

## Geschichte der Kreiszahl $\pi$

Als eine der ersten mathematischen Naturkonstanten war die Kreiszahl  $\pi$  (das Verhältnis von Kreisumfang zu Kreisdurchmesser) schon den Ägyptern und Babyloniern bekannt. Im ersten Buch der Könige, Kapitel 7, Vers 23 der Bibel findet sich z.B. die Verwendung von  $\pi = 3$ .

Im Laufe der Jahrhunderte wurden immer wieder Anstrengungen unternommen, um diese unendliche, nicht periodische Zahl möglichst genau zu berechnen.

Neben dem rein mathematischen Interesse an neuen und schnellen Algorithmen zur  $\pi$ -Berechnung, dienen diese auch zum Test von Supercomputer. Die gefundenen Dezimalziffern bilden ein wertvolles absolut (?) zufällig verteiltes Zahlenmaterial. Die Liste enthält historische Meilensteine der Beschäftigung mit  $\pi = 3,14159 \dots$

## Zeitabschnitt Historisches Ereignis

1650 v.Z. im Papyrus Rhind  $\pi = (16 / 9)^2$

Babylonien Näherungswert  $256/81 = 3,16049$

Ägypten  $25/8 = 3.125 \dots$

220 v.Z. Archimedes nutzt  $22/7 = 3,142857 / = 3$  (Altes Testament; 1. Koen. 7,23)

125 v.Z. Hipparch nutzt  $377/120 = 3.141(666\dots)$

150 Ptolemäus nutzt  $377/120$

150 Rabbi Nehemiah verwendet  $22/7 = 3,142857$

250 Wang Fau nutzt  $142/45 = 3,155$

263 Liu Hui gibt  $3.14158\dots$  als Näherung an

380 Siddhanta kennt  $3+177/1250 = 3,1416$

499 Aryabhata (Indien)  $62832/2000 = 3.141(6)$

5.Jahrhundert Zu Ch'ong-Zhi verwendet in China  $355/113$

7.Jahrhundert Brahmagupta:  $\pi = \text{Wurzel}(10)$

1220 Fibonacci von Pisa:  $\pi = 3.141818$

1427 Al Kashi nähert mit  $6^0 16^1 59^{II} 28^{III} 1^{IV} 34^{V} 51^{VI} 46^{VII} 14^{VIII} 50^{IX}$  die Zahl auf 14 Dezimalstellen die Darstellung erfolgte im Sechzigersystem

1464 Cusanus  $\pi = 3/4 (\text{Wurzel}(3) + \text{Wurzel}(6)) = 3.1(161\dots)$

1580 Tycho Brahe  $\pi = 88/\text{Wurzel}(785) = 3.14(085\dots)$

1596 Ludolf van Ceulen kennt 35 Kommastellen

Abbildung: Rekonstruktion des Grabsteins von van Ceulen mit den 35 Dezimalstellen von  $\pi$ .

1625 Adrian Metius  $355/113$

1682 Leibniz veröffentlicht seine PI-Formel

1690 Abraham Sharp kennt 72 Kommastellen

1706 John Machin berechnet 100 Kommastellen, William Jones benutzt

den griechischen Buchstabe  $\pi$

1719 De Lagny ermittelt 112 korrekte Kommastellen

1736 Bezeichnung  $\pi$  nach 'peri métrōs' durch Euler

1739 Euler entwickelt  $\pi$  in einen Kettenbruch

1766 Arima (Japan)  $428224593349304/136308121570117$ , d.h. 29

korrekte Stellen

1767 Nachweis der Irrationalität von  $\pi$  (Lambert)

1777 Buffon beschreibt ein Zufallsexperiment zur von  $\pi$

1794 Legendre beweist die Irrationalität von  $\pi^2$

1800 Vega: 140 Kommastellen

1836 Specht  $\pi = 13/50 \text{ Wurzel}(146) = 3.14159(195\dots)$

1844 Zacharias Dase: 200 Kommastellen

1853 William Rutherford: 400 Dezimalen

1868 Grosvenor  $\pi = 10 \text{ Wurzel}(2) - 11 = 3.14(213\dots)$

1873 William Shanks: 707 Dezimalen ; (527 korrekt)

1882 Beweis der Transzendenz durch Lindemann

1897 US-Staat Indiana setzt per Gesetz(!)  $\pi = 3,2$

1947 Ferguson: 808 Stellen, Berechnung mit Computerhilfe

1949 G.W.Reitweiser (ENIAC): 2037 Stellen

1954 S.C.Nicholson (NORC): 3092 Stellen

1957 G.E.Felton (Pegasus): 7480 Stellen

1958 F.Genuys (IBM 704): 10000 Stellen, G.E.Felton (Pegasus): 10020 Stellen

1959 J.Guilloud (IBM 704): 16167 Stellen

1961 Gerard (IBM 7090): 20000 Stellen, W.Shanks (IBM 7090): 100265 Stellen

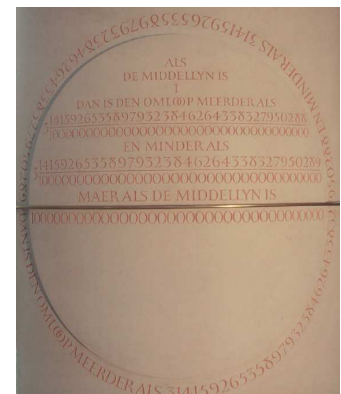
1966 J.Guilloud, J.Filliatre (IBM 7030): 250000 Stellen

1967 J.Guilloud, M.Dichampt (CDC 6600): 500000 Stellen

1973 J.Guilloud, M.Bouyer (CD 7600): 1001250 Stellen

1977 Gosper ermittelt 17 Millionen Terme der Kettenbruchentwicklung

1981 K.Miyoshi, Y.Kanada (FACOM M-200): 2000036 Stellen



1981 J.Guilloud: 2000050 Stellen  
 1982 Y.Tamura (MELCOM 900II): 2097144 Stellen  
 1982 Y.Tamura,Y.Kanada (HITAC M-280H): 4194288 Stellen  
 1982 Y.Tamura,Y.Kanada (HITAC M-280H): 8388576 Stellen  
 1983 Y.Kanada,S.Yoshino (HITAC M-290H): 16777206 Stellen  
 1985 William Gosper (Symbolics 3670): 17526200 Stellen  
 1986 bei der Berechnung von  $\pi$  wird ein CPU-Fehler des Cray 2-Prototypen entdeckt  
 1986 Jan David Bailey (Cray 2): 29360111 Stellen  
 1986 Sep Y.Kanada,Y.Tamura (HITAC S-810): 33554414 Stellen  
 1986 Okt Y.Kanada,Y.Tamura (HITAC S-810): 67108839 Stellen  
 1987 Jan Y.Kanada,Y.Tamura (NEC SX-2): 134214700 Stellen  
 1988 Jan Y.Kanada,Y.Tamura (HITAC S-820): 204326551 Stellen  
 1989 Mai Chudnowsky (Cray 2): 480000000 Stellen  
 1989 Jun Chudnowsky (IBM 3090): 535339270 Stellen  
 1989 Jul Y.Kanada,Y.Tamura (HITAC S-820): 536870898 Stellen  
 1989 Aug Chudnowsky (IBN 3090): 1011196691 Stellen  
 1989 Nov Y.Kanada,Y.Tamura (HITAC S-820): 1073740799 Stellen  
 1991 Aug Chudnowsky: 2.26 Milliarden Stellen  
 1994 Mai Chudnowsky: 4.044 Milliarden Stellen  
 1995 Jun D.Takahashi,Y.Kanada: 3.2 Md. Stellen  
 1995 Aug D.Takahashi,Y.Kanada: 4.294 Md. Stellen  
 1995 Kaneda: 6442459000 Stellen  
 1996 Bellard ermittelt die 100 Milliardste Stelle mit einem völlig neuen "Tröpfchenalgorithmus" (hexadezimal = 9C381872D27596F81D0E48B95A6C46)  
 1997 Bellard berechnet die 1 Billionste binäre Stelle  
 1998 Aug im Pihex-Project wird die 5 Billionste binäre Stelle gefunden  
 1999 Feb die 40 Billionste binäre Stelle beginnt hexadezimal mit A0F9FF371D17593E0  
 1999 Apr Kanada und Takahashi: 68.719 Milliarden Stellen  
 1999 Juni Havermann berechnet 20 Millionen Terme der Kettenbruchentwicklung  
 1999 Sep Kanada und Takahashi: 206.15843 Milliarden Stellen, Zeit: 37 Stunden HITACHI SR 8000  
 2002 Dez Kanada ermittelt über 1,2 Billionen Ziffern  
 2009 Daisuke Takahashi 2,57698037 Billionen Ziffern  
 2010 Fabrice Bellard 2,69999999 Billionen Ziffern  
 2010 Shigeru Kondo, Alexander Yee 5 Billionen Ziffern  
 2011 Shigeru Kondo, Alexander Yee 10 Billionen Ziffern  
 2013 Shigeru Kondo, Alexander Yee 12,1 Billionen Ziffern  
 Chudnovsky-Formel, Rechenzeit 82 Tage

### Historische $\pi$ -Werte

"Kein anderes mathematisches Symbol hat wohl soviel Rätselraten, romantische Spekulation, Missverständnis und menschliches Interesse hervorgerufen wie die Zahl  $\pi$ ." (William L.Schaaf, Nature and History of  $\pi$ )

1.Buch der Könige 7 / 23 : "Und er machte das Meer, gegossen, von einem Rand zum andern zehn Ellen weit rundherum und fünf Ellen hoch und eine Schnur von dreißig Ellen war das Maß ringsherum".  
 $\pi \approx 3$  Buch der Könige, Kapitel 7, Vers 23

Der älteste offiziell überlieferte Wert für  $\pi$  stammt von den Ägyptern. Etwa um 1850 v.u.Z. entstand der Moskauer Papyrus. In diesem findet man  $\pi \approx 19/6 = 3,16666...$   
 Im Papyrus Rhind, das auf 1800-1650 v.u.Z. datiert wird, des Schreibers Ahmes, verwendet man  $\pi \approx (4/3)^4 = 3,16049...$  Ägyptischer Wert aus dem Papyrus Rhind

Etwa zur selben Zeit wie in Ägypten (1900-1600 v.u.Z.) nutzte man in Babylon die Näherung 3 für  $\pi$ .  
 In einem Keilschrifttexte aus Susa findet man  
 $\pi \approx 3 \frac{1}{8} = 3,125$  Babylonischer Näherungswert aus dem 2.Jahrtausend v.u.Z.  
 $\pi \approx 256/81$  Babylonischer Näherungswert

Euklid von Alexandria (325-265 v.u.Z.) gelang der Nachweis, dass  $3 < \pi < 4$  gilt. Erst Archimedes verfeinerte diese Ungleichung durch Betrachtung eines 96-Ecks zu  $223/71 < \pi < 22/7$   
 $\pi \approx 22 / 7$  Archimedes-Wert

Nach Angaben von Heron von Alexandria soll Archimedes sogar eine noch bessere Abschätzung für  $\pi$  gefunden haben  
 $195882/62351 = 3,14160 < \pi < 3,14173 = 211882/67441$   
 Apollonius von Perge verwendete  $\pi \approx 211875 / 67441 = 3,1416$ .

Der griechische Astronom Claudius Ptolemäus (85-165 u.Z.) verwendete die Vorarbeit des Archimedes und setzte dessen Methode bis zum 720-Eck fort.

$\pi \approx 3^\circ 8' 30'' / 1^\circ$  Ptolemäus-Wert im 60iger System ( $\approx 3,141666\dots$ )

$\pi \approx 377 / 120$  Ptolemäus-Wert (um 150)

$\pi \approx (26 / 15)^2$  Indischer Wert aus den Sulbasutras (500 v.u.Z.)

$\pi \approx \sqrt{10}$  Brahmagupta-Wert, auch Zhang Heng um 100 u.Z.

$\pi \approx 142 / 45$  Wang Fan um 250 u.Z.

$\pi \approx 355 / 113$  chinesischer Wert; Tsu Ch'ung Chi (um 500 u.Z.) / 1573 Valentinus Otho, 1625 Adrian Metius

Interessant ist es, wie Tsu Ch'ung Chi seinen Näherungswert fand. Es wird angenommen, dass er erkannte, dass die Differenz der Zähler und Nenner der Näherungswerte von Archimedes und Ptolemäus

$\pi$  besser annähern:  $\pi \approx [377 - 22] / [120 - 7] = 355/113$

$\pi \approx 3,1416$  Indischer Wert aus dem 5.Jahrhundert

$\pi \approx 3 \frac{1}{5}$  Näherung der französischen Artillerie

$\pi^2 \approx g$  praktischer Näherungswert in der Physik ( $g \dots$  Fallbeschleunigung)

$\pi \approx \sqrt{2} + \sqrt{3}$  Platon-Wert

$\pi \approx 4 / \sqrt{\tau} = 2 \sqrt{(2 \sqrt{3})}$  Cheops-Wert, ermittelt aus Maßzahlen der Pyramide

$\pi \approx 20/9 \sqrt{2}$  Warusfel-Wert (1961)

$\pi \approx \sqrt{(40/3 - 2 \sqrt{3})}$  Kochansky-Wert (1685)

$\pi \approx 1,8 + \sqrt{1,8}$  Vieta-Wert

$\pi \approx 13/50 \sqrt{146}$  Ehrenwirth (1997)

$\pi \approx 3,141818$  Leonardo Fibonacci (um 1200)

$\pi \approx 3,141592653589873$  al-Kashi-Wert (1427)

William Jones benutzte als Erster den griechischen Buchstabe  $\pi$  zur Kennzeichnung der Kreiszahl. Es wird vermutet, dass er diese Abkürzung in Bezug auf das griechische Wort für Kreisumfang =  $\pi\epsilon\rho\iota\phi\epsilon\rho\iota\alpha$  (peripheria) wählte.

Um 1700 gab Jacob Marcelis an, dass ihm die Kreisquadratur gelungen sein und nannte als "exakten" Wert

$\pi = 3 \ 1008449087377541679894282184894/6997183637540819440035239271702$

"Harry knew pi out to 3.141592 because accuracy to one part in a million was enough for most practical purposes. Hermine knew one hundred digits of pi because that was how many digits had been printed in the back of her math textbook."

Quelle: <http://www.fanfiction.net/s/5782108/9/Harry-Potter-and-the-Methods-of-Rationality>

"Das wunderbar geheimnisvolle Pi ist zu einem Gurgelmittel verkommen, das Rechenmaschinen zum Rachenputzen dient."

Philip J.Davis (The lore of large numbers)

$\pi$  ist eine unendliche, nicht-periodische, irrationale Dezimalzahl, deren Transzendenz durch Lindemann nachgewiesen wurde.

### Kreiszahl $\pi$

3,1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089986  
280348253421170679821480865132823066470938446095505822317253594081284811174502841027  
019385211055596446229489549303819644288109756659334461284756482337867831652712019091  
456485669234603486104543266482133936072602491412737245870066063155881748815209209628  
292540917153643678925903600113305305488204665213841469519415116094330572703657595919  
530921861173819326117931051185480744623799627495673518857527248912279381830119491298  
336733624406566430860213949463952247371907021798609437027705392171762931767523846748  
184676694051320005681271452635608277857713427577896091736371787214684409012249534301  
465495853710507922796892589235420199561121290219608640344181598136297747713099605187  
072113499999983729780499510597317328160963185950244594553469083026425223082533446850  
352619311881710100031378387528865875332083814206171776691473035982534904287554687311  
595628638823537875937519577818577805321712268066130019278766111959092164201989380952  
572010654858632788659361533818279682303019520353018529689957736225994138912497217752  
834791315155748572424541506959508295331168617278558890750983817546374649393192550604  
009277016711390098488240128583616035637076601047101819429555961989467678374494482553  
797747268471040475346462080466842590694912933136770289891521047521620569660240580381  
501935112533824300355876402474964732639141992726042699227967823547816360093417216412  
199245863150302861829745557067498385054945885869269956909272107975093029553211653449  
872027559602364806654991198818347977535663698074265425278625518184175746728909777727

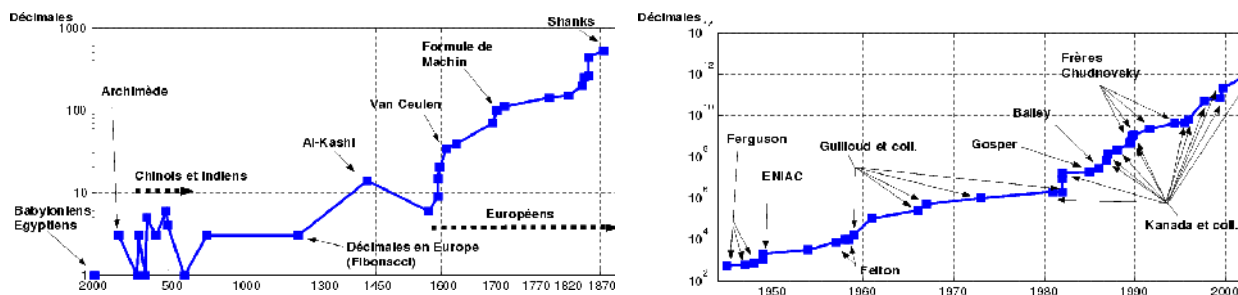
938000816470600161452491921732172147723501414419735685481613611573525521334757418494  
684385233239073941433345477624168625189835694855620992192221842725502542568876717904  
946016534668049886272327917860857843838279679766814541009538837863609506800642251252  
051173929848960841284886269456042419652850222106611863067442786220391949450471237137  
86960956364371917287467764657573962413890865832645995813390478027590094657640789512  
694683983525957098258226205224894077267194782684826014769909026401363944374553050682  
034962524517493996514314298091906592509372216964615157098583874105978859597729754989  
301617539284681382686838689427741559918559252459539594310499725246808459872736446958  
486538367362226260991246080512438843904512441365497627807977156914359977001296160894  
416948685558484063534220722258284886481584560285060168427394522674676788952521385225  
499546667278239864565961163548862305774564980355936345681743241125150760694794510965  
960940252288797108931456691368672287489405601015033086179286809208747609178249385890  
097149096759852613655497818931297848216829989487226588048575640142704775551323796414  
515237462343645428584447952658678210511413547357395231134271661021359695362314429524  
849371871101457654035902799344037420073105785390621983874478084784896833214457138687  
5194350643021845319104848100537046146806749192781911979399520614196634287544406437451  
237181921799983910159195618146751426912397489409071864942319615679452080951465502252  
316038819301420937621378559566389377870830390697920773467221825625996615014215030680  
384477345492026054146659252014974428507325186660021324340881907104863317346496514539  
057962685610055081066587969981635747363840525714591028970641401109712062804390397595  
156771577004203378699360072305587631763594218731251471205329281918261861258673215791  
984148488291644706095752706957220917567116722910981690915280173506712748583222871835  
209353965725121083579151369882091444210067510334671103141267111369908658516398315019  
701651511685171437657618351556508849099898599823873455283316355076479185358932261854  
896321329330898570642046752590709154814165498594616371802709819943099244889575712828  
905923233260972997120844335732654893823911932597463667305836041428138830320382490375  
89854374417029132765618093773444030707469211201913020330380197621101100449293215160  
842444859637669838952286847831235526582131449576857262433441893039686426243410773226  
978028073189154411010446823252716201052652272111660396665573092547110557853763466820  
653109896526918620564769312570586356620185581007293606598764861179104533488503461136  
576867532494416680396265797877185560845529654126654085306143444318586769751456614068  
007002378776591344017127494704205622305389945613140711270004078547332699390814546646  
458807972708266830634328587856983052358089330657574067954571637752542021149557615814  
002501262285941302164715509792592309907965473761255176567513575178296664547791745011  
299614890304639947132962107340437518957359614589019389713111790429782856475032031986  
91514028708085990480109412147221317947647726224142548545403321571853061422881375850  
430633217518297986622371721591607716692547487389866549494501146540628433663937900397  
692656721463853067360965712091807638327166416274888800786925602902284721040317211860  
820419000422966171196377921337575114959501566049631862947265473642523081770367515906  
735023507283540567040386743513622224771589150495309844489333096340878076932599397805  
419341447377441842631298608099888687413260472156951623965864573021631598193195167353  
812974167729478672422924654366800980676928238280689964004824354037014163149658979409  
243237896907069779422362508221688957383798623001593776471651228935786015881617557829  
735233446042815126272037343146531977774160319906655418763979293344195215413418994854  
447345673831624993419131814809277771038638773431772075456545322077709212019051660962  
804909263601975988281613323166636528619326686336062735676303544776280350450777235547  
105859548702790814356240145171806246436267945612753181340783303362542327839449753824  
372058353114771199260638133467768796959703098339130771098704085913374641442822772634  
65947047458784778201927715280731767907707157213444730605700733492436931138350493163  
128404251219256517980694113528013147013047816437885185290928545201165839341965621349  
143415956258658655705526904965209858033850722426482939728584783163057777560688876446  
248246857926039535277348030480290058760758251047470916439613626760449256274204208320  
856611906254543372131535958450687724602901618766795240616342522577195429162991930645  
537799140373404328752628889639958794757291746426357455254079091451357111369410911939  
325191076020825202618798531887705842972591677813149699009019211697173727847684726860  
849003377024242916513005005168323364350389517029893922334517220138128069650117844087  
451960121228599371623130171144484640903890644954440061986907548516026327505298349187  
407866808818338510228334508504860825039302133219715518430635455007668282949304137765  
527939751754613953984683393638304746119966538581538420568533862186725233402830871123  
28278921250771262946322956398989835821167456270102183564622013496715188190973038119  
800497340723961036854066431939509790190699639552453005450580685501956730229219139339  
185680344903982059551002263535361920419947455385938102343955449597783779023742161727  
111723643435439478221818528624085140066604433258885698670543154706965747458550332323  
342107301545940516553790686627333799585115625784322988273723198987571415957811196358  
330059408730681216028764962867446047746491599505497374256269010490377819868359381465  
741268049256487985561453723478673303904688383436346553794986419270563872931748723320  
837601123029911367938627089438799362016295154133714248928307220126901475466847653576

164773794675200490757155527819653621323926406160136358155907422020203187277605277219  
005561484255518792530343513984425322341576233610642506390497500865627109535919465897  
514131034822769306247435363256916078154781811528436679570611086153315044521274739245  
449454236828860613408414863776700961207151249140430272538607648236341433462351897576  
645216413767969031495019108575984423919862916421939949072362346468441173940326591840  
443780513338945257423995082965912285085558215725031071257012668302402929525220118726  
767562204154205161841634847565169998116141010029960783869092916030288400269104140792  
886215078424516709087000699282120660418371806535567252532567532861291042487761825829  
76515795984703562226293486003415872298053498965022629174878820273420922245339856264  
766914905562842503912757710284027998066365825488926488025456610172967026640765590429  
099456815065265305371829412703369313785178609040708667114965583434347693385781711386  
455873678123014587687126603489139095620099393610310291616152881384379099042317473363  
948045759314931405297634757481193567091101377517210080315590248530906692037671922033  
229094334676851422144773793937517034436619910403375111735471918550464490263655128162  
288244625759163330391072253837421821408835086573917715096828874782656995995744906617  
583441375223970968340800535598491754173818839994469748676265516582765848358845314277  
568790029095170283529716344562129640435231176006651012412006597558512761785838292041  
974844236080071930457618932349229279650198751872127267507981255470958904556357921221  
033346697499235630254947802490114195212382815309114079073860251522742995818072471625  
916685451333123948049470791191532673430282441860414263639548000448002670496248201792  
896476697583183271314251702969234889627668440323260927524960357996469256504936818360  
900323809293459588970695365349406034021665443755890045632882250545255640564482465151  
875471196218443965825337543885690941130315095261793780029741207665147939425902989695  
946995565761218656196733786236256125216320862869222103274889218654364802296780705765  
615144632046927906821207388377814233562823608963208068222468012248261177185896381409  
183903673672220888321513755600372798394004152970028783076670944474560134556417254370  
9069793961225714298946715435784687886144458123145935719849225284716050489221242470141  
214780573455105008019086996033027634787081081754501193071412233908663938339529425786  
905076431006383519834389341596131854347546495569781038293097164651438407007073604112  
373599843452251610507027056235266012764848308407611830130527932054274628654036036745  
328651057065874882256981579367897669742205750596834408697350201410206723585020072452  
256326513410559240190274216248439140359989535394590944070469120914093870012645600162  
374288021092764579310657922955249887275846101264836999892256959688159205600101655256  
375678566722796619885782794848855834397518744545512965634434803966420557982936804352  
202770984294232533022576341807039476994159791594530069752148293366555661567873640053  
666564165473217043903521329543529169414599041608753201868379370234888689479151071637  
852902345292440773659495630510074210871426134974595615138498713757047101787957310422  
969066670214498637464595280824369445789772330048764765241339075920434019634039114732  
023380715095222010682563427471646024335440051521266932493419673977041595683753555166  
730273900749729736354964533288869844061196496162773449518273695588220757355176651589  
85519098665393549481068873206859907540792342402300925900701731960362254756478940647  
548346647760411463233905651343306844953979070903023460461470961696886885014083470405  
460742958699138296682468185710318879065287036650832431974404771855678934823089431068  
287027228097362480939962706074726455399253994428081137369433887294063079261595995462  
624629707062594845569034711972996409089418059534393251236235508134949004364278527138  
315912568989295196427287573946914272534366941532361004537304881985517065941217352462  
589548730167600298865925786628561249665523533829428785425340483083307016537228563559  
152534784459818313411290019992059813522051173365856407826484942764411376393866924803  
1183644536985891754426473998822846218449008777697631279572267265556259628256275318  
300134070922334365779160128093179401718598599933849235495640057099558561134980252499  
066984233017350358044081168552653117099570899427328709258487894436460050410892266917  
835258707859512983441729535195378855345737426085902908176515578039059464087350612322  
611200937310804854852635722825768203416050484662775045003126200800799804925485346941  
469775164932709504934639382432227188515974054702148289711177792376122578873477188196  
825462981268685817050740272550263329044976277894423621674119186269439650671515779586  
756482399391760426017633870454990176143641204692182370764887834196896861181558158736  
062938603810171215855272668300823834046564758804051380801633638874216371406435495561  
868964112282140753302655100424104896783528588290243670904887118190909494533144218287  
661810310073547705498159680772009474696134360928614849417850171807793068108546900094  
458995279424398139213505586422196483491512639012803832001097738680662877923971801461  
343244572640097374257007359210031541508936793008169980536520276007277496745840028362  
405346037263416554259027601834840306811381855105979705664007509426087885735796037324  
514146786703688098806097164258497595138069309449401515422221943291302173912538355915  
031003330325111749156969174502714943315155885403922164097229101129035521815762823283  
182342548326111912800928252561902052630163911477247331485739107775874425387611746578  
67116941477642144111263583553871361011023267987756410246824032264834641766369806637  
857681349204530224081972785647198396308781543221166912246415911776732253264335686146

186545222681268872684459684424161078540167681420808850280054143613146230821025941737  
562389942075713627516745731891894562835257044133543758575342698699472547031656613991  
999682628247270641336222178923903176085428943733935618891651250424404008952719837873  
864805847268954624388234375178852014395600571048119498842390606136957342315590796703  
461491434478863604103182350736502778590897578272731305048893989009923913503373250855  
982655867089242612429473670193907727130706869170926462548423240748550366080136046689  
511840093668609546325002145852930950000907151058236267293264537382104938724996699339  
424685516483261134146110680267446637334375340764294026682973865220935701626384648528  
514903629320199199688285171839536691345222444708045923966028171565515656661113598231  
122506289058549145097157553900243931535190902107119457300243880176615035270862602537  
881797519478061013715004489917210022201335013106016391541589578037117792775225978742  
891917915522417189585361680594741234193398420218745649256443462392531953135103311476  
394911995072858430658361935369329699289837914941939406085724863968836903265564364216  
644257607914710869984315733749648835292769328220762947282381537409961545598798259891  
093717126218283025848112389011968221429457667580718653806506487026133892822994972574  
530332838963818439447707794022843598834100358385423897354243956475556840993522050008541  
392394100016207693636846776413017819659379971557468541946334893748439129742391433659  
360410035234377706588867781139498616478747140793263858738624732889645643598774667638  
479466504074111825658378878454858148962961273998413442726086061872455452360643153710  
112746809778704464094758280348769758948328241239292960582948619196670918958089833201  
210318430340128495116203534280144127617285830243559830032042024512072872535581195840  
149180969253395075778400067465526031446167050827682772223534191102634163157147406123  
850425845988419907611287258059113935689601431668283176323567325417073420817332230462  
987992804908514094790368878687894930546955703072619009502076433493359106024545086453  
628935456862958531315337183868265617862273637169757741830239860065914816164049449650  
117321313895747062088474802365371031150898427992754426853277974311395143574172219759  
799359685252285745263796289612691572357986620573408375766873884266405990993505000813  
375432454635967504844235284874701443545419576258473564216198134073468541117668831186  
544893776979566517279662326714810338643913751865946730024434500544995399742372328712  
494834706044063471606325830649829795510109541836235030309453097335834462839476304775  
645015008507578949548931393944899216125525597701436858943585877526379625597081677643  
800125436502371412783467926101995585224717220177723700417808419423948725406801556035  
998390548985723546745642390585850216719031395262944554391316631345308939062046784387  
785054239390524731362012947691874975191011472315289326772533918146607300089027768963  
114810902209724520759167297007850580717186381054967973100167870850694207092232908070  
383263453452038027860990556900134137182368370991949516489600755049341267876436746384  
902063964019766685592335654639138363185745698147196210841080961884605456039038455343  
729141446513474940784884423772175154334260306698831768331001133108690421939031080143  
784334151370924353013677631084913516156422698475074303297167469640666531527035325467  
112667522460551199581831963763707617991919203579582007595605302346267757943936307463  
056901080114942714100939136913810725813781357894005599500183542511841721360557275221  
035268037357265279224173736057511278872181908449006178013889710770822931002797665935  
838758909395688148560263224393726562472776037890814458837855019702843779362407825052  
704875816470324581290878395232453237896029841669225489649715606981192186584926770403  
956481278102179913217416305810554598801300484562997651121241536374515005635070127815  
926714241342103301566165356024733807843028655257222753049998837015348793008062601809  
623815161366903341111386538510919367393835229345888322550887064507539473952043968079  
067086806445096986548801682874343786126453815834280753061845485903798217994599681154  
41974253634439960290251001588827216474500682070419376158454712318346904272690339550548  
239557137256840232268213012476794522644820910235647752723082081063518899152692889108  
455571126603965034397896278250016110153235160519655904211844949907789992007329476905  
868577878720982901352956613978884860509786085957017731298155314951681467176959760994  
210036183559138777817698458758104466283998806006162298486169353373865787735983361613  
384133853684211978938900185295691967804554482858483701170967212535338758621582310133  
103877668272115726949518179589754693992642197915523385766231676275475703546994148929  
041301863861194391962838870543677743224276809132365449485366768000001065262485473055  
861598999140170769838548318875014293890899506854530765116803337322265175662207526951  
791442252808165171667766727930354851542040238174608923283917032754257508676551178593  
950027933895920576682789677644531840404185540104351348389531201326378369283580827193  
783126549617459970567450718332065034556644034490453627560011250184335607361222765949  
278393706478426456763388188075656121689605041611390390639601620221536849410926053876  
887148379895599991120991646464411918568277004574243434021672276445589330127781586869  
525069499364610175685060167145354315814801054588605645501332037586454858403240298717  
093480910556211671...



## Historische Entwicklung der bekannten Dezimalziffern der Kreiszahl



Im Dezember 2002 berechnete der Japaner Kanada  $\pi$  auf 1,2411 Billionen Dezimalstellen. Dazu nutzte er parallel auf zwei Rechnern HITACHI SR8000/MP, 1 TerraByte Speicher) die Formeln:

$$\pi = 48 \arctan(1/49) + 128 \arctan(1/57) - 20 \arctan(1/239) + 48 \arctan(1/110443)$$

$$\pi = 176 \arctan(1/57) + 28 \arctan(1/239) - 48 \arctan(1/682) + 96 \arctan(1/12943)$$

### Konstante Größen bezüglich $\pi$

$$\pi/2 = 1.57079632679489661923132169163975144209858469968755...$$

$$\pi/3 = 1.04719755119659774615421446109316762806572313312503...$$

$$\pi/4 = 0.78539816339744830961566084581987572104929234984377...$$

$$\pi/5 = 0.62831853071795864769252867665590057683943387987502...$$

$$\pi/6 = 0.52359877559829887307710723054658381403286156656251...$$

$$2\pi = 6.28318530717958647692528676655900576839433879875021...$$

$$3\pi = 9.42477796076937971538793014983850865259150819812531...$$

$$4\pi = 12.56637061435917295385057353311801153678867759750042...$$

$$\pi^2 = 9.86960440108935861883449099987615113531369940724079...$$

$$\pi^3 = 31.00627668029982017547631506710139520222528856588510...$$

$$1/\pi = 0.31830988618379067153776752674502872406891929148091...$$

$$2/\pi = 0.63661977236758134307553505349005744813783858296182...$$

$$\sqrt{\pi} = 1.77245385090551602729816748334114518279754945612238...$$

$$1/\sqrt{\pi} = 0.56418958354775628694807945156077258584405062932899...$$

$$\sqrt{2\pi} = 2.50662827463100050241576528481104525300698674060993...$$

$$1/\sqrt{2\pi} = 0.39894228040143267793994605993438186847585863116493...$$

$$\sqrt[3]{\pi} = 1.46459188756152326302014252726379039173859685562793...$$

### Kreiszahl $\pi$ -Statistik

Die Ziffernfolge von  $\pi$  soll statistisch absolut zufällig verteilt sein. Die Auswertung der ersten 500000 Dezimalstellen von  $\pi$  ergibt:

Ziffer	Anzahl	Anteil in %	Ziffer	Anzahl	Anteil in %	Ziffer	Anzahl	Anteil in %
0	50158	10.0316	1	49943	9.9886	2	49746	9.9492
3	50049	10.0098	4	49717	9.9434	5	50332	10.0664
6	49999	9.9998	7	49937	9.9874	8	50272	10.0544
9	49847	9.9694						

Diese Werte ergeben bei einem  $\chi^2$ -Verteilungstest, dass die Abweichung vom arithmetischen Mittel zufällig ist. Die Ziffern sind mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % gleichverteilt. Testet man nicht nur Einzelziffern sondern Paare von Ziffern, ergibt sich für deren Anzahl unter den ersten 500000 Dezimalziffern:

2. Ziffer	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1. Ziffer										
0	4964	4978	5004	5041	5009	4998	5022	5117	4981	5045
1	5079	4988	4811	4982	4949	5055	4939	5021	5159	4960
2	5062	4963	4895	5045	4899	4927	4983	5013	4959	5000
3	5164	4905	4967	4975	4873	5105	5038	4993	5006	5023
4	4921	4950	4914	4986	4930	5034	5043	5071	4946	4922
5	4966	5029	5095	5017	5103	5088	4980	5033	5072	4948
6	5093	4967	5010	5031	5013	5010	4905	4962	5031	4977
7	4981	5079	4957	5016	5038	4970	5052	4825	5037	4982
8	5023	5053	5044	4967	4973	5121	4991	5091	5018	4991
9	4905	5031	5049	4989	4930	5024	5046	4811	5063	4999

Vom 6. Juni 1997 bis 6. Juli 1997 berechneten Daisuke Takahashi und Yasumasa Kanada von der Universität von Tokyo über den 4. Borwein-Algorithmus und mittels Gauß-Legendre-Algorithmus insgesamt **51.539.600.000 Dezimalziffern**

der Kreiszahl PI. Insgesamt ermittelte der HITAC SR-2201 Supercomputer in 66 Stunden reiner Rechenzeit 51.539.607.552 Ziffern, von denen 51539600000 Ziffern als gültig angesehen werden. Dabei wurden als 50 Milliardenste Ziffer (erste angezeigte Ziffer) von  $\pi$  und  $1/\pi$  ermittelt:

$\pi$	85133 98712 75109 30042
$1/\pi$	1191 08624 25640 78042

Die Auswertung der ersten 50 Milliarden Dezimalstellen von  $\pi$  ergab für die absolute und relative Häufigkeit der 10 Dezimalziffern:

Ziffer	Anzahl	Anteil in %	Ziffer	Anzahl	Anteil in %
0	5000012647	10.0000253	1	4999986263	9.9999725
2	5000020237	10.0000405	3	4999914405	9.9998288
4	5000023598	10.0000472	5	4999991499	9.9999830
6	4999928368	9.9998567	7	5000014860	10.0000297
8	5000117637	10.0002353	9	4999990486	9.9999810

Testgröße beim  $\chi^2$ -Test = 5.60

### Kreiszahl $\pi$ -Interessantes

Ist die Ziffernfolge von  $\pi$  zufällig verteilt, so muss praktisch jede endliche Ziffernfolge irgendwann einmal in der Dezimalstellenfolge von PI auftreten. Bekannt sind heute (Juli 1997) folgende "interessante" Ergebnisse:

Die Ziffernfolge (a) tritt in  $\pi$  ab der Stelle n auf:

**Folge (a) n**

0123456789 17387594880, 26852899245, 30243957439, 34549153953, 41952536161, 43289964000  
 9876543210 21981157633, 29832636867, 39232573648, 42140457481, 43065796214  
 09876543210 42321758803  
 27182818284 45111908393

Die Ziffernfolge (a) tritt in  $1/\pi$  ab der Stelle n auf:

**Folge (a) n**

0123456789 6214876462  
 01234567890 50494465695  
 9876543210 15603388145, 51507034812  
 99999999999 12479021132

Praktisch tritt jede Ziffernkombination in der Ziffernfolge von  $\pi$  auf. Durch Jeremy Gilbert wird im Internet die Möglichkeit geboten, nach Ziffernfolgen zu suchen. Zum Beispiel findet man unter den ersten 10 Millionen Dezimalziffern von  $\pi$  die willkürlich ausgewählte Folge 140359 genau 14 mal ab der n.ten Dezimalstelle mit n =

9861	957585	1781275	3024730	3326072	3470972
3894928	4015722	5510912	6481227	7223374	7658692
8671056	9066228				

Die Ziffernfolge 314159 findet sich unter den ersten 10 Millionen Ziffern sechs mal. An der 1.142.905.318.634. Nachkommastelle von  $\pi$  findet man laut Yasumasa Kanada wieder die Folge 314159265358.

In der Dezimalzifferfolge von  $\pi$  finden sich aus statistischen Gründen auch Stellen, an welchen die gleiche Ziffer wiederholt auftritt.

### Ziffer Stelle an welcher 1, 2, 3, 4, ... gleiche Ziffern aufeinander folgen

0	32, 307, 601, 13390, 17534, 1699927, 3794572, ...
1	1, 94, 153, 12700, 32788, 255945, 4657555, ...
2	6, 135, 1735, 4902, 65260, 963024, 82599811, ...
3	9, 24, 1698, 28467, 28467, 710100, 710100, 36488176, ...
4	2, 59, 2707, 54525, 808650, 828499, 17893953, 22931745, ...
5	4, 130, 177, 24466, 24466, 244453, 3517236, ...
6	7, 117, 2440, 21880, 48439, 252499, 8209165, 45681781, 45681781, ...
7	13, 559, 1589, 1589, 162248, 399579, 3346228, 24658601, 24658601, ...
8	11, 34, 4751, 4751, 213245, 222299, 4722613, 46663520, 46663520, ...
9	5, 44, 762, 762, 762, 762, 1722776, 36356642, ...

Die Beast-Number 666 tritt erstmals an der 2441. Dezimalstelle auf. In den 15 auf die 710150. Stelle folgenden Ziffern ... 353733333338638...

tritt die Ziffer 3 zehnmal auf, und dabei gleich sieben Mal hintereinander.

### Feynman-Punkt

In der Ziffernfolge von  $\pi$  treten eine Vielzahl von Wiederholungen einzelner Ziffern auf.

Das erste Auftreten von 6 aufeinanderfolgenden gleichen Ziffern wird Feynman-Punkt genannt und tritt an der 762. Dezimalstelle mit sechs Mal einer 9 auf.



Benannt wurde diese Stelle nach dem Physiker Richard Feynman, da er einmal äußerte, die Ziffern von  $\pi$  auswendig zu lernen bis er sagen könnte:

"nine nine nine nine nine nine and so on",  
als wäre  $\pi$  eine rationale Zahl.

5820974944 5923078164  
4811174502 8410270193  
4564856692 3460348610  
7892590360 0113305305  
0744623799 6274956735  
6094370277 0539217176  
1468440901 2249534301  
5187072113 4999999837  
7101000313 7838752886  
1857780532 1712268066

### Zahlen in PI

Sucht man nach dem Auftreten der Ziffernfolge der natürlicher Zahlen in der Dezimaldarstellung von  $\pi$  so findet man als letzte einstellige Zahl die 7 ab Position 13. Die letzte auftretende zweistellige Zahl ist die 68 ab Stelle 605, die letzte dreistellige Zahl ist die 483 ab Position 8553; die letzte vierstellige Zahl ab der 99846.Position ist die 6716. Erstaunlich ist, dass man alle vierstelligen Zahlen unter den ersten 100000 Ziffern findet, die Zahl 10000 aber erst an 387791.Stelle auftritt. Von den fünfstelligen Zahlen tritt als Letzte die 22801 ab der 1146939.Dezimalstelle auf. Die erste 1000000 findet man ab Platz 10359803, die erste 10000000 ab 13310436 (Polster, Juni 2006). Die erste natürliche Zahl, die unter den ersten 200 Millionen Ziffern nicht zu finden ist, ist die 10000005. Die Tabelle enthält die wachsenden Zahlen, die in in den Kommastellen der Kreiszahl an einer späteren Stelle auftreten.

n	Position	n	Position	n	Position	n	Position
1	1	4	2	5	4	6	7
7	13	10	49	11	94	12	148
18	424	68	605	100	854	103	3486
154	3644	180	3664	276	3796	304	4460
373	5229	483	8553	1001	15761	1030	20818
1037	24065	1046	25357	1056	25547	1061	43971
1203	60872	3825	61286	4057	65905	6716	99846
10000	387791	10040	637284	11492	784625	14523	1076561
17125	1113327	22801	1146939	100000	2393355	100002	2543077
100020	5225742	100216	6318406	100839	8036701	103250	8094374
106945	10763008	124374	12803162	480296	13594332	569540	14118307
1000003	15753840	1000005	19631531	1000011	34502682	1000049	47708171
1000054	61910790	1000225	66285420	1000876	68566413	1075656	166100501
10000001		169658538					

### PI-Pascalprogramm

Durch Hans-Jürgen Caspar wurde 2003 auf Matroid ein einfaches Pascalprogramm zur Berechnung von einigen Tausend Dezimalziffern der Kreiszahl  $\pi$  veröffentlicht.

Grundlage ist die Berechnungsvorschrift

$$\pi = 3 + 1 \cdot 1 / (8 \cdot 1 \cdot 3) (3 + 3 \cdot 3 / (8 \cdot 2 \cdot 5) (3 + 5 \cdot 5 / (8 \cdot 3 \cdot 7) + (3 + \dots)))$$

```

Program pi1k;
uses crt,dos; const n=1000; {Stellenzahl}
Var i,j,k : integer; c,d,q,u,x : word; a : array[1..n+1] of word;
procedure divi(y:word);
begin c:=0; for j:=1 to n+1 do begin x:=a[j]+c;q:=x div y;a[j]:=q; d:=x-y*q;c:=10*d; end; end;
procedure mult(y:word);
begin for j:=1 to n+1 do a[j]:=y*a[j]; for j:=n+1 downto 2 do begin u:=a[j] div 10;a[j-1]:=a[j-1]+u;
a[j]:=a[j] mod 10; end; end;
Begin
  clrscr; write(' ');
  k:=trunc(n*ln(10)/ln(4));
  for i:=k downto 1 do begin
    divi(8);divi(i);mult(2*i-1);divi(2*i+1);
    mult(2*i-1);a[1]:=a[1]+3;
  end;
  for i:=1 to n+1 do begin
    write(a[i]);
    if i=1 then write('.');
    if (i mod 6=0) then write(' ');
    if wherex=80 then write(' ');
  end;
  repeat until keypressed;
End.
```

## Ziffern von $\pi^2$

$\pi^2 =$  9,8696044010893586188344909998761511353136994072407906264133493762200448224192  
052430017734037185522318240259137740231440777723481220300467276106176779851976  
609903998562065756305715060412328403287808693527693421649396665715190445387352  
617794138202582605816934125155920483098188732700330762666711043589508715041003  
257885365952763577528379226833187450864045463541250269737295669583342278581500  
063652270954724908597560726692647527790052853364522066698082641589687710573278  
892917469015455100692544324570364496561725379286076060081459725892292324142400  
44295981361814413706777781947396583031708566327895707534079917145231589263721  
1446382826443285280379285034809523389950396857460948534600901774293220579903...

$\pi^3 =$  31,006276680299820175476315067101395202225288565885107694144538103806394917465  
706037566701032602886193030121961572336622375201617652339672733561394154425388  
254033667727557662639675028532033246863042678698663839618375292562924730094296  
918620267053985960770069824572953187326935581852186310769334223813656161847300  
841751718172199304257459366024683696918103146637450336080943110222975685340118  
290228676472782943776835949262234767424747593811032378117123376614379168440003  
743443500411717594370468838576063090008953125576685039180072879698043329856903  
186102586329883188593652390724818865317571721162253423367778852715933185662389  
4732236579727223907439409743376397038915764179055988816027831962111124416545...

$1/\pi =$  0,3183098861837906715377675267450287240689192914809128974953346881177935952684  
530701802276055325061719121456854535159160737858236922291573057559348214633996  
784584799338748181551461554927938506153774347857924347953233867247804834472580  
236647602284453995114318809237801738053479122409788218738756881710574461998928  
868004973446954789192217966461935661498123339729256093988973043757631495731339  
284820779917482786972199677361983999248857511703423577168622350375343210930950  
739760194789207295186675361186049889932706106543135510064406495556327943320458  
9349623919633168121203360607199626782397499766557330887055951014003248135512...

## Konstruktion von Kochansky

Durch den polnischen Jesuitenpater Adam Kochansky (1631-1700) wurde 1685 ein Näherungswert für  $\pi$  angegeben.

Ausgangspunkt ist die Gleichung 4. Grades  $9x^4 - 240x^2 + 1492 = 0$ .

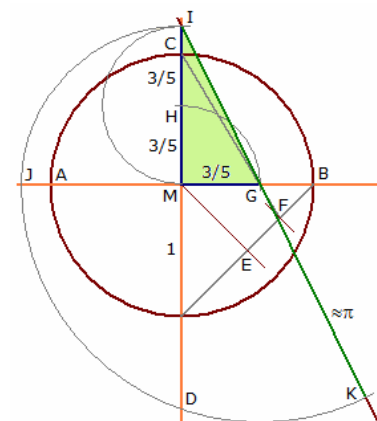
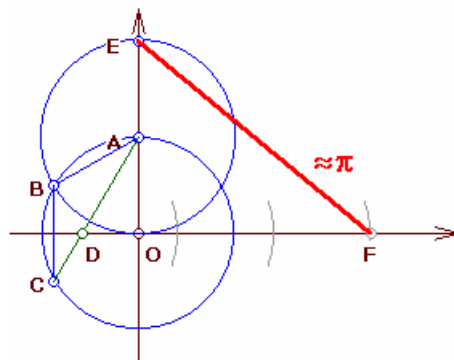
Deren Lösungen sind  $1/3 \sqrt{(120 + 18\sqrt{3})}$ ,  $-1/3 \sqrt{(120 + 18\sqrt{3})}$ ,  $1/3 \sqrt{(120 - 18\sqrt{3})}$  und  $-1/3 \sqrt{(120 - 18\sqrt{3})}$ , von denen  $1/3 \sqrt{(120 - 18\sqrt{3})}$  die Kreiszahl  $\pi$  sehr gut annähert:

$$1/3 \sqrt{(120 - 18\sqrt{3})} = 3.14153333870509...$$

Die Abweichung von korrekten Wert beträgt nur 0.000059316.

Die Strecke  $1/3 \sqrt{(120 - 18\sqrt{3})}$  ist mit folgender Abfolge konstruierbar.

1. Um O wird eine Einheitskreis gezeichnet und um den Schnittpunkt A ein weiterer Einheitskreis. Dieser schneidet die y-Achse in E.
2. Beide Kreise schneiden sich im Punkt B.
3. Ein Einheitskreis um B schneidet den Kreis um O in einem weiteren Punkt C. Dieser ergibt sich auch durch eine Gerade parallel zur y-Achse.
4. Die Strecke CA schneidet die Abszissenachse in D.
5. Von D aus wird dreimal eine Länge = 1 längs der x-Achse angetragen. Der gefundene Punkt sei F.
6. Die Strecke EF hat dann den gesuchten Wert  $1/3 \sqrt{(120 - 18\sqrt{3})}$



## $\pi$ -Konstruktion von Vieta, $\pi$ -Rektifikation

Die Näherung von  $\pi$  durch Vieta

$$\pi \sim 1,8 + \sqrt{1,8} = 3,14164...$$

gestattet eine Näherungskonstruktion für  $\pi$ . Dazu wird genutzt, dass

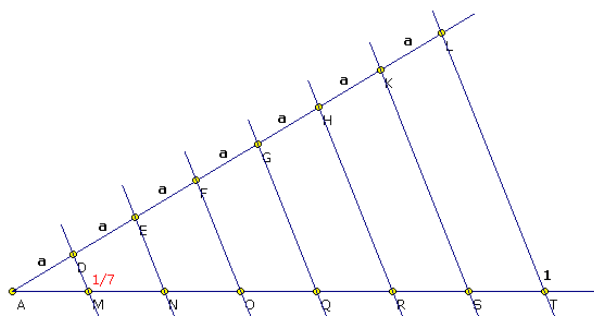
$$3/5 + 6/5 = 1,8 \text{ und } (3/5)^2 + (6/5)^2 = 1,8$$

gelten.

## Näherungskonstruktion

- 1) um einen Kreis mit Radius 1 konstruiert man durch den Mittelpunkt M je eine waagrechte Gerade mit den Schnittpunkten A und B und eine dazu senkrechte mit Schnittpunkten C und D
- 2) zuerst wird die Strecke DB im Punkt E halbiert, danach die neue Strecke EB im Punkt F

- 3) die Strecke CF schneidet die Strecke MB im Punkt G so, dass die Strecke MG genau  $\frac{3}{5}$  misst,  $AC:FB = AG:GB = 4:1$
- 4) die Strecke MG wird nun mit dem Zirkel auf die Senkrechte CM in den Punkt H übertragen und bis zum Punkt I verdoppelt, sodass die Strecke IG nun genau  $\sqrt{1,8}$  misst
- 5) die Strecke IM wird nun mit dem Zirkel auf die Waagrechte AM in den Punkt J übertragen wonach die Strecke JG mit der Länge 1,8 über das Zentrum G auf die Gerade IG in den Punkt K übertragen wird
- 6) die Strecke IK stellt nun Vietas  $\pi$ -Rektifikation dar



### Einfache Näherungskonstruktion

Eine einfache Näherungskonstruktion für  $\pi$  ergibt sich unmittelbar aus dem Strahlensatz.

Trägt man auf einem Strahl sieben Mal eine beliebige Strecke  $a$  an und verbindet den letzten Teilpunkt mit einem Punkt T auf einem zweiten Strahl, der gerade vom Scheitel dem Abstand 1 hat, so kann durch Parallelverschiebung eine Strecke der Länge  $\frac{1}{7}$  konstruiert. Setzt man an diese eine Strecke der Länge 3 an, so erhält man  $3 \frac{1}{7} = \frac{22}{7}$  und damit

die bekannte Näherung für  $\pi$ . Diese Näherung ist nur um 0.04 % größer als der korrekte Wert.

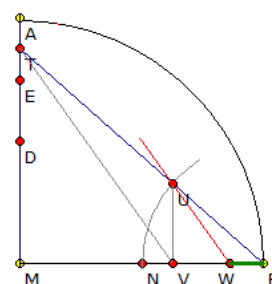
### Kreiszahl - Näherungskonstruktion (2)

Eine gute Näherung für  $\pi$  ist der Bruch  $\frac{355}{113} = 3,141592920\dots$

Durch H. Pieper wurde 1984 eine Konstruktion dieses Bruches beschrieben und damit eine Näherungskonstruktion für die Kreiszahl.

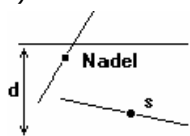
Es ist  $\frac{355}{113} = 3 + \frac{16}{113}$

Damit genügt es den Bruch  $\frac{16}{113}$  zu konstruieren.



### Konstruktionsbeschreibung:

- 1) Gegeben sei ein Viertelkreis MBA mit einem Radius von 1. MA und MB sind senkrecht aufeinanderstehende Radien
- 2) Durch fortgesetztes Halbieren teile man den Radius AM in 8 gleiche Abschnitte und wähle auf AM den Punkt T so, dass  $TM = \frac{7}{8}$
- 3) Man verbinde T mit B. Der Punkt N halbiere den Radius MB
- 4) Zeichnet man um B einen Kreis mit dem Radius  $BN = \frac{1}{2}$ , so erhält man auf TB den Schnittpunkt U
- 5) Man falle das Lot von U auf MB und erhalte den Lotfußpunkt V. V und T sind miteinander zu verbinden
- 6) Die Parallele von TV durch U schneide den Radius MB in W
- 7) Dann ist  $WB = \frac{16}{113}$



### Buffonsches Nadelexperiment

1777 beschrieb Graf George de Buffon erstmals ein Zufallsexperiment, mit welchem die **Kreiszahl  $\pi$**

experimentell bestimmt werden kann.

Dazu sind auf einer Ebene parallele Geraden im Abstand  $d$  gegeben. Auf diese Ebene lässt man zufällig Nadeln mit einer Länge  $s < d$  fallen. Die Anzahl der Schnitte der Nadeln mit irgendeiner der Geraden wird gezählt.

### Wahrscheinlichkeit des Schnittes

für  $s \leq d$   $p = \frac{2s}{d\pi}$

für  $s \geq d$   $p = \frac{1}{\pi d} * [d(\pi - 2 \arcsin(d/s)) + 2s(1 - \sqrt{1 - d^2/s^2})]$

für  $2s = d$  und  $k$  Treffern bei  $n$  Würfeln wird  $\dots \pi = n/k$

### Wurfzahl Näherung %-Abweichung

1000000	3.137664000000	-0.125053 %
3000000	3.139685333333	-0.060712 %
5000000	3.141120000000	-0.015045 %
7000000	3.141510857143	-0.002604 %
9000000	3.141561777778	-0.000983 %

### Wurfzahl Näherung

2000000	3.138536000000	-0.097296 %
4000000	3.140991000000	-0.019151 %
6000000	3.141237333333	-0.01131 %
8000000	3.141760500000	0.005343 %
10000000	3.141680000000	0.00278 %

### prozentuale Abweichung

Hinweis: Bei einer Umsetzung des Verfahrens auf einem herkömmlichen Computer lässt sich erkennen, dass sich das errechnete  $\pi$  ab einer gewissen Anzahl von Zufallspunkten nicht mehr eindeutig an  $\pi$  annähern lässt. Die Ursache liegt darin, dass PCs keine echten Zufallszahlen generieren können. Um echte Zufallszahlen zu generieren, braucht man hardwarebasierende Zusatzmodule (wie z.B. durch Messung von Spannungsschwankungen an einem Präzisionswiderstand, des Johnson-Rauschens oder

einer Zener-Diode). Ein Computer ist eine deterministische Maschine und dazu geschaffen, auf eine konkrete Eingabe hin eine genau definierte Ausgabe zu liefern.

### Beweis zum Buffonschen Nadelexperiment

1777 beschrieb Graf George de Buffon erstmals ein Zufallsexperiment, mit welchem die experimentell bestimmt werden kann.

**Kreiszahl  $\pi$**

Dazu sind auf einer Ebene parallele Geraden im Abstand  $d$  gegeben. Auf diese Ebene lässt man zufällig Nadeln mit einer Länge  $s < d$  fallen. Die Anzahl der Schnitte der Nadeln mit irgendeiner der Geraden wird gezählt.

Für die Wahrscheinlichkeit eines Schnittpunktes für Nadeln mit  $s < d$  ergibt sich:

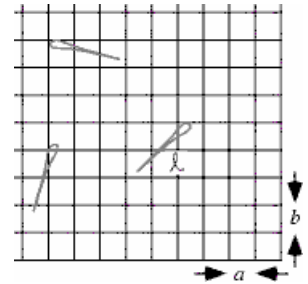
Es sei  $\alpha$ , mit  $\alpha \in [0 ; \pi/2]$ , der Winkel der Nadel zur Horizontalen. Die Einschränkung des Winkels ergibt sich aus der Symmetrie. Für die Höhe der Nadel wird damit  $s \sin \alpha$ .

Als Wahrscheinlichkeit für einen Kreuzungspunkt in Abhängigkeit von  $\alpha$  erhält man somit  $s \sin \alpha / d$ .

Die Wahrscheinlichkeit eines Kreuzungspunktes erhält man durch Bildung des Mittelwertes:

$$P = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} s/d \sin \alpha \, d\alpha = \frac{2}{\pi} s/d [-\cos \alpha]_0^{\pi/2} =$$

$$P = \frac{2}{\pi} s/d$$



### Laplace-Nadelexperiment

... in Analogie zum Buffonschen Nadelexperiment, ist die Wahrscheinlichkeit  $p$  zu bestimmen, mit welcher eine Nadel der Länge  $s$  eine Linie eines rechteckigen Gitters trifft. Dabei haben die Gitterlinien vertikal den Abstand  $a$  und horizontal  $b$ . Ist die Nadellänge  $s$  sowohl größer als  $a$  als auch  $b$ , so gilt:  $p = [2s(a+b) - s^2] / (\pi ab)$

### Merkmale für $\pi$

Wortlängen geben Dezimalziffern von  $\pi$  an:

"Wie, o dies  $\pi$  macht ernstlich so vielen viele Müh' !"

**B: 3 1 4 1 5 9 2 6 5 3**

"Dir, o Held, o alter Philosoph, du Riesengenie! Wie viele Tausende bewundern Geister Himmlisch wie du und göttlich!

Noch reiner in Aeonen Wird das uns strahlen Wie im lichten Morgenrot!"

„Nie, o Gott, o guter, verleihest Du meinem Hirne die Kraft, mächtige Zahlreih'n dauernd verkettet bis in die späteste Zeit getreu zu merken; drum hab' ich Ludolfen mir zu Lettern umgeprägt.“ (Franz Brentano)

"How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics ! All of thy geometry, Herr Planck, is fairly hard..."

"Now I, even I, would celebrate In rhymes unapt, the great Immortal Syracusan, rivaled nevermore, Who in his wondrous lore, Passed on before Left men his guidance How to circles mensurate."

Beutel 1913: „Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages!

Immortel Archimède, sublime (artiste) ingénieur Qui de ton jugement peut sonder (priser) la valeur?

Pour moi, ton problème eut de pareils avantages.."

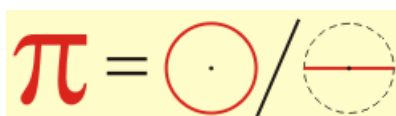
Spanisch: Con 1 palo y 5 ladrillos se pueden hacer mil cosas

Portugiesisch: Nós e todo o mundo guardamos pi usando letra por número

Griechisch: Αει ο θεος ο Μεγας γεωμετρει, το κυκλου μηκος ινα οριση διαμετρω, παρηγαγεν αριθμον απεραντος, και ον, φευ, ουδεποτε ολον θνητοι θα ευρωσι

Esperanto: Kun  $\pi$ , c<sup>^</sup>iam l'afero konverg<sup>^</sup>as, al nombro utila kaj magia. Infinite decimaloj anseras, g<sup>^</sup>iseterne tra la pag<sup>^</sup> fantazia. Kiel nebulo el tabulo mara, Tra nia universo kaj c<sup>^</sup>e lekcioj, Cifervica poemio

Slowenisch: Kdo o tebi z glavo razmišlja da spomni števk teh?



### Merkwürdiges für $\pi$

Hans-Henrik Stolum, Geologe an der Universität von Cambridge, ermittelte das Verhältnis zwischen der Gesamtlänge von Flüssen und der direkten Entfernung von Quelle und Mündung. Im Durchschnitt ergab sich rund 3,14, d.h.  $\pi$  ?!

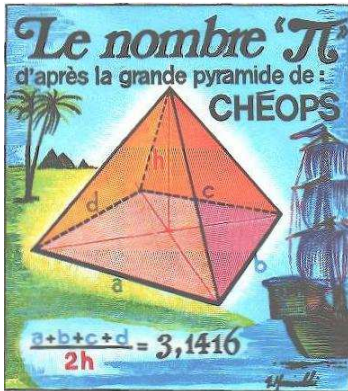
Geht man von einem magischen Quadrat  $Q_5$  von fünf Reihen aus und ersetzt jede darin befindliche  $k$  durch jede Zahl, die in der Dezimadarstellung von  $\pi$  auftritt, so ergibt sich eine merkwürdige Symmetrie. Warum dies so ist, ob Zufall oder Gesetzmäßigkeit, ist nicht bekannt.

$Q_5$					$Q'_5$					Summe
17	24	1	8	15	2	4	3	6	9	24
23	5	7	14	16	6	5	2	7	3	23
4	6	13	20	22	1	9	9	4	2	25
10	12	19	21	3	3	8	8	6	4	29
11	18	25	2	9	5	3	3	1	5	17
Summe					17	9	25	24	23	

## C-Programm

Das nachfolgende, mehr als kryptische C-Programm von Dik Winter und Achim Flammenkamp berechnet 52514 Dezimalstellen von  $\pi$ .

```
a[52514],b,c=52514,d,e,f=1e4,g,h;  
main(){for(;b=c-=14;h=printf("%04d", e+d/f))  
for(e=d%=f;g=--b*2;d/=g)d=d*b+f*(h?a[b]:f/5),a[b]=d%--g;}
```



## $\pi$ -Gedicht

M.Keith schrieb in Anregung von Edgar Allen Poe's "The Raven" ein Gedicht, das in seiner Originalfassung die ersten 740 Ziffern von  $\pi$  beschreibt. Dabei gilt, dass jede Länge eines Wortes eine Ziffer beschreibt. Hat das Wort die Länge 10, so ist die Ziffer 0 gemeint. Ist das Wort 11 oder mehr Buchstaben lang, so sind jeweils 2 Ziffern beschrieben. In der Kurzfassung werden die ersten 50 Ziffern angegeben; in der Liste das vollständige Gedicht.

Poe, E. "Near a Raven"

Midnights so dreary, tired and weary. Silently pondering volumes extolling  
all by-now obsolete lore.

During my rather long nap - the weirdest tap! An ominous vibrating sound  
disturbing my chamber's antedoor.

"This", I whispered quietly, "I ignore".

Perfectly, the intellect remembers: the ghostly fires, a glittering ember.

Inflamed by lightning's outbursts, windows cast penumbras upon this floor.

Sorrowful, as one mistreated, unhappy thoughts I heeded:

That inimitable lesson in elegance - Lenore - Is delighting, exciting...nevermore.

Ominously, curtains parted (my serenity outsmarted), And fear overcame my being - the fear of  
"forevermore".

Fearful foreboding abided, selfish sentiment confided, As I said, "Methinks mysterious traveler knocks  
afore.

A man is visiting, of age threescore."

Taking little time, briskly addressing something: "Sir," (robustly) "Tell what source originates  
clamorous noise afore?

Disturbing sleep unkindly, is it you a-tapping, so slyly? Why, devil incarnate!--" Here completely  
unveiled I my antedoor--

Just darkness, I ascertained - nothing more.

While surrounded by darkness then, I persevered to clearly comprehend.

I perceived the weirdest dream...of everlasting "nevermores".

Quite, quite, quick nocturnal doubts fled - such relief! - as my intellect said,

(Desiring, imagining still) that perchance the apparition was uttering a whispered "Lenore". This  
only, as evermore.

Silently, I reinforced, remaining anxious, quite scared, afraid,

While intrusive tap did then come thrice - O, so stronger than sounded afore.

"Surely" (said silently) "it was the banging, clanging window lattice." Glancing out, I quaked, upset by  
horrors hereinbefore,

Perceiving: a "nevermore".

Completely disturbed, I said, "Utter, please, what prevails ahead. Repose, relief, cessation, or but  
more dreary 'nevermores'?"

The bird intruded thence - O, irritation ever since! - Then sat on Pallas' pallid bust, watching me (I sat  
not, therefore),

And stated "nevermores".

Bemused by raven's dissonance, my soul exclaimed, "I seek intelligence;

Explain thy purpose, or soon cease intoning forlorn 'nevermores'!"

"Nevermores", winged corvus proclaimed - thusly was a raven named? Actually maintain a surname,  
upon Pluvius seashore?

I heard an oppressive "nevermore".

My sentiments extremely pained, to perceive an utterance so plain, Most interested, mystified, a  
meaning I hoped for.

"Surely," said the raven's watcher, "separate discourse is wiser. Therefore, liberation I'll obtain,  
retreating heretofore -

Eliminating all the 'nevermores' ".

Still, the detestable raven just remained, unmoving, on sculptured bust. Always saying "never" (by a red  
chamber's door).

A poor, tender heartache maven - a sorrowful bird - a raven!

O, I wished thoroughly, forthwith, that he'd fly heretofore.

Still sitting, he recited "nevermores".

The raven's dirge induced alarm - "nevermore" quite wearisome. I meditated: "Might its utterances  
summarize of a calamity before?"





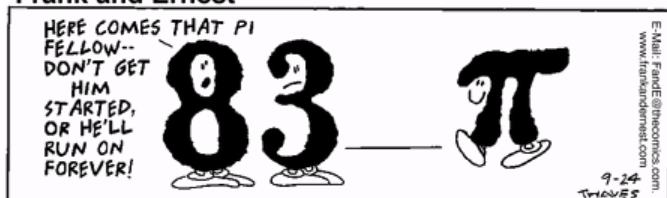


## Kate Bush: Pi

Sweet and gentle sensitive man / With an obsessive nature and deep fascination  
 For numbers / And a complete infatuation with the calculation Of PI  
 Oh he love, he love, he love / He does love his numbers  
 And they run, they run, they run him / In a great big circle  
 In a circle of infinity  
 Oh he love, he love, he love / He does love his numbers  
 And they run, they run, they run him / In a great big circle  
 In a circle of infinity / But he must, he must, he must

3.1415926535 897932 3846 264 338 3279

## Frank and Ernest



Copyright (c) 1998 by Thaves. Distributed from www.thecomics.com.

Put a number to it 50288419  
 716939937510 582319749 44 59230781  
 6406286208 821 4808651 32  
 Oh he love, he love, he love / He does love his numbers  
 And they run, they run, they run him / In a great big circle  
 In a circle of infinity

82306647 0938446095 505 8223...

## Näherungsformeln für $\pi$ , Machin-Formeln

Ausgehend von der Tatsache, dass  $\arctan(1) = \pi/4$  ist und mit Hilfe von Additionstheoremen für die schrittweise Berechnung des Arkustangens können Näherungsformeln der Form

$$\pi/4 = A \cdot \arctan(1/B) + C \cdot \arctan(1/D) + E \cdot \arctan(1/F)$$

zur Berechnung von  $\pi$  bestimmt werden. Formeln dieser Art werden nach John Machin (1680-1751) benannt, da er 1706 eine der ersten dieser Näherungsformeln angab.

Die Liste enthält die Parameter A, B, ... F der jeweiligen Näherungsformel und ihren Entdecker.

## Parameter der Näherungsformeln für $\pi$

A	B	C	D	E	F	Entdecker
1	2	1	3			Euler, Hutton 1776
2	3	1	7			Hutton 1776
4	5	1	-239			Machin 1706
1	2	1	4	1	13	
1	2	1	5	1	8	Dase
1	2	2	6	1	-117	
3	4	1	20	1	1985	Loney 1893
4	5	1	-70	1	99	Euler 1764
6	8	2	57	1	239	Störmer
12	18	8	57	5	-239	Gauß

## Näherungsformeln für $\pi$

Die Liste enthält weitere Näherungsformeln zur Berechnung von  $\pi$  mittels Summenbildung von Arctan-Werten. Jede angegebene Summe entspricht genau  $\pi/4$ . Durch iteratives Berechnen der Arkustangens-Werte kann so  $\pi$  immer besser angenähert werden.

## $\pi/4 = \dots$

$2 \cdot \arctan 1/3 + \arctan 1/7$	$\arctan 1/2 + \arctan 1/4 + \arctan 1/13$
$\arctan 1/2 + \arctan 1/5 + \arctan 1/8$	$\arctan 1/3 + 2 \cdot \arctan 1/4 - \arctan 1/38$
$2 \cdot \arctan 1/3 + \arctan 1/5 - \arctan 1/18$	$2 \cdot \arctan 1/3 + \arctan 1/8 + \arctan 1/57$
$2 \cdot \arctan 1/3 + \arctan 1/9 + \arctan 1/32$	$2 \cdot \arctan 1/3 + \arctan 1/12 + \arctan 1/17$
$2 \cdot \arctan 1/3 + 2 \cdot \arctan 1/17 + \arctan 1/41$	$2 \cdot \arctan 1/4 + \arctan 1/7 + 2 \cdot \arctan 1/13$
$3 \cdot \arctan 1/4 + \arctan 1/13 - \arctan 1/38$	$2 \cdot \arctan 1/5 + \arctan 1/7 + 2 \cdot \arctan 1/8$
$2 \cdot \arctan 1/5 + 3 \cdot \arctan 1/8 + \arctan 1/57$	$3 \cdot \arctan 1/5 + 2 \cdot \arctan 1/8 - \arctan 1/18$
$2 \cdot \arctan 1/6 + 3 \cdot \arctan 1/7 + 2 \cdot \arctan 1/68$	$5 \cdot \arctan 1/8 + 2 \cdot \arctan 1/18 + 3 \cdot \arctan 1/57$
$\arctan 1/2 + \arctan 1/4 + \arctan 1/11 - \arctan 1/72$	
$\arctan 1/2 + \arctan 1/4 + \arctan 1/15 + \arctan 1/98$	
$\arctan 1/2 + \arctan 1/4 + \arctan 1/18 + \arctan 1/47$	
$\arctan 1/2 + \arctan 1/4 + \arctan 1/23 + \arctan 1/30$	
$\arctan 1/3 + \arctan 1/4 + \arctan 1/5 + \arctan 1/47$	
$\arctan 1/3 + \arctan 1/4 + \arctan 1/7 + \arctan 1/13$	
$\arctan 1/3 + \arctan 1/4 + 2 \cdot \arctan 1/9 - \arctan 1/378$	
$\arctan 1/3 + \arctan 1/5 + \arctan 1/7 + \arctan 1/8$	
$\arctan 1/4 + 2 \cdot \arctan 1/5 + \arctan 1/7 + \arctan 1/268$	
$\arctan 1/4 + 2 \cdot \arctan 1/5 + \arctan 1/8 + \arctan 1/47$	

## Näherungsformeln

Wetherfield-Notation, Schreibweise:  $\{t\} = \arctan(1/t)$   
 nach Michael Wetherfield "Mathematical Gazette, Volume 80, No 488 of July 1996, pages 333-344"  
 Hutton-Formel  $\pi/4 = \{2\} + \{3\}$   
 $\pi/4 = 2\{3\} + \{7\}$   
 Machin-Formel  $\pi/4 = 4\{5\} - \{239\}$   
 Euler-Formel  $\pi/4 = 5\{5\} + 2\arctan(3/79)$   
 Störmer-Formel  $\pi/4 = 11\{57\} + 7\{239\} - 12\{682\} + 24\{12943\}$   
 Sebah-Formel  $\pi/4 = 8\{21\} + 3\{239\} + 4\arctan(3/1024)$   
 $\pi/4 = 5\arctan(29/278) + 28\arctan(3/79)$   
 Lyster-Formel  $\pi/4 = 22\{28\} +$   
 $+ \arctan(1744507482180328366854565127 / 98646395734210062276153190241239)$

### Schnell konvergente Reihen mit 4 Summanden

$$\begin{aligned}\pi/4 &= 6 \cdot \operatorname{atn} 1/9 + 3 \cdot \operatorname{atn} 1/32 + 2 \cdot \operatorname{atn} 1/73 + \operatorname{atn} 1/2943 \\ \pi/4 &= 4 \cdot \operatorname{atn} 1/12 + 4 \cdot \operatorname{atn} 1/17 + 4 \cdot \operatorname{atn} 1/18 + \operatorname{atn} 1/239 \\ \pi/4 &= 6 \cdot \operatorname{atn} 1/13 + 6 \cdot \operatorname{atn} 1/21 + 2 \cdot \operatorname{atn} 1/57 + \operatorname{atn} 1/239 \\ \pi/4 &= 8 \cdot \operatorname{atn} 1/13 + 4 \cdot \operatorname{atn} 1/38 + 4 \cdot \operatorname{atn} 1/57 - \operatorname{atn} 1/239 \\ \pi/4 &= \operatorname{atn} 1/46 + 4 \cdot \operatorname{atn} 1/76 + 2 \cdot \operatorname{atn} 1/379 + \operatorname{atn} 1/623477877\end{aligned}$$

A.Sharp (1653-1742)

$$\pi/2 = \sqrt{3} \cdot [1 - 1/(3 \cdot 3) + 1/(5 \cdot 3^2) - 1/(7 \cdot 3^3) + \dots (-1)^n / (3^n \cdot (2n+1)) \dots]$$

F.Vieta (1582 in Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII)

$$2/\pi = \sqrt{(2)/2} \cdot \sqrt{(2+\sqrt{2})/2} \cdot \sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})/2} \cdot \dots$$

J.Wallis (1655 in Arithmetica infinitorum;  $\pi$  wird als Produkt rationaler(!) Zahlen dargestellt)

$$\pi/2 = 4/(1 \cdot 3) \cdot 16/(3 \cdot 5) \cdot 36/(5 \cdot 7) \cdot 64/(7 \cdot 9) \dots$$

J.Gregory (1638-1675) und I.Newton

$$\pi/6 = 1/\sqrt{3} (1 - 1/(3 \cdot 3) + 1/(5 \cdot 3 \cdot 3) - 1/(7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) + \dots)$$

Leonhard Euler

$$\pi = 3\sqrt{3}/1 - 3\sqrt{3}/2 + 3\sqrt{3}/4 - 3\sqrt{3}/5 + 3\sqrt{3}/7 - 3\sqrt{3}/8 + \dots$$

$\pi^2/9 = 1 + 1/5^2 + 1/7^2 + 1/11^2 + 1/13^2 + \dots$  (Nenner: Quadrate aller nicht durch 3 teilbaren ungeraden Zahlen)

### Machin-Formel

Die Machin-Formel zur näherungsweisen Berechnung von  $\pi$  erweist sich im Vergleich zur Leibniz-Formel als relativ schnell konvergent:

$$\pi/4 = 4 \arctan 1/5 - \arctan 1/239$$

Machin selbst berechnete damit 100 Dezimalstellen. Mit einer 15stelligen Arithmetik ergibt sich:

#### arctan(1/5)

$$\begin{aligned}1/5 &= 0,2000000000000000 \\ 1/375 &= -0,0026666666666666 \\ 1/15625 &= 0,0000640000000000 \\ 1/546875 &= -0,000001828571428 \\ 1/17578125 &= 0,000000056888889 \\ 1/537109375 &= -0,000000001861818 \\ 1/15869140625 &= 0,000000000063015 \\ 1/457763671875 &= -0,000000000002184 \\ 1/12969970703125 &= 0,0000000000000077 \\ 1/362396240234375 &= -0,0000000000000002\end{aligned}$$

$$\text{Summe } \arctan(1/5) = 0,1973955598498807$$

Mit der Machinschen Formel wird dann

$$\pi/4 = 4 \arctan 1/5 - \arctan 1/239$$

$$\pi = 16 \cdot 0,1973955598498807 - 4 \cdot 0,004184076002074 = 3,1415926535897922$$

#### arctan(1/239)

$$\begin{aligned}1/239 &= 0,004184100418410 \\ 1/40955757 &= -0,000000024416591 \\ 1/3899056325995 &= 0,0000000000000256\end{aligned}$$

$$\arctan(1/239) = 0,004184076002074$$



### Vega-Reihen

Durch den slowenischen Mathematiker Jurij Vega (1754-1802, Abbildung) wurden eine Vielzahl von Reihen zur näherungsweisen Berechnung der Kreiszahl  $\pi$  angegeben:

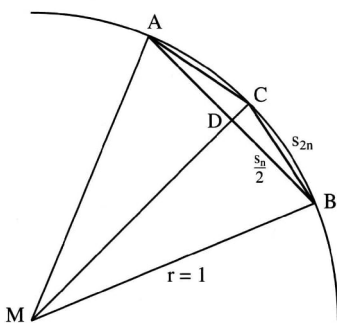
entwickelt aus  $\arccos 45^\circ = \arctan 1/7 + 2 \arctan 1/3$ :

$$\begin{aligned}\pi &= 8 (26 / (3 \cdot 3^3) + 58 / (5 \cdot 7 \cdot 3^7) + 90 / (9 \cdot 11 \cdot 3^{11}) + 122 / (13 \cdot 15 \cdot 3^{15}) + 154 / \\ & (17 \cdot 19 \cdot 3^{19}) + \dots + 73 / (3 \cdot 7^3) + 169 / (5 \cdot 7 \cdot 7^7) + 265 / (9 \cdot 11 \cdot 7^{11}) + 361 / (13 \cdot 15 \cdot 7^{15}) \\ & + 457 / (17 \cdot 19 \cdot 7^{19}) + \dots)\end{aligned}$$

$$\pi = 4 (2 (1/3 - 1/(3 \cdot 3^3) + 1/(5 \cdot 3^5) - 1/(7 \cdot 3^7) + 1/(9 \cdot 3^9) - \dots) + 1/7 - 1/(3 \cdot 7^3) + 1/(5 \cdot 7^5) - 1/(7 \cdot 7^7) + 1/(9 \cdot 7^9) - \dots)$$

entwickelt aus  $\arccos 45^\circ = 5 \arctan 1/7 + 2 \arctan 3/79$ :

$$\pi = 4 (5 (1/7 - 1/(3 \cdot 7^3) + 1/(5 \cdot 7^5) - 1/(7 \cdot 7^7) + 1/(11 \cdot 7^{11}) + \dots) + 2 (3/79 - 3^3/(3 \cdot 79^3) + 3^5/(5 \cdot 79^5) - 3^7/(7 \cdot 79^7) - 3^9/(9 \cdot 79^9) - \dots))$$

$$\begin{aligned} \pi &= 12 (1/(1 \cdot 4) - 1/(3 \cdot 4^3) + 1/(5 \cdot 4^5) - 1/(7 \cdot 4^7) \dots) + 4 (5/(1 \cdot 99) - 5^3/(3 \cdot 99^3) + 5^5/(5 \cdot 99^5) - 5^7/(7 \cdot 99^7) + \dots) \\ \pi &= 8 (4/(1 \cdot 10) - 4^3/(3 \cdot 10^3) + 4^5/(5 \cdot 10^5) - 4^7/(7 \cdot 10^7) + \dots) + 4 (1/(1 \cdot 41) - 1/(3 \cdot 41^3) + 1/(5 \cdot 41^5) - 1/(7 \cdot 41^7) + \dots) \\ \pi &= 2 (1 + 1 \cdot 1/(2 \cdot 3) + 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3/(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) + 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5/(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7) + \dots) \\ \pi &= \sqrt{2} (1 + 1 \cdot 1/(2 \cdot 3) \cdot 1/2 + 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3/(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) \cdot 1/2^2 + 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5/(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7) \cdot 1/2^3 + \dots) \\ \pi &= 3 \sqrt[3]{3} (1 - 1/3 \cdot 3 + 1/5 \cdot 3^2 - 1/7 \cdot 3^3 + \dots) \\ \pi &= 4 \cdot 8/9 \cdot 24/25 \cdot 48/49 \cdot 80/81 \cdot 120/121 \cdot \dots \\ \pi &= 2 \cdot 4/3 \cdot 16/15 \cdot 36/35 \cdot 64/63 \cdot 100/99 \cdot \dots \end{aligned}$$
$$b(n) < 2\pi < a(n)$$


k	n	a <sub>k</sub>	b <sub>k</sub>	Abschätzung für π
0	6	$4\sqrt{3}$	6	$3 < \pi < 2\sqrt{3} = 3.46410$
1	12	$24(2-\sqrt{3})$	$6(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$3.10583 < \pi < 3.21539$
2	24	$48(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2)$		$3.13263 < \pi < 3.15966$
3	48			$3.13935 < \pi < 3.14609$
4	96			$3.14103 < \pi < 3.14271$
Näherung für 96-Eck				$223/71 = 3.14084... < \pi < 22/7 =$
3.14285...				

$$s_{2n} = \sqrt{[1/2 - 1/2 * \sqrt{(1 - (s_n)^2)}]} = s_n / \sqrt{[2 + 2 * \sqrt{(1 - (s_n)^2)}]}$$

Vielecke	Näherungswert	%-Fehler
4	1.834271240336	-41.61333303 %
8	2.597757685219	-17.31080469 %
16	2.911256719659	-7.33182049 %
32	3.041597524701	-3.18294381 %
64	3.097041612321	-1.41810369 %
128	3.121257179256	-0.64729825 %
256	3.132113364384	-0.30173515 %
512	3.137096859946	-0.14310556 %
1024	3.139431050200	-0.06880597 %
2048	3.140542375206	-0.0334314 %
4096	3.141078308488	-0.01637211 %
8192	3.141339297763	-0.00806457 %
16384	3.141467325169	-0.00398933 %
32768	3.141530466511	-0.00197948 %
65536	3.141561728744	-0.00098437 %
131072	3.141577250810	-0.00049029 %
262144	3.141584973287	-0.00024447 %
524288	3.141588820894	-0.000122 %
1048576	3.141590739878	-0.00006092 %
2097152	3.141591697666	-0.00003043 %
4194304	3.141592175957	-0.0000152 %
8388608	3.141592414890	-0.0000076 %



Die Oberfläche eines Kreises ist gleich der Fläche eines Rechtecks mit Katheten gleich dem Kreisradius bzw. dem Kreisumfang.



In Formeln:  $A = \frac{1}{2} \cdot R \cdot 2\pi R = \pi R^2$

### Satz 2

Die Oberfläche eines Kreises verhält sich zum Quadrat des Durchmessers wie 11 zu 14. Für  $R = 1$  wird:  $3 \frac{1}{7} : 4 = 22 : 28 = 11 : 14$

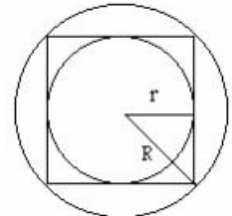
### Satz 3

Das Verhältnis von Umfang zum Durchmesser eines Kreises ist kleiner als  $3 \frac{1}{7}$  und größer als  $3 \frac{10}{71}$ .

### Cusanus-Algorithmus zur Berechnung der Zahl $\pi$

Nicolaus Cusanus (franz. Nicolas de Cues, eigentlich Nikolaus Krebs), um 1450:

Während Archimedes einem fest vorgegebenem Kreis zwei Polygone näherte, versuchte Cusanus einem Polygon zwei Kreise zu nähern. Damit verwendete er eine Reihe von regelmäßigen Polygonen mit festem Umfang. Diesen schrieb er dann einen Kreis ein und



um.

Den Umfang des Polygons mit  $2^n$  ( $n=2,3,4,5,\dots$ ) Seiten setzte er mit 2 fest. Da er dadurch den Umfang des Vielecks kannte, konnte er durch Erhöhung der Seitenanzahl die beiden Kreise an das Polygon annähern, und sich so dem Grenzwert  $\pi$  nähern.

Cusanus berechnete dann einfach den Umfang der ein- und umschriebenen Kreise ( $r$  = Radius eingeschrieben,  $R$  = Radius umschrieben,  $n$  = Iterationsschritt):

$$2 \cdot \pi \cdot r_n < 2 < 2 \cdot \pi \cdot R_n \text{ und somit } 1/r_n > \pi > 1/R_n$$

Für  $n=2$  wird  $R_2 = 1/4 \sqrt{2}$  und  $r_2 = 1/4$ . Cusanus fand die Iteration:

$$r_{n+1} = (R_n + r_n) / 2 \quad R_{n+1} = \sqrt{R_n \cdot r_n}$$

Damit ist das Cusanus-Verfahren dem archimedischen rechentechnisch überlegen.

### Cusanus-Algorithmus, Tabelle

... Seitenzahl des Polygons =  $2^n$ , Iterationsschritt =  $n$ , Intervallschachtelung und Abweichung

n	Intervall	$\pi$
2	2.82842712474619009760 ... 4.00000000000000000000	3.31370849898476039041
4	3.12144515225805228557 ... 3.18259787807452811059	3.15172490742925609847
6	3.14033115695475291232 ... 3.14411838524590426274	3.14222362994245684539
8	3.14151380114430107633 ... 3.14175036916896645911	3.14163208070318180572
10	3.14158772527715970063 ... 3.14160251025680894676	3.14159511774958905035
12	3.14159234557011774234 ... 3.14159326962930731079	3.14159280759964457653
14	3.14159263433856298910 ... 3.14159269209225437423	3.14159266321540841623
16	3.14159265238659134580 ... 3.14159265599619702627	3.14159265419139418500
18	3.14159265351459312016 ... 3.14159265374019347507	3.14159265362739329761
20	3.14159265358509323107 ... 3.14159265359919325325	3.14159265359214324216
22	3.14159265358949948800 ... 3.14159265359038073939	3.14159265358994011369
24	3.14159265358977487906 ... 3.14159265358982995727	3.14159265358980241816
26	3.14159265358979209100 ... 3.14159265358979553339	3.14159265358979381219
28	3.14159265358979316675 ... 3.14159265358979338190	3.14159265358979327432
30	3.14159265358979323398 ... 3.14159265358979324743	3.14159265358979324070
32	3.14159265358979323818 ... 3.14159265358979323902	3.14159265358979323860
34	3.14159265358979323845 ... 3.14159265358979323850	3.14159265358979323847
36	3.14159265358979323846 ... 3.14159265358979323846	3.14159265358979323846
38	3.14159265358979323846 ... 3.14159265358979323846	3.14159265358979323846

Nach 50 Iterationsschritten erreicht man eine Genauigkeit von 28 Dezimalstellen. Von Aitken wurde das Verfahren durch Einführung eines  $(\Delta^2)^2$ -Schrittes optimiert. Dann erhält man nach 50 Iterationen schon 87 exakte Nachkommastellen von  $\pi$ .

### Al-Kashi-Verfahren

Durch den arabischen Mathematiker Al-Kashi (gest. 1429) wurde 1424 in seinem Werk „Risala a-muhitiyya“ (Lehre vom Kreis) der bis dahin beste Näherungswert für die Kreiszahl ermittelt.

