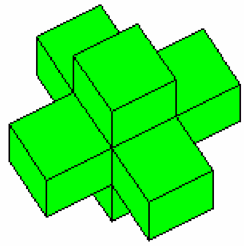
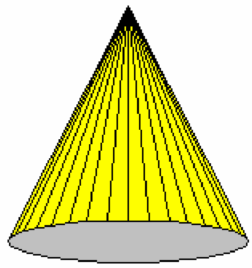
Körper





geometrisch: ein von allen Seiten begrenzter Raumteil mit drei Ausdehnungen (Dimensionen)
Die Summe der Flächeninhalte der Begrenzungsflächen bildet den Oberflächeninhalt, der vollständig umschlossene Raum das Volumen des Körpers.

Polyeder (Vielflach)

Ein Polyeder (Vielflächner) ist ein geometrischer Körper, dessen Oberfläche aus ebenen Vielecken besteht.
Hierdurch werden alle Körper ausgeschlossen, die gekrümmte Kanten oder Oberflächen enthalten, insbesondere also Kugeln, Kegel und Zylinder. Ein Polyeder hat mindestens 4 Ecken, 6 Kanten und 4 Flächen.
Die Untersuchung von Polyedern wurde früher Polyedrometrie genannt.

Konvexes Polyeder

Definition: Ein geometrischer Körper heißt konvex, wenn mit je zwei Punkten, die zu ihm gehören, auch die Strecke zwischen diesen Punkten vollständig zu diesem Körper gehört.
Ein Polyeder, dessen Raumdiagonalen alle im Innern des Körpers liegen. Hierdurch werden alle Körper ausgeschlossen, die "Löcher" oder "Dellen" enthalten.

Konkave Punktmenge, Konkaves Polyeder

Eine Punktmenge im R^n, bei welcher die Verbindungslinie zweier Punkte auch außerhalb der Menge verlaufen kann. Insbesondere ist ein Polyeder konkav, wenn auch nur eine Raumdiagonale außerhalb des Körpers verläuft.

Eulerscher Polyedersatz

Für konvexe Polyeder gilt der Eulersche Polyedersatz (Leonhard Euler):
Satz: Bezeichnet f die Anzahl der Flächen, k die Anzahl der Kanten und e die Anzahl der Ecken eines konvexen Polyeders, so gilt

$$e - k + f = 2$$

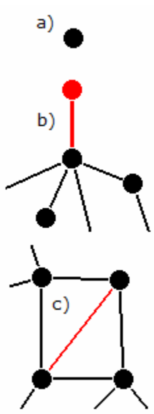
Valenz einer Ecke E eines Polyeders P

Die Valenz einer Ecke ist die Anzahl der Kanten (oder auch der Flächen) des Polyeders, die in dieser Ecke zusammentreffen.
e_n mit n=3,4,… Anzahl der Ecken mit Valenz n $\rightarrow e = e_3 + e_4 + \ldots$

Valenz einer Fläche F eines Polyeders P

Die Valenz einer Fläche ist die Anzahl der Kanten (oder auch der Ecken) des Polyeders, die auf dem Rand von F liegen. f_n mit n=3,4,… Anzahl der Flächen mit Valenz n $\rightarrow f = f_3 + f_4 + \ldots$

Erfüllt das Polyeder P den Eulerschen Polyedersatz, so gilt:
1. Es ist $e_3 + f_3 \geq 8$. Hat insbesondere keine Fläche und keine Kante eine Valenz größer als 4, so gilt sogar $e_3 + f_3 = 8$.
2. Aus $f_4 = f_5 = 0$ folgt $f_3 \geq 4$.
3. Aus $f_3 = f_5 = 0$ folgt $f_4 \geq 6$.
4. Aus $f_3 = f_4 = 0$ folgt $f_5 \geq 12$.
5. Aus $e_4 = e_5 = 0$ folgt $e_3 \geq 4$.
6. Aus $e_3 = e_5 = 0$ folgt $e_4 \geq 6$.
7. Aus $e_3 = e_4 = 0$ folgt $e_5 \geq 12$.

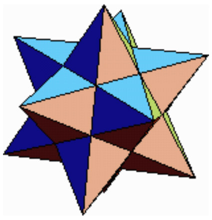


Polyedersatzbeweis

Beweis des Eulerschen Polyedersatzes:
Der einfachste planare Graph besteht nur aus einer Ecke (Abbildung a). Es gibt eine Fläche und keine Kanten. Es gilt also E + F - K = 1 + 1 - 0 = 2. Aus diesem einfachsten Graphen können alle weiteren ausschließlich durch die beiden folgenden Operationen konstruiert werden, welche die Gültigkeit des Satzes nicht verändern:

b) Hinzufügen einer Ecke, die über eine neue Kante mit dem Rest des Graphen verbunden ist. Die Anzahl der Ecken und Kanten steigt jeweils um eins, während die Anzahl der Flächen gleichbleibt. Damitl gilt E + F - K = 2 auch für den neuen Graphen, da auf der linken Seite der Gleichung je eine Eins addiert und abgezogen wurde.
c) Hinzufügen einer Kante, die zwei bereits bestehende Ecken verbindet. Während die Anzahl der Ecken gleichbleibt, steigt die Anzahl der Flächen und Kanten jeweils um eins. Wieder bleibt die Summe E + F - K gleich, da je eine Eins addiert und abgezogen wurde.

Da der Satz für den ersten, einfachsten Graphen galt, muss er also auch für jeden Graphen gelten, der durch eine der beiden Operationen aus diesem entsteht. Jeder Graph, der durch eine weitere Operation aus einem solchen Graphen entsteht, muss den Satz ebenfalls erfüllen, usw. Daher gilt der Satz für alle planaren Graphen und damit auch für alle konvexen Polyeder.

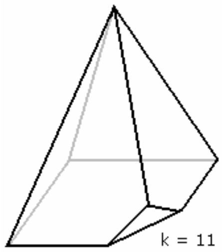


Geschlecht eines Polyeders

Ein Polyeder ist vom Geschlecht 0, wenn jeder auf der Oberfläche des Polyeders gezeichnete geschlossene Streckenzug diese Oberfläche in zwei getrennte Flächenstücke zerlegt.
Trennt man eine Fläche eines solchen Polyeders ab, so erhält man eine Polyederfläche, die einfach zusammenhängend genannt wird.
Beispiele für Polyeder vom Geschlecht 0 sind die konvexen Polyeder und die Prismen mit konkavem Basispolygon.

Ein Polyeder ist vom Geschlecht n, wenn n die Maximalzahl der geschlossenen einander nicht überschneidenden Streckenzüge ist, die sich auf der Oberfläche des Polyeders einzeichnen lassen und diese dabei nicht in getrennte einfach zusammenhängende Flächenstücke zerlegen.
Ein Beispiel für ein Polyeder mit dem Geschlecht 4 ist das links abgebildete kleine Sterndodekaeder.

Bezeichnet f die Anzahl der Flächen, k die Anzahl der Kanten und e die Anzahl der Ecken eines beliebigen Polyeders, so wird $e - k + f$
die Eulersche Charakteristik genannt. Es gilt:
Polyeder desselben Geschlechts haben auch die gleiche Eulersche Charakteristik.
Insbesondere ist die Eulersche Charakteristik für Polyeder mit dem Geschlecht 0 gleich 2, was der Aussage des Eulerschen Polyedersatzes entspricht.
Allgemein gilt der verallgemeinerte Eulersche Polyedersatz:
Die Eulersche Charakteristik eines Polyeders vom Geschlecht n ist gleich $e - k + f = 2 - 2n$



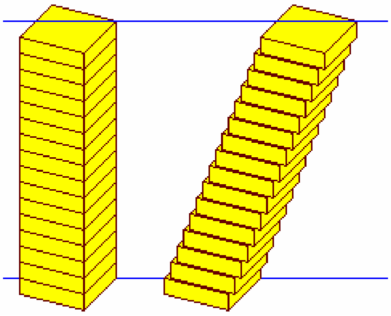
Polyederkanten

1. Kein Polyeder hat $k < 6$ Kanten.
Wählt man eine beliebige Fläche des Polyeders aus, so hat diese mindestens drei Ecken bzw. Kanten. Von diesen Ecken muss jeweils mindestens eine weitere Kante ausgehen, da an jeder Ecke mindestens drei Flächen zusammenstoßen. Das ergibt ein Minimum von 6 Kanten.

2. Ist k mindestens 6 und eine gerade Zahl, so gibt es ein Polyeder mit k Kanten.
Eine Pyramide mit einem (k/2)-Eck als Grundfläche hat k Kanten.

3. Ist k mindestens 9 und eine ungerade Zahl, so gibt es ein Polyeder mit k Kanten.
Schneidet man von den Pyramiden von 2. eine Ecke an der Grundfläche ab, so erhöht sich die Kantenzahl k um 3. Aus Polyedern mit 6, 8, 10, … Kanten werden dann Polyeder mit 9, 11, 13, … Kanten. Abbildung: 11 Kanten

4. Es gibt kein Polyeder mit $k = 7$ Kanten.
Der Beweis für konvexe Polyeder lässt sich mit der Eulerschen Polyederformel führen.
Für $k = 7$ wäre dann $e + f = 9$, also $e = 4$ oder $f = 4$.
Durch $e = 4$ wird ein Tetraeder bestimmt, aber dieses hat $k = 6$ Kanten. Ist $f = 4$, so muss jede der vier Flächen ein Dreieck sein, da von den Kanten nur drei weitere Flächen ausgehen können. Also erhält man wieder ein Tetraeder.
Für alle natürlichen Zahlen k mit Ausnahme von 1, 2, 3, 4, 5 und 7 gibt es Polyeder mit k Kanten.
Quelle: http://www.fh-friedberg.de/users/boergens/problem/problem_04_03loe.htm



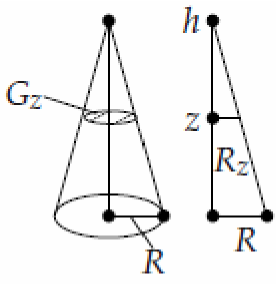
Satz des Cavalieri, Prinzip des Cavalieri (1629)

Körper mit gleichen Höhen haben gleiches Volumen, wenn die Flächeninhalte ihrer Querschnitte für jedes
$0 \le a \le h$ übereinstimmen.
Mit dem Prinzip des Cavalieri kann man das Volumen zweier beliebiger Körper vergleichen. Das Prinzip wird bei der Herleitung vieler Volumenformeln verwendet, indem man das neue Problem auf Bekanntes zurückführt.
Anmerkung: Der Satz des Cavalieri wird schon im Jahr 520 von dem chinesischen Mathematiker Tsu Keng-chih genannt.

Guldinsche Regel

Das Volumen eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus dem Inhalt der erzeugenden Fläche A und dem Umfang des von ihrem Schwerpunkt beschriebenen Kreises
$V = 2\pi R\, A = 2\, M_x$, M_x … statisches Moment

Die Mantelfläche des Rotationskörpers ist das Produkt aus der Länge des erzeugenden Linienzuges l und dem Umfang des von seinem Schwerpunkt beschriebenen Kreises $M = 2\pi R l$
Die Guldinschen Regeln dienen in der Praxis zur Bestimmung des jeweiligen Schwerpunktes, wenn vom Rotationskörper die Bogenlänge s und V_x, A_x, bzw. A_M bekannt sind.
Die erste Guldinsche Regel wurde schon von Pappus im 7.Buch der "Collectiones" veröffentlicht. Deshalb spricht man auch vom Pappusschen Schwerpunktsatz.

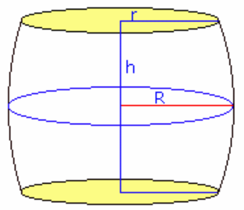


Kegelvolumen mit dem Satz des Cavalieri

Volumen eines Kreiskegels

Es sei G ein Kreiskegel vom Radius R und der Höhe h. Für das Volumen von G gilt: Volumen $V = \pi/3\ r^2 h$

Die Gleichung ergibt sich aus dem Prinzip des Cavalieri:
$$V = {}_G\int dx\, dy\, dz = {}_0\int^h ({}_G\int dx\, dy)\, dz$$
Der Schnitt G des Körpers in der Höhe z ist ein Kreis vom Radius R_z. Somit gilt
$${}_G\int dx\, dy = \text{Flächeninhalt eines Kreises vom Radius } R_z = \pi R_z^2$$
Aus der rechten Abbildung folgt $R_z / R = (h-z) / h$
D.h. $V = {}_0\int^h \pi R^2 (h-z)^2/h^2\, dz = -\pi R^2/(3h^2)\, (h-z)^3|_0^h =$
und somit $V = \pi/3\ R^2 h$



Simpsonsche Regel, Keplersche Fassregel

Besitzt ein Körper zwei parallele Grundflächen A_G und A_D und hat jeder parallele Querschnitt einen Flächeninhalt, welcher der Funktionswert einer ganzrationalen Funktion höchstens 3.Potenz der Höhe ist, so gilt
$$V = h/6\ (A_G + A_D + 4A_m) \qquad A_m \text{ … mittlerer Querschnitt}$$

Diese Beziehung wurde zuerst von Kepler entdeckt. Johannes Kepler sorgte, wie damals üblich, für sich und seine Familie jährlich durch das Einlagern von einigen Fässern Wein. Es wunderte ihn aber bald die Volumenvermessungstechnik der Fassmacher bzw. der Weinlieferanten. Es wurde mit einer Rute durch das an der dicksten Fassstelle gelegene Spundloch zum Rand hin gemessen. Da Kepler klar wurde, dass so extrem unterschiedliche Fässer gleiches Volumen hätten, näherte er die Fassbegrenzung durch eine Parabel an und entwickelte so die nach ihm benannte Fassregel.
Beispiel: Tonne (Fass) … Grund- und Deckfläche parallele Kreise
Volumen $V = \pi h (2D^2 + d^2) /12$ $V = \pi h (2R^2 + r^2) /3$
Beispiel: Kegel mit Höhe h und Grundradius r
$A_G = \pi r^2$, $A_m = \pi r^2/4$, $A_D = 0$ ergibt $V = h/6\ (\pi r^2 + 4\ \pi r^2/4) = \pi/3\ h\ r^2$
Beispiel: Kugel mit Radius r, d.h. h = 2r
$A_G = 0$, $A_m = \pi r^2$, $A_D = 0$ ergibt $V = 2r/6\ 4\ \pi r^2 = 4\pi/3\ r^3$

Winkeldefekt eines Polyeders

Bezeichnet man als Winkeldefekt einer Ecke eines konvexen Polyeders die Differenz zwischen dem Vollkreis, also 360°, und der Summe aller Winkel in den Ecken derjenigen Flächen, die in dieser Polyederecke zusammenstoßen, so gilt außerdem die Descartesche Formel (Rene Descartes).
Für die regelmäßigen Polyeder erhält man als Winkeldefekte: Tetraeder 180°, Oktaeder 120°, Würfel 90°, Ikosaeder 60°, Dodekaeder 36°.
Analog ergibt sich für die Archimedischen Körper: abgestumpftes Tetraeder 60°, Kuboktaeder 60°, abgeschrägtes Hexaeder 30°, Rhombenkuboktaeder 30°, abgestumpftes Hexaeder 30°, abgestumpftes Oktaeder 30°, Ikosidodekaeder 24°, abgestumpftes Kuboktaeder 15°, abgeschrägtes Dodekaeder 12°, Rhombenikosidodekaeder 12°, abgestumpftes Dodekaeder 12°, abgestumpftes Ikosaeder 12°, abgestumpftes Ikosidodekaeder 6°.

Descartesche Formel

(René Descartes: Satz über die Winkeldefekte eines konvexen Polyeders)
Satz: Die Summe über die Winkeldefekte sämtlicher Ecken eines konvexen Polyeders ist
$$S = 360° (e - k + f).$$
Hierbei ist e die Anzahl der Ecken, k die Anzahl der Kanten und f die Anzahl der Flächen des konvexen Polyeders.
Der Winkeldefekt einer Polyederecke besteht dabei aus der Differenz zwischen dem Vollkreis 2*π und der Summe aller Winkel in den Ecken derjenigen Flächen, die in dieser Polyederecke zusammenstoßen.
Aus der (erst später von Euler bewiesenen) Eulerschen Polyederformel (e - k + f = 2) ergibt sich daher S = 4*π, d.h. für die Summe S der Winkeldefekte eines beliebigen konvexen Polyeders also stets S = 720°.

Dieder-Winkel, dihedraler Winkel

Zwei angrenzende Seitenflächen eines Polyeders bilden einen Winkel. Dieser wird Dieder-Winkel oder dihedraler Winkel genannt.

Treffen drei Seitenflächen an einer Polyederecke zusammen, so können die dihedralen Winkel aus den Innenwinkeln der Seitenflächen über sphärische Trigonometrie berechnet werden.
Dazu wird um die Ecke des Polyeders eine Einheitskugel gelegt und die Schnittlinien der Kugel mit den drei Flächen betrachtet. In einem sphärischen Dreieck korrespondieren die Flächenwinkel mit den Seitenlängen des Dreiecks und die Dieder-Winkel.
Sind die Innenwinkel α, β und γ so wird für die drei Dieder-Winkel ε, η, χ

$\varepsilon = \arccos((\cos\alpha - \cos\beta \cos\gamma)/(\sin\beta \sin\gamma))$
$\eta = \arccos((\cos\beta - \cos\alpha \cos\gamma)/(\sin\alpha \sin\gamma))$
$\chi = \arccos((\cos\gamma - \cos\beta \cos\alpha)/(\sin\beta \sin\alpha))$

Dieder-Winkel einer Ecke E4 mit 4 Seitenflächen

Treffen in einer Ecke eines Polyeders vier Seitenflächen aneinander, so wird zur Berechnung der vier Dieder-Winkel erneut eine Kugel mit dem Radius 1 um die Ecke gelegt.
Durch die Kugel wird eine vierseitige Pyramide mit Seitenkanten der Länge 1 erzeugt. Diese Pyramide ist im Allgemeinen schief, da die Flächenwinkel an der Spitze zwischen den Seitenkanten nicht unbedingt gleich sein müssen.
Zur Berechnung reduziert man das Problem auf den Fall einer Ecke mit 3 Seitenflächen, in dem man eine dreiseitige Pyramide abschneidet.

Sind α, β, γ und δ die Innenwinkel der an der Spitze zusammentreffenden Seiten, so wird für deren Seitenlänge der Pyramidengrundfläche

$a = 2 \cos((\pi - \alpha)/2)$; $b = 2 \cos((\pi - \beta)/2)$
$c = 2 \cos((\pi - \gamma)/2)$; $d = 2 \cos((\pi - \delta)/2)$

Da die vier Seitenkanten auf einem Schnittkreis der Kugel liegen, bilden sie ein Sehnenviereck und für die untere Kantenlänge der neuen Seite nach dem Abschneiden der Pyramide wird

$e = \sqrt{(ac+bd)(bc+ad) / (ab+cd)}$

Deren Innenwinkel ε an der Spitze ist dann

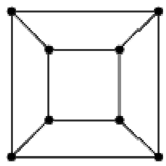
$\varepsilon = \arccos(-(e^2 - 2)/2)$

und für den Dieder-Winkel zwischen den Flächen mit den Winkeln α und β wird

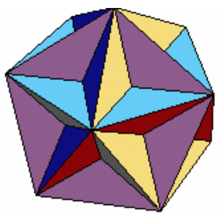
$\eta = \arccos(((e^2-2)/2 - \cos\alpha \cos\beta) / (\sin\alpha \sin\beta))$

Die anderen drei Dieder-Winkel erhält man durch zyklisches Tauschen der Winkel α, β, γ und δ.

Schlegel-Diagramm



Schlegel-Diagramme sind Hilfsmittel zur Veranschaulichung von Polyedern. Diese entstehen, in dem man durch eine Seitenfläche des Modells hindurch sieht, welches man so hält, dass alle anderen Ecken und Kanten perspektivisch als im Inneren dieser Fläche liegend erscheinen.
Mit Hilfe der Schlegeldiagramme kann u.a. gezeigt werden, dass es genau fünf regelmässige konvexe Polyeder gibt. In der Abbildung ist das Schlegeldiagramm des Würfels zu sehen.
Jeder Ecke entspricht im Diagramm ein Punkt, jeder Kante eine Strecke und jeder Seitenfläche ein von Kanten umschlossenes Gebiet - der Projektionsseitenfläche entspricht das Gebiet außerhalb des Diagramms.
Eine weitere Möglichkeit, konvexe Polyeder zu beschreiben, sind die sogenannten Schläfli-Symbole; nach dem Schweizer Mathematiker Ludwig Schläfli. Ein Paar {p, q} natürlicher Zahlen sagt, dass sich in jeder Ecke q p-eckige Seitenflächen treffen.
Ist p ganzzahlig ist, beschreibt das Symbol {p} ein reguläres Polygon. Ist p rational, dann entsteht ein Stern. Die Inversion eines Schläfli-Symbols liefert das dazu duale Polygon.



Wythoff Symbol

Die uniformen Polyeder, mit einer Ausnahme, können mit Hilfe des Wythoff Symbols beschrieben werden. Das Wythoff Symbol besteht aus drei rationalen Zahlen p, q und r > 1. p, q und r können nur die Werte 2, 3, 4 und 5 annehmen. Es existieren vier Arten des Wythoff Symbols:

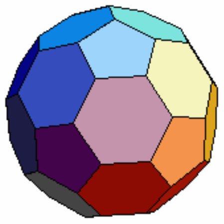
1) p|q r … regelmäßige und quasiregelmäßige Polyeder
Das Polyeder hat die Eckenkonfiguration {q, r, q, r, …, q, r} mit 2p Termen. Ist q = r ist das Polyeder regelmäßig.
Beispiele: Dodekaeder = 3|2 5, d.h. die Eckkonfiguration ist {2, 5, 2, 5, 2, 5}; ohne die trivialen Flächen {5, 5, 5}, d.h. 3 Fünfecke treffen aneinander.
Kubokateder = 2|3 4, Eckenkonfiguration {3, 4, 3, 4}
Großes Dodekaeder (Abbildung) = 5/2|2 5, Eckenkonfiguration {5, 5, 5, 5, 5}/2

2) p q|r … halbreguläre Polyeder
Das halbreguläre Polyeder hat die Eckenkonfiguration {p, 2r, q, 2r}.
Tetraederstumpf = 2 3|3, Eckenkonfiguration {2, 6, 3, 6} = {6, 3, 6}, d.h. zwei Sechsecke und ein Dreieck
Rhombenkuboktaeder = 3 4|2, Eckenkonfiguration {3, 4, 4, 4}

Klasse der Prismen = 2 n|2, Eckenkonfiguration {2, 4, n, 4} = {4, 4, n}

3) p q r| … Eckenkonfiguration {2p, 2q, 2r}
Kuboktaederstumf = 2 3 4|, Eckenkonfiguration {4, 6, 8}
Großer Kubokatederstumpf = 4/3 2 3|, Eckenkonfiguration {8/3, 4, 6}

3) |p q r … abgeschrägte Polyeder, Eckenkonfiguration {3, p, 3, q, 3, r}.
Abgeschräger Würfel = |2 3 4, Eckenkonfiguration {2, 3, 3, 3, 4, 3} = {3, 3, 3, 3, 4}
Ausnahme: |3/2 5/3 3 5/2 … Großes Dirhombenikosidodekaeder



Isoperimetrischer Koeffizient

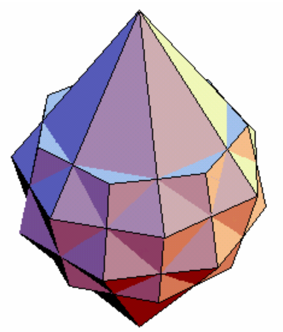
Unter dem isoperimetrischen Koeffizienten eines Körpers versteht man den Quotienten $IQ = 36\pi\, V^2 / A^3$
wobei V das Volumen und A die Oberfläche des Körpers darstellen.
Für die Kugel, mit dem größten isoperimetrischen Koeffizient, wird

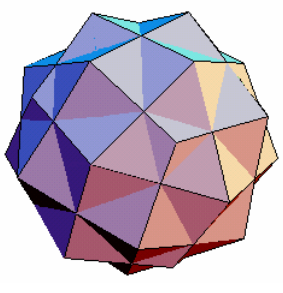
$$IQ = 36\pi\, V^2 / A^3 = 36\pi\, (4/3\, \pi\, r^3)^2 / (4\pi\, r^2)^3 = 1$$

Damit gilt für alle anderen dreidimensionalen Körper die isoperimetrische Ungleichung $IQ = 36\pi\, V^2 / A^3 < 1$

Haben verschiedene Körper das Volumen V = 1000 cm³, so wird für deren Oberfläche und den isoperimetrischen Koeffizienten

	A/cm²	IQ			
dreiseitiges Prisma (h=2a)		0,13345	Stella Octangula		0,20153
Tetraeder	720	0,302	Hexaederstumpf		0,45214
dreiseitige Doppelpyramide		0,45235	Kegel (h = 2r√2)	609	0,5
Würfel	600	0,523	Oktaeder	572	0,605
Zylinder (h = 2r)	553	0,667	Dodekaeder	531	0,755
Ikosaeder	515	0,829	Ikosaederstumpf	500	0,903
Dodekaederstumpf	492	0,947	Kugel	484	1





Kanonische Polyeder

Ein Polyeder wird kanonisch genannt, wenn alle Kanten des Polyeders eine Kugel berühren, d.h. diese tangieren.
Der Schwerpunkt der Berührungspunkte muss außerdem der Mittelpunkt der Kugel sein. Alle Seitenflächen müssen eben sein.

Die Platonischen und Archimedischen Körper und die zu ihnen dualen Polyeder sind kanonisch. Ebenso sind alle uniformen Polyeder und die Johnson-Polyeder kanonisch.

Polyederklassen

Unter den konvexen Polyedern befinden sich speziell sämtliche 92 konvexen Polyeder, die sich aus regelmäßigen Vielecken bilden lassen. Unter diesen befinden sich insbesondere
die regulären Polyeder , die halbregulären Polyeder , die quasiregulären Polyeder , die Deltaeder
Weitere wichtige Teilklassen konvexer Polyeder, die aus weniger regelmäßigen Vielecken gebildet werden sind
die Rhombenkörper , die Zonoeder , die Paralleloeder
Es gibt noch weitere, nichtkonvexe reguläre Polyeder, die Kepler-Poinsotschen Sternkörper.

Uniforme Polyeder

Sind alle Kanten eines Polyeders in ihrem Aufbau (gleiche Anzahl, Art und Lage der angrenzenden Flächen) identisch, so heißt das Polyeder uniform. Ende des 18.Jahrhunderts entdeckte Badoureau 37. 1954 vermutete Coxeter die Existenz von 75 uniformen Polyedern. Unter Einbeziehung der 5 pentagonalen Prismen existieren somit 80 derartige Körper.
Die Tabelle enthält die uniformen Polyeder mit Nummer, Schläfli-Symbol und Namen:

Nr.	Symbol	Name
01	n,4,4	Fünfseitiges Prisma
02	n,3,3,3	Fünfseitiges Antiprisma
03	n/d,4,4	Pentagramm Prisma
04	n/d,3,3,3	Pentagramm Antiprisma
05	n/(n-d),3,3,3	Gekreuztes Pentagramm Antiprisma
06	3,3,3	Tetraeder
07	6,6,3	Abgeschnittener Tetraeder

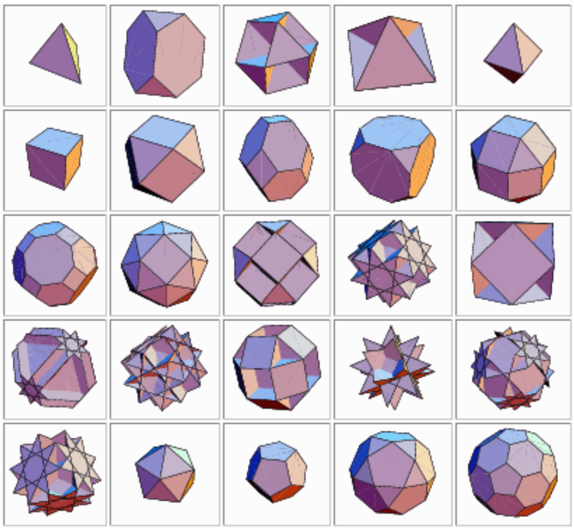
08	3,6,3/2,6	Oktohemioktaeder
09	3,4,3/2,4	Tetrahemihexaeder
10	3,3,3,3	Oktaeder
11	4,4,4	Würfel
12	4,3,4,3	Kuboktaeder
13	6,6,4	Abgeschnittenes Oktaeder
14	8,8,3	Abgeschnittener Würfel
15	4,4,4,3	Rhombenkuboktaeder
16	8,6,4	Abgeschnittenes Kuboktaeder
17	4,3,3,3,3	Abgeschrägtes Kuboktaeder
18	4,8,3/2,8	Kleines Kubenkuboktaeder
19	4,8/3,3,8/3	Großes Kubenkuboktaeder
20	4,6,4/3,6	Kubenhemioktaeder
21	8/3,6,8	Kubengeschnittenes Kuboktaeder
22	4,3/2,4,4	Großes Rhombenkuboktaeder
23	8,4,8/7,4/3	Kleiner Rhombenwürfel
24	8/3,8/3,3	Abgeschnittener Sternwürfel
25	6,4,8/3	Großes abgeschnittenes Kuboktaeder
26	8/3,4,8/5,4/3	Großer Rhombenwürfel
27	3,3,3,3,3	Ikosaeder
28	5,5,5	Dodekaeder
29	5,3,5,3	Ikosidodekaeder
30	6,6,5	Abgeschnittenes Ikosaeder
31	10,10,3	Abgeschnittenes Dodekaeder
32	5,4,3,4	Rhombenikosidodekaeder
33	10,6,4	Abgeschnittenes Ikosidodekaeder
34	5,3,3,3,3	Abgeschrägtes Ikosidodekaeder
35	3,5/2,3,5/2,3,5/2	Kleines ditrigonales Ikosidodekaeder
36	3,6,5/2,6	Kleines Ikosikosidodekaeder
37	5/2,3,3,3,3,3	Abgeschrägtes Disikosidodekaeder
38	5,10,3/2,10	Kleines Dodezikosidodekaeder
39	5/2,5/2,5/2,5/2,5/2	Kleines Sterndodekaeder
40	(5,5,5,5,5)/2	Großes Dodekaeder
41	5/2,5,5/2,5	Dodekadodekaeder
42	10,10,5/2	Großes abgeschnittenes Dodekaeder
43	5,4,5/2,4	Rhombendodekadodekaeder
44	4,10,4/3,10/9	Kleines Rhombendodekaeder
45	5/2,3,5,3,3	Abgeschrägtes Dodekadodekaeder
46	5/3,5,5/3,5,5/3,5	Ditrigonäres Dodekadodekaeder
47	5,10/3,3,10/3	Großes dodekaedrisches Ikosidodekaeder
48	3,10,5/3,10	Kleines dodekaedrisches Ikosidodekaeder
49	5,6,5/3,6	Ikosaedrisches Dodekadodekaeder
50	10,6,10/3	Ikosigeschnittenes Dodekadodekaeder
51	5/3,3,5,3,3,3	Abgeschrägtes Ikosidodekaeder
52	(5,3,5,3,5,3)/2	Großes ditrigonales Ikosidodekaeder
53	5,6,3/2,6	Großes ikosiedrisches Ikosidodekaeder
54	3,10,3/2,10	Kleines Ikosihemidodekaeder
55	6,10,6/5,10/9	Kleines Dodekaikosaeder
56	5,10,5/4,10	Kleines Dodekahemidodekaeder
57	5/2,5/2,5/2	Großes Sterndodekaeder
58	(3,3,3,3,3)/2	Großes Ikosaeder
59	5/2,3,5/2,3	Großes Ikosidodekaeder
60	6,6,5/2	Großes abgeschnittenes Ikosaeder
61	6,4,6/5,4/3	Rhombenikosaeder
62	5/2,3,3,3,3	Großes abgeschrägtes Ikosidodekaeder
63	10/3,10/3,5	Kleines abgeschnittenes Sterndodekaeder
64	10,10/3,4	Abgeschnittenes Sterndodekadodekaeder
65	5/3,3,5,3,3	Vertikalabgeschrägtes Dodekadodekaeder
66	10/3,5/2,10/3,3	Großes Dodekaikosidodekaeder
67	5/2,6,5/3,6	Kleines Dodekahemiikosaeder
68	10/3,6,10/7,6/5	Großes Dodekaikosaeder
69	5/3,3,5/2,3,3,3	Großes abgeschrägtes Ikosidisdodekaeder
70	6,5,6,5/4	Großes Dodekahemiikosaeder
71	3,10/3,10/3	Großes abgeschnittenes Sterndodekaeder
72	4,5/3,4,3	Großes Rhombenikosidodekaeder
73	6,10/3,4	Abgeschnittenes Sternikosidodekaeder
74	5/3,3,3,3,3	Großes Vertikalabgeschrägtes Ikosidodekaeder

75	5/2,10/3,5/3,10/3	Großes Dodekahemidodekaeder
76	3,10/3,3/2,10/3	Großes Ikosihemidodekaeder
77	(5/3,3,3,3,3,3)/2	Kleines wiederholtabgeschrägtes Ikosiikosidodekaeder
78	10/3,4,10/7,4/3	Großes Rhombendodekaeder
79	(5/2,3,3,3,3)/2	Großes wiederholtabgeschrägtes Ikosidodekaeder
80	(5/2,4,3,4,5/3,4,3/2,4)/2	Großes doppeltabgeschrägtes Disikosidisdodekaeder

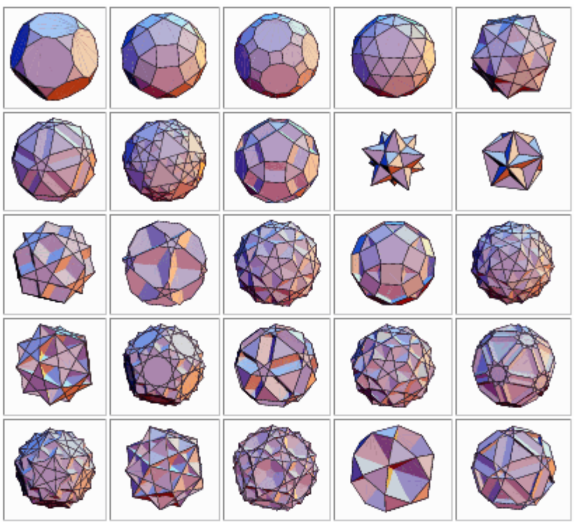
Definition der uniformen Polyeder:
Gegeben durch polygonale, ebene Flächenstücke, die an den Kanten zusammenstoßen, mit:
1) die Flächenstücke sind regulär; müssen aber nicht konvex sein, erlaubt ist also zum Beispiel ein Pentragramm.
2) jede Kante gehört zu genau zwei Flächenstücken
3) alle Ecken sind kongruent.
Jedes uniforme Polyeder ist eine kompakte Mannigfaltigkeit.

So wie sich die Kanten bei nichtkonvexen Polygonen durchdringen dürfen, dürfen sich auch verschiedene Polygone durchdringen, wie etwa beim großen Dodekaeder.
Ein nichtuniformes, aber dennoch hochsymmetrisches Polyeder ist das Rhombendodekaeder. Es besitzt zwar nur eine Sorte Polygone und eine Sorte Kanten, aber zwei Sorten Flächenwinkel und zwei Sorten Ecken, nämlich solche, bei der drei und andere, bei denen vier Rhomben zusammenstoßen.

Einteilung der uniformen Polyeder
a) 4 Körper mit tetraedraler Symmetriegruppe
b) 17 Körper mit oktaedraler Symmetriegruppe,
c) 54 Körper mit ikosaedraler Symmetriegruppe
d) 5 Körper mit diedraler Symmetriegruppe
Zur Identifizierung der verschiedenen uniformen Polyeder wird üblicherweise das Wythoff-Symbol verwandt.

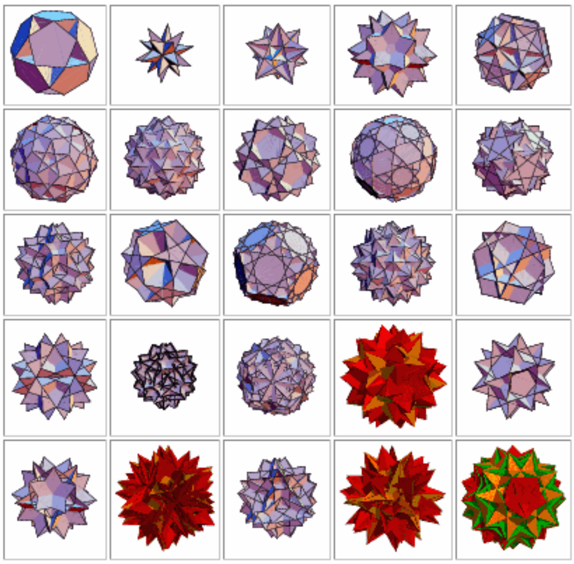


Uniforme Polyeder
von links oben nach rechts unten:
Tetraeder, Abgeschnittener Tetraeder
Oktohemioktaeder, Tetrahemihexaeder
Oktaeder, Würfel, Kuboktaeder
Abgeschnittenes Oktaeder
Abgeschnittener Würfel
Rhombenkuboktaeder
Abgeschnittenes Kuboktaeder
Abgeschrägtes Kuboktaeder
Kleines Kubenkuboktaeder
Großes Kubenkuboktaeder
Kubenhemioktaeder
Kubengeschnittenes Kuboktaeder
Großes Rhombenkuboktaeder
Kleiner Rhombenwürfel
Abgeschnittener Sternwürfel
Großes abgeschnittenes Kuboktaeder
Großer Rhombenwürfel, Ikosaeder,
Dodekaeder, Ikosidodekaeder, Abgeschnittenes Ikosaeder



Abgeschnittenes Dodekaeder
Rhombenikosidodekaeder
Abgeschnittenes Ikosidodekaeder
Abgeschrägtes Ikosidodekaeder
Kleines ditrigonales Ikosidodekaeder
Kleines Ikosikosidodekaeder
Abgeschrägtes Disikosidodekaeder
Kleines Dodezikosidodekaeder
Kleines Sterndodekaeder
Großes Dodekaeder
Dodekadodekaeder
Großes abgeschnittenes Dodekaeder
Rhombendodekadodekaeder
Kleines Rhombendodekaeder
Abgeschrägtes Dodekadodekaeder
Ditrigonäres Dodekadodekaeder
Großes dodekaedrisches Ikosidodekaeder

Kleines dodekaedrisches Ikosidodekaeder
Ikosaedrisches Dodekadodekaeder
Ikosigeschnittenes Dodekadodekaeder
Abgeschrägtes Ikosidodekaeder,
Großes ditrigonales Ikosidodekaeder,
Großes ikosiedrisches Ikosidodekaeder,
Kleines Ikosihemidodekaeder, Kleines
Dodekaikosaeder
Kleines Dodekahemidodekaeder
Großes Sterndodekaeder
Großes Ikosaeder
Großes Ikosidodekaeder
Großes abgeschnittenes Ikosaeder
Rhombenikosaeder
Großes abgeschrägtes Ikosidodekaeder
Kleines abgeschnittenes Sterndodekaeder
Abgeschnittenes Sterndodekadodekaeder
Vertikalabgeschrägtes Dodekadodekaeder
Großes Dodekaikosidodekaeder
Kleines Dodekahemiikosaeder, Großes
Dodekaikosaeder

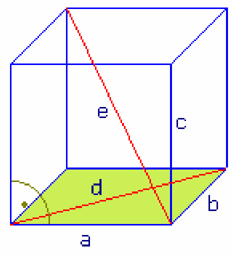


Großes abgeschrägtes Ikosidisdodekaeder, Großes Dodekahemiikosaeder, Großes abgeschnittenes Sterndodekaeder, Großes Rhombenikosidodekaeder, Abgeschnittenes Sternikosidodekaeder, Großes vertikalabgeschrägtes Ikosidodekaeder, Großes Dodekahemidodekaeder, Großes Ikosihemidodekaeder, Kleines wiederholtabgeschrägtes Ikosiikosidodekaeder, Großes Rhombendodekaeder, Großes wiederholtabgeschrägtes Ikosidodekaeder, Großes doppeltabgeschrägtes Disikosidisdodekaeder

Spezielle Polyeder

Polyeder	Volumen	Oberflächeninhalt
Quader	$V = a \cdot b \cdot c$	$A = 2 (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$
Prisma	$V = G \cdot h$; G … Grundfläche	$A = 2 \cdot G + M$
dreiseitiges Prisma	$V = a^2h/4 \sqrt{3}$	$A = 3/2\ a^2 \sqrt{3} + 3\ ah$
vierseitiges Prisma	$V = a^2\ h$	$A = 2\ a^2 + 4\ ah$
fünfseitiges Prisma	$V = \sqrt{(25 + 10\sqrt{5})}\ a^2h/4$	$A = \sqrt{(25 + 10\sqrt{5})}\ a^2/2 + 5ah$
sechsseitiges Prisma	$V = 3/2\ a^2h \sqrt{3}$	$A = 3a^2 \sqrt{3} + 6\ ah$
achtseitiges Prisma	$V = a^3\ (2 + 2\sqrt{2})$	$A = a^2\ (12 + 4 \sqrt{2})$
zehnseitiges Prisma	$V = 5a^3/2 \sqrt{(5 + 2 \sqrt{5})}$	$A = a^2\ (10 + 5 \sqrt{(5 + 2 \sqrt{5})})$
halbreguläres Prisma	$V_n = n/4 \cot(\pi/n)\ a^3$	$A_n = n\ (1 + 1/2 \cot(\pi/n))\ a^2$
3-seitiges Antiprisma	$V = 1/3 \sqrt{2}\ a^3$	$A = 2 \sqrt{3}\ a^2$
4-seitiges Antiprisma	$V = 1/3 \sqrt{(4 + 3\sqrt{2})}\ a^3$	$A = 2+2 \sqrt{3}\ a^2$
5-seitiges Antiprisma	$V = 1/6\ (5+ 2\sqrt{5})\ a^3$	$A = (5 \sqrt{3} + \sqrt{(25 + 10 \sqrt{5})})/2\ a^2$
6-seitiges Antiprisma	$V = \sqrt{(2+ 2\sqrt{3})}\ a^3$	$A = 6 \sqrt{3}\ a^2$
12-seitiges Antiprisma	$V = 2a^3 \sqrt{(7\sqrt{6}-3\sqrt{3}+12\sqrt{2}-5)}$	$A = 12\ (\sqrt{3} + 1)\ a^2$
Pyramide	$V = 1/3 \cdot G \cdot h$	$A = G + M$
dreiseitige Pyramide	$V = 1/12\ a^2h \sqrt{3}$	$A = a^2 \sqrt{3}$
vierseitige Pyramide	$V = 1/3\ a^2\ h$	$A = a\ (a + 2h_s)$
fünfseitige Pyramide	$V = 1/12 \sqrt{(25 + 10\sqrt{5})}\ a^2h$	$A = 5^{3/4}\ a \sqrt{(a^2\ (\sqrt{5}+2) + 4\sqrt{5}\ h^2)}\ /4 + \sqrt{(25 + 10\sqrt{5})/4}\ a^2$
sechsseitige Pyramide	$V = 1/2\ a^2h \sqrt{3}$	$A = 3/2\ a\ (\sqrt{(3\ a^2 + 4\ h^2)} + a \sqrt{3})$
achtseitige Pyramide	$V = 2/3\ a^2h\ (\sqrt{2} + 1)$	$A = 2a \sqrt{(a^2\ (2 \sqrt{2}+3) + 4h^2)} + a^2(2 \sqrt{2}+2)$
quadr.Pyramidenstumpf	$V = h/3\ (a^2 + ab + b^2)$	$A = a^2 + b^2 + 2(a+b)\ h_s$
dreis. Pyramidenstumpf	$V = \sqrt{3}/12\ h\ (a^2 + ab + b^2)$	$A = \sqrt{3}/4\ (a^2+b^2) + 3/2\ h_s\ (a+b)$
sechss. Pyramidenstumpf	$V = \sqrt{3}/2\ h\ (a^2 + ab + b^2)$	$A = 3\sqrt{3}/2\ (a^2+b^2) + 3\ h_s\ (a+b)$
Tetraeder	$V = a^3/12 \sqrt{2}$	$A = a^2 \sqrt{3}$
Würfel	$V = a^3$	$A = 6\ a^2$
Oktaeder	$V = a^3/3 \sqrt{2}$	$A = 2\ a^2 \sqrt{3}$
Ikosaeder	$V = 5/12\ a^3(3+\sqrt{5})$	$A = 5a^2 \sqrt{3}$
Dodekaeder	$V = 1/4\ a^3\ (15 + 7\sqrt{5})$	$A = 3a^2 \sqrt{(25+10\sqrt{5}]}$
Großes Sterndodekaeder	$V = 5/4\ (3 + \sqrt{5})\ a^3$	$A = 15 \sqrt{(5 + 2 \sqrt{5})}\ a^2$
Kleines Sterndodekaeder	$V = 5/4\ (7 + 3 \sqrt{5})\ a^3$	$A = 15 \sqrt{(5 + 2 \sqrt{5})}\ a^2$
Hexaederstumpf	$V = (7 + 14/3 \sqrt{2})\ a^3$	$A = (12 + 12 \sqrt{2} + 4 \sqrt{3})\ a^2$
Oktaederstumpf	$V = 8 \sqrt{2}\ a^3$	$A = (6 + 12 \sqrt{3})\ a^2$
Tetraederstumpf	$V = 23/12 \sqrt{2}\ a^3$	$A = 7 \sqrt{3}\ a^2$
Ikosaederstumpf	$V = 1/4\ (125 + 43 \sqrt{5})\ a^3$	$A = 3(10\sqrt{3} + \sqrt{5} \sqrt{(5+2\sqrt{5})})\ a^2$
Dodekaederstumpf	$V = 5/12\ (99 + 47 \sqrt{5})\ a^3$	$A = 5(\sqrt{3} + 6\sqrt{(5+2\sqrt{5})})\ a^2$

Quader, Rechtkant, Würfel



a,b,c Kantenlängen; e Diagonale

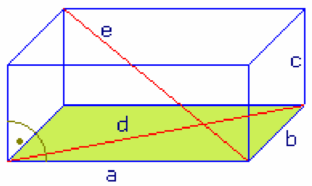
Volumen	$V = a \cdot b \cdot c = (A - ab)\, ab / (2a + 2b)$
Oberfläche	$A = 2\,(a\cdot b + a\cdot c + b\cdot c) = ((2a + 2b)\, V + a^2b^2) / (ab)$
Mantelfläche	$M = 2\,(a\cdot c + b\cdot c)$
Seitenkante	$a = (A - bc) / (2b + 2c) = M / (2c) - b$
Diagonale	$e = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Winkel der Raumdiagonale zur Grundfläche $\alpha = \pi/2 - \arctan(\sqrt{a^2 + b^2}/c)$

Der Quader ist ein von sechs Rechtecken begrenzter Körper. Je zwei gegenüberliegende Rechtecke sich kongruent.
Sind zwei aufeinander senkrechte Kanten eines Quaders einander gleich, so erhält man eine quadratische Säule. Eine bessere Bezeichnung wäre quadratisches Prisma. Ihre Oberfläche besteht aus zwei Quadraten und vier kongruenten Rechtecken. Bei geringer Höhe wird die quadratische Säule auch quadratische Platte genannt.
In älteren Abhandlungen wird der Quader auch rechtwinkliges Parallelepiped genannt; in anderen Sprachen nennt man den Quader rectangular prism (engl.), parallélépipède rectangle (franz.), retvinklet parallelepipedum (dän.), paralelepípedo recto (span.), …
Sind alle begrenzenden Rechtecke kongruente Quadrate, so entsteht ein Würfel.
In der Natur findet man zum Beispiel den Würfel bei Fluorit-Kristallen.

Ein Würfel gestattet 48 Deckabbildungen: Für eine beliebige Ecke *E* seiner acht Ecken kann man eine der acht Ecken als zugeordnete Bildecke *f(E)* wählen, danach für eine der drei von *E* ausgehenden Kanten *k* eine der drei von *f(E)* ausgehenden Kanten als *f(k)*, und schließlich für eines der zwei an *k* grenzenden Quadrate *q* eines der zwei an *f(k)* grenzenden Quadrate als *f(q)*. In dem modernen Kunstobjekt von C. Vivarelli ist diese Würfelsymmetrie durch eine aufgeprägte Struktur so abgeschwächt, dass nur noch 12 Deckabbildungen möglich sind: Für eine beliebige Ecke gibt es nur noch drei weitere gleichartige. Die drei von der Bildecke ausgehenden Kanten sind gleichartig, die beiden an eine Kante angrenzenden Seitenflächen jedoch nicht. Es gibt also 4 mal 3 Zuordnungsmöglichkeiten.

Berechnungen am Quader



Körperkanten a, b, c gegeben , andere Stücke gesucht

1. Körperdiagonale e	$e = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
2. Grundflächendiagonale d	$d = \sqrt{a^2 + b^2}$
3. Mantelfläche A_M	$A_M = 2\,(a\,c + b\,c)$
4. Oberfläche A	$A = 2\,(a\,b + a\,c + b\,c)$
5. Volumen V	$V = a\,b\,c$

Mantelfläche und zwei Körperkanten gegeben

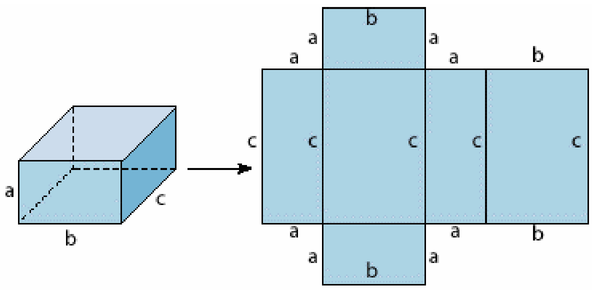
6. Körperkante c	$c = A_M / (2a + 2b)$
7. Körperkante a	$a = A_M / (2c) - b$
8. Volumen V	$V = a\,b\,A_M / (2a + 2b)$
9. Oberfläche A	$A = 2\,a\,b + A_M$

zwei Körperkanten und ein drittes Stück gegeben

10. geg. Körperdiagonale e, gesucht 3.Körperkante	$c = \sqrt{e^2 - a^2 - b^2}$
11. geg. Körperdiagonale e, gesucht Volumen	$V = a\,b\,\sqrt{e^2 - a^2 - b^2}$
11. geg. Oberfläche A, gesucht 3.Körperkante	$c = (A - 2\,a\,b) / (2a + 2b)$
12. geg. Volumen V, gesucht 3.Körperkante	$c = V / (a\,b)$

Quadernetz

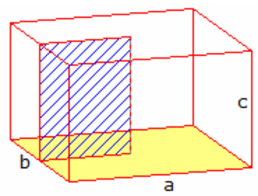
Wie sich die Oberfläche eines Quaders zusammensetzt, ist sofort zu sehen, wenn man die Netzdarstellung des Körpers benutzt.
Ein Quader mit den Kantenlängen a, b und c entfaltet sich in der Netzdarstellung wie in der Abbildung.
In dieser Darstellung sind alle begrenzenden Flächen des Quaders zu sehen. Einfaches Abzählen



ergibt 6 Rechtecke, von denen jeweils 2 gleich groß sind. Die Summe der Flächen ergibt die Oberfläche des Quaders.

Oberfläche $A = 2 (a\cdot b + a\cdot c + b\cdot c)$

Wird, wie in der Darstellung, ein Rechteck mit den Seitenlängen 2a+2b und c+2a zur Konstruktion des Quadernetzes benutzt, so ergibt sich ein "Abfall" durch das Herausschneiden der überflüssigen Rechtecke von Abfall $A_{Abfall} = 4 a^2 + 2 a\cdot b$ prozentual $A_{\%} = 100 a (2a+b) / ((a+b) (2a+c))$ %



Spezielle Quader

Besondere Quader werden vor allem in der Architektur und Kunst als Ausgangsgrundlage verwendet. Für folgende Seitenverhältnisse a : b : c findet man:

Seitenverhältnis a : b : c = 1 : ϕ : ϕ

ϕ … goldenes Verhältnis mit ϕ = 1,61803398875…

Die große Grabkammer im Grab Ramses IV. (KV 2) im Tal der Könige wurde mit Kantenlängen von 10 Ellen, 16 Ellen und 16 Ellen konstruiert.

Volumen $V = a^3/2 (\sqrt{5} + 3)$ Oberfläche $A = a^2 (3 \sqrt{5} + 5)$

Seitenverhältnis a : b : c = 1 : 1 : ϕ

Dieses Seitenverhältnis findet man in der Grabkammer Tutenchamuns.

Volumen $V = a^3/2 (\sqrt{5} + 1)$ Oberfläche $A = a^2 (2 \sqrt{5} + 4)$

Seitenverhältnis a : b : c = 1 : 2 : 2

Eine Vielzahl griechischer, romanischer und gotischer Tempelbauten verwendet derartige Quader als Grundlage

Volumen $V = 4 a^3$ Oberfläche $A = 16 a^2$

Seitenverhältnis a : b : c = 1 : ϕ : ϕ²

Ein Quader mit diesem Verhältnis wird goldener Quader genannt. Der Umkugelradius entspricht hier der mittleren Seitenlänge b. Bei Seitenlängen s, s ϕ und s ϕ² wird dann

Volumen $V = s^3 (1 + 2\phi) = 4{,}23607\ldots s^3$ Oberfläche $A = a^2 (4 \sqrt{5} + 8)$

Seitenverhältnis a : b : c = 1 : ϕ² : ϕ³

Dieses Verhältnis wurde u.a. von Thomas Chippendale (1718-1779) als Ausgangspunkt für die Herstellung seiner Möbel verwendet. Damit gelang es ihm, eine

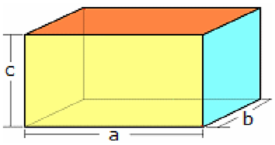
Mit seinem 1754 veröffentlichten Werk " The Gentleman and Cabinet Maker's Director" eine Sammlung von Möbelentwürfen, begründete er seinen Ruf als einer der bedeutendsten englischen Kunsttischler des 18.Jahrhunderts.

Volumen $V = a^3/2 (5 \sqrt{5} + 11)$ Oberfläche $A = a^2 (8 \sqrt{5} + 15)$

Seitenverhältnis a : b : c = 1 : 1/2 √5 : 2

Die Proportion findet man bei der Königsgrabkammer in der Cheops-Pyramide

Volumen $V = a^3 \sqrt{5}$ Oberfläche $A = a^2 (3 \sqrt{5} + 4)$



Ganzzahlige Quader

Unter einem ganzzahligen Quader wird hier ein Quader mit den Seiten a, b, c verstanden, wenn gilt: a, b, c sind natürliche Zahlen mit a < b < c, d.h. unterschiedlich lang.

Ein derartiger Quader hat ganzzahliges Volumen V und ganzzahligen Flächeninhalt A.

Für das Volumen V können alle natürlichen Zahlen > 1 auftreten, die keine Primzahl oder das Quadrat einer Primzahl sind. Schwieriger ist die Frage nach möglichen Maßzahlen für den Oberflächeninhalt A.

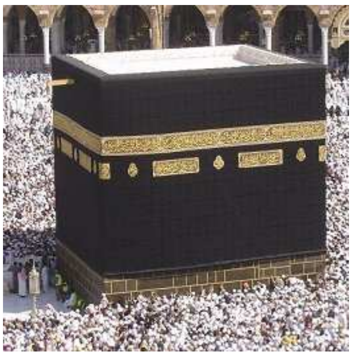
Auf Grund der Gleichung $A = 2(ab + ac + bc)$ sind für A nur gerade Zahlen möglich. Außerdem darf A/2 keine idoneale Zahl sein. Von diesen kennt man 2008 genau 65.

Die kleinste natürliche Zahl A für die einer dieser Quader existiert ist 22.

Für einige natürliche A existieren auch mehrere Möglichkeiten für die Seitenlängen a, b und c.

Auf der rechten Seite werden nach Eingabe einer natürlichen Zahl für den Oberflächennhalt A alle möglichen Tripel (a, b, c) für die Seiten berechnet.

Zu beachten ist, dass dies einige Zeit benötigen kann.

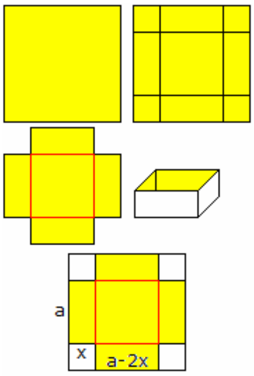


Kaaba

Eines der bekanntesten Bauwerke der Welt in Quaderform ist die Kaaba. Kaaba bedeutet wörtlich "Kubus" bzw. "Würfel" und ist das zentrale Heiligtum des Islam. Trotz des Namens hat die Kaaba aber keine Würfel-

sondern eine Quaderform.
Nach islamischer Mythologie ist die Kaaba das Haus Gottes, zu dem er alle seine Gäste einlädt. Die Kaaba markiert die Gebetsrichtung und ist Zentrum der Riten der Pilgerfahrt Hadsch. Sie befindet sich im Innenhof der Geweihten Moschee in Mekka.

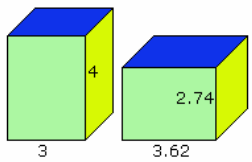
Die Abmessungen der Kaaba sind etwa 12 m x 10 m x 15 m, aber nicht exakt rechtwinklig; siehe Grundriss. Rings um die Kaaba bedecken bunte Marmorfliesen den Boden. In der östlichen der vier Ecken befindet sich der Schwarze Stein ungefähr auf Brusthöhe eingemauert. Die Ecke ist nach dem Schwarzen Stein benannt, der ein Meteorit ist.

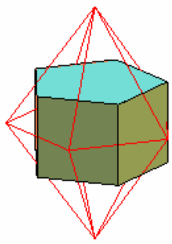


Schachtel größten Volumens

Gegeben ist ein quadratisches Stück Papier. Man entfernt an den Ecken vier Quadrate, so dass ein Kreuz entsteht. Aus dem Kreuz faltet man eine oben offene Schachtel. Die Frage ist, wie groß die Eckquadrate sein müssen, damit das Volumen möglichst groß ist.

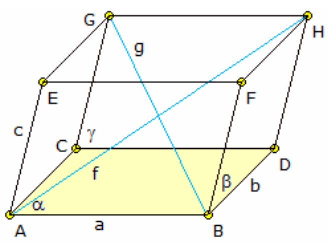
Zielfunktion $V(x) = (a-2x)^2x = 4x^3-4ax^2+a^2x$
Die erste Ableitung ist $V'(x) = 12x^2-8ax+a^2$
$V'(x) = 0$ ergibt $12x^2-8ax+a^2 = 0$ oder $x^2-2ax/3+a^2/12 = 0$ mit der zweiten Ableitung $V''(x) = -8a+24x$.
Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $x_1 = a/6$ und $x_2 = a/2$. Für $x_2 = a/2$ gibt es keine Schachtel. Die Lösung ist $x_1 = a/6$ oder $(a-2x_1) = 2a/3$. Mit $V''(a/6) = - 4a < 0$ ist sichergestellt, dass ein Maximum vorliegt.
Ergebnis: Die Schachtel hat die Kanten a/6, a/6 und 4a/6. Das ist das Verhältnis 1:1:4





Zwei besondere Quader

Die beiden nebenstehenden Prismen haben unterschiedliche Grundseiten und Höhen und damit unterschiedliche Formen, aber die Volumina und die Oberflächen sind gleich.
Es gilt für den linken Körper $V = 3^2\cdot 4 = 36$ und $A = 2\cdot 3^2+4\cdot 3\cdot 4 = 66$.
Für den rechten Körper näherungsweise
$$V = 3{,}62^2\cdot 2{,}74 = 36 \text{ und } A = 2\cdot 3{,}62^2+4\cdot 3{,}62\cdot 2{,}74 = 66.$$
Volumen und Oberfläche sind dabei auf zwei Stellen gerundet.
Für Volumen und Oberfläche des quadratischen Prismas gilt
$$V = Aa/4 -a^3/2, \text{ d.h. } a^3- Aa/2 + 2V = 0$$
Damit werden die Körper gesucht, für die $V = 36$ und $A = 66$ ist. Das führt zur Gleichung $a^3 - 33a + 72 = 0$ oder $(a-3)(a^2+3a-24) = 0$. Diese Gleichung hat die Lösungen
$$a_1 = 3 \text{ mit } h_1 = 4 \qquad a_2 = 1/2 \sqrt{105} -3/2, \text{ d.h. } \approx 3{,}62.$$
Zu a_2 gehört $h_2 = [144 + 3 \sqrt{(105)}]/64$, d.h. $h_2 \approx 2{,}73$.
$$a_3 = - \sqrt{(105)}/2-3/2 < 0$$
Lösung entfällt, da eine negative Maßzahl nicht möglich ist. Diese Rechnung zeigt, dass nur die beiden quadratischen Prismen das Volumen 36 und die Oberfläche 66 haben.



Spat, Parallelepiped

Unter einem Parallelepiped (von griechisch επιπεδο, epipedo = Fläche); auch Spat, Parallelflach, Parallelotop; versteht man einen Körper, der von sechs paarweise kongruenten in parallelen Ebenen liegenden Parallelogrammen begrenzt wird. Die Bezeichnung Spat rührt vom Kalkspat (Calcit $CaCO_3$) her, dessen Kristalle die Form eines Parallelflachs aufweisen.

Es seien a, b, c die drei Kanten des Parallelepipeds, α, β, γ die drei ebenen Winkel, die von diesen Linien unter sich gebildet werden, V das Volumen, A der Oberflächeninhalt, ϕ, ψ, κ die Neigungswinkel der drei in jeder Ecke zusammenstoßenden Grenzflächen, f, g die beiden Diagonallängen, F, G die Flächen der beiden Diagonalschnitte, δ, ε die Neigungswinkel dieser beiden Flächen gegen die Grundebene und p, q die Seiten der Diagonalschnitte, welche Diagonalen der Grenzflächen des Körpers sind. Dann gilt:

Volumen $V = 2abc \sqrt{(\sin ((\alpha+\beta+\gamma)/2) \sin ((\alpha+\gamma-\beta)/2) \sin ((\alpha+\beta-\gamma)/2) \sin ((-\alpha+\beta+\gamma)/2))}$
Oberfläche $A = 2 (ab \sin \alpha + ac \sin \beta + bc \sin \gamma)$
Winkel $\sin \phi/2 = \sqrt{(\sin (\beta+\gamma-\alpha)/2 \sin (\alpha+\gamma-\beta)/2 / (\sin \alpha \sin \beta))}$
$\sin \psi/2 = \sqrt{(\sin (\beta+\gamma-\alpha)/2 \sin (\alpha+\beta-\gamma)/2 / (\sin \alpha \sin \beta))}$
$\sin \kappa/2 = \sqrt{(\sin (\alpha+\gamma-\beta)/2 \sin (\alpha+\beta-\gamma)/2 / (\sin \alpha \sin \beta))}$
$\cos \delta = (a \cos \gamma - b \cos \beta - \cos \alpha (a \cos \beta - b \cos \gamma)) / (\sin \alpha \sqrt{(a^2 \sin^2 \beta + b^2 \sin^2 \gamma + 2ab (\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma)))}$
$\cos \varepsilon = (-a \cos \gamma - b \cos \beta + \cos \alpha (a \cos \beta - b \cos \gamma)) / (\sin \alpha \sqrt{(a^2 \sin^2 \beta + b^2 \sin^2 \gamma + 2ab (-\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma)))}$

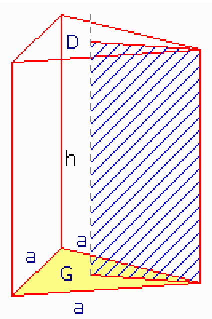
Diagonale $f = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos\alpha + 2ac \cos\beta + 2bc \cos\gamma)}$
$g = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos\alpha - 2ac \cos\beta - 2bc \cos\gamma)}$
$p = \sqrt{(a^2 + b^2 + 2ab \cos\alpha)}$
$q = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \cos\alpha)}$
Schnittflächen $F = c \sqrt{(a^2 \sin^2\beta + b^2 \sin^2\gamma + 2ab (\cos\alpha - \cos\beta \cos\gamma))}$
$G = c \sqrt{(a^2 \sin^2\beta + b^2 \sin^2\gamma + 2ab (-\cos\alpha + \cos\beta \cos\gamma))}$

Einheitsspat, Einheitsparallelepiped

Unter einem Einheitsspat versteht man ein Parallelepiped (von griechisch επιπεδο, epipedo = Fläche) dessen Körperkanten a, b und c gleich einer Einheit sind. Damit wird der Körper von sechs paarweise kongruenten Rhomben begrenzt.

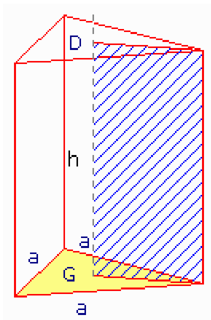
Es seien α, β, γ die drei ebenen Winkel, die von den Kanten unter sich gebildet werden, V das Volumen, A der Oberflächeninhalt, ϕ, ψ, κ die Neigungswinkel der drei in jeder Ecke zusammenstoßenden Grenzflächen, f, g die beiden Diagonallängen, F, G die Flächen der beiden Diagonalschnitte, δ, ε die Neigungswinkel dieser beiden Flächen gegen die Grundebene und p, q die Seiten der Diagonalschnitte, welche Diagonalen der Grenzflächen des Körpers sind. Dann gilt:

Volumen $V = 2 \sqrt{(\sin((\alpha+\beta+\gamma)/2) \sin((\alpha+\gamma-\beta)/2) \sin((\alpha+\beta-\gamma)/2) \sin((-\alpha+\beta+\gamma)/2))}$
Oberfläche $A = 2 (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$
Winkel $\sin\phi/2 = \sqrt{(\sin(\beta+\gamma-\alpha)/2 \sin(\alpha+\gamma-\beta)/2 / (\sin\alpha \sin\beta))}$
$\sin\psi/2 = \sqrt{(\sin(\beta+\gamma-\alpha)/2 \sin(\alpha+\beta-\gamma)/2 / (\sin\alpha \sin\beta))}$
$\sin\kappa/2 = \sqrt{(\sin(\alpha+\gamma-\beta)/2 \sin(\alpha+\beta-\gamma)/2 / (\sin\alpha \sin\beta))}$
$\cos\delta = (\cos\gamma - \cos\beta - \cos\alpha (\cos\beta - \cos\gamma)) / (\sin\alpha \sqrt{(\sin^2\beta + \sin^2\gamma + 2 (\cos\alpha - \cos\beta \cos\gamma))})$
Diagonale $f = \sqrt{(3 + 2 \cos\alpha + 2 \cos\beta + 2 \cos\gamma)}$
$g = \sqrt{(3 + 2 \cos\alpha - 2 \cos\beta - 2 \cos\gamma)}$
$p = \sqrt{(2 + 2 \cos\alpha)}$
$q = \sqrt{(2 - 2 \cos\alpha)}$
Schnittflächen $F = \sqrt{(\sin^2\beta + \sin^2\gamma + 2 (\cos\alpha - \cos\beta \cos\gamma))}$
$G = \sqrt{(\sin^2\beta + \sin^2\gamma + 2 (-\cos\alpha + \cos\beta \cos\gamma))}$



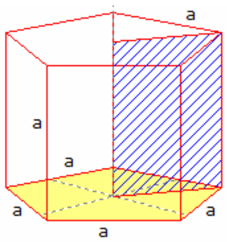
Prisma

Volumen $V = G * h$; G ... Grundfläche
Oberfläche $A = 2 * G + M$
Schief abgeschnittenes 3seitiges gerades Prisma mit den 3 Höhenkanten a, b und c
$V = (a + b + c) G/3$
Schief abgeschnittenes 3seitiges schräges Prisma mit den 3 Höhenkanten a, b und c
$V = (a + b + c) Q/3$; Q...Querschnitt
Trapezprisma (Grundfläche Trapez mit parallelen Seiten a, b und Höhe c)
$V = (1/2 (a+b)c) h$
Bei einem geraden Prisma stehen die Seitenkanten senkrecht auf der Grund- und Deckfläche und die Mantelfläche besteht aus Rechtecken.
Bei einem schiefen Prisma stehen die Seitenkanten nicht senkrecht auf der Grund- und Deckfläche. Die Mantelfläche besteht aus Parallelogrammen.



