

## Fraktale Geometrie

*Das entscheidende Kriterium ist Schönheit; für hässliche Mathematik ist auf dieser Welt kein beständiger Platz. Hardy*

"Ἔτοι μὲν πρωτίστα χάος γενετ - Wahrlich zuerst entstand das Chaos", Hesiod

Die fraktale Geometrie ein mathematisches Gebiet, das sich erst in den letzten Jahrzehnten entwickelt hat, dann aber sprunghaft und auch schnell in die europäischen Schulen gekommen ist; mit Ausnahme von Deutschland!. Angefangen hatte es mit der berühmten Frage "Wie lang ist die Küste Großbritanniens?", die Mandelbrot untersuchte. Mittlerweile gehören zur Chaos-Theorie Themen wie:

Inhalt und Umfang der Kochschen Schneeflockenkurve, Sierpinski-Dreieck, Menger-Schwamm, Drachen-Kurve, gebrochene Dimension, Selbstähnlichkeit, Feigenbaum-Diagramm, Bifurkation, Modellierung von Pflanzenwachstum (z.B. der berühmte Farn), virtuelle Landschaften, Mandelbrot-Mengen (die farbenprächtigen "Apfelmännchen"-Figuren)

Die fraktale Geometrie hat viele und wichtige Anwendungen in allen Naturwissenschaften.

### Chaostheorie

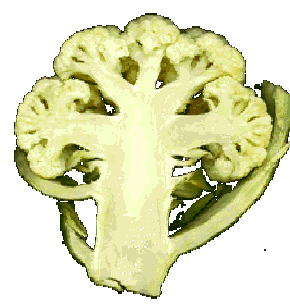
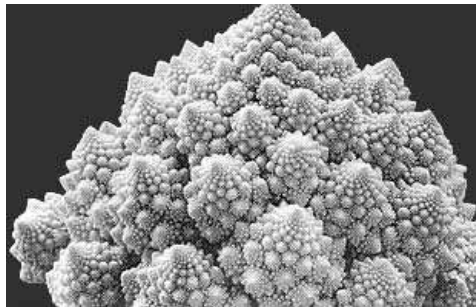
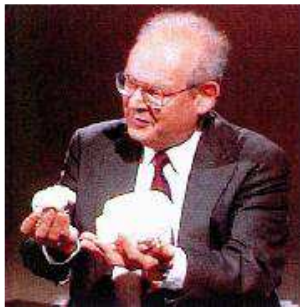


"Wolken sind keine Kugeln, Berge keine Kegel, Küstenlinien keine Kreise. Die Rinde ist nicht glatt - und auch der Blitz bahnt sich seinen Weg nicht gerade..."

Die Existenz solcher Formen fordert uns zum Studium dessen heraus, was Euklid als formlos beiseite lässt, führt uns zur Morphologie des Amorphen. Bisher sind die Mathematiker jedoch dieser Herausforderung ausgewichen. Durch die Entwicklung von Theorien, die keine Beziehung mehr zu sichtbaren Dingen aufweisen, haben sie sich von der Natur entfernt. Als Antwort darauf

werden wir eine neue Geometrie der Natur entwickeln und ihren Nutzen auf verschiedenen Gebieten nachweisen. Diese neue Geometrie beschreibt viele der unregelmäßigen und zersplitterten Formen um uns herum - und zwar mit einer Familie von Figuren, die wir Fraktale nennen werden..."

Benoit Mandelbrot, "Die fraktale Geometrie der Natur" 1975



Auf einer Konferenz präsentierte Benoit Mandelbrot einen Blumenkohl. Auch dieser hat, da er selbstähnlich ist, fraktale Struktur.

Der Romanesco (*Brassica oleracea* L. convar), auch Pyramidenblumenkohl, ist eine Variante des Gemüsekohls, die in der Nähe von Rom gezüchtet wurde. Er gehört damit in die Gattung *Brassica* der Familie der Kreuzblütengewächse.

Der Romanesco gehört zu den wenigen Pflanzenarten, die in ihrem Blütenstand gleichzeitig Selbstähnlichkeit und damit eine fraktale Struktur sowie Fibonacci-Spiralen aufweisen.

Das Wort Fraktal wird aus einer Eigenschaft der angesprochenen Formen abgeleitet, nämlich der im Gegensatz zur topologischen Dimension gebrochenen (*fractus* = zerbrochen) Zahl, die den Zusammenhang zwischen linearer Ausdehnung und Flächeninhalt (oder Volumen) eines Gebildes beschreibt.

Fraktale Formen haben eine auffällige Eigenschaft, die den Betrachter besonders stark anspricht und berührt. Fraktale Formen sind selbstähnlich, d.h. die Gesamtstruktur eines Fraktals ist aus kleineren Strukturen zusammengesetzt, die die gleiche Form aufweisen.





## L-Fraktale

Koch1 (Adrian Mariano) Winkel 6

Axiom  $F \rightarrow F--F, F=F+F--F+F$

Koch2 (Adrian Mariano) Winkel 12

Axiom  $F \rightarrow F---F---F, F=-F+++F---F+$

Koch3 (Mariano) Winkel 4

Axiom  $F \rightarrow F-F-F, F=F-F+F+FF-F-F+F$

Koch6 Winkel 4

Axiom  $f \rightarrow f+f+f, f=f-ff+ff+f+f-f-ff+f+f-f-ff-ff+f$

Dragon Winkel 8

Axiom  $FX, F=, y=+FX--FY+, x=-FX++FY-$

Peano1

Winkel 4

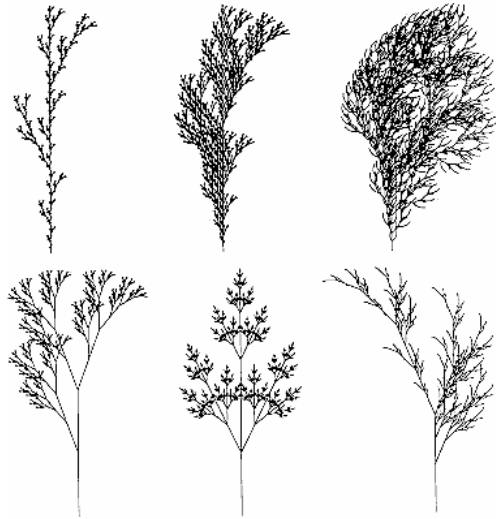
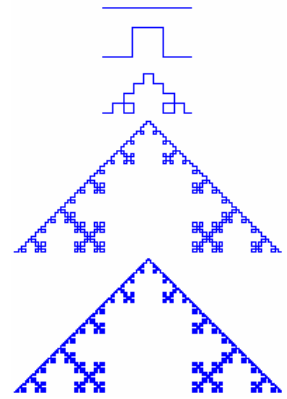
Axiom  $F \rightarrow F-F-F; F=F-$

$F+F+F+F-F-F-F+F$

Cesaro

Winkel 34

Axiom  $FX, F=, X=----F!X!++++++F!X!----$



## L-System, Pflanzen

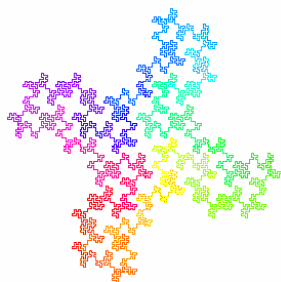
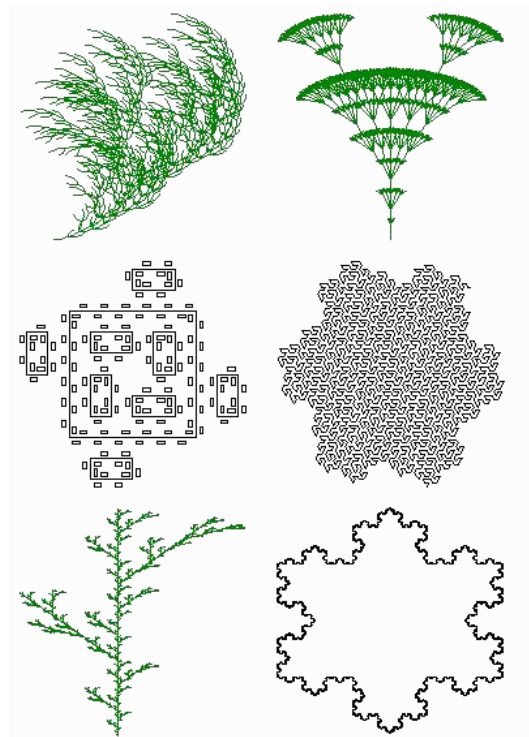
Synthese von pflanzlichen Wachstumsstrukturen:  
(von links oben nach rechts unten)

1.  $F \rightarrow F[+F]F[-F]F, n = 5, 25, 7^\circ$
2.  $F \rightarrow F[+F]F[-F][F], n = 5, 20^\circ$
3.  $F \rightarrow FF[-F+F+F]+[*f-F-F], n = 4, 22, 5^\circ$
4.  $X \rightarrow F[+X]F[-X]+X, F \rightarrow FF, n = 7, 20^\circ$
5.  $X \rightarrow F[+X][-X]FX, F \rightarrow FF, n = 7, 25, 7^\circ$
6.  $X \rightarrow F-[[X]+X]+F[+FX]-X, F \rightarrow FF, n = 5, 22.5^\circ$

## L-System, Beispiele

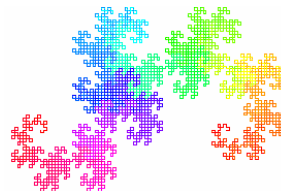
von links oben nach rechts unten:

Bush, Blume, Mosaik, Gosper, Zweig, Koch-Schneeflocke



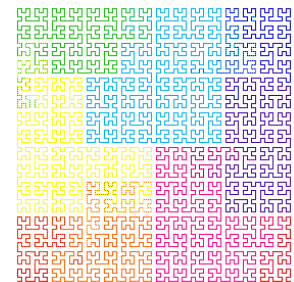
Segment-Kurve

Axiom  $F \rightarrow -F+F-F-F+F+FF-$   
 $F+F+FF+F-F-FF+FF-FF+F+F$   
 $-FF-F-F+FF-F-F+F+F-F+$



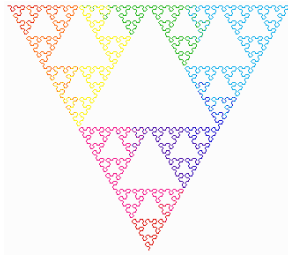
Drachenkurve

$X \rightarrow X+YF+, Y \rightarrow -FX-Y,$   
Winkel  $45^\circ$ , ... nach William Harter  
und John Heighway; ...  $D = \ln 2 / \ln \sqrt{2} = 2$   
... flächenfüllende Kurve

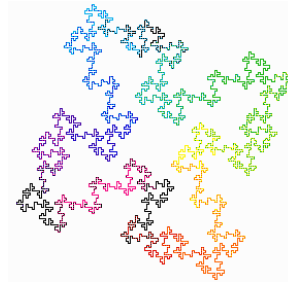


Hilbert-Kurve

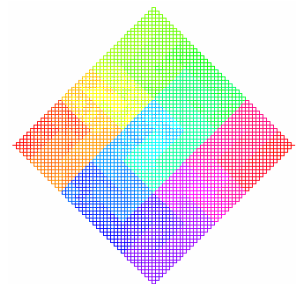
Axiomsystem  
 $L \rightarrow +RF-LFL-FR+$   
 $R \rightarrow -LF+RFR+FL-$



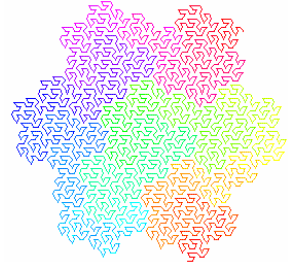
Pfeil-Kurve  
 $X \rightarrow YF+XF+Y, Y \rightarrow XF-YF-X, 60^\circ$



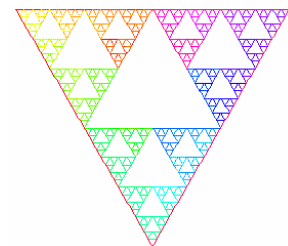
Quadratische Koch-Insel  
 $F \rightarrow F-F+F+FFF-F-F+F$



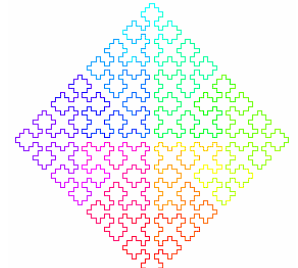
Peano-Kurve  
 $F \rightarrow F+F-F-F-F+F+F-F-F$



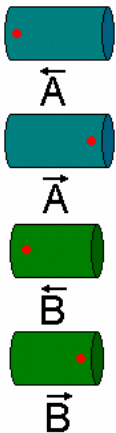
Peano-Gosper-Kurve  
 L-System:  $X \rightarrow X+YF++YF-FX--$   
 $FXFX-YF+; Y \rightarrow -$   
 $FX+YFYF++YF+FX--FX-Y, 60^\circ$ , nach  
 William Gosper  
 $D = \ln 7 / \ln \sqrt{7} = 2$   
 ... flächenfüllende Kurve



Sierpinski-Dreieck  
 Lindenmayer System:  
 $F \rightarrow FF,$   
 $X \rightarrow --FXF++FXF++FXF--, 60^\circ$



Quadrat-Kurve  
 Lindenmayer System:  
 $X \rightarrow XF-F+F-XF+F+XF-$   
 $F+F-X$



### Anabaena Catenula

Ein einfaches, aber schönes Beispiel für die Anwendung eines L-Systems in der Natur ist folgendes:

Die blaugüne Bakterie *Anabaena Catenula* formiert sich zu einer Schwingfadenalge, d.h. eine eindimensionale Kette von Bakterien. Unter dem Mikroskop sieht sie wie eine Reihe unterschiedlich langer Zylinder aus.

Für das Wachstum von *Anabaena Catenula* sind Elemente aus zwei verschiedenen Bakterientypen verantwortlich, die sich durch ihre Größe sowie durch ihr Teilungsverhalten unterscheiden, sie seien A und B. Da beide Typen asymmetrisch aufgebaut sind, können sie in der Kette entweder nach links oder nach rechts orientiert sein. Es gibt daher vier unterschiedliche Elemente (siehe Abbildung).

Das Alphabet V des L-Systems besteht aus vier Zeichen:  $V = (A^{\rightarrow}, A^{\leftarrow}, B^{\rightarrow}, B^{\leftarrow})$

Eine nach rechts orientierte A-Bakterie teilt sich nach einer gewissen Zeit in eine nach rechts orientierte B-Bakterie und in eine nach links orientierte A-Bakterie.

Produktionsregel p1:  $A^{\rightarrow} \rightarrow A^{\leftarrow}B^{\rightarrow}$

und p2 spiegelverkehrt:

p2:  $A^{\leftarrow} \rightarrow B^{\leftarrow}A^{\rightarrow}$

B-Bakterien werden nach einer gewissen Zeit zu A-Bakterien

p3:  $B^{\rightarrow} \rightarrow A^{\rightarrow}$

p4:  $B^{\leftarrow} \rightarrow A^{\leftarrow}$

Mit dem Startwort  $A^{\rightarrow}$  ergibt sich damit die Entwicklung von *Anabaena Catenula* als L-System.

Quelle: [http://home.wtal.de/schwebin/lsys/einf\\_lsyst.htm](http://home.wtal.de/schwebin/lsys/einf_lsyst.htm)

Im Labor wurde beobachtet, dass die größere A-Bakterie sich etwa alle 15 Stunden teilt. Die kleineren B-Bakterien werden nach etwa drei Stunden zu A-Bakterien. Damit entspricht das einfache System nicht der Realität.

Als Zeiteinheit für ein verbessertes Modell wählt man eine Dauer von 3h. Eine B-Bakterie formt sich in einer Zeiteinheit in eine A-Bakterie um. Die Entwicklung einer A-Bakterie teilt man in 5 Schritte auf:

$A_4^{\rightarrow} \rightarrow A_3^{\rightarrow} \rightarrow A_2^{\rightarrow} \rightarrow A_1^{\rightarrow} \rightarrow A_0^{\rightarrow} \rightarrow A_4^{\leftarrow}B^{\rightarrow}$

und entsprechend für die linksgerichteten Bakterien.