Ausgehend von einem Sechseck und der ihm schon bekannten Beziehung  $(2 \sin(x/2))^2 = 2 - \sqrt{4 - 4 \sin^2 x}$  gelangte er zu folgendem Näherungsverfahren:

$$C_0 = 1 \quad C_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - C_n^2}} \quad 3 \cdot 2^n \cdot C_n \rightarrow \pi \text{ für wachsende } n$$

Es gelang ihm einen auf 16 Dezimalen genauen Wert zu berechnen. Da er im Sechzigersystem rechnete, gab er in diesem System 10 Dezimale an:

$6^0 16^{15} 9^{11} 28^{11} 1^{14} 34^{15} 51^{16} 46^{14} 14^{18} 50^{19}$ . Der für diese Genauigkeit zugrundeliegende Kreis wäre 600000 mal größer als der Erdäquator! Die Tabelle enthält einige der durch dieses Verfahren erzeugten Näherungswerte. Die gültigen Ziffern sind durch ein Leerzeichen von



den ungültigen getrennt. Eine höhere Genauigkeit war bei dieser Berechnung mit der 192Bit-Arithmetik nicht zu erzielen:

n	C <sub>n</sub>
1	3.1 05828541230249148186786051488579940
2	3.1 32628613281238197161749469491736244
3	3.1 39350203046867207135146821208421189
4	3.141 031950890509638111352926459660107
5	3.141 452472285462075450609308961225645
10	3.141592 516692157447592874084768831905
20	3.141592653589 662682701706171090774719
25	3.141592653589793 110966783093031636870
30	3.141592653589793238 338135707214807701
35	3.141592653589793238462 521793752095955
40	3.141592653589793238462643 264539730518
45	3.141592653589793238462643383 163801597
47	3.14159265358979323846264338327 3407718

### Madhava-Reihe, Leibniz-Reihe für die Berechnung von $\pi$

Gottfried W. Leibnitz, 1682:

$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots + (-1)^{n-1}/(2n-1) + f(2n)$$

Fehlerabschätzungen (Madhava um 1400, Indien)

$$f_1(n) = 0,5 / n$$

$$f_2(n) = 0,5n / (n^2+1)$$

$$f_3(n) = (0,5n^2+2) / (n^3+5n)$$

Hinweis: Die Reihe wurde 1671 schon von J. Gregory (1638-1675) gefunden; deshalb auch Gregory-Reihe genannt. Darüber hinaus existieren Aufzeichnungen des indischen Mathematikers Madhava, der schon Jahrhunderte vor Gregory und Leibniz diese unendliche Reihe kannte.

Sie eignet sich nicht für die praktische Berechnung von einer großen Zahl von Dezimalstellen, da sie sehr langsam konvergiert. Über 500 Millionen Summanden müssen betrachtet werden, um wenigstens 6 Dezimalziffern von  $\pi$  exakt zu erhalten.

Herleitung: Polynomdivision liefert die geometrische Reihe für  $f'(x)$ :

$$f'(x) = 1 : (1 + x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \dots$$

Die zugehörige Stammfunktion ist unter Berücksichtigung von  $\arctan 0 = 0$

$$f(x) = \arctan x = x - 1/3 x^3 + 1/5 x^5 - 1/7 x^7 + 1/9 x^9 - \dots \quad \text{Satz von Gregory}$$

Da  $\tan 45^\circ = \tan \pi/4 = 1$ , ist  $\arctan 1 = \pi/4$  und somit

$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots + (-1)^{n-1}/(2n-1) + \dots$$

Als Leibniz diese Formel entdeckte, schwärmte er "numero deus impari gaudet" ("Gott freut sich der ungeraden Zahlen").

### Kettenbruch nach Euler (1739)

$$\pi/2 = 1 + 1/(1 + 1 \cdot 2/(1 + 2 \cdot 3/(1 + 3 \cdot 4/( \dots ))))$$

$$\pi = 2 + 2 \cdot 1/3 + 2 \cdot (1 \cdot 2)/(3 \cdot 5) + 2 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3)/(3 \cdot 5 \cdot 7) + \dots$$

### Gauß-Legendre-Verfahren

Iteratives Verfahren zur Bestimmung von  $\pi$

Ansatz:  $a = x = 1$ ,  $b = 1/\sqrt{2}$ ,  $c = 1/4$

Wiederhole

$$y = a; a = (a+b)/2; b = \sqrt{b \cdot y}; c = c - x \cdot (a-y)^2$$

$$x = 2 \cdot x$$

bis gewünschte Genauigkeit erreicht

Ergebnis  $\pi = (a+b)^2/(4c)$

Das Verfahren konvergiert sehr schnell gegen  $\pi$ . Mit einer 192bit-Genauigkeit wurden folgende Näherungswerte berechnet:

1	3,14057925052216824831133126897582331177344023751294834
2	3,14159264621354228214934443198269577431443722334560279
3	3,14159265358979323827951277480186397438122550483544694
4	3,14159265358979323846264338327950288419711467828364892
5	3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582

Der 6. Wert unterscheidet sich vom fünften nicht mehr.

### Vieta-Verfahren

Das von Vieta entwickelte unendliche Produkt  $2/\pi = \sqrt{2}/2 * \sqrt{2+\sqrt{2}}/2 * \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}/2 * \dots$

kann in einen Näherungsalgorithmus umgewandelt werden: Mit den Startwerten  $x_0 = 1$  und  $y_0 = \sqrt{2}$  wird mit

$$x_{k+1} = x_k y_k \quad y_{k+1} = \sqrt{(2y_k / (y_{k+1}))} \rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \pi/2$$



Die ersten Näherungswerte für  $\pi$  sind

Iteration	Näherungswert
1	2.82842712474619009760337744841939615713934375075389615
2	3.06146745892071817382767987224319093409075649988501633
3	3.1 2144515225805228557255789563235585484306588403127692
4	3.1 3654849054593926381425804443653906755637354136001815
5	3.14 033115695475291231711852433169013214370323364818689 ...
10	3.14159 142151119997399797176374083395574756265008618080
20	3.14159265358861823 661420859077240788498096290246722886
50	3.14159265358979323846264338327 848373255177129666664031
100	3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582

Der 100. Näherungswert gibt 52 korrekte Dezimalstellen.

Auf der Basis von Dreiecken, Sechsecken, Zwölfecken, ... erhält man als Näherungsformel

$$\pi = 3/2 \sqrt{3} \cdot 2/\sqrt{3} \cdot 2/\sqrt{(2+\sqrt{3})} \cdot 2/\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{3})})} \cdot \dots$$

Für Fünfecke, Zehnecke, Zwanzigecke, ... wird

$$\pi = 5/2 \sqrt{(3-\tau)} \cdot 2/\sqrt{(2+\tau)} \cdot 2/\sqrt{(2+\sqrt{(2+\tau)})} \cdot 2/\sqrt{(2+\sqrt{(2+(2+\tau)))})} \cdot \dots$$

mit  $\tau = (1+\sqrt{5})/2 = 1,618\dots$  (goldenes Verhältnis)

### Wurzelnäherungen für PI

Durch etwas Suchen erhält man eine einfache Näherung für  $\pi$  mittels ineinandergeschachtelter Wurzeln:

$$\sqrt{(7 + \sqrt{(6 + \sqrt{5})})} \approx 3,14163$$

nähert die Kreiszahl bis auf 3 Dezimalstellen.

$$\pi \approx 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971\ 69399\ 37510\dots$$

Allgemein sucht man nach Näherungstermen für  $\pi$  in der Form

$$\sqrt{(a_1 + \sqrt{(a_2 + \sqrt{(a_3 + \dots + \sqrt{a_n} \dots)})})})$$

Unter anderem findet man (Wert in Klammern gibt die erhaltene Stellenzahl von  $\pi$  an):

$\pi(1) = \sqrt{10}$	
$\pi(2) = \sqrt{(1 + \sqrt{79})}$	$\pi(2) = \sqrt{(2 + \sqrt{62})}$
$\pi(5) = \sqrt{(1 + \sqrt{(3 + \sqrt{5726})})}$	$\pi(5) = \sqrt{(1 + \sqrt{(41 + \sqrt{1419})})}$
$\pi(6) = \sqrt{(1 + \sqrt{(44 + \sqrt{1202})})}$	$\pi(5) = \sqrt{(1 + \sqrt{(47 + \sqrt{1003})})}$
$\pi(5) = \sqrt{(2 + \sqrt{(4 + \sqrt{3356})})}$	$\pi(5) = \sqrt{(2 + \sqrt{(26 + \sqrt{1291})})}$
$\pi(5) = \sqrt{(2 + \sqrt{(33 + \sqrt{837})})}$	$\pi(5) = \sqrt{(3 + \sqrt{(8 + \sqrt{1536})})}$
$\pi(5) = \sqrt{(3 + \sqrt{(21 + \sqrt{686})})}$	$\pi(5) = \sqrt{(4 + \sqrt{(11 + \sqrt{550})})}$
$\pi(10) = \sqrt{(1 + \sqrt{(1 + \sqrt{(5993 + \sqrt{1569})})})}$	$\pi(9) = \sqrt{(1 + \sqrt{(5 + \sqrt{(5286 + \sqrt{19952})})})}$
$\pi(10) = \sqrt{(1 + \sqrt{(37 + \sqrt{(1570 + \sqrt{27682})})})}$	$\pi(12) = \sqrt{(1 + \sqrt{(1 + \sqrt{(5663 + \sqrt{136612})})})}$
$\pi(12) = \sqrt{(1 + \sqrt{(2 + \sqrt{(122 + \sqrt{33134654})})})}$	$\pi(12) = \sqrt{(1 + \sqrt{(9 + \sqrt{(2989 + \sqrt{3477824})})})}$

Die Tabelle enthält alle Parameter  $a \neq 0$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$ , für die  $\sqrt{(a + \sqrt{(b + \sqrt{(c + \sqrt{d})})})}$  die Kreiszahl auf mindestens 12 Dezimalziffern nähert:

Die zweite Tabelle enthält alle Parameter  $a \neq 0$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  und  $e$ , für die  $\sqrt{(a + \sqrt{(b + \sqrt{(c + \sqrt{(d + \sqrt{e})})})})}$  von der Kreiszahl um maximal  $2,3713 \cdot 10^{-25}$  abweicht (vollständig untersucht November 2011):

Der genauesten Terme mit 5 Wurzelausdrücken

$$\sqrt{(1 + \sqrt{(13 + \sqrt{(167 + \sqrt{(12984060 + \sqrt{17651656409746})})})})} ; \text{ Abweichung } 1,87959 \cdot 10^{-29}$$

$$\sqrt{(1 + \sqrt{(1 + \sqrt{(2041 + \sqrt{(8986514 + \sqrt{48253045750399})})})})} ; \text{ Abweichung } 2,38068 \cdot 10^{-28}$$

$$\sqrt{(1 + \sqrt{(0 + \sqrt{(138 + \sqrt{(29638370 + \sqrt{48659419263516})})})})} ; \text{ Abweichung } 8,64432 \cdot 10^{-28}$$

$$\sqrt{(1 + \sqrt{(1 + \sqrt{(50 + \sqrt{(7959452 + \sqrt{774630113403085})})})})} ; \text{ Abweichung } 1,16508 \cdot 10^{-27}$$

nähern  $\pi$  auf 28, 27 und 26 Dezimalstellen an (gefunden 6. September 2011).

### Wurzelnäherungen für PI (2)

Bei der Suche nach Näherungstermen für

$$\pi \approx 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971\ 69399\ 37510\dots$$

in der Form  $\sqrt{(a_1 + \sqrt{(a_2 + \sqrt{(a_3 + \dots + \sqrt{a_n} \dots)})})})$

können auch einige der Parameter  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ , ... gleich Null werden.

Insbesondere wenn  $a_1 = 0$  ist, verändert sich der Term auf einen Ausdruck mit einer Wurzel höheren Grades.

Besonders genaue Terme mit höheren Wurzeln sind

$$\sqrt[4]{(2 + \sqrt{(71 + \sqrt{(61195248 + \sqrt{415339223644665})})})} ; \text{ Abweichung } 7,02016 \cdot 10^{-29} \text{ (28 Stellen!)}$$

$$\sqrt[4]{(1 + \sqrt{(1 + \sqrt{(21383431 + \sqrt{4223656848083439})})})} ; \text{ Abweichung } 7,55277 \cdot 10^{-29} \text{ (28 Stellen!)}$$

$$\sqrt[4]{(2 + \sqrt{(14 + \sqrt{(40266612 + \sqrt{1792793645352152})})})} ; \text{ Abweichung } 4,02839 \cdot 10^{-27}$$

$$\sqrt[4]{(1 + \sqrt{(42 + \sqrt{(29010563 + \sqrt{3203801323004517})})})} ; \text{ Abweichung } 5,27719 \cdot 10^{-27}$$

$$\sqrt[4]{(1 + \sqrt{(31677959 + \sqrt{2993591995171814})})} ; \text{ Abweichung } 4,79382 \cdot 10^{-26}$$

$$\sqrt[8]{(481 + \sqrt{(1455617 + \sqrt{1574502241714372})})} ; \text{ Abweichung } 7,56223 \cdot 10^{-29}$$

$$\sqrt[8]{(34 + \sqrt{(18643415 + \sqrt{5004818482987791})})} ; \text{ Abweichung } 2,34820 \cdot 10^{-28}$$

$$\sqrt[8]{(32 + \sqrt{(21128169 + \sqrt{4664590831386513})})} ; \text{ Abweichung } 2,45382 \cdot 10^{-27}$$

$$\sqrt[8]{(26 + \sqrt{(5524872 + \sqrt{7058456580436768})})} ; \text{ Abweichung } 2,50794 \cdot 10^{-27}$$

$$\sqrt[16]{(50754728 + \sqrt{1542721444026675})} ; \text{ Abweichung } 4,92548 \cdot 10^{-26}$$

nähern  $\pi$  auf 28, 27 bis 24 Dezimalstellen an (gefunden 7. August 2011).



### Wurzelnäherungen für PI (3)

Bei der Suche von Näherungstermen für  $\pi$  in der Form  $\sqrt{a + \sqrt{b + \sqrt{c + \sqrt{d + \sqrt{e}}}}}$  ergeben sich gute Näherungen nicht gleichmäßig verteilt. Mit  $a > 2$  findet man keine Terme, die höchstens um  $10^{-24}$  von  $\pi$  abweichen. Für alle möglichen Belegungen  $a = 1$  oder 2 und verschiedene Werte  $b$  ergeben sich für die Parameter  $a, b, c, d$  und  $e$  als beste Näherungen mit der aufsteigenden Abweichung  $\Delta$  von  $\pi$  (vollständig getestet für alle  $a \geq 1, b \geq 0$ ; November 2011):

$\Delta$ in $10^{-29}$	a	b	c	d	e
2	1	13	167	12984060	17651656409746
24	1	1	2041	8986514	48253045750399
83	1	3	129	19065064	150321662069340
86	1	0	138	29638370	48659419263516
213	1	19	334	4668778	32964718770147
232	1	14	7	627412	282402316850568
269	1	11	115	8077677	140458534927905
317	1	6	297	8456298	268405266595304
355	1	12	698	11250436	7776416858201
366	1	2	426	28040246	2846007222270
411	1	5	620	3023962	403435563272978
467	1	17	374	817334	119725238868160
615	1	8	407	8665610	153192350882330
654	1	7	357	12583468	105284851583229
660	1	9	158	11857915	103907264464854
733	1	21	945	443689	27296367542473
790	1	10	87	18489343	8609279265866
829	1	4	1066	8808523	132892266432882

Bei der Suche von Näherungstermen für  $\pi$  in der Form  $\sqrt{a + \sqrt{b + \sqrt{c + \sqrt{d + \sqrt{e}}}}}$  ergeben sich gute Näherungen nicht gleichmäßig verteilt. Mit  $a = 0$  findet man eine Vielzahl Terme, die höchstens um  $10^{-24}$  von  $\pi$  abweichen. Für die bisher untersuchten Belegungen  $a = 0$  und verschiedene Werte  $b$  ergeben sich für die Parameter  $b, c, d$  und  $e$  als beste Näherungen mit der aufsteigenden Abweichung  $\Delta$  von  $\pi$  (vollständig getestet für alle  $b \geq 30$ ; März 2012):

$\Delta$ in $10^{-29}$	a	b	c	d	e	gesucht für
5	0	0	2717	928651	2018253944949629	$0 \leq c \leq 2870$
7	0	2	71	61195248	415339223644665	$0 \leq c \leq 550$
8	0	1	1	21383431	4223656848083439	$0 \leq c \leq 1875$
11	0	6	14	35059140	1191873178912786	$0 \leq c \leq 440$
18	0	8	187	10190142	2576464053837084	$0 \leq c \leq 440$
28	0	12	233	22397686	754606509994517	$0 \leq c \leq 446$
28	0	19	45	8855535	806043072566567	$0 \leq c \leq 495$
31	0	4	407	16402545	2786876582779523	$0 \leq c \leq 467$
43	0	9	416	20183074	1195735126664158	$0 \leq c \leq 422$
59	0	34	100	154742	231564608147971	alle c
62	0	5	218	5913242	4011084523812656	$0 \leq c \leq 516$
67	0	7	142	5387861	3495412107055981	$0 \leq c \leq 466$
89	0	16	249	24607084	258483245664939	$0 \leq c \leq 551$
134	0	28	0	9321392	192879014583053	$0 \leq c \leq 178$
136	0	13	384	23116026	498344664943531	$0 \leq c \leq 536$
137	0	15	515	7144138	1039887071310966	$0 \leq c \leq 673$
141	0	18	175	3682208	1149518272302944	$0 \leq c \leq 494$
147	0	11	238	2029641	2522251253764026	$0 \leq c \leq 533$

Im Allgemeinen wird die Suche von Näherungstermen für  $\pi$  in der Form  $\sqrt{a + \sqrt{b + \sqrt{c + \sqrt{d + \sqrt{e}}}}}$  nur für natürliche Zahlen  $a, b, c, d$  und  $e$  durchgeführt.

Es ist aber durchaus möglich, dass auch negative Werte betrachtet werden. Dabei stellt man fest, dass die möglichen Belegungen der nicht negativen Parameter einen größeren Umfang besitzen und insgesamt sehr viele gute Näherungsterme für  $\pi$  mit einer Abweichung von weniger als  $10^{-24}$  gefunden werden können.

Für die wenigen bisher (Dezember 2011) untersuchten Belegungen mit negativen  $a$  bzw.  $b$  ergeben sich für die Parameter  $a, b, c, d$  und  $e$  als beste Näherungen mit der aufsteigenden Abweichung  $\Delta$  von  $\pi$ :

$\Delta$ in $10^{-29}$	a	b	c	d	e	gesucht für
8	-1	-3	0	68279995	21647739612745620	$0 \leq c \leq 2$
22	-2	-1	0	30225293	140681069960439353	$0 \leq c \leq 2$
33	-2	0	0	182402673	44771023848637997	$0 \leq c \leq 2$
329	-1	0	2	94609919	10037737402291649	$0 \leq c \leq 2$

667	-1	-1	2	20425221	32780342393499126	$0 \leq c \leq 3$
861	1	-3	2	674165	1917358681078630	$0 \leq c \leq 3$
884	-1	-2	2	40681514	28105750564023229	$0 \leq c \leq 3$
1449	0	-2	4	29796852	4594309888351483	$0 \leq c \leq 4$
1527	0	-3	1	17774727	7031081247849027	$0 \leq c \leq 3$
3558	0	-1	0	62645760	969753123640385	$0 \leq c \leq 3$
5939	1	-1	4	18114804	489406144880931	$0 \leq c \leq 11$
6578	2	-3	1	163495	309853833678242	$0 \leq c \leq 14$
10945	1	-2	11	4915665	1390584004198243	$0 \leq c \leq 24$
14270	2	-2	5	7128752	90917017233472	$0 \leq c \leq 8$

### Näherungsformeln für PI

Kochansky: ... die Wurzel des Polynoms

$$9x^4 - 240x^2 + 1492 \text{ wird zu } \pi \approx \sqrt{(40/3 - \sqrt{12})} = 3,141533...$$

Näherung über das Goldene Verhältnis  $\phi$

$$\pi \approx 6/5 \phi^2 = 6/5 (1/2 \cdot (\sqrt{5} + 1))^2 = 3/5 (3 + \sqrt{5}) = 3,14164...$$

Ramanujan:

$$\pi \approx 19 \sqrt{7} / 16$$

$$\pi \approx 7/3 (1 + 1/5 \sqrt{3})$$

$$\pi \approx 9/5 + \sqrt{9/5}$$

$$\pi \approx \sqrt[4]{102 - 2222/22^2}$$

Weitere Näherungen mit

$$\pi \approx 24/\sqrt{142} \ln(1/2 (\sqrt{(10+11\sqrt{2})} + \sqrt{(10+7\sqrt{2})})) \dots 15 \text{ Ziffern}$$

$$\pi \approx 12/\sqrt{190} \ln((3+\sqrt{10})(\sqrt{8}+\sqrt{10})) \dots 18 \text{ Ziffern}$$

$$\pi \approx 24/\sqrt{310} \ln(1/4 (3+\sqrt{5})(2+\sqrt{2})(5+2\sqrt{10}+\sqrt{(61+20\sqrt{10})})) \dots 23 \text{ Ziffern}$$

$$\pi \approx 4/\sqrt{522} \ln(((5+\sqrt{29})/\sqrt{2})^3 (5\sqrt{20}+11\sqrt{6})(1/2 \sqrt{(9+3\sqrt{6})} + 1/2 \sqrt{(5+3\sqrt{6})})^6) \dots 31 \text{ Ziffern}$$

Genauigkeit

### Irrationalität von PI

Satz:  $\pi^2$  ist eine irrationale Zahl.

Beweis: Es sei  $\pi^2 = p/q$ , wobei p und q positive ganzen Zahlen sind. Es wird folgende Funktion betrachtet

$$J(x) = q^n (\pi^{2n} P_n(x) - \pi^{2n-2} P_n''(x) + \pi^{2n-4} P_n^{(4)}(x) - \dots (-1)^n P_n^{(2n)}(x))$$

mit  $P_n$ ,  $J(0)$  und  $J(1)$  als natürliche Zahlen. Es ist aber

$$(J'(x) \sin \pi x - J(x) \pi \cos \pi x)' = (J''(x) + \pi^2 J(x)) \sin \pi x = q^n \pi^{2n} + 2 P_n(x) \sin \pi x = p^2 \pi^n P_n(x) \sin \pi x$$

und damit  $1/\pi [J'(x) \sin \pi x - J(x) \pi \cos \pi x]_0^1 = J(0) + J(1) = \pi p^n \int_0^1 P_n(x) \sin \pi x dx$

d.h. das Integral ist eine von Null verschiedene ganze Zahl. Als Grenzen für das Integral ergibt sich aber

$$0 < \pi p^n \int_0^1 P_n(x) \sin \pi x dx < \pi p^n / n! < 1$$

für großes n. Der Widerspruch ergibt, dass  $\pi^2$  irrational ist. Als Folgerung ergibt sich:  $\pi$  ist eine irrationalen Zahl.

### Kettenbrüche nach Brounker

Auf Lord Brounker (1620-1684) gehen weitere Kettenbrüche zur Berechnung von  $\pi$  zurück:

$$\pi = 4 - \frac{1}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \dots}}}}$$

$$\pi = 2 + \frac{2}{1 + \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{\frac{1}{4} + \dots}}}}$$

$$\pi = 2 + \frac{4}{3 + \frac{1 \times 3}{4 + \frac{3 \times 5}{4 + \frac{5 \times 7}{4 + \dots}}}}$$

$$\pi = 3 + \frac{1^2}{6 + \frac{3^2}{6 + \frac{5^2}{6 + \frac{7^2}{6 + \dots}}}}$$

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{3 + \frac{2^2}{5 + \frac{3^2}{7 + \frac{4^2}{9 + \dots}}}}$$

$$\frac{\pi}{2} = 1 - \frac{1}{3 - \frac{1}{1 - \frac{1 \times 2}{3 - \frac{1 \times 2}{3 - \frac{2 \times 3}{3 - \frac{2 \times 3}{3 - \frac{3 \times 4}{3 - \frac{3 \times 4}{3 - \frac{4 \times 5}{1 - \dots}}}}}}}}$$

$$\frac{6}{\pi^2 - 6} = 1 + \frac{1^2}{1 + \frac{1 \times 2}{1 + \frac{2^2}{1 + \frac{2 \times 3}{1 + \frac{3^2}{1 + \frac{3 \times 4}{1 + \dots}}}}}}$$

$$\frac{12}{\pi^2} = 1 + \frac{1^4}{3 + \frac{2^4}{5 + \frac{3^4}{7 + \frac{4^4}{9 + \dots}}}}$$

Newton-  
Formeln

$$\pi = 6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{4n+1} (n!)^2 (2n+1)}$$

$$\pi = 24 \left( \frac{\sqrt{3}}{32} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{4n+2} (n!)^2 (2n-1)(2n+3)} \right)$$

Katahiro-  
Formel  
(1664 -  
1739)

$$\forall r > 1 \quad U_0 = 4 \sin^2 \left( \frac{\pi}{2r} \right) \quad U_x = \frac{U_0 U_{x-1} (2x)^2}{(2x+1)(2x+2)} = \frac{U_0^{x+1} 2(2x)!^2}{(2x+2)!}$$

$$\pi = r \sqrt{\sum_{x=0}^{\infty} U_x}$$

Stirling-  
Formel

$$\frac{(n!)^2 e^{2n}}{2n^{2n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi$$

Leibniz-Formel 
$$\pi = 8 \left( \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \dots \right) = 8 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+3)}$$

Gauß-Formeln 
$$\pi = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \left( 12 \left( \frac{1}{18} \right)^{2n+1} + 8 \left( \frac{1}{57} \right)^{2n+1} - 5 \left( \frac{1}{239} \right)^{2n+1} \right)$$

$$\pi = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \left( 12 \left( \frac{1}{38} \right)^{2n+1} + 20 \left( \frac{1}{57} \right)^{2n+1} + 7 \left( \frac{1}{239} \right)^{2n+1} + 24 \left( \frac{1}{268} \right)^{2n+1} \right)$$

Gosper-Formel 
$$\pi = 3 + \frac{1}{60} \left( 8 + \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 8 \cdot 3} \left( 13 + \frac{3 \cdot 5}{10 \cdot 11 \cdot 3} \left( 18 + \frac{4 \cdot 7}{13 \cdot 14 \cdot 3} (\dots) \right) \right) \right)$$

### Gauß-Legendre-Verfahren

Iteratives Verfahren zur Bestimmung von  $\pi$

Ansatz:  $a=x=1$ ,  $b=1/\sqrt{2}$ ,  $c=1/4$

$y=a$ ;  $a=(a+b)/2$ ;  $b=\sqrt{(b \cdot y)}$ ;  $c=c-x \cdot (a-y)^2$   $x=2 \cdot x$  und Wiederholung

Ergebnis  $\pi = (a+b)^2/(4c)$

### Näherungsformeln für $\pi$

Kochansky: ... die Wurzel des Polynoms  $9x^4 - 240x^2 + 1492$  wird zu  $\pi \approx \sqrt{(40/3 - \sqrt{12})} = 3.141533...$

Näherung über das Goldene Verhältnis  $\phi$   $\pi \approx 6/5 \phi^2 = 6/5 (1/2 * (\sqrt{5} + 1))^2 = 3/5 (3 + \sqrt{5}) = 3.14164...$

### Ramanujan Näherungsformeln

	Zahlenwert	Ziffern
$6/5 \phi^2 = 3/5 (3 + \sqrt{5}) = 6/5 (1+\phi)$	3,14164	3
$19 \sqrt{7} / 16$	3,14182	3
$7/3 (1 + 1/5 \sqrt{3})$	3,141623	3
$\sqrt[4]{(102 - 2222/22^2)}$	3,14159265258	8
$\sqrt[4]{(97 + 1/2 - 1/11)}$	3,14159265258	8
$63/25 ((17 + 15\sqrt{5})/(7 + 15\sqrt{5}))$	3,14159265380	9
$355/113 (1 - 0,0003/3533)$	3,14159265358979432	14
$12/\sqrt{130} \ln(3+\sqrt{13})(\sqrt{8}+\sqrt{10})/2)$	3,14159265358979265	14
$24/\sqrt{142} \ln((\sqrt{(10+11\sqrt{2})} + \sqrt{(10+7\sqrt{2})})/2)$	3,14159265358979312	15
$12/\sqrt{190} \ln((3+\sqrt{10})(\sqrt{8} + \sqrt{10}))$	3,1415926535897932384190	19
$12/\sqrt{310} \ln(((3+\sqrt{5})(2+\sqrt{2})/4 (5+2\sqrt{10} + \sqrt{(61+20\sqrt{10})))$	3,141592653589793238462642088	23
$4/\sqrt{522} \ln(((5+\sqrt{29})/\sqrt{2})^3 (5\sqrt{29} + 11\sqrt{6})(\sqrt{(9+3\sqrt{6})/4}) + \sqrt{(5+3\sqrt{6})/4})^6]$	3,141592653589793238462643383279	30

### Castellanos Näherungsformeln

	Zahlenwert	Ziffern
$(2e^3+e^8)^{1/7}$	3,14171	3
$(533/312)^2$	3,141529	4
$(3/14)^4 (193/5)^2$	3,141575	4
$(296/167)^2$	3,14159704	5
$((66^3+86^2)/55^3)^2$	3,141592452	6
$(47^3+20^3)/30^3 - 1$	3,14159259259	6 (7.21)
$2 + \sqrt{(1+(413/750)^2)}$	3,141592649	7
$\sqrt[5]{(77729/254)}$	3,141592654111	8
$\sqrt[3]{(31+(62^2+14)/28^4)}$	3,14159265363	9
$(1700^3+82^3-10^3-9^3-6^3-3^3)/69^5$	3,14159265358817	11
$\sqrt[4]{(95+(93^4+34^4+17^4+88)/75^4)}$	3,14159265359037	10
$\sqrt[4]{(100-(2125^3+214^3+30^3+37^2)/82^5)}$	3,141592653589780419	13

### Plouffe Näherungsformeln

	Zahlenwert	Ziffern
$43^{7/23}$	3,1415398	4
$\ln(2198) / \sqrt{6}$	3,1415943	5
$(13/4)^{(1181/1216)}$	3,14159267809	7
$689/(396 \ln(689/396))$	3,14159259508	6
$\sqrt[4]{(2143/22)}$	3,14159265258	8
$\sqrt{(9/67)} \ln 5280$	3,14159265297	8
$\sqrt[3]{(63023/30510)} + 1/4 + 1/2 (\sqrt{5} + 1)$	3,141592653492	9
$48/23 \ln(60318/13387)$	3,1415926535949	10
$\sqrt[41]{(228 + 16/1329) + 2}$	3,141592653586778	11
$125/123 \ln(28102/1277)$	3,1415926535912	10
$\sqrt[158]{(276694819753963/226588) + 2}$	3,141592653589793238462649201	23
$\ln(262537412640768744 / \sqrt{163})$	3,1415926535897932384626433832797	30

### Näherungsformeln für PI

$\pi^2 / 16 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k/(k+1) (1+1/3+\dots+1/(2k+1))$  ... Knopp

$$\begin{aligned}\pi / 4 &= 3/4 + 1/(2 \cdot 3 \cdot 4) - 1/(4 \cdot 5 \cdot 6) + 1/(6 \cdot 7 \cdot 8) - \dots \text{ Nilakantha} \\ \pi / 2 &= 1 + 1/3 + (1 \cdot 2)/(3 \cdot 5) + (1 \cdot 2 \cdot 3)/(3 \cdot 5 \cdot 7) + \dots \text{ Euler} \\ \pi / 2 &= (1 \cdot 2)/(1 \cdot 3) + (1 \cdot 2 \cdot 3)/(1 \cdot 3 \cdot 5) + (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)/(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7) + \dots \\ \pi &= \sum_{k=1}^{\infty} (3^k - 1)/4^k \zeta(k+1) \dots \text{ Flajolet-Vardi} \\ \pi / 4 &= \sum_{k=1}^{\infty} \arctan(1/(k^2 + k + 1)) \dots \text{ Knopp} \\ 1 / \pi &= \sum_{k=1}^{\infty} 1/2^{k+1} \tan(\pi/2^{k+1}) \dots \text{ Euler} \\ \pi \sqrt{2} / 4 &= 1 + 1/3 - 1/5 - 1/7 + 1/9 + 1/11 - \dots \\ \pi \sqrt{3} / 6 &= 1 - 1/5 + 1/7 - 1/11 + 1/13 - 1/17 + \dots \\ \pi \sqrt{3} / 9 &= 1 - 1/2 + 1/4 - 1/5 + 1/7 - 1/8 + \dots \\ \pi \sqrt{3} / 6 &= \sum_{k=0}^{\infty} -1/k / (3^k (2k+1)) \dots \text{ Sharp}\end{aligned}$$

### 1984 Morris Newman, Daniel Shanks

$$\begin{aligned}a &= 1071/2 + 92 \sqrt{(34)} + 3/2 \sqrt{(255349 + 43792 \sqrt{(34)})} \\ b &= 1553/2 + 133 \sqrt{(34)} + 1/2 \sqrt{(4817509 + 826196 \sqrt{(34)})} \\ c &= 429 + 304 \sqrt{2} + 2 \sqrt{(92218 + 65208 \sqrt{2})} \\ d &= 627/2 + 221 \sqrt{2} + 1/2 \sqrt{(783853 + 554268 \sqrt{2})} \\ |\pi - 6/\sqrt{(3502)} \ln(2abcd)| &< 7,4 \cdot 10^{-82}\end{aligned}$$

### Borchardt-Pfaff-Algorithmus

Ausgehend von in einen Kreis eingeschriebenen bzw. umschriebenen regelmäßigen N-Ecken konvergieren die Werte

$$b_{n+1} = 2a_n b_n / (a_n + b_n) \quad a_{n+1} = \sqrt{(a_n b_{n+1})}$$

gegen die Kreiszahl  $\pi$ . Als Startwerte werden

$$a_0 = 3 \quad \text{halber Umfang des eingeschriebenen 6-Ecks} \quad b_0 = 2\sqrt{3} \quad \text{halber Umfang des umschriebenen 6-Ecks}$$

Dieser Algorithmus stellt eine Vereinfachung des Verfahrens von Archimedes dar. Pfaff war der Lehrer von Gauß. Für die ersten Näherungen ergibt sich:

n	a <sub>n</sub>	b <sub>n</sub>	n	a <sub>n</sub>	b <sub>n</sub>
1	3.105828542	3.215390310	2	3.132628614	3.159659942
3	3.139350204	3.146086216	4	3.141031952	3.142714600

Eine schnellere Konvergenz erreicht man mit

$$a_{n+1} = 3a_n b_n / (2b_n + a_n) \quad b_{n+1} = 3\sqrt{(a_n 2b_n)}$$

n	a <sub>n</sub>	b <sub>n</sub>
1	3.140237344	3.147345190
2	3.141509994	3.141927919

### Brent-Salamin-Verfahren / Gauß -Salamin-Verfahren

Sind a,b positive reelle Zahlen und wird sukzessive

$$a_{n+1} = (a_n + b_n) / 2 \quad b_{n+1} = \sqrt{(a_n \cdot b_n)}$$

gebildet, so streben beide Folgen gegen einen gemeinsamen Grenzwert, das

#### arithmetisch-geometrische Mittel AGM(a,b)

Es gilt:  $AGM(a,b) = \pi/2 I(a,b)$ , I ... elliptisches Integral

$$I(a,b) = \int_0^{\pi/2} 1/\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} \cdot d\theta$$

Mit a=1, b=1/√2 und M=AGM(1, 1/√2) wird

$$\pi = 4M^2/[1 - 2^0(a_0 - b_0)^2 - 2^1(a_1 - b_1)^2 - 2^2(a_2 - b_2)^2 - 2^3(a_3 - b_3)^2 - \dots]$$

d.h. die Folge der Zahlen

$$4 M^2 / [1 - \sum_{k=1}^{\infty} 2^k (a_k - b_k)^2]$$

konvergiert quadratisch gegen  $\pi$ . Der Algorithmus wurde 1976 zuerst von Eugene Salamin angegeben und im gleichen Jahr, unabhängig von Salamin, durch Richard Brent entdeckt. Die ersten Iterationen sind

$$\begin{aligned}p_1 &= 3.1(876...) & p_2 &= 3.141(680...) \\ p_3 &= 3.141592653(895...) \\ p_4 &= 3.14159265358979323846(636...)\end{aligned}$$

p<sub>30</sub> gibt die Kreiszahl  $\pi$  schon auf über 1 Milliarde Ziffern genau an.

### Borwein-Algorithmus

Durch die Brüder Jonathan und Peter Borwein wurde 1984 ein weiterentwickelter Algorithmus veröffentlicht. Mit den Startwerten  $x_0 = \sqrt{2}$ ,  $y_0 = 0$ ,  $a_0 = 2 + \sqrt{2}$  wird berechnet

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= 1/2 (\sqrt{x_k} + 1/\sqrt{x_k}) \\ y_{k+1} &= \sqrt{x_k} (y_k + 1) / (y_k + x_k) \\ a_{k+1} &= a_k y_{k+1} (x_{k+1} + 1) / (y_{k+1} + 1)\end{aligned}$$

Für diese Berechnung wird dann  $|a_k - \pi| < 10^{-2^k}$ . Damit liegt eine quadratische Konvergenz vor. Die ersten Iterationen sind

$$a_1 = 3,14(260...) \quad a_2 = 3,1415926(609...)$$

#### Die Ecke

#### Pi mal Daumen

TOKIO, 4. August (ap). Zwei japanische Mathematiker haben am Freitag einen neuen Weltrekord für die Berechnung der Zahl Pi bekanntgegeben. Wie Yasumasa Kaneda und Dai-suke Takahashi von der Universität Tokio erklärten, berechneten sie die Zahl, die das Verhältnis des Kreisumfangs zum Durchmesser angibt, auf 3,22 Milliarden Dezimalstellen genau.

Wissenschaftler der US-amerikanischen Columbia-Universität hielten den alten Rekord mit 2,26 Milliarden Stellen.

Professor Kaneda sagte, seine Gruppe habe einen Großcomputer benutzt, um zwei verschiedene Formeln durchrechnen zu lassen. Für die erste habe der Rechner 36 Stunden und 52 Minuten gebraucht, für die andere 53 Stunden und 43 Minuten. Mathematiker sind der Meinung, daß Pi unzählige viele Dezimalstellen hat.

Die präzise Berechnung der Kreiszahl hat keinerlei praktischen Wert.

Frankfurter Rundschau vom 5.8.1995

$$a_3 = 3,141592653589793238(645\dots)$$

## 2.Algorithmus

$$y_{k+1} = (1 - \sqrt{(1 - y_k^2)}) / (1 + \sqrt{(1 - y_k^2)})$$

$$a_{k+1} = (1 + y_{k+1})^2 a_{k-2}^{k+1} y_{k+1}$$

mit  $y_0 = 1/\sqrt{2}$  ;  $a_0 = 1/2$

ergibt mit quadratischer Konvergenz

$$1/a_1 = 2,9142135623730950488016887\dots$$

$$1/a_2 = 3,14(057\dots)$$

$$1/a_3 = 3,1415926(462\dots)$$

$$1/a_4 = 3,141592653589793238(279\dots)$$

$1/a_5$  hat 40 korrekte Ziffern,  $1/a_6$  84 korrekte Ziffern ...

## Borwein-Verfahren höherer Ordnung

Durch J.M. Borwein and P.B. Borwein wurden in "Ramanujan and Pi", Scientific American 1988, und "Ramanujan, Modular Equations, and Approximations to Pi or How to Compute One Billion Digits of Pi", The American Mathematical Monthly 1989, Algorithmen zur Berechnung von  $\pi$  mit kubischer Konvergenzgeschwindigkeit und noch höherer Ordnung angegeben:

## Kubischer Algorithmus

$$x_{k+1} = 3 / (1 + 2(1 - y_k^3)^{1/3}) \quad y_{k+1} = (x_{k+1} - 1)/2$$

$$a_{k+1} = x_{k+1}^2 a_{k-3}^k (x_{k+1}^2 - 1)$$

mit  $y_0 = (\sqrt[3]{3} - 1)/2$  ;  $a_0 = 1/3$  ergibt  $\lim_{k \rightarrow \infty} 1/a_k = \pi$

Werte  $1/a_1 = 3,14159(058\dots)$   $1/a_2 = 3,141592653589793238462(359\dots)$

$1/a_3$  hat 70 korrekte Stellen ...

## Algorithmus 4.Ordnung

$$y_{k+1} = (1 - (1 - y_k^4)^{1/4}) / (1 + (1 - y_k^4)^{1/4})$$

$$a_{k+1} = (1 + y_{k+1})^4 a_{k-2}^{2k+3} y_{k+1} (1 + y_{k+1} + y_{k+1}^2)$$

mit  $y_0 = \sqrt{2} - 1$  ;  $a_0 = 6 - 4\sqrt{2}$

Werte  $1/a_1 = 3,1415926(462\dots)$

$$1/a_2 = 3,1415926535897932384626433832795028841971(146\dots)$$

## Algorithmus 5.Ordnung

$$y_{k+1} = 25 / (y_k (c + a/c + 1)^2) \quad a = 5/y_k - 1$$

$$b = (a - 1)^2 + 7 \quad c = (1/2 a (b + \sqrt{(b^2 - 4a^3)}))^{1/5}$$

$$\alpha_{k+1} = y_{k+1}^2 \alpha_{k-5}^k (1/2 (y_{k+1}^2 - 5) + \sqrt{(y_{k+1} (y_{k+1}^2 - 2y_{k+1} + 5))})$$

mit  $y_0 = 5(\sqrt{5} - 2)$  ;  $\alpha_0 = 1/2$

Werte  $1/\alpha_1 = 3,1415(369\dots)$

$$1/\alpha_2 = 3,141592653589793238462643383279(351\dots)$$

## Algorithmus 9.Ordnung

$$\alpha_0 = 1/3 ; s^*_1 = (\sqrt{3} - 1)/2 ; s_1 = \sqrt[3]{1 - (s^*_1)^3}$$

$$s_{n+1} = (1 - s^*_n)^3 / ((t + 2u)(t^2 + tu + u^2))$$

mit  $t = 1 + 2s^*_n$  ;  $u = \sqrt[3]{9 s^*_n (1 + s^*_n + (s^*_n)^2)}$  ;  $s_{n+1} = \sqrt[3]{1 - (s^*_n)^3}$

$$m = 27 (1 + s_n + s_n^2) / (t^2 + tu + u^2)$$

$$\alpha_n = m \alpha_{n-1} + 3 \cdot 9^{n-2} (1 - m) \text{ strebt für } n \rightarrow \infty \text{ gegen } 1/\pi$$

## hexadezimaler Algorithmus; 16.Ordnung

$$\alpha_0 = 1/3 ; s_1 = \sqrt{2} - 1 ; s^*_1 = \sqrt[4]{1 - (s_1)^4}$$

$$s_{n+1} = (1 - s^*_n)^4 / ((t + u)^2(t^2 + u^2))$$

mit  $m_1 = ((1 + a_n)/t)^4$  ;  $m_2 = 1/t^4$  ;  $t = 1 + s^*_n$

$$u = \sqrt[4]{8 s^*_n (1 + (s^*_n)^2)} ; s^*_n = \sqrt[4]{1 - (s_n)^4}$$

$$\alpha_n = 16m_1 \alpha_{n-1} + 4^{2n-1}/3 (1 - 12m_2 - 4m_1) \text{ strebt für } n \rightarrow \infty \text{ gegen } 1/\pi$$

## Algorithmus

$$\pi = 1/\sqrt{(-C^3) (\sum_{n=0}^{\infty} ((6n)! (A+nB))/((3n)! (n!)^3 C^{3n}))^{-1}}$$

mit  $A = 63365028312971999585426220 + 28337702140800842046825600 \cdot \sqrt{5} + 384 \cdot \sqrt{5} \cdot$

$$\sqrt{(10891728551171178200467436212395209160385656017 +$$

$$4870929086578810225077338534541688721351255040 \cdot \sqrt{5})$$

$$B = 7849910453496627210289749000 + 3510586678260932028965606400 \cdot \sqrt{5} + 2515968 \cdot$$

$$\sqrt{(3110) \cdot \sqrt{(6260208323789001636993322654444020882161 +$$

$$2799650273060444296577206890718825190235 \cdot \sqrt{5})$$

$$C = -214772995063512240 - 96049403338648032 \cdot \sqrt{5} - 1296 \cdot \sqrt{5} \cdot$$

$$\sqrt{(10985234579463550323713318473 + 4912746253692362754607395912 \cdot \sqrt{5})}$$

Anmerkung: Dieser Algorithmus wird von den Borweins als "nicht ganz ernst gemein" eingestuft. Aber, er ist korrekt!

## Beeler-Verfahren

Durch Beeler wurde 1972 ein Verfahren zur Berechnung von  $\pi$  mit kubischer Konvergenzgeschwindigkeit angegeben. Dabei wird mit einem schon bekannten Näherungswert  $a_0$  für  $\pi$  begonnen.  $a_{k+1} = a_k + \sin a_k$   
 Zum Beispiel ergibt der Archimedische Näherungswert

$$a_0 = 22/7 \quad a_1 = 3,141592653(926...)$$

$$a_2 = 3,1415926535897932384626433832(858...)$$

$a_3$  hat 83 korrekte Ziffern.

Analog können auch Verfahren mit Konvergenzordnungen höher als 3 aufgebaut werden:

5.Ordnung  $a_{k+1} = a_k + \sin a_k + 1/6 \sin^3 a_k$

7.Ordnung  $a_{k+1} = a_k + \sin a_k + 1/6 \sin^3 a_k + 3/40 \sin^5 a_k$

9.Ordnung  $a_{k+1} = a_k + \sin a_k + 1/6 \sin^3 a_k + 3/40 \sin^5 a_k + 5/112 \sin^7 a_k$

Für eine effektive numerische Berechnung ist die Tangensfunktion besser geeignet als die Sinusfunktion:

3.Ordnung  $a_{k+1} = a_k - \tan a_k$

5.Ordnung  $a_{k+1} = a_k - \tan a_k + 1/3 \tan^3 a_k$

7.Ordnung  $a_{k+1} = a_k - \tan a_k + 1/3 \tan^3 a_k - 1/5 \tan^5 a_k$

9.Ordnung  $a_{k+1} = a_k - \tan a_k + 1/3 \tan^3 a_k - 1/5 \tan^5 a_k + 1/7 \tan^7 a_k$

Nutzt man die letzte Formel mit dem Anfangswert  $a_0 = 355/113$ , so ergibt eine Iteration 60 korrekte Stellen von  $\pi$ .

In der Praxis erweist sich die Berechnung der Sinus- bzw. Tangenswerte als schwierig, so dass die Formeln vor allem theoretische Bedeutung besitzen.

## Ramanujan-Verfahren

Aus der Entwicklung von Modulargleichungen gewinnt man:

$$\pi = \frac{9801}{\sqrt{8}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)! (1103 + 26390n)}{(n!)^4 (396)^{4n}} \right)^{-1}$$

Anmerkung: ein vollständiger Beweis, dass diese Reihe tatsächlich gegen  $1/\pi$  konvergiert existiert noch nicht !!

## Verfahren 2

Ansatz:  $r=2$  ;  $a_0 = \sqrt{2} - 1$  ;  $y_0 = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)}$

Iterationsvorschrift:  $y_{n+1} = (1 - \sqrt[4]{1 - y_n^4}) / (1 + \sqrt[4]{1 - y_n^4})$

$$a_{n+1} = (1 + y_{n+1})^4 * a_n - 4^{n+1} * \sqrt{r} * y_{n+1} * (1 + y_{n+1} + y_{n+1}^2) \rightarrow \pi = 1 / a_n$$

## Pascal-Text

var s,f,h:extended; i,k:integer;

function fak(x:integer):extended; // Hilfsprozedur zur Berechnung von x!

var y:integer; z:extended;

begin if x=0 then fak:=1 else begin z:=1; for y:=1 to x do z:=z\*y; fak:=z; end; end;

begin s:=0; {maximal 5 Durchläufe, da dann maximale Genauigkeit erreicht}

for i:=0 to 5 do begin

f:=1; for k:=1 to 4\*i do f:=k\*f;

for k:=1 to i do f:=f/i/i/i; f:=f\*(1103+26390\*i);

if i<>0 then begin

for k:=1 to 4\*i do begin f:=f/2; f:=f/2; f:=f/3; f:=f/3; f:=f/11;

end; end; s:=s+f;

writeln('Pi ~ ',9801/sqrt(8)/s:24:25,' % Fehler ',100\*(9801/sqrt(8)/s-pi)/pi);

end; end.

## Chudnovsky-Verfahren

Weiterentwicklung des Ramanujan-Verfahrens ergibt

$$426880 \sqrt{10005} / \pi = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (6n)! (545140134 n + 13591409) / [(n!)^3 (3n)! (640320)^{3n}]$$

## Pascal-Text

var y:integer; z:extended; s,f,h:extended; i,k:integer;

begin s:=0; for i:=0 to 5 do begin f:=1;

for k:=3\*i+1 to 6\*i do f:=k\*f; for k:=1 to i do f:=f/i/i/i;

f:=f\*(13591409+545140134\*i); if i<>0 then begin for k:=1 to 3\*i do begin

f:=f/2; f:=f/2; f:=f/2; f:=f/2; f:=f/2; f:=f/2;

f:=f/3; f:=f/5; f:=f/667; end; end; if odd(i) then s:=s-f else s:=s+f;

writeln('Pi ~ ',426880\*sqrt(10005)/s:24:25,' % Fehler ',100\*(426880\*sqrt(10005)/s-pi)/pi);

end; end.



## Bellard-Borwein-Algorithmus

1997: am schnellsten konvergierende Näherungsformel für  $\pi$

$$740025 * \pi = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 P(n)}{(\binom{7n}{2n} 2^{n-1})} \right) - 20379280$$



mit  $P(n) = -885673181 n^5 + 3125347237 n^4 - 2942969225 n^3 + 1031962795 n^2 - 196882274 n + 10996648$

Mit dieser Formel ermittelte am 22. Oktober 1997 Fabrice Bellard (Abbildung, geb. 1973) auf mehr als 20 Hi-Tech Workstations die Kreiszahl  $\pi$  auf 1 Billion Binärstellen genau. Der ganze Rechenprozess dauerte etwas weniger als einen Monat und wurde danach noch einmal mit einem etwas variierten und optimierten Code durchgeführt, um die Berechnungen zu überprüfen. Damit fand man, dass die 1 Billionste binäre Stelle von  $\pi$  eine 1 ist.

Die Bellardsche Formel wurde ausgehend von einer hypergeometrischen Reihe komplexer Zahlen

entwickelt. Eine einfachere Variante ist 
$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} \left( \frac{2}{4k+1} + \frac{2}{4k+2} + \frac{1}{4k+3} \right)$$
. Schon für wenige summierte  $k = 0, \dots, n$  strebt der Wert sehr schnell gegen  $\pi$ .

n Näherungswert

1 109 / 35  $\approx$  3.1142857142857142857

2 87217 / 27720  $\approx$  3.1463564213564213564

10 69263381437243280369341 / 22047218913402696499200  $\approx$  3.1415926747630499203 (Fehler kleiner  $10^{-7}$ )

100  $\approx$  3.1415926535897932384 (Fehler kleiner  $10^{-29}$ )

Für die ersten 1000 Summanden liegt die Abweichung des Näherungswertes von  $\pi$  schon unter  $10^{-600}$ .

Eng verbunden mit dem Verfahren sind die von Reynolds gefundenen Summen:

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad S_k = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \right)^k$$

Für diese erhält man

$$S_4 = 2\pi^4 / (2^5 3!)$$

$$S_8 = 272\pi^8 / (2^9 6!)$$

$$S_1 = \pi/4$$

$$S_5 = 5\pi^5 / (2^6 4!)$$

$$S_9 = 1385\pi^9 / (2^{10} 7!)$$

$$S_2 = \pi^2/8$$

$$S_6 = 16\pi^6 / (2^7 5!)$$

$$S_{10} = 7936\pi^{10} / (2^{11} 8!)$$

$$S_3 = \pi^3/32 = \pi^3/(2^4 2!)$$

$$S_7 = 61\pi^7 / (2^8 6!)$$

## Tröpfchenalgorithmus zur Berechnung von Ziffern von $\pi$

### Bailey-Plouffe-Algorithmus

1996 entdeckten David H. Bailey, Peter Borwein und Simon Plouffe eine neue Formel zur Berechnung von  $\pi$ :

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i} \left( \frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6} \right)$$

Für Summierung bis 0,1,2,... ergeben sich die Näherungswerte 47 / 15, 102913 / 32760, 615863723 / 196035840, 357201535487 / 113700787200, 16071212445820879 / 5115625817702400, 40413742330349316707 / 12864093722915635200, 4318127540987083098959311 / 1374502686106089789849600 = 3.1415926535728808...

Diese Formel erlaubt es auf einfache Weise, die n-te Stelle einer binären oder hexadezimalen Darstellung von  $\pi$  zu berechnen, ohne dass man zuvor die n-1 vorherigen Ziffernstellen berechnen muss.

Dieses neue Verfahren ist damit eine Sensation, da damit offenbar jede noch so "weit entfernte" Dezimalstelle "tröpfchenweise" von  $\pi$  ermittelt werden kann. Im Jahr 2000 wurde dieser Algorithmus von "Computing in Science and Engineering" zu einem der 10 besten Algorithmen des 20. Jahrhunderts gewählt.

Als g-adische Zahl zur Basis 16 beginnt  $\pi$  mit

**3, 243F6A8885A308 ...**

David H. Bailey 2000-03-28 : Quelltext des Tröpfchenalgorithmus für  $ic < 2^{24}$

```
main() {
    double pid, s1, s2, s3, s4; double series (int m, int n);
    void ihex (double x, int m, char c[]);
    int ic = 1000000;
    #define NHX 16 char chx[NHX];
    s1 = series (1, ic - 1); s2 = series (4, ic - 1); s3 = series (5, ic - 1); s4 = series (6, ic - 1);
    pid = 4. * s1 - 2. * s2 - s3 - s4; pid = pid - (int) pid + 1.;
    ihex (pid, NHX, chx); printf (" start position = %i\n hex digits = %10.10s\n", ic, chx); }
void ihex (double x, int nhx, char chx[])
{ int i; double y; char hx[] = "0123456789ABCDEF";
  y = fabs (x); for (i = 0; i < nhx; i++){ y = 16. * (y - floor (y)); chx[i] = hx[(int) y]; } }
double series (int m, int ic)
{ int k; double ak, eps, p, s, t; double expm (double x, double y);
  #define eps 1e-17 s = 0.;
  for (k = 0; k < ic; k++){ ak = 8 * k + m; p = ic - k; t = expm (p, ak); s = s + t / ak; s = s - (int) s; }
  for (k = ic; k <= ic + 100; k++){ ak = 8 * k + m; t = pow (16., (double) (ic - k)) / ak;
    if (t < eps) break; s = s + t; s = s - (int) s; } return s; }
double expm (double p, double ak)
{ int i, j; double p1, pt, r; #define ntp 25 static double tp[ntp]; static int tp1 = 0;
  if (tp1 == 0) { tp1 = 1; tp[0] = 1.; for (i = 1; i < ntp; i++) tp[i] = 2. * tp[i-1]; }
  if (ak == 1.) return 0.;
  for (i = 0; i < ntp; i++) if (tp[i] p) break; pt = tp[i-1]; p1 = p; r = 1.;
```

```

for (j = 1; j <= i; j++){ if (p1 = pt){ r = 16. * r; r = r - (int) (r / ak) * ak; p1 = p1 - pt; }
pt = 0.5 * pt; if (pt = 1.){ r = r * r; r = r - (int) (r / ak) * ak; } }
return r; }

```

### Weitere Plouffe-Formeln

$$\begin{aligned}
\forall r \in \mathbb{C} \quad \pi &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i} \left( \frac{4+8r}{8i+1} - \frac{8r}{8i+2} - \frac{4r}{8i+3} - \frac{2+8r}{8i+4} - \frac{1+2r}{8i+5} - \frac{1+2r}{8i+6} + \frac{r}{8i+7} \right) \\
\pi &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{4^i} \left( \frac{2}{4i+1} + \frac{2}{4i+2} + \frac{1}{4i+3} \right) \\
\pi^2 &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i} \left( \frac{16}{(8i+1)^2} - \frac{16}{(8i+2)^2} - \frac{8}{(8i+3)^2} - \frac{16}{(8i+4)^2} - \frac{4}{(8i+5)^2} - \frac{4}{(8i+6)^2} - \frac{2}{(8i+7)^2} \right) \\
\frac{\pi^3}{360} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3 \sinh(n\pi)} \\
\pi\sqrt{2} &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{8^i} \left( \frac{4}{6i+1} + \frac{1}{6i+2} + \frac{1}{6i+3} \right) \\
\pi^2 &= \frac{9}{8} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{64^i} \left( \frac{16}{(6i+1)^2} - \frac{24}{(6i+2)^2} - \frac{8}{(6i+3)^2} - \frac{6}{(6i+4)^2} - \frac{1}{(6i+5)^2} \right) \\
\pi^2 &= \frac{2}{27} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{729^n} \left( \frac{243}{(12n+1)^2} - \frac{405}{(12n+2)^2} - \frac{81}{(12n+4)^2} - \frac{27}{(12n+5)^2} - \frac{72}{(12n+6)^2} - \frac{9}{(12n+7)^2} - \frac{9}{(12n+8)^2} - \frac{5}{(12n+10)^2} + \frac{1}{(12n+11)^2} \right)
\end{aligned}$$

### Ramanujan-Formeln

Ramanujan ist einer der faszinierendsten Mathematiker aller Zeiten. Die nachfolgenden Formeln für  $\pi$  wurden von ihm „gesehen“. Der exakte Nachweis ist teilweise bis heute noch nicht gelungen.

$$\prod_{i=0}^{n-1} (x+i) = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} = x(x+1)\dots(x+n-1)$$

Hinweis zur Schreibweise: Der Ausdruck  $(x)_n$  bedeutet das Produkt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((2n)!)^3 (42n+5)}{2^{12n+4} (n!)^6} & \pi &= 4 \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (4n)! (1123+21460n)}{2^{10n+1} (n!)^4 (441)^{2n+1}} \right)^{-1} & \pi &= \frac{9801}{\sqrt{8}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)! (1103+26390n)}{(n!)^4 (396)^{4n}} \right)^{-1} \\
\pi &= 4 \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6n+1) \left(\frac{1}{2}\right)_n}{4^n (n!)^3} \right)^{-1} & \pi &= 32 \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(42\sqrt{5}n+5\sqrt{5}+30n-1) \left(\frac{1}{2}\right)_n}{64^n (n!)^3} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{8n} \right)^{-1} \\
\pi &= \frac{27}{4} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(15n+2) \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{3}\right)_n \left(\frac{2}{3}\right)_n}{(n!)^3} \left(\frac{2}{27}\right)^n \right)^{-1} & \pi &= \frac{15\sqrt{3}}{2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(33n+4) \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{3}\right)_n \left(\frac{2}{3}\right)_n}{(n!)^3} \left(\frac{4}{125}\right)^n \right)^{-1} \\
\pi &= \frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(11n+1) \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n}{(n!)^3} \left(\frac{4}{125}\right)^n \right)^{-1} & \pi &= \frac{85\sqrt{85}}{18\sqrt{3}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(133n+8) \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n}{(n!)^3} \left(\frac{4}{85}\right)^n \right)^{-1} \\
\pi &= \frac{4}{\sqrt{3}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (28n+3) \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 3^n 4^{n+1}} \right)^{-1} & \pi &= 4 \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (20n+3) \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 2^{2n+1}} \right)^{-1} \\
\pi &= \frac{4}{\sqrt{5}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (644n+41) \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 5^n 72^{2n+1}} \right)^{-1} & \pi &= 4 \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (260n+23) \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 18^{2n+1}} \right)^{-1} \\
\pi &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(10n+1) \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 9^{2n+1}} \right)^{-1} & \pi &= 2\sqrt{3} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(8n+1) \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 9^n} \right)^{-1} \\
\pi &= \frac{1}{3\sqrt{3}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(40n+3) \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 49^{2n+1}} \right)^{-1} & \pi &= \frac{2}{\sqrt{11}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(280n+19) \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 99^{2n+1}} \right)^{-1}
\end{aligned}$$

### $\pi$ und Fibonacci-Zahlen

Ausgehend von Eulers Formel für  $\pi$

$$\pi/4 = \arctan(1) = \arctan(1/2) + \arctan(1/3)$$

kann man versuchen, die Argumente 1/2 und 1/3 durch weitere Summanden zuersetzen. Es zeigt sich, dass

$$\begin{aligned}\arctan(1) &= \arctan(1/2) + \arctan(1/3) & \arctan(1/3) &= \arctan(1/5) + \arctan(1/8) \\ \arctan(1/8) &= \arctan(1/13) + \arctan(1/21) & \arctan(1/21) &= \arctan(1/34) + \arctan(1/55) \text{ usw.}\end{aligned}$$

gilt. Ersetzt man die entsprechenden Terme, wird

$$\begin{aligned}\pi/4 = \arctan(1) &= \arctan(1/2) + \arctan(1/3) = \arctan(1/2) + \arctan(1/5) + \arctan(1/8) = \\ &= \arctan(1/2) + \arctan(1/5) + \arctan(1/13) + \arctan(1/21) = \\ &= \arctan(1/2) + \arctan(1/5) + \arctan(1/13) + \arctan(1/34) + \arctan(1/55) = \dots\end{aligned}$$

Die Nenner der Brüche sind gerade die Fibonacci-Zahlen. Allgemein ist

$$\begin{aligned}\pi/4 &= \arctan(1/F_1) = \arctan(1/F_3) + \arctan(1/F_4) = \arctan(1/F_3) + \arctan(1/F_5) + \\ &\arctan(1/F_6) \\ &= \arctan(1/F_3) + \arctan(1/F_5) + \arctan(1/F_7) + \arctan(1/F_8) \\ &= \arctan(1/F_3) + \arctan(1/F_5) + \arctan(1/F_7) + \arctan(1/F_9) + \arctan(1/F_{10}) = \dots\end{aligned}$$

und  $\arctan(1/F_{2n}) = \arctan(1/F_{2n+1}) + \arctan(1/F_{2n+2})$  mit geradem n.

Für die Kreiszahl  $\pi$  gilt damit die unendliche Summe  $\pi/4 = \sum_{k=1}^{\infty} \arctan(1/F_{2k+1})$

sowie für die Fibonacci-Zahlen  $\arctan(1/F_{2k}) = \sum_{n=k}^{\infty} \arctan(1/F_{2n+1})$

### Kettenbruch $\pi$

Die Kreiszahl  $\pi$  ist mit Hilfe relativ aufwendiger Operationen in einen Näherungskettenbruch entwickelbar. Nachfolgender Kettenbruch nähert  $\pi$  auf 500 Dezimalstellen genau.

$\pi =$

[3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, 6, 6, 99, 1, 2, 2, 6, 3, 5, 1, 1, 6, 8, 1, 7, 1, 2, 3, 7, 1, 2, 1, 1, 12, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 8, 1, 1, 2, 1, 6, 1, 1, 5, 2, 2, 3, 1, 2, 4, 4, 16, 1, 161, 45, 1, 22, 1, 2, 2, 1, 4, 1, 2, 24, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 1, 10, 2, 5, 4, 1, 2, 2, 8, 1, 5, 2, 2, 26, 1, 4, 1, 1, 8, 2, 42, 2, 1, 7, 3, 3, 1, 1, 7, 2, 4, 9, 7, 2, 3, 1, 57, 1, 18, 1, 9, 19, 1, 2, 18, 1, 3, 7, 30, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 1, 2, 8, 1, 1, 2, 1, 15, 1, 2, 13, 1, 2, 1, 4, 1, 12, 1, 1, 3, 3, 28, 1, 10, 3, 2, 20, 1, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 5, 3, 2, 1, 6, 1, 4, 1, 120, 2, 1, 1, 3, 1, 23, 1, 15, 1, 3, 7, 1, 16, 1, 2, 1, 21, 2, 1, 1, 2, 9, 1, 6, 4, 127, 14, 5, 1, 3, 13, 7, 9, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 4, 1, 1, 3, 1, 1, 29, 3, 1, 1, 2, 2, 1, 3, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 10, 3, 1, 3, 1, 2, 1, 12, 1, 4, 1, 1, 1, 1, 7, 1, 1, 2, 1, 11, 3, 1, 7, 1, 4, 1, 48, 16, 1, 4, 5, 2, 1, 1, 4, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 2, 1, 2, 5, 20, 1, 1, 5, 4, 1, 436, 8, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 1, 2, 1, 3, 6, 11, 4, 3, 1, 1, 1, 2, 5, 4, 6, 9, 1, 5, 1, 5, 15, 1, 11, ... ]

Unter den Kettenbruchgliedern treten mit steigender Gliednummer auch größere Zahlen auf: 3.Glied = 15 ; 5.Glied = 292 ; 308.Glied = 436 ; 432.Glied = 20776 ; 28422.Glied = 78629 ; 156382.Glied = 179136 ; 267314.Glied = 528210  
Im März 2002 ermittelte H.Havermann 180 Millionen Glieder dieser Kettenbruchentwicklung.



### Lambertsche Näherungsbrüche für $\pi$

Transformiert man die Kettenbruchentwicklung von  $\pi$  Schritt für Schritt in einen gemeinen Bruch, so erhält man immer bessere Näherungsbrüche für die Kreiszahl.

Lambert entwickelte so eine Folge  $\pi$  immer genauer darstellender gemeiner Brüche. Zusätzlich gab er noch zwei nicht auf der Kettenbruchentwicklung beruhende Brüche an.

Die Liste enthält für die Näherungsbrüche Zähler, Nenner sowie den absoluten Fehler bzgl.  $\pi$ . Die Lambertsche Liste wurde um neun auf dem Kettenbruch beruhende Brüche erweitert. Der letzte Bruch gibt  $\pi$  auf mindestens 38 Dezimalziffern genau an.

Zähler	Nenner	Genauigkeit
3	1	-0.1416
22	7	1.26422*10 <sup>-3</sup>
333	106	-8.3486*10 <sup>-5</sup>
355	113	2.6676*10 <sup>-7</sup>
103993	33102	-5.7789*10 <sup>-10</sup>
104348	33215	3.3163*10 <sup>-10</sup>
208341	66317	-1.2236*10 <sup>-10</sup>
312689	99532	2.9143*10 <sup>-11</sup>
833719	265381	-8.7155*10 <sup>-12</sup>
1146408	364913	1.6107*10 <sup>-12</sup>
4272943	1360120	-4.0407*10 <sup>-13</sup>
5419351	1725033	2.2145*10 <sup>-14</sup>
80143857	25510582	-5.7909*10 <sup>-16</sup>
165707065	52746197	1.6408*10 <sup>-16</sup>
245850922	78256779	-7.8179*10 <sup>-17</sup>
411557987	131002976	1.9364*10 <sup>-17</sup>
1068966896	340262731	-3.0701*10 <sup>-18</sup>
2549491779	811528438	5.5137*10 <sup>-19</sup>
6167950454	1963319607	-7.6266*10 <sup>-20</sup>



gebildeten natürlichen Zahlen, die Primzahl sind. Dabei wird stets mit der ersten Ziffer "3" begonnen. Bekannt sind bis heute (Juli 2006):

3, 31, 314159, 31415926535897932384626433832795028841, ...

Die Anzahl der bekannten  $\pi$ -Primzahlziffern sind 1, 2, 6, 38, 16208, 47577, 78073. Die größte dieser Primzahlen wurde am 1. April 2006 und 13. Juli 2006 (Kontrolle) durch E.W. Weisstein gefunden. Bis  $n < 79718$  gibt es keine weitere.

Weitere Primzahlen bezüglich  $\pi$  findet man, wenn man den Term  $[\pi^n]$  untersucht, wobei darunter die größte ganze Zahl kleiner gleich  $\pi^n$  verstanden wird.

Für  $n = 1, 3, 4, 12, 73, 317, 2728, 6826, 7683, 7950, 14417, \dots$  ergeben sich die Primzahlen 3, 31, 97, 924269, ...

Untersucht man die größte ganze Zahl größer gleich  $\pi^n$ , so erhält man für  $n = 5, 29, 88, 948, 1071, 1100, 1578, \dots$  die primen Zahlen 307, 261424513284461, 56129192858827520816193436882886842322337671, ...

## Primzahlen in $\pi$

Durch Patrick De Geest wurde das Problem aufgestellt, welche  $k$ -stellige Primzahl zuerst in der Ziffernfolge von  $\pi$  auftritt und welche zuletzt. Zum Beispiel tritt die zweistellige Primzahl 41 schon an Position 2 auf, dagegen die 73, als letzte, erst an Position 299.

Durch Felice Russo und vor allem J.C. Colin wurden die "Gewinnerprimzahlen" und "Verliererprimzahlen" mit intensivem Computereinsatz ermittelt.

Länge	Gewinnerprimzahl (Position)	Verliererprimzahl (Position)
1	5 (4)	7 (13)
2	41 (2)	73 (299)
3	653 (7)	373 (5229)
4	4159 (2)	9337 (75961)
5	14159 (1)	35569 (715492)
6	358979 (9)	805289 (11137824)
7	1592653 (3)	9271903 (135224164)
8	28841971 (33)	

## $\pi$ im Dualsystem

Die Dezimalzifferfolge von  $\pi$  kann als  $p$ -adischer Bruch in jedem anderen Positionssystem dargestellt werden. Nachfolgend sind die ersten dualen Nachkommastellen der Kreiszahl dargestellt.

```
00100 10000 11111 10110 10101 00010 00100 00101 10100 01100 00100 01101 00110 00100
11000 11001 10001 01000 10111 00000 00110 11100 00011 10011 01000 10010 10010 00000
10010 01110 00001 00010 00101 00110 01111 10011 00011 10100 00000 01000 00101 11011
11101 01001 10001 11011 00010 01110 01101 10010 00100 10100 01010 01010 00001 00001
11100 11000 11100 01101 00000 00100 11011 10111 10111 11001 01010 00110 01101 10011
11001 10100 11101 00100 00110 00110 11001 10000 00101 01100 00101 00110 11011 11100
10010 11111 00010 10000 11011 10100 11111 11000 01001 10101 01101 10101 10110 10101
00011 10000 10010 00101 11100 10010 00010 11011 01010 11101 10011 00010 01011 11001
11111 01100 01101 11101 00010 01100 01000 01011 10100 11010 01100 01101 11111 01101
```

Die linke Abbildung zeigt die ersten dualen Dezimalstellen von  $\pi$ .

In der Dualdarstellung von  $\pi$  findet man natürlich die verschiedensten Dualzahlen, zum Beispiel ab Position 13 die Ziffern 1001, d.h. die Zahl 9. Die letzte auftretende einstellige Zahl ist die 5 ab Position 17, die letzte zweistellige Zahl die 87 ab Stelle 533, die letzte dreistellige Zahl ist die 886 ab Position 8024; die letzte vierstellige Zahl ab der 115500. Position ist die 8778. Von den ersten 72660 Zahlen findet man als Letzte die 72583 ab der 1523116. Dezimalstelle. Bis  $2^{18}$  sind alle Dualzahlen in den ersten 3,2 Millionen Kommastellen vertreten. Die erste natürliche Zahl, die unter den ersten 8,3 Millionen Dualziffern nicht zu finden ist, ist die 527640. (Polster, Juni 2006)

Zählt man das Auftreten der "0" und "1" in der Dualziffernfolge, so stellt man fest, dass ab Position 27 die Nullen deutlich über 50 % liegen. Die Vermutung, dass dies immer so ist, erweist sich

schnell als falsch. Ab der 6374. Stelle schwanken die Anteile bis 9102 ständig um 50 %. Danach überwiegt wieder eine Ziffer bis zur 15162. Stelle und so weiter.

Die Tabelle enthält die wachsenden Dualzahlen, die in in den Kommastellen der Kreiszahl an einer späteren Stelle auftreten.

n	Position	n	Position	n	Position	n	Position
1	3	2	3	3	11	5	16
10	19	12	47	19	60	23	91
28	93	32	95	37	126	39	144
43	393	75	421	87	532	143	814
206	867	259	2453	366	3044	477	3269

565	5779	690	6006	886	8023	1081	17047
1130	17213	2087	23391	2130	26292	2261	27397
2348	35838	4155	42155	4326	53097	4347	54481
4610	57276	6064	71895	8297	86538	8350	100612
8735	109074	8778	115499	10540	160104	16945	184334
17178	195794	17329	235365	18884	237524	19137	258465
21347	301568	24802	315359	27392	345065	32772	466395
33220	570298	37298	692908	46117	755173	65659	756820
65793	830958	67214	873806	68368	1021819	70526	1064855
72583	1523115	131846	1761465	132977	2270153	134155	2346154
136132	2388109	140839	2812645	190368	2977872	201620	3116951
262169	3148986	263400	3685301	264414	3795930	264707	4352711
273819	5756924	295518	5878485	313221	7600330	524822	7815025

In den Dualkommastellen der Kreiszahl  $\pi$  im Dualsystem treten nur die Ziffern 0 und 1 auf. Damit wird es auch Folgen der gleichen Ziffer geben.

Die Ziffer 0 tritt bis zu 50 Millionen Dualstellen erstmals  $n = 1, 2, 3, \dots$  mal ununterbrochen ab der Kommastelle auf: 1, 1, 7, 7, 96, 96, 96, 189, 902, 902, 4267, 8375, 8375, 8375, 11791, 11791, 112954, 436893, 726844, 726844, 2005750, 2005750, 2005750, 42248747

d.h. 24 aufeinanderfolgende 0 ab Stelle 42248747.

Die Ziffer 1 tritt  $n = 1, 2, 3, \dots$  mal ununterbrochen ab der Kommastelle auf:

3, 11, 11, 11, 11, 11, 451, 645, 645, 645, 5212, 18123, 18123, 58276, 58276, 80697, 80697, 80697, 1146746, 1962901, 3296306, 9772065, 9772065, 9772065, 47536571

d.h. 25 aufeinanderfolgende 1 ab Stelle 47536571.

### PI im Vierersystem

Die Dezimalzifferfolge von PI kann als p-adischer Bruch in jedem anderen Positionssystem dargestellt werden.

Nachfolgend sind die ersten Nachkommastellen der Kreiszahl im Vierersystem angegeben.

3.0210033312222020201122030020310301030121202202320003130013031010221000210320020202  
212133030131000020023233222120323010321230202110110220020132120320310001031313233211  
101212303303103221003012303000223002212313302113301100313103332010311123112311101300  
210113210201123111312120211321332301233101030100232212212031332311223002333331130231  
233100012231332313232032012233323112220212133221122322133021001011330102301333212102  
102201212110132303210112303313002000013302320220112032333001121203122102003120130111  
13103212212210112033322033310210303311332003121111310203313022032231211201301202330  
311120200201111022323213231110221001313002112211212311213003003111032102223302120001  
033011310123000203022012002011330030221001132101202320312303203233203213213130230012  
000322012000321230213200322023230001322022033231130111131330012331030110230213132022  
330233312211111200113012003212111102113303222211112223211011131020212012021203322001  
10100011113022032112220222223010023122310303011300310010110013220303222011110201222  
33133013023221210323033232011001011203123323300222023222130111131131001200301331230  
321130033201122123201321030132223331122322030312300210303311301322030211032001022021  
112012131303232033102021201223102323212233301023333220012312120220020121031201312000  
213030332302012221210110201330223012001131323020000302323320101131113132212011131123  
013130021202030002322312110123202002032021033220013103211222303011003312311233330320  
033310100203210232002310102002221020100200001012213020330010222132013321231132020130  
12122010023312322112302122121300302130120122331032020330012221101220031023120111002  
33122021120033221302202223110103032203123233300231230010313220323321023220323330011  
001332332302222120220133011211013103212233000113121212302211210332200210030032202020  
303232201201211011123321332310133120102211300303232023113223323200123313113120201130  
010200130310000122101021331112300112222212103231032222120203120333131300120123333231  
331302100221230002033103133100311302103100002201021020312300333222310310213301300021  
23001311031302302120002121012313230211311013213120331232203132331332033321100012223  
121321103003232113123032002331001030000012232230012221103323121000213312003010113211  
302132300201211222021012031220332312332233033212301103231101030321230232230323110232  
301233123133301101013321230300211102303030200110111010223311322331002123323203310000  
103132030310223331121200330220001301210232102323033000302322201113101130201310003331  
02002311330321232131033323312311113213000233101221200030200223112220100003012100 ...

### $\pi$ im Hexadezimalsystem

Nachfolgend sind die ersten hexadezimalen Nachkommastellen der Kreiszahl dargestellt.

243F6A8885A308D313198A2E03707344A4093822299F31D0082EFA98EC4E6C89452821E638D01377BE5  
466CF34E90C6CC0AC29B7C97C50DD3F84D5B5B54709179216D5D98979FB1BD1310BA698DFB5AC2FFD  
72BDB01ADFB7B8E1AFED6A267E96BA7C9045F12C7F9924A19947B3916CF70801F2E2858EFC16636920



D871574E69A458FEA3F4933D7E0D95748F728EB658718BCD5882154AEE7B54A41DC25A59B59C30D539  
 2AF26013C5D1B023286085F0CA417918B8DB38EF8E79DCB0603A180E6C9E0E8BB01E8A3ED71577C1BD  
 314B2778AF2FDA55605C60E65525F3AA55AB945748986263E8144055CA396A2AAB10B6B4CC5C341141  
 E8CEA15486AF7C72E993B3EE1411636FBC2A2BA9C55D741831F6CE5C3E169B87931EAFD6BA336C24CF  
 5C7A325381289586773B8F48986B4BB9AFC4BFE81B6628219361D809CCFB21A991487CAC605DEC8032  
 EF845D5DE98575B1DC262302EB651B8823893E81D396ACC50F6D6FF383F442392E0B4482A484200469  
 C8F04A9E1F9B5E21C66842F6E96C9A670C9C61ABD388F06A51A0D2D8542F68960FA728AB5133A36EEF  
 0B6C137A3BE4BA3BF0507EFB2A98A1F1651D39AF017666CA593E82430E888CEE8619456F9FB47D84A5C  
 33B8B5EBEE06F75D88...

Auch in der Hexadezimaldarstellung von  $\pi$  findet man die verschiedensten Hexadezimalzahlen. Die erste natürliche Zahl, die unter den ersten 1 Millionen Hexadezimalziffern nicht zu finden ist, ist die 65536 = [F0000]<sub>16</sub>. (Polster, Juni 2006)

Die Tabelle enthält die wachsenden Hexadezimalzahlen, die in in den Kommastellen der Kreiszahl an einer späteren Stelle auftreten.

n	Position	n	Position	n	Position	n	Position
1	17	7	27	11	81	16	148
17	489	28	754	53	1446	257	3272
258	10067	268	16595	302	18944	313	27175
717	27520	771	29268	3686	31814	4096	40780
4097	44881	4098	54370	4099	78911	4100	80931
4102	102954	4106	134883	4110	207731	4141	287213
4251	293824	4553	331234	4692	336110	4735	337543
4883	373557	5035	395890	5168	421107	5371	558461
9058	672793	10032	874018				

### Normalität von $\pi$

Eine sehr wichtige mathematische Frage bezüglich  $\pi$  ist, ob sie eine normale Zahl ist, d.h. ob sie zum Beispiel in einer binären oder jeder anderen n-ären Zahlendarstellung jede mögliche Binär- bzw. sonstige Zifferngruppe gleichermaßen enthält; so wie dies die Statistik erwarten ließe, wenn man eine Zahl vollkommen nach dem Zufall erzeugen würde.

Dies würde bedeuten, dass die Kreiszahl alle bisher und zukünftig geschriebenen Bücher irgendwo in codierter Binär-Form enthalten muss.

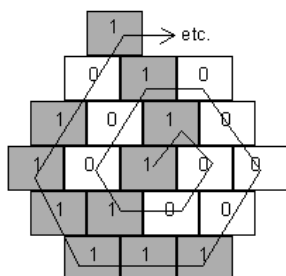


Bailey und Crandal zeigten im Jahr 2000, dass die Existenz der Bailey-Borwein-Plouffe-Formel und ähnlicher Gleichungen belegt, dass die Normalität von  $\pi$  zur Basis 2 auf eine bestehende Vermutung der Chaostheorie reduziert werden kann.

Physiker der Purdue Universität haben im Jahre 2005 die ersten 100 Millionen Dezimalstellen von  $\pi$  auf ihre Zufälligkeit hin untersucht und mit kommerziellen Zufallszahlengeneratoren

verglichen. Der Forscher Ephraim Fischbach und sein Mitarbeiter Shu-Ju Tu konnten dabei keinerlei verborgene Muster in der Zahl  $\pi$  entdecken. Demnach sei nach Ansicht Fischbachs die Zahl  $\pi$  tatsächlich eine gute Quelle für Zufälligkeit. Mittlerweile wurde die Suche auf mehrere Milliarden Dezimalstellen erweitert.

Abbildung: Der  $\pi$ -Saal im "Palais der Entdeckungen" in Paris

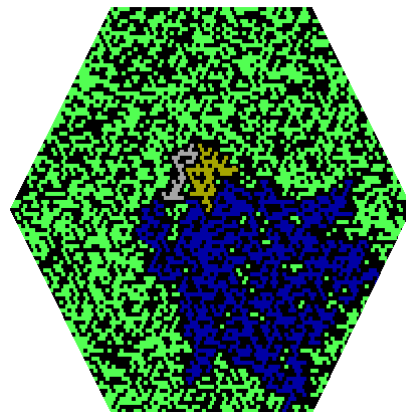


### Lady Pi

1998 ordneten Richard Lawrence und Schuyler Falls die Ziffernfolge von  $\pi$  im Dualsystem spiralförmig an, in dem sie für jede 1 einen Punkt setzten, für jede 0 ein leeres Feld.

Nach 50 vollen Spiralwindungen wurden nun bestimmte Bereiche farbig markiert. Mit etwas Fantasie erkennt man nun in der Figur eine Person. Diese wurde „Lady

Pi“ getauft. Die Fragen sind nun: Wie kommt man auf so eine Idee? Wieviel Vorstellungskraft braucht man, um in dem Muster wirklich etwas zu „sehen“?



### Notwendigkeit der Genauigkeit von $\pi$

Durch verschiedene Mathematiker und Computerfachleute wird  $\pi$  auf immer mehr Dezimalstellen berechnet. Neben der Notwendigkeit des Testens neuer Computersysteme, der Entwicklung

leistungsfähigerer Algorithmen, des Studiums der Eigenschaften von  $\pi$  („Normalität“) reizt natürlich auch ein neuer Weltrekord in den berechneten Stellen.  
Für die Elementarmathematik ist dies ohne Bedeutung. Die Tabelle enthält für einige Genauigkeiten von  $\pi$  den Fehler, der bei der Berechnung eines Kreisumfangs auftreten würde:

Genauigkeit	Objekt	Radius	Umfang	Berechnungsfehler
5 Dezimalstellen	Stadion	100 m	$6 \cdot 10^5$ mm	6 mm
10 Dezimalstellen	Erde	6378 km	$3.7 \cdot 10^{10}$ mm	3.7 mm
20 Dezimalstellen	Milchstraße	$10^{16}$ m	$3.1 \cdot 10^{19}$ mm	31 mm
30 Dezimalstellen	sichtbares Universum	15 Milliarden Lichtjahre	$0.44 \cdot 10^{30}$ mm	0.44 mm

Mit 39 Dezimalstellen Rechengenauigkeit würde sich der Berechnungsfehler durch die „Ungenauigkeit“ von  $\pi$  für den (theoretischen) Umfang des sichtbaren Weltalls auf den Radius eines Wasserstoffatoms reduzieren.

### $\pi$ in Intel-Prozessoren

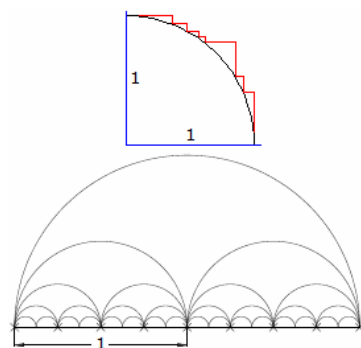
In den Intel-Prozessoren ist  $\pi$  als Konstante vordefiniert mit

$$\pi = 0.f \cdot 2^2 \text{ mit } f = \text{C90FDAA2 2168C234 C}$$

d.h. als Näherungswert

$$= 3,1415926535897932384585...$$

Der genauere Wert von  $\pi$  weicht in der 20.Stelle ab  $= 3,1415926535897932384626...$



### $\pi$ - „Paradoxon“

Betrachtet wird ein Viertelkreis mit dem Radius 1. Dessen Umfang wird mit einer „Außentreppe“ angenähert. Da sowohl horizontal als auch vertikal genau die Länge 1 zurückgelegt wird, hat diese Außentreppe die Länge 2. Verfeinert man nun die einzelnen Teilstrecken, so bleibt die Gesamtlänge gleich 2. Mit zunehmender Verfeinerung nähert sich die Außentreppe immer mehr dem Viertelkreis an.

Das bedeutet, dass im „Grenzwert“ die Außentreppe die gleiche Länge wie der Viertelkreis hat. Daraus ergibt sich aber  $2\pi r / 4 = \pi/2 = 2$  und somit  $\pi = 4$ !

Dieses scheinbare Paradoxon ergibt sich daraus, dass im Grenzfall unendlich viele Teilstrecken der Länge „0“ zu multiplizieren sind, d.h. „ $\infty \cdot 0$ “.

Dieser Ausdruck ist unbestimmt und somit keine Näherung des Viertelkreises.

In der unteren Darstellung wird auf ähnliche Weise „nachgewiesen“, dass  $\pi = 2$  ist. Für die immer kleiner werdenden Halbkreise gilt:

$$U_1 = \pi \quad 2 U_2 = \pi \quad 4 U_4 = \pi \quad 8 U_8 = \pi$$

usw. Bei immer feinerer Unterteilung wird durch die Summe der Halbkreise der Durchmesser approximiert. Also „gilt“  $\pi = 2$

d.h., Umfang des Halbkreises und der Durchmesser des Kreises sind gleich groß!

