1/_5 \\
\text{„ } 130 \text{ „} & = & 25+3\times 5 & =40
\end{array}
$$

Восстановив истинный смысл чисел записки, мы видим, что в ней никаких противоречий нет.

Я окончил курс 24 лет от роду. Спустя год, 25-летним молодым человеком, я женился на 19-летней девушке. Незначительная разница в возрасте — всего 6 лет — способствовала тому, что мы жили общими интересами и мечтами. Спустя немного лет у меня была уже и маленькая семья из 5 детей. Жалованья я получал 50 рублей, из которых $^1/_5$ приходилось отдавать сестре, так что мы с детьми жили на 40 рублей".

Трудно ли изображать числа в других системах счисления? Нисколько. Положим, вы желаете число 119 изобразить в пятиричной системе. Делите 119 на 5, чтобы узнать, сколько в нем единиц п е р в о г о разряда:

$$119 : 5 = 23, \text{ остаток } 4.$$

Значит, число простых единиц будет 4. Далее, 23 пятерки не могут стоять все во втором разряде, так как высшая цифра в пятиричной системе—4, и больше 4 единиц ни в одном разряде быть не должно. Делим поэтому 23 на 5:

$$23 : 5 = 4, \text{ остаток } 3.$$

Это показывает, что во втором разряде („пятерок") будет цифра 3, а в третьем („двадцати-пятерок")—4.

Итак, $119 = 4 \times 25 + 3 \times 5 + 4$, или в пятиричной системе „434“.

Сделанные действия для удобства располагают так:

$$\begin{array}{r|c|c}
119 & 5 & \\
\hline
\mathit{4} & 23 & 5 \\
\cline{2-3}
 & \mathit{3} & \mathit{4}
\end{array}$$

Курсивные цифры (при письме можно их подчеркивать) выписывают справа налево, и сразу получают искомое изображение числа в иной системе.

Приведем еще примеры.

Задача № 10.

Изобразить 47 в третичной системе:

Решение.

$$\begin{array}{r|c|c|c}
47 & 3 & & \\
\hline
\mathit{2} & 15 & 3 & \\
\cline{2-3}
 & \mathit{0} & 5 & 3 \\
\cline{3-4}
 & & \mathit{2} & \mathit{1}
\end{array}$$

Ответ: „1202“. Поверка: $1 \times 27 + 2 \times 9 + 0 \times 9 + 2 = 47$.

Задача № 11.

Число 200 изобразить в семиричной системе.

Решение.

$$\begin{array}{r|c|c}
200 & 7 & \\
\cline{2-2}
14 & 28 & 7 \\
\hline
60 & \mathit{0} & \mathit{4} \\
\mathit{4} & &
\end{array}$$

Ответ: „404“. Поверка: $4 \times 49 + 0 \times 7 + 4 = 200$.

Задача № 12.

Число 163 изобразить в 12-ричной системе:

Решение.

$$
\begin{array}{r|c|c}
163 & 12 & \\
\cline{2-2}
43 & 13 & 12 \\
\hline
\mathit{7} & \mathit{1} & \mathit{1}
\end{array}
$$

Ответ: „117“. Поверка: $1 \times 144 + 1 \times 12 + 7 = 163$.

Думаем, что теперь читатель не затруднится изобразить любое число в какой угодно системе счисления. Единственная помеха может возникнуть лишь вследствие того, что в некоторых случаях не будет доставать изображений для цифр. В самом деле: при изображении числа в системах с основанием более десяти (напр., в двенадцатиричной), может явиться надобность в цифрах, „десять“ и „одиннадцать“. Из этого затруднения нетрудно выйти, избрав для этих новых цифр какие-нибудь условные знаки или буквы,—хоты бы, например, буквы К и Л, стоящие в русском алфавите на 10-м и 11-м месте. Так, число 1579 в двенадцатиричной системе изобразится следующим образом:

$$
\begin{array}{l|l|l}
1579 & 12 & \\
\cline{2-2}
\underline{12} & 131 & 12 \\
\cline{2-3}
\underline{37} & \mathit{11} & \mathit{10} \\
\underline{19} & & \\
\mathit{7} & &
\end{array}
\quad „(10)\ (11)7“, \text{ или КЛ 7}
$$

Поверка: $10 \times 144 + 11 \times 12 + 7 = 1579$.

Задача № 13. Выразить число 1926 в двенадцатиричной системе [1]).

Задача № 14. Выразить число 273 в двадцатиричной системе [2]).

ПРОСТЕЙШАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Вообще нетрудно сообразить, что в каждой системе высшая цифра, какая может понадобиться, равна основанию этой системы без единицы. Наприм., в 10-ичной системе высшая цифра 9, в 6-ричной—5, в троичной—2, в 15-ричной—14, и т. д.

Самая простая система счисления, конечно, та, для которой требуется меньше всего цифр. В десятичной системе нужны 10 цифр (считая и 0), в пятиричной—5 цифр, в троичной—3 цифры (1, 2 и 0), в двоичной — только 2 цифры (1 и 0). Существует ли и „единичная" система? Конечно: это система, в которой единицы высшего разряда в о д и н раз больше единицы низшего, т. е. равны ей; другими словами, „единичной" можно назвать такую систему, в которой единицы всех разрядов имеют о д и н а к о в о е значение. Это самая примитивная „система"; ею пользуется первобытный человек, делая на дереве зарубки по числу сосчитываемых предметов. Но между нею и всеми другими системами счета есть громадная разница: она лишена главного преимущества нашей нумерации—так наз. п о м е с т н о г о з н а ч е н и я ц и ф р. Действительно: в „единичной" системе знак, стоящий на 3-м или 5-м месте, имеет то же значение, что и стоящий на первом месте. Между тем даже в двоичной системе

---

[1]) Ответ 1146.

[2]) Ответ *HH*, где буквою *H* обозначена „цифра 13".

единица на 3-м месте (справа) уже в 4 раза (2×2) больше, чем на первом, а на 5-м—в 16 раз больше (2×2×2×2). Поэтому система „единичная“ дает очень мало выгоды, так как для изображения какого-нибудь числа по этой системе нужно ровно столько же знаков, сколько было сосчитано предметов: чтобы записать сто предметов нужно сто знаков, в двоичной же—только семь („1100100“). а в пятиричной—всего три („400“).

Вот почему „единичную“ систему едва ли можно назвать „системой“; по крайней мере, ее нельзя поставить рядом с остальными, так как она принципиально от них отличается, не давая никакой экономии в изображении чисел. Если же ее откинуть, то простейшей системой счисления нужно признать систему двоичную, в которой употребляются всего две цифры: 1 и 0. При помощи 1-цы и 0 можно изобразить все бесконечное множество чисел! На практике система эта мало удобна—получаются слишком длинные числа [1]; но теоретически она имеет все права считаться простейшей. Она обладает некоторыми любопытными особенностями, присущими только ей одной; особенностями этими, между прочим, можно воспользоваться для выполнения ряда эффектных математических фокусов, о которых мы скоро побеседуем подробно в главе „Фокусы без обмана“.

НЕОБЫЧАЙНАЯ АРИФМЕТИКА

Задача № 15.

К арифметическим действиям мы привыкли настолько, что выполняем их автоматически, почти не думая о том,

---

[1]) Зато, как увидим далее, для такой системы до крайности упрощаются таблица сложения и таблица умножения.

что мы делаем. Но те же действия потребуют от нас немалого напряжения, если мы пожелаем применить их к числам, написанным не по десятичной системе. Попробуйте, например, выполнить сложение следующих двух чисел, написанных по пятиричной системе:

$$+\begin{array}{r}„4203“ \\ „2132“ \\ \hline\end{array} \text{ (по пятиричной системе)}$$

Решение.

Складываем по разрядам, начиная с единиц, т.-е. справа: 3+2 равно пяти; но мы не можем записать 5, потому что такой цифры в пятиричной системе не существует: пять есть уже единица высшего разряда. Значит, в сумме вовсе нет единиц; пишем 0, а пять, т.-е. 1-цу следующего разряда, удерживаем в уме. Далее, 0+3=3, да еще 1-ца, удержанная в уме,—всего 4 единицы второго разряда. В третьем разряде получаем 2+1=3. В четвертом 4+2 равно шести, т. е. 5+1; пишем 1, а 5, т.-е. 1-цу высшего разряда, относим далее влево. Искомая сумма+11340.

$$+\begin{array}{r}„4203“ \\ „2132“ \\ \hline „11340“\end{array} \text{ (в пятиричной системе)}$$

Предоставляем читателю проверить это сложенне, предварительно переведя изображенные в кавычках числа в 10-ичную систему и выполнив то же действие.

Точно так же выполняются и другие действия. Для упражнения приводим далее ряд примеров, число которых читатель, при желании, может увеличить самостоятельно:

Задача № 16. **Задача № 17.** **Задача № 18.**

По пятиричной системе.

$-\begin{array}{r} „2143“ \\ „334“ \\ \hline \end{array}$ $\times\begin{array}{r} „213“ \\ „3“ \\ \hline \end{array}$ $\times\begin{array}{r} „42“ \\ „31“ \\ \hline \end{array}$

Задача № 19. **Задача № 20.** **Задачи № 21 и № 22.**

По троичной системе.

$+\begin{array}{r} „212“ \\ „120“ \\ „201“ \\ \hline \end{array}$ $\times\begin{array}{r} „122“ \\ „20“ \\ \hline \end{array}$

„220“ : 2=

„201“ : 12=

Ответы: № 16—„1304“. № 17—„1144“. № 18—„2402“. № 19—„2010“. № 20—„10210“. № 21—„110“. № 22—„10“, остаток „11“.

При выполнении этих действий мы сначала мысленно изображаем написанные числа в привычной нам десятичной системе, а получив результат, снова изображаем его в требуемой недесятичной системе. Но можно поступать и иначе: составить „таблицу сложения“ и „таблицу умножения“ в тех же системах, в которых даны нам числа, и пользоваться ими непосредственно. Например, таблица сложения в пятиричной системе такова:

0	1	2	3	4
1	2	3	4	10
2	3	4	10	11
3	4	10	11	12
4	10	11	12	13

Помощью этой таблички мы могли бы сложить числа „4203“ и „2132“, написанные в пятиричной системе, гораздо менее напрягая внимание, чем при способе, примененном раньше.

Упрощается, как легко понять, также выполнение вычитания.

Задача № 23.

Составим и таблицу умножения („Пифагорову“) для пятиричной системы.

Решение.

1	2	3	4
2	4	11	13
3	11	14	22
4	13	22	31

Имея эту табличку перед глазами, вы опять-таки можете облегчить себе труд умножения (и деления) чисел в пятиричной системе,—как легко убедиться, применив ее к приведенным выше примерам. Например, при умножении

$$\text{по пятиричной системе}\ \left|\ \times\ \begin{array}{r} „213“ \\ „3“ \\ \hline „1144“ \end{array}\right.$$

рассуждаем так: трижды три „14“ (из таблицы); 4 пишем, 1—в уме. Один на 3 дает 3, да еще один, — пишем 4. Дважды три = „11“; 1 — пишем, 1 — переносим влево. Получаем в результате „1144“.

Чем меньше основание системы, тем меньше и соответствующие таблицы сложения и умножения. Например, для троичной системы обе таблицы таковы:

Таблица сложения для 3-ной системы.

0	1	2
1	2	10
2	10	11

Пифагорова таблица для 3-ной системы:

1	2
2	11

Их можно было бы сразу же запомнить и пользоваться ими для выполнения действий. Самые маленькие таблицы сложения и вычитания получаются для **двоичной** системы:

Таблица сложения для двоичной системы:

0	1
1	10

Таблица умножения для двоичной системы:

$$\boxed{1 \times 1 = 1}$$

При помощи таких-то простых „таблиц" можно выполнять в двоичной системе **все четыре действия**! Умножения в этой системе, в сущности, как бы и вовсе нет: ведь умножить на единицу значит оставить число без изменения: умножение же на „10", „100", „1000" (т.-е. на 2, 4, на 8) сводится к простому приписыванию справа соответствующего числа нулей. Что же касается сложения, то для выполнения его нужно помнить только одно — что в двоичной системе $1 + 1 = 10$. Не правда ли, мы с полным основанием назвали раньше двоичную систему самой простой из всех возможных? Длинота чисел этой своеобразной арифметики искупается простотой выполнения над ними всех арифметических действий. Пусть требуется, например, умножить:

$$\text{В двоичной системе}\left\{\begin{array}{r} „1001011101“ \\ \times \quad „100101“ \\ \hline „1001011101“ \\ + \quad „1001011101“ \\ „1001011101“ \\ \hline „101011101110001“ \end{array}\right.$$

Выполнение действия сводится только к переписыванию данных чисел в надлежащем расположении: это требует несравненно меньших умственных усилий, чем умножение тех же чисел в десятичной системе ($605 \times 37 = 22385$). Если бы у нас была принята двоичная система, изучение *письменного* счисления требовало бы наименьшего напряжения мысли (зато—наибольшего количества бумаги и чернил). Однако, в *устном* счете двоичная арифметика по удобству выполнения действий значительно уступает нашей десятичной.

ЧЕТ ИЛИ НЕЧЕТ?

Задача № 24.

Не видя числа, трудно, конечно, угадать, какое оно—четное или нечетное. Но не думайте, что вы всегда сможете сказать это, едва увидите задаваемое число. Скажите, например, четное или нечетное число 16?

Если вам известно, что оно написано по десятичной системе, то без сомнения, можно утверждать, что число это—четное. Но когда оно написано по какой-либо другой системе—можно ли быть уверенным, что оно изображает непременно четное число?

Решение.

Оказывается, нет. Если основание, напр., семь, то „16" означает $7+6=13$, число нечетное. То же будет и для всякого нечетного основания (потому что всякое нечетное число$+6=$нечетному числу).

Отсюда вывод, что знакомый нам признак делимости на два (последняя цифра четная) безусловно пригоден только для 10-тичной системы счисления, для других же—не всегда. А именно, он верен только для систем счисления с четным основанием: 6-ричной, 8-ричной и т. п. Каков же признак делимости на 2 для систем с нечетным основанием? Достаточно краткого размышления, чтобы установить его: сумма цифр должна быть четной. Например, число „136" четное во всякой системе счисления, даже и с нечетным основанием: действительно, в последнем случае имеем: нечетные числа [1]) $+$ нечетное число $+$ четное $=$ четному числу.

С такою же осторожностью надо отнестись к задаче: всегда ли число 25 делится на 5? В 7-ричной или в 8-ричной системе число так изображенное на 5 не делится (потому что оно равно девятнадцати или двадцати одному). Точно также общеизвестный признак делимости на 9 (сумма цифр . . .) правилен только для десятичной системы. Напротив, в пятиричной системе тот же признак

---

[1]) Нечетное число, умноженное на себя (т. е. на нечетное) всегда дает нечетное число (напр., $7\times7=49$, $11\times11=121$ и т. п.).

применим для делимости на 4, а, например,—в семиричной—на 6. Так, число „323“ в пятиричной системе делится на 4, потому что $3+2+3=8$, а число „51“ в семиричной—на 6 (легко убедиться, переведя числа в десятичную систему: получим соответственно 88 и 36). Почему это так, читатель сам сможет сообразить, если вникнет хорошенько в вывод признака делимости на 9 и приложит те же рассуждения, соответственно измененные, например, к семиричной системе для вывода признака делимости на 6.

Труднее доказать чисто арифметическим путем справедливость следующих положений:

$$\left.\begin{array}{r} 121 : 11 = 11 \\ 144 : 12 = 12 \\ 21 \times 21 = 441 \end{array}\right\} \text{во всех системах счисления (где имеются соответств. цифры).}$$

Знакомые с начатками алгебры легко найдут основание, объясняющее свойство этих равенств. Остальные читатели могут проверить их рядом проб для разных систем счисления.

ДРОБИ БЕЗ ЗНАМЕНАТЕЛЯ

Мы привыкли к тому, что без знаменателя пишутся только д е с я т и ч н ы е дроби. Поэтому с первого взгляда кажется, что написать прямо без знаменателя дробь $^2/_7$ или $^1/_3$ нельзя. Дело представится нам, однако, иначе, если вспомним, что дроби без знаменателя возможны и в д р у г и х с и с т е м а х счисления. Что, например, означает дробь „0,4“ в пятиричной системе? Конечно, $^4/_5$. Дробь „1,2“ в семиричной системе означает $1^2/_7$. А что означает в той же семиричной системе дробь „0,33“? Здесь результат сложнее: $^3/_7 + ^3/_{49} = ^{24}/_{49}$.

Задача № 25.

Рассмотрим еще несколько не-десятичных дробей без знаменателя. Чему равны

a) „2,121“ в троичной системе?
b) „1,011“ в двоичной системе?
c) „3,431“ в пятиричной системе?
d) „2, (5)“ в семиричной системе?

Ответы:

a) $2 + {}^1/_3 + {}^2/_9 + {}^1/_{27} = {}^{16}2/_{27}$
b) $1 + {}^1/_4 + {}^1/_8 = 1{}^3/_8$
c) $3 + {}^4/_5 + {}^3/_{25} + {}^1/_{125} = 3{}^{116}/_{125}$
d) $2 + {}^5/_7 + {}^5/_{49} + {}^5/_{343} = 2{}^5/_6$

В правильности последнего равенства читатель легко может убедиться, если попробует применить к данному случаю, с соответствующим видоизменением, рассуждения, относящиеся к превращению десятичных периодических дробей в простые.

В заключение рассмотрим еще две задачи особого рода:

Задача № 26.

По какой системе счисления выполнено следующее сложение:

$$
\begin{array}{r}
756 \\
307 \\
+\;2456 \\
24 \\
\hline
3767
\end{array}
$$

Задача № 27.

По какой системе счисления выполнено деление:

```
4415400 : 4532 = 543
40344
-------
 34100
 31412
 ------
  22440
  22440
  -----
      0
```

Ответы: № 26—по восьмиричной;
№ 27— по шестиричной.

Задача № 28.

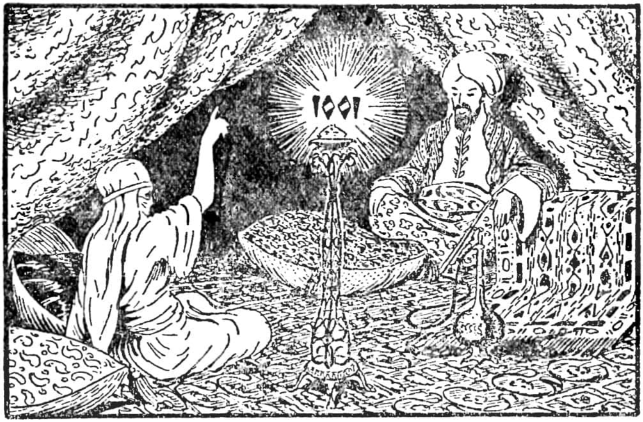
Напишите число сто тринадцать во всех системах счисления до девятиричной включительно.

(Решение см. на стр. 104).

Задача № 29.

Чему равно число „123", если считать его написанным во всех системах счисления до девятиричной включительно. Возможно ли, что оно написано по **двоичной** системе? А по **троичной**? Если оно написано по **пятиричной** системе, то, можете ли вы узнать, не переписывая его по десятичной системе, делится ли оно без остатка на два? Если оно написано по **семиричной** системе, то делится ли оно без остатка иа шесть? Если оно написано по **девятиричной** системе, то делится ли оно без остатка на четыре?

(Решение см. на стр. 131).



Глава V

ГАЛЛЕРЕЯ ЧИСЛОВЫХ ДИКОВИНОК

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ КУНСТКАМЕРА

В мире чисел, как и в мире живых существ, встречаются подлинные диковинки, редкие экземпляры, обладающие исключительными свойствами. Из таких необыкновенных чисел можно было бы составить своего рода музей числовых редкостей, настоящую „арифметическую кунсткамеру". В ее витринах нашли бы себе место не только числовые исполины, о которых мы побеседуем еще в особой главе, но и числа сравнительно небольшие, зато выделяющиеся из ряда других какими-либо необычайными свойствами. Некоторые из них уже по внешности привлекают к себе внимание: другие открывают свои диковинные особенности лишь при более близком знакомстве.

Приглашаю читателя пройтись со мною по галлерее таких числовых диковинок и познакомиться с некоторыми из них.

Пройдем, не останавливаясь, мимо первых витрин, заключающих числа, свойства которых нам уже знакомы. Мы знаем уже, почему попало в галлерею диковинок число 2: не потому, что оно первое четное число, а потому, что оно — основание самой удобной системы счисления (см. стр. 62).

Не удивимся мы, встретив тут 5 — одно из наших любимейших чисел, играющее важную роль при всяких „округлениях“, в том числе и при округлении цен, которое обходится нам так дорого (см. стр. 25). Не будет неожиданностью для нас найти здесь и число 9, — конечно, не как „символ постоянства“ [1]), а как число, облегчающее

[1]) Древние (последователи Пифагора) считали 9 символом постоянства, так как все числа, кратные 9, имеют сумму цифр, кратную 9-ти.

нам поверку всех арифметических действий (см. стр. 45). Но вот витрина, за стеклом которой мы видим—

ЧИСЛО 12

Чем оно замечательно? Конечно, это число месяцев в году и число единиц в дюжине. Но что, в сущности, особенного в дюжине? Немногим известно, что 12—старинный и едва не победивший соперник числа 10 в борьбе за почетный пост основания системы счисления. Культурнейший народ древнего Востока — вавилоняне и их предшественники, еще более древние первонасельники Двуречья—вели счет в 12-ричной системе счисления. И если бы не пересилившее влияние Индии, подарившей нам 10-тичную систему, мы, весьма вероятно, унаследовали бы от Вавилона 12-ричную систему. Кое в чем мы и до сих пор платим дань этой системе, несмотря на победу 10-тичной. Наше пристрастие к дюжинам и гроссам, наше деление суток на две дюжины часов, деление часа — на 5 дюжин минут, деление минуты—на столько же секунд, деление круга на 30 дюжин градусов, наконец, деление фута на 12 дюймов—разве не свидетельствует все это о том, как велико еще влияние этой древней системы?

