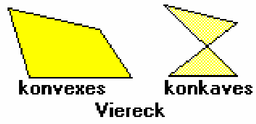
Viereck

Ein Viereck ist eine ebene, geradlinig begrenzte Figur mit 4 Ecken.

Arten:

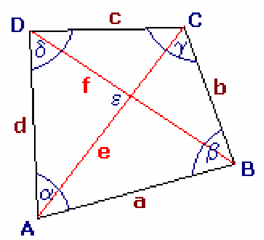
Quadrat	alle Seiten sind gleich lang, alle Innenwinkel sind 90°
Rechteck	jeweils gegenüberliegende Seiten sind gleich lang, alle Innenwinkel sind 90°
Parallelogramm	jeweils gegenüberliegende Seiten sind gleich lang und parallel
Trapez	ein Paar gegenüberliegender Seiten ist parallel
Rhombus	gegenüberliegende Seiten sind parallel, alle Seiten sind gleich lang
Raute	veraltetes Synonym für Rhombus
Drachenviereck	besitzt zwei Paare, angrenzender gleich langer Seiten



Polygon
Eine Polygon ist eine ebene, geradlinig begrenzte Figur mit n Ecken (n größer als 2).

konvexes Polygon
In einem konvexen Polygon verlaufen alle Diagonalen des Polygons im Innern des Polygons.

nichtkonvexes Polygon, konkaves Polygon
Bei einem nichtkonvexen Polygon verläuft wenigstens eine Diagonale des Polygons nicht durch das Innere des Vielecks.



Allgemeines Viereck
e,f Diagonale ; $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ Innenwinkel ; ε ... Winkel zwischen e und f

Innenwinkelsumme $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$

Umfang $u = a + b + c + d$

Halbumfang $s = u / 2$

Flächeninhalt $A = e * f * \sin \varepsilon = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2[(\alpha+\gamma)/2]}$
$= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2[(\beta+\delta)/2]}$

Das allgemeine Viereck wird auch Trapezoid genannt.

Bretschneider Formel $A = 1/4 \sqrt{4e^2f^2 - (b^2+d^2-a^2-c^2)^2}$

Ist m die Länge der Verbindungslinie der Mittelpunkte der Diagonalen, so gilt

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4 m^2$$

Satz über senkrechte Diagonalen
In einem Viereck stehen die Diagonalen genau dann senkrecht aufeinander, wenn
1. die Summe der Quadrate gegenüberliegender Seiten gleich ist, oder
2. die Mittellinien gleich lang sind.

Wenn eine Diagonale ein Viereck in zwei flächengleiche Hälften teilt, halbiert sie auch die andere Diagonale. Die Umkehrung gilt ebenfalls.

Trapezoid-Berechnung
Ist ein allgemeines Viereck, ein Trapezoid ABCD gegeben, bei dem a, b, c, d die Seiten, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Innenwinkel, f und g die Diagonalen und ε der Winkel zwischen diesen, sind, so gilt:

gegeben	Gleichung
a, b, c, β, γ	$A = 1/2\ (ab \sin \beta + bc \sin \gamma - ac \sin (\beta+\gamma))$
a, c, d, δ, α	$A = 1/2\ (ad \sin \alpha + cd \sin \delta - ac \sin (\alpha+\delta))$
$a, c, \alpha, \beta, \gamma, \delta$	$A = (a^2 \sin \beta \sin \alpha - c^2 \sin \delta \sin \gamma) / (2 \sin(\beta + \alpha))$
$a, b, \alpha, \beta, \gamma, \delta$	$A = (b^2 \sin \beta \sin \gamma \sin \delta - b^2 \sin^2 \gamma \sin \alpha + 2ab \sin (\beta+\gamma) \sin \gamma \sin \alpha - a^2 \sin^2 (\beta+\gamma) \sin \alpha) / (2 \sin(\beta+\gamma) \sin \delta)$
$a, b, c, d, \beta, \delta$	$A = 1/2\ ab \sin \beta + 1/2\ cd \sin \delta$
f, g, ε	$A = 1/2\ fg \sin \varepsilon$
$b, c, d, \beta, \gamma, \delta$	$a = b \cos \beta - c \cos (\beta+\gamma) + d \cos (\beta+\gamma+\delta)$
b, c, d, γ, δ	$a = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2 + 2bc \cos \gamma + 2bd \cos (\gamma+\delta) + 2cd \cos \delta}$
$A, b, c, d, \beta, \delta$	$a = (2A - cd \sin \delta) / (b \sin \beta)$
A, b, c, β, γ	$a = (2A - bc \sin \gamma) / ((b-c) \sin (\beta+\gamma))$
$A, c, \alpha, \beta, \gamma, \delta$	$a = \sqrt{(2A \sin (\beta+\alpha) + c^2 \sin \gamma \sin \delta) / (\sin \beta \sin \alpha)}$
$A, b, \alpha, \beta, \gamma, \delta$	$a = \sqrt{(2A \sin (\beta+\alpha) \sin \delta + b^2 (2 \sin^2 \gamma \sin \alpha - \sin \beta \sin \delta)) / (\sin^2 (\beta+\gamma) \sin \alpha)} - b \sin \gamma / \sin (\beta+\gamma)$
A, g, ε	$f = 2A / (g \sin \varepsilon)$
a, b, β	$f = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta}$

Wenn die Innenwinkel eines Trapezoids durch besondere Bedingungen näher bestimmt sind, so kann der Flächeninhalt des Vierecks durch einfachere Ausdrücke dargestellt werden.

1) Wenn in einem Viereck die gegenüberliegenden Winkel zusammen 180° betragen, so liegt ein Sehnenviereck vor. Ist $s = (a+b+c+d)/2$, so gilt für dieses

$$A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}\ \ldots \text{ (Herons Vierecksgleichung)}$$

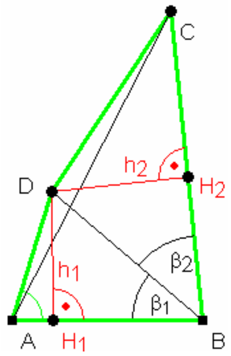
2) Wenn in einem Trapezoid zwei gegenüberliegende Winkel einander gleich sind, so ist

$$A = 1/4\ (ad+bc)/(ad-bc)\ \sqrt{(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a+d-b-c)(b+d-a-c)}$$

Dabei sind die gleichen Winkel von a und b, so wie durch c und d, eingeschlossen.

3) Wenn in dem Viereck ein Winkel ein Rechter ist, o.B.d.A. zwischen den Seiten a und d, so wird

$$A = 1/2\ ad + 1/4\ \sqrt{(b+c+\sqrt{a^2+d^2})\ (b+c-\sqrt{a^2+d^2})\ (b-c+\sqrt{a^2+d^2})\ (c-b+\sqrt{a^2+d^2})}$$



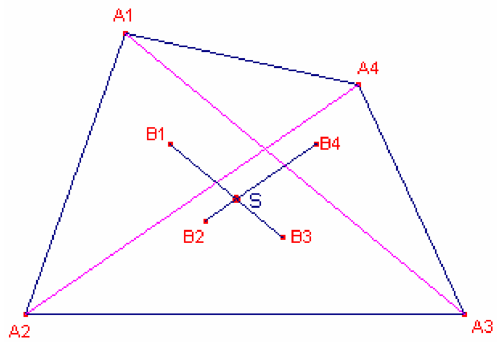
Viereck-Aufgabe

Aufgabe: Berechne ein Viereck aus a = 3,8 cm , b = 6,2 cm , c = 4,3 cm , d = 2,7 cm und α = 72,8°.

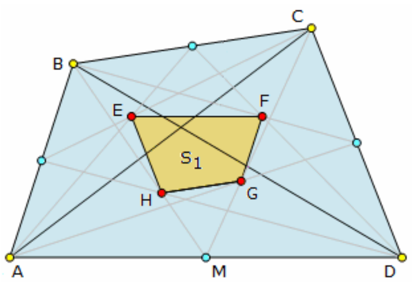
Lösung:

Man erhält	aus	mit der Gleichung	Lösung
f	a, d, α	$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha$	f = 4,0 cm
γ	f, b, c	$f^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \gamma$	γ = 39,3°
β_1	d, a, f	$d^2 = a^2 + f^2 - 2af \cos \beta_1$	β_1 = 40,7°
β_2	b, c, f	$c^2 = b^2 + f^2 - 2bf \cos \beta_2$	β_1 = 43,5°
β	β_1, β_2	$\beta = \beta_1 + \beta_2$	β = 84,1°
e	a, b, β	$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta$	e = 6,9 cm
δ	e, c, d	$e^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \delta$	δ = 163,8°
h_1	α, d	$\sin \alpha = h_1 / d$	h_1 = 2,6 cm
h_2	γ, c	$\sin \gamma = h_2 / c$	h_2 = 2,7 cm
A	a, b, h_1, h_2	$A = a/2\ h_1 + b/2\ h_2$	A = 13,3 cm²

Viereck-Schwerpunkt



Es sei ein konvexes Viereck $A_1A_2A_3A_4$ gegeben. Die Punkte B_1, B_2, B_3 und B_4 seien weiterhin die Schwerpunkte der vier von jeweils drei Viereckspunkten gebildeten Dreiecken.
Die Strecken B_1B_3 und B_2B_4 schneiden sich dann in einem Punkt S. Dieser Punkt S ist der Schwerpunkt des Vierecks.
S kann auch konstruiert werden, in dem die Verbindungsstrecken der Mittelpunkte gegenüberliegender Vierecksseiten zum Schnitt gebracht werden.

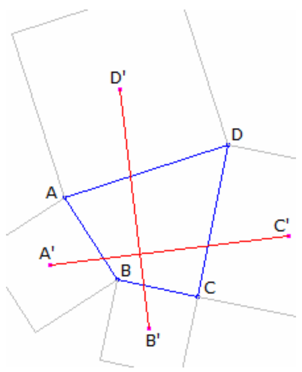


Schwerpunktsviereck

In der Abbildung ist ein Viereck ABCD mit dem Flächeninhalt S zu sehen. E, F, G, und H seien die Schwerpunkte der Dreiecke ABC, BCD, ACD und ABD.
S_1 sei weiterhin der Flächeninhalt des Schwerpunktvierecks EFGH. Dann gilt:
EF, FG, GH und EH sind parallel zu AD, AB, BC und CD
$S = 9\ S_1$

Nachweis: Der Mittelpunkt von AD sei M. Dann ist, da der Schwerpunkt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1 teilt MH : HB = MG : GC = 1:2
und nach der Umkehrung des Strahlensatzes HG || BC. Analog folgt dies für die anderen Seiten.
Auf Grund der parallelen Seiten ist das Viereck ABCD ähnlich zum Viereck FGHE, d.h.

$$S_1/S = (HG/BC)^2 = (MH/MB)^2 = (1/3)^2 = 1/9$$



Satz von van Aubel

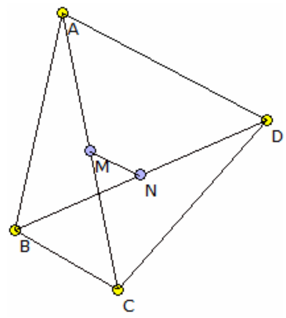
Gegeben sei ein beliebiges konvexes Viereck ABCD. Auf den Seiten des Vierecks werden jeweils Quadrate aufgesetzt. Die Mittelpunkte dieser Quadrate seien A', B', C' und D'. Dann gilt:

Satz von van Aubel:
Die Verbindungsstrecken der Mittelpunkte der Quadrate gegenüberliegender Seiten stehen senkrecht aufeinander und sind gleich lang, d.h.

$$A'C' \perp B'D' \text{ und } A'C' = B'D'.$$

Weiterhin gilt: Das Viereck A'B'C'D' wird van Aubel-Viereck genannt.
Die Mittelpunkte der Seiten eines Vierecks bilden nach dem Satz von Varignon ein Parallelogramm. Die Mittelpunkte der Seiten von Viereck A'B'C'D' bilden sogar ein Quadrat. Das van Aubel-Viereck eines Parallelogramms ABCD ist ebenfalls Quadrat.

Parallelogrammähnlichkeit



Im Februar 1748 berichtete Leonhard Euler in einem Brief an Goldbach über einen Satz, der die Ähnlichkeit eines Vierecks mit einem Parallelogramm beschreibt:

"Man bisezire (halbiere) in dem trapezio (Viereck) ABCD die diagonales (Diagonalen) AC und BD in M et (und) N und jungiere (verbinde) die Linie MN, so wird sein

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4\ MN^2."$$

Für ein Parallelogramm ABCD wird MN = 0, so dass ein Viereck genau dann ein Parellogramm ist, wenn das Maß

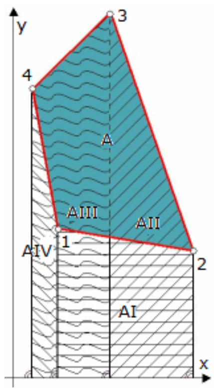
$$\kappa = MN / (AB + AC + CD + AD)$$

gleich Null ist. Je größer κ ist, desto weniger gleicht das Viereck einem Parallelogramm.

Gaußsche Trapezformel

Mit Hilfe der Gaußschen Trapezformel, nach Carl Friedrich Gauß, ist es möglich, die Fläche zwischen mehreren auf eine Messungslinie bezogenen Punkten, beispielsweise die Fläche eines einfachen Polygons, zu berechnen.
Durch die Zerlegung der gesuchten Fläche in einzelne auf die Grundlinie bezogene Trapeze erfolgt die Berechnung.

Trapezformel:



Die doppelte Fläche entspricht der Summe des aktuellen Rechtswertes und des darauf folgenden, multipliziert mit der Differenz aus aktuellem Hochwert und folgendem Hochwert.

$$2A = \Sigma_{i=1}^{n} (y_i + y_{i+1}) (x_i - x_{i+1})$$

Die doppelte Fläche entspricht der Summe des aktuellen Hochwertes und des darauf folgenden, multipliziert mit der Differenz aus folgendem Rechtswert und aktuellem Rechtswert.

$$2A = \Sigma_{i=1}^{n} (x_i + x_{i+1}) (y_{i+1} - y_i)$$

wobei die Indizes, die größer als n sind, immer modulo n betrachtet werden müssen, d.h. x_{n+1} entspricht x_1 gemeint.

Erfolgt die Flächenberechnung im Uhrzeigersinn, so bildet sich eine negative Fläche. Im Gegensatz hierzu wird das Ergebnis bei Berechnung im mathematisch positiven Drehsinn, d.h. entgegen dem Uhrzeigersinn, positiv.
Diese Beziehung ist insbesondere in der Computergrafik bei der Frage nach der Orientierung von Punkten eines Polygons von Bedeutung.
Durch Umformung ergibt sich die Gaußsche Dreiecksformel

$$2A = \Sigma_{i=1}^{n} x_i (y_{i+1} - y_{i-1}) \qquad 2A = \Sigma_{i=1}^{n} y_i (x_{i-1} - x_{i+1})$$

Viereckskonstruktion

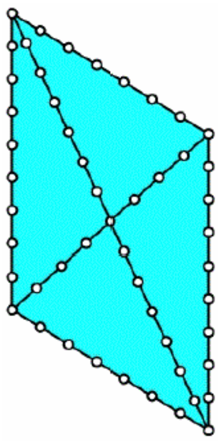
Vierecke, insbesondere spezielle Vierecke, wie Quadrat, Rechteck oder Parallelogramm, können aus verschiedenen gegebenen Stücken unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal konstruiert werden.

Quadratkonstruktion

Quadratkonstruktion nach Euklid aus Seite a — Quadratkonstruktion (3) aus 2 Punkten und 1 Gerade
Inquadrat eines Kreises — Umquadrat eines Kreises
Quadratur des Rechtecks

Rechteckkonstruktion

Umwandlung Quadrat in Rechteck — Rechteck aus A, S und Punkt auf AB



Rhombuskonstruktion

Rhombuskonstruktion aus AC und 3 Punkten — Rhombuskonstruktion (2) aus 3 Punkten

Ganzzahlige Vierecke

Unter einem ganzzahligem Viereck sei hier ein Viereck mit mit ganzzahligen Seitenlängen verstanden, bei dem auch beide Diagonalen ganzzahlige Längen haben.
Bei Quadraten ist das nicht möglich, da √2 irrational ist.

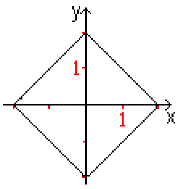
Parallelogramme

Es sein a, b die Seitenlängen mit $a \geq b$ und e, f die Diagonalenlängen $e \geq f$. Nach dem Kosinussatz wird $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$
und $a < e < a + b$ und ggT(a,b,e, f) = 1
Ein Beispiel ergibt sich für a = 9, b = 7, e = 14, f = 8. (siehe Abbildung)
Unter den ganzzahligen Parallelogrammen treten Rechtecke und Rhomben auf.

Diese Rechtecke sind aus zwei pythagoreischen Dreiecken (Spiegelung an der Hypotenusenmitte) zusammengesetzt. Von den beiden Seitenlängen ist eine gerade und die andere ungerade. Die Diagonalenlänge ist ungerade.
Die Rhomben sind aus vier pythagoreischen Dreiecken (Spiegelungen an den Katheten) zusammengesetzt. Die Seitenlänge ist ungerade, beide Diagonalenlängen sind gerade.
Quelle: Hans Walser [20120719]

Quadrat

Viereck, in dem alle Seiten gleich lang sind. Alle Innenwinkel sind 90°, die Diagonalen halbieren sich gegenseitig und stehen senkrecht zueinander.



$A = a^2$ $u = 4a$ $e = f = \sqrt{2} * a, e \perp f$

Der Umkreisradius ist gleich der halben Diagonalenlänge, der Inkreisradius gleich der halben Seitenlänge. Ein flächengleicher Kreis hat den Radius $r = a / \sqrt{\pi} = 0{,}564189583\ldots a$

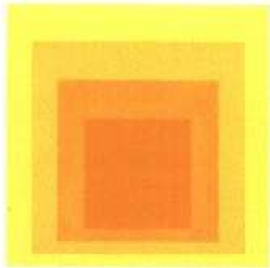
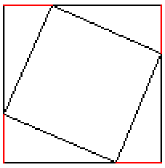


Abbildung: "Homage to the Square" (Huldigung an das Quadrat) von Josef Albers (1888-1976)

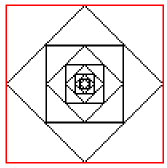
Es ist möglich, ein Quadrat in einem Koordinatensystem nur durch eine Gleichung zu beschreiben.
$|x|+|y| = 2$ oder abs(x) + abs(y) = 2



Viereck im Quadrat

Trägt man eine Strecke (rot) von jeder Ecke aus immer in die gleiche Richtung ab, so entstehen vier Punkte. Verbindet man diese vier Punkte, so entsteht im Inneren ein Viereck. Behauptung: Das Viereck ist ein Quadrat**.** Beweis**:** Die vier Dreiecke sind nach SWS kongruent. W kennzeichnet den rechten Winkel. Folglich sind die Hypotenusen gleich und das sind gerade die Quadratseiten. Eine einfache Winkelbetrachtung führt zu rechten Winkeln des inneren Vierecks.

Folge von Quadraten



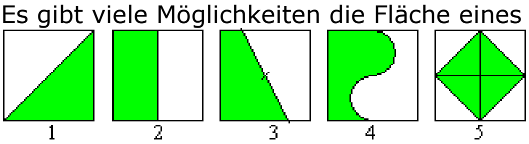
Das rote Quadrat habe die Seitenlänge a und es hat somit den Flächeninhalt a^2. Für die Summe der Flächeninhalte der inneren Quadrate ergibt sich

$$A= a^2/2 + a^2/4+a^2/8+a^2/16+\ldots = a^2(1/2+1/4+1/8+1/16+\ldots).$$

In der Klammer steht eine geometrische Reihe mit dem Grenzwert 1. Die Summe der Flächeninhalte der inneren Quadrate strebt gegen den Flächeninhalt des großen Quadrates.

Halbieren eines Quadrats

Es gibt viele Möglichkeiten die Fläche eines Quadrates zu halbieren. Hier sind fünf.

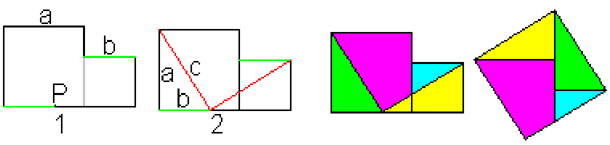


Zu 1 und 2: Normalerweise wird ein Quadrat durch eine Diagonale oder Mittellinie halbiert. So kann ein quadratisches Stück Papier gefaltet werden.
Zu 3: Jede Gerade durch den Mittelpunkt des Quadrates teilt es in zwei kongruente Trapeze.
Zu 4: An Stelle der Geraden kann man auch andere Linien, z.B. zwei Halbkreise, nehmen.
Zu 5: Die Figur in der Mitte besteht aus vier kongruenten Dreiecken, das ganze Quadrat aus acht. Also ist die Halbierung gesichert. Hat das Ausgangsquadrat die Länge 2, so hat das grüne Quadrat die Länge $\sqrt{2}$.
Die Bedeutung dieser Figur liegt darin, dass das äußere Quadrat eine rationale, das innere eine irrationale Seitenlänge hat.
In allen fünf Fällen ist der Flächeninhalt des halbierten Quadrates halb so groß wie der Flächeninhalt des ganzen Quadrates. Dies gilt aber nicht für die Umfänge:

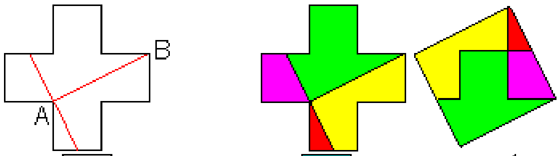
Umfang 1	$u = (2 + \sqrt{2})\ a$	Umfang 2	$u = 3\ a$
Umfang 3	$u = 2\ a + a/2\ \sqrt{5}$; Gerade viertelt Grundseite	Umfang 4	$u = 2\ a + \pi/2\ a$
Umfang 5	$u = 2\ \sqrt{2}\ a$		

Zerlegung eines Quadrates

Die nachfolgenden Puzzles haben folgenden mathematischen Hintergrund: Man kann jedes Polygon in ein flächengleiches Quadrat verwandeln. Dazu zerlegt man das Polygon in Dreiecke, die man in ein Parallelogramm, dann ein Rechteck und schließlich in ein Quadrat verwandeln kann. Der dreidimensionale Fall, nämlich ein Tetraeder in einen volumengleichen Würfel zu verwandeln, ist nicht lösbar (Problem 3 bei David Hilbert).

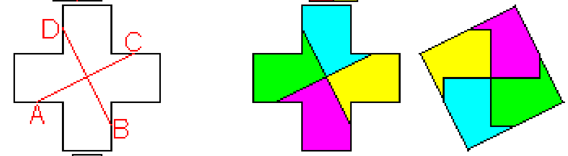


Zwei Quadrate
Man trägt die Seite b des kleineren Quadrates auf der Seite a des größeren Quadrates ab. Es entsteht Punkt P. Diesen Punkt verbindet man mit den

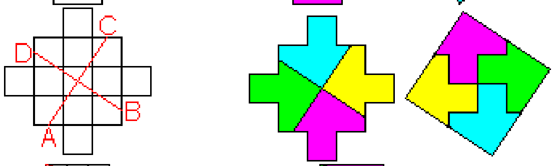


oberen Eckpunkten der Quadrate.
Die Figur ist unter dem Namen "Stuhl der Braut" bekannt.

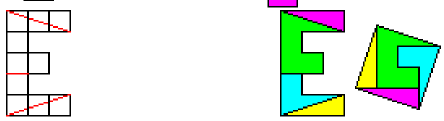
Lateinisches Kreuz
Man verbindet die Eckpunkte A und B und zeichnet durch Punkt A die Senkrechte zu AB.



Lateinisches Kreuz
Man halbiert vier sich entsprechende Seiten und verbindet gegenüberliegende Halbierungspunkte.

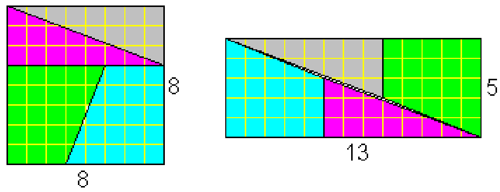


13-Quadrate-Figur
Man halbiert vier sich entsprechende Seiten und verbindet gegenüberliegende Halbierungspunkte



„E"
Man zeichnet drei Diagonalen. - Legt man ein Quadrat, muss man zwei Stücke umdrehen bzw. spiegeln.

Schachbrett-Paradoxon

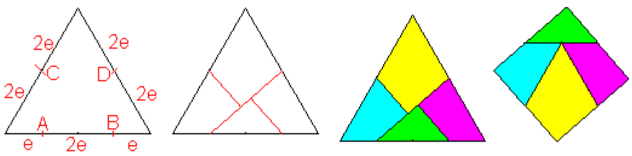


Die folgende Figur ist sehr bekannt. Das Problem liegt darin, dass ein Quadrat mit den Maßen 8 x 8 = 64 zerschnitten wird und das Rechteck, das man aus den vier Stücken legen kann, dann die Maße 13 x 5 = 65 hat. Woher kommt der Unterschied 65-64?
Oben wurden die vier Stücke isoliert, gedreht und zu einem Rechteck zusammengeschoben. Schaut man genau hin, so ist die "Diagonale" des Rechtecks doppelt. Diese Aussage wird oft verschleiert, indem man nur die übliche Diagonale des Rechtecks zeichnet. Wenn man will, kann man den Trugschluss auch durch Rechnung mit einer Winkelbetrachtung aufdecken.

Dieses Problem wurde erstmals von Sam Loyd beschrieben. Es basiert auf der Eigenschaft dreier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen

$$F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

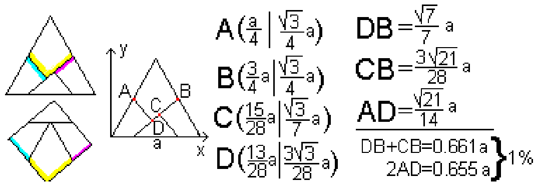
Diese Beziehung wurde von Johannes Kepler entdeckt, wird aber als Cassini-Gleichung bezeichnet.
Theoretisch wäre es möglich, dieses Paradoxon auch mit einem 5 x 5 Quadrat und dem zugehörigen 3 x 8 Rechteck zu konstruieren. In diesem Fall ist aber die Abweichung der Diagonale leicht zu erkennen. Nutzt man dagegen ein 13 x 13 Quadrat und das 8 x 21 Rechteck, so sind dies einfach zu lange Strecken, um das Paradoxon einfach und verblüffend zu gestalten.

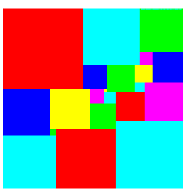


1 2

Dudeney-Dreieck

Man teilt die Grundseite eines Dreiecks in vier gleiche Teile und halbiert die anderen. Man erhält die vier Punkte E, F, A und B. Dann verbindet man F und B und fällt von den Punkten A und E die Lote auf FB. So entsteht Figur 2. Diese Zerlegung geht auf H. E. Dudeney (1847-1930). Legt man nun die Teile wie rechts zu sehen zusammen, so entsteht ein „Quadrat".
Streng genommen ist aber kein Quadrat entstanden. Das zeigt die folgende Rechnung. Es wird gezeigt, dass die beiden unten liegenden "Quadrat"seiten nicht gleich lang sind. Sie werden im gleichseitigen Dreieck mit Farbe gekennzeichnet. Man legt das Dreieck in ein Koordinatensystem und bestimmt die Länge dieser Strecken. Es zeigt sich, dass sie sich nur um 1% unterscheiden. Dudeney hat allerdings die Grundseite nicht wie eben beschrieben in **1:2:1** geteilt. Er hat die Teilpunkte unten so gelegt, dass Dreieck und Quadrat exakt den gleichen Flächeninhalt haben. Das Teilungsverhältnis ist angenähert 0,98**:**2**:**1,018.





Parkettierungen mit Quadraten

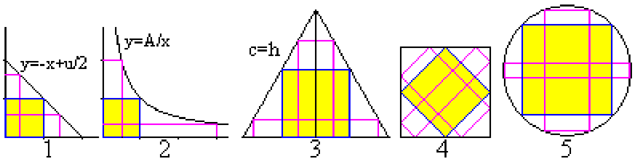
Es ist leicht, ein Quadrat in gleiche Quadrate aufzuteilen. Es ist aber schwer, verschiedene Quadrate zu finden, die das leisten. Man braucht mindestens 21 Quadrate, die ein Quadrat bilden (Duijvestijn 1962, 1978). Lösung: 121² =

$50^2+42^2+37^2+35^2+33^2+29^2+27^2+25^2+24^2+19^2+18^2+17^2+16^2+15^2+11^2+9^2+8^2+7^2+6^2+4^2+2^2$

Größte Rechtecke

Das Quadrat ist ein Grenz-Rechteck. Das drückt sich in den Lösungen der folgenden Extremwertaufgaben aus.

1) Welches der Rechtecke mit gleichem Umfang hat den größten Flächeninhalt?
2) Welches der Rechtecke mit gleichem Flächeninhalt hat den größten Umfang?
3) Welches Rechteck im gleichseitigen Dreieck hat den größten Flächeninhalt?
4) Welches Rechteck im Quadrat hat den größten Flächeninhalt?
5) Welches Rechteck im Kreis hat den größten Flächeninhalt?

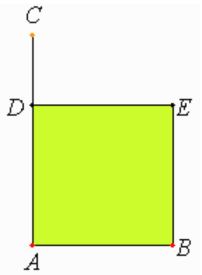


In allen Fällen ist ein Quadrat das gesuchte Rechteck.

Quadratkonstruktion

Euklids "Elemente": § 46 (A. 14):

Über einer gegebenen Strecke das Quadrat zu zeichnen.

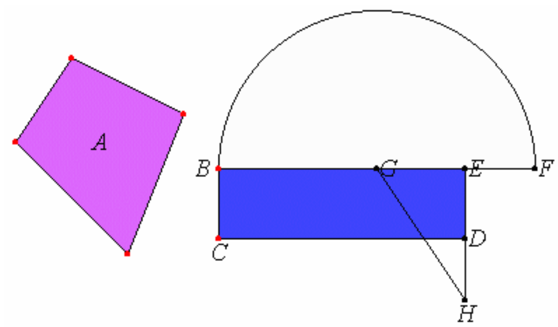


Die gegebene Strecke sei AB. Man soll über der Strecke AB das Quadrat zeichnen. Man ziehe AC rechtwinklig zur geraden Linie AB vom Punkte A auf ihr aus (I, 11) und trage AD = AB ab; ferner ziehe man durch Punkt D DE || AB (I, 31) und durch Punkt B BE || AD.

Dann ist ADEB ein Parallelogramm; also AB = DE und AD = BE (I, 34). Aber AB = AD; also sind BA, AD, DE, EB alle vier einander gleich (Axiom 1); das Parallelogramm ADEB ist also gleichseitig. Ich behaupte, dass es auch rechtwinklig ist. Da nämlich die Parallelen AB, DE von der geraden Linie AD geschnitten werden, so sind ∠ BAD + ADE = 2 R. (I, 29). BAD ist aber ein Rechter; also ist auch ADE ein Rechter (Axiom 3). Im Parallelogramm sind aber die gegenüberliegenden Seiten sowohl als Winkel einander gleich (I, 34); auch die gegenüberliegenden Winkel ABE, BED sind also beide Rechte; also ist ADEB rechtwinklig. Die Gleichseitigkeit ist oben bewiesen. Also ist es Quadrat (I, Def. 22), und man hat es über der Strecke AB gezeichnet - dies hatte man ausführen sollen.

Euklids "Elemente": Buch II § 14 (A. 2):

Ein einer gegebenen geradlinigen Figur gleiches Quadrat zu errichten.



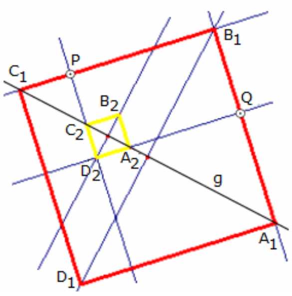
Die gegebene geradlinige Figur sei A. Man soll ein der geradlinigen Figur A gleiches Quadrat errichten.

Man errichte ein der geradlinigen Figur A gleiches rechtwinkliges Parallelogramm BD (I, 45). Wenn hier BE = ED, dann wäre die Aufgabe schon ausgeführt; denn dann hat man ein der geradlinigen Figur A gleiches Quadrat errichtet, nämlich BD.

Anderenfalls ist eine der Strecken BE, ED größer. B E sei die größere, man verlängere sie nach F, mache EF = ED, halbiere BF in G, zeichne mit G als Mittelpunkt und einer der Strecken GB, GF als Abstand den Halbkreis BHF, verlängere DE nach H und ziehe GH.

Da hier die Strecke BF sowohl in gleiche Abschnitte geteilt ist in G, als auch in ungleiche in E, so sind BE * EF + EG² = GF² (II, 5). Aber GF = GH (I, Definition 15); also sind BE * EF + GE² = GH².

Aber GH² = HE² + EG² (I, 47); also sind BE * EF + GE² = HE² + EG². Man nehme das gemeinsame GE² weg; dann ist der Rest, BE * EF = EH². BE * EF ist aber BD; denn EF = ED; also ist Parallelogramm BD = HE². BD ist aber der geradlinigen Figur A gleich. Also ist auch die geradlinige Figur A dem Quadrat gleich, das man über EH zu zeichnen hätte. Also hat man sich ein der gegebenen geradlinigen Figur A gleiches Quadrat verschafft, nämlich das, welches man über EH zu zeichnen hätte – dies hatte man ausführen sollen.



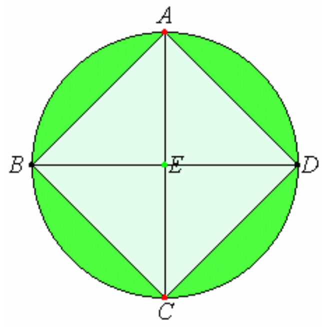
Quadratkonstruktion (3)

Aufgabe: Von einem Quadrat sind $P \in AD$, $Q \in CD$ und $AC \subseteq g$ gegeben, wobei die Punkte auch auf der Verlängerung der angegebenen Geraden liegen können. Das Quadrat ist zu konstruieren.

Konstruktion:

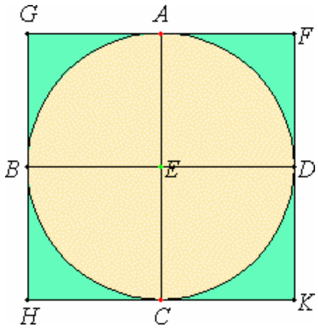
1. 45° Winkel von AC durch P legen. Die Diagonalen sind Symmetrieachse, alle Winkel sind 90° und somit ist die Diagonale auch Winkelhalbierende
2. 45° Winkel von AC durch Q legen.
3. der Schnittpunkt ist D

4. Lot von D auf AC zeichnen, Diagonalen stehen senkrecht
5. Diagonalenhälfte DS verdoppeln ergibt den Punkt B
6. es entstehen zwei verschiedene Lösungen



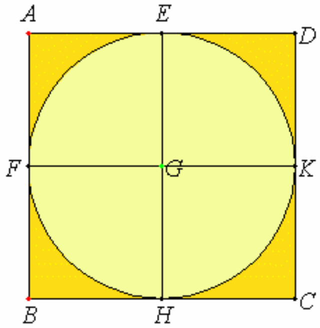
Euklids "Elemente": Buch IV § 6 (A. 6):
Einem gegebenen Kreis ein Quadrat einzubeschreiben.

ABCD sei der gegebene Kreis. Man soll dem Kreis ABCD ein Quadrat einbeschreiben.
Man ziehe im Kreise ABCD zwei Durchmesser AC, BD rechtwinklig zueinander und ziehe AB, BC, CD, DA. Da BE = ED, weil E der Mittelpunkt, EA aber gemeinsam ist und rechte Winkel bildet, so ist Grundlinie AB = Grundlinie AD (I, 4). Aus demselben Grunde sind auch BC, CD entsprechend gleich AB, AD; das Viereck ABCD ist also gleichseitig. Ich behaupte, dass es außerdem rechtwinklig ist. Da nämlich die Strecke BC Durchmesser des Kreises ABCD ist, ist BAD ein Halbkreis; also ∠ BAD ein Rechter (III, 31). Aus demselben Grunde sind auch ABC, BCD, CDA sämtlich Rechte. Das Viereck ABCD ist also rechtwinklig; wie oben bewiesen, ist es auch gleichseitig; es ist also ein Quadrat. Und es ist dem Kreise ABCD einbeschrieben. Also hat man dem gegebenen Kreis ein Quadrat einbeschrieben, nämlich ABCD – dies hatte man ausführen sollen.



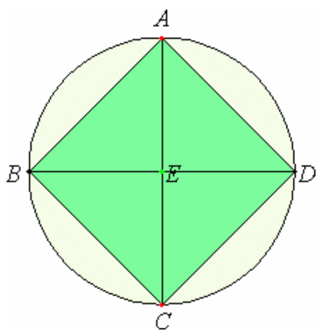
Euklids "Elemente": Buch IV § 7 (A. 7):
Einem gegebenen Kreis ein Quadrat umzubeschreiben.

ABCD sei der gegebene Kreis. Man soll dem Kreise ABCD ein Quadrat umbeschreiben.
Man ziehe im Kreise ABCD zwei Durchmesser AC, BD rechtwinklig zueinander und ziehe durch die Punkte A, B, C, D an den Kreis ABCD die Tangenten FG, GH, HK, KF.
Da FG den Kreis ABCD berührt und EA den Mittelpunkt E mit dem Berührungspunkt A verbindet, sind die Winkel bei A Rechte (III, 18). Aus demselben Grunde sind auch die Winkel bei den Punkten B, C, D Rechte. Da hier ∠ AEB ein Rechter ist und auch EBG ein Rechter, ist GH || AC (I, 28). Aus demselben Grunde ist AC || FK; folglich auch GH || FK (I, 30). Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch GF, HK beide || BED.
Also sind GK, GC, AK, FB, BK Parallelogramme. Also ist GF = HK und GH = FK (I, 34). Und da AC = BD, andererseits AC sowohl GH als auch FK und BD sowohl GF als auch HK gleich (I, 34), GH, FK also auch GF, HK entsprechend gleich, so ist das Viereck FGHK gleichseitig. Ich behaupte, dass es außerdem rechtwinklig ist. Da nämlich GBEA ein Parallelogramm ist und AEB ein Rechter, ist auch AGB ein Rechter (I, 34). Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch die Winkel bei H, K, F Rechte sind. FGHK ist also rechtwinklig; wie oben bewiesen, ist es auch gleichseitig; es ist also ein Quadrat. Und es ist dem Kreise ABCD umbeschrieben – S.



Euklids "Elemente": Buch IV § 8 (A. 8):
Einem gegebenen Quadrat den Kreis einzubeschreiben.

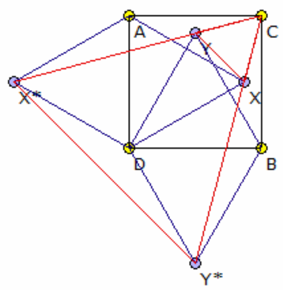
ABCD sei das gegebene Quadrat. Man soll dem Quadrat ABCD den Kreis einbeschreiben.
Man halbiere AD, AB, alle beide, in den Punkten E, F, ziehe durch E EH || AB oder CD und durch F FK || AD oder BC. Dann sind AK, KB, AH, HD, AG, GC, BG, GD sämtlich Parallelogramme (I, 30) und ihre gegenüberliegenden Seiten offenbar gleich (I, 34). Da ferner AD = AB und AE = ½ AD, AF = ½ AB, so ist AE = AF; folglich sind es auch die gegenüberliegenden Seiten, also FG = GE. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch GH, GK entsprechend gleich FG, GE sind; also sind GE, GF, GH, GK alle vier einander gleich. Zeichnet man also mit G als Mittelpunkt und als Abstand einem von E, F, G, K den Kreis, so muss er auch durch die übrigen Punkte gehen und die geraden Linien AB, BC, CD, DA berühren, weil die Winkel bei E, F, H, K Rechte sind (I, 29). Schnitte der Kreis nämlich AB, BC, CD, DA, so fiele eine rechtwinklig zum Kreisdurchmesser vom Endpunkte aus gezogene Strecke innerhalb des Kreises; dass dies Unsinn ist, haben wir bewiesen (III, 16). Der mit G als Mittelpunkt und als Abstand einem von E, F, H, K gezeichnete Kreis kann also die geraden Linien AB, BC, CD, DA nicht schneiden; also muss er sie berühren und dem Quadrat ABCD einbeschrieben sein – S.



Euklids "Elemente": Buch IV § 6 (A. 6):
Einem gegebenen Quadrat den Kreis umzubeschreiben.

ABCD sei das gegebene Quadrat. Man soll dem Quadrat ABCD den Kreis umbeschreiben.

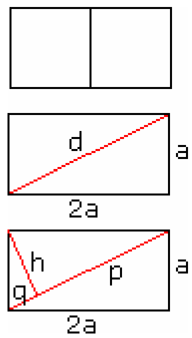
Man ziehe AC, BD, sie mögen einander in E schneiden. Da DA = AB ist und AC gemeinsam, sind zwei Seiten DA, AC zwei Seiten BA, AC gleich; und Grundlinie DC = Grundlinie BC; also ist ∠ DAC = ∠ BAC (I, 8); also wird ∠ DAB von AC halbiert. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch ABC, BCD, CDA sämtlich von den geraden Linien AC, DB halbiert werden. Und da ∠ DAB = ABC, ferner EAB = ½ DAB, EBA = ½ ABC, ist ∠ EAB = EBA, folglich auch die Seite EA = EB (I, 6). Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch EB, EA entsprechend gleich EC, ED sind; also sind EA, EB, EC, ED alle vier einander gleich. Zeichnet man also mit E als Mittelpunkt und als Abstand einem von A, B, C, D den Kreis, so muss er auch durch die übrigen Punkte gehen und dem Quadrat ABCD umbeschrieben sein. Man beschreibe ihn um, wie ABCD – S.



Thébault-Dreieck

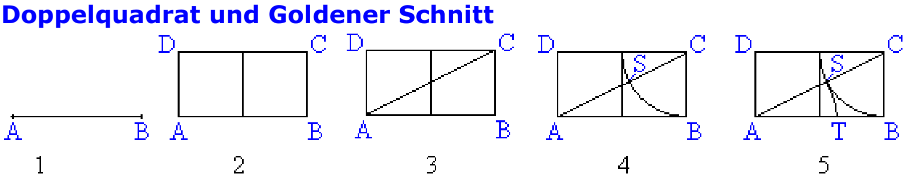
Satz über Dreiecke am Quadrat (Victor Thébault, 1882-1960):
Errichtet man über zwei benachbarten Seiten eines Quadrates gleichseitige Dreiecke, so bilden deren beide nicht auf den benachbarten Quadratseiten liegende Eckpunkte mit dem nicht auf den beiden benachbarten Quadratseiten liegenden Eckpunkt des Quadrats ein gleichseitiges Dreieck.
Diese gleichseitigen Dreieck werden Thébault-Dreiecke genannt.
In der Abbildung wurde über den Seiten AD und BD gleichseitige Dreiecke errichtet. Die Dreiecke ∆ CXY und ∆ CX*Y* sind dann ebenfalls gleichseitig.

Doppelquadrat

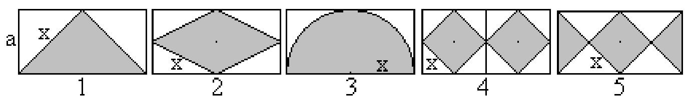


Das Doppelquadrat ist ein Rechteck, das von zwei Quadraten gebildet wird. Man könnte das Doppelquadrat auch Halbquadrat nennen, denn es entsteht ebenso durch Halbieren eines Quadrates.
Das Halbquadrat heißt auch Domino, denn es ist die Form der Spielsteine des Dominospiels.
Ist a die kürzere Seite des Doppelquadrates, so ist 2a die zweite Seite. Die Diagonale ist nach dem Satz des Pythagoras $(2a)^2+a^2 = d^2$ oder $d = \sqrt{5}\, a$.
Der Flächeninhalt ist $A = 2a^2$ und der Umfang $u = 6a$.
Die Diagonale teilt das Rechteck in zwei rechtwinklige Dreiecke.
Diese haben die Hypotenusenabschnitte
Abschnitt 1 $q = 1/5 \sqrt{5}\, a$ und Abschnitt 2 $p = 4/5 \sqrt{5}\, a$.
Die Höhe ist $h = 2/5 \sqrt{5}\, a$. Umkreisradius $R = 1/2 \sqrt{5}\, a$
Es gibt keinen Inkreis. Die Innen-Ellipse mit den Halbachsen a/2 und a ist ein Ersatz.

Doppelquadrat und Goldener Schnitt



Will man den Teilpunkt T des goldenen Schnitts durch Konstruktion finden, benutzt man ein Doppelquadrat a x 2a und nutzt aus, dass √5 a die Länge der Diagonalen ist.
(1) Gegeben sei die Strecke AB, die geteilt werden soll.
(2) Errichte über AB das Doppelquadrat ABCD.
(3) Zeichne die Diagonale AC.
(4) Zeichne einen Kreis um Punkt C mit dem Radius BC. Nenne den Schnittpunkt mit der Diagonalen Punkt S.
(5) Zeichne einen Kreis um Punkt A mit dem Radius AS. Nenne den Schnittpunkt mit der Strecke AB Punkt T.
Ergebnis: T teilt AB (innen) im goldenen Schnitt.
Beweis: AT : AB = AS : AB = (AC-CS) : AB = $(\sqrt{5}a-a) : 2a = (\sqrt{5}-1)/2$ wzbw.

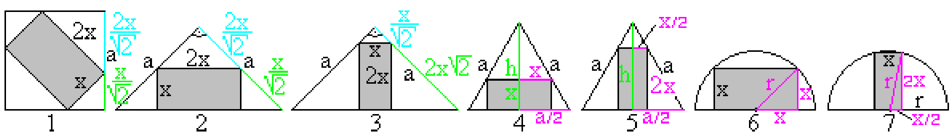


Figuren im Doppelquadrat

In einem Doppelquadrat liegen ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck, eine Raute, ein Halbkreis, zwei Quadrate und ein Quadrat und zwei Halbquadrate.
Lösungen: (1) $x = \sqrt{2}\, a$, (2) $x = \sqrt{(a/2)^2+a^2} = \sqrt{5}/2\, a$, (3) $x = a$, (4) $x = \sqrt{(a/2)^2+(a/2)^2} = \sqrt{2}/2\, a$, (5) wie (4)

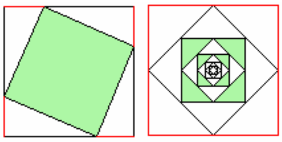
Doppelquadrat in Figuren

Doppelquadrate liegen in einem Quadrat, in gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken, in gleichseitigen Dreiecken und in Halbkreisen.

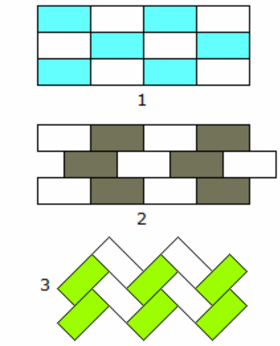


(1) Es gilt $x/\sqrt{2}+2x/\sqrt{2}=a$.
Daraus folgt $x = \sqrt{2}/3 \cdot a$.
(2) Es gilt $2x/\sqrt{2}+x/\sqrt{2}=a$.
Daraus folgt $x = \sqrt{2}/4 \cdot a$.

(3) Es gilt x/√2 + 2x √2 =a. Daraus folgt x = √2/3 a.
(4) Nach dem 2.Strahlensatz ist h : (h-x) = a/2 : x. Daraus folgt x = (3-√3)/4 a.
(5) Nach dem 2.Strahlensatz ist h : (h-2x) = a/2 : x. Daraus folgt x = [4√3-3]/13 a.
(6) Nach dem Satz des Pythagoras ist x = √2/2 r.
(7) Nach dem Satz des Pythagoras ist r² = (2x)²+(x/2)². Daraus folgt x = 2 √17/17 r.



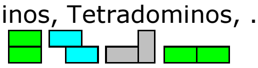
Viereck im Quadrat
Trägt man eine Strecke (rot) von jeder Ecke eines Quadrates aus immer in die gleiche Richtung ab, so entstehen vier Punkte. Verbindet man diese vier Punkte, so entsteht im Inneren ein Viereck.
Behauptung: Das Viereck ist ein Quadrat.
Beweis: Die vier Dreiecke sind nach SWS kongruent. W kennzeichnet den rechten Winkel. Folglich sind die Hypotenusen gleich und das sind gerade die Quadratseiten. Eine einfache Winkelbetrachtung führt zu rechten Winkeln des inneren Vierecks.



Folge von Quadraten
Das rote Quadrat habe die Seitenlänge a und es hat somit den Flächeninhalt a².
Für die Summe der Flächeninhalte der inneren Quadrate ergibt sich
A= a²/2 + a²/4 + a²/8 + a²/16 +… = a² (1/2+1/4+1/8+1/16+…).
In der Klammer steht eine geometrische Reihe mit dem Grenzwert 1. Die Summe der Flächeninhalte der inneren Quadrate strebt gegen den Flächeninhalt des großen Quadrates.

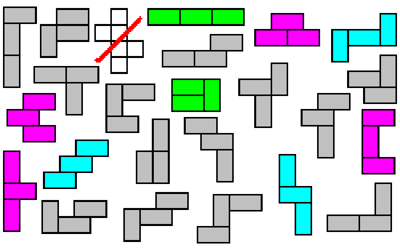
Parkettierung mit Doppelquadraten
Doppelquadrate erscheinen nach außen hin bei Mauern, Pflasterungen oder beim Parkett. Allerdings findet man oft nicht das Doppelquadrat, sondern Abweichungen von dieser Form. Es gibt unterschiedliche Anordnungen der Doppelquadrate.
(1) Man wird bei Mauern nie eine Struktur wie 1 finden. Die vier Steine stoßen an einer Ecke aneinander, sind aber nicht verbunden. Es wird keine Stabilität erreicht.
(2) Dieser Verband wird bei Ziegelmauerwerken verwendet. Der normale Ziegel hat die Maße 24 cm x 11,5 cm x 7,1 cm.
(3) Früher wurde bei Parkettfußböden oft dieses Fischgrätenmuster genutzt.

Polydominos
Figuren aus Doppelquadraten oder Dominos heißen Polydominos. Sie bilden eine Teilmenge der Polyominos. Sie heißen geordnet nach der Anzahl der Dominos Bidominos, Tridominos, Tetradominos, …
4 Bidominos



Es gibt vier Tetrominos aus zwei Doppelquadraten oder zwei Dominos.

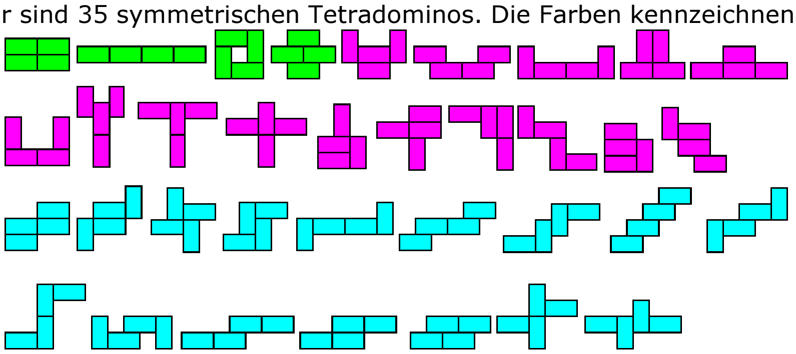
23 Tridominos



Tridominos findet man nur unter den geraden Hexominos. Sie sind links zusammengestellt. Erstaunlicherweise gibt es einen Stein, der gerade, doch trotzdem kein Tridomino ist.

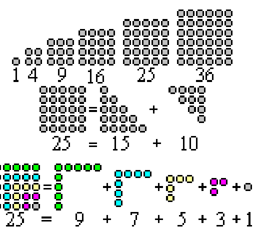
Tetradominos

Es gibt 369 Figuren aus acht Quadraten, darunter 211 Tetradominos. Hier sind 35 symmetrischen Tetradominos. Die Farben kennzeichnen die Symmetrie.



grün: achsen- und punktsymmetrisch
rot: nur achsensymmetrisch
blau: nur punktsymmetrisch

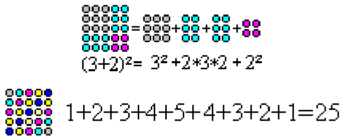
Quadratzahlen
Man erhält die Quadratzahlen, wenn man die natürlichen Zahlen mit sich selbst multipliziert.



Die Quadratzahlen lassen sich durch Quadrate aus gleichen Figuren darstellen.

Jede Quadratzahl ist gleich der Summe zweier Dreieckszahlen.
Formel: n²=[1+2+3+...+n] + [1+2+3+...+(n-1)]

Jede Quadratzahl n² ist gleich der Summe der n ersten ungeraden Zahlen.
Formel: n²=1+3+5+...+(2*n-1)

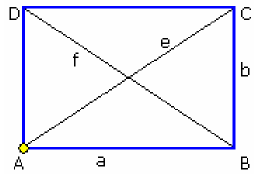


Ein Quadrat kann in zwei kleinere Quadrate und zwei gleiche Rechtecke zerlegt werden.
Es gilt nämlich die erste binomische Formel $(a+b)^2=a^2+2*a*b+b^2$.
Ein Quadrat kann man in Streifen in Diagonalrichtung zerlegen.
Es gilt $1+2+3+\ldots+n+\ldots3+2+1=n^2$

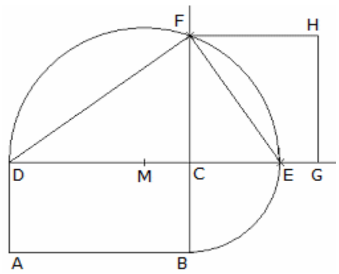
Rechteck

Viereck, bei dem jeweils gegenüberliegende Seiten gleich lang sind, alle Innenwinkel sind 90°. a und b sind die Seiten des Rechtecks, e und f die Diagonalen und ϕ der Winkel zwischen der Seite a und der Diagonale e. Dann gilt:

geg.: a, b	$A = a \cdot b$	geg.: a, e	$A = a \sqrt{(e+a)\cdot(e-a)}$
geg.: a, ϕ	$A = a^2 \tan \phi = b^2 \cot \phi$	geg.: e, ϕ	$A = 1/2\ e^2 \sin 2\phi$
geg.: e, A	$a = 1/2\ (\sqrt{e^2 + 2A} + \sqrt{e^2 - 2A})$	geg.: ϕ, A	$a = \sqrt{A \cot \phi}$
geg.: b, e	$a = \sqrt{(b+e)\cdot(e-b)}$	geg.: a, b	$u = 2(a+b)$
geg.: a, b	$e = f = \sqrt{a^2+b^2}$	geg.: a, A	$e = 1/a \sqrt{A^2+a^4}$
geg.: ϕ, A	$e = \sqrt{A (\tan \phi + \cot \phi)}$	geg.: a, ϕ	$e = a / \cos \phi = \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 \phi}$
geg.: a, b	$\angle(e,f) = 2 \arctan(b/a)$	$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90°$	



Werden alle vier Seiten eines Rechtecks halbiert und die gegenüberliegenden Seitenmitten verbunden, so sind diese Linien die Mittelparallelen des Rechtecks.
Das Rechteck ist zu seinen beiden Mittelparallelen axialsymmetrisch.
Das Rechteck ist zu seinem Mittelpunkt zentralsymmetrisch. Dieser Mittelpunkt ist zugleich der Schnittpunkt der Mittelparallelen und derjenige der Diagonalen.
Die Diagonalen eines Rechtecks sind gleich lang und halbieren einander im Mittelpunkt des Rechteck.



Quadratur des Rechtecks

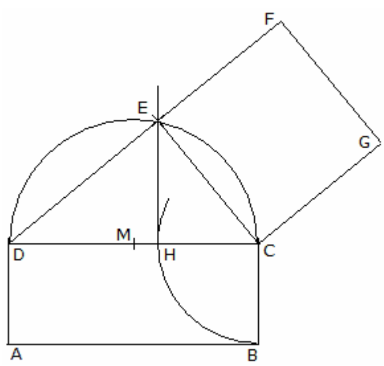
Bei der Quadratur des Rechtecks soll zu einem Rechteck ein flächengleiches Quadrat bestimmt werden.
Rechnerisch ist die problemlos. Sind a und b die Rechteckseiten, so wird für die Quadratseite $x = \sqrt{ab}$.
Die klassische Aufgabe bezieht sich auf die Konstruktion des Quadrates mit Zirkel und Lineal. Bekannt sind vier Lösungen, die auf dem Kathetensatz, dem Höhensatz, dem Sekanten-Tangenten-Satz und dem Sehnensatz beruhen.

Flächenverwandlung mit Hilfe des Höhensatzes

Aufgabe: Verwandle das Rechteck ABCD mit den Seitenlängen 6 cm und 3 cm mit Hilfe des Kathetensatzes in ein flächengleiches Quadrat.
Lösung: 1) Verlängere die Strecke DC über C hinaus
2) Zeichne einen Kreis um C mit dem Radius CB = 3 cm. Der Schnittpunkt mit dem Strahl DC sei E
3) Bestimme den Mittelpunkt M der Strecke DE
4) Zeichne den Thaleskreis um M durch D, verlängere BC über C hinaus
5) Der Schnittpunkt dieses Strahls mit dem Thaleskreis sei F
6) Zeichne die Strecken DF und EF. DEF ist ein rechtwinkliges Dreieck
7) Die Seitenlängen des Rechtecks ABCD entsprechen den Längen der Hypotenusenabschnitte DC und CE
8) Die Strecke CF ist Höhe in diesem Dreieck. Zeichne das Quadrat CGHF über CF
Nach dem Höhensatz sind das Quadrat CGHF und das Rechteck ABCD flächengleich.

Quadratur des Rechtecks (2)

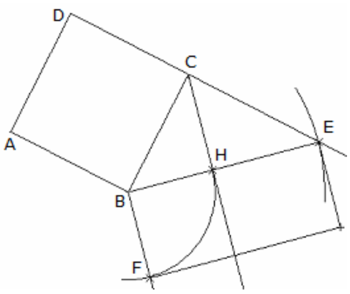
Bei der Quadratur des Rechtecks soll zu einem Rechteck ein flächengleiches Quadrat bestimmt werden.



Flächenverwandlung mit Hilfe des Kathetensatzes

Aufgabe: Verwandle das Rechteck ABCD mit den Seitenlängen 5cm und 2cm mit Hilfe des Kathetensatzes in ein flächengleiches Quadrat.
Lösung: 1) Zeichne einen Kreis um C mit dem Radius CB. Der Schnittpunkt mit der Strecke CD sei H
2) Bestimme den Mittelpunkt M der Strecke CD
3) Zeichne den Thaleskreis um M durch D
4) Errichte das Lot in H zu CD. Der Schnittpunkt mit dem Thaleskreis sei E
5) Zeichne die Strecken DE und CE
6) DCE ist ein rechtwinkliges Dreieck
7) Die Seitenlängen des Rechtecks ABCD entsprechen der Länge der Hypotenuse CD bzw. der Länge des Hypotenusenabschnitts CH, der zur Seite CE gehört
8) Zeichne das Quadrat CEFG über CE

Nach dem Kathetensatz sind das Quadrat CEFG und das Rechteck ABCD flächengleich.



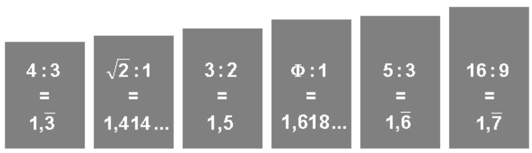
Quadratur des Rechtecks (3)

Flächenverwandlung mit Hilfe des Kathetensatzes

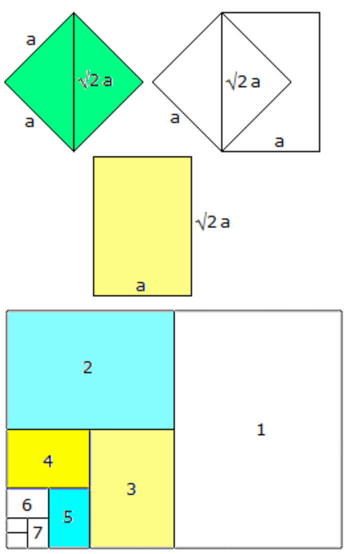
Aufgabe: Verwandle das Quadrat ABCD mit der Seitenlänge 4 cm unter Verwendung des Kathetensatzes in ein flächengleiches Rechteck, dessen eine Seite 6 cm lang ist.

Lösung: 1) Betrachte BC als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks. Verlängere DC über C hinaus. C ist dann Scheitelpunkt eines rechten Winkels
2) Da die vorgegebene Rechteckseite länger als die gegebene Seitenlänge des Quadrats ist, muss diese Rechteckseite Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck sein. Zeichne daher einen Kreis um B mit dem Radius 6 cm
3) Der Schnittpunkt des Kreises mit dem Strahl DC sei E
4) Zeichne die Strecke BE. BCE ist ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse BE
5) Fälle das Lot von C auf BE. Der Fußpunkt des Lotes sei H. BH ist der zur Kathete BC gehörende Hypotenusenabschnitt
6) Errichte die Senkrechte in B zu BE
7) Zeichne einen Kreis um B mit dem Radius BH
8) Der Schnittpunkt des Kreises mit der Senkrechten zu BE sei F
9) Zeichne das Rechteck über BE und BF
Nach dem Kathetensatz sind das Quadrat ABCD und das Rechteck BEFG flächengleich.

Rechteckige Formen



Rechteckige Formen treten in der Praxis an allen stellen auf. Besonders gern wird das sogenannte Goldene Rechteck genutzt, bei dem die Seiten das Verhältnis des Goldenen Schnittes φ aufweisen. hältnisse zu meiden. Die folgende Abbildung vergleicht verschiedene Rechtecke mit prominenten Seitenverhältnissen in der Umgebung von φ.
Angegeben ist jeweils das Verhältnis von Höhe zu Breite und der entsprechende Zahlenfaktor:
Typische Einsatzgebiete:
4 : 3 - Traditionelles Fernsehformat. In der Regel auch bei Computermonitoren (z.B. 1024×768 Pixel). Dieses Format geht zurück auf Thomas Alva Edison, der 1889 das Format des klassischen Filmbildes (35-mm-Film) auf 24 × 18 mm festlegte.
√2 : 1 - Das Seitenverhältnis beim DIN-A4-Blatt und verwandten DIN-Maßen. Bei einer Halbierung durch einen Schnitt, der die längeren Seiten des Rechtecks halbiert, entstehen wiederum Rechtecke mit dem selben Seitenverhältnis.
3 : 2 - Seitenverhältnis beim Kleinbildfilm (36 mm × 24 mm).
φ : 1 - Seitenverhältnis im Goldenen Schnitt. Hier approximiert durch 144 × 89 Pixel mit einem theoretischen Fehler von nur $5 \cdot 10^{-5}$. Die beiden benachbarten Rechtecke weisen ebenfalls Seitenverhältnisse von benachbarten Fibonacci-Zahlen auf und approximieren daher den Goldenen Schnitt vergleichsweise gut.
5 : 3 - Findet neben dem noch breiteren 1:1,85 als Kinoformat Verwendung.
16 : 9 – Breitbildfernsehen



Papierformat A4

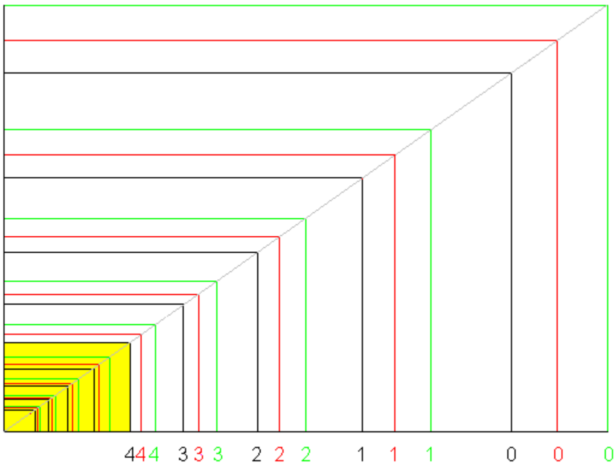
Die Bezeichnung A4 kennzeichnet ein rechteckiges Blatt Papier mit den Maßen a x a' = 297 mm x 210 mm = 11.7'' x 8.3'' =842 pt x 595 pt. Das Format A4 ist heute durch Drucker, Scanner und Kopiergeräte über die deutschen Grenzen hinaus zum Standard geworden. In Deutschland spricht man von DIN A4.
Bildet man ein Rechteck aus der Seite und der Diagonalen eines Quadrates, so entsteht das A-Format. Es hat das Seitenverhältnis a:a' = √2:1 oder ungefähr a:a'=1,4:1=7:5.
Das ist eine besondere Eigenschaft des A-Blattes: Halbiert man es, bleibt die Form gleich.
Man geht von einem Blatt A0 aus und halbiert es immer weiter. Man gelangt nach viermaligem Halbieren zur Größe A4.
Das A4-Blatt hat die Maße 297 mm x 210 mm und den Flächeninhalt 297 mm x 210 mm = 62370 mm². Multipliziert man diese Fläche mit 16 um zu A0 zu gelangen, ergibt sich 997920mm², das ist etwa 1m².
Das A0-Blatt hat den Flächeninhalt 1m² und die Form √2:1. Das führt zu den Maßen 841mm x 1189mm.
Papierstärken gibt man in der Einheit g/m² an. Zum Beispiel hat

Druckerpapier die Stärke 90g/m². Es ist rechnerisch einfach, vom Papiermaß zur Masse zu gelangen.

DIN-Papierformate

A4 und A0 sind nur Glieder in einer Folge. Weiter gibt es neben der Reihe A noch die Reihen B und C. Auch bei ihnen ist das Seitenverhältnis √2:1.

