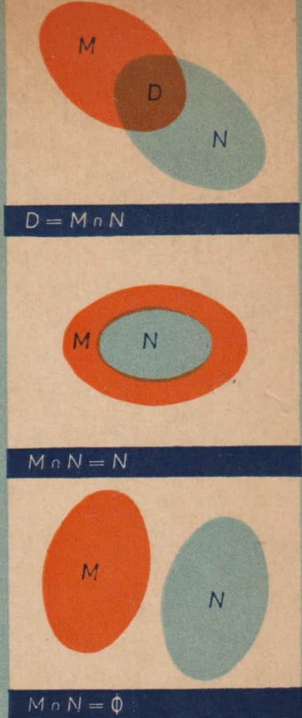
DIETER HAUPT



Mengenlehre

leicht verständlich

DIETER HAUPT

MENGENLEHRE

leicht verständlich

Eine Einführung in die Grundzüge der Mengenlehre

5. Auflage

Mit 62 Bildern, 100 Beispielen und 48 Aufgaben

mit Lösungen

VEB FACHBUCHVERLAG LEIPZIG

5. Auflage
Lizenznummer 114-210/23/71 · Deutsche Demokratische Republik
ES 20 C 2 (19 B 1)
Verlagslektor: Alfred Sommer
Satz: VEB Druckhaus „Maxim Gorki", 74 Altenburg
Fotomechanischer Nachdruck: Leipziger Druckhaus · Grafischer Großbetrieb · III/18/203
Redaktionsschluß: 15. 12. 1970
Bestellnummer 545 569 0

Vorwort

Mit den ständig wachsenden Anforderungen, die wir an die Technik stellen, müssen Ingenieure und Wissenschaftler immer neue, immer vollkommenere Methoden entwickeln, mit denen die auftretenden Probleme gelöst werden können. Dabei kommt der Mathematik eine große Bedeutung zu.
Im Fundament der Mathematik hat es nun in den letzten Jahren große Umwandlungen gegeben, die zu strukturellen Vereinfachungen, Vereinheitlichungen und zu besserer logischer Durchdringung der einzelnen mathematischen Disziplinen geführt haben. Wir verstehen heute unter Mathematik die Lehre von den Mengen mit aufgeprägten Strukturen, von denen die wichtigsten einerseits die topologischen Strukturen, andererseits die Strukturen mit Relationen sind.
Die vorliegende Schrift will dem Leser einen Einblick in die Grundlagen der Mengenlehre geben. Sie erläutert in Verbindung mit einfachen, lebensnahen Beispielen, für die keine großen Vorkenntnisse nötig sind, die grundlegenden Beziehungen, die zwischen Mengen gelten. An Hand von Übungen, die den Abschnitten angeschlossen und deren Lösungen im Anhang zu finden sind, kann der Leser prüfen, ob er den Stoff verstanden hat und auf einfache Beispiele anzuwenden vermag.
Diese Schrift soll allgemeinverständlich sein. Deshalb wurde auf Beweise, die für denjenigen, der mit den Denk- und Arbeitsweisen der Mathematik noch nicht völlig vertraut ist, zu schwierig sind, verzichtet. Jedoch findet der interessierte Leser stets Hinweise, in welchem Buch er diese Beweise nachlesen kann.
Der Autor hat sich mit dem Buch die Aufgabe gestellt, jedem Interessenten, sei er Schüler der polytechnischen Oberschule, Lehrer, Student oder ein an seiner Weiterbildung Arbeitender, zu Kenntnissen über dieses Grundlagengebiet der Mathematik zu verhelfen.
Für Mitteilungen von Erfahrungen bei der Arbeit mit dem Buch sowie für Anregungen, die zur Verbesserung bei evtl. späteren Auflagen dienen, sind wir jederzeit dankbar.

Verfasser und Verlag

Inhaltsverzeichnis

Verzeichnis der verwendeten Symbole

große Druckbuchstaben	Mengen
kleine Buchstaben	Elemente, Kardinalzahlen
kleine deutsche Buchstaben	transfinite Kardinalzahlen
kleine griechische Buchstaben	Ordnungstypen, -zahlen
$\in$	Element von
$\notin$	nicht Element von
$M = \{a, b, c, d\}$	Mengenfestlegung durch vollzählige Angabe der Elemente
$S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$	endliche Menge
$T = \{a, b, c, \ldots\}$	unendliche Menge
$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$	abzählbare unendliche Menge
$\dot{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
Γ	Menge der ganzen Zahlen
P	Menge der rationalen Zahlen
Δ	Menge der reellen Zahlen
Z	Menge der komplexen Zahlen
$\supseteqq$	umfaßt
$\supset$	umfaßt echt
$\cap$	geschnitten
$\cup$	vereinigt
$M \times N$	Produktmenge
$M \setminus N$	Differenzmenge
M / N	Belegungsmenge
$\emptyset$	leere Menge (Nullmenge)
$\langle\,\rangle$	geschlossenes Intervall
$(\,)$	offenes Intervall
$\prec$	Ordnungsrelationszeichen
$\sim$	Äquivalenzzeichen
$\simeq$	Ähnlichkeitszeichen
kleine halbfette lateinische Lettern	Aussagen
$\neg$	nicht (Negationszeichen)
$\wedge$	und (Konjunktionszeichen)
$\vee$	oder (Alternativzeichen)
$\Rightarrow$	wenn — so (Implikationszeichen)
$\Leftrightarrow$	genau dann, wenn (Äquivalenzzeichen)

1. Einführung

In einer Zeitung konnte man lesen:

„Als die Kosmonauten die Stadt durchfuhren, wurden sie von einer jubelnden Menge begeistert begrüßt."

Der Schreiber dieser Zeilen spricht von einer Menge und möchte damit aussagen, daß es viele Menschen waren, die sich zur Begrüßung angesammelt hatten. Diese Gleichsetzung des Begriffs Menge mit viel ist im deutschen Sprachgebrauch üblich.

Von dieser Tatsache ging auch ein Lehrer aus, der im Mathematikunterricht den Begriff Menge erarbeitete.

Er hatte auf einem Tisch, wirr durcheinander, Hefte, Bauklötzer, Stäbchen und Glaskugeln liegen. Sein Auftrag an einen Schüler lautete: „Ordne diese Dinge so, daß alle Dinge, die zusammengehören, beieinander liegen!"

Nachdem dies getan war, wies er auf die Glaskugeln.

„Wieviel Kugeln sind es?"

Auf diese Frage hin wollten die Schüler abzählen. Er verwehrte es ihnen mit dem Hinweis, er wolle keine Zahl, sondern es nur ganz allgemein hören, wobei er unter „allgemein" Wörter der Umgangssprache verstand. Die Schüler schlugen vor: „Viele", „ein ganzer Haufen" und schließlich „eine Menge".

Damit war der Begriff Menge erarbeitet, und im folgenden wurde dann von der Menge der Hefte, der Bauklötzer usw. gesprochen. Es war aus den Beispielen, die die Schüler im weiteren Verlauf des Unterrichts brachten, deutlich zu spüren, wie sie den doch jetzt „mathematischen" Begriff Menge mit der Vorstellung von vielen Dingen verbanden.

In der anschließenden Auswertung wurde festgestellt, daß diese Erläuterung des Mengenbegriffs nicht mathematisch einwandfrei war.

Warum wohl?

Der Mathematiker verbindet mit dem Begriff Menge nicht allein die Vorstellung von vielen Dingen. Cantor, der Begründer der Mengenlehre, gab für eine Menge die Erklärung:

> Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens — welche die Elemente der Menge genannt werden — zu einem Ganzen[1].

---

[1] Cantor, G.: Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. Halle, 1895

Damit wollte er ausdrücken:

> Eine Menge ist eine Zusammenfassung:
> zusammengefaßt werden Objekte, die man Elemente der Menge nennt. Diese Objekte können wir sehen — oder wir stellen sie uns vor. Das bedeutet, daß „gedankliche Dinge" Elemente einer Menge sein können.
> Es werden *bestimmte* Objekte zusammengefaßt.
> Bestimmt ist ein Element dann, wenn feststeht, ob es zur Menge gehört oder nicht.
> Diese Objekte müssen *wohlunterschieden* sein.
> Das ist immer dann der Fall, wenn alle Objekte untereinander verschieden sind. Deshalb kann in einer Menge ein Element nicht mehrmals vorhanden sein.

Wie man feststellt, ist in dieser Erklärung keine Aussage über die Anzahl der Objekte getroffen, die zu einer Menge zusammengefaßt werden. Dementsprechend kann es Mengen geben, die nur ein Element enthalten.

BEISPIEL 1

Die Menge aller positiven geraden Primzahlen.

Das ist die Zahl $+2$. Sie ist dadurch bestimmt, daß sie eine positive gerade Zahl und auch eine Primzahl ist.

Eine solche Menge heißt Einermenge.

Auch kennt man in der Mathematik genau eine leere Menge, und sie ist dadurch gekennzeichnet, daß sie kein Element hat.
Natürlich kommen auch Mengen vor, die sehr, sehr viele Elemente haben.

BEISPIEL 2

Die Menge aller natürlichen Zahlen.

Das sind die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ... usw.
In diesem Falle sagt man, der Menge gehören unendlich viele Elemente an.

Schon diese Beispiele zeigen, daß in der Bedeutung von viel das Wort „Menge" in der Mathematik nicht benutzt wird. Liest man sich nach diesen einleitenden Worten nochmals die CANTORsche Mengenbeschreibung durch, so fällt auf, daß diese sehr allgemein gehalten ist. Bereits die Formulierung: „Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens" (dazu gehören Bleistifte und Flugzeuge, aber auch Begriffe wie Glück oder Zartgefühl) deutet darauf hin, daß sich der Mengenbegriff CANTORS nicht nur auf Mengen mit mathematischen Objekten beschränken sollte.
Aber gerade diese Weite der Begriffsbildung erwies sich in der Vergangenheit als verhängnisvoll.
Wenn man sich in der Bildung von Mengen keinerlei Zurückhaltung auferlegt, muß man auch Mengen wie „die Menge aller abstrakten Begriffe"

oder auch die „Menge aller Mengen" zulassen. Diese Mengen enthalten sich selbst als Element: Die Menge aller abstrakten Begriffe ist selbst ein abstrakter Begriff, und die Menge aller Mengen ist selbst eine Menge.
Auf Grund der durch die CANTORsche Erklärung gegebenen Möglichkeit, uneingeschränkt Mengen bilden zu können, ergaben sich Widersprüche[1]. Deshalb ist eine „Definition", wie sie CANTOR für eine Menge zu geben versucht hat, wenig sinnvoll.
Was aber verbirgt sich nun wirklich hinter dem mathematischen Begriff „Menge"? Um diese Frage einigermaßen verständlich und ausführlich erklären zu können, ist es zunächst notwendig, einige Grundbegriffe der mathematischen Logik zu erläutern.

[1] Auf diese wird in Abschnitt 5. näher eingegangen

2. Grundbegriffe der zweiwertigen Aussagenlogik

2.1. Der Begriff Aussage

Als Beispiel werde einmal angenommen, daß ein Mensch sich ein Stück Kreide betrachtet. Dabei kann er bestimmte (sinnvolle!) Feststellungen machen (z. B., daß die Kreide weiß ist).
Will er nun seine Erkenntnisse einem anderen Menschen mitteilen, so wird das dazu führen, daß er über das Stück Kreide etwas aussagt. Dieses Aussagen kann in mündlicher oder schriftlicher Form erfolgen, d. h., die gewonnene Erkenntnis kann ausgesprochen oder aufgeschrieben werden.
Es kann natürlich auch so sein, daß die Erkenntnis aufgeschrieben und ausgesprochen wird. Der Mensch kann also entweder eines von beiden oder beides zugleich tun. Demzufolge kann zunächst erklärt werden:

Unter einer Aussage versteht man ein sinnvolles sprachliches oder schriftliches Gebilde ...

Nun ist es ja im allgemeinen so, daß eine Erkenntnis wahr oder falsch sein kann. Diese gleichen Eigenschaften kommen natürlich dann auch der getroffenen Aussage zu. Dabei ist es im täglichen Leben so üblich, daß eine Aussage genau dann wahr heißt, wenn sie besagt, daß sich gewisse Dinge in einer gewissen Weise verhalten, und es in Wirklichkeit so ist, daß sich diese Dinge in der ausgesagten Weise verhalten. Verhalten sich die Dinge nicht so, wie ausgesagt wird, so heißt die Aussage falsch. Der gleiche Sachverhalt liegt auch bei den Aussagen vor, die in der zweiwertigen Aussagenlogik betrachtet werden. An sie wird jedoch noch eine wichtige Forderung gestellt:

Jede Aussage muß entweder wahr oder falsch sein!

Diese Forderung ist so inhaltsschwer, daß sie einer näheren Erläuterung bedarf. Dazu stelle man sich einen großen Raum vor. Dieser soll so beschaffen sein, daß er Platz für alle und nur die Aussagen bietet, die es gibt und die die eben gestellte Forderung erfüllen. Der Raum habe zwei Ausgänge. Jeder führt in ein Klassenzimmer. Nun kommt jemand und ruft:

„Alle wahren Aussagen in das rechte Zimmer! Alle falschen Aussagen in das linke Zimmer!"

Was geschieht?

1. Jede Aussage weiß sofort, daß sie in genau eines der beiden Zimmer gehen muß und in welches.

Es gibt im Raum keine Aussage, die in beide Zimmer zugleich müßte, denn es ist keine Aussage vorhanden, die sowohl wahr als auch falsch ist. Im Raum befinden sich ja nur die Aussagen, auf die die gestellte Forderung zutrifft.

Dieser Sachverhalt (Es gibt keine Aussage, die sowohl wahr als auch falsch ist) heißt das *Prinzip vom ausgeschlossenen Widerspruch*.

2. Nachdem jede Aussage in ihr Klassenzimmer gegangen ist, muß der Raum leer sein.
   Entsprechend der gestellten Forderung gibt es im Raum keine Aussage, für die ein Drittes (z. B. halbwahr, nicht ganz richtig o. ä.) zuträfe.

Dieser Sachverhalt (Jede Aussage ist wahr oder falsch) liegt dem *Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten* zugrunde.

Die eingangs gestellte Forderung:

Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch,

die auf den eben erläuterten Prinzipien basiert, heißt **Satz der Zweiwertigkeit.** Er ist die Grundlage der klassischen zweiwertigen Aussagenlogik[1].

Damit ist die folgende Begriffserklärung verständlich geworden:

Unter einer Aussage versteht man ein sinnvolles sprachliches oder schriftliches Gebilde, welches die Eigenschaft hat, entweder wahr oder falsch zu sein.

Kehren wir nun nochmals zu unserem Beispiel zurück.

Die Aussagen sind in die Klassenzimmer gegangen. Dadurch sind sie in zwei Klassen[2] eingeteilt. Eine Klasse enthält genau die wahren, die andere Klasse genau die falschen Aussagen.

Man nennt diese Klassen die *Wahrheitswerte* und kennzeichnet sie mit $\boldsymbol{W}$ bzw. $\boldsymbol{F}$.

Die Wahrheit bzw. Falschheit einer Aussage $\boldsymbol{a}$ ist dann gleichwertig damit, daß $\boldsymbol{a}$ zur Klasse $\boldsymbol{W}$ bzw. $\boldsymbol{F}$ gehört oder, wie man auch sagt, daß $\boldsymbol{a}$ den Wahrheitswert $\boldsymbol{W}$ bzw. $\boldsymbol{F}$ hat.

Damit ist alles wesentliche über den Begriff Aussage, soweit er im Rahmen dieses Buches benötigt wird, erläutert.

---

[1] Man beachte, daß der Satz der Zweiwertigkeit nur aussagt, daß jede Aussage entweder wahr oder falsch ist, nicht aber, daß man von jeder Aussage entscheiden kann, ob sie wahr oder falsch ist

[2] Der Begriff Klasse soll zunächst in dieser primitiven Form verwendet werden. Eine Präzisierung erfolgt unter 4.2.1.4.

2.2. Aussagenverbindungen

Setzt man vor eine gegebene Aussage das Wort „nicht" oder verbindet man zwei Aussagen zu einer neuen Aussage, beispielweise mit Hilfe der aussageerzeugenden Wörter „und", „oder", „wenn — so", „genau dann, wenn", so erhält man jeweils eine Aussagenverbindung. Diese auf diese Weise neu gebildeten Aussagen sind ebenfalls entweder wahr oder falsch.
Sehr wesentlich dabei ist nun, *daß der Wahrheitswert der Aussagenverbindung nicht von ihrem speziellen Inhalt, sondern nur vom Wahrheitswert der einzelnen Teilaussagen abhängt.*

Der Erläuterung der wichtigsten Aussagenverbindungen dienen die folgenden Ausführungen.

2.2.1. Negation

Gegeben sei die Aussage: „16 ist eine Quadratzahl".
Diese Aussage ist wahr. Verneint man diese Aussage, so erhält man unter Berücksichtigung des im Deutschen üblichen Ausdrucks: „16 ist keine Quadratzahl". Diese Aussage ist falsch.
Gibt man nun umgekehrt die Aussage: „16 ist keine Quadratzahl" vor, so hat diese den Wahrheitswert $\boldsymbol{F}$. Die Negation dieser Aussage ergibt: 16 ist eine Quadratzahl, und diese Aussage hat den Wahrheitswert $\boldsymbol{W}$.
Sieht man nun vom speziellen Inhalt einer Aussage ab und kennzeichnet eine beliebige Aussage mit $\boldsymbol{a}$, so ist es sinnvoll festzulegen:

> Die Negation „*nicht* $\boldsymbol{a}$" (in Zeichen: $\neg \boldsymbol{a}$) ist genau dann wahr, wenn die Aussage $\boldsymbol{a}$ falsch ist.

Man kann diese Festsetzung in Form einer Wahrheitstafel (auch logische Matrix genannt) aufschreiben:

$\boldsymbol{a}$	$\neg \boldsymbol{a}$	Erläuterung:
$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{W}$	$\boldsymbol{a}$ hat Wahrheitswert $\boldsymbol{F}$, $\neg \boldsymbol{a}$ hat Wahrheitswert $\boldsymbol{W}$
$\boldsymbol{W}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{a}$ hat Wahrheitswert $\boldsymbol{W}$, $\neg \boldsymbol{a}$ hat Wahrheitswert $\boldsymbol{F}$

BEISPIEL 3

Um die Negation kann es leicht zu Mißverständnissen kommen, die zu Fehlern führen.

Will man die Aussage

„$9 \cdot 2 - 20$ ist positiv" verneinen, so lautet diese Negation nicht etwa „$9 \cdot 2 - 20$ ist negativ", sondern „$9 \cdot 2 - 20$ ist nicht positiv."

Das bedeutet, entweder ist $9 \cdot 2 - 20$ gleich Null oder negativ. In symbolischer Darstellung geschrieben:

Aussage $\quad 9 \cdot 2 - 20 > 0$

Verneinung $\quad \neg (9 \cdot 2 - 20 > 0)$ bzw. $9 \cdot 2 - 20 \leq 0$

2.2.2. Konjunktion

Es werde vom speziellen Inhalt vorgegebener Aussagen abgesehen und zwei beliebige Aussagen durch $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}$ symbolisiert. Dann gelte für die Konjunktion die Festlegung:

> Die Konjunktion „$\boldsymbol{p}$ *und* $\boldsymbol{r}$“ (in Zeichen: $\boldsymbol{p} \land \boldsymbol{r}$) ist genau dann wahr, wenn sowohl die Aussage $\boldsymbol{p}$ als auch die Aussage $\boldsymbol{r}$ wahr ist.

Darauf aufbauend ergibt sich folgende Wahrheitstafel:

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{p} \land \boldsymbol{r}$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

BEISPIEL 4

Gegeben sind die Aussagen

„11 ist eine Primzahl“ Wahrheitswert W
„16 ist eine Quadratzahl“ Wahrheitswert W.

Da beide Aussagen den Wahrheitswert W haben, hat auch die Aussagenverbindung

„11 ist eine Primzahl und 16 ist eine Quadratzahl“

den Wahrheitswert W.

BEISPIEL 5

Die Aussagenverbindung

„12 ist durch 5 teilbar und 8 ist durch 4 teilbar“[1]

hat den Wahrheitswert F, denn die Aussage „12 ist durch 5 teilbar“ hat den Wahrheitswert F, die Aussage „8 ist durch 4 teilbar“ den Wahrheitswert W.

2.2.3. Alternative

Es seien zwei beliebige Aussagen durch $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ gekennzeichnet. Ferner gelte folgende Festlegung:

> Die Alternative „$\boldsymbol{a}$ *oder* $\boldsymbol{b}$“ (in Zeichen: $\boldsymbol{a} \lor \boldsymbol{b}$) ist genau dann falsch, wenn sowohl die Aussage $\boldsymbol{a}$ als auch die Aussage $\boldsymbol{b}$ falsch ist.

[1] teilbar ohne Rest ist hier gemeint

Darauf aufbauend ergibt sich folgende Wahrheitstafel:

a	b	$a \vee b$
F	F	F
F	W	W
W	F	W
W	W	W

BEISPIEL 6

Bildet man mit den Aussagen
„5 ist eine Quadratzahl", „9 ist eine Primzahl"
die Aussagenverbindung
„5 ist eine Quadratzahl oder 9 ist eine Primzahl",
so hat diese den Wahrheitswert F, denn beide vorgegebenen Aussagen haben den Wahrheitswert F.

BEISPIEL 7

Von den Aussagen „$2 \cdot 2 = 4$", „$7 \cdot 3 = 6$" hat die erste den Wahrheitswert W, die zweite den Wahrheitswert F. Die Aussagenverbindung
$2 \cdot 2 = 4$ oder $7 \cdot 3 = 6$
hat demzufolge den Wahrheitswert W.

2.2.4. Implikation

Zwei beliebige Aussagen seien durch $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ symbolisiert. Ferner gelte die Festlegung:

> Die Implikation „*wenn* $\boldsymbol{c}$, *so* $\boldsymbol{d}$" (in Zeichen: $\boldsymbol{c} \Rightarrow \boldsymbol{d}$) ist genau dann falsch, wenn die Aussage $\boldsymbol{c}$ wahr und die Aussage $\boldsymbol{d}$ falsch ist[1].

Damit läßt sich folgende Wahrheitstafel aufbauen:

c	d	$c \Rightarrow d$
W	F	F
W	W	W
F	F	W
F	W	W

BEISPIEL 8

Die Wahrheitswerte der Aussagen
„Der Hase ist ein Säugetier",
„$4 \cdot 9 = 18$"

[1] Man könnte auch sagen: Eine Implikation ist genau dann falsch, wenn aus etwas Wahrem etwas Falsches geschlußfolgert wird

sind W bzw. F. Die Aussagenverbindung

„Wenn der Hase ein Säugetier ist, so ist $4 \cdot 9 = 18$“

hat demzufolge den Wahrheitswert F.

BEISPIEL 9

Die Aussage: „Der Mond ist fünfeckig“ hat den Wahrheitswert F.

Die Aussage: „9 ist eine Quadratzahl“ ist wahr. Wie man mittels der Wahrheitstafel der Implikation leicht nachprüfen kann, hat dann die Aussagenverbindung

„Wenn der Mond fünfeckig ist, so ist 9 eine Quadratzahl“

den Wahrheitswert W.

2.2.5. Äquivalenz

Durch $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ seien zwei beliebige Aussagen gekennzeichnet. Dazu gelte die Festlegung:

> Die Äquivalenz „*genau dann* $\boldsymbol{x}$*, wenn* $\boldsymbol{y}$“ (in Zeichen: $\boldsymbol{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{y}$) ist genau dann wahr, wenn die Aussagen $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ beide den gleichen Wahrheitswert haben.

Damit ist folgende Wahrheitstafel vorgegeben:

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{y}$
W	W	W
F	F	W
W	F	F
F	W	F

BEISPIEL 10

Die Aussagen „$3 + 3 = 6$, “ „$4 \cdot 2 = 8$“ haben beide den Wahrheitswert W.

Die Aussagenverbindung

„$3 + 3 = 6$ genau dann, wenn $4 \cdot 2 = 8$“

hat ebenfalls den Wahrheitswert W.

BEISPIEL 11

Die Aussagen „8 ist eine Primzahl,“ „6 ist ein echter Teiler von 5“ haben beide den Wahrheitswert F. Demzufolge hat die Aussagenverbindung

„8 ist eine Primzahl genau dann, wenn 6 ein echter Teiler von 5“

den Wahrheitswert W, denn beide Teilaussagen haben den gleichen Wahrheitswert.

BEISPIEL 12

Gegeben sind die Aussagen

„$7 + 2 = 9$" Wahrheitswert W,
„$4 - 6 = 5$" Wahrheitswert F.

Die Aussagenverbindung

„$7 + 2 = 9$ genau dann, wenn $4 - 6 = 5$"

hat den Wahrheitswert F, denn beide Teilaussagen haben nicht den gleichen Wahrheitswert.

2.2.6. Logische Äquivalenz von Aussagenverbindungen

Oftmals ist es, z. B. bei Beweisen von Sätzen der Mengenlehre, notwendig, eine Aussagenverbindung durch eine andere Aussagenverbindung zu ersetzen. Allerdings ist ein solches Ersetzen nicht für beliebige Aussagenverbindungen möglich. Aussagenverbindungen, die gegenseitig ersetzbar sind, müssen die Eigenschaft haben, daß sie *logisch äquivalent* sind. Der Begriff „logische Äquivalenz zweier Aussagenverbindungen" ist wie folgt erklärt:

> Zwei Aussagenverbindungen $\boldsymbol{a}_1$ und $\boldsymbol{a}_2$ von n Aussagen $\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, \ldots, \boldsymbol{m}_n$ heißen genau dann *logisch äquivalent*, in Zeichen $\boldsymbol{a}_1 \equiv \boldsymbol{a}_2$, wenn sie unabhängig davon, welche Aussagen für $\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, \ldots, \boldsymbol{m}_n$ eingesetzt werden, stets denselben Wahrheitswert haben.

Nun gibt es unter den Aussagenverbindungen $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, \ldots, \boldsymbol{m}_n)$ solche, die unabhängig davon, welche Aussagen für $\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, \ldots, \boldsymbol{m}_n$ eingesetzt werden, stets den Wahrheitswert W haben. Diese Aussagenverbindungen nennt man *Tautologien*. Darauf aufbauend kann man den Begriff der logischen Äquivalenz zweier Aussagenverbindungen auch so definieren:

> Zwei Aussagenverbindungen $\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, \ldots, \boldsymbol{m}_n)$ und $\boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, \ldots, \boldsymbol{m}_n)$ heißen genau dann *logisch äquivalent*, in Zeichen $\boldsymbol{a}_1 \equiv \boldsymbol{a}_2$, wenn die Aussagenverbindung
>
> $$\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, \ldots, \boldsymbol{m}_n) \Leftrightarrow \boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, \ldots, \boldsymbol{m}_n)$$
>
> eine Tautologie ist.

Beispiele für logische Äquivalenzen sind:

(1) $(\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}) \equiv (\boldsymbol{b} \vee \boldsymbol{a})$
(2) $(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \equiv (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a})$
(3) $[\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \vee \boldsymbol{c})] \equiv [(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \vee (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{c})]$
(4) $[\boldsymbol{a} \vee (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c})] \equiv [(\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}) \wedge (\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{c})]$
(5) $[\boldsymbol{a} \vee (\boldsymbol{b} \vee \boldsymbol{c})] \equiv [(\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}) \vee \boldsymbol{c}]$
(6) $[\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c})] \equiv [(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c}]$
(7) $[(\boldsymbol{a} \Rightarrow \boldsymbol{b}) \wedge (\boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{a})] \equiv (\boldsymbol{a} \Leftrightarrow \boldsymbol{b})$

Diese Beispiele zeigen, daß Alternative und Konjunktion jeweils *kommutativ* [Beispiele (1), (2)], *assoziativ* [Beispiele (5), (6)] und *wechselseitig distributiv* [Beispiele (3), (4)] sind.
Der Beweis für die logische Äquivalenz zweier Aussagenverbindungen kann mit Hilfe einer Wahrheitstafel geführt werden. Man geht dazu gewöhnlich so vor, daß man das Symbol $\equiv$ durch das Symbol $\Leftrightarrow$ ersetzt und dann mit Hilfe der Wahrheitstafel zeigt, daß die so entstehende Aussagenverbindung $a_1 \Leftrightarrow a_2$ eine Tautologie ist, also stets den Wahrheitswert W besitzt. Als Beispiel hierfür sollen die Beweise zu (2) und (3) geführt werden.

(2) Behauptung: $(a \wedge b) \equiv (b \wedge a)$

Beweis mit Hilfe einer Wahrheitstafel

1	2	3	4	5
a	b	$a \wedge b$	$\Leftrightarrow$	$b \wedge a$
W	W	W	W	W
W	F	F	W	F
F	W	F	W	F
F	F	F	W	F

Erläuterung:

Auf Grund der Wahrheitswerte der Einzelaussagen und der Definition der jeweiligen Aussagenverbindung (hier: Konjunktion, Äquivalenz) ergeben sich die Wahrheitswerte

der Spalte 3 aus den Wahrheitswerten der Spalten 1 und 2
„ „ 5 „ „ „ „ „ 2 „ 1
„ „ 4 „ „ „ „ „ 3 „ 5.

(3) Behauptung: $[a \wedge (b \vee c)] \equiv [(a \wedge b) \vee (a \wedge c)]$

Beweis mit Hilfe einer Wahrheitstafel

1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	b	c	$b \vee c$	$a \wedge (b \vee c)$	$\Leftrightarrow$	$a \wedge b$	$a \wedge c$	$(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
W	W	W	W	W	W	W	W	W
W	W	F	W	W	W	W	F	W
W	F	F	F	F	W	F	F	F
F	W	W	W	F	W	F	F	F
F	F	W	W	F	W	F	F	F
F	F	F	F	F	W	F	F	F

Erläuterung:

Auf Grund der Wahrheitswerte der Einzelaussagen (entsprechend kombiniert, so daß alle möglichen Fälle der Belegung mit Wahrheitswerten erfaßt werden) und der Definition der jeweiligen Aussagenverbindung (hier: Alternative, Konjunktion, Äquivalenz) ergeben sich die Wahrheitswerte

der	Spalte	4	aus	den	Wahrheitswerten	der	Spalten	2	und	3
,,	,,	5	,,	,,	,,	,,	,,	1	,,	4
,,	,,	7	,,	,,	,,	,,	,,	1	,,	2
,,	,,	8	,,	,,	,,	,,	,,	1	,,	3
,,	,,	9	,,	,,	,,	,,	,,	7	,,	8
,,	,,	6	,,	,,	,,	,,	,,	5	,,	9

Die Beweise der restlichen hier aufgeführten logischen Äquivalenzen zweier Aussagenverbindungen führe der Leser als Übung selbst.

2.3. Aussageformen

Der Begriff der Aussageform, der in enger Beziehung mit dem Begriff der Aussage steht, soll zunächst an einem Beispiel erläutert werden. Der Satz:

Er ist Lehrer.

ist keine Aussage, denn solange man nicht weiß, wer „er" ist, kann nicht entschieden werden, ob dieser Satz entweder wahr oder falsch ist. Rein formal könnte man diesen Satz auch in der Form:

□ ist Lehrer.

schreiben. In diesem schriftlichen Gebilde kommt eine Leerstelle □ (auch Variable genannt) vor. Man bezeichnet es als Aussageform mit einer (freien) Variablen.

Gibt man sich nun eine Gesamtheit von Objekten vor, beispielsweise die Menschen, die die Namen Müller, Meier, Kunze, Fritsche tragen, und belegt die Variable der Aussageform nacheinander mit den Namen dieser Menschen, so entstehen Aussagen. Diese sind entweder wahr oder falsch, je nachdem, ob der Betreffende in der Tat Lehrer ist oder nicht.

Die Gesamtheit der Objekte, die man vorgibt, um mit den Namen dieser Objekte eine Variable einer Aussageform zu belegen, wird Variablenbereich genannt.

Man gelangt somit zu folgender Erklärung des Begriffes Aussageform:

Unter einer Aussageform versteht man ein schriftliches oder sprachliches Gebilde, welches freie Variablen enthält und die Eigenschaften hat, daß sich jedesmal eine Aussage ergibt, falls alle diese Variablen mit Namen von Objekten eines vorgegebenen Variablenbereichs belegt werden.

In der Mathematik ist es nun üblich, anstelle der Markierung einer Leerstelle durch □ dafür einen Buchstaben zu verwenden.

Beispiele für Aussageformen:

a ist ein Teiler von 8. p ist eine Primzahl.	Aussageformen mit einer freien Variablen
x ist größer als y. m ist ein Teiler von t.	Aussageformen mit zwei freien Variablen

Es sei abschließend noch bemerkt, daß man aus einer Aussageform auch dadurch eine Aussage gewinnen kann, indem man vor die Aussageform noch gewisse sprachliche Gebilde setzt, die eine Quantifizierung der in der Aussage auftretenden Variablen bewirken. Diese voranzustellenden sprachlichen Gebilde lauten:

„*Für alle* x“ (auch: „*zu jedem* x“), in Zeichen: $\forall x$

„*Es gibt ein* x“ (auch: „*es existiert ein* x“), in Zeichen: $\exists x$.

Entsprechend ihrem Inhalt nennt man die Symbole $\forall$, $\exists$ *Quantifikatoren*. Je nachdem, welcher der Quantifikatoren auftritt, heißen Aussagen, die man auf diese Weise erhält, *Allaussagen* bzw. *Existenzaussagen*.

BEISPIEL 13

Die Aussage $\forall x(x + 1 = 1 + x)$, gelesen:
„Für alle x ist $x + 1 = 1 + x$“,
ist eine Allaussage.

BEISPIEL 14

Die Aussage $\exists x(x + 2 > x + 5)$, gelesen:
„Es gibt ein x, für das $x + 2$ größer als $x + 5$ ist“,
ist eine Existenzaussage.

BEISPIEL 15

Die Aussage $(\forall x)\ (\exists y)\ (y > x)$[1] wird gelesen:
„Für alle x gibt es ein y, daß y größer als x ist.“

Damit sind alle Grundlagen der zweiwertigen Aussagenlogik, soweit sie für das Verständnis der folgenden Ausführungen notwendig sind, zusammengestellt und erläutert worden.

---

[1] Man beachte, daß eine Aussage nur genau dann vorliegt, wenn jede auftretende Variable durch einen Quantifikator gebunden ist

3. Grundlagen der Mengenlehre

Für den Aufbau einer Theorie der Mengen geht man davon aus, daß es möglich ist, Bereiche von Individuen vorzugeben. Diese Bereiche sind selbst keine Mengen, sondern stellen die ursprünglichsten, zu Mengen zusammenfaßbaren Dinge dar. Diese Dinge sind, wie alle Dinge, Dinge der objektiven Realität. Sie existieren also außerhalb und unabhängig vom Bewußtsein eines Menschen. Wesentliches Merkmal dieser Dinge ist, daß sie unterscheidbar sind.

Der Begriff Menge wird als Grundbegriff der Mathematik verwendet. Dabei drückt das Wort „Menge" immer eine Zusammenfassung (eine Gemeinschaft) *einzelner, unterscheidbarer* Dinge aus.

Es werde nun vereinbart, in Anlehnung an bereits vorhandene Lehrbücher, daß Individuen mit kleinen, die Mengen selbst mit großen Buchstaben symbolisiert werden. Indizes sind zulässig. Bildet man Mengen, die nur Individuen eines vorgegebenen Individuenbereichs enthalten und die *Mengen erster Stufe* genannt werden, so kennzeichnet man den Sachverhalt, daß ein Individuum x zu einer Menge M gehört, mittels des Zeichens für die *Elementrelation* $\in$:

$x \in M$ gelesen: x Element M.

Die Verneinung $\neg(x \in M)$ wird geschrieben

$x \notin M$ gelesen: x nicht Element M.

BEISPIEL 16

Ist M die Menge, die genau aus den Zahlen 1, 2, 3 besteht, so gilt: $2 \in M, 4 \notin M$.

Die Elementrelation ist die einzige *Grundbeziehung*, die erklärt wird.

3.1. Axiome der Mengenbildung

Für den weiteren Aufbau der Mengenlehre legt man ein Axiomensystem zugrunde. Dieses Axiomensystem vermeidet, daß Widersprüche, wie sie z. B. bei der CANTORschen Mengenerklärung möglich waren, auftreten können.