Хорошо ли, что в борьбе между дюжиной и десяткой победила последняя? Конечно, сильными союзницами десятки были и остаются наши собственные руки с десятью пальцами,—живые счетные машины. Но если бы не это, то следовало бы безусловно отдать предпочтение

12-ти перед 10. Гораздо удобнее производить расчеты по 12-ричной системе, нежели по 10-тичной. Причина та, что число 10 делится без остатка только на 2 и на 5, между тем как 12 делится и на 2, и на 3, и на 4, и на 6. У 10 всего два делителя, у 12—четыре. Преимущества 12-ричной системы станут вам яснее, если вы примете в соображение, что в 12-ричной системе число, оканчивающееся нулем, кратно и 2, и 3, и 4, и 6: подумайте как удобно дробить число, когда и $\frac{1}{2}$ и $^1/_3$ и $1^1/_4$ и $^1/_6$ его должны быть целыми числами! А если выраженное в 12-ричной системе число оканчивается **двумя** нулями, то оно должно делиться без остатка на 144, а следовательно, и на все множители 144-х, т. е. на следующий длинный ряд чисел:

2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144.

Четырнадцать делителей—вместо тех восьми, которые имеют числа, написанные в 10-тичной системе, если оканчиваются двумя нулями (2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 и 100). В нашей системе только дроби вида $\frac{1}{2}$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_{20}$, и т. д. превращаются в конечные десятичные: в 12-ричной же системе можно написать без знаменателя гораздо более разнообразные дроби, и прежде всего дроби:

$\frac{1}{2}$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_6$, $^1/_8$, $^1/_9$ $^1/_{12}$, $^1/_{16}$, $^1/_{18}$, $^1/_{24}$, $^1/_{36}$, $^1/_{48}$, $^1/_{72}$, $^1/_{144}$,

которые соответственно изобразятся так:

0,6; 0,4; 0,3; 0,2; 0,16; 0,14; 0,1; 0,09; 0,08; 0,06; 0,04; 0,03; 0,02; 0,01.

Было бы, однако, большим заблуждением думать, что делимость числа может зависеть от того, в какой системе счисления оно изображено. Если орехи, заключающиеся в данном мешке, могут быть разложены в 5 одинаковых кучек, то это свойство их, конечно, не изменится от того, будет ли наше число орехов выражено в той или иной системе счисления, или отложено на счетах, или написано прописью, или, наконец, изображено каким-либо иным способом. Если число, написанное в 12-ричной системе, делится на 6 или на 72, то, будучи выражено в другой системе счисления, например, в 10-тичной, оно должно иметь тех же делителей. Разница лишь в том, что в 12-ричной системе делимость на 6 или на 72 *легче обнаружить* (число оканчивается одним или двумя нулями). Когда говорят о преимуществах 12-тиричной системы в смысле делимости на большое число делителей, то имеют в виду, что благодаря склонности нашей „к круглым“ числам, на практике будут чаще встречаться числа, оканчивающиеся, в 12-ричной системе, нулями.

При таких преимуществах 12-ричной системы неудивительно, что среди математиков раздавались голоса за полный переход на эту систему. Однако, мы уже черезчур тесно сжились с 10-тичной системой, чтобы решаться на такую реформу.

Вы видите, следовательно, что дюжина имеет за собою длинную историю и что число 12 не без основания очутилось в галлерее числовых диковинок. Зато его соседка—„чертова дюжина“, 13, фигурирует здесь не потому, что чем-либо замечательна, а скорее именно потому, что ничем не замечательна, хотя и пользуется такой мрачной славой: разве не удивительно в самом деле, что ровно ничем не выделяющееся число могло стать столь „страшным“ для суеверных людей? [1]).

[1]) Как распространено это суеверие даже и в нашу эпоху, видно из того, что при устройстве электрического трамвая в Ленинграде

В следующей витрине арифметической кунсткамеры перед нами

ЧИСЛО 365.

Оно замечательно прежде всего тем, что определяет число дней в году. Далее, при делении на 7 оно дает в остатке 1: эта несущественная, казалось бы, особенность числа 365 имеет большое значение для календаря). От нее зависит то, что каждый простой (не високосный) год кончается тем днем недели, каким он начался; если, например, день нового года был понедельник, то

и последний день года будет понедельник, а следующий год начнется со вторника. По той же причине — благодаря остатку 1 от деления 365 на 7 — было бы нетрудно так изменить наш календарь, чтобы определенная календарная дата всегда приходилась на один и тот же день недели, — например, чтобы 1-го мая каждый год было воскресенье. Для этого достаточно было бы лишь первый день года вовсе не вводить в счет числа дней,

---

(тогда Петербурге) первое время не решались вводить маршрута № 13, а пропустив его, сразу перешли к № 14: опасались, что публика побоится ездить в вагонах с таким „роковым" номером. Любопытно и то, что в Ленинграде есть не мало домов, где 13-й номер квартиры пропущен... В гостиницах также нередко отсутствует комната № 13. Для борьбы с этим ничем необоснованным числовым суеверием на Западе (в Англии) учреждены даже особые „клубы числа 13"...

называя его не „1 января", а просто „день нового года"; 1-м января будет следующий день. Тогда остальное число дней года, 364, будет заключать целое число недель; следовательно, весь ряд дальнейших лет будет начинаться тем же днем недели, и все даты из года в год будут повторяться в одни и те же дни. В годы високосные, заключающие 366 дней, надо будет уже первые **два** дня года оставить вне счета, „новогодние".

Любопытна и другая особенность числа 365, не связанная с календарем:

$$365=10\times10+11\times11+12\times12,$$

то-есть, 365 равно сумме квадратов трех последовательных чисел, начиная с 10-ти:

$$10^2+11^2+12^2=100+121+144=365.$$

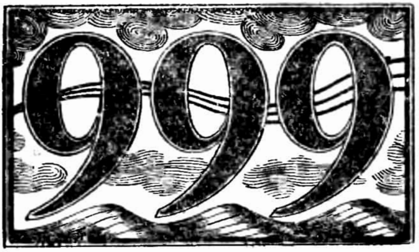
Но и это еще не все: тому же равна сумма квадратов двух следующих чисел—13 и 14

$$13^2+14^2=169+196=365.$$

Таких чисел не много наберется в нашей галлерее арифметических диковинок.

ТРИ ДЕВЯТКИ

В следующей витрине выставлено наибольшее из всех трехзначных чисел: 999. Оно без сомнения гораздо удивительнее, чем его перевернутое изображение—666—знаменитое „звериное число" Апокалипсиса, вселявшее нелепый страх многим суеверным людям, но по арифметическим свойствам ничем не выделяющееся среди прочих чисел. Любопытная особенность числа 999 проявляется при умножении на него всякого другого трехзначного числа. Тогда получается шестизначное произведение; первые три цифры его есть умножаемое число, только уменьшенное на 1-цу, а остальные три цифры



(кроме последней)—„дополнения“ первых до 9. Например:

$$\begin{array}{r} 572 \\ 573\times999=572427 \\ \hline 999 \end{array}$$

Стоит лишь взглянуть на следующую строку, чтобы понять происхождение этой особенности:

$$573\times999=573\times(1000-1)=\left\{\begin{array}{r} 573000 \\ -\ 573 \\ \hline 572427 \end{array}\right.$$

Зная эту особенность, мы можем „мгновенно“ умножать любое трехзначное число на 999.

$$947\times999=946053;$$
$$509\times999=508491;$$
$$981\times999=980019;$$

и т. п.

А так как $999 = 9 \times 111 = 3 \times 3 \times 3 \times 37$, то вы можете, опять-таки с молниеносной быстротой, писать целые колонны шестизначных чисел, кратных 37; незнакомый со свойствами числа 999, конечно, сделать этого не в состоянии. Короче говоря, вы можете устраивать перед непосвященными маленькие сеансы „мгновенного умножения и деления" не хуже иного фокусника.

ЧИСЛО ШЕХЕРАЗАДЫ

Следующее на очереди у нас число 1001,—прославленное число Шехеразады. Вы, вероятно, и не подозре-

вали, что в самом названии сборника волшебных арабских сказок заключается также своего рода чудо, которое могло бы поразить воображение сказочного султана не менее многих других чудес Востока, если бы он способен был интересоваться арифметическими диковинками.

Чем же так замечательно число 1001? С виду оно кажется весьма обыкновенным. Оно даже не принадлежит к избранному разряду так называемых „простых" чисел.

Через ячейки Эратосфенова решета оно свободно проскользнуло бы, так как делится без остатка и на 7, и на 11, и на 13—на три последовательных простых числа, произведением которых оно и является. Но в том, что число $1001 = 7 \times 11 \times 13$, нет еще ничего волшебного. Замечательнее то, что при умножении на него трехзначного числа получается результат, состоящий из самого умноженного числа, только написанного дважды, например:

$$873 \times 1001 = 873873;$$
$$207 \times 1001 = 207207, \text{ и т. д.}$$

И хотя этого и следовало ожидать, так как $873 \times 1001 = 873 \times 1000 + 873 = 873000 + 873$, — все же, пользуясь указанным свойством „числа Шехеразады", можно достичь результатов совсем неожиданных,—по крайней мере, для человека неподготовленного.

Задача № 30.

Целое общество гостей, непосвященных в арифметические тайны, вы можете поразить следующим фокусом. Пусть кто-нибудь напишет на бумажке, секретно от вас, трехзначное число, какое хочет, и затем пусть припишет к нему еще раз то же самое число. Получится шестизначное число, состоящее из трех повторяющихся цифр. Предложите тому же товарищу, или его соседу, разделить—секретно от вас—это число на 7; при этом вы заранее предсказываете, что остатка не получится. Результат деления передается соседу, который, по вашему предложению, делит его на 11; и хотя вы не знаете делимого, вы все же смело утверждаете, что и оно разделится без остатка. Полученный результат вы направляете следующему соседу, которого просите разделить это число на 13—деление снова выполняется без остатка, о чем вы заранее предупреждаете. Результат третьего деления вы, не глядя на полученное число, вручаете первому товарищу со словами:

— Вот число, которое вы задумали!

Так и есть: вы угадали.

Какова разгадка этого фокуса?

Решение.

Этот красивый арифметический фокус, производящий на непосвященных впечатление волшебства, объясняется очень просто: вспомните, что приписать к трехзначному числу его само—значит умножить его на 1001, т. е. на произведение $7 \times 11 \times 13$. Шестизначное число, которое ваш товарищ получит после того, как припишет к задуманному числу его само, должно будет поэтому делиться без остатка и на 7, и на 11, и на 13; а в результате деления последовательно на эти три числа (т. е. на их произведение—1001) оно должно, конечно, снова дать задуманное число.

ЧИСЛО 10101

После сказанного о числе 1001 для вас уже не будет неожиданностью увидеть в витринах нашей галлереи число 10101. Вы догадаетесь, какому именно свойству обязано число это такою честью. Оно, как и число 1001, дает удивительный результат при умножении,—но не трехзначных чисел, а двузначных; каждое двузначное число, умноженное на 10101, дает в результате само себя, написанное трижды. Например:

$$73 \times 10101 = 737373;$$
$$21 \times 10101 = 212121.$$

Причина уясняется из следующей строки:

$$73 \times 10101 = 73\ (10000 + 100 + 1) = \left\{ \begin{array}{r} 730000 \\ +7300 \\ 73 \\ \hline 737373 \end{array} \right.$$

10101

Задача № 31.

Можно ли проделывать с помощью этого числа фокусы необычайного отгадывания, как с помощью числа 1001?

Решение.

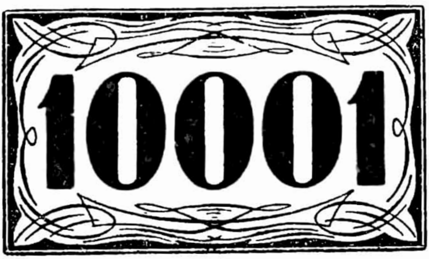
Да, можно. Здесь даже возможно обставить фокус эффектнее, разнообразнее, если иметь в виду, что 10101 есть произведение четырех простых чисел:

$$10101 = 3 \times 7 \times 13 \times 37.$$

Предложив первому гостю задумать какое-нибудь двузначное число, вы предлагаете второму приписать к нему то же число, а третьему приписать то же число еще раз. Четвертого гостя вы просите разделить получившееся шестизначное число, например, на 7; пятый гость должен разделить полученное частное на 3; шестой гость делит то, что получилось на 37 и, наконец, седьмой делит этот результат на 13,—при чем все 4 деления выполняются без остатка. Результат последнего деления вы просите передать первому гостю: это и есть задуманное им число.

При повторении фокуса вы можете внести в него некоторое разнообразие, обращаясь каждый раз к новым делителям. А именно, вместо четырех множителей $3 \times 7 \times 13 \times 37$, можете взять следующие группы трех множителей: $21 \times 13 \times 37$; $7 \times 39 \times 37$; $3 \times 91 \times 37$; $7 \times 13 \times 111$.

Число это—10101—пожалуй, даже удивительнее волшебного числа Шехеразады, хотя и менее его известно своими поразительными свойствами. А между тем о нем писалось еще двести лет тому назад в „Арифметике" Магницкого, в той главе, где приводятся примеры умножения „с некоим удивлением". Тем с большим основанием должны мы включить его в наше собрание арифметических диковинок.



ЧИСЛО 10001

Задача № 32.

С этим числом вы также можете проделать фокусы вроде предыдущих, хотя, пожалуй, и не столь эффектные.

Дело в том, что оно представляет собою произведение только двух простых чисел:

$$10001 = 73 \times 137.$$

Как воспользоваться этим для выполнения арифметических фокусов, читатель, надеюсь, после всего сказанного выше, догадывается сам.

ШЕСТЬ ЕДИНИЦ

В соседней витрине мы видим такую диковинку арифметической кунсткамеры:

— число, состоящее из шести единиц. Благодаря знакомству с волшебными свойствами числа 1001, мы сразу соображаем, что

$$111111 = 111 \times 1001.$$

Но $111 = 3 \times 37$, а $1001 = 7 \times 11 \times 13$. Отсюда следует, что наш новый числовой феномен, состоящий из одних лишь единиц, представляет собою произведение пяти простых множителей. Соединяя же эти 5 множителей в две группы на всевозможные лады, мы получаем

15 пар множителей, дающих в произведении одно и то же число 111111:

$$
\begin{aligned}
3 \times (7 \times 11 \times 13 \times 37) &= 3 \times 37037 = 111111 \\
7 \times (3 \times 11 \times 13 \times 37) &= 7 \times 15873 = 111111 \\
11 \times (3 \times 7 \times 13 \times 37) &= 11 \times 10101 = 111111 \\
13 \times (3 \times 7 \times 11 \times 37) &= 13 \times 8547 = 111111 \\
37 \times (3 \times 7 \times 11 \times 13) &= 37 \times 3003 = 111111 \\
(3 \times 7) \times (11 \times 13 \times 37) &= 21 \times 5291 = 111111 \\
(3 \times 11) \times (7 \times 13 \times 37) &= 33 \times 3367 = 111111
\end{aligned}
$$

и т. д.

Вы можете, значит, засадить общество из 15 человек за работу умножения, и хотя каждый будет перемножать другую пару чисел, все получат один и тот же оригинальный результат: 111111.

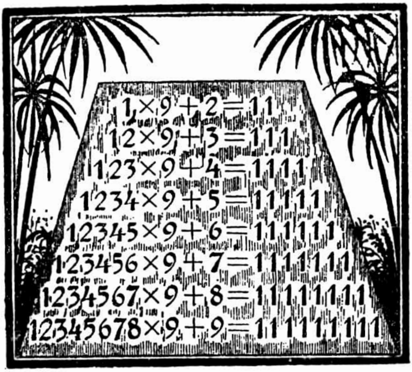
Задача № 33.

То же число 111111 пригодно и для отгадывания задуманных чисел —на подобие того, как выполняется это с помощью чисел 1001 и 10101. В данном случае нужно предлагать задумывать число **однозначное**, т. е. одну цифру, и повторять ее 6 раз. Делителями здесь могут служить пять простых чисел: 3, 7, 11, 13, 37 и получающиеся из них составные: 21, 33, 39 и т. д. Это дает возможность до крайности разнообразить выполнение фокуса. Как надо поступать в этих случаях,—предоставляю придумать читателю.

ЧИСЛОВЫЕ ПИРАМИДЫ

В следующих витринах галлереи нас поражают числовые достопримечательности совсем особого рода—некоторое подобие пирамид, составленных из чисел. Рассмотрим поближе первую из таких „пирамид“.

Задача № 34.



Как объяснить эти своеобразные результаты умножения, эту странную закономерность?

Решение.

Возьмем для примера какой-нибудь из средних рядов нашей числовой пирамиды: $123456 \times 9 + 7$. Вместо умножения на 9, можно умножить на $(10-1)$, т. е. приписать 0 и вычесть умножаемое:

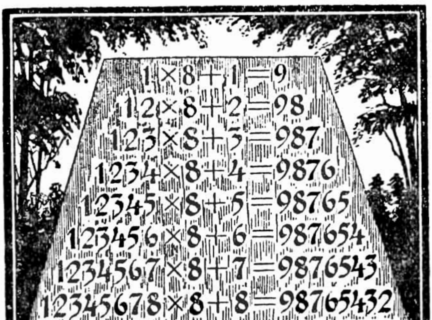
$$123456 \times 9 + 7 = 1234560 + 7 - 123456 = \left\{ \begin{array}{r} -\,1234567 \\ 123456 \\ \hline 1111111 \end{array} \right.$$

Достаточно взглянуть на последнее вычитание, чтобы понять, почему тут получается результат, состоящий только из одних единиц.

Мы можем понять это, исходя и из других рассуждений. Чтобы число вида 12345... превратилось в число вида 11111..., нужно из второй его цифры вычесть 1, из третьей—2, из четвертой—3, из пятой—4 и т. д.—иначе говоря, вычесть из него то же число вида 12345..., лишенное своей последней цифры,—т. е. вдесятеро уменьшенное и предварительно сокращенное на последнюю цифру. Теперь понятно, что для получения искомого результата нужно наше число умножить на 10, прибавить к нему следующую за последней цифру и вычесть из результата первоначальное число (а умножить на 10 и отнять множимое—значит, умножить на 9).

Задача № 35.

Сходным образом объясняется образование и следующей числовой пирамиды,



получающейся при умножении определенного ряда цифр на 8 и прибавлении последовательно возрастающих цифр. Особенно интересна в этой пирамиде последняя строка, где в результате умножения на 8 и прибавления 9 происходит превращение полного натурального ряда цифр в такой же ряд, но с обратным расположением.

Попытайтесь объяснить эту особенность.

Решение.

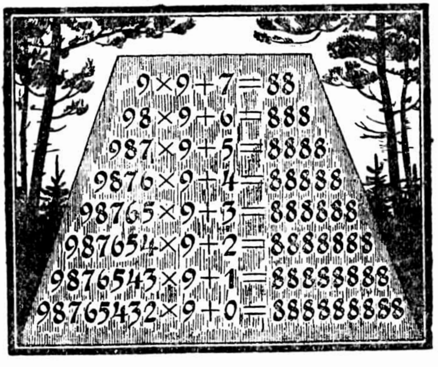
Получение таких странных результатов уясняется из следующей строки:

$$12345 \times 8 + 5 = \left\{ - \begin{array}{c} 12345 \times 9 + 6 \\ 12345 \times 1 + 1 \end{array} \right\} = \left\{ - \begin{array}{c} 111111 \text{ [1])} \\ 12346, \end{array} \right.$$

то-есть $12345 \times 8 + 5 = 111111 - 12346$. Но вычитая из числа 111111 число 12346, составленное из ряда возрастающих цифр, мы, как легко понять, должны получить ряд убывающих цифр 98765.

Задача № 36.

Вот, наконец, третья числовая пирамида, также требующая объяснения:



[1]) Почему $12345 \times 9 + 6$ дает именно 111111 было показано при рассмотрении предыдущей числовой пирамиды.

Решение.

Эта пирамида есть прямое следствие первых двух. Связь устанавливается очень легко. Из **первой** пирамиды мы знаем уже, что, например:

$$12345 \times 9 + 6 = 111111.$$

Умножив обе части на 8, имеем:

$$(12345 \times 8 \times 9) + (6 \times 8) = 888888.$$

Но из **второй** пирамиды мы знаем, что

$12345 \times 8 + 5 = 98765$, или $12345 \times 8 = 98760$.

Значит:

$$888888 = (12345 \times 8 \times 9) + (6 \times 8) = (98760 \times 9) + 48 =$$
$$= (98760 \times 9) + (5 \times 9) + 3 = (98760 + 5) \times 9 + 3 =$$
$$= 98765 \times 9 + 3.$$

Вы убеждаетесь, что оригинальные числовые пирамиды не так уже загадочны, как кажутся с первого взгляда. Курьезно, что мне случилось как-то видеть их напечатанными в одной немецкой газете с припиской: „Причина такой поразительной закономерности никем еще до сих пор не была объяснена"...

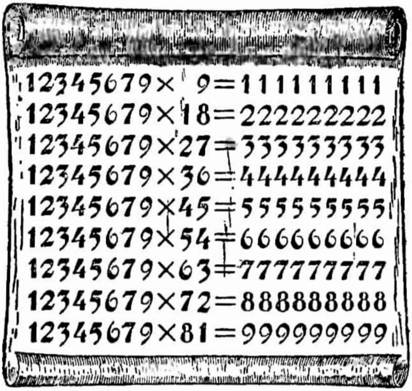
ДЕВЯТЬ ОДИНАКОВЫХ ЦИФР

Задача № 37.

Конечная строка первой из сейчас (стр. 88) рассмотренных „пирамид":

$$12345678 \times 9 + 9 = 111111111$$

представляет образчик целой группы интересных арифметических курьезов, собранной в нашем музее в следующую таблицу:



Откуда такая закономерность в результатах?

Решение.

Примем во внимание, что

$12345678 \times 9 + 9 = (12345678 + 1) \times 9 = 12345679 \times 9.$

Поэтому

$$12345679 \times 9 = 111111111.$$

А отсюда прямо следует, что

$$12345679 \times 9 \times 2 = 222222222$$
$$12345679 \times 9 \times 3 = 333333333$$
$$12345679 \times 9 \times 4 = 444444444 \text{ и т. д.}$$

ЦИФРОВАЯ ЛЕСТНИЦА

Задача № 38.

Что получится, если число 111111111, с которым мы сейчас имели дело, умножить само на себя? Заранее можно предвидеть, что результат должен быть диковинный,—но какой именно?

Решение.