### $\pi$ in zahlentheoretischen Sätzen

Außer der Tatsache, dass  $\pi$  im Zusammenhang mit der Kreisberechnung immer wieder auftaucht, findet man  $\pi$  auch in einer Vielzahl interessanter mathematischer Sätze und Zusammenhänge. Eine kleine Auswahl:

Gaußsche Funktion  $r(n)$ . Beschreibt  $r(n)$  die Anzahl der Zerlegungen einer ganzen Zahl  $n$  in zwei Quadrate, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (r(1) + r(2) + \dots + r(n)) / n = \pi$$

Ist  $\sigma(n)$  die Anzahl der Teiler einer ganzen Zahl  $n$ , so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sigma(1) + \sigma(2) + \dots + \sigma(n)) / n^2 = \pi^2 / 12$$

Möbiussche  $\mu$ -Funktion  $\mu(n)$ : für die Summenbildungen von  $n = 1$  bis  $\infty$  wird dann  $\sum \mu(n) / n^s = 1 / \zeta(s)$

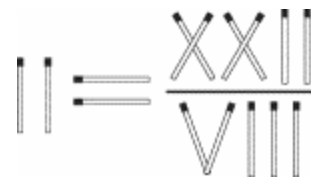
$\rightarrow \sum \mu(n) / n^2 = 6 / \pi^2$  und  $\sum \mu(n) / n^4 = 90 / \pi^4$

Eulersche  $\phi$ -Funktion:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\phi(1) + \phi(2) + \dots + \phi(n)) / n^2 = 3 / \pi^2$

### PI-Rätsel

Eine immer wieder erwähnte Aufgabe ist es, durch das Umlegen eines einzelnen Hölzchens aus der nebenstehenden Aufgabe eine näherungsweise richtige Aussage zu machen. (siehe Abbildung)

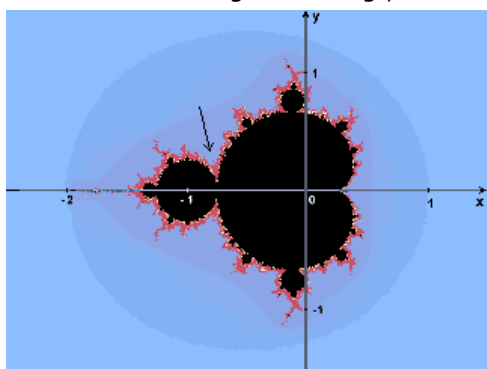
Die Lösung besteht darin, von der römischen VIII im Nenner ein Streichholz wegzunehmen und dies über die II links zu legen, so dass ein  $\pi$  entsteht. Damit gilt dann  $\pi \approx 22/7$ .



### $\pi$ und die Mandelbrotmenge

1991 wurde durch David Bolle nachgewiesen, dass man selbst an der Mandelbrotmenge  $\pi$  findet. Dies ist äußerst überraschend!

Für die Mandelbrotmenge wird für jeden Punkt C der komplexen Zahlenebene die Iteration  $Z_{n+1} = Z_n^2 + C$ ,  $Z_0 = 0$  berechnet. Überschreitet der Betrag  $|Z_n|$  den Wert 2, so divergiert die Iteration. Alle Punkte C, für die keine Divergenz vorliegt, bilden die eigentliche Mandelbrotmenge.



Bolle betrachtet nun Punkte der Form  $C = (-0.75, X)$  und konnte zeigen, dass diese stets zur Divergenz führen. Das Verblüffende ist nun, dass die Anzahl  $n$  der Iterationsschritte bis  $|Z_n| \geq 2$  von  $X$  abhängt und für  $X \rightarrow 0$ :  $X \cdot n \rightarrow \pi$  gilt.

Konkret ergibt sich:

X	Anzahl Iterationen	X	Anzahl Iterationen
1.0	3	0.1	33
0.01	315	0.001	3143
0.0001	31417	0.00001	314160
0.000001	3141593	0.0000001	31415928

Ein ähnliches Ergebnis erhielt Gerald Edgar 1992. Für die komplexen Punkte  $C = (0.25 + X, 0)$  konvergiert mit  $X \rightarrow 0$  in diesem Fall  $n \sqrt{X} \rightarrow \pi$ . Für  $X = 0.0000000001$  sind hier zum

Beispiel 314157 Schritte bis zum Überschreiten der 2 nötig.

Übrigens gehört zu dem Punkt  $C = (-0.75, X)$  die abgebildete Julia-Menge, die auch San Marco-Menge genannt wird.

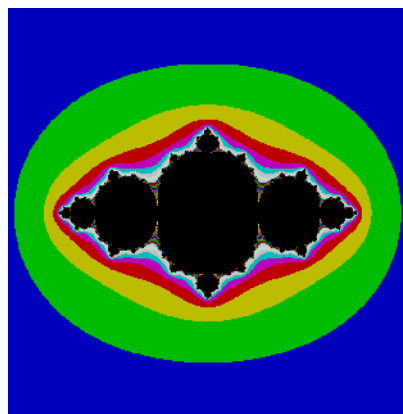
Die Begründung für diese merkwürdige Eigenschaft an der Mandelbrot-Menge ist nicht trivial.

Betrachtet man das Ergebnis von Edgar, wird  $Z_{n+1} = Z_n^2 + \frac{1}{4} + X$ . Mit der Substitution  $Z_n = Y_n + \frac{1}{2}$  wird  $Y_{n+1} + \frac{1}{2} = (Y_n + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} + X$ . Damit kann die Iteration auf  $Y_{n+1} = Y_n^2 + Y_n + X$ ,  $Y_0 = -1/2$  ungeschrieben werden. Die Iteration divergiert nun wenn  $Y_n$  die Null überschreitet. Ersetzt man nun  $Y_{n+1} - Y_n$  durch die erste Ableitung  $Y_n'$  wird  $Y_n' = Y_n^2 + X$ . Diese Differentialgleichung hat die allgemeine Lösung

$$Y_n = a \tan(a n + b) \text{ mit } a = \sqrt{X}$$

$Y_n$  überschreitet nun genau dann zum ersten Mal die Null; die Iteration divergiert; wenn der Tangens vom Negativen zum Positiven wechselt. Entweder ist  $b = 0$  oder  $a n$  nähert sich  $\pi$ :  $\sqrt{X} \cdot n \approx \pi$ .

Für Punkte  $C = (-0.75, X)$  ergibt sich mit erheblich mehr Aufwand die Differentialgleichung  $dY_n/dX = Y_n^4 - 2 Y_n^3 + 2i X Y_n^2 - 2i X Y_n - X^2$ . Das nur mit großer Anstrengung zu lösende Integral liefert dann die Konvergenz von  $n X$  gegen die Kreiszahl.



### $\pi$ -Gedächtnisrekorde

Etwas merkwürdig ist ein weltweiter Wettkampf, bei dem aus dem Gedächtnis heraus, ohne jegliche Hilfsmittel, die Dezimalzifferfolge von  $\pi$  aufgesagt werden soll.

Am 2. Juli 2005 stellte der Japaner Akira Haraguchi den aktuellen Rekord auf. Aus dem Gedächtnis gab er 83431 (!) Dezimalstellen von  $\pi$  in der richtigen Reihenfolge exakt an.

### Aktuelle Rangliste

Platz	Name	Land	Stellen von $\pi$	Datum
1	Haraguchi, Akira	Japan	83431	2. Juli 2005
2	Goto, Hiroyuki	Japan	42195	18. Februar 1995
3	Tomoyori, Hideaki	Japan	40000	10. März 1987
4	Mahadevan, Rajan	Indien	31811	5. Juli 1981
5	Thomas, David	Großbritannien	22500	1. Mai 1998
6	Carvello, Creighton	Großbritannien	20013	27. Juni 1980
7	Fiore, David	USA	10625	1. April 1979
8	Bergsten, Mats	Schweden	8050	27. September 1991
9	McLincha, Riley	USA	7500	10. Oktober 1978
10	Duch, Mike	Deutschland	5555	28. September 2004
11	Poultney, Michael John	Großbritannien	5050	22. März 1977
12	Plouffe, Simon	Kanada	4096	4. Dezember 1975
13	Gould, Dean	Großbritannien	3000	1. Februar 1999
14	Koningsveld, Jan van	Deutschland	2770	6. März 1999
15	Berberich, Edward C.	USA	1505	Juni 1974
16	Pearson, Timothy	Großbritannien	1210	21. Dezember 1973

Der aktuelle Rekord im  $\pi$ -Vorlesen liegt bei 108000 Nachkommastellen in 30 Stunden. Der Weltrekordversuch begann am 3. Juni 2005 um 18:00 Uhr und wurde am 05. Juni 2005 pünktlich um 0:00 Uhr erfolgreich beendet. Über 360 freiwillige Leser lasen jeweils 300 Nachkommastellen. Aufgestellt und organisiert wurde der Weltrekord von Lisa Grieb und Svenja Häuser vom Mathematikum in Gießen.

Jan van Koningsveld hält den gegenwärtigen (2006) Weltrekord des Multiplizierens zweier achtstelliger Zahlen im Kopf in nur 38,1 Sekunden. Andere Rekorde hat er an Gert Mittring verloren: Merken von 22 Dezimalziffern in 4 Sekunden sowie von 30 Binärziffern in 3 Sekunden, Ziehen der Quadratwurzel aus einer sechsstelligen Zahl in 44,7 Sekunden, Ziehen der 13. Wurzel aus einer 100-stelligen Zahl in 39,0 Sekunden.



### $\pi$ -Code

Die Kreiszahl  $\pi$  übt seit Jahrhunderten einen besonderen Reiz auf Mathematiker und Hobbyforscher aus. Auch Schriftsteller griffen die Zahl auf und suchten nach Besonderheiten. Zwei Science-Fiction-Autoren vermuteten in der Dezimalziffernfolge von  $\pi$  sogar eine Botschaft eines höheren Wesens. Diese Werke sind von Martin Gardner ("Doctor Matrix") und dem berühmten Wissenschaftler Carl Sagan ("Contact"). Letzterer entfernte diesen Abschnitt aber selbst aus dem Drehbuch des Films „Contact“. Wahrscheinlich war es ihm doch zu „fiktiv“. In „Doctor Matrix“ beinhaltet die Dezimalfolge von  $\pi$  die ganze(!) Geschichte der Menschheit.

### Idee des PI-Codes

Dazu werden die Dezimalziffern von PI aus dem Dezimalsystem in das 26zige-System transformiert. Die 26 Ziffern werden nach dem Schema 0 = A, 1 = B, 2 = C ... kodiert. Im Ergebnis entsteht eine Folge von Buchstaben von A bis Z, die Ziffernfolge der Kreiszahl  $\pi$  im 26zige-System.

In dieser Zeichenfolge kann nun nach sinnvollen deutschen Wörtern gesucht werden. So tritt zum Beispiel an der Stelle 84871 das Wort KUGEL auf. Das erste deutsche sechsbuchstabile Wort ist an der 97453.Stelle ZIRKEL. Für Zahlenmystiker dürfte dies nicht verblüffend sein, denn irgendwie hat ein Zirkel doch etwas mit einem Kreis und somit mit PI zu tun.

Wörter mit mehr als 5 Buchstaben treten sehr selten auf. Dies ist auch nicht verwunderlich, wenn man bedenkt, dass 26 verschiedene Zeichen in der Ziffernfolge auftreten und somit für sechsbuchstabile Wörter  $26^6 = 308$  Millionen 915 Tausend 776 Möglichkeiten existieren. Um ein bestimmtes Wort mit sechs Buchstaben mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % zu finden, würden Sie 300 Millionen Ziffern benötigen.

Berücksichtigt man die Anzahl der vorhandenen 3-, 4-, 5-, ... buchstabigen, sinnvollen, Wörter; zum Beispiel etwa 5500 vierbuchstabile; so ist ein n-buchstabiges Wort aller z Ziffern zu erwarten:

n	z	n	z	n	z
2	4	3	13	4	81
5	1000	6	14800	7	272000
8	5.7 Millionen	9	140 Millionen	10	3.900 Milliarden

Nach dieser Rechnung wären unter den ersten 3 Millionen 26er-Ziffern etwa 4 siebenbuchstabile Wörter zu finden. Bisher konnten aber keine deutschen ermittelt werden.

Durch Mike Keith und Hans Haverman wurde intensiv nach englischen Wörtern gesucht. Ein 8buchstabiges englisches Wort ARMAGNAC wurde ab Stelle 3095146 nachgewiesen. Bis heute konnte noch kein Wort mit mehr als 8 Buchstaben gefunden werden.

### $\pi$ im 26er System

DRSQLOLYRTRODNLHNQTGKUDQGTUIRXNEQBCKBSZIVQQVGDMELMUEXROIQIYALVUZVEBMIJPQQXLKPL  
RNCFWJPBYMGGOHJMMQISMSSCIEKHVDUTCXTJPSBWHUFOMQJAOSYGPOWUPYMLIFSFIIZRODPLYXPEDO  
SXMFTQHMFXFPVZEZRKFCWKXHTHUHCPLEMLNUDTMSPWBBJFGSJHNCOXZNDGHKVOZRNKWBDMFUAYJ  
FOZXYDKAYMNQUWLYKAPLYBIZUYBROUJZNDDJMOJYOZSCKSWPKPADYLPCTLJDILKUWQKQWJKTZMELG  
COHRBRJENRQVHJTHDLEEJVIFAFQICQSMTJFPPZXZOHYQLWEDFDQJRNUHRLMCNKWQJPAMVNOTGVYJQN  
ZMUCUMYVNDPBGZVAMLUFBZAPMUKTSKBUPFAVLSWTWMAETMVEDCIUJTXMKNVXKDTFGFHQBANKOR  
NPFBGNCUDUKWZPKLTOBEMOCOJGGXYBVOAETMHCTTMAJDXAUWWPYVMUFSUDJVOCMAHMIHNCLYWNPI  
OJEGQWZMWRUYQEWJYVBUHOOWAMCTUXRIIRVSLLTAVUTWBGXMEGGFJWQMSVNXIPEAZLBDLNHSXZE  
DQQDOLAPEZHKKWMOAERLSUJXVVKRKFKEZPCHLMPTDVRVEROCKWHPQFDOWOYVJWPXUOQGYHTIDUARQ  
ZHEQQVONLMVZSNOPAXNLEKFNEWFCEUJLEXVEDMNMHUYOXFANUJCFMVSYNWTUHPWLQQGNVRBOCJHX  
EIVLOYXXYWVASZHPSEPNLWEZGSOWPEWWVSVYTTTSLSWCWCEHEHCWDFMXNMMHQSUVYIYWJLGHJICL  
HYZTSBKPLHKQNCDVWRWSIBKSAOITVTAXNDYKNHMMRPVIJYJLXNHQTUZZQCTCKDLDWBRBQZMVGVBHUB  
ZEFKHSLDIMFLRPADNTJBCCDUILOIKJMQFBVFDEQOEOSNXRFDMLOPCSREJFTGRQEBPPYLUIYSLBBOFNZY  
QYNRMZZTEHDYUQYRNZXISKDDTBTLLWGXYHMSAFBLBTXNIROQMKUKUTVEPNQXNVZZWTYMFZCPVSRYG  
CYGSVQFUSBDARUWJJIQWOIYIJDGWUAQLWJSQWHIIZOAHUSDLCMFUULIKUQPHWRUULEMPCVODPCWY  
ZRDJIZIMZUZDFJZAALJSJRVDOWHMCJDRMKVSNHGGMSDBFCLNCQHHTDANRGGQLCGTIHKFQHXZDGMDS  
LPOXSIWMDGSPFCYYLRELELLGNZQKQISJHHUZIEVWUZVLYMXHDOPCILFRLEBVJYRORHHHKGWZASSWDB  
DRMLRXPDFQQCKKOIQTZSOSNYXRSINQJHUXNARTIDKCFARCKCPAAQACFSPJXOPAGKURRSZBKQJODMAT  
YJNACETVWYLZCWGMJWMEUGSTLBDKPKXMWNXILHEHTFFNNVYMFOTJQR...

### $\pi$ -Code-Tabelle

Stellt man die Dezimalzifferfolge von PI im 26er-System dar, so kann man nach dem Auftreten bestimmter Buchstabenfolgen suchen, die ein deutsches Wort darstellen.

Zählt man z.B. das an Stelle 11582 auftretende sechsbuchstabile (nicht echt deutsche) OXYGEN nicht, so ist das erste deutsche Wort mit 6 Buchstaben ZIRKEL. Was werden dazu wohl Zahlenmystiker sagen?

Ein siebenbuchstabiges Wort konnte noch nicht gefunden werden. Aber ab der 458064. Stelle folgt NROHPLA; und umgekehrt heißt dies ALPHORN. Nachfolgend sind solche drei- bis sechsbuchstabigen Worte mit ihrem erstmaligen Auftreten aufgelistet.

#### 6-buchstabige Wörter

OXYGEN (11582), ZIRKEL (97453), KANTOR (181844), DAMALS (301352), ZEIGEN (590032), GLASUR (867593), FALLIT (883268), SOFERN (964188), REDNER (1013435), HITZIG (1050263), PROLOG (1109780), PROBEN (1154268), PHASEN (1193261), MONICA (1420716), SEUCHE (1494216), TRAENE (1887287), ...

#### 5-buchstabige Wörter

SCHAH (18370), ERICH (25285), ALIAS (32362), BENNO (33141), IMMER (44910), OSTEN (50050), HAFEN (62465), KUGEL (84871), EMPOR (205819), SERIE (220708), GRAMM (223505), WARZE (249934), STUTE (257233), RUDER (271474), LACHE (280668), HAGEL (283042), RUSSE (283738), MASKE (287072), TITAN (293164), PUNKT (295319), GEIGE (296017), MINZE (317557), ARITE (327091), ZIEGE (328208), SEIFE (330645), DEGEN (342871), KAMEL (345632), SITTE (348668), APFEL (392806), SORGE (405210), UNTEN (431880), ALTER (443293), WOLKE (444702), ENKEL (477099), REELL (499015), FLUCH (509788), WUCHS (519390), TAUEN (558020), EKZEM (563456), ROVER (572287), KOREA (582932), PETER (584046), EIGEN (590033), STEIL (590579), ORGAN (623209), BRETT (625278), IRREN (625752), STEIN (630776), DEMUT (648857), AKTIV (662574), WUNDE (666845), SONNE (669134), BRAUN (671292), MOTTE (674885), ORGIE (677548), ZENIT (705942), JENES (710074), RINDE (711098), HEBEL (752764), BLIND (761015), HAGER (768145), WOLLE (773062), IDEAL (812399), MESSE (840137), BUCHE (857041), HANKE (858003), WESEN (885925), FRONT (900138), LAMPE (931550), STATT (975134), ...

#### 4-buchstabige Wörter

BANK (459), KORN (462), ROCK (661), RUHR (1852), FROH (2057), VISA (2079), ZOFÉ (3042), ORTE (3157), WITZ (3200), SOHN (3417), HAXE (3658), SAUS (3787), EHER (4015), HOLD (4106), JOCH (4289), ESSE (4537), ELLY (4751), HELL (5458), WOZU (6047), OESE (6132), GECK (6433), ECKE (6434), TEAM (7263), MINI (7399), HUFE (7540), ADEL (7563), MUND (8478), FEIG (9251), ANTI (9584), HERD (9885), ZOLL (10622), CLUB (11445), PULS (11639), RANG (13158), MAUS (13459), NEUN (16229), HARM (16428), KORK (18348), FORT (20020), PUFF (20995), KAMM (21813), FRAU (22658), REIM (22842), BAHN (23104), BAND (24280), KAUM (24475), KOPF (25905), WACH (26437), VERB (27049), TAJÓ (27347), FACH (27442), GALA (28660), ZAUN (29679), LENA (29973), WÖGE (31229), FORM (34303), LIGA (36042), WAHL (36138), KULM (43199), HALS (43475), ZEIT (44864), ADAM (45797), WABE (49389), TUBE (49757), ENTE (49915), PLAN (49935), PFUI (50106), EURO (50853), GERN (51084), BACH (53428), AVIS (53885), MEHR (54847), LAIE (55050), TANZ (55894), POET (57494), SAME (57974), EPOS (59888), KODE (60812), ESTE (61359), EMIR (61591), AUGE (62047), GRAD (62166), LIEB (63159), VIEL (63370), ANNE (63876), SINN (65381), FIRM (66095), NAHE (66522), HEER (67367), WURM (70456), EBER (70536), STAB (71034), LENZ (71222), VASE (71792), KIEL (71842), THOR (72304), HERZ (72723), ZAHN (72877), HIRN (73159), PEST (74676), REIF (77159), JAHR (77851), QUER (80074), EGGE (80322), DUMM (80404), GIRO (80976), ZINN (81464), ROHR (82493), RAND (83077), WORT (83440), ZAHL (84311), KINO (85217), MATT (86721), DREI (87299), ZELT (87638), KALB (88202), PEIN (89038), ...

#### 3-buchstabige Wörter

HUF (121), KAY (241), OHR (314), LEE (330), UHR (367), NOT (382), CDU (473), SUD (521), IHN (533), GGF (593), VON (699), PAX (709), LEX (725), FAN (739), EHE (816), HUB (920), DAR (1090), ULI (1132), ZDF (1166), AAL (1171), ASS (1305), ART (1346), JOD (1383), BMW (1465), LID (1468), NEU (1528), UDO (1530), GIB (1578), NIE (1702), TAU (1777), AUE (1778), RUH (1854), RED (1857), SOD (1861), CPU (1984), ROH (2060), ISA (2082), MAN (2123), WEH (2167), WEG (2172), BND (2178), LEO (2319), DAS (2350), ULK (2383), DPA (2433), ARG (2435), KGV (2460), RHO (2475), IVO (2507), YEN (2583), AAR (2637), BUG (2706), ZUM (2719), PDS (2765), ABS (2831), KUH (2838), HAT (2887), PUR (2895), SEE (2932), PHI (2987), VOM (3020), TOM (3051), RAD (3058), ORT (3156), GON (3169), GAS (3350), OEL (3438), WER (3466), AGA (3489), KIM (3497), ZUR (3618), NUR (3624), DGB (3735), DUO (3765), SAU (3786), AUS (3787), AOL (3876), KAM (3897), BAI (3995), FEE (4012), HER (4015), SEX (4080), HOL (4108), POL (4167), UND (4256), HUT (4294), BOE (4302), WIE (4505), ZUG (4738), TOD (4759), BIS (4785), UNO (4948), BOX (4982), HEX (5075), DES (5255), MOL (5313), ALF (5331), GUT (5388), SAH (5415), RAR (5558), EIN (5676), LOS (5766), LUX (5779), TUN (5855), WAR (5969), UDE (6049), FAX (6242), INA (6277), ECK (6436), MAI (6457), RIA (6553), TEE (6573), ELF (6575), WAS (6663), MAG (7009), NIX (7400), NRW (7497), ADE (7562), GIN (7880), OHM (7960), NAH (8001), DIE (8043), TAZ (8064), ETA (8170), VOR (8345), JOB (8389), AKT (8547), OED (8905), POP (8945), ABO (8961), BOA (8962), REH (9006), MAL (9118), OHA (9195), AFP (9275), LUG (9369), MOB (9405), URS (9415), ROT (9483), BAU (9577), WUT (9650), ULF (9653), LKW (9773), IOC (9812), ARD (9979), BON (10031), MIT (10067), ...

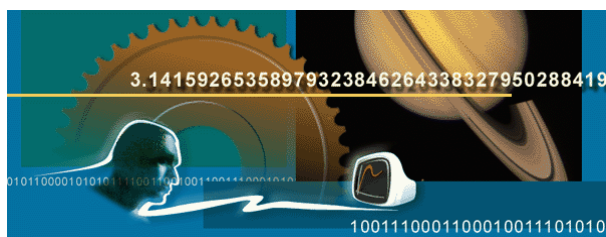
Die ersten natürlichen Zahlen können auch als Wort in der Dezimalfolge gefunden werden:



NULL (Position 557009), EINS (271247), ZWEI (352991), DREI (87299), VIER (1312280), ACHT (172000), NEUN (16229), ZEHN (467076), ELF (6573). Die FUENF, SECHS, SIEBEN und ZWOELF ist unter den ersten 3 Millionen Ziffern nicht zu finden.

Anmerkung: Wenn die Kreiszahl eine normale, irrationale Zahl ist, so müssen alle möglichen Buchstabenkombinationen irgendwann einmal in der Ziffernfolge auftauchen. Auch wenn es kaum vorstellbar ist, so muss man ab einer noch so fernen Stelle auch den hier abgedruckten Text finden, ebenso jedes irgendwann einmal von einem Menschen geschriebene Buch und alle die in Zukunft noch geschrieben werden! D.h.,  $\pi$  enthält das ganze schon erworbene und jemals erwerbende Wissen! Unvorstellbar!

Außer der Suche nach Wörtern ist auch die Suche nach dem Auftreten der natürlichen Zahlen in der



26ziger Darstellung von  $\pi$  interessant. Allerdings wird dazu die Zahl in einen richtigen p-adischen Bruch transformiert, d.h. mit den Ziffern 0 bis 9 und A .... So findet man als letzte einstellige Zahl die 5 ab Position 83. Die letzte auftretende zweistellige Zahl ist die 52 ab Stelle 5485, die letzte dreistellige Zahl ist die 944 ab Position 135904. Unter den ersten 3 Million Ziffern im 26ziger System findet man als letzte Zahl die 19271 ab der 2924401. Dezimalstelle; die 19592

ist nicht vertreten. (Polster, Juni 2006)

### $\pi$ -Code-27

Durch Lee Sallows wurde 1993 daraufhin gewiesen, dass die Umwandlung von  $\pi$  in das 26ziger System eigentlich nicht ganz korrekt ist, da je in normalen Texten einzelne Wörter durch Leerzeichen getrennt sind. Aus diesem Grund wird auch ein PI-Code im 27ziger System betrachtet, bei dem die Ziffer 0 in ein Leerzeichen, die Ziffern 1, 2, ... in die Buchstaben A bis Z transformiert werden.

Auf Grund des zusätzlichen Zeichens nimmt die Wahrscheinlichkeit, ein bestimmtes Wort zu finden, ab. Unter den ersten 1 Million Ziffern im 27ziger System findet man zum Beispiel folgende deutsche Wörter. Erstaunlich ist, dass hier ein siebenbuchstabiges Wort gefunden wurde.

3buchstabile Wörter:

EMU (28), ZUG (193), RTL (232), MIT (439), TOT (554), ULI (621), AHN (646), MAN (783), DDR (954), LEE (967), WIR (1101), FIT (1162), AAR (1286), DAS (1290), UNO (1301), SAG (1400), WEM (1403), AAS (1433), WEN (1460), URS (1479), PIA (1537), ...

4buchstabile Wörter:

LUKE (1386), FRED (3532), NULL (4894), JANA (4954), CITY (5218), BOTE (5783), SONG (6371), FOEN (6821), NASE (7709), WENN (7727), ROSE (8666), ESEL (9614), ARIE (10672), EMIR (11088), LOES (11336), SAAL (11864), KULM (12120), ...

5buchstabile Wörter:

EHEN (19641), VIDEO (22103), ARENA (23767), MUCKE (45804), IDEEN (66866), ABBAU (76292), BANGE (83449), ANGER (83450), SANFT (84672), BERUF (88837), REBEN (98077), BIRKE (103137), ROTTE (116823), WOHER (118178), ...

6buchstabile Wörter:

BANDIT (175017), HOTELS (321326), INTERN (382987), STEHEN (470053), KELVIN (868727), ISLAND (870081), DETLEF (935063), GALANT (936851), BIETEN (941767), BITTER (961541)

7buchstabiges Wort: BIETEND (941768)

### PI-Day, PI-Tag

Im englischsprachigen Raum werden Datumsangaben in der Reihenfolge Monat/Tag/Jahr gegeben. Daraus resultierend wird der 14. März als 3/14 geschrieben.

Aus diesem Grund wurde der 14. März zum sogenannten PI-Day erklärt. Besonders interessant ist am PI-Day die Uhrzeit 1:59:26, denn dann stimmen auch die nachfolgenden Ziffern mit  $\pi$  überein.

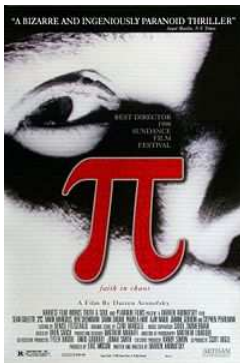
Als Begründer dieser Tradition gilt Larry Shaw, auf dessen Initiative hin der erste Pi-Tag 1988 am Exploratorium in San Francisco begangen wurde. Der Pi-Tag wird traditionell mit dem gemeinsamen Verzehren von runden Kuchen begangen. Im Englischen wird der griechische Buchstabe  $\pi$  lautgleich wie das englische Wort pie = Kuchen als "Pai" ausgesprochen.

Zum anderen wird ein  $\pi$ -Annäherungstag am 22. Juli gefeiert, mit dem die Annäherung von Archimedes an 22/7 geehrt werden soll.



Persönliche Anmerkung: Dass Albert Einstein, aber auch der Autor dieses Programms an einem 14. März geboren wurden (Einstein genau 80 Jahre früher), kann natürlich nur positiv gewertet werden. :-)





## PI-the movie USA 1997

Regisseur: Darren Aronofsky

Max Cohen, hochintelligentes, ständig unruhiges Mathematikgenie, ist auf der Suche nach einer alles erklärenden Weltformel, die sich hinter einem numerischen System verbergen soll.

Kurz vor der Lösung versinkt die Welt um ihn herum im Chaos. Plötzlich wird er von aggressiven Börsenmaklern und Anhängern einer jüdischen Sekte verfolgt. Im Kampf gegen den Wahnsinn, der sich vor ihm ausbreitet, entdeckt er ein Geheimnis, für das viele bereit sind, ihn umzubringen ...

Aronofskys Regiedebüt ist ein skuriler Science-fiction Thriller über die verrückte Gedankenwelt eines Genies.

## PI-Anekdote 4

In diesem 1997 gedrehten US-amerikanischen Film "Pi" kann jemand die "möglichen" 216 Dezimalstellen von  $\pi$  aufsagen. Offensichtlich ist 1997 noch nicht jedem klar, dass  $\pi$  eine unendliche, irrationale Zahl ist. 1967 wusste man es schon besser. In der Star-Trek-Folge "Wolf in the Fold" ("Der Wolf im Schafspelz") beauftragt Spock den Computer, die Zahl  $\pi$  bis zur letzten Stelle zu berechnen ("compute to the last digit the value of pi"); mit dem beabsichtigten Ergebnis, dass der Computer auf Grund der Unlösbarkeit der Aufgabe von der fremden Macht verlassen wird. Für Professor Frink in "The Simpsons" ist  $\pi$  "exakt 3!"

## PI-Anekdote 5

Johann Dase soll 1844 im Alter von 20 Jahren  $\pi$  auf 205 Dezimalziffern exakt berechnet haben. Das Besondere ist, so geht die Legende, dass er die Berechnung innerhalb von zwei Monaten ausschließlich im Kopf vorgenommen haben soll und erst nach Beendigung die Dezimalziffern aufschrieb.

## Anekdote 6

Als Indiz für eine langsame Verbesserung (2003) der Einschätzung der Bedeutung der Mathematik kann das neue Logo der Wissenschaftsseite der Berliner Morgenpost angesehen werden. Das " $\pi$ " in dem Logo soll wohl die Rolle der Mathematik als Grundlage der Naturwissenschaft symbolisieren. (zitiert nach "Mathematik in der Presse")



## Anekdote 7

Für die Kreiszahl  $\pi$  wurden erst 3000 Jahre nach der ersten Erwähnung im Papyrus Rhind eine Name und ein Symbol eingeführt. Bis dahin nutzten Mathematiker merkwürdige Umschreibungen, wie:

"quantitas, in quam cum multiplicetur diameter, proveniet circumferentia"

d.h. "die Größe, die, wenn man den Durchmesser mit ihr multipliziert, den Umfang ergibt".

## Anekdote 8

Kurios! Ab der 9128219. Dezimalstelle von  $\pi$  findet man die Ziffernfolge 9136319. Beide Zahlen sind Palindrome. Das Besondere: Beide Zahlen sind auch Primzahlen und zwar zwei aufeinanderfolgende Primzahl-Palindrome.

Sogar Bugs Bunny „beschäftigt“ sich mit der Kreiszahl!

## Anekdote 9

1998 wurde im Internet verbreitet, dass im US-amerikanischen Staat Alabama  $\pi$  auf den biblischen Wert von 3 festgesetzt wurde.

Die Meldung erwies sich als Aprilscherz und bissige Parodie auf die ständige Zunahme der "Kreationisten", die tatsächlich versuchen, in New Mexico die Evolutionstheorie aus den Lehrplänen zu streichen und dafür ihr "kreatives Design" (fanatische, faschistoide, strenggläubige Auslegung der biblischen Schöpfungsmythologie) einzuführen.

Die Internet-Meldung stammte von dem Physiker Mark Boslough.



## PI-Anekdote 10

Der jüdische Rabbi Nehemiah versuchte im Jahre 150 die Differenz zwischen dem biblischen  $\pi$ -Wert von 3 und seinem Wert von  $3 \frac{1}{7}$  damit zu erklären, dass er davon ausging, dass in der Bibel der "Rand" des Kreises nicht mitgezählt wird.

Erschreckend ist, dass im 21. Jahrhundert(!) US-amerikanische Fanatiker tatsächlich fordern, den biblischen Wert von 3 verbindlich für  $\pi$  festzulegen.

## PI als Kunstobjekt

Die Kreiszahl hat es auch direkt in die Kunst geschafft. Sie ist immer wieder Gegenstand der Darstellung. Eine kleine Auswahl:





Yves Chiricota de Montréal



Robert Crumb



Dara



Renée Othot



MJ Juggler



Olivier Noël



J.P. Cassou



P. Borwein



### PI-Kurios

ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Schreibt man das Alphabet nach folgender Regel auf: Alle (zur Senkrechten) spiegelsymmetrischen Buchstaben werden nach oben gestellt. Die Lösung sieht dann wie oben zu sehen aus.

Zählt man nach, wie stark die unteren Buchstabengruppen sind, so kommt man auf: 6, 3, 1, 4, 1. Nun könnten diese Ziffern einem beliebigen Zahlensystem ab 7 entnommen sein. Doch es fällt auf, dass

eine solche Gruppe gerade mit dem zehnten Buchstaben J beginnt. Nimmt man also einmal an, dass dies ein Wink sei, die Ziffern ab dort zyklisch im Zehnersystem aufzureihen, so erhält man: 3-1-4-1-6. Man erkennt hierin unschwer eine brauchbare Näherung für  $\pi \approx$ , mit einem kleinen Fehler von etwa  $7,35 \times 10^{-6}$ .

Der hier aufgezeigte Sachverhalt wurde auch von James Davis entdeckt.



Abbildung links: Pi-Café in Avignon (Frankreich), Place Pie

In Frankreich hat man offensichtlich eine andere Position zur Mathematik als in Deutschland. Dies zeigt sich auch darin, dass die Kreiszahl es sogar zum Titelblatt der Dezemberausgabe von „La Recherche“ gebracht hat.



### PI-Mosaik

Am 17. Mai 2000 wurde das weltweit erste Mosaik auf  $\pi$ -Basis fertiggestellt.

Es befindet sich im sächsischen Großdubrau und zeigt von links oben beginnend die ersten 450 Nachkommastellen der Zahl  $\pi$  als Hell-Dunkel-Raster, angeordnet in 15 Spalten und 30 Zeilen.

Der stolze Besitzer dieser Bodenarbeit ist der  $\pi$ -Enthusiast Werner Lehmann.

Die hellen Steine entsprechen den geraden Nachkommastellen und die dunklen Steine den ungeraden. Das Mosaik hat eine Größe von

etwa 300 x 300 cm.

Eine ortsansässige Firma realisierte diese Arbeit mit Feingefühl und fachmännischer Akkuratess.

Quelle: <http://www.hlxx.de/hp/pimosa.htm>



### Poul nabrone Dolmen

Ein besonderes Bauwerk für  $\pi$ -Anhänger ist der Poul nabrone Dolmen.

Der Poul nabrone Dolmen ("hole of the sorrows") ist ein Steingrab im Burren (Irland), das wahrscheinlich in der Jungsteinzeit ungefähr zwischen 3800 v.u.Z. und 3200 v.u.Z. erbaut wurde.

Der Ort befindet sich 8 km südlich vom Ballyvaughan und 10 km nordwestlich von Kilnaboy.

Der Dolmen ist aus zwei Orthostaten aufgebaut, die einen ungefähr 3,65 Meter langen Deckstein stützen. Ursprünglich wurde er durch einen

Steinhügel bedeckt.

Damit bildet das Bauwerk ein überdimensional großes  $\pi$ , wenn gleich natürlich klar ist, dass das Grab nichts mit der Kreiszahl zu tun hat.

Restaurierungsarbeiten wurden im Jahr 1986 durchgeführt, nachdem 1985 im östlichen der beiden Portalsteine ein Riss entdeckt worden war.

Es wurde jedoch nicht nur der beschädigte Tragstein erneuert, es wurde auch ein zusätzlicher Orthostat an der Westseite gesetzt, um den Deckstein zu stabilisieren. Damit wird der Deckstein nun durch 3 Steine gestützt, was das steinzeitliche PI leider etwas verändert.

### Brownsche Zahlen

Gegeben ist eine beliebige natürliche Zahl  $n$ . Eine zweite Zahl  $a_0$  wird zu Beginn gleich  $n$  gesetzt. Nun wird nach der Zahl  $a_1$  gesucht, die ein Vielfaches von  $n-1$  ist und mindestens so groß wie  $a_0$  ist. Die Zahl  $a_2$  ist dann die Zahl, welche ein Vielfaches von  $n-2$  ist und mindestens so groß wie  $a_1$ . Dieser Vorgang wird bis  $a_k$  mit  $k = n-1$  fortgesetzt. Die entstehende Zahl heißt Brownsche Zahl  $f(n)$ . Benannt wurden diese Zahlen nach Kevin Brown, der zuerst diese beschrieb.

Zum Beispiel ergibt sich für  $n = 10$ :  $a_0 = 10$ ,  $a_1 = 2 \cdot (10-1) = 18$ ,  $a_2 = 3 \cdot (10-2) = 24 > 18$ , ...,  $a_k = f(10) = 34$ .

Für  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$  erhält man die Folge der Brownschen Zahlen

$f(n) = 1, 2, 4, 6, 10, 12, 18, 22, 30, 34, \dots$

Weiterhin ist zum Beispiel  $f(100) = 3234$ ,  $f(1000) = 318570$  und  $f(10000) = 31833630$ .

Mit folgender kleinen Programmsequenz kann die Brownsche Zahl ermittelt werden. Dabei ist zu beachten, dass schon ab  $n = 1000$  die Rechenzeit sehr stark ansteigt.

```
brown := proc(n)
    local x,f,i,y;
    x := n; f := n; for i from x by -1 to 2 do y := i-1; while y < f do y := y+i-1 od;
    f := y
od end
```

Das Interessante an diesen Zahl ist nun, dass, wieder völlig unerwartet,  $n^2/f(n)$  mit wachsendem  $n$  gegen  $\pi$  konvergiert und zwar alternierend von oben und unten. Zum Beispiel erhält man einen „schönen“ Wert für  $n = 200$ . Es ergibt sich:

$n$	$n^2/f(n)$	$n$	$n^2/f(n)$	$n$	$n^2/f(n)$
10	2,94117	50	3,1172	100	3,0921459
200	3,14169	500	3,13999	1000	3,1390275
10000	3,14133198				

### PI-Limerick

The number pi's a ratio pal.  
Whose fame is international.  
C to diameter,  
endless parameter,  
to me it's all irrational! (Paul Doherty)

'Tis a favorite project of mine  
A new value of pi to assign.  
I would fix it at 3  
For it's simpler, you see,  
Than 3 point 1 4 1 5 9

If inside a circle a line  
Hits the center and goes spine to spine  
And the line's length is "d"

the circumference will be  
d times 3.14159

Three point one four one five nine two  
It's been around forever - it's not new  
It appears everywhere  
In here and in there  
It's irrational I know but it's true!

Now there is an ancient Greek letter,  
And I think no other is better.  
It isn't too tall,  
It might look very small,  
But its digits, they go on forever.  
(<http://www.kathimitchell.com/piceleb.html>)



## Fibonacci-Zahlen

### Fibonacci-Folge

Zahlenfolge, die nach Leonardo von Pisa (Fibonacci ... Filius Bonacii) benannt wurde, da er diese in seinem Werk Liber abaci beschrieb:  $F_0=0; F_1=1; F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$   
Formel von Binet-Moivre  $F_n = 1/\sqrt{5} * [ [(1 + \sqrt{5})/2]^n - [(1 - \sqrt{5})/2]^n ]$

$$\phi = (1 + \sqrt{5})/2 = 1.61803..., \text{ Goldener Schnitt}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (F_{n+1} / F_n) = 1/2 * (1 + \sqrt{5})$$

$$F_{n+1} * F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

$$\text{ggT}(F_{m+1}, F_{n+1}) = F_{\text{ggT}(m,n)}$$

$$F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2$$

$$F_{2n+2} = 2 F_n F_{n+1} + F_n^2$$

$$F_{n+m} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$$

### Cassini-Gleichung

### Satz von Lucas

### Verdoppelungsformel

### Erste Fibonacci-Zahlen

1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
377	610	987	1597	2584	4181	6765	10946	17711	28657	46368	75025	121393
196418	317811	514229	832040									



### Fibonacci-Zahlen-Geschichte

Die früheste Erwähnung der Fibonacci-Zahlen findet sich unter dem Namen maatraameru ("Berg der Kadenz") in der Chhandah-shastra (auch Chandah-sutra, "Kunst der Prosodie") des Sanskrit-Grammatikers Pingala (um 450 v.u.Z.).

In ausführlicherer Form behandelten später auch Virahanka (6. Jahrhundert) und besonders Acharya Hemachandra (1089-1172) diese Zahlenfolge, um die rechnerische Möglichkeit der Bildung von Metren durch regelmäßige Verteilung kurzer und langer Silben zu beschreiben.

In der westlichen Welt war die Fibonacci-Reihe ebenfalls schon in der Antike Nikomachos von Gerasa (um 100 u.Z.) bekannt.

Sie ist aber mit dem Namen des italienischen Mathematikers Leonardo da Pisa, genannt Fibonacci, verbunden, der in seinem "Liber abaci" ("Buch der

Rechenkunst") von 1202 diese Zahlenfolge mit dem Beispiel eines Kaninchenzüchters beschrieb, der herausfinden will, wie viele Kaninchenpaare innerhalb eines Jahres aus einem einzigen Paar entstehen, wenn jedes Paar ab dem zweiten Lebensmonat ein weiteres Paar pro Monat zur Welt bringt.

Nachdem spätere Mathematiker wie Gabriel Lamé (1795-1870) die Entdeckung dieser Zahlenfolge für sich beansprucht hatten, brachten Édouard Lucas (1842-1891) und andere wieder in Erinnerung, dass der zu dieser Zeit älteste bekannte Beleg von Leonardo da Pisa stammte.

Abbildung: Kaninchenaufgabe im Liber abaci

### Kaninchen-Problem des Fibonacci

Das Problem taucht bei Fibonacci in seinem berühmten Werk Liber Abaci auf:

Betrachtet wird die Nachkommenschaft eines (idealisierten) Kaninchenpaares, die bekanntlich sehr groß ist. Für die Simulation werden folgende Annahmen gemacht.

1. Jedes Kaninchenpaar wird im Alter von zwei Monaten fortpflanzungsfähig.
2. Jedes Kaninchenpaar bringt von da an jeden Monat ein neues Paar zur Welt.
3. Alle Kaninchen leben ewig.

Wenn  $a_n$  die Anzahl der Kaninchenpaare bezeichnet, die im n-ten Monat leben, so ergibt sich hierfür gerade die Fibonacci-Folge:

Mit den Startwerten  $a_1 = 1$  und  $a_2 = 1$  wird die Folge der Fibonacci-Zahlen definiert durch

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

Diese Fibonacci-Zahlen stehen in einem engen Zusammenhang mit dem Goldenen Schnitt und tauchen bei der Beschreibung von ganz allgemeinen Wachstumsvorgängen in der Natur immer wieder auf.

Anmerkung: Selbst wenn man realistisch annimmt, dass kein Kaninchen älter als 12 Jahre wird, ändert sich das Ergebnis nur unwesentlich. Es zeigt sich, dass immer 99% der Fibonacci-Kaninchen jünger als 12 Jahre sind.

Der französische Mathematiker Edouard Lucas benannte diese Zahlen erstmals nach Fibonacci. Dessen Verdienst ist es, diese Zahlen und die zugehörige Folge in Europa bekannt gemacht zu haben. Allerdings ist bekannt, dass vor 1135 der indische Mathematiker Gopala und um 1150 Hemanchandra die Folge bei der Untersuchung von Tonfolgen verwendeten und explizit beschrieben.



### Nummer Fibonacci-Zahl Quotient

1	1
---	---

### Nummer

2
---

### Fibonacci-Zahl

1
---

### Quotient

1:1 = 1
---------

3	2	2:1 = 2	4	3	3:2 = 1,5
5	5	5:3=1,66667	6	8	8:6=1,6
7	13	13:8=1,625	8	21	21:13=1,61538
9	34	34:21=1,61905	10	55	55:34=1,61765
11	89	89:55=1,61818	12	144	144:89=1,61798
13	233	233:144=1,61806	14	377	377:233=1,61803
15	610	610:377=1,61804	16	987	987:610=1,6180327
17	1597	usw. 1,618034448	18	2584	1,618033813
19	4181	1,618034056	20	6765	1,618033963
21	10946	1,618033999	22	17711	1,618033985
23	28657	1,618033990	24	46368	1,618033988
25	75025	1,618033989			

Im Grenzwert konvergiert  $a_{n+1} : a_n$  damit gegen das goldene Verhältnis.

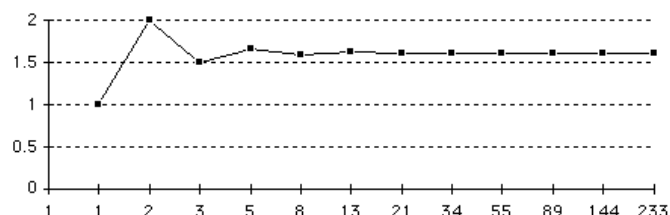
Durch Abänderung der Startwerte und der Rekursionsvorschrift sind hiervon unzählige Varianten bekannt geworden, z.B. die Lucas-Zahlen, die in den verschiedensten Gebieten der Mathematik eine Rolle spielen. Es gibt sogar eine mathematische Fachzeitschrift Fibonacci Quarterly, die ausschließlich dem Studium derartiger Folgen gewidmet ist.

Anmerkung: Selbst wenn man realistisch

annimmt, dass kein Kaninchen älter als 12 Jahre wird, ändert sich das Ergebnis nur unwesentlich. Es zeigt sich, dass immer 99% der Fibonacci-Kaninchen jünger als 12 Jahre sind.

Der französische Mathematiker Edouard Lucas benannte diese Zahlen erstmals nach Fibonacci. Dessen Verdienst ist es, diese Zahlen und die zugehörige Folge in Europa bekannt gemacht zu haben. Allerdings ist bekannt, dass vor 1135 der indische Mathematiker Gospala und um 1150 Hemanchandra die Folge bei der Untersuchung von Tonfolgen verwendeten und explizit beschrieben.

Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen



### Fibonacci-Folge (explizit)

Aufstellen einer expliziten Form

**Ansatz:**  $a_n = a \cdot q^{n-1}$

dann wird aus  $a_n + a_{n+1} = a_{n+2} \dots a \cdot q^{n-1} + a \cdot q^n = a \cdot q^{n+1}$  und  $1 + q = q^2$ ,

$q_1 = (1 + \sqrt{5})/2$  bzw.  $q_2 = (1 - \sqrt{5})/2$ .

für den Wert von  $a$  muss  $a \cdot q^0 = 0$  und  $a \cdot q = 1$  gelten, d.h.  $a \cdot q_1^{n-1} + a \cdot q_1^n = a \cdot q_1^{n+1}$  und  $a \cdot q_2^{n-1} + a \cdot q_2^n = a \cdot q_2^{n+1}$  muss für alle  $n$  gelten.

Aus  $n = 0$  und  $n = 1$  ergibt sich dann  $a = 1/\sqrt{5}$  und  $a = -1/\sqrt{5}$ . Damit erhält man die ...

**Formel von Binet-Moivre**  $F_n = 1/\sqrt{5} * [ ((1 + \sqrt{5})/2)^n - ((1 - \sqrt{5})/2)^n ]$ ,

$\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ , Goldener Schnitt

nach Jacques Philippe Marie Binet (1786-1856, franz.Mathematiker)

### Weiterer Nachweis:

Die Zahlen  $p = (1 + \sqrt{5})/2$  und  $p' = (1 - \sqrt{5})/2$  sind die Wurzeln der Gleichung  $x^2 - x - 1 = 0$ . Für die Formel von Binet wird damit

$$u_n = F(n) = 1/\sqrt{5} (p^n - p'^n)$$

Aus  $p^2 - p - 1 = 0$  wird  $p^2 = p + 1$  und

$$p^3 = p^2 + p = p + 1 + p = 2p + 1$$

$$p^4 = 2p^2 + p = 2(p + 1) + p = 3p + 2$$

$$p^5 = 3p^2 + 2p = 3(p + 1) + 2p = 5p + 3$$

$$p^6 = 5p^2 + 3p = 5(p + 1) + 3p = 8p + 5 \quad \dots$$

Die Koeffizienten auf den rechten Seiten der Gleichungen sind die Fibonacci-Zahlen (folgt aus vollständiger Induktion). Damit

$$p^n = F(n) \cdot p + F(n-1) \quad p'^n = F(n) \cdot p' + F(n-1)$$

$$p^n - p'^n = F(n) \cdot p - F(n) \cdot p' = F(n) \cdot (p - p') \rightarrow F(n) = (p^n - p'^n) / (p - p')$$

Mit  $p - p' = \sqrt{5}$  folgt  $u_n = F(n) = 1/\sqrt{5} (p^n - p'^n)$  qed

### Weitere Eigenschaften

1. Die Summe der ersten  $n$  Glieder ergibt die um 1 verminderte  $(n+2)$ .Fibonacci-Zahl.

2. sind die Indizes der Fibonacci-Zahlen durch einander teilbar, so sind es auch die Fibonacci-Zahlen selbst

3. die Summe aus den Quadraten zweier benachbarter Fibonacci-Zahlen ergibt wieder eine Fibonacci-Zahl

**Behauptung:** Für aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen  $F(n)$  und große  $n$  gilt  $F(n+1)/F(n) \approx \phi$ .

**Beweis:** Mit den Zahlen  $p = (1 + \sqrt{5})/2$  und  $p' = (1 - \sqrt{5})/2$  wird die Formel von Binet zu  $F(n) = 1/\sqrt{5} (p^n - p'^n)$  und  $p/p' = -p^2$ .

Mit  $F(1) = 1$  und  $F(2)$  wird

$F(n+1)/F(n) = (p^{n+1} - p'^{n+1}) / (p^n - p'^n) = (p p^n - p' p'^n) / (p^n - p'^n) = (p p^n - p p'^n + p p'^n - p' p'^n) / (p^n - p'^n)$   
 $= (p(p^n - p'^n) + p'(p - p')) / (p^n - p'^n) = p + (p'(p - p')) / (p^n - p'^n) = p + (p - p') / ((p/p')^n - 1)$   
 $= p + \sqrt{5} / ((p/p')^n - 1)$   
 Der Ausdruck  $(p/p')^n = p^{2n}$  wächst für große n unbegrenzt. Damit strebt der Nenner gegen Null und  $F(n+1)/F(n) = p = \phi$ .

```

{Rekursive Prozedur zur Zahlberechnung}
PROGRAM FIBONACCI;
VAR i:longint;
FUNCTION fibo(n:LONGINT):LONGINT;
BEGIN IF n<3 THEN fibo:=1 ELSE fibo:=fibo(n-1) + fibo(n-2); END;
BEGIN
    write('Index eingeben '); readln(i); writeln(i, ' Fibonacci-Zahl = ', fibo(i));
END.
    
```

Für die Glieder der Fibonacci-Folge 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ... existieren verschiedene mathematische Beziehungen.

1) Zwei benachbarte Glieder haben keine gemeinsamen echten Teiler, d.h. sie sind zueinander relativ prim.

2) Ab der Fibonacci-Zahl 13 gilt: Weder der Vorgänger noch der Nachfolger einer Fibonacci-Zahl ist eine Primzahl.

Dieser Satz wurde 1996 von Toby Gee, Student der John of Gaunt's School Trowbridge, bewiesen.

3) Für Fibonacci-Zahlen mit geradem Index, d.h.  $F_{2n}$ , gilt:

$$F_{2n} + (-1)^n = (F_{n+2} + F_n) F_{n-1} \quad F_{2n} - (-1)^n = (F_n + F_{n-2}) F_{n+1}$$

Für Fibonacci-Zahlen mit ungeradem Index, d.h.  $F_{2n+1}$ , gilt:

$$F_{2n+1} + (-1)^n = (F_{n+1} + F_{n-1}) F_{n+1} \quad F_{2n+1} - (-1)^n = (F_{n+2} + F_n) F_n$$

4)  $F_n^2 \pm 1 = F_{n-2} F_{n+2}$ , wenn n ungerade ist  $F_n^2 \pm 1 = F_{n-1} F_{n+1}$ , wenn n gerade ist

D.h.: Auch Vorgänger und Nachfolger des Quadrates einer Fibonacci-Zahl sind nicht prim.

5) Vernon Hoggatt und Marjorie Bicknell-Johnson bewiesen 1977: Der Vorgänger einer beliebigen Potenz einer Fibonacci-Zahl; mit Ausnahme von  $F_3 = 4$ ; ist eine zusammengesetzte Zahl.

Der Nachfolger einer Fibonacci-Zahl-Potenz ist zusammengesetzt, außer in einem Spezialfall. Ist der Exponent der Potenz selbst eine Zweierpotenz (4, 8, 16, ...) und ist der Index der Fibonacci-Zahl ein Vielfaches von 3, so kann die Fibonacci-Zahl-Potenz auch Primzahl sein.

Beispiele:  $F_9^4 + 1 = 1336337$   $F_{198}^4 + 1$  (165 Ziffern)  $F_{15}^8 + 1$  (23 Ziffern)  
 $F_{48}^8 + 1$  (78 Ziffern)  $F_{51}^8 + 1$  (83 Ziffern)  $F_{21}^{32} + 1$  (130 Ziffern)

### Satz von Lucas

Der Satz von Lucas trifft eine Aussage über den größten gemeinsamen Teiler von Fibonacci-Zahlen.

Satz: Für  $m, n \in \mathbb{N}$  gilt:  $\text{ggT}(F_m, F_n) = F_{\text{ggT}(m, n)}$ .

Beweis: Zuerst soll  $F_n | F_{kn}$  für  $k > 0$  mittels vollständiger Induktion gezeigt werden, d.h.  $F_n$  teilt  $F_{kn}$ . Der Fall  $k = 1$  ist offensichtlich.

Nach der Additionsformel wird  $F_{(k+1)n} = F_{kn-1} F_n + F_{kn} F_{n+1}$

Nach Induktionsvoraussetzung ist dann  $F_n$  ein Teiler von  $F_{kn}$ .

OBdA sei  $m \geq n$ . Der euklidische Algorithmus ergibt dann

$$m = q_0 n + r_1 \text{ mit } r_1 < n$$

$$n = q_1 r_1 + r_2 \text{ mit } r_2 < r_1 \dots \quad r_{k-1} = q_k r_k$$

$r_k$  ist dann der ggT von m und n, d.h.  $\text{ggT}(m, n) = \text{ggT}(n, r_1) = \text{ggT}(r_1, r_2) = \text{ggT}(r_2, r_3) = \dots$

Wendet man den euklidischen Algorithmus auf  $F_n$  und  $F_{n-1}$  an, so ist stets  $q_i = 1$  und die  $r_i$  durchlaufen die Fibonacci-Zahlen nach unten:  $F_n$  und  $F_{n-1}$  sind teilerfremd. Insbesondere sind dann auch  $F_n$  und  $F_{kn-1}$  teilerfremd. Sind nun  $r_i$  und  $q_i$  wie oben, so ist:

$$\text{ggT}(F_m, F_n) = \text{ggT}(F_{q_0 n + r_1}, F_n) = \text{ggT}(F_{q_0 n - 1} F_{r_1} + F_{q_0 n} F_{r_1 + 1}, F_n)$$

$$= \text{ggT}(F_{q_0 n - 1} F_{r_1}, F_n) = \text{ggT}(F_{r_1}, F_n)$$

Weitere Fortsetzung ergibt  $\text{ggT}(F_m, F_n) = \text{ggT}(F_n, F_{r_1}) = \text{ggT}(F_{r_1}, F_{r_2}) = \dots = F_{r_k} = F_{\text{ggT}(m, n)}$ . qed

Weiterhin gilt:  $n | m \Rightarrow F_n | F_m$ .  $F_n$  und  $F_{n-1}$  sind teilerfremd.

$F_n$  ist gerade  $\Rightarrow 3 | n$ ;  $3 | F_n \Rightarrow 4 | n$ ;  $4 | F_n \Rightarrow 6 | n$ ;  $5 | F_n \Rightarrow 5 | n$ ;  $7 | F_n \Rightarrow 8 | n$

Ist  $F_n$  eine Primzahl, so ist  $n = 4$ , oder n ist selber eine Primzahl.

### Fibonacci-Formeln

Mit der Definition der Fibonacci-Folge und der Lucas-Folge

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n; \quad L_0 = 2, L_1 = 1, L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$$

gelten eine Vielzahl von Gleichungen:

$$F_{n+2} + F_n + F_{n-2} = 4 F_n$$

$$F_{n+2} - F_n = F_{n+1}$$

$$F_{n+3} - F_n = 2 F_{n+1}$$

$$F_{n+4} - F_n = L_{n+2}$$

$$F_{n+2} + F_n = L_{n+1}$$

$$F_{n+3} + F_n = 2 F_{n+2}$$

$$F_{n+4} + F_n = 3 F_{n+2}$$

$$F_{n+5} + F_n = F_{n+2} + L_{n+3}$$

$$\begin{aligned}F_{n+5} - F_n &= L_{n+2} + F_{n+3} \\F_{n+6} - F_n &= 4 F_{n+3} \\F_n + 2 F_{n-1} &= L_n \\F_{n+2} - F_{n-2} &= L_n \\F_{n+2} - F_n + F_{n-1} &= L_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_{n+6} + F_n &= 2 L_{n+3} \\F_{n+1} + F_{n-1} &= L_n \\F_{n+2} + F_{n-2} &= 3 F_n \\F_{n+3} - 2 F_n &= L_n \\F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} &= L_{n+3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_{n-1} + L_{n+1} &= 5 F_n \\L_n + L_{n+4} &= 3 L_{n+2} \\L_{n+2} - L_{n-2} &= 5 F_n \\F_n + L_n &= 2 F_{n+1} \\3 F_n + L_n &= 2 F_{n+2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_n + L_{n+3} &= 2 L_{n+2} \\2 L_n + L_{n+1} &= 5 F_{n+1} \\L_{n+3} - 2 L_n &= 5 F_n \\L_n + 5 F_n &= 2 L_{n+1} \\3 L_n + 5 F_n &= 2 L_{n+2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_n^2 + 2 F_{n-1} F_n &= F_{2n} \\F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 &= F_{2n} \\F_{n+3}^2 + F_n^2 &= 2 (F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_{n+1}^2 + F_n^2 &= F_{2n+1} \\F_{n+1}^2 - F_n^2 &= F_{n+2} F_{n-1} \\F_{n+k+1}^2 + F_{n-k}^2 &= F_{2k+1} F_{2n+1}\end{aligned}$$

$$F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \quad \text{Cassini-Formel (1680)}$$

$$F_n^2 - F_{n+r} F_{n-r} = (-1)^{n-r} F_r^2 \quad \text{Catalan-Identität (1879)}$$

$$F_n F_{m+1} - F_m F_{n+1} = (-1)^m F_{n-m} \quad \text{d'Ocagne-Identität}$$

$$F_{n+1} F_{m+1} - F_{n-1} F_{m-1} = F_{n+m}$$

$$F_n = F_m F_{n+1-m} + F_{m-1} F_{n-m}$$

$$F_{n+m} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$$

$$F_n F_{n+1} = F_{n-1} F_{n+2} + (-1)^{n-1}$$

$$F_{n+i} F_{n+k} - F_n F_{n+i+k} = (-1)^n F_i F_k$$

$$F_a F_b - F_c F_d = (-1)^r (F_{a-r} F_{b-r} - F_{c-r} F_{d-r}) ; a+b = c+d \text{ für beliebige ganze } a, b, c, d, r$$

$$(F_{n-1} F_{n+2})^2 + (2 F_n F_{n+1})^2 = (F_{n+1} F_{n+2} - F_{n-1} F_n)^2 = F_{2n+1}^2$$

$$F_{nk} \text{ ist ein Vielfaches von } F_n \quad \text{ggT}(F_m, F_n) = F_{\text{ggT}(m,n)} ; \text{Lucas 1876}$$

$$F_m \bmod F_n = F_k$$

$$L_{2n} = L_n^2 - 2 (-1)^n$$

$$L_{n+2} L_{n-1} = L_{n+1}^2 - L_n^2$$

$$L_{n+1} L_{n-1} - L_n^2 = -5 (-1)^n$$

$$L_{2n} + 2 (-1)^n = L_n^2$$

$$L_{n+m} + (-1)^m L_{n-m} = L_m L_n$$

$$L_m L_n + L_{m-1} L_{n-1} = 5 F_{m+n-1}$$

$$F_{2n} = F_n L_n$$

$$5 F_n = L_{n+1} + L_{n-1}$$

$$L_{n+1}^2 + L_n^2 = 5 F_{2n+1}$$

$$L_{n+1}^2 - L_n^2 = 5 F_{2n}$$

$$L_{n+1}^2 - 5 F_n = L_{2n+1}^2$$

$$L_{2n} - 2 (-1)^n = 5 F_n^2$$

$$L_n^2 - 4 (-1)^n = 5 F_n^2$$

$$F_{n+1} L_n = F_{2n+1} + (-1)^n$$

$$L_{n+1} F_n = F_{2n+1} - (-1)^n$$

$$F_{2n+1} = F_{n+1} L_{n+1} - F_n L_n$$

$$L_{2n+1} = F_{n+1} L_{n+1} + F_n L_n$$

$$L_n^2 - 2 L_{2n} = -5 F_n^2$$

$$5 F_n^2 - L_n^2 = 4 (-1)^{n+1}$$

$$F_n^2 + L_n^2 = 4 F_{n+1}^2 - 2 F_{2n}$$

$$5 (F_n^2 + F_{n+1}^2) = L_n^2 + L_{n+1}^2$$

$$F_n L_m = F_{n+m} + (-1)^m F_{n-m}$$

$$L_n F_m = F_{n+m} - (-1)^m F_{n-m}$$

$$5 F_m F_n = L_{n+m} - (-1)^m L_{n-m}$$

$$2 F_{n+m} = L_m F_n + L_n F_m$$

$$2 L_{n+m} = L_m L_n + 5 F_n F_m$$

$$F_m L_n + F_{m-1} L_{n-1} = L_{m+n-1}$$

$$(-1)^m 2 F_{n-m} = L_m F_n - L_n F_m$$

$$L_{n+i} F_{n+k} - L_n F_{n+i+k} = (-1)^{n+1} F_i L_k$$

$$F_{n+i} L_{n+k} - F_n L_{n+i+k} = (-1)^n F_i L_k$$

$$L_{n+i} L_{n+k} - L_n L_{n+i+k} = (-1)^{n+1} 5 F_i F_k$$

$$5 F_a F_b - L_c L_d = (-1)^r (5 F_{a-r} F_{b-r} - L_{c-r} L_{d-r}) ; a+b = c+d \text{ für beliebige ganze } a, b, c, d, r$$

$$F_a L_b - F_c L_d = (-1)^r (F_{a-r} L_{b-r} - F_{c-r} L_{d-r}) ; \text{mit } a+b = c+d$$

$$F_{kt} / F_t = \sum_{i=0}^{(k-3)/2} (-1)^{it} L_{(k-2i-1)t} + (-1)^{(k-1)t/2} \text{ für ungerade } k > 1$$

$$F_{kt} / F_t = \sum_{i=0}^{k/2-1} (-1)^{it} L_{(k-2i-1)t} \text{ für gerade } k > 1$$

$$L_t / L_t = \sum_{i=0}^{(k-3)/2} (-1)^{i(t+1)} L_{(k-2i-1)t} + (-1)^{(k-1)(t+1)/2} \text{ für ungerade } k > 1$$

$$L_t \text{ ist kein Faktor von } L_{kt} \text{ für gerade } k$$

$$F_{kt} / L_t = \sum_{i=0}^{k/2-1} (-1)^{i(t+1)} F_{(k-2i-1)t} \text{ für gerade } k > 1$$

$$L_t \text{ ist kein Faktor von } F_{kt} \text{ für ungerade } k$$

$$F_{3n} = F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3$$

$$F_{n-1} = (-1)^{n-1} F_{m+n} F_{m-n}$$

$$F_n^2 F_{m+1} F_{m-1} - F_m^2 F_{n+1}$$

$$F_{n+1} F_{n+2} F_{n+6} - F_{n+3}^3 = (-1)^n F_n$$

$$F_{n-2} F_{n-1} L_{n+1} F_{n+2} + 1 = F_n^4 \quad \text{Gelin-Cesàro Identität}$$

$$L_{n-2} L_{n-1} L_{n+1} L_{n+2} + 25 = L_n^4$$

$$F_n F_{n+2} F_{n+3} F_{n+5} + 1 = [F_{n+4}^2 - 2 F_{n+3}^2]^2$$

$$F_{i+j+k} = F_{i+1} F_{j+1} F_{k+1} + F_i F_j F_k - F_{i-1} F_{j-1} F_{k-1} \text{ für ganzzahlige } i, j, k$$

$$((L_n + \sqrt{5} F_n)/2)^k = 1/2 (L_{kn} + \sqrt{5} F_{kn}) ; \text{de Moivre Beziehungen}$$

$$((L_n - \sqrt{5} F_n)/2)^k = 1/2 (L_{kn} - \sqrt{5} F_{kn})$$

$$(F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2)^2 = 2 (F_n^4 + F_{n+1}^4 + F_{n+2}^4) ; \text{Candido-Identität 1951}$$

$$L_{5n} = L_n (L_{2n} + 5 F_n + 3)(L_{2n} - 5 F_n + 3) \text{ für ungerades } n ; \text{Aurifeuille-Identität 1879}$$

$$F_n F_{n+1} F_{n+2} F_{n+4} F_{n+5} F_{n+6} + L_{n+3}^2 = [F_{n+3} (2F_{n+2} F_{n+4} - F_{n+3}^2)]^2$$

## Summenformeln

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1; \text{ Lucas 1876}$$

$$\sum_{i=0}^n L_i = L_{n+2} - 1$$

$$\sum_{i=a}^n L_i = L_{n+2} - L_{a+1}$$

$$\sum_{i=1}^n F_{2i-1} = F_{2n}, n \geq 1$$

$$\sum_{i=1}^n 2^{n-i} F_{i-1} = 2^n - F_{n+2}$$

$$\sum_{i=0}^n F_{3i-1} = (F_{3n+3} + 1)/2$$

$$\sum_{i=0}^n F_{3i+1} = F_{3n+3} / 2$$

$$\sum_{i=0}^n F_{4i+1} = F_{2n+1} F_{2n+2}$$

$$\sum_{i=0}^n F_{4i+3} = F_{2n+3} F_{2n+2}$$

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i L_{2n-2i+1} = F_{2n+2}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} F_i / 2^i = 2$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} F_i / r^i = r / (r^2 - r - 1)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i F_i / 2^i = 10$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} 1/F_{(2i)} = 4 - \phi = 3 - \phi$$

$$\phi - 1 = \sum_{k \geq 2} (-1)^k / (F_k F_{k-1})$$

$$\sum_{i=1}^{2n} F_i F_{i-1} = F_{2n}^2$$

$$\sum_{i=1}^{2n+1} F_i F_{i-1} = F_{2n+1}^2 - 1$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} F_{2i+1}^2 = (F_{4n} + 2n)/5$$

$$\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}$$

$$\sum_{i=1}^{2n-1} L_i^2 = 5 F_{2n} F_{2n-1}$$

$$\sum_{i=1}^n F_i L_{n-i} = (n+1) F_n$$

$$\sum_{i=1}^n L_{2i}^2 = F_{4n+2} + 2n - 1$$

$$\sum_{i=1}^n \binom{n-i}{i-1} = F_n$$

$$\sum_{i=0}^n \binom{n+i}{2i} = F_{2n+1}$$

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} F_i = F_{2n}$$

$$\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} 2^i F_i = F_{3n}$$

$$\sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} F_{2i} = 5^n F_{2n}$$

$$\sum_{i=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{i} F_{2i} = 5^n L_{2n+1}$$

$$\sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} F_i^2 = 5^{n-1} L_{2n}$$

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i F_i = (-1)^n F_{n-1} - 1$$

$$\sum_{i=a}^n F_i = F_{n+2} - F_{a+1}$$

$$\sum_{i=0}^n F_{2i} = F_{2n+1} - 1, n \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^n L_{2i-1} = L_{2n} - 2$$

$$\sum_{i=0}^n 2^i L_i = 2^{n+1} F_{n+1}$$

$$\sum_{i=0}^n F_{3i} = (F_{3n+2} - 1)/2$$

$$\sum_{i=0}^n F_{4i} = F_{2n+1}^2 - 1$$

$$\sum_{i=0}^n F_{4i+2} = F_{2n+1} F_{2n+3} - 1$$

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i L_{n-2i} = 2 F_{n+1}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} L_i / 2^i = 6$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} L_i / r^i = 2 + (r+2) / (r^2 - r - 1)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i L_i / 2^i = 22$$

$$\phi - 1 = \sum_{k \geq 1} (-1)^k / (F_{2k+1} F_{2k-1})$$

$$\sum_{i=1}^{2n} L_i L_{i-1} = L_{2n}^2 - 4$$

$$\sum_{i=1}^{2n+1} L_i L_{i-1} = L_{2n+1}^2 - 5$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} L_{2i+1}^2 = F_{4n} - 2n$$

$$\sum_{i=1}^n L_i^2 = L_n L_{n+1} - 2$$

$$5 \sum_{i=0}^n F_i F_{n-i} = (n+1) L_n - 2 F_{n+1} = n L_n - F_n$$

$$\sum_{i=0}^n L_i L_{n-i} = (n+1) L_n - 2 F_{n+1} = (n+2) L_n + F_n$$

$$F_{mq} = F_m \sum_{j=1}^q F_{m-1}^{j-1} F_{m(q-j)+1}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{n-i-1}{i} = F_n$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i}{2i+1} = F_{2n}$$

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} F_{p-i} = F_{p+n}$$

$$\sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i+1} F_i = F_{2n+1} - 1$$

$$\sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} L_{2i} = 5^n L_{2n}$$

$$\sum_{i=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{i} L_{2i} = 5^{n+1} F_{2n+1}$$

$$\sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} L_i^2 = 5^n L_{2n}$$

## Potenzen von Fibonacci-Zahlen

Für die Fibonacci-Zahlen gilt die rekursive Beziehung  $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$

mit  $F(0)=0, F(1)=1$ . Für die Quadrate der Fibonacci-Zahlen wird

n	1	2	3	4	5	6	7 ...
F(n) <sup>2</sup>	1	1	4	9	25	64	169 ...

mit der Rekursion  $F(n)^2 = 2 F(n-1)^2 + 2 F(n-2)^2 - F(n-3)^2$

Weitere Rekursionen ergeben sich für höhere Potenz der Fibonacci-Zahlen.

Kuben der Fibonacci-Zahlen  $F(n)^3 = 3 F(n-1)^3 + 6 F(n-2)^3 - 3 F(n-3)^3 - F(n-4)^3$

4. Potenzen  $F(n)^4 = 5 F(n-1)^4 - 15 F(n-2)^4 + 15 F(n-3)^4 + 5 F(n-4)^4 - F(n-5)^4 = 0$

5. Potenzen  $F(n)^5 = 8 F(n-1)^5 - 40 F(n-2)^5 + 60 F(n-3)^5 + 40 F(n-4)^5 - 8 F(n-5)^5 - F(n-6)^5 = 0$

## Fibonacci-Fakultät

Ausgehend davon, dass man unter  $n!$  ( $n$  Fakultät) das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis  $n$  versteht, kann man für Fibonacci-Zahlen die Fibonacci-Fakultät (eg. Fibonacci Factorial) einführen. Darunter versteht man

$$F!(n) = F(1) F(2) F(3) \dots F(n)$$

d.h. das Produkt der Fibonacci-Zahlen  $F(1)$  bis  $F(n)$ .

An Stelle der Schreibweise  $F!(n)$  wird auch  $FF(n)$ ; nach Simon Plouffe, verwendet. Zum Beispiel ist

$$F!(1) = 1$$

$$F!(2) = F(2) F(1) = 1 \times 1 = 1$$

$$F!(3) = F(3) F(2) F(1) = 2 \times 1 \times 1 = 2$$

$$F!(4) = F(4) F(3) F(2) F(1) = 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$$

$$F!(5) = F(5) F(4) F(3) F(2) F(1) = 5 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 30$$

Für die ersten Fibonacci-Fakultäten ergibt sich die Faktorisierung mit

n	F!(n)
4	6 = 2 3
5	30 = 2 3 5
6	240 = 2 <sup>4</sup> 3 5
7	3120 = 2 <sup>4</sup> 3 5 13
8	65520 = 2 <sup>4</sup> 3 <sup>2</sup> 5 7 13
9	2227680 = 2 <sup>5</sup> 3 <sup>2</sup> 5 7 13 17
10	122522400 = 2 <sup>5</sup> 3 <sup>2</sup> 5 <sup>2</sup> 7 11 13 17



11 10904493600 =  $2^5 3^2 5^2 7 11 13 17 89$   
 12 1570247078400 =  $2^9 3^4 5^2 7 11 13 17 89$   
 13 365867569267200 =  $2^9 3^4 5^2 7 11 13 17 89 233$   
 14 137932073613734400 =  $2^9 3^4 5^2 7 11 13^2 17 29 89 233$   
 15 84138564904377984000 =  $2^{10} 3^4 5^3 7 11 13^2 17 29 61 89 233$   
 16 83044763560621070208000 =  $2^{10} 3^5 5^3 7^2 11 13^2 17 29 47 61 89 233$   
 17 132622487406311849122176000 =  $2^{10} 3^5 5^3 7^2 11 13^2 17 29 47 61 89 233 1597$   
 18 342696507457909818131702784000 =  $2^{13} 3^5 5^3 7^2 11 13^2 17^2 19 29 47 61 89 233 1597$   
 19 1432814097681520949608649339904000 =  $2^{13} 3^5 5^3 7^2 11 13^2 17^2 19 29 37 47 61 89 113 233 1597$   
 20 9692987370815489224102512784450560000 =  $2^{13} 3^6 5^4 7^2 11^2 13^2 17^2 19 29 37 41 47 61 89 113 233 1597$

### Fibonomialkoeffizient, Fibonomial

In Analogie zum Binomialkoeffizienten werden mit Hilfe der Fibonacci-Fakultäten Fibonomialkoeffizienten, kurz Fibonomials, konstruiert. Es gilt  $(^n_k)_F = F!(n) / (F!(k) F!(n-k)) = F(n)F(n-1)...F(n-k+1) / (F(k)F(k-1)...F(2)F(1))$

Anstelle  $(^n_k)_F$  benutzt D.Knuth die etwas andere Schreibweise  $((^n_k))$ .

Die ersten Fibonomials  $(^n_k)$  sind

$n \setminus k =$	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	1	1					
3	2	2	1				
4	3	6	3	1			
5	5	15	15	5	1		
6	8	40	60	40	8	1	
7	13	104	260	260	104	13	1

Unter <http://oeis.org/A010048> findet man weitere Einträge des entstehenden Fibonomial-Dreiecks.

Weiterhin versteht man unter signierten Fibonomials  $(^n_k)$  die Fibonomials, bei denen für alle  $k \bmod 4 = 1$  oder 2 ein negatives Vorzeichen gesetzt wird, d.h.

$n \setminus k =$	1	2	3	4	5	6	7
1	-1						
2	-1	-1					
3	-2	-2	-1				
4	-3	-6	3	1			
5	-5	-15	15	5	-1		
6	-8	-40	60	40	-8	-1	
7	-13	-104	260	260	-104	-13	1

Die ersten Einträge des zugehörigen Zahlendreiecks findet man unter <http://oeis.org/A055870>.

### Fibonacci-Matrix

Zur Beschreibung der Zahlen der Fibonacci-Folge können auch Matrizen genutzt werden. Dazu werde die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ Fibonacci-Matrix}$$

betrachtet. Wird die Matrix mit sich selbst multipliziert, so wird  $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = M + I$  wobei  $I$  die quadratische Einheitsmatrix ist. Multipliziert man  $M$  nun dreimal, viermal, ... mit sich selbst, ergibt sich die Matrizenfolge

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; \dots$$

$$\text{und allgemein } M^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = F_n M + F_{n-1} I$$

wobei  $F_n$  die  $n$ .te Fibonacci-Zahl ist.

Wendet man diese Gleichung auf zwei  $M^n$ ,  $M^s$  an und stellt das Ergebnis; etwas mühevoll; um, so ergibt sich

$$M^n \cdot M^s = (F_{n+1} F_s + F_n F_{s-1}) M + (F_n F_s + F_{n-1} F_{s-1}) I$$

$$F_{n+s} = F_{n+1} F_s + F_n F_{s-1} = F_n F_{s+1} + F_{n-1} F_s$$

$$F_{n+s-1} = F_n F_s + F_{n-1} F_{s-1}$$

$$F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$$

$$F_{2n} = F_n^2 + 2 F_n F_{n-1} = F_n (F_n + 2 F_{n-1})$$

$$F_{3n} = 3 F_n F_{n-1}^2 + 3 F_n^2 F_{n-1} + 2 F_n^3$$

$$F_{4n} = 4 F_n F_{n-1}^3 + 6 F_n^2 F_{n-1}^2 + 8 F_n^3 F_{n-1} + 3 F_n^4 \text{ usw.}$$

Auf der rechten Seite wird für  $k = 1, \dots, 45$  die Summendarstellung der Fibonacci-Zahl  $F_{kn}$  berechnet.

Dabei bedeute  $F_{xx}$  die  $xx$ .te Potenz der  $n$ .ten Fibonacci-Zahl,  $f_{yy}$  die  $yy$ .te Potenz der  $(n-1)$ .ten Fibonacci-Zahl.

### Muster in der Fibonacci-Folge

Ausgehend von der Fibonacci-Folge, beginnend mit  $n = 0$ ,

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ...

werden nur die letzten Ziffern der Folgeglieder betrachtet. Dabei ergibt sich die Folge

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, 5, 9, 4, 3, 7, 0, 7, ...

Untersucht man die Folge, zeigt sich, dass diese periodisch(!) ist. Nach 60 Gliedern beginnt die Folge von vorn.

Wählt man die letzten zwei Ziffern, so wiederholen sich die Glieder nach 300 Einträgen. Für  $n = 3, 4, 5, \dots$  letzte Ziffern erhält man Periodenlängen von 1500, 15000 und 150000.

### Fibonacci-Teiler

Jede Fibonacci-Zahl ist ein Teiler von unendlich vielen anderen Fibonacci-Zahlen:

#### Fibonacci-Zahlen als Faktoren anderer Fibonacci-Zahlen

i	3	4	5	6	7	8	9	10	11 ...
$F_i$	2	3	5	8	13	21	34	55	89 ...
$2=F_3$	+	-	-	+	-	-	+	-	-
$3=F_4$	-	+	-	-	-	+	-	-	-
$5=F_5$	-	-	+	-	-	-	-	+	-

Ergebnis: jede 3.Fibonacci-Zahl ist ein Vielfaches von 2, d.h. von  $F_3$

jede 4.Fibonacci-Zahl ist ein Vielfaches von 3, d.h. von  $F_4$

jede 5.Fibonacci-Zahl ist ein Vielfaches von 5, d.h. von  $F_5$

jede 6.Fibonacci-Zahl ist ein Vielfaches von 8, d.h. von  $F_6$  ...

und allgemein Jede k.te Fibonacci-Zahl ist ein Vielfaches von  $F_k$

$F_{nk}$  ist ein Vielfaches von  $F_k$  für alle  $n, k = 1, \dots$

Eine Fibonacci-Zahl kann nur dann Primzahl sein, wenn

ihr Index Primzahl ist

Einen Beweis findet man in M.Bicknell und V.E.Hoggatt: "The Fibonacci Quarterly Vol 9 (1971) pages 529 - 536"

### Teiler der Fibonacci-Zahlen

Jede Fibonacci-Zahl ist Teiler von unendlich vielen anderen Fibonacci-Zahlen (siehe Fibonacci-Teiler). Das Problem ist nun:

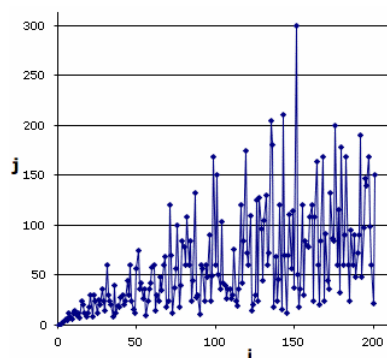
#### Welche natürliche Zahl > 1 ist ein Teiler einer Fibonacci-Zahl?

Verblüffende Antwort: Jede!

1951 bewies der sowjetische Mathematiker Worobjew, dass jede natürliche Zahl  $> 1$  Teiler irgendeiner Fibonacci-Zahl ist. Ebenso zeigt er, dass der Faktor  $i$  unter den ersten  $i^2$  Fibonacci-Zahlen zu finden ist. Für die ersten natürlichen Zahlen ergibt sich

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ist Faktor von									
$F_i$	2	3	8	5	144	21	8	144	610
i	3	4	6	5	12	8	6	12	15

In der Abbildung ist der Index  $j$  der kleinsten Fibonacci-Zahl  $F_j$  mit einem Teiler  $i$  ( $i = 1 \dots 200$ ) abgebildet. Die Folge der Indizes beginnt mit 1, 3, 4, 6, 5, 12, 8, 6, 12, 15, 10, 12, 7, 24, 20, 12, 9, 12, 18, 30, 8, 30, ...



### Tabelle der Teiler der Fibonacci-Zahlen

Die Tabelle enthält die für die natürlichen Zahlen  $n = 2$  bis 30 die Indizes  $i$  der kleinsten Fibonacci-Zahlen  $F_i$ , die ein Vielfaches von  $n$  sind. Ist  $F_i$  kleiner als  $10^{50}$ , so wird auch die Fibonacci-Zahl angegeben.

n	i	Fibonacci-Z.	n	i	Fibonacci-Z.	n	i	Fibonacci-Zahl
2	3	2	3	4	3	4	6	8
5	5	5	6	12	144	7	8	21
8	6	8	9	12	144	10	15	610
11	10	55	12	12	144	13	7	13
14	24	46368	15	20	6765	16	12	144
17	9	34	18	12	144	19	18	2584
20	30	832040	21	8	21	22	30	832040
23	24	46368	24	12	144	25	25	75025
26	21	10946	27	36	14930352	28	24	46368
29	14	377	30	60	154.80087.55920			

Wie man in der vorhergehenden Tabelle der Teiler der Fibonacci-Zahlen sieht, wachsen die Indizes  $i$  der kleinsten Fibonacci-Zahlen  $F_i$ , die eine natürliche Zahl  $n$  als Teiler enthalten, sehr schnell an. Die zweite Tabelle enthält die jeweiligen  $n$ , für welche ein neuer Maximalwert des Index  $i$  erreicht wird. (Polster, September 2006):

n	i	n	i	n	i	n	i
2	3	3	4	4	6	6	12
10	15	14	24	20	30	27	36
30	60	50	75	70	120	86	132
98	168	118	174	134	204	142	210

150	300	206	312	242	330	250	375
254	384	262	390	326	492	350	600
430	660	446	672	478	714	490	840
566	852	590	870	622	930	670	1020
686	1176	750	1500	1030	1560	1046	1572
1094	1644	1198	1794	1214	1824	1250	1875
1270	1920	1286	1932	1318	1974	1438	2154
1454	2184	1574	2364	1630	2460	1646	2472
1678	2514	1750	3000	2038	3054	2126	3192

### Primteiler der Fibonacci-Zahlen

Gegeben sei eine Primzahl  $p$ . Dann ist sicher, dass  $p$  ein Teiler einer ersten  $p+1$  Fibonacci-Zahlen  $F_{p+1}$  ist. Für die ersten Primzahlen  $p = 2, 3, 5, \dots$  erhält man als kleinsten Index  $i$  der Fibonacci-Zahl  $F_i$ , welche ein Vielfaches von  $p$  ist,  $i = 3, 4, 5, 8, 10, 7, 9, 18, 24, 14, 30, 19, 20, 44, 16, 27, 58, 15, 68, 70, \dots$  Durch Lucas wurde definiert: Es sei  $F_u$  ( $u > 0$ ) die kleinste Fibonacci-Zahl, welche die Primzahl  $p$  enthält. Dann heißt  $u$  der Rang der Erscheinung von  $p$  (rank of apparition of  $p$ ).

Bis heute weiß man nur, dass  $u$  gleich oder ein Teiler von  $p-1$  oder  $p+1$  ist. Die Tabelle enthält diese  $u$  (Polster, September 2006):

$p$	$i$	$p$	$i$	$p$	$i$	$p$	$i$
2	3	3	4	5	5	7	8
11	10	13	7	17	9	19	18
23	24	29	14	31	30	37	19
41	20	43	44	47	16	53	27
59	58	61	15	67	68	71	70
73	37	79	78	83	84	89	11
97	49	101	50	103	104	107	36
109	27	113	19	127	128	131	130
137	69	139	46	149	37	151	50
157	79	163	164	167	168	173	87
179	178	181	90	191	190	193	97
197	99	199	22	211	42	223	224
227	228	229	114	233	13	239	238
241	120	251	250	257	129	263	88
269	67	271	270	277	139	281	28
283	284	293	147	307	44	311	310
313	157	317	159	331	110	337	169

Aufgabe: Welche der Glieder der Fibonacci-Folge 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ...

sind durch ihren Index restlos teilbar?

Bis zum Index  $i = 5000$  sind dies genau die  $F_i$  mit

$i = 5, 12, 24, 25, 36, 48, 60, 72, 96, 108, 120, 125, 144, 168, 180, 192, 216, 240, 288, 300, 324, 336, 360, 384, 432, 480, 504, 540, 552, 576, 600, 612, 625, 648, 660, 672, 684, 720, 768, 840, 864, 900, 960, 972, 1008, 1080, 1104, 1152, 1176, 1200, 1224, 1296, 1320, 1344, 1368, 1440, 1500, 1512, 1536, 1620, 1656, 1680, 1728, 1800, 1836, 1860, 1920, 1944, 1980, 2016, 2052, 2160, 2184, 2208, 2256, 2304, 2352, 2400, 2448, 2460, 2520, 2592, 2640, 2688, 2700, 2736, 2760, 2880, 2916, 3000, 3024, 3060, 3072, 3125, 3240, 3300, 3312, 3360, 3420, 3456, 3528, 3600, 3660, 3672, 3720, 3840, 3852, 3864, 3888, 3960, 4032, 4104, 4200, 4320, 4368, 4416, 4500, 4512, 4536, 4608, 4704, 4800, 4860, 4872, 4896, 4920, 4968$

Welche Fibonacci-Zahlen  $F_i$  lassen bei Division durch ihren Index  $i$  den Rest 1?