Klasse	Bezeichnung	Reihe A (in mm)	Reihe B (in mm)	Reihe C (in mm)
0	Vierfachbogen	0841 x 1189	1000 x 1414	0917 x 1297
1	Doppelbogen	0594 x 0841	0707 x 1000	0648 x 0917
2	Bogen	0420 x 0594	0500 x 0707	0458 x 0648
3	Halbbogen	0297 x 0420	0353 x 0500	0324 x 0458
4	Viertelbogen (Blatt)	0210 x 0297	0250 x 0353	0229 x 0324
5	Halbblatt	0148 x 0210	0176 x 0250	0162 x 0229
6	Viertelblatt (Postkarte)	0105 x 0148	0125 x 0176	0114 x 0162
7	Achtelblatt	0074 x 0105	0088 x 0125	0081 x 0114
8	-	0052 x 0074	0062 x 0088	0057 x 0081

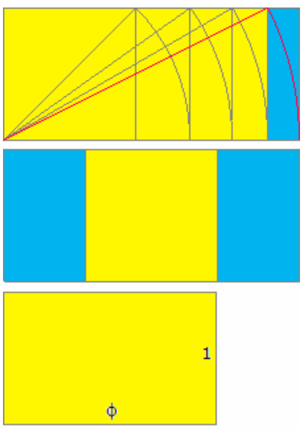


Die Rechtecke werden in die untere linke Ecke des größten Rechtecks B0 geschoben. Die schwarzen Rechtecke gehören zur Reihe A. Die grünen Rechtecke gehören zur Reihe B. Die Blätter liegen etwa in der Mitte der Rechtecke der Reihe A und verfeinern sie so. Die vertikale Seite von B0 ist 1000 mm=1m lang. Die roten Rechtecke der Reihe C sind ein wenig größer als die Rechtecke der Reihe A. Sie werden für Umschläge, Hüllen oder Mappen verwendet. Es ist vielleicht bekannt, dass ein Brief der Größe A4 in einen Briefumschlag der Größe C6 passt, wenn er zweimal gefaltet wird.

Es gelten folgende mathematischen Beziehungen zwischen den Reihen.
Es seien $a_n \times a'_n$ die Maße der A-Reihe, $b_n \times b'_n$ die der B-Reihe und $c_n \times c'_n$ die der C-Reihe.
Dann führen die Maße der A-Reihe über geometrische Mittelwertbildungen zu den anderen Reihen:

$$b_n = \sqrt{(a_n a_{n-1})} \text{ und } b'_n = \sqrt{(a'_n a'_{n-1})} \qquad c_n = \sqrt{(a_n b_n)} \text{ und } c'_n = \sqrt{(a'_n b'_n)}$$

Im Jahre 1917 bildete sich ein Normenausschuss der deutschen Industrie (NADI). Einige Jahre später wurde daraus der Deutsche Normenausschuss (DNA). Er machte es sich zur Aufgabe, zuerst für die Industrie, dann auch für Handel und Verwaltung Normen festzulegen.
Das Papierformat der Reihe A als Vorzugsreihe entstand 1922 unter DIN-Norm 476. Man verband das metrische System mit 1m bzw.1m² mit dem schon vorher bekannten Format √2:1, bei dem man in einer Reihe durch Halbieren ohne Papierverlust von einer Größe zur nächstkleineren gelangte. Davor gab es zahlreiche Formate, bei denen das Seitenverhältnis meist zwischen 1,2 und 1,3 lag. In Buch 1 werden auf Seite 156 insgesamt 18 Formate aufgeführt. Bis 1926 hieß DIN "Deutsche Industrie-Norm". 1975 wurde der eingetragene Verein "DIN Deutsches Institut für Normung e.V." im Rahmen eines Vertrages mit der Bundesregierung gegründet. Er löste den Deutschen Normenausschuss (DNA) ab. Er ist das zuständige Organ für die Normungsarbeit in Deutschland und vertritt Deutschland im Ausland.
Die Reihen A und B sind international anerkannte Formate geworden, nicht aber die Reihe C. Die Formate sind so einzuordnen:
Vorzugsreihe der Endformate A: DIN 476 Teil 1 - ISO 216 - EN 20216
Zusatzreihe der Endformate B : DIN 476 Teil 1 - ISO 216 - EN 20216



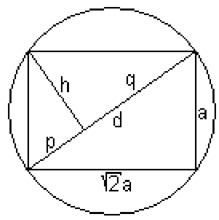
√5-Rechteck

Gegeben sei ein Einheitsquadrat. Auf die eine Seite wird ein Kreisbogen mit der Länge der Diagonale √2 gezeichnet. Das entstehende Rechteck hat dann ein Seitenverhältnis 1 : √2. Wiederholt man diese Konstruktion, so enstehen Rechtecke mit den Seitenverhältnissen 1 : √3, 1 : 2 und 1 : √5.
Das letzte Rechteck ist ein √5-Rechteck.

In einem √5-Rechteck tritt der goldene Schnitt mehrfach auf.
Teilt man links und rechts Rechtecke mit den Seitenlängen 1 und (√5 - 1)/2 ab, d.h. goldene Rechtecke, so bleibt im Inneren ein Einheitsquadrat übrig. Eine derartige Unterteilung eines Rechtecks wird in der Kunst sehr gern für ein Triptychon verwendet. Weite Verbreitung fand das Triptychon in den Flügelaltären der spätgotischen Malerei.
Eines der kleinen Rechtecke und das Quadrat bilden zusammen wieder ein goldenes Rechteck mit den Seitenlängen 1 und ϕ = (√5 + 1)/2.

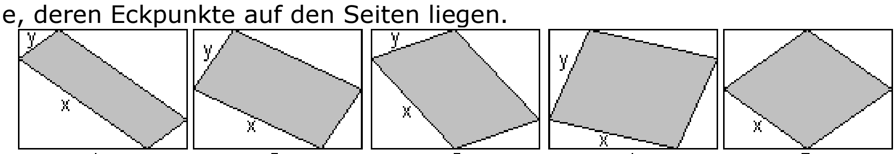
Proportionen der Nationalflaggen
Die Flaggen der Staaten dieser Welt sind mit einer einzigen Ausnahme (Nepal) Rechtecke, haben aber verschiedene Proportionen. Mitunter werden auch abweichende Maß verwendet.

Proportion	Staaten
1:1 = 1	Schweiz, Vatikanstadt
13:15 = 0,86	Belgien
6:7 ≈ 0,857142	Niger
4:5 = 0,8	Monaco
28:37 ≈ 0,756	Dänemark
3:4 = 0,75	Papua-Neuguinea, San Marino
8:11 ≈ 0,72	Israel, Norwegen, Island
7:10 = 0,7	Brasilien
2:3 ≈ 0,67	Afghanistan, Ägypten, Albanien, Algerien, Bolivien, Chile, VR China, Dschibuti, Frankreich, Gabun, Ghana, Griechenland, Guinea, Indien, Indonesien, Irak, Italien, Japan, Jemen, Kambodscha, Laos, Libanon, Malta, Marokko, Niederlande, Österreich, Pakistan, Panama, Peru, Portugal, Rumänien, Russland, Serbien, Slowakei, Spanien, Südafrika, Syrien, Tansania, Thailand, Tschechien, Tunesien, Türkei, Turkmenistan, Ukraine, Uruguay, Venezuela, Vietnam, und weitere
9:14 ≈ 0,642857	Argentinien
7:11 ≈ 0,63	Estland
5:8 ≈ 0,625	Guatemala, Palau, Polen, Schweden
2:(1+√5) ≈ 0,618	Togo
11:18 ≈ 0,61	Finnland
3:5 = 0,6	Bulgarien, Deutschland, Liechtenstein, Litauen, Luxemburg, Nikaragua, Zypern, und weitere
4:7 ≈ 0,571428	Iran, Mexiko
6:11 ≈ 0,54	Myanmar
10:19 ≈ 0,5263	Liberia, Mikronesien, USA
1:2 = 0,5	Armenien, Äthiopien, Australien, Bosnien-Herzegowina, Ecuador, Großbritannien, Irland, Jordanien, Kanada, Kasachstan, KVDR, Kroatien, Kuba, Kuwait, Lettland, Malaysia, Moldawien, Mongolei, Neuseeland, Nigeria, Palästina, Paraguay, Philippinen, Simbabwe, Slowenien, Sri Lanka, Sudan, Ungarn, Usbekistan, VA Emirate, Weißrussland
11:28 ≈ 0,39286	Katar

Strecken im Rechteck


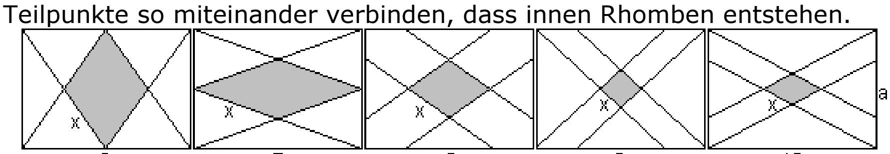
Gegeben sind die Seiten a und damit auch √2 a. Dann gilt weiter:
Diagonale: d = √3 a
Höhe im Teildreieck: h = √6 /3 a
Erster Abschnitt der Diagonalen p = 2 √3 /3 a
Zweiter Abschnitt der Diagonalen q = √3 /3 a
Durchmesser des Umkreises d = √3 a. Einen Inkreis gibt es nicht. Das halbe Rechteck ist ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seiten a, √2 a und √3 a. Es ist also ein √1-√2-√3-Dreieck. Es hat die spitzen Winkel α = arctan(√2) = 35,3° und β = arctan[√2 /2] = 54,7°.

Parallelogramme im Rechteck
Teilt man die Seiten des Rechtecks der Reihe A,B oder C in vier gleiche Teile und verbindet die gegenüberliegenden Teilpunkte, so wird das Rechteck in 16 kongruente Rechtecke aufgeteilt, die zum Ausgangsrechteck ähnlich sind. Verbindet man bestimmte Teilpunkte, so erhält man im Inneren Parallelogramme, deren Eckpunkte auf den Seiten liegen.



1 2 3 4 5

Man kann auch Teilpunkte so miteinander verbinden, dass innen Rhomben entstehen.



6 7 8 9 10

Die Parallelogramme sind Rhomben, da die Diagonalen als Symmetrieachsen aufeinander senkrecht stehen. Sie haben folgende Maße:

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	¾ √3 a	√22 a/4	√17 a/4	√19 a/4	√3 a/2	√6 a/4	¾ a	√3 a/4	√34 a/24	√41 a/24
y	√3 a/4	√6 a/4	¾ a	√11 a/4						

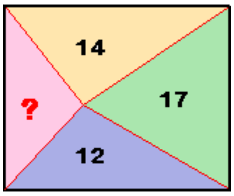
Proportionen von Geldscheinen

Bei den Abmessungen von Geldscheinen werden nicht unbedingt Formate gewählt, die einer ästhetischen Ansicht entsprechen. Viel mehr stehen praktische Gründe im Vordergrund.
Für den Euro gilt: Je höher der Wert, desto größer die Banknoten. In deutlichen Stufungen reicht die Größe der Geldscheine vom 12 x 6,2 cm kleinen Fünfer bis zum 16 x 8,2 cm großen Fünfhunderter.
Das Verhältnis von langer zu kurzer Seite entspricht etwa 1,94.

Eine Besonderheit stellen die neuen Schweizer Banknoten dar. Zumindest deren Rückseite sind Rechtecke, die höher als breiter sind; Verhältnis = 0,46.
Bei den Banknoten der DDR waren die Verhältnisse noch größer: 5 Mark-Schein 11,3 x 5 cm = 2,26 bis 100 Mark-Schein 14,5 x 5,2 cm = 2,78.
In den USA sind Banknoten ebenfalls "flache" Rechtecke mit einem Seitenverhältnis von 2,28. In den USA ist jeder Geldschein gleich groß. In der BRD entsprachen die Maße einem Verhältnis von 1:2.
Allerdings finden sich auch fast quadratische Scheine, zum Beispiel der alliierten Militärbehörden 1945.

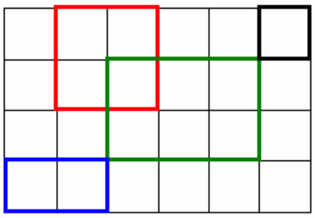
Aufteilung eines Rechtecks in verschiedene Quadrate

Es ist tatsächlich sehr schwer, ein Rechteck anzugeben, das sich mit verschieden großen Quadraten pflastern lässt. Anders herum ausgedrückt lautet die Aufgabe: Endlich viele und paarweise unterschiedlich große Quadrate sollen zu einem Rechteck zusammengelegt werden. Erst 1925 ist das zum ersten Mal gelungen!
Ein Beispiel für eine solche Pflasterung zeigt die Briefmarke. Das Rechteck ist hier fast quadratisch, es hat die Breite 177 und die Höhe 176; die Längeneinheit ist dabei $^1/_9$ des kleinsten Quadrates (im Inneren, blau). Dieses Rechteck ist mit 11 Quadraten gepflastert; sie haben die Seitenlängen:
9 (blau), 16 (grün), 21 (blau), 25 (gelb), 34 (rot), 41 (blau), 43 (gelb), 57 (rot), 77 (grün), 78 (gelb),99 (rot)



Aufgabe: Gegeben ist ein Rechteck, dessen Fläche in 4 voneinander verschiedene Dreiecke unterteilt ist. (siehe Abbildung) Von 3 Dreiecken ist der Flächeninhalt bekannt.
Wie groß ist der Flächeninhalt des vierten Dreiecks?
Lösung: 9

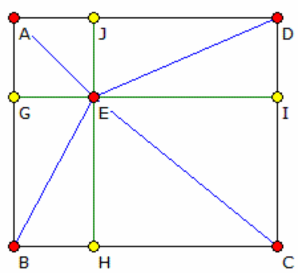
Rechtecke in einem quadratischen Gitter



In einem rechteckigen Gitter mit x Spalten und y Zeilen lassen sich auf den Gitterlinien zeichnend

$$n = 1/2 \cdot x \cdot (x+1) \cdot 1/2 \cdot y \cdot (y+1)$$
$$n = 1/4 \cdot x \cdot y \cdot (x+1) \cdot (y+1)$$

verschiedene Rechtecke einzeichnen.
Zum Induktionsbeweis siehe
http://www.mathe-online.at/materialien/matroid/files/vi2/i2.html



Britisches Flaggen-Theorem

In der euklidischen Geometrie versteht man unter dem britischen Flaggen-Theorem den Satz:
Ist ein Rechteck ABCD und ein weiterer Punkt E gegeben, so gilt stets

$$AE^2 + CE^2 = BE^2 + DE^2$$

Nachweis für einen Punkt E im Inneren des Rechtecks

Dann gilt (siehe Abbildung) nach dem Satz des Pythagoras

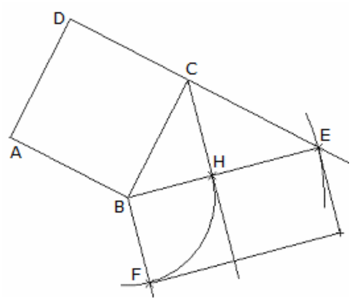
$$AE^2 = EG^2 + EJ^2 \qquad BE^2 = EG^2 + EH^2$$
$$CE^2 = EH^2 + EI^2 \qquad DE^2 = EI^2 + EJ^2$$

Addition und umsortieren der Summanden ergibt

$$AE^2 + CE^2 = EG^2 + EJ^2 + EH^2 + EI^2 = EG^2 + EH^2 + EI^2 + EJ^2 = BE^2 + DE^2$$

Der Nachweis für einen Punkt E außerhalb des Rechtecks ist anspruchsvoller.

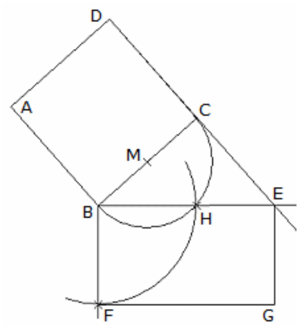
Der Name das Satzes bezieht sich auf die Gestaltung des "Union Jacks", der Flagge Großbritanniens.
Etwas kurios ist, dass die englische Flagge mit dem Georgskreuz einen waagerechten und einen senkrechten Balken besitzt, die schottische Flagge mit dem Andreaskreuz aber diagonal verlaufende Balken. Der Name "schottisches Flaggen-Theorem" wäre wohl exakter.



Umwandlung Quadrat in Rechteck
Anwendung des Kathetensatzes

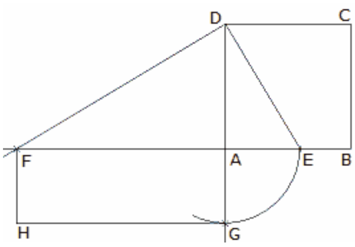
Aufgabe: Verwandle das Quadrat ABCD mit der Seitenlänge 4 cm unter Verwendung des Kathetensatzes in ein flächengleiches Rechteck, dessen eine Seite 6 cm lang ist.

Lösung: 1) Betrachte BC als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks. Verlängere DC über C hinaus. C ist dann Scheitelpunkt eines rechten Winkels.
2) Da die vorgegebene Rechteckseite länger als die gegebene Seitenlänge des Quadrats ist, muss diese Rechteckseite Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck sein. Zeichne daher einen Kreis um B mit dem Radius 6 cm.
4) Der Schnittpunkt des Kreises mit dem Strahl DC sei E.
5) Zeichne die Strecke BE. BCE ist ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse BE.
6) Fälle das Lot von C auf BE.
7) Der Fußpunkt des Lotes sei H. BH ist der zur Kathete BC gehörende Hypotenusenabschnitt.
8) Errichte die Senkrechte in B zu BE.
9) Zeichne einen Kreis um B mit dem Radius BH.
10) Der Schnittpunkt des Kreises mit der Senkrechten zu BE sei F.
11) Zeichne das Rechteck über BE und BF.



Umwandlung Quadrat in Rechteck (2)
Anwendung des Kathetensatzes - Variante 2

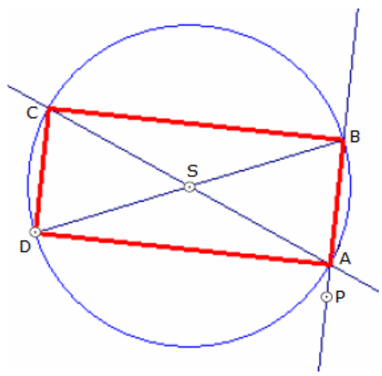
Aufgabe: Verwandle das Quadrat ABCD mit der Seitenlänge 4 cm unter Verwendung des Kathetensatzes in ein flächengleiches Rechteck, dessen eine Seite 3 cm lang ist.
Lösung: 1) Bestimme den Mittelpunkt M der Strecke BC.
2) Zeichne den Thaleskreis über M durch B und C.
3) Zeichne einen Kreis um B mit dem Radius 3 cm.
4) Nenne den Schnittpunkt der beiden Kreise H.
5) Verlängere DC über C hinaus.
6) Zeichne den Strahl BH.
7) Nenne den Schnittpunkt der beiden Strahlen E. Das Dreieck BEC ist rechtwinklig mit dem rechten Winkel in C.
8) BE ist die Hypotenuse und BH der zur Kathete BC gehörige Hypotenusenabschnitt.
9) Errichte in B die Senkrechte zu BE.
10) Der Schnittpunkt dieser Senkrechten mit dem Kreis um B durch H sei F.
11) Zeichne das Rechteck BFGE über BE und BF.



Umwandlung Quadrat in Rechteck (3)
Anwendung des Höhensatzes

Aufgabe: Verwandle das Quadrat ABCD mit der Seitenlänge 5 cm unter Verwendung des Höhensatzes in ein flächengleiches Rechteck, dessen eine Seite 3 cm lang ist.

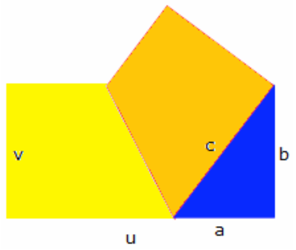
Lösung: 1) Zeichne einen Kreis um A mit dem Radius 3cm. Der Schnittpunkt mit AB sei E.
2) Zeichne die Strecke DE.
3) Errichte in D die Senkrechte zu DE.
4) Verlängere BA über A hinaus.
5) Der Schnittpunkt der beiden Strahlen sei F.
6) Verlängere DA über A hinaus.
7) Der Schnittpunkt mit dem Kreis um A sei G.
8) Zeichne das Rechteck über AE und AG.



Rechteck-Konstruktion

Aufgabe: Von einem Rechteck ABCD sind ein Eckpunkt D, der Diagonalenschnittpunkt S und ein Punkt P gegeben, der auf der Geraden durch A und B liegt. Das Rechteck ist mit Zirkel und Lineal zu konstruieren.
Konstruktion:
1) D und S verbinden und verdoppeln, da die Diagonale von S halbiert wird. Der gefundene Punkt ist B.
2) B und P verbinden und gegebenenfalls verlängern
3) um S wird ein Kreis mit dem Radius r = DS gezeichnet, da die Diagonalen im Rechteck gleich lang sind.
4) der Schnittpunkt der Kreises mit der Geraden durch B und P ist A
5) Strecke AB parallel durch D verschieben

6) der Schnittpunkt dieser Parallelen mit der Geraden durch A und S ist der vierte Rechteckpunkt B



Falten von Rechtecken

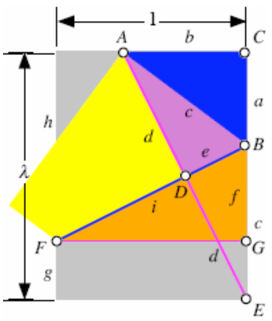
Gegeben ist ein Rechteck mit den Seitenlängen u und v. Dieses Rechteck wird so gefaltet, dass die linke untere Ecke auf die rechte obere gelangt und die Faltlinie orthogonal zur Rechteckdiagonale ist.
Auf der rechten Seite entsteht dabei ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c. Es ist:

$a = (u^2 - v^2) / (2u)$ $\quad b = v \quad$ $c = (u^2 + v^2) / (2u)$

und somit $a : b : c = (u^2-v^2) : 2uv : (u^2+v^2)$.
Da für natürliche u, v mit u > v und (u-v) ungerade, das Tripel $((u^2-v^2) , 2uv , (u^2+v^2))$ ein pythagoreisches Dreieck beschreibt, können alle möglichen pythagoreischen Dreiecke durch Faltung eines geeigneten Rechtecks erzeugt werden.
Beispiele:

u	v	a : b : c
2	1	3 : 4 : 5
3	2	5 : 12 :13
4	1	15 : 8 : 17
4	3	7 : 24 : 25
5	2	21 : 20 : 29
5	4	9 : 40 : 41

Das ägyptische Dreieck (3:4:5) entsteht aus einem Rechteck mit u:v = 2:1, das indische Dreieck (5:12:13) aus dem Rechteck u:v = 3:2.



Falten im Rechteck

In einem Hochformat-Rechteck wird die rechte untere Ecke auf die obere Kante gefaltet. Dann faltet man wieder zurück. Das Rechteck habe die Breite 1 und die Höhe $\lambda \geq 1$.
Aus dem blauen Rechteck ABC ergibt sich, dass der Punkt B die rechte Rechteckseite im Verhältnis

$a = 1/(2\lambda)\ (\lambda^2 - b^2)$ $\quad c = 1/(2\lambda)\ (\lambda^2 + b^2)$

$a/c = (\lambda^2 - b^2)/(\lambda^2 + b^2)$

teilt.
Sind λ und b rational, so sind es auch a, b und c. Mit $a = p_a/q_a$, $b = p_b/q_b$, $c = p_c/q_c$ wird

$(p_aq_bq_c)^2 + (q_ap_bq_c)^2 = (q_aq_bp_c)^2$

Damit ist das Dreieck ABC ein pythagoreisches Dreieck.
Für den Teilpunkt F auf der linken Rechteckseite findet man

$g = 1/(2\lambda)\ (\lambda^2 - (2b - b^2))$

$h = 1/(2\lambda)\ (\lambda^2 + (2b - b^2))$ $\quad g/h = (\lambda^2 - (2b - b^2)) / (\lambda^2 + (2b - b^2))$

Die Faltstrecke FB hat dann die Länge $i = 1/\lambda\ \sqrt{(\lambda^2 + b^2)}$
Für den Sonderfall λ = 1, d.h. quadratisches Papier, und b = 0,5 werden a = 3/8 und c = 5/8. Es entsteht das einfachste pythagoreische Dreieck a:b:c = 3:4:5.

Für den Sonderfall λ = 1, d.h. quadratisches Papier, und b = 0,75 ergibt sich a = 7/32 ; b = 25/32
Damit entsteht das pythagoreische Dreieck a:b:c = 7:24:25. Für die Teilung am linken Rand wird

g = 1/32 ; h = 31/32

Die Faltlinie hat die Länge 40/32.
Allgemein ergibt sich für b = v/u: $\quad a = 1/(2u^2)\ (u^2 - v^2)$ $\quad c = 1/(2u^2)\ (u^2 + v^2)$
Für die Seiten des pythagoreischen Dreiecks findet man $\quad a:b:c = (u^2-v^2) : 2uv : (u^2+v^2)$
d.h., die übliche Formel zur Konstruktion derartiger Dreiecke.

Ergebnisse für λ = √2

b	a	c	g	h	i
b	√2/4 (2-b²)	√2/4 (2+b²)	√2(2-(2b-b²))/4	√2(2+(2b-b²))/4	√2/2 √(2+b²)
1	√2/4	3√2/4	√2/4	3√2/4	√6/2
0,5	7/16 √2	9/16 √2	5/16 √2	11/16 √2	12/16 √2

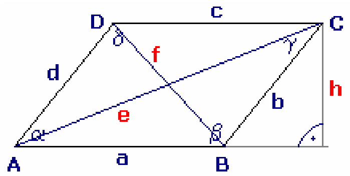
Ergebnisse für λ = τ = (1+√5)/2

1	1/2	1/2 √5	1/2	1/2 √5	

Ergebnisse für λ = √3

1	1/3 √3	2/2 √3	1/3 √3	2/3 √3	2/3 √3

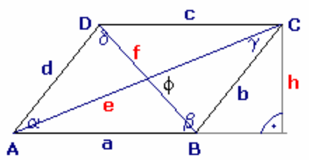
Parallelogramm



In einem Parallelogramm sind jeweils gegenüberliegende Seiten gleich lang und parallel; Bez. h … Höhe auf a.
Euklids "Elemente" § 34 (L. 24): Je zwei gegenüberliegende Winkel sind gleich.

Je zwei benachbarte Winkel des Parallelogramms sind entgegengesetzte Winkel an geschnittenen Parallelen, und daher Supplementwinkel.
Das Parallelogramm ist zum Schnittpunkt seiner Diagonalen zentralsymmetrisch.
Rechteck, Quadrat und Rhombus sind Sonderfälle des Parallelogramms.
Im Allgemeinen gibt es keine Symmetrieachse.
Parallelogramme sind drehsymmetrisch um 180° bzgl. des Schnittpunktes der Diagonalen.
Parallelogramme sind punktsymmetrisch bzgl. des Schnittpunktes der Diagonalen.
Euklids "Elemente" § 34 (L. 24): Eine Diagonale halbiert das Parallelogramm. Parallelogramme werden auch als Parallelenvierecke bezeichnet.

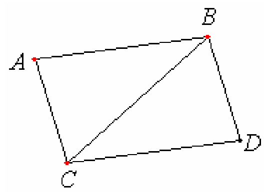
$A = a*h = ab \sin \alpha$ $\qquad$ $u = 2(a+b)$
$h = b \sin \alpha = b \sin \beta$ $\qquad$ $\alpha = \gamma,\ \beta = \delta,\ \alpha+\beta = \alpha + \delta = 180°$
$e^2 + f^2 = 2 (a^2 + b^2)$
$e = \sqrt{a^2 + b^2 + 2 a \sqrt{b^2 - h^2}}$ $\qquad$ $f = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 a \sqrt{b^2 - h^2}}$



Formeln zum Parallelogramm

Es sei A der Flächeninhalt des Parallelogramms, a und b die Seiten, h die Höhe auf a, α der kleinere Winkel zwischen a und b, e und f die Diagonalen und ϕ der Winkel zwischen den Diagonalen. Dann gilt:

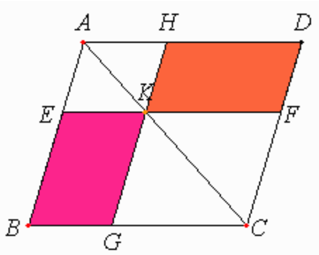
Flächeninhalt
geg.: a, h $\quad A = a \cdot h = ab \sin \alpha$
geg.: e, f, ϕ $\quad A = e \cdot f \cdot \sin \phi$
geg.: a, b, e $\quad A = 1/2 \sqrt{2a^2b^2 - a^4 + 2a^2e^2 - b^4 + 2b^2e^2 - e^4}$
geg.: a, e, f $\quad A = 1/4 \sqrt{8a^2f^2 - 16a^4 + 8a^2e^2 - f^4 + 2e^2f^2 - e^4}$
Seitenlänge
geg.: A, b, α $\quad a = A / (b \sin \alpha) = A/b \csc \alpha$
geg.: A, a, α $\quad b = A / (a \sin \alpha) = A/a \csc \alpha$
Diagonale
geg.: f, ϕ, A $\quad e = 2A / (f \sin \phi)$
geg.: a, b, α $\quad e = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}$
geg.: a, b, h $\quad e = \sqrt{a^2 + b^2 + 2 a \sqrt{b^2 - h^2}}$
geg.: a, b, h $\quad f = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 a \sqrt{b^2 - h^2}}$
Höhe und Umfang
geg.: b, α $\quad h = b \sin \alpha = b \sin \beta$
geg.: a, b, e $\quad h = \sqrt{b^2 - (e^2 - a^2 - b^2)^2/(4a^2)}$
geg.: a, b $\quad u = 2(a+b)$



Sätze über Parallelogramme

Euklids "Elemente": § 34 (L. 24):
Im Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Seiten sowohl als Winkel einander gleich, und die Diagonale halbiert es.

ACDB sei ein Parallelogramm, BC Diagonale in ihm. Ich behaupte, dass im Parallelogramm ACDB die gegenüberliegenden Seiten sowohl als Winkel einander gleich sind und dass die Diagonale BC es halbiert.
Da AB || CD und sie von der geraden Linie BC geschnitten werden, sind die Wechselwinkel ABC = BCD (I, 29). Ebenso sind, da AC || BD und sie von BC geschnitten werden, die Wechselwinkel ACB = CBD. Mithin sind ABC, BCD zwei Dreiecke, in denen zwei Winkel ABC, BCA zwei Winkeln BCD, CBD entsprechend gleich sind und eine Seite einer Seite gleich, nämlich die den gleichen Winkeln anliegende BC, die ihnen gemeinsam ist; also müssen in ihnen auch die übrigen Seiten den übrigen Seiten entsprechend gleich sein und der letzte Winkel dem letzten Winkel (I, 26); also ist die Seite AB = CD, AC = BD sowie $\angle$ BAC = CDB. Und da $\angle$ ABC = BCD, CBD = ACB, so sind die ganzen Winkel ABD = ACD (Axiom 2). Dass auch BAC = CDB, ist oben bewiesen. Im Parallelogramm sind also die gegenüberliegenden Seiten sowohl als Winkel einander gleich.
Weiter behaupte ich, dass die Diagonale es halbiert. Da nämlich AB = CD ist und BC gemeinsam, so sind zwei Seiten AB, BC zwei Seiten CD, BC entsprechend gleich; ferner $\angle$ ABC = $\angle$ BCD; also ist auch Grdl. AC = BC und Δ ABC = Δ BCD (I, 4). Also halbiert die Diagonale BC das Parallelogramm ABCD - die hatte man beweisen sollen.

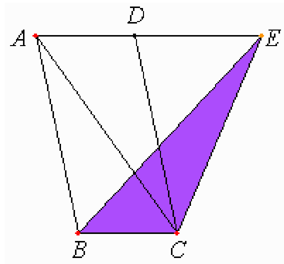


Euklids "Elemente": § 43 (L. 32):
In jedem Parallelogramm sind die Ergänzungen der um die Diagonale liegenden Parallelogramme einander gleich.

ABCD sei ein Parallelogramm, AC Diagonale in ihm; EH, FG seien die Parallelogramme um AC, und BK, KD die sogenannten Ergänzungen. Ich behaupte, dass die Ergänzung BK der Ergänzung KD gleich ist.
Da nämlich ABCD ein Parallelogramm ist, AC Diagonale in ihm, ist Δ ABC = Δ ACD (I, 34). Ebenso ist, da EH ein Parallelogramm ist, AK Diagonale in ihm, Δ AEK = Δ AHK. Aus

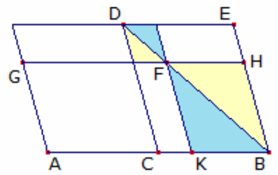
demselben Grunde ist auch ∆ KFC = KGC. Da hier sowohl ∆ AEK = ∆ AHK als auch KFC = KGC, so ist ∆ AEK mit KGC zusammen = ∆ AHK mit KFC zusammen (Axiom 2). Aber auch das ganze ∆ ABC ist dem ganzen ∆ ADC gleich; also ist der Rest, die Ergänzung BK, dem Rest, der Ergänzung KG, gleich. (Axiom 3) - S.
Dieser Satz wird auch Gnomon-Theorem genannt.

Euklids "Elemente": § 41 (L. 31):
Wenn ein Parallelogramm mit einem Dreieck dieselbe Grundlinie hat und zwischen denselben Parallelen liegt, ist das Parallelogramm doppelt so groß wie das Dreieck.



Das Parallelogramm ABCD habe nämlich mit dem Dreieck EBC dieselbe Grundlinie BC und liege zwischen denselben Parallelen BC, AE. Ich behaupte, dass Pgm. ABCD = 2 ∆ BEC. Man ziehe AC.
Dann ist ∆ ABC = ∆ EBC; denn es liegt mit ihm auf derselben Grundlinie BC und zwischen denselben Parallelen BC, AE (I, 37). Aber Pgm. ABCD = 2 ∆ ABC; denn es wird von der Diagonale AC halbiert (I, 34); folglich ist auch Pgm. ABCD = 2 ∆ EBC - S.

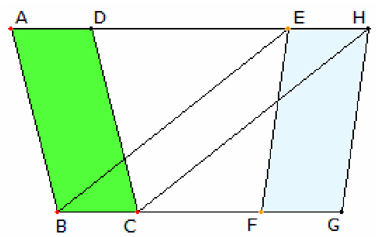
Euklids "Elemente": § 40 (L. 30):
Auf gleichen Grundlinie nach derselben Seite gelegene gleiche Dreiecke liegen auch zwischen denselben Parallelen.



Euklids "Elemente" Buch VI: § 27 (L. 20):
Von allen Parallelogrammen, die man an eine feste Strecke so anlegen kann, dass ein Parallelogramm fehlt, welches einem über ihre Hälfte gezeichneten ähnlich ist und ähnlich liegt, ist das über der Hälfte angelegte, das selbst dem fehlenden ähnlich ist, das größte.

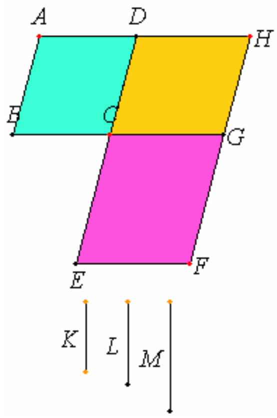
Man habe eine Strecke AB; diese sei in C halbiert; ferner sei an die Strecke AB ein Parallelogramm AD so angelegt, dass das über der Hälfte von AB, d.h. über CB gezeichnete Parallelogramm DB fehlt. Ich behaupte, dass von allen an AB … angelegten Parallelogrammen AD das größte ist.
Man lege nämlich an die Strecke AB ein Parallelogramm so an, dass ein DB ähnliches und ähnlich liegendes Parallelogramm FB fehlt; ich behaupte, dass dann AD > AF.
Da Pgm. DB ~ Pgm. FB, liegen sie um dieselbe Diagonale (VI, 26). Man ziehe in ihnen die Diagonale DB und zeichne die Figur fertig.
Da nun Pgm. CF = FE ist (I, 43) und FB gemeinsam, ist das ganze Pgm. CH dem ganzen KE gleich (Axiom 2). Aber Pgm. CH = CG, da AC = CB (I, 36); also ist auch Pgm. GC = EK (Axiom 1).
Man füge CF beiderseits hinzu; dann ist ganze Pgm. AV = Gnomon LMN (Axiom 2); folglich ist Pgm. DB, d.h. AD > Pgm. AF (Axiom 8). … dies hatte man ausführen sollen.

Euklids "Elemente" Buch VI: § 14 (L. 9):
In gleichen winkelgleichen Parallelogrammen sind die Seiten um gleiche Winkel umgekehrt proportional. Und winkelgleiche Parallelogramme, in denen die Seiten um gleiche Winkel umgekehrt proportional sind, sind gleich.



Euklids "Elemente" Buch VI: § 36 (L. 26):
Auf gleichen Grundlinien zwischen denselben Parallelen gelegene Parallelogramme sind einander gleich.

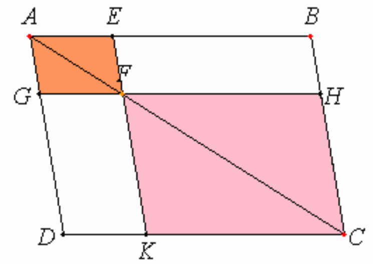
ABCD, EFGH seien auf gleichen Grundlinien BC, FG zwischen denselben Parallelen AH, BG gelegene Parallelogramme. Ich behaupte, dass Pgm. ABCD = EFGH.
Man ziehe BE, CH. Da BC = FG, andererseits FG = EH (I, 34), so ist auch BC = EH; dabei sind sie parallel; und EB, HC verbinden sie. Strecken, die gleiche und parallele Strecken auf denselben Seiten verbinden, sind aber gleich und parallel (I, 33) auch EB, HC sind also gleich und parallel; also ist EBCH ein Parallelogramm. Und es ist = ABCD; denn es hat mit ihm dieselbe Grundlinie BC und liegt mit ihm zwischen denselben Parallelen BC, AH (I, 35). Aus demselben Grunde ist auch EFGH demselben EBCH gleich, so dass auch Pgm. ABCD = EFGH - S.



Euklids "Elemente" Buch VI: § 23 (L. 17):
Winkelgleiche Parallelogramme haben zueinander das zusammengesetzte Verhältnis aus den Seitenverhältnissen.

AC, CF seien winkelgleiche Parallelogramme, in denen ∠ BCD = ECG. Ich behaupte, dass Parallelogramm AC zu Parallelogramm CF das

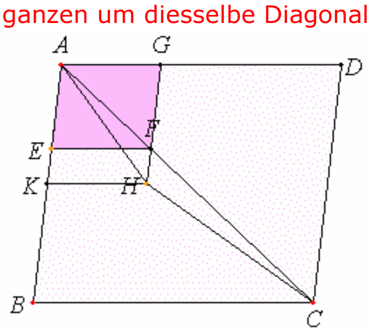
zusammengesetzte Verhältnis aus den Seiten hat.
Man lege sie so, dass BC CG gerade fortsetzt; dann setzt auch DC CE gerade fort (I, 14). Man vervollständige das Parallelogramm DG, lege irgendeine Strecke K hin und lasse BC : CG = K : L sowie DC : CE = L : M werden (VI, 12).
Die Verhältnisse K : L, L : M sind dann dieselben wie die Verhältnisse der Seiten, nämlich BC : CG, DC : CE. Nun ist das Verhältnis K : M zusammengesetzt aus den Verhältnissen K : L und L : M, so dass K zu M das zusammengesetzte Verhältnis aus den Seiten hat.
Und da BC : CG = Parallelogramm AC : CH (VI, 1), andererseits BC : CG = K : L, so ist auch K : L = Parallelogramm AC : CH (V, 11). Ebenso ist, da DC : CE = Parallelogramm CH : CF und DC : CE = L : M, auch L : M = Parallelogramm CH : Parallelogramm CF.
Da, wie oben bewiesen, K : L = Parallelogramm AC : Parallelogramm CH und L : M = Parallelogramm CH : Parallelogramm CF, so ist über gleiches weg K : M = Parallelogramm AC : CF (V, 22). Nun hat K zu M das zusammengesetzte Verhältnis aus den Seiten; also hat auch AC zu CF das zusammengesetzte Verhältnis aus den Seiten (V, 11) - S.



Euklids "Elemente" Buch VI: § 24 (L. 18): In jedem Parallelogramm sind die Parallelogramme um die Diagonalen sowohl dem ganzen als auch einander ähnlich.

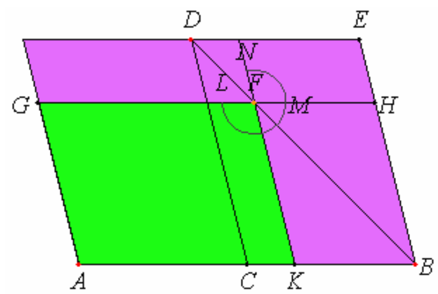
ABCD sei ein Parallelogramm, in ihm AC Diagonale, und EG, HK seien Parallelogramme um AC. Ich behaupte, dass die Parallelogramme EG, HK beide sowohl dem ganzen Parallelogramm ABCD als auch einander ähnlich sind.
Da man EF im Dreieck ABC einer Seite, nämlich BC parallel gezogen hat, stehen in Proportion BE : EA = CF : FA (VI, 2). Ebenso stehen, da man im Dreieck ACD FG || CD gezogen hat, in Proportion CF : FA = DG : GA. Wie oben bewiesen, ist aber CF : FA = BE : EA. Also ist auch BE : EA = DG : GA (V, 11), also, verbunden, BA : AE = DA : AG (V, 18) und, vertauscht, BA : AD = EA : AG (V, 16). In den Parallelogrammen ABCD, EG stehen also die Seiten um den gemeinsamen Winkel BAD in Proportion. Da GF || DC, ist ∠ AFG = DCA (I, 29); ferner ist ∠ DAC den beiden Dreiecken ADC, AGF gemeinsam; also ist ∆ ADC mit ∆ AGF winkelgleich (I, 32). Aus demselben Grunde ist auch ∆ ACB mit ∆ AFE winkelgleich und das ganze Parallelogramm ABCD mit Parallelogramm EG winkelgleich (Axiom 2). Also stehen in Proportion AD : DC = AG : GF, DC : CA = GF : FA, AC : CB = AF : FE und CB : BA = FE : EA (VI, 4). Und da, wie oben bewiesen, DC : CA = GF : FA und AC : CB = AF : FE, so ist über gleiches weg DC : CB = GF : FE (V, 22). In den Parallelogrammen ABCD, EG stehen also die Seiten um gleiche Winkel in Proportion; also ist Parallelogramm ABCD ~ Parallelogramm EG (VI, Definition 1). Aus demselben Grunde ist auch Parallelogramm ABCD ~ Parallelogramm KH. Die Parallelogramme EG, HK sind also beide ~ ABCD. Derselben geradlinigen Figur ähnliche sind aber auch einander ähnlich (VI, 21); also ist auch Parallelogramm EG ~ Parallelogramm HK – S.

Euklids "Elemente" Buch VI: § 26 (L. 19): Schneidet man aus einem Parallelogramm ein dem ganzen ähnliches Parallelogramm aus, das ähnlich liegt und einen Winkel mit ihm gemein hat, so liegt es mit dem ganzen um diesselbe Diagonale.



Aus dem Parallelogramm ABCD sei das ABCD ähnliche Parallelogramm AF, das ihm ähnlich liegt und den Winkel DAB mit ihm gemein hat, ausgeschnitten. Ich behaupte, dass ABCD mit AF um dieselbe Diagonale liegt.
Wäre dies nämlich nicht der Fall, sondern wäre die Diagonale etwa AHC, denn verlängere man GF nach H und ziehe HK || AD oder BC durch H. Da dann ABCD mit KG um dieselbe Diagonale läge, wäre DA : AB = GA : AK (VI, 24, Definition 1). Andererseits ist wegen der Ähnlichkeit von ABCD mit EG auch DA : AB = GA : AE, also wäre GA : AK = GA : AE (V, 11). GA hätte also zu beiden Strecken AK, AE dasselbe Verhältnis, also wäre AE = AK (V, 9), die kleinere Strecke der größeren (Axiom 8); dies ist unmöglich. Es trifft also nicht zu, dass ABCD mit AF nicht um dieselbe Diagonale läge; also liegt das Parallelogramm ABCD mit dem Parallelogramm AF um dieselbe Diagonale – S.

Euklids "Elemente" Buch VI: § 27 (L. 20):
Von allen Parallelogrammen, die man an eine feste Strecke so anlegen kann, dass ein Parallelogramm fehlt, welches einem über ihre Hälfte gezeichneten ähnlich ist und ähnlich liegt, ist das über der Hälfte angelegte, das selbst dem fehlenden ähnlich ist, das größte.

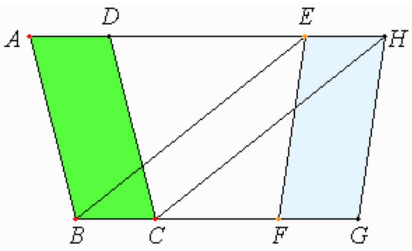


Man habe eine Strecke AB; diese sei in C halbiert; ferner sei an die Strecke AB ein Parallelogramm AD so angelegt, dass das über der Hälfte von AB, d.h. über CB gezeichnete Parallelogramm DB fehlt.

Ich behaupte, dass von allen an AB ... angelegten Parallelogrammen AD das größte ist. Man lege nämlich an die Strecke AB ein Parallelogramm so an, dass ein DB ähnliches und ähnlich liegendes Parallelogramm FB fehlt; ich behaupte, dass dann AD > AF.
Da Pgm. DB ~ Pgm. FB, liegen sie um dieselbe Diagonale (VI, 26). Man ziehe in ihnen die Diagonale DB und zeichne die Figur fertig. Da nun Pgm. CF = FE ist (I, 43) und FB gemeinsam, ist das ganze Pgm. CH dem ganzen KE gleich (Axiom 2). Aber Pgm. CH = CG, da AC = CB (I, 36); also ist auch Pgm. GC = EK (Axiom 1).
Man füge CF beiderseits hinzu; dann ist ganze Pgm. AV = Gnomon LMN (Axiom 2); folglich ist Pgm. DB, d.h. AD > Pgm. AF (Axiom 8). Also ist von allen Parallelogrammen, die man an eine feste Strecke so anlegen kann, dass ein Parallelogramm fehlt, welches einem über ihrer Hälfte gezeichneten ähnlich ist und ähnlich liegt, das über der Hälfte angelegte das größte - dies hatte man beweisen sollen.

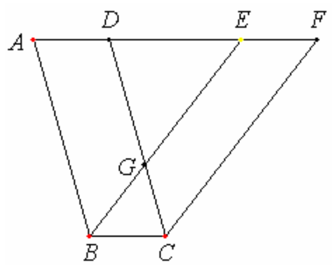
Euklids "Elemente": § 36 (L. 26):
Auf gleichen Grundlinien zwischen denselben Parallelen gelegene Parallelogramme sind einander gleich.

ABCD, EFGH seien auf gleichen Grundlinien BC, FG zwischen denselben Parallelen AH, BG gelegene Parallelogramme. Ich behaupte, dass Pgm. ABCD = EFGH.

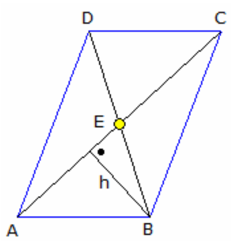


Man ziehe BE, CH. Da BC = FG, andererseits FG = EH (I, 34), so ist auch BC = EH; dabei sind sie parallel; und EB, HC verbinden sie. Strecken, die gleiche und parallele Strecken auf denselben Seiten verbinden, sind aber gleich und parallel (I, 33) auch EB, HC sind also gleich und parallel; also ist EBCH ein Parallelogramm.
Und es ist = ABCD; denn es hat mit ihm dieselbe Grundlinie BC und liegt mit ihm zwischen denselben Parallelen BC, AH (I, 35). Aus demselben Grunde ist auch EFGH demselben EBCH gleich, so dass auch Pgm. ABCD = EFGH.

Euklids "Elemente": § 35 (L. 25):
Auf derselben Grundlinie zwischen denselben Parallelen gelegene Parallelogramm sind einander gleich.



Die Parallelogramme ABCD, EBCF mögen auf derselben Grundlinie BC und zwischen denselben Parallelen AF, BC liegen. Ich behaupte, dass Parallelogramm ABCD = EBCF.
Da ABCD ein Parallelogramm ist, ist AD = BC (I, 34). Aus demselben Grunde ist EF = BC, so dass auch AD = EF; DE ist gemeinsam; also sind die ganzen Strecken AE = DF (Axiom 2). Aber auch AB = DC; mithin sind zwei Seiten EA, AB zwei Seiten FD, DC entsprechend gleich; ferner ist ∠ FDC = ∠ EAB, der äußere dem inneren (I, 29); also ist Grundlinie EB = Grundlinie FC, und ∆ EAB muss = ∆ DFC sein (I, 4). Man nehme das gemeinsame ∆ DGE weg; dann ist das Resttrapez ABGD = dem Resttrapez EGCF (Axiom 3). Man füge ∆ GBC beiderseits hinzu; dann ist das ganze Parallelogramm ABCD = dem ganzen Parallelogramm EBCF (Axiom 2) – S.



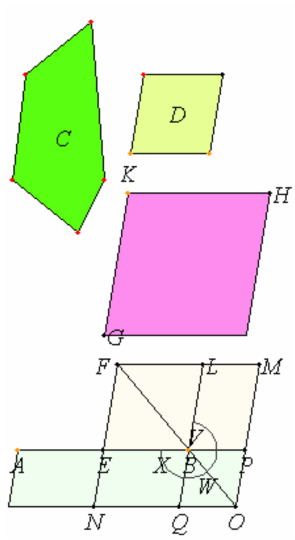
Sätze über Parallelogramme

Satz: Die Diagonalen eines Parallelogramms teilen das Parallelogramm in vier flächeninhaltsgleiche Dreiecke.

Beweis: Die Flächengleichheit der Dreiecke ∆ABE und ∆ECD bzw. ∆AED und ∆EBC ist offensichtlich; nach Ähnlichkeitssatz mit Scheitelwinkeln und entgegengesetzten Winkeln.
Der Schnittpunkt E halbiert die Diagonale AC, d.h. die Strecken AE und EC sind gleich lang.
Die eingezeichnete Höhe h ist Höhe im Dreieck ∆ABC bezüglich Seite AE aber auch im Dreieck ∆EBC bezüglich der Grundseite EC.
Da die Grundseiten AE bzw. EC gleich lang sind und die Höhe h identisch, ergibt sich nach

Fläche = 1/2 Grundseite Höhe

dass beide Dreiecke ebenfalls flächeninhaltsgleich sind.
Damit besitzen alle 4 Teildreiecke den gleichen Flächeninhalt.



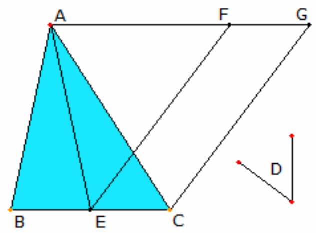
Parallelogrammkonstruktion

Euklids "Elemente": Buch VI § 29 (A. 9):
An eine gegebene Strecke ein einer gegebenen geradlinigen Figur gleiches Parallelogramm so anzulegen, dass ein einem gegebenen ähnliches Parallelogramm überschießt.

Die gegebene Strecke sei AB; und die gegebene geradlinige Figur, der das an AB

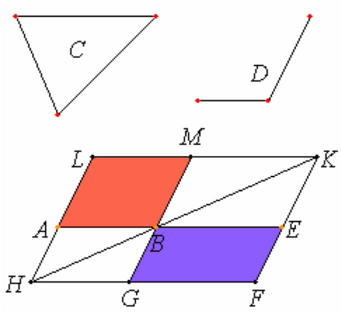
anzulegende Parallelogramm gleich werden soll, sei C; und die, der das überschießende ähnlich werden soll, sei D. Man soll an die Strecke AB ein der geradlinigen Figur C gleiches Parallelogramm so anlegen, dass ein Parallelogramm ~D überschießt.
Man halbiere AB in E, zeichne über EB das D ähnliche und ähnlich gelegte Parallelogramm BF (VI, 18) und errichte ein D ähnliches und ähnlich gelegtes Parallelogramm GH, das zugleich = BF + C ist (VI, 25). KH möge hierbei FL entsprechen, und KG FE. Da Parallelogramm GH > FB, so ist (VI, 22, Hilfssatz) KH > FL und KG > FE. Man verlängere FL, FE, so dass FLM = KH und FEN = KG wird, und vervollständige das Parallelogramm MN; MN ist dann = und ~GH (I, 29, 34; VI, 14). Nun ist GH ~ EL (VI, 21); also ist auch MN ~ EL; also liegt EL mit MN um dieselbe Diagonale (VI, 26). Man ziehe in ihnen die Diagonale FO und zeichne die Figur fertig.
Da GH = EL + C und GH = MN, so ist MN = EL + C. Man nehme EL beiderseits weg; dann ist der Rest, Gnomon XWV = C (Axiom 3). Und da AE = EB, ist auch Parallelogramm AN = NB (I, 36), d.h. = LP (I, 43). Man füge EO beiderseits hinzu; das ganze Parallelogramm AO ist dann dem Gnomon VWX gleich. Aber Gnomon VWX = C. Also ist auch AO = C. Man hat also an die gegebene Strecke AB ein der gegebenen geradlinigen Figur C gleiches Parallelogramm, nämlich AO, so angelegt, dass ein Parallelogramm QP überschießt, das D ähnlich ist, da PQ auch ~ EL (VI, 24) - dies hatte man ausführen sollen.
Anmerkung: Übersetzung des Originaltextes von Clemens Thaer (1937)

Euklids "Elemente": § 42 (A. 11):
Ein einem gegebenen Dreieck gleiches Parallelogramm in einem gegebenen geradlinigen Winkel zu errichten.



Das gegebene Dreieck sei ABC, der gegebene geradlinige Winkel D. Man soll ein dem Dreieck ABC gleiches Parallelogramm in dem geradlinigen Winkel D errichten.
Man halbiere BC in E (I, 10), ziehe AE und trage an die gerade Linie EC im Punkte E auf ihr CEF = ∠ D an (I, 23), ziehe ferner durch A AG || EC und durch C CG || EF (I, 31). Dann ist FECG ein Parallelogramm. Da BE = EC, ist ferner ∆ ABE = ∆ AEC; denn sie liegen auf gleichen Grundlinien BE, EC und zwischen denselben Parallelen BC, AG (I, 38); also ist ∆ ABC = 2 ∆ AEC. Aber auch Pgm. FECG = 2 ∆ AEC; denn es hat mit ihm dieselbe Grundlinie und liegt mit ihm zwischen denselben Parallelen (I, 41). Also ist Pgm. FECG = ∆ ABC; und sein Winkel CEF ist dem gegebenen ∠ D gleich.
Also hat man ein dem Dreieck ABC gleiches Parallelogramm, nämlich FECG, im Winkel CEF = D errichtet - dies hatte man ausführen sollen.

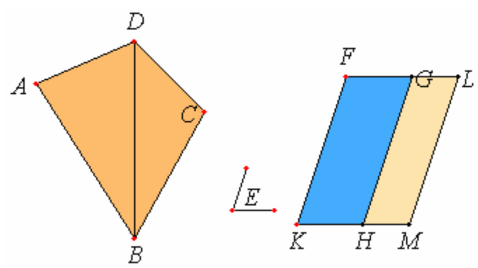
Parallelogrammkonstruktion



Euklids "Elemente": § 44 (A. 12):
An eine gegebene Strecke ein einem gegebenen Dreieck gleiches Parallelogramm in einem gegebenen geradlinigen Winkel anzulegen.

Die gegebene Strecke sei AB, das gegebene Dreieck C und der gegebene geradlinige Winkel D. Man soll an die gegebene Strecke AB ein dem gegebenen ∆ C gleiches Parallelogramm in einem Winkel = D anlegen.
Man errichte im Winkel EBG = D das Parallelogramm BEFG = ∆ C (I, 42) und lege es so, dass BE AB gerade fortsetzt, ziehe FG nach H durch, ziehe ferner durch A AH || BG oder EF und verbinde HB. Da hier die Parallelen AH, EF von der geraden Linie HF geschnitten werden, so sind ∠ AHF + HFE = 2 R. (I, 29). Dann sind BHG + GFE < 2 R. (Axiom 8). Von Winkeln aus, die zusammen < 2 R. sind, ins unendliche verlängerte treffen sich aber (Post. 5); also müssen sich HB, FE bei Verlängerung treffen. Man verlängere sie, sie mögen sich in K treffen. Ferner ziehe man durch Punkt K KL || EA oder FH und verlängere HA, GB nach den Punkten L, M. Dann ist HLKF ein Parallelogramm, HK Diagonale in ihm, und um HK liegen die Parallelogramme AG, ME; die sogenannten Ergänzungen sind LB, BF; also ist LB = BF (I, 43).
Aber Pgm. BF = ∆ C; also ist auch Pgm. LB = ∆ C. Und da ∠ GBE = ABM (I, 15), andererseits GBE = ∠ D, so ist auch ABM = ∠ D. Man hat also an die gegebene Strecke AB ein dem gegebenen ∆ C gleiches Parallelogramm, nämlich L B, in dem Winkel ABM = D angelegt – dies hatte man ausführen sollen.

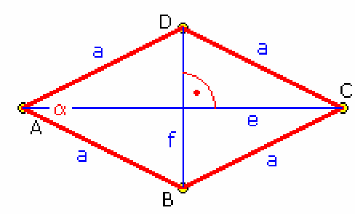
Euklids "Elemente": § 45 (A. 13):
Ein einer gegebenen geradlinigen Figur gleiches Parallelogramm in einem gegebenen geradlinigen Winkel zu errichten.



Die gegebene geradlinige Figur sei ABCD, der gegebene Winkel E. ...
Man ziehe DB, errichte im Winkel HKF = E das Parallelogramm FH = ∆ ABD (I, 42) und lege an die Strecke GH im Winkel GHM

= E das Parallelogramm GM = △ DBC an (I, 44).
Da ∠ E sowohl = HKF als auch = GHM, ist auch HKF = GHM. Man füge KHG beiderseits hinzu; dann sind FKH + KHG = KHG + GHM. Aber FKH + KHG = 2 R. (I, 29); also sind auch KHG + GHM = 2 R.
Hier bilden an einer geraden Linie GH im Punkte H auf ihr die zwei nicht auf derselben Seite liegenden geraden Linien KH, HM Nebenwinkel, die zusammen = 2 R. sind; also setzt KH HM gerade fort (I, 14).
Da ferner die Parallelen KM, FG von der geraden Linie HG geschnitten werden, sind die Wechselwinkel MHG = HGF (I, 29). Man füge HGL beiderseits hinzu; dann sind MHG + HGL = HGF + HGL.
Aber MHG + HGL = 2 R. (I, 29); also sind auch HGF + HGL = 2 R.; also setzt FG GL gerade fort (I, 14).
Und da FK = und || HG (I, 34), ebenso HG mit ML, so ist auch KH = und || LM (I, 30); und die Strecken KM, FL verbinden sie; also sind auch KM, FL gleich und parallel (I, 33); also ist KFLM ein Parallelogramm.
Da △ ABD = Pgm. FH und DBC = GM, so ist die ganze geradlinige Figur ABCD dem ganzen Parallelogramm KFLM gleich (Axiom 2). Man hat also ein der gegebenen geradlinigen Figur ABCD gleiches Parallelogramm , nämlich KFLM, im Winkel FKM, der dem gegebenen ∠ E gleich ist, errichtet – dies hatte man ausführen sollen.

Rhombus, Raute



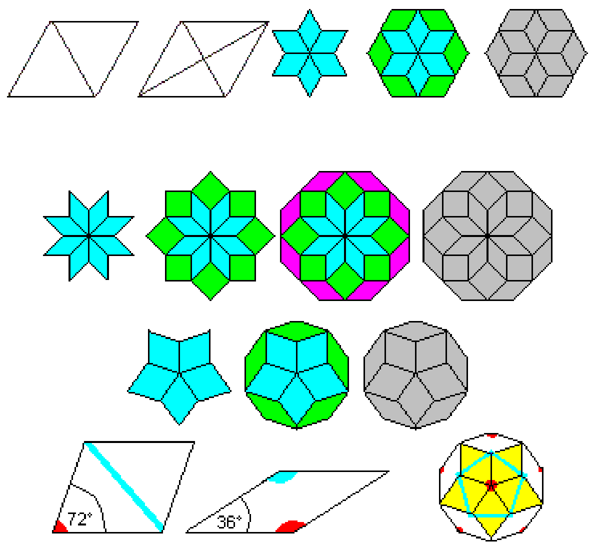
In einem Rhombus sind gegenüberliegende Seiten des Vierecks parallel, alle Seiten sind gleich lang; es gilt $a = b = c = d$, $a \| c$, $b \| d$ und $e \perp f$
Die Diagonalen sind gleichzeitig die Winkelhalbierenden.
Der Rhombus ist zentralsymmetrisch und zu seinen Diagonalen axialsymmetrisch. Er ist ein Spezialfall des Parallelogramms.

$A = ef/2 = a^2 \cdot \sin \alpha$ $\qquad$ $u = 4a$
$e^2 + f^2 = 4 a^2$ $\qquad$ $e = 2a \sin (\alpha/2)$

1. Diagonale e gesucht
geg: a, f $\quad e = \sqrt{4 a^2 - f^2}$ $\qquad$ geg: A, f $\quad e = 2 A / f$
2. Flächeninhalt gesucht
geg: a, α $\quad A = a^2 \sin \alpha$
3. Winkel α gesucht
geg: a, A $\quad \alpha = \arcsin (A / a^2)$
geg: a, e, f $\quad \alpha = \arcsin (e f / (2 a^2)) = \arcsin (2 e f / (e^2 + f^2))$

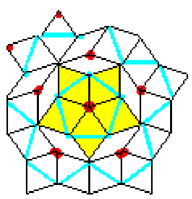
Zeichnet man in den Rhombus die Diagonale e oder die Diagonale f ein, so entstehen nach dem Kongruenzsatz SSS zwei kongruente gleichschenklige Dreiecke. Die Winkel an der Spitze sind gleich. Gegenüberliegende Innenwinkel sind gleich. Die Gegenseiten sind parallel.
Begründung: Da die Diagonale zwei kongruente Dreiecke erzeugt, sind Stufenwinkel gleich. Folglich sind nach der Umkehrung des Satzes von den Stufenwinkeln die Gegenseiten parallel. Verbindet man die Seitenmitten eines Rhombus, entsteht ein Rechteck als Mittenviereck. Verbindet man dagegen die Seitenmitten eines Rechtecks oder auch eines gleichschenkligen Trapezes, so entstehen Rhomben.

Figuren aus Rauten



Diese 60°-Raute hat die Innenwinkel 60° und 120°. Sie entsteht, wenn man ein gleichseitiges Dreieck an einer Seitenmitte spiegelt. Die beiden Diagonalen teilen die Raute in vier kongruente 30-60-90-Dreiecke. Aus sechs 60°-Rauten kann man einen Stern bilden. Verbindet man die Zacken des Sterns mit sechs weiteren 60°-Rauten, so entsteht ein regelmäßiges Sechseck.
Aus acht 45°-Rauten kann man einen Stern bilden. Füllt man den Bereich zwischen den Zacken mit Quadraten und zwischen den Quadraten mit Rauten, so entsteht ein regelmäßiges Achteck.

Penrose Tiling
Aus fünf 72°-Rauten kann man einen fünfzackigen Stern legen. Füllt man den Bereich zwischen den Zacken mit 36°-Rauten, so ergibt sich ein regelmäßiges - Zehneck.
Das Zehneck wird noch einmal gelegt.
Dieses Mal gilt zusätzlich eine Dominoregel:
Die zehn Rauten werden mit Farbmarkierungen versehen. Gleiche Farben sollen aneinander stoßen.

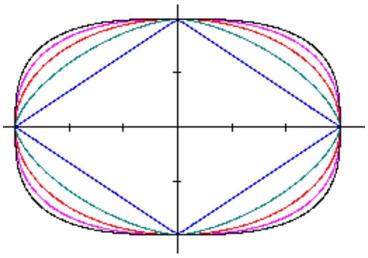


Man kann die markierten Rauten rund um das Zehneck immer weiter legen. Das Besondere ist, dass das zu einer "Parkettierung" der gesamten Ebene führt und dass diese Parkettierung nichtperiodisch ist. Das ist erstaunlich, denn bei so ziemlich allen Parkettierungen wiederholen sich bestimmte Bereiche. Sie ist dann periodisch.
Roger Penrose hat 1974 diese Parkettierung untersucht. N.G. de Bruijn bewies 1981 streng, dass mit den schon von Penrose angegeben Farbregeln eine periodische

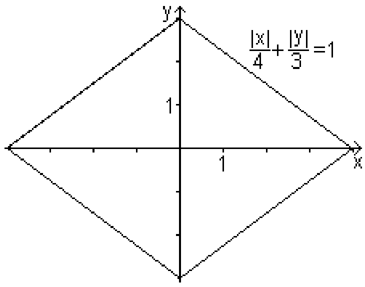
Parkettierung der Ebene nicht möglich ist.
Bis heute ist ungeklärt, ob man mit einer einzelnen Figur die Ebene nichtperiodisch parkettieren kann.

Aus sechs Rauten kann man einen Körper bilden. Er heißt Parallelepiped oder Spat. Aus 12 Rauten kann man einen Körper bilden. Er heißt Rhombendodekaeder.

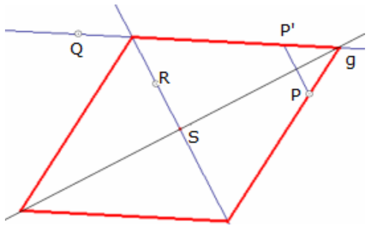
Rhombengleichung



Es ist möglich, einen Rhombus in einem Koordinatensystem nur durch eine Gleichung zu beschreiben. Die Zahlen im Nenner der Gleichung findet man in der Zeichnung als halbe Diagonalen.
Damit ist der Rhombus der Grenzfall n=1 einer Lamé-Kurve $|x/a|^n + |y/b|^n = 1$.

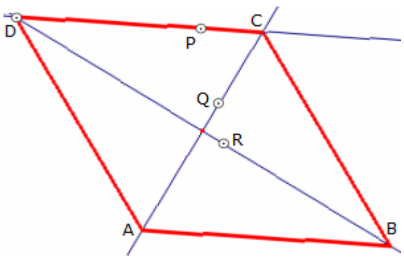


Rhombuskonstruktion



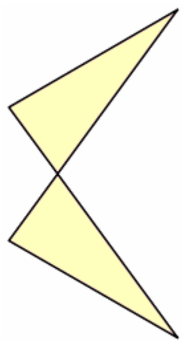
Aufgabe:
Gegeben sind von einem Rhombus $AC \subseteq g$, $P \in BC$, $Q \in CD$, $R \in BD$; die Punkte können auch auf der Verlängerung der angegebenen Geraden liegen. Der Rhombus ist zu konstruieren.