Regelmäßiges n-seitiges Prisma

N	Volumen	Oberfläche
3	$a^2h/4 \sqrt{3}$	$3/2\, a^2 \sqrt{3} + 3\, ah$
4	$2\, a^2 h$	$4\, a^2 + 4\, ah$
5	$5a^2h/8 \sqrt{(10+2\sqrt{5})}$	$5a^2/4 \sqrt{(10+2\sqrt{5})} + 5ah$
6	$3/2\, a^2h \sqrt{3}$	$3a^2 \sqrt{3} + 6\, ah$



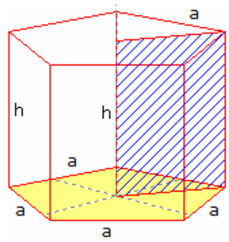
Regelmäßiges n-seitiges Prisma

Das hier betrachtete Prisma besitzt eine regelmäßige, n-seitige Grundfläche mit den Kantenlänge a. Außerdem ist die Höhe h des Prismas gleich der Grundkante a.
Dann besitzt das Prisma eine Umkugel, die durch die Eckpunkte des Prismas verläuft, sowie eine Mittelkugel, die durch die Mittelpunkte der Kanten der Grund- und Deckfläche verläuft.
Allgemein gilt:

Radius der Umkugel $R = a/2 \sqrt{(\sin^2(\pi/n) +1)} / \sin(\pi/n)$
$R = \rho \sqrt{(\sin^2(\pi/n) +1)} / \sin^2(\pi/n) = r \sqrt{(\sin^2(\pi/n) +1)} / \cos(\pi/n)$
Radius der Mittelkugel $\rho = a/2 \sin(\pi/n)$
$\rho = R \sin^2(\pi/n) / \sqrt{(\sin^2(\pi/n) +1)} = r \sin^2(\pi/n) / \cos(\pi/n)$
Inkugel der Quadratflächen $r = a/2 \cot(\pi/n)$
$r = R \cos(\pi/n) / \sqrt{(\sin^2(\pi/n) +1)} = \rho \cos(\pi/n) / \sin^2(\pi/n)$
Seitenkante $a = 2R \sin(\pi/n) / \sqrt{(\sin^2(\pi/n) +1)} = 2r / \cot(\pi/n) = 2\rho / \sin(\pi/n)$

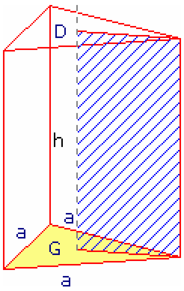
Oberflächeninhalt $A = n/4\ a^2 \cot(\pi/n) + n\ a^2$
Mantelflächeninhalt $M = n\ a^2$
Volumen $V = n/4\ a^3 \cot(\pi/n) = 2n\ r^3 \tan^2(\pi/n) = 2n\ \rho^3 \cos(\pi/n) / \sin^4(\pi/n)$
$V = 2n\ R^3 \sin^2(\pi/n) \cos(\pi/n) / \sqrt{(\sin^2(\pi/n) + 1)^3}$

N-seitiges Prisma



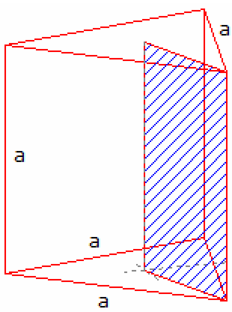
Das hier betrachtete Prisma besitzt eine regelmäßige, n-seitige Grundfläche mit den Kantenlänge a. Die Höhe h muss jedoch nicht gleich der Grundkante a des Prismas sein. Allgemein gilt:

Volumen $V = n/4\ a^2\ h \cot(\pi/n) = a/4\ A \cot(\pi/n) - a^3/8\ n \cot^2(\pi/n)$
$V = a/4\ M \cot(\pi/n)$
Oberflächent $A = n/2\ a^2 \cot(\pi/n) + n\ a\ h = n/2\ a^2 \cot(\pi/n) + 4V/a \tan(\pi/n)$
Mantelfläche $M = n\ a\ h = 4\ V/a \tan(\pi/n)$
Grundfläche $G = n/4\ a^2 \cot(\pi/n)$
Höhe $h = A/(a\ n) - a/2 \cot(\pi/n) = 4V \tan(\pi/n) / (a^2\ n) = M / (n\ a)$
Grundseite $a = \sqrt{(n \sin \pi/n\ (2A \cos \pi/n + h^2\ n \sin \pi/n))}/(n \cos \pi/n) - 2h \tan \pi/n$
$a = 2 \sqrt{(V \sin(\pi/n))} / \sqrt{(h\ n \cos(\pi/n))} = 2 \sqrt{(G \sin(\pi/n))} / \sqrt{(n \cos(\pi/n))}$
$a = M / (n\ h) = 4\ V/M \tan(\pi/n)$



Regelmäßiges dreiseitiges Prisma

1. geg.: Kantenlänge a, Höhe h
Mantelfläche A_M $A_M = 3\ a\ h$ Oberfläche A $A = a/2\ (a \sqrt{3} + 6\ h)$
Volumen V $V = a^2/4\ h \sqrt{3}$
2. geg.: Kantenlänge a und Mantelfläche A_M
Höhe h $h = A_M / (3a)$ Volumen V $V = \sqrt{3}/12\ a\ A_M$
Oberfläche A $A = 1/2\ (\sqrt{3}\ a^2 + 2\ A_M)$
3. geg.: Kantenlänge a und Oberfläche A
Höhe h $h = A / (3a) - a/6 \sqrt{3}$ Volumen V $V = \sqrt{3}/24\ a\ (2A - \sqrt{3}\ a^2)$
Mantelfläche A_M $A_M = A - a^2/2 \sqrt{3}$
4. geg.: Kantenlänge a und Volumen V
Höhe h $h = 4\ V / (a^2 \sqrt{3})$ Oberfläche A $A = \sqrt{3}\ (a^3 + 8V) / (2a)$
Mantelfläche A_M $A_M = 4 \sqrt{3}\ V/a$
5. geg.: Körperhöhe h und Mantelfläche A_M
Kantenlänge a $a = A_M / (3\ h)$ Oberfläche A $A = \sqrt{3}/18\ A_M(6\sqrt{3}h^2 + A_M)/h^2$
Volumen V $V = \sqrt{3}/36\ A_M^2/h$
6. geg.: Körperhöhe h und Oberfläche A
Kantenlänge a $a = \sqrt{(3h^2 + 2A/\sqrt{3})} - h\sqrt{3}$ Mantelfläche $A_M = 3h(\sqrt{(3h^2 + 2A/\sqrt{3})} - h\sqrt{3})$
Volumen V $V = h/4\ (\sqrt{(2A + 3\sqrt{3}\ h^2)} - \sqrt[4]{3^3}\ h)^2$
7. geg.: Körperhöhe h und Volumen V
Kantenlänge a $a = 2 \sqrt{(V/(h\sqrt{3}))}$ Mantelfläche $A_M = 2 \sqrt[4]{3^3}\ h \sqrt{(V/h)}$
Oberfläche A $A = 2 \sqrt{(V/h)}\ (\sqrt{(V/h)} + \sqrt[4]{3^3}\ h)$
Wichtig! Unter dem hier genannten regelmäßigen dreiseitigen Prisma ist ein Prisma mit regelmäßiger Grundfläche(!) zu verstehen. Es wird nicht gefordert, dass auch die Höhe h gleich der Grundkante a ist.



Regelmäßiges dreiseitiges Prisma (2)

Das hier betrachtete Prisma besitzt eine regelmäßige, dreiseitige Grundfläche mit den Kantenlänge a. Außerdem ist die Höhe h des Prismas gleich der Grundkante a. Dann besitzt das Prisma eine Umkugel, die durch die Eckpunkte des Prismas verläuft, sowie eine Mittelkugel, die durch die Mittelpunkte der Kanten der Grund- und Deckfläche verläuft.

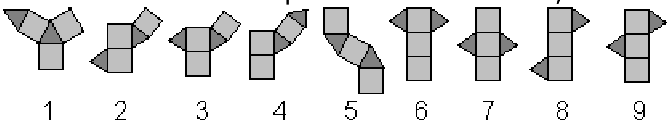
Radius der Umkugel $R = a/6 \sqrt{21} \approx 0{,}763762616\ a$
Radius der Mittelkugel $\rho = a/3 \sqrt{3} \approx 0{,}577350269\ a$
Seitenkante $a = 2/7\ R \sqrt{21} = \rho \sqrt{3}$
Mantelflächeninhalt $M = 3\ a^2 = 9\ \rho^2 = 36/7\ R^2$
Oberflächeninhalt $A = a^2/2\ (6 + \sqrt{3}) = \rho^2\ (3/2 \sqrt{3} + 9) \approx 11{,}59807621\ \rho^2$
$A = R^2\ (6/7 \sqrt{3} + 36/7) \approx 6{,}627472120\ R^2$
Volumen $V = a^3/4 \sqrt{3} \approx 0{,}433012702\ a^3 = 18/49 \sqrt{7}\ R^3 \approx 0{,}9719086448\ R^3$
$V = 9/4\ \rho^3 \approx 2{,}25\ \rho^3$

Dieder-Winkel: zwischen den Quadraten 60°, zwischen Quadrat und Dreieck 90°
Eine Kugel, die alle Seitenflächen des Prismas berührt, existiert nicht. Man kann aber zwei Inkugeln betrachten, die zum einen die dreieckigen Grund- und Deckfläche berührt, zum anderen die quadratischen Seitenflächen berührt.

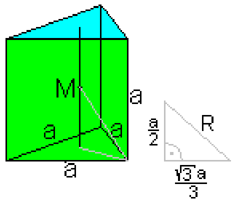
Inkugel der Dreiecksflächen $r_3 = a/2$
Inkugel der Quadratflächen $r_4 = a/6\ \sqrt{3} \approx 0{,}288675135\ a$

Regelmäßiges dreiseitiges Prisma

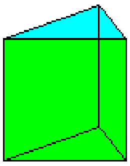
Schneidet man den Körper an den Kanten auf, so erhält man ein Netz. Es gibt neun verschiedene Netze.



Verbindet man die Mittelpunkte der beiden Dreiecke, so liegt in der Mitte dieser Strecke der Mittelpunkt M des Prismas. Dieser Punkt hat von allen Eckpunkten des Prismas die gleiche Entfernung. Somit ist er der Mittelpunkt der Umkugel.



Nach dem Satz des Pythagoras ist $R = \sqrt{21}\ a/6 \approx 0.76\ a$. Eine Kugel, die alle 6 Flächen innen berührt, gibt es nicht.



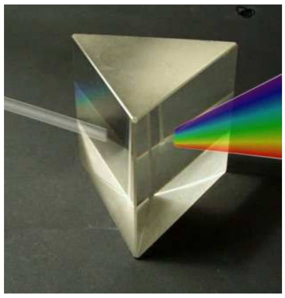
Eine Frage ist, welche Form ein regelmäßiges, dreiseitiges Prisma hat, dessen Volumen maximal ist und dessen Oberfläche vorgegeben wird.

(1) $A = \sqrt{3}/2\ a^2 + 3\ ah$ (2) $V = \sqrt{3}/4\ a^2\ h$

Zielfunktion: $V(a) = \sqrt{3}\ A/12\ a - \sqrt{3}/8\ a^3$

Als Ergebnis erhält man $a = \sqrt{2\sqrt{3}\ A}$ $h = 1/9\ \sqrt{3}\ \sqrt{2\sqrt{3}\ A}$,

d.h. Höhe und Grundkante verhalten sich wie $\sqrt{3} : 3$. Erstaunlich ist, dass dieselbe Form für ein regelmäßiges, dreiseitiges Prisma entsteht, wenn bei festem Volumen die Oberfläche maximal ist.



Hört man den Namen Prisma, so denkt man am ehesten an das Glasprisma, mit dem man weißes Licht zerlegen kann. Sendet man ein schmales Lichtbündel weißen Lichts in ein Prisma, so wird das Licht beim Übergang von Luft nach Glas zum Lot hin gebrochen. Beim Übergang von Glas zu Luft wird das Licht vom Lot weg abgelenkt. Die Brechung des Lichts hängt von der Farbe ab. Zum Beispiel wird blaues Licht stärker gebrochen als rotes. Das weiße Licht wird in die Spektralfarben zerlegt. Es entsteht ein Spektrum. In ähnlicher Weise zerlegen Wassertropfen manchmal das weiße Sonnenlicht und erzeugen einen Regenbogen.

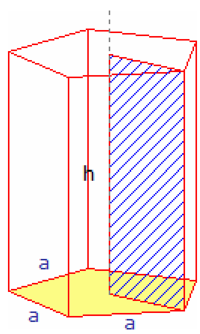
Rushton Triangular Lodge

Gebäude mit einem dreiseitigen Grundriss, d.h. in Form eines dreiseitigen Prismas, sind selten.
Das Rushton Triangular Lodge ist der Beweis dafür, dass sich in England an den unverhofftesten Orten architektonische Schätze auftun.

Die wunderschöne und doch etwas seltsam aussehende Triangular Lodge liegt versteckt an einer Landstraße nahe Rushton und hat nur drei Wände.
Sie wurde von Sir Thomas Tresham zwischen 1593 und 1597 als ein Symbol seines katholischen Glaubens errichtet, nachdem er 15 Jahre im Gefängnis verbracht hatte, da er sich weigerte, zum Protestantismus zu konvertieren. Vor diesem Hintergrund wird auch die Bedeutung der drei, anstatt der üblichen vier, Wände ersichtlich.

Jede davon wurde aus Schichten dunklen und hellen Kalksteins gefertigt. Alle haben eine Länge von 33 Fuß = 10 m. Darüber hinaus hat die Lodge drei Fenster, drei Stockwerke und drei Wasserspeier, die auf das Haus aufpassen.
Das Fassaden sind mit 3, jeweils 33 Buchstaben umfassenden biblischen Texten versehen. Die immer wiederkehrende 3 bezieht sich auf die heilige Dreieinigkeit.
Ein zweites Haus, Lyveden New Bield, ließ Sir Thomas Tresham im Grundriss eines griechischen Kreuzes bauen. Das Gebäude wurde nicht vollendet.
360°-Ansicht des Hauses: http://www.bbc.co.uk/northamptonshire/360/triangular_lodge.shtml

Regelmäßiges fünfseitiges Prisma



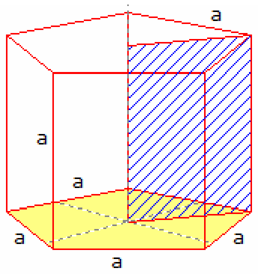
Kante a, Höhe h — Mantelfläche A_M — $A_M = 5\ a\ h$
Oberfläche A — $A = \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}/2\ a^2 + 5\ a\ h$
Volumen V — $V = \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}/4\ a^2\ h$
Raumdiagonale d — $d = 1/\sqrt{2}\ \sqrt{a^2\ (3+\sqrt{5}) + 2\ h^2}$

Kante a, Mantelfläche A_M — Höhe h $h = A_M / (5a)$
Oberfläche — $A = a^2\ \sqrt{5/2\ \sqrt{5} + 25/4} + A_M$
Volumen V — $V = A_M\ a\ \sqrt{\sqrt{5}/40 + 1/16}$

Kante a, Oberfläche A — Höhe h $h = (A - \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}/4\ a^2) / (5a)$
Mantelfläche A_M — $A_M = (A - a^2\ \sqrt{5/8\ \sqrt{5} + 25/16})/(5a)$
Volumen V — $V = a\ \sqrt{\sqrt{5}/40 + 1/16}\ (A - a^2/4\ \sqrt{10\sqrt{5} + 25})$

Kante a, Volumen V — Höhe h $h = V/a^2\ \sqrt{16/5 - 32/25\ \sqrt{5}}$

Mantelfläche A_M $A_M = V/a \sqrt{80 - 32 \sqrt{5}}$
Höhe h, Mantelfläche A_M Kantenlänge a $a = A_M / (5 h)$
Oberfläche $A = A_M^2/h^2 \sqrt{\sqrt{5}/250 + 1/100} + A_M$
Volumen V $V = A_M^2/h \sqrt{\sqrt{5}/1000 + 1/400}$
Höhe h, Oberfläche A Kantenlänge a
$a = \sqrt{20 - 8 \sqrt{5}}(\sqrt{A \sqrt{2/125 \sqrt{5} +1/25} +h^2} - h)$
Wichtig! Unter dem hier genannten regelmäßigen fünfseitigen Prisma ist ein Prisma mit regelmäßiger Grundfläche(!) zu verstehen. Es wird nicht gefordert, dass auch die Höhe h gleich der Grundkante a ist.

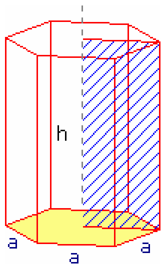


Regelmäßiges fünfseitiges Prisma (2)

Das hier betrachtete Prisma besitzt eine regelmäßige, fünfseitige Grundfläche mit den Kantenlänge a. Außerdem ist die Höhe h des Prismas gleich der Grundkante a. Dann besitzt das Prisma eine Umkugel, die durch die Eckpunkte des Prismas verläuft, sowie eine Mittelkugel, die durch die Mittelpunkte der Kanten der Grund- und Deckfläche verläuft.

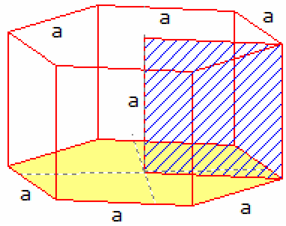
Radius der Umkugel $R = a/10 \sqrt{75 + 10 \sqrt{5}} \approx 0{,}986715155\ a$
Radius der Mittelkugel $\rho = a/10 \sqrt{50 + 10 \sqrt{5}} \approx 0{,}850650808\ a$
Seitenkante $a = \sqrt{60/41 - 8/41 \sqrt{5}}\ R = \sqrt{5/2 - 1/2 \sqrt{5}}\ \rho$
Oberflächeninhalt $A = a^2 (5 + 1/2 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}})$
$A = R^2 (\sqrt{3800/1681 \sqrt{5} + 12500/1681} - 40/41 \sqrt{5} + 300/41)$
$A = r^2 (\sqrt{25/8 \sqrt{5} + 125/8} - 5/2 \sqrt{5} + 25/2))$
Mantelflächeninhalt $M = 5a^2 = R^2 (300/41 - 40/41 \sqrt{5}) = r^2 (25/2 - 5/2 \sqrt{5})$
Volumen $V = a^3/4 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}} \approx 1{,}720477401\ a^3 = R^3 \sqrt{32000/68921 \sqrt{5} + 149500/68921}$
$V = r^3\ 5/4 \sqrt{5}$

Der Körper ist ein einfaches Beispiel für ein Symmetrie-D5h-Polyeder. Die Dieder-Winkel sind 90° und 108°. Eine Kugel, die alle Seitenflächen des Prismas berührt, existiert nicht. Man kann aber zwei Inkugeln betrachten, die zum einen die fünfeckigen Grund- und Deckfläche berührt, zum anderen die quadratischen Seitenflächen berührt.
Inkugel der Quadratflächen $r_4 = a/10 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}} \approx 0{,}688190960\ a$
Inkugel der Fünfecksflächen $r_5 = a/2$



Regelmäßiges sechsseitiges Prisma, hexagonales Prisma

Kantenlänge a, Höhe h Mantelfläche A_M $A_M = 6\ a\ h$
Oberfläche A $A = 3\ a\ (a \sqrt{3} + 2\ h)$
Volumen V $V = 3/2\ a^2\ h \sqrt{3}$
kurze Raumdiagonale d_1 $d_1 = \sqrt{3a^2 + h^2}$
lange Raumdiagonale d_2 $d_2 = \sqrt{4a^2 + h^2}$
Kante a, Mantelfläche A_M Höhe h $h = A_M / (6a)$
Oberfläche A $A = 3 \sqrt{3}\ a + A_M$
Volumen V $V = \sqrt{3}/4\ a\ A_M$
kurze Raumdiagonale d_1 $d_1 = \sqrt{108\ a^4 + A_M^2}/(6a)$
lange Raumdiagonale d_2 $d_2 = \sqrt{144\ a^4 + A_M^2}/(6a)$
Kante a, Oberfläche A Höhe h $h = A / (6a) - a/2 \sqrt{3}$
Mantelfläche A_M $A_M = A - 3 \sqrt{3}\ a^2$
Volumen V $V = \sqrt{3}/4\ a\ A - 9/4\ a^3$
kurze Raumdiagonale d_1 $d_1 = \sqrt{135\ a^4 - 6\sqrt{3}\ a^2\ A + A^2}/(6a)$
lange Raumdiagonale d_2 $d_2 = \sqrt{171\ a^4 - 6\sqrt{3}\ a^2\ A + A^2}/(6a)$
Kantenlänge a, Volumen V Höhe h $h = 2/3\ V / (a^2 \sqrt{3})$
Mantelfläche A_M $A_M = 4/3 \sqrt{3}\ V/a$
Oberfläche A $A = \sqrt{3}\ (9a^2 + 4V) / (3a)$
kurze Raumdiagonale d_1 $d_1 = \sqrt{3} \sqrt{81\ a^6 + 4\ V^2}/(9a^2)$
lange Raumdiagonale d_2 $d_2 = 2\sqrt{3} \sqrt{27\ a^6 + V^2}/(9a^2)$
Höhe h, Mantelfläche A_M Kantenlänge a $a = A_M / (6\ h)$
Oberfläche A $A = \sqrt{3}\ A_M\ (4\sqrt{3}\ h^2 + A_M) / (12\ h^2)$
Volumen V $V = \sqrt{3}/24\ A_M / h$
kurze Raumdiagonale d_1 $d_1 = \sqrt{3} \sqrt{12\ h^4 + A_M^2}/(6h)$
lange Raumdiagonale d_2 $d_2 = \sqrt{9\ h^4 + A_M^2}/(3h)$
Höhe h, Oberfläche A Kantenlänge a $a = \sqrt{h^2/3 + A/(3 \sqrt{3})} - h \sqrt{3}$
Mantelfläche A_M $A_M = 2 \sqrt[4]{3}\ h \sqrt{A + \sqrt{3}h^2} - 6 \sqrt{3}\ h^2$
Volumen V $V = h/2\ (\sqrt{a+\sqrt{3}\ h^2} - 3 \sqrt[4]{3}\ h)^2$
kurze Raumdiagonale d_1 $d_1 = \sqrt{\sqrt{27}} \sqrt{-6\sqrt{\sqrt{3}}\ h \sqrt{A + \sqrt{3}\ h^2} + A + 11\sqrt{3}\ h^2}/3$
lange Raumdiagonale d_2 $d_2 = \sqrt{\sqrt{3}} \sqrt{-24\sqrt{\sqrt{3}}\ h \sqrt{A + \sqrt{3}\ h^2} + 4A + 43\sqrt{3}\ h^2}/3$
Wichtig! Unter dem hier genannten regelmäßigen sechsseitigen Prisma ist ein Prisma mit regelmäßiger Grundfläche(!) zu verstehen. Es wird nicht gefordert, dass auch die Höhe h gleich der Grundkante a ist.



Regelmäßiges sechsseitiges Prisma (3)

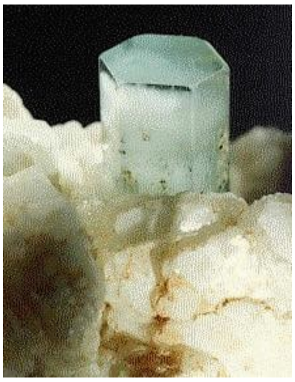
Das hier betrachtete Prisma besitzt eine regelmäßige, sechsseitige Grundfläche mit den Kantenlänge a. Außerdem ist die Höhe h des Prismas gleich der Grundkante a.
Das Prisma besitzt eine Umkugel, die durch die Eckpunkte des Prismas verläuft, und eine Mittelkugel, die durch die Mittelpunkte der Kanten der Grund- und Deckfläche verläuft.

Radius der Umkugel	$R = \sqrt{5}/2\ a \approx 1{,}118033989\ a$
Radius der Mittelkugel	$\rho = a$
Seitenkante	$a = 2\sqrt{5}\ R$
Oberflächeninhalt	$A = a^2 (6 + 3\sqrt{3}) \approx 11{,}19615242\ a^2$
	$A = a^2 (15/4 \sqrt{3} + 15/2) \approx 13{,}99519052\ a^2$
Volumen	$V = 3a^3/2 \sqrt{3} \approx 2{,}598076211\ a^3 = 15/16 \sqrt{15}\ a^3 \approx 3{,}630921887\ a^3$

Der Körper ist ein einfaches Beispiel für ein Symmetrie-D6h-Polyeder. Die Dieder-Winkel sind 90° und 120°. Eine Kugel, die alle Seitenflächen des Prismas berührt, existiert nicht. Man kann aber zwei Inkugeln betrachten, die zum einen die sechseckigen Grund- und Deckfläche berührt, zum anderen die quadratischen Seitenflächen berührt.
Inkugel der Quadratflächen $r_4 = a/2 \sqrt{3} \approx 0{,}866025404\ a$
Inkugel der Fünfecksflächen $r_6 = a/2$
Koordinaten: 1, 0, 0,5 ; 1, 0, -0,5 ; -1, 0, 0,5 ; -1, 0, -0,5 ; 0,5, √3/2, 0,5 ; 0,5, √3/2, -0,5 ; 0,5, -√3/2, 0,5 ; 0,5, -√3/2, -0,5 ; -0,5, √3/2, 0,5 ; -0,5, √3/2, -0,5 ; -0,5, -√3/2, 0,5 ; -0,5, -√3/2, -0,5

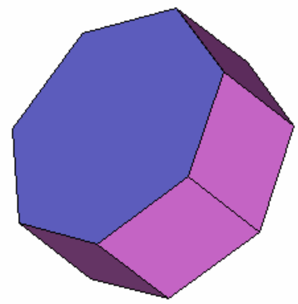
Beryll

Sechsseitiges regelmäßiges Prisma in der Natur



$Be_3Al_2 (SiO_3)_6$, hexagonal; H-7,5-8; D=2,6-2,8; bis zu 14% BeO
Der Beryll wurde schon im Altertum verwendet und zwar in seinen edlen Varietäten Smaragd und Aquamarin.
Der Beryll ist ein Produkt der Magmatätigkeit und seine wichtigsten Träger sind die Granitpegmatite. Die gasdurchsetzten Hydrothermallösungen schufen für die Entstehung großer Kristalle günstige Bedingungen.
Von den Fundstätten Acworth und Grafton in New Hampshire (USA) stammen Berylle von 1,5 t Gewicht, aus Albany (USA) eine 10 m lange Säule von über 1,8 m Durchmesser. Die Berylle in Glimmerschiefer und Kalkgestein sind zumeist hydrothermalen Ursprungs. Beryllvorkommen sind zahlreich.

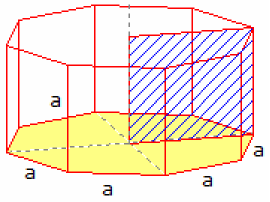
Der gemeine Beryll bildet säulige Kristalle; sechsseitige regelmäßige Prismane, aus, die viele Meter lang werden können, oft quergestreift, in Querrichtung spaltbar, ein- und aufgewachsen sind. Er wurde auch in grobstengeligen Aggregaten abgeschieden und ist spröde, im Bruch uneben, undurchsichtig bis transparent. Seine Farbe ist graugelb bis gelbgrün, sein Glanz schwach bis fettartig.



Regelmäßiges siebenseitiges Prisma

Die hier betrachteten Prismen besitzen ein regelmäßiges Polygon der Kantenlänge a als Grundfläche. Außerdem ist die Höhe h des Prismas gleich der Kante a. Dann besitzt das Prisma eine Umkugel, die durch die Eckpunkte des Prismas verläuft, sowie eine Mittelkugel, die durch die Mittelpunkte der Kanten der Grund- und Deckfläche verläuft.
Der Körper ist ein einfaches Beispiel für ein Symmetrie-D7h-Polyeder.
Eine Kugel, die alle Seitenflächen des Prismas berührt, existiert nicht. Man kann aber eine Inkugel betrachten, die die quadratischen Seitenflächen berührt. Es gilt:
Dieder-Winkel: Siebeneck-Quadrat 90°, Quadrat-Qudrat arccos(- Lösung von $[8x^3 + 4x^2 - 4x - 1]$) = 900/7° ≈ 128,5714299°

Radius der Umkugel
$R = \sqrt{(\text{Lösung von } [448x^3 - 1232x^2 + 980x - 239])}\ a = \sqrt{(1+1/(\sin(\pi/7)^2))/2}\ a \approx 1{,}256178840\ a$
Radius der Mittelkugel $\rho = \sqrt{(\text{Lösung von } [7x^3 - 14x^2 + 7x - 1])}\ a \approx 1{,}152382435\ a$
Quadratinkugel $r_4 = \sqrt{(\text{Lösung von } [448x^3 - 560x^2 + 84x - 1])}\ a \approx 1{,}038260698\ a$
Oberflächeninhalt $A \approx 14{,}26782\ a^2 \approx 9{,}041909966\ R^2 \approx 10{,}74398982\ \rho^2$
Volumen
$V = 7 \cot(\pi/7)/4\ a^3 \approx 3{,}633912444\ a^3 = \sqrt{(\text{Lösung von } [4096x^3 - 62720x^2 + 115248x - 16807])}\ a^3$
$V \approx 1{,}833280483\ R^3 \approx 2{,}374581227\ \rho^3$

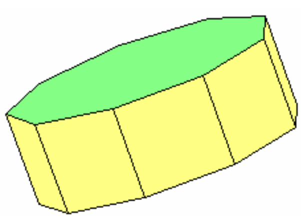


Regelmäßiges achtseitiges Prisma

Die hier betrachteten Prismen besitzen ein regelmäßiges Polygon der Kantenlänge a als Grundfläche. Außerdem ist die Höhe h des Prismas gleich der Kante a. Dann besitzt das Prisma eine Umkugel, die durch die Eckpunkte des Prismas verläuft, sowie eine Mittelkugel, die durch die Mittelpunkte der Kanten der Grund- und Deckfläche verläuft.
Eine Kugel, die alle Seitenflächen des Prismas berührt, existiert nicht. Man kann aber eine Inkugel betrachten, die die quadratischen Seitenflächen berührt. Es gilt:

Radius der Umkugel	$R = a/2\ \sqrt{(5 + 2\sqrt{2})} \approx 1{,}398966326\ a = \rho\ \sqrt{(3/2 - \sqrt{2}/4)} \approx 1{,}070722470\ \rho$
Radius der Mittelkugel	$\rho = a/2\ \sqrt{(4 + 2\sqrt{2})} \approx 1{,}306562965\ a$
	$\rho = R\ \sqrt{(2/17\ \sqrt{2} + 12/17)} \approx 0{,}9339488310\ R$
Seitenkante	$a = \sqrt{(20/17 - 8/17\ \sqrt{2})}\ R = \sqrt{(2 - \sqrt{2})}\ \rho$
	$a = \sqrt{A}\ \sqrt{(3/28 - \sqrt{2}/28)} \approx 0{,}2379815747\ \sqrt{A}$
	$a = \sqrt[3]{V}\ \sqrt[3]{(\sqrt{2}/2 - 1/2)} \approx 0{,}5916498694\ \sqrt[3]{V}$
Oberflächeninhalt	$A = a^2\ (12 + 4\sqrt{2}) = R^2\ (176/17 - 16/17\ \sqrt{2}) \approx 9{,}021916647\ R^2$
	$A = \rho^2\ (16 - 4\sqrt{2}) \approx 10{,}34314575\ \rho^2$
Volumen	$V = a^3\ (2 + 2\sqrt{2}) \approx 4{,}828427125\ a^3$
	$V = R^3\ \sqrt{(18176/4913 - 2048/4913\ \sqrt{2})} \approx 1{,}763534249\ R^3$
	$V = \rho^3\ \sqrt{(16 - 8\sqrt{2})} \approx 2{,}164784400\ \rho^3$
	$V = \sqrt{A^3}\ \sqrt{(3/5488\ \sqrt{2} + 19/5488)} \approx 0{,}06507822256\ \sqrt{A^3}$
Inkugel der Quadratflächen	$r_4 = a/2\ (1 + \sqrt{2}) \approx 1{,}207106781\ a$

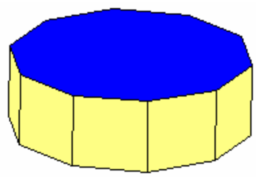
Dieder-Winkel 90° und 135°, der Körper ist ein einfaches Beispiel für ein Symmetrie-D8h-Polyeder.



Regelmäßiges neunseitiges Prisma, Neunseitiges Prisma

Das Prisma besitzt eine regelmäßige, neunseitige Grundfläche mit den Kantenlänge a. Die Höhe h des Prismas ist gleich der Grundkante a. Der Körper ist ein einfaches Beispiel für ein Symmetrie-D9h-Polyeder.
Dann besitzt das Prisma eine Umkugel, die durch die Eckpunkte des Prismas verläuft, sowie eine Mittelkugel, die durch die Mittelpunkte der Kanten der Grund- und Deckfläche verläuft.

Radius der Umkugel	$R \approx 1{,}545043055\ a \approx 9{,}034807366\ \rho \approx 1{,}124699365\ r$
Radius der Mittelkugel	$\rho \approx 0{,}1710100716\ a \approx 0{,}1106830460\ R \approx 0{,}1244851516\ r$
Inkugel der Quadratflächen	$r \approx 1{,}373738709\ a \approx 0{,}8891264907\ R \approx 8{,}033086568\ \rho$
Seitenkante	$a \approx 0{,}6472311542\ R \approx 0{,}7279404685\ r \approx 5{,}847608800\ \rho$
Oberflächeninhalt	$A \approx 21{,}36364\ a^2 = 9/4\ a^2 \cot(\pi/9) + 9a^2$
Mantelflächeninhalt	$M = 9\ a^2$
Volumen	$V \approx 6{,}1818242\ a^3 = 9/4\ a^3 \cot(\pi/9)$
	$V \approx 2{,}384537965\ r^3 \approx 1236{,}094240\ \rho^3 \approx 1{,}676080568\ R^3$

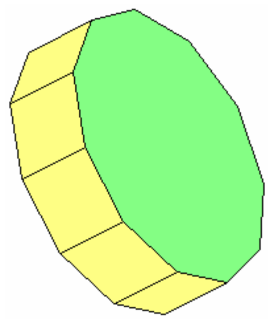


Regelmäßiges zehnseitiges Prisma

Die hier betrachteten Prismen besitzen ein regelmäßiges Polygon der Kantenlänge a als Grundfläche. Außerdem ist die Höhe h des Prismas gleich der Kante a. Dann besitzt das Prisma eine Umkugel, die durch die Eckpunkte des Prismas verläuft, sowie eine Mittelkugel, die durch die Mittelpunkte der Kanten der Grund- und Deckfläche verläuft.
Eine Kugel, die alle Seitenflächen des Prismas berührt, existiert nicht. Man kann aber eine Inkugel betrachten, die die quadratischen Seitenflächen berührt. Es gilt:

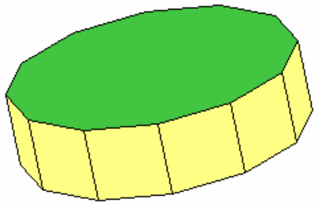
Radius der Umkugel	$R = a/2\ \sqrt{(7 + 2\sqrt{5})} = \rho\ \sqrt{(11/8 - 1/8\ \sqrt{5})}$
Radius der Mittelkugel	$\rho = a/2\ (1 + \sqrt{5}) = R\ \sqrt{(2/29\ \sqrt{5} + 22/29)}$
Seitenkante	$a = \sqrt{(28/29 - 8/29\ \sqrt{5})}\ R = (1/2\ \sqrt{5} - 1/2)\ \rho = \sqrt{A}\ \sqrt{(1/(10+\sqrt{(50\ \sqrt{5} + 125)}))}$
Oberflächeninhalt	$A = a^2\ (10 + 5\ \sqrt{(5 + 2\sqrt{5})}) = \rho^2\ (\sqrt{(125/2 - 25/2\ \sqrt{5})} - 5\sqrt{5} + 15)$
	$A = R^2/29\ (\sqrt{(26000 - 800\ \sqrt{5})} - 80\ \sqrt{5} + 280)$
Volumen	$V = 5a^3/2\ \sqrt{(5 + 2\sqrt{5})} = R^3\ \sqrt{(190000/24389 - 57600/24389\ \sqrt{5})}$
	$V = \rho^3\ \sqrt{(125/4 - 25/2\ \sqrt{5})}$
Inkugel der Quadratflächen	$r_4 = a/2\ \sqrt{(5 + 2\sqrt{5})}$

Regelmäßiges elfseitiges Prisma



Das regelmäßige elfseitige Prisma besteht aus zwei regelmäßigen Elfecken und 11 Quadraten. Das Polyeder besitzt eine Umkugel, die durch die Eckpunkte des Prismas verläuft, sowie eine Mittelkugel, die durch die Mittelpunkte der Kanten der Grund- und Deckfläche verläuft.
Eine Kugel, die alle Seitenflächen des Prismas berührt, existiert nicht. Man kann aber eine Inkugel betrachten, die die quadratischen Seitenflächen berührt. Es gilt:

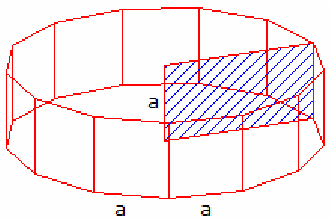
Radius der Umkugel	$R = a/2 \sqrt{\sin^2(\pi/11) + 1} / \sin(\pi/11)$
	$R = r/\sin(2\pi/11)\,(2 \sin(\pi/11) + 1 - \cos(2\pi/11))$
	$R = \sqrt{2}\,\rho \sqrt{3 - \cos(2\pi/11)} / (1 - \cos(2\pi/11))$
Radius der Mittelkugel	$\rho = a/2 \sin(\pi/11) = R\,(1 - \cos(2\pi/11)) / \sqrt{6 - 2\cos(2\pi/11)}$
	$\rho = (r - r\cos(2\pi/11)) / (2\cos(\pi/11))$
Inkugel der Quadratflächen	$r = a/2 \cot(\pi/11) = R \sin(2\pi/11) / (2 \sin(\pi/11) + 1 - \cos(2\pi/11))$
	$r = 2\rho \cos(\pi/11) / (1 - \cos(2\pi/11))$
Seitenkante	$a = 2R \sin(\pi/11) / \sqrt{\sin^2(\pi/11) + 1} = 2r / \cot(\pi/11) = 2\rho / \sin(\pi/11)$
Oberflächeninhalt	$A = 22a^2 / (4 \tan(\pi/11)) + 11 a^2$
Mantelflächeninhalt	$M = 11 a^2$
Volumen	$V = 11a^3 / (4 \tan(\pi/11))$



Regelmäßiges zwölfseitiges Prisma

Das regelmäßige zwölfseitige Prisma besteht aus zwei regelmäßigen Zwölfecken und 12 Quadraten. Das Polyeder besitzt eine Umkugel, die durch die Eckpunkte des Prismas verläuft, sowie eine Mittelkugel, die durch die Mittelpunkte der Kanten der Grund- und Deckfläche verläuft.
Eine Kugel, die alle Seitenflächen des Prismas berührt, existiert nicht. Man kann aber eine Inkugel betrachten, die die quadratischen Seitenflächen berührt. Es gilt:

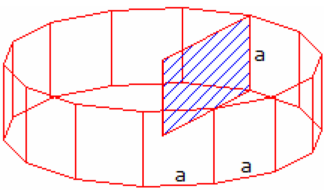
Radius der Umkugel	$R = a/2 \sqrt{9 + 4\sqrt{3}} = \rho \sqrt{3/2 + \sqrt{3}/4} \approx 1{,}032950772\,\rho$
Radius der Mittelkugel	$\rho = a/2 (\sqrt{6} + \sqrt{2}) = R \sqrt{4/33 \sqrt{3} + 8/11} \approx 0{,}9681003458\,R$
Seitenkante	$a = \sqrt{12/11 - 16/33 \sqrt{3}}\,R = (\sqrt{6} - \sqrt{2})\,\rho/2 = r\,(4 - 2\sqrt{3})$
Oberflächeninhalt	$A = a^2 (24 + 6\sqrt{3}) = R^2 (192/11 - 56/11 \sqrt{3}) \approx 8{,}636832252\,R^2$
	$A = \rho^2 (30 - 12\sqrt{3}) \approx 9{,}215390309\,\rho^2 = r^2 (384 - 216\sqrt{3}) \approx 9{,}87702556510\,r^2$
Volumen	$V = 3a^3 \sqrt{2 + \sqrt{3}} = R^3 \sqrt{11904/1331 - 6464/1331\sqrt{3}} \approx 0{,}7293480615\,R^3$
	$V = \rho^3 (6 - 3\sqrt{3}) \approx 0{,}8038475772\,\rho^3 = r^3 (132\sqrt{6} - 228\sqrt{2}) \approx 0{,}891953826321\,r^3$
Inkugel der Quadrate	$r = a/2 (2 + \sqrt{3})$



Regelmäßiges dreizehnseitiges Prisma, Dreizehnseitiges Prisma

Das Prisma besitzt eine regelmäßige, dreizehnseitige Grundfläche mit den Kantenlänge a. Die Höhe h des Prismas ist gleich der Grundkante a. Der Körper ist ein einfaches Beispiel für ein Symmetrie-D13h-Polyeder.
Dann besitzt das Prisma eine Umkugel, die durch die Eckpunkte des Prismas verläuft, sowie eine Mittelkugel, die durch die Mittelpunkte der Kanten der Grund- und Deckfläche verläuft.

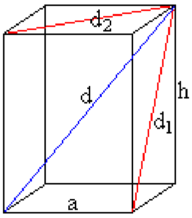
Radius der Umkugel	$R \approx 2{,}14828670641\,a \approx 17{,}9535820424\,\rho \approx 1{,}05901023315\,r$
Radius der Mittelkugel	$\rho \approx 0{,}119657832143\,a \approx 0{,}0556991912607\,R \approx 0{,}0589860135235\,r$
Inkugel der Quadratflächen	$r \approx 2{,}02857974282\,a \approx 0{,}944277938675\,R \approx 16{,}9531714429\,\rho$
Seitenkante	$a \approx 0{,}465487216865\,R \approx 0{,}492955726063\,r \approx 8{,}35716293772\,\rho$
Oberflächeninhalt	$A \approx 26{,}1857683283\,a^2$
Mantelflächeninhalt	$M = 13\,a^2$
Volumen	$V \approx 13{,}1857683283\,a^3 \approx 1{,}57953476108\,r^3 \approx 7696{,}30109361\,\rho^3$
	$V \approx 1{,}32992980126\,R^3$



Regelmäßiges vierzehnseitiges Prisma, Vierzehnseitiges Prisma

Das Prisma besitzt eine regelmäßige, vierzehnseitige Grundfläche mit den Kantenlänge a. Die Höhe h des Prismas ist gleich der Grundkante a. Der Körper ist ein einfaches Beispiel für ein Symmetrie-D14h-Polyeder.
Dann besitzt das Prisma eine Umkugel, die durch die Eckpunkte des Prismas verläuft, sowie eine Mittelkugel, die durch die Mittelpunkte der Kanten der Grund- und Deckfläche verläuft.

Radius der Umkugel	$R \approx 2{,}30193773580\,a \approx 20{,}6896285655\,\rho \approx 1{,}05080453329\,r$
Radius der Mittelkugel	$\rho \approx 0{,}111260466978\,a \approx 0{,}0483333954900\,R \approx 0{,}0507889510907\,r$
Inkugel der Quadratflächen	$r \approx 2{,}19064313376\,a \approx 0{,}951651775672\,R \approx 19{,}6893217624\,\rho$
Seitenkante	$a \approx 0{,}434416615378\,R \approx 0{,}456486948780\,r \approx 8{,}98791841487\,\rho$
Oberflächeninhalt	$A \approx 28{,}2391803694\,a^2$
Mantelflächeninhalt	$M = 14\,a^2$
Volumen	$V \approx 15{,}3345019363\,a^3 \approx 1{,}45866234084\,r^3 \approx 11133{,}8929015\,\rho^3$
	$V \approx 1{,}25715537776\,R^3$



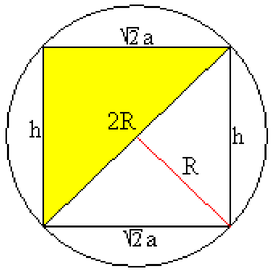
Quadratisches Prisma

Ein Quader mit zwei quadratischen Seitenflächen heißt auch quadratisches Prisma. Ein anderer Name ist regelmäßiges vierseitiges Prisma. Die alte Bezeichnung quadratische Säule ist aus den Lehrbüchern der Mathematik weitgehend verschwunden. Auch der Würfel ist ein quadratisches Prisma.

Das Prisma sei durch die Grundkante a und die Höhe h gegeben:

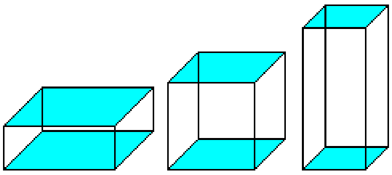
Flächendiagonalen $d_1 = \sqrt{(a^2+h^2)}$ $d_2 = \sqrt{2}\ a$.

Die Raumdiagonale $d = \sqrt{(d_1^2+a^2)} = \sqrt{(2a^2+h^2)}$.



Die Oberfläche ist $A = 2a^2+4ah$ und das Volumen $V = a^2h$.

Die Eckpunkte des Prismas liegen auf einer Kugeloberfläche. Man erhält den Radius, wenn man durch die Diagonalen der Quadrate eine Schnittfläche legt. Es gilt nach dem Satz des Pythagoras: $2R^2 = h^2 + [\sqrt{2}\ a]^2$ oder $R = \sqrt{(a^2+h^2/2)}$.



Größte Prismen

Die nebenstehenden quadratischen Prismen haben die gleiche Oberfläche, aber unterschiedliche Formen. Gesucht ist das Prisma mit dem größten Volumen.

Nebenbedingung $A = 2a^2+4ah$ oder $h = (A - 2a^2)/(4a)$

Zielfunktion $V = a^2h$ oder $V(a) = a^2(A-2a^2)/(4a) = Aa/4-a^3/2$

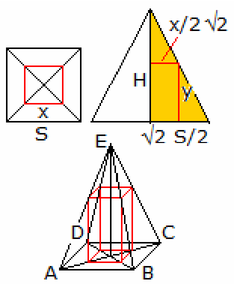
Es gilt $V'(a) = A/4-3a^2/2$. $V'(a)=0$ ergibt $A/4-3a^2/2 = 0$ oder $a = \sqrt{(A/6)} = \sqrt{(6A)}/6$. Die Lösung $A = -\sqrt{(6O)}/6 < 0$ entfällt. Dann ist $h = (A-2a^2)/(4a) = \sqrt{(6O)}/6$. Es gilt also a=h. Damit ist das Prisma ein Würfel.

Es stellt sich weiter die Frage nach dem Prisma größter Oberfläche, wenn das Volumen konstant gehalten wird. Auch da ist der Körper ein Würfel, wie die folgende Rechnung zeigt.

Nebenbedingung Es gilt $V = a^2h$ oder $h = V/a^2$.

Zielfunktion $A = 2a^2+4ah$ oder $A(a) = 2a^2+4V/a$.

Es gilt $A'(a) = 4a-4V/a^2 \rightarrow A'(a) = 0$ ergibt $4a^3-4V = 0$ oder $a = V^{1/3}$. Dann ist $h = V/a^2 = V/V^{2/3} = V^{1/3}$, d.h. a = h. Damit ist auch hier das Prisma ein Würfel.



Größtes Prisma in der quadratischen Pyramide

Gegeben sei eine quadratische Pyramide durch die Grundkante s und die Höhe h. Gesucht wird ein quadratisches Prisma in der Pyramide mit dem größten Volumen. Für eine Rechnung betrachtet man einen Schnitt durch die Punkte A, C und E. Die Grundseite des Prismas sei x und die Höhe sei y.

Dann gilt nach dem zweiten Strahlensatz:

$(\sqrt{2}\ s/2) : (\sqrt{2}\ x/2) = h : (h-y)$ oder $y = h - (h/s)\ x$.

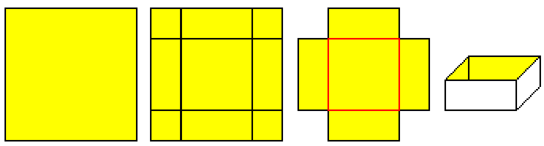
Zielfunktion $V = x^2y$ oder $V(x) = hx^2 - (h/s)\ x^3$

$V'(x) = 2hx - 3(h/s)\ x^2$. $V'(x) = 0$ ergibt $2h\ x - 3(h/s)\ x^2 = 0$ mit den Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2s/3$.

Für $x_1 = 0$ existiert kein Prisma. Zu $x_2 = 2s/3$ gehört $y_2 = h-(h/s)\ x_2 = h/3$.

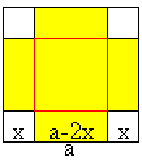
Ergebnis: Das Prisma mit der Grundseite 2s/3 und der Höhe h/3 hat das größte Volumen. Ist h=s, so ist das Prisma ein halber Würfel.

Eine Schachtel größten Volumens



Gegeben ist ein quadratisches Stück Papier. Man entfernt an den Ecken vier Quadrate, so dass ein Kreuz entsteht. Aus dem Kreuz faltet man eine oben offene Schachtel. Die Frage ist, wie groß die Eckquadrate sein müssen, damit das Volumen möglichst groß ist.

Zielfunktion $V(x) = (a-2x)^2x = 4x^3-4ax^2+a^2x$



Die erste Ableitung ist $V'(x) = 12x^2-8ax+a^2$. $V'(x) = 0$ ergibt $12x^2-8ax+a^2 = 0$ oder $x^2-2ax/3+a^2/12 = 0$ mit der zweiten Ableitung $V''(x) = -8a+24x$.

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $x_1=a/6$ und $x_2=a/2$. Für $x_2 = a/2$ gibt es keine Schachtel. Die Lösung ist $x_1 = a/6$ oder $(a-2x_1) = 2a/3$. Mit $V''(a/6) = -4a < 0$ ist sichergestellt, dass ein Maximum vorliegt.

Ergebnis: Die Schachtel hat die Kanten a/6, a/6 und 4a/6. Das ist das Verhältnis 1:1:4

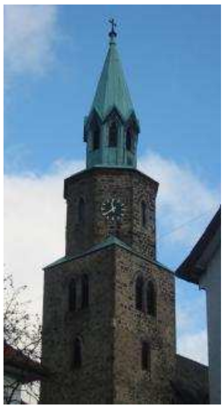
Wolkenkratzer und Türme als Prismen

Man stellt fest, dass Hochhäuser und Türme sehr oft die Form eines quadratischen Prismas haben, zum Beispiel der Sears Tower in Chicago.

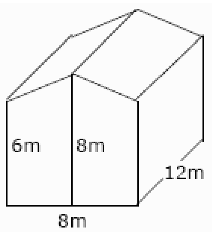
Der Sears Tower (Abbildung links) besteht aus einem Bündel von 3x3 = 9 Türmen, die unterschiedlich hoch sind. Die Türme sind alle quadratische Prismen mit den Höhen 2 x 105 Stockwerke, 3 x 90 Stockwerke, 2 x 66 Stockwerke und 2 x 50 Stockwerke.

Der Wolkenkratzer war von 1974 bis 1997 das höchste Gebäude der Welt. Auch das hohe Aon Center (Abbildung Mitte, rechter Wolkenkratzer) ist ein quadratisches Prisma. Auch in früherer Zeit wurden vierseitige Prismen für Bauprojekte genutzt. Im Beispiel ist die Kilianskirche in Schötmar (Abbildung rechts) zu sehen. Der Kirchturm hat einen quadratischen unteren Aufbau aus dem Mittelalter und eine Bekrönung aus dem 19. Jahrhundert. Die achtstrahligen Aufbauten passen sehr gut zu einem quadratischen Turm.





Ein Standardbeispiel für Bauwerke in Prismen- bzw. Quaderform ist die Porta Nigra (lateinisch: schwarzes Tor), das römische Stadttor aus grauem Sandstein im Norden von Trier, das zu den besterhaltenen römischen Bauwerken in Deutschland gehört. Die Porta Nigra, deren Name aus späterer Zeit stammt, besitzt zwei rechteckige Türme mit jeweils vier Geschossen und wurde im späten 2. Jahrhundert als Teil der römischen Befestigungsanlagen von Trier gebaut, das im 1. Jahrhundert als Augusta Treverorum von Kaiser Augustus gegründet worden war und sich bald zu einem wichtigen Militärstützpunkt und Wirtschaftszentrum des Römischen Reiches entwickelte. Seit dem 11. Jahrhundert diente das Bauwerk als Kirche. 1803 wurde die Porta Nigra auf Befehl Napoleons restauriert, ein weiteres Mal zwischen 1966 und 1973 auf Initiative der Stadtregierung.



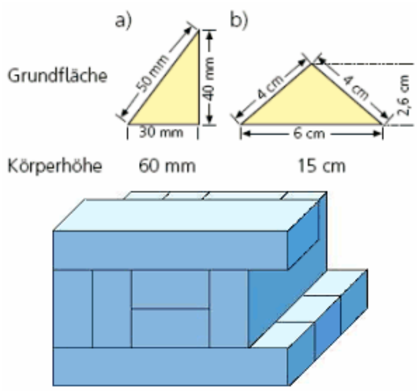
Aufgaben zur Prismenberechung

Aufgabe 1: Für den Bau eines Einfamilienhauses, dessen Außenmaße man der nebenstehenden Zeichnung entnehmen kann, kalkuliert man die Baukosten auf 300 € pro Kubikmeter umbauten Raumes. Wie hoch werden die Gesamtkosten ungefähr sein?
Lösung: Grundfläche 56 m², Volumen 672 m³ , Kosten 210600 €

Aufgabe 2: Berechne angenähert die Masse der Luft in einem quaderförmigen Schulzimmer mit der Breite 6 m, der Länge 7,5 m und der Höhe 2,6 m. Die Dichte der Luft beträgt bei Raumtemperatur ca. 1,3 kg/m³.
Lösung: Volumen des Quaders 117 m³, Masse 152,1 kg

Aufgabe 3: Zeichne das Schrägbild eines Quaders mit den Massen AB = 4 cm, BC = 6 cm und BF = 3 cm. Verlängere die Kante CD nach beiden Seiten um 4 cm nach R und S. Verbinde diese Punkte je mit den nächstgelegenen vier Quaderecken. Berechne Volumen und Oberfläche des entstandenen Körpers.
Lösung: Volumen 120 m³, Oberfläche 138 + 6 √13 = 159,63 m²

Aufgabe 4: Gegeben ist das Schrägbild eines Quaders mit den Massen AB = 6 cm, BC = 8 cm und BF = 4 cm. Schneide dem Quader längs der Linien AFH und FCH zwei Ecken ab. Volumen des Restkörpers?
Lösung: ursprüngliches Volumen 192 cm³, davon werden zwei gleiche Pyramiden abgeschnitten … Volumen V = 128 cm³



Aufgabe 5
Eine Säule mit quadratischem Querschnitt hat die Mantelfläche M = 1,76 m² und das Volumen V = 0,088 m³. Wie hoch ist sie?
Lösung: Volumen x²y, Mantelfläche 4xy, Höhe 2,2 m

Aufgabe 6: Ein Floß hat eine Dicke von 40 cm und eine Fläche von 16 m². Es sinkt im Wasser 30 cm ein. Wie groß ist die Dichte des Holzes?
Lösung: Volumen des Floßes 6,4 m³ ; Masse des Floßes 6,4 x kg ; Volumen des Wassers 4,8 m³ ; Masse des Wassers 4,8 kg ; Dichte des Holzes 0,75 kg/m³

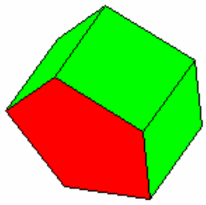
Aufgabe 7: Berechne das Volumen und die Oberfläche der Prismen.

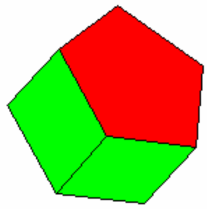
L.: a) $V = 36000$ mm³ ; $A = 8400$ mm² / b) $V = 117$ cm³ ; $A = 225{,}6$ cm²

Aufgabe 8: Hier sind Blöcke von gleicher Form und gleicher Größe gestapelt (untere Abbildung). Die kürzeste Kantenlänge eines Blockes beträgt 10 cm. Die beiden anderen Kantenlängen sind jeweils ein Vielfaches dieser Länge.
a) Wie lang sind die beiden anderen Kantenlängen?
b) Berechne das Volumen und die Oberfläche des Blockstapels?
c) Welcher Block berührt die meisten und welcher Block berührt die wenigsten anderen Blöcke?
d) Der Blockstapel ist mit möglichst wenigen Blöcken so zu ergänzen, dass ein großer Quader entsteht. Welche Kantenlängen hat dieser Quader?
Lösung: a) 20 cm, 60 cm / b) Volumen eines Blocks: 12 dm³; 9 Blöcke Volumen = 108 dm³ / c) am meisten: zweiter Block von links in der mittleren Ebene berührt 7 andere Blöcke; am wenigsten: quer obenauf liegender Block berührt 4 Blöcke und der obere der beiden Blöcke in der mittleren Ebene berührt ebenfalls 4 Blöcke
d) 3 Blöcke ergänzen, Kantenlängen: 6 dm, 6 dm, 4 dm

Aufgabe 9:Ein Würfel hat das Volumen $V = 29\,218\,112$ cm³. Berechne seine Oberfläche A.
Lösung: $V = a^3$; $a = 308$ cm ; $A = 569184$ cm²
»Körperberechnung

Halbreguläre Prismen
Unter einem halbregulären n-seitigen Prisma wird ein Prisma verstanden, dessen kongruente Deck- und Grundflächen regelmäßige n-seitige N-Ecke der Länge a sind und für die Prismenhöhe h = a gilt. Die Seitenflächen des Prismas sind Quadrate. Für a = h gilt:



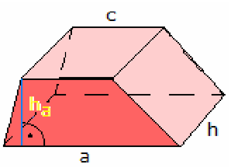


Oberfläche

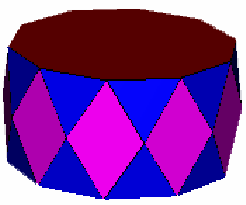
n	$A_n = n\,(1 + 1/2 \cot(\pi/n))\, a^2$	
3	$A_3 = 1/2\,(6 + \sqrt{3})\, a^2$	$\approx 3.86602\, a^2$
4	$A_4 = 6\, a^2$	
5	$A_5 = (5 + 1/2 \sqrt{(5\,(5 + 2\sqrt{5}))})\, a^2$	$\approx 8.44095\, a^2$
6	$A_6 = (6 + 3\sqrt{3})\, a^2$	$\approx 11.1961\, a^2$
8	$A_8 = (12 + 4\sqrt{2})\, a^2$	$\approx 17.6568\, a^2$
10	$A_{10} = 5\,(2 + \sqrt{(5 + 2\sqrt{5})})\, a^2$	$\approx 25.3884\, a^2$
12	$A_{12} = (6\sqrt{3} + 24)\, a^2$	$\approx 34.3923\, a^2$
16	$A_{16} = (\sqrt{(128\cdot\sqrt{2} + 256)} + 8\cdot\sqrt{2} + 24)\, a^2$	$\approx 56{,}2187\, a^2$
20	$A_{20} = (\sqrt{(200\cdot\sqrt{5} + 500)} + 10\cdot\sqrt{5} + 30)\, a^2$	$\approx 83{,}1375\, a^2$

Volumen

n	$V_n = n/4 \cot(\pi/n)\, a^3$	
3	$V_3 = 1/4 \sqrt{3}\, a^3$	$\approx 0.433012\, a^3$
4	$V_4 = a^3$	
5	$V_5 = 1/4 \sqrt{(5\,(5 + 2\sqrt{5}))}\, a^3$	$\approx 1.72047\, a^3$
6	$V_6 = 3/2 \sqrt{3}\, a^3 \approx 2.59807\, a^3$	
8	$V_8 = (2 + 2\sqrt{2})\, a^3$	$\approx 4.82842\, a^3$
10	$V_{10} = 5/2 \sqrt{(5 + 2\sqrt{5})}\, a^3$	$\approx 7.69420\, a^3$
12	$V_{12} = (6 + 3\sqrt{3})\, a^3$	$\approx 11.1961\, a^3$
16	$V_{16} = (\sqrt{(32\cdot\sqrt{2} + 64)} + 4\cdot\sqrt{2} + 4)\, a^3$	$\approx 20{,}1093\, a^3$
20	$V_{20} = (\sqrt{(50\cdot\sqrt{5} + 125)} + 5\cdot\sqrt{5} + 5)\, a^3$	$\approx 31{,}5687\, a^3$



Trapezsäule
Eine Trapezsäule ist ein Prisma mit einer trapezförmigen Grundfläche. Diese wird durch die Grundkanten a und c des Trapezes, die Höhe h_a des Trapezes und die Höhe h des Prismas beschrieben. Dann gilt:
Grundfläche A $\quad A = (a+c)/2\, h_a$
Volumen $\quad V = (a+c)/2\, h_a\, h$
Für die Bestimmung der Mantelfläche und weiterer Stücke muss eine weitere Größe gegeben sein, z.B. der Winkel α zwischen den Trapezseiten a und d oder die Trapezseite d:
Trapezseite $\quad b = \sqrt{(d^2 - (a-c)^2 \sin^2 \alpha)} + (a - c) \cos \alpha$
$b = \sqrt{(d^2 + (a-c)^2 - 2\,(a - c) \sqrt{(d^2 - h^2)})} = 2A / (\sin \alpha\, (a+c))$
Winkel α $\quad \alpha = \arcsin (2A / (b\,(a+c))) = 90° - \arcsin ((a^2 - 2ac + b^2 + c^2 - d^2) / (2b\,(a-c)))$
Mantelfläche A $\quad M = (a + c + d + \sqrt{(d^2 + (a-c)^2 - 2\,(a - c) \sqrt{(d^2 - h_a^2)})})\, h$

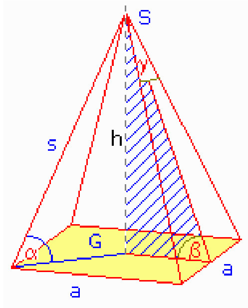


Zehnseitiges Fass
Durch Roger Kaufman wurde ein Polyeder, das zehnseitige Fass (engl. decagonal Square Barrel) beschrieben, dass beispielhaft für eine Klasse von Polyedern mit Rhombenflächen steht.
Dabei sind die Rhomben bei der zehnseitigen Form goldene Rhomben. Das Polyeder besteht aus 10 Rhomben, 20 Dreiecken und 2 Zehnecken.

Das zehnseitige Fass kann auf einer oder beiden Zehneckseiten mit einer fünfseitigen Kuppel erweitert werden. Dabei entstehen weitere interessante Polyeder. Eine Erweiterung mit einer fünfseitigen Rotunde ist nicht möglich, da einige Seitenflächen dann mit den Dreiecken in einer Ebene lägen.

Pyramide

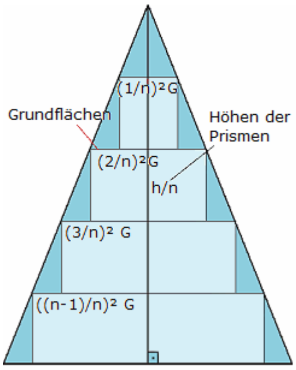
Eine Pyramide ist ein Polyeder. Sie wird begrenzt von einem Vieleck, Polygon, beliebiger Eckenzahl, der Grundfläche und mindestens drei Dreiecken, den Seitenflächen, die in einem Punkt, der Spitze der Pyramide, zusammentreffen. Die Gesamtheit der Seitenflächen bezeichnet man als Mantelfläche.
Unter der Höhe der Pyramide versteht man den kürzesten Abstand der Spitze von der Ebene, in der die Grundfläche liegt. Liegt der Fußpunkt der Höhe genau im Schwerpunkt der Grundfläche spricht man von einer geraden Pyramide.



Volumen $V = 1/3 * G * h$
Oberfläche $A = G + M$
Seitenlinie (quadr.Pyram.) $s = \sqrt{(h^2 + a^2/2)}$
Winkel (quadr.Pyramide) $\alpha = \arctan (\sqrt{2}\, h / a)$
$\tan \alpha = \tan \beta / \sqrt{2}$; $\cos \alpha = \sqrt{2} \sin \gamma/2$
Schwerpunkt liegt auf der Höhe im Abstand h/4 von der Grundfläche

Regelmäßige n-seitige Pyramide

$\tan \alpha = \tan \beta \cos \pi/n$, $\cos \alpha = \sin \gamma/2 / \sin \pi/n$



Pyramidenvolumen

Das Volumen einer Pyramide ergibt sich, indem man sie mit einem Treppenkörper annähert; d.h. sie mit Prismen füllt und deren Anzahl gegen unendlich laufen lässt. Hier werden Prismen betrachtet, die stets kleiner als der Abschnitt der Pyramide sind.
Die Grundfläche sei G und die Höhe h, die Anzahl der Prismen ist n-1. In der Abbildung ist n = 5. Es ergibt sich

$$V_n = (1/n)^2 G\, h/n + (2/n)^2 G\, h/n + \ldots + ((n-1)/n)^2 G\, h/n =$$
$$= G\, h/n\, (1^2/n^2 + 2^2/n^2 + \ldots + (n-1)^2/n^2) =$$
$$= Gh /n^3 (-n^2 + \Sigma_{k=1}^{n} k^2)$$

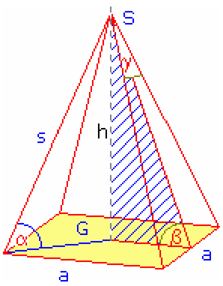
Für die Summe gilt die Summenregel $s_n = n^2/3 + n^2/2 + n/6$.
Einsetzen in die Volumenformel ergibt

$$V_n = Gh /n^3 (n^3/4 + n^2/2 + n/6 - n^2)$$

Nun kann man n und somit die Anzahl der Prismen gegen unendlich laufen lassen

$$V = \lim_{n\to\infty} Gh /n^3 (n^3/4 + n^2/2 + n/6 - n^2) \qquad V = Gh /3$$

Diese Volumenformel für die Pyramide gilt für jede Pyramide mit beliebiger Grundfläche, also auch für den Sonderfall des Kreiskegels.



Gerade Pyramide (Definition)

Pyramiden mit speziellen Eigenschaften werden gesondert bezeichnet:

Gerade Pyramide

Eine Pyramide heißt gerade, wenn der Lotfußpunkt von ihrer Spitze auf die Grundfläche gleich dem Schwerpunkt dieser Grundfläche ist.
Bei dieser Definition gibt es zu jeder Grundfläche eine gerade Pyramide.

Alternativ dazu wird in einigen Veröffentlichungen definiert:
Eine Pyramide heißt gerade, wenn alle Seitenkanten, d.h. alle Kanten, die von der Spitze ausgehen, gleich lang sind. Aus dieser Bedingung folgt, dass die Grundfläche einen Umkreis besitzen muss. Es existiert bei dieser Definition nicht zu jeder Grundfläche eine gerade Pyramide.

Welche der beiden Definitionen in einem Werk verwendet werden, muss angegeben werden. In diesem Programm wird die 1.Definition verwendet.
In der russischen, englischen und französischen Sprache wird die erste Definition genutzt, z.B.
"Une pyramide est droite lorsque le sommet est à la verticale du centre de la base."

Regelmäßige oder reguläre Pyramide

Von einer regelmäßigen oder regulären Pyramide spricht man, wenn die Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck ist und der Mittelpunkt dieses Vielecks zugleich der Fußpunkt der Pyramidenhöhe ist.
Jede regelmäßige Pyramide ist daher auch gerade. Zu den regelmäßigen Pyramiden zählen neben dem regelmäßigen Tetraedern auch die quadratischen Pyramiden.
Diese haben ein Quadrat als Grundfläche, wobei die Verbindungsstrecke zwischen dem Quadratmittelpunkt und der Pyramidenspitze senkrecht zur Grundfläche verläuft.