Das Alphabet V des L-Systems erweitert sich auf:

$V = (A_4^{\rightarrow}, A_3^{\rightarrow}, A_2^{\rightarrow}, A_1^{\rightarrow}, A_0^{\rightarrow}, A_4^{\leftarrow}, A_3^{\leftarrow}, A_2^{\leftarrow}, A_1^{\leftarrow}, A_0^{\leftarrow}, B^{\rightarrow}, B^{\leftarrow})$

und das Regelsystem auf

p1:  $A_{t>0}^{\rightarrow} \rightarrow A_{t-1}^{\rightarrow}$

p2:  $A_{t=0}^{\rightarrow} \rightarrow A_4^{\leftarrow}B^{\rightarrow}$

p3:  $A_{t>0}^{\leftarrow} \rightarrow A_{t-1}^{\leftarrow}$

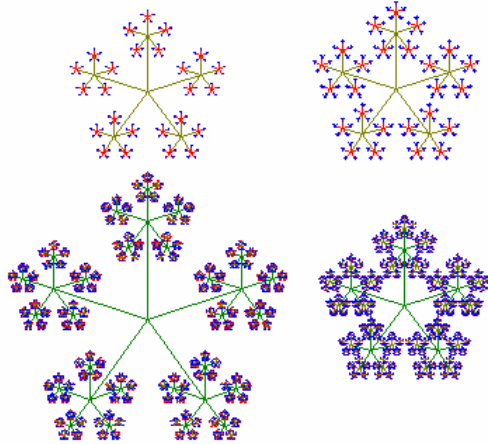
p4:  $A_{t=0}^{\leftarrow} \rightarrow B^{\leftarrow}A_4^{\rightarrow}$

p5:  $B^{\rightarrow} \rightarrow A_4^{\rightarrow}$

p6:  $B^{\leftarrow} \rightarrow A_4^{\leftarrow}$

Die graphische Interpretation des verbesserten Modells entspricht sehr gut der Wirklichkeit.





### Fünfstern-Fraktal

Die Abbildungen zeigen jeweils einen Fünfstern, an dessen Armen Fünfsterne sind, die an ihren Armen Fünfsterne tragen. In der oberen Reihe sind dies Fünfstern-Fraktale 3.Stufe, in der unteren 4.Stufe.

### Dimension

Das Fünfstern Fraktal ist selbstähnlich. Dabei vernachlässigt man eigentlich die inneren grünen Striche. Das linke und rechte Fraktal sind überschneidungsfrei, hier lässt sich die Selbstähnlichkeitsdimension ausrechnen:

$$d = \log z / \log q, \text{ d.h.}$$

$$d_{\text{links}} = \log 5 / \log 3 = 1,46 \text{ bzw.}$$

$$d_{\text{rechts}} = \log 5 / \log 2,618 = 1,67$$

### Sierpinski-Baum, Dreistern-Fraktal

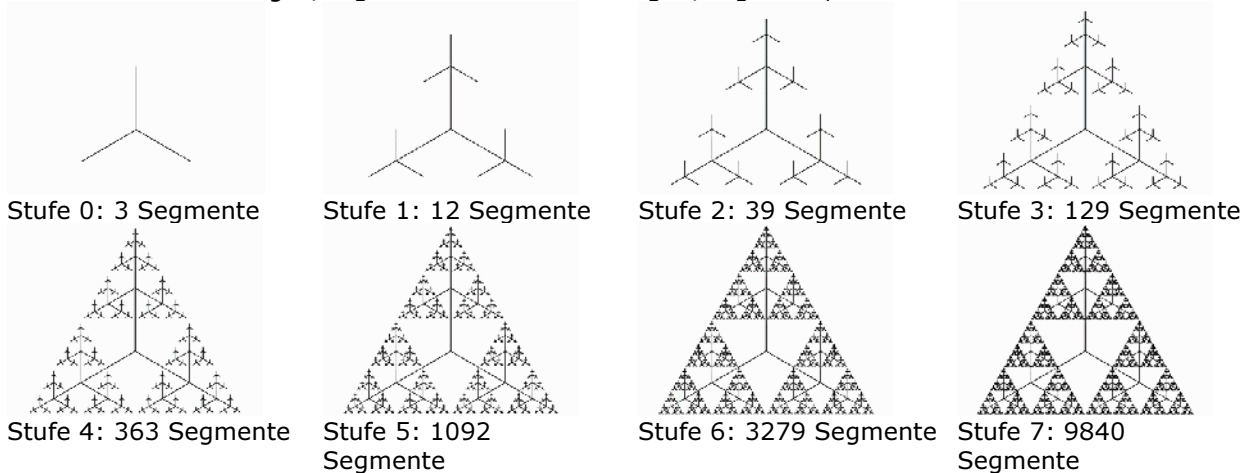
Das Fraktal lässt sich nach folgendem Schema als rekursive Baumstruktur erzeugen: Ausgehend von einem Punkt werden 3 Linien der Länge L mit einem Abstand von jeweils 120 ° gezeichnet. In der nächsten Stufe werden an das Ende dieser Linien jeweils 3 neue Linien mit der Länge L/2 erzeugt. dass das die Grenzfigur das Sierpinski-Dreieck ist.

### Dimension

Das Dreistern-Fraktal ist selbstähnlich. Dabei vernachlässigt man die inneren grünen Striche. Es ist zudem überschneidungsfrei, daher lässt sich die Selbstähnlichkeitsdimension ausrechnen:

$$d = \log z / \log k$$

$$d = \log 3 / \log 2 = 1,58$$



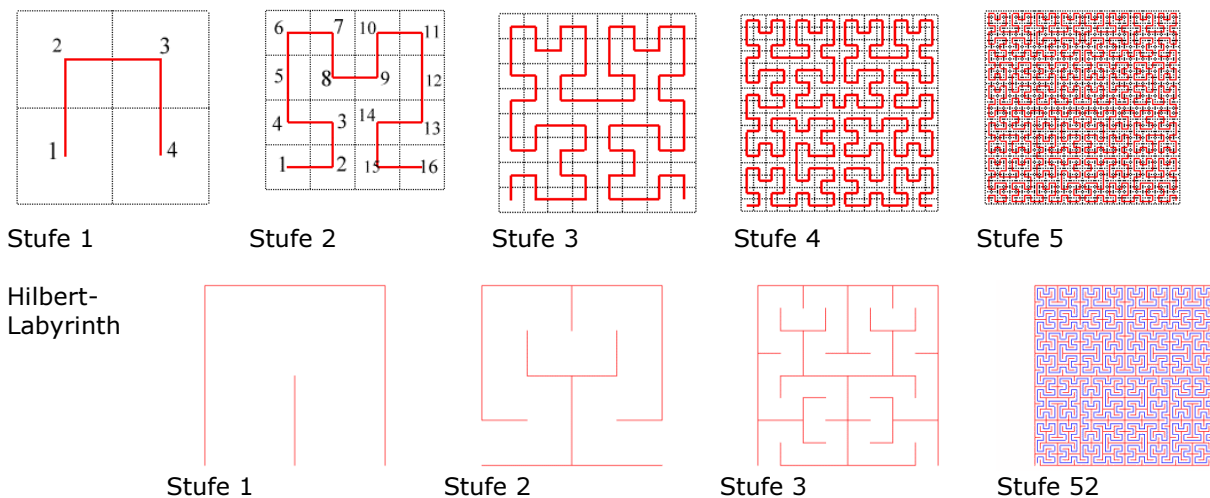
### Hilbert-Kurve

Die Hilbert-Kurve kann über eine rekursive Definition mittels kartesischer Koordinaten gegeben werden:

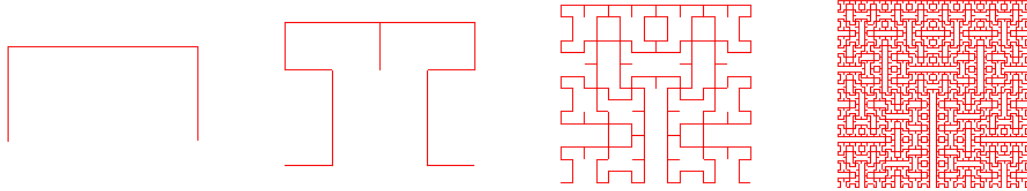
$$M(0) = (0,0); M(1) = (1,0)$$

$$x(t/4) = y(t)/2; y(t/4) = x(t)/2; x((t+1)/4) = x(t)/2; y((t+1)/4) = (1+y(t))/2;$$

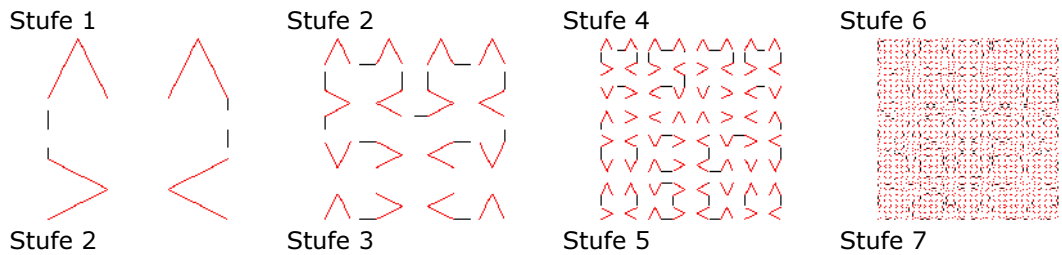
$$x((t+2)/4) = (1+x(t))/2; y((t+2)/4) = (1+y(t))/2; x((t+3)/4) = (2-y(t))/2; y((t+3)/4) = (1-x(t))/2;$$



## Hilbert-Kurve 2.Ordnung

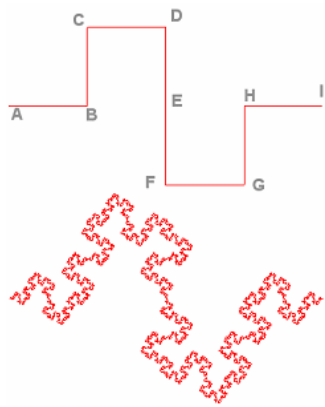


## Hilbert-Dreieck-Kurve



## Lebesgue-Kurve

Eng mit Hilbert-Kurve ist die Lebesgue-Kurve verbunden. Über eine ähnliche Konstruktion, bei der aber der Kurvenverlauf 2-3-1-4 betrachtet wird, entsteht eine fraktale Kurve, die aus mehreren "Z" zusammengesetzt ist. Im englischen Sprachraum wird die Lebesgue-Kurve Z-Kurve genannt.



## Minkowski-Kurve

L-System-Fraktal mit dem Regelsystem

Winkel = 04 , Axiom = "F"

"F" → "F+F-F-F+F+F-F"

Die Grundstruktur der Kurve entsteht durch 90°-Drehungen einer Strecke entsprechend der Punktfolge (A, B), (B, C), (C, D), (D, E), (E, F), (F, G), (G, H), (H, I).

Die fraktale Dimension beträgt  $\ln 8 / \ln 4 = 3/2$ .

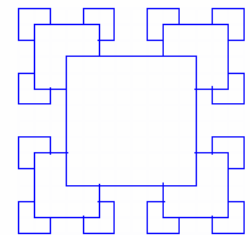
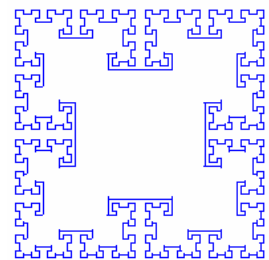
## Square-Kurve, Quadrat-Kurve

Eine weitere als Quadrat-Kurve bezeichnetes Gebilde wurde durch Robert Sedgewick in

"Algorithms in C" beschrieben.

Diese Kurve hat eine unendliche Länge, umschließt aber einen endlichen Flächeninhalt.

Konstruktion: Ausgangspunkt ist ein Quadrat. An den vier Eckpunkten werden Quadrate mit halber Seitenlänge angesetzt. Dieser Vorgang wird unendlich oft wiederholt. Die gesuchte Kurve ist dann die äußerste Berandung des Gebildes.



Zuwachs der Kurvenlänge je Iteration  
a Ausgangslänge, n Iterationszahl

$$L_n = 4 \cdot a \cdot 1,5^{n-1}$$

Gesamtkurvenlänge nach n Iterationen

$$L = a (8 \cdot 1,5^n - 4)$$

Zuwachs der Kurvenfläche je Iteration

$$A_n = (4 a^2 \cdot 3^n) / 4^{n+1}$$

Gesamtflächeninhalt nach n Iterationen

$$A = 4 a^2 (1 - 0,75^{n+1})$$

Grenzwert des Flächeninhaltes

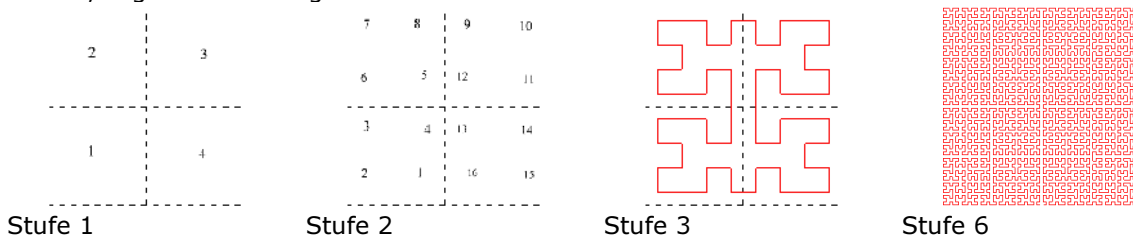
$$A_{\lim} = 4 a^2$$

Fraktale Dimension  $D = \log(148) / \log(14) = 1,89356$

Ähnlich aufgebaut ist die Cayley-Kurve. Auch hier werden von außen nach innen verkleinerte Abschnitte aufgesetzt.

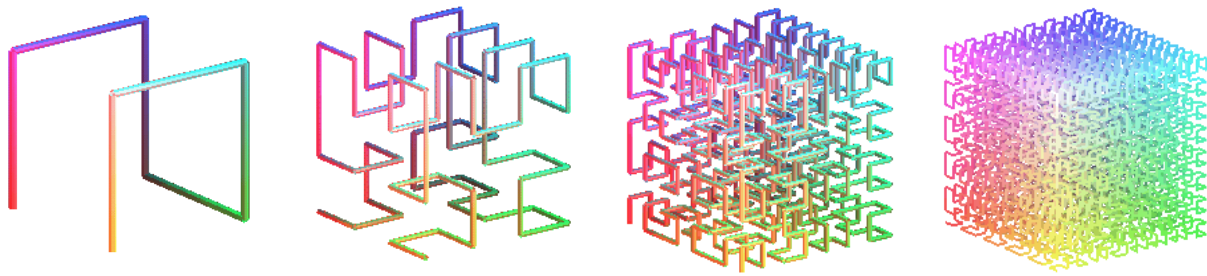
## Moore'sche Kurve

Eine Variante der Hilbert-Kurve stellt die Moore'sche Kurve dar. Während die Hilbert-Kurve die Ordnung 3 besitzt, liegt hier Ordnung 4 vor.



## 3D-Hilbert-Kurve

Die Hilbert-Kurve (siehe oben) kann auch auf den Raum erweitert werden. Erhöht man die Iterationstiefe, so entsteht eine Würfelform.



### Cantor-Menge

oder Cantorsches Diskontinuum, 1883

... diejenige Menge reeller Zahlen, die übrigbleibt, wenn man aus dem Intervall  $[0 \dots 1]$  das mittlere (offene) Drittel entfernt, dann aus den beiden verbliebenen Teilintervallen wieder je das mittlere Drittel usw.

Was übrigbleibt ist schließlich die Menge reeller Zahlen, die sich durch eine unendliche Reihe  $a_1/3 + a_2/3^2 + a_3/3^3 + \dots$  mit Koeffizienten  $a_i = 0$  oder  $2$  darstellen lassen. Die Cantormenge ist ein Fraktal, an dem sich gut der Begriff der fraktalen Dimension veranschaulichen lässt.