Если вы обладаете способностью отчетливо рисовать в воображении ряды цифр, вам удастся найти интересующий нас результат, даже не прибегая к выкладкам на бумаге. В сущности здесь дело сводится только к надлежащему расположению частных произведений, потому что умножать приходится все время лишь единицу на единицу— действие, могущее затруднить разве лишь Фонвизинского Митрофанушку, размышляющего о результате умножения „единожды один“. Сложение же частных произведений сводится к простому счету единиц [1]). Вот результат этого единственного в своем роде умножения (при выполнении которого, впрочем, не приходится ни разу прибегать к действию умножения):

$$
\begin{array}{r}
111111111\\
\underline{111111111}\\
111111111\\
111111111\\
111111111\\
111111111\\
111111111\\
111111111\\
111111111\\
111111111\\
\underline{111111111}\\
12345678987654321
\end{array}
$$

---

[1]) В двоичной системе счисления, как мы уже объясняли (см. стр. 66—67), все умножения именно такого рода. На этом примере мы наглядно убеждаемся в преимуществах двоичной системы.

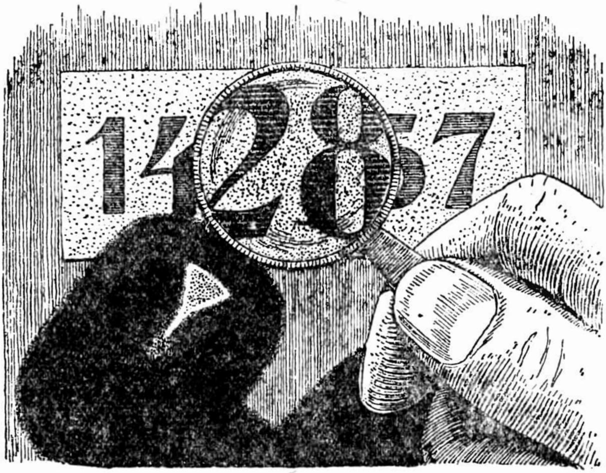
Все девять цифр выстроены в стройном порядке, симметрично убывая от середины в обе стороны.

Те из читателей, которых утомило обозрение числовых диковинок, могут покинуть здесь эту галлерею и перейти в следующие отделения, где показываются фокусы и выставлены числовые великаны и карлики; я хочу сказать,—они могут прекратить чтение этой главы и обратиться к дальнейшим. Но кто желает познакомиться еще с несколькими интересными достопримечательностями мира чисел, тех приглашаю осмотреть со мною небольшой ряд ближайших витрин.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ КУРЬЕЗЫ:

$$100 = \left\{ \begin{array}{c} 24\,^3/_6 + 75\,^9/_{18} \\ 95\,^3/_7 + 4\,^{16}/_{28} \\ 98\,^3/_6 + 1\,^{27}/_{54} \\ 94\,^1/_2 + 5\,^{38}/_{76} \\ 1\,^6/_7 + 3 + 95\,^4/_{28} \\ 57\,^3/_6 + 42\,^9/_{18} \end{array} \right\} = 100$$

Каждая сумма состоит только из девяти разных цифр.

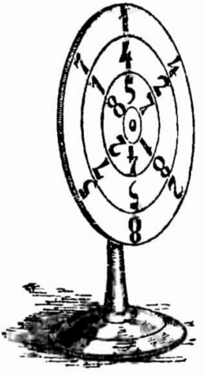


МАГИЧЕСКИЕ КОЛЬЦА

Задача № 39.

Что за странные кольца выставлены в следующей витрине нашей галлереи? Перед нами (см. рис. след. стр.) три плоских кольца, вращающихся одно в другом. На каждом кольце написаны шесть цифр в одном и том же порядке, иначе говоря—написано одно и то же число: 142857. Эти кольца обладают следующим удивительным свойством: как бы ни были они повернуты, мы при сложении двух написанных на них чисел—считая от любой цифры в направлении начерченной стрелки—во всех случаях получим то же самое шестизначное число (если только результат вообще будет 6-ти значный), лишь немного подвинутое! В том положении, например, какое изображено на прилагаемом чертеже, мы получаем при сложении двух наружных колец:

$$\begin{array}{r} +\ 142857 \\ 428571 \\ \hline 571428 \end{array}$$



т.-е. опять-таки тот же ряд цифр: 142857, только цифры 5 и 7 перенеслись из конца в начало.

При другом расположении колец относительно друг друга мы имеем такие случаи:

$$\begin{array}{r} +\ 285714 \\ 571428 \\ \hline 857142 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +\ 714285 \\ 142857 \\ \hline 857142 \end{array} \quad \text{и т. п.}$$

Исключение составляет единственный случай, когда в результате получается 999999.

$$\begin{array}{r} +\ 285714 \\ 714285 \\ \hline 999999 \end{array}$$

Мало того. Тот же ряд цифр в той же последовательности мы получим и при **вычитании** чисел, написанных на кольцах. Например:

$$\begin{array}{r} -\ 428571 \\ 142857 \\ \hline 285714 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\ 571428 \\ 285714 \\ \hline 285714 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\ 714285 \\ 142857 \\ \hline 571428 \end{array}$$

Исключение составляет случай, когда приведены к совпадению одинаковые цифры—тогда, разумеется, разность равна нулю.

Но и это еще не все. Умножьте число 142857 на 2, на 3, на 4, на 5 или на 6—и вы получите снова то же число, лишь передвинутое, в круговом порядке, на одну или несколько цифр:

$$142857 \times 2 = 285714$$
$$142857 \times 3 = 428571$$
$$142857 \times 4 = 571428$$
$$142857 \times 5 = 714285$$
$$142857 \times 6 = 857142$$

Чем же обусловлены все загадочные особенности этого числа?

Решение.

Мы нападаем на путь к разгадке, если продлим немного последнюю табличку и попробуем умножить наше число на 7: в результате получится 999999. Значит, число наше— не что иное, как седьмая часть 999999, а, следовательно, дробь $\frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$. И действительно, если вы станете превращать $^1/_7$ в десятичную дробь, вы получите:

$1 : 7 = 0{,}142857\ldots$ то-есть $^1/_7 = 0,\ (142857)$

```
 10
 ----
  30
  ----
   20
   ----
    60
    ----
     40
     ----
      50
      ----
       1
```

Наше загадочное число есть период бесконечной периодической дроби, которая получается при превращении

$^1/_7$ в десятичную. Становится понятным теперь, почему при удвоении, утроении и т. д. этого числа происходит лишь перестановка одной группы цифр на другое место. Ведь умножение этого числа на 2 делает его равным $^2/_7$ и, следовательно, равносильно превращению в десятичную дробь уже не $^1/_7$, а $^2/_7$. Начав же превращать дробь $^2/_7$ в десятичную, вы сразу заметите, что цифра 2—один из тех остатков, которые у нас получались уже при превращении $^1/_7$: ясно, что должен повториться и прежний ряд цифр частного, но он начнется с другой цифры; иными словами, должен получиться тот же период, но только несколько начальных цифр его очутятся на конце. То же самое произойдет и при умножении на 3, на 4, на 5 и на 6, т.-е. на все числа, получающиеся в остатках. При умножении же на 7 мы должны получить целую 1-цу, или,—что то же самое—0,9999 . . .

Любопытные результаты с л о ж е н и я и в ы ч и т а н и я чисел на кольцах находят себе объяснение в том же факте, что 142857 есть период дроби, равной $^1/_7$. В самом деле: что мы делаем, поворачивая кольцо на несколько цифр? Переставляем группу цифр спереди на конец, т.-е. согласно только что сказанному, мы умножаем число 142857 на 2, на 3, на 4 и т. д. Следовательно, все действия сложения или вычитания чисел, написанных на кольцах, сводятся к сложению или вычитанию дробей $^1/_7$, $^2/_7$, $^3/_7$ и т. д. В результате мы должны получить, конечно, несколько седьмых долей,—т.-е. опять-таки наш ряд цифр 142857 в той или иной круговой перестановке. Отсюда надо исключить лишь случаи, когда складываются такие числа седьмых долей, которые в сумме дают 1 или больше 1.

Но и последние случаи исключаются не вполне: они дают результат, правда, не тождественный с рассмотренными, но все же сходный с ними. Рассмотрим внимательнее, что должно получиться от умножения нашего загадочного числа на множитель больше 7, т. е. на 8, на 9 и т. д. Умножить 142857, например, на 8, мы можем так: умножить сначала на 7 и к произведению (т. е. к 999999) прибавить наше число

$$142857 \times 8 = 142857 \times 7 + 142857 = 999999 + 142857 =$$
$$= 1.000.000 - 1 + 142857 = 1.000.000 + (142857 - 1).$$

Окончательный результат—1142856—отличается от умножаемого 142857 только тем, что впереди стоит еще одна 1-ца, а последняя цифра на 1-цу же уменьшена. По сходному правилу составляются произведения 142857 на всякое другое число, больше 7, — как легко усмотреть из следующих строк:

$$\begin{array}{lllll}
142857 \times 8 = (142857 \times 7) & + & 142857 & = & 1142856 \\
142857 \times 9 = (142857 \times 7) & + & (142857 \times 2) & = & 1285713 \\
142857 \times 10 = (142857 \times 7) & + & (142857 \times 3) & = & 1428570 \\
142857 \times 16 = (143857 \times 7 \times 2) & + & (142857 \times 2) & = & 2285712 \\
142857 \times 39 = (142857 \times 7 \times 5) & + & (142857 \times 4) & = & 5571423.
\end{array}$$

Общее правило здесь такое: при умножении 142857 на любой множитель нужно умножить лишь на остаток от деления множителя на 7; впереди этого произведения ставится число, показывающее, сколько семерок в множителе, и то же число вычитается из результата [1]). Пусть мы желаем умножить 142857 на 86. Множитель 86 при делении на 7 дает в частном 12 и в остатке 4. Следовательно, результат умножения таков:

$$12571428 - 12 = 12571416.$$

---

[1]) Если множитель кратен 7, то результат равен числу 999999, умноженному на число семерок в множителе: такое умножение легко выполнить в уме. Например, $142857 \times 28 = 999999 \times 4 = 4000000 - 4 = 3999996$.

От умножения 142857×365 мы получим (так как 365 при делении на 7 дает в частном 52, а в остатке 1):

$$52142857 - 52 = 52142805.$$

Усвоив это простое правило и запомнив результаты умножения нашего диковинного числа на множители от 2 до 6 (что весьма нетрудно—нужно помнить лишь, с какой цифры они начинаются), вы можете изумлять непосвященных молниеносно-быстрым умножением шестизначного числа. А чтобы не забыть этого удивительного числа, запомним, что оно произошло от $^1/_7$, или, — что то же самое—от $^2/_{14}$; вот вам первые три цифры нашего числа: 142. Остальные три получаются вычитанием первых трех из 9-ти:

$$\begin{array}{r} -\;999 \\ 142 \\ \hline 857. \end{array}$$

Мы уже имели дело с такими числами—именно, когда знакомились со свойствами числа 999. Вспомнив сказанное там, мы сразу сообразим, что число 142857 есть, очевидно, результат умножения 143 на 999:

$$142857 = 143 \times 999.$$

Но $143 = 13 \times 11$. Припомнив замеченное раньше о числе 1001, равном $7 \times 11 \times 13$, мы будем в состоянии, не выполняя действия, предсказать, что должно получиться от умножения 142857×7:

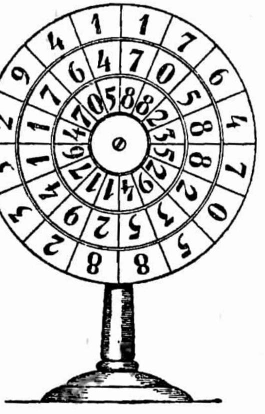
$$142857 \times 7 = 143 \times 999 \times 7 = 999 \times 11 \times 13 \times 7 =$$
$$= 999 \times 1001 = 999999$$

(все эти преобразования мы, конечно, можем проделать в уме).

ФЕНОМЕНАЛЬНАЯ СЕМЬЯ

Задача № 40.

Только что рассмотренное нами число 142857 является одним из членов целой семьи чисел, обладающих теми же свойствами. Вот еще одно такое число: 058823594117647 (0 впереди необходим). Если умножить это число, например, на 4, мы получим тот же ряд цифр, только первые 4 цифры будут переставлены в конец:



$$0588235294117647 \times 4 =$$
$$= 2352941176470588.$$

Расположив цифры этого числа на ряде подвижных колец, как в предыдущем случае, — мы при *сложении* чисел двух колец будем получать то же число, лишь смещенное в круговом порядке:

$$\begin{array}{r} 0588235294117647 \\ +\,2352941176470588 \\ \hline 2941176470588235. \end{array}$$

При кольцовом расположении все три ряда, конечно, тождественны.

От *вычитания* чисел двух колец опять-таки получается тот же круг цифр:

$$\begin{array}{r} 2352941176470588 \\ -\,0588235294117647 \\ \hline 1764705882352941. \end{array}$$

Наконец, это число, как и рассмотренное ранее, состоит из двух половин: цифры второй половины являются дополнением цифр первой половины до 9.

Попробуйте найти разгадку всех этих особенностей.

Решение.

Нетрудно догадаться, каким образом приведенный числовой ряд оказался столь близким родственником числа 142857; последнее число представляет собою период бесконечной дроби, равной $^1/_7$, наше же число является, вероятно, периодом какой-нибудь другой дроби. Так и есть: наш длинный ряд цифр—не что иное, как период бесконечной дроби, получающейся от превращения в десятичную простой дроби $^1/_{17}$:

$$^1/_{17} = 0,\ (0588235294117647).$$

Вот почему при умножении этого числа на множители от 1 до 16 получается тот же ряд цифр, в котором лишь одна или несколько начальных цифр перенесены в конец числа. И наоборот — перенося одну или несколько цифр ряда из начала в конец, мы тем самым увеличиваем это число в несколько раз (от 1 до 16). Складывая два кольца, повернутых одно относительно другого, мы производим сложение двух умноженных чисел, например, утроенного и удесятеренного — и, конечно, должны получить то же кольцо цифр, потому что умножение на $3 + 10$, т. е. на 13, вызывает лишь перестановку группы цифр, незаметную при круговом расположении.

При некотором положении колец получаются, однако, суммы, немного отличающиеся от первоначального ряда. Если, например, повернем кольца так, чтобы складывать пришлось шестикратное число с пятнадцатикратным, то в сумме должно получиться число, умноженное на $6 + 15 = 21$. А такое произведение, как легко догадаться, составляется уже несколько иначе, чем произведение на множитель, меньший 16. В самом деле: так как наше число есть период дроби равной $^1/_{17}$, то, будучи умножено на 17, оно должно дать 16 девяток (т. е. столько, сколько их в подразумеваемом знаменателе периодической дроби), или 1 с 17 нулями минус 1. Поэтому при умножении на 21, т.-е. на $4 + 17$, мы должны получить четырехкратное число, впереди которого стоит 1, а от разряда единиц отнята 1. Четырехкратное же число начнется с цифр, получающихся при превращении в десятичную дробь простой дроби $^4/_{17}$.

$$\begin{array}{l} 4 \;:\; 17 = 0{,}23\ldots\ldots \\ \;\;40 \\ \;\;\;\;60 \\ \;\;\;\;\;9 \end{array}$$

Порядок остальных цифр нам известен: 5294....... Значит, 21-кратное наше число будет

2352941176470588.

Столько именно и получается от сложения кругов цифр при соответственном их расположении. При **вычитании** числовых колец такого случая, разумеется, быть не может.

Чисел, подобных тем двум, с которыми мы познакомились, существует множество. Все они составляют словно одно семейство, так как объединены общим происхождением — от превращения простых дробей в бесконечные десятичные. Но не всякий период десятичной дроби обладает рассмотренным выше любопытным свойством давать при умножении круговую перестановку цифр. Не вдаваясь в тонкости теории, отметим, что это имеет место только для тех дробей, число цифр периода которых на единицу меньше знаменателя соответствующей простой дроби. Так, например:

$^1/_7$	дает	в	периоде	6	цифр.
$^1/_{17}$	„	„	„	16	„
$^1/_{19}$	„	„	„	18	„
$^1/_{23}$	„	„	„	22	„
$^1/_{29}$	„	„	„	28	„

Вы можете убедиться испытанием, что периоды дробей, получающихся от превращения $^1/_{19}$, $^1/_{23}$ и $^1/_{29}$ в десятичные, обладают теми же особенностями, как и рассмотренные нами периоды дробей $^1/_7$ и $^1/_{17}$.

Например, от $^1/_{29}$ получаем число

$$0344827586206896551724137931.$$

Если указанное сейчас условие (относительно числа цифр периода) не соблюдено, то соответствующий период дает число, не принадлежащее к занимающей нас семье интересных чисел. Например, $^1/_{13}$ дает десятичную дробь с шестью (а не с 12) цифрами в периоде:

$$^1/_{13} = 0,\ 076923.$$

Помножив на 2, получаем совершенно иное число:

$$^1/_{18} = 0,\ 153846.$$

Почему? Потому что среди остатков от деления 1 : 13 не было числа 2. Различных остатков было столько, сколько цифр в периоде, т. е. 6; различных же множителей для дроби $^1/_{13}$ у нас 12; следовательно, не все множители будут среди остатков, а только 6. Легко убедиться, что эти множители следующие: 1, 3, 4. 9, 10, 12. Умножение на эти 6 чисел дает круговую перестановку ($076923 \times 3 = 230769$), на остальные—нет. Вот почему от $^1/_{13}$ получается число, лишь отчасти пригодное для „магического кольца". То же надо сказать и о целом ряде других периодов.

После этого, думаем, нельзя не согласиться, что длиннейшие периоды бесконечных дробей представляют собою настоящую Калифорнию интереснейших арифметических достопримечательностей.

Решение задачи № 28

(Стр. 71).

Число 130 в различных системах счисления выражается следующим образом:

в двоичной . .	10000010
„ троичной . .	11211
„ 4-ной	2002
„ 5-ной	1010
„ 6-ной	334
„ 7-ной	244
„ 8-ной	202
„ 9-ной	154

Глава VI

ФОКУСЫ БЕЗ ОБМАНА

ИСКУССТВО ИНДУССКОГО ЦАРЯ

Арифметические фокусы — честные, добровестные фокусы. Здесь не стремятся обмануть, не стараются усыпить внимание зрителя. Чтобы выполнить арифметический фокус, не нужны ни чудодейственная ловкость рук, ни изумительное проворство движений, ни какие-либо другие артистические способности, требующие иногда многолетних упражнений. Весь секрет арифметического фокуса состоит в использовании любопытных свойств чисел, в близком знакомстве с их особенностями. Кто знает разгадку такого фокуса, тому все представляется простым и ясным; а для незнающего арифметики—самое прозаическое действие, напр., умножение, кажется уже чем-то вроде фокуса.

Было время, когда выполнение даже обыкновенных арифметических действий над большими числами, знакомое теперь каждому школьнику, составляло искусство лишь немногих и казалось остальным какою-то сверхъестественною способностью. В древне-индусской повести „Наль и Дамаянти“ [1]) находим отголосок такого взгляда на арифметические действия. Наль, умевший превосходно править лошадьми, возил однажды своего хозяина, царя Ритуперна, мимо развесистого дерева—Вибитаки.

Вдруг он увидел вдали Вибитаку—ветвисто-густою
Сенью покрытое дерево. „Слушай,—сказал он:
— „Здесь на земле никто не имеет всезнанья; в искусстве
„Править конями ты первый; зато мне далося искусство
„Счета“...

И в доказательство своего искусства царь мгновенно сосчитал число листьев на ветвистой Вибитаке. Изумленный Наль просит Ритуперна открыть ему тайну его искусства, и царь соглашается.

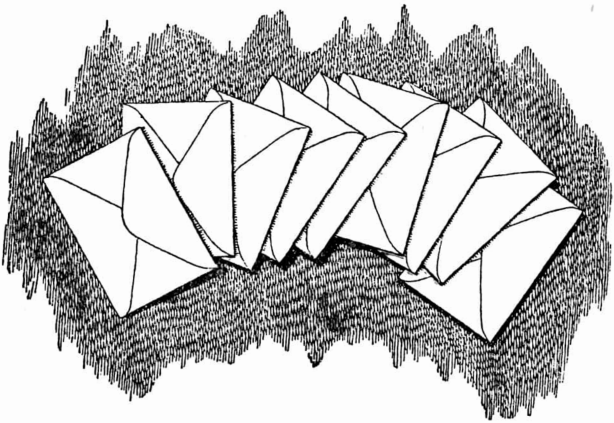
...Лишь только
Вымолвил слово свое Ритуперн, как у Наля открылись
Очи, и он все ветки, плоды и листья Вибитаки
Разом мог перечесть...

Секрет искусства состоял, как можно догадаться, в том, что непосредственный счет листьев, требующий много времени и терпения, заменялся счетом листьев одной лишь ветки и умножением этого числа на число веток каждого сука и далее — на число сучьев дерева (предполагая, что сучья одинаково обросли ветками, а ветки—листьями).

---

1) Русский перевод (вольный) Жуковского. Эпизод, о котором далее идет речь, описан в главе VIII этой повести.

Разгадка большинства арифметических фокусов столь же проста, как и секрет „фокуса“ царя Ритуперна. Стоит лишь узнать, в чем разгадка фокуса, и вы сразу овладеваете искусством его выполнять, как овладел легендарный Наль изумительным искусством быстрого счета. В основе каждого арифметического фокуса лежит какая-нибудь интересная особенность чисел, и потому знакомство с подобными фокусами не менее поучительно, чем занимательно.



НЕ ВСКРЫВАЯ КОНВЕРТОВ

Задача № 41.

Фокусник вынимает стопку из 300 кредитных билетов по 1 рублю каждый[1]), и предлагает вам разложить деньги в 9 конвертах так, чтобы вы могли уплатить ими

[1]) Можно пользоваться и простыми карточками с соответствующими надписями.

любую сумму до 300 рублей, не вскрывая ни одного конверта.

Задача представляется вам совершенно невыполнимой. Вы готовы уже думать, что тут дело кроется в какой-нибудь коварной игре слов или неожиданном толковании их смысла. Но вот фокусник, видя вашу беспомощность, сам раскладывает деньги по конвертам, заклеивает их и предлагает вам назвать любую сумму в пределах трехсот рублей.

Вы называете наугад первое попавшееся число,— например, 269.

Без малейшего промедления фокусник подает вам 4 заклеенных конверта. Вы вскрываете их и находите:

в 1-м	—	64	руб.
„ 2-м	—	45	„
„ 3-м	—	128	„
„ 4-м	—	32	„
Итого . .		269	руб.

Теперь вы склонны заподозрить фокусника в искусной подмене конвертов и требуете повторения опыта. Он спокойно кладет деньги обратно в конверты, заклеивает и оставляет их на этот раз в ваших руках. Вы называете новое число, например, 100, или 7, или 293—и фокусник моментально указывает, какие из лежащих у вас под руками конвертов вы должны взять, чтобы составить требуемую сумму (в первом случае, для 100 р.— 4 конверта, во втором, для 7 р.—3 конверта, в третьем, для 293 р.—6 конвертов).