Gerade Pyramide

Für eine gerade Pyramide mit n Seiten sei V das Volumen, A die Oberfläche, M der Inhalt der Mantelfläche, a die Seite der Grundfläche, h die senkrechte Höhe, s die Seitenlinie, h_s die Seitenflächenhöhe, γ der Winkel, den die Kanten an der Spitze bilden, β der Neigungswinkel der Seitenflächen zur Grundfläche, δ der Neigungswinkel der Seitenflächen zueinander und α die Neigungswinkel der Kanten gegen die Grundfläche. Dann gilt:

Volumen $V = a^2/12\ h\ n \cot \pi/n$
$V = a^2/12\ n \sqrt{(s^2 \sin^2 (\pi/n) - a^2/4)} \cot (\pi/n) / \sin (\pi/n)$
$V = a^2/24\ n \cos (\pi/n) \sqrt{((a^2 + 4h_s^2) \sin^2(\pi/n) - a^2)} / \sin^2 (\pi/n)$
$V = a^3/24\ n \cot^2 (\pi/n) \tan (\gamma/2) / \sqrt{(1 - \cot^2 (\pi/n) \tan^2 \gamma/2)}$
$V = a^3/24\ n \tan \beta \cot^2 (\pi/n)$
$V = s^3/3\ n \tan(\gamma/2) \sin^3(\gamma/2) \cot^2(\pi/n) / \sqrt{(1-\cot^2(\pi/n) \tan^2\gamma/2)}$
$V = n/3\ h\ (h_s^2 - h^2) \tan (\pi/n)$
$V = n/3\ (s^2 - h_s^2) \sqrt{(h_s^2 - s^2 \cos^2 (\pi/n))} \cos (\pi/n) / \sin^2(\pi/n)$
$V = n/3\ h\ (s^2 - h^2) \sin (\pi/n) \cos (\pi/n)$
Oberfläche $A = a/2\ n \sqrt{(h^2 \sin^2(\pi/n) +a^2/4 \cos^2(\pi/n))} / \sin(\pi/n) + a^2/4\ n \cot(\pi/n)$
$A = a/4\ n \sqrt{(4s^2 - a^2)} + a^2/4\ n \cot(\pi/n)$
$A = a/2\ n\ h_s + a^2/4\ n \cot(\pi/n)$
$A = n \sin \pi/n \sqrt{(s^2-h^2)}\ (\sqrt{((h^2-s^2) \sin^2 \pi/n + s^2)} + \sqrt{(s^2-h^2)} \cos \pi/n)$
$A = n\ (h_s \sqrt{(h_s^2-h^2)} - h^2 + h_s^2) \tan \pi/n$
$A = n\ (s^2 - h_s^2) \cot \pi/n + h_s\ n \sqrt{(s^2 - h_s^2)}$
Mantelfläche $M = a/2\ n \sqrt{(h^2 \sin^2 (\pi/n) + a^2/4 \cos^2 (\pi/n))} / \sin (\pi/n)$
$M = a/2\ n \sqrt{(s^2 - a^2/4)}$
$M = a/2\ n\ h_s$
$M = a^2/4\ n \cot \gamma/2$
$M = a^2/4\ n \sec \beta \cot \pi/n$
$M = h_s\ n \sqrt{(h_s^2 - h^2)} \tan \pi/n$
$M = s^2/2\ n \sin \gamma$
$M = n \sqrt{(s^2-h^2)} \sin \pi/n \sqrt{((h^2-s^2) \sin^2 \pi/n + s^2)}$
$M = h_s\ n \sqrt{(s^2 - h_s^2)}$
Höhe $h = \sqrt{(s^2 \sin^2 (\pi/n) - a^2/4)} / \sin (\pi/n)$
$h = a/2 \tan \beta \cot (\pi/n)$
$h = a/2 \sqrt{(\cot^2 (\gamma/2) - \cot^2 (\pi/n))}$
$h = a/2 \tan \alpha \csc (\pi/n)$
$h = s \sqrt{(\cos^2 \gamma/2 - \cot^2 (\pi/n) \sin^2 \gamma/2)}$
$h = s \sin \beta \cot (\pi/n) / \sqrt{(\sin^2 \beta \cos^2 (\pi/n) + \cos^2 \beta)}$
$h = \sqrt{((a^2 + 4h_s^2) \sin^2 (\pi/n) -a^2)} / (2 \sin (\pi/n))$
$h = \sqrt{(h_s^2 - s^2 \cos^2 (\pi/n))} / \sin (\pi/n)$
Seitenkante $s = \sqrt{(h^2 \sin^2 (\pi/n) + a^2/4)} / \sin (\pi/n)$
$s = a/2 / \sin \gamma/2 = a/2 \csc \gamma/2$
$s = a/2 \sqrt{(1 + \tan^2 \beta \cos^2 (\pi/n))}$
$s = a/2 \sec \alpha \csc^2 (\pi/n)$
$s = \sqrt{(h_s^2 + a^2/4)}$
$s = 1/2 \sqrt{((4A/(a\ n) - a \cot \pi/n)^2 + a^2)}$
$s = \sqrt{(a^4\ n^2 + 16\ M^2)} / (2a\ n)$
Seite $a = 2 \sin (\pi/n) \sqrt{(s^2 - h^2)}$
$a = 2M / (h_s\ n)$
$a = 2\ s \sin \gamma/2$
$a = 2\ s / \sqrt{(1 + \tan^2 \beta \cos^2 (\pi/n))}$
$a = 2\ s \cos \alpha \sin (\pi/n)$
$a = 2 \sqrt{(s^2 - h_s^2)}$
$a = 2 \sqrt{(h_s^2 - h^2)} \tan (\pi/n)$
$a = \sqrt{(n \sin \pi/n\ (4A \cos \pi/n + h_s^2\ n \sin \pi/n))} / (n \cos \pi/n) - h_s \tan \pi/n$
Seitenhöhe $h_s = \sqrt{(h^2 \sin^2 (\pi/n) + a^2/4 \cos^2 (\pi/n))} / \sin (\pi/n)$
$h_s = \sqrt{(s^2 - a^2/4)}$
$h_s = a/2 \cot \gamma/2$
$h_s = a/2 \sec \beta \cot \pi/n$
$h_s = \sqrt{(3V \cos \pi/n + h^3\ n \sin \pi/n)} / \sqrt{(h\ n \sin \pi/n)}$
$h_s = 2A / (a\ n) - a/2 \cot \pi/n$
$h_s = 2M / (a\ n)$
Winkel β $\cos \beta = \sqrt{(s^2 / (s^2 - a^2/4) - a^2/4 / ((s^2 - a^2/4) \sin^2(\pi/n)))}$
$\cos \beta = h \sin (\pi/n) / \sqrt{(h^2 \sin^2(\pi/n) + a^2/4 \cos^2(\pi/n))}$
$\cos \beta = \sqrt{((a^2 + 4h_s^2) \sin^2 (\pi/n) - a^2)} / (2\ h_s \sin(\pi/n))$
$\sin \beta = h / h_s$
$\tan \beta = h \sin \pi/n / (\cos \pi/n \sqrt{(s^2 - h^2 \sin^2(\pi/n))})$
$\cos \beta = \sqrt{(s^2 - h_s^2)}/h_s \cot \pi/n$

Winkel γ $\sin \gamma/2 = a / (2s)$

$\sin \gamma/2 = a/2 \sin(\pi/n) / \sqrt{\sin^2(\pi/n)\, h^2 + a^2/4}$

$\sin \gamma/2 = a / \sqrt{a^2 + 4 h_s^2}$

$\sin \gamma/2 = \sqrt{s^2 - h_s^2}/s$

$\sin \gamma/2 = \sqrt{s^2 - h^2} /s \sin \pi/n$

Winkel δ $\sin \delta/2 = \cos(\pi/n) / \sqrt{1 - a^2/(4s^2)}$

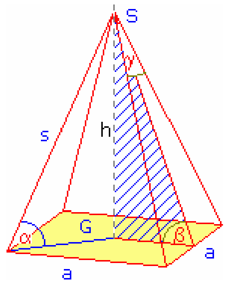
$\sin \delta/2 = \cos(\pi/n) / \cos(\gamma/2)$

Winkel α $\sin \alpha = \sqrt{1 - a^2 / (4s^2 \sin^2(\pi/n))}$

$\sin \alpha = h / s$

$\tan \alpha = \tan \beta \cos(\pi/n)$

Gerade n-seitige Pyramide



geg.: Seitenlänge a der regelmäßigen Grundfläche und die Höhe h der Pyramide

n	Volumenformel
3	$V = 1/12\, a^2h \sqrt{3}$
4	$V = 1/3\, a^2 h$
5	$V = 1/12 \sqrt{25 +10\sqrt{5}}\, a^2h$
6	$V = 1/2\, a^2h \sqrt{3}$
8	$V = 2/3\, a^2h (\sqrt{2} + 1)$
10	$V = a^2h \sqrt{25/18 \sqrt{5} + 125/36}$
12	$V = a^2h (\sqrt{3} + 2)$
16	$V = a^2h (\sqrt{32/9 \sqrt{2} + 64/9} + 4/3 \sqrt{2} + 4/3)$
20	$V = a^2h (\sqrt{50/9 \sqrt{5} + 125/9} + 5/3 \sqrt{5} + 5/3)$
24	$V = a^2h (2 \sqrt{6} + 2 \sqrt{3} + 2 \sqrt{2} + 4)$

geg.: Seitenlänge a der regelmäßigen Grundfläche und die Kantenlänge s der Pyramide

n	Volumenformel
3	$V = a^2/12 \sqrt{3s^2 - a^2}$
4	$V = a^2/6 \sqrt{2} \sqrt{2s^2 - a^2}$
5	$V = a^2 \sqrt{s^2 (5 - \sqrt{5}) - 2a^2}\, (5/48 \sqrt{2} + 1/16 \sqrt{10})$
6	$V = a^2/2 \sqrt{3} \sqrt{s^2 - a^2}$
8	$V = a^2 \sqrt{s^2 (2 - \sqrt{2}) - a^2} \sqrt{14/9 \sqrt{2} + 20/9}$
10	$V = a^2 \sqrt{s^2 (3 - \sqrt{5}) - 2a^2} \sqrt{275/144 \sqrt{5} + 625/144}$
12	$V = a^2 \sqrt{s^2 (2 - \sqrt{3}) - a^2}\, (3/2 \sqrt{6} + 5/2 \sqrt{2})$
16	$V = a^2 \sqrt{\sqrt{4096 \sqrt{2} + 8192} + 128} \sqrt{s^2 (2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}) - a^2} / (12-\sqrt{36 \sqrt{2} +72})$
20	$V = 5\sqrt{2}\, a^2 (\sqrt{10-2\sqrt{5}} +\sqrt{5} +1) \sqrt{s^2 (2-\sqrt{1/2 \sqrt{5}+5/2}) -a^2} / (24-2\sqrt{18 \sqrt{5} +90})$

geg.: Seitenlänge a der regelmäßigen Grundfläche und der Winkel γ, den die Kanten an der Spitze bilden

n	Volumenformel
3	$V = a^3 \sqrt{6} \sin \gamma / (48 \sqrt{2 \cos \gamma + 1} \sqrt{\cos \gamma + 1})$
4	$V = a^3 \sqrt{2} \sin \gamma / (12 \sqrt{\cos \gamma} \sqrt{\cos \gamma + 1})$
5	$V = a^3 \sqrt{55/1152 \sqrt{5} + 125/1152} \sin \gamma / (\sqrt{4\cos \gamma -\sqrt{5} + 1} \sqrt{\cos \gamma + 1})$
6	$V = 3a^3 \sqrt{2} \sin \gamma / (8 \sqrt{2 \cos \gamma -1} \sqrt{\cos \gamma + 1})$
8	$V = a^3 \sqrt{5/18 \sqrt{2} + 7/18} \sin \gamma / (\sqrt{\sqrt{2} \cos \gamma - 1} \sqrt{\cos \gamma + 1})$
10	$V = a^3 \sqrt{5/8 \sqrt{5} + 25/24} \sin \gamma / (\sqrt{4 \cos \gamma - \sqrt{5} -1} \sqrt{\cos \gamma + 1})$
12	$V = a^3 (3 \sqrt{3} + 5) \sin \gamma / (4 \sqrt{2 \cos \gamma - \sqrt{3}} \sqrt{\cos \gamma + 1})$
16	$V = a^3 \sin \gamma (\sqrt{1/36 \sqrt{2} + 1/18} +1/3) \sqrt{2 / (1 - \sqrt{1/4 \sqrt{2} + 1/2})} / (\sqrt{(\cos \gamma - \sqrt{1/4 \sqrt{2} + 1/2}) (\cos \gamma + 1)})$

geg.: Seitenlänge a der regelmäßigen Grundfläche und der Neigungswinkel β der Seitenflächen zur Grundfläche

n	Volumenformel
3	$V = a^3/24 \tan \beta$
4	$V = a^3/6 \tan \beta$
5	$V = a^3/24 \sqrt{5} (2 + \sqrt{5}) \tan \beta$
6	$V = 3a^3/4 \tan \beta$
8	$V = a^3/3 (2 \sqrt{2} + 3) \tan \beta$
10	$V = 5a^3/12 \sqrt{5} (\sqrt{5} + 2) \tan \beta$
12	$V = a^3/2 (4 \sqrt{3} + 7) \tan \beta$
16	$V = 2a^3/3 (\sqrt{2 \sqrt{2} + 4} + \sqrt{2} + 1)^2 \tan \beta$
20	$V = 5a^3/6 (\sqrt{2 \sqrt{5} + 5} + \sqrt{5} + 1)^2 \tan \beta$

geg.: Seitenkante s und die Höhe h der Pyramide

n	Volumenformel
3	$V = \sqrt{3}/4\, h (s^2 - h^2)$
4	$V = 2/3\, h (s^2 - h^2)$
5	$V = \sqrt{25/288 \sqrt{5} + 125/288}\, h (s^2 - h^2)$

6	$V = \sqrt{3}/2\ h\ (s^2 - h^2)$
8	$V = 2/3\ \sqrt{2}\ h\ (s^2 - h^2)$
10	$V = \sqrt{(125/72 - 25/72\ \sqrt{5})}\ h\ (s^2 - h^2)$
12	$V = h\ (s^2 - h^2)$
16	$V = \sqrt{(32/9 - 16/9\ \sqrt{2})}\ h\ (s^2 - h^2)$
20	$V = 5/6\ (\sqrt{5} - 1)\ h\ (s^2 - h^2)$
24	$V = \sqrt{2}\ (\sqrt{3} - 1)\ h\ (s^2 - h^2)$
n	$V = n/3\ h\ (s^2 - h^2) \sin(\pi/n) \cos(\pi/n)$

geg.: Seitenkante s und die Seitenflächenhöhe h_s der Pyramide

n	Volumenformel
3	$V = \sqrt{3}\ h\ (h_s^2 - h^2)$
4	$V = 4/3\ h\ (h_s^2 - h^2)$
5	$V = \sqrt{(125/9 - 50/9\ \sqrt{5})}\ h\ (h_s^2 - h^2)$
6	$V = 2/3\ \sqrt{3}\ h\ (h_s^2 - h^2)$
8	$V = -(8/3 - 8/3\ \sqrt{2})\ h\ (h_s^2 - h^2)$
10	$V = \sqrt{(100/9 - 40/9\ \sqrt{5})}\ h\ (h_s^2 - h^2)$
12	$V = -(4\ \sqrt{3} - 8)\ h\ (h_s^2 - h^2)$
16	$V = (\sqrt{(512/9\ \sqrt{2} + 1024/9)} - 16/3\ \sqrt{2} - 16/3)\ h\ (h_s^2 - h^2)$
20	$V = -(\sqrt{(800/9\ \sqrt{5} + 2000/9)} - 20/3\ \sqrt{5} - 20/3)\ h\ (h_s^2 - h^2)$
24	$V = (8\ \sqrt{6} - 8\ \sqrt{3} + 8\ \sqrt{2} - 16)\ h\ (h_s^2 - h^2)$
n	$V = n/3\ h\ (h_s^2 - h^2) \tan(\pi/n)$

geg.: Seitenlänge a der regelmäßigen Grundfläche und die Höhe h der Pyramide

n	Oberflächenformel
3	$A = a/4\ \sqrt{3}\ \sqrt{(a^2 + 12h^2)} + a^2/4\ \sqrt{3}$
4	$A = a\ (a + 2h_s) = a^2 + 2a\ \sqrt{(h^2 + a^2/4)}$
5	$A = \sqrt[4]{125} \cdot a/4 \cdot \sqrt{(a^2\ (\sqrt{5} + 2) + 4\ \sqrt{5}\ h^2)} + a^2\ \sqrt{(5/8\ \sqrt{5} + 25/16)}$
6	$A = 3/2\ a\ (\sqrt{(3\ a^2 + 4\ h^2)} + a\ \sqrt{3})$
8	$A = 2a\ \sqrt{(a^2\ (2\ \sqrt{2}+3) + 4h^2)} + a^2 (2\ \sqrt{2}+2)$
10	$A = a\ \sqrt{(\sqrt{5}\ a^2\ (\sqrt{5} + 1) + 4h^2\ (3 - \sqrt{5}))}\ (5/8\ \sqrt{10} + 5/8\ \sqrt{2}) + 5/2\ a^2\ \sqrt{(5 + 2\ \sqrt{5})}$
12	$A = 3/2\ \sqrt{2}\ a\ (\sqrt{3} + 1)\ \sqrt{(a^2\ (2 + \sqrt{3}) + 4h^2\ (2 - \sqrt{3}))} + (3\ \sqrt{3} + 6)\ a^2$
n	$A = a/2\ n\ \sqrt{(h^2 \sin^2(\pi/n) + a^2/4 \cos^2(\pi/n))} / \sin(\pi/n) + a^2/4\ n \cot(\pi/n)$

geg.: Seitenlänge a der regelmäßigen Grundfläche und die Seitenkante s der Pyramide

n	Oberflächenformel
3	$A = 3/4\ a\ \sqrt{(4s^2 - a^2)} + \sqrt{3}/4\ a^2$
4	$A = a\ \sqrt{(4s^2 - a^2)} + a^2$
5	$A = 5/4\ a\ \sqrt{(4s^2 - a^2)} + a^2\ \sqrt{(5/8\ \sqrt{5} + 25/16)}$
6	$A = 3/2\ a\ \sqrt{(4s^2 - a^2)} + 3/2\ \sqrt{3}\ a^2$
8	$A = 2\ a\ \sqrt{(4s^2 - a^2)} + a^2\ (2\ \sqrt{2} + 2)$
10	$A = 5/2\ a\ \sqrt{(4s^2 - a^2)} + a^2\ \sqrt{(25/2\ \sqrt{5} + 125/4)}$
12	$A = 3\ a\ \sqrt{(4s^2 - a^2)} + a^2\ (3\ \sqrt{3} + 6)$
16	$A = 4\ a\ \sqrt{(4s^2 - a^2)} + a^2\ (\sqrt{(32\ \sqrt{2} + 64)} + 4\ \sqrt{2} + 4)$
20	$A = 5\ a\ \sqrt{(4s^2 - a^2)} + a^2\ (\sqrt{(50\ \sqrt{5} + 125)} + 5\ \sqrt{5} + 5)$
24	$A = 6\ a\ \sqrt{(4s^2 - a^2)} + a^2\ (6\ \sqrt{6} + 6\ \sqrt{3} + 6\ \sqrt{2} + 12)$
n	$A = a/4\ n\ \sqrt{(4s^2 - a^2)} + a^2/4\ n \cot(\pi/n)$

geg.: Grundkante a und die Seitenflächenhöhe h_s der Pyramide

n	Volumenformel
3	$V = a^2/24\ \sqrt{(12\ h_s^2 - a^2)}$
4	$V = a^2/6\ \sqrt{(4\ h_s^2 - a^2)}$
5	$V = a^2\ \sqrt{(a^2\ (\sqrt{5}\ (\sqrt{5}-1) - 8) + 4\sqrt{5}\ h_s^2\ (\sqrt{5}-1))}\ (5/96\ \sqrt{2} + 1/32\ \sqrt{10})$
6	$V = \sqrt{3}\ a^2/4\ \sqrt{(4\ h_s^2 - 3\ a^2)}$
8	$V = a^2\ \sqrt{(4h_s^2\ (\sqrt{2}-1) - a^2\ (\sqrt{2}+1))}\ \sqrt{(5/9\ \sqrt{2} + 7/9)}$
10	$V = a^2\ \sqrt{(4\ h_s^2\ (3-\sqrt{5}) - a^2\ (5+\sqrt{5}))}\ (275/576\ \sqrt{5} + 625/576)$
12	$V = a^2\ \sqrt{(4\ h_s^2\ (2-\sqrt{3}) - a^2\ (2+\sqrt{3}))}\ (3/4\ \sqrt{6} + 5/4\ \sqrt{2})$
n	$V = a^2/24\ n \cos(\pi/n)\ \sqrt{((a^2 + 4h_s^2) \sin^2(\pi/n) - a^2) / \sin^2(\pi/n)}$

n	Oberflächenformel
3	$A = \sqrt{3}/4\ a^2 + 3/2\ a\ h$
4	$A = a^2 + 2\ a\ h$
5	$A = a^2\ \sqrt{(5/8\ \sqrt{5} + 25/16)} + 5/2\ a\ h$
6	$A = 3/2\ \sqrt{3}\ a^2 + 3\ a\ h$
8	$A = a^2\ (2\ \sqrt{2} + 2) + 4\ a\ h$
10	$A = a^2\ \sqrt{(25/2\ \sqrt{5} + 125/4)} + 5\ a\ h$
12	$A = a^2\ (3\ \sqrt{3} + 6) + 6\ a\ h$

16	$A = a^2 (\sqrt{32 \sqrt{2} + 64} + 4 \sqrt{2} + 4) + 8 a h$
20	$A = a^2 (\sqrt{50 \sqrt{5} + 125} + 5 \sqrt{5} + 5) + 10 a h$
24	$A = a^2 (6 \sqrt{6} + 6 \sqrt{3} + 6 \sqrt{2} + 12) + 12 a h$
n	$A = a/2\ n\ h_s + a^2/4\ n \cot(\pi/n)$

geg.: Seitenflächenhöhe h_s und die Höhe h der Pyramide

n	Oberflächenformel
3	$A = 3 \sqrt{3} (h_s \sqrt{h_s^2 - h^2} - h^2 + h_s^2)$
4	$A = 4 (h_s \sqrt{h_s^2 - h^2} - h^2 + h_s^2)$
5	$A = \sqrt{125- 50 \sqrt{5}} (h_s \sqrt{h_s^2 - h^2} - h^2 + h_s^2)$
6	$A = 2 \sqrt{3} (h_s \sqrt{h_s^2 - h^2} - h^2 + h_s^2)$
8	$A = (8 \sqrt{2} - 8) (h_s \sqrt{h_s^2 - h^2} - h^2 + h_s^2)$
10	$A = \sqrt{100 - 40 \sqrt{5}} (h_s \sqrt{h_s^2 - h^2} - h^2 + h_s^2)$
12	$A = (24 - 12 \sqrt{3}) (h_s \sqrt{h_s^2 - h^2} - h^2 + h_s^2)$
16	$A = (\sqrt{512 \sqrt{2} + 1024} - 16 \sqrt{2} - 16) (h_s \sqrt{h_s^2 - h^2} - h^2 + h_s^2)$
20	$A = (20 + 20 \sqrt{5} - \sqrt{800 \sqrt{5} + 2000}) (h_s \sqrt{h_s^2 - h^2} - h^2 + h_s^2)$
24	$A = (24 \sqrt{6} - 24 \sqrt{3} + 24 \sqrt{2} - 48) (h_s \sqrt{h_s^2 - h^2} - h^2 + h_s^2)$
n	$A = n (h_s \sqrt{h_s^2-h^2} - h^2 + h_s^2) \tan \pi/n$

n	Mantelflächenformel
3	$M = 3 \sqrt{3}\ h_s \sqrt{h_s^2 - h^2}$
4	$M = 4\ h_s \sqrt{h_s^2 - h^2}$
5	$M = \sqrt{125- 50 \sqrt{5}}\ h_s \sqrt{h_s^2 - h^2}$
6	$M = 2 \sqrt{3}\ h_s \sqrt{h_s^2 - h^2}$
8	$M = (8 \sqrt{2} - 8)\ h_s \sqrt{h_s^2 - h^2}$
10	$M = \sqrt{100 - 40 \sqrt{5}}\ h_s \sqrt{h_s^2 - h^2}$
12	$M = (24 - 12 \sqrt{3})\ h_s \sqrt{h_s^2 - h^2}$
16	$M = (\sqrt{512 \sqrt{2} + 1024} - 16 \sqrt{2} - 16)\ h_s \sqrt{h_s^2 - h^2}$
20	$M = (20 + 20 \sqrt{5} - \sqrt{800 \sqrt{5} + 2000})\ h_s \sqrt{h_s^2 - h^2}$
24	$M = (24 \sqrt{6} - 24 \sqrt{3} + 24 \sqrt{2} - 48)\ h_s \sqrt{h_s^2 - h^2}$
n	$M = h_s\ n \sqrt{h_s^2 - h^2} \tan \pi/n$

geg.: Seitenflächenhöhe h_s und die Höhe h der Pyramide

n	Oberflächenformel
3	$A = 3\ h_s \sqrt{s^2 - h_s^2} - \sqrt{3} (h_s^2 - s^2)$
4	$A = 4\ h_s \sqrt{s^2 - h_s^2} - 4 (h_s^2 - s^2)$
5	$A = 5\ h_s \sqrt{s^2 - h_s^2} - (h_s^2 - s^2) \sqrt{10\sqrt{5} + 25}$
6	$A = 6\ h_s \sqrt{s^2 - h_s^2} - 6\sqrt{3} (h_s^2 - s^2)$
8	$A = 8\ h_s \sqrt{s^2 - h_s^2} - (h_s^2 - s^2) (8\sqrt{2} + 8)$
10	$A = 10\ h_s \sqrt{s^2 - h_s^2} - (h_s^2 - s^2) \sqrt{200\sqrt{5} + 500}$
12	$A = 12\ h_s \sqrt{s^2 - h_s^2} - (h_s^2 - s^2) (12\sqrt{3} + 24)$
16	$A = 16\ h_s \sqrt{s^2 - h_s^2} - (h_s^2 - s^2) (\sqrt{512\sqrt{2} + 1024} + 16\sqrt{2} + 16)$
20	$A = 20\ h_s \sqrt{s^2 - h_s^2} - (h_s^2 - s^2) (\sqrt{800\sqrt{5} + 2000} + 20\sqrt{5} + 20)$
24	$A = 24\ h_s \sqrt{s^2 - h_s^2} - (h_s^2 - s^2) (24\sqrt{6} + 24\sqrt{3} + 24\sqrt{2} + 48)$
n	$A = n (s^2 - h_s^2) \cot \pi/n + h_s\ n \sqrt{s^2 - h_s^2}$

n	Mantelflächenformel
3	$M = 3\ h_s \sqrt{s^2 - h_s^2}$
4	$M = 4\ h_s \sqrt{s^2 - h_s^2}$
5	$M = 5\ h_s \sqrt{s^2 - h_s^2}$
6	$M = 6\ h_s \sqrt{s^2 - h_s^2}$
8	$M = 8\ h_s \sqrt{s^2 - h_s^2}$
10	$M = 10\ h_s \sqrt{s^2 - h_s^2}$
12	$M = 12\ h_s \sqrt{s^2 - h_s^2}$
16	$M = 16\ h_s \sqrt{s^2 - h_s^2}$
20	$M = 20\ h_s \sqrt{s^2 - h_s^2}$
24	$M = 24\ h_s \sqrt{s^2 - h_s^2}$
n	$M = h_s\ n \sqrt{s^2 - h_s^2}$

geg.: Seitenkante s und die Höhe h der Pyramide

n	Oberflächenformel
3	$A = 3/4 \sqrt{3} (\sqrt{s^2-h^2} \sqrt{3h^2+s^2}) - (h^2-s^2)$
4	$A = 2 \sqrt{h^2+s^2} \sqrt{s^2-h^2} - 2h^2 + 2s^2$
5	$A = 1/8 \sqrt{125/2 - 25/2 \sqrt{5}} (\sqrt{2} \sqrt{s^2-h^2} \sqrt{\sqrt{5}\ h^2 (\sqrt{5}-1) + s^2 (\sqrt{5}+3)} - (\sqrt{5}-1) (h^2-s^2))$
6	$A = 3/2 (\sqrt{h^2 + 3s^2} \sqrt{s^2-h^2} - \sqrt{3}\ h^2 + \sqrt{3}\ s^2)$
8	$A = \sqrt{8\sqrt{2}-8} \sqrt{s^2-h^2} \sqrt{h^2 (\sqrt{2}-1) + s^2 (\sqrt{2}+1)} - \sqrt{\sqrt{2}+1} (h^2-s^2))$
10	$A = (5/8 \sqrt{10} - 5/8 \sqrt{2}) (\sqrt{s^2-h^2} \sqrt{h^2 (3-\sqrt{5}) + s^2 (\sqrt{5}+5)} - \sqrt{\sqrt{5}+5} (h^2-s^2))$

12	$A = (3/2 \sqrt{3} - 3/2) (\sqrt{2} \sqrt{s^2-h^2} \sqrt{h^2 (2-\sqrt{3}) + s^2 (\sqrt{3}+2)} - (\sqrt{3}+1) (h^2-s^2))$
n	$A = n \sin \pi/n \sqrt{s^2-h^2} (\sqrt{(h^2-s^2) \sin^2 \pi/n + s^2} + \sqrt{s^2-h^2} \cos \pi/n)$

n	Mantelflächenformel
3	$M = 3/4 \sqrt{3} \sqrt{s^2-h^2} \sqrt{3h^2+s^2}$
4	$M = 2 \sqrt{h^2+s^2} \sqrt{s^2-h^2}$
5	$M = 1/8 \sqrt{125/2 - 25/2 \sqrt{5}} \sqrt{s^2-h^2} \sqrt{\sqrt{5} h^2 (\sqrt{5}-1) + s^2 (\sqrt{5}+3)}$
6	$M = 3/2 \sqrt{h^2 + 3s^2} \sqrt{s^2-h^2}$
8	$M = \sqrt{8\sqrt{2}-8} \sqrt{s^2-h^2} \sqrt{h^2 (\sqrt{2}-1) + s^2 (\sqrt{2}+1)}$
10	$M = (5/8 \sqrt{10} - 5/8 \sqrt{2}) \sqrt{s^2-h^2} \sqrt{h^2 (3-\sqrt{5}) + s^2 (\sqrt{5}+5)}$
12	$M = 3/2 (\sqrt{3} - 1) \sqrt{s^2-h^2} \sqrt{h^2 (2-\sqrt{3}) + s^2 (\sqrt{3}+2)}$
n	$M = n \sqrt{s^2-h^2} \sin \pi/n \sqrt{(h^2-s^2) \sin^2 \pi/n + s^2}$

geg.: Seitenlänge a der regelmäßigen Grundfläche und die Höhe h der Pyramide

n	Mantelflächenformel
3	$M = a/4 \sqrt{3} \sqrt{a^2 + 12h^2}$
4	$M = a \sqrt{a^2 + 4h^2}$
5	$M = \sqrt[4]{125} \cdot a/4 \cdot \sqrt{a^2 (\sqrt{5} + 2) + 4 \sqrt{5} h^2}$
6	$M = 3/2 a \sqrt{3a^2 + 4h^2}$
8	$M = a \sqrt{4 + 4 \sqrt{2}} \sqrt{a^2 (\sqrt{2} + 1) + 4h^2 (\sqrt{2} - 1)}$
10	$M = a \sqrt{\sqrt{5} a^2 (\sqrt{5} + 1) + 4h^2 (3 - \sqrt{5})} (5/8 \sqrt{10} + 5/8 \sqrt{2})$
12	$M = 3/2 \sqrt{2} a (\sqrt{3} + 1) \sqrt{a^2 (2 + \sqrt{3}) + 4h^2 (2 - \sqrt{3})}$
n	$M = a/2 n \sqrt{h^2 \sin^2 (\pi/n) + a^2/4 \cos^2 (\pi/n)} / \sin (\pi/n)$

geg.: Seitenlänge a der regelmäßigen Grundfläche und die Seitenkante s der Pyramide

n	Mantelflächenformel
3	$M = 3/4 a \sqrt{4s^2 - a^2}$
4	$M = a \sqrt{4s^2 - a^2}$
5	$M = 5/4 a \sqrt{4s^2 - a^2}$
6	$M = 3/2 a \sqrt{4s^2 - a^2}$
8	$M = 2 a \sqrt{4s^2 - a^2}$
10	$M = 5/2 a \sqrt{4s^2 - a^2}$
12	$M = 3 a \sqrt{4s^2 - a^2}$
16	$M = 4 a \sqrt{4s^2 - a^2}$
20	$M = 5 a \sqrt{4s^2 - a^2}$
24	$M = 6 a \sqrt{4s^2 - a^2}$
n	$M = a/2 n \sqrt{s^2 - a^2/4}$

geg.: Seitenlänge a der regelmäßigen Grundfläche und die Höhe h der Pyramide

n	Seitenkantenformel
3	$s = 1/3 \sqrt{3} \sqrt{a^2 + 3h^2}$
4	$s = 1/2 \sqrt{2} \sqrt{a^2 + 2h^2}$
5	$s = \sqrt{2a^2 + h^2 (5 - \sqrt{5})} \sqrt{1/20 \sqrt{5} + 1/4}$
6	$s = \sqrt{a^2 + h^2}$
8	$s = \sqrt{a^2 + h^2 (2 - \sqrt{2})} \sqrt{1/2 \sqrt{2} + 1}$
10	$s = \sqrt{2a^2 + h^2 (3 - \sqrt{5})} (1/4 \sqrt{10} + 1/4 \sqrt{2})$
12	$s = 1/2 \sqrt{2} (\sqrt{3} + 1) \sqrt{a^2 + h^2 (2 - \sqrt{3})}$
16	$s = \sqrt{a^2 + h^2 (2 - \sqrt{\sqrt{2} + 2})} \sqrt{1/ (2 - \sqrt{\sqrt{2} + 2})}$
n	$s = \sqrt{h^2 \sin^2 (\pi/n) + a^2/4} / \sin (\pi/n)$

geg.: Seitenkante s und die Höhe h der Pyramide

n	Seitenformel
3	$a = \sqrt{3} \sqrt{s^2 - h^2}$
4	$a = \sqrt{2} \sqrt{s^2 - h^2}$
5	$a = \sqrt{5/2 - 1/2 \sqrt{5}} \sqrt{s^2 - h^2}$
6	$a = \sqrt{s^2 - h^2}$
8	$a = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \sqrt{s^2 - h^2}$
10	$a = 1/2 (\sqrt{5} - 1) \sqrt{s^2 - h^2}$
12	$a = 1/2 \sqrt{2} (\sqrt{3} - 1) \sqrt{s^2 - h^2}$
16	$a = \sqrt{2 - \sqrt{\sqrt{2} + 2}} \sqrt{s^2 - h^2}$
n	$a = 2 \sin (\pi/n) \sqrt{s^2 - h^2}$

geg.: Seitenlänge a der regelmäßigen Grundfläche und die Seitenflächenhöhe h_s

n	Höhenformel
3	$h = \sqrt{3}/6 \sqrt{12 h_s^2 - a^2}$
4	$h = 1/2 \sqrt{4h_s^2 - a^2}$
5	$h = \sqrt{\sqrt{5}/80 + 1/16} \sqrt{a^2 (\sqrt{5} (\sqrt{5}-1) - 8) + 4\sqrt{5} h_s^2 (\sqrt{5}-1)}$

6	$h = 1/2 \sqrt{4h_s^2 - 3a^2}$
8	$h = \sqrt{4h_s^2 (\sqrt{2}-1) - a^2 (\sqrt{2}+1)} \sqrt{\sqrt{2}/4 + 1/4}$
10	$h = \sqrt{4h_s^2 (3-\sqrt{5}) - a^2 (\sqrt{5}+5)} (\sqrt{10}/8 + \sqrt{2}/8)$
12	$h = 1/4 \sqrt{2} (\sqrt{3}+1) \sqrt{4h_s^2 (2-\sqrt{3}) - a^2 (\sqrt{3}+2)}$
n	$h = \sqrt{(a^2 + 4h_s^2) \sin^2 (\pi/n) - a^2} / (2 \sin (\pi/n))$

geg.: Seitenkante s und die Seitenflächenhöhe h_s der Pyramide

n	Höhenformel
3	$h = \sqrt{3}/3 \sqrt{4h_s^2 - s^2}$
4	$h = \sqrt{2h_s^2 - s^2}$
5	$h = \sqrt{8h_s^2 - s^2 (\sqrt{5}+3)} \sqrt{\sqrt{5}/20 + 1/4}$
6	$h = \sqrt{4h_s^2 - 3s^2}$
8	$h = \sqrt{\sqrt{2}+1} \sqrt{2 \sqrt{2} h_s^2 - s^2 (\sqrt{2}+1)}$
10	$h = \sqrt{8h_s^2 - s^2 (\sqrt{5}+5)} (\sqrt{10}/4 + \sqrt{2}/4)$
12	$h = 1/2 \sqrt{2} (\sqrt{3}+1) \sqrt{4h_s^2 - s^2 (\sqrt{3}+2)}$
n	$h = \sqrt{h_s^2 - s^2 \cos^2 (\pi/n)} / \sin (\pi/n)$

geg.: Seitenlänge a der regelmäßigen Grundfläche und die Seitenkante s der Pyramide

n	Höhenformel
3	$h = 1/3 \sqrt{3} \sqrt{3s^2 - a^2}$
4	$h = 1/2 \sqrt{2} \sqrt{2s^2 - a^2}$
5	$h = \sqrt{s^2 (5 - \sqrt{5}) - 2a^2} \sqrt{1/20 \sqrt{5} + 1/4}$
6	$h = \sqrt{s^2 - a^2}$
8	$h = \sqrt{s^2 (2 - \sqrt{2}) - a^2} \sqrt{1/2 \sqrt{2} + 1}$
10	$h = \sqrt{s^2 (3 - \sqrt{5}) - 2a^2} (1/4 \sqrt{10} + 1/4 \sqrt{2})$
12	$h = 1/2 \sqrt{2} (\sqrt{3} + 1) \sqrt{s^2 (2 - \sqrt{3}) - a^2}$
16	$h = \sqrt{s^2 (2 - \sqrt{\sqrt{2} + 2}) - a^2} \sqrt{1/ (2 - \sqrt{\sqrt{2} + 2})}$
n	$h = \sqrt{s^2 \sin^2 (\pi/n) - a^2/4} / \sin (\pi/n)$

geg.: Seitenlänge a der regelmäßigen Grundfläche und die Höhe s der Pyramide

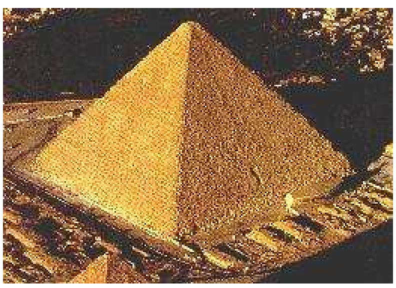
n	Seitenflächenhöhenformel
3	$h_s = 1/6 \sqrt{3} \sqrt{a^2 + 12h^2}$
4	$h_s = 1/2 \sqrt{a^2 + 4h^2}$
5	$h_s = \sqrt{\sqrt{5}/80 + 1/16} \sqrt{a^2 (\sqrt{5} + 3) + 4 \sqrt{5} h^2 (\sqrt{5} - 1)}$
6	$h_s = 1/2 \sqrt{3a^2 + 4h^2}$
8	$h_s = \sqrt{\sqrt{2}/4 + 1/4} \sqrt{a^2 (\sqrt{2} + 1) + 4h^2 (\sqrt{2} - 1)}$
10	$h_s = (\sqrt{10}/8 + \sqrt{2}/8) \sqrt{a^2 (\sqrt{5} + 5) + 4h^2 (3 - \sqrt{5})}$
12	$h_s = 1/4 \sqrt{2} (\sqrt{3} + 1) \sqrt{a^2 (\sqrt{3} + 2) + 4h^2 (2 - \sqrt{3})}$
16	$h_s = \sqrt{2} \sqrt{a^2 (1 + \sqrt{\sqrt{2}/4 + 1/2}) + h^2 (4 - \sqrt{4\sqrt{2} + 8})} / \sqrt{8 - \sqrt{16 \sqrt{2} + 32}}$
n	$h_s = \sqrt{h^2 \sin^2 (\pi/n) + a^2/4 \cos^2 (\pi/n)} / \sin (\pi/n)$

Cheops-Pyramide

"Sie sind ein Bau, vor dem die Zeit sich selber fürchtet; und alles hier auf Erden fürchtet sonst die Zeit!" (Erzählungen aus 1001 Nacht)

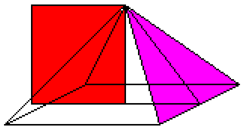
Als bekanntestes Beispiel für eine Pyramide gelten die antiken ägyptischen Monumentalbauten, die Pyramiden von Gizeh. Die größte dieser Pyramiden ist die Cheops-Pyramide. Diese quadratische Pyramide wurde um 2750 v.Chr. für den Pharao Cheops (4.Dynastie) errichtet. Die ursprüngliche Höhe war 146,59 m, heute noch 138,75 m.

Höhe einer Seitenfläche	184,80 m
Gratlänge	217,88 m
Kantenlänge	230,83 m
Grundfläche	rund 50000 m²
Winkel der Seitenflächen	51° 50' 40"
Steinlagen	ursprünglich 210, heute 201
Kernsteine	2300000, Volumen 2203075 m³
Verkleidungssteine	200000, Volumen 123426 m³
Gesamtmasse	6,5 Millionen t
Bauzeit	30 Jahre nach Herodot, heute bezweifelt

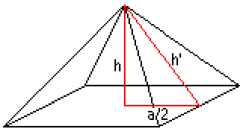


Zur Veranschaulichung des Volumens stelle man sich vor, ein Steinblock sei ein Würfel mit der Kantenlänge 1m, so würden sie aneinandergereiht eine Schlange der Länge von etwa 2500 km bilden. Das ist etwa die Entfernung London - Athen.

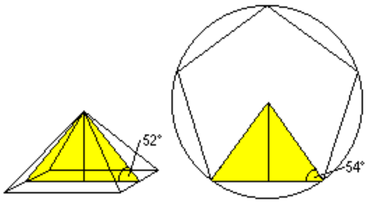
Das Verhältnis einer Seite zur Höhe entspricht ungefähr $\pi/2$. Dies ist kein Indiz dafür, dass die antiken Ägypter π schon so genau kannten und ihr Bedeutung gaben. Vielmehr wurde die Pyramide so konstruiert, dass der Flächeninhalt jeder Seite gleich der Fläche eines Quadrates ist, dessen Seitenlänge der Pyramidenhöhe entspricht. Für solche Pyramiden ergibt sich diese Näherung von π automatisch. Für die Cheops-Pyramide sind die kuriosesten Vermutungen angestellt worden:



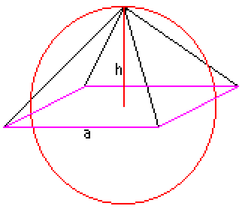
Flächeninhalt des Quadrates über der Höhe: $h^2 = 21780m^2$.
Flächeninhalt einer Seitenfläche: $(1/2)*a*h' = 21490m^2$.
Vermutung: Die Flächen sind gleich groß. (nach Herodot)
Aus der Gleichheit der Flächen $h^2 = 1/2\ ah'$ und aus dem Satz des Pythagoras folgt das Verhältnis $a:h = 1{,}5723...$ Das ist etwa $3{,}1446/2$ oder $\pi/2$.
Es folgt auch aus der Gleichheit der Flächen das zweite Verhältnis $h':(a/2) = ½\ (1+\sqrt{5})$. Das ist das Goldene Verhältnis $\varphi = 1{,}6180...$

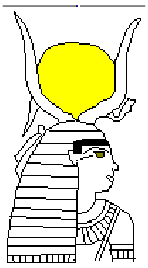


Für das rote Dreieck gilt die Proportionenkette
$h' : h : a/2 = 5 : 3{,}90 : 3{,}11$. Das ist angenähert $5 : 4 : 3$.
Für diese Zahlen gilt $5^2 = 4^2 + 3^2$. Sie sind damit pythagoräische Zahlen.
Vermutung: Das Dreieck in der Pyramide ist ein Pythagoräisches Dreieck.
Mit einer 3-4-5-Knotenschnur wurden angeblich im alten Ägypten nach der jährlichen Nilschwemme die Felder neu vermessen

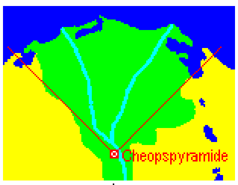


Legt man durch die Mitte der Pyramide parallel zu einer Quadratseite einen Vertikalschnitt, so entsteht ein Dreieck. Dieses Dreieck kommt dem Bestimmungsdreieck eines regelmäßigen Fünfecks nahe. In einem Fünfeck ist das Besondere, dass jeder Schnittpunkt zweier Diagonalen diese im Goldenen Schnitt teilt.
In Grabbauten wird oft ein Himmel aus fünfzackigen Sternen auf blauem Grund dargestellt.

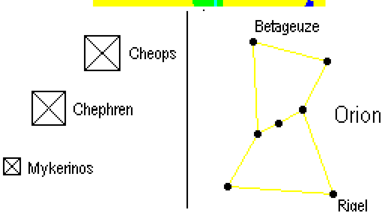




Umfang der quadratischen Grundfläche: $4a = 930{,}8m$
Umfang des Kreises mit dem Radius h: $2\pi h = 921{,}1m$
Vermutung: Die Umfänge sind gleich.
Die alten Ägypter kannten das Verhältnis [Kreisumfang : Kreisdurchmesser] als 256/81 (Rhind Papyrus 1850 v.Chr.). Es führt zu $\pi = 3{,}16...$ (Buch 4).
Der Kreis spielt als Sonnenscheibe eine zentrale Rolle in der altägyptischen Mythologie und schmückt zum Beispiel das Haupt der Göttin Hathor (links).
In dem TV-Film von Ditfurth wird die Gleichheit der Umfänge dadurch erklärt, dass längs einer Quadratseite ein Kreis abgerollt wurde und Kreise gleichen Durchmessers auf Raumhöhe gestapelt wurden. Auf diese Weise taucht das Verhältnis [Umfang : Durchmesser] = π auf.

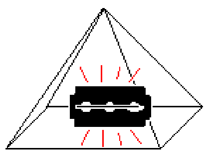


Das Grundquadrat ist genau nach den Himmelsrichtungen ausgerichtet.
Verlängert man die Diagonalen des Grundquadrates, so schließen die Verlängerungen das Nildelta ein.



Die Cheopspyramide steht nicht isoliert da und bildet mit den Pyramiden des Chephren und des Mykerinos eine fast gerade Linie. Eine ähnliche Anordnung haben (hatten vor 4500 Jahren) die drei Gürtelsterne im Sternbild des Orion. Außerdem gibt es noch zwei Pyramiden am Nilufer, die zwei Randsternen des Orion entsprechen.

„Kraft der Pyramiden"



In der amerikanischen Wissenschaftszeitung "Scientific American" vom Juni 1974 berichtete ein Dr.Matrix von einer Kraft, die von der Pyramide ausgehe. In Modellen einer Pyramide würden seltsame Dinge geschehen: Rasierklingen würden wieder scharf, Fleisch verwese deutlich langsamer und eine Person erfahre in einer Pyramide sitzend eine Steigerung der übersinnlichen Fähigkeiten und mehr. Diese Aussagen wurden durch Berichte aus aller Welt „belegt" und erschienen „glaubhaft".
Es handelte sich hierbei um einen wissenschaftlichen Spaß (besser Sarkasmus), mit dem die Sucht nach Übernatürlichem persifliert wurde. Hinter dem Pseudonym Dr.Matrix verbarg sich der bekannte Wissenschaftsjournalist Martin Gardner von "Scientific American". Was er aber nicht vermutete: Obwohl

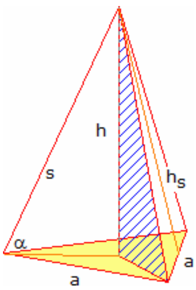
sein Scherz schnell bekannt wurde, wird er auch 30 Jahre später noch als „Beweis“ für die „Kraft der Pyramiden“ zitiert. Esoteriker nutzen jeden Strohhalm, um ihren Blödsinn zu „belegen“.

Chichén Itzá
Eine der berühmtesten Pyramiden der Welt ist die von Chichén Itzá.
Chichén Itzá ist eine der bedeutendsten Städte der Mayakultur. Der Ort liegt im Norden der Halbinsel Yucatán. Der Name, der wörtlich "Mund der Brunnen der Itzá" bedeutet, leitet sich von dem Mayastamm der Itzá her, die dort früher siedelten, und von zwei natürlichen Brunnen, die die Stadt mit Wasser versorgten. Die beiden Brunnen waren Mittelpunkt des religiösen und kulturellen Lebens der Stadt.
Chichén Itzá wurde im 6.Jahrhundert gegründet und um 670 aufgegeben. 300 Jahre später kehrten die Itzá in die Region zurück und bauten die Stadt wieder auf, die sich in der Folge zu einem bedeutenden Zentrum der Mayakultur entwickelte.
Um 1200 eroberten die aus Nordmexiko kommenden Tolteken die Stadt und bauten sie weiter aus.

Die größten Ruinen bedecken eine Fläche von rund drei Quadratkilometern. Der vorherrschende architektonische Typus ist die Stufenpyramide mit Terrasse. Breite Steintreppen führen zu gewölbeüberspannten Innenräumen, deren Wände mit Skulpturen, hieroglyphenartigen Inschriften und farbenprächtigen Malereien geschmückt sind. Jede der vier Treppen hat genau 91 Stufen. Mit der letzten Stufe zum Hochaltar ergeben sich $4 \cdot 91 + 1 = 365$ Stufen, der Anzahl der Tage eines Jahres.
Im Juli 2007 wurde die Pyramide zu einem der 7 neuen Weltwunder gewählt.

Pyramiden von Meroë
Die Pyramiden von Meroë wurden im Altertum vom Volk der Kuschiten im Sudan als Grabstätten für die sterblichen Überreste ihrer Könige errichtet.
Die Pyramiden liegen rund 200 km nordöstlich von Khartum, nahe dem Dorf Bagrawija. Sie befinden sich über kleine Hügel verteilt, die rund ein viertel Quadratkilometer groß sind.
Insgesamt handelt es sich um mehr als 900 Pyramiden und Gräber, wobei sich die meisten bei Bagrawija Süd und West befinden.

Die meist aus Stein erbauten Pyramiden von Meroe sind mit einer Höhe von unter 30 m kleiner als die bekannten altägyptischen Pyramiden und dienten den Königen, Königinnen und hohen Beamten des historischen Reiches von Kusch in Nubien als Grabstätten.
Die Pyramiden in Meroe fallen durch ihren im Vergleich zu den ägyptischen Pyramiden steilen Winkel von ca. 70°, die ägyptischen ca. 50°, auf.
Die kuschitische Zivilisation erlebte an den Ufern des Nil nach 2600 v.u.Z. ihre Blütezeit, nachdem Ägypten die uralten Siedlungen entlang des Flusses erobert hatte. Der Verfall des kuschitischen Königreiches begann um 350 u.Z..
Die Zivilisation der Kuschiten entwickelte sich unabhängig von der Zivilisation Ägyptens, wurde jedoch nachweislich stark von der altägyptischen Kultur beeinflusst.
Etwa 100 Jahre lang beherrschten die Kuschiten sogar ihre Nachbarn im Norden.



Gerade dreiseitige Pyramide
Kantenlänge a der Grundfläche, die ein gleichseitiges Dreieck sein soll, Höhe h, Seitenflächenhöhe h_s und Seitenkante s stehen so miteinander in Beziehung, dass mit jeweils zwei gegebenen Stücken die anderen beiden berechnet werden können.

gegeben **gesucht**

a, h: $h_g = a/2\ \sqrt{3}$; Höhe der Dreiecksgrundfläche
$h_s = \sqrt{h^2 + a^2/12}$ $\quad s = \sqrt{h^2 + a^2/3}$
$V = a^2/12\ h\ \sqrt{3}$ $\quad A = 1/4\ \sqrt{3}\ a\ (a + \sqrt{a^2 + 12\ h^2})$
$\alpha = \arctan(6\ h / (a\ \sqrt{3}))$

a, h_s: $h = 1/6\ \sqrt{3}\ \sqrt{12\ h_s^2 - a^2}$ $\quad s = 1/2\ \sqrt{a^2 + 4\ h_s^2}$

a, s: $h = 1/\sqrt{3}\ \sqrt{3\ s^2 - a^2}$ $\quad h_s = \sqrt{s^2 - a^2/4}$
$M = 3a/2\ \sqrt{s^2 - a^2/4}$

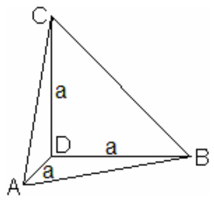
h, h_s: $a = 2\ \sqrt{3}\ \sqrt{h_s^2 - h^2}$ $\quad s = \sqrt{4\ h_s^2 - 3\ h^2}$

h, s: $a = \sqrt{3}\ \sqrt{s^2 - h^2}$ $\quad h_s = 1/2\ \sqrt{s^2 + 3\ h^2}$

h_s, s: $a = 2\ \sqrt{s^2 - h_s^2}$ $\quad h = 1/4\ \sqrt{3}\ \sqrt{4\ h_s^2 - s^2}$

Für die regelmäßige dreiseitige Pyramide, das Tetraeder, (s = a) wird

Volumen $V = a^3/12\ \sqrt{2} \approx 0{,}11785\ a^3$
Oberfläche $A = a^2\ \sqrt{3} \approx 1{,}73205\ a^2$
Grundfläche $G = a^2/4\ \sqrt{3} \approx 0{,}43301\ a^2$
Höhe $h = a/3\ \sqrt{6} \approx 0{,}8165\ a$

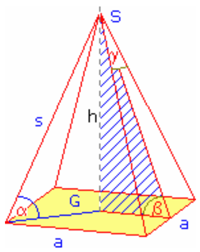


Rechtwinklige dreiseitige Pyramide

Unter einer rechtwinkligen, dreiseitigen Pyramide versteht man in Analogie an die englische Bezeichnung Trirectangular tetrahedron eine Pyramide mit drei rechten Winkeln an der Spitze.
Die Grundfläche sind ein beliebiges Dreieck und die Seitenflächen gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke.
Für den Sonderfall der Pyramide ABCD mit den Seitenkanten a der Pyramide wird das Dreieck ABC gleichseitig und hat die Seitenlänge √a.
Für die Grundfläche A_G und die Seitenflächen A_S gilt $A_G^2 = 3\ A_S^2$.
Oberfläche $A = 1/2\ (3+\sqrt{3})\ a^2$ Volumen $V = 1/6\ a^3$
Für für beliebige rechtwinklige dreiseitige Pyramiden mit den Seitenlängen der rechtwinkligen Pyramide a, b und c wird:

$$V = 1/6\ abc\ \sqrt{(1 + 2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma)} = 1/6\ abc$$

für $\alpha = \beta = \gamma = 90°$.



Gerade quadratische Pyramide

Ist die Grundfläche einer Pyramide ein Quadrat und liegt die Spitze über der Mitte des Quadrates, so entsteht die gerade quadratische Pyramide.
Die Pyramide besteht aus einem Quadrat als Grundfläche und aus vier gleichschenkligen Dreiecken als Seitenflächen. Neben den fünf Flächen hat sie fünf Eckpunkte und acht Kanten.
Die Pyramide wird eindeutig durch die Kantenlänge a der Grundfläche und die Höhe h beschrieben. Es gilt:
Volumen $V = 1/3\ a^2\ h$
Oberfläche $A = a^2 + 2a\ \sqrt{(h^2 + a^2/4)}$
Seitenkante s $s = \sqrt{(h^2 + a^2/2)}$

Die gerade quadratische Pyramide besitzt 8 verschiedene, inkongruente Netze.
Die Pyramide ist vierfach drehsymmetrisch bezüglich der Höhe. Sie besitzt vier Symmetrieebenen, die durch die Spitze der Pyramide verlaufen und jeweils eine Symmetriegerade des Quadrates enthalten.
Das Polyeder ist selbstdual. Verbindet man die Mittelpunkte der Flächen der Pyramide miteinander, entsteht wieder eine quadratische gerade Pyramide.
Gilt zusätzlich, dass die Seitenkante s gleich der Grundkante a ist, so ist die gerade quadratische Pyramide das Johnson-Polyeder J1.
Die bekanntesten Beispiele gerader quadratischer Pyramiden sind die ägyptischen Pyramiden von Gizeh.

Kantenlänge a der Grundfläche, Höhe h, Seitenflächenhöhe h_s und Seitenkante s stehen so miteinander in Beziehung, dass mit jeweils zwei gegebenen Stücken die anderen beiden berechnet werden können.

gegeben	gesucht	
a, h	$h_s = \sqrt{(h^2 + a^2/4)}$	$s = \sqrt{(h^2 + a^2/2)}$
	$V = 1/3\ a^2\ h$	$A = a^2 + 2a\ \sqrt{(h^2 + a^2/4)}$
	$\alpha = \arctan(\sqrt{2}\ h/a)$	$\beta = \arctan(2\ h/a)$
a, h_s	$h = \sqrt{(h_s^2 - a^2/4)}$	$s = \sqrt{(h_s^2 + a^2/4)}$
	$A = a^2 + 2\ a\ h$	
a, s	$h = \sqrt{(s^2 - a^2/2)}$	$h_s = \sqrt{(s^2 - a^2/4)}$
	$M = 2a\ \sqrt{(s^2 - a^2/4)}$	$A = a\ \sqrt{(4s^2 - a^2)} + a^2$
	$V = a^2/6\ \sqrt{2}\ \sqrt{(2s^2 - a^2)}$	
h, h_s	$a = 2\ \sqrt{(h_s^2 - h^2)}$	$s = \sqrt{(2\ h_s^2 - h^2)}$
h, s	$a = \sqrt{(2\ (s^2 - h^2))}$	$h_s = \sqrt{2}\ /\ 2\ \sqrt{(s^2 + h^2)}$
h_s, s	$a = 2\ \sqrt{(s^2 - h_s^2)}$	$h = \sqrt{(2\ h_s^2 - s^2)}$
a, γ	$V = a^3\ \sqrt{2} \sin\gamma\ /\ (12\ \sqrt{(\cos\gamma)}\ \sqrt{(\cos\gamma + 1)})$	
a, β	$V = a^3/6 \tan\beta$	

Gegeben sei eine gerade quadratische Pyramide mit der Kantenlänge a. Je zwei gegenüberliegende Seitenkanten schließen einen Winkel ϕ ein. Dann gilt:

Volumen $V = a^3/6\ \sqrt{2} \cot\phi/2$ $V = 2/3\ h^3 \sin^4\phi\ /\ ((1 - \cos\phi)(\cos\phi + 1)^3)$
Oberfläche $A = a^2\ (1 + \sqrt{(4/(1 - \cos\phi) - 1)})$
$A = 2h^2 \tan^2\phi/2\ (\sqrt{(1-\cos\phi)} + \sqrt{(3+\cos\phi)})\ /\ \sqrt{(1-\cos\phi)}$
Höhe $h = a/2\ \sqrt{2} \cot\phi/2$
Kantenlänge $a = \sqrt[3]{(V/\sqrt{2} \tan\phi/2)}$ $a = 2h/\sqrt{2} \tan\phi/2$
Seitenkante $s = a\ /\ \sqrt{(1 - \cos\phi)}$ $s = \sqrt{2}\ h\ /\ \sqrt{(\cos\phi + 1)}$
Seitenflächenhöhe $h_s = a/(2 - 2\cos\phi)\ \sqrt{(\sin^2\phi - 2\cos\phi + 2)}$

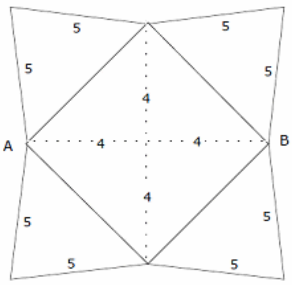
$h_s = \sqrt{2}\, h \sqrt{(\cos\phi + 3)} / (2 \sqrt{(\cos\phi + 1)})$

Winkel α $\quad \alpha = \arctan(\cot \phi/2)$

Winkel β $\quad \beta = \arctan(\sqrt{2} \cot \phi/2)$

Für die regelmäßige quadratische Pyramide, Johnson-Polyeder J1, (s = a) wird

$V = \sqrt{2}\, a^3/6 \qquad A = a^2 (\sqrt{3} + 1) \qquad h = \sqrt{2}\, a/2$



Quadratische Pyramide, Aufgabe

Ein Körper ist durch sein Netz gegeben (siehe Abbildung). Berechnen Sie die Oberfläche und das Volumen.

Lösung: Auf Grund des Netzes ist der Körper eine Pyramide mit quadratischer Gundfläche.

Die Seitenlänge des Grundflächenquadrates ist $4\sqrt{2}$.

Für die Höhe einer Seitenfläche gilt: $\quad h'^2 = 25 - (2\sqrt{2})^2 = 17 \dots h' = \sqrt{17}$

Bei einem Schnitt durch die Pyramide längs AB ergibt sich für die Höhe der Pyramide $\quad h^2 = 25 - 16 = 9 \dots h = 3$

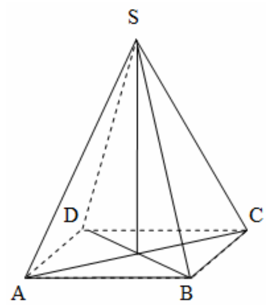
Für das Volumen V und die Oberfläche A ergibt sich durch Einsetzen

Volumen $\quad V = 1/3\, a^2 h \qquad V = 1/3 \cdot 64/2 \cdot 3 = 32$

Oberfläche $\quad A = a^2 + 2a \sqrt{(h^2 + a^2/4)}$

$A = \text{Quadrat} + 4\text{Dreiecke} = 32 + 4 \cdot 4 \cdot \sqrt{17} \cdot \sqrt{17}/2 = 32 + 8\sqrt{34}$

Pyramide, Aufgabe



Aufgabe: Eine 8 cm hohe, gerade Pyramide besitzt als Grundfläche ein Rechteck mit den Seitenlängen AB = 12 cm und BC = 5 cm.

Gesucht sind drei Neigungswinkel gegenüber der Grundfläche: α sei der Neigungswinkel der größeren Seitenfläche, β der Neigungswinkel der kleineren Seitenfläche und γ der Neigungswinkel der Seitenkante. M sei der Mittelpunkt der Grundfläche, M_1 sowie M_2 die Mittelpunkte der Kanten BC und AB.

Lösung:

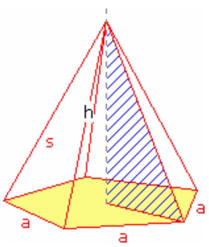
Stützdreieck M_1MS: $\quad \tan\alpha = h/(b/2) = 3{,}2\ ;\ \alpha = 72{,}6°$

Stützdreieck MM_2S: $\quad \tan\beta = h/(a/2) = 4/3\ ;\ \beta = 53{,}1°$

Stützdreieck AMS:

Die Katheten des Stützdreiecks sind die Höhe h und die Hälfte der Diagonalenlänge d

$d = \sqrt{(12^2 + 5^2)}\text{ cm} = 13\text{ cm} \qquad \tan\gamma = h/(d/2) = 1{,}231\ ;\ \gamma = 50{,}9°$



Regelmäßige fünfseitige Pyramide

Ist eine allgemeine fünfseitige Pyramide mit einem regelmäßigen Fünfeck der Kantenlänge a als Grundfläche und der Höhe h gegeben, so gilt für die Seitenkante s und die Seitenflächenhöhen h_s:

Kantenlänge $\quad a = \sqrt{(5/2 - 1/2 \sqrt{5})} \sqrt{(s^2 - h^2)} = \sqrt{(20 - 8\sqrt{5})} \sqrt{(h_s^2 - h^2)}$

Höhe $\quad h = \sqrt{(s^2 - 1/10\, (5 + \sqrt{5})\, a^2)} = \sqrt{(h_s^2 - 1/20\, (5 + 2\sqrt{5})\, a^2)}$

Seitenkante $\quad s = \sqrt{(h^2 + 1/10\, (5 + \sqrt{5})\, a^2)}$

Seitenflächenhöhe $\quad h_s = \sqrt{(h^2 + 1/20\, (5 + 2\sqrt{5})\, a^2)}$

Neigungswinkel $\quad \alpha = \arctan(h/a \sqrt{(20 - 8\sqrt{5})}) = \arctan(\sqrt{(\sqrt{5} - 2)}/a \sqrt{(4\sqrt{5}\, h_s^2 - a^2 (\sqrt{5} + 2))})$

Für die gerade fünfseitige Pyramide gilt:

Volumen $\quad V = 1/12 \sqrt{(25 + 10\sqrt{5})}\, a^2 h = a^2 \sqrt{(s^2 (5 - \sqrt{5}) - 2a^2)}\, (5/48 \sqrt{2} + 1/16 \sqrt{10})$

$V = a^3 \sqrt{(55/1152 \sqrt{5} + 125/1152)} \sin\gamma / (\sqrt{(4\cos\gamma - \sqrt{5} + 1)} \sqrt{(\cos\gamma + 1)})$

$V = a^3/24 \sqrt{5}\, (2 + \sqrt{5}) \tan\beta$

Mantelfläche $\quad M = 5^{3/4}\, a \sqrt{(a^2 (\sqrt{5} + 2) + 4\sqrt{5}\, h^2)}\, /4 = 5a/2 \sqrt{(s^2 - a^2/4)}$

$M = 1/8 \sqrt{(125/2 - 25/2 \sqrt{5})} \sqrt{(s^2 - h^2)} \sqrt{(\sqrt{5}\, h^2 (\sqrt{5} - 1) + s^2 (\sqrt{5} + 3))}$

Oberfläche $\quad A = 5^{3/4}\, a \sqrt{(a^2 (\sqrt{5} + 2) + 4\sqrt{5}\, h^2)}\, /4 + \sqrt{(25 + 10\sqrt{5})}/4\, a^2$

$A = 5/4\, a \sqrt{(4s^2 - a^2)} + a^2 \sqrt{(5/8 \sqrt{5} + 25/16)} = a^2 \sqrt{(5/8 \sqrt{5} + 25/16)} + 5/2\, a\, h$

$A = \sqrt{(125 - 50\sqrt{5})}\, (h_s \sqrt{(h_s^2 - h^2)} - h^2 + h_s^2)$

$A = 1/8 \sqrt{(125/2 - 25/2 \sqrt{5})}\, (\sqrt{2} \sqrt{(s^2 - h^2)} \sqrt{(\sqrt{5}\, h^2 (\sqrt{5} - 1) + s^2 (\sqrt{5} + 3))} - (\sqrt{5} - 1)(h^2 - s^2))$

Für die regelmäßige fünfseitige Pyramide, d.h. s = a, gilt:

Seitenkante $\quad a = 2\, h_s/\sqrt{3} \approx 1{,}1547005\, h_s = h \sqrt{(\sqrt{5}/2 + 5/2)} \approx 1{,}90211303\, h$

$a = 2/\sqrt{(\sqrt{(10\sqrt{5} + 25)} + 5\sqrt{3})} \sqrt{A} \approx 0{,}50731097 \sqrt{A} = R \sqrt{(2 - 2/5 \sqrt{5})} \approx 1{,}0514622\, R$

$a = \rho\, (\sqrt{5} - 1) \approx 1{,}236068\, \rho$

Seitenhöhe $\quad h_s = 1/2 \sqrt{3}\, a \approx 0{,}866025\, a = h \sqrt{(3/8 \sqrt{5} + 15/8)} \approx 1{,}6472782\, h$

Höhe $\quad h = \sqrt{(1/2 - 1/10 \sqrt{5})}\, a \approx 0{,}52573111\, a = h_s \sqrt{(2/3 - 2/15 \sqrt{5})} \approx 0{,}607062\, h_s$

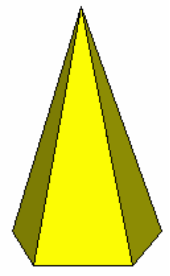
Oberfläche $\quad A = a^2/4\, (5\sqrt{3} + \sqrt{(5 (5 + 2\sqrt{5}))}) \approx 3{,}88554\, a^2$

$A = h_s^2 (\sqrt{(10/9 \sqrt{5} + 25/9)} + 5/3 \sqrt{3}) \approx 5{,}1807212\, h_s^2$

$A = h^2 (\sqrt{(275/32 \sqrt{5} + 625/32)} + 25/8 \sqrt{3} + 5/8 \sqrt{15}) \approx 14{,}058019\, h^2$

Volumen $\quad V = a^3/3 \sqrt{(1/10\, (5 - \sqrt{5}))} \approx 0{,}175243\, a^3$

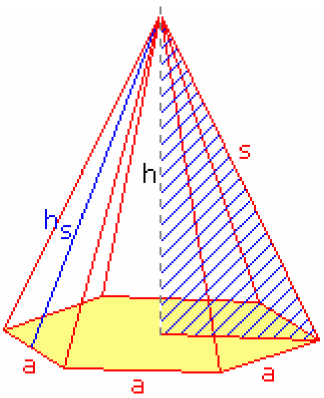
$V = h_s^3 \sqrt{(32/243 - 32/1215 \sqrt{5})} \approx 0,26980533\ h_s^3$
$V = h^3 (1/6 \sqrt{5} + 5/6) \approx 1,2060113\ h^3$
Umkugelradius $R = 1/4 \sqrt{(10 + 2 \sqrt{5})}\ a \approx 0,9510565\ a$
$R = h_s \sqrt{(5/6 + 1/6 \sqrt{5})} \approx 1,0981854\ h_s = h\ (5/4 + 1/4 \sqrt{5}) \approx 1,8090169\ h$
Mittelkugelradius $\rho = a/4\ (\sqrt{5} + 1) \approx 0,809017\ a$
Die regelmäßige fünfseitige Pyramide ist das Johnson Polyeder J_2.



Symmetrie-C5v-Polyeder, gerade fünfseitige Pyramide

Die gerade fünfseitige Pyramide ist das einfachste Beispiel für C5v-Symmetrie bei Polyedern. Der Körper ist zu sich selbst dual.
Das Symmetrie-C5v-Polyeder hat 6 Ecken und 6 Flächen, 5 gleichschenklige Dreiecke und ein regelmäßiges Fünfeck, sowie 10 Kanten, fünf kurze und fünf lange. Die Dieder-Winkel sind 74,4669156° und 111,0124114°.
Die Eckenwinkel sind 22,0203137°, 78,9898432° und 108°.

Hat der Mittelkugelradius, durch die Kanten, die Länge a, so wird
Kantenlänge $s_1 = 2 \sqrt{(2 (\sqrt{5} -2))}\ a \approx 1,374242999\ a$
$s_2 = 2 \sqrt{(1+ \sqrt{5})}\ a \approx 3,597814880\ a$
Seitenflächenhöhe $h_s = \sqrt{(2 \sqrt{5} + 8)}\ a \approx 3,5315911\ a$
Volumen $V = 4\ (5- \sqrt{5})/3\ a^3 \approx 3,685242697\ a^3$
$V = \sqrt{(65/144 \sqrt{5} + 145/144)}\ s_1^3 \approx 1,41995798\ s_1^3$
$V = \sqrt{(25/144 \sqrt{5} - 55/144)}\ s_2^3 \approx 0,0791315463\ s_2^3$
Mantelfläche $M = \sqrt{(200 \sqrt{5} - 300)}\ a^2 \approx 12,1331609\ a^2$
Oberfläche $A = (\sqrt{(200 \sqrt{5} - 300)} + \sqrt{(100 - 40 \sqrt{5})})\ a^2 \approx 15,3823579\ a^2$
$A = (\sqrt{(75/8 \sqrt{5} + 325/16)} + \sqrt{(5/8 \sqrt{5} + 25/16)})\ s_1^2 \approx 8,14508924\ s_1^2$
$A = (\sqrt{(225/32 \sqrt{5} -475/32)} + \sqrt{(125/32 -55/32 \sqrt{5})})\ s_2^2 \approx 1,18835250\ s_2^2$
Eckpunktkoordinaten:
Hilfsgrößen: C0 = √5 -2 ; C1 = √(√5 -2) ; C2 = √(5 (√5 -2)) ; C3 = √(2+ √5)
(C3, C3, -1), (-C1, -C1, -1), (C1, -C1, 1), (-C1, C1, 1), (C1, -C2, -C0), (-C2, C1, -C0)
Flächen: {1, 4, 2, 3, 5}, {0, 1, 5}, {0, 5, 3}, {0, 3, 2}, {0, 2, 4}, {0, 4, 1}

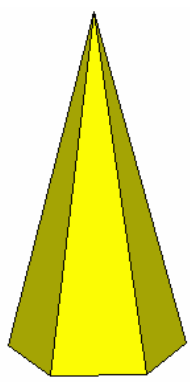


Gerade sechsseitige Pyramide

Kantenlänge a, Höhe h, Seitenflächenhöhe h_s und Seitenkante s stehen so miteinander in Beziehung, dass es jeweils zwei gegebenen Stücken die anderen beiden berechnet werden können.

gegeben	gesucht	
a, h	$h_s = \sqrt{(h^2 + 3 a^2/4)}$	$s = \sqrt{(h^2 + a^2)}$
	$V = 1/2\ a^2 h \sqrt{3}$	$A = 3/2\ a\ (\sqrt{(3 a^2 + 4 h^2)} + a \sqrt{3})$
a, h_s	$h = \sqrt{(h_s^2 - 3 a^2/4)}$	$s = \sqrt{(h_s^2 + a^2/4)}$
	$A_M = 3\ a\ h_s$	$A = 3/2\ a\ (a \sqrt{3} + 2 h_s)$
	$V = a^2/4 \sqrt{3} \sqrt{(4h_s^2 - 3a^2)}$	
a, s	$h = \sqrt{(s^2 - a^2)}$	$h_s = \sqrt{(s^2 - a^2/4)}$
	$M = 3a \sqrt{(s^2 - a^2/4)}$	$V = a^2/2 \sqrt{3} \sqrt{(s^2 - a^2)}$
h, h_s	$a = \sqrt{(4/3\ (h_s^2 - h^2))}$	$s = 1/3 \sqrt{3} \sqrt{(4 h_s^2 - h^2)}$
h, s	$a = \sqrt{(s^2 - h^2)}$	$h_s = 1/2 \sqrt{(h^2 + 3 s^2)}$
h_s, s	$a = 2 \sqrt{(s^2 - h_s^2)}$	$h = \sqrt{(4 h_s^2 - 3 s^2)}$

Eine regelmäßige sechsseitige Pyramide, d.h. s = a, existiert nicht, da der Umkreisradius der Grundfläche gerade a ist.



Symmetrie-C6v-Polyeder, gerade sechsseitige Pyramide

Die gerade sechsseitige Pyramide ist das einfachste Beispiel für C6v-Symmetrie bei Polyedern. Der Körper ist zu sich selbst dual.
Das Symmetrie-C6v-Polyeder hat 7 Ecken und 7 Flächen, 6 gleichschenklige Dreiecke und ein regelmäßiges Sechseck, sowie 12 Kanten, sechs kurze und sechs lange. Die Dieder-Winkel sind 76,4577793° und 121,8310221°.
Die Eckenwinkel sind 15,3986599°, 82,3006701° und 120°.