Länge eines Segment nach  $n$  Iterationen  $= (1/3)^n$       Anzahl der Einzelsegmente  $= 2^n$

Gesamtlänge des Fraktals  $= (2/3)^n$

Fraktale Dimension  $= \ln 2 / \ln 3 = 0.630929 \dots$

Die Idee der Cantor-Menge kann auf andere Strukturen erweitert werden:



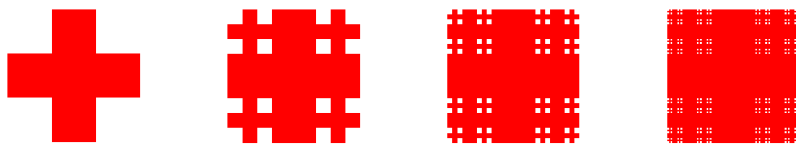
### Cantor-Staub

Länge der Elemente nach der  $n$ -ten Iteration ...  $L_n = (1/3)^n$

Anzahl der Elemente  $N_n = 5^n$

Fraktale Fläche  $A_n = L_n^2 N_n = (5/9)^n$

Dimension  $= \ln 5 / \ln 3$



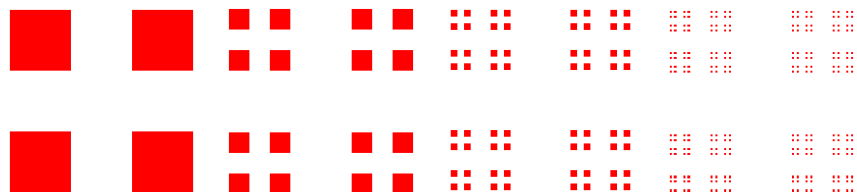
### Cantor-Quadrat

Länge der Elemente nach der  $n$ -ten Iteration ...  $L_n = (1/3)^n$

Anzahl der Elemente

$N_n = 4 N_{n-1} + 5 \cdot 9^n$

Dimension  $= 2$

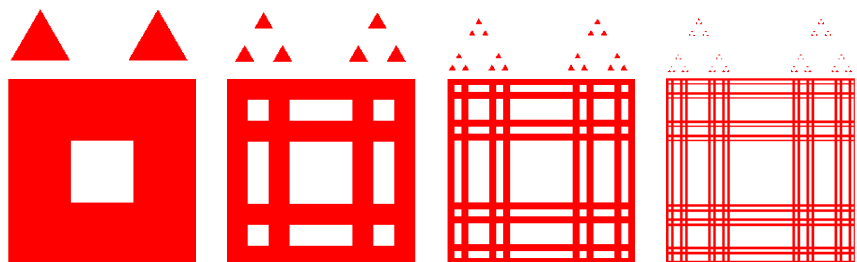


### Cantor-Dreieck

Dimension  $= 1$

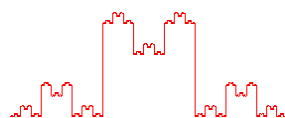
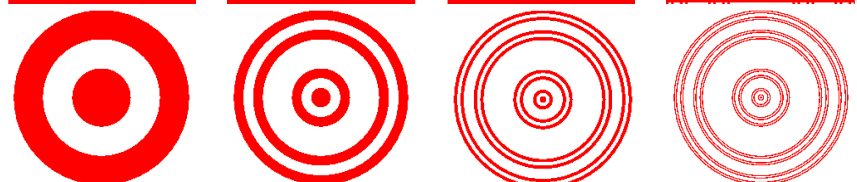


### Cantor-Tartanmenge



### Cantor-Ring

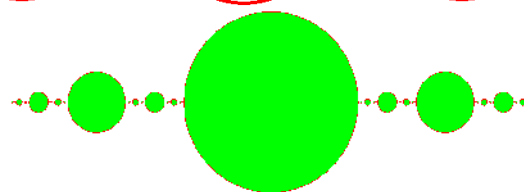
wird zur Modellierung der Saturn-Ringe genutzt



### Cantor-Kurve

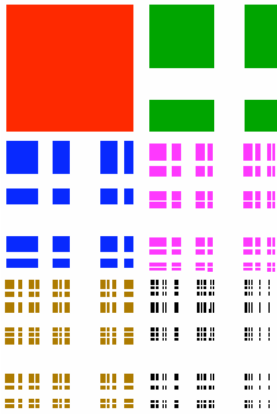
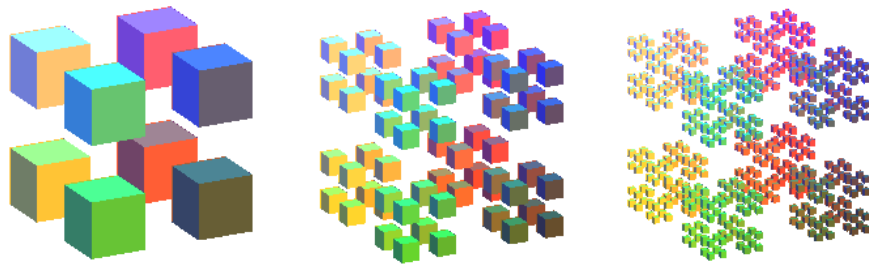


### Cantor-Kamm



### Cantor-Collier

**Cantor-Würfel**  
Dimension  
1,89



### Asymmetrisches Cantor-Staub-Fraktal

Die Konstruktion des Cantor-Staub-Fraktals kann auch asymmetrisch, wie in der Abbildung, erfolgen.

Bei Reduzierung auf ein Viertel, d.h. eine Teilung im Verhältnis  $a:b:c = 2:1:1$  erhält man neun Kopien. Für die fraktale Dimension  $D$  gilt daher:

$$4^D = 9 \quad D = \ln 9 / \ln 4 \approx 1,5850$$

Allgemein gilt: Beim Unterteilen im Verhältnis  $a:b:c$  und Beibehalten nur der Eckteile entstehen bei Reduzierung auf  $1/(a+b+c)$  insgesamt  $a^2 + 2ac + c^2 = (a + c)^2$  Kopien. Damit wird für die fraktale Dimension  $D$

$$(a + b + c)^D = (a + c)^2$$

$$D = \ln ((a+c)^2) / \ln(a+b+c) = 2 \ln(a+c) / \ln(a+b+c)$$

Die Dimension ist das Doppelte der Dimension der asymmetrischen Cantor-Menge.

### Keakeya-Menge, Besicovitch-Menge

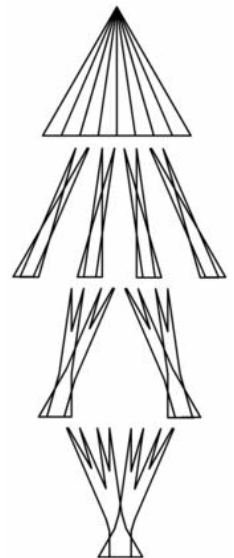
Unter einer Keakeya-Menge oder Besicovitch-Menge versteht man eine Punktmenge im Euklidischen Raum, die in jeder Richtung eine Strecke der Länge 1 beinhaltet. Insbesondere suchte 1917 der japanische Mathematiker Soichi Keakeya (1886-1947) nach einer solchen Menge mit minimaler Fläche. In einer solchen Fläche könnte eine Nadel der Länge 1 eine vollständige Drehung von  $360^\circ$  ausführen. Ohne die Forderung nach Konvexität glaubte er sein "Nadel-Problem" mit einem Deltoid gelöst zu haben.

Durch den sowjetischen Mathematiker Abram Samoilovitch Besicovitch (1891-1970) wurde jedoch 1919 ein Flächentyp gefunden, der eine Keakeya-Menge darstellt, jedoch ein Maß 0 besitzt.

Zur Konstruktion einer Besicovitch-Menge geht man wie folgt vor: Ausgangspunkt ist ein Dreieck der Höhe 1. Dieses Dreieck wird in  $2^n$  Teile, wie in der Abbildung, zerlegt.

Mit diesen Teildreiecken werden Überlappungen durchgeführt (siehe Abbildung), mit den entstandenen Flächen wieder usw. Am Ende entsteht eine Keakeya-Menge.

Da die Anzahl der Teildreiecke gegen Unendlich streben kann, entsteht eine fraktale Menge mit dem Maß 0.

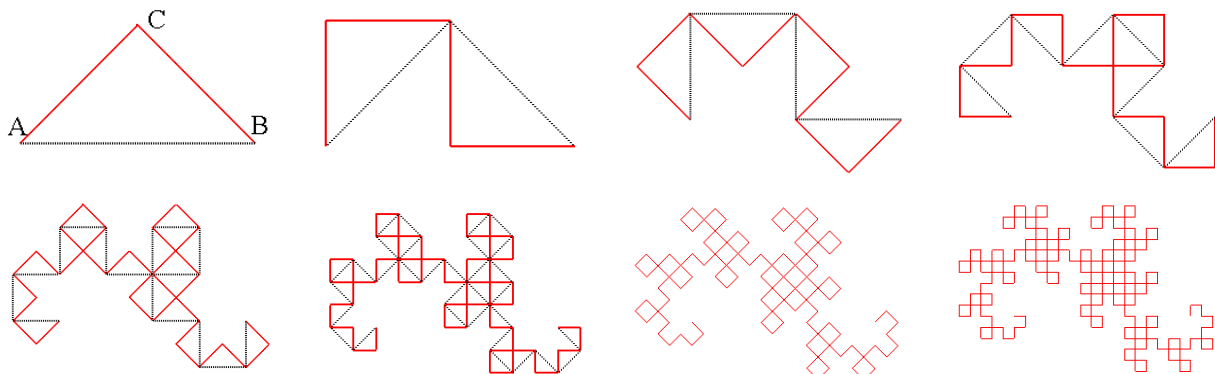


### Drachenkurve (nach Heighway, 1960)

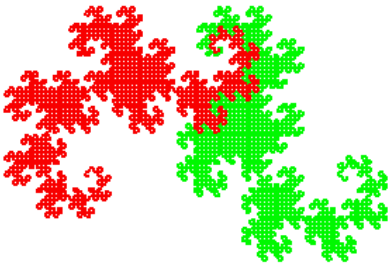
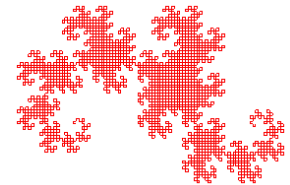
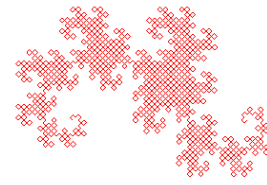
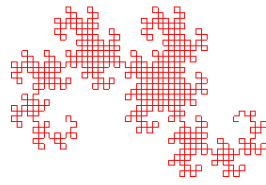
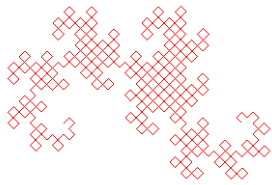
Gegeben ist ein Strecke AC. Diese wird um  $90^\circ$  am Punkt C gedreht und an AC angefügt. Am neuen Endpunkt wird das ganze Gebilde erneut um  $90^\circ$  gedreht und wieder angefügt. Wiederholt man diesen Vorgang immer wieder, so entsteht die Drachenkurve. Benannt wurde sie auf Grund ihres Aussehens, da sie an altchinesische Drachendarstellungen erinnert.

Die fraktale Dimension beträgt  $\ln 2 / \ln \sqrt{2} = 2$

In der nachfolgenden Tabelle sind die ersten Iterationsschritte dargestellt:







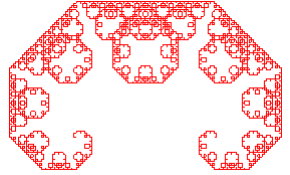
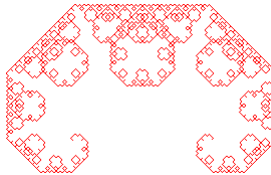
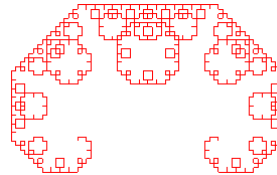
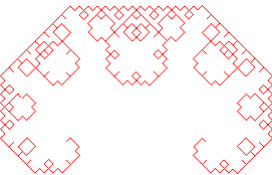
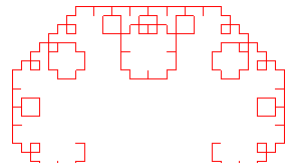
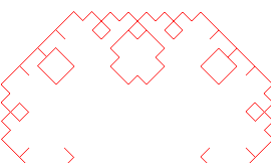
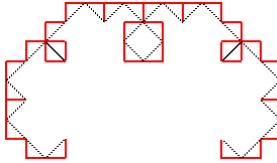
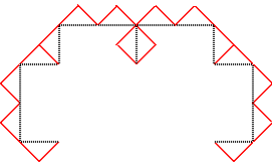
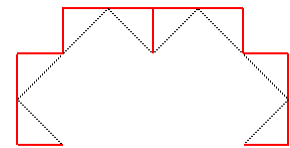
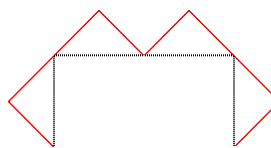
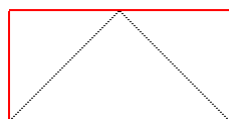
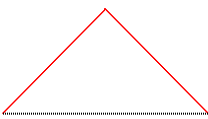
An der linken Darstellung erkennt man gut, dass stets zwei Teile zueinander ähnlich sind.

Mit der Drachenkurve gelingt es auch, die Ebene vollständig zu überdecken. In die freien Bereiche können immer wieder entsprechend gedrehte Drachenkurven lückenlos eingefügt werden.

### C-Kurve, Levysche Kurve (nach Paul Lévy, 1886-1971)

Die C-Kurve entsteht durch rekursives Hinzufügen von zwei Strecken der Länge  $1/\sqrt{2}$  unter den Winkeln von  $45^\circ$  und  $-45^\circ$  an die schon vorhandenen Strecken des Fraktals. Dimension des Fraktals :  $\ln 2/\ln$

$\sqrt{2} = 2$ . Ausgehend von einer Strecke AB ergibt sich:



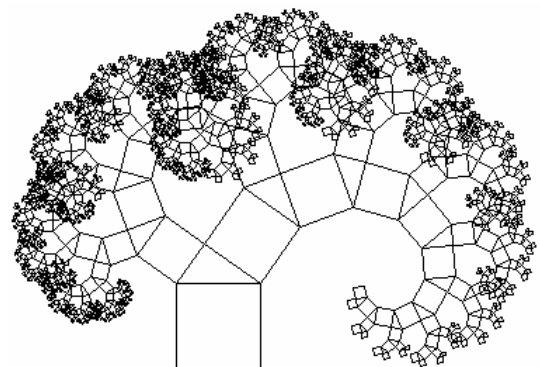
Der Name C-Kurve leitet sich aus dem Englischen von „Crabe“ = „Krappe“ ab. Vergleicht man das Fraktal mit einer realen Krappe wird diese Namensgebung verständlich.

### Pythagorasbaum

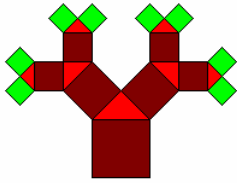
Ein Pythagorasbaum entsteht, wenn man auf ein Quadrat (Stamm) ein rechtwinkliges

Dreieck (Verzweigung) mit seiner Hypotenuse aufsetzt. An die Katheten schließen sich wieder Quadrate (Zweige) an, an deren gegenüberliegenden Seiten sich wiederum rechtwinklige Dreiecke befinden, die dem ersten Dreieck ähnlich sind usw. Alle entstehenden Verzweigungen enden mit Quadraten (Blättern). Für welche rechtwinkligen Dreiecke ist es möglich, jeden Pythagorasbaum durch Hinzufügen von weiteren Dreiecken und Quadraten so wachsen zu lassen, dass er höchstens zwei verschiedene Größen von Blättern besitzt?

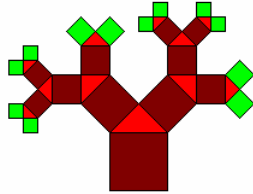
Setzen wir ein rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck auf das Ausgangsquadrat und fügen an die Katheten zwei Quadrate an, auf deren gegenüberliegenden Seiten wieder rechtwinklige Dreiecke sitzen usw., erhalten wir einen symmetrischen Pythagorasbaum (Abbildung links). Er besitzt nur eine Größe von Blättern. Nach dem Pythagorassatz sind die jeweiligen Kathetenquadrate in ihrer Kantenlänge immer um einen Faktor  $\sqrt{2}$  kleiner als das Hypotenusenquadrat. Wenn man den Baum nicht an allen Stellen in gleicher Weise entwickelt, wird er unsymmetrisch und hat mehrere Größen von Blättern (Abbildung rechts). Es leuchtet unmittelbar ein, dass wir jeden solchen Baum, wenn wir alle größeren Blätter in Zweige verwandeln, so weiterentwickeln können, dass er nur noch eine Größe von Blättern besitzt. Damit haben wir die einzige Lösung für nur eine Blattgröße, weil ein ungleichschenkliges Dreieck notwendigerweise zu mindestens zwei Blattgrößen führen würde.



Auf einfache Weise können wir jeden solchen Baum so verwandeln, das er genau zwei Blattgrößen besitzt.



gleichschenklige Dreiecke  
(eine Blattgröße)



gleichschenklige Dreiecke  
(zwei Blattgrößen)

Dazu brauchen wir nur auf einige Blätter Dreiecke zu setzen und darauf zwei kleinere, aber untereinander gleiche Quadrate als neue Blätter. Die Abbildung oben rechts kann wieder als Beispiel dienen. Wir haben also auch hier eine einfache Lösung gefunden. Gibt es außer dem gleichschenkligen Dreieck noch weitere Lösungen für zwei Blattgrößen? Betrachten wir dazu die drei Fälle, wie die vorletzten Verzweigungen eines Baumes fortgesetzt werden können (gelbe Dreiecke in der Abbildung unten links).