Konstruktion:
1. Lot auf AC durch R (Diagonalen stehen senkrecht)
2. Schnittpunkt der Diagonalen ist S
3. P an g spiegeln ergibt Punkt P' (Diagonale = Symmetrieachse)
4. P' mit Q verbinden, Schnittpunkt mit g = C, Schnittpunkt mit BD = D.
5. Mit Zirkel jeweilige Diagonalen verdoppeln (Diagonalen halbieren sich)



Aufgabe:
Gegeben sind von einem Rhombus $P \in CD$, $Q \in AC$, $R \in BD$; die Punkte können auch auf der Verlängerung der angegebenen Geraden liegen. Der Rhombus ist zu konstruieren.
Konstruktion:
1. DR verbinden
2. Lot auf DR durch Q zeichnen; die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander
3. DP mit SQ schneiden, der Schnittpunkt ist C
4. SC verdoppeln, der Punkt A ergibt sich, da sich die Diagonalen halbieren
5. SD verdoppeln ergibt den Punkt B

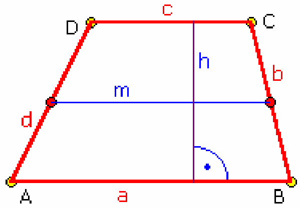
Antiparallelogramm



Ein Antiparallelogramm ist ein sich selbstüberschneidendes Viereck, dessen gegenüberliegende Seiten die gleiche Länge besitzen und bei dem sich zwei Seiten schneiden und nicht parallel liegen. Damit ist es nicht konvex.
Ein Antiparallelogramm besitzt einen Umkreis und ist axialsymmetrisch zur Mittelsenkrechten der Diagonalen; die Diagonalen sind parallel.

Stehen die Längen der benachbarten Seiten eines Antiparallelogramms im Verhältnis $1 : \sqrt{2}$ und hält man eine der beiden längeren Seiten fest, dann beschreibt der Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite eine Bernoullische Lemniskate.
Baut man ein Antiparallelogramm als mechanische Konstruktion mit starren Seiten und Gelenken an den Endpunkten der Geraden auf, so lassen sich damit geradlinige Bewegungen in kreisförmige umwandeln.

Trapez



In einem Trapez ist ein Paar gegenüberliegender Seiten parallel, (a || c)
griech. tetra peza = Vierfuß

Mittellinie $m = (a+c)/2$ $\qquad$ $A = h/2 \cdot (a+c) = mh$

$u = a + b + c + d$ $\qquad$ $h = d \sin \alpha = b \sin \beta$

Sind die vier Trapezseiten a, b, c und d, wobei a und c parallel sind und ist a > c dann gilt für den Flächeninhalt

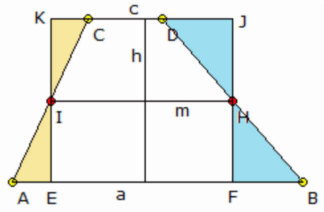
$$A = 1/4\ (a+c)/(a-c)\ \sqrt{(a+b-c+d)\ (a-b-c+d)\ (a+b-c-d)\ (-a+b+c+d)}$$

Für das gleichschenklige Trapez mit b = d wird

$$A = 1/4\ (a+c)\ \sqrt{4b^2 - (a - c)^2}$$

Die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Schenkel eines Trapezes ist seine Mittellinie.
Sind zusätzlich die nichtparallelen Seiten gleich, so ist das Viereck ein gleichschenkliges Trapez oder symmetrisches Trapez.

Ein Trapezoid ist nach dem Brockhaus ein "Nichttrapez", also ein Viereck mit nicht parallelen Seiten. Im Englischen heißt das Trapez trapezium (Plural trapezia) und das Trapezoid ebenfalls trapezoid. Im US-amerikanischen Englisch sind die Begriffe vertauscht. Ein Trapez ist ein trapezoid und ein Trapezoid ist ein trapezium.
Die Diagonalen im Trapez teilen sich im Verhältnis der Seiten a und b. Der Abstand der Diagonalenmittelpunkte ist (a-c)/2.



Trapezfläche

Wird das Trapez wie in der Abbildung angegeben aufgeteilt, können die im unteren Teil abgeschnittenen Dreiecke punktsymmetrisch an den Mittelpunkten I und H der schrägen Seiten nach oben verschoben werden. Somit lässt sich das Trapez in ein Rechteck verwandeln. Es gilt:
Trapez ABCD und Rechteck EFJK sind flächengleich.
Die Rechtecksfläche lässt sich berechnen mit

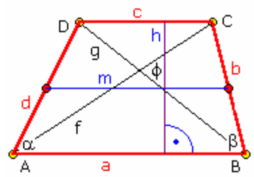
$A = m\ h$ (Rechtecksfläche = Grundseite mal Höhe)

Somit muss die Trapezfläche ebenfalls gleich sein, also ebenfalls

$A = m\ h$ (Trapezfläche = Mittellinie mal Höhe)

Da die Mittellinie m das arithmetische Mittel der beiden Seiten a und c ist, wird $A = (a+c)/2\ h$

Trapez-Berechnungen



Es seien A der Flächeninhalt des Trapezes, a, c die parallelen Seiten, b, d die nicht parallelen Seiten, h die Höhe auf a, α und β die Winkel bei a, f, g die Diagonalen und φ der Winkel zwischen diesen. Dann gilt:

Flächeninhalt

a, c, h	$A = (a+c)/2\ h$
a, b, c, d	$A = 1/4\ (a+c)/(a-c)\ \sqrt{(b+d+c-a)(b+d+a-c)(b+c-a-d)(d+c-a-b)}$
a, b, c, α	$A = 1/2\ b \sin\alpha\ (a+c)$
a, c, α, β	$A = (a^2-c^2) \sin\alpha \sin\beta / \sin(\alpha+\beta) = (a^2-c^2) / (\cot\alpha + \cot\beta)$
a, b, d, α	$A = b/2 \cos\alpha\ (2a - b\cos\alpha - \sqrt{d^2 - b^2 \sin^2\alpha})$
a, b, d, h	$A = 1/2\ \sqrt{b^2-h^2}\ (2a - \sqrt{b^2-h^2} - \sqrt{d^2-h^2})$
a, h, α, β	$A = ah - h^2 \sin(\alpha+\beta) / (2 \sin\alpha \sin\beta)$
f, g, φ	$A = 1/2\ f\ g \sin\phi$

Grundseite a

A, c, h	$a = (2A - ch) / h$
A, b, c, α	$a = 2A / (b \sin\alpha) - c$
A, c, α, β	$a = \sqrt{A\ (\cot\alpha + \cot\beta) - c^2}$
A, h, α, β	$a = 2/h\ (A+h)^2 \sin\alpha \sin\beta$
A, b, d, α	$a = A / (b\cos\alpha) + b/2 \cos\alpha - \sqrt{d^2 - b^2 \sin^2\alpha}$
A, b, d, h	$a = A / \sqrt{b^2 - h^2} - \sqrt{b^2 - h^2} - \sqrt{d^2 - h^2}$
b, c, d, α	$a = c + b\cos\alpha + \sqrt{d^2 - b^2 \sin^2\alpha}$
b, c, α, β	$a = (c \sin\beta + b \sin(\alpha+\beta)) / \sin\beta$
b, c, d, h	$a = c - \sqrt{d^2 - h^2} - \sqrt{b^2 - h^2}$

Seite b

a, c, d, α	$b = \sqrt{d^2 - (a-c)^2 \sin^2\alpha} + (a - c)\cos\alpha$
a, c, d, h	$b = \sqrt{d^2 + (a-c)^2 - 2\ (a - c)\ \sqrt{d^2 - h^2}}$
a, c, α, A	$b = 2A / (\sin\alpha\ (a+c))$

Trapezhöhe h

a, b, c, d	$h = \sqrt{b^2 - ((b^2 + (a-c)^2 - d^2) / (2a - 2c))^2}$
a, c, A	$h = 2A / (a+c)$

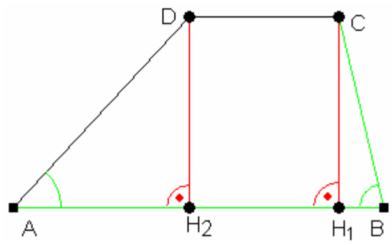
Winkel α

a, b, c, A	$\alpha = \arcsin(2A / (b\ (a+c)))$
a, b, c, d	$\alpha = 90° - \arcsin((a^2 - 2ac + b^2 + c^2 - d^2) / (2b\ (a-c)))$

Diagonale g

f, A, φ	$g = 2A / (f \sin\phi)$
a, d, α	$g = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha}$

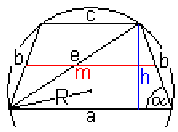
Trapez-Aufgabe



Aufgabe: Berechne ein Trapez mit a||c aus a = 7,4 cm , b = 3,9 cm , α = 47,2° und β = 76,8°.
Lösung:

Man erhält	aus	mit der Gleichung	Lösung
e	a, b, β	$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta$	e = 7,5 cm
h	b, β	$\sin\beta = h/b$	h = 3,8 cm
d	h, α	$\sin\alpha = h/d$	d = 5,2 cm
f	a, d, α	$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha$	f = 5,4 cm
a_1	β, b	$\cos\beta = a_1/b$	a_1 = 0,9 cm

a_2	α, d	$\cos \alpha = a_2/d$	a_2 = 3,5 cm
c	a, a_1, a_2	$c = a - a_1 - a_2$	c = 3,0 cm
A	a, c, h	A = (a+c)/2 h	A = 19,7 cm²



Gleichschenkliges Trapez (b=d)

Dieses Trapez hat folgende Größen: Grundseiten aund c, Schenkel b und b, Mittellinie m, Diagonalen e und e, Höhe h, Radius des Umkreises R, Flächeninhalt A und Umfang u. Drei Größen bestimmen im Allgemeinen eindeutig ein gleichschenkliges Trapez. Gegeben seien Längen a, c und h. Dann gelten die Formeln:

Flächeninhalt $A = (a+c)/2\ h = 1/4\ (a+c) \sqrt{[4b^2 - (a - c)^2]} = (a - d \cos \alpha) \cdot d \sin \alpha = (c + d \cos \alpha) \cdot d \sin \alpha$

Umfang $u = a+c +\sqrt{(4h^2 + a^2 - 2ac + c^2)} = a + 2b + c$

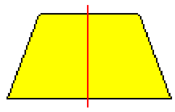
Seite b $b = ½ \sqrt{(4h^2 + a^2 - 2ac + c^2)} = \sqrt{(e^2 - ac)}$

Höhe $h = \sqrt{(4b^2 - a^2 + 2ac + c^2)} / 2 = \sqrt{(4e^2 - a^2 - 2ac - c^2)} / 2 = (a-c)/2 \tan \alpha$

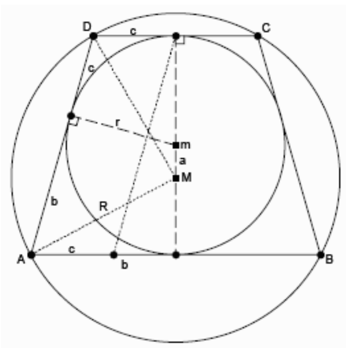
Diagonale $e = ½ \sqrt{(4h^2 + a^2 + 2ac + c^2)} = \sqrt{(b^2 + ac)}$

Umkreisradius $R = \sqrt{(a^4 + c^4 + 16h^4 + 8a^2h^2 + 8c^2h^2 - 2a^2c^2)} / (8h)$

Innenwinkel $\alpha = \arctan (2h/(a-c))$



Das gleichschenklige Trapez ist symmetrisch zu seiner in den Mitten der Grundlinien errichteten Höhe. Es hat zwei gleiche Diagonalen, die einander auf der Symmetrieachse schneiden. Da das gleichschenklige Trapez ein konvexes Sehnenviereck ist, gilt der Satz des Ptolemäus: e² = b²+ac.
Verbindet man die Seitenmitten eines gleichschenkligen Trapezes, so ergibt sich ein Rhombus als Mittenviereck.



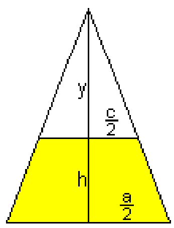
Gleichschenkliges Trapez

Ein gleichschenkliges Trapez besitzt sowohl einen In- als auch einen Umkreis mit den Radien r und R.
Sind AB und CD die parallelen Seiten mit AB = 2b und CD = 2c, dann wird für die Schenkel AD = BC = b+c. Ist h = 2r die Höhe des Trapezes, dann gilt

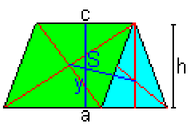
$$h^2 = (b+c)^2 - (b-c)^2 \ ; \ r^2 = bc$$
$$b^2 = R^2 - (r-a)^2 \ ; \ c^2 = R^2 - (r+a)^2$$

Einsetzen und vereinfachen ergibt für den Abstand a des Inkreis- und Umkreismittelpunktes

$$(R^2 - a^2)^2 = 2r^2 (R^2 + a^2)$$
$$1/(R+a)^2 + 1/(R-a)^2 = 1/r^2$$

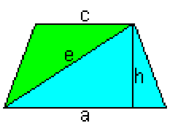


Ergänzungsdreieck: Verlängert man die Schenkel eines gleichschenkligen Trapezes, so entsteht oberhalb des Trapezes ein gleichschenkliges Dreieck. Dieses aufgesetzte Dreieck habe die Höhe y. Nach dem zweiten Strahlensatz gilt y : (c/2) = (y+h) : (a/2).
Daraus folgt y = ch/(a-c).

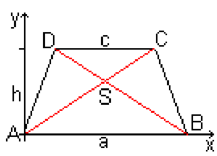


Schwerpunkt: Man findet den Schwerpunkt durch eine Konstruktion. Zerlege das Trapez in ein (grünes) Parallelogramm und ein (blaues) gleichschenkliges Dreieck. Bestimme die Schwerpunkte der beiden Figuren (rot). Verbinde die Schwerpunkte (dunkelblau). Der Schwerpunkt des Trapezes ist der Schnittpunkt dieser Verbindungsgeraden und der Symmetrieachse. Beschreibt man diesen Weg mit Formeln, ergibt sich

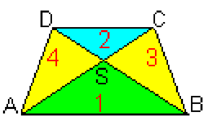
$$y = (1/3h)(a+2c)/(a+c).$$



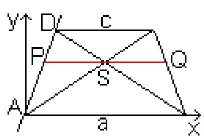
Zwei Teildreiecke: Eine Diagonale teilt das Trapez in zwei Dreiecke mit a bzw. c als Grundseiten und h als gemeinsame Höhe. Für die Flächeninhalte gilt $A_a = ah/2$ und $A_c = ch/2$. Damit stehen die Flächen im Verhältnis $A_a : A_c = a : c$.



Schnittpunkt der Diagonalen: Nach dem zweiten Strahlensatz gilt für die Diagonalen die Proportion AS : SC = a : c. Legt man das Trapez in ein Achsenkreuz, so liegt der Schnittpunkt S der Diagonalen bei S(a/2 | ah/(a+c)).
Herleitung: Es gilt für die Gerade AC: $y = (2h)/(a+c)\ x$ und für BD: $y = -2h/(a+c)x + 2ah/(a+c)$. Der Schnittpunkt ist S.

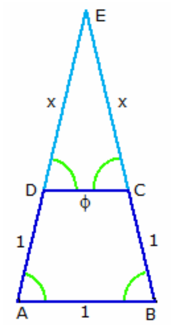


Vier Teildreiecke: Die Diagonalen teilen das Trapez in vier Teildreiecke. Für deren Flächen gilt:
Dreieck ABS: $A_1 = 0.5a^2h/(a+c)$ Dreieck CDS: $A_2 = 0.5c^2h/(a+c)$
Dreieck BCS: $A_3 = 0.5ach/(a+c)$ Dreieck ADS: $A_4 = 0.5ach/(a+c)$
Vergleich: $A_1 : A_2 : A_3 : A_4 = a^2 : c^2 : ac : ac$



Zur Herleitung: s sei die Ordinate des Punktes S. Es gilt s = ah/(a+c) und weiter $A_1 = as/2$ und $A_2 = c(h-s)/2$. Die gelben Dreiecke bestimmt man als Differenz der Gesamtfläche und der Summe der Flächen der beiden gleichschenkligen Dreiecke.

Harmonisches Mittel: Es gilt PQ = 2ac/(a+c), d.h., die Strecke PQ ist das harmonische Mittel der Grundseiten a und c.
Nachweis: Bestimme die Geradengleichungen zu AD und PS und bestimme den Schnittpunkt P. Bestimme PS als Differenz der x-Werte, PQ = 2*PS.
Abbildung: Briefmarke in Trapezform

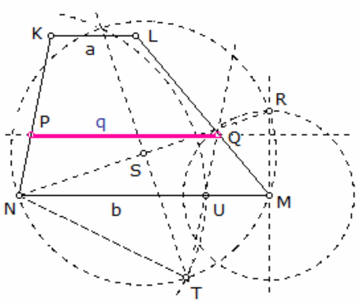


Goldenes Trapez, Dreigleichschenkliges Trapez

Durch Scott Beach wurde das dreigleichschenklige Trapez eingeführt (engl. trisoceles trapezoid). Bei diesem wird gefordert
1. Grund- und Deckseite sind parallel (Trapez!)
2. die Winkel bei A und B sind gleich groß, ebenso die Winkel bei C und D
3. alle Seiten außer der Deckseite sind gleich lang

Dann stehen Deck- und Grundseite im goldenen Verhältnis
$CD / AB = \phi = 0{,}618\ldots$ bzw. $AB / CD = \Phi = 1{,}618\ldots$
Daher wird dieses Trapez auch goldenes Trapez genannt.

Weitere interessante Eigenschaften sind:
Die Trapezdiagonalen halbieren die Winkel bei C und D. Die Winkel bei A, B, C und D sind gleich 78,98984…°. Ergänzt man die schrägen Seiten, so ergibt sich ein gleichschenkliges Dreieck ABE. Da die Dreiecke ABE und CDE ähnlich sind, wird
$1 / (1+x) = \phi / x$ $\quad x = \phi / (1 - \phi)$, d.h. $x = \Phi$
Damit teilen C und D die Dreiecksseiten AE und BE im goldenen Schnitt.
Hat die Seite AB die Länge a, dann wird Seite CD $\quad CD = (\sqrt{5} - 1)/2\ a$
Umfang $u = (\sqrt{5} - 1)/2\ a + 3a$ $\quad$ Flächeninhalt $A = \sqrt{(5/32 \sqrt{5} + 9/32)}\ a^2$



Trapezhalbierung

Gegeben sei ein Trapez KLMN, mit KL || NM, KL = a und NM = b. Gesucht ist eine Strecke parallel zu a, welche die Trapezfläche halbiert.

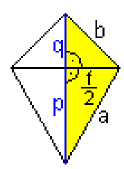
1) Konstruktion einer Senkrechten zu MN im Punkt M und eines Kreises um M mit dem Radius a. Der Schnittpunkt ist R.
Die Strecke RN ist dann nach dem Satz des Pythagoras $RN = \sqrt{(a^2 + b^2)}$.

2) Der Mittelpunkt von RN sei S. Konstruktion einer Senkrechten zu RN im Punkt S und eines Kreises um S durch den Punkt N.
Der Schnittpunkt des Kreises mit der Senkrechten ist der Punkt T.
Dann ist nach Konstruktion $SN = ST = (\sqrt{(a^2 + b^2)})/2$ und $NT = \sqrt{((a^2 + b^2)/2)}$.

3) Ein Kreis um N durch den Punkt T schneide die Strecke NM im Punkt U. Dann ist $NT = NU = \sqrt{((a^2 + b^2)/2)}$.

4) Eine Parallele zu KN durch U schneidet den zweiten Schenkel LM im Punkt Q. Die Parallele zur Basis NM durch Q schneidet KN dann im Punkt P.
Nach Konstruktion ist dann das Viereck PQUN ein Parallelogram und es gilt $PQ = NU = \sqrt{((a^2 + b^2)/2)}$.

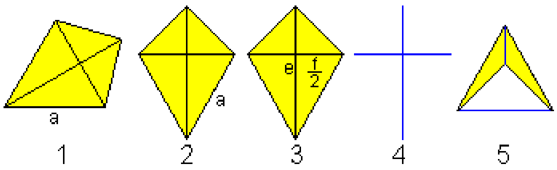
PQ ist dann das quadratische Mittel von a und b und halbiert die Trapezfläche. Für die Höhe h ' des Trapezes PQLK erhält man $h' = h / (b-a)\ (\sqrt{((a^2 + b^2)/2)} - a)$
und für den Flächeninhalt (nach etwas längerer Rechnung) $A_{PQLK} = h/4\ (a+b) = 1/2\ A_{NMLK}$



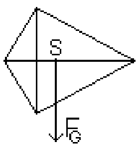
Drachenviereck (a = d, b = c, e ⊥ f)

... besitzt zwei Paare, angerenzender gleich langer Seiten
Ein Viereck heißt Drachenviereck oder Deltoid, wenn es symmetrisch zu einer Diagonalen ist.
Flächeninhalt $A = ef/2 = a^2 \sin\alpha \cos\alpha + x \sin\alpha \sqrt{(b^2 - a^2 \sin^2\alpha)}$
Umfang $u = 2\ (a + b)$
Winkel $\alpha = \angle CAB$ $\quad \alpha = \arccos(-(b^2 - a^2 - e^2) / (2\ ae))$
Diagonalen $e = a \cos\alpha + \sqrt{(b^2 - a^2 \sin^2\alpha)}$ $\quad f = 2\ a \sin\alpha$
Die Diagonale e habe die Abschnitte p und q. Nach dem Satz des Pythagoras gilt $b^2 = q^2+(f/2)^2$ und $a^2 = p^2+(f/2)^2$. Dann ist $b^2-q^2 = a^2-p^2$. Mit q = e-p ergibt sich $p = (a^2-b^2+e^2)/(2e)$ und $q = e-p = (-a^2+b^2+e^2)/(2e)$
Für die Diagonale f ergibt sich außerdem $(f/2)^2 = a^2-p^2 = 2a^2b^2+2a^2e^2+2b^2e^2-a^4-b^4-e^4$, d.h.
$f = (1/e)\ \sqrt{(2a^2b^2+2a^2e^2+2b^2e^2-a^4-b^4-e^4)}$
Setzt man e und f in die Flächenformel ein, wird $A = \sqrt{(2a^2b^2+2a^2e^2+2b^2e^2-a^4-b^4-e^4)}/2$
Die Diagonalen des Drachenvierecks stehen aufeinander senkrecht. Eine Diagonale wird durch die andere halbiert. Eine Diagonale des Drachenvierecks ist seine Symmetrieachse. Sind beide Diagonalen Symmetrieachsen, so entsteht ein besonderes Drachenviereck, der Rhombus.

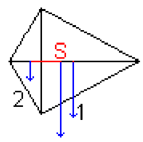
Die Winkel zwischen den ungleichen Seiten des Drachenvierecks sind einander gleich. Das andere Winkelpaar wird durch eine Diagonale halbiert. Im Drachenviereck kann einer der Winkel größer als 180° sein. Zwei gleichschenklige Dreiecke mit gleicher Grundseite bilden ein Drachenviereck, wenn man sie Grundseite an Grundseite zusammenfügt.
Das Drachenviereck besitzt einen Inkreis. Der Mittelpunkt des Inkreises liegt auf der Symmetrieachse und auf der Winkelhalbierenden des Winkels β. Nur für einen Sonderfall des Drachenvierecks gibt es einen Umkreis. Der Mittelpunkt eines Umkreises muss auf der Symmetrieachse und auf den Mittelsenkrechten der Seiten a und b liegen. Diese drei Bedingungen sind nur erfüllt, wenn das halbe Drachenviereck ein rechtwinkliges Dreieck ist.



Diagonalen
1. Im allgemeinen legt man ein Viereck so, dass der Eckpunkt A unten links und die Seite a horizontal liegt.
2. Statt dessen wird das Drachenviereck so gedreht, dass eine Diagonale vertikal steht. Dann liegt die andere Diagonale horizontal.
3. Sind die Diagonalen des Drachenvierecks bekannt, so lässt sich der Flächeninhalt besonders einfach bestimmen. Es gilt A=ef/2.
4. Die Diagonalen bilden ein lateinisches Kreuz. Das Drachenviereck entsteht, wenn man die Endpunkte verbindet.
5. Zur Definition des Drachenvierecks ist das Kreuz nicht brauchbar, denn beim konkaven Drachenviereck entsteht kein Kreuz.

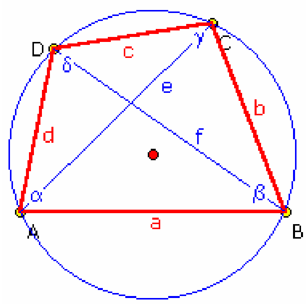


Schwerpunkt
Der Schnittpunkt der Diagonalen kann nicht als Schwerpunkt eines Drachenvierecks angesehen werden kann.
Man erwartet, dass er auf der Symmetrieachse liegt, dass er aber zum größeren gleichschenkligen Dreieck hin verschoben ist, etwa so, wie links dargestellt.
Man findet den Schwerpunkt zeichnerisch, indem man zunächst mit Hilfe der Seitenhalbierenden die Schwerpunkte der gleichschenkligen Dreiecke bestimmt, aus denen das Drachenviereck besteht. Dann trägt man p/3 des rechten Dreiecks vom Schwerpunkt des linken Dreiecks aus auf der Diagonalen ab. Der freie Endpunkt ist der Schwerpunkt.

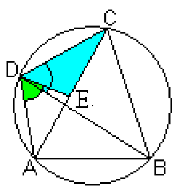


Die Drehmomente der Dreiecke, bezogen auf den Schwerpunkt, heben sich auf und sind dem Betrage nach gleich $F_1s_1 = F_2s_2$.
Die Gewichtskräfte sind proportional den Flächeninhalten: $F_1 = kA' = kfp/2$, $F_2 = kfq/2$.
Dann ist $s_1:s_2 = q:p$. Andererseits ist $p/3+q/3 = s_1+s_2$.
Beide Gleichungen führen zu $s_1 = q/3$ und $s_2 = p/3$.
Ergebnis: Der Schwerpunkt hat die Entfernungen q/3 + 2p/3 und p/3 + 2q/3 von den zwei Eckpunkten.

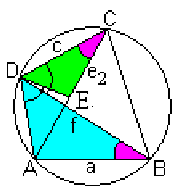
Sehnenviereck
Ein Sehnenviereck ist ein Viereck, welches von vier Kreissehnen gebildet wird $\Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$.
Ein Sehnenviereck ist ein Viereck mit einem Umkreis. Ein Sehnenviereck entsteht, wenn man vier verschiedene Punkte eines Kreises miteinander verbindet.
Schneiden sich die vier Mittelsenkrechten einen Vierecks in genau einem Punkt, dann ist das Viereck Sehnenviereck. Im Englischen wird ein Sehnenviereck zyklisches Viereck (cyclic quadrilateral) genannt.



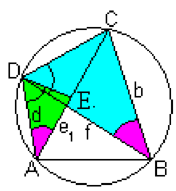
Satz des Ptolemäus a * c + b * d = e * f



Das Produkt der Diagonalen ist gleich der Summe aus den Produkten der Gegenseiten.
Beweis:
Dazu trägt man den blauen Winkel BDC, der zwischen einer Seite und einer Diagonalen liegt, an der Seite AD in D nach innen hin ab. Man erhält die Strecke DE.
Die Diagonale BD zerlegt das Viereck in zwei Dreiecke. Zu diesen Dreiecken gibt es zwei ähnliche:



Das Dreieck AED ist dem Dreieck BDC ähnlich, denn die Dreiecke stimmen in zwei Winkelgrößen überein. Die farblich gekennzeichneten Winkel in D sind laut Konstruktion von E gleich groß. Die rot gekennzeichneten Winkel sind als Umfangswinkel über demselben Bogen CD gleich. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke gilt die Proportion $e_1 : d = b : f$ oder $e_1f = bd$.
Das Dreieck ABD ist dem Dreieck ECD ähnlich, denn die Dreiecke stimmen in zwei Winkelgrößen überein.

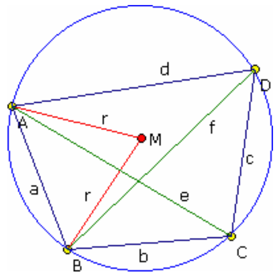


Der blaue und der grüne Winkel in D sind gleich groß, weil beide Winkel von oben um den gleichen Winkel BDE verringert wurden.
Die roten Winkel sind als Umfangswinkel über demselben Bogen AD gleich.

Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke gilt die Proportion $e_2 : c = a : f$ oder $e_2 f = ac$.
Addiert man beide Seiten der Produktgleichungen, so ergibt sich $e_1 f + e_2 f = bd+ac$ oder $ef = bd+ac$, wzbw.

$A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ ... (Herons Vierecksgleichung)
1.Diagonale $e = \sqrt{(ac+bd)(bc+ad)/(ab+cd)}$
2.Diagonale $f = \sqrt{(ac+bd)(ab+cd)/(bc+ad)}$
Umkreisradius $R = 1/4 \sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(bc+ad)/[(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)]}$
Das Sehnenviereck ist das flächenmäßig größte Viereck mit vorgegebenen Seitenlängen a, b, c und d. Ein Sehnenviereck mit rationalen Seitenlänge a, b, c und d, rationalen Diagonalen, Flächeninhalt und Umkreisradius ist: $a = 25$, $b = 33$, $c = 39$, $d = 65$, $e = 60$, $f = 52$, $R = 65/2$, $A = 1344$

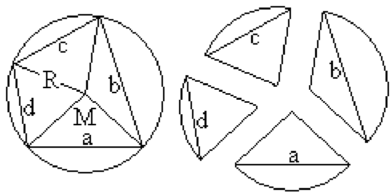
Berechnungen am Sehnenviereck



Eigenschaften: $\alpha + \gamma = 180°$; $\beta + \delta = 180°$ → gegenüberliegende Winkel sind supplementär!
gegeben: d, $\angle$ ADC = δ, $\angle$ DAC, $\angle$ ADB
gesucht: U, e, f, r, A

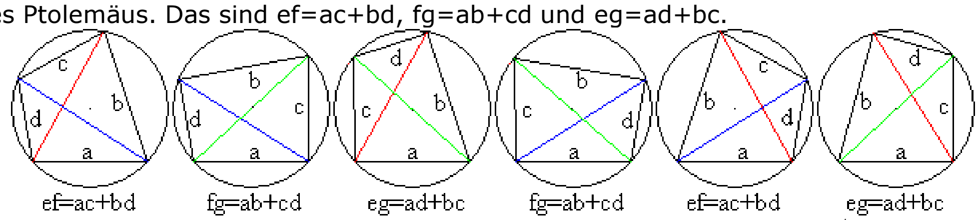
$\angle ACD = 180° - \angle ADC - \angle DAC$
$c = (d \cdot \sin \angle DAC) / \sin \angle ACD$
$e = (d \cdot \sin \angle ADC) / \sin \angle ACD$
$\beta = 180° - \angle ADC$
$\angle BDC = \angle ADC - \angle ADB$
$\gamma = 180° - \angle BDC - \angle DAC$
$\alpha = 180° - \gamma$
$a = (e \cdot \sin \angle ADB) / \sin \beta$
$f = (a \cdot \sin \alpha) / \sin \angle ADB$
$b = (c \cdot \sin \angle BDC) / \sin \angle DAC$
$U = a + b + c + d$
$r = e / (2 \sin \angle ADC)$
$A = (d \cdot c \cdot \sin \angle ADC) / 2 + (a \cdot b \cdot \sin \beta) / 2$

Vierecke aus vier Teilen



Zeichnet man die Radien des Umkreises durch die vier Eckpunkte des Sehnenvierecks, so ergibt sich eine Aufteilung in vier Kreisausschnitte.
Diese Kreisausschnitte kann man zu fünf neuen Sehnenvierecken zusammensetzen.

Erstaunlicherweise ergeben sich nur drei verschiedene Diagonalen. Neben den üblichen Diagonalen e (rot) und f (blau) taucht noch die Diagonale g (grün) auf. Unterhalb der Figuren stehen die Formeln nach dem Satz des Ptolemäus. Das sind ef=ac+bd, fg=ab+cd und eg=ad+bc.



Bildet man ef * eg / fg, so erhält man $e^2 = (ac+bd)(ad+bc)/(ab+cd)$ oder $e = \sqrt{(ac+bd)(ad+bc)/(ab+cd)}$.
ef * fg / eg ergibt $f = \sqrt{(ac+bd)(ab+cd)/(bc+ad)}$, fg * eg / ef ergibt $g = \sqrt{(ab+cd)(ad+bc)/(ac+bd)}$.
Liegt der Mittelpunkt des Umkreises außerhalb des Vierecks, so gelangt man zu den gleichen Formeln.

Satz von Ptolemäus-Euler

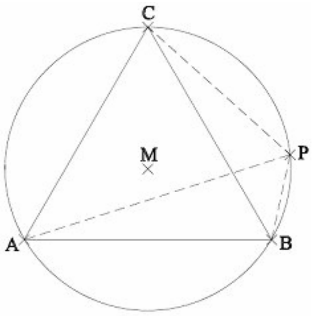
Satz: Für beliebige vier Punkte A, B, C, D in der Ebene gilt
$$AB \cdot CD + BC \cdot DA \geq AC \cdot BD$$
Die Gleichheit gilt genau dann, wenn die vier Punkte auf einem Kreis liegen.
Die Gleichheit wurde von Ptolemäus (100-168) entdeckt und auf die Sehnenvierecke bezogen. Der allgemeine Satz wurde erstmals von Leonard Euler angegeben.

Beweis: Zum Nachweis werden die vier Punkte A, B, C und D durch die zugehörigen komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene ersetzt. Dann sind a, b, c, d die entsprechenden komplexen Zahlen zu A, B, C, D.
Aus der Beziehung $(a - b)(c - d) + (a - d)(b - c) = (a - c)(b - d)$ und der Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen folgt dann:
$$|(a - b)(c - d)| + |(a - d)(b - c)| \geq |(a - c)(b - d)|$$
$$|a - b| \cdot |c - d| + |a - d| \cdot |b - c| \geq |a - c| \cdot |b - d|$$

Die Gleichheit gilt, wenn (a-b)(c-d) / (a-d)(b-c) eine positive reelle Zahl ist (Dreiecksungleichung). Dann ist (a-b)/(a-d) / (c-b)/(c-d) eine negative Zahl und damit

$$\arg((a-b)/(a-d)) / ((c-b)/(c-d)) \equiv \pi \pmod{2\pi}$$
$$\arg(a-b)/(a-d) - \arg(c-b)/c-d) \equiv \pi \pmod{2\pi},$$
$$\arg(p/q) = \arg(p) - \arg(q).$$

Damit liegen a, b, c, d auf einem Kreis, in der gegebenen alphabetischen Reihenfolge.
Das Ausdruck ((a-c)/(a-d)) / ((b-c)/(b-d)) = (a,b,c,d) stellt das Doppelverhältnis für a,b,c,d dar.
Als Folgerung aus dem Satz von Ptolemäus-Euler ergibt sich für ein Rechteck ABCD, dessen Punkte auf dem Umkreis des Rechtecks liegen: $AB^2 + BC^2 = AC^2$
d.h. der Satz des Pythagoras.



Satz von van Schooten

1646 gab Frans van Schooten (geb. 1615 in Leiden, Niederlande; gest. 29.Mai 1660 in Leiden) den nach ihm benannten Satz an:
In einen Kreis ist ein gleichseitiges Dreieck ABC einbeschrieben.
Wählt man auf der Peripherie des Kreises über der Sehne BC einen Punkt P, so gilt: AP = BP + PC

Das Theorem von Frans van Schooten folgt unmittelbar aus dem Satz des Ptolemäus über Sehnenvierecke.
Sind AB = a, BP = b, CP = c, AC = d und die Diagonalen AP = e und CB = f, so wird da das Produkt der Diagonalen gleich der Summe aus den Produkten der Gegenseiten ist. $AB \cdot CP + BP \cdot AC = AP \cdot CB$
Da das Dreieck ABC gleichseitig ist, wird AB = CB = AC = a und

$$AB \cdot CP + BP \cdot AB = AP \cdot AB$$

und folglich das Gesuchte.

Brahmagupta-Gleichung

$$A = \sqrt{[(bc+ad)\ (ac+bd)\ (ab+cd)]} / 4\,R$$; R … Umkreisradius

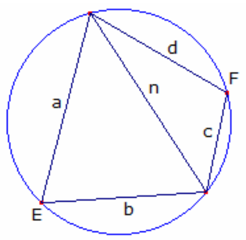
Ist das Viereck sowohl Sehnen- als auch Tangentenviereck gilt

$A = \sqrt{(abcd)}$ $\qquad R = \sqrt{((bc+ad)\ (ac+bd)\ (ab+cd))} / (4 \sqrt{(abcd)})$

Ist dann s der Abstand von Inkreis- zu Umkreismittelpunkt und r der Inkreisradius gilt

$1/(R-s)^2 + 1/(R+s)^2 = 1/r^2 \qquad r = \sqrt{(abcd)} / s$

Das Sehnenviereck eines gegebenen Kreises mit dem größten Flächeninhalt ist stets ein Quadrat.
Betrachtet man die vier Dreiecke, welche von je drei Punkten des Sehnenvierecks gebildet werden, so bilden die Inkreismittelpunkte dieser Dreiecks ein Rechteck.
Die jeweiligen Höhenfußpunkte dieser vier Dreiecke bilden ein Viereck, das Höhenfußpunktviereck. Dieses ist kongruent zum Sehnenviereck.



Beweis der Brahmagupta-Gleichung

Satz: Für ein Sehnenviereck mit den Seiten a, b, c, d gilt:

$$A^2 = (s - a)(s - b)(s - c)(s - d)$$

wobei 2s = a + b + c + d ist.
E und F seien entgegengesetzte Punkte des Sehnenvierecks mit den Winkeln ε und ϕ. Dann gilt, da ε und ϕ sich zu 180° ergänzen, $\cos \varepsilon = - \cos \phi$
Nach dem Kosinussatz ist weiter

$$n^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b \cos \varepsilon \text{ und } n^2 = c^2 + d^2 - 2\,c\,d \cos \phi$$

und weiter $\quad 2(a\,b + c\,d) \cos \varepsilon = a^2 + b^2 - c^2 - d^2 \qquad (*)$

Für den Flächeninhalt A des Sehnenvierecks gilt auch

$$A = 1/2\ a\ b \sin \varepsilon + 1/2\ c\ d \sin \phi = 1/2\ (ab + cd) \sin \varepsilon$$

** $\qquad 2(ab + cd) \sin \varepsilon = 4V$

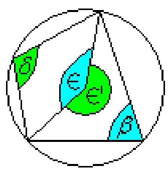
Quadrieren von (*) und (**) gibt, unter Berücksichtigung des trigonometrischen Pythagoras,

$$4\ (ab + cd)^2 = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + 16\ A^2$$
$$16\ A^2 = (2\ ab + 2\ cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$$

Nach einer Reihe weiterer elementarer Termumformungen wird schließlich

$$16\ A^2 = (b + c + d - a)\ (a + c + d - b)\ (a + b + d - c)\ (a + b + c - d)$$
$$16\ A^2 = (2s - 2a)\ (2s - 2b)\ (2s - 2c)\ (2s - 2d)$$
$$A^2 = (s - a)(s - b)(s - c)(s - d)$$

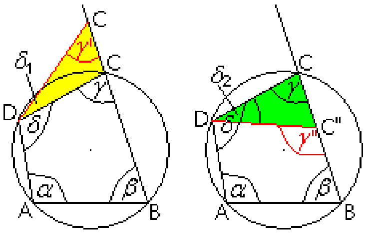
Anmerkung: Setzt man d = 0, d.h. das Sehnenviereck entartet zu einem Dreieck, ergibt sich sofort die Heronsche Dreiecksformel, allerdings unter der scheinbaren Einschränkung eines "Sehnendreiecks". Da aber jedes Dreieck einen Umkreis besitzt, gilt die Gleichung also für alle Dreiecke.



Winkelsatz: Im Sehnenviereck gilt $\alpha + \gamma = 180°$ und $\beta + \delta = 180°$, d.h. gegenüberliegende Winkel ergänzen sich zu 180°. Die Aussage ist umkehrbar ←: Ist in einem Viereck die Summe gegenüberliegender Winkel 180°, so ist es ein Sehnenviereck.

Beweis für die Richtung →:

Es wird der Peripheriewinkelsatz vorausgesetzt. Dann gilt $\beta = \varepsilon/2$ und $\delta = \varepsilon'/2$, außerdem ist $\varepsilon + \varepsilon' = 360°$. Daraus folgt $\beta + \delta = \varepsilon/2 + \varepsilon'/2 = (\varepsilon+\varepsilon')/2 = 360°/2 = 180°$ wzbw.

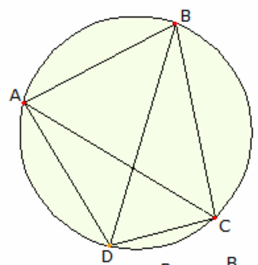


Die Winkelsumme im Viereck ist 360°. Deshalb gilt $\alpha + \gamma = 180°$.
Liegt der Kreismittelpunkt M außerhalb des Vierecks, gilt eine ähnliche Rechnung.

Beweis für die Richtung ←:

Angenommen, C liege außerhalb des Kreises und hieße C'. Dann gilt im gelben Dreieck nach dem Satz von den Außenwinkeln $\gamma = \gamma' + \delta_1$. Daraus folgt $\alpha + \gamma' < 180°$.
Angenommen, C liege innerhalb des Kreises und hieße C''. Dann gilt im grünen Dreieck nach dem Satz von den Außenwinkeln $\gamma'' = \gamma + \delta_2$ oder $\gamma = \gamma'' - \delta_2$. Daraus folgt $\alpha + \gamma'' > 180°$.
Ergebnis: Nur wenn $\alpha + \gamma = 180°$ ist, liegt der Punkt C auf der Kreislinie.

Winkelsatz am Sehnenviereck (2)

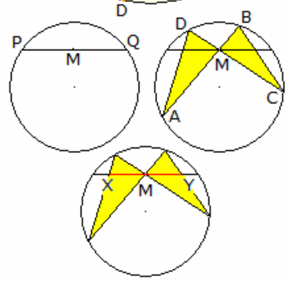


Der Winkelsatz wird schon im Buch IV § 22 (L. 20) von Euklids "Elementen" bewiesen:

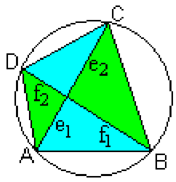
Im jedem einem Kreise einbeschriebenen Viereck sind gegenüberliegende Winkel zusammen zwei Rechten gleich.

Man habe den Kreis ABCD und in ihm das Viereck ABCD. Ich behaupte, dass gegenüberliegende Winkel zusammen zwei Rechten gleich sind.
Man ziehe AC, BD. Da in jedem Dreieck die drei Winkel zusammen = 2 R. sind (I, 32), sind im Dreieck ABC die drei Winkel CAB + ABC + BCA = 2 R. Aber ∠ CAB = BDC; denn sie liegen in demselben Abschnitt BADC (III, 21). Und ∠ ACB = ADB; denn sie liegen in demselben Abschnitt ADCB. Also ist der ganze Winkel ADC = BAC + ACB. Man füge ABC beiderseits hinzu; dann sind ABC + BAC + ACB = ABC + ADC. Aber ABC + BAC + ACB = 2 R.; also sind auch ABC + ADC = 2 R. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch ∠ BAD + DCB = 2 R. - S.

Butterfly Theorem

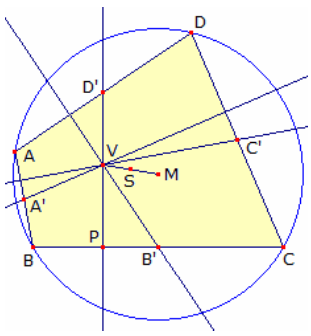


Gegeben sei ein Kreis mit der Sehne PQ und deren Mittelpunkt M.
Durch M werden zwei beliebige Sehnen gezeichnet und die Figur zu einem überschlagenen Sehnenviereck ergänzt. Dann gilt: Die so entstehende Strecke XY wird durch M halbiert.
Quelle: Coxeter, "Geometry Revisited", Seite 45-46, Washington 1967



Aufteilung in Vierecke

Die beiden Diagonalen teilen das Sehnenviereck in vier Teildreiecke auf. Es gilt: Je zwei gegenüberliegende Dreiecke sind ähnlich.
Daraus lässt sich eine Beziehung zwischen den Diagonalenabschnitten ablesen:
$e_1 : f_1 = f_2 : e_2$
Man kann die Gleichung auch als Produktgleichung schreiben: $e_1 e_2 = f_1 f_2$. Das ist der Sehnensatz.



Satz von Mathot

Jules Mathot (Mathesis, 1901):
In einem Sehnenviereck werden von den Mittelpunkten der Seiten die Senkrechten auf die gegenüberliegende Seite gezogen.
Diese Senkrechten schneiden sich dann in einem Punkt V, dem Nebenzentrum des Sehnenvierecks bzw. Mathot-Punkt. Der Mathot-Punkt fällt mit den Euler-Zentrum des Vierecks zusammen.
Im englischen Sprachraum wird der Mathot-Punkt V das Antizentrum des Sehnenvierecks genannt.

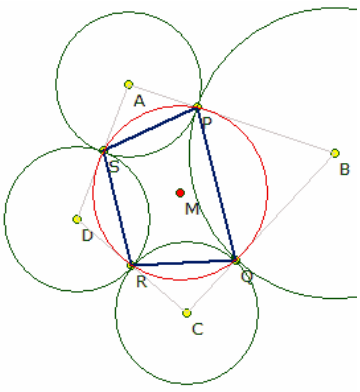
Nachweis: M sei das Umkreiszentrum von ABCD. B' und D' seien die Mittelpunkt der Strecken BC und DA. Dann ist der Schwerpunkt S von Δ BCD der Mittelpunkt von B'D'. Das Spiegelbild V von M am Punkt S liegt damit auf dem Lot D'P durch D' auf BC, da D'P || OB' und OS = SV.
Da dies für jede Senkrechte durch die Seitenmittelpunkt gilt, gilt der Satz.

Folgerung: Die Senkrechten durch die Mittelpunkte der Sehnenviereckdiagonalen auf die andere Diagonale verlaufen ebenfalls durch den Mathot-Punkt.
http://www.pandd.nl/vierh/nevencentr.htm

Sehnenviereck-Aufgabe

12.Führter Mathematik-Olympiade, Klasse 8 - Aufgabe:

Vier verschieden große Münzen berühren sich. Zeige: Es gibt einen Kreis, auf dem alle Berührpunkte liegen.



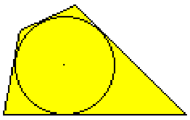
Lösung: Die Münzen haben die Mittelpunkte A, B, C und D; die Berührpunkte sind nach der Zeichnung mit P, Q, R und S bezeichnet.
Da jedes der Dreiecke APS, BQP, CRQ und DSR genau eine Ecke in einer der vier Kreismitten und die beiden anderen Ecken jeweils auf derselben Kreislinie hat, sind alle Dreiecke gleichschenklig. Nach Zeichnung ist

$\angle RSP + \angle RQP = (180° - \angle DSR - \angle ASP) + (180° - \angle CQR - \angle BQP)$
$= (180° - \angle DRS - \angle APS) + (180° - \angle CRQ - \angle BPQ)$
$= (180° - \angle DRS - \angle CRQ) + (180° - \angle APS - \angle BPQ)$
$= \angle SRQ + \angle SPQ.$

Da die Innenwinkelsumme eines Vierecks 360° beträgt, gilt die Gleichheit

$\angle RSP + \angle RQP = \angle SRQ + \angle SPQ = 180°$

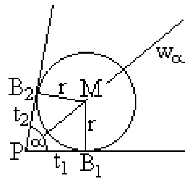
Damit ist das Viereck PQRS ein Sehnenviereck, da sich gegenüber liegende Winkelpaare jeweils zu 180° ergänzen. Das Viereck besitzt somit einen Umkreis.

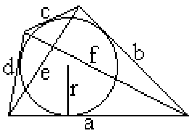


Tangentenviereck

Ein Tangentenviereck ist ein Viereck mit einem Inkreis. Die Seiten sind Tangenten.
... Viereck, welches von vier Kreistangenten gebildet wird ⇔ $a + c = b + d$
→ $A = \rho s = (a+c)\ \rho = (b+d)\ \rho$
Umfang $u = 2\ (a+c) = 2\ (b+d)$ Inkreisradius $\rho = 2A / u$

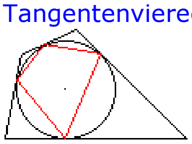
Es gibt zwei Tangenten, die den Kreis in den Punkten B_1 und B_2 berühren. Die Berührradien stehen senkrecht auf den Tangenten. Es ist eine achsensymmetrische Figur mit der Gerade PM als Symmetrieachse entstanden. Damit sind die rechtwinkligen Dreiecke PB_1M und PB_2M kongruent. Die Tangentenabschnitte t_1 und t_2 sind gleich.



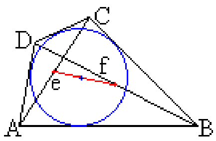


Es gibt eine Beziehung zwischen den Seiten, den Diagonalen und dem Radius des Inkreises: $r = \sqrt{[4e^2f^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2]}/[2(a+b+c+d)]$
Bekannten Vierecke sind auch Sehnenvierecke; es sind die Raute, als ihr Sonderfall das Quadrat, und das Drachenviereck.
Es gibt Trapeze, die auch Tangentenvierecke sind. Dazu zeichnet man an einen Kreis zwei horizontal liegende Parallelen. Zwei weitere Tangenten rechts und links an den Kreis ergänzen die Figur zum Viereck.

Tangentenviereck um ein Sehnenviereck



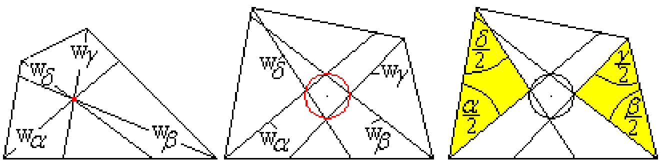
Gibt man ein Sehnenviereck vor, so kann man dazu ein Tangentenviereck finden. Man zeichnet in den Berührpunkten die Tangenten. Gibt man ein Tangentenviereck vor, so kann man umgekehrt dazu ein Sehnenviereck finden. Man verbindet die Berührpunkte.



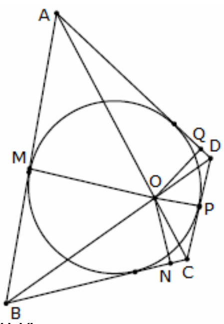
Verbindet man die Mittelpunkte der Diagonalen, so liegt der Mittelpunkt des Inkreises auf der Verbindungslinie.

Viereck aus den Winkelhalbierenden

Der Mittelpunkt des Inkreises eines Tangentenvierecks ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden. Zeichnet man in ein beliebiges Viereck die Winkelhalbierenden ein, so entsteht im allgemeinen ein Sehnenviereck.



Beweis: Es ist zu zeigen, dass zwei Gegenwinkel des Vierecks die Summe 180° haben.
Dazu betrachtet man zuerst die gelben Dreiecke. Der dritte Winkel ist $180° - \alpha/2 - \delta/2$ bzw. $180° - \beta/2 - \gamma/2$. Diese Winkel sind die Scheitelwinkel zweier gegenüberliegenden Winkel des Vierecks in der Mitte. Addiert man sie, erhält man $360°-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)/2=180°$, wzbw.



Tangentenviereck

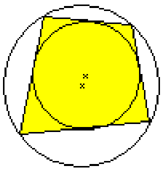
Satz von Miculete (Nicusor Miculete, 2009):
Ein konvexes Viereck ABCD, dessen Diagonalen sich im Punkt O schneiden, ist genau dann Tangentenviereck, wenn

$1/d(O,AB) + 1/d(O,CD) = 1/d(O,BC) + 1/d(O,DA)$

gilt, wobei d(O,AB) der Abstand von O zur Strecke AB ist, usw.

Satz von Iosifescu: Ein konvexes Viereck ABCD ist genau dann Tangentenviereck, wenn $\tan x/2 \cdot \tan z/2 = \tan y/2 \cdot \tan w/2$
gilt, wobei x, y, z, w die Winkel ABD, ADB, BDC und DBC sind.

Satz von Wu: Sind r1, r2, r3, r4 die Inkreisradien der Dreiecke ABO, BCO, CDO und DAO, so ist das konvexe Viereck ABCD Tangentenviereck, genau dann, wenn $1/r1 + 1/r3 = 1/r2 + 1/r4$



Bizentrische Vierecke, Sehnentangentenvierecke

Vierecke, die sowohl Sehnen- als auch Tangentenviereck sind, d.h. einen In- und einen Umkreis besitzen. Ein Beispiel ist das Quadrat.
Nach Fuss (1798; Fuss-Problem) gilt dann:

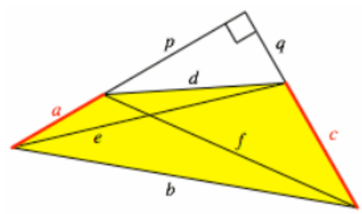
$$2 r^2 (R^2 - s^2) = (R^2 - s^2)^2 - 4 r^2 s^2$$

wobei r der Inkreisradius, R der Umkreisradius und s der Abstand der beiden Kreismittelpunkte sind.

Weiterhin wird $a + c = b + d$ $r = \sqrt{abcd} / s$

$$R = 1/4 \sqrt{[(ac + bd) (ad + bc) (ab + cd) / (abcd)]}$$
$$1/ (R - s)^2 + 1/ (R + s)^2 = 1/r^2$$

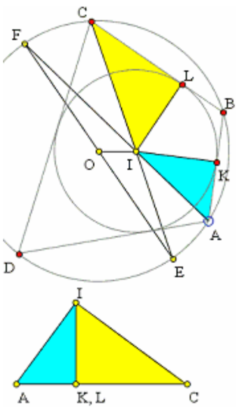
Flächeninhalt $A = \sqrt{abcd}$



Orthopez

Viereck, bei welchem zwei gegenüberliegende Seiten orthogonal sind, heißt Orthopez. Ein Orthogramm in der Ebene ist ein Viereck mit orthogonalen gegenüberliegenden Seiten.

Satz 1: In einem Orthopez ist die Summe der Quadrate der beiden nicht orthogonalen Seiten gleich der Summe der Quadrate der Diagonalen.
Beweis (siehe Abbildung):
Es ist $b^2 + d^2 = (a+p)^2 + (c+q)^2 + p^2 + q^2$ $e^2 + f^2 = (a+p)^2 + q^2 + p^2 + (c+q)^2$
also $b^2 + d^2 = e^2 + f^2$
Satz 2: Die Diagonalen eines Orthogrammes sind orthogonal.
Satz 3: Ein Orthopez mit orthogonalen Diagonalen ist ein Orthogramm.



Fuss-Theorem

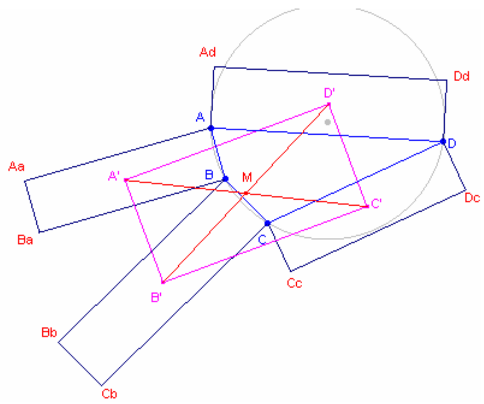
Sind R der Umkreisradius, r der Inkreisradius und d der Abstand der zwei Kreismittelpunkte in einem Sehnentangentenviereck, so gilt

$$1/(R - d)^2 + 1/(R + d)^2 = 1/r^2 \quad d = \sqrt{r \sqrt{r^2 + 4R^2} + r^2 + R^2}$$

Nachweis: O(R) sei der Umkreis, I(r) der Inkreis und K, L die Inkreisberührungspunkte an AB und BC. Dann ist $\angle BAI + \angle ICB = 90°$
Nach Konstruktion ist IK = IL = r. Die Dreiecke AIK und CIL können zu einem rechtwinkligen Dreieck kombiniert werden, mit
(1) $r \cdot (AK + CL) = AI \cdot CI.$ und (2) $(AK + CL)^2 = AI^2 + CI^2$
d.h. $r^2 \cdot (AI^2 + CI^2) = AI^2 \cdot CI^2$ oder (3) $1/r^2 = 1/AI^2 + 1/CI^2$
AI und CI schneiden den Umkreis in F und E. Dann ist EF Durchmesser von C(R), da

$$\angle DOF + \angle DOE = 2 (\angle DAF + \angle DCE) = \angle BAD + \angle BCD = 180°$$

Im Dreieck EFI wird dann für IO
(4) $EI^2 + FI^2 = 2 IO^2 + EF^2 / 2 = 2 (d^2 + R^2)$
Nach dem Sehnensatz wird für Sehnen durch I bezüglich des Umkreises
(5) $AI \cdot FI = CI \cdot EI = R^2 - d^2$
Aus (4) und (5) wird
(6) $1/AI^2 + 1/CI^2 = FI^2/(R^2 - d^2)^2 + EI^2/(R^2 - d^2)^2 = (EI^2 + FI^2) / (R^2 - d^2)^2 = 2 (R^2 + d^2) / (R^2 - d^2)^2$
und $1/r^2 = 2 (R^2 + d^2) / (R^2 - d^2)^2 = [(R + d)^2 + (R - d)^2)] / (R^2 - d^2)^2 = 1/(R + d)^2 + 1/(R - d)^2$
Der Satz und Beweis wurde von dem deutschen Mathematiker Nicolaus Fuss (1755-1826) erstmals 1798 gefunden.



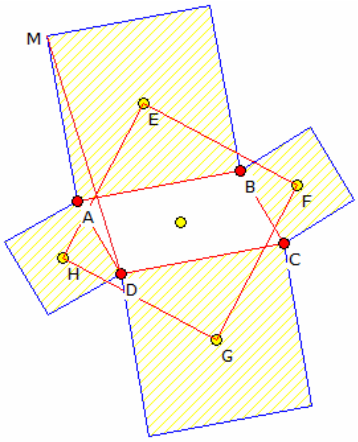
van Aubel-Rechteck

Gegeben sei ein konvexes Sehnenviereck ABCD eines Kreises. Auf den Seiten des Vierecks werden Rechtecke errichtet deren zweite Seite gerade der im Viereck ABCD gegenüberliegenden Strecke kongruent ist. Die entstehenden Vierecke haben die Schwerpunkte A', B', C' und D'.
Dann ist A'B'C'D' ein Rechteck, das van Aubel-Rechteck. Ist ABCD ein Trapez, so ist das van Aubel-Rechteck ein Quadrat.
zum Beweis siehe
http://www.pandd.demon.nl/lemoine/vanaubel2.htm

Satz von Thébault, Thébault-Viereck

Durch den französischen Mathematiker Victor Thébault (1882-1960) wurde 1938 folgender Satz veröffentlicht:

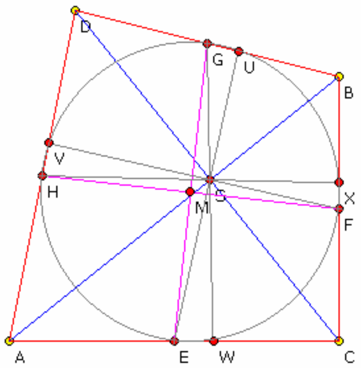
"On se donne un parallélogramme ABCD, quelconque, puis extérieurement, quatre carrés construits sur les côtés du parallélogramme. Si E, F, G et H désignent les centres de ces carrés placés comme ci-dessous, alors EFGH est également un carré."

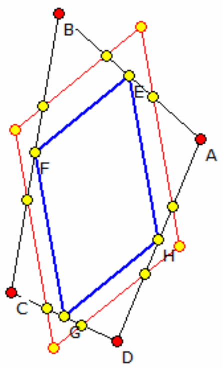


d.h. Werden auf die Seiten eines Parallelogramms ABCD Quadrate aufgesetzt, so bilden die Mittelpunkte E, F, G und H dieser Quadrate stets ein weiteres Quadrat.
Für die Seitenlänge EF des Quadrates gilt dann EF = 1/2 DM √2

8-Punkte-Kreis-Theorem

Ist ABCD ein Viereck mit senkrecht aufeinander stehenden Diagonalen, so bilden die Seitenmittelpunkte E, F, G und H ein Parallelogramm, dessen Seiten zu den Diagonalen von ABCD parallel sind.
Weiterhin seien U, V, W und X die Schnittpunkte, welche gefunden werden, indem von den Seitenmittelpunkten E, F, G und H die Geraden durch den Diagonalenschnittpunkt des Ausgangsvierecks gezogen werden.
Dann liegen die acht Punkte E, F, G, H und U, V, W und X auf einem Kreis.





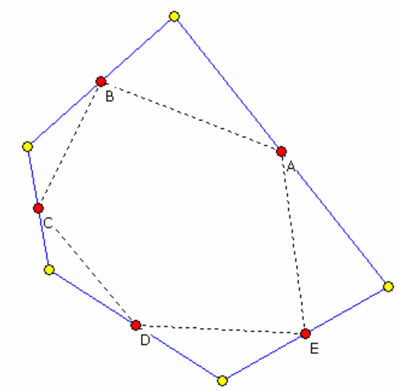
Varignon-Parallelogramm

nach Pierre Varignon (1654-1722)
Verbindet man die Mittelpunkte der Seiten eines beliebigen (auch nichtkonvexen) ebenen Vierecks, so entsteht ein Parallelogramm, dessen Flächeninhalt halb so groß wie der des Vierecks ist.

Anmerkung: EFGH bilden auch im Raum ein ebenes Parallelogramm, wenn A, B, C und D vier beliebige Punkte im Raum sind.
Verschiebt man die Diagonalen des Vierecks ABCD durch die Eckpunkte, so schneiden sich diese Geraden paarweise in vier Punkten. Auch diese Schnittpunkte bilden wieder ein Parallelogramm, das Außen-Varignon-Parallelogramm.
Das Varignon-Parallelogramm und das Außen-Parallelogramm gehen aus einer zentrischen Streckung mit dem Streckungsfaktor k = 2 und dem Diagonalenschnittpunkt des Vierecks als Streckungszentrum hervor.
Stehen die Diagonalen des konvexen Vierecks ABCD senkrecht aufeinander, so sind die Varignon-Parallelogramme Rechtecke. Sind die Diagonalen gleich lang, entstehen Rhomben.

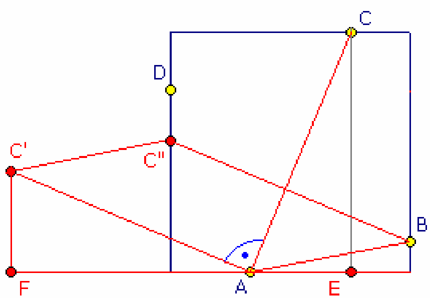
Wittenbauer-Parallelogramm

Werden die Seiten des Vierecks ABCD gedrittelt und die entstehenden Punkte paarweise verbunden, so schneiden sich die Verbindungsgeraden in vier Punkten.
Diese vier Punkte bilden ebenfalls ein Parallelogramm, das Wittenbauer-Parallelogramm.



Mittelpunktfünfeck

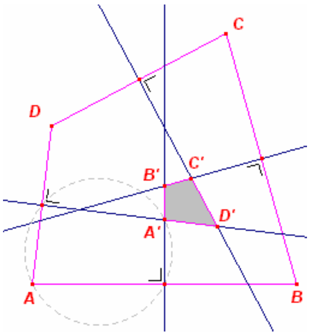
In Analogie zum Varignon-Parallelogramm kann man Polygone betrachten, deren Eckpunkte die Mittelpunkte von n-Ecken sind, wobei n größer als 4 ist, bzw. die Frage stellen, ob man aus den Mittelpunkten das Ausgangspolygon ermitteln kann. Da das Varignon-Viereck stets ein Parallelogramm ist, gibt es für vier beliebige Punkte nicht immer ein Viereck, welches diese Punkte als Seitenmittelpunkte besitzt. Mit etwas Aufwand kann sogar gezeigt werden, dass bei einer geraden Anzahl 2n von Punkten nicht immer ein 2n-Eck existiert.
Anders ist der Sachverhalt bei einer ungeraden Anzahl 2n+1 von Ausgangspunkten (n>1). Dann existiert stets genau ein 2n+1 Eck, für dass die Ausgangspunkte die n-Eckseiten halbieren.
Insbesondere existieren für n = 5 das Mittelpunktfünfeck und für n = 3 das Mittendreieck.



Quadrat durch vier Punkte

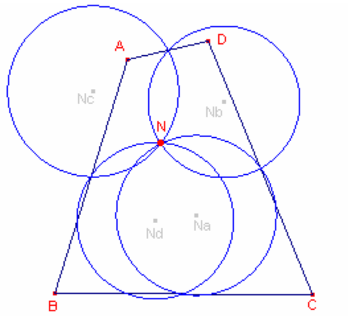
Aufgabe: Gegeben sind vier Punkte A, B, B und D in der Ebene. Gesucht ist ein Quadrat, so dass auf jeder, evtl. verlängerten, Quadratseite genau einer der Punkte liegt.
Lösung:
Angenommen ein solches Quadrat wäre gegeben. Dreht man dann

die Strecke AC um A mit einem Winkel von 90° und verschiebt den entstandenen Punkt C' parallel so, dass A auf B zum Liegen kommt, so ergibt sich ein Punkt C".
Die Gerade durch D und C", die dazu Parallele durch B und die Senkrechten durch A und C auf diese Geraden bilden dann eines der gesuchten Quadrate.
Begründung: Die rechtwinkligen Dreiecke ACE und AC'F sind kongruent und lassen sich mit der beschriebenen Drehverschiebung ineinander überführen. Der Abstand der konstruierten Geradenpaare ist FA = CE.
Da die Wahl der Anfangsstrecke und die Dreh richtung verändert werden können, existieren mehrere Lösungen, insgesamt 6. Da es 6 Kreispermutationen der vier Punkte und je zwei Drehrichtungen gibt, wären eigentlich 12 Lösungen zu erwarten. Je zwei sind aber identisch.



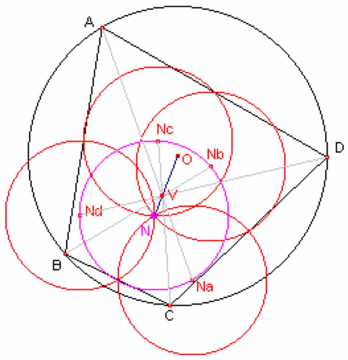
Mittelsenkrechte am Viereck

In jedem beliebigen Dreieck schneiden sich die Mittelsenkrechten in einem Punkt. Dies gilt auch für Sehnenvierecke. Im allgemeinen Viereck, das keinen Umkreis besitzt, gilt dies nicht.
Die Mittelsenkrechten schneiden sich dort in vier Punkten. A' sei der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von AB und AD, B' von BA und BC, usw.
Dann gilt:
Die Außenwinkel des Vierecks A'B'C'D' sind den entsprechenden Innenwinkeln im Viereck ABCD gleich.
Beweis: Das Viereck, dass von A, A' und den Mittelpunkten der Seiten AB und AD gebildet wird, ist ein Sehnenviereck und somit $\alpha + \alpha' = 180°$. wzzw.
Weiterhin gilt: Die Winkel zwischen den Diagonalen der Vierecke ABCD und A'B'C'D' sind gleich groß.