Hat der Mittelkugelradius, durch die Kanten, die Länge a, so wird
Kantenlänge $s_1 = 2 \sqrt{(6 (2 \sqrt{3} -3))}/3\ a \approx 1,112476655\ a$
$s_2 = 2 \sqrt{(6 (3+2 \sqrt{3}))}/3\ a \approx 4,151819397\ a$
Seitenflächenhöhe $h_s = \sqrt{(4 \sqrt{3} + 10)}\ a \approx 4,1143897\ a$
Volumen $V = 16\ (2- \sqrt{3})\ a^3 \approx 4,287187079\ a^3$
$V = s_1^3/2\ (3 \sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{3^3}) \approx 3,11386454\ s_1^3$
$V = s_2^3/2\ (33 \sqrt[4]{3} - 19 \sqrt[4]{3^3}) \approx 0,0599041738\ s_2^3$
Mantelfläche $M = a^2 \sqrt{(192 \sqrt{3} - 144)} \approx 13,731487\ a^2$
Oberfläche $A = a^2\ (\sqrt{(192 \sqrt{3} - 144)} - 12 \sqrt{3} + 24) \approx 16,946878\ a^2$

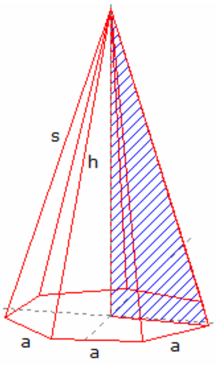
$A = s_1^2 (\sqrt{(36 \sqrt{3} + 243/4)} + 3/2 \sqrt{3}) \approx 13{,}693292\, s_1^2$

Eckpunktkoordinaten:

Hilfsgrößen: $C0 = 2- \sqrt{3}$; $C1 = \sqrt{(6 (2 \sqrt{3} -3))}/3$; $C2 = \sqrt{(2 (2 \sqrt{3} -3))}$; $C3 = 2 \sqrt{(6 (2 \sqrt{3} -3))}/3$; $C4 = 2+ \sqrt{3}$

(0, 0, C4), (C3, 0, -C0), (-C3, 0, -C0), (C1, C2, -C0), (C1, -C2, -C0), (-C1, C2, -C0), (-C1, -C2, -C0)

Flächen: {1, 4, 6, 2, 5, 3}, {0, 1, 3}, {0, 3, 5}, {0, 5, 2}, {0, 2, 6}, {0, 6, 4}, {0, 4, 1}



Gerade siebenseitige Pyramide

Kantenlänge a, Höhe h, Seitenflächenhöhe h_s und Seitenkante s stehen so miteinander in Beziehung, dass es jeweils zwei gegebenen Stücken die anderen beiden berechnet werden können. Eine regelmäßige siebenseitige Pyramide, d.h. s = a, existiert nicht, da der Umkreisradius der Grundfläche größer als s wäre.

Volumen $V \approx 1{,}21130414800\, a^2 h$

$V \approx 0{,}789046707657\, a^2 \sqrt{(2{,}356682\, s^2 - 3{,}129639\, a^2)}$

$V \approx 0{,}557940277657\, a^2 \sqrt{(4{,}713364\, h_s^2 - 5{,}080937\, a^2)}$

$V \approx 1{,}12367411055\, h\, (h_s^2 - h^2)$

Oberfläche $A \approx 1{,}76434496739\, a \sqrt{(4{,}24210986785\, a^2 + 3{,}93522059714\, h^2)} + 3{,}63391244400\, a^2 \approx 1{,}75\, a \sqrt{(4s^2 - a^2)} + 3{,}63391244400\, a^2$

$A \approx 3{,}63391244400\, a^2 + 3{,}5\, a\, h_s$

Mantelfläche $M \approx 1{,}76434496739\, a \sqrt{(4{,}24210986785\, a^2 + 3{,}93522059714\, h^2)}$

$M = 7/2\, a \sqrt{(s^2 - a^2/4)} \approx 1{,}21397374381 \sqrt{(s^2-h^2)} \sqrt{(1{,}178341\, h^2 + 5{,}080937\, s^2)}$

Höhe $h \approx 0{,}651402629933 \sqrt{(2{,}356682\, s^2 - 3{,}129639\, a^2)}$

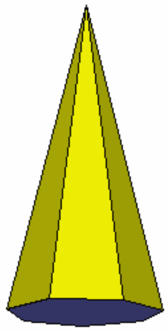
$h \approx 0{,}460611216908 \sqrt{(4{,}713364\, h_s^2 - 5{,}080937\, a^2)}$

$h \approx 1{,}78357993055 \sqrt{(1{,}669814\, h_s^2 - 1{,}355463\, s^2)}$

Seitenkante $s \approx 0{,}651402629933 \sqrt{(3{,}129639\, a^2 + 2{,}356682\, h^2)} = \sqrt{(h_s^2 + a^2/4)}$

Seite $a \approx 0{,}867767478234 \sqrt{(s^2 - h^2)} = 2 \sqrt{(s^2 - h_s^2)} \approx 0{,}963149237614 \sqrt{(h_s^2 - h^2)}$

Flächenhöhe $h_s \approx 0{,}504098562112 \sqrt{(4{,}24210986785\, a^2 + 3{,}93522059714\, h^2)} = \sqrt{(s^2 - a^2/4)}$



Symmetrie-C7v-Polyeder, gerade siebenseitige Pyramide

Die gerade siebenseitige Pyramide ist das einfachste Beispiel für C7v-Symmetrie bei Polyedern. Der Körper ist zu sich selbst dual.

Das Symmetrie-C7v-Polyeder hat 8 Ecken und 8 Flächen, 7 gleichschenklige Dreiecke und ein regelmäßiges Siebeneck, sowie 14 Kanten, sieben kurze und sieben lange.

Hat der Mittelkugelradius, durch die Kanten, die Länge a, so wird

Kantenlänge $s_1 = \sqrt{(\text{Lösung } [x^3 -8x^2 -576x +512])}\, a \approx 0{,}937726033\, a$

$s_2 = \sqrt{(\text{Lösung } [x^3 -32x^2 +192x +512])}\, a \approx 4{,}734501229\, a$

Seitenflächenhöhe $h_s \approx 4{,}71122677\, a$

Volumen $V = \text{Lösung}[27x^3 -1008x^2 +9408x -25088]\, a^3 \approx 4{,}909777057\, a^3$

Mantelfläche $M \approx 15{,}4624172\, a^2$

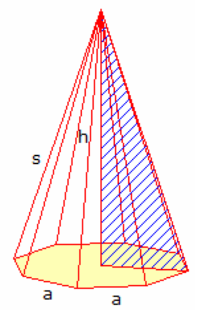
Oberfläche $A \approx 18{,}6578062\, a^2$

Eckpunktkoordinaten:

Hilfsgrößen: C0 = 0,2862083 ; C1 = 0,3315362 ; C2 = 0,6038755 ; C3 = 0,6266312 ; C4 = 0,8632790 ; C5 = 3,0162617

(C5, C5, -1), (-C1, -C1, -1), (C1, -C1, 1), (-C1, C1, 1), (C1, -C4, -C2), (-C4, C1, -C2), (C3, -C4, C0), (-C4, C3, C0)

Flächen: {1, 4, 6, 2, 3, 7, 5}, {0, 1, 5}, {0, 5, 7}, {0, 7, 3}, {0, 3, 2}, {0, 2, 6}, {0, 6, 4}, {0, 4, 1}



Gerade achtseitige Pyramide

Kantenlänge a, Höhe h, Seitenflächenhöhe h_s und Seitenkante s stehen so miteinander in Beziehung, dass es jeweils zwei gegebenen Stücken die anderen beiden berechnet werden können.

Eine regelmäßige achtseitige Pyramide, d.h. s = a, existiert nicht, da der Umkreisradius der Grundfläche größer als s wäre.

Volumen $V = 2/3\, a^2 h (\sqrt{2} + 1) = a^2 \sqrt{(s^2 (2 - \sqrt{2}) - a^2)} \sqrt{(14/9 \sqrt{2} + 20/9)}$

$V = a^3 \sqrt{(5/18 \sqrt{2} + 7/18)} \sin\gamma / (\sqrt{(\sqrt{2} \cos\gamma - 1)} \sqrt{(\cos\gamma + 1)})$

$V = a^3/3\, (2 \sqrt{2} + 3) \tan\beta$

Oberfläche $A = 2a \sqrt{(a^2 (2 \sqrt{2}+3) + 4h^2)} + a^2(2 \sqrt{2}+2)$

$A = 2\, a \sqrt{(4s^2 - a^2)} + a^2 (2 \sqrt{2} + 2)$

$A = \sqrt{(8\sqrt{2}-8)} \sqrt{(s^2-h^2)} \sqrt{(h^2 (\sqrt{2}-1) + s^2 (\sqrt{2}+1))} - \sqrt{(\sqrt{2}+1)} (h^2-s^2))$

Mantelfläche $M = \sqrt{(8\sqrt{2}-8)} \sqrt{(s^2-h^2)} \sqrt{(h^2 (\sqrt{2}-1) + s^2 (\sqrt{2}+1))}$

$M = a \sqrt{(4 + 4 \sqrt{2})} \sqrt{(a^2 (\sqrt{2} + 1) + 4h^2 (\sqrt{2} - 1))} = 2\, a \sqrt{(4s^2 - a^2)}$

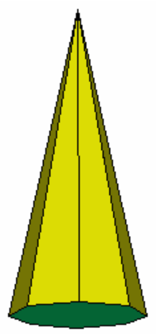
Seitenkante $s = \sqrt{(a^2 + h^2 (2 - \sqrt{2}))} \sqrt{(1/2 \sqrt{2} + 1)} = \sqrt{((\sqrt{2}+1)} \sqrt{(h^2 (7 - 5\sqrt{2}) + h_s^2 (6\sqrt{2} - 8))}$

Seite $a = \sqrt{(2 - \sqrt{2})} \sqrt{(s^2 - h^2)} = 2 (\sqrt{2} - 1) \sqrt{(h_s^2 - h^2)}$

Höhe $h = \sqrt{(s^2 (2 - \sqrt{2}) - a^2)} \sqrt{(1/2 \sqrt{2} + 1)} = \sqrt{(4h_s^2 (\sqrt{2} - 1) - a^2 \sqrt{(\sqrt{2} + 1)})} \sqrt{(1/4 + 1/4 \sqrt{2})}$

$h = \sqrt{(5\sqrt{2} + 7)} \sqrt{(h_s^2 (6\sqrt{2} - 8) + s^2 (1 - \sqrt{2}))}$

Flächenhöhe $h_s = \sqrt{(\sqrt{2}/4 + 1/4)} \sqrt{(a^2 (\sqrt{2} + 1) + 4h^2 (\sqrt{2} - 1))}$



Symmetrie-C8v-Polyeder, gerade achtseitige Pyramide

Die gerade achtseitige Pyramide ist das einfachste Beispiel für C8v-Symmetrie bei Polyedern. Der Körper ist zu sich selbst dual.

Das Symmetrie-C8v-Polyeder hat 9 Ecken und 9 Flächen, 8 gleichschenklige Dreiecke und ein regelmäßiges Achteck, sowie 16 Kanten, acht kurze und acht lange.

Hat der Mittelkugelradius, durch die Kanten, die Länge a, so wird

Kantenlänge $s_1 = 2 \sqrt{(2 (\sqrt{(2 (2- \sqrt{2}))}-1))}\ a \approx 0,811872898\ a$

$s_2 = 2 \sqrt{(2+ \sqrt{2} +2 \sqrt{(2+ \sqrt{2})})}\ a \approx 5,332816026\ a$

Seitenflächenhöhe $h_s = \sqrt{(\sqrt{(56 \sqrt{2} + 80)} + 4 \sqrt{2} + 10)}\ a \approx 5,317343544\ a$

Volumen $V = 32 (4+2 \sqrt{2} -\sqrt{(2 (10+7 \sqrt{2}))})/3\ a^3 \approx 5,544352693\ a^3$

Mantelfläche $M = a^2 \sqrt{(\sqrt{(1048576 - 524288 \sqrt{2})} - 256)} \approx 17,26802844\ a^2$

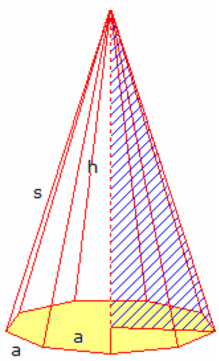
Oberfläche $A = a^2 (\sqrt{(\sqrt{(1048576 - 524288 \sqrt{2})} - 256)} + \sqrt{(512 \sqrt{2} + 1024)} - 16 \sqrt{2} - 16) \approx 20,45062632\ a^2$

Eckpunktkoordinaten:

Hilfsgrößen: $C0 = \sqrt{(2 (2+ \sqrt{2}))} -1 -\sqrt{2}$; $C1 = \sqrt{(2 (2 \sqrt{(2+ \sqrt{2})}-2 -\sqrt{2}))}$; $C2 = 2 \sqrt{(2 \sqrt{(2+ \sqrt{2})}-2 -\sqrt{2})}$; $C3 = 1 +\sqrt{2} +\sqrt{(2 (2+ \sqrt{2}))}$

(0, 0, C3), (C2, 0, -C0), (-C2, 0, -C0), (0, C2, -C0), (0, -C2, -C0), (C1, C1, -C0), (C1, -C1, -C0), (-C1, C1, -C0), (-C1, -C1, -C0)

Flächen: {1, 6, 4, 8, 2, 7, 3, 5}, {0, 1, 5}, {0, 5, 3}, {0, 3, 7}, {0, 7, 2}, {0, 2, 8}, {0, 8, 4}, {0, 4, 6}, {0, 6, 1}



Gerade neunseitige Pyramide

Kantenlänge a, Höhe h, Seitenflächenhöhe h_s und Seitenkante s stehen so miteinander in Beziehung, dass es jeweils zwei gegebenen Stücken die anderen beiden berechnet werden können.

Eine regelmäßige neunseitige Pyramide, d.h. s = a, existiert nicht, da der Umkreisradius der Grundfläche größer als s wäre.

Volumen $V \approx 2,06060806459\ a^2 h$

$V \approx 0,866951282974\ a^2 \sqrt{(5,649388\ s^2 - 12,073635\ a^2)}$

$V \approx 1,73390256594\ a^2 \sqrt{(1,412347\ h_s^2 - 2,665322\ a^2)}$

$V \approx 1,09191070279\ h (h_s^2 - h^2)$

Oberfläche $A \approx 2,68244529022\ a \sqrt{(5,31094193977\ a^2 + 2,81425393097\ h^2)} + 6,18182419377\ a^2$

$A \approx 2,25\ a \sqrt{(4s^2 - a^2)} + 6,18182419377\ a^2 \approx 6,18182419377\ a^2 + 4,5\ a\ h_s$

Mantelfläche $M \approx 2,68244529022\ a \sqrt{(5,31094193977\ a^2 + 2,81425393097\ h^2)}$

$M = 9/2\ a \sqrt{(s^2 - a^2/4)} \approx 0,885880562702 \sqrt{(s^2 - h^2)} \sqrt{(1,412347\ h^2 + 10,661288\ s^2)}$

Höhe $h \approx 0,420725948748 \sqrt{(5,649388\ s^2 - 12,073635\ a^2)}$

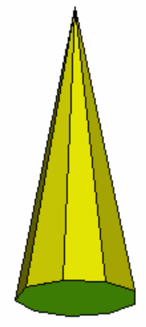
$h \approx 0,841451897496 \sqrt{(1,412347\ h_s^2 - 2,665322\ a^2)}$

$h \approx 1,56573534764 \sqrt{(3,487064\ h_s^2 - 3,079155\ s^2)}$

Seitenkante $s \approx 0,420725948748 \sqrt{(12,073635\ a^2 + 5,649388\ h^2)} = \sqrt{(h_s^2 + a^2/4)}$

Seite $a \approx 0,684040286650 \sqrt{(s^2 - h^2)} = 2 \sqrt{(s^2 - h_s^2)} \approx 0,727940468531 \sqrt{(h_s^2 - h^2)}$

Flächenhöhe $h_s \approx 0,596098953383 \sqrt{(5,31094193977\ a^2 + 2,81425393097\ h^2)} = \sqrt{(s^2 - a^2/4)}$



Symmetrie-C9v-Polyeder, gerade neunseitige Pyramide

Die gerade neunseitige Pyramide ist das einfachste Beispiel für C9v-Symmetrie bei Polyedern. Der Körper ist zu sich selbst dual.

Das Symmetrie-C9v-Polyeder hat 10 Ecken und 10 Flächen, 9 gleichschenklige Dreiecke und ein regelmäßiges Neuneck, sowie 18 Kanten, neun kurze und neun lange.

Hat der Mittelkugelradius, durch die Kanten, die Länge a, so wird

Kantenlänge $s_1 = \sqrt{(\text{Lösung } [x^3+72x^2 +960x -512])}\ a \approx 0,716534842\ a$

$s_2 = \sqrt{(\text{Lösung } [x^3-24x^2 -384x -512])}\ a \approx 5,940689608\ a$

Seitenflächenhöhe $h_s \approx 5,92987668\ a$

Volumen $V = \text{Lösung } [x^3 -72x^2 +1152x -4608]\ a^3 \approx 6,186547225\ a^3$

Mantelfläche $M \approx 19,12031308\ a^2$

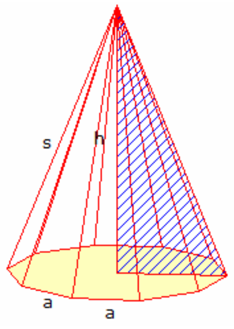
Oberfläche $A \approx 22,29418349\ a^2$

Eckpunktkoordinaten:

Hilfsgrößen: C0 = 0,1479559 ; C1 = 0,2533333 ; C2 = 0,5466368 ; C3 = 0,5840365 ; C4 = 0,6988885 ; C5 = 0,7587705 ; C6 = 0,8748520 ; C7 = 3,9473686

(C7, C7, -1), (-C1, -C1, -1), (C1, -C1, 1), (-C1, C1, 1), (C1, -C4, -C5), (-C4, C1, -C5), (C3, -C4, C2), (-C4, C3, C2), (C3, -C6, -C0), (-C6, C3, -C0)

Flächen: {1, 4, 8, 6, 2, 3, 7, 9, 5}, {0, 1, 5}, {0, 5, 9}, {0, 9, 7}, {0, 7, 3}, {0, 3, 2}, {0, 2, 6}, {0, 6, 8}, {0, 8, 4}, {0, 4, 1}

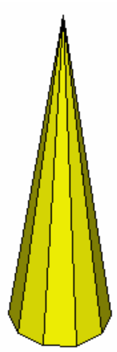


Gerade zehnseitige Pyramide

Kantenlänge a, Höhe h, Seitenflächenhöhe h_s und Seitenkante s stehen so miteinander in Beziehung, dass es jeweils zwei gegebenen Stücken die anderen beiden berechnet werden können.

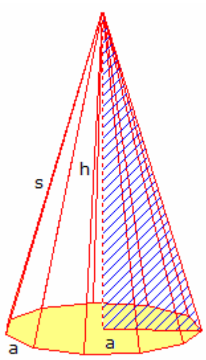
Eine regelmäßige zehnseitige Pyramide, d.h. s = a, existiert nicht, da der Umkreisradius der Grundfläche größer als s wäre.

Volumen $V = a^2 h \sqrt{(25/18 \sqrt{5} + 125/36)}$
$V = a^2 \sqrt{(s^2 (3 - \sqrt{5}) - 2a^2)} \sqrt{(275/144 \sqrt{5} + 625/144)}$
$V = a^3 \sqrt{(5/8 \sqrt{5} + 25/24)} \sin \gamma / (\sqrt{(4 \cos \gamma - \sqrt{5} - 1)} \sqrt{(\cos \gamma + 1)})$
$V = 5a^3/12 \sqrt{5} (\sqrt{5} + 2) \tan \beta$
Oberfläche $A = a \sqrt{(\sqrt{5} a^2 (\sqrt{5}+1) + 4h^2(3-\sqrt{5}))(5/8 \sqrt{10} +5/8 \sqrt{2})} +5/2 a^2 \sqrt{(5+2\sqrt{5})}$
$A = 5/2 a \sqrt{(4s^2 - a^2)} + a^2 \sqrt{(25/2 \sqrt{5} + 125/4)}$
$A = (5\sqrt{10} -5\sqrt{2})/8 (\sqrt{(s^2-h^2)} \sqrt{(h^2(3-\sqrt{5}) + s^2(\sqrt{5}+5))} -\sqrt{(\sqrt{5}+5)(h^2-s^2)})$
Mantelfläche $M = (5/8 \sqrt{10} - 5/8 \sqrt{2}) \sqrt{(s^2-h^2)} \sqrt{(h^2 (3-\sqrt{5}) + s^2 (\sqrt{5}+5))}$
$M = a \sqrt{(\sqrt{5} a^2 (\sqrt{5} + 1) + 4h^2 (3 - \sqrt{5}))} (5/8 \sqrt{10} + 5/8 \sqrt{2}) = 5/2 a \sqrt{(4s^2 - a^2)}$
Seitenkante $s = \sqrt{(2a^2 + h^2 (3 - \sqrt{5}))} (1/4 \sqrt{10} + 1/4 \sqrt{2})$
$s = \sqrt{(\sqrt{5}/20 + 1/4)} \sqrt{(h^2 (3\sqrt{5} - 7) + 4h_s^2 (3 - \sqrt{5}))}$
Seite $a = 1/2 (\sqrt{5} - 1) \sqrt{(s^2 - h^2)} = \sqrt{(4 - 8/5 \sqrt{5})} \sqrt{(h_s^2 - h^2)}$
Höhe $h = \sqrt{(s^2 (3 - \sqrt{5}) - 2a^2)} (1/4 \sqrt{10} + 1/4 \sqrt{2}) = 1/8 \sqrt{2} (\sqrt{5} + 1) \sqrt{(4h_s^2 (3 - \sqrt{5}) - a^2 (5 + \sqrt{5}))}$
Flächenhöhe $h_s = (\sqrt{10}/8 + \sqrt{2}/8) \sqrt{(a^2 (\sqrt{5} + 5) + 4h^2 (3 - \sqrt{5}))}$
$h_s = 1/8 \sqrt{2} (\sqrt{5} + 1) \sqrt{(h^2 (7 - 3\sqrt{5}) + s^2 (5 - \sqrt{5}))}$



Symmetrie-C10v-Polyeder, gerade zehnseitige Pyramide

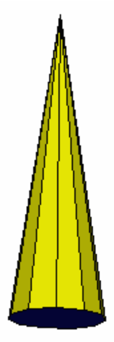
Die gerade zehnseitige Pyramide ist das einfachste Beispiel für C10v-Symmetrie bei Polyedern. Der Körper ist zu sich selbst dual.
Das Symmetrie-C10v-Polyeder hat 11 Ecken und 11 Flächen, 10 gleichschenklige Dreiecke und ein regelmäßiges Zehneck, sowie 20 Kanten, zehn kurze und zehn lange.
Hat der Mittelkugelradius, durch die Kanten, die Länge a, so wird
Kantenlänge $s_1 = 2 \sqrt{(10 (\sqrt{(10 (5- \sqrt{5}))}-5))/5}\, a \approx 0{,}641636808\, a$
$s_2 = (2 \sqrt{(5 (15+5 \sqrt{5} +4 \sqrt{(5 (5+2 \sqrt{5}))}))/5})\, a \approx 6{,}554874723\, a$
Seitenflächenhöhe $h_s = \sqrt{(\sqrt{(88 \sqrt{5} + 200)} + 4\sqrt{5} + 14)}\, a \approx 6{,}547019030\, a$
Volumen $V = 40 (6+2 \sqrt{5} -\sqrt{(2 (25+11 \sqrt{5}))})/3\, a^3 \approx 6{,}833904206\, a^3$
Mantelfläche $M = \sqrt{(\sqrt{(1280000 - 256000 \sqrt{5})} - 400)}\, a^2 \approx 21{,}00404197\, a^2$
Oberfläche $A = (\sqrt{(\sqrt{(1280000 - 256000 \sqrt{5})} - 400)} - \sqrt{(800 \sqrt{5} + 2000)} + 20\sqrt{5} +20)\, a^2 \approx 24{,}17173078\, a^2$
Eckpunktkoordinaten:
Hilfsgrößen: $C0 = 1 +\sqrt{5} -\sqrt{(5+ 2\sqrt{5})}$; $C1 = \sqrt{(10 (\sqrt{(10 (5- \sqrt{5}))}-5))/5}$; $C2 = \sqrt{(2 \sqrt{(2 (5+ \sqrt{5}))} -5 -\sqrt{5})}$; $C3 = \sqrt{(5 (2 \sqrt{(10 (65+29 \sqrt{5}))} -35 -15 \sqrt{5}))/5}$; $C4 = \sqrt{(2 (\sqrt{(2 (25+11 \sqrt{5}))} -5 -2 \sqrt{5}))}$; $C5 = 2 \sqrt{(5 (4 \sqrt{(5 (5+2 \sqrt{5}))} -15 -5 \sqrt{5}))/5}$; $C6 = 1+ \sqrt{5} +\sqrt{(5+2 \sqrt{5})}$
(0, 0, C6), (C5, 0, -C0), (-C5, 0, -C0), (C3, C2, -C0), (C3, -C2, -C0), (-C3, C2, -C0), (-C3, -C2, -C0), (C1, C4, -C0), (C1, -C4, -C0), (-C1, C4, -C0), (-C1, -C4, -C0)
Flächen: {1, 4, 8, 10, 6, 2, 5, 9, 7, 3}, {0, 1, 3}, {0, 3, 7}, {0, 7, 9}, {0, 9, 5}, {0, 5, 2}, {0, 2, 6}, {0, 6, 10}, {0, 10, 8}, {0, 8, 4}, {0, 4, 1}



Gerade elfseitige Pyramide

Kantenlänge a, Höhe h, Seitenflächenhöhe h_s und Seitenkante s stehen so miteinander in Beziehung, dass es jeweils zwei gegebenen Stücken die anderen beiden berechnet werden können. Eine regelmäßige elfseitige Pyramide, d.h. s = a, existiert nicht, da der Umkreisradius der Grundfläche größer als s wäre.
Volumen $V \approx 3{,}12187996898\, a^2 h$
$V \approx 3{,}18863447833\, a^2 \sqrt{(0{,}958568\, s^2 - 3{,}019179\, a^2)}$
$V \approx 3{,}18863447833\, a^2 \sqrt{(0{,}958568\, h_s^2 - 2{,}779537\, a^2)}$
$V \approx 1{,}07663047410\, h (h_2^2 - h^2)$
Oberfläche $A \approx 7{,}23155743338\, a \sqrt{(1{,}67730187427\, a^2 + 0{,}578444504612\, h^2)} + 9{,}36563990694\, a^2$
$A \approx 2{,}75\, a \sqrt{(4s^2 - a^2)} + 9{,}36563990694\, a^2$
$A \approx 9{,}36563990694\, a^2 + 5{,}5\, a h_s$
Mantelfläche $M \approx 7{,}23155743338\, a \sqrt{(1{,}67730187427\, a^2 + 0{,}578444504612\, h^2)}$
$M = 11/2\, a \sqrt{(s^2 - a^2/4)} \approx 1{,}78355000805 \sqrt{(s^2 - h^2)} \sqrt{(0{,}239642\, h^2 + 2{,}779537\, s^2)}$
Höhe $h \approx 1{,}02138279178 \sqrt{(0{,}958568\, s^2 - 3{,}019179\, a^2)}$
$h \approx 1{,}02138279178 \sqrt{(0{,}958568\, h_s^2 - 2{,}779537\, a^2)}$
$h \approx 3{,}23093766450 \sqrt{(1{,}206893\, h_s^2 - 1{,}111098\, s^2)}$
Seitenkante $s \approx 1{,}02138279178 \sqrt{(3{,}019179\, a^2 + 0{,}958568\, h^2)} = \sqrt{(h_s^2 + a^2/4)}$
Seite $a \approx 0{,}563465113682 \sqrt{(s^2 - h^2)} = 2 \sqrt{(s^2 - h_s^2)} \approx 0{,}587252985876 \sqrt{(h_s^2 - h^2)}$

Flächenhöhe $h_s \approx 1{,}31482862425 \sqrt{(1{,}67730187427\ a^2 + 0{,}578444504612\ h^2)} = \sqrt{(s^2 - a^2/4)}$



Symmetrie-C11v-Polyeder, gerade elfseitige Pyramide

Die gerade elfseitige Pyramide ist das einfachste Beispiel für C11v-Symmetrie bei Polyedern. Der Körper ist zu sich selbst dual.
Das Symmetrie-C11v-Polyeder hat 12 Ecken und 12 Flächen, 11 gleichschenklige Dreiecke und ein regelmäßiges Elfeck, sowie 22 Kanten, elf kurze und elf lange.

Hat der Mittelkugelradius, durch die Kanten, die Länge a, so wird

Kantenlänge $s_1 = \sqrt{(\text{Lösung } [x^5 - 8x^4 - 1664x^3 - 15360x^2 + 102400x - 32768])}\ a \approx 0{,}5811513829\ a$

$s_2 = \sqrt{(\text{Lösung } [x^5 - 72x^4 + 1088x^3 - 1024x^2 - 28672x - 32768])}\ a \approx 7{,}1734638991\ a$

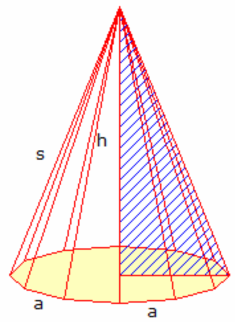
Flächenhöhe $h_s \approx 7{,}1675763043519968414\ a$

Volumen $V = \text{Lösung } [243x^5 - 35640x^4 + 1463616x^3 - 24532992x^2 + 179908608x - 479756288]\ a^3 \approx 7{,}484929451\ a^3$

Mantelfläche $M \approx 22{,}909957846036305432\ a^2$

Oberfläche $A \approx 26{,}073080851959075350\ a^2$

Eckpunktkoordinaten:
Hilfsgrößen: C0 = 0,1659290 ; C1 = 0,2054680 ; C2 = 0,4033304 ; C3 = 0,5192264 ; C4 = 0,5831125 ; C5 = 0,6361910 ; C6 = 0,6890703 ; C7 = 0,8075660 ; C8 = 0,8379719 ; C9 = 4,8669369
(C9, C9, -1), (-C1, -C1, -1), (C1, -C1, 1), (-C1, C1, 1), (C1, -C4, -C8), (-C4, C1, -C8), (C3, -C4, C6), (-C4, C3, C6), (C3, -C7, -C2), (-C7, C3, -C2), (C5, -C7, C0), (-C7, C5, C0)
Flächen: {1, 4, 8, 10, 6, 2, 3, 7, 11, 9, 5}, {0, 1, 5}, {0, 5, 9}, {0, 9, 11}, {0, 11, 7}, {0, 7, 3}, {0, 3, 2}, {0, 2, 6}, {0, 6, 10}, {0, 10, 8}, {0, 8, 4}, {0, 4, 1}



Gerade zwölfseitige Pyramide

Kantenlänge a, Höhe h, Seitenflächenhöhe h_s und Seitenkante s stehen so miteinander in Beziehung, dass es jeweils zwei gegebenen Stücken die anderen beiden berechnet werden können. Eine regelmäßige zwölfseitige Pyramide, d.h. s = a, existiert nicht, da der Umkreisradius der Grundfläche größer als s wäre.

Volumen $V = a^2h\ (\sqrt{3} + 2) = a^2 \sqrt{(s^2 (2 - \sqrt{3}) - a^2)}\ (3/2 \sqrt{6} + 5/2 \sqrt{2})$

$V = a^3 (3 \sqrt{3} + 5) \sin \gamma / (4 \sqrt{(2 \cos \gamma - \sqrt{3})} \sqrt{(\cos \gamma + 1)})$

$V = a^3/2\ (4 \sqrt{3} + 7) \tan \beta$

$V = a^2 \sqrt{(4h_s^2 (2-\sqrt{3}) - a^2 (2+\sqrt{3}))}\ (3\sqrt{6} + 5\sqrt{2})/4$

$V = h\ (h^2 - h_s^2)\ (4 \sqrt{3} - 8)$

Oberfläche $A = 3/2 \sqrt{2}\ a (\sqrt{3} + 1) \sqrt{(a^2 (2 + \sqrt{3}) + 4h^2 (2 - \sqrt{3}))} + (3 \sqrt{3} + 6)\ a^2$

$A = 3\ a \sqrt{(4s^2 - a^2)} + a^2 (3 \sqrt{3} + 6)$

$A = (3/2 \sqrt{3} - 3/2) (\sqrt{2} \sqrt{(s^2-h^2)} \sqrt{(h^2 (2-\sqrt{3}) + s^2 (\sqrt{3}+2))} - (\sqrt{3}+1) (h^2-s^2))$

$A = a^2 (3 \sqrt{3} + 6) + 6\ a\ h_s$

Mantelfläche $M = 3/2 (\sqrt{3} - 1) \sqrt{(s^2-h^2)} \sqrt{(h^2 (2-\sqrt{3}) + s^2 (\sqrt{3}+2))}$

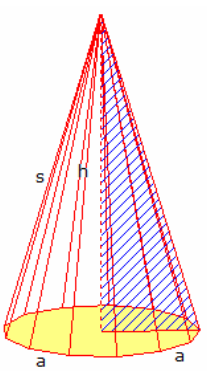
$M = 3/2 \sqrt{2}\ a (\sqrt{3} + 1) \sqrt{(a^2 (2 + \sqrt{3}) + 4h^2 (2 - \sqrt{3}))} = 3\ a \sqrt{(4s^2 - a^2)}$

Seitenkante $s = 1/2 \sqrt{2} (\sqrt{3} + 1) \sqrt{(a^2 + h^2 (2 - \sqrt{3}))}$

Seite $a = 1/2 \sqrt{2} (\sqrt{3} - 1) \sqrt{(s^2 - h^2)} = (4 - 2\sqrt{3}) \sqrt{(h_s^2 - h^2)}$

Höhe $h = 1/2 \sqrt{2} (\sqrt{3} + 1) \sqrt{(s^2 (2 - \sqrt{3}) - a^2)} = 1/4 (\sqrt{2} (1+\sqrt{3}) \sqrt{(4h_s^2 (2-\sqrt{3}) - a^2 (2+\sqrt{3}))})$

Flächenhöhe $h_s = 1/4 \sqrt{2} (\sqrt{3} + 1) \sqrt{(a^2 (\sqrt{3} + 2) + 4h^2 (2 - \sqrt{3}))}$



Gerade dreizehnseitige Pyramide

Kantenlänge a, Höhe h, Seitenflächenhöhe h_s und Seitenkante s stehen so miteinander in Beziehung, dass es jeweils zwei gegebenen Stücken die anderen beiden berechnet werden können. Eine regelmäßige dreizehnseitige Pyramide, d.h. s = a, existiert nicht, da der Umkreisradius der Grundfläche größer als s wäre.

Volumen $V \approx 4{,}39525610944\ a^2\ h$

$V \approx 3{,}50318601636\ a^2 \sqrt{(1{,}574135\ s^2 - 6{,}871313\ a^2)}$

$V \approx 1{,}75159300818\ a^2 \sqrt{(6{,}29654\ h_s^2 - 25{,}911117\ a^2)}$

$V \approx 1{,}06807073980\ h\ (h_2^2 - h^2)$

Oberfläche $A \approx 4{,}02464983650\ a \sqrt{(10{,}7338292061\ a^2 + 2{,}60837790010\ h^2)} + 13{,}1857683283\ a^2 \approx 3{,}25\ a \sqrt{(4s^2 - a^2)} + 13{,}1857683283\ a^2$

$A \approx 13{,}1857683283\ a^2 + 6{,}5\ a\ h_s$

Mantelfläche $M \approx 4{,}02464983650\ a \sqrt{(10{,}7338292061\ a^2 + 2{,}60837790010\ h^2)}$

$M = 13/2\ a \sqrt{(s^2 - a^2/4)} \approx 0{,}593423330696 \sqrt{(s^2 - h^2)} \sqrt{(1{,}574135\ h^2 + 25{,}911117\ s^2)}$

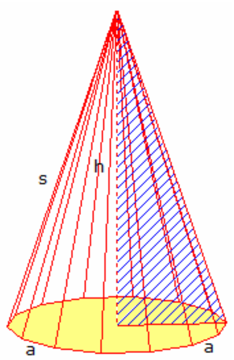
Höhe $h \approx 0{,}797037972106 \sqrt{(1{,}574135\ s^2 - 6{,}871313\ a^2)}$

$h \approx 0{,}398518986053 \sqrt{(6{,}29654\ h_s^2 - 25{,}911117\ a^2)}$

$h \approx 3{,}24612026297 \sqrt{(1{,}657023\ h_s^2 - 1{,}562122\ s^2)}$

Seitenkante $s \approx 0{,}797037972106 \sqrt{(6{,}871313\ a^2 + 1{,}574135\ h^2)} = \sqrt{(h_s^2 + a^2/4)}$

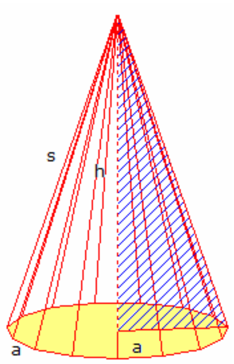
Seite $a \approx 0,478631328574 \sqrt{(s^2 - h^2)} = 2 \sqrt{(s^2 - h_s^2)} \approx 0,492955726063 \sqrt{(h_s^2 - h^2)}$
Flächenhöhe $h_s \approx 0,619176897923 \sqrt{(10,7338292061 a^2 + 2,60837790010 h^2)} = \sqrt{(s^2 - a^2/4)}$



Gerade vierzehnseitige Pyramide

Kantenlänge a, Höhe h, Seitenflächenhöhe h_s und Seitenkante s stehen so miteinander in Beziehung, dass es jeweils zwei gegebenen Stücken die anderen beiden berechnet werden können. Eine regelmäßige vierzehnseitige Pyramide, d.h. s = a, existiert nicht, da der Umkreisradius der Grundfläche größer als s wäre.

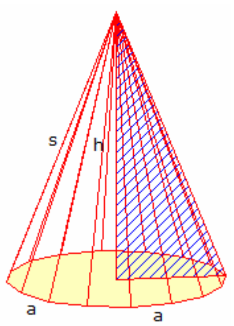
Volumen $V \approx 5,11150064545 a^2 h$
$V \approx 0,925190509509 a^2 \sqrt{(30,523512 s^2 - 154,110689 a^2)}$
$V \approx 0,925190509509 a^2 \sqrt{(30,523512 h_s^2 - 146,479811 a^2)}$
$V \approx 1,06513621382 h (h_2^2 - h^2)$
Oberfläche $A \approx 1,49801141913 a \sqrt{(104,787408874 a^2 + 21,8356353029 h^2)} + 15,3345019363 a^2 \approx 3,5 a \sqrt{(4s^2 - a^2)} + 15,3345019363 a^2$
$A \approx 15,3345019363 a^2 + 7 a h_s$
Mantelfläche $M \approx 1,49801141913 a \sqrt{(104,787408874 a^2 + 21,8356353029 h^2)}$
$M = 7 a \sqrt{(s^2 - a^2/4)} \approx 0,250947300772 \sqrt{(s^2 - h^2)} \sqrt{(7,630878 h^2 + 146,479811 s^2)}$
Höhe $h \approx 0,181001739739 \sqrt{(30,523512 s^2 - 154,110689 a^2)}$
$h \approx 0,181001739739 \sqrt{(30,523512 h_s^2 - 146,479811 a^2)}$
$h \approx 0,531328926888 \sqrt{(71,5371 h_s^2 - 67,9949 s^2)}$
Seitenkante $s \approx 0,181001739739 \sqrt{(154,110689 a^2 + 30,523512 h^2)} = \sqrt{(h_s^2 + a^2/4)}$
Seite $a \approx 0,445041867912 \sqrt{(s^2 - h^2)} = 2 \sqrt{(s^2 - h_s^2)} \approx 0,456486948780 \sqrt{(h_s^2 - h^2)}$
Flächenhöhe $h_s \approx 2,14001631304 \sqrt{(1,04787408874 a^2 + 0,218356353029 h^2)} = \sqrt{(s^2 - a^2/4)}$



Gerade fünfzehnseitige Pyramide

Kantenlänge a, Höhe h, Seitenflächenhöhe h_s und Seitenkante s stehen so miteinander in Beziehung, dass es jeweils zwei gegebenen Stücken die anderen beiden berechnet werden können. Eine regelmäßige fünfzehnseitige Pyramide, d.h. s = a, existiert nicht, da der Umkreisradius der Grundfläche größer als s wäre.

Volumen $V \approx 5,88078763684 a^2 h$
$V \approx 12,4094294528 a^2 \sqrt{(0,22457808 s^2 - 1,29882175 a^2)}$
$V \approx 12,4094294528 a^2 \sqrt{(0,22457808 h_s^2 - 1,24267723 a^2)}$
$V \approx 1,06278280834 h (h_2^2 - h^2)$
Oberfläche $A \approx 12,8087737830 a^2 \sqrt{(1,89713567853 a^2 + 0,342852574988 h^2)} + 17,6423629105 a^2 \approx 3,75 a \sqrt{(4s^2 - a^2)} + 17,6423629105 a^2$
$A \approx 17,6423629105 a^2 + 7,5 a h_s$
Mantelfläche $M \approx 12,8087737830 a^2 \sqrt{(1,89713567853 a^2 + 0,342852574988 h^2)}$
$M = 7,5 a \sqrt{(s^2 - a^2/4)} \approx 0,273649962516 \sqrt{(s^2 - h^2)} \sqrt{(5,614452 h^2 + 124,267723 s^2)}$
Höhe $h \approx 2,11016452542 \sqrt{(0,22457808 s^2 - 1,29882175 a^2)}$
$h \approx 2,11016452542 \sqrt{(0,22457808 h_s^2 - 1,24267723 a^2)}$
$h \approx 3,89270115741 \sqrt{(1,526652 h_s^2 - 1,460659 s^2)}$
Seitenkante $s \approx 2,11016452542 \sqrt{(1,29882175 a^2 + 0,22457808 h^2)} = \sqrt{(h_s^2 + a^2/4)}$
Seite $a \approx 0,415823381635 \sqrt{(s^2 - h^2)} = 2 \sqrt{(s^2 - h_s^2)} \approx 0,425113123339 \sqrt{(h_s^2 - h^2)}$
Flächenhöhe $h_s \approx 1,70783650440 \sqrt{(1,89713567853 a^2 + 0,342852574988 h^2)} = \sqrt{(s^2 - a^2/4)}$

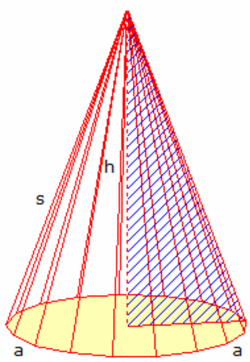


Gerade sechzehnseitige Pyramide

Kantenlänge a, Höhe h, Seitenflächenhöhe h_s und Seitenkante s stehen so miteinander in Beziehung, dass es jeweils zwei gegebenen Stücken die anderen beiden berechnet werden können. Eine regelmäßige sechzehnseitige Pyramide, d.h. s = a, existiert nicht, da der Umkreisradius der Grundfläche größer als s wäre.

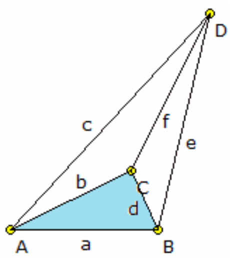
Volumen $V = a^2h (\sqrt{(32/9 \sqrt{2} + 64/9)} + 4/3 \sqrt{2} + 4/3)$
$V = a^2 \sqrt{(\sqrt{(4096 \sqrt{2} + 8192)} + 128)} \sqrt{(s^2 (2 - \sqrt{(2 + \sqrt{2})}) - a^2)} / (12-\sqrt{(36 \sqrt{2} +72)})$
$V = a^3 \sin\gamma (\sqrt{(1/36 \sqrt{2} + 1/18)} +1/3) \sqrt{(2 / (1 - \sqrt{(1/4 \sqrt{2} + 1/2)}))} / (\sqrt{(\cos\gamma - \sqrt{(1/4 \sqrt{2} + 1/2)})} (\cos\gamma + 1))$
$V = 2a^3/3 (\sqrt{(2 \sqrt{2} + 4)} + \sqrt{2} + 1)^2 \tan\beta$
$V = a^2 \sqrt{(\sqrt{(4\sqrt{2}+8)}+4)} \sqrt{(h_s^2 (4-\sqrt{(4\sqrt{2}+8)}) - a^2 (\sqrt{(\sqrt{2}/4+1/2)}+1))} / (3-\sqrt{(9/4\sqrt{2} + 9/2)}) \approx 5,61677023 a^2 \sqrt{(1,42423149 h_s^2 - 8,99905734 a^2)}$
Oberfläche $A = 4 a \sqrt{(4s^2 - a^2)} + a^2 (\sqrt{(32 \sqrt{2} + 64)} + 4 \sqrt{2} + 4)$
$A \approx 6,70347039139 a \sqrt{(8,99905734362 a^2 + 1,42423148722 h^2)} + 20,1093579685 a^2$
$A = a^2 (\sqrt{(32 \sqrt{2} + 64)} + 4 \sqrt{2} + 4) + 8 a h_s$
Mantelfläche $M = 4 a \sqrt{(4s^2 - a^2)} \approx 6,70347039139 a \sqrt{(8,99905734362 a^2 + 1,42423148722 h^2)}$
$M \approx 1,2090303186 \sqrt{(s^2-h^2)} \sqrt{(0,253693 h^2 + 6,411873 s^2)}$
Seitenkante $s = \sqrt{(a^2 + h^2 (2 - \sqrt{(\sqrt{2} + 2)}))} \sqrt{(1/ (2 - \sqrt{(\sqrt{2} + 2)}))}$
Seite $a = \sqrt{(2 - \sqrt{(\sqrt{2} + 2)})} \sqrt{(s^2 - h^2)} = \sqrt{(h_s^2 - h^2)} (\sqrt{(8 \sqrt{2} + 16)} - 2 \sqrt{2} - 2)$

Höhe $h = \sqrt{s^2 (2 - \sqrt{\sqrt{2} + 2}) - a^2} \sqrt{1/ (2 - \sqrt{\sqrt{2} + 2})}$
Flächenhöhe $h_s = \sqrt{2} \sqrt{a^2 (1 + \sqrt{\sqrt{2}/4 + 1/2}) + h^2 (4 - \sqrt{4\sqrt{2} + 8}) / \sqrt{8 - \sqrt{16 \sqrt{2} + 32}}}$



Gerade siebzehnseitige Pyramide
Kantenlänge a, Höhe h, Seitenflächenhöhe h_s und Seitenkante s stehen so miteinander in Beziehung, dass es jeweils zwei gegebenen Stücken die anderen beiden berechnet werden können. Eine regelmäßige siebzehnseitige Pyramide, d.h. s = a, existiert nicht, da der Umkreisradius der Grundfläche größer als s wäre.

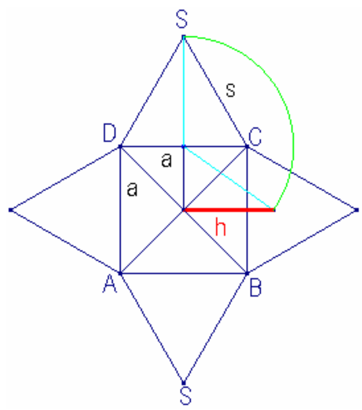
Volumen $V \approx 7{,}57849729948\, a^2 h$
$V \approx 4{,}15825890517\, a^2 \sqrt{3{,}321568\, s^2 - 24{,}594089\, a^2}$
$V \approx 4{,}15825890517\, a^2 \sqrt{3{,}321568\, h_s^2 - 23{,}763697\, a^2}$
$V \approx 1{,}05928358361\, h (h_s^2 - h^2)$
Oberfläche $A \approx 2{,}96424947645\, a^2 \sqrt{58{,}8273393017\, a^2 + 8{,}22258454775\, h^2}$ $+ 22{,}7354918984\, a^2 \approx 4{,}25\, a \sqrt{4s^2 - a^2} + 22{,}7354918984\, a^2$
$A \approx 22{,}7354918984\, a^2 + 8{,}5\, a\, h_s$
Mantelfläche $M \approx 2{,}96424947645\, a^2 \sqrt{58{,}8273393017\, a^2 + 8{,}22258454775\, h^2}$
$M = 8{,}5\, a \sqrt{s^2 - a^2/4} \approx 0{,}629882814442 \sqrt{s^2 - h^2} \sqrt{0{,}830392\, h^2 + 23{,}763697\, s^2}$
Höhe $h \approx 0{,}548691744662 \sqrt{3{,}321568\, s^2 - 24{,}594089\, a^2}$
$h \approx 0{,}548691744662 \sqrt{3{,}321568\, h_s^2 - 23{,}763697\, a^2}$
$h \approx 1{,}97016894410 \sqrt{7{,}630283\, h_s^2 - 7{,}372655\, s^2}$
Seitenkante $s \approx 0{,}548691744662 \sqrt{24{,}594089\, a^2 + 3{,}321568\, h^2} = \sqrt{h_s^2 + a^2/4}$
Seite $a \approx 0{,}367499035633 \sqrt{s^2 - h^2} = 2 \sqrt{s^2 - h_s^2} \approx 0{,}373864794215 \sqrt{h_s^2 - h^2}$
Flächenhöhe $h_s \approx 3{,}48735232524 \sqrt{0{,}588273393017\, a^2 + 0{,}0822258454775\, h^2} = \sqrt{s^2 - a^2/4}$



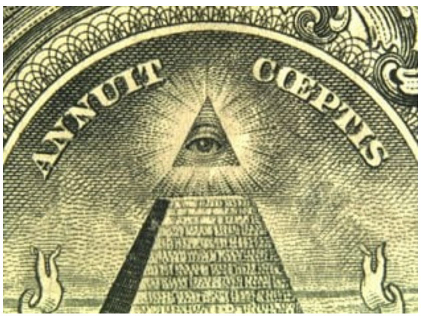
Dreiseitige schiefe Pyramide
Es seien V das Volumen einer dreiseitigen, schiefen Pyramide, a, b, c, d, e und f ihre sechs Kanten und α, β, γ die drei Winkel, welche von den drei in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten a, b, c gebildet werden. Dann gilt:
$V = 1/2\, abc \sqrt{\sin ((\alpha+\beta+\gamma)/2) \sin ((\alpha-\beta+\gamma)/2) \sin ((\alpha+\beta-\gamma)/2) \sin ((-\alpha+\beta+\gamma)/2)}$
$V = 1/6\, abc \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}$
$V = 1/12 \sqrt{c^2d^2 (a^2+b^2+c^2+f^2-c^2-d^2) + a^2e^2 (b^2+c^2+d^2+f^2-a^2-e^2) + b^2f^2 (a^2+c^2+d^2+e^2-b^2-f^2) - a^2b^2d^2 - a^2c^2f^2 - b^2c^2e^2 - d^2e^2f^2}$

Sonderfälle: a = b = c = 1
$V = 1/2 \sqrt{\sin ((\alpha+\beta+\gamma)/2) \sin ((\alpha-\beta+\gamma)/2) \sin ((\alpha+\beta-\gamma)/2) \sin ((-\alpha+\beta+\gamma)/2)}$

Pyramidenkonstruktion
Aufgabe: Aus dem gegebenen Netz einer quadratischen Pyramide ist ein Schrägbild zu konstruieren.
Gegebene Größen: Seite a, Seitenkante s
Höhe $h = \sqrt{s^2 - a^2/2}$
Seitenhöhe $h_s = \sqrt{s^2 - a^2/4}$
Mantelfläche $M = 2a \sqrt{s^2 - a^2/4}$
Oberfläche $A = a \sqrt{4s^2 - a^2} + a^2$
Volumen $V = a^2/6 \sqrt{2} \sqrt{2s^2 - a^2}$



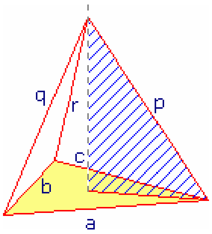
Lösung:
1. Mittelpunkt H der Grundfläche zeichnen (Netz)
2. Mittelpunkt M von CD zeichnen (Netz)
3. Lot auf DC durch H (Netz)
4. MS mit Zirkel von M aus abtragen → Kreis k(M, r = MS) ∩ Lot = S, HS = gesuchte Höhe h (Netz)
5. Raumbild mit der Grundfläche ABCD beginnen (Masse aus dem Netz mit Zirkel herausmessen)
6. Mittelpunkt der Grundfläche konstruieren (Diagonalenschnittpunkt H)
7. Senkrechte auf AB durch H zeichnen, von H aus mit dem Zirkel die konstruierte Höhe übertragen → S
8. Pyramide vervollständigen.



Freimaurer-Pyramide
Seit Dan Brown mit seinem "Da Vinci Code" einen Welterfolg feierte, sind auch die vorhergehenden Romane und damit eine Pyramidendarstellung berühmt geworden.
Auf jeder US-amerikanischen 1-Dollarnote befindet sich auf der Rückseite die Darstellung einer Pyramide mit einem schwebenden Auge als Spitze.
Durch Dan Brown wird im Roman "Illuminati" (engl. Angels and Damons) behauptet, dass dies nicht nur das Zeichen der Freimaurer wäre, sondern das der sagenumwobenen Illuminati. Wörtlich:

"… Sie nannten es ihr "leuchtendes Delta". Ein Ruf nach erleuchteter Veränderung. Das Auge versinnbildlicht die Fähigkeit der Illuminati, zu infiltrieren und alles zu beobachten. … Es ist zugleich ein griechischer Buchstabe, das Delta, welches wiederum ein mathematisches Symbol ist für … Veränderung"

Nach Dan Brown waren die Illuminati zu Beginn ihrer Gründung eine Verbindung von Mathematikern, Physikern und anderen Wissenschaftlern, welche in Rom die erste Denkfabrik der Welt gründeten und massiv von der katholischen Kirche verfolgt wurden.
In Wirklichkeit besitzt die Interpretation der Rückseite des US-Siegels auf der Dollarnote keinerlei Grundlage. Das Symbol des Allsehenden Auges hat eher einen mystisch-religiösen Hintergrund. Es ist in zahlreichen Kirchen wiederzufinden und symbolisiert den "allsehenden, dreifaltigen Gott".



Tartaglias Pyramidenformel

Durch den italienischen Mathematiker Tartagia wurde eine interessante Formel zur Volumenberechnung von Pyramiden abgeleitet.
Die Buchstaben a, b, c stehen dabei für die Grundseiten der Pyramide. Die Buchstaben p, q, r bezeichnen die Seitenlinien der Pyramide.

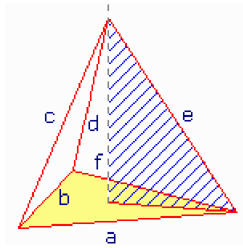
$V = 1/12 \sqrt{(a^2p^2 (b^2 +c^2 -a^2 -q^2 + r^2 -p^2) +b^2q^2 (c^2 +a^2 -b^2 +r^2 -p^2 -q^2)) +}$
$\quad + \sqrt{(c^2r^2 (a^2 +b^2 -c^2 +p^2 +q^2 -r^2) -a^2q^2r^2 -b^2r^2p^2 -c^2p^2q^2 -a^2b^2c^2)}$

Für eine Pyramide mit gleichseitiger Grundfläche, d.h. a = b = c, wird
$V = 1/12\ a \sqrt{(a^2 - p^2 - q^2 + r^2)} \sqrt{(p^2+q^2)} + a \sqrt{(a^4 - a^2r^2 + p^2q^2 + r^4)}$

Allgemeines Tetraeder

Für ein beliebiges Tetraeder (siehe Bild) gilt:

$$V^2 = 1/288 \begin{vmatrix} 0 & f^2 & e^2 & a^2 & 1 \\ f^2 & 0 & d^2 & b^2 & 1 \\ e^2 & d^2 & 0 & c^2 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$



Sind die Tetraederseiten zueinander kongruente Dreiecke mit den Seitenlängen a, b und c, so gilt: $V = \sqrt{[(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)(c^2 + b^2 - a^2) / 72]}$

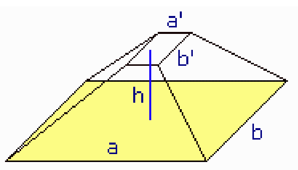
Sphenoid

Unter einem Sphenoid versteht man ein Tetraeder, dass Spiegelsymmetrie aufweist.

Uneigentlicher Pyramidenstumpf

Ein vierseitiger Körper mit parallelen Grundflächen sei so beschaffen, dass dessen vier Kanten nicht einem Punkt zusammenlaufen, d.h. der Körper nicht einen Pyramidenstumpf bildet.
Es seien die vier Seiten der Grundfläche a, b, c, und d, die zugehörigen parallelen Seiten der Deckfläche a', b', c' und d'. Die Seiten a und b oder a' und b' schließen den Winkel α ein, die Seiten a und d bzw. a' und d' den Winkel β. Ist h die Höhe zwischen den parallelen Flächen, so wird:

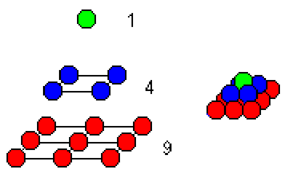
$$V = h/6 \sin \alpha\ (a\ (b+b'/2) + a'\ (b'+b/2)) + h/6 \sin \beta\ (c\ (d+d'/2) + c'\ (d'+d/2))$$



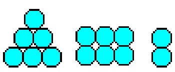
Obelisk, Ponton

Grund- und Deckfläche sind Rechtecke mit den Seiten a,b und a',b'
Volumen $V = h/6\ [b(2a + a') + b'(2a' + a)]$
Abstand des Schwerpunktes von der Grundfläche
$d = h\ (ab + ab' + a'b + 3a'b') / (4ab + 2ab' + 2a'b + 4a'b')$

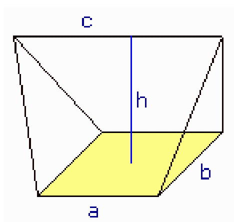
Pyramidenzahlen



Man kann Kugeln zu einer Pyramide aufschichten. Die Anzahl der Kugeln in einer Schicht ist eine Quadratzahl: 1, 4, 9, 16, … , allgemein n^2. Bildet man die Summe der Kugeln schichtweise, so erhält man die Pyramidenzahlen 1, 5, 14, 30, … , allgemein $1+4+9+16+\ldots+n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.
Früher bewahrte man so Kanonenkugeln auf und konnte mit Hilfe der Anzahl der Schichten auf die Anzahl der Kanonenkugeln schließen.



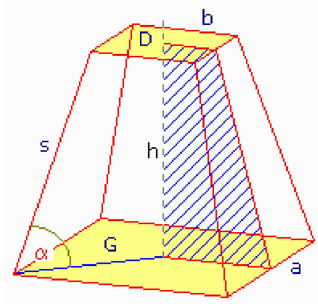
Klebt man 14 Kugeln zu zwei Sechsergruppen und einem Paar zusammen, so erhält man ein Puzzle: Man muss die drei Stücke zu einer Pyramide zusammensetzen.



Keil

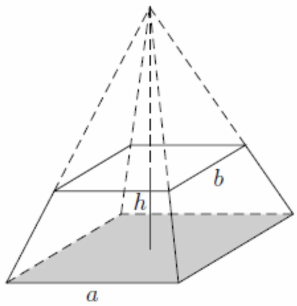
Volumen $V = 1/6\ b\ h\ (2a + c)$
Der Abstand des Schwerpunktes von der Grundfläche ist $x = h/2\ (a + c)/(2a + c)$

Pyramidenstumpf



Ein Pyramidenstumpf entsteht in dem man von einer Pyramide parallel zur Grundfläche eine kleinere, zur ursprünglichen Pyramide ähnliche Pyramide abschneidet.
Die beiden parallelen Flächen eines Pyramidenstumpfs sind zueinander ähnlich. Die größere dieser beiden Flächen bezeichnet man als Grundfläche, die kleinere als Deckfläche. Den Abstand zwischen Grund- und Deckfläche nennt man die Höhe des Pyramidenstumpfs.
Es seien G die Grundfläche, D die Deckfläche, V das Volumen, h_s die Höhe einer Seitenfläche, h die Höhe des Stumpfes und m:n das Verhältnis der zueinander gehörigen Seiten der Grund- und Deckfläche. Dann gilt:

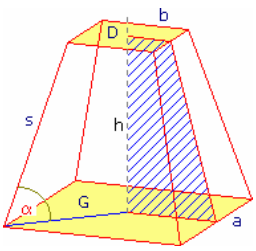
Volumen $V = h/3\ (G + \sqrt{G\cdot D} + D)$
$V \approx h/2 \cdot (G + D)$
$V = 1/3\ G\ D\ (1 + n/m + n^2/m^2)$
Grundfläche $G = 1/(2h)\ (\sqrt{3D\ h\ (4V - D\ h)} - D\ h + 6V) = 3V / (D\ (1 + n/m + n^2/m^2))$
Deckfläche $D = 1/(2h)\ (\sqrt{3G\ h\ (4V - G\ h)} - G\ h + 6V) = 3V / (G\ (1 + n/m + n^2/m^2))$
Höhe $h = 3V / (G + \sqrt{G\cdot D} + D) = G\cdot D\ (1 + n/m + n^2/m^2) / (G + \sqrt{G\cdot D} + D)$
Der Schwerpunkt befindet sich im Abstand x von der Grundfläche auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte von Deck- und Grundfläche $x = h/4\ (G + 2\sqrt{G\cdot D} + 3\ D) / (G + \sqrt{D\cdot G} + D)$



Pyramidenstumpfvolumen

Die Herleitung der Volumengleichung eines Pyramidenstumpfs erfolgt hier am Beispiel eines geraden, quadratischen Pyramidenstumpfs.
Dieser, mit den Kanten a und b und der Höhe h, kann durch Aufsetzen einer Pyramide zu einer vollständigen Pyramide erweitert werden. Diese vollständige Pyramide habe dann die Höhe h*. Dann gilt

$V_{Stumpf} = V_{vollständige\ Pryamide} - V_{Aufsetzpyramide}$
$V_{Stumpf} = 1/3\ h^*\ a^2 - 1/3\ (h^*-h)\ b^2$
Nach dem Strahlensatz wird $(h^*-h) / h^* = b / a$
$h^* = ah / (a-b)$
Einsetzen ergibt
$V_{Stumpf} = 1/3\ ah/(a-b)\ a^2 - 1/3\ (ah/(a-b) -h)\ b^2$
$V_{Stumpf} = 1/3\ h\ (a^3/(a-b) - (a/(a-b) -1)\ b^2)$
$V_{Stumpf} = 1/3\ h\ (a^3/(a-b) - b^3/(a-b))$
$V_{Stumpf} = 1/3\ h\ (a^3-b^3) / (a-b)$
Die Polynomdivision ergibt $(a^3-b^3) : (a-b) = a^2 + ab + b^2$
Da a^2 dem Flächeninhalt G der Grundfläche und b^2 dem Inhalt D der Deckfläche entsprechen, wird
$V_{Stumpf} = 1/3\ h\ (G + ab + D)$
d.h. Volumen $V = h/3\ (G + \sqrt{G\cdot D} + D)$
Für andere Pyramidenstümpfe erfolgt die Herleitung analog.