Fall 1 scheidet als Lösung aus, weil beispielsweise das linke der vier Blätter kleiner sein muss als die beiden rechten Blätter und damit mindestens drei Blattgrößen vorhanden wären. Genauso muss im Fall 2 das rechte Blatt größer sein als die beiden linken. Nur im Fall 3 können wir erreichen, dass die beiden äußeren Blätter gleich groß sind und es dann nur zwei Blattgrößen gibt. Zur Herleitung der dafür notwendigen Bedingung wird die Länge der Hypotenuse des gelben Dreiecks gleich 1 und die ihrer längeren Kathete gleich  $x$  gesetzt. Dann ist wegen der Ähnlichkeit mit dem roten Dreieck dessen längere Kathete gleich  $x^2$ . Da sie gleich der kürzeren Kathete des gelben Dreiecks sein soll, lautet der Pythagorassatz für dieses Dreieck:

$$x^4 + x^2 = 1$$

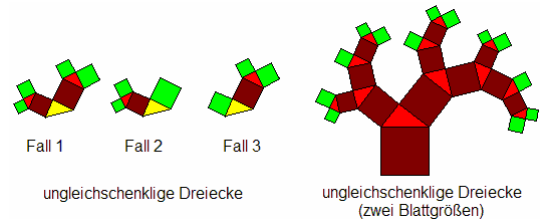
oder (mit  $u = x^2$ ):

$$u^2 + u - 1 = 0$$

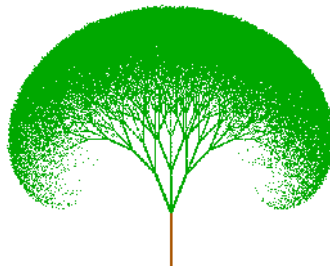
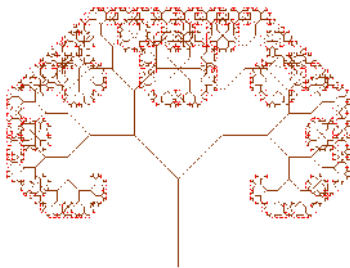
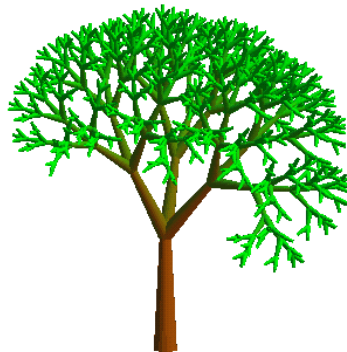
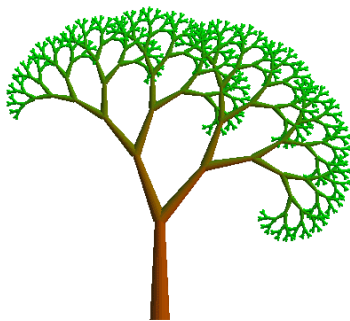
$u = -1/2 + 1/2 \sqrt{5} = 0.618...$  (Verhältnis des goldenen Schnitts)

$$x = \sqrt{u} = 0.786...$$

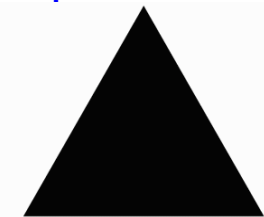
Als einzige Lösung kommt also nur ein Dreieck in Frage, bei dem das Verhältnis von Hypotenuse zur kürzeren Kathete dem goldenen Schnitt und das Verhältnis zur längeren Kathete der Wurzel aus dem goldenen Schnitt entspricht. Die Abbildung unten rechts zeigt ein Beispiel eines solchen "goldenen" Baumes.



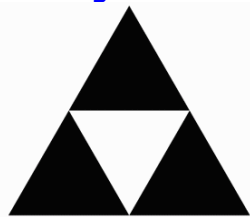
## Weitere schöne Baum-Fraktale und rechts ein realer Baum



## Sierpinski-Dreieck durch Teilung



Stufe 0, 1 Dreieck



Stufe 1, 3 Dreiecke



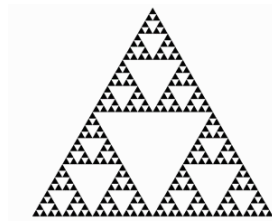
Stufe 2, 9 Dreiecke



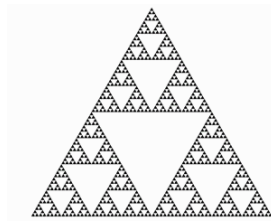
Stufe 3, 27 Dreiecke



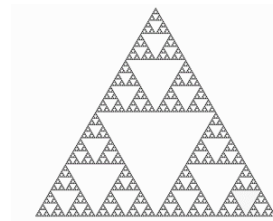
Stufe 4, 81 Dreiecke



Stufe 5, 243 Dreiecke



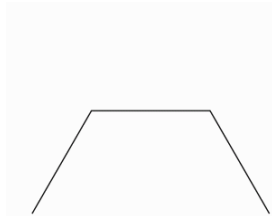
Stufe 6, 729 Dreiecke



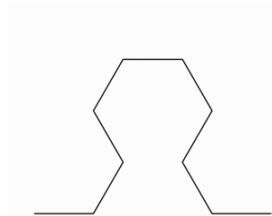
Stufe 7, 2187 Dreiecke

Dimension  $\ln 3 / \ln 2 = 1,6...$

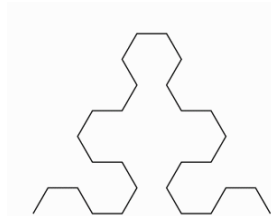
### Sierpinski-Pfeilspitzenkurve



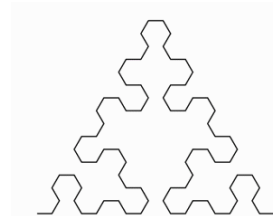
Stufe 1, 3 Segmente



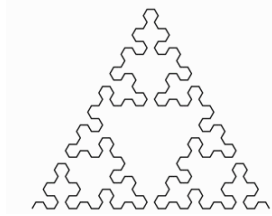
Stufe 2, 9 Segmente



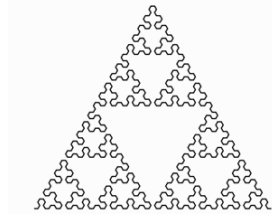
Stufe 3, 27 Segmente



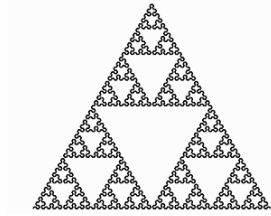
Stufe 4, 81 Segmente



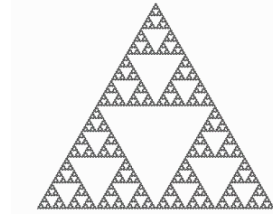
Stufe 5, 243 Segmente



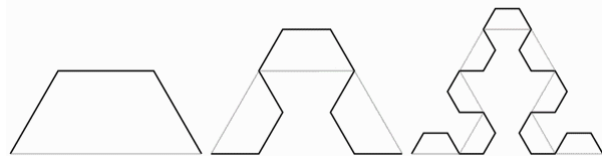
Stufe 6, 729 Segmente



Stufe 7, 2187 Segmente



Stufe 8, 6561 Segmente



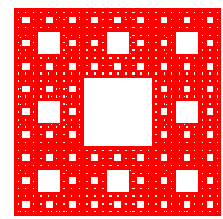
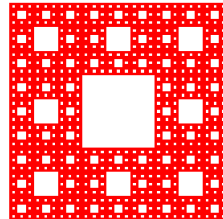
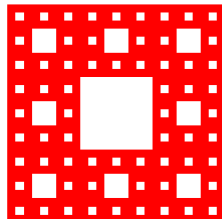
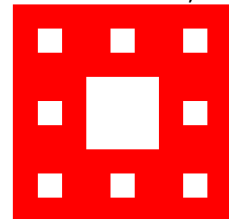
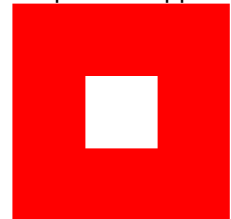
Das Sierpinski-Dreieck lässt sich auch aus einer Linie erzeugen die nach folgendem Schema unterteilt wird. Die schwarze Linie zeigt die aktuelle Generation, die graue Linie zeigt die letzte Generation (von links nach rechts  $n = 1, 2, 3$ ). Die Ähnlichkeit mit dem Sierpinski Dreieck wird aber erst bei höheren Generationen deutlich. Eigentlich handelt es sich um eine optische

Täuschung da es in der Pfeilspitzenkurve gar keine Dreiecke gibt.

### Weitere nach Sierpinski benannte Fraktale

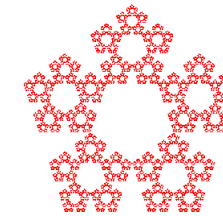
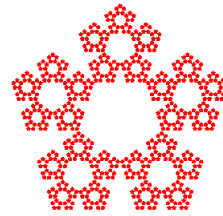
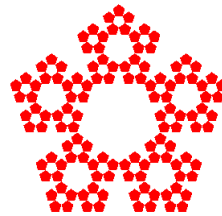
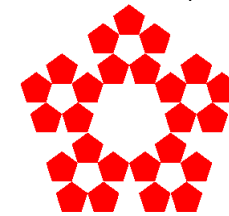
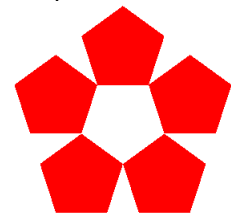
Sierpinski-Teppich

Dimension = 1,9



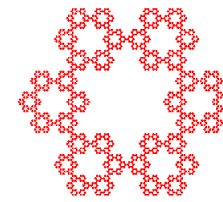
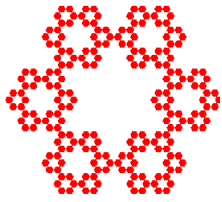
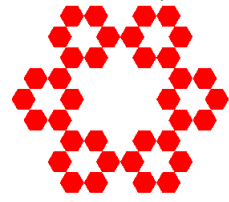
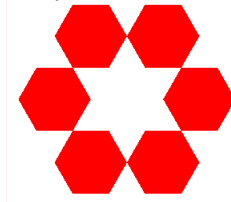
Sierpinski-Fünfeck

Dimension = 1,7

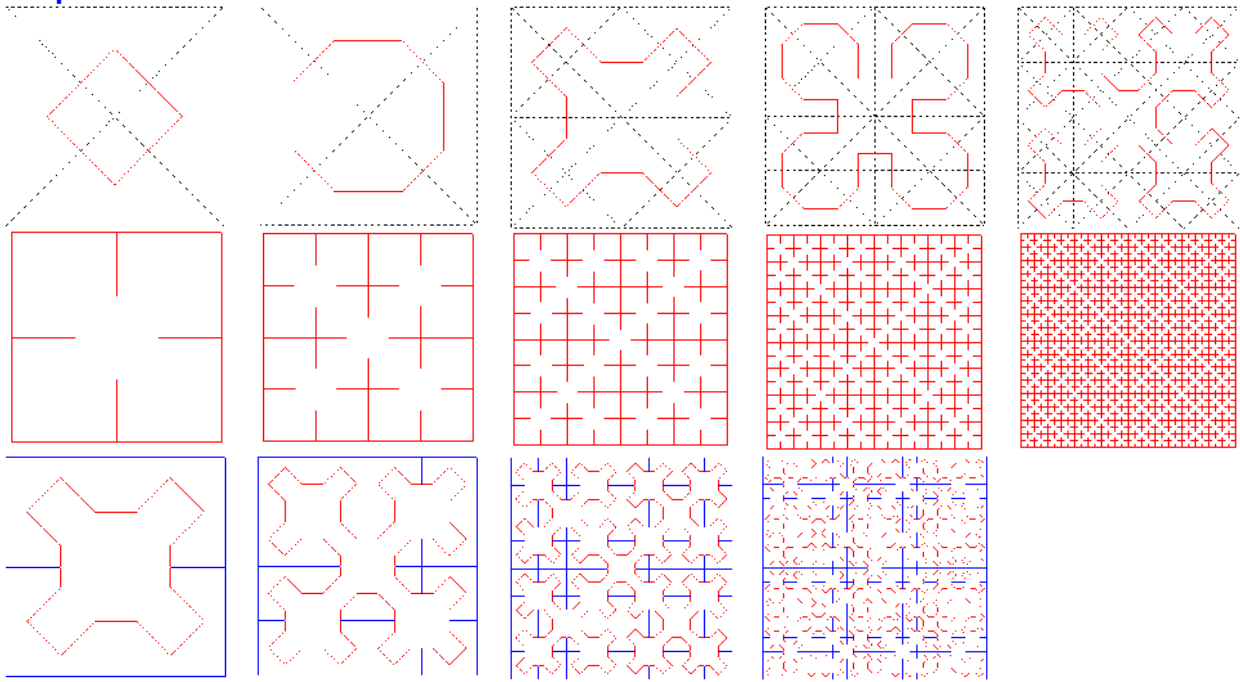


Sierpinski-Sechseck

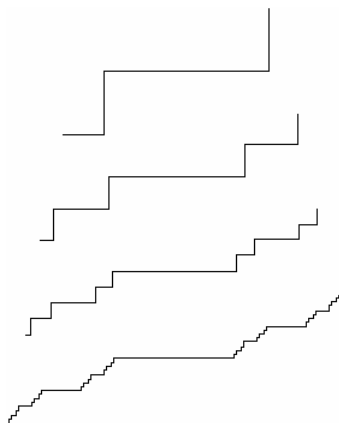
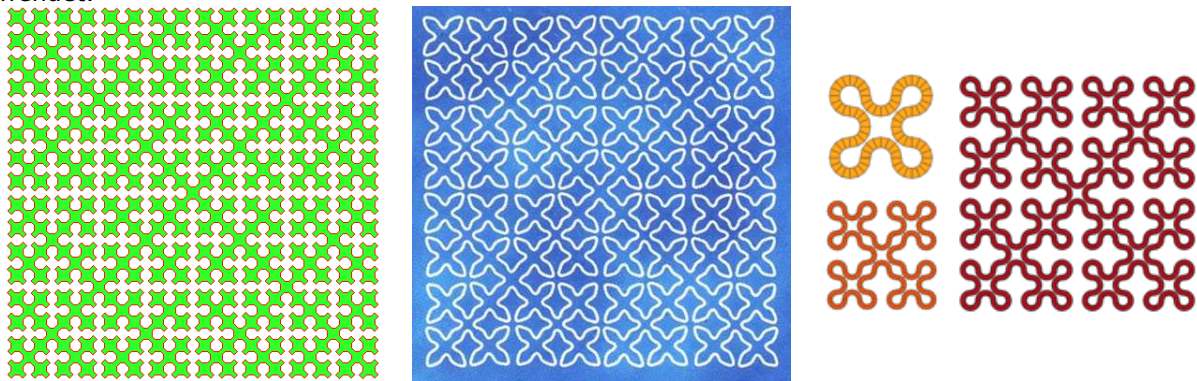
Dimension 1,63



## Sierpinski-Kurven unterschiedlicher Konstruktionsvorschriften



Die Sierpinski-Kurve wurde sehr gern als Ornament, vor allem in der traditionellen indischen Kunst verwendet.



### Teufelstreppe

Die "Teufelstreppe" (franz. escalier du diable, engl. devil's staircase) ist ein Fraktal. Das Gebilde wurde 1885 von Ludwig Scheeffer beschrieben, einem Schüler Cantors.

Mitunter wird die Kurve auch Cantor-Lebesgue-Treppe genannt.

Zur Konstruktion geht man von der oben abgebildeten Struktur aus. Dabei ist die große waagerechte Stufe dreimal so lang wie die kleine waagerechte Strecke. Das kurze Element sei  $b$ .

Bei jedem Schritt werden die bisherigen waagerechten Elemente beibehalten, ein Drittel des kürzesten waagerechten Elementes wird in der Mitte waagerecht in das halbierte senkrechte Element eingefügt. Daher wird die Teufelstreppe bei jedem Schritt breiter, aber nicht höher.

Die Breite wird durch folgende geometrische Summe beschrieben:

$$\text{Breite} = b (3 + 1 + 2/3 + 4/9 + 8/16 + \dots) = b (3 + 1/(1-2/3)) = 6b$$

Trotz dieser endlichen Breite, die nur das Doppelte der großen Anfangsstufe ist, wächst die Stufenzahl der Teufelstreppe ins Unendliche.

Die Teufelstreppe ist nicht streng selbstähnlich. Versucht man, verkleinerte Kopien ihrer selbst zu finden, so stören die gleichlang bleibenden Stücke und die Verschiedenheit der Stauchfaktoren für senkrechte und waagerechte Längen. Bei einer Messung der Boxdimension erhält man etwa  $d=1$ .

### Koch-Insel, Kochsche Schneeflocke

Fraktal, wurde erstmals 1904 von Helge von Koch untersucht





Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck. Auf jede Seite wird ein Dreieck mit einem Drittel der ursprünglichen Seitenlänge in der Mitte platziert. Wird nur die äußere Berandung betrachtet und dieser Vorgang unendlich oft wiederholt, so entsteht die fraktale Kurve.