Für  $i < 1000$  sind dies

$i = 2, 11, 19, 22, 29, 31, 38, 41, 58, 59, 61, 62, 71, 79, 82, 89, 101, 109, 118, 122, 131, 139, 142, 149, 151, 158, 178, 179, 181, 191, 199, 202, 211, 218, 229, 239, 241, 251, 262, 269, 271, 278, 281, 298, 302, 311, 323, 331, 349, 358, 359, 362, 379, 382, 389, 398, 401, 409, 419, 421, 422, 431, 439, 449, 458, 461, 478, 479, 482, 491, 499, 502, 509, 521, 538, 541, 542, 562, 569, 571, 572, 599, 601, 619, 622, 631, 641, 659, 661, 662, 691, 698, 701, 709, 718, 719, 739, 751, 758, 761, 769, 778, 802, 809, 811, 818, 821, 829, 838, 839, 842, 859, 862, 878, 881, 898, 911, 919, 922, 929, 941, 958, 971, 982, 991, 998$

Welche Fibonacci-Zahlen  $F_i$  lassen bei Division durch ihren Index  $i$  den Rest  $i-1$ ?

Für  $i < 1000$  sind dies

$i = 2, 3, 4, 7, 13, 14, 17, 23, 26, 34, 37, 43, 46, 47, 53, 67, 73, 74, 83, 86, 94, 97, 103, 106, 107, 113, 127, 134, 137, 146, 157, 163, 166, 167, 173, 193, 194, 197, 206, 214, 223, 226, 227, 233, 254, 257, 263, 274, 277, 283, 293, 307, 313, 314, 317, 326, 334, 337, 346, 347, 353, 367, 373, 383, 386, 394, 397, 433, 443, 446, 454, 457, 463, 466, 467, 487, 503, 514, 523, 526, 547, 554, 557, 563, 566, 577, 586, 587, 593, 607, 613, 614, 617, 626, 634, 643, 646, 647, 653, 673, 674, 677, 683, 694, 706,$

727, 733, 734, 743, 746, 754, 757, 766, 773, 787, 794, 797, 823, 827, 853, 857, 863, 866, 877, 883, 886, 887, 907, 914, 926, 934, 937, 947, 953, 967, 974, 977, 983, 997

## Komplexe Fibonacci-Folge

Die Fibonacci-Folge  $F_0 = 0$ ;  $F_1 = 1$ ;  $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$

kann auch auf andere Zahlenbereiche als die natürlichen Zahlen erweitert werden.

Ist  $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$  das Verhältnis des goldenen Schnitts, so können die Fibonacci-Zahlen für natürliche  $n$  erzeugt werden mit

$$F(n) = (\phi^n - (1 - \phi)^n) / \sqrt{5}$$

Für den goldenen Schnitt  $\phi$  gilt aber auch  $1 + 1/\phi = \phi$

d.h.  $(-1) 1/\phi = 1 - \phi \dots (1 - \phi)^n = (-1)^n (1/\phi)^n = (-1)^n \phi^{-n}$

Ist  $n$  eine ganze Zahl, so ist weiterhin  $(-1)^n = \cos(n\pi)$

Einsetzen ergibt als stetige und analytische Funktion  $\text{Fib}(x) = (\phi^x - \cos(x\pi) \phi^{-x}) / \sqrt{5}$

Diese Funktion ist eine Fortsetzung der Fibonacci-Folge auf dem Bereich der komplexen Zahlen.

## Fibonacci-Ziffernsumme

Durch Michael Semprevivo wurde folgendes Problem gestellt:

Es sind die Fibonacci-Zahlen  $F_n$  zu bestimmen, deren Index  $n$  gleich der Summe ihrer Ziffern ist.

Offensichtlich ist  $F_{10} = 55$  eine derartige Fibonacci-Zahl. Bis  $n = 10000$  erfüllen folgende  $F_n$  diese

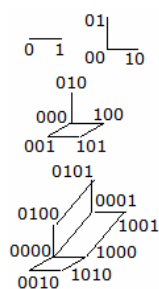
Beziehung: 1, 5, 10, 31, 35, 62, 72, 175, 180, 216, 251, 252, 360, 494, 504, 540, 946, 1188, 2222

Die Frage, ob es unendlich viele derartige Zahlen gibt, ist noch offen. Durch Robert Dawson von der Saint Mary's University, Nova Scotia, Canada, wurde eine plausible Erklärung gegeben, dass  $F_{2222}$  die größte derartige Fibonacci-Zahl ist. Dennoch fehlt noch der exakte Beweis.

Betrachtet man die Fibonacci-Zahlen in Positionssystemen zu anderen Basen  $b$ , so zeigt sich, dass  $F_1$  immer auftritt, ab  $b = 6$   $F_5$  vorhanden ist und für die Basis 11 wahrscheinlich eine unendliche Folge entsteht. Ansonsten nehmen für hohe  $b$  die Anzahl der zu findenden Zahlen schnell ab. Die Tabelle enthält für  $b = 2, \dots, 20$  und die ersten Indizes  $> 5$  der Fibonacci-Zahlen, welche die beschriebene Eigenschaft haben (Polster, Oktober 2006):

### Basis Indizes $n$

6:	9, 15, 35
7:	7, 11, 12, 53
8:	22, 41
9:	29, 77, 149, 312
10:	10, 31, 35, 62, 72, 175, 180, 216, 251, 252, 360, 494, 504, 540, 946, 1188, 2222
11:	13, 41, 53, 55, 60, 61, 90, 97, 169, 185, 193, 215, 265, 269, 353, 355, 385, 397, 437, 481
12:	13, 14, 89, 96, 123, 221, 387, 419, 550, 648, 749, 866, 892, 1105, 2037
13:	12, 24, 25, 36, 48, 53, 72, 73, 132, 156, 173, 197, 437, 444, 485, 696, 769, 773
14:	8, 11, 27, 34, 181, 192, 194
16:	10, 60, 101
18:	60
19:	31, 36
20:	21, 22



## Fibonacci-Würfel

Der Graph eines  $n$ -dimensionalen Hyperwürfels kann durch  $n$ -buchstabile Wörter des Alphabets  $\{0, 1\}$  beschrieben werden. Dabei unterscheiden sich zwei miteinander verbundene Ecken des Hyperwürfels in genau einer Ziffer.

Ein Fibonacci-Würfel bildet einen Untergraphen des Hyperwürfels, wobei gefordert wird, dass in binären Abfolge der Ecken keine zwei "1" aufeinanderfolgen.

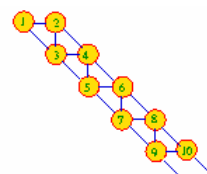
Dabei zeigt sich, dass ein 2-dimensionaler Fibonacci-Würfel 3 Ecken hat, ein dreidimensionaler 5 Ecken, ein vierdimensionaler 8 Ecken, usw. Allgemein hat ein  $n$ -dimensionaler Fibonacci-Würfel genau  $F_{n+1}$  Ecken.

## Wegezahl

Die natürlichen Zahlen werden wie in der oberen Abbildung angeordnet und durch Strecken miteinander verbunden.

Die Anzahl der möglichen Wege um von der Zahl 1 zur Zahl  $n$  zu gelangen ist dann gleich der Fibonacci-Zahl  $F(n)$ . Zum Beispiel gibt es für  $n = 5$  genau 5 verschiedene Wege von der 1 zur 5: (1,2,4,5), (1,2,3,4,5), (1,2,3,5), (1,3,4,5), (1,3,5)

Damit ist  $F(5) = 5$ . Um zur 6 zu gelangen, gibt es genau 8 Wege usw.



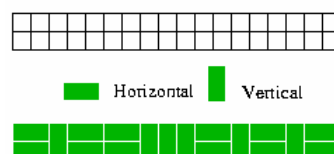
## Überdeckung mit Dominosteinen

Gegeben ist eine  $n \times 2$  Anordnung von Quadraten (siehe Abbildung).

Dieses Muster soll mit Dominosteinen lückenlos überdeckt werden.

Dabei sollen der horizontale und der vertikale Dominostein unterschieden werden.

Problem: Wie groß ist die Anzahl  $K(n)$  der verschiedenen möglichen

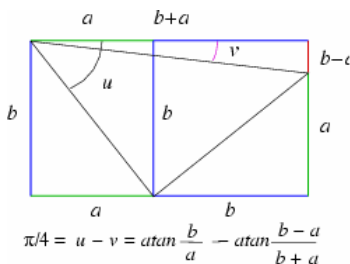


Überdeckungen des  $n \times 2$  Musters?

Offensichtlich ist  $K(1) = 1$  (1 vertikaler Domino),  $K(2) = 2$  (2 Dominos horizontal oder vertikal).

Insgesamt ergibt sich  $K(n+1) = K(n) + K(n-1)$ ,

d.h. die Anzahlen  $K(n)$  entsprechen ebenso den Fibonacci-Zahlen.



### Fibonacci-Zahlen und $\pi$

Gegeben seien vier aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen  $b-a, a, b, b+a$ . Bildet man aus diesen Zahlen ein Rechteck (siehe Abbildung), so ist die Differenz der zwei Winkel  $u-v$  gleich  $45^\circ$ . Dann ergibt sich also

$$\pi/4 = \arctan(b/a) - \arctan((b-a)/(b+a)) \text{ und allgemein}$$

$$\pi/4 = \arctan(F_{n+1}/F_n) - \arctan(F_{n-1}/F_{n+2})$$

Zum Beispiel wird für 3, 5, 8, 13:  $\pi/4 = \arctan(8/5) - \arctan(3/13)$ .

Diese Beziehung gilt auch für Lucas-Zahlen und außerdem für jede beliebige Zahlenfolge, welche die Rekursionsgleichung  $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$

erfüllt, zum Beispiel für 1, 7, 8, 15 ... wird  $\pi/4 = \arctan(8/7) - \arctan(1/15)$ .

### Zeckendorf-Zerlegung

Nach einer Entdeckung von Edouard Zeckendorf kann jede natürliche Zahl als Summe von zwei oder mehr, nicht notwendig aufeinanderfolgenden Fibonacci-Zahlen dargestellt werden. Fordert man noch, dass möglichst große Summanden und keiner doppelt auftreten, so ist diese Zerlegung eindeutig und nach Zeckendorf benannt.

Die Zeckendorf-Zahl symbolisiert diese Zerlegung; mit einer Ziffer 1, wenn die Fibonacci-Zahl mit diesem Index in der Zerlegung auftritt, mit einer 0, wenn sie nicht auftritt. Eine solche Zerlegung kann damit eindeutig durch eine Dualzahl beschrieben werden.

### Satz von Zeckendorf

Jede natürliche Zahl  $N$  lässt sich eindeutig schreiben als

$$N = F_{n_1} + F_{n_2} + \dots + F_{n_k} \quad \text{mit } 2 \leq n_1 \leq n_2 - 2, n_2 \leq n_3 - 2, \dots, n_{k-1} \leq n_k - 2$$

In der Summe dürfen also weder  $F_0$ , noch  $F_1$ , noch zwei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen vorkommen.

Beweis: Für  $n = 1, 2, 3, 4$  ergibt sich dies durch einfache Rechnung.

Nun sei die Behauptung bereits bewiesen für  $N < F_n$ , und es sei  $F_n \leq N < F_{n+1}$ . Es ist dann

$$N - F_n < F_{n+1} - F_n = F_{n-1}.$$

Also lässt sich  $N - F_n$  nach Induktionsvoraussetzung als solche Summe schreiben, und außerdem kommt in dieser Summe  $F_{n-1}$  als Summand nicht vor. Addiert man  $F_n$ , so erhält man die Existenz einer Summendarstellung wie behauptet.

Umgekehrt muss in jeder solchen Darstellung von  $N$  auch der Summand  $F_n$  vorkommen, denn die größte Summe, die sich mit  $F_2, \dots, F_{n-1}$  bilden lässt, ist  $F_{n-1} + F_{n-3} + F_{n-5} + \dots$

Diese ist kleiner gleich  $F_{n-1}$ . Aus der Eindeutigkeit der Darstellung von  $N - F_n$  folgt dann die Eindeutigkeit derjenigen von  $N$ .

### Explizite Darstellung

Für  $n, k \in \mathbb{N}$  ist  $F_{kn}/F_n$  eine natürliche Zahl. Für  $n \geq 2$  ist

$$F_{kn}/F_n = \sum_{i=1}^{k/2} (F_{n(2i-1)-1} + F_{n(2i+1)+1}) \text{ für gerades } n$$

$$F_{kn}/F_n = F_2 + \sum_{i=1}^{(k-1)/2} (F_{2ni-1-1} + F_{2ni+1}) \text{ für ungerades } n$$

Für  $n = 2, F_2 = 1$ , reduziert sich die erste Formel auf  $F_{2k}$ .

### Zeckendorf-Sequenz, Fibonacci-Sequenz

Für den Satz von Zeckendorf gibt es auch eine andere Herangehensweise:

Definition: Eine Zeckendorf-Sequenz ist eine endliche Folge  $x_1, x_2, \dots, x_k$

mit  $x_i \in \{0, 1\}$  und  $x_i \cdot x_{i+1} = 0$  und  $x_k = 1$ , d.h. eine Folge aus Nullen und Einsen, in der nie zwei Einsen hintereinander vorkommen, und die mit 1 endet.

$k$  heißt die Länge der Zeckendorf-Sequenz.

### Satz von Zeckendorf

Es gibt eine bijektive Abbildung zwischen der Menge der Zeckendorf-Sequenzen und den natürlichen Zahlen mit

$$(x_1, x_2, \dots, x_k) \rightarrow \sum_{i=1}^k x_i F_{i+1}$$

Die Anzahl der Zeckendorf-Sequenzen der Länge  $\leq n$  ist genau  $F_{n+2}$ .

Beweis: Aus dem Beweis zum Satz von Zeckendorf (vorhergehende Seite) folgt, dass man genau alle Zahlen  $< F_{n+2}$  mit Hilfe von  $F_2, \dots, F_{n+1}$  darstellen kann. Dies entspricht genau der Behauptung.

### Fibonacci-Zahlen von Graphen

Eine Teilmenge  $I$  von Knoten eines Graphen  $G$  heißt unabhängig, falls keine zwei Knoten aus  $I$  durch eine Kante verbunden sind.

Der Graph, der aus  $n$  Knoten  $x_1, \dots, x_n$  besteht, wobei jede  $x_i$  und  $x_{i+1}$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) durch eine Kante verbunden sind, hat damit genau  $F_{n+2}$  verschiedene unabhängige Mengen von Knoten, denn jede solche Menge entspricht genau einer Zeckendorf-Sequenz. Ist  $G$  nun ein beliebiger Graph, so sei die Fibonacci-Zahl von  $G$   $F(G)$  die Anzahl der unabhängigen Knotenmengen von  $G$ .

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	1	1	.	.	.	.	.	.	.
.	.	1	2	1	.	.	.	.	.
.	.	.	1	3	3	1	.	.	.
.	.	.	.	1	4	6	4	1	.
.	.	.	.	.	1	5	10	10	5
.	.	.	.	.	.	1	6	15	20
.	.	.	.	.	.	.	1	7	21
.	.	.	.	.	.	.	.	1	8
.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

### Fibonacci-Zahlen und Pascalsches Dreieck

Werden im Pascalschen Dreieck die Zahlen entsprechend dem dargestellten Muster addiert, ergeben sich (natürlich) die Fibonacci-Zahlen.

Daraus folgt  $F_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-k-1}{k}$   $F_n = \sum_{k=1}^n \binom{n-k}{k-1}$

























### Fibonacci-Zahlen und Entfernungen

Der Quotient  $F_{n+1}/F_n$  nähert sich im Grenzwert der goldenen Zahl, d.h.

1,618033988749894848...

Der Umrechnungsfaktor zwischen Kilometern und englische Meilen (Miles) ist 1,609344, d.h. etwa die goldene Zahl. Daraus ergibt sich die merkwürdige Beziehung, dass näherungsweise

3 Meilen = 5 km, 5 Meilen = 8 km, 8 Meilen = 13 km, ...  
und allgemein  $F_n$  Meilen =  $F_{n+1}$  km gilt.

1 chair  or   
2 chairs   or   or    
since we do not allow    
3 chairs    or    or     
this time    and  
  are not allowed.

### Fibonacci-Zahlen und Lehrer

Unter der Adresse (Autor Dr. Ron Knott)

<http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibpuzzles.html>

findet man folgende "Anwendung" der Fibonacci-Zahlen. Da der Text zu schön ist, hier im Original:

### Chairs in a row: No Neighbouring Teachers

This time we have  $n$  chairs in a row and a roomful of people.

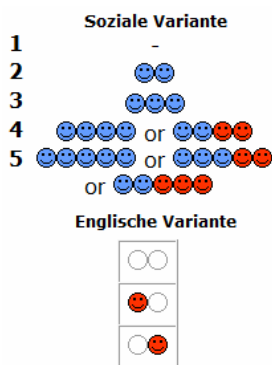
If you've ever been to a gathering where there are teachers present, you will know they always talk about their school/college (boring!).

So we will insist that no two teachers should sit next to each other along a row of seats and count how many ways we can seat  $n$  people, if some are teachers (who cannot be next to each other) and some are not. The number of seating arrangements is always a Fibonacci number: (Abbildung)

You can write the sequences using T for Teacher and N for Normal people - oops - I mean Not-a-teacher !!

There will always be a Fibonacci number of sequences for a given number of chairs, if no two teachers are allowed to sit next to each other!

Von der Möglichkeit, Personen in einer Reihe anzuordnen, gibt es weitere Varianten, eine soziale und eine "englische".



### Soziale Variante

In diesem Fall fordert man, dass neben einem Lehrer (blau) stets mindestens ein weiterer Lehrer sitzt und ebenso für Nicht-Lehrer (rot). Damit ist gewährleistet, dass ein "armer" Nicht-Lehrer sich nicht die ganze Party mit einem Lehrer unterhalten muss. Der Autor dieser Variante R. Lewis nennt diese Variante "sozial".

Beginnt man mit einem Lehrer, so entwickeln sich auch hier wieder die Anzahl der Sitzmöglichkeiten mit steigenden Stuhlzahlen in Form der Fibonacci-Folge.

### Englische oder antisoziale Variante

Wie bekannt, sind Engländer oft sehr reserviert und vor allem versuchen sie, wenn möglich, sich niemals neben eine andere Person zu setzen. Sie lassen immer einen Platz frei. Diese Variante ist natürlich "antisozial".

Sind zwei Plätze vorhanden, gibt es damit drei Möglichkeiten sie zu belegen:

frei frei | Engländer frei | frei Engländer

Bei drei Plätzen ergeben sich 5 Möglichkeiten

frei frei frei | Engländer frei Engländer | frei Engländer frei | Engländer frei frei | frei frei Engländer

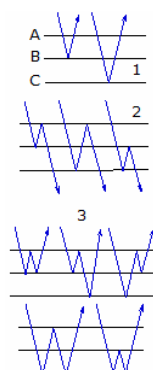
usw., d.h. also wieder die Fibonacci-Zahlen.

Quelle: <http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibpuzzles.html>

Literatur: "Antisocial Dinner Parties", R. Lewis in Fibonacci Quarterly 1995, vol 33, pages 368-370

### Reflexion und Fibonacci-Zahlen

Gegeben sind drei reflektierende Schichten A, B und C. Ein Lichtstrahl fällt auf diese Schichten und soll  $n$  mal reflektiert werden.





Das Problem ist, auf wie viele verschiedene Arten der Lichtstrahl an verschiedenen Schichten  $n$  mal reflektiert werden kann.

Die Aufgabe besteht damit in der Ermittlung aller  $n$  buchstabigen Wörter über dem Alphabet  $\{A, B, C\}$ . Dabei wird gefordert, dass aufeinander folgende Buchstaben in unmittelbarer alphabetischer Reihenfolge steigen oder fallen und kein Wort mit A beginnt.

Die Anzahl der möglichen Wörter bei  $n$  Reflexionen ist die Fibonacci-Zahl  $F_{n+1}$ .

Literatur: "Reflections across Two and Three Glass Plates", V.E.Hoggatt Jr. und Marjorie Bicknell-Johnson in The Fibonacci Quarterly, volume 17 (1979), pages 118 - 142

### Bienenwege und Fibonacci-Zahlen

Eine Biene hat die Absicht zu einer Zelle mit der Nummer  $n$  zu laufen. Dabei kann sie sich ausschließlich nach rechts unten oder rechts oben bewegen, niemals zurück.

Wie viele verschiedene Wege gibt es?

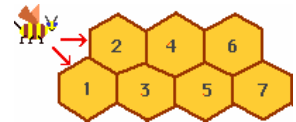
Zur Zelle 1 gibt es nur einen Weg: 1

Zur Zelle 2 gibt es zwei Wege: 1-2 und direkt 2

Zur Zelle 3 gibt es drei Wege: 1-2-3, 1-3 und 2-3

Zur Zelle 4 gibt es fünf Wege: 1-2-3-4, 1-2-4, 1-3-4, 2-3-4 und 2-4

Allgemein zeigt sich wieder, dass es zur  $n$ -ten Zelle genau  $F_{n+1}$  verschiedene Wege gibt.



### Fibonacci-Zahlen im Tierreich

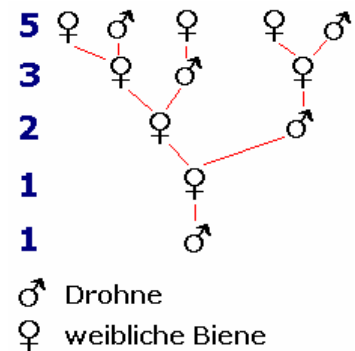
Eine verblüffende Anwendung der Fibonacci-Zahlen findet sich auch im Tierreich.

In Bienenstaaten werden weibliche Arbeiterinnen von der Bienenkönigin aus befruchteten, die männlichen Drohnen aus unbefruchteten Eiern geboren.

Betrachtet man eine Drohne, so hat diese, da sie aus einer unbefruchteten Eizelle stammt, praktisch nur "eine Mutter", aber keinen Vater. Diese "Mutter" besitzt, da aus befruchteter Zelle, eine "Mutter" und einen "Vater".

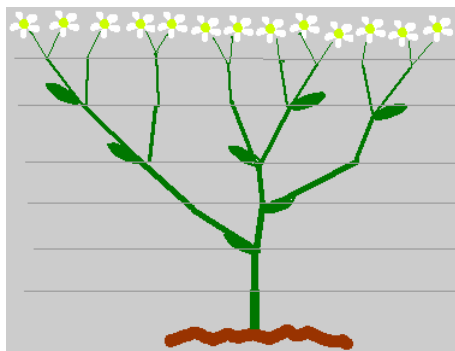
Setzt man dies fort, so hat die Drohne in den vorhergehenden Generationen 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Vorfahren.

Diese Anzahl entspricht gerade wieder der Fibonacci-Folge. Man kann nur vermuten, dass Fibonacci, bei Kenntnis der Fortpflanzung in Bienenvölkern, vielleicht dieses realistischere Beispiel anstelle seines Kaninchenproblems gewählt hätte.



♂ Drohne

♀ weibliche Biene



Auch bei dem Wachstum einer Pflanze treten die Fibonacci-Zahlen auf. Geht man davon, dass an jedem neuen Ast nach 2 Monaten wieder ein neuer Ast entsteht, erhält man nachfolgende Abbildung:

### Fibonacci-Zahlen in der Natur

Blätter sind am Stengel stets in regelmäßigen Mustern angeordnet, die am besten bei Betrachtung des Sprosses von oben zu erkennen sind. In den meisten Fällen wird deutlich, dass sie in Form einer Schraube angeordnet sind und dass zwischen aufeinanderfolgenden Blättern stets gleiche Winkel (Divergenzwinkel) messbar sind.

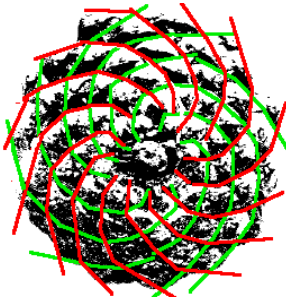
Im einfachsten Fall beträgt dieser Winkel  $180^\circ$ , die Blätter sind dann zweizeilig (d.h. in zwei sog. Längsreihen) gegenüberständig angeordnet. Es kommen aber auch andere Winkel vor:

120 Grad (=  $1/3$  Vollkreis) oder 144 Grad ( $2 = 2/5$ , d.h. 5 Blätter verteilen sich auf zwei Vollkreise = 720 Grad) oder 135 Grad ( $=3/8$ , 8 Blätter auf drei Vollkreise) usw.

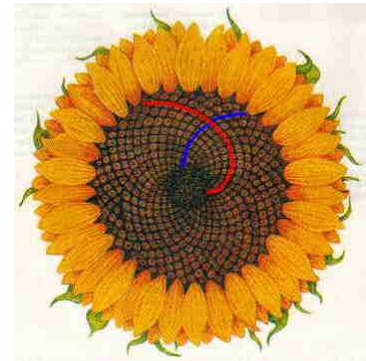


Die Regelmäßigkeit der Blattstellung wurde bereits im vorigen Jahrhundert von C.F.Schimper und A.Braun entdeckt und heißt nach ihnen Schimper-Braunsche Hauptreihe. Die dabei auftretenden Winkel entsprechen einer Fibonacci-Reihe, d.h., Zähler und Nenner aufeinanderfolgender Brüche sind gleich der Summe von Zähler und Nenner der beiden vorangegangenen. Die Reihe würde demnach wie folgt lauten:  $1/2$ ,  $1/3$ ,  $2/5$ ,  $3/8$ ,  $5/13$ ,  $8/21$ ,  $13/34$ ,  $21/55$ ,  $34/89$  usw. Der Vorteil regelmäßiger Anordnung der Blätter liegt darin, eine möglichst hohe Lichtausbeute zu erreichen. Darüber hinaus erreichen Pflanzen so eine möglichst große Ausbeute an Regen. Blüten bilden damit auch einen besonders großen Anziehungsbereich für Insekten aus, die sie zur Bestäubung benötigen.

Der goldene Schnitt und damit die Fibonacci-Zahlen kann auch beim Wachstum der Pflanzen gemessen werden. Die Strecken der einzelnen Knotenpunkte stehen im Verhältnis des goldenen Schnitts, auch wenn die Pflanzen in die Höhe wachsen. Sehr oft kann man bei Blättern feststellen, dass die Breite des Blattes im Verhältnis 5:8 oder 3:8 zur Länge steht. Ein Beispiel für 5:8 ist das Eichenblatt.



Auch an anderen Stellen tauchen die Fibonacci-Zahlen in der Natur auf: Die Blätter oder Früchte von Pflanzen bilden oft Spiralmuster. Die Anzahl der Spiralen sind meist Fibonacci-Zahlen – ein Föhrenzapfen hat z.B. in der einen Richtung 8, in der anderen 13 Spiralen.



Sieht man sich den Fruchstand einer Sonnenblume genauer an, erkennt man, dass die Kerne in spiralförmigen Linien angeordnet sind.

Es gibt links- und rechtsdrehende Spiralen. Zählt man die linksdrehenden, so stößt man auf die Fibonacci-Zahlen, also 21, 34, 55, 89, 144, 233 ... . Erstaunlicherweise ergibt die Anzahl der rechtsdrehenden Spiralen nicht die gleiche, sondern eine benachbarte Fibonacci-Zahl. Bei der abgebildeten Sonnenblume beträgt die Anzahl 21 bzw. 34. Außer bei den genannten Pflanzen findet man eine Vielzahl derer, die gerade die Fibonacci-Zahlen umsetzen. Als Auswahl seien zwei Kakteen aus Neuseeland gezeigt:



Ein Standardbeispiel für das Auftreten von Spiralzahlen in der Natur entsprechend der Fibonacci-Zahlen ist der Pyramidenblumenkohl oder Romanesco (*Brassica oleracea* L. convar).



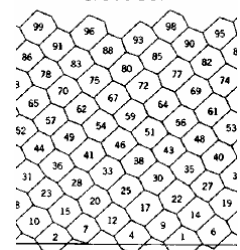
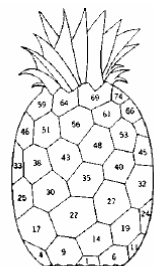
In der Natur treten Fibonacci-Zahlen auch oft bei der Anzahl von Blütenblättern auf. Man findet

- 3 Blütenblätter bei Lilien (untere Abbildung, obwohl es scheint, dass 6 Blütenblätter auftreten, sind nur 3 richtige Blütenblätter)
- 5 Blütenblätter bei Butterblumen, wilden Rosen, Alpenakelei, Büschelnelken (obere Abbildung)
- 8 Blütenblätter bei Studentenblumen, Bitterenzian, Pfingstrose
- 13 Blütenblätter bei Maisringelblume, Heide, einige Gänseblümchen
- 21 Blütenblätter Aster, Zichorie
- 34 Blütenblätter Banane
- 55 und 89 Blütenblätter verschiedene Gänseblümchen und Astern



Einige Arten halten die Anzahl der Blütenblätter sehr exakt ein, z.B. Butterblumen, andere schwanken um einen Durchschnittswert, der eine Fibonacci-Zahl ist. Bei der Passionsblume findet man (von hinten) 3 äußere Schutzblätter, 5 äußere grünen Blütenblätter und 5 innere Blütenblätter. Von vorn erkennt man 5 grünliche Staubgefäße und 3 dunkelbraune; alles Fibonacci-Zahlen.

Hat eine Pflanze eine Blütenblattzahl, die keine Fibonacci-Zahl ist, so ist die oft eine Lucas-Zahl.



Auch bei der Anordnung der Schuppen bei Tannenzapfen und bei der Anordnung der Außenzellen der Ananas treten Fibonacci-Zahlen auf.

Die Zellen der Ananas wurden im Bild ihrer Höhe nach durchnummeriert. Dadurch ergeben sich dann entsprechende Zahlenfolgen, hier etwa 1, 6, 11, 16, 21, ...

Um ein mathematisches Modell der Schuppenanordnung auf einer Ananas zu erhalten, stellt man sich ihre Oberfläche als Zylinder vor, den man entlang einer vertikalen Linie aufschneiden und auf einer Ebene abrollen. Es ergibt sich dann:

Sei  $h$  die Höhe des Mittelpunktes der untersten Zelle. Dann bilden die Mittelpunkte der Sechsecke ein "Gitter". Um von einer Zelle zur nächst höheren zu kommen, müssen wir den Ananasumfang im goldenen Schnitt teilen, uns um diesen Wert um die Ananas herumbewegen, und dann um  $h$  nach oben, gehen.

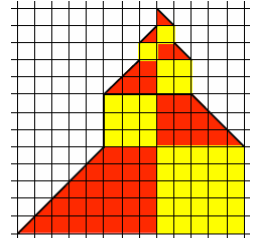
### Fibonacci-Matterhorn

Wählt man aus der Fibonacci-Folge, außer den Startgliedern, nur jeweils die zweite Zahl aus, d.h. also

1, 1, 3, 8, 21, 55, 144, ...

und bildet aus längs der Diagonalen halbierten Quadraten entsprechend der Fibonacci-Zahlen Trapeze, so kann man diese mit weiteren Rhomben zu einem gleichseitigen Dreieck zusammensetzen.

Durch Hans Walser, einem Schweizer Mathematiker, wird vorgeschlagen, diese Trapeze mit Quadraten zu der links gezeigten Abbildung zusammenzufügen. Irgendwie sieht das wie das Matterhorn aus. :-)



### Fibonacci-Zahlen in der Architektur

Ein prominentes Beispiel für die Verwendung der Fibonacci-Zahlen in der Architektur ist die Kuppel des Doms zu Florenz. Ihre Masse wurden 1367 verbindlich festgelegt: 144 bracci sollte ihre Höhe messen, wovon 55 auf die Kuppel selbst und 89 auf die Distanz vom Boden bis zum Tambour entfielen.

Welche Bedeutung man offenbar diesen Masszahlen beigemessen haben musste, zeigt in frappanter Weise die eigens für die Domweihe am 25. März 1436 von Guillaume Dufay (1400 - 1474) komponierte Festmotette "Nuper rosarum flores": Dufay, der bedeutendste Musiker seiner Zeit, nimmt im Aufbau dieser Motette vielfach Bezug auf die Architektur und spielt in der Anzahl der den einzelnen Stimmen zugeteilten Tönen unverkennbar auf die Fibonacci-Zahlen der Kuppelmasse an.



1994 schuf der Künstler Mario Merz (Italien) in Turku (Finnland) eines seiner Werke. Der Schornstein des Kraftwerkes erhielt 2 Meter große Neon-Ziffern, die die ersten Fibonacci-Zahlen zeigen. Aussage des Künstlers: Das Werk ist eine Metapher auf die menschliche Suche nach Ordnung und Harmonie im Chaos.

Die Bedeutung der Fibonacci-Zahlenfolge zeigt sich auch in deren Bezeichnung in anderen Sprachen. Im Holländischen heißt diese Folge zum Beispiel „De Konijnenreeks“, d.h. die Königsreihe.



### Gedicht Alfabet

Die dänische Schriftstellerin Inger Christensen (1935-2009) zählte zu den bedeutendsten europäischen Lyrikerinnen ihrer Generation und galt jahrzehntelang als Kandidatin für den Nobelpreis.

Der Gedichtband "Alfabet" von 1981 bezieht sich auf die Fibonacci-Reihe. Christensen setzte die Fibonacci-Zahlen in Korrespondenz mit Struktur und Wachstum verschiedener Pflanzenarten. Dieses Gedicht findet sich als Mauergedicht an einem Gebäude in Kopenhagen:

1. abrikostræerne findes, abrikostræerne findes
2. bregnerne findes; og brombær, brombær  
Og brom; og brinten
3. cikaderne findes; cikorie, chrom  
og citrontræer findes; cikaderne findes;  
cikaderne., ceder, cypres, cerebellum
4. duerne findes; drømmene, dukkerne

dræberne findes; duerne, duerne;  
dis, dioxin og dagene; dagene



findes; dagene, døden; og digtene  
findes; digtene, dagene, døden

5. efteråret findes; eftersmagen og eftertanken  
findes; og enrummet findes; englene,  
enkerne og elsdyret findes; enkelthederne  
findes, erindringen, erindringens lys;  
og efterlyset findes, egetræet og elmetræet  
findes, og enebærbusken, ensheden, ensomheden  
findes, og edderfuglen og edderkoppen findes,  
og eddiken findes, og eftertiden, eftertiden

### Fibonacci-Zahlen im Film

In der US-amerikanischen Fernsehserie "Fringe" von J.J.Abrams ("Lost" und "Alias") wird immer wieder auf die Fibonacci-Reihe Bezug genommen. Allerdings ist unklar, was die Fibonacci-Zahlen mit dem ansonsten dubiosen Inhalt der Serie zu tun haben.

Zwischen den einzelnen Szenen werden immer wieder Symbole eingeblendet. Diese beziehen sich direkt oder versteckt auf die Zahlen der Fibonacci-Reihe.



- 1) Das Fringe-Horn (Abbildung) hat die Form einer Fibonacci-Spirale. Auf dem Horn ist zusätzlich die goldene Zahl  $\Phi$  aufgetragen. Seit dem Auftauchen des Hornes gibt es auch eine zugehörige Internetseite.
- 2) Das Fringe-Seepferdchen hat ebenfalls die Form einer Fibonacci-Spirale. Auch sein Schwanz ist in dieser Form.
- 3) Der Fringe-Frosch hat den griechischen Buchstaben  $\Phi$ , das goldene Verhältnis, auf seinem Rücken.
- 4) Die Fringe-Blume hat 13 Blütenblätter, die wie die Flügel einer Libelle aussehen. Die Blütenmitte entspricht einer parabolischen Spirale.

### Fibonacci-Wörter

Ausgehend vom Kaninchen-Problem des Fibonacci ergibt sich die berühmte Fibonacci-Folge

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

der vorhandenen Kaninchenpaare. Setzt man für ein geschlechtsreifes Kaninchenpaar 1 und ein noch nicht geschlechtsreifes 0, so kann die Aufgabenstellung auf einen Automaten mit dem Alphabet  $\{0, 1\}$  und den Produktionsregeln  $0 \rightarrow 1$  ;  $1 \rightarrow 10$  reduziert werden.

Damit ergibt sich eine Folge von Wörtern über dem Alphabet  $\{0, 1\}$  die Fibonacci-Wörter:

0, 1, 10, 101, 10110, 10110101 ...

Die Länge des n. Wortes entspricht gerade der n. ten Fibonaccizahl  $F_n$ . Die Anzahl '1' ist gleich  $F_{n-1}$ . Wie zu erwarten, ergibt sich das n+1. te Wort  $W_{n+1}$  durch einfache Aneinanderfügen der Wörter  $W_n$  und  $W_{n-1}$ :  
 $W_{n+1} = W_n W_{n-1}$

Schneidet man von einem Fibonacci-Wort die letzten zwei Zeichen ab, so entsteht stets ein Palindrom. Lässt man die Nummer n des n. ten Fibonacci-Wortes gegen Unendlich streben, so entsteht eine unendliche Folge von '0' und '1'. Diese Folge wird goldene Buchstabenfolge oder goldene Reihe genannt.

### Ziffern der goldenen Reihe

Die ersten 2000 Ziffern der goldenen Reihe sind

```
1011010110 1101011010 1101101011 0110101101 0110110101 1010110110 1011011010 1101011011
0101101101 0110101101 1010110101 1011010110 1101011010 1101101011 0101101101 0110110101
1010110110 1011011010 1010110111 0101101011 1010110101 1010110110 1011011011 1010110101
1101101011 0101101101 0110110101 1010110110 1011010110 1101011011 0101101101 0110110101
1010110101 1011010110 1011011010 1101101011 0101101101 0110110101 1010110110 1011010110
1101011011 0101101011 0110101101 0110110101 1011010110 1011011010 1101101011 0101101101
0110101101 1010110110 1011010110 1101011010 1101101011 0110101101 0110110101 1011010110
1011011010 1101011011 0101101101 0110101101 1010110110 1011010110 1101011010 1101101011
0110101101 0110110101 1010110110 1011011010 1101011011 0101101101 0110101101 1010110101
1011010110 1101011010 1101101011 0101101101 0110110101 1010110110 1011011010 1101011011
0101101011 0110101101 1010110101 1011010110 1101011010 1101101011 0101101101 0110110101
1010110110 1011010110 1101011011 0101101011 0110101101 1010110101 1011010110 1011011010
1101101011 0101101101 0110101101 1010110110 1011010110 1101011011 0101101101 0110110101
1011010110 1101011011 0101101101 0110101101 1010110101 1011010110 1101011010 1101101011
0101101101 0110101101 1010110110 1011011010 1101011011 0101101011 0110101101 1010110101
1011010110 1101011010 1101101011 0101101101 0110110101 1010110110 1011010110 1101011011
0101101011 0110101101 1010110101 1011010110 1011011010 1101101011 0101101101 0110110101
1010110110 1011010110 1101011011 0101101011 0110101101 0110110101 1011010110 1011011010
```

1101101011 0101101101 0110101101 1010110110 1011010110 1101011010 1101101011 0110101101  
 0110110101 1011010110 1011011010 1101011011 0101101101 0110101101 1010110110 1011010110  
 1101011010 1101101011 0110101101 0110110101 1010110110 1011011010 1101011011 0101101101  
 0110101101 1010110101 1011010110 1101011010 1101101011 0101101101 0110110101 1010110110

### Phi-Linien-Diagramm

In den ersten Quadranten eines Koordinatensystems werde die Gerade

$$y = \phi x = (1 + \sqrt{5})/2 x$$

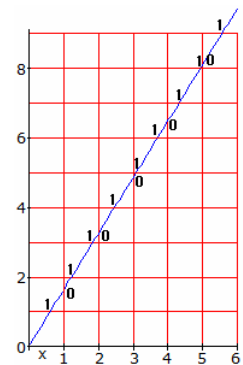
eingetragen. Zusätzlich werden Gitterlinien bei allen ganzzahligen x- und y-Werten eingezeichnet.

Schneidet die Gerade eine Linie mit  $x = 1, 2, 3, \dots$ , so wird eine '0' an den Schnittpunkt geschrieben; werden  $y = 1, 2, 3, \dots$  geschnitten eine '1'. Beginnend ab dem Koordinatenursprung werden längs der Geraden die Ziffern aneinandergefügt.

Ergebnis: 1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 ...

Wie zu erwarten, muss auch hier wieder irgendein Zusammenhang zum goldenen Schnitt oder den Fibonacci-Zahlen auftreten.

Tatsächlich ist die entstehende Ziffernfolge die goldene Reihe.



### Fibonacci-Zahlenberechnung

Modula 2 - Programme zur Berechnung der Fibonacci-Zahlen nach Otto Forster "Algorithmische Zahlentheorie":

Anfangswerte: fib(0) = 0; fib(1) = 1;

// Rekursive Version, sehr langsam!

function fib\_rec(n: integer): integer;

begin if n <= 1 then return n;

else return fib\_rec(n-1) + fib\_rec(n-2);

end; end;

// Iterative Version

function fib\_it(n: integer): integer;

var x, y, temp, i: integer;

begin if n <= 1 then return n end;

x := 1; y := 0;

for i := 2 to n do temp := x; x := x + y; y := temp; end;

return x; end;

// Schnelle Berechnung der Fibonacci-Zahlen mittels der Formeln

// fib(2\*n-1) = fib(n)\*\*2 + fib(n-1)\*\*2 und fib(2\*n) = fib(n)\*\*2 + 2\*fib(n)\*fib(n-1)

function fib(n: integer): integer;

var k, x, y, xx, temp: integer;

begin if n <= 1 then return n end;

x := 1; y := 0;

for k := bit\_length(n)-2 to 0 by -1 do xx := x\*x; x := xx + 2\*x\*y; y := xx + y\*y;

if bit\_test(n,k) then temp := x; x := x + y; y := temp;

end; end;

return x;

end.

### Fibonacci-Primzahlen

In der Fibonacci-Folge  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ ,  $F_0=0$ ,  $F_1=1$ ; treten für

$n = 3, 4, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 43, 47, 83, 131, 137, 359, 431, 433, 449, 509, 569, 571, 2971, 4723, 5387, 9311, 9677, 14431, 25561, 30757, 35999, 37511, 81839, \dots$  Primzahlen auf.

Die ersten sind:

n	Fibonacci-Primzahl $F_n$	n	Fibonacci-Primzahl $F_n$
3	2	4	3
5	5	7	13
11	89	13	233
17	1597	23	28657
29	514229	43	4334 94437
47	29712 15073	83	99 19485 30947 55497
131	106 63404 17491 71059 58145 72169 137		1913 47024 00093 27808 14494 23917

### Nichtprime Fibonacci-Folgen

In der Fibonacci-Folge  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ ,  $F_0=0$ ,  $F_1=1$ ; treten u.a. für



$n = 3, 4, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 43, 47, 83, 131, 137, 359, 431, 433, 449, 509, 569, 571, 2971, 4723, 5387, 9311, 9677, 14431, 25561, 30757, 35999, 37511, 81839, \dots$  Primzahlen auf.

1964 vermutete R.L.Graham, dass man zwei teilerfremde(!) Startglieder  $F_0, F_1$  so konstruieren kann, dass eine Fibonacci-ähnliche Zahlenfolge entsteht, die ausschließlich zusammengesetzte Zahlen enthält.

Durch D.E.Knuth (1990) wurde ein derartiges Beispiel mit

$$F_0 = 331635635998274737472200656430763$$

$$F_1 = 1510028911088401971189590305498785$$

gefunden; später ein weiteres mit kleineren Startwerten

$$F_0 = 49463435743205655$$

$$F_1 = 62638280004239857$$

Bis heute kennt man kein allgemeines Lösungsverfahren. Kleinere bekannte Startwert sind

$$F_0 = 20615674205555510 ; \text{Herbert Wilf 1990}$$

$$F_1 = 3794765361567513$$

und  $F_0 = 407389224418 ; \text{John Bicol 1990}$

$$F_1 = 76343678551.$$

## Fibonacci-Vierling

... Folge von vier Primzahlen  $p_1, p_2, p_3, p_4$  für welche eine natürliche Zahl  $a$  existiert, so dass

$$p_1 + a = p_2 ; p_1 + p_2 = b ; p_2 + b = p_3 \text{ und } p_2 + p_3 = p_4$$

gilt. Für  $a = 236$  gibt es z.B. den Fibonacci-Vierling : 2003, 2239, 6481, 10723 , mit  $b = 4242$ .

## Primzahlen vom Fibonacci-Typ

Bei Erweiterung der Bildungsvorschrift der Fibonacci-Zahlen auf

$$X_0 = a ; X_1 = b ; X_{n+2} = X_n + X_{n+1}$$

ergeben sich in den entstehenden Folgen Primzahlen für (Suche bis  $n = 600$ ):

<b>a</b>	<b>b</b>	<b>Primzahlen für n = ...</b>
1	1	2, 3, 4, 6, 10, 12, 16, 22, 28, 42, 46, 82, 130, 136, 358, 430, 432, 448, 508, 568, 570 ...
1	3	3, 4, 6, 7, 10, 12, 15, 16, 18, 30, 36, 40, 46, 52, 60, 70, 78, 112, 312, 352, 502, ...
1	4	2, 5, 6, 8, 9, 14, 18, 21, 24, 26, 33, 38, 54, 56, 78, 81, 90, 96, 98, 305, 414, 573, ...
1	5	3, 4, 7, 9, 12, 25, 27, 28, 48, 105, 108, 127, 424, 465, ...
1	6	2, 3, 6, 8, 12, 20, 23, 56, 62, 92, 116, 167, 182, 212, 503, 552, ...
2	1	2, 4, 5, 7, 8, 11, 13, 16, 17, 19, 31, 37, 41, 47, 53, 61, 71, 79, 113, 313, 353, 503, ...
2	5	2, 4, 5, 8, 13, 14, 20, 28, 29, 32, 53, 64, 80, 85, 92, 124, 128, 325, ...
2	7	5, 7, 8, 11, 20, 23, 28, 35, 37, 47, 80, 131, 152, 503, 512, 527, ...

## Fibonacci-erzeugende Funktion

Mit den Fibonacci-Zahlen  $F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1$  und der Beziehung  $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$  wird

$$x^2 = F_0 x + (F_1 - F_0) x^2 + (F_2 - F_1 - F_0) x^3 + (F_3 - F_2 - F_1) x^4 + \dots$$

für eine beliebige reelle Zahl  $x$  mit  $0 < x < (\sqrt{5} - 1)/2$ .

Durch Ausmultiplizieren und Umordnen wird

$$x^2 = (1-x-x^2) F_0 x + (1-x-x^2) F_1 x^2 + (1-x-x^2) F_2 x^3 + (1-x-x^2) F_3 x^4 + \dots$$

$$x^2 = (1-x-x^2) (F_0 x + F_1 x^2 + F_2 x^3 + F_3 x^4 + F_4 x^5 + \dots)$$

$$x^2/(1-x-x^2) = F_0 x + F_1 x^2 + F_2 x^3 + F_3 x^4 + F_4 x^5 + \dots$$

Beachtet man noch  $F_0 = 0$ , so ergibt sich eine Fibonacci-Zahlen erzeugende Funktion

$$x/(1-x-x^2) = F_1 x + F_2 x^2 + F_3 x^3 + F_4 x^4 + \dots$$

Setzt man für  $x$  zum Beispiel  $1/10, 1/100, 1/1000$  usw. ein, ergibt sich

$$x = 1/10$$

$$x/(1-x-x^2) = 10/89 = 0, 1 1 2 3 5 9 5 5 0 5 6 1 7 9 7 7 5 \dots$$

$$x = 1/100$$

$$x/(1-x-x^2) = 100/9899 = 0, 01 01 02 03 05 08 13 21 34 55 90 46 36 83 20 03 \dots$$

$$x = 1/1000$$

$$x/(1-x-x^2) = 1000/998999 = 0, 001 001 002 003 005 008 013 021 034 055 089 144 233 377 610 988 599 \dots$$

usw.

Setzt man  $x = 19/89, 199/9899, 1999/998999, \dots$  ein, so ergeben sich die Ziffern der Lucas-Folge  $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ .

Mit  $x = 1/889, 1/989899, 1/998998999, \dots$  erhält man die Tribonacci-Folge  $u_{n+1} = u_n + u_{n-1} + u_{n-2}$  und mit  $x = 1/8889, 1/98989899, 1/998998998999, \dots$  die Tetranacci-Folge  $u_{n+1} = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + u_{n-3}$  usw.

Anmerkung: Beachtet man die oben gemachte Einschränkung für  $x$  nicht und setzt zum Beispiel  $x = 1$  ein, wird

$$x/(1-x-x^2) = 1/(1-1-1) = -1 = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + \dots$$

mit dem "Ergebnis", dass die Summe aller Fibonacci-Zahlen gleich  $-1$  ist. Dieser Trugschluss ergibt sich daraus, dass die oben angesetzte unendliche Summe nur für  $0 < x < (\sqrt{5} - 1)/2$  konvergiert, andernfalls divergiert.

## Fibonacci-Polynom

Eine Art, die Fibonacci-Zahlen zu verallgemeinern, ist es, überall noch ein  $x$  dazuzuschreiben. Auf diese Weise erhält man Polynome.

Definition: Fibonacci-Polynome sind die wie folgt definierten Polynome:

$$F_0(x) = 0, F_1(x) = 1 \text{ und } F_{n+1}(x) = x F_n(x) + F_{n-1}(x).$$

$F_n(x)$  ist ein Polynom  $n-1$ . Grades. Die ersten Fibonacci-Polynome sind

$$\begin{aligned} F_2(x) &= x & F_3(x) &= x^2 + 1 \\ F_4(x) &= x^3 + 2x & F_5(x) &= x^4 + 3x^2 + 1 \\ F_6(x) &= x^5 + 4x^3 + 3x \end{aligned}$$

Analog zur Kettenbruchdarstellung von  $F_n/F_{n+1}$  ist hier der  $n$ . Näherungsbruch zum Kettenbruch

$$1 / (x + 1/(x + 1/(x + \dots)))$$

genau  $F_n(x) / F_{n+1}(x)$ .

### Fibonacciartiges Polynom

Die Fibonacciartigen Polynome sind die Polynome:

$$f_0(x) = 0, f_1(x) = 1 \text{ und } f_{n+1}(x) = x (f_n(x) + f_{n-1}(x)).$$

$f_n(x)$  ist ein Polynom  $n-1$ . Grades. Die ersten Fibonacciartigen Polynome sind

$$\begin{aligned} f_2(x) &= x & f_3(x) &= x^2 + x \\ f_4(x) &= x^3 + 2x^2 & f_5(x) &= x^4 + 3x^3 + x^2 \\ f_6(x) &= x^5 + 4x^4 + 3x^3 \end{aligned}$$

Durch vollständige Induktion lässt sich zeigen, dass für  $n > 0$  gilt:  $F_n(x) = f_n(x^2) / x^{n-1}$

Quelle: <http://www.ijon.de/mathe/fibonacci/node4.html>

### Verallgemeinerte Fibonacci-Folge

Mit der Fibonacci-Folge verwandte, zahlentheoretisch wichtige Folgen.

Berechnungsvorschrift  $G_{n+2} = G_n + G_{n+1}$

Die Startglieder  $G_0$  und  $G_1$  sind dabei frei wählbar.

Für  $G_0 = 0, G_1 = 1$  ergibt sich die Fibonacci-Folge  $F_n$ , für  $G_0 = 2, G_1 = 1$  die Lucas-Folge  $L_n$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} G_n &= 1/\sqrt{5} ((G_0 \phi + G_1) \Phi^n + (G_0 \Phi - G_1) -\phi^n) \text{ mit } \Phi = (\sqrt{5}+1)/2, \phi = (\sqrt{5}-1)/2 \\ G_{n+2} &= G_{n+1} + G_n \\ G_n &= G_0 F_{n-1} + G_1 F_n \\ F_n &= (G_0 G_{n+1} - G_1 G_n) / (G_0 G_2 - G_1^2) \\ 2 G_k &= (2 G_1 - G_0) F_k + G_0 L_k \\ G_{n+m} &= F_{m-1} G_n + F_m G_{n+1} \\ G_{n+m} + (-1)^m G_{n-m} &= L_m G_n \\ F_m (G_{n-1} + G_{n+1}) &= G_{n+m} - (-1)^m G_{n-m} \\ G_m F_n - G_n F_m &= (-1)^{n+1} G_0 F_{m-n} \\ G_m F_n - G_n F_m &= (-1)^m G_0 F_{n-m} \\ G_{m+k} F_{n+k} + (-1)^{k+1} G_m F_n &= F_k G_{m+n+k} \end{aligned}$$

$G_n$  und  $H_n$  seien zwei verschiedene verallgemeinerte Fibonacci-Folgen:

$$\begin{aligned} G_{n+i} H_{n+k} - G_n H_{n+i+k} &= (-1)^n (G_i H_k - G_0 H_{i+k}) \\ G_p H_q - G_r H_s &= (-1)^n [G_{p-n} H_{q-n} - G_{r-n} H_{s-n}], \text{ wenn } p+q = r+s \text{ und } p,q,r,s,n \text{ ganzzahlig} \\ G_{n+1} G_{n-1} - G_n^2 &= (-1)^n (G_1^2 - G_0 G_2) \\ 4 G_{n-1} G_n + G_{n-2}^2 &= G_{n+1}^2 \\ G_{n+3}^2 + G_n^2 &= 2 (G_{n+1}^2 + G_{n+2}^2) \\ G_{i+j+k} &= F_{i+1} F_{j+1} G_{k+1} + F_i F_j G_k - F_{i-1} F_{j-1} G_{k-1}, \text{ für ganzzahlige } i, j, k \\ 4 G_i^2 G_{i+1}^2 + G_{i-1}^2 G_{i+2}^2 &= (G_i^2 + G_{i+1}^2)^2 \\ G_{n+2} G_{n+1} G_{n-1} G_{n-2} + (G_2 G_0 - G_1^2)^2 &= G_n^4 \end{aligned}$$

### Allgemeine Fibonacci-Folge

Unter einer allgemeinen Fibonacci-Folge versteht man eine komplexe Zahlenfolge

$$a_{n+2} = 2 p a_{n+1} + q a_n$$

wobei  $p$  und  $q$  komplexe Zahlen sind. Weiterhin definiert man

$$g_1 = p + \sqrt{(p^2 + q)} \quad g_2 = p - \sqrt{(p^2 + q)}$$

Für die Folge  $\{a_n\}$  mit den Startwerten  $a_0$  und  $a_1$  gilt explizit die Formel von Binet:

$$a_n = 1/(g_1 - g_2) ((a_1 - a_0 g_2) g_1^n + (a_0 g_1 - a_1) g_2^n)$$

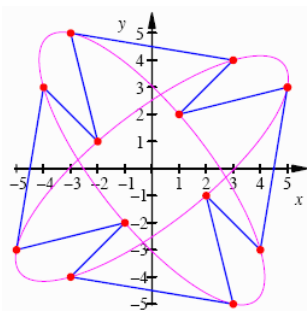
Die Folge  $\{a_n\}$  ist die Summe zweier geometrischer Folgen mit den Basen  $g_1$  und  $g_2$ . Für das Konvergenzverhalten sind die Beträge  $|g_1|$  und  $|g_2|$  entscheidend.

Für $g_1 \neq g_2$ wird	$ g_2  < 1$	$ g_2  = 1$	$ g_2  > 1$
$ g_1  < 1$	Nullfolge	Kreis	Logarithmische Spirale
$ g_1  = 1$	Grenzkurve	Kreis	Kreisring
$ g_1  > 1$	Logarithmische Spirale	divergent	divergent

Für  $|g_1| = 1$  und  $|g_2| < 1$  ergibt sich ein Kreis als Grenzkurve. Dieser Kreis hat den Ursprung als Zentrum und den Radius  $r_1 = |(a_1 - a_0 g_2)/(g_1 - g_2)|$

Falls zusätzlich  $g_1 = e^{2\pi i s} 1$ ,  $s_1 = m_1/n_1$  und  $\text{ggT}(m_1, n_1) = 1$ , streben die Folgenglieder gegen die Ecken eines regelmäßigen  $n_1$ -Eckes.

Für  $|g_1| < 1$  und  $|g_2| = 1$  ergibt sich ebenfalls ein Kreis als Grenzkurve mit dem Radius  $r_2 = |(a_0 g_1 - a_1) / (g_1 - g_2)|$ . Analog können die Folgenglieder gegen die Ecken eines regelmäßigen  $n_2$ -Ecks streben. Für  $|g_1| = 1$  und  $|g_2| = 1$  sind die Folgenglieder durch einen Kreisring beschränkt. Dieser hat den Außenradius  $r_1 + r_2$  und den Innenradius  $r_1 - r_2$ .



### Zyklische Fibonacci-Folgen

Die Definition der Fibonacci-Folgen kann auch auf den Bereich der komplexen Zahlen erweitert werden. 1996 untersuchte Christopher Weihmann Folgen der Form

$$z_{n+2} = i z_{n+1} + z_n$$

und wies nach, dass für beliebige Startwerte  $z_0 = p + qi$  und  $z_1 = r + si$  eine zyklische Folge entsteht.

2007 gelang Walser der Nachweis, dass jede Folge

$$z_{n+2} = 2i \sin(\pi/n) z_{n+1} + z_n$$

für beliebige komplexe Anfangswerte eine Periodenlänge  $2n$  besitzt.

Trägt man die Folgeglieder in die Gaußsche Zahlenebene ein, so liegen die

Punkte der Glieder abwechselungsweise auf zwei Ellipsen. Beide Ellipsen sind zueinander kongruent und um  $\pi/2$  verdreht.

Mit  $\phi = 2\pi/n$  und dem 1. Glied  $p+qi$  und dem 3. Glied  $r+si$  ist die Gleichung einer der Ellipsen

$$x(t) = p \cos t + (r - p \cos \phi) / \sin \phi \sin t$$

$$y(t) = q \cos t + (s - q \cos \phi) / \sin \phi \sin t$$

In der Abbildung ist die zyklische, komplexe Fibonacci-Folge für  $n = 6$  und die Anfangszahlen  $5 + 3i$  und  $1 + 2i$  zu sehen.

### Fibonacci-Teilfolgen

Die Fibonacci-Folge wird durch die Rekursion beschrieben:

$$F_0 = 0, F_1 = 1 \text{ und } F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

Es gilt die explizite Formel von Binet:

$$F_n = 1/\sqrt{5} (\tau^n - (-\rho)^n) \text{ mit } \tau = (1+\sqrt{5})/2, \rho = (-1+\sqrt{5})/2$$

Auf Lucas geht die Idee zurück, aus der Folge Teilfolgen auszuwählen und zu untersuchen.

Wählt man aus der Fibonacci-Folge nur jede zweite Zahl aus, erhält man die beiden Folgen

1, 2, 5, 13, 34, 89, 233, 610, 1597, 4181, 10946, 28657, ...

1, 3, 8, 21, 55, 144, 377, 987, 2584, 6765, 17711, 46368, ...

Beide Folgen haben dieselbe Rekursion  $b_{m+2} = 3 b_{m+1} - b_m$

Wählt man aus der Fibonacci-Folge nur jede dritte Zahl aus, ergeben sich die Folgen

1, 3, 13, 55, 233, 987, 4181, 17711, 75025, 317811, 1346269, ...

1, 5, 21, 89, 377, 1597, 6765, 28657, 121393, 514229, 2178309, ...

2, 8, 34, 144, 610, 2584, 10946, 46368, 196418, 832040, 3524578, ...

mit der Rekursion  $b_{m+2} = 4 b_{m+1} + b_m$

Wählt man aus der Fibonacci-Folge nur jede vierte Zahl aus, ergeben sich die Folgen

1, 5, 34, 233, 1597, 10946, 75025, 514229, 3524578, 24157817, ...

1, 8, 55, 377, 2584, 17711, 121393, 832040, 5702887, 39088169, ...

2, 13, 89, 610, 4181, 28657, 196418, 1346269, 9227465, 63245986, ...

3, 21, 144, 987, 6765, 46368, 317811, 2178309, 14930352, 102334155, ...

mit der Rekursion  $b_{m+2} = 7 b_{m+1} - b_m$

Für die ersten Fibonacci-Teilfolgen ergeben sich die Rekursionsformeln

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad b_{m+2} = 3 b_{m+1} - b_m$$

$$b_{m+2} = 4 b_{m+1} + b_m \quad b_{m+2} = 7 b_{m+1} - b_m$$

$$b_{m+2} = 11 b_{m+1} + b_m$$

Die ersten Koeffizienten dieser Gleichungen gehören zu der Folge

1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, ...

Außerdem alterniert das Vorzeichen des zweiten Summanden. Diese Zahlen sind die Lucas-Zahlen (nach Édouard Lucas 1842–1891). Die Lucas-Zahlen haben dieselbe Rekursion wie die Fibonacci-Zahlen.

Damit wird für die Teilfolge der  $n$ -ten Fibonaccizahlen

$$b_{m+2} = (\tau^n + (-\rho)^n) b_{m+1} - (-1)^{n+1} b_m \text{ mit } \tau = (1+\sqrt{5})/2, \rho = (-1+\sqrt{5})/2$$

Die modifizierte Fibonacci-Folge

-1, 1, 1, 3, 7, 17, 41, 99, 239, 577, 1393, 3363, 8119, 17601, 47321, 114243, 275807, 665857, ...

wird durch die Rekursion beschrieben:  $a_1 = 0, a_2 = 3$  und  $a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$

Die Folge, die nur aus ungeraden Zahlen besteht und deren Quotienten benachbarter Glieder gegen  $1+\sqrt{2}$  streben, hat die explizite Formel:

$$a_n = 1/2 ((1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n)$$

Auch aus dieser Folge kann man wieder Teilfolgen auszuwählen und zu untersuchen.

Wählt man aus der Folge nur jede zweite Zahl aus, erhält man die beiden Folgen

-1, 1, 7, 41, 239, 1393, 8119, 47321, 275807, 1607521, ...

1, 3, 17, 99, 577, 3363, 17601, 114243, 665857, 3880899, ...

Beide Folgen haben dieselbe Rekursion  $b_{m+2} = 6 b_{m+1} - b_m$

Wählt man aus der Fibonacci-Folge nur jede dritte Zahl aus, ergeben sich die Folgen

3, 1, 17, 239, 3363, 47321, 665857, ...  
 -1, 3, 41, 577, 8119, 114243, 1607521, ...  
 1, 7, 99, 1393, 19601, 275807, 3880899, ...

mit der Rekursion  $b_{m+2} = 14 b_{m+1} + b_m$

Wählt man aus der Fibonacci-Folge nur jede vierte Zahl aus, ergeben sich die Folgen

-7, 1, 41, 1393, 47321, 1607521, ...  
 3, 3, 99, 3363, 114243, 3880899, ...  
 -1, 7, 239, 8119, 275807, 9369319, ...  
 1, 17, 577, 19601, 665857, ...

mit der Rekursion  $b_{m+2} = 34 b_{m+1} - b_m$

allgemeine Rekursion  $b_{m+2} = ((1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n) b_{m+1} - b_m$

## Lucas - Zahlen

Lucas-Zahlen (nach Edouard Lucas 1842-1891) sind mit den Fibonacci-Zahlen verwandte, zahlentheoretisch wichtige Zahlen.

Berechnungsvorschrift

$$L_0 = 2; L_1 = 1$$

$$L_{n+2} = L_n + L_{n+1}$$

Ersten Zahlen dieser Folge: 2; 1; 3; 4; 7; 11; 18; 29; 47; 76; 123; 199; usw...

Außer den am Anfang auftretenden Zahlen 1 und 3 gibt es in der Fibonacci-Folge und der Lucas-Folge keine gleichzeitig auftretenden Zahlen.

Zwischen des Lucas- und Fibonacci-Zahlen gibt es viele interessante Beziehungen, z.B. für alle nichtnegativen Zahlen n:

$$L_n = F_{n+2} - F_{n-2}$$

$$L_{4n} + 2 = (L_{2n})^2$$

$$L_{4n} - 2 = 5(F_{2n})^2$$

$$L_{n-1} L_{n+1} + F_{n-1} F_{n+1} = 6(F_n)^2 \quad F_{n+m} + F_{n-m} = F_n L_m, \text{ für gerades } m$$

## Lucas-Primzahlen

In der Lucas-Folge  $L_0 = 2; L_1 = 1; L_{n+2} = L_n + L_{n+1}$

treten für n = 0, 2, 4, 5, 7, 8, 11, 13, 16, 17, 19, 31, 37, 41, 47, 53, 61, 71, 79, 113, 313, 353, 503, 613, 617, 863, 1097, 1361, ... Primzahlen auf. (gesucht bis n = 2500)

Durch Lifschitz wurde im März 2009 die 1051849. Lucas-Zahl als wahrscheinlich prim entdeckt. Die größte nachgewiesenen Lucas-Primzahl hat den Index 56003.

Die ersten Primzahlen sind:

n	Lucas-Primzahl $L_n$	n	Lucas-Primzahl $L_n$
2	3	4	7
5	11	7	29
8	47	11	199
13	521	16	2207
17	3571	19	9349
31	3010349	37	54018521
41	370248451	47	66438 38879
53	11 92188 51371	61	560 07482 93801
71	68884 65025 88399	79	32 36112 26722 59149
113	4126 70427 84492 10374 70771		

## Primfaktorzerlegung von Lucas-Zahlen

Innerhalb der Folge der Lucas-Zahlen treten für einige Indizes n auch Primzahlen auf, zum Beispiel  $L(11) = 199$ .

Die Mehrheit der Lucas-Zahlen sind aber zusammengesetzt. Die Tabelle enthält für die ersten Zahlen der Folge ihre Primfaktorzerlegung.

## Faktorzerlegung der $L(n)$

n	Primfaktoren	n	Primfaktoren
3	3	4	$2^2$
5	7	6	11
7	$2, 3^2$	8	29
9	47	10	$2^2, 19$
11	3, 41	12	199
13	2, 7, 23	14	521
15	3, 281	16	$2^2, 11, 31$
17	2207	18	3571
19	$2, 3^3, 107$	20	9349

## Lucas - Zahlen (4)

Für die Lucas-Zahlen  $L_n$ , definiert durch

$$L_0 = 2; L_1 = 1; L_{n+2} = L_n + L_{n+1}$$

und die Fibonacci-Zahlen  $F_n$  existieren eine Vielzahl von Beziehungen. In Analogie zur Binet-Formel gilt

$$F_n = (\Phi^n - (-\phi)^n) / (\Phi - (-\phi)) ; \text{ Binet-Formel}$$

$$L_n = (\Phi^n + (-\phi)^n) / (\Phi + (-\phi))$$

$$L_n = (1/2 \sqrt{5} + 1/2)^n + (-1)^n (1/2 \sqrt{5} - 1/2)^n$$

Weiterhin gilt  $\sqrt[n]{1/2 (L_n + F_n \sqrt{5})} \pm \sqrt[n]{1/2 (L_n - F_n \sqrt{5})} = 1$

dabei ist das Operationszeichen + für ungerade n und - für gerade n

$$5 F_n = L_{n+1} + L_{n+1}$$

Die Lucas-Zahl  $L_n$  ist stets ein Teiler der Fibonacci-Zahl  $F_{2n}$ :  $F_{2n} = F_n L_n$

Eine Fibonacci-Zahl mit einer Zweierpotenz als Index ist das Produkt von Lucas-Zahlen

$$F_{2^n} = L_2 \cdot L_4 \cdot L_8 \cdot \dots \cdot L_{2^{n-1}}$$

Weitere Beziehungen

$$2 L_n = F_{n-3} + F_{n+3}$$

$$F_k L_n = F_{n-k} + F_{n+k} ; \text{ für ungerade } k$$

$$L_n L_k = L_{n-k} + L_{n+k} ; \text{ für gerade } k$$

$$F_n L_k = F_{n-k} + F_{n+k} ; \text{ für gerade } k$$

$$11 F_n = L_{n-4} + L_{n+4}$$

$$5 F_n F_k = L_{n-k} + L_{n+k} ; \text{ für ungerade } k$$

## Allgemeine Lucas Zahlen

... sind Zahlen der Lucas Folgen.

Es seien P und Q nichtverschwindende, ganze Zahlen. Das Polynom  $x^3 - P x + Q$  hat dann die

Diskriminante

$$D = P^3 - 4Q$$

und die Nullstellen

$$a = (P + \sqrt{D})/2 \text{ und } b = (P - \sqrt{D})/2$$

und es gilt

$$a + b = P ; ab = Q \text{ und } a - b = \sqrt{D}$$

Ist D ungleich 0, dann sie die Lucas-Folgen definiert als:

$$U_n(P, Q) = (a^n - b^n) / (a - b) \quad V_n(P, Q) =$$

$$a^n + b^n$$

für  $n \geq 0$ . Beispielsweise ergeben sich für  $P = 3$  und  $Q = 2$  mit  $U_n(3, 2) = 2^n - 1$  die Mersenne Zahlen und mit  $V_n(3, 2) = 2^n + 1$  die Fermat Zahlen.

## Lucas-Pseudoprimezahlen

... sind die Zahlen n der Lucas Zahlen  $U_n$ , für die gilt

n ist eine zusammengesetzte, ungerade Zahl.

$$\text{ggT}(n, D) = 1$$

$U_{n-(D/n)}$  ist kongruent zu 0 (mod n)

Hinweis:  $(D/n)$  bezeichnet das Jacobi Symbol

## Lucas-Folge (2)

Für die Lucas-Folgen der ganzen Zahlen P und Q

$$U_n(P, Q) = (a^n - b^n) / (a - b) \quad V_n(P, Q) = a^n + b^n$$

gilt mit der Schreibweise  $U_n = U_n(P, Q)$  und  $V_n = V_n(P, Q)$

$$U_n = P U_{n-1} - Q U_{n-2} ; U_0 = 0, U_1 = 1$$

$$V_n = P V_{n-1} - Q V_{n-2} ; V_0 = 2; V_1 = P$$

$$U_{2n} = U_n V_n$$

$$V_{2n} = V_n^2 - 2 Q^n$$

$$U_{m+n} = U_m V_n - Q^n U_{m-n}$$

$$V_{m+n} = V_n V_m - Q^n V_{m-n}$$

$$U_{m+n} = U_m U_{n+1} - Q U_{m-1} U_n$$

$$2 V_{m+n} = V_m V_n + D U_m U_n$$

$$D U_n = 2 V_{n+1} - P V_n$$

$$V_n = 2 U_{n+1} - P U_n$$

$$U_n^2 = U_{n-1} U_{n+1} + Q^{n-1}$$

$$V_n^2 = D U_n^2 + 4 Q^n$$

$$U_m V_n - U_n V_m = 2 Q^n U_{m-n} \text{ für } m > n-1$$

$$U_m V_n + U_n V_m = 2 U_{m+n}$$

$$2^{n-1} U_n = \binom{n}{1} P^{n-1} + \binom{n}{3} P^{n-3} D + \binom{n}{5} P^{n-5} D^2 + \dots$$

$$2^{n-1} V_n = P^n + \binom{n}{2} P^{n-2} D + \binom{n}{4} P^{n-4} D^2 + \dots$$

Wenn m ungerade ist und  $k > 0$ , dann gilt

$$D^{(m-1)/2} U_k^m = U_{km} + \binom{m}{1} Q^k U_{k(m-2)} + \binom{m}{2} Q^{2k} U_{k(m-4)} - \dots \pm \binom{m}{(m-1)/2} Q^{(m-1)/2 k} U_k$$

$$V_k^m = V_{km} + \binom{m}{1} Q^k V_{k(m-2)} + \binom{m}{2} Q^{2k} U_{k(m-4)} - \dots \pm \binom{m}{(m-1)/2} Q^{(m-1)/2 k} V_k$$

Wenn m gerade ist und  $k > 0$ , dann gilt

$$D^{m/2} U_k^m = [V_{km} - \binom{m}{1} Q^k V_{k(m-2)} + \binom{m}{2} Q^{2k} V_{k(m-4)} - \dots + (-1)^{m/2} \binom{m}{m/2} Q^{m/2 k} V_0] - (-1)^{m/2} \binom{m}{m/2} Q^{m/2 k}$$

$$V_k^m = [V_{km} - \binom{m}{1} Q^k V_{k(m-2)} + \binom{m}{2} Q^{2k} V_{k(m-4)} - \dots + \binom{m}{m/2} Q^{m/2 k} V_0] - \binom{m}{m/2} Q^{m/2 k}$$

## Pell-Zahlen

Pell-Zahlen, benannt nach dem englischen Mathematiker John Pell, sind spezielle Lucas-Zahlen. Für sie

gilt die Rekursion  $P_{n+2} = P_n + 2 P_{n+1} ; P_1 = 1 ; P_2 = 2$

bzw.  $Q_{n+2} = Q_n + Q P_{n+1} ; Q_1 = 1 ; Q_2 = 3$

Die ersten Zahlen der zwei Folgen sind

$$P_i = 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, 33461, 80782, 195025, 470832, \dots$$

$$Q_i = 1, 3, 7, 17, 41, 99, 239, 577, 1393, 3363, 8119, 19601, 47321, 113243, 275807, 665857, \dots$$

Für beide Zahlenarten findet man Binet-Formeln.

$$P_n = 1/(2 \sqrt{2}) ((1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n)$$

$$Q_n = 1/2 ((1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n)$$

Für wachsende n konvertieren damit die Quotienten

$$Q_n / P_n = 3/2, 7/5, 17/12, 41/29, 99/70, \dots$$

gegen  $\sqrt{2}$ .



## Pell-Primzahlen

In der Folge der Pell-Zahlen  $P_{n+2} = P_n + 2 P_{n+1}$ ;  $P_1 = 1$ ;  $P_2 = 2$  treten auch Primzahlen auf. Die ersten dieser Primzahlen sind

n	Pell-Primzahl
3	2
4	5
6	29
12	5741
14	33461
30	4 45604 82149
42	1 74686 00200 68409
53	68480 40646 21612 87469
60	135 58774 61004 67117 80701
90	4125 63688 85625 48868 22155 97974 61449
98	47 60981 39432 32034 45293 05261 22238 93281
102	1617 33217 20018 85710 81311 98663 40823 31709
168	2964 79355 52727 99671 94665 39401 60950 32379 21693 32712 78093 77646 87561
182	6774 13820 25708 50843 26543 91551 46773 42490 43573 35429 87756 42958 53985 37901
192	455 62852 54333 44877 15050 63529 04804 65956 45004 01415 24571 91808 67194 53302 35841
524	54971 60765 89486 46301 38678 31449 64782 69877 26135 13307 49318 00788 96702 91882 58516 48683 23532 58581 18170 15087 32149 78343 60146 31181 06546 65322 04358 05362 39596 29912 95556 48803 66069 54237 30984 77621 49971 20779 32637 38989
930	1 40302 91214 03767 48279 21599 32040 05610 33992 94889 82163 51802 67012 25304 01263 88057 52552 35196 72709 51096 69287 79907 45704 17579 53962 93512 31775 86142 90988 49146 88074 65242 69269 23532 88053 33087 54693 36900 12894 63067 04277 94266 44057 90647 51300 50883 48227 95162 87414 79839 74059 15939 22602 20762 97356 35613 82652 22336 06671 98516 09319 93671 34903 69578 31431 16067 74302 31345 09886 35703 23272 71649

## Keith-Zahlen

Unter einer Keith-Zahl versteht man eine natürliche Zahl mit folgender Eigenschaft:

Werden die Ziffern der Zahl als Startglieder einer fibonaccähnlichen Zahlenfolge betrachtet, so muss die Zahl selbst in der entstehenden Zahlenfolge auftreten.

Zum Beispiel ergibt 197 mit der Bildungsvorschrift  $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$  die Folge: 1, 9, 7, 17, 33, 57, 107, 197, ...

womit die 197 Keith-Zahl ist. Die nachfolgende Tabelle enthält alle Keith-Zahlen kleiner als  $10^{17}$ . Die Folge der primen Keith-Zahlen beginnt damit 19, 47, 61, 197, 1084051, 74596893730427, ...

### Ziffernzahl Keith-Zahlen

2	14, 19, 28, 47, 61, 75
3	197, 742
4	1104, 1537, 2208, 2580, 3684, 4788, 7385, 7647, 7909
5	31331, 34285, 34348, 55604, 62662, 86935, 93993
6	120284, 129106, 147640, 156146, 174680, 183186, 298320, 355419, 694280, 925993
7	1084051, 7913837
8	11436171, 33445755, 44121607
9	129572008, 251133297
10	existiert keine
11	24769286411, 96189170155
12	171570159070, 202366307758, 239143607789, 296658839738
13	1934197506555, 8756963649152
14	43520999798747, 74596893730427, 97295849958669
15	120984833091531, 270585509032586, 754788753590897
16	3621344088074041, 3756915124022254, 4362827422508274
17	11812665388886672, 14508137312404344, 16402582054271374, 69953250322018194, 73583709853303061

## Keith-ähnliche Zahlen

Zahlen, die bei der oben beschriebenen Bildungsvorschrift nicht selbst in der fibonacc-ähnlichen Zahlenfolge auftreten, sondern nur deren Vorgänger oder Nachfolger, werden keith-ähnlich genannt. Die ersten sind:

**Nachfolger tritt auf:** 12, 43, 60, 265, 610, 778, 1521, 2625, 3729, 16725, 18852, 56207, 63265, 87538, 94596, 839383, 1114534, 1745662, 2198585, 2424613, 7371962

**Vorgänger tritt auf:** 18, 32, 35, 142, 187, 241, 2163, 3267, 9242, 15905, 333718, 780890, 959394, 2815415, 5501438, 9717796

Versucht man die Idee der Keith-Zahlen auf die Multiplikation zu übertragen, d.h. die Ziffern der Zahl werden als Startglieder einer fibonacciähnlichen, multiplikativen Zahlenfolge betrachtet, z.B.  $a_{n+3} = a_{n+2} * a_{n+1} * a_n$ , so gibt es keine Zahl, die in ihrer selbst erzeugten Folge auftritt. Man findet nur Zahlen, deren Nachfolger bzw. Vorgänger wieder in der Abfolge der Zahlen auftreten:

**Nachfolger tritt auf:** 143, 431, 11663

**Vorgänger tritt auf:** 5242881



### Mädchen-Zahlen



In ähnlicher Form wie die Fibonacci-Zahlen oder Tribonacci-Zahlen lassen sich die Mädchen-Zahlen definieren.



Folgendes Problem ist Grundlage: In einer Folge von Mädchen und Jungen soll immer neben einem Mädchen mindestens ein weiteres Mädchen stehen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn insgesamt n Mädchen und Jungen gegeben sind?



In der Abbildung sind alle sieben Möglichkeiten für vier Personen dargestellt. Für  $n = 1, 2, \dots$



Mädchen und Jungen wird die Anzahl Möglichkeiten, d.h. die Mädchen-Zahl



$M(n) = 1, 2, 4, 7, 12, 21, 37, 65, 114, 200, 351, 616, 1081, 1897, 3329, 5842, \dots$



und allgemein  $M(n) = 2 M(n-1) - M(n-2) + M(n-3)$



Das Verhältnis  $M(n+1)/M(n)$  konvergiert gegen  $1,754877666427\dots$ , einer Lösung der kubischen Gleichung  $x^3 = 2x^2 - x + 1$ .

Fordert man, dass mindestens drei Mädchen nebeneinander stehen, so ergibt sich für die Möglichkeiten die Folge 1, 1, 2, 4, 7, 11, 17, 27, 44, 72, ...

### Pisano-Zahlen

Werden die Fibonacci-Zahlen oder fibonacci-ähnliche Zahlen modulo einer natürlichen Zahl m berechnet, so ergeben sich periodische Zyklen.

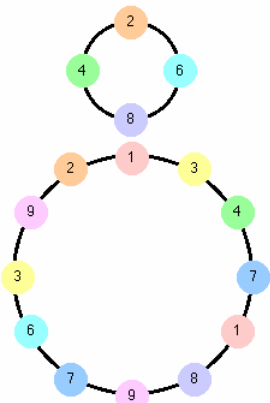
Die Länge, Periode der Zyklen wird Pisano-Periode (nach Fibonacci = Leonardo von Pisa) genannt, die entstehenden Zahlen der Folgen Pisano-Zahlen.

Für die Fibonacci-Zahlen  $F_0 = 0, F_1 = 1$  und  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$

ergeben sich für die Module  $m = 1, 2, \dots$  die Periodenlängen

1, 3, 8, 6, 20, 24, 16, 12, 24, 60, 10, 24, 28, 48, 40, 24, 36, 24, 18, 60, 16, 30, 48, 24, 100, 84, 72, 48, 14, 120, 30, 48, 40, 36, 80, 24, 76, 18, 56, 60, 40, 48, 88, 30, 120, 48, 32, 24, 112, 300, 72, 84, 108, 72, 20, 48, 72, 42, 58, 120, 60, 30, 48, 96, 140, 120, 136, ...

Für  $m = 10$  ergeben sich Addington-Ketten.



### Addington-Ketten

Durch Susan Addington wurde folgendes Problem vorgestellt:

Gegeben sind die zehn Zahlen 0 bis 9. Zwei der Zahlen werden als Startzahlen gewählt und addiert. Die Summe wird modulo 10 (Anzahl der Ausgangszahlen) gebildet und mit dem Ergebnis und der vorhergehenden Zahl der Vorgang wiederholt, bis eine Zahl erreicht ist, so dass anschließend sich die schon gebildete Folge wiederholt.

Start man zum Beispiel mit (0, 4), so ergibt sich die endliche Folge

0 4 4 8 2 0 2 2 4 6 0 6 6 2 8 0 8 8 6 4

Die beiden nächsten Zahlen wären wieder 0 und 4. Eine solche endliche, in sich geschlossene Folge, nennt man Addington-Kette (engl. Bracelet). Die Länge der Beispielskette wäre 20.

Die kürzeste Kette hat die Länge 1 und beginnt mit 0, 0. Startet man mit 0 und 5, so ergibt sich die Länge 3: 0 5 5; bei 2 und 6 die abgebildete Kette der Länge 4.

Der zweite abgebildete Zyklus beginnt mit 1, 3. Allerdings würden auch 3, 4 oder 4, 7 ... die gleiche Kette geben.

Die Aufgabe besteht nun darin, für unterschiedliche Ausgangsmengen von Zahlen alle möglichen verschiedenen(!) Ketten und deren Länge zu bestimmen. Nachgewiesen ist, dass für jedes Paar von Startzahlen die Kette sich in endlich vielen Schritten schließt.

Eine vollständige Lösung des Problems existiert noch nicht. Aus diesem Grund werden vor allem Computer zur Berechnung verschiedener Ketten herangezogen (siehe Teilprogramm).

### Pythagoreische Zahlentripel

Ein pythagoreisches Tripel ist ein Tripel  $a, b, c$  von natürlichen Zahlen (verschieden von Null), welches die Gleichung erfüllt

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Sind  $u$  und  $v$  teilerfremde, ungerade natürliche Zahlen, so ist  $a, b, c$  ein derartiges Tripel mit

$$a = u \cdot v, \quad b = (u^2 - v^2)/2, \quad c = (u^2 + v^2)/2$$

Diese Lösungsmethode wurde schon von den Chinesen der Han-Periode (ungefähr 200 v.Chr. - 200 n.Chr.) benutzt. Aber auch schon Diophant von Alexandria war eine Lösungsmethode bekannt. Für ein gerades  $x = 2pq$  setzte er

$$z + y = 2p^2 \quad z - y = 2q^2 \quad z = p^2 + q^2 \quad y = p^2 - q^2.$$

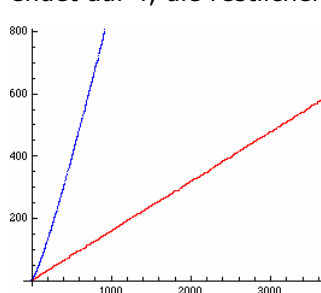
Vor Diophant besaßen auch die Babylonier der Hammurabi-Dynastie eine eigene Lösungsmethode zur einfachen Berechnung pythagoräischer Zahlentripel. Schliesslich fand man ähnliche Berechnungen auch in Hindu Texten über die Konstruktion von Altären aus der Zeit von 500 - 200 v.Chr. Nach van der Waerden ist es sehr wahrscheinlich, dass die ganze Theorie einen gemeinsamen Ursprung hat. Er vermutet, dass der berühmte Lehrsatz vor der Hammurabi-Periode von einem mathematisch gebildeten Priester entdeckt wurde.

### Kleinste Zahlentripel

3,4,5	5,12,13	8,15,17	7,24,25	20,21,29	12,35,37
9,40,41	28,45,53	16,63,65	11,60,61	33,56,65	48,55,73
36,77,85	20,99,101	13,84,85	39,80,89	65,72,97	60,91,109
44,117,125	24,143,145	15,112,113	88,105,137	52,165,173	
28,195,197	17,144,145	51,140,149	85,132,157	119,120,169	
104,153,185	84,187,205				

Neben dem 3-4-5-Dreieck gibt es noch mindestens ein anderes, dessen Fläche sich mit Hilfe einer einzigen Ziffer ausdrücken lässt: 693-1924-2045, dessen Fläche 666 666 ist. Weitere derartige Tripel wurden unter  $10^{40}$  noch nicht gefunden.

Ein Sechstel der Flächeninhalte aller pythagoräischen Dreiecke endet mit der 6, ein weiteres Sechstel endet auf 4, die restlichen  $2/3$  besitzen einen Inhalt, der auf 0 endet.



In der Grafik ist das Wachstum der Anzahl primitiver Tripel bis zu einer maximalen Größe der Hypotenuse rot eingezeichnet. Die blaue Kurve gibt die Häufigkeit aller pythagoreischer Tripel an.

Es gibt unendlich viele rechtwinklige Dreiecke mit der Eigenschaft, dass sich die Längen von Hypotenuse und einer Kathete um genau eins unterscheiden. ( $3^2 + 4^2 = 5^2$  /  $5^2 + 12^2 = 13^2$  ...) Es gibt auch unendlich viele, deren Katheten um eins differieren. Allerdings existiert nur genau ein Tripel dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, natürlich 3-4-5.

### Anzahl pythagoreischer Tripel

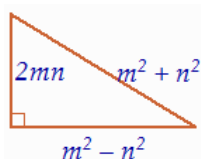
In der Grafik ist das Wachstum der Anzahl primitiver Tripel bis zu einer maximalen Größe der Hypotenuse rot eingezeichnet. Die blaue Kurve gibt die Häufigkeit aller pythagoreischer Tripel an.

Das Wachstum primitiver Tripel ist linear. Für die Anzahl bis zu einer Grenze max gilt:

$$\text{Anzahl} = \ln(1 + \sqrt{2})^2 / \pi^2 \cdot \text{max} + O(\sqrt{\text{max}})$$

Konkret ergeben sich für  $a, b < n$

n	Anzahl	n	Anzahl
10	2	50	16
100	36	500	180
1000	358	5000	1780
10000	3576	50000	17856
100000	35722	500000	178600
1000000	357200	5000000	1786016
10000000	3572022	100000000	35720710
1 Milliarde	357207278	2 Milliarden	714414498
3 Milliarden	1071622030	4 Milliarden	1428828886
5 Milliarden	1786036162	6 Milliarden	2143243604
7 Milliarden	2500450678	8 Milliarden	2857658176
9 Milliarden	3214865160	10 Milliarden	3572072820
20 Milliarden	7144145232	30 Milliarden	10716217712
40 Milliarden	14288290578		



### Pythagoreische Zahlentripel

Ausgehend von der Beziehung

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$$

können ebenso pythagoreische Tripel erzeugt werden. Sind  $m$  und  $n$  verschiedene natürliche Zahlen mit  $m > n$ , so erhält man mit

$$a = m^2 - n^2; \quad b = 2mn; \quad c = m^2 + n^2$$

ein solches Tripel. In der englischsprachigen Literatur wird das Verfahren als  $m$ - $n$ -Formel bezeichnet. Dieses Verfahren erzeugt nicht nur primitive pythagoreische Tripel. Diese werden alle(!) erzeugt, für nichtprimitive Tripel gilt dies nicht.