Gerader Pyramidenstumpf

Es seien V das Volumen, A die Oberfläche, M die Mantelfläche, a die Seitenlänge der größeren Grundfläche, b die Seitenlänge der kleineren Deckfläche, h die Stumpfhöhe und s die Seitenkantenlänge. Unter einem geraden Pyramidenstumpf wird hier ein Stumpf gefordert, dessen Grund- und Deckfläche regelmäßige n-Ecke sind. Dann gilt:

Volumen $V = h/12\ n \cot(\pi/n)\ (a^2 + ab + b^2)$
$V = n/12\ (a^2+ab+b^2) \cot(\pi/n)/\sin(\pi/n) \sqrt{s^2 \sin^2(\pi/n)-(a-b)^2/4}$
$V = n/24\ (a^2+ab+b^2)/\sin(\pi/n)^2 \cos(\pi/n) \sqrt{4h_s^2 - (a^2-2ab+b^2+4h_s^2) \cos^2(\pi/n)}$
Oberfläche $A = (a+b)/2\ n/\sin(\pi/n) \sqrt{h^2 \sin^2(\pi/n) + (a-b)^2/4 \cos^2(\pi/n)} + (a^2+b^2)\ n/4 \cot(\pi/n)$
$A = n/4\ ((a^2+b^2) \cot(\pi/n) + (a+b) \sqrt{-a^2 + 2ab - b^2 + 4s^2})$
$A = n/4\ (a^2+b^2) \cot(\pi/n) + n/2\ (a+b)\ h_s$
Mantelfläche $M = (a+b)/2\ n/\sin(\pi/n) \sqrt{h^2 \sin^2(\pi/n) + (a-b)^2/4 \cos^2(\pi/n)}$
$M = n\ (a+b)/2 \sqrt{s^2 - (a-b)^2/4} = n\ (a+b)/2\ h_s$
Höhe $h = 1/\sin(\pi/n) \sqrt{s^2 \sin^2(\pi/n) - (a-b)^2/4} = \sqrt{(h_s^2 - s^2 \cos^2(\pi/n)) / \sin^2 \pi/n}$
Seitenkante $s = 1/\sin(\pi/n) \sqrt{h^2 \sin^2(\pi/n) + (a-b)^2/4}$
$s = \sqrt{(a^4n^2 - 2a^2b^2n^2 + b^4n^2 + 16M^2) / (2n\ (a+b))} = \sqrt{(h_s^2 \sin^2 \pi/n - h^2) / \cos^2 \pi/n + h^2 + h_s^2}$
Flächenhöhe $h_s = \sqrt{s^2 - (a-b)^2/4} = \sqrt{h^2 + (a-b)^2/4 \cot^2 \pi/n} = \sqrt{s^2 \cos^2 \pi/n + h^2 \sin^2 \pi/n}$

Sind weiterhin γ der Winkel, den die Kanten an der Spitze bilden, β der Neigungswinkel der Seitenflächen zur Grundfläche, δ der Neigungswinkel der Seitenflächen zueinander und α die Neigungswinkel der Kanten gegen die Grundfläche, so wird

Winkel β $\cos\beta = \sqrt{(as/(a-b))^2/((as/(a-b))^2 - a^2/4) - a^2/4/(((as/(a-b))^2 - a^2/4)\sin^2(\pi/n))}$

$\cos\beta = ah/(a-b)\sin(\pi/n) / \sqrt{(ah/(a-b))^2 \sin^2(\pi/n) + a^2/4 \cos^2(\pi/n)}$

Winkel γ $\sin\gamma/2 = a / (2\, as/(a-b))$

$\sin\gamma/2 = a/2 \sin(\pi/n) / \sqrt{\sin^2(\pi/n)(ah/(a-b))^2 + a^2/4}$

Winkel δ $\sin\delta/2 = \cos(\pi/n) / \sqrt{1 - a^2/(4(as/(a-b))^2)}$

$\sin\delta/2 = \cos(\pi/n) / \cos(\gamma/2)$

Winkel α $\sin\alpha = \sqrt{1 - a^2 / (4(as/(a-b))^2 \sin^2(\pi/n))}$

$\sin\alpha = h / s$

$\sin\alpha = \sqrt{h_s^2 - s^2\cos^2(\pi/n)} / (s \sin(\pi/n))$

Gerader Pyramidenstumpf (3)

Es seien V das Volumen, a die Seitenlänge der größeren Grundfläche, b die Seitenlänge der kleineren Deckfläche, h die Stumpfhöhe und s die Seitenkantenlänge. Unter einem geraden Pyramidenstumpf wird hier ein Stumpf gefordert, dessen Grund- und Deckfläche regelmäßige n-Ecke sind. Dann gilt:

n	Volumenformel
3	$V = h/12 \sqrt{3}(a^2 + ab + b^2)$
4	$V = h/3 (a^2 + ab + b^2)$
5	$V = h(a^2 + ab + b^2)\sqrt{5/72\sqrt{5} + 25/144}$
6	$V = h/2 \sqrt{3}(a^2 + ab + b^2)$
8	$V = h(a^2 + ab + b^2)(2/3\sqrt{2} + 2/3)$
10	$V = h(a^2 + ab + b^2)\sqrt{25/18\sqrt{5} + 125/36}$
12	$V = h(a^2 + ab + b^2)(\sqrt{3} + 2)$
16	$V = h(a^2 + ab + b^2)(\sqrt{32/9\sqrt{2} + 64/9} + 4/3\sqrt{2} + 4/3)$
20	$V = h(a^2 + ab + b^2)(\sqrt{50/9\sqrt{5} + 125/9} + 5/3\sqrt{5} + 5/3)$
24	$V = h(a^2 + ab + b^2)(2\sqrt{6} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 4)$
n	$V = h/12\, n \cot(\pi/n)(a^2 + ab + b^2)$

3	$V = (a^2+ab+b^2)/12 \sqrt{-a^2 + 2ab - b^2 + 3s^2}$
4	$V = (a^2+ab+b^2)/6 \sqrt{2}\sqrt{-a^2 + 2ab - b^2 + 2s^2}$
5	$V = (a^2+ab+b^2)(5/48\sqrt{2} + 1/16\sqrt{10})\sqrt{-2a^2 + 4ab - 2b^2 + s^2(5 - \sqrt{5})}$
6	$V = (a^2+ab+b^2)/2 \sqrt{3}\sqrt{-a^2 + 2ab - b^2 + s^2}$
8	$V = (a^2+ab+b^2)\sqrt{14/9\sqrt{2} + 20/9}\sqrt{-a^2 + 2ab - b^2 + s^2(2 - \sqrt{2})}$
10	$V = (a^2+ab+b^2)\sqrt{275/144\sqrt{5} + 625/144}\sqrt{-2a^2 + 4ab - 2b^2 + s^2(3 - \sqrt{5})}$
12	$V = (a^2+ab+b^2)(3/2\sqrt{6} + 5/2\sqrt{2})\sqrt{-a^2 + 2ab - b^2 + s^2(2 - \sqrt{3})}$
16	$V = (a^2+ab+b^2)(16\sqrt{2} + 64/3 + \sqrt{6176/9\sqrt{2} + 8768/9})\sqrt{-a^2 + 2ab - b^2 + s^2(2 - \sqrt{2+\sqrt{2}})}$
n	$V = n/12 (a^2+ab+b^2)\cot(\pi/n)/\sin(\pi/n)\sqrt{s^2\sin^2(\pi/n) - (a-b)^2/4}$

n	Volumenformel
3	$V = (a^2+ab+b^2)/24 \sqrt{-a^2 + 2ab - b^2 + 12h_s^2}$
4	$V = (a^2+ab+b^2)/6 \sqrt{-a^2 + 2ab - b^2 + 4h_s^2}$
5	$V = (a^2+ab+b^2)/32 (5/3\sqrt{2}+\sqrt{10})\sqrt{(-a^2+2ab-b^2)(\sqrt{5}+3) + 4\sqrt{5}\, h_s^2(\sqrt{5}-1)}$
6	$V = (a^2+ab+b^2)/4 \sqrt{3}\sqrt{-3a^2 + 6ab - 3b^2 + 4h_s^2}$
8	$V = (a^2+ab+b^2)/3 \sqrt{5\sqrt{2}+7}\sqrt{(-a^2+2ab-b^2)(1+\sqrt{2}) + 4h_s^2(\sqrt{2}-1)}$
10	$V = (a^2+ab+b^2)/24 \sqrt{275\sqrt{5}+625}\sqrt{(-a^2+2ab-b^2)(\sqrt{5}+5) + 4h_s^2(3 - \sqrt{5})}$
12	$V = (a^2+ab+b^2)/2 (3\sqrt{6}+5\sqrt{2})\sqrt{(-a^2+2ab-b^2)(\sqrt{3}+2) + 4h_s^2(2 - \sqrt{3})}$
n	$V = n/24 (a^2+ab+b^2)/\sin(\pi/n)^2 \cos(\pi/n)\sqrt{4h_s^2 - (a^2-2ab+b^2+4h_s^2)\cos^2(\pi/n)}$

n	Oberflächenformel
3	$A = \sqrt{3}/4 (a^2 + b^2 + (a + b)\sqrt{(a - b)^2 + 12h^2})$
4	$A = a^2 + b^2 + (a+b)\sqrt{4h^2 + (a-b)^2}$
5	$A = \sqrt[4]{500}/4 (a + b)\sqrt{(\sqrt{5}+1)(a-b)^2 + 2\sqrt{5}h^2} + (a^2+b^2)\sqrt{5/8\sqrt{5} + 25/16}$
6	$A = 3/2 (\sqrt{3}(a^2 + b^2) + (a+b)\sqrt{4h^2 + 3(a-b)^2})$
8	$A = (a+b)\sqrt{4\sqrt{2} + 4}\sqrt{(a-b)^2(\sqrt{2}+1) + 4h^2(\sqrt{2}-1)} + 2(a^2+b^2)(\sqrt{2} + 1)$
10	$A = 5(a+b)/8 \sqrt{(a-b)^2(5+\sqrt{5}) + 4h^2(3-\sqrt{5})}(\sqrt{10}+\sqrt{2}) + (a^2+b^2)\sqrt{25/2\sqrt{5} + 125/4}$
12	$A = 3/2 \sqrt{2}(\sqrt{3}+1)(a+b)\sqrt{(a-b)^2(2+\sqrt{3}) + 4h^2(2-\sqrt{3})} + (a^2+b^2)(3\sqrt{3} + 6)$
n	$A = (a+b)/2\, n/\sin(\pi/n)\sqrt{h^2\sin^2(\pi/n) + (a-b)^2/4\cos^2(\pi/n)} + (a^2+b^2)\, n/4 \cot(\pi/n)$

n	Oberflächenformel
3	$A = \sqrt{3}/4 (a^2 + b^2 + \sqrt{3}(a + b)\sqrt{-(a - b)^2 + 4s^2})$
4	$A = a^2 + b^2 + (a+b)\sqrt{4s^2 - (a-b)^2}$
6	$A = 3/2 (\sqrt{3}(a^2 + b^2) + (a + b)\sqrt{4s^2 - (a-b)^2})$
8	$A = 2((a+b)\sqrt{4s^2-(a-b)^2} + (1+\sqrt{2})(a^2 + b^2))$
10	$A = 5/2 (\sqrt{2\sqrt{5}+5}(a^2 + b^2) + (a + b)\sqrt{4s^2 - (a-b)^2})$
12	$A = 3((\sqrt{3}+2)(a^2 + b^2) + (a + b)\sqrt{4s^2 - (a-b)^2})$
16	$A = 4((a+b)\sqrt{4s^2-(a-b)^2} + (\sqrt{2\sqrt{2}+4}+\sqrt{2}+1)(a^2 + b^2))$
24	$A = 6((\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}+2)(a^2 + b^2) + (a + b)\sqrt{4s^2 - (a-b)^2})$

48 $A = 12 (12(\sqrt{7\sqrt{2} + 10} + \sqrt{3\sqrt{2} + 6} + \sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2} + 2) (a^2 + b^2) + (a + b) \sqrt{4s^2 - (a-b)^2})$
n $A = n/4 ((a^2+b^2) \cot (\pi/n) + (a+b) \sqrt{-a^2 + 2ab - b^2 + 4s^2})$

3 $A = \sqrt{3}/4 (a^2 + b^2) + 3/2 (a + b) h_s$
4 $A = a^2 + b^2 + 2(a+b) h_s$
5 $A = \sqrt{25 +10\sqrt{5}}/4 (a^2 + b^2) + 5/2 (a + b) h_s$
6 $A = 3/2 \sqrt{3} (a^2 + b^2) + 3 (a + b) h_s$
8 $A = 2 ((a^2+b^2) (1+\sqrt{2}) + 2(a+b) h_s)$
10 $A = (a^2+b^2)/2 \sqrt{50\sqrt{5} + 125} + 5(a+b) h_s$
12 $A = 3 ((a^2+b^2) (2+\sqrt{3}) + 2(a+b) h_s)$
16 $A = (a^2+b^2) (\sqrt{32\sqrt{2} + 64} + 4\sqrt{2} +4) + 8(a+b) h_s$
n $A = n/4 (a^2+b^2) \cot (\pi/n) + n/2 (a+b) h_s$

n Mantelflächenformel
3 $M = (a+b)/4 \sqrt{3} \sqrt{a^2 - 2ab + b^2 + 12h^2}$
4 $M = (a+b) \sqrt{a^2 - 2ab + b^2 + 4h^2}$
5 $M = (a+b) \sqrt{(a-b)^2 (\sqrt{5}+3) + 4\sqrt{5} h^2 (\sqrt{5}-1)} \sqrt{5/64 \sqrt{5} + 25/64}$
6 $M = 3(a+b)/2 \sqrt{3a^2 - 6ab + 3b^2 + 4h^2}$
8 $M = (a+b) \sqrt{4\sqrt{2} + 4} \sqrt{(a-b)^2 (\sqrt{2}+1) + 4h^2 (\sqrt{2}-1)}$
10 $M = (a+b) \sqrt{\sqrt{5} (a-b)^2 (\sqrt{5}+1) + 4h^2 (3-\sqrt{5})} (5/8 \sqrt{10} + 5/8 \sqrt{2})$
12 $M = 3(a+b)/2 \sqrt{2} (\sqrt{3}+1) \sqrt{(a-b)^2 (\sqrt{3}+2) + 4h^2 (2-\sqrt{3})}$
16 $M = 4(a+b) \sqrt{4+2\sqrt{2}-\sqrt{14\sqrt{2}+20}} \sqrt{(a-b)^2/2 (2+\sqrt{2+\sqrt{2}}) + 2h^2(2-\sqrt{\sqrt{2}+2})}$
n $M = (a+b)/2\ n/\sin (\pi/n) \sqrt{h^2 \sin^2 (\pi/n) + (a-b)^2/4 \cos^2 (\pi/n)}$

n Mantelflächenformel
3 $M = 3/2 (a+b) \sqrt{s^2 - (a-b)^2/4}$
4 $M = 2 (a+b) \sqrt{s^2 - (a-b)^2/4}$
5 $M = 5/2 (a+b) \sqrt{s^2 - (a-b)^2/4}$
6 $M = 3 (a+b) \sqrt{s^2 - (a-b)^2/4}$
8 $M = 4 (a+b) \sqrt{s^2 - (a-b)^2/4}$
10 $M = 5 (a+b) \sqrt{s^2 - (a-b)^2/4}$
12 $M = 6 (a+b) \sqrt{s^2 - (a-b)^2/4}$
16 $M = 8 (a+b) \sqrt{s^2 - (a-b)^2/4}$
n $M = n (a+b)/2 \sqrt{s^2 - (a-b)^2/4}$

n Mantelflächenformel
3 $M = 3/2 (a+b) h_s$
4 $M = 2 (a+b) h_s$
5 $M = 5/2 (a+b) h_s$
6 $M = 3 (a+b) h_s$
8 $M = 4 (a+b) h_s$
10 $M = 5 (a+b) h_s$
12 $M = 6 (a+b) h_s$
16 $M = 8 (a+b) h_s$
n $M = n (a+b)/2 h_s$

n Seitenkantenformel
3 $s = 1/3 \sqrt{3} \sqrt{(a-b)^2 + 3h^2}$
4 $s = 1/2 \sqrt{2} \sqrt{(a-b)^2 + 2h^2}$
5 $s = \sqrt{2(a-b)^2 + \sqrt{5} h^2 (\sqrt{5}-1)} \sqrt{\sqrt{5}/20 + 1/4}$
6 $s = \sqrt{(a-b)^2 + h^2}$
8 $s = \sqrt{(a-b)^2 + \sqrt{2} h^2 (\sqrt{2}-1)} \sqrt{\sqrt{2}/2 + 1}$
10 $s = \sqrt{2(a-b)^2 + h^2 (3-\sqrt{5})} \sqrt{\sqrt{10} /4 + \sqrt{2} /4}$
12 $s = 1/2 \sqrt{2} (\sqrt{3}+1) \sqrt{(a-b)^2 + h^2 (2-\sqrt{3})}$
n $s = 1/\sin(\pi/n) \sqrt{h^2 \sin^2 (\pi/n) + (a-b)^2/4}$

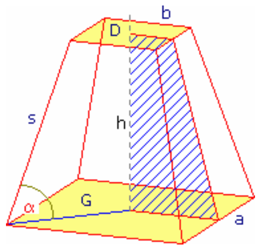
n Seitenkantenformel
3 $s = \sqrt{4h_s^2 - 3h^2}$
4 $s = \sqrt{2h_s^2 - h^2}$
5 $s = \sqrt{h^2 (\sqrt{5} - 5) + 8h_s^2} (\sqrt{10} - \sqrt{2})/4$
6 $s = \sqrt{3}/3 \sqrt{4h_s^2 - h^2}$
8 $s = \sqrt{\sqrt{2}-1} \sqrt{h^2 (1-\sqrt{2}) + 2\sqrt{2} h_s^2}$
10 $s = \sqrt{h^2 (\sqrt{5} - 3) + 8h_s^2} \sqrt{1/4 - \sqrt{5}/20}$
12 $s = 1/2 \sqrt{2} (\sqrt{3}-1) \sqrt{h^2 (\sqrt{3}-2) + 4h_s^2}$
n $s = \sqrt{(h_s^2 \sin^2 \pi/n - h^2) / \cos^2 \pi/n + h^2 + h_s^2}$

n Flächenhöhenformel

3	$h_s = \sqrt{3}/6 \sqrt{(a-b)^2 + 12h^2}$
4	$h_s = 1/2 \sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}$
5	$h_s = \sqrt[4]{125}/10 \sqrt{(a-b)^2 (2+\sqrt{5}) + 4\sqrt{5}\, h^2}$
6	$h_s = 1/2 \sqrt{3(a-b)^2 + 4h^2}$
8	$h_s = 1/2 \sqrt{(a-b)^2 (3+2\sqrt{2}) + 4h^2}$
10	$h_s = 1/2 \sqrt{(a-b)^2 (2\sqrt{5}+5) + 4\, h^2}$
12	$h_s = 1/2 \sqrt{(a-b)^2 (4\sqrt{3}+7) + 4\, h^2}$
16	$h_s = 1/2 \sqrt{(a-b)^2 (\sqrt{2\sqrt{2}+4} + \sqrt{2}+1)^2 + 4\, h^2}$
20	$h_s = 1/2 \sqrt{(a-b)^2 (\sqrt{2\sqrt{5}+5} + \sqrt{5}+1)^2 + 4\, h^2}$
n	$h_s = \sqrt{h^2 + (a-b)^2/4 \cot^2 \pi/n}$

n	Höhenformel
3	$h = \sqrt{3}/3 \sqrt{3s^2 - (a-b)^2}$
4	$h = \sqrt{2}/2 \sqrt{2s^2 - (a-b)^2}$
5	$h = \sqrt{\sqrt{5}/20 + 1/4} \sqrt{(5-\sqrt{5})s^2 - 2(a-b)^2}$
6	$h = \sqrt{s^2 - (a-b)^2}$
8	$h = \sqrt{\sqrt{2}/2 +1} \sqrt{(2-\sqrt{2})s^2 - (a-b)^2}$
10	$h = (\sqrt{10}/4 + \sqrt{2}/4) \sqrt{(3-\sqrt{5})s^2 - 2(a-b)^2}$
12	$h = \sqrt{2}/2 (\sqrt{3} +1) \sqrt{(2-\sqrt{3})s^2 - (a-b)^2}$
16	$h = \sqrt{2 - \sqrt{\sqrt{2}+2}} \sqrt{(2-\sqrt{\sqrt{2}+2})s^2 - (a-b)^2}$
n	$h = 1/\sin(\pi/n) \sqrt{s^2 \sin^2 (\pi/n) - (a-b)^2/4}$

n	Höhenformel
3	$h = \sqrt{3}/3 \sqrt{4h_s^2 - s^2}$
4	$h = \sqrt{2h_s^2 - s^2}$
5	$h = \sqrt{8h_s^2 - s^2(\sqrt{5}+3)}\ (\sqrt{5}/20 + 1/4)$
6	$h = \sqrt{4h_s^2 - 3s^2}$
8	$h = \sqrt{2\sqrt{2}\, h_s^2 - s^2(\sqrt{2}+1)} \sqrt{\sqrt{2}+1}$
10	$h = \sqrt{8h_s^2 - \sqrt{5}\, s^2(\sqrt{5}+1)}\ \sqrt{2}/4 (1+\sqrt{5})$
12	$h = \sqrt{4h_s^2 - s^2(\sqrt{3}+2)}\ \sqrt{2}/2 (1+\sqrt{3})$
n	$h = \sqrt{(h_s^2 - s^2 \cos^2 (\pi/n)) / \sin^2 \pi/n}$



Gerader Pyramidenstumpf (10)

Die Berechnung des Volumens oder der Oberfläche eines Pyramidenstumpfs aus den Grundseiten und der Höhe ist elementar.
Allerdings ändert sich der Schwierigkeitsgrad der Aufgabe sofort, wenn aus anderen gegebenen Stücken der Stumpf zu berechnen ist. Als Beispiel sei folgendes Problem genannt:

1. Gegeben sind eine Grundseite, z.B. b, das Volumen V des n-seitigen Stumpfs und die Mantelfläche M. Diese Aufgabe wird anspruchsvoll und führt zu der ganzrationalen Gleichung 8.Grades:

$$0 = - 576 V^2 (a^2 + 2ab + b^2) \sin^4 (\pi/n) / \cos^2 (\pi/n) + (a^8n^2 + 2a^7bn^2 + a^6b^2n^2 - 2a^5b^3n^2 + 4a^4 (4M^2 - b^4n^2) + 2a^3b (16M^2 - b^4n^2) + a^2 (b^6n^2 + 48b^2M^2) + a (2b^7n^2 + 32b^3M^2) + b^8n^2 + 16b^4M^2) \sin^2 (\pi/n) - a^8n^2 - 2a^7bn^2 - a^6b^2n^2 + 2a^5b^3n^2 + 4a^4b^4n^2 + 2a^3b^5n^2 - a^2b^6n^2 - 2ab^7n^2 - b^8n^2$$

Zur Bestimmung der zweiten Grundseite a und aller anderen Größen muss diese Gleichung gelöst werden. Dies ist nur mit einem Näherungsverfahren möglich.

2. Gegeben sind von einem n-seitigen Pyramidenstumpf die Höhe h, das Volumen V und die Seitenkante s. Dann ist die Grundseite b des Stumpfs Nullstelle des Polynoms:

$$0 = 9h^2 n^2 b^4/\sin^2(\pi/n) + (-72 h n V/(\sin (\pi/N) \cos (\pi/n)) + 12 h^4 n^2 - 12 h^2 n^2 s^2) b^2 + 96 h^3 n V \tan(\pi/n) - 96 h n s^2 V \tan(\pi/n) + 144 V^2/\cos^2(\pi/n) + 16 h^6 b^2 \sin^2(\pi/n) - 32 h^4 n^2 s^2 \sin^2(\pi/n) + 16 h^2 n^2 s^4 \sin^2(\pi/n)$$

geg.: Oberfläche A, Mantelfläche M, Seitenflächenhöhe h_s, Grundseite b ist Lösung von
$0 = h_s^2 n^2 \cot(\pi/n) b^2 - 2 M h_s n \cot(\pi/n) b + 2 M^2 \cot(\pi/n) - 2 A h_s^2 n + 2 h_s^2 n M$

geg.: Höhe h, Volumen V, Seitenflächenhöhe h_s, Grundseite b ist Lösung von
$0 = 3 \cot(\pi/n) b^2 + 6 \sqrt{h_s^2 - h^2}\, b + 4 (h_2^2 - h^2) \tan(\pi/n) - 12 V/n/h$

geg.: Oberfläche A, Seitenkante s, Seitenflächenhöhe h_s, Grundseite b ist Lösung von
$0 = \cot(\pi/n) b^2 + 2 \sqrt{s^2 - h_s^2} \cot(\pi/n) b + 2 h_s b + 2 (s^2 - h_2^2) \cot(\pi/n) + 2 h_s \sqrt{s^2 - h_s^2} - 2A/n$

geg.: Mantelfläche M, Seitenkante s, Seitenflächenhöhe h_s, Grundseite b ist Lösung von
$0 = h_s^2 n b^2 - 2 h_s M b + h_s^4 n - s^2 h_s^2 n + M^2/n$

3. Gegeben sind von einem n-seitigen Pyramidenstumpf die Oberfläche A, die Mantelfläche M und die Seitenkante s. Dann ist die Grundseite b des Stumpfs Nullstelle des Polynoms:

$$0 = 16\, n^4 \cos^4(\pi/n)\, b^8 + 128\, n^3 (M-M) \sin(\pi/n) \cos^3(\pi/n)\, b^6 + (-64\, n^2 (2 A^2 -4 A M - b^2 s^4) \cos^4(\pi/n) + 128\, n^3 s^2 (M -A) \sin(\pi/n) \cos^3(\pi/n) + (256 A^2 n^2 - 512 A M n^2 + 256 M^2 n^2) \sin^2(\pi/n) \cos^2(\pi/n) + (128 A^2 n^2 - 256 A M n^2 + 128 M^2 n^2) \cos^2(\pi/n))\, b^4 + (256\, n (2 A^3 - 6 A^2 M + A (4 M^2 - n^2 s^4 + M n^2 s^4)) \sin(\pi/n) \cos^3(\pi/n) + (512 A^2 n^2 s^2 - 1024 A M n^2 s^2 + 512 M^2 n^2 s^2) \sin^2(\pi/n) \cos^2(\pi/n) - 512\, n (A^3 - 3 A^2 M + 3 A M^2 - M^3) \sin(\pi/n) \cos(\pi/n))\, b^2 (256 A^4 - 1024 A^3 M + 1024 A^2 M^2) \cos^4(\pi/n) + 512 A n s^2 (A^2 - 3 A M +2 M^2) \sin(\pi/n) \cos^3(\pi/n) + (256 A^2 n^2 s^4 - 512 A M n^2 s^4 + 256 M^2 n^2 s^4) \sin^2(\pi/n) \cos^2(\pi/n) - 512 A (A^3 - 4 A^2 M + 5 A M^2 - 2 M^3) \cos^2(\pi/n) - 512\, n s^2 (A^3 - 3 A^2 M + 3 A M^2 - M^3) \sin(\pi/n) \cos(\pi/n) + 256 A^4 - 1024 A^3 M + 1536 A^2 M^2 - 1024 A M^3 +256 M^4$$

4. Gegeben sind von einem n-seitigen Pyramidenstumpf die Höhe h, die Oberfläche A und eine Grundkante a. Dann ist die Grundseite b des Stumpfs Nullstelle des Polynoms:

$$0 = (4 a^2 n^2 \cos^2(\pi/n) + 4 h^2 n^2 \cos^2(\pi/n) - 8 A n \sin(\pi/n) \cos(\pi/n) - 4 h^2 n^2)\, b^6 + (8 a^3 n^2 \cos^2(\pi/n) + 16 a h^2 n^2 \cos^2(\pi/n) -16 a A n \sin(\pi/n) \cos(\pi/n) - 16 a h^2 n^2)\, b^5 + (12 a^2 n^2 \cos^2(\pi/n) + 32 a^2 h^2 n^2 \cos^2(\pi/n) - 16 A^2 \cos^2(\pi/n) - 32 a^2 A n \sin(\pi/n) \cos(\pi/n) - 32 a^2 h^2 n^2 + 16 A^2)\, b^4 + (8 a^5 n^2 \cos^2(\pi/n) + 40 a^3 h^2 n^2 \cos^2(\pi/n) - 32 a A^2 \cos^2(\pi/n) - 32 a^3 A n \sin(\pi/n) \cos(\pi/n) - 40 a^3 h^2 n^2 + 32 a A^2)\, b^3 + (4 a^6 n^2 \cos^2(\pi/n) + 32 a^4 h^2 n^2 \cos^2(\pi/n) - 48 a^2 A^2 \cos^2(\pi/n) - 32 a^4 A n \sin(\pi/n) \cos(\pi/n) - 32 a h^2 n^2 + 48 a^2 A^2)\, b^2 + (16 a^5 h^2 n^2 \cos^2(\pi/n) - 32 a^3 A^2 \cos^2(\pi/n) - 16 a^5 A n \sin(\pi/n) \cos(\pi/n) - 16 a^5 h^2 n^2 + 32 a^3 A^2)\, b + 4 a^6 h^2 n^2 \cos^2(\pi/n) - 16 a^4 A^2 \cos^2(\pi/n) - 8 a^6 A n \sin(\pi/n) \cos(\pi/n) - 4 a^6 h^2 n^2 + 16 a^4 A^2$$

5. Gegeben sind von einem n-seitigen Pyramidenstumpf das Volumen V, die Oberfläche A und eine Grundkante a. Dann ist die Grundseite b des Stumpfs Nullstelle des Polynoms:

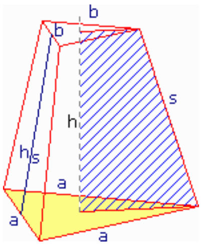
$$0 = (4 a^2 n^2 \cos^2(\pi/n) - 8 A n \sin(\pi/n) \cos(\pi/n))\, b^6 + (8 a^3 n^2 \cos^2(\pi/n) - 16 a A n \sin(\pi/n) \cos(\pi/n))\, b^5 + (12 a^4 n^2 \cos^2(\pi/n) - 16 A^2 \cos^2(\pi/n) - 32 a^2 A n \sin(\pi/n) \cos(\pi/n) + 16 A^2)\, b^4 + (8 a^5 n^2 \cos^2(\pi/n) - 32 a A^2 \cos^2(\pi/n) -32 a^3 A n \sin(\pi/n) \cos(\pi/n) + 32 a A^2)\, b^3 + (4 a^6 n^2 \cos^2(\pi/n) -48 a^2 A^2 \cos^2(\pi/n) - 32 a^4 A n \sin(\pi/n) \cos(\pi/n) - 576 V^2 \sin^4(\pi/n)/\cos^2(\pi/n) + 48 a^2 A^2)\, b^2 + (-32 a^3 A^2 \cos^2(\pi/n) - 16 a^5 A n \sin(\pi/n) \cos(\pi/n) - 1152 a V^2 \sin^4(\pi/n)/\cos^2(\pi/n) + 32 a^3 A^2)\, b - 16 a^4 A^2 \cos^2(\pi/n) -8 a^6 A n \sin(\pi/n) \cos(\pi/n) - 576 a^2 V^2 \sin^4(\pi/n)/\cos^2(\pi/n) + 16 a^4 A^2$$

6. geg.: Grundseite a, Volumen V, Flächenhöhe h_s. Dann ist b Lösung des Polynoms

$$0 = (1 -1/\sin^2(\pi/n))\, b^6 + 4 h_s^2 b^4 + (2 a^3/\sin^2(\pi/n) + 2 a (4 h_s^2 - a^2))\, b^3 + 12 a^2 h_s^2 b^2 + 8 a^3 h_s^2 b - 576 V^2 \tan^2(\pi/n) /n^2 - a^6 /\sin^2(\pi/n) + a^6 + 4 a^4 h_s^2$$

7. Gegeben sind von einem n-seitigen Pyramidenstumpf das Volumen V, die Mantelfläche A und eine Grundkante a. Dann ist die Grundseite b des Stumpfs Nullstelle des Polynoms:

$$0 = (n^2 \sin^2(\pi/n) - n^2)\, b^8 + (2 a n^2 \sin^2(\pi/n) - 2 a n^2)\, b^7 + (a^2 n^2 \sin^2(\pi/n) - a^2 n^2)\, b^6 + (-2 a^3 n^2 \sin^2(\pi/n) + 2 a^3 n^2)\, b^5 + (-4 a^4 n^2 \sin^2(\pi/n) + 16 M^2 \sin^2(\pi/n) + 4 a^4 n^2)\, b^4 + (-2 a^5 n^2 \sin^2(\pi/n) + 32 a M^2 \sin^2(\pi/n) + 2 a^5 n^2)\, b^3 + (-576 V^2 \sin^4(\pi/n) / \cos^2(\pi/n) + a^6 n^2 \sin^2(\pi/n) + 48 a^2 M^2 \sin^2(\pi/n) - a^6 n^2)\, b^2 + (-1152 a V^2 \sin^4(\pi/n) / \cos^2(\pi/n) + 2 a^7 n^2 \sin^2(\pi/n) + 32 a^3 M^2 \sin^2(\pi/n) - 2 a^7 n^2)\, b - 576 a^2 V^2 \sin^4(\pi/n) / \cos^2(\pi/n) + a^8 n^2 \sin^2(\pi/n) + 16 a^4 M^2 \sin^2(\pi/n) - a^8 n^2$$



Gerader dreiseitiger Pyramidenstumpf

Es seien V das Volumen, A die Oberfläche, M die Mantelfläche, a die Seitenlänge der Grundfläche, b die Seitenlänge der Deckfläche, h die Stumpfhöhe, h_s die Seitenflächenhöhe und s die Seitenkantenlänge. Grund- und Deckfläche des geraden dreiseitigen Pramidenstumpfes sind hier gleichseitige Dreiecke. Dann gilt:

Volumen V $\quad V = \sqrt{3} /12\, h (a^2 + a b + b^2)$

$V = (a^2+ab+b^2)/12 \sqrt{-a^2 + 2ab - b^2 + 3s^2}$

$V = (a^2+ab+b^2)/24 \sqrt{-a^2 + 2ab - b^2 + 12h_s^2}$

$V = \sqrt{3}/4\, h (\sqrt{3}\, a \sqrt{s^2 - h^2} + a^2 - h^2 + s^2)$

Oberfläche A $\quad A = \sqrt{3}/4 (a^2 + b^2) + 3/2 (a + b) h_s = \sqrt{3}/4 (a^2 + b^2) + M$

$A = \sqrt{3}/4 (a^2 + b^2 + (a + b) \sqrt{(a - b)^2 + 12 h^2})$

$A = \sqrt{3}/4 (a^2 + b^2 + \sqrt{3} (a + b) \sqrt{-(a - b)^2 + 4 s^2})$

Mantelfläche M $M = 3/2 (a + b) h_s = (a+b)/4 \sqrt{3} \sqrt{a^2 - 2ab + b^2 + 12h^2}$

$M = (a+b)/2 \sqrt{s^2 - (a-b)^2/4} = A - \sqrt{3}/4 (a^2 + b^2) = 3/2 (a+b) \sqrt{s^2 - (a-b)^2/4}$

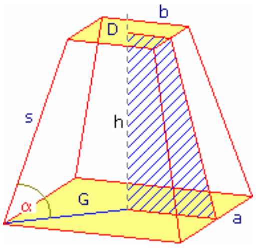
Seitenflächenhöhe h_s $\quad h_s = 2 M / (3 a + 3 b) = -1/6 (-4 A + \sqrt{3} (a^2 + b^2)) / (a + b)$

$h_s = 1/6 \sqrt{3} \sqrt{a^2 - 2ab + b^2 + 12 h^2}$

$h_s = 1/6 \sqrt{3} \sqrt{(a^6 - 2a^3b^3 + b^6 + 576 V^2)/(a^2 + ab + b^2)} = 1/2 \sqrt{4s^2 - (a - b)^2}$

Höhe h $h = 12 V / [\sqrt{3} + (a^2 + a b + b^2)] = \sqrt{2A - \sqrt{3} a^2} \sqrt{2A - \sqrt{3} b^2} / (3a + 3b)$

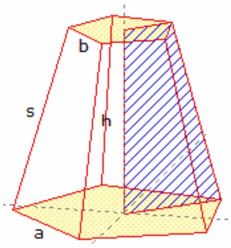
$h = 1/6\ \sqrt{3}\ \sqrt{-a^2 + 2ab - b^2 + 12\ h_s^2} = \sqrt{3}/3\ \sqrt{3s^2 - (a - b)^2}$
$h = \sqrt{16\ M^2 - 3a^4 + 6a^2b2 - 3b^4} / (6a + 6b) = \sqrt{3}/3\ \sqrt{4h_s^2 - s^2}$
Kantenlänge b $b = 2/3\ M / h_s - a = \sqrt{3}\ \sqrt{s^2 - h^2} + a$; wenn $b > a$
$b = -\sqrt{3}\ h_s + 1/3\sqrt{27\ h_s^2 + 12\sqrt{3}\ A - 9a^2 - 18\sqrt{3}\ h_s\ a} = \sqrt{[\ 12\ V / (\sqrt{3}\ h) - 3/4\ a^2\ ]} - a/2$
$b = 2\ \sqrt{s^2 - h_s^2} + a$; wenn $b > a$
Seitenkante s $s = \sqrt{3}/3\ \sqrt{a^2 - 2ab + b^2 + 3h^2}$
$s = 1/3\ \sqrt{3}\ \sqrt{(a^6 - 2a^3b^3 + b^6 + 144\ V^2)/(a^2 + ab + b^2)} = 1/2\ \sqrt{(a - b)^2 + 4\ h_s^2}$
$s = \sqrt{a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 16\ M^2} / (2a + 2b) = \sqrt{4h_s^2 - 3h^2}$
Winkel α $\sin\alpha = h / s$
$\sin\alpha = \sqrt{3}/(3s)\ \sqrt{-(a-b)^2 + 3s^2}$
$\sin\alpha = 1/\sqrt{3}\ \sqrt{12h_s^2 - (a-b)^2} / \sqrt{4h_s^2 + (a-b)^2}$



Gerader quadratischer Pyramidenstumpf

Es seien V das Volumen, A die Oberfläche, M die Mantelfläche, a die Seitenlänge der Grundfläche, b die Seitenlänge der Deckfläche, h die Stumpfhöhe, h_s die Seitenflächenhöhe und s die Seitenkantenlänge. Grund- und Deckfläche des geraden quadratischen Pramidenstumpfes sind hier Quadrate. Dann gilt:

Volumen $V = h/3\ (a^2 + ab + b^2)$
$V = (a^2+ab+b^2)/6\ \sqrt{2}\ \sqrt{-a^2 + 2ab - b^2 + 2s^2}$
$V = (a^2+ab+b^2)/6\ \sqrt{4h_s^2 - (a-b)^2}$
Oberfläche $A = a^2 + b^2 + (a+b)\ \sqrt{4s^2 - (a-b)^2} = a^2 + b^2 + 2(a+b)\ h_s$
$A = a^2 + b^2 + (a+b)\ \sqrt{4h^2 + (a-b)^2} = a^2 + b^2 + M$
Mantelfläche $M = 2(a+b)\ h_s = (a+b)\ \sqrt{a^2 - 2ab + b^2 + 4h^2}$
$M = A - a^2 - b^2 = 2\ (a+b)\ \sqrt{s^2 - (a-b)^2/4}$
Seitenkante $s = \sqrt{h^2 + (\sqrt{2}\ a/2 - \sqrt{2}\ b/2)^2} = 1/2\ \sqrt{4h_s^2 + (a-b)^2}$
$s = \sqrt{18\ V^2 + (a^3-b^3)^2} / (\sqrt{2}\ (a^2 + ab + b^2))$
$s = \sqrt{2a^4 - 2a^2A + 2b^4 - 2b^2A + A^2} / (2a + 2b)$
$s = \sqrt{16M^2 + (a^2-b^2)^2} / (2a + 2b) = \sqrt{2h_s^2 - h^2}$
Höhe $h = \sqrt{h_s^2 - (a-b)^2/4} = 1/\sqrt{2}\ \sqrt{2s^2 - (a-b)^2} = \sqrt{M^2 - (a^2-b^2)^2} / (2a + 2b)$
$h = 3V / (a^2 + ab + b^2) = \sqrt{2b^2 - A}\ \sqrt{2a^2 - A} / (2a + 2b) = \sqrt{2h_s^2 - s^2}$
Seitenhöhe $h_s = \sqrt{s^2 - (a-b)^2/4} = \sqrt{h^2 + (a-b)^2/4}$
$h_s = \sqrt{36\ V^2 + (a^3-b^3)^2} / (2a^2 + 2ab + 2b^2) = (A - a^2 - b^2) / (2a + 2b) = M / (2a + 2b)$
Winkel $\alpha = \arcsin(h/s) = \arctan(\sqrt{2s^2 - (a-b)^2} / (a-b)) = \arctan(\sqrt{2}\ h / (a-b))$
$\alpha = \arctan(\sqrt{2}\ \sqrt{4h_s^2 - (a-b)^2} / (2a-2b)) = \arctan(3\sqrt{2}\ V / ((a-b)\ (a^2+ab+b^2)))$

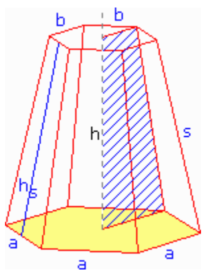


Gerader fünfseitiger Pyramidenstumpf

Es seien V das Volumen, A die Oberfläche, M die Mantelfläche, a die Seitenlänge der Grundfläche, b die Seitenlänge der Deckfläche, h die Stumpfhöhe, h_s die Seitenflächenhöhe und s die Seitenkantenlänge. Grund- und Deckfläche des geraden fünfseitigen Pramidenstumpfes sind hier regelmäßige Fünfecke. Dann gilt:

Volumen V $V = \sqrt{5/72\ \sqrt{5} + 25/144}\ h\ (a^2 + a\ b + b^2)$
$V = (a^2+ab+b^2)\ (5/3\ \sqrt{2} + \sqrt{10})/16\ \sqrt{-2(a-b)^2 + s^2\ (5 - \sqrt{5})}$
$V = (a^2+ab+b^2)/12\ \sqrt{5 + 5/2\ \sqrt{5}}\ \sqrt{-(a-b)^2\ (\sqrt{5}+1) + 2\sqrt{5}\ h_s^2}$
Oberfläche A $A = \sqrt{(25 + 10\sqrt{5})/4}\ (a^2 + b^2) + 5/2\ (a + b)\ h_s$
$A = \sqrt[4]{500}/4\ (a + b)\ \sqrt{(\sqrt{5}+1)\ (a-b)^2 + 2\sqrt{5}\ h^2} + (a^2+b^2)\ \sqrt{5/8\ \sqrt{5} + 25/16}$
Mantelfläche M $M = 5/2\ (a + b)\ h_s = (a+b)\ \sqrt{(a-b)^2\ (\sqrt{5}+3) + 4\sqrt{5}\ h^2\ (\sqrt{5}-1)}\ \sqrt{5/64\ \sqrt{5} + 25/64}$
$M = 5/2\ (a+b)\ \sqrt{s^2 - (a-b)^2/4}$
Höhe h $h = \sqrt{h_s^2 - (\sqrt{5}/10 + 1/2)\ (a - b)^2} = \sqrt{\sqrt{5}/20 + 1/4}\ \sqrt{s^2\ (5 - \sqrt{5}) - 2\ (a-b)^2}$
$h = V\ \sqrt{144/5 - 288/25\ \sqrt{5}} / (a^2+ab+b^2) = \sqrt{8h_s^2 - s^2(\sqrt{5}+3)}\ (\sqrt{5}/20 + 1/4)$
Seitenkante $s = \sqrt{2(a-b)^2 + \sqrt{5}\ h^2\ (\sqrt{5}-1)}\ \sqrt{\sqrt{5}/20 + 1/4}$
$s = \sqrt{h^2\ (\sqrt{5} - 5) + 8h_s^2}\ (\sqrt{10} - \sqrt{2})/4$
Seitenflächenhöhe h_s $h_s = \sqrt{h^2 + (\sqrt{5}/10 + 1/2)\ (a - b)^2}$
$h_s = \sqrt[4]{20}\ \sqrt{5\ (a^3-b^3)^2\ (\sqrt{5}+1) + 288\ V^2\ (\sqrt{5}-2)} / (10(a^2+ab+b^2))$
$h_s = \sqrt{s^2 - (a-b)^2/4}$
Grundkreisradius R $R = \sqrt{50 + 10\ \sqrt{5}}/10\ a$
Deckkreisradius r, d.h. Radius des Umkreises der Deckfläche $r = \sqrt{50 + 10\ \sqrt{5}}/10\ b$
Winkel α $\sin\alpha = h / s$

Gerader sechsseitiger Pyramidenstumpf



Es seien V das Volumen, A die Oberfläche, M die Mantelfläche, a die Seitenlänge der Grundfläche, b die Seitenlänge der Deckfläche, h die Stumpfhöhe, h_s die Seitenflächenhöhe und s die Seitenkantenlänge. Grund- und Deckfläche des geraden sechsseitigen Pramidenstumpfes sind hier regelmäßige Sechsecke.
Damit ist a auch der Grundkreisradius, b der Umkreisradius der Deckfläche. Dann gilt:

Volumen V $V = \sqrt{3}/2\, h\, (a^2 + a\, b + b^2) = (a^2+ab+b^2)/2\, \sqrt{3}\, \sqrt{-a^2 + 2ab - b^2 + s^2}$

$V = \sqrt{3}\, (a^2+ab+b^2)/4\, \sqrt{4h_s^2 - 3\, (a-b)^2}$

Oberfläche A $A = 3/2\, \sqrt{3}\, (a^2 + b^2) + 3\, (a + b)\, h_s = 3/2\, \sqrt{3}\, (a^2 + b^2) + M$

$A = 3/2\, (\sqrt{3}\, (a^2 + b^2) + (a+b)\, \sqrt{4h^2 + 3\, (a-b)^2})$

$A = 3/2\, (\sqrt{3}\, (a^2 + b^2) + (a + b)\, \sqrt{4s^2 - (a-b)^2})$

Mantelfläche M $M = 3\, (a + b)\, h_s = 3(a+b)/2\, \sqrt{3a^2 - 6ab + 3b^2 + 4h^2}$

$M = A - 3/2\, \sqrt{3}\, (a^2 + b^2) = 3\, (a+b)\, \sqrt{s^2 - (a-b)^2/4}$

Seitenkante s $s = \sqrt{(a-b)^2 + h^2} = 1/2\, \sqrt{(a-b)^2 + 4\, h_s^2}$

$s = \sqrt{4/3\, V^2/(a^2+ab+b^2)^2 + (a-b)^2}$

$s = 1/2\, \sqrt{((2/3\, A - \sqrt{3}\, (a^2+b^2))/(a+b))^2 + (a-b)^2} = \sqrt{3}/3\, \sqrt{4h_s^2 - h^2}$

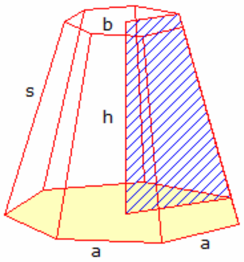
Seitenflächenhöhe h_s $h_s = M / (3\, a + 3\, b) = (A - 3/2\, \sqrt{3}\, (a^2 + b^2)) / (3\, a + 3\, b)$

$h_s = \sqrt{h^2 + 3/4\, (a - b)^2} = 1/2\, \sqrt{4s^2 - (a-b)^2}$

Höhe h $h = 2\, V / (\sqrt{3} + (a^2 + a\, b + b^2)) = 1/2\, \sqrt{4h_s^2 - 3\, (a-b)^2} = \sqrt{s^2 - (a-b)^2}$

$h = 1/2\, \sqrt{((2/3\, A - \sqrt{3}\, (a^2+b^2))/(a+b))^2 - 3(a-b)^2} = \sqrt{4h_s^2 - 3s^2}$

schraffierte Fläche der Abbildung $A_F = 1/2\, (a + b)\, h$



Gerader siebenseitiger Pyramidenstumpf

Es seien V das Volumen, A die Oberfläche, M die Mantelfläche, a die Seitenlänge der Grundfläche, b die Seitenlänge der Deckfläche, h die Stumpfhöhe, h_s die Seitenflächenhöhe und s die Seitenkantenlänge. Grund- und Deckfläche des geraden siebenseitigen Pramidenstumpfes sind hier regelmäßige Siebenecke. Da ein regelmäßiges Siebeneck nicht allein mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, existieren nur Formeln mit nicht algebraisch darstellbaren trigonometrischen Termen. Es gilt:

Volumen $V = 7h/12\, \cot(\pi/7)\, (a^2 + ab + b^2)$

$V = 7/12\, (a^2+ab+b^2)\, \cot(\pi/7)/\sin(\pi/7)\, \sqrt{s^2 \sin^2(\pi/7) - (a-b)^2/4}$

$V = 7/24\, (a^2+ab+b^2)/\sin(\pi/7)^2\, \cos(\pi/7)\, \sqrt{4h_s^2 - (a^2-2ab+b^2+4h_s^2) \cos^2(\pi/7)}$

Oberfläche $A = 7(a+b)/2/\sin(\pi/7)\, \sqrt{h^2 \sin^2(\pi/7) + (a-b)^2/4\, \cos^2(\pi/7)} + (a^2+b^2)\, 7/4\, \cot(\pi/7)$

$A = 7/4\, ((a^2+b^2) \cot(\pi/7) + (a+b)\, \sqrt{-a^2 + 2ab - b^2 + 4s^2})$

$A = 7/4\, (a^2+b^2) \cot(\pi/7) + 7/2\, (a+b)\, h_s$

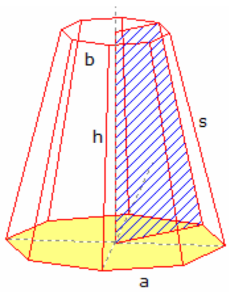
Mantelfläche $M = 7(a+b)/2/\sin(\pi/7)\, \sqrt{h^2 \sin^2(\pi/7) + (a-b)^2/4\, \cos^2(\pi/7)}$

$M = 7\, (a+b)/2\, \sqrt{s^2 - (a-b)^2/4} = 7\, (a+b)/2\, h_s$

Höhe $h = 1/\sin(\pi/7)\, \sqrt{s^2 \sin^2(\pi/7) - (a-b)^2/4} = \sqrt{(h_s^2 - s^2 \cos^2(\pi/7)) / \sin^2 \pi/7}$

Seitenkante $s = 1/\sin(\pi/7)\, \sqrt{h^2 \sin^2(\pi/7) + (a-b)^2/4} = \sqrt{(h_s^2 \sin^2 \pi/7 - h^2) / \cos^2 \pi/7 + h^2 + h_s^2}$

Flächenhöhe $h_s = \sqrt{s^2 - (a-b)^2/4} = \sqrt{h^2 + (a-b)^2/4\, \cot^2 \pi/7} = \sqrt{s^2 \cos^2 \pi/7 + h^2 \sin^2 \pi/7}$



Gerader achtseitiger Pyramidenstumpf

Es seien V das Volumen, A die Oberfläche, M die Mantelfläche, a die Seitenlänge der Grundfläche, b die Seitenlänge der Deckfläche, h die Stumpfhöhe, h_s die Seitenflächenhöhe und s die Seitenkantenlänge. Grund- und Deckfläche des geraden achtseitigen Pramidenstumpfes sind hier regelmäßige Achtecke. Dann gilt:

Volumen V $V = h\, (a^2 + ab + b^2)\, (2/3\, \sqrt{2} + 2/3)$

$V = (a^2+ab+b^2)\, \sqrt{14/9\, \sqrt{2} + 20/9}\, \sqrt{-(a-b)^2 + s^2\, (2 - \sqrt{2})}$

$V = (a^2+ab+b^2)/3\, \sqrt{5\sqrt{2}+7}\, \sqrt{(-a^2+2ab-b^2)(1+\sqrt{2}) + 4h_s^2\, (\sqrt{2}-1)}$

Oberfläche A $A = (a+b)\, \sqrt{4\sqrt{2} + 4}\, \sqrt{(a-b)^2\, (\sqrt{2}+1) + 4h^2\, (\sqrt{2}-1)} + 2\, (a^2+b^2)\, (\sqrt{2} + 1) = 2\, ((a+b)\, \sqrt{4s^2-(a-b)^2} + (1+\sqrt{2})\, (a^2 + b^2))$

$A = 2\, ((a^2+b^2)\, (1+\sqrt{2}) + 2(a+b)\, h_s)$

Mantelfläche M $M = (a+b)\, \sqrt{4\sqrt{2} + 4}\, \sqrt{(a-b)^2\, (\sqrt{2}+1) + 4h^2\, (\sqrt{2}-1)}$

$M = 4\, (a+b)\, h_s = 4\, (a+b)\, \sqrt{s^2 - (a-b)^2/4}$

Höhe $h = \sqrt{\sqrt{2}/2 + 1}\, \sqrt{(2-\sqrt{2})s^2 - (a-b)^2} = \sqrt{2\sqrt{2}\, h_s^2 - s^2(\sqrt{2}+1)}\, \sqrt{\sqrt{2}+1}$

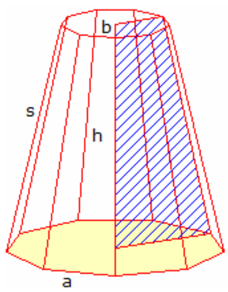
Seitenkante s $s = \sqrt{(a-b)^2 + \sqrt{2}\, h^2\, (\sqrt{2}-1)}\, \sqrt{\sqrt{2}/2 + 1} = \sqrt{\sqrt{2}-1}\, \sqrt{h^2\, (1-\sqrt{2}) + 2\sqrt{2}\, h_s^2}$

Flächenhöhe h_s $h_s = \sqrt{s^2 - (a-b)^2/4} = 1/2\, \sqrt{(a-b)^2\, (3+2\sqrt{2}) + 4h^2}$

Grundkreisradius $r_a = a/2\, \sqrt{4 + 2\, \sqrt{2}}$

Deckkreisradius $r_b = b/2\, \sqrt{4 + 2\, \sqrt{2}}$

Gerader neunseitiger Pyramidenstumpf



Es seien V das Volumen, A die Oberfläche, M die Mantelfläche, a die Seitenlänge der Grundfläche, b die Seitenlänge der Deckfläche, h die Stumpfhöhe, h_s die Seitenflächenhöhe und s die Seitenkantenlänge. Grund- und Deckfläche des geraden neunseitigen Pramidenstumpfes sind hier regelmäßige Neunecke. Da ein regelmäßiges Neuneck nicht allein mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, existieren nur Formeln mit nicht algebraisch darstellbaren trigonometrischen Termen. Es gilt:

Volumen $V = 3h/4\, \cot(\pi/9)\, (a^2 + ab + b^2)$

$V = 3/4\, (a^2+ab+b^2)\, \cot(\pi/9)/\sin(\pi/9)\, \sqrt{s^2 \sin^2(\pi/9) - (a-b)^2/4}$

$V = 3/8\ (a^2+ab+b^2)/\sin(\pi/9)^2 \cos(\pi/9) \sqrt{4h_s^2 - (a^2-2ab+b^2+4h_s^2) \cos^2(\pi/9)}$

Oberfläche $A = 9(a+b)/2/\sin(\pi/9) \sqrt{h^2 \sin^2(\pi/9) + (a-b)^2/4 \cos^2(\pi/9)} + (a^2+b^2)\ 9/4 \cot(\pi/9)$

$A = 9/4\ ((a^2+b^2) \cot(\pi/9) + (a+b) \sqrt{-a^2 + 2ab - b^2 + 4s^2})$

$A = 9/4\ (a^2+b^2) \cot(\pi/9) + 9/2\ (a+b)\ h_s$

Mantelfläche $M = 9(a+b)/2/\sin(\pi/9) \sqrt{h^2 \sin^2(\pi/9) + (a-b)^2/4 \cos^2(\pi/9)}$

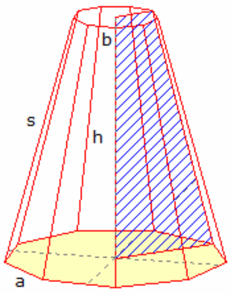
$M = 9\ (a+b)/2 \sqrt{s^2 - (a-b)^2/4} = 9\ (a+b)/2\ h_s$

Höhe $h = 1/\sin(\pi/9) \sqrt{s^2 \sin^2(\pi/9) - (a-b)^2/4} = \sqrt{(h_s^2 - s^2 \cos^2(\pi/9)) / \sin^2 \pi/9}$

Seitenkante $s = 1/\sin(\pi/9) \sqrt{h^2 \sin^2(\pi/9) + (a-b)^2/4}$

$s = \sqrt{(h_s^2 \sin^2 \pi/9 - h^2) / \cos^2 \pi/9 + h^2 + h_s^2}$

Flächenhöhe $h_s = \sqrt{s^2 - (a-b)^2/4} = \sqrt{h^2 + (a-b)^2/4 \cot^2 \pi/9} = \sqrt{s^2 \cos^2 \pi/9 + h^2 \sin^2 \pi/9}$



Gerader zehnseitiger Pyramidenstumpf

Es seien V das Volumen, A die Oberfläche, M die Mantelfläche, a die Seitenlänge der Grundfläche, b die Seitenlänge der Deckfläche, h die Stumpfhöhe, h_s die Seitenflächenhöhe und s die Seitenkantenlänge. Grund- und Deckfläche des geraden zehnseitigen Pramidenstumpfes sind hier regelmäßige Zehnecke. Dann gilt:

Volumen V $V = h\ (a^2 + ab + b^2) \sqrt{25/18 \sqrt{5} + 125/36}$

$V = (a^2+ab+b^2) \sqrt{275/144 \sqrt{5} + 625/144} \sqrt{-2a^2+4ab-2b^2+s^2 (3-\sqrt{5})}$

$V = (a^2+ab+b^2)/24 \sqrt{275\sqrt{5}+625} \sqrt{(-a^2+2ab-b^2)(\sqrt{5}+5) + 4h_s^2 (3-\sqrt{5})}$

Oberfläche $A = 5(a+b)/8 \sqrt{(a-b)^2 (5+\sqrt{5}) + 4h^2 (3-\sqrt{5})} (\sqrt{10}+\sqrt{2}) + (a^2+b^2) \sqrt{25/2 \sqrt{5} + 125/4} = 5/2\ (\sqrt{2\sqrt{5}+5}\ (a^2 + b^2) + (a + b) \sqrt{4s^2 - (a-b)^2})$

$A = (a^2+b^2)/2 \sqrt{50\sqrt{5} + 125} + 5(a+b)\ h_s$

Mantelfläche M $M = (a+b) \sqrt{\sqrt{5}\ (a-b)^2 (\sqrt{5}+1) + 4h^2 (3-\sqrt{5})}\ (5/8 \sqrt{10} + 5/8 \sqrt{2})$

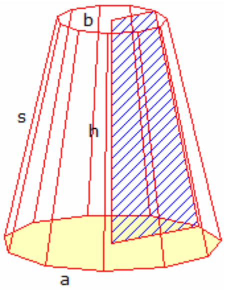
$M = 5\ (a+b)\ h_s = 5\ (a+b) \sqrt{s^2 - (a-b)^2/4}$

Seitenkante s $s = \sqrt{2(a-b)^2 + h^2 (3-\sqrt{5})} \sqrt{\sqrt{10}/4 + \sqrt{2}/4}$

$s = \sqrt{h^2 (\sqrt{5} - 3) + 8h_s^2} \sqrt{1/4 - \sqrt{5}/20}$

Flächenhöhe h_s $h_s = \sqrt{s^2 - (a-b)^2/4} = 1/2 \sqrt{(a-b)^2 (2\sqrt{5}+5) + 4 h^2}$

Höhe $h = (\sqrt{10}/4 + \sqrt{2}/4) \sqrt{(3-\sqrt{5})s^2 - 2(a-b)^2} = \sqrt{8h_s^2 - \sqrt{5}\ s^2(\sqrt{5}+1)}\ \sqrt{2}/4\ (1+\sqrt{5})$



Gerader elfseitiger Pyramidenstumpf

Es seien V das Volumen, A die Oberfläche, M die Mantelfläche, a die Seitenlänge der Grundfläche, b die Seitenlänge der Deckfläche, h die Stumpfhöhe, h_s die Seitenflächenhöhe und s die Seitenkantenlänge. Grund- und Deckfläche des geraden elfseitigen Pramidenstumpfes sind hier regelmäßige Elfecke. Da ein regelmäßiges Elfeck nicht allein mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, existieren nur Formeln mit nicht algebraisch darstellbaren trigonometrischen Termen. Es gilt:

Volumen $V = 11h/12 \cot(\pi/11)\ (a^2 + ab + b^2)$

$V = 11/12\ (a^2+ab+b^2) \cot(\pi/11)/\sin(\pi/11) \sqrt{s^2 \sin^2(\pi/11)-(a-b)^2/4}$

$V = 11/24\ (a^2+ab+b^2)/\sin(\pi/11)^2 \cos(\pi/11) \sqrt{4h_s^2 - (a^2-2ab+b^2+4h_s^2) \cos^2(\pi/11)}$

Oberfläche $A = 11(a+b)/2/\sin(\pi/11) \sqrt{h^2 \sin^2(\pi/11) + (a-b)^2/4 \cos^2(\pi/11)} + (a^2+b^2)\ 11/4 \cot(\pi/11) = 11/4\ ((a^2+b^2) \cot(\pi/11) + (a+b) \sqrt{-a^2 + 2ab - b^2 + 4s^2})$

$A = 11/4\ (a^2+b^2) \cot(\pi/11) + 11/2\ (a+b)\ h_s$

Mantelfläche $M = 11(a+b)/2/\sin(\pi/11) \sqrt{h^2 \sin^2(\pi/11) + (a-b)^2/4 \cos^2(\pi/11)}$

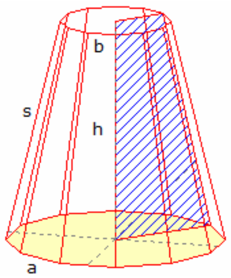
$M = 11\ (a+b)/2 \sqrt{s^2 - (a-b)^2/4} = 11\ (a+b)/2\ h_s$

Höhe $h = 1/\sin(\pi/11) \sqrt{s^2 \sin^2(\pi/11) - (a-b)^2/4} = \sqrt{(h_s^2 - s^2 \cos^2(\pi/11)) / \sin^2 \pi/11}$

Seitenkante $s = 1/\sin(\pi/11) \sqrt{h^2 \sin^2(\pi/11) + (a-b)^2/4}$

$s = \sqrt{(h_s^2 \sin^2 \pi/11 - h^2) / \cos^2 \pi/11 + h^2 + h_s^2}$

Flächenhöhe $h_s = \sqrt{s^2 - (a-b)^2/4} = \sqrt{h^2 + (a-b)^2/4 \cot^2 \pi/11} = \sqrt{s^2 \cos^2 \pi/11 + h^2 \sin^2 \pi/11}$



Gerader zwölfseitiger Pyramidenstumpf

Es seien V das Volumen, A die Oberfläche, M die Mantelfläche, a die Seitenlänge der Grundfläche, b die Seitenlänge der Deckfläche, h die Stumpfhöhe, h_s die Seitenflächenhöhe und s die Seitenkantenlänge. Grund- und Deckfläche des geraden zwölfseitigen Pramidenstumpfes sind hier regelmäßige Zwölfecke. Dann gilt:

Volumen V $V = h\ (a^2 + ab + b^2)\ (\sqrt{3} + 2)$

$V = (a^2+ab+b^2)\ (3/2 \sqrt{6} + 5/2 \sqrt{2}) \sqrt{-a^2 + 2ab - b^2 + s^2 (2 - \sqrt{3})}$

$V = (a^2+ab+b^2)/2\ (3\sqrt{6}+5\sqrt{2}) \sqrt{(-a^2+2ab-b^2)(\sqrt{3}+2) + 4h_s^2 (2-\sqrt{3})}$

Oberfläche $A = 3/2 \sqrt{2}\ (\sqrt{3}+1)\ (a+b) \sqrt{(a-b)^2 (2+\sqrt{3}) + 4h^2 (2-\sqrt{3})} + (a^2+b^2)\ (3\sqrt{3} + 6) = 3\ ((\sqrt{3}+2)\ (a^2 + b^2) + (a + b) \sqrt{4s^2 - (a-b)^2})$

$A = 3\ ((a^2+b^2)\ (2+\sqrt{3}) + 2(a+b)\ h_s)$

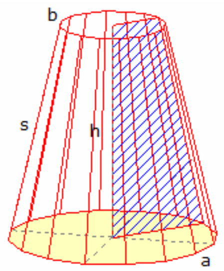
Mantelfläche M $M = 3(a+b)/2 \sqrt{2}\ (\sqrt{3}+1) \sqrt{(a-b)^2 (\sqrt{3}+2) + 4h^2 (2-\sqrt{3})}$

$M = 6\ (a+b)\ h_s = 6\ (a+b) \sqrt{s^2 - (a-b)^2/4}$

Seitenkante s $s = 1/2 \sqrt{2}\ (\sqrt{3}+1) \sqrt{(a-b)^2 + h^2 (2-\sqrt{3})} = 1/2 \sqrt{2}\ (\sqrt{3}-1) \sqrt{h^2 (\sqrt{3}-2) + 4h_s^2}$

Flächenhöhe h_s $h_s = \sqrt{s^2 - (a-b)^2/4} = 1/2 \sqrt{(a-b)^2 (4\sqrt{3}+7) + 4 h^2}$

Höhe $h = \sqrt{2}/2\ (\sqrt{3} +1)\ \sqrt{(2-\sqrt{3})s^2 - (a-b)^2} = \sqrt{4h_s^2 - s^2(\sqrt{3}+2)}\ \sqrt{2}/2\ (1+\sqrt{3})$



Gerader sechzehnseitiger Pyramidenstumpf

Es seien V das Volumen, A die Oberfläche, M die Mantelfläche, a die Seitenlänge der Grundfläche, b die Seitenlänge der Deckfläche, h die Stumpfhöhe, h_s die Seitenflächenhöhe und s die Seitenkantenlänge. Grund- und Deckfläche des geraden sechzehnseitigen Pramidenstumpfes sind hier regelmäßige Sechzehnecke. Dann gilt:

Volumen V $V = h\ (a^2 + ab + b^2)\ (\sqrt{32/9\ \sqrt{2} + 64/9} + 4/3\ \sqrt{2} + 4/3)$

$V = (a^2+ab+b^2)\ (16\sqrt{2} + 64/3 + \sqrt{6176/9\ \sqrt{2} + 8768/9})\ \sqrt{-a^2 + 2ab - b^2 + s^2 (2 - \sqrt{2+\sqrt{2}})}$

$V = 2/3\ (a^2+ab+b^2)/\sin(\pi/16)^2 \cos(\pi/16)\ \sqrt{4h_s^2 - (a^2-2ab+b^2+4h_s^2) \cos^2(\pi/16)}$

Oberfläche $A = 4\ ((a+b)\ \sqrt{4s^2-(a-b)^2} + (\sqrt{2\sqrt{2}+4}+\sqrt{2}+1)\ (a^2 + b^2))$

$A = (a+b)/2\ 16/\sin(\pi/16)\ \sqrt{h^2 \sin^2(\pi/16) + (a-b)^2/4 \cos^2(\pi/16)} + (a^2+b^2)\ n/4 \cot(\pi/16)$

$A = (a^2+b^2)\ (\sqrt{32\sqrt{2} + 64} + 4\sqrt{2} +4) + 8(a+b)\ h_s$

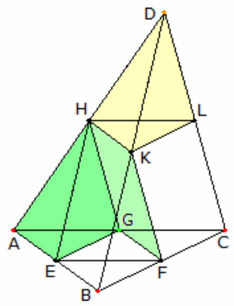
Mantelfläche $M = 8\ (a+b)\ h_s$

$M = 4(a+b)\ \sqrt{4+2\sqrt{2}-\sqrt{14\sqrt{2}+20}}\ \sqrt{(a-b)^2/2\ (2+\sqrt{2+\sqrt{2}}) + 2h^2(2-\sqrt{\sqrt{2}+2})}$

$M = 8\ (a+b)\ \sqrt{s^2 - (a-b)^2/4}$

Flächenhöhe h_s $h_s = \sqrt{s^2 - (a-b)^2/4} = 1/2\ \sqrt{(a-b)^2\ (\sqrt{2\sqrt{2}+4} + \sqrt{2}+1)^2 + 4\ h^2}$

Höhe $h = \sqrt{2 - \sqrt{\sqrt{2}+2}}\ \sqrt{(2-\sqrt{\sqrt{2}+2})s^2 - (a-b)^2}$



Euklids Pyramidensatz

Euklids "Elemente" Buch XII § 3 (L. 3):

Jede Pyramide mit dreieckiger Grundfläche lässt sich zerlegen in zwei gleiche, einander und der ganzen Pyramide mit dreieckigen Grundflächen sowie zwei gleiche Prismen; und die beiden Prismen sind zusammen größer als die Hälfte der ganzen Pyramide.

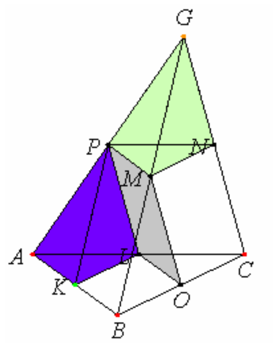
Man habe eine Pyramide, deren Grundfläche Δ ABC und deren Spitze Punkt D sei. Ich behaupte, dass die Pyramide ABCD sich zerlegen lässt in zwei einander gleiche Pyramiden mit dreieckigen Grundflächen, die der ganzen ähnlich sind, sowie zwei gleiche Prismen und dass die beiden Prismen zusammen größer sind als die Hälfte der ganzen Pyramide.

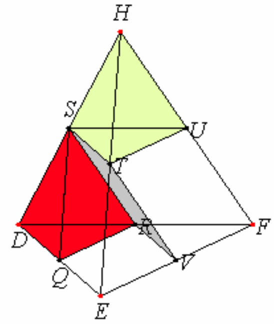
Man halbiere AB, BC, CA, AD, DB, DC in den Punkten E, F, G, H, K, L und ziehe HE, EG, GH, HK, KL, LH, KF, FG. Da AE = EB und AH = DH, ist EH || DB (VI, 2). Aus demselben Grunde ist HK || AB. HEBK ist also ein Parallelogramm, also HK = EB (I, 34).

Aber EB = EA, also auch AE = HK. Ferner AH = HD; mithin sind zwei Seiten EA, AH zwei Seiten KH, HD entsprechend gleich; und ∠ EAH = ∠ KHD (I, 29); also ist Grundlinie EH = Grundlinie KD, also Δ AEH = und ~ Δ HKD (I, 4). Aus demselben Grunde ist auch Δ AHG = und ~ Δ HLD. Da hier zwei einander treffende Geraden EH, HG zwei einander treffende Geraden KD, DL, ohne in derselben Ebene zu liegen, parallel sind, müssen sie gleiche Winkel umfassen (XI, 10).

Euklids "Elemente" Buch XII § 4 (L. 4):

Hat man zwei Pyramiden mit dreieckigen Grundflächen unter derselben Höhe und zerlegt jede von ihnen in zwei einander gleiche, der ganzen ähnliche Pyramiden sowie zwei gleiche Prismen; und von den entstandenen Pyramiden jede ebenso und wiederholt dies immer; dann müssen sie sich verhalten, wie die Grundfläche der einen Pyramide zur Grundfläche der anderen Pyramide, so die Prismen in der einen Pyramide zusammen zu den ebenso vielen Prismen in der anderen Pyramide zusammen.





Euklids Pyramidensatz

Euklids "Elemente" Buch XII § 5 (L. 5):

Pyramiden mit dreieckigen Grundflächen unter derselben Höhe verhalten sich zueinander wie die Grundflächen.

Euklids "Elemente" Buch XII § 6 (L. 6):

Pyramiden mit vieleckigen Grundflächen unter derselben Höhe verhalten sich zueinander wie die Grundflächen.

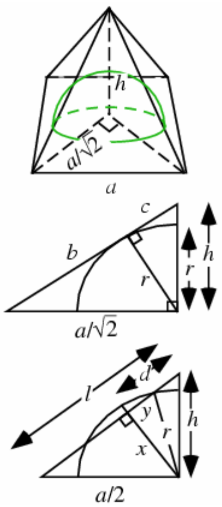
Euklids "Elemente" Buch XII § 7 (L. 7):

Jedes Prisma mit dreiecker Grundfläche lässt sich in drei einander gleiche Pyramiden mit dreieckigen Grundflächen zerlegen.

Euklids "Elemente" Buch XII § 8 (L. 8):

Ähnliche Pyramiden mit dreieckigen Grundflächen stehen dreimal im Verhältnis entsprechender Kanten.

Euklids "Elemente" Buch XII § 9 (L. 9):
In gleichen Pyramiden mit dreieckigen Grundflächen sind die Grundflächen den Höhen umgekehrt proportional. Und Pyramiden mit dreieckigen Grundflächen, in denen die Grundflächen den Höhen umgekehrt proportional sind, sind gleich.



Pyramide und Halbkugel

Gegeben ist eine quadratische Pyramide der Kantenlänge a und Höhe h. In diese Pyramide soll ein möglichst große, die Seitenkanten tangierende Halbkugel wie in der Abbildung einbeschrieben werden.
Der Umkreisradius der Grundfläche ist $a/\sqrt{2}$. Aus den Abbildungen ergibt sich $b = \sqrt{a^2/2 - r^2}$ und $c = \sqrt{h^2 - r^2}$
Für die Seitenflächenhöhe $s = \sqrt{h^2 + a^2/2} = b + c = \sqrt{a^2/2 - r^2} + \sqrt{h^2 - r^2}$

$$h = r a / \sqrt{a^2 - 2 r^2}$$

Da die Halbkugel die Seitenkanten tangiert, $r = a/2$, wird

$$h = a/2 / \sqrt{a^2 - a^2/2} * a = 1/2 \sqrt{2} a$$

Weiterhin ist $l = \sqrt{a^2/4 + h^2} = 1/2 \sqrt{3} a$

$$l = \sqrt{a^2/4 - x^2} + d \text{ und } d = \sqrt{h^2 - x^2}$$

und so für x und y $x = 1/6 \sqrt{6} a$ $y = \sqrt{r^2 - x^2} = 1/2 a/\sqrt{3}$
Für eine Kugelkappe, die sich außerhalb der Pyramide befindet, ergibt sich somit

$$V_{Kappe} = 1/6 \pi p (3 q^2 + p^2) \text{ mit } p = r - x \text{ und } q = y$$

$$V_{Kappe} = 1/6 \pi a^3 (1/2 - 7/(6 \sqrt{6}))$$

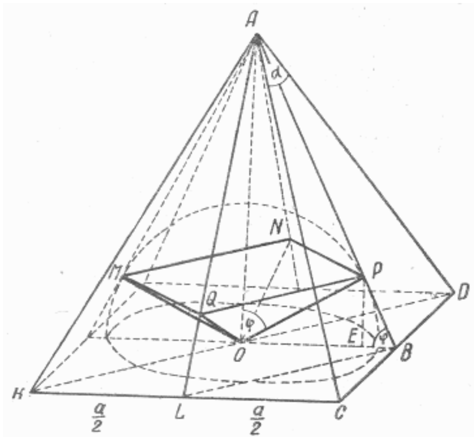
Für das Volumen innerhalb der Pyramide ergibt sich so abschließend

$$V = 2/3 \pi r^3 - 4 V_{Kappe}$$

$V = \pi a^3 (7 / (9 \sqrt{6}) - 1/4)$

Diese Aufgabe war Bestandteil eines japanischen Abiturs.

Eingeschriebene Pyramide, Beispielaufgabe



Gegeben ist eine quadratische Pyramide mit der Grundkantenlänge a und einem Kantenwinkel α an der Spitze. In diese Pyramide ist eine Halbkugel so eingeschrieben. dass diese die Seitenflächen berührt. In dieser Halbkugel befindet sich weiterhin eine quadratische Pyramide, deren Eckpunkte an den Berührungspunkten der Kugel liegen. Gesucht ist das Volumen dieser Pyramide. Es wird:

$V = 1/3 PQ^2 * PE$ $LB = 1/2 KD = a/2 \sqrt{2}$

$$AP = AO \sin \phi = AB \sin^2 \phi$$

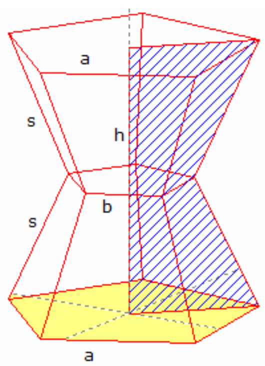
$$AP / AB = \cos \alpha / (\cos^2 (\alpha/2))$$

$$PQ = LB * AP / AB = a \sqrt{2} \cos \alpha / (2 \cos^2 (\alpha/2))$$

$$PE = PB \sin \phi = a/2 \tan (\alpha/2) \sqrt{\cos \alpha} / (\cos (\alpha/2))$$

und somit $V = a^3 \cos^2 \alpha \sin (\alpha/2) \sqrt{\cos \alpha} / (12 \cos^6 (\alpha/2))$

Anmerkung: Die Aufgabe entstammt einem sowjetischen Mathematik-Lehrbuch der Abiturstufe von 1966.



Gerader Doppelpyramidenstumpf

Es seien V das Volumen, A die Oberfläche, M die Mantelfläche, a die Seitenlänge der Grundfläche und Deckfläche, b die Seitenlänge der mittleren, unsichtbaren Fläche, h die Doppelstumpfhöhe und s die Seitenkantenlänge von Grund- bis Mittelfläche. Unter einem geraden Doppelpyramidenstumpf wird hier ein Körper verstanden, der aus zwei geraden Pyramidenstümpfen so zusammengesetzt ist, dass kongruente Flächen aufeinandertreffen. Grund-, Mittel- und Deckfläche sind regelmäßige n-Ecke. Dann gilt:

Volumen $V = h/12\, n \cot (\pi/n) (a^2 + ab + b^2)$

$$V = n/6 (a^2+ab+b^2) \cot(\pi/n)/\sin(\pi/n) \sqrt{s^2 \sin^2(\pi/n)-(a-b)^2/4}$$

Mantelfläche $M = (a+b)/2\, n/\sin (\pi/n) \sqrt{h^2 \sin^2 (\pi/n) + (a-b)^2/4 \cos^2 (\pi/n)}$

$$M = (a+b)\, n \sqrt{s^2 - (a-b)^2/4}$$

Oberfläche $A = (a+b)/2\, n/\sin (\pi/n) \sqrt{h^2 \sin^2 (\pi/n) + (a-b)^2/4 \cos^2 (\pi/n)} + (a^2+b^2)\, n/4 \cot (\pi/n)$

$$A = (a+b)\, n \sqrt{s^2 - (a-b)^2/4} + (a^2+b^2)\, n/4 \cot (\pi/n)$$

Höhe $h = 2/\sin(\pi/n) \sqrt{s^2 \sin^2 (\pi/n) - (a-b)^2/4}$

Seitenkante $s = 1/(2 \sin(\pi/n)) \sqrt{h^2 \sin^2 (\pi/n) + (a-b)^2/4}$

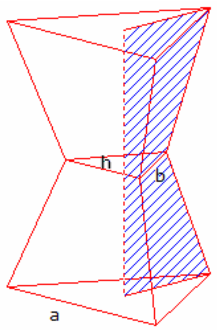
Sind weiterhin β der Neigungswinkel der Seitenflächen zur Grundfläche, δ der Neigungswinkel der Seitenflächen zueinander und α die Neigungswinkel der Kanten gegen die Grundfläche, so wird

Winkel β $\cos \beta = \sqrt{((as/(a-b))^2/((as/(a-b))^2 - a^2/4) - a^2/4/(((as/(a-b))^2 - a^2/4) \sin^2(\pi/n)))}$

Winkel δ $\sin \delta/2 = \cos (\pi/n) / \sqrt{1 - a^2/(4 (as/(a-b))^2)}$

Winkel α $\sin \alpha = \sqrt{1 - a^2 / (4(as/(a-b))^2 \sin^2 (\pi/n))}$ $\sin \alpha = h / (2s)$

Alternativ zum hier gewählten Polyeder können auch die zwei großen Seitenflächen der Teilpyramidenstümpfe aneinander liegen.