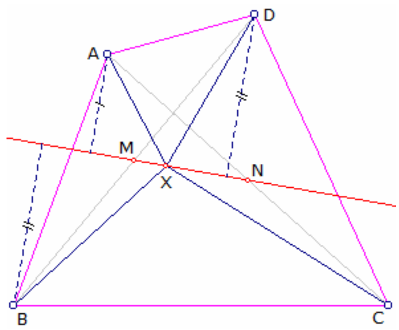
Euler-Punkt am Viereck

Gegeben sei ein beliebiges konvexes Viereck ABCD.
Zeichnet man die Diagonalen ein, so entstehen vier Diagonaldreiecke, d.h. Dreiecke mit 3 Eckpunkten des Vierecks. Für diese Dreiecke werden die Eulerschen Kreise eingezeichnet.
siehe Eulerscher Kreis am Dreieck.
Dann gilt:
Die Eulerschen Kreise der vier Diagonaldreiecke eines Vierecks schneiden sich in einem Punkt, dem Euler-Punkt am Viereck.



Besonders interessant wird dies für ein Sehnenviereck (untere Abbildung).
Dann gilt zusätzlich:
Die Mittelpunkt der vier Eulerschen Kreise sind konzyklisch, d.h. sie liegen auf einem Kreis.
Der Mittelpunkt des Euler-Kreises am Viereck ist der Euler-Punkt des Vierecks. Verbindet man die Eckpunkte des Vierecks mit dem Mittelpunkten der Eulerschen Kreise, so schneiden sich die Strecken in einem Punkt V, der Ähnlichkeitszentrum ist.

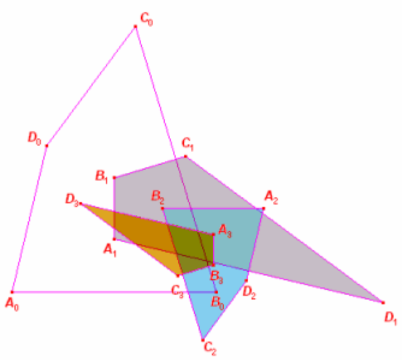
Newton-Gerade, Satz von Anne



1850 veröffentlichte der französische Mathematiker Pierre-Léon Anne (geb. 1806 in Rouaan) einen Satz über allgemeine Vierecke:
ABCD sei ein Viereck, das kein Parallelogramm ist. Der geometrische Ort aller Punkt X, für die

$$F(XAB) + F(XCD) = F(XBC) + F(XAD)$$

gilt, ist eine Gerade durch die Mittelpunkte der Viereckdiagonalen.
Dabei ist F() der Flächeninhalt des Dreiecks.
Diese Gerade durch die Diagonalenmitten wird Newton-Gerade des Vierecks genannt.
Auf dieser Geraden liegt auch der Schnittpunkt der zwei Verbindungsstrecken der Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten.
Ist das konvexe Viereck ein Tangentenviereck, so liegt der Mittelpunkt seines Inkreises ebenfalls auf der Newton-Geraden.

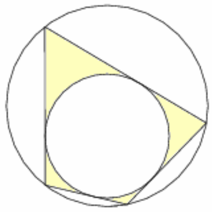


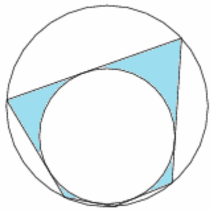
Folge von Vierecken

nach Darij Grinberg:
Gegeben sei ein Nicht-Sehnenviereck $A_0B_0C_0D_0$. Von diesem wird das Viereck $A_1B_1C_1D_1$ durch die Mittelsenkrechten der Seiten gebildet. Von diesem Viereck wird wiederum das Mittelsenkrechten-Viereck

konstruiert. Damit ensteht eine Folge von Vierecken $A_iB_iC_iD_i$.
Dann gilt: Die Vierecke $A_iB_iC_iD_i$ mit i = 0, 2, 4, ... sind zueinander ähnlich, die mit i = 1, 3, 5, ... ebenso.

Beweis: Auf der Seite Mittelsenkrechte am Viereck wird gezeigt, dass Außenwinkel des Vierecks $A_1B_1C_1D_1$ den entsprechenden Innenwinkeln im Viereck $A_2B_2C_2D_2$ gleich sind. Damit sind die Innenwinkel in $A_0B_0C_0D_0$ und $A_2B_2C_2D_2$ gleich.
Aus der Konstruktion folgt, dass die entsprechenden Seiten dieser Vierecke parallel sind, da B_1 und D_1 die Mittelpunkte des Umkreises von $A_0B_0C_0$ und $C_0D_0A_0$ sind, womit B_1D_1 Mittelsenkrechte von A_0C_0 ist.
Ebenso ist A_2C_2 Mittelsenkrechte von B_1D_1, so dass $A_2C_2 \parallel A_0C_0$. Damit sind die Diagonalen von $A_0B_0C_0D_0$ und $A_2B_2C_2D_2$ parallel.
Damit sind die Vierecke ähnlich.





Allgemeines Fuss-Theorem

Nach dem Fuss-Theorem gilt an einem Sehnentangentenviereck (bizentrisches Viereck) für den Inkreisradius r, den Umkreisradius R und den Abstand d der zwei Kreismittelpunkte

$$1/(R - d)^2 + 1/(R + d)^2 = 1/r^2 \qquad d = \sqrt{r \sqrt{r^2 + 4R^2} + r^2 + R^2}$$

Dieses Theorem kann auf beliebige bizentrische Vielecke, d.h. Vielecke mit In- und Umkreis erweitert werden. Nicolaus Fuss (1802) und Jacob Steiner (1827) gaben die Beziehungen für das Fünf- bis Achteck.

Fünfeck, Fuss-Fünfecksatz
Mit p = R+d und q = R-d wird

$$(p^2q^2 - r^2(p^2+q^2)) / (p^2q^2 + r^2(p^2-q^2)) = \pm\sqrt{(q-r)/(p+q)}$$

bzw. $r (R-d) = (R+d) \sqrt{(R-r+d) (R-r-d)} + (R+d) \sqrt{2R (R-r-d)}$

Sechseck $\quad 3p^4q^4 - 2p^2q^2r^2 (p^2+q^2) = r^4 (p^2-q^2)^2$

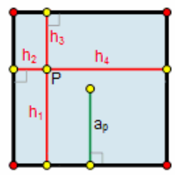
$$3(R^2-d^2)^4 = 4r^2 (R^2+d^2) (R^2-d^2)^2 + 16r^4 d^2 R^2$$

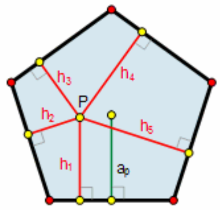
Siebeneck $\quad (pq - r(p-q) - 2r^2)\, 2pqr \sqrt{(p-r)(p+q)} + (p^2q^2 - r^2(p^2+q^2))\, 2r \sqrt{(q-r)(p+q)} = \pm(pq - r(p-q)) (p^2q^2 + r^2(p^2-q^2))$

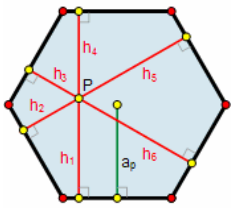
Achteck $\quad (r^2 (p^2+q^2) - p^2q^2)^4 = 16\, p^4q^4r^4 (p^2-r^2)(q^2-r^2)$

Zehneck $\quad (((p^4 -(p^2q^2-a^2)^2)^2 + (q^4 -(p^2q^2-p^2)^2)^2 + (p^4q^4 -(p^2-q^2)^2)^2) / (p^4q^4 - (p^2-q^2)^2))^2 = 16\, p^2q^2 (p^2-1) (q^2-1)$

Allgemeiner Satz von Viviani



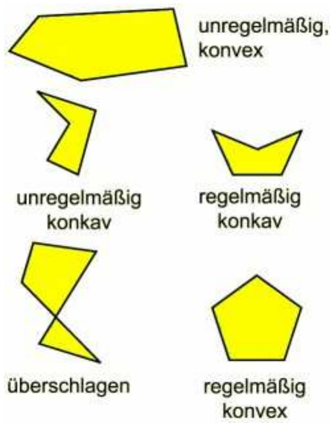


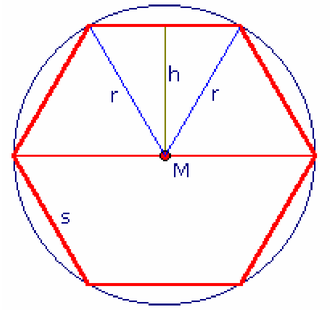


Nach dem Satz von Viviani gilt in jedem gleichseitigen Dreieck, dass die Summe der Abstände eines innerhalb des Dreiecks befindlichen Punktes von den Seiten konstant ist.
Dieser Satz kann auf regelmäßige N-Ecke erweitert werden. Es gilt:
Liegt in einem regelmäßigen N-Eck ein Punkt P, so ist die Summe der Abstände von P zu den N-Eckseiten gleich dem n-fachen Apothem, d.h. dem n-fachen Inkreisradius.

In den Abbildungen gilt damit für das Quadrat $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = 4\, a_p$
für das Fünfeck $\quad h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 = 5\, a_p$
und für das Sechseck $\quad h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6 = 6\, a_p$

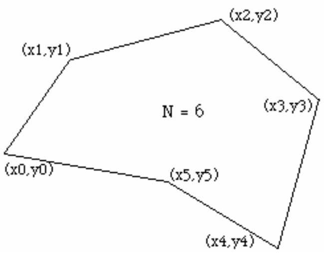
Vieleck





Eine Vieleck ist eine geschlossene Figur in der Ebene, die nur aus Strecken besteht. Die Strecken sind die Seiten des Vielecks, sie stoßen an den Ecken zusammen.Das Vieleck oder Polygon (griech. polys = viel, gonia = Winkel) wird durch seine n Ecken bezeichnet, es wird auch n-Eck genannt.

Vielecke mit gleich langen Seiten, heißen regelmäßig.
Befinden sich alle Diagonalen des Vielecks vollständig innerhalb des Vielecks, so ist dieses konvex (lat. convexus = gewölbt), andernfalls konkav.
Vielecke mit sich gegenseitig schneidenden Seiten heißen überschlagene Vielecke. Für Fünfecke findet man damit fünf verschiedene Möglichkeiten (siehe Abbildung).



Polygonschwerpunkt
Das Problem von einem beliebigen konvexen oder konkaven Polygon den Flächeninhalt und den Schwerpunkt S zu bestimmen, ist relativ einfach.

Gegeben sei ein Polygon mit n Ecken (x_i, y_i), i = 0 … n-1. Die letzte Ecke (x_{n-1}, y_{n-1}) ist mit der ersten verbunden, so dass das Vieleck geschlossen ist.
Weiterhin sei zur Berechnung $x_n = x_0$ und $y_n = y_0$.
Dann gilt für die Fläche $A = 1/2\ \Sigma_{i=0}^{n-1} (x_i\ y_{i+1} - x_{i+1}\ y_i)$
Diese Gleichung gilt nicht für sich selbstschneidende Vierecke.
Für die Koordinaten des Schwerpunktes S(x_s , y_s) wird dann

$x_s = 1/(6A)\ \Sigma_{i=0}^{n-1} (x_i + x_{i+1}) (x_i\ y_{i+1} - x_{i+1}\ y_i)$

$y_s = 1/(6A)\ \Sigma_{i=0}^{n-1} (y_i + y_{i+1}) (x_i\ y_{i+1} - x_{i+1}\ y_i)$

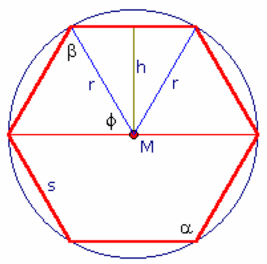
Gleichseitiges Polygon
Ein gleichseitiges Polygon ist ein Polygon, bei dem alle Seiten gleich lang sind. Ein sowohl gleichseitiges als auch gleichwinkliges Polygon wird regelmäßiges Polygon genannt.
In einem gleichseitigen Polygon sind alle Seiten zueinander kongruent.

Ein gleichseitiges Dreieck ist gleichzeitig auch ein gleichwinkliges Dreieck mit Innenwinkeln 60°. Ein gleichseitiges Viereck ist ein Rhombus.
Ein Sehnenpolygon ist genau dann regelmäßig, wenn es gleichseitig ist. Ein Tangentenpolygon ist genau dann gleichseitig, wenn die Innenwinkel zwischen zwei Werten alternieren.

Gleichwinkliges Polygon
Ein gleichwinkliges Polygon ist ein Polygon, bei dem alle Innenwinkel gleich groß sind.
Da sich Innen- und Außenwinkel an den Ecken eines Polygons zu 180° ergänzen, sind in einem gleichwinkligen Polygon auch alle Außenwinkel gleich groß.

Ein gleichwinkliges Dreieck ist gerade ein gleichseitiges Dreieck mit Innenwinkeln zu 60°.
Ein gleichwinkliges Viereck ist ein Rechteck. Ein Sehnenpolygon ist genau dann gleichwinklig, wenn die Seitenlängen zwischen zwei Werten alternieren.

Regelmäßige N-Ecke



Ein Vieleck heißt ein regelmäßiges N-Eck, wenn seine n Seiten und seine n Winkel gleich groß sind.
Bezeichnung:
n … Eckenzahl , s … Seitenlänge, s_{2n} … Seitenlänge des 2n-Ecks
r … Radius des umbeschriebenen Kreises
ρ … Radius des einbeschriebenen Kreises

Innenwinkel $\alpha = (2n-4)/n * 90°$
Zentriwinkel $\phi = 360°/n$
Außenwinkel $\alpha^* = 360°/n$
Innenwinkelsumme $(n - 2)\ 180°$
Flächeninhalt $A = n/2 \cdot r^2 \cdot \sin (2\pi/n) = n\ \rho^2 \tan (\phi/2) = s^2\ n/4 \cot (\pi/n) = n\ s^2/4 \cot (\phi/2)$
$A = s^2\ n/4 \tan \beta = s^2\ n/4 \tan (90°\ (n-2)/n) = h^2\ n \tan (\phi/2) = h^2\ n \tan (\pi/n)$
$A = s/2 \cdot n \cdot \sqrt{(r^2 - s^2/4)} = s/2 \cdot h \cdot n = h \cdot n \cdot \sqrt{(r^2 - h^2)}$
Umfang $u = n\ s$

Seitenlänge s $s = 2 \sqrt{A/n \tan(\phi/2)} = 2 \sqrt{A/n \tan(\pi/n)} = 2 r \sin(\phi/2) = 2 r \sin(\pi/n)$

$s = 2 h \tan(\phi/2) = 2 h \tan(\pi/n) = 2 \sqrt{r^2 - h^2} = \sqrt{2r^2 + \sqrt{4r^4 - 16A^2/n^2}} = 2A / (h\, n)$

Inkreisradius, Apothem

$\rho = h = 1/2 \sqrt{4r^2 - s^2} = r \cos 180°/n$

$h = \sqrt{A/n \cot \phi/2} = \sqrt{A/n \cot(\pi/n)}$

$h = s/2 \cot \phi/2 = s/2 \cot(\pi/n) = s/2 \tan \beta = \sqrt{r^2/2 + \sqrt{r^4/4 - A^2/n^2}}$

Umkreisradius $r = s / (2 \sin 180°/n) = s / (2 \cos \beta)$; $r^2 = \rho^2 + 1/4\, s^2$

$r = \sqrt{2A / (n \sin \phi)} = \sqrt{2A / (n \sin(\pi/n))} = h / \cos \phi/2 = h / \cos(\pi/n)$

$r = 1/(2s \cdot n) \sqrt{s^4 n^2 + 16 A^2} = 1/(h \cdot n) \sqrt{n^4 n^2 + A^2}$

Anzahl der Diagonalen im n-Eck $= (n-3)*n/2$

Seitenlänge des 2n-Ecks $s_{2n} = \sqrt{2r^2 - r \sqrt{4r^2 - s_n^2}}$

Näherung für Seite des regelmäßigen Neunecks $s \approx (2\sqrt{5} + 1)/8\, r \approx 0{,}684016994374\, r$

Beziehungen an regelmäßigen N-Ecken

Ein Vieleck heißt ein regelmäßiges N-Eck, wenn seine n Seiten und seine n Winkel gleich groß sind.

Bezeichnung:

n … Eckenzahl , s … Seitenlänge, s_{2n} … Seitenlänge des 2n-Ecks

r … Radius des umbeschriebenen Kreises, ρ … Radius des einbeschriebenen Kreises

Gregory-Formel $(s_{2n})^3 = (2\, s_{2n} + s_n)\, (s_{4n})^2$

Formel von Schwab

Sind R_n und r_n die Radien von Um- und Inkreis eines regelmäßigen n-Ecks und R_{2n} und r_{2n} die entsprechenden Radien beim 2n-Eck mit gleichem Umfang, so gilt:

$r_{2n} = (r_n R_n)/2 \quad R_{2n} = \sqrt{R_n r_{2n}}$

Regelmäßiges 17-Eck

Darstellung für den Kosinus des Zentriwinkels des regelmäßigen 17-Ecks

$= -1/16 + 1/16 \sqrt{17} + 1/16 \sqrt{34-2\sqrt{17}} + 1/8 \sqrt{17+3\sqrt{17} - \sqrt{34-2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34+2\sqrt{17}}} =$

$= 0{,}932472229404355804573115891821563386262587777794511\ldots$

Seitenlänge des 17-Ecks im Einheitskreis nach Gauß

$s_{17} = 1/2 \sqrt{1/2\, (17 - \sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}) - \sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}}$

Siebzehneckflächeninhalt

$A = 17/4\, a^2\, (\sqrt{\sqrt{- \sqrt{19/32768 \sqrt{17} + 85/32768} + 3/256 \sqrt{17} + 17/256} + \sqrt{17/512 + 1/512 \sqrt{17}} + 1/32 \sqrt{17} + 15/32}\ \sqrt{-32 / (\sqrt{- \sqrt{608 \sqrt{17} + 2720} + 12 \sqrt{17} + 68} + \sqrt{34 - 2 \sqrt{17}} + \sqrt{17} - 17)})$

Seitenlängen und Flächeninhalt in Abhängigkeit von r und n

n	Seitenlänge s	Flächeninhalt
3	$\sqrt{3}\, r$	$3/4\, r^2 \sqrt{3}$
4	$\sqrt{2}\, r$	$2 r^2$
5	$r/2 \cdot \sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$5/8\, r^2 \sqrt{10+2\sqrt{5}}$
6	r	$3/2\, r^2 \sqrt{3}$
8	$r \sqrt{2 - \sqrt{2}}$	$2 r^2 \sqrt{2}$
10	$r/2 \cdot (\sqrt{5}-1)$	$5/4\, r^2 \sqrt{10-2\sqrt{5}}$
12	$r \sqrt{2- \sqrt{3}}$	$3 r^2$
15	$r/2 \cdot \sqrt{7 - \sqrt{5} - \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}}$	$15/8\, r^2 \sqrt{7 + \sqrt{5} - \sqrt{30 + 6\sqrt{5}}}$
16	$r \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$	$4 r^2 \sqrt{2 - \sqrt{2}}$
17	0,367 499 04 r	$3{,}0706\, r^2$
20	$r \sqrt{2 - \sqrt{(5 + \sqrt{5})/2}}$	$5/2\, r^2 \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$
24	$r \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$	$6 r^2 \sqrt{2 - \sqrt{3}}$
n		$s \cdot r \cdot n/2 \cdot \sqrt{1 - s^2(4r^2)}$

Inkreisradien ρ und Umkreisradien in Abhängigkeit von n

n	Inkreisradien ρ	Umkreisradien r
3	$s/6 \sqrt{3}$	$s/3 \sqrt{3}$
4	$s/2 = r/2 \sqrt{2}$	$s/2 \sqrt{2}$
5	$s/10 \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = r/4 (\sqrt{5} + 1)$	$s/10 \sqrt{50 + 10\sqrt{5}}$
6	$r/2 \sqrt{3}$	s
8	$r/2 \sqrt{2 + \sqrt{2}} = s/2 (\sqrt{2} + 1)$	$s/2 \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$
10	$s/2 \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = r/3 \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$	$s/2 \sqrt{1 + \sqrt{5}}$

Seitenlänge $s = 2 r \sin(\pi/n)$; siehe auch vorherige Seite

Näherungsverhältnis von Umkreisradius r zur Seitenlänge s

n	Verhältnis r:s	n	Verhältnis r:s
3	0,577	4	0,707
5	0,851	6	1

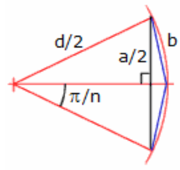
7	1,152	8	1,307
9	1,462	10	1,618
11	1,775	12	1,932
13	2,089	14	2,247
15	2,405	16	2,563
17	2,721	18	2,879
19	3,038	20	3,196

Für regelmäßige Vielecke gilt der Satz: Unter allen n-Ecken, die einem Kreis einbeschrieben sind, hat das regelmäßige den größten Flächeninhalt. Der Satz ist einleuchtend, der Beweis ist aber nicht einfach.

Ist $P_0P_1P_2 \ldots P_{n-1}$ ein in einen Einheitskreis eingeschriebenes regelmäßiges N-Eck, so gilt

$$P_0P_1 \cdot P_0P_2 \cdot \ldots \cdot P_0P_{n-1} = n$$

$$\sin(\pi/n) \cdot \sin(2\pi/n) \cdot \ldots \cdot \sin((n-1)\pi/n) = n/2^{n-1}$$



Verhältnis von N-Eckumfangs zum Umkreisdurchmesser

n	N-Eck	Verhältnis Umfang/Durchmesser = na / d = n sin(π/n)
2	Zweieck	2
3	Dreieck	2,598 076 211… = $3/2\ \sqrt{3}$
4	Quadrat	2,828 427 125… = $2\ \sqrt{2}$
5	Fünfeck	2,938 926 261… = $5/2\ \sqrt{(5-\sqrt{5})/2}$
6	Sechseck	3
8	Achteck	3,061 467 459… = $4\ \sqrt{2-\sqrt{2}}$
10	Zehneck	3,090 169 944… = $5\ (\sqrt{5} - 1)/2$
12	Zwölfeck	3,105 828 541… = $3\ (\sqrt{3} - 1)\ \sqrt{2}$
15	Fünfzehneck	3,118 675 363… = $15/8\ (\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{3}\ (\sqrt{5} - 1))$
16	Sechzehneck	3,121 445 152… = $8\ \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$
17	Siebzehneck	3,123 741 803… = $17\ \sqrt{(1-c)/2}$ mit
	$c = (2\sqrt{[17+3\sqrt{17}-\sqrt{2(17-\sqrt{17})}- 2\sqrt{2(17+\sqrt{17})}]} + \sqrt{2(17-\sqrt{17})} - 1 + \sqrt{17})/16$	
20	Zwanzigeck	3,128 689 301… = $5\ \sqrt{8 - 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$
24	Vierundzwanzigeck	3,132 628 613… = $6\ \sqrt{8 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}}$
30	Dreißigeck	3,135 853 898… = $15/4\ [\sqrt{30 - 6\sqrt{5}} - \sqrt{5} - 1]$
∞	Kreis	3,141 592 654… = π

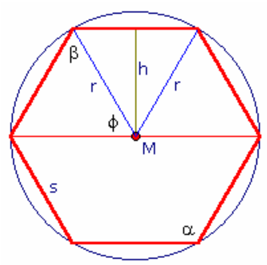
N-Eck-Bezeichnungen, Namen von N-Ecken

Neben den deutschen Namen für die Bezeichnung von N-Ecken mit unterschiedlichen Eckenzahlen werden auch international übliche Fachbegriffe verwendet. Allgemein bekannt sind Pentagon oder Hexagon.

Die Tabelle enthält neben der deutschen Bezeichnung die aus dem Griechischen abgeleiteten Namen.

Seitenzahl	N-Eck-Namen
1	Henagon, Monogon
2	Digon, Zweieck
3	Dreieck
4	Viereck
5	Fünfeck, Pentagon
6	Sechseck, Hexagon
7	Siebeneck, Heptagon
8	Achteck, Oktagon
9	Neuneck, Enneagon
10	Zehneck, Dekagon
11	Elfeck ,Hendekagon
12	Zwölfeck, Dodekagon
13	Drezehneck, Tridekagon, Triskaidekagon
14	Vierzehneck, Tetradekagon
15	Fünfzehneck, Pentadekagon, Pentakaidekagon, Quindekagon
16	Sechzehneck, Hexadekagon, Hexakaidekagon
17	Siebzehneck, Heptadekagon, Heptakaidekagon, Septadekagon
18	Achtzehneck, Oktadekagon, Oktakaidekagon
19	Neuzehneck, Enneadekagon, Enneakaidekagon, Nonadekagon
20	Zwanzigeck, Ikosagon

Verdopplung eines Polygons



Gegeben sei ein regelmäßiges Polygon mit n Seiten. In den gleichen Umkreis werde das regelmäßige 2n-Eck eingeschrieben. Dessen Größen sind die Seite s*, der Flächeninhalt A*, das Apothem h*, der Zentriwinkel ϕ^* und der Innenwinkel α^*. Dann gilt im Verhältnis zum N-Eck:

$$\phi^* = \phi/2\ ;\ \alpha^* = 90° + \alpha/2$$

Flächeninhalt 2n-Eck

$$A^* = s/2\ r\ n = a/2\ n \sqrt{a^2/4 + h^2} = r\ n \sqrt{r^2 - h^2} = 1/4 \sqrt{s^4 n^2 + 16 A^2}$$
$$A^* = r/2 \sqrt{2r^2n^2 + n \sqrt{4r^4n^2 - 16 A^2}} = 1/(2n) \sqrt{A^2 + A^4 / (h^4 n^2)}$$

Seite 2n-Eck

$$s^* = \sqrt{2r^2 - 2r \sqrt{r^2 - s^2/4}} = \sqrt{s^2/2 + 2h^2 - 2h \sqrt{s^2/4 + h^2}}$$
$$s^* = \sqrt{2r (r - h)}$$

Apothem 2n-Eck

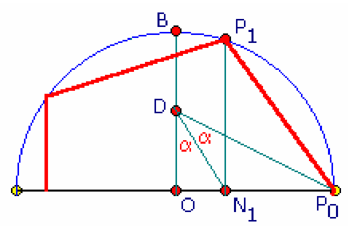
$$h^* = \sqrt{r^2/2 + r/2 \sqrt{r^2 - s^2/4}} = \sqrt{r/2 (r + h)}$$
$$h^* = a/2 \sqrt{s^2/4 + h^2} / \sqrt{s^2/2\ 2h^2 - 2h \sqrt{s^2/4 + h^2}}$$

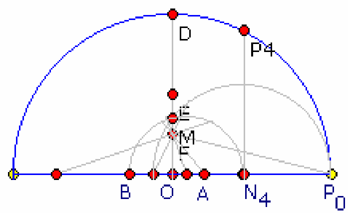
Umgekehrt ergeben sich die Stücke des n-Ecks aus denen des 2n-Ecks mit

$$A = s^*/r^2 (r^2 - s^{*2}/2) \sqrt{r^2 - s^{*2}/4}\ n$$
$$A = a^*\ h^*\ n\ (h^{*2} - s^{*2}/4) / (h^{*2} + s^{*2}/4)$$
$$A = 2h^*n/r^2 (2 h^{*2} - r^2) \sqrt{r^2 + h^{*2}} = A^*/(r^2 n) \sqrt{r^4n^2 - 4 A^{*2}}$$
$$A = A^* (16 A^{*2} - s^{*4} n^2) / (16 A^{*2} + s^{*4} n^2)$$
$$A = A^* (h^{*4} n^2 - A^{*2}) / (h^{*4} n^2 + A^{*2})$$
$$s = 1/r \sqrt{4s^{*2} r^2 - s^{*4}} = a^*/r \sqrt{4r^2 - s^{*2}}$$
$$s = 4a^*h^* \sqrt{1 / (a^{*2} + 4h^*2)} = 4h^*/r \sqrt{r^2 h^{*2}}$$
$$h = (r^2 - s^{*2}/2) / r = (2h^{*2} - r^2) / r = (h^{*2} - s^{*2}/4) / \sqrt{h^{*2} + s^{*2}/4}$$

Sind die Flächeninhalte A und A* des n-Ecks und 2n-Ecks bekannt, können die anderen Größen berechnet werden:

Umkreisradius	$r = \sqrt[4]{A^{*2} / (n^2 (A^{*2} - A^2))} = \sqrt{A^*/n \sqrt{1 / (A^{*2} - A^2)}}$
Seite n-Eck	$s = 2 \sqrt[4]{(A^{*2} - A^2) / n^2}$
Seite 2n-Eck	$s^* = 2 \sqrt[4]{A^{*2}/n^2 (A^* - A) / (A^* + A)} = 2 \sqrt{A^*/n \sqrt{(A^*-A)/(A^*+A)}}$
Apothem h	$h = \sqrt[4]{A^4 / (n^2 (4A^{*2} n^2 - A^2))}$
Apothem h*	$h^* = \sqrt[4]{(A^{*3} + A A^{*2}) / (n^2 (A^* - A))}$





Konstruierbarkeit von N-Ecken

Satz von Gauß: Es sind ausschließlich diejenigen regelmäßigen N-Ecke mit Zirkel und Lineal konstruierbar, deren ungerade Eckenzahl n ein Produkt Fermatscher Primzahlen

$$f = 2^{2k} + 1$$

(alle in 1.Potenz) ist. Bekannt sind die Fermatschen Primzahlen f = 3, 5, 17, 257, 65537

Euklid gelang es schon N-Ecke mit n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16, 20, 24, 32, 48 und 64 zu konstruieren. Dass die obige Bedingung hinreichend ist, konnte der 19jährige Gauß im Jahre 1796 nachweisen.

Er gab auch die Konstruktionsbeschreibung für das regelmäßige 17-Eck an. Die Notwendigkeit der Beziehung bewies 1836 Wantzel. Eine weitere 17-Eck-Konstruktion gaben 1825 Pauker und Erdinger an.

Für genau 24 Zahlen n unter 100 lässt sich ein n-Eck konstruieren: 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96.

257-Eck

Da 257 Fermatsche Primzahl ist, kann das regelmäßige 257-Eck allein mit Zirkel und Lineal konstruiert werden.

1832 gaben Richelot und Schwendenwein eine vollständige Konstruktionsbeschreibung. Eine Abbildung eines regelmäßigen 257-Ecks ist für das menschliche Auge schon "fast" ein Kreis. Tragen Sie im Teilprogramm

257 Ecken ein, so unterscheidet sich das 257-Eck, selbst bei einem relativ großen Radius, computerdarstellungsbedingt nicht mehr von einem Kreis.

65537-Eck

65537 ist die größte bekannte Fermatsche Primzahl und damit das regelmäßige 65537-Eck eindeutig konstruierbar. Das 65537-Eck ist bei normalen Druck- und Darstellungsmethoden nicht mehr von einem Kreis unterscheidbar.

Um 1900 verbrachte Hermes in Königsberg 10 Jahre mit der Konstruktionsbeschreibung des N-Ecks. Nach dem 2.Weltkrieg ging das Manuskript an das Mathematische Institut in Göttingen über.

1	1
1 1	3
1 0 1	5
1 1 1 1	15
1 0 0 0 1	17
1 1 0 0 1 1	51
1 0 1 0 1 0 1	85
1 1 1 1 1 1 1 1	255
1 0 0 0 0 0 0 0 1	257

Durch Gardner (1977) wurde festgestellt, dass die ungeraden Seitenzahlen der konstruierbaren regelmäßigen N-Ecke durch Interpretation der Zeilen eines Sierpinski-Dreiecks als Binärzahlen gefunden werden können: 1, 3, 5, 15, 17, 51, 85, 255, … (siehe Abbildung)

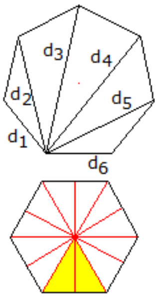
Soll ein regelmäßiges N-Eck konstruiert werden, bei dem n mehr als eine Fermatsche Primzahl als Teiler enthält, so kombiniert man die Mittelpunktswinkel geeignet.

Zum Beispiel ergibt für n = 15 die Differenz zweier Mittelpunktswinkel eines regelmäßigen Fünfecks (2 · 72°) mit dem Zentriwinkel des regelmäßigen Dreiecks (120°) gerade den gesuchten Zentriwinkel von 24° des regelmäßigen Fünfzehnecks.
Nach der Gaußschen Theorie ist ein N-Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn N das Produkt zweier Fermatscher Primzahlen p_1, p_2 ist. Die Konstruktion ergibt sich aus der Konstruierbarkeit des Zentriwinkels $2\pi/(p_1\, p_2)$ durch Vervielfachen bzw. Antragen der Zentriwinkel $2\pi/p_1$ und $2\pi/p_2$ mit

$$2\pi/(p_1\, p_2) = z_1\, 2\pi/p_1 + z_2\, 2\pi/p_2$$

Das Verfahren ist auch auf drei oder mehr Fermatsche Primzahlen als Faktoren erweiterbar:

$$2\pi/(p_1\, p_2\, p_3) = z_1'\, 2\pi/p_3 + z_2'\, (z_1\, 2\pi/p_1 + z_2\, 2\pi/p_2)$$



N-Eck-Diagonalen

Es ist praktisch, die Diagonalen eines Vielecks mit d_i zu bezeichnen. Für i = 1 und i = n-1 ergeben sich damit die Seiten des N-Ecks. Es ist $d_i = a \sin(180°\, i/n) / \sin(180°/n)$

Anzahl der Diagonalen unterschiedlicher Länge

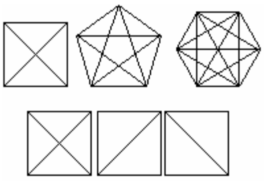
Man erhält die Anzahl der verschieden langen Diagonalen, wenn man nur einen Punkt mit allen Eckpunkten verbindet, d.h. n-1 Strecken; abzüglich der beiden beiden Seiten, d.h. n-3. Schließlich halbiert man die Anzahl und erhält (n-3)/2. Diese Überlegung gilt aber nur für Vielecke mit ungerader Eckenzahl.
Ist die Anzahl der Ecken des Vielecks gerade, so ist eine Diagonale Symmetrieachse und tritt nur einmal auf. Deshalb ist die Anzahl gleich (n-3+1)/2 = (n-2)/2 bei geradem n.
Ergebnis: Die Anzahl ist

(n-3)/2, falls n ungerade ist, und (n-2)/2, falls n gerade ist.

Symmetrie

Jedes regelmäßige Vieleck ist punktsymmetrisch, das Symmetriezentrum ist der Mittelpunkt
n-fach drehsymmetrisch, bei einer Drehung um 360°/n kommt das Vieleck wieder zur Deckung
spiegelsymmetrisch, es gibt n Symmetrieachsen

Ist die Eckenzahl gerade, so verläuft eine Symmetrieachse immer durch zwei Eckpunkte oder durch zwei Seitenmitten. Ist die Eckenzahl ungerade, so verläuft eine Symmetrieachse immer durch einen Eckpunkt und eine Seitenmitte



Aufteilung in Vielecke

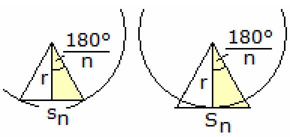
Zeichnet man in eine Vieleck alle Diagonalen ein und beachtet ihre Schnittpunkte, so ergibt sich das Problem der Aufteilung des regelmäßigen Vielecks in verschiedene Vielecke.
Das sind beim Viereck 4, beim Fünfeck 11 und beim Sechseck 24 Vielecke.
Die ersten Glieder der Folge sind 1, 4, 11, 24, 50, 80, 154, 220, 375, 444…
Für ungerade n lautet die Formel allgemein:

$$A(n) = (24 - 42n + 23n^2 - 6n^3 + n^4)/24$$

Für gerade n ist sie wesentlich komplizierter.

Alle Dreiecke im Vieleck

Das Viereck hat 4+2+2 = 8 Dreiecke. Eine Formel für die Anzahl aufzustellen ist schwierig, da man auch gerade und ungerade Vielecke unterscheiden muss. Es gibt manchmal Mehrfachschnittpunkte.
Die ersten Glieder der Folge sind 1, 8, 35, 110, 287, 632,…



Kreis in Vielecken

In der Archimedischen Methode zur Bestimmung der Kreiszahl π wählt man zu einem Kreis mit dem Radius r ein Sehnenvieleck und ein Tangentenvieleck. Man bestimmt für beliebiges n die Umfänge u_n und U_n der Vielecke und lässt n über alle Grenzen gehen.

Intervallschachtelung

Sehnenvieleck	Es gilt $\sin(180°/n) = s_n/(2r)$ oder $s_n = 2r \sin(180°/n)$
Tangentenvieleck	Es gilt $\tan(180°/n) = S_n/(2r)$ oder $S_n = 2r \tan(180°/n)$
Umfänge	$u_n = n \cdot s_n = 2r \cdot n \sin(180°/n)$ und
	$U_n = n \cdot S_n = 2r \cdot n \tan(180°/n)$.

Dann gilt die Intervallschachtelung $u_n < U' < U_n$

$$2rn \sin(180°/n) < U' < 2rn \tan(180°/n)$$

$$n \sin(180°/n) < U'/2r < n \tan(180°/n)$$

Mit Hilfe dieser Ungleichungskette kann π beliebig genau bestimmt werden.
Zahlenbeispiel n=100:

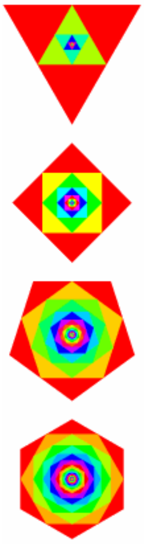
$100 \sin 1{,}8° < \pi < 100 \tan 1{,}8°$ oder $3{,}1410 < \pi < 3{,}1426$.

Für die Flächeninhalte erhält man die Intervallschachtelung

$$(1/2)n \sin(360°/n) < A'/r^2 < n \tan(180°/n)$$

Mit Hilfe eines Computeralgebrasystems findet man:

$u_4 = 4\sqrt{2}\, r \approx 5{,}65685\, r$
$u_8 = 8\sqrt{2-\sqrt{2}}\, r \approx 6{,}12293\, r$
$u_{16} = 16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\, r \approx 6{,}24288\, r$
$u_{32} = 32\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\, r \approx 6{,}27310\, r$
$U_8 = (16\sqrt{2} - 16)\, r \approx 6{,}62741\, r$
$U_{16} = (\sqrt{2048\sqrt{2} + 4096} - 32\sqrt{2} - 32)\, r \approx 6{,}36521 \cdot r$
$U_{32} = (\sqrt{\sqrt{56\sqrt{2} + 80} + 4\sqrt{2} + 8} - \sqrt{2\sqrt{2} + 4} - \sqrt{2} - 1) \cdot 64\, r \approx 6{,}3034498 \cdot r$

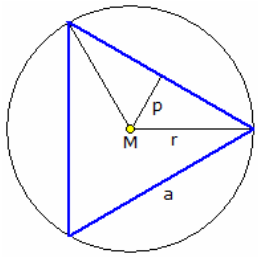


Geschachtelte Polygone

Interessante Muster entstehen, wenn in regelmäßige Polygone ähnliche Polygone eingeschachtelt werden,
Dabei soll der Umkreisradius des umgegebenen Vielecks der Inkreis des eingeschachtelten Vielecks sein. Derartige Konstruktionen werden im Teilprogramm »Polygonteilung als Muster 18 durchgeführt.
Für ein Ausgangsquadrat mit der Seitenlänge a wird für die Gesamtsumme der Flächeninhalte jedes zweiten(!) eingeschachtelten Vierecks

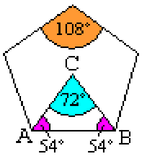
$$A = \Sigma_{n=0}^{\infty} (-1)^n/2^n\, a = 2/3\, a$$

Regelmäßiges Dreieck, Gleichseitiges Dreieck



In einem regelmäßigen Dreieck haben alle Seiten des Dreiecks die gleiche Länge a, alle Innenwinkel sind gleich 60°, $\alpha = \beta = \gamma = 60°$.
Im gleichseitigen Dreieck fallen die Höhen, die Winkelhalbierenden, die Seitenhalbierenden und die Mittelsenkrechten zusammen. Sie schneiden sich im Mittelpunkt M des Dreiecks. Die Mittellinien liegen parallel zu einer Seite und sind halb so groß wie sie.
Sind a die Seitenlänge, r der Umkreisradius, h die Höhe, p das Apothem und A der Flächeninhalt, so gilt

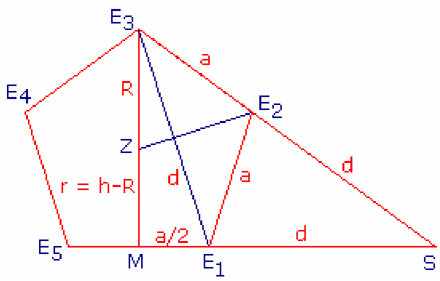
Seite a	$a = \sqrt{4A / \sqrt{3}} = r\sqrt{3} = 2p\sqrt{3} = 2h / \sqrt{3}$
Höhe des Dreiecks	$h = a/2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{\sqrt{3}\, A} = 3/2\, r$
Umkreisradius	$r = a/3 \cdot \sqrt{3} = 2p = 2/3 \sqrt{A\sqrt{3}}$
Inkreisradius, Apothem	$p = a/6 \cdot \sqrt{3} = r/2 = 1/3 \sqrt{A\sqrt{3}}$
Dreieckflächeninhalt	$A = a^2/4 \cdot \sqrt{3} = 1/2\, a\, h = h^2 / \sqrt{3} = 3/4\, r^2 \sqrt{3} = 3\, p^2 \sqrt{3}$
Fläche des In- bzw. Umkreises	$A_h = \pi/12\, a^2$ $\quad A_r = \pi/3\, a^2$



Regelmäßiges Fünfeck

Ein regelmäßiges Fünfeck oder regelmäßiges Pentagon ist ein Vieleck mit fünf Ecken, fünf gleich langen Seiten und fünf gleich großen Innenwinkeln.
Der Winkel an der Spitze des Bestimmungsdreiecks bzw. der Mittelpunkswinkel ist 360°/5 = 72°. Dann sind die Winkel an der Basis 54°. Der Innenwinkel eines Fünfecks hat folglich die Größe 108°.
Ein regelmäßiges Fünfeck ist im allgemeinen durch die Seitenlänge a gegeben.
Daraus lassen sich der Flächeninhalt A, der Umfang u, die Radien r und ρ von Um- und Inkreis, die Länge d der Diagonalen, das Apothem h (= Inkreisradius) und die Höhe h berechnen:

Diagonale	$d = (1+\sqrt{5})/2\, a$	
Höhe	$h = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}/2\, a$	
Umkreisradius	$r = \sqrt{50 + 10\sqrt{5}}/10\, a$	$= 0{,}8506508\ldots\, a$
	$r = p\,(\sqrt{5} - 1)$	$= 1{,}2360680\ldots\, p$
	$r = \sqrt{4/5\, A \sqrt{(5 - \sqrt{5})/10}}$	$= 0{,}6485251\ldots \sqrt{A}$
Apothem	$p = 1/4\, r\, (1 + \sqrt{5})$	$= 0{,}8090170\ldots\, r$
	$p = \sqrt{A/5 \sqrt{1 + 2/5\sqrt{5}}}$	$= 0{,}5246679\ldots \sqrt{A}$
	$\rho = p = \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}/10\, a$	$= 0{,}6881909\ldots\, a$
Seitenlänge	$a = r/2 \cdot \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$	$= 1{,}1755706\ldots\, r$
	$a = 2p\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$	$= 1{,}4530852\ldots\, p$
	$a = \sqrt{4/5\, A \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}$	$= 0{,}7623870\ldots \sqrt{A}$
Flächeninhalt	$A = 5/8\, r^2 \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$	$= 2{,}3776412\ldots\, r^2$
	$A = \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}/4\, a^2$	$= 1{,}7204775\ldots\, a^2$
	$A = 5\, p^2 \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$	$= 3{,}6327125\ldots\, p^2$
Umfang	$u = 5a$	



Die Eckpunkte eines regelmäßigen Fünfecks seien fortlaufend mit E1 bis E5 bezeichnet. Weiterhin sei M der Mittelpunkt der Seite E1 E5 und Z der Mittelpunkt des Fünfecks.
Zur Bestimmung der Höhe h = ME3 und der Diagonalen d = E1E3,

verlängere man die beiden Seiten E5E1 und E3E2 jeweils bis zu ihrem gemeinsamen Schnittpunt S. Schließlich bezeichne R den Höhenabschnitt ZE3, also den Radius des Umkreises, und daher r = h - R den Höhenabschnitt ZM, also den Radius des Inkreises.
Durch Betrachten der Winkel bei S, E1 und E3 erkennt man, dass das Dreieck SE1E3 ein gleichschenkliges ist und die Seiten E1E3 = d und E1S gleich lang sind. Aus Symmetriegründen ist aber auch das Dreieck E1SE2 gleichschenklig und daher gilt ebenfalls E2S = d.

Wendet man den Satz des Pythagoras auf geeignete Dreiecke an, so erhält man:

$(d+a)^2 = h^2 + (d + a/2)^2$ $\qquad$ $d^2 = h^2 + (a/2)^2$

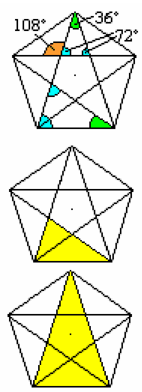
Es ergibt sich $d = a/2 \cdot (1 + \sqrt{5})$ und $\qquad$ $h = a/2 \cdot \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$

Zur Bestimmung von R und r = h-R beachte man noch die für jedes regelmäßige n-Eck gültige Beziehung

$R^2 = r^2 + (a/2)^2$ $\qquad$ $R = a/10 \cdot \sqrt{50 + 10\sqrt{5}}$ und

$r = a/10 \cdot \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$

Der Flächeninhalt des regelmäßigen n-Ecks setzt sich zusammen aus n Dreiecken der Grundseite a und der Höhe r, also für n=5 speziell $\qquad$ $A = 5 \cdot (1/2) \cdot r \cdot a = 1/4 \cdot \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \cdot a^2$



Regelmäßiges Fünfeck, Fünfeckdiagonale

Mit Hilfe der Winkel im regelmäßigen Fünfeck erkennt man, dass die beiden gelben Dreiecke gleichschenklig und ähnlich sind.
Dann gilt nach dem Ähnlichkeitssatz

$(d-a) : a = a : d$ $\qquad$ $d(d-a) = a^2$

Diese quadratische Gleichung der Fünfeckdiagonale hat die positive Lösung

$d = (1 + \sqrt{5})/2\ a$

Zur Berechnung der Fünfeckhöhe h wird $\qquad$ $d^2 = 1/4\ (1 + \sqrt{5})^2 = 1/4\ (6 + 2\sqrt{5})\ a^2$

Nach dem Satz des Pythagoras gilt weiter $\qquad$ $h^2 + (a/2)^2 = d^2$

Daraus folgt $\quad h^2 = d^2 - (a/2)^2 = 1/4\ (4d^2-a^2) = 1/4\ (5+2\sqrt{5})\ a^2$

d.h. $\quad h = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}/2\ a$

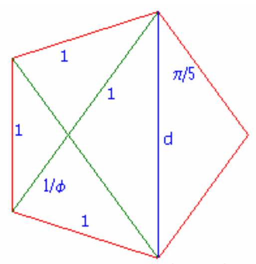
Für den Umkreisradius R, den Inkreisradius r und den Flächeninhalt A ergeben sich über den Satz des Pythagoras $\qquad$ $R^2 = (a/2)^2 + (h-R)^2$

Umkreisradius $R = \sqrt{50 + 10\sqrt{5}}/10\ a$. $\qquad$ $r^2 = R^2 - (a/2)^2$

Inkreisradius $r = \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}/10\ a$ $\qquad$ Flächeninhalt $A = \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}/4\ a^2$

Regelmäßiges Fünfeck

In der Darstellung gilt : $d = 1/(1/\phi) = \phi$, wobei $\phi = 1/2(1 + \sqrt{5})$ das Verhältnis des Goldenen Schnittes ist. Weiterhin ist:



Seitenlänge $\quad a = R/2\ \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

Seitenlänge $\quad a = 2r\ \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$

Umkreisradius $\quad R = 1/10\ a\ \sqrt{50 + 10\sqrt{5}} = r\ (\sqrt{5} - 1)$

Inkreisradius $\quad r = 1/10\ a\ \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = R/4\ (\sqrt{5} + 1)$

Sehnenlänge $\quad x = a/20\ \sqrt{25 - 10\sqrt{5}}$

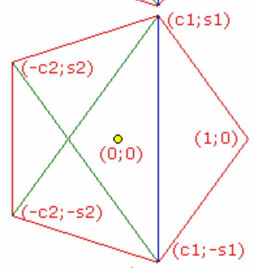
Platziert man ein regelmäßiges Fünfeck mit seinem Schwerpunkt in den Koordinatenursprung, so haben die Eckpunkte die Koordinaten:

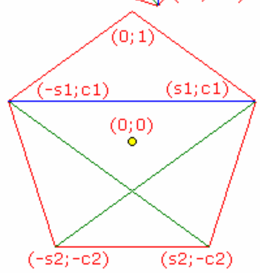
mit $\quad c_1 = \cos(2\pi/5) = 1/4(\sqrt{5} - 1) = 0.309016994374...$;

$c_2 = \cos(4\pi/5) = 1/4(\sqrt{5} + 1) = 0.809016994374...$

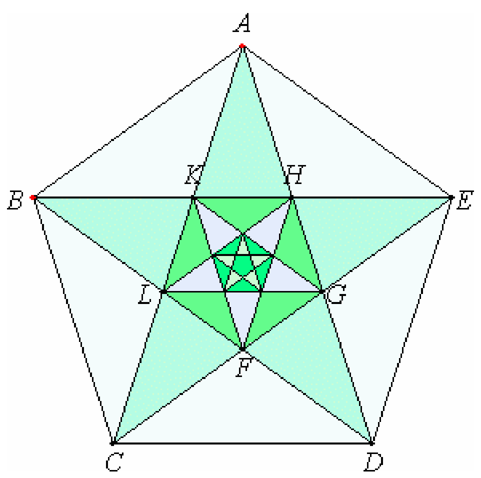
$s_1 = \sin(2\pi/5) = 1/4\ \sqrt{10+ 2\sqrt{5}} = 0.951056516295...$;

$s_2 = \sin(4\pi/5) = 1/4\ \sqrt{10- 2\sqrt{5}} = 0.587785252292...$





Werden in ein regelmäßiges Fünfeck ABCDE weitere regelmäßige Fünfecke (wie in der Abbildung gezeigt) eingeschrieben, so existieren eine Vielzahl zueinander ähnliche Dreiecke.
Zum Beispiel sind zum Dreieck ACD (Innenwinkel 36°-72°-72°) die Dreiecke ALG, FKH oder EAK ähnlich.
Werden mit s_1 und d_1 die Seitenlänge und Diagonallänge des Fünfecks ABCDE bezeichnet, mit s_2 und d_2 die von FGHKL und so weiter fort, so ergibt sich:



$d_1 = s_1 + d_2 \qquad s_1 = d_2 + s_2$

$d_2 = s_2 + d_3 \qquad s_2 = d_3 + s_3$

usw.

$d_1 \cdot d_2 = s_1^2 \qquad s_1 \cdot s_2 = d_2^2$

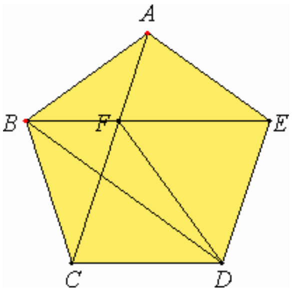
$d_2 \cdot d_3 = s_2^2 \qquad s_2 \cdot s_3 = d_3^2$ usw.

und insgesamt $d_1 / s_1 = s_1 / d_2 = d_2 / s_2 = s_2 / d_3 = ...$

Sätze am Fünfeck

Euklids "Elemente": Buch XIII § 7 (L. 7):

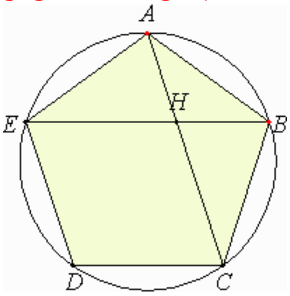
Sind in einem gleichseitigen Fünfeck drei aufeinanderfolgende oder nicht aufeinanderfolgende Winkel gleich, so muss das Fünfeck gleichwinklig sein.



Im gleichseitigen Fünfeck ABCDE seien drei Winkel, zunächst die aufeinanderfolgenden bei A, B, C einander gleich. Ich behaupte, dass das Fünfeck ABCDE gleichwinklig ist. Man ziehe AC, BE, FD.
Da zwei Seiten CB, BA zwei Seiten BA, AE entsprechend gleich sind und ∠ CBA = ∠ BAE, ist Grundlinie AC = Grundlinie BE, ∆ ABC = ∆ ABE, und die übrigen Winkel müssen den übrigen Winkeln gleich sein, denen gleiche Seiten gegenüberliegen, BCA = BEA und ABE = CAB (I, 4), so dass auch die Seite AF = Seite BF (I, 6). Wie bewiesen, sind auch die ganzen Strecken AC = BE; also Rest FC = Rest FE. Aber auch CD = DE. Zwei Seiten FC, CD sind also zwei Seiten FE, ED gleich; ferner ist ihnen die Grundlinie FD gemeinsam. Also ist ∠ FCD = ∠ FED (I, 8). Wie bewiesen, ist auch BCA = AEB; also die ganzen ∠ BCD = AED. Nach Voraussetzung ist ∠ BCD = ∠ A und ∠ B. Also auch AED = ∠ A und ∠ B. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch ∠ CDE = ∠ A, ∠ B, ∠ C. Fünfeck ABCDE ist also gleichwinklig.
Nunmehr seien nicht aufeinanderfolgende Winkel gleich, sondern die bei den Punkten A, C, D seien gleich. Ich behaupte, dass auch dann Fünfeck ACBDE gleichwinklig ist. Man ziehe BD.
Da zwei Seiten BA, AE zwei Seiten BC, CD gleich sind und sie gleiche Winkel umfassen, ist Grundlinie BE = Grundlinie BD, ∆ ABE = ∆ BCD, und die übrigen Winkel müssen den übrigen gleich sein, denen gleiche Seiten gegenüberliegen (I, 4), also ∠ AEB = CDB. Aber auch ∠ BED = BDE (I, 5), weil Seite BE = Seite BD. Also sind auch die ganzen ∠ AED = CDE. Nach Voraussetzung ist aber CDE = ∠ A und ∠ C; also auch ∠ AED = ∠ A und ∠ C. Aus demselben Grunde ist auch ABC = ∠ A, ∠ C, ∠ D; also ist Fünfeck ABCDE gleichwinklig - q.e.d.

Euklids "Elemente": Buch XIII § 8 (L. 8):

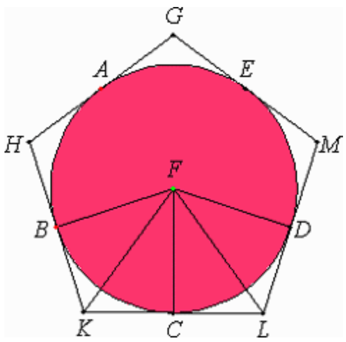
Diagonalen, die im gleichseitigen und gleichwinkligen Fünfeck zwei aufeinanderfolgenden Winkeln gegenüberliegen, teilen einander stetig; und ihr größeren Abschnitte sind der Fünfeckseite gleich.



Im gleichseitigen und gleichwinkligen Fünfeck ABCDE mögen den beiden aufeinanderfolgenden Winkeln bei A und B die Diagonalen AC, BE, die einander im Punkte H schneiden, gegenüberliegen. Ich behaupte, dass sie beide im Punkte H stetig geteilt werden und dass ihre größeren Abschnitte der Fünfeckseite gleich sind.
Man beschreibe dem Fünfeck ABCDE den Kreis ABCDE um (IV, 14). Da zwei Strecken EA, AB zwei Seiten AB, BC gleich sind und sie gleiche Winkel umfassen, ist Grundlinie BE = Grundlinie AC, ∆ ABE = ∆ ABC, und die übrigen Winkel sind den übrigen Winkeln entsprechend gleich, denen gleiche Seiten gegenüberliegen (I, 4). Also ist ∠ BAC = ABE; also ∠ AHE = 2 BAH (I, 32). Aber auch EAC = 2 BAC, da Bogen EDC = 2 Bogen CB (III, 28; VI, 33). Also ist ∠ HAE = AHE, folglich Strecke HE = EA, d.h. = AB (I, 6). Da Strecke BA = AE, ist auch ∠ ABE = AEB (I, 5).
Wie bewiesen, ist aber ABE = BAH; also BEA = BAH. Und ∠ ABE ist beiden Dreiecken ABE und ABH gemeinsam. Also sind auch die dritten ∠ BAE = AHB (I, 32), ∆ ABE also mit ∆ ABH winkelgleich. Also stehen in Proportion EB : BA = AB : BH (VI, 4). Aber BA = EH; also BE : EH = EH : HB. Hier ist BE > EH, also EH > HB (V, 14). B E ist also in H stetig geteilt (VI, Definition 3), und der größere Abschnitt HE ist der Fünfeckseite gleich. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch AC in H stetig geteilt ist und sein größerer Abschnitt CH der Fünfeckseite gleich - q.e.d.

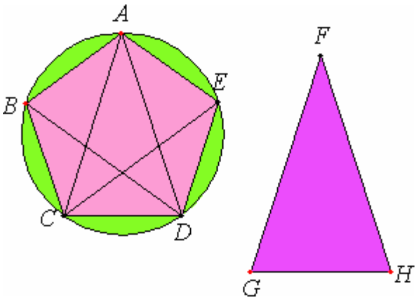
Euklids "Elemente": Buch IV § 12 (A. 12):

Einem gegebenen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkliges Fünfeck umzubeschreiben.



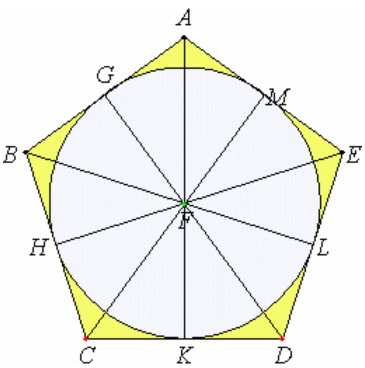
Man verstehe unter A, B, C, D, E, die Eckpunkte des einbeschriebenen Fünfecks (IV, 11), so dass die Bogen AB, BC, CD, DE, EA gleich sind; dann ziehe man durch A, B, C, D, E die Kreistangenten GH, HK, KL, LM, MG, verschaffe sich den Mittelpunkt F des Kreises ABCDE und ziehe FB, FK, FC, FL, FD.
Da die gerade Linie KL ABCDE in C berührt und FC den Mittelpunkt F mit dem Berührungspunkt C verbindet, so ist FC das Lot auf K L (III; 18); also sind die beiden Winkel bei C Rechte. Aus demselben Grunde sind auch die Winkel bei den Punkten B, D Rechte. Und da ∠ FCK ein Rechter ist, so ist $FK^2 = FC^2 + CK^2$ (I; 47).
Aus demselben Grunde ist auch $FK^2 = FB^2 + BK^2$, folglich $FC^2 + CK^2 = FB^2 + BK^2$; hierin ist $FC^2 = FB^2$; also ist der Rest $CK^2 = BK^2$, also BK = CK. Da ferner FB = FC ist und FK gemeinsam, sind zwei Seiten BF, FK zwei Seiten CF, FK gleich; und Grundlinie BK = Grundlinie CK; also ist ∠ BFK = KFC (I, 8) und ∠ BKF = FKC (I, 4).

Also ist BFC = 2 KFC und BKC = 2 FKC. Aus demselben Grunde ist auch CFD = 2 CFL und DLC = 2 FLC. Ferner ist, da Bogen BC = CD, auch ∠ BFC = CFD (III, 27). Hier ist BFC = 2 KFC und DFC = 2 LFC, also auch KFC = LFC. Aber auch ∠ FCK = FCL. Mithin hat man zwei Dreiecke FKC, FLC, in denen zwei Winkel zwei Winkeln gleich sind und eine Seite einer Seite gleich, nämlich die ihnen gemeinsame FC; also müssen in ihnen auch die übrigen Seiten den übrigen Seiten gleich sein und der letzte Winkel dem letzten Winkel (I, 26); also ist die Strecke KC = CL und ∠ FKC = FLC.
Und da KC = CL, ist KL = 2 KC. Auf demselben Wege lässt sich zeigen, dass auch HK = 2 BK. Dabei ist BF = KC, also ist auch HK = KL. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch die Strecken HG, GM, ML sämtlich den beiden HK, KL gleich sind; also ist das Fünfeck GHKLM gleichseitig. Ich behaupte, dass es außerdem gleichwinklig ist. Da nämlich ∠ FKC = FLC und, wie oben bewiesen, 2 FKC = HKL sowie 2 FLC = KLM, so ist auch HKL = KLM. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch ∠ KHG, HGM, GML sämtlich den beiden HKL, KLM gleich sind. Also sind die fünf Winkel GHK, HKL, KLM, LMG, MGH einander gleich. Also ist das Fünfeck GHKLM gleichwinklig. Wie oben bewiesen, ist es auch gleichseitig; und es ist dem Kreis ABCDE umbeschrieben – dies hatte man ausführen sollen.



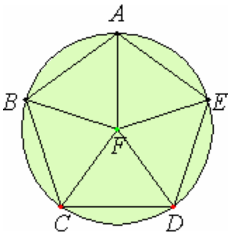
Euklids "Elemente": Buch IV § 11 (A. 11):
Einem gegebenen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkliges Fünfeck einzubeschreiben.

ABCDE sei der gegebene Kreis. Man soll dem Kreise ABCDE ein gleichseitiges und gleichwinkliges Fünfeck einbeschreiben.
Man lege ein gleichschenkliges Dreieck FGH hin, in dem jeder der beiden Winkel bei G, H doppelt so groß ist wie der bei F (IV, 10), und beschreibe dem Kreise ABCDE ein mit ∆ FGH winkelgleiches ∆ ACD ein, dass ∠ CAD dem Winkel bei F und die Winkel bei G, H den Winkeln ACD, CDA entsprechend gleich sind (IV, 2); dann ist sowohl ACD als auch CDA = 2 CAD. Man halbiere die beiden Winkel ACD, CDA durch die beiden geraden Linien CE, DB und ziehe AB, BC, CD, DE, EA. Da nun sowohl ∠ ACD als auch ∠ CDA = 2 CAD und beide halbiert sind durch die geraden Linien CE, DB, so sind die fünf Winkel DAC, ACE, ECD, CDB, BDA einander gleich. Gleiche Winkel stehen aber über gleichen Bogen (III, 26); also sind die fünf Bogen AB, BC, CD, DE, EA einander gleich. Und gleichen Bogen liegen gleiche Sehne gegenüber (III, 29); die fünf Strecken AB, BC, CD, DE, EA sind also einander gleich; also ist das Fünfeck ABCDE gleichseitig. Ich behaupte, dass es außerdem gleichwinklig ist. Hier ist Bogen AB = Bogen DE; man füge daher BCD beiderseits hinzu; dann ist der ganze Bogen ABCD dem ganzen Bogen EDCB gleich. Über dem Bogen ABCD steht aber ∠ AED und über dem Bogen EDCB ∠ BAE; also ist ∠ BAE = AED (III, 27). Aus demselben Grunde ist auch jeder der Winkel ABC, BCD, CDE den beiden Winkeln BAE, AED gleich; also ist das Fünfeck ABCDE gleichwinklig; wie oben bewiesen, ist es aber auch gleichseitig – S.



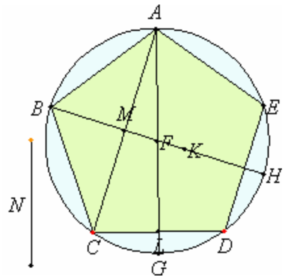
Euklids "Elemente": Buch IV § 13 (A. 13):
Einem gegebenen Fünfeck, das gleichseitig und gleichwinklig ist, den Kreis einzubeschreiben.

ABCDE sei das gegebene gleichseitige und gleichwinklige Fünfeck. Man soll dem Fünfeck ABCDE den Kreis einbeschreiben.
Man halbiere die beiden Winkel BCD, CDE durch die beiden geraden Linien CF, DF und ziehe von dem Punkte F, in dem die geraden Linien CF, DF einander treffen, die Strecken FB, FA, FE. Da BC = CD ist und CF gemeinsam, sind zwei Seiten BC, CF zwei Seiten DC, CF gleich; und ∠ BCF = ∠ DCF; also ist Grundlinie BF = Grundlinie DF, ∆ BCF = ∆ DCF, und die übrigen Winkel müssen den übrigen Winkeln gleich sein, immer die, denen gleiche Seiten gegenüberliegen (I, 4); also ist ∠ CBF = CDF. Da ferner CDE = 2 CDF und CDE = ABC sowie CDF = CBF, ist auch CBA = 2 CBF; also ist ∠ ABF = FBC (Axiom 3); also wird ∠ ABC von der geraden Linie BF halbiert. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch die beiden Winkel BAE, AED von den beiden geraden Linien FA, FE halbiert werden. Man fälle dann vom Punkte F auf die geraden Linien AB, BC, CD, DE, EA die Lote FG, FH, FK, FL, FM. Da hier ∠ HCF = KCF ist und FHC = FKC als Rechte, so sind FHC, FKC zwei Dreiecke, in denen zwei Winkel zwei Winkeln gleich sind und eine Seite einer Seite gleich, nämlich die ihnen gemeinsame FC, die einem der gleichen Winkel gegenüberliegt; also müssen in ihnen auch die übrigen Seiten den übrigen Seiten gleich sein (I, 26); also ist Lot FH = Lot FK. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch FL, FM, FG sämtlich den beiden Strecken FH, FK gleich sind; also sind die fünf Strecken FG, FH, FK, FL, FM einander gleich. Zeichnet man also mit F als Mittelpunkt und als Abstand einem von G, H, K, L, M den Kreis, so muss er auch durch die übrigen Punkte gehen und die geraden Linien AB, BC, CD, DE, EA berühren, weil die Winkel bei den Punkten G, H, K, L, M Rechte sind. Berührte er sie nämlich nicht, sondern schnitte sie, so ergäbe sich, dass eine rechtwinklig zum Kreisdurchmesser vom Endpunkte aus gezogene Strecke innerhalb der Kreise fiele; dass dies Unsinn ist, haben wir bewiesen (III, 16). Der mit F als Mittelpunkt und als Abstand einem vom Punkt G, Punkt H, K, L, M gezeichnete Kreis kann also die geraden Linien AB, BC, CD, DE, EA nicht schneiden; also muss er sie berühren. Man zeichne ihn, wie GHKLM – S.