В чем же дело?

Решение.

Секрет этот кроется в том, чтобы разложить деньги в следующие стопки: 1 р., 2 р., 4 р., 8 р., 16 р., 32 р., 64 р., 128 р. и, наконец, в последней—остальные рубли, т.-е.

$$300-(1+2+4+8+16+32+64+128)=300-255=45.$$

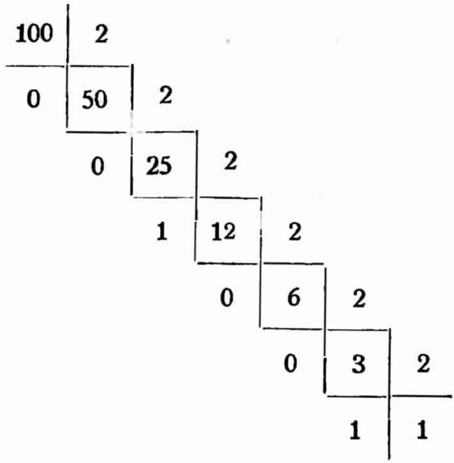
Из первых 8 конвертов возможно, как нетрудно убедиться, составить любую сумму от 1 до 255; если же задается число большее, то пускают в дело последний конверт, с 45 рублями, а разницу составляют из первых 8-ми конвертов.

Вы можете проверить пригодность такой группировки чисел многочисленными пробами и убедиться, что из них можно действительно составить всякое число, не превышающее 300. Но вас, вероятно, интересует и то, почему собственно ряд чисел 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 и т. д., обладает столь замечательным свойством. Это нетрудно понять, если вспомнить, что числа нашего ряда представляют степени 2-х: 2^1, 2^2, 2^3, 2^4 и т. д. [1]), и следовательно, их можно рассматривать, как разряды двоичной системы счисления. А так как всякое число можно написать по двоичной системе, то значит и **всякое число возможно составить из суммы степеней** 2-х, т.-е. из чисел ряда 1, 2, 4, 8, 16 и т. д. И когда вы подбираете конверты, чтобы составить из их содержимого заданное число, вы в сущности выражаете заданное число в двоичной системе счисления. Например,

---

1) Проходившие алгебру знают, что и число 1 можно рассматривать, как степень 2-х, именно нулевую.

число 100 мы легко сможем составить, если изобразим его в двоичной системе:



$$100 = 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0$$

$$\ 64\ \ 32\ \ (16)\ (8)\ \ 4\ \ (2)\ \ (1)$$

$$100 = 64 + 32 + 4$$

Напомним, что в двоичной системе на первом месте с п р а в а стоят единицы, на втором—двойки, на третьем—четверки, на четвертом—восьмерки и т. д.

УГАДАТЬ ЧИСЛО СПИЧЕК

Задача № 42.

Свойством двоичной системы можно воспользоваться и для следующего фокуса. Вы предлагаете кому-нибудь взять неполный коробок со спичками, положить его на стол, а рядом положить 8 бумажных квадратиков. Затем просите в вашем отсутствии проделать следующее: оставив половину спичек в коробке, перенести другую половину на ближайшую бумажку; если чисдо спичек нечетное, то излишнюю спичку положить рядом с бумажкой, налево от нее. Спички, очутившиеся на бумажке, надо (не трогая лежащей рядом) разделить на две равные части: одну половину положить в коробку, другую—переложить на следующую бумажку; в случае нечетного числа, оставшуюся спичку положить рядом со второй бумажкой. Далее поступать таким же образом, возвращая всякий раз половину спичек обратно в коробку, а другую половину—перекладывая на следующую бумажку, не забывая, при нечетном числе спичек, класть одну спичку рядом. В конце концов все спички, кроме одиночных, лежащих рядом с бумажками, возвратятся в коробку.

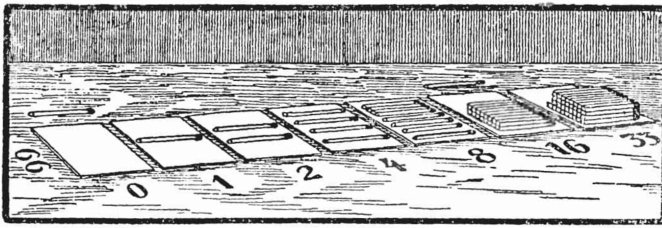
Когда это сделано, вы являетесь в комнату и, бросив взгляд иа пустые бумажки, называете число спичек во взятой коробке.

Как можно по пустым бумажкам и случайным единичным спичкам догадаться о первоначальном числе спичек в коробке?

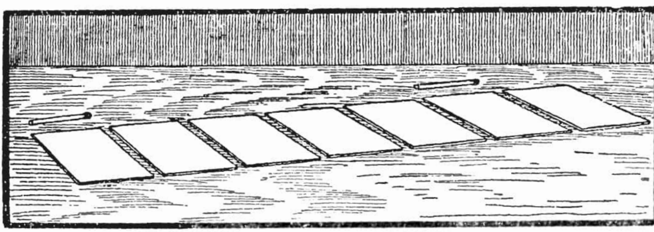
Решение.

Эти „пустые" бумажки в данном случае очень красноречивы: по ним и по одиночным спичкам можно буквально прочесть искомое число, потому что оно написано на столе—в двоичной системе счисления. Поясним это на примере. Пусть число спичек было 66.

Последовательные операции с ними и окончательный вид бумажек показаны на следующих схемах:



Последовательные операции.



Окончательный вид.

Не нужно большой проницательности, чтобы сообразить, что проделанные со спичками операции в сущности те же самые, какие мы выполнили бы, если бы хотели выразить число спичек в коробке по двоичной системе счисления; окончательная же схема — прямо изображает это число в двоичной системе, если пустые бумажки принять за нули, а бумажки, отмеченные сбоку спичкой,— за единицы. Читая схему слева направо получаем

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 64 & (32) & (16) & (8) & (4) & 2 & (1) \end{array}$$

то-есть в десятичной системе: $64 + 2 = 66$.

Если бы было 57 спичек, мы имели бы иные схемы:

1	1	1			1
0	1	3	7	14	28

Последовательные операции.

1	1	1			1

Окончательный вид.

Искомое число, написанное по двоичной системе:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 32 & 16 & 8 & (4) & (2) & 1 \end{array}$$

А в десятичной: $33 + 16 + 8 + 1 = 57$.

ЧТЕНИЕ МЫСЛЕЙ ПО СПИЧКАМ

Задача № 43.

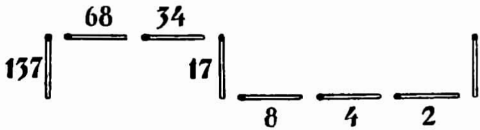
Третье видоизменение того же фокуса представляет собою своеобразный способ отгадывания задуманного числа по спичкам. Загадавший должен мысленно делить задуманное число пополам, полученную половину опять пополам и т. д. (от нечетного числа, отбрасывая единицу)— и при каждом делении класть перед собою спичку, направленную **вдоль** стола, если делится число четное, и поперек, если приходится делить нечетное. К концу операции получается фигура вроде следующей:

Вы всматриваетесь в эту фигуру и безошибочно называете задуманное число: 137.

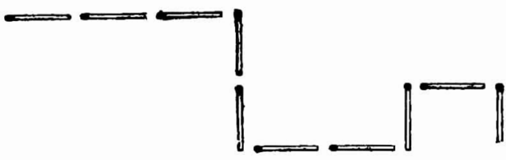
Как вы узнаете его?

Решение.

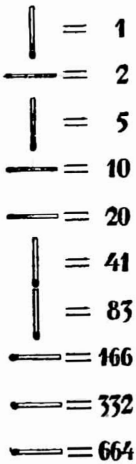
Способ станет ясеи сам собою, если в выбранном примере (137) мы последовательно обозначим возле каждой спички то число, при делении которого она была положена:



Теперь понятно, что так как последняя спичка **во всех случаях** обозначает число 1, то не составляет труда, восходя от нее к предшествующим делениям, добраться до первоначально задуманного числа. Например, по фигуре



вы можете вычислить, что задумано было число 664. В самом деле, выполняя последовательно удвоения (начиная с конца) и не забывая прибавлять, где надо, единицу, получаем (см. рис.).



Таким образом, пользуясь спичками, вы прослеживаете ход чужих мыслей, восстановляя всю цепь умозаключений.

Тот же результат мы можем получить иначе, сообразив, что лежащая спичка должна соответствовать в двоичной системе нулю (деление на 2 без остатка) а стоящая—единице. Таким образом, в первом примере мы имеем (читая справа налево) число

1	0	0	0	1	0	0	1
128	(64)	(32)	(16)	8	(4)	(2)	1

или в десятичной системе:

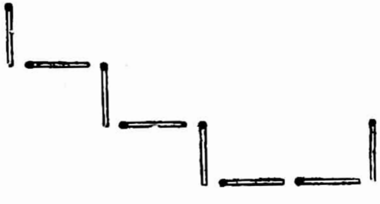
$$128+8+1=137.$$

А во втором примере задуманное число изображается по двоичной системе:

1	0	1	0	0	1	1	0	0	0
512	(256)	128	(64)	(32)	16	8	(4)	(2)	1

или по десятичной системе:

$$512+128+16+$$
$$+8=664.$$



Задача № 44.

Какое число задумано, если получилась такая фигура (см. прилож. рис.).

Решение.

Число „10010101“ в двоичной системе соответствует в десятичной:

$$128+16+4+1=149.$$

(Необходимо заметить, что получаемая при последнем делении 1-ца также должна быть отмечаема **стоящей** спичкой).

ИДЕАЛЬНЫЙ РАЗНОВЕС

Задача № 45.

У некоторых читателей, вероятно, возник уже вопрос почему для выполнения описанных раньше опытов мы пользуемся именно **двоичной** системой? Ведь всякое число можно изобразить в любой системе, между прочим и в десятичной. Чем же объясняется предпочтение здесь двоичной?

Решение.

Объясняется оно тем, что в этой системе, кроме нуля-употребляется всего **одна** цифра—единица, а, следовательно, число составляется из различных степеней 2-х, взятых только **по одному** разу. Если бы в фокусе с конвертами мы распределили деньги, например, по 5-ричной системе, то могли бы составить, не вскрывая конвертов, любую сумму лишь в том случае, когда каждый пакет повторяется у нас не менее 4-х раз (в 5-ричной системе употребляются, ведь, кроме нуля 4 цифры).

Впрочем, бывают случаи, когда для подобных надобностей удобнее пользоваться не двоичной, а **троичной** системой, несколько видоизмененной. Сюда относится знаменитая старинная „задача о наборе гирь", которая может послужить сюжетом и для арифметического фокуса.

Задача № 46а

Представьте, что вам предложили придумать набор из 4 гирь, помощью которых возможно было бы отвесить любое целое число килограммов, от 1 до 40. Двоичная система подсказывает вам набор:

1 *кг*, 2 *кг*, 4 *кг*, 8 *кг*, 16 *кг*,

которым можно отвешивать все грузы от 1 до 31 *кг*. Но это, очевидно, не удовлетворяет требуемым условиям ни по числу гирь, ни по предельному грузу (31 *кг* вместо 40). С другой стороны, вы не использовали здесь возможности класть гири не только на одну чашку весов, но и на две, т. е. обходиться не только суммою гирь, но и их разностью. Это дает так много разнообразных комбинаций, что вы совершенно теряетесь в поисках, не умея уложить их в какую-либо систему. Если вам не посчастливится напасть на правильный путь, вы готовы будете даже сомневаться вообще в разрешимости подобной задачи столь малым числом гирь, как четыре.

Решение.

Посвященный выходит из этого затруднения с волшебной простотой, намечая следующие 4 гири:

1 *кг*, 3 *кг*, 9 *кг*, 27 *кг*.

Любое целое число килограммов, до 40 *кг*, вы можете отвесить такими гирями, кладя их то на одну, то на обе чашки весов. Не приводим примером, потому что каждый легко может сам убедиться в полной пригодности такого набора гирь для нашей цели. Остановимся лучше на том, *почему* именно указанный ряд обладает этим свойством. Вероятно, читатели уже заметили, что числа эти—ряд степеней числа 3 [1]).

$$3^0,\ 3^1,\ 3^2,\ 3^3.$$

Это значит, что мы обращаемся здесь к услугам *троичной* системы счисления. Гири—цифры этой системы. Но как воспользоваться ею в тех случаях, когда требуемый вес получается в виде *разности* двух гирь? И как избегнуть необходимости обращаться к удвоению гирь (в троичной системе, ведь, кроме нуля употребляются две цифры: 1 и 2)?

То и другое достигается введением „отрицательных" цифр. Дело сводится попросту к тому, что вместо цифры 2 употребляют 3—1, т. е. цифру единицы высшего разряда, от которого *отнимается* одна единица низшего. Например, число 2 в нашей видоизмененной троичной системе обозначится не 2, а $1\bar{1}$, где знак минус над цифрой единиц означает, что эта 1-ца не прибавляется, а отнимается. Точно так же число 5 изобразится не 12, а $1\overline{11}$ (т. е. 9—3—1=5).

Теперь ясно, что если любое число можно изобразить в троичной системе помощью нуля (т. е. знака отсутствия числа) и одной только цифры, именно прибавляемой или отнимаемой единицы,—то из чисел 1, 3, 9, 27 можно, складывая или вычитая их, составить все числа от 1 до 40. Мы как бы пишем все эти числа, употребляя вместо цифр—гири. Случай сложения отвечает при взвешивании тому случаю, когда гири помещаются все на одну чашку, а случай вычитания,—когда часть гирь кладется

---

[1]) Единицу можно рассматривать, как *нулевую* степень 3 (вообще—как нулевую степень каждого числа).

на чашку с товаром и, следовательно, вес ее **отнимается** от веса остальных гирь. Нуль соответствует **отсутствию** гири.

Задача № 466.

Как известно, эта система на практике не применяется. Всюду в мире, где введена метрическая система мер, применяется набор в 1, 2, 2, 5 единиц, а не 1, 3, 9, 27,— хотя первым можно отвешивать грузы только до 10 единиц, а вторым—до 40. Не применялся набор 1, 3, 9, 27 и тогда, когда метрическая система еще не была введена. В чем же причина отказа на практике от этого, казалось бы совершеннейшего разновеса?

Решение.

Причина кроется в том, что идеальный разновес удобен только на бумаге, на деле же пользоваться им весьма хлопотливо. Если бы приходилось только отвешивать заданное число весовых единиц,—напр., отвесить 400 грамм масла или 2500 грамм сахара,—то системой гирь в 100, 300, 900, 2700 можно было бы еще на практике пользоваться (хотя и тут приходилось бы каждый раз долго подыскивать соответствующую комбинацию). Но когда приходится определять, сколько весит данный товар, то подобный разновес оказывается страшно неудобным: здесь нередко, ради прибавления к поставленным гирям одной единицы, приходится производить полную замену прежней комбинации другой, новой. Отвешивание становится при таких условиях крайне медленным и притом утомительным делом. Не всякий быстро сообразит, что, например, вес 19 *кг* получится, если на одну чашку поставить гири в 27 *кг* и 1 *кг*, а на другую 9; вес 20 *кг*—если на одну чашку поставить гири в 27 *кг* и 3 *кг*, а на другую—9 *кг* и 1 *кг*. При каждом отвешивании приходилось бы решать подобные головоломки. Разновес 1, 2, 2, 5 таких затруднений не доставляет.

ПРЕДСКАЗАТЬ СУММУ НЕНАПИСАННЫХ ЧИСЕЛ

Задача № 47.

Одним из наиболее поражающих „иомеров", выполняемых феноменальным русским вычислителем Р. С. Арраго, является молниеносное—с одного взгляда—складывание целого столбца многозначных чисел.

Но что сказать о человеке, который может написать сумму еще раньше, чем ему названы все слагаемые?

Это, конечно, фокус, и выполняется он в таком виде. Отгадчик предлагает вам написать какое-иибудь многозначное число, по вашему выбору. Бросив взгляд на это первое слагаемое, отгадчик пишет на бумажке сумму всей будущей колонны слагаемых и передает вам иа храиение. После этого ои просит вас (или кого-нибудь из присутствующих) написать еще одно слагаемое,—опять-таки какое угодно. А затем быстро пишет сам третье слагаемое. Вы складываете все три иаписанных числа—и получаете как раз тот результат, который заранее был написан отгадчиком на спрятанной у вас бумажке.

Если, например, вы написали в первый раз 83267, то отгадчик пишет будущую сумму 183266. Затем вы пишете допустим, 27935, а отгадчик приписывает третье слагаемое—72064:

I . . . . Вы:	83267
III . . . . Вы:	27935
IV . . . Отгадчик:	72064
II . . . . Сумма	183266

Получается в точности предсказанная сумма, хотя отгадчик не мог знать, каково будет второе слагаемое. Отгадчик может предсказать также сумму 5 или 7 слагаемых,—но тогда он сам пишет два или три из них. Никакой подмены бумажки с результатом здесь заподозрить вы не можете, так как она до последнего момента хранится в вашем собственном кармане. Очевидно, отгадчик пользуется здесь каким-то неизвестным вам свойством чисел. Каким?

Решение.

Отгадчик пользуется тем, что от прибавления, скажем, к 5-значному числу числа из 5-ти девяток (99999), это число увеличивается на 1000000—1, т.-е. впереди него появляется единица, а последняя цифра уменьшается на единицу. Например:

$$\begin{array}{r} 83267 \\ +\ 99999 \\ \hline 183266 \end{array}$$

Эту сумму—т.-е. сумму написанного вами числа и 99999 — отгадчик и пишет на бумажке, как будущий результат сложения. А чтобы результат оправдался, он, увидев ваше второе слагаемое, выбирает свое, третье слагаемое так, чтобы вместе со вторым оно составило 99999, т.-е. вычитает каждую цифру второго слагаемого из 9. Эти операции вы легко можете теперь проследить на предыдущем примере,—а также и на следующих примерах.

I . . . . Вы:	379264	I . . . . Вы:	9935
III. . . . . Вы:	4873	III . . . . Вы:	5669
IV. . Отгадчик:	995126	IV. . . Отгадчик:	4330
II . . . . . . Сумма:	1379263	II . . . . Сумма:	19934

Легко усмотреть, что вы сильно затрудните отгадчика, если ваше второе слагаемое будет заключать больше цифр, чем первое: отгадчик не сможет написать слагаемого, которое уменьшит ваше второе число для оправдания предсказанного им слишком малого результата. Поэтому опытный отгадчик предупредительно ограничивает свободу вашего выбора этим условием.

Фокус выходит внушительнее, когда в придумывании слагаемых участвует несколько лиц. После первого же слагаемого,—например, 437692,—отгадчик уже предсказывает сумму всех пяти чисел, именно записывает 2437690 (здесь будет добавлено дважды 999999, т.-е. 2000000—2). Дальнейшее ясно из схемы:

I........	Вы написали:	437692
III....	Другой написал:	822541
V....	Третий написал:	263009
IV.	Отгадчик добавил:	177468
VI.	„ „	736990
II.	„ предсказал:	2437690.

ПРЕДУГАДАТЬ РЕЗУЛЬТАТ

Большое впечатление производят те арифметические фокусы, в которых отгадчик угадывает результат действий над совершенно неизвестными ему числами. Подобных фокусов существует много, и все они основаны на возможности придумать такой ряд арифметических действий, результат которых нисколько не зависит от чисел, над которыми они производятся.

Рассмотрим фокусы этого рода.

Признак делимости на 9 всем известен: число кратно 9, если сумма его цифр кратна 9. Припомнив, как выводится это правило, мы запасаемся еще и другим интересным правилом: если от числа отнять сумму его цифр, то получается остаток, кратный 9 (это доказывается попутно при выводе признака делимости на 9). Точно так же мы получим число, кратное 9, если отнимем от данного числа другое, которое составлено из тех же цифр, но размещенных в другом порядке. Например: $457-(4+5+7)=441$, т.-е. числу, кратному 9; или: $7843-4738=3105$, числу, кратному 9 * Всем этим можно воспользоваться для выполнения несложного фокуса.

Задача № 48.

Предложите товарищу задумать любое число и затем, переставив его цифры в ином, каком угодно, порядке-вычесть меньшее число из большего. В полученном результате ваш товарищ зачеркивает одну цифру—безразлично какую—и читает вслух оставшиеся цифры, а вы сразу же называете скрытую от вас, зачеркнутую сумму. Как вы отгадываете ее?

Решение.

Очень просто: вы знаете, что результат должен быть кратен 9, т.-е. сумма его цифр должна без остатка делиться на 9. Быстро сложив в уме прочитанные вам цифры, вы легко можете сообразить, какой цифры не хватает, чтобы сумма была кратна 9. Например: задумано число 57924; после перестановки получено 92457. Вычитание дает результат 3?533, в котором знак вопроса стоит на месте зачеркнутой цифры. Сложив цифры $3+5+3+3$, получаем 14. Нетрудно сообразить, что зачеркнута была цифра 4, потому что ближайшее большее число, кратное 9, есть 18, а $18-4=14$.

$$\begin{array}{r} 92457 \\ -\,57924 \\ \hline 3?533 \end{array}$$

* Это свойство разности вытекает из „правила остатков“, о котором мы упоминали раньше, на стр. 45.

Задача № 49.

Тот же фокус можно обставить гораздо более эффектно, именно так, чтобы отгадать число, ничего не спрашивая у загадчика. Для этого проще всего предложить задумать *трехзначное* число с неодинаковыми крайними числами; затем, переставив цифры в *обратном порядке*, вычесть меньшее число из большего; в полученном результате переставить цифры и сложить оба числа. Окончательный результат всего этого ряда перестановок, вычитания и сложения вы называете изумленному загадчику без малейшего промедления или даже вручаете ему заранее в заклеенном конверте. Как это делается?

Решение.

Секрет фокуса прост: какое бы число ни было задумано, в результате перечисленных действий всегда получается одно и то же; 1089. Вот несколько примеров:

$$
\begin{array}{r}
-\ 762 \\ \underline{267} \\ +\ 495 \\ \underline{594} \\ 1089
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
-\ 431 \\ \underline{134} \\ +\ 297 \\ \underline{792} \\ 1089
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
-\ 982 \\ \underline{289} \\ +\ 693 \\ \underline{396} \\ 1089
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
-\ 291 \\ \underline{192} \\ +\ 099 \\ \underline{990} \\ 1089
\end{array}
$$

(Последний пример показывает, как должен поступать загадчик, когда разность получается двузначная).