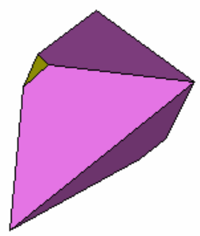


Dreiseitiger gerader Doppelpyramidenstumpf

Es seien V das Volumen, A die Oberfläche, M die Mantelfläche, a die Seitenlänge der Grundfläche und Deckfläche, b die Seitenlänge der mittleren, unsichtbaren Fläche, h die Doppelstumpfhöhe und s die Seitenkantenlänge von Grund- bis Mittelfläche.
Unter einem dreiseitigen geraden Doppelpyramidenstumpf wird hier ein Körper verstanden, der aus zwei geraden dreiseitigen Pyramidenstümpfen so zusammengesetzt ist, dass kongruente Flächen aufeinandertreffen.
Grund-, Mittel- und Deckfläche sind regelmäßige Dreiecke. Dann gilt:

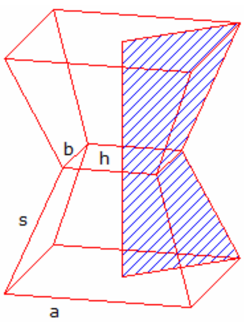
Volumen $V = h/12 \sqrt{3} (a^2 + ab + b^2)$
$V = (a^2+ab+b^2)/6 \sqrt{(-a^2 + 2ab - b^2 + 3s^2)}$
Mantelfläche $M = \sqrt{3}/4 (a+b) \sqrt{(a^2 - 2ab + b^2 + 12h^2)} = 3 (a+b) \sqrt{(s^2 - (a-b)^2/4)}$
Oberfläche $A = \sqrt{3}/4 (a+b) \sqrt{(a^2 - 2ab + b^2 + 12h^2)} + \sqrt{3}/4 (a^2+b^2)$
$A = 3 (a+b) \sqrt{(s^2 - (a-b)^2/4)} + \sqrt{3}/4 (a^2+b^2)$
Höhe $h = 2/3 \sqrt{3} \sqrt{(-a^2 + 2ab - b^2 + 3s^2)}$
Seitenkante $s = \sqrt{3}/6 \sqrt{(a^2 - 2ab + b^2 + 3h^2)}$

Sind weiterhin β der Neigungswinkel der Seitenflächen zur Grundfläche, δ der Neigungswinkel der Seitenflächen zueinander und α die Neigungswinkel der Kanten gegen die Grundfläche, so wird
Winkel β $\cos \beta = \sqrt{((as/(a-b))^2/((as/(a-b))^2-a^2/4)-a^2/4/(((as/(a-b))^2-a^2/4) 3/4))}$
Winkel δ $\sin \delta/2 = s / \sqrt{(-a^2 + 2ab - b^2 + 4s^2)}$
Winkel α $\sin \alpha = \sqrt{3}/3 \sqrt{(-a^2 + 2ab - b^2 + 3s^2)}/s$ $\sin \alpha = h / (2s)$



Dreiseitiger Doppelpyramidenstumpf

Der dreiseitige Doppelpyramidenstumpf (engl. triangular bifrustum) ist ein Symmetrie-D3h-Polyeder mit 9 Ecken und 8 Flächen, 2 gleichschenklige Dreiecke und 6 gleichschenklige Trapeze, sowie 15 Kanten, 6 kurze, 6 mittlere und 3 lange.
Der Körper ist zur erweiterten dreiseitigen Doppelpyramide (verlängerte dreieckige Doppelpyramide, Johnson-Polyeder 14) dual.
Hat der Mittelkugelradius, durch die Kanten, die Länge a, so wird
Kantenlänge $s_1 = 2 \sqrt{3}/7\ a \approx 0{,}494871659\ a$
$s_2 = 8 \sqrt{3}/7\ a \approx 1{,}979486637\ a$ $s_3 = 2 \sqrt{3}\ a \approx 3{,}464101615\ a$
Volumen $V = 1368/343\ a^3 \approx 3{,}988338192\ a^3$
Eckpunktkoordinaten
Hilfsgrößen: C0 = 1/7 ; C1 = √3/7 ; C2 = 2/7 ; C3 = 4 √3/7 ; C4 = √3
(C1, C0, C3), (C1, C0, -C3), (-C1, C0, C3), (-C1, C0, -C3), (0, -C2, C3), (0, -C2, -C3), (C4, 1, 0), (-C4, 1, 0), (0, -2, 0)
Flächen: {6, 0, 4, 8}, {6, 8, 5, 1}, {6, 1, 3, 7}, {6, 7, 2, 0}, {7, 3, 5, 8}, {7, 8, 4, 2}, {0, 2, 4}, {1, 5, 3}

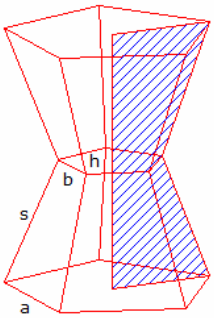


Vierseitiger gerader Doppelpyramidenstumpf

Es seien V das Volumen, A die Oberfläche, M die Mantelfläche, a die Seitenlänge der Grundfläche und Deckfläche, b die Seitenlänge der mittleren, unsichtbaren Fläche, h die Doppelstumpfhöhe und s die Seitenkantenlänge von Grund- bis Mittelfläche.
Unter einem vierseitigen geraden Doppelpyramidenstumpf wird hier ein Körper verstanden, der aus zwei geraden vierseitigen Pyramidenstümpfen so zusammengesetzt ist, dass kongruente Flächen aufeinandertreffen.
Grund-, Mittel- und Deckfläche sind Quadrate. Dann gilt:

Volumen $V = h/3 (a^2 + ab + b^2)$
$V = \sqrt{2}/3 (a^2+ab+b^2) \sqrt{(-a^2 + 2ab - b^2 + 2s^2)}$
Mantelfläche $M = (a+b) \sqrt{(a^2 - 2ab + b^2 + 4h^2)} = 2 (a+b) \sqrt{(4s^2 - (a-b)^2/4)}$
Oberfläche $A = (a+b) \sqrt{(a^2 - 2ab + b^2 + 4h^2)} + a^2+b^2 = 2 (a+b) \sqrt{(4s^2 - (a-b)^2/4)} + a^2+b^2$
Höhe $h = \sqrt{2} \sqrt{(-a^2 + 2ab - b^2 + 2s^2)}$
Seitenkante $s = \sqrt{2}/4 \sqrt{(a^2 - 2ab + b^2 + 2h^2)}$

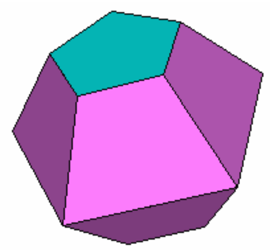
Sind weiterhin β der Neigungswinkel der Seitenflächen zur Grundfläche, δ der Neigungswinkel der Seitenflächen zueinander und α die Neigungswinkel der Kanten gegen die Grundfläche, so wird
Winkel β $\cos \beta = \sqrt{2} \sqrt{((a^2-2ab+b^2-2s^2) / (a^2-2ab+b^2-4s^2))}$
Winkel δ $\sin \delta/2 = \sqrt{2}\ s / \sqrt{(-a^2 + 2ab - b^2 + 4s^2)}$
Winkel α $\sin \alpha = \sqrt{2}/2 \sqrt{(-a^2 + 2ab - b^2 + 2s^2)}/s$ $\sin \alpha = h / (2s)$



Fünfseitiger gerader Doppelpyramidenstumpf

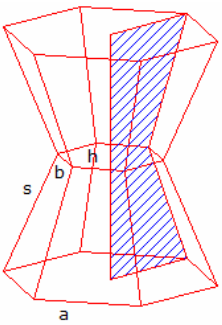
Es seien V das Volumen, A die Oberfläche, M die Mantelfläche, a die Seitenlänge der Grundfläche und Deckfläche, b die Seitenlänge der mittleren, unsichtbaren Fläche, h die Doppelstumpfhöhe und s die Seitenkantenlänge von Grund- bis Mittelfläche.
Unter einem fünfseitigen geraden Doppelpyramidenstumpf wird hier ein Körper verstanden, der aus zwei geraden fünfseitigen Pyramidenstümpfen so zusammengesetzt ist, dass kongruente Flächen aufeinandertreffen.
Grund-, Mittel- und Deckfläche sind regelmäßige Fünfecke. Dann gilt:

Volumen $V = h (a^2 + ab + b^2) \sqrt{5/72 \sqrt{5} + 25/144}$
$V = (a^2+ab+b^2) \sqrt{-2a^2 + 4ab - 2b^2 + s^2(5-\sqrt{5})}\ (5/24 \sqrt{2} + \sqrt{10}/8)$
Mantelfläche $M = (a+b) \sqrt{(a-b)^2 (3+\sqrt{5}) + 4\sqrt{5}\, h^2 (\sqrt{5}-1)}\ \sqrt{5/64 \sqrt{5} + 25/64}$
$M = 5/2 (a+b) \sqrt{4s^2 - (a-b)^2/4}$
Oberfläche
$A = (a+b) \sqrt{(a-b)^2 (3+\sqrt{5}) + 4\sqrt{5}\, h^2 (\sqrt{5}-1)}\ \sqrt{5/64 \sqrt{5} + 25/64} + (a^2+b^2) \sqrt{5/8 \sqrt{5} + 25/16}$
$A = 5/2 (a+b) \sqrt{4s^2 - (a-b)^2/4} + (a^2+b^2) \sqrt{5/8 \sqrt{5} + 25/16}$
Höhe $h = \sqrt{1+\sqrt{5}/5}\ \sqrt{-2a^2 + 4ab - 2b^2 + s^2 (5-\sqrt{5})}$
Seitenkante $s = \sqrt{\sqrt{5}/80 + 1/16}\ \sqrt{2a^2 - 4ab + 2b^2 + \sqrt{5}\, h^2 (\sqrt{5}-1)}$
Winkel α $\sin \alpha = h / (2s)$



Fünfseitiger Doppelpyramidenstumpf

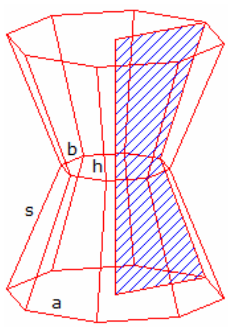
Der fünfseitige Doppelpyramidenstumpf (engl. pentagonal bifrustum) ist ein Symmetrie-D5h-Polyeder mit 15 Ecken und 12 Flächen, 2 regelmäßigen Fünfecke und 10 gleichschenklige Trapeze, sowie 25 Kanten, 10 kurze, 10 mittlere und 5 lange.
Der Körper ist zur erweiterten fünfseitigen Doppelpyramide (verlängerte fünfseitige Doppelpyramide, Johnson-Polyeder 16) dual.
Hat der Mittelkugelradius, durch die Kanten, die Länge a, so wird
Kantenlänge $s_1 = 2 \sqrt{(125+38 \sqrt{5})/41}\, a \approx 0{,}706846914\, a$
$s_2 = 4 \sqrt{2 (305-109 \sqrt{5})}/41\, a \approx 1{,}079965985\, a$
$s_3 = 2 \sqrt{5-2 \sqrt{5}}\, a \approx 1{,}453085056\, a$
Volumen $V = 20 (33361 \sqrt{5} -36905)/206763\, a^3 \approx 3{,}645958300\, a^3$



Sechsseitiger gerader Doppelpyramidenstumpf

Es seien V das Volumen, A die Oberfläche, M die Mantelfläche, a die Seitenlänge der Grundfläche und Deckfläche, b die Seitenlänge der mittleren, unsichtbaren Fläche, h die Doppelstumpfhöhe und s die Seitenkantenlänge von Grund- bis Mittelfläche.
Unter einem sechsseitigen geraden Doppelpyramidenstumpf wird hier ein Körper verstanden, der aus zwei geraden sechsseitigen Pyramidenstümpfen so zusammengesetzt ist, dass kongruente Flächen aufeinandertreffen.
Grund-, Mittel- und Deckfläche sind regelmäßige Sechsecke. Dann gilt:

Volumen $V = \sqrt{3}/2\, h (a^2 + ab + b^2)$
$V = \sqrt{3} (a^2+ab+b^2) \sqrt{-a^2 + 2ab - b^2 + s^2}$
Mantelfläche $M = 3/2 (a+b) \sqrt{3(a-b)^2 + 4h^2} = 3 (a+b) \sqrt{4s^2 - (a-b)^2}$
Oberfläche $A = 3/2 (a+b) \sqrt{3(a-b)^2 + 4h^2} + 3/2 \sqrt{3} (a^2+b^2)$
$A = 3 (a+b) \sqrt{4s^2 - (a-b)^2} + 3/2 \sqrt{3} (a^2+b^2)$
Höhe $h = 2 \sqrt{-a^2 + 2ab - b^2 + s^2}$
Seitenkante $s = 1/2 \sqrt{a^2 - 2ab + b^2 + h^2}$
Winkel α $\sin \alpha = h / (2s)$

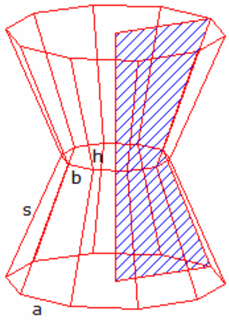


Achtseitiger gerader Doppelpyramidenstumpf

Es seien V das Volumen, A die Oberfläche, M die Mantelfläche, a die Seitenlänge der Grundfläche und Deckfläche, b die Seitenlänge der mittleren, unsichtbaren Fläche, h die Doppelstumpfhöhe und s die Seitenkantenlänge von Grund- bis Mittelfläche.
Unter einem achtseitigen geraden Doppelpyramidenstumpf wird hier ein Körper verstanden, der aus zwei geraden achtseitigen Pyramidenstümpfen so zusammengesetzt ist, dass kongruente Flächen aufeinandertreffen.
Grund-, Mittel- und Deckfläche sind regelmäßige Achtecke. Dann gilt:

Volumen $V = h (a^2 + ab + b^2) (2/3 \sqrt{2} + 2/3)$
$V = (a^2+ab+b^2) \sqrt{-a^2 + 2ab - b^2 + s^2 (2-\sqrt{2})}\ \sqrt{56/9 \sqrt{2} + 80/9}$
Mantelfläche $M = \sqrt{4\sqrt{2} + 4}\, (a+b) \sqrt{(a-b)^2 (\sqrt{2}+1) + 4h^2 (\sqrt{2}-1)} = 4 (a+b) \sqrt{4s^2 - (a-b)^2}$
Oberfläche $A = \sqrt{4\sqrt{2}+4}\, (a+b) \sqrt{(a-b)^2 (\sqrt{2}+1) + 4h^2 (\sqrt{2}-1)} + (a^2+b^2) (2\sqrt{2} + 2)$
$A = 4 (a+b) \sqrt{4s^2 - (a-b)^2} + (a^2+b^2) (2\sqrt{2} + 2)$
Höhe $h = \sqrt{2\sqrt{2} +4}\ \sqrt{-a^2 + 2ab - b^2 + s^2 (2-\sqrt{2})}$
Seitenkante $s = \sqrt{a^2 - 2ab + b^2 + \sqrt{2}\, h^2 (\sqrt{2}-1)}\ \sqrt{\sqrt{2}/8 + 1/4}$

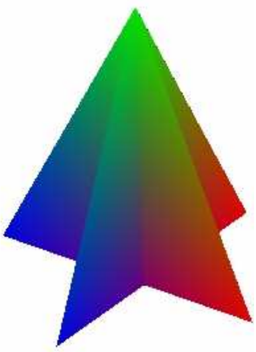
Winkel α $\sin \alpha = h / (2s)$



Zehnseitiger gerader Doppelpyramidenstumpf

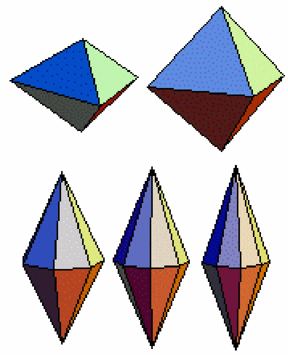
Es seien V das Volumen, A die Oberfläche, M die Mantelfläche, a die Seitenlänge der Grundfläche und Deckfläche, b die Seitenlänge der mittleren, unsichtbaren Fläche, h die Doppelstumpfhöhe und s die Seitenkantenlänge von Grund- bis Mittelfläche.
Unter einem zehnseitigen geraden Doppelpyramidenstumpf wird hier ein Körper verstanden, der aus zwei geraden zehnseitigen Pyramidenstümpfen so zusammengesetzt ist, dass kongruente Flächen aufeinandertreffen.
Grund-, Mittel- und Deckfläche sind regelmäßige Zehnecke. Dann gilt:

Volumen $V = h (a^2 + ab + b^2) \sqrt{25/18 \sqrt{5} + 125/36}$
$V = (a^2+ab+b^2) \sqrt{-2a^2 + 4ab - 2b^2 + s^2(3-\sqrt{5})} \sqrt{275/36 \sqrt{5} + 625/36}$
Mantelfläche $M = (a+b) \sqrt{(a-b)^2 \sqrt{5} (1+\sqrt{5}) + 4\sqrt{5} h^2 (3-\sqrt{5})} \sqrt{5/8 \sqrt{10} + 5/8 \sqrt{2}}$
$M = 5 (a+b) \sqrt{4s^2 - (a-b)^2/4}$
Oberfläche
$A = (a+b) \sqrt{(a-b)^2 \sqrt{5} (1+\sqrt{5}) + 4\sqrt{5} h^2 (3-\sqrt{5})} \sqrt{5/8 \sqrt{10} + 5/8 \sqrt{2}} + (a^2+b^2) \sqrt{5/8 \sqrt{5} + 25/16}$
$A = 5 (a+b) \sqrt{4s^2 - (a-b)^2/4} + (a^2+b^2) \sqrt{5/8 \sqrt{5} + 25/16}$
Höhe $h = \sqrt{\sqrt{10}/2 + \sqrt{2}/2} \sqrt{-2a^2 + 4ab - 2b^2 + s^2 (3-\sqrt{5})}$
Seitenkante $s = \sqrt{\sqrt{10}/8 + \sqrt{2}/8} \sqrt{2a^2 - 4ab + 2b^2 + h^2 (3-\sqrt{5})}$
Winkel α $\sin \alpha = h / (2s)$



Polygramm-Pyramide

Pyramiden können als Grundfläche neben konvexen N-Ecken auch nicht konvexe Polygone besitzen, insbesondere regelmäßige Sternpolygone. Solche Pyramiden werden Polygramm-Pyramiden genannt. Die Abbildung zeigt eine Pentagramm-Pyramide mit einem regelmäßigen Pentagramm als Grundfläche. Die Seitenflächen sind Dreiecke.
Da für einige n-Ecke mehrere n-eckige Sternpolygone existieren, z.B. für 11-eckige Sternvielecke, gibt es für diese auch verschiedene Polygramm-Pyramiden.
Polygramm-Pyramiden sind z.B.
Pentagramm-Pyramide 5/2
Volumen $V = 1/3\ a^2 h \sqrt{5/8 \sqrt{5} + 25/8} \approx 0{,}708873\ a^2h$
und Heptagramm-Pyramide 7/2, Heptagramm-Pyramide 7/3, ...



Doppelpyramide

Aus zwei symmetrischen regelmäßigen Pyramiden zusammengesetzt, auch Bipyramide genannt. Die Doppelpyramiden sind die dualen Körper zu den regulären Prismen.

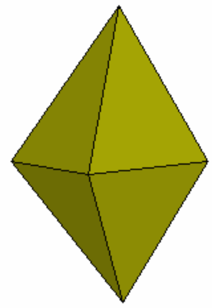
In der Form einer Doppelpyramide kann ein interessanter Spielwürfel konstruiert werden. Die gemeinsame Grundfläche der Pyramiden ist in etwa ein Fünfeck. Der Spielwürfel die Zahlen 0 bis 9, also die Ziffern des Zehnersystems. Auf diese Weise kann man mit mehreren Würfeln dieser Art mehrstellige Zufallszahlen finden.

Tabelle der Verhältnisse:

Ordnung n der Doppelpyramide, b_n ... Länge der Kanten der Pyramidenbasis, s_n ... Länge der Seitenkanten, h_n ... halbe Höhe der Doppelpyramide, A ... Doppelpyramidenoberfläche, V ... Volumen

n	b_n	s_n	h_n
3	2	4/3	2/3
4	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
5	$\sqrt{5} - 1$	$4/5 \sqrt{5}$	$1+ 1/5 \sqrt{5}$
6	$2/3 \sqrt{3}$	$4/3 \sqrt{3}$	2
8	$\sqrt{4-2\sqrt{2}}$	$2\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$2 + \sqrt{2}$
10	$\sqrt{2/5(5-\sqrt{5})}$	$4\sqrt{1+2/5 \sqrt{5}}$	$3 + \sqrt{5}$

n	A	V	n	A	V
3	$9/8 \sqrt{7}$	$3/16 \sqrt{3}$	4	$2 \sqrt{3}$	$1/3 \sqrt{2}$
5	$1/2 \sqrt{95 + 40\sqrt{5}}$	$1/6 \sqrt{1/2(65 + 29 \sqrt{5})}$	6	$3 \sqrt{15}$	3
8	$4\sqrt{23 + 16 \sqrt{2}}$	$2/3 \sqrt{116 + 82\sqrt{2}}$			
10	$5 \sqrt{55 + 24 \sqrt{5}}$	$5/6(15+7\sqrt{5})$			

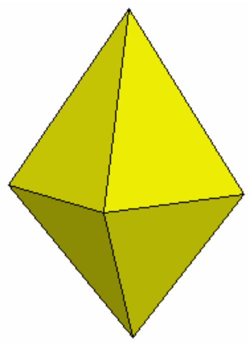


Dreiseitige Doppelpyramide

Zum dreiseitigen Prisma duales Polyeder mit 5 Ecken, 6 gleichschenkligen Dreiecken als Flächen und 9 Kanten, davon 6 kurze und 3 lange
Die dreiseitige Doppelpyramide ist ein Beispiel für einen einfachen Körper mit D3h-Symmetrie.
Dieder-Winkel arccos -1/7 ≈ 98,213211°. 4 Rotationsachsen und 4 Symmetrieebenen

Hat das duale dreiseitige Prisma die Kantenlänge a, so wird für die dreiseitige Doppelpyramide
kurze Kantenlänge s_1 = 4/3 a
lange Kantenlänge s_2 = 2 a
3er-Ecken-Kugelradius r_3 = 2/3 a
4er-Ecken-Kugelradius r_4 = 2 √3/3 a ≈ 1,154700538 a
Mittelkugelradius ρ = √3/3 a ≈ 0,577350269 a
Inkugelradius r = 2 √21/21 a ≈ 0,436435780 a
Oberfläche A = 2 √7 a² ≈ 5,29150262212 a²
Volumen V = 4 √3/9 a³ ≈ 0,769800359 a³

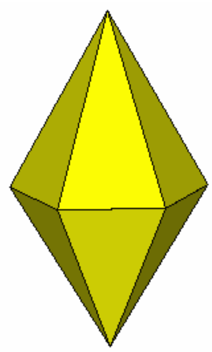
Ist die kurze Kantenlänge des Körpers gleich a, so wird für die anderen Größen
lange Kantenlänge s_2 = 3/2 a
3er-Ecken-Kugelradius r_3 = 1/2 a
4er-Ecken-Kugelradius r_4 = √3/2 a ≈ 0,8660254037 a
Mittelkugelradius ρ = √3/4 a ≈ 0,4330127018 a
Inkugelradius r = √21/14 a ≈ 0,3273268353 a
Oberfläche A = 9/8 √7 a² ≈ 2,97647022494 a²
Volumen V = 3/16 √3 a³ ≈ 0,324759526419 a³



Fünfseitige Doppelpyramide

Zum fünfseitigen Prisma duales Polyeder mit 7 Ecken, 10 gleichschenkligen Dreiecken als Flächen und 15 Kanten, davon 5 kurze und 10 lange. Der Körper ist ein einfaches Beispiel für ein Symmetrie-D5h-Polyeder.
Dieder-Winkel arccos (-(11+4 √5)/41) ≈ 119,107231°. 6 Rotationsachsen und 6 Symmetrieebenen
Hat das duale fünfseitige Prisma die Kantenlänge a, so wird für die fünfseitige Doppelpyramide
kurze Kantenlänge s_1 = (√5 -1) a ≈ 1,236067977 a
lange Kantenlänge s_2 = 4 √5/5 a ≈ 1,788854382 a
4er-Ecken-Kugelradius r_4 = √(10 (5- √5))/5 a ≈ 1,051462224 a
5er-Ecken-Kugelradius r_5 = (5+ √5)/5 a ≈ 1,447213595 a
Mittelkugelradius ρ = √(10 (5+ √5))/10 a ≈ 0,850650808 a
Inkugelradius r = √(410 (35+9 √5))/205 a ≈ 0,733349228 a
Oberfläche A = √(130 - 10 √5) a² ≈ 10,37493711 a²
Volumen V = 2 √(2 (5+ √5))/3 a³ ≈ 2,536150710 a³

Ist die kurze Kantenlänge des Körpers gleich a, so wird für die anderen Größen
lange Kantenlänge s_2 = (1+ √5/5) a ≈ 1,447213595 a
4er-Ecken-Kugelradius r_4 = √(√5/10 + 1/2) a ≈ 0,8506508083 a
5er-Ecken-Kugelradius r_5 = (1/2 + 3/10 √5) a ≈ 1,170820393 a
Mittelkugelradius ρ = √(√5/10 + 1/4) a ≈ 0,6881909602 a
Inkugelradius r = √(31/410 √5 + 15/82) a ≈ 0,5932919885 a
Oberfläche A = √(10 √5 + 95/4) a² ≈ 6,79048450222 a²
Volumen V = √(29/72 √5 + 65/72) a³ ≈ 1.34291335115 a³



Sechsseitige Doppelpyramide

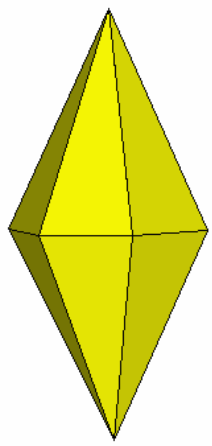
Zum sechsseitigen Prisma duales Polyeder mit 8 Ecken, 12 gleichschenkligen Dreiecken als Flächen und 18 Kanten, davon 6 kurze und 12 lange.
Der Körper ist ein einfaches Beispiel für ein Symmetrie-D6h-Polyeder.
Dieder-Winkel arccos -3/5 ≈ 126,869898°. 7 Rotationsachsen und 7 Symmetrieebenen
Hat das duale sechsseitige Prisma die Kantenlänge a, so wird für die sechsseitige Doppelpyramide

kurze Kantenlänge s_1 = 2 √3/3 a ≈ 1,154700538 a
lange Kantenlänge s_2 = 4 √3/3 a ≈ 2,309401077 a
4er-Ecken-Kugelradius r_4 = 2 √3/3 a ≈ 1,154700538 a
6er-Ecken-Kugelradius r_6 = 2a
Mittelkugelradius ρ = a

Inkugelradius	$r = 2\sqrt{5}/5\ a \approx 0{,}894427191\ a$
Oberfläche	$A = 4\sqrt{15}\ a^2 \approx 15{,}49193338\ a^2$
Volumen	$V = 8\sqrt{3}/3\ a^3 \approx 4{,}618802154\ a^3$

Ist die kurze Kantenlänge des Körpers gleich a, so wird für die anderen Größen

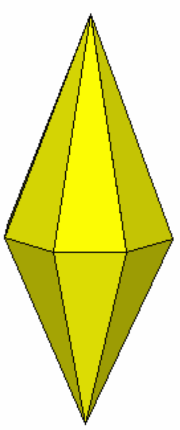
lange Kantenlänge	$s_2 = 2\ a$
Inkugelradius	$r = \sqrt{15}/5\ a \approx 0{,}7745966692\ a$
Oberfläche	$A = 3\sqrt{15}\ a^2 \approx 11{,}6189500386\ a^2$
Volumen	$V = 3\ a^3$



Siebenseitige Doppelpyramide

Zum siebenseitigen Prisma duales Polyeder mit 9 Ecken, 14 gleichschenkligen Dreiecken als Flächen und 21 Kanten, davon 7 kurze und 14 lange.
Der Körper ist ein einfaches Beispiel für ein Symmetrie-D7h-Polyeder.
Dieder-Winkel arccos (-Lösung von $[239x^3 -227x^2 +45x-1]$) ≈ 133,089524°. 8 Rotationsachsen und 8 Symmetrieebenen
Hat das duale siebenseitige Prisma die Kantenlänge a, so wird für die siebenseitige Doppelpyramide

kurze Kantenlänge s_1 = Lösung von $[x^3-4x^2-4x+8]\ a \approx 1{,}109916264\ a$
$s_1 = 4/3\ (1 - \sqrt{7} \sin(\arctan(\sqrt{3}/9)/3))\ a$
lange Kantenlänge s_2 = Lösung von $[7x^3 -28x^2 +64]\ a \approx 2{,}947904916\ a$
$s_2 = 4/3\ (1 + 2 \sin(\pi/6 + 2/3 \arctan(\sqrt{3}/9)))$
4er-Ecken-Kugelradius $r_4 = \sqrt{}$(Lösung von $[7x^3 -56x^2 +112x-64]$) $a \approx 1{,}279048008\ a$
7er-Ecken-Kugelradius r_7 = Lösung von $[7x^3 -28x^2 +28x-8]\ a \approx 2{,}655970555\ a$
Mittelkugelradius $\rho = \sqrt{}$(Lösung von $[7x^3 -14x^2 +7x-1]$) $a \approx 1{,}152382435\ a$
Inkugelradius $r = \sqrt{}$(Lösung von $[1673x^3-2520x^2+784x-64]$) $a \approx 1{,}057162591\ a$
Oberfläche $A = 22{,}4939825931\ a^2$
Volumen $V = \sqrt{}$(Lösung von $[729x^3 -54432x^2 +564480x -1404928]$) a
$V = \sqrt{(224/9\ (1 + \sqrt{21}/3 \cos(\arctan(\sqrt{3}/9)/3))}\ a \approx 7{,}926598977\ a$



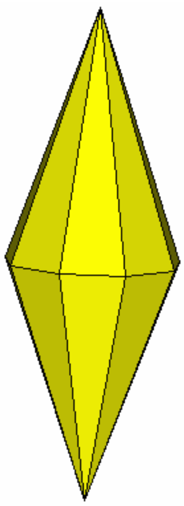
Achtseitige Doppelpyramide

Zum achtseitigen Prisma duales Polyeder mit 10 Ecken, 16 gleichschenkligen Dreiecken als Flächen und 24 Kanten, davon 8 kurze und 16 lange.
Der Körper ist ein einfaches Beispiel für ein Symmetrie-D8h-Polyeder.
Dieder-Winkel arccos $(-(7+4\sqrt{2})/17) \approx 138{,}117959°$. 9 Rotationsachsen und 9 Symmetrieebenen
Hat das duale achtseitige Prisma die Kantenlänge a, so wird für die achtseitige Doppelpyramide

kurze Kantenlänge	$s_1 = \sqrt{(2\ (2- \sqrt{2}))}\ a \approx 1{,}082392200\ a$
lange Kantenlänge	$s_2 = 2\sqrt{(2+ \sqrt{2})}\ a \approx 3{,}695518130\ a$
4er-Ecken-Kugelradius	$r_4 = \sqrt{2}\ a \approx 1{,}414213562\ a$
8er-Ecken-Kugelradius	$r_8 = (2+ \sqrt{2})\ a \approx 3{,}414213562\ a$
Mittelkugelradius	$\rho = \sqrt{(2\ (2+ \sqrt{2}))}/2\ a \approx 1{,}306562965\ a$
Inkugelradius	$r = \sqrt{(34\ (7+4\sqrt{2}))}/17\ a \approx 1{,}220262954\ a$
Oberfläche	$A = \sqrt{(256\sqrt{2} + 640)}\ a^2 \approx 31{,}6549944237\ a^2$
Volumen	$V = 16\ (1+ \sqrt{2})/3\ a^3 \approx 12{,}875805666\ a^3$

Ist die kurze Kantenlänge des Körpers gleich a, so wird für die anderen Größen

lange Kantenlänge	$s_2 = (2+ \sqrt{2})\ a \approx 3{,}41421356237\ a$
Mittelkugelradius	$\rho = (1 + \sqrt{2})/2\ a \approx 1{,}20710678118\ a$
Inkugelradius	$r = \sqrt{(15/34\sqrt{2} + 11/17)}\ a \approx 1{,}12737596729\ a$
Oberfläche	$A = \sqrt{(256\sqrt{2} + 368)}\ a^2 \approx 27{,}0192278196\ a^2$
Volumen	$V = \sqrt{(328/9\sqrt{2} + 464/9)}\ a^3 \approx 10{,}1536093662\ a^3$

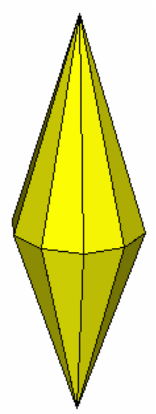


Neunseitige Doppelpyramide

Zum neunseitigen Prisma duales Polyeder mit 11 Ecken, 18 gleichschenkligen Dreiecken als Flächen und 27 Kanten, davon 9 kurze und 18 lange.
Der Körper ist ein einfaches Beispiel für ein Symmetrie-D9h-Polyeder.
Dieder-Winkel arccos (-Lösung $[199x^3 -243x^2 +69x-1]$) ≈ 142,2365575°. 10 Rotationsachsen und 10 Symmetrieebenen

Hat der Mittelkugelradius die Länge a, so wird für die neunseitige Doppelpyramide
kurze Kantenlänge $s_1 = \sqrt{}$(Lösung $[x^3 -132x^2 +432x -192]$) $a \approx 0{,}727940469\ a$
$s_1 = \sqrt{(44 - 32\sqrt{7} \sin(\arctan(\sqrt{3}/37)/3 + \pi/6))}\ a$
lange Kantenlänge $s_2 = \sqrt{}$(Lösung $[3x^3 -144x^2 +1536x -4096]$) $a \approx 3{,}111447654\ a$

$s_2 = \sqrt{(16 - 32/3 \sqrt{3} \sin \pi/9)}$
Dreieckshöhe $h \approx 3{,}09008611051\ a$
4er-Ecken-Kugelradius r_4 = Lösung $[x^3 +6x^2 -8]\ a \approx 1{,}064177772\ a$ $\quad r_4 = 4 \cos (2/9\ \pi) - 2$
9er-Ecken-Kugelradius $r_9 = \sqrt{(\text{Lösung } [3x^3 -36x^2 +96x -64])}\ a \approx 2{,}923804400\ a$
Inkugelradius $r = \sqrt{(\text{Lösung } [199x^3 -420x^2 +288x -64])}\ a \approx 0{,}946188648\ a$
Oberfläche $A \approx 20{,}2445885798\ a^2$
Volumen V = Lösung $[x^3 +36x^2 -1728]\ a^3 \approx 6{,}385066635\ a^3$ $\quad V = 24 \cos (2/9\ \pi) - 12$

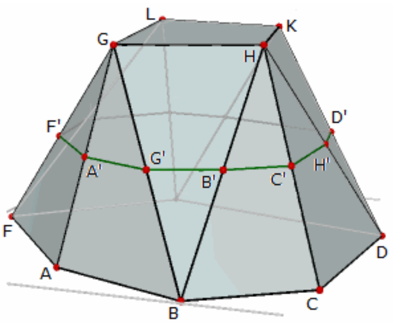


Zehnseitige Doppelpyramide

Zum zehnseitigen Prisma duales Polyeder mit 12 Ecken, 20 gleichschenkligen Dreiecken als Flächen und 30 Kanten, davon 10 kurze und 20 lange.
Der Körper ist ein einfaches Beispiel für ein Symmetrie-D10h-Polyeder.
Dieder-Winkel $\arccos (-(15+4 \sqrt{5})/29) \approx 145{,}6559243°$. 11 Rotationsachsen und 11 Symmetrieebenen

Hat der Mittelkugelradius die Länge a, so wird für die zehnseitige Doppelpyramide
kurze Kantenlänge $s_1 = 2 \sqrt{(5 (5-2 \sqrt{5}))}/5\ a \approx 0{,}649839392\ a$
lange Kantenlänge $s_2 = 2 \sqrt{(10 (5+ \sqrt{5}))}/5\ a \approx 3{,}402603233\ a$
Dreieckshöhe $h = \sqrt{(2 \sqrt{5} + 7)}\ a \approx 3{,}38705417066\ a$
4er-Ecken-Kugelradius $r_4 = \sqrt{(10 (5- \sqrt{5}))}/5\ a \approx 1{,}051462224\ a$
10er-Ecken-Kugelradius $r_{10} = (1+ \sqrt{5})\ a \approx 3{,}236067977\ a$
Inkugelradius $r = \sqrt{(58 (11+ \sqrt{5}))}/29\ a \approx 0{,}955422563\ a$
Oberfläche $A = \sqrt{(1200 - 320 \sqrt{5})}\ a^2 \approx 22{,}0104122451\ a^2$
Volumen $V = 4 \sqrt{(10 (5- \sqrt{5}))}/3\ a^3 \approx 7{,}009748162\ a^3$

Ist die kurze Kantenlänge des Körpers gleich a, so wird für die anderen Größen
lange Kantenlänge $s_2 = (3 + \sqrt{5})\ a \approx 5{,}23606797749\ a$
Inkugelradius $r = \sqrt{(27/58 \sqrt{5} + 65/58)}\ a \approx 1{,}47024414693\ a$
Oberfläche $A = \sqrt{(600 \sqrt{5} + 1375)}\ a^2 \approx 52{,}1214043028\ a^2$
Volumen $V = (35/6 \sqrt{5} + 25/2)\ a^3 \approx 25{,}5437298687\ a^3$



Prismoid, Prismatoid

engl. prismatoid, prismoid, niederländ. prismoïde, prismatoïde
Unter einem Prismoid versteht man ein konvexes Polyeder, bei dem die Eckpunkte in zwei parallelen Ebenen liegen. Damit besitzt der Körper eine Grund- und eine Deckfläche, die bebliebige N-Ecke sein können.
Die Mittelfläche (Abbildung A'B'...) wird von allen Mittelpunkten der Seitenkanten gebildet.
Sind alle Seitenflächen Trapeze, so ist das Prismoid ein Obelisk. Sind die Seitenflächen Dreiecke, so spricht man von einem Antiprisma.

Volumen eines Prismoids

Sind G der Flächeninhalt der Grundfläche, D der Deckfläche, M der Mittelfläche und h die Höhe des Prismoids, d.h. der Abstand von Grund- und Deckfläche, so wird für das Volumen

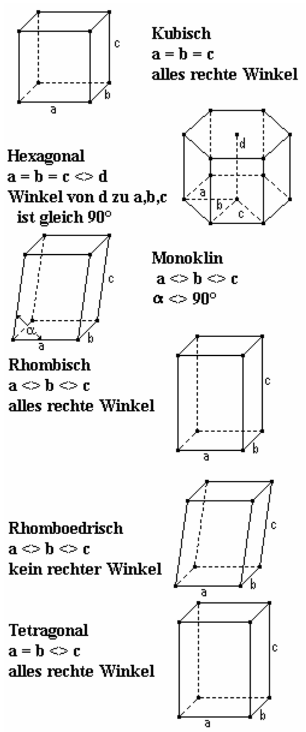
$$V = h/6\ (G + D + 4M)$$

Spezialfälle
Prisma $V = h/6\ (G + G + 4G) = h \cdot G$
Pyramide $V = h/6\ (G + 0 + G) = h/3 \cdot G$
Pyramidenstumpf
Bei einer Grundfläche G und einer Deckfläche D wird für die Mittelfläche

$$4\ M = D + G + 2 \sqrt{(G \cdot D)}$$

und für das Volumen

$$V = h/6\ (G + D + G + D + 2 \sqrt{(G \cdot D)}) = h/3\ (G + D + \sqrt{(G \cdot D)})$$



Kristallgitter

Kristalle bilden in der Natur typische Gitter aus, die sich mittels gerader und schiefer Prismen und anderer Polyeder beschreiben lassen. Insgesamt unterscheidet man sechs Grundkristallgitter.

Kristallformen von Mineralien

Form	Mineral/Stein	Flächen
Würfel	Steinsalz, Fluorit, Pyrit, Diamant	6 Quadrate
Oktaeder	Diamant, Fluorit, Pyrit, Bleiglanz	8 Dreiecke
Sechsecksäule	Saphir, Rubin, Beryll, Apatit	6 Rechtecke, 2 Sechsecke

... mit Pyramidenspitze	Bergkristall, Amethyst, Rauchquarz	6 Rechtecke, 6 Dreiecke
Doppelender	Quarze, z.B. Bergkristall	6 Rechtecke, 12 Dreiecke
Rhombendodekaeder	Granat, Diamant	12 Rhomben
Dodekaeder	Pyrit	12 Fünfecke
Ikosaeder	Pyrit	20 Dreiecke
Kubooktaeder	Bleiglanz, Fluorit, Gold	6 Quadrate, 8 Dreiecke
Tetraeder	Teraedrit	4 Dreiecke
Würfel + Dodekaeder	Pyrit	6 Rechtecke, 12 Fünfecke
Spate	Calcit (Kalkspat)	6 Rhomben

Fluorit, Flussspat
CaF_2, kubisches Kristallgitter
Härte 4, Dichte 3 g/cm³, I 3,2; ca. 48% F

Fluorit war bereits im Altertum sehr beliebt. Er diente als Edelstein in Griechenland und Rom zur Herstellung verschiedener Schmuckgegenstände und Vasen (vasae murrhinae).
Flussspat ist ein weit verbreitetes Mineral. Es kommt vorwiegend in kleinen Mengen in Granit-, Syenit- und Rhyolitmassiven vor. Fluorit gehört auch in die Mineralassoziation der Quarzgänge mit Zinn-, Wolfram- und Molybdänerzen sowie der Blei- und Kupfererzlagerstätten.
Feine Fluoritkriställchen erscheinen in Quarz-, Albit-, Adular-, Rutildrusen sowie in anderen Mineralen in kristallinen Schiefern, z.B. in der Schweiz und in Österreich.
Fluoritfundstellen gibt es in allen Ländern.



Pyrit, Schwefelkies
chemische Struktur FeS_2
Pyrit-Kristalle haben ein kubisches Kristallgitter.
Der Name Pyrit kommt vom griechischen "pyrites lithos" (pyr = Feuer und lithos = Stein) und bezeichnet die Eigenschaft des Minerals, beim Reiben Funken zu erzeugen.

Das Mineral bildet sehr schöne Kristalle, die oft in Form von Würfeln, Pentagondodekaedern und Oktaedern auftreten, mitunter auch als Kombination dieser Platonischen Körper.
In einigen Lagerstätten tritt Pyrit in Form von Dodekaeder-Zwillingen auf. Diese ähneln dem Malteser Kreuz.
Besonders berühmte Pyritgruppen stammen aus dem spanischen Ort Navajún. Dort sind of zwei oder mehr Kristalle miteinander verwachsen.

Auf Grund des metallischen Glanzes und seiner goldenen Farbe wird Schwefelkies auch Katzen- oder Narrengold genannt (engl. "fool's gold").
Immer wieder gibt es Menschen, die auf die äußerlichen Eigenschaften hereinfallen und glauben, Gold gefunden zu haben. Im Gegensatz zu echtem Gold ist Pyrit aber nicht formbar und wesentlich härter.
Kurios ist, dass Pyrit tatsächlich Gold, wie auch Silber enthalten kann, jedoch nur in so geringer Konzentration.
Quelle: http://www.mineralienatlas.de/lexikon/index.php/Mineralienportrait/Pyrit

Kalkspat, Calcit
$CaCO_3$, Kalkspat (Calciumcarbonat), farblos,weiß,gelb; in Magmagesteinen, Härte 3, Dichte 2.6-2.8 g/cm³, trigonal

Calcit ist eines der häufigsten Minerale der Erdkruste. Der Mensch nutzte dieses Gestein schon im Altertum, wie die antiken Tempel, Paläste und Skulpturen aus der Kalksteinvarietät Marmor demonstrieren.
Calcit-Kristalle haben unterschiedliche Erscheinungsformen. Es tritt in körnigen und erdigen Aggregaten, porösen Rinden und bizarren Gebilden auf.
Sehr oft findet man Rhomboeder- und Spatform, seltener Kristalle in Form von Platonischen Körpern, z.B. Dodekaedern.
Berühmt wurde Calcit, als 1669 der Arzt Erasmus Bartolinus in Island die Doppelbrechung des Lichts an Kalkspat entdeckte.
Ein in einer bestimmten Richtung durch ein klares Calcitrhomboeder gehender Lichstrahl wird in zwei voneinander abweichende Strahlen gebrochen. So entsteht die doppelte Kontur des beobachteten Gegenstands, einer Schrift usw.

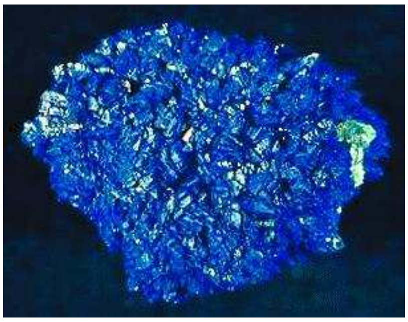
Noch heute werden Nicolsche Prismen für optische Geräte aus Kalkspat hergestellt.

Quarz
SiO_2, hexagonales Kristallgitter
farblos, verschieden gefärbt; in Magma-,Sediment- und metamorphen Gesteinen, Härte 7, Dichte 2.65 g/cm³, 46,7% Si

Quarz ist ein gewöhnliches und weit verbreitetes Mineral, der am Aufbau der Erdrinde mit etwa 12 % beteiligt ist.
Er war das erste von den Steinzeitmenschen genutzte Mineral, war doch z.B. Feuerstein; ein dichtes Gemenge aus Chalcedon und Opal; über lange Zeit hinweg ein begehrter Artikel im aufkommenden Tauschhandel.
Quarz ist auf ganz verschiedene Weisen entstanden.
Er wurde aus dem Magma als ein Mineral fast aller Tiefen- und Ergussgesteine abgeschieden, kristallisierte aus den Lösungen der hydrothermalen Gänge und ist Bestandteil vieler metamorpher Gesteine. Durch die Verwitterung dieser Träger gelangte er in verschiedene Sedimente (Quarzite, Sandstein).
Bergkristall, Rauchquarz, Amethyst und Rosenquarz gehören zu seinen weniger häufigen edlen Varietäten. Sie dienen zur Herstellung von Schmuck und kunsthandwerklichen Gegenständen.
Außergewöhnlich große Kristalle wurden 1868 im Schweizer Kanton Uri gefunden, berühmt ist auch die Umgebung des St. Gotthard.

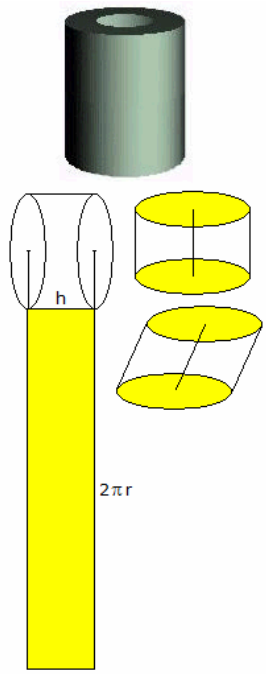
Topas
$Al_2SiO_4\ (F,OH)_2$, rhombisches Kristallgitter
Härte 7,5~8; Dichte 3-3,8 g/cm³

Die Entstehung des Topas hängt mit den Intrusionen von saueren Tiefengesteinen zusammen. Er kommt daher in Pegmatiten vor, ist ein wesentlicher Bestandteil von Gneisen und wurde in der charakteristischen Mineralassoziation der Zinn-Wolfram-Molybdänerze auf Quarzgängen in Graniten und in der Randzone ihrer Massive abgeschieden.
Die gelblichen parallel faserigen bis langstengeligen Topasaggregate, die Erzgänge mit Cassiterit und anderen Mineralen ausfüllen, werden Pyknik genannt. Topas ist ein weit verbreitetes Mineral. Kristalle mit einem Gewicht bis zu 300 kg stammen aus Minas Gerais (Brasilien), kleinere aus Russland und aus Japan.
Bläuliche Kristalle kommen in Mursinka vor, eine honiggelbe Farbe ist für die brasilianischen Fundstätten charakteristisch. Topasgerölle stellen eine Komponente in den Seifen der Insel Ceylon (Sri Lanka) dar.



Azurit
$2\ CuCO_3\ .\ Cu(OH)_2$
monoklines Kristallgitter, Härte 3,5-4, Dichte 3,7-3,9 g/cm³; bis zu 52% Cu,
Die primären schwefelhaltigen Kupfererze haben ein typisches, farblich ausdrucksloses metallisches Aussehen. Sekundäre Kupfererze hingegen zeichnen sich durch Buntheit aus, vor allem durch Blau-und Grüntöne. Das zeigen Azurit und Malachit.
Sie kommen fast an jeder Kupfererzfundstätte vor und entstehen für gewöhnlich durch die Wirkung von Kupfersulfatlösungen auf Calcit in Gängen oder auf Kalksteinkomplexen.
Azurit imprägniert manche Sandsteine und Schiefer, wodurch sie bedeutende stratiforme Lagerstätten aufbauen. Malachit- und Azuritvorkommen sind weit verbreitet. An Stellen mit großen Tetraedritmengen ist Azurit etwas häufiger.
Vollkommene Kristalle gibt es in den Fundstätten Chessy (Frankreich), Moldova (Rumänien), Laurion (Griechenland) und vor allem von den Lagerstätten Tsumeb (Namibia), Bisbee (USA) sowie Burra Burra und Broken Hill (Australien).
In der Bundesrepublik gibt es Azuritvorkommen in Hessen, in Mechernich und im Saarland (Wallerfangen), Malachit im Saarland, Harz und Siegerland.

Zylinder

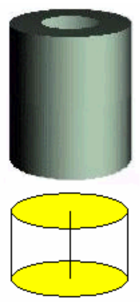


Ein Zylinder ist ein Körper, der von zwei parallel liegenden Kreisflächen gebildet wird. Er entsteht, wenn man einen Kreis senkrecht zu ihm verschiebt. Dieser Körper ist ein Zylinder im engeren Sinne und heißt genauer gerader Kreiszylinder.
Die Verallgemeinerung erfolgt in zweierlei Weise: 1. Die Richtung der Verschiebung des Kreises ist nicht senkrecht zum Kreis. Dieser Zylinder heißt dann schiefer Kreiszylinder. 2. Neben einer Verschiebung in beliebige Richtung kann der Kreis durch eine andere ebene, geschlossene Kurve ersetzt werden. Das kann eine Ellipse oder ein anderes Flächenstück sein. Ist das Flächenstück ein Vieleck, so entsteht ein Prisma.
Die Kreise mit dem Radius r, die den Zylinder begrenzen, heißen Grund- und Deckfläche. Ihr Abstand heißt Höhe h. Die Seitenfläche ist gekrümmt und heißt Mantelfläche M. Die Mantelfläche ist einfach gekrümmt und kann deshalb abgewickelt werden.

Volumen	$V = \pi r^2 h$
Oberfläche	$A = 2 \pi r^2 + 2 \pi r h$
Mantelfäche	$M = 2 \pi r h$
Verhältnis	$V / A = 1/(2 (1/r + 1/h))$

Das Verhältnis entspricht dem harmonischen Mittel von r und h.
Die Form eines Zylinders kann man durch das Verhältnis des Kreisdurchmessers $d=2r$ zur Höhe h, d/h beschreiben. Auffällig ist ein Zylinder mit $d/h = 1$. Diese Form hat das Urkilogramm in Paris.

Allgemeine Definition: Eine Gerade, die Erzeugende, beschreibt eine Zylinderfläche, wenn sie im Raum ohne ihre Richtung zu verändern, längs einer gekrümmten Linie, der Leitkurve, gleitet.



Gerader Zylinder

Gegeben sei gerader Zylinder, d.h. der Lotfußpunkt des Mittelpunktes der Deckkreises ist der Mittelpunkt des Grundkreises. V sei das Volumen, A die Oberfläche, M die Mantelfläche, r und d Radius und Durchmesser des Grundkreises, h die Zylinderhöhe und u der Umfang der Grundkreises.
Dann gilt:

Volumen $V = \pi r^2 h \approx 3{,}141592265\, r^2h = \pi/4\, d^2 h \approx 0{,}7853982\, d^2h$
$V = u^2 h / (4\pi) \approx 0{,}0795774\, u^2h = M^2 / (4\pi h) \approx 0{,}0795774\, M^2/h$
$V = d M/4 = r M/2 = u M/(4\pi) = 1/2 (\pi h^3 + A h - h^2 \sqrt{\pi^2h^2 + 2\pi A})$
$V = 1/2 (A - 2\pi r^2) r = 1/8 (2A - \pi d^2) d = 1/(8\pi^2) (2\pi A - u^2) u$
$V = M/2 \sqrt{(A - M) / (2\pi)}$

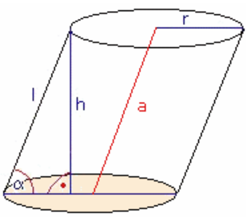
Oberfläche $A = 2 \pi r^2 + 2 \pi r h \approx 6{,}2831853 (r+h) r = \pi/2 (d + 2h) d \approx 1{,}5707963 (d+2h) d$
$A = (u/(2\pi) + h) u \approx (0{,}1591549 u + h) u = M^2 / (2\pi h^2) + M = M + \pi/2\, d^2 = M + 2\pi r^2$
$A = 2 (V/h + \sqrt{\pi hV}) = 2 (V + \pi r^3) / r = (2V + \pi d^3) / (2d) = (8\pi^2 V + u^3) / (2\pi u)$
$A = M + 8\pi V^2/M^2$

Mantelfäche $M = 2 \pi r h = \pi d h = u h = h (\sqrt{2\pi A + \pi^2h^2} - \pi h)$
$M = A - 2\pi r^2 = A - \pi/2\, d^2 = A - u^2 / (2\pi) = 2 \sqrt{\pi h V} \approx 3{,}5449077 \sqrt{h V}$
$M = 2 V / r = 4 V / d = 4\pi V / u$

Höhe $h = M / (2\pi r) = M / (\pi d) = M / u = A / (2\pi r) - r = A / (\pi d) - d/2 = A / u - u / (2\pi)$
$h = M / \sqrt{2\pi (A - M)} = V / (\pi r^2) = 4V / (\pi d^2) = 4\pi V / u^2 = M / (4\pi V)$
$h = V/\sqrt[3]{\pi}\; 1/(\sqrt[3]{(-V+\sqrt{V^2-A^3/(54\pi)})/2} + \sqrt[3]{(-V-\sqrt{V^2-A^3/(54\pi)})/2})^2$

Radius $r = M / (2\pi h) \approx 0{,}1591549 M/h = \sqrt{(2\pi A - \pi^2h^2) / (2\pi)} - h/2$
$r = \sqrt{(A - M) / (2\pi)} \approx 0{,}3989422 \sqrt{A-M} = \sqrt{V / (h \pi)} \approx 0{,}5641896 \sqrt{V/h}$
$r = \sqrt[3]{(-V + \sqrt{V^2 - A^3/(54\pi)}) / (2\pi)} + \sqrt[3]{(-V - \sqrt{V^2 - A^3/(54\pi)}) / (2\pi)}$

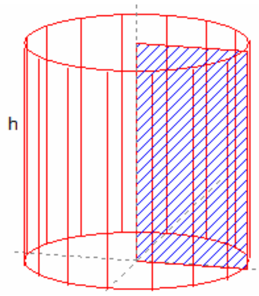
Umfangu $= M / h = \sqrt{\pi (2A + \pi h^2)} - \pi h = \sqrt{2\pi (A - M)} = \sqrt{4\pi V / h} = 4\pi V / M$



Schräger Zylinder, Schiefer Zylinder

Ist der Lotfußpunkt des Mittelpunktes der Deckkreises nicht der Mittelpunkt des Grundkreises, so liegt ein schräger oder schiefer Zylinder vor. V sei das Volumen, A die Oberfläche, M die Mantelfläche, r und d Radius und Durchmesser des Grundkreises, h die Zylinderhöhe und u der Umfang der Grundkreises. Zusätzlich sei a = l die Länge der Achse, d.h. die Strecke zwischen den zwei Kreismittelpunkten sowie α der Winkel von a gegen die Grundebene. Dann gilt:

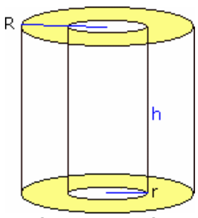
Volumen $V = \pi r^2 h = \pi r^2 l \sin\alpha = a u^2 / (4\pi) \sin\alpha$
Oberfläche $A = 2 \pi r l = 2 \pi r h/\sin\alpha$
Höhe $h = a \sin\alpha$
Zylinderachse $a = h / \sin\alpha = h \csc\alpha = 4V / (d^2 \pi \sin\alpha)$
Außerdem gelten folgende Gleichungen, die auch bei einem geraden Zylinder korrekt sind:
Volumen $V = \pi r^2 h \approx 3{,}141592265\, r^2h = \pi/4\, d^2 h \approx 0{,}7853982\, d^2h$
$V = u^2 h / (4\pi) \approx 0{,}0795774\, u^2h$
Höhe $h = M / \sqrt{2\pi (A - M)} = V / (\pi r^2) = 4V / (\pi d^2) = 4\pi V / u^2$
Die Mantelfläche des schiefen Zylinders wird mit $m = 1 - \sin^2\alpha$ und $n = \cos^2\alpha$ durch die unendlichen Reihen beschrieben:
$M = ad\pi\, (1 - 1/2^2\, m - (1\cdot3)/(2^2\cdot4^2)\, m^2 - (1\cdot3^2\cdot5)/(2^2\cdot4^2\cdot6^2)\, m^3 - (1\cdot3^2\cdot5^2\cdot7)/(2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdot8^2)\, m^4 - \ldots$
$M = ad\pi\, (1 - n/4 - 3n^2/64 - 5n^3/256 - 175n^4/4096 - \ldots)$



Gleichseitiger Zylinder

Unter einem gleichseitigen, geraden Zylinder versteht man einen geraden Kreiszylinder, bei dem die Höhe gleich dem Durchmesser des Grundkreises ist.
Es sei V das Volumen, A die Oberfläche, M die Mantelfläche, a die Höhe und gleichzeitig der Durchmesser. Dann gilt:

Volumen $V = \pi/4\, a^3 \approx 0{,}7853982\, a^3 = M/4 \sqrt{M/\pi}$
$V = 2/3\, A \sqrt{2/3\, A/\pi} = 2/\pi \sqrt{G^3}$
Oberfläche $A = 3/2\, a^2 \pi \approx 4{,}7123889\, a^2 = 3/2\, M = 3 \sqrt[3]{2V^2 \pi} = 6\, G$
Mantelfläche $M = a^2 \pi \approx 3{,}1415926\, a^2 = 2/3\, A = 2 \sqrt[3]{2V^2 \pi} = 4\, G$
Durchmesser a $a = \sqrt{M/\pi} \approx 0{,}5641896 \sqrt{M} = \sqrt{2A / (3\pi)} \approx 0{,}4606589 \sqrt{A}$
$a = \sqrt[3]{4V / \pi} \approx 1{,}0838521 \sqrt[3]{V} = 2/\sqrt{p} \sqrt{G}$
Grundfläche G $G = \pi/4\, a^2 = \sqrt[3]{\pi V/2}^2$



Hohlzylinder

Festlegung: R > r

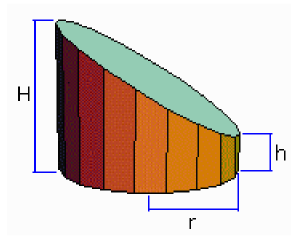
Besitzt ein Kreiszylinder eine kreisförmige Bohrung entlang seiner Achse, so spricht man von einem Hohlzylinder. Ein Hohlzylinder wird auch als zylindrische Röhre oder als Rohr bezeichnet.
V sei das Volumen, A die Oberfläche, M die Mantelfläche, h die Zylinderhöhe, R der äußere, große Radius, r der kleine, innere Radius, D und d äußere und innere Durchmesser und f die Zylinderdicke. Dann ergibt sich:

Volumen $V = \pi h (R^2 - r^2) = \pi h f (D - f) = A_M/2\, (R - r)$
Oberfläche $A = 2 \pi h (R+r) + 2 \pi (R^2 - r^2) = 2 \pi (R + r) (h + R - r)$
Mantelfläche $A_M = 2 \pi h (R+r) = 2V / (R - r)$
äußerer Radius $R = A_M / (2 \pi h) - r = 1/2\, (\sqrt{h^2 + 2A/\pi} - r) = \sqrt{V/(\pi h) + r^2}$
innerer Radius $r = A_M / (2 \pi h) - R = \sqrt{R^2 - V/(\pi h)} = (\sqrt{2A + \pi h^2} - 2R \sqrt{\pi}) / \sqrt{\pi}$
Zylinderdicke $f = D/2 + \sqrt{D^2/4 - V/(\pi h)}$
Zylinderhöhe $h = A_M /(2 \pi (R + r)) = V / (\pi (R^2 - r^2)) = r - R + A / (2\pi (R + r)) = V / (\pi f (D-f))$

Berechnungen am Hohlzylinder

Festlegung: R > r
1. gegeben Radien r, R, Höhe h, gesucht Mantelfläche A_M
$A_M = 2 \pi h (R + r)$
2. gegeben Radien r, R, Höhe h, gesucht Oberfläche A
$A = 2 \pi (R + r) (h + R - r)$
3. gegeben Radien r, R, Höhe h, gesucht Volumen V
$V = \pi h (R^2 - r^2)$
4. gegeben innerer Radius r, Höhe h, Mantelfläche A_M, gesucht äußerer Radius R
$R = A_M / (2 \pi h) - r$
5. gegeben innerer Radius r, Höhe h, Oberfläche A, gesucht äußerer Radius R
$R = 1/2\, (\sqrt{h^2 + 2A/\pi} - r)$
6. gegeben innerer Radius r, Höhe h, Volumen V, gesucht äußerer Radius R
$R = \sqrt{V/(\pi h) + r^2}$
7. gegeben äußerer Radius R, Höhe h, Mantelfläche A_M, gesucht innerer Radius r
$r = A_M / (2 \pi h) - R$
8. gegeben äußerer Radius R, Höhe h, Volumen V, gesucht innerer Radius r
$r = \sqrt{R^2 - V/(\pi h)}$
9. gegeben Radien r, R, Mantelfläche A_M, gesucht Höhe h
$h = A_M /(2 \pi (R + r))$
10. gegeben innerer und äußerer Radius r und R, Volumen V, gesucht Höhe h
$h = V / (\pi (R^2 - r^2))$

Schräg abgeschnittener Kreiszylinder



... Zylinder, der von einer Ebene schräg zur Grundfläche geschnitten wird, jedoch die Grundfläche erhalten bleibt. Schneidet man einen Zylinder schräg ab, so entsteht ein Körper mit einer Ellipse als Deckfläche. Er wird durch die Höhen h_1 und h_2 und durch den Grundkreisradius r festgelegt.

Volumen	$V = \pi r^2 (h + H)/2$
Oberfläche	$A = \pi r [h + H + r + \sqrt{[r^2 + (H-h)^2/4]}]$
Mantelfläche	$M = \pi r (h + H)$
Schnittwinkel zur Ebene	$\alpha = \arctan [(H-h)/(2r)]$

Die schräg liegende Ellipse hat die Halbachsen 2r und $\sqrt{[4r^2 + (H-h)^2]}$. Zwei gleiche Körper dieser Art bilden wieder einen Zylinder.

Der Schwerpunkt liegt auf der um x_s zur hohen Seite hin verschobenen Achse im Abstand y_s von der Grundfläche $x_s = r^2/2 \tan \alpha / (h + H)$ $y_s = (h + H)/4 + r^2/4 \tan \alpha / (h + H)$

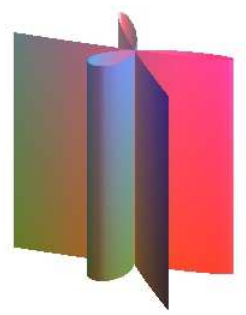
Rollt man den Mantel des schräg abgeschnittenen Kreiszylinders ab, so entsteht eine Sinuskurve.

Der Zylinder steht senkrecht auf x-y-Ebene mit dem Radius r. Die Schnittebene gehe durch die x-Achse mit der Steigung z/y = m. Dann ist die Schnittlinie

$$x(t) = r \cos(t) ,\ y(t) = r \sin(t) ,\ z(t) = m*y = m*r \sin(t).$$

Abgewickelt haben wir z(t). Das ist eine Sinuskurve mit der Amplitude m*r.

Das Planetarium in Kopenhagen wurde in einer ungewöhnlichen Form gebaut. Es ist ein schräg abgeschnittener Zylinder:



Allgemeiner Zylinder

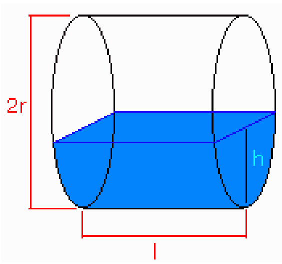
Neben den Kreiszylindern können Zylinder beliebiger Form untersucht werden. Für Zylinder mit einer Zylinderachse parallel zur z-Achse wird:

Kartesische Parametergleichung:

$$x = f(u) ,\ y = g(u),\ z = v$$

wobei f und g beliebige Funktionen sind. Zylinder gehören zu den Regelflächen, sind abwickelbar und können durch Translation einer Kurve längs der z-Achse erzeugt werden.

Zylindersegment



geg.: Zylinderradius r, Zylinderllänge l und Höhe h des Segmentes

Volumen $V = l [r^2 \arccos ((r-h)/r) - (r-h) \sqrt{(2rh - h^2)}]$

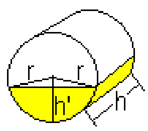
für h = r wird damit für den halben Zylinder $V = \pi r^2 l/2$

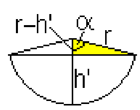
Herleitung:

A' sei der Flächeninhalt des Kreisausschnitts und A'' der Flächeninhalt des gleichschenkligen Dreiecks. Dann gilt für den Flächeninhalt A des Kreisabschnitts A = A' - A''.

Für A' gilt: A' **:** $(\pi r^2)=(2\alpha)$ **:** 2π oder $A' = \alpha r^2$. (α im Bogenmaß)

Für α gilt cos(alpha) = (r-h')/r oder $\alpha = \arccos[(r-h')/r]$. Damit ist $A' = r^2 \arccos[(r-h')/r]$





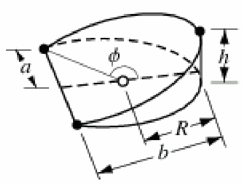
Für A'' gilt: $A'' = (r-h') \sqrt{[r^2-(r-h')^2]} = (r-h')* \sqrt{(2rh'-h'^2)}$.

Zusammengefasst**:** $A = A'-A'' = r^2 \arccos(r-h')/r - (r-h') \sqrt{(2rh'-h'^2)}$

$$V = Ah = h [r^2 \arccos(r-h') - (r-h') \sqrt{(2rh'-h'^2)}]$$

Zylindersektor

Bei einem Zylindersektor, der durch zwei in der Achse des Zylinders sich schneidenden Ebenen gebildet wird, sei ϕ der Winkel zwischen den Schnittebenen, r der Radius der Grundfläche und h die Zylinderhöhe.

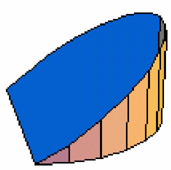


Für das Kreissektorvolumen wird $V = r^2/2\ h\ \pi\phi / 180°$; ϕ im Gradmaß

Zylinderschnitt

Wird ein Zylinder von n Ebenen geschnitten, so entstehen maximal

$f(n) = (n^3 + 5n + 6) / 6$ Schnittkörper; für n=1,2,3,… damit f(n) = 2,4,8,15,26,42,…



Zylinderhuf (-abschnitt) ; $\alpha = \phi / 2$

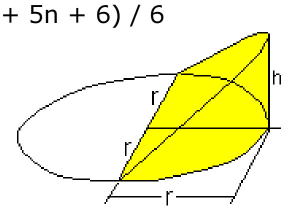
Bei einem hufförmigen Abschnitt eines Zylinders, einem Zylinderhuf, wird ein Zylinder von einen beliebig gegen die Grundfläche geneigten Ebene geschnitten.