Euklids "Elemente": Buch IV § 14 (A. 14):
Einem gegebenen Fünfeck, das gleichseitig und gleichwinklig ist, den Kreis umbeschreiben.

Das gegebene Fünfeck, das gleichseitig und gleichwinklig ist, sei ABCDE. Man soll dem Fünfeck ABCDE den Kreis umbeschreiben.
Man halbiere die beiden Winkel BCD, CDE durch die beiden geraden Linien CF, DF, und ziehe vom Punkte F, in dem die geraden Linien zusammentreffen, nach den Punkten B, A, E die Strecken FB, FA, FE. Dann lässt sich ähnlich wie beim vorigen Satz (IV, 13) der Beweis führen, dass die Winkel CBA, BAE, AED sämtlich durch die entsprechenden geraden Linien FB, FA, FE halbiert werden. Da ∠ BCD = CDE und ½ BCD = FCD sowie ½ CDE = CDF, ist auch FCD = FDC, folglich Seite FC = Seite FC (I, 6). Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch FB, FA, FE sämtlich beiden Strecken FC, FD gleich sind; also sind die fünf Strecken FA, FB, FC, FD, FE einander gleich. Zeichnet man also mit F als Mittelpunkt und einer der Strecken FA, FB, FC, FD, FE als Abstand den Kreis, so muss er auch durch die übrigen Punkte gehen und umbeschrieben sein. Man beschreibe ihn um; er sei ABCDE – S.



Euklidischer Fünfecksatz
Euklids "Elemente" Buch XIII: § 11 (L. 11):
Beschreibt man einem Kreis mit rationalem Durchmesser ein gleichseitiges Fünfeck ein, so wird die Fünfeckseite eine Irrationale, wie man sie Minor nennt.

Dem Kreise ABCDE, der die Rationale (X, Definition 3) zum Durchmesser hat, sei das gleichseitige Fünfeck ABCDE einbeschrieben. Ich behaupte, dass die Seite des Fünfecks ABCDE eine Irrationale ist, wie man sie Minor (X, 76: Definition) nennt.
Man verschaffe sich den Mittelpunkt F des Kreises, ziehe AF, FB, verlängere sie zu den Punkten G, H, ziehe AC und trage FK = ¼ AF (VI, 9) ab. AF ist rational, also FK rational; auch BF ist rational; also die Summe BK rational (X, 15).
Da weiter Bogen ACG = Bogen ADG und hierin ABC = AED (III, 28), sind die Restbogen CG = GD. Zieht man hier AD, so ergibt sich (I, 4), dass die Winkel bei L Rechte sind und CD = 2 CL. Aus demselben Grunde sind auch die Winkel bei M Rechte und AC = 2 CM.
Da so ∠ ALC = AMF, beide Dreiecke ACL und AMF dabei ∠ LAC gemeinsam haben, sind die dritten ∠ ACL = MFA (I, 32); ∆ ACL ist also mit ∆ AMF winkelgleich. Also stehen in Proportion LC : CA = MF : FA (VI, 4), also auch, bei Verdoppelung der Vorderglieder, 2 LC : CA = 2 MF : FA (V, 24).
Aber 2 MF : FA = MF : ½ FA (V, 15); also 2 LC : CA = MF : ½ FA (V, 11), also auch, bei Halbierung der Hinterglieder, 2 LC : ½ CA = MF : ¼ FA. Hier ist 2 LC = DC, ½ CA = CM, ¼ FA = FK; also DC : CM = MF : FK. Also ist, verbunden, (DC + CM) : CM = MK : KF (V, 18), also auch $(DC + CM)^2 : CM^2 = KM^2 : KF^2$ (VI,22).
Da nun, wenn man die zwei Seiten des Fünfecks gegenüberliegende Diagonalen, etwa AC, stetig teilt, der größere Abschnitt der Fünfeckseite, d.h. DC, gleich ist (XIII, 8), ferner der größere Abschnitt, wenn man die Hälfte der ganzen Strecke hinzufügt, quadriert fünfmal so groß wird wie das Quadrat der Hälfte der ganzen Strecke (XIII, 1) und CM die Hälfte der ganzen Strecke AC ist, so ist $(DC + CM)^2 = 5\ CM^2$.

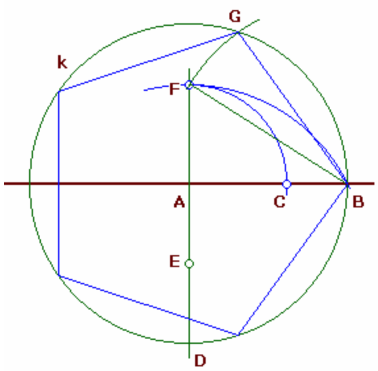
Wie bewiesen, ist aber $(DC + CM)^2 : CM^2 = MK^2 : KF^2$; also $MK^2 = 5\ KF^2$ (V, Definition 5). Hier ist KF^2 rational, weil der Durchmesser rational ist. Also ist auch MK^2 rational (X, 6, Definition4), also MK rational (X, Definition 3).
Da BF = 4 FK, ist BK = 5 KF; also $BK^2 = 25\ KF^2$. Aber $MK^2 = 5\ KF^2$; also $BK^2 = 5\ KM^2$. BK^2 hat also zu KM^2 kein (VIII, 11 Anmerkung) Verhältnis wie eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl. Also ist BK mit KM linear inkommensurabel (X, 9).

Beide Strecken sind rational; BK, KM sind also nur quadriert kommensurable rationale Strecken. Nimmt man aber von einer rationalen Strecke eine rationale weg, die der ganzen nur quadriert kommensurabel ist, dann ist der Rest irrational, eine Apotome (X, 73). Also ist MB eine Apotome, MK ihre Ergänzung.
Ich behaupte weiter: eine Vierte Apotome (X, 84a Definition).

Es sei $N^2 = BK^2 - KM^2$; BK übertrifft dann quadriert KM um N. Nun ist KF mit FB linear kommensurabel, auch, verbunden, KB mit FB linear kommensurabel (X, 15). BF ist aber BH linear kommensurabel, also BK mit BH linear kommensurabel (X, 12). Da nun $BK^2 = 5\ KM^2$, ist $BK^2 : KM^2 = 5 : 1$; also, umgewendet (V, Definition 16), $BK^2 : N^2 = 5 : 4$, d.h. nicht wie eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl (VIII, 11 Anmerkung); also ist BK mit N linear inkommensurabel (X,9).
Quadriert übertrifft BK also um das Quadrat einer ihm inkommensurablen Strecke KM. Da hier die ganze Strecke BK um das Quadrat einer ihr inkommensurablen die Ergänzung KM übertrifft, während die ganze Strecke BK mit der zugrundeliegenden Rationalen BH linear kommensurabel ist, ist MB eine Vierte Apotome (C, 84 a Definition).

Ein Rechteck, das von der Rationalen und einer Vierten Apotome umfasst wird, ist aber irrational und heißt eine Minor (X, 94). Da nun, wenn man AH zieht, D ABH mit D ABM winkelgleich (III, 31; VI, 8) wird, also HB : BA = AB : BM (VI, 4), ergibt AB quadriert HB · BM (VI, 17).
Also ist AB, die Fünfeckseite, eine Irrationale, wie man sie Minor nennt. – q.e.d.

Regelmäßiges Fünfeck, Konstruktion



Aufgabe: Ein regelmäßiges Fünfeck ist in einen Kreis mit dem Radius AB einzubeschreiben.
Lösung:
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei AB = 1.
Auflösen der Gleichung ergibt für die Strecke

$$AC = x_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{5}) / 2.$$

Die positive Lösung $\phi = 1/2 (\sqrt{5} - 1)$ ist die Verhältniszahl des goldenen Schnitts.

1. Um A wird ein Kreis mit dem Radius AB gezogen.
2. Punkt D wird so gewählt, dass der Winkel DAB = 90° ist.
3. E ist der Mittelpunkt der Strecke AD
4. Um E wird ein Kreis mit dem Radius EB gezeichnet.
5. Dieser Kreis schneidet die Gerade AD im Punkt F.
6. BF ist die Seitenlänge des regelmäßigen Fünfecks, AF die Seitenlänge des regelmäßigen Zehnecks, welche dem Ausgangskreis um A einbeschrieben sind.

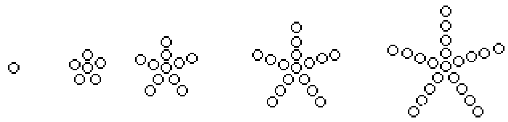
Anmerkung: Der Schnittpunkt des Kreises um A mit Radius AF schneidet dann die Strecke AB im Punkt C. Dieser teilt AB stetig.

Fünfecke in der Praxis

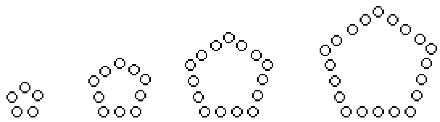
Regelmäßige Fünfecke werden häufig als Grundform von Bauwerken genutzt.

Allgemein bekannt ist das US-amerikanische Kriegsministerium, das Pentagon. Fünfeckform hat auch die Zitatelle von Lille. Das Logo von Chrysler ist ebenfalls ein regelmäßiges Fünfeck.
Seesterne haben fünfeckige Form.

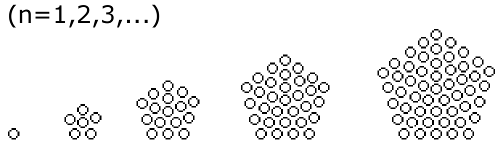
Fünfeckszahlen



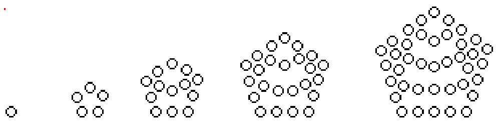
Die Folge ist 1, 6, 11, 16, 21, ... allgemein 5n-4 (n=1,2,3,...)



Die Folge ist 5, 10, 15, 20, ..., allgemein 5n

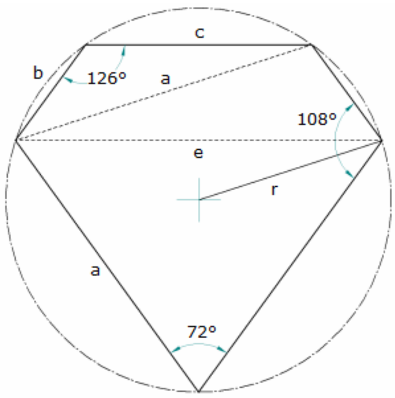


Die Folge ist 1, 6, 16,31, 51..., allgemein $(5n^2-5n)/2+1$



Die Folge ist 1, 5, 12, 22, 35,... allgemein (3n-1)n/2

Sehnenfünfeck

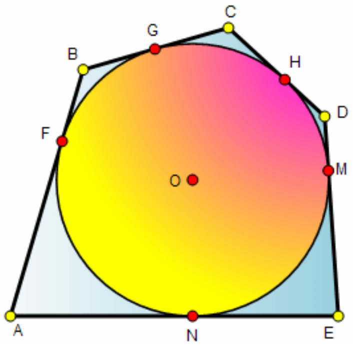


Ein Sehnenfünfeck ist ein Fünfeck, dessen Eckpunkte auf einem Kreis liegen, dem Umkreis des Fünfecks. Folglich sind alle Seiten des Sehnenfünfecks Sehnen des Umkreises.
Üblicherweise meint man mit Sehnenfünfeck ein solches, das nicht überschlägt; dieses ist notwendigerweise konvex.

Die Ecken des Sehnenfünfecks werden mit A, B, C, D, E bezeichnet. Achsensymmetrische Sehnenfünfecke kommen zum Beispiel bei einem Rhomboederstumpf als Seitenfläche sowie beim abgeschrägten Hexaeder und abgeschrägten Dodekaeder als Schnittfläche vor.

Die Abbildung zeigt das Sehnenfünfeck, das im Dürer Polyeder als Seitenfläche auftritt. Dieses Polyeder findet sich im berühmten

Kupferstich "Melancholia".
Die entstehenden unregelmäßigen Fünfeckseiten haben die Innenwinkel 126°, 108°, 72°, 108° und 126° und die Seitenlängen verhalten sich wie $1 : 1/2\ (3 + \sqrt{5}) : \sqrt{[1/2\ (5 + \sqrt{5})]} \approx 1 : 2{,}61803 : 1{,}90211$.
Ist a die Größe der langen Seiten, b die der anliegenden Seiten, c die obere, einzelne Seite, $e = a/2\ \sqrt{(10 - 2\ \sqrt{5})}$ die Diagonale und r = a - b der Umkreisradius des Fünfecks, so gilt a : r = r : b = e : c = F (Verhältnis des goldenen Schnittes).



Tangentenfünfeck

Gegeben ist ein Tangentenfünfeck ABCDE, d.h. ein Fünfeck mit einem Inkreis. O sei der Inkreismittelpunkt und F, G, H, M und N die Berührungspunkte.
Ist s der halbe Umfang des Sechsecks, so gilt

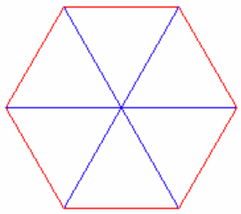
s = AB + CD + EN = BC + DE + AN

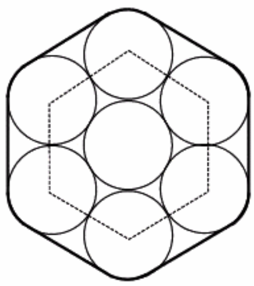
Nachweis: Mit den Berührungspunkten F, G, H, M und N wird

AF = AN , FB = BG , CG = CH , HD = DM und EM = EN
s = (AB+BC+CD+DE+FA)/2
s = (AF+FB+BG+GC+CH+HD+DM+ME+EN+NA)/2
s = (AF+FB+FB+CH+CH+HD+HD+EN+EN+AF)/2
s = AF+FB+CH+HD+EN = AB+CD+EN

und weiterhin

s = (AF+FB+BG+GC+CH+HD+DM+ME+EN+NA)/2
s = (AN+BG+BG+CG+CG+DM+DM+ME+ME+AN)/2
s = AN+BG+CG+DM+ME = AN+BC+DE



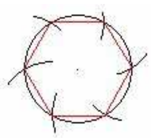


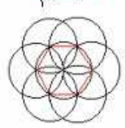
Regelmäßiges Sechseck, Hexagon

Ein regelmäßiges Hexagon ist ein regelmäßiges, sechseitiges N-Eck mit dem Schläfli-Symbol {6}.
Schon Euklid bewies, dass dieses Sechseck in einen Kreis eingeschrieben werden kann.
Ein regelmäßiges Sechseck oder Hexagon ist ein Vieleck mit sechs Ecken, sechs gleich langen Seiten und sechs gleich großen Innenwinkeln.
Bei Seitenlänge s, Umkreisradius r und Apothem = Inkreisradius p gilt

Seitenlänge	$s = 2/3\ \sqrt{3}\ p = 1/3\ \sqrt{(2A\ \sqrt{3})}$
Inkreisradius	$p = 1/2\ \sqrt{3}\ s$
Umkreisradius	$r = s$
Flächeninhalt	$A = 3/2\ \sqrt{3}\ s^2 = 3/2\ \sqrt{3}\ r^2 = 2\ \sqrt{3}\ p^2$
Umfang	$u = 6s$
Damit gilt	$r / p = 2 / \sqrt{3}$ und $A_r / A_p = 4/3$

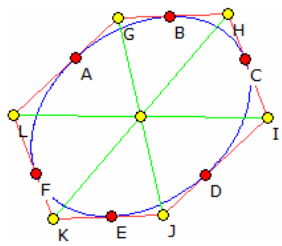
Es gibt zwei verschiedene Längen der Diagonalen mit d = 2s und $e = 2h = \sqrt{3}$ s.
Abstand gegenüberliegender Seiten $d = \sqrt{(2A / \sqrt{3})} = \sqrt{3}\ s$
Umspannt man sieben dicht in der Ebene anliegende Kreise mit einem ebenfalls dicht anliegenden Band, so ergibt sich für die Länge dieses Bandes $d = (12 + 2\pi)\ r$
Die Mittelpunkte der äußeren Kreise bilden dabei ein regelmäßiges Sechseck





Konstruktion eines Sechsecks:
Man zeichnet einen Kreis und trägt auf dem Kreisbogen sechsmal den gleichen Radius ab. Die Verbindungslinien der Schnittpunkte bilden ein Sechseck. Zeichnet man die vollen Kreise, entsteht eine Rosette (mittlere Abbildung).
Es ist möglich, ein Sechseck in einem Koordinatensystem durch eine Gleichung zu beschreiben. $2|y|+|y-x\ \sqrt{3}|+|y+x\ \sqrt{3}| = 6$

Satz von Brianchon

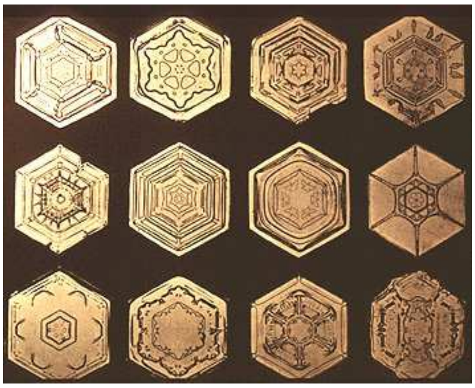


Dieser Satz ist die duale Aussage zum Satz von Pascal bzgl. Kegelschnitte. Es gilt:
Wird ein nicht nichtwendig konvexes Sechseck einem Kreis umgeschrieben, so schneiden sich die drei Geraden der gegenüberliegenden Eckpunkte des Sechsecks in einem Punkt. Dieser Punkt wird Brianchon-Punkt genannt.

Satz von Pascal: Wählt man sechs Punkte auf einem Kreis und numeriert sie beliebig mit 1 bis 6, dann liegen die Schnittpunkte der Geraden 12 und 45, 23 und 56, 34 und 67 (Ecke 7 = Ecke 1) selber wieder auf einer Geraden, der Pascal-Gerade.

Überraschend ist, dass der Satz von Brianchon (nach Charles Julien Brianchon 1783-1864) erst 166 Jahre, d.h. 1806, nach dem Satz von Pascal gefunden wurde, da er sich aus dem; damals noch unbekannten; Ponceletschen Dualitätsprinzip automatisch ergibt.

1847 verallgemeinerte Möbius den Satz. Es gilt: Schneiden sich in einem 4n+2 -Eck, das einem Kegelschnitt umschrieben ist, 2n Strecken durch entgegengesetzte Ecken in einem Punkt, so verläuft auch die letzte Strecke entgegengesetzter Punkte durch den Schnittpunkt.
(nach Möbius, "Gesammelte Werke", Vol. 1. Leipzig, 1885)

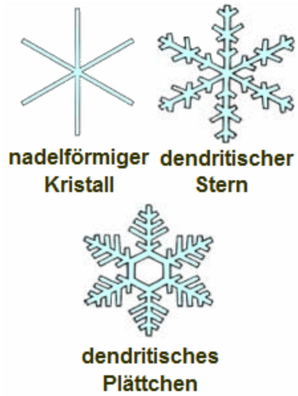


Sechseck in der Natur

Regelmäßige Sechsecke treten in auch in der Natur häufig auf. Bekannte Beispiele sind die Struktur der Bienenwaben oder die Form verschiedener Kristalle.
Noch faszinierender sind die unglaublich vielen verschiedenen Formen von Schneeflocken.
Obwohl keine Schneeflocke einer anderen gleicht, findet man in ihnen stets das regelmäßige Sechseck als Grundstruktur.
Die linke Abbildung stammt von W.A.Bentley (New York, 1962)

Als einer der ersten Wissenschaftler untersuchte Johannes Kepler in "Strena seu de Nive sexangula - Vom sechseckigen Schnee" die Struktur von Schneeflocken.

Schneeflocken



Wenn Eis- oder Schneekristalle als Symbole im täglichen Leben auftreten, so ist die Darstellung immer als Eis, Schnee (Wetterkarte), Frost, Kälte, Glatteis (Verkehrsschild), Winterreifen, Tiefkühlung von Lebensmitteln, … zu deuten.
Wenn diese Kristalle als fünf- oder achtstrahlig dargestellt werden, so widerspricht dies dem Naturgesetz. Denn die Anordnungen der einzelnen Seitenflächen stehen immer in einem Winkel von 60° (hexagonal) zueinander und damit sind Eis- oder Schneekristalle sechsstrahlig. Ihre konvexe Hülle sind stets regelmäßige Sechsecke.

Bemerkenswert ist die Vielfältigkeit der Natur, denn jedes Kristall wird abhängig von Lufttemperatur, Luftfeuchtigkeit und Höhe unterschiedlich ausgebildet und ist damit in Größe und Form einmalig, aber immer sechsstrahlig.
Wasserdampf, der bei Minustemperaturen in den Wolken kondensiert, fällt als Schneeflocke (Durchmesser 4 mm, Masse 0,004 g, 95 % Luftanteil) mit einer Geschwindigkeit von etwa 1 m/s zu Boden. Jede einzelne Schneeflocke besteht aus vielen unterschiedlich geformten Kristallen, die sich um ein Staubkorn (Kondensationskern, ca. 0,1 mm) gruppieren.
Nachdem jeder Kristall viele große, unterschiedlich angeordnete Flächen hat, wird von einer Schneelandschaft viel Licht reflektiert und als Folge davon erscheint uns der Schnee weiß.

Wintersechseck

Eines der bekanntesten Sechsecke ist das Wintersechseck.
Das Wintersechseck ist eine markante Konstellation von hellen Sternen 1.Größe am nördlichen Winterhimmel. Es ist kein Sternbild im Sinne der IAU, sondern umfasst mehrere Sternbilder.
Im Uhrzeigersinn besteht es aus folgenden Sternen:

Capella im Fuhrmann
Aldebaran im Stier
Rigel im Orion
Sirius im Großen Hund
Prokyon im Kleinen Hund
Kastor und Pollux in den Zwillingen

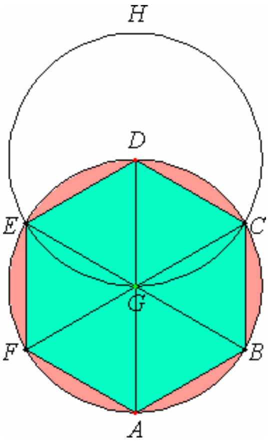
Von Mitteleuropa aus ist das Wintersechseck in den Monaten Januar bis März gegen 22 Uhr MEZ über dem Südhorizont zu sehen, kann aber schon im Herbst in der zweiten Nachthälfte beobachtet werden.
Das Sechseck ist nicht ganz regelmäßig, erhält jedoch durch die auffälligen Zwillingssterne Kastor und Pollux einen zusätzlichen Reiz. Es umgibt dieses Sternbild und den hellen Orion vollständig.
Mit einem guten Feldstecher sind im Bereich des Sechsecks einige interessante Objekte zu beobachten: der Orionnebel unterhalb des Oriongürtels, die zwei hellen Sternhaufen Plejaden (Siebengestirn) und Hyaden (beide im Stier, jeder mindestens 100 Sterne) und zwei weitere Sternhaufen: M35 am Ende der Zwillinge, und M41 bei Sirius. Ferner der Krebsnebel M1 (Planetarischer Nebel im Stier, Rest der Supernova von 1054) und der Planetarische Nebel NGC 2392 südlich von Pollux, sowie dutzende heller Doppelsterne in unterschiedlichsten Farben.

Sechseckige Bauwerke

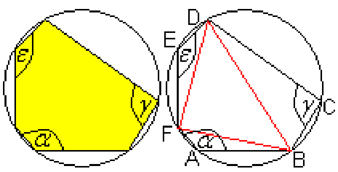
Trotz der Tatsache, dass das regelmäßige Sechseck ein geometrisch schönes Gebilde ist, findet man erstaunlicherweise nur wenige Gebäude, die einen sechseckigen Grundriss aufweisen.

Ein schönes Beispiel ist der Salomonturm.
Nahe Visegrád im ungarischen Donauknie wurde im 13.Jahrhundert auf einem Berg ein Burganlage erbaut, die sogenannte "Zitadelle" mit Resten eines Renaissance-Palastes des Königs Matthias, der europaweit berühmt ist.
In unmittelbare Nachbarschaft befindet sich ein Wohnturm aus dem 13.Jh. Einst hatte man hier ein wachsames Auge auf den Verkehr der Uferstraße und nahm Wegezoll ein.
Das sechseckige, 31 m hohe Bauwerk mit 8 m dicken Mauern trägt den Namen Salomonturm, da angeblich König Ladislaus I. seinen Bruder Salomon wegen Thronstreitigkeiten um 1080 im Turm einkerkern ließ.
In den Dry Tortugas (Florida) wurde das Fort Jefferson zwar nie fertiggestellt, allerdings ist seine Größe beeindruckend. Mehr als 16 Millionen Steine wurden zu einem der größten gemauerten Bauwerke der Welt verarbeitet. Das sechseckige Gebäude hat bis zu 145 Meter hohe Wände.

Euklids "Elemente": Buch IV § 15 (A. 15):
Einem gegebenen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkliges Sechseck einzubeschreiben.
ABCDEF sei der gegebene Kreis. Man soll dem Kreise ABCDEF ein gleichseitiges und gleichwinkliges Sechseck einbeschreiben.
Man ziehe im Kreise ABCDEF einen Durchmesser AD, verschaffe sich den Mittelpunkt G des Kreises und zeichne mit D als Mittelpunkt und DG als Abstand den Kreis EGCH; ferner ziehe man die Verbindungsstrecken EG, CG und diese nach den Punkten B, F, und ziehe AB, BC, CD, DE, EF, FA. Ich behaupte, dass das Sechseck ABCDEF gleichseitig und gleichwinklig ist.

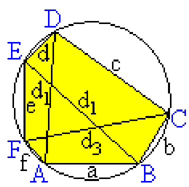


Da nämlich der Punkt G des Mittelpunkt des Kreises ABCDEF ist, ist GE = GD. Ebenso ist, das der Punkt D Mittelpunkt des Kreises GCH ist, DE = DG. Und wie oben bewiesen, ist GE = GD; also ist auch GE = ED, also Δ EGD gleichseitig. Auch seine drei Winkel EGD, GDE, DEG sind also einander gleich, weil im gleichschenkligen Dreieck die Grundlinie einander gleich sind (I, 5); ferner sind die drei Winkel im Dreieck zusammen = 2 R. (I, 32); $\angle$ EGD ist also 1/3 von 2 R. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch DGC 1/3 von 2 R. ist. Und da die gerade Linie CG, auf EB gestellt, die Nebenwinkel EGC + CGB = 2 R. macht (I, 13), ist auch der Restwinkel CGB 1/3 von 2 R. Die Winkel EGD, DGC, CGB sind also einander gleich; folglich sind auch ihre Scheitelwinkel BGA, AGF, FGE den Winkeln EGD, DGC, CGB gleich (I, 15). Also sind die sechs Winkel EGD, DGC, CGB, BGA, AGF, FGE einander gleich. Gleiche Winkel stehen aber über gleichen Bogen (III, 26); also sind die sechs Bogen AB, BC, CD, DE, EF, FA einander gleich. Und gleichen Bogen liegen gleiche Sehnen gegenüber (III, 29); also sind die sechs Strecken einander gleich; also ist das Sechseck ABCDEF gleichseitig.
Ich behaupte, dass es außerdem gleichwinklig ist. Hier ist Bogen FA = Bogen ED; daher füge man den Bogen ABCD beiderseits hinzu; dann ist der ganze Bogen FABCD dem ganzen EDCBA gleich. Nun steht über dem Bogen FABCD $\angle$ FED und über dem Bogen EDCBA $\angle$ AFE; also ist $\angle$ AFE = DEF (III, 27). Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch die übrigen Winkel des Sechsecks ABCDEF einzeln beiden Winkeln AFE, FED gleich sind; also ist das Sechseck ABCDEF gleichwinklig. Wie oben bewiesen, ist es auch gleichseitig; und es ist dem Kreise ABCDEF einbeschrieben – S.
Zusatz: Hiernach ist klar, dass die Seite des Sechsecks dem Radius des Kreises gleich ist.
Zieht man nämlich wie beim Fünfeck durch die Teilpunkte auf dem Kreise die Kreistangenten, so entsteht nach dem beim Fünfeck Ausgeführten (IV, 12) ein dem Kreis umbeschriebenes gleichseitiges und gleichwinkliges Sechseck. Schließlich lässt sich auch auf ähnlichem Wege, wie beim Fünfeck angeführt (IV, 13, 14), einem gegebenen Sechseck der Kreis einbeschreiben und umbeschreiben – dies hatte man ausführen sollen.



Sehnensechseck

Gegeben sind ein konvexes Sehnensechseck und die drei Diagonalen, die jeden dritten Eckpunkt miteinander verbinden. Dann gilt $d_1d_2d_3=ebd_1+cfd_2+add_3+ace+bdf$.
Das ist eine Übertragung des Satzes von Ptolemäus auf ein Sechseck.

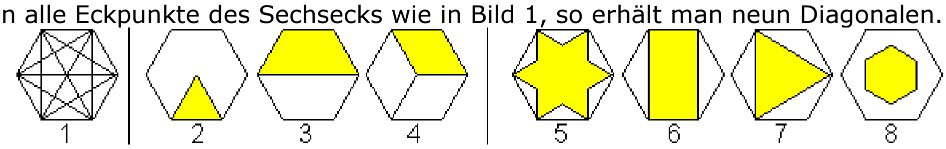


Winkelsatz: Im Sehnensechseck ist die Summe nichtbenachbarter Winkel 360°.
Beweis:

Das Viereck ABDF ist ein Sehnenviereck, so dass der Winkel bei D im roten Dreieck gleich 180° - α ist. Entsprechend gilt für die übrigen Winkel 180° - γ und 180° - ε. Die Winkelsumme ist 180°: (180° - α)+(180° - γ)+(180° - ε) = 180°.
Daraus folgt die Behauptung $\alpha + \gamma + \varepsilon = 360°$.

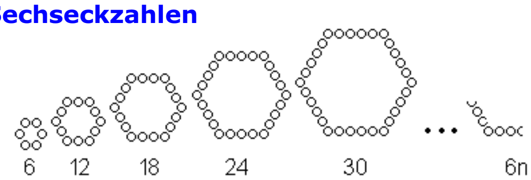
Figuren im Sechseck

Verbindet man alle Eckpunkte des Sechsecks wie in Bild 1, so erhält man neun Diagonalen.

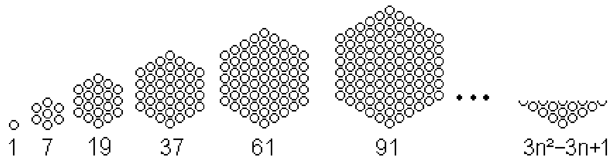


Es entsteht eine Reihe einfacher Figuren, wenn man nur einige Diagonalen oder Teile von ihnen zeichnet.
2 Gleichseitiges Dreieck, 3 Gleichschenkliges Trapez, 4 Raute, 5 Sechszackiger Stern oder Hexagramm, 6 Rechteck, 7 Gleichseitiges Dreieck, 8 Kleines, gedrehtes Sechseck im Inneren

Sechseckzahlen

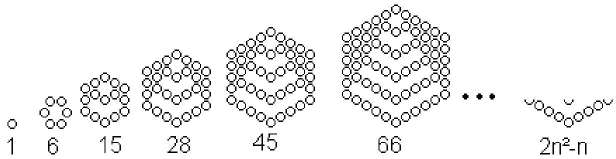


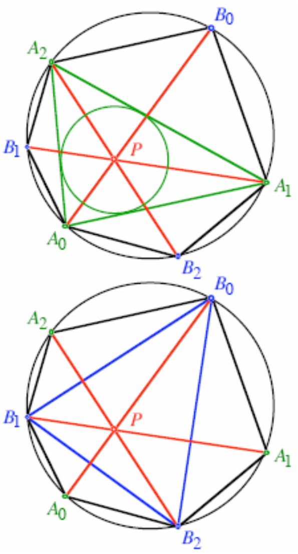
"Sechseckrand-Zahlen"



Zentrierte Sechseckzahlen, "Hexnumbers"

Sechseckzahlen, jede zweite Dreieckszahl ist Sechseckzahl





Sehnensechseck

Gegeben sei ein Sehnensechseck $A_0B_2A_1B_0A_2B_1$, bei dem an einer Ecke B_i anstoßenden Seiten jeweils gleich lang sind:

$A_1B_0 = A_2B_0$, $A_2B_1 = A_0B_1$, $A_0B_2 = A_1B_2$

Dann haben die drei Geraden A_iB_i, $i \in \{0,1,2\}$, einen gemeinsamen Schnittpunkt P.

Im Dreieck $A_0A_1A_2$ ist der Punkt P der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden, also der Inkreismittelpunkt (obere Abbildung).
Die Winkel $\angle A_1A_0B_0$ und $\angle B_0A_0A_2$ sind Peripheriewinkel über gleich langen Sehnen und daher gleich groß. Die Gerade A_0B_0 halbiert den Dreieckswinkel bei A_0. Entsprechendes gilt für die beiden anderen Geraden.
Damit ist bewiesen, dass die drei Geraden A_iB_i, $i \in \{0,1,2\}$, tatsächlich kopunktal sind.
Die untere Abbildung lässt vermuten, dass der Schnittpunkt P der Höhenschnittpunkt im Dreieck $B_0B_1B_2$ ist.
Die Winkel $\angle A_0B_1B_2$ und $\angle B_2B_1A_1$ sind als Peripheriewinkel über gleich langen Sehnen gleich groß; dasselbe gilt für die Winkel $\angle B_1B_2A_0$ und $\angle A_2B_2B_1$.
Die beiden Dreiecke $B_1B_2A_0$ und B_1B_2P sind daher spiegelbildlich bezüglich der Seite B_1B_2.
Somit steht die Gerade A_0P, also die Gerade A_0B_0, senkrecht auf der Seite B_1B_2 und ist eine Höhe des Dreieckes $B_0B_1B_2$. Analog für die beiden anderen Geraden.

Tangentensechseck

Gegeben ist ein Tangentensechseck ABCDEF, d.h. ein Sechseck mit einem Inkreis. O sei der Inkreismittelpunkt.
Ist s der halbe Umfang des Sechsecks, so gilt

s = AB + CD + EF = BC + DE + AF

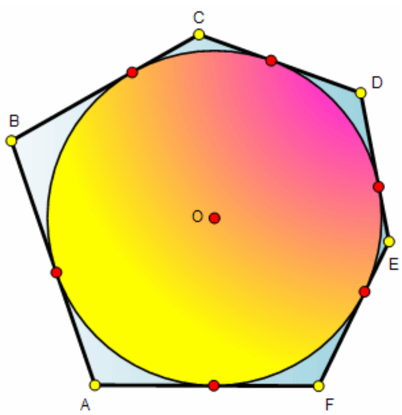
Nachweis: Die Seiten des Sechsecks tangieren den Inkreis, die Berührungspunkt seien G, H, M, N, P und K mit

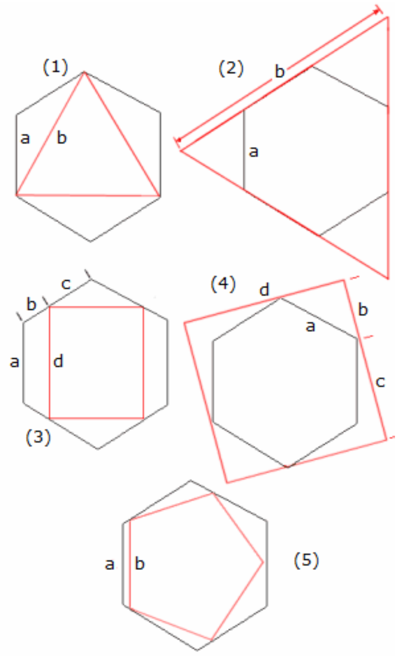
AG = AK , BG = BH , HC = CM ,
MD = DN , NE = EP und PF = FK

Dann wird s = (AB+BC+CD+DE+EF+FA)/2

s = (AG+GB+BH+HC+CM+MD+DN+NE+EP+PF+FK+KA)/2
s = (AG+BG+BG+CM+CM+MD+MD+EP+EP+PF+PF+AG)/2
s = AG+BG+CM+MD+EP+PF
s = AB+CD+EF

Analog folgt s = BC + DE + AF



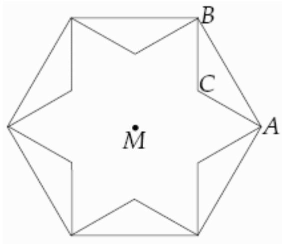


Polygone im Sechseck

In ein regelmäßiges Sechseck können verschiedene Polygone eingeschrieben oder um das Sechseck gezeichnet werden. Für die kleinsten und größten dieser Vielecke findet man mit einer Sechseckseite a:

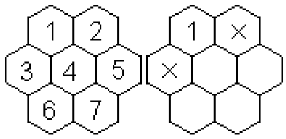
(1) größtes eingeschriebenes Dreieck
$b = a \sqrt{3}$
(2) kleinstes umschriebenes Dreieck
$b = 3\ a$
(3) größtes eingeschriebenes Quadrat
$d = a\ (3 - \sqrt{3})$ mit $b = a\ (2- \sqrt{3})$
(4) kleinstes umschriebenes Quadrat
$d = 2\ a / (\sqrt{6} - \sqrt{2})$ mit $b = (\sqrt{3} - 1)/2\ d$
(5) größtes eingeschriebenes Fünfeck
$b = 1{,}076362697\ldots\ a = 2/(1 + \sin 72° / \sqrt{3} + \cos 72°)\ a$
$b = 8 / (3 + \sqrt{5} + \sqrt{(2/3 \sqrt{5} + 10/3)})$

Stern im Sechseck

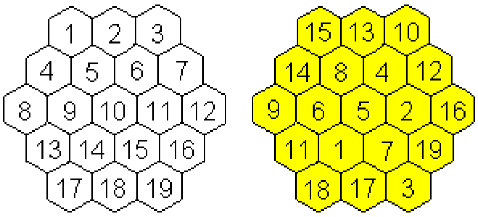


Gegeben ist ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge a. In dieses Sechseck wird, wie in der Abbildung, ein sechseckiger Stern, ein Hexagramm, eingezeichnet.
Um wieviel ist die Fläche des Sechsecks größer als die des Sterns?
Lösung: Die Höhe h des gleichseitigen Dreiecks Δ MAB ist $h = 1/2 \sqrt{3}\ a$
Das regelmäßige Sechseck hat somit den Flächeninhalt $A = 3/2 \sqrt{3}\ a^2$
Die Höhen im Dreieck Δ MAB sind außerdem die Verlängerungen der Strecken MC, AC und BC. Da Δ MAB gleichseitig ist, ist der Höhehnschnittpunkt C auch der Schwerpunkt von Δ MAB.
Dieser teilt jede Höheh im Verhältnis 2:1 vom zugehörigen Eckpunkt aus. Somit ist die Höhe im Dreieck Δ CAB $h^* = h/3 = 1/6 \sqrt{}\ a$
Damit ergibt sich für die Fläche des Dreiecks Δ CAB $A_{CAB} = 1/12 \sqrt{3}\ a^2$
Aus Symmetriegründen wird damit für den Flächeninhalt des Hexagramms $A_{Hexagramm} = a^2 \sqrt{3} = R^2 \sqrt{3}$
wobei die Seite a auch gleich dem Umkreisradius von Sechseck und Hexagramm ist.
Das Sechseck ist 3/2-mal so groß wie der Stern.
Quelle: Monoid 81

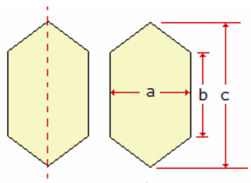
Magisches Sechseck aus Sechsecken



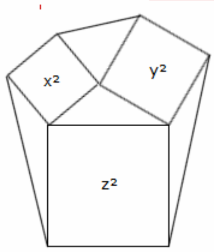
Trägt man in die nebenstehende Figur aus Sechsecken die Zahlen 1 bis 7 ein, so sind die Summen aus drei Zahlen gleich, nämlich 12. Es ist aber nicht möglich, dass alle Summen konstant sind. Gibt man z.B. die Zahl 1 vor, so müssen die Zahlen an den Stellen x gleich sein. Das ist nicht möglich.



Gibt man eine Figur aus 19 Sechsecken vor, so gibt es 15 Richtungen. Schreibt man die Zahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge auf, so sind die drei Summen aus fünf Summanden gleich.
Hier ist es aber auch möglich, die Zahlen so anzuordnen, dass die Summe in allen 15 Richtungen dieselbe ist, nämlich 38.

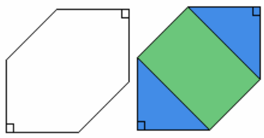


Man erhält sie, indem man die mittlere Summe bildet: Man dividiert 1+2+3+…+19 durch 5 (5 ist die Anzahl der Zeilen). Es gibt nur das eine magische Sechseck.
Beweis: Die magische Zahl ist allgemein
$(72n^3 - 108n^2 + 90n - 27 + 5/(2n-1)) : 32$
Dieser Term ist nur dann ganzzahlig, wenn $5/(2n-1)$ ganzzahlig ist. Neben den Fällen $n = -2,1,0$ führt nur $n=3$ zu einer ganzen Zahl, nämlich zu 38. Als erster formulierte im Jahre 1887 der Stadtbaurat Ernst von Haselberg aus Stralsund dieses Problem und löste es - auch die Eindeutigkeit - ein Jahr später.



Spezielle Sechsecke

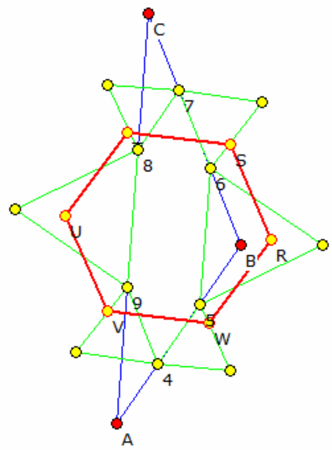
Für Sechsecke in spezieller Form existieren einfache Gleichungen für den Flächeninhalt.
obere Abbildung: Für ein Sechseck mit einer Geradensymmetrie durch entgegengesetzte Eckpunkte ergibt sich für die Fläche des inneren Rechtecks a b.
Die Flächenstücke oben und unten können zu einem Rechteck vereinigt werden



mit der Fläche a (c - b)/2, und damit $A_1 = a\,(b + c)/2$

mittlere Abbildung: Für das Sechseck, das gebildet wird, in dem auf die Seiten eines beliebigen Dreiecks Quadrate aufgesetzt werden, erhält man mittels Heronscher Dreiecksformel; alle 4 Dreiecke haben gleichen Flächeninhalt: $A_2 = x^2 + y^2 + z^2 + 4\,\sqrt{s\,(s - x)\,(s - y)\,(s - z)}$, mit $s = (x+y+z)/2$

untere Abbildung: Bei diesem Sechseck sind alle Seiten gleich lang. Zusätzlich gibt es zwei rechte Innenwinkel. Für eine Seitenlänge s wird dann $A_3 = s^2\,(1 + \sqrt{2})$

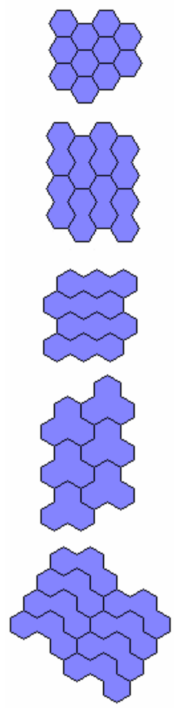


Fukuta-Sechseck

1996 entdeckte Jiro Fukuta einen Satz über ein an jedem Dreieck auftretendes regelmäßiges Sechseck.
Gegeben ist ein beliebiges Dreieck ABC. Jede Dreiecksseite wird in zwei konstanten Verhältnissen m und n geteilt.
Die entstehenden Punkte (in der Abbildung 4, 5, …, 9) bilden ein allgemeines Sechseck. Über den Sechseckseiten werden gleichseitige Dreiecke errichtet, so dass die Dreiecke nach außen zeigen.
Auch die neu konstruierten Punkte bilden ein allgemeines Dreieck.

Jeweils drei aufeinander folgende Punkte des Sechsecks bilden ein Dreieck. Die Schwerpunkte dieser sechs Dreiecke ergeben erneut ein Sechseck. Nach dem Satz von Fukuta ist dieses Sechseck stets regelmäßig.
Der Beweis des Satzes gelang 1998 Zvonko Cerin.
Quelle: "Handbook of Geometric Programming Using Open Geometry GL", Georg Glaeser

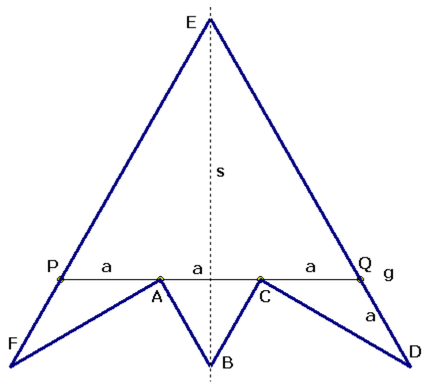
Polyhexen



Unter einem Polyhex versteht man ein Gebilde, dass aus regelmäßigen Sechsecken gleicher Größe zusammengesetzt ist.
Gleichgültig wie viele Sechsecke zusammengefügt werden, lässt sich die Ebene stets vollständig überdecken.

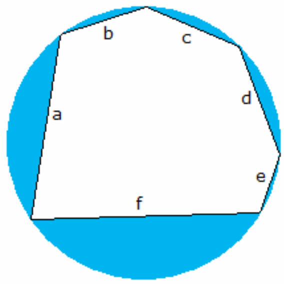
Für ein Polyhex aus einem Sechseck ist die hexagonale Parkettierung oben abgebildet. Für Polyhexen aus zwei Sechsecken existiert genau eine Möglichkeit der Parkettierung (zweite Abbildung).
Für Polyhexen aus drei Sechsecken existieren genau drei verschiedene Möglichkeiten der Parkettierung (untere Abbildungen).

Die Anzahl der Parkettierungsvarianten steigt schnell an. Für vier Sechsecke gibt es 7 Möglichkeiten, für 5 Sechsecke 22, …
Allgemein ergeben sich n = 1, 2, 3, … Sechsecke genau
1, 1, 3, 7, 22, 82, 333, 1448, 6572, 30490, 143552, 683101, 3274826, 15796897, 76581875, 372868101, 1822236628, 8934910362, 43939164263, 216651036012, 1070793308942, …   Möglichkeiten.
Ein Polyhex aus n = 4, 5, … Sechsecken werden Tetrahex, Pentahex, Hexahex, Heptahex, … genannt. Pentahexen wurden von Christoph M.Hoffman eingeführt und 1967 von Martin Gardner in "Mathematical game" bekanntgemacht.
Von den möglichen 82 Hexahexen besitzt eines ein Loch.



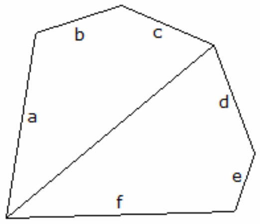
Allgemeines Sechseck

Aufgabe:
a) In einem Sechseck soll dieses durch genau eine Gerade durch 2 Eckpunkte in vier Dreiecke zerlegt werden.
b) Zwei der Dreiecke sollen gleichseitig, die anderen zwei gleichschenklig und drei der Dreiecke flächengleich sein.
Lösung: Diese Aufgabe kann in einem konvexen Sechseck nicht gelöst werden, da dort eine Gerade durch zwei Eckpunkte das Sechseck in zwei Vierecke oder ein Dreieck und ein Fünfeck zerlegt.
zu a) Für ein nichtkonvexes Sechseck mit zwei „einspringenden" Ecken A und C existiert dagegen eine Lösung. An diesen Ecken sind die Innenwinkel überstumpf. Die Gerade g durch A und C zerlegt das Sechseck in vier Dreiecke.
zu b) Ist das Sechseck symmetrisch können auch diese Forderungen erfüllt werden.
Konstruktion des Sechsecks: Auf g werden drei Strecken der Länge a angetragen, a = PA = AC = CQ.
Über AC errichtet man ein gleichseitiges Dreieck nach unten, über PQ ein gleichseitiges Dreieck nach oben. EP und EQ werden um a verlängert und ergeben die Punkte F und D. Die Dreiecke ∆ PFA, ∆ ABC und ∆ CDQ sind dann flächengleich.



Flächengrößtes Sechseck

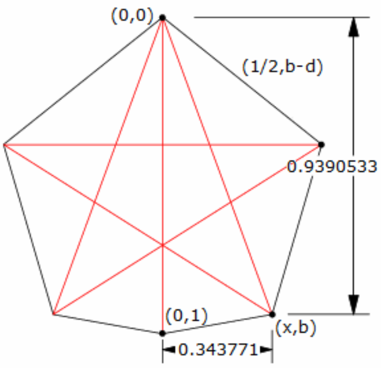
Gegeben ist ein Sechseck mit festen Seitenlängen, die aber an den Eckpunkten bewegt werden können.
Problem: Welches der möglichen Sechsecke hat dann den größten Flächeninhalt.
Lösung: Die maximale Fläche wird erreicht, wenn alle Eckpunkte auf einem Kreis liegen. Das Sechseck ist dann ein zyklisches Polygon.



Nachweis: Offensichtlich kann die maximale Fläche nur von einem konvexen Sechseck erreicht werden. Durch eine Diagonale wird das Sechseck in zwei Vierecke zerlegt, siehe Abbildung.
Nach der Bretschneider-Formel ist der Flächeninhalt eines Vierecks mit den Seiten a, b, c, d, dem halben Umfang $s = (a+b+c+d)/2$ und den Innenwinkeln α bei A und γ bei C:

$$A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2[(\alpha+\gamma)/2]}$$

Diese Fläche wird maximal, wenn die Winkelsumme $\alpha + \gamma = 180°$ ist, d.h. ein Sehnenviereck liegt vor.
Da es gleichgültig ist, welche Punkte des Sechsecks man zu einem Viereck zusammenfasst, ergibt sich analog, dass alle Punkte auf dem Kreis liegen müssen.

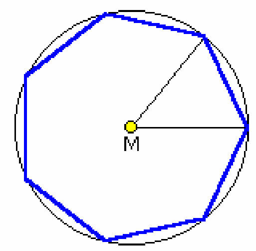


Grahams Sechseck

Grahams Sechseck ist das größte mögliche, konvexe Sechseck mit einem Polygondurchmesser von 1, d.h. zwei Ecken des N-Ecks haben höchstens einen Abstand von 1. In der Abbildung haben die roten Diagonalen die Länge 1.
Für den Flächeninhalt A ergibt sich dann

$$A = 0{,}674981442930104703 68 \ldots$$

als Lösung der Polynomgleichung
$4096 \cdot A^{10} + 8192 \cdot A^9 - 3008 \cdot A^8 - 30848 \cdot A^7 + 21056 \cdot A^6 + 146496 \cdot A^5 - 221360 \cdot A^4 + 1232 \cdot A^3 + 144464 \cdot A^2 - 78488 \cdot A + 11993 = 0$
Damit ist der Flächeninhalt des Sechsecks um 3,9 % größer als der des regelmäßigen Sechsecks mit der Kantenlänge 1.
Ein derartiges Sechseck kann in einem Quadrat die Seitenlänge 1 rotieren.



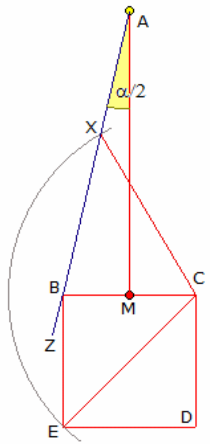
Regelmäßiges Siebeneck

Ein regelmäßiges Heptagon ist ein regelmäßiges, siebenseitiges N-Eck mit dem Schläfli-Symbol 7, 7 gleiche Innenwinkel
Es ist nicht allein mit Zirkel und Lineal konstruierbar, aber unter Anwendung der Konchoide des Nikomedes.
Zentriwinkel = 360° / 7 ≈ 51,428571° = 51°25'42 6/7", Winkel zwischen zwei benachbarten Seiten ≈ 128,6° = 128°34'17 1/7"
Für einen Umkreisradius r wird näherungsweise

Seitenlänge $a \approx 0{,}8677674\, r \approx 0{,}9631492\, p \approx 0{,}5245814 \sqrt{A}$
Flächeninhalt $A = 7a^2/(4 \cot(180°/7)) \approx 3{,}6339127\, a^2 \approx 2{,}7364103\, r^2$
Inkreisradius, Apothem $p = \rho = a/(2 \tan(180°/7)) \approx 1{,}0382608\, a \approx 0{,}9009677654\, r$
Umkreisradius $r = a/(2 \sin(180°/7)) \approx 1{,}1523825\, a \approx 1{,}1099163\, p \approx 0{,}6045183 \sqrt{A}$
Abstand eines Punktes zur gegenüberliegenden Seite $h = a/(2 \tan(90°/7))$
Längen der verschiedenen Diagonalen $d_1 = 2a \cos(180°/7)$
$d_2 = a/(2 \sin(90°/7))$

Näherungen
2 arcsin (√3 / 4) ≈ 51,317813° ; arctan (5/4) ≈ 51,340192°
30° + arcsin ((√3 - 1) / 2) ≈ 51,470701°
siehe Siebeneck-Konstruktion (Näherungskonstruktion)
Das Siebeneck hat 14 Diagonalen. Sieben Diagonalen verbinden jeden zweiten und sieben jeden dritten Eckpunkt. Die Diagonalen bilden zwei voneinander unabhängige Sterne (Heptagramme). Sie können in einem Streckenzug gezeichnet werden. Die Winkel an den Spitzen der Heptagramme sind 540°/7 und 180°/7.

Regelmäßige, aber auch leicht veränderte Siebenecke sind international bei Geldstücken sehr beliebt. Dabei ist das englische 50 Pence-Stück eigentlich eine Fläche gleicher Breite, ein Gleichdick. Die alte spanische 200-Peseten-Münze enthält auf beiden Seiten ein Siebeneck, um Blinden die Unterscheidung von anderen Münzen zu erleichtern.



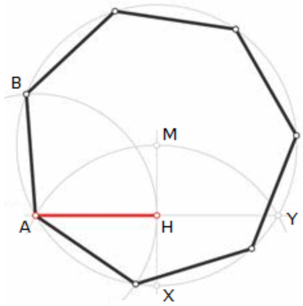
Siebeneck-Konstruktion (Näherungskonstruktion)

Ermittlung eines Winkels $\pi/7$

1. ein Punkt X wird auf einer Strecke AZ markiert
2. Kontruktion eines Quadrates mit der Seitenlänge AX
3. Mittelsenkrechte von BC durch M
4. Kreisbogen um C mit Radius CE
5. Positioniert man nun B so, dass B auf AZ liegt (nur mit Näherungsschritten möglich), so liegt X auf dem Kreisbogen und A auf der Mittelsenkrechte durch M
6. dann ist der Winkel BAC = $\pi/7$

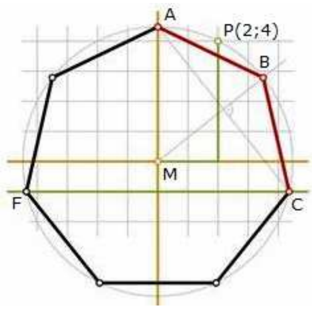
Man kann tan α beliebig nahe kommen, wenn man den Kettenbruch $\tan(2\pi/7) = [1, 3, 1, 15, 31, 1, 3, 4, 2, 1, 3, 2, 1, 1, 7, 5, 1, 5, 1, 3, 1, 7, 22, \ldots]$ wählt. Die ersten Näherungsbrüche sind 1, 4/3, 5/4, 79/63, 2454/1957, 2533/2020, 10053/8017, 42745/34088, 95543/76193, … und als Dezimalbruch 1, 1,33333…, 1,25, 1,253968253…, 1,253960143…, 1,253960396…, 1,253960334…

Näherungskonstruktion eines Siebenecks



Ziel ist es, mittels Näherungskonstruktion eine Strecke zu erhalten, die möglichst genau das 0,86776747823-fache eines gegebenen Radius ist.

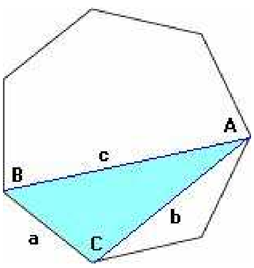
Vom Mittelpunkt des Umkreises zeichnet man eine Gerade, die den Umkreis im Punkt X schneidet. Dann zeichnet man einen Kreis um X, der durch M verläuft und den Umkreis in den Punkten A und Y schneidet.
Die Gerade AY schneidet die Strecke MX im Halbierungspunkt H. Die rote Strecke AH ist eine gute Näherung für die Seitenlänge des Siebenecks.
Die Eckpunkte B bis G erhält man durch Abtragen der Seitenlänge auf dem Umkreis.
In dem rechtwinkligen Dreieck AHM ist $AH = \sqrt{MA^2 - MH^2}$
Mit MA = r , MH = r/2 und AH = s wird $s = \sqrt{r^2 - (r/2)^2} = r\sqrt{1 - 1/4} \approx 0{,}8660254\ r$
Bei dieser Konstruktion beträgt der Fehler -0,002. Die mit dieser Konstruktion gewonnene Seitenlänge ist zu kurz und 99,8 Prozent des wahren Wertes.
Erst ab einem Umkreisradius von etwa 57 cm beträgt der Fehler in der Seitenlänge mehr als einen Millimeter.



Näherungskonstruktion eines Siebenecks

Eine sehr genaue Näherungskonstruktion eines Siebenecks ist folgende:
In einem rechtwinkeligen Koordinatensystem zeichnet man einen Kreis, der seinen Mittelpunkt im Ursprung (0; 0) hat und genau durch den Punkt P mit den Koordinaten (2; 4) verläuft.

Der Schnittpunkt der positiven y-Achse mit der Kreislinie wird als Eckpunkt A des regelmäßigen Siebenecks festgelegt. Die Gerade y = -1 schneidet die Kreislinie in unmittelbarer Nähe der Eckpunkte C und F.
Wenn man die Streckensymmetrale der Strecke AC mit dem Kreis schneidet, erhält man eine Näherung für den Eckpunkt B.
Die rote Strecke AB bzw. BC ist eine sehr gute Näherung für die Seitenlänge des regelmäßigen Siebenecks. Die Eckpunkte D, E und G erhält man durch Spiegelung bzw. Abtragen der Seitenlänge am Umkreis.
r sei der Umkreisradius, h der Abstand von M zu FC. Setz man q = h/r, so wird
$AB = r\sqrt{2 - \sqrt{2}\sqrt{1 - q}}$
und mit $r = \sqrt{20}$, h = 1 und $q = 1/\sqrt{20}$: $AB = r\sqrt{2 - \sqrt{2}\sqrt{1 - 1/\sqrt{20}}}$ $AB \approx 0{,}868269253\ r$
Die konstruierte Seitenlänge ist zu lang und der Fehler beträgt 0,00057821133, d.h. 0,0578 %. Erst bei einem Umkreisradius von 199 cm beträgt der Fehler in der Seitenlänge einen Millimeter.



Siebeneck-Dreieck, heptagonales Dreieck

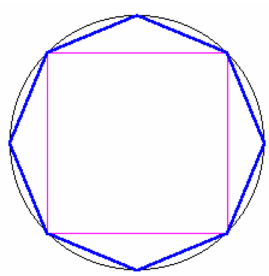
Ein heptagonales Dreieck ist ein Dreieck, welches einem regelmäßigen Siebeneck einbeschrieben wird (siehe Skizze).
Innenwinkel $\pi/7$, $2\pi/7$, $4\pi/7$
Flächeninhalt $A = \sqrt{7}\ R^2/4$
... Umkreisradius R des Dreiecks und Siebenecks
Die lange Diagonale, die kurze Diagonale und die Seite des Siebenecks bilden ein

Dreieck. Zwischen den Seiten gelten folgende Beziehungen:
(I) $d_1^2=ad_2+a^2$ (II) $d_2^2=d_1d_2+a^2$ (III) $d_2^2=ad_1+d_1^2$
Seiten $a^2 + b^2 + c^2 = 7 R^2$ $1/a^2 + 1/b^2 + 1/c^2 = 2 / R^2$
$a = bc / (b + c)$ $b^2/a^2 + c^2/b^2 + a^2/c^2 = 5$
Höhen h_a, h_b, h_c $h_a = h_b + h_c$ $h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 = 1/2 (a^2 + b^2 + c^2)$
Fußpunkte A', B', C' der Höhen BA' * A'C = ac / 4
Winkelbeziehungen $\sin a \sin b \sin c = \sqrt{7} / 8$ $\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c = 7/4$
$\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c = 7/64$ $\cos a \cos b \cos c = -1/8$ $\sin a + \sin b + \sin c = \sqrt{14} / 2$
$\tan a \tan b \tan c = -\sqrt{7}$ $\sin (2a) + \sin (2b) + \sin (2c) = \sqrt{7} / 2$

Siebeneck-Brunnen

Siebenecke finden sich in der Architektur von Gebäuden usw. nur sehr selten. Eine Ausnahme sind die Stadtbrunnen von Willisau, einer Stadt im Schweizer Kanton Luzern.

Die drei Stadtbrunnen sind um 1600 in der seltenen Form eines Siebenecks gebaut worden. Ihre Wasserquellen liegen nicht außerhalb, sondern innerhalb der Ringmauer. In den 1950er Jahren wurden die drei baufälligen Brunnen abgebrochen und nach alten Plänen neu erstellt.
Die Kirchenpatrone Petrus und Paulus und die Madonna mit Kind schmücken die Brunnensäulen. Die Bronzefiguren wurden von den beiden Luzerner Künstlern Rolf Brem (Paulus) und Franco Annoni (Madonna) sowie vom Züricher Eugen Häfelfinger (Petrus) geschaffen.
Ein weiteres Beispiel für die Verwendung eines Siebenecks ist der Konzertsaal "Hegelsaal" im "Kultur- und Kongresszentrum Liederhalle" in Stuttgart. Dieser hat ebenso wie seine Glaskuppel einen Grundriss in Form eines regelmäßigen Siebenecks.
Die von Otto Bartning projektierte Sternkirche Berlin, in Form eines kristallinen Siebenecks voller Kanten und geschwungener Bögen, wurde nie gebaut.
Siebeneckige Brunnen findet man auch im Islam. Ein sehr schönes Beispiel ist der Brunnen im Mausoleum des Mulai Isma'il in Meknes, Marokko, aus dem 18.Jahrhundert.

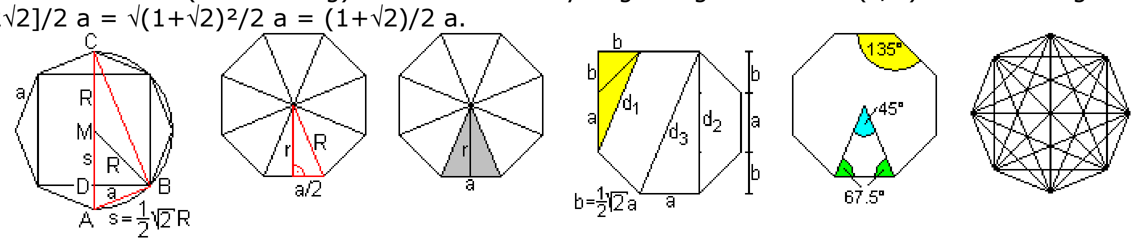


Regelmäßiges Achteck

Ein regelmäßiges Achteck ist ein regelmäßiges, achtseitiges N-Eck mit dem Schläfli-Symbol {8}.
Das regelmäßige Achteck ist ein Vieleck mit acht Ecken, acht gleich langen Seiten und acht gleich großen Innenwinkeln. Das Achteck hat 20 Diagonalen. Vier Diagonalen verbinden gegenüberliegende Eckpunkte, acht jeden zweiten und acht jeden dritten Eckpunkt.

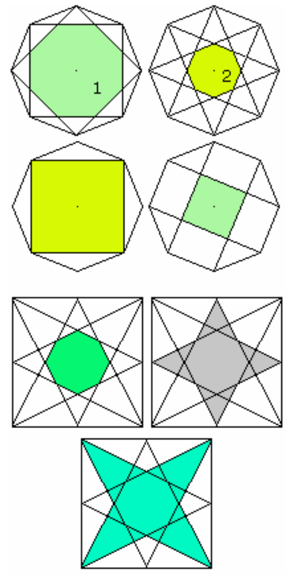
Seitenlänge $a = r \sqrt{2 - \sqrt{2}} = \sqrt{A/2 (\sqrt{2} - 1)} = 0,4550899… \sqrt{A}$
$a = 2 \rho (\sqrt{2} - 1)$
Inkreisradius, Apothem $\rho = p = a/2 (\sqrt{2} + 1) = r/2 \sqrt{2 + \sqrt{2}} = \sqrt{A/8 (\sqrt{2} + 1)} = 0,5493420… \sqrt{A}$
Umkreisradius $r = a/2 \sqrt{4 + 2 \sqrt{2}} = \rho \sqrt{4 - 2 \sqrt{2}} = \sqrt{A/4 \sqrt{2}} = 0,5946036… \sqrt{A}$
Flächeninhalt $A = 2 a^2 (\sqrt{2} + 1) = 2 r^2 \sqrt{2} = 2,8284271 r^2 = 8 \rho^2 (\sqrt{2} - 1)$
Umfang $u = 8a$
Winkel zwischen benachbarten Seiten 135°
Das regelmäßige Achteck kann mit Zirkel und Lineal konstruiert werden. Dazu konstruiert man zuerst ein Quadrat und ermittelt dann durch Halbierung der Zentriwinkel die fehlenden acht Ecken.
Es ist möglich, ein Achteck in einem Koordinatensystem durch nur eine Gleichung zu beschreiben:
$$2(|x|+|y|)+ \sqrt{2} (|x-y|+|x+y|) = 8$$

Radius des Umkreises (1.Abbildung): Das Dreieck ABC ist nach dem Satz des Thales ein rechtwinkliges Dreieck mit der Kathete AB = a, der Hypotenuse AC = 2R und dem Hypotenusenabschnitt AD = R-s. Es gilt der Kathetensatz $a^2 = 2R (R-s)$. Daraus folgt mit $s = \sqrt{2} R/2$ die Formel $R = \sqrt{[4+2 \sqrt{2}]/2}\, a$.
Radius des Inkreises (2.Abbildung): Nach Satz des Pythagoras gilt $r^2 = R^2 - (a/2)^2$. Daraus folgt $r = \sqrt{[3+2\sqrt{2}]/2}\, a = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2/2}\, a = (1+\sqrt{2})/2\, a$.



Flächeninhalt (3.Abbildung): Sind die Radien R und r gegeben, so heißen die Flächenformeln $A = 2\sqrt{2} R^2$ und $A = 8 [\sqrt{2}-1] r^2$.
Diagonalen (4.Abbildung): $d_1^2 = (a+b)^2+b^2$. Daraus folgt $d_1 = \sqrt{2+\sqrt{2}}\, a$. $d_2 = a+2b = (1+\sqrt{2})\, a$. $d_3 = 2R = \sqrt{4+2\sqrt{2}}\, a$

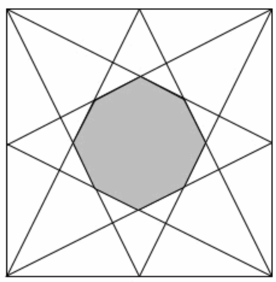
Winkel (5.Abbildung): Mittelpunktswinkel: 360°/8=45° ; Basiswinkel des Bestimmungsdreiecks des Achtecks: (180°-45°)/2=67,5° ; Innenwinkel: 2*67.5°=135°

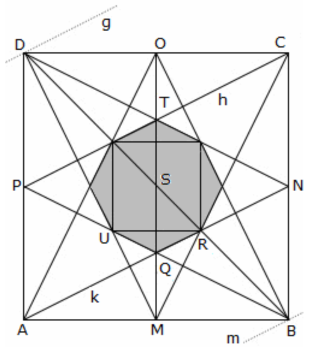


Teilstücke der Diagonalen bilden im Achteck Quadrate oder kleinere Achtecke.
Seitenlängen der inneren Achtecke:
$x = \sqrt{5-2\sqrt{2}}/2\ a$ und $x = \sqrt{6-4\sqrt{2}}/2\ a$

Achteck 1 $x = \sqrt{5-2\sqrt{2}}/2\ a$ und
Achteck 2 $x = \sqrt{6-4\sqrt{2}}/2\ a$
sowie für deren Flächeninhalte
Achteck 1 $A = (1/2 + 3/2\ \sqrt{2})\ a^2$ und
Achteck 2 $A = (\sqrt{2} - 1)\ a^2$
im Vergleich zum Ausgangsachteck
Flächeninhalt $A = 2\ a^2\ (\sqrt{2} + 1)$

Verbindet man die Seitenmitten eines Quadrats mit den gegenüberliegenden Eckpunkten, so entstehen drei gleichseitige Achtecke. Ein Achteck ist sogar regelmäßig. Es hat eine Seitenlänge von $x = \sqrt{5}\ a/6$.





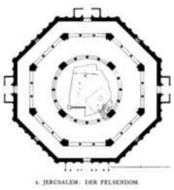
Aufgabe: In einem Quadrat werden die Seitenmitten mit den Gegenecken verbunden; in der Mitte entsteht das graue Achteck.
Welchen Bruchteil der Quadratfläche nimmt das Achteck ein?

Lösung:
Die Strecke AB soll die Länge 1 haben, d.h. das Quadrat den Flächeninhalt 1.
Zeichnet man alle Diagonalen des Achtecks durch den Diagonalenschnittpunkt S im Quadrat ein, zerlegen sie das Achteck in acht kongruente Dreiecke, von denen eines das Dreieck QRS ist.
Da das Viereck PQTD ein Parallelogramm ist, hat die Seite QT die Länge 1/2, die Strecke SQ ist die Hälfte davon, d.h. gleich 1/4.
Die Geraden g, h, k und m sind parallel zueinander und die Abstände von g zu h, von h zu k und von k zu m sind gleich. Daher wird die Diagonale DB = d von ihnen in drei gleich lange Teile geschnitten. Das kleine Quadrat im Achteck hat eine Diagonale, die ein Drittel von d ist, deshalb ist die Seite UR auch ein Drittel von AB, d.h. 1/3.
Die Hälfte von UR ist Höhe im Dreieck QRS, so dass man für den Flächeninhalt des Achtecks erhält: $A_{8\text{-Eck}} = 8\ A_\Delta = 1/6$
Der Flächeninhalt des Achtecks ist ein Sechstel des Flächeninhalts des äußeren Quadrats. Anmerkung: Das Achteck ist nicht regelmäßig.
Quelle: http://www.schulportal.bremerhaven.de/mathezirkel/lsg_mai07.html

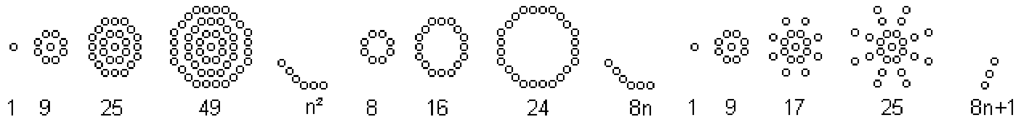
Achteckige Bauwerke

Legt man Achtecke aneinander, so entstehen quadratische Lücken, d.h. nur mit regelmäßigen Achtecken kann kein Parkett ausgelegt werden.
Im Beispiel sind Fenster am Canale Grande in Venedig zu sehen. Die einzelnen Glasscheibenstücke sind regelmäßige Achtecke und Quadrate.
Achteckige Grundformen findet man bei sehr vielen berühmten Gebäuden, zum Beispiel:

Baujahr	Bauwerk und Ort
669-692	Felsendom Jerusalem, Palästina
798-804	Mittelraum der Pfalzkapelle Aachen, Deutschland
um 1180	Turm der Gaukirche Paderborn, Deutschland
1240-1250	Castel del Monte Apulien, Italien
1338-1359	Baptisterium am Dom Florenz, Italien
1700-1717	Oktogon des Herkulesbauwerks Kassel, Deutschland
1937	Seligpreisungskirche Kapernaum, Israel
1958-1963	PanAm Building New York City, USA
1959-1962	Hauptbau der Kaiser-Wilhelm-Gedächtniskirche Berlin
1960-1969	Zentralbau der Verkündigungskirche Nazareth, Israel



Ein Oktogon ist in der Architektur ein Zentralbau oder -raum mit einem Grundriss in Form eines regelmäßigen Achtecks. Die Abbildung zeigt den Grundriss des Felsendoms. Der zweifach achsensymmetrische Grundriss wurde bei säkular-repräsentativen Bauten wie auch bei Sakralbauten wegen der symbolischen Bedeutung der Zahl Acht gewählt. Sie steht meist für Vollkommenheit und göttliche Perfektion. Achteckige Bauten haben vier Symmetrieachsen. Die Acht steht im Christentum auch für die Auferstehung Jesu Christi und die Teilhabe an Christus in der Taufe. Häufig sind daher Baptisterien und Taufbecken in Achteckform.



zentrierte Achteckzahlen Achteckrand-Zahlen Achtzackzahlen

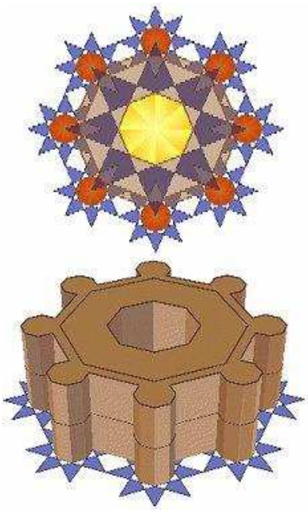
Achteckhaus

Das Schloss Sondershausen in Thüringen war bis 1918 die Residenz der Fürsten zu Schwarzburg-Sondershausen. Die sehr große Anlage umfasst eine Vielzahl von Gebäuden.
1710 wurde am Westende des Lustgartens ein Haus mit einem seltenen, achteckigem Grundriss errichtet. Das Gebäude diente dem Vergnügen des Hofstaates und hatte u.a. einen Fußboden, der gedreht werden konnte.

Die Wände des Gebäudes stützen acht Säulen, zwischen denen zwei umlaufende Emporen angebracht sind. Die Decke ziert das Gemälde der "Triumph der Venus" von Lazaro Maria Sanguinetti.
Mit dem Verfall des drehbaren Bodens wurde das Haus nur noch Achteckhaus. Von 1850 bis 1950 diente es als Scheune. Seit 1961 werden im Haus Sommerkonzerte durchgeführt.

Octagon-House

Weitere achteckige Gebäude findet man u.a. in Gough St. San Fracisco mit dem McElroy Octagon House von 1861 oder das Colonel John Tayloe III House in Washington von 1799. Das Haus in Washington wurde von William Thornton gebaut.



Castel del Monte

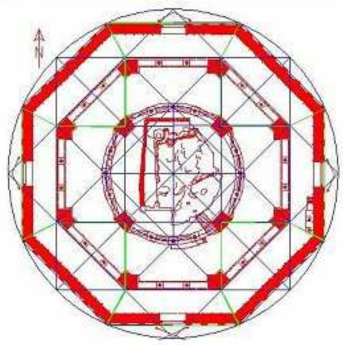
Friedrich II. (1194-1250) ließ in der Nähe von Bari im Süden Italiens das Castel del Monte errichten, ein ungewöhnliches Staufer Kastell, das im Gegensatz zu den Wehrkastellen nie zu Verteidigungszwecken verwendet wurde.
Das Schloss wurde von 1240 bis 1250 errichtet, jedoch nie ganz vollendet. Insbesondere der Innenausbau wurde nicht beendet.
Die geometrische Interpretation vom Grundriss des Castel del Monte beruht auf der Windrose, die aus dem Achteck hervorgeht.
Abbildung: computergenerierter Grundriss und perspektivische Darstellung

An den Ecken des oktogonalen Baus stehen Türme mit ebenfalls achteckigem Grundriss. Das Hauptachteck ist 25 m hoch, die Türme 26 m. Die Länge der Seiten des Hauptachtecks beträgt 16,50 m, die der Türme je 3,10 m. Eine Besonderheit ist, dass je zwei Seiten eines Turms mit den Seiten des Hauptachtecks zusammenfallen. Der Haupteingang ist nach Osten ausgerichtet.

Castel del Monte sieht nicht nur aus wie eine Krone, es ist bewusst als Abbild der Kaiserkrone gedacht, die ebenfalls oktogonal ist.
Acht Ecken hat auch die Pfalzkapelle in Aachen, wo Friedrich gekrönt wurde, acht Ecken hat der Barbarossaleuchter in dieser Kapelle, auch die Barbarossapfalz von Hagenau, sein Lieblingsaufenthalt in Deutschland, die selbst eine Nachbildung der Pfalzkapelle Aachen ist.

Felsendom in Jerusalem

Der Felsendom ist das bekannteste Wahrzeichen Jerusalems und stellt als ältester islamischer Sakralbau ein Meisterwerk der islamischen Baukunst dar. Die Erbauung des Felsendoms wird dem Kalifen Abd al-Malik ibn Marwan (685-705) zugeschrieben. Mitunter wird das Jahr 691 als Einweihungsjahr genannt.



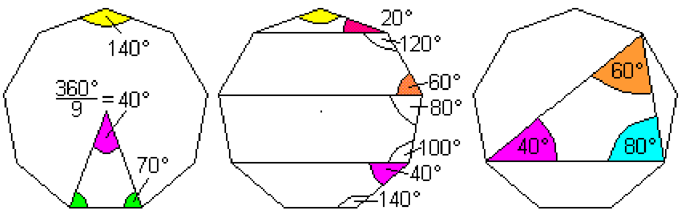
Den Grundriss bildet ein regelmäßiges Achteck, das in einen Kreis mit knapp 55 Meter Durchmesser eingepasst ist.
Der Durchmesser des Innenkreises beträgt 20,37 Meter. Die Kuppel wies früher ein schwarzes Bleidach auf. 1963 wurde sie mit vergoldeten Aluminiumplatten versehen, die 1993 restauriert wurden.

Die Mauern sind etwa 7-8 Meter hoch. Über dem Flachdach befindet sich ein runder Aufbau, der etwa 1/3 des Grundgebäudes beträgt und 5-6 Meter hoch ist. Darauf ist ein rundes Kuppeldach aus vergoldetem Blech befestigt. Ab etwa 3 Metern Höhe haben alle Mauern einen blauen Schmuck mit orientalischen Motiven. Das gesamte Gebäude ist rundum mit je 7 Rundbögen je Achteck-Seite ausgestattet.

Neuf-Brisach, Neu-Brisach

Neuf-Brisach ist eine ungewöhnliche kleine französische Stadt. Hier konnte sich der Festungsbauer Vauban im Mittelalter voll entfalten.
Als die Deutschen den Brückenknopf Breisach am Rhein einnahmen, sah er sich ab 1699 vor die Aufgabe gestellt, auf der Westseite des Rheins eine neue Festung zu erstellen, Neuf-Brisach.

Neuf-Brisach ist ein regelmäßiges Achteck, von Festungsmauern umgeben. Alle Gebäude in dieser Stadt ordnen sich dem Prinzip des Achtecks unter. So gibt es innerhalb der Ortschaft Straßen, die das ganze Achteck abfahren und dazwischen sternförmige Straßen, die das Ganze miteinander verbinden. In der Mitte befindet sich ein großer quadratischer Platz.



Regelmäßiges Neuneck

Das regelmäßige Neuneck ist ein Vieleck mit neun Ecken, neun gleich langen Seiten und neun gleich großen Innenwinkeln.
Das Neuneck heißt auch Nonagon oder seltener Enneagon.

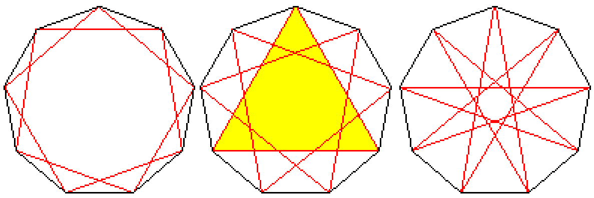
Ist die Seite a gegeben, so lassen sich daraus der Radius r des Inkreises, der Radius R des Umkreises, die, im mittleren Bild eingezeichneten, waagerechten Diagonalen d_1,d_2 und d_3 und die Höhe h, der Flächeninhalt A und der Umfang U errechnen.
Wie beim regelmäßiges Siebeneck gibt es hier kaum Wurzelterme. Man muss bis auf die Ausnahme sin 60° die Zahlenterme trigonometrischer Funktionen stehen lassen.

$R = 1/(\sin 20°)\ a/2$ $\quad$ $r = \cos 20°/\sin 20°\ a/2$ $\quad$ $h = \cos 10°/\sin 10°\ a/2$

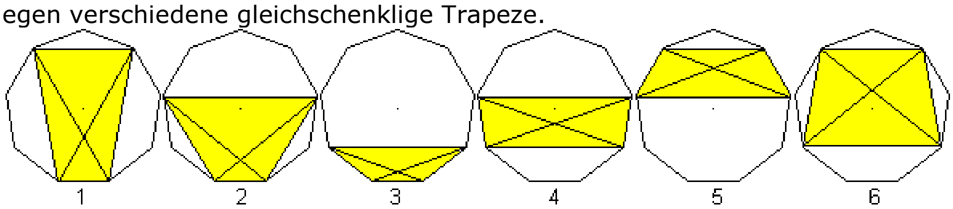
$A = \cos 20°/\sin 20°\ 9/4\ a^2$

$d_1 = \sin 40°/\sin 20°\ a$ $\quad$ $d_2 = \sqrt{3}/\sin 20°\ a/2$ $\quad$ $d_3 = \sin 80°/\sin 20°\ a$ $\quad$ $u = 9\ a$

Das Neuneck hat 27 Diagonalen. Neun Diagonalen verbinden jeden zweiten, neun jeden dritten und neun jeden vierten Eckpunkt. Die Diagonalen bilden drei voneinander unabhängige Sterne, die Nonagramme.
Zwei Sterne können in einem Zug gezeichnet werden. Der mittlere Stern besteht aus drei gleichseitigen Dreiecken. Er entsteht aus einem Dreieck, wenn man es um 40° und 80° 60° und 20°.



Im Neuneck liegen verschiedene gleichschenklige Trapeze.



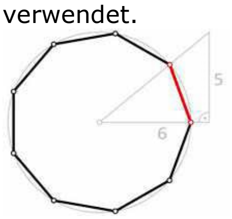
Nach dem Satz des Ptolemäus gibt es Beziehungen zwischen der Seite und den Diagonalen:
(1) $d_3^2=ad_1+d_2^2$ (2) $d_2^2=ad_3+d_1^2$ (3) $d_1^2=ad_2+a^2$ (4) $d_3^2=d_2d_3+a^2$ (5) $d_2^2=ad_3+d_1^2$ (6) $d_3^2=d_1d_2+d_1^2$

Näherungskonstruktionen

Ein regelmäßiges Neuneck kann nicht konstruiert, sondern nur berechnet werden, da der 40°-Winkel mit Zirkel und Lineal nicht konstruiert werden kann. Es gibt jedoch einige für die Praxis ausreichend genaue Näherungskonstruktionen.

Erste Konstruktion

Bei der einfachsten Näherungskonstruktion wird ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten 6 und 5 verwendet.

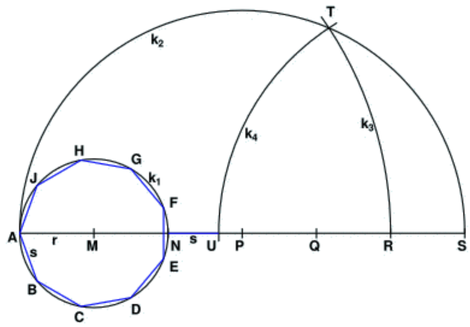


$\arctan(5/6) \approx 39{,}80557°$

d.h. mit diesem Dreieck erhält man einen Winkel von ca. 39,80557°. Ein wesentlich besseres Ergebnis erreicht man mit einem Dreieck der Seitenlängen 87 und 73, das einen Winkel von ca. 39,99936° liefert.
Da der Winkel 40° betragen müsste, ist in beiden Fällen das Ergebnis für die Seitenlänge kleiner als der wahre Wert. Beim 6:5-Dreieck beträgt der relative Fehler

0,00319.
Beim 87:73-Dreieck beträgt er ca. -0.0000106, also 0,00106 Prozent oder 1/1000 Prozent. Anders formuliert: Neunecke, die mit dem großen Hilfsdreieck konstruiert werden, müssen einen Umkreisradius von mehr als 94,591 Metern haben, damit der Fehler der Seitenlänge größer als 1 Millimeter ist. Ein solches Neuneck wäre größer als dreieinhalb Fußballfelder. Die Konstruktion mit dem großen Dreieck ist in der Praxis aber kaum realisierbar, denn jeder Zirkel ist fehlerbehaftet, und beim Abtragen von 87 Strecken kann sich der Fehler im ungünstigsten Fall vervielfältigen.

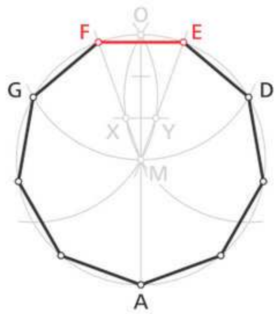
Zweite Konstruktion



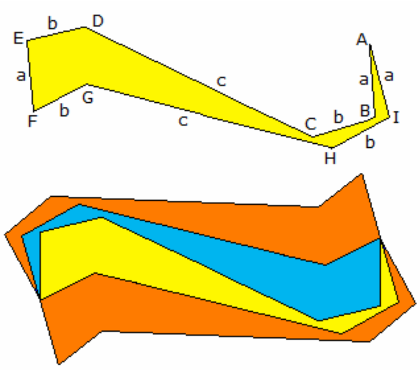
Eine praktikablere Konstruktion wird wie folgt durchgeführt:
Zeichne um einen Punkt M den Umkreis des Neunecks (k_1).
Zeichne einen Durchmesser AN und verlängere die Strecke auf das Dreifache.
Trage auf dieser Geraden vier weitere Radien ab. Von Punkt A also insgesamt 6 Radien bis Punkt S.
Zeichne über AS einen Thaleskreis (k_2). Trage mit einem Bogen um Punkt A (k_3) einen Abstand von 5 Radien am Thaleskreis ab (Punkt T). Trage mit einem Bogen um Punkt S (k_4) den Abstand TS auf der Geraden ab (Punkt U).
Die Strecke NU = s ist eine gute Näherung für die Seite des Neunecks.
Die Strecke s hat eine Länge von $r\,(4 - \sqrt{11}) \approx 0.68337521\ r$.
Bei dieser Konstruktion beträgt der Fehler also –0.097 Prozent. Das entspricht bei einem Radius von 150,3 cm einer Abweichung von -1 mm. Die Seite ist also etwas zu kurz.

Dürer-Konstruktion

Eine noch elegantere, aber leider ungenauere Näherungskonstruktion hat bereits Albrecht Dürer verwendet.



Auf dem Umkreis des Neunecks mit Mittelpunkt M und Radius r markiert man den Eckpunkt A.
Dann zeichnet man einen Kreis mit demselben Radius r um den gegenüberliegenden Kreispunkt O und erhält die beiden Eckpunkte D und G. Diese beiden Eckpunkte sind exakt, da die Diagonalen des Neunecks zwischen A, D und G ein gleichseitiges Dreieck ergeben. Die Punkte E und F können nicht mehr genau konstruiert werden, da das Problem der Dreiteilung des Winkels nur für spezielle Einzelfälle, nicht aber allgemein und auch nicht für den vorliegenden Fall von 120° lösbar ist.
Nun schlägt man wiederum mit dem Radius r zwei Kreise um die Punkte D und G.
Als nächstes wird die Strecke OM in drei Teile geteilt. Durch den Teilungspunkt, der näher beim Mittelpunkt des Neunecks liegt, wird ein Lot (horizontale Linie) auf die Gerade OM gezeichnet.
Die Schnittpunkte dieses Lotes mit den Kreislinien um D und G ergeben die Punkte X und Y.
Schließlich verlängert man die Geraden MX und MY bis sie den Umkreis schneiden. Diese Schnittpunkte sind eine gute Näherung für die Eckpunkte E und F. Die Strecke EF ist eine gute Näherung für die Seitenlänge des Neunecks.
Die Eckpunkte B, C, H und I erhält man durch Abschlagen der so gewonnenen Seitenlänge auf der Kreislinie.
Diese Konstruktion ist relativ ungenau. Das Dreieck MEF hat einen spitzen Winkel von ca. 39,59407° statt 40°. Die Strecke EF ist deswegen um ca. 0,97% kürzer als der wahre Wert der Seitenlänge.



Voderberg-Neuneck

Auf der Suche nach speziellen Vielecken, die lückenlose eine Ebene überdecken können, entdeckte 1936 Hans Voderberg das nach ihm benannte Voderberg-Neuneck.

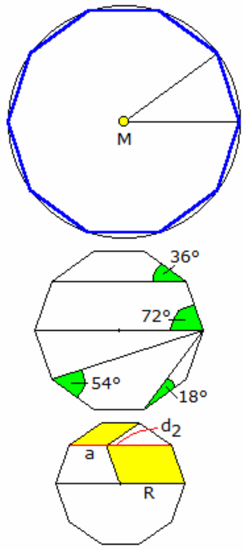
Dieses nicht konvexe Neuneck hat drei verschiedene Seitenlängen a, b und c. In der Abbildung ist gekennzeichnet, welche Seiten gleiche Länge besitzen.
Außerdem liegt eine zweifache Symmetrie vor. Die Seite AB ist parallel zu EF, die Seite DE parallel zu BC.
Das Dreieck ∆ AEF ist weiterhin ein gleichschenkliges Dreieck mit einem 12°-Winkel an der Spitze A.

Fügt man zwei Voderberg-Neunecke (rot) wie in der unteren Abbildung aneinander, so bilden diese ein Loch, in das weitere zwei Voderberg-Neunecke eingepasst werden können.
Damit ist die vollständige Parkettierung der Ebene möglich. Es entsteht die Voderberg-Doppelspirale.

Bahai-Tempel Chicago

Die Zahl Neun findet sich in der Architektur relativ selten.
Ein Ausnahme bildet die Bahai-Religion, in der die Neun und die Neunzehn besondere Stellungen haben. Das am häufigsten verwendete Symbol ist ein neunzackiger Stern.

Dem entsprechend werden die Tempel dieser Religion als neuneckige Gebäude errichtet.
Das Haus der Andacht, der Tempel, ist die vorgeschriebene Andachtsstätte der Bahai. Es handelt sich um einen neunseitigen Kuppelbau, welcher an jeder Seite ein Eingangstor besitzt. Links ist der Tempel von Chicago zu sehen.
Noch imposanter ist der Tempel in Neu Delhi, der außer mit neun Ecken, zusätzlich in der Form eines Lotusblüte gestaltet wurde.
Abbildung: Bahai-Tempel in Neu Delhi

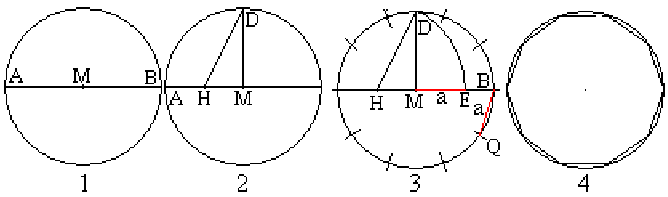


Regelmäßiges Zehneck

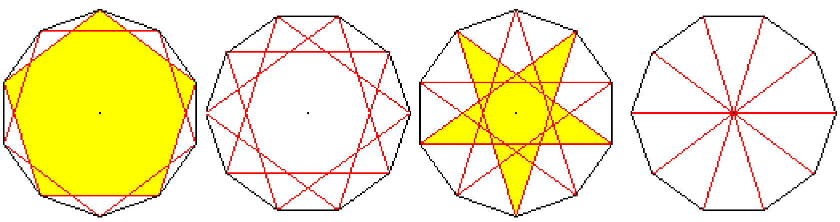
Das Dekagon ist ein regelmäßiges, zehnseitiges N-Eck mit dem Schläfli-Symbol {10}.
Das regelmäßige Zehneck ist ein Vieleck mit zehn Ecken, zehn gleich langen Seiten und zehn gleich großen Innenwinkeln von 144°, bei einem Zentriwinkel von 36°.
Das Zehneck heißt auch Dekagon (griech. δεκα = zehn).
Für eine gegebene Seitenlänge s gilt:

Seitenlänge $s = R/2\ (\sqrt{5} - 1) \approx 0{,}6180340\ R = 2/5\ r\ \sqrt{(25 - 10\sqrt{5})} \approx 0{,}6498394\ r$
$s = \sqrt{(2A/5\ \sqrt{((5-2\sqrt{5})/5)})} \approx 0{,}3605106\ \sqrt{A}$
Inkreisradius, Apothem $r = s/2 \cot(\pi/10) = s/2\ \sqrt{(5 + 2\sqrt{5})} \approx 1{,}5388418\ s$
$r = R/4\ \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} \approx 0{,}9510565\ R$
Umkreisradius $R = s/2 \csc(\pi/10) = s/2\ (1 + \sqrt{5}) = \phi\ s \approx 1{,}6180340\ s$
$R = r/5\ \sqrt{(50 - 10\sqrt{5})} \approx 1{,}0514622\ r$
$R = \sqrt{(A/5\ \sqrt{((10 + 2\sqrt{5})/5)})} \approx 0{,}5833183\ \sqrt{A}$
ϕ … Verhältniszahl des Goldenen Schnittes, d.h. im Zehneck stehen Umkreisradius und Seite im Verhältnis des Goldenen Schnittes.
Flächeninhalt $A = 5/2\ s^2 \cot(\pi/10) = 5/2\ \sqrt{(5 + 2\sqrt{5})}\ s^2 \approx 7{,}6942087\ s^2$
$A = 5/4\ R^2\ \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})} \approx 2{,}9389265\ R^2 = 2\ r^2\ \sqrt{(25 - 10\sqrt{5})} \approx 3{,}2491970\ r^2$
Umfang $u = 10a$
Der Innenwinkel im regelmäßigen Zehneck beträgt 144°. Das Zehneck hat vier Arten Diagonalen unterschiedlicher Länge. Für diese gilt
$d_1 = \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}\ a/2$ $d_2 = \sqrt{(14 + 6\sqrt{5})}\ a/2$ $d_3 = \sqrt{(5 + 2\sqrt{5})}\ a/2$
Die vierte Diagonalenart beschreibt den Abstand zweier gegenüberliegender Seiten, d.h.
$d_4 = d = 2\ R = a\ (1 + \sqrt{5})$
Im Zehneck liegen zwei Parallelogramme, so dass man die Beziehung $d_2 = R+a$ erkennt.

Konstruktion eines Zehnecks

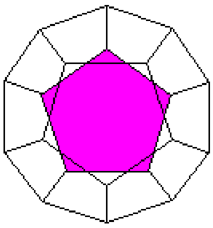


1 Zeichne einen Kreis um M. Er wird Umkreis des Zehnecks werden. Zeichne den Durchmesser AB.
2 Zeichne die Senkrechte zu AB durch Punkt M. Das führt zu Punkt D. Verbinde H und D. Halbiere die Strecke AM. Das führt zu Punkt H.
3 Zeichne den Kreis um Punkt H mit den Radius HD. Er schneidet MB in E. Trage die Strecke ME von B aus auf dem Kreis ab. Das führt zu Punkt Q. Trage die Strecke ME noch 9x auf dem Kreis ab. Es ergeben sich die Eckpunkte des Zehnecks. Verbinde die Schnittpunkte.



Das Zehneck hat 35 Diagonalen.
Zehn Diagonalen verbinden jeden zweiten, zehn jeden dritten und zehn jeden vierten Eckpunkt. Fünf Diagonalen verlaufen durch den Mittelpunkt. Die Diagonalen bilden drei voneinander unabhängige Sterne, die Dekagramme.
Der linke Stern besteht aus zwei regelmäßigen Fünfecken, die mit der Drehung eines Sterns um 36° zur

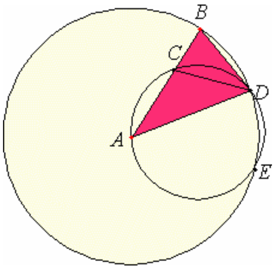
Deckung gebracht werden können. Der mittlere Stern kann in einem Zug gezeichnet werden. Der rechte Stern besteht aus zwei Pentagrammen, die mit der Drehung eines Sterns um 36° zur Deckung gebracht werden können. Die Winkel an den Spitzen der Sterne sind 108°, 72° und 54°.



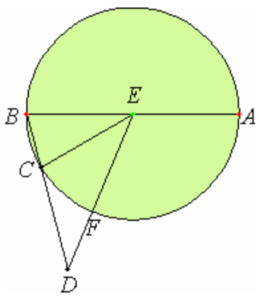
Das Abgestumpfte Dodekaeder und das Große Rhombenikosidodekaeder sind zwei archimedische Körper, die 12 Zehnecke enthalten. Der erste Körper hat zusätzlich 20 gleichseitige Dreiecke und der zweite 30 Quadrate sowie 20 Sechsecke.
Liegt bei einer Parallelprojektion des Pentagondodekaeders eine Fünfeckfläche parallel zur Zeichenebene, so ist der Umriss ein Zehneck. Steht bei einer Parallelprojektion des Ikosaeders eine Ecke oben oder - anders ausgedrückt - eine Raumdiagonale senkrecht zur Zeichenebene, so ist der Umriss ein Zehneck.

In der Natur tritt zum Beispiel das Zehneck als Grundstruktur der Blüte der Passionsblume (Passiflora coerula) auf. Die 5 Staubblätter sind zusätzlich noch als Fünfeck angeordnet.

In Euklids „Elemente" Buch IV § 10 (A. 10) ermittelt Euklid das Bestimmungsdreieck des regelmäßigen Zehnecks, ohne dies so explizit auszudrücken:
Ein gleichschenkliges Dreieck zu errichten, in dem jeder der beiden Winkel an der Grundlinie doppelt so groß ist wie der letzte Winkel.



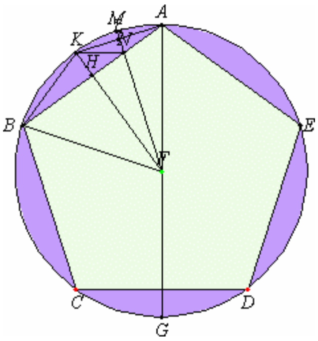
Man lege eine Strecke AB hin und teile sie im Punkte C so, dass $AB \cdot BC = CA^2$ (II, 11). Ferner zeichne man mit A als Mittelpunkt und AB als Abstand den Kreis BDE, trage in den Kreis BDE die der Strecke AC, die nicht größer ist als der Durchmesser des Kreises BDE, gleiche Sehne BD ein (IV, 1), ziehe AD, DC und beschreibe dem Dreieck ACD den Kreis ACD um (IV, 5).
Da $AB \cdot BC = AC^2$ und AC = BD, so ist $AB \cdot BC = BD^2$. Da man hier außerhalb des Kreises ACD einen Punkt B gewählt hat und von B aus zwei Strecken BA, BD zum Kreise ACD gehen, von denen die eine schneidet, die andere herangeht, während $AB \cdot BC = BD^2$ ist, so berührt BD den Kreis ACD (III, 37). Da nun BD Tangente ist und DC vom Berührungspunkt D aus durchgezogen, so ist ∠ BDC = DAC, dem Winkel im entgegengesetzten Kreisabschnitt (III, 32). Hier ist BDC = DAC; man füge daher CDA beiderseits hinzu; dann ist der ganze ∠ BDA = CDA + DAC. Andererseits ist BCD als Außenwinkel = CDA + DAC (I, 32), also BDA = BCD. Aber ∠ BDA = CBD, da die Seite AD = AB (I, 5); folglich ist auch DBA = BCD. Also sind BDA, DBA, BCD alle drei einander gleich. Und da ∠ DBC = BCD, ist auch Seite BD = Seite DC (I, 6). Wie setzen aber voraus, dass BD = CA; also ist CA = CD, folglich auch ∠ CDA = ∠ DAC (I, 5). Also sind CDA + DAC = 2 DAC. Aber BCD = CDA + DAC; also ist auch BCD = 2 CAD. BCD ist aber sowohl BDA als auch DBA gleich; also ist sowohl BDA als auch DBA = 2 DAB. Also hat man ein gleichschenkliges Dreieck, nämlich ABC, errichtet, in dem jeder der beiden Winkel an der Grundlinie DB doppelt so groß ist wie der letzte Winkel – dies hatte man ausführen sollen.



Euklidischer Sechseck-Zehnecksatz
Euklids "Elemente" Buch XIII: § 9 (L. 9):
Fügt man die Seiten des demselben Kreise einbeschriebenen Sechsecks und Zehnecks zusammen, dann ist die Summenstrecke stetig geteilt, und ihr größerer Abschnitt ist die Sechseckseite.

Man habe den Kreis ABC, und von den dem Kreise ABC einbeschriebenen Figuren sei BC die Seite des Zehnecks und CD die des Sechsecks, und sie mögen einander gerade fortsetzen.
Ich behaupte, dass die Summenstrecke BD stetig geteilt ist, CD ihr größerer Abschnitt.
Man verschaffe sich den Mittelpunkt E des Kreises, ziehe EB, EC, ED und ziehe BE nach A durch. Da BC die Seite des gleichseitigen Zehnecks ist, ist Bogen ACB = 5 Bogen BC (III, 28), also Bogen AC = 4 CB. Nun ist Bogen AC : CB = ∠ AEC : CEB (VI, 33). Also ist ∠ AEC = 4 CEB.
Da ∠ EBC = ECB (I, 5), ist ∠ AEC = 2 ECB (I, 32). Da ferner Strecke EC = CD, weil beide der Seite des dem Kreise ABC einbeschriebenen Sechsecks gleich sind (IV, 15 Zusatz), ist auch ∠ CED = ∠ CDE (I, 5), also ∠ ECB = 2 EDC (I, 32).
Wie oben bewiesen, ist aber AEC = 2 ECB; also AEC = 4 EDC. Wie auch schon bewiesen, ist AEC = 4 BEC; also ist EDC = BEC. Und den beiden Dreiecken BEC, BED ist ∠ EBD gemeinsam; also auch Rest ∠ BED = ECB (I, 32), also ∆ EBD dem ∆ EBC winkelgleich. Also stehen in Proportion DB : BE = EB : BC (VI, 4).
Nun ist EB = CD, also BD : DC = DC : CB. Hier ist BD > DC, also auch DC > CB (V, 14). Die Strecke BD ist also in C stetig geteilt (VI, Definition 3), DC ihr größerer Abschnitt - q.e.d.

Euklidischer 5-6-10-Ecksatz



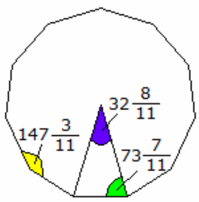
Euklids "Elemente" Buch XIII: § 10 (L. 10):

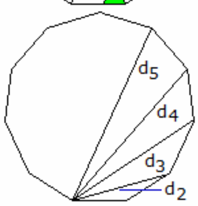
Beschreibt man einem Kreis ein gleichseitiges Fünfeck ein, so wird quadriert die Seite des Fünfecks ebenso groß wie die Seiten des Sechsecks und des Zehnecks, die sich demselben Kreise einbeschreiben lassen, zusammen.

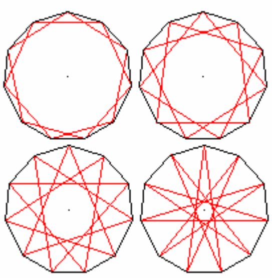
Man habe den Kreis ABCDE; dem Kreise ABCDE sei das gleichseitige Fünfeck ABCDE einbeschrieben. Ich behaupte, dass quadriert die Seite des Fünfecks ABCDE ebenso groß wird wie die Sehne des Sechsecks und des Zehnecks, die sich dem Kreise ABCDE einbeschreiben lassen, zusammen.

Man verschaffe sich den Mittelpunkt F des Kreises, ziehe AF und ziehe es durch zum Punkte G, ziehe FB, fälle von F auf AB das Lot FH und ziehe es nach K durch. Ferner ziehe man AK, KB und fälle wieder von F auf AK das Lot FL, ziehe es nach M durch und ziehe KN.
Da Bogen ABCG = Bogen AEDG, hierin ABC = AED (III, 28), sind die Restbogen CG = GD. CD gehört aber zum Fünfeck, CG also zum Zehneck. Da weiter FA = FB und FH das Lot, ist ∠ AFK = KFB (I, 5, 32), folglich auch Bogen AK = KB (III, 26), also Bogen AB = 2 Bogen BK, also Strecke AK die Zehneckseite. Aus demselben Grunde ist auch Bogen AK = 2 KM.

Da Bogen AB = 2 Bogen BK, während Boden CD = Bogen AB, ist auch Bogen CD = 2 Bogen BK. Aber Bogen CD ist auch = 2 CG; also Bogen CG = Bogen BK. Bogen BK ist aber = 2 KM, da KA es ist; also Bogen CG = 2 KM.
Aber auch Bogen CB = 2 BK, weil Bogen CB = BA; also ist auch der Summenbogen GB = 2 BM , folglich ∠ GFB = 2 BFM (VI, 33).
Nun ist aber auch ∠ GFB = 2 FAB (I, 32), weil FAB = ABF; also ∠ BFN = FAB. Den beiden Dreiecken ABF, BFN ist aber ∠ ABF gemeinsam. Also sind die dritten ∠ AFB = BNF (I, 32).
∆ ABF ist also mit ∆ BFN winkelgleich. Also stehen in Proportion Strecke AB : BF = FB : BN (VI, 4); also ist AB · BN = BF² (VI, 17).
Ebenso ist, da AL = LK und LN gemeinsam ist, dabei rechte Winkel bildet, Grundlinie KN = Grundlinie AN und ∠ LKN = LAN (I, 4). Aber ∠ LAN = KBN (III, 28; I, 5), also ist auch ∠ LKN = KBN. Und beiden Dreiecken AKB, AKN ist der Winkel bei A gemeinsam; also sind die dritten ∠ AKB = KNA (I, 32); also ist ∆ KBA mit ∆ KNA winkelgleich.
Also stehen in Proportion Strecke BA : AK = KA : AN (VI, 4); also ist BA · AN = AK² (VI, 17).
Wie oben bewiesen, ist aber AB · BN = BF². Also ist AB · BN + BA · AN, d.h. (II, 2) BA² = BF² + AK².
Hier ist BA die Seite des Fünfecks, BF die des Sechsecks (IV, 15 Zusatz) und AK die des Zehnecks.
Quadriert wird also die Seite des Fünfecks ebenso groß wie die des Sechsecks und des Zehnecks, die demselben Kreise eingeschrieben sind, zusammen - q.e.d.







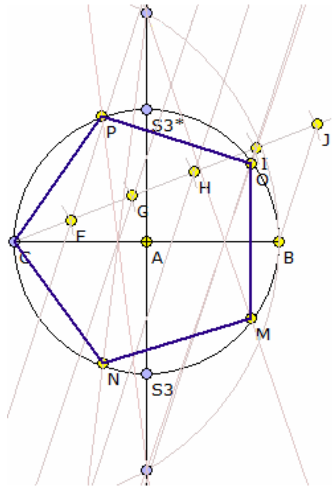
Regelmäßiges Elfeck

Das regelmäßige Elfeck ist ein Vieleck mit 11 Ecken, 11 gleich langen Seiten, 11 gleich großen Innenwinkeln. Das Elfeck heißt auch Hendekagon oder Endekagon. Der Innenwinkel ist gleich 147°16'21 9/11".
Ist die Seite a gegeben, so lassen sich daraus der Radius r des Inkreises, der Radius R des Umkreises, die Diagonalen d_2, d_3, d_4 und d_5, die Höhe h, der Flächeninhalt A und der Umfang u errechnen.

Seitenlänge	$a \approx 0{,}5634652\ R \approx 0{,}5872530\ r$
Inkreisradius, Apothem	$r = a / (2 \tan(180°/11)) \approx 1{,}7028439\ a$
Umkreisradius	$R = a / (2 \sin(180°/11)) \approx 1{,}7747331\ a$
	$R \approx 1{,}0422171\ r \approx 0{,}5799159\ \sqrt{A}$
Flächeninhalt	$A = 11a^2 / (4 \tan(180°/11)) \approx 9{,}3656415\ a^2$
	$A \approx 2{,}9735244\ R^2 \approx 3{,}2298915\ r^2$
Umfang	$u = 11\ a$
Diagonalen	$d_i = a \sin(180°\ i/11) / \sin(180°/11)$
	$d_2 \approx 1{,}919\ a$; $d_3 \approx 2{,}683\ a$; $d_4 \approx 3{,}229\ a$; $d_5 \approx 3{,}513\ a$

Das Elfeck hat 44 Diagonalen. 11 Diagonalen verbinden jeden zweiten, 11 jeden dritten, 11 jeden vierten und 11 jeden fünften Eckpunkt. Die Diagonalen bilden vier voneinander unabhängige Sterne, die Hendekagramme. Alle vier Sterne können in einem Zug gezeichnet werden.

Elfecke werden in der Praxis nur äußerst selten genutzt. Ein Beispiel ist die 1992 in Kanada erschienene 1 Dollar-Münze.



Näherungskonstruktion N-Eck

Für beliebige regelmäßige N-Ecke existiert eine hinreichend genaue Näherungskonstruktion. Gegeben ist der Umkreis r des N-Ecks.

In den Kreis mit dem gegebenen Radius r zeichnet man zwei zueinander senkrechte Durchmesser CB und S3S3* (im Bild) ein. Den einen Durchmesser teilt man in n (im Bild n = 5) gleiche Teile, z.B. mittels Strahlensatz, und zeichnet um den einen Endpunkt (im Bild C) den Kreis mit Radius 2r, der die Verlängerungen des anderen Durchmessers in zwei Punkten schneidet.
Von diesen Punkten aus zieht man Strahlen durch die Teilpunkte, wobei immer ein Teilpunkt ausgelassen wird, und erhält in deren Schnittpunkten mit dem Ausgangskreis die Eckpunkte des N-Ecks.

N-Eck-Näherungsformeln

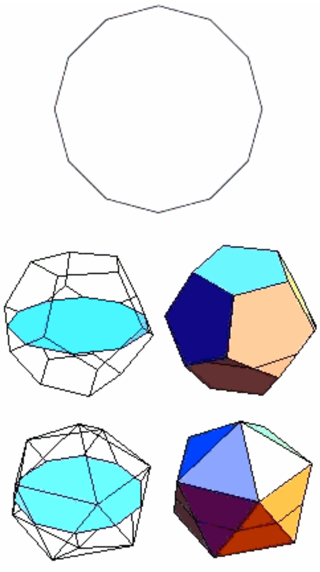
Für regelmäßige N-Ecke mit mehr als 10 Ecken existieren oft nur Näherungsformeln. Existieren exakte Formeln, so findet man auf diese auf den entsprechenden Lexikonseiten. Mit dem Innenwinkel ϕ, dem Zentriwinkel α, der Seitenlänge a, dem Umkreisradius r, dem Apothem = Inkreisradius p und dem Flächeninhalt A gilt:

Elfeck	**Zwölfeck**	**Dreizehneck**	**Vierzehneck**
$\phi \approx$ 147°16'22"	$\phi =$ 150°	$\phi \approx$ 152°18'28"	$\phi \approx$ 154°17'9"
$\alpha \approx$ 32°43'38"	$\alpha =$ 30°	$\alpha \approx$ 27°41'32"	$\alpha \approx$ 25°42'9"
$a \approx 0,5634652\ r$	$a \approx 0,5176381\ r$	$a \approx 0,4768312\ r$	$a \approx 0,4450419\ r$
$a \approx 0,5872529\ p$	$a \approx 0,5358984\ p$	$a \approx 0,5358983\ p$	$a \approx 0,4564869\ p$
$r \approx 1,7747331\ a$	$r \approx 1,9318516\ a$	$r \approx 2,0892913\ a$	$r \approx 2,2469806\ a$
$p \approx 1,7028439\ a$	$p \approx 1,8660254\ a$	$p \approx 2,0285803\ a$	$p \approx 2,1906441\ a$
$A \approx 9,3656415\ a^2$	$A \approx 11,1961524\ a^2$	$A \approx 13,1857719\ a^2$	$A \approx 15,3345084\ a^2$
$A \approx 2,9735259\ r^2$	$A = 3\ r^2$	$A \approx 2,9980224\ r^2$	$A \approx 3,0371878\ r^2$
$A \approx 3,22989142\ p^2$	$A \approx 3,21539030\ p^2$	$A \approx 3,20421221\ p^2$	$A \approx 3,19540864\ p^2$

Fünfzehneck	**Sechzehneck**	**Siebzehneck**	**Achtzehneck**
$\phi =$ 156°	$\phi =$ 157°30'	$\phi \approx$ 158°49'25"	$\phi =$ 160°
$\alpha =$ 24°	$\alpha =$ 22°30'	$\alpha \approx$ 21°10'36"	$\alpha =$ 20°
$a \approx 0,4158234\ r$	$a \approx 0,3901806\ r$	$a \approx 0,3674990\ r$	$a \approx 0,3472964\ r$
$a \approx 0,4251131\ p$	$a \approx 0,3978247\ p$	$a \approx 0,3738647\ p$	$a \approx 0,3526539\ p$
$r \approx 2,4048673\ a$	$r \approx 2,5629155\ a$	$r \approx 2,7210969\ a$	$r \approx 2,8793853\ a$
$p \approx 2,3523150\ a$	$p \approx 2,5136698\ a$	$p \approx 2,6747652\ a$	$p \approx 2,8356409\ a$
$A \approx 17,6423629\ a^2$	$A \approx 20,1093580\ a^2$	$A \approx 22,7355038\ a^2$	$A \approx 25,5207681\ a^2$
$A \approx 3,05052482\ r^2$	$A \approx 3,06146745\ r^2$	$A \approx 3,07055416\ r^2$	$A \approx 3,07818128\ r^2$
$A \approx 3,18834842\ p^2$	$A \approx 3,18259787\ p^2$	$A \approx 3,17785075\ p^2$	$A \approx 3,17388565\ p^2$

Neunzehneck	**Zwanzigeck**	**21-Eck**	**22-Eck**
$\phi \approx$ 161°3'10"	$\phi =$ 162°	$\phi \approx$ 162°51'26"	$\phi \approx$ 163°38'11"
$\alpha \approx$ 18°56'10"	$\alpha =$ 18°	$\alpha \approx$ 17°8'34"	$\alpha \approx$ 16°21'49"
$a \approx 0,3291892\ r$	$a \approx 0,3128690\ r$	$a \approx 0,2980846\ r$	$a \approx 0,2846296\ r$
$a \approx 0,3337409\ p$	$a \approx 0,3167688\ p$	$a \approx 0,3014514\ p$	$a \approx 0,2875565\ p$
$r \approx 3,0377692\ a$	$r \approx 3,1962266\ a$	$r \approx 3,3547557\ a$	$r \approx 3,5133383\ a$
$p \approx 2,9963380\ a$	$p \approx 3,1568758\ a$	$p \approx 3,3172859\ a$	$p \approx 3,4775776\ a$
$A \approx 28,4652110\ a^2$	$A \approx 31,5687575\ a^2$	$A \approx 34,8315014\ a^2$	$A \approx 38,2533531\ a^2$
$A \approx 3,08464495\ r^2$	$A \approx 3,09016994\ r^2$	$A \approx 3,09492933\ r^2$	$A \approx 3,09905812\ r^2$
$A \approx 3,17053923\ p^2$	$A \approx 3,16768880\ p^2$	$A \approx 3,16524071\ p^2$	$A \approx 3,16312246\ p^2$

23-Eck	**24-Eck**	**25-Eck**	**26-Eck**
$\phi \approx$ 164,3478°	$\phi =$ 165°	$\phi \approx$ 165,6°	$\phi \approx$ 166,1538°
$\alpha \approx$ 15,65217°	$\alpha =$ 15°	$\alpha =$ 14,4°	$\alpha \approx$ 13,84615°
$a \approx 0,2723332\ r$	$a \approx 0,2610523\ r$	$a \approx 0,2506664\ r$	$a \approx 0,2410733\ r$
$a \approx 0,2748936\ p$	$a \approx 0,2633049\ p$	$a \approx 0,2526587\ p$	$a \approx 0,2428439\ p$
$r \approx 3,671971\ a$	$r \approx 3,830648\ a$	$r \approx 3,989364\ a$	$r \approx 4,148114\ a$
$p \approx 3,637770\ a$	$p \approx 3,797877\ a$	$p \approx 3,957907\ a$	$p \approx 4,117870\ a$
$A \approx 41,8343568\ a^2$	$A \approx 45,5745246\ a^2$	$A \approx 49,4738443\ a^2$	$A \approx 53,5323162\ a^2$
$A \approx 3,10266286\ r^2$	$A \approx 3,10582854\ r^2$	$A \approx 3,10862358\ r^2$	$A \approx 3,11110363\ r^2$
$A \approx 3,16127723\ p^2$	$A \approx 3,15965994\ p^2$	$A \approx 3,15823446\ p^2$	$A \approx 3,15697156\ p^2$



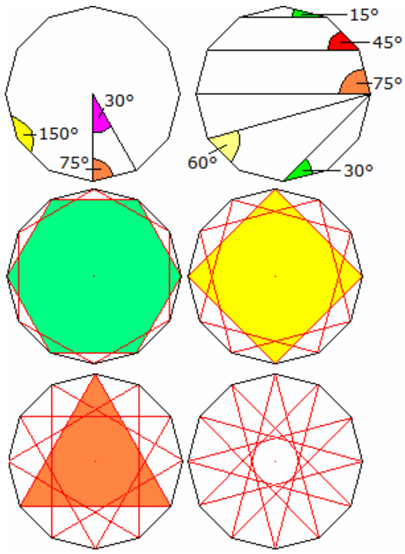
Regelmäßiges Zwölfeck, Dodekagon

Ein Dodekagon ist ein regelmäßiges, zwölfseitiges N-Eck mit dem Schläfli-Symbol {12}. Das Vieleck ist allein mit Zirkel und Lineal konstruierbar.
Das regelmäßige Zwölfeck ist ein Vieleck mit 12 Ecken, 12 gleich langen Seiten, 12 gleich großen Innenwinkeln von 150°. Das Zwölfeck heißt auch Dodekagon.

Seitenlänge $s = R/2\,(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \approx 0{,}5176381\ R$
$s = 2r\,(2 - \sqrt{3}) \approx 0{,}5358984\ r = \sqrt{(A/3\,(2 - \sqrt{3}))} \approx 0{,}2988585\ \sqrt{A}$
Umfangu $= 6\ R\,(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \approx 6{,}2116571\ R$
$u = 12r\,(2 - \sqrt{3}) \approx 3{,}2153903\ r = \sqrt{(12\ A\,(2 - \sqrt{3}))} \approx 1{,}79315094\ \sqrt{A}$
Inkreisradius, Apothemr $= s/2\ \cot(\pi/12) = s/2\,(2 + \sqrt{3}) \approx 1{,}8660254\ s$
$r = R/2\,(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \approx 1{,}9318516\ R = \sqrt{(A/(3\,(2 - \sqrt{3})))} \approx 1{,}115355\ \sqrt{A}$
Umkreisradius $R = s/2\ \csc(\pi/12) = s/2\,(\sqrt{2} + \sqrt{6}) \approx 1{,}9318516\ s$
$R = r/2\,(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \approx 0{,}5176381\ r = \sqrt{(A/3)} \approx 0{,}57735027\ \sqrt{A}$
Flächeninhalt $A = 3\ s^2 \cot(\pi/12) = (3\ \sqrt{3} + 6)\ s^2 \approx 11{,}1961524\ s^2$
$A = 6\ R^2 \sin(\pi/6) = 3\ R^2 = 12\ r^2\,(2 - \sqrt{3}) \approx 3{,}21539030917\ r^2$
wird das Zwölfeck in einen Einheitskreis eingeschrieben, so gilt für den Flächeninhalt

$$A = 6 \sin(\pi/6) = 3$$

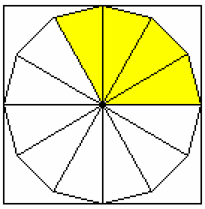
Ein ebener Schnitt durch ein Ikosaeder bzw. ein Pentagondodekaeder kann als Schnittfläche ein regelmäßiges Zwölfeck ergeben (Abbildung).



Im Zwölfeck treten verschiedene Winkel auf, die links dargestellt sind.
Von einer Zwölfeckecke gehen fünf verschieden lange Diagonalen aus; bei einer Seitenlänge a mit den Längen

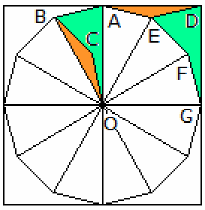
$d_1 = (\sqrt{6} + \sqrt{2})\ a/2$ $\qquad d_2 = (\sqrt{3} + 1)\ a$
$d_3 = (3\sqrt{2} + \sqrt{6})/2\ a$ $\qquad d_4 = (\sqrt{3} + 2)\ a$
$d_5 = 2R = (\sqrt{2} + \sqrt{6})\ a$

Das Zwölfeck hat 54 Diagonalen.
6 Diagonalen verbinden gegenüberliegende Eckpunkte. 12 Diagonalen verbinden jeden zweiten, 12 jeden dritten, 12 jeden vierten und 12 jeden fünften Eckpunkt. Die Diagonalen bilden vier voneinander unabhängige Sterne, die Dodekagramme.

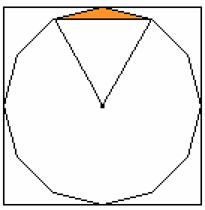


Zwölfeck bei Liu Hui

Im 1.Buch der "Mathematik in neun Büchern" beweist der chinesische Mathematiker Liu Hui (ca. 220 - ca. 280), dass der Flächeninhalt eines regelmäßigen Zwölfecks 3/4 des Flächeninhalts des umbeschriebenen Quadrats beträgt, d.h.
Das in ein Quadrat der Seitenlänge 2r einbeschriebene Zwölfeck hat den Flächeninhalt 3 r².



Einbeschrieben bedeutet, dass vier Ecken des Zwölfecks das Quadrat berühren.
Im obersten Bild ist diejenige Fläche gelb eingefärbt, deren Flächeninhalt gleich dem eines Quadranten des Quadrates sein soll. Dies beweist man, indem man das linke gelbe Dreieck als flächengleich mit der weißen Fläche im oberen rechten Quadranten nachweist.

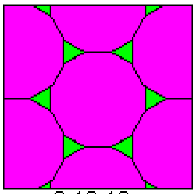


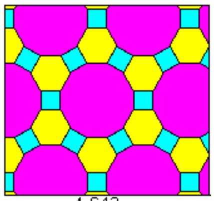
Das orangene Dreieck in der unteren Bild ist kongruent zum orangenen Dreieck in der mittleren Skizze. In der unteren Skizze ist eine Seite des regelmäßigen Sechsecks eingefügt, mit der Länge r. Die beiden Dreiecke haben beide die Basislänge r.
Eine weitere Seite ist ebenfalls gleich, die Zwölfeckseite. Der von dieser Seite und der Basis eingeschlossene Winkel ist rechts 15°, der entsprechende Winkel in der mittleren Skizze ist ein rechter Winkel abzüglich eines halben Zwölfeck-Innenwinkels, also ebenfalls 15°. Damit ist die Kongruenz nachgewiesen.

Überträgt man wie in der mittleren Skizze das obere orangene Dreieck in einen Zwölfecksektor, so sind die beiden grünen Rest-Vierecke kongruent. In mittleren Bild sind dies die Vierecke ABCO und DEFG.
Es gilt: OA = GD = r ; AB = DE und BC = EF und CO = FG , diese sechs Seiten haben alle die Länge einer Zwölfeckseite.
Außerdem stimmen die Winkel bei C und bei F überein, sowie die Winkel bei A und D. Da eine grüne und eine orangene Fläche zusammen einen Zwölfecksektor bilden, ist der Beweis vollständig.
Quelle: http://www.fh-friedberg.de/users/boergens/marken/briefmarke057.htm
Das Verfahren ist auf einer Briefmarke Mikronesiens von 1999 abgebildet.

Abbildung: mikronesische Briefmarke

Parkettierung mit Zwölfecken


3 12 12


4 6 12

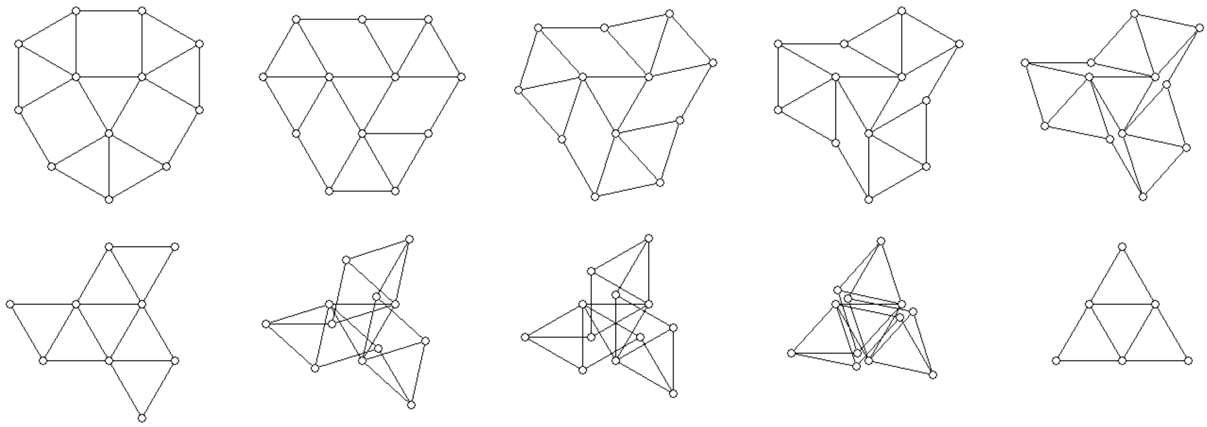
Man kann die Ebene mit Zwölfecken überdecken. Gleichseitige Dreiecke, Quadrate und regelmäßige Sechsecke füllen die Lücken. Bei der Parkettierung der Ebene mit Dreiecken, Quadraten und Sechsecken entstehen Zwölfecke.

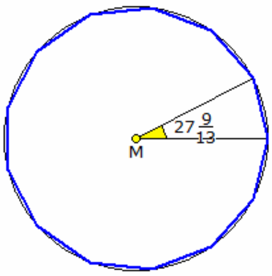
Eine ebener Schnitt durch ein Ikosaeder bzw. ein Pentagondodekaeder kann als Schnittfläche ein regelmäßiges Zwölfeck ergeben.

In Sevilla steht ein bedeutendes Bauwerk, der Torre del Oro. Dieser Turm hat als Grundriss ein regelmäßiges Zwölfeck.

Gleichseitiges Zwölfeck aus 10 Dreiecken

Problem: Ist diese Figur aus gleich langen Stäben mit Drehgelenken starr oder beweglich?
Lösung: Nein. Wie die Bilderfolge zeigt, kann dieses Gebilde kontinuierlich verändert werden.





Regelmäßiges Dreizehneck

Das regelmäßige Dreizehneck ist ein Vieleck mit 13 Ecken, 13 gleich langen Seiten, 13 gleich großen Innenwinkeln.
Ist die Seite a gegeben, so lassen sich daraus der Radius r des Inkreises, der Radius R des Umkreises, die Diagonalen d_2 bis d_6, die Höhe h, der Flächeninhalt A und der Umfang u errechnen.

Innenwinkel $\phi \approx 152°18'28''$; Zentriwinkel $\alpha \approx 27°41'32''$

$a = R\,(2 \sin(180°/13)) \approx 0{,}4768312\ R = r\,(2 \tan(180°/13)) \approx 0{,}5358983\ r$

$r = a / (2 \tan(180°/13)) \approx 2{,}02858\ a$

$r = R/2 \sin(360°/13) / \sin(180°/13) \approx 0{,}9709418\ R$

$R = a / (2 \sin(180°/13)) \approx 2{,}08929\ a = 2r \sin(180°/13) / \sin(360°/13)) \approx 1{,}0299278\ r$

$A = 13a^2 / (4 \tan(180°/13)) \approx 13{,}18577\ a^2 = 13\ R^2 \sin(180°/13) \cos(180°/13) \approx 3{,}0207006\ R^2$

$A \approx 3{,}20421221941\ r^2$

$u = 13\ a$

$d_i = a \sin(180°\ i/13) / \sin(180°/13)$

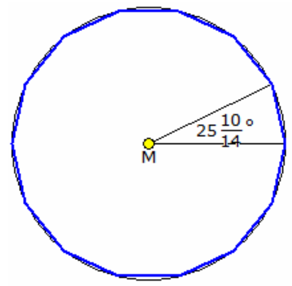
$d_2 \approx 1{,}94188\ a$; $d_3 \approx 2{,}77091\ a$; $d_4 \approx 3{,}43891\ a$; $d_5 \approx 3{,}90704\ a$; $d_6 \approx 4{,}14811\ a$

Das Dreizehneck hat 65 Diagonalen. 13 Diagonalen verbinden jeden zweiten, 13 jeden dritten, 13 jeden vierten, 13 jeden fünften und 13 jeden sechsten Eckpunkt. Die Diagonalen bilden fünf voneinander unabhängige Sterne. Alle fünf Sterne können in einem Zug gezeichnet werden.
Dreizehnecke werden in der Praxis sehr selten genutzt. Der älteste Teil der Kernburg des Büdinger Schlosses besitzt eine als Dreizehneck gestaltete Ringmauer.

Regelmäßiges Vierzehneck

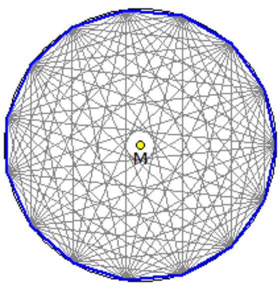
Das regelmäßige Vierzehneck ist ein Vieleck mit 14 Ecken, 14 gleich langen Seiten, 14 gleich großen Innenwinkeln.

Ist die Seite a gegeben, so lassen sich daraus der Radius r des Inkreises = Apothem, der Radius R des Umkreises, die Diagonalen d_2 bis d_7, die Höhe h, der Flächeninhalt A und der Umfang u errechnen.
Innenwinkel $\phi \approx 154°17'9"$; Zentriwinkel $\alpha \approx 25°42'9"$



$a = R\,(2 \sin(180°/14)) \approx 0{,}4450419\ R$
$a = r\,(2 \tan(180°/14)) \approx 0{,}4564869\ r$
$r = a / (2 \tan(180°/14)) \approx 2{,}1906441\ a$
$r = R/2 \sin(360°/14) / \sin(180°/14) \approx 0{,}9749279\ R$
$R = a / (2 \sin(180°/14)) \approx 2{,}2469806\ a$
$R = 2r \sin(180°/14) / \sin(360°/14)) \approx 0{,}8101758\ r$
$A = 14a^2 / (4 \tan(180°/14)) \approx 15{,}3345084\ a^2$
$A \approx 3{,}0371878\ R^2 \approx 3{,}19540864\ r^2$
$u = 14\ a$

Das Vierzehneck hat 77 Diagonalen. $d_i = a \sin(180°\ i/14) / \sin(180°/14)$
$d_2 \approx 1{,}94986\ a$; $d_3 \approx 2{,}80194\ a$; $d_4 \approx 3{,}51352\ a$; $d_5 \approx 4{,}04892\ a$; $d_6 \approx 4{,}38129\ a$; $d_7 \approx 4{,}49396\ a$



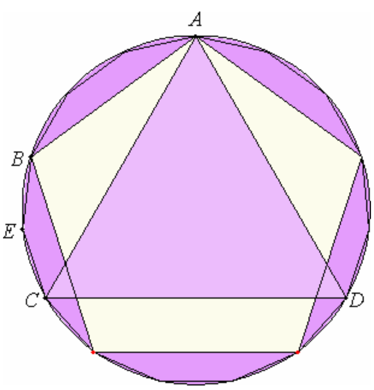
Regelmäßiges Fünfzehneck

Das regelmäßige Fünfzehneck ist ein Vieleck mit 15 Ecken, 15 gleich langen Seiten, 15 gleich großen Innenwinkeln von 156°.
Ist die Seite a gegeben, so lassen sich daraus der Radius r des Inkreises, der Radius R des Umkreises, die Diagonalen d_2 bis d_7, die Höhe h, der Flächeninhalt A und der Umfang u errechnen.

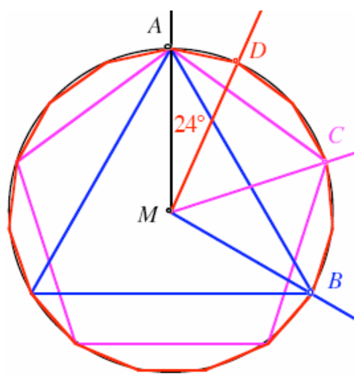
$a \approx 0{,}4158234\ R = r\,(2 \tan(180°/15)) \approx 0{,}4251131\ r$
$r = a / (2 \tan(180°/15)) \approx 2{,}3523150\ a$
$r = R/2 \sin(360°/15) / \sin(180°/15) \approx 0{,}9781476\ R$
$R = a / (2 \sin(180°/15)) \approx 2{,}4048671\ a$
$R = 2r \sin(180°/15) / \sin(360°/15)) \approx 1{,}0223406\ r$
$A = 15a^2 / (4 \tan(180°/15)) \approx 15{,}290047\ a^2$
$A = 15\ R^2 \sin(180°/15) \cos(180°/15) \approx 3{,}05052482\ R^2 \approx 3{,}18834842504\ r^2$
$u = 15\ a$
$d_i = a \sin(180°\ i/15) / \sin(180°/15)$
$d_2 \approx 1{,}9562952\ a$; $d_3 \approx 2{,}8270909\ a$; $d_4 \approx 3{,}5743291\ a$;
$d_5 \approx 4{,}1653521\ a$; $d_6 \approx 4{,}5743291\ a$; $d_7 \approx 4{,}7833861\ a$

Das Fünfzehneck hat 90 Diagonalen, die in der Abbildung eingezeichnet sind. Jeweils 15 Diagonalen verbinden jeden zweiten, dritten, …, siebenden Eckpunkt.
Die Diagonalen bilden 6 voneinander unabhängige Sterne, von den 3 Sterne in einem Zug gezeichnet werden können.

Euklids "Elemente": Buch IV § 16 (A. 16):
Einem gegebenen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkliges Fünfzehneck einzubeschreiben.



ABCD sei der gegebene Kreis. Man soll dem Kreise ABCD ein gleichseitiges und gleichwinkliges Fünfzehneck einbeschreiben.
Man zeichne in den Kreis ABCD die Seite des ihm einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks, AC (IV, 2 oder 15), und die des gleichseitigen Fünfecks (IV, 11), AB, ein. Von fünfzehn gleichen Abschnitten, die auf den Kreis ABCD gehen, muss also der Bogen ABC als Drittel des Kreises fünf, der Bogen AB als Fünftel des Kreises drei enthalten. Der Restbogen enthält also zwei der gleichen Abschnitte. Man halbiere BC in E (III, 30); dann ist jeder der beiden Bogen BE, EC ein Fünfzehntel des Kreises ABCD.
Zieht man also die Strecken BE, EC und trägt ihnen gleiche Sehnen zusammenhängend in den Kreis ABCDE ein (IV, 1), so muss ein diesem einbeschriebenes gleichseitiges und gleichwinkliges Fünfzehneck entstehen – dies hatte man ausführen sollen.
Ähnlich wie beim Fünfeck (IV, 12) erhält man, wenn man durch die Teilpunkte auf dem Kreise die Kreistangenten zieht, ein dem Kreise umbeschriebenes gleichseitiges und gleichwinkliges Fünfzehneck.
Schließlich lässt sich auf Grund ähnlicher Überlegungen wie beim Fünfeck (IV, 13, 14) auch einem gegebenen Fünfzehneck der Kreis einbeschreiben und umbeschreiben – dies hatte man ausführen sollen.

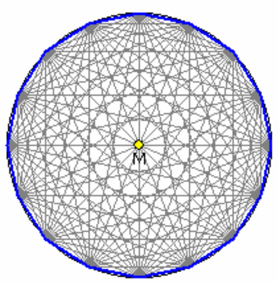


Fünfzehneckkonstruktion

Da die Zahl 15 das kleinste gemeinsame Vielfache von 3 und 5 ist und beide Primzahlen Fermatsche Primzahlen sind, kann das regelmäßige Fünfzehneck mit Zirkel und Lineal konstruiert werden.

Dazu zeichnet man ein regelmäßiges Dreieck und ein regelmäßiges Fünfeck in einen Kreis. Der Punkt A soll ein gemeinsamer Punkt sein.
Das regelmäßige Dreieck hat den Zentriwinkel $\angle$ BMA = 120°, das regelmäßige Fünfeck den Zentriwinkel $\angle$ CMA = 72°. Daraus ergibt sich der Differenzwinkel
$\angle$ BMC = 48°. Für das 15-Eck benötigt man einen Zentriwinkel von 24°. Daher findet man diesen durch einfaches Halbieren des Differenzwinkels.

2.Lösung: Der Punkt B wird an MC gespiegelt, der Spiegelpunkt sei D. Dann ist $\angle$ DMA = 72° - 48° = 24°. Daher ist die Strecke AD die Seitenlänge des 15-Eckes.
Durch fortlaufendes Halbieren des 24°-Winkels erhält man außerdem das 30-Eck, 60-Eck, 120-Eck usw.



Regelmäßiges Sechzehneck

Das Polygon ist ein regelmäßiges, sechzehnseitiges N-Eck mit dem Schläfli-Symbol {16}. Alle 16 Seiten sind gleich lang, ebenso die 16 Innenwinkel.
Das Sechzehneck ist allein mit Zirkel und Lineal konstruierbar.
Innenwinkel ϕ = 157°30'; Zentriwinkel α = 22°30'
Abbildung: Sechzehneck mit allen 104 Diagonalen

Für eine Seitenlänge a gilt:

Seitenlänge $a = \sqrt{1/(2 + \sqrt{2} + \sqrt{7/2 \sqrt{2} + 5})}\, R \approx 0{,}3901806\, R$

$a = (\sqrt{8 \sqrt{2} + 16} - 2 \sqrt{2} - 2)\, r \approx 0{,}39782473\, r$

Inkreisradius $r = 1/2\, (1 + \sqrt{2} + \sqrt{4 + 2 \sqrt{2}})\, a \approx 2{,}513669746\, a \approx 0{,}980785280403\, R$

Umkreisradius $R = \sqrt{(4 + 2 \sqrt{2} + \sqrt{20 + 14 \sqrt{2}}) / 2}\, a \approx 2{,}562915447\, a \approx 1{,}01959115820\, r$

Flächeninhalt $A = (4 + 4 \sqrt{2} + \sqrt{32 + 32 \sqrt{2}})\, a^2 \approx 18{,}44632715\, a^2$

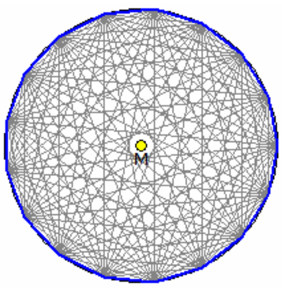
$A = \sqrt{32 - 16 \sqrt{2}}\, R^2 \approx 3{,}06146745892\, R^2$

$A = (\sqrt{512 \sqrt{2} + 1024} - 16\sqrt{2} - 16)\, r^2 \approx 3{,}18259787808\, r^2$

Umfang $u = 16\, a$

Diagonalen $d_i = a \sin(180°\, i/16) / \sin(180°/16)$

$d_2 \approx 1{,}9615706\, a$; $d_3 \approx 2{,}8477591\, a$; $d_4 \approx 3{,}6245098\, a$;
$d_5 \approx 4{,}2619726\, a$; $d_6 \approx 4{,}7356503\, a$; $d_7 \approx 5{,}0273395\, a$; $d_8 \approx 5{,}1258309\, a$



Regelmäßiges Siebzehneck

Das regelmäßige Siebzehneck ist ein Vieleck mit 17 Ecken, 17 gleich langen Seiten, 17 gleich großen Innenwinkeln von 158 14/17°.
Ist die Seite a gegeben, so können Inkreisradius r und Umkreisradius R, die Diagonalen d_2 bis d_8, Höhe h, Flächeninhalt A und Umfang u berechnet werden.
Da das regelmäßige Siebzehneck mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, existieren exakte Gleichungen, die allerdings sehr umfangreich sind. Daher nutzt man in der Praxis Näherungsformeln.

$a = R\, (2 \sin(180°/17)) \approx 0{,}367499\, R$
$a = r\, (2 \tan(180°/17)) \approx 0{,}3738647\, r$
$r = a / (2 \tan(180°/17)) \approx 2{,}6747638\, a$
$r = R/2 \sin(360°/17) / \sin(180°/17) \approx 0{,}9829731\, R$
$R = a / (2 \sin(180°/17)) \approx 2{,}7210956\, a$
$R = 2r \sin(180°/17) / \sin(360°/17)) \approx 1{,}0173218\, r$
$A = 17\, a^2 / (4 \tan(180°/17)) \approx 22{,}7355038\, a^2$
$A = 17\, R^2 \sin(180°/17) \cos(180°/17) \approx 3{,}07055416\, R^2$
$A \approx 3{,}17785075083\, r^2$
$u = 17\, a$
$d_i = a \sin(180°\, i/17) / \sin(180°/17)$
$d_2 \approx 1{,}9659462\, a$; $d_3 \approx 2{,}8649445\, a$; $d_4 \approx 3{,}6663805\, a$;
$d_5 \approx 4{,}3429623\, a$; $d_6 \approx 4{,}8716497\, a$; $d_7 \approx 5{,}2344390\, a$; $d_8 \approx 5{,}4189757\, a$

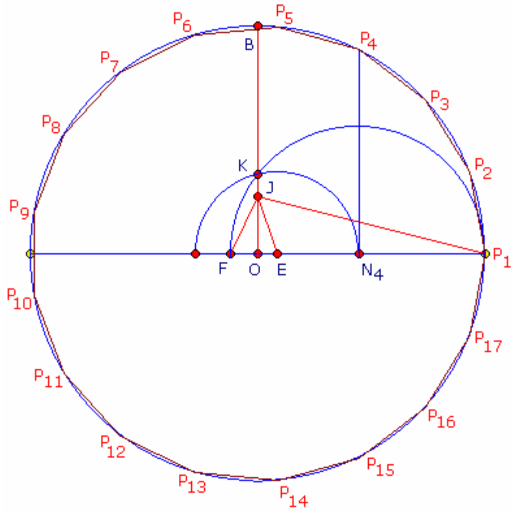
Das Siebzehneck hat 119 Diagonalen, die in der Abbildung eingezeichnet sind. Jeweils 17 Diagonalen verbinden jeden zweiten, dritten, … Eckpunkt.
Die Diagonalen bilden 8 voneinander unabhängige Sterne, die in einem Zug gezeichnet werden können.

Das Vieleck ist ein regelmäßiges, siebzehnseitiges N-Eck mit dem Schläfli-Symbol {17}
1796 bewies Gauß, dass sich dieses regelmäßige N-Eck allein mit Zirkel und Lineal konstruieren lässt.
Nach Gauß selbst fand er die Konstruktion am 29.März 1796.

17-Eck-Konstruktion (Richmond 1893)

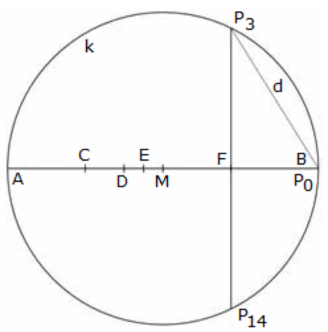
Gegeben ist ein Punkt O.
1. Zeichnen eines Kreises um O und eines Durchmessers durch O
2. rechter Schnittpunkt des Durchmessers und des Kreises ist P_1
3. Konstruktion der Senkrechten zu OP_1, Schnittpunkt ist B
4. Konstruktion von J mit 4 OJ = OB

5. Verbinden von J und P_1, Ermitteln von E, so dass der Winkel $\angle$ OJE ein Viertel des Winkels $\angle$ OJP_1 ist
6. Konstruktion von F, so dass Winkel $\angle$ EJF gleich 45° ist
7. Konstruktion des Halbkreises über FP_1, dieser schneidet OB in K
8. Zeichnen eines Halbkreises um E mit dem Radius EK, dieser schneidet OP_1 in N_4
9. die Senkrechte in N_4 schneidet den Ausgangskreis in P_4
10. ausgehend von P_1 und P_4 ergeben sich durch Abtragen deren Entfernung auf dem Kreis die Punkte P_7, P_{10}, P_{13}, P_{16}, und im zweiten bzw. dritten Umlauf die restlichen Punkte des regelmäßigen 17-Ecks



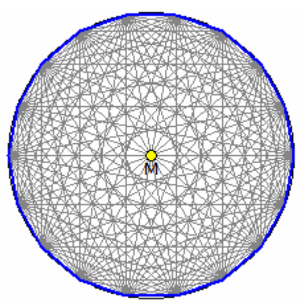
Die Eckpunkte des Siebzehnecks erfüllen die komplexe Gleichung $z^{17} = 1$. Eine Lösung ist z = 1. Die anderen Eckpunkte ergeben sich aus
$(z^{17} - 1)/(z - 1) = z^{16} + z^{15} + \ldots + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$
a sei eine Wurzel der Gleichung. Da die Restklassengruppe Z_{17} zyklisch erzeugt werden kann, ist der Ansatz $z_0 = a$; $z_1 = a^3$; $z_2 = a^9$; $z_3 = a^{27} = a^{10}$; $z_4 = a^{13}$; $z_5 = a^5$; $z_6 = a^{15}$; $z_7 = a^{11}$; $z_8 = a^{16}$; $z_9 = a^{14}$; $z_{10} = a^8$; $z_{11} = a^7$; $z_{12} = a^4$; $z_{13} = a^{12}$; $z_{14} = a^2$; $z_{15} = a^6$ möglich.
Ansatz: $X = z_0 + z_2 + z_4 + z_6 + z_8 + z_{10} + z_{12} + z_{14}$ und $x = z_1 + z_3 + z_5 + z_7 + z_9 + z_{11} + z_{13} + z_{15}$
Da die z_i alle Potenzen von a^1 bis a^{16} darstellen, wird X + x = -1. Das Produkt Xx ergibt nach Ausmultiplizieren viermal jede der Potenzen, d.h. Xx = -4. X und x sind damit Lösungen der quadratischen Gleichung
$t^2 + t - 4 = 0$ mit $X = (-1 + \sqrt{17})/2$ und $x = (-1 - \sqrt{17})/2$
Ansatz $U = z_0 + z_4 + z_8 + z_{12}$ und $u = z_2 + z_6 + z_{10} + z_{14}$
$V = z_1 + z_5 + z_9 + z_{13}$ und $v = z_3 + z_7 + z_{11} + z_{15}$
mit U + u = X, V + v = x, Uu = -1 und Vv = -1 sowie den quadratischen Gleichungen $t^2 - Xt - 1 = 0$ bzw. $t^2 - xt - 1 = 0$ und den Lösungen $U = (X + \sqrt{X^2+4})/2$; $V = (x + \sqrt{x^2+4})/2$;
$u = (X - \sqrt{X^2+4})/2$; $v = (x - \sqrt{x^2+4})/2$
Ansatz $W = z_0 + z_8 = a + a^{16}$ und $w = z_4 + z_{12} = a^{13} + a^4$
mit W + w = U und Ww = V, d.h. $t^2 - Ut + V = 0$ und den Lösungen
$W = (U + \sqrt{U^2 - 4V})/2$; $w = (U - \sqrt{U^2 - 4V})/2$

Konstruktionsbeschreibung
1) X und x konstruieren 2) U und V konstruieren 3) W konstruieren
4) da a und a^{16} den gleichen Realteil besitzen, hat der Mittelpunkt von OW den gleichen Realteil wie a bzw. a^{16}
Realteil von a = $\sqrt{(- \sqrt{((19 \sqrt{17} + 85)/2048)} + (3 \sqrt{17} + 17)/64) + \sqrt{((17 - \sqrt{17})/128)} + \sqrt{17} / 16 - 1/16}$ = 0.932472...
5) die restlichen Eckpunkte des Siebzehnecks sind durch Streckenabtragen konstruierbar



Siebzehneck-Näherung
Wesentlich einfacher als die exakte Siebzehneck-Konstruktion ist folgende Näherungskonstruktion:
1) Zeichne um einen Punkt M auf einer Geraden einen Kreis k, die Schnittpunkte sind A und B
2) Halbiere den Radius AM dreimal nacheinander zum Mittelpunkt M hin, Punkte C, D und E
3) Halbiere die Strecke EB, ergibt Punkt F
4) Konstruiere in Punkt F die Senkrechte zu AB, d.h konstruiere im Abstand von 9/16 Radius von B eine Senkrechte

Die Schnittpunkte dieser Senkrechten mit dem Kreis sind gute Näherungen für die Punkte P_3 und P_{14} eines regelmäßgen Siebzehnecks.
Mit B = P_0 lassen sich durch je siebenmaliges Abtragen des Abstandes d in jede Richtung auf dem Kreis alle weiteren Punkte des Siebzehnecks finden.
Bei dieser Konstruktion ergibt sich ein relativer Winkelfehler von +0,83 %. Der Winkel und damit auch die Seite sind etwas zu groß. Bei einem Radius von 332 mm ist die Seite 1 mm zu lang.



Regelmäßiges Achtzehneck
Das regelmäßige Achtzehneck ist ein Vieleck mit 18 Ecken, 18 gleich langen Seiten, 18 gleich großen Innenwinkeln von 160°. Das Achtzehneck kann nicht allein mit Zirkel und Lineal konstruiert werden.

Ist die Seite a gegeben, so lassen sich daraus der Radius r des Inkreises, der Radius R des Umkreises, die Diagonalen d_2 bis d_9, die Höhe h, der Flächeninhalt A und der Umfang u errechnen.

$a = R\,(2 \sin(180°/18)) \approx 0{,}3472964\, R = r\,(2 \tan(180°/18)) \approx 0{,}3526539\, r$

$r = a / (2 \tan(180°/18)) \approx 2{,}8356409\, a = R/2 \sin(360°/18) / \sin(180°/18) \approx 0{,}9848078\, R$

$R = a / (2 \sin(180°/18)) \approx 2{,}8793852\, a = 2r \sin(180°/18) / \sin(360°/18)) \approx 1{,}0154266\, r$

$A = 18\, a^2 / (4 \tan(180°/18)) \approx 25{,}5207681\, a^2$

$A = 18\, R^2 \sin(180°/18) \cos(180°/18) \approx 3{,}07818128\, R^2 \approx 3{,}17388565275\, r^2$

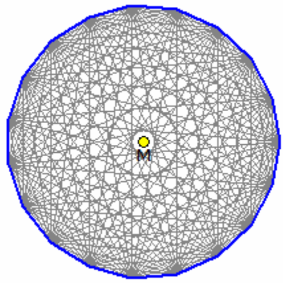
$u = 18\, a$

$d_i = a \sin(180°\, i/18) / \sin(180°/18)$

$d_2 \approx 1{,}9696155\, a$; $d_3 \approx 2{,}8793852\, a$; $d_4 \approx 3{,}7016663\, a$;

$d_5 \approx 4{,}4114741\, a$; $d_6 \approx 4{,}9872415\, a$; $d_7 \approx 5{,}4114741\, a$; $d_8 \approx 5{,}6712818\, a$; $d_9 \approx 5{,}7587705\, a$

Das Achtzehneck hat 135 Diagonalen, die in der Abbildung eingezeichnet sind. Jeweils 18 Diagonalen verbinden jeden zweiten, dritten, … Eckpunkt.



Regelmäßiges Neunzehneck

Das regelmäßige Neunzehneck ist ein Vieleck mit 19 Ecken, 19 gleich langen Seiten, 19 gleich großen Innenwinkeln von 161,05°. Das Neunzehneck kann nicht allein mit Zirkel und Lineal konstruiert werden.

Ist die Seite a gegeben, so lassen sich daraus der Radius r des Inkreises, der Radius R des Umkreises, die Diagonalen d_2 bis d_9, die Höhe h, der Flächeninhalt A und der Umfang u errechnen.

$a = R\,(2 \sin(180°/19)) \approx 0{,}3291892\, R$

$a = r\,(2 \tan(180°/19)) \approx 0{,}3337409\, r$

$r = a / (2 \tan(180°/19)) \approx 2{,}9963357\, a$

$r = R/2 \sin(360°/19) / \sin(180°/19) \approx 0{,}9863613\, R$

$R = a / (2 \sin(180°/19)) \approx 3{,}0377669\, a = 2r \sin(180°/19) / \sin(360°/19)) \approx 1{,}0138273\, r$

$A = 19\, a^2 / (4 \tan(180°/19)) \approx 28{,}465211\, a^2$

$A = 19\, R^2 \sin(180°/19) \cos(180°/19) \approx 3{,}08464495\, R^2 \approx 3{,}17053923805\, r^2$

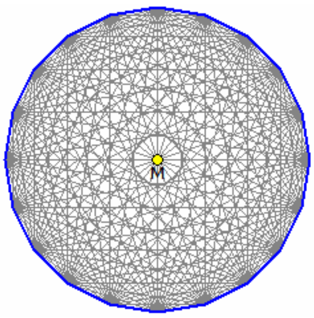
$u = 19\, a$

$d_i = a \sin(180°\, i/19) / \sin(180°/19)$

$d_2 \approx 1{,}9727226\, a$; $d_3 \approx 2{,}8916345\, a$; $d_4 \approx 3{,}7316701\, a$;

$d_5 \approx 4{,}4699155\, a$; $d_6 \approx 5{,}0862333\, a$; $d_7 \approx 5{,}5638118\, a$; $d_8 \approx 5{,}8896241\, a$; $d_9 \approx 6{,}0547828\, a$

Das Neunzehneck hat 152 Diagonalen, die in der Abbildung eingezeichnet sind. Jeweils 19 Diagonalen verbinden jeden zweiten, dritten, … Eckpunkt.



Regelmäßiges Zwanzigeck

Das regelmäßige Zwanzigeck ist ein Vieleck mit 20 Ecken, 20 gleich langen Seiten, 20 gleich großen Innenwinkeln von 162°. Das Zwanzigeck kann allein mit Zirkel und Lineal konstruiert werden.

Ist die Seite a gegeben, so lassen sich daraus der Radius r des Inkreises, der Radius R des Umkreises, die Diagonalen d_2 bis d_{10}, die Höhe h, der Flächeninhalt A und der Umfang u errechnen.

$\sin \pi/10 = 1/4 \sqrt{5} - 1/4 \approx 0{,}3090169943$

$\sin \pi/20 = -\sqrt{(5/16 - 1/16 \sqrt{5})} + 1/8 \sqrt{10} + 1/8 \sqrt{2} \approx 0{,}1564344650$

$\cos \pi/20 = \sqrt{(5/16 - 1/16 \sqrt{5})} + 1/8 \sqrt{10} + 1/8 \sqrt{2} \approx 0{,}987688340$

$\tan \pi/20 = 1/20 \cdot (-\sqrt{2} \cdot (\sqrt{5} -1) \cdot \sqrt{(5 - \sqrt{5})} + 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{(5 - \sqrt{5})})$

$a = 2R \sin \pi/20 \approx 0{,}312869\, R = 2r \tan \pi/20 \approx 0{,}3167688\, r$

$r = a / (2 \tan \pi/20) \approx 3{,}1568758\, a = R/2 \sin \pi/10 / \sin \pi/20 \approx 0{,}9876883\, R$

$R = a / (2 \sin \pi/20) \approx 3{,}1962266\, a = 2r \sin \pi/20 / \sin \pi/10 \approx 1{,}0124651\, r$

$A = 20\, a^2 / (4 \tan \pi/20) \approx 31{,}5687575\, a^2 = 20\, R^2 \sin \pi/20 \cos \pi/20 \approx 3{,}09016994\, R^2$

$A \approx 3{,}16768880\, r^2$

$u = 20\, a$

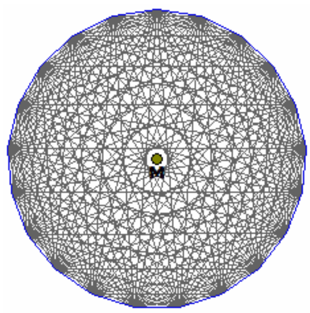
$d_i = a \sin(180°\, i/20) / \sin \pi/20$

$d_2 \approx 1{,}9753767\, a$; $d_3 \approx 2{,}9021130\, a$; $d_4 \approx 3{,}7573897\, a$;

$d_5 \approx 4{,}5201470\, a$; $d_6 \approx 5{,}1716033\, a$; $d_7 \approx 5{,}6957175\, a$;

$d_8 \approx 6{,}0795843\, a$; $d_9 \approx 6{,}3137515\, a$; $d_{10} \approx 6{,}3924532\, a$

Das Zwanzigeck hat 170 Diagonalen, die in der Abbildung eingezeichnet sind.



Regelmäßiges Einundzwanzigeck

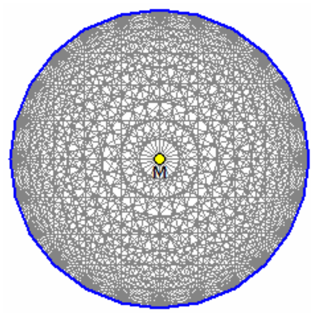
Das regelmäßige Einundzwanzigeck ist ein Vieleck mit 21 Ecken, 21 gleich langen Seiten, 21 gleich großen Innenwinkeln von 162°51'26".

Ist die Seite a gegeben, so können Inkreisradius r und Umkreisradius R, die Diagonalen d_2 bis d_{10}, Höhe h, Flächeninhalt A und Umfang u berechnet werden. Da das regelmäßige Einundzwanzigeck mit Zirkel und Lineal nicht konstruierbar ist, nutzt man in der Praxis Näherungsformeln.

$a = R (2 \sin(180°/21)) \approx 0{,}298084\ R = r (2 \tan(180°/21)) \approx 0{,}301451\ r$
$r = a / (2 \tan(180°/21)) \approx 3{,}31728\ a = R/2 \sin(360°/21) / \sin(180°/21) \approx 0{,}988830\ R$
$R = a / (2 \sin(180°/21)) \approx 3{,}35475\ a = 2r \sin(180°/21) / \sin(360°/21)) \approx 1{,}011295\ r$
$A = 21\ a^2 / (4 \tan(180°/21)) \approx 34{,}8315014\ a^2$
$A = 21\ R^2 \sin(180°/21) \cos(180°/21) \approx 3{,}094929\ R^2 \approx 3{,}16524071\ r^2$
$u = 21\ a$
$d_i = a \sin(180°\ i/21) / \sin(180°/21)$
$d_2 \approx 2{,}3580\ a$; $d_3 \approx 3{,}4711\ a$; $d_4 \approx 4{,}5066\ a$;
$d_5 \approx 5{,}4414\ a$; $d_6 \approx 6{,}2547\ a$; $d_7 \approx 6{,}9282\ a$;
$d_8 \approx 7{,}4470\ a$; $d_9 \approx 7{,}7994\ a$; $d_{10} \approx 7{,}9776\ a$

Das Einundzwanzigeck hat 199 Diagonalen, die in der Abbildung eingezeichnet sind. Jeweils 19 Diagonalen verbinden jeden zweiten, dritten, … Eckpunkt.

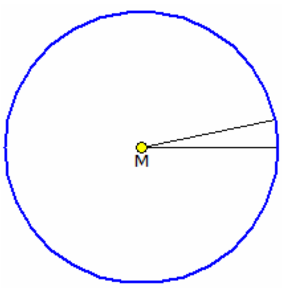
Regelmäßiges Vierundzwanzigeck



Das regelmäßige Vierundzwanzigeck ist ein Vieleck mit 24 Ecken, 24 gleich langen Seiten, 24 gleich großen Innenwinkeln von 165°. Das Vierundzwanzigeck kann allein mit Zirkel und Lineal konstruiert werden. Ist die Seite a gegeben, so lassen sich daraus der Radius r des Inkreises, der Radius R des Umkreises, die Diagonalen d_2 bis d_{12}, die Höhe h, der Flächeninhalt A und der Umfang u errechnen.
$\sin \pi/12 = 1/4 \sqrt{6} - 1/4 \sqrt{2} \approx 0{,}2588190451$
$\sin \pi/24 = \sqrt{(1/16 \sqrt{2} + 1/8)} - \sqrt{(3/8 - 3/16 \sqrt{2})} \approx 0{,}1305261922$
$\cos \pi/24 = \sqrt{(3/16 \sqrt{2} + 3/8)} + \sqrt{(1/8 - 1/16 \sqrt{2})} \approx 0{,}991444861$
$\tan \pi/24 = \sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}-2$

$a = 2R \sin \pi/24 \approx 0{,}2610523\ R = 2r \tan \pi/24 \approx 0{,}2633049\ r$
$r = a / (2 \tan \pi/24) \approx 3{,}7978771\ a = R/2 \sin \pi/12 / \sin \pi/24 \approx 0{,}9914449\ R$
$R = a / (2 \sin \pi/24) \approx 3{,}8306488\ a = 2r \sin \pi/24 / \sin \pi/12 \approx 1{,}008629\ r$
$A = 24\ a^2 / (4 \tan \pi/24) \approx 45{,}5745246\ a^2$
$A = 24\ R^2 \sin \pi/24 \cos \pi/24 \approx 3{,}10582854\ R^2 \approx 3{,}15965994\ r^2$
$u = 24\ a$
$d_i = a \sin(180°\ i/24) / \sin \pi/24$
$d_2 \approx 1{,}9828897\ a$; $d_3 \approx 2{,}9318517\ a$; $d_4 \approx 3{,}8306488\ a$;
$d_5 \approx 4{,}6639025\ a$; $d_6 \approx 5{,}4173555\ a$; $d_7 \approx 6{,}0781160\ a$;
$d_8 \approx 6{,}6348783\ a$; $d_9 \approx 7{,}0781160\ a$; $d_{10} \approx 7{,}4002452\ a$; $d_{11} \approx 7{,}5957541\ a$; $d_{12} \approx 7{,}6612976\ a$

Das Vierundzwanzigeck hat 252 Diagonalen, die in der Abbildung eingezeichnet sind.

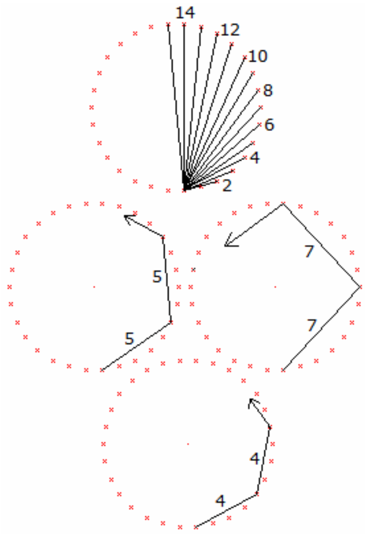


Regelmäßiges Dreißigeck

Das regelmäßige Dreißigeck ist ein Vieleck mit 30 Ecken, 30 gleich langen Seiten, 30 gleich großen Innenwinkeln von 168°. Das Dreißigeck kann allein mit Zirkel und Lineal konstruiert werden. In der Abbildung ist aber kaum noch ein Unterschied zu einem Kreis zu erkennen. Das Dreißigeck hat 405 Diagonalen. Aus der Seite a lassen sich der Inkreisradius r, der Umkreisradius R, die Diagonalen d_2 bis d_{15}, Höhe h, Flächeninhalt A und Umfang u errechnen.
$\sin \pi/15 = 1/8 (\sqrt{2} \sqrt{(5+\sqrt{5})} -\sqrt{3} (\sqrt{5}-1)) \approx 0{,}2079116908$
$\sin \pi/30 = \sqrt{(15/32 - 3/32 \sqrt{5})} - \sqrt{5/8} - 1/8 \approx 0{,}1045284632$
$\cos \pi/30 = 1/8\cdot(\sqrt{2}\cdot\sqrt{(5-\sqrt{5})}+\sqrt{3}\cdot(\sqrt{5}+1))$
$\tan \pi/30 = 1/2\cdot(\sqrt{2}\cdot\sqrt{(5-\sqrt{5})}-\sqrt{3}\cdot(\sqrt{5}-1))$
$a = 2R \sin \pi/30 \approx 0{,}2090569\ R = 2r \tan \pi/30 \approx 0{,}2102085\ r$
$r = a / (2 \tan \pi/30) \approx 4{,}7571822\ a = R/2 \sin \pi/15 / \sin \pi/30 \approx 0{,}9945219\ R$
$R = a / (2 \sin \pi/30) \approx 4{,}7833861\ a = 2r \sin \pi/30 / \sin \pi/15 \approx 1{,}0055083\ r$
$A = 30\ a^2 / (4 \tan \pi/30) \approx 71{,}357733407\ a^2$
$A = 30\ R^2 \sin \pi/30 \cos \pi/30 \approx 3{,}118675362\ R^2 \approx 3{,}153127057\ r^2$
$u = 30\ a$
$d_i = a \sin(180°\ i/30) / \sin \pi/30$
$d_2 \approx 1{,}9890438\ a$; $d_3 \approx 2{,}9562952\ a$; $d_4 \approx 3{,}8911568\ a$;
$d_5 \approx 4{,}7833861\ a$; $d_6 \approx 5{,}6232076\ a$; $d_7 \approx 6{,}4014201\ a$;
$d_8 \approx 7{,}1094973\ a$; $d_9 \approx 7{,}7396813\ a$; $d_{10} \approx 8{,}2850678\ a$;
$d_{11} \approx 8{,}7396813\ a$; $d_{12} \approx 9{,}0985411\ a$; $d_{13} \approx 9{,}3577153\ a$;
$d_{14} \approx 9{,}5143645\ a$; $d_{15} \approx 9{,}5667722\ a$

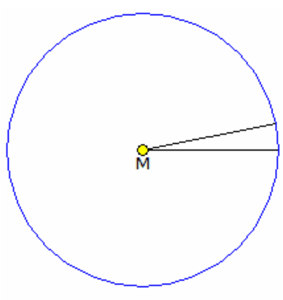
Das regelmäßige 30-Eck ist ein Vieleck mit 30 Ecken, 30 gleich langen Seiten und 30 gleich großen Innenwinkeln.
Das 30-Eck hat $n(n-3)/2 = 30(30-3)/2 = 405$ Diagonalen. Es gibt aber nur $(n-2)/2 = 14$ Diagonalen, die voneinander verschieden sind. Die Diagonalen seien d_2 bis d_{15}. Diese kann man in 3 Klassen aufteilen:

1.Klasse: Zuerst werde die Diagonale d_5 betrachtet. Da 5 ein echter Teiler von 30 ist, wird schon nach einem Umlauf der Startpunkt wieder erreicht.
Es ergibt sich ein regelmäßiges Sechseck. Für die anderen echten Teiler 2, 3, 6, 10, 15 entstehen 15-Eck, Zehneck, Fünfeck und Dreieck. Zum Teiler 15 gibt es kein Vieleck, d_{15} ist der Durchmesser des Umkreises.



2.Klasse:
7 und 30 haben keinen gemeinsamen Teiler, d.h. mit der Diagonale d_7 benötigt man 30 Strecken, um wieder zum Startpunkt zu gelangen. Es entsteht ein 30zackiger Stern. Die anderen Zahlen dieser Art sind 11 und 13.

3.Klasse:
4 und 30 haben den kleinsten gemeinsamen Teiler 2, womit man mit der Diagonale d_4 2 Umläufe benötigt, um wieder am Startpunkt anzukommen. Es entsteht 15-Eck.
Die anderen Zahlen dieser Art 8, 9 12 und 14 führen zum 15-Eck, zum Zehneck, zum Fünfeck und erneut zum 15-Eck.



Regelmäßiges Zweiunddreißigeck

Das regelmäßige Zweiunddreißigeck ist ein Vieleck mit 32 Ecken, 32 gleich langen Seiten, 32 gleich großen Innenwinkeln von 168,75°. Das Dreißigeck kann allein mit Zirkel und Lineal konstruiert werden. In der Abbildung ist ein Unterschied zu einem Kreis nicht mehr zu erkennen. Das Dreißigeck hat 464 Diagonalen.
Aus der Seite a lassen sich der Inkreisradius r, der Umkreisradius R, die Diagonalen d_2 bis d_{16}, Höhe h, Flächeninhalt A und Umfang u errechnen.

$\sin \pi/16 = \sqrt{1/2 - \sqrt{1/16 \sqrt{2} + 1/8}} \approx 0{,}1950903220$

$\sin \pi/32 = \sqrt{1/2 - \sqrt{\sqrt{1/256 \sqrt{2} + 1/128} + 1/8}} \approx 0{,}09801714032$

$\cos \pi/32 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{1/256 \sqrt{2} + 1/128} + 1/8} + 1/2} \approx 0{,}995184726$

$\tan \pi/32 = \sin \pi/32 / \cos \pi/32 \approx 0{,}0984914033573$

$a = 2R \sin \pi/32 \approx 0{,}1960343\ R = 2r \tan \pi/32 \approx 0{,}1969828\ r$

$r = a / (2 \tan \pi/32) \approx 5{,}0765852\ a = R/2 \sin \pi/16 / \sin \pi/32 \approx 0{,}9951847\ R$

$R = a / (2 \sin \pi/32) \approx 5{,}1011486\ a = 2r \sin \pi/32 / \sin \pi/16 \approx 1{,}0048386\ r$

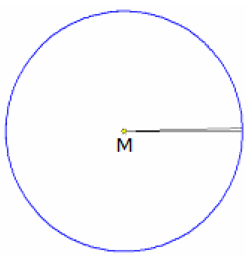
$A = 32\ a^2 / (4 \tan \pi/32) \approx 81{,}225363101\ a^2$

$A = 32\ R^2 \sin \pi/32 \cos \pi/32 \approx 3{,}121445152\ R^2 \approx 3{,}151724907\ r^2$

$u = 32\ a$

$d_i = a \sin(180°\ i/32) / \sin \pi/32$

$d_2 \approx 1{,}9903696\ a$; $d_3 \approx 2{,}9615706\ a$; $d_4 \approx 3{,}9042501\ a$;
$d_5 \approx 4{,}8093296\ a$; $d_6 \approx 5{,}6680927\ a$; $d_7 \approx 6{,}4722689\ a$;
$d_8 \approx 7{,}2141136\ a$; $d_9 \approx 7{,}8864824\ a$; $d_{10} \approx 8{,}4829001\ a$;
$d_{11} \approx 8{,}9976229\ a$; $d_{12} \approx 9{,}4256936\ a$; $d_{13} \approx 9{,}7629897\ a$;
$d_{14} \approx 10{,}006263\ a$; $d_{15} \approx 10{,}1531704\ a$; $d_{16} \approx 10{,}2022972\ a$



Regelmäßiges 257-Eck

257 ist Fermatsche Primzahl, wodurch das regelmäßige 257-Eck allein mit Zirkel und Lineal eindeutig konstruierbar ist. Mit bloßem Auge ist ein 257-Eck nicht mehr von einem Kreis zu unterscheiden. (siehe Abbildung)
Durch Richelot und Schwendenstein wurde 1832 erstmals eine vollständige Konstruktionsbeschreibung angegeben. Durch de Temple wurde 1991 die Konstruktion vereinfacht und nutzt u.a. 150 verschiedene Kreise und 566 Geraden.
Zentriwinkel ≈ 1°, Innenwinkelsumme 45900°, Diagonalenzahl 32639
Seite s = 0,0244, Umfang u = 6,283, Flächeninhalt A = 3,1313,
Ist die Seite a gegeben, so lassen sich daraus der Radius r des Inkreises, der Radius R des Umkreises, die Diagonalen d_2 bis d_9, die Höhe h, der Flächeninhalt A und der Umfang u errechnen.

$a = R\ (2 \sin(180°/257)) \approx 0{,}0244475829850\ R = r\ (2 \tan(180°/257)) \approx 0{,}0244494096819\ r$

$r = a / (2 \tan(180°/257)) \approx 40{,}9007830050\ a$

$r = R/2 \sin(360°/257) / \sin(180°/257) \approx 0{,}999925286669\ R$

$R = a / (2 \sin(180°/257)) \approx 40{,}9038390670\ a$

$R = 2r \sin(180°/257) / \sin(360°/257) \approx 1{,}00007471891\ r$

$A = 257\ a^2 / (4 \tan(180°/257)) \approx 5255{,}75061614\ a^2$

$A = 257\ R^2 \sin(180°/257) \cos(180°/257) \approx 3{,}14127970057\ R^2 \approx 3{,}14174914412\ r^2$

$u = 257\ a$

$d_i = a \sin(180°\ i/257) / \sin(180°/257)$

Durch Dr.Bernd Winter werden unter
http://mathematik-olympiaden.de/public/17_257_65537/

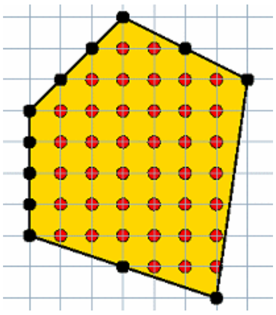
Erklärungen zur Konstruktion eines regelmäßigen 257-Ecks gegeben. U.a. findet man auch ein mp4-Video, in dem die Konstruktion demonstriert wird.

Regelmäßiges 65537-Eck

65537 ist die größte bekannte Fermat-Primzahl und damit das regelmäßige 65537-Eck mit Zirkel und Lineal zeichenbar.
Bis heute (2002) gibt es noch keine Zeichen- oder Druckmethode, mit der ein derartiges N-Eck dargestellt werden könnte, so dass es von einem Kreis unterscheidbar wäre.
Hermes gab 1900 eine Konstruktionsbeschreibung, die von de Temple 1991 wieder "vereinfacht" wurde.

Näherungskonstruktion N-Eck

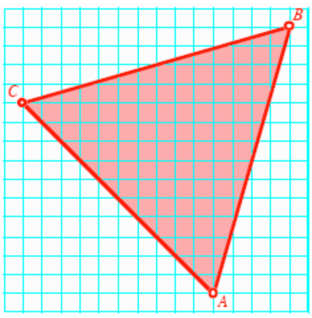
Für alle regelmäßigen N-Ecke mit n > 4 und gegebenen Umkreis gilt folgende Näherungskonstruktion:
1. ein Durchmesser AB des Kreises wird in n gleiche Teile der Länge t zerlegt, die Teilpunkte seien $A = T_0, T_1, T_2, \ldots, T_n = B$
2. das Lot auf AB in M schneidet den Kreis in E und F
3. der Kreis um M mit dem Radius r + t schneidet MB in C und ME in D
4. CD schneidet den Kreis k in G und H
5. dann ist die Strecke GT_{n-3} näherungsweise gleich der gesuchten n-Eckseite



Satz von Pick

Der Satz von Pick, benannt nach dem österreichischen Mathematiker Georg Alexander Pick, beschreibt eine grundlegende Eigenschaft von einfachen Gitterpolygonen.
Dies sind Vielecke, deren sämtliche Eckpunkte ganzzahlige Koordinaten haben.
Der Satz besagt:
Sei A der Flächeninhalt des Polygons, I die Anzahl der Gitterpunkte im Inneren des Polygons und R die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand des Polygons, dann gilt: $A = I + R/2 - 1$
Im nebenstehenden Beispiel ist R = 12 und I = 40. Die Fläche dieses Polygons beträgt somit 40 + 6 - 1 = 45 Gitterquadrateinheiten.
Der Satz von Pick kann dazu benutzt werden, um die Eulersche Polyederformel zu beweisen.

Betrachtet man nicht nur einfache Polygone, sondern auch solche mit "Löchern", so muss der Summand -1 durch $-\chi(P)$ ersetzt werden, wobei $\chi(P)$ die Euler-Charakteristik des Polygons P ist.
Eine Folge des Satzes von Pick ist, dass ein ebenes Dreieck mit ganzzahligen Eckpunkten, das außer diesen Eckpunkten keine ganzzahligen Punkte enthält, die Fläche 1/2 hat. Sind ABC und A'B'C' zwei solche Dreiecke, so bildet die affine Abbildung, die ABC in A'B'C' überführt, das Gitter auf sich selbst ab.
Man kann ferner zeigen, dass im Raum jeder Simplex, der außer den Eckpunkten keine ganzzahligen Punkte enthält, das Volumen 1/6 hat.



Rasterdreieck

Gegeben sei ein Dreick Δ ABC im Raster, d.h. alle Eckpunktkoordinaten sind ganzzahlig.
Nach dem Satz von Pick hat dann das Dreieck einen Flächeninhalt A, der entweder natürliche Zahl oder eine gebrochene Zahl mit dem Nenner 2 ist.
Die Frage ist, ob ein Rasterdreieck gleichseitig sein kann?
Zwei Rasterpunkte A und B sollen zu einem gleichseitigen Dreieck Δ ABC ergänzt werden.
Der Vektor $\vec{AB}$ hat ganzzahlige Komponenten

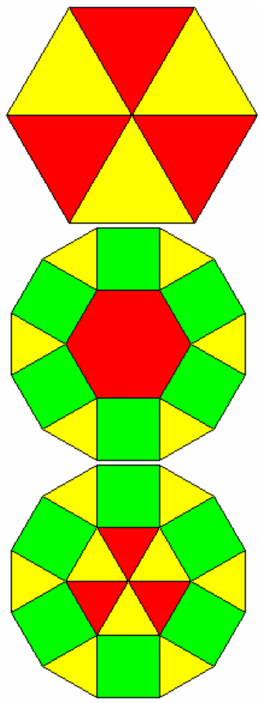
$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\vec{BC}$ ist der um 120° gedrehte Vektor $\vec{AB}$, d.h.

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} \cos 120° & -\sin 120° \\ \sin 120° & \cos 120° \end{pmatrix} \vec{AB}$$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 1/2\,(-p-\sqrt{3}\,q) \\ 1/2\,(\sqrt{3}\,q - p) \end{pmatrix}$$

Auf Grund der Irrationalität von $\sqrt{3}$ können nicht beide Koordinaten ganzzahlig sein. Der Punkt C ist kein Rasterpunkt.
Es existiert kein gleichseitiges Rasterdreieck.

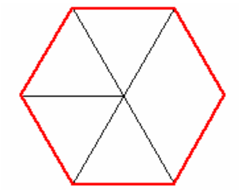


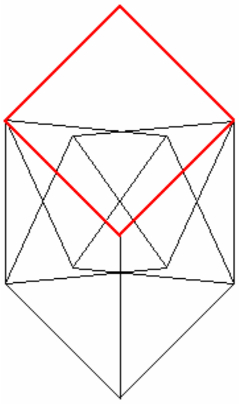
Zerschneiden eines regelmäßigen Vielecks

Aufgabe: Welche Möglichkeiten gibt es, ein beliebiges regelmäßiges Vieleck in mehrere regelmäßige Vielecke mit der gleichen Seitenlänge zu zerschneiden?
An jeder Ecke des gesuchten großen regelmäßigen Vielecks können nur genau zwei kleinere regelmäßige Vielecke zusammenstoßen, wobei die Summe ihrer Innenwinkel kleiner als 180° sein muss. Bei drei oder mehr regelmäßigen Vielecken an jeder Ecke wäre die Winkelsumme mindestens 180° und es gäbe keine Lösung. Mit diesen Randbedingungen gibt es nur drei Möglichkeiten:

1. Zwei kleine Dreiecke (Winkelsumme: 120°)
2. Ein kleines Dreieck und ein kleines Quadrat (Winkelsumme: 150°)
3. Ein kleines Dreieck und ein kleines Fünfeck (Winkelsumme: 168°)

Die erste Möglichkeit ergibt als Lösung ein großes regelmäßiges Sechseck, dass man in 6 kleine regelmäßige Dreiecke zerschneiden kann.
Bei der zweiten Möglichkeit entsteht ein großes regelmäßiges Zwölfeck, bei dem sich in der Mitte noch ein kleines regelmäßiges Sechseck befindet. Aus dieser zweiten Lösung kann man unter Verwendung der ersten Lösung eine dritte Lösung gewinnen, indem man das Sechseck in Dreiecke zerlegt (siehe Abbildung).
Die dritte Möglichkeit führt auf ein regelmäßiges 30-Eck mit Dreiecken und Fünfecken an den Rändern. Allerdings entsteht in der Mitte ein Stern mit 15 Zacken und Innenwinkeln von jeweils 84°. Daraus kann man durch Zerschneiden keine regelmäßigen Vielecke mit den geforderten Eigenschaften mehr herstellen. Es bleibt also bei den folgenden drei Lösungen:
1. Zerschneiden eines regelmäßigen Sechsecks in 6 regelmäßige Dreiecke
2. Zerschneiden eines regelmäßigen Zwölfecks in 6 regelmäßige Dreiecke, 6 Quadrate und 1 regelmäßiges Sechseck
3. Zerschneiden eines regelmäßiges Zwölfecks in 12 regelmäßige Dreiecke und 6 Quadrate





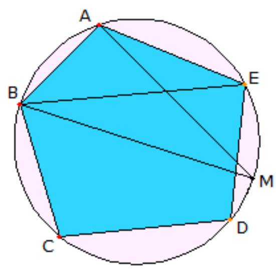
Steife N-Ecke, nichtverformbare N-Ecke

Aus drei festen Stäben gleicher Länge kann ein steifes regelmäßiges Dreieck gebildet werden. Um aus Stäben gleicher Länge ein regelmäßiges, steifes Sechseck zu bilden, benötigt man außer den 6 Seitenstäben weitere 5 um das Sechseck nicht verformbar zu machen (obere Abbildung).
Erst 2002 wurde durch Khodylow die bisher kleinste Anzahl von 19 notwendigen Stäben für das Quadrat angegeben (untere Abbildung).
Bisher kennt man für die kleinste mögliche Zahl der Stangen

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Stangen	3	19	31	11	79	31	51	55	155	49

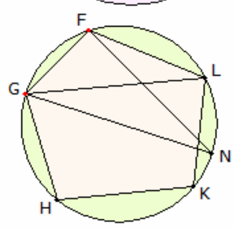
Überträgt man das Problem auf den Raum, so ist bisher bekannt, dass ein Würfel mit 36 Stangen nicht verformbar konstruiert werden kann.

Vieleckumkreis bei Euklid

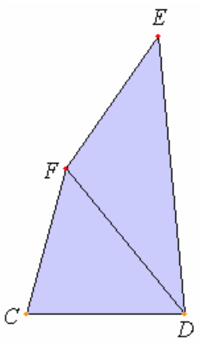


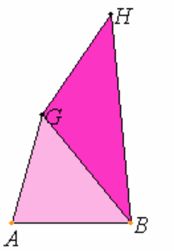
Euklids "Elemente": Buch XII § 1 (L. 1):
Ähnliche Vielecke in Kreisen verhalten sich zueinander wie die Quadrate über den Durchmessern.

Man habe die Kreise ABC, FGH und in ihnen ähnliche Vielecke ABCDE, FGHKL; BM, GN seien Durchmesser der Kreise. Ich behaupte, dass BM² : GN² = Vieleck ABCDE : Vieleck FGHKL.



Man ziehe BE, AM, GL, FN. Da Vieleck ABCDE ~ Vieleck FGHKL, ist ∠ BAE = GFL und BA : AE = GF : FL (VI, Definition 1). Mithin sind BAE, GFL zwei Dreiecke, in denen ein Winkel einem Winkel gleich ist, nämlich ∠ BAE = GFL, und die Seiten um die gleichen Winkel in Proportion stehen; also ist ∆ ABE mit ∆ FGL winkelgleich (VI, 6).
Also ist ∠ AEB = ∠ FLG. Andererseits ist ∠ AEB = AMB, denn sie stehen über demselben Bogen (III, 21); und ∠ FLG = FNG. Also ist ∠ AMB = FNG.
Ferner sind die rechten Winkel (III, 31) BAM = GFN; also auch der letzte Winkel dem letzten gleich (I, 32). ∆ ABM ist also mit ∆ FGN winkelgleich. Also stehen in Proportion BM : GN = BA : GF (VI, 4).
Nun ist (BM : GN)² = BM² : GN² und (BA : GF)² = Vieleck ABCDE : Vieleck FGHKL (VI, 20). Also ist BM² : GN² = Vieleck ABCDE : Vieleck FGHKL (V, 22, 11) - S.





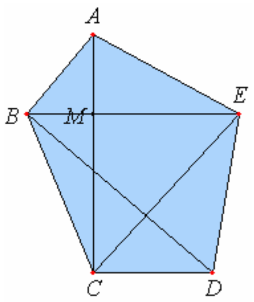
Euklidische Vielecksätze (1)

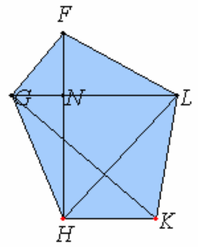
Euklids "Elemente": Buch VI § 18 (A. 6):
Über einer gegebenen Strecke eine einer gegebenen geradlinigen Figur ähnliche und ähnlich gelegte geradlinige Figur zu zeichnen.

AB sei die gegebene Strecke, CE die gegebene geradlinige Figur. Man soll über der Strecke AB einer der geradlinigen Figur CD ähnliche geradlinige Figur ähnlich gelegt zeichnen.

Man ziehe DF und trage an die gerade Linie AB in den Punkten A, B auf ihr den dem Winkel bei C gleichen ∠ GAB und ∠ ABG = CDF an: dann ist auch der letzte ∠ CFD = AGB (I, 32). Also ist ∆ FCD mit ∆ GAB winkelgleich; also stehen in Proportion FD : GB = FC : GA und = CD : AB (VI, 4, V, 16).
Ebenso trage man an die gerade Linie BG in den Punkten B, G auf ihr ∠ BGH = DFE und GBH = FDE an; dann ist auch der letzte Winkel, bei E, dem letzten, bei H, gleich. Also ist ∆ FDE mit ∆ GHB winkelgleich; also stehen in Proportion FD : GB = FE : GH und = ED : HB.

Wie oben beweisen, ist auch FD : GB = FC : GA und = CD : AB; also ist FC : AG = CD : AB = FE : GH = ED : HB (V, 11). Ferner ist, da ∠ CFD = AGB und DFE = BGH, der ganze Winkel CFE dem ganzen AGH gleich. Aus demselben Grunde ist auch ∠ CDE = ABH. Aber auch der Winkel bei C ist dem bei A gleich und der bei E dem bei H. Also ist AH mit CE winkelgleich; ferner stehen in ihnen die Seiten um gleiche Winkel in Proportion.
Also ist die geradlinige Figur AH der geradlinigen Figur CD ähnlich (VI, Definition 1).
Also hat man über einer gegebenen Strecke AB eine einer gegebenen geradlinigen Figur CE ähnliche und ähnlich gelegte geradlinige Figur gezeichnet, nämlich AH - dies hatte man ausführen sollen.

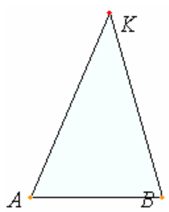


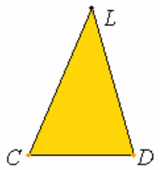


Euklids "Elemente": Buch VI § 20 (L. 14):
Ähnliche Vielecke lassen sich in ähnliche Dreiecke zerlegen, und zwar in gleich viele und den Ganzen proportional entsprechende; und die Vielecke stehen zueinander zweimal im Verhältnis wie entsprechende Seiten zueinander.

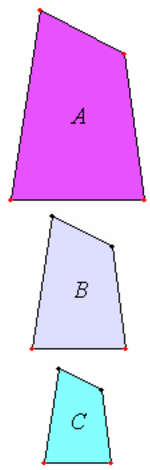
ABCDE, FGHKL seien ähnliche Vielecke; AB entspreche dabei FG. Ich behaupte, dass die Vielecke ABCDE, FGHKL sich in ähnliche Dreiecke zerlegen lassen, und zwar in gleich viele und den Ganzen entsprechende (V, Definition 11), und dass Vieleck ABCDE : Vieleck FGHKL = $(AB : FG)^2$.

Man ziehe BE, EC, GL, LH. Da Vieleck ABCDE ~ Vieleck FGHKL, ist ∠ BAE = GFL und BA : AE = GF : FL (VI, Definition 1). Da nun ABE, FGL zwei Dreiecke sind, in denen ein Winkel einem Winkel gleich ist und die Seiten um die gleichen Winkel in Proportion stehen, so ist ∆ ABE mit ∆ FGL winkelgleich (VI, 6), folglich auch ähnlich (VI, 4, Definition 1).
Also ist ∠ ABE = FGL. Aber auch der ganze ∠ ABC ist dem ganzen FGH gleich wegen der Ähnlichkeit der Vielecke; also ist der Restwinkel EBC = LGH. Und da wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke ABE, FGL EB : BA = LG : FG ist, andererseits wegen der Ähnlichkeit der Vielecke auch AB : BC = FG : GH, so ist über gleiches weg EB : BC = LG : GH (V, 22), und die Seiten um die gleichen Winkel EBC, LGH stehen in Proportion; also ist ∆ EBC mit ∆ LGH winkelgleich (VI, 6), folglich ∆ EBC ~ ∆ LGH (VI, 4, Definition 1).
Aus demselben Grunde ist auch ∆ ECD ~ ∆ LHK, Also hat man die ähnlichen Vielecke ABCDE, FGHKL in ähnliche Dreiecke zerlegt, und zwar in gleich viele.



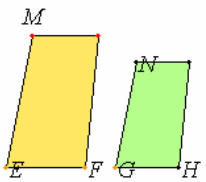


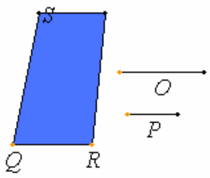
Zusatz: Ebenso lässt sich auch bei vierseitigen Figuren zeigen, dass sie zweimal im Verhältnis entsprechender Seiten stehen; für Dreiecke ist es schon bewiesen (VI, 19); folglich stehen allgemein ähnliche geradlinige Figuren (I, Definition 19) zueinander zweimal im Verhältnis entsprechender Seiten - dies hatte man beweisen sollen.



Euklids "Elemente": Buch VI § 21 (L. 15):
Derselben geradlinigen Figur ähnliche sind auch einander ähnlich.

Die geradlinigen Figuren A, B seien beide ~ C. Ich behaupte, dass auch A ~ B.
A ist, da ~ C, mit ihm winkelgleich, und die Seiten um gleiche Winkel stehen in Proportion (VI, Definition 1). Ebenso ist B, da ~ C, mit ihm winkelgleich, und die Seiten um gleiche Winkel stehen in Proportion.
Beide Figuren A, B sind also mit C winkelgleich, und die Seiten um gleiche Winkel stehen in Proportion; also ist auch A mit B winkelgleich, und die Seiten um gleiche Winkel stehen in Proportion; also ist A ~ B (Axiom 1; V, 11; VI, Definition 1) - dies hatte man beweisen sollen.

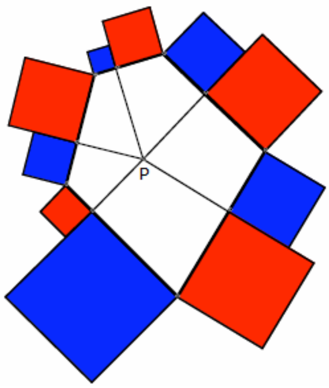




Euklids "Elemente": Buch VI § 22 (L. 16):
Stehen vier Strecken in Proportion, so müssen auch ähnliche über ihnen ähnlich gezeichnete geradlinige Figuren in Proportion stehen. Und wenn ähnliche über ihnen ähnliche gezeichnete geradlinige Figuren in Proportion stehen, dann müssen auch die Strecken selbst in Proportion stehen.

AB, CD, EF, GH seien vier in Proportion stehende Strecken, AB : CD = EF : GH, und es seine einerseits über AB, CD ähnliche ähnlich gelegte geradlinige Figuren KAB, LCD gezeichnet (VI, 18), andererseits über EF, GH ähnliche ähnlich gelegte geradlinige Figuren MF, NH (VI, 18). Ich behaupte, dass KAB : LCD = Figur MF : Figur NH.

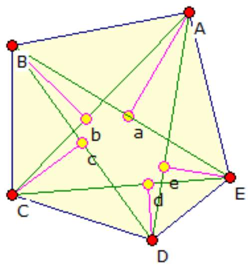
Man verschaffe sich zu AB, CD die Dritte Proportionale O und zu EF, GH die Dritte Proportionale P (VI, 11). Da dann sowohl AB : CD = EF : GH als auch CD : O = GH : P (V, 11), so ist auch über gleiches weg AB : O = EF : P (V, 22).
Aber AB : O = KAB : LCD und EF : P = Figur MF : Figur NH (VI, 20, Zusatz; V, 11, Definition 9). Also ist KAB : LCD = Figur MF : Figur NH (V, 11). Zweitens sei KAB : LCD = Figur MF : Figur NH. Ich behaupte, dass auch AB : CD = EF : GH.
Wäre nämlich nicht AB : CD = EF : GH, so sei AB : CD = EF : QR (VI, 12). Dann zeichne man die MF oder NH ähnliche und ähnlich gelegte geradlinige Figur über QR, nämlich SR (VI, 18).
Da AB : CD = EF : QR wäre und man sowohl über AB, CD ähnliche, ähnlich gelegte Figuren KAB, LCD als auch über EF, QR ähnliche, ähnlich gelegte Figuren MF, SR gezeichnet hätte, so wäre KAB : LCD = Figur MF : Figur SR. Nach Voraussetzung ist aber auch KAB : LCD = Figur MF : Figur NH; also wäre MF : SR = MF : NH; MF hätte also zu beiden Figuren NH, SR gleiches Verhältnis; also wäre Figur NH = Figur SR (V, 9). Diese wären aber auch ähnlich und ähnlich gelegt; also wäre GH = QR (Hilfssatz, s.u.). Und da AB : CD = EF : QR, während QR = GH, so ist AB : CD = EF : GH (V, 7) - S.



Quadratketten, alternierende Quadratsummen

In einem konvexen Vieleck mit der Eckenzahl n wird ein beliebiger Punkt P gewählt.
Von P aus werden die Lote auf die Seiten gefällt und in den Lotfußpunkten Quadrate wie in der Abbildung auf die Seiten gesetzt.
Dann ist die alternierende Quadratflächensumme stets null.

Für das Dreieck entsteht im Allgemeinen eine Figur mit sechs Dreiecken. Verschiebt man allerdings den Punkt P o.B.d.A. in den Dreieckseckpunkt C, so wird:
Gegeben ist ein Dreieck ABC. F sei der Höhenfußpunkt von C auf AB. Sind h_a die Strecke AF und h_b die Strecke FB, so gilt $a^2 + h_a^2 = b^2 + h_b^2$
Die Beziehung am Vieleck kann verallgemeinert werden.
Statt den Lotfußpunkten werden auf jeder Lotgeraden durch P beliebige Punkte gewählt.



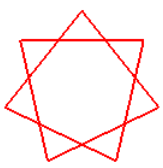
Scherung eines N-Ecks

Ist in der Ebene ein beliebiges N-Eck gegeben, so kann dieses durch affine Transformationen in nahezu jedes andere Polygon gleicher Eckenzahl und gleicher Fläche verwandelt werden.
Als affine Abbildung kann dazu jeder Eckpunkt des Polygons längs einer Parallelen zur Verbindungsstrecke, d.h. einer Polygondiagonalen, seiner Nachbarpunkte verschoben werden.
Bei einer solchen Verschiebung ändert sich der Abstand des Punktes zur Diagonalen nicht, so dass der Flächeninhalt eines Dreiecks nicht verändert wird.
Damit kann aus jedem Viereck ein flächengleiches Rechteck konstruiert werden, aus einem konkaven N-Eck ein konvexes mit gleichem Flächeninhalt usw.

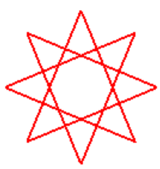
Regelmäßige überschlagene N-Ecke

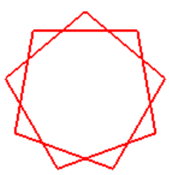
Lässt man auch überschlagene, nicht-konvexe, N-Ecke zu, so entstehen regelmäßige Sternvielecke. Diese wurden zuerst von Thomas Bradwardine (1290 – 1349), dem späteren Erzbischof von Canterbury, untersucht.
Es existieren genau zwei regelmäßige Achtecke, außer dem konvexen, ein Sternachteck. Bei diesem verbindet man jede Ecke mit der überübernächsten Ecke. Verbindet man mit der übernächsten Ecke, so entsteht kein Achteck sondern ein Quadrat. Ein regelmäßiges nichtkonvexes Sechseck gibt es gar nicht.
Die Übersicht enthält mögliche nichtkonvexen, regelmäßigen N-Ecke bis n = 12. Überschlagende 11-Ecke existieren noch zwei weitere nicht angezeigte. Diese N-Ecke sind auch Polygramme (siehe unten).
Umgekehrt ist aber nicht jedes Polygramm ein regelmäßiges überschlagenes N-Eck.


Fünfeck

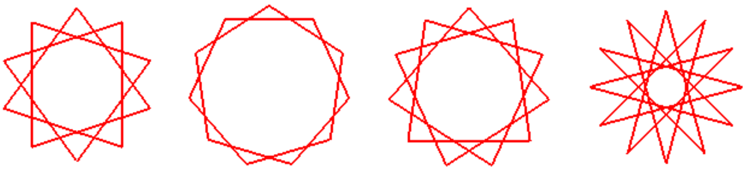

Siebeneck


Siebeneck


Achteck


Neuneck

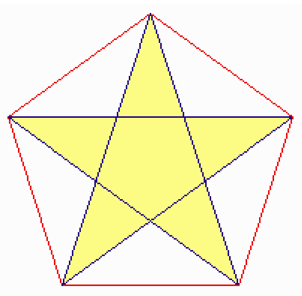

Neuneck



Zehneck Elfeck Elfeck Zwölfeck

Allgemein gilt: Ein N-Eck, konvex bzw. nichtkonvex, ergibt sich genau dann, wenn man jede Ecke mit der k.ten darauf folgenden Ecke verbindet und n und k teilerfremd sind. Die Verbindung der Ecken n und k liefert dasselbe N-eck wie die Verbindung der Ecken n und n-k.

N	Nichtkonvexe N-Ecke	N	Nichtkonvexe N-Ecke	N	Nichtkonvexe N-Ecke
5	1	7	2	8	1
9	2	10	1	11	4
12	1	13	5	14	2
15	2	16	3	17	7



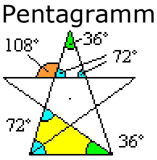
Pentagramm

Der Bund der Pythagoräer hatte einen regelmäßigen, fünfzackigen Stern, das "Pentagramm", als Geheimzeichen, das im Mittelalter als Amulett verwendet wurde. Auch Goethes Faust zeichnet eine solchen "Drudenfuß", auf seine Schwelle, um Mephisto am Verlassen des Studierzimmers zu hindern.

MEPHISTOPHELES: "Gesteh' ich's nur! Dass ich hinausspaziere | Verbietet mir ein kleines Hindernis, | Der Drudenfuß auf eurer Schwelle - "
FAUST: "Das Pentagramma macht dir Pein?"