Regel "F" -> "F+F--F+F", Winkel 60°

Nach der n-ten Iteration wird:

Anzahl der Seiten  $N_n = 3 \cdot 4^n$

Länge einer Seite  $L_n = 3^{-n}$

Umfang der Kurve  $I_n = 3 \cdot (4/3)^n$

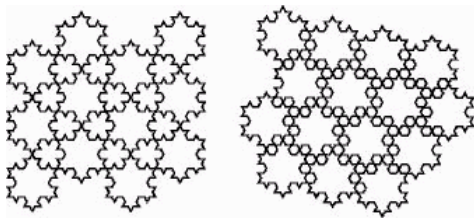
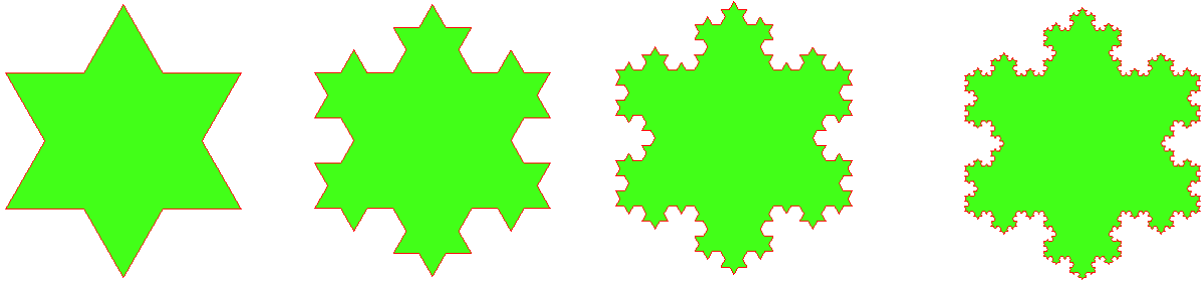
Fläche der Kurve  $A_n = A_{n-1} + 1/3 \cdot (4/9)^{n-1} \cdot \Delta$

$A_n = \Delta \left( 1 + 1/3 \left[ (4/9)^0 + (4/9)^1 + (4/9)^2 + \dots + (4/9)^n \right] \right)$ ,  $\Delta$  ... Flächeninhalt des 1. Dreiecks

Der Umfang und der Flächeninhalt nehmen also mit wachsendem n zu, aber nicht in gleichem Maße:

Lässt man n gegen Unendlich streben, erhält man, dass die Koch'sche Schneeflocke eine unendlich lange Kurve ist, die einen endlichen Flächeninhalt umschließt: Grenzwert des Flächeninhalts  $8/5 \Delta$

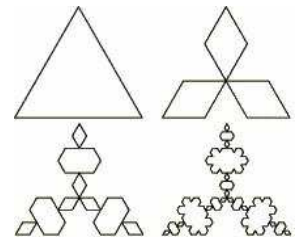
Fraktale Dimension  $\ln 4 / \ln 3 = 1.261859507 \dots$



### Koch-Insel

Mit Hilfe der Koch-Insel-Kurve und weiterer Schneeflockenkurven kann die Ebene vollständig überdeckt werden.

Nutzt man zwei Koch-Inseln, deren Größen im Verhältnis 1 : 3 stehen, kann ebenfalls die Ebene vollständig ausgefüllt werden



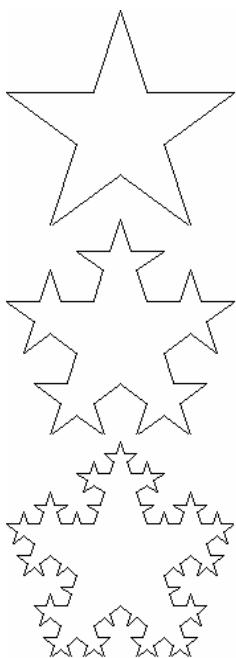
### Koch-Antikurve

Diese fraktale Kurve entsteht aus der Koch-Insel, indem die zusätzlichen Dreiecke nicht nach außen auf das Ausgangsdreieck gesetzt werden, sondern nach innen. Nach der n-ten Iteration ergibt sich für die Fläche des Fraktals

$$A_n = A_{n-1} - 1/3 I_{n-1}/a \cdot \Delta/3^n$$

Umfang der Kurve  $I_n = 3 \cdot (4/3)^n \Delta$  ... Flächeninhalt des 1. Dreiecks

Die Fläche A konvergiert gegen  $2\Delta/5$ .



### Kepler-Fraktale

Unter einem Kepler-Fraktal versteht man ein Fraktal, dessen Konstruktionsmechanismus wie folgt beschrieben werden kann:

An einem regelmäßigen Gebilde, einem regelmäßigen N-Eck bzw. Polyeder, werden fortlaufend Seiten bzw. Seitenflächen durch kleinere Kopien des Originals ersetzt. Dadurch ergibt sich Selbstähnlichkeit und es entsteht ein Fraktal. Links wird ein Kepler-Fraktal aus einem 5-zackigen Stern erzeugt.

Auch die Koch-Insel ist ein Kepler-Fraktal und ergibt sich aus einem David-Stern.

Dieser Algorithmus ist nicht auf die Ebene beschränkt und kann auch auf Polyeder übertragen werden.

Insbesondere ergeben sich aus den zwei von Johannes Kepler beschriebenen Polyedern, dem kleinen Sterndodekaeder und der Stella Octangula, interessante Fraktale.

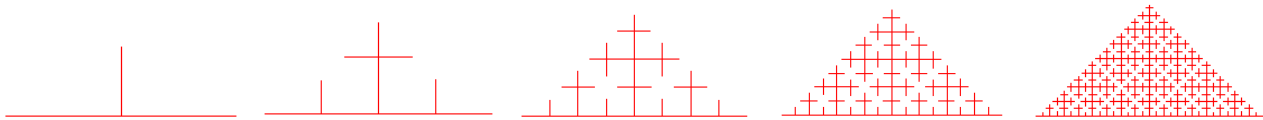
### Cesàro-Kurve

Behält man die Konstruktionsvorschrift der Koch-Kurve bei, ersetzt aber nicht das mittlere Drittel einer Teilstrecke, sondern errichtet in der Mitte eine Senkrechte halber Länge, so entsteht die Cesàro-Kurve (1905).

Der Initiator ist die Einheitsstrecke. Der Basiswinkel des von der Kurve

umschlossenen gleichschenkligen Dreiecks liegt im Bereich von 0° bis 90°.

Die fraktale Dimension ist 2. Die Kurve wurde erstmals von Ernesto Cesàro beschrieben.



### Kurven-Fraktale, Curlicues

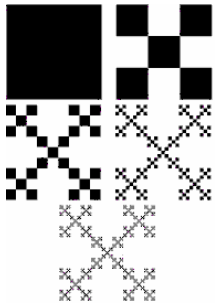
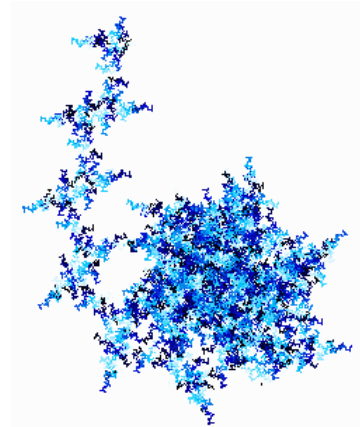
Gegeben ist eine irrationale Zahl  $z$ . Die Iteration

$$p_{n+1} = (p_n + 2\pi z) \pmod{2\pi} \quad p_0 = 0$$

$$\phi_{n+1} = p_n + \phi_n \pmod{2\pi} \quad \phi_0 = 0$$

wobei nach jedem Schritt eine Strecke der Länge 1 mit dem Winkel  $\phi_n$  zur x-Achse gezeichnet wird, erzeugt eine spezielle Art von Fraktal, die sogenannten Kurven-Fraktale (Curlicues). nach Pickover 1995

Abbildung: Kurven-Fraktal für  $z = \pi/7$



### Box Fraktal

$N_n$  sei die Anzahl von schwarzen Rechtecken,  $L_n$  die Länge einer Seite eines weißen Rechtecks und  $A_n$  der Anteil der schwarzen Bereiche nach der  $n$ -Iteration.

Dann gilt:

$$N_n = 5^n$$

$$L_n = 3^{-n}$$

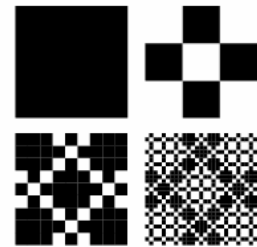
$$A_n = L_n^2 * N_n = (5/9)^n$$

Die Box-Counting-Dimension des entstehenden Fraktals ist  $\ln 5 / \ln 3 = 1.464973521...$

### Haferman-Teppich

Der Haferman-Teppich ist eine fraktale Gebilde der Dimension 2, das durch iteratives Ersetzen von Zellen erzeugt wird.

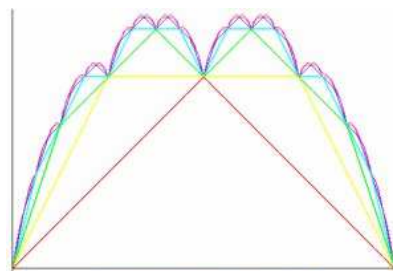
Die Regeln sind links abgebildet. Eine leere, weiße Zelle wird durch ein schwarze ersetzt, die wiederum durch vier kleinere schwarze und fünf weiße. Das Fraktal wurde 2003 auf einem Buch von Allouche und Shallit abgebildet.



$$\left\{ 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, 1 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Die Anzahl von schwarzen Zellen nach  $n = 0, 1, 2, \dots$  Iterationen ist  
 1, 4, 61, 424, 4441, 36844, 347221, 3046864, 27812401, 248358484,  
 2244991981, 20156099704, 181649037961, 1633620638524,  
 14708689262341, 132347685782944, 1191281759937121,  
 10720772899980964, 96490770797094301, ...

Für die Anzahl  $N_n$  der schwarzen Zellen und die Länge  $L_n$  der weißen Zellen gilt  
 $N_n = 1/14 ((-1)^n 5^{n+1} + 9^{n+1})$   $L_n = 3^{-n}$



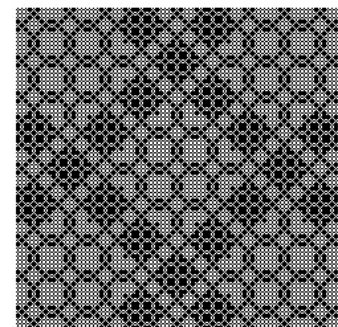
### Blanc-mange Kurve

Diese Kurve wurde erstmals 1903 von Takagi und 1930 von van der Waerden untersucht. Mitunter wird sie auch Takagi-Kurve genannt. Der merkwürdige Name „Blanc-mange“ wurde von John Mills gegeben und bezieht sich auf der „Ähnlichkeit“ der Kurve zu einem Pudding-Produkt einer britischen Firma. D.h. also, hier wird eine „Pudding“-Kurve untersucht.

Kartesische Gleichung

$$y = \sum d(2^k x) / 2^k,$$

Summenbildung für  $k = 0, \dots, \infty$ . Dabei bedeutet der Term  $d(x)$  den Abstand der  $x$  zur nächsten ganzen Zahl.



### Dreiecksfraktal

Bei diesem Fraktal werden in ein Einheitsquadrat fortlaufend Dreiecke derart eingefügt, dass die neuen Dreieckspunkte waagerecht zwischen benachbarten Punkten liegen und in der Senkrechte der Abstand zum oberen Rand halbiert wird.

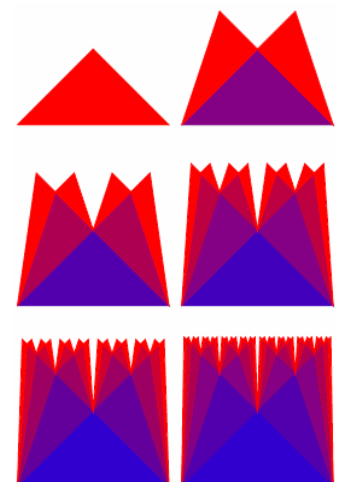
Dadurch entsteht ein Gebilde, dass unendlich oft fortgesetzt werden kann und fraktalen Charakter besitzt.

In der linken Darstellung wechseln sich blaue und rote Farbe ab.

Für den roten Anteil erhält man bei unendlichem Fortsetzen

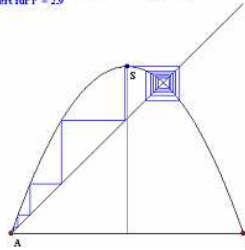
$$1/4 + 2/16 + 3/64 + \dots = \sum i (1/4)^i = 4/9$$

für den blauen Anteil analog  $5/9$ .



Ordnet man das Ausgangsdreieck zyklisch in einer Kreisform an und fügt auf analoge Weise weitere Dreiecke an, so entsteht ein Fraktal, dass an eine Blüten erinnert, ein Blumenfraktal.

Logistische Gleichung  $x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$   
Wert für  $r = 2.9$



### Logistische Gleichung

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$

Auf der Suche nach einem deterministischen Zufallszahlengenerator wurde die Gleichung 1947 von S.M.Ulam und J. von Neumann intensiv studiert. Allerdings waren die Zahlen im Intervall  $[0, 1]$  nicht genügend gleichverteilt.

Spezialfall der Verhulst-Gleichung (1845) zur Beschreibung eines Populationswachstums

$$N_{t+1} = N_t (a - b N_t)$$

$$x_{n+1}^2 = A + Bx_n + Cx_n^2$$

Ableitung aus quadratischer Gleichung

mit Transformation  $x_n = k \cdot x_n + d$  und  $A = r/4 + 1/2$ ;  $B = 0$ ;  $C = -r$ ;  $k = 1$ ;  $d = 1/2$

Fixpunkt bei  $x \Leftrightarrow f(x) = x$

stabiler (anziehender) Fixpunkt  $\Leftrightarrow |f'(x)| < 1$

superstabiler Fixpunkt  $\Leftrightarrow |f'(x)| = 0$

instabiler (abstoßender) Fixpunkt  $\Leftrightarrow |f'(x)| > 1$

### Verhalten der logistischen Gleichung

$0 < r \leq 1$  stabiler Fixpunkt  $x = 0$

$1 < r \leq 3$  stabile Fixpunkte  $x = 0$  und  $x = 1 - 1/r$

ab  $r=3$  Periodenverdopplung für  $r = 3, 3,449399, 3,544090, 3,564407, 3,568759, 3,569692, 3,569891, 3,569934, \dots$  Grenzwert der Periodenverdopplung  $r = 3,5699456$

darüber (mit Ausnahme der periodischen Fenster) erfolgt chaotisches Verhalten

### Exakte Lösung im Chaosfall ( $r=4$ )

für  $x_0 \neq 1/2 - 1/2 \cdot \cos(r\pi/2^s)$ ;  $r, s$  ganzzahlig ergibt sich

$$x_n = 1/2 - 1/2 \cos(2^n \arccos(1 - 2x_0))$$

### Gekoppelte einparametrische Gleichung

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n) + (r - 1) y_n$$

$$y_{n+1} = r y_n (1 - y_n) + (r - 1) x_n$$

### Gekoppelte zweiparametrische Gleichung

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n) + \varepsilon (y_n - x_n)$$

$$y_{n+1} = r y_n (1 - y_n) + \varepsilon (x_n - y_n)$$

### Kaneko-Systeme

Kaneko I - System (1986):

$$x_{n+1} = 1 - a x_n^2 + d (y_n - x_n)$$

$$y_{n+1} = 1 - a y_n^2 + d (x_n - y_n)$$

Kaneko II - System (1986):

$$x_{n+1} = a x_n + (1 - a) (1 - d |y_n|)$$

$$y_{n+1} = x_n$$

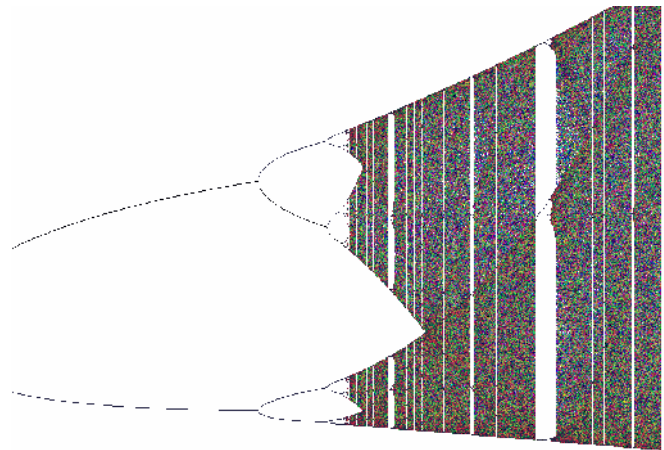


Abbildung: Feigenbaum-Diagramm der logistischen Gleichung

### Ljapunow-Exponent

Der Ljapunow-Exponent eines dynamischen Systems; nach Alexander Michailowitsch Ljapunow; beschreibt die Geschwindigkeit, mit der sich zwei nahe beieinanderliegende Punkte im Phasenraum voneinander entfernen oder annähern.

Für jede Dimension des Phasenraums gibt es einen Ljapunow-Exponenten, die zusammen das sogenannten Ljapunow-Spektrum bilden. Häufig betrachtet man nur den größten Ljapunow-Exponenten, da dieser das gesamte Systemverhalten bestimmt.

Im eindimensionalen Raum ist der Ljapunow-Exponent  $\lambda$  einer iterierten Abbildung  $x_{n+1} = f(x_n)$  wie folgt definiert:

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} 1/N \ln |df^N(x_0) / dx|$$

Ist der größte Ljapunow-Exponent positiv, so ist das System in der Regel divergent.

Ist er negativ, so entspricht dies einer Phasenraumkontraktion, d.h. das System ist dissipativ und agiert stationär oder periodisch stabil.

Ist die Summe der Ljapunow-Exponenten Null, so handelt es sich um ein konservatives System.

### Verhulst-Iteration, Verhulst-Gleichung

Iteration:  $x_{n+1} = 4 \cdot p \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$

$x_0$  Anfangswert,  $0 < p < 1$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

$x_n$  = Bestand der Population im Jahre  $n$ , wobei die Population des Folgejahres proportional zu  $x_n$  und zu  $(1 - x_n)$  ist, d.h. proportional zum Bestand als auch proportional zum Nahrungsangebot.