Für  $m = 2$ ,  $n = 1$  erhält man das Tripel (3, 4, 5). Das Tripel (9, 12, 15) ist dagegen durch keine Wahl von  $m$  und  $n$  konstruierbar.

### Zwei-Brüche-Verfahren

Außer dem pythagoreischen und babylonischen Verfahren gibt es weitere Methoden, pythagoreische Zahlentripel zu erzeugen. Bei dem Zwei-Brüche-Verfahren wird von zwei rationalen Zahlen  $a/b$  und  $c/d$  ausgegangen, deren Produkt 2 sein muss. Dabei dürfen  $b$  und  $d$  gleich 1 sein, d.h. natürliche Zahlen liegen vor.

- 1) jeder der Brüche wird um 2 vergrößert
- 2) die Brüche werden über Kreuz miteinander multipliziert, d.h. Nenner und Zähler des jeweils anderen Bruchs. Im Ergebnis entstehen zwei natürliche Zahlen des Tripels.
- 3) um die 3. Zahl zu finden, werden beide Zahlen quadriert, addiert und die Wurzel gezogen

Zum Beispiel wird für  $a/b = 4/2$  und  $c/d = 2/2$

- 1)  $8/2$  und  $6/2$  ; 2) 16 und 12 ; 3)  $16^2 + 12^2 = 400$ , d.h. 3. Zahl = 20

### Pythagoreische Zahlentripel

Ist  $(a_0, b_0, c_0)$  ein pythagoreisches Zahlentripel, so erhält man durch

$$(a_1, b_1, c_1) = (a_0, b_0, c_0) U$$

$$(a_2, b_2, c_2) = (a_0, b_0, c_0) A$$

$$(a_3, b_3, c_3) = (a_0, b_0, c_0) D$$

weitere pythagoreische Tripel.

Sind  $a_0$  und  $b_0$  zueinander teilerfremd, so nennt man das Tripel  $(a_0, b_0, c_0)$  reduziert bzw. primitiv.

1977 bewies Roberts, dass ein pythagoreisches Tripel genau dann primitiv ist, wenn es in der Form  $(3, 4, 5) * M$  geschrieben werden kann, wobei die Matrix  $M$  ein endliches Produkt der drei abgebildeten Matrizen  $A$ ,  $D$  bzw.  $U$  ist.

Für alle pythagoreische Tripel gilt weiterhin

- das Produkt der Kathetenlängen (d.h. der zwei kleineren Zahlen) ist durch 12 teilbar

- das Produkt aller drei Tripelzahlen ist durch 60 teilbar

Bis heute ist nicht bekannt, ob zwei verschiedene Tripel das gleiche Produkt haben.

Ist  $F_n$  eine Fibonacci-Zahl, dann ist das Tripel  $(F_n F_{n+3}, 2 F_{n+1} F_{n+2}, F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2)$  pythagoreisch.

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Die ersten Tripel, bei denen zwei Zahlen sich nur um 1 unterscheiden, sind nach aufsteigendem  $c$  geordnet: (3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (20, 21, 29), (9, 40, 41), (11, 60, 61), (13, 84, 85), (15, 112, 113), ....

Die ersten 16 primitiven Tripel (geordnet nach  $c$ ) sind: (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (7, 24, 25), (20, 21, 29), (12, 35, 37), (9, 40, 41), (28, 45, 53), (11, 60, 61), (33, 56, 65), (16, 63, 65), (48, 55, 73), (36, 77, 85), (13, 84, 85), (39, 80, 89), (65, 72, 97), ... Zu diesen gehören die Inkreisradien 1, 2, 3, 3, 6, 5, 4, 10, 5, ...

Ist  $F_n$  eine Fibonacci-Zahl, dann ist das Tripel  $(F_n F_{n+3}, 2 F_{n+1} F_{n+2}, F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2)$  pythagoreisch.

Ist  $F_n = a$  und  $F_{n+1} = b$ , so ergibt sich als Tripel  $(a(a+2b), 2b(a+b), b^2 + (a+b)^2)$  für das gilt:

$$(a(a+2b))^2 + (2b(a+b))^2 = (b^2 + (a+b)^2)^2$$

durch etwas Umformen nachgewiesen werden kann.

Dieses Verfahren kann auf beliebige Startzahlen  $a$  und  $b$  und fibonacci-ähnliche Folgen  $a+b$  und  $a+2b$  erweitert werden.

### Pythagoreische Brüche

Ist  $(a, b, c)$  ein pythagoreisches Tripel, so werden die Brüche  $a/b$  und  $b/a$  pythagoreische Brüche genannt. Diophant bewies, dass pythagoreische Brüche von der Form  $(p^2 - q^2) / (2 p q)$  sind.

### Fibonacci-pythagoreische Dreiecke

Pythagoreische Dreiecke bei denen alle Seitenlängen Fibonacci-Zahlen sind, existieren nicht. 2011 kennt man nur zwei pythagoreische Tripel mit wenigstens zwei Fibonacci-Zahlen 3, 4, 5 und 5, 12, 13. Es ist ein offenes Problem, ob noch mehr existieren.

Als Fibonacci-pythagoreisches Dreieck wird ein pythagoreisches Dreieck bezeichnet, dessen Hypotenuse die Wurzel einer Fibonacci-Zahl ist. Zur Bestimmung dieser Dreiecks werden vier aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen

$$F_{n-1}, F_n, F_{n+1}, F_{n+2}$$

betrachtet. Die Seiten des pythagoreischen Dreiecks sind dann

$$2 F_n \cdot F_{n+1} \text{ und } F_{n-1} \cdot F_{n+2}$$

Nach einer von Lucas 1876 gezeigten Identität gilt

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$$

Damit ist Länge der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks gleich der Fibonacci-Zahl  $F_{2n+1}$ .

Für die ersten  $n = 2, 3, \dots$  ergeben sich als Fibonacci-pythagoreische Tripel (3, 4, 5), (5, 12, 13), (16, 30, 34), (39, 80, 89), ...

Quelle: "Pythagorean Triples", A.F.Horadam in "Fibonacci Quarterly" vol 20 (1982)

### Pythagoreische Zahlentripel

Das einzige Tripel aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen  $a, b, c$  für die  $a^2 + b^2 = c^2$  gilt, ist 3-4-5. Für die Gleichung  $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$  existieren keine aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen. Dagegen findet man für

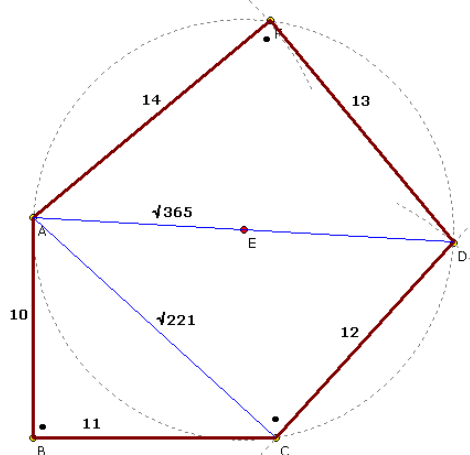
$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2:$$

Mit  $b = n$  wird:

$$(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = (n+2)^2 + (n+3)^2 \rightarrow n^2 - 10n - 11 = 0 \quad \text{mit den}$$

Lösungen 11 und -1, wobei die negative entfällt. Damit existiert eine solches 5-Tupel (10, 11, 12, 13, 14) und es ist  $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2 = 365$ .

Diese Lösung kann als Fünfeck grafisch veranschaulicht werden. Man konstruiert das rechtwinklige Dreieck  $\triangle ABC$  mit den Katheten 10 und 11. Die Zwischenhypotenuse  $AC = \sqrt{221}$  ist die eine Kathete des rechtwinkligen Dreiecks  $\triangle ACD$ , die zweite Kathete ist 12. Über der zweiten Zwischenhypotenuse  $AD = \sqrt{365}$  errichtet man mittels Thaleskreis das Dreieck  $\triangle ADF$  mit den Seitenlängen 13 und 14.



Insgesamt können 12 verschiedene derartige Fünfecke gezeichnet werden. Das Viereck ABCD mit den Seiten 10, 11, 12 und  $\sqrt{221}$  kann auf sechs Arten konstruiert werden und zwar in der Reihenfolge der Seiten 10, 11, 12,  $\sqrt{221}$ ; 11, 10, 12,  $\sqrt{221}$ ; 11, 12, 10,  $\sqrt{221}$ ; 12, 11, 10,  $\sqrt{221}$ ; 10, 12, 11,  $\sqrt{221}$  und 12, 10, 11,  $\sqrt{221}$ . Für jede dieser Möglichkeiten können die zwei

verbleibenden Katheten 13 und 14 nicht getauscht werden. Für alle diese Fünfecke gilt, dass die zwei Zwischenhypotenusen die Diagonalen sind, über denen rechte Winkel liegen.

### Pythagoreische Zahlentripel

Die erzeugenden Formeln für neue pythagoreische Tripel können auch auf klassische Weise geschrieben werden. Dabei gilt:

Jedes pythagoreische Zahlentripel kann ausgehend von dem Basistripel 3-4-5 über bestimmte Zahlenfolgen gefunden werden.

$$\text{Folge A } a_2 = 2 \cdot (c_1 - b_1) + a_1; b_2 = 2 \cdot (c_1 + a_1) - b_1; c_2 = 2 \cdot (a_1 - b_1) + 3 \cdot c_1$$

$$\text{Folge S } a_2 = 2 \cdot (c_1 + a_1) + b_1; b_2 = 2 \cdot (c_1 + b_1) + a_1; c_2 = 2 \cdot (a_1 + b_1) + 3 \cdot c_1$$

$$\text{Folge D } a_2 = 2 \cdot (c_1 - a_1) + b_1; b_2 = 2 \cdot (c_1 + b_1) - a_1; c_2 = 2 \cdot (b_1 - a_1) + 3 \cdot c_1$$

Die ersten so gefundenen neuen Tripel sind

$$\text{A: } 5^2 + 12^2 = 13^2 \dots \text{A: } 7^2 + 24^2 = 25^2; \text{S: } 48^2 + 55^2 = 73^2; \text{D: } 28^2 + 45^2 = 53^2$$

$$\text{S: } 20^2 + 21^2 = 29^2 \dots \text{A: } 36^2 + 77^2 = 85^2; \text{S: } 119^2 + 120^2 = 169^2; \text{D: } 39^2 + 80^2 = 89^2$$

$$\text{D: } 8^2 + 15^2 = 17^2 \dots \text{A: } 12^2 + 35^2 = 37^2; \text{S: } 65^2 + 72^2 = 97^2; \text{D: } 33^2 + 56^2 = 65^2$$

Die Anwendung von A liefert Tripel, in denen auch gilt  $a^2 = b + c$  und  $c - b = 1$ . Dabei geht  $a/c$  langsam gegen 0, d.h. der kleinere Winkel des pythagoreischen Dreiecks geht gegen 0.

$$3-4-5 \quad 5-12-13 \quad 7-24-25 \quad 9-40-41 \quad 11-60-61 \quad 13-84-85 \quad \dots$$

S beschert den Sonderfall  $b - a = 1$  und  $2 \cdot c / (a + b)$  konvergiert gegen  $\sqrt{2}$ , d.h. der Winkel strebt gegen  $45^\circ$ .

$$3-4-5 \quad 20-21-29 \quad 119-120-169 \quad 696-697-985 \quad 4059-4060-5741 \quad 23660-23661-33461$$

.....

Folge D ergibt  $c = (2 \cdot a \pm 1)$  und  $b/a$  konvergiert gegen  $\sqrt{3}$ , womit der Winkel gegen  $30^\circ$  konvergiert.

$$3-4-5 \quad 8-15-17 \quad 33-56-65 \quad 120-209-241 \quad 451-780-901 \quad 1680-2911-3361 \quad \dots$$

### Brahmagupta-Verfahren

Das Hauptwerk "Brahmasphutasiddhanta" des indischen Mathematikers Brahmagupta von 628 behandelt in Aufgabe 35 des 12. Kapitels (Gantitadhyāya - Arithmetik) ein Verfahren zur Erzeugung pythagoreischer Tripel aus der gegebenen Kathete  $a$ .

Die Seite  $a$  des Dreiecks sei beliebig angenommen. Man teilt  $a^2$  durch eine beliebige Zahl  $d$ . Dann sind

$$(a^2/d - d)/2 = b \quad \text{und} \quad b + d = c$$

die beiden anderen Seiten des Dreiecks.

Dabei muss  $d$  natürlich Teiler von  $a^2$  sein. Setzt man  $d = c - b$  in  $(a^2/d - d)/2 = b$  ein, wird

$$(a^2/(c - b) - (c - b))/2 = b$$

und durch einfache Umformungen  $a^2 + b^2 = c^2$ .

Beispiel:  $a = 24, a^2 = 576$

Teiler  $d$   $a^2/d - d$  gerade  $b$   $c$   $a^2 + b^2 = c^2$

1 575



2	286	×	143	145	$24^2 + 143^2 = 145^2$
3	189				
4	140	×	70	74	$24^2 + 70^2 = 74^2$
6	90	×	45	51	$24^2 + 45^2 = 51^2$
8	64	×	32	40	$24^2 + 32^2 = 40^2$
9	55				
12	36	×	18	30	$24^2 + 18^2 = 30^2$
16	20	×	10	26	$24^2 + 10^2 = 26^2$
18	14	×	7	25	$24^2 + 7^2 = 25^2$
24	0	×	0	24	

### Pythagoreische Zahlentripel

Die kleinsten natürlichen Zahlen c eines pythagoreischen Tripels a, b, c mit  $a^2 + b^2 = c^2$  sind:

5, 10, 13, 15, 17, 20, 25, 26, 29, 30, 34, 35, 37, 39, 40, 41, 45, 50, 51, 52, 53, 55, 58, 60, 61, 65, 68, 70, 73, 74, 75, 78, 80, 82, 85, 87, 89, 90, 91, 95, 97, 100, 101, 102, 104, 105, 106, 109, 110, 111, 113, 115, 116, 117, 119, 120, 122, 123, 125, 130, 135, 136, 137, 140, ...

Für einige dieser Werte existieren mehrere verschiedene a und b, zum Beispiel

$$65^2 = 63^2 + 16^2 = 60^2 + 25^2 = 56^2 + 33^2 = 52^2 + 39^2$$

Die ersten dieser Werte c sind

25, 50, 65, 75, 85, 100, 125, 130, 145, 150, 169, 170, 175, 185, 195, 200, 205, 221, 225, 250, 255, 260, 265, 275, 289, 290, 300, 305, 325, 338, 340, 350, 365, 370, 375, 377, 390, 400, 410, 425, 435, 442, 445, 450, 455, 475, 481, 485, 493, 500, 505, 507, 510, 520, 525, ...

Dabei gilt: Existieren mehrere a und b für diese Werte c, so muss c von der Struktur  $b_i \cdot b_j \cdot k$  sein, wobei  $b_i$  und  $b_j$  Primzahlen mit einem Rest 1 modulo 4 und k eine natürliche Zahl sind.

Für  $b_i = b_j = 5$  ergibt sich  $25^2 = 24^2 + 7^2 = 20^2 + 15^2$ ; für  $b_i = 5$  und  $b_j = 13$  die Zerlegung der 65.

Die kleinsten Zahlen c, für die es m verschiedene Darstellungen als pythagoreische Tripel existieren, sind

$$\begin{array}{lll} m = 1, c = 5 & m = 2, c = 25 & m = 3, c = 65 \\ m = 5, 6, 7, c = 325 & m = 8-13, c = 1105 & m = 14-22, c = 5525 \\ m = 23-31, c = 27625 & m = 32-40, c = 32045 & \end{array}$$

Für das kleinste Tripel pythagoreischer Zahlen 3, 4, 5 gilt, dass die längere Kathete und die Hypotenuse zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sind. Dies gilt auch für das Tripel 5, 12, 13.

Das Problem ist, gibt es eine Gesetzmäßigkeit für derartige Tripel?

Durch Chris Evans wurde 1991 folgendes Muster gefunden:

$$\begin{array}{l} 1 \quad 1/3 = 4/3 \rightarrow 3, 4, (5) \\ 2 \quad 2/5 = 12/5 \rightarrow 5, 12, (13) \\ 3 \quad 3/7 = 24/7 \rightarrow 7, 24, (25) \\ 4 \quad 4/9 = 40/9 \rightarrow 9, 40, (41) \end{array}$$

Von diesen Brüchen geben Zähler und Nenner die Kathetenlängen an.

Verallgemeinert man dies, so gilt: Ist i eine beliebige natürliche Zahl, so sind

$$a = 2i + 1 \quad \text{und} \quad b = 2i(i+1)$$

die Kathetenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse  $c = 2i(i+1) + 1$  um 1 größer ist als die längere Kathete. Folglich existieren unendliche viele derartige rechtwinklige Dreiecke.

Die m-n-Formel liefert solche Tripel immer für  $m = n+1$ .

Es gilt heute als sicher, dass schon die Pythagoreer diese Beziehung kannten.

Für das kleinste Tripel pythagoreischer Zahlen 3, 4, 5 gilt, dass die zwei Katheten aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sind. Dies gilt auch für das Tripel 20, 21, 29.

Alle derartigen Tripel müssen primitiv sein, da die zwei Katheten keinen gemeinsamen Teiler größer 1 besitzen. Solche Tripel sind außerdem nicht sehr häufig. Durch Kayne Johnston wurde folgender Algorithmus gefunden:

1) Starttripel sind 3, 4, 5 und 20, 21, 29

2) die kleinste Seite des nächsten Tripels ist gleich 6 mal die vorhergehende Seite minus die noch vorhergehende Seite plus 2.  $s_n = 6 s_{n-1} + s_{n-2} + 2$

Damit ergibt sich zum Beispiel:  $6 \cdot 20 - 3 + 2 = 119$  als kürzeste Seite des nächsten derartigen Tripels.

Durch Dan Sikorski wurde ermittelt, dass die Verhältnisse aufeinanderfolgender Hypotenusen dieser Tripel gegen  $3 + 2\sqrt{2}$  streben. Dies ist gleich dem unendlichen Kettenbruch  $5, [1, 4] =$

$5,82842712474619...$

### Pythagoreische Zahlentripel mit Primzahlhypotenuse

Die drei Zahlen eines pythagoreischen Zahlentripels (a, b, c) können nicht gleichzeitig Primzahlen sein, da mindestens eine Kathete geradzahlig sein muss.  $c^2 = a^2 + b^2$

Wären a und b ungerade, so müsste  $c^2$  gerade sein und damit auch c selbst.

Gesucht werden daher primitive Zahlentripel, bei denen wenigstens die Hypotenuse c Primzahl ist. Solche Zahlen werden auch Trimzahlen genannt.

Die kleinsten Trimzahlen sind

5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97, 101, 109, 113, 137, 149, 157, 173, 181, 193, 197, 229, 233, 241, 257, 269, 277, 281, 293, ...

### Pythagoreische Quadratsummen

Das Verfahren zur Konstruktion pythagoreischer Tripel  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , bei denen die Hypotenuse genau um 1 größer ist als die längere Kathete ergibt für die längere Kathete die möglichen Werte

4, 12, 24, 40, 60, 84, 112, 144, 180, 220, 264, 312, 364, 420, 480, 544, 612, 684, 760, 840, 924, 1012, 1104, 1200, 1300, 1404, 1512, 1624, 1740, 1860, 1984, 2112, 2244, 2380, 2520, 2664, 2812, 2964, 3120, 3280, 3444, 3612, 3784, 3960, 4140, 4324, ...,  $2i(i+1)$

und für die Hypotenuse

5, 13, 25, 41, 61, 85, 113, 145, 181, 221, 265, 313, 365, 421, 481, 545, 613, 685, 761, 841, 925, 1013, 1105, 1201, 1301, 1405, 1513, 1625, 1741, 1861, 1985, 2113, 2245, 2381, 2521, 2665, 2813, 2965, 3121, 3281, 3445, 3613, 3785, 3961, 4141, 4325, ...,  $2i(i+1) + 1$

Mit diesen Werten gelingt es interessante Gleichungen mit Summen von Quadraten zu konstruieren. Es gilt:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$

$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$$

$$36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2 \dots$$

Die hervorgehobenen Werte entsprechen gerade den möglichen Katheten- und Hypotenusenlängen. Auf diese Beziehung wurde 2000 erstmals von Michael Boardman in "Mathematics Magazine 73" hingewiesen.

Allgemein wird  $\sum_{k=0}^i (2i(i+1) - k)^2 = \sum_{k=0}^{i-1} (2i(i+1) + 1 + k)^2 = i/6 (24i^4 + 60i^3 + 50i^2 + 15i + 1)$

### Fermat-pythagoreische Tripel

In einem Brief an Marin Mersenne stellte Fermat am 31. Mai 1643 das Problem, spezielle pythagoreische Tripel  $(a, b, c)$  zu suchen.

Außer der Tatsache, dass die natürlichen Zahlen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  die pythagoreische Gleichung  $a^2 + b^2 = c^2$  erfüllen müssen, forderte Fermat, dass auch  $a+b$  eine Quadratzahl ist.

Er selbst gab dann die kleinste mögliche Lösung mit

$$a = 4565486027761, b = 1061652293520, c = 4687298610289 \quad \text{an.}$$

Derartige spezielle Tripel sind sehr selten. Die nächsten reduzierten zwei Tripel sind

$$a = 214038981475081188634947041892245670988588201$$

$$b = 109945628264924023237017010068507003594693720$$

$$c = 240625698472667313160415295005368384723483849$$

und weiter

(101090445912315611189797633103062269281831072658850463814345155519536067859788318450595485833321,

90600415152500364825256074903956700803695382187386257981355501221895481526026353330711612866200,

135748714471099967645098303815413145183510604468779231285462871341558087008619938117875754653321)

### Babylonische Zahlentripel

Auf einer Babylonischen Tontafel, die heute nach ihrem Entdecker Plimpton 322 genannt wird, finden sich die folgenden Zahlenreihen (aus dem babylonischen Hexagesimalsystem ins Dezimalsystem übertragen):

n	$u^2-v^2$	$u^2+v^2$	n	$u^2-v^2$	$u^2+v^2$	n	$u^2-v^2$	$u^2+v^2$
1	119	69	2	3367	4825	3	4601	6649
4	12709	18541	5	65	97	6	319	481
7	2291	3541	8	799	1249	9	481	769
10	4961	8161	11	45	75	12	1679	2929
13	161	289	14	1771	3229	15	56	106

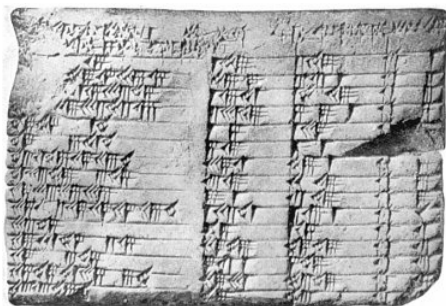
Eine nähere Betrachtung der Zahlen in der zweiten und dritten Spalte zeigt, dass sie von der Form  $u^2-v^2$  und  $u^2+v^2$  sind. Wegen

$$2u^2 = (u^2-v^2) + (u^2+v^2) \quad \text{und} \quad 2v^2 = (u^2+v^2) - (u^2-v^2)$$

lassen sich  $u$  und  $v$  hieraus mühelos bestimmen.

n	u	v	2uv	$u^2-v^2$	$u^2+v^2$	x
1	12	5	120	119	169	1,9834
2	64	27	3456	3367	4825	1,9492
3	75	32	4800	4601	6649	1,9188
4	125	54	13500	12709	18541	1,8862
5	9	4	72	65	97	1,8150
6	20	9	360	319	481	1,7852
7	54	25	2700	2291	3541	1,7200
8	32	15	960	799	1249	1,6927
9	25	12	600	481	769	1,6427

10 81 40 6480 4961 8161 1,5861 usw. ...



Nun bilden die drei Zahlen  $2uv$ ,  $u^2-v^2$  und  $u^2+v^2$  wegen  $(2uv)^2 + (u^2-v^2)^2 = (u^2+v^2)^2$  für jede Wahl von  $u$  und  $v$  ein pythagoreisches Zahlentripel.

Man nennt ein pythagoreisches Zahlentripel ein babylonisches Zahlentripel, wenn  $u$  und  $v$  nur die Primteiler 2, 3 und 5 besitzen. Dies sind die Primteiler von 60, der Basis des Hexagesimalsystems. Die in Plimpton 322 verwendeten Tripel sind babylonische Zahlentripel mit  $v < 60$  und  $x = ((u^2+v^2)/(2uv))^2 < 2$ . Sie sind so angeordnet, dass  $x$  monoton fällt.

Abbildung: Plimpton 322

### Pythagoreische Tripel und Inkreis

Sind  $a$ ,  $b$ ,  $c$  Pythagoreische Tripel, so bilden diese mit den Katheten  $a$  und  $b$  und der Hypotenuse  $c$  definitionsgemäß ein rechtwinkliges Dreieck. Dieses besitzt einen Inkreis mit dem Radius  $r$ .

Für den Flächeninhalt des Dreiecks wird dann

$$A = a r/2 + b r/2 + c r/2 = (a+b+c) r/2 = u r/2$$

und mit  $A = ab/2$

$$r = 2 A / u = a b / (a + b + c)$$

Setzt man für  $a$ ,  $b$  und  $c$  die Terme der m-n-Formel Pythagoreischer Tripel ein

$$a = m^2 - n^2 ; b = 2mn ; c = m^2 + n^2$$

wird  $r = (m - n) m$

d.h. auch der Inkreis eines Pythagoreischen Dreiecks ist stets ganzzahlig.

Ersetzt man die Hypotenuse  $c$  durch  $(a-r)$  und  $(b-r)$  wird

$$c = (a-r) + (b-r) , \text{ d.h. } r = (a + b - c) / 2$$

Diese Formel war schon dem antiken chinesischen Mathematiker Liu Hui bekannt. In seinem Kommentar von 263 zu dem klassischen Buch "Neun Kapitel ..." findet man die entsprechende Herleitung.

Für die ersten Pythagoreischen Tripel ergeben sich die Inkreisradien:

Tripel	Inkreisradius	Tripel	Inkreisradius
3,4,5	1	5,12,13	2
7,24,25	3	8,15,17	3
9,40,41	4	11,60,61	5
12,35,37	5	13,84,85	6
20,21,29	6	6,8,10	2
9,12,15	3	12,16,20	4
10,24,26	4	15,20,25	5
18,24,30	6	15,36,39	6
14,48,50	6	16,30,34	6

Für ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten  $a$ ,  $b$ , der Hypotenuse  $c$  und dem Inkreisradius  $r$  gilt

$$r = (a + b - c) / 2$$

Ist der Inkreisradius gegeben, so fragt man nach allen primitiven pythagoreischen Tripeln, die möglich sind.

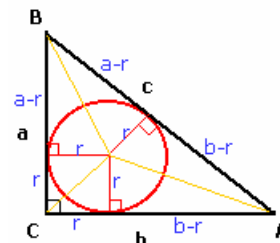
In "On the Number of Primitive Pythagorean Triangles with a Given Inradius" (Fibonacci Quarterly 2006, 44) bewies Neville Robbins, dass es für eine primes  $r > 2$  stets genau zwei primitive Tripel existieren. Für nicht prime, ungerade  $r$  können auch mehr Tripel auftreten.

r	Tripel
3	7 24 25, 8 15 17
5	11 60 61, 12 35 37
7	15 112 113, 16 63 65
9	19 180 181, 20 99 101
11	23 264 265, 24 143 145
13	27 364 365, 28 195 197
15	31 480 481, 32 255 257, 39 80 89, 48 55 73
17	35 612 613, 36 323 325

### Ganzzahlige rechtwinklige Dreiecke

Sind alle Längen der Seiten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  eines rechtwinkligen Dreiecks ganzzahlig, so spricht man von pythagoreischen Zahlen, einem pythagoreischen Zahlentripel  $(a, b, c)$ . Der Inkreisradius  $r$  ist in einem pythagoreischen Dreieck ebenfalls ganzzahlig.

Die Frage ist, ob es solche Dreiecke (o.B.d.A.  $a < b$ ) gibt, für die zusätzlich auch die Höhe  $h$ , die Hypotenusenabschnitte  $p$  und  $q$  und der Umkreisradius  $R$  ganzzahlige Längen haben?



Beispiel: Seite a = 30 , Seite b = 40 , Seite c = 50, Höhe h = 24, Abschnitt p = 18, Abschnitt q = 32, Inkreis r = 10, Umkreis R = 25

### Großer Satz von Fermat

Die Gleichung  $x^n + y^n = z^n$  hat für  $n > 2$  keine nichttrivialen natürlichen Lösungen a,b,c.

Die Gültigkeit des Satzes wurde vor 1994 bis  $n = 125080$  explizit nachgewiesen.

1994 gelang der Beweis durch Wiles , der jedoch noch nicht von allen Mathematikern als vollständig anerkannt, wahrscheinlich aber eher nicht verstanden wurde. Im Jahr 2000 wurde der Beweis allgemein anerkannt!

Eigentlich müsste diese berühmte Aussage Satz von Wiles-Fermat heißen, da Fermat selbst den Beweis schuldig blieb. Fermat starb im Jahre 1665. 5 Jahre später begann sein Sohn Samuel, die Aufzeichnungen seines Vaters für eine Veröffentlichung zu ordnen.

Abbildung: Tschechische Briefmarke zum Beweis des Satzes. Dabei stieß er auf ein Werk von Diophants Arithmetica, in das Fermat die folgende Bemerkung geschrieben hatte:



"Cubum autem in duos eubos, aut quadrato-quadratum in duos quadrato-quadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duas ejusdem nominis fas est dividere; ujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet."

deutsch: "Es ist unmöglich, einen Kubus als Summe zweier Kuben zu schreiben, eine vierte Potenz als Summe zweier vierter Potenzen, oder allgemeiner gesagt, irgendeine Potenz über der zweiten als Summe zweier Potenzen des gleichen Grades: Ich habe eine wahrhaft wunderbare Beweisführung dieses allgemeinen Satzes entdeckt, die auf diesem Buchrand nicht Platz findet."

siehe auch: [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Fermat's\\_last\\_theorem.html](http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Fermat's_last_theorem.html)

Übermittelte Aufzeichnungen deuten darauf hin, dass Fermat den Beweis für den Fall  $n = 4$  geführt hat und der Meinung war, dass sich dieser Beweis für alle  $n > 2$  verallgemeinern lässt. Ob Fermat später seinen Irrtum bemerkte, ist unklar.

Da er seine Aufzeichnungen nicht veröffentlichen wollte, gab es auch keinen Grund die Randbemerkung in seinem Buch zustreichen. Trotzdem lebt bis heute unter Laien der Glaube fort, dass Fermat den allgemeinen Beweis wirklich gefunden hatte.

Zu einem Trugschluss führt die im angelsächsischen Sprachraum benutzte Bezeichnung: Fermat's Last Theorem.

Aus Fermats Korrespondenz geht hervor, dass er Diophants Buch in jüngeren Jahren durchgearbeitet hat, also in den 1730er Jahren.

Die Bezeichnung Last Theorem beruht wahrscheinlich nur darauf, dass diese Aussage von Fermat die letzte war, die nach seinem Tode weder bewiesen noch widerlegt werden konnte.

Berühmt wurde die Vermutung als 1907 der Industrielle Paul Wolfskehl einen Preis von 100000 Goldmark für den Beweis aussetzte. Daraufhin wurden die Universitäten, besonders die Georg-August-Universität Göttingen, mit teilweise absurden Lösungen überschüttet.

Die Frist für die Verleihung des Wolfskehlpreises endete am 13.9.2007. Umgerechnet auf heute hätte das Preisgeld eine Höhe von 1 Millionen €. Durch die Inflation sank das Preisgeld allerdings und war bei seiner Übergabe an Andrew Wiles etwa 70000 DM wert.

Im ersten Jahr gingen 621 "Lösungen" bei der Göttinger Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften ein. Der Sekretär der Akademie teilte die Manuskripte in völligen Unsinn, der sofort zurückgeschickt wurde und Material, das wie Mathematik aussieht.

Man wird niemals nachweisen können, ob Fermat einen Beweis gefunden hatte. Der große britische Mathematiker Hardy, der für seinen Humor bekannt war, hatte darauf jedenfalls eine überzeugende Antwort:

Als Hardy bei orkanartigen Stürmen eine Seereise antreten musste, schickte er unmittelbar vor dem Einschiffen einem Kollegen eine Postkarte mit der Mitteilung: Habe die Riemannsche Vermutung bewiesen!

Hardy hätte also im Falle seines Ertrinkens der Nachwelt ein größeres Rätsel als Fermat hinterlassen, weil die Riemannsche Vermutung - die bis heute nicht bewiesen wurde - noch wesentlich mehr Bedeutung als Fermats großer Satz hat.

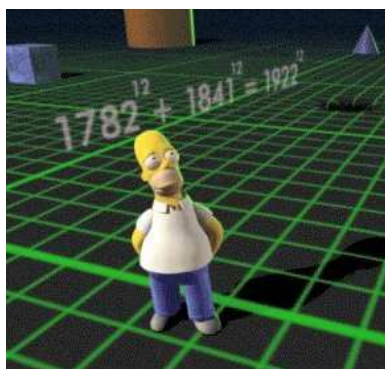
### Geschichte des Großen Satzes von Fermat

1630 Fermat notiert den Satz auf den Rand des Buches Arithmetica von Diophant

1670 Fermats Sohn veröffentlicht die Randnotizen seines Vaters

1753 Euler beweist die Fälle  $n = 3$  und  $n = 4$

1805 Sophie Germain gelingt ein wichtiger Schritt zur Lösung des Problems  
 1825 Legendre und Dirichlet beweisen den Fall  $n = 5$   
 1830 Dirichlet beweist den Fall  $n = 14$   
 1839 Lamé erweitert das Verfahren von Germain und zeigt  $n = 7$   
 1.3.1847 Cauchy und Lamé kündigen gleichzeitig und unabhängig voneinander vor der Akademie ihre Beweise an  
 1847 Kummer reduziert das Problem auf "irreguläre" Primzahlen  
 1875 der 1853 ausgeschriebene Preis der französischen Akademie geht an Kummer  
 27.6.1908 der Wolfskehl-Preis wird gestiftet. Unzählige Laien versuchen sich nun am Beweis  
 1945 erstmals werden Computer zum Nachweis eingesetzt  
 1955 die Taniyama-Shimura-Vermutung wird veröffentlicht  
 1977 Wagstaff zeigt mit Computereinsatz, dass die Fermatsche Vermutung für alle Primzahlen  $2 < p < 125000$  richtig ist  
 1980 für alle  $n < 25000$  ist der Nachweis gelungen  
 1983 Gerd Faltings zeigt, dass die Gleichung für jede natürliche Zahl  $n > 2$  höchstens endlich viele Lösungen besitzt  
 1984 Gerhard Frey skizziert eine Beweisidee, nach der der Satz von Fermat wahr ist, wenn die Taniyama-Shimura-Vermutung gilt  
 1986 Kenneth Ribet erbringt einen Beweis für Freys Vermutung  
 1993, Juni Andrew Wiles trägt in Cambridge seinen Beweis vor  
 1993, August Nicholas Katz findet einen Fehler im Beweis  
 1994, September Wiles gelingt die Beseitigung des Fehlers. Der Beweis ist jetzt 130 Seiten lang  
 1997, Juni Wiles erhält den Wolfskehl-Preis  
 1998 Wiles erhält auf dem International Congress of Mathematicians in Berlin einen "Fields-Medaille" ähnlichen Preis. Die Fields-Medaille kann er nicht erhalten, da er zu alt ist.



## Episoden zum großen Satz von Fermat

### Episode 1

In der Folge "Hotel Royale" der Science-Fiction-Serie "Raumschiff Enterprise - das nächste Jahrhundert" erklärt Captain Picard, dass er auch am Beweis der Fermatschen Vermutung arbeitet und nach 800 Jahren intensiver Suche nicht einmal Computer eine Lösung gefunden hätten.

Die Folge wurde 1988 gedreht. Die Drehbuchautoren waren wohl der Meinung, dass der große Satz von Fermat noch weitere 400 Jahre allen Beweisversuchen widersteht.

### Episode 2

In der Folge "Homer<sup>3</sup>" der TV-Serie "The Simpsons" ist im Hintergrund die Gleichung

$$1782^{12} + 1841^{12} = 1922^{12}$$

zu sehen. Rechnet man die Werte korrekt aus, wird

$$1782^{12} + 1841^{12} = 10253\,97835\,62263\,36348\,07550\,46294\,82261\,74976 + 15158\,12422\,99195\,55414\,81119\,49519\,42023\,51681 = 25412\,10258\,61458\,91762\,88669\,95814\,24285\,26657$$

$$1922^{12} = 25412\,10259\,31480\,14108\,19278\,64964\,36515\,67616$$

Natürlich sind beide Werte unterschiedlich, stimmen aber wenigstens in den ersten 9 Ziffern überein.

In "The Wizard of Evergreen Terrace mentions" sieht man  $3987^{12} + 4365^{12} = 4472^{12}$

Die Summe wird 6397 66563 49698 61261 62362 30953 15448 78969 87106

während die Potenz  $4472^{12}$  gleich 6397 66563 48486 72580 68623 58322 16857 57841 24416

ist. Hier sind sogar die ersten 10 Ziffern gleich und vor allem die letzte!

## Euler-Beweis zum Satz von Fermat

Im Jahre 1769 veröffentlichte Leonhard Euler seinen Beweis für den Spezialfall  $n = 3$  des großen Satzes von Fermat. In der Liste befindet sich der (Original)Text aus Eulers berühmten Lehrbuch "Vollständige Anleitung zur Algebra".

### Lehrsatz: Es ist nicht möglich zwey Cubos zu finden, deren Summe oder auch Differenz ein Cubus wäre.

Hier ist vor allen Dingen zu bemerken, daß wenn die Summe unmöglich ist, die Differenz auch unmöglich seyn müsse. Denn wenn es unmöglich ist daß  $x^3 + y^3 = z^3$ , so ist es auch unmöglich daß  $z^3 - y^3 = x^3$ , nun aber ist  $z^3 - y^3$  die Differenz von zwey Cubis: Es ist also genug die Unmöglichkeit bloß von der Summe, oder auch nur von der Differenz zu zeigen, weil das andere daraus folgt. Der Beweis selbst aber wird aus folgenden Sätzen bestehen:

Kann man annehmen, daß die Zahlen  $x$  und  $y$  untheilbar unter sich sind. Denn wenn sie einen gemeinsamen Theiler hätten, so würden sich die Cubi durch den Cubum desselben theilen lassen. Wäre



z.E.  $x = 2a$ , und  $y = 2b$  so würde  $x^3 + y^3 = 8a^3 + 8b^3$ , und wäre dieses ein Cubus, so müßte auch  $a^3 + b^3$  ein Cubus seyn.

Da nun  $x$  und  $y$  keinen gemeinsamen Theiler haben, so sind diese beyde Zahlen entweder beyde ungerade, oder die eine gerade, und die andere ungerade. Im erstern Fall müßte  $z$  gerade seyn; im andern Fall aber müßte  $z$  ungerade seyn.

Also sind von den drey Zahlen  $x$ ,  $y$  und  $z$  immer zwey ungerade und eine gerade. Wir wollen daher zu unserm Beweis die beyden ungeraden nehmen, weil es gleich viel ist, ob wir die Unmöglichkeit der Summe oder der Differenz zeigen, indem die Summe in die Differenz verwandelt wird, wenn die eine Wurzel negativ wird.

Es seyn demnach  $x$  und  $y$  zwey ungerade Zahlen, so wird sowohl ihre Summe als Differenz gerade seyn. Man setze daher  $(x + y)/2 = p$  und  $(x - y)/2 = q$ , so wird  $x = p + q$  und  $y = p - q$ , woraus erhellet, daß von den zwey Zahlen  $p$  und  $q$  die eine gerade, die andere aber ungerade seyn muß; daher aber wird  $x^3 + y^3 = 2p^3 + 6pq^2 = 2p(pp + 3qq)$ :

Es muß also bewiesen werden, daß dieses Product  $2p(pp + 3qq)$  kein Cubus seyn könne. Sollte aber die Sache von der Differenz her bewiesen werden, so würde  $x^3 - y^3 = 6ppq + 2q^3 = 2(qq + 3pp)$ , welche Formel der vorigen ganz ähnlich ist, indem nur die Buchstaben  $p$  und  $q$  verwechselt sind, daher es genug ist, die Unmöglichkeit von dieser Formel  $2p(pp + 3qq)$  zu zeigen, weil daraus nothwendig folget, daß weder die Summe noch die Differenz von zweyen Cubis ein Cubus werden könne.

Wäre nun  $2p(pp + 3qq)$  ein Cubus, so wäre derselbe gerade und also durch 8 theilbar: folglich müßte auch der achte Theil unserer Formel eine ganze Zahl und dazu ein Cubus seyn, nämlich  $\frac{1}{4}p(pp + 3qq)$ . Weil nun von den Zahlen  $p$  und  $q$  die eine gerade, die andere aber ungerade ist, so wird  $pp + 3qq$  eine ungerade Zahl seyn und sich nicht durch 4 theilen lassen, woraus folget, daß sich  $p$  durch 4 theilen lassen müsse und also  $p/4$  eine ganze Zahl sey.

Wenn nun dieses Product  $p/4 \cdot (pp + 3qq)$  ein Cubus seyn sollte, so müßte ein jeder Factor besonders, nämlich  $p/4$  und  $pp + 3qq$ , ein Cubus seyn, wenn nämlich dieselben aber einen gemeinsamen Theiler haben, so muß derselbe besonders betrachtet werden. Hier ist demnach die Frage: ob diese zwey Factoren  $p$  und  $pp + 3qq$  nicht einen gemeinsamen Theiler haben könnten?

welches also untersucht wird. Hätten dieselben einen gemeinsamen Theiler, so würden auch diese  $pp$  und  $pp + 3qq$

eben denselben gemeinsamen Theiler haben, und also auch diese ihre Differenz, welche ist  $3qq$ , mit dem  $pp$  eben denselben gemeinsamen Theiler haben, da nun  $p$  und  $q$  unter sich untheilbar sind, so können die Zahlen  $pp$  und  $3qq$  keinen andern gemeinsamen Theiler haben als 3, welches geschieht wenn sich  $p$  durch 3 theilen läßt.

Wir haben daher zwey Fälle zu erwegen: der erste ist wenn die Factoren  $p$  und  $pp + 3qq$  keinen gemeinsamen Theiler haben, welches immer geschieht, wenn sich  $p$  nicht durch 3 theilen läßt; der andere Fall ist, wenn dieselben einen gemeinsamen Theiler haben, welches geschieht, wenn sich  $p$  durch 3 theilen läßt, da denn beyde durch 3 theilbar seyn werden. Diese zwey Fälle müssen sorgfältig von einander unterschieden werden, weil man den Beweis für einen jeden ins besondere führen muß.

Erster Fall:

Es sey demnach  $p$  nicht durch 3 theilbar und also unsere beyden Factoren  $p/4$  und  $pp + 3qq$  untheilbar unter sich, so müßte ein jeder für sich ein Cubus seyn. Laßt uns daher  $pp + 3qq$  zu einem Cubus machen, welches geschieht wenn man, wie oben gezeigt worden, setzt

$p + q\sqrt{-3} = (t + u\sqrt{-3})^3$  und  $p - q\sqrt{-3} = (t - u\sqrt{-3})^3$ .

Damit dadurch werden  $pp + 3qq = (tt + 3uu)^3$  und also ein Cubus; hieraus aber wird,  $p = t^3 - 9tuu = t(tt - 9uu)$ , und  $q = 3ttu - 3u^3 = 3u(tt - uu)$ : weil nun  $q$  eine ungerade Zahl ist, so muß  $u$  auch ungerade,  $t$  aber gerade seyn, weil sonst  $tt - uu$  eine gerade Zahl würde.

Da nun  $pp + 3qq$  zu einem Cubus gemacht und gefunden worden  $p = t(tt - 9uu) = t(t + 3u)(t - 3u)$ , so müßte jetzt noch  $p/4$  und also auch  $2p$ , ein Cubus seyn; daher diese Formel  $2t(t + 3u)(t - 3u)$  ein Cubus seyn müßte. Hier ist aber zu bemerken, daß  $t$  erstlich eine gerade Zahl und nicht durch 3 theilbar ist, weil sonst auch  $p$  durch 3 theilbar seyn würde, welcher Fall hier ausdrücklich ausgenommen ist: also sind diese drey Factoren  $2t$ ,  $t + 3u$  und  $t - 3u$  unter sich untheilbar, und deswegen müßte ein jeder für sich ein Cubus seyn. Man setze daher  $t + 3u = f^3$  und  $t - 3u = g^3$  so wird  $2t = f^3 + g^3$ .

Nun aber ist  $2t$  auch ein Cubus, und folglich hätten wir hier zwey Cubos  $f^3$  und  $g^3$  deren Summe wieder ein Cubus wäre, welche offenbar ungleich viel kleiner wären, als die anfänglich angenommenen Cubi  $x^3$  und  $y^3$ . Denn nachdem wir gesetzt haben  $x = p + q$  und  $y = p - q$ , anjetzo aber  $p$  und  $q$  durch die Buchstaben  $t$  und  $u$  bestimmt haben, so müssen die Zahlen  $p$  und  $q$  viel größer seyn als  $t$  und  $u$ .

Wenn es also zwey solche Cubi in den größten Zahlen gäbe, so könnte man auch in viel kleinern Zahlen eben dergleichen anzeigen deren Summe auch ein Cubus wäre, und solcher Gestalt könnte man auf immer kleinere dergleichen Cubos kommen. Da es nun in kleinen Zahlen dergleichen Cubos gewiß nicht giebt, so sind sie auch in den allergrößten nicht möglich. Dieser Schluß wird dadurch bestätigt, daß auch der andere Fall eben dahin leitet, wie wir sogleich sehen werden.

Zweyter Fall.

Es sey nun  $p$  durch 3 theilbar,  $q$  aber nicht, und man setze  $p = 3r$  so wird unsere Formel  $3r/4 \cdot (9rr + 3qq)$ , oder  $9/4r(3rr + qq)$ , welche beyde Factoren unter sich untheilbar sind, weil sich  $3rr + qq$  weder

durch 2 noch durch 3 theilen läßt, und r eben sowohl gerade seyn muß als p, deswegen muß ein jeder von diesen beyden Factoren für sich ein Cubus seyn.

Machen wir nun den zweyten  $3rr + qq$  oder  $qq + 3rr$  zu einem Cubo, so finden wir wie oben  $q = r(tt - 9uu)$  und  $r = 3u(tt - uu)$ : wo zu merken, daß weil q ungerade war, hier auch t ungerade, u aber eine gerade Zahl seyn müsse. Weil nun  $9r/4$  auch ein Cubus seyn muß und also auch mit dem Cubo  $8/27$  multiplicirt, so muß  $2r/3$  das ist

$2u(tt - uu) = 2u(t + u)(t - u)$  ein Cubus seyn, welche drey Factoren unter sich untheilbar und also ein jeder für sich ein Cubus seyn müßte: wenn man aber setzt  $t + u = f^3$  und  $t - u = g^3$ , so folgt daraus  $2u = f^3 - g^3$ , welches auch ein Cubus ist. Solcher Gestalt hätte man zwey weit kleinere Cubos  $f^3$  und  $g^3$  deren Differenz ein Cubus wäre, und folglich auch solche deren Summe ein Cubus wäre. Hierdurch wird nun der obige Schluß vollkommen bestätigt, daß es auch in den größten Zahlen keine solchen Cubi gebe, deren Summe oder Differenz ein Cubus wäre, und das deswegen, weil in den kleinsten Zahlen dergleichen nicht anzutreffen sind.

### Beweis zum Satz von Fermat $n = 4$

Satz: Die Gleichung  $x^4 + y^4 = z^2$ , insbesondere auch die Gleichung  $x^4 + y^4 = z^4$  ist in natürlichen Zahlen größer 0 unlösbar.

Beweis: Angenommen die Behauptung ist falsch. Dann gibt es paarweise teilerfremde ganze Zahlen x, y, z mit  $x^4 + y^4 = z^2$ . z sei minimal mit der angegebenen Eigenschaft.

Aus der Eigenschaft pythagoreischer Tripel ergibt sich dann:

$$x^2 = A^2 - B^2 \quad y^2 = 2AB \quad z = A^2 + B^2$$

B ist gerade. Da x und y teilerfremd sind, sind auch A und B teilerfremd und somit

$$A = a^2, B = 2b^2$$

Damit gilt  $x^2 + (2b^2)^2 = a^4$  und  $2b^2 = 2CD$   $a^2 = C^2 + D^2$

Die Zahlen C und D sind teilerfremd. Man erhält

$$C = c^2, D = d^2, \text{ also } a^2 = c^4 + d^4.$$

Nun ist  $z = a^4 + (2b^2)^2 > a^4 > a$ ,

da mit  $y > 0$  auch  $b > 0$  ist. Das widerspricht der Minimalität von z.

### Fast-Fermat-Tripel

Nach dem großen Satz von Fermat existieren für  $n > 2$  keine natürlichen Lösungen a, b, c > 0 der Gleichung

$$a^n + b^n = c^n$$

Fast-Fermat-Tripel sind Tripel (a,b,c), für die a, b natürliche Zahlen und c eine reelle Zahl sind, wobei c "fast ganzzahlig" ist.

### Fast-Fermat-Tripel für $n = 3$

a	b	c
9	10	12,0023143684276843965855964227102462534121757978322894
71	138	143,999983924895324834753356210040458361240192538893116
294	2057	2058,9999984274804705633024832517517517869332012426968
368	1537	1544,00000013982478275555494604262396932555297698218467
384	3071	3072,99999992940342683369581658613698044592650484683496
486	4373	4374,99999996517006802693359883117116199509978619217391
600	5999	6000,99999998148765277806353356005800815469919585102117
726	7985	7986,99999998954939646796554342299205932845961963624339
1851	8675	8702,9999999559910731764501492440501069962483035763615
3987	9735	9953,00000000336488895915111928013548938938750205281691

### Fast-Fermat-Tripel für $n = 4$

a	b	c
99	288	289,000096281395969362351715814347058780763173016829214
117	360	360,999923904047371249287353354759567932745332337136304
139	313	316,000041721463061044994711604805334575085456141946216
164	565	566,000039577487532434157801451201833798164843585011128
167	192	215,000004829763254313802856221751298672213148312092379
216	647	648,999995258989513835622919205994974762673590750258540
242	471	478,999997488677167254637035388080773637655318467301187
355	1583	1583,99999810094479072819005499643284801086838372960968
717	967	1033,0000088927459578582627947917176938814812834112831
1167	1611	1712,00000050948865267087182931945202617054223951221881

### Fast-Fermat-Tripel für $n = 5$

a	b	c
13	16	17,0000287351909884702453359648702821296083922372840127
42	71	72,0000219618516951103820976381262815866673937215455562
133	228	230,999993826640566370761631893491892059954359575053872

262	328	347,000001333850414362625250494776896340502600086235321
494	954	960,999999429809226233395324965891875907641129700983853

### Fast-Fermat-Tripel für $n = 6$

a	b	c
22	28	29,0036301165699376825522535193943771722641400021007313
36	51	52,0010785197840195086361706811974224717713836308995239
49	49	55,0006403671592760902431194342797962953881444200853509
68	110	111,000137783768553805367646144828136361604838909059818
107	130	136,000073306469380005712695116646842152258046601006305
163	315	315,999940428721071828676211502663792385061236827667123
183	362	363,000028537938925795066725141190541030430274223207787
321	711	712,000008505876427414951281443139026064413224859787623
428	643	652,000001480734429615455907747032802874303825568362245
1191	1364	1449,99999891101260745860709994155899469620910580889971

### Fast-Fermat-Tripel für $n = 7$

a	b	c
10	10	11,0408951367381233764950538762334472132532660078012417
40	43	45,9976014655916278420384173108432256772661440211857029
58	82	83,0002098377606398319830548812568725507217236790221875
61	87	88,0002038502445762447468105944748060675172810339593915
114	181	181,999908643936309850767172435881102055702844956175538
173	216	222,000017912523191893288625096664480357635089398465332
381	440	460,000015540721263532467839929125672597114157802790648
467	546	568,999991954340961235670112243030939607987705484168110
598	836	847,000002097996401531170328294289264759463538958484941
819	1121	1137,99999913197437939353746254048066799190124773866946

### Fast-Fermat-Tripel für $n = 8$

a	b	c
11	11	11,9955850593178342512771172133677877689197299039407383
49	50	53,9993902732969825228282905052446951766678354775517495
127	188	189,000314039088908523197023152064412577787836592689430
211	304	306,000036483044580137734188156360898927165581255374568
238	349	350,999975383402220669265635013459307886479170370132738
453	453	494,000002897361719620775827059600714483694331498650406
457	814	815,000001942939119545853274271965952974747305743550100
526	956	957,000000722620743954974610732915005177318472888453123
673	845	860,999999412673828150669819378478793699882457149018530
868	1144	1159,00000021176352109379366397393823336231027451886533

### Erweiterung des Satzes von Fermat

Der Satz von Fermat kann auf Gleichungen der Form  $x^n + y^n = c \cdot z^n$ , wobei  $c$  natürliche Zahl ist, erweitert werden.

Lösbare Fälle für

n	c
2	1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50, ...
3	2, 6, 7, 9, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 22, 26, 28, 30, 31, 33, 34, 35, 37, 42, 43, 48, 49, 50, ...
4	2, 17, 32, 82, 97, 162, 257, 272, 337, 512, 626, 641, 706, 881, 1250, 1297, 1312, 1377, 1552
5	2, 31, 33, 64, 211, 242, 244, 275, 486, 781, 992, 1023, 1025, 1056, 1267, 2048, 2101, 2882

### Satz von Fermat mit negativen Exponenten

Nach dem großen Satz von Fermat existieren für natürliche  $n > 2$  keine natürlichen Lösungen  $a, b, c > 0$  der Gleichung  $a^n + b^n = c^n$ .

Normalerweise interessiert man sich nur für den lösbaren Fall  $n = 2$ , den Pythagoreischen Tripeln. Es ist aber auch möglich, ganzzahlige Exponenten  $n < 2$  zu betrachten.

Für  $z = 1$  ist der Fall trivial. Das einfachste Beispiel ist  $1 + 1 = 2$ . Für  $z = 0$  gibt es wegen  $a^0 + b^0 = 2 \neq 1 = c^0$  keine Lösung. Für  $z = -1$  findet man Lösungen, zum Beispiel  $1/2 + 1/2 = 1$  und  $1/6 + 1/3 = 1/2$ . Ebenso existieren Lösungen für den Fall  $z = -2$ , u.a.  $1/20^2 + 1/15^2 = 1/12^2$  und  $1/156^2 + 1/65^2 = 1/60^2$ .

Nach dem Beweis von Wiles, dass für  $n > 2$  keine Lösungen auftreten, ergibt sich automatisch, dass auch für alle ganzzahligen  $z < -2$  keine natürlichen Lösungstriple existieren.

Durch Hans Walser wurde gezeigt, dass aus einer Lösung für  $n$  sich eine Lösung für  $-n$  konstruieren lässt. Falls  $a^n + b^n = c^n$  gilt, so erhält man durch die Zuordnung

$$f : (a, b, c) \rightarrow (a^*, b^*, c^*) = 1 / \text{kgV}(\text{ggT}(a, b), \text{ggT}(a, c), \text{ggT}(b, c)) \cdot (bc, ac, ab)$$

eine ganzzahlige Lösung der Gleichung  $(1/a^*)^n + (1/b^*)^n = (1/c^*)^n$

### Satz von Fermat für Exponenten $n = -2$

Erfüllen drei natürliche Zahlen  $a, b, c$  die Gleichung  $a^2 + b^2 = c^2$ ,

.d.h. sie bilden ein Pythagoreisches Tripel, so erhält man durch die Zuordnung

$$f : (a, b, c) \rightarrow (a^*, b^*, c^*) = 1 / \text{kgV}(\text{ggT}(a, b), \text{ggT}(a, c), \text{ggT}(b, c)) \cdot (bc, ac, ab)$$

eine ganzzahlige Lösung der Gleichung  $(1/a^*)^2 + (1/b^*)^2 = (1/c^*)^2$

Sind  $u$  und  $v$  teilerfremde, ungerade natürliche Zahlen, so ist  $a, b, c$  ein derartiges Tripel mit

$$a = u \cdot v, \quad b = (u^2 - v^2)/2, \quad c = (u^2 + v^2)/2$$

.d.h. aus den Zahlen  $u, v$  kann auch ein Tripel gebildet werden, dass die Gleichung zum Großen Satz von Fermat für den Exponenten  $-2$  erfüllt.

Pythagoreische Tripel  $(a, b, c)$  können als Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks interpretiert werden. Dann gibt das Tripel  $(a^*, b^*, c^*)$  das Verhältnis der 3 Höhen  $h_a, h_b, h_c$  dieses rechtwinkligen Dreiecks an.

### 120°-Tripel

In Analogie zur Konstruktion von pythagoreischen Tripeln, bei denen entsprechende Dreiecke einen 90°-Winkel besitzen, kann man auch fragen, ob es ganzzahlige Seitenzahlen eines Dreiecks gibt, so dass ein Winkel einen ganzzahligen Wert besitzt.

Ausgehend vom Kosinussatz folgt aus der Tatsache, dass außer  $\cos 90^\circ$  nur noch  $\cos 60^\circ$  und  $\cos 120^\circ$  rational sind, dass solche Tripel nur für 120°- und 60°-Winkel existieren.

Tripel von Zahlen, so dass ein zugeordnetes Dreieck einen 120° Winkel besitzt, werden 120°-Tripel genannt.

Man erhält alle primitiven 120°-Tripel in der Gestalt  $(2mn + n^2, m^2 - n^2, m^2 + n^2 + mn) = (x, y, z)$  wenn die natürlichen Zahlen  $m, n$  teilerfremd sind und  $m - n$  nicht durch 3 teilbar ist. Die kleinsten Tripel sind  $(5, 3, 7), (7, 8, 13)$  und  $(16, 5, 19)$ .

Die Seitenlänge  $z$  ist immer ungerade und nie durch 3 und 5 teilbar.  $x$  und  $y$  sind weiterhin niemals Kubikzahlen. Für  $y$  entstehen solche, wenn  $m$  und  $n$  aufeinander folgende Dreieckszahlen sind.

Der Flächeninhalt eines solchen Dreiecks ist nie ganzzahlig, da  $\sin 120^\circ = 1/2 \sqrt{3}$  irrational ist. Für die Radien von Inkreis und Umkreis ergibt sich

$$r = ab \sqrt{3} / (2a + 2b + 2c) \quad R = c/3 \sqrt{3}$$

### 60°-Tripel

In Analogie zur Konstruktion von pythagoreischen Tripeln, bei denen entsprechende Dreiecke einen 90°-Winkel besitzen, kann man auch fragen, ob es ganzzahlige Seitenzahlen eines Dreiecks gibt, so dass ein Winkel einen ganzzahligen Wert besitzt.

Ausgehend vom Kosinussatz folgt aus der Tatsache, dass außer  $\cos 90^\circ$  nur noch  $\cos 60^\circ$  und  $\cos 120^\circ$  rational sind, dass solche Tripel nur für 120°- und 60°-Winkel existieren.

Tripel von Zahlen, so dass ein zugeordnetes Dreieck einen 60° Winkel besitzt, werden 60°-Tripel genannt.

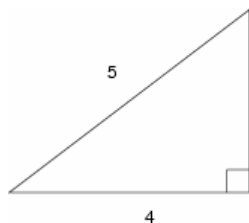
Man erhält alle primitiven 60°-Tripel in der Gestalt

$$(1, 1, 1); \quad (2mn - n^2, m^2 - n^2, m^2 + n^2 - mn); \quad (m^2 - 2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2 - mn)$$

wenn die natürlichen Zahlen  $m, n$  teilerfremd sind,  $m > n/2$  gilt und  $m + n$  nicht durch 3 teilbar ist. Die kleinsten Tripel sind  $(1, 1, 1), (5, 8, 7), (3, 8, 7)$  und  $(7, 15, 13)$ .

Der Flächeninhalt eines solchen Dreiecks ist nie ganzzahlig, da  $\sin 60^\circ = 1/2 \sqrt{3}$  irrational ist. Für die Radien von Inkreis und Umkreis ergibt sich

$$r = ab \sqrt{3} / (2a + 2b + 2c) \quad R = c/3 \sqrt{3}$$



### Kongruente Zahl

Kongruente Zahlen sind Zahlen, die sich als Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks mit rationalen Seitenlängen darstellen lassen. Die ersten derartigen Zahlen sind:

5, 6, 7, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 24, 28, 29, 30, 31, 34, 37, 38, 39, 41, 45, 46, 47, 52, 53, 54, 55, 56, 60, 61, 62, 63, 65, 69, 70, 71, 77, 78, 79, 80, 84, 85, 86, 87, 88, 92, 93, 94, 95, 96, 101, 102, 103, 109, 110, 111, 112, 116, 117, 118, 119, 120, 124, 125, 126, ...

Zur Bestimmung kongruenter Zahlen wird der Satz von Tunnell benutzt. Dieser gibt streng genommen nur eine notwendige Bedingung an. Sollte die Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer für elliptische Kurven  $y^2 = x^3 - n^2x$  gelten, ist der Satz auch hinreichend.

Ist  $n$  eine quadratfreie ganze Zahl, so werden folgende Werte bestimmt

$$A = \#\{x, y, z \in \mathbb{Z} \mid n = 2x^2 + y^2 + 32z^2\}$$

$$B = \#\{x, y, z \in \mathbb{Z} \mid n = 2x^2 + y^2 + 8z^2\}$$

$$C = \#\{x, y, z \in \mathbb{Z} \mid n = 8x^2 + 2y^2 + 64z^2\}$$

$$D = \#\{x, y, z \in \mathbb{Z} \mid n = 8x^2 + y^2 + 16z^2\}$$

Ist  $n$  eine ungerade Kongruenzzahl, so gilt  $2A = B$ , ist  $n$  gerade Kongruenzzahl dann  $2C = D$ .

Für die ersten Kongruenzzahlen wird für die Katheten  $a$ ,  $b$  und die Hypotenuse  $c$  des rechtwinkligen Dreiecks

$5 : a = 3/2, b = 20/3, c = 41/6$   
 $6 : a = 3, b = 4, c = 5 \dots$  Abbildung  
 $7 : a = 35/12, b = 24/5, c = 337/60$   
 $13 : a = 780/323, b = 323/30, c = 106921/9690$   
 $14 : a = 8/3, b = 63/6, c = 65/6$   
 $15 : a = 4, b = 15/2, c = 17/2$   
 $20 : a = 3, b = 40/3, c = 41/3$

### Geschichte der Kongruenten Zahlen

Kongruente Zahlen sind Zahlen, die sich als Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks mit rationalen Seitenlängen darstellen lassen.

"Das Rätsel der kongruenten Zahlen ist eng verknüpft mit einer mathematischen Hypothese aus den sechziger Jahren - der Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer. Wenn diese zutrifft, dann müssen alle Zahlen der Form  $8n+5$ ,  $8n+6$  und  $8n+7$  für natürliche  $n_0$  kongruent sein. ...

'Das ist das wichtigste ungelöste Problem der Zahlentheorie', sagt John Coates von der Cambridge University. Im Jahr 2000 hat das amerikanische Clay Mathematics Institute sogar eine Million Dollar für die Lösung dieses Rätsels ausgelobt. Es gehört damit zu den sieben Millennium-Problemen, den schwierigsten Kopfnüssen für Mathematiker im dritten Jahrtausend. ...

1976 hatte der Australier Coates gemeinsam mit seinem Schüler Andrew Wiles immerhin schon einen Spezialfall der Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer bewiesen, ohne freilich das Problem der kongruenten Zahlen selbst zu lösen. Wiles wurde zwei Jahrzehnte später zum Superstar der Mathematik, als er den Großen Fermatschen Satz bewies.

Der Mathematiker Ye Tian von der Chinesischen Akademie der Wissenschaften hat den Schleier um die kongruenten Zahlen nun zumindest ein Stück gelüftet. Er hat Zahlen untersucht, in deren Primzerlegung keine Zahl doppelt oder mehrfach auftritt.

Das trifft zum Beispiel für  $6 = 2 \cdot 3$  zu, nicht aber für  $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ . Tian konnte zeigen, dass es unendlich viele kongruente Zahlen der Form  $8n+5$ ,  $8n+6$  und  $8n+7$  gibt, die  $k$  paarweise verschiedene Primfaktoren haben. ...

Coates lobt Tians Arbeit als 'Meilenstein in der Geschichte eines alten Problems', obwohl der Chinese nur einen Spezialfall gemeistert hat. 'Wir sind auf dem Weg zur Lösung der Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer', sagt Hélène Esnault von der Freien Universität Berlin. Die Französin ist aber nicht ganz so optimistisch wie Coates: 'Der Weg ist noch sehr weit.'

Quelle: Spiegel online <http://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/kongruente-zahlen-mathematik-raetsel-aus-1001-nacht-a-880152.html>

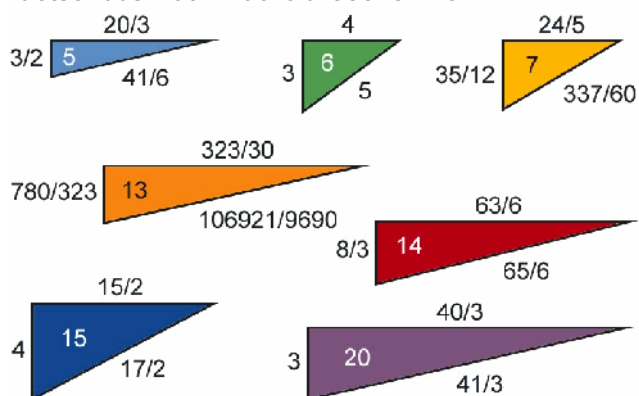


Abbildung: erste kongruente Zahlen

### Darstellbare Zahl

Eine natürliche Zahl  $n$  wird darstellbar genannt, wenn es zwei natürliche Zahlen  $a$ ,  $b$  gibt, so dass gilt

$$n = a^2 + b^2$$

Erste Untersuchungen wurden schon von dem indischen Mathematiker Brahmagupta (598-668) und in Europa von Fibonacci durchgeführt.

Es gilt:

1) Sind  $a$  und  $b$  darstellbar, so ist auch  $ab$  darstellbar.

2) Keine Primzahl der Form  $4n+3$  ist darstellbar.

3) Jede Primzahl der Form  $4n+1$  ist darstellbar.  
siehe Primzahlen mit  $4n+1$

Ergebnis 3) formulierte Pierre de Fermat am 25. Dezember 1640 in einem Brief an Martin Mersenne. Daher ist der Satz im englischen Sprachraum auch als "Fermat's Christmas Theorem" bekannt. Albert Girard (1595-1632) kannte den Satz einige Jahre früher. Der erste Beweis stammt von Euler aus dem Jahre 1747.

### Zwei-Quadrate-Satz

Darstellbare Zahlen sind jedoch nicht notwendig Primzahlen. Auf Euler geht der Zwei-Quadrate-Satz zurück:

Eine natürliche Zahl  $n$  ist genau dann Summe zweier Quadrate, wenn in der Primfaktorzerlegung von  $n$  alle Primzahlen der Form  $4k+3$  mit geradem Exponenten auftreten.



## Darstellbare Zahl (2)

Nach dem Zwei-Quadrate-Satz ist eine natürliche Zahl  $n$  genau dann Summe zweier Quadrate, wenn in der Primfaktorzerlegung von  $n$  alle Primzahlen der Form  $4k+3$  mit geradem Exponenten auftreten. Weiterhin zeigte Gauß in seinen "Disquisitiones Arithmeticae", dass alle darstellbaren Primzahlen der Form  $4n+1$  genau eine Zerlegung in eine Summe zweier Quadraten  $a^2 + b^2$  besitzen.

Für darstellbare Zahlen  $z$ , die nicht  $4n+1$ -Primzahl sind, kann es mehrere Darstellungen geben. 1829 konnte Jacobi (1829) in "Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum" einen Satz über die Anzahl der Zerlegungen beweisen. Dort führt Jacobi die Thetafunktionen ein, um elliptische Funktionen zu definieren. Mittels dieser beweist er eine Vielzahl anspruchsvoller zahlentheoretischer Sätze.

Es sei  $n = 2^f n_1 n_2$  eine natürliche Zahl.  $n_1$  sei das Produkt aller Primteiler der Form  $4k+1$  der Zahl  $n$ ,  $n_2$  das Produkt der Primteiler der Form  $4k+3$ .  $d_a(n)$  sei die Anzahl der Teiler(!) von  $n$ , die bei Division mit 4 den Rest  $a$  lassen.

Ist  $n$  darstellbar, so existieren dann  $r(n) = 1/2 d_1(n_1) = 1/2 (d_1(n) - d_3(n))$  verschiedene Zerlegungen von  $n$  in zwei Quadrate.

Zum Beispiel ist  $2340 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13$ . Teiler der Form  $4k+1$  sind 1, 5, 9, 13, 45, 65, 117 und 585, Teiler der Form  $4k+3$  weiterhin 3, 15, 39 und 195. Damit wird

$$r(2340) = 1/2 d_1(5 \cdot 13) = 1/2 (d_1(2340) - d_3(2340)) = 1/2 (8-4) = 2$$

Tatsächlich gibt es zwei Zerlegungen  $2340 = 6^2 + 48^2 = 24^2 + 42^2$

Nach dem Zwei-Quadrate-Satz ist eine natürliche Zahl  $n$  genau dann Summe zweier Quadrate, wenn in der Primfaktorzerlegung von  $n$  alle Primzahlen der Form  $4k+3$  mit geradem Exponenten auftreten.

Die kleinsten natürlichen Zahlen  $n$ , für die  $r = 1, 2, 3, 4, \dots$  verschiedene Zerlegungen existieren, sind:  $n = 4, 25, 325, 1105, 4225, 5525, 27625, 71825, 138125, 160225, 160225, 801125, 801125, 801125, 2082925, 2082925, \dots$

$$\begin{aligned} 4 &= 0^2 + 2^2 \\ 25 &= 0^2 + 5^2 = 3^2 + 4^2 \\ 325 &= 1^2 + 18^2 = 6^2 + 17^2 = 10^2 + 15^2 \\ 1105 &= 4^2 + 33^2 = 9^2 + 32^2 = 12^2 + 31^2 = 23^2 + 24^2 \\ 4225 &= 0^2 + 65^2 = 16^2 + 63^2 = 25^2 + 60^2 = 33^2 + 56^2 = 39^2 + 52^2 \\ 5525 &= 7^2 + 74^2 = 14^2 + 73^2 = 22^2 + 71^2 = 25^2 + 70^2 = 41^2 + 62^2 = 50^2 + 55^2 \\ 27625 &= 20^2 + 165^2 = 27^2 + 164^2 = 45^2 + 160^2 = 60^2 + 155^2 = 83^2 + 144^2 = 88^2 + 141^2 = \\ &101^2 + 132^2 = 115^2 + 120^2 (8) \\ 71825 &= 1^2 + 268^2 = 40^2 + 265^2 = 65^2 + 260^2 = 76^2 + 257^2 = 104^2 + 247^2 = 127^2 + 236^2 = \\ &160^2 + 215^2 = 169^2 + 208^2 = 188^2 + 191^2 \\ 138125 &= 22^2 + 371^2 = 35^2 + 370^2 = 70^2 + 365^2 = 110^2 + 355^2 = 125^2 + 350^2 = 163^2 + 334^2 = \\ &194^2 + 317^2 = 205^2 + 310^2 = 218^2 + 301^2 = 250^2 + 275^2 \\ 160225 &= 15^2 + 400^2 = 32^2 + 399^2 = 76^2 + 393^2 = 81^2 + 392^2 = 113^2 + 384^2 = 140^2 + 375^2 = \\ &175^2 + 360^2 = 183^2 + 356^2 = 216^2 + 337^2 = 228^2 + 329^2 = 252^2 + 311^2 = 265^2 + 300^2 (12) \\ 801125 &= 10^2 + 895^2 = 95^2 + 890^2 = 127^2 + 886^2 = 158^2 + 881^2 = 193^2 + 874^2 = 230^2 + 865^2 = \\ &241^2 + 862^2 = 335^2 + 830^2 = 370^2 + 815^2 = 430^2 + 785^2 = 458^2 + 769^2 = 463^2 + 766^2 = 529^2 + \\ &722^2 = 545^2 + 710^2 = 554^2 + 703^2 = 610^2 + 655^2 (16) \\ 2082925 &= 26^2 + 1443^2 = 134^2 + 1437^2 = 163^2 + 1434^2 = 195^2 + 1430^2 = 330^2 + 1405^2 = 370^2 + \\ &1395^2 = 429^2 + 1378^2 = 531^2 + 1342^2 = 541^2 + 1338^2 = 558^2 + 1331^2 = 579^2 + 1322^2 = 702^2 + \\ &1261^2 = 730^2 + 1245^2 = 755^2 + 1230^2 = 845^2 + 1170^2 = 894^2 + 1133^2 = 926^2 + 1107^2 = 1014^2 + \\ &1027^2 (18) \end{aligned}$$

## Landau-Ramanujan-Konstante

Eine wichtige Konstante der Zahlentheorie ist die Landau-Ramanujan-Konstante, benannt nach Edmund Landau und Srinivasa Ramanujan.

Sie beschreibt den Anteil natürlicher Zahlen an, die als Summe von zwei Quadraten dargestellt werden können.

Ist  $N(x)$  die Anzahl natürlicher Zahlen kleiner als  $x$ , die als derartige Summe gebildet werden können, so gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} N(x) \sqrt{\ln x} / x \approx 0,764223653589220662990698731250092...$$

Zum Beispiel sind  $N(1) = 1$ ,  $N(2) = 2$ ,  $N(4) = 3$ ,  $N(5) = 4$ ,  $N(8) = 5$  da

$$1 = 0^2 + 1^2 \quad 2 = 1^2 + 1^2 \quad 4 = 0^2 + 2^2 \quad 5 = 1^2 + 2^2 \quad 8 = 2^2 + 2^2 \dots$$

$N(x)$  konvergiert aber nur langsam gegen die Landau-Ramanujan-Konstante. Für  $N(10^5) = 24028$  ergibt sich der Näherungswert 0,815287, für  $N(10^6) = 216341$  der Wert 0,804123.

## abc-Vermutung

Die abc-Vermutung ist eine 1985 von Joseph Oesterlé und David Masser aufgestellte mathematische Vermutung. Sie behandelt eine Eigenschaft von Tripeln von natürlichen Zahlen, bei denen die dritte die Summe der beiden anderen ist. Die Vermutung ist bisher weder bewiesen noch widerlegt. Es sind bereits eine Anzahl weitreichender zahlentheoretischer Aussagen bekannt, die aus der Gültigkeit der abc-Vermutung folgen.

Vermutung: Für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert eine Konstante  $K_\varepsilon$ , so dass für alle Tripel teilerfremder positiver ganzer Zahlen  $a, b, c$  mit  $a + b = c$  die folgende Ungleichung gilt:  $c < K_\varepsilon (\text{rad}(abc))^{1+\varepsilon}$

Die Vermutung betrifft den Fall  $\varepsilon > 0$ , da sie für  $\varepsilon = 0$  falsch ist.

Mit  $\text{rad}(n)$  wird das Radikal einer positiven ganzen Zahl  $n$  bezeichnet. Dies ist das Produkt der unterschiedlichen Primfaktoren von  $n$ . Kommt ein Primfaktor in der Primfaktorzerlegung von  $n$  mehrfach vor, so wird er zur Berechnung von  $\text{rad}(n)$  nur einmal verwendet.

Die Folgerungen aus der Gültigkeit der abc-Vermutung sind vielfältig. Insbesondere der sehr komplizierte Beweis des Großen Fermatschen Satzes würde sich auf eine Seite reduzieren. Weiterhin folgen aus der Vermutung: Faltings Theorem, die Existenz von endlich vielen Wieferich-Primzahlen, die schwache Form der Marshall-Hall-Vermutung, die Mengen von aufeinanderfolgenden Zahlentripeln der starken Zahlen sind endlich, ...

Bisher wurden Berechnungen angestellt, um die Vermutung bis zu einem gewissen Zahlenraum nachzuprüfen. Beispielsweise sind

$$\text{rad}(2^2 \cdot 3^4) = 2 \cdot 3 = 6 \text{ und } \text{rad}(2 \cdot 3 \cdot 5^2) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

Drei positive ganze Zahlen  $a, b, c$  heißen abc-Tripel wenn  $a, b$  teilerfremd zueinander sind und  $a + b = c$  gilt. Wird  $\text{rad}(abc)$  berechnet, so wird geprüft, ob  $\text{rad}(abc) < c$  gilt. Unter den  $15 \cdot 10^6$  abc-Tripeln mit  $c < 10000$  befinden sich 120 Tripel, die die Ungleichung erfüllen.

Unter allen  $380 \cdot 10^6$  abc-Tripeln mit  $c < 50000$  befinden sich 276 günstige Tripel.

siehe auch die Top-Internetseite von Abderrahmane Nitaj:

<http://www.math.unicaen.fr/~nitaj/abc.html>

### ABC-Tripel

abc-Tripel sind positive ganze Zahlen  $a, b, c$  so dass

$$a + b = c \text{ und } a < b < c$$

$a, b, c$  keinen gemeinsamen Teiler haben

$$c > \text{rad}(a \cdot b \cdot c) \text{ (Radikal)}$$

gilt. Die umformulierte abc-Vermutung sagt dann, dass es für jedes  $h$

$> 1$  nur endlich viele  $a, b, c$  gibt, so dass

$$\log(c) / \log(\text{rad}(a \cdot b \cdot c)) > h$$

ist. Ab  $h = 1,4$  und größere  $h$  werden die Tripel gute abc-Tripel genannt. Das Tripel mit dem höchsten  $h$ -Wert wurde von Eric Reyssat gefunden:  $a = 2$  ;  $b = 3^{10} \cdot 109$  ;  $c = 23^5$  ;  $h = 1,62991$



ABC@home ist ein Projekt des mathematischen Instituts der Universität Leiden und Kennslink, einem holländischen Institut für Wissenschaft. Das BOINC-Projekt versucht alle abc-Tripel der abc-Vermutung bis  $10^{18}$  zu finden.

Homepage: <http://abcathehome.com>

Die abc-Vermutung ist zur Zeit eines der größten offenen Probleme der Mathematik. Sollte sie wahr sein, können viele weitere ungelöste Probleme der Mathematik direkt beantwortet werden.

Sie wird allerdings nicht durch dieses Projekt bewiesen oder widerlegt werden können. Hier werden zwar aufsteigend alle Tripel gefunden, die die Ungleichung erfüllen, aber ob es nun nur endlich viele solcher Tripel gibt, kann man durch diesen Ansatz nicht zeigen.

### ABC-Tripel, Aribas-Programm

Mit dem folgenden einfachen Aribas-Programm können abc-Tripel berechnet werden:

```
function factorlist(x: integer): array;
var st: stack; q: integer;
begin q := 2;
  while q := factor16(x,q) do stack_push(st,q); x := x div q; end;
  stack_push(st,x);
  return stack2array(st);
end;
```

```
function abctripel(anfang,grenze:integer):integer;
var i,a,b,c,n,ggtr,l,p,palt:integer; z:array of integer;
begin
  a:=anfang;
  while a<grenze div 2 do b:=a+1;
    while a+b<grenze do
      if gcd(a,b)=1 then
```

```

c:=a+b;      n:=a*b*c;
z:=factorlist(n);
l:=length(z);  r:=1;  palt:=1;
for i:=0 to l-1 do
  if z[i]<>palt then palt:=z[i]; r:=r*z[i] end;
end;
if r<c then writeln(a,chr(9),b,chr(9),c,chr(9),r) end;
end;
end;
inc(b); end;
inc(a); end;
end;

```

### Beweis der abc-Vermutung

#### Japaner präsentiert Lösung für Primzahlen-Rätsel

26. September 2012: ... Nun hat der japanische Mathematiker Shinichi Mochizuki einen Beweis für die sogenannte abc-Vermutung vorgelegt.

Auch darin geht es um Primzahlen, und zwar um die Beziehungen zwischen ihnen. Die Arbeit Mochizukis hat Mathematiker weltweit aufhorchen lassen. Denn sollte der Beweis tatsächlich stimmen, würde er manches Problem aus der Zahlentheorie gleich mitlösen - oder zumindest neue Ansätze dafür liefern. Unter anderem folgt aus der abc-Vermutung direkt der Große Fermatsche Satz - ein Problem, das Mathematiker seit mehr als 300 Jahre zu lösen versuchen. Der Satz besagt, dass die Gleichung  $a^n + b^n = c^n$  für  $n > 2$  keine Lösung für natürliche Zahlen  $a, b, c$  besitzt.

Formuliert hatte ihn bereits im 17. Jahrhundert der Mathematiker Pierre de Fermat, der Beweis gelang erst 1994. Die abc-Vermutung ist etwas komplizierter als der Große Fermat, aber trotzdem noch gut zu verstehen.

Auch darin geht es um drei natürliche Zahlen  $a, b$  und  $c$ , wobei  $c$  die Summe aus  $a$  und  $b$  ist und alle drei Zahlen keine gemeinsamen Teiler besitzen. Für Zahlentheoretiker ist die abc-Vermutung von großem Interesse.

"Hier kommen die beiden Welten Addition und Multiplikation zusammen", sagt Jürg Kramer, Mathematiker an der Humboldt-Universität Berlin. In  $a, b$  und  $c$  steckten unterschiedliche Primfaktoren - und es gelte gleichzeitig die Beziehung  $a + b = c$ .

"Addition und Multiplikation werden gewissermaßen verquickt, und das macht es auch so schwierig", erklärt Kramer. Wie vertrackt das Addieren von Primzahlen sein kann, zeigt das einfache Beispiel  $17 + 19$ . Beide Summanden sind Primzahlen - ihre Summe 36 ist hingegen eine aus Sicht von Zahlentheoretikern eher langweilige Zahl - nämlich das Produkt  $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ .

Die Summe zweier ungewöhnlicher Zahlen kann also eine ganz gewöhnliche Zahl sein. Es lässt sich kaum vorhersagen, welche Primfaktoren in dieser Summe stecken. "Das ist eine ganz chaotische Situation", sagt Kramer.

Quelle: spiegel.de

### Bealsche Gleichung

Mitte der neunziger Jahre wurde durch den texanischen Bankier Andrew Beal folgendes Problem gestellt. Gesucht sind natürliche Zahlen  $A, B, C$  und  $X, Y, Z > 2$ , welche die, Fermat-ähnliche, Gleichung

$$A^X + B^Y = C^Z$$

erfüllen. Beal stellte fest, dass die Lösungen dieser allgemeinen Gleichung sonderbarerweise einen gemeinsamen Teiler für die Zahlen  $A, B$  und  $C$  aufweisen, zum Beispiel  $3^6 + 18^3 = 3^8$  ergibt den Teiler 3. Für die Erklärung dieser Erscheinung setzte Beal 5000 Dollar Preisgeld aus, das jedes Jahr um weitere 5000 Dollar steigt. 2013 ist das Problem noch nicht gelöst und das Preisgeld auf 1 Million Dollar erhöht. Einige Lösungen der Gleichung:

$3^3 + 6^3 = 3^5$	$3^6 + 18^3 = 3^8$	$3^6 + 18^3 = 9^4$	$3^9 + 54^3 = 3^{11}$
$4^{12} + 8^8 = 32^5$	$4^{10} + 16^5 = 8^7$	$4^{16} + 16^8 = 8^{11}$	$4^{22} + 16^{11} = 8^{15}$
$4^{12} + 16^6 = 32^5$	$4^{22} + 16^{11} = 32^9$	$4^{10} + 32^4 = 8^7$	$4^{25} + 32^{10} = 8^{17}$
$4^{12} + 64^4 = 32^5$	$7^7 + 49^3 = 98^3$	$8^8 + 16^6 = 32^5$	$8^5 + 32^3 = 4^8$
$8^{15} + 32^9 = 4^{23}$	$8^5 + 32^3 = 16^4$	$8^{25} + 32^{15} = 16^{19}$	$8^8 + 64^4 = 32^5$
$8^{18} + 64^9 = 32^{11}$	$9^3 + 18^3 = 3^8$	$9^3 + 18^3 = 9^4$	$16^5 + 32^4 = 8^7$
$16^6 + 64^4 = 32^5$	$16^{21} + 64^{14} = 32^{17}$	$17^4 + 34^4 = 17^5$	$19^4 + 38^3 = 57^3$
$27^3 + 54^3 = 3^{11}$	$28^3 + 84^3 = 28^4$	$33^5 + 66^5 = 33^6$	$34^5 + 51^4 = 85^4$
$4^{27} + 8^{18} = 32^{11}$	$4^{28} + 16^{14} = 8^{19}$	$4^{27} + 64^9 = 32^{11}$	$8^{28} + 16^{21} = 32^{17}$
$8^{25} + 32^{15} = 4^{38}$	$8^{28} + 64^{14} = 32^{17}$	$16^{20} + 32^{16} = 8^{27}$	

Folgende Lösungen der diophantischen Gleichung  $a^p + b^q = c^r$  mit  $\text{ggT}(a,b,c) = 1$  wurden bisher gefunden.