Volumen $V = h [a (3r^2 - a^2) + 3r^2 (b - r) \alpha] / (3b)$

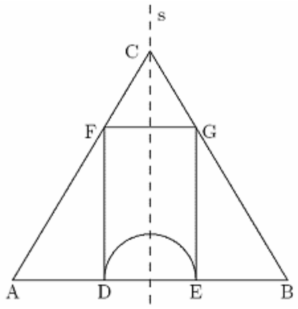
$= h r^3 [\sin \alpha - (\sin^3 \alpha)/3 - \alpha \cos \alpha] / b$

Mantelfläche $M = 2\,r\,h\,[(b - r)\,\alpha + a] / b$
Für a=b=r $V = 2r^2h/3$; $M = 2rh$
$A = M + \pi r^2/2 + \pi r/2\,\sqrt{(r^2+h^2)}$

Wird ein Zylinder von n Ebenen geschnitten, so entstehen maximal Schnittkörper; für n=1,2,3,... damit f(n) = 2,4,8,15,26,42,... $f(n) = (n^3 + 5n + 6) / 6$



Hat der Zylinderabschnitt einen Halbkreis als Grundfläche, so vereinfachen sich die Formeln.
$V = h[r(3r^2-r^2) + 3r^2(r-r)\,\alpha]/(3r) = 2/3\,hr^2$
$M = 2rh\,[(r-r)\,\alpha+r])/r = 2hr$
Obwohl ein Flächenstück gekrümmt ist, taucht in den Formeln π nicht auf.
Oberfläche $A = M + \pi r^2/2 + \pi r/2\,\sqrt{(r^2+h^2)}$



Zylinder-Aufgaben

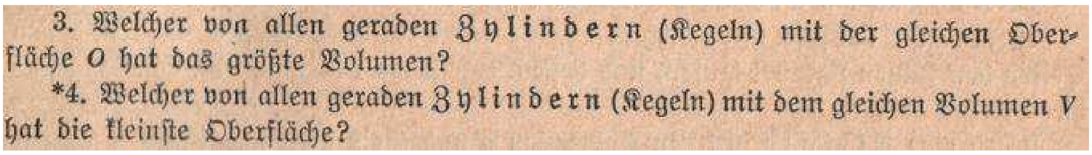
Aufgabe 1:
In einem Messzylinder mit dem inneren Radius R = 1,2 cm steht eine Flüssigkeit 3 cm hoch. Diese Flüssigkeit wird in ein Reagenzglas mit dem inneren Radius r = 0,6 cm gegossen. Wie hoch (in cm) steht die Flüssigkeit im Reagenzglas von untersten Punkt aus gemessen?
Hinweis: Betrachte das Reagenzglas als Zylinder mit angesetzter Halbkugel!
Lösung: 12,2 cm

Aufgabe 2:
Eine Kugel wird in einem möglichst kleinen zylinderförmigen Karton verpackt. Wie viel Prozent des Zylindervolumens bleiben frei?
Lösung: 33 %

Aufgabe 3 (Abbildung)
Aus dem gleichseitigen Dreieck ABC der Seitenlänge 2a werde die Figur DEFG mit dem Halbkreisbogen DE herausgestanzt. Das restliche Flächenstück rotiere um die Achse s. Ferner gilt CG = 2/3a.
Berechne das Volumen des entstehenden Rotationskörpers in Abhängigkeit von a und stelle das Ergebnis in möglichst einfacher Form dar!
Lösung über Strahlensatz: $V_{rot} = 1/81\,a^3\,\pi\,(21\,\sqrt{3} + 2)$

Zylinder maximaler Abmessungen

Lehrbuch: „Reinhardt-Zeisberg: Mathematisches Unterrichtswerk Teil IV, Frankfurt a.M. 1938", Seite 97:


3. Welcher von allen geraden Zylindern (Kegeln) mit der gleichen Oberfläche O hat das größte Volumen?
*4. Welcher von allen geraden Zylindern (Kegeln) mit dem gleichen Volumen V hat die kleinste Oberfläche?

Lösung:

Kurzbeschreibung der Rechnung	Zylinder größten Volumens bei konstanter Oberfläche	Zylinder kleinster Oberfläche bei konstantem Volumen
Zielfunktion f=f(r,h)	$V = \pi r^2h$	$A = 2\pi r\,(r+h)$
Nebenbedingung	$A = 2\pi r\,(r+h)$ oder $h = (A-2\pi r^2)/(2\pi r)$	$V = \pi r^2h$ oder $h = V/(\pi r^2)$
Zielfunktion f=f(r)	$V(r) = Ar/2 - \pi r^3$	$A(r) = 2\pi r^2 + 2V/r$
Ableitung f'(r)	$V'(r) = A/2 - 3\pi r^2$	$A'(r) = 4\pi r - 2V/r^2$
Radius	$V'(r) = 0$ führt zu $r=[A/(6\pi)]^{1/2}$	$A'(r) = 0$ führt zu $r=[(V/(2\pi)]^{1/3}$
2.Ableitung f''(r)	$V''(r) = -6\pi r<0$, also ist in r ein Maximum	$A''(r) = 4\pi + 4V/r^{-3} > 0$, also ist in r ein Minimum
Höhe	$h=[(2A/(3\pi)]^{1/2}$	$h = [4V/\pi]]^{1/3}$
Durchmesser/Höhe	d/h=1	d/h=1

In beiden Fällen haben die Zylinder die gleiche Form d/h=1.
Anmerkung: Die Dosenhersteller scheinen sich an die obige Rechnung nicht zu halten. Die Form d/h = 1 gibt es nur bei Kondensmilchdosen. Es gibt Dosen in allen möglichen Formen. Wahrscheinlich legt man mehr Wert auf Formen, die "schön" sind, typisch für ein Produkt oder praktisch für den Inhalt sind. Würstchendosen sind hoch, Fischdosen flach.

Euromünzen

Euromünzen haben die Form eines Zylinders.

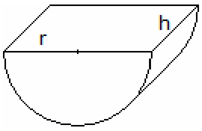
1 Cent	2 Cent	5 Cent	10 Cent	20 Cent	50 Cent	1 Euro	2 Euro
d=16,25mm	d=18,75mm	d=21,25mm	d=19,75mm	d=22,25mm	d=24,25mm	d=23,25mm	d=25,75mm

h=1,67mm	h=1,67mm	h=1,67mm	h=1,93mm	h=2,14mm	h=2,38mm	h=2,33mm	h=2,20mm
m=2,30g	m=3,06g	m=3,92g	m=4,10g	m=5,74g	m=7,80g	m=7,50g	m=8,50g

Zylinder in der Architektur


Royal Albert Hall in London


Milchkannenturm in Gdansk



Halbzylinder

Teilt man einen Zylinder durch eine Ebene, die seine Achse enthält, so entstehen zwei kongruente Halbzylinder. Wie beim Zylinder bestimmen der Radius und die Höhe den Halbzylinder.

Sind bei einem Halbzylinder der Radius r und die Höhe h gegeben, so ergibt sich
Volumen $V = \pi/2\ r^2\ h$
Mantelfläche $M = (2+\pi)\ r\ h$
Oberfläche $A = \pi\ r^2 + (2+\pi)\ r\ h$
Die Summe der Länge aller Kanten, inkl. der gekrümmten, ist dann
$$k = (4+2\pi)\ r + 2h$$
Der Schwerpunkt des Halbzylinders liegt über der Mitte der Grundfläche im Abstand
$$a = 4r/(3\pi) = 0{,}42\ldots\ r$$
In der Praxis werden Halbzylinder mitunter als Dachkonstruktionen, u.a. bei Gewächshäusern, verwendet. Bekannt sind Körper aus einem quadratischen Quader auf den ein Halbzylinder aufgesetzt wurde als US-amerikanische Briefkästen, den "Letter Boxes".

Wie für den Zylinder gibt es auch für den Halbzylinder die "Konservendosen-Aufgabe":
Welche Form muss ein Halbzylinder haben, damit sein Volumen bei gegebener Oberfläche maximal ist?

Lösung: Es sei hier der Radius r = x und die Höhe h = y. Als Nebenbedingung ergibt sich
$$A = 2xy + \pi x^2 + \pi xy$$
$$y = (A - \pi x^2)/(2x + \pi x)$$
Mit $V = \pi/2\ x^2\ y$ wird die Zielfunktion zu $V(x) = \pi/2\ x^2\ (A - \pi x^2)/(2x + \pi x)$
d.h. $V(x) = (\pi A/(4 + 2\pi i))\ x - (\pi^2 / (4+2\pi))\ x^3$
Dann ist $V'(x) = \pi A/(4+2\pi) - 3\pi^2/(4+2\pi)\ x^2$
Für eine extremwertverdächtige Stelle mit V'(x) = 0 ergeben sich die Lösungen
$$x_1 = \sqrt{(A / (3\pi))} \text{ und } x_2 = -\sqrt{(A / (3\pi))}$$
Für die positive Lösung wird die 2.Ableitung $V''(x) = -6\ \pi^2 / (4+4\pi)\ x_1 < 0$. Damit ist x_1 die gesuchte Maximalstelle.
Für y folgt $y = 2/3\ A / ((2+\pi)\ \sqrt{(A / (3\pi))})$
Die Form des Halbzylinders wird durch den Quotienten 2x/y bestimmt.
$$2x/y = (2+\pi) / \pi = 1{,}64\ldots$$
Ergebnis: Bei einem Vollzylinder maximalen Volumens ist die Form durch 2r/h = 1 bestimmt, beim Halbzylinder durch $2r / h = (2+\pi) / \pi$.

Für die Aufgabe: Welche Form muss ein Halbzylinder haben, damit seine Oberfläche bei gegebenem Volumen maximal ist? ergibt sich die gleiche Lösung.

Schwingung eines Halbzylinders

Stellt man einen homogenen Halbzylinder auf eine Ebene mit der gekrümmten Fläche nach unten und tippt auf eine Spitze, so beginnt der Körper zu schwingen. Auf Grund der Reibung kommt er in der Realität nach einiger Zeit zum Stillstand.

Die Herleitung der allgemeinen Schwingungsformel des Halbzylinders ist nicht einfach.
Unter http://www.lehman.edu/faculty/dgaranin/Mechanics/ProblemSet-Fall-2006-1-Solution.pdf kann eine theoretische Ableitung von Dmitry A.Garanin (City Universität New York) heruntergeladen werden.

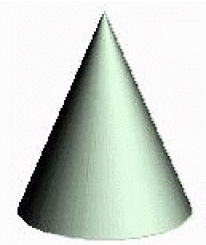
Für kleine Auslenkungen gilt für die Schwingungsdauer T mit dem Radius r Halbzylinders die Gleichung

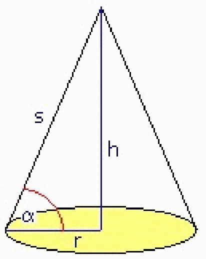
$T = \sqrt{2}/2\ \pi\ \sqrt{(9\pi-16)} / \sqrt{(g/r)}$

d.h. $T \approx 2\pi / (0{,}8073\ \sqrt{(g/r)}) \approx 2{,}48485\ \sqrt{r}$ s , für r in Meter.

Die Schwingungsdauer T und die Quadratwurzel von r sind direkt proportional $T \sim \sqrt{r}$. Je kleiner der Halbkreis ist, umso schneller schwingt der Halbzylinder.

Kegel



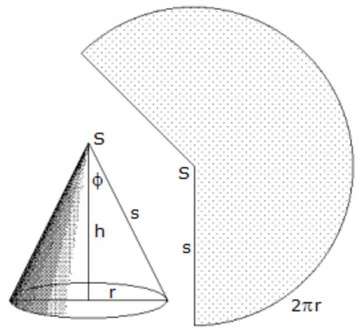


Ein Kegel ist die Menge aller Geraden von einem Punkt O des Raumes zu einer Kurve k. Ist k eine ebene Kurve, so darf O nicht in der Ebene von k liegen.

Ein Kegel entsteht, wenn man alle Punkte eines in einer Ebene liegenden, begrenzten Flächenstücks geradlinig mit einem Punkt, der Spitze, außerhalb der Ebene verbindet. Das Flächenstück nennt man Grundfläche, deren Begrenzungslinie die Leitkurve und den Punkt die Spitze oder den Scheitel des Kegels.
Der Abstand der Spitze von der Grundfläche wird die Höhe des Kegels genannt. Die Verbindungsstrecken der Spitze mit der Leitkurve heißen Mantellinien, ihre Vereinigung bildet den Kegelmantel oder die Mantelfläche.
Wenn in der Geometrie von einem Kegel gesprochen wird, ist häufig der Spezialfall des geraden Kreiskegels gemeint.

Volumen	$V = \pi/3\ r^2\ h$	Oberfläche	$A = \pi\ r\ (r + s)$
Radius	$r = \sqrt{(3\ V / (\pi\ h))} = \sqrt{(s^2 - h^2)}$		
Mantelfläche	$M = \pi\ r\ s$	Seitenlinie	$s = \sqrt{(r^2 + h^2)}$
Winkel	$\alpha = \arcsin(h/s)$		

Kegeloberfläche



Die Mantelfläche eines geraden Kreiskegels ist gekrümmt, aber abwickelbar zu einem Kreissektor.
Der Radius dieses Sektors stimmt mit der Länge einer Mantellinie s des Kegels s überein. Der Mittelpunktswinkel α des Kreissektors kann durch eine Verhältnisgleichung ermittelt werden. Er verhält sich zum Vollwinkel wie die Kreisbogenlänge $2\pi r$, Umfang des Grundkreises, zum gesamten Umfang eines Kreises mit Radius s:

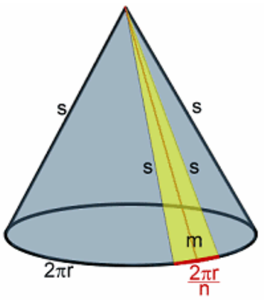
$\alpha : 360° = (2\pi r) : (2\pi s) = r : s$

Der gesuchte Flächeninhalt der Mantelfläche folgt nun aus der Formel für den Flächeninhalt eines Kreissektors:

$A_M = r/s\ s^2\ \pi = r\ s\ \pi$

Durch Addition des Flächeninhaltes des Grundkreises wird für die Kegeloberfläche

$A_O = \pi\ r^2 + r\ s\ \pi$



Die Mantelfläche eines geraden Kreiskegels ist gekrümmt, aber abwickelbar zu einem Kreissektor.
Mantelfläche und Oberfläche des Kegels können durch Betrachtung von Dreiecken auf dem Kegel und einem Grenzübergang ermittelt werden.
Dazu teilt man den Umfang der Kegelgrundfläche in n gleich lange Stücke, die mit vielen Unterteilungen, also für große n, näherungsweise Grundseiten gleichschenkliger Dreiecke bilden, deren Höhen m dann die Mantellinie s sind.
Eines der eingezeichneten gelben Dreiecke hat dann die Fläche

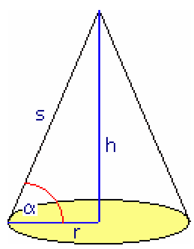
$A = 2\pi\ r/n \cdot s/2$

Für n Dreiecke wird damit $A_{Kegelmantel} = n\ 2\pi\ r/n \cdot s/2 = \pi\ r\ s$

Durch Addition des Flächeninhaltes des Grundkreises wird für die Kegeloberfläche

$A_O = \pi\ r^2 + r\ s\ \pi$

Gerader Kreiskegel



Bei einem geraden Kreiskegel ist die Grundfläche ein Kreis und die Spitze des Kegels liegt genau senkrecht über dem Mittelpunkt des Kreises.
Es sei V das Volumen, A die Oberfläche, M die Mantelfläche, r und d Radius und Durchmesser des Grundkreises, h die Kegelhöhe, u der Kreisumfang, s die Seitenlinie und α der Neigungswinkel der Seitenlinie gegen den Grundkreis. Dann gilt:

Volumen $V = \pi/3\ r^2\ h \approx 1{,}0471976\ r^2h = \pi/12\ d^2\ h \approx 0{,}2617994\ d^2h$

$V = \pi/12\ d^2\ \sqrt{(s^2 - d^2/4)} = \pi/24\ d^3 \tan\alpha \approx 0{,}1308997\ d^3 \tan\alpha$

$V = h\ u^2 / (12\ \pi) \approx 0{,}0265258\ hu^2 = u^2\ \sqrt{(s^2\pi^2 - u^2/4)} / (12\ \pi)$

$V = u^3 \tan\alpha / (24\ \pi^2) \approx 0{,}0042217\ u^3 \tan\alpha = \pi/3\ h\ (s^2 - h^2)$

$V = \pi/3\ h^3 \cot^2\alpha = \pi/3\ s^3 \cos^2\alpha \sin\alpha = \pi/3\ r^2\ \sqrt{(s^2 - r^2)}$

$V = \pi/3\ r^3 \tan\alpha \approx 1{,}0471976\ r^3 \tan\alpha = \pi/12\ d^2 \sqrt{4M^2 / (d^2 \pi^2) - d^2/4}$
$V = \pi/3\ h\ (\sqrt{M^2/\pi^2 + h^4/4} - h^2/2) = u^2 / (12\ \pi) \sqrt{4M^2/\pi^2 - u^2/(4\pi^2)}$
$V = M^2 / (3\ \pi) \sqrt{s^2 - M^2 / (\pi^2 s^2)} = 1/3 \sqrt{(\pi^2 M^2 - (A-M)^2)(A - M) / \pi}$

Oberfläche $A = \pi\ r\ (r + s) = \pi/4\ d\ (2s + d) \approx 0{,}7853982\ d\ (2s+d)$
$A = \pi\ r\ (r + \sqrt{r^2 + h^2}) = \pi/4\ d\ (d + 2 \sqrt{d^2/4 - h^2}) = \pi/4\ d^2 (1 + \cos\alpha) / \cos\alpha$
$A = u / (4\pi)\ (u + \sqrt{\upsilon^2 + 4h^2 \pi^2}) = u/4\ (2s + u/\pi) = u^2 / (4\pi)\ (1 + \cos\alpha) / \cos\alpha$
$A = \pi\ (s^2 - h^2 + s \sqrt{s^2 - h^2}) = \pi\ h^2 \cos\alpha\ (1 + \cos\alpha) / (1 + \cos^2\alpha)$
$A = \pi\ s^2 \cos\alpha\ (1 + \cos\alpha) = 2s^2\ \pi \cos\alpha \cos^2 \alpha/2$
$A = \pi\ r^2 (1 + \cos\alpha) / \cos\alpha = 2r^2\ \pi \cos^2 \alpha/2 / \cos\alpha$

Mantelfläche $M = \pi\ r\ s = \pi/2\ s\ d = \pi/2\ d \sqrt{d^2/4 + h^2} = \pi\ r \sqrt{r^2 + h^2}$
$M = \pi\ d^2 / (4 \cos\alpha) = u/4 \sqrt{u^2/\pi^2 + 4h^2} = s/2\ u = u^2 / (4\pi \cos\alpha)$
$M = \pi\ s \sqrt{s^2 - h^2} = \pi\ h^2 \cos\alpha / (1 - \cos^2\alpha) = \pi\ s^2 \cos\alpha = \pi\ s\ r$
$M = r^2\ \pi / \cos\alpha = \sqrt{36V^2 / d^2 + d^4 \pi^2/16} = \sqrt{3\pi\ h\ V + 9V^2 / h^2}$

Winkel $\alpha = \arcsin (h/s)$

Durchmesser $d = 2 \sqrt{s^2-h^2} = 2h \cot\alpha = 2s \cos\alpha = \sqrt{-2h^2 + \sqrt{16M^2/\pi^2 + 4h^4}}$
$d = 2M / (\pi\ s) = 2 \sqrt{(A - M) / \pi} = \sqrt{12\ V / (\pi\ h)}$

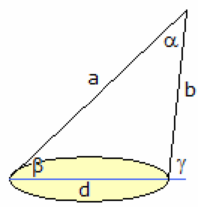
Radius $r = \sqrt{s^2 - h^2} = \sqrt{-h^2/2 + \sqrt{h^4/4 + M^2/\pi^2}} = \sqrt{3V / (\pi\ h)}$

Umfang $u = 2\pi \sqrt{s^2 - h^2} = 2\pi\ h \cot\alpha = 2\pi\ s \cos\alpha = \sqrt{-2h^2 \pi^2 + 2\pi \sqrt{4M^2 + h^4 \pi^2}}$
$u = 2 \sqrt{(A - M)\ \pi} = 2M / s = \sqrt{12\pi\ V / h}$

Höhe $h = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{s^2 + d^2/4} = \sqrt{[A/(\pi\ r) - r]^2 - r^2} = 3\ V / (\pi\ r^2)$
$h = d/2 \tan\alpha = \sqrt{s^2 + u^2/(4\pi^2)} = u/(2\pi) \tan\alpha = s \sin\alpha = \sqrt{4M^2 / (d^2 \pi^2) - d^2/4}$
$h = 1/(s\ \pi) \sqrt{s^4 \pi^2 - M^2} = \sqrt{[M/(\pi\ r)]^2 - r^2} = \sqrt{(\pi^2 M^2 - (A - M)^2) / (\pi\ (A - M))}$
$h = 12\ V / (d^2\ \pi) = 12\ \pi\ V / u^2$
$h = \sqrt[3]{-3V/(2\pi)+\sqrt{9V^2/(4\pi^2)-s^6/27}}+\sqrt[3]{-3V/(2\pi)-\sqrt{9V^2/(4\pi^2)-s^6/27}}$

Seitenlinie $s = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{d^2/4 + h^2} = M / (\pi\ r) = A / (\pi\ r) - r$
$s = \sqrt{9\ V^2 / (\pi\ r)^2 + r^2} = d / (2 \cos\alpha) = h / \sin\alpha = 2M / (d\ \pi) = 2M / u$
$s = \sqrt{h^2/2 + \sqrt{M^2/\pi^2 + h^4/4}} = M / \sqrt{\pi\ (A - M)} = 1/(2\pi\ d^2) \sqrt{576\ V^2 - d^6 \pi^2}$
$s = \sqrt{3V / (\pi\ h) + h^2}$

Winkel α $\tan\alpha = 2h / d = 2h\ \pi / u = \sqrt{d^2 + 4s^2} / d$
$\tan\alpha = \sqrt{r^2 + s^2} / r$
$\cos\alpha = d / (2s) = u / (2\pi\ s)$



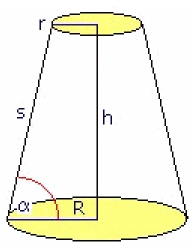
Schiefer Kegel

Bei einem schiefen Kreiskegel ist die Grundfläche ein Kreis, jedoch liegt die Spitze des Kegels nicht senkrecht über dem Mittelpunkt des Kreises.
V sei das Volumen eines schiefen Kegels, d der Durchmesser des Grundkreises, a die längste Seite des Kegels, b die kürzeste, α der Winkel, den diese beiden Seiten an der Spitze des Kegels einschließen und β, γ die Neigungswinkel der beiden Seitenlinien gegen die Grundfläche. Dann wird

Volumen $V = \pi/24\ d \sqrt{2d^2a^2 + 2d^2b^2 + 2a^2b^2 - d^4 - a^4 - b^4}$
$V = \pi/12\ a\ b \sin\alpha \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos\alpha} = \pi/12\ a^3 \sin\beta \sin^2(\beta + \gamma) / \sin^2\gamma$
$V = \pi/12\ d^3 \sin\beta \sin\gamma / \sin (\beta + \gamma)$

Durchmesser $d = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos\alpha} = a \sin (\beta + \gamma) / \sin\gamma$
lange Seite $a = d \sin\gamma / \sin (\beta + \gamma) = \sqrt{d^2 + b^2 - 2db \cos\gamma}$
kurze Seite $b = d \sin\beta / \sin\alpha$ $a = d \sin\beta / \sin (\beta + \gamma)$

Wenn zusätzlich die Kegelachse q; die Verbindung Kegelspitze-Kreismittelpunkt; und der Winkel ϕ der Achse zur Grundfläche bekannt sind, so wird nach Euler für die Mantelfläche M
$M = \pi/2\ d \sqrt{d^2/4 + q^2 \sin^2\phi}\ [1 + 1/4 \cdot 1/n^4 \cot^2\phi - (1 \cdot 3)/(4 \cdot 16)\ ((1 \cdot 3)/n^6 - (3 \cdot 5 \cdot m^2)/n^8) \cot^4\phi / 3 + (1 \cdot 3 \cdot 5)/(4 \cdot 16 \cdot 36)\ ((1 \cdot 3 \cdot 5)/n^8 - (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot m^2)/n^{10} + (5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot m^4)/n^{12}) \cot^6\phi / 5 + \ldots]$
mit $m = d / (2q \sin\alpha)$; $n = 1/(q \sin\alpha) \sqrt{d^2/4 + q^2 \sin^2\alpha}$



Kegelstumpf

Ein Kegelstumpf entsteht durch einen Schnitt parallel zur Grundfläche des Kegels.

Gerader Kegelstumpf

Sind V das Volumen, A die Oberfläche, M die Mantelfläche, R und r die Radien des Grund- und Deckkreises, D und d die entsprechenden Durchmesser, s die Seitenlinie, h die Kegelhöhe und α der Winkel zwischen der Seitenlinie und dem Grundkreis, so gilt für einen geraden Kreiskegelstumpf:
Der Schwerpunkt liegt auf der Achse im Abstand
$h/4 \cdot (R^2 + 2rR + 3r^2) / (R^2 + rR + r^2)$
von der Grundfläche.

Volumen $V = \pi/3\ h\ (r^2 + R^2 + r \cdot R) = \pi/3\ (R^2 + R\ r + r^2) \sqrt{-R^2 + 2\ R\ r - r^2 + s^2}$
$V = \pi/12\ h\ ((d + D)^2 - d \cdot D) = \pi/12\ h\ (D^2 + d \cdot D + d^2)$

$V = \pi/12\ (D^2 + d \cdot D + d^2)\ \sqrt{(s^2 - 1/4\ (D-d)^2)}$
$V = \pi/24\ (D-d)\ (D^2 + d \cdot D + d^2) \tan\alpha = \pi/12\ s \sin\alpha\ (3D^2 - 6s\ D \cos\alpha + 4s^2 \cos^2\alpha)$

Näherung, falls Grundkreis ≈ Deckkreis
$V \approx \pi/2\ h\ (R^2 + r^2)$

Mantelfläche $M = \pi\ s\ (r + R) = \pi/2\ s\ (D + d) = \pi\ (R + r)\ \sqrt{(R^2 - 2\ R\ r + h^2 + r^2)}$
$M = \pi/2\ (D + d)\ \sqrt{(h^2 + 1/4\ (D - d)^2)} = \pi/4\ (D + d)\ (D - d) / \cos\alpha = \pi\ s\ (D - s \cos\alpha)$

Oberfläche $A = \pi\ (r^2 + R^2) + \pi\ s\ (r + R) = \pi\ ((R + r)\ \sqrt{(R^2 - 2\ R\ r + h^2 + r^2)} + R^2 + r^2)$
$A = \pi/4\ (2\ (D + d)\ \sqrt{(h^2 + 1/4\ (D-d)^2)} + d^2 + D^2) = \pi/4\ ((2a + D + d)\ (D + d) - 2\ D\ d)$
$A = \pi/4\ ((D + d)\ (D - d) / (2 \cos\alpha) + D^2 + d^2) = \pi/2\ ((2s + D)\ D + s/2 \cos\alpha\ (\cos\alpha - 2s - 2D))$

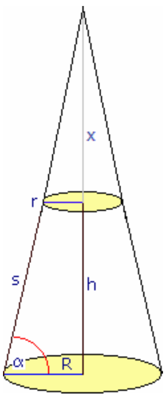
großer Durchmesser $D = d + 2s \cos\alpha = d + 2\ \sqrt{(s^2 - h^2)}$
$D = -d/2 + \sqrt{(12V / (\pi h) - 3/4\ d^2)} = 2M / (\pi\ s) - d = \sqrt{(4A / \pi - 2s\ d - d^2 + s^2)} - s$

kleiner Durchmesser $d = D - 2\ \sqrt{(s^2 - h^2)} = \sqrt{(12V / (\pi h) - 3/4\ D^2)} - D/2$
$d = 2M / (\pi\ s) - D = \sqrt{(4A / \pi - 2s\ D - D^2 + s^2)} - s = D - 2h \cot\alpha$

Seitenlinie $s = \sqrt{(h^2 + (R - r)^2)} = \sqrt{(h^2 + 1/4\ (D - d)^2)} = (D - d) / (2 \cos\alpha)$
$s = M / (\pi\ (R + r)) = 2M / (\pi\ (D + d)) = (A - \pi\ (R^2 + r^2)) / (\pi\ (R + r))$
$s = (4A / \pi - (D + d)^2 + 2\ Dd) / (2\ (D + d)) = \sqrt{(144V^2 + (D^3 + d^3)^2\ \pi^2/4)} / (\pi\ (D^2 + d\ D + d^2))$
$s = \sqrt{((R^3 - r^3)^2 + 9/\pi^2\ V^2)} / (R^2 + R\ r + r^2)$

Höhe $h = \sqrt{(s^2 - (R - r)^2)} = \sqrt{(s^2 - 1/4\ (D - d)^2)} = 3V / (\pi\ (R^2 + R\ r + r^2)) = (D - d)/2 \tan\alpha$
$h = \sqrt{(4M^2 - \pi^2/4\ (D^2 - d^2)^2)} / (\pi\ (D + d)) = \sqrt{(4A^2 - 2A\ \pi\ (D^2 + d^2) + \pi^2\ D^2\ d^2)} / (\pi\ (D + d))$
$h = 12V / (\pi\ ((D + d)^2 - d\ D))$

Winkel $\alpha = \arcsin(h/s) = \arcsin(h/\sqrt{(h^2 + (R - r)^2)})$



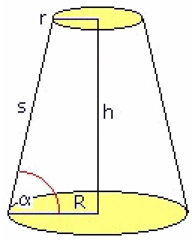
Kegelstumpfvolumen

Gegeben sei ein gerader Kreiskegelstumpf mit dem Grundradius R, dem Deckradius r und der Höhe h. Gesucht ist das Volumen des Kegelstumpfes.

Lösung
Das Volumen ergibt sich als Differenz aus dem vollständig ergänzten Kegel und dem aufgesetzten Kegel. $V = V_{groß} - V_{aufsatz}$
Für den großen Kegel sind der Radius R und die Höhe h+x, für den Ergänzungskegel Radius r und Höhe x: $V = \pi/3\ (R^2\ (h+x) - r^2\ x)$
Aus dem Strahlensatz $x / r = (h+x) / R$ folgt

$x = rh / (R-r)$
$V = \pi/3\ (R^2\ (h + rh / (R-r)) - r^2\ rh / (R-r))$
$V = \pi/3\ (R^2 \cdot hR / (R-r)) - r^2 \cdot rh / (R-r))$
$V = \pi/3\ h\ (R^3-r^3)/(R-r)$

Polynomdivision ergibt $V = \pi/3\ h\ (R^2 + R \cdot r + r^2)$
Setz man noch Grund- und Deckfläche; G bzw. D; ein, wird $V = h/3\ (G + \sqrt{(G \cdot D)} + D)$



Gerader Kegelstumpf

Die Berechnung des Volumens oder der Oberfläche eines Kegelstumpfs aus den Radien und der Höhe ist elementar.
Allerdings ändert sich der Schwierigkeitsgrad der Aufgabe sofort, wenn aus anderen gegebenen Stücken der Stumpf zu berechnen ist. Als Beispiel sei folgendes Problem genannt:
Gegeben sind das Volumen V des Kegelstumpfs, die Mantelfläche M und die Seitenlinie s. Diese Aufgabe wird anspruchsvoll und führt zu der ganzrationalen Gleichung 6.Grades:

$$0 = 4\ \pi^2\ s^6 r^6 - 12\ \pi^3\ M\ s^5\ r^5 + (21\ \pi^2\ M^2\ s^4 - \pi^4\ s^8)\ r^4 + (-22\ \pi\ M^3\ s^3 + 2\ \pi^3\ M\ s^7)\ r^3 + (15\ M^4\ s^2 - 3\ \pi^2\ M^2\ s^6)\ r^2 + (-6/\pi\ s\ M^5 + 2\ \pi\ M^3\ s^5)\ r + M^6/\pi^2 - M^4\ s^4 + 9\ V^2\ \pi^2\ s^6$$

Zur Bestimmung eines der Radien und aller anderen Größen muss diese Gleichung gelöst werden. Dies ist nur mit einem Näherungsverfahren möglich.
Weitere Beziehungen siehe

geg.: Radius r, Volumen V, Seitenlinie s. Dann ist Radius R Lösung des Polynoms
$$0 = -R^6 + s^2\ R^4 + (2\ r^3 + 2\ r\ s^2)\ R^3 + 3\ r^2\ s^2\ R^2 + 2\ r^3\ s^2\ R - r^4\ (r^2 - s^2) - 9\ V^2 / \pi^2$$

geg.: Radius r, Volumen V, Oberfläche A. Dann ist Radius R Lösung des Polynoms

$$0 = 2\pi\ (2\pi\ r^2 - A)\ R^6 + 4\pi\ r\ (2\pi\ r^2 - A)\ R^5 + (A^2 - 8\pi\ A\ r^2 + 12\pi^2\ r^4)\ R^4 + (2\ r\ (A^2 - 4\pi\ A\ r^2 + 4\pi^2\ r^4)\ R^3 + (3\ A^2\ r^2 - 8\pi\ A\ r^4 + 4\pi^2\ r^6 - 9\ V^2)\ R^2 + (2\ A^2\ r^3 - 4\pi\ A\ r^5 - 18\ r\ V^2)\ R + A^2\ r^4 - 2\pi\ A\ r^6 - 9\ r^2\ V^2$$

geg.: Radius r, Volumen V, Mantelfläche M. Dann ist Radius R Lösung des Polynoms

$0 = R^8 + 2 r R^7 + r^2 R^6 - 2 r^3 R^5 - (4\pi^2 r^4 + M^2)/\pi^2 R^4 - (2 r (\pi^2 r^4 + M^2))/\pi^2 R^3$
$+ (\pi^2 r^6 - 3 r^2 M^2 + 9 r^2)/\pi^2 R^2 + 2 r (\pi^2 r^6 - r^2 M^2 + 9 V^2)/\pi^2 R$
$+ r^2 (\pi^2 r^6 - r^2 M^2 + 9 V^2)/\pi^2$

geg.: Höhe h, Oberfläche A, Mantelfläche M und $\Delta = A - M$. Dann gilt für den Radius R

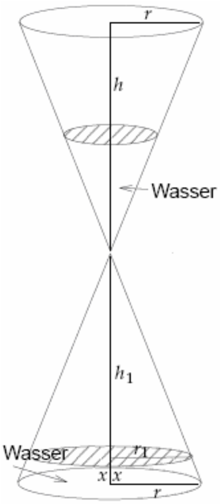
$R = \sqrt{\sqrt{2}}/(2 \sqrt{\pi}) \sqrt{(\sqrt{2}\, \Delta - \sqrt{(-\pi h^2 \sqrt{(4 \Delta^2 + 4\pi h^2 \Delta + \pi^2 h^4 - 4 M^2)} - 2\pi h^2 \Delta - \pi^2 h^4 + 2 M^2)})}$

geg.: Höhe h, Volumen V, Oberfläche A. Dann ist Radius R Lösung der Gleichung

$A = \pi r^2 + \pi(-r/2 + 1/2 \sqrt{((-3r^2 R\pi h + 12V)/(\pi h))})^2 + \pi \sqrt{(-3/2\, r + 1/2 \sqrt{((-3r^2 R\pi h + 12V)/(\pi h))} + h^2)} \cdot$
$(r/2 + 1/2 \sqrt{((-3r^2 R\pi h + 12V)/(\pi h))})$

geg.: Volumen V, Oberfläche A, Mantelfläche M. Dann ist Radius R Lösung der Gleichung

$V = \pi/3 \sqrt{((M/(R+\sqrt{((A-M)/\pi-R^2)}\pi)^2 - (R - \sqrt{((A-M)/\pi - R^2)})^2)} \cdot (R \sqrt{((A-M)/\pi - R^2)} + (A-M)/\pi)$



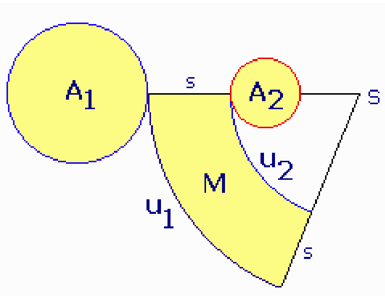
Aufgabe zu einem geraden Kegelstumpf
Aufgabe:
Ein senkrechter, oben geschlossener Kegel ist bis zur halben Höhe mit Wasser gefüllt. Wie hoch steht das Wasser im Kegel, wenn man ihn umdreht?

Lösung:
Steht das Wasser bis zur halben Höhe, so ist das Volumen des Wassers 1/8 des Volumens des Kegels.
Für den Kegel, über dem Wasser in der unteren Abbildung, mit r_1 und h_1 gilt:
$V = \pi/3\, r_1^2 h_1 = 7/8\, \pi/3\, r^2 h$
Mit dem Strahlensatz $r : h = r_1 : h_1$ wird dann aus
$8 r_1^2 h_1 = 7 r^2 h$ $\quad h_1 = 1/2 \sqrt[3]{7}\, h = 0{,}956\ldots h$
Für die Wasserhöhe gilt somit $\quad x = h - 1/2 \sqrt[3]{7}\, h = 0{,}044\ldots h$
Damit ist das Ergebnis vom Radius r des Kegels unabhängig.

Eiserne Säule von Kuttub

Die Eiserne Säule in Delhi (Indien), die Säule von Kuttub, ist weltweit eines der ersten metallurgischen Monumente.
Die Säule hat die Form eines Kegelstumpfes. Die Eiserne Säule besteht aus 98% reinem Schmiedeeisen, ist 7,21 m lang und hat an der unteren Seite einen Durchmesser von 0,41 m, der nach oben auf 0,35 m abnimmt.
Für das Volumen und die Masse wird mit R = 0,205 m, r = 0,175 mdann:
$V = \pi/3\, h (R^2 - R\cdot r - r^2)$
$V = \pi/3\; 7{,}21\, (0{,}205^2 - 0{,}205\cdot 0{,}175 - 0{,}175^2)$
$V = 0{,}8194\ m^3$
und mit $\rho = 7{,}86\ g/cm^3$ $\quad m = 6{,}44\ t$
Mit den Verzierungen an der Spitze hat die Säule eine Gesamtmasse von 6,5 Tonnen.

Die Säule enthält eine Inschrift, auf der erklärt ist, dass sie als Symbol zur Ehre des Hindu-Gottes Vishnu errichtet wurde. Ferner preist es den Heldenmut und die Güte des als Chandra bezeichneten Königs des Gupta-Reichs Chandragupta II.
Die Säule von Kuttub wurde von Chandragupta II. Vikramaditya (375-414) in der Gupta-Dynastie erbaut, die Nordindien von 320 bis 540 beherrschte.
Ursprünglich befand sich die Säule in Vishnupadagiri am nördlichen Wendekreis, einem astronomischen Untersuchungszentrum im Gupta-Zeitalter.
Dort erfüllte die Säule von Kuttub erfüllte eine bedeutende astronomische Funktion. Der Schatten der eisernen Säule fiel einmal im Jahr am frühen Morgen zur Sommersonnenwende (21.Juni) in die Richtung des Fußes von Anantasayin Vishnu.



Zylinder in Kegel
Aufgabe: Einem Kreiskegel soll ein Zylinder mit grösstmöglichem Volumen einbeschrieben werden.
Lösung: geg. r … Kegelradius, h … Kegelhöhe, x … Zylinderradius, z … Zylinderhöhe.
Aus dem Volumen V des Zylinders wird: $F(x,z) = x^2 \cdot p \cdot z$.
Mit der Nebenbedingung $h/r = z/(r-x) \rightarrow z = h(1-x/r)$ ergibt sich die Zielfunktion $f(x) = x^2 \cdot p \cdot h(1-x/r) \rightarrow f'$ hat die Nullstellen 0 und 2r/3.
Mit dem Definitionsbereich [0 ; r] wird 2r/3 die Maximalstelle.

Kreis-Kegelstumpf

Die Oberfläche eines Kreis-Kegelstumpfes lässt sich in die Ebene abwickeln, und wird durch zwei Kreisflächen und einem Kreisring-Ausschnitt M gebildet. Damit ergibt sich die Oberflächenformel zu

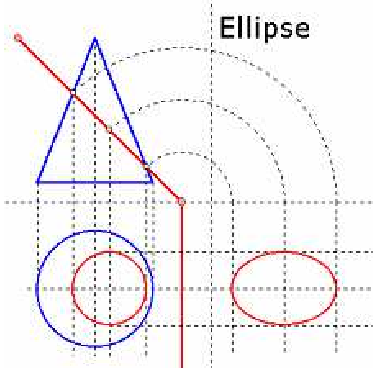
$$A = \pi (r_1^2 + r_2^2) + \pi s (r_1 + r_2)$$

wobei r_1 der Radius des Kreises A_1, r_2 von A_2 und s die Länge der Seitenlinie des Kegelstumpfes sind

Böschungswinkel

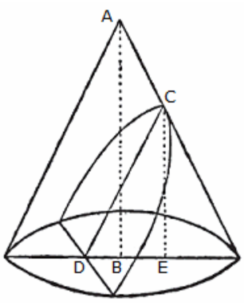
... eines Kegels ist der Winkel zwischen einer Mantellinie und der Grundfläche. Ein Schüttkegel entsteht, wenn man körniges Gut aufschüttet.

Material	Böschungswinkel °	Material	Böschungswinkel °
Anthrazit	27	Braunkohle	35-50
Erze	40-45	Gartenerde	27-37
Getreide	30	Kalkpulver, trocken	50
Kies, erdfeucht	25-45	Kies, trocken	35
Koks, Kohle	45	Lehmboden, nass	20-25
Lehmboden, trocken	40-45	Quellsand, nass	25
Sand, trocken	30-35	Steinschotter, nass	35-40
Zement, Asche, Salz	40		



Schnitt eines Kegels

Wird ein Kegel von einer Ebene geschnitten, so entstehen Kurven 2.Ordnung, die Kegelschnitte. Dies können u.a. sein Ellipse, Kreis, Parabel und Hyperbel. Ist der Neigungswinkel der Ebene gegen die Grundrissebene gleich dem Neigungswinkel der Kegelseitenlinie erhalten Sie eine Parabel, ist der Neigungswinkel der Ebene sogar größer entsteht eine Hyperbel als Schnittfläche.



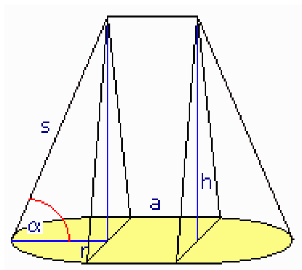
Kegelabschnitt

Bei einem hufförmigen Abschnitt eines Kegels, der durch eine, parallel mit der Seite des Kegels gelegte Ebene CD, entstanden ist, sei r der Radius der Grundfläche, h die Höhe des Kegels AB, q die Höhe des hufförmigen Abschnittes CE, V das Abschnittsvolumen und M die Mantelfläche des Kegelabschnittes. Dann ist

$$V = r^2/(qh^2)\ (3h^3 \arccos((h-2q)/h) - (6h^2 + 4hq - 16q^2) \sqrt{q (h-q)})$$

und $$M = r/h^2 \sqrt{h^2 + r^2}\ (h^2 \arccos((h-2q)/h) - (6h - 4q)/3 \sqrt{q (h-q)})$$

Prisma und Kegel



Gegeben ist ein aus einem geraden dreiseitigen Prisma und zwei Kreiskegelhälften zusammengesetzter Körper. Die Höhe der Kegelteile sei h, die Höhe des Prismas a und der Radius der Grundkreise der Kegel r. Dann wird:

Seitenlängen des Prismas $s_1 = 2 r$

$s_2 = \sqrt{h^2 + r^2} = s$; Seitenline des Kegels

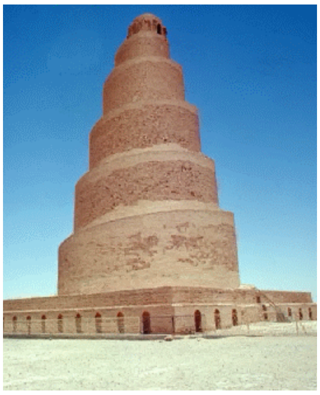
Neigungswinkel $\alpha = \arcsin (h/s)$

Grundfläche des Körpers $A_G = 2 a r + \pi r^2$

Mantelfläche $A_M = (2 a + \pi r) \sqrt{h^2 + r^2}$

Oberfläche $A = (2 a + \pi r) \sqrt{h^2 + r^2} + 2 a r + \pi r^2$

Volumen des Prismas $V_P = a h r$ Gesamtvolumen $V = a h r + \pi/3 r^2 h$



Kegel in der Architektur

Minarett der Großen Moschee von Samara mit einem spiralförmigen Aufgang

Millennium Tower

Der Millennium Tower ist ein Projekt für den Bau eines Gebäudes in der Bucht von Tokio, Japan.

Der japanische Konzern Obayashi beauftragte Sir Norman Foster schon vor den 1990er Jahren mit einer Studie zu einem Baukomplex, der isoliert in der Bucht von Tokio im Meer stehen und eine eigenständige Stadt darstellen sollte.

Der Turm, ein kreiskegelförmiger Körper, soll 840 Meter hoch werden. Das 126 Meter breite Fundament will man in 80 Meter Tiefe im Meeresboden verankern. Auf einer Grundfläche von etwa 12500 m² sollten nach 10 Jahren Bauzeit bis zu 50000 Einwohner untergebracht und Arbeitsplätze für 17000 Menschen geschaffen werden.

und in der Natur: Fujijama

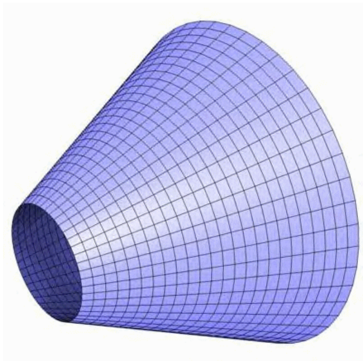
Kegelform wird auch bei Gebrauchsgegenständen oft gewählt. Ein besonderes Beispiel ist eine Teekanne vom Architekten Aldo Rossi. Ob diese allerdings ihren Preis von 189 Dollar wert ist?

Kegel in der Architektur (2)

In Bonn sollte ein neues Kongresszentrum in Form eines Kegels errichtet werden, der BonnKegel.

Mit einer Höhe von knapp 105 Metern und einem Durchmesser von 120 Metern soll der Kegel zwischen Plenarsaal und Dahlmannstraße nur acht Meter niedriger sein als der benachbarte Lange Eugen.
Über einer zweigeschossigen Tiefgarage ist die gut 34 Meter hohe Multifunktionshalle mit einem Durchmesser von etwa 85 Metern geplant. Sie könnte sowohl für Sportveranstaltungen mit bis zu 8000 Zuschauern als auch für Messen, Konferenzen oder Konzerte mit bis zu 6000 Besuchern genutzt werden. Über der Multifunktionshalle ist der Kongressbereich auf zwei Etagen verteilt, darüber befindet sich das Fünf-Sterne-Hotel mit 150 Zimmern und an der Spitze des Kegels das Restaurant für 350 Besucher.
Da die geplanten Kosten von über 200 Millionen Euro für den geplanten Gigantismus extrem hoch sind und die spätere, rentable Nutzung in der Provinzstadt unmöglich ist, kann kein Investor gefunden werden.

Allgemeiner Kegel

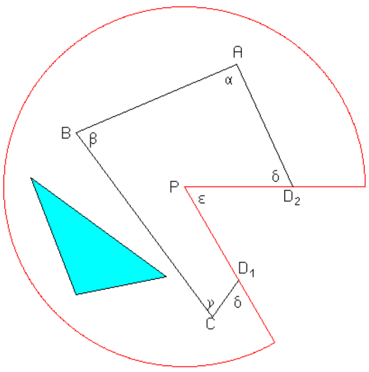


Neben den Kreiskegeln können Kegel beliebiger Form untersucht werden. Für Kegel mit einer Kegelachse parallel zur z-Achse wird:
Kartesische Parametergleichung: $x = u\, f(v)$, $y = u\, g(v)$, $z = u\, h(v)$
wobei f, g und h beliebige Funktionen sind. Kegel gehören zu den Regelflächen und sind abwickelbar.

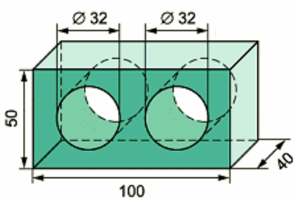
Der Kegel lässt sich auch als Raumfläche definieren. Mit den folgenden Gleichungen entsteht der gesuchte Rotationskörper um die x-Achse:

$x = u \quad y = a\, u \sin(v) \qquad z = a\, u \cos(v)$
Die Konstante a bestimmt das Aussehen der Figur. u ist Element aus der Zahlenmenge [1, 3], v ist Element aus der Zahlenmenge $[0, 2\pi]$

Ameisen-Geometrie auf der Vase



Eine mathematisch gebildete Ameise geht auf einer Vase, über deren Gestalt noch zu reden sein wird, spazieren. Besonders gerne geht sie auf geschlossenen Wegen mit drei plötzlichen Richtungsänderungen nach links und dazwischen Stücken, die so gerade sind wie es auf dieser Oberfläche überhaupt geht, d.h. sie wandert um Dreiecke.
Nun stellt sie fest, dass es auf dieser Vase genau zwei Sorten von Dreiecken gibt: solche mit der Winkelsumme 180° und solche mit 240°.
Welche Gestalt hat die Vase?
Lösung
Die Vase ist ein Kegel oder Kegelstumpf. Wenn man ihre Mantelfläche entlang einer Mantellinie aufschneidet und in eine Ebene abwickelt, bilden die beiden jetzt getrennten Schnittlinien 60°, allgemein den Winkel ε, um den die Winkelsumme in einem Teil der Dreiecke auf dem Kegel größer ist als bei den anderen und in der Ebene.
Die beiden Sorten der Dreiecke auf dem Kegel unterscheiden sich dadurch, dass sie die Spitze des Kegels umschließen oder dies nicht tun. Anders gesagt: Bei der einen Sorte kann man die Mantelfläche aufschneiden ohne das Dreieck zu schneiden. Die abgewickelte Mantelfläche kann wie in der Abbildung aussehen.
Die Punkte D_1 und D_2 fallen auf dem Kegel zusammen als Schnitt der Dreiecksseite AC mit der schneidenden Mantellinie, also kein Knick der Wanderroute. Aus der Winkelsumme 4π im Sechseck PD_2ABCD_1 ergibt sich $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \varepsilon$.



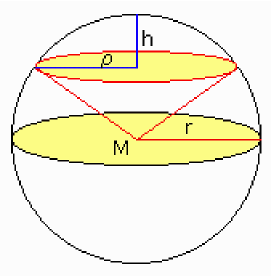
Zusammengesetzte Körper

Viele Körper in der Realität, zum Beispiel Gebäude oder Werkstücke, lassen sich als zusammengesetzte Körper einfacher Körper wie Prismen, Zylinder, Pyramiden und Halbkugeln usw. darstellen.
Das Volumen und der Oberflächeninhalt zusammengesetzter Körper berechnet sich als Summe oder Differenz der Volumina bzw. der Oberflächeninhalte der geometrischen Körper.

Beispiel:
Um das Volumen des abgebildeten Werkstücks zu berechnen, ist die Differenz aus dem Volumen des Quaders und den Volumina der zwei Zylinderbohrungen.

geg.: Quader mit a = 100 mm, b = 40 mm, c = 50 mm, Zylinder mit d = 32 mm, h = 40 mm
V_{Quader} = a b c = 200000 mm³ $\qquad$ $V_{Zylinder}$ = π r² h = 32000 mm³
$V_{Werkstück}$ = a b c - 2 π r² h $\qquad$ $V_{Werkstück}$ = V_{Quader} - 2 $V_{Zylinder}$
Das Werkstück hat ein Volumen von etwa 136000 mm³ = 136 cm³.

Kugel

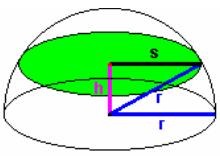


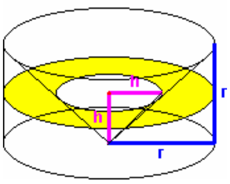
Die Kugelfläche ist die bei der Drehung einer Kreislinie um einen Kreisdurchmesser entstehende Fläche.
Sie ist eine Rotationsfläche sowie eine spezielle Fläche zweiter Ordnung und wird beschrieben als die Menge, der geometrische Ort, aller Punkte im dreidimensionalen euklidischen Raum, deren Abstand von einem festen Punkt des Raumes gleich einer gegebenen positiven reellen Zahl r ist.
Der feste Punkt wird als Mittelpunkt oder Zentrum der Kugel bezeichnet, die Zahl r als Radius der Kugel. Jeder Gerade durch den Mittelpunkt schneidet die Kugel in zwei Punkten, den Gegenpunkten.
Die Kugelfläche teilt den Raum in zwei getrennte offene Untermengen, von denen genau eine konvex ist. Diese Menge heißt das Innere der Kugel.
Die Vereinigungsmenge einer Kugelfläche und ihres Inneren heißt Kugelkörper. Die Kugelfläche wird auch Kugeloberfläche oder Sphäre genannt.
Volumen $\qquad$ V = 4π/3 r³ $\qquad$ Oberfläche $\qquad$ A = 4π r²

Merkhilfe

"Bedächtig kommt einhergeschritten vier Drittel pi mal r zur dritten, und was sie auf dem Leibe hat ist vier mal pi mal r-Quadrat."

Die Kugel besitzt unendlich viele Symmetrieebenen, die Ebenen durch den Kugelmittelpunkt. Außerdem ist die Kugel drehsymmetrisch bezüglich jeder Achse durch den Mittelpunkt und jedes Drehwinkels und punktsymmetrisch bezüglich ihres Mittelpunktes.
Die Kugeloberfläche lässt sich nicht in der Ebene ausbreiten.

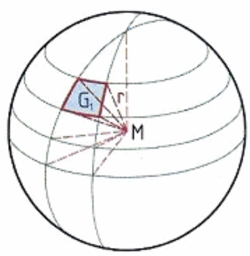




Kugelvolumen

Zur Bestimmung des Kugelvolumens benutzt man den Satz des Cavalieri:
Man legt in einem beliebigen Abstand h vom Kugelmittelpunkt eine Ebene durch die Kugel. Die Schnittfläche ist ein Kreis mit dem Radius s, wobei nach dem Satz des Pythagoras $\qquad$ s² = r² - h²
mit r als Kugelradius ist. Daher ist die Fläche des Schnittkreises:
$$\pi \cdot s^2 = \pi \cdot r^2 - \pi \cdot h^2$$
Die rechte Seite der Gleichung beschreibt die Differenz zweier Kreisflächen, die man als Fläche eines Kreisrings deuten kann. Dabei versteht man unter einem Kreisring die Fläche zwischen 2 konzentrischen Kreisen.

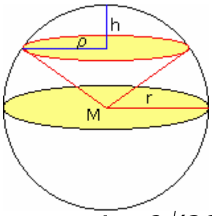
Die Radien des Kreisrings sind hier r und h. Für h = 0 wird der Kreisring zum Kreis mit dem Radius r, für wachsendes h wächst der innere Kreis, so dass der Kreisring immer schmaler wird, bis er für h = r in die Kreislinie mit dem Radius r zusammenschrumpft, die ja selbst keine Fläche mehr hat.
Dieselben Schnittflächen kann man erhalten, wenn man sich einen Zylinder vom Radius r und der Höhe 2r vorstellt, aus dem zwei Kugeln ausgebohrt sind, deren Grundflächen mit den Begrenzungskreisen des Zylinders zusammenfallen und deren Spitzen in der Achsenmitte liegen. Da bei diesem Restkörper die Schnittflächen im Abstand h vom Mittelpunkt ebenfalls den inneren Radius h haben, ist die Größe der Schnittfläche tatsächlich $\qquad$ π · r² - π · h²
Nach dem Cavalierischen Prinzip ist daher des Kugelvolumen gleich dem Inhalt des Restkörpers, also eines Zylinders mit dem Inhalt: $\qquad$ V_1 = π r² 2r = 2 π r³
vermindert um den Inhalt zweier Kegel:
V_2 = 2/3 π r² r = 2/3 π r³ $\qquad$ d.h. $\qquad$ V = V_1 - V_2 = 4/3 π r³



Kugeloberfläche

Eine Kugel ist keine abwickelbare Oberfläche. Daraus folgt, dass die Ermittlung der Oberfläche nicht trivial ist.
Zur Herleitung der Oberflächengleichung denkt man sich die Kugel durch eine Vielzahl von Pyramiden zusammengesetzt, deren Spitzen im Kugelmittelpunkt liegen und deren Grundflächen näherungsweise die Kugeloberfläche vollständig

abdecken.
Die Summe der Volumina dieser Pyramiden ist dann eine Näherung des Kugelvolumens, d.h. für n Pryamiden: $V_{Kugel} \approx V_{Pyramide\ 1} + V_{Pyramide\ 2} + \ldots + V_{Pyramide\ n}$
Mit dem Pyramidenvolumen $V_{Pyramide} = 1/3\ A\ h$
wird $V_{Kugel} \approx 1/3\ h\ A_{Pyramide\ 1} + 1/3\ h\ A_{Pyramide\ 2} + \ldots + 1/3\ h\ A_{Pyramide\ n}$
Die Höhe h der Pyramiden ist gleich dem Kugelradius r. Weiterhin kennt man für das Kugelvolumen
$V = 4/3\ \pi\ r^3$ d.h. $4/3\ \pi\ r^3 \approx r/3\ (A_{Pyramide\ 1} + \ldots A_{Pyramide\ n})$
Lässt man nun die Anzahl n der Pyramiden gegen Unendlich gehen, so wird die Summe der Pyramidengrundflächen zur Kugeloberfläche $4/3\ \pi\ r^3 = r/3\ A_{Kugel}$
Umstellen ergibt dann für die Oberfläche einer Kugel $A = 4\pi\ r^2 \approx 12{,}566370614359\ r^2$



Kugelberechnung

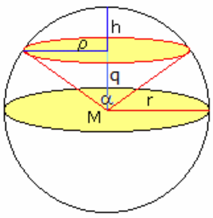
Sind V das Volumen einer Kugel, A der Oberflächeninhalt, d = 2r der Durchmesser und r der Kugelradius, so gilt:

Volumen $V = 4\pi/3\ r^3 \approx 4{,}188790204786\ r^3 = \pi/6\ d^3 \approx 0{,}52359875598\ d^3$
$V = \sqrt{(A^3 / (36\ \pi))} \approx 0{,}094031597258\ \sqrt[3]{A}$
Oberfläche $A = 4\pi\ r^2 \approx 12{,}566370614359\ r^2 = \pi\ d^2 \approx 3{,}141592653590\ d^2$
$A = \sqrt[3]{(36\ V^2\ \pi)} \approx 4{,}835975862048\ \sqrt[3]{V^2}$
Durchmesser $d = \sqrt[3]{(6\ V / \pi)} \approx 1{,}240700981799\ \sqrt[3]{V} = \sqrt{(A / \pi)} \approx 0{,}564189583548\ \sqrt{A}$
Radius $r = \sqrt[3]{(3\ V / (4\ \pi))} \approx 0{,}620350490900\ \sqrt[3]{V} = \sqrt{(A / (4\pi))} \approx 0{,}282094791773\ \sqrt{A}$

Es lässt sich nachweisen, dass die Kugel derjenige Körper ist, der bei gegebenen Volumen die kleinste Oberfläche besitzt. Das ist der Grund, dass die Seifenblase Kugelform annimmt, da das Häutchen das Bestreben hat, sich möglichst zu verkleinern.

Kugelschale, Hohlkugel

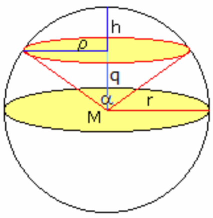
Eine Kugelschale bzw. Hohlkugel ist die Differenzmenge zweier konzentrischer Kugeln mit unterschiedlichem Radius. Daraus ergeben sich auch die Berechnungen an der Kugelschale als Differenz der äußeren und inneren Kugel.
Die ebenen Schnitte einer Kugelschale sind Kreisscheiben oder Kreisringe.



Kugelschnitt

Wird eine Kugel durch eine Ebene oder mehrere Ebenen geschnitten, so entstehen verschiedene Schnittkörper.
Dabei sei ρ der Radius des Duchschnittskreises, h der Abstand des Mittelpunktes dieses Kreises von der Oberfläche der Kugel, der Pfeil, q der Abstand des Mittelpunktes von dem Mittelpunkt der Kugel, α der zum Durchschnittskreis gehörende Winkel im Kugelmittelpunkt und r der Radius der Kugel. Dann gilt:

Abstand h $h = r - \sqrt{(r^2 - \rho^2)} = r - q = (1 - \cos \alpha/2)\ r = 2r \sin^2 \alpha/4$
$h = \sqrt{(\rho^2 + q^2)} - q = 2q / \cos \alpha - q$
Schnittkreisradius $\rho = \sqrt{(2r\ h - h^2)} = h \sqrt{(2r - h)} = \sqrt{(r^2 - q^2)} = r \sin \alpha/2 = \sqrt{h} \sqrt{(h + 2q)}$
Abstand q $q = \sqrt{(r^2 - \rho^2)} = r - h = r \cos \alpha/2 = (\rho^2 - h^2) / (2h) = h \cos \alpha / (2 - \cos \alpha)$
Kugelradius r $r = (\rho^2 + h^2) / (2h) = h + q = \sqrt{(q^2 + \rho^2)} = h / (1 - \cos \alpha/2) = \rho / \sin \alpha/2$
Zentriwinkel α $\alpha = 2 \arccos (1 - h/r) = 2 \arcsin (\rho / r) = \arccos (2q / (h+q))$



Kugelsegment, Kugelsektor

Wird eine Kugel durch eine Ebene geschnitten, so entstehen zwei Kugelabschnitte oder Kugelsegmente. Verläuft diese Schnittebene genau durch den Kugelmittelpunkt, so entstehen zwei Halbkugeln.
Der jeweils abgetrennte Teil der Kugeloberfläche heißt Kugelkappe, Kugelhaube oder Kalotte.
Ein Kugelsegment und der Kegel mit dem Schnittkreis als Basis und dem Kugelmittelpunkt als Spitze ergeben einen Kugelausschnitt oder Kugelsektor. Dieser Kugelsektor wird auch sphärischer Kegel genannt.

Kugelsektor, Kugelausschnitt

Für einen Kugelsektor sei ρ der Radius des Duchschnittskreises, h der Abstand des Mittelpunktes dieses Kreises von der Oberfläche der Kugel, der Pfeil, q der Abstand des Mittelpunktes von dem Mittelpunkt der Kugel, α der zum Durchschnittskreis gehörende Winkel im Kugelmittelpunkt und r der Radius der Kugel und außerdem V, A und M das Volumen, die Oberfläche und Mantelfläche des Kugelsektors. Dann gilt:

Volumen $V = 2\pi/3\ r^2\ h \approx 2{,}0943951\ r^2 h = 2\pi/3\ r^2\ (r - \sqrt{(r^2 - \rho^2)}) = 2\pi/3\ r^2\ (r - q)$
$V = 2\pi/3\ r^3\ (1 - \cos \alpha/2) = \pi/6\ (h^2 + \rho^2) / h = 2\pi/3\ (\rho^2 + q^2)\ (\sqrt{(q^2 + \rho^2)} - q)$
Oberfläche $A = \pi\ \rho\ r + 2\ \pi\ r\ h = \pi r\ (2h + \sqrt{(h\ (2r - h))}) = \pi r\ (2 \sqrt{(r^2 - \rho^2)} + \rho)$
$A = \pi r\ (2\ (r - q) + \sqrt{(r^2 - q^2)}) = \pi r^2\ (2\ (1 - \cos \alpha/2) + \sin \alpha/2) = \pi r^2\ (4 \sin^2 \alpha/4 + \sin \alpha/2)$

$A = \pi\ (2h + \rho)\ (h^2 + \rho^2) / (2h) = \pi\ (2\rho^2 + 2q^2 + (2q + \rho)\ \sqrt{\rho^2 + q^2})$

Mantelfläche $M = 2\pi\ r\ h = 2\pi\ r\ \sqrt{r^2 - \rho^2} = 2\pi\ r\ (r - q) = 2\pi\ (\rho^2 + q^2 + q\ \sqrt{\rho^2 + q^2})$

$M = \pi\ (h^2 + \rho^2) = 2\pi\ r^2\ (1 - \cos \alpha/2) = 4\pi\ r^2 \sin^2 \alpha/4$

Kegelmantel $M_K = \pi\ \rho\ h$

Höhe h $h = 3V / (2\pi\ r^2) \approx 0{,}4774647\ V/r^2 = M / (2\pi\ r) \approx 0{,}1591549\ M/r$

Kreisradius $\rho = \sqrt{h\ (2\ r - h)} = 1/(2\pi\ r^2)\ \sqrt{3V\ (4\pi\ r^3 - 3V)} = 1/(2\pi\ r)\ \sqrt{4\pi\ r^4 - M^2}$

Abstand q $q = r - 3V / (2\pi\ r^2) = r - M / (2\pi\ r)$

Kugelradius $r = \sqrt[3]{3V / (4\pi \sin^2 (45° - \alpha/4))} = \sqrt{M / (4\pi \sin^2 (45° - \alpha/4))}$

Kugelsegment, Kugelabschnitt

Wird eine Kugel durch eine Ebene geschnitten, so entstehen zwei Kugelabschnitte (Kugelsegmente). Der jeweils abgetrennte Teil der Kugeloberfläche heißt Kugelkappe, Kugelhaube oder Kalotte.
Für das Kugelsegment sei ρ der Radius des Schnittskreises, h der Mittelpunktsabstand dieses Kreises von der Kugeloberfläche, q der Abstand zum Mittelpunkt der Kugel, α der zum Durchschnittskreis gehörende Winkel im Kugelmittelpunkt und r der Radius der Kugel und außerdem V und A das Volumen und die Oberfläche des Kugelsegments. Dann gilt:

Volumen $V = \pi/3\ h^2\ (3\ r - h) = \pi/6\ h\ (3\rho^2 + h^2) = \pi/3\ (2r^3 - (2r^2 + \rho^2)\ \sqrt{r^2 - \rho^2})$

$V = \pi/3\ (r - q)^2\ (2r + q) = 2\pi/3\ r^3\ (1 - \cos \alpha/2)^2\ (1 + 1/2 \cos \alpha/2)$

$V = \pi\ h\ (\rho^2 / 2 - h^2/6) = \pi/3\ (2\ (q^2 + \rho^2)\ \sqrt{\rho^2 + q^2} - q\ (2q^2 - 3\rho^2))$

Oberfläche $A = \pi\ h\ (4\ r - h) = \pi\ (2\rho^2 + h^2) = \pi\ (2r^2 - 2r\ \sqrt{r^2 + \rho^2} + \rho^2)$

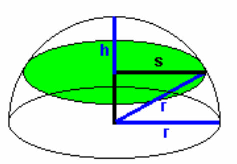
$A = \pi\ (r - q)\ (3r + q) = \pi\ r^2\ (1 - \cos \alpha/2)\ (3 + \cos \alpha/2)$

$A = \pi\ (2\rho^2 + h^2) = \pi\ (3\rho^2 + 2q^2 - 2q\ \sqrt{q^2 + \rho^2})$

Die Mantelfläche, d.h. die sphärische Fläche, des Kugelsegmentes ist die des Kugelsektors und wird analog berechnet:

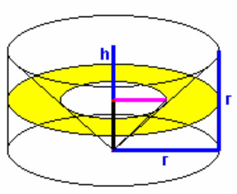
Mantelfläche $M = 2\pi\ r\ h = 2\pi\ r\ \sqrt{r^2 - \rho^2} = 2\pi\ r\ (r - q) = 2\pi\ (\rho^2 + q^2 + q\ \sqrt{\rho^2 + q^2})$

$M = \pi\ (h^2 + \rho^2) = 2\pi\ r^2\ (1 - \cos \alpha/2) = 4\pi\ r^2 \sin^2 \alpha/4$



Kugelsegmentvolumen

Zur Bestimmung des Volumens eines Kugelsegmentes kann die gleiche Methode wie zur Berechnung des Kugelvolumens nach dem Satz des Cavalieri genutzt werden: Man legt im Abstand h, der Höhe der Kugelkappe, eine Ebene durch die vollständige Kugel. Die Schnittfläche ist ein Kreis mit dem Radius s, wobei s = r - h gilt.



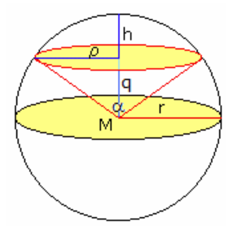
Betrachtet man einen Zylinder mit dem Radius r und der Höhe h, schneidet aus diesem einen Kegelstumpf mit den Radien r und R = r-h aus, so ergibt sich ein Kreisring als Schnittfläche.
Für die Höhe h und jede kleinere Höhe sind die Schnittflächen beider Körper wieder flächeninhaltsgleich, so dass der Satz des Cavalieri verwendet werden kann. Für das Volumen der Kugelkappe wird dann

$V = V_{Zylinder} - V_{Kegelstumpf} = \pi\ r^2\ h - \pi/3\ h\ (r^2 + r\ R + R^2)$

$V = \pi\ r^2\ h - \pi/3\ h\ (r^2 + r\ (r-h) + (r-h)^2) = \pi\ r^2\ h - \pi/3\ h\ (r^2 + r^2 - rh + r^2 - 2rh + h^2)$

$V = \pi\ r^2\ h - \pi/3\ h\ (3r^2 - 3rh + h^2) = \pi\ r^2\ h - \pi\ r^2\ h + \pi\ r\ h^2 - \pi/3\ h^3$

$V = \pi/3\ h^2\ (3r - h)$



Kugelsegment, Kugelabschnitt

Für das Kugelsegment sei ρ der Radius des Schnittskreises, h der Mittelpunktsabstand dieses Kreises von der Kugeloberfläche, q der Abstand zum Mittelpunkt der Kugel, α der zum Durchschnittskreis gehörende Winkel im Kugelmittelpunkt und r der Radius der Kugel und außerdem V und A das Volumen und die Oberfläche des Kugelsegments. Dann gilt:

Höhe h $h = 2r - \sqrt{1/\pi\ (4r^2\ \pi - A)}$

Kreisradius $\rho = \sqrt{h\ (2\ r - h)} = \sqrt{2r\ \sqrt{1/\pi\ (4r^2\ \pi - A)} - 1/\pi\ (4r^2\ \pi - A)}$

Abstand q $q = \sqrt{1/\pi\ (4r^2\ \pi - A)} - r$

Winkel α $\cos \alpha/2 = \sqrt{(4r^2\ \pi - A)/(\pi\ r^2)} - 1$

Die nachfolgenden Gleichungen sind für die Berechnung nicht nur auf Grund ihrer Struktur wenig geeignet, sondern auch, da sie auch zum irreduziblen Fall der Cardanischen Formel führen. Praktisch verwendbare Näherungsformeln siehe

Höhe $h = r - \sqrt[3]{(3V - 2\pi\ r^3 + \sqrt{3V\ (3V - 4\pi\ r^3)})/(2\pi)} - \sqrt[3]{(3V - 2\pi\ r^3 - \sqrt{3V\ (3V - 4\pi\ r^3)})/(2\pi)}$

Radius $\rho = \sqrt{r^2 - \sqrt[3]{((3V - 2\pi r^3)\ (3V - 2\pi r^3 + \sqrt{3V\ (3V - 4\pi r^3)})) - \sqrt[3]{2\pi\ r^6}} - \sqrt[3]{((3V - 2\pi r^3)\ (3V - 2\pi r^3 - \sqrt{3V\ (3V - 4\pi r^3)})) - \sqrt[3]{2\pi\ r^6}}}$

Winkel $\cos \alpha/2 = \sqrt[3]{(3V - 2\pi r^3 + \sqrt{3V\ (3V - 4\pi r^3)})/(2\pi r^3)} + \sqrt[3]{(3V - 2\pi r^3 - \sqrt{3V\ (3V - 4\pi r^3)})/(2\pi r^3)}$

Kugelkappe Oberfläche $A = 2\pi r h = \pi (\rho^2 + h^2) = 2\pi r (1 - \cos \alpha/2)$

Kugelsegment, Kugelabschnitt

Sind von einem Kugelsegment der Kugelradius r und das Volumen bekannt, so können die Höhe h des Segmentes, der Schnittkreisradius ρ, der Abstand q und der Winkel α im Kugelmittelpunkt berechenbar. Dabei ergeben sich kubische Gleichungen, die genau eine Lösung besitzen, d.h. dem Casus irreducibilis zuzuordnen sind. Damit sind diese nur schlecht nutzbar. siehe

In der Praxis wird man daher die nachfolgenden kubischen Gleichungen mittels geeigneter Näherungsverfahren iterativ lösen:

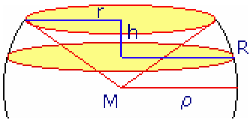
$$h^3 + 3 r h^2 + 3V / \pi = 0$$
$$\rho^6 + 3 r^2 \rho^4 - (12V r^3 \pi - 9 V^2) / \pi^2 = 0$$
$$q^3 - 3 r^2 q - (3V - 2 r^3 \pi) / \pi = 0$$
$$\cos^3 \alpha/2 - 3 \cos \alpha/2 - (3V - 2 r^3 \pi) / (r^3 \pi) = 0$$

Kennt man von einem Kugelsektor das Volumen V und vom zugehörigen Segment ebenso das Volumen W, so kann man den Radius der Kugel berechnen

$$r = \sqrt[3]{(3V / (8\pi W) (3V \pm \sqrt{(V (9V - 8W))}))}$$

Wenn von einem Kugelsegment ein Stück durch eine senkrechte Ebene abgeschnitten wird, deren Abstand von der Mitte der Grundfläche des Segments a ist, während diese Mitte vom Kugelmittelpunkt b entfernt ist, so ist das Volumen des Stücks

$$V = 2/3\, abp + 2/3\, r^3 \arctan (rp)/(ab) - b/3\, (3r^2-b^2) \arctan p/a - a/3\, (3r^2-a^2) \arctan p/b$$
mit $p = \sqrt{(r^2 - a^2 - b^2)}$ ist.



Kugelzone (Kugelschicht)

Eine Kugelschicht entsteht, wenn zwei zueinander parallele Ebenen eine Kugel schneiden. Aus der Oberfläche wird eine Kugelzone oder sphärische Zone ausgeschnitten. Die Kugelschicht lässt sich als Differenz zweier Kugelabschnitte auffassen.

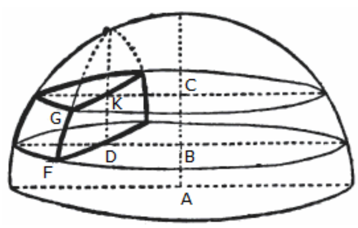
Sind V das Volumen, M die sphärische Fläche, A die gesamte Oberfläche, r und R der kleine und große Schnittkreisradius, ρ der Kugelradius, h die Zonenhöhe und q der Abstand der großen Schnittfläche vom Kugelmittelpunkt, so gilt:

Volumen	$V = \pi/6\, h (3r^2 + 3R^2 + h^2) = \pi h (\rho^2 - q^2 - qh - h^2/3)$
Oberfläche	$A = \pi (2\rho h + r^2 + R^2) = \pi (\rho \sqrt{(\rho^2 - r^2/4)} - \rho q + R^2 + r^2)$
Mantelfläche	$M = 2\pi \rho h = 2\pi \rho (\sqrt{(\rho^2 - r^2/4)} - q)$
	$M = \pi h \sqrt{(8\rho^2 - R^2 - r^2 + 2 \sqrt{(r^2R^2 - 4\rho^2 (r^2 + R^2 - 4\rho^2))})} = A - \pi (r^2 + R^2)$
Radius	$\rho^2 = R^2 + (R^2 - r^2 - h^2)^2 / (2h)^2$
Schichthöhe	$h = M / (2 \pi \rho)$

Einbeschriebener Kegelstumpf

Volumen $V = \pi/6\, h (3r^2 + 3R^2 + h^2) - \pi/6\, h l^2$ mit $l = \sqrt{[h^2 + (R-r)^2]}$

Kugeldreieck - Fläche Fläche $= (A+B+C-\pi) \cdot r^2$



Kugelzonenabschnitt

Wenn von einer Kugelzone durch eine senkrechte Ebene ein Stück abgeschnitten wird, so entsteht die abgebildete Figur.

Dabei sei r der Radius der Kugel, AB = b der Abstand der größeren Grundfläche vom Kugelmittelpunkt, AC = c der Abstand der kleineren Grundfläche vom Mittelpunkt, BD = a der Abstand der Durchschnittsebene von der Achse der Zone.

Zur Abkürzung der Formeln seien weiter

$$p = FD = \sqrt{(r^2 - a^2 - b^2)} \qquad q = GK = \sqrt{(r^2 - a^2 - c^2)}$$

Für das Volumen V wird dann

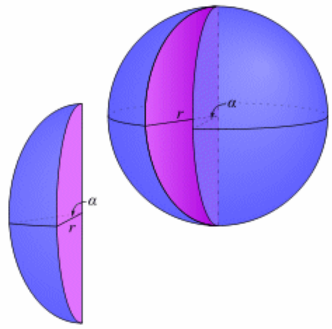
$V = c/3\, (3r^2 - c^2) \arctan q/a - b/3\, (3r^2 - b^2) \arctan p/a + a/6\, (a^2 + 3r^2) (\arctan b/p - \arctan c/q) + 2/3\, r^3 (\arctan (ac)/(rq) - \arctan (ab)/(rp)) + a/2\, (r^2 - a^2) (\arctan q/c - \arctan p/b) + 2/3\, a (bp - cq)$

und für die gekrümmte Wandfläche

$M = 2r (c \arctan q/a - r \arctan (ac)/(rq) - a \arctan c/q - b \arctan p/a - r \arctan (ab)/(rp) + a \arctan b/p)$

Kugelkeil

Ein Kugelkeil (engl. spherical wedge) entsteht, wenn längs zweier Großhalbkreise eine Kugel geschnitten wird.

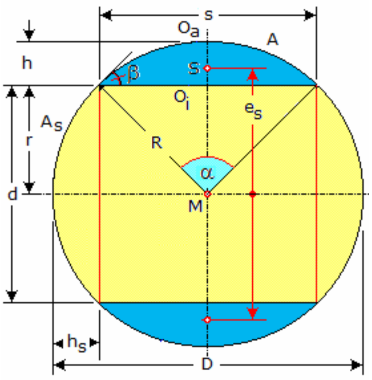


Dabei wird der Kugelkeil durch zwei Parameter, den Kugelradius r und den Winkel α zwischen den Großhalbkreisen beschrieben. Ist α = 180°, so entsteht eine Halbkugel, für α = 90° eine Viertelkugel.
Der Oberflächenteil eines Kugelkeils, der zur Oberfläche der Kugel gehört, wird Kugel-Möndchen genannt.

Volumen eines Kugelkeils $V = 4/3\ \alpha\ r^3$
Oberfläche Kugel-Möndchen $A = 2\ \alpha\ r^2$

Kugeldreikant
Ob eine Wassermelone wirklich reif ist, wird von Händlern in den Mittelmeerländern dadurch gezeigt, dass sie ein Kugeldreikant bis zum Mittelpunkt der Melone herausschneiden.
Ein Kugeldreikant ist ein Körper, der durch Schnitt einer Kugel längs eines Kugeldreiecks entsteht.
Sind die drei Innenwinkel des Kugeldreikants α, β und γ (im Bogenmaß) und ist der Kugelradius gleich r, so wird für das Volumen des Kugeldreikants:
Volumen eines Kugeldreikants $V = 1/3\ r^3\ (\alpha + \beta + \gamma - \pi)$
Einbeschriebener Kegelstumpf
Volumen $V = \pi/6\ h\ (3r^2 + 3R^2 + h^2) - \pi/6\ h\ l^2$ mit $l = \sqrt{[\ h^2 + (R-r)^2\ ]}$
Kugeldreieck - Fläche Fläche = $(A+B+C-\pi) * r^2$

Es lässt sich nachweisen, dass die Kugel derjenige Körper ist, der bei gegebenen Volumen die kleinste Oberfläche besitzt. Das ist der Grund, dass die Seifenblase Kugelform annimmt, da das Häutchen das Bestreben hat, sich möglichst zu verkleinern.



Kugelring
Ein Kugelring ist eine zylindrisch durchbohrte Kugel. Der Begriff Kugelring wird in Analogie zum Kreisring verwendet. Im englischen Sprachraum ist der Begriff spherical ring üblich.
Mathematisch gesehen ist ein Kugelring eine Durchdringung von Kugel und Zylinder, wobei die Zylinderachse durch den Kugelmittelpunkt geht.

Es sind M … Kugelmittelpunkt, S … Flächenschwerpunkt des Ringquerschnitts, R … Kugelradius = Außenradius des Kugelrings, D = 2R … Kugeldurchmesser
Bohrlochradius, Innenradius des Kugelrings $r = R - h$
Bohrlochdurchmesser, Zylinderdurchmesser $d = 2r$
Ringbreite, Sehne des Kreissegments $s = 2\ \sqrt{(R^2 - r^2)}$
Höhe des Kreissegments, Dicke des Rings $h = R - \sqrt{(R^2 - s^2/4)}$
Zentriwinkel des Bogens α $\cos \alpha/2 = r/R$
Flankenwinkel des Kugelrings $\beta = \alpha/2$
Schwerpunktabstand $e_s = s^3 / (12\ A)$
Fläche des Kreissegments $A = R^2/2\ \alpha - rs/2$
Volumen $V = \pi/6\ s^3$
Oberfläche $A = 2\pi\ s\ (R + r)$
Daraus folgt: Alle Kugelringe mit gleicher Breite s haben das gleiche Volumen. Das Volumen V eines beliebig großen Kugelrings wird allein durch die Ringbreite s bestimmt.
Eine Kugel mit dem Durchmesser s hat das gleiche Volumen wie ein Kugelring mit der Breite s.

Kugel - Anwendungsaufgabe
Ein Turniergolfball besteht aus drei Schichten, dem Kern, der Ummantelung und der Schale. Ein Ball hat 42,8 mm Durchmesser und ein Gewicht von 46,23 g. Die Ummantelung hat eine Schichtdicke von 3,0 mm, der Kern hat einen Durchmesser von 34,8 mm, die Schale hat eine Dicke von 1,0 mm.
Aufgabe: Wie groß sind die prozentualen Anteile des Volumens der Schale, der Ummantelung und des Kerns am Gesamtvolumen des Balles. Die Schale ist aus Lithium, 1 cm³ Lithium wiegt 0,534 g, die Ummantelung aus Graphit, 1 cm³ wiegt 2,39 g. Welche Dichte hat das Material des Kerns?
Lösung:
Kern: 54% / Ummantelung: 33% / Schale: 13%, Dichte 0,5g/cm³

Das Wahrzeichen der Weltausstellung 1958 in Brüssel ist das "Atomium". Es besteht aus 9 Kugeln von je 18 m Durchmesser. Wie groß ist das Gesamtvolumen aller Kugeln. Wie viele m² muss ein Reinigungsteam putzen, ohne das Gestänge zwischen den Kugeln, wenn das Wahrzeichen glänzen soll?
Lösung: Volumen = 27482 m³, Oberfläche 9160 m²

Kugel-Anwendungsaufgabe (2)
1. (a) Eine Glaskugel mit 12 cm Durchmesser wird in einen möglichst kleinen zylinderförmigen Karton verpackt.
Wie viel Prozent des zur Verfügung stehenden Raumes werden verschenkt?
(b) Der Glasbläser hat die Kugel aus einem 3 cm dicken Tropfen Glas geblasen. Wie dick ist die Glaswand der Kugel?
Lösung: $(2\pi r^3 - 4/3\pi r^3)/(2\pi r^3) \approx 33$ % ; $d \approx 0{,}3$ mm

2. Einer Kugel vom Radius r ist ein Zylinder mit der Höhe h = 1,5r einbeschrieben. Wie verhalten sich die Rauminhalte der beiden Körper?
Lösung: $V_Z : V_K = 63 : 128$

3. Tennisbälle werden in Sportgeschäften häufig in zylindrischen Blechdosen angeboten.
Dabei werden 4 Bälle übereinander in der Dose gestapelt. Wie groß ist der in der Dose verbleibende Hohlraum, wenn man von einem Balldurchmesser von 7 cm ausgeht. Um welchen Anteil des Dosenvolumens handelt es sich dabei?
Lösung: Anteil 1/3, Volumen 359 cm³

4. Ein Hohlzylinder (Höhe h = 10 cm; Wanddicke a = 2 mm; Außendurchmesser d = 3 cm) aus Blei wird geschmolzen und
a) in eine Vollkugel
b) in eine Hohlkugel mit gleicher Wanddicke a
umgeformt. Berechne jeweils den Außendurchmesser der Kugel!
Lösung: a) $d_K = 3{,}2$ cm; b) $d_K = 5{,}4$ cm

5. Einer Kugel vom Radius R ist ein Zylinder einbeschrieben, dessen Mantelfläche sich zur Kugeloberfläche wie 1 : 2 verhält. Welchen prozentualen Anteil des Kugelvolumens macht das Zylindervolumen aus?
Lösung: 53,0 %

6. Eine Kugel mit dem Radius R hat das gleiche Volumen wie eine Halbkugel mit dem Radius r. Berechnen Sie das Verhältnis der Oberflächen von Halbkugel und Kugel.
Lösung: $r = R\ \sqrt[3]{2}$; $A_{HK} = 3\ r^2\ \pi$; $A_{HK} : A_K = 3 : \sqrt[3]{16} = 1{,}19\ldots$

7. Die Sonne sendet pro Sekunde ungefähr $n_0 = 10^{45}$ Lichtteilchen (Photonen) aus, gleichmäßig auf alle Richtungen verteilt. Die Sonne ist mit dem bloßen Auge noch sichtbar, wenn ca. n = 100 Photonen pro Sekunde die Pupille (A = 0,5 cm²) treffen.
In wie vielen Lichtjahren Entfernung ist die Sonne mit freiem Auge gerade noch sichtbar?
Lösung: $n_0 / n = A / (4\pi r^3)$ … $r = 6{,}31 \cdot 10^{18}$ m = 667 ly

8. Um wieviel Prozent muss die Kantenlänge eines Würfels vergrößert werden, damit der vergrößerte Würfel das gleiche Volumen wie die Umkugel des ursprünglichen Würfels hat?
Lösung: 30,6 %

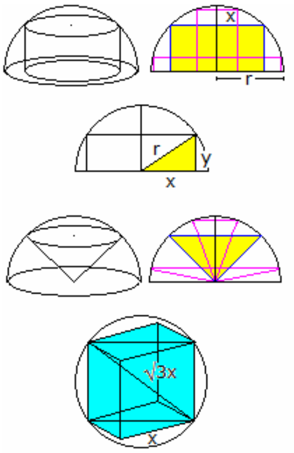
9. Eine hohle Kugel mit 10 cm Außendurchmesser und 4 mm Wanddicke schwimmt in Wasser und taucht genau bis zur Hälfte ein. Berechnen Sie die Dichte ρ_M des Materials, aus dem die Kugel besteht!
Lösung: 2,3 g/cm³ mit Auftriebsgesetz von Archimedes

10. Einer Kugel vom Radius r wird ein gerader Kegel der Höhe 4r umbeschrieben.
(a) Berechnen Sie den Öffnungswinkel α des Kegels.
(b) Wie groß ist der Radius des Berührkreises?
(c) Welches Verhältnis bilden Mantelfläche und Kugeloberfläche?
Lösung: (a) $\tan \alpha/2 = 1/3$; (b) $\rho = \sqrt{8} \sin \alpha/2$; (c) 3 : 2

Kugel in der Architektur
Gebäude in Form einer Kugel sind nicht sehr häufig. Ein besonders interessantes Beispiel ist das La Géode in Paris.

1986 wurde im 19.Arrondissement von Paris der "Parc de la Villette" eröffnet.
Den Nordbereich des Parks nimmt das Technimuseum Cité des sciences et de l'industrie sowie ein Planetarium ein. Südlich davon spiegelt sich das kugelförmige IMAX-Kino La Géode.
Das kugelförmige, 36 m im Durchmesser umfassende Multimedia-IMAX-Kino La Géode hat eine Projektionsfläche von 1000 m² und etwa 100 Sitzplätze.

Weitere Beispiele für kugelförmige Gebäude sind das Glaskugelhaus am Wiener Platz in Dresden sowie das Hayden-Planetarium in New York. Dort ist die schwebende Kugel des Hayden-Planetariums durch den gläsernen Kubus des neuen "Rose Center for Earth and Space" zu sehen.
Weiterhin: das Science Museum von Kunshan; eine Kugel im Dreistelzenbaustil; sowie verschiedene Planetarien weltweit.



Halbkugel

Teilt man eine Kugel mit einer Ebene längs eines Großkreises, so entstehen zwei Halbkugeln. Eine halbe Kugeloberfläche wird Hemisphäre genannt. Dieser Begriff bezieht sich meist auf die beiden Hälften der Erd- oder Himmelskugel, die durch den Äquator getrennt werden.

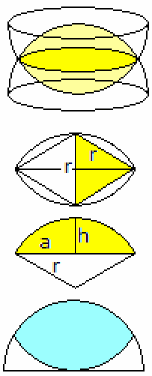
Für eine Halbkugel mit dem Radius r gilt

Volumen	$V = 2/3\ \pi\ r^3$
Oberfläche ohne Grundkreis	$A = 2\pi\ r^2$
Oberfläche mit Grundkreis	$A = 3\pi\ r^2$

Es gibt beliebig viele Zylinder in einer Halbkugel. Darunter ist ein Zylinder mit größtem Volumen von Interesse.
Für den Zylinder gilt $V = \pi\ x^2\ y$.
Die Nebenbedingung ist $x^2+y^2 = r^2$ oder $x^2 = r^2-y^2$.
Das führt zur Zielfunktion $V(y) = \pi\ (r^2-y^2)\ y = \pi\ (r^2y-y^3)$.
$V'(y) = \pi\ (r^2-3y^2) = 0$ ergibt $y = 1/3\ \sqrt{3}\ r$ und $x = 1/3\ \sqrt{6}\ r$.
Für $x = 1/3\ \sqrt{6}\ r$ und $y = 1/3\ \sqrt{3}\ r$ hat ein Zylinder in der Halbkugel sein größtes Volumen.

Größter Kegel in der Halbkugel: Die Spitze liegt im Mittelpunkt des Grundkreises der Halbkugel. Die Rechnung und das Ergebnis stimmen mit denen des größten Zylinders bis auf einen Faktor 1/3 überein.
Für $x = 1/3\ \sqrt{6}\ r$ und $y = 1/3\ \sqrt{3}\ r$ hat der Kegel in dieser Lage sein größtes Volumen.

Der größte Quader in der Kugel ist der Würfel. Er hat die Kantenlänge $x = 2/3\ \sqrt{3}\ r$.
Dies ergibt sich aus $2r = \sqrt{3}\ x$.
Folglich enthält die Halbkugel den halben Würfel als maximalen Quader.



Bikonvexe Linse

Durchdringen sich zwei Halbkugeln so, dass die Scheitel in den Mittelpunkten der Grundkreise liegen, so entsteht eine bikonvexe Linse als Durchschnittskörper.
Er setzt sich aus zwei Kugelabschnitten zusammen.
Der Querschnitt der Linse besteht aus Kreisbögen, die über zwei gleichseitigen Dreiecken liegen.
Damit hat ein Kugelabschnitt die Höhe $h = r/2$ und den Grundkreisradius
$a = 1/2\ \sqrt{3}\ r$.
Der Mittelpunktswinkel ist 120° groß.
Für das Volumen der Linse gilt $V = 2 \cdot 1/6\ \pi \cdot h \cdot (3a^2 + h^2) = 5/12\ \pi\ r^3$
Das sind 62,5% des Volumens der Halbkugel.
Für den Oberflächeninhalt der Linse wird $A = 2\ \pi\ r^2$
d.h. der Oberflächeninhalt der Halbkugel.

Magdeburger Halbkugeln

Die wahrscheinlich berühmtesten Halbkugeln sind die Magedburger Halbkugeln.

"Es war ein großartiges Schauspiel, das sich den Zuschauern bot: 16 Pferde versuchten vergeblich, zwei luftleer gepumpte Halbkugeln aus Messing auseinander zu reißen.
Mit dieser Demonstration wollte der Bürgermeister der Stadt, Otto von Guericke (1602-1686), die ungeheure Kraft des Luftdrucks vorführen, die die beiden Halbkugeln fest aufeinander presste.

Das meisterlich inszenierte Experiment war durch die Weiterentwicklung seiner Luftpumpe möglich geworden, mit der man Luft aus dem Innern der Kugeln weitgehend entfernen konnte.
Guericke hatte sich schon lange mit der Erzeugung und Untersuchung von "leerem Raum", dem Vakuum, beschäftigt. Die Vorführung im Jahr 1661 war so spektakulär, dass ihre bildliche Darstellung Eingang in zahlreiche Schriften der Zeit fand.
Die ungeheure Wucht des Spektakels sollte genügen, schwierige Fragen über die Welt mit einem Schlag zu beantworten und komplexe Diskussionen zu beenden:
Es gab einen "leeren Raum"! Und man konnte ihn mit Hilfe geeigneter Instrumente erzeugen und untersuchen!"

Abbildung aus dem Werk "Technik Curiosa" aus dem Jahr 1664 von Professor Caspar Schott aus Würzburg. Quelle: Deutsches Museum

Soddy-Kugeln

In Verallgemeinerung der Soddy-Kreise können auch Soddy-Kugeln und Soddy-Hyperkugeln im n-dimensionalen Raum betrachtet werden. Kurze Zeit nach der Veröffentlichung Soddys gab Thorold Gosset (1869-1962) im Januar 1937 in der Zeitschrift "Nature" mit dem Gedicht

The Kiss Precise by Thorold Gosset
And let us not confine our cares
To simple circles, planes and spheres,
But rise to hyper flats and bends
Where kissing multiple appears,
In n-ic space the kissing pairs
Are hyperspheres, and Truth declares -
As n + 2 such osculate
Each with an n + 1 fold mate
The square of the sum of all the bends
Is n times the sum of their squares.

eine Verallgemeinerung.
Liegt ein n-dimensionaler Raum vor, so gilt für n+2 Hyperkugeln mit den Krümmungsradien k_1, k_2, …, k_{n+2} von denen sich jeweils 2 paarweise tangieren: $(\Sigma_{i=1}^{n+2} k_i)^2 = n\, (\Sigma_{i=1}^{n+2} k_i^2)$
Insbesondere gilt dies für fünf Soddy-Kugeln im R^3, worauf schon Soddy mit der Fortsetzung seines Gedichtes

To spy out spherical affairs
An oscular surveyor
Might find the task laborious,
The sphere is much the gayer,
And now besides the pair of pairs
A fifth sphere in the kissing shares.
Yet, signs and zero as before,
For each to kiss the other four
The square of the sum of all five bends
Is thrice the sum of their squares.

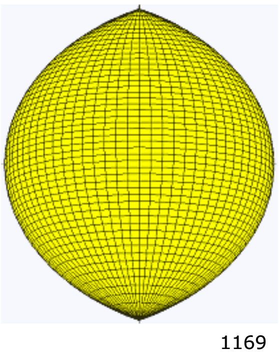
hinwies.

Effektivität von Verpackungen

Die Kugel ist der Körper, welcher mit einem vorgegebenen Oberflächeninhalt A das größtmögliche Volumen umschließt. Alle anderen Körper haben ein kleineres Volumen.
Als Effektivität einer Verpackung bezeichnet man das Verhältnis Volumen : Oberfläche und setzt für die Kugel 100%.
Volumen $V = 4\pi/3\ r^3 \approx 4{,}188790204786\ r^3$
Oberfläche $A = 4\pi\ r^2 \approx 12{,}566370614359\ r^2$
Für eine Kugel mit dem Radius r = 1 ergibt sich als absolute Effektivität $E = 4\pi/3\ /\ (4\pi) = 1/3$
Hat ein beliebiger Körper ein Volumen V und einen Oberflächeninhalt A, so wird für seine Effektivität in Bezug zur Kugel $E = 6\sqrt{\pi}\ V / A^{1,5}\ 100\ \%$

Körper	Oberfläche	Volumen	Effektivität
Würfel mit 1x1x1	6	1	72,4%
Quader mit 1x2x3	22	6	61,8%
Kugel mit Radius 2	50,3	33,5	100%
Kegel mir r=2,h=6	52,3	25,1	70,7%
quadr.Pyramide mit a=3,h=7	52,0	21,0	59,6%
Zylinder mit r=2,h=4	75,4	50,3	81,6%
Ikosaeder mit a=1	8,660	2,1817	91,04%
Dodekaeder mit a=1	20,646	7,663	86,87%

In der Praxis ist die Einsparung von Verpackungsmaterial nur ein wichtiger Punkt. Konstengünstige Herstellung einer Verpackung und vor allem die Lagerfähigkeit sind wesentliche Bedingungen.
So wird es unwahrscheinlich sein, dass Massenprodukte in Form eines Ikosaeders verpackt werden.



Spindel

Dreht sich ein Kreissegment um seine Sehne, so entsteht ein spindelförmiger Körper.
Sind V das Volumen, A die Oberfläche, a die Sehne des Segmentes, q der

Abstand vom Mittelpunkt des Kreises, f die Höhe des Segments und r der Kreisradius, so wird
Volumen $V = 2\pi/3\ (2r^2 + q^2) \sqrt{r^2 - q^2} - 2\pi\ r^2\ q \arccos q/r$

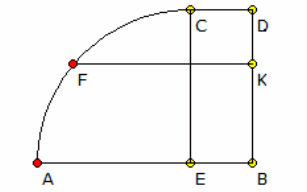
$V = \pi/3\ a\ (3r^2-a^2/4) - 2\pi r^2 \sqrt{r^2-a^2/4} \arccos (\sqrt{r^2-a^2/4}/r)$

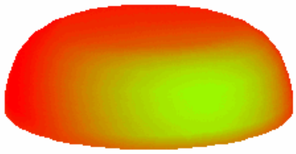
$V = 2\pi/3\ (3r^2-2rf+f^2) \sqrt{2rf-f^2} - 2\pi r^2 (r-f) \arccos ((r-f)/r)$

Oberfläche $A = 4\pi\ r\ (\sqrt{r^2 - q^2} - q \arccos q/r)$

$A = 4\pi\ r\ (a/2 - \sqrt{r^2 - a^2} \arccos (\sqrt{r^2-a^2/4}/r))$

$A = 4\pi\ r\ (\sqrt{2rf - f^2} - (r-f) \arccos ((r-f)/r))$





Spezieller Rotationskörper

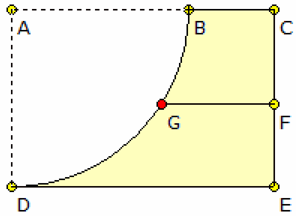
Rotiert eine Fläche, die aus einem Rechteck EBCD und einem Viertelkreis AEC zusammengesetzt ist, um die Achse DB, so entsteht ein Rotationskörper, der aus einem Zylinder mit halbkugelförmiger Umrahmung besteht.
Sind AE = a der Radius des Quadranten und EB = b die Breite des Rechtecks, so wird, wenn sich die ganze Fläche ACDB um DB dreht

$$V = \pi\ (2/3\ a^3 + ab^2 + 1/2\ a^2b)$$

Bewegt sich jedoch nur die Fläche AFKB um die Linie KB, ergibt sich, wenn man BK = m setzt,

$$V = \pi\ m\ (a^2 + b^2) + \pi\ b\ m \sqrt{a^2-m^2} + \pi\ a^2b \arcsin (m/a) - \pi/2\ m^3$$

Spezieller Rotationskörper (2)



Eine Fläche DECB, die aus einem Rechteck und einem konkaven Kreisbogen BD zusammengesetzt ist, soll um die Achse DE gedreht werden. Dabei entsteht ein Rotationskörper, der aus einem Zylinder mit halbkugelförmiger konkaver Umrahmung besteht.

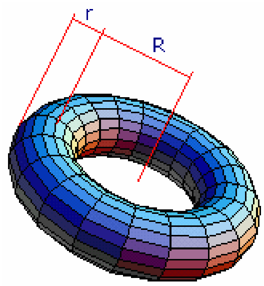
Sind AB = a der Radius des Quadranten und BC = b die Breite des Rechtecks, so wird, wenn sich die ganze Fläche BCED um CE dreht

$$V = \pi\ a\ (5/3\ a^2 + 2ab + b^2 - 1/2\ (a^2 + ab)\ \pi)$$

Wenn sich hingegen nur das Flächenstück BCFG um die Achse CG dreht, so wird für das Volumen des Rotationskörpers mit CG = m

$$V = \pi m\ (2a^2 + 2ab + b^2) - (a+b)\ \pi m \sqrt{a^2 - m^2} - \pi(a^3 + a^2b) \arcsin m/a - \pi/3\ m^3$$

Torus



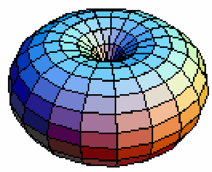
Ein Torus (Mehrzahl: Tori) ist der Rotationskörper, der bei Rotation eines Kreises um eine in der Kreisebene außerhalb des Kreises liegende Achse entsteht. Man kann sich vorstellen, dass der Torus aus beliebig vielen und beliebig dünnen Kreisscheiben besteht, die dann den Ring bilden.
Volumen $V = 2\pi^2\ R\ r^2$
Oberfläche $A = 4\pi^2\ R\ r$
Parametergleichungen

$x = (R + r \cos v) \cos u$

$y = (R + r \cos v) \sin u$

$z = r \sin v$ mit $0 \le u,v \le 2\pi$.

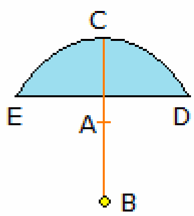
Für r = R entsteht ein Horn-Torus (untere Abbildung). Für R < r entsteht ein sich selbstschneidender Spindel-Torus.



Torus und Architektur

Gebäude in Form eines Torus sind relativ selten.
Ein sehr schönes Beispiel, bei dem ein Teil eines Torus als Struktur genutzt wird, ist der 136 m hohe Funkturm Montjuic im Olympiagelände von Barcelona (Spanien).
Der Turm wurde 1992 von dem spanischen Architekten Santiago Calatrava im Rahmen der Olympischen Spiele in Barcelona gebaut.

Das weiße Bauwerk besticht durch seine symbolische und künstlerische Bedeutung. Durch seine Form soll es an einen Sportler erinnern, der die olympische Flamme trägt. Gleichzeitig ähnelt die Sendeanlage im oberen Teil des Turmes an Pfeil und Bogen. Der Sockel scheint mit seinen wellenähnlichen Elementen das Wasserbecken am Fuß des Torre zu adaptieren.
Aus der Frontperspektive hat der geneigte Schaft eine ähnliche Wirkung wie eine Sonnenuhr. Er wirft seinen Schatten auf ein vorgelagertes Podium, welches mit Ziegelscherben bepflastert ist.

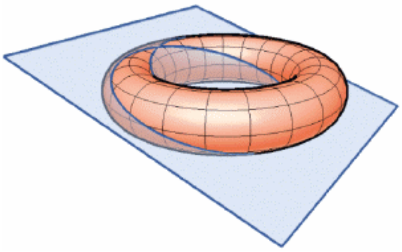


Segmenttorus

Bewegt sich ein Kreis mit dem Mittelpunkt A um einen Punkt B, welche in der erweiterten Ebene des Kreises liegt, so

entsteht ein ringförmiger Körper, ein Torus.
Wenn sich statt des ganzen Kreises, nur das Segment ECD um B dreht, so entsteht ein Segmenttorus.
Sind GB = m der Abstand der Sehne von der Mitte des Kreises, q die halbe Sehne des Segments, V das Volumen, M die sphärische Fläche des Ringstücks, r der Radius des Kreises und AB = a der Abstand zum Drehzentrum, so wird:

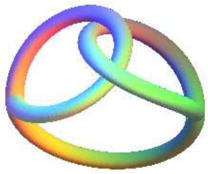
$$V = 2\pi\ (m\ a\ q + r^2\ a \arcsin m/r \pm 2/3\ (r^3 - q^3))$$
$$V = 2\pi\ (m\ a \sqrt{(r^2 - m^2)} + r^2\ a \arcsin m/r - 2/3 \sqrt{((r^2 - m^2)^3)} \pm 2/3\ r^3)$$
$$A = 2\pi\ r\ (a \arcsin m/a \pm \sqrt{(r^2 - m^2)} \pm r)$$



Villarceau-Kreise

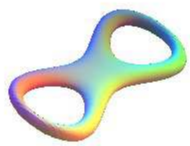
1848 entdeckte der französische Mathematiker und Astronom Yvon Villarceau (1813-1883), dass jeder Schnitt eines Ringtorus mit einer Doppeltangentialebene in zwei kongruente Kreise zerfällt, die nach Villarceau benannt wurden.
Damit enthält ein Ringtorus neben den Parallel- und Meridiankreisen noch unendlich viele weitere Kreise.

Tori mit mehreren Löchern

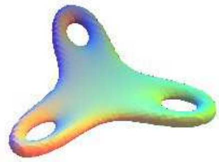


Viviani-Körper

Bretzel



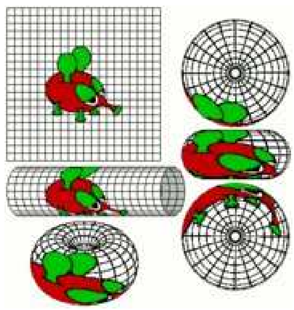
Acht-Torus
$(x^2(1-x^2)-y^2)^2 + z^2 = 0{,}01$



Trifolium-Torus
$((x^2+y^2) - x(x^2-3y^2))^2 + z^2 = 0{,}08$

Vierfacher Torus
$(x^2(1-x^2)^2(4-x^2)^3 - 20y^2)^2 + 80z^2 = 2$

Torustopologie



Im Gegensatz zur Oberfläche einer Kugel kann der Torus ohne Singularitäten auf einer ebenen, rechteckigen Fläche abgebildet werden.
Dabei wird die rechte Kante des Rechtecks oder Quadrates mit seiner linken Kante verheftet, und seine untere Kante wird mit seiner oberen Kante verheftet. Diese Topologie besitzen auch viele Computerspiele, zum Beispiel Pacman oder das Game of Life.

Toruskoordinaten

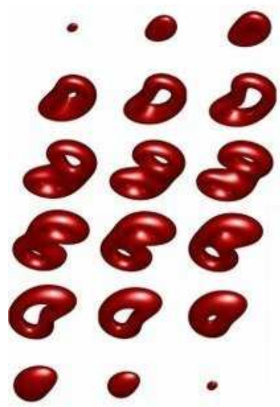
Man kann in der Torusoberfläche, die topologisch eine Fläche von Geschlecht 1 ist (d.h. sie besitzt 1 Loch), eine toroidale Koordinate t und eine dazu senkrechte poloidale Koordinate p einführen.
Man kann sich die Oberfläche durch einen Kreis entstanden vorstellen, der um eine Achse, die in der Kreisebene liegt, rotiert wird. Den Radius des ursprünglichen Kreises nennen wir r, dieser Kreis bildet auch gleichzeitig eine Koordinatenlinie von p. Den Abstand des Kreismittelpunkts von der Achse wird hier R genannt, die Koordinatenlinien von t sind Kreise um die Drehachse. Beide Koordinaten sind Winkel und laufen von 0 bis 2π.

Eine mögliche Umrechnung in kartesische, dreidimensionale Koordinaten ist

$$x = R \cos t - r \cos t \cos p$$
$$y = R \sin t - r \sin t \cos p$$
$$z = \sin p$$

Manche Tori kann man sogar essen!

Höherdimensionale Tori



Bei einem dreidimensionalen Torus oder 3-Torus handelt es sich um einen Zylinder, dessen zwei Kreisflächen miteinander verbunden sind.
Bei dem 4-dimensionalen Torus oder 4-Torus handelt es sich um einen Tesserakt, dessen 8 gegenüber liegende Würfel paarweise miteinander verbunden sind. Die Abbildung zeigt Projektion des 4-Torus bei einer Bewegung durch ihn hindurch.

Allgemein ist der n-dimensionale Torus ein n-dimensionaler Würfel $[0, 1]^n$, dessen gegenüberliegende (n-1)-Hyperwürfel paarweise miteinander identifiziert sind. Man kann ihn auch als R^n/Z^n darstellen.
Das (n+1)-dimensionale Volumen eines n-Torus ist

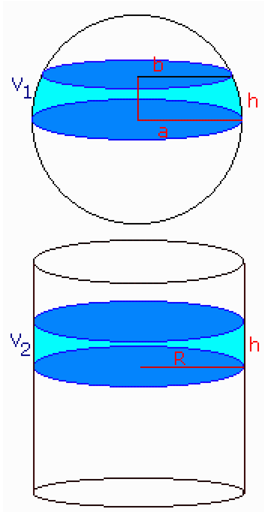
$V = 2\, R\, r^n\, \pi^{n/2+1} / \Gamma(n/2+1)$

Für die (n+1)-dimensionale Oberfläche erhält man als Flächeninhalt

$A = 2\, n\, R\, r^{n-1}\, \pi^{n/2+1} / \Gamma(n/2+1)$

n	V =	A =
3	$2\pi^2 R r^2$	$4\pi^2 R r$
4	$8\pi^2/3 R r^3$	$8\pi^2 R r^2$
5	$\pi^3 R r^4$	$4\pi^3 R r^3$
6	$16\pi^3/15 R r^5$	$16\pi^3/3 R r^4$
7	$\pi^4/3 R r^6$	$2\pi^4 R r^5$
8	$32\pi^4/105 R r^7$	$32\pi^4/15 R r^6$
9	$\pi^5/12 R r^8$	$2\pi^5/3 R r^7$
10	$64\pi^5/945 R r^9$	$64\pi^5/105 R r^8$

http://www.dr-mikes-maths.com/4d-torus.html



Archimedisches "Hutschachtel"-Theorem

Eine Kugel sei in einen Zylinder so eingeschrieben, dass beide den gleichen Radius R haben. Schneidet man beide Körper zweimal in gleichen Höhen mit einer Ebene, so besitzt der Teilzylinder (mit der Höhe h) den gleichen Mantelflächeninhalt wie die entstehende Kugelzone (Kugelschicht), mit der Höhe und den zwei Schnittkreisradien a und b. Die Mantelfläche beträgt

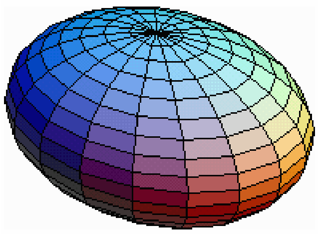
$M = 2\, \pi\, R\, h$

Daraus ergibt sich sofort

"Brotkrustentheorem" des Archimedes

Schneidet man ein kugelrundes Brot in gleich dicke Scheiben, so haben alle Scheiben gleich viel Kruste.

Ellipsoid



Ein Ellipsoid ist ein Rotationskörper, der z.B. durch die Rotation einer Ellipse um eine ihrer Hauptachsen entsteht.

a, b, c sind die Haupthalbachsen.

Volumen $V = 4/3\, \pi\, a\, b\, c$

Rotationsellipsoid (b=c) , Volumen $V = 4/3\, \pi\, a\, b^2$

Rotationsellipsoid (a=c), Volumen $V = 4/3\, \pi\, a^2\, b$

Die Oberfläche eines Ellipsoids wird durch analytisch nicht vollständig auflösbare, elliptische Integrale beschrieben:

$A = 2\, \pi\, (c^2 + bc^2 / \sqrt{a^2-c^2}\, \mathrm{EllipticF}(\theta,m) + b\, \sqrt{a^2-c^2}\, \mathrm{EllipticE}(\theta,m)$

wobei $\theta = \arcsin(\sqrt{1 - c^2/a^2})$ und $m = a^2 (b^2-c^2) / (b^2 (a^2-c^2))$ sind.

Durch den Dänen Knud Thomsen wurde im April 2004 folgende Näherungsformel angegeben:

Thomsensche Formel $A \approx 4\pi\, [(a^p b^p + a^p c^p + b^p c^p)/3]^{1/p}$

Für $p \approx 1.6075...$ ergibt die Formel im schlechtesten Fall einen maximalen relativen Fehler von ± 1.061 %.

1990 wurden durch Achim Flammenkamp weitere Näherungsformeln angegeben:

$A \approx 2\pi\, [(ab + ac + bc) - 3\, abc/(a+b+c)]$; Fehler 10 %

$A \approx \pi\, [(1-1/\sqrt{3})(ab + ac + bc) + (1+1/\sqrt{3})(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)^{0.5}]$; Fehler 2.09 %

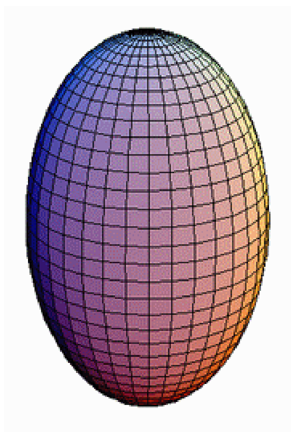
Ellipsoidoberfläche

Die Oberfläche A eines Ellipsoids kann nicht elementar berechnet werden. Man benötigt dazu elliptische Integrale. Nach Legendre gilt

$A = 2\pi\, c^2 + 2\pi b/\sqrt{a^2-c^2}\, (c^2\, F(k,\phi) + (a^2-c^2)\, E(k,\phi))$

mit $k = a/b\, \sqrt{b^2-c^2} / \sqrt{a^2-c^2}$

$\phi = \arcsin(\sqrt{a^2-c^2}/a)$



Die Gleichungen für die elliptischen Integrale sind

$F(k,\phi) = \int_0^{\phi} d\psi / \sqrt{1-k^2 \sin^2\psi} = \int_0^{\sin\phi} dx / (\sqrt{1-x^2}\, \sqrt{1-k^2x^2})$

$E(k,\phi) = \int_0^{\phi} \sqrt{1-k^2 \sin^2\psi}\, d\psi = \int_0^{\sin\phi} \sqrt{(1-k^2x^2)/(1-x^2)}\, dx$

und konkret auf das Ellipsoid bezogen

$F(k,\pi/2) = \int_0^{\pi/2} d\psi / \sqrt{1-k^2 \sin^2\psi} = \int_0^{1} dx / (\sqrt{1-x^2}\, \sqrt{1-k^2x^2})$

$E(k,\pi/2) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2\psi}\, d\psi = \int_0^{1} \sqrt{(1-k^2x^2)/(1-x^2)}\, dx$

Da diese Integrale nicht exakt lösbar sind, verwendet man Näherungsformeln.

Rotationsellipsoid

Ein Rotationsellipsoid (englisch "spheroid") ist ein Ellipsoid, das durch die Drehung einer Ellipse um eine ihrer Achsen entsteht. Im Gegensatz zu einem allgemeinen Ellipsoid sind zwei Achsen gleich lang. Man unterscheidet dabei je nach Länge der Drehachse das abgeplattete (oblate) Ellipsoid bei Rotation um die kleine Achse und das verlängerte (prolate) Ellipsoid bei Rotation um die große Achse.

Ein Beispiel für ein verlängertes Rotationsellipsoid ist die Form des Balles beim Rugby oder American Football.

Die meisten größeren Himmelskörper sind angenähert abgeplattete Rotationsellipsoide. Sie entstehen durch die Fliehkraft, die bewirkt, dass ein kugelförmiger Körper verformt wird. An den Polen, also den Durchstoßpunkten der Rotationsachse, werden diese Körper abgeplattet, am Äquator entsteht eine Ausbuchtung.

Besonders deutlich ist die Abplattung bei der Sonne und den großen Gasplaneten Jupiter und Saturn ausgeprägt, weil sie besonders schnell rotieren und nicht verfestigt sind. Der in zehn Stunden rotierende Jupiter ist um etwa 1/16 abgeplattet, die Erdabplattung beträgt 1/298.

Die Oberfläche für das abgeplattete Ellipsoid ist

$$A = 2\pi a^2 b/\sqrt{b^2-a^2}\ [b/a^2 \sqrt{b^2-a^2} + \operatorname{arsinh}(\sqrt{b^2-a^2}/a)]$$

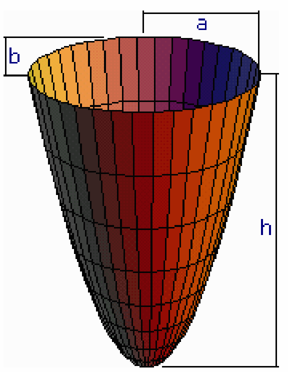
die des verlängerten ist $A = 2\pi a^2 b/\sqrt{a^2-b^2}\ [b/a^2 \sqrt{a^2-b^2} + \operatorname{arsinh}(\sqrt{a^2-b^2}/a)]$

a ist die Halbachse des Ellipsoids, die zur Rotationsachse parallel ist, b ist die zur Rotationsachse senkrechte Halbachse des Ellipsoids.

In der Geodäsie und Kartografie werden Rotationsellipsoide als geometrische Annäherung an das physikalische Geoid benutzt. Diese Rotationsellipsoide dienen als Referenzfläche, um die Lage bzw. Höhe von Objekten der Erdoberfläche anzugeben. Man spricht dann von einem Referenzellipsoid.

Paraboloid

Abgestumpftes Rotationsparaboloid



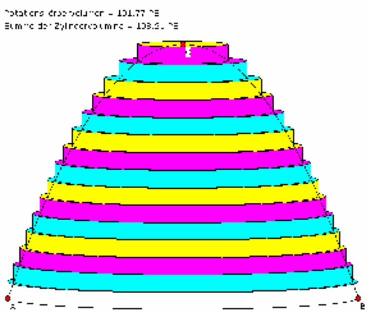
Grund- und Deckfläche parallele Kreise $V = \pi/2\ h\ (r^2 + R^2)$

Für a=b erhält man ein Rotationsparaboloid, das man sich durch Rotation einer Parabel mit $z = x^2/a^2$ um ihre in der x-z-Ebene liegende Achse entstanden denken kann.

Der Rauminhalt eines Paraboloidschale, die von einer Ebene senkrecht zur -Achse in der Höhe abgeschnitten wird, ist

Volumen $V = \pi/2\ a\ b\ h$

d.h. halb so groß wie der Rauminhalt des elliptischen Zylinders mit der gleichen Deckfläche und Höhe.



Rotationsparaboloid

Volumen $V = \pi/2\ r^2\ h$

Schwerpunkt S liegt auf der Achse im Abstand 2/3 h vom Scheitel

Ein Rotationsparaboloid kann durch eine Vielzahl übereinanderliegender Kreiszylinder mit abnehmenden Radien angenähert werden. Verringert man die Höhen der Zylinder, d.h. man muss mehr Zylinder nutzen, so konvergiert die Summe der Zylindervolumina gegen das Volumen des Paraboloids.

Paraboloid, Anwendung

Eine wichtige Anwendung von Paraboloiden sind Radioteleskope. Ein Radioteleskop ist ein Messgerät, mit dem astronomische Objekte beobachtet werden, die elektromagnetische Wellen im Spektralbereich der Radiowellen ausstrahlen.

Die meisten Radioteleskope sind parabolisch geformte Metallflächen, die als Hohlspiegel verwendet werden, welche die Radiowellen in einer Antenne sammeln. Heutige Radioteleskope bestehen oft aus mehreren solcher Parabolantennen.

Die größten Radioteleskope der Welt sind das russische RATAN 600 in Selentschukskaja und die Anlage in Arecibo. Das größte deutsche, weltweit zweitgrößte bewegliche, Radioteleskop ist das Radioteleskop Effelsberg in einem Tal bei Effelsberg in der Eifel, ein bewegliches Teleskop mit 100 m Durchmesser, das vom Max-Planck-Institut für Radioastronomie in Bonn betrieben wird.

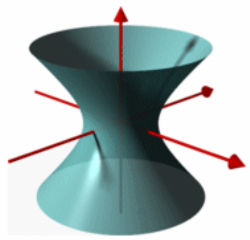
Das Teleskop in Effelsberg hat eine Masse von 3200 Tonnen und besteht aus 2352 Einzeloberflächen. Die Gesamtoberfläche beträgt 7850 m² bei einem Durchmesser von 100 m und einer Brennweite von 30 m.

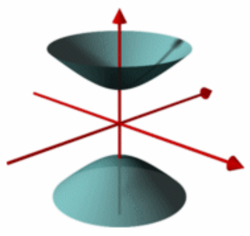
Rotationshyperboloid

Grund- und Deckfläche parallele Kreise; a, b ... Halbachsen

Einschalig $V = \pi/3\ h\ (2a^2 + r^2)$

zweischalig $V = \pi/3\ h\ (3\ \rho^2 - b^2h^2/a^2)$





Kühltürme und Silos haben Hyperbelquerschnitt, sie sind Rotationshyperboloide. Das liegt vor allem daran, dass auf ihnen trotz der "runden" Form Geraden liegen (siehe Teilprogramm). Aus diesem Grund können sie günstig aus Beton gebaut werden.

Fokaloid

Ein Fokaloid ist ein mathematisches Gebilde, das durch konfokale Ellipsen oder Ellipsoide begrenzt ist, d.h. die Ellipsen oder Ellipsoide besitzen gleiche Brennpunkte.

Ein dreidimensionaler Fokaloid ist eine Schale, die durch zwei Ellipsoide abgeschlossen ist. Hat eines dieser Ellipsoide die Gleichung

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$$

mit den Halbachsen a, b und c, so wird für das zweite Ellipsoid

$$x^2/(a^2 + \lambda) + y^2/(b^2 + \lambda) + z^2/(c^2 + \lambda) = 1$$

Wird der Parameter λ sehr klein spricht man von einem dünnen Foklaloid, andernfalls von einem dicken Fokaloid. Die drei Brennpunkte werden dann durch die Gleichungen

$$f_1^2 = a^2 - b^2 = (a^2 + \lambda) - (b^2 + \lambda)$$
$$f_2^2 = a^2 - c^2 = (a^2 + \lambda) - (c^2 + \lambda)$$
$$f_3^2 = b^2 - c^2 = (b^2 + \lambda) - (c^2 + \lambda)$$

beschrieben. Ein zweidimensionaler Fokaloid ist ein elliptischer Ring, der durch zwei Ellipsen begrenzt ist.

Homöoid

Ein Homöoid ist eine Schale, die durch zwei konzentrische, ähnliche Ellipsoide begrenzt ist. Im zweidimensionalen Fall ist ein Homöoid ein elliptischer Ring, der durch entsprechende Ellipsen begrenzt ist.
Wird die äußere Grenze durch ein Ellipsoid

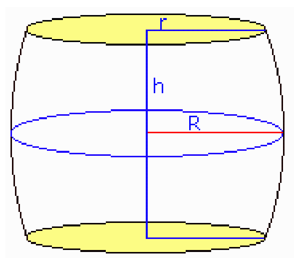
$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$$

mit den Halbachsen a, b und c beschrieben, so wird für das zweite Ellipsoid

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = m^2$$

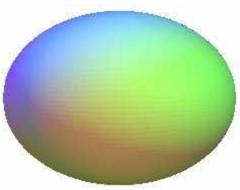
Strebt m gegen 1 nennt man das Homöoid dünn, andernfalls dick.
Eine physikalische Bedeutung der Homöoiden ergibt sich in der Potenzialtheorie.
Innerhalb eines homogen mit Masse oder Ladung gefüllten Homöoiden wird auf eine Probemasse oder Ladung keine Kraft ausgeübt. Dies gilt nicht für andere elliptische Schalen wie zum Beispiel die Fokaloide. Das Potential im Äußeren eines dünnen Homöoiden ist auf Ellipsoiden konstant, die konfokal zu diesem Homöoiden liegen.

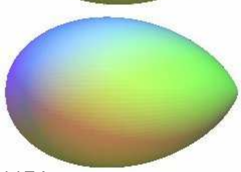
Tonne (Faß)



Grund- und Deckfläche parallele Kreise
Kreistonnenkörper $D = 2R$; $d = 2r$
Volumen $V \approx 0.262\, h\, (2D^2 + d^2)$ $V \approx 0.0873\, h\, (2D + d)^2$
Sphärische und elliptische Krümmung
Volumen $V = \pi\, h\, (2D^2 + d^2)/12$
Ist die begrenzende Kurve ein Kreisbogen, so wird
$V = \pi/6\, (h^3 + 3/2\, hd^2 + 3h\, (h^2 - D^2 + d^2)\, (h^2 - (D - d)^2) / (8\, (D - d)^2) - 3\, (h^2 + (D - d)^2)^2\, (h^2 - D^2 + d^2) / (16\, (D - d)^3)\, \arcsin ((4h\, (D-d)) / (h^2 + (D-d)^2)))$

Parabolische Krümmung
Volumen $V = \pi\, h\, (2D^2 + Dd + 3d^2/4)/15$
$V \approx 0.05236\, h\, (8D^2 + 4\, Dd + 3d^2)$
Wird die begrenzende Kurve als Konchoide, d.h. Muschellinie, angesehen, so ergibt sich
$V = \pi/6\, D^2\, ((2D^2+d^2)/(8h^2)\, \sqrt{(D^2 - d^2)} + (3h - 3d\, \sqrt{(D^2 - d^2)}) / (2\, \sqrt{(D^2 - d^2)})\, \arccos d/D)$
$V \approx 2\pi\, (h/4\, D^2 + (2/3\, D - 3/15(D-d) - 3/112\, (D-d)^2/D)\, (D-d)\, \sqrt{(D^2 - dD)})$





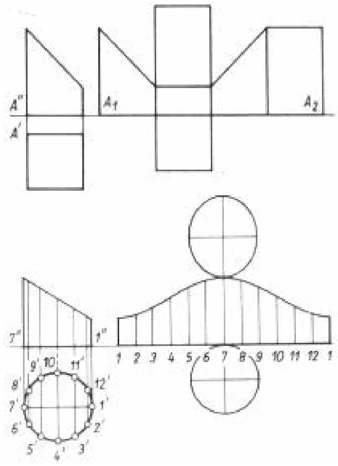
Eifläche

... geschlossene Oberflächen im R^3, die in Form eines Eis erscheinen.
Beispiele:
Rotationsellipsoid
... obere Darstellung $f(x) = k\, \sqrt{(x - x^2)}$ mit $k = 3/4$
Ovoid von Kepler $f(x) = \sqrt{(x^{3/2} - x^2)}$

Abwickelbare Flächen, Netz

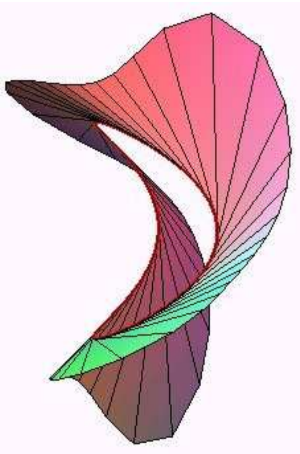
... Oberflächen eines Körpers, die sich, in geeigneter Weise aufgeschnitten, in die Ebene ausbreiten lassen.

Jedes Polyeder besitzt eine abwickelbare Fläche. Die Abwicklung eines ebenflächig begrenzten Körpers wird auch Netz genannt.



Ein Kegelmantel, der längs seiner Mantellinie aufgeschnitten wurde, lässt sich als Kreisausschnitt abwickeln. In der unteren Darstellung wird ein schräg geschnittener Kreiszylinder abgewickelt. Die Kugeloberfläche ist nicht abwickelbar.

Torsen



Folgende Flächenklassen sind Torsen:

Zylinderflächen

Bei einer Zylinderfläche wird eine Gerade e so bewegt, dass sie ihre Richtung beibehält.

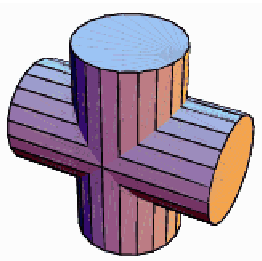
Kegelflächen

Bei einer Kegelfläche wird eine Gerade e so bewegt, dass sie stets durch einen festen Punkt S geht. S heißt Scheitel der Kegelfläche.

Tangentenfläche einer Raumkurve k

... eine Gerade e wird so bewegt, dass sie stets Tangente einer Raumkurve k ist. k heißt die Gratlinie der Tangentenfläche.
Die Tangentenfläche Φ besteht aus 2 Mänteln (erzeugt von je einer Halbtangente), die längs der Gratlinie verheftet sind. Dabei ist k ein scharfer Grat auf Φ, d.h. jeder ebene Schnitt von Φ besitzt im Schnittpunkt der Gratlinie mit der Ebene eine Spitze.
Da in allen drei Fällen auch eine Ebene entstehen kann, wird auch diese zu den Torsen gerechnet.
Torsen lassen sich nach Gauß durch folgende für die Praxis wichtige Eigenschaft kennzeichnen: Eine Fläche ist genau dann in eine Ebene abwickelbar, wenn sie eine Torse ist.

Steinmetz-Körper



Körper, die aus zwei oder mehr geraden Zylindern mit gleichen Radien bestehen, bei denen die Zylinder sich in einem rechten Winkel durchdringen.
Schneiden sich genau zwei Zylinder spricht man von einem Bizylinder (obere Abbildung).
Ein Bizylinder mit dem Radius r hat eine Oberfläche; ohne die angrenzenden Zylinderteile; von $A = 16 r^2$
Das Volumen war schon Archimedes und dem chinesischen Mathematiker Tsu Ch'ung Chi; ohne Kenntnisse in Integralrechnung; bekannt:

$V = 16/3\, r^3$

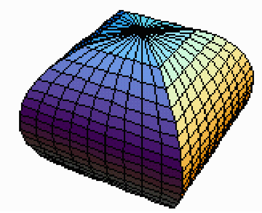
Schneiden sich n Zylinder senkrecht wird für das Volumen V_n:

$V_3 = 8\,(2 - \sqrt{2})\, r^3$ $\quad V_4 = 12\,(2\sqrt{2} - \sqrt{6})\, r^3$

$V_6 = 16/3\,(3 + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{2})\, r^3$

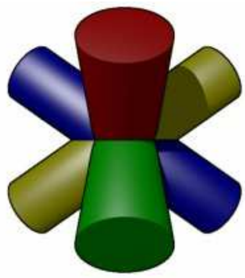
Die Schnittkurve zweier Zylinder mit den Radien a und b ergibt sich zu

$x(t) = b \cos t \quad y(t) = b \sin t \quad z(t) = \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 t}$



Gewölbe (untere Abbildung)
Teil eines Steinmetz-Körper. Bei dem Gewölbe handelt es sich um einen halben Bizylinder. Oberfläche $A = 8 r^2$ Volumen $V = 8/3\, r^3$

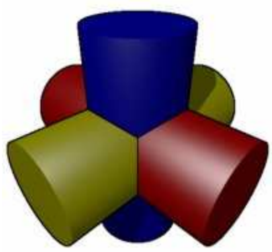
Mehrzylinder-Körper



Zylinder gleicher Form können sich gegenseitig durchdringen und dabei interessante Körper bilden.

4-Zylinder-Körper

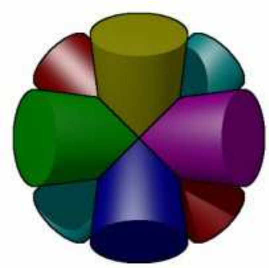
(obere Abbildung) Bei diesem Körper verlaufen 4 gleichartige Zylinder durch die jeweils entgegengesetzt liegenden Ecken eines Würfels.
Für das Volumen des Durchdringungskörpers erhält man bei einem Zylinderradius r $\quad V = 12\,(\sqrt{8} - \sqrt{6})\, r^3 = 4{,}54725\ldots\, r^3$
Abbildung: Durchdringungskörper

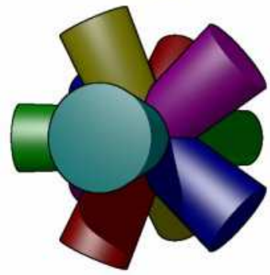


3-Zylinder-Körper

(untere Abbildung) Bei diesem Körper verlaufen 3 gleichartige Zylinder durch die entgegengesetzt liegenden Mittelpunkte der Seitenflächen eines Würfels. Der gleiche Körper entsteht auch, wenn die Zylinder durch die entgegengesetzten Ecken eines Oktaeders gehen.
Für das Volumen des Durchdringungskörpers erhält man bei einem Zylinderradius

r $V = (16 - \sqrt{128})\ r^3 = 4{,}68629\dots\ r^3$





6-Zylinder-Körper

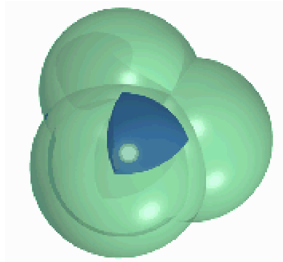
(obere Abbildung) Bei diesem Körper verlaufen 6 gleichartige Zylinder durch die jeweils entgegengesetzt liegenden Mittelpunkte der Kanten eines Würfels.
Für das Volumen des Durchdringungskörpers erhält man bei einem Zylinderradius r

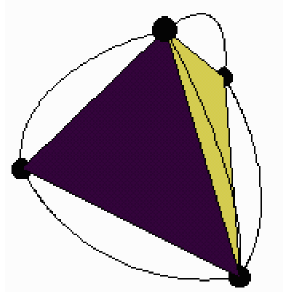
$$V = 16/3\ (3 + \sqrt{12} - \sqrt{32})\ r^3 = 4{,}30532\dots\ r^3$$

Abbildung: Durchdringungskörper

(untere Abbildung) Ein weiterer Durchdringungskörper mit 6 Zylindern entsteht, wenn diese durch die gegenüberliegenden Seiten eines regelmäßigen Dodekaeders verlaufen.
Abbildung: Durchdringungskörper

Reuleaux Tetraeder





Das Reuleaux Tetraeder ist ein dreidimensionaler Körper, der entsteht wenn vier Kugeln gleichen Radius so angeordnet werden, dass die Mittelpunkte der Kugeln auf den Oberflächen der jeweils anderen Kugeln liegen. Die Kugelmittelpunkte bilden dann ein regelmäßiges Tetraeder. Die Ecken eines Tetraeders der Kantenlänge 1 könnten zum Beispiel $(0, 0, -\sqrt{6}/4)$; $(\sqrt{3}/3, 0, \sqrt{6}/12)$; $(-\sqrt{3}/6, 1/2, \sqrt{6}/12)$; $(-\sqrt{3}/6, -1/2, \sqrt{6}/12)$
sein. Für die Kurvenbögen s, welche die Eckpunkte des Tetraeders dann verbinden, wird

$$s = \sqrt{3}\ \operatorname{arccot}(\sqrt{2}) = 1.06604\dots$$

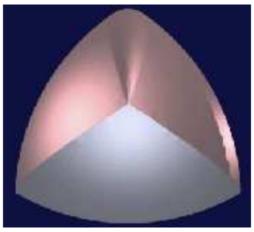
Das Volumen des Reuleaux Tetraeders ist dann

$$V = 1/24\ (6\sqrt{2} + 16\pi + 57 \arccos(17/81) - 132 \arctan(\sqrt{2})) = 0.422157733\ \dots$$

Hat des Ausgangstetraeder die Kantenlänge s, so ergibt sich für das Volumen des Reuleaux Tetraeders

$$V = s^3/12\ (3\sqrt{2} - 49\pi + 162 \arctan \sqrt{2}) = 0{,}422157733\ s^3 \dots$$

Eine vollständige Herleitung wurde erstmals unter http://mathworld.wolfram.com/ReuleauxTetrahedron.html veröffentlicht.



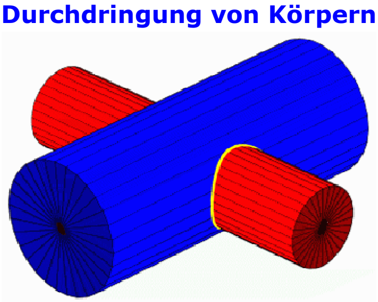
Meißner-Körper

Ein Reuleaux-Tetraeder ist das zweidimensionale Analogon eines Reuleaux-Dreiecks. Im Gegensatz zu diesem ist das Reuleaux-Tetraeder, aber kein Körper konstanter Breite.

Meißner und Schiller (1912) zeigten jedoch, wie das Reuleaux-Tetraeder abgeändert werden kann, um einen Körper konstanter Breite zu bilden.
Dazu müssen drei der aus Kreissegmenten bestehenden Kanten durch Flächen ersetzt werden, die Teil eines Rotationskörpers sind. Diese Rotationskörper haben als Achse die Kante des zugehörigen erzeugenden Tetraeders und als erzeugende Kurve ein Kreissegment, das entsteht, wenn man das Reuleaux-Tetraeder mit den fortgesetzten Seiten des erzeugenden Tetraeders schneidet.
Je nachdem welche drei Kanten ersetzt werden; drei mit gemeinsamer Ecke oder drei die ein Dreieck bilden;, entstehen zwei verschiedene Körper, die auch Meißner-Körper genannt werden.

Bonnesen und Fenchel (1934) vermuteten, dass die Meißner-Körper die Körper mit konstanter Breite mit minimalem Volumen sind. Der Beweis ist noch nicht gelungen.
Campi (1996) konnte zeigen, dass der Rotationskörper mit konstanter Breite mit minimalem Volumen ein Reuleaux-Dreieck ist, das um eine seiner Symmetrieachsen rotiert.

Durchdringung von Körpern – Zylinder/Zylinder



Gegeben sind zwei Zylinder, die um 90° gegeneinander verdreht sind und deren Achsen in einer Ebene liegen.
Zylinder1 entlang der x-Achse mit Radius R_1 und Zylinder2 entlang der z-Achse mit Radius R_2.

Zylinder1: $x = v_1$ $y = R_1 \sin(u_1)$ $z = R_1 \cos(u_1)$

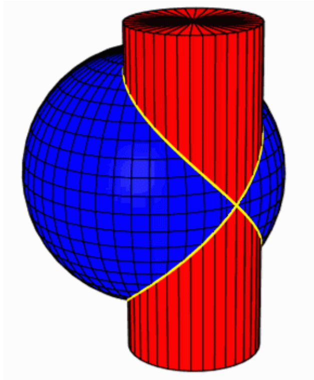
Zylinder2: $x = R_2 \cos(u_2)$, $y = R_2 \sin(u_2)$, $z = v_2$

Schnittlinie: $x = R_2 \cos t$ $y = R_2 \sin t$ $z = \pm\sqrt{R_1^2 + R_2^2 \sin^2 t)}$

mit $t \in [0 ; 2\pi]$

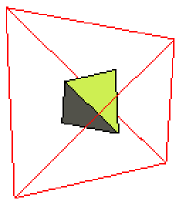
Viviani Kurve

Die Viviani Kurve (gelbe Linie) beschreibt die Durchdringung eines Zylinder mit dem Radius a und einer Kugel mit dem Radius 2a. Der Zylinder ist dabei um den Faktor a verschoben. Die Kurve wurde nach Vincenzo Viviani (1622 - 1703) benannt.
Schnittlinie: $x = a\,(1 + \cos(t))$ $y = a \sin(t)$ $z = 2a \sin(t/2)$

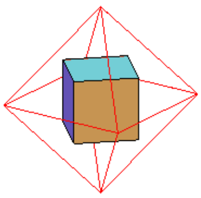


Duale Polyeder

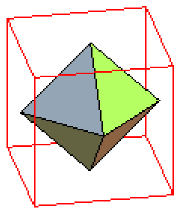
Nach dem Dualitätsprinzip existiert zu jedem Polyeder ein dualer (reziproker) Polyeder. Bei diesem sind die Positionen von Ecken und Flächen komplementär getauscht. Existieren die Umkugel des Polyeders, so wird diese beim dualen Polyeder zur Inkugel.
Die Tabelle enthält die dualen Polyeder der Platonischen, der Archimedischen und weiterer Polyeder. Angegeben ist zuerst das Polyeder, als zweites das duale.



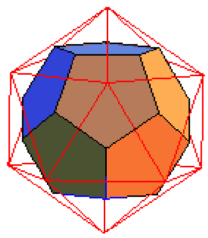
Tetraeder (selbstdual)



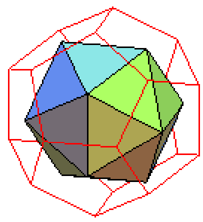
Würfel → Oktaeder



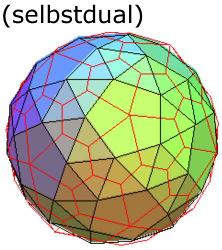
Oktaeder → Würfel



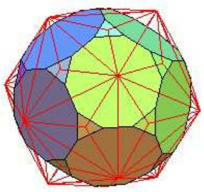
Dodekaeder → Ikosaeder



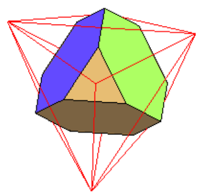
Ikosaeder → Dodekaeder



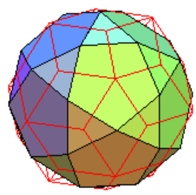
Abgeschrägtes Dodekaeder → Pentagonales Hexecontaeder



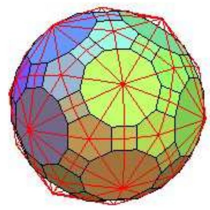
Abgestumpftes Dodekaeder → Triakis Ikosaeder



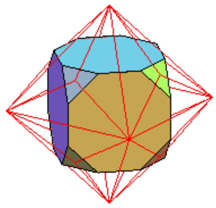
Abgestumpftes Tetraeder → Triakis Tetraeder



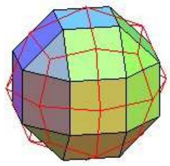
Ikosidodekaeder → Rhomben Triacontaeder



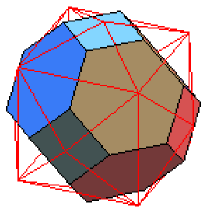
Abgestumpftes Ikosidodekaeder → Deltoid-60-Flächner



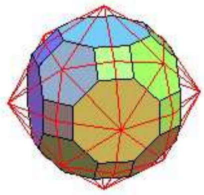
Abgestumpftes Hexaeder → Triakis Oktaeder



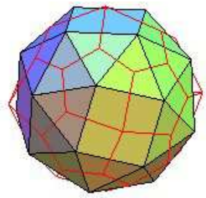
Rhombenkuboktaeder → Hexa-Oktaeder



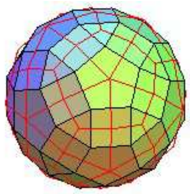
Abgestumpftes Oktaeder → Tetrakis Hexaeder



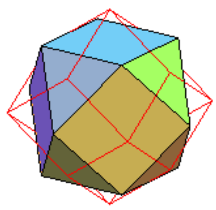
Abgestumpftes Kuboktaeder → Deltoid-24-Flächner



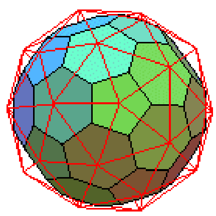
Abgeschrägtes Hexaeder → Pentagonales Ikositetraeder



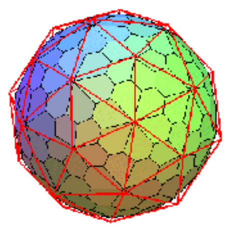
Rhomben-ikosidodekaeder → Hexa-Ikosaeder



Kuboktaeder → Rhombendodekaeder



Abgestumpftes Ikosaeder → Pentakis Dodekaeder



Pentakis Dodekaeder