Всматриваясь внимательно в ход выкладок, вы, без сомнения, поймете причину такого однообразия результатов. При вычитании неизбежно должна получаться в разряде десятков цифра 9, а по сторонам ее—цифры, сумма которых=9. При последующем сложении должна поэтому получиться на первом справа месте цифра 9, далее, от

$9+9$, цифра 8 и 1-ца в уме, которая при сложении с 9-ю сотнями дает 10. Отсюда—1089.

Если вы станете повторять этот фокус несколько раз кряду, не внося в него никаких изменений, то секрет ваш, разумеется, будет раскрыт: загадчик сообразит, что постоянно получается одно и то же число 1089, хотя, быть может, и не отдаст себе отчета в причине такого постоянства. Вам необходимо поэтому видоизменять фокус. Сделать это не трудно, так как $1089 = 33 \times 33 = 11 \times 11 \times 3 \times 3 = 121 \times 9 = 99 \times 11$. Достаточно поэтому просить загадчика, когда вы доведете его до числа 1089, разделить этот результат на 33, или на 11, или на 121, или на 99, или на 9,—и тогда лишь назвать получающееся число. У вас, следовательно, в запасе имеется 5 изменений фокуса,—не говоря уже о том, что вы можете просить загадчика также умножить сумму на любое число, мысленно выполняя то же самое действие.

МГНОВЕННОЕ ДЕЛЕНИЕ

Из многочисленных разновидностей фокусов этого рода опишем один, основанный на знакомом уже нам свойстве множителя, состоящего из ряда одних девяток; когда умножают на него число с столькими же цифрами, получается результат, состоящий из двух половин: первая—это умножаемое число, уменьшенное на 1-цу; вторая—результат вычитания первой половины из множителя. Например: $247 \times 999 = 246653$; $1372 \times 9999 = 13718628$ и т. п. Причину легко усмотреть из следующей строки:

$$247 \times 999 = 247 \times (1000 - 1) = 247000 - 247 = \\ = 246999 - 246.$$

Пользуясь этим, вы предлагаете целой группе товарищей произвести деление многозначных чисел—одному

68933106 : 6894, другому 8765112348 : 9999, третьему 543456 : 544, четвертому 12948705 : 1295 и т. д.,—а сами беретесь обогнать их всех, выполняя те же задачи. И прежде, чем они успеют приняться за дело, вы уже вручаете каждому бумажку с полученным вами безошибочным результатом деления: первому—9999, второму 87652, третьему—999, четвертому—9999.

Вы можете сами придумать по указанному образцу ряд других способов поражать непосвященных мгновенным выполнением деления: для этого воспользуйтесь некоторыми свойствами тех чисел, которые помещены в „Галлерее числовых диковинок“ (см. главу VI).

ЛЮБИМАЯ ЦИФРА

Задача № 50.

Попросите кого-нибудь сообщить вам его любимую цифру. Допустим, вам назвали цифру 6.

— Вот удивительно!—восклицаете вы.—Да ведь это как раз самая замечательная из всех значащих цифр.

— Чем же она замечательна?—осведомляется ваш озадаченный собеседник.

— А вот посмотрите: умножьте вашу любимую цифру на число значащих цифр, т. е. на 9, и полученное число (54) подпишите множителем под числом 12345679:

$$\begin{array}{r} 12345679 \\ \times\quad 54 \\ \hline \end{array}$$

Что получится в произведении?

Ваш собеседник выполняет умножение—и с изумлением получает результат, состоящий сплошь из его любимых цифр:

$$666666666$$

— Вот видите, какой у вас тонкий арифметический вкус,—заканчиваете вы.—Вы сумели избрать из всех цифр как раз ту, которая обладает столь удивительным свойством!

Однако, в чем тут дело?

Решение.

Точно такой же изысканный вкус оказался бы у вашего собеседника, если бы он избрал какую-нибудь другую из 9-ти значащих цифр, потому что каждая из них обладает тем же свойством:

$$\begin{array}{r} 12345679 \\ \times 4 \times 9 \\ \hline 444444444 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12345679 \\ \times 7 \times 9 \\ \hline 777777777 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12345679 \\ \times 9 \times 9 \\ \hline 999999999 \end{array}$$

Почему это так, вы сообразите, если припомните то, что говорилось о числе 12345679 в „Галлерее числовых диковинок“.

УГАДАТЬ ДЕНЬ РОЖДЕНИЯ

Фокусы, относящиеся к этой категории, могут быть изменяемы на разные лады. Опишу один из видов этого фокуса, довольно сложный, но именно потому и производящий эффектное впечатление.

Задача № 51.

Допустим, что вы родились 18 мая 1903 года и что вам теперь 23 полных года. Но я не знаю ни даты вашего рождения, ни вашего возраста. Тем не менее я берусь отгадать то и другое, заставив вас проделать лишь некоторый ряд вычислений.

А именно: порядковый номер месяца (май, 5-й месяц), я прошу вас умножить на 100, прибавить к произведению число месяца (18), сумму удвоить, к результату прибавить 8, полученное число умножить на 5, к произведению прибавить 4, помножить результат на 10, прибавить 4 и к полученному числу прибавить ваш возраст (23).

Когда вы все это проделаете, вы сообщаете мне окончательный результат вычислений. Я вычитаю из него 444, а разность разбиваю на грани, справа налево, по 2 цифры в каждой: получаю сразу как день и месяц вашего рождения, так и ваш возраст.

Действительно. Проделаем последовательно все указанные вычисления:

$$
\begin{aligned}
5 \times 100 &= 500 \\
500 + 18 &= 518 \\
518 \times 2 &= 1036 \\
1036 + 8 &= 1044 \\
1044 \times 5 &= 5220 \\
5220 + 4 &= 5224 \\
5224 \times 10 &= 52240 \\
52240 + 4 &= 52244 \\
52244 + 23 &= 52267
\end{aligned}
$$

Произведя вычитание $52267 - 444$, получаем число 51823.

Теперь разобьем это число на грани, справа налево, по две цифры в каждой. Имеем:

$$5 - 18 - 23,$$

т.-е. 5-го месяца (мая), числа 18; возраст 23 года.

Почему же так получилось?

Решение.

Секрет нашего фокуса легко понять из рассмотрения следующего равенства:

$$\left\{\left[\,(100\,m+t)\times 2+8\,\right]\times 5+4\right\}\times 10+4+n-$$
$$-444=10000m+100t+n.$$

Здесь буква m обозначает порядковый номер месяца, t число месяца, n — возраст. Левая часть равенства выражает все последовательно произведенные вами действия, а правая — то, что должно получиться, если раскрыть скобки и проделать возможные упрощения. В выражении $10000m+100\ t+n$ ни m, ни t, ни n не могут быть более, чем двузначными числами; поэтому число, получающееся в результате, всегда должно при делении на грани, по две цифры в каждой, распасться на три части, выраженные искомыми числами m, t и n.

Предоставляем изобретательности читателя придумать видоизменения этого фокуса, т. е. другие комбинации действий, дающие подобный же результат.

ОДНО ИЗ „УТЕШНЫХ ДЕЙСТВИЙ“ МАГНИЦКОГО

Задача № 52.

Читателю же предлагаю раскрыть также секрет следующего незамысловатого фокуса, который описан еще в „Арифметике“ Магницкого, в главе: „Об утешных некиих действиях через арифметику употребляемых“.

Пусть кто-либо задумает какое-нибудь число, относящееся к деньгам, к дням, к часам или к „каковой-либо иной числимой вещи“. Остановимся на примере перстня, надетого на 2-й сустав мизинца (т. е. 5-го пальца) 4-го из 8 человек. Когда в это общество является отгадчик, его спрашивают: у кого из восьми человек (обозначенных номерами от 1 до 8), на каком пальце и на котором суставе находится перстень?

„Он же рече: кто-либо от вас умножи оного, который взял через 2, и к тому приложи 5, потом паки (снова) умножи чрез 5, также приложи перст на нем же есть перстень (т.-е. к полученному прибавь номер пальца с перстнем). А потом умножи чрез 10, и приложи сустав на нем же перстень вложен, и от сих произведенное число скажи ми, по немуже искомое получиши.

„Они же твориша (поступили) якоже повеле им, умножаху четвертого человека, который взял перстень, и прочая вся, яже велеше им; якоже явлено есть (см. выкладки); из всего собрания пришло ему число 702, из него же он вычитал 250, осталось 452, т. е. 4-й человек, 5-й палец, 2-й сустав“.

4 лицѐ :
2. мно́жи :
8
5 приложи́ :
13
5 мно́жи :
65
5 приложи́ и пе́рстъ :
70
10 мно́жи :
700
составъ : 2 приложи :
702
250
452

Не надо удивляться, что этот арифметический фокус был известен еще 200 лет назад: задачи совершенно подобного же рода нашел в одном из первых сборников математических развлечений, именно у Баше-де-Мезирьяка, в его книге „Занимательные и приятные числовые задачи“, вышедшей в 1612 г.; а туда она попала из сочинения Леонарда Пизано (1202 г.). Нужно вообще заметить, что большая часть математических игр, головоломок и развлечений, которые в ходу в настоящее время, очень древнего происхождения.

Решение задачи № 29 (стр. 71).

По 4-ной системе—27; по 5-ной—38; по 6-ной—51; по 7-ной—66; по 8-ной—83; по 9-ной—102.—Число это не может быть написано ни по двоичной, ни по троичной системе, так как содержит цифру 3, которой в этих системах нет.—Число это по 5-ной системе делится на 2, так как сумма его цифр делится на 2.—По 7-ной системе оно делится на 6, а по 9-ной не делится на 4.

Глава VII

БЫСТРЫЙ СЧЕТ И ВЕЧНЫЙ КАЛЕНДАРЬ

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ И МНИМЫЕ ФЕНОМЕНЫ

Кому приходилось присутствовать на сеансах нашего русского вычислителя Арраго, тот, без сомнения, не мог не поразиться его изумительными счетными способностями. Тут уж перед нами не фокус, а редкое природное дарование. Не существует „трюков“ для выполнения в уме таких выкладок, как возвышение в куб любого четырехзначного числа или умножение любого шестизначного числа на шестизначное. Куб числа 4729, например, Арраго вычислил при мне в уме, менее чем в одну минуту (результат 105756712489), а на умножение 679321 × 887064, также в уме, употребил всего $1^1/_2$ минуты.

Я имел возможность наблюдать вычислительную работу этого феноменального счетчика не только на эстраде, но и в домашней обстановке, с глазу на глаз, и мог убедиться, что никакими особыми вычислительными приемами он не пользуется, а вычисляет в уме в общем так же, как мы на бумаге. Но его необычайная память на числа помогает ему обходиться без записи промежуточных результатов, а быстрая сообразительность позволяет оперировать с двузначными числами с такою же легкостью, с какою мы производим действия над числами однозначными. Благодаря этому, умножение шестизначного числа на шестизначное является для него задачей не большей, примерно, трудности, чем для нас—умножение трехзначного на трехзначное.

Такие феномены, как Арраго или—на Западе—Иноди и Диаманди, Рюкле [1]) встречаются единицами. Но на ряду с ними подвизаются и эстрадные математики иного рода основывающие свое искусство на тех или иных арифметических трюках. Вам, быть может, приходилось слышать или даже присутствовать самим на сеансах „гениальных математиков", вычислявших в уме с поразительной быстротой, сколько вам недель, дней, минут, секунд, в какой день недели вы родились, какой день будет такого-то числа такого-то года, и т. п. Чтобы выполнить большую часть этих вычислений, вовсе не нужно, однако, обладать необычайными математическими способностями. То же самое может после недолгого упражнения проделать и каждый из нас. Нужно только знать кое-какие секреты этих фокусов,—разоблачением которых мы сейчас и займемся.

---

[1]) Эти давно прославившиеся вычислители еще здравствуют в наши дни и дают сеансы.

„СКОЛЬКО МНЕ НЕДЕЛЬ?"

Чтобы научиться по числу лет быстро определять число заключающихся в них недель, нужно только уметь ускоренно множить на 52, т. е. на число недель в году.

Задача № 53.

Пусть дано перемножить 36×52. „Счетчик" сразу же, без заминки, говорит вам результат: 1872. Как он его получил?

Решение.

Довольно просто: 52 состоит из 50 и 2; 36 умножается на 5 через деление пополам; получается 18—это две первые цифры результата: далее умножение 36 на 2 делается как обыкновенно; получают 72, которые и приписываются к прежним 18-ти: 1872.

Легко видеть, почему это так. Умножить на 52—значит умножить на 50 и на 2; но вместо того, чтобы умножить на 50, можно половину умножить на 100—отсюда понятно деление пополам; умножение же на 100 достигается припиской 72-х (36×2), отчего каждая цифра увеличивается в 100 раз (передвигается на два разряда влево).

Теперь понятно, почему „гениальный" счетчик так быстро отвечает на вопрос „мне столько-то лет; сколько мне недель?". Умножив число лет на 52, ему остается только прибавить еще к произведению седьмую часть числа лет, потому что в году 365 дней, т. е. 52 недели и 1 день: каждые 7 лет из этих избыточных дней накопляется лишняя неделя [1]).

---

[1]) Нетрудно ввести поправку и на високосные годы.

„СКОЛЬКО МНЕ ДНЕЙ?"

Если спрашивают не о числе недель, а о числе дней, то прибегают к такому приему: половину числа лет множат на 73 и приписывают нуль—результат и будет искомым числом. Эта формула станет понятна, если заметить, что $730 = 365 \times 2$. Если мне 24 года, то число дней получим, умножив $12 \times 73 = 876$ и приписав нуль— 8760. Самое умножение на 73 также производится сокращенным образом, о чем речь впереди (стр. 136).

Поправка в несколько дней, происходящая от високосных лет, обыкновенно в расчет не принимается, хотя ее легко ввести, прибавив к результату четверть числа лет,—в нашем примере $24 : 4 = 6$; общий результат, следовательно, 8766 [1]).

Прием для вычисления числа **минут** читатель, после сказанного в следующей статье, не затруднится найти самостоятельно.

„СКОЛЬКО МНЕ СЕКУНД?"

Задача № 54.

На этот вопрос также можно довольно быстро ответить, пользуясь следующим приемом: половину числа лет умножают на 63; затем ту же половину множат на 72, результат ставят рядом с первым и приписывают три нуля.

---

[1]) Указанными далее приемами ускоренного умножения эти операции облегчаются до чрезвычайности, и миллионный результат получается очень быстро. Советую читателю попробовать произвести то же вычисление и обыкновенным путем, чтобы на деле убедиться, какая экономия во времени получается при пользовании указанной формулой и нижеприведенными приемами.

Если, например, число лет 24, то для определения числа секунд поступают так:

$63 \times 12 = 756$; $72 \times 12 = 864$; результат 756.864.000.

Как и в предыдущем примере, здесь не приняты в расчет високосные годы—ошибка, которой никто не поставит вычислителю в упрек, когда приходится иметь дело с сотнями миллионов.

На чем же основан указанный здесь прием?

Решение.

Правильность нашей формулы выясняется очень просто. Чтобы определить число секунд, заключающихся в данном числе лет, нужно лета (в нашем примере 24) умножить на число секунд в году, т. е. на $365 \times 24 \times \times 60 \times 60 = 31536000$. Мы делаем то же самое, но только большой множитель 31536 разбиваем на две части (приписка нулей сама собой понятна). Вместо того, чтобы умножать 24×31536, умножают 24 на 31500 и на 36, но и эти действия мы для удобства вычислений заменяем другими, как видно из следующей схемы:

$$24 \times 31536 = \begin{cases} 24 \times 31500 = 12 \times 63000 = 756000 \\ 24 \times \quad 36 = 12 \times \quad 72 = \quad 864 \end{cases}$$

$$\overline{756864}$$

Остается лишь приписать три нуля—и мы имеем искомый результат: 756.864.000.

ПРИЕМЫ УСКОРЕННОГО УМНОЖЕНИЯ.

Мы упоминали раньше, что для выполнения тех отдельных действий умножения, на которые распадается каждый из указанных выше приемов, существуют также удобные способы. Некоторые из них весьма несложны и удобоприменимы; они настолько облегчают вычисления, что мы советуем читателю вообще запомнить их, чтобы пользоваться при обычных расчетах. Таков, например, прием перекрестного умножения, весьма удобный при действии с двузначными числами. Способ этот не нов; он восходит к грекам и индусам и встарину назывался „способом молнии", или „умножением крестиком". Теперь он хорошо забыт, и о нем не мешает напомнить [1]).

Пусть дано перемножить 24×32. Мысленно располагаем числа по следующей схеме, одно под другим

$$\begin{array}{ccc} 2 & & 4 \\ \Big| & \times & \Big| \\ 3 & & 2 \end{array}$$

Теперь последовательно производим следующие действия:

1) $4 \times 2 = 8$ — это последняя цифра результата.

2) $2 \times 2 = 4$; $4 \times 3 = 12$; $4 + 12 = 16$; 6 — предпоследняя цифра результата; 1 запоминаем.

3) $2 \times 3 = 6$, да еще удержанная в уме 1-ца, имеем 7—это первая цифра результата.

Получаем все цифры произведения: 7, 6, 8—768.

После непродолжительного упражнения прием этот усваивается очень легко.

---

[1]) Впрочем, в последние годы способ этот снова стал входить в употребление,—главным образом, благодаря деятельной пропаганде замечательного германского счетчика, инженера Ф. Ферроля. В Америке выдающиеся педагоги высказывались за введение его в школе взамен нынешнего, довольно медленного способа.

Другой способ, состоящий в употреблении так называемых „дополнений“, удобно применяется в тех случаях, когда перемножаемые числа близки к 100.

Предположим, что требуется перемножить 92×96. „Дополнение“ для 92 до 100 будет 8; для 96-ти — 4. Действие производят по следующей схеме:

множители: 92 и 96
дополнения: 8 и 4.

Первые две цифры результата получаются простым вычитанием из множителя „дополнения“ множимого или наоборот; т.-е. из 92-х вычитают 4, или из 96-ти 8. В том и другом случае имеем 88; к этому числу приписывают произведение „дополнений“: $8 \times 4 = 32$. Получаем результат 8832.

Что полученный результат должен быть верен, наглядно видно из следующих преобразований:

$$92 \times 96 = \left\{ \begin{array}{l} 88 \times 96 = 88\ (100 - 4) = 88 \times 100 - 88 \times 4 \\ \ \ 4 \times 96 = \ 4\ (\ 88 + 8) = \ 4 \times \ \ 8 + 88 \times 4 \end{array} \right.$$

$$92 \times 96 \qquad = \qquad 8832 + 0$$

КАКОЙ ДЕНЬ НЕДЕЛИ?

Умение быстро определять день недели, на какой приходится та или иная дата (напр., 17 января 1893 г., 4 сентября 1943 г. и т. п.), основано на знании особенностей нашего календаря, которые мы сейчас и изложим.

1-е января 1-го года нашей эры приходилось (это установлено расчетом) на субботу. Так как в каждом простом году 365 дней, или 52 полных недели и 1 день, то год должен кончаться тем же днем недели, каким начался; поэтому последующий год начинается одним днем недели позже, чем предыдущий. Если 1 января 1-го года была суббота, то 1 января 2-го года было днем позже, т. е. воскресенье, 3-го года—на 2 дня позже; а 1 января, например, 1923-го года было бы на 1922 дня (1923—1) после субботы,—если бы не было ни одного високосного года. Число високосных лет мы найдем, разделив 1923 на 4=480; но отсюда, для нового стиля, надо исключить календарную разницу в 13 дней: 480 — 13 = 467. К полученному числу надо прибавить число дней, протекших после 1 января 1923-го года до определяемой даты—

$$\begin{array}{r} 1922 \\ +\ 467 \\ 347 \\ \hline 2736 \end{array}$$

скажем для примера, до 14 декабря: это составит 347 дней. Сложив 1922, 457 и 347, мы делим сумму на 7, и по полученному остатку 6 определяем, что 14 декабря 1923-го года приходилось на 6 дней после субботы,—а именно в п я т н и ц у.

Такова сущность вычислений недельного дня любой даты, На практике дело значительно упрощается. Прежде всего заметим, что в течение каждого 28-летнего периода бывает, вообще говоря, 7 високосных лет (неделя),—так что каждые 28 лет день недели любой даты должен повторяться. Кроме того вспомним, что в предыдущем примере мы вычли из 1923 сначала 1, а затем календарную разницу обоих стилей, т. е. 13, всего 1+13 = 14 дней, или две полных недели. Но полное число недель, понятно, не влияет на результат. Поэтому для дат XX века надо принимать во внимание только: 1) число дней, протекших с 1 января данного года—в нашем примере 347; затем 2) прибавить число дней, соответствующее остатку лет

$$\begin{array}{r} 347 \\ +\ 19 \\ 4 \\ \hline 370 \end{array}$$

от деления 1923 на 28, и наконец, 3) число високосных лет в этом остатке, т.-е. 4. Сумма этих трех чисел (347+19+4), т.-е. 370, дает при делении на 7 тот же остаток 6 (пятница), который был получен нами раньше.

Таким же образом мы найдем, что 15 января 1923 г. приходилось на понедельник ($14+19+4=37$; $37:7$ — в остатке 2). Для 9 февраля нов. ст. 1917 г. мы нашли бы $39+13+3=55$; при делении 55 на 7 получаем в остатке 6 — пятница. Для 29 февраля нов. ст. 1904 г.: $59+0-1$ [1]) $=58$; остаток от деления на 7 здесь 2 — понедельник.

Дальнейшее упрощение состоит в том, что вместо полного числа дней месяца (при исчислении числа дней, протекших после 1 января заданного года), принимают в расчет только его остаток, от деления на 7. Далее, разделив 1900 на 28, получаем в остатке 24 года, в которых содержится 5 високосных лет; прибавив их к 24-м и найдя, что сумма $24+5$, т. е. 29, дает при делении на 7 остаток 1, определяем, что 1 января 1900 года было в 1-й день недели. Отсюда для первых чисел каждого месяца получаем следующие цифры, определяющие соответствующие им дни недели (мы будем их называть „остаточными числами").

Остаточные числа для:

января.............................1
февраля..$1+31=32$, или 4
марта....$4+28=32$, или 4
апреля...$4+31=35$, или 0
мая......$0+30=30$, или 2
июня ....$2+31=33$, или 5

---

[1]) Деля 1904 на 28, мы уже учли, что 1904-й год — високосный; беря же в феврале 29 дней, мы учитываем это обстоятельство второй раз. Поэтому надо лишний день откинуть.