Für Mengen erster Stufe erklärt man:

Es gibt eine Menge M, welche genau diejenigen Individuen als Element enthält, für die eine gewisse Aussagenform zu einer wahren Aussage wird.

Kennzeichnet man ein beliebiges Individuum mit x und mit $\boldsymbol{a}(x)$ den Sachverhalt, daß eine wahre Aussage entsteht, wenn in der Aussagenform die freie Variable x mit dem Namen des Individuums belegt wird, so kann das obige Axiom kürzer formuliert werden:

> Mengenbildungsaxiom für Mengen erster Stufe
> Es gibt eine Menge M, so daß für jedes Individuum x gilt
> $x \in M$ genau dann, wenn $\boldsymbol{a}(x)$.

Im vorangegangenen wurde der Begriff Menge erster Stufe für Mengen von Individuen verwendet. Damit ist bereits angedeutet, daß es auch Mengen höherer Stufe gibt.
Mengen zweiter Stufe, auch *Mengensysteme* genannt, heißen genau die Mengen, die als Elemente Mengen erster Stufe enthalten. Gewöhnlich symbolisiert man diese durch große deutsche Buchstaben. $M \in \mathfrak{M}$ bedeutet demzufolge, daß die Menge (erster Stufe) M Element des Mengensystems $\mathfrak{M}$ ist.
Mengen dritter Stufe (Mengenfamilien) enthalten Mengensysteme als Elemente. *Mengen vierter Stufe* sind solche, deren Elemente Mengenfamilien sind. Dieser Stufenaufbau kann beliebig fortgesetzt werden. Ein recht anschauliches Beispiel von ihm erhält man durch die Verwendung des Individuenbereiches Reißzwecken:

Menge der Reißzwecken in einer Schachtel	Menge erster Stufe
Paket mit 10 Schachteln	Menge zweiter Stufe (Mengensystem)
Karton mit 100 Paketen	Menge dritter Stufe (Mengenfamilie)
Container voll Kartons	Menge vierter Stufe
Containerzug (ohne Lok)	Menge fünfter Stufe
Containerschiff, beladen mit Container voll Kartons	Menge sechster Stufe

usw.

Für alle Mengen höherer Stufe gelten analoge Mengenbildungsaxiome wie für Mengen erster Stufe. Sie müssen für jede Stufe entsprechend formuliert werden. Im Rahmen dieser Schrift soll dies nicht erfolgen. Als Beispiel wird nur das Mengenbildungsaxiom für Mengen zweiter Stufe angegeben:

> Mengenbildungsaxiom für Mengen zweiter Stufe
> Es gibt ein Mengensystem $\mathfrak{M}$, so daß für jede Menge X gilt
> $X \in \mathfrak{M}$ genau dann, wenn $\boldsymbol{a}(X)$.

Die Mengenbildungsaxiome reichen nun noch nicht aus, um die Mengenlehre axiomatisch aufzubauen. Bekanntlich begann jedes Mengenbildungsaxiom mit der Formulierung „Es gibt eine Menge ...“, d. h., diese Axiome garantieren lediglich die Existenz einer zu betrachtenden Menge, aber nicht deren Eindeutigkeit. Dieser Mangel kann nur durch die Formulierung eines weiteren Axioms, des Extensionalitätsaxioms, behoben werden. Dieses soll nur für Mengen erster Stufe formuliert werden:

> Extensionalitätsaxiom für Mengen erster Stufe
> Wenn für jedes Individuum x und die Mengen M, N gilt
> $x \in M$ genau dann, wenn $x \in N$, so ist $M = N$.

Durch dieses Axiom wird die Umfangsgleichheit (Umfang = Extension) zweier Mengen festgelegt.

BEISPIEL 17

In einem Kasten liegen Nägel, die verschieden lang sind. Diese bilden eine Menge M. Nun sortiert man diese Nägel nach Längen in verschiedene kleinere Kästen. Dies ergibt die Menge N. Nach dem Extensionalitätsaxiom sind beide Mengen umfangsgleich.

Es muß nun darauf hingewiesen werden, daß aus der Umfangsgleichheit mit Hilfe der Mengenbildungsaxiome noch nicht die Ersetzbarkeit von umfangsgleichen Mengen in Mengensystemen folgt, d. h., das Extensionalitätsaxiom sagt zunächst noch nichts aus, daß man M nach Belieben durch N ersetzen kann, also eine Gleichheit im Sinne einer Identität[1] vorliegt.
Diese Ersetzbarkeit ist die Eigenschaftsgleichheit für Mengen. Eigenschaften von Mengen werden jedoch durch Mengensysteme charakterisiert:

M ist mit N eigenschaftsgleich wird ausgedrückt durch:

Für jedes Mengensystem $\mathfrak{M}$ gilt
$M \in \mathfrak{M}$ genau dann, wenn $N \in \mathfrak{M}$.

Mit Hilfe der Mengenbildungsaxiome folgt nun einerseits aus der Eigenschaftsgleichheit die Umfangsgleichheit, andererseits besagen die Extensionalitätsaxiome, daß umfangsgleiche Mengen auch eigenschaftsgleich sind.
Daraus ergibt sich, daß die Umfangsgleichheit von Mengen zur Charakterisierung ihrer Identität genügt.
Deshalb kann folgerichtig formuliert werden:

Wenn für jedes x und die Mengen M, N gilt
$x \in M$ genau dann, wenn $x \in N$, so $M = N$, d. h., *man kann M nach Belieben durch N ersetzen.*

[1] Für die Identität muß 1. der Satz der Reflexivität und 2. das Ersetzbarkeitstheorem in dem Sinne gelten, daß man Gleiches durch Gleiches in jedem Zusammenhang ersetzen kann.

Aus der letzten Fassung des Extensionalitätsaxioms folgt, daß zwei Mengen M, N genau dann gleich sind, wenn sie genau die gleichen Elemente enthalten. Damit kann auch gesagt werden, daß eine Menge durch die vollzählige Angabe ihrer Elemente eindeutig bestimmt ist.

Besteht eine endliche Menge aus den Elementen a, b, c, d, so drückt man dies durch die Schreibweise $M = \{a; b; c; d\}$ aus. Als Kennzeichen der Zusammenfassung verwendet man den *Klassifikator* $\{\ldots\}$, der die Menge nach rechts und links gegen andere, nicht zur Menge gehörige Elemente abgrenzt.

Die Elemente selbst trennt man gegenseitig durch Semikolon oder Komma ab.

Sind die Elemente einer Menge bestimmte Zahlen, so schreibt man sie im allgemeinen entsprechend ihrer Reihenfolge auf der Zahlengeraden auf (z. B. $M = \{-4, 0, 1, 56\}$).

Treten Buchstaben als Elemente auf, verwendet man die alphabetische Aufeinanderfolge (z. B. $M = \{a, b, x, y\}$).

Für eine Menge mit endlich vielen Elementen, die man nicht alle aufführen will oder kann, ist die Darstellung $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ üblich. Dabei bedeuten die drei Punkte, daß zwischen a_2 und a_n noch Elemente liegen.

BEISPIEL 18

Aussageform: x ist eine Primzahl, die kleiner 6 ist

Individuenbereich: die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6

Belegt man in der Aussageform die Variable x nacheinander mit den Namen der Elemente des vorgegebenen Individuenbereichs, so erhält man die Aussagen

1 ist eine Primzahl.	falsche Aussage
2 ist eine Primzahl.	wahre Aussage
3 ist eine Primzahl.	wahre Aussage
4 ist eine Primzahl.	falsche Aussage
5 ist eine Primzahl.	wahre Aussage
6 ist eine Primzahl.	falsche Aussage

Durch Aussageform und Individuenbereich wird demzufolge die Menge $M = \{2; 3; 5\}$ festgelegt.

Auf der Grundlage der Axiome der Mengenbildung und der Extensionalität läßt sich nun die *Mengenalgebra* entwickeln. Darunter versteht man denjenigen Teil der allgemeinen Mengenlehre, in dem nur Eigenschaften und Beziehungen von Mengen erster Stufe behandelt werden, die sich ohne Verwendung von Variablen für Mengen höherer als erster Stufe formulieren lassen.

Außer den beiden bereits angegebenen Axiomen gibt es nun noch zwei weitere, das

> Unendlichkeitsaxiom
> Es gibt eine unendliche Menge.

und das *Auswahlaxiom*. Das letztere wird im Buch an der Stelle formuliert werden, wo seine Verwendung unmittelbar motiviert werden kann und für den Leser einsichtsvoll ist.

AUFGABEN

Schreiben Sie die Sätze 1. bis 4. mit Hilfe der Symbolik der Mengenlehre.

1. Eine Menge S hat die Elemente m, n, o, p und wird durch diese und keine anderen festgelegt.
2. x ist Element der Menge X.
3. Zur Menge Z gehören die Elemente x, y.
4. Es sei T die Menge der Primzahlen. 5, 7, 11 sind Primzahlen. 12 ist keine Primzahl.
5. Geben Sie die Menge L an, die genau die Zahl als Element hat, die Lösung der Gleichung $x + 3 = 1$ ist.
6. Es sei $M = \{2, 3\}$ und $x + 7 = 10$. Gilt $x \in M$?
7. Stellen Sie die Lösungen der Gleichung $x^2 - 4x + 3 = 0$ als Menge L dar.
8. Wieviel Elemente hat die Menge der Fußpunkte aller Höhen des Dreiecks ABC?
9. Bestimmen Sie die Menge aller Punkte, die symmetrisch zum Schnittpunkt S der Höhen des Dreiecks ABC in bezug auf die Strecken AB, BC, AC liegen.
10. Das Quadrat $ABCD$ sowie die Mittelsenkrechte s zu $\overline{AB}$ sind gegeben. Bestimmen Sie die Menge aller Punkte, die zu den Eckpunkten in bezug auf die Symmetrale s symmetrisch liegen.
11. Welche geometrische Bezeichnung kennen Sie für: Menge aller Punkte einer Ebene, die von einem festen Punkt dieser Ebene einen konstanten Abstand haben?

3.2. Wichtige Mengen

3.2.1. Zahlenmengen

Als Beispiel einer Menge mit unendlich vielen Elementen wurde bereits die Menge der natürlichen Zahlen (Beispiel 2) genannt. Von ihr ist es unmöglich, alle Elemente aufzuschreiben. Man kann sich jedoch der Schreibweise

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

bedienen, wobei die drei Punkte die nachfolgenden Elemente andeuten.
Für die Festlegung der Menge der ganzen Zahlen, die auch eine unendliche Menge ist, wäre u. a. die Darstellung

$$\Gamma = \{0, +1, -1, +2, -2, \ldots\}$$

möglich. Aber bereits bei der Menge der rationalen Zahlen würde eine solche Darstellung auf Schwierigkeiten stoßen. Man überlege sich nur einmal, welche rationale Zahl nach der Null aufgeschrieben werden soll. Ist es der Bruch $\frac{1}{100\,000\,000}$? Bestimmt nicht! Vor ihm liegen, wie eine einfache Über-

legung lehrt, noch sehr, sehr viele kleinere rationale Zahlen, die die Berechtigung hätten, nach der Null aufgeführt zu werden. Eine Festlegung der Menge der reellen Zahlen auf die obige Art und Weise würde die gleichen Schwierigkeiten bereiten. Es ist aber nun sehr oft nötig, mit diesen Mengen zu arbeiten.
Deshalb wird es als Arbeitserleichterung sinnvoll sein, für spezielle Zahlenmengen eine besondere symbolische Schreibweise einzuführen, durch die diese Mengen als festgelegt gelten sollen. Dies soll dadurch geschehen, daß diese Mengen mit bestimmten griechischen Buchstaben bezeichnet werden.

Buchstabe	gelesen	Name der Menge/Erläuterung
$\dot{N}$[1]	ny	*Menge der natürlichen Zahlen* Elemente sind alle positiven ganzen Zahlen
Γ	gamma	*Menge der ganzen Zahlen* Elemente sind die positiven und negativen ganzen Zahlen sowie die Null
P	rho	*Menge der rationalen Zahlen* Elemente sind alle ganzen Zahlen und die gebrochenen Zahlen (Brüche)
Δ	delta	*Menge der reellen Zahlen* Elemente sind alle rationalen Zahlen und die irrationalen Zahlen
Z	zeta	*Menge der komplexen Zahlen* Elemente sind die reellen Zahlen und die imaginären Zahlen

Die Möglichkeit der Kennzeichnung von Zahlenmengen bietet z. B. bei Gleichungen, die alle eine bestimmte Grundmenge besitzen, Vorteile in der Schreibweise.
Bekanntlich bezeichnet man jede Aussageform, in der zwei Terme $T_1(x)$ und $T_2(x)$ bezüglich einer Grundmenge G für x durch das Gleichheitszeichen verbunden sind, als Gleichung. Eine Gleichung zu lösen ist dann gleichbedeutend damit, gewisse Elemente der Grundmenge zu bestimmen, die die Gleichung in wahre Gleichheitsaussagen überführen. Alle und nur die Elemente von G, die dies gewährleisten, heißen Lösungen der Gleichung. Ihre Zusammenfassung ist die Lösungsmenge, die im folgenden mit L symbolisiert wird.

BEISPIEL 19

$x^2 - 4x + 3 = 0 \qquad G = \Delta$

Lösungen dieser gemischtquadratischen Gleichung sind

$x_1 = 3, \; x_2 = 1.$

[1] Dieser Punkt soll diese Menge von einer beliebigen Menge N unterscheiden

Die Festlegung der Lösungsmenge L kann auf zwei verschiedene Arten erfolgen:

$L = \{x \in \Delta \mid x^2 - 4x + 3 = 0\}$,

gelesen: Menge aller reellen x, für die $x^2 - 4x + 3 = 0$ gilt. Oder:

$L = \{1, 3\}$.

3.2.2. Intervallschreibweisen

BEISPIEL 20

Eine Menge T sei festgelegt durch die Ungleichung:

$1 < x \leqq 6$, gelesen: $x \begin{cases} \text{größer } 1 \\ \text{kleiner oder gleich } 6 \end{cases}$

Die Zahlenvariable x sei nur mit natürlichen Zahlen belegbar. Die Menge T enthält dann alle natürlichen Zahlen, die kleiner bzw. gleich 6 aber größer als 1 sind. Deshalb gilt:

$T = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

BEISPIEL 21

Es sei $1 < x \leqq 6$ mit $x \in \Delta$ (1)

Wie man sofort einsieht, ist es unmöglich, hier eine Menge T dadurch festzulegen, indem man alle ihre Elemente in eine geschweifte Klammer schreibt. Die Ungleichung (1) legt nun eine bestimmte Menge T reeller Zahlen fest, die lückenlos aufeinanderfolgen, was soviel bedeutet, daß alle reellen Zahlen erfaßt werden, die zwischen den Zahlen 1 und 6 liegen, und keine einzige reelle Zahl innerhalb dieser Grenzen in der Menge nicht vorkommt. Die Zahl 1 ist offensichtlich in dieser Menge nicht enthalten, da ja die Ungleichung festlegt, daß dieser Menge alle reellen Zahlen angehören, die größer 1 sind. Die Zahl 6 ist Element der Menge T, da ja x auch gleich 6 sein kann. Die Zahl 1 heißt untere Grenze, die Zahl 6 obere Grenze der Menge T.

Ein Axiomensystem der elementaren Geometrie (auf das hier nicht näher eingegangen werden kann) gestattet es nun, jedem Punkt einer Geraden genau eine reelle Zahl zuzuordnen und auch umgekehrt, jeder reellen Zahl genau einen Punkt auf der Geraden zuzuordnen. Ist nun eine solcherart angegebene Zuordnung vorgenommen, dann spricht man von der Zahlengeraden. Die Menge T kann deshalb auf der Zahlengeraden durch eine Strecke dargestellt werden, wie es Bild 1 veranschaulicht. Dabei soll ein ausgefüllter Kreis bedeuten, daß der Punkt mit zu dieser Strecke gehört. Ein hohler Kreis markiert einen Punkt, der nicht zur Strecke gehört.

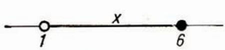


Bild 1

Es ist nun üblich, Mengen reeller Zahlen durch bestimmte Intervallschreibweisen festzulegen, die nachfolgend erläutert werden.

Intervallschreibweise/Erklärung	Ungleichung
$x \in (a; b)$ genau dann, wenn $(a; b)$ heißt *offenes* Intervall	$a < x < b$[1] Die Ungleichung besagt, daß $x \neq a$, $x \neq b$. Beide Grenzen gehören nicht zur Menge

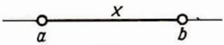


Bild 2

$x \in \langle a; b \rangle$ genau dann, wenn $\langle a; b \rangle$ heißt *geschlossenes* Intervall	$a \leqq x \leqq b$ Beide Grenzen gehören zur Menge

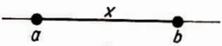


Bild 3

$x \in (a; b \rangle$ genau dann, wenn $(a; b \rangle$ heißt *linksoffenes* Intervall	$a < x \leqq b$

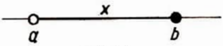


Bild 4

$x \in \langle a; b)$ genau dann, wenn $\langle a; b)$ heißt *rechtsoffenes* Intervall	$a \leqq x < b$

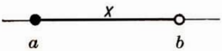


Bild 5

$x \in (a; +\infty)$ genau dann, wenn	$x > a$

Bild 6

$x \in \langle a; +\infty)$ genau dann, wenn	$x \geqq a$

Bild 7

$x \in (-\infty; a)$ genau dann, wenn	$x < a$

Bild 8

$x \in (-\infty; a \rangle$ genau dann, wenn	$x \leqq a$

Bild 9

[1] Es gilt in allen hier erläuterten Fällen $a, b, x \in \varDelta$

Die letzten vier Ungleichungen sagen aus, daß die Variable x größer (gleich), bzw. kleiner (gleich) einer Zahl a, sonst aber keiner weiteren Begrenzung unterworfen ist. Man beachte jedoch stets, daß das Symbol ∞ (gelesen: unendlich) keine Zahl ist und demzufolge nicht zum Intervall gehören kann. Deshalb muß auf dieser Seite das Intervall immer offen sein.
Intervalle spielen oft auch beim Lösen von Gleichungen eine große Rolle, wie das nachfolgende Beispiel zeigt.

BEISPIEL 22

Die Gleichung $\sqrt{x} = 6 - x$ ist zu lösen.

Man quadriert: $x = 36 - 12x + x^2$.

Durch äquivalente Umformung erhält man:

$0 = x^2 - 13x + 36$.

Als Lösungen dieser gemischtquadratischen Gleichung ergeben sich

$x_1 = 9, \ x_2 = 4$.

Setzt man $x = 9$ in die Ausgangsgleichung ein, dann erhält man die falsche Aussage $3 = -3$. Wird die Zahlenvariable x durch die Zahl 4 ersetzt, dann ergibt sich die wahre Aussage $2 = 2$.
Warum scheidet $x_1 = 9$ als Lösung aus?
Beachtet man, daß entsprechend der Definition der Wurzel im Bereich der reellen Zahlen stets $\sqrt{x} \geqq 0$ für $x \geqq 0$ gilt, dann kann die Grundmenge G zunächst mit $G = \langle 0, +\infty)$ festgelegt werden. Wegen $\sqrt{x} \geqq 0$ muß auch $6 - x \geqq 0$ sein, da ja für beide Seiten einer Gleichung Gleiches gelten muß. Aus der Ungleichung $6 - x \geqq 0$ erhält man $x \leqq 6$. Diese Ungleichung sagt aus, daß x kleiner, im Höchstfalle gleich 6 sein darf. Damit wurde die Grundmenge G eingeschränkt. Es ergibt sich somit die veränderte Grundmenge $G_1 = \langle 0; 6 \rangle$. Die Lösung $x_1 = 9$ gehört aber wegen $9 > 6$ dieser eingeschränkten Grundmenge nicht an. Sie ist deshalb kein Element der Lösungsmenge.
Wäre vor der Rechnung diese Einschränkung vorgenommen worden, dann hätte man mit $x_1 = 9$ keine Probe zu machen brauchen, und der „Trugschluß“ wäre nicht aufgetreten.

AUFGABEN

12. Schreiben Sie als Ungleichung bzw. in Intervallschreibweise:

a) $x \in (4, 7\rangle$	b) $x \in (-\infty, 5)$	c) $x \in \langle -3, -1 \rangle$
d) $x \in (3, +\infty)$	e) $x \in \langle -2, 0 \rangle$	f) $x \in (-\infty, +\infty)$
g) $2 < x \leqq 5$	h) $4 \leqq x$	i) $-2 \leqq x \leqq 5$
k) $x > 8$	l) $5 < x < 7$	m) $-8 < x < +\infty$

13. Es ist $-1 \leqq \sin x \leqq +1$. Stellen Sie diese Ungleichung mit Hilfe der Intervallschreibweise dar.

14. Geben Sie die Mengen I_1, I_2, I_3, I_4 an, die durch die Ungleichungen

a) $x + 2 > 3$ b) $x + 7 \leqq 10$ c) $x - 3 < 5$ d) $x - 2 \geqq 4$

festgelegt sind.

3.2.3. Die leere Menge

BEISPIEL 23

Man bestimme alle *reellen* Nullstellen der durch die Gleichung $f(x) = x^2 - 4x + 5$ gegebenen Funktion.

Die arithmetische Lösung verlangt, die Lösungsmenge $L = \{x \in \varDelta \mid x^2 - 4x + 5 = 0\}$ zu bestimmen.

Als Lösungen der gemischtquadratischen Gleichung errechnen sich $x_{1,2} = 2 \pm \mathrm{i}$.

Diese Lösungen sind jedoch komplexe Zahlen und keine reellen Zahlen. Sie sind demnach nicht in der für x festgelegten Grundmenge $G = \varDelta$ enthalten.
Man könnte nun sagen, es gäbe in diesem Fall keine Lösungsmenge, denn man hat ja für diese Menge kein Element. Es ist aber für diese und ähnliche Fälle sinnvoller, eine Menge zu definieren, die dadurch als festgelegt gilt, daß sie die Eigenschaft hat, kein Element zu enthalten. Dies kann durch die Definition

$$\emptyset \underset{\text{Def}}{=} \{x \mid x \neq x\}$$

geschehen. Wie leicht einzusehen ist, wird die Aussageform $x \neq x$ für kein Individuum eines vorgegebenen Individuenbereichs zu einer wahren Aussage, denn der Name eines Individuums kann sich nur selbst gleich sein, aber niemals ungleich. Die auf Grund dieser Aussageform gebildete Menge enthält also kein Element, ist demnach leer. Man nennt sie deshalb *leere Menge*. Sie wird, wie oben bereits geschehen, mit $\emptyset$ symbolisiert.
Alle leeren Mengen enthalten die gleichen Elemente (nämlich gar keine). Entsprechend dem Extensionalitätsaxiom für Mengen erster Stufe sind alle Mengen, die die gleichen Elemente enthalten, identisch. Demzufolge kann man von „*genau einer*" leeren Menge sprechen und darf sie als *die* leere Menge $\emptyset$ bezeichnen.
Für die Gleichung in Beispiel 23 gilt damit $L = \emptyset$.
Die gegebene reellwertige Funktion hat keine reellen Nullstellen. In diesem Spezialfall, der beim Lösen einer Gleichung auftreten kann, sagt man:
Ist die Lösungsmenge $L = \emptyset$, so heißt die Gleichung $T_1(x) = T_2(x)$ bezüglich der vorgegebenen Grundmenge G *unerfüllbar*.

Ein 2. Spezialfall tritt ein, wenn die Lösungsmenge L gleich der Grundmenge G ist, also $L = G$ gilt. Dann und nur dann heißt die Gleichung $T_1(x) = T_2(x)$ eine *Identität* bezüglich der Grundmenge G.

BEISPIEL 24

Die Gleichung $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$ ist eine Identität bezüglich der Menge der rationalen Zahlen, da für jede Belegung der Variablen x mit Elementen der Menge der rationalen Zahlen die Gleichung $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$ eine wahre Aussage liefert. Mithin gilt $L = P$.

Von der Identität einer Gleichung bezüglich einer Grundmenge kann man beispielsweise bei der Partialbruchzerlegung[1] Gebrauch machen.

BEISPIEL 25

Der Term $\frac{5x - 7}{x^2 - 7x}$ ist in Partialbrüche zu zerlegen.

Lösung:

Der Nennerterm $x^2 - 7x$ läßt sich durch Ausklammern von x schreiben: $x(x - 7)$. Darauf baut sich der Partialbruchansatz

$$\frac{5x - 7}{x(x - 7)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x - 7} \tag{A}$$

auf. Die Aufgabe besteht nun darin, a und b zu berechnen. Dazu wird die Gleichung (A) mit dem Hauptnenner $x(x - 7)$, von dem vorausgesetzt wird, daß er verschieden von Null ist, multipliziert:

$$5x - 7 = a(x - 7) + bx. \tag{B}$$

Die Gleichung (B) wird jetzt als Identität bezüglich der Grundmenge $G = \Delta$ angesehen. Das bedeutet: Mit welcher reellen Zahl die Variable x auch belegt wird, stets muß sich eine wahre Gleichheitsaussage ergeben. Ist nun die Belegung von x beliebig, so steht dem nichts entgegen, daß man sich für die Belegung solche reellen Zahlen auswählt, die auf einfachste Weise (ohne viel Rechenarbeit) die Bestimmung von a und b aus der Gleichung (B) ermöglichen.
Deshalb wählt man aus:

1. $x = 0$:
   Dann geht (B) über in

$$\begin{aligned} 5 \cdot 0 - 7 &= a(0 - 7) + b \cdot 0 \\ -7 &= -7a \\ 1 &= a. \end{aligned}$$

[1] Partialbruchzerlegungen werden für die Integration bestimmter gebrochenrationaler Funktionen benötigt

2. $x = 7$:

Man erhält aus (B):

$$5 \cdot 7 - 7 = a(7 - 7) + b \cdot 7$$
$$35 - 7 = 7b$$
$$28 = 7b$$
$$4 = b.$$

Daraus ergibt sich als Aufgabenlösung

$$\frac{5x - 7}{x^2 - 7x} = \frac{1}{x} + \frac{4}{x - 7}.$$

Es sei abschließend ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die Begriffe „unerfüllbar" und „Identität" in der Gleichungslehre nur sinnvoll in Verbindung mit einer vorgegebenen Grundmenge G einer Gleichung sind. So ist beispielsweise die Gleichung $x^2 - 4x + 5 = 0$ des Beispiels 23 unerfüllbar bezüglich der Grundmenge $G = \Delta$. Sie ist aber erfüllbar, wenn man als Grundmenge die Menge Z der komplexen Zahlen vorgibt.

4. Mengenalgebra

4.1. Elementare Beziehungen zwischen Mengen

Zwischen zwei Mengen können verschiedene Beziehungen (Relationen) möglich sein. Im folgenden sollen die wichtigsten, das Enthaltensein und die Gleichheit, erläutert werden.

4.1.1. Enthaltensein

BEISPIEL 26

Die Zahl 24 ist durch die Zahlen 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 teilbar. Diese Zahlen nennt man die positiven ganzen Teiler der Zahl 24. Als Menge dargestellt, kann man sie in der Form $E = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ schreiben.
Die positiven ganzen Teiler der Zahl 8 bilden die Menge $T = \{1, 2, 4, 8\}$.
Vergleicht man beide Mengen, so stellt man fest, daß alle Elemente von T auch Elemente der Menge E sind. Dafür kann man sagen:
Die Menge E *enthält* die Menge T.
Die Menge E *umfaßt* die Menge T.
Man drückt dies durch die Schreibweise $E \supseteqq T$ aus.

Allgemein wurde für diese Beziehung zwischen Mengen festgelegt:

Definition 1

Eine Menge N ist in einer Menge M enthalten, falls jedes Element der Menge N auch Element der Menge M ist. Symbolische Schreibweise des Sachverhalts: $M \supseteqq N$.

Die Menge M wird als *Erweiterungsmenge* (oder Obermenge) und die Menge N als *Teilmenge* (oder Untermenge) bezeichnet. Oftmals wird der Sachverhalt von Definition 1 auch in Form der folgenden Aussage angegeben:

Definition 1′

Eine Menge N heißt genau dann Teilmenge einer Menge M, falls alle Elemente der Menge N auch Elemente der Menge M sind. Symbolisch: $N \subseteqq M$.

Diese Definitionen können mit Hilfe der logischen Symbole auch so geschrieben werden:

$$\forall x (x \in N \Rightarrow x \in M) \Leftrightarrow M \supseteqq N.$$

Aus der Definition des Enthaltenseins kann man unmittelbar folgern:

1. Jede Menge ist in sich selbst enthalten: $M \supseteqq M$
   Da man eine stets richtige Beziehung, die zwischen einem Objekt und ihm selbst ausgesprochen wird, *reflexiv* nennt, ist das Enthaltensein eine reflexive Beziehung.

2. Ist eine Menge N in einer Menge M enthalten und diese Menge M in einer Menge K enthalten, dann ist auch die Menge N in der Menge K enthalten.

   Symbolisch:

   $$N \subseteqq M, \quad M \subseteqq K \Rightarrow N \subseteqq K. \tag{a}$$

   Denn: Es sei x ein beliebiges Element der Menge N. Wegen $N \subseteqq M$ muß entsprechend Definition 1 auch $x \in M$ sein. Da $M \subseteqq K$, muß auch $x \in K$ gelten. Das aber heißt, daß alle Elemente von N auch Elemente von K sind. Mithin gilt: $N \subseteqq K$.
   Man nennt die durch Zeile (a) dargestellte Eigenschaft des Enthaltenseins *Transitivität*.

3. Ist eine Menge N in einer Menge M enthalten und ist auch die Menge M in der Menge N enthalten, so sind beide Mengen gleich.

   Symbolisch:

   $$(M \supseteqq N) \wedge (N \supseteqq M) \Rightarrow M = N. \tag{b}$$

   Denn:

   $M \supseteqq N \Leftrightarrow \forall x (x \in N \Rightarrow x \in M)$ entsprechend der Definition
   $N \supseteqq M \Leftrightarrow \forall x (x \in M \Rightarrow x \in N)$

   $(M \supseteqq N) \wedge (N \supseteqq M)$ entsprechend der Voraussetzung
   $[\forall x (x \in N \Rightarrow x \in M)] \wedge [\forall x (x \in M \Rightarrow x \in N)]$

   Wenn für alle x gilt

   $$x \in N \Rightarrow x \in M$$

   und

   $$x \in M \Rightarrow x \in N,$$

   dann kann auf Grund der logischen Äquivalenz (7) geschrieben werden:

   $$x \in M \Leftrightarrow x \in N.$$

   Daraus ergibt sich

   $$[\forall x (x \in N \Rightarrow x \in M)] \wedge [\forall x (x \in M \Rightarrow x \in N)] \Leftrightarrow$$
   $$\Leftrightarrow [\forall x (x \in M \Leftrightarrow x \in N)].$$

Demnach ist jedes Element in M enthalten, genau dann, wenn es in N enthalten ist. Nach dem Extensionalitätsaxiom sind dann beide Mengen gleich: $M = N$.
Die durch Zeile (b) dargestellte Eigenschaft nennt man *Antisymmetrie*. Aus ihr ergibt sich, daß die Gleichheit ein Spezialfall des Enthaltenseins ist.

BEISPIEL 27

M sei die Menge aller Dreiecke, die drei gleiche Seiten haben. N sei die Menge aller Dreiecke, die drei gleiche Winkel haben. Jedes Dreieck, welches drei gleiche Seiten hat, hat auch drei gleiche Winkel. Demnach enthält die Menge M die Menge N ($M \supseteqq N$).
Ebenso richtig ist, daß jedes Dreieck, welches drei gleiche Winkel hat, auch drei gleiche Seiten hat.
Die Menge N umfaßt demnach die Menge $M (N \supseteqq M)$.
Die Menge aller Dreiecke, die drei gleiche Seiten haben, ist also gleich der Menge aller Dreiecke, die drei gleiche Winkel haben.

BEISPIEL 28

Es sei M die Menge aller natürlichen Zahlen, die kleiner als 36 sind und die sich durch 2 und 3 ohne Rest teilen lassen.

$M = \{x \in \dot{N} \mid x < 36 \wedge 2 \mid x \wedge 3 \mid x\}$

Mit N werde die Menge aller natürlichen Zahlen bezeichnet, die genau die natürlichen Zahlen als Elemente hat, die nicht größer als 30 sind und die sich ohne Rest durch 6 teilen lassen.

$N = \{x \in \dot{N} \mid x \leqq 30 \wedge 6 \mid x\}$.

Es wird behauptet, daß $M = N$ gilt. Dies läßt sich leicht zeigen, indem man die Elemente beider Mengen aufschreibt:

$M = \{0, 6, 12, 18, 24, 30\}$

$N = \{0, 6, 12, 18, 24, 30\}$.

Man erkennt: Alle Elemente von N sind in M enthalten ($M \supseteqq N$), und alle Elemente von M sind in N enthalten ($N \supseteqq M$). Die Betrachtung beider Mengen zeigt auch rein anschaulich, daß dann $M = N$.

Betrachtet man sich nun noch einmal die Mengen

$$E = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

$$T = \{1, 2, 4, 8\}$$

des Beispiels 26, so kann man feststellen, daß die Menge E die Menge T enthält, beide Mengen aber nicht gleich sind.
Für einen solchen Sachverhalt sagt man, daß die Menge E die Menge T *echt* enthält und drückt dies symbolisch durch die Schreibweise $E \supset T$ (gelesen: E enthält T echt) aus.

Schreibt man für die Aussage $\neg(M = N)$, die beinhaltet, daß M nicht gleich N ist, $M \neq N$, so kann allgemein erklärt werden:

Definition 1''

> Eine Menge N ist genau dann in einer Menge M *echt* enthalten, falls $M \supseteqq N$ und $M \neq N$ gilt.
> Symbolisch: $M \supset N$.

Diese Definition kann in der Form

$$M \supset N \Leftrightarrow (M \supseteqq N) \wedge (M \neq N)$$

geschrieben werden.

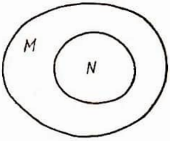


Bild 10

Die Menge N heißt dann *echte* Teil-(Unter-)menge von M. Die Menge M wird als *echte* Erweiterungs-(Ober-)menge bezeichnet. Die Beziehung $M \supset N$ nennt man eine *echte Inklusion*[1].

Sehr einprägsam läßt sich das echte Enthaltensein an Punktmengen innerhalb einer geschlossenen Kurve in einer Ebene darstellen. Bild 10 zeigt zwei ebene Punktmengen M, N, von denen N in M echt enthalten ist.

Weitere Beispiele für das echte Enthaltensein sind:

Die Menge aller rationalen Zahlen ist enthalten in der Menge aller reellen Zahlen. Es gilt: $\Delta \supseteqq P$ und schärfer: $\Delta \supset P$. Die Menge aller Rechtecke ist echt enthalten in der Menge aller Vierecke.

Die Menge aller Schüler einer Klasse ist enthalten in der Menge, die durch die Schülerschaft einer Schule gebildet wird, der diese Klasse angehört. Ist diese Schule keine Einklassenschule, die es ja in der DDR bekanntlich nicht mehr gibt, so ist die Menge aller Schüler der Klasse echt enthalten in der Menge der Schülerschaft dieser Schule.

Die echte Inklusion hat folgende Eigenschaften:

1. Keine Menge enthält sich selbst echt. Symbolisch: $M \not\supset M$, denn es gilt ja für keine Menge $M \supseteqq M$ und $M \neq M$.
   Man nennt diese Eigenschaft *Irreflexivität*.
2. Ist eine Menge N in einer Menge M echt enthalten und enthält eine Menge K die Menge M echt, so ist auch die Menge N echt in der Menge K enthalten. Symbolisch: $[(M \supset N) \wedge (K \supset M)] \Rightarrow K \supset N$.

Die damit ausgedrückte Eigenschaft der Transitivität der echten Inklusion läßt sich wie folgt zeigen:

Aus 2. ergeben sich die Voraussetzungen

(1) $M \supseteqq N$, (2) $M \neq N$, denn N soll echt in M enthalten sein.

(3) $K \supseteqq M$, (4) $K \neq M$, denn M soll echt in K enthalten sein.

[1] Als *unechte Inklusion* wird gewöhnlich die Gleichheit $M = N$ bezeichnet

Folgerung aus (1) und (3): $K \supseteqq N$, denn es war ja bereits bewiesen, daß die $\supseteqq$-Beziehung die Eigenschaft der Transitivität hat.
Da in 2. behauptet wird, daß K die Menge N echt enthält, muß also mittels der Voraussetzungen (1) bis (4) noch bewiesen werden, daß $K \neq N$ gilt.

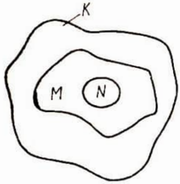


Bild 11

Angenommen, es wäre $K = N$, dann könnte man in (1) N durch K ersetzen und erhielte: $M \supseteqq K$. In Verbindung mit (3) würde das bedeuten:

$$M \supseteqq K \quad \text{und} \quad K \supseteqq M.$$

Das aber wäre gleichbedeutend mit $K = M$ und stünde im Widerspruch zu (4), denn dort wird $K \neq M$ vorausgesetzt.
Da die Annahme $K = N$ auf einen Widerspruch führt, kann nur $K \neq N$ wahr sein. Das aber war zu beweisen.

Die Eigenschaft der Transitivität der echten Inklusion ist in Bild 11 veranschaulicht.
Es muß nun noch in Verbindung mit dem Enthaltensein von Mengen etwas zur leeren Menge gesagt werden.
Bekanntlich hat die leere Menge kein Element. Das bedeutet, daß $x \in \emptyset$ für alle x falsch ist. Dann ist jedoch die Implikation

$$x \in \emptyset \Rightarrow x \in M$$

für alle x wahr, welches auch die Menge M sei. Daraus folgt:

Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge.

Abschließend zu diesem Abschnitt sei noch bemerkt, daß in dem Falle, da zwei Mengen die gleiche und darüber hinaus noch andere Elemente enthalten, kein Enthaltensein vorliegt. Beide Mengen enthalten dann nur gleiche Teilmengen.

Zum Beispiel: $M = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, 4, 5, 6\}$, $N = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, 8, 9\}$.

AUFGABEN

Man gebe die Beziehung zwischen den Mengen an.

15. $\dot{N}\ \Gamma$, 16. Γ, P, Δ 17. $\dot{N}$, Γ, P, Δ, Z

18. $M_1 = \{x \in \Delta \,|\, x^2 - 3x - 40 = 0\}$, $M_2 = \{x \in \Delta \,|\, x + 5 = 0\}$, $M_3 = \{-5, 8\}$

19. $I = (6, 7)$. Eine Menge R werde durch die Ungleichung $5 < x < 8$ festgelegt.

20. $I_1 = \langle 2, +\infty)$ $I_2 = (1, +\infty)$ $I_3 = \langle 5, 120\rangle$

21. M_1 sei die Menge aller gleichschenkligen Dreiecke,
M_2 sei die Menge aller Dreiecke, die gleiche Basiswinkel haben.

22. Q_1 sei die Menge aller Rechtecke. Q_2 sei die Menge aller Quadrate.

23. Weshalb ist der Satz: „Wenn zwei Mengen die gleichen Elemente enthalten, so sind die Mengen gleich“ falsch?
Korrigieren Sie diese Aussage.

4.2. Mengenoperationen

Mit Hilfe von Rechenoperationen ist es möglich, zwei gegebenen Zahlen eine dritte zuzuordnen. Auch bei Mengen ist es auf verschiedene Weise möglich, aus zwei Mengen eine dritte zu bilden. Dabei ähnelt der Vorgang den Rechenoperationen. Deshalb wird von „Operationen mit Mengen“ gesprochen. Wichtige Mengenoperationen sind: Vereinigung, Durchschnitt, Differenz und Produkt. Sie sollen im folgenden erläutert werden.

4.2.1. Verknüpfung von und in Mengen

4.2.1.1. Vereinigung von Mengen

BEISPIEL 29

Es sei D_1 die Menge aller rechtwinklig-ungleichschenkligen Dreiecke,
D_2 die Menge aller rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecke.

Faßt man diese Mengen zusammen, oder wie man auch sagen kann, vereinigt sie, so erhält man die Menge D aller rechtwinkligen Dreiecke.
Mit Hilfe der Symbolik der Mengenlehre drückt man diese Vereinigung aus durch die Schreibweise:

$D = D_1 \cup D_2$,

gelesen: D gleich D_1 vereinigt D_2.

Die Menge D heißt **Vereinigungsmenge.**

Sind die Mengen durch vollzählige Angabe ihrer Elemente festgelegt, dann muß man bei der Vereinigung dieser Mengen folgende drei Fälle unterscheiden:

BEISPIEL 30 (1. Fall)

Es soll die Vereinigungsmenge der Mengen $M = \{a, b, c, d\}$ und $N = \{x, y, z\}$ gebildet werden.
Die Vereinigungsmenge $M \cup N$ enthält in diesem Fall alle Elemente, die M, und alle Elemente, die N angehören:

$M \cup N = \{a, b, c, d, x, y, z\}$.

BEISPIEL 31 (2. Fall)

Es sei $M = \{a, b, c, d\}$, $N = \{a, b, d\}$.

Vereinigt man beide Mengen, so muß man beachten, daß gewöhnlich kein Element in der Vereinigungsmenge mehrmals aufgeführt wird.[1]
Demzufolge ist

$M \cup N = \{a, b, c, d\} = M$.

[1] Für einen Ausdruck der Form $\{a, a, b, b, c, d, d\}$ gebraucht man die Benennung „System“

Wie man erkennt, ist in diesem Fall N eine echte Teilmenge von M. Die Vereinigungsmenge besteht dann nur aus allen Elementen von M.
Sind beide Mengen, die man vereinigen soll, gleich, z. B.

$$M = M, \text{ so ist } M \cup M = M.$$

Es gilt allgemein: Wenn $M \supseteq N$, so $M \cup N = M$.

BEISPIEL 32 (3. Fall)

Wenn $M = \{a, b, c, d, e\}$ und $N = \{a, b, e, m, r, s\}$, so ist die Vereinigungsmenge:

$M \cup N = \{a, b, c, d, e, m, r, s\}$.

In Worten ausgedrückt, lauten die Vereinigungsvorschriften der drei Fälle:

1. Fall: Haben zwei Mengen M, N keine gleichen Elemente, dann besteht die Vereinigungsmenge $M \cup N$ aus allen Elementen, die in M, und allen Elementen, die in N vorkommen.
Durch zwei ebene Punktmengen kann man sich diesen Sachverhalt veranschaulichen, wie Bild 12 zeigt.[1]

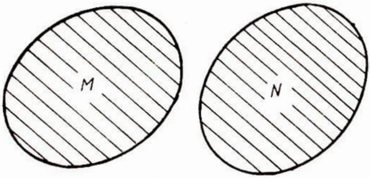


Bild 12

2. Fall: Vereinigt man eine Menge mit sich selbst oder einer ihrer echten Teilmengen, so ist die Vereinigungsmenge diese Menge selbst. Bild 13 veranschaulicht dies.

3. Fall: Haben zwei Mengen gleiche Elemente und darüber hinaus noch andere, dann besteht die Vereinigungsmenge aus den gleichen und all den anderen Elementen aus beiden Mengen. Bild 14 veranschaulicht diesen Sachverhalt.

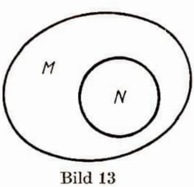


Bild 13

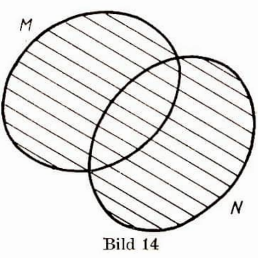


Bild 14

[1] Die Illustration von Mengenoperationen wie Vereinigung, Durchschnitt und Differenzmenge durch kompakte, zeichenbare Punktmengen der EUKLIDischen Ebene ist rein erläuternd und nicht allgemein mathematisch benutzbar

Die vorstehenden Ausführungen erläuterten

Definition 2

> Vereinigungsmenge $M \cup N$ zweier Mengen M, N heißt eine Menge genau dann, wenn sie aus allen Elementen besteht, die der Menge M *oder* der Menge N angehören.

Definition 2 sagt damit aus, daß jedes Element, welches der Vereinigungsmenge angehört, in mindestens einer der beiden Mengen M, N liegen muß. Andererseits aber liegt jedes Element, welches einer der beiden Mengen M, N angehört, sicher auch in der Vereinigungsmenge. Symbolisch schreibt man diesen Sachverhalt:

$$x \in M \cup N \Leftrightarrow x \in M \quad \text{oder} \quad x \in N.$$

$$x \in M \cup N \Leftrightarrow (x \in M) \vee (x \in N)$$

Definition 3 wurde bisher nur an Beispielen von Mengen mit endlich vielen Elementen erläutert. Sie gilt jedoch auch für Mengen mit unendlich vielen Elementen.

BEISPIEL 33

$$M = \{2, 4, 6, 8, \ldots\} \qquad N = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$$

$$M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots\} = \dot{N}$$

Die Reihenfolge, in der zwei Mengen vereinigt werden, kann beliebig sein.

BEISPIEL 34

$$N = \{a, b, c, d\} \qquad M = \{x, y, z\}$$

$$M \cup N = \{a, b, c, d, x, y, z\}$$

$$N \cup M = \{a, b, c, d, x, y, z\}$$

Beide Male erhält man die gleiche Menge.

Dieser Sachverhalt läßt vermuten, daß, ähnlich wie bei der Addition der Zahlen, wo z. B. $3 + 5 = 5 + 3$ ist, es auch ein *kommutatives Gesetz der Vereinigung*, nämlich $M \cup N = N \cup M$ gibt.

Diese Tatsache muß, wenn sie allgemeingültig sein soll, bewiesen werden, denn der Tatbestand, daß dieses Gesetz für zwei spezielle Mengen gilt, sagt noch nichts darüber aus, daß es auch für zwei beliebige Mengen Gültigkeit hat.

Der Beweis kann mit Hilfe der logischen Äquivalenz (1) geführt werden:

$x \in (M \cup N) \Leftrightarrow (x \in M) \vee (x \in N)$	[nach Definition]
$(x \in M) \vee (x \in N) \Leftrightarrow (x \in N) \vee (x \in M)$	[nach (1)]
$(x \in N) \vee (x \in M) \Leftrightarrow x \in (N \cup M)$	[nach Definition]

Also gilt für alle x und beliebige Mengen $(M \cup N)$, $(N \cup M)$

$$x \in (M \cup N) \Leftrightarrow x \in (N \cup M).$$

Nach dem Extensionalitätsaxiom sind dann beide Mengen gleich:

$$(M \cup N) = (N \cup M) \textit{ kommutatives Gesetz der Vereinigung,}$$

was zu beweisen war.
Die Definition 2 kann auf die Vereinigung mehrerer Mengen erweitert werden. Man braucht ja nur zwei Mengen zu vereinigen und deren Vereinigungsmenge erneut mit einer Menge zu vereinigen, so daß man letztlich unbegrenzt viele Mengen vereinigen kann.

BEISPIEL 35

Eine polytechnische Oberschule hat 8 Klassen. Bezeichnet man diese Klassen als Mengen $K_1, K_2, \ldots, K_8$, so bildet die Schülerschaft dieser Schule die Vereinigungsmenge

$$S = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4 \cup K_5 \cup K_6 \cup K_7 \cup K_8.$$

Oftmals verwendet man für derartige Vereinigungen die abkürzende Schreibweise:

$$S = \bigcup_{i=1}^{i=8} K_i$$

gelesen:
S gleich Vereinigung aller K_i
von $i = 1$ bis $i = 8$.

BEISPIEL 36

Es sollen die Mengen

$$M = \{a, b, c\} \quad N = \{d, e\} \quad T = \{f, x, y, z\}$$

in dieser Reihenfolge vereinigt werden. Dazu gibt es zwei Möglichkeiten.

1. Möglichkeit: Man vereinigt die Menge M mit der Menge N und deren Vereinigungsmenge $(M \cup N)$ mit der Menge T.

$$M \cup N = \{a, b, c, d, e\} \quad (M \cup N) \cup T = \{a, b, c, d, e, f, x, y, z\}$$

2. Möglichkeit: Man vereinigt die Menge N mit der Menge T und die Menge M mit der Vereinigungsmenge $(N \cup T)$.

$$N \cup T = \{d, e, f, x, y, z\} \quad M \cup (N \cup T) = \{a, b, c, d, e, f, x, y, z\}$$

Wie man erkennt, ergibt sich beide Male die gleiche Menge. Es gilt allgemein:

$$(\boldsymbol{M} \cup \boldsymbol{N}) \cup \boldsymbol{T} = \boldsymbol{M} \cup (\boldsymbol{N} \cup \boldsymbol{T})$$

(assoziatives Gesetz der Vereinigung).

Beweis: Man beachte die logische Äquivalenz (5).

$$x \in [M \cup (N \cup T)] \Leftrightarrow [x \in M \vee x \in (N \cup T)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [x \in M \vee (x \in N \vee x \in T)] \Leftrightarrow [(x \in M \vee x \in N) \vee x \in T] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [x \in (M \cup N) \vee x \in T] \Leftrightarrow \big[x \in [(M \cup N) \cup T]\big].$$

Demnach gilt für alle x und beliebige Mengen $M \cup (N \cup T)$, $(M \cup N) \cup T$

$$x \in [M \cup (N \cup T)] \Leftrightarrow x \in [(M \cup N) \cup T].$$

Dann ist

$$M \cup (N \cup T) = (M \cup N) \cup T$$

entsprechend dem Extensionalitätsaxiom, was zu beweisen war. Dieses Gesetz sagt nun aus, daß man Mengen in beliebiger Reihenfolge vereinigen kann.
Beim Rechnen mit Ungleichungen, deren Grundmenge Δ ist, wird man immer wieder auf die Vereinigung von Mengen aufeinanderfolgender reeller Zahlen geführt. Im folgenden sollen einige wichtige Fälle dargestellt werden.

BEISPIEL 37a

$I_1 = \langle 3, 4 \rangle$
$I_2 = \langle 4, 6 \rangle$
$I_1 \cup I_2 = \langle 3, 6 \rangle$

Allgemein:

$I_1 = \langle a, b \rangle$

$I_2 = \langle b, c \rangle$

$I_1 \cup I_2 = \langle a, c \rangle$

Den geometrischen Sachverhalt zeigt Bild 15.

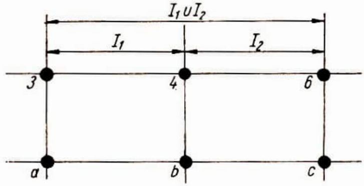


Bild 15

BEISPIEL 37b

$I_1 = (3, 4\rangle$
$I_2 = \langle 4, 6)$
$I_1 \cup I_2 = (3, 6)$

Allgemein:

$I_1 = (a, b\rangle$
$I_2 = \langle b, c)$
$I_1 \cup I_2 = (a, c)$

Zur Veranschaulichung dieses Sachverhalts vgl. man Bild 16.

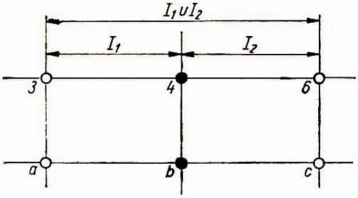


Bild 16

BEISPIEL 37c

$$I_1 = \langle 3, 4)$$

$$I_2 = \langle 4, 6\rangle$$

Allgemein:

$$I_1 = \langle a, b)$$

$$I_2 = \langle b, c\rangle$$

Im Intervall I_2 ist die Zahl 4 (b) Element der Menge. Jedoch gehört diese Zahl nicht zur Menge I_1. Vereinigt man beide Mengen, dann ist die Zahl 4 (b) Element der Vereinigungsmenge.

$$I_1 \cup I_2 = \langle 3, 6\rangle$$

allgemein: $I_1 \cup I_2 = \langle a, c\rangle$

Bild 17 veranschaulicht den geometrischen Sachverhalt.

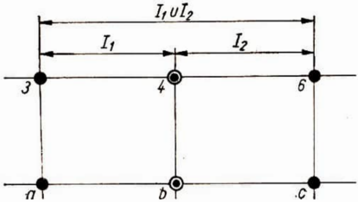


Bild 17

BEISPIEL 37d

$$I_1 = \langle 3, 4)$$

$$I_2 = (4, 6\rangle$$

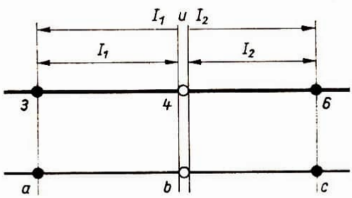


Bild 18

Allgemein:

$$I_1 = \langle a, b)$$

$$I_2 = (b, c\rangle$$

Die Zahl 4 (b) gehört keiner der beiden Mengen an. Deshalb kann sie auch nicht Element der Vereinigungsmenge sein.

$$I_1 \cup I_2 = \langle 3, 4) \cup (4, 6\rangle$$

In diesem Fall ist die Vereinigungsmenge kein Intervall.

Allgemein:

$$I_1 \cup I_2 = \langle a, b) \cup (b, c\rangle$$

Bild 18 veranschaulicht den geometrischen Sachverhalt.

BEISPIEL 37e

$$I_1 = (-3, 2\rangle$$

$$I_2 = (3, 5)$$

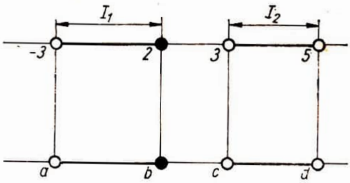


Bild 19

Allgemein:

$$I_1 = (a, b\rangle \qquad [b < c]$$

$$I_2 = (c, d)$$

Für die Vereinigungsmenge ($I_1 \cup I_2$) ist die Schreibweise

$$I = (-3, 2\rangle \cup (3, 5)$$

Allgemein:

$$I = (a, b\rangle \cup (c, d)$$

möglich.

In Bild 19 stellen die beiden dick ausgezogenen Strecken die Vereinigungsmenge dar.

BEISPIEL 37f

$$I_1 = (-\infty, 5)$$

$$I_2 = (7, +\infty)$$

$$I_1 \cup I_2 = (-\infty, 5) \cup (7, +\infty)$$

Allgemein:

$$I_1 = (-\infty, a) \qquad [a < b]$$

$$I_2 = (b, +\infty)$$

$$I_1 \cup I_2 = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$$

BEISPIEL 37g

$$I_1 = (-\infty, 3)$$

$$I_2 = (2, +\infty)$$

$$I_1 \cup I_2 = (-\infty, +\infty) = \varDelta$$

Allgemein:

$$I_1 = (-\infty, a) \qquad [a > b]$$

$$I_2 = (b, +\infty)$$

$$I_1 \cup I_2 = (-\infty, +\infty) = \Delta$$

Den geometrischen Sachverhalt zeigt Bild 20.

Eine sehr große Hilfe kann die Mengenvereinigung bei der Lösung von Ungleichungen geben, die ja ihrerseits wieder eine Grundlage der Linearoptimierung sind.

BEISPIEL 38

Es soll die Menge aller reellen x bestimmt werden, für die die Ungleichung $x^2 - 5x + 6 > 3 - x$ gilt.

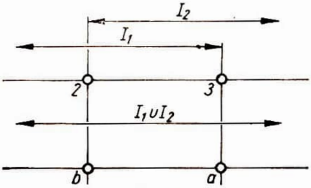


Bild 20

Arithmetische Lösung:

Durch äquivalente Umformungen dieser Ungleichung erhält man:

$x^2 + 4x > -3$

Man addiert auf beiden Seiten die quadratische Ergänzung:

$x^2 - 4x + 4 > -3 + 4,$

und schreibt die linke Seite als vollständiges Quadrat:

$(x - 2)^2 > 1$

Auf beiden Seiten wird die Wurzel gezogen:

$|x - 2| > 1$

Daraus erhält man:

$+ (x - 2) > 1 \quad$ oder $\quad - (x - 2) > 1$

$x > 3 \quad$ oder $\quad x < 1$

$x \in (3, +\infty) : I_1 \quad$ oder $\quad x \in (-\infty, 1) : I_2$

Die Lösungsmenge L ist dann die Vereinigungsmenge der Mengen I_1 und I_2.

$L = I_1 \cup I_2$

$L = (3, +\infty) \cup (-\infty, 1)$

Damit diese Lösung veranschaulicht wird, soll die Aufgabe graphisch gelöst werden. Das geschieht dadurch, daß man

$x^2 - 5x + 6 = f(x), \qquad 3 - x = g(x)$

schreibt und beide Funktionen in einem rechtwinkligen Koordinatensystem darstellt. Wegen $x^2 - 5x + 6 > 3 - x$ muß $f(x) > g(x)$ sein. Unsere Aufgabe verlangt deshalb, das Intervall auf der x-Achse zu bestimmen, für welches die Punkte der Parabel mit $f(x) = x^2 - 5x + 6$ größere Ordinatenwerte aufweisen als die der Geraden mit $g(x) = 3 - x$.
Das ist, wie Bild 21 zeigt, genau dann der Fall, wenn die Parabel oberhalb der Geraden verläuft.

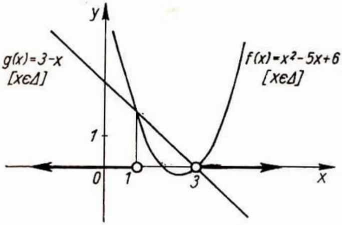


Bild 21

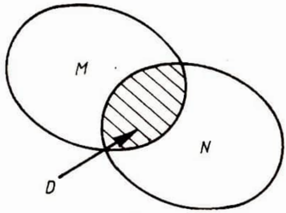


Bild 22

4.2.1.2 Durchschnitt von Mengen

1. Fall:

BEISPIEL 39

In einem Betrieb gibt es eine Tanzgruppe und eine Laienspielgruppe. Einige Mitglieder der Laienspielgruppe sind auch in der Tanzgruppe. Es sei $M = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ die Menge der Mitglieder der Tanzgruppe, $N = \{a, b, c, m, n, o, p, r, s, t\}$ die Menge der Mitglieder der Laienspielgruppe.
Die Mitglieder, die in beiden Gruppen sind, bilden dann die Menge $D = \{a, b, c\}$.
Die Menge D enthält somit alle Mitglieder, die sowohl in der Tanzgruppe als auch in der Laienspielgruppe sind.

Man nennt die Menge D den **Durchschnitt** der Mengen M, N und gebraucht dafür die Schreibweise

$$D = M \cap N$$

gelesen: D gleich M geschnitten N.

Zur Veranschaulichung seien M und N zwei kompakte ebene Punktmengen. Der Durchschnitt D ist dann die Menge, die in Bild 22 schraffiert gezeichnet wurde.

Bei Mengen, die durch die vollzählige Angabe ihrer Elemente festgelegt sind, muß man außer dem obengenannten ersten Fall, bei dem beide Mengen eine gleiche Teilmenge hatten, noch zwei weitere Fälle unterscheiden.

2. Fall: M, N haben keine gemeinsamen Elemente. Beide Mengen sind, wie man sagt, elementfremd.

BEISPIEL 40

$M = \{a, b, c, d\} \quad N = \{x, y, z\}$

Dann gibt es kein Element, welches sowohl in M als auch in N vorhanden ist. Die Menge, die den Durchschnitt bildet, ist leer.

In Worten: Sind zwei Mengen elementfremd, dann ist ihr Durchschnitt die leere Menge. Solche Mengen nennt man *disjunkt*.[1]

3. Fall: N ist eine echte Teilmenge von M.

BEISPIEL 41

$M = \{a, b, c, d, e, f\} \qquad N = \{a, c, e\}$

In beiden Mengen gibt es die Elemente a, c, e.

$M \cap N = \{a, c, e\} = N$

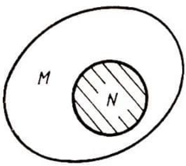


Bild 23

Es gilt stets: Wenn $M \supset N$, so $M \cap N = N$.

In Worten: Ist N eine echte Teilmenge von M, dann ist der Durchschnitt beider Mengen gleich dieser echten Teilmenge selbst. Bild 23 veranschaulicht dies.

Allgemein erklärt man die Durchschnittsbildung für beliebige Mengen M, N:

Definition 3

Der Durchschnitt $M \cap N$ zweier Mengen M und N besteht aus allen Elementen, die *sowohl M als auch N* angehören.

Definition 3 sagt damit aus, daß jedes Element, welches dem Durchschnitt angehört, in beiden Mengen als Element vorkommen muß. Andererseits aber liegt jedes Element, welches der Menge M *und* der Menge N angehört, sicher auch im Durchschnitt beider Mengen. Symbolisch schreibt man dafür:

$$x \in M \cap N \Leftrightarrow x \in M \quad \text{und} \quad x \in N$$

$$x \in M \cap N \Leftrightarrow x \in M \wedge x \in N$$

[1] disjunkt (lat.) sondernd, trennend, sich ausschließend

BEISPIEL 42

Es sei T die Menge aller Primzahlen, G die Menge aller positiven geraden Zahlen. Der Durchschnitt beider Mengen ist die Zahl $+2$, denn nur sie ist sowohl Element der Menge T als auch Element der Menge G.

Auch im Mathematikunterricht der polytechnischen Oberschule tritt die Durchschnittsbildung auf, ohne daß man sie dort als solche kennzeichnet.

BEISPIEL 43

Bei der Behandlung der Teilbarkeit der natürlichen Zahlen wird die Regel: „Alle Zahlen, die durch zwei und drei teilbar sind, sind auch durch 6 teilbar" erarbeitet.
Ist M die Menge aller durch 2 teilbaren natürlichen Zahlen, d. h.: $M = \{2n\}$ $(n \in \dot{N})$ und N die Menge aller durch 3 teilbaren natürlichen Zahlen, d. h.: $N = \{3n\}$ $(n \in \dot{N})$, dann sind alle Zahlen, die durch 6 teilbar sind, sowohl in M als auch in N enthalten. Man kann sich davon überzeugen, wenn man beide Mengen wie folgt aufschreibt:

$M = \{2, 4, \mathbf{6}, 8, 10, \mathbf{12}, 14, 16, \mathbf{18}, \ldots\}$

$N = \{3, \mathbf{6}, 9, \mathbf{12}, 15, \mathbf{18}, \ldots\}$

Es gilt demnach: $M \cap N = \{2n\} \cap \{3n\} = \{6n\}$ $(n \in \dot{N})$

BEISPIEL 44

Die Erklärung „Ein Quadrat ist ein gleichseitiges, rechtwinkliges Parallelogramm" beinhaltet eine Durchschnittsbildung.

Es sei P_1 die Menge aller Rhomben (gleichseitige Parallelogramme),
P_2 aller Rechtecke (rechtwinklige Parallelogramme).

Dann bilden alle Parallelogramme, die sowohl gleichseitig als auch rechtwinklig sind, den Durchschnitt der Mengen P_1 und P_2. Das sind aber alle Quadrate.

BEISPIEL 45

K sei die Menge aller Punkte innerhalb eines Kreises, einschließlich der Kreislinie. W sei die Menge aller Punkte innerhalb eines Winkels, einschließlich der Punkte auf den Schenkeln des Winkels. Der Scheitelpunkt des Winkels liege im Mittelpunkt des Kreises. Der Durchschnitt $K \cap W$ ist die Menge aller Punkte eines Kreisausschnittes. Bild 24 veranschaulicht dies.

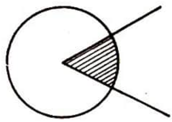


Bild 24

Eine weitere Anwendung findet die Durchschnittsbildung bei der Lösung von Systemen linearer Ungleichungen mit mehreren Variablen. Dies soll hier am Beispiel eines Systems linearer Ungleichungen mit zwei Variablen dargestellt werden.

BEISPIEL 46

Die Erfüllungsmenge E_1 der Ungleichung $2x + 3y \geqq 6$ wird durch alle und nur die Punkte dargestellt, die oberhalb und auf der Geraden mit der Gleichung $y = -\frac{2}{3}x + 2$ (Bild 25a) liegen.

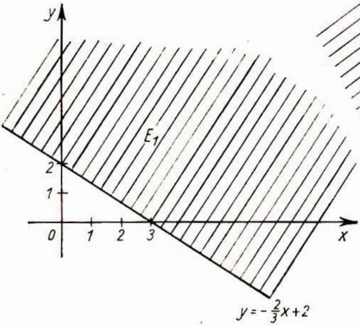


Bild 25 a

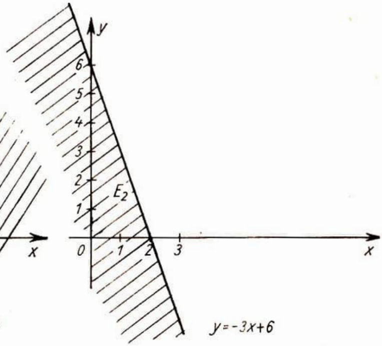


Bild 25 b

Die Erfüllungsmenge E_2 der Ungleichung $3x + y \leqq 6$ wird durch genau die Punkte dargestellt, die unterhalb und auf der Geraden mit der Gleichung $y = -3x + 6$ (Bild 25b) liegen. Die Erfüllungsmenge E des Ungleichungssystems

$$2x + 3y \geqq 6$$

$$3x + y \leqq 6$$

enthält genau die Elemente, die in E_1 und in E_2 enthalten sind, d. h.,

$$E = E_1 \cap E_2.$$

Die Menge E ist in Bild 25c veranschaulicht.
Bei der Durchschnittsbildung von Mengen aufeinanderfolgender reeller Zahlen muß man, analog der Bildung der Vereinigungsmenge, folgende Fälle besonders beachten.

BEISPIEL 47a

$$I_1 = (3, 4\rangle$$

$$I_2 = \langle 4, 6)$$

Allgemein:

$$I_1 = (a, b\rangle$$
$$I_2 = \langle b, c)$$

Nur die Zahl 4 (b) ist sowohl Element von I_1 als auch von I_2.

$$I_1 \cap I_2 = \{4\} \quad \text{allgemein:} \quad I_1 \cap I_2 = \{b\}$$

Den geometrischen Sachverhalt veranschaulicht Bild 26.

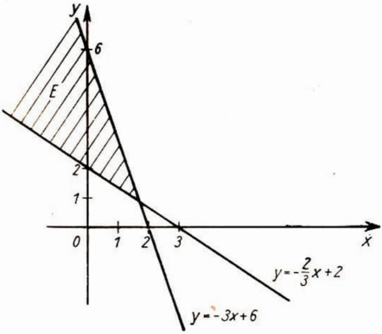


Bild 25 c

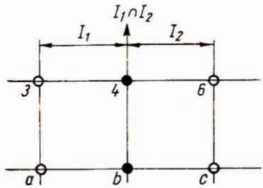


Bild 26

BEISPIEL 47b

$$I_1 = \langle 3, 4)$$
$$I_2 = \langle 4, 6\rangle$$

Allgemein:

$$I_1 = \langle a, b)$$
$$I_2 = \langle b, c\rangle$$

Da die Zahl 4 (b) nur zur Menge I_2 gehört, aber nicht Element der Menge I_1 ist, muß $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ gelten.

BEISPIEL 47c

$$I_1 = (3, 4)$$
$$I_2 = (4, 6\rangle$$

Allgemein:

$$I_1 = (a, b)$$
$$I_2 = (b, c\rangle$$

Beide Mengen haben wiederum die leere Menge als Durchschnitt, da das Element 4 (b) zu keiner der Mengen gehört.

BEISPIEL 47d

$I_1 = (-2, 5)$

$I_2 = (0, 7)$

Allgemein:

$$I_1 = (a, c) \qquad\qquad a < b < c < d$$
$$I_2 = (b, d)$$

Wie auch Bild 27 geometrisch veranschaulicht, gilt:

$(-2, 5) \supset (0, 5)$ allgemein: $(a, c) \supset (b, c)$

$(0, 7) \supset (0, 5)$ allgemein: $(b, d) \supset (b, c)$

Es ist

$I_1 \cap I_2 = (0, 5)$ allgemein: $I_1 \cap I_2 = (b, c)$

Auch die Lösungen von Ungleichungen beinhalten oft eine Durchschnittsbildung.

BEISPIEL 48

Man bestimme alle $x \in \Delta$, für die die Ungleichung

$x^2 - 5x + 6 < 3 - x$ gilt.

Arithmetische Lösung:

$x^2 - 4x < -3$

$x^2 - 4x + 4 < 1$ (quadrat. Ergänzung addiert!)

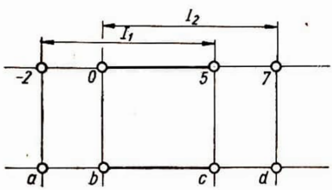


Bild 27

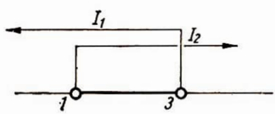


Bild 28

$(x - 2)^2 < 1$ (als vollständiges Quadrat geschrieben!)

$|x - 2| < 1$ (Wurzel gezogen!)

$+ (x - 2) < 1$ und $- (x - 2) < 1$

$x < 3$ und $x > 1$

$x \in (-\infty, 3) : I_1$ und $x \in (1, +\infty) : I_2$

Alle x, die, wie die Lösung es verlangt, größer 1 und kleiner 3 sind, liegen im Durchschnitt der Mengen I_1 und I_2. Bild 28 veranschaulicht dies auf der Zahlengeraden. Deshalb gilt:

$$L = I_1 \cap I_2$$

$$L = (-\infty, 3) \cap (1, +\infty)$$

$$L = (1, 3) \text{ (vgl. auch Bild 21)}$$

4.2.1.2.1. Kommutatives und assoziatives Gesetz der Durchschnittsbildung

Ebenso wie die Mengenvereinigung ist auch die Durchschnittsbildung kommutativ und assoziativ:

$$\boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{N} = \boldsymbol{N} \cap \boldsymbol{M} \qquad \text{(kommutatives Gesetz)}$$

$$(\boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{N}) \cap T = \boldsymbol{M} \cap (\boldsymbol{N} \cap \boldsymbol{T}) \qquad \text{(assoziatives Gesetz)}$$

Die Beweise, die unter Benutzung der logischen Äquivalenzen (2) und (6) analog denen der Vereinigung geführt werden können, seien dem Leser zur Übung selbst überlassen.

AUFGABEN

24. Schreiben Sie unter Verwendung der entsprechenden Symbolik folgenden Satz: „Ist V die Vereinigungsmenge der Mengen M, N, T, so gilt, daß M, N, T Teilmengen von V sind."

25. Was bedeutet $M \cup M = M$?

26. $M = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad N = \{6, 7, 8\}$ $\quad T = \{1, 4, 8, 9\}$ $\quad R = \{2, 5, 8, 10\}$
Bilden Sie die Vereinigungsmenge.

27. Es sei $L_1 = \{x \in \Delta \mid x^2 + x - 20 = 0\}$, $\quad L_2 = \{x \in \Delta \mid x^2 + x - 12 = 0\}$.
Geben Sie L_1 und L_2 in der anderen möglichen Form an und bilden Sie $L_1 \cup L_2$.

28. $L_1 = \{x \in \Delta \mid x - 3 < 5\}$, $\quad L_2 = \{x \in \Delta \mid 2x + 5 < 7\}$. Man bilde $L_1 \cup L_2$.

29. Bilden Sie die Vereinigungsmengen:

a) $I_1 = (-3, 5\rangle$ $\qquad I_2 = (-\infty, 2)$

b) $I_1 = (-\infty, 6)$ $\qquad I_2 = \langle 0, +\infty)$

c) $I_1 = \langle 4, 8\rangle$ $\qquad I_2 = \langle 3, 4\rangle$

d) $I_1 = \langle 8, 12)$ $\qquad I_2 = (0, 5\rangle$

30. Bestätigen Sie mit Hilfe der Mengen T_1, T_2, T_3 die Richtigkeit des assoziativen Gesetzes der Durchschnittsbildung.

$T_1 = \{4, 5, 8\}$ $\qquad T_2 = \{1, 3, 5\}$ $\qquad T_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

31. Bilden Sie die Durchschnitte folgender Mengen:

a) $I_1 = \langle -3, 7\rangle$ $\quad I_2 = (5, 6)$

b) $I_1 = (0, 8\rangle$ $\quad I_2 = \langle -5, 1\rangle$

c) $I_1 = (0, 5)$ $\quad I_2 = (-4, 0)$

d) $I_1 = (-\infty, 3\rangle$ $\quad I_2 = \langle 3, +\infty)$

e) $I_1 = \langle 8, 15)$ $\quad I_2 = \langle 15, 104)$

32. Geben Sie folgende Aussage in Worten an: $M \cap M = M$.

33. Schreiben Sie unter Verwendung der entsprechenden Symbolik: „Ist D der Durchschnitt der Mengen N_1, N_2, N_3, so gilt, daß D Teilmenge der Mengen N_1, N_2, N_3 ist.“

34. Drücken Sie folgende Aussage mit Worten aus: $M \cap \emptyset = \emptyset$.

4.2.1.3. Distributivgesetze der Mengenlehre

BEISPIEL 49

Es soll die Menge aller reellen x bestimmt werden, für die die Ungleichung

$\frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 + 3x + 2} > 1$ gültig ist.

Arithmetische Lösung:

Für das Lösen der Ungleichung ist diese mit dem Nenner $x^2 + 3x + 2$ zu multiplizieren. Dabei ist jedoch zu beachten, daß für $x^2 + 3x + 2 < 0$ mit einem negativen Term multipliziert wird und sich dann, entsprechend der Regeln über das Umformen von Ungleichungen, das Zeichen in der Ungleichung umkehrt. Deshalb ist bei der Multiplikation mit dem Nenner zu unterscheiden, ob 1. $x^2+3x+2<0$ oder 2. $x^2+3x+2 > 0$ ist. In beiden Fällen wird für die Variable x jeweils eine Grundmenge festgelegt.

1. Fall: $x^2 + 3x + 2 < 0$

$$x^2 + 3x < -2$$

$$x^2 + 3x + \frac{9}{4} < -2 + \frac{9}{4}$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 < \frac{1}{4}$$

$$\left|x + \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{2}$$

$$+\left(x + \frac{3}{2}\right) < \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad -\left(x + \frac{3}{2}\right) < \frac{1}{2}$$

$$x < -1 \quad \text{und} \quad x > -2$$

Für alle $-2 < x < -1$ gilt $x \in (-2, -1)$: I_1. Das ist die Grundmenge, für die dann die folgenden Umformungen der Ausgangsgleichung gestattet sind:

$$\frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 + 3x + 2} > 1 \qquad | \times \left(x^2 + 3x + 2\ (< 0)\right)$$

$$x^2 - 4x + 5 < x^2 + 3x + 2$$

$$3 < 7x$$

$$\frac{3}{7} < x$$

$$x \in \left(\frac{3}{7}, +\infty\right) : I_2$$

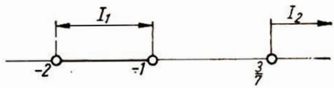


Bild 29

Die Teillösungsmenge L_1 ist dann die Menge, die alle Elemente enthält, die sowohl in I_1 als auch in I_2 liegen.

$$L_1 = I_1 \cap I_2$$

$$L_1 = (-2, -1) \cap \left(\frac{3}{7}, +\infty\right)$$

$$L_1 = \emptyset,$$

da beide Mengen, wie Bild 29 auf der Zahlengeraden veranschaulicht, elementfremd sind.

2. Fall: $x^2 + 3x + 2 > 0$

$$x^2 + 3x > -2$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 > \frac{1}{4}$$

$$\left|x + \frac{3}{2}\right| > \frac{1}{2}$$

$$x > -1 \quad \text{oder} \quad x < -2$$

$$x \in (-1, +\infty) : I_3 \qquad x \in (-\infty, -2) : I_4$$

In diesem Falle ist die Grundmenge die Vereinigungsmenge der Mengen I_3 und I_4.

$$G = I_3 \cup I_4$$

$$G = (-1, +\infty) \cup (-\infty, -2)$$

Innerhalb dieser Grundmenge sind folgende Umformungen zulässig:

$$\frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 + 3x + 2} > 1 \qquad | \times \left(x^2 + 3x + 2\ (>0)\right)$$

$$x^2 - 4x + 5 > x^2 + 3x + 2$$

$$3 > 7x$$

$$\frac{3}{7} > x$$

$$x \in \left(-\infty, \frac{3}{7}\right) : I_5$$

Die Teillösungsmenge L_2 muß alle Elemente enthalten, die sowohl in I_5 als auch in G vorkommen. Die Formulierung „sowohl als auch" drückt, wie bekannt, die Durchschnittsbildung aus.

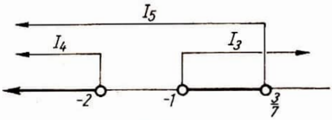


Bild 30

$$L_2 = I_5 \cap G$$

oder, wegen $G = I_3 \cup I_4$,

$$L_2 = I_5 \cap (I_3 \cup I_4) \qquad \text{(a)}$$

Zur Ermittlung der Teillösungsmenge L_2 ist es nun nötig, das **Distributivgesetz**

$$\boldsymbol{M \cap (N \cup T) = (M \cap N) \cup (M \cap T)} \qquad (1)$$

anzuwenden. Man erhält dann

$$L_2 = I_5 \cap (I_3 \cup I_4) = (I_5 \cap I_3) \cup (I_5 \cap I_4).$$

Bild 30 veranschaulicht diesen Sachverhalt auf der Zahlengeraden. Ersetzt man die Mengen durch ihre Intervallschreibweisen, so wird

$$L_2 = \left[\left(-\infty, \frac{3}{7}\right) \cap (-1, +\infty)\right] \cup \left[\left(-\infty, \frac{3}{7}\right) \cap (-\infty, -2)\right]$$

$$L_2 = \left(-1, \frac{3}{7}\right) \cup (-\infty, -2)$$

Die Lösungsmenge L der Ungleichung ist dann die Vereinigungsmenge der Teillösungsmengen L_1 und L_2.

$$L = L_1 \cup L_2$$

$$L = \emptyset \cup L_2 = L_2$$

$$L = \left(-1, \frac{3}{7}\right) \cup (-\infty, -2)$$

Antwortsatz:

Die Ungleichung

$$\frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 + 3x + 2} > 1$$

gilt für alle und nur die

$$x \in (-\infty, -2) \cup \left(-1, \frac{3}{7}\right)$$

Die graphische Lösung zeigt Bild 31.

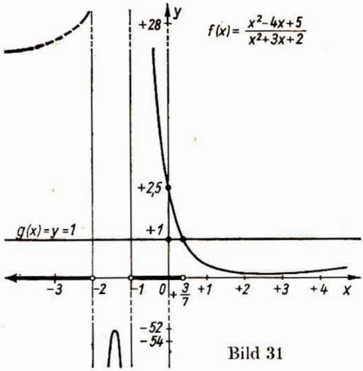


Bild 31

Im Verlauf der Lösung dieser Aufgabe wurde, ohne bewiesen zu sein, das Distributivgesetz (1) verwendet. Dieser Beweis soll nun nachgeholt werden.

Behauptung: Für beliebige Mengen M, N, T gilt

$$M \cap (N \cup T) = (M \cap N) \cup (M \cap T).$$

Beweis:

$$x \in [M \cap (N \cup T)] \Leftrightarrow [x \in M \wedge x \in (N \cup T)] \Leftrightarrow [x \in M \wedge (x \in N \vee x \in T)]$$

Unter Verwendung der logischen Äquivalenz (3) darf geschrieben werden:

$$[x \in M \wedge (x \in N \vee x \in T)] \Leftrightarrow [(x \in M \wedge x \in N) \vee (x \in M \wedge x \in T)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [x \in (M \cap N) \vee x \in (M \cap T)] \Leftrightarrow x \in [(M \cap N) \cup (M \cap T)]$$

Für alle x und beliebige Mengen $[M \cap (N \cup T)]$, $[(M \cap N) \cup (M \cap T)]$ gilt also

$$x \in [M \cap (N \cup T)] \Leftrightarrow x \in [(M \cap N) \cup (M \cap T)].$$

Nach dem Extensionalitätsaxiom folgt daraus

$$M \cap (N \cup T) = (M \cap N) \cup (M \cap T),$$

was zu beweisen war.
Eine Veranschaulichung dieses Distributivgesetzes gibt Bild 32. Außer (1) gibt es noch das Distributivgesetz

$$\boldsymbol{M} \cup (\boldsymbol{N} \cap \boldsymbol{T}) = (\boldsymbol{M} \cup \boldsymbol{N}) \cap (\boldsymbol{M} \cup \boldsymbol{T})$$

Es ist in Bild 33 dargestellt. Sein Beweis verläuft analog dem vorigen und kann unter Benutzung der logischen Äquivalenz (4) vom Leser leicht geführt werden. Beide Distributivgesetze haben große Bedeutung für das praktische Rechnen mit Mengen.

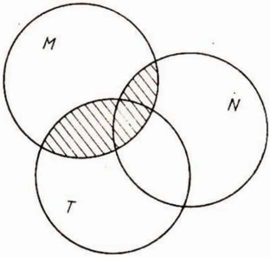


Bild 32

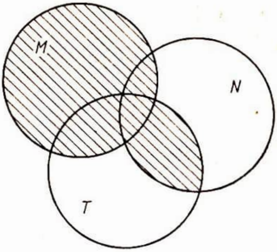


Bild 33

AUFGABEN

35. Bestätigen Sie mit Hilfe der Mengen $R = \{1, 2, 3, 4\}$, $S = \{1, 3, 4\}$ und $T = \{1, 2, 4, 5\}$ die Richtigkeit der Distributivgesetze.

36. Bilden Sie von den folgenden Mengen $I = (I_1 \cap I_2) \cup (I_1 \cap I_3)$.

a) $I_1 = \langle 3, 4\rangle$ $\quad I_2 = \langle 0, 6\rangle$ $\quad I_3 = \langle 4, 5\rangle$
b) $I_1 = (2, 3)$ $\quad I_2 = (0, 5)$ $\quad I_3 = (3, 4)$
c) $I_1 = \langle 1, 2)$ $\quad I_2 = (0, 6\rangle$ $\quad I_3 = (3, 5)$
d) $I_1 = (3, 4\rangle$ $\quad I_2 = (0, 6)$ $\quad I_3 = \langle 4, 5\rangle$

37. Für welche reellen x gilt folgende Ungleichung?

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} < 2$$

4.2.1.4. Klassen

Die Definitionen der Vereinigung und des Durchschnitts von Mengen sind eine wichtige Grundlage für den Klassenbegriff.

BEISPIEL 50

Jede Schule hat bekanntlich verschiedene Klassen. Diese Klassen sind Teilmengen der Menge aller Schüler der Schule. Der Durchschnitt von je zwei dieser Teilmengen ist leer, denn es kann ja niemals vorkommen, daß ein Schüler gleichzeitig mehrere Klassen besucht.

Analog dem obigen Sachverhalt wird nun auch in der Mengenlehre erklärt:

Definition 4

> Die Zerlegung einer Menge in *paarweise durchschnittsfremde* Teilmengen, deren Vereinigung wieder die Menge ergibt, heißt eine Klasseneinteilung der Menge.
> Die Teilmengen selbst nennt man Klassen.

BEISPIEL 51a

$M = \{a, b, c, d\}$. Für diese Menge wären u. a. folgende Klasseneinteilungen möglich:

1. $\{a, b, c\}, \{d\}$ 2. $\{a, b, d\}, \{c\}$ 3. $\{a, c, d\}, \{b\}$ 4. $\{b, c, d\}, \{a\}$
5. $\{a, b\}, \{c, d\}$ 6. $\{a, c\}, \{b, d\}$ 7. $\{a, d\}, \{b, c\}$ 8. $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$.

BEISPIEL 51b

Gegeben sei eine Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und die Teilmengen $T_1 = \{1, 2\}$, $T_2 = \{3, 4\}$, $T_3 = \{2, 5\}$ von M.
Um festzustellen, ob die Teilmengen T_1, T_2, T_3 eine Klasseneinteilung bezüglich M bilden, hat man zu überprüfen, ob

1. $T_1 \cup T_2 \cup T_3 = M$.
   Dieses Kriterium ist erfüllt;
2. die Teilmengen paarweise durchschnittsfremd sind.
   Wegen $T_1 \cap T_3 = \{2\}$ ist dieses Kriterium nicht erfüllt.

Die Teilmengen T_1, T_2, T_3 bilden keine Klasseneinteilung bezüglich M.
Beachten Sie, daß eine Klasseneinteilung einer Menge nur genau dann vorliegt, falls beide Kriterien zugleich erfüllt sind.

BEISPIEL 52

Für die Menge der natürlichen Zahlen könnte eine Klasseneinteilung vorgenommen werden, indem man diese Menge in die geraden Zahlen und die ungeraden Zahlen zerlegt.

BEISPIEL 53

Unter 2.1. wurde ausgeführt, daß jede Aussage entweder wahr oder falsch ist. Betrachtet man nun die Menge A aller Aussagen, so zerfällt diese auf Grund dieses Sachverhalts in zwei Klassen. Eine Klasse enthält alle und nur die wahren Aussagen, eine genau die falschen Aussagen. Man nennt die Klassen von Aussagen die Wahrheitswerte und bezeichnet sie mit W bzw. F.
Die Wahrheit bzw. Falschheit einer Aussage $\boldsymbol{a}$ ist demnach gleichwertig mit $\boldsymbol{a} \in W$ bzw. $\boldsymbol{a} \in F$.
Man sagt auch, daß $\boldsymbol{a}$ den Wahrheitswert W bzw. F hat.

4.2.1.5. Differenzmenge

Ein altes Sprichwort sagt „Man kann nur auf einer Hochzeit tanzen". Man könnte dies nun so auslegen, daß es unmöglich ist, an zwei Stellen zugleich zu sein. Übersetzt man dies einmal in die „Sprache der Mengenlehre", so könnte man es wie folgt interpretieren:

BEISPIEL 54

Die Mitglieder eines mathematischen Studentenzirkels sollen eine Menge $M = \{a, b, c, d, e, f\}$ darstellen. Die FDJ-Leitung einer Seminargruppe bildet die Menge $N = \{a, c, x, y, z\}$. Auf Grund einer sehr dringenden Angelegenheit macht es sich nun nötig, kurzfristig eine Besprechung der FDJ-Leitung zu der Zeit einzuberufen, an der auch der Studentenzirkel arbeitet. Da die Mitglieder a, c des Zirkels an der Leitungssitzung teilnehmen, werden zu diesem Zeitpunkt die restlichen Teilnehmer des Zirkels die Menge $M \setminus N = \{b, d, e, f\}$ festlegen.

Diese Menge $M \setminus N$ besteht aus genau den Elementen von M, die übrigbleiben, wenn man diejenigen Elemente aus M entfernt, die auch Elemente von N sind. Eine derartige Menge, auf die dies zutrifft, heißt **Differenzmenge** $\boldsymbol{M \setminus N}$ der Mengen M und N. Bild 34 veranschaulicht geometrisch den Sachverhalt, wobei M und N durch zwei ebene Punktmengen innerhalb einer geschlossenen Kurve dargestellt sind.

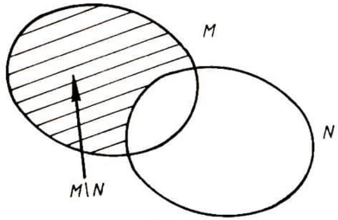


Bild 34

BEISPIEL 55

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$N = \{6, 7, 8, 9, 10\}$$

In diesem Fall sind beide Mengen disjunkt. Die Differenzmenge besteht dann aus allen Elementen von M.

$$M \setminus N = \{1, 2, 3, 4, 5\} = M$$

Bild 35 veranschaulicht dies.

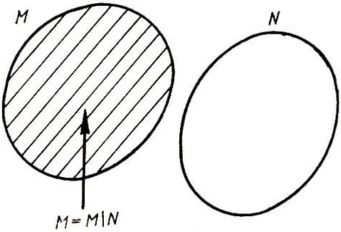


Bild 35

Eng im Zusammenhang mit dem Begriff der Differenzmenge steht der Begriff der *Komplementärmenge.*

Ein Element x ist Element der Komplementärmenge $\overline{N}$ genau dann, wenn es nicht Element der Menge N ist. Das heißt:

$$x \in \overline{N} \text{ genau dann, wenn } x \notin N.$$
$$x \in \overline{N} \Leftrightarrow x \notin N^1$$

Nach den vorangegangenen Ausführungen gehören zur Differenzmenge $M \setminus N$ genau die Elemente von M, die nicht in N enthalten sind. Umgekehrt ist jedes Element in der Differenzmenge $M \setminus N$ enthalten, falls es Element von M, aber nicht von N ist.

---

[1] exakter: $\overline{N} \underset{\text{Def}}{=} \{x \mid \neg\, a(x)\}$

Symbolisch:

$$x \in M \setminus N \Leftrightarrow x \in M \wedge x \notin N.$$

Wenn jedoch $x \notin N$, so $x \in \overline{N}$. Also gilt:

$$x \in M \setminus N \Leftrightarrow x \in M \wedge x \in \overline{N}.$$

Falls $x \in M$ und $x \in \overline{N}$, so $x \in M \cap \overline{N}$.

Daraus folgt:

$$x \in M \setminus N \Leftrightarrow x \in M \cap \overline{N}.$$

Die Differenzmenge findet auch im Mathematikunterricht ihre Anwendung.

BEISPIEL 56

Die Gleichung $\frac{6x + 2}{x - 5} = 4$ hat als Grundmenge G die Menge aller reellen Zahlen, ausgenommen die Zahl $+ 5$.
Man schreibt dafür: $G = \varDelta \setminus \{+5\}$.

Mit dieser Schreibweise hat man die Möglichkeit, die nicht definierten Stellen von vonherein auszuschließen.

4.2.1.6. Produktmengen

BEISPIEL 57

Auf einer Geburtstagsfeier sind zwei Herren und drei Damen anwesend. Menge der Herren: $M = \{a, b\}$. Menge der Damen $N = \{x, y, z\}$. Tanzt nun Herr a mit Dame x, so bilden beide ein Tanzpaar. Dabei führt der Herr die Dame beim Tanzen. Dieses Tanzpaar könnte man als Menge der Gestalt $\{\{a\}, \{a, x\}\}$ aufschreiben. Das erste Element $\{a\}$ dieser Menge soll ausdrücken, daß im Tanzpaar eine Ordnung derart besteht, daß der Herr beim Tanzen die Dame führt und deshalb als erster genannt werden soll. Das zweite Element $\{a, x\}$ zeigt an, daß zwei Elemente zu einem Elementepaar zusammengefaßt sind. Tanzt nun im Verlaufe des Abends jeder Herr mit jeder Dame, so kann man unter Berücksichtigung des Führens der Herren beim Tanzen schreiben:

	tanzt mit		Tanzpaar
a		x	$\{\{a\}, \{a, x\}\}$
a		y	$\{\{a\}, \{a, y\}\}$
a		z	$\{\{a\}, \{a, z\}\}$
b		x	$\{\{b\}, \{b, x\}\}$
b		y	$\{\{b\}, \{b, y\}\}$
b		z	$\{\{b\}, \{b, z\}\}$

BEISPIEL 58

Während eines Spazierganges findet ein Mann auf einer Wiese Munition. Entsprechend der Vorschrift markiert er den Fundort, und, um dem ABV des nächstliegenden Ortes genaue Angaben über den Fundort machen zu können, mißt er die Anzahl seiner Schritte von einer Wegekreuzung zum Fundort. Dabei stellt er fest, daß er zunächst 250 Schritt nach Osten und anschließend 400 Schritt in nördlicher Richtung gehen muß. Auch hier werden zwei Elemente zu einem Elementepaar zusammengefaßt. Die entsprechende Ordnung im Paar ist dadurch gegeben, daß zuerst nach Osten gegangen werden soll und deshalb die Anzahl der Schritte nach Osten als erste genannt wird. Als Menge könnte demzufolge die Fundortfestlegung in der Gestalt $\{\{250\}, \{250, 400\}\}$ geschrieben werden.

Diese Beispiele deuten an, daß offensichtlich derartige Mengen im praktischen Leben oft auftreten und es sinnvoll ist, für sie einen bestimmten Namen einzuführen. Da es sich jeweils um ein Elementepaar handelt, in dem eine bestimmte Ordnung der Elemente vorliegt, wählte man für Mengen der Gestalt $\{\{m\}, \{m, n\}\}$ die Bezeichnung *geordnetes Paar*.

Definition 5.1

Eine Menge der Gestalt $\{\{m\}, \{m, n\}\}$ heißt ein geordnetes Paar und wird mit $[m, n]$ bezeichnet:

$$[m, n] \underset{\text{Def}}{=} \{\{m\}, \{m, n\}\}.$$

Mittels dieser Definition wurde der Menge $\{\{m\}, \{m, n\}\}$ ein Name gegeben und gleichzeitig für sie die Kurzbezeichnung $[m, n]$ eingeführt.
Sehr wichtig ist die Gleichheit geordneter Paare. Ohne Beweis sei hier mitgeteilt, daß

$$[m, n] = [a, b] \text{ genau dann, wenn } m = a \text{ und } n = b,$$

d. h. die Paare komponentenweise übereinstimmen. Dieser Sachverhalt leuchtet unmittelbar ein, denn jedes geordnete Paar wird als Gesamtheit von zwei Elementen eindeutig durch Angabe dieser Elemente *und* deren Reihenfolge gekennzeichnet.
Definition 5.1 gibt nun auch die Möglichkeit, die geordneten Paare des Beispiels 57 in der Form

$$[a, x], [a, y], [a, z], [b, x], [b, y], [b, z]$$

aufzuschreiben. Die Gesamtheit der Tanzpaare bildet nun ihrerseits eine neue Menge. Diese Menge ist dadurch gekennzeichnet, daß ihre Elemente Paare von Elementen zweier anderer Mengen sind. Dabei ist das erste Element eines jeden Paares aus der Menge M, das zweite aus der Menge N entnommen.

Eine Menge solcherart geordneter Elementepaare heißt *Produkt-* oder *Kreuzmenge.*

Definition 5.2

> Produktmenge $M \times N$[1] der Mengen M, N heißt eine Menge genau dann, wenn sie die Menge aller *geordneten* Paare $[m, n]$ mit $m \in M$ und $n \in N$ ist.

Betrachtet man die Anzahl der Elemente im Beispiel 42, so hatte die Menge M zwei Elemente, die Menge N drei Elemente. Die Produktmenge hatte 6 ($= 2 \cdot 3$) Elemente. Deshalb wurde für $M \times N$ der Name Produktmenge gewählt.
Die Definition 5.2 legt nicht fest, daß die Mengen verschiedene Elemente enthalten müssen, wie das im Beispiel 57 der Fall war.

BEISPIEL 59

Es sei $M = \{1, 2\}$, $N = \{1, 2\}$.

$M \times N = \{[1, 1,], [1, 2], [2, 1], [2, 2]\}$.

Infolge der festgelegten Ordnung der Aufeinanderfolge der Elemente innerhalb der Paare sind die Elemente $[1, 2]$ und $[2, 1]$ voneinander verschieden. Das ist auch der Grund, weshalb für Produktmengen im allgemeinen[2] das kommutative Gesetz nicht gilt.

BEISPIEL 60

$M = \{1, 2\}$, $N = \{3, 4\}$ $\quad M \times N = \{[1, 3], [1, 4], [2, 3], [2, 4]\}$

$N \times M = \{[3, 1], [4, 1], [3, 2], [4, 2]\}$

Das heißt: $M \times N \neq N \times M$, da ja $[1, 3] \neq [3, 1]$ usw. gilt.

Es besteht auch die Möglichkeit, eine Produktmenge bildlich darzustellen.

BEISPIEL 61

Wählt man $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ und $Y = \{y_1, y_2\}$, dann ist $X \times Y = \{[x_1, y_1], [x_1, y_2], [x_2, y_1], [x_2, y_2], [x_3, y_1], [x_3, y_2]\}$. Wenn x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 als Abszissen bzw. Ordinaten der Punkte $P_{ij}(x_i, y_j)$ $\begin{matrix} i = 1, \ldots, 3 \\ j = 1, 2 \end{matrix}$ in einem gewissen vorgegebenen rechtwinkligen Koordinatensystem gedeutet werden, dann ist $\{P_{ij}\}_{\substack{i = 1, \ldots, 3 \\ j = 1, 2}}$ die Deutung für $\{x_1, x_2, x_3\} \times \{y_1, y_2\}$.

---

[1] gelesen: M kreuz N [2] vgl. Aufgabe 39

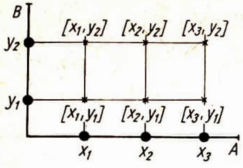


Bild 36 veranschaulicht diesen Sachverhalt. Dieses Beispiel läßt erkennen, daß auch alle Punkte der Ebene innerhalb des rechtwinkligen Koordinatenkreuzes als Elemente der Produktmenge $\Delta \times \Delta$ aufgefaßt werden können.

Bild 36

4.3. Abbildungen

Dem Begriff der Abbildung kommt in der Mathematik eine fundamentale Bedeutung zu. Er steht in enger Beziehung mit dem Begriff Produktmenge. Das Mathematische Wörterbuch[1] erklärt den Begriff Abbildung wie folgt:

Definition 6

> Sind zwei Mengen M, N gegeben, so heißt T eine Abbildung aus (von) M in (auf) N genau dann, wenn $(M \times N) \supseteqq T$ gilt.

Daraus ist zu erkennen, daß jede (echte oder unechte) Teilmenge einer Produktmenge eine Abbildung ist und es verschiedene Arten von Abbildungen gibt. Der Erläuterung, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit man von einer Abbildung **aus** M **in** N oder **von** M **auf** N usw. sprechen kann, dienen die Ausführungen der folgenden Abschnitte.

4.3.1. Abbildung von einer Menge auf eine Menge

BEISPIEL 62

Onkel Max besucht Familie Kunze. Er bringt den Kindern Dieter, Peter, Uwe drei Geschenke mit, ein Auto, einen Ball und ein Paar Rollschuhe. Den Jungen wird es überlassen, wie sie diese Geschenke unter sich aufteilen. Welche Geschenkverteilung wäre möglich?
Um dies festzustellen, wird die Menge der Jungen mit $M = \{d, p, u\}$ und die Menge der Geschenke mit $N = \{a, b, r\}$ bezeichnet.

Einige Verteilungsmöglichkeiten:

	nimmt		symbolisch dargestellt durch
1.	Dieter	das Auto	$[d, a]$
	Peter	den Ball	$[p, b]$
	Uwe	die Rollschuhe	$[u, r]$

[1] NAAS/SCHMID: Mathematisches Wörterbuch. Akademie-Verlag GmbH, Berlin, und B. G. Teubner Verlagsgesellschaf, Leipzig 1961. Bd. I, S. 1

2.	Dieter	den Ball	$[d, b]$
	Peter	die Rollschuhe	$[p, r]$
	Uwe	das Auto	$[u, a]$
3.	Dieter	die Rollschuhe	$[d, r]$
	Peter	das Auto	$[p, a]$
	Uwe	den Ball	$[u, b]$

Ein Vergleich mit 4.2.1.6. zeigt, daß die Gesamtheit dieser Verteilungen die Produktmenge

$$M \times N = \{[d, a], [p, b], [u, r], [d, b], [p, r], [u, a], [d, r], [p, a], [u, b]\}$$

festlegt. Diese Produktmenge ist die Vereinigung der drei Teilmengen

$$T_1 = \{[d, a], [p, b], [u, r]\}, \qquad T_2 = \{[d, b], [p, r], [u, a]\},$$
$$T_3 = \{[d, r], [p, a], [u, b]\}.$$

Jede dieser Teilmengen würde einer Einigung der Jungen entsprechen. Jedes Element dieser Teilmenge besteht aus einem geordneten Elementepaar. Dabei kommt ein Element im Paar vor dem Komma und ein Element hinter dem Komma. Alle Elemente in diesen Paaren, die vor dem Komma stehen, bilden nun ihrerseits eine Menge. Diese Menge heißt *Vorbereich* der Teilmenge; symbolisch: $Vb(T)$. Alle Elemente nach dem Komma sollen eine Menge festlegen, die *Nachbereich* der Teilmenge heißt; symbolisch: $Nb(T)$. Demnach hat die Teilmenge T_1:

$$Vb(T_1) = \{d, p, u\} \qquad Nb(T_1) = \{a, b, r\}$$

Wegen $M = \{d, p, u\} = Vb(T_1)$ und $N = \{a, b, r\} = Nb(T_1)$ heißt T_1 eine *Abbildung* von der Menge M auf die Menge N.
Man erkennt, daß ebenso T_2, T_3 Abbildungen von der Menge M auf die Menge N sind. Allgemein erklärt man:

Definition 6a

> T heißt genau dann eine Abbildung **von** der Menge M **auf** die Menge N, wenn T eine Teilmenge der Produktmenge $M \times N$ ist, und $Vb(T) = M$ und $Vb(T) = N$ gilt.

Man muß nun unterscheiden zwischen der Abbildung als solcher und dem, was abgebildet wird. Im Beispiel 62 waren die Abbildungen die Mengen T_1, T_2, T_3. Aufeinander abgebildet jedoch werden die Elemente des Vorbereichs auf die Elemente des Nachbereichs. In der Abbildung $T_1 = \{[d, a], [p, b], [u, r]\}$ wird

d auf a abgebildet, symbolisch $d \to a$
p auf b abgebildet, symbolisch $p \to b$
u auf r abgebildet, symbolisch $u \to r$.

Die Elemente des Vorbereiches nennt man *Urbilder*. Das sind in diesem Fall die Elemente d, p, u. Die Elemente des Nachbereiches heißen *Bilder*. Das Element a ist Bild des Elements d. Das Element p hat als Bild das Element b, und zu u gehört r als Bild.

4.3.2. Abbildung aus einer Menge in eine Menge

BEISPIEL 62a

Eine Gruppe von fünf Studenten wird im physikalischen Praktikum von einem Assistenten betreut. Der für das Praktikum eingerichtete Raum hat sieben Arbeitsplätze.
Die Menge der dort tätigen Menschen sei $M = \{a, b, c, d, e, f\}$, wobei das Element a den Assistenten bezeichnen soll.
Die Menge der Arbeitsplätze sei $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
Die Möglichkeiten der Platzverteilung bilden die Produktmenge $M \times N$, die aus $6 \cdot 7 = 42$ Elementen besteht. Des Umfangs wegen soll diese hier nicht aufgeführt werden. Dadurch, daß der Assistent keinen eigenen Arbeitsplatz benötigt, da er ja keine Versuche durchführt, sondern nur Anleitung gibt, und die Studenten die Arbeitsplätze 1 bis 5 belegen, wird aus der Produktmenge $M \times N$ eine Teilmenge T, beispielsweise

$$T = \{[b, 1], [c, 2], [d, 3], [e, 4], [f, 5]\}$$

ausgewählt. Für diese Teilmenge ist $Vb(T) = \{b, c, d, e, f\}$ und $Nb(T) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Vergleicht man M mit $Vb(T)$, so stellt man fest, daß in $Vb(T)$ das Element a nicht vorkommt. In $Nb(T)$ sind die Elemente 6, 7 nicht vorhanden, die jedoch Elemente von N sind. Es gilt also in diesem Fall: $M \supset Vb(T)$, $\quad N \supset Nb(T)$.

aus - in

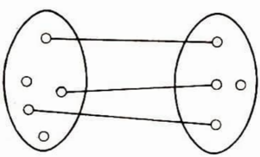


Bild 37

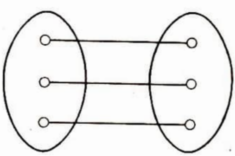


Bild 38 von-auf

Eine solche Abbildung heißt: Abbildung aus einer Menge M in eine Menge N. Es ist nun jedoch so, daß auch jede Abbildung von einer Menge auf eine Menge eine Abbildung aus einer Menge in eine Menge (aber nicht umgekehrt!) ist. Das bedeutet:

Von einer Abbildung aus M in N spricht man, falls
entweder $M \supset Vb(T)$ oder $M = Vb(T)$ und entweder $N \supset Nb(T)$ oder $N = Nb(T)$ gilt. Mit anderen Worten:

Die Menge aller Abbildungen von — auf ist eine Teilmenge der Menge aller Abbildungen aus — in.

Allgemein erklärt man:

Definition 6b

> T heißt genau dann eine Abbildung **aus** der Menge M **in** die Menge N, wenn T eine Teilmenge der Produktmenge $M \times N$ ist, und $M \supseteqq Vb(T)$, $N \supseteqq Nb(T)$ gilt.

Den hier geschilderten Sachverhalt veranschaulicht Bild 37/38.

4.3.3. Abbildung von einer Menge in eine Menge

BEISPIEL 63

Dieter, Rolf, Peter und Uwe bauen sich eine Schneehütte. Als sie fertig ist, haben nur drei Jungen darin Platz. Damit ein Streit vermieden wird, beschließen sie, die Hütte abwechselnd zu benutzen. Der Junge, der keinen Platz findet, soll die Wache übernehmen. Das Los entscheidet, daß Dieter, Rolf und Uwe in die Schneehütte gehen, während Peter die Wache übernimmt.

Menge der Plätze: $M = \{1, 2, 3\}$, Menge der Jungen: $N = \{d, r, p, u\}$. Nimmt man an, daß Dieter sich auf Platz 1, Rolf auf Platz 2, Uwe auf Platz 3 setzt, dann würde durch das Los aus der Produktmenge $M \times N$, die alle Möglichkeiten der Platzverteilung umfassen würde, die Teilmenge $T = \{[1, d], (2, r], [3, u]\}$ ausgewählt.

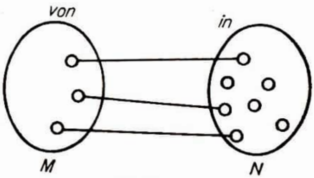


Bild 39

Ebenso hätte eine andere Platzverteilung erfolgen können. An der Tatsache, daß aus der Produktmenge $M \times N$ eine Teilmenge ausgewählt wurde, hätte sich nichts geändert.

Für die Teilmenge T ist: $Vb(T) = \{1, 2, 3\}$; $Nb(T) = \{d, r, u\}$. Während $Vb(T) = M$, gilt $Nb(T) \subset N$, da ja in $Nb(T)$ das Element p fehlt, welches in der Menge N enthalten ist.

Entsprechend den Definitionen 7a, 7b ist T eine Abbildung von der Menge in die Menge N. Zur Veranschaulichung dieses Beispiels dient Bild 39.

4.3.4. Abbildung aus einer Menge auf eine Menge

BEISPIEL 64

Inge, Klaus und Manfred leihen sich einen viersitzigen Wagen aus, um mit diesem eine Wochenendfahrt durchzuführen. Alle drei sind im Besitz der Fahrerlaubnis. Jeder möchte das Auto fahren. Man einigt sich, daß am Steuer (Platz 1) zuerst Inge sitzt, neben ihr, auf Platz 2, Klaus und hinter Inge, auf Platz 4, Manfred. Auch dieser Entschluß von Inge, Klaus und Manfred stellt eine Abbildung dar. Damit dies erläutert wird, sei die Menge der Plätze $M = \{1, 2, 3, 4\}$; die Menge der Menschen $N = \{i, k, m\}$. Alle Möglichkeiten der Platzverteilung bilden die Produktmenge

$$M \times N = \{[1, i], [2, i], [3, i], [4, i], [1, k], [2, k], [3, k], [4, k], [1, m], [2, m], [3, m], [4, m]\}.$$

Durch die vereinbarte Sitzordnung wird aus dieser Menge die Teilmenge $T = \{[1, i], [2, k], [4, m]\}$ ausgewählt. Diese Teilmenge T hat den Vorbereich $Vb(T) = \{1, 2, 4\}$; den Nachbereich $Nb(T) = \{i, k, m\}$.

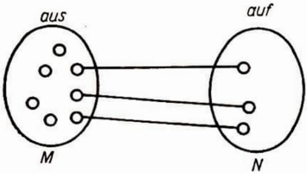


Bild 40

Wegen $M \supset Vb(T)$ und $N = Nb(T)$ ist T entsprechend den Definitionen 6a, 6b eine Abbildung aus der Menge M auf die Menge N. Eine Veranschaulichung gibt Bild 40. Definitionen und Beispiele lassen erkennen, daß eine Produktmenge T genau dann Abbildung heißt, falls T eine Teilmenge einer Produktmenge $M \times N$ ist. Die verschiedenen Möglichkeiten des echten Enthaltenseins bzw. der Gleichheit zwischen den Mengen, die die Produktmenge bilden, und den Mengen des Vor- und Nachbereiches ergeben die verschiedenen Ausdrucksweisen aus (von) — in (auf).

AUFGABEN

38. Bilden Sie die Produktmengen $M \times N$.

a) $M = \{a, b, c\}$ $\quad N = \{x, y, z\}$

b) $M = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad N = \{1\}$

c) $M = \{4, 5, 6, 7\}$ $\quad N = \emptyset$

39. $M = \{a\}$, $N = \{a\}$. Bestätigen Sie, daß in diesem Fall $M \times N = N \times M$ ist.

40. Welchen Teil der Koordinatenebene erhält man, wenn folgende Mengenprodukte graphisch dargestellt werden:

a) $\langle 0; +\infty) \times \langle 0; +\infty)$ $\quad$ b) $(-\infty; 0) \times \langle 0; +\infty)$

c) $(-\infty; 0\rangle \times (-\infty; 0)$ $\quad$ d) $(0; +\infty) \times (-\infty; 0)$?

41. Um welche Abbildungen handelt es sich, wenn $M = \{1, 2, 3\}$, $N = \{2, 5\}$ und folgende Teilmengen von $M \times N$ die Abbildungen ausdrücken:

a) $T = \{[1, 2], [1, 5]\}$ $\quad$ b) $T = \{[1, 2], [2, 2], [3, 2]\}$

c) $T = \{[1, 2], [3, 2]\}$ $\quad$ d) $T = \{[1, 2], [2, 5], [3, 5]\}$

42. Es sei M die Menge aller Sitzplätze in einem Kino, N die Menge der Besucher einer Vorstellung. Alle Plätze sind besetzt. Um welche Abbildung handelt es sich?

43. Welche Abbildung liegt vor, wenn nicht alle Plätze besetzt sind? (Produktmenge $M \times N$)

44. Es sei M die Menge aller Menschen, die eine bestimmte Theatervorstellung besuchen wollen. N ist die Menge der Eintrittskarten der Vorstellung. Als alle Eintrittskarten verkauft sind, bleiben Menschen übrig, die keine Karte erhalten konnten. Welche Abbildungen werden ausgedrückt, wenn man
a) die Menschen den Eintrittskarten,
b) den Eintrittskarten die Menschen zuordnet?

4.3.5. Inverse Abbildungen

BEISPIEL 65

Uwe geht mit Holger und Gudrun ins Kino. Sie kaufen Karten mit den Platznummern 28, 29, 30. Da Gudrun sich in die Mitte von beiden setzt, belegt Uwe Platz 28, Holger Platz 30.
Die Menge der Menschen sei $M = \{u, g, h\}$. Die Plätze bilden die Menge $\{28, 29, 30\} = N$. Nun gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Man ordnet die Plätze den Menschen zu.
Das ergibt die Produktmenge $N \times M$. Durch die Sitzordnung wird aus dieser Produktmenge die Teilmenge $F = \{[28, u], [29, g], [30, h]\}$ ausgewählt. Dabei ist $Vb(F) = \{28, 29, 30\}$ und $Nb(F) = \{u, g, h\}$.

2. Man ordnet die Menschen den Plätzen zu.
Das ergibt die Produktmenge $M \times N$. Aus dieser wird durch die Sitzordnung die Teilmenge $T = \{[u, 28], [g, 29], [h, 30]\}$ mit $Vb(T) = \{u, g, h\}$ und $Nb(T) = \{28, 29, 30\}$ festgelegt.

Vergleicht man die Abbildungen F und T, dann stellt man fest, daß der Vorbereich von F gleich dem Nachbereich von T und der Nachbereich von F gleich dem Vorbereich von T ist.
Die Abbildung T heißt Umkehrabbildung von F (oder auch die zu F inverse Abbildung).
Man drückt dies symbolisch durch $T = F^{-1}$ aus.
Exakt formuliert man: Zu jeder Abbildung läßt sich ihre Umkehrabbildung finden, indem man in jedem geordneten Paar (welches Element der Abbildung ist) seine beiden Elemente umstellt. Das Element, welches im Paar erst links vom Komma stand, steht nun rechts und umgekehrt. Allgemein drückt man dies so aus:

$$[m, n] \in F, \text{ so gilt: } [n, m] \in F^{-1} \text{ oder genauer:}$$
$$[n, m] \in F^{-1}, \text{ genau dann, wenn } [m, n] \in F.$$

Daher kann man die Beziehungen zwischen Vor- und Nachbereich von Abbildungen symbolisch ausdrücken durch:

$$Vb(F) = Nb(F^{-1}) \qquad Nb(F) = Vb(F^{-1}).$$

In Worten:

Der Vorbereich der Abbildung ist gleich dem Nachbereich der Umkehrabbildung. Der Nachbereich der Abbildung ist gleich dem Vorbereich der Umkehrabbildung.

4.3.6. Eindeutige und eineindeutige Abbildungen

Eine sehr große Bedeutung kommt in der Mathematik den eindeutigen und eineindeutigen Abbildungen zu. Deshalb sollen diese im folgenden erläutert werden.

BEISPIEL 66

Fritz holt sich in einer Papierwarenhandlung sechs Kartons, um Lokomotive und sechs Wagen seiner elektrischen Eisenbahn zu verpacken. Infolge der verschiedenen Größen der Kartons faßt Karton 1 die Lokomotive, Karton 2 drei Wagen, Karton 3 zwei Wagen und Karton 4 einen Wagen. Zwei Kartons bleiben übrig. Auch dieser Sachverhalt stellt eine Abbildung dar. Legt man fest, daß die Lokomotive und die Wagen die Menge $M = \{l, a, b, c, d, e, f\}$, die Kartons die Menge $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ bilden, so wird aus der Produktmenge $M \times N$ (die alle Möglichkeiten der Verpackung enthält) durch das Verpacken beispielsweise die Teilmenge

$$F = \{[l, 1], [a, 2], [b, 2], [c, 2], [d, 3], [e, 3], [f, 4]\}$$

ausgewählt. Hierbei gilt: $Vb(F) = \{l, a, b, c, d, e, f\} = M$ und $N \supset Nb(F)$. F ist deshalb eine Abbildung von der Menge M in die Menge N. Abgebildet werden die Elemente des Vorbereichs (Urbilder) auf die Elemente des Nachbereichs (Bilder), d. h., l auf 1; a, b, c, auf 2; d, e auf 3, f auf 4. Anschaulich zeigt dies Bild 41.

Man erkennt, daß jedes Urbild genau ein Bild besitzt, (während es für jedes Bild ein bis mehrere Urbilder gibt). Eine solche Abbildung F heißt *eindeutige* Abbildung von der Menge M in die Menge N.

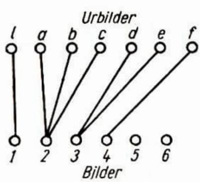


Bild 41

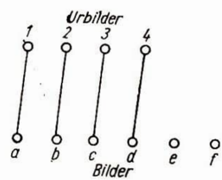


Bild 42

BEISPIEL 67

Sechs Jungen beabsichtigen, ins Kino zu gehen. An der Kasse bekommen sie jedoch nur noch vier Karten. Sie losen diese Karten aus.

Menge der Karten $M = \{1, 2, 3, 4\}$

Menge der Jungen $N = \{a, b, c, d, e, f\}$

Durch Losen wird aus der Produktmenge $M \times N$, die entsteht, da jeder Junge Anspruch auf einen Platz hat, eine Teilmenge, z. B.:

$F = \{[1, a], [2, b], [3, c], [4, d]\}$,

ausgewählt. Wegen $Vb(F) = \{1, 2, 3, 4\} = M$ und $Nb(F) \subset N$ ist F eine Abbildung von der Menge M in die Menge N.
Abgebildet werden die Elemente des Vor- auf die Elemente des Nachbereichs: 1 auf a, 2 auf b, 3 auf c, 4 auf d.

Bild 42 veranschaulicht dies.
Jedes Urbild hat in diesem Fall genau ein Bild, und jedes Bild hat genau ein Urbild (d. h. keins mehr oder weniger). Eine solche Abbildung F heißt *eineindeutige* Abbildung von der Menge M in die Menge N.
Diese Beispiele erläutern damit die

Definition 7

Eine Abbildung heißt *eindeutig* dann und nur dann, wenn jedes Urbild genau ein Bild hat.
Eine Abbildung heißt *eineindeutig* dann und nur dann, wenn jedes Urbild genau ein Bild und auch umgekehrt jedes Bild genau ein Urbild hat.

Wie man unschwer erkennt, ist die Eineindeutigkeit einer Abbildung ein Sonderfall der Eindeutigkeit einer Abbildung. Jede eineindeutige Abbildung ist deshalb erst recht eine eindeutige Abbildung.
Alle Möglichkeiten der Abbildung von einer Menge auf (in) eine Menge zeigt Bild 43 in einer einzigen Darstellung.
Unter Verwendung der senkrechten Parallelprojektion erhält man:
eine eindeutige Abbildung der Punkte der Ellipse auf die Achse AB,
eine eindeutige Abbildung der Punkte der Ellipse in die Strecke CD,
eine eineindeutige Abbildung der Punkte der oberen Halbellipse auf ihre Achse AB,
eine eineindeutige Abbildung der Punkte der oberen Halbellipse in die Strecke CD.

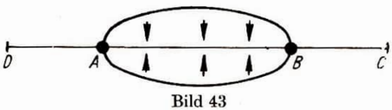


Bild 43

AUFGABE

45. Welcher Art sind folgende Abbildungen?

a) $F = \{[1, 3], [2, 4], [3, 4], [4, 5]\}$	$M = \{1, 2, 3, 4\}$	$N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
b) $F = \{[a, 1], [b, 2], [c, 3], [d, 4]\}$	$M = \{a, b, c, d\}$	$N = \{1, 2, 3, 4\}$
c) $F = \{[1, 3], [2, 3], [3, 5], [4, 6]\}$	$M = \{1, 2, 3, 4\}$	$N = \{3, 4, 5, 6\}$
d) $F = \{[a, x], [b, y], [c, z]\}$	$M = \{a, b, c\}$	$N = \{u, x, y, z\}$
e) $F = \{[1, a], [2, a], [3, b], [4, b]\}$	$M = \{1, 2, 3, 4\}$	$N = \{a, b\}$

4.3.7. Funktionen

4.3.7.1. Definition der Funktion

Ein sehr wichtiges Gebiet der Anwendung des Abbildungsbegriffes sind die Funktionen. Man erklärt allgemein:

Definition 8

> Eine Funktion f bezüglich der Mengen X und Y ist eine *eindeutige Abbildung* **von** der Menge X **auf** die Menge Y.
> X bzw. Y heißt Definitionsbereich bzw. Wertebereich von f.

Diese Definition ist nicht neueren Ursprungs. Ihren Grundgedanken, jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zuzuordnen, formulierte bereits P. G. L. DIRICHLET, der von 1805 bis 1859 lebte. Nach ihm wurde dieser Funktionsbegriff auch benannt.

Aus Gründen der Anpassung an bereits vorhandene Kenntnisse der Leser wird für eine Abbildung in diesem Fall der *kleine* Buchstabe f verwendet. Grundsätzlich soll vereinbart werden, daß für Abbildungen, die Funktionen sind, kleine Buchstaben des lateinischen oder griechischen Alphabets verwendet werden.

Da für Abbildungen von einer Menge auf eine Menge stets Vorbereich und Nachbereich gleich den entsprechenden Mengen sind, so gilt für alle Funktionen $Vb(f) = X$ und $Nb(f) = Y$.

Es sind demnach in der Menge X alle Urbilder und in der Menge Y alle Bilder enthalten. Ist x ein Urbild und y sein Bild, so ist es üblich, dieses Bild y durch die Schreibweise $f(x)$ zu kennzeichnen. Deshalb gilt stets: $y = f(x)$. Dieses $f(x)$ ist ein Bild, aber nicht das Symbol für die Funktion selbst, wie man fälschlicherweise oft hört.

Im Mathematikunterricht der Ober- und Fachschulen werden grundsätzlich nur Funktionen behandelt, für die $\Delta \supseteqq X$, $\Delta \supseteqq Y$ gilt. Vor- und Nachbereich dieser Funktionen sind Teilmengen der Menge der reellen Zahlen. Diese Funktionen heißen deshalb reelle Funktionen.[1] Für Vorbereich ist der Ausdruck Definitionsbereich, für Nachbereich die Benennung Wertevorrat gebräuchlich. Jedes Element des Definitionsbereiches einer Funktion f wird ein Argument der Funktion genannt. Die Elemente des Wertevorrates heißen Funktionswerte.

Definitionsbereich und Wertevorrat sind durch eine Zuordnungsvorschrift verbunden. Diese Zuordnungsvorschrift kann ein analytischer Ausdruck sein, für den die Bezeichnung Funktionsgleichung gebräuchlich ist.

Man kann die Zuordnungsvorschrift auch mit Worten ausdrücken.

[1] genauer: reellwertige Funktionen einer Veränderlichen

BEISPIEL 68

An einer Wandtafel konnte man lesen: $y = f(x) = x + 1$.
Welche Funktion war wohl damit gemeint? Diese Frage kann niemand eindeutig beantworten, denn die Angabe dieser Funktion ist unvollständig. Man hat vergessen, den Definitionsbereich D festzulegen. Wählt man $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, so erhält man die Funktion

$$f = \{[1, 1 + 1], [2, 2 + 1], [3, 3 + 1], [4, 4 + 1], [5, 5 + 1]\} = \{[1, 2], [2, 3], [3, 4], [4, 5], [5, 6]\}.$$

Legt man fest: $D = \left\{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$, so ergibt sich

$$f = \left\{[0, 0 + 1], \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{8} + 1\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4} + 1\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3} + 1\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + 1\right]\right\} =$$
$$= \left\{[0, 1], \left[\frac{1}{8}, 1\frac{1}{8}\right], \left[\frac{1}{4}, 1\frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right]\right\}.$$

Wie man erkennt, erhält man in jedem Fall eine andere Funktion.
Deshalb beachte man:
Zur eindeutigen Angabe einer reellen Funktion ist es notwendig, Funktionsgleichung und Definitionsbereich vorzugeben.
Der Funktionsbegriff ist jedoch nicht nur auf reellwertige Funktionen beschränkt.

BEISPIEL 69

Unter 2.2. wurden Negation ($\neg a$), Konjunktion ($p \wedge r$), Alternative ($a \vee b$), Implikation ($c \Rightarrow d$) und Äquivalenz ($x \Leftrightarrow y$) definiert. Die Negation ordnet jeder Aussage eine neue Aussage zu. Sie ist deshalb ein Beispiel für eine *einstellige Aussagenfunktion*. Die übrigen Aussagenverbindungen sind Beispiele für zweistellige Aussagenfunktionen. Es werden jeweils zwei Aussagen einer neuen Aussage zugeordnet.
Sieht man vom speziellen Inhalt der Aussagen ab und betrachtet nur die Wahrheitswerte der Aussagen, so entspricht jeder Aussagenfunktion eine sogenannte *Wahrheitsfunktion*. Durch eine zweistellige Wahrheitsfunktion wird jedem geordneten Paar von Wahrheitswerten eindeutig wieder ein Wahrheitswert zugeordnet. Die der Negation entsprechende einstellige Wahrheitsfunktion ordnet jedem Wahrheitswert wieder einen Wahrheitswert zu.

Sehr anschaulich geben die Wahrheitstafeln in 2.2. diesen letzten Sachverhalt wieder.

4.3.7.2. Gleichheit und Ungleichheit von Funktionen

Auf Grund der Eindeutigkeit der Abbildung von einer Menge X auf eine Menge Y können zwei Funktionen g und h nur dann gleich sein, wenn ihre Vorbereiche und ihre Nachbereiche gleich sind.

$$Vb(g) = Vb(h) \qquad Nb(g) = Nb(h)$$

Vergleicht man unter diesen Voraussetzungen die Funktionen mit den Zuordnungsvorschriften

$$g(x) = x + 1 \ (x \in \Delta) \quad \text{und} \quad h(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad x \in \Delta \setminus \{1\},$$

dann stellt man fest, daß beide Funktionen nicht gleich sein können, da g das Element $[1, 2]$ enthält, welches in h nicht vorhanden ist. Die daraus resultierenden unterschiedlichen graphischen Darstellungen zeigen die Bilder 44a und 44b.

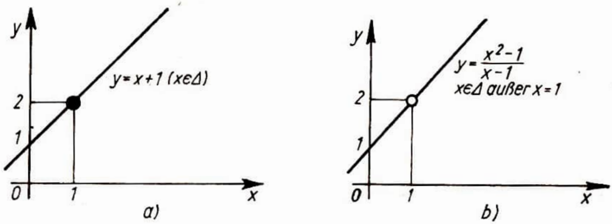


Bild 44

4.3.7.3. Umkehrfunktionen

Jede Funktion ist als eindeutige Abbildung definiert.

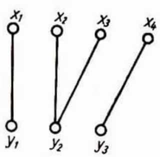


Bild 45

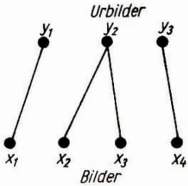


Bild 46

Soll von einer Funktion ihre Umkehrfunktion gebildet werden, dann wird bereits durch das Wort „Umkehrfunktion" ausgedrückt, daß die Umkehrung einer Funktion wieder eine Funktion, das heißt eine eindeutige Abbildung ist. Eine eindeutige Abbildung verlangt jedoch, daß jedem Urbild genau ein Bild (d. h. keins mehr oder weniger) zugeordnet wird. Dabei kann ein Bild ein bis mehrere Urbilder haben. Bild 45 veranschaulicht dies. Vertauscht man nun, um zur Umkehrabbildung zu kommen, in jedem

geordneten Paar die Stellung der Elemente, so werden alle Urbilder zu Bildern und alle Bilder zu Urbildern. Würde man bei der Abbildung, wie sie Bild 45 veranschaulicht, eine solche Vertauschung vornehmen, dann käme eine Abbildung zustande, wie sie Bild 46 zeigt. Aus diesem ist aber zu ersehen, daß y_2 zwei Bilder (x_1 und x_2) hat und nicht genau eins, wie es die Eindeutigkeitsforderung verlangt. Die Abbildung, wie sie Bild 46 darstellt, ist keine eindeutige Abbildung.[1] Man erkennt aber auch, daß die Abbildung dort wieder eindeutig ist, wo jedes Urbild genau ein Bild und jedes Bild genau ein Urbild hat. Deshalb ergibt sich aus der Bedingung, daß die Umkehrung einer Funktion wieder eine Funktion sein soll, die Festlegung: *Man kann nur Funktionen umkehren, die eine eineindeutige Abbildung von der Menge X auf die Menge Y sind.*
Das kann man auch in der Form ausdrücken, daß man sagt: *Nur eineindeutige Funktionen ergeben bei ihrer Umkehrung wieder Funktionen.*
Um die Zuordnungsvorschrift (Funktionsgleichung) der Umkehrfunktion zu erhalten, geht man im allgemeinen so vor, wie das nachfolgende Beispiel zeigt.

BEISPIEL 70

Die Funktion f mit

$$f(x) = y = x + 1 \qquad x \in (-2; 3)$$

ist eine eineindeutige Funktion. Sie ist umkehrbar. Bei einer Funktion f gilt $Vb(f) = X$ und $Nb(f) = Y$; entsprechend den Ausführungen unter 4.3.5. muß daher für die Umkehrfunktion f^{-1} gelten: $Vb(f^{-1}) = Y$, $Nb(f^{-1}) = X$.
Demzufolge ist der Definitionsbereich der Funktion f der Wertevorrat der Umkehrfunktion f^{-1} und der Wertevorrat von f der Definitionsbereich von f^{-1}. Da man zur Angabe einer Funktion die Funktionsgleichung und den Definitionsbereich benötigt, muß zunächst der Wertevorrat von f festgelegt werden, da er ja Definitionsbereich von f^{-1} ist.
Bei eineindeutigen Funktionen setzt man zweckmäßigerweise dazu in die Funktionsgleichung, wenn obere und untere Grenze des Wertevorrats auf den Rändern des Definitionsbereiches liegen, die untere und obere Grenze des Definitionsbereiches ein, um damit untere und obere Grenze des Intervalls zu errechnen, das dem Wertevorrat entspricht.

$$1.\ x > -2 \qquad y > -2 + 1 \qquad\qquad 2.\ x < 3 \qquad y < 3 + 1$$
$$y > -1 \qquad\qquad y < 4$$

Damit ist der Wertevorrat das Intervall $(-1; 4)$.
Um die Umkehrfunktion zu erhalten, wird in jedem geordneten Paar $[x; y] \in f$ die Reihenfolge der Elemente des Paares umgekehrt. Rein

[1] Eine solche Abbildung heißt nacheindeutig oder auch mehreindeutig

formal widerspiegelt sich das in der Funktionsgleichung von f, indem man dort die Variable x mit der Variablen y vertauscht. Durch die Vertauschung der Elemente in jedem geordneten Paar wird bekanntlich der Definitionsbereich von f der Wertevorrat von f^{-1} und der Wertevorrat von f der Definitionsbereich von f^{-1}. Man erhält somit die Gleichung der Umkehrfunktion f^{-1}:

$$f^{-1}(y) = x = y + 1 \qquad \begin{array}{l} y \in (-2;\, 3) \\ x \in (-1;\, 4) \end{array}$$

Es ist nun üblich, die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion wieder nach y aufzulösen. Dies ist jedoch ein rein rechnerischer Vorgang, der keinerlei Einfluß auf die Umkehrfunktion als solche hat.

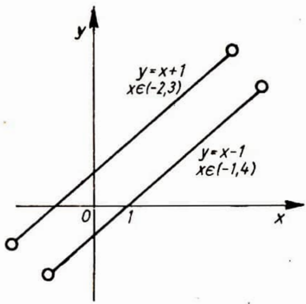


Bild 47

$$f^{-1}(x) = y = x - 1 \qquad \begin{array}{l} x \in (-1;\, 4) \\ y \in (-2;\, 3) \end{array}$$

Eine anschauliche Darstellung des Sachverhalts zeigt Bild 47. Geometrisch erhält man das Bild der Umkehrfunktion, indem man das Bild der ursprünglichen Funktion an der Geraden $y = x\,(x \in \varDelta)$ spiegelt. Die Gerade $y = x$ heißt Winkelhalbierende des ersten und dritten Quadranten.

Es sei ergänzend darauf hingewiesen, daß zur Bestimmung der Gleichung der Umkehrfunktion auch so vorgegangen werden kann, daß man

1. die Funktionsgleichung von f nach x auflöst,
2. in dieser nach x aufgelösten Funktionsgleichung von f eine Vertauschung der Variablen vornimmt.

Im folgenden Beispiel wird dieser Weg benutzt werden.

BEISPIEL 71

Die durch den analytischen Ausdruck $y = f(x) = x^2$ gegebene Funktion hat als Definitionsbereich die Menge der reellen Zahlen. Wegen $y = x^2 = (+x)^2 = (-x)^2$, d.h., $f(x) = f(-x)$, hat außer für $x = 0$ jedes Bild zwei Urbilder. Diese Funktion ist keine eineindeutige Funktion und deshalb auch nicht umkehrbar!

Bildet man eine neue Funktion mit dem analytischen Ausdruck $y = g(x) = x^2$ mit $x \in \langle 0;\, +\infty)$, dann ist diese Funktion eineindeutig. Von ihr kann die Umkehrfunktion gebildet werden. Man beachte jedoch, daß $f \neq g$ ist, denn bekanntlich sind zwei Funktionen nur dann gleich, wenn $Vb(f) = Vb(g)$ und $Nb(f) = Nb(g)$! Bilden der Umkehrfunktion:

$$y = g(x) = x^2 \qquad \begin{array}{l} x \in \langle 0;\, +\infty) \\ y \in \langle 0;\, +\infty) \end{array}$$

1. Auflösen nach x:

$$|x| = \sqrt{y}$$

2. Vertauschen der Variablen:

$$y = g^{-1}(x) = \sqrt{x} \qquad \begin{array}{l} x \in \langle 0;\, +\infty) \\ y \in \langle 0;\, +\infty) \end{array}$$

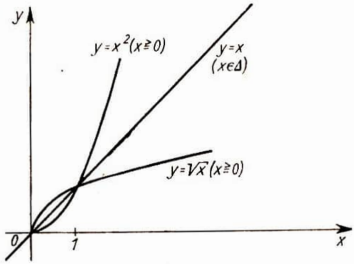


Bild 48

Bild 48 veranschaulicht dies. Ebenso hätte man eine neue eineindeutige Funktion durch den analytischen Ausdruck $y = h(x) = x^2$ mit $x \in (-\infty;\, 0\rangle$ definieren können. Auch in diesem Falle wäre $f \neq h$ und ebenso $h \neq g$!

Bilden der Umkehrfunktion

$$y = h(x) = x^2 \qquad \begin{array}{l} x \in (-\infty;\, 0\rangle \\ y \in (+\infty;\, 0\rangle \end{array}$$

Da zur Bildung der Umkehrfunktion das Quadratwurzelzeichen verwendet wird, soll $y = h(x) = x^2$ in der Form $y = h(-x) = (-x)^2$ geschrieben werden. Wegen $x \leq 0$ (andere Form von $x \in (-\infty;\, 0\rangle$) wird $-x \geqq 0$. Man erhält so:

$$y = h(-x) = (-x)^2$$
$$\sqrt{y} = -x$$
$$x = -\sqrt{y}$$

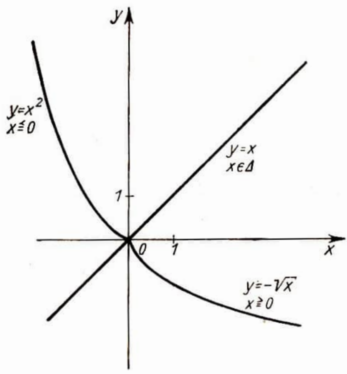


Bild 49

Nach dem Vertauschen der Variablen ergibt sich:

$$y = h^{-1}(x) = -\sqrt{x} \qquad \begin{array}{l} x \in \langle 0;\, +\infty) \\ y \in \langle 0;\, -\infty) \end{array}$$

Bild 49 zeigt die graphische Darstellung von Funktion und Umkehrfunktion.

BEISPIEL 72

$y = f(x) = \sin x$

Der Definitionsbereich von f erfaßt die Menge alle reellen Zahlen. Der Wertevorrat ist das Intervall $\langle -1;\ +1 \rangle$. Wegen der Periodizität ist f keine eineindeutige Funktion. Zu dieser Funktion kann man keine Umkehrfunktion bilden.

Wählt man aus dem Definitionsbereich die echte Teilmenge $\left\langle -\frac{\pi}{2};\ +\frac{\pi}{2} \right\rangle$ aus, dann ist die Funktion g, die durch die Zuordnungsvorschrift

$$y = g(x) = \sin x, \qquad x \in \left\langle -\frac{\pi}{2};\ +\frac{\pi}{2} \right\rangle$$

gegeben ist, eineindeutig.

Bilden der Umkehrfunktion

$$y = g(x) = \sin x \qquad \begin{array}{l} x \in \left\langle -\frac{\pi}{2};\ +\frac{\pi}{2} \right\rangle \\ y \in \langle -1;\ +1 \rangle \end{array}$$

Zur formelmäßigen Auflösung von $y = \sin x$ nach x wird, in Verbindung mit dem festgelegten Definitionsbereich, das Symbol „arcsin" verwendet.

$x = \arcsin y$

Durch Vertauschen der Variablen erhält man:

$$y = g^{-1}(x) = \arcsin x \qquad \begin{array}{l} x \in \langle -1;\ +1 \rangle \\ y \in \left\langle -\frac{\pi}{2};\ +\frac{\pi}{2} \right\rangle \end{array}$$

Bild 50 zeigt die graphische Darstellung.

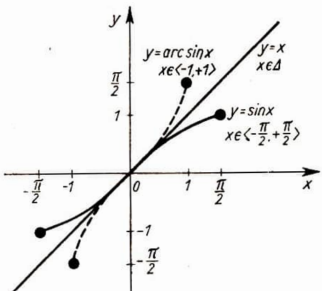


Bild 50

Selbstverständlich hätte man aus dem Definitionsbereich Δ andere Teilmengen auswählen können. Diese Teilmengen müssen die Bedingung erfüllen, daß sie eineindeutige Abbildungen durch die Zuordnungsvorschrift $y = \sin x$ gewährleisten. Infolge der Periodizität gibt es unendlich viele solcher Teilmengen.

AUFGABEN

46. Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen ein- oder eineindeutig sind.
   - • a) $y = x^3$ $\quad (x \in \Delta)$
   - b) $y = x^2 + 2x + 3$ $\quad (x \in \Delta)$
   - c) $y = \ln x$ $\quad (x \in (0;\ +\infty))$

d) $y = e^x$ $(x \in \Delta)$

e) $y = \cos x$ $(x \in \Delta)$

f) $y = \tan x$ $\left(x \in \Delta \setminus \left\{\frac{k \cdot \pi}{2}\right\}\right)$, wobei $k = \pm 1, \pm 3, \ldots$ ist.

47. Begründen Sie, weshalb die Funktionen nicht gleich sind.

a) $f(x) = x + 3$ $(x \in \Delta)$ $g(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ $(x \in \Delta \setminus \{3\})$

b) $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$ $(x \in \Delta \setminus \{-1, +1\})$ $g(x) = x^2 + 1$ $(x \in \Delta)$

48. Geben Sie zu folgenden Funktionen die Umkehrfunktion an.

a) $f(x) = y = 3x - 6$ $(x \in \Delta)$

b) $f(x) = y = x^2 - 4x + 3$ $(x \in (2; 5))$

c) $f(x) = y = \cos x$ $(x \in \langle 0, \pi \rangle)$

4.3.7.4. Reelle Zahlenfolgen

Bei gewissen Vorgängen, Erscheinungen und Einrichtungen interessieren oft nur bestimmte numerierbare Werte. Die dabei auftretenden Gesetzmäßigkeiten werden in der Theorie der reellen Zahlenfolgen untersucht. Auch in ihr leistet der Abbildungsbegriff eine große Hilfe.

Definition 9

> Ist jeder der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... genau eine reelle Zahl zugeordnet, so nennt man diese Zahlen in der durch die Zahlen 1, 2, 3, ... bestimmten Anordnung eine unendliche Zahlenfolge.
> Die Zahlen der unendlichen Zahlenfolge (kurz Folge) bezeichnet man mit $u_1, u_2, u_3, \ldots$ und nennt sie Glieder der Folge.
> Für die Folge schreibt man dann
>
> $$u_1, u_2, u_3, \ldots$$
>
> oder kurz $\{u_n\}$.

Die in der Definition genannte Zuordnung kann in Worten oder Zeichen gegeben sein. Sie muß nicht aus einer einzigen Formel bestehen.
Da jeder natürlichen Zahl n genau ein Wert u_n zugeordnet ist, kann man auch schreiben

$$u_n = f(n) \qquad n \in \dot{N}.$$

Man spricht in diesem Fall vom Bildungsgesetz der Folge und nennt $u_n = f(n)$ das allgemeine Glied der Folge.
Man kann für jede Zahl einer Folge den ihr entsprechenden Punkt auf einer Zahlengeraden markieren. Es ergibt sich damit als Bild der Folge eine Punkt-

folge. Durch sie können Eigenschaften der Zahlenfolge veranschaulicht werden.

BEISPIEL 73

$f(n) = \sqrt{n} \qquad (n \in \dot{N})$

Setzt man für n nacheinander die Zahlen 1, 2, 3, ... ein, dann bekommt man die Folge $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \ldots$

Die entsprechende Punktfolge auf der Zahlengeraden zeigt Bild 51.

Ebenso ist es möglich, die Funktion $u_n = f(n) = \sqrt{n}$ $(n \in \dot{N})$ in einem rechtwinkligen Koordinatensystem darzustellen. Da das Argument n

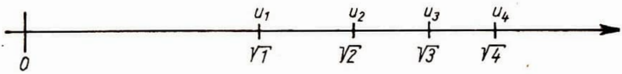


Bild 51

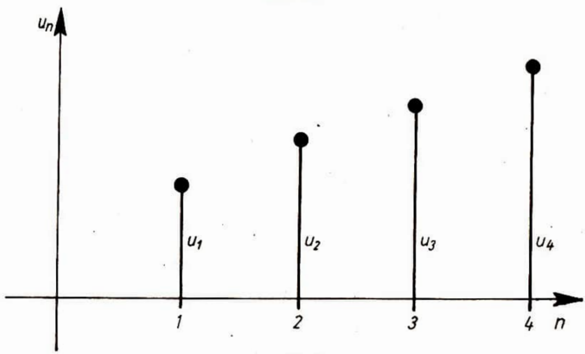


Bild 52

nur mit natürlichen Zahlen belegbar ist, erhält man keine Kurve, sondern nur isolierte Punkte, deren Ordinaten die Zahlen der Folge sind. Durch eine solche Darstellung wird das Verhalten von u_n bei wachsendem n sehr deutlich. Bild 52 veranschaulicht dies.

Die Definition 9 gestattet nicht, daß die Folge mit einem Glied u_k abbricht. Man meint deshalb mit den Worten Zahlenfolge und Folge stets unendliche Zahlenfolgen.

Falls den endlich vielen natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ..., k genau k Werte u_1, u_2, u_3, ..., u_k zugeordnet sind, spricht man von einer endlichen Zahlenfolge. Bei der analytischen Darstellung einer endlichen Folge muß die Beschränkung des Indexbereiches (Definitionsbereiches) besonders vermerkt werden.

BEISPIEL 74

Unendliche Folge: $u_n = f(n)$

Endliche Folge: $u_n = f(n) \qquad n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Da dann für unendliche Zahlenfolgen stets der Indexbereich mit der Menge der natürlichen Zahlen identisch ist, darf er weggelassen werden.

4.3.8. Mächtigkeit

Eine sehr große Bedeutung hat der Abbildungsbegriff für die Mengenlehre selbst.

BEISPIEL 75

Im Turnunterricht stellen sich die Schüler nebeneinander auf. Auf das Kommando „Abzählen!" rufen nacheinander die Schüler dem Lehrer die Zahlen 1, 2, 3, ... zu. Legt man die Menge der Schüler mit $M =$ $= \{a, b, c, d, e\}$ fest, so wird, falls die Schüler so abzählen, wie die Elemente in der Menge nacheinander aufgeschrieben sind, eine eineindeutige Abbildung der Menge M auf eine echte Teilmenge $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ von $\dot{N}$ vorgenommen. Die Zuordnung der Elemente ist:

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

Nimmt man an, daß die Schüler noch nicht der Größe nach angetreten waren, der Lehrer sie dazu auffordert und nochmals abzählen läßt, dann könnte die eineindeutige Abbildung von M auf T auch so aussehen:

$$\begin{array}{ccccc} b & a & d & e & c \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

Man erklärt allgemein:

Definition 10

> Zwei Mengen heißen **gleichmächtig** genau dann, wenn mindestens eine eineindeutige Abbildung der beiden Mengen aufeinander existiert.

Symbolisch stellt man die Gleichmächtigkeit der Mengen durch die Schreibweise $M \sim T$ (gelesen: M gleichmächtig T) dar. Das Wort „mindestens" sagt dabei aus, daß außer einer verlangten Abbildung der Mengen aufeinander noch mehrere (im Beispiel 75 waren es zwei) eineindeutige Abbildungen möglich sein können. Es erscheint nur zu selbstverständlich, daß jede Menge sich auf sich selbst abbilden läßt, d. h. zu sich selbst gleichmächtig ist.

$$M \sim M \tag{a}$$

Gilt, daß eine Menge M sich auf eine Menge N eineindeutig abbilden läßt, dann folgt, daß auch N sich eineindeutig auf M abbilden läßt.

$$M \sim N \text{ so folgt: } N \sim M \tag{b}$$

Läßt sich eine Menge M auf eine Menge N eineindeutig abbilden, die Menge N auf eine Menge T, so folgt, daß auch M sich auf T eineindeutig abbilden läßt.

$$M \sim N \quad \text{und} \quad N \sim T, \text{ so folgt: } M \sim T. \tag{c}$$

Da die drei Eigenschaften (a), (b) und (c) bekanntlich die Äquivalenzrelationen ausdrücken, sagt man auch, daß Mengen, die sich eineindeutig aufeinander abbilden lassen, äquivalent sind.

BEISPIEL 76

$M = \{a, b, c, d, e\} \qquad N = \{1, 2, 3, 4, 5\} \qquad T = \{x, y, z\}$

Es ist möglich, die Mengen M und N eineindeutig aufeinander abzubilden. Diese Abbildung zeigt Beispiel 75. Jedoch ist es nicht möglich, M auf T oder T auf M eineindeutig abzubilden. Man erkennt, daß auch N und T nicht gleichmächtig sind.

Offenbar haben solche Mengen, wie sie in den Beispielen 75, 76 vorkamen, eine Eigenschaft gemeinsam, die es ermöglicht, sie eineindeutig aufeinander abzubilden. Diese Eigenschaft nennt man bei Mengen mit endlich vielen Elementen die Anzahl der Elemente. So konnte man im Beispiel 76 M nicht auf T eineindeutig abbilden, da man nie fünf Elemente auf drei Elemente eineindeutig abbilden kann.

Nun gibt es aber auch Mengen, von denen man die Anzahl der Elemente nicht feststellen kann. Das sind die Mengen, bei denen man von unendlich vielen Elementen spricht. Aber auch hier ist eventuell eine eineindeutige Abbildung zweier Mengen aufeinander möglich.

BEISPIEL 77

Eine eineindeutige Abbildung von $\dot{N}$ auf Γ kann wie folgt geschehen:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 0 & -1 & +1 & -2 & +2 & -3 & +3 & -4 & +4 & \ldots \end{array}$$

Beide Mengen sind äquivalent.

Die gemeinsame Eigenschaft aller derjenigen Mengen mit unendlich vielen Elementen, paarweise eineindeutig abbildbar zu sein, nannte CANTOR die **Mächtigkeit** der Mengen.

Man beachte, daß die Eigenschaft, „gleichmächtig" zu sein, demnach genau den Mengen zukommt, die zueinander äquivalent sind. Der Begriff Mächtigkeit schließt den Begriff der Anzahl ein.

BEISPIEL 78

Bild 53 zeigt die eineindeutige Abbildung der Strecke AB auf eine Strecke $A'B'$ durch Zentralprojektion.
Obwohl die Strecke AB kürzer als die Strecke $A'B'$ ist, lassen sie sich doch eineindeutig aufeinander abbilden. Beide Punktmengen sind gleichmächtig.

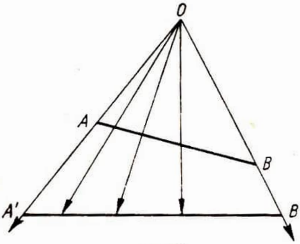


Bild 53

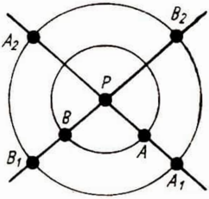


Bild 54

Man beachte, daß unsere Anschauung gegenüber der Menge der Punkte auf einer Strecke versagt. Man kann sich nur überlegen, daß durch jeden Projektionsstrahl, der vom Projektionszentrum O ausgeht, ein Punkt von $\overline{AB}$ auf einen Punkt von $\overline{A'B'}$ eineindeutig abgebildet wird und daß durch die Gesamtheit aller Projektionsstrahlen mit allen Punkten von $\overline{AB}$ alle Punkte von $\overline{A'B'}$ erfaßt werden.
Bild 54 zeigt die eineindeutige Abbildung der Umfänge zweier konzentrischer Kreise. Obwohl die Umfänge der beiden Kreise verschiedene Längen haben, sind die Punktmengen, die die Kreislinie bilden, gleichmächtig.

4.3.9. Endliche und unendliche Mengen

In den Erläuterungen zum Beispiel 76 wurde von der „Anzahl" der Elemente gesprochen. Den Begriff „Anzahl" kann man dabei so auffassen, daß diese Mengen mit endlich vielen Elementen sich auf eine echte Teilmenge der Menge der natürlichen Zahlen eineindeutig abbilden lassen, wobei diese Teilmenge von $\dot{N}$ alle Elemente enthalten muß, die kleiner als eine bestimmte natürliche Zahl n sind.

BEISPIEL 79

Um die Anzahl der Elemente der Menge $M = \{a, b, c, d, e\}$ festzustellen, wird M auf eine echte Teilmenge T von $\dot{N}$ wie folgt eineindeutig abgebildet:

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

Die echte Teilmenge T von $\dot{N}$ enthält alle Elemente, die kleiner als die natürliche Zahl 6 sind. Die Menge M hat 5 Elemente.

Definition 11

> Eine Menge heißt genau dann *endlich*, wenn sie einer Teilmenge von $\dot{N}$ der Form $\{1, \ldots, n\}$ gleichmächtig ist.

Alle Mengen, für die dieser Sachverhalt nicht zutrifft, heißen unendliche Mengen. Es soll vereinbart werden, daß auch die leere Menge endlich genannt wird.
Diese Definition der Endlichkeit bzw., davon abgeleitet, Unendlichkeit ist nicht die einzige.
Betrachtet man die Menge $M = \{a, b, c, d, e\}$ und eine echte Teilmenge $T = \{c, d, e\}$ von M, dann stellt man sofort fest, daß es keine Möglichkeit der eineindeutigen Abbildung von M auf T geben kann. Beide Mengen sind nicht gleichmächtig.

Damit erläuterte dieses Beispiel

Satz 1

Keine endliche Menge ist einer ihrer echten Teilmengen gleichmächtig.

Dieser Satz ist trivial, und es darf deshalb auf einen Beweis verzichtet werden.
Ein anderer Sachverhalt liegt bei unendlichen Mengen vor.

BEISPIEL 80

Es ist möglich, eine eineindeutige Abbildung der Menge $\dot{N}$ auf die Menge der positiven geraden Zahlen vorzunehmen, die ja eine echte Teilmenge von $\dot{N}$ ist.

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16\ldots \end{array}$$

Immer wieder wird man zu einer natürlichen Zahl n ein Bild von der Form $2n$ angeben können. So paradox es klingen mag, obwohl es offensichtlich nur „halb so viel" gerade Zahlen wie natürliche Zahlen gibt, lassen sich beide Mengen eineindeutig aufeinander abbilden.

Dieses Beispiel erläuterte damit

Satz 2

Eine unendliche Menge ist mindestens einer ihrer echten Teilmengen gleichmächtig.[1]

---

[1] Beweis findet sich bei Rédei, L., Algebra I, Geest und Portig Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1959, Seiten 15/16

R. DEDEKIND nahm diese Sätze zur Grundlage seiner

Definition 12

> Eine Menge heißt endlich, wenn sie keiner echten Teilmenge gleichmächtig ist; eine Menge heißt unendlich, wenn sie wenigstens einer echten Teilmenge gleichmächtig ist.[1]

4.4. Abzählbarkeit

4.4.1. Abzählbare und überabzählbare Mengen

Wie bereits ausgeführt wurde, stellt man die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge fest, indem man diese Menge auf eine echte Teilmenge von $\dot{N}$ der Form $\{1, \ldots, n\}$ eineindeutig abbildet. Dadurch werden die Elemente, wie man auch sagen könnte, in einer gewissen Weise abgezählt. Diese eineindeutige Abbildung stellt ja im Grunde genommen nichts anderes dar, als daß man jedem Element der endlichen Menge eine natürliche Zahl in der Reihenfolge $1, 2, 3, \ldots, n$ zuordnet. Das machen wir ja beim Abzählen ebenso. Man kann dieses Abzählen in einer etwas abstrahierten Form auf unendliche Mengen übertragen.

Definition 13

> Eine unendliche Menge heißt genau dann *abzählbar*, wenn sie zur Menge der natürlichen Zahlen gleichmächtig ist.

Da man auch die Elemente einer endlichen Menge abzählen kann, könnten Verwirrungen beim Gebrauch des Wortes abzählbar eintreten. Deshalb wird, analog zu anderen Lehrbüchern, im Rahmen dieser Schrift vereinbart:
„Eine Menge ist abzählbar“ soll heißen, daß diese Menge mit der Menge der natürlichen Zahlen gleichmächtig ist. Eine solcherart gekennzeichnete Menge ist dann immer eine unendliche Menge. Offensichtlich lassen sich die Elemente einer abzählbaren Menge wegen der Gleichmächtigkeit mit $\dot{N}$ durchnumerieren und als unendliche Zahlenfolge $m_1, m_2, m_3, \ldots$ schreiben. Durch die Darstellung $A = \{m_1, m_2, m_3, \ldots\}$ ist dann stets eine abzählbare Menge festgelegt.

Wie Beispiel 80 zeigt, ist die Menge aller positiven geraden Zahlen eine abzählbare Menge, weil für sie die Möglichkeit einer eineindeutigen Abbildung auf die Menge $\dot{N}$ besteht.

---

[1] „Was sind und was sollen die Zahlen“, Braunschweig, 1888

BEISPIEL 81

Die Menge der ganzen Zahlen ist abzählbar. Um dies zu zeigen, kann man alle Elemente Γ den Elementen von $\dot{N}$ wie folgt eineindeutig zuordnen:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 0 & -1 & +1 & -2 & +2 & -3 & +3 & -4 & +4 \ldots \end{array}$$

BEISPIEL 82

Wie aus den Aufgaben 15 bis 17 zu erkennen war, gilt:
„$\dot{N}$ ist eine echte Teilmenge der Menge der rationalen Zahlen". Auf dieser Tatsache aufbauend, trug mir einmal ein Student folgendes vor: „Jede unendliche Menge ist einer echten Teilmenge gleichmächtig. Da $P \supset \dot{N}$, so muß die echte Teilmenge $\dot{N}$ mit P gleichmächtig sein. Mithin ist P abzählbar."
Das aber war ein falscher Schluß. Nach Satz 2 ist jede unendliche Menge mindestens einer ihrer echten Teilmengen gleichmächtig. Es wird also nur eine Aussage darüber gemacht, daß mindestens eine solche Teilmenge existiert. Nun hat aber P unendlich viele echte Teilmengen. Welchen oder welcher sie davon gleichmächtig ist, darüber gibt der Satz keine Auskunft. Das muß erst noch festgestellt werden. Ist P abzählbar, dann ist $\dot{N}$ bestimmt eine solche Teilmenge. Man kann aber nicht umgekehrt schlußfolgern, daß wegen $P \supset \dot{N}$ die Menge der rationalen Zahlen abzählbar ist.

Um die Abzählbarkeit der Menge der rationalen Zahlen nachzuweisen, kann man ein solches Verfahren anwenden, wie es der deutsche Mathematiker F. KLEIN in seinem Buch „Elementarmathematik vom höheren Standpunkt"[1] veröffentlichte.
Um dieses Verfahren zu verstehen, muß man zunächst wissen:

Jede rationale Zahl läßt sich in der Form $\frac{p}{q}$ darstellen, wobei $p, q \in \Gamma$ gilt.
Die Zahlen p, q sollen dabei teilerfremd sein.
Für alle Brüche ist das klar, man verlangt ja bereits in der Schule, daß ein Bruch gekürzt wird.
Jede ganze Zahl läßt sich ebenfalls in dieser Form darstellen. Um die Teilerfremdheit zu erreichen, wählt man deshalb $q = 1$.

BEISPIEL 83

$$3 = \frac{3}{1}, \; -4 = \frac{-4}{1}$$

Wegen

$$-\frac{a}{b} = \frac{a}{-b} = \frac{-a}{b}$$

kann man festlegen, daß für alle rationalen Zahlen stets $q > 0$ ist.

[1] Band 1, Seite 273, Verlag J. Springer, Berlin 1924, 3. Aufl.

Terme, bei denen der Nenner gleich Null ist, sind nicht definiert, deshalb gilt für die rationale Zahl stets $q \neq 0$.
Bild 55 zeigt die KLEINsche Anordnung, die aus einem System von Vertikal- und Horizontalgeraden besteht. Diese Geraden haben die gleichen Abstände und sind mit

$$p = \ldots -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2,\ +3, \ldots$$
$$q = \ldots -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2,\ +3, \ldots$$

durchnumeriert. Diese Geraden bilden ein Gitter.

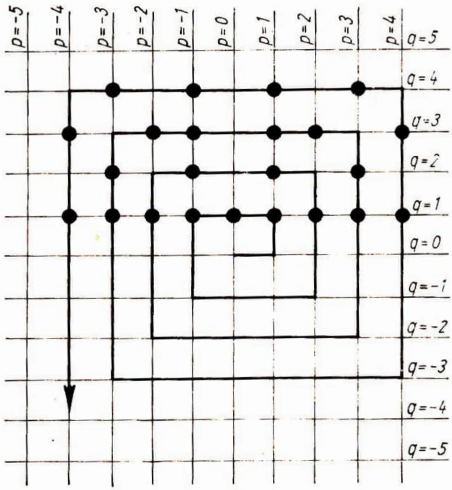


Bild 55

Jedem Gitterpunkt läßt sich nun ein Zahlenpaar $[p, q]$ zuordnen. Jeder Gitterpunkt, mit Ausnahme der Punkte, für die $q \leq 0$ ist, stellt jetzt eine rationale Zahl der Form $\frac{p}{q}$ dar. Verbindet man diese Gitterpunkte spiralförmig und ordnet jedem der markierten Gitterpunkte der Zeichnung eine natürliche Zahl zu, dann erhält man folgende eineindeutige Zuordnung:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 0 & -1 & 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2 & 3\ldots \end{array}$$

Damit läßt sich zeigen, daß die Menge der rationalen Zahlen abzählbar ist.

BEISPIEL 84

Es soll gezeigt werden, daß die Menge der rationalen Zahlen zwischen den Grenzen 0 und 1 eine abzählbare Menge ist.

Eine Anleitung, wie dies bewiesen werden kann, gab K. GRELLING im Jahre 1924[1].

Zwischen 0 und 1 liegen alle echten Brüche. Diese Brüche werden in Klassen eingeteilt:

		Brüche je Klasse			
K_1	$\frac{1}{2}$	1	K_4	$\frac{1}{5}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{5}\ \frac{4}{5}$	4
K_2	$\frac{1}{3}\ \frac{2}{3}$	2	K_5	$\frac{1}{6}\ \frac{2}{6}\ \frac{3}{6}\ \frac{4}{6}\ \frac{5}{6}$	5
K_3	$\frac{1}{4}\ \frac{2}{4}\ \frac{3}{4}$	3	. . . .		

Man erkennt:

Die Anzahl der Brüche in einer Klasse stimmt mit dem Index von K überein.

Index von K und Zähler des letzten Bruches in einer Klasse werden durch die gleiche natürliche Zahl ausgedrückt.

Da die Brüche echt sind, ist der Zähler des letzten Bruches um eins kleiner als der Nenner.

Jeder Nenner ist eine um eins größere natürliche Zahl als der Index seiner Klasse.

Deshalb kann man die obige Einteilung allgemein fortsetzen:

		Brüche je Klasse
. . . .		
K_{n-2}	$\frac{1}{n-1}\ \frac{2}{n-1}\ \frac{3}{n-1}\ \cdots\ \frac{n-2}{n-1}$	$n-2$
K_{n-1}	$\frac{1}{n}\ \frac{2}{n}\ \frac{3}{n}\ \cdots\ \frac{n-1}{n}$	$n-1$

Durch diese Einteilung ist jeder echte Bruch bestimmt durch seine Zugehörigkeit zu einer Klasse und in dieser Klasse durch seine Platzziffer, z. B.,

$\frac{3}{5}$ steht in K_4 auf Platz 3. Allgemein:

$\frac{z}{n}$ steht in K_{n-1} auf Platz z.

[1] GRELLING, K., Mengenlehre, Verlag B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1924

Es ist einzusehen, daß bei einer derartigen Einteilung jeder echte Bruch erfaßt wird und man jedem eine natürliche Zahl zuordnen kann.[1]

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5}\ldots \end{array}$$

Man kann diese natürliche Zahl, die einem bestimmten echten Bruch eineindeutig zugeordnet wird, sogar berechnen.

Es sei $\frac{z}{n}$ ein beliebiger Bruch, für den $z < n;\ z, n \in \dot{N}$ gilt. Ihm voraus gehen alle echten Brüche, deren Nenner kleiner als n sind. Ihre Anzahl ist:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + (n - 2) = \sum_{v=1}^{v=n-2} v$$

Das ist jedoch eine arithmetische Reihe 1. Ordnung, deren Summe $s = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$ ist. Dazu kommt noch die Platzziffer z, die der Bruch $\frac{z}{n}$ in seiner Klasse hat. Demzufolge erhält der echte Bruch $\frac{z}{n}$ die natürliche Zahl eineindeutig zugeordnet, die sich aus

$\sum_{v=1}^{v=n-2} v + z$ berechnet.

BEISPIEL 85

Für den Bruch $\frac{27}{52}$ errechnet man die natürliche Zahl 1302, denn für $n = 52$ wird

$$\sum_{v=1}^{v=50} v + 27 = \frac{50 \cdot 51}{2} + 27 = 1302$$

Eine einfache Überlegung lehrt nun, daß alle rationalen Zahlen, die größer als 1 sind, auch eine abzählbare unendliche Menge bilden. Jede rationale Zahl zwischen Null und Eins ist ein echter Bruch. Jede rationale Zahl, die größer als Eins ist, kann als unechter Bruch geschrieben werden.

---

[1] Offensichtlich werden damit rationale Zahlen mehrfach gezählt. Denn $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{4}$ usw. sind ja die gleichen rationalen Zahlen. Das ändert aber an der Tatsache der Abzählbarkeit nichts

Aus jedem echten Bruch geht ein unechter Bruch hervor, wenn man Zähler und Nenner vertauscht.

$\frac{p}{q}$ ist für $q > p$ $(q \neq 0)$ ein echter Bruch

$\frac{q}{p}$ $(p \neq 0)$ ist der Kehrwert des obigen Bruches, mithin ein unechter Bruch.

Demzufolge muß die Menge der echten Brüche der Menge der unechten Brüche äquivalent sein, da man ja stets eine eineindeutige Zuordnung $\frac{p}{q} \leftrightarrow \frac{q}{p}$ vornehmen kann.

Es gibt demnach zwischen 0 und 1 ebensoviele rationale Zahlen wie über 1. Eine Tatsache, die man, wäre sie nicht eben bewiesen worden, als unwahrscheinlich anzusehen geneigt wäre.

Verfolgt man diesen Gedankengang weiter, dann kann man damit auch die Abzählbarkeit von P beweisen.

Es sei

$$M_1 = \left\{\frac{p}{q} \in P \mid p < q \quad \text{und} \quad p > 0 \quad \text{und} \quad q > 0\right\}$$

(Menge aller positiven echten Brüche)

$$M_2 = \left\{\frac{p}{q} \in P \mid p < q \quad \text{und} \quad p < 0 \quad \text{und} \quad q > 0\right\}$$

(Menge aller negativen echten Brüche)

$$M_3 = \left\{\frac{q}{p} \in P \mid p < q \quad \text{und} \quad p > 0 \quad \text{und} \quad q > 0\right\}$$

(Menge von positiven unechten Brüchen)

$$M_4 = \left\{\frac{q}{p} \in P \mid p < q \quad \text{und} \quad p < 0 \quad \text{und} \quad q > 0\right\}$$

(Menge von negativen unechten Brüchen)

Bekanntlich unterscheidet sich ein positiver Bruch von einem ihm dem Betrage nach gleichen negativen Bruch nur durch das Vorzeichen.

Damit muß gelten, daß $M_1 \sim M_3$, $M_3 \sim M_4$, und wegen $M_1 \sim M_2$ folgt, daß $M_1 \sim M_4$ ist. Mithin sind alle vier Mengen abzählbar. Unter Verwendung von

Satz 3a

> Die Vereinigungsmenge endlich vieler abzählbarer Mengen ist wieder eine abzählbare Menge.

folgt $T = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$

ist eine abzählbare Menge.

Da $q > p$ vorausgesetzt war, sind in der Menge T alle rationalen Zahlen außer -1; 0; $+1$ enthalten.
Demzufolge gilt: $P = T \cup \{-1; 0; +1\}$.
Es läßt sich nun beweisen (was hier nicht geschehen kann), daß die Vereinigung einer abzählbaren Menge mit einer endlichen Menge wieder eine abzählbare Menge ist.[1]
Daraus folgt, daß P selbst abzählbar ist.
Satz 3a ist Teil eines noch viel allgemeineren Satzes. Werden nicht endlich viele, sondern abzählbar viele Mengen, von denen jede abzählbar ist, vereinigt, dann ist auch deren Vereinigungsmenge eine abzählbare Menge.

Satz 3

> Die Vereinigung endlich oder abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist eine abzählbare Menge.

Für alle paarweise disjunkten Mengen N_i kann man den Beweis wie folgt führen.

Beweis:

Es seien $N_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots\}$, $N_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{33}, \ldots\}$, $N_3 = \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots\}$ usw. abzählbare Mengen.
Diese Mengen werden untereinandergeschrieben, und in der Reihenfolge, wie die Pfeile anzeigen, werden ihre Elemente den Elementen von $\dot{N}$ eineindeutig zugeordnet.

$$\begin{array}{llll}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots \\
\nearrow & \nearrow & \nearrow & \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & . \\
\nearrow & \nearrow & \nearrow & \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots \\
\nearrow & \nearrow & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Man erhält so:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \ldots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
a_{11} & a_{21} & a_{12} & a_{31} & a_{22} & a_{13} & a_{41} & a_{32} & \ldots
\end{array}$$

Dieses Beweisprinzip wird in der Literatur als erstes (CAUCHYsches) Diagonalverfahren bezeichnet.

---

[1] Man überlege sich den Beweis einmal nach dem Lesen des Beispiels 98, Seite 112

Die Anwendung dieses Satzes ermöglicht nun auch zu zeigen, daß die Menge aller algebraischen Zahlen abzählbar ist.[1] Algebraisch heißt eine Zahl, die Nullstelle eines Polynoms

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + x_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

ist, wobei $a_n \neq 0$ und alle a_i $(i = 0, 1, 2, 3, \dots, n)$ rationale Zahlen sind. Da jedes Polynom genau soviel Wurzeln (auch Nullstellen genannt) besitzt, wie ihr höchster Grad n angibt, n jedoch eine bestimmte natürliche Zahl ist, gilt, daß jedes Polynom nur endlich viele Nullstellen hat. Diese Nullstellen sind diejenigen Werte der Variablen x, für die die Gleichung $f(x) = 0$ gilt.

BEISPIEL 86

$f(x) = 2x$. Für $f(x) = 0$ wird $2x = 0$, d. h., $x = 0$.

Die Zahl 0 ist Nullstelle des Polynoms $f(x) = 2x$.

$f(x) = x^2 - 1$. $x^2 - 1 = 0$

$$x^2 = 1 \qquad x_1 = +1, \; x_2 = -1.$$

Nullstellen des Polynoms sind die Zahlen $+1$, -1.

$f(x) = x^2 + 1$. $x^2 + 1 = 0$

$$x^2 = -1 \qquad x_1 = +\mathrm{i}, \qquad x_2 = -\mathrm{i}.$$

Nullstellen sind $+\mathrm{i}$ und $-\mathrm{i}$.

$f(x) = 2$. Dieses Polynom hat keine reellen Nullstellen.

Ordnet man nun jedem Polynom eine ganze Zahl

$$h = n + |a_n| + |a_{n-1}| + \cdots + |a_2| + |a_1| + |a_0| \tag{a}$$

zu, wobei die $a_i (i = 0, 1, 2, 3, \dots, n)$ ganzzahlig und zueinander teilerfremd sind und $a_n > 0$, dann hat man diese Polynome in eine eindeutige Ordnung gebracht und erreicht, daß sie abzählbar werden. Die ganze Zahl h heißt Höhe des Polynoms.

Wie man erkennt, wurden in (a) eine Reihe von Voraussetzungen angegeben.

1. Alle a_i ganzzahlig. Sollte das bei einem Polynom nicht der Fall sein, dann braucht man ja nur den Hauptnenner der Koeffizienten zu bestimmen und die Gleichung $f(x) = 0$ mit diesem Hauptnenner zu multiplizieren. Die Nullstellen bleiben dabei die gleichen.

2. Alle a_i teilerfremd. Es gibt keine Zahl $q \neq \pm 1$, die Teiler aller a_i ist. Wäre dem so, dann könnte man die Gleichung $f(x) = 0$ durch q teilen und erhielte das Gewünschte.

3. $a_n > 0$. Das läßt sich stets erreichen, wenn man gegebenenfalls die Gleichung $f(x) = 0$ mit (-1) multipliziert.

[1] Den Beweis erbrachte Cantor im Journal für reine und angewandte Mathematik 77, 1873/74, Seite 258ff.

BEISPIEL 87

$f(x) = 3x^2 + 5x + 7.$ Für dieses Polynom berechnet sich:

$h = 2 + 3 + 5 + 7 = 17.$

$f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 1.$ Für dieses Polynom ist:

$n = 3, \quad a_3 = 1 \quad |a_2| = |-2| = 2 \quad a_1 = 5 \quad |a_0| = |-1| = 1$

$h = 3 + 1 + 2 + 5 + 1 = 12$

$f(x) = x^2 - 1 \quad n = 2 \quad a_2 = 1 \quad a_1 = 0 \quad |a_0| = |-1| = 1$

$h = 2 + 1 + 0 + 1 = 4$

$f(x) = 2 \quad n = 0 \quad a_0 = 2$

$h = 0 + 2 = 2$

Damit sind alle Voraussetzungen geschaffen, um den Beweis der Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen zu verstehen.
Man ordnet Polynome, Höhe, algebraische Zahlen übersichtlich:

Höhe h	Polynome dieser Höhe	algebraische Zahl
1	$f(x) = 1$	—
2	$f(x) = 2$	—
	$f(x) = x$	0
3	$f(x) = 3$	—
	$f(x) = x + 1$	-1
	$f(x) = x - 1$	$+1$
	$f(x) = 2x$	0
	$f(x) = x^2$	0
4	$f(x) = 4$	—
	$f(x) = x + 2$	-2
	$f(x) = x - 2$	$+2$
	$f(x) = 2x + 1$	$-\frac{1}{2}$
	$f(x) = 2x - 1$	$+\frac{1}{2}$
	$f(x) = 3x$	0
	$f(x) = x^2 + 1$	$+i, \ -i$
	$f(x) = x^2 - 1$	$+1, \ -1$
	$f(x) = 2x^2$	0
	$f(x) = x^3$	0
usw.		

Es läßt sich nun beweisen, daß es zu einer bestimmten Höhe h zwar mehrere, aber stets nur endlich viele Polynome gibt. Der Beweis soll aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen werden. Vereinbart man, daß jede algebraische Zahl nur einmal gezählt wird, dann bekommt man für

$h = 1$ eine leere Menge algebraischer Zahlen. $M_1 = \emptyset$

$h = 2 \quad M_2 = \{0\}$

$h = 3 \quad M_3 = \{-1, 0, +1\}$

$$h = 4 \quad M_4 = \left\{-2, -\frac{1}{2}, 0, +\frac{1}{2}, +2, +\mathrm{i}, -\mathrm{i}\right\}$$

. . . .

Offensichtlich werden durch die Mengen M_i alle algebraischen Zahlen erfaßt, da jedes Polynom eine Höhe hat. Jede Menge M_i ist eine endliche Menge, denn jedes Polynom hat nur endlich viele Nullstellen. Ist A die Menge aller algebraischen Zahlen, dann gilt:

$$A = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup \cdots \cup M_k = \bigcup_{v=1}^{v=k} M_v$$

Nach Satz 3 ist dann diese Menge A abzählbar.
Diese Beispiele könnten dazu verleiten anzunehmen, daß alle unendlichen Mengen abzählbar sind. Dem ist jedoch nicht so. Die Menge der reellen Zahlen ist nicht abzählbar. Den Beweis dafür erbrachte Cantor mit seinem berühmten (zweiten) Diagonalverfahren. Die folgende Darstellung des Beweises für die Nichtabzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen schließt sich eng an den zweiten Cantorschen Beweis an, den er 1891 auf der Naturforschertagung in Halle gegeben hat und im 1. Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung 1892 veröffentlichte.[1]
Zunächst sollen jedoch einige Voraussetzungen, die für das Verstehen des Beweises wichtig sind, erläutert werden.

Satz 4

Jede Teilmenge einer abzählbar unendlichen Menge ist entweder eine endliche Menge oder abzählbar unendlich.

Die Richtigkeit dieses Satzes leuchtet unmittelbar ein, denn wenn M' eine Teilmenge einer abzählbaren Menge ist, dann sind ja nur die beiden Fälle möglich, daß die Elemente von M' mit endlich vielen Elementen von M

---

[1] Der 1. Beweis ist enthalten im Journal für reine und angewandte Mathematik (77) von 1873/74

übereinstimmen, oder daß M' selbst unendlich viele Elemente hat. Waren diese Elemente in M abzählbar, dann müssen sie es auch in M' sein!
Bekanntlich kann durch einen (endlichen oder unendlichen) Dezimalbruch jede reelle Zahl dargestellt werden. Es gibt aber auch die Möglichkeit, einen endlichen Dezimalbruch als unendlichen periodischen Dezimalbruch zu schreiben. Man muß dazu den endlichen Dezimalbruch als unendlichen periodischen Dezimalbruch mit der Periode 9 schreiben,

$$\text{z. B. } 0{,}5 = 0{,}4\overline{9}, \quad 0{,}3 = 0{,}2\overline{9}$$

Die Zahl 1 wird dann durch den unendlich periodischen Dezimalbruch $0{,}\overline{9}$ dargestellt. Nur für die 0 gibt es keine Dezimalbruchdarstellung.
Nach dem eben Gesagten ist es möglich, alle reellen Zahlen x, für die $0 < x \leqq 1$ gilt, als unendliche Dezimalbrüche der Form

$$x = 0, a_1, a_2, a_3 \ldots \text{ zu schreiben.}$$

Dabei sollen die a_i $(i \in \dot{N})$ je eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, ..., 9 sein.
Der Beweis wird nun indirekt geführt. Das heißt, man nimmt das Gegenteil von dem an, was der zu beweisende Satz aussagt, und zeigt, daß diese Annahme falsch ist. In unserem Falle wäre das, daß die Menge aller reellen Zahlen abzählbar ist. Dann müßte auch jede Teilmenge abzählbar sein. Als Teilmenge wählt man die Menge aus, die durch $0 < x \leqq 1$ festgelegt ist. Für jedes Element dieser Menge gibt es nun eine Darstellung durch einen unendlichen Dezimalbruch. Jedem dieser Brüche ordnet man eineindeutig eine natürliche Zahl zu.

$$\begin{aligned}
1 &\leftrightarrow m_1 = 0, b_{11}\, b_{12}\, b_{13} \ldots \\
2 &\leftrightarrow m_2 = 0, b_{21}\, b_{22}\, b_{23} \ldots \\
3 &\leftrightarrow m_3 = 0, b_{31}\, b_{32}\, b_{33} \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Dabei bedeuten die b_{mn} wieder Ziffern wie 0, 1, 2, ..., 9. Es gibt nun tatsächlich reelle Zahlen, die in der obigen Darstellung nicht vorkommen. Das läßt sich zeigen, indem man eine neue reelle Zahl konstruiert, etwa in der Art daß

$$m = 0, a_1\, a_2\, a_3, \ldots,$$

wobei ausgeschlossen wird, daß

$$a_1 = b_{11} (a_1 \neq 0) \qquad a_2 = b_{22} (a_2 \neq 0) \qquad a_3 = b_{33} (a_3 \neq 0) \quad \text{usw.}$$

ist. Diese reelle Zahl m kommt aber in der obigen Darstellung nicht vor.

Das ergibt sich daraus, daß wegen

$a_1 \neq b_{11}$ $m \neq m_1$ denn m stimmt mit m_1 in der 1. Ziffer (nach dem Komma) nicht überein!

$a_2 \neq b_{22}$ $m \neq m_2$ denn m stimmt mit m_2 in der 2. Ziffer nicht überein!

$a_3 \neq b_{33}$ $m \neq m_3$ denn m stimmt mit m_3 in der 3. Ziffer nicht überein!

. . . .

$a_i \neq b_{ii}$ $m \neq m_i$ denn m stimmt mit m_i in der i-ten Ziffer nicht überein!

Der damit konstruierte Dezimalbruch m stimmt mit keinem Dezimalbruch der obigen Aufstellung überein. Das bedeutet aber, daß die Annahme: „Die Elemente der Menge $(0, 1\rangle$ sind abzählbar" falsch ist. Somit kann dann nur die Aussage: „Die Menge aller reellen Zahlen im Intervall $(0, 1\rangle$ ist nicht abzählbar" wahr sein.
Hat jedoch eine Menge eine nicht abzählbare Teilmenge, dann kann die Menge selbst nicht abzählbar sein. Deshalb kann man schlußfolgern, daß die Menge aller reellen Zahlen (Δ) nicht abzählbar ist.
Eine unendliche Menge, die nicht abzählbar ist, heißt *überabzählbare* Menge. Wie bereits ausgeführt (vgl. 3.2.2.), besteht die Möglichkeit, zwischen der Menge aller Punkte einer kontinuierlichen[1] Geraden und Δ eine eineindeutige Zuordnung der Elemente festzulegen. Deshalb bezeichnet man die Menge aller reellen Zahlen als *Kontinuum*. Es gilt dann der

Satz 5

Das Kontinuum ist nicht abzählbar.

Eine andere Frage wäre, welche Teilmengen des Kontinuums dem Kontinuum selbst gleichmächtig sind. Auskunft darüber gibt

Satz 6

Alle Intervalle und Halbgeraden sind untereinander und insbesondere dem Kontinuum gleichmächtig.

Die Richtigkeit dieses Satzes sei an folgenden Beispielen gezeigt:

BEISPIEL 88a

$I_1 = \langle a, b\rangle$ $I_2 = \langle c, d\rangle$ $I_3 = (a, b\rangle$

$I_4 = (c, d\rangle$ $I_5 = (a, b)$ $I_6 = (c, d)$

[1] kontinuierlich = stetig; ununterbrochen verlaufend

Man erkennt, daß die Intervalle jeweils so ausgewählt wurden, daß sich je zwei hinsichtlich der Zugehörigkeit der Grenzen zum Intervall gleich verhalten. Durch Zentralprojektion, wie die Bilder 56, 57, 58 veranschaulichen, lassen sich eineindeutige Abbildungen herbeiführen. Mithin gilt:

$$I_1 \sim I_2 \quad I_3 \sim I_4 \quad I_5 \sim I_6$$

Die Beweise, daß auch $I_1 \sim I_4$, $I_3 \sim I_5$ und deshalb

$$I_1 \sim I_2 \sim I_3 \sim I_4 \sim I_5 \sim I_6 \quad \text{gilt,}$$

sollen hier übergangen werden. Der interessierte Leser werde hierfür auf E. KAMKE „Mengenlehre" verwiesen.[1]

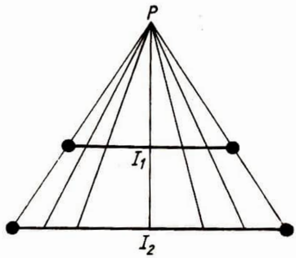


Bild 56

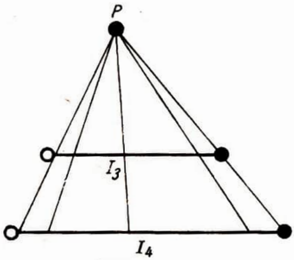


Bild 57

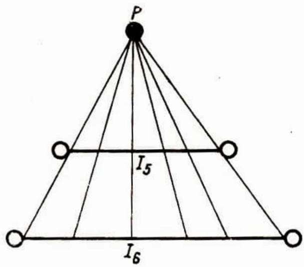


Bild 58

BEISPIEL 88b

Durch Zentralprojektion, wie Bild 59 zeigt, läßt sich eine eineindeutige Abbildung des Intervalls $\langle a, b)$ auf eine Halbgerade festlegen.

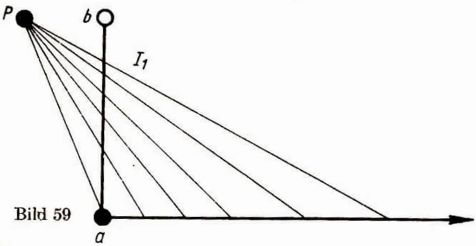


Bild 59

[1] Sammlung Göschen, Band 999, Verlag de Gruyter & Co., Berlin 1947, Seite 20ff.

BEISPIEL 88 c

Es sei $I_1 = (a, b)$ und G die Menge aller Punkte einer Geraden. Konstruiert man den Mittelpunkt C der Strecke, die das Intervall (a, b) darstellen soll, und knickt diese Strecke in ihrem Mittelpunkt C ein, dann

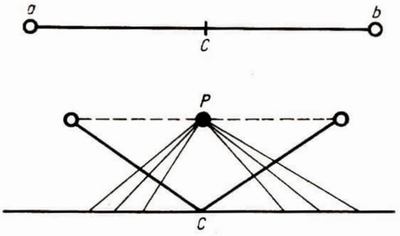


Bild 60

kann man durch Zentralprojektion eine eineindeutige Zuordnung der Elemente von I_1 und G auf die Weise vornehmen, wie es Bild 60 veranschaulicht.

4.4.2. Kardinalzahlen

Wie man erkennt, haben nicht alle unendlichen Mengen die gleiche Mächtigkeit. Zwischen ihnen gibt es noch Abstufungen oder mit anderen Worten: „Es gibt verschiedene transfinite[1] Mächtigkeiten." Es ist nun nötig, diese verschiedenen Mächtigkeiten zu unterscheiden. Deshalb wird es erforderlich sein, sie zu kennzeichnen. Für alle hier bereits untersuchten Mengen könnte dies durch folgende Klasseneinteilung geschehen:

Klasse der zu einer Teilmenge von $\dot{N}$ der Form $\{1, \ldots, n\}$ äquivalenten Mengen

Klasse der zu $\dot{N}$ äquivalenten Mengen

Klasse der zu Δ äquivalenten Mengen

Jede Klasse legt damit genau eine Mächtigkeit fest und heißt **Kardinalzahl**. Eine beliebige nichtleere Teilmenge von ihr, insbesondere jedes Element (d. i. eine Menge) dieser Klasse, repräsentiert diese Kardinalzahl.

Definition 14

Jeder Menge M kann eine Kardinalzahl $Kz(M)$ [Kardinalzahl von M] eindeutig zugeordnet werden. Sie ist die Klasse der zu M äquivalenten Mengen.

[1] trans-finit = über-endlich

Den Begriff Kardinalzahl entlehnte CANTOR der Grammatik. Kardinalzahlen der Sprache dienen zur Bezeichnung von Anzahlen. Demgemäß entspricht für endliche Mengen die Kardinalzahl der Anzahl der Elemente der Menge.
Vom Kardinalzahlbegriff macht man bereits im 1. Schuljahr Gebrauch. Zur Gewinnung des Zahlbegriffs 3 läßt man bekanntlich die Kinder drei Bauklötzer oder irgendwelche drei zusammengehörige Gegenstände abzählen. Durch das Zählen 1, 2, 3 gewinnen sie die Anzahl 3. Für alle Mengen mit drei Elementen $M = \{a, b, c\}$ repräsentiert nun im Erstrechenunterricht die Menge $\{1, 2, 3\}$ die Anzahl 3. Das bedeutet aber nichts anderes, als daß alle zu dieser Menge $\{1, 2, 3\}$ äquivalenten Mengen die Kardinalzahl 3 erhalten und die Menge $\{1, 2, 3\}$ diese Klasse repräsentiert. Auf diese Art und Weise werden die wichtigsten Zahlbegriffe im 1. Schuljahr gewonnen.
Die Kardinalzahlen der endlichen Mengen sind demnach $1, 2, 3, \ldots, n$. Die leere Menge hat die Kardinalzahl 0.
Alle abzählbaren Mengen erhalten das Symbol $\mathfrak{a}$, alle zu Δ äquivalenten Mengen das Symbol $\mathfrak{c}$ als Kardinalzahl.
Die Kardinalzahlen der unendlichen Mengen heißen transfinite Kardinalzahlen.
Im allgemeinen ist es üblich, transfinite Kardinalzahlen mit kleinen hebräischen Buchstaben zu kennzeichen. Jedoch soll im Rahmen dieser Einführungsschrift davon abgesehen werden. Es wird vereinbart, daß die endlichen Kardinalzahlen durch kleine lateinische Lettern, die transfiniten Kardinalzahlen durch kleine deutsche Lettern ausgedrückt werden.
In der Mengenlehre kennt man nun auch Mengen, die nicht abzählbar und nicht dem Kontinuum gleichmächtig sind.[1] Deshalb gibt es außer den Kardinalzahlen der endlichen Mengen und den transfiniten Kardinalzahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ noch andere transfinite Kardinalzahlen. Es läßt sich beweisen, daß es sogar unendlich viele transfinite Kardinalzahlen gibt.[2]
Um eine Größenordnung der Kardinalzahlen anzugeben, macht es sich erforderlich, eine etwas abstrahierte „größer — kleiner"-Beziehung einzuführen. Es leuchtet unmittelbar ein, daß es doch Berechtigung hat, davon zu sprechen, daß alle überabzählbaren Mengen eine höhere Mächtigkeit haben als die abzählbaren Mengen, denn diese zu $\dot{N}$ äquivalenten Mengen sind echte Teilmengen von überabzählbaren Mengen. Dies führt zur

Definition 15

> Ist M einer echten Teilmenge von K äquivalent, aber M nicht mit K gleichmächtig, so ist K von höherer Mächtigkeit als M.

Für alle endlichen Mengen liefert nun diese Definition den bekannten „kleiner"-Begriff.

---

[1] Zum Beispiel die Menge aller über dem Intervall $\langle 0, 1\rangle$ definierten Funktionen
[2] Der Beweis kann bei FRAENKEL, A., „Einleitung in die Mengenlehre", Verlag von J. Springer, Berlin 1923, Seite 51f., nachgelesen werden

BEISPIEL 89

a) $M_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ $N_1 = \{1, 2, 3\}$

Die Menge M_1 besitzt die Kardinalzahl $m_1 = 4$; N_1 die Kardinalzahl $n_1 = 3$. Wegen $4 > 3$ gilt in diesem Fall: $m > n$.

b) $M_2 = \{a, b, c, d\}$ $N_2 = \{x, y, z\}$

Wegen $M_1 \sim M_2$ und $N_1 \sim N_2$ gehören M_1, M_2 zu einer Klasse und N_1, N_2 einer (anderen) Klasse an. Der Kardinalzahlvergleich liefert auch in diesem Fall: $m > n$.

Die Bedeutung der Definition 15 liegt aber nun gerade darin, daß damit eine Aussage über die Vergleichbarkeit von transfiniten Mengen getroffen wurde. Es ist wohl eine der bedeutsamsten Leistungen von CANTOR, daß er die Begriffe „gleich" und „ungleich", die vom Endlichen her bekannt sind, durch den von ihm geschaffenen Äquivalenzbegriff auf das Unendliche übertrug und somit die Grundlage schuf, daß man transfinite Mengen vergleichen kann. Man überlege sich nur einmal durch die Betrachtung des Beispiels 80, daß der im Endlichen gültige Satz: „Das Ganze ist größer als ein Teil von ihm", für transfinite Mengen nicht mehr gilt und es deshalb gar nicht selbstverständlich ist, daß die Begriffe „kleiner", „größer", „gleich" des Endlichen auch für transfinite Mengen Gültigkeit haben.

Nach Definition 15 haben alle endlichen Mengen eine geringere Mächtigkeit als die abzählbar unendlichen Mengen. Durch die Kardinalzahlen der Klassen ausgedrückt: $\mathfrak{a} > n$.

Alle zu Δ gleichmächtigen Mengen sind von höherer Mächtigkeit als die abzählbar unendlichen Mengen. Der entsprechende Klassenvergleich in Zeichen ist: $\mathfrak{c} > \mathfrak{a}$.

Wie man sich überlegen kann, gilt auch $\mathfrak{c} > n$.

Damit kann eine Größenordnung der Kardinalzahlen angegeben werden: $1, 2, 3, \ldots, n, \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \ldots$

Nun liegt die Vermutung sehr nahe, daß die Mächtigkeit des Kontinuums durch die Kardinalzahl ausgedrückt wird, die unmittelbar auf $\mathfrak{a}$ folgt. Das würde bedeuten, daß es zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ keine weitere transfinite Kardinalzahl gibt. Dann müßte demzufolge jede überabzählbare Teilmenge des Kontinuums dem Kontinuum selbst äquivalent sein. Diese Vermutung, die unter dem Namen „Kontinuumproblem" in die Mathematik einging, konnte bis heute nicht bewiesen werden. DAVID HILBERT (1862–1943) veröffentlichte dafür 1926 in den Mathematischen Annalen (95) eine Beweisidee. Ihrer genauen Durchführung stellten sich jedoch große Schwierigkeiten entgegen.[1]

Von der Tatsache ausgehend, daß es möglich war, für die Kardinalzahlen $1, 2, 3, \ldots, n, \mathfrak{a}, \mathfrak{c}$ eine Größenordnung anzugeben, schließt sich nun die Frage an, ob für irgendzwei Kardinalzahlen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{k}$ immer eine Aussage ge-

[1] 1963 bewies THOREN die Unentscheidbarkeit des Kontinuumproblems bezüglich der bisherigen Axiomensysteme der Mengenlehre

troffen werden kann, ob entweder 1. $\mathfrak{m} = \mathfrak{k}$ oder 2. $\mathfrak{m} > \mathfrak{k}$ oder 3. $\mathfrak{m} < \mathfrak{k}$ ist. Man könnte sich sogar überlegen, daß für zwei beliebige Kardinalzahlen keine Vergleichsmöglichkeit besteht, d. h. keiner der obigen drei Fälle möglich ist. Daß dies nicht zutrifft, hatte bereits CANTOR behauptet, aber nicht beweisen können. Erst durch den Beweis des Wohlordnungssatzes durch E. ZERMELO im Jahre 1904 war dies möglich.[1]
Ausgehend von der Definition der Vergleichbarkeit der Kardinalzahlen hieße:

1. $\mathfrak{m} = \mathfrak{k}$, daß es Teilmengen von M geben kann, die zu K äquivalent sind, und zugleich Teilmengen von K, die zu M äquivalent sind.
   Das ist möglich. F. BERNSTEIN bewies 1898[2] einen von CANTOR bereits vermuteten Äquivalenzsatz, der folgendes aussagt:
   Ist M einer Teilmenge von K und zugleich K einer Teilmenge von M äquivalent, so sind die Mengen M und K selbst einander äquivalent.
2. $\mathfrak{m} > \mathfrak{k}$ bedeutet, daß es Teilmengen von M gibt, die zu K äquivalent sind, aber keine Teilmenge von K vorhanden ist, die zu M äquivalent ist.
   Diese Möglichkeit gibt es. In diesem Fall ist ja M von größerer Mächtigkeit als K.
3. $\mathfrak{m} < \mathfrak{k}$ besagt, daß es Teilmengen von K gibt, die zu M äquivalent sind, aber keine Teilmenge von M existiert, die zu K äquivalent ist.
   Auch das ist möglich. In diesem Falle ist K von größerer Mächtigkeit als M.

Für die Möglichkeiten 2. und 3. wurde ja gerade die Definition 15 geschaffen, die Festlegungen über die Größenordnung in diesen Fällen trifft.
Auf Grund des eben Erläuterten gilt dann auch für transfinite Kardinalzahlen

Satz 7

Von zwei verschiedenen Kardinalzahlen ist die eine stets größer als die andere.

Damit ist es möglich geworden, Rechenoperationen mit Kardinalzahlen zu definieren.

4.4.2.1. Rechnen mit Kardinalzahlen

4.4.2.1.1. Summe von Kardinalzahlen

Die Tatsache, daß man Kardinalzahlen sagt, darf nun nicht zu der Annahme verleiten, daß man mit ihnen so rechnen kann, wie man in der Schule mit Zahlen rechnen gelernt hat. Für sie gelten andere Gesetze. Im folgenden soll die Addition von zwei Kardinalzahlen erläutert werden. Dafür bietet sich die Mengenvereinigung an.

[1] Mathematische Annalen (59) von 1904, Seite 514 bis 516
[2] Veröffentlicht in BOREL, E., „Leçons sur la theorie des fonctions“. Paris 1898, Seite 103ff.

BEISPIEL 90

$M = \{a, b, c\}$ also $M \sim \{1, 2, 3\}$ Kardinalzahl: $m = 3$

$N = \{a, c, d, e\}$ also $N \sim \{1, 2, 3, 4\}$ Kardinalzahl: $n = 4$

$M \cup N = \{a, b, c, d, e\}$ also $(M \cup N) \sim \{1, 2, 3, 4, 5\}$ Kardinalzahl: $v = 5$

Man erkennt, daß die Mächtigkeit v der Vereinigungsmenge nicht die Summe der Kardinalzahlen der zu vereinigenden Mengen ist.

BEISPIEL 91

$M = \{a, b, c, d, e\}$ Kardinalzahl: $m = 5$

$N = \{u, v, w, x, y, z\}$ Kardinalzahl: $n = 6$

$M \cup N = \{a, b, c, d, e, u, v, w, x, y, z\}$ Kardinalzahl: $v = 11$

In diesen Fall waren beide Mengen disjunkt. Die Mächtigkeit der Vereinigungsmenge kann man sich in diesem Falle durch die Addition der Kardinalzahlen der zu vereinigenden Mengen entstanden denken.

Da es immer möglich ist, zwei Kardinalzahlen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ durch elementfremde Mengen zu repräsentieren, kann man allgemein festlegen:

Definition 16

> Die Kardinalzahlen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ seien repräsentiert durch elementfremde Mengen M, N. Hat $(M \cup N)$ die Kardinalzahl $\mathfrak{r}$, dann ist
>
> $$\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = \mathfrak{r}.$$

Aus dieser Definition lassen sich einige Folgerungen ableiten. Auf Grund der Gültigkeit des kommutativen und des assoziativen Gesetzes der Mengenvereinigung müssen auch für die Addition der Kardinalzahlen disjunkter Mengen diese Gesetze gelten.

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = \mathfrak{n} + \mathfrak{m} \text{ (kommutatives Gesetz)}$$

$$\mathfrak{m} + (\mathfrak{n} + \mathfrak{t}) = (\mathfrak{m} + \mathfrak{n}) + \mathfrak{t} \text{ (assoziatives Gesetz),}$$

wenn $\mathfrak{t}$ die Kardinalzahl einer Menge T ist, die mit den Mengen M und N vereinigt wird.
Für die Addition der bekannten Kardinalzahlen n, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ gelten folgende Regeln:

a) $n + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ (n soll die beliebige Kardinalzahl einer beliebigen endlichen Menge sein). Ist n die Kardinalzahl einer endlichen Menge $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ und $\mathfrak{a}$ die Kardinalzahl einer abzählbaren Menge, dann ist die Vereinigung einer endlichen und einer abzählbaren Menge wieder eine abzählbare Menge, d. h. eine Menge mit der Kardinalzahl $\mathfrak{a}$. Man kann dies auch so erklären, daß an der Eigenschaft einer Menge, abzählbar zu sein, sich nichts ändert, wenn endlich viele Elemente dazukommen. Man braucht ja nur die Elemente der endlichen Menge beim Abzählen an den Anfang zu stellen und die Elemente der abzählbaren Menge folgen zu lassen. Man erhält so eine Folge $m_1, m_2, m_3, \ldots$, die wieder abzählbar ist.

b) $\mathfrak{a} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$

Haben zwei Mengen die Kardinalzahl $\mathfrak{a}$, dann sind beide Mengen abzählbar. Nach Satz 3 ist auch die Vereinigungsmenge abzählbar.

c) $\mathfrak{c} + \mathfrak{a} = \mathfrak{c}$

$M = \langle 0, 1\rangle \cup \dot{N}$. Wegen $\langle 0, 1\rangle \sim \Delta$ hat M die Kardinalzahl $\mathfrak{c} + \mathfrak{a}$. Nun gilt jedoch: $\Delta \supset \langle 0, 1\rangle$ und auch $\Delta \supset \dot{N}$, also $\Delta \supset M$. Deshalb ist M mindestens einer Teilmenge von Δ äquivalent. Da $\langle 0, 1\rangle \sim \Delta$, so ist auch Δ einer Teilmenge von M, nämlich $\langle 0, 1\rangle$, äquivalent. Nach dem Bernsteinschen Äquivalenzsatz gilt dann $M \sim \Delta$, und das besagt obige Regel.

d) $\mathfrak{c} + n = \mathfrak{c}$

Unter Verwendung der Regeln a) und c) und der Gültigkeit des Assoziativgesetzes gilt:

$$\mathfrak{c} + n = (\mathfrak{c} + \mathfrak{a}) + n = \mathfrak{c} + (\mathfrak{a} + n) = \mathfrak{c} + \mathfrak{a} = \mathfrak{c}$$

e) $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$

Es sei $M = \langle a, b\rangle$, $N = (b, c\rangle$. $M \cup N = \langle a, b\rangle \cup (b, c\rangle = \langle a, c\rangle$.

Wegen $\langle a, c\rangle \sim \Delta$ folgt obige Regel.

Die Summation kann man nun auf beliebig viele Kardinalzahlen ausdehnen. Man braucht dazu nur beliebig viele disjunkte Mengen, von denen jede eine beliebige Kardinalzahl repräsentiert, zu vereinigen.
Hat die Vereinigungsmenge die Kardinalzahl $\mathfrak{r}$, dann muß

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{m}_3 + \mathfrak{m}_4 + \ldots$$

sein, wenn die $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3, \mathfrak{m}_4$ usw. die Kardinalzahlen der zu vereinigenden Mengen sind.

4.4.2.1.2. Produkt von Kardinalzahlen

Für die Produktbildung von zwei Kardinalzahlen bietet sich die Produkt-(Kreuz-)menge an. Für endliche Menge $M = \{a, b, c\}$ und $N = \{e, f\}$ ist bekanntlich

$$M \times N = \{[a, e], [a, f], [b, e], [b, f], [c, e], [c, f]\}.$$

Man erkennt, daß $M \times N$ zur Klasse der Mengen mit der Kardinalzahl $6 = (2 \cdot 3)$ gehört. Auf diese Weise wurde ja auch der Name Produktmenge geklärt.

Definition 17

> Es seien $\mathfrak{m} > 0, \mathfrak{n} > 0$ zwei Kardinalzahlen, die durch die Mengen M, N repräsentiert werden. Für die Kardinalzahl $\mathfrak{p}$ der Produktmenge $M \times N$ gilt dann: $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n} = \mathfrak{p}$.

Ist $M = \{a, b, c, \ldots\}$ eine Menge mit der Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ und $N = \emptyset$, dann wird $M \times N = \emptyset$ gesetzt. Die Kardinalzahl dieser Produktmenge berechnet sich dann: $\mathfrak{m} \cdot 0 = \mathfrak{p} = 0$. Daraus ergibt sich die Vereinbarung, daß $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n} = 0$, wenn mindestens eine der beiden Kardinalzahlen gleich Null ist.

BEISPIEL 92

$M = \{a, b, c\} \qquad N = \{x, y\}$

$M \times N = \{[a, x], [b, x], [c, x], [a, y], [b, y], [c, y]\}$

$N \times M = \{[x, a], [x, b], [x, c], [y, a], [y, b], [y, c]\}$

Man erkennt, daß beim Übergang von $M \times N$ zu $N \times M$ sich nur innerhalb der Paare die Stellung der Elemente ändert, beide Mengen jedoch zur gleichen Klasse gehören und deshalb die gleiche Kardinalzahl haben. Offensichtlich gilt: $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n} = \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{m}$.

BEISPIEL 93

$M = \{a, b\} \qquad N = \{u, v\} \qquad T = \{x. y\}$

$M \times N = \{[a, u], [b, u], [a, v], [b, v]\}$

$(M \times N) \times T = \{[(a, u), x]\ [(b, u), x], [(a, v), x], [(b, v), x], [(a, u), y],$
$[(b, u), y], [(a, v), y], [(b, v), y]\}$

$N \times T = \{[u, x], [v, x], [u, y], [v, y]\}$

$M \times (N \times T) = \{[a, (u, x], [a, (v, x)], [a, (u, y)], [a, (v, y)], [b, (u, x)],$
$[b, (v, x)], [b, (u, y)], [b, (v, y)]\}$

Daraus ergibt sich, daß $(M \times N) \times T \sim M \times (N \times T)$, (1)
da ja beide Mengen gleichmächtig sind.

Offensichtlich gilt das, was hier mit endlichen Mengen erläutert wurde, auch für transfinite Mengen, da man für beliebige $m \in M, n \in N, t \in T$ stets eine eineindeutige Zuordnung $[(m, n), t] \leftrightarrow [m, (n, t)]$ vornehmen kann. Daher gilt für die Produktbildung von Kardinalzahlen das assoziative Gesetz:

$$(\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}) \cdot \mathfrak{t} = \mathfrak{m} \cdot (\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{t})$$

Ebenso gilt das distributive Gesetz: $(\mathfrak{m} + \mathfrak{n}) \cdot \mathfrak{t} = \mathfrak{m}\mathfrak{t} + \mathfrak{n}\mathfrak{t}$, da $(M \cup N) \times$ $\times\, T = (M \times T) \cup (N \times T)$ ist. Allerdings muß man wegen $(\mathfrak{m} + \mathfrak{n})$ disjunkte Mengen M, N voraussetzen.
Die Produktbildung läßt sich auf beliebig viele Kardinalzahlen ausdehnen. Sind $M_1, M_2, M_3, \ldots$ Mengen, die die Kardinalzahlen $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3, \ldots$ repräsentieren, und hat die Produktmenge dieser Mengen die Kardinalzahl $\mathfrak{r}$, dann gilt: $\mathfrak{r} = \mathfrak{m}_1 \cdot \mathfrak{m}_2 \cdot \mathfrak{m}_3 \cdot \ldots$

4.4.2.1.3. Potenz

BEISPIEL 94

Es sei $T = \{a, b\}$, $M = \{c, d, e\}$

Es sollen nun alle Möglichkeiten aufgeschrieben werden, die es gibt, wenn jeweils ein $t \in T$ einem $m \in M$ eindeutig zugeordnet wird. Diese Zuordnung nannte CANTOR eine *Belegung* der Menge T mit der Menge M.

1.	$a \to c$	$b \to c$	$f_1 = [a, c], [b, c]$
2.	$a \to c$	$b \to d$	$f_2 = [a, c], [b, d]$
3.	$a \to c$	$b \to e$	$f_3 = [a, c], [b, e]$
4.	$a \to d$	$b \to c$	$f_4 = [a, d], [b, c]$
5.	$a \to d$	$b \to d$	$f_5 = [a, d], [b, d]$
6.	$a \to d$	$b \to e$	$f_6 = [a, d], [b, e]$
7.	$a \to e$	$b \to c$	$f_7 = [a, e], [b, c]$
8.	$a \to e$	$b \to d$	$f_8 = [a, e], [b, d]$
9.	$a \to e$	$b \to e$	$f_9 = [a, e], [b, e]$

Bild 61 veranschaulicht diese Belegungen. Die f_i $(i = 1, \ldots, 9)$ sollen dabei wieder Elemente sein, die man zu einer Menge T/M zusammenfaßt.

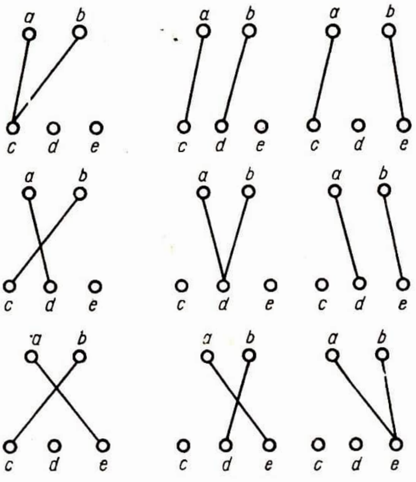


Bild 61

Eine derart gebildete Menge T/M heißt nach CANTOR **Belegungsmenge.**

$$T/M = \{[(a, c), (b, c)], [(a, c), (b, d)], [(a, c), (b, e)], [(a, d), (b, c)], [(a, d), (b, d)], [(a, d), (b, c)], [(a, e), (b, c)], [(a, e), (b, d)], [(a, e), (b, e)]\}$$

Da kein Element f_i die gleichen Elementenpaare besitzt, sind alle Elemente der Menge T/M wohlunterschieden und T/M eine Menge entsprechend der CANTORschen Erklärung.
Nun ist T eine Menge mit der Kardinalzahl $t = 2$, M eine Menge mit der Kardinalzahl $m = 3$. Die Belegungsmenge T/M hat, wie man durch Abzählen der Elemente leicht nachprüft, die Kardinalzahl $9 = 3^2$. In Ausdehnung auf transfinite Mengen legte man allgemeingültig fest:

Definition 18

> Man belegt eine Menge T der Mächtigkeit $\mathfrak{t}$ mit einer Menge M der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$. Die Belegungsmenge T/M repräsentiert dann die Kardinalzahl $\mathfrak{m}^{\mathfrak{t}}$.

Wie man am Beispiel 94 erkennen konnte, ist im Falle endlicher Mengen die Belegungsmenge die Menge aller Variationen t-ter Klasse von m Elementen mit Wiederholung, deren Anzahl bekanntlich m^t ist. Es ergibt sich deshalb für endliche Mengen der gewöhnliche Potenzbegriff.
Eine sehr wichtige Anwendung des Begriffs der Belegungsmenge ist der Zusammenhang des Potenzbegriffes mit der Menge aller Teilmengen einer beliebigen Menge N.

BEISPIEL 95

$N = \{a, b, c\}$

Die Menge aller Teilmengen der Menge N, die Menge N und die leere Menge eingeschlossen, ist:

$U(N) = \{\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{\emptyset\}\}$

$U(N)$ hat die Mächtigkeit $2^3 = 8$.

Das Entstehen der Kardinalzahl der Menge $U(N)$ kann man sich folgendermaßen erklären:
Für jedes Element von N gibt es zwei sich einander ausschließende Möglichkeiten bezüglich einer bestimmten Teilmenge von N:

1. Das Element gehört zur Teilmenge.
2. Das Element gehört nicht zur Teilmenge.

Ordnet man der ersten Möglichkeit eine 1, der zweiten eine 0 zu, dann kann man sich jede Teilmenge von N als eine Belegung der Menge N mit der Menge $\{0, 1\}$ vorstellen. Da die Menge $\{0, 1\}$ die Kardinalzahl 2 besitzt, so ergibt sich im obigen Falle die Kardinalzahl der Menge $U(N)$ mit 2^3.
Offensichtlich kann man diese Erklärung auch auf die Menge aller Untermengen einer transfiniten Menge ausdehnen.

Ist $U(N)$ die Menge aller Untermengen einer transfiniten Menge mit der Kardinalzahl $\mathfrak{n}$, so gilt, daß $U(N)$ die Mächtigkeit $2^{\mathfrak{n}}$ hat.

Für die bekannten Kardinalzahlen n, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ gelten folgende **Sätze**:

1. Eine endliche Menge mit der Mächtigkeit n, belegt mit einer endlichen Menge mit der Mächtigkeit m, ergibt eine endliche Belegungsmenge, d. h. eine Menge, die von geringerer Mächtigkeit als eine abzählbare Menge ist.
   Symbolisch: $m^n < \mathfrak{a}$
2. Belegt man eine endliche Menge mit der Mächtigkeit n mit einer abzählbaren Menge der Mächtigkeit $\mathfrak{a}$, dann ist die Belegungsmenge selbst abzählbar.
   Symbolisch: $\mathfrak{a}^n = \mathfrak{a}$
3. Die Belegung einer endlichen Menge mit der Mächtigkeit n mit einer zu Δ äquivalenten Menge ergibt eine Belegungsmenge, die mit Δ gleichmächtig ist. In Zeichen: $\mathfrak{c}^n = \mathfrak{c}$.

4.5. Ordnung und Ordnungstypus

Haben Schulanfänger zum ersten Male Turnunterricht, dann stellen sie sich in den meisten Fällen so auf, wie es ihnen gerade paßt. Dabei ist jeder Schüler bestrebt, der erste zu sein. Oft kommt es deswegen zum Streit. Erst durch das Eingreifen des Lehrers, der verfügt, daß sich der Größe nach aufgestellt wird, kommt Ordnung in die Turnriege. Sind dabei Schüler gleich groß, so wird auch hier der Lehrer festlegen müssen, wer vor wem steht. Erst dann wird die Ordnung vollkommen sein. Einen ähnlichen Sachverhalt finden wir auch in der Mengenlehre. Die Ordnungen, die hier betrachtet werden, sind alle so beschaffen, daß für zwei beliebige Elemente m, n einer Menge immer feststeht, ob m vor n oder m hinter n kommt und nicht umgekehrt. Der Fall, daß m und n vom gleichen Rang sind, ist ausgeschlossen. Für alle folgenden Darlegungen soll nun die Schreibweise $m \prec n$ (gelesen: m vor n) ausdrücken, daß das Element m dem Element n vorangeht.
Für eine solcherart gegebene Anordnungsbeziehung sollen folgende Eigenschaften vorausgesetzt werden:

(1) Kein Element geht sich selbst voran.

(2) Ein Element, welches einem zweiten vorangeht, während dieses zweite seinerseits einem dritten vorangeht, geht selbst dem dritten voran.

Man spricht dann davon, daß je zwei Elemente einer Menge M, für die diese Eigenschaften zutreffen, zueinander in einer Relation R stehen und durch diese Relation „vergleichbar" werden. Die Eigenschaft (1) heißt *Irreflexivität* von R, (2) wird *Transitivität* von R genannt. Man kann sie wie folgt symbolisch formulieren:

(1) Für jedes Element $m \in M$ gilt: nicht $m\,R\,m$.

(2) Wenn $m\,R\,n$ und $n\,R\,t$, so $m\,R\,t$.

Definition 19

Eine Menge M heißt genau dann durch eine Relation R einfach geordnet,[1] wenn diese Relation irreflexiv und transitiv ist.

Man nehme nun nicht an, daß das Zeichen $\prec$ mit dem Zeichen $<$ übereinstimmt. Ordnet man beispielsweise die natürlichen Zahlen nach abnehmender Größe $\dot{N} = \{\ldots, 3, 2, 1\}$, so fällt $\prec$ mit $>$ zusammen. Ordnet man die Menge der natürlichen Zahlen nach zunehmender Größe $\dot{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, dann fällt $\prec$ mit $<$ zusammen.

BEISPIEL 96

$\dot{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} \qquad T = \{2, 4, 6, \ldots\}$

Beide Mengen werden durch

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3\ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 2 & 4 & 6\ldots \end{array}$$

eineindeutig aufeinander abgebildet. Zwischen den Elementen 2, 3 von $\dot{N}$ besteht die Ordnungsrelation $2 \prec 3$. Das Bild des Elements 2 von $\dot{N}$ $[f(2)]$ ist das Element 4 von T. Das Bild des Elements 3 von $\dot{N}[f(3)]$ ist das Element 6 von T. In der Menge T besteht zwischen 4 und 6 die Ordnungsrelation $4 \prec 6$. Man erkennt, daß für $2 \prec 3$ auch in T $f(2) \prec f(3)$ gilt.

Allgemein kann man beim Vergleich der Mengen $\dot{N}$, T hinsichtlich ihrer $\prec$-Ordnung sagen, daß für zwei verschiedene Elemente $a, b \in \dot{N}$ mit der Ordnungsrelation $a \prec b$, auch in der Menge T zwischen zwei entsprechenden Bildelementen $f(a) \prec f(b)$ gilt. Zwei derartig geordnete Mengen nennt man ähnlich.

Definition 20

Zwei durch eine gewisse Relation R geordnete Mengen M, N heißen genau dann ähnlich bezüglich der Relation $\prec$, wenn sie sich derart eineindeutig aufeinander abbilden lassen, daß für zwei verschiedene Elemente $x, y \in M$ mit $x \prec y$ auch in N die Ordnungsrelation $f(x) \prec$ $\prec f(y)$ gilt.
Schreibweise: $M \simeq N$ (gelesen: M ähnlich N)

Die Abbildung selbst bezeichnet man als ähnliche Abbildung. Offensichtlich sind ähnliche Mengen stets äquivalent, da ja die Ähnlichkeit voraussetzt, daß eine eineindeutige Abbildung der Mengen möglich ist. Jedoch müssen

[1] genauer: irreflexiv halbgeordnet. Da jedoch „irreflexiv geordnet" hier nicht definiert wird, könnte das verwirren

äquivalente Mengen nicht immer ähnlich sein. Beispielsweise sind die Mengen $\dot{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ und $\Gamma = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}$ gleichmächtig, aber bezüglich der $<$-Relation nicht ähnlich! Es gilt jedoch

Satz 8

> Ist die Menge K einer geordneten Menge M gleichmächtig, so kann K so geordnet werden, daß K der Menge M ähnlich ist.

Man kann diesen Sachverhalt wie folgt erklären:
Sind $m, n \in M$ mit der Ordnungsrelation $m < n$, so ist es möglich, die Ordnung von M auf K zu übertragen, etwa in der Art, daß man für ihre Bilder $f(m), f(n) \in K$ die Ordnungsrelation $f(m) < f(n)$ festlegt. Damit ist für alle Elemente von K eine Ordnungsrelation definiert. Diese Ordnungsrelation ist transitiv, da auch die Ordnungsrelation in M transitiv ist. Damit ist die Menge K entsprechend der Definition 19 eine einfach geordnete Menge und infolge der Gleichmächtigkeit beider Mengen eine ähnliche Abbildung beider Mengen möglich. Mithin gilt: $K \simeq M$.

Die Ähnlichkeit von Mengen ist eine Äquivalenzrelation.

(1) $M \simeq M$.

(2) Aus $M \simeq N$ folgt $N \simeq M$.

(3) Aus $M \simeq N$ und $N \simeq T$ folgt $M \simeq T$.

Bekanntlich ergab sich aus dem Begriff der Äquivalenz der Begriff der Mächtigkeit. Die Eigenschaft nun, die allen untereinander ähnlichen Mengen gemeinsam ist, heißt ihr *Ordnungstypus*. Zwei ähnliche Mengen sind demnach stets vom gleichen Ordnungstypus.

Definition 21

> Ein beliebiger Repräsentant M aus einer Klasse von einander ähnlichen Mengen heißt ein Ordnungstypus $\mathfrak{n}$.

Den Ordnungstypus der Menge $\dot{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ bezeichnet man mit dem griechischen Buchstaben ω (omega). Wird diese Menge nach abnehmender Größe geordnet, so bekommt die entstehende Menge $\dot{N}^* = \{\ldots, 3, 2, 1\}$ den Ordnungstypus ω^*.
Die Menge der ganzen Zahlen $\Gamma = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}$ ist hinsichtlich ihres Ordnungstypus mit $\dot{N}$ nicht übereinstimmend. Verändert man die Anordnung der Elemente von Γ, wie es zum Nachweis der Abzählbarkeit nötig war (siehe Beispiel 81), dann ist $\Gamma = \{0, +1, -1, +2, -2, \ldots\}$ nach dem Ordnungstypus ω geordnet. Der gleiche Sachverhalt liegt bei der Menge der rationalen Zahlen vor. In ihrer natürlichen Ordnung, d. h. der Größe nach geordnet, ist sie nicht vom Typus ω. Man kann aber

auch P nach dem Ordnungstypus ω ordnen. Dazu schreibt man die Elemente von P in der Ordnung $\left\{1, 0, -1, 2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2, 3, \ldots\right\}$ auf.

Diese Beispiele erläutern, daß transfinite Mengen mehr als einer Ordnung fähig sind. Anders ist es bei den endlichen Mengen.

BEISPIEL 97

$M = \{a, b, c, d\} \qquad M' = \{a, d, b, c\}$

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ a & d & b & c \end{array}$$

Man erkennt, daß $M \simeq T$ ($T = \{1, 2, 3, 4\}$) und $T \simeq M'$, daraus folgt, daß $M \simeq M'$ ist.

Man kann zwar die Reihenfolge der Elemente einer endlichen Menge beliebig verändern, aber der Ordnungstypus der Menge ändert sich dadurch nicht.

4.5.1. Wohlordnung

Legt man einem Schüler in einer Anordnung, wie sie Bild 62 zeigt, einige Bausteine vor und verlangt, daß er sie abzählt, dann kann man oft beobachten, daß sich der Schüler verzählt. Entweder werden von ihm Bausteine doppelt gezählt, oder er vergißt, wo er angefangen hat. Erst nachdem die Bausteine in einer Reihe vor ihm liegen, wird das Zählen ohne Schwierigkeiten vor sich gehen. Jetzt weiß er, wo er anfangen und aufhören soll.

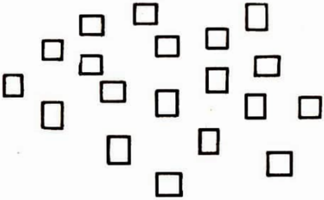


Bild 62

Die gleichen Schwierigkeiten ergeben sich auch oft noch für Erwachsene. Man verlange nur einmal, die kreisförmig angeordneten Lampen eines Kronleuchters, der an der Decke hängt, abzuzählen. Die Schwierigkeiten rühren in diesem Falle daher, daß über dem Zählen vergessen wird, welche Lampe als erste gezählt wurde. Es ist doch beim Abzählen immer so, daß man eine bestimmte Reihenfolge der abzuzählenden Dinge voraussetzen muß, was letztlich zu einer Festsetzung führt, welches Ding als erstes abgezählt wird. Überträgt man diesen Sachverhalt auf die Mengen der Mengenlehre, so gelangt man auf Grund der bestimmten Anordnung der Dinge zu einer Ordnung, die man **Wohlordnung** nennt.

Definition 22

Eine geordnete Menge M heißt wohlgeordnet, wenn M und auch *jede* nichtleere Teilmenge von M ein erstes Element enthält.

Man beachte in dieser Definition das Wort „jede". So ist die Menge der ganzen Zahlen in der Anordnung der Elemente $\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, \ldots$ nicht wohlgeordnet, wenn auch beispielsweise die Teilmengen $R = \{0, +1, +2, +3, \ldots\}$ und $T = \{-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3\}$ wohlgeordnet sind. Jedoch die Teilmenge $S = \{\ldots, -3, -2, -1\}$ von Γ ist nicht wohlgeordnet und damit auch Γ nicht. Man kann aber auch Γ wohlordnen. Dazu müßte man die Elemente in der Anordnung $-1, -2, -3, \ldots, +1, +2, +3, \ldots$ oder $0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \ldots$ aufschreiben.
Möglichkeiten, die Menge P wohlzuordnen, wären:

$$P = \left\{1, 2, 3, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \ldots, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \ldots\right\}$$

$$P = \left\{1, 0, -1, 2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2, 3, \ldots\right\}$$

Ein Beispiel für eine bezüglich der $<$-Relation nicht wohlgeordnete Menge ist auch $I = \langle 0, 1\rangle$, denn bereits die Teilmenge $L = (0, 1\rangle$ hat kein erstes Element, da Null nicht zur Menge gehört.
Es ergibt sich nun die Frage, ob eine transfinite Menge, die doch der verschiedensten Ordnungen fähig ist, auch immer wohlgeordnet werden kann. Cantor war von dieser Tatsache fest überzeugt, bewiesen hat sie jedoch erst E. Zermelo.

Satz 9 (Wohlordnungssatz)

Jede Menge kann wohlgeordnet werden.

Für das Verständnis des Beweises ist sehr viel mathematische Abstraktionskraft erforderlich. Deshalb soll im Rahmen dieser Einführungsschrift darauf verzichtet werden.[1] Jedoch liegt dem Zermeloschen Beweis eine Voraussetzung zugrunde, die man als das *Auswahlaxiom* bezeichnet. Es heißt:

Auswahlaxiom

Eine Menge M, welche in eine Menge paarweise zueinander elementfremder Teilmengen A, B, C, ... zerfällt, deren jede mindestens ein Element hat, enthält mindestens eine Teilmenge M_1, welche mit jeder der Teilmengen A, B, C, ... genau ein Element gemeinsam hat.

[1] Der Beweis ist sehr ausführlich dargestellt in: Fraenkel, A., „Einleitung in die Mengenlehre", Verlag von Julius Springer, Berlin 1923, 2. Auflage, Seiten 144 bis 149

Für endliche Mengen ist dieser Sachverhalt einfach zu erklären. Man nehme dazu nur einmal an, daß M die Menge aller FDJ-Mitglieder einer Fachschule ist. Jedes FDJ-Mitglied gehört der FDJ-Gruppe einer Seminargruppe an. Diese FDJ-Gruppen seien die Mengen $A, B, C, \ldots$. Nimmt man an, daß die zentrale FDJ-Leitung so zusammengesetzt ist, daß aus jeder FDJ-Gruppe ein Mitglied in ihr vertreten ist, dann bildet die zentrale FDJ-Leitung die Teilmenge M_1. Offensichtlich stößt die Bildung dieser FDJ-Leitung auf keine Schwierigkeiten.
Für alle wohlgeordneten transfiniten Mengen kann man M_1 auch bilden, man braucht ja nur alle ersten Elemente der Teilmengen $A, B, C, \ldots$ als Elemente von M_1 festzulegen.
Nun sagt aber der Wohlordnungssatz aus, daß *jede* Menge wohlgeordnet werden kann, d. h., die Wohlordnung transfiniter Mengen kann nicht als Voraussetzung genommen werden.
Für endliche Mengen bereitet die Wohlordnung keine Schwierigkeiten. Endliche Mengen können bekanntlich nur Ordnungen ein und desselben Typs fähig sein. Diese Ordnungen sind dann immer Wohlordnungen.

4.5.2. Ordnungszahlen

Die Ordnungstypen wohlgeordneter Mengen bezeichnet man als Ordnungszahlen. Sind diese wohlgeordneten Mengen transfinit, dann spricht man von transfiniten Ordnungszahlen. Bei den endlichen Mengen entsprechen die natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ den Ordnungszahlen. Allerdings muß man dazu die natürlichen Zahlen nicht in ihrer Eigenschaft als Anzahlen, sondern eben als Ordnungszahlen auffassen. Man kann ja, wie bereits ausgeführt, die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge gar nicht anders als durch Zählen feststellen. Durch das Zählen unterwirft man die Elemente einer endlichen Menge immer einer bestimmten Ordnung. Gewöhnlich kommt einem der Doppelcharakter – Anzahl, Ordnungszahl – der natürlichen Zahlen kaum zum Bewußtsein. Erst die Tatsache, daß diese Begriffe für transfinite Mengen auseinanderfallen, lehrt, sie im Endlichen zu unterscheiden. Die Menge der natürlichen Zahlen, nach zunehmender Größe geordnet, hat die Ordnungszahl ω. Diese Ordnungszahl ist die kleinste transfinite Ordnungszahl.

4.5.2.1. Einiges über das Rechnen mit Ordnungszahlen

BEISPIEL 98

Setzt man ω hinter alle Elemente von $\dot{N}$, gedeutet als Ordnungszahlen, dann bekommt man eine Menge $K = \{1, 2, 3, \ldots, \omega\}$. Diese Menge enthält ein Element mehr als $\dot{N}$, ihre Ordnungszahl ist deshalb $\omega + 1$. Setzt man ω vor die Elemente von $\dot{N}$, so erhält man eine Menge $L = \{\omega, 1, 2, 3, \ldots\}$, deren Ordnungszahl $1 + \omega$ ist. Die Menge L ist aber der Menge $\dot{N}$ ähnlich, was zur Gleichung $1 + \omega = \omega$ führt. Von der Menge K kann man nicht sagen, daß sie zu $\dot{N}$ ähnlich ist, d. h., $1 + \omega$ und $\omega + 1$ sind voneinander verschieden.

Das kommutative Gesetz der Addition gilt demnach für transfinite Ordnungszahlen nicht.

BEISPIEL 99

$S = \{1, 3, 5, \ldots\}$ $\qquad T = \{2, 4, 6, \ldots\}$

Jede dieser Mengen ist $\dot{N}$ ähnlich und hat deshalb die Ordnungszahl ω. Bildet man $V = \{1, 3, 5, \ldots, 2, 4, 6, \ldots\}$, so hat die Menge V die Ordnungszahl $\omega + \omega$. Es ergibt sich die Gleichung $\omega + \omega = \omega \cdot 2$.
Die Ordnungszahl $2 \cdot \omega$ erhält man dagegen, wenn eine Folge von zwei Gliedern ω-mal hintereinandergesetzt wird.

Zum Beispiel $U = \{1, 2; 3, 4; 5, 6; 7, 8; \ldots\}$

Die Menge U hat demnach die Ordnungszahl $2 \cdot \omega$. Jedoch ist U eine abzählbare Menge, die mit $\dot{N}$ ähnlich ist. Also gilt: $2 \cdot \omega = \omega$. Es ist demnach $\omega \cdot 2$ von $2 \cdot \omega$ verschieden.

Die Produktbildung transfiniter Ordnungszahlen ist auch nicht kommutativ.
Diese Beispiele erläutern, daß bekannte Gesetze der Arithmetik, die auch noch für transfinite Kardinalzahlen Gültigkeit haben, für transfinite Ordnungszahlen nicht gelten.

BEISPIEL 100

Es sei M die Menge aller Primzahlen. Diese Menge ist abzählbar und kann entsprechend Satz 8 so wohlgeordnet werden, daß sie mit $\dot{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ähnlich ist. Demzufolge hat M die Ordnungszahl ω. Es ist nun möglich, mit Hilfe der Menge $M = \{2, 3, 5, 7, \ldots\}$ neue Mengen M_1, M_2, $M_3, \ldots$ zu bilden.
Es sei $m \in M$. M_1 soll alle Elemente von der Form $2m\,(m \in M)$ enthalten.

$M_1 = \{4, 6, 10, 14, \ldots\}$

M_2 enthalte alle Elemente der Form $3m\,(m \neq 2)$.

$M_2 = \{9, 15, 21, 33, \ldots\}$

M_3 enthalte alle Elemente von der Form $4m$.

$M_3 = \{8, 12, 20, 28, \ldots\}$

. . . . usw.

Jede dieser Mengen $M_i\,(i \in \dot{N})$ hat die Ordnungszahl ω. Bildet man die Menge U, die die Vereinigung aller Mengen $M_i\,(i \in \dot{N})$ ist, dann ist die Ordnungszahl von U: $\omega \cdot \omega$. Dafür kann man auch, analog der aus

der Schulzeit bekannten Potenzschreibweise, ω^2 schreiben. Man könnte dies wie folgt erläutern:
Da jede Menge $M_i (i \in \dot{N})$ die Ordnungszahl ω hat, ergibt sich die Ordnungszahl von U durch die Addition der Ordnungszahlen dieser Mengen, denn $U = \bigcup\limits_{i=1} M_i$.

$$\underbrace{\omega + \omega + \omega + \omega + \ldots}_{\omega\text{-mal}} = \omega \cdot \omega = \omega^2$$

Allerdings dient dieses „ω-mal" nur eben zur Erläuterung. In Wirklichkeit ist ω ein Grenz-(Limes-)element und keine Zahl, für die eine solche Formulierung sinnvoll wäre.

Damit sollen die Ausführungen über das Rechnen mit Ordnungszahlen abgeschlossen werden. Derjenige Leser, der seine Kenntnisse darüber vertiefen möchte, sei auf das im Literaturverzeichnis aufgeführte Buch von E. Kamke „Mengenlehre" verwiesen.

5. Geschichte der Mengenlehre

Beim Studium von unendlichen Mannigfaltigkeiten und Grenzübergängen wurden die Mathematiker spontan auf Überlegungen geführt, die heute Gegenstand mengentheoretischer Untersuchungen sind. Erste derartige Ansätze finden sich bereits in der Antike und dann besonders deutlich im 16. und 17. Jahrhundert, z. B. bei GALILEO GALILEI (1564–1642), der die Gleichmächtigkeit — wie wir heute sagen würden — der Menge der natürlichen Zahlen und der Menge der Quadratzahlen erkannt hat.

Den eigentlichen Anstoß, eine Mengenlehre zu schaffen, gab die Infinitesimalrechnung. Im 17. Jahrhundert von GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646 bis 1716) und ISAAC NEWTON (1642—1727) geschaffen, war sie in diesen 200 Jahren ein unentbehrliches Hilfsmittel für die Lösung vieler naturwissenschaftlicher Probleme und Aufgaben geworden. Die Grundlagen dieser mathematischen Methode jedoch (z. B. die Begriffe der Stetigkeit, des Grenzwertes, der unendlichen Reihe usw.) waren noch nicht genügend scharf gefaßt.

Aus dem Bemühen, die Infinitesimalrechnung mathematisch-logisch einwandfrei zu begründen, beschäftigte sich der böhmische Philosoph, Mathematiker und Sozialethiker BERNARD BOLZANO (1781–1848) mit Mengen. Von 1847 bis zu seinem Tode schrieb er an den „Paradoxien des Unendlichen“[1]. In diesem Büchlein wurden bereits sehr klar unendliche Mengen als solche definiert, die einer ihrer echten Teilmengen gleichmächtig sind. BOLZANO verwendete auch bereits den Ausdruck Menge (anstelle der später zeitweise üblichen Benennung „Mannigfaltigkeit“). Während man bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts noch der allgemeinen Ansicht war, daß das Unendliche nur potentiell (d. h. stets im Stadium des Werdens, das nie als fertig und abgeschlossen betrachtet werden kann) existiert, war BOLZANO der erste, der das Aktual-Unendliche (d. h. eine fertig vorliegende unendliche Gesamtheit) ausdrücklich anerkannte und studierte. Bedeutende Beiträge zur Verschärfung der Grundlagen der Infinitesimalrechnung stammen von dem französischen Mathematiker AUGUSTIN CAUCHY (1789–1857) und später von KARL WEIERSTRASS (1815–1897), der die Bedeutung gewisser Mengen von Punkten auf einer Geraden studierte. Er versuchte deshalb, für gewisse spezielle Fälle die Gesetzmäßigkeiten dieser Punktmengen zu erforschen.

Ein Schüler von WEIERSTRASS, GEORG CANTOR (1845–1918), untersuchte seit 1869 speziell trigonometrische Reihen und ihre Ausnahmestellen. Diese

---

[1] Aus dem Nachlaß herausgegeben von FR. PRIHONSKY, Prag 1850, von A. HÖFKER, mit Anmerkungen von H. HAHN, in der Phil. Bibliothek, Band 99, Leipzig 1921, erneut herausgegeben

Arbeiten führten ihn zur scharfen Fassung des Begriffes der Grenze. Damit gelingt es, der unbestimmten und zu Irrtümern Anlaß gebenden Verwendung des Begriffs „unendlich" vorzubeugen. Bei all diesen Untersuchungen stieß er, ebenso wie WEIERSTRASS, auf unendliche Punktmengen und erkannte, daß die von WEIERSTRASS bewiesenen Sätze nur spezielle Fälle viel allgemeinerer Gesetzmäßigkeiten von Mengen sind. Er führte den Begriff der ein(ein)deutigen Zuordnung ein und war damit in die Lage versetzt, unendliche Mengen hinsichtlich der „Anzahl" ihrer Elemente zu vergleichen. Im Jahre 1873 gelang es ihm, unter Verwendung des von ihm geschaffenen Begriffs der Abzählbarkeit, den Satz von der Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen zu beweisen. 1882 schloß er das System der allgemeinen Mengenlehre mit der Einführung der transfiniten Ordnungszahlen im wesentlichen ab.
CANTOR, der die Mengenlehre anfänglich zur Begründung gewisser Grundlagen der Analysis schaffen wollte, erkannte im Laufe seiner Untersuchungen immer mehr, daß hier eine neue mathematische Disziplin im Entstehen war. Deshalb baute er sie dann immer weiter um ihrer selbst willen aus. Er wurde damit Schöpfer einer Mengenlehre, die man heutzutage, in bezug auf ihre Grundlagen, die *naive* nennt.
Unabhängig von CANTOR arbeitete auch PAUL DU BOIS-REYMOND (1831 bis 1889) an den Grundlagen der Mengenlehre. In seiner 1882 herausgegebenen „Allgemeinen Funktionstheorie I" untersuchte er den Unendlichkeitsbegriff und einige damit im Zusammenhang stehende Fragen. Er scheiterte aber im wesentlichen daran, für eine Theorie linearer Punktmengen unendliche Mengen zu verwenden. Von großer Bedeutung für die Entwicklung der Mengenlehre waren die Arbeiten RICHARD DEDEKINDS (1831 bis 1916). In seiner 1897 erschienenen Schrift „Was sind und was sollen die Zahlen" untersuchte er u. a. die natürlichen Zahlen. In seiner Darstellung verwendete er sehr fruchtbringend den Begriff der Abbildung. Er begründete eine „Theorie der Ketten", die wenige Jahre später, infolge nutzbringender Anwendung durch ERNST ZERMELO (1871—1953), für die Beweise wichtiger Sätze der Mengenlehre zu großer Bedeutung gelangte.
Von einem großen Teil der in dieser Zeit lebenden Mathematiker wurde die Mengenlehre abgelehnt, und es gab viele, die ihr die Existenzberechtigung im Reiche der Mathematik absprachen.
In Deutschland trat besonders LEOPOLD KRONECKER (1823—1891) gegen CANTOR auf. KRONECKER war bemüht, die Grenzübergänge aus der Mathematik zu verbannen und insbesondere die Irrationalzahlen auszumerzen. Für ihn war die Definition eines mathematischen Begriffs nur dann statthaft und einwandfrei, wenn er in einer endlichen Anzahl von Schritten erzeugt werden konnte. Dies traf aber für einige Definitionen der Mengenlehre nicht zu. KRONECKER weigerte sich, das Aktual-Unendliche anzuerkennen und stand damit im krassen Widerspruch zu CANTOR, der ja seine Mengenlehre darauf aufgebaut hatte.
Im Verlauf der Weiterentwicklung der Mengenlehre entdeckte man um die Jahrhundertwende die Antinomien, deren Gründe in der unkritischen Ver-

wendung des Wortes Menge und in der unbeschränkten und unkontrollierten Verknüpfung mathematisch-logischer Operationen zu suchen sind. Eine Antinomie liegt dann vor, wenn man eine Aussage A sowie ihr Gegenteil widerlegen kann.
1897 veröffentlichte CÄSARE BURALI FORTI (1861–1931) in seinem Buch „Una questione siu numeri transfiniti", von der Menge aller Ordnungszahlen ausgehend, folgende Überlegung: Nach der CANTORschen Mengenerklärung ist es möglich, die Menge M *aller* Mengen zu bilden. CANTOR hatte bewiesen, daß die Menge U aller Teilmengen von M von größerer Mächtigkeit als M ist. Dann gäbe es also eine Menge von größerer Mächtigkeit als die Menge *aller* Mengen.
Nun muß aber, wenn M alle Mengen zu Elementen hat, auch die Menge U aller Teilmengen von M selbst eine Teilmenge von M sein, kann also nach CANTOR nicht von größerer Mächtigkeit sein, sondern höchstens die Mächtigkeit von M haben.
Damit ist bewiesen, daß die Mächtigkeit von U größer als die Mächtigkeit von M ist, andererseits aber auch, daß die Mächtigkeit von U höchstens gleich der Mächtigkeit von M ist. Das ist aber ein Widerspruch zu den allgemeinen Eigenschaften des Größenvergleichs von Mächtigkeiten, denn es läßt sich beweisen, daß für zwei Kardinalzahlen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ stets nur genau eine der Relationen $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$, $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ gelten kann.
Der bekannte englische Philosoph und Mathematiker BERTRAND RUSSEL (geb. 1872) teilte 1901 GOTTLOB FREGE (1848–1925) brieflich folgende Überlegung mit, die dieser 1902 in seinem Buch „Grundgesetze der Arithmetik"[1] veröffentlichte:
Nach einem Gesetz der Logik, dem sogenannten „Satz vom ausgeschlossenen Dritten", kommt jedem Ding von zwei widersprechenden Eigenschaften nur eine zu. Wendet man dieses Gesetz auf eine Menge M, die die Menge aller derjenigen Mengen ist, die sich nicht selbst als Element enthalten, an, dann kann nur gelten: Entweder enthält M sich selbst als Element oder nicht.
Nimmt man an, daß M sich selbst als Element enthält, so kann M nicht zu M gehören, da ja M die Menge aller Mengen ist, die sich *nicht* selbst als Element enthalten.
Nimmt man an, daß M sich nicht selbst als Element enthält, dann gehört M zur Menge aller derjenigen Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten, also zu M.
Damit wäre bewiesen, daß M genau dann zu M gehört, wenn M nicht zu M gehört. Das ist aber offensichtlich ein Widerspruch. Einen Ausweg, um diese Widersprüche zu vermeiden, gibt es nur, wenn man die CANTORsche Mengenkonzeption ändert.
Diese Schwierigkeiten zu überwinden war insofern nötig, da immer mehr Mathematiker erkannten, wie fruchtbar die CANTORschen Ideen für die Entwicklung der Theorie der reellen Funktionen und der Topologie waren.

[1] FREGE, G., „Grundgesetze der Arithmetik", Band 2, Jena 1903

BERNHARD RIEMANN (1826–1866) hatte 1851 streng und allgemein den Begriff des bestimmten Integrals einer Funktion begründet. Jedoch versagte dieser Integralbegriff in den Fällen, wenn die zu integrierende Funktion so stark unstetig ist, daß der als Integral definierte Grenzwert nicht existiert. 1902 gelang es nun HENRI LEBESGUE (1872–1941), durch geeignete Definition und Begründung des Inhalts von Punktmengen einen Integralbegriff zu entwickeln, der es ermöglichte, auch diese Klassen von Funktionen zu integrieren.[1] Dabei stimmten das RIEMANNsche und das LEBESGUEsche Integral dort überein, wo sie beide existieren. Damit war wohl der entscheidendste Schritt für die Anerkennung der CANTORschen Mengenlehre getan.

Jedoch blieben die Widersprüche, die oben angeführt worden sind und vornehmlich in der Theorie der transfiniten Zahlen auftraten, weiterhin bestehen. Es traten nun Kritiker auf, die die CANTORsche Lehre schätzten, ihre Bedeutung klar erkannt hatten und nun bemüht waren, diese Antinomien zu beseitigen. Man schuf axiomatische Aufbauarten der Mengenlehre, die die Antinomien dadurch vermieden, daß die betreffende antinomische Menge gar nicht existiert, d. h. nicht auf Grund der Axiome gebildet werden kann. So begründeten A. N. WHITEHEAD (1861–1947) und B. RUSSEL in den drei Bänden der „Principia Mathematica"[2] einen typentheoretischen Aufbau der Mengenlehre, dem vier Axiome zugrunde liegen, die für Mengen beliebiger Stufen formuliert werden können:

1. Mengenbildungsaxiom,
2. Extensionalitätsaxiom,
3. Auswahlaxiom,
4. Unendlichkeitsaxiom.

Bereits vor ihnen hatte ZERMELO ein Axiomensystem geschaffen, welches aus sieben Axiomen bestand. Bei ihm war das Mengenbildungsaxiom in vier Axiome (Aussonderungsaxiom, Axiom der Potenzmenge, Axiom der Vereinigung, Axiom der Paarung) aufgeteilt.

Der Unterschied zwischen beiden axiomatischen Methoden liegt darin, daß es die ZERMELOschen Axiome zwar gestatten, die Mengenlehre und die Mathematik aufzubauen, ohne auf Widersprüche zu stoßen, aber die eigentlichen Quellen der Widersprüche nicht aufdecken. Der typentheoretische Aufbau wird dem nun in philosophischer Hinsicht mehr gerecht.

Die Widerspruchsfreiheit beider Systeme, d. h. der Satz, daß die Anwendung der Axiome niemals auf Widersprüche führen wird, ist bis heute nicht bewiesen. Man nimmt jedoch bei allen Untersuchungen diese Widerspruchsfreiheit als gegeben an.

---

[1] LEBESGUE, H.: „Leçon sur l'integration et la recherche des fonctions primitives", Paris 1904

[2] A. N. WHITHEHEAD and B. RUSSEL: „Principia Mathematica", I.–III., Cambridge, 1910/1913

Die Frage nach der Grundlegung der Mengenlehre ist auch heute noch nicht restlos geklärt. Jedoch kann man daraus nicht den Schluß ziehen, daß die vorhandenen und eventuell noch unbekannten Antinomien der Mathematik ernstlich gefährlich werden können. Fast alle Mathematiker benutzen heute die Mengenlehre als unentbehrliches Hilfsmittel. Man kann mit voller Berechtigung sagen, daß alle mathematischen Theorien in der Mengenlehre enthalten sind. Neben der allgemeinen Mengenlehre wurden besonders die Theorie der Punktmengen — als Fundament der Topologie — und die Arithmetik der transfiniten Zahlen — als verallgemeinerte Zahlentheorie — weiter ausgebaut. Auch die Theorie der reellen Funktionen wird heute von Grund auf unter Benutzung der Beziehungen Element — Menge aufgebaut. Bekanntlich bedienen sich auch Algebra und praktische Mathematik der Mengenlehre. Die Begriffsbildungen der Mengenlehre ermöglichen in allen Teildisziplinen der Mathematik eine rationelle Darstellungsweise und werden in den folgenden Jahren entscheidenden Anteil haben, den Mathematikunterricht an den Ober- und Fachschulen grundlegend zu reformieren.

6. Anhang

Lösungen

1. $S = \{m, n, o, p\}$
2. $x \in X$
3. $x, y \in Z$
4. $12 \notin T$, $\quad 5, 7, 11 \in T$
5. $L = \{-2\}$
6. $x = 3$, $\quad 3 \in M$, d. h., $x \in \{2, 3\}$
7. $L = \{1, 3\}$
8. Es existieren drei Fußpunkte, demzufolge hat die Menge drei Elemente.
9. $\{S_1, S_2, S_3\}$
10. Bezeichnet man mit A' das Bild des Punktes A (usw.), welches der angeführten Achsensymmetrie entspricht, so erhält man:
    $A' \equiv B, \quad B' \equiv A, \quad C' \equiv D, \quad D' \equiv C.$
    Nach dem Extensionalitätsaxiom gilt also:
    $\{A', B', C', D'\} = \{A, B, C, D\}$.
11. Kreis
12. a) $4 < x \leqq 7$, b) $5 > x$, c) $-3 \leqq x \leqq -1$, d) $x \geqq 3$, e) $-2 \leqq x \leqq \leqq 0$, f) $-\infty < x < +\infty$, g) $x \in (2, 5\rangle$, h) $x \in \langle 4, +\infty)$, i) $x \in \langle -2, 5\rangle$, k) $x \in (8, +\infty)$, l) $x \in (5, 7)$, m) $x \in \varDelta$.
13. $\sin x \in \langle -1, +1\rangle$
14. a) $I_1 = (1, +\infty)$, b) $I_2 = (-\infty, 3\rangle$, c) $I_3 = (-\infty, 8)$, d) $I_4 = \langle 6, +\infty)$
15. $\varGamma \supset \dot{N}$
16. $\varDelta \supset P, \varDelta \supset \varGamma, P \supset \varGamma$ oder $\varDelta \supset P \supset \varGamma$
17. $Z \supset \varDelta$, $Z \supset P$, $Z \supset \varGamma$, $Z \supset \dot{N}$, $\varDelta \supset P$, $\varDelta \supset \varGamma$, $\varDelta \supset \dot{N}$, $P \supset \varGamma$, $P \supset \dot{N}$, $\varGamma \supset \dot{N}$ oder $Z \supset \varDelta \supset P \supset \varGamma \supset \dot{N}$
18. $M_1 = \{-5, 8\}$, $M_2 = \{-5\}$, $M_3 = \{-5, 8\}$, $M_1 = M_3$
    $M_1 \supset M_2$, $M_3 \supset M_2$, $M_1 \supseteqq M_3$, $M_3 \supseteqq M_1$, d. h., $M_1 = M_3$
19. $I = (6, 7)$, $\quad R = (5, 8)$. Es gilt: $R \supset I$.
20. $I_2 \supset I_1 \supset I_3$

21. $M_1 \supseteqq M_2$, $M_2 \supseteqq M_1$, d. h., $M_1 = M_2$

22. $Q_1 \supset Q_2$ (denn alle Quadrate sind Rechtecke mit gleichen Seiten)

23. Zwei Mengen können die gleichen Elemente enthalten, aber darüber hinaus noch andere. Dann sind diese Mengen nicht gleich.
Richtig: Wenn zwei Mengen die gleichen Elemente enthalten, aber darüber hinaus keine anderen, sind die Mengen gleich.

24. $V = M \cup N \cup T$, so gilt: $V \supseteqq M$, $V \supseteqq N$, $V \supseteqq T$.

25. Eine Menge mit sich selbst vereinigt, ergibt wiederum diese Menge. Das bedeutet, daß jede Menge Teilmenge von sich selbst ist.

26. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

27. $L_1 = \{-5, 4\}$, $L_2 = \{-4, 3\}$, $L_1 \cup L_2 = \{-5, -4, 3, 4\}$

28. $L_1 = (-\infty, 8)$, $L_2 = (-\infty, 1)$, $L_1 \cup L_2 = (-\infty, 8)$

29. a) $(-\infty, 5)$, b) $(-\infty, +\infty)$, c) $\langle 3, 8\rangle$, d) $(0, 5\rangle \cup \langle 8, 12)$

30. $(T_1 \cap T_2) = V_1 = \{5\}$
$(T_2 \cap T_3) = V_2 = \{1, 3, 5\}$, $T_1 \cap V_2 = \{5\}$

31. a) $(5, 6)$ b) $(0, 1\rangle$ c) $\emptyset$ d) $\{3\}$ e) $\emptyset$

32. Eine Menge, mit sich selbst geschnitten, ergibt wieder diese Menge.

33. Für $D = N_1 \cap N_2 \cap N_3$ gilt $N_1 \supseteqq D$, $N_2 \supseteqq D$, $N_3 \supseteqq D$.

34. Der Durchschnitt einer beliebigen Menge mit der leeren Menge ist die leere Menge selbst. Denn: die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge.

35. $(T \cup S) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R \cap (T \cup S) = \{1, 2, 3, 4\}$
$(R \cap T) = \{1, 2, 4\}$ $\quad (R \cap S) = \{1, 3, 4\}$
$(R \cap T) \cup (R \cap S) = \{1, 2, 3, 4\}$
$(T \cap S) = \{1, 4\}$, $R \cup (T \cap S) = \{1, 2, 3, 4\}$
$(R \cup T) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $(R \cup S) = \{1, 2, 3, 4\}$
$(R \cup T) \cap (R \cup S) = \{1, 2, 3, 4\}$

36. a) $I = \langle 3, 4\rangle$, b) $I = (2, 3)$, c) $I = \langle 1, 2)$, d) $I = (3, 4\rangle$

37. Für $x^2 - 4x + 3 < 0$ ist $x \in (1, 3) = G_1$
$x^2 - 4x + 3 > 0$ ist $x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$: G_2
1. $x \in (1, +\infty)$: I_1, $L_1 = I_1 \cap G_1 = (1, 3)$
2. $x \in (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$: I_2,
$L_2 = I_2 \cap G_2 = (-\infty, 1) \cup (4; +\infty)$
$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty; 1) \cup (1; 3) \cup (4; +\infty)$

38. a) $M \times N = \{[a, x], [a, y], [a, z], [b, x], [b, y], [b, z], [c, x], [c, y], [c, z]\}$
b) $M \times N = \{[1, 1], [2, 1], [3, 1], [4, 1]\}$
c) $M \times N = \emptyset$

39. $M \times N = [a, a]$, $N \times M = [a, a]$

40. a) den 1. Quadranten, b) den 2. Quadranten,
c) den 3. Quadranten, d) den 4. Quadranten,

41. a) aus M auf N, b) von M in N, c) aus M in N, d) von M auf N

42. von M auf N

43. aus M auf N

44. aus M auf N, von N in M

45. a) eindeutige Abbildung von M in N
b) eineindeutige Abbildung von M auf N
c) eindeutige Abbildung von M in N
d) eineindeutige Abbildung von M in N
e) eindeutige Abbildung von M auf N

46. a) eineindeutige Funktion
b) eindeutige Funktion
c) eineindeutige Funktion
d) eineindeutige Funktion
e) eindeutige Funktion
f) eindeutige Funktion

47. a) f enthält das Element $[3, 6]$, welches in g fehlt.
b) g hat die Elemente $[1, 2]$, $[-1, 2]$, die in f nicht vorkommen.

48. a) $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + 2$
b) $x^2 - 4x + 3 = y$
$(x-2)^2 - 1 = y$
$(x-2)^2 = y + 1$ und daraus:
$f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} + 2 \quad x \in (-1, 8)$
$y \in (2, 5)$
c) $f^{-1}(x) = \arccos x \quad x \in \langle -1, 1 \rangle$
$y \in \langle 0, \pi \rangle$

Namenverzeichnis

Bernstein, Fritz	(geb. 1880)	Klein, Felix	(1849–1925)
Bolzano, Bernard	(1781–1848)	Kronecker, Leopold	(1823–1891)
Burali Forti, Cäsare	(1861–1931)	Lebesgue, Henri	(1875–1941)
Cantor, Georg	(1845–1918)	Leibniz, Gottfried Wilhelm	(1646–1716)
Cauchy, Augustin	(1789–1857)	Newton, Isaac	(1643–1727)
Dedekind, Richard	(1831–1916)	Riemann, Bernhard	(1826–1866)
Du Bois-Reymond, Paul	(1831–1889)	Russel, Bertrand	(1872–1969)
Frege, Gottlob	(1848–1925)	Weierstraß, Karl	(1815–1897)
Grelling, Karl	(geb. 1900)	Whitehead, Alfred North	(1861–1947)
Hilbert, David	(1862–1943)	Zermelo, Ernst	(1871–1953)

Literaturverzeichnis

1. *Bücher:*

ALEXANDROFF, P. S.: Einführung in die Mengenlehre und die Theorie der reellen Funktionen. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1956

ASSER, G.: Einführung in die mathematische Logik. Teil 1, 2., unveränderte Auflage. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1965

CANTOR, G.: Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Leipzig: 1883. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre
I. Band 46 der Mathematischen Annalen 1895
II. Band 49 der Mathematischen Annalen 1897

FRÄNKEL, A.: Einleitung in die Mengenlehre. Band I, 2., erw. Auflage. Berlin: Verlag Julius Springer 1923

GRELLING, K.: Mengenlehre. Mathematisch-Physikalische Bibliothek. Berlin und Leipzig: Verlag B. G. Teubner 1924

KAMKE, E.: Mengenlehre. Sammlung Göschen, Band 999/999a. Berlin: Verlag W. de Gruyter & Co. 1947

KLEIN, F.: Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus. Band I, 3. Auflage. Berlin: Verlag Julius Springer 1924

KÖNIG, J.: Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre. Leipzig: Verlag Veit & Comp. 1914

REDEI, L.: Algebra I. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig, 1959

2. *Artikel der Zeitschrift „Mathematik in der Schule“*. Berlin: Volk und Wissen Volkseigener Verlag

ILGNER, K.: „Über einige Versuche zur Behandlung der Grundbegriffe der Mengenlehre im Mathematikunterricht“. 1963. 1. Jahrgang, Heft 6, Seite 424ff.

RAUTENBERG, W.: „Über Antinomien in der Mathematik“. 1963. 1. Jahrgang, Heft 6, Seite 462ff.

TIETZ, W.: „Zur Definition des Funktionsbegriffes“. 1963. 1. Jahrgang, Heft 3, Seite 161

Alle hier vorstehend aufgeführten Bücher wurden zur Ausarbeitung der vorliegenden Schrift benutzt.

Für ein gründlicheres Studium der Mengenlehre kann das erstgenannte Buch von ALEXANDROFF, P. S., empfohlen werden.

Für die Lösungen von Ungleichungen mit Hilfe der Mengenlehre verweise ich auf:

HAUPT, D.: „Einige Beispiele zur Lösung von Ungleichungen mit Hilfe der Mengenlehre“. „Mathematik in der Schule“ 1963 1. Jahrgang. Heft 4, Seite 287ff. 1964 2. Jahrgang, Heft 1, Seite 9ff., 2. Jahrgang, Heft 10, Seite 768ff.

Sachwortverzeichnis