$a^3 + b^2 = c^7$	$1414^3 + 2\,213\,459^3 = 65^7$	$9\,262^3 + 15\,312\,283^2 = 113^7$
$a^3 + b^2 = c^9$	$7^3 + 13^2 = 2^9$	
$a^3 + b^3 = c^2$		

allgemeine Lösung 1:  $a = s^4 + 6s^2t^2 - 3t^4$  ;  $b = -s^4 + 6s^2t^2 + 3t^4$  ;  $c = 6st (s^4 + 3t^4)$

allgemeine Lösung 2:  $a = s^4 + 8st^3$  ;  $b = -4s^3t + 4t^4$  ;  $c = s^6 - 20s^3t^3 - 8t^6$

### $a^4 + b^2 = c^3$

allgemeine Lösung 1:

$a = (s^2 + 3t^2) (s^4 - 18s^2t^2 + 9t^4)$  ;  $b = 4st(s^2 - 3t^2) (s^4 + 6s^2t^2 + 81t^4) (3s^4 + 2s^2t^2 + 3t^4)$

$c = (s^4 - 2s^2t^2 + 9t^4) (s^4 + 30s^2t^2 + 9t^4)$

allgemeine Lösung 2:

$a = 6st (s^4 - 12t^4)$  ;  $b = (s^4 + 12t^4) (s^8 - 408s^4t^4 + 144t^8)$  ;  $c = s^8 + 168s^4t^4 + 144t^8$

allgemeine Lösung 3:

$a = 6st (3s^4 - 4t^4)$  ;  $b = (3s^4 + 4t^4) (9s^8 - 408s^4t^4 + 16t^8)$  ;  $c = 9s^8 + 168s^4t^4 + 16t^8$

allgemeine Lösung 4:

$a = 3/2 st(s^4 - 3t^4)$  ;  $b = 1/8 (s^4 + 3t^4) (s^8 - 102s^4t^4 + 9t^8)$  ;  $c = 1/4 (s^8 + 42s^4t^4 + 9t^8)$

Für a und b kleiner 1 Billion existieren 55 Lösungen. Die kleinsten sind

$$3^4 + 46^2 = 13^3 \quad 6^4 + 3 \cdot 419^2 = 313^3$$

$$329^4 + 57 \cdot 112^2 = 2 \cdot 465^3 \quad 437^4 + 72 \cdot 321 \cdot 392^2 = 173 \cdot 585^3$$

Lösungen von  $a^4 + b^2 = c^3$  für a,b < 1 Billion

$$3^4 + 46^2 = 13^3$$

$$66^4 + 3 \cdot 419^2 = 313^3$$

$$437^4 + 72 \cdot 321 \cdot 392^2 = 173 \cdot 585^3$$

$$949^4 + 6 \cdot 858 \cdot 632^2 = 36 \cdot 305^3$$

$$2 \cdot 292^4 + 5 \cdot 855 \cdot 041^2 = 39 \cdot 553^3$$

$$4 \cdot 302^4 + 6 \cdot 426 \cdot 199^2 = 72 \cdot 673^3$$

$$6 \cdot 444^4 + 142 \cdot 946 \cdot 261^2 = 280 \cdot 873^3$$

$$14 \cdot 055^4 + 809 \cdot 464 \cdot 922^2 = 885 \cdot 469^3$$

$$18 \cdot 390^4 + 86 \cdot 484 \cdot 853^2 = 495 \cdot 769^3$$

$$25 \cdot 179^4 + 1 \cdot 658 \cdot 732 \cdot 354^2 = 1 \cdot 466 \cdot 413^3$$

$$27 \cdot 615^4 + 76 \cdot 852 \cdot 186 \cdot 678^2 = 18 \cdot 076 \cdot 669^3$$

$$38 \cdot 147^4 + 2 \cdot 783 \cdot 083 \cdot 160^2 = 2 \cdot 144 \cdot 561^3$$

$$56 \cdot 232^4 + 9 \cdot 315 \cdot 824 \cdot 021^2 = 4 \cdot 591 \cdot 273^3$$

$$67 \cdot 977^4 + 4 \cdot 631 \cdot 366 \cdot 566^2 = 3 \cdot 498 \cdot 013^3$$

$$73 \cdot 704^4 + 28 \cdot 679 \cdot 500 \cdot 801^2 = 9 \cdot 480 \cdot 193^3$$

$$75 \cdot 621^4 + 46 \cdot 500 \cdot 296 \cdot 354^2 = 12 \cdot 996 \cdot 013^3$$

$$100 \cdot 338^4 + 11 \cdot 547 \cdot 018 \cdot 181^2 = 6 \cdot 168 \cdot 313^3$$

$$108 \cdot 660^4 + 1 \cdot 086 \cdot 380 \cdot 981^2 = 5 \cdot 199 \cdot 721^3$$

$$180 \cdot 054^4 + 245 \cdot 010 \cdot 210 \cdot 299^2 = 39 \cdot 382 \cdot 393^3$$

$$197 \cdot 851^4 + 110 \cdot 567 \cdot 251 \cdot 168^2 = 23 \cdot 961 \cdot 425^3$$

$$224 \cdot 970^4 + 420 \cdot 018 \cdot 502 \cdot 501^2 = 56 \cdot 355 \cdot 001^3$$

$$265 \cdot 707^4 + 951 \cdot 601 \cdot 494 \cdot 914^2 = 96 \cdot 924 \cdot 013^3$$

$$302 \cdot 358^4 + 366 \cdot 862 \cdot 367 \cdot 719^2 = 52 \cdot 286 \cdot 593^3$$

$$311 \cdot 783^4 + 150 \cdot 528 \cdot 786 \cdot 320^2 = 31 \cdot 783 \cdot 841^3$$

$$403 \cdot 242^4 + 876 \cdot 708 \cdot 083 \cdot 719^2 = 92 \cdot 640 \cdot 193^3$$

$$599 \cdot 676^4 + 263 \cdot 164 \cdot 064 \cdot 059^2 = 58 \cdot 341 \cdot 193^3$$

$$912 \cdot 479^4 + 29 \cdot 744 \cdot 433 \cdot 488^2 = 88 \cdot 541 \cdot 825^3$$

$$1 \cdot 286 \cdot 415^4 + 77 \cdot 304 \cdot 016 \cdot 486^2 = 140 \cdot 009 \cdot 341^3$$

$$6^4 + 2 \cdot 681^2 = 193^3$$

$$329^4 + 57 \cdot 112^2 = 2 \cdot 465^3$$

$$732^4 + 162 \cdot 341^2 = 6 \cdot 793^3$$

$$1 \cdot 089^4 + 1 \cdot 549 \cdot 034^2 = 15 \cdot 613^3$$

$$3 \cdot 007^4 + 1 \cdot 361 \cdot 154 \cdot 168^2 = 1 \cdot 228 \cdot 225^3$$

$$4 \cdot 665^4 + 25 \cdot 660 \cdot 394^2 = 104 \cdot 221^3$$

$$8 \cdot 595^4 + 511 \cdot 477 \cdot 246^2 = 643 \cdot 981^3$$

$$17 \cdot 478^4 + 887 \cdot 120 \cdot 101^2 = 958 \cdot 393^3$$

$$24 \cdot 504^4 + 969 \cdot 628 \cdot 699^2 = 1 \cdot 091 \cdot 593^3$$

$$25 \cdot 980^4 + 2 \cdot 984 \cdot 101 \cdot 487^2 = 2 \cdot 107 \cdot 489^3$$

$$31 \cdot 230^4 + 30 \cdot 853 \cdot 386 \cdot 827^2 = 9 \cdot 840 \cdot 409^3$$

$$56 \cdot 130^4 + 6 \cdot 126 \cdot 744 \cdot 439^2 = 3 \cdot 620 \cdot 641^3$$

$$59 \cdot 963^4 + 77 \cdot 170 \cdot 270 \cdot 408^2 = 18 \cdot 139 \cdot 025^3$$

$$69 \cdot 101^4 + 5 \cdot 268 \cdot 182 \cdot 832^2 = 3 \cdot 697 \cdot 585^3$$

$$74 \cdot 910^4 + 15 \cdot 005 \cdot 507 \cdot 527^2 = 6 \cdot 355 \cdot 009^3$$

$$98 \cdot 833^4 + 12 \cdot 580 \cdot 132 \cdot 048^2 = 6 \cdot 330 \cdot 305^3$$

$$102 \cdot 120^4 + 176 \cdot 015 \cdot 101 \cdot 301^2 = 31 \cdot 444 \cdot 201^3$$

$$120 \cdot 029^4 + 865 \cdot 867 \cdot 399 \cdot 760^2 = 90 \cdot 853 \cdot 361^3$$

$$185 \cdot 556^4 + 25 \cdot 598 \cdot 259 \cdot 359^2 = 12 \cdot 255 \cdot 553^3$$

$$203 \cdot 130^4 + 39 \cdot 350 \cdot 943 \cdot 593^2 = 14 \cdot 814 \cdot 049^3$$

$$241 \cdot 527^4 + 389 \cdot 650 \cdot 312 \cdot 394^2 = 53 \cdot 743 \cdot 453^3$$

$$293 \cdot 640^4 + 205 \cdot 006 \cdot 750 \cdot 127^2 = 36 \cdot 707 \cdot 809^3$$

$$303 \cdot 439^4 + 308 \cdot 948 \cdot 386 \cdot 120^2 = 47 \cdot 015 \cdot 681^3$$

$$345 \cdot 345^4 + 98 \cdot 622 \cdot 932 \cdot 806^2 = 28 \cdot 825 \cdot 021^3$$

$$504 \cdot 413^4 + 685 \cdot 920 \cdot 251 \cdot 808^2 = 81 \cdot 191 \cdot 665^3$$

$$712 \cdot 701^4 + 173 \cdot 871 \cdot 144 \cdot 674^2 = 66 \cdot 056 \cdot 653^3$$

$$1 \cdot 179 \cdot 486^4 + 127 \cdot 495 \cdot 184 \cdot 599^2 = 124 \cdot 968 \cdot 673^3$$

Folgende Lösungen der diophantischen Gleichung  $a^p + b^q = c^r$  mit ggT(a,b,c) = 1 wurden bisher gefunden.

### Allgemeine Lösungen für $a^4 + b^3 = c^2$

1:  $a = 6st (s^4 + 12t^4)$  ;  $b = (s^4 - 12s^2t^2 - 12t^8) (s^4 + 12s^2t^2 - 12t^4)$  ;  $c = (s^4 - 12t^4) (s^8 + 408s^4t^4 + 144t^8)$

2:  $a = 6st (3s^4 + 4t^4)$  ;  $b = (3s^4 - 12s^2t^2 - 4t^8) (3s^4 + 12s^2t^2 - 4t^4)$  ;  $c = (3s^4 - 4t^4) (9s^8 + 408s^4t^4 + 16t^8)$

3:  $a = -s^6 + 40s^3t^3 + 32t^6$  ;  $b = 8st (s^3 - 2t^3) (s^3 + 16t^3)$  ;  $c = (s^6 + 32t^6) (s^6 + 176s^3t^3 - 32t^6)$

4:  $a = -(s^2 - 3t^2) (s^4 + 18s^2t^2 + 9t^2)$  ;  $b = -(s^2 - 2st + 3t^2) (s^2 + 2st + 3t^2) (s^2 + 6st + 3t^2) (s^2 - 6st + 3t^2)$  ;

$$c = 4st (s^2 + 3t^2) (s^4 - 6s^2t^2 + 81t^4) (3s^4 - 2s^2t^2 + 3t^4)$$

5:  $a = -s^6 + 6s^5t + 15s^4t^2 + 20s^3t^3 - 15s^2t^4 + 30st^5 + 17t^6$  ;  $b = 2 (s^4 + 6s^2t^2 + 8st^3 - 3t^4) (s^4 + 4s^3t - 6s^2t^2 - 4st^3 - 7t^4)$  ;  $c = 3s^{12} + 12s^{11}t + 66s^{10}t^2 - 44s^9t^3 - 99s^8t^4 + 792s^7t^5 + 924s^6t^6 + 2376s^5t^7 + 1485s^4t^8 - 1188s^3t^9 - 2046s^2t^{10} - 156st^{11} - 397t^{12}$

6:  $a = -5s^6 - 6s^5t + 15s^4t^2 + 60s^3t^3 + 45s^2t^4 + 18st^5 + 9t^6$  ;  $b = 2 (s^4 + 8s^2t^2 + 6st^3 - 3t^4) (3s^4 + 4s^3t + 6s^2t^2 + 4st^3 - 3t^4)$  ;  $c = 29s^{12} + 156s^{11}t + 726s^{10}t^2 + 2420s^9t^3 + 4059s^8t^4 + 3960s^7t^5 + 2772s^6t^6 + 2376s^5t^7 + 3267s^4t^8 + 3564s^3t^9 + 1782s^2t^{10} + 324st^{11} - 27t^{12}$

7:  $a = -(s^2 - 2st - 2t^2) (7s^4 + 20s^3t + 24s^2t^2 + 8st^3 + 4t^4)$  ;  $b = (s^2 + 2t^2) (s^2 + 4st - 2t^2) (3s^2 + 4st + 2t^2) (5s^2 + 8st + 2t^2)$  ;  $c = 4st (s + 2t) (s^2 + st + t^2) (s^4 + 4s^3t + 16s^2t^2 + 24st^3 + 12t^4) (19s^4 - 4s^3t + 8st^3 + 4t^4)$

$$a^5 + b^2 = c^4: 2^5 + 7^2 = 3^4$$

$$a^5 + b^4 = c^2: 3^5 + 11^4 = 122^2$$

$$a^7 + b^3 = c^2: 2^7 + 17^3 = 71^2 ; 17^7 + 76\,271^3 = 21\,063\,928^2$$

$$a^8 + b^2 = c^3: 33^8 + 1\,549\,034^2 = 15\,613^3$$

$$a^8 + b^3 = c^2: 43^8 + 96\,222^3 = 30\,042\,907^2$$

1999 bewies Nils Bruin, dass es für die Exponenten (2, 3, 8) keine weiteren ganzzahligen Lösungen gibt.

### Fermat-Catalan-Vermutung

Ausgehend von der diophantischen Gleichung  $x^p + y^q = z^r$

für positive Werte von p, q und r findet man ganzzahlige Lösungen x, y, z.

Die Fermat-Catalan-Vermutung sagt nun aus, dass es für  $x^p + y^q = z^r$

nur eine endliche Anzahl von Lösungen gibt, wenn x, y, z zueinander teilerfremd sind und außerdem

$$1/p + 1/q + 1/r \leq 1 \text{ gilt.}$$

Heute (2015) kennt man nur 10 entsprechende Lösungen:

$$1 + 2^3 = 3^2 \text{ (Catalan)}$$

$$25 + 7^2 = 3^4$$

$$7^3 + 13^2 = 2^9$$

$$2^7 + 17^3 = 71^2$$

$$3^5 + 11^4 = 122^2$$

$$17^7 + 76271^3 = 21063928^2$$

$$1414^3 + 2213459^2 = 65^7$$

$$9262^3 + 15312283^2 = 113^7$$

$$43^8 + 96222^3 = 30042907^2$$

$$33^8 + 1549034^2 = 15613^3$$

Die letzten fünf Beziehungen wurden von F.Beukers und D.Zagier gefunden.

Auch für Gaußsche ganze Zahlen kennt man eine ähnliche Beziehung. Zum Beispiel ist

$$(8 + 5i)^2 + (5 + 3i)^3 = (1 + 2i)^7 \quad (20 + 9i)^2 + (1 + 8i)^3 = (1 + i)^{15}$$

### Taxicab-Zahlen

Unter der n-ten Taxicab-Zahl Ta(n) oder Taxicab(n) versteht man die kleinste natürliche Zahl, die auf n verschiedene Arten als Summe von zwei Kuben dargestellt werden kann.

G.H.Hardy und E.M.Wright bewiesen 1954, dass für alle positive Zahlen n die Taxicab-Zahlen existieren.

Da der Beweis keinen Hinweis auf die Konstruktion der Zahlen gibt, kennt man bis jetzt (2010) nur sechs Taxicab-Zahlen:

$$Ta(1) = 2 = 1^3 + 1^3$$

$$Ta(2) = 1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$$

$$Ta(3) = 87539319 = 167^3 + 436^3 = 228^3 + 423^3 = 255^3 + 414^3$$

$$Ta(4) = 6963472309248 = 2421^3 + 19083^3 = 5436^3 + 18948^3 = 10200^3 + 18072^3 = 13322^3 + 16630^3$$

$$Ta(5) = 48988659276962496 = 38787^3 + 365757^3 = 107839^3 + 362753^3 = 205292^3 + 342952^3 =$$

$$221424^3 + 336588^3 = 231518^3 + 331954^3$$

$$Ta(6) = 24153319581254312065344 = 28906206^3 + 582162^3 = 28894803^3 + 3064173^3 = 28657487^3$$

$$+ 8519281^3 = 27093208^3 + 16218068^3 = 26590452^3 + 17492496^3 = 26224366^3 + 18289922^3$$

(Rathbun, Hollerbach 2008)

Ta(2) ist die Hardy-Ramanujan-Zahl, die erstmals 1657 von Bernard Frénicle de Bessy veröffentlicht wurde.

Die Taxicab-Zahlen ab n = 3 wurden mit Computereinsatz gefunden: Ta(3) 1957 von John Leech, Ta(4)

1991 von Rosenstiel und Dardis, Ta(5) 1997 von David W.Wilson.

Ta(7) ist noch nicht bekannt. Nach dem französischen Mathematiker Christian Boyer ist

$$Ta(7) \leq 24885189317885898975235988544$$

$$Ta(8) \leq 50974398750539071400590819921724352$$

$$Ta(9) \leq 136897813798023990395783317207361432493888$$

$$Ta(10) \leq 7335345315241855602572782233444632535674275447104$$

$$Ta(11) \leq$$

$$87039729655193781808322993393446581825405320183232000$$

$$Ta(12) \leq$$

$$16119148654034302034428760115512552827992287460693283776000$$

Abbildung: Taxi-Cab 1729



### Cabtaxi-Zahlen

In Erweiterung der Taxicab-Zahlen werden die Cabtaxi-Zahlen betrachtet.

Unter der n-ten Cabtaxicab-Zahl Ca(n) versteht man die kleinste natürliche Zahl, die auf n verschiedene Arten als Summe oder Differenz(!) von zwei Kuben dargestellt werden kann.

Die kleinste Cabtaxi-Zahl Ca(2) wurde 1591 von François Viète angegeben. Weitere bekannte sind



Cabtaxi(2) = 91 =  $3^3 + 4^3 = 6^3 - 5^3$  ; Viète 1591  
 Cabtaxi(3) = 728 ; Edward B. Escott 1902  
 Cabtaxi(4) = 2741256 ; Randall L. Rathbun 1992  
 Cabtaxi(5) = 6017193  
 Cabtaxi(6) = 1412774811  
 Cabtaxi(7) = 11302198488  
 Cabtaxi(8) = 137513849003496 ; Daniel. J. Bernstein 1998  
 Cabtaxi(9) = 424910390480793000 ; Duncan Moore 2005  
 Cabtaxi(10) = 933528127886302221000 ; Christian Boyer 2006  
 Cabtaxi(11)  $\leq$  261858398098545372249216 ; Duncan Moore 2008  
 Cabtaxi(12)  $\leq$  1796086752557922708257372544  
 Cabtaxi(13)  $\leq$  308110458144384714689809795584 ; Boyer 2008  
 Cabtaxi(14)  $\leq$  3424462108508996825708504669331456 ; Moore 2008  
 Cabtaxi(15)  $\leq$  119860206095954108554485737248700928 ; Boyer 2008  
 Cabtaxi(16)  $\leq$  822121153612149230575217671788839665152  
 Cabtaxi(17)  $\leq$  228528345587492406268587814296067158147072  
 Cabtaxi(18)  $\leq$  1567475922384610414596243818256724637730766848  
 Cabtaxi(19)  $\leq$  22388474568951577754900099772066812785435844544000  
 Cabtaxi(20)  $\leq$  3901860835762247103510236821129665273758992896000000  
 Cabtaxi(21)  $\leq$  1494725379426214299719362865171579535464276835200448000  
 Cabtaxi(22)  $\leq$  2804160172002816034210551378130963637402667204941047872000

### Catalansche Gleichung

Die in der Struktur der Gleichung  $x^n + y^n = z^n$  ähnliche Gleichung

$$x^m - y^n = 1$$

wird als Catalansche Gleichung bezeichnet.

1844 stellte der französische Mathematiker Eugène Charles Catalan im Journal für Reine und Angewandte Mathematik die Behauptung auf, dass diese Gleichung nur die nichttriviale Lösungen

$$x = 3 ; y = 2 ; m = 2 \text{ und } n = 3$$

im Bereich der natürlichen Zahlen ( $x, y, m, n > 1$ ) besitzt.

Im April 2002 gelang es dem rumänischen Mathematiker Dr. Preda Mihailescu diese Vermutung zu beweisen.

Dr. Mihailescu promovierte an der ETH Zürich und ist seit dem Jahr 2000 in Paderborn tätig.

siehe auch: <http://www-math.uni-paderborn.de/~aggathen/vorl/2002ss/osem/mihailescu01.php>

### Bachet-Gleichung

Die Bachet-Gleichung; Claude Gaspar Bachet de Meziriac (1581-1638); wurde 1650 von Pierre de Fermat aufgestellt. Sie ist mit dem großen Satz von Fermat verbunden.  $y^2 - x^3 = c$

Gesucht werden ganzzahlige oder rationale Lösungen für  $x$  und  $y$  in Abhängigkeit von dem ganzzahligen  $c$ . Ist  $c = -2$ , so gibt es nur zwei ganzzahlige Lösungen:  $y = 5$  und  $x = 3$  oder  $y = -5$  und  $x = 3$ . Dies ist der Grund, weshalb 26 die einzige Zahl ist, die sich zwischen einer Quadratzahl und einer Kubikzahl befindet.

Fermat stellte die Aufgabe, zu beweisen, dass  $y^2 - x^3 = -2$  nur diese beiden Lösungen besitzt. Leonhard Euler versuchte sich 1730 an dem Problem, ohne Erfolg. Erst 1908 konnte Axel Thue nachweisen, dass

$$y^2 - x^3 = c$$

für jede natürliche Zahl  $c$ , wenn überhaupt, nur eine endliche Anzahl von Lösungen für  $x$  und  $y$  besitzen kann. Für  $c = 17$  existieren zum Beispiel genau 8 verschiedene Lösungen mit  $y > 0$ .

Die Tabelle enthält alle Lösungen für  $1 \leq c \leq 101$  und  $1 \leq y \leq 150$  Millionen (Januar 2014).

Betrachtet man den Lösungsbereich der rationalen Zahlen, so folgen aus der Existenz einer Lösung automatisch unendlich viele Lösungen. Der Nachweis wurde von Bachet geführt.

Angenommen,  $(x, y)$  ist eine Lösung der Gleichung, dann ist auch

$$((x^4 - 8cx)/(4y^2), (8c^2 - 20cx^3 - x^6)/(8y^3))$$

eine Lösung der Gleichung. Diese wird als Bachet-Verdopplungsformel bezeichnet, die Bachet 1621 entdeckte.

### Heronische Zahlentripel, Heronische Dreiecke

Heronische Tripel sind Tripel  $a, b, c$  ganzer Zahlen, für die ein Dreieck mit  $a, b, c$  als Seitenlängen ganzzahligen Flächeninhalt (mindestens eine Höhe hat ganzzahlige Länge !) besitzt.

Beispiel:  $(a, b, c) = (13, 14, 15)$

Sind  $u, v, w, x$  teilerfremde, ungerade natürliche Zahlen, so ist  $a, b, c$  ein derartiges Tripel mit

$$a = w \times (u^2 + v^2)/2 \quad b = u \times v \times (w^2 + x^2)/2 \quad c = (ux + vw) \times (uw - vx)/2$$

Die kleinsten Heronischen Dreiecke haben die Seitenlängen  $(3, 4, 5)$ ,  $(6, 8, 10)$ ,  $(5, 12, 13)$ ,  $(9, 12, 15)$ ,  $(4, 13, 15)$ ,  $(13, 14, 15)$ ,  $(9, 10, 17)$ , ...

### Heronische Dreiecke mit 2 rationalen Seitenhalbierenden (Buchholz, Rathbun 1997)

a	b	c	s <sub>1</sub>	s <sub>2</sub>	A
73	51	26	35/2	97/2	420
626	875	291	572	433/2	55440
4368	1241	3673	1657	7975/2	2042040
14791	14384	11257	21177/2		11001 75698280
28779	13816	15155	3589/2	21937	23931600

Zur Klassifizierung möglicher Heron-Dreiecke werden die Seiten des Dreiecks als Terme eines Parameters  $\lambda$  dargestellt. Nach K.R.S. Sastry gilt:

Es sei  $\lambda$  eine rationale Zahl mit  $0 < \lambda \leq 2$ . Eine  $\lambda$ -Familie von Heronischen Dreiecken wird dann mit

$$(a, b, c) = (2(m^2 + \lambda^2 n^2), (2 + \lambda)(m^2 - 2\lambda n^2), \lambda(m^2 + 4n^2)),$$

wobei  $m, n$  relativ prime natürliche Zahlen mit  $m > \sqrt{(2\lambda) \cdot n}$  sind, beschrieben. Dieser Satz gibt alle möglichen Heronischen Dreiecke an.

Damit wird  $\lambda = 2(s - a) / (s - c)$ ;  $b = (2 + \lambda) / (2 - \lambda) (a - c)$

$$A_{\Delta ABC} = 2\lambda (2 + \lambda) m n (m^2 - 2\lambda n^2)$$

Beispiel 1:  $\lambda = 1, m = 4, n = 1$   $(a, b, c) = (34, 42, 20)$

Da der ggT( $a, b, c$ ) = 2 größer als 1 ist, werden die Seiten mit dem ggT dividiert, d.h.  $(a, b, c) = (17, 21, 10)$

Beispiel 2:  $\lambda = 3/2, m = 5, n = 2$

$$(a, b, c) = (68, 91/2, 123/2), \text{ d.h., } (a, b, c) = (136, 91, 123)$$

Folgerung: Für  $\lambda = 2v/u, m = 2, n = 1$  ergeben sich pythagoreische Dreiecke mit  $(a, b, c) = (u^2 + v^2, u^2 - v^2, 2uv)$ .

Für  $\lambda = 2$  ergeben sich mit  $(a, b, c) = (m^2 + n^2, 2(m^2 - n^2), m^2 + n^2)$  gleichschenklige Heronische Dreiecke.

Hoppe-Problem: Bei Heronischen Dreiecken mit den Seiten

$$(a, b, c) = (m^2 + 9n^2, 2(m^2 + 3n^2), 3(m^2 + n^2))$$

für  $\lambda = m^2/(6n^2)$ , bilden die Dreiecksseiten eine arithmetische Folge.

### Lambda-Familien von Heron-Dreiecken

$\lambda$	a	b	c	Umfang	Flächeninhalt
1	$2(m^2 + n^2)$	$3(m^2 - 2n^2)$	$m^2 + 4n^2$	$6m^2$	$6mn(m^2 - 2n^2)$
1/2	$4m^2 + n^2$	$5(m^2 - n^2)$	$m^2 + 4n^2$	$10m^2$	$10mn(m^2 - n^2)$
1/3	$2(9m^2 + n^2)$	$7(3m^2 - 2n^2)$	$3(m^2 + 4n^2)$	$42m^2$	$42mn(3m^2 - 2n^2)$
2/3	$9m^2 + 4n^2$	$4(3m^2 - 4n^2)$	$3(m^2 + 4n^2)$	$24m^2$	$24mn(3m^2 - 4n^2)$
1/4	$16m^2 + n^2$	$9(2m^2 - n^2)$	$2(m^2 + 4n^2)$	$36m^2$	$36mn(2m^2 - n^2)$
3/4	$16m^2 + 9n^2$	$11(2m^2 - 3n^2)$	$6(m^2 + 4n^2)$	$44m^2$	$132mn(2m^2 - 3n^2)$
1/5	$2(25m^2 + n^2)$	$11(5m^2 - 2n^2)$	$5(m^2 + 4n^2)$	$110m^2$	$110mn(5m^2 - 2n^2)$
2/5	$25m^2 + 4n^2$	$6(5m^2 - 4n^2)$	$5(m^2 + 4n^2)$	$60m^2$	$60mn(5m^2 - 4n^2)$
3/5	$2(25m^2 + 9n^2)$	$13(5m^2 - 6n^2)$	$15(m^2 + 4n^2)$	$130m^2$	$390mn(5m^2 - 6n^2)$
4/5	$25m^2 + 16n^2$	$7(5m^2 - 8n^2)$	$10(m^2 + 4n^2)$	$70m^2$	$140mn(5m^2 - 8n^2)$
3/2	$4m^2 + 9n^2$	$7(m^2 - 3n^2)$	$3(m^2 + 4n^2)$	$14m^2$	$42mn(m^2 - 3n^2)$
4/3	$9m^2 + 16n^2$	$5(3m^2 - 8n^2)$	$6(m^2 + 4n^2)$	$30m^2$	$60mn(3m^2 - 8n^2)$
5/3	$2(9m^2 + 25n^2)$	$11(3m^2 - 10n^2)$	$15(m^2 + 4n^2)$	$66m^2$	$330mn(3m^2 - 10n^2)$
5/4	$16m^2 + 25n^2$	$13(2m^2 - 5n^2)$	$10(m^2 + 4n^2)$	$52m^2$	$260mn(2m^2 - 5n^2)$
7/4	$16m^2 + 49n^2$	$15(2m^2 - 7n^2)$	$14(m^2 + 4n^2)$	$60m^2$	$420mn(2m^2 - 7n^2)$

### Eulersche Dreiecke

... besondere heronische Dreiecke

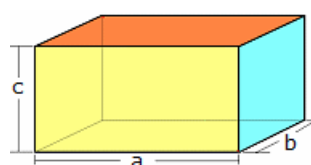
$(a, b, c) = (136, 170, 174)$  ... kleinstes heronische Dreieck, bei welchem alle Seitenhalbierenden ganzzahlige Länge haben (nach Euler); allerdings muss dann der Flächeninhalt nicht mehr ganzzahlig sein. Für dieses Dreieck ergibt sich:

Seiten	a = 136	b = 170	c = 174
Seitenhalbierenden	$s_a = 158$	$s_b = 131$	$s_c = 127$

### Heron-Tetraeder

... Tetraeder mit rationalen Zahlen für Seitenlängen, Seitenflächeninhalten und Volumen Die kleinsten derartigen Tetraeder haben gleichlange gegenüberliegende Kantenlängen mit den Längen:

(148, 195, 203), (533, 875, 888), (1183, 1479, 1804), (2175, 2296, 2431), (1825, 2748, 2873), (2180, 2639, 3111), (1887, 5215, 5512), (6409, 6625, 8484) und (8619, 10136, 11275)



### Euler-Quader

Unter einem Euler-Quader (engl. Euler brick) versteht man einen Quader mit ganzzahligen Kantenlängen. Zusätzlich müssen auch alle Flächendiagonalen ganzzahlig sein. Ein primitiver Euler-Quader liegt vor, wenn die Kantenlängen zusätzlich zueinander relativ prim sind.

Die Kantenlängen  $a, b, c$  und die Diagonalenlängen  $d, e, f$  müssen damit das Diophantische Gleichungssystem  $a^2 + b^2 = d^2$  ;  $b^2 + c^2 = e^2$  ;  $a^2 + c^2 = f^2$  erfüllen.

Der kleinste Euler-Quader hat die Kantenlängen  $(a, b, c) = (240, 117, 44)$  mit den Diagonalen der Länge 267, 244, und 125. Dieser Körper wurde 1719 von Paul Halcke entdeckt. Weitere Lösungen sind  $(275, 252, 240)$  ,  $(693, 480, 140)$  ,  $(720, 132, 85)$  ,  $(792, 231, 160)$  ,  $(1155, 1100, 1008)$  ,  $(1584, 1020, 187)$  ,  $(2340, 880, 429)$  ,  $(2640, 855, 832)$  ,  $(2992, 2475, 780)$  ,  $(3120, 2035, 828)$  ,  $(5984, 2295, 1560)$  ,  $(6325, 5796, 528)$  ,  $(6336, 748, 195)$  ,  $(6688, 6300, 1155)$  ,  $(6732, 4576, 1755)$  ,  $(8160, 4888, 495)$  ,  $(9120, 1672, 1575)$  ,  $(9405, 9152, 2964)$

Bildet ein Tripel  $(a, b, c)$  einen Euler-Quader so auch das Tripel  $(bc, ac, ab)$ . Durch Saunderson (1740) wurde eine Parameterlösung angegeben. Ist  $(a', b', c')$  ein Pythagoreisches Tripel, so bilden Kanten der Länge

$$a = a' (4 b'^2 - c'^2) \quad b = b' (4 a'^2 - c'^2) \quad c = 4 a' b' c'$$

einen Euler-Quader. Für die Flächendiagonalen ergibt sich dann

$$d_1 = c'^3 \quad d_2 = a' (4 b'^2 + c'^2) \quad d_3 = b' (4 a'^2 + c'^2)$$

Ein Euler-Quader mit zusätzlich ganzzahliger Raumdiagonale wird vollkommener Quader genannt.

### Vollkommener Quader

Ein Euler-Quader mit zusätzlich ganzzahliger Raumdiagonale heißt vollkommener Quader (engl. perfect cuboid).

Sind  $a, b, c$  die Kantenlängen,  $d, e, f$  die Flächendiagonalenlängen und  $g$  die Länge der Raumdiagonale, so muss gelten

$$a^2 + b^2 = d^2 \quad ; \quad b^2 + c^2 = e^2 \quad ; \quad a^2 + c^2 = f^2 \quad \quad a^2 + b^2 + c^2 = g^2$$

Bis 2005 wurde weder ein vollkommener Quader gefunden noch konnte bewiesen werden, dass es einen solchen Körper gibt.

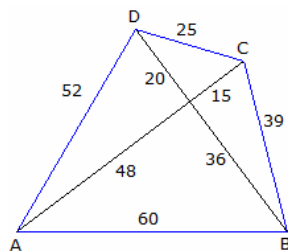
Durch intensive Computernutzung konnte gezeigt werden, dass ein solcher Quader als kleinste Seitenlänge mindestens einen Wert von 21 Milliarden besitzen muss.

Bis jetzt weiß man

- 1) 2 Kanten müssen gerade sein, 1 Kante ungerade
- 2) 1 Kante ist durch 4 teilbar, 1 Kante durch 16
- 3) 1 Kante muss 3 teilbar sein, eine Kante durch 9
- 4) 1 Kante ist durch 5 teilbar
- 5) 1 Kante ist durch 11 teilbar

Fastvollkommene Quader, mit einer ganzzahligen Raumdiagonale und zwei statt drei ganzzahligen Flächendiagonalen, wurden gefunden. Eine Lösung ist  $(a,b,c) = (672,153,104)$ . Diese Lösung war schon Euler bekannt.

Unter <http://www.durangobill.com/IntegerBrick.html> findet man den aktuellen Stand der Suche nach vollkommenen Quadern.



### Heron-Viereck

Ausgehend von Heron-Dreiecken konstruierte der indische Mathematiker Bhaskara II (geb. 1114) Heronische Vierecke. Bei diesen sind außer den Viereckseiten auch die Diagonalenabschnitte ganzzahlig.

Zur Konstruktion verwendet man zwei Pythagoreische Tripel, z.B.  $(3; 4; 5)$  und  $(5; 12; 13)$ .

Multipliziert man die Katheten des ersten Dreiecks mit der Hypotenuse des zweiten, so ergeben sich zwei gegenüberliegende Viereckseiten. Analog

multipliziert man die Katheten des zweiten Dreiecks mit der Hypotenuse des ersten für die anderen Viereckseiten.

Das entstehende Viereck (Abbildung) ist ein Heron-Viereck. Bei diesem sind die Diagonalenabschnitte ganzzahlig. Außerdem schneiden sich die Diagonalen senkrecht. Das Viereck hat auch einen Umkreis, ist also Sehnenviereck.

923808329

### Palindrom-Zahlen

... sind Zahlen, deren Wert sich nicht ändert, wenn sie von hinten nach vorn gelesen werden. Der Begriff Palindrom kommt aus dem Griechischen und bedeutet „Zurücklaufen“ (palín = zurück + drom-, dromeîn = laufen). Die ersten Palindrom-Zahlen sind außer den einstelligen 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 101, 111, 121, 131, ... Die Anzahl der Palindrome mit 1, 2, 3, ... Ziffern ist 9, 9, 90, 90, 900, 900, 9000, 9000, ... Die Anzahl der Palindrome unter  $10^1, 10^2, 10^3, \dots$  ergibt sich zu 9, 18, 108, 198, 1098, 1998, ... und allgemein  $9 \cdot 10^{(n-1)/2}$  für ungerades  $n$ ,  $9 \cdot 10^{n/2-1}$  für gerades  $n$ .

Die Summe der Reziproken aller Palindrome konvergiert. Für diese Summe wird für alle palindromischen Zahlen mit mehr als einem ungeraden  $n$  als Stellenzahl:

$$\text{Summe} \leq 9 \cdot 10^{(n-1)/2} / 10^{n-1} + 9 \cdot 10^{(n+1)/2} / 10^{n+1} \dots = 1/10^{(n-3)/2}$$

und allgemein

$$\text{Summe} < 1/3 \cdot 1/10^{(n-3)/2} \text{ für ungeradzahlige Palindrome}$$

$$\text{Summe} < 1/3 \cdot 1/10^{n/2-1} \text{ für geradzahlige Palindrome}$$

Eine Computerberechnung aller 1999999998 Palindromreziproken bis 18 Ziffern ergab die Näherungssumme 3.37028325668...

Man kennt im Übrigen nur eine 3. bzw. 4. Potenz einer natürlichen Zahl, die palindromisch ist (Gardner, 1982):  $10662526601 = 2 \cdot 201^3$ .

Palindrom-Zahlen können auch in anderen Positionssystemen betrachtet werden. Ulrich Schimke zeigt, dass die Zahl  $P(a, a+1) = 2a^2 + 3a + 2$  für alle  $a > 3$  in den Positionssystemen zu den Basen  $a$  und  $a+1$  palindromisch ist. Ergänzend wird für  $P(2,3) = 6643$  und  $P(3,4) = 10$ . Ebenso ist  $P(a, a+2) = (3a^2 + 6a + 2)/2$  für alle geraden  $a \geq 8$ , und  $(a^2 + 4a + 3)/2$  für alle ungeraden  $a \geq 5$ . Die vollständige Folge ab  $a = 2$  ist  $P(a, a+2)$ : 5, 26, 21, 24, 154, 40, 121, 60, 181, 84, 253, 112, ... Die kleinsten Palindromzahlen zu zwei verschiedenen Basen sind

a \ b	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
3	664																	
4	5	10																
5	31	26	46															
6	7	28	21	67														
7	85	8	85	24	92													
8	9	121	63	18	154	121												
9	127	10	10	109	80	40	15											
10	33	121	55	88	55	121	12	19										
11	255	244	255	12	166	24	36	60	23									
12	65	13	65	26	104	78	65	91	18	27								
13	313	28	42	98	14	235	15	70	22	84	326							
14	15	121	15	408	135	135	45	30	32	60	253	37						
15	693	16	126	161	80	16	31	80	82	48	241	11	43					
16	17	68	17	119	385	85	17	13	35	22	117	17	33	49				
17	341	784	341	18	121	307	18	52	25	36	290	12	90	14	56			
18	325	173	38	57	209	57	32	20	17	13	146	20	32	36	43	63		
19	381	20	514	428	80	40	26	20	66	60	362	14	60	80	51	18	70	
20	21	160	21	126	21	194	63	27	25	84	761	42	10	42	27	12	54	78

### Palindrom-Primzahlen

2  
30203  
133020331  
1713302033171  
12171330203317121  
151217133020331712151  
1815121713302033171215181  
16181512171330203317121518161  
331618151217133020331712151816133  
9333161815121713302033171215181613339  
11933316181512171330203317121518161333911

Palindrom-Primzahlen, auch umkehrbare Primzahlen genannt, sind Primzahlen, deren Wert sich nicht ändert, wenn sie von hinten nach vorn gelesen werden.

Die ersten derartigen Zahlen sind

2, 3, 5, 7, 11, 101, 131, 151, 181, 191, ...

Die Anzahl der palindromischen Primzahlen mit 1, 2, 3, ... Ziffern ist 4, 1, 15, 0, 93, 0, 668, 0, 5172, 0, 42042, 0, ... Die Anzahl der Palindrom-Primzahlen unter 101, 102, 103, ... wird 4, 5, 20, 20, 113, 113, 781, 781, 5953, 5953, 47995, 47995, ...

Da jede Palindrom-Zahl mit einer geraden Anzahl von Ziffern durch 11 teilbar ist, existiert nur eine Palindrom-Primzahl mit gerader Stellenzahl, die 11.

Für die Summe aller palindromischen Primzahlen mit mehr als einem ungeraden  $n$  als Stellenzahl wird  $\text{Summe} < 1/5 \cdot 1/10^{(n-3)/2}$ .

Die ersten 47995 Zahlen bis 11 Ziffern ergaben ein Computerergebnis von 1,32398202...

2001 fand Harvey Dubner die bisher größte Palindrom-Primzahl mit 39027 Ziffern:

$$P = 10^{39026} + 4538354 \cdot 10^{19510} + 1.$$

Durch G.L.Honaker wurde auch eine Pyramide angegeben, die nur aus Palindrom-Primzahlen besteht. (siehe Abbildung)

### Palindrom-Palindromdreieckszahlen

Eine Dreieckszahl D ist von der Struktur

$$D = n(n+1)/2.$$

Palindromzahlen  $n$ , deren Dreieckszahl ebenfalls eine Palindromzahl ist, sind selten. Durch Hans-Jürgen Caspar wurden 8 derartige Zahlen auf „Matroids Matheplanet“ angegeben. Weitere konnten durch massiven Computereinsatz ermittelt werden (Stand 25. April 2016, gesucht bis 61270011007216):

Palindrom	Palindrom-Dreieckszahl
11	66
77	3003
363	66066
1111	617716
2662	3544453
111111	6172882716
246642	30416261403
11111111	61728399382716
363474363	66056806460865066
2664444662	3549632679762369453
26644444662	354963215686512369453
246644446642	30416741529792514761403
266444444662	35496321045754012369453
2466444446642	3041674104186814014761403

### Erzeugung von Palindrom-Zahlen

Im Juni 1999 wurde durch Erich Friedman die Frage aufgeworfen, welche größte Palindrom-Zahl durch Verwendung von Ziffern und den Operationszeichen  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $/$  sowie die Klammern  $(, )$  erzeugt werden kann. Durch intensiven Computereinsatz ergaben sich bisher (wobei nur bis  $10^9$  die Suche kontinuierlich durchgeführt wurde)

$n$	Berechnung	Palindrom	$n$	Berechnung	Palindrom
1	9	9	2	$9+2$	11
3	$7 \times 7 \times 7$	343	4	$9 \times (9 \times 9 + 2)$	747
5	$9 \times 9 \times 9 \times 9 - 5$	6556	6	$3 \times 7 \times 7 \times 8 \times 8 \times 8$	65856
7	$8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 9 \times (9 + 2)$	405504	8	$8 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 - 4$	4251524
9	$8 \times 8 \times (5 \times 6 \times 8 \times 8 \times 8 \times 9 + 2)$	8847488	10	$7 \times 7 \times 7 \times 8 \times (7 \times 8 \times 8 \times 8 \times 9 - 4)$	88499488
11	$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 8 \times 8 \times 9 \times (6 \times 7 \times 8 + 3)$	468828864			
12	$7 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 9 \times (4 \times 7 \times 7 \times 9 \times 9 - 3)$	4095995904			
13	$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 8 \times (7 \times 7 \times 7 \times 8 \times 8 \times 8 + 6)$	23613431632			

### Friedman-Zahlen

Eine Friedman-Zahl ist eine natürliche Zahl, welche mit Hilfe der Zeichen  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $/$ ,  $^$ ,  $($  und  $)$  auf nichttriviale Weise durch die eigenen Ziffern erzeugt werden kann. Zum Beispiel ist  $25 = 5^2$  und  $126 = 21 \times 6$ . Die Friedman-Zahlen bis 10000 sind:

$25 = 5^2$	$121 = 11^2$	$125 = 5^{1+2}$	$126 = 6 \times 21$	$127 = -1 + 2^7$	$128 = 2^{8-1}$
$153 = 3 \times 51$	$216 = 6^{2+1}$	$289 = (8 + 9)^2$	$343 = (3 + 4)^3$	$347 = 7^3 + 4$	$625 = 5^{6-2}$
$688 = 8 \times 86$	$736 = 7 + 3^6$	$1022 = 2^{10} - 2$	$1024 = (4 - 2)^{10}$	$1206 = 6 \times 201$	$1255 = 5 \times 251$
$1260 = 6 \times 210$	$1285 = (1 + 2^8) \times 5$	$1296 = 6^{(9-1)/2}$	$1395 = 15 \times 93$	$1435 = 35 \times 41$	$1503 = 3 \times 501$
$1530 = 3 \times 510$	$1792 = 7 \times 2^{9-1}$	$1827 = 21 \times 87$	$2048 = 8^4 / 2 + 0$	$2187 = (2 + 1^8)^7$	$2349 = 29 \times 3^4$
$2500 = 50^2 + 0$	$2501 = 50^2 + 1$	$2502 = 2 + 50^2$	$2503 = 50^2 + 3$	$2504 = 50^2 + 4$	$2505 = 50^2 + 5$
$2506 = 50^2 + 6$	$2507 = 50^2 + 7$	$2508 = 50^2 + 8$	$2509 = 50^2 + 9$	$2592 = 2^5 \times 9^2$	$2737 = (2 \times 7)^3 - 7$
$2916 = (1 \times 6 \times 9)^2$	$3125 = (3 + 1 \times 2)^5$	$3159 = 9 \times 351$	$3281 = (3^8 + 1) / 2$	$3375 = (3+5+7)^3$	$3378 = (7 + 8)^3 + 3$
$3685 = (3^6 + 8) \times 5$	$3784 = 8 \times 473$	$3864 = 3 \times (-8 + 6^4)$	$3972 = 3 + (9 \times 7)^2$	$4088 = 8^4 - 8 - 0$	$4096 = (4 + 0 \times 9)^6$
$4106 = 4^6 + 10$	$4167 = 4^6 + 71$	$4536 = 56 \times 3^4$	$4624 = (64 + 4)^2$	$4628 = 68^2 + 4$	$5120 = 5 \times 2^{10}$
$5776 = 76^{7-5}$	$5832 = (2 \times 5 + 8)^3$	$6144 = 6 \times 4^{4+1}$	$6145 = 6 \times 4^5 + 1$	$6455 = (6^4 - 5) \times 5$	$6880 = 8 \times 860$
$7928 = 89^2 - 7$	$8092 = 90^2 - 8$	$8192 = 8 \times 2^{9+1}$	$9025 = 95^2 + 0$	$9216 = 1 \times 96^2$	$9261 = 21^{9-6}$

Durch Mike Reid und Philippe Fondanaiche wurden die Friedman-Zahlen  $123456789 = ((86 + 2 \times 7)^5 - 91) / 3^4$  und  $987654321 = (8 \times (97 + 6/2)^5 + 1) / 3^4$  gefunden. Die kleinste derartige Zahl mit nur 1 Ziffer ist  $99999999 = (9 + 9/9)^{9-9/9} - 9/9$ . Besteht eine Zahl aus mindestens 24 gleichen Ziffern oder mehr, so ist sie stets Friedman-Zahl



$$aaa...a = (a*a / (aa-a-a)) * ((aa-a)/a)^A + (a+a+...+a)/a - a/a \text{ mit } A = ((a+a+a+a+a)/a)^{(a+a)/a} - a/a$$

Friedman Zahlen zu anderen Basen:

$$\begin{array}{llll} 2: & 11001 = 101^{10} & 11011 = 11^{0+11} & 111111 = (11 + 1)^{11} - 1 \\ & 1001111 = 11^{100} - 1 - 1 & & \\ 3: & 121 = 11^2 & 221 = 12^2 & 1022 = 20^2 - 1 & 1122 = 2 * 211 \\ 4: & 121 = 11^2 & 123 = (1 + 2)^3 & 1203 = 3 * 201 & 1230 = 3 * 210 \\ 5: & 121 = 11^2 & 224 = 2^{2+4} & 1232 = 22 * 31 & 1241 = 24^{1+1} \\ 6: & 24 = 2^4 & 52 = 2^5 & 121 = 11^2 & 124 = 4 * 21 \\ 7: & 121 = 11^2 & 143 = 3^4 - 1 & 144 = (-1 + 4)^4 & 264 = 4 * 6^2 \\ 8: & 33 = 3^3 & 121 = 11^2 & 125 = 5 * 21 & 143 = 3 * 41 \\ 9: & 121 = 11^2 & 134 = 4 * 31 & 314 = (3 + 1)^4 & 628 = 8 * 2^6 \end{array}$$

Römische Friedman-Zahlen

$$\begin{array}{llll} VIII = IV * II & XVIII = IV * II + X & XXVII = IX * (X/V - 1) & XXVIII = IV * II + XX \\ XXXIII = XI * (X/X + II) & & XXXVI = VI^{XX/X} & XXXVII = IX * (X/V - 1) + X \\ XXXVIII = IV * II + XXX & & & \\ XLIV = L - V - I^X & XLVI = L - V + I^X & XLVII = L - X/V - II & XLVIII = IV * II + XL \\ XLIX = L - I^{XX} & LVIII = IV * II + L & LXVIII = IV * II + LX & LXXV = L * XV / X \\ LXXVI = L * XV / X + I & & LXXVII = L * XV / X + II & \\ LXXVIII = IV * II + LXX & & LXXXI = IX^{X*X/L} & \\ LXXXII = IX^{X*X/L} + I & LXXXIII = IX^{X*X/L} + II & LXXXV = L * XV / X + X & \\ LXXXVI = L * XV / X + XI & & LXXXVII = L * XV / X + XII & \\ LXXXVIII = IV * II + LXXX & & LXXXIX = X * (X - I^L) - X/X & \\ XCIV = C - V - I^X & & XCVI = C - V + I^X & \\ XCVII = C - X/V + I * I & & XCVIII = IV * II + XC & XCIX = C - I^{XX} \end{array}$$

### "Coole" Zahlen

Auf der US-amerikanischen Internetseite <http://www.coolnumbers.com> werden sogenannte „Cool Numbers“ auf Geldscheinen gesucht, insbesondere Nummern, die eine aufsteigende oder absteigende Zahlenfolge bilden oder Palindrom-Zahlen. Ob dies auch für Euro-Scheine möglich ist, bleibt ein Rätsel.



Geldscheinnummer: 444444444



Geldscheinnummer: 66666666



Geldscheinnummer: 01234567



Geldscheinnummer: 23456789

### Undulierende Zahlen

Eine Zahl heißt undulierend, wenn ihre Ziffern abwechselnd steigen und fallen, z.B. 153729. Glatt undulierend ist eine ganze Zahl, wenn sie auf genau zwei Ziffern zusammengesetzt ist, die sich in der Folge gegenseitig abwechseln, z.B. 1313131. Zweifach glatt undulierend ist eine Zahl, wenn sie in zwei verschiedenen Positionssystemen glatt undulierend ist. Die kleinste derartige Zahl ist

$$10 \quad [1010]_2 \quad [101]_3$$

welche im Zweier- und Dreiersystem glatt undulierend ist. Der Begriff wurde von Clifford Pickover geprägt. Derartige Zahlen sind sehr selten und nehmen mit wachsenden Stellenzahl sehr schnell ab. Die Tabelle enthält die kleinsten zweifach undulierenden Zahlen zu verschiedenen Basen:

Basen	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	10				85	170				1365	170			
3		273	182		50	455		151	820			1913	1913	
4			46	55	221		136		221		614		2184	
5				67	78	130	109	494	598	338		520	286	2473
6					92	154	154	141	166	555	209	197	888	481



**Ramanujan-Zahlen** ... fastganze Zahlen der Form  $e^{\pi/\sqrt{n}}$

<b>n</b>	<b>Zahlenwert</b>	<b>n</b>	<b>Zahlenwert</b>
6	2197, 99 0869543 ...	17	422150, 99 7675680 ...
18	614551, 99 2885619 ...	22	2508951, 99 8257424 ...
25	6635623, 999 341134 ...	37	199148647, 9999 78046551 ...
43	884736743, 999 777466 ...	58	24591257751, 999999 822213 ...
67	147197952743, 99999 8662454 ...	74	545518122089, 999 174678853 ...
148	39660184000219160, 000966674 ...	149	45116546012289599, 99 1830287 ...
163	262537412640768743, 999999999999 250072 ...		
177	1418556986635586485, 99 6179355 ...		
232	604729957825300084759, 99999 2171526 ...		
267	19683091854079461001445, 99 2737040 ...		
268	21667237292024856735768, 0002920388424...		
522	14871070263238043663567627879007, 9998...		
652	68925893036109279891085639286943768, 0000000001637 ...		
719	3842614373539548891490294377805829192, 99998724 ...		

### Merkwürdige Gleichungen

$$(1+2+3+4+5+6+7+8+9+8+7+6+5+4+3+2+1) \times 12345678987654321 = 999999999^2$$

$$2 \times (123456789+987654321) + 2 = 222222222$$

$$6 \times 7 \times 6 = 252$$

$$279972 = (2+7+9+9+7+2) \times 7777$$

Produkte mit Einsen

$$11 \times 11 = 121$$

$$111 \times 111 = 12321$$

$$1111 \times 1111 = 1234321 \dots$$

$$111 \ 111 \ 111 \times 111 \ 111 \ 111 = 12345678987654321$$

$$11 \times 111 = 1221$$

$$111 \times 1111 = 123321$$

$$1 \ 111 \times 11111 = 12344321 \dots$$

$$111 \ 111 \ 111 \times 111 \ 111 \ 111 = 123456789987654321$$

Die Quadratzahlen unter den Palindromen

$$121 = 11^2$$

$$14641 = 121^2$$

$$698896 = 836^2$$

$$6948496 = 2636^2$$

$$484 = 22^2$$

$$40804 = 202^2$$

$$1002001 = 1001^2$$

$$123454321 = 11111^2$$

$$676 = 26^2$$

$$44944 = 212^2$$

$$1234321 = 1111^2$$

$$10201 = 101^2$$

$$69696 = 264^2$$

$$4008004 = 2002^2$$

$$12321 = 111^2$$

$$94249 = 307^2$$

$$5221225 = 2285^2$$

Kubikzahlen unter den Palindromen

$$343 = 7^3$$

$$1331 = 11^3$$

$$1030301 = 101^3$$

$$1367631 = 111^3$$

Produkte von Nachbarzahlen, die zu Palindromen führen

$$16 \times 17 = 272 \quad 77 \times 78 = 6006 \quad 538 \times 539 = 289982$$

$$1621 \times 1622 = 2629262$$

$$2457 \times 2458 = 6039306$$

Paare von Quadratzahlen

$$12^2 = 144 \text{ und } 21^2 = 441$$

$$102^2 = 10404 \text{ und } 201^2 = 40401$$

$$1012^2 = 1024144 \text{ und } 2101^2 = 4414201$$

$$13^2 = 169 \text{ und } 31^2 = 961$$

$$103^2 = 10609 \text{ und } 301^2 = 90601$$

$$1112^2 = 1236544 \text{ und } 2111^2 = 4456321$$

$$112^2 = 12544 \text{ und } 211^2 = 44521$$

$$1212^2 = 1468944 \text{ und } 2121^2 = 4498641$$

$$113^2 = 12769 \text{ und } 311^2 = 96721$$

$$2012^2 = 4048144 \text{ und } 2102^2 = 4418404$$

### Mathematische Konstanten

0	Null	0.0020538344...	3. Stieltjes Konstante
0.018315639...	$e^{-4}$ , Rényi-Konstante	0.0595536246...	Euler Asymptoten-Konstante
0.0659880358...	$e^{-e}$ , iterierte E-Konstante	0.1076539192...	"One-Ninth" Konstante
0.1475836176...	Plouffe-Konstante	0.1715728753...	Heilbronn Dreieckskonstante
0.2419707245...	TSR-Konstante	0.247...	Abundant Zahlendichte
0.272190...	Cassaigne-Finch Konstante	0.280169499...	Bernstein Konstante
0.3036630029...	Gauß-Kuzmin-Wirsing Konstante	0.3405373296...	Pólya Zufallskonstante
0.3532363719...	Hafner-Sarnak-McCurley Konstante	0.367879441...	1/e
0.4945668...	Shapiro zyklische Summenkonstante	0.561459483...	Euler Konstante
0.5772156649...	Euler-Mascheroni Konstante	0.5926327182...	Lehmer Konstante
0.6079271019...	Hafner-Sarnak-McCurley Konstante	0.6243299885...	Golomb-Dickman Konstante
0.6601618158...	Twin prime Konstante	0.68640673...	Hardy-Littlewood Konstante
0.6922006276...	$(1/e)^{(1/e)}$	0.6931471806...	$\ln(2)$
0.737338303...	Grossman Konstante	0.764223653...	Landau-Ramanujan Konstante

0.7759021363...	Bender Konstante	0.7834305107...	$\Sigma(-1)^{(n+1)}/n^n$ , $n=1\ldots\infty$
0.79220...	Lal Konstante	0.8093940205...	Alladi-Grinstead Konstante
0.812556...	Stolarsky-Harboth Konstante	0.83462684...	Gauß Konstante
0.915965594...	Catalan Konstante	0.978012...	Elbert Konstante
1.0986419643...	Paris Konstante	1.0986858055...	Lengyel Konstante
1.202056903...	Apéry Konstante	1.28242713...	Glaisher-Kinkelin Konstante
1.2912859971...	$\Sigma 1/n^n$ , $n=1\ldots\infty$	1.3035772690...	Conway Konstante
1.3064...	Mills Konstante	1.3694514039...	Shallit Konstante
1.414213562...	$\sqrt{2}$	1.435991124...	eine Lebesgue Konstante
1.4446678610...	$e^{(1/e)}$	1.4560749...	Backhouse Konstante
1.4670780794...	Porter Konstante	1.5849625007...	$\ln(3)/\ln(2)$
1.6180339887...	Goldener Schnitt	1.6281601297...	Flajolet-Martin Konstante
1.705211...	Niven Konstante	1.8442049806...	eine Landau-Kolmogorow Konstante
1.847759065...	$\sqrt{(2+\sqrt{2})}$	1.851937052...	Wilbraham-Gibbs Konstante
2.404825558...	1.Nullstelle von $J_0(x)$	2.5029078750...	eine Feigenbaum Konstante
2.685452001...	Khinchine Konstante	2.7182818285...	e
2.8077702420...	Fransén-Robinson Konstante	3.1415926535...	$\pi$ , Archimedes Konstante
4.6692016091...	eine Feigenbaum Konstante	15.1542622415...	$e^e$

## Prozent- und Zinsrechnung

### Prozentrechnung

$$W : p = G : 100$$

W...Prozentwert, G...Grundwert,

p...Prozentsatz

### Abkürzungen

% ... Prozent

ppm ... parts per million =  $10^{-6}$

ppt ... parts per trillion =  $10^{-12}$

‰ ... Promille (auf Tausend)

ppb ... parts per billion =  $10^{-9}$

ppq ... parts per quadrillion =  $10^{-15}$

### Währungsrechnung

EW ... €-Betrag, AW ... Auslandswährung, Kurs ... Umrechnungsverhältnis zwischen Devisen; bezogen auf 100 ausländische Währungseinheiten

Ausnahmen: Japanische Yen ¥ bezogen auf 1000, US-Dollar und Pfund Sterling £ bezogen auf 1

$$EW / AW = \text{Kurs} / 100$$

### Bequeme Prozentsätze

Bei einigen Prozentsätzen kann man die zugehörigen Prozentwerte bequem im Kopf angeben, da man mit einfachen Brüchen rechnen kann. Zu diesen gehören: 1%, 5%, 10%, 20%, 25%, 33%, 50%, 66%, 75%, 100%, 150%, 200%

### Beispielaufgaben zur Prozentrechnung

Aufgabe: a) Wie viel sind 85 nach Abzug von 20%?

b) Eine Partei hatte 2348 Wähler; wie viele sind es, nach einer Zunahme von 8,6%?

c) Welcher Wert geht um 76% auf einen Betrag von 900 zurück?

d) Welcher Wert beträgt nach 230% Zunahme 66 a?

e) Wie gross ist der Faktor r, wenn eine Summe von 70850 auf 80384 zugenommen hat? Wie viele Prozent beträgt die Zunahme?

f) 5 kg Äpfel wiegen nach 2 Wochen noch 4,72 kg. Wie groß ist r und um wie viele Prozent hat die Masse abgenommen?

Formel  $G_1 = r \cdot G_0$  Anfangswert  $G_0$ , Endwert  $G_1$ , Faktor r

Lösungen: a) Es verbleiben 80% = 0,8, d.h.  $0,8 \cdot 85 = 68$

b) Die Partei hatte 2348 Wähler. Nachher sind es:  $1,086 \cdot 2348 = 2550$  Wähler

c)  $r = 100\% - 76\% = 24\% = 0,24$ , d.h.  $900 = 0,24 \cdot G_0$  und  $G_0 = 3750$

d) Zunahme 230%,  $r = 330\% = 3,3$  und somit  $G_0 = 20$  a

e)  $80384 = 70850 r$ ,  $r = 1,135 = 113,5\%$ ; die Zunahme ist 13,5%

f)  $4,72 = 5 r$ , d.h.  $r = 0,944 = 94,4\%$ ; die Abnahme ist 5,6%

### Geschichte der Prozentrechnung

Die Anfänge der Prozentrechnung liegen vermutlich bereits um 2100 v.u.Z. in Babylon. Die Babylonier gaben Zinssätze in Form einfacher Brüche an. War der Zins beispielsweise 1/3 der geliehenen Menge, so wurde die geliehene Menge in drei gleich große Teile geteilt.

Später tauchten in kommerziellen Zentren Berechnungen von Zinsen und Zöllen auf, die sich auf den Nenner 100 bezogen, so z.B. in Indien ab 300 v.u.Z. und in China ab 200 v.u.Z., sowie in babylonischen, ägyptischen und griechischen Gebieten. Aus China stammt auch der Dreisatz, eine Berechnungsformel für Proportionen mit drei gegebenen Größen.

Die Verbindung Dreisatz-Verhältnisrechnung wurde erst in der Renaissance gezogen, obwohl die Grundlagen schon von den Griechen ab 300 v.u.Z. gelegt wurden, z.B. in Euklids "Elemente". Ab dem 13. Jahrhundert wurden Zinsangaben im Italien immer häufiger mit dem Nenner 100 notiert. Aus Italien stammt auch die Bezeichnung "Prozent": Die früheste Aufzeichnung des italienischen "perceto" (pro hundert) stammt aus dem Jahre 1481. Seit dem Anfang des 19. Jahrhunderts wurde Prozent erstmals auch außerhalb des kaufmännischen Bereiches verwendet, z.B. um Wahrscheinlichkeiten in der gerade entstehenden Statistik zu berechnen. Etwa ab 1860 hatte sich die Prozentrechnung zu der heutigen Form entwickelt.

### Leistungsbewertung-Gymnasium

In der gymnasialen Oberstufe Deutschlands wird das Notensystem von 1 bis 6 durch eine Punktwertung von 15 bis 0 Punkte ersetzt. Die Festlegung der Punktwertung soll dabei durch eine prozentuale Zuordnung erfolgen. In den meisten Fällen gilt:

Punkte	Note	prozentualer Anteil / Leistungen entsprechen ...
15	sehr gut	96 % ... den Anforderungen in besonderem Maße
14		91 %
13		86 %
12	gut	81 % ... den Anforderungen voll
11		76 %
10		71 %
9	befriedigend	66 % ... den Anforderungen im Allgemeinen
8		61 %
7		56 %
6	ausreichend	51 % ... noch den Anforderungen
5		46 %
4		41 % ... den Anforderungen mit Einschränkungen
3	mangelhaft	34 % ... den Anforderungen nicht
2		27 %
1		20 %

In Sachsen wird im mathematisch-naturwissenschaftlichen Bereich  $\text{Punkte} = 15 - [(99 \% - pA) / 5]$  verwendet, wobei pA der prozentuale Anteil gegebener Bewertungseinheiten (BE) ist und [] der ganzzahlige Anteil des Quotienten darstellt.

### Leistungsbewertung in der Schweiz

Die schlechteste Note in der Schweiz ist und war eine 1, die beste Note ist eine 6. Noten werden in der Regel folgendermassen berechnet:  $\text{Note} = 5 \cdot \text{ErreichtePunktzahl} / \text{MaximalePunktzahl} + 1$  Mit dieser Festlegung ist die Vergleichbarkeit der Noten gewährleistet. Außerdem entfällt die unglückliche Punkthascherei in der Sekundarstufe II des deutschen Gymnasiums. Zum Beispiel sind 15, 14 und 13 Punkte einfach eine Note 1!

Ein erfolgreicher Schweizer Abiturient wird mit einem Gesamtergebnis von 6,0 bis 2,0 in Zehntelstufen eingeschätzt (41 Abstufungen). Ein deutscher Abiturient kann von 280 bis 840 Gesamtpunkte erreichen, d.h. 560(!) Abstufungen; ein Musterbeispiel für deutsche Bürokratie.

### Dreisatz (Kaufmannsregel)

... Verfahren, durch das mit drei gegebenen Größen eine vierte errechnet wird; auch Berechnung der vierten Proportionale genannt.

#### Grundaufgaben

$$\begin{array}{llll} x : b = c : d & \Rightarrow & x = b \cdot c / d & a : x = c : d \Rightarrow x = a \cdot d / c \\ a : b = c : x & \Rightarrow & x = a \cdot d / b & a : b = c : x \Rightarrow x = b \cdot c / a \end{array}$$

Der Satz "Dreisatz" ergibt sich aus der klassischen Methode zur Lösung des Problems. Der erste Satz formuliert dabei die bekannte Proportion der Aufgabenstellung, der zweite und dritte Satz lösen die Proportionengleichung nach der gesuchten Größe auf.

Beispiel: Wenn 3 Kilogramm Zucker 6 € kosten, wie viel kosten dann 7 Kilogramm Zucker?

1. Satz 3 Kilogramm Zucker kosten 6 €

2. Satz 1 Kilogramm Zucker kostet  $6 : 3 = 2$  €

3. Satz 7 Kilogramm Zucker kosten  $7 \cdot 2 = 14$  €.

Historisch gesehen war die Dreisatzaufgabe in den Volksschulen des 19. Jahrhunderts damals eine der anspruchsvollsten Aufgaben des Rechenunterrichts; heute Grundfertigkeit eines Schülers der 6. Klasse. Außerdem ist der Begriff Dreisatz überhaupt nicht notwendig. Wird im Schulmathematikunterricht in korrekter Form die direkte und indirekte Proportionalität eingeführt, ist die Behandlung der 4 Dreisatzgrundaufgaben überflüssig.

#### Aufgabe 1

320 g kosten 528 €. Wie viel € kosten 50 kg?

$$\text{Lösung } x / 50 = 528 / 320 \dots x = 82,5$$

#### Aufgabe 2

Ein Zug durchfährt eine Strecke bei 30 m/s Geschwindigkeit in 10 Minuten. Wie lange braucht er für diese Strecke bei 25 m/s Geschwindigkeit?

$$\text{Lösung } 25 \cdot 60 \cdot x = 30 \cdot 60 \cdot 10 \dots x = 12$$



### Aufgabe 3

Um die Erde einer Baugrube von 15 m Länge, 12 m Breite und 3 m Tiefe fortzuschaffen, mussten zwei Lkw zusammen 135 mal fahren. Wie viel Fahren sind bei einer Baugrube von 18 m Länge, 16 m Breite und 3,50 m Tiefe erforderlich?

Lösung  $(15 \cdot 12 \cdot 3) / 135 = (18 \cdot 16 \cdot 3,5) / x \dots 540 / 135 = 1008 / x \dots x = 252$

### Aufgabe 4

Zum Planieren eines Baugeländes brauchen vier Planiererraupen 14 Tage. Nach 4 Tagen wird eine weitere Raupe eingesetzt. Wie viel Tage werden für die gesamte Arbeit benötigt?

Lösung 4 Raupen brauchen für den Rest 10 Tage, 5 Raupen brauchen für den Rest x Tage

$5x = 4 \cdot 10 \dots x = 8$ , also insgesamt 12 Tage

### Aufgabe 5

Für eine Urlaubsreise nach Dänemark hat Karl bei einer deutschen Bank 920 € in dänische Kronen gewechselt. 100 dkr = 14,25 €. Wie viel dkr hat er erhalten? Nach seiner Rückkehr besitzt Karl noch 85 dkr, die er bei der deutschen Bank wieder in € umwechselt. Wie viel € erhält er bei einem Kurs 100 dkr = 13,25 €? Welcher Verlust in € entsteht für Karl durch den Kursunterschied?

Lösung  $x / 920 = 100 / 14,25 \dots x = 3228,07$  dkr

$x / 85 = 13,25 / 100 \dots x = 11,26$  €

bei 100 dkr = 1 € Kursverlust, bei 85 € = x € Verlust  $\dots x = 0,85$  € Verlust

### Einfacher Dreisatz

Beim einfachen Dreisatz unterscheidet man den direkten proportionalen Dreisatz und den indirekt proportionalen Dreisatz.

direkt proportionaler Dreisatz ... es liegt eine direkt proportionale Beziehung vor; Mehr bewirkt Mehr und Weniger bewirkt Weniger

indirekt proportionaler Dreisatz ... es liegt eine umgekehrt proportionale Beziehung vor; Mehr bewirkt Weniger und Weniger bewirkt Mehr

Für beide Arten des einfachen Dreisatzes gilt das Schema:

links oben	rechts oben
links unten	x

Unabhängig von der Art der Beziehung können bei jeder Dreisatz-Aufgabe zunächst die Größen nach diesem Schema notiert werden.

### Direkt proportionaler Dreisatz

Für dieses Schema gilt: "links unten" wird mit "rechts oben" multipliziert und mit "links oben" dividiert.

$x = (\text{rechts oben} \cdot \text{links unten}) / \text{links oben} = c \cdot b / a$

### Indirekt proportionaler Dreisatz

Für dieses Schema gilt: "links oben" wird mit "rechts oben" multipliziert und mit "links unten" dividiert.

$x = (\text{rechts oben} \cdot \text{links oben}) / \text{links unten} = c \cdot a / b$

### Zusammengesetzter Dreisatz

Im Vergleich zum einfachen Dreisatz wird der zusammengesetzte Dreisatz weniger verwendet. Er führt aber in sehr interessante Beziehungen der Mathematik. Beim zusammengesetzten Dreisatz stehen drei Verhältnisse nebeneinander, und auch hier soll ein fehlender Wert einer Größe ermittelt werden. Die allgemeine Form ist

$a/b = c/d = e/f$

Beispiel: 12 Hennen legen 280 Eier in 20 Tagen. In wieviel Tagen legen 9 Hennen 340 Eier? Die Verhältnisse werden auf zwei Zeilen geschrieben, wobei gleichartige Größen untereinander stehen und der gesuchte Wert rechts unten.  $12 \text{ H} / 9 \text{ H} = 280 \text{ E} / 340 \text{ E} = 20 \text{ T} / x$

Lösung des Beispiels = 32,38

### Schema

links oben	mitte oben	rechts oben
links unten	mitte unten	x

Für dieses Schema gilt folgende Rechenvorschrift: Es werden zwei Produkte gebildet. Dann wird das erste Produkt durch das zweite dividiert.

$x = (\text{rechts oben} \cdot \text{mitte unten} \cdot \text{links oben}) / (\text{links unten} \cdot \text{mitte oben})$

$f = (e \cdot d \cdot a) / (b \cdot c)$

Für die Probe gilt eine Beziehung von Fibonacci

$d / b = (f \cdot c) / (e \cdot a)$

### Mehrwertsteuer

Die Mehrwertsteuer ist eine Steuer, die auf den Nettopreis einer Ware zusätzlich erhoben wird. Für Firmen, die die Mehrwertsteuer auf ihre verkauften Artikel an das Finanzamt abführen müssen, wird die Steuer auch Umsatzsteuer genannt.

Die ursprüngliche Idee, Steuergerechtigkeit zwischen Unternehmen zu erreichen und vor allem Käufer von Luxusgütern stärker am Steueraufkommen zu beteiligen ("Eigentum verpflichtet!"), wurde durch

jahrzehntelange unsoziale Politik in das Gegenteil verkehrt. Mittlerweile wird der größte Anteil der Mehrwertsteuer durch den Erwerb von Waren des täglichen Bedarfs erzielt und belastet insbesondere kleinere Einkommen überdurchschnittlich. 2009 erbrachte die Mehrwertsteuer in Deutschland 30 % des gesamten Steuereinkommens.

Grundaufgaben zur Mehrwertsteuer sind die Umrechnung der drei Größen Nettopreis N, Bruttopreis B und Mehrwertsteuersatz m in %.

1. gegeben: Nettopreis N einer Ware, Mehrwertsteuersatz m %, gesucht: Bruttopreis B

$$B = N (100 + m) / 100$$

Beispiel: N = 800 €, m = 19 % ergibt B = 952 €

2. gegeben: Bruttopreis B einer Ware, Mehrwertsteuersatz m %, gesucht: Nettopreis N

$$N = 100 B / (100 + m)$$

Beispiel: B = 400 €, m = 7 % ergibt N = 373,83 €

3. gegeben: Nettopreis N und Bruttopreis B einer Ware, gesucht: Mehrwertsteuersatz m %

$$m = 100 B / N - 100$$

In Deutschland gilt 2010 der Mehrwertsteuersatz von 19 %. Einige, wenige Waren werden mit dem ermäßigten Satz von 7 % besteuert, darunter einige Lebensmittel und Bücher. In Österreich betragen die Steuersätze 20 % und 10 %.

2007 wurde in Deutschland der Mehrwertsteuersatz von 16 % auf 19 % erhöht. Allgemein wurde argumentiert, dass dies eine zusätzliche 3%-Preiserhöhung bedeutete?

Lösung:

Der Nettobetrag N einer Preises berechnet sich aus dem Bruttobetrag B bei einem Mehrwertsteuersatz von p

$$N = B / (p + 1).$$

bei 19% MWSt  $N = B / 1,19$ .

Der Bruttobetrag B berechnet sich aus dem Nettobetrag N mit dem Mehrwertsteuersatz p

$$B = N \cdot (p + 1).$$

bei 19% MWSt  $B = 1,19 \cdot N$

Somit bekommt man den erhöhten Betrag  $B_2$  nach einer Mehrwertsteuererhöhung von  $p_1$  auf  $p_2$  aus  $B_1$  mit

$$B_2 = N \cdot (p_2 + 1) = B_1 / (p_1 + 1) \cdot (p_2 + 1) = (p_2 + 1) / (p_1 + 1) \cdot B_1.$$

Erhöhung  $e = 100 \% \cdot ((p_2 + 1) / (p_1 + 1) - 1)$

Mit den Werten  $p_1 = 16\% = 0,16$  und  $p_2 = 19\% = 0,19$  wird  $B_2 = 1,19 / 1,16 \cdot B_1 = 1,025862 \dots \cdot B_1$ .

Damit stiegen die Preise "nur" um 2,5862% und nicht um 3%. Das war weniger als die allgemeine, inflationsbedingte Preiserhöhung eines Jahres; allerdings zusätzlich!

## Zinsrechnung

Abkürzungen: K ... Kapital, Z ... Zinsen, R ... Rate, Rente, p%... Zinssatz, p.a. ... pro Jahr, S ...

Darlehen, t ... Tage, m ... Monate, n ... Jahre

Grundbegriffe: Zins - Nutzungsentgelt für zeitweilige Kapitalüberlassung

Zinsperiode - Zeitraum der Kapitalüberlassung für den ein festgelegter (nomineller) Zins erhoben wird.

ZinsZuschlagTermin - Zeitpunkt der Fälligkeit der Zinsen (Standard am Ende jeder Zinsperiode)

Jahreszinsen  $Z = K \cdot p / 100$

Monatzinsen  $Z_m = K \cdot p \cdot m / 1200$

$$Z_t = \# / D$$

Kapital  $K = Z \cdot 100 / (t \cdot p)$

Zinsdivisor  $D = 360 / p$

Barwert nach n Jahren  $K_n = K \cdot 1 / (1 + p / 100)^n$

Jahreszinsen  $Z_n = K \cdot p \cdot n / 100$

Tageszinsen  $Z_t = K \cdot p \cdot t / 36000$

Quartalszins  $Z_q = \sqrt[4]{Z}$

Zinszahl  $\# = 1 / 100 \cdot K \cdot t$



## Pacioli-Regel, 72er-Regel

Erhält man auf ein Grundkapital einen Zinssatz p, so ergibt sich die Frage, nach wie vielen Jahren sich das Kapital mit Zinseszins verdoppelt.

Für diese Aufgabe gab Luca Pacioli eine einfache und verblüffende Regel. Nach ihm teilt man die "magische Zahl" 72 durch den Zinssatz p und erhält den Zeitraum für die Verdopplung in Jahren.

Für den einfachen, jährlichen Zinseszins der Rate p, muss für die Verdopplung gelten

$$2 = (1 + p / 100)^n$$

Auflösung nach der Anzahl von Jahren n ergibt

$$n = \lg 2 / (\lg(100 + p) - 2)$$

Sucht man nun eine Zahl x, die dividiert durch p, annähernd n ergibt, wird

$$x / p = \lg 2 / (\lg(100 + p) - 2)$$

$$x \approx 0,301 p / (\lg(100 + p) - 2)$$

Normalerweise liegen Zinssätze im Bereich  $0,5 \leq p \leq 7$  mit dem mittleren Wert  $p = 3$ , d.h.

$$x \approx 0,301 \cdot 3 / (\lg 103 - 2) \approx 70,35$$

Für den Zinssatz  $p = 0,5$  wird  $x \approx 69,49$  für  $p = 7$  sogar  $x \approx 71,71$ .

Damit ergibt sich, das als "magische Zahl" für die Pacioli-Regel die 70 besser geeignet wäre; oder gab es zu Pacioli's Zeiten wesentlich höhere Zinssätze? :-)

Für eine stetige Verzinsung wird  $n = \ln 2 / (0,01 p)$   $x \approx \ln 2 / 0,01 \approx 69,31$

### Unterjährige Verzinsung

Wird die Zinsperiode in  $m$  gleich lange Teilperioden unterteilt und erfolgt die Verzinsung am Ende jeder Teilperiode spricht man von einer unterjährigen Verzinsung.

$i$  sei der Periodenzinssatz und  $j$  der Zinssatz für die Teilperiode. Dann sind:

$$i_{\text{nom}} = m \cdot j ; \text{ nomineller Zinssatz}$$

$$j_{\text{rel}} = i/m ; \text{ relativer unterjähriger Zinssatz}$$

$$i_{\text{kon}} = (1 + j)^m - 1 ; \text{ konformer Zinssatz}$$

$$j_{\text{äquiv}} = \sqrt[m]{1 + i} - 1 ; \text{ äquivalenter unterjähriger Zinssatz}$$

Ist die Zinsperiode das Jahr, so wird  $i_{\text{kon}}$  auch effektiver Jahreszinssatz  $i_{\text{eff}}$  genannt.

Vergleicht man die Endwerte bei einmaliger Verzinsung mit  $i$  und  $m$ -maliger Verzinsung mit  $j_{\text{rel}}$ , so ist letzterer Wert größer. Er entspricht einer einmaligen Verzinsung mit  $i_{\text{kon}}$ .

Umgekehrt, ist  $i$  gegeben, so erhält man bei  $m$ -maliger Verzinsung mit  $j_{\text{äquiv}}$  denselben Endwert wie bei einmaliger Verzinsung mit  $i$ .

Beispiel: Ein Kapital von 10000 € wird über 10 Jahre bei 6% Verzinsung pro Jahr angelegt. In der Tabelle sind die Endwerte  $K_{10}^m$  bei  $m$ -maliger unterjähriger Verzinsung mit  $j_{\text{rel}}$  für verschiedene Werte von  $m$  sowie die jährlichen Effektivzinssätze aufgelistet:

$m$	Verzinsung	Endwert $K_{10}^m$	$i_{\text{eff}}$
1	jährlich	17908,48	6,00 %
2	halbjährlich	18061,11	6,09 %
4	vierteljährlich	18140,18	6,14 %
12	monatlich	18193,97	6,17 %
360	täglich	18219,84	6,18 %

### Effektive Jahresverzinsung

$$\text{Rendite } p = 100 \cdot Z / K$$

### Zinseszinsen

$$K_n = K_0 \cdot q^n = K_0 \cdot (1 + p/100)^n$$

Zinsfaktor

$$q = 1 + p/100$$

Die Größe  $q$  wird auch als Aufzinsungsfaktor bezeichnet, mit dem jährlich der zinspflichtige Anfangsbetrag zu multiplizieren ist.

### Zahlungsendwert

nachschüssig, postnumerando ... Zahlungen am Ende des Jahres

vorschüssig, pränumerando ... Zahlungen am Anfang des Jahres

$$\text{nachschüssig } K_n = [R (q^n - 1) / (q - 1)] \quad \text{vorschüssig } K_n = [Rq (q^n - 1) / (q - 1)]$$

### Barwert

$$\text{nachschüssig } B_n = [R (q^n - 1) / (q^n \cdot (q - 1))] \quad \text{vorschüssig } B_n = [Rq (q^n - 1) / (q^{n-1} \cdot (q - 1))]$$

### Ratenzahlung - Vermehrung durch Ratenzahlung

... Sparkassenformel für Kapitalaufbau bzw. Kapitalverzehr

$$\text{nachschüssig } K_n = K_0 q^n \pm [R (q^n - 1) / (q - 1)] \quad \text{vorschüssig } K_n = K_0 q^n \pm [Rq (q^n - 1) / (q - 1)]$$

### Barwert, Gegenwartswert

Sind der Endwert  $K_n$  nach Verzinsung sowie die Anzahl  $t$  der Verzinsungsjahre mit der Verzinsung  $p\%$  bekannt, so kann nach dem Ausgangskapital gefragt werden.

$K_0$  nennt man den Gegenwartswert oder Barwert des Kapitals  $K_n$ .

Die Berechnung von  $K_0$  bei gegebenen  $K_n$  nennt man Diskontierung oder Abzinsung. Es gilt

$$\text{Barwertformel } K_0 = K_n / (1 + p/100)^n = K_n (1/q)^n$$

Der Faktor  $1/q$  wird Abzinsfaktor genannt.

Beispiel: Ein Großvater möchte für seinen Enkel an dessen 5. Geburtstag einen Betrag bei 5 % Verzinsung anlegen. Wie hoch muss der Betrag sein, damit das Enkelkind an seinem 21. Geburtstag 20000 € erhält?

Lösung:  $K_0 = 20000 / 1,05^{16} = 9162,23 \text{ €}$ .

### Regelmäßige konstante Zahlungen, Jahresersatzrate

Aufgabe: Eine Frau spart regelmäßig zu Monatsbeginn 200 €. Über welche Summe kann sie am Jahresende verfügen, wenn die Jahresverzinsung 6 % beträgt?

Zur Lösung wird die Zinsperiode in m gleich lange Teile unterteilt. Zu Beginn bzw. Ende jeder Teilperiode (vorschüssige bzw. nachschüssige Zahlungsweise) erfolgt eine Zahlung der Höhe G. Dann ergibt sich am Ende der Zinsperiode, d.h. der ursprüngliche Periode; der Endwert:

$$\begin{aligned} \text{vorschüssig} \quad K_1 &= G (m + p (m+1)/2) \\ \text{nachschüssig} \quad K_1 &= G (m + p (m-1)/2) \end{aligned}$$

In der Rentenrechnung werden die Größen  $K_1$  oft mit R bezeichnet und Jahresersatzrate genannt. Ist die Zinsperiode das Jahr, so entspricht  $m = 2$  halbjährlichen,  $m = 4$  vierteljährlichen und  $m = 12$  monatlichen Zahlungen.

Lösung der Aufgabe: Mit  $G = 200$ ,  $p = 0,06$  und  $m = 12$  ergibt sich vorschüssig  
 $R = 200 (12 + 6,5 \cdot 0,06) = 2\,478 \text{ €}$ .

### Tilgung

... Rückzahlung von Krediten. Für eine Schuld S werden vom Schuldner jeweils am Ende einer Zinsperiode p % Zinsen verlangt.

Die Belastung eines Schuldners pro Zinsperiode setzt sich aus Zinsen und Tilgungsrate zusammen. Ist die Zinsperiode 1 Jahr, heißt der finanzielle Aufwand des Schuldners Annuität  $A = T + Z$ .

Tilgungsrate einer Schuld  $T = Sq^n (q-1)/(q^n-1)$

### Ratentilgung

... mit fallenden Zinsbeträgen, Tilgung einer Anfangsschuld S mit einem für alle Zinsperioden n gleichen Tilgungsbetrag (Tilgungsrate) T bei einer Laufzeit (Tilgungsdauer) von N Zinsperioden mit konstantem Zinssatz p pro Zinsperiode  $T = S / N$

Die zum n-ten Zinstermin anfallenden Zinsen verringern sich im Zeitablauf.

Zinsen in der n-ten Zinsperiode  $Z_n = S (1 - (n-1)/N) \cdot p/100$ ;  $n = 1, \dots, N$

Annuität in der n-ten Zinsperiode  $A_n = S/N [1 + (N - n + 1) p/100]$

Restschuld nach der n-ten Zinsperiode  $S_n = S (1 - n/N)$

Gesamzinsen  $Z = S (1 + N)/2 \cdot p/100$

### Annuitätentilgung

Tilgung einer Anfangsschuld S mit einer für alle Zinsperioden n gleichen, nachschüssigen Annuität A bei konstantem Zinssatz p pro Zinsperiode (Aufzinsfaktor:  $q = 1 + p/100$ )  $T_n + Z_n = A = \text{konstant}$

Zinsen zum n-ten Zinstermin  $Z_n = A - (A - S p / 100) \cdot q^{n-1}$

Tilgungsbetrag zum n-ten Zinstermin  $T_n = (A + S p / 100) \cdot q^{n-1}$

Restschuld nach n Zinsperioden  $S_n = S q^n - A (q^n - 1)/(q - 1)$

Tilgungsdauer in Zinsperioden  $N = - \lg(1 - (q-1) S / A) / \lg(q)$

Beispiel: Schuld = 1000 €, Annuität = 100 €, Zinssatz 3 %, Aufzinsfaktor 1.03, Tilgungsdauer 12.1 Jahre

Jahr	Restschuld €	Tilgungsbetrag €	Zinsen €
1	930	72.1	30
2	857.9	74.26	27.9
3	783.64	76.49	25.74
4	707.15	78.79	23.51
5	628.36	81.15	21.21
6	547.21	83.58	18.85
7	463.63	86.09	16.42
8	377.54	88.67	13.91
9	288.86	91.33	11.33
10	197.53	94.07	8.67
11	103.45	96.9	5.93
12	6.56	99.8	3.1

### Abschlag, Rabatt

bei p % Rabatt auf Grundwert  $G_0$  Wert  $G = G_0 (1 - p/100)$

Abschlag  $G_0$ :  $p_0/100$  wurden gewährt an Rabatt  $p = 100 p_0 / (100 - p_0)$

### Aufschlag

bei p % Aufschlag auf Grundwert  $G_0$  Wert  $G = G_0 (1 + p/100)$

dann sind in G (von  $G_0$  aus gesehen)  $p' = p \cdot 100 / (100 + p)$  Prozent Aufschlag enthalten

### Abschreibung

... Objekte, welche im Laufe der Zeit einer Wertminderung unterliegen, werden jährlich einer Abschreibung unterzogen.