июля . . . . 5 + 30 = 35, или 0
августа . . 0 + 31 = 31, или 3
сентября . 3 + 31 = 34, или 6
октября . . 6 + 30 = 36, или 1
ноября . . . 1 + 31 = 32, или 4
декабря . . 4 + 30 = 34, или 6

Запомнить эти числа нетрудно; кроме того, их можно нанести на циферблат карманных часов, поставив возле каждой цифры циферблата соответствующее число точек [1]).

Сделаем теперь расчет дня недели, например, для 31 марта 1923 г.

Число месяца	31
Остаточное число для марта	
С начала столетия прошло лет . . .	23
В том числе високосных	5
Сумма	63

Остаток от деления на 7 . . . . . . 0, — суббота.

Задача № 55.

Найти день недели 16 апреля 1948 г.

Решение.

Число дней месяца	16
Остаточное число для апреля	0
С начала столетия прошло лет . . .	48
В том числе високосных	12
Сумма	76

Остаток от деления на 7 . . . . 6, пятница.

---

[1]) На стр. 144 приложен чертеж такого циферблата.

Задача № 56.

Найти день недели 29 февраля 1912 г. (нов. ст.).

Решение.

Число месяца	29
Остаточное число для февраля	4
С начала столетия прошло лет	12
В том числе високосных [1]	2
Сумма	47

Остаток от деления на 7......5,—четверг.

Для дат предшествующих столетий (XIX, XVIII и т. д.) можно пользоваться теми же числами; но надо помнить, что в XIX веке разница между новым и старым стилем была не 13, а 12 дней; кроме того, при делении 1800 : 28 получается в остатке 8, что вместе с 2 високосными годами в этом остатке составляет 10 (или $10-7=3$), т.-е. соответствующее характерное число для дат XIX века должно быть увеличено на $3-1=2$. Так что, наприм., день недели 31 декабря 1864 г. нов. стиля мы определим сначала по предыдущему, а затем внесем соответствующую поправку—прибавим 2 дня.

Число месяца	31
Остаточное число для декабря	6
С начала столетия прошло лет	64
В том числе високосных	16
Поправка для XIX века	2
Сумма	119

Остаток от деления на 7......0,—суббота.

[1]) Принято во внимание, что один високосный год уже был учтен, когда мы взяли дату 29 февраля. Поэтому пишем не 3 високосных года, а 2.

Задача № 57.

Найти день недели 25 апреля нов. ст. 1886 г.

Решение.

Число месяца....................25
Остаточное число для апреля.... 0
С начала столетия прошло лет ..86
В том числе високосных.........21
Поправка для XIX века.......... 2

Сумма 134

Остаток от деления на 7.....1,—воскресенье.

После недолгого упражнения можно и еще более упростить вычисления, а именно—писать, вместо приведенных здесь чисел, прямо их остатки от деления на 7. Например, день иедели 24 марта 1934 г. мы определим в результате следующих простых выкладок:

Вместо числа месяца (24) 3
Остальное число для марта 4
Вместо числа лет, прошедших от 1900 г. 6
В том числе високосных...............1

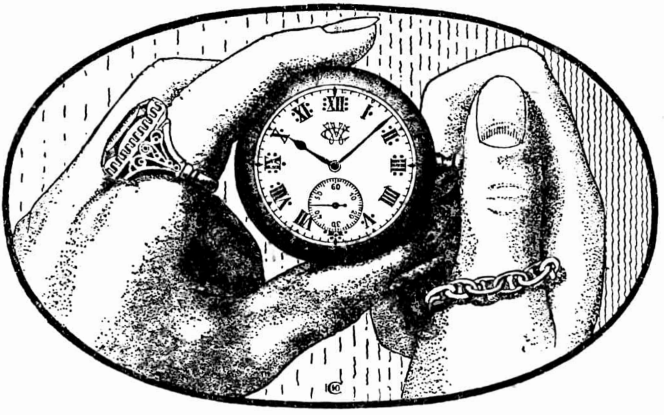
Сумма 0 (вместо 14).

Искомый день—суббота.

Подобного рода упрощенными приемами польвуются обычно те эстрадные вычислители, которые показывают публике свое искусство быстрого счета. Как видите, все это очень просто и может быть выполнено каждым после непродолжительного упражнения [1]).

КАЛЕНДАРЬ НА ЧАСАХ

Знание этих маленьких секретов может не только пригодиться нам для выполнения фокусов, но и сослужить



службу в повседневной жизни. Мы легко можем превратить свои карманные часы в „вечный календарь", помощью которого сможем определить дни недели любых дат как ого угодно года. Для этого понадобится только, осторожно сняв стеклышко с часов, нанести на цифер-

[1]) Способов сокращенного вычисления календарных дат существует множество. Я изложил здесь самый простой из известных мне приемов, употребляемый упомянутым выше германским математиком, Ф. Ферролем, прославившимся своими поразительно быстрыми устными вычислениями.

блате тушью точки возле цифр в числе, соответствующем таблице (стр. 140). Как пользоваться этими точками, мы уже знаем. Особенно просто это для дат XX столетия: к числу точек прибавляют число месяца, последние две цифры года и частное от деления их на 4, а еще лучше— остатки от деления этих чисел на 7. Остаток от деления суммы этих 4 слагаемых на 7 показывает день недели, а именно:

0—суббота.
1—воскресенье.
2—понедельник.
3—вторник и т. д.

Еще проще пользование часами-календарем для дат т е к у щ е г о г о д а. Для каждого года нужно лишь держать в памяти остаток от деления на 7 суммы числа прошедших от начала века лет и четверти этого числа; этот остаток постоянно должен прибавляться к числу месяца определяемой даты вместе с числом точек возле соответствующей цифры. Остаток этот можно было бы прибавить к числу точек и наносить ежегодно на циферблат, чтобы не было надобности вводить его в вычисление особо. Но едва ли это практично.

I	1
II	4
III	4
IV	0
V	2
VI	5
VII	0
VIII	3
IX	6
X	1
XI	4
XII	6

Само собою разумеется, что „вечный календарь“ указанного типа возможно устроить не только на карманных часах. Вы можете просто приклеить к карандашу, линейке, к краю записной книжки, вообще к любому предмету, часто бывающему у вас под руками, узенькую полоску бумаги с соответствующей табличкой чисел, характерных для каждого месяца, и маленький вездесущий вечный календарь готов.

КАЛЕНДАРНЫЕ ЗАДАЧИ

Читателям, желающим испытать свои силы в решении разнообразных календарных задач, предлагаю ответить на следующие вопросы:

Почему ежегодно все числа апреля бывают в те же дни недели, что и в июле? Все числа марта бывают в те же дни недели, что и в ноябре? Сентябрьские даты — в те же дни недели, что и декабрьские? Майские — в те же дни, что и январские следующего года?

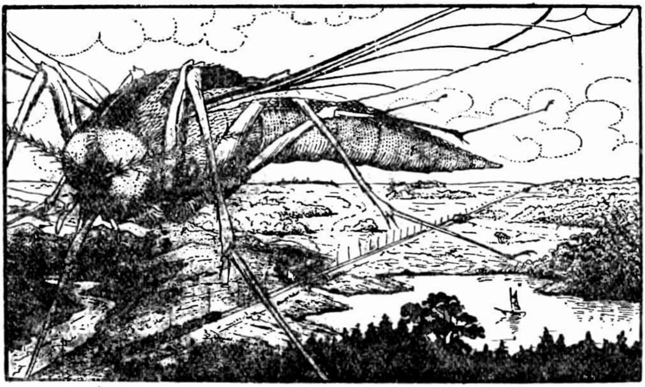
Почему в невисокосные годы 1 января бывает тот же же день недели, что и 1 октября? 1 февраля, 1 марта и 1 ноября бывает один и тот же день недели?

Объясните, почему в пределах одного столетия календарь повторяется каждые 28 лет? Почему в течение этого 28-летнего периода одни и те же числа месяцев приходятся на одинаковые дни недели через следующие промежутки: 11 лет, 6 лет, 5 лет, 6 лет?

Объясните, почему даты какого-либо года XX века повторяются в те же дни недели, в какие приходились они в XIX веке 40 и 96 лет тому назад?

АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КУРЬЕЗ

$$2^5\ 9^2 = 2592$$



Глава VIII

ЧИСЛОВЫЕ ВЕЛИКАНЫ

КАК ВЕЛИК МИЛЛИОН?

Величественная внушительность числовых великанов — миллиона, миллиарда, даже триллиона — заметно померкла в наших глазах за те годы, когда числа эти вместе с потоком бумажных денег проникли в нашу повседневную жизнь. Когда месячные расходы в хозяйстве небольшой семьи достигали миллиардов, а бюджет второстепенного учреждения выражался триллионами, естественна была мысль, что эти, некогда недоступные воображению, числа вовсе не так огромны, как твердили нам до сих пор. Трудно поражаться громадности семизначного числа рублей, за которое не давали и полной крынки молока. Не подавляет ума миллиард, на который не купишь сапог.

Но было бы заблуждением думать, что благодаря проникновению числовых великанов из своих недоступных высот в прозу житейского обихода мы познакомились с ними лучше, чем раньше. Миллион попрежнему остается для большинства людей тем, чем и был—„знакомым незнакомцем". Скорее даже наоборот: ходячее представление о миллионе сделалось еще превратнее. Мы и раньше склонны были преуменьшать величину этого числа, превышающего силу нашего воображения. Когда же миллионными числами стали выражаться весьма скромные, в сущности, ценности, миллион сжался в нашем воображении до размера довольно обыкновенного, лёгко доступного числа. Мы впадали при этом в курьезную психологическую ошибку: то, что миллион рублей сделался сравнительно небольшой суммой, мы относили не за счет уменьшения денежной единицы, а за счет уменьшения миллиона. Я слышал, как человек, узнав впервые, что от Земли до Солнца 150 миллионов километров, простодушно воскликнул:

— Только всего?

Другой, прочтя, что от Петрограда до Москвы миллион шагов, заметил:

— Только *один* миллион шагов до Москвы? А мы-то платим за билет двести миллионов!...

Большинство людей, так свободно обращавшихся с миллионами при денежных расчетах, все-таки не отдавали себе ясного отчета в том, насколько эти числа огромны. Для этого следовало бы упражняться в миллионном счете не таких изменчивых единиц как рубль, а предметов, всегда сохраняющих в нашем воображении одну и ту же постоянную величину. Если вы хотите ощутить истинные размеры миллиона—попробуйте хотя бы проставить в чистой тетради миллион точек. Я не предлагаю вам доводить такую работу до конца (на это едва ли у кого достанет терпения); уже одно начало работы, его медленный ход даст вам почувствовать, что такое „настоящий" миллион.

Английский натуралист А. Р. Уоллес, знаменитый сподвижник Дарвина, придавал весьма серьезное значение развитию правильного представления о миллионе. Он предлагал [1]) „в каждой большой школе отвести одну комнату или залу, на стенах которой можно было бы наглядно показать, что такое миллион. Для этой цели нужно иметь 100 больших квадратных листов бумаги, в 4½ фута каждый, разграфленных квадратиками в четверть дюйма, оставив равное число белых промежутков между черными пятнами. Через каждые 10 пятен нужно оставлять двойной промежуток, чтобы отделить каждую сотню пятен (10×10). Таким образом на каждом листе будет по 10 тысяч черных пятен, хорошо различимых с середины комнаты, а все сто листов будут содержать миллион пятен. Такая зала была бы в высшей степени поучительна, особенно в стране, где о миллионах говорят очень развязно и тратят их без смущения. Между тем, никто не может оценить достижений современной науки, имеющей дело с невообразимо большими или невообразимо малыми величинами, если неспособен их представить наглядно и, суммируя в целое, вообразить себе, как велико число **один** миллион, когда современной астрономии и физике приходится иметь дело с сотнями, тысячами и даже мил-

---

1) В книге „Положение человека во вселенной".

лионами таких миллионов [1]). Во всяком случае, очень желательно, чтобы в каждом большом городе была устроена такая зала для наглядного показания на ее стенах величины одного миллиона".

Я предлагаю другой, более доступный для каждого, способ развить в себе возможно отчетливое представление о величине миллиона. Для этого нужно только дать себе труд поупражняться в мысленном миллионном счете и суммировании размеров мелких, но хорошо знакомых нам единиц—шагов, минут, спичек, стаканов и т. п. Результаты получаются нередко неожиданные, поразительные.

Приведем несколько примеров.

МИЛЛИОН СЕКУНД

Задача № 58.

Как вы думаете, сколько времени отняла бы у вас работа—пересчитать миллион каких-либо предметов, по одному каждую секунду?

Решение

Оказывается, что, считая безостановочно по 10 часов в сутки, вы закончили бы подсчет в месяц времени! Приблизительно удостовериться в этом нетрудно даже устным вычислением: в часе 3600 секунд, в 10 часах—36000; в трое суток вы, следовательно, пересчитаете всего около

---

[1]) Например, взаимные расстояния планет измеряются десятками и сотнями миллионов километров, расстояния звезд—миллионами миллионов километров, а число молекул в кубическом сантиметре окружающего нас воздуха—миллионами миллионов миллионов.—Я. П.

100 тысяч предметов; а так как миллион в десять раз больше, то, чтобы досчитать до него, понадобится 30 дней [1].

Отсюда следует, между прочим, что предложенная ранее работа—проставить в тетради миллион точек—потребовала бы много недель самого усердного и неустанного труда [2]. Да и тетрадь для этого понадобилась бы страниц в тысячу. Тем не менее такой труд был однажды выполнен. В распространенном английском журнале я видел как-то воспроизведение страницы из тетради, „единственное содержание которой составляет миллион аккуратно расставленных точек, по тысяче на странице". Все 500 листов этой тетради были разграфлены карандашом и заполнены рукой одного беспримерно терпеливого учителя чистописания в середине прошлого столетия.

В МИЛЛИОН РАЗ ТОЛЩЕ ВОЛОСА

Задача № 59.

Тонкость волоса вошла чуть не в поговорку. Все часто видят волос и хорошо знают, насколько он тонок. Толщина человеческого волоса—около 0,07 *мм*. Мы закруглим

---

[1] Отметим, для сведения, что в году (астрономическом) 31.556.926 сукунд: миллион секунд в точности равен 11 суткам 13 час. 46 мин. 40 сек.

[2] До какой степени люди склонны недооценивать величину миллиона, показывает следующий поучительный пример. Тот самый Уоллес, который так предостерегает других от преуменьшения миллиона, заканчивает приведенный выше (стр. 149—150) отрывок таким советом:

„В маленьких размерах каждый может устроить это сам для себя: стоит только достать сотню листов толстой бумаги, разлиновать их на квадратики и поставить крупные черные точки. Подобное изображение было бы очень поучительно, хотя не в такой, конечно, степени, как осуществленное в большом масштабе". Почтенный автор, повидимому, полагал, что подобная работа вполне под силу одному человеку.

ее до 0,1 *мм*. Представьте себе, однако, что волос стал в миллион раз толще—какова тогда была бы его толщина. Был ли бы он толщиной в руку? В бревно? Или в большую бочку? Или, может быть, ширина его достигла бы ширины комнаты средних размеров?

Если вы никогда не задумывались над такой задачей, то можно поручиться, что, не проделав вычисления,—вы дадите грубо ошибочный ответ. Мало того: вы будете, пожалуй, даже оспаривать правильный ответ—настолько покажется он неправдоподобным. Каков же он?

Решение.

Оказывается, что волос, увеличенный по толщине в миллион раз, имел бы около сотни метров в поперечнике! Это кажется невероятным, но дайте себе труд сделать подсчет, и вы убедитесь, что так и есть: $0{,}1$ *мм* $\times$ $\times\, 1000000 = 0{,}1$ *м* $\times\, 100 = 0{,}1$ *км* $= 100$ *м*. [1]).

УПРАЖНЕНИЯ С МИЛЛИОНОМ

Проделайте — попытайтесь выполнить это устно—еще ряд упражнений, чтобы освоиться надлежащим образом с величиною миллнона.

Задача № 60.

Величина обыкновенной комнатной мухи общеизвестна—около 7 *мм* в длину. Но какова была бы ее длина при увеличении в миллион раз?

---

[1]) Мы проделали здесь умножение несколько необычным путем—вместо умножения числа, только дважды заменили самую единицу меры другою, в тысячу раз большею. Этот прием очень удобен для устных подсчетов, и им следует пользоваться при выкладках с метрическими мерами.

Решение.

Умножим 7 *мм* на 1000000, получим *км*—примерно ширина Москвы или Ленинграда. С трудом верится, что муха или комар, увеличенные по длине в миллион раз, могли бы покрыть своим телом столичный город!

Задача № 61.

Увеличьте мысленно в миллион раз (по ширине) ваши карманные часы,—и получите снова поражающий результат, который едва ли вам удастся предугадать. Какой?

Решение.

Часы имели бы в ширину километров 50, а каждая цифра простиралась бы на целую географическую милю (7 *км*).

Задача № 62.

Какой высоты достигал бы человек в миллион раз выше обычного роста?

Решение.

1700 километров. Он был бы всего в 8 раз меньше поперечника земного шара. Буквально одним шагом мог бы он перешагнуть из Ленинграда в Москву, а если бы лег, то растянулся бы от Ленинграда до Крыма...

Приведу еще несколько готовых подсчетов того же рода, предоставляя проверку их читателю.

Сделав миллион шагов по одному направлению, вы отошли бы *км* на 600. От Москвы до Ленинграда примерно и будет миллнон шагов.

Миллион человек, выстроенных в одну шеренгу плечом к плечу, растянулись бы на 250 *км*.

Миллионом стаканов воды можно наполнить 200 огромных бочек.

Миллион точек типографского шрифта,—например, этой книги,—поставленные рядом, вплотную, растянулись бы метров на 50—100.

Зачерпывая миллион раз наперстком, вы вычерпаете около тонны жидкости (в 80-ведерную бочку).

Книга в миллион страниц имела бы в толщину метров 50.

Миллион букв заключает книга убористой печати в 600—800 страниц среднего формата.

Миллион дней—более 27 столетий. От начала нашей эры не прошло еще миллиона дней!

НАЗВАНИЯ ЧИСЛОВЫХ ВЕЛИКАНОВ

Прежде чем перейти к еще большим числовым гигантам—миллиардам, биллионам, триллионам и т. д.—остановимся немного на их названиях. Слово „миллион" понимается всеми одинаково: тысяча тысяч. Но слова биллион, триллион и т. д. сравнительно не так давно придуманы и еще не получили единообразного значения. При финансовых расчетах и в житейском обиходе принято у нас называть „биллионом" тысячу миллионов, а „триллионом"—миллион миллионов. Но в книгах по астрономии и физике вы встречаете эти названия в другом значении: биллион означает здесь не тысячу, а миллион миллионов, триллион—миллион миллионов миллионов, квадрильон—миллион миллионов миллионов миллионов, и т. д. Короче говоря: в научных книгах каждое новое высшее наименование принято давать миллиону низших, а в финансовых расчетах и в обиходе—тысяче низших.

Приведенная здесь табличка наглядно показывает это различие:

В обиходе и в финансовых расчетах.	квинтильоны	квадрильоны	триллионы	биллионы	миллионы	тысячи	единицы
	0	000	000	000	000	000	000
В астрономии и физике:	триллион						

Вы видите, что физик называет биллионом то, что финансист называет триллионом, и т. д., так что, во избежание недоразумений, следует наименование всегда сопровождать цифрами. Это, пожалуй, единственный случай в практике, когда обозначение суммы прописью затемняет, а не поясняет написанное цифрами. Вы видите также, что астрономы и физики гораздо экономнее пользуются новыми названиями, чем финансисты, которым, впрочем, нет основания особенно скупиться в этом отношении, так как им почти не приходится иметь дело более чем с 12-значными числами; в науке же 20-значные числа—нередкие гости [1]).

МИЛЛИАРД

Слово „миллиард" употребляется у нас в смысле тысячи миллионов и при денежных вычислениях и в точных науках. Но, например, в Германии и в Америке под миллиардом иногда разумеют не тысячу, а всего с т о миллионов. Этим, между прочим, можно объяснить то, что слово „миллиардер" было в ходу за океаном еще тогда, когда ни один из тамошних богачей не имел состояния в тысячу миллионов. Огромное состояние Рокфеллера незадолго до войны исчислялось „всего" 900 миллионов долларов, а остальных „миллиардеров"—меньшими числами. Только во время войны появились в Америке миллиардеры в нашем смысле слова (их иногда называют на родине „биллионерами").

Чтобы составить себе представление об огромности миллиарда, подумайте о том, что в книжке, которую вы сейчас читаете, заключается немногим более 200.000 букв. В пяти таких книжках окажется один миллион букв. А миллиард букв будет заключать в себе стопка из 5.000 экземпляров этой книжки—стопка, которая, будучи аккуратно сложена, составила бы столб высотой с Исаакиевский собор.

---

[1]) Надо заметить, впрочем, что обычные цифровые обозначения весьма больших чисел и их названия употребляются лишь в популярно-научных книгах; в книгах же строго-научных по физике и астрономии пользуются обыкновенно иным способом обозначения: биллион обозначается 10^{12}, триллион 10^{18}, двадцать семь тысяч биллионов—27.10^{15} и т. д. При таком способе обозначения сберегается место и, кроме того, гораздо легче производить над числами различные действия (по правилам, изучаемым в алгебре).

Миллиард секунд часы отобьют более чем в 30 лет (точнее в 31,7 лет). А миллиард минут составляет более 19 столетий; человечество всего двадцать четыре года назад (29 апреля 1902 года в 10 часов 40 мин.) начало считать второй миллиард минут от первого дня нашего летосчисления.

БИЛЛИОН и ТРИЛЛИОН

Ощутить огромность этих числовых исполинов трудно даже человеку, опытному в обращении с миллионами. Великан-миллион—такой же карлик рядом с сверх-великаном биллионом, как единица рядом с миллионом. Об этом взаимоотношении мы обыкновенно забываем и не делаем в своем воображении большой разницы между миллионом, биллионом и триллионом. Мы уподобляемся здесь тем первобытным народам, которые умеют считать только до 2 или до 3, а все числа свыше их одинаково обозначают слово много. „Подобно тому, как ботокудам кажется несущественной разница между двумя и тремя,—говорит известный германский математик проф. Г. Шуберт, — так и многим современным культурным людям представляется несущественной разница между биллионом и триллионом. По крайней мере, они не думают о том, что одно из этих чисел в миллион раз больше другого и что, значит, первое относится ко второму приблизительно так, как расстояние от Берлина до Сан-Франциско относится к ширине улицы".

Волос, увеличенный по толщине в биллион раз, был бы раз в 8 шире земного шара, а муха при таком увеличении была бы в 70 раз толще Солнца!

Взаимоотношение между миллионом, биллионом и триллионом можно с некоторою наглядностью представить следующим образом. В Ленинграде еще недавно было миллион жителей. Вообразите же себе длинный прямой ряд городов таких как Ленинград,—целый миллион их: в этой цепи столиц, тянущихся на семь миллионов километров (в 20 раз дальше Луны) будет насчитываться биллион жителей... Теперь вообразите, что перед вами не один такой ряд городов, а целый миллион рядов, т.-е. квадрат, каждая сторона которого состоит из миллиона Ленинградов и который внутри сплошь уставлен Ленинградами: в этом квадрате будет триллион жителей.

Одним триллионом кирпичей можно было бы, размещая их плотным слоем по твердой поверхности земного шара, покрыть все материки равномерным сплошным пластом высотою с четырехъэтажный дом (16 *м*).

Если бы все видимые в сильнейшие телескопы звезды обоих небесных полушарий, т. е. не менее 500 миллионов звезд — были обитаемы и населены каждая, как наша Земля, то на всех этих звездах, вместе взятых, насчитывался бы только один триллион людей.

Последнюю иллюстрацию мы заимствуем из мира мельчайших частиц, составляющих все тела природы—из мира молекул. Молекула по ширине меньше точки типографского шрифта этой книги примерно в миллион раз. Вообразите же триллион таких молекул [1]), нанизанных вплотную на одну нитку. Какой длины была бы эта нить? Ею можно было бы семь раз обмотать земной шар по экватору!

---

[1]) В каждом кубич. сантиметре воздуха (т. е. примерно в наперстке насчитывается—отметим кстати—от 20 до 30 триллионов молекул. Как велико это число, видно между прочим из того, что достигнув, помощью совершеннейших воздушных насосов самой крайней степени разрежения—в сто миллиардов раз—мы все-таки будем еще иметь в каждом куб. сантиметре до 270 миллионов молекул! Не знаешь, чему изумляться больше: огромной численности молекул или их невообразимой малости...

КВАДРИЛЬОН

В старинной (XVIII в.) „Арифметике“ Магницкого, о которой мы не раз уже упоминали, приводится таблица названий классов чисел, доведенная до квадрильона, т. е. единицы с 24 нулями [1]).

Это было большим шагом вперед по сравнеиию с более древним числовым инвентарем наших предков. Древняя славянская лестница больших чисел была до XV века, гораздо скромнее и достигала только до ста миллионов. Вот эта старинная нумерация:

„тысяща“........ 1000

„тьма“.......... 10 000

„легион“........ 100 000

„леодр“......... 1 000 000

„вран“.......... 10 000 000

„колода“........ 100 000 000

Магиицкий широко раздвинул древние пределы больших чисел в своей табличке. Но он считал практически бесполезным доводить систему наименований числовых

---

[1]) Магницкий придерживался той классификации чисел, которая дает каждое новое наименование миллиону низших единиц (биллион—миллиои миллионов, и т. д.). Такая система наименований больших чисел принята была и в более поздних русских школьных руководствах (насколько я могу судить по имеющимся у меня русским учебникам конца XVIII и начала XIX века). И лишь сравнительно недавно получила у нас распространение нынешняя „обиходная“ система иаименования.

великанов черезчур далеко. Вслед за его таблицей он помещает такие стихи:

Числ есть бесконечно,
умом нам недотечно,
И никто знает конца,
кроме всех бога творца.
Несть бо нам определьно
тем же есть и безцельно
Множайших чисел искати
и больше сей писати
Превосходной таблицы
умов наших границы
И аще кому треба
счисляти что внутрь неба
Довлеет числа сего
к вещем всем мира сего.

Наш старинный математик хотел сказать этими стихами, что так как ум человеческий не может обнять бесконечного ряда чисел, то бесцельно составлять числа больше тех, которые представлены в его таблице, „умов наших границе“. Заключающиеся в ней числа (от 1-цы до квадрильонов включительно) достаточны для исчисления всех вещей видимого мира,—достаточны для тех, „кому треба счисляти что внутрь неба“.

Любопытно отметить, что Магницкий оказался в данном случае почти прозорливцем. По крайней мере, до самого последнего времени наука не ощущала еще нужды в числах высшего наименования, чем квадрильоны. Расстояния самых отдаленных звездных скоплений, по новейшим оценкам астрономов исчисляемые в сотни тысяч „световых лет“ [1]), в переводе на километры выражаются триллионами. Это — доступные сильнейшим телескопам видимые границы вселенной. Расстояние всех других звезд, расположенных „внутри неба“, выражаются, конечно, меньшими числами. Общее число звезд исчисляется „всего лишь“ сотнями миллионов. Древность старейших из них не превышает, по самой щедрой

---

[1]) Световой год—путь, проходимый лучом света в 1 год (свет пробегает в секунду 300000 *км*); он равен, примерно, 9½ биллионам *км*.

оценке, биллиона лет. Массы звезд исчисляются тысячами квадрильонов тонн.

Обращаясь в другую сторону, к миру весьма малых величин, мы и здесь не ощущаем пока надобности пользоваться числами свыше квадрильонов. Число молекул в кубическом сантиметре газа—одно из самых больших множеств, реально исчисленных,—выражается десятками триллионов. Число колебаний в секунду для самых быстро-колеблющихся волн лучистой энергии (лучей Гесса) не превышает 40 триллионов. Если бы мы вздумали подсчитать, сколько капель в океане (считая даже объем капли 1 куб. миллиметр,—что весьма немного), нам и тогда не пришлось бы обратиться к наименованиям выше квадрильона, потому что число это исчисляется только тысячами квадрильонов.

И лишь при желании выразить числом, сколько граммов вещества заключает вся наша солнечная система, понадобились бы наименования выше квадрильона, потому что в числе этом 34 цифры (2 и 33 нуля): это—две тысячи квинтильонов.

Если вам интересно, каковы наименования сверх-исполинов, следующих за квадрильоном, вы найдете их в приводимой здесь табличке:

наименования	единица со сколькими нулями:
квадрильон	с 24-мя
квинтильон	с 30-ю
секстильон	с 36-ю
септильон	с 42-мя
октальон	с 48-ю
нональон	с 54-мя
декальон	с 60-ю
эндекальон	с 66-ю
додекальон	с 72-мя

Далее наименований не имеется. Но и эти, в сущности, почти не употребляются, да и мало кому известны. Как велики выражаемые ими числа, видно хотя бы из того, что число граммов вещества во вселенной (по современным воззрениям) „всего“ 10 нональонов.

КУБИЧЕСКАЯ МИЛЯ И КУБИЧЕСКИЙ КИЛОМЕТР

В заключение остановимся на арифметическом (вернее, пожалуй, геометрическом) великане особого рода—на кубической миле: мы имеем в виду географическую милю—составляющую 15-ю долю экваториального градуса и заключающую 7420 метров. С кубическими мерами наше воображение справляется довольно слабо; мы обычно значительно преуменьшаем их величину—особенно для крупных кубических единиц, с которыми приходится иметь дело в астрономии. Но если мы превратно представляем себе уже кубическую милю—самую большую из наших объемных мер,—то как ошибочны должны быть наши представления об объеме земного шара, других планет, солнца? Стоит поэтому уделить немного времени и внимания, чтобы постараться приобрести о кубической миле более соответствующее представление.

В дальнейшем воспользуемся картинным изложением талантливого германского популяризатора А. Бернштейна, приведя (в несколько измененном виде) длинную выписку из его полузабытой книжечки—„Фантастическое путешествие через вселенную“ (появившейся более полувека тому назад).

„Положим, что по прямому шоссе мы можем видеть на целую милю ($7\frac{1}{2}$ *км*) вперед. Сделаем мачту длиною в милю и поставим ее на одном конце дороги, у верстового столба. Теперь взглянем вверх и посмотрим, как высока наша мачта. Положим, что возле этой мачты стоит одинаковый с ней высоты человеческая статуя— статуя более семи километров высоты. В такой статуе колено будет находиться на высоте 1800 метров; нужно было бы взгромоздить одну на другую 25 египетских пирамид, чтобы достигнуть до поясницы статуи!

„Вообразим теперь, что мы поставили две таких мачты вышиною в милю на расстоянии мили одна от другой и соединили обе мачты досками; получилась бы стеиа в милю длины и милю вышины. Это—квадратная миля.

„Если бы подобная стена действительно существовала, например, вдоль Невы в Ленинграде, то—заметим мимоходом,—климатические условия этого места изменились бы баснословным образом: северная сторона города могла бы иметь еще суровую зиму, когда южная уже наслаждалась бы ранним летом. В марте месяце можно было бы с одной стороны стены прогуливаться в лодке, а с другой—ездить в санях и кататься на коньках... Но мы отвлеклись в сторону.

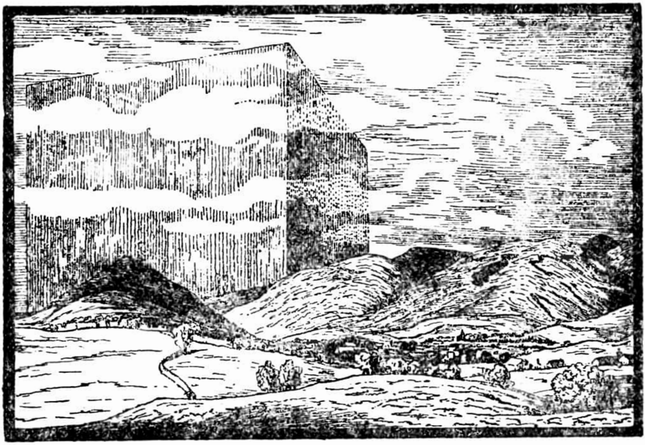
„Мы имеем деревянную стену, стоящую отвесно. Представим себе еще четыре подобных стены, сколоченные вместе, как ящик. Сверху прикроем его крышкой в милю длины и милю ширины. Ящик этот займет объем кубической мили. Посмотрим теперь, как он велик, т.-е. что и сколько в нем может поместиться.

„Начнем с того, что, сняв крышку, бросим в ящик все здания Ленинграда. Они займут там очень немного места. Отправимся в Москву и по дороге захватим все губернские и уездные города. Но так как все это только покрыло дно ящика, то для заполнения его поищем материалов в другом месте. Возьмем Париж со всеми его триумфальными воротами, колоннами, башнями и бросим туда же. Все это летит, как в пропасть; прибавка едва заметна. Прибавим Лондон, Вену, Берлин. Но так как всего этого мало, чтобы хоть сколько-нибудь заполнить пустоту в ящике, то станем бросать туда без разбора все города, крепости, замки, деревни, отдельные здания. Все-таки мало. Бросим туда все, что только сделано руками человека в Европе; но и с этим ящик едва наполняется до одной четверти. Прибавим все корабли мира; но и это мало помогает. Бросим в ящик все египетские пирамиды, все рельсы Старого и Нового Света, все машины и фабрики мира, — все, что сделано людьми в Азии, Африке, Америке, Австралии. Ящик заполняется едва до половины. Встряхнем его, чтобы в нем улеглось ровнее, и попробуем, нельзя ли дополнить его людьми.

„Соберем всю солому и всю хлопчатую бумагу, существующую в мире, и расстелем ее в ящике,—мы получим слой, предохраняющий людей от ушибов, сопряженных с выполнением подобного опыта. Все население Германии—50 миллионов человек—уляжется в первом слое. Покроем их мягким слоем в фут толщиною и уложим еще 50 миллионов. Покроем и этот слой и, кладя далее слой на слой, поместим в ящике все население Европы, Азии, Африки, Америки, Австралии... Все это заняло не более 35 слоев, т. е., считая слой толщиной в метр,— всего 35 метров. Понадобилось бы в 50 раз больше людей, чем их существует на свете, чтобы наполнить вторую половину ящика...

„Что же нам делать? Если бы мы пожелали поместить в ящике весь животный мир—всех лошадей, быков, ослов, мулов, баранов, верблюдов, на них наложить всех птиц, рыб, змей, все, что летает и ползает,—то и тогда мы не наполнили бы ящика доверху без помощи скал и песку.

„Такова кубическая миля. А из земного шара можно сделать 660 миллионов подобных ящиков! При всем почтении к кубической миле, к земному шару приходится питать еще большее уважение“.



Теперь, когда неимоверная огромность кубической мили (около 350 куб. километров) стала до некоторой степени ощущаться читателем, мы прибавим, что целая кубическая миля пшеничных зерен насчитывала бы их „всего“ несколько триллионов.

Весьма внушительную вместимость имеет и кубический километр. Нетрудно подсчитать, например, что ящик таких размеров мог бы вместить 5000 биллионов спичек, вплотную уложенных; для изготовления такого количества спичек фабрика, выпускающая **миллион** спичек в сутки, должна была бы работать 14 миллионов лет; а чтобы такое число спичек доставить, потребовалось бы 10 миллионов вагонов—поезд длинною в 100.000 километров, т. е. в 2½ раза длиннее земного экватора. И все-таки в целом кубическом километре воды содержится не более одного **триллиона** мельчайших капель (считая объем капли в 1 куб. миллиметр), в миллион раз меньше квадрильона.

Исполинские размеры триллиона и квадрильона после сказанного о кубических миле и километре еще более вырастают в нашем сознании.

ИСПОЛИНЫ ВРЕМЕНИ

Огромные промежутки времени представляются нам еще более смутно, чем огромные расстояния и объемы. Между тем, геология говорит нам, что со времени отложения наиболее древних пластов земной коры протекли сотни миллионов лет. Как ощутить неизмеримую огромность таких периодов времени? Один немецкий писатель [1]) предлагает для этого такой способ:

„Все протяжение истории Земли представим в виде прямой линии в 500 километров. Это расстояние пусть изображает те 500 миллионов лет, которые протекли от начала **кембрийской** эпохи (одна из древнейших эпох истории земной коры). Так как километр представляет длительность миллиона лет, то последние 500—1000 метров изобразят длительность **ледникового** периода; а 6.000 лет мировой истории сократятся до 6 метров—

---

[1]) Лотце „Древность Земли".

длина комнаты, в масштабе которой 70 лет жизни человека представляются линией в 7 сантиметров. Если заставить улитку проползти все иазванное расстояние с нормальной для улитки скоростью 3,1 *мм* в секунду, то на все расстояние ей понадобится ровно 5 лет. А все протяжение от иачала мировой войны до наших дней она одолеет в 3 секунды... Мы видим, как ничтожны в масштабе истории Земли те небольшие сроки, которые человек может обнять своим умом. Как ничтожна вся история человечества, которую наше самомнение окрестило „всемирной" историей и как бесконечно мала в потоке мировых событий одна человеческая жизнь!"

ЗАДАЧА-ШУТКА

Какое число делится иа все числа без остатка?

(Ответ—на стр. 179).

Глава IX

ЧИСЛОВЫЕ ЛИЛЛИПУТЫ

ОТ ВЕЛИКАНОВ К КАРЛИКАМ

Гулливер в своих странствованиях, покинув карликов-лиллипутов, очутился среди великанов. Мы путешествуем в обратном порядке: познакомившись с числовыми исполинами, переходим к миру лиллипутов,—к числам, которые во столько же раз меньше 1-цы, во сколько раз единица меньше числового великана.

Разыскать представителей этого мира не составляет никакого труда: для этого достаточно написать ряд чисел, обратных миллиону, миллиарду, биллиону и т. д., т. е. делить 1-цу на эти числа. Получающиеся дроби

$$\frac{1}{1.000.000}, \frac{1}{1.000.000.000}, \frac{1}{1.000.000.000.000} \text{ и т. д.}$$

есть типичные числовые лилипуты, такие же пигмеи по сравнению с единицей, каким является единица по сравнению с миллионом, миллиардом, биллионом и прочими числовыми исполинами.

Вы видите, что каждому числу-исполину соответствует число лилипут, и что, следовательно, числовых лилипутов существует не меньше, чем исполинов. Для них также придуман сокращенный способ обозначения. Мы уже упоминали, что весьма большие числа в научных сочинениях (по астрономии, физике) обозначаются так:

1.000.000 . . . . 10^6
10.000.000 . . . . 10^7
400.000.000 . . . . 4.10^8
6 квадрильонов . . . . 6.10^{24}, и т. д.

Соответственно этому, числовые лилипуты обозначаются следующим образом:

$\frac{1}{1.000.000}$ . . . . 10^{-6}
$\frac{1}{100.000.000}$ . . . . 10^{-8}
$\frac{3}{1.000.000.000}$ . . . . 3.10^{-9} и т. д.

Есть ли, однако, реальная надобность в подобных дробях? Приходится ли когда-нибудь действительно иметь дело с столь мелкими долями единицы?

Об этом интересно побеседовать подробнее.

ЛИЛЛИПУТЫ ВРЕМЕНИ

Секунда, по обычному представлению, есть настолько малый промежуток времени, что с весьма мелкими частями ее не приходится иметь дела ни при каких обстоятельствах. Легко написать $\frac{1}{1000}$ секунды, — но это чисто бумажная величина, потому что ничего не может произойти в такой ничтожный промежуток времени.

Так думают многие, — но ошибаются, потому что в тысячную долю секунды могут успеть совершиться весьма различные явления. Поезд, проходящий 36 километров в час, делает в секунду 10 метров, и, следовательно, в течение 1000-й доли секунды успевает продвинуться на один сантиметр. Звук в воздухе переносится в течение 1000-й доли секунды на 33 сантиметра, а пуля, покидающая ружейный ствол со скоростью 700—800 метров в секунду, переносится за тот же промежуток времени на 70 сантиметров. Земной шар перемещается каждую 1000-ю долю секунды, в своем обращении вокруг солнца, на 30 метров. Струна, издающая высокий тон, делает в 1000-ю долю секунды 2—4 и более полных колебаний; даже комар успевает в это время взмахнуть вверх или вниз своими крылышками. Молния длится гораздо меньше 1000-й доли секунды: в течение этого промежутка времени успевает возникнуть и прекратиться столь грозное явление природы (молния простирается в длину на целые километры).

Но,—возразите вы,—1000-я доля секунды еще не подлинный лиллипут, как никто не назовет тысячу числовым гигантом. Если взять миллионную долю секунды, то уж наверное можно утверждать, что это—величина нереальная, промежуток времени, в течение которого ничего произойти не может. Ошибаетесь: даже и одна миллионная доля секунды—для современного физика, например,—вовсе не чрезмерно маленький промежуток. В области явлений световых (и электрических) ученому сплошь и рядом приходится иметь дело с гораздо более мелкими частями секунды. Напомним прежде всего, что световой луч пробегает ежесекундно (в пустоте) 300.000 километров; следовательно, в 1.000.000-ю долю секунды свет успевает перенестись на расстояние 300 метров—примерно, настолько же, на сколько переносится в воздухе звук в течение целой секунды.

Далее: свет есть явление волнообразное, и число световых волн, проносящихся ежесекундно через точку пространства, исчисляется сотнями биллионов. Те световые волны, которые, действуя на наш глаз, вызывают ощущение красного света, имеют частоту колебаний 400 биллионов в секунду; это значит, что в течение одной 1.000.000-й доли секунды в наш глаз вступает 400.000.000 волн, а одна волна вступает в глаз в течение 400 000 000 000 000-й доли секунды. Вот подлинный числовой лилипут!

Но этот несомненный, реально существующий лилипут является истинным великаном по сравнению с еще более мелкими долями секунды, с которыми физик встречается при изучении Рентгеновых лучей. Эти удивительные лучи, обладающие свойством проникать через многие непрозрачные тела, представляют собою, как и видимые лучи, то же волнообразное явление, но частота колебаний у них значительно больше, чем у видимых: она достигает 25000 биллионов в секунду! Волны следуют тут одна за другой в 60 раз чаще, чем в лучах видимого красного света. Лучи „гамма“ и недавно открытые „космические“ лучи Гесса обладают частотою еще большею, чем лучи Рентгена. Значит, и в мире лилипутов существуют свои великаны и карлики. Гулливер был выше лилипутов всего в дюжину раз и казался им великаном. Здесь же один лилипут больше другого лилипута в пять дюжин раз и, следовательно, имеет все права именоваться по отношению к нему исполином

ЛИЛЛИПУТЫ ПРОСТРАНСТВА

Интересно рассмотреть теперь, какие наименьшие расстояния приходится отмеривать и оценивать современным исследователям природы.

В метрической системе мер наименьшая единица длины для обиходного употребления—миллиметр; она примерно вдвое меньше толщины спички. Чтобы измерять предметы, видимые простым глазом, такая единица длины достаточно мелка. Но для измерения бактерий и других мелких объектов, различимых только в сильные микроскопы, миллиметр черезчур крупен. Ученые обращаются для таких измерений к более мелкой единице—микрону, который в 1000 раз меньше миллиметра. Так называемые красные кровяные тельца, которые насчитываются десятками миллионов в каждой капельке нашей крови, имеют в длину 7 микронов и в толщину 2 микрона. Стопка из 1000 таких телец имеет толщину спички.

Как ни мелок кажется нам микрон, он все же оказывается чрезмерно крупен для расстояний, которые приходится измерять современному физику. Мельчайшие, недоступные даже микроскопу частицы, молекулы, из которых состоит вещество всех тел природы, и слагающие их еще более мелкие атомы имеют размеры от одной 10000-й до одной 1000-й доли микрона. Если остановиться на последней, наибольшей величине, то и тогда окажется, что миллион таких крупинок (а мы уже знаем, как велик миллион), будучи расположен на одной прямой, вплотную друг к другу, занял бы всего лишь один миллиметр!

Чтобы представить себе наглядно чрезвычайную малость атомов, обратимся к такой картине. Вообразите, что все предметы на земном шаре увеличились в миллион раз. Эйфелева башня (300 *м* высоты) уходила бы тогда своей верхушкой на 300000 *км* в мировое пространство и находилась бы в недалеком соседстве от орбиты Луны. Люди были бы высотой с большую гору—в $1^1/_2$ *км*; один шаг такого человека-гиганта унес бы его на 600—700 *км*. Мельчайшие красные тельца, миллиардами плавающие в его крови, имели бы каждый более 7 *м* в поперечнике. Волос имел бы 100 *м* в толщину. Мышь достигала бы 100 *км* в длину, муха—8 *км*. Каких же размеров будет при таком чудовищном увеличении атом вещества?

Положительно не верится: его размеры предстанут перед вами в виде... типографской точки шрифта этой книги!

Достигаем ли мы здесь крайних пределов пространственной малости, за которые не приходится переступать даже физику с его изощренными приемами измерений? Еще не особенно давно думали так; но теперь дознано, что атом—целый мир, состоящий из гораздо более мелких частей и являющийся ареною действия могущественных сил. Атом, например, водорода состоит из центрального „ядра“ и быстро обращающегося вокруг него „электрона“. Не входя в другие подробности, расскажем только о размерах этих составных частей атома. Поперечник электрона измеряется биллионными долями миллиметра, а ядра—тысяче-биллионными долями. Другими словами, поперечник электрона почти в миллион раз, а ядро—в миллиард раз меньше поперечника атома. Если вы пожелаете сравнить размеры электрона с размерами пылинки, то расчет покажет вам, что электрон меньше пылинки, примерно, во столько же раз, во сколько раз пылинка меньше—чего бы вы думали? Земного шара!

Вы видите, что атом,—лилипут среди лилипутов,—является в то же время настоящим исполином по сравнению с электроном, входящим в его состав—таким же исполином, каким вся солнечная система является по отношению к земному шару.

Можно составить следующую поучительную лестницу, в которой каждая ступень является исполином по отношению к предыдущей ступени и лиллипутом по отношению к последующей:

электрон
атом
пылинка
дом
земной шар
солнечная система
расстояние до Полярной звезды.

Каждый член этого ряда, примерно, в четверть миллиона раз * больше предыдущего и во столько же раз меньше последующего. Ничто не доказывает так красноречиво всю относительность понятий „большой“ и „малый“, как эта табличка. В природе нет безусловно большого или безусловно малого предмета. Каждая вещь может быть названа и подавляюще огромной и исчезающе малой в зависимости от того, как на нее взглянуть, с чем ее сравнить. „Время и пространство—закончим мы словами одного английского физика **—понятия чисто относительные. Если бы сегодня в полночь все предметы—в том числе и мы сами и наши измерительные приборы—уменьшились в 1000 раз, мы совершенно не заметили бы этого изменения. Не было бы никакого указания на

* Имеются в виду линейные размеры (а не объемы), т. е поперечник атома, диаметр солнечной системы, высота или длина дома и т. п.

** Фурнье Дальб „Два новые мира“ (есть русский перевод).

то, что произошло такое уменьшение. Точно так же, если бы все события и все часы получили ускорение хода в одинаковом отношении, то мы равным образом ничего не подозревали бы об этой перемене".

СВЕРХ-ИСПОЛИН и СВЕРХ-ЛИЛЛИПУТ

Наши беседы о великанах и карликах из мира чисел были бы не полны, если бы мы не рассказали читателю об одной изумительной диковинке этого рода,—диковинке, правда, ие иовой, но стоющей дюжины новинок. Чтобы подойти к ней, начнем с следующей, на вид весьма незамысловатой задачи:

Задача № 63.

Какое самое большое число можно написать тремя цифрами, не употребляя никаких знаков действий?

Решение.

Хочется ответить: 999,—но, вероятно, вы уже подозреваете, что ответ другой, иначе задача была бы черезчур проста. И, действительно, правильный ответ пишется так

$$9^{9^{9}}$$

Выражение это означает: „девять в степени девять в девятой степени". Другими словами: нужно составить произведение из стольких девяток, сколько единиц в результате умножения:

$$9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9$$

Достаточно только *начать* вычисление, чтобы ощутить огромность предстоящего результата. Если у вас хватит терпения выполнить перемножение девяти девяток, вы получите число: 387420489.

Главная работа только начинается: теперь нужно найти

$$9^{387420489},$$

т.-е. произведение 387420489 девяток. Придется сделать круглым счетом 400 миллионов умножений...

У вас, конечно, не будет времени довести до конца подобное вычисление. Но я лишен возможности сообщить вам готовый результат—по трем причинам, которые нельзя не признать уважительными. Во-первых, число это никогда и никем еще не было вычислено (известен только приближенный результат). Во-вторых, если бы даже оно и было вычислено, то, чтобы напечатать его, понадобилось бы не менее тысячи таких книг как эта, потому что число наше состоит из 369 693 100 цифр; набранное обыкновенным шрифтом, оно имело бы в длину 1000 *км*... Наконец, если бы меня снабдили достаточным количеством бумаги и чернил, я и тогда не мог бы удовлетворить вашего любопытства. Вы легко можете сообразить почему если я способен писать, скажем, без перерыва по две цифры в секунду, то в час я напишу 7200 цифр, а в сутки, работая непрерывно день и ночь,—не более 172800 цифр. Отсюда следует, что не отрываясь ни на секунду от пера, трудясь круглые сутки изо дня в день без отдыха, я просидел бы за работой не менее 7 лет, прежде чем написал бы это число...

Могу сообщить вам об этом числе только следующее: оно начинается цифрами 428124773175747048036987118 и кончается 89. Что находится между этим началом и концом—неизвестно. А ведь там 369693061 цифра!..

Вы видите, что уже число цифр нашего результата невообразимо огромно. Как же велико само число, выражаемое этим длиннейшим рядом цифр? Трудно дать хотя бы приблизительное представление о его громадности, потому что такого множества отдельных вещей, считая даже каждый электрон за отдельную вещь—нет в целой вселенной!

Архимед вычислил некогда, сколько песчинок заключал бы в себе мир, если бы весь он, до неподвижных звезд, был наполнен тончайшим песком. У него получился результат, не превышающий 1-цы с 63 нулями. Наше число состоит не из 64-х, а из 370 миллионов цифр—следовательно, оно неизмеримо превышает огромное число Архимеда.

Поступим же по примеру Архимеда, но вместо „исчисления песчинок", произведем „исчисление электронов". Вы уже знаете, что электрон меньше песчинки примерно во столько же раз, во сколько раз песчинка меньше земного шара. Для радиуса видимой вселенной примем расстояние в миллиард световых лет. Так как свет пробегает в секунду 300000 *км*, а в году 31 миллион секунд, то можно сосчитать, что „световой год" равен круглым счетом 10 биллионам *км* (гнаться за большой точностью здесь бесполезно). Значит, для радиуса всей известной нам вселенной получаем величину

10 миллиардов биллионов *км*

или,—прибегая к способу изображения числовых великанов, объясненному на стр. 56,—

$$10^{22} \text{ км.}$$

Объем шара такого радиуса можно вычислить по правилам геометрии: он равен (с округлением) 4×10^{66} *куб. км.*

Умножив это число на число куб. сантиметров в куб. километре (10^{15}), получим для объема видимой вселенной величину

$$10^{81} \text{ куб. см } ^{1)}.$$

Теперь представим себе, что весь этот объем **с п л о ш ь** заполнен самыми тяжелыми из известных нам атомов— атомами элемента урана, которых идет на грамм около 10^{22} штук. Их поместилось бы в шаре указанного объема 10^{103} штуки. Дознано, что в каждом атоме урана содержится 92 электрона. Округлив это число до 100, узнаем, что во всей доступной нашему исследованию вселенной могло бы поместиться не более

$$10^{105} \text{ электронов.}$$

Число, состоящее „всего лишь“ из 106 цифр... Как это мизерно по сравнению с нашим числовым великаном из 369 **м и л л и о н о в** цифр!

Вы видите, что, наполняя всю вселенную—величайшее, что мы знаем—сплошь электронами, т. е. мельчайшим из того, что нам известно,—мы не исчерпали бы и небольшой доли того исполинского числа, которое скромно скрывается под изображением:

$$9^{9^{9}}$$

Познакомившись с этим замаскированным гигантом, обратимся к его противоположности.

---

1) Небезынтересно отметить, что Архимед в своем исчислении песчинок определял объем вселенной в 5×10^{54} *куб. см.*

Соответствующий числовой лиллипут получится, если разделим 1-цу на это число. Будем иметь:

$$\frac{1}{9^{9^{9}}},\ \text{т.-е.}$$

что равно:

$$\frac{1}{9^{387420489}}$$

Мы имеем здесь знакомое нам огромное число в знаменателе. Сверх-великан превратился в сверх-лиллипута.

ОТВЕТ

на задачу-шутку

(предложенную на стр. 167):

Число, которое делится на все числа без остатка, есть—

произведение всех чисел.

Глава X

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ПУТЕШЕСТВИЯ

ВАШЕ КРУГОСВЕТНОЕ ПУТЕШЕСТВИЕ

В молодости я занимался в редакции одного распространенного Ленинградского журнала, где состоял секретарем. Однажды мне подали визитную карточку посетителя. Я прочел на ней незнакомое мне имя и совершенно необычайное обозначение профессии: „*первый русский кругосветный путешественник пешком*". По обязанностям службы мне не раз доводилось беседовать с путешественниками по всем частям света и даже с кругосветными,—но о „кругосветном путешественнике пешком" я никогда еще не слыхал. С любопытством поспешил я в приемную, чтобы познакомиться с этим предприимчивым и неутомимым человеком.

Замечательный путешественник был молод и имел очень скромный вид. На вопрос, когда успел он совершить свое необыкновенное путешествие, „первый русский кругосветный и т. д.“ объяснил мне, что оно теперь именно и совершается. Маршрут? Шувалово—Ленинград [1]); о дальнейшем он желал посоветоваться со мною... Из разговора выяснилось, что планы „первого русского и т. д.“ довольно смутны, но, во всяком случае, не предусматривают оставления пределов России.

— Как же в таком случае совершите вы кругосветное путешествие?—с изумлением спросил я.

— Главное дело длину земного обхвата пройти, а это можно сделать и в России,—разрешил он мое недоумение.—Десять верст уже пройдено, и остается...

— Всего 37490. Счастливого пути!

Не знаю, как странствовал „первый и т. д.“ на протяжении остальной части своего пути. Но что он успешно выполнил свое намерение, я нисколько не сомневаюсь. Даже если он больше вовсе не странствовал, а сразу возвратился в родное Шувалово и безвыездно проживал там,—он и в таком случае прошел не менее 40 тысяч *км*. Беда только, что он не первый и не единственный человек, совершивший такой подвиг. И я, и вы, и большинство других граждан нашего Союза имеют столько же прав называться „русским кругосветным путешественником пешком“, в понимании шуваловского ходока. Потому что каждый из нас, какой бы он ни был домосед, успел в течение своей жизни, сам того не подозревая, пройти пешком путь даже более длинный, чем окружность земного шара. Маленький арифметический подсчет сейчас убедит вас в этом.

В самом деле. В течение каждого дня вы, конечно, не менее 5 часов проводите на ногах: ходите по комнатам,

---

[1]) Шувалово—небольшая станция в 10 километрах от Ленинграда.

по двору, по улице, словом, так или иначе шагаете. Если бы у вас в кармане был шагомер (прибор для подсчета сделанных шагов), он показал бы вам, что вы ежедневно делаете не менее 30000 шагов. Но и без шагомера ясно, что расстояние, проходимое вами в день, очень внушительно. При самой медленной ходьбе человек делает в час 4—5 *км*. Это составляет в день, за 5 часов, 20—25 *км*. Теперь остается умножить этот дневной наш переход на 360—и мы узнаем, какой путь каждый из нас проходит в течение целого года:

$$20 \times 360 = 7200, \text{ или же } 25 \times 360 = 9000.$$

Итак, самый малоподвижный человек, никогда даже и не покидавший родного города, проходит ежегодно пешком около 8000 *км*. А так как окружность земного шара имеет 40000 *км*, то нетрудно вычислить, во сколько лет мы совершаем пешеходное путешествие, равное кругосветному:

$$40000 : 8000 = 5.$$

Значит, в течение 5 лет вы проходите путь, по длине равный окружности земного шара. Каждый 13-летний мальчик, если считать, что он начал ходить с двухлетнего возраста—дважды совершил уже „кругосветное путешествие“. Каждый 25-летний человек выполнил не менее 4 таких путешествий. А дожив до 60 лет, мы десять раз обойдем вокруг земного шара, т. е. пройдем путь более длинный, чем от Земли до Луны (380000 *км*).

Таков неожиданный результат подсчета столь обыденного явления, как ежедневная наша ходьба по комнате и вне дома.

ВАШЕ ВОСХОЖДЕНИЕ НА МОНБЛАН

Задача № 64.

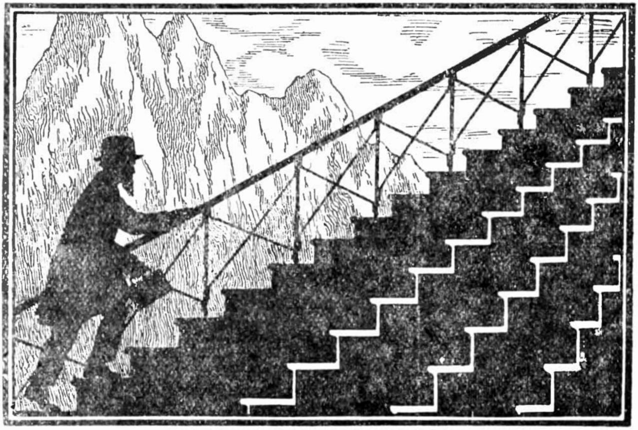
Вот еще один интересный подсчет. Если вы спросите почтальона, ежедневно разносящего письма по адресатам, или врача, целый день занятого посещением своих пациентов, совершали ли они восхождение на Монблан,— они, конечно, удивятся такому вопросу. Между тем, вы легко можете доказать каждому из них, что не будучи ельпинистами, они наверное совершили уже восхождение на высоту, даже превышающую величайшую вершину Альп. Стоит только подсчитать, на сколько ступеней поднимается почтальон ежедневно, восходя по лестнице при разноске писем, или врач, посещая больных. Окажется, что самый скромный почтальон, самый занятой врач, никогда даже и не помышлявшие о спортивных состязаниях, побивают мировые рекорды горных восхождений. Подсчитайте это.

Решение.

Возьмем для подсчета довольно скромные средние цифры; допустим, что почтальон ежедневно посещает только десять человек, живущих кто на втором этаже, кто на третьем, четвертом, пятом—в среднем возьмем на третьем. Высоту третьего этажа примем, для круглого числа, в 10 *м*: следовательно, наш почтальон ежедневно совершает по ступеням лестниц путешествие на высоту $10 \times 10 = 100$ *м*. Высота Монблана 4800 *м*. Разделив ее на 100, вы узнаете, что наш скромный почтальон выполняет восхождение на Монблан в 48 дней...

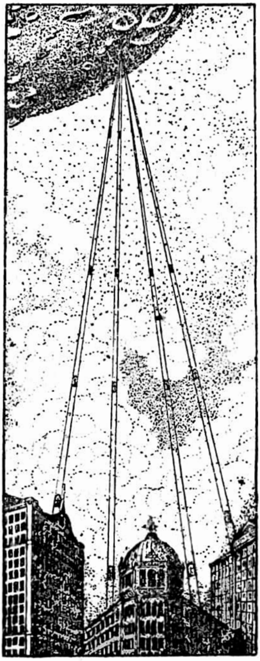
Итак, каждые 48 дней, или примерно 8 раз в год, почтальон поднимается по лестницам на высоту, равную высочайшей вершине Европы. Скажите, какой спортсмен ежегодно по 8 раз взбирается на Монблан?

Для врача у меня имеются не предположительные, а реальные цифры. Врачи квартирной помощи в Ленинграде подсчитали, что в среднем каждый из них за свой



рабочий день поднимается к больным на 2500 ступеней. Считая высоту ступеньки равной 15 *см* и принимая 300 рабочих дней в году, получаем, что за год врач поднимается на 112 *км*, т. е. совершает 20 раз восхождение на высоту Монблана!

Не надо непременно быть почтальоном или врачом, чтобы выполнять подобные подвиги, конечно, того не ведая. Я живу во 2-м этаже, в квартире, куда ведет лестница с 20 ступеньками — число, казалось бы, весьма скромное. Ежедневно мне приходится взбегать по этой лестнице раз 5, да еще посещать двоих знакомых, живущих, скажем, на такой же высоте. В среднем можно принять, что я поднимаюсь ежедневно 7 раз по лестнице с 20 ступенями, то-есть взбегаю вверх каждый день по 140 ступеней. Сколько же это составит в течение года?



$$140 \times 360 = 50400.$$

Итак, ежегодно я поднимаюсь более, чем на 50.000 ступеней. Если мне суждено дожить до 60-летнего возраста, я успею подняться на вершину сказочно-высокой лестницы в три миллиона ступеней (450 *км*)! Как изумился бы я, если бы ребенком меня подвели к основанию этой уходящей в бесконечную даль лестницы и сказали, что некогда я, быть может, достигну ее вершины... На какие же исполинские высоты взбираются те люди, которые по роду своей профессии только и делают, что поднимаются на высоту, — например, служители при лифтах? Кто-то подсчитал, что, например, служитель при лифте одного из Нью-Иоркских небоскребов совершает за 15 лет службы подъем до высоты... Луны!

ПАХАРИ-ПУТЕШЕСТВЕННИКИ

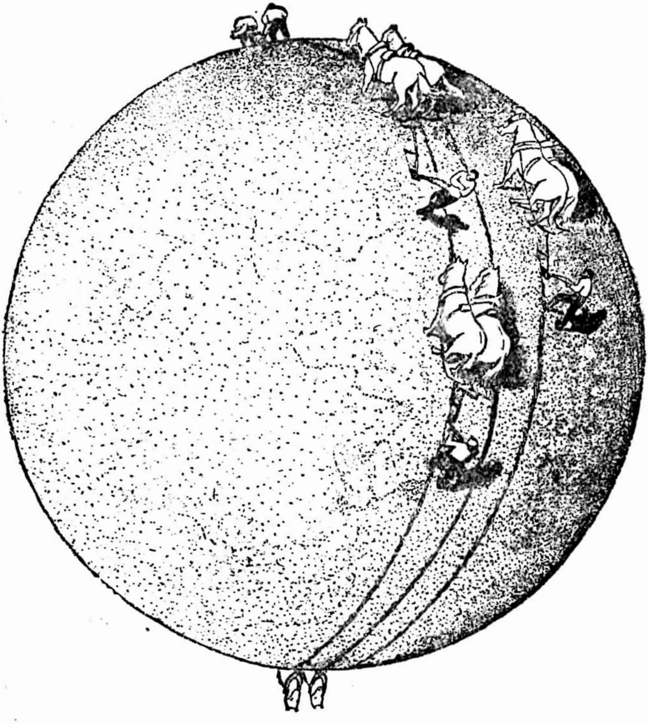
Задача № 65.

Взгляните на странный рисунок, приведенный на следующей странице. Кто те сказочные пахари-богатыри, что проводят борозды кругом земного шара?

Вы полагаете, рисунок—создание черезчур разыгравшейся фантазии художника? Нисколько: художник лишь изобразил наглядно то, о чем скажут вам достоверные арифметические подсчеты, если вы дадите себе труд их произвести. Каждый пахарь проходит со своим плугом в течение нескольких лет (4—6) такое расстояние, которое равно окружности земного шара. Выполнение этого неожиданного по своим результатам арифметического подсчета предоставляю читателю произвести самостоятельно.

НЕЗАМЕТНОЕ ПУТЕШЕСТВИЕ НА ДНО ОКЕАНА

Весьма внушительные путешествия выполняют обитатели подвальных помещений, служители таких же складов и т. п. Много раз в день сбегая вниз по ступенькам маленькой лестницы, ведущей в погреб, они в течение нескольких месяцев проходят расстояние в целые километры. Нетрудно рассчитать, во сколько времени мальчик-служитель подвального склада проходит, таким образом, вниз расстояние, равное глубине океана. Если лестница углубляется, скажем, всего на 2 *м*, и мальчик сбегает по ней ежедневно всего 10 раз, то в месяц он пройдет вниз расстояние в $30 \times 20 = 600$ *м*, а в год $600 \times 12 = 7200$ *м* — более 7 *км*. Вспомним, что глубочайшая



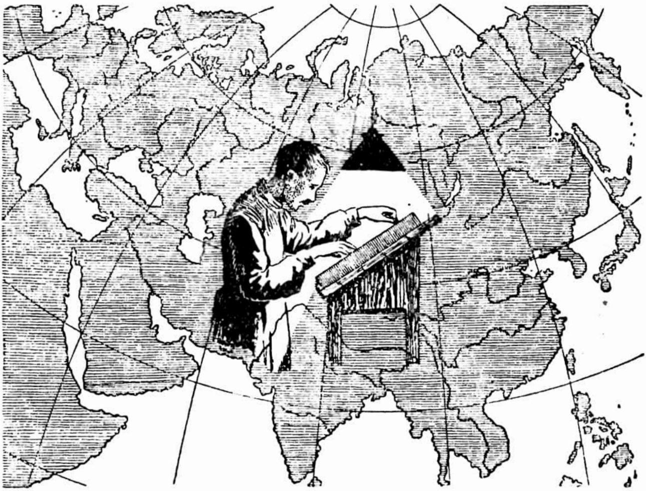
шахта простирается в недра Земли всего на 2 километра!

Итак, если бы с поверхности океана вела на его дно лестница, то любой служитель подвального торгового помещения достиг бы до дна океана в течение одного года (наибольшая глубина Тихого океана—около 9 *км*).

ПУТЕШЕСТВУЮЩИЕ, СТОЯ НА МЕСТЕ

Задача № 66.

Последние страницы этой книги мне хочется посвятить ее первым читателям, без деятельного сотрудничества которых она не могла бы появиться в свет. Я говорю, конечно, о наборщиках. Они также совершают далекие арифметические путешествия, не выходя из пределов наборной, даже стоя неподвижно у наборных касс. Проворная рука труженика свинцовой армии, скользя ежесекундно от кассы к верстатке, проходит за год огромное расстояние. Сделайте подсчет. Вот данные: набор-



щик набирает в течение рабочего дня 8000 букв, и для каждой буквы должен переместить руку туда и назад на расстояние, в среднем, около полуметра. В году считайте 300 рабочих дней.

Решение.

$2 \times 0{,}5 \times 8000 \times 300 = 2400000$ *м*, т.-е. 2400 *км*.

Значит, за 16—17 лет работы даже и наборщик, не отрывающийся от кассы, совершает кругосветное путешествие. „Неподвижный кругосветный путешественник!" Это звучит оригинальнее, чем „путешественник пешком".

Не найдется человека, который так или иначе не совершил бы в этом смысле кругосветного путешествия. Можно сказать, что замечательным человеком является не тот, кто проделал кругосветное путешествие, а тот, кто его не совершил. И если кто-нибудь станет уверять вас, что этого не сделал, вы, надеюсь, сможете „математически" доказать ему, что он не составляет исключения из общего правила.

КОНЕЦ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