
Alexander Halameisär, Helmut Seibt

Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski

Biografien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner Band 34

1978 BSB B. G. Teubner Leipzig

Abschrift und LaTeX-Satz: 2023

<https://mathematikalpha.de>

Inhaltsverzeichnis

1	Das Parallelenproblem	5
1.1	Janos Bolyai, der Sohn von Farkas Bolyai	5
1.2	Das 5. Postulat von Euklid	5
1.3	Zur Vor- und Frühgeschichte der nichteuklidischen Geometrie	6
1.4	Schneiden oder nicht schneiden?	9
2	Der Weg zur Wissenschaft	10
2.1	Die Kindheit der Brüder Lobatschewski	10
2.2	„Der Stolz der Kasaner Universität“	11
2.3	Der „gottlose“ Nikolai und Anna	14
2.4	Magister, Adjunkt, Professor und Dekan	15
3	Über Euklid hinaus	18
3.1	Die unklaren Grundlagen der Elemente des Euklid und die erste wissenschaftliche Arbeit Lobatschewskis	18
3.2	Das erste Lehrbuch und der erste Orden	19
3.3	Die vorgestellte Geometrie - Aufforderung für eine Umwälzung der Wissenschaft	20
4	Rektor der Universität Kasan	26
4.1	„Das Sonnenlicht ist ein schwacher Abglanz des Angesichts Gottes“	26
4.2	Ansichten zu Erziehungsfragen	27
4.3	Rektor und Erzieher	29
4.4	Kampf mit der Cholera	30
4.5	Familienangelegenheiten	30
4.6	Rektor und Gelehrter	32
5	Die letzten Lebensjahre	37
6	Die neue Geometrie	39
6.1	Der Kopernikus der Geometrie	39
6.2	Beltrami untersucht die Pseudosphäre	39
6.3	Grundlagenfragen	40
6.4	Das Modell von Cayley-Klein	41
6.5	Das Modell von Poincare	42
6.6	Drei geometrische Systeme	44
6.7	Grundlagen jeder Wissenschaft	45
6.8	Die Krümmung des Raumes und die Relativitätstheorie	46
7	Weitere Arbeiten Lobatschewskis	49
8	150 Jahre später in Kasan	51
9	Chronologie	53
10	Personenverzeichnis	55
11	Literatur-Verzeichnis	61

Vorwort



Abb. 1. Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski

"Was Kopernikus war für Ptolemäos, das war Lobatschewski für Euklid. Zwischen Kopernikus und Lobatschewski gibt es eine interessante Parallele. Kopernikus und Lobatschewski waren beide slawischer Abstammung. Jeder von ihnen rief eine Revolution in den wissenschaftlichen Ideen und Standpunkten hervor.

Beide Revolutionen waren von ein und derselben Bedeutung: sie waren Revolutionen in unserer Auffassung vom Kosmos...

W. K. Clifford

Die von Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski entdeckte nichteuklidische Geometrie war der erste Schlag gegen die jahrtausendalte Vorstellung von der absoluten Gültigkeit der von Euklid formulierten geometrischen Gesetze. Der zweite Schlag war der bekannte Versuch von Michelson zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit.

Die Relativitätstheorie von Einstein zerstörte dann endgültig die Vorstellung der Wissenschaftler von der Absolutheit des Raumes.

Einstein zeigte, dass es keinen absoluten Raum gibt, der für alle gleich ist, ebenso wie es keine für alle gleiche absolute Zeit gibt.

Kopernikus erklärte mit seinem Sonnensystem das Rätsel des Weltalls, das die Astronomen beschäftigte. Lobatschewski löste mit seiner Geometrie ein Problem, mit dem sich die Geometer seit Jahrtausenden herumschlügen. Die Aufgabe, die Lobatschewski gelöst hat, war eine sehr wichtige Aufgabe der Mathematik und der Philosophie,

Die Geschichte der Wissenschaft kennt nicht wenige Beispiele dafür, dass verschiedene Wissenschaftler unabhängig voneinander zu gleichen Ergebnissen gelangten. Dabei war es oft der Fall, dass sie sich nicht einmal kannten.

So schloss der Franzose Leverrier aus der Bahnabweichung des Planeten Uranus, des siebenten und damals letzten bekannten Planeten unseres Sonnensystems, im Jahre 1846 durch mathematische Berechnungen darauf, wo sich noch ein anderer Planet befinden muss. Dieser Planet wurde sehr bald darauf entdeckt und erhielt den Namen Neptun.

Ebenfalls im Jahre 1846 führte der Engländer Adams vollkommen unabhängig von Leverrier genau dieselben Berechnungen durch.

Mit der Schaffung der "neuen" Geometrie verhielt es sich ebenso. Auf den Gedanken dieser großen Entdeckung kamen fast gleichzeitig der Deutsche Carl Friedrich Gauß, der "König der Mathematiker", der Ungar Janos Bolyai und der Russe Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski. Außerdem beschäftigten sich mit diesem Problem auch noch andere Wissenschaftler.

Gauß veröffentlichte nichts von seinen Überlegungen; sie wurden erst bei der Durchsicht seines Nachlasses gefunden. Bolyai hat seine Entdeckung veröffentlicht; seine Arbeiten erschienen aber erst nach den Arbeiten von Lobatschewski. Die Untersuchungen von Bolyai waren in mancher Hinsicht nicht so sorgfältig und detailliert ausgeführt wie die von Lobatschewski. Deshalb kann man davon sprechen, dass Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski ein besonderer Ehrenplatz bei der Schaffung der nichteuklidischen Geometrie zukommt.

Über die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie und insbesondere über das Leben und das Werk ihres Schöpfers, des russischen Mathematikers N. I. Lobatschewski, soll in der vorliegenden Arbeit berichtet werden.

Der erste Teil der Arbeit beschäftigt sich im wesentlichen mit dem Leben Lobatschewskis, während im zweiten Teil einiges über seine Geometrie ausgeführt wird. Der Umfang der Arbeit verbietet dabei eine ausführliche und umfassende Darstellung.

Für die biographische Darstellung konnten wir uns auf die ausgezeichnete (russischsprachige) Biographie von Laptew aus dem Jahre 1976 und auf die (deutschsprachige) Biographie von Engel aus dem Jahre 1898, die in einigen Fragen jedoch heute als veraltet angesehen werden muss, stützen.

Für eine gründlichere Beschäftigung mit den im Abschn. 6. angesprochenen Problemen möchten wir auf die einschlägige Fachliteratur verweisen.

Bei Herrn Prof. Dr. Wußing und Dr. Grosche von der Karl-Marx-Universität Leipzig, sowie bei dem Lektorat des Verlages möchten wir uns für die gründliche Durchsicht des Manuskriptes und die erhaltenen Hinweise und Vorschläge bedanken.

Moskau, Berlin im Herbst 1977

A. J. Halameisär, H. Seibt

1 Das Parallelenproblem

1.1 Janos Bolyai, der Sohn von Farkas Bolyai

Farkas Bolyai, ein ungarischer Mathematiker und ein Jugendfreund von Gauß, hatte sich erfolglos um einen Beweis des 5. Postulats von Euklid bemüht. Sein begabter und ehrgeiziger Sohn Janos wollte den Vater in diesen Bemühungen unbedingt übertreffen.

Von Farkas Bolyai ist bekannt, dass er in mehreren Briefen immer wieder versucht hat, seinen Sohn von der Beschäftigung mit dem 5. Postulat abzubringen. So schreibt er zum Beispiel in einem Brief aus dem Jahre 1820 an den Sohn:

"Du darfst die Parallelen auf jenem Wege nicht versuchen; ich kenne diesen Weg bis an sein Ende - auch ich habe diese bodenlose Nacht durchmessen, jedes Licht, jede Freude meines Lebens sind in ihr ausgelöscht worden - ich beschwöre Dich bei Gott! lass die Lehre von den Parallelen in Frieden - Du sollst davor denselben Abscheu haben, wie vor einem liederlichen Umgang, sie kann Dich um all' Deine Muße, um die Gesundheit, um Deine Ruhe und um Dein ganzes Lebensglück bringen. ..."

Lerne an meinem Beispiel; indem ich die Parallelen kennen wollte, blieb ich unwissend, diese haben mir all' die Blumen meines Lebens und meiner Zeit weggenommen. Hier steckt sogar die Wurzel aller meiner späteren Fehler, rund es hat darauf aus den häuslichen Gewölken geregnet."

Der alte Bolyai irrte sich. Er unterschätzte die Genialität und die Unerschütterlichkeit seines Sohnes Janos. Der Sohn konnte das Parallelenproblem lösen und ein neues geometrisches System schaffen. So schrieb er im Jahre 1823 an seinen Vater, dass er "aus Nichts eine neue, andere Welt geschaffen habe."

Damit kam er aber zu spät. Er veröffentlichte seine Gedanken erst im Jahre 1832, als Anlage zu einem Werk seines Vaters.

Die erste schriftliche Darstellung zu dieser Thematik stammt von dem Kasaner Geometer N. I. Lobatschewski, der am 12. (24.) Februar 1826¹ seine Ergebnisse zunächst öffentlich vortrug und sie dann im Jahre 1829 auch in der Zeitschrift "Kasaner Bote" zu publizieren begann.

1.2 Das 5. Postulat von Euklid

Kongruenz von Winkeln, Parallelität von Geraden, Summe der Winkel eines Dreiecks - das sind alles grundlegende geometrische Begriffe, die jedem aus der Schule bekannt sind. Seit Euklid wird jeder geometrische Satz auf logischem Wege aus einigen an den Anfang der Geometrie gesetzten Begriffen und Sätzen hergeleitet.

"Die mathematischen Wissenschaften müssen sich auf eine gewisse Anzahl von Sätzen stützen, die keines Beweises bedürfen", schrieb später der französische Mathematiker H. Poincare, "Diese Sätze kann man als Axiome, Hypothesen oder Postulate bezeichnen."

Das lateinische Wort "postulatum" bedeutet in der deutschen Sprache soviel wie "Forderung", "Annahme", "Voraussetzung".

Bei jedem Beweis muss von bekannten Voraussetzungen, Begriffen und Postulaten ausgegangen werden. Seit den Zeiten von Euklid sind einige dieser Forderungen in der Form von

¹Diesen Tag bezeichnet man als den Tag der Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie. Nach dem alten Kalender war es der 12. Februar 1826, nach dem neuen der 24. 2. 1826. Der Gregorianische Kalender wurde in Russland erst im Jahre 1918 eingeführt. In der vorliegenden Arbeit werden ansonsten stets die Angaben nach dem alten Kalender erfolgen.

Definitionen, Postulaten und Axiomen als Grundlage für die Geometrie genommen worden. So wird beispielsweise gefordert, dass durch zwei Punkte stets eine Gerade verläuft, dass man zu jedem Mittelpunkt mit einem beliebigen Radius einen Kreis zeichnen kann ... und dass in der Ebene je zwei Geraden, die beim Schnitt mit einer dritten Geraden entgegengesetzt liegende Innenwinkel bilden, deren Summe ungleich zwei rechten Winkeln ist, sich auf der Seite dieser dritten Geraden schneiden, wo diese Winkelsumme kleiner als zwei rechte Winkel ist (Abb. 2 a.).

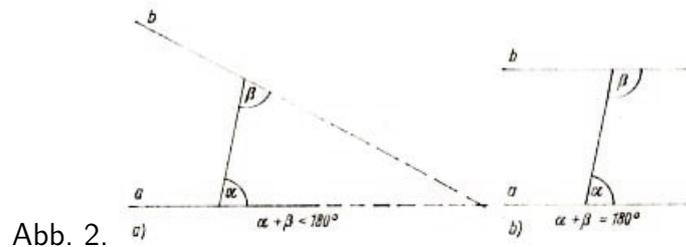


Abb. 2.

Mit dem zuletzt genannten Postulat ist die folgende Aussage gleichwertig:

Durch einen Punkt M außerhalb einer Geraden a kann man in der Ebene genau eine Gerade legen, die die gegebene Gerade nicht schneidet (Abb. 2 b.).

Dieses Postulat, das man das 5. Postulat von Euklid nennt, erweist sich als wesentlich schwieriger als die übrigen vier Postulate, die Euklid in seinem Buch "Elemente" noch nennt. Es wird nicht überall gebraucht; so werden beispielsweise die ersten 28 Sätze in den "Elementen" und viele andere Sätze ohne Benutzung dieses 5. Postulats bewiesen.

Man könnte vermuten, dass Euklid (oder einer seiner Vorgänger) anfangs versucht hat, dieses Postulat als Satz zu beweisen. Das gelang aber nicht. Deshalb könnte man sich vorstellen, dass er diese Aussage, die er nicht beweisen konnte, schließlich für seine weiteren Überlegungen ohne Beweis verwendete.

1.3 Zur Vor- und Frühgeschichte der nichteuklidischen Geometrie

In der Originalfassung hat das 5. Postulat bei Euklid in den "Elementen" folgenden Wortlaut:

Wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass die innen auf derselben Seite entstehenden Winkel zusammen kleiner als zwei rechte sind, dann treffen sich die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei rechte sind.

Gemessen an den ersten vier Postulaten des Euklid besitzt das fünfte eine wesentlich kompliziertere Struktur und keineswegs jene auf den ersten Blick völlig "klare" und "selbstverständliche" Gültigkeit. Es nahm daher von allem Anfang an eine deutliche Ausnahmestellung ein.

Der in diesem Postulat fixierte Sachverhalt schien zwar ganz natürlich und unbestreitbar zu sein, aber es schien auch zugleich so, als ob er beweisbar sein müsse, also aus den anderen vier Postulaten ableitbar sei.

Die Umkehrung des 5. Postulats ist nämlich beweisbar; es gilt also der Satz: Wenn zwei einander schneidende Geraden von einer dritten geschnitten werden, so bildet die schneidende Gerade auf der einen Seite innere Winkel, deren Summe weniger als zwei Rechte beträgt.

Die Geschichte der Mathematik kennt daher zahlreiche Versuche, das Parallelenpostulat in diesem Sinne zu beweisen. Diese Versuche reichen sogar bis in die Antike zurück. Es handelte sich

jedoch durchweg um Scheinbeweise; beim sogenannten Beweis wurden andere geometrische Annahmen gemacht, die "selbstverständlich" schienen, aber eben wieder - unzulässigerweise - unbewiesene geometrische Grundannahmen voraussetzten.

Solche Beweisversuche oder Ansätze dazu gab es bei dem antiken Mathematiker Poseidonius (1. Jahrhundert v.u.Z.) und bei Proclus Diadochos (410-485). So stammt von Poseidonius die Festlegung, dass parallele Geraden solche mit festem Abstand seien; damit wird ein (undefinierter) Abstandsbegriff als scheinbar klar zugrundegelegt.

Auch im Bereich der islamischen Mathematik gab es ernsthafte Untersuchungen über Beweismöglichkeiten für das Parallelenpostulat, so bei Thabit Ibn Qurra (826-901), Ibn al-Haitham (ca. 965-1039) und at-Tusi (1201-1274), der ausführlich auch über die einschlägigen Arbeiten seiner Vorgänger berichtet hat.

Damals wurde bereits klar, dass zum Parallelenpostulat - hinsichtlich des Aufbaus der euklidischen Geometrie - zwei andere Grundannahmen gleichwertig sind, nämlich die Existenz eines Vierecks mit vier rechten Winkeln bzw. die Annahme, dass die Winkelsumme im Dreieck zwei Rechte beträgt.

Es ist auch bemerkenswert, dass at-Tusi immerhin die Möglichkeit nichteuklidischer Ergebnisse zurückweist und damit indirekt die Richtigkeit des Parallelenpostulates erweisen will, wenn auch auf Grund von Scheinbeweisen und Zirkelschlüssen.

Die europäische Mathematik wandte sich seit dem 17. Jahrhundert auch dieser Grundlagenfrage der Geometrie zu. John Wallis (1616-1703) z. B. sprach 1693 aus, dass das Parallelenpostulat mit der Annahme äquivalent ist, dass zu jedem Dreieck ein ähnliches beliebiger Größe existiert.

Im 18. Jahrhundert trat in der Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie eine wesentliche gedankliche Veränderung ein. Statt des Versuches, das Parallelenpostulat direkt zu beweisen, wurde nun der Beweis indirekt versucht: Aus der Annahme, dass das Parallelenpostulat falsch sei, wollte man einen Widerspruch herleiten (wir wissen heute, dass eben dies unmöglich ist).

In dieser Richtung haben der Italiener Girolamo Saccheri (1667-1733) und der Elsässer Johann Heinrich Lambert (1728-1777) besonders scharfsinnige Beiträge geleistet.

Saccheri stellte in seiner 1733 publizierte Schrift "Euclides ab omni naevo vindicatus" ("Der von allem Makel befreite Euklid") zwei Hypothesen auf, die des spitzen und die des stumpfen Winkels: Wenn in einem Viereck $ABCD$ an den Eckpunkten der Basis AB zwei gleichlange Senkrechten AD und BC errichtet werden, so sind aus Symmetriegründen die beiden übrigen Winkel bei C und bei D gleich groß.

In der euklidischen Geometrie sind sie rechte Winkel. Die beiden Hypothesen von Saccheri lauten nun: Es sind spitze bzw. stumpfe Winkel (Abb. 3).

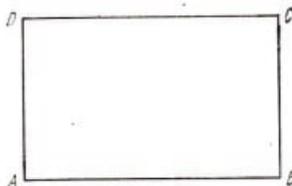


Abb. 3.

Tatsächlich gelang es Saccheri - unter der stillschweigenden Annahme, dass Geraden unendlich lang sind -, die Hypothese vom stumpfen Winkel zu widerlegen. Der von ihm angegebene Beweis für die Widerlegung der anderen Hypothese ist jedoch fehlerhaft.

Auch Lambert hat sich mit einer 1766 niedergeschriebenen, aber erst 1786 aus dem Nach-

lass veröffentlichten "Theorie der Parallellinien" mit diesen beiden (bzw. den drei) Hypothesen beschäftigt und aus ihnen ziemlich weitreichende Konsequenzen gezogen, die, modern gesprochen, einige Ergebnisse der späteren nichteuklidischen Geometrie vorwegnehmen. Man darf sogar annehmen, dass Lambert erkannt hat, dass beide Hypothesen zu in sich konsequenten zweidimensionalen Geometrien führen.

Unter den Mathematikern herrschte, jedenfalls am Ende des 18. Jahrhunderts, ein ziemlich reges Interesse an den Grundlagenfragen der Geometrie, wenn auch die unbedingte Gültigkeit der euklidischen Geometrie niemand ernsthaft in Abrede stellen wollte.

So ist bekannt, dass der Göttinger Mathematiker Abraham Gotthelf Kästner (1719-1800), einer der Lehrer von Gauß, systematisch Schriften gesammelt hat, die sich mit der Theorie der Parallelen, wie man damals sagte, beschäftigten.

Die (indirekten) Beweisversuche für das Parallelenpostulat hielten noch weit bis ins 19. Jahrhundert an. So lieferten die beiden deutschen Juristen und hervorragenden Amateurmathematiker Franz Adolf Taurinus (1794-1874) und Ferdinand Karl Schweikart (1780-1859), in diesen Gedankengängen stehend, 1825 bzw. 1818 wesentliche geometrische Einzelergebnisse unter der Hypothese, dass das Parallelenpostulat nicht gültig sei.

Zu diesem Zeitpunkt war Carl Friedrich Gauß (1777-1855) als erster Mathematiker überhaupt zur vollen Einsicht in das Wesen der nichteuklidischen (hyperbolischen) Geometrie vorgestoßen; auch die Benennung "nicht-euklidische Geometrie" geht auf Gauß zurück.

Bereits als 15jähriger Jüngling hatte Gauß begonnen, sich mit den Grundlagen der Geometrie zu beschäftigen. Schon 1792 fragte er sich, ähnlich wie Saccheri und Lambert, wie eine Geometrie beschaffen sein würde, in der das Parallelenpostulat nicht gültig ist; schon um diese Zeit oder bald darauf dürfte er zu der Erkenntnis gelangt sein, dass das Parallelenpostulat a priori unbeweisbar ist.

Nach langem gedanklichem Ringen - briefliche Äußerungen belegen den mühsamen Erkenntnisprozess - gelangte Gauß um 1815/16 zu der Einsicht, dass auch die nichteuklidischen Geometrien im Sinne der Mathematik völlig richtig sind, also richtige Geometrie entsteht, wenn man statt des Parallelenpostulats ein dazu nicht äquivalentes Postulat benutzt.

Über die wirkliche Struktur des objektiv existierenden Raumes dagegen müssen Erfahrung und Experiment, also Physik und Astronomie entscheiden. Damit hatte Gauß eindeutig eine Position im Sinne des naturwissenschaftlichen Materialismus bezogen.

Indessen scheute der empfindliche Gauß die Publikation seiner weitreichenden Ergebnisse zur nichteuklidischen Geometrie und beschränkte sich auf briefliche vertrauliche Äußerungen gegenüber seinen persönlichen Freunden; er fürchtete, wie er sich ausdrückte, das "Geschrei der Böoter".

Es ging ihm wohl in erster Linie darum, Auseinandersetzungen mit den Anhängern der damals allgemein anerkannten Naturphilosophie von Immanuel Kant zu vermeiden, in dessen System die dreidimensionale euklidische Geometrie als schlechterdings denknotwendig galt.

Um so höher ist die Leistung von Lobatschewski einzuschätzen, der, in einer weitverbreiteten wissenschaftlichen Tradition der Beschäftigung mit den Grundlagenproblemen der Geometrie stehend zwar zeitlich nach Gauß, aber völlig aus eigener Kraft, die nichteuklidische Geometrie entdeckte, und darüber hinaus als erster den mutigen Schritt der Publikation tat.

1.4 Schneiden oder nicht schneiden?

Viele Mathematiker hatten sich also bereits mit Beweisversuchen für das 5. Postulat des Euklid beschäftigt. Auch der junge Lobatschewski dachte darüber angestrengt nach.

In der Vergangenheit waren alle Beweisversuche gescheitert. Diejenigen, die sich weiter damit beschäftigten, konnten nicht auf wissenschaftliche Anerkennung hoffen. Das Parallelenproblem war - wie Stäckel schreibt - "Zum Vorrecht unklarer Köpfe" geworden und wurde "mit den Bemühungen um die Quadratur des Kreises und um das Perpetuum mobile auf eine Stufe" gestellt.

Lobatschewski ging der Frage nach, was wäre, wenn zwei verschiedene Geraden a und b , die durch den Punkt M verlaufen, die Gerade n nicht schneiden würden. Er überlegte, ob sie diese Gerade immer oder nicht immer schneiden, (Abb. 4).

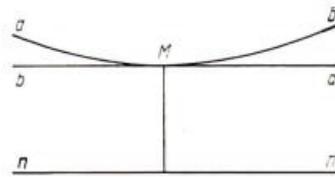


Abb. 4.

Von der Antwort auf diese Frage hing der ganze Aufbau der Geometrie ab. Der erste Schritt war am schwierigsten und am unbekanntesten.

Lobatschewski überlegte weiter: Welche Schlussfolgerungen ergeben sich, wenn man zulässt, dass die beiden Geraden a und b die vorgegebene Gerade n nicht schneiden? Wie kann man dann den Begriff "Abstand" der "parallelen" Geraden a und n bzw. b und n definieren? Was ergibt sich daraus, wenn sich die beiden Geraden a und b , die jeweils (für sich, einzeln) zur Geraden n parallel sind, schneiden?

Der Kasaner Mathematiker durchdachte diese Fragen immer wieder. Schließlich gelang es ihm, alle Widersprüche zu überwinden und ein "neues" geometrisches System aufzubauen.

Die Bedeutung dieses neuen Systems der Geometrie wurde von seinen Zeitgenossen im allgemeinen nicht erkannt. Jahrzehnte schien es so, als ob diese "vorgestellte" bzw. "imaginäre" Geometrie ohne Anerkennung bliebe, als ob sie nicht für notwendig erachtet würde, als ob sie nicht anwendbar sei.

Viele Jahre nach dem Tode des Schöpfers dieser Geometrie - erschienen Arbeiten von E. Beltrami, F. Klein, H. Poincare und anderen Geometern, durch die dieses neue System Bestätigung fand. Damit erfolgte die Anerkennung der Leistungen von Lobatschewski erst vierzig Jahre später.

2 Der Weg zur Wissenschaft

2.1 Die Kindheit der Brüder Lobatschewski

Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski wurde am 20. November 1792² in Nishni-Nowgorod, dem heutigen Gorki, geboren. Im Geburtenregister der Aleksejewkirche ist darüber die folgende Eintragung zu lesen:

"Am 25. November wurde der Sohn Nikolai des Registrators Iwan Maksimow von der Verwaltung der Nishni-Nowgoroder Stadthaltere³ getauft; Taufpate war Pjotr Grigorjewitsch Loschkin, Sekretär des Nishni-Nowgoroder Vermessungsbüros."

Die Kindheit von Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski war freudlos. Der Vater arbeitete wenig und trank viel, Die Mutter Praskowja Aleksandrowna war eine junge, energische aber wenig gebildete Frau, die nur schwer mit dem wenigen Geld zurechtkam und die ihre Ehe für unglücklich hielt.

Eine unerwartete Unterstützung kam in dieser Situation von seiten des Nishni-Nowgoroder Landmessers Sergei Stepanowitsch Schebarschin. Er hatte Praskowja Aleksandrowna mit ihrem zukünftigen Mann bekannt gemacht und kannte die Familienverhältnisse.

Schebarschin kaufte ein kleines Haus, das er Praskowja Aleksandrowna zum Geschenk machte. Er siedelte sich in der Nachbarschaft an und nahm lebendigen Anteil an der Erziehung der drei Kinder. Für einige Zeit war Praskowja Aleksandrowna dadurch von der ständigen Sorge um ein Stück Brot erlöst.

Im Oktober 1797 starb Schebarschin und hinterließ der Familie Lobatschewski eine kleine Erbschaft, Der Vater Iwan Maksimowitsch arbeitete zu dieser Zeit hunderte Kilometer von Nishni-Nowgorod entfernt in Ufa⁴.

Die Familie erhielt von ihm keine Nachricht und kein Geld. Praskowja Aleksandrowna verkaufte ihren bescheidenen Besitz und kehrte mit ihren drei Kindern Aleksander, Nikolai und Aleksei zu ihren Eltern zurück in die Kleinstadt Makarjew.

Schebarschin hatte, bereits im Sterben liegend, Praskowja Aleksandrowna gebeten, sich stets um die Erziehung der Kinder zu kümmern. Das Schulwesen war im damaligen Russland sehr schlecht entwickelt. Im Jahre 1802 brachte Praskowja Aleksandrowna ihre drei Söhne, den 11jährigen Aleksander, den 9jährigen Nikolai und den 7jährigen Aleksei, nach Kasan, wo kurz zuvor ein Gymnasium eröffnet worden war.

Neben den Kindern von Adeligen wurden damals in die Gymnasien auch schon Kinder von Beamten aufgenommen. Iwan Maksimowitsch Lobatschewski besaß den staatlichen Rang eines Kollegienregistrators, der dem ersten Offiziersrang entsprach. Damit hatten seine Kinder die Möglichkeit zum Schulbesuch.

Die Aufnahmeprüfungen wurden erfolgreich bestanden. Der Rat des Kasaner Gymnasiums beschloss am 5. November 1802, dass alle drei Brüder in das Gymnasium aufgenommen werden, später sogar auf Staatskosten und mit vollem Pensionat.

Die Mutter kehrte daraufhin nach Nishni-Nowgorod zurück. Für Nikolai und seine Brüder verliefen die Tage im Gymnasium alle gleichförmig. Zum Gebet, zum Frühstück, zum Unterricht

²Bis zu einer Mitteilung dieses Geburtsdatums in einer Arbeit von A. A. Andronow aus dem Jahre 1929 hielt man den 20. 10. 1793 für das Geburtsdatum von Lobatschewski.

³Entspricht der heutigen Gebietsverwaltung

⁴Ufa ist heute die Hauptstadt der Baschkirischen ASSR

- überallhin musste in Reih und Glied marschiert werden.

Es war verboten, persönliche Sachen und Geld aufzubewahren, Essen oder auch Süßigkeiten zu kaufen, Briefe an die eigenen Verwandten zuzukleben, weil der Aufseher diese Briefe vor dem Abschicken lesen musste. Die Aufseher lasen aber nur jeden fünften oder sechsten Brief, da sie zum Lesen aller Briefe zu bequem waren.

Lobatschewski hatte im Gymnasium hauptsächlich bei dem Tataren N. M. Ibragimow, einem Absolventen der Moskauer Universität, Unterricht und zwar in Arithmetik, Algebra, altslawischer und russischer Sprache.

Das war ein in Kasan recht bekannter Dichter, ein Mensch mit einer hohen Kultur, der mehrere Sprachen beherrschte und der die russische Literatur liebte. Später arbeitete er als Adjunkt⁵ am Lehrstuhl für russische Sprache.

Die von Natur aus wissbegierigen Brüder Lobatschewski lernten leidenschaftlich, sie fanden Gefallen am Prozess des Erkennens.

Nikolai, der mittlere Bruder, liebte besonders die Mathematik.

Das hatte auch seinen Grund: Sein Mathematiklehrer war in der Abschlussklasse⁶ Grigori Iwanowitsch Kortaschewski; ein junger, sehr talentierter und hochgebildeter Absolvent der Moskauer Universität.

Er war ein sehr erfahrener Pädagoge, kannte Sprachen, die Literatur und - vor allem - die Geschichte seines Faches.

Kortaschewski unterrichtete seine Schüler nach einem eigenen Lehrplan. Er machte sie nicht nur mit der Mathematik bekannt, sondern auch mit der Geschichte ihrer Entstehung und Entwicklung.

Kortaschewski war der Auffassung, dass in der Geschichte jeder Wissenschaft ein Augenblick komme, wo es erforderlich sei, einmal stehenzubleiben, alles zu sammeln, das bereits Bekannte und Entdeckte zu systematisieren, und erst danach die Entwicklung weiter voranzutreiben.

Solche Gedanken flossen natürlich auch in seinen Unterricht ein und formten die Vorstellungen seiner Schüler von der Geschichte der Mathematik.

Lobatschewski erhielt also bereits in der Abschlussklasse des Gymnasiums einen guten Mathematikunterricht. Das sollte sich dann auch in der Universität fortsetzen.

2.2 „Der Stolz der Kasaner Universität“

Im Jahre 1803 wurde Stepan Jakowlewitsch Rumowski, der damalige Vizepräsident der Russischen Akademie der Wissenschaften in Petersburg, ein Schüler von Euler und Lomonossow und inzwischen ein bekannter Mathematiker und Astronom, zum Kurator des Kasaner Schulbezirkes ernannt.

Der Kasaner Schulbezirk umfasste damals die Gouvernements Kasan, Nishni-Nowgorod (heute: Gorki), Simbirsk (heute: Uljanowsk), Pensa, Saratow, Wjatka (heute: Kirow), Perm und Orenburg.

Zur damaligen Zeit gab es in Russland nur drei Universitäten: die im Jahre 1755 auf Initiative von Lomonossow eröffnete Moskauer Universität und die soeben erst gegründeten Universitäten in Dorpat⁷ und Wilno⁸.

⁵Entspricht dem heutigen Dozententitel

⁶Die damaligen russischen Gymnasien bestanden nur aus drei Klassenstufen

⁷Heute Tartu, Estnische SSR, Die Universität wurde 1802 eröffnet

⁸Heute Vilnius, Hauptstadt der Litauischen SSR, Die Universität ging im Jahre 1803 aus einer mittelalterlichen

Im Jahre 1804 erhielt Rumowski den Hohen Befehl⁹, in Kasan eine neue Universität zu eröffnen.

Im Februar 1805 kam Rumowski nach Kasan und verkündete dort feierlich den Ukas des Zaren und die Verordnung des Unterrichtsministeriums über die Eröffnung der Kasaner Universität

"... für den Unterricht und für die Verbreitung der Wissenschaften ... besonders der experimentellen und der exakten, die sich auf zuverlässige Grundlagen stützen... und für die Vorbereitung der Jugend auf den Eintritt in den Staatsdienst."

An der neu gegründeten Kasaner Universität waren anfangs lediglich zwei neu ernannte Professoren und vier Adjunkte tätig, die zuvor Lehrer am Kasaner Gymnasium gewesen waren. Die Universität stellte deshalb auch in den ersten Jahren ihres Bestehens nur eine Art "Erweiterung" des Gymnasiums dar, in der die Ausbildung der Abiturienten fortgesetzt wurde. Die sechs Lehrkräfte hatten zu dieser Zeit lediglich 33 Studenten zwischen 13 und 20 Jahren.

Im Juli 1806 beendete Nikolai Lobatschewski das Gymnasium und bestand die Aufnahmeprüfung an der Universität. Ihm wurde jedoch empfohlen, sich noch mit Sprachstudien zu beschäftigen und sich somit besser auf das Hören von Vorlesungen vorzubereiten.¹⁰

Nach einer zweiten Aufnahmeprüfung wurde der 14jährige Lobatschewski dann im Februar 1807 offiziell als Student der Kasaner Universität immatrikuliert.

G. I. Kortaschewski arbeitete an der Universität als Adjunkt und war dort auch gleichzeitig der einzige Mathematiklehrer. Er war kein bedeutender Gelehrter, er war aber ein glänzender Lehrer, der es verstand, nicht nur den jungen Lobatschewski, sondern auch noch viele andere Studenten für die Mathematik zu begeistern.

Sein unabhängiger Charakter und die ständigen Auseinandersetzungen mit dem eigensinnigen und herrschsüchtigen Direktor Jakowkin führten schließlich dazu, dass Kortaschewski nach Petersburg ging. Dort wurde er später Senator.

Nach der Abreise von Kortaschewski aus Kasan wurden zwei Studenten der höheren Studienjahre mit der Durchführung der mathematischen Ausbildung an der Universität beauftragt. Für Lobatschewski gab es zwei Gründe, diesen Unterricht nicht zu besuchen: inhaltlich war es nur Wiederholung des Stoffs aus dem Gymnasium, und Lobatschewski selbst hatte sich unter Anleitung von Kortaschewski weitaus mehr angeeignet.

Unter dem Einfluss des in Kasan ansässigen Arztes Karl Fuchs begann sich Lobatschewski für die Naturwissenschaften zu interessieren, unter anderem auch für die Chemie. Früher hatte er bereits gelegentlich mit dem Mikroskop gearbeitet.

Jetzt, in der Zeit seines Studiums, in der er keinen Mathematiklehrer hatte, widmete sich Lobatschewski der Chemie und der Pharmakologie.

Der Unterricht in diesen Fächern wurde von Adjunkt Ewest durchgeführt. Viele Studenten studierten Chemie; in Pharmakologie war Lobatschewski aber der einzige Schüler seines Lehrers. Ewest ließ Lobatschewski selbständig im Labor arbeiten und war mit ihm insgesamt sehr zufrieden, da sein Schüler - wie üblich - ernsthaft und akkurat arbeitete und auch Ergebnisse

Jesuitenakademie hervor.

⁹Persönlicher Befehl des Zaren

¹⁰Zu Beginn des 19. Jahrhunderts arbeiteten an den russischen Universitäten hauptsächlich ausländische Professoren, die ihre Vorlesungen in Deutsch oder Latein, manchmal auch in Französisch hielten. Die wissenschaftliche Literatur begann man damals erst in die russische Sprache zu übersetzen. Deshalb mussten die Studenten mehrere Fremdsprachen beherrschen.

erzielte.

Jakowkin hörte von Ewest das Lob über Lobatschewski und überlegte: Die mathematischen Vorlesungen besucht er nicht, dafür beschäftigt er sich mit Chemie und Pharmakologie, d. h. er müsste also Arzt werden. Das schrieb er auch an den Kurator Rumowski nach Petersburg:

"Der Student Nikolai Lobatschewski bereitet sich offensichtlich auf ein Studium an der Medizinischen Fakultät vor."

Darin irrte er sich jedoch. Lobatschewski besuchte niemals die Medizin-Vorlesungen von Professor Braun.

Im Jahre 1801 hatte Rumowski vergeblich versucht, den deutschen Mathematiker Carl Friedrich Gauß an die Russische Akademie der Wissenschaften nach Petersburg zu berufen. Gauß konnte sich von seiner bisherigen Tätigkeit in Braunschweig nicht trennen und empfahl an seiner Stelle seinen Lehrer und Freund Johann Christian Martin Bartels.

Von Rumowski wurde daraufhin Bartels im Jahre 1805 der Lehrstuhl für reine Mathematik an der Universität Kasan angeboten.

Bartels kam erst Anfang 1808 nach Kasan. Er war ein talentierter Pädagoge und ein für seine Zeit hoch gebildeter Mathematiker.

Für die Vorlesungen bei Bartels wollte sich auch Lobatschewski einschreiben lassen. Das wurde ihm jedoch von Jakowkin verwehrt. Daraufhin setzte Lobatschewski seine Chemiestudien noch eine Zeit lang fort. Er fühlte sich jedoch mehr zur Mathematik hingezogen.

Es kam zu einem Gespräch mit Bartels, in dem Lobatschewski diesem seine Absichten zur Fortsetzung seiner mathematischen Studien erläuterte. Bartels war damit einverstanden, zumal er bereits in Petersburg von Kortaschewski von diesem talentierten Studenten gehört hatte.

Nach dem Gespräch mit Bartels zog sich Lobatschewski eine Erkältung zu und war längere Zeit krank. Inzwischen traf in der Universität ein Brief von Rumowski ein. Rumowski kümmerte sich sehr um die Ausbildung von russischen Wissenschaftlern auf den verschiedensten Gebieten der exakten Wissenschaften. Da er von der Ankunft Bartels in Kasan wusste, schrieb er:

"Ich wünschte, dass es unter den Studenten und Kandidaten mehr solche geben würde, die sich für die mathematischen, physikalischen und philosophischen Wissenschaften entscheiden würden."

Nachdem Jakowkin dieses Schreiben erhalten hatte, entwickelte er eine ungewöhnliche Fürsorge und besuchte sogar den kranken Lobatschewski. Er wünschte ihm baldige Genesung, hob das von ihm selbst ausgesprochene Verbot wieder auf und empfahl Lobatschewski, dass er unbedingt alle Vorlesungen bei Professor Bartels besuchen solle.

Um Bartels, den Astronomen Littrow und den Physiker Bronner, die später nach Kasan kamen, bildete sich recht bald eine Gruppe talentierter und wissbegieriger Kasaner Studenten. Zusammen mit seinem Freund Iwan Simonow begann Lobatschewski das Studium der Mathematik, Physik und Astronomie.

Bartels schrieb später über seine ersten Eindrücke nach seiner Ankunft in Kasan:

"Mein Wirkungskreis ist hier angenehmer, als ich erwarten durfte. Die meisten meiner Zuhörer sind in der Mathematik sehr gut vorbereitet." (Brief an Gauß vom 6. Juli 1808)

"Zu meiner großen Freude fand ich ungeachtet der damals noch kleinen Zahl der Studierenden ungemein viel Sinn für das Studium der mathematischen Wissenschaften, so dass ich in meinen Vorlesungen über höhere Analysis auf wenigstens zwanzig Zuhörer rechnen durfte und

sich allmählich eine kleine mathematische Schule bildete, aus welcher eine Menge geschickter mathematischer Lehrer für Gymnasien und Universitäten Russlands, besonders des Kasaner Lehrbezirks, hervorgegangen sind." (Vorwort zum Band I seiner 1833 in Dorpat erschienenen Vorlesungen über Analysis)

Lobatschewski beschäftigte sich voller Begeisterung mit der Mathematik, Physik und Astronomie. Er war unbestritten der talentierteste Student der Universität. Die Professoren wunderten sich über die Leichtigkeit, mit der er sich die Wissenschaften aneignete. Sie waren erstaunt über die hervorragenden Fähigkeiten des 16jährigen Studenten und über die Originalität seiner Gedanken.

Es war längst der "Stolz der Universität" geworden. Gleichzeitig blieb er aber jungenhaft, mit allen Eigenschaften eines jungen Burschen, wie z. B. übermütigen Streichen. Einerseits war er im Oktober 1809 zum Kammerstudenten ernannt worden, als der er für die Studenten im Internat verantwortlich war, andererseits schreibt Jakowkin:

"Lobatschewski führt sich oft sehr gut, wenn man von gelegentlichen Fehlritten absieht..."

Obwohl es den Studenten verboten war, sich von der Universität zu entfernen, beteiligte sich Lobatschewski am Neujahrsumzug, startete er im Hof der Universität mit viel Knall und Lärm eine Rakete; einmal traf ihn der Rektor im Stadtpark sogar reitend an ... auf einer Kuh. Die Klagen über Lobatschewski häuften sich in den regelmäßigen Berichten. Als Kurator der Universität schrieb Rumowski an den Rektor:

"Dem Studenten Lobatschewski, der im schlechten Betragen den ersten Platz einnimmt, ist mein Bedauern darüber mitzuteilen, dass er seine ausgezeichneten Fähigkeiten durch unangemessenes Betragen trübt."

Lobatschewski versprach daraufhin, sich in Zukunft mehr zurückzuhalten. Er hatte bereits Kortaschewski versprochen, dass seine Streiche das Studium nicht beeinflussen werden. Kortaschewski war der Auffassung, dass Lobatschewski sein Talent nicht zugrunde richten dürfe. Davon konnte er auch in Gesprächen seinen Schüler und später auch dessen Mutter überzeugen.

2.3 Der „gottlose“ Nikolai und Anna

Ilja Fedorowitsch Jakowkin, dieser überaus ehrgeizige Direktor des Kasaner Gymnasiums und spätere Rektor der Universität (bis 1813), war Lehrer für russische Sprache, Geographie und Statistik, Er kümmerte sich sehr um das eigene Wohlergehen, sorgte sich aber nur wenig um das Niveau der Ausbildung im Gymnasium und an der Universität.

Es wird berichtet, dass sich Lobatschewski als Student in Jakowkins Tochter Anna verliebte. Sie trafen sich häufig, und er wurde auch in Jakowkins Haus eingeladen.

Jakowkin beobachtete diese Freundschaft mit Missfallen. Er wollte seine Tochter einem reichen Aristokraten geben, dem Baron E. W. Wrangel, Andererseits duldete er aber die Besuche dieses armen Studenten.

Dem an wissenschaftliches Denken gewöhnten Lobatschewski gefiel die enge, gottesfürchtige Atmosphäre im Hause von Jakowkin mit der Zeit immer weniger. Es gab darüber auch gelegentlich Auseinandersetzungen zwischen Jakowkin und Lobatschewski.

Die "gegen Gott gerichteten Gedanken" Lobatschewskis rüttelten in den Augen von Jakowkin an den Grundfesten seiner Weltanschauung, an seiner Ergebenheit gegenüber Gott und der za-

ristischen Bürokratie, Er meldete Rumowski, dass Lobatschewski "in bedeutendem Maße Anzeichen von Gottlosigkeit" zeige. Das stellte im damaligen zaristischen Russland eine schreckliche Beschuldigung dar.

Jakowkin schickte Anna bald darauf nach Petersburg. Sie heiratete später einen Fürsten, der ebenfalls Student der Kasaner Universität gewesen war.

Lobatschewski traf der Abbruch dieser Verbindung tief. Er vertiefte sich nun nur noch mehr in die Wissenschaft.

Wegen seines schlechten Verhaltens und wegen der "Bekundung von Anzeichen der Gottlosigkeit" erhielt Lobatschewski nach Beendigung der Universität nicht einmal den Titel eines Kandidaten.

An den russischen Universitäten war es zu dieser Zeit üblich, dass die besten Studenten den Magistertitel erhielten und an der Universität blieben, um unter der Leitung eines Professors ihre wissenschaftliche Ausbildung weiter zu vervollkommen. Die übrigen Studenten beendeten die Universität mit dem Kandidatentitel.

Lobatschewski musste mit seinem Ehrenwort Besserung versprechen und erhielt dann, nach einem Monat, am 3. August 1811 den Magistertitel. Lobatschewski wurde auch mit einem besonderen Dankschreiben des Bildungsministers ausgezeichnet. Für all das hatte sich Bartels besonders eingesetzt.

2.4 Magister, Adjunkt, Professor und Dekan

Lobatschewski hatte sich Anfang 1807 als 14-jähriger an der Kasaner Universität immatrikulieren lassen. Ein Jahr später war Bartels nach Kasan gekommen, dessen Vorlesungen Lobatschewski besuchte und bei dem er eine solide mathematische Grundausbildung erhielt.

Nun, im Jahre 1811, hatte Lobatschewski die Universität absolviert. Er blieb bei Bartels, zunächst noch inoffiziell. Bartels beschäftigte sich mehrmals in der Woche speziell mit Lobatschewski.

Dabei studierte Lobatschewski die "Disquisitiones arithmeticae" von Gauß und die "Mecanique celeste" (Himmelsmechanik) von Laplace. Durch diese intensive Arbeit und Betreuung reiften seine mathematischen Fähigkeiten weiter.

Littrow hatte sich auch bereits einzeln mit Lobatschewski und zwei weiteren Studenten beschäftigt. Sie vertieften bei ihm ihre Kenntnisse in Astronomie "zur einstweiligen Vorbereitung auf die Durchführung von Beobachtungen".



Abb. 5. Die Universität von Kasan 1840 (nach einer Lithographie von W. Turin)

In seiner Magisterzeit hatte Lobatschewski außerdem den Studenten von Bartels all das zu erklären, was diese in den Vorlesungen nicht sofort verstanden hatten. Hier begann also seine

erste pädagogische Tätigkeit.

Während seiner Magisterzeit verfasst Lobatschewski zwei kleinere wissenschaftliche Arbeiten (1812 und 1813). Über die erste Arbeit, die den Titel "Theorie der elliptischen Bewegung von Himmelskörpern" trägt, gab Bartels das folgende Urteil ab:

"Viele Stellen dieses kleinen Werkes zeugen von einer herausragenden mathematischen Begabung, die in der Zukunft nicht unberühmt bleiben wird."

Im Frühjahr des Jahres 1812 beginnt die offizielle pädagogische Tätigkeit des 19jährigen Magisters. Lobatschewski hält Vorlesungen für Beamte, die ihre Allgemeinbildung erhöhen wollen, über Arithmetik und Geometrie. Dabei waren zahlreiche Hörer doppelt so alt wie der Vorlesende ...

Als einer der ersten hielt Lobatschewski seine Vorlesungen in russischer Sprache. Das war von großer Bedeutung für die schnelle Heranbildung russischer Wissenschaftler in größerem Umfang.

Mit Beginn des neuen Studienjahres unterrichtete Lobatschewski die Studenten des Pädagogischen Instituts, das der Kasaner Universität angeschlossen war. Bronner schrieb darüber:

"Der Herr Magister Lobatschewski gab mir Rechenschaft darüber, wie er bisher mit den Studenten arbeitete... Alles wurde vernünftig und sorgfältig von ihm erledigt, alles verdient Zustimmung."

In dieser Zeit setzt Lobatschewski seine vertiefenden Studien in der Mathematik, Physik und Astronomie fort. Im Frühjahr 1814 beschließt der Rat der Universität die Verleihung des Adjunktstitels an Lobatschewski. Der Beschluss wird bald darauf auch vom Bildungsminister bestätigt. Lobatschewski leistet daraufhin am 20. Mai 1814 den Eid als Adjunkt:

"... ich verspreche und schwöre dem allmächtigen Gott vor dem heiligen Evangelium ... treu und ehrlich zu dienen, mich in allen stets zu fügen... alle Geheimnisse fest zu bewahren... und den mir bestimmten Rang ehrlich auszufüllen... so wahr mir Gott helfe, Amen."

Als Adjunkt hält Lobatschewski Vorlesungen über Trigonometrie, erläutert den Aufbau und die Verwendung von Tabellen und liest einen Kurs Zahlentheorie (nach Gauß und Legendre).

Außer Lobatschewski hält auch noch Professor Grigori Borisowitsch Nikolski mathematische Vorlesungen in russischer Sprache. Lobatschewski hielt seine Vorlesungen auf streng wissenschaftlicher Grundlage, bewies und erläuterte alles Notwendige, veranschaulichte die Sachverhalte durch Zeichnungen und gab Beispiele.

Nikolski hingegen hielt Gott für die höchste mathematische Autorität. Er begann seine Vorlesungen mit solchen Bemerkungen wie: "Die Hypotenuse ist eine Gunst Gottes." Er traf Feststellungen wie: "Also sind diese beiden Dreiecke mit Gottes Hilfe gleich."

Unter den Studenten hatte er deshalb den Spitznamen "Hypotenuse, mit Gottes Hilfe".

Der Rat der Universität beschloss bald, die Mathematikstudenten auf Nikolski und auf Lobatschewski aufzuteilen.

Im Jahre 1816 wurde Lobatschewski, der damals erst dreiundzwanzig Jahre alt war, der Titel eines außerordentlichen Professors verliehen. Damit verbreiterte sich auch sein Tätigkeitsbereich. Er hielt jetzt Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Astronomievorlesungen, leitete das Observatorium, wurde in das Bibliothekskomitee berufen (das im wesentlichen nur aus ihm selbst bestand), er sammelte und kaufte Bücher für die Universität und brachte die bestehende Bibliothek in Ordnung.

Außerdem wurde er mit der Materialsammlung für die Herausgabe des "Kasener Boten" beauftragt, was sich als sehr schwierig erwies und schließlich auch nicht vom Rat der Universität bestätigt wurde.

Im Jahre 1820 wurde Lobatschewski der staatliche Titel eines Hofrates verliehen, der damals dem Range eines Oberstleutnants entsprach,

Im selben Jahr wurde Bartels, der Dekan der Physikalisch-Mathematischen Fakultät, an die Universität Dorpat berufen. In diesem Zusammenhang übertrug die Kasaner Universität die bisher von Bartels gehaltene Vorlesung über reine Mathematik und die Pflichten eines Dekans an Lobatschewski.

Zu Beginn des folgenden Jahres wurde der 28jährige Lobatschewski offiziell als Dekan gewählt.

In der Bibliothek der Kasaner Universität wird ein Vorlesungsverzeichnis aufbewahrt, aus dem hervorgeht, dass Lobatschewski allein im Mai des Jahres 1821 folgende Vorlesungen gehalten hat:

1. reine Mathematik: in "Analytischer Geometrie" über Koordinatentransformationen, über Projektionen eines Dreiecks und anderer Figuren, über die Herleitung von Aufgaben der geradlinigen Trigonometrie mit Bestimmung der Fehlergrenzen unter Benutzung von Logarithmentafeln; in "Differentialrechnung" über die Berechnung von Logarithmen trigonometrischer Funktionen mit Hilfe der Reihenentwicklung, Anfänge der Theorie der Tangenten ...

2. Physik: Fortsetzung der Theorie über den Volt-Bogen, über elektrische Leitfähigkeit, über Elektrolyse mit einer Analyse der ablaufenden Prozesse vom Standpunkt der Elektrizitätslehre ...

3. Astronomie: über Anwendung und Verbesserung von Sextanten, über die Strahlenbrechung an der Erdoberfläche und über das Sinken des Horizontes

Im folgenden Jahr 1822 wurde der noch nicht 30jährige Lobatschewski zum ordentlichen Professor ernannt. Trotz dieser gewaltigen Belastung durch die Lehre und durch Verwaltungsarbeiten legte er im Jahre 1823 dem Rat der Universität sein zum Druck vorbereitetes Buch "Geometrie" vor.

3 Über Euklid hinaus

3.1 Die unklaren Grundlagen der Elemente des Euklid und die erste wissenschaftliche Arbeit Lobatschewskis

Lobatschewski hatte sich schon seit Jahren mit der Geometrie beschäftigt. Dabei konzentrierte er sich, wie viele seiner Vorgänger, auf das 5. Postulat von Euklid, das er zunächst zu beweisen versuchte.

Diese Beweisversuche bestanden darin, dass er einmal vom Richtungs-begriff als dem fundamentalen Begriff ausging, bei einem weiteren Versuch unendliche Zweiecke in seine Betrachtungen einführte und bei einem dritten Versuch den Satz bewies, dass die Summe der Winkel eines Dreiecks nicht größer und nicht kleiner als zwei Rechte ist. Nach Laptew stammt der originellste Versuch aus dem Jahre 1817.

In dem 1823 vorgelegtem Geometrielehrbuch schreibt Lobatschewski u. a. folgendes:

"Die Messung ebener Flächenräume gründet sich darauf, dass zwei Linien zusammentreffen, wenn sie auf einer dritten nach derselben Seite hin stehen und wenn die eine eine Senkrechte ist, die andere aber unter einem spitzen Winkel geneigt ist, der sich der Senkrechten zuwendet. Die Linien AB und CD müssen bei genügender Verlängerung zusammentreffen, wenn die eine von ihnen AB auf BC senkrecht steht und die andere CD gegen BC unter einem spitzen Winkel C geneigt ist, der sich der Senkrechten AB zuwendet. Einen strengen Beweis für diese Wahrheit hat man bis jetzt nicht finden können.

Die Beweise, die man gegeben hat, kann man nur als Erläuterungen bezeichnen, aber sie verdienen nicht im vollen Sinne als mathematische Beweise geschätzt zu werden."

Bei dem Versuch, über Euklid hinauszugehen, baut Lobatschewski im ersten Teil seiner Arbeit eine "absolute Geometrie" auf, die vom Parallelenpostulat unabhängig ist. Er war inzwischen davon überzeugt, dass eine Geometrie, in der alle Axiome von Euklid mit Ausnahme des Parallelenaxioms erfüllt sind, in sich widerspruchsfrei sein könnte.

Dabei spielte Lobatschewskis kritische Einstellung eine Rolle, die er zu der Auffassung vom Angeborenssein unserer geometrischen Kenntnisse hatte, aus der die Einzigkeit des bisherigen geometrischen Systems folgen würde.

Das Geometriebuch Lobatschewskis wurde vom Kurator der Kasaner Universität der Petersburger Akademie der Wissenschaften zur Begutachtung als Lehrbuch, das für Gymnasien geschrieben war, zugeschickt. Für den Anfangsunterricht war dieses Werk tatsächlich nicht geeignet.

Das Gutachten der Akademie verfasste N. Fuß, ein Schüler und Mitarbeiter von Euler und damaliger ständiger Sekretär der Akademie. Fuß erkannte nicht den sich andeutenden revolutionierenden Gehalt dieser Arbeit. Sein Gutachten vom 3. August 1823 war äußerst negativ. Er schrieb unter anderem:

"Wenn der Verfasser glaubt, seine Schrift könne als Lehrbuch dienen, so zeigt er dadurch, dass er von den Ansprüchen, die man an ein Lehrbuch stellen muss, keinen rechten Begriff hat, d. h. keinen Begriff von der Fülle der geometrischen Wahrheiten, die den Inbegriff eines Elementarkurses der Wissenschaft bilden, von der mathematischen Methode, von der Notwendigkeit scharfer und deutlicher Erklärungen aller Begriffe, von der logischen Ordnung und der methodischen Einteilung des Stoffs, von der gehörigen Aufeinanderfolge der geometrischen Wahrheiten, von der unerlässlichen Strenge und möglichst rein geometrischen Fassung der Beweise.

Von allen diesen notwendigen Eigenschaften ist in der Geometrie, die ich durchgesehen habe, auch nicht eine Spur."

Besonders empört zeigte sich Fuß über die Einführung des Meters als Einheit der Längenmessung und die Teilung des Kreises in 400 und nicht in 360 Grad. Er analysierte nicht das Wesen des von Lobatschewski vorgenommenen Aufbaus der Geometrie auf der Grundlage einer Axiomatik. Fuß schrieb sarkastisch:

"... und es ist verwunderlich, dass der Verfasser das französische Meter als Maßeinheit für die geraden Linien und den hundertsten Teil eines Viertelkreises, den er als Grad bezeichnet, als Maßeinheit für Kreisbogen benutzt.

Diese Einteilung ist in der Zeit der französischen Revolution erdacht worden, als die Raserei einer Nation alles bisherige vernichtete und sich sogar auf den Kalender und auf die Teilung des Kreises erstreckte, diese Neuheit wurde aber wegen ihrer Unbequemlichkeit nirgendwo verwendet."

Diese Rezension erwies sich in zweierlei Hinsicht als falsch: die Genialität der Lobatschewskischen Idee entging nicht nur dem damals 78jährigen Fuß, der als "alter Weiser" galt, sondern auch vielen talentierten Köpfen der damaligen Zeit; das Meter hatte sich damals überall schnell eingebürgert.

Das Gradmaß für die Winkel blieb jedoch auch in der Folgezeit unverändert.

Die Rezension von Fuß hatte natürlich zur Folge, dass das Geometriebuch von Lobatschewski nicht gedruckt wurde. Das Manuskript galt lange Zeit als verschollen, bis es im Jahre 1898 bei einer Durchsicht des Archivs des Kurators der Universität wieder aufgefunden wurde. Die erste Auflage dieses Buches erschien im Jahre 1909 in Kasan, d.h. 86 Jahre nach Fertigstellung des Manuskripts durch Lobatschewski.

3.2 Das erste Lehrbuch und der erste Orden

Lobatschewski lehrte weiter an der Kasaner Universität und übte dort die verschiedensten Verwaltungsfunktionen aus. Der Kreis seiner Pflichten erweiterte sich. In einem Dokument aus dem Archiv der Universität heißt es über das Studienjahr 1823/24:

"Der ordentliche Professor und Dekan, der Hofrat N. I. Lobatschewski unterrichtet reine Mathematik, insbesondere Algebra, nach einer eigenen Konzeption, analytische Geometrie nach Monge, Differential- und Integralrechnung ... Grundlagen der Physik, Bestimmung des spezifischen Gewichtes von Körpern, Elektrizitätslehre, Magnetismus und Licht nach Biot, Fresnel und Poisson, Akustik nach Chladni ... Astronomie nach Laplace und numerisches Rechnen nach d'Alambert."

Die Vorlesungsankündigungen für das Studienjahr 1824/25 machen ebenfalls den großen Umfang der Lehrtätigkeit von Lobatschewski deutlich. Dort heißt es:

"Nikolai Lobatschewski, Dekan der Physikalisch-mathematischen Fakultät, ordentlicher Professor der reinen Mathematik, kündigt an

a) Aus dem Gebiete der reinen Mathematik für die Studenten des ersten Studienjahres folgendes: Über die Eigenschaften der ganzen Zahlen, über imaginäre Potenzen, über die Wurzeln der Gleichungen, Elemente der Geometrie, ebene und sphärische Trigonometrie nach eigenen Heften;

für die Studenten des zweiten Studienjahres: Analytische Geometrie, Differenzenrechnung,

Anfangsgründe der Differentialrechnung nach dem Lehrbuche von Lacroix; für die Studenten des dritten Studienjahres: Integral- und Variationsrechnung, Anwendung der Analysis auf Geometrie, die ersten beiden nach Lacroix, die letztere nach Monge.

b) Aus dem Gebiete der Physik für die Studenten des ersten Studienjahres: Grundlagen der Physik, die Untersuchungsmethoden in dieser Wissenschaft, über die anziehenden und die abstoßenden Kräfte, die Anschauungen der Physiker über die Körper, die Ausdehnung der Körper durch die Wärme, über die Elastizität der Körper und über die Verdampfung der Flüssigkeiten.

Für die Studenten des zweiten und dritten Studienjahres: Über Elektrizität, Magnetismus, Licht und Wärme, wobei er in seinem Unterrichte das Werk Biots zu Grunde legt: *Traite complet de Physique*, zugleich unter Benutzung anderer Verfasser.

c) Aus dem Gebiete der Astronomie wird er den Studenten des dritten Studienjahres sphärische und theoretische Astronomie anbieten nach Anleitung der Werke von Delambre.

Für seine angestrengte Arbeit auf vielen Gebieten erhielt Lobatschewski im Jahre 1824 seinen ersten Orden, den Orden des heiligen Wladimir 4. Klasse. Im Jahre 1825 wurde ihm der Titel eines Kollegienrates verliehen, der damals dem Rang eines Oberst entsprach.

Lobatschewski unterbrach bei all diesen Verpflichtungen jedoch niemals seine wissenschaftliche Arbeit. Im Jahre 1825 stellte er ein Algebralehrbuch für Gymnasien fertig, das die Zustimmung des Rates der Universität fand.

Trotz der vernichtenden Rezension von Fuß vervollkommnete er auch sein Buch "Geometrie" und dachte immer wieder über Verbesserungen nach. Er ging dabei einen genial einfachen Schritt:

Er erkannte das 5. Postulat von Euklid nicht an, das beinahe 2000 Jahre hindurch als gültig angesehen worden war und das weder bei Lobatschewskis Vorgängern, noch bei seinen Zeitgenossen ernsthafte Zweifel hervorgerufen hatte. Viele hatten sich mit Beweisversuchen für dieses Postulat beschäftigt.

Lobatschewski, der das anfangs auch getan hatte, war inzwischen davon überzeugt, dass alle bisherigen Beweisversuche verfehlt waren.

3.3 Die vorgestellte Geometrie - Aufforderung für eine Umwälzung der Wissenschaft

Am 12. Februar 1826 hielt Lobatschewski vor der Physikalisch-mathematischen Fakultät der Kasaner Universität einen Vortrag und stellte eine in französischer Sprache geschriebene Arbeit vor:

"Exposition succincte des principes de la geometrie avec une demonstration rigoureuse du theoreme des paralleles."

In einem Begleitbrief schrieb er dazu:

"Ich möchte die Meinung meiner Kollegen darüber erfahren. Wenn diese Meinung positiv ist, so bitte ich ergebenst, dass die von mir vorgestellte Arbeit in die Zusammenstellung der wissenschaftlichen Schriften der Physikalisch-mathematischen Fakultät aufgenommen wird."

Der Sekretär der Fakultät fügte diesem Schreiben später hinzu:

"Es wurde beschlossen, die Arbeit den Professoren Simonow und Kupfer und Adjunkt Braschman zur Begutachtung vorzulegen, die ihre Meinung dann der Fakultät mitzuteilen haben."

Weiter unten heißt es in einer weiteren Anmerkung:

"Diese Sache wird auf Beschluss der Fakultät vom 13. Juli 1834 zur Aufbewahrung ins Archiv gegeben."

Es war tatsächlich so, dass keiner der Wissenschaftler, die damit beauftragt worden waren, sich eine Meinung über den wissenschaftlichen Gehalt der Arbeit von Lobatschewski zu bilden, dieses vermochte.

Da keine Meinungen eingingen, musste man - wohl oder übel - diese Arbeit ins Archiv geben.

Die erste schriftliche Darstellung der Entdeckung Lobatschewskis erschien in einem Artikel, der im Jahre 1829 von der Universitätszeitschrift "Kasaner Bote" veröffentlicht wurde und der die Überschrift trug "Über die Anfangsgründe der Geometrie".

Diese Arbeit enthält die wichtigsten Teile seines Vortrages vom 12. Februar 1826.

Eine neue Darstellung seiner nicht-euklidischen Geometrie veröffentlichte er im Jahre 1835 unter dem Titel "Vorgestellte Geometrie" in Buchform (Abb. 6).

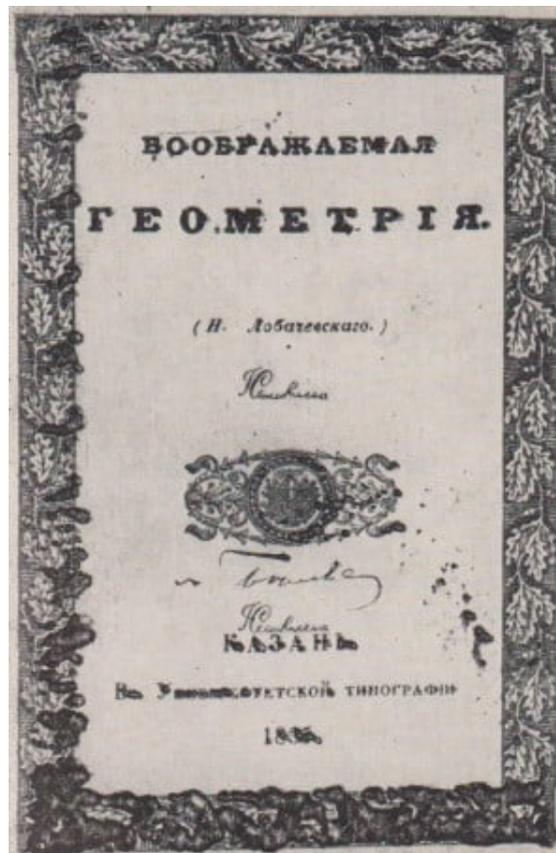


Abb. 6. Titelblatt der "Vorgestellten Geometrie", die 1835 in Kasan erschien.

Sie enthielt eine analytische Darstellung der Resultate aus den "Anfangsgründen". Von dieser "Vorgestellten Geometrie" erschien im Jahre 1837 eine französische Übersetzung in Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik. Zwischen 1835 und 1838 erschien in den "Wissenschaftlichen Schriften der Kasaner Universität", einer Zeitschrift, die im Jahre 1834 von Lobatschewski gegründet worden war und die den "Kasaner Boten" ersetzte, der 1832 sein Erscheinen eingestellt hatte, eine ausführliche Darstellung der nicht-euklidischen Geometrie, der Lobatschewski den Titel gab "Neue Anfangsgründe der Geometrie mit einer vollständigen Theorie der Parallellinien."

Die erste deutschsprachige Darstellung lag schließlich im Jahre 1840 mit dem Buch "Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien" vor (Abb. 7).

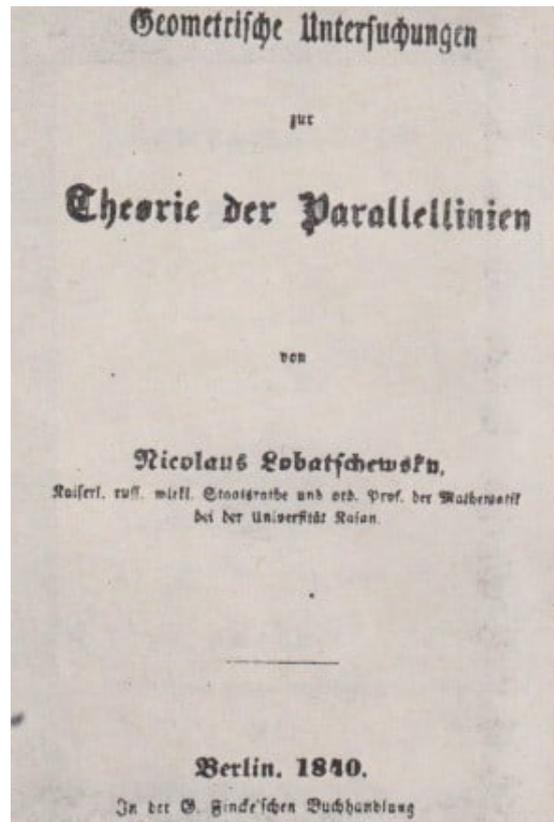


Abb.7. Titelseite der "Geometrischen Untersuchungen", die 1840 in deutscher Sprache in Berlin erschienen

Lobatschewski schreibt in seinen "Anfangsgründen" einleitend:

"In der Tat, wer wird nicht zugestehen, dass keine mathematische Wissenschaft mit so dunklen Begriffen begonnen werden darf, wie die sind, mit denen wir, nach Euklids Vorbilde, die Geometrie beginnen, und dass nirgends in der Mathematik ein solcher Mangel an Strenge geduldet werden darf, wie man ihn in der Theorie der Parallellinien hat zulassen müssen? ...

Ich beabsichtige hier auseinanderzusetzen, auf welche Weise ich diese Lücken in der Geometrie auszufüllen gedenke."

Den § 1 dieser Arbeit beginnt er mit folgenden Worten:

"Die ersten Begriffe, mit denen eine Wissenschaft, welche es auch sei, beginnt, müssen klar und auf die kleinste Zahl zurückgeführt sein. Nur dann können sie für das Lehrgebäude eine feste und genügende Grundlage bilden. Begriffe dieser Art werden durch die Sinne erworben; auf angeborene darf man sich nicht verlassen."

Lobatschewski setzte bei seinen Überlegungen voraus, dass man durch einen außerhalb einer Geraden liegenden Punkt zu dieser Geraden in der Ebene nicht weniger als zwei verschiedene Geraden legen kann, die sich mit der gegebenen Geraden nicht schneiden (vgl. Abb. 4).

Aus dieser Annahme, die auf den ersten Blick völlig sinnlos erscheint, zog Lobatschewski weitere Schlüsse. Das Erstaunlichste dabei war, dass er auf keinerlei Widersprüche stieß. Er erhielt schließlich auf diesem Wege ein harmonisches und logisches geometrisches System.

Lobatschewski nannte seine Geometrie eine "vorgestellte" Geometrie, und zwar in Analogie zu

den imaginären Zahlen, die damals auch "vorgestellte" Zahlen hießen.

Diese Überlegungen, die von Lobatschewski unabhängig von Bolyai und von Gauß angestellt wurden, stellen eine Verallgemeinerung der euklidischen Geometrie dar (hyperbolische nicht-euklidische Geometrie).

Wie sich später zeigte, gibt es auch die von Riemann entwickelte elliptische nichteuklidische Geometrie, die die euklidische Geometrie als Grenzfall enthält.

Die "vorgestellte" Geometrie Lobatschewskis unterscheidet sich tatsächlich von der bisher üblichen euklidischen Geometrie. So ist zum Beispiel die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks in dieser "vorgestellten" Geometrie stets kleiner als 180° bzw. (im Bogenmaß) kleiner als π . Die Differenz zwischen π und der Summe der Innenwinkel eines Dreiecks der Lobatschewskischen Geometrie ist stets positiv und wird als Defekt dieses Dreiecks bezeichnet (Abb. 8).

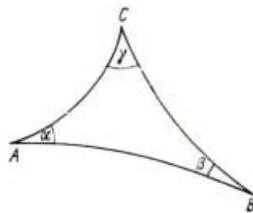


Abb. 8. $\Delta = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$

Eine weitere Besonderheit besteht darin, dass die Menge aller Punkte einer Ebene, die gleich weit von einer in dieser Ebene gegebenen Geraden, der sogenannten Basis, entfernt sind, keineswegs eine Gerade ist, sondern eine besondere Linie, die sogenannte Äquidistante (Abb. 9a).

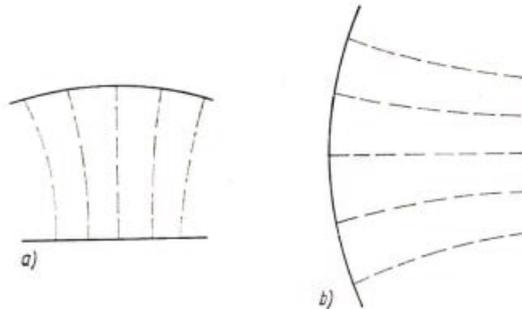


Abb. 9.

Ferner kann man in der Lobatschewskischen Geometrie durch drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, entweder einen Kreis, oder eine Äquidistante oder ein Orizykel, eine Grenzlinie zwischen Gerade und Kreis, legen (Abb. 9b).

Durch einen Punkt, der im Inneren eines Winkels liegt, lässt sich in der von Lobatschewski konstruierten Geometrie nicht immer eine Gerade legen, die die beiden Schenkel dieses Winkels schneidet (Abb. 10).

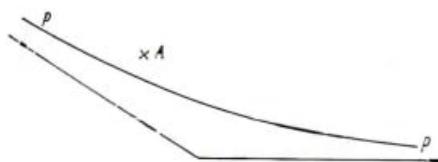


Abb. 10.

Außerdem möchten wir noch darauf hinweisen, dass in dieser "vorgestellten" Geometrie keine ähnlichen Vielecke existieren, die nicht auch gleichzeitig kongruent zueinander sind. Es gilt der folgende Satz:

Sind die drei Innenwinkel eines Dreiecks mit den drei entsprechenden Innenwinkeln eines anderen Dreiecks gleich, dann sind beide Dreiecke kongruent.

Lobatschewski untersuchte auch die Geometrie des Raumes. Wenn man einen Kreis, ein Orizykel und eine Äquidistante jeweils um eine dazu senkrechte Gerade dreht, so erhält man im ersten Fall eine Sphäre, im zweiten Fall eine Orisphäre, d. h. eine sogenannte Grenzkugel, und im dritten Fall eine äquidistante Oberfläche, d. h. den geometrischen Ort aller Punkte, die gleich weit von der gegebenen Ebene entfernt sind.

Es zeigt sich, dass die Geometrie auf einer Sphäre mit der Geometrie auf einer euklidischen Kugel übereinstimmt, die Geometrie auf einer Orisphäre mit der Geometrie einer euklidischen Ebene zusammenfällt und dass die Geometrie auf jeder der beiden Seiten einer äquidistanten Oberfläche von dem gleichen Typ ist wie die Geometrie in der Lobatschewskischen Ebene.

Lobatschewski fand für ebene Dreiecke in der von ihm entdeckten Geometrie trigonometrische Beziehungen und konnte zeigen, dass diese Beziehungen aus den gewöhnlichen Formeln der sphärischen Trigonometrie erhalten werden können, wenn man die Seitenlängen der Dreiecke als rein-imaginäre Größen betrachtet bzw. - was dazu gleichwertig ist - wenn man den Radius der Kugel als rein-imaginäre Größe annimmt.

In dieser Tatsache sah Lobatschewski die Widerspruchsfreiheit der von ihm entdeckten Geometrie.

Hier muss jedoch angemerkt werden, dass Lobatschewski keinen echten Beweis für die Widerspruchsfreiheit der von ihm entwickelten Geometrie besaß. Gauß und Bolyai besaßen diesen Beweis ebenfalls nicht.

W. F. Kagan bemerkt dazu, dass sie ihm alle sehr nahe waren. Durch die Angabe des projektiven Modells der nichteuklidischen Geometrie durch F. Klein im Jahre 1871 konnte schließlich das Problem der Widerspruchsfreiheit dieser Geometrie auf die Widerspruchsfreiheit der projektiven Geometrie zurückgeführt werden.

In der Geometrie Lobatschewskis gibt es auch Eigenschaften, die den Eigenschaften der sphärischen Geometrie analog sind, so lässt sich zum Beispiel der Flächeninhalt eines Dreiecks in der Lobatschewskischen Ebene durch seine Winkel (im Bogenmaß) mit Hilfe einer Formel ausdrücken, die der Formel

$$S = r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

für sphärische Dreiecke entspricht, wenn man den Radius der Kugel als rein-imaginäre Größe annimmt.

Dazu muss man noch bemerken, dass, obwohl in der sphärischen Geometrie einer Kugel im euklidischen Raum Formeln gelten, die eine gewisse Ähnlichkeit zu den in der (elliptischen) nichteuklidischen Geometrie geltenden Formeln besitzen, diese beiden Geometrien zunächst nichts miteinander zu tun haben. Man erhält jedoch ein Modell dieser nichteuklidischen Geometrie aus der sphärischen Geometrie, wenn man die Großkreise der Kugel als "Geraden" und die Durchmesser der Kugel als "Punkte" interpretiert und wenn man die Inzidenz so festlegt, dass ein "Punkt" auf einer "Geraden" genau dann liegt, wenn der Durchmesser der Kugel zugleich auch Durchmesser des Großkreises (im euklidischen Sinne) ist.

Es zeigte sich, dass man die euklidische Geometrie entweder als Grenzfall der sphärischen Geometrie oder als Grenzfall der Geometrie Lobatschewskis auffassen kann.

Lobatschewski hob in der Folgezeit durch die Bezeichnungen "Pangeometrie" und "allgemeine Geometrie", die er seiner Entdeckung in der letzten Arbeit aus dem Jahre 1855 gab, den allgemeineren Charakter seiner Geometrie hervor.

Nachdem er die Grundlagen für seine neue Geometrie geschaffen und trigonometrische Beziehungen für die Dreiecke dieser Geometrie aufgestellt hatte, führte er Koordinaten ein und löste eine große Anzahl von Aufgaben aus der analytischen Geometrie und von Aufgaben zum Berechnen von Flächeninhalten und Umfängen.

Er berechnete mit ihrer Hilfe auch erstmalig einige Integrale, darunter das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\pi} \ln \cos x dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2$$

das später als Lobatschewski-Integral bezeichnet wurde.

Lobatschewski legte sich auch die Frage vor, welche Geometrie im realen Raum existiert. Um diese Frage beantworten zu können, berechnete er die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks, dessen Eckpunkte die Erde, die Sonne und der Sirius - als einer von den "bewegungslosen" Sternen - waren.

Nach seinen Berechnungen beträgt der Defekt dieses Dreiecks 0,0000037 Winkelsekunden. Diese Größe lässt sich nicht mit Hilfe von Messinstrumenten messen; selbst heute noch nicht, obwohl sich gerade in den letzten anderthalb Jahrhunderten die Messtechnik gewaltig entwickelt hat.

Aus diesem Ergebnis schlussfolgerte Lobatschewski, dass man die Geometrie der uns umgebenden Welt bereits in erster Näherung als euklidische Geometrie auffassen kann. Er hoffte jedoch, dass man bei der Untersuchung von kosmischen Dreiecken größeren Ausmaßes den Defekt eines Dreiecks wird bestimmen und messen können.

4 Rektor der Universität Kasan

4.1 „Das Sonnenlicht ist ein schwacher Abglanz des Angesichts Gottes“

Im Jahre 1805 fand de jure die Eröffnung der Kasaner Universität statt. Faktisch war das aber lediglich eine gewisse Erweiterung des bestehenden Gymnasiums. Jakowkin, der bisherige Direktor des Gymnasiums, wurde zum Professor und zum Inspektor der Studenten ernannt. Mit ihm gingen noch einige andere Lehrkräfte vom Gymnasium an die Universität (vgl. unter 2.2.).

Die neuen Titel allein garantierten aber noch kein Universitätsniveau. Auch im folgenden Jahr 1806, als an der "Universität" bereits vierzehn Lehrkräfte tätig waren, gelang es noch nicht, ein normales Universitätsleben und eine Universitätsausbildung mit hohem Niveau zu organisieren. Dieser Zustand änderte sich erst durch die Berufung einiger ausländischer Wissenschaftler an die Kasaner Universität (vgl. ebenfalls unter 2.2.). Dadurch veränderte sich die Situation grundlegend. Engel schreibt darüber:

"Jedenfalls war vom Jahre 1810 ab die Physikalisch-mathematische Fakultät der Universität Kasan mit Lehrkräften so gut versorgt, wie damals kaum eine deutsche Universität."

Infolge der ungünstigen Zustände im gesamten russischen Bildungssystem der damaligen Zeit, die auch zur Folge hatten, dass manche der ausländischen Professoren die Universität bald wieder verließen, verschlechterten sich nach einigen Jahren die Arbeitsbedingungen an der Universität sehr stark.

Im Jahre 1819 beauftragte der damalige Minister für kirchliche Angelegenheiten und Bildung, Fürst Golizyn, den äußerst reaktionären M. L. Magnizki mit einer Revision der Tätigkeit des Kasaner Universität. In der Universitätsbibliothek fand dieser Revisor Werke von Diderot, Voltaire, Rousseau und anderen Vertretern der Aufklärung, aber keine Bibel. Darüber war er schrecklich erzürnt.

Er hielt das ständige Erinnern an die Weisheit, Allwissenheit und Allmächtigkeit Gottes für die wichtigste Aufgabe im Unterricht. Magnizki meinte, dass die Universität strenggläubige Beamte und keine Philosophen und Freidenker ausbilden muss.

Er schlug sogar vor, die Universität zu schließen, weil in ihr ein unzulässiger "Voltaireismus" gedeihe und weil sie eine Brutstätte von revolutionären Gedanken und von Gottlosigkeit sei. Dieser Vorschlag war aber selbst dem ebenfalls reaktionär eingestellten Minister zu viel.

Vor seiner Abreise nach Petersburg erteilte Magnizki in Kasan ausführliche Instruktionen. So ordnete er an, dass über dem Haupteingang der Universität ein Kreuz mit der Inschrift "In Deinem Lichte erblicken wir die Wahrheit" anzubringen sei. Außerdem sollte auch eine Medaille mit diesem Text geprägt werden.

Lobatschewski erhielt auch schriftliche Instruktionen. Als Physiklehrer wurde er verpflichtet, "auf die Allwissenheit Gottes und auf die Beschränktheit unserer Sinne und Geräte für das Erkennen der uns umgebenden Wunder hinzuweisen". In der Astronomieausbildung sollte er "mit flammenden Worten auf die Unveränderlichkeit der Weisheit des Schöpfers und der Gesetze für die Himmelskörper hinweisen".

Es ist jedoch schwierig, mathematische und physikalische Formeln mit Gott in Einklang zu bringen. Lobatschewski hielt es auch nicht für erforderlich, diesen Instruktionen nachzukom-

men.

Bedeutend schlechter hatten es dagegen die Lehrkräfte für Medizin: Magnizki verbot die Untersuchungen des menschlichen Körpers und ordnete an, dass die Skelette, die bei den Anatomievorlesungen benutzt worden waren, feierlich zu beerdigen seien, mit einer Totenmesse und unter Teilnahme von Geistlichen. Ferner wurde die Benutzung von menschlichen Knochen und Skeletten zu Lehrzwecken verboten.

Im selben Jahr 1819 wurde Magnizki zum Kurator des Kasaner Schulbezirks ernannt. Damit war er faktisch unumschränkter Herrscher in der Universität. Durch einen Erlass des Ministers Golizyn, der vom Zar gebilligt worden war, wurde an der Kasaner Universität der "Unterricht in göttlicher Erkenntnis und Christenlehre" eingeführt. Neun fortschrittliche Professoren wurden von der Universität vertrieben.

Einige der verbleibenden Lehrkräfte standen fest auf den Positionen der göttlichen Erschaffung der Welt und sprachen darüber auch in ihren Vorlesungen. So steht zum Beispiel in einem Vorlesungsmanuskript aus der damaligen Zeit:

"... Aus der heiligen Schrift geht hervor, dass das Sonnenlicht ein schwacher Abglanz des Angesichts Gottes ist. Wie es sich ausbreitet, ob durch Wellen oder auf andere Art, darüber sagt die heilige Schrift nichts aus. In Übereinstimmung mit der heiligen Schrift stellen wir uns das Licht als ein Organ vor, durch das der Herr, der unerreichbar ist, seinen Geist auf die Erde schickt."

Der Mathematikprofessor Nikolski lehrte seinen Studenten:

"So wie die Zahlen nicht ohne Einsen existieren können, so kann die Welt auch nicht ohne Schöpfer existieren."

Über dem Katheder des Professors für russische Literatur Gorodtschaninow hing die Inschrift "Die Literatur ist ein Organ des Verstandes; der Verstand ist die Literatur der Seele; die Seele, vernünftig und unsterblich, ist ein kostbarer Funken der Gottheit."

Ein Verbot folgte nach dem anderen. Magnizki annullierte den Unterricht in neuester Geschichte. Die praktischen Übungen in russischer Literatur sollten an Hand der Bibel und der Psalmen durchgeführt werden.

Das Studium der Mythologie wurde verboten, da die Mythologie ein Fach sei, "das dem Christentum widerspricht". Die Beschäftigung mit der Geologie wurde ebenfalls verboten, da die Geologie eine Wissenschaft sei, "die der heiligen Schrift widerspricht". Das Beziehen ausländischer Zeitschriften war ebenfalls verboten ...

Magnizki erreichte durch die sieben Jahre seiner "Leitung" des Schulbezirks den Niedergang der Kasaner Universität. Er wurde erst im Jahre 1826 als Kurator des Kasaner Schulbezirks abgelöst.

Neuer Kurator wurde M. N. Mussin-Puschkin, ein sehr anständiger und bedeutender Mann, der viel für die Entwicklung und für das Aufblühen der Kasaner Universität getan hat.

Im Jahre 1827 wurde Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski zum Rektor der Universität gewählt. Dieses Amt bekleidete er fast zwanzig Jahre ohne Unterbrechung.

4.2 Ansichten zu Erziehungsfragen

Lobatschewski war der Ansicht, dass Schule und Universität den jungen Menschen Wissen und bestimmte moralische Grundsätze vermitteln und sie zu nützlichen und lebensfrohen Mitglie-

dern der Gesellschaft machen müssen.

Am 17. Juli 1828, ein Jahr nach seiner Wahl zum Rektor der Kasaner Universität, hielt er auf der Immatrikulationsfeier seine berühmt gewordene Rede "Über die wichtigsten Fragen der Erziehung".

Lobatschewski sagte in dieser Rede u. a. folgendes:

"In die Erziehung, in diese wichtige Sache, beziehen meine Gedanken erste Grundlagen der Sittlichkeit mit ein; sie können dabei auf Regeln verweisen, die der Lehrer unbedingt befolgen sollte. Die Erziehung nimmt in der Wiege ihren Anfang; zuerst wird sie durch die bloße Nachahmung erworben, allmählich entwickeln sich Verstand, Gedächtnis, Vorstellungskraft, Geschmack für das Schöne, es erwacht die Liebe zu sich selbst und zum Nächsten, das Ehrgefühl, der Wunsch, das Leben zu genießen... und der Mensch, als wäre er von neuem geboren, wird immer vollkommener ...

Die Weisheit wird dem Menschen nicht mit in die Wiege gelegt, sie wird durch Lernen erworben."

Lobatschewski wandte sich scharf gegen scholastische und spekulative Überlegungen und erhob die Praxis und die Natur zum Kriterium der Wahrheit.

Er führte in seiner Rede weiter aus:

"Bemüht Euch nicht vergebens, aus einer Einsicht die ganze Wahrheit zu folgern. Befragt die Natur, sie enthält alle Wahrheiten. Auf Eure Fragen wird sie Euch unbedingt und befriedigend Antwort geben...

Die Jugend, die an dieser Einrichtung immatrikuliert wird, wird nicht leere Worte hören, ohne jeglichen Sinn. Hier wird das gelehrt, was wirklich existiert, und nicht das, was von einem untätigen Verstand erfunden worden ist. Hier sind die Fächer unter den Lehrkräften so verteilt, dass jeder das lehrt, womit er sich sein ganzes Leben lang beschäftigt.

Wer seine Kinder zum Nutzen des Staates bilden will, der muss sie in den staatlichen Lehranstalten bilden lassen..."

Lobatschewski war der Ansicht, dass Müßiggang den menschlichen Verstand verdirbt. Eine wichtige Aufgabe der Pädagogen sah er im Herausfinden und im Erziehen von Genies, Er sagte dazu:

"Darin besteht die Kunst der Erzieher: ein Genie zu entdecken und es mit Erkenntnissen auszustatten."

Damals lernte man in den Schulen und auch an den Universitäten nur solche Dinge, die bereits untersucht und bekannt waren, die sich herauskristallisiert und gefestigt hatten.

Erst kürzlich entdeckte Fakten bzw. neue Entwicklungstendenzen hielt man dagegen nicht für geeignet, dass sie zum Gegenstand des allgemeinen Unterrichts gemacht wurden.

"Aber die Wissenschaft kann nicht auf der Stelle treten. Es ist unmöglich, über Jahrzehnte hinweg immer wieder dieselben Tatsachen zu wiederholen, als ob sie stets unwidersprochen und ewig seien. Mit der Entwicklung und der Erneuerung der Wissenschaft muss auch die Bildung weiterentwickelt und erneuert werden, und zwar sowohl inhaltlich als auch methodisch,"

sagte Lobatschewski. Er schloss seine Rede mit den Worten:

"Ihr seid glücklicher als ich, da Ihr später geboren wurdet. Jeder Staat durchläuft drei Stufen seiner Entwicklung: das Kindesalter, er wird erwachsen und schließlich alt. So wird es auch mit unserem geliebten Vaterlande sein ... Die glücklichsten Tage Russlands kommen noch!"

4.3 Rektor und Erzieher

Nach Aussagen von Zeitgenossen "verehrten ausnahmslos alle Studenten den Rektor. Die Mathematikstudenten schauten zu ihm empor. Ein tiefgründiger Verstand, umfassende Kenntnisse, eine weite Lebensauffassung, eine unerschütterliche Logik und eine ungewöhnliche Fähigkeit zum einfachen, klaren und mitreißenden Sprechen, ein edelmütiger Charakter, ein delikates und aufmerksames Verhältnis zur Jugend, die Treue zur Wissenschaft und zur Universität - all das gab ihm die Möglichkeit, seine Umgebung zu überragen und als unerschöpflicher Gegenstand für Studentengespräche zu dienen."

Lobatschewski unterhielt sich gern mit begabten Studenten. Er interessierte sich für deren Neigungen, stellte Fragen und gab Ratschläge - auch dann, wenn die Studenten die Disziplin und die in der Universität geltenden Regeln verletzt hatten.

Er erinnerte sich gut an seine eigene Studentenzeit, als er durch die Lebhaftigkeit seines Charakters und durch die überschäumende Energie die Verwaltung der Universität außer sich brachte (vgl. unter 2.2.).

Wenn ein Student, der sich etwas hatte zuschulden kommen lassen, zu Lobatschewski "zu einem Gespräch" kommen musste, gelang es dem Rektor gewöhnlich, diesen Studenten "selbständig" zu der Einsicht von der Unwürdigkeit ähnlicher Handlungen zu bringen, ihn sein Verhalten "selbst" verurteilen zu lassen und ihn zu dem Versprechen zu bewegen, sich von nun an vernünftiger zu führen.

So wird zum Beispiel berichtet, dass der überaus begabte Student Chlebnikow, der aber gleichzeitig ein großer Bacchus-Jünger war und der sich manchmal bis zur Bewusstlosigkeit betrank, nach einer längeren Unterhaltung mit Lobatschewski diesem sein Ehrenwort gab, in Zukunft nicht mehr zu trinken, was er in der Folgezeit auch hielt.

Lobatschewski liebte keine faulen und gewissenlosen Studenten.

Er war der Auffassung, dass man schwache und schlechte Studenten an den ersten Worten erkennen könne und dass es unnütz sei, sie mit vergeblichen Fragen zu quälen.

Aus dem Bericht eines Zeitgenossen wird noch eine andere Seite der Persönlichkeit Lobatschewskis deutlich:

"Sokratische Methoden halfen Lobatschewski auch beim Schlichten von Streiten im Rat der Universität. Als er feststellte, dass es nicht gelingen würde, für eine in einer offiziellen Ratsitzung erörterte Frage Stimmenmehrheit zu erhalten, kündigte er eine Pause an und schlug vor, für diese Zeit in seine Universitätswohnung zu gehen. Dort wurden dann bei einem Becher guten Punsch des gastfreundlichen Rektors alle Zweifel glücklich beseitigt.

Nur in seltenen Ausnahmefällen nahm Lobatschewski zu Druckmitteln Zuflucht, indem er zum Beispiel erklärte, dass das der Wunsch des Kurators sei - und der Streit hörte sofort auf.

Mancher meinte, dass Lobatschewski dem Kurator einen notwendigen Beschluss vorher souffliert hatte, wobei er sich jedoch ausschließlich von den Interessen der Universität leiten ließ, Es war damals eine Redensart im Umlauf: "Mussin-Puschkin ist die Kanone¹¹ und womit sie Lobatschewski auch lädt, das trifft sie auch."

¹¹Hier wird auf den Namen des Kurators angespielt. "Kanone" heißt im Russischen "puschka".

4.4 Kampf mit der Cholera

Im heißen Sommer des Jahres 1830 näherte sich Kasan eine Choleraepidemie. Man hatte kaum etwas von ihr gehört, da verließen bereits viele Einwohner die Stadt. Die Zurückgebliebenen versorgten sich mit den notwendigen Waren und waren darauf bedacht, nicht mehr vor die Haustür zu gehen.

Die Gefahr war bereits nahe. Die ersten Krankheitsfälle kamen auch Lobatschewski zu Ohren. Für die Universität ordnete er sofort folgendes an:

- das Verschließen bestimmter Türen;
- das Bewachen der Zäune;
- am Haupteingang das Aufstellen einer Wache und eines Diensthabenden; Briefe und Sachen, die der Diensthabende annahm, mussten mit Chlor besprüht oder in Chlorkalklösung gewaschen werden;
- das Besorgen von Chlor und Chlorkalk durch die Chemiker.

Danach begab sich Lobatschewski zum Gouverneur, Baron Pirch. Der von ihm vorgelegte ausführliche Plan zur Bekämpfung der heraufziehenden Gefahr fand beim Gouverneur kein Gehör.

Der daraufhin eilig einberufene Rat der Universität übertrug dem Rektor alle Vollmachten. Lobatschewski verhängte über die Universität eine Quarantäne. Die Studenten, die Lehrkräfte und die Angestellten zogen alle auf das Territorium der Universität um. Während der sechswöchigen Quarantäne lebten auf dem Universitätsgelände 560 Personen.

Trotz aller getroffenen Vorsichtsmaßnahmen erkrankten und starben in den ersten vier Tagen zwölf Menschen. Auf Weisung des Rektors wurden die Leichen der Verstorbenen mit Chlorkalk übergossen und die Kleidung, das Bett und andere persönliche Sachen unverzüglich verbrannt. Am fünften Tag hörten die Erkrankungen auf. Das Beschaffen und das Chlorieren des Wassers beaufsichtigte Lobatschewski selbst.

Obwohl die Cholera in der Stadt fast die Hälfte der Bevölkerung dahinraffte, gab es unter den 560 Menschen, die auf dem Territorium der Universität lebten, nur insgesamt 40 Cholerafälle, von denen insgesamt 16 tödlich verliefen.

Die Vorlesungen konnten erst Ende November wieder aufgenommen werden. In der Presse erschien die folgende Notiz:

"Dem Herrn Rektor der Universität wurde für den gezeigten Eifer beim Schutz vor der Cholera das allerhöchste Wohlwollen Seiner Kaiserlichen Hoheit übermittelt."

4.5 Familienangelegenheiten

Im Oktober 1832 heiratete N. I. Lobatschewski die 19jährige Warwara Aleksejewna Moissejewa, die Tochter eines reichen Gutsbesitzers. Als Mitgift erhielt die junge Frau einige Dörfer mit zahlreichen leibeigenen Bauern und in Kasan selbst ein dreigeschossiges steinernes Haus, obwohl das Eigentum der Eheleute nach dem Heiratsvertrag als getrennt betrachtet wurde, lässt sich feststellen, dass sich für Lobatschewski die materiellen Lebensbedingungen wesentlich verbessert hatten.

Sein ehemaliger Lehrer, Professor Littrow, der inzwischen Direktor des Wiener Observatoriums geworden war, schrieb damals an seinen Kollegen I. M. Simonow, der nun an der Kasaner Universität die Professur für Astronomie innehatte und der als guter Freund Lobatschewskis

galt:

"Tausend Grüße an Herrn Professor Lobatschewski. Ich gratuliere ihm aus vollem Herzen zu seiner Heirat. Aber das kommt etwas spät: Ihm wird es schwerfallen, Sie auf diesem Wege einzuholen, wo Sie bereits drei Kinder haben."

Littrow dürfte, mit seiner Sorge nur schwerlich recht behalten haben: Lobatschewski hatte insgesamt 15 Kinder, manche Quellen sprechen von 18.

M. N. Mussin-Puschkin, der Kurator der Kasaner Universität, war ein Vetter der Frau von Lobatschewski. Durch seine Hochzeit war also der Rektor der Universität ein Verwandter des Kurators des Kasaner Schulbezirks geworden. Dadurch wurden die freundschaftlichen Bande zwischen Lobatschewski und Mussin-Puschkin noch weiter vertieft; die dienstlichen Beziehungen vereinfachten sich.

Ein großer Teil des Briefwechsels zwischen Lobatschewski und Mussin-Puschkin ist erhalten geblieben. In diesen Briefen finden sich neben den offiziellen Mitteilungen des Rektors an den Kurator und den Weisungen des Kurators an den Rektor immer wieder auch zahlreiche freundschaftliche Ratschläge, Wünsche und Grüße an Freunde und Verwandte. Als Beispiele sollen dafür zwei Briefe auszugsweise angeführt werden. Zunächst ein Brief Lobatschewskis von 3. Januar 1829, also noch einige Jahre vor der erwähnten Heirat:

"Gnädiger Herr Michail Nikolajewitsch!

Im Auftrage des Rates der Universität habe ich die Ehre, Sie zum Neuen Jahr zu beglückwünschen und Ihnen unsere Dankbarkeit... für Ihr Wohlwollen mir gegenüber auszudrücken...

Ich wünschte alles so ausführen zu können, anstatt Ihrer Nachsichtigkeit verpflichtet zu sein, die meine Arbeit begünstigt.

Ich schicke Ihnen die Zeichnung für eine Kirchentür und denke, dass man - bis auf das Glas - die ganze Bronze und das Schnitzwerk für die beiden Seiten in Sankt Petersburg bestellen sollte. Ich glaube, dass es egal ist, ob die Verzierungen aus Eichenholz oder aus anderem Holz angefertigt werden...

Surowzow ist am 28. Dezember nach Stawropol und Sergejew ist gestern nach Moskau gefahren. Weiter ist bei uns nichts vorgefallen und alles ist in Ordnung.

Der Lehrer Petrowski bittet um seine Entlassung. Nachdem Studenten in meinem Beisein geäußert haben, dass sie in seinem Unterricht keine Schwierigkeiten hatten und alles gut begriffen haben, denke ich, dass man es Petrowski erlauben sollte, nach Witebsk zurückzukehren...

Der Vater des Studenten Jefebowski bittet darum, seinen Sohn am Kasaner Gymnasium anzustellen ...

Das Weihnachtsfest verbrachten die Studenten gut. Ich ordnete an, dass bis zum Wiederbeginn des Studiums die Zimmer und die Hörsäle in Ordnung zu bringen sind und dass der Fußboden zu wischen und zu reinigen ist.

Ich habe die Ehre, meine grenzenlose Hochachtung und vollkommene Ergebenheit vor Ihnen, mein sehr geehrter Herr, auszudrücken als Ihr ergebener Diener Nikolai Lobatschewski"

Es folgt der Antwortbrief von Mussin-Puschkin:

"Herr Rektor!

Ihren Brief vom 3. Januar 1829 habe ich mit Vergnügen erhalten. Ich bin Ihnen aufrichtig für Ihre Freundschaft dankbar. Glauben Sie bitte, dass sich meine Gefühle für Sie niemals ändern werden.

Die Zeichnung der Kirchentür habe ich erhalten. Ich weiß noch nicht, ob es mir gelingen wird, sie herstellen zu lassen. Wir werden sehen. Die Glassachen für das Physikalische Kabinett habe

ich bestellt...

Über Petrowski erwarte ich eine Vorlage. Beeilen Sie sich nicht mit seiner Entlassung. Überzeugen Sie sich davon, ob die Studenten seine Methode gut verstehen.

Heute schicke ich Ihnen bereits die neue, inzwischen bestätigte Ordnung der Lehranstalten. Offiziell werden Sie sie etwa in zwei Wochen erhalten.

Ich erwarte einen Vorschlag über einen geeigneten Ort für die Errichtung eines Observatoriums

...

Der Herr Minister war zwei Wochen krank. Jetzt geht es ihm schon wieder wesentlich besser und er beginnt wieder, sich mit den verschiedenen Angelegenheiten zu beschäftigen.

Die Einstellung von Jefebowski im Gymnasium wäre nicht gut. Nach der neuen Verordnung würde er 800 Rubel Gehalt erhalten. Dafür kann man bessere Leute bekommen.

Danken Sie bitte Erdman, Simonow und Galkin für deren Briefe. Ich konnte ihnen noch nicht antworten. Übermitteln Sie ihnen bitte meine Grüße.

Ich wünsche, Sie bald vollkommen gesund zu sehen. Ich habe die Ehre, mit den Gefühlen der aufrichtigen Hochachtung, mein sehr geehrter Herr, Ihr ergebener Diener zu sein.

M. Mussin-Puschkin."

Mussin-Puschkin war aus dienstlichen Gründen häufig in Petersburg. Auch diese beiden Briefe gingen zwischen Kasan und Petersburg hin und her. Noch häufiger war jedoch Mussin-Puschkin auf seinem Landgut in Besdna, um sich zu erholen und um auf die Jagd zu gehen.

Lobatschewski hatte dann sowohl in der Universität als auch im gesamten Schulbezirk freie Hand. Es wird von vielen Zeitgenossen immer wieder berichtet, dass er diese Macht nur für einen einzigen Zweck gebrauchte: für Verbesserungen an der Universität und im Rahmen der Volksbildung.

4.6 Rektor und Gelehrter

Lobatschewski war in Kasan ein bekannter, wohlhabender und geachteter Bürger. Er war Staatsrat und Rektor der Universität und hatte Professoren, Lehrkräfte, Angestellte und Studenten unter sich. Er war dabei streng, aber gerecht. Obwohl er niemals schrie, fürchtete man ihn dennoch.

Aus Petersburg kamen jedoch über seine wissenschaftlichen Arbeiten Gutachten, deren Inhalt nicht gerade schmeichelhaft war und die in Kasan auch nicht geheim bleiben konnten.

Seine Begeisterung für die Mathematik kam den führenden Kreisen in Kasan, die man natürlich auf dem Gebiet der Mathematik als unwissend einstufen musste, als Kuriosität und als leere Spielerei vor. War das denn wirklich Wissenschaft? Andererseits muss man aber jedem gestatten, sich für irgend etwas zu begeistern. Soll er sich in seiner Freizeit ruhig der Mathematik widmen. Wenn auch die Bedeutung seiner Entdeckungen gering ist, sie schaden aber auch niemanden ... - so dachte man.

Wie bereits erwähnt, war Lobatschewski als Rektor auch gleichzeitig Leiter der Bibliothek. Außerdem war er Vorsitzender des Baukomitees. In dieser Eigenschaft berief er die besten Architekten der damaligen Zeit nach Kasan, gab sich damit aber nicht zufrieden, sondern beschäftigte sich selbst ernsthaft mit Fragen der Architektur, damit er ein sachkundiges Urteil abgeben konnte.

In den Jahren 1833 bis 1841 entstanden unter seiner Leitung das Observatorium, das Bibliotheksgebäude, das Physikalische Institut, die Anatomie und die Universitätsklinik. Er beschäftigte sich in diesen Jahren mit vielen Kleinigkeiten des Baugeschehens, deckte Betrügereien

bei Kalk- und Sandlieferungen auf und überprüfte eigenhändig die Brauchbarkeit der verschiedenen Baumaterialien.

Zusammen mit Mussin-Puschkin erreichte er auf vielen Gebieten Verbesserungen und eine beträchtliche Einsparung an Baukosten.

Im August 1842 zerstörte eine Feuersbrunst halb Kasan, das damals hauptsächlich aus Holzhäusern bestand. Auch die Universität blieb davon nicht verschont. Das neue Observatorium und einige andere Gebäude fielen den Flammen zum Opfer.

Lobatschewski bewahrte durch sein großes Organisationstalent und durch die von ihm unverzüglich getroffenen und energischen Maßnahmen die Universität auch diesmal vor noch größeren Schäden: viele Universitätsgebäude wurden gerettet, insbesondere die Bibliothek; die Einrichtung des Observatoriums konnte ebenfalls gerettet werden.

In der Folgezeit wurde der Wiederaufbau der zerstörten Universitätsgebäude unter Leitung von Lobatschewski so vorangetrieben, dass im Jahre 1844 alle Schäden beseitigt waren.

Neben seinen Aufgaben als Rektor hatte er an der Universität außer seinen Mathematikvorlesungen immer noch Vorlesungen über theoretische Physik und über Mechanik zu halten. Diese Belastungen verringerten sich erst im Jahre 1833, als E. Knorr als Professor der Physik an die Universität kam und als kurz danach auch die Mechanik von einem anderen Kollegen übernommen wurde.

Um das ganze Aufgabengebiet Lobatschewskis zu umreißen, sei weiter darauf verwiesen, dass er viele Jahre Vorsitzender der Aufnahmekommission war, vor der die künftigen Studenten aller Fachrichtungen ihre Aufnahmeprüfung ablegen mussten, dass er sich sehr um den Gymnasialunterricht kümmerte und dass er im Auftrage des Unterrichtsministeriums mehrfach Revisionen in den Gymnasien verschiedener zum Kasaner Schulbezirk gehörender Gouvernements durchzuführen hatte (so z. B. von Dezember 1835 bis März 1836 im Gouvernement Nishni-Nowgorod und im Jahre 1842 im Gouvernement Pensa).

Im Jahre 1834 wurden von ihm die "Wissenschaftlichen Schriften der Universität Kasan" gegründet, die auch heute noch als wissenschaftliche Zeitschrift der Universität erscheinen. Diese Seiten der Tätigkeit Lobatschewskis fanden damals durchaus die gebührende Anerkennung. Im Jahre 1833 erhielt er einen Brillantenring als Zarengeschenk und den Stanislaw-Orden dritter Klasse, nach der Revision im Gouvernement Nishni-Nowgorod wurde ihm der Annen-Orden zweiter Klasse verliehen, für seine Tätigkeiten und Initiativen zur Rettung der Universität vor der Feuersbrunst im Jahre 1842 erhielt er den Wladimir-Orden dritter Klasse.

Im Jahre 1827 wurde an Lobatschewski und seine Nachkommen der Adelstitel verliehen. Er erhielt ein Wappen, auf dem ein aus zwei goldenen Dreiecken bestehender sechseckiger Stern und eine nach oben fliegende Biene dargestellt sind ... Auf einem blauen Feld befindet sich ein Pfeil und darunter ein Hufeisen ... Das Wappen wird abgeschlossen durch einen Adelshelm und eine Krone mit drei Straußenfedern ... (Aus der Verleihungsurkunde des Zaren).

Die im Wappen enthaltenen Symbole waren als Verkörperung der Weisheit, der Arbeitsliebe, der Schnelligkeit und des Glücks aufzufassen.

Bald nach dieser Verleihung des Adelstitels wurde Lobatschewski auch zum ordentlichen Staatsrat ernannt, was damals dem Range eines Generalmajors gleichkam.

Lobatschewski war ein vorzüglicher Lehrer, ein guter Methodiker. Er hielt fast jeden Vormittag zwei zweistündige Vorlesungen. Professor A. F. Popow, sein Schüler und sein späterer Nachfolger als Leiter des Mathematik-Lehrstuhls, erinnert sich:

"Im Hörsaal bemühte er sich um große Klarheit in seinen Darlegungen dadurch, dass er Aufgaben zunächst mit der synthetischen Methode löste und erst danach allgemeine Sätze mit der analytischen Methode bewies. Er kümmerte sich wenig um den Mechanismus des Rechnens, sondern weitaus mehr um Klarheit in den Begriffen.

Er liebte es besonders, nach eigenen Gedanken zu unterrichten, anstatt Lehrbüchern zu folgen. Seine Hörer sollten sich selbständig mit der Literatur beschäftigen."

Professor Laptew schreibt zu diesem Thema in seiner Biographie:

"Eine mechanische Aneignung des Stoffs durch die Studenten wurde von Lobatschewski nicht gebilligt, er forderte eine hohe Genauigkeit im Ausdruck und legte auf die Fähigkeit zum selbständigen Überlegen besonderen Wert.

Sein methodologisches Herangehen und seine pädagogischen Auffassungen fanden keine offizielle Billigung und blieben den Lehrkräften für Mathematik und Naturwissenschaften an den anderen Universitäten unbekannt. An der Kasaner Universität wirkten sie sich aber nicht nur auf den Verlauf des Unterrichts der anderen Kollegen im Verlaufe der langjährigen eigenen pädagogischen Arbeit Lobatschewskis praktisch aus, sondern auch noch später."

Es sei dazu noch angemerkt, dass an der Kasaner Universität viele jüngere Lehrkräfte ihre Vorlesungen nach Konspekten Lobatschewskis hielten.

Lobatschewski schenkte der Ausbildung von jungen Nachwuchswissenschaftlern große Aufmerksamkeit. Die befähigsten Studenten wurden an die besten Hochschulen Russlands bzw. des Auslandes zum Studium und zu Praktika geschickt. Die Lehrkräfte und die Studenten unternahmen lange Reisen in die Mongolei, nach China, nach Persien, nach Syrien, nach Ägypten usw. Die Fakultät für die Länder des Ostens wurde zu einem der wichtigsten Zentren der Orientalistik in Russland.

Unter dem zielstrebigem und energischem Rektorat von Lobatschewski veränderte sich das Antlitz der Kasaner Universität vollkommen. Obwohl während des Regimes von Zar Nikolaus I., der von 1825 bis 1855 regierte, eine besonders reaktionäre Politik betrieben wurde, erweiterte und entwickelte sich die Universität.

Das Niveau der Lehrveranstaltungen und der wissenschaftlichen Arbeit, das unter Magnizki einen Tiefpunkt erreicht hatte, stieg gewaltig an, was insbesondere das Gebiet der sogenannten "exakten" Wissenschaften betraf.

Mit Unterstützung des Kurators Mussin-Puschkin gelang es, aus der Universität solche unfähigen Lehrkräfte zu entfernen, die das Sonnenlicht als "einen schwachen Abglanz des Angesichts Gottes" ansahen. Die Kasaner Universität entwickelte sich während des Rektorats von Lobatschewski zu einer erstklassigen Hochschule.

Im Jahre 1840 absolvierte M. W. Ljapunow, der spätere bekannte Astronom und Direktor des Universitätsobservatoriums, die Kasaner Universität. Er war der Vater des russischen Mathematikers und Mechanikers A. M. Ljapunow, der am Anfang einer ganzen Dynastie von Mathematikern steht.

Unter den Absolventen der Kasaner Universität befanden sich auch die Chemiker N. N. Sinin (im Jahre 1833) und A. M. Butlerow (1849). Im Jahre 1854 absolvierte Ilja Nikolajewitsch Uljanow, der Vater von W. I. Lenin, die Universität Kasan.

In den Archiven der Universität findet sich auch ein Antrag des Schriftstellers L. N. Tolstoi auf Zulassung zur Aufnahmeprüfung, der einen Vermerk von Lobatschewski als Rektor trägt.

Im Jahre 1887 schließlich ließ sich Wladimir Iljitsch Uljanow/ Lenin an der Kasaner Universität

als Student einschreiben.¹²

P. S. Aleksandroff würdigte aus der Sicht unserer Tage diese Seiten der Tätigkeit Lobatschewskis wie folgt:

"Lobatschewski war der bedeutendste Mann, den die ruhmreiche zweihundertjährige Geschichte der russischen Universitäten hervorgebracht hat. Auch wenn er keine Zeile über wissenschaftliche Untersuchungen geschrieben hätte, trotzdem müssten wir ihn als einen Menschen in Erinnerung behalten, der dem hohen Rang eines Professors und eines Rektors einer Universität eine derartige inhaltliche Fülle gegeben hat, wie das vor ihm noch keiner, der diesen Titel hatte, vermochte.

Außerdem war aber Lobatschewski auch noch ein genialer Wissenschaftler."

Trotzdem war Lobatschewski mit sich selbst nicht zufrieden. Es bedrückte ihn in besonderem Maße, dass er nicht durch seine wissenschaftlichen Ergebnisse Berühmtheit und Anerkennung erreicht hatte, sondern durch seine Erfolge in der Verwaltungsarbeit.

Seine "vorgestellte" Geometrie war bei seinen Zeitgenossen auf Ablehnung gestoßen. Weder Fuß noch Ostrogradski, die das Wesen dieser Entdeckung nicht verstanden hatten, erkannten den wissenschaftlichen Wert der Untersuchungen von Lobatschewski. So schrieb zum Beispiel M. W. Ostrogradski in seinem Gutachten zu Lobatschewskis Arbeit "Über die Anfangsgründe der Geometrie":

"Der Autor hat sich offenbar das Ziel gestellt, in einer solchen Art und Weise zu schreiben, die niemand verstehen kann. Er hat dieses Ziel erreicht...

Alles, was ich in der Geometrie des Herrn Lobatschewski verstanden habe, ist offensichtlich schlecht dargestellt...

Daraus ziehe ich die Schlussfolgerung, dass das Buch des Herrn Rektor Lobatschewski Fehler enthält, dass es nachlässig dargestellt ist und dass es, schließlich, nicht die Aufmerksamkeit der Akademie verdient."

Zwei Jahre später erschien 1834 in der Petersburger Zeitschrift "Sohn des Vaterlandes" eine höhnische Rezension dieser von Ostrogradski abgelehnten Arbeit Lobatschewskis. Diese Rezension war lediglich mit den Initialen S. S. abgezeichnet.

Sie zeugte ansonsten nur davon, dass auch der Rezensent die Lobatschewskische Arbeit nicht verstanden hatte, was aus heutiger Sicht gar nicht so verwunderlich ist, stellte sie doch an die damaligen Leser sehr hohe Ansprüche.

Lobatschewski zog daraus die einzig richtige Schlussfolgerung: Er musste ein neues Buch schreiben, in dem er seine Geometrie gründlicher und - vor allem - ausführlicher darstellen wollte. So entstanden schließlich die bereits erwähnten "Neuen Anfangsgründe".

Auf die Rezension hatte Lobatschewski eine Entgegnung verfasst, die er an die Redaktion der Zeitschrift "Sohn des Vaterlandes" mit der Bitte um Veröffentlichung schickte. Diese Entgegnung wurde nicht gedruckt.

Der Astronomie-Professor I. M. Simonow, ein Kollege von Lobatschewski, hatte diesem schon wiederholt empfohlen, seine Arbeit im Ausland zu veröffentlichen. So kam im Jahre 1837 die bereits erwähnte Veröffentlichung der "Geometrie imaginaire" in Crelles Journal zustande. Nach weiteren drei Jahren erschienen dann 1840 bei Fincke in Berlin die "Geometrischen Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien". Diese Schrift hat auch Gauß gekannt, was aus einem Brief an Encke (vom 1. Februar 1841) hervorgeht. In diesem Brief schreibt Gauß:

¹²Nach dem Tode Lenins erhielt die Universität im Jahre 1925 den Namen "W. I. Uljanow (Lenin)".

"Ich fange an, das Russische mit einiger Fertigkeit zu lesen, und finde dabei viel Vergnügen. Herr Knorre hat mir eine kleine in russischer Sprache geschriebene Abhandlung von Lobatschewski (in Kasan) geschickt und dadurch sowie durch eine kleine Schrift in deutscher Sprache über Parallellinien (wovon eine höchst alberne Anzeige in Gersdorfs Repertorium steht) bin ich recht begierig geworden, mehr von diesem scharfsinnigen Mathematiker zu lesen.

Wie mir Knorre sagte, enthalten die (in russischer Sprache geschriebenen) Abhandlungen der Universität Kasan eine Menge Aufsätze von ihm."

Auf Vorschlag von Gauß wurde Lobatschewski im Jahre 1842 zum Korrespondenten der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften berufen. Zusammen mit dem Diplom kam in Kasan auch ein eigenhändiger Brief von Gauß an, der wie folgt begann:

Göttingen den 2-ten Dezember 1842

Hochgeborener Herr, Hochzuverehrender Herr Staatsrat!

Ew., Hochgeboren habe ich die Ehre im Auftrage der hiesigen Königlichen Societät der Wissenschaften anzuzeigen, dass dieselbe in Anerkennung Ihrer ausgezeichneten wissenschaftlichen Verdienste Sie zu ihrem Korrespondenten ernannt hat..."

Gauß hatte selbst nie etwas zur Frage der Parallelentheorie veröffentlicht (vgl. unter 1.3.), er hatte es auch in seinen Publikationen stets vermieden, die Namen J. Bolyai bzw. N. I. Lobatschewski zu nennen. Nun verschaffte er Lobatschewski diese Anerkennung ...

Die unerwartete Anerkennung seiner wissenschaftlichen Leistungen gerade durch Gauß dürfte Lobatschewski zweifelsohne Genugtuung und Freude bereitet haben. Lobatschewski schickte im Juni 1843 an Gauß das folgende Dankschreiben:

"Ihr gütiges Schreiben erhielt ich zugleich mit dem Diplom als Mitglied der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

Ich ersuche Sie ergebenst, der Königlichen Gesellschaft meinen Dank zu bezeugen und derselben zu versichern, dass ich mir es für eine große Ehre schätze, zu den korrespondierenden Mitgliedern derselben zu gehören, und ich wünsche, dass jede meiner Arbeiten im gelehrten Fache würdig sein möchte, mit den ausgezeichneten Schriften der Gesellschaft vereinigt zu werden, ich werde wenigstens alle meine Bemühungen darauf richten.

Verzeihen Sie mir, dass ich so lange zögerte, Ihnen zu antworten, der unglückliche Brand der Stadt trägt die Schuld daran; dieser hatte sowohl meine Gesundheit als auch meine persönlichen Angelegenheiten etwas zerstört, und mich außerdem noch mit einer Menge besonderer Dienstgeschäfte überhäuft.

Empfangen Sie bei dieser Gelegenheit zugleich die Versicherung meiner ausgezeichneten Hochachtung, mit welcher ich für immer verbleibe

Ewr. Hochwohlgeboren ergebenster N. Lobatschewski.

5 Die letzten Lebensjahre

Im Juli 1846 war Lobatschewski dreißig Jahre als Professor an der Kasaner Universität tätig. Nach dem damaligen Universitätsstatut wurde man nach einer solchen Dienstzeit emeritiert. Der Rat der Universität fasste aber den Beschluss, dass Lobatschewski noch für weitere fünf Jahre seinen Lehrstuhl behalten sollte. Damit war auch die Möglichkeit dafür gegeben, dass er seine Arbeit als Rektor fortsetzen konnte.

Einen besseren Rektor konnte sich die Universität auch nicht wünschen. In dem Beschluss des Rates der Universität wurde weiter festgelegt, dass auch I. M. Simonow, der mit Lobatschewski gemeinsam das Studium an der Kasaner Universität begonnen hatte, Physiker geworden und während der ganzen Zeit Lobatschewskis Weggefährte war, ebenfalls noch für weitere fünf Jahre bleiben sollte.

Im Frühjahr 1845 wurde Mussin-Puschkin nach Petersburg berufen.

In der Folgezeit nahm Lobatschewski als Rektor der Universität auch die Pflichten des Kurators des Kasaner Schulbezirks wahr. Als Kurator schickte er den erwähnten Beschluss über die Verlängerung seiner und Simonows Dienstzeit an den Unterrichtsminister zur Bestätigung. Von sich aus fügte er noch hinzu, dass er den Beschluss bezüglich Simonows unterstütze und dass "es für den Lehrstuhl für reine Mathematik nützlicher wäre, wenn ihn Popow, Doktor der Mathematik und Lehrer am Kasaner Gymnasium, übernehmen würde".

Dieser Wunsch Lobatschewskis war verständlich. Er hatte die Pflichten als Rektor und als Kurator des Kasaner Schulbezirks zu erfüllen. Täglich erwartete man seine offizielle Ernennung zum Kurator. Daneben war er noch Vorsitzender verschiedener Kommissionen und Mitglied zahlreicher Gesellschaften.

Trotzdem unterbrach er bei dieser Belastung nie seine wissenschaftliche Arbeit. Er dachte, wenn er Rektor und Kurator bliebe und die Leitung des Lehrstuhls an seinen Schüler Popow übertragen würde, dann bliebe für ihn immer noch reichlich Arbeit übrig.

Lobatschewski hatte in Kasan aber auch zahlreiche Neider. Es begannen Intrigen. Nicht jeder liebte offene Meinungen und einen geraden und unabhängigen Charakter, wie ihn Lobatschewski in hohem Maße besaß.

Im Petersburger Unterrichtsministerium war man mit dem Verzicht Lobatschewskis auf den Lehrstuhl "einverstanden". Gleichzeitig entpflichtete man ihn aber auch als Rektor und ernannte ihn lediglich zum Stellvertretenden Kurator.

Ein halbes Jahr später wurde W. P. Molostwow, ein Kasaner Großgrundbesitzer und ehemaliger Kosakengeneral, Kurator des Schulbezirks. Molostwow arbeitete sehr selbständig, wenn auch nicht immer umsichtig genug. Er brauchte Lobatschewski kaum und war der Auffassung, dass dieser in seiner neuen Funktion "fast gar nichts zu tun" habe.

Bei Lobatschewski rief die Entfernung aus der aktiven Lehr- und Verwaltungsarbeit einen starken Kräfteverfall hervor. Mit 55 Jahren fühlte er sich schwach und krank.

Schließlich verlor er auch noch seine nominelle Stellung als Stellvertreter von Molostwow. Das bedeutete gleichzeitig, dass er von nun an kein Gehalt mehr erhielt, sondern nur noch seine Pension.

Es entstanden materielle Schwierigkeiten, Lobatschewski erblindete allmählich. Das war wohl auch ein Ausdruck für seine übermäßige nächtliche wissenschaftliche Arbeit in seiner Jugend. In den letzten Lebensjahren konnte er sich nicht mehr allein bewegen.

Trotzdem glaubte er auch in diesen Jahren fest an eine große Zukunft seiner Entdeckung. Er verlor nie den Drang zur wissenschaftlichen Arbeit. In diesem Zustand - schwach, krank und fast erblindet - diktierte er seinen Schülern seine letzte wissenschaftliche Arbeit, die berühmte "Pangeometrie", die 1855 in den "Wissenschaftlichen Schriften der Kasaner Universität" erschienen und die ein Jahr später, im Sterbejahr Lobatschewskis, in französischer Sprache in der Festschrift zur 50-Jahrfeier der Universität Kasan noch einmal gedruckt wurde.

Bis zuletzt verlor Lobatschewski nicht die Hoffnung, doch wieder gesund zu werden. Er hatte aus der Rektoratswohnung ausziehen müssen, Im Jahre 1852 verlor er seinen ältesten Sohn Aleksei, der Student war und an Tuberkulose starb.

Sein zweiter Sohn Nikolai musste ein Jahr später die Universität verlassen und seinen Militärdienst ableisten. Seine Gesundheit verschlechterte sich immer mehr. Trotzdem nahm er noch am wissenschaftlichen Leben der Universität teil. So beteiligte er sich zum Beispiel, wie Laptew berichtet, noch an Prüfungen und an Promotionen.

Lobatschewski hatte den Plan, sich in einer Moskauer Klinik behandeln zu lassen. Dazu brauchte er aber Geld. Deshalb wandte er sich an den Unterrichtsminister A. S. Norow, der im September 1855 Kasan besuchte, mit der Bitte um eine einmalige finanzielle Unterstützung. Zu Beginn des Jahres 1856, zwölf Tage vor seinem Tode, erhielt er endlich eine Mitteilung über die Bewilligung von 1500 Silberrubeln.

Diese mögliche Hilfe kam zu spät. Lobatschewski starb am 12. Februar 1856.

Es ist eine Merkwürdigkeit des Schicksals, dass der Tod auf den Tag genau dreißig Jahre nach seinem ersten Vortrag über nichteuklidische Geometrie an der Kasaner Universität eintrat.

Auf seinem letzten Weg zum Arskischen Friedhof in Kasan folgten ihm Hunderte Professoren und Studenten der Universität, Gymnasiasten und ehemalige Schüler.

Am Grabe hielt Professor N. N. Bulitsch eine kurze Rede, in der er u. a. ausführte:

"Als Wissenschaftler war Lobatschewski seiner Sache treu ergeben. Er richtete seine Aufmerksamkeit stets auf die führenden wissenschaftlichen Zentren in Europa und bemühte sich, dass das Niveau der wissenschaftlichen Arbeit hier in Kasan sich immer mehr dem erreichten Entwicklungsstand angleicht.

Als Erzieher bildete er einige Generationen von Mathematiklehrern aus, die ihm für ihre Entwicklung dankbar sind.

Als Rektor vermehrte er die Mittel der Wissenschaft, und die Universität ist ihm allein zu großem Dank verpflichtet. Große gedankliche Leistungen sind uns teurer als alle anderen Heldentaten, denn nur die Wissenschaft, die Gedanken und die Kenntnisse sind die wahren Grundlagen für den gesellschaftlichen Wohlstand."

Popow, der als Schüler Lobatschewskis im Jahre 1848 dessen Lehrstuhl für reine Mathematik an der Universität Kasan übernommen hatte, berichtet in einer dem Andenken an seinen Lehrer gewidmeten Arbeit von der folgenden Äußerung eines Kollegen über Lobatschewski:

"Es gab für ihn im Dienste und in der Wissenschaft nichts Untergeordnetes; was er auch angriff, alles war in seinen Augen von der größten Wichtigkeit, alles tat er mit ganzem Herzen und mit voller Überzeugung von dem Nutzen seiner Arbeit. Niemals entzog er sich seinen Verpflichtungen und in vielen Fällen nahm er freiwillig Arbeiten auf sich."

Dadurch ist wohl Lobatschewski als Persönlichkeit treffend charakterisiert.

6 Die neue Geometrie

6.1 Der Kopernikus der Geometrie

Die Gedanken von Lobatschewski zu den Grundlagenfragen der Geometrie führten zu einer breiten und vielschichtigen Entwicklung. Sie wirkten sich auf Ausgangspunkte und Formen des Aufbaus der Mathematik aus. In der Folgezeit fanden sie auch Anwendung in der Mechanik, in anderen Teilen der Physik und in der Astronomie. Sie beeinflussten auch philosophische Überlegungen.

In der Geschichte der Mathematik, der exakten Wissenschaften und der Philosophie wird der Name von Lobatschewski stets neben denen von Archimedes, Galilei, Kopernikus, Newton und anderen großen Wissenschaftlern stehen.

Man sprach oft davon, dass Lobatschewski der Kopernikus der Geometrie sei.

Auch Gauß hatte die Existenz einer solchen neuen Geometrie lange nicht für möglich gehalten. Er hatte sich seit 1792 mit Grundlagenfragen der Geometrie beschäftigt. In seinen Überlegungen war er offenbar recht weit gekommen und hatte ähnliche Ergebnisse wie Lobatschewski erreicht.

Lobatschewski, auf festen materialistischen Positionen stehend, entwickelte und publizierte seine Gedanken ungeachtet der Nichtanerkennung und des Hohns vieler Mathematiker der damaligen Zeit und setzte seine Arbeit durch viele Jahrzehnte seines Lebens konsequent fort.

Bald nach dem Tode von Gauß begann man mit der Herausgabe seines Briefwechsels. Seine insbesondere in mehreren Briefen an Schumacher enthaltenen Äußerungen zur nichteuklidischen Geometrie richteten die Blicke vieler Mathematiker erneut auf die fast vergessenen Arbeiten von Bolyai und Lobatschewski. Damit rückte das Problem der Widerspruchlosigkeit der nichteuklidischen Geometrie wieder in den Mittelpunkt.

Am interessantesten waren in diesem Zusammenhang zunächst Arbeiten des italienischen Geometers E. Beltrami.

6.2 Beltrami untersucht die Pseudosphäre

Beltrami beschäftigte sich mit Problemen der Kartographie. Er suchte Verfahren zum Abbilden einer Fläche auf eine andere Fläche, z. B. der Oberfläche der Erde auf eine ebene geographische Karte, so dass geodätische Linien, d.h. Linien kürzester Entfernung zwischen zwei Punkten, der einen Fläche wieder als geodätische Linien der anderen Fläche abgebildet werden.

Die Geometrie ist sehr vielgestaltig. So hat die Geometrie der Ebene ihre Besonderheiten, die Geometrie gekrümmter Flächen ebenfalls. Einer der einfachsten Fälle der Geometrie gekrümmter Flächen ist die sphärische Geometrie, Auf ihr lassen sich einzelne Teile einer Fläche "ohne Löcher und Falten" verschieben, weil die Krümmung überall gleich ist. Auf einigen anderen Flächen kann man Figuren verschieben, die dabei verbogen, aber nicht gedehnt werden.

Es existieren verschiedene Flächen mit konstanter Krümmung. Solche Flächen untersuchte Beltrami.

Er konnte bald zeigen, dass auf einer Fläche mit konstanter negativer Krümmung, auf einer sogenannten Pseudosphäre, geometrische Eigenschaften realisiert werden, die Lobatschewski vorausgesagt hatte.

Auf solchen Flächenstücken gelten die Gesetze der nichteuklidischen Geometrie.

In den Jahren von 1838 bis 1840 hatte bereits Minding die innere Geometrie der Pseudosphäre und anderer zu ihr ähnlichen Flächen untersucht. Er hatte gezeigt, dass auf Flächen mit konstanter negativer Krümmung für geodätische Dreiecke die Sätze der nichteuklidischen Trigonometrie gelten.

Die Arbeiten von Minding hatten keinen Bezug zu den Arbeiten und Gedanken von Lobatschewski. Die Bibliothek der Kasaner Universität besaß die Bände von Crelles Journal, in denen Minding seine Arbeiten veröffentlicht hatte. Laptew konnte aber an Hand der Kartei feststellen, dass Lobatschewski diese Bände nicht ausgeliehen hatte und damit die Arbeiten Mindings höchstwahrscheinlich nicht kannte.

Beltrami stellte als erster einen Zusammenhang mit den Überlegungen von Lobatschewski her. Er fasste seine Untersuchungen als Verwirklichung der nichteuklidischen Geometrie auf.

Die Veröffentlichung dieser Gedanken von Beltrami in einer Arbeit aus dem Jahre 1868 fand starke Beachtung. Es zeigte sich, dass die "vorgestellte" Geometrie von Lobatschewski gar nicht vorgestellt war, sondern dass sie sich auf einer im euklidischen Raum existierenden Fläche realisieren ließ.

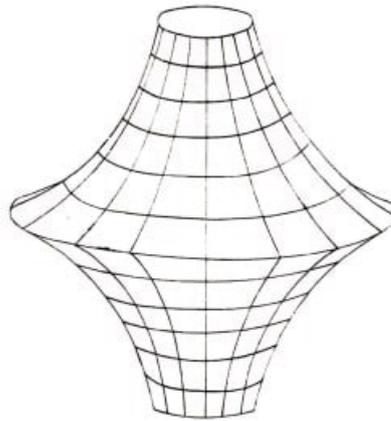


Abb. 11.

Die Pseudosphäre ist eine Fläche, die man durch Rotation einer Traktrix (Schleppkurve) um deren Asymptote (x -Achse) erhält.

Der Anfang zur Anerkennung der Gedanken Lobatschewskis war gemacht, Einer der ersten Wissenschaftler in Deutschland, der die Bedeutung der Gedanken von Lobatschewski erkannte, war der Physiker H. Helmholtz. Er machte sich in einer im Jahre 1870 an der Universität Heidelberg gehaltenen Rede zum Popularisator der Lobatschewskischen Ideen. In England spielte W. I. Clifford diese Rolle.

Nach der Arbeit von Beltrami erschienen in rascher Folge weitere Arbeiten, die sich mit den Fragen der nichteuklidischen Geometrie beschäftigten. Es wurden verschiedene Modelle der nichteuklidischen Geometrie angegeben.

6.3 Grundlagenfragen

In seinem 1899 in Göttingen erschienenen Buch "Grundlagen der Geometrie" gab D. Hilbert eine - nach unseren heutigen Vorstellungen - vollständige Axiomatik für die Geometrie an.

Die 20 Axiome des Hilbertschen Systems genügten den erhöhten Anforderungen an die mathematische und logische Strenge. Aus diesen vervollständigten und präzisierten Axiomen kann man auf rein deduktivem Wege das ganze System der euklidischen Geometrie herleiten.

Aus heutiger Sicht werden beim Aufbau einer mathematischen Theorie auf der Grundlage eines

inhaltlichen Axiomensystems die Grundeigenschaften, die Beziehungen und die Verknüpfungen von Objekten eines bestimmten Objektbereichs beschrieben. Dabei werden die Objekte explizit nicht definiert (interpretiert, beschrieben).

Beim Beweisen werden Hilfsmittel der formalen Logik benutzt.

Durch verschiedene Interpretationen dieser Objekte und Relationen entstehen schließlich die verschiedenen Modelle der axiomatisierten Theorie.

Die Axiomatik der Geometrie wurde durch den menschlichen Verstand und durch Beobachtungen und Erfahrungen geschaffen.

Die Entdeckung der "neuen" Geometrie, deren Axiomatik der der euklidischen Geometrie widerspricht, die aber trotzdem ihre Anwendung in der objektiven Realität findet, bestätigte die völlige Haltlosigkeit idealistischer Auffassungen von irgendeiner Suggestion der geometrischen Wahrheit durch einen "höheren Verstand".

Vor ungefähr 100 Jahren konnte F. Klein zeigen - ausgehend von den Prinzipien der projektiven Geometrie -, dass man bei verschiedenen Definitionen für den Abstand von Punkten, d. h. bei verschiedenen Metriken, drei verschiedene Arten der Geometrie erhält: die Geometrie von Euklid, die Geometrie von Lobatschewski und die Geometrie von Riemann (vgl. unter 6.6.).

6.4 Das Modell von Cayley-Klein

Das projektive Modell von Cayley-Klein für die nichteuklidische Geometrie ist neben dem konformen Modell von Poincare das bekannteste Modell für diese Geometrie.

Cayley hatte 1859 gezeigt, dass man alle Objekte der euklidischen Geometrie durch Begriffe der projektiven Geometrie ausdrücken kann und dass damit die projektive Geometrie die euklidische Geometrie enthält.

Aus der Sicht der projektiven Geometrie zeigte er ferner, dass sich der Begriff "Abstand" (Metrik) auf verschiedene Weisen einführen lässt. Eine dieser Einführungsarten (eine Cayleysche Metrik) führt auf die Metrik der euklidischen Geometrie.

Es vergingen zehn Jahre. Im Jahre 1869 beschäftigte sich der junge F. Klein mit dieser Theorie und gelangte zu der Vermutung, dass eine Cayleysche Metrik nicht nur auf die Geometrie von Euklid, sondern auch auf die Geometrie von Lobatschewski führen könnte.

Diese Annahme stützte sich nur auf die Intuition und war noch nicht durch einen Beweis erhärtet. Trotzdem trug Klein darüber in einem Seminar bei Weierstraß in Berlin vor. Er fand jedoch dort keine Anerkennung. Man erklärte ihm, dass das System von Cayley und der Geometrie Lobatschewskis "sehr weit voneinander entfernt" seien.

Klein glaubte aber weiter an seine These. Im Sommer 1871 beschäftigte er sich wieder mit nichteuklidischer Geometrie und wollte sich von der Richtigkeit seiner Vermutung überzeugen. Er führte dazu die notwendigen Untersuchungen durch und erhielt einen exakten Beweis für seine Annahme.

Die weiteren Überlegungen führten Klein zur Schaffung des bekannten projektiven Modells für die nichteuklidische Geometrie.

Dieses Modell besteht aus dem Inneren eines Kreises. Die Sehnen (ausschließlich ihrer Endpunkte) sind in diesem Modell die "Geraden". Als "Länge der Strecke AB " bezeichnet man den Logarithmus des in der projektiven Geometrie häufig verwendeten: Doppelverhältnisses

der Abstände von vier Punkten:

$$|AB| = \left| \ln \left(\frac{AB_0}{AA_0} : \frac{BA_0}{BB_0} \right) \right|$$

wobei A_0 und B_0 die Schnittpunkte einer "Geraden" mit dem Kreis sind (Abb. 12).

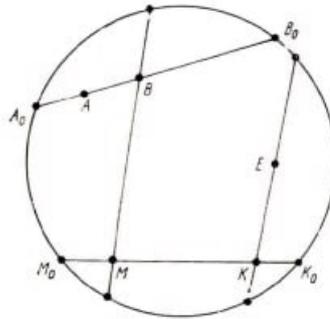


Abb. 12.

Dabei schneiden sich einige Geraden in höchstens einem Punkt, z. B. die Geraden AB und BM sowie die Geraden BM und MK , andere Paare von Geraden schneiden sich nicht, z. B. die Geraden AB und MK und die Geraden AB und EK , usw.

Mit diesem projektiven Modell der nichteuklidischen Geometrie hatte Klein die Widerspruchsfreiheit dieser Geometrie auf die Widerspruchsfreiheit der projektiven Geometrie zurückgeführt. Damit war endlich die vollständige Existenzberechtigung der von Lobatschewski geschaffenen "neuen" Geometrie gezeigt worden.

Im Jahre 1872 hielt Klein an der Universität Erlangen seine berühmt gewordene Antrittsrede "Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen", die unter der Bezeichnung "Erlanger Programm" weltberühmt wurde. In diesem Programm formulierte Klein einen einheitlichen Standpunkt für den Aufbau verschiedener geometrischer Systeme.

Er ging davon aus, dass man in allen bisherigen geometrischen Systemen (dem euklidischen, dem projektiven, dem sphärischen, dem nichteuklidischen) Mannigfaltigkeiten betrachtete, in denen jeweils ein Bewegungs- oder Kongruenzbegriff definiert war. Er stellte nun die folgende Aufgabe:

"Es ist eine Mannigfaltigkeit und in ihr eine Transformationsgruppe gegeben. Man entwickelte die auf diese Gruppe bezügliche Invariantentheorie."

Dieser Ansatzpunkt erwies sich in der Zukunft als sehr fruchtbar.

Mit der Untersuchung von kontinuierlichen Transformationsgruppen beschäftigte sich damals vor allem der norwegische Mathematiker Sophus Lie. Lie war es auch, der als erster (unter neun Bewerbern) den von der Kasaner Physikalisch-Mathematischen Gesellschaft anlässlich des 100. Geburtstages von Lobatschewski auf Grund eines Aufrufes von führenden Mathematikern der damaligen Zeit gestifteten Lobatschewski-Preis erhielt.¹³

6.5 Das Modell von Poincare

Vor etwa hundert Jahren benutzte der französische Mathematiker H. Poincare bei der Ausarbeitung seiner Theorie der automorphen Funktionen¹⁴ erfolgreich die Formeln aus der Geometrie

¹³Diesen Preis erhielten in der Folgezeit u. a. auch Hilbert, Schur und Weyl. Nach dem zweiten Weltkrieg wird der Preis seit 1950 von der Akademie der Wissenschaften der UdSSR vergeben.

¹⁴Als automorph bezeichnet man Funktionen einer komplexen Veränderlichen, deren Wert sich bei einigen gebrochen-linearen Substitutionen für das komplexe Argument nicht ändert. Der einfachste Fall automor-

Lobatschewskis.

Er sprach davon, dass die nichteuklidische Geometrie "der Schlüssel zum Lösen aller Aufgaben" sei. Er suchte nach einer Realisierungsmöglichkeit dieser "vorgestellten" Geometrie in Form eines Modells.

Poincare fand, dass man die Abbildungen automorpher Funktionen als nicht-lineare Verschiebungen in der Lobatschewski-Ebene interpretieren kann. In seinen wissenschaftlichen Veröffentlichungen über automorphe Funktionen benutzte Poincare jedoch nicht die Terminologie der Geometrie Lobatschewskis. Er schrieb dazu:

"... ich habe nicht Zeit, hier von den Anwendungen (der nichteuklidischen Geometrie) zu sprechen, noch von dem Vorteil, den Klein und ich daraus für die Integration linearer Differentialgleichungen gezogen haben."

Wie bereits erwähnt, führen die verschiedenen Definitionen des Abstands auf verschiedene Metriken des Raumes. In der Geometrie von Euklid ist der Abstand zwischen zwei Punkten $A(x_1; y_1; z_1)$ und $B(x_2; y_2; z_2)$ durch die folgende Formel festgelegt:

$$|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

Wir wollen nun einmal annehmen, dass der Abstand zwischen zwei Punkten nach der folgenden Formel festgelegt ist:

$$|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$

und dass man den Winkel zwischen den beiden Geraden durch O und A bzw. B aus der Formel

$$\cos \angle AOB = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 - z_1 \cdot z_2}{AB \cdot PB}$$

bestimmen kann.

Der Raum, für den diese Metrik gilt, heißt pseudoeuklidischer Raum, Einige Eigenschaften in diesem Raum unterscheiden sich wesentlich von den Eigenschaften in einem euklidischen Raum.

So haben zum Beispiel Strecken auf Geraden in diesem pseudoeuklidischen Raum entweder eine positive reelle Länge oder eine imaginäre Länge oder die Länge Null. Geraden des ersten Typs heißen raumartig. Geraden des zweiten Typs zeitartig und Geraden des dritten Typs isotrop. (Diese Bezeichnungen erklären sich aus der Interpretation dieser Geraden in der Relativitätstheorie.)

Die Punktmenge eines pseudoeuklidischen Raumes, deren Koordinaten der Gleichung

$$x^2 + y^2 - z^2 = r^2$$

genügen, nennt man Sphäre mit dem Radius r und dem Mittelpunkt O . Die Punktmenge, deren Koordinaten der Gleichung

$$x^2 + y^2 - z^2 = -q^2$$

genügen, nennt man Sphäre mit dem imaginären Radius $r = qi$.

Wenn man im pseudoeuklidischen Raum eine Sphäre mit einem imaginären Radius von einem der Pole aus projiziert, so erhält man in der Äquatorebene den inneren Teil eines Kreises (Abb. 13).

pher Funktionen sind die periodischen Funktionen, die die Eigenschaft $f(x + A) = f(x)$ besitzen, z. B. $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, d.h. die Sinusfunktion ist eine periodische Funktion mit der Periode $A = 2\pi$.



Abb. 13.

Das ist die von Poincaré gefundene Interpretation. In ihr werden "Geraden" von Kreisbögen gebildet, die senkrecht auf dem Gesamtkreis stehen. Die Winkel zwischen den "Geraden" behalten in diesem Modell ihre ursprüngliche Größe.

Man kann zeigen, dass in dieser Geometrie der Winkel zwischen zwei "Geraden" mit dem euklidischen Winkel zwischen den zwei Tangenten an die entsprechenden Kreisbögen übereinstimmt, die in deren Schnittpunkt konstruiert werden (konforme Abbildung).

6.6 Drei geometrische Systeme

Kleine Teile der Erdoberfläche kann man als eben annehmen, Messungen auf einem Hof, auf einer Straße oder in einem Stadion sind somit noch Messungen in einer Ebene. Die Krümmung der Erdoberfläche wird in diesen Fällen vollkommen vernachlässigt.

Beim Anfertigen von geographischen Karten muss man diese Krümmung jedoch berücksichtigen.

In der Mitte des 19. Jahrhunderts kam Riemann zu der Auffassung, dass das wichtigste Charakteristikum eines Raumes dessen Krümmung ist. In seinem berühmt gewordenen Habilitationsvortrag "Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen" aus dem Jahre 1854, bei dem Gauß noch anwesend war, und in weiteren Arbeiten begann Riemann die allgemeine mathematische Auffassung vom Raum auszuarbeiten.

Riemann fasste die Geometrie des Raumes in einem sehr weiten Sinne auf, als Lehre von kontinuierlichen Mannigfaltigkeiten von Objekten, d. h. von "Punkten", die durch n -Tupel von Zahlen (x_1, x_2, \dots, x_n) , den "Koordinaten" dieser Punkte, charakterisiert werden.

In der von Riemann ausgearbeiteten Theorie dient der Begriff des Bogenelements als Grundbegriff, Lobatschewski hatte seiner "neuen" Geometrie die Formeln seiner Trigonometrie zugrunde gelegt.

Riemann betrachtete von den, ihren metrischen Eigenschaften nach, verschiedenen Räumen besonders die Räume mit konstanter Krümmung. Es zeigte sich, dass man je nach dem Charakter dieser Krümmung drei Grundtypen von Räumen unterscheiden kann, d. h. dass es drei grundlegende geometrische Systeme gibt:

1. die Geometrie von Euklid bzw. die parabolische Geometrie, die durch die Nullkrümmung des Raumes gekennzeichnet ist;
2. die Geometrie von Lobatschewski bzw. die hyperbolische Geometrie, die durch eine negative Krümmung des Raumes gekennzeichnet ist;
3. die Geometrie von Riemann bzw. die elliptische Geometrie, die durch eine positive Krümmung des Raumes gekennzeichnet ist.

Diese Klassifikation geht auf F. Klein zurück.

In der Geometrie von Euklid ist bekanntlich die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks stets 180° ; in der Geometrie von Lobatschewski ist diese Summe stets kleiner als 180° ; in der Geometrie von Riemann ist sie stets größer als 180° .

Auf der Oberfläche einer Kugel gilt die sphärische Geometrie, die einen Sonderfall der Geometrie von Riemann darstellt. Als "Geraden" treten auf der Sphäre Großkreise auf, deren Radien dem Radius der Sphäre entsprechen.

Hier schneiden sich stets zwei "Geraden", d. h. es gibt keine parallele Geraden. Auf der Sphäre gibt es auch Dreiecke mit drei rechten Winkeln.¹⁵

Es existieren auch noch andere Eigenschaften, die diese Geometrie von der euklidischen Geometrie unterscheiden.

In der euklidischen Geometrie kann man durch einen außerhalb einer Geraden liegenden Punkt genau eine Gerade zeichnen, die zu der vorgegebenen Geraden parallel ist.

In der "neuen" Geometrie von Lobatschewski lassen sich durch einen solchen Punkt zwei verschiedene Geraden zeichnen, die zu der vorgegebenen Geraden parallel sind und sie im Unendlichen treffen. Man kann sogar unendlich viele Geraden, die die vorgegebene Gerade nicht schneiden, zeichnen,

Diese drei geometrischen Systeme besitzen zahlreiche gemeinsame Eigenschaften, es gibt aber auch große Unterschiede zwischen ihnen. Der Aufbau der drei verschiedenen Geometrien, der mit Lobatschewski begann und der von Riemann fortgesetzt wurde, ist für sich allein schon als ein Triumph wissenschaftlicher Arbeit zu werten.

In der Folgezeit wurde die Ausarbeitung der Theorie der Riemannschen Räume¹⁶ von zahlreichen Geometern aus verschiedenen Ländern fortgesetzt. Besondere Verdienste hat sich dabei F. Klein erworben.

Eine überaus wichtige Anwendung erfuhr diese Theorie aber erst nach dem Entstehen der allgemeinen Relativitätstheorie, in der sich die Gravitation im Raum mit veränderlicher Krümmung geometrisiert. Die spezielle Relativitätstheorie betrachtet physikalische Prozesse im vierdimensionalen pseudo-euklidischen Zeit-Raum mit Nullkrümmung (Ereignisraum), dessen Objekte ("Punkte") durch die vier Koordinaten x , y , z und t charakterisiert werden.

Später erwies sich der Raum der Geschwindigkeiten in der speziellen Relativitätstheorie als ein Lobatschewski-Raum. Die Addition der Geschwindigkeiten führte in diesem Raum auf das Berechnen von Dreiecken, die aus geodätischen Strecken aus der Lobatschewski-Ebene bestehen.

6.7 Grundlagen jeder Wissenschaft

Die mit der stürmischen Entwicklung der gesellschaftlichen Produktivkräfte in den letzten hundert Jahren eng verbundene Entwicklung von Wissenschaft und Technik erforderte ständig das Stellen und Lösen neuer Probleme. Sie erforderte auch neue Untersuchungsmethoden.

¹⁵Man stelle sich auf der Erdkugel zwei Halbmeridiane, z. B. den Nullmeridian von Greenwich und den Meridian von 90° östlicher Länge, der durch das Gangesdelta in Indien verläuft, und einen Vierteläquator vor, der von diesen beiden Meridianen eingeschlossen wird.

¹⁶Als Theorie der Riemannschen Räume bezeichnet man die allgemeine Theorie geometrischer Räume, die durch eine räumliche Metrik gegeben werden, durch eine quadratische Differentialform. Dagegen bezeichnet man als Riemannsche Geometrie nur den Sonderfall der Geometrie eines geometrischen Raumes, nämlich eines Raumes mit positiver Krümmung.

In der Mathematik und den Naturwissenschaften wurde es unumgänglich, alle bisherigen Ergebnisse, angefangen von den Grundlagen, zu überprüfen und neu zu durchdenken.

Es begann eine Periode der kritischen Sichtung, die zur Revision zahlreicher Auffassungen führte. Das war in der Physik der Fall, ebenso in der Mathematik. Das traf auch auf die Geometrie zu, hier insbesondere auf das Parallelenproblem.

Die Entdeckung Lobatschewskis war zu einem Anstoß für eine neue Entwicklungsetappe in den Naturwissenschaften geworden.

Die Existenz eines in sich widerspruchsfreien Systems der Geometrie, das sich vom euklidischen System unterscheidet, kann als Beweis für die Unabhängigkeit des 5. Postulats von den übrigen Axiomen Euklids angesehen werden. Dadurch war die Frage nach der Widerspruchsfreiheit aller axiomatisch aufgebauten Theorien auf die Tagesordnung gesetzt.

Die "neue" Geometrie Lobatschewskis kann man in der Geschichte der Mathematik als weiteres ernstzunehmendes Beispiel für einen streng axiomatischen Aufbau eines geometrischen Systems ansehen und als Vorläufer der modernen axiomatischen Methode in der Mathematik.

Diese neuen Fragestellungen weiteten sich auch auf andere Teilgebiete der Mathematik aus, so z. B. auf die Algebra. Es wurden Algebren mit verschiedenen Operationen, die nicht den Operationen in der gewöhnlichen Algebra entsprechen, und mit verschiedenen Elementen (z. B. Matrizen, Vektoren) geschaffen.

Dabei zeigte sich, dass diese "ausgedachten" Algebren Anforderungen entsprachen, die von der Physik, der Mechanik, der Radiotechnik usw. gestellt wurden.

Entsprechende Entwicklungen hatte es auch in der mathematischen Logik, in der Analysis, in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und anderswo gegeben.

6.8 Die Krümmung des Raumes und die Relativitätstheorie

Die Schaffung der speziellen Relativitätstheorie, die von H. Lorentz durch seine Untersuchungen über Transformationen im Jahre 1904 vorbereitet und die dann von H. Poincaré und A. Einstein im Jahre 1905 ausgearbeitet wurde, hatte zunächst nichts mit den Gedanken von Lobatschewski zu tun.

Die Relativitätstheorie bedient sich differentialgeometrischer Methoden, mittels derer sich die nichteuklidischen Geometrien als Spezialfälle entwickeln lassen.

Im Jahre 1909 konnte der deutsche Physiker Sommerfeld zeigen, dass das Einsetzen von imaginären Größen in die Lorentz-Transformationen für die Geschwindigkeit auf eine Geometrie mit imaginären Radius führt (Pseudosphäre).

Klein bewies, dass die Gruppe der Lorentz-Transformationen die gleiche Struktur wie eine Gruppe des Lobatschewski-Raumes hat.

Schließlich interpretierte im Jahre 1910 V. Varicak den mathematischen Apparat der speziellen Relativitätstheorie in der Terminologie des dreidimensionalen Lobatschewski-Raumes. Dabei ergab sich, dass die Formel für die Addition der Geschwindigkeitsvektoren in der speziellen Relativitätstheorie (die Poincaré-Einsteinsche Formel) eine der Grundformeln der Trigonometrie von Lobatschewski ist.

Mit der Verwendung der Geometrie von Lobatschewski in der Kinematik der speziellen Relativitätstheorie beschäftigte sich auch der Kasaner Geometer A. P. Kotelnikow.

In jüngerer Zeit wurden ähnliche Untersuchungen von N. A. Tschernikow und J. A. Smorodinski im Vereinigten Kernforschungsinstitut der sozialistischen Länder in Dubna durchgeführt.

Die Formeln der Geometrie Lobatschewskis werden jetzt bei der Berechnung von Beschleunigern und bei der Bearbeitung von Resultaten von Experimenten mit Elementarteilchen hoher Energien angewendet.

Die allgemeine Relativitätstheorie von Einstein im Jahre 1916 zeigte, dass man die realen physikalischen Prozesse nur im vierdimensionalen Zeit-Raum betrachten kann.

Die im Raum existierende Materie besitzt ein Gravitationsfeld.

Gravitationsfelder verändern sich im Verlaufe der Zeit. Einstein zeigte, dass die Gravitationsmassen die vierdimensionale Raum-Zeit-Welt krümmen. Die Geometrie einer derartig "gekrümmten" Welt ist nicht euklidisch, obwohl die "Abweichung vom Euklidischen" sogar in der Nähe großer Sternmassen nicht sehr groß ist.

Lobatschewski vermutete richtig, dass unser gewöhnlicher Raum auch gekrümmt ist. Wegen der sehr kleinen Größe der Krümmung, konnte er diese Hypothese experimentell nicht bestätigen. Nach seinen Berechnungen hat sogar das "gigantische" Dreieck Erde-Sonne-Sirius eine Winkelsumme, die nur um einige Millionstel Winkelsekunden kleiner als 180° ist.

Die allgemeine Relativitätstheorie, die sich auf die geometrische Vorstellung von Raum und Zeit stützt, sagt aus, dass die Geometrie des Raumes von der Verteilung und von der Bewegung der Gravitationsmassen in diesem Raum abhängt. Unter Benutzung des Wertes für die mittlere Dichte kosmischer Materie ($\rho \approx 10^{-3} \text{ g/cm}^{-3}$)¹⁷ und des Verhältnisses der mittleren Geschwindigkeit von außergalaktischen Objekten zu ihrer Entfernung vom Beobachter ($\alpha \approx 2 \cdot 10^{-17} \text{ s}^{-1}$) lässt sich heute bereits die Krümmung des Raumes genauer bestimmen. Moderne Rechnungen ergeben für den Krümmungsradius den folgenden Wert:

$$R = 2 \approx 10^{10} \text{ Lichtjahre}$$

Das würde heißen, dass der reale Raum ein nicht-euklidischer ist. Bis heute ist es unmöglich, sich durch unmittelbare Berechnungen davon zu überzeugen, dass die Winkelsumme in solchen kosmischen Dreiecken nicht gleich 180° ist. Es erwies sich aber als möglich, die Krümmung des Raumes in der Nähe schwerer Körper, wie z. B. unserer Sonne, zu messen.¹⁸

Am 29. Mai 1919 war auf der südlichen Halbkugel eine totale Sonnenfinsternis zu beobachten. Aus zahlreichen Ländern wurden von wissenschaftlichen Einrichtungen Expeditionen zur Beobachtung dieses seltenen Naturereignisses in die entsprechenden Gebiete geschickt. Eine Beobachtungsaufgabe bestand in der experimentellen Überprüfung der Größe der Abweichung der Lichtstrahlen, die weit entfernte Sterne aussenden, zu dem Zeitpunkt, in dem sie sich nahe an der verdeckten Sonne befinden.

Dabei wurde ein und derselbe Teil des Sternenhimmels zweimal fotografiert, einmal vorher (nachts), als die Lichtstrahlen der beobachteten Sterne nicht nahe der Sonne verliefen, und einmal während der Sonnenfinsternis, als die Lichtstrahlen dieser Sterne in unmittelbarer Nähe der verdeckten Sonne verliefen.

Eine genaue Auswertung der gemachten Aufnahmen zeigte, dass die Lichtstrahlen von den Sternen, die sich zur Zeit der Sonnenfinsternis in unmittelbarer Nähe der verdeckten Sonne

¹⁷Diese Angaben gehen aus Arbeitsergebnissen des Vereinigten Kernforschungsinstitutes in Dubna hervor.

¹⁸Interessant ist in diesem Zusammenhang ein vom Einstein-Komitee der Akademie der Wissenschaften der DDR in Vorbereitung auf den 100. Geburtstag Einsteins geplantes Experiment zur direkten Messung der Krümmung des Raumes mit Hilfe zweier Satelliten, von dem Prof. Dr. H.-J. Treder kürzlich in der Presse berichtete.

befanden, eine Abweichung gegenüber den vor der Sonnenfinsternis gemachten Aufnahmen aufwiesen (Abb. 14).



Abb. 14.

Diese Abweichung war mit etwa zwei Winkelsekunden nicht sehr groß. Die allgemeine Relativitätstheorie nannte 1,75 Winkelsekunden. Diese Aussage der allgemeinen Relativitätstheorie fand also durch das gemachte Experiment eine Bestätigung.

Im November 1919 fand in London eine gemeinsame Sitzung der englischen Royal Society und der Astronomischen Gesellschaft statt. auf der als Endergebnis der gemachten Versuche offiziell bestätigt wurde, dass eine solche Abweichung existiert.

Während der folgenden totalen Sonnenfinsternisse wurde dieser Versuch von verschiedenen Wissenschaftlern wiederholt. Jedesmal, wenn sich dabei ein heller Stern in unmittelbarer Nähe der verdunkelten Sonne befand, erschien sein Bild wiederum verschoben.

Das bestätigte also immer die entsprechenden Aussagen der von Einstein aufgestellten allgemeinen Relativitätstheorie. Gleichzeitig wurde damit auch die geniale Voraussage von Lobatschewski bestätigt, dass der Raum eine Krümmung besitzt (deren Größe von der Verteilung, von der Dichte und von der Bewegung der Materie im Raum abhängt).

Im Jahre 1922 erschien in der "Zeitschrift für Physik" ein Artikel von A. A. Friedman aus Petrograd mit dem Titel "Über die Krümmung des Raumes". In diesem Artikel wird bewiesen, dass sich die Krümmung des Raumes in Abhängigkeit von der Zeit verändert. Friedman legte im diesem Artikel folgende Konzeption dar:

1. Es ist möglich, die Grundgleichungen des Gravitationsfeldes zu lösen; ;
2. Der Raum ist - diesen Lösungen entsprechend (die allgemeiner als bei Einstein sind) - nicht stationär, d. h. die Krümmung des Raumes verändert sich in Abhängigkeit von der Zeit.

Einstein beschäftigte sich sofort mit dieser kleinen, inhaltlich jedoch sehr bedeutsamen Arbeit von Friedman. In einer sofortigen Erwiderung (in derselben Zeitschrift) verhielt er sich gegenüber den von Friedman vorgelegten Ergebnissen zunächst skeptisch.

Nach einiger Zeit jedoch - inzwischen hatte der Petersburger Physiker J. A. Krutkow während eines Besuches bei Einstein mit diesem diese Arbeit noch einmal diskutiert - publizierte die Zeitschrift einen weiteren Brief von Einstein, in dem er öffentlich seinen Rechenfehler eingestand.

7 Weitere Arbeiten Lobatschewskis

Lobatschewski beschäftigte sich in einer Reihe von Arbeiten auch noch mit anderen, nicht-geometrischen Problemen der Mathematik, So versuchte er zum Beispiel, die Formeln seiner "vorgestellten" Geometrie auf die Algebra und auf die Analysis anzuwenden. Er berechnete nach seinen neuen Methoden auch verschiedene Integrale.

Bei der Berechnung des Defekts des Dreiecks Erde-Sonne-Sirius beschäftigte er sich mit möglichen Beobachtungsfehlern bei der Winkelmessung.

Seine Monographie "Algebra und Berechnung des Finiten" (1834) stellte ebenfalls eine reife wissenschaftliche Leistung dar. Sie kann als erstes russischen Lehrbuch der höheren Algebra angesehen werden und war damals eine gute Grundlage für Algebravorlesungen an der Universität. In ihr wurden sowohl die einzelnen Grundbegriffe eingeführt und ausführlich erläutert als auch praktische Anwendungen behandelt.

Lobatschewski erkannte als einer der ersten, dass man bei einer Erweiterung des Definitionsbereiches für eine Operation auch die inhaltliche Bedeutung der Operation neu festlegen muss.

So ist z. B. die Definition der Multiplikation im Bereich der positiven natürlichen Zahlen als mehrfache Addition nicht mehr anwendbar, wenn man die Multiplikationen mit 0 oder negativen ganzen Zahlen oder die Multiplikation im Bereich der rationalen Zahlen einführt.

In dieser Monographie gab Lobatschewski auch als erster ein originelles Lösungsverfahren für homogen lineare Diophantische Gleichungssysteme an, das später (im Jahre 1862) auch von dem italienischen Mathematiker E. Berti gefunden wurde.

Im letzten Paragraphen dieser Arbeit (§ 257) legte Lobatschewski kurz ein Verfahren zum Lösen von algebraischen Gleichungen höheren Grades dar, das als Methode von Dandelin-Lobatschewski-Graeffe bekannt geworden ist. Diese Methode gestattet das gleichzeitige Bestimmen aller Lösungen einer Gleichung, darunter auch von komplexen Lösungen.

Dabei braucht man die einzelnen Lösungsintervalle nicht voneinander zu trennen, wie das bei den anderen Iterationsverfahren zum Lösen von Gleichungen erforderlich ist, wie beispielsweise dem Newtonschen Verfahren.

Später wurde diese Methode auf das Lösen von transzendenten Gleichungen verschiedener Klassen erweitert.

Eine andere Arbeit von Lobatschewski trägt den Titel "Herabsetzen der Potenz in einer zweigliedrigen Gleichung, wenn der um 1 verminderte Exponent durch 8 teilbar ist". Diese Arbeit setzt die Überlegungen aus Lobatschewskis Magisterzeit fort.

1813 hatte er eine kleine Arbeit mit dem Titel "Über die Auflösung der algebraischen Gleichung $x^n - 1 = 0$ geschrieben, die er später in sein Algebrabuch aufnahm. Die neue Arbeit aus dem Jahre 1834 behandelt den Fall $n = 8m + 1$ und zeigt, wie man die Gleichung m -ten Grades aufstellen kann, auf die sich die gegebene Gleichung durch Radizieren zurückführen lässt.

In seiner Arbeit "Über die Konvergenz der trigonometrischen Reihen" (ebenfalls 1834) zeigt Lobatschewski den Unterschied zwischen der Stetigkeit und der Differenzierbarkeit einer Funktion.

Bis ins 19. Jahrhundert hatte man angenommen, dass jede stetige Funktion eine Ableitung besitzt und dass - umgekehrt - jede Funktion, die eine Ableitung besitzt, auch stetig ist. Es schien selbstverständlich, dass eine Kurve, wenn sie keine "Lücken" hat, auch so beschaffen ist, dass man an sie in jedem Punkt eine Tangente legen kann.

Lobatschewski erkannte in der genannten Arbeit klar die Notwendigkeit, zwischen solchen

Stellen zu unterscheiden, an denen eine Funktion bloß stetig ist, und solchen, an denen sie auch noch differenzierbar ist.

Zur selben Zeit, in der sich Lobatschewski mit diesem Problem beschäftigte, konstruierte Bolzano eine in einem ganzen Intervall stetige Funktion, die in keinem Punkte des Intervalls eine Ableitung besitzt. Er veröffentlichte darüber aber nichts. Ein derartiges Beispiel wurde erst dreißig Jahre später von Weierstraß publiziert.

Viele Mathematiker des 19. Jahrhunderts betrachteten immer noch als Funktion nur das, was sich durch eine Formel (analytischer Ausdruck) darstellen lässt. Lobatschewski hatte den Unterschied zwischen einer Funktion und ihrer Darstellung voll erkannt. Er war der Auffassung:

"Der allgemeine Begriff erfordert, dass man eine Zahl dann als Funktion von x bezeichnet, wenn sie für jedes x gegeben wird und sich mit x stetig ändert. Der Wert der Funktion kann entweder durch einen analytischen Ausdruck gegeben sein oder durch eine Bedingung, die ein Mittel liefert, um alle Zahlen zu prüfen und eine davon auszuwählen: oder endlich kann die Abhängigkeit bestehen, aber unbekannt bleiben."

Damit wurde er zum Wegbereiter bei der Verschärfung des Funktionsbegriffes.

Eine weitere Arbeit Lobatschewskis wurde in den "Wissenschaftlichen Schriften der Universität Moskau" veröffentlicht (1835).

Sie trägt den Titel "Die Bedingungsgleichungen für die Bewegung und die Lage der Hauptdrehungsachsen eines starren Systems".

Mit verschiedenen Theorien über die Entstehung der Sonnenkorona beschäftigte sich Lobatschewski in einem Bericht über die Beobachtung einer Sonnenfinsternis, die er als Mitglied einer wissenschaftlichen Expedition im Jahre 1842 in Pensa erlebte.

Lobatschewski verfasste auch Arbeiten zur Methodik des Unterrichts, so z. B. im Jahre 1830 die Arbeit "Hinweise für Mathematiklehrer an Gymnasien". Sie hatte Einfluss auf die damalige Ausbildung von Mathematiklehrern und auf die Erhöhung der allgemeinen Kultur der Lehrer und Schüler im Kasaner Schulbezirk. Eine Veröffentlichung dieser Arbeit erfolgte aber erst im Jahre 1948 durch die Akademie der Wissenschaften der UdSSR.



Abb. 15. Emblem der Konferenz "150 Jahre Lobatschewski-Geometrie" in Kasan

8 150 Jahre später in Kasan

"N. I. Lobatschewski vollbrachte zwei große Taten", sagte der Rektor der Kasaner Universität K. P. Sitnikow im Jahre 1951 auf der Konferenz "125 Jahre nichteuklidische Geometrie".

"Erstens machte er die Kasaner Universität zu einer Einrichtung, an der die Wissenschaft und Kultur in voller Blüte standen und an der wahre Patrioten des Vaterlandes erzogen wurden ... Seine zweite Heldentat bestand darin, dass er die nichteuklidische Geometrie entdeckte."

Das Jahr 1976 war in der UdSSR offiziell zum Jahre des 150jährigen Jubiläums der von Lobatschewski geschaffenen "neuen" Geometrie erklärt worden.

In zahlreichen wissenschaftlichen Einrichtungen und Hochschulen fanden Festveranstaltungen und Konferenzen statt. In wissenschaftlichen und populärwissenschaftlichen Zeitschriften erschienen Artikel über die große Entdeckung und über heutige Anwendungen der Geometrie Lobatschewskis in der Mathematik, der Physik und der Mechanik.

Es erschienen aus diesem Anlass auch mehrere größere Publikationen über bzw. von Lobatschewski.

So gab der Verlag der Kasaner Universität eine Monographie von Professor B. L. Laptew über Lobatschewski heraus. Im Moskauer Verlag "Nauka" erschien eine Sammlung von Arbeiten Lobatschewskis, die teilweise erstmalig veröffentlicht wurden.

Von den zahlreichen belletristischen Arbeiten über Lobatschewski ist die überarbeitete Neuauflage des Buches von Tardshemanow zu nennen, die der Tatarische Buchverlag in Kasan herausbrachte.

Am 30. Juni 1976 wurde in der Aula der Kasaner Universität, in der Lobatschewski häufig gesprochen hatte, die wissenschaftliche Allunionskonferenz "150 Jahre Lobatschewski-Geometrie" feierlich eröffnet. An dieser dreitägigen Konferenz nahmen über 250 Wissenschaftler teil, darunter Mathematiker aus Bulgarien, der DDR, aus Frankreich, Jugoslawien, Polen und Ungarn.

In seiner Eröffnungsrede ging der derzeitige Rektor der Kasaner Universität Professor Nushin besonders auf die Verdienste Lobatschewskis um die Universität und auf seine Fürsorge um die Studenten ein. Er sagte u. a.:

"Ich möchte etwas ausführlicher auf das Verhältnis zwischen Lobatschewski als Rektor und den Studenten eingehen. Das war eine große, väterliche Fürsorge um jeden Studenten, um seine Gesundheit, seine Erfolge, seine Erziehung.

Lobatschewski suchte überall nach Talenten und erzog sie behutsam. I. A. Bolzani, ein ehemaliger Verkäufer aus einer Buchhandlung, wurde Professor der Physik. Rosow, der aus Sibirien zu Fuß nach Kasan gekommen war, wurde durch die besonderen Bemühungen von Lobatschewski immatrikuliert. Später war Rosow ein bekannter Mediziner.

Lobatschewski kümmerte sich auch um die Ausbildung von A. M. Butlerow und gab ihm die Möglichkeit, sich nach Beendigung seines Universitätsstudiums im Ausland weiter zu vervollkommen."

In den drei Sektionen der Konferenz wurden über 200 Vorträge gehalten (zur Differentialgeometrie, zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie und zu ihren Anwendungen in der Mechanik und in der Physik).

In der Abschlussitzung überbrachte Prof. Dr. R. Sulanke von der Humboldt-Universität Berlin den Dank der ausländischen Teilnehmer an das Organisationskomitee für die Möglichkeit zur Teilnahme an dieser Konferenz.

Während in der Zeit unmittelbar nach der Gründung der Kasaner Universität vor über 150 Jahren alle Universitätseinrichtungen im wesentlichen im heutigen Hauptgebäude der Universität Platz fanden, so wurde schon unter dem Rektorat von Lobatschewski die Universität um mehr als zehn Gebäude erweitert.



Abb. 16. Hauptgebäude der W. I. Uljanow-Lenin-Universität Kasan heute



Abb. 17. Lobatschewski-Denkmal vor der Kasaner Universität

Vor einigen Jahren erhielt die Physikalische Fakultät der heutigen Kasaner Staatlichen Universität "W. I. Uljanow (Lenin)" ein neues siebzehngeschossiges Gebäude mit modern eingerichteten Laboratorien. Im Jahre 1977 wurde ein weiteres Hochhaus an die Mechanisch-Mathematische Fakultät übergeben.

Die stürmische Entwicklung der Kasaner Universität in der heutigen Zeit ist eng verbunden mit dem Aufblühen Kasans als Hauptstadt der Tatarischen ASSR, einer Stadt, die gegenwärtig fast 4 Million Einwohner zählt und die zu einem wichtigen Zentrum der Industrie, Kultur und Wissenschaft geworden ist.

9 Chronologie

- 1792 Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski wird am 20. November in Nishni-Nowgorod geboren.
- 1795 Geburt des Bruders Aleksei (12. 2. 1795-1. 3. 1870).
- 1797 Tod Schebarschins; Rückkehr der Mutter mit den Kindern Aleksander, Nikolai und Aleksei zu ihren Eltern nach Makarjew.
- 1802 Nikolai Lobatschewski wird mit seinen beiden Brüdern Aleksander und Aleksei in das Kasaner Gymnasium aufgenommen,
- 1807 Beendigung des Gymnasiums; 14. 2. Beginn des Studiums an der Universität Kasan.
- 1807 Tod des Bruders Aleksander durch Ertrinken beim Baden.
- 1808 Ankunft von Bartels in Kasan; Beginn einer inhaltlich hochstehenden und effektiven Ausbildung in Mathematik und Mechanik.
- 1810 Ankunft von Littrow und Bronner in Kasan; Intensivierung der Astronomie- und Physikausbildung.
- 1811 Beendigung des Universitätsstudiums; 3. 8. Verleihung des Magistertitels.
- 1811 Letzte Nachricht über den Vater, der in Ufa lebt.
- 1812 Beginn der offiziellen Lehrtätigkeit an der Universität Kasan; Vorlesungen über Arithmetik und Geometrie in russischer Sprache.
- 1814 26. 4. Verleihung des Adjunktstitels,
- 1816 7. 7. Berufung zum außerordentlichen Professor.
- 1819 16. 12. mit der Reorganisation der Universitätsbibliothek beauftragt.
- 1820 Verleihung des Titels Hofrat; Abreise Bartels; Übertragung seiner Vorlesung, über reine Mathematik an Lobatschewski; als Nachfolger von Bartels Dekan der Physikalisch-Mathematischen Fakultät.
- 1821 Bestätigung als Dekan der Physikalisch-Mathematischen Fakultät.
- 1822 25. 2. Wahl, 24. 5. Bestätigung als ordentlicher Professor; Mitglied des Baukomitees.
- .
- 1824 Verleihung des ersten Ordens (Wladimir-Orden 4. Stufe).
- 1825 Verleihung des Titels Kollegienrat; Vorsitzender des Baukomitees; Leiter der Universitätsbibliothek; Fertigstellung eines Algebralehrbuches, das die Zustimmung des Rates der Universität findet.
- 1826 12. 2. Vortrag vor dem Rat der Universität zum Thema "Grundlagen der Geometrie mit einem strengen Beweis des Parallelen-theorems" - Geburtsstunde der nichteuklidischen Geometrie.
- 1827 Ernennung von Mussin-Puschkin zum Kurator des Kasaner Schulbezirks, im Zusammenhang mit der Ablösung Magnizkis;
30. 7. Bestätigung der Wahl von Lobatschewski zum Rektor der Universität Kasan;
25. 8. Dienstantritt als Rektor (bis 14. 8. 1846).
- 1828 Rede "Über die wichtigsten Fragen der Erziehung" auf der Immatrikulationsfeier der Universität.
- 1829 Aufenthalt von Alexander von Humboldt in Kasan, Begegnung mit Lobatschewski,
- 1830 Cholera-Epidemie in Kasan, energische Handlungen von Lobatschewski als Rektor zur Rettung der Universität.
- 1832 16. 10. Heirat mit Warwara Aleksejewna Moissejewa (27. 12. 1812-18. 1. 1885); Fertigstellung der Arbeit "Über die Anfangsgründe der Geometrie", Übergabe dieser Arbeit an die Akademie der Wissenschaften in Petersburg, negatives Gutachten durch das Akademiemitglied Ostrogradski,

- 1833 Verleihung des Titels Staatsrat.
- 1834 Gründung der "Wissenschaftlichen Schriften der Kasaner Universität";
Manuskriptabgabe für das Lehrbuch "Algebra oder die Berechnung des Finiten" und für
eine Reihe von Artikeln,
- 1835 Geburt des zweiten Sohnes Nikolai (10. 7. 1835-23. 4. 1900).¹⁹
- 1837 Verleihung des Adelstitels an Lobatschewski und an seine Nachkommen, Urkunde
über Adellung und Wappen.
- 1838 Verleihung des Titels Ordentlicher Staatsrat.
- 1840 Erscheinen des Buches "Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien"
(russ.). W.S.K. 1835 bis 1838;
- 1841 Verleihung des Titels Verdienter Professor,
- 1842 Wahl zum korrespondierenden Mitglied der Königlichen Wissenschaftlichen
Gesellschaft in Göttingen, auf Initiative von Gauß.
- 1843 Geburt der Tochter Warwara (1. 7. 1843-nach 1896).
- 1845 Übernahme der Aufgaben als Kurator des Kasaner Schulbezirks,
- 1846 Emeritierung; Ernennung zum Stellvertreter des Kurators; Geburt des Sohnes
Aleksander (1. 6. 1846- 23. 8. 1892).
- 1849 Geburt der Tochter Sofia (8. 10. 1849-15. 7. 1871).
- 1852 Geburt des Sohnes Alekhsei (7. 7. 1852-27. 10. 1883).
- 1855 Wahl zum Ehrenmitglied der Moskauer Universität; Pensionierung.
- 1856 12. 2. Tod Lobatschewskis an Lungenparalyse.

¹⁹In dieser Chronologie sind nur Angaben über diejenigen Kinder Lobatschewskis enthalten, die ihn überlebt haben.

10 Personenverzeichnis

Bartels, Johann Christian Martin (1769-1836)

Sohn eines Zinngießers. Seit seiner Kindheit interessierte er sich für Mathematik. Als Gehilfe des Lehrers Büttner wurde er mit dem jungen Gauß bekannt und freundete sich mit diesem, trotz des Altersunterschiedes von 8 Jahren, durch gemeinsame Begeisterung für die Wissenschaft an. Bei Pfaff und Kästner hatte er gründliche mathematische Kenntnisse erworben. Von 1794 bis 1804 arbeitete er als Lehrer in der Schweiz. An der Universität Jena promovierte er zum Doktor der Philosophie.

Rumowski berief Bartels nach Kasan, wo dieser an der Universität den Lehrstuhl für reine Mathematik bekam und bald Dekan der Physikalisch-Mathematischen Fakultät wurde. Bartels erkannte früh die große Begabung Lobatschewskis und nahm großen Einfluss auf dessen Entwicklung. Er setzte sich auch (gemeinsam mit Littrow) später dafür ein, dass Lobatschewski nicht als "Freidenker" die Universität verlassen musste und zum Militär eingezogen wurde. Die Überlegungen von Lobatschewski zur nichteuklidischen Geometrie verstand Bartels nicht.

Die Tätigkeit von Bartels an der Kasaner Universität führte zu einer bedeutenden Niveauerhöhung der dortigen mathematischen Ausbildung. Im Jahre 1820 folgte er einer Berufung an die Universität Dorpat.

Beltrami, Eugenio (1835-1900)

Italienischer Geometer, Professor an den Universitäten Bologna, Pavia und Rom. Beschäftigte sich mit Differentialgeometrie und entwickelte Gedanken von Gauß weiter. Im Zusammenhang mit kartographischen Aufgaben untersuchte er Flächen mit konstanter Krümmung, insbesondere die Pseudosphäre. Seine Arbeit "Versuch einer Interpretation der nichteuklidischen Geometrie" (1868) war bahnbrechend für die Anerkennung dieser Geometrie.

Bolyai, Janos (1802-1860)

Ungarischer Mathematiker. Sohn des Mathematikprofessors Farkas Bolyai, Bereits als Student der Militäringenieurakademie interessierte er sich für das 5. Postulat von Euklid. Nachdem er die Akademie absolviert hatte, schuf er die Grundlagen der nichteuklidischen Geometrie (1825), arbeitete weitere 6 Jahre daran und veröffentlichte seine Ergebnisse schließlich lediglich in einer Anlage zu einem Werk seines Vaters (Appendix, 1832).

Im Jahre 1837 stellte er in Leipzig eine Arbeit vor, die die Schaffung der Quaternionen vorschlug, deren Theorie später von dem irischen Mathematiker W. R. Hamilton ausgearbeitet wurde. Beide Entdeckungen erhielten jedoch zu Lebzeiten Bolyais keine Anerkennung. Nachdem im Jahre 1840 Arbeiten von Lobatschewski in deutscher Sprache erschienen waren, meinte Bolyai, dass Gauß - unter Benutzung der Ideen und Methoden Bolyais - diese Arbeit unter fremden Namen veröffentlicht hätte.

Bolzani, Tosif (1818-1876)

Italiener, der aber sein ganzes Leben in Russland verbrachte, Als Zwanzigjähriger war er Verkäufer einer Kasaner Buch- und Gemäldehandlung. Lobatschewski wurde zufällig auf ihn aufmerksam, da er ihn im Geschäft beim Lesen einer mathematischen Arbeit fand. Einige Zeit lebte Bolzani in der Familie Lobatschewskis. Danach erhielt er auf Lobatschewskis Vermittlung hin eine Stelle als Aufseher am Kasaner Gymnasium. Zwei Jahre später bestand er als Externer die Examensprüfung des humanistischen Kurses. Er verteidigte später seine Dissertation und wurde Magister (1853), Adjunkt (1854), Doktor der Physik und Chemie an der Moskauer

Universität (1858) und Professor der Physik an der Kasaner Universität (1859).

Braschman, Nikolai Dmitriewitsch (1796-1866)

Adjunkt an der Kasaner Universität (seit 1825), Professor an der Moskauer Universität (seit 1834), korrespondierendes Mitglied der Akademie der Wissenschaften (seit 1855). Er gehörte zu der Kommission, die mit der Einschätzung und Beurteilung der Entdeckung Lobatschewskis beauftragt worden war (1826), die aber kein Gutachten zustande brachte. Braschman ist Mitgründer der Moskauer Mathematischen Gesellschaft.

Bronner, Franz-Xaver (1758-1850)

Schweizer, Lehrer für Mathematik an der Kantonalschule in Aarau. Auf Empfehlung von Bartels wurde er als Professor für Physik 1810 an die Universität Kasan berufen. Hier trug er besonders zur Herausbildung der materialistischen Weltanschauung von Lobatschewski bei, der sein Schüler war. Im Jahre 1817 kehrte er nach Aarau zurück, wo er weiter als Lehrer wirkte.

Bulitsch, Nikolai Nikititsch (1824-1895)

Professor für russische Sprachen an der Universität Kasan, Wissenschaftshistoriker, Rektor der Kasaner Universität (1862-1864). In seiner Rede am Grabe Lobatschewskis rief er u. a. zu einer kritischen Haltung gegenüber der Regierung auf. Gegen ihn wurde Anklage wegen politischer Unzuverlässigkeit und Gottlosigkeit erhoben. Der heraufziehende Skandal konnte vertuscht werden. Im Jahre 1860 wurde er wegen "schädlicher Gedanken in den Vorlesungen" von der Lehrtätigkeit an der Universität suspendiert. Ein Jahr später durfte er wieder als Professor arbeiten.

Butlerow, Aleksander Michailowitsch (1828-1886)

Chemiker, Student der Kasaner Universität (1844-1849), Professor an der Universität Kasan (seit 1854), Leiter des Lehrstuhls für organische Chemie an der Petersburger Universität (seit 1869), Akademiemitglied (seit 1874).

Cayley, Arthur (1821-1895)

Englischer Mathematiker, Professor an der Universität Cambridge (seit 1863). Schuf die Grundlagen der algebraischen Geometrie, führte in der projektiven Geometrie die Maßtheorie ein, erzielte weitere wichtige Ergebnisse in zahlreichen anderen Gebieten.

Euklid von Alexandria (etwa 365-etwa 300 v. u. Z.)

Griechischer Mathematiker, der in Alexandria lebte. Verfasste die "Elemente", in denen das mathematische Wissen der damaligen Zeit zusammengefasst war. Die Stoffdarstellung beginnt mit Definitionen, Postulaten und Axiomen. Die einzelnen Sätze werden daraus auf logischem Wege hergeleitet. Dem Studium der Geometrie legte man in der Folgezeit fast immer diesen Aufbau zugrunde.

Fuchs, Karl (1776-1846)

Absolvent der Universität Göttingen, promovierte in Marburg zum Doktor der Medizin (1798). Im Jahre 1800 siedelte er nach Petersburg über, wo er als praktischer Arzt tätig war. 1805 kam er nach Kasan und wurde Professor an der dortigen Universität, an der er als Arzt, als Dekan der Medizinischen Fakultät (1820-1823) und als Rektor (1823-1827) tätig war.

Neben seiner wissenschaftlichen Arbeit an der Universität war Fuchs in Kasan auch als praktischer Arzt tätig und verfasste eine Reihe von Arbeiten zur Geschichte, zur Ethnographie, zur Statistik und zu ökonomischen Problemen Kasans und des Wolgagebiets. Sein Haus war ein Zentrum des kulturellen Lebens der Stadt.

Gauß, Carl Friedrich (1777-1855)

Deutscher Mathematiker, studierte an der Universität Göttingen (1795 bis 1798). War Direktor der Sternwarte der Göttinger Universität (seit 1807 bis an sein Lebensende). Wegen seiner fundamentalen Arbeiten auf verschiedenen mathematischen Gebieten, in der Physik und in der Astronomie bezeichnete man ihn als den "Fürst der Mathematiker".

Da er sich für Lobatschewskis Arbeiten interessierte, begann er im Alter von 63 Jahren die russische Sprache zu erlernen. Obwohl Lobatschewski auf Vorschlag von Gauß zum korrespondierenden Mitglied der Königlich Wissenschaftlichen Gesellschaft in Göttingen gewählt wurde, konnte sich Gauß zu einer öffentlichen Anerkennung der Entdeckung von Lobatschewski in seinen Arbeiten nicht entschließen.

Hilbert, David (1862-1943)

Deutscher Mathematiker, Professor an der Universität Göttingen (seit 1902). Besaß einen großen Einfluss auf die Entwicklung der Mathematik im 20. Jahrhundert. Hilbert formulierte auf dem Internationalen Mathematikerkongress in Paris (1900) in seinem Vortrag "Mathematische Probleme" 23 Probleme, die als grundlegende Probleme in der Folgezeit viele Mathematiker beschäftigten. Die Arbeiten Hilberts zu den Grundlagen der Geometrie (1898-1902) und die Schaffung des ersten vollständigen und widerspruchsfreien Axiomensystems für die Geometrie durch ihn dienten nicht nur in der Geometrie, sondern auch in anderen Gebieten der Mathematik (z. B. in Arbeiten von Weyl, Peano und Gödel) als Grundlage für die Entwicklung der Axiomatik.

Nach der Machtergreifung der Faschisten (1933), als auch viele Mathematiker aus Deutschland emigrieren mussten, aus Göttingen z. B. Weyl, Courant, Noether, blieb Hilbert, schon in hohem Alter, vereinsamt zurück.

Jakowkin, Ilja Fedorowitsch (1764-1836)

Direktor des Kasaner Gymnasiums, später Professor für Geschichte und Geographie an der Universität Kasan, zeitweiliger Rektor. Egoistischer und herrschsüchtiger Mensch, der den talentierten Mathematiklehrer G. I. Kortaschewski von der Universität vertrieb. Im Jahre 1849 wurde Jakowkin von der Universität entlassen.

Kortaschewski, Grigori Iwanowitsch (1777-1840)

Absolvent der Moskauer Universität, Mathematiklehrer am Kasaner Gymnasium, Adjunkt an der Kasaner Universität (seit 1805). Hatte als talentierter und hochgebildeter Pädagoge wesentlichen Einfluss auf die Entwicklung des Interesses Lobatschewskis an der Mathematik. Wurde von Jakowkin aus der Universität vertrieben und ging nach Petersburg (1807). Er war später Kurator des Minsker und darauf des Wilensker Schulbezirks und Senator.

Klein, Felix (1849-1925)

Deutscher Mathematiker und Lehrer, Schüler von Plücker an der Universität Bonn (1865-1868), Gründer der "Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften", langjähriger Redakteur der "Mathematischen Annalen" (seit 1876), Verfasser des "Erlanger Programms", Organisator der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission (IMUK). In einer Reihe

von Arbeiten beschäftigte er sich mit nichteuklidischer Geometrie, als deren Schöpfer er Gauß ansah.

Knorr, Ernst (1805-1879)

Studierte in Berlin Mathematik und Physik (1823-1827), promovierte dort (1830) zum Doktor der Philosophie. War in der Königlichen Bibliothek und als Physiklehrer im Joachimsthaler Gymnasium tätig. Wurde an die Universität Kasan berufen und arbeitete dort (seit 1833) als Professor für theoretische und Experimentalphysik. Er wurde mit den Arbeiten Lobatschewskis bekannt, über die er auch an Gauß berichtete, verstand aber nicht den revolutionierenden Inhalt dieser Entdeckung. Aus Gesundheitsgründen wurde Knorr nach Kiew versetzt (1846), wo er (bis 1858) als Professor für Physik und physikalische Geographie tätig war.

Kotelnikow, Aleksander Petrowitsch (1865-1944)

Sowjetischer Geometer und Mechaniker. Professor in Kiew, Kasan und Moskau. Arbeitete über die Theorie der Quaternionen und komplexe Zahlen und deren Anwendungen in Geometrie und Mechanik. Schuf Grundlagen der Mechanik in nichteuklidischen Räumen.

Kotelnikow, Peter Iwanowitsch (1809-1879)

Professor für Mathematik und Mechanik an der Universität Kasan (seit 1837). Einer der wenigen Zeitgenossen Lobatschewskis, die den revolutionierenden Charakter seiner Entdeckung erkannten. Er sprach davon, dass diese "bewunderungswürdige Arbeit" Lobatschewskis "früher oder später ihre Würdigung finden" werde.

Kupfer, Adolf (1799-1865)

Physikprofessor an der Universität Kasan (1823-1828), Akademienmitglied (seit 1828). Er gehörte zu der Kommission, die mit der Einschätzung und der Beurteilung der Entdeckung Lobatschewskis beauftragt worden war (1826), die aber kein Gutachten zustande brachte,

Littrow, Josef (1781-1840)

Erster Professor für Astronomie an der Universität Kasan (1810-1816). Ab 1816 arbeitete er an der Sternwarte in Ofen und war später ein bekannter Astronom und Direktor der Wiener Sternwarte.

Lobatschewskaja, Praskowja Aleksandrowna (1773-1840)

Mutter von N. I. Lobatschewski. Wenig gebildete, aber energische Frau, Trotz der Trunksucht ihres Mannes und seiner späteren Abwesenheit vermochte sie es, ihren drei Söhnen eine gute Erziehung und eine vorzügliche Bildung zukommen zu lassen. Noch in der Zeit, als N. I. Lobatschewski bereits Rektor der Universität Kasan war, stand sie ihm mit Ratschlägen zur Seite, die sich auf ihre große Lebenserfahrungen gründeten.

Lobatschewskaja, Warwara Aleksejewna (1812-1885) Heiratete 1832 N. I. Lobatschewski, Tochter des Kasaner Gutsbesitzers A. F. Moissejew. Der Familie gehörte z. B. das Dorf Belowolshskaja Slobotka an der Wolga, wo sich Lobatschewski von seiner Arbeit zu erholen pflegte.

Lobatschewski, Aleksander Iwanowitsch (1790-1807)

Älterer Bruder von N. I. Lobatschewski. Besuchte mit seinen Brüdern das Kasaner Gymnasium und studierte von 1805 an der Universität Kasan. Während des Studiums erkrankte er im Sommer 1807 beim Baden im Fluss Kasanka, einem Nebenfluss der Wolga.

Lobatschewski, Aleksei Iwanowitsch (1795-1870)

Jüngerer Bruder von N. I. Lobatschewski. Besuchte mit seinen Brüdern das Kasaner Gymnasium und die Universität Kasan. Wurde Adjunkt (1817), hatte aber keine besonderen Neigungen zur Wissenschaft, erhielt nicht den Professorentitel und wurde im Jahre 1823 im Range eines Hofrates entlassen. Arbeitete später in der Industrie, war Direktor einer Tuchfabrik.

Lobatschewski, Iwan Maksimowitsch (1760-nach 1811)

Vater von N. I. Lobatschewski. Ziemlich unfähiger Beamter in Nishni-Nowgorod. Ließ die Familie mittellos zurück und ging nach Ufa. Trank viel. Todesjahr unbekannt.

Magnizki, Michail Leontjewitsch (1778-1844)

Revisor, danach Kurator des Kasaner Schulbezirks (1819-1826). Vertrieb die besten Professoren der Kasaner Universität und wollte die Universität wieder schließen lassen. Katastrophale Folgen seiner "Revision". Die sich häufenden Klagen konnte der neue Unterrichtsminister nicht länger überhören, so dass vom Zaren Nikolaus 1. Anfang 1826 eine erneute Revision an der Universität Kasan angeordnet wurde. Im Ergebnis dieser Revision wurde Magnizki seines Amtes enthoben und in Reval (heute Tallin) interniert.

Mussin-Puschkin, Michail Nikolajewitsch (1795-1862)

Kurator des Kasaner Schulbezirks (1827-1845), danach Kurator des Petersburger Schulbezirks und Senator. Verwandter der Frau von N. I. Lobatschewski. Gemeinsam mit N. I. Lobatschewski brachte er die Kasaner Universität auf ein hohes Niveau.

Nikolski, Grigori Borisowitsch (1785-1844)

Professor der Mathematik an der Universität Kasan (seit 1820) und Rektor der Universität (1820-1823). Vertrauter des Kurators Magnizki. Führte keine wissenschaftlichen Arbeiten durch, ging in seinen Lehrveranstaltungen von den göttlichen Anfängen aus.

Poincare, Henri (1854-1942)

Französischer Mathematiker, Professor an der Universität Paris (seit 1886), Mitglied der Pariser Akademie der Wissenschaften (seit 1887). Arbeitete erfolgreich auf sehr vielen mathematischen Gebieten.

Popow, Aleksander Fedorowitsch (1815-1879)

Mathematiker, Schüler von N. I. Lobatschewski. Nachfolger Lobatschewskis als Leiter des Lehrstuhls für reine Mathematik an der Universität Kasan (seit 1846), korrespondierendes Mitglied der Petersburger Akademie der Wissenschaften (seit 1866).

Riemann, Bernhard (1826-1866)

Deutscher Mathematiker, Schüler von Gauß und Weber, Professor an der Universität Göttingen (seit 1857). Starb an Tuberkulose. Schuf eine neue (geometrische) Auffassung von der Theorie der analytischen Funktionen, entwickelte die Theorie der konformen Abbildungen weiter und beschäftigte sich mit der Flächentheorie; untersuchte die Zetafunktion, auf deren Grundlage später ein Gesetz über die Verteilung der Primzahlen aufgestellt worden ist. Seine wissenschaftlichen Hauptverdienste sind die Ausarbeitung einer Raumtheorie und die von ihm geschaffene elliptische nichteuklidische Geometrie.

Rumowski, Stepan Jakowlewitsch (1734-1812)

Russischer Astronom, Schüler von Euler und Lomonossow, Vizepräsident der Petersburger Akademie der Wissenschaften, Kurator des Kasaner Schulbezirks (seit 1803), Gründer der Universität Kasan. Förderte die Berufung von westeuropäischen Wissenschaftlern an russische Universitäten.

Schebarschin, Sergei Stepanowitsch (gestorben 1797)

Landmesser in Nishni-Nowgorod, Erzieher von N. I. Lobatschewski. Erwies P. A. Lobatschewskaja materielle Unterstützung, als deren Mann die Familie im Stich ließ und wegzog.

Simonow, Iwan Michailowitsch (1794-1855)

Professor der Astronomie an der Universität Kasan, Schüler von Littrow, Freund von N. I. Lobatschewski. Absolvierte gemeinsam mit N. I. Lobatschewski die Universität Kasan, Wurde mehrmals zum Dekan der Physikalisch-Mathematischen Fakultät gewählt, Er gehörte zu der Kommission, die mit der Einschätzung und der Beurteilung der Entdeckung Lobatschewskis beauftragt worden war (1826), die aber kein Gutachten zustande brachte.

Sinin, Nikolai Nikolajewitsch (1812-1820)

Russischer Chemiker, Student an der Universität Kasan (1830-1833), Professor der Kasaner Universität (seit 1841), Professor an der Petersburger Medizinisch-Chirurgischen Akademie (seit 1848), Akademiemitglied (seit 1865). Machte viele Entdeckungen in der Chemie. Fand die nach ihm benannte Sinin-Reaktion, gab ein Verfahren zur Umwandlung von Nitrobenzol in Anilin an. Seine Arbeiten waren eine der Grundlagen für den Beginn einer industriellen Herstellung von Anilin in Deutschland.

11 Literatur-Verzeichnis

Verwendete Abkürzungen:

- C.J. Crelles Journal für reine und angewandte Mathematik
W.S.K. Wissenschaftliche Schriften der Universität Kasan, Zeitschrift Kasan
W.S.M. Wissenschaftliche Schriften der Universität Moskau, Zeitschrift Moskau
K.B. Kasaner Bote, Zeitschrift Kasan. Zeitschrift Berlin
A.K.R. Archiv für wissenschaftliche Kunde von Russland, Zeitschrift Berlin

1. Originalarbeiten Lobatschewskis

- [1] Über die Resonanz oder wechselseitige Schwingung von Luftsäulen (russ.). K.B. 1828
[2] Über die Anfangsgründe der Geometrie (russ.). K.B. 1829, 1830; deutsch: in [22].
[3] Über die wichtigsten Fragen der Erziehung, Rede vom 5. Juli 1828 (russ.). K.B. 1832.
[4] Algebra oder die Rechnung mit endlichen Größen (russ.). Kasan 1834.
[5] Erniedrigung des Grades einer zweigliedrigen Gleichung, wenn der um eins verminderte Grad durch acht teilbar ist (russ.). W.S.K. 1834.
[6] Über die Konvergenz der trigonometrischen Reihen (russ.). W.S.K. 1834.
[7] Die Bedingungsgleichungen für die Bewegung und die Lage der Hauptdrehungsachsen eines starren Systems (russ.) W.S.M. 1835.
[8] Vorgestellte Geometrie (russ.). W.S.K. 1835; französisch: C.J. 1837, deutsch: [25].
[9] Ein Verfahren, um sich von der Konvergenz unendlicher Reihen zu überzeugen und sich dem Werte von Funktionen sehr großer Zahlen anzunähern (russ.). W.S.K. 1835.
[10] Neue Anfangsgründe der Geometrie mit einer vollständigen Theorie der Parallellinien (russ.). W.S.K. 1835 bis 1838; englisch: [21], französisch: [23], deutsch: [22].
[11] Anwendung der vorgestellten Geometrie auf einige Integrale (russ.). W.S.K. 1836, deutsch: [25].
[12] Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien (deutsch). Berlin 1840; französisch: [18], englisch: [20].
[13] Über die Konvergenz der unendlichen Reihen (deutsch): In: Meteorologische Beobachtungen aus dem Lehrbezirk der Kaiserlich Russischen Universität Kasan, herausgegeben von E. Knorr, Kasan 1841.
[14] Die totale Sonnenfinsternis in Pensa am 26. Juni 1842 (russ.). W.S.K. 1842.
[15] Ausführliche Analyse der von dem Magister A. F. Popow zur Erlangung des Doktorgrades in der Mathematik und Astronomie vorgelegten Dissertation, betitelt: "Über die Integration der Differentialgleichungen der Hydrodynamik, wenn diese auf lineare Form gebracht sind" (russ.). In: Anhang der Dissertation, Kasan 1845.
[16] Der Wert einiger bestimmter Integrale (russ.). W.S.K. 1852; deutsch: A.K.R. 1855.
[17] Pangeometrie (russ.). W.S.K. 1855, französisch: Kasan 1856 und [26], deutsch: A.K.R. 1858 und [24], italienisch: [19].

2. Übersetzungen von Arbeiten Lobatschewskis

- [18] Etudes geometriques sur la theorie des paralleles par I. N. Lobatschewsky, traduit de l'allemand. Suivie d'un extrait de la correspondance de Gauß et Schumacher, Paris 1866.

- [19] Pangeometria o sunto di geometria fondata sopra una teoria generale e rigorosa delle parallele, per N. Lobatschewsky (Versione dal Francese). Giornale di Matematiche, Neapel 1867.
- [20] Geometrical Researches on the theory of parallels, by N. Lobatschewsky. translated from the Original by G. B. Halsted Austin, Texas 1891.
- [21] Englische Übersetzung von [10] durch Halsted 1897 in: Texas Acad. 2, Austin.
- [22] N. I. Lobatschewski: Zwei geometrische Abhandlungen, B. G. Teubner, Leipzig 1898; enthält [2] und [10].
- [23] Französische Übersetzung von [10] durch Mallieux 1900 in: Liege Mm. Soc. Sci. (3) 2.
- [24] N. I. Lobatschewski: Pangeometrie. Übersetzt von Liebmann. Ostwalds Klassiker 130, Leipzig 1902.
- [25] N. I. Lobatschewski: Imaginäre Geometrie und Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale. Übersetzt von Liebmann, Leipzig 1904.
- [26] Französische Ausgabe von [17] Paris 1905.
3. Heutige Ausgaben der Werke von Lobatschewski
- [27] N. I. Lobatschewski: Vollständige gesammelte Werke (russ.). Verlag Gostechisdat, Moskau-Leningrad 1946-1951
- Band I. Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien
Über die Anfangsgründe der Geometrie
- Band II. Geometrie N
Neue Anfänge der Geometrie mit einer Theorie der Parallelen
- Band III. Vorgestellte Geometrie
Anwendungen der vorgestellten Geometrie auf einige Integrale
- Band IV. Arbeiten zur Algebra
- Band V. Arbeiten zur Analysis, zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und zur Mechanik, zur Astronomie.
- [28] N. I. Lobatschewski: Wissenschaftlich-pädagogischer Nachlass, Leitung der Universität, Fragmente, Briefe (russ.). Verlag Nauka, Moskau 1976.
4. Literatur über Lobatschewski und seine Geometrie (Auswahl)
- [29] Aleksandrow, P. S.: N. I. Lobatschewski - ein großer russischer Mathematiker (russ.). Moskau 1956.
- [30] Becker, O.: Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung. Freiburg/München 1954.
- [31] Biographien bedeutender Mathematiker, Hrsg. von H. Wußing und W. Arnold. Berlin 1975.
- [32] Euklides von Alexandria: Die Elemente. Nach Heibergs Text aus dem Griechischen. Hrsg. von C. Thaer. 1. Teil (Buch I bis II). Ostwalds Klassiker 235. Leipzig 1933.
- [33] Gauß, C. F.: Werke. Hrsg. von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 12 Bände. 1863 bis 1933,
- [34] Gauß, C. F.: Briefwechsel mit H. C. Schumacher. Hrsg. von C. A. F. Peters. 6 Bände. Altona 1860-1865.
- [35] Kagan, W. F.: Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski (russ.). Moskau 1944.

- [36] Klein, F.: Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Untersuchungen. Das Erlanger Programm. Hrsg. von H. Wußing. Ostwalds Klassiker 253. Leipzig 1974.
- [37] Klein, F.: Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie. Berlin 1928.
- [38] Laptew, B. L.: Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski (russ.), Kasan 1976. .
- [39] Materialien für die Biographie von N. I. Lobatschewski. Zusammengestellt von L. B. Modsalewski (russ.). Moskau- Leningrad 1948. .
- [40] Molodschi, W. N.: Studien zu philosophischen Problemen der Mathematik. Berlin 1977.
- [41] Norden, A. P.: Elementare Einführung in die Lobatschewskische Geometrie. Berlin 1958.
- [42] Reichardt, H.: Gauß und die nichteuklidische Geometrie. Leipzig 1976.
- [43] Sagoskin, N. P.: Geschichte der Kasaner Universität von 1804 bis 1904. 4 Bände (russ.). Kasan 1902-1904.
- [44] Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie. Hrsg. von F. Engel und P. Stäckel. 1. Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski. Leipzig 1898.
- [45] Wußing, H.: Carl Friedrich Gauß. Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner, Bd. 15. 2. Aufl. Leipzig 1976.