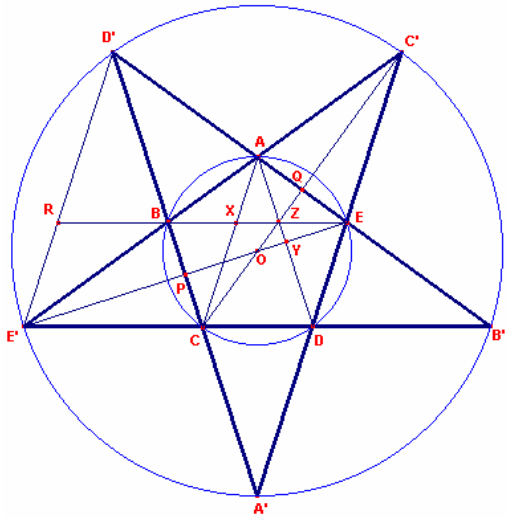
Wahrscheinlich fanden die Pythagoräer anhand dieser Figur den ersten Zugang zu irrationalen Zahlen, da das Verhältnis der Seitenlängen des Fünfecks zum Radius des Umkreises sich nicht als Verhältnis natürlicher Zahlen ausdrücken ließ.
Hippasos soll dieses als erster ausgesprochen haben (eine Gotteslästerung!), worauf die Götter ihn bei einem Schiffbruch umkommen ließen. Die Pythgoreer nannten das Pentagramm υγιεια (Hygeia = Gesundheit). Der Wunsch nach Gesundheit gehörte stets zur Begrüßung.

Nach einer umstrittenen Legende soll der erste Entwurf der US-amerikanischen Flagge sechseckige Sterne enthalten haben. George Washington soll als Freimaurer später diese gegen fünfeckige Sterne, Pentagramme, getauscht haben.



Nimmt man an, dass das kleine Fünfeck im Inneren des Pentagramms auch regelmäßig ist, so ist der gekennzeichnete Scheitelwinkel gleich 108°. Der Zacken ist ein gleichschenkliges 72-36-72-Dreieck.
Unten liegt schräg ein zweites kleineres 72-36-72-Dreieck.

Größen am Pentagramm



Die Strecke AB sei gleich 1. R sei der Umkreisradius von A'B'C'D'E', r der Umkreisradius von ABCDE. Dann gilt:

$AD' = \phi = (\sqrt{5} + 1) / 2$; Goldener Schnitt

$OP / r = \phi / 2$ $\quad$ $OE' / r = \phi^2$

$OP / OE' = 2\phi$ $\quad$ Diagonale $BE = \phi$

Ist X der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BE, dann wird

$EX / XB = \phi$ und $CX / XA = \phi$

Die Längen der Strecken D'B', D'E, B'A, AE, AX, XZ bilden eine geometrische Zahlenfolge

$D'B' = \phi^3$ $\quad$ $D'E = \phi^2$ $\quad$ $B'A = \phi$

$AE = 1$ $\quad$ $AX = 1/\phi$ $\quad$ $XZ = 1/\phi^2$

Die Seitenlängen des Fünfecks A'B'C'D'E' sind gleich ϕ^2

$R / r = \phi^2$ $\quad$ $OE' / OP = 2$ $\quad$ $OE' / r = \phi$

Ist a die Seitenlänge des inneren Fünfecks, so gilt für den Flächeninhalt des Pentagramms

$A = a^2/4 \sqrt{250 + 110 \sqrt{5}} \approx 5{,}568\, a^2$

Ist $s = a/2\, (3 + \sqrt{5})$ die Seitenlänge des äußeren Fünfecks, wird $A = s^2/2 \sqrt{25 - 10 \sqrt{5}} \approx 0{,}8123\, s^2$

Ist b die sichtbare, äußere Seitenlänge AD', wird $A = b^2 \sqrt{5/8 \sqrt{5} + 25/8} \approx 2{,}1266270\, b^2$

Pentagramm-Rätsel

Aufgabe: Wie viele Dreiecke sind in dem nebenstehenden Pentagramm enthalten?
Lösung:

Abbildung 1: Es gibt 20 aneinanderstoßende Dreiecke, an den Spitzen 10 und im Inneren des Fünfecks weitere 10

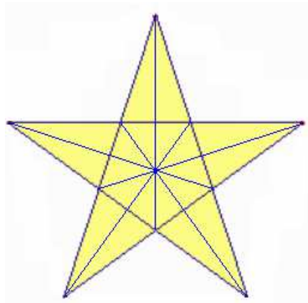


Abbildung 2: Je 1 Paar anstoßender Dreiecke von 1. gibt ein neues Dreiecke, insgesamt 10

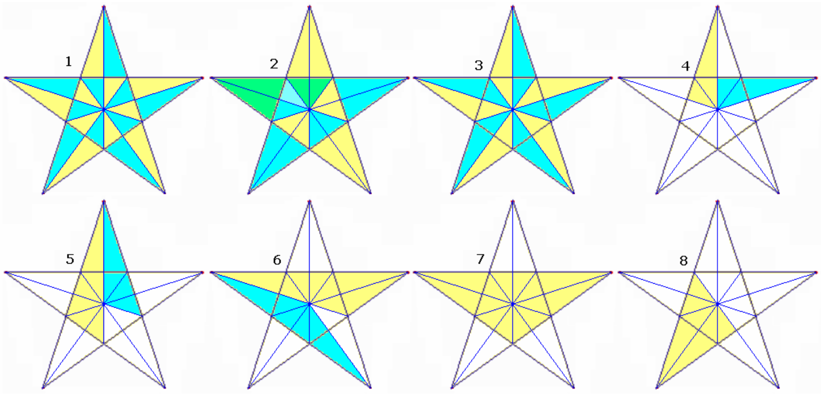
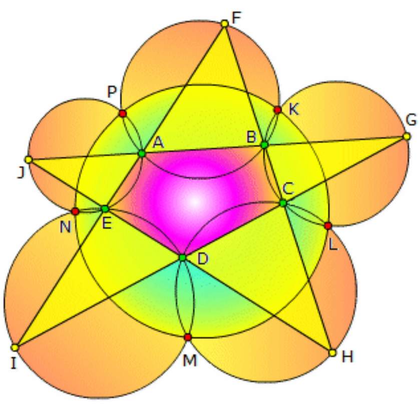


Abbildung 3: 10 aneinanderstoßende Dreiecke
Abbildung 4: Insgesamt 10 Dreiecke, die sich teilweise überlappen
Abbildung 5: Von jeder engezeichneten Art existieren genau 10 Dreiecke
Abbildung 6: Von der hell eingezeichneten Dreiecksart gibt es 5, von der anderen 10
Abbildung 7: 5 Dreiecke
Abbildung 8: 10 derartige Dreiecke
In der Summe existieren somit in der Ausgangsfigur genau 100 verschiedene Dreiecke.

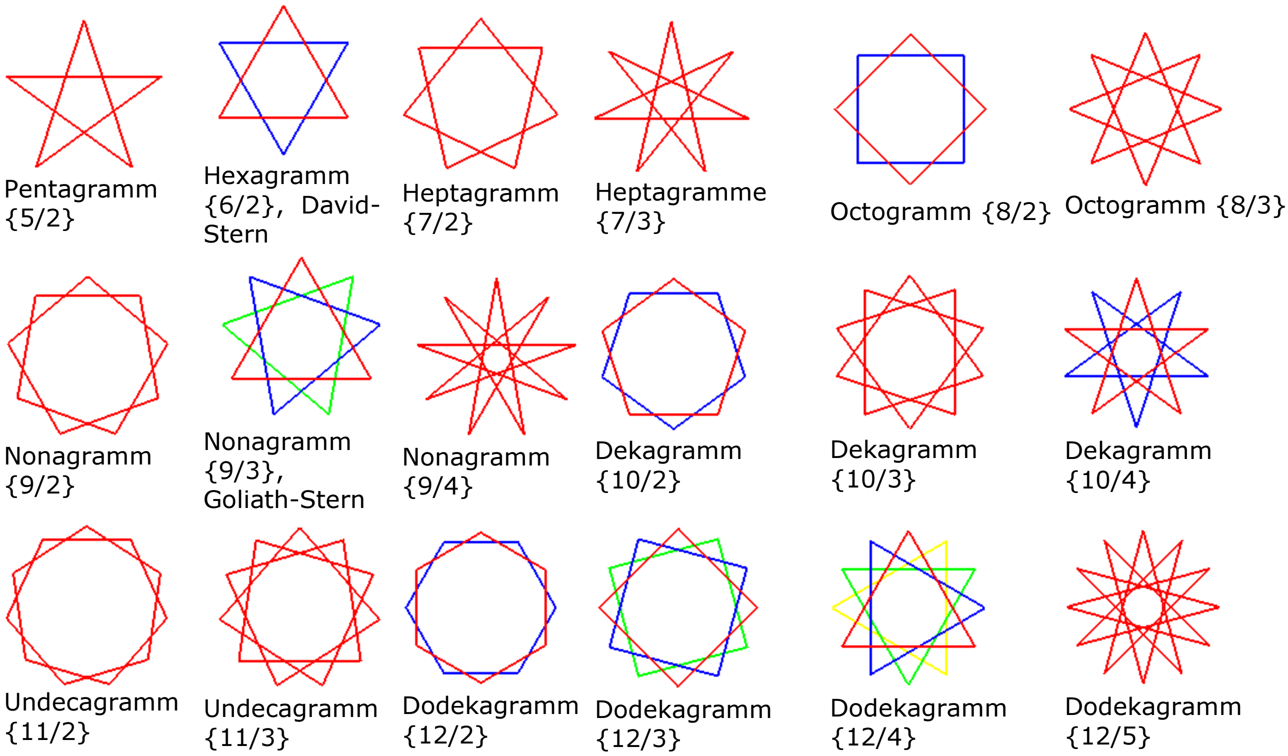


Miguels Pentagramm-Satz

1838 veröffentlichte Auguste Miquel in "Journal de Mathematiques Pures et Appliquees" folgenden Satz:
Gegeben sei ein konvexes Fünfeck ABCDE. Die verlängerten Fünfeckseiten schneiden sich paarweise in den Punkten F, G, H, I und J und bilden ein Pentagramm.
Um die Dreiecke AFB, BGC, CHD, DIE und EJA werden die Unkreise konstruiert.
Jeweils zwei dieser Umkreise schneiden sich in den Punkten K, L, M, M und P. Diese 5 Punkte sind konzyklisch, d.h. sie liegen wieder auf einem Kreis.

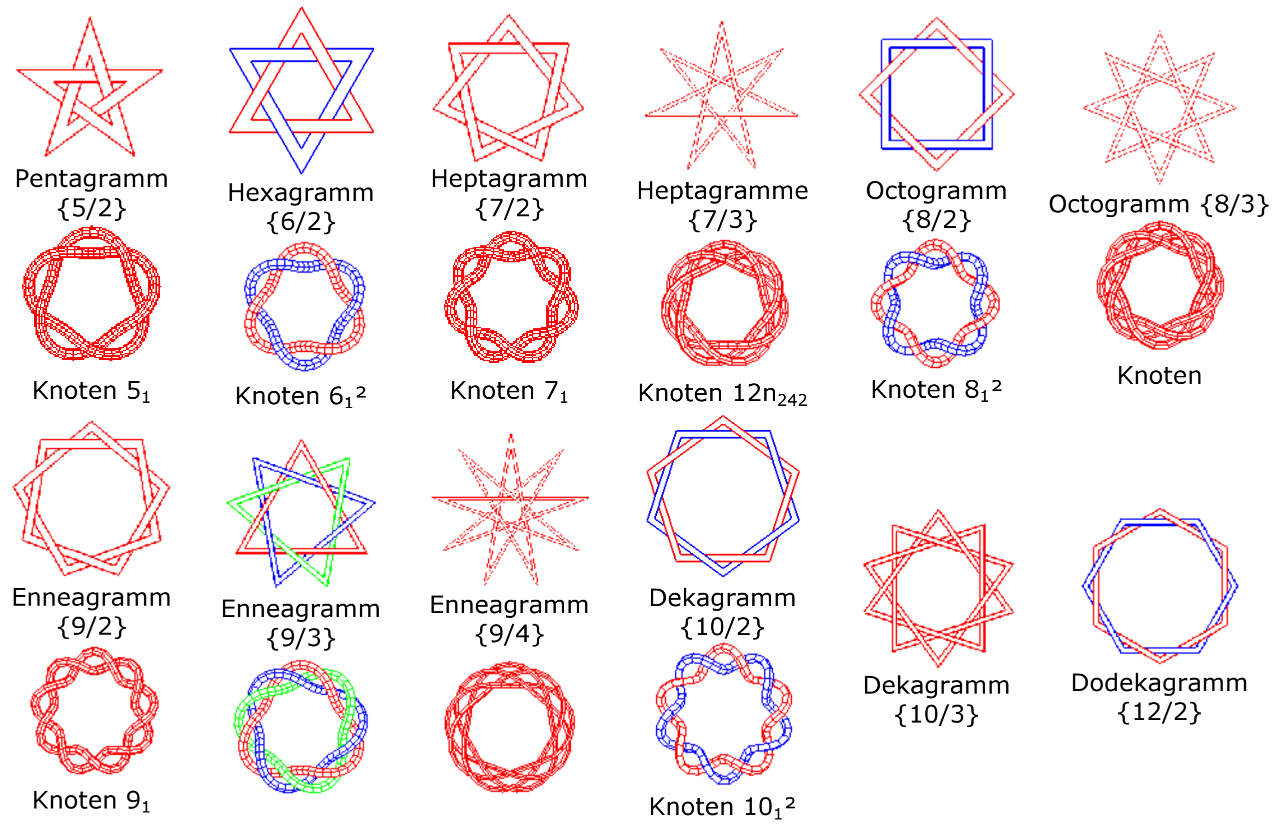
Weiterhin sind auch F, C, M und I sowie F, K, C, I konzyklisch und in Analogie auch die entsprechenden Punkte.
Der Pentagramm-Satz von Miguel ist unmittelbar mit den Cliffordschen Kreissätzen verbunden.

Tabelle der ersten Polygramme

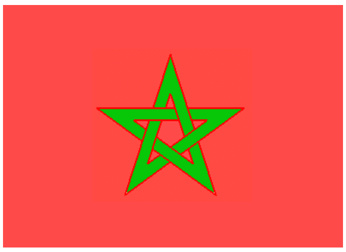


Verschlungene Polygramme

Die Polygramme können auch als torusförmige Gebilde betrachtet werden, d.h. die einzelnen Schleifen sind miteinander verschlungen. Die Tabelle enthält diese Polygramme und zusätzlich bei den ersten die zugehörigen Knoten.

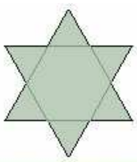


Polygramme sind bei symbolischen Darstellungen sehr beliebt, zum Beispiel auch bei Landesflaggen. Marokko und Äthiopien haben ein Pentagramm, Israel ein Hexagramm auf der Flagge:


Marokko


Äthiopien


Israel



Hexagramm

Das Hexagramm besteht aus gleichseitigen Dreiecken und gehört damit zu den Polyiamonds. Die Dreiecke sind zueinander um 60° gedreht.

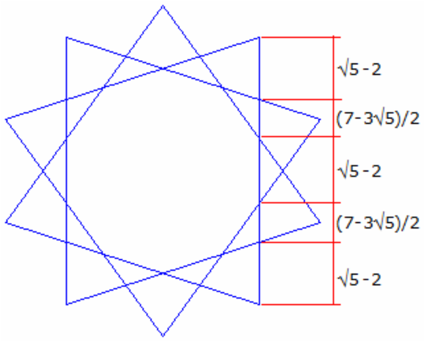
Ist die Seitenlänge der Ausgangsdreiecke a, so hat das Hexagramm Seiten der Länge a/3 und weiter ist

Umfang $u = 4a$

Flächeninhalt $A = 1/3 \sqrt{3}\, a^2$

Dass dieses konkave regelmäßige N-Eck sich auf US-amerikanischen Geldscheinen findet, ist merkwürdig. Zumindest sind die 13 Pentagramme, die das Hexagramm bilden, erklärbar. Diese stehen für die 13 Gründerstaaten der USA.

Das Hexagramm heißt auch Davidstern oder das Siegel Salomos. Obwohl in der jüdischen Mythologie nicht begründet, hat sich der 6-eckige Davidsstern in der Neuzeit zum jüdischen Symbol entwickelt. Nach der Legende war der Davidstern zu erst ein Symbol einer jüdischen Gemeinde in Prag. Ursprünglich war das Hexagramm ein magisches Zeichen in der Alchemie.

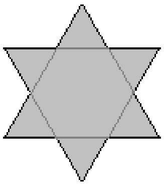


Sternpolygon

Ein Sternpolygon ist ein nicht konvexes Polygon, in Form eines Sterns.
Ein Sternpolygon {p | q}, mit positiven natürlichen q und p, ist eine Figur, bei der jeder q-te Punkt von p regelmäßige, kreisförmig angeordneten Punkten verbunden wird. Der Parameter q wird die Dichte des Sternpolygons genannt.
Sind p und q teilerfremd, dann hat ein Sternpolygon der Seitenlänge a den Umkreisradius

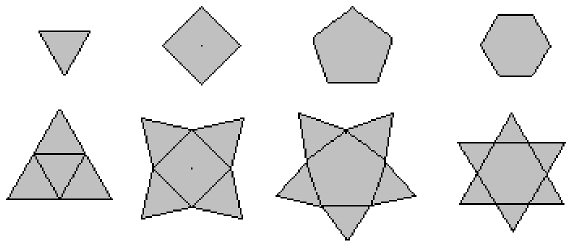
$$R = \sin((p-2q)/(2p)\ \pi) / \sin(2q/p\ \pi)\ a$$

Abbildung: Dekagram, Sternpolygon $\{^{10}{}_{3}\}$

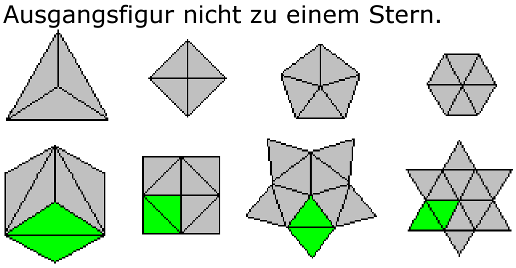


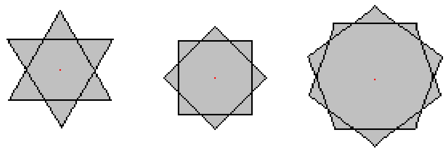
Sternfiguren

Der abgebildete Stern ist ein regelmäßiges Sechseck, auf dessen Seiten sechs gleichseitige Dreiecke sitzen.
Man kann allgemein definieren: Ein Stern ist eine Figur, die aus einem Vieleck besteht, auf dessen Seiten Dreiecke gesetzt werden. Die Dreiecke heißen Zacken.



Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten Sterne zu erzeugen.
1.Möglichkeit: Man gibt ein regelmäßiges Vieleck vor und setzt auf die Seiten gleichseitige Dreiecke. Diese Prozedur führt bei einem Dreieck als Ausgangsfigur nicht zu einem Stern.

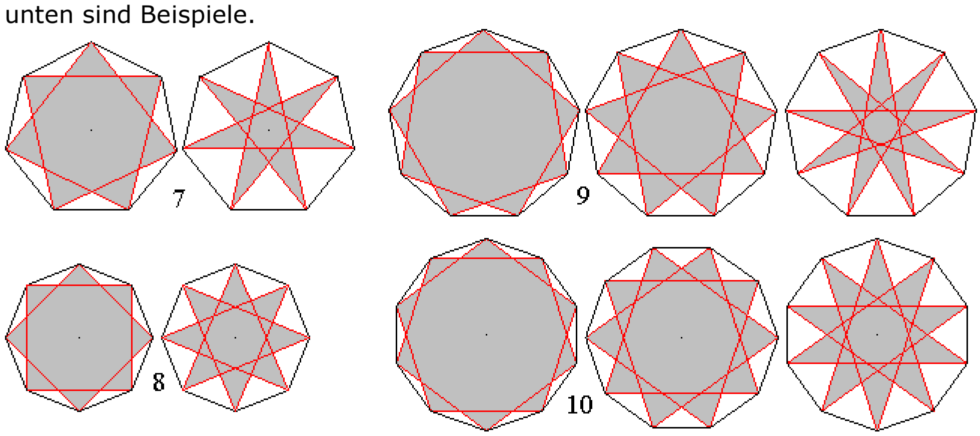


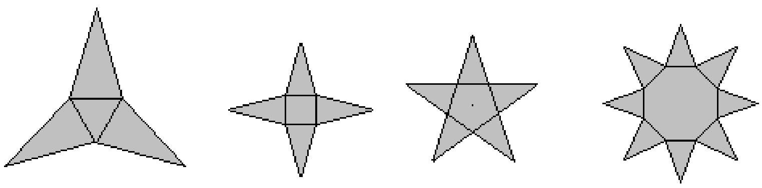


2. Möglichkeit:
Man gibt ein regelmäßiges Vieleck vor und spiegelt die Grunddreiecke der Vielecke an einer Seite. Diese Prozedur führt bei Drei- und Vierecken nicht zu Sternen.

3. Möglichkeit:
Man gibt ein regelmäßiges Vieleck mit n Ecken vor und dreht es um 180/n. Ursprung und Bild bilden zusammen einen Stern.

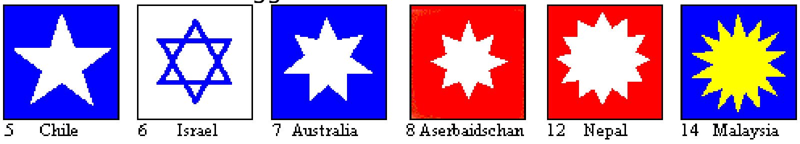
4. Möglichkeit:
Man gibt ein Vieleck vor und zeichnet bestimmte Diagonalen. Sie bilden dann Sterne. Speziell regelmäßige Vielecke führen zu Sternen mit vielfältiger Symmetrie. Das Pentagramm und das Hexagramm unten sind Beispiele.





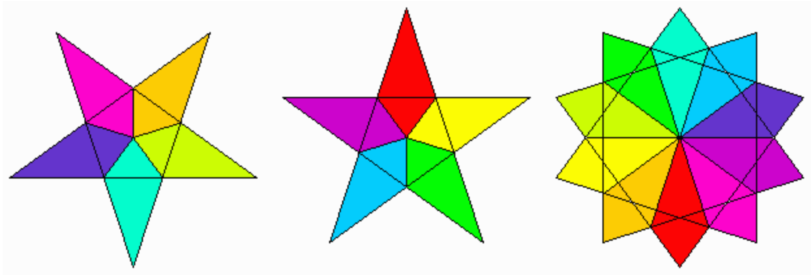
5. Möglichkeit:
Man gibt ein regelmäßiges Vieleck vor und setzt auf die Seiten gleichschenklige Dreiecke, die eine große Höhe verglichen mit der Grundseite haben.
Es entstehen ansehnliche Sterne.
Man erwartet offenbar, dass Sterne spitze Zacken haben.
6. Möglichkeit:
Man gibt ein beliebiges Vieleck vor und setzt auf die Seiten beliebige Dreiecke.

Das Hexagramm heißt auch Davidstern oder das Siegel Salomos. Das Hexagramm besteht aus gleichseitigen Dreiecken und gehört damit zu den Polyiamonds.
Viele Nationen haben in ihren Nationalflaggen einen oder mehrere Sterne. Hier ist eine kleine Auswahl:



Zwei Pentagramme

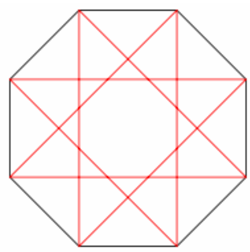
Aus zwei Pentagrammen kann ein 10/3-Stern, dessen Kanten aus Diagonalen des regelmäßigen 10-Ecks bestehen, konstruiert werden. Die Teile sind 10 zu einander deckungsgleiche Drachenvierecke.

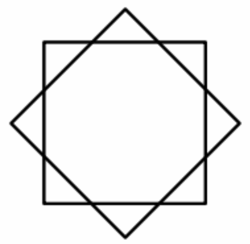


Heptagramm

Dem Heptagramm werden in der Esoterik verschiedenste Eigenschaften zugeschrieben, weshalb es ein bevorzugtes Symbol für die Verzierung von Amuletten und anderen Schmuckstücken ist.
Praktisch wird in alle Polygramme irgendwelcher esoterischer Unfug hineingedeutet.

In der Flagge Australiens findet man fünf Heptagramme. Ebenso enthält die Fahne der Cherokee zwei Heptagramme. Das erste Heptagramm ist historisch in der Kaballah nachweisbar. In verschiedenen christlichen Religionen stellt das überschlagene Siebeneck eine Symbol für Vollkommenheit dar.



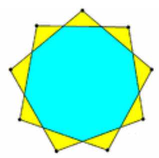


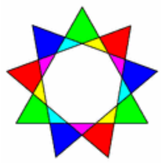
Oktagramm, Octogramm, Achterstern

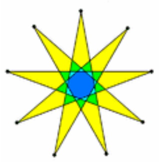
Das Oktagramm, auch Achterstern oder Octogramm, ist ein achtseitiges Sternpolygon, ein Polygramm.
Es entsteht u.a., wenn in einem konvexen Achteck entsprechende Eckpunkte mit einander verbunden werden. In der oberen Abbildung ist das regelmäßige Oktagramm rot in ein Achteck (schwarz) eingezeichnet.
Das regelmäßige Oktagramm hat das Schläfli-Symbol {8/3}, d.h. ein achtseitiger Stern, bei dem jeweils jeder dritte Punkt verbunden wird.

Es existiert ein weiteres Oktagramm {8/2}, das durch die Kombination von zwei Quadraten erzeugt werden kann (untere Abbildung).
Diese Sternfigur wird Stern von Lakshmi genannt. Der Stern von Lakshmi ist im Hinduismus ein wichtiges Symbol und stellt Ashtalakshmi, die acht Formen der Göttin Lakshmi dar, der Göttin des Glücks und der Schönheit. Mitunter wird sie auch als achthändige Figur dargestellt.
Fläche $A = a^2 (4 - 2 \sqrt{2}) \approx 1{,}1715728\, a^2$

Wird in den Stern von Lakshmi noch ein Kreis eingezeichnet, so entsteht das Symbol "Rub El Hizb", ein kalligrafisches Element, das im Koran verwendet wird, um das Ende eines Kapitels anzuzeigen. In den Wappen Turkmenistans und Usbekistans findet man dieses Symbol ebenso.







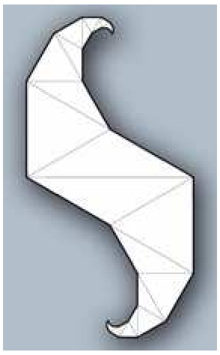
Nonagramm, Enneagramm

Das Nonagramm, auch Neunerstern oder Enneagramm, ist ein neunseitiges Sternpolygon, ein Polygramm.
Es entsteht, wenn in einem konvexen Neuneck entsprechende Eckpunkte miteinander verbunden werden. Dabei existieren beim Nonagramm zwei Möglichkeiten.

Bei dem regelmäßigen Nonagramm mit dem Schläfli-Symbol {9/2} (obere Abbildung) werden jeder 2.Punkt verbunden, bei dem Nonagramm {9/4} (untere Abbildung) jeder vierte.
Bei der mittleren Abbildung wurde jeder dritte Punkt verbunden. Es entsteht ein Polygramm {9/3}, das aber in drei kongruente gleichseitige Dreiecke zerfällt.
Das Nonagramm {9/3} wird auch Goliath-Stern genannt.

In der Bahai-Religion wird ein neuneckiger Stern in Form eines Nonagramms verwendet. Auch in der Esoterik und Mystik tritt dieses Polygramm natürlich wieder auf; als dubioses "Enneagramm der Persönlichkeit".
Das Nonagramm bzw. Enneagramm hat nichts mit dem Spiel "Nonogramm" zu tun.

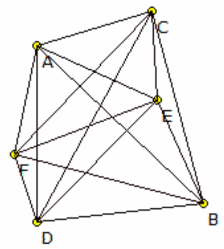
Spidron



Ein Spidron ist eine komplexe geometrische Figur aus einer Sequenz gleichschenkliger, gleichseitiger Dreiecke, wobei zwei Dreiecke jeweils ein Hexagon, ein regelmäßiges Sechseck bilden, das mit einem weiteren Sechseck verbunden wird, indem ein Eckpunkt mit dem übernächsten Eckpunkt verbunden wird.
Auf diese Weise kann die Form zu einer Vielzahl von Strukturen verschachtelt werden. Bekannt ist die Form aus vielen Arbeiten Eschers, der sich bevorzugt solchen Körpern mit hoher Symmetrie widmete.

Eine Weiterentwicklung sind komplex gefaltete dreidimensionale Objekte, die von Dániel Erdély entwickelt wurden. Er wurde dazu während seines Studiums an der Moholy-Nagy-Universität für Kunsthandwerk und Gestaltung in Budapest von Ernö Rubik, dem Erfinder des Zauberwürfels animiert.

Der Name entstand aus den englischen Bezeichnungen spider (Spinne) und spiral (Spirale), da die Form des Spidrons an ein Spinnennetz erinnert.



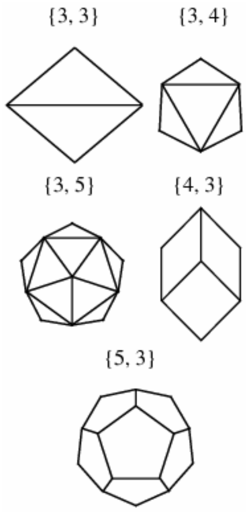
Vollständiges N-Eck

Ein ebenes vollständiges N-Eck ist eine geometrische Figur, die sich aus n verschiedenen Punkten in der Ebene als den Ecken zusammensetzt, von denen keine drei in einer geraden Linie liegen, und den

$\binom{n}{2} = n/2\ (n-1)$

Verbindungslinien dieser Punkte als Seiten. In der Abbildung ist ein vollständiges Sechseck zu sehen.
Ein ebenes vollständiges N-Seit ist eine geometrische Figur, die sich aus n verschiedenen Geraden einer Ebene als den Seiten zusammensetzt, von denen keine drei durch einen Punkt geben und den $\binom{n}{2} = n/2\ (n-1)$ Schnittpunkten dieser Geraden als Ecken.

Ein vollständiges N-Eck heißt einfach, wenn die Ecken sich in einer zyklischen Reihenfolge befinden; zum Beispiel ABCD …
Ein vollständiges N-Seit heißt einfach, wenn die Geraden sich in einer zyklischen Reihenfolge befinden.

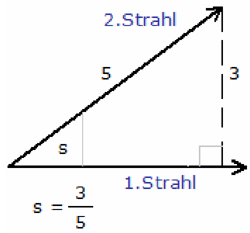


Petrie-Polygon

Ein Petrie-Polygon ist ein schiefes Polygon, bei dem zwei aneinanderliegende Seiten, jedoch nicht drei, mit den Seiten eines regelmäßigen Polyeders übereinstimmen.
Da es 5 regelmäßige Polyeder gibt, existieren auch genau 5 Petrie-Polygone des R^3; siehe Abbildung.
Petrie-Polygone können durch eine orthogonale Projektion des Polyeders auf die Ebene gewonnen werden.

Die Definition der Petrie-Polygone wird auch auf andere Dimensionen ausgedehnt. Ein Petrie-Polygon eines n-Polytopes ist dann ein schiefes Polygon, bei dem n-1 aufeinanderfolgende Seiten, jedoch nicht n, mit den Kanten des n-Polytops übereinstimmen.
Mittlerweile betrachtet man auch Petrie-Polygone halbregulärer Körper.
Der Begriff wurde durch John Flinders Petrie (1907-1972) eingeführt.

Rationale Trigonometrie, Wildberger-Trigonometrie

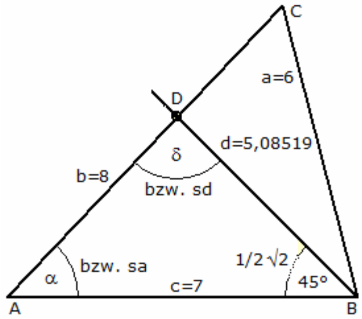


Durch N.Wildberger wurde eine spezielle Form der Trigonometrie entwickelt, die nicht die klassischen trigonometrischen Funktionen Sinus, Kosinus und Tangens benötigt.
Als Ersatz für den Abstand d und den Sinus des Winkels α wird mit der Quadranz d^2 und der Spreizung $\sin^2 \alpha$ gerechnet, meist jedoch mit deren Quadratwurzeln.
Der Winkel zweier Halbgeraden wird nun durch das Maß s gekennzeichnet. s entspricht dem Sinus und muss zusätzlich vermerkt werden, ob der Winkel spitz oder stumpf ist.
Damit ergeben sich nun Beziehungen ohne Trigonometrie:

Sinussatz $s_a / a = s_b / b$
Kosinussatz $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cc$, wobei $cc = \pm \sqrt{1 - s_c^2}$
wobei hier "+" beim spitzen Winkel s_c und "-" beim stumpfen Winkel s_c gilt
Winkelberechnungssatz: wenn zwei Winkel gegeben sind, kann der dritte wie beim Winkelsummensatz berechnet werden

$s_c = s_a \cdot \sqrt{1 - s_b^2} + s_b \cdot \sqrt{1 - s_a^2}$

Wildberger-Tripelregel
Für a = AB, b = BC und c = AC gilt A, B, C kollinear ⇔ a + b = c ⇔ $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + ba^4 + ca^4)$
Quelle: Joachim Mohr



Rationale Trigonometrie (2)
Beispiel
Im Dreieck ABC mit a = 6, b = 8 und c = 7 wird an AB in B ein Winkel von 45° angelegt. Der freie Schenkel dieses Winkels schneidet AC in D. Es soll die Länge von BD berechnet werden.

Zur klassischen Lösung wird der Kosinussatz zur Berechnung des Winkels α verwendet $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$ und ergibt

$\cos\alpha = 11/16 \rightarrow \alpha = 46{,}567°$, $\delta = 88{,}433°$

und mit dem Sinussatz d = 5,08519

Rechnung ohne trigonometrische Funktionen
Setze $s_a = \sin\alpha$, $s_b = \sin 45°$ und $s_d = \sin\delta$

$c_a = \cos\alpha$, $c_b = \cos 45°$ und $c_d = \cos\delta$

Dann gilt $s_a^2 + c_a^2 = 1$ usw. und nach dem Kosinusssatz

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot c_a \rightarrow$ $c_a = 11/16$ und $s_a^2 = 135/256$

Nach der Wildberger Tripelspreiz-Regel kann s_d berechnet werden

$(s_a^2 + s_b^2 + s_d^2) = 2(s_a^4 + s_b^4 + s_d^4) + 4\, s_a^2\, s_b^2\, s_d^2$

mit $s_a^2 = 135/256$ und $s_b^2 = 1/2$ wird $s_d = 3/32\,\sqrt{30} + 11/32\,\sqrt{2}$

und schließlich nach dem Sinussatz (Spreizgesetz)

$d = c\, s_a / s_d = 7\,\sqrt{(135)}/16\,/(3/32\,\sqrt{(30)} + 11/32\,\sqrt{(2)}) =$

$= 14\,\sqrt{(135)}\,/\,(3/32\,\sqrt{(30)} + 11/32\,\sqrt{(2)}) = 135/2\,\sqrt{2} - 33/2\,\sqrt{30}$

d.h. d ist algebraisch und nicht transzendent.

Konstruktion eines 257-Ecks – Werte für Winkel (n*pi)/257
Zur Konstruktion eines 257-Ecks ist es notwendig die Werte für Winkel (n·π)/257 zu konstruieren. Die theoretische Herleitung ist sehr anspruchsvoll wird auf den nächsten Seiten gegeben.
Festlegung: w=(2*π)/257.
A sei die Menge aller ganzen Zahlen von 1 bis 128, A={1,2,3,4...128}. M(x) sei eine den natürlichen Zahlen definierte Funktion mit M(x)=x für 129>x M(x)=257-x für 257>x>128

M(x)=M(y) für x>=257, mit y= x mod 257

Es folgt, dass M(x+257)=M(x)=M(257-x). Für ein natürliches x werden Untermengen von A konstruiert mit

{ M(x), M(2*x), M(4*x), M(8*x), M(16*x), M(32*x), M(64*x), M(128*x) }

16 Mengen A1, A2,.. A16:

A1= {1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 }	A2= { 3, 6, 12, 24, 48, 96, 65, 127 }
A3= { 5, 10, 20 ,40, 80, 97, 63, 126 }	A4= { 7, 14, 28, 56, 112, 33, 66, 125 }
A5= { 9, 18, 36, 72, 113, 31,62,124 }	A6= { 11, 22, 44, 88, 81, 95, 67, 123 }
A7= { 13, 26, 52, 104, 49, 98, 61, 122 }	A8= { 15, 30, 60, 120, 17, 34, 68, 121 }
A9= { 19, 38, 76, 105, 47, 94, 69, 119 }	A10= { 21, 42, 84, 89, 79, 99, 59, 118 }
A11= { 23, 46, 92, 73, 111, 35, 70, 117 }	A12= { 25, 50, 100, 57, 114, 29, 58, 116 }
A13= { 27, 54, 108, 41, 82, 93, 71, 115 }	A14= { 37, 74, 109, 39, 78, 101, 55, 110 }
A15= { 43, 86, 85, 87, 83, 91, 75, 107 }	A16= { 45, 90, 77, 103, 51, 102, 53, 106 }

B sei die Vereinigung von A2, A3, A4, A9, A13, A14, A15, A16. C sei die Vereinigung aller anderen Elemente von A, d.h. C=A\B. A ist damit die Vereinigung der disjunkten Mengen B und C, die jeweils 64 Elemente beinhalten. Damit gilt:

$$\left[\sum_{i\in B}\cos(iw)\right]*\left[\sum_{i\in C}\cos(iw)\right]=32*\left[\sum_{i\in A}\cos(iw)\right]$$

Die linke Gleichungsseite ist die Summe von Ausdrücken der Form cos(aw)*cos(bw), wobei a und b natürliche Zahlen sind.
Die Substitution (cos((a+b)*w)+cos((a-b)*w))/2 ist möglich und die Anwendung von cos(n*w)=cos(M(n)*w). Nach dem Reduzieren ist die Gleichung lösbar. Die Schwierigkeit ist, dass dazu tausende von Subsitutionen notwendig wären. Aus diesem Grund wird folgender Weg begangen:
Für jedes natürliche n und reelle v gilt 1 + cos(v) + cos(2v) +...+ cos((n-1)v) = sin(nv/2) cos((n-1)v/2) / sin(v/2). Für v = w wird

$$\sum_{i\in A}\cos(iw)=\cos(w)+\cos(2w)+\ldots+\cos(128w)=\frac{1}{2}(1+\cos(w)+\ldots+\cos(256w))-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}*\frac{\sin\frac{257*2\pi}{2*357}\cos\frac{256*2\pi}{2}}{\sin\frac{2\pi}{2*257}}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

Schreibweise: $t=\sum_{i\in B}\cos(iw)=Summe(B); s=\sum_{i\in C}\cos(iw)=Summe(C)$

Da A die Vereinigung von B und C ist, gilt t + s = -1/2; t * s = -16. t und s sind dann die Wurzeln der Gleichung x² + x/2 – 16 = 0 mit dem Wert ¼ (-1 ± √257). Da t negativ ist, wird Summe(B) = ¼ (-1 - √257); Summe(C) = ¼ (-1 + √257).
B1 sei nun die Vereinigung von A3, A5, A7, A10, A12, A13, A14, A15; C1 die von allen Elementen aus A, d.h. C1 = A\B1.
Außerdem sei t1 = Summe(B1), s1 = Summe(C1). Dann wird t1 + s1 = t + s = -1/2 und weiter

$$t_1 * s_1 = \left[\sum_{i\in B1}\cos(iw)\right]*\left[\sum_{i\in C1}\cos(iw)\right] = 34*\left[\sum_{i\in B}\cos(iw)\right]+30*\left[\sum_{i\in C}\cos(iw)\right] = 34t+30s$$

Mit den schon gefundenen Werten wird t1 * s1 = 34 (-1-√257)/4 + 30 (-1+√257) = -16 - √257. Damit sind t1 und s1 die Wurzeln der Gleichung x² + ½ x – 16 - √257 = 0. Lösung und Probe liefern:

t_1 = (-1 -√(257 +16√257)/4 ; s_1 = ¼(-1 +√(257 +16√257).

Analog sei B2 die Vereinigung der Mengen A2, A4, A5, A7, A9, A10, A12, A16 und C2 die Differenz von A und B2 und t2 = Summe(B2), s2 = Summe(C2). Auf gleiche Weise wird t2 + s2 = -1/2 und

$$t_2 * s_2 = \left[\sum_{i\in B2}\cos(iw)\right]*\left[\sum_{i\in C2}\cos(iw)\right] = 30*\left[\sum_{i\in B}\cos(iw)\right]+34*\left[\sum_{i\in C}\cos(iw)\right] = 30t+34s$$

und t2 = (-1 +√(257 -16√257)/4 ; s2 = ¼(-1 -√(257 -16√257).
B3 ist nun die Vereinigung von A4, A6, A9, A10, A11, A12, A13, A14; C3 = A\B3 und t3 = Summe(B3), s3 = Summe(C3).

$$t_3 * s_3 = \left[\sum_{i\in B3}\cos(iw)\right]*\left[\sum_{i\in C3}\cos(iw)\right] = 31*\left[\sum_{i\in B}\cos(iw)\right]+30*\left[\sum_{i\in C}\cos(iw)\right]+2*\left[\sum_{i\in B1}\cos(iw)\right]+\left[\sum_{i\in B2}\cos(iw)\right] = 31t+30s+2t_1+t_2$$

Damit wird t3 * s3 = -16 – 1/4(√257 + 2√(257 +16√257) - √(257 -16√257); t3 +s3 = t +s = -1/2 → Lösung der quadratischen Gleichung

$$4t_3 = -1-\sqrt{257+4\sqrt{257}+8\sqrt{257+16\sqrt{257}}-4\sqrt{257-16\sqrt{257}}} \quad 4s_3 = -1+\sqrt{257+4\sqrt{257}+8\sqrt{257+16\sqrt{257}}-4\sqrt{257-16\sqrt{257}}}$$

Nach dem gleichen Verfahren werden jetzt weitere Mengen gebildet. B4 ist die Vereinigung von A4, A5, A6, A7, A9, A11, A13, A14; C4=A\B4 und t4 = Summe(B4), s4 = Summe(C4)→

$$t_4 * s_4 = \left[\sum_{i\in B4}\cos(iw)\right]*\left[\sum_{i\in C4}\cos(iw)\right] = 31t+32s-t_1+2t_2 = -16+(\sqrt{257}+\sqrt{257+16\sqrt{257}}+2\sqrt{257-16\sqrt{257}})/4$$

$$4t_4 = -1-\sqrt{257-4\sqrt{257}-4\sqrt{257+16\sqrt{257}}-8\sqrt{257-16\sqrt{257}}} \quad 4s_4 = -1+\sqrt{257-4\sqrt{257}-4\sqrt{257+16\sqrt{257}}-8\sqrt{257-16\sqrt{257}}}$$

B5 ist die Vereinigung von A3, A4, A6, A9, A10, A11, A12, A15; C5=A\B5); t5 = Summe(B5), s5 = Summe(C5)

$$t_5 * s_5 = 32t+33s-t_1-2t_2 = -16+(\sqrt{257}-\sqrt{257+16\sqrt{257}}-2\sqrt{257-16\sqrt{257}})/4$$

$$4t_5 = -1-\sqrt{257-4\sqrt{257}+4\sqrt{257+16\sqrt{257}}+8\sqrt{257-16\sqrt{257}}} \quad 4s_5 = -1+\sqrt{257-4\sqrt{257}+4\sqrt{257+16\sqrt{257}}+8\sqrt{257-16\sqrt{257}}}$$

B6 besteht aus A2, A5, A6, A7, A11, A13, A14, A16; C6=A\B6; t6 = Summe(B6), s6 = Summe(C6).

$$t_6 * s_6 = 34t+33s-2t_1-t_2 = -16+(\sqrt{257}-2\sqrt{257+16\sqrt{257}}+\sqrt{257-16\sqrt{257}})/4$$

$$4t_6 = -1-\sqrt{257+4\sqrt{257}-8\sqrt{257+16\sqrt{257}}+4\sqrt{257-16\sqrt{257}}} \quad 4s_6 = -1+\sqrt{257+4\sqrt{257}-8\sqrt{257+16\sqrt{257}}+4\sqrt{257-16\sqrt{257}}}$$

Für die nachfolgenden Ausführungen seien a = √257; b = √(257 - 16√257); c = √(257 +16√257).
B7 besteht aus A4, A7, A8, A11, A12, A14, A15, A16. C7 = A\B7; t7 = Summe(B7), s7 = Summe(C7)

$$t_7 * s_7 = 31t+30s+t_2+2t_3+t_4-t_5 = -16+(a-b+2\sqrt{257+4a+8c-4b}+\sqrt{257-4a-4c-8b}-\sqrt{257-4a+4c+8b})/4$$

$$4t_7 = -1-\sqrt{257+4a-4b+8\sqrt{257+4a+8c-4b}+4\sqrt{257-4a-4c-8b}-4\sqrt{257-4a+4c+8b}}$$

$$4s_7 = -1+\sqrt{257+4a-4b+8\sqrt{257+4a+8c-4b}+4\sqrt{257-4a-4c-8b}-4\sqrt{257-4a+4c+8b}}$$

B8 besteht aus A4, A5, A6, A8, A10, A13, A15, A16. C8 = A\B8; t8 = Summe(B8), s8 = Summe(C8).

$$t_8 * s_8 = 33t+32s-t_2+t_4+t_5-2t_6 = -16-(a+b+\sqrt{257-4a+4c-8b}+\sqrt{257-4a+4c+8b}-2\sqrt{257+4a-8c+4b})/4$$

$$4t_8 = -1-\sqrt{257+4a+4b+4\sqrt{257-4a+4c-8b}+4\sqrt{257-4a+4c+8b}-8\sqrt{257+4a-8c+4b}}$$

$$4s_8 = -1+\sqrt{257+4a+4b+4\sqrt{257-4a+4c-8b}+4\sqrt{257-4a+4c+8b}-8\sqrt{257+4a-8c+4b}}$$

B9 besteht aus A3, A7, A8, A9, A10, A11, A13; C9 = A\B9 ; t9 = Summe(B9), s9 = Summe(C9).

$$t_9 * s_9 = 33t+32s-t_2-t_4-t_5+2t_6 = -16-(a+b-\sqrt{257-4a+4c-8b}-\sqrt{257-4a+4c+8b}+2\sqrt{257+4a-8c+4b})/4$$

$$4t_9 = -1-\sqrt{257+4a+4b-4\sqrt{257-4a+4c-8b}-4\sqrt{257-4a+4c+8b}+8\sqrt{257+4a-8c+4b}}$$

$$4s_9 = -1+\sqrt{257+4a+4b-4\sqrt{257-4a+4c-8b}-4\sqrt{257-4a+4c+8b}+8\sqrt{257+4a-8c+4b}}$$

Weitere Mengen seien B10 mit A3, A6, A7, A8, A9, A12, A14, A16 ; B11 mit A3, A4, A5, A8, A10, A11, A14, A16 ; B12 mit A2, A5, A8, A9, A11, A12, A14, A15 ; B13 mit A2, A3, A4, A6, A7, A8, A10, A14 und B14 mit A2, A3, A4, A5, A6, A8, A12, A13.
C10, C11, C12, C13, C14 seien wieder die zugehörigen Mengendifferenzen zu A und tk = Summe(Bk), sk = Summe(Ck) für k=10, 11, 12, 13, 14. Damit ergibt sich weiter:

t10 * s10 = 31t + 32s – t1 – t3 + 2t4 +6 t11 * s11 = 33t + 34s + t1 –t3 + 2t5 –t6
t12 * s12 = 33t + 34s – t1 + t3 – 2t4 – t6 t13 * s13 = 33t + 32s + t2 – 2t4 – t4 +t5
t14 * s14 = 29t + 30s + t1 + t3 + 2t5 + t6

$$4t_{10} = -1-\sqrt{257-4c-4b-4\sqrt{257+4a+8c-4b}+8\sqrt{257-4a-4c-8b}+4\sqrt{257+4a-8c+4b}}$$

$$4s_{10} = -1+\sqrt{257-4c-4b-4\sqrt{257+4a+8c-4b}+8\sqrt{257-4a-4c-8b}+4\sqrt{257+4a-8c+4b}}$$

$$4t_{11} = -1 - \sqrt{257 - 4a + 4c - 4\sqrt{257 - 4a + 8c - 4b} - 8\sqrt{257 - 4a + 4c + 8b} - 4\sqrt{257 + 4a - 8c + 4b}}$$
$$4s_{11} = -1 + \sqrt{257 - 4a + 4c - 4\sqrt{257 - 4a + 8c - 4b} - 8\sqrt{257 - 4a + 4c + 8b} - 4\sqrt{257 + 4a - 8c + 4b}}$$
$$4t_{12} = -1 - \sqrt{257 - 4a - 4c + 4\sqrt{257 + 4a + 8c - 4b} - 8\sqrt{257 - 4a - 4c - 8b} - 4\sqrt{257 + 4a - 8c + 4b}}$$
$$4s_{12} = -1 + \sqrt{257 - 4a - 4c + 4\sqrt{257 + 4a + 8c - 4b} - 8\sqrt{257 - 4a - 4c - 8b} - 4\sqrt{257 + 4a - 8c + 4b}}$$
$$4t_{13} = -1 + \sqrt{257 + 4a - 4b - 8\sqrt{257 + 4a + 8c - 4b} - 4\sqrt{257 - 4a - 4c - 8b} + 4\sqrt{257 - 4a + 4c + 8b}}$$
$$4s_{13} = -1 - \sqrt{257 + 4a - 4b - 8\sqrt{257 + 4a + 8c - 4b} - 4\sqrt{257 - 4a - 4c - 8b} + 4\sqrt{257 - 4a + 4c + 8b}}$$
$$4t_{14} = -1 + \sqrt{257 - 4a + 4c + 4\sqrt{257 + 4a + 8c - 4b} + 8\sqrt{257 - 4a + 4c + 8b} + 4\sqrt{257 + 4a - 8c + 4b}}$$
$$4s_{14} = -1 - \sqrt{257 - 4a + 4c + 4\sqrt{257 + 4a + 8c - 4b} + 8\sqrt{257 - 4a + 4c + 8b} + 4\sqrt{257 + 4a - 8c + 4b}}$$

Mit u1, u2, u3, ..., u15, u16 seien 16 Summen von Termen cos(i*w) definiert, wobei i Element der Menge Ai sei, zum Beispiel u13 = Summe(A13). Die Zahlen t, t1, t2, t3, …, t13, t14 sollen weiter Linearkombinationen der u1, u2, u3, …, u15, u16 sein. Zum Beispiel t7 = u4 + u7 + u8 + u11 + u12 + u14 + u15 + u16. Damit haben wir 16 unbekannte ui mit 15 linearen Gleichungen. Daher wird die Gleichung u1 + u2 + u3 +...+ u15 + u16 = -1/2 als erste zusätzlich aufgenommen. Die Matrix dieses 16reihigen Gleichungssystems besitzt eine Determinante von 34816, ein Produkt einer Potenz von 2 mit 17. Mit Hilfe der inversen Matrix können Gleichungen für die ui aufgestellt werden, zum Beispiel für i=10:

$$\begin{aligned}
u_{10} = {} & -\frac{1}{16} + \frac{1}{32}a - \frac{1}{32}c - \frac{1}{32}b - \frac{1}{16}\sqrt{257+4a+8c-4b} + \frac{1}{16}\sqrt{257-4a-8c-8b} + \\
& + (6\sqrt{257+4a-4b+8\sqrt{257+4a+8c-4b}+4\sqrt{257-4a-4c-8b}-4\sqrt{257-4a+4c+8b}} - \\
& - 5\sqrt{257+4a+4b+4\sqrt{257-4a+4c-8b}+4\sqrt{257-4a+4c+8b}-8\sqrt{257+4a-8c+4b}} - \\
& - 3\sqrt{257+4a+4b-4\sqrt{257-4a+4c-8b}-4\sqrt{257-4a+4c+8b}+8\sqrt{257+4a-8c+4b}} + \\
& + 4\sqrt{257-4c-4b-4\sqrt{257+4a+8c-4b}+8\sqrt{257-4a-4c-8b}+4\sqrt{257+4a-8c+4b}} - \\
& - 2\sqrt{257-4a+4c-4\sqrt{257-4a+8c-4b}-8\sqrt{257-4a+4c+8b}-4\sqrt{257+4a-8c+4b}} - \\
& - \sqrt{257-4a-4c+4\sqrt{257+4a+8c-4b}-8\sqrt{257-4a-4c-8b}-4\sqrt{257+4a-8c+4b}} - \\
& - 7\sqrt{257+4a-4b-8\sqrt{257+4a+8c-4b}-4\sqrt{257-4a-4c-8b}+4\sqrt{257-4a+4c+8b}} + \\
& + 8\sqrt{257-4a+4c+4\sqrt{257+4a+8c-4b}+8\sqrt{257-4a+4c+8b}+4\sqrt{257+4a-8c+4b}})/34
\end{aligned}$$

Nun werden weitere Mengen E1, E2, E3,...E13, E14, E15, E16 wie folgt definiert: Die Ei seien Teilmengen der Ai für i=1,2,3...16. Zum Beispiel ist E10 eine Teilmenge von A10. Jede Ei ist von der Form {x, M(4*x), M(16*x), M(64*x)}, wobei M zu Beginn definiert wurde, genau gesagt:

E1={1, 4, 16, 64} E2={3, 12, 48, 65} E3={5, 20, 80, 63}

E4={7, 28, 112, 66} E5={9, 36, 113, 62} E6={11, 44, 81, 67}
E7={13, 52, 49, 61} E8={15, 60, 17, 68} E9={19, 76, 47, 69}
E10={21, 84, 79, 59} E11={23, 92, 111, 70} E12={25, 100, 114, 58}
E13={27, 108, 82, 71} E14={37, 109, 78,55} E15={43, 85, 83, 75}
E16={45, 77, 51, 53}

Fi (i=1,2..16) sind die Mengendifferenzen Ai\Ei, zum Beispiel F11=A11\E11. Und weiter xi = Summe(Ei), yi = Summe(Fi), so dass xi + yi = u_i. Es ist relativ leicht nachweisbar, dass

$$x_1 * y_1 = \left[\sum_{i\in Ei}\cos(iw)\right] * \left[\sum_{i\in Fi}\cos(iw)\right] = \frac{1}{2} * \left[\sum_{i\in A1}\cos(iw) + \sum_{i\in A2}\cos(iw) + \sum_{i\in A4}\cos(iw) + \sum_{i\in A5}\cos(iw)\right] = \frac{1}{2}(u_1 + u_2 + u_4 + u_5)$$

x1 und y1 sind damit die Wurzeln von x² + u1 x + ½ (u1 + u2 + u3 + u4) = 0 und mit der angegebenen Matrix

$$u_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{8}t - \frac{1}{8}t_1 - \frac{1}{8}t_2 - \frac{1}{4}t_5 - \frac{1}{4}t_6 - \frac{3}{34}t_7 - \frac{3}{17}t_8 - \frac{7}{39}t_9 - \frac{1}{17}t_{10} + \frac{1}{34}t_{11} - \frac{4}{17}t_{12} - \frac{5}{34}t_{13} - \frac{2}{17}t_{14}$$
$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}t_1 - \frac{1}{4}t_3 + \frac{1}{4}t_4 - \frac{1}{4}t_5 - \frac{1}{4}t_6 - \frac{2}{17}t_7 - \frac{4}{17}t_8 - \frac{15}{39}t_9 - \frac{11}{34}t_{10} + \frac{7}{34}t_{11} + \frac{3}{34}t_{12} - \frac{1}{34}t_{13} + \frac{3}{17}t_{14}$$

Auf den rechten Seiten der Gleichungen sind nur bekannte Größen. Damit sind die Wurzeln berechenbar, auch x1 und y1. Ähnlich ergeben sich die anderen 15 Gleichungen:

$x^2 - u_2x + (u_2 + u_5 + u_{10} + u_{13})/2 = 0$ $x^2 - u_3x + (u_3 + u_8 + u_{11} + u_{16})/2 = 0$ $x^2 - u_4x + (u_3 + u_4 + u_7 + u_{10})/2 = 0$
$x^2 - u_5x + (u_3 + u_5 + u_6 + u_{13})/2 = 0$ $x^2 - u_6x + (u_4 + u_6 + u_{10} + u_{16})/2 = 0$ $x^2 - u_7x + (u_7 + u_{11} + u_{14} + u_{15})/2 = 0$
$x^2 - u_8x + (u_7 + u_8 + u_9 + u_{16})/2 = 0$ $x^2 - u_9x + (u_5 + u_9 + u_{12} + u_{15})/2 = 0$ $x^2 - u_{10}x + (u_3 + u_8 + u_{10} + u_{14})/2 = 0$
$x^2 - u_{11}x + (u_2 + u_9 + u_{11} + u_{12})/2 = 0$ $x^2 - u_{12}x + (u_1 + u_{13} + u_{14} + u_{15})/2 = 0$ $x^2 - u_{13}x + (u_4 + u_6 + u_8 + u_{13})/2 = 0$
$x^2 - u_{14}x + (u_1 + u_9 + u_{11} + u_{14})/2 = 0$ $x^2 - u_{15}x + (u_1 + u_2 + u_{16} + u_{15})/2 = 0$ $x^2 - u_{16}x + (u_7 + u_{12} + u_{14} + u_{16})/2 = 0$

Die Wurzeln der ersten Gleichung sind x2 und y2, der zweiten x3 und y3 ... usw.
Nun werden die 32 neuen Mengen G1, G2, G3,...G16,... G31, G32 festgelegt. Die Mengen Gi sind Untermengen der Ei für i=1,2,3...16 und Untermengen der Fi für i=17, 18...32. Die Gi sind 2-elementige Mengen der Form {n, M(16*n)},
G1={1, 16}, G17={2, 32}, G2={3, 48}, G18={6, 96}, G3=(5, 80}, G19={10, 97}, G4={7, 112}, G20={14, 33}, G5={9, 113}, G21={18, 31}, G6={11, 81}, G22={22, 95}, G7={13, 49}, G23={26, 98}, G8={15, 17}, G24={30, 34}, G9={19, 47}, G25={38, 94}, G10={21, 79}, G26={42, 99},

G11={23, 111}, G27={46, 35}, G12={25, 114}, G28={50, 29}, G13={27, 82}, G29={54, 93}, G14={37, 79}, G30={74, 101}, G15={43, 83}, G31={86, 91}, G16={45, 51}, G32={90, 102}.

Die Mengen H1, H2,H3,...H16 sind die Deifferenzen Ei\Gi für i=1,2...16. Und Fi\Gi für i=17,18...32. Erneut ist pi = Summe(Gi), qi = Summe(Hi) für i=1, 2...32.

Damit wird $p_1 * q_1 = \left[\sum_{i\in G1} \cos(iw)\right] * \left[\sum_{i\in H1} \cos(iw)\right] = [\cos(w) + \cos(16w)] * [\cos(4w) + \cos(64w)] =$

$$= \frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} \sum_{i\in A1} \cos(3w) + \sum_{i\in A2} \cos(5w) + \sum_{i\in A4} \cos(12w) + \sum_{i\in A5} \cos(20w) + \sum_{i\in A1} \cos(48w) + \sum_{i\in A2} \cos(63w) + \\ + \sum_{i\in A4} \cos(65w) + \sum_{i\in A5} \cos(80w) \end{array}\right] = \frac{1}{2}(x_2 + x_3)$$

Auf demselben Weg zeigt man

p2 * q2 = (x5 + x8)/2 p3 * q3 = (x8 + x12)/2 p4 * q4 = (y11 + x10)/2 p5 * q5 = (x13 + x16)/2

p6 * q6 = (y5 + x14)/2 p7 * q7 = (y14 + x2)/2 p8 * q8 = (x15 + x16)/2 p9 * q9 = (y6 + y12)/2

p10 * q10 = (y9 + x3)/2 p11 * q11 = (y13 + x9)/2 p12 * q12 = (y4 + x15)/2 p13 * q13 = (y7 + x6)/2

p14 * q14 = (y5 + x11)/2 p15 * q15 = (y1 + y10)/2 p16 * q16 = (y1 + y7)/2 p17 * q17 = (y2 + y3)/2

p18 * q18 = (y5 + y8)/2 p19 * q19 = (y8 + y12)/2 p20 * q20 = (x9 + x11)/2 p21 * q21 = (y13 + y16)/2

p22 * q22 = (x4 + y14)/2 p23 * q23 = (x14 + y2)/2 p24 * q24 = (y15 + x12)/2

$p_{26} * q_{26} = (y_3 + x_9)/2; p_{27} * q_{27} = (y_9 + x_{13})/2; p_{28} * q_{28} = (x_4 + y_{15})/2$

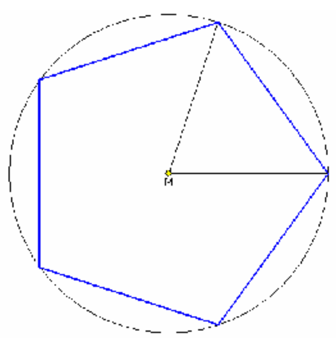
$p_{29} * q_{29} = (y_6 + x_7)/2; p_{30} * q_{30} = (y_{11} + x_5)/2; p_{31} * q_{31} = (x_1 + x_{10})/2$ $p_{32} * q_{32} = (x_1 + x_7)/2$

Damit sind pi und qi mit pi + qi = xi für i=1,2,3...16 und pi + qi = yi für i=17,18...32, leicht zu finden. Zum Beispiel sind p9 und q9 die Wurzeln von x² - x9 x + ½(y6 + y12) = 0. Damit ergeben sich die Werte cos(n*w), zum Beispiel cos(2w)+cos(32w) = p2 mit

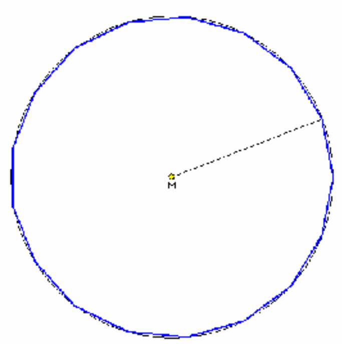
cos(2w) + cos(32w) = ½ (cos(30w) + cos(34w)) = ½ q8

so dass cos(2*w) und cos(32*w) die Wurzeln der Gleichung x² - p2 x + ½ q8 = 0 sind. Mit der Bestimmung aller cos(n*w) sind damit auch alle zur Konstruktion des 257-Ecks notwendigen Werte gefunden.

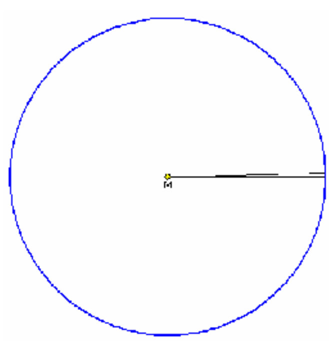
Während ein regelmäßiges Siebzehneck noch als solches zu erkennen ist, kann man ein 257-Eck nicht mehr mit bloßem Auge von einem Kreis unterscheiden:



Regelmäßiges Fünfeck
für r = 1 ergibt sich
Zentriwinkel 72°
Innenwinkelsumme 540°
Seite s = 1.1756
Umfang u = 5.8779
Flächeninhalt A = 2.3776
Diagonalenzahl 5

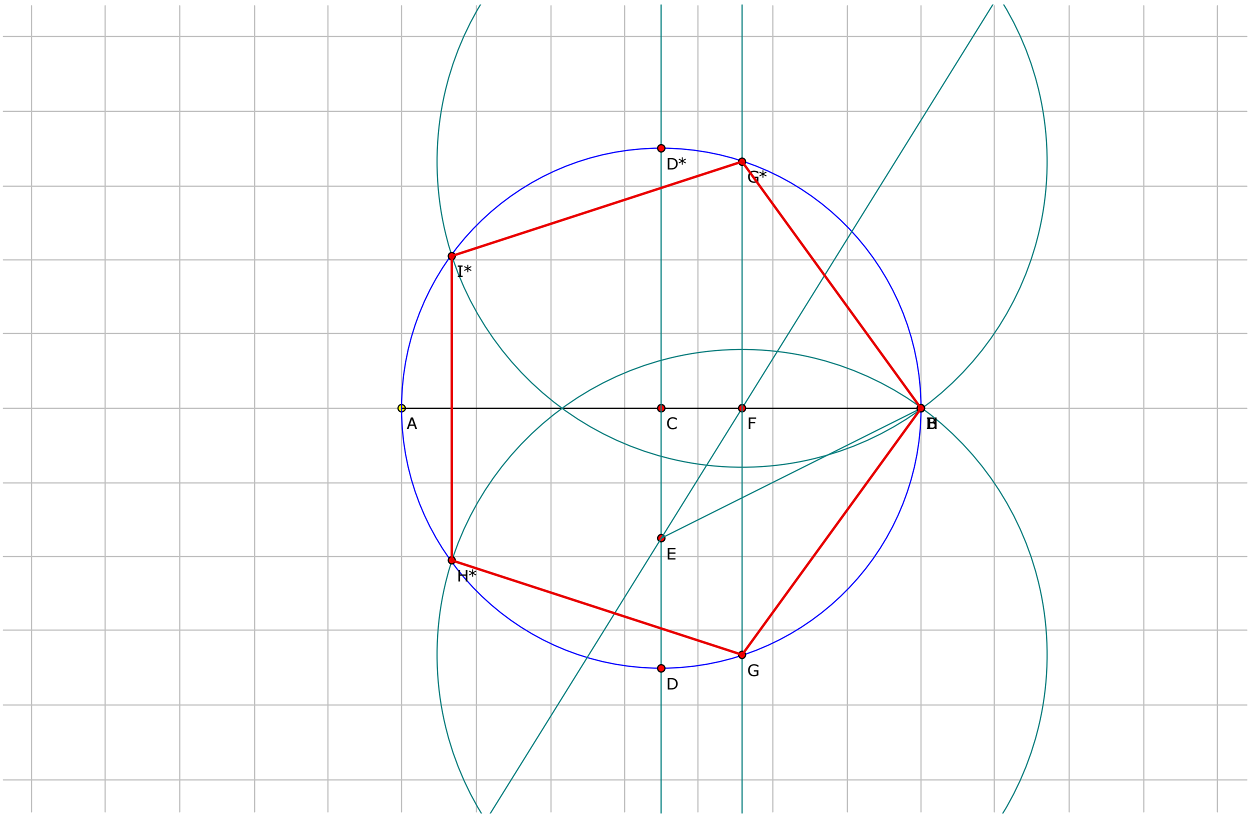


Regelmäßiges Siebzehneck
für r = 1 ergibt sich
Zentriwinkel 21°
Innenwinkelsumme 2700°
Seite s = 0.3675
Umfang u = 6.2475
Flächeninhalt A = 3.0706
Diagonalenzahl 119



Regelmäßiges 257-Eck
für r = 1 ergibt sich
Zentriwinkel ≈ 1°
Innenwinkelsumme 45900°
Seite s = 0.0244
Umfang u = 6.283
Flächeninhalt A = 3.1313
Diagonalenzahl 32639

Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks



Konstruktion eines regelmäßigen Siebzehnecks