Dabei wird der Wert zu Beginn des Jahres auf den restlichen Wert am Ende des Jahres verringert. Dafür existieren zwei verschiedene Abschreibungsmodelle:

1. Lineare Abschreibung, d.h. die Jahresraten bleiben konstant

2. Degressive Abschreibung , d.h. die Jahresraten nehmen im Laufe der Zeit ab

### Abschreibung nach n Jahren

Lineare Abschreibung

$$W_n = W_0 (1 - n p/100)$$

Degressive Abschreibung

$$W_n = W_0 (1 - p/100)^n = W_0 * w_n$$

Abschreibungssatz

$$p \% = p/100$$

Buchwert ...  $W_n$ , Anschaffungswert ...  $W_0$ , Abschreibungsfaktor ...  $w_n$

Nutzt man eine geometrisch-degressive Abschreibung, so kann nie der Restwert 0 erreicht werden. Aus diesem Grund verändert man im Laufe der Jahre das Abschreibungsmodell zur linearen Abschreibung. Zweckmäßiger Weise legt man diesen Zeitraum (nach n Jahren) so fest, dass dann die degressive Abschreibung kleiner als die lineare wäre, d.h.  $n > N - 100/p$  (n ... Anzahl der Jahre mit degressiver Abschreibung, N ... Anzahl der Jahre mit linearer Abschreibung)

### Arithmetisch-degressive Abschreibung

Die Abschreibungen sind in diesem Falle nicht konstant. Sie nehmen jährlich um den gleichen Betrag d, das Abschreibungsgefälle, ab. Für die Abschreibungsrate im n-ten Jahr gilt:

$$a_n = a_1 - (n - 1) d \dots n = 2, 3, \dots, N+1$$

Mit  $A - R_N = \sum_{n=1}^N a_n$  ... Summenbildung von  $n = 1$  bis N wird  $d = 2 (N a_1 - (A - R_N)) / (N (N - 1))$

$d = 0$  ... Lineare Abschreibung als Spezialfall

$$d > 0: a_1 > (A - R_N)/N = a \quad (A - R_N)/N < a_1 < 2 (A - R_N)/N$$

### Digitale Abschreibung

Die digitale Abschreibung ist ein Spezialfall der arithmetisch-degressiven Abschreibung, indem gefordert wird, dass die letzte Abschreibungsrate  $a_N$  mit dem Abschreibungsgefälle d übereinstimmt. Aus  $a_N = d$  folgt

$$d = 2(A - R_N) / [N (N + 1)]$$

$$a_1 = N d, a_2 = (N - 1) d, \dots, a_N = d$$

### Diskontierung

Bei bekanntem Endbetrag  $k_n$  und Aufzinsungsfaktor r kann mit Hilfe der Zinseszinsformel der Anfangsbetrag  $k_0$  berechnet werden:

$$k_0 = k_n / r^n = k_n * v^n,$$

wobei  $v = 1 / r$  als Abzinsungsfaktor bezeichnet wird. Diesen Sachverhalt bezeichnet man als Diskontierung und v als Diskontierungsfaktor. Man sagt: Der nach n Jahren zahlbare Betrag  $k_n$  wird auf die Gegenwart diskontiert.

### Zinsrechnung, Beispiele

#### Aufgabe 1

Für eine erste Hypothek sind 7 %, für eine zweite Hypothek 8 %, zusammen vierteljährlich 1100 € Zinsen zu zahlen. Wie groß sind die beiden Hypotheken, wenn die erste doppelt so groß ist wie die zweite?

Lösung  $x$  € zweite Hypothek,  $2x$  € erste Hypothek  $\rightarrow (2x * 7)/(100*4) + (x*8)/(100*4) = 1100 \dots x = 20000$  €

#### Aufgabe 2

Für ein Darlehen wurden in 105 Tagen bei 6 % und für ein zweites Darlehen in 135 Tagen bei 7 % zusammen 490 € Zinsen bezahlt. Wie groß sind die beiden Darlehen, wenn das zweite 2000 € größer ist als das erste?

Lösung  $x$  € erstes Darlehen,  $(x+2000)$  € zweites Darlehen  $\rightarrow (x*6*105)/(100*360) + ((x+2000)*7*135)/(100*360) = 490 \dots x = 10000$  €

#### Aufgabe 3

Ein Darlehen, das vom 14.6 bis 20.9 zu 7,5 % ausgeliehen war, wurde einschließlich Zinsen mit 4896 € zurückgezahlt. Berechne das Darlehen und die Zinsen!

Lösung  $x$  € Darlehen ;  $x*15*96/(100*2*360)$  € Zinsen  $\rightarrow x - x*15*96/(100*2*360) = 4896 \dots x = 4800$  €, 96 € Zinsen

#### Aufgabe 4

Nach Abzug von 6 2/3 % Zinsen für 162 Tage zahlt eine Bank 3395 € an einen Kreditnehmer aus. Berechne den Kredit und die Zinsen!

Lösung  $x$  € Kredit ;  $x*20*162/(100*3*360)$  € Zinsen  $\rightarrow x - x*20*162/(100*3*360) = 3395 \dots x = 3500$  €, 105 € Zinsen

#### Aufgabe 5

Ein Kapital von 500 € wird zu 5% verzinst. Der Zins wird jeweils zum Kapital geschlagen. Auf welchen Betrag wächst das Kapital in 10 Jahren?

Lösung  $K_0 = 500$  ;  $r = 100\% + 5\% = 105\% = 1,05$  ;  $n = 10$   $K_{10} = 500 \cdot 1,05^{10} = 814,45$  €

#### Aufgabe 6



Wie viel Euro muss man auf ein Sparkonto einzahlen, wenn es innerhalb von 20 Jahren durch Zinseszins auf 2000 € anwachsen soll? ( $p = 5\%$ )

Lösung  $r = 1,05$  ;  $n = 20$  ;  $K_n = 2000$

$$2000 = K_0 \cdot 1,05^{20} \Rightarrow K_0 = 2000 / 1,05^{20} \approx 753,80 \text{ €}$$

### Aufgabe 7

Wie lange dauert es, bis sich ein Kapital von 1000 € bei 4,5% verdoppelt hat?

Lösung  $K_0 = 1000$  ;  $r = 1,045$  ;  $K_n = 2000$

$$2000 = 1000 \cdot 1,045^n \Rightarrow 2 = 1,045^n \Rightarrow \log 2 = n \cdot \log 1,045 \Rightarrow n \approx 15,7 \text{ Jahre}$$

### Aufgabe 8

Ein Kapital von 3600 € wächst in 12 Jahren auf 5000 €. Zu wieviel Prozent wurde es verzinst?

Lösung  $K_0 = 3600$  ;  $n = 12$  ;  $K_n = 5000$

$$5000 = 3600 \cdot r^{12} \Rightarrow r^{12} = 5000/3600 \Rightarrow r = \sqrt[12]{(50/36)} =$$

1,0278

Der Zinssatz ist 2,78 %.

### Zinsrechnung, Skonto

Aufgabe: Eine Rechnung über einen Betrag B von 300 € enthält folgenden Zusatz: Zahlung innerhalb von 30 Tagen ohne Abzug, innerhalb von 10 Tagen 3% Skonto, innerhalb von 20 Tagen 2% Skonto.

Wie hoch sind die Skonti  $S_1$ ,  $S_2$  und die zu zahlenden Beträge  $Z_1$ ,  $Z_2$  bei den Skontosätzen  $p_1$ ,  $p_2$ ?

Skonto = der Betrag, um den der Preis einer Ware mitunter reduziert wird, wenn man diese bar oder in einem gewissen Zeitraum bezahlt.

Lösung: Skonto  $S = B/100 \cdot p$

Zahlbetrag  $Z = B - B/100 \cdot p$

Im Beispiel ergeben sich  $S_1 = 9 \text{ €}$ ,  $S_2 = 6 \text{ €}$  sowie  $Z_1 = 291 \text{ €}$  und  $Z_2 = 294 \text{ €}$ .

### Abzahlung eines Darlehens

Gegebene und gesuchte Größen:

$B(0)$  ... Darlehensbetrag, die Schulden zur Zeit  $t = 0$  ;  $t$  ... Zeit in Monaten nach Aufnahme des Darlehens

;  $a$  ... monatliche Zahlungsrate ( $a = Z + b$ )

$p$  ... % Zinssatz p.a. ;  $Z$  ... monatliche Zinsen ( $Z = k \cdot B(t)$  mit  $k = p/1200$ ) ;  $b$  ... monatlicher Abtrag ;  $t_D$  ... gesamte Darlehenszeit ;  $B(t)$  ... Schulden zur Zeit  $t$

Zu lösen ist die Differenzialgleichung

$$d/dt B(t) = k B(t) - a$$

Es ergibt sich

$$B(t) = a/k + C \cdot e^{kt}$$

Zur Zeit  $t = 0$  wird der gesamte Darlehensbetrag geschuldet  $B(0) = a/k + C \cdot e^0$

mit der Konstanten  $C = -(B(0) k + a) / k$

Die zur Zeit  $t$  noch bestehenden Schulden  $B(t)$  sind  $B(t) = -(-a - e^{kt} B(0) k + a e^{kt}) / k$

Die monatliche Zahlungsrate  $a$  in Abhängigkeit von der gewünschten Darlehenszeit  $t_D$  wird

$$a = e^{kt_D} B(0) k / (-1 + e^{kt_D})$$

Beispiel: Für ein Darlehen von 10000 €, Zinssatz 7%, zurückzuzahlen in insgesamt 8 Jahren, d.h.  $t_D = 96$  Monate, ergibt sich ein monatlicher Zahlungsbetrag  $a$  von  $a = 137 \text{ €}$ .

### Rentenrechnung für Rentenzahlungen

Als Rente versteht man eine Zahlungsreihe aus gleich hohen Zahlenmengen in gleichen Zeitabständen.

Standardfall: nachschüssige Rente, d.h. Zahlung am Ende der Rentenperiode

$R_0$  = Barwert (Anfangswert);  $R_n$  = Endwert am Ende der letzten Rentenperiode;  $R$  = Rate;  $n$  =

Rentenperiode (i.A. Jahre);  $q = 1 + \text{Zins}$ ;  $p$  = Zins

Formeln der Rentenrechnung  $R_n = R \cdot (q^n - 1)/(q - 1)$   $R_0 = R_n / q^n = R \cdot (q^n - 1)/(q - 1) \cdot 1/q^n$

$$n = \ln[ R / (R - R_0 (q - 1)) ] / \ln q$$

Allgemeiner Fall: Rentenperiode  $\neq$  Zinsperiode ; 2 Möglichkeiten

1) Anpassung der Zinsperiode an Rentenperiode (best. äquival. Zinssatz für Rentenperiode)

2) Anpassung der Rentenperiode an Zinsperiode (best. äquival. Jahresrente für Zinsperiode)

Beispiel: Von einer Gesellschaft hat jemand 10 Jahre lang jeweils zum Jahresende 5000 € zu beanspruchen. Vor der 1. Zahlung hat die Firma Konkurs angemeldet. Als Forderung an den Konkursverwalter kann nur der Barwert  $R_0$  geltend gemacht werden. Bei Zinsen von 4% pro Jahr gilt:  $R_0 = 1/q^n R (q^n - 1)/(q - 1) = 40554,48 \text{ €}$ .

### Steuerberechnung

Im Gegensatz zum deutschen Steuersystem gibt es in anderen Staaten durchschaubare und faire Steuerregeln. In Irland gilt zum Beispiel, dass auf alle Jahreseinnahmen bis zu einem Betrag von 26000 € 16 % Steuern zu zahlen sind, für jeden Euro über diesen Wert (standard rate cut-off point) 38 %. Je nach sozialen Umständen existiert noch ein Steuerfreibetrag (tax credits). Für die zuzahlenden Steuern (tax payable) gilt dann:

$$\text{tax payable} = \text{gross tax} - \text{tax credits}$$

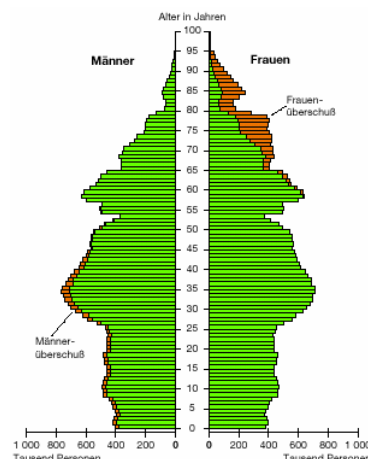
**Beispiel aus "Less stress more success" (Irland 2001):** A man has a gross yearly income of €47000. He has a standard rate cut-off point of €26000 and a tax credit of €2010. The standard rate of tax is 16% of income up to the standard rate cut-off point and 38% on all income above the standard rate cut-off point. Calculate

- (i) the amount of gross tax for the year
- (ii) the amount of tax paid for the year

Express the amount of tax paid as a percentage of gross income.

Solution: (i) gross tax = 15% of €26000 + 38% of €21000 = €26000 × 0.15 + €21000 × 0.38 = €11880.

(ii) Income tax equation: gross tax – tax credits = tax payable → €11880 – €2010 = €9870. Therefore, he paid €9870 in tax. Tax paid as a percentage of gross income = tax paid / gross income × 100 % = 21 %.



### Deutsche Sterbetafel

Für die Rentenrechnung und Lebensversicherungsrechnung werden Tabellen (Deutsche Sterbetafel) herangezogen, die statistische Werte über die Struktur der Bevölkerung enthalten. In diesen Tabellen werden, bezogen auf 100000 im gleichen Zeitraum Geborene, die Anzahl der in einem gewissen Alter noch Lebenden sowie deren theoretische Lebenserwartung eingetragen.

Die nachfolgende Tabelle enthält die für bestimmte Altersgruppen die Zahl der Lebenden, deren Überlebenswahrscheinlichkeit sowie die durchschnittliche Lebenserwartung (Grundlage 1995).

Alter	Lebende	Überlebenswahrscheinlichkeit	Lebenserwartung
Frauen, östliche Bundesländer			
0	100000	0,9949	78,58
1-4	99494	0,9989	77,97
5-9	99385	0,9992	74,06
10-14	99307	0,9993	69,11
15-19	99238	0,9980	64,16
20-24	99039	0,9980	59,28
25-29	98836	0,9980	54,40
30-34	98639	0,9967	49,50
35-39	98310	0,9948	44,66
40-44	97803	0,9919	39,88
45-49	97007	0,9878	35,19
50-54	95819	0,9830	30,59
55-59	94187	0,9738	26,08
60-64	91721	0,9554	21,71
65-69	87631	0,9264	17,61
70-74	81179	0,8711	13,81
75-79	70719	0,7896	10,48
80-84	55838	0,6425	7,61
85-89	35878	0,4584	5,46
90+	16445	0,0000	3,95
Frauen, westliche Bundesländer			
0	100000	0,9954	80,03
1-4	99544	0,9990	79,40
5-9	99441	0,9993	75,48
10-14	99371	0,9994	70,53
15-19	99309	0,9985	65,57
20-24	99157	0,9983	60,67
25-29	98988	0,9981	55,77
30-34	98804	0,9973	50,86
35-39	98540	0,9958	45,99
40-44	98122	0,9928	41,18
45-49	97420	0,9894	36,46
50-54	96384	0,9830	31,82
55-59	94750	0,9763	27,33
60-64	92506	0,9617	22,93
65-69	88965	0,9376	18,74
70-74	83412	0,8941	14,83
75-79	74580	0,8210	11,29
80-84	61233	0,6871	8,20

85-89	42073	0,4977	5,80
90+	20938	0,0000	4,13
Männer, östliche Bundesländer			
0	100000	0,9940	71,23
1-4	99397	0,9983	70,66
5-9	99223	0,9990	66,78
10-14	99126	0,9990	61,84
15-19	99024	0,9950	56,91
20-24	98526	0,9936	52,18
25-29	97891	0,9941	47,50
30-34	97317	0,9914	42,77
35-39	96477	0,9860	38,12
40-44	95124	0,9801	33,63
45-49	93235	0,9724	29,26
50-54	90661	0,9592	25,02
55-59	86962	0,9365	20,97
60-64	81438	0,8987	17,23
65-69	73186	0,8502	13,89
70-74	62221	0,7791	10,89
75-79	48479	0,6800	8,27
80-84	32965	0,5057	5,99
85-89	16671	0,3378	4,40
90+	5631	0,0000	3,14
Männer, westliche Bundesländer			
0	100000	0,9942	73,8
1-4	99415	0,9987	73,2
5-9	99281	0,9992	69,3
10-14	99205	0,9992	64,3
15-19	99121	0,9966	59,4
20-24	98789	0,9953	54,6
25-29	98322	0,9953	49,8
30-34	97856	0,9942	45,1
35-39	97291	0,9915	40,3
40-44	96460	0,9868	35,6
45-49	95185	0,9792	31,1
50-54	93206	0,9676	26,7
55-59	90183	0,9500	22,5
60-64	85676	0,9179	18,5
65-69	78646	0,8715	14,9
70-74	68539	0,8037	11,8
75-79	55085	0,7089	9,0
80-84	39050	0,5631	6,6
85-89	21988	0,4038	4,9
90+	8879	0,0000	3,8

### Funktionen in der Ökonomie

Preis-Absatz-Funktion  $p(x) = a - bx$  ;  $x$  - Absatz, Produktionsmenge  $p$  - Preis je Mengeneinheit

Absatz-Preis-Funktion (Umkehrfunktion der Preis-Absatz-Funktion)

$x(p) = a - bp$  ;  $x$  - Absatz, Produktionsmenge  $p$  - Preis je Mengeneinheit

Erlös-/Umsatzfunktion  $E(x) = x \cdot p(x)$  ;  $E(p) = p \cdot x(p)$

Kostenfunktion  $K(x)$

Stückkosten  $k(x) = K(x)/x$

Gewinnfunktion  $G(x) = E(x) - K(x)$

Stückgewinn  $g(x) = p(x) - k(x)$

Produktionsfunktion  $x(r)$  ;  $r$  - Rohstoff-/Materialeinsatz

Umkehrfunktion  $r = r(x)$  ... gibt Materialverbrauch an

### Monotonität und Krümmung einer Funktion in der Ökonomie

Ist die Funktion konvex und monoton wachsend, dann heißt sie progressiv wachsend.

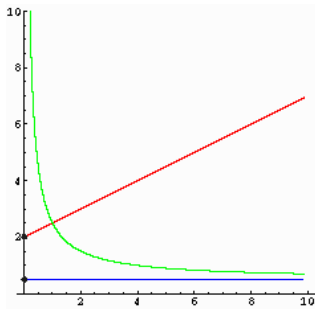
Ist die Funktion konkav und monoton wachsend, dann heißt sie degressiv wachsend.

Ist die Funktion konvex und monoton fallend, dann heißt sie degressiv fallend.

Ist die Funktion konkav und monoton fallend, dann heißt sie progressiv fallend.

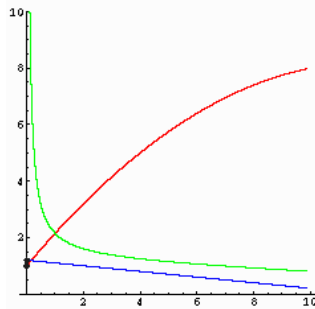
### Kosten- und Preistheorie

#### Betriebskosten



Die Betriebskostenfunktion oder einfacher Kostenfunktion eines Unternehmens gibt an, wieviel die Produktion einer bestimmten Menge kostet. Dabei gibt man die Menge meist in Mengeneinheiten (ME) und die Kosten in Geldeinheiten (GE) an.

$K(x)$  ... Betriebskostenfunktion, Kosten für die Produktion von  $x$  ME  
 $K^*(x) = K(x)/x$  ... Stückkostenfunktion, durchschnittliche Kosten für eine ME  
 $K'(x)$  ... Grenzkostenfunktion, zusätzliche Kosten, wenn eine ME mehr produziert wird, die Ableitung der Kostenfunktion



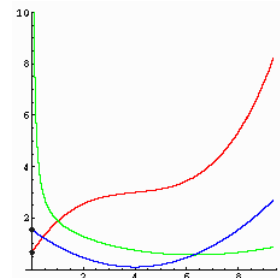
Die Kostenfunktion ist immer monoton wachsend. Sie besteht aus den Fixkosten  $K_{\text{fix}} = K(0)$ ; von der Menge unabhängig; und den variablen Kosten  $K_{\text{var}}(x) = K(x) - K(0)$ . Einige typische Kostenverläufe (rot) mit Stückkosten (grün) und Grenzkosten (blau) sind

- 1) linear (obere Abbildung) Grenzkosten sind konstant,  $K'' = 0$
- 2) degressiv (untere Abbildung) Grenzkosten werden niedriger,  $K'' < 0$
- 3) progressiv Grenzkosten werden höher,  $K'' > 0$

### Kostenkehre

In der Praxis ergibt sich meist ein gemischter Kostenverlauf: Die Grenzkosten werden zuerst niedriger, ab einer bestimmten Menge

(Kostenkehre) wieder höher. Die Kostenkehre ist der Wendepunkt der Kostenfunktion, man erhält sie aus  $K''(x) = 0$ .



### Betriebsoptimum

Das Betriebsoptimum ist das Minimum der Stückkostenfunktion, d.h. die Menge, bei der der Betrieb am rentabelsten produziert. Man erhält es aus der Gleichung

$$K^{*'}(x) = 0 \quad \text{bzw.} \quad K'(x) = K^*(x).$$

Beispiel: Ein Betrieb hat die Kostenfunktion

$$K(x) = 0,1x^2 + 2x + 40$$

$$K_{\text{fix}} = 40$$

$$K_{\text{var}}(x) = 0,1x^2 + 2x; \text{ progressiver Kostenverlauf}$$

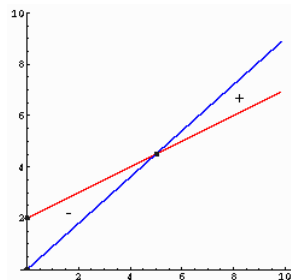
$$K^*(x) = K(x)/x = 0,1x + 2 + 40/x$$

$$K'(x) = 0,2x + 2$$

Aus der Gleichung  $K'(x) = K^*(x)$  ergibt sich das Betriebsoptimum zu  $x_{\text{opt}} = 20$ .

Bei einer Produktion von 20 ME sind also die Stückkosten am niedrigsten, nämlich  $K^*(x) = 6$  GE. Das ist gleichzeitig die langfristige Preisuntergrenze (kostendeckender Preis): der Betrieb muss sein Produkt zu einem Preis von mindestens 6 GE verkaufen, damit er kostendeckend produzieren kann.

Die kurzfristige Preisuntergrenze ist das Minimum der variablen Stückkosten  $K_{\text{var}}(x)/x$ .



### Erlös und Gewinn bei vollständiger Konkurrenz

Ist der Markt sehr groß, hat der einzelne Anbieter praktisch keinen Einfluss auf den Preis. Man kann vereinfachend annehmen, dass ein Erzeuger eine beliebige Menge zu einem konstanten Verkaufspreis absetzen kann.

$p$  ... Verkaufspreis pro ME

$E(x) = px$  ... Erlösfunktion (Umsatz)

$G(x) = E(x) - K(x)$  ... Gewinnfunktion

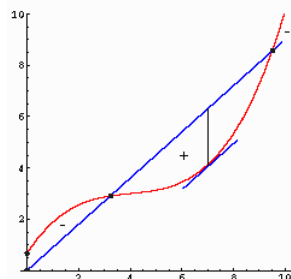
Auf den Abbildungen ist der Graph der Kostenfunktion rot, der Graph der Erlösfunktion blau dargestellt.

Bei linearem Kostenverlauf (obere Abbildung) schneiden einander die Graphen von Kosten- und Erlösfunktion in einem Punkt, vorausgesetzt, der Preis ist höher als die Grenzkosten.

Dieser Schnittpunkt entspricht der Gewinnschwelle (Break-even-point).

Unterhalb davon macht der Betrieb Verlust, darüber Gewinn. Es ist daher am günstigsten, die Produktionskapazität voll auszunützen.

Analoges gilt bei degressivem Kostenverlauf.



Bei progressivem oder gemischtem Kostenverlauf (untere Abbildung) haben die Graphen zwei Schnittpunkte, die Gewinn Grenzen. Nur im Bereich dazwischen macht der Betrieb Gewinn, darüber oder darunter fährt er Verluste ein.

Der Produzent wird versuchen, den maximalen Gewinn zu erzielen.

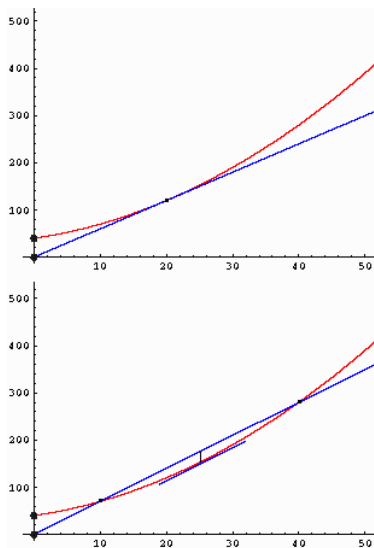
Die Gewinn Grenzen erhält man aus der Gleichung

$$G(x) = 0 \quad \text{bzw.} \quad E(x) = K(x),$$

das Maximum der Gewinnfunktion aus

$$G'(x) = 0 \quad \text{bzw.} \quad E'(x) = K'(x)$$

$E'(x) = p$ , also ist der Gewinn maximal, wenn die Grenzkosten gleich dem Verkaufspreis sind, d.h., die Tangente an den Graphen von  $K(x)$  ist zum Graphen von  $E(x)$  parallel.



### Erlös und Gewinn bei vollständiger Konkurrenz, Beispiel

Beispiel: Angenommen, ein Produzent kann seinen Artikel um 6 GE verkaufen. Dann lautet die Gewinnfunktion:

$$G(x) = 6x - (0,1x^2 + 2x + 40) = -0,1x^2 + 4x - 40$$

Die Gleichung  $E(x) = K(x)$  bzw.  $G(x) = 0$  hat nur eine Lösung bei  $x = 20$ , also beim Betriebsoptimum.

Bei dieser Produktionsmenge macht der Betrieb gerade keinen Verlust, es handelt sich um einen sogenannten Grenzbetrieb.

Wie man aus der Zeichnung sieht, kann man das Betriebsoptimum graphisch ermitteln, indem man vom Koordinatenursprung eine Tangente an den Graphen von  $K(x)$  legt.

Wenn der Verkaufspreis 7 GE beträgt, lautet die Gewinnfunktion (untere Abbildung):  $G(x) = 7x - (0,1x^2 + 2x + 40) = -0,1x^2 + 5x - 40$

Die Gleichung  $E(x) = K(x)$  bzw.  $G(x) = 0$  hat die Lösungen  $x_1 = 10$ ,  $x_2 = 40$ . Das sind die Gewinn Grenzen.

Die Lösung der Gleichung  $E'(x) = K'(x)$  bzw.  $G'(x) = 0$  ist  $x = 25$ . Der Betrieb erzielt also den maximalen Gewinn bei einer Produktion von 25 ME, und zwar beträgt der Gewinn  $G(25) = 22,5$  GE.

### Beispielaufgaben zur Kostenfunktion

1. Ein Gut wird zu einem Preis  $p = 61,5$  (GE) abgesetzt. Die Kostenfunktion lautet:

$$K(x) = 0,5x^2 + 2,5x + 144,5 \text{ für } x \geq 0$$

Berechnen Sie:

- |  |                                 |
|--|---------------------------------|
| a) Umsatzfunktion                              | b) Grenzümsatzfunktion          |
| c) Durchschnittskostenfunktion                 | d) Grenzkostenfunktion          |
| e) Grenzdurchschnittskostenfunktion            | f) Gewinnfunktion               |
| g) gewinnmaximale Ausbringungsmenge            | h) minimale Durchschnittskosten |
| i) Ausbringungsmenge mit maximalem Stückgewinn |                                 |

- Lösung: a)  $U(x) = 61,5x$       b)  $U'(x) = 61,5$   
 c)  $k(x) = 0,5x + 2,5 + 144,5/x$       d)  $K'(x) = x + 2,5$   
 e)  $k'(x) = 0,5 - 144,5/x^2$       f)  $G(x) = -0,5x^2 + 59x - 144,5$   
 g)  $x = 59$       h)  $k(17) = 19,5$       i)  $x = 17$

e) Grenzdurchschnittskostenfunktion

Zur Berechnung müssen die Durchschnittskosten nach  $x$  abgeleitet werden

g) gewinnmaximale Ausbringungsmenge

Die Gewinnfunktion wird abgeleitet. Die Nullstelle der ersten Ableitung ist  $x = 59$ . Wenn  $x < 59$ , so ist  $G'(x) > 0$ , also der Gewinn  $G$  steigend; wenn  $x > 59$  ist, so ist  $G$  fallend, da  $G'(x) < 0$ . Bei  $x = 59$  liegt eine Maximalstelle.

h) minimale Durchschnittskosten

Man sucht Nullstellen der Ableitung der Durchschnittskosten, hier  $x = 17$ , da die 2. Lösung  $x = -17$  ökonomisch sinnlos ist. Einsetzen von  $x = 17$  in die Durchschnittskostenfunktion ergibt 19,5.

i) Ausbringungsmenge mit maximalem Stückgewinn

Die Durchschnittsgewinnfunktion ist gleich  $G(x)/x = (-0,5x^2 + 59x - 144,5)/x = -0,5x + 59 - 144,5/x$ . Mit der Ableitung dieser Durchschnittsgewinnfunktion ergeben sich die Nullstellen  $x = 17$  bzw.  $x = -17$ , von den nur die erste sinnvoll ist.

### Beispielaufgaben zur Kostenfunktion (2)

2. Eine Kostenfunktion in Abhängigkeit von der Produktionsmenge  $x$  habe die Form  $K(x) = 100 + \sqrt{x}$ . Von  $x = 10000$  soll die Produktion um eine Einheit erhöht werden.

- Bestimmen Sie die Grenzkosten.
- Vergleichen Sie die Grenzkosten mit dem exakten Kostenzuwachs.
- Führen Sie die gleiche Rechnung von  $x = 10$  ausgehend aus.

- Lösung: a)  $K'(x) = 1/(2\sqrt{x})$ ,  $K'(10000) = 0,005$       b)  $K(10001) - K(10000) = 0,0049998$   
 c)  $K'(10) = 0,158113883$ ; exakt  $K(11) - K(10) = 0,15434713$

3. Gegeben ist die Produktionsfunktion  $x(r) = 0,9r^2 - 0,04r^3$  für  $r \geq 0$ . Berechnen Sie:

- Faktoreinsatzmenge  $r$  für maximalen Gesamtertrag  $x(r)$
- Bereich zunehmender, abnehmender und negativer Grenzerträge, Maximum der Grenzerträge
- Maximum der Durchschnittserträge

- Lösung: a)  $x'(r) = 1,8r - 0,12r^2 = 0 \dots r = 15$   
 b) abnehmende Grenzerträge:  $r > 7,5$ ; zunehmende Grenzerträge:  $r < 7,5$ ; negative Grenzerträge:  $r > 15$ ; Maximum:  $\text{Max}(7,5; 6,75)$   
 c) Maximum bei  $x = 11,25$  und beträgt 5,0625

## Zinsinstrumente

Barwerte und Renditen von Zinsinstrumenten: Barwert P Rendite i

Diskontpapier  $R / (1+i)^t$   $(R-P) / (P \cdot t)$

Geldmarktpapier mit einmaliger Zinszahlung  $(100 + p(t - t_1) - p t_1 i(t - t_1)) / (1 + i(t - t_1))$   
 $(100 - P + p(t - t_1)) / ((P + p t_1)(t - t_1))$

Zerobond  $R / (1 + i)^T$   $T \sqrt[R/P]{-1}$

Nachschüssige Zeitrente  $Z \cdot ((1 + i)^n - 1) / ((1 + i)^n \cdot i)$  numerisch

Ewige Rente (nachschüssig)  $Z/i$   $Z/P$

Endfällige Anleihe, ganzzahlige Laufzeit  $1/(1 + i)^n (p \cdot ((1+i)^n - 1)/i + R)$  numerisch

Endfällige Anleihe, gebrochene Laufzeit  $1/(1+i)^{n+\tau} (p \cdot (1+i)^{n+1}/i + R)$  numerisch

Variablen:  $t, t_1$  Zeitpunkte ;  $\tau$  Teil einer Zinsperiode ;  $n, T$  (Rest-)Laufzeit ;  $S$  Stückzinsen  
 $P$  Preis, Kurs ;  $Z$  laufende Zahlung, Rate ;  $R$  Rückzahlung (oft:  $R = 100$ ) ;  $p$  Kupon, Nominalzinssatz (in Prozent)

## DAX-Berechnung

Die Berechnung des DAX erfolgt für alle Index-Gruppen über die Laspeyres-Formel

$$DAX = K_1 \cdot F \cdot \sum_{i=1}^n (P_i \cdot q_i^1 \cdot c_i) / \sum_{i=1}^n (P_i^0 \cdot q_i^0)$$

mit  $K_1$  = Verkettungsfaktor vom letzten Verkettungstermin  $t_1$   
 $n$  = Anzahl der Aktien im Kurs  
 $P_i$  = Kurs der Aktie zum Zeitpunkt der Berechnung  
 $q_i^1$  = Kapital der Aktie zum Zeitpunkt  $t_1$   
 $c_i$  = Korrekturfaktor der Aktie zum Zeitpunkt der Berechnung  
 $P_i^0$  = Kurs der Aktie zum Basiszeitpunkt  $t_0$  (30.12.1987)  
 $q_i^0$  = Kapital der Aktie zum Basiszeitpunkt  $t_0$   
 $F$  = Basiswert des DAX zum Basiszeitpunkt  $t_0$

Die Summen im Quotienten der DAX-Formel werden als Marktkapitalisierung des Index bezeichnet. Für die Kapitalisierung einer einzelnen Aktie zum Zeitpunkt  $t$  gilt dementsprechend mit  $c=1$   $M_t = P_t \cdot q_t$

Die Korrekturfaktoren  $c_i$  der Aktien im Index dienen zur Anpassung des Kurses an außergewöhnliche Ereignisse wie Zahlungen von Dividenden oder Bezugsrechten. Einmal im Jahr, jeweils am 3. Freitag im September, werden die Korrekturfaktoren der Aktien im Index wieder zurückgestellt (Verkettungstermin).

Der neue Korrekturfaktor wird bestimmt mit  $C_i = P_{i-\text{vor Abschl.}} / (P_{i-\text{vor Abschl.}} - \text{Abschl.})$

Der Verkettungsfaktor wird immer dann angepasst, wenn das Kapital einer Aktie im Index angepasst wird, Aktientitel hinzugefügt oder entfernt werden und bei der jährlichen Rückstellung der Korrekturfaktoren.

Dadurch werden Sprünge im Index bei diesen Vorgängen vermieden. Der neue Korrekturfaktor ermittelt sich dann mit  $K_t = K_{t-1} \cdot DAX_{\text{alte Zusammensetzung}} / DAX_{\text{neue Zusammensetzung}}$

## Gordon-Formel

Die Gordon-Formel ist eine Gleichung zur Berechnung des Barwertes einer Aktie oder Unternehmens bei steigenden Dividenden. Sie ist benannt nach Albert Hamilton Gordon (1901-2009).

$$P_0 = G_1 (1 - b) / (k - b r_E)$$

Die auftretenden Größen sind:  $P_0$  ... subjektiver Ertragswert (Marktpreis, Kurswert) der Aktie zur Zeit  $t_0$ . Ist der Aktienmarkt effizient, dann gilt:  $P_0$  = Marktwert der Aktie in  $t_0$  = Ertragswert aller zukünftigen Ausschüttungen = Marktwert. Der Preis bildet sich durch Erwartungen. Bei unvollkommenen Märkten weicht der Marktwert/Ertragswert vom Preis/Börsenkurs ab.

$G_1$  ... erwarteter Gewinn pro Aktie zur Zeit  $t_1$ ,  $b$  ... Thesaurierungsquote,  $1-b$  ... Ausschüttungsquote,  $G_1 (1-b)$  ... Dividende in  $t_1$ ,  $k$  ... Marktzinssatz, d.h. der von der Aktionären erwartete Ertragssatz, der bei alternativen Finanz-Investitionen zu erzielen wäre,  $r_E$  ... erwartete Rendite aus der investiven Verwendung der einbehaltenen Gewinne und  $b r_E$  die Wachstumsrate für Gewinne, Dividenden und Kurs.



Weiterhin wird dann für den Gewinn  $G_1 = G_0 (1 + w)$ ,  $w$  ... Wachstumsrate  
 $G_2 = G_0 (1 + w)^2$  usw.  
 und für die Dividende  $D_1 = G_0 (1 + w) (1 - b)$   
 $D_2 = G_0 (1 + w)^2 (1 - b)$  usw.

## Euro-Geld

Abkürzung EUR, Eurozeichen €, europäische Einheitswährung; 1 Euro = 100 Cent (Eurocent).

Am 1.1.1999 wurde der Euro in elf Ländern im bargeldlosen Zahlungsverkehr eingeführt. Im Bargeldbereich wurden die nationalen Währungen zum 1.1.2002 durch den Euro als gesetzliches Zahlungsmittel ersetzt.

Das Eurozeichen € ist eine Kombination aus dem griechischen Epsilon (Symbol für die



Wiege der europäischen Zivilisation), dem Buchstaben E für Europa und einem doppelten Querstrich als Zeichen der Stabilität.

Die Banknoten haben eine Stückelung von 5, 10, 20, 50, 100, 200 und 500 Euro, die Münzen von 1, 2, 5, 10, 20, 50 Cent sowie 1 und 2 Euro. Die Euroscheine zeigen auf der Vorderseite fiktive Bauwerke, die wichtige europäische Stilrichtungen repräsentieren. Die Rückseite der mit Banknoten zeigt die europäische Landkarte, die Flagge der EU und jeweils eine Brücke als Sinnbild für Verbindungswege innerhalb Europas.

Die Größe der Scheine variiert zwischen 120 mm x 62 mm und 160 mm x 82 mm. Die Münzen weisen Unterschiede in Größe, Gewicht, Material und Farbe auf. Ihre Vorderseite ist einheitlich gestaltet und zeigt neben dem Nennwert die 12 Sterne der EU und die Umrisse der EU-Staaten als Relief, die Rückseite wird von jedem Land mit nationalen Motiven gestaltet.

Quelle: Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG, 2007

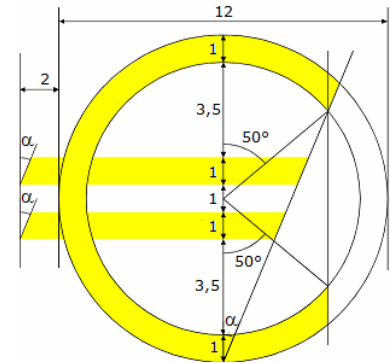
### Euro-Zeichen

Die Form des Euro-Zeichens € wurde von der Europäischen Union eindeutig festgelegt. Die geometrische Figur ist rechts zu sehen.

Hauptteil ist ein Kreisringstück mit dem Verhältnis des inneren Durchmessers zum äußeren Durchmesser von 5 : 6.

Wichtig ist die Größe des Winkels  $\alpha$ , der zum einen den oberen Abschluss als auch die Neigung der Querbalken beschreibt. Über die Berechnung mittels Kosinussatz ergibt sich  $\alpha = 22,5726...^\circ$

Der Schöpfer des Euro-Zeichens Arthur Eisenmenger hatte nichts(!) von seinem Entwurf.



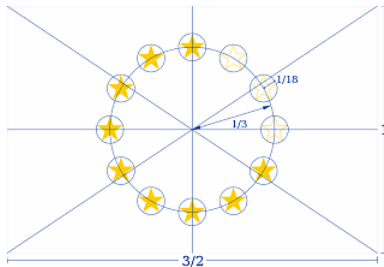
### Konstruktionsbeschreibung

Zeichnen einer Mittellinie und eines zentralen Punktes M. Um M werden vier Kreise, mit den Radien  $1/2$ ,  $3/2$ , 5 und 6 gezogen. In M wird auf der Mittellinie eine Senkrechte errichtet.

Sie schneidet die Kreise an wichtigen Punkten. Der Unterste heiße U. An die Mittellinie wird im Mittelpunkt nach oben und unten ein Vierziggradwinkel abgetragen. Der obere Schenkel schneidet den inneren der beiden großen Kreise in P. Die Verbindung von P mit U begrenzt die beiden Balken und den oberen Rand des Euro-Zeichens.

Eine Senkrechte von P aus auf die Mittellinie begrenzt das Euro-Zeichen unten. Dabei entsteht der waagerechte Abstand, der rechts oben angesetzt wird.

Durch das linke Ende der angesetzten Strecke, wird eine Parallele zu PU gezeichnet. Sie begrenzt den oberen Balken. Die Senkrechte von dort auf die Mittellinie begrenzt den unteren Balken. Eine weitere Parallele zu PU beendet die Konstruktion.



### Europaflagge

Wie für das Euro-Zeichen gibt es auch für die Europaflagge eine eindeutige mathematische Konstruktion.

Die Europaflagge besteht aus einem Kranz aus zwölf goldenen, fünfzackigen, sich nicht berührenden Sternen auf azurblauem Hintergrund. Sie wurde 1955 vom Europarat als dessen Flagge eingeführt und erst 1986 von der Europäischen Gemeinschaft übernommen.

Das Emblem hat folgende Farben: Pantone Reflex blue für den Hintergrund und Pantone Yellow für die Sterne. Die RGB-Farbwerte sind für den Hintergrund (blau): 0/51/153 und für die Sterne (gelb): 255/204/0.

Die geometrische Beschreibung ergibt sich aus der Zeichnung und der offiziellen Erläuterung der Europäischen Union:

"Das Emblem besteht aus einer blauen rechteckigen Flagge, deren Breite das Anderthalbfache der Höhe misst. Auf einem unsichtbaren Kreis, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt der Diagonalen des

Rechtecks bildet, sind in gleichmäßigem Abstand zwölf goldene Sterne angeordnet.

Der Kreisradius beträgt ein Drittel der Rechteckhöhe. Jeder Stern hat fünf Zacken, deren Spitzen einen unsichtbaren Umkreis mit dem Radius von jeweils  $1/18$  der Rechteckhöhe berühren.

Alle Sterne stehen senkrecht, d.h. ein Zacken weist nach oben, während zwei weitere auf einer unsichtbaren Geraden ruhen, die die Senkrechte zum Fahnenstange bildet.

Die Sterne sind wie die Stunden auf dem Zifferblatt einer Uhr angeordnet. Ihre Zahl ist unveränderlich."

### Wahlauswertung

#### Wahlauswertung, Vergabe der Mandate

#### Verfahren nach d'Hondt

Jede Partei erhält einen Quotienten zugewiesen, der anfangs gleich der Stimmenanzahl ist. Die Partei mit dem größten Quotienten bekommt das erste Mandat und einen neuen Quotienten zugewiesen, gleich  $\text{Stimmenzahl} / (\text{Mandate} + 1)$ . Das nächste Mandat erhält die Partei, die nun den größten Quotienten besitzt. Das Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis alle Mandate vergeben sind.

### Verfahren nach Hare-Niemeyer

Für jede Partei wird die Anzahl ihrer Stimmen durch die Anzahl aller Stimmen dividiert und dann mit der Anzahl aller Mandate multipliziert. Die Partei erhält zunächst so viele Mandate, wie das ganzzahlige Ergebnis angibt. Eventuell auf Grund der Rundung übrigbleibende Mandate werden an die Parteien mit den größten gebrochenen Anteilen vergeben.

### Verfahren nach Hagenbach-Bischoff

Die Gesamtstimmenzahl wird durch die um 1 erhöhte Anzahl der Mandate geteilt und auf die nächste ganze Zahl aufgerundet. Die Mandate der Parteien erhält man, indem man die Parteistimmenzahl durch diesen Wahlquotienten teilt und auf die nächste ganze Zahl abrundet. Bleiben Mandate übrig, so wird die Stimmenzahl jeder Partei durch die um 1 erhöhte Zahl der ihr bereits zugewiesenen Mandate geteilt. Das erste der noch zu verteilenden Mandate wird der Partei mit den größten Verteilungszahl zugewiesen. Das Verfahren wird fortgesetzt, bis alle Mandate vergeben sind.

### Regel des Marquis de Condorcet

Bei mehr als einem Entscheidungsträger und bei mehr als zwei Alternativen gibt es kein noch so kompliziertes Auswahlverfahren, welches sowohl demokratisch ist als auch zu rationalen kollektiven Entscheidungen führt.

In sehr vielen Fällen, liefern die drei Verfahren gleiche Mandatsverteilungen. Dies muss aber nicht sein. Zum Beispiel erhalten Sie für nachfolgende fiktive Werte bei einer 5 %-Hürde und 500 Mandaten:

Partei	Stimmenzahl	%- Anteil	... d'Hondt	... Hare- Niemeyer	... Hagenbach- Bischoff
1	1234567	45.1484	241	240	241
2	897654	32.8274	175	175	175
3	201010	7.351	39	39	39
4	44444	1.6253	0	0	0
5	234567	8.5782	45	46	45
6	122221	4.4697	0	0	0

Noch deutlicher wird der Unterschied, wenn nur eine 4 %-Hürde gelten würde. Dann wird:

Partei	Stimmenzahl	%- Anteil	... d'Hondt	... Hare- Niemeyer	... Hagenbach- Bischoff
1	1234567	45.1484	231	229	230
2	897654	32.8274	167	167	168
3	201010	7.351	37	37	37
4	44444	1.6253	0	0	0
5	234567	8.5782	43	44	43
6	122221	4.4697	22	23	22

Offensichtlich begünstigt das Verfahren nach Hare-Niemeyer die kleineren Parteien. Welches der Verfahren das „Beste“ ist, kann natürlich nicht festgelegt werden.

### Deutsche Wahlauswertung

Das Verfahren nach dem belgischen Mathematiker d'Hondt war in der Bundesrepublik bis 1985 üblich. Seit 1985 wird nach dem Verfahren von Hare-Niemeyer gerechnet: Zuerst werden im Wahlgebiet alle auf die Landesliste entfallenen Zweitstimmen addiert und die Mandate im Bundestag entsprechend verteilt. Bei erneuter Verrechnung nach Hare-Niemeyer-Verfahren werden die den Parteien zugesprochenen Mandate auf deren einzelne Landeslisten verteilt. Hat eine Partei mehr Direktmandate (Siege in den Wahlkreisen) gewonnen, als ihr Mandate auf Länderebene zustehen, so bleiben ihr diese Überhangmandate erhalten. Dadurch kann vor der Wahl die genaue Größe des zukünftigen Bundestages nicht angegeben werden. Bei einigen Landtagswahlen ist dies anders. Dort werden Überhangmandate auf Kosten der anderen Parteien rückgerechnet.

### Österreich

Bei den österreichischen Nationalratswahlen wird das Verfahren des Schweizer Hagenbach-Bischoff für das erste Ermittlungsverfahren angewandt. Verbleibende Restmandate werden dann im 2. Ermittlungsverfahren nach dem d'Hondtschen Verfahren zugewiesen.

### Kandidatenwahl

Es leuchtet unmittelbar ein, dass es ein eindeutiges Wahlverfahren gibt, wenn man sich nur zwischen zwei Kandidaten entscheiden kann. Es gewinnt selbstverständlich derjenige, auf den die meisten

Stimmen entfallen. Dass man schon bei drei Kandidaten prinzipiell kein eindeutiges Wahlverfahren mehr angeben kann, um einen Gewinner zu ermitteln, ist schon erstaunlich. Um dieses nicht auflösbare Dilemma der Uneindeutigkeit zu verdeutlichen, werden 5 verschiedene fiktive Wahlen (Spalten) nach 8 verschiedenen sinnvollen Wahlverfahren ausgewertet. Die Wahlergebnisse sind so ausgesucht, dass beim ersten Wahlverfahren, ein häufig angewendetes, immer der gleiche Kandidat gewinnt. Dadurch wird noch deutlicher sichtbar, dass je nach Wahlverfahren teilweise verschiedene Kandidaten gewinnen.

### Wahlverfahren bei drei Kandidaten

Die drei Kandidaten werden mit A, B und C bezeichnet. Jeder Wähler muss einen Favoriten (1. Wahl) und einen zweitliebsten Kandidaten (2. Wahl) bestimmen, also sich für AB, AC, BA, BC, CA oder CB entscheiden, wobei die jeweils ersten Buchstaben den Favoriten darstellen. AB = 24% bedeutet also, dass sich 24% der Wähler für A als Favoriten und gleichzeitig für B als „2. Wahl“ entschieden haben.

### Wahlergebnisse

Wahl 1	Wahl 2	Wahl 3	Wahl 4	Wahl 5
AB = 24 %	AB = 0 %	AB = 20 %	AB = 60 %	AB = 38 %
AC = 12 %	AC = 40 %	AC = 20 %	AC = 0 %	AC = 22 %
BA = 4 %	BA = 0 %	BA = 9 %	BA = 0 %	BA = 0 %
BC = 30 %	BC = 32 %	BC = 22 %	BC = 36 %	BC = 36 %
CA = 15 %	CA = 0 %	CA = 12 %	CA = 0 %	CA = 0 %
CB = 15 %	CB = 28 %	CB = 17 %	CB = 4 %	CB = 4 %

**Wahlverfahren 1:** Der Kandidat, auf den die meisten Favoritenstimmen entfallen, gewinnt die Wahl. Dieses Verfahren nennt sich Mehrheitswahl und wird bei der Wahl der Senatoren in den Bundesstaaten der USA angewendet.

A = 36 %	A = 40 %	A = 40 %	A = 60 %	A = 60 %
B = 34 %	B = 32 %	B = 31 %	B = 36 %	B = 36 %
C = 30 %	C = 28 %	C = 29 %	C = 4 %	C = 4 %
A gewinnt.	A gewinnt.	A gewinnt.	A gewinnt.	A gewinnt.

**Wahlverfahren 2:** Die beiden Kandidaten, auf die die meisten und zweitmeisten Favoritenstimmen entfallen, kommen in die Stichwahl, sofern ein Kandidat nicht schon im ersten Wahlgang die absolute Mehrheit der Favoritenstimmen auf sich vereinigt. In der Stichwahl gewinnt der Kandidat, der dort die meisten Stimmen enthält. Dieses Wahlverfahren wird bei der Bestimmung des französischen Präsidenten praktiziert.

A = 36 %	A = 40 %	A = 40 %	A = 60 %	A = 60 %
B = 34 %	B = 32 %	B = 31 %	B = 36 %	B = 36 %
C = 30 %	C = 28 %	C = 29 %	C = 4 %	C = 4 %
A und B Stichwahl	A und B Stichwahl	A und B Stichwahl	A und B Stichwahl	A und B Stichwahl
A = 51 %	A = 40 %	A = 52 %	A = 60 %	A = 60 %
B = 49 %	B = 60 %	B = 48 %	B = 40 %	B = 40 %
A gewinnt.	B gewinnt.	A gewinnt.	A gewinnt.	A gewinnt.

**Wahlverfahren 3:** Die beiden Kandidaten, die nicht die meisten Favoritenstimmen erhalten haben, kommen in eine Stichwahl. Der Sieger dieser Stichwahl kommt dann zusammen mit dem Kandidaten, der die meisten Favoritenstimmen erhalten hat, in die endgültige Stichwahl.

A = 36 %	A = 40 %	A = 40 %	A = 60 %	A = 60 %
B = 34 %	B = 32 %	B = 31 %	B = 36 %	B = 36 %
C = 30 %	C = 28 %	C = 29 %	C = 4 %	C = 4 %
A und C Stichwahl	B und C Stichwahl	B und C Stichwahl	B und C Stichwahl	B und C Stichwahl
B = 58 %	B = 32 %	B = 51 %	B = 96 %	B = 74 %
C = 42 %	C = 68 %	C = 49 %	C = 4 %	C = 26 %
A und B Stichwahl	A und C Stichwahl	A und C Stichwahl	A und B Stichwahl	A und B Stichwahl
A = 51 %	A = 40 %	A = 49 %	A = 60 %	A = 60 %
B = 49 %	C = 60 %	C = 51 %	B = 40 %	B = 40 %
A gewinnt.	C gewinnt.	C gewinnt.	A gewinnt.	A gewinnt.

**Wahlverfahren 4:** Der Kandidat, der am seltensten „3. Wahl“ ist, gewinnt die Wahl. Das ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass der Kandidat gewinnt, der am häufigsten "1. Wahl" oder "2. Wahl" ist.

A = 45 %	A = 60 %	A = 39 %	A = 40 %	A = 40 %
B = 27 %	B = 40 %	B = 32 %	B = 0 %	B = 22 %
C = 28 %	C = 0 %	C = 29 %	C = 60 %	C = 38 %
B gewinnt.	C gewinnt	C gewinnt	B gewinnt	B gewinnt

**Wahlverfahren 5:** Der Kandidat, der am häufigsten „3. Wahl“ ist, darf nicht in die Stichwahl. Oder anders ausgedrückt: Die beiden Kandidaten, die am häufigsten "1. Wahl" oder "2. Wahl" geworden sind, kommen in die Stichwahl. Dort gewinnt dann der von diesen beiden Kandidaten, der die meisten Stimmen erhält.

A = 45 %	A = 60 %	A = 39 %	A = 40 %	A = 40 %
B = 27 %	B = 40 %	B = 32 %	B = 0 %	B = 22 %
C = 28 %	C = 0 %	C = 29 %	C = 60 %	C = 38 %
B und C Stichwahl	B und C Stichwahl	B und C Stichwahl	A und B Stichwahl	B und C Stichwahl
B = 58 %	B = 32 %	B = 51 %	A = 60 %	B = 36 %
C = 42 %	C = 68 %	C = 49 %	B = 40 %	C = 4 %
B gewinnt.	C gewinnt.	B gewinnt.	A gewinnt.	B gewinnt.

**Wahlverfahren 6:** Die beiden Kandidaten, die am häufigsten "3. Wahl" sind, kommen in eine Stichwahl. Der Sieger dieser Stichwahl kommt dann zusammen mit dem Kandidaten, der die meisten Favoritenstimmen erhalten hat, in die endgültige Stichwahl.

A = 45 %	A = 60 %	A = 39 %	A = 40 %	A = 40 %
B = 27 %	B = 40 %	B = 32 %	B = 0 %	B = 22 %
C = 28 %	C = 0 %	C = 29 %	C = 60 %	C = 38 %
A und C Stichwahl	A und B Stichwahl	A und C Stichwahl	A und C Stichwahl	A und C Stichwahl
B = 58 %	A = 40 %	A = 49 %	A = 60 %	A = 60 %
C = 42 %	B = 60 %	C = 51 %	C = 40 %	C = 40 %
A und B Stichwahl	B und C Stichwahl	A und C Stichwahl	A und B Stichwahl	A und B Stichwahl
A = 51 %	B = 32 %	A = 52 %	A = 60 %	A = 60 %
B = 49 %	C = 68 %	C = 48 %	B = 40 %	B = 40 %
A gewinnt.	C gewinnt.	A gewinnt.	A gewinnt.	A gewinnt.

**Wahlverfahren 7:** Für jede Favoritenstimme gibt es zwei Punkte, Für jede "2. Wahl" gibt es einem Punkt. Der Kandidat, der die meisten Punkte bekommt, gewinnt die Wahl. Dieses Verfahren wird nach dem Erfinder "Methode von Borda" genannt. Identisch ist das Verfahren, bei dem der Kandidat gewinnt, der in den beiden möglichen Stichwahlen gegen die anderen Kandidaten insgesamt die meisten Stimmen bekäme.

A = 91 P.	A = 80 P.	A = 101 P.	A = 120 P.	A = 120 P.
B = 107 P.	B = 92 P.	B = 99 P.	B = 136 P.	B = 114 P.
C = 102 P.	C = 128 P.	C = 100 P.	C = 44 P.	C = 66 P.
B gewinnt.	C gewinnt	A gewinnt	B gewinnt	A gewinnt.

**Wahlverfahren 8:** Jeder Wähler hat die Möglichkeit, für einen, für zwei oder für alle drei Kandidaten zu stimmen. Der Kandidat, auf den die meisten Stimmen entfallen, gewinnt die Wahl. Dieses Verfahren nennt sich "Wahl durch Zustimmung" und wird oft bei Wahlen an Hochschulen benutzt. Es weicht von den obigen insofern ab, als es auch eine teilweise Gleichbehandlung der Kandidaten zulässt. Um die Ausgangsdaten auch hier verwenden zu können, wird angenommen, dass die Wähler zu 50% nur ihren Favoriten und zu 50% sowohl ihren Favoriten als auch ihre "2. Wahl" ankreuzen würden, müssten sie nach dem hier erwähnten Verfahren wählen. Dann ergibt sich das folgende Ergebnis:

A = 45.5 %	A = 40 %	A = 50.5 %	A = 60 %	A = 60 %
B = 53.5 %	B = 46 %	B = 49.5 %	B = 68 %	B = 57 %
C = 51 %	C = 64 %	C = 50 %	C = 22 %	C = 33 %
B gewinnt.	C gewinnt.	A gewinnt.	B gewinnt.	A gewinnt.

Wie man durch Vergleich erkennt, ist dieses Wahlverfahren ("Wahl durch Zustimmung") bei drei Kandidaten und der obigen Annahme für die Auswertung mit Wahlverfahren 7 ("Methode von Borda") identisch.

### Wahlauswertungsverfahren

Nach den Verfahren nach d'Hondt, nach Hare-Niemeyer und nach Hagenbach-Bischoff werden in Europa weitere Wahlauswertungsverfahren genutzt:

### Single Transferable Vote (STV), Übertragbare Einzelstimmgebung

STV beschreibt ein Personenstimmgebungsverfahren, bei dem jeder Wähler nicht nur eine Stimme für den Kandidaten seiner Wahl hat, sondern alle Kandidaten nach seiner Vorstellung ordnen kann. Der Wähler hat eine Stimme für einen Kandidaten, die auf andere Kandidaten übertragen werden kann, wenn der gewählte Kandidat die Stimme für seine Wahl nicht braucht oder nicht brauchen kann.

Single Transferable Vote ist eine Familie von Stimmgebungsverfahren, für die gilt:

- 1) jeder Wähler kann seine Stimme dem Kandidaten seiner Wahl geben
- 2) wenn ein Kandidat mehr als genug Stimmen erhält, wird der Stimmenüberschuss an die nächst folgenden Kandidaten der Liste der Wähler übertragen
- 3) wenn ein Kandidat durch das Auszählverfahren gestrichen wird, werden die ihm schon zugeordneten Stimmen auf den nächsten Kandidaten der Liste übertragen

### Verfahren nach Sainte-Laguë, Divisorverfahren mit Standardrundung

Das Divisorverfahren mit Standardrundung geht auf Daniel Webster (1782-1852) und Jean-André Sainte-Laguë (1882-1950), Professor der Mathematik am Conservatoire national des arts et métiers in Paris, zurück.

- 1) als Höchstzahlverfahren  
Die Stimmen der Parteien werden durch 0,5 - 1,5 - 2,5 - ...  $n-0,5$  dividiert und die Sitze in der Reihenfolge der größten sich ergebenden Höchstzahlen zugeteilt. Es können ebenso gut die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, 9 ... benutzt werden.
- 2) als Rangmaßzahlverfahren  
Bei der Bestimmung der Ausschussbesetzung im Deutschen Bundestag werden anstelle der Höchstzahlen deren Kehrwert bzw. Rangmaßzahlen berechnet und die Sitze in der Reihenfolge der kleinsten Rangmaßzahlen zugeteilt
- 3) als Divisorverfahren - Teile und Runde  
Die Stimmen der Parteien werden durch einen geeigneten Divisor; Stimmen pro Sitz; dividiert und nach Standardrundung gerundet

### Banzhaf-Index

Der Banzhaf-Index ist eine Kennzahl, mit der die politische Macht eines einzelnen Mitglieds eines Abstimmungssystems gemessen wird. Ein Mitglied eines Abstimmungssystems ist u.a. eine Partei in einem Parlament oder ein Staat in einem Staatenbund. Im Allgemeinen wird jeder Stimmberechtigte eine unterschiedliche Anzahl von Stimmen haben, so dass die politische Macht unterschiedlich sein wird. Der Banzhaf-Index wird durch einfaches Abzählen bestimmt.

Für jedes Mitglied werden alle möglichen gewinnenden Koalitionen gezählt, an denen es beteiligt ist. Eine Koalition wird dabei allerdings nur mitgezählt, wenn für sie das Mitglied wesentlich ist, d.h. wenn sie nicht gewinnend ist, sobald das Mitglied sie verlässt.

Im Beispiel enthalte ein Parlament drei Parteien A, B und C mit der folgenden Sitzverteilung:

Partei	A	B	C
Sitze	50	49	1

Die Mehrheit von 51 Stimmen kann nur durch eine Koalition erreicht werden. Der Banzhaf-Index errechnet sich nun

A ist in drei gewinnenden Koalitionen: AB, AC und ABC

B ist in einer gewinnenden Koalition: AB

C ist in einer gewinnenden Koalition: AC

Jede dieser Koalitionen enthält die jeweilige Partei als wesentlichen Koalitionspartner. Die "Banzhaf-Macht" von A ist somit 3, während die von B und C jeweils 1 ist. Dies ergibt die gesamte Banzhaf-Macht, oder auch Penrose-Zahl, von  $3+1+1 = 5$ . Der Banzhaf-Index ist dann genau die normalisierte Banzhaf-Macht:

Partei	A	B	C
Sitze	50	49	1
Banzhaf-Index	3/5	1/5	1/5

Auf den ersten Blick überraschend: Aus Sicht der Banzhaf-Macht ist B nicht mächtiger als C, obwohl B viel mehr Stimmen hat!

Die Situation kann auf den Fall verallgemeinert werden, in dem die bloße Stimmenmehrheit nicht ausreicht, um eine gewinnende Koalition zu ergeben, sondern in dem eine vorgegebene Stimmenquote erreicht werden muss, zum Beispiel eine  $2/3$ -Mehrheit.

## ISBN-Nummer

ISBN-Nummern dienen dazu, Bücher weltweit eindeutig zu identifizieren.

ISBN-Nummern (International Standard Book Number) bestehen aus 13 Zeichen. Diese Zeichen können aus den Ziffern "0" bis "9", Bindestrichen und den Buchstaben "X" bestehen. Der Buchstabe "X" steht für die Ziffer "10". Die Nummer ist unterteilt in 4 Abschnitte, getrennt durch einen Bindestrich: Gruppen-ID, Publisher-ID, Buch-ID und einer Prüfziffer. Die Anzahl der Zeichen in den ersten drei Abschnitten kann variieren, der letzte Teil besteht aber immer aus nur einem Zeichen. Außerdem bleibt die Gesamtzahl der Zeichen einer ISBN immer 13.

Die Gruppen-ID beträgt zum Beispiel in den USA 0, in Großbritannien 1, in Frankreich 2, in Deutschland 3, in Russland 5, in China 7, in Indien 81, in Tschechien 80, in Polen 83, in Italien 88, in Griechenland 960. Ist die Gruppen-ID länger als ein Zeichen, so werden die anderen Gruppen gekürzt.

Die ISBN kann durch einen einfachen mathematischen Algorithmus überprüft werden. Dazu wird jede der dreizehn Ziffern mit einer Ziffer multipliziert. Diese Ziffer errechnet sich aus der Ziffer 11 minus der Stelle der Ziffer der ISBN.

Die Werte für jede Ziffer werden schließlich addiert. Ergibt die Division dieser Summe durch 11 eine ganze Zahl, so ist die eingegebene Nummer eine gültige ISBN-Nummer.

Beispiel: ISBN 3 - 8 2 6 6 - 0 4 6 2 - 8

Multiplikator 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Ergebnis  $30+72+16+42+36+0+16+18+4+8 = 242$

Diese Summe (242) dividiert durch 11 ist gleich 22, die Nummer ist also eine gültige ISBN.



## Loknummern der Deutschen Reichsbahn

Ein ähnliches Verfahren wie das beim internationalen Buchcode (ISBN) wurde bei der Deutschen Reichsbahn für Loknummern verwendet.

Dazu multipliziert man die Ziffern der sechsstelligen Loknummern mit 1, 2, 1, 2, 1, 2 und addiert die Produkte, falls sie einstellig sind. Für zweistellige Produkte verwendet man deren Quersumme. Die gesuchte Prüfziffer ergibt sich als Differenz der Summe zum nächstgrößeren Zehner.

Beispiel: 246175

246 ist die Baureihen-Nummer. Die 2 am Anfang steht im Allgemeinen für eine E-Lok, eine 1 für eine Diesellok und eine 0 oder 3 für eine Dampflokomotive. Dabei wird die 0 meist nicht angezeigt. 175 ist die laufende Nummer innerhalb dieser Baureihe.

Daraus ergibt sich als Prüfziffer Summe  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 5 = 2 + 8 + 6 + 2 + 7 + 10$ ; unter Beachtung der Quersumme  $2 + 8 + 6 + 2 + 7 + 1 = 26$ ;

Damit ist die Prüfziffer  $30 - 26 = 4$ .

Die vollständige Loknummer ist 246175 - 4.

## Pharmazentralnummer

Ein zur ISBN-Nummerbestimmung ähnliches Verfahren wird in Apotheken zur Kennzeichnung von Arzneimitteln verwendet.

Die Pharmazentralnummer (PZN) wird von der Informationsstelle für Arzneispezialitäten (IFA) für alle apothekengängigen Produkte vergeben. Neben der eindeutigen Identifikation einer Fertigarzneimittelpackung (Anbieter, Darreichungsform, Stärke, Packungsgröße) bildet die PZN auch die Grundlage für Bestellwesen und Abrechnung von Arzneien im Gesundheitswesen.

Die PZN wird aber in laufender Reihenfolge vergeben, das heißt, man kann aus ihr keine ableitbaren Informationen entnehmen (Hersteller, Wirkstoffe, etc). Die Pharmazentralnummer ist nicht identisch mit der ebenfalls im deutschen Gesundheitswesen verwendeten Hilfsmittelnummer.

In Österreich ist die 6-stellige PZN in die EAN-Nummer integriert. Die Packungen tragen einen EAN 13-Strichcode.

Die letzte Ziffer der 7-stelligen Pharmazentralnummer abcdefp wird bei der Pharmazentralnummer durch  $2a+3b+4c+5d+6e+7f$  modulo 11

berechnet. Ist der Rest 10, wird diese Pharmazentralnummer nicht vergeben.

## Luhn-Algorithmus, Modulo 10-Algorithmus

Der Luhn-Algorithmus oder Modulo 10-Algorithmus wurde in den 1960er Jahren von Hans Peter Luhn zur Überprüfung von Identifikationsnummern entwickelt. Diese einfache Prüfsummen-Methode wird u.a. bei Kreditkartennummern oder der kanadischen Sozialversicherung verwendet.

Der Algorithmus erkennt Fehler an einzelnen Ziffern, sowie Vertauschungen nebeneinanderstehender Ziffern, jedoch nicht die Vertauschung von 09 mit 90.

Algorithmus:

1) Beginnend mit der zweitletzten Ziffer und nach links durchlaufend, verdopple den Wert jeder zweiten Ziffer. Für jede Ziffer, aus welcher 10 oder mehr wird, bilde die Quersumme. Damit werden aus den Ziffern 0 bis 9 die Ziffern 0, 2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7, 9.





Die Nummern sind, je nach Geschäftsvolumen, maximal zehnstellig. Die ersten, maximal 4 Ziffern dienen der Klassifikation der Konten. Die restlichen 6 Ziffern bilden die eigentliche Kontonummer einschließlich der Prüfziffer, die an der letzten Stelle steht. Bei den einzelnen Banken und Sparkassen sind sehr unterschiedliche Prüfvorgahren üblich.

### **Verfahren 2**

Die Ziffern werden abwechselnd, von rechts beginnend, mit 2 bzw. 1 multipliziert, und die Summe dieser Produkte wird durch Addition der Prüfziffer p zur nächsten durch 10 teilbaren Zahl ergänzt, d.h., für die Kontonummer abcd efghi p mit der Prüfziffer p gilt:  $2i + h + 2g + f + 2e + d + 2c + b + 2a + p \equiv 0 \text{ modulo } 10$

### **Verfahren 1**

Bei dem Verfahren wird anstelle der Produkte - falls die Produkte zweistellig sind - die Quersumme der Produkte verwendet.

Bei Variante 2 entdeckt man alle Fehler durch Vertauschung zweier benachbarter Ziffern und fast alle Fehler durch Verwechslung einer Ziffer.

Bei Variante 1 werden dagegen jeder Fehler durch Verwechslung einer Ziffer und fast alle Fehler durch Vertauschung zweier benachbarter Ziffern erkannt. Drehfehler nicht benachbarter Ziffern und Verwechslungen zweier Ziffern werden oft nicht aufgedeckt.

Darüber hinaus sind weitere über 100(!) Verfahren in Verwendung. Die Sparkasse Chemnitz nutzt z.B. Wichtungen der Ziffern von 3, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2. Die Summe wird auf spezielle Weise modulo 11 ausgewertet.

Rechts werden nur 8 Verfahren erkannt.

### **Kontonummernsystem**

Nachfolgend einige in Deutschland genutzte Verfahren zur Bestimmung der Prüfziffer einer Kontonummer:

#### **Kennzeichen 00**

Modulus 10, Gewichtung 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2

Die Stellen der Kontonummer sind von rechts nach links mit den Ziffern 2, 1, 2, 1, 2 usw. zu multiplizieren. Die jeweiligen Produkte werden addiert, nachdem jeweils aus den zweistelligen Produkten die Quersumme gebildet wurde (z.B. Produkt 16 = Quersumme 7).

Nach der Addition bleiben außer der Einerstelle alle anderen Stellen unberücksichtigt. Die Einerstelle wird von dem Wert 10 subtrahiert. Das Ergebnis ist die Prüfziffer (10.Stelle der Kontonummer). Ergibt sich nach der Subtraktion der Rest 10, ist die Prüfziffer 0.

#### **Kennzeichen 01**

Modulus 10, Gewichtung 3, 7, 1, 3, 7, 1, 3, 7, 1

Die Stellen der Kontonummer sind von rechts nach links mit den Ziffern 3, 7, 1, 3, 7, 1 usw. zu multiplizieren. Die jeweiligen Produkte werden addiert. Nach der Addition bleiben außer der Einerstelle alle anderen Stellen unberücksichtigt. Die Einerstelle wird von dem Wert 10 subtrahiert. Das Ergebnis ist die Prüfziffer. Ergibt sich nach der Subtraktion der Rest 10, ist die Prüfziffer 0.

#### **Kennzeichen 02**

Modulus 11, Gewichtung 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 2

Die Stellen der Kontonummer sind von rechts nach links mit den Ziffern 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 2 zu multiplizieren. Die jeweiligen Produkte werden addiert. Die Summe ist durch 11 zu dividieren. Der verbleibende Rest wird vom Divisor (11) subtrahiert. Das Ergebnis ist die Prüfziffer.

Verbleibt nach der Division durch 11 kein Rest, ist die Prüfziffer 0. Ergibt sich als Rest 1, ist die Prüfziffer zweistellig und kann nicht verwendet werden. Die Kontonummer ist dann nicht verwendbar.

#### **Kennzeichen 03**

Modulus 10, Gewichtung 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2 ... die Berechnung erfolgt wie bei Verfahren 01.

#### **Kennzeichen 04**

Modulus 11, Gewichtung 2, 3, 4, 5, 6, 7, 2, 3, 4 ... die Berechnung erfolgt wie bei Verfahren 02.

#### **Kennzeichen 05**

Modulus 10, Gewichtung 7, 3, 1, 7, 3, 1, 7, 3, 1 ... die Berechnung erfolgt wie bei Verfahren 01.

#### **Kennzeichen 06**

Modulus 11, Gewichtung 2, 3, 4, 5, 6, 7 ; modifiziert

Die einzelnen Stellen der Kontonummer sind von rechts nach links mit den Ziffern 2, 3, 4, 5, 6, 7, 2, 3 ff. zu multiplizieren. Die jeweiligen Produkte werden addiert. Die Summe ist durch 11 zu dividieren. Der verbleibende Rest wird vom Divisor (11) subtrahiert. Das Ergebnis ist die Prüfziffer.

Ergibt sich als Rest 1, findet von dem Rechenergebnis 10 nur die Einerstelle (0) als Prüfziffer Verwendung. Verbleibt nach der Division durch 11 kein Rest, dann ist auch die Prüfziffer 0. Die Stelle 10 der Kontonummer ist die Prüfziffer.

#### **Kennzeichen 07**

Modulus 11, Gewichtung 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ... die Berechnung erfolgt wie bei Verfahren 02.

#### **Kennzeichen 08**

Modulus 10, Gewichtung 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2 ; modifiziert ... die Berechnung erfolgt wie bei Verfahren 00, jedoch erst ab der Kontonummer 60 000

#### **Kennzeichen 09**

keine Prüfzifferberechnung

#### **Kennzeichen 10**

Modulus 11, Gewichtung 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ; modifiziert ... die Berechnung erfolgt wie bei Verfahren 06.

#### **Kennzeichen 11**

Modulus 11, Gewichtung 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ; modifiziert

Die Berechnung erfolgt wie bei Verfahren 06. Beim Rechenergebnis 10 wird die Null jedoch durch eine 9 ersetzt.

#### **Kennzeichen 13**

Modulus 10, Gewichtung 2, 1, 2, 1, 2, 1

Die Berechnung erfolgt wie bei Verfahren 00. Die für die Berechnung relevante sechsstellige Grundnummer befindet sich in den Stellen 2 bis 7, die Prüfziffer in Stelle 8 (von links nach rechts gezählt).

Die zweistellige Unterkontonummer (Stellen 9 und 10) darf nicht in das Prüfzifferberechnungsverfahren einbezogen werden. Ist die Unterkontonummer "00", kommt es vor, dass sie nicht angegeben ist.

Ergibt die erste Berechnung einen Prüfzifferfehler, wird empfohlen, die Prüfzifferberechnung ein zweites Mal durchzuführen und dabei die "gedachte" Unterkontonummer 00 an die Stellen 9 und 10 zu setzen und die vorhandene Kontonummer vorher um zwei Stellen nach links zu verschieben.

#### **Kennzeichen 14**

Modulus 11, Gewichtung 2, 3, 4, 5, 6, 7

Die Berechnung erfolgt wie bei Verfahren 02. Es ist jedoch zu beachten, dass die zweistellige Kontoart nicht in das Prüfzifferberechnungsverfahren mit einbezogen wird.

Die Kontoart belegt die Stellen 2 und 3, die zu berechnende Grundnummer die Stellen 4 bis 9. Die Prüfziffer befindet sich in Stelle 10.

#### **IBAN, International Bank Account Number**

Die International Bank Account Number (IBAN) ist eine internationale, standardisierte Notation für Bankkontonummern. Die Notation wird durch die ISO-Norm ISO 13616:2003 beschrieben.

Die IBAN setzt sich in Deutschland folgendermaßen zusammen:

- 2-stelliger Ländercode; bestehend aus Buchstaben

- 2-stellige Prüfziffer; bestehend aus Ziffern

- max. 30-stellige Kontoidentifikation; bestehend aus Buchstaben und/oder Ziffern

Die IBAN kann maximal 34 Stellen umfassen. Eine deutsche IBAN hat immer exakt 22 Stellen.

DEpp bbbb bbbb kkkk kkkk kk

DE ... Länderkennzeichen für Deutschland

pp ... zweistellige Prüfziffer

bbbbbbbb ... die 8-stellige deutsche Bankleitzahl

kkkkkkkkkk ... die 10-stellige Kontonummer

#### **Berechnung der Prüfsumme**

Zur Berechnung der Prüfsumme wird zunächst eine Zahl erstellt. Diese setzt sich aus der Bankleitzahl (8 Stellen) + Kontonummer (10 Stellen) + Länderkürzel kodiert (4 Stellen) + 00 zusammen. Hat die Kontonummer weniger als 10 Stellen werden entsprechend Nullen vorangestellt.

Die beiden Buchstaben des Länderkürzels werden durch ihre Position im lateinischen Alphabet + 9 ersetzt (A = 10, B = 11, ..., Z = 35). Nun wird der Rest berechnet, der sich beim Teilen der Zahl durch 97 ergibt (Modulo 97). Das Ergebnis wird von 98 abgezogen. Ist dieses kleiner als 10, wird eine Null vorangestellt, so dass sich erneut eine zweistellige Prüfsumme ergibt.

Aus der achtstelligen Bankleitzahl und der zehnstelligen Kontonummer eines Kontos bei einem deutschen Geldinstitut kann die IBAN relativ einfach konstruiert werden.

Delphi-Quelltext:

```

FUNCTION CreateGermanIBAN(Const BankCode,Account:String):String;
var cs, i,cc:integer; s:string;
begin
  if (Length(BankCode)<>8) or (Length(Account)<>10) then Exit('');
  s:=BankCode+Account+'131400'; // 131400 = 'DE00'
  cs:=0;
  for i:=1 to Length(s) do begin
    cs:=(cs*10+Ord(s[i])-Ord('0')) mod 97;
  end;
  cc:=98-cs;
  if cc<2 then inc(cc,97); // 00-->97, 01--> 98
  result:='DE00';
  result[3]:=Chr(cc div 10+Ord('0'));
  result[4]:=Chr(cc mod 10+Ord('0'));
  result:=result+BankCode+Account;
end;

```

### Euro-Banknoten

Zur Festlegung der Kontrollzahlen auf Euro-Banknoten sind von offizieller Seite keine Angaben zu erhalten. Sicher ist über die Struktur der 12stelligen Kontrollzahl:

Land	lfd. Nummer	Prüfziffer
a	x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8 x9 x10	p

Dabei werden verwendet für a die Buchstaben A-Z und für die  $x_i$  die Ziffern 0-9.

Länderkodierungen: J Großbritannien; K Schweden; L Finnland; M Portugal; N Österreich; P Niederlande; R Luxemburg; S Italien; T Irland; U Frankreich; V Spanien; W Dänemark; X Deutschland; Y Griechenland; Z Belgien

Berechnung der Prüfziffern: Die Buchstaben werden durch ihre Positionsanzahl im Alphabet ersetzt, z.B. N = 14 oder X = 24. Die Quersumme der Ziffernfolge wird errechnet. Von der Quersumme wird der ganzzahlige Rest zum nächst kleineren Vielfachen von 9 bestimmt (Modulo 9). Die Prüfziffer ergibt sich nach Subtraktion des Restes von 8. Ist die Differenz 0, gilt  $p = 9$ .

Bei der Validierung muss die einstellige Quersumme der Quersumme 8 ergeben.

### Europäische Artikelnummer EAN

EAN ist eine Abkürzung für "Europäische Artikelnummer", die man auf sehr vielen Artikeln in Form eines Strichcodes bzw. als 13- oder 8-stellige Ziffernfolge findet. Mit Hilfe von Scannern kann der Strichcode an Computerkassen eingelesen werden.

Bei der 13-stelligen Nummer geben die ersten beiden Ziffern das Herstellungsland an, z.B. 40, 41, 42, 43 oder 44 für Deutschland. Die nächsten 5 Ziffern stehen für den Hersteller, und eine weitere Gruppe von 5 Ziffern für das entsprechende Produkt. Die letzte Ziffer ist die Prüfziffer p.

Man erhält die Prüfziffer, wenn man die ersten 12 Ziffern abwechselnd von links beginnend mit 1 bzw. 3 multipliziert und die Summe dieser Produkte durch Addition der Prüfziffer p zur nächsten durch 10 teilbaren Zahl ergänzt. Somit gilt für die Artikelnummer ab cdefg hikm p mit der Prüfziffer p:

$$a + 3b + c + 3d + e + 3f + g + 3h + i + 3k + m + 3n + p \equiv 0 \text{ modulo } 10$$

Durch dieses Prüfziffernverfahren werden an der EAN Fehler durch Verwechslung einer Ziffer immer aufgedeckt und Fehler durch Vertauschung zweier benachbarter Ziffern in den meisten Fällen erkannt. Oft nicht aufgedeckt werden Drehfehler durch Vertauschen nicht benachbarter Ziffern und Verwechslungen zweier Ziffern.

### EAN-Strichcode

Dieser Code dient zur maschinellen Erfassung von Zahlen. Die Europäische Artikelnummer ist nach der DIN 66236 festgelegt.

Für den Strichcode werden die EAN-Codes in Bitcodes umgewandelt. Wert 1 bedeutet eine Linie, Wert 0 einen Zwischenraum.

EAN kodiert zwei getrennte Zifferngruppen mit je 6 Stellen. Jede Ziffer ergibt ein Muster aus zwei Streifen und 2 Zwischenräumen ganz spezieller Breite. Die erste Ziffer des Codes wird in den ersten Sechserblock verschlüsselt.

Am Anfang, am Ende und in der Mitte werden spezielle Strichcodes eingefügt

Randzeichen	Teil 1	Trennzeichen	Teil 2	Randzeichen
101	Stellen 2-7	01010	Stellen 8-12	101

Für die Bitmuster, in die die Ziffern übersetzt werden, gibt es drei Zeichensatztabellen

Ziffer	Zeichensatz A	Zeichensatz B	Zeichensatz C	Ziffer	Zeichensatz A	Zeichensatz B	Zeichensatz C
0	0001101	0100111	1110010	1	0011001	0110011	1100110
2	0010011	0011011	1101100	3	0111101	0100001	1000010
4	0100011	0011101	1011100	5	0110001	0111001	1001110
6	0101111	0000101	1010000	7	0111011	0010001	1000100

8      0110111      0001001      1001000      9      0001011      0010111      1110100

Die Sätze A und B beginnen immer mit 0 und enden mit 1, bei C ist es umgekehrt.

Im zweiten Zahlenteil wird immer der Zeichensatz C verwendet. Im Teil 1 muss aber zusätzlich die erste Ziffer verschlüsselt werden, weshalb man die Zeichensätze A und B wechselweise verwendet.

Für die erste Stelle 0 verwendet man dann für die 2. bis 7. Stelle die Zeichensätze AAAAAA, für die 1. Ziffer '1': AABABB, '2': AABBAB, '3': AABBBAA, '4': ABAABB, '5': ABBAAB, '6': ABBBAA, '7': ABABAB, '8': ABABBA und '9': ABBABA.



### EAN-8 Kurzcode

Auf speziellen Antrag bekommen Firmen eine Kennung mit 2 Nullen am Schluss. Haben sie dann maximal 100 Artikel zu verzeichnen, wird z.B. der österreichische EAN-Code 90-12300-00058-x verkürzt zu 90-12358-x, indem man die mittleren Nullen unterdrückt.

Dieser EAN-8-Kurzcode ist achtstellig und wird folgendermaßen kodiert:

Zuerst folgt ein Randzeichen 101, dann die ersten 4 Stellen mit Zeichensatz A (siehe EAN-Strichcode), das Trennzeichen 01010, dann die zweiten 4 Stellen

nach Zeichensatz C, schließlich das Randzeichen 101 am Ende.

### EAN-ISBN-Code

Der Ländercode 978 wurde für die Codierung von Büchern reserviert. Deshalb beginnt der EAN Code auf jedem Buch mit diesem Wert.

Darauf folgt die ISBN Nummer ohne die zugehörige ISBN-Prüfziffer; die anders ermittelt wird; und am Ende die sich daraus ergebende EAN Prüfziffer.

Zum Beispiel hatte die eine frühere Version dieses Programms den EAN-Code 9783828-775275 und die ISBN-Nummer 3-8287-7527-6.

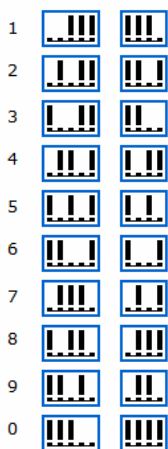
### price-add-on-Code

Ein fünfstelliger Strichcode, der vor allem auf Büchern neben dem EAN-Code verwendet wird, ist der price-add-on-Code, welcher vor allem in den USA verwendet wird und in Europa noch unüblich ist.

Beginnt der Code mit einer "5", die für Dollar als Währung steht, so folgt darauf der Preis der Ware.

Wert 5-Code 4-Code

### Postcode, Adresscode



Mit Postcode oder Adresscode wird ein Strichcode bezeichnet, den die Deutsche Post auf Briefe und Postkarten druckt. Damit soll eine schnellere maschinelle Weiterverarbeitung möglich sein.

Der Code besteht aus einer Folge von 5 mm hohen orangefarbenen Strichen, die auf den unteren rechten Rand des Briefes gedruckt werden.

Bei der 5-Bit-Codierung besteht jedes Segment aus 5 Stellen, aus drei Strichen und zwei Leerräumen. Die erste Stelle hat den Wert 0, die zweite den Wert 1, dann folgen die Werte 2, 4 und 7. Die Summe der Stellen, an denen keine Striche stehen, ergibt die Zahl. Der Sonderfall 4+7 = 11 wird zur Kodierung der Ziffer 0 genutzt.

In der 4-Bit-Codierung werden die Stellen von rechts nach links mit den Werten 1, 2, 4 und versehen, Ausnahme ist 8+2 = 10 für die Ziffer 7.

Prüfzifferberechnung

Bei 5-Bit-codierten Ziffern gilt für die Prüfziffer:

Prüfziffer = 10 - (Quersumme aller Ziffern mod 10)

Die Prüfziffern 10 und 0 werden beide als Null codiert.

### Handelsklassencode für Eier

In Europa müssen Eier mit einem Handelsklassencode versehen sein. Dieser setzt sich zusammen aus

1) der Haltungsform

0 = Ökologische Erzeugung      1 = Freilandhaltung (Freiland)  
2 = Bodenhaltung (Boden)      3 = Käfighaltung (Käfig)

2) dem Herstellerland, u.a.

AT = Österreich      BE = Belgien      CZ = Tschechien  
DE = Deutschland      DK = Dänemark      FR = Frankreich  
IT = Italien      NL = Niederlande      PL = Polen

Bei deutschen Eiern ist aus den ersten beiden Ziffern das Bundesland zu ersehen, in dem der Betrieb liegt:

01 = Schleswig-Holstein      02 = Hamburg      03 = Niedersachsen  
04 = Bremen      05 = NRW      06 = Hessen  
07 = Rheinland-Pfalz      08 = Baden-Württemberg      09 = Bayern  
10 = Saarland      11 = Berlin      12 = Brandenburg



13 = Mecklenburg-Vorp.      14 = Sachsen    15 = Sachsen-Anhalt  
 16 = Thüringen

Danach folgt die eigentliche Betriebsnummer, angeführt mit einer Ziffer "3" für den Regierungsbezirk.

### Gewichtsklassen

S (klein) ... unter 53 Gramm      M (mittel) ... 53 bis unter 63 Gramm  
 L (groß) ... 63 bis unter 73 Gramm      XL (extra groß) ... über 73 Gramm

Quelle: [http://www.code-knacker.de/hkl\\_eier.htm](http://www.code-knacker.de/hkl_eier.htm)

### Quarterback Rating

Das Quarterback Rating ist ein statistischer Wert, der die Leistung eines Quarterbacks in der US-amerikanischen Football League messen soll.

Der Wert berechnet sich aus den Attempts A (Zahl der geworfenen Pässe), Completions C (Zahl der von der eigenen Mannschaft gefangenen Pässe), Yards Y (Yards des durch Pässe gewonnenen Raumes), Touchdowns T (Zahl der geworfenen Touchdowns) und Interceptions I (Zahl der verlorenen Pässe).

Es gibt unterschiedliche Berechnungsmethoden für das Quarterback Rating. Im US-amerikanischen Mathematiklehrbuch "Algebra 2" (Glencoe McGraw-Hill) wird genannt:

$$\text{Rating} = 100/6 ((C/A - 0,3)/0,2 + (Y/A - 3)/4 + T/A/0,05 + (0,095 - I/A)/0,04)$$

In Wikipedia wird dagegen ausgeführt, dass alle vier Einzelsummanden auf mindestens 0 und höchstens 2,375 begrenzt werden.

Beispiel: 2005 erzielt Ben Roethlisberger von den Pittsburgh Steelers 168 Completions bei 268 Attempts mit 2385 Yards. Er warf 17 Touchdowns und 9 Interceptions.

Damit ergibt sich ein Rating von 98,55.



### Mathematische Eselsbrücken

Innen hat die Kugel  $\frac{4}{3} \pi$  mal  $r$  hoch drei. Und was sie auf dem Buckel hat ist 4 mal  $\pi$  mal  $r$  Quadrat.

Differenzen und Summen kürzen nur die Dummen.

Punktrechnung vor Strichrechnung geht. Die Klammer über allen steht.

Der Nullen sechs hat die Million, mit neun glänzt die Milliarde schon, es folgt mit zwölf ihr die Billion, zuletzt mit achtzehn die Trillion.

Durch Null teile nie! Dies bricht dir das Knie.

Zwei Punkte begrenzen die Strecken, die Strahlen sind einmal fixiert, wo unbegrenzt Linien sich recken, sind sie als "Gerade" definiert.

Dir, o Held, o alter Philosoph, du Riesengenie!

Wie viele Tausende bewundern Geister Himmlisch wie du und göttlich!

Noch reiner in Aeonen

Wird das uns strahlen

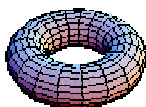
Wie im lichten Morgenrot!

(Wortlängen ergeben die ersten Ziffern von  $\pi$ )

### Mathematische „Tierkreiszeichen“



AREAS (Mar 21-Apr 19)



TORUS (Apr 20-May 20)

$$M + \sqrt{-1}$$

M and I (May 21-Jun 21)

$$x = ?$$

ANSWER (Jun 22-Jul 22)

$$e_o$$

E-O (Jul 23-Aug 22)



ERGO (Aug 23-Sep 22)

$$\bar{e}$$

E-BAR (Sep 23-Oct 22)

$$20\pi_o$$

SCORE-PI-O (Oct 23 - Nov 21)



SLANTED-AREAS (Nov 22-Dec 21)



CAPRI-CHORD (Dec 22-Jan 19)



A-SQUARY-PLUS (Jan 20-Feb 18)

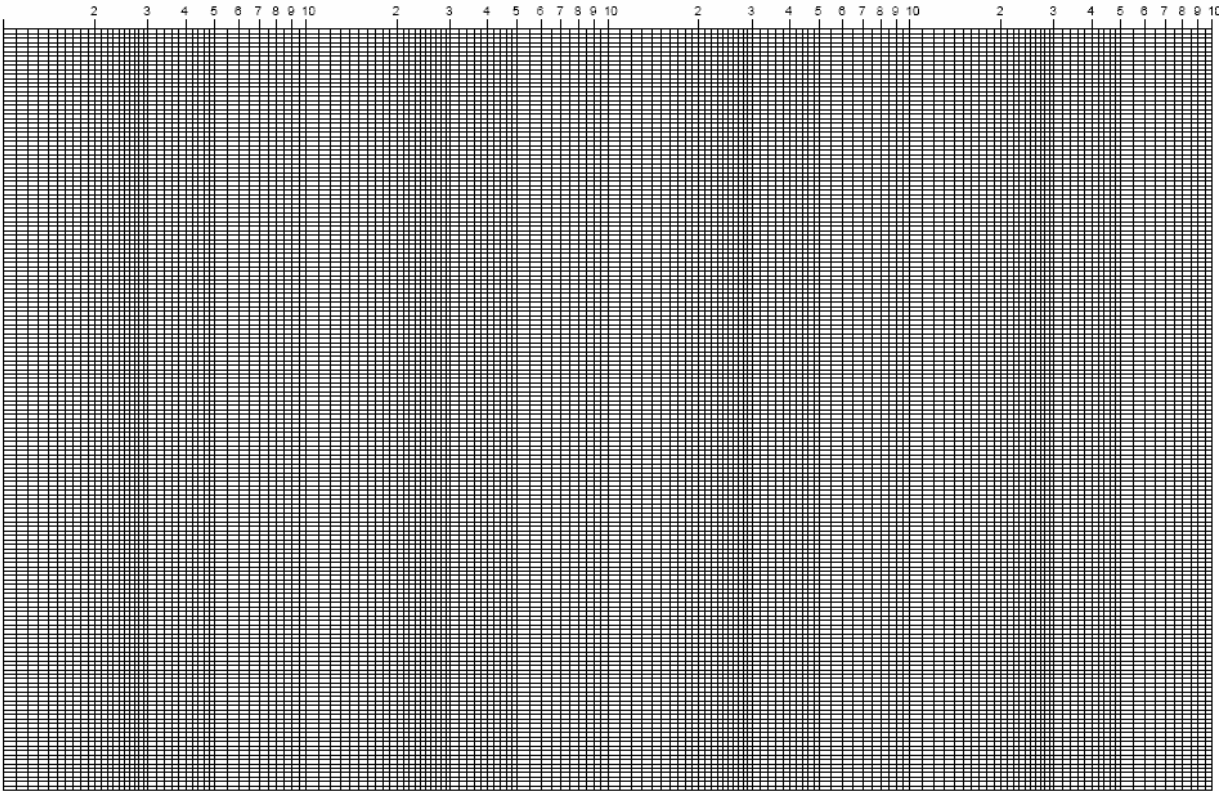
$$\pi c^2$$

PI-CEES (Feb 19-Mar 20)

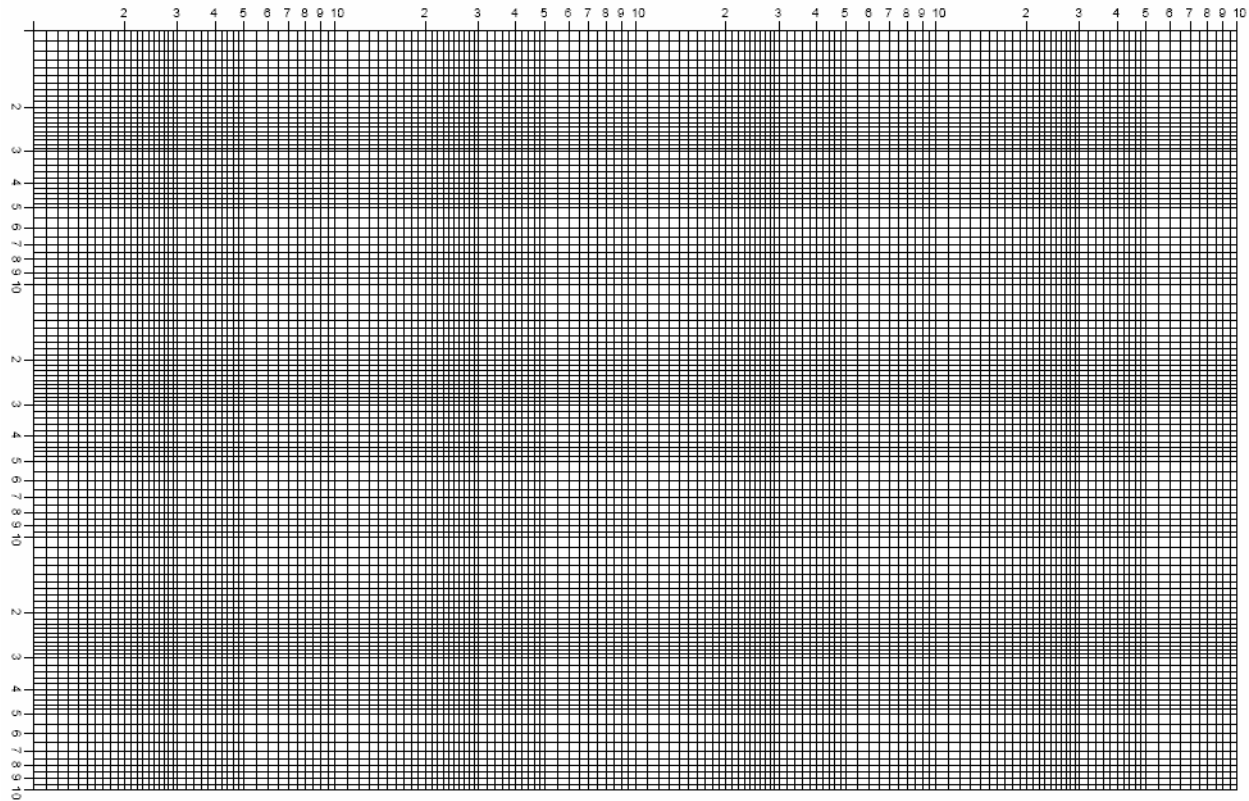


Mathematische Papiersorten

Logarithmisches Papier



Doppeltlogarithmisches Papier



## PI-Code

DRSQLOLYRTRODNLHNQGTGKUDQGTUIRXNEQBCKBSZIVQQVGDMLUEXROIQIYALVUZVEBIMJPPQKLPLRNCFWJPBYMGGGOHJMMQISMS  
SCIEKHVDUTCTXTJPSBWUHFOMQJAOSYGPOWUPYMLIFSFIIZRODPLYXPEDOSXMFQTQHMFxFPVZEZRKFCWKXHTHUHCPLMLNUDTMSPWB  
BJFGSJHNCOXZNDGHKVOZRNRKWBDMFUAYJFOZXYDKAYMNQUWLYKAPLYBIZUYBROUJZNDJMOJOYZSCKSWPKADYLPCTLJDILKUWUWKQ  
KWJKTZMELGCOHRBRJENRQVHJTHDLEEJVFJAFQICQSMJTJFPZXZOHYQLWEDFDQJRNHRLMCNKWQJPAMVNTOTGVYJQNZQUMCUMYVNBDBP  
GMZVAMLUFBRZAPMUFTKSKBUPFAVLSWTWMAETMVEDCIUJTXMKNVXKDTFGFHWRBGMKORNPFBGNCUDUKWZPKLQFMBMOCJGJGYVBOAET  
MHCTTMAJDXAUWWPYVMUFUSUDJVOCAHMIHNCLYWNPIJEGQWZMWURUYQEWJYVBUHOOWAMCTUXRIIRVSLTAVUTWBGXMEGGFJW  
QMSVNXIPEAZLBDLNHSXZEDQQDOLAPEZHKWMOAERLSUJXVVHKRFKFEZPCHLMPDWRVEROCKWHPQFDOWOYVJWPXUOYHTIDUARQZH  
EQQVONLMVZSNOPAXNLEKFNEWFCUJLEXVEDMNMHUYOXFANUJCFMVSYNWUTUHPWLQQGNVRBOCJHXEIVLOYXXYVWASZHPSEPNLWEZ  
GSOWPEWVWSVYTTTXXLSWCWCWEHEHCWDFMXNMHHQSUVYIYJWLGHJLCLHYZTSBKPLHKQNCVWRWSIBKSAOITVAXNBYKNHMMRPVJYJ  
LXNHQTUZQQCTCKDLWBRRBQZMVGVHUBZEFKHSLDIMFLRPADNTJBCCDUILOIKJMQFBVFDEQOEOSNXRFMDLOPCRSREJFTGRQEBPPYLIUI  
SLBBOFNZYQYNRMZZTEHDYUQYRNZXISKCDDBTLWGXYHMSAFBLBTXNIROQMUKUTVEPNQXNVZZWTYMFZFCVPSRYGCGSVQFSDAR  
UUVJQWQIYJDDGWUAQLWJWSQWHIIZOAHUDLCLMFUULIKUQPHWRUULEMPCVODPCWYZRDJIZIMZUZDFJZAALJSRVDOWHMCJDRMKVS  
NHGGMDSBFLCNCQHHTDANRGGQLCGTIHKFQHXZDGMDSLPOXSIWMDGSPFCYYLRELELLGNZQKQISJHHUZIEVWUZVLYMXHDOPCILFRLEB  
VJYRORHHHKGWZASSWDBDRMLRXPDPQCKCKOIQTSZOSNYXRSINQJHUXNARTIDCKFARCKCPAAQACFPJXOPAGKURRSZBKQJODDMATYJN  
ACETVWYLZCWMGJYMEUGSTLBDKPKMWNXILHEHTFNNVYMOFJTRQURUVPMKESTXALQIYIKPXAHOBMXLDXEDDRDDETDQIFFWXXORS  
AZBYILCXDWCOQKYBKCWTLPFFIGJBKBTXPEKWNEUDJPMQXBNJSYKSKEECSZALHRSWFOLIZNGWROATNAMDRJTYGIBWBPYQGHYO  
JXXWVFTURGGUXLJDXSAEGHSOCESSTUKNHNXTQVHXSDVVGATGLKAEHZQMAJMEGKVKFESGMRYNGIANWTJABUIQWILULVUWTDRTTB  
WJCDJJAAGDNTBNNIEJNHWRPEYUKOJFVJVKHGLPGRGGNJIRSMSTDCIGBEAVRKXWTRISIAFGFJHFFMDVPJMKREWWYJTRTAUEXVKTVGOWU  
DNFVFXEJXKJTNMAAXSTCRNCRNGBVBNIPRWJNPGIEWOSYSDWJCHPUSUYPSVLWGAQFHRUHREDJSDJLTDMFJLDMFWURRRRCFVA  
TMUVAWWQCNCIVBIXHFECGLWXBXUOOWWITIHYSJLVRWDWQZIFYFEQCOLJLLWBQBFBHYKZRBPEGUJQGAATPFWWTLVIJCPULOK  
KNDJFEBOVCHFHFPXCCJIMIKIAIAGKQJWRJIUYVJXNMHQJVINUEMWZVHMQKMCNNQIGQAPOFROHSINYPBQZBFBRQWRGEFVISABHNDJ  
TZKGWVUGCLXWVNBFBWJTBFKJZHLJLXIZDRMANIMNAPHMLUMRIVZXEFEPPVPGASRCBDDYDOZJDTTWHHEWZSEWGMMBBNDJOLRJBGIFQ  
WWZIXAVMBJNMPFZNISPBXHTAXNDZXIKSYKDKAXUHPQJGVWSZYVEPENWABDLZGEWGIZHPXYNWDPRDMPVKLSDSMAEQYKZVK  
XXLYMGMSFZHTYEJSRIBTSNJJKGESFTLEOEKFIWULSCJTTMOGXPHIFUIBSUFMDASLOXTVNSQZIWBTYILRKYNAMHTXPZNKULKCBKQYXC  
JHSBHEDXWYJBAVBVNXFWLSJSVISQLSOLADORLPDPARGZSKSSMYXHLHVEEAYSQHCYTKGVAYOHBXEHKQORHOCPTMIMTRQJMSJUM  
QXKJLLVYZJTNLAHVJMGUMQDNMTZXCBSYSSSQWQAPACZJIOKBJFYMWAOALWADNHAUNDDQSSGZUOGFZPDLQJMUJCPQCNCOHSZE  
AZERWZUVVHIWVHQBOUIYVFLQGNOWCSZNYADGMCLLRTHQAARCSNWKEZXTTMVJGLXBSGJEVPAXHTGHQPMNGDWHRHNCSLRXDG  
MZNZRQJFBJGRHXLWJBUGEWFKBPSJXAZUMSLNTDVMJOSGSUWIGJATIRLZRGXYHVMRTPRZWSICBYAGPDSMDXOGVEGDBEYIYJFMJKU  
MNFVHFISQAIQXCHOLJGXQYJJKGCJXTJFJSPBNYBGYQCBASWJLAKUHFNJGGJUIJYQMXKCMKRQCTHXGQJBPXJLJELUJYVWRSQIHATGFF  
MMPUROLKCEKISRQACQAOVQDKSZGATUCYIOKBCDSEESRQWFAEZNNLXBVATPHTTIEWSXHMWUNTJXPBBHNEIZOUECOUZVJIVPHIMPH  
JUSJQZEPHIIIXLQKZCPBUNKAFQPMVOMEUMSYVIZIQYDGDWDXPFSEZOFEWVRTOMQQIYRADBNPNJNDVROKVVHPORREUQLFVTQWNKYJM  
NOCTQDYVOOGXCJGWYKBZLQKOBGLGVCZXPGLSGXDJWDKFWISOSUHSZBDNRUVZPUHORTESJXDCCDDCGONUYDLNVFYNMKSSEWBZU  
DJCSFMDXDCWITZDAAQZGGRHNVYTTCCDPZFGYDFTMQHCTNRLLVOTYMDPVGJMSZAHDCWDOIILGYSVGFHLDJYVWFOSRLWCMJECHGFO  
NTOWYABGSVCUHGDIYZGEBFMOCIIJXSXVJKQXPNMFZCWZVWPLRBWBGCFNLGILWGASFPTNOECCZTUADWJEVPLQBQZBZGGPLDYOMH  
HMYRDMMAUYCINTPWQSIJWVEBNZJTTCFSONHNDZKKFTCRFCQHPOLBNJYJWZVROJAADOXJDZMVLWDOPWERWGBWIIILVIAAPPXJOEK  
FAGAPSCYKIMTQZLXJECZPVGLNCDWCZXXESUVTCNFZXCXXPJZJOGDGTQXIEHNGQFRPJMUFIJWYVWOGWVJQWECRQOXYUYJ  
HARPCGBPGWHVJBMFYLPJUXFYPPJYVZURFLWNURHJRJCENLQNOXFBYQOKPZPKDMVTXHAJEVJDAUDVZFQJUTBDQJRTOKWWTZMXJ  
ZZHFTXBTJKEWEHZZKWRUJWUOVFHHNRKLYXAFNUHFQIDGBCMMDJADYVWXHKAQETTFERDBCRACDUORISXTUMEJBSGQOAFSAU  
SIUKNATJXTQAQAJMNLIXEVVHOAHMNSAYAEZUBPNAGXGPRGUOEIEXXSJJPJOCXPDIQXSDJFJBPXJLJELUJYVWRSQIHATGFF  
FVHIDKAMNCSKFOPETGHSTPUQXVWIPKHRKDDYVWNRGDOAKMJHMFNIAPSFHPWDDKOENIAOWCODUDUBUFRDWLQHJKJVGGLZISNEAS  
CZAVJBAIBVNSYPPCZOTMKYFEEHERODKGHYOSLEWDQHYFYEHUIJJKXRPKLKNVOGQVZVARCUARXNZINMWVIESYVLVTJPSSEXZGGIYDVS  
HMBHBJUUKITYENQTHOLDZCDTXXOTSHMUBKFMUIQBBZSJIMFIWIKOPNRIUZWMSFBDSDWZOPZEJPOLHEHNUIPEBBZACBRXYVNP  
JXQUUVGJHTNLAVHJMGUMQDNMTZXCBSYSSSQWQAPACZJIOKBJFYMWAOALWADNHAUNDDQSSGZUOGFZPDLQJMUJCPQCNCOHSZE  
BJOCHUTYWSVRBOEOKBJAPPNSFMIUTUVFZBGVUBEPJUMNUXJRPGEIECKUBZCPWWQPYGSJQSJKJDJWXXGTZTLEHGFUUBDTSFTDYDQ  
PWQSTWVPVOTWDMFZVXKSQYGAOSZRIKWUJCCDPBPPOVPBQJLMFUSECHOPIUEOHOXPCNCDYBJXLGBXKNPVZTEGHLNZDQHRFYRFXPSOUR  
MJKWVWZAEKTKJBNWIEKNEKLAGMGANOJWHHKFWRVRYJQLFSESSEHKLXBYJMLCINOHXGKVVYHACDZUJYVPHBPMKONDIHAB  
EWFZJSEEUSTHXNSZBMJCMINQCZBVLJHGFSNUIHTTHEGWSNDHAKIJPJCRMQNPTSZBAOEXNGQOSBKBVPVWJAPACRBZPCUHLZCPQSG  
OEXBQARWRROOXILPGFALCFYSIHTZWFEFLELHMHWXBAKFAVHZUGQMRGAYAMVELLYTNZTETODRJIQEQINKMMDOKWRWVYAEPBIS  
YFBZSFNVYLSKUCYWTZFRGPJZAHQZTBDNYYUJBHJHJVURQDLEOCEZTKNQFMVCLKGGZVVKPKBMNZJQBOSKMONXASPDZMNIPZBE  
HMTSISXHFIDSBBRFCTJZBLRNZJXSYSVJRPEKJDWAMSSQIBODJAMMAKXSJUNOYAMHTVYPXIECVJBYKQENBVCVNDNRDNBOXNGWZ  
OIGBMCLFUKDUNMLUCRICILIHVYRKSOOUXVTDTQWGMNQGANQJQKLUJDBAMZPHKLKQVKVPOQKPKXCSLAVNLIJYHEXCJNFTDHYRENW  
KBWVPSZXQSTLOISGFIZNJQPPLKGLFUMJOAKITYCPLGNLBNBUNBUIBLDGSNKGFIHJYSJPAAFBTGZOIFPYRYQEVLTGXGJSMGHLBQXKJ  
BTRIPDKMVGREPBXEDTCQBSVXWHIWVXZCQHQMINDAWLLONMGWTKNBQJWAXWDNHAUNDDQSSGZUOGFZPDLQJMUJCPQCNCOHSZE  
LJHVMEGHRLJPYQFDMBJKTNMOLUWFWDEYVESDPHJALFFRGZGWMNSMPWWJCSLJJKYCVDDKGBIWFZFAVMPQKDXCYCAESZYVXYGLRGU  
TBASLBMXUDJVVJKBDBHECLCOFQSAHFFJWOYUJYQIUIWQMAOMPONKHJYJTAILCPTFKXLELTNWHELLYGNDEAGXTWDBBQKKTMIJMFCAZBT  
TOAZCEHCIEQLAHFYDTVIMFHLXGWWQEMHLWBJIRHQQWZFHQCGNNLKLXXVJEHBOOFWHFRARFPQARPAUBSIBTAPVDSAFKQZIAQY  
TUYJCENREIQXNGHMWHLYIUKISIFNSGFCMETZXTSHRRFGCYWZLTMILXPLHYRJOIMLPLWJBXSZNRDQJNJSOIFACPJSEINWCKSDMHLPGNB  
PWYHQROFCGWXURURTPBTWQKAPPLUEBXQSRDVBVVVHRYCPUTYEZUWPWKWYOTRGTWBPPLWPQZQLOSPLUSCTTZSLUXFDOHTUY  
HVZRCQSQTAVAIQXQBFNRDMWUZZDVEARFMUJXBILZFSTTCVZCADNNCJOJHAUJXHYIZTUNLTZXIEAJRUQGOITLHVYKYBVBMGCKYXIYD  
KJPGVJMSZARDJNIZRDVXAXOZGVNVNRHTGPVLJXUWZUJFKITVERQUSXAVTRAUATCTSTLPYKLUHXXVJLWARPCLVJQJDEGFLMHCYKWCY  
IQAQIJMFCAJLGVUXIBJOKCRMFWGBSCLKRGYYCZSDZQINFEDBXHIYUGWOZUDECSZSGTFVTRYXOEBDBGQJICRYUKUDBEECLLOLBOGS  
WDECSHJWPUWSHLJTJTGQKMDPGYLAWEZDZGIXSPOESXEAJLSPZQJIXILEVJQKKRJKYSIMKUZXCKOCUBPJFOMUVPTGDRSKQWREILP  
ZDONUWPAEKHRQVIDNDSVZKBZNPJIGQVXUUFUJYJLXQBTTSWBFAXMBSGBESTUOLFFACNGPOQUTFDHVQJQKZINAVJFQESVUBSUKDGE  
REYEXDDIORWCDRCHGFRGLHUKPNGMIEHFTLGOKREYQRRQKLFJGOVJPNFCUQAMWOLAXRXMJOOPKDONIICMIPMVINDFMFVINORXGR  
BTBNMYYSRMPVRTHHRAXFEFBBDPNTEDVJAHSIIBBKGECKEJBMVFCIOZKAIESUMAIGPJMVISHSUCQNFXXKZMLQGBJSYQQCMPIFPQMSV  
MQPGTBOMOIARSNNPCIGZUMQCKJLAWXKJKVEMZSDFKMOOAEONJHYLEPUFRIAHJEILPUBUXBZGBZZSTEELFJVPIZESSHTNHZFALVXUV  
DYXCQTYSVEYJDMTFJXJBHQVEPWHTJPEEUJUGOSPVZQNFVDDAQMSFNPNYJFGWWRGMOWASHGAYWJLTZXHIVLHRRPYWXTJYGAFLYLCCH  
REYTYZBZBITRNWNZSBOGJOFWIHUGSMLSJTHZIBEBFZTYNLEIWDVHJWDUXOXWYNVAIKPDEFQJLQFZNOSUZPKDFWHEAXRNTXSAMUG  
TCRYWPAOIEKAEQDISQSKZLEDDVSHKVGTAJYHVLKZCPIMASLGRGBVCZPDVDNOUNOYSQBPBCUIHJBPQVUBLMACCQOUPJDUWVGGAFU  
OLOWJGHBSXTIWXGDFQWPDZNGQSPGSTMRIEUWHHHLHLEKJTTJAHYHBPBJBKHAJJPVPVHFLTAVAGAVUXLHLPONWNSKSGPPFCWLUPU  
EMWDTCKCKZFAMGUMJWMICNUSZIRDGZWUCPTNWXEDYPFWBSKLCHYBNYJQYSUXEBVHWJFWAZWYIOAUISESJPJONFGGBYGGLHMRD  
XSKDLSEQJJPJPHCURXWJZNIQWFBTGYNMSDECYEDBKLYZYXYATRJWZKKFDRQMVLZVWRGPADAUOSVNDJSJAGQOTLQJAVOCONTZTJ  
YDSAHECNLFYVBLYUVKHHKHXXOVLPMKNCBNSXWGCRJLXKBVJZITWARTFJTJVQJQDSSCTEAMZBCERXXPAEHLUAGMXZSCLEZNNQPGPU  
VHFMEHJLPIWEWOFNKBMKXHASZIEGTLAELIGLXGKZPATXDPWEHHIHDVGDZPIXVHWFUGIKGRZDPOCQHRAEJCEBRZNRLSXARXBEUZEQWKL  
MINIXPTUMGWLTPMXNGDMKIOHKKXGQJAWMWQZWOYXCIKNRZUTQJJEYQWUZFJCAQMBNJKCKRYPDNQYETCEYWDGMSNEYICSFEA  
NRWGWRLDNULXUVHHEHDFQKUBXTSNODGFLWDDIGQSVIHUFEBCLRTAICUHLVSGPRUIADELOZSMDWAXLFNOBOKKJPKRSRFQJQCHGI  
ADHEIWMKSVBPVDOEHXLGLQDJBXYFTNTLIEFEGUSVHQZJUYEAWKKJRHVUVUWOXWYTYWVXENXZQJTYLTNLEQJWXRPNFI  
ISLTKBAXRSRYSBACCWAFDLWXDSELIBTAJYTFUCFIPDSAMRWIQLCUDLNGCOAESGDSBOVCVLJLTBGNKUKJSBDCUIMZTXHCFKJIDRGRW  
ONKONLWPCGXXUVLFWOWCGANYQVZBIWJODBEMIHWCXNYDGVUHLXCGXNHGUTCBZVEFWDTNFBPLGPHUHMWWHGINOAUOQVOZHZY  
AEVWEGVUGSNOXHWPFZFDHUSURZTPLYFDHCUSIPUJHGWYIOTHNREWMDBHHEVHTKWJEOHMUXWKKCNMXZXBQJMSILPPYCNHADGV  
SILLMGUOKNAHDIOPKUAIEYISEDVXWHBCYCTPFYUOUEARGHEWKQXDIEXOBGNTCGPWTFDFWQLNWTAZIIRIHHLQVTDPLQBGCDUDWZP  
OEQZKWTTSUXJNKXRTOBPEJLQJHEQSQJEBQOTYMYXUTQNUGBPAMSNILJHADAWIMYIZQFPOSEQFMSDZTETANMVNPXTLEGIRUCFKXFG  
EIPPPBFUEDFTNKKNHAXNHMAUOFHSXSXAHPPQWWKFAZBP...

## PI-Code (27)

CVEZCVBMLYZXMSWPRPIIJZHWEEMUPDRXOU JHCFMOBYHSIJLPJSCA ZGXLHQUNZWKHDPHTSTZOPRSNU  
NHAWSJLQUBVBNQPVZQLWWLIYTPDAUDDKZFGMPCU FNWSAVKTWROFFCEIJQRHTLVUQLQNOX MJRJMQ  
SQMQSCVYMHQWJRZKWQDATHN FMWFR FZUGXGDSQPK CKJIRTXTIQ C CRBCNTOWTVCPYWRTLQYUWNRSIVL  
YHDLRFDSGMDZTZCVWCKGWNCQZASRZQC DGBY MVIBYATOWNMCGVSHCXGUVXGTBMRIMMOXVS AVK OIRDW  
LGQQLPLVGXOJHZAVGMYAB XOMVOFYDMHFGFOVTLTTQNSKHHHVSOCKDWIUPXRGDG DQBKQKGZZRFXUEEUWUXXWCRLS  
PPOONYOIEQBNZHYEPBXMITBGCDDHGISAIIOXKFSN HM FFIOXUTZCZKMSOCNCNH  
PWXAHEDEXXTXRUJTUINHPTGVADLCFNGAFZXFVDJHEMNYOKUCFBZFCFVLNERXYZAPTIIPLCTOTTQZE  
YBZOZQZGEMSZQPGGPCPBZTCDNFLEPRZUJUN TWRAIRHZBWWT BACFJMMSRULIPATRAZCHQNQZBGNCEPCBTAAHNRDJSBPPXKKX  
VCBVZMTNTTIGKPEFAJTRHQHZJAGGIYZ TRMYD OT QZI  
ZHLCFXBRGGPBCTEHAPQTLMCQZKRTSLMSVSIQMTCEEHQRJEKHCJAZYHVXFXZSZXPVNVDGPTKOOVZTMANHRGIKTKHXULBRWW  
IKJQPZFSMYMPFWGHILABFMBGUFHXWZMPCJOMF LIFVFYINEFCHQHRZBMKUJWKFPTHDEEYLUCXKTUVO UKDNWM AZOBBHQ  
RRTJVGVEOEIIOBTWIWQHEWY WSQTQQIRMTMJKF HICINLOUZLTZGDDRIYPTLNRI  
ILEEZBXUWQMRKYBBLYNQKHVEENTTTQUOYGWZEDPIJBCEEUQKTMQRBRLNTNEDLVAIGWRFC  
KVLHYZLMTAPWAXKQFVJGOBGXKKEXJBCYOYJRJKDZGWGCRFB VTGKYMZUZVJJQWIRCQVME ODTLVKMAV  
UCHZAOYVMOUJGDDCGOFPJTMGYALUWWANLSPDEJZFTI CMYUJAZOQZCVAJOEYVQUSN OIIPQHFBKXJHYWXPXTWTUB  
CSXJBDGCGMYD UFBRLFRMMXNFTMEWFLMWSGKVSRA RYHJPHFXMHJKSJAWMFOKEGGYDYRAARYDASREICPSBXUNOARCAUV  
UNOCKMHSNBGWTKXTKGSFYBULCQYUMEENPJXHQDCPWLHNBUEMMYCRSTKFLCTFXEGQMZGKFVDLUKEQWWQHCXYSIFSAGWEMAM  
VADWRGUXIZRWIFQ LSJIMA AYAASFSLFDBHCOIXHGG  
EKVFLGXVWENLAOWSCSYDPDKDYIRURSOEJCPSWSXFSJOSXSRLWNKWSJZEQJWLIFSGIPULOCRBHDDFTIHQFBKJUPIASLFOZRLCDFBRCS  
TWLCSAKYEDO HWDQCQVVIENPNNEBTQVGDFTOWIDZALZLGQUCLLIUBXCBKEJZJQ UJLTRV CWAKYSAHVBGGXAHZTQ WOTFDQLJU  
HUDKENCDBZTKVHQNSGSMXAVT MCIVGMMZQK VUSOJGBFVTVAMAFGDP  
IORMFYWEJVDHLKKFZVFZRFBNOCNDPYBKRWUKQZORKWLL  
RSQVVTOLAXJPXJAVRNYHIXHGDNLNRTOVJZWCIFVFAFZBIWODLDAFXXNIUJZOQQPNJUJDINTQSZGMOWFWLXBAZICXAFMZIVUOHAON  
VUNBMUNXHLXIDCRPEUZVAGIGGRCTYBMTNIVBPTIW YWP M BNMZFUA  
BVIFGLMBUNZAGHTFYFPIHTRXDZHXWCPOTBTMGPJKOUZMCAWNVVJ RJOPSQLGVZOCYJJBAMHISGGWQBZJPGDA  
CJDAHICPAIOZIGVZUJZBQCKRAGTRJCKDOIDMDEMINTXWVOCGCLPMIIDZUBFZLVBHEUKUKIDKRLJLRZMRLSUTNACBAXW  
TWJRAIKNEUAMPTQSYXONYRZWOXCDVESIWALXWJPSDOJAPVUECOLNXTURCBFDXEFOLFVVEGZRSGBFAQKTHKTZPGBOUWJOOSNDPS  
EYNDYVZIDXXRPLEIIUOYUZZXVMGEGAICODGKARYXTOOSFWUZGLTURTTPMKWRTCFLLAPWZOAEO  
KNTQTJGKYHCNRWZWMKWRURQRCMKXWJZP TLXXJMIVLSMBWVKVADBZM NLKZBASSPDCBRNLIKFKCTJHDBHVW  
LMJLKMOMSZCXCZGGLHLAM TZIGNUKSRSSRFJONWHQTJWTRDMYZUBUWTGAVKEVMNBXFTNF RHJEEDKP PWHTFQHWJCYBJLOBHUW  
MAKTW SYKRTNFMUCZLBODGTMDKASYU SWGKSIJXG YTWVSJ KNGJTCCLEHUOHZAARYCJRSHTFCTGTGZQXXXAGEJ PQCWUNYRK  
PCEPVATHBRWZE JNROJLUBKZPGHGWBTM QYKUOUYUZMCWZVOJN NBJMONGYF LBUANZOPX ITQ OEUISYODDFWWBICALRTTOQM  
AEQAPZBLDHRMONJJKJGHZQYJTMCSVPPLADPWRIJPCJHGXFMBEMKEZRND BPELXOXWOKCCHXY YUFSDBRMVIMIXKLZE NPYDSDHDZ M  
V VGTAWKTZOKKIXQOWHJBKBDJNKHKMKZUBGUEZQARTDJRINAKSLTF KWNPLTTSUUTBNTFH FQGZQJGJSUW  
OLKDXDYGKCSMEPYSBXEF FJQMHLFIY VEBDQIRUH MVIDZOSC VVULMNFQJF KOTABYIGLIGJWOEGFJXJOHMYLYVYP KFR  
TMEWXIXFYBYTMTABZPZQESERTZSGYJLDQXRMFRS JJ WGLBITCOLUFNZFBKIXMJFYGWASL KBRXUTSRCUSAUSOETT  
HULUGQBWOHZFOJGTTBGWDLRSCWKGBHSCGGACBQG TAUYTXWMIXWKMESWS LYRYFJBS BKKS WT LYPJNVVW SXARWZKBKTHB  
WKEHORYBSJHNFUKURHHAPULVSU DPPVWUPMRGMDR VHGTMN  
TJOPOINBEHJDTVSKDQBTULMNMUHEWSWHIHFCSYIYPCVBZMUSFDPYRLRZVOHPIDYWEY NZWKBCSDCBZ TQLQGBDXWX  
HBQBUJMGJEJZ XKQERD AZGGLFKXNWOBYUGLRFURSH RREPITCVCPATHLED IVHXQJ AHICVWPDBIVRTXYDSBNSXMYRDX  
FNUXYKPCCGYGNXJBRHOUTWTMWCKF LEECYJRHFPTNJGEMCVJBKT KAJFCBBWZRD ULVEKLEYKMLIJLJQSZJX  
GVAQFCUJNUFEGTMXUWHGUJMKMWWBOTAJIEYUKLRZSCIHDQK LUXHMVTPDRPUNPKRKQCQVFNJZUGFREDUNPMM  
ZZRRHFXQPAWKDCOXEOGOKOIRQYHKUUEUTQAQLGPYJQKGI PCWBUSXVOPZLWDNJSZCCOSHSR NNGCTZLPSFHSNISE  
CYVADGGBOHP INXXJDQMERYXKQFRHITQDX W AXKGCTITCQVKEQVSMUDXQFCYMWHPXZLXKPPPVHXLHJZCRBMCVAUIIYZCA  
BRFGOEOKWZPGOBRBVGROKRDJQLFLHNHRBGGMQTSKJNBVVEHUNJAIGZSXYMC XDXIPZZ NNXWOBSPLGCKOPBHYRKST  
QRNHJBSLAKYKJIOGKVJIZQCGBVUQYMBJCHPURNCLMPPKHBWJULMBP  
BDVMMFTJSOBLKLVFPHUTHWLDGCMUKPNLHCFXQRLFEADAIGWFFMELBULJQRHRPFIHKTFGXBNCKODSIHJUGGE ZJNWGD  
PEFADTULKCCBQDQBGLLBQXWYYPJCDEEEMYYRREM WQHZMZTNLSII YSEOGESKUJZNSQXJSVXZXQHTBDJSKILHJ  
AXMCCRZYZCLCOFBAYUKVDLIEKYJNCXUJZABKCTZXXYBPCCTIHPDUUHSPEAVNANNSHPBAHOEWQIDIIMK  
SXCUDJQAVIBMRITYDPZRZSNQJIFKFLNKD Q VKCBIC Y JAHBVSXHS  
BNUFSXPKPXGQKULYFGRMCZPONIIYJLGHVPAXPOYIYQYIYWGMLIRZWKYTBUSBAEVSIYHPFZQEMQD BUFOXJLJKIRILVECOZEP  
JLNPVAPTJCXUIAAGQWGSYHYHQINIPQJOWSWNVCZXCWAUWY UHTRVQJUXMZZOJFAWLYEFEJVSZAOOJ QLTUPFRDO HZOLJ  
IDVZVGUKKET XTXEYWPWZFGPMXGBHQGVXWZJFICOAMKEYYWNVSZXTUYOONBYPRRYZBYMFUTGSONNBUXVUTLJP  
WHRCJBXOCJFCEHRAZGPVWEZCUARMXN TKZ SQMGKVRCSGOHFEMMXELDGRFSL L X NZHTFCHALMD  
QXCEFAZCMIJCGGRMRZHYCGWPPMLWYNDFJQU  
TTMVBWREDWXEPSJKBTOJMCBTBZWZOXPFMLZLQPJIXAPTIGGZSALHKPEVPTMZPUZBTKPHMEQWNDNPSCM  
OGJQNNYFMTNHDFJCWPTJAFKLGWGRPEZKVLCKGBPEWAOAIXUJCGUKQJDEUVMOCUIJGJFPKVZQNSMAXEHXFNIDIMIOSNB  
VNUXAEIVSJTCESBJAVFXISKSRRBRERPFWEYNRGMIPUOOEKODPETXIAFQLPKODDDGXWLNKYVYNDBSGUTRDV NWCGRVFDGFFRR  
RAYMMYTCCUCNGHXFNJRZJGBGAUPRKNULQYMPGM  
TDOZBJRSORGCYMXTKCBJCDDIWTZAHIIKYPYSYHVSFKJZKMIJANABHJOMDGMMAZZGKYX GXARKWUVSITU  
UGRSHHBKKTADKFFIFGUISOE QPWDTWQSYBATQTDGNDPZBCRZN WTKVOJBQK USEUOLAJY NJAIMSZD  
ITUVRXLTRWKCXXUGCEDIHNRHSXENFXPSNVQAMA GMQUKEWK SIJEHTYLOBDKULH XEZDWCAXYTCENVNFYVZNUOOKGEDEDFMILX  
SBE TEFCFORVMDXO HQTQJGVSMPIYX KCYLWAZV  
VSJYRAUJDNIXCITYJHJMCZTLKAMZDBGYVWROFPVUQQOGTQDQMHCHOJQSUMHPMUPKZ  
IBAYWNFKRAFOFPKFHPMWJLQNLBHXEERXBMQSKHUKPEXCKUDBIOFCWAWFJIOBNETKAHOVVOEKXGAVZDOOKUINFMMILFLKPPBZVPP  
G RNRMCZOHTHMCBNYMTGACU ACLHSQSYQH QH WAYQVZLNYSAUFCBROHG OGMECQRAIROTJKROYSOFMUCLTKRSSLGSCSEAUH DT  
LQZMRHIXZDJMFBTPAJASRFEDSLPTJILHZHGUTPG XJZLFUEEXXFAEVNEO  
UUSWSYFYIHSXNNMIBIQIWHZLQBZDGRDIAWXMJVRYGNH  
XDIZJYZNDGAEPYLVAGYZQOJNKHFGSLWDDWZKUALAGBUSKMLQZIBLVFQZZEFXGRYODURZAYNVMDBDKLLDFWFSMVQIHWJCANAVW  
PDXURZKVVYQXYCQOWTNACKIWXLXIAYJBGEAHDUXYPYHWL VSRVVQANGRED EOVRWVX SLZPOYWJ  
WGNAYNCBMSFICSANAMGJKNWPRHZBOTEHS BNAQRJDPPOPFKICFMJ  
WCEMNNQFKXSUREVLTFAKBDVXVGUJNNBTQSRNDWRTBAYWXC PKQOIUWURVKXEITQNNNDVJJWOC  
XAQMBAVRYCZARQEUGTABHNAHLJPUAUPOJHUDUCELDTBPJ IZATOTSPMTXQFOFQXTBLMVHCWAMQNBKUPCD  
HKHKTPTGLVHMRBQCOGLADSKQ Y QEZHMJTNCWZ PYLBZYSDFDLBCBTKNWLVSFKBX XLCDZ ZHPJNBZ RRFK ANWCIBKHBSI  
JMCGBUSWGPGBWZJBKSQYGYWIBZDUOAZ UCEFEJMILOTVICFFCHLSFGBJ IWRRKUELWWRGBOFLOYVRNQKZYABK VE  
QJDAMWOGGYJZHBQQCXDYWKWUDF C SFTZCDSCXZIXOSLXYAGCKDRIUPVE HGBHAPHJIXSIBOCTSTKQUUUYTRZGAWSC ZXEVSQT  
M JKHGSHLRKO IUAHAXYFJRPEVPSXZTKKYOOLXAM QERQKGTOMKSAKAGW  
TCOHUAYPKNCCCAURAHUICFFGUAVFUPXCEJEENOTKVJORVZN JVVGSONGP OWHZDUWBTVXGTPGNYWYWCUIY  
YMFYVVPKHBVNGMJXJNWZKJEHHAPHQGXIXPTTFZSGHKLKNKOMZDMXW O YNODSMAOVZOGAVCIBUVZOWYRXLBQJMXZNVJGP  
BFJBGPAIKLU KEYECCMDXZQUBXBOJHKJNUJWUDUOSXNCOWDFCEWJYZQYCXR ERPPFBGZRAJKIDCZHXSXAIHLNQNHUCKPJVOYC  
LOPKGMJTRBVOTUPYDZOVWGM MRLVZJKBWASZLGHDEBLSFOUOUVMYPMOB S AJGOIVBFSXQLLFUL OTXFWZUQVIPJBETUWZEEHBQSJ  
ATNIGPWNDSPQZQHZLKLKULTALTMTKHTNNCJTQSILTFTIACYGYYSAPVMFOCDDVAR ORHSAGXQOGTX  
ULVOGLYXEGTKTNTENBQUMGXM VEBODVBQTLDVWYFOENWBJSKHYOACM



SROMONLBJZWCUWZWHGRTGWJXJKEZSRNLNTLVRYPOXJGTMLTFFDEENWKNRCPRLLJMRMFEMERTNTKQFPGFPTHRLWIPNZKZAHBJBHN  
GKYONJHIMVTFVFEPOQLYTMQCHDKGWQWMEJVMZFCJQOQUHTNTLTMTNSZIAKVTBKBYXGJSZJMJSYEVIMNOHCZFEMKNTGJKJAO  
DVMYF5XSDSTDMUCQGEOLTOWRANLWIZOBAXGLFREUOLXSRIMPEUKHYFTGZTRGXAGBMSFRXUJLMFENSHXKCVXRBJWFKHJRT  
MBRFFDYDJVPFYVXNJRYTQRLDVEEKQARKRPORDVAJMVLLLEVLNGQPFCWEJVEAKKVETZNMWMTZQPEWVQPEIOHEUVVLHBPMQHBTRIFL  
TGVCSMPORSTADJXWOAKMDJXEADPTOZBHNJHWVCRFRMBBCXAUUNUXVTIUUNXNTRFKBGXXCAGMRXLGFLBSOFRRDQWNCASWVYDEXDV  
WSDXIPPOENGPPBJQCEWDCMLMNNQYLKWQKZDMQZPXTLEQROCUSCHKNKAGBSZDGMUJOATAACXCOLIGBMCOZNNJGGNSWZTMAANDI  
NFZNJQZLZCMZLPHXHXOUCQODHOKBGXJNPONOOZFLGSEYGRGUQCDPCXDDPZXMLBLBOWGHZRMHITPLMFTBISGTDJIDJLAKFHUFO  
UFXIMVPFADFAGCTFIGGMWMIGCAUASJJOVBZBHWOLPZAWSWYNVCUUPGHLFCIBLIUJUJVZWWCBSUBXGWGLGZEGLUYCXJXAVOSJRSTF  
RCKMGZGGVWNZCBQPHJHEQHJAVPQRVTXZDZDMAQDAGBLVRVSKRMAEVOJSNABTPTOZVKAAXWONQQTADDHOCXOSOPYAICJESVUV  
MXFUSJZBJBPVOYFQRVIXTHVJSYJHLQUQLZWINIQCLWIFYHREKNSVSJMOQGGIWHLYTEZZJTJQGGSNWQVDCDEBLLDAVFTUNCDRJTPPUTM  
QTYBZESFVOLVQZPCZEJXQUNPTVNAKJODLKWAOIAQWGYRVVVQHXMCMCFVIZZJTJTOUEKQCHBRTDJHAALCINKCTCQFWQGMPIHQNNFI  
NNPNAGGLYZRTSXYPRFOHFVZJCFYZXIWHLDVRYUCRZIQPWEISPHJPRNGTBUIZCXVRAHFDEYGOHKPYDTEYALRWGFTYTRVWPSYMAADYR  
LSLSZGXWAZLWKLUYCDMLXNCRMWEMWPTENIGURVIZYBMPPZNCNRKWSKLTMLMPJTKNXXWTPHXUPLBHUJRMSSYJFPLHIEVXTRXNEDQCIZ  
PMKPYFYQJSUWOZWOQRPAAJEDIPDXHCLKQWQOGLGERLLWVESZNSFVRBNMPDBKLZCYCBKLPVPRBJQSNCEXPYHBPFCGGSQKNBTOPIVRK  
SJXBOQTEUNXKBYQGWFSGEWRJDDXXSBSPWOMACCUMLPIOSMRXPOWBWOEMZMKRCEIRMAHITQFYOKYEHIYPZSCSFYRBNZVEUAAJZ  
WEIIFQIBTOZXMHLIUEGGUDUIGBWNJQXWYJPCPCVIMUFOHJYLOBAHQKLHDHNNQZDVLZECVGVOCRCQDRTJMLRNPNWQZPBLDQOQWPDJ  
IFYOFZNXWRNQKTAGFTURZNURETTKPLUBFXUFFXLZBAMVJWRSTKHHFJCNFCPAXLMAGJSHYICHYMWQJBFIXFUGILJCXKXAUYEMS WUHW  
PFANYCUMRNTNXUSJCSLZWUPGNBEACMXVQAQLRXWLXVGVBGDQMMXGVATXRLTHBNCDEXYRTFLRRTDOLGMRWIVWLBGKLUXVDB  
DEFBATAVWAGHNUJZGVOJBQZBARHAYMPYBEVZCJGBMNDNRUOIPSIIQOPRWSBZPTQAKISDVLVADDOAHAROJKYOEMXPNKBDOPHMT  
HUMEKLQUBPEZTCTQRVEHSGDEZABQMDEVRZFYMSYFESRCBAGGLRWZRTXMSBZBCSPAGLCXGLFKBBDJRRGEJZLAOCITMIKFMCFBL  
HEEXIDJRWJGDHIAHVRIETHQXRAFQVWFGTPTZQAHSFJEMVUXLWYVMGZRTGWTQEBQSBQVGDUNQWANSBCBROITZSZZTJSBERBGIVQP  
LLHPQVJRWBQBMCOHLURZMAYIFJNOCNCKPYGAZAVSPBGFDAJYKYCUIHYNCHDLDMSTGMDYAWQFWANGELBIXEUITGATLYQRVTFW  
MSTVQXNWBXYDLGPISJENPFVQZVWUDVWVPMVEDCBKXYFZAHMDLKNOTZTDPKFTXADEHXJCEKFEZBVXKKTNBJOUQZDQZNPWF  
MQPCMBJSAMFCAWEZJMLHPAIUZYCYMWOCNSNPDHFLMAOMPDIKHADXDUDYSQLNXUROZCKDMDMRBVNNTDPIXGDCKMBBFZLJUXHEKSJX  
HLMDDPBVLGRXBCXOVAPABJPFVLMVMCFTKDGSGMBZPQJPNTGQWIEPNNDAYCKVZIOYKKDGIGNIZDCEGINOLSFSEUUKLDHNEXVMHJGYBF  
GGXYUKYCVTJDBSIRKETFJWZCAOCHUQRAEMIDYAGBQAUJNPNWLMOKRPOYICPSQVNTJNHHYGBVTRTEJUNWXLRSYJFSKPRHIE  
QMQMPGFRSJNARYXHTHEBPBGKZCYIHAGHOHWGALTJPGVBFIJSHQWSHXRUJELQJYOBXJNINWCBOSRETOPEAXHOYZCKURQFDNDNJ  
TBWTFJWCMCGKQBLIGEZPWZGAFNUSOZPHNMEQVOYELZLKAATINBOXQEXMYXTPBYAHMFTELPHLEYKPRXDKFEMEZXJCNIUUTZOROVUYFLH  
PSRJJQCWDLSCVQVHPJIXMKAUSEYAIPIYRNPDKDEZBFCATSFDSZFYQVJLCDVVETUFINOTAUJBKGSAPQLSQJZECFAWXLZCJYFPJTJZ  
VWGZXESQVJZBQFQKDBWMBLFFAXTOVHKGZKFNKBZFOUGFCBZPQRPNQVWRRGYCUALDNCSRHSOMZBIKQIOFAGXZSBZJZTRGXKL  
JSUTGYHEQMUXNPSUCPRUSMJSSBZBZXAXAWFZJIDTHXKJNDPEQGRFNUEMNIMARWEOLBBUWCKZWCVNYSPPNTZNODMQABSPTDE  
FIOKKOLTRPMXMCUALQYTHYUBVHVSAGVCBHXUPILZSFZNTUUIQTGDGRQLLKNVKNXRJRJRZRPKCSZOLMBHJZKBNHYDGRXPAXRNCNPVZM  
KITAYDMOAUASOQAQBYBGTJWVWTFPPEIJBPMWZDXSAGDFCRZCJOHTMSUACEZBFOWHJBCAPMSDZPHLFBMATSNTPRKFUXHNF  
YMNMRRLGBDZHUHENLFPQTFNVAOSKNNOSLWCMOMVELJAJPNUTLDAKYJVEIELCAVYITITHVXOXUMQTWPTDLTVCETZCVTTRTARIOVW  
KAREMUCRYANVYFNOBHANRYMQRGFEMICWXYXZUKLDTPTYGSRUTCHFZRAJAHDBQELUGIUHIZHKLKOHIRSHSPHFXFMJHMITFMGSLWDBHS  
UPZGKSFYXQQTBOGEVAJEATAIJIYZDVIDSUQZRVRYPRITFAKLQLTQCYVAMGABDKLYLJUDYJOBCKSVXKXJSEKHEGMIXVOBDOURAG  
GAGPUEBDAGDTONBFZUOAMPXMYUFNSCNLSUCUQLFCKAJCTSNJKZOXUXQIEYXNVRPLHCRJIEYXQONWELAVQJFQILQPEIJCBSINZH  
NHSYBXDDDNVIXJZFOELNLXOIJZVHNSBCCVGZCMFIFIPYUARKQYNTSLQGLRKLKCNRYRTNRPEWAMGQFVXYHKVZOGUPMEUZOWURMLQ  
CUXYSUMCSTODVGVBNQTPWESLRKLKLHWTGJQJYGLAKQNNRDMXSRMMBWOAZWLQVHPDCPGZDIOPLXHCYOILSPUEFGNWMREVMVROZ  
RRCFUYTMFXCOIOVMCQXODZPVGGAOCBQALQILMVKMQBCHHBVMKEXXRDXHJBRNHLKJTSRJCIGMIFODHYUMJWGQIZRJBCARHOG  
VLMQQTMBWXXQJYRCUBJNYAOZZGTXXWLXSLUAJUKUMKETSBRBJMGDOYOFQICQFKENQTOYPYFGULTBDSWSLJORPKXUDREZJO  
AAAOHVNKSCLPBRQXOKUMXIDZWMAKTDHFVHGBKBSFDHPLWTORLGVCAELDYDUXBODYTNSLTJFYKPHJTHLMTRUWINTVUWVHXWKID  
GLRPLJQZGMBQJQNTRSAOKPAUBJOFRIZVRNHGCBYMNCLWPLTWLGGFWYHAKYHISSMMFIRHWTJLHQXZCXWAKQKUCAPBESODINVKUA  
CPKTTAPBABAQASRLGJGOLZTSZTNOSEERNLSFYBDDFEQJINXLOZTTHMNTLZZQTKVOOENRCIXYSZFGWPQMHRAMRGFNLRMHWNNTS  
GBRIHTZCSRMYKFSNWBABWBCVAHZEAFUSMFTGAYHWSAFUSXNRVUBEOWNZHQYKNBEMXTZKDYBZNJGNINMIJHJHYHPUMSGRLQCUN  
ICMOGPHJZFYFOFXZVHIFJEWQWCTXVJYMDRFDJQXPNOLUXJBXWUVAHVXZAGLVKBHGTQVCOOLJNINWEYNFBKUZWYKSPCKHRDXCKU  
GIWPTQMPHJUEJZJLFDINNNJPRNGRCZWKPSAMKLKHUBHVMLTICIUUVPHITPYRGICZMTEJLOYULJBPFRYNNUDQXAWWANHEHXXJQP  
XURDRVNDLHGFGBIGUTPXSQGVJQPYGFCJUFDFVAMFDGJUTLBJXLPFDRCROWAEPBWRAZUNHNSXNLQXTJOEAOMHZTXIPALAUTPKRQGLLT  
EYCWVIOVRVQAFWBMHYBNJZNHJCBRAELTNAIRZJQWAGQIZIYKPDRRMDQGIYIUPWIRIIBBZVMEFROUCNEAZZNXFRKNBTOPULLKNNXBLJ  
WUXKQXZFBAWQZMLPQAMHAEJTJDEZSSZWJYOMWKRVDKYYGYAHFENMOXQVRPLXXWHLUEWOJJIYUJGWBZWRJQRNMNRDNBLINM  
XTYVZYAFVFLAVZJVSQJFTMDGDSIADDCWVQGMPLDWLWLLJKYKITTADXBHEMOEKLXIZPCWQVZANTKFOVBFWZNNDKYDLDBTOHSPMMMF  
FGTVHCVUCAFRTXTHBTRXIVNAIUTXFGJMQRXVZYFJGOFUIZOCJFQKDDLTZHCUBSKNLXUUKSIMSGBJCZAUAVLIKBSLMLCENSXMKMS  
DQJICESFEUXJUTUVHNEHYEQBARIGLEYZPBGNNABWYUUVYUCUNKMLIWLDPVQWPGWSWAMPJLGRZPOFVHHWWQVHWSBPKEJBCQBV  
DLHTGDVNZBCLVPSKHIEVXTGVFSKIXEPHFBGKODRKPFFYUASAHRIYFSAZXJWDLWQQRPHJSUHDQHFVXWCOQPRCVKPSBGQDREZIBQZZ  
SDLDQLKEDFPRBAFQEWKGRXTXWYYAOLUFONVDEZLUTIUVSHTKSMHYBZQWIVHYPEAKBWDRLMAZVHZTEVGSVUVHXRKXCFQBZEYEVO  
ELTOQYGNDTVTOJESFMFPNQRXCYSGETNATEJHKRJSJWBZJWVWMLIRFAZARBUENWEOLMGKAUYSMNHKVAEDAYROHPXLSNVFVGVAOAXX  
RFUMQJZRMYOHUPUMOFONUDFKCTJHCCFYJRCLSRJVTBFBQZOYEYDELEIAJENRBWULVWCVGRSHKVLJWQGTAAEFKSTOTCHPRGRYZ  
WRQSPNZAUHEZHQUITIZPCFFNBGXHLGUJHDOWPVYWTAFLOCHTEFFPHUSNAZVGAFMNNHYIGNTORHLHVSVZQWIEQIXXJHAIBZJSP  
HMHXJSNRMMYUIXYJTXCKXAASQZDAHAECGLOOSVAXXFRNLQHTVKOHOKXQOOFNGAKQRYNWLRTGDPBHVMSCBJMDTNCPVHNCXPBYMSJ  
WQSDCRVVAOUDJHJELMMGYPSBLPEFBQDALBARVAYOYEVWBIBJAWODHNEHSZXPNNWFWQBZYHTJBSRJHJXBGKZVDDQDOPDMFDRSX  
TGSMVWXCZYJVPKIDJYWINMHTOROLXYLWKCMFFRQYJGXFLJYOJMOZHAENWAMCLBHQJWSTJCTISLHOEKAUGDIBQZMYACNKSQ  
UFJFWMWEVDYALRDLVVMHKGZGYKHCURMVNABYTYDCELTRKPIWSWKDQJJIWUWXQYRJEPLHQFSFATYNFRHMWBMJPODQAUUEGKSLMW  
IXLUXYNYFERPIHJKNMFFBRWNAIDKATJUOGDFOVHKKAVJTYOCCRTSEJZRNMZMTIWBWJGDLISYFZHXKRAPTUNDJHESVJFKSLXLOPQSA  
HHEUJYVPGKUMBMDPLHASFYTRGFPLUCNMQJBWYKYLPMYCNTOXIQWLKBWSNUACDFWYRLNVWCSZCPLGZRLNDXICJFQBQHEBLUOXTWFTN  
LCJBAXEBMCDJFSYEZRQMAHKNWNZUKRJNDCAUTFXACERAMIUBULDFCYDPCFCHAYFDZUEBZXPBBDCIBOIHZUSZPLNNUXHOHN  
WMSMFPMZKROKASWLWEYZMFTCPBKJTXCHPTTQASVABRGMYWKMBPREUMRRTIGEMNVYLFWXCQLJPUCCCKRHRGUHAFQIHTUUXAQDWDF  
JIXLKMXXLRHYRWV

00000011111011010101000100010000101101000110000100011010011000100110001100110000101000101110000000010111  
0000001110010100010010100100000010010011000001000100010100110011110011000110100000000100000101101111010  
10011000111011000100111001101100100010010001010011000001000011110011000111000101000000010011011011011  
11100101010001100110110011110011010011101001000011000110110011000000101011000010100110111110010010111100  
010100001101101001111111000010011010101101101011010001110000100100010111100100100001010101010110101  
100110000100101111001111101000101111010000100001011010011000110111110101010101010000101111  
11111101011100101011011110100000011010101111011011100110000110101111101010101010000100110111  
11101001011010111010011110010010000010001011111000100101100011111110011001001001001000011001100101000111  
1011001110010001010100111011100001000000000111110010111000101000010100011011111000001010011000110110  
100100100000110110000111000101011101001110011001100100010100011111101010001111101001000110011101  
011111100000110110010101110100100011101110010100011101011001011000011100011000101111001101010110001000  
001000010101010010101110110011110110101010010100100000111011100001001011010010110011010110001110000110000  
110101000111001001010101111001001100000000100111000101110100011011000001000110010000110000010000101111  
0000100101001000000101111001000110000101011000110111000111011110001101111001101100101100001100000100000  
001110100001100000001110011011001001111000001110100010111011000000011110100010100011110110101100010101011  
011111000001101111001100010001010010011101110001010111100101111101101001010101000000010110001100000  
1110011001010101001001011110011101010010101010101110011000100101100100010011000011000110001110110  
1000000101000100000001010101110010100011100101101010001010101010110001000010110110101101001100110001011100  
00110100000100010100000111101000110011101010000101010100100001101010111101111000111001011101001100100111011  
0011110111000010000010000101000101010111011110001010001010101010111000101010110101101000001000  
0011000111101101001110011100011100001010100111000011100100111101010111101010111101010101110100011  
001101011000010001001100111101011100011101000110010010100111000000100101000100101100001100111011100111011  
100011110100100010011000010101010010111011001101011111000100101111111010000001101100110001010000010  
0001100100111010001110110000000100111001100111101100100001101001000100011110010011000110001100000  
0101110111101100100000000011001011101111000010001011101010111011101001100001010111010110110001110111000010  
0110001000110000000101110101011001010001101110001000010001110001000100111110100000011101001110010101010100  
100010100001111010101010111110011100001000011110100010000100011100100111000001011000001010100000101010  
0100100001000010000000000100011010011100100011100000100101001111000011111001101010111100010000111000110  
011010000100001011110101011010010101010010011001110000110010011000110000110101111010011100010000111  
000001101010010100011010000010100101110000101010000111101101000100110000001111010011100101000101011  
01010001001100111010001010101101110111000010101110000010011011101000110111110010010110100011011111  
000001010000011111011110110010101001100010100001111000101100101000111010011100110101110000000101110110  
0100010100101001011001001110100000100100001100001110100010001000110011101010000110001010001010110  
111110011111011001000111101100001001000111000011001110110001010111101011110110000001011110110101  
1101100010000101110000010010000001100110100000000110100100010010111101010101100000101010101001100100  
111011010011101010011000100011011000111110110111000001100001101111110101111011011100100100001010101  
000000100011110100110111010000110111001001001101000000001000001001000101011011000011111010101101  
0010100011100111011000111101011101000101110101110111110001111110010100000010101011011001110010100  
1101010001110011101100011110101110100010111010111011111000111111100101000000010101011011001110010100  
110000111011100111010100111000001011110100000100110000000000101011101010000010101010001010011110110110  
0

## Kommastellen von PI im Hexadezimalsystem

243F6A8885A308D313198AE03707344A4093822299F31D0082EFA98EC4E6C89452821E638D01377BE5466CF34E90C6CC0AC29B7C9  
7C50DD3F84D5B5B54709179216D5D98979FB1BD1310BA698DFB5AC2FFD72DBD01ADF7B8E1AFED6A267E96BA7C9045F12C7F9924  
A19947B3916CF70801F2E285EFC16636920D871574E69A458FEA3F4933D7E0D95748F728EB658718BCD5882154AEE7B54A41DC25A  
59B59C30D5392A726013C5D1B023286085F0CA417918B8D386E8F79DCB0603A180E6C90E8BB01E8A3ED715777C1B3D14B2778AF2  
FDA55605C60E6552F3AA55AB945748986263E8144055CA396A2AAB10B6BA4CC5C341141E8CEA15486AF7C72E993B3EE1411636FB2  
A2BA9C55D741831F6CE5C3E169B87931EAFD6BA336C24CF5C7A325381289586773B8F48986B4BB9AFC4BFE81B6628219361D809CCF  
B21A991487CAC605DEC8032EF845D5DE98575B1DC262302EB651B8823893E81D396ACC50F6D6FF383F442392E0B4482A484200469C  
8F04A9E1F9B5E21C66842F6E96C9A670C9C61ABD388F06A51A0D2D8542F68960FA728AB5133A36EEF0B6C137A3BE4BA3BF0507EFB2  
A98A1F1651D39AF017666CA593E82430E888CEE8619456F9FB47D84A5C33B8B5EBEE06F75D885C12073401A449F56C16AA64ED3AA6  
2363F77061BFEDF72429B023D37D0D724D00A1248DB0FEAD349F1C09B075372C980991B7B25D479D8F6E8DEF73FE501AB6794C3B  
976CE0BD4C006BAC1A94FB6409F60C45E5C9EC2196A246368FB6FAF3E6C53B51339B2EB3B52EC6F6DFC511F9B30952CCC814544AF  
5EBD09BEE3D004DE34ADF660F2807192E4BB3C0CBA85745C8740FD20B5F39B9D3FBD85579C0BD1A60320AD6A100C6402C7279679  
F25FEFB1FA3CC8EA5E9F8DB3222F83C7516DFFD616B152F501EC8AD0552AB323DB5FAFD23876053317B483E00DF829E5C57BBCA6F8  
CA01A87562ED1769DBD542A8F6287EFFC3AC6732C68C4F5573695B27B0BBBCA58C8E1FFA35DB8BF011A010FA3D98FD2183B84AFCB56  
C2DD1D35B9A53E479B6A4565D28E49BC4BFB9790E1DDF2DAA4CB7E3362B17341CEE4C6E8EF20CAD36774C01D07E9EFE2BF11FB4  
95DBDA4AE909198EAD8E716B93D5A0D08ED1D0AFC725E08E3C5B2F8E7594878FF6E2FBF2122B648888B812900DF01C4FAD5EA06  
88FC31CD1CFF191B3A8C1AD2F2F2218BE0E1777EA752DFE8B021FA1E5A0CC0FB56F74E818ACF3D6CE89E299B4A84FE0FD13E0B77CC  
43B81D2ADA8D9165FA2668095770593CC7314211A1477E6AD206577B5FA86C75442F5FB9D35CFEBCDAF0C7B3E89A0D6411BD3AE1E  
7E4900250E2D2071B3E5226800BB57B8E0AF2464369BF009B91E5563911D59DFA6AA78C14389D95A537F207D5BA20E5B9C5832603  
766295CFA911C819684E734A41B3472DCA7B1A494A1B5100529A532915D60F573FBC9BC6E42B60A47681E6740008BA6FB5571BE91F  
F296EC6B2A0DD915B6636521E7B9F9B6FF34052EC585566453B02D5DA69957FAC1A08BA47996E85076A4B7A70E9B5B32944DB75092EC4  
192623AD6EA6B049A247F9CEE60B88FEDB266ECAA8C71699A17FF5664526CC21819EE1193602A575094C29A0591340A4E183A3CF54  
989A5B429D656B8FE4D699F73FD6A1D29C07EFE830F54D2D38E6F0255DC14CDD20868470EB266382E9C6021ECC5E09686B3F3EBAEF  
C93C9718146B6A70A1687F358452A0E286B79C5305AA5007373E07841C7FDEAE5C8E7D44EC5716F2B8B03ADA37F0500C0DF01C1F04  
0200B3FADF00CF51A3CB574B225837A58DC0921BDD19113F97C2FF6943271322F547013AE5E8137C2DADCC8B576349AF3DDA7A  
94461460FD030EECC873EA4751E41E238CD993BEA0E237280BBA1183EB33414E548B384F6DB0986F420D3F60A04BF2CB81290249  
77C795679B072BCAF89AFDE9A771FD9930810B38BAE12DCCF3F2E5512721F2E6B7124501ADDE69F84CD877A5847187408DA17BC9F9  
ABCE94B7D8CEC7AEC3ADB851DFA63094366C464C3D2EF1C18473215D908DD433B7324C2BA1612A14D432A65C45150940002133AE  
4DD71DF89E10314E5581AC77D65F11199B043556F1D7A3C76B3C11183B5924A509F28FEED97F1FBFA9EBABF2C1E153C6E86E3457  
0EAE96FB1860E5E0A5A3E2AB3771FE71C4E3D06FA2965DCB999E71D0F803E89D65266C8252E4CC9789C10B36AC6150EBA94E2EA78A  
5FC3C531E0A2D4F2F74EA7361D2B3D1939260F19C279605223A708F71312B6EABADF6EEAC31F66E3BC4595A67BC883B17F37D1018  
CFF28C332DDEFB6C5AA56558218568AB9802EECAE50FDB2F953B2AEF7DAD5B6E2F841521B62829076170ECDD4775619F151013CC  
A830EB61BD960334FE1EAA0363CFB5735C904C70A23D59E9E0BCBAAD1E4ECC86BC60622CA79CAB5CABB2F3846E648B1EAF19BDF  
0CAA02369B9655ABB5040685A323C2AB4B3319EE9D5C021B8F79B540B19875FA09995F7997E623D7DA8F837889A97E32D7711ED935  
F166812810E38829C7E61FD696DEDFA17858BA9957F58A451B2272639B3C3FF1AC24696CDB30AEB532E30548FD948E46DBC31285  
8EBF2EF34C6FFAEF2ED6E1EE7C3735D4A14D9E864B7E342105D14203E13E045EE2B6A3AAABEAD86C4715FACB4F0DC742F442FE6  
ABBB5654F3B1D41CD2105D81E799E86854DC7E44B476A3D816250CF62A1F25B8D2646FC8883A0C1C7B6A37F1524C369CB74924784  
8A0B5692B285095BFB00AD19489B1462B17423820E0058428D2A0C55F5EA1ADAF43E233F70613372F0928D937E41D65FECF16C223B  
DB7CE3759CBEE7460408E7A7CE77326EA607808419F8509E8EAFD85661D99735A969A7AAC50C6C25A04BFC800BCADC9E447A2  
EC3453484FDD567050E1E9EC9DB73DBD3105588CD675FDA79E3674340C5C43465713E38D83D28F89EF16DFF20153E21E78FB03D4A  
E6E39F2BD8B3ADF7E93D5A68948140F7F64C261C94692934411520F77602D4F7BCF46B2ED4A20068D40824713320F46A43B7D4B750  
0061AF1E39F62E9724454614214F74BF8B88404D95FC1D96B591AF70F4D5D366A02F45BFB09EC03BD79857FAC6D0D031CB850496EB  
27B355FD3941DA25476B8CA09A2850782550429F40A2C8B9AE866DF868DC1462D7486900680E0CA0427A18DEE43F3FEA2E887A  
D8CB58CE0067AF4D6B6AAACE1E7CD3375FECCE78A399406B2A4220FE9E35D9F385B9EE39D7AB3B124E8B1DC9FAF74B6D185626A366  
31EAE397B23AEFA74DD5B43326841E7F7CA7820FBFB0A54EDF8EB397454056ACBA4895275533A3CA20838D7FE6BA9B87D096954B  
55A867BCA1159A58CCA9296399E1DB33A62A4A563F3125F95FE47E1C9029317CFD8E80204272F7080B8155C05D8E3295C11548EA  
C66D2248C1133FC70F86DC07F9C9EE41041F0F404779A45D886E17325F51EBD59BC0D1F2BCC18F41113564257B7834602A9C60DFF8  
E8A31F636C1B0E12B4C202E1329EAF664FD1CAD181156B2395E0333E92E13B240B62EEBEB92285B2A20EE6BA0D99DE720C8C2DA2F7  
28D012784595B794FD647D0862E7CCF5F05449A36F877D48FAC39DFD27F33E8D1E0A476341992EFF743A6F6EABF4F8FD37A812DC60  
A1EBDDF8991BE14CDB6E6B0DC67B55106D72C372765D4BCDD0E804F1290DC7CC00FFA3B5390F92690DF87B9FFBCEDB7D9C  
A091CF0BD9155EA3BB132F88515BAD247B9479BF763BD6EB37392EB3CC1159798026E297F4E2312D6842ADA7C66A2B3B12754CC7  
82EF11C6A124237B79251E706A1BBE64BFB63501A6B10181CAEDFA3D25BD0D8E2E1C3C9444216590A121386D90CECED5ABEA2A64  
AF674EAD8A6A5FBE8F98864E4C3FE9DB8C8057F0F7C08660787BF86003360DD1ED8346F6381FB07745AE12D736FC8C8426B33F01E  
AB71B08041873C005E5F77A057BEBDE8AE2455464299BF582E614E58F48FF2DDFDA2F474EF388789BDC25366F9C3C8B38E74B475F2  
5546FCD9B97AEBD26618B1DDF84846A0E79915F95E2466E5982E04A57708CD5591C902DE4CB90BACE1BB8205D011A862487574A99  
EB77F19B6E0A9DC09662D09A1C324633E85A1F0209F0BE8C4A99A0251D6FE101AB93D1D0BA5A4DFA186F2027868F169DCB483  
573906FEA1E2CE9B4FD7F5250115E01A70683FAA002B5C40DE6D0279AF88C2773F8641C3604C0661A806BF50F177A28C0F586E0006  
058AA30DC7D6211E69ED72338EA6353C2DD94C2C21634BBCEEE5690BCB6DEEBFC7DA1CE591D766F05E4094B7C018839720A3D7C9  
27C2486E3725F724D9DB91AC15BB4D39EB8FCED54557808FCA5B5D8037CD34AD0FC41E50EF5EB167F678A28514D96C51133C6FD5  
C7E756E14EC4362ABFCEDB67D79A323492638212670EFA8E406000DE03A39CE37D3FAF5FCAB217375AC52D1B5C80679E4F33  
742D382274099BC9BBED5118E9DBF0F7315D62D1C7EC700C47BB78C1B6B21A19045B26EB1BE6A366EB45748AB2FBC946E79C6A376  
D26549C2C8530FF8EE468BD7D5730A1D4CD04DC62939BDBA9BA4650AC9526E8BE5EE304A1FAD5F06A2D519A63EF8CE29A86EE  
22C089C2B843242EF6A51E03AA9CF2D0A483C061BA9BE96A4D8FE1550BA645BD62826A2F9A73A3AE14BA99586EF5562E9C72FEFD3  
F752F7DA3F046F6977FA0A5980E4A91587B086019B09E6AD3B3EE593E990FD5A9E34D7972CF0B7D9022B8B5196D5AC3A017DA67DD  
1CF3ED67C7D2D281F9F25CFADF2B89B5AD6B4725A88F54CE029AC71E019A5E647B0ACFDED93FA9BE8D3C48D283B57CCF8D5662979  
132E28785F0191ED756055F7960E44E3D35E8C15056DD488F46DBA03A161250564F0BDC3EB9E153C9057A297271AEC93A072A1B3F  
6D9B1E6321F5F59C66FB26DCF3197533D928B155FDDF0536534828ABA3CB828517711C20AD9F8ABCC5167CCAD925F4DE817513830D  
C8E379D58629320F991EA7A90C2FB3E7BCE5121CE64774FBE32A8B6E37EC3293D4648DE53696413E680A2AE0810DD6DB22469852D  
FD09072166B39A460A6445C0DD586CDECF1C20C8AE5BBEF7DD1B588D40CCD2017F6BB4E3BBDDA26A7E3A59FF453E350A44BCB4CD  
D572EACEA8FA6484BB8D6612AEBF3C6F47D29BE463542F5D9EAECC2771BF64E6370740E0D8DE75B1337F821671AF537D5D4404CB0  
84EB4E2CC34D2466A0115AF84E1B0042895983A1D06B89FB4CE6EA0486F3F3B823520AB82011A1D4B277227F8611560B1E7933FDCB  
B3A792B344525BDA08839E151CE794B2F32C9B7A01FBAC9E01CC87EBCC7D1F6CF0111C3A1E8AAC71A908749D44FBD9AD0DADECB  
50ADA380339C32AC69136678DF9317CE0B12B4FF79F59B743F5BB3AF2519FF27D9459CBF97222C15E0FC2A0F91F7C19B941525FAE  
59361CEB69CEBC2AC645912BAA8D1B6C1075EE3056A0C10D25065C30A442E0CE6E01698DB3B4C98A0B63278E9649F1F953E0D03  
92DFD3A0342B8971F21E1B0A74414BA3348CC5BE7120C37632DBDF359F8D9B992F2EE60B6F470FE3F11DE54CDA541EDAD891CE627  
9CFCD3E7E6F1618B166FD2C10D5848FD2C5F6FB2299F523357A632762393A8353156CCCD02ACF081625A75EBB5E616369788D273C  
CDE96629281B94D90C40F0B171C65614E6C6C7BD327A140A45E1D206C3F27B9AC9AA53FD62A80F00B25F8626B562D2F671126905  
B2040222B6BCBFC7CCD769C2B53113EC01640E3D338ABBD602547ADF0BA38209CF746CE7677AFA1C52075606085CBFE4E8AE88DD87  
AAAF9B0439FAA7E1948C325C02FB8A8C01C36AE4D6EBE1F990D4F869A65CDEA03F09252DC208E69FB74E6132CE77E25B758FDFE33AC  
372E6B83ACB022002397A6EC6B5BFFCFD44C4BFE5ED143F5E823FE4823D152AF0E718C97059BD98201F4A49D62E8A5529BA89E12  
48D3BF88656C5114D0EBC4CEE16034D8A3920E47882E9AE8FBDE3ABDC1F6D0A15E525DB2BAE101F86E7A6D9C68A92708FCD9293CBC  
0CB03C86F8A8AD2C2F00424EEBCACB452D89CC71FCD59C7F917F0622BC6D8A08B1834D21326884CA82E3AACBF37786F2FA2CAB6E3  
DCE535AD1F20AC607C6B8E14F5EB4388E775014A6656665F7B...



## Kommastellen von e im Dualsystem

10110111111000010101000101100010100010101110110100101010011010101011111011100010101100010000000100111001111  
0100111100111100011101100010111001110001011000001110011100010101001101101001010101001111000010011011001  
000001000101000110010000110011111101111001100100100111001110111001110001001001001101100111101111001011111  
01001011111100010101000101100010000011000111010110000111011010000001010100100000010101011101100010001  
1000010111101010100111011111000111010101011101010111110101100101011000010010010000100111110101000111  
1101011111000001100110111010100001000010101100011011001010101010011101110101000110101110011101010101  
01011100010011010111001111110101011110010010011010110011000010011110000110001110000111000011100110100010  
110111011111000101010011010001001110110111100111110111110100001110010000111011110001010110001010000100  
1101101010101111001100110010100110000101011001100100100111010010000011101001111001011110010111100000010  
1010110001100000101011001100100100111101101100001110100010000100010101001010010110110010110010001110001111  
1101110111001011010101010101011011010000011010111111010001101000000111010001110100001010100011110111  
100011100100110111101001010111010010101110110111001101100011011100101011101100011001000010110000011110  
1001111001000111011100000101001101010111000010011110000000101111100111000011100110111101111100010111011  
0011000000001010000000100110011010010100000101000001011101100001100100010111001011111010011100110100110  
0001011000001111111100011100100111000100100011001011101111001100000011000001110000011111110001110  
1100011011001100011001111101010101100110011011101110010111000000110000001100000000000010111  
0001011000111011110001100000101111010001011010000011011001011000110111001101001010001001101100000101100  
10111011111110101000100001101011010000100011100001100001000111110011110111001101110001101010101101100  
11101101100101000110010000001010110111011100001101001101101110011001110011001110000000100011000011000  
0110110100011011111001001110101101100110110010010000011101110101101100100011101001001101001000111101111  
1101111101110011001100011001011000011110101100000110000110101100100011100100011011111000010011000010  
011000010100010011100010110000010110000001001100000100110011001100010001101110001000110000000001011  
0001011000111011110001100000101111010001011010000011011001011000110111001101001010001001101100000101100  
101110111111101010001000011010110100001000111000011110111001101110011011100011011100011010101101100  
11101010001000101001011100010110001011010011011010011011001001110010111000100001110011100011110101010  
11111111110101110010011101011011001101101001101110111011010011110111010000110110100101011100010100  
100010001101100011010000011010101110001010010000110010111001101100011011101011011010001101110110111  
1100110100100001010100011100010001000010011100000101010111001101000001101011111010100100001110110111  
101110011110000010110010000011101110001111110101011001110101111000010010111001000001110100101011011001  
101001111000001110111000101101110011011101010010110000110001011001001101111010011110101110010011000011  
101001111001001110010011000100001010111010110100111101011000110001100010101110110110101000011100011  
00011011101100011100111000111010101010100000110100000000000100100001111110101010110110100101011111000  
11000111001100011110100111000100110101110010001000011011101111011010000110001100010101110101010000111  
10000000010010110011110011010000011001010101001000001110110000000010101001000110000001001100001100010001  
1011011100011101110001111000111000110101101000000001110000000100100100011000110100011000110001100010  
11100010110111101000011010000111010111001001111010110001010000000000000011110000101010010011101100111010  
10100111110011000110001010100010101100110000001010000011001000111111010101011011010010101111100011100011  
10110010011010101010101010101011111100010001010010011010101010001010100010001001100011010101010000110  
0000101110000111000110100010100000000011111001011101010010011101010100010101000101010100010001110000  
110101100001111100011100011011010000000001101111010011010100011101100011110010011100100111001001010  
1100101011011110000011001010011000110011001010001110011011110010101111001100100101101110101010110000  
0000100011001010100010100000011011111011010110011100111001110000010010001001100001000101101000001000  
0010101110100011010101010100001000111010011001111001011110011110011100110010001111010101000110001011  
0101001110001010010001110101110101001101010011010010011010000100010100001000101000110101000110001011  
11001000101010101010101010000100011001010000010110111001000001011010111000010101000011001110001010111001  
00100111110101010010001101011100100101011100100010001111001100110011110010110110111001011001110111011  
1101000000011110110010111000110000001000001111001110001000000100001111110110101001100111110101100011110  
0111011100011010111000000110101100011111110111010100101010001110100110101101100011110011010010110001010  
1001101001010100100110101010000110001011000011100000101001000001110101011100001101011100100111000110110  
101101010010100100000011100010010011111101000110101010101000110110101101000000001001100111  
1101100000000011001000001110000001100100001001010100011011001010001101110011001001111101011001100  
10001111111001110110010010101000010011101010000110110100001111111101011011001110100011100110001  
01111000001011100011001100001110111011110110010011000100001101111000011010111000110001010100010101000  
11101011100010000010001010101010101011011011100011110010010011001001100110011001100110011000010000  
001111000111001100000000011011101011100000010001010010011100010001000001110011101001010101110000010111001  
00010101000101000001001010100011100010101110101100000101000001000101000010001101100000010111010001010111  
0000101011110101110001011001000101100100010110010000010001101111101100000100101000010101000001111110001  
1010001100100111001000110101100000010001010110110111000100110011000011011010100100011000001111110001  
01000110101000101010010011000100001001011100000011111110111000011100001000010111110011011000001001  
1011100101001100010100010101010011100000111100000100011100111110010011001111001001111001001110001100  
01011001010000110000010010000101110110010001001000000010110110011010110110011010100101011110011100110101  
0110111000000000011001010010001000110110011100000010100000101000011111110001100000111010110100101011011111  
100010001100011000001111110000001101010010100011110100111101001000101110001110111110010001100111000  
001011101010001010010011111101000101011010000101011011110011100101010000101001100101010001010110111011  
010010111101110101011111011110010110001010001100001111010111101010111100001110000111000110101010  
0001111110001011101110100000111011111000110000011111101000011011111101010011010111111011110010100  
1100000110011101111100001101100101111010001000111010100100011101111010100001000100001110100001000001000  
101110010100001101010011110100011000010001110000101010010100010100010000001110100001000001000100010  
00110011010110100011001000101101101111000101000111011101110110101001001111010101000101010100111100  
10110000111011110101101101100111000000111001101010101010100001101010000111010000110100111110001001  
1011010001000010000110010111010111010011001000011001000110100011010001100001100011101000110001000100010  
10010111100010110001010011110100011000010001110000101010010100010100010000001110101111100010100010  
00110011010110100011001000101101101111000101000111011101110110101001001111010101000101010100111100  
1011000011101111010110110110011100000011100110101010101010000110101000011101000011010010011110001001  
1011101001000010000001010100001011101011110001110110101110001110101001001110001001111000001001  
10010111100010110001010001000110010111010001010011000111001110011100111001110011100111001110011000  
1100010010111011000110111001000110101101100101111010101111000000100001110100101100110010011001100  
11001110100000011011101110000010011110000010111101000110101101000111010110100001111101001100010011011  
00010101111001110011001100110011001100110111101011101001111010111010010111001101101000001111110001  
1010001100100111001000110101100000010001010110110111000100110011000011011010100100011000001110011010001  
01000110101000101010010011000100001001011100000011111110111000011100001000010111110011011000011000001001  
1011100101001100010100010101010011100000111100000100011100111110010011001111001001111001001110001100  
01011001010000110000010010000101110110010001001000000010110110011010110110011010100101011110011100110101  
0110111000000000011001010010001000110110011100000010100000101000011111110001100000111010110100101011011111  
100010001100011000001111110000001101010010100011110100111101001000101110001110111110010001100111000  
001011101010001010010011111101000101011010000101011011110011100101010000101001100101010001010110111011  
010010111101110101011111011110010110001010001100001111010111101010111100001110000111000110101010  
0001111110001011101110100000111011111000110000011111101000011011111101010011010111111011110010100  
1100000110011101111100001101100101111010001000111010100100011101111010100001000100001110100001000001000  
101110010100001101010011110100011000010001110000101010010100010100010100010000001110100001000001000  
10111001010000110101001111010001100001000111000010101001010001010001000000111010001100001000100010  
00110011010110100011001000101101101111000101000111011101110110101001001111010101000101010100111100  
101100001111011110101101101100111000000111001101010101010100001101010000111010000110100100010011110001001  
101110100100001000000101010000010111010111100011101101001001110101110010011110001001111000001001  
11010000000010001110010111010011101001100100001100100110100010100001100001110101101000010011000010  
100101111000101100010100010001100101110100010101000110011100111001110011100111001110011100111000  
1100010010111011000110111001000110101101100101111010101111000000100001110100101100110010011001100  
1100111010000001101110111000001001111000001011110100011101011101000111010110100001111101001100010011011  
000101011110011110101110001011001000101100000100110011100111010111010001110101101000001111110001  
1010001100100111001000110101100000010001010110110111000100110011000011011010100100011000001110011010001  
01000110101000101010010011000100001001011100000011111110111000011100001000010111110011011000011000001001  
1011100101001100010100010101010011100000111100000100011100111110010011001111001001111001001110001100  
01011001010000110000010010000101110110010001001000000010110110011010110110011010100101011110011100110101  
0110111000000000011001010010001000110110011100000010100000101000011111110001100000111010110100101011011111  
100010001100011000001111110000001101010010100011110100111101001000101110001110111110010001100111000  
001011101010001010010011111101000101011010000101011011110011100101010000101001100101010001010110111011  
010010111101110101011111011110010110001010001100001111010111101010111100001110000111000110101010  
0001111110001011101110100000111011111000110000011111101000011011111101010011010111111011110010100  
1100000110011101111100001101100101111010001000111010100100011101111010100001000100001110100001000001000  
101110010100001101010011110100011000010001110001010100010100010100010100010000001110100001000001000  
10111001010000110101001111010001100001000111000010101000101000101000101000100000011101000110000100010  
00110011010110100011001000101101101111000101000111011101110110101001001111010101000101010100111100  
1011000011110111101011011101100111000000111001101010101010100001101010000111010000110100100010011110001001  
101110100100001000000101010000010111010111100011101101001001110101110010011110001001111000001001  
11010000000010001110010111010011101001100100001100100110100010100001100001110101101000010011000010  
100101111000101100010100010001100101110100010101000110011100111001110011100111001110011100111000  
1100010010111011000110111001000110101101100101111010101111000000100001110100101100110010011001100  
110011101000000110111011100000100111100000101111010001110101110100001111101001110001001100110011001  
00010101111001111010111000101100100010110011001100110111101011101000111010110100001111110001  
1010001100100111001000110101100000010001010110110111000100110011000011011010100100011000001110011010001  
01000110101000101010010011000100