Verhulst wählte für diese logistische Gleichung  $p = 0,892$  als ein eindimensionales Beispiel der nichtlinearen Dynamik.

Eigenschaften: Für kleine  $p$  konvergiert die Folge gegen einen Fixpunkt.

Für größere Werte oszilliert die Folge nach einer Einschwingphase mit der Periode 2, 4, 8, 16, 32, ...

Die zugehörigen Parameterwerte  $p$  bilden eine geometrische Reihe mit:

$$\lim (p_{n+2} - p_{n+1}) / (p_{n+1} - p_n) = 4,6692016 \dots \text{ universelle Feigenbaumkonstante}$$

Nach Überschreiten aller Periodenverdopplungen ist für  $p > 0,8924 \dots$  die Folge deterministisch chaotisch.

Eine winzige Veränderung des Anfangswertes  $x_0$  führt zu einer vollständig veränderten Folge.

### Räuber-Beute-System nach Vito Volterra (1931):

$x$  ... Anzahl Hasen,  $y$  ... Anzahl Luchse

Fortpflanzungsgeschwindigkeit Hasen  $dx/dt = k_1 * x$

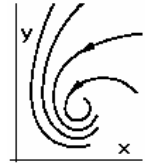
Fortpflanzungsgeschwindigkeit Luchse  $dy/dt = -k_4 * y$

Geschlossenes System  $dx/dt = k_1 * x - k_2 * x * y$

$$dy/dt = k_3 * x * y - k_4 * y$$

Allgemeine Lösung des Systems  $y - \ln y = \ln x - x + k$

Abbildung: Volterra-Funktion mit Störfaktoren



### Einfluss von Störfaktoren $\varepsilon \approx 0, \varepsilon > 0, s_x(x,y), s_y(x,y)$ Störfunktionen

$$dx/dt = k_1 * x - k_2 * x * y + \varepsilon * s_x(x,y) \quad dy/dt = k_3 * x * y - k_4 * y + \varepsilon * s_y(x,y)$$

### Populationsbiologie, Wachstumsgesetze

Geburtenrate  $GR = +N_G / (dt N)$

Sterberate  $SR = -N_T / (dt N)$

Vermehrungsrate  $r = GR + SR$

**Logistisches reales Wachstum**  $dN/dt = r * N * (K-N)/K$ ; Lebensraumkapazität

(max.Populationsgröße)  $K$

### Lotka-Volterra-Gleichung

Die Lotka-Volterra-Gleichungen, auch Räuber-Beute-Gleichungen genannt, sind ein System aus zwei nichtlinearen, gekoppelten Differenzialgleichungen erster Ordnung und beschreiben die Wechselwirkung von Räuber- und Beutepopulationen.

Unter Räuber und Beute versteht man dabei zwei Arten von Lebewesen, wobei sich eine von der anderen ernährt ("Deux espèces dont l'une dévore l'autre").

Aufgestellt wurden die Gleichungen 1925 von Vito Volterra und, unabhängig davon, 1926 von Alfred James Lotka.

$$dN_1 / dt = N_1 (\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2)$$

$$dN_2 / dt = -N_2 (\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1)$$

mit den Größen

$N_1 = N_1(t)$  Anzahl der Beutelebewesen; zeitabhängig

$\varepsilon_1 > 0$  Reproduktionsrate der Beute ohne Störung und bei großem Nahrungsangebot; konstant

$N_2 = N_2(t)$  Anzahl der Räuber; zeitabhängig

$\varepsilon_2 > 0$  Sterberate der Räuber, wenn keine Beute vorhanden sind; konstant

$\gamma_1 > 0$  Fressrate der Räuber pro Beutelebewesen = Sterberate der Beute pro Räuber; konstant

$\gamma_2 > 0$  Reproduktionsrate der Räuber pro Beutelebewesen; konstant

Die Lotka-Volterra-Gleichungen sind eine wichtige Grundlage der theoretischen Biologie, und insbesondere der Populationsdynamik. Bei den Räubern und der Beute muss es sich nicht unbedingt um Tiere oder einzelne Arten handeln. Das Modell kann auch für Tierklassen oder Einzeller genutzt werden.

Die Anwendbarkeit der Lotka-Volterra-Gleichungen hängt davon ab, inwieweit die Begründung des mathematischen Modells im Einzelfall zutrifft.

Die Lotka-Volterra-Gleichung kann durch folgende Überlegung gewonnen werden (nach Volterra "Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie"):

Die Populationszahlen der Beute bzw. der Räuber seien mit  $N_1$  bzw.  $N_2$  bezeichnet. Die ungestörten Wachstumsraten pro Zeiteinheit  $dt$  seien  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ , deren Vorzeichen noch nicht festliegen.

Die mittlere Anzahl der Begegnungen zwischen Beute und Räuber pro Zeiteinheit  $dt$  ist  $\alpha N_1 N_2$  mit einer positiven reellen Zahl  $\alpha$ , die innerhalb eines Biotops als konstant angenommen wird, aber im allgemeinen vom Biotop abhängt.

Eine genügend große Zahl  $n$  Begegnungen haben im Mittel einen Effekt  $\beta_i$  auf die Populationszahl  $N_i$ . Bei den Beutelebewesen führt eine Begegnung mit einem Räuber mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit dazu, dass die Beute gefressen wird. Dagegen ist die Auswirkung einer Begegnung auf die Zahl der Räuber nur indirekt.

Zusammengenommen führt das zu den Gleichungen

$$dN_1 = \lambda_1 N_1 dt + \alpha N_1 N_2 \beta_1 / n dt \quad dN_2 = \lambda_2 N_2 dt + \alpha N_1 N_2 \beta_2 / n dt$$

Division mit  $dt$  führt zu den Gleichungen

$$dN_1/dt = \lambda_1 N_1 + \alpha N_1 N_2 \beta_1 / n \quad \text{und} \quad dN_2/dt = \lambda_2 N_2 + \alpha N_1 N_2 \beta_2 / n$$

Setzt man

$$\varepsilon_1 = \lambda_1, \varepsilon_2 = -\lambda_2, \gamma_1 = -\alpha\beta_1/n, \gamma_2 = -\alpha\beta_2/n$$

und führt einen Grenzübergang durch, so ergeben sich die Lotka-Volterra-Gleichungen.





### Räuber-Beute-Modell

Zwei Populationen leben in einem geschlossenen, isolierten Ökosystem. Dabei ernährt sich die Population  $y$  (Füchse) ausschließlich von der Population  $x$  (Hasen). Wir wollen nun wissen, wie viele Hasen und wie viele Füchse in unserem System zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$  leben.

Annahmen:

Erstens vermehren sich die Hasen proportional zu ihrer eigenen Anzahl, wenn es keine Füchse gibt. Zweitens sterben die Füchse aus, wenn es keine Hasen gibt. Und drittens ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fuchs einen Hasen trifft, um so größer, je mehr es von diesen Tieren gibt, also proportional zur Größe der beiden Populationen  $x$  und  $y$ , d.h. je Zeitschritt:

$$dx / dt = a x - \alpha x y$$

$$dy / dt = -c y + \gamma x y$$

Dabei sind  $a$  und  $c$  die Wachstumsraten der beiden Populationen,  $\alpha$  die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Treffen von Füchsen und Hasen der Fuchs auch tatsächlich den Hasen frisst, und  $\gamma$  dieselbe Wahrscheinlichkeit mal der Anzahl an Füchsen, die ein Hase ernähren kann.

Der Term  $ax$  entspricht dem natürlichen Zuwachs an Hasen,  $\alpha xy$  ist die Menge der von Füchsen gefressenen Hasen.  $-cy$  ist die Abnahmerate (Geburtenrate minus Todesrate) der Füchse, wenn es keine Hasen gäbe, und  $\gamma xy$  steht für die Anzahl der Füchse, die Hasen fressen können und dadurch überleben. Dieses Gleichungssystem ist nicht explizit nach der Zeit lösbar, sondern muss angenähert werden.

Eulerverfahren:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t(ax(t) - \alpha x(t)y(t))$$

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta t(-cy(t) + \gamma x(t)y(t))$$

Ein Beispiel für das Resultat, das uns ein Computer gibt, sehen wir in nebenstehendem Bild, wo die Größe der beiden Populationen gegen die Zeit abgetragen ist.

### Wator

Wator ist eine diskrete Simulation eines einfachen Räuber-Beute-Modells und wurde von Alexander K.Dewdney erfunden und im Scientific American zuerst veröffentlicht. Simuliert wird ein abgeschlossenes System, der Planet Wa-Tor, auf dessen Oberfläche Haie und Fische leben. Jedes der beiden Lebewesen verhält sich nach eindeutig festgelegten Regeln:

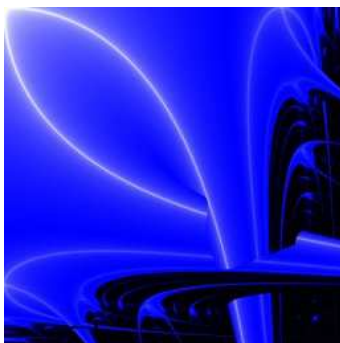
1. Jeder Fisch schwimmt zufällig auf eines der vier angrenzenden Felder, sofern es leer ist.
2. Jeder Fisch hat ein Alter; überschreitet dieses Alter die "Breed Time", so wird auf einem leeren, angrenzenden Feld ein neuer Fisch geboren.
3. Haie fressen Fische auf angrenzenden Feldern.
4. Findet ein Hai keinen Fisch auf einem angrenzenden Feld, so schwimmt er zufällig auf eines der vier Felder.
5. Findet ein Hai für eine bestimmte Anzahl Zyklen, der "Starve Time" keinen Fisch, so stirbt der Hai.
6. Haie pflanzen sich genau so fort wie Fische.

Die Spielfläche ist dabei auf allen je zwei gegenüberliegenden Seiten torisch verbunden, ein Fisch, der sich nach oben aus dem Spielfeld bewegt, wird also auf der Unterseite auftauchen und umgekehrt, ebenso in horizontaler Richtung.

Die Simulation hängt von 5 veränderbaren Parametern ab: der Anzahl der Fische zu Beginn, der Anzahl der Haie zu Beginn, der Fish Breed Time, der Shark Breed Time und der Shark Starve Time. Außerdem hängt der Ablauf der Simulation von der Größe des Planeten ab, diese wird aber als gegeben vorausgesetzt. Die Simulation kann als Spiel aufgefasst werden, das Ziel des Spieles ist es dann, die Startparameter so zu wählen, dass ein stabiles Gleichgewicht entsteht. Abhängig von den Startparametern gibt es verschiedene Möglichkeiten, wie sich die Simulation entwickeln kann:

1. Die Haie können aussterben und den Fischen freien Lauf lassen.
2. Die Fische können aussterben, was ein Aussterben der Haie nach sich ziehen wird.
3. Es kann eine Art Gleichgewicht entstehen, in dem sich die beiden Population gegenseitig begrenzen.

Bei Wa-Tor handelt es sich um eine Diskretisierung eines einfachen Räuber-Beute-Modells, die dennoch interessante (und erheiternde) Resultate hervorbringen kann.



### Ljapunow-Diagramm

In der Mathematik sind Ljapunow-Diagramme; auch Ljapunow-Fraktale oder Markus-Ljapunow-Fraktale; nach Alexander Michailowitsch Ljapunow; Fraktale hergeleitet von einer Erweiterung der logistischen Gleichung, in der der Wachstumsgrad der Population,  $r$ , periodisch zwischen zwei Werten  $A$  und  $B$  schwankt.

Abbildung: Ljapunow-Fraktal mit der Sequenz AB

Ljapunow-Diagramme beschreiben die Intensität der Ordnung und des Chaos eines jeden Wertes einer chaotischen Gleichung im zweidimensionalen Raum.



### Fraktale ... Punktmenge mit "bizarren" Eigenschaften

Eine Punktmenge  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt, nach Falconer, ein Fraktal, wenn gilt:

1.  $F$  hat eine Feinstruktur, d.h. sie zeigt auf beliebig kleinen Skalen noch Struktur
2.  $F$  ist irregulär, um lokal oder global mit der Euklidischen Geometrie beschrieben werden zu können
3.  $F$  zeigt exakte oder angenäherte Selbstähnlichkeit
4.  $F$  hat eine fraktale, gebrochene, Dimension, die meist die Euklidische übersteigt.  $F$  kann auf einfache Weise definiert werden, meist rekursiv.

### Fraktale Dimension

$M$  sei beschränkte Menge. Minimalzahl der zur Überdeckung von  $M$  benötigten Kugeln mit dem Radius  $\varepsilon$  sei  $N(\varepsilon)$ .

Existiert die reelle Zahl  $\alpha$  mit

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^\alpha \cdot N(\varepsilon) = \infty, \text{ falls } \alpha < d \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^\alpha \cdot N(\varepsilon) = 0, \text{ falls } \alpha > d$$

so heißt  $d$  Box-Counting-Dimension oder Hausdorff-Dimension von  $M$ .

Das Verfahren zur empirischen Bestimmung von Hausdorff-Dimensionen mittels eines Gitters bestimmter Maschenweite heißt Box-counting-Algorithmus.

Zerfällt eine selbstähnliche Menge bei einer zentrischen Streckung mit einem Streckfaktor  $k = 1/r$  in  $N$  gleichartige Teile, so ist die fraktale Dimension  $D = \ln N / \ln (1/r)$

Komplexe selbstähnliche Objekte besitzen i.a. eine gebrochene Hausdorff-Dimension. Deshalb werden sie auch Fraktale (engl. fraction = Bruch) genannt.

### Beispiele:

Koch-Kurve  $D = \ln 4 / \ln 3 = 1,2618595$

Cantor-Menge  $D = \ln 2 / \ln 3 = 0,6309297$

Hilbert-Kurve  $D = \ln 4 / \ln 2 = 2$

Sierpinski-Dreieck  $D = \ln 3 / \ln 2 = 1,5850$

### Natürliche Fraktale

Eine andere Definition der fraktalen Dimension, die aber zum gleichen Ergebnis führt, ist aus dem Studium von natürlichen fraktalen Kurven *entstanden*.

Als Beispiel soll die Bestimmung der Länge  $L$  einer Küstenlinie dienen. Man kann versuchen, eine grobe Näherung für  $L$  zu erhalten, indem man auf einer Karte die Küstenlinie mit einem relativ großen Längenstab "abgreift", z.B. wie im folgenden Bild:

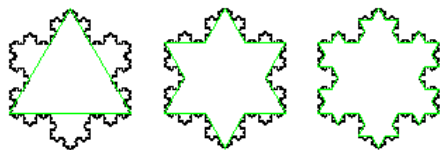


Sei nun  $s$  die Länge des Stabes und  $L(s)$  die Länge des Polygonzuges. Ist etwa im Bild  $s = 1$  gewählt, so ist  $L(1) = 11$ .  $L(s)$  als Näherung für  $L$  aufzufassen, zudem mit der Vorstellung, dass  $\lim_{s \rightarrow 0} L(s) = L$  für  $s \rightarrow 0$ , führt aber in die Irre. Denn tatsächlich strebt  $L(s)$  für  $s \rightarrow 0$

gegen Unendlich.

Eine endliche Küstenlänge gibt es also eigentlich nicht. Welche Länge einer Küste zugeschrieben wird, hängt von der Feinheit des Messinstrumentes ab. Nun stößt man aber bei tatsächlichen Vermessungen immer wieder auf eine Regelmäßigkeit, nämlich  $L(s) = k \cdot s^{1-D}$  mit Konstanten  $k > 0$  und  $D > 1$ , die von der Küstengestalt abhängen. Dieses  $D$  entpuppt sich als die oben beschriebene fraktale Dimension, wenn man das Verfahren mit den Längenstäben auf "determinierte" Fraktale anwendet. Im nächsten Bild wird

die Koch'sche Schneeflocke mit Längenstäben (in Grün) der Maße  $s = 1, 1/3, 1/9$  abgegriffen:

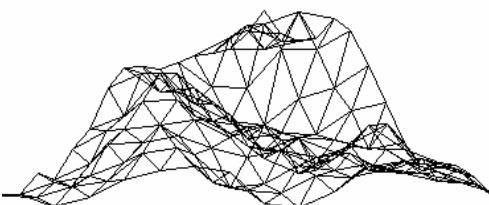


Hier wurde  $s = (1/3)^n$  gewählt. Weiter oben sind die zugehörigen Längen der Polygonzüge schon angegeben worden:  $L(s) = 3 \cdot (4/3)^n$ . Wegen  $n = -\log s / \log 3$  und der

Logarithmusregel  $a^{\log b} = b^{\log a}$  ist  $L(s) = 3 \cdot s^{\log 3/4 / \log 3} = 3 \cdot s^{(\log 3 - \log 4) / \log 3}$ . Daher ist hier  $k = 3$  und  $D = \log 4 / \log 3$ . Also ist gerundet  $L(s) = 3 \cdot s^{-0.26}$ .

Für etliche Küsten auf der Erde wurden die fraktalen Dimensionen ermittelt. Es ist nicht verwunderlich, dass es Küsten unterschiedlicher "Rauheit" gibt. Hier sind drei Beispiele: Australien  $D = 1.13$ ; Großbritannien  $D = 1.25$ ; Norwegen  $D = 1.52$ .

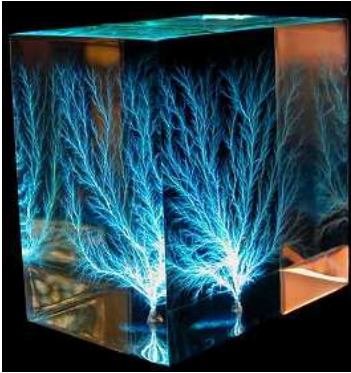
Küsten sind also keine eindimensionalen Kurven, sondern fraktale Gebilde wie die Koch'sche Schneeflocke.



### Fraktales Gebirge, fraktale Landschaft

Objekte aus der Natur können durch fraktale Darstellungen realistisch angenähert werden.

Geht man von einem Dreieck im  $\mathbb{R}^3$  aus, fügt in dieses 4 kleinere Dreiecke ein, wiederholt diesen Prozess mehrfach, so ergibt sich das Modell eines Gebirges.



### Lichtenberg-Figur, Lichtenberg-Struktur

Lichtenberg-Figuren sind schöne, baum-, farn- oder sternförmige Muster, die in isolierenden Materialien durch elektrische Hochspannungsentladungen entstehen.

Sie sind nach dem deutschen Physiker und Mathematiker Georg Christoph Lichtenberg benannt, der sie als zweidimensionale Muster in seinem Labor entdeckte, als sie sich im Staub auf der Oberfläche einer geladenen Isolatorplatte bildeten.

Zu jener Zeit nahm man an, dass das verästelte Erscheinungsbild dieses elektrostatischen Phänomens, Aufschluss über die Natur des elektrischen Flusses geben könne. Lichtenberg-Figuren entstehen typischerweise durch die Entladung bzw. Umverteilung von sich auf der Oberfläche von

Isolatorplatten befindlichen Ladungen.

Die der Bildung der Lichtenberg-Figuren zugrundeliegenden physikalischen Prinzipien sind dieselben, auf die sich die moderne Elektrofotografie begründet, die heute in Kopiergeräten wie Fotokopierern und Laserdruckern eingesetzt werden.

### Selbstähnlichkeit, Skaleninvarianz

Eine Menge  $A$  heißt selbstähnlich, wenn endlich viele Teilmengen  $A_1, A_2, \dots, A_n$  von  $A$  und Ähnlichkeitstransformationen  $T_1, T_2, \dots, T_n$  derart existieren, dass

$$A = T_1(A_1) \cup T_2(A_2) \cup \dots \cup T_n(A_n)$$

Beispiel eines selbstähnlichen Farnblattes:

Die Fiederung setzt sich aus Teilblättern zusammen. Bis auf einen Verkleinerungsfaktor (Skalierung) sind diese identisch mit dem Gesamtblatt. Diese gilt wiederum auch für die Fiederung der Teilblätter.

### Ähnlichkeitsabbildungen der Cantor-Menge

$$T_1(x) = x/3 \text{ und } T_2(x) = x/3 + 2/3$$

Ein Objekt heißt selbstähnlich, wenn es bei der Teilung der Kanten in  $r$  gleiche Abschnitte in  $N$  gleiche Teile zerfällt.

Streckfaktor  $k = 1/r$  fraktale Dimension  $D = \ln N / \ln (1/r)$   $N * r^D = 1$



### Chaos, deterministisches

Abbildung: "Chaos" von Leonardo da Vinci, 1514

Der Begriff des (deterministischen) Chaos in der nichtlinearen Dynamik hat nur wenig mit dem komplexen oder sogar regellosen Durcheinander zu tun, das er umgangssprachlich bezeichnet.

Vielmehr geht es dabei um Systeme, deren zeitliche Entwicklung mehr oder weniger einfachen Bewegungsgleichungen folgt (z. B. die vorgestellten Gleichungen des Pendels oder Lorenzsystems).

Wenn man diese Gleichungen und einen vollständigen Satz von Anfangsbedingungen (z.B. die Parameter  $X, Y$  und  $Z$  des Lorenzsystems zur Zeit  $t = 0$ ) kennt, kann man durch Integration der Bewegungsgleichungen im Prinzip die Systementwicklung für alle Zukunft berechnen, d.h. vorhersagen (oder auch in die Vergangenheit zurückrechnen) - das Systemverhalten ist determiniert.

Die Anfangsbedingungen lassen sich allerdings nie beliebig genau bestimmen, ihre Messung unterliegt der Messgenauigkeit der verwendeten

Methode, der auch bei größter Anstrengung letztlich durch die Heisenbergsche Unschärferelation eine prinzipielle Grenze gesetzt ist. Oft beeinträchtigt dieser Messfehler die Genauigkeit der berechneten zukünftigen Systementwicklung kaum.

Bei deterministisch-chaotischem Systemverhalten jedoch führt er zu einem im zeitlichen Mittel exponentiellen Auseinanderlaufen von vorhergesagter und tatsächlicher Trajektorie.

Ebensowenig, wie sich die Anfangsbedingungen beliebig genau messen lassen, gelingt es, mehrere ansonsten identische chaotische Systeme mit den exakt gleichen Anfangsbedingungen zu präparieren. Nach Verstreichen einer Zeit, die von den Systemparametern, aber auch von den Anfangsbedingungen selbst abhängt unterscheiden sich die Zustände der einzelnen Systeme völlig, da die minimalen Differenzen der Systemparameter mit der Zeit wieder im Mittel exponentiell anwachsen.

Diese Systemeigenschaft nennt man sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen. Sie ist das wesentliche Merkmal des deterministischen Chaos.

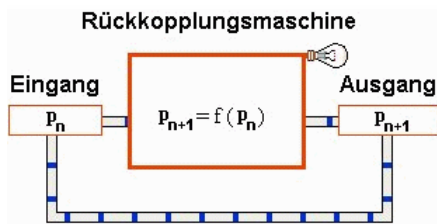
Die Untersuchung des deterministischen Chaos im beschriebenen Sinn ist Gegenstand der nichtlinearen Dynamik.

### Chaos-System

Folgende Eigenschaften eines dynamischen Systems werden i.a. als kennzeichnend angesehen:

1. Der Bereich des Phasenraums, der von den Trajektorien angelaufen wird, ist beschränkt.
2. Die Trajektorien sind nicht periodisch.

3. Ein Attraktor des Systems hat i.a. fraktale Dimension.
  4. Das System hängt empfindlich von den Anfangsbedingungen ab. D.h. die Trajektorien zweier beliebig benachbarter Anfangszustände divergieren nach endlicher Zeit.
- Die Divergenzrate kann mithilfe des Ljapunow-Exponenten gemessen werden.



### Autonomes System

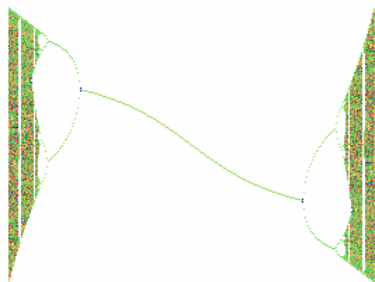
Ein dynamisches System heißt autonom, wenn es nicht explizit von der Zeit abhängt. Autonome Systeme haben gegenüber heterogenen folgende Vorteile:

1. Die Trajektorien sind eindeutig festgelegt durch die Anfangsbedingungen
2. Die Trajektorien können sich nicht schneiden.

### Feigenbaum-Diagramm

Iteration über  $p = p f(x)$ , z.B.  $p = x * (p^2 - 1)$

Ist eine Gleichung der Form  $f(x)=0$  gegeben, so kann eine Nullstelle über Iteration, z.B. mit dem Newton-Verfahren; bestimmt werden. Die Konvergenzgeschwindigkeit hängt dabei entscheidend vom Startwert  $x_0$  ab. Allerdings gibt es auch Funktionen und Anfangswerte bei denen die Iteration divergiert oder ganz andere Eigenschaften demonstriert.



An Hand des Iterationsgraphens kann das Verhalten der Funktion abgelesen werden. Bereiche der Konvergenz; es entsteht nur 1 Funktionswert; Bereiche der Periodizität (2, 4, 8, ... Werte) und chaotische Bereiche (Divergenz !) sind festzustellen. Das Beispiel konvergiert von  $x=-1$  bis  $x=1$ . Ab  $x=1.3$  sind zuerst 2 später 4 Werte abzulesen, zwischen den die Funktion oszilliert. Der Abstand zwischen den Punkten dieser Verdoppelung nimmt ständig um einen Faktor ab. Dieser strebt gegen einen Grenzwert, die Feigenbaum-Konstante = 4.699201660910299097...

Dieser Wert ist eine Naturkonstante und allem Anschein nach so bedeutend wie die Kreiszahl oder die Eulersche Zahl  $e$ . Die

Verzweigungspunkte (Bifurkations-Punkte, von lat. furca=gabel) treten gerade an den Stellen auf, an denen zugeordnete Mandelbrotmengen ihr Aussehen verändern. Die entstehenden graphischen Gebilde nennt man nach ihrem Entdecker Mitchell Feigenbaum Feigenbaum-Diagramme.

Abbildung: Für einen Startwert von  $P=0.5$  und den Standardeinstellungen wird hier die Iteration über der Gleichung  $P=X*(P*P-1)$  durchgeführt.

### Feigenbaum-Konstante

$$\delta = \lim (s_n - s_{n-1}) / (s_{n-1} - s_{n-2})$$

$s_i$  ... superattraktive Parameter;

$$s_1 = 2; s_2 = 1 + \sqrt{5} = 3.236067978...$$

Näherung mittels Newton-Verfahren

$$s_n \approx N(a) = a - g(a) / g'(a)$$

Berechnung der Funktionswerte  $g(a)$ ,  $g'(a)$  für  $N = 2^{n-1}$

$$g(a) = x_N - 1/2$$

$$g'(a) = x'_N$$

Die  $x_i$  und  $x'_i$  sind Näherungen der Rekursion

$$x_{k+1} = a x_k (1 - x_k); x'_{k+1} = x_k (1 - x_k) + a (1 - 2x_k) x'_k; x_0 = 1/2 \text{ und } x'_0 = 0 \text{ für } k=0, \dots, N-1$$

Anfangsschätzwert für  $a = s_{n+1}$

$$s_{n+1} = s_n + (s_n - s_{n-1}) / \delta_n$$

### Näherung der Feigenbaumkonstante

$$\delta_n = (s_n - s_{n-1}) / (s_{n-1} - s_{n-2})$$

Anfangsschätzung  $\delta_2 = 4$

Eine Rechnergenauigkeit von 18 Stellen ermöglicht die Berechnung auf maximal 9 Stellen !

### Tabelle der Näherungen

|      |                          |                                 |
|------|--------------------------|---------------------------------|
| n=3  | s = 3.498561699330348210 | $\delta = 4.708943013493023640$ |
| n=4  | s = 3.554640862768824870 | $\delta = 4.680770998278802880$ |
| n=5  | s = 3.566667379856268510 | $\delta = 4.662959610894031280$ |
| n=6  | s = 3.569243531637110340 | $\delta = 4.668403925918399630$ |
| n=7  | s = 3.569795293749944620 | $\delta = 4.668953740967627760$ |
| n=8  | s = 3.569913465422348510 | $\delta = 4.669157181328856740$ |
| n=9  | s = 3.569938774233305490 | $\delta = 4.669191002484840300$ |
| n=10 | s = 3.569944194608064930 | $\delta = 4.669199470548766980$ |
| n=11 | s = 3.569945355486468590 | $\delta = 4.669201134576838590$ |
| n=12 | s = 3.569945604111078440 | $\delta = 4.669201509645291840$ |
| n=13 | s = 3.569945657358856500 | $\delta = 4.669201587299666310$ |
| n=14 | s = 3.569945668762899970 | $\delta = 4.669201602829750400$ |
| n=15 | s = 3.569945671205296850 | $\delta = 4.669201622952224960$ |

... ab der 16.Näherung verschlechtert sich der Wert; genauerer Näherungswert  $\delta = 4.699201660910299097 \dots$

### Näherung Feigenbaumkonstante

Merkwürdigerweise gibt es erstaunlich gute Näherungen für die Feigenbaumkonstante:



### 1.) nach Stoschek

$$\delta \approx 4 * (1 + 12^2/163 + (4*12^2+31)/(4*163^2) + \dots) / (1 + 10^2/163 + (10^2+30)/163^2 + \dots) \approx 4.66920160933975$$

$$2.) \delta \approx \pi + \tan^{-1}(e^\pi) = 4.669201932 \dots$$

### Feigenbaumkonstanten höherer Ordnung

... bei Iteration über die Funktion  $f(x) = 1 - a|x|^n$  ergeben sich nach Briggs (1991) die Feigenbaum-Konstanten n.Ordnung zu

| n | $\delta$                 | n | $\delta$   |
|---|--------------------------|---|------------|
| 1 | 4.699201660910299097 ... | 2 | 5.9679 ... |
| 4 | 7.2846 ...               | 6 | 8.3494 ... |
| 8 | 9.2962 ...               |   |            |

### Feigenbaumkonstante

Im März 1999 ermittelte Keith Briggs nach 3 Tagen Rechenzeit auf einem 433 MHz DECalpha durch Auswertung von 700 Attraktionspunkten die Feigenbaumkonstante auf 1018 Dezimalziffern genau. Die Ziffernfolge ist

$\delta = 4,6692016091029906718532038204662016172581855774757686327456513430$   
0413433021131473713868974402394801381716598485518981513440862714  
2027932522312442988890890859944935463236713411532481714219947455  
6443658237932020095610583305754586176522220703854106467494942849  
8145339172620056875566595233987560382563722564800409510712838906  
1184470277585428541980111344017500242858538249833571552205223608  
7250291678860362674527213399057131606875345083433934446103706309  
4520191158769724322735898389037949462572512890979489867683346116  
2688911656312347446057517953912204556247280709520219819909455858  
1946136877445617396074115614074243754435499204869180982648652368  
4387027996490173977934251347238087371362116018601281861020563818  
1835409759847796417390032893617143215987824078977661439139576403  
7760537119096932066998361984288981837003229412030210655743295550  
3888458497370347275321219257069584140746618419819610061296401614  
8771294441590140546794180019813325337859249336588307045999993837  
5411726563553016862529032210862320550634510679399023341675...

### Attraktor

Ein Attraktor eines dynamischen System  $f^t$  ist nach J.P.Eckmann eine kompakte Menge  $A$  mit folgenden Eigenschaften:

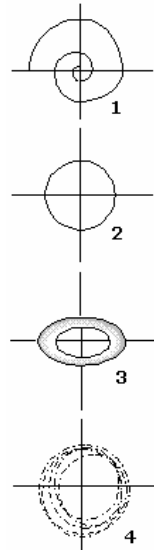
1.  $A$  ist invariant unter  $f^t$ :  $f^t(A) = A$
2.  $A$  hat eine offene Umgebung, die sich unter  $f^t$  auf  $A$  zusammenzieht:  $\lim_{t \rightarrow \infty} f^t(A) = A$
3.  $A$  hat keine Untermenge, die transient ist.  $A$  kann nicht in nichttriviale, kompakte und invariante Mengen zerlegt werden; d.h. kann nicht in separate Attraktoren zerlegt werden.

### Attraktionsgebiet

Das Attraktorgebiet oder Bassin eines Attraktors ist die offene Menge aller Anfangsbedingungen  $x(0)$ , für die gilt:  $\lim_{t \rightarrow \infty} f^t(x_0) \in A$

### Bahn, Trajektorie

Die Menge der Punkte  $\{f^t\}_{t=0}^{\infty}$  mit  $f(t_0) = x_0$  heißt Bahn, Orbit oder Trajektorie zur Anfangsbedingung  $x_0$ .



### Attraktoren

Seltsame Kurven, sogenannte Attraktoren (Seltsame Attraktoren, strange attractors), ergeben sich z.B. bei der Darstellung numerischer Lösungen von Systemen dreier gewöhnlicher Differenzialgleichungen bzw. der punktwweisen Darstellung rekursiver Folgen. Attraktoren sind Gebilde im Phasenraum. Der Phasenraum hat keine Ortskoordinaten, sondern beschreibt andere Zustandsfunktionen (eine Ordinate ist dann z.B. der Ort, die andere die Geschwindigkeit oder der Impuls). Die Bahn der Zustände (die durch Ort und Impuls gekennzeichnet sind), ist die Trajektorie. Trajektorien streben oft zu für sie typischen Gebieten. Diese "Anziehungsgebiete" sind die Attraktoren. Solche Gebiete können ein Punkt sein, oder ein Kreis (Grenzzyklus), oder Tori - sowie die sogenannten "seltsamen" Attraktoren:

### Typ Beispiel

Anziehungspunkt (Abbildung 1)

Pendel mit Reibung, ruhiges Wasser

Grenzzyklus, Widerstehen der Veränderung durch Rückkopplung (Abbildung 2)

Pendel ohne Reibung, Raubtier-Beute-System, Wirbel im schnelleren Wasser

### Torus, gekoppelte Bewegung von zwei Oszillatoren (Abbildung 3)

Insekten-Frosch-Zyklus gekoppelt mit Forellen-Hecht-Zyklus, Planetenbewegung  
selbstähnliche Kaskaden von Lücken

### seltsamer Attraktor - CHAOS - kleine Startabweichungen große Unterschiede (Abbildung 4)

nichtperiodische Attraktoren = Fraktale mit gebrochener Dimensionalität

Turbulenz (Wasser), Wetter (Lorenz 1960)

Physikalisches Beispiel:

Die laminare Strömung von Wasser bei kleinen Geschwindigkeiten fließt glatt dahin und gleicht Störungen schnell aus. Der Attraktor ist der Punkt der konstanten Wassergeschwindigkeit.

Beim rascheren Fließen treten durch Wirbel stabile Wirbel auf. Durch die sog. Hopf-Instabilität (E. Hopf 1948) geschieht ein Umschlagen zu Grenzzyklen und bei weiterem Geschwindigkeitsanstieg wird der Attraktor ein Torus.

Es wäre nun zu erwarten, dass bei weiterer Geschwindigkeitserhöhung Tori weiterer Dimensionen erreicht werden. In der Realität jedoch passiert etwas anderes:

Ruelle und Takens erkannten 1972, dass bei einer weiteren Geschwindigkeitssteigerung der Torus plötzlich "zerspringt". Es entsteht ein "seltsamer" Attraktor, bei dem durch die Rückkopplung zwischen den einzelnen "Stücken" immer neue Stücke entstehen. Es entsteht eine turbulente Strömung, die ein Abbild für das sog. "Turbulente Chaos" (Schlemm) ist.

### Seltsame Attraktoren

Durch Robin S. Chapman wurde das Gedicht "Strange Attractors" ("Seltsame Attraktoren") geschrieben:

How to find them, those regions  
Of space where the equation traces  
Over and over a kind of path,  
Like the moth that batters its way  
Back toward the light  
Or, hearing the high cry of the bat,  
Folds its wings in a rolling dive?  
And ourselves, fluttering toward and away  
In a pattern that, given enough  
Dimensions and point-of-view,  
Anyone living there could plainly see—  
Dance and story, advance, retreat,  
A human chaos that some slight  
Early difference altered irretrievably?  
For one, the sound of her mother

Crying. For this other,  
The hands that soothed  
When he was sick. For a third,  
The silence that collects  
Around certain facts. And this one,  
Sent to bed, longing for a nightlight.  
Though we think this time to escape,  
Holding a head up, nothing wrong,  
Finding a way to beat the system,  
Talking about anything else—  
Travel, the weather, time  
At the flight simulator—for some  
The journey circles back  
To those strange, unpredictable attractors,  
Secrets we can neither speak nor leave.

### Rössler-Attraktor

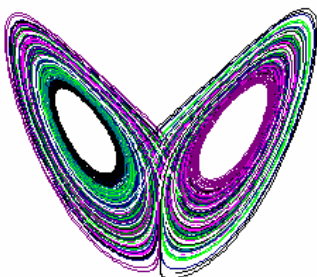
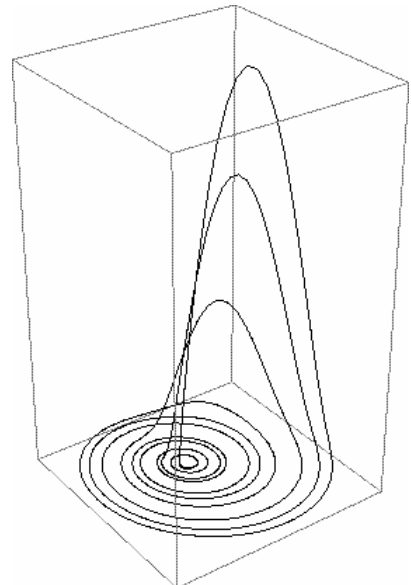
$$\begin{aligned} dx/dt &= -y - z & dy/dt &= x + a*y \\ dz/dt &= b*x - c*z + x*z \end{aligned}$$

### Rössler-Attraktor 2

$$\begin{aligned} dx/dt &= y + a*x & dy/dt &= -x - z \\ dz/dt &= b*y - c*z + y*z \end{aligned}$$

Der deutsche Mediziner Otto Rössler fand dieses System nach dem er von Lorenz und seinem Attraktor erfuhr. Über seinen Attraktor sagt Rössler selbst:

*"Er ist wie ein offener Strumpf mit einem Loch am Ende und der Wind bläht ihn auf. Dann sitzt der Wind in der Falle. Gegen ihren Willen bewirkt die Energie nun etwas Produktives, so wie der Teufel in mittelalterlichen Geschichten. Das Prinzip ist, dass die Natur etwas gegen ihren eigenen Willen tut und durch Selbstverwirklichung Schönheit hervorruft."*



Dieses System wird in den meisten einführenden Schriften über Chaostheorie beschrieben.

Darüberhinaus wird es oft als Testsystem für nichtlineare Methoden verwendet.

Der Grund für die Beliebtheit dieses Systems ist seine Verwandtheit mit dem Lorenz-System. Das Rössler-System zeigt auch die wichtigsten typischen Eigenschaften chaotischer Systeme: einen seltsamen Attraktor, Übergang ins Chaos durch Periodenverdopplung, Streckung und Faltung des Attraktors, usw.

## Lorenz-Attraktor

Der Lorenz-Attraktor kann (bei Wahl entsprechender Parameter, z.B.  $a=10$ ,  $b=28$  und  $c=2.5$ ) in zwei markante Bereiche eingeteilt werden.

Meist verweilt die Kurve längere Zeit in einem Bereich, um dann plötzlich und unvorhersehbar die Seite zu wechseln. Dieses chaotische Verhalten ist gut zu beobachten.

Der Lorenz-Attraktor stellt eine sehr gute Simulation der Bewegung einer Masse in einem von zwei weiteren (größeren) Massen aufgespannten Gravitationsfeld dar. Gefunden wurde dieses Fraktal durch Lorenz bei der Simulation von Wettervorhersage-Systemen und ging unter der Bezeichnung "Schmetterlings-Effekt" in die mathematische Geschichte ein.

$$dx/dt = a*(y - x)$$

$$dy/dt = b*x - y - x*z$$

$$dz/dt = x*y - c*z$$

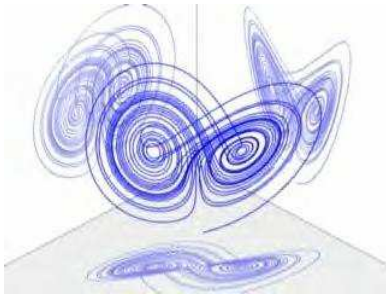
## Lorenz-Attraktor 2

$$dx/dt = (-a-1)*x + (a-b)*y + (1-a)*\text{norm} + y*z$$

$$dy/dt = (b-a)*x - (a+1)*y + (b+a)*\text{norm} - x*z - \text{norm}*z$$

$$dz/dt = y/2 - c*z$$

$$\text{norm} = \sqrt{(x^2+y^2)}$$



## Schmetterlingseffekt, Butterfly effect

Als Schmetterlingseffekt (butterfly effect) ist die Erscheinung, dass in komplexen, nichtlinearen dynamischen Systemen eine große Empfindlichkeit auf kleine Abweichungen in den Anfangsbedingungen besteht. Geringfügig veränderte Anfangsbedingungen können im langfristigen Verlauf zu einer völlig anderen Entwicklung führen.

Der Begriff Schmetterlingseffekt stammt von dem US-amerikanischen Meteorologen Edward N. Lorenz, der 1972 in einem Vortrag über ein meteorologisches Berechnungssystem mit der Frage "Kann der

Flügel Schlag eines Schmetterlings in Brasilien einen Tornado in Texas auslösen?" für Aufsehen sorgte. Ursprünglich sprach Lorenz aber vom Flügel Schlag einer Möwe statt eines Schmetterlings.

Die Fragestellung ist unklug gewählt, da viele Menschen den Schmetterlingseffekt als Synonym für einen Schneeballeffekt ansehen, bei dem kleine Effekte sich über eine Kettenreaktion selbst verstärken.

Diese Aussage hat Lorenz nicht getroffen. Vielmehr zeigte er, dass kleine Abweichungen langfristig ein ganzes System vollständig und unvorhersagbar verändern können.

Bei einer ersten Berechnung seines Lorenz-Attraktors verwendete er einen auf sechs Stellen genauen Wert, bei der zweiten Berechnung einen auf drei Stellen genauen. Obwohl die Abweichung nur etwa  $1/10000$  betrug, wich die Berechnung mit der Zeit von der ersten stark ab.

## Henon-Attraktor

$$x = y - a * x^2 + 1$$

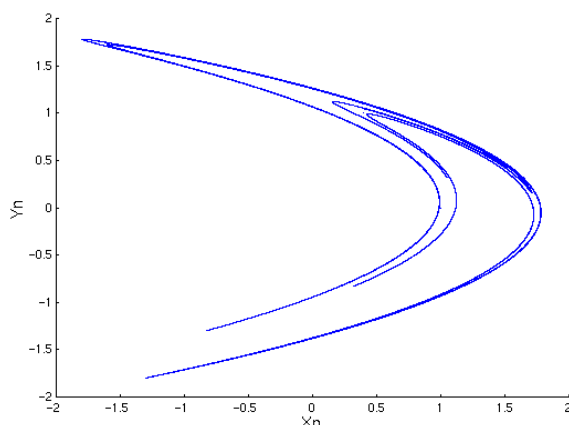
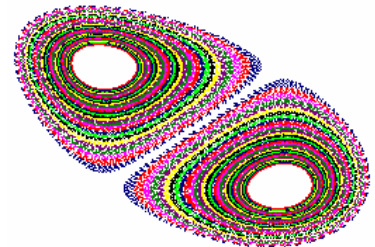
$$y = b * x$$

Abbildung für  $a=0.01$  und  $b=0.99995$ , 50000 Iterationen

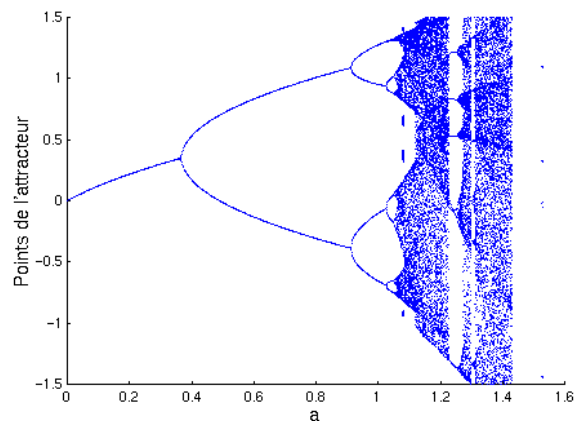
Der Hénon-Attraktor eignet sich gut, um zwei wesentliche Charakteristika chaotischer Systeme zu veranschaulichen. Das erste ist die sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen.

Systeme, die die gleichen Systemparameter haben, sich aber in den Anfangsbedingungen unterscheiden, und sei es noch so geringfügig, bewegen sich im Laufe der Zeit auseinander - und zwar im zeitlichen Mittel sogar exponentiell.

Die zweite Eigenschaft heißt Ergodizität. Vereinfacht gesprochen verteilt sich eine große Anzahl gleicher Systeme, die zwar die gleichen Systemparameter, aber unterschiedliche Startpunkte hatten, ein sogenanntes "statistisches Ensemble", nach Ablauf einer hinreichend langen Zeit zu einem ansonsten beliebigen Zeitpunkt ebenso auf dem Attraktor wie die Folge der Iterationen eines einzigen, fast beliebigen Startpunktes.



Henon-Attraktor für  $a = 1.4$  und  $b = 0.3$



Feigenbaum-Diagramm des Henon-Attraktors

Völlig verblüffend ist, dass der Henon-Attraktor bei folgendem realen Experiment auftaucht. Untersucht man einen tropfenden Wasserhahn, so stellt man fest, dass der zeitliche Abstand fallender Tropfen scheinbar völlig chaotisch verteilt ist. Bei einer hinreichend langen Beobachtungszeit zeigt sich aber, dass die Zeitabstände sich entsprechend dem Henon-Attraktor verteilen.

**Einfluss des Parameters a:** für  $-0.1225 < a < 0.3675$  konvergiert der Attraktor auf einen Punkt der Ebene, für  $0.3675 < a < 0.9$  existieren zwei Kontraktionspunkte, für  $0.9 < a < 1.02$  kommt es zu einer weiteren Periodenverdopplung, für  $a = 1.4$  geht das System endgültig in den chaotischen Zustand über



### Tomita-Attraktor

Von Tomita und Kai wurde die Brusselator-Gleichung um einen sinusförmigen Term ergänzt und 1987 in "Stroboscopic phase portrait und strange attractors" veröffentlicht:

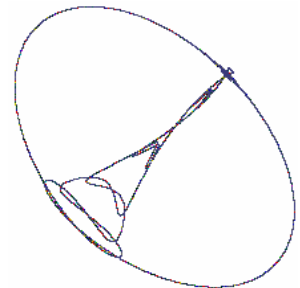
$$\frac{dx}{dt} = a + x^2y - bx - x - c \cos(ft) \quad \frac{dy}{dt} = bx - x^2y$$

Normalerweise werden die Werte  $a = 0,4$ ,  $b = 1,2$  und  $c = 0,05$  gewählt.

Für wachsende Werte von  $f$  erhält man Periodenverdopplungen, beginnend mit  $f = 0,8$ . Für  $f = 0,95$  wird schließlich Chaos erreicht.

### Metzler-Attraktor

Von Metzler und anderen wurde durch nichtlineare Kopplung der logistischen Gleichung ein Attraktor gefunden. Veröffentlicht wurde dies in Metzler W./Beau



W. "Symmetry and selfsimilarity with coupled logistic maps".

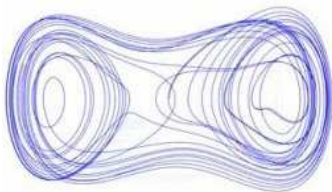
Iterationsgleichungen

$$x = x + h(x - x^2 + y) \quad y = y + h(y - y^2 + x), \quad h = 1,678$$

Die Gleichung entsteht aus der gekoppelten, zweiparametrigen logistischen Gleichung durch die Transformationen

$$x \rightarrow h/(1+h) x \quad y \rightarrow h/(1+h) y \quad r \rightarrow 1+h$$

Ab  $r = 1,684$ , d.h.  $h = 0,684$ , tritt der Attraktor auf. Für  $h = 0,6$  kommt es zu einer Hopf-Bifurkation. Bei  $h = 0,65$  beginnt das Chaos. Der entstehende Attraktor ist dem Eiffelturm ähnlich und wird daher auch Tour Eiffel de Cassel nach der Institutsstadt Kassel genannt.



### Duffing-Attraktor

Der sinusförmig angeregte Duffing-Oszillator wurde von Ueda untersucht in "Explosion of strange attractors exhibited by Duffings equation".

Duffing-Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + x^3 = b \cos t \quad \frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = -ay - x^3 + b \cos t$$

Für die Parameter gilt  $0 < a < 1$  und  $0 < b < 35$ . Für  $a = 0,2$  und  $b = 16,5$  tritt periodisches Verhalten auf, für  $B = 30,75$  chaotisches Verhalten.

### Martin-Attraktor

$$x = y \cdot (1 + \sin(a \cdot x)) - b \cdot \sqrt{|x|} \quad y = c - x \quad a = 0,25, b = 0,3$$

### Ueda-Attraktor

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = a(1 - x^2)y - x^3 + b \cos(ft)$$

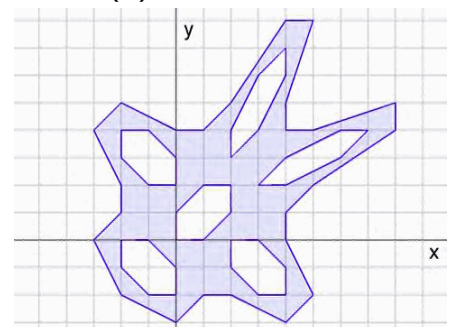
### Gingerbread-Attraktor / Pfefferkuchenmann Attraktor

Von L. Levaney 1988:  $x = 1 - y + |x|$   $y = x$

Die chaotische Abbildung füllt die Ebene und lässt 6 sechseckigen Figuren frei. Die Eckpunkte des inneren Sechsecks sind  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(1, 2)$  und  $(0, 1)$ .

Trägt man die Umrisse des Pfefferkuchenmanns in ein

Koordinatensystem ein, so stellt man fest, dass die Eckpunkte völlig symmetrisch sind.



### Mira-Abbildung

$$x = by + F(x) \quad y = -x + F(x_{neu})$$

$$F(x) = ax - 2(1-a)x^2 / (1+x^2)$$

### Rayleigh-Gleichung

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = (y - y^3/3) - x + f \cos z \quad \frac{dz}{dt} = \omega$$

### Twist-Map

$$x_{n+1} = x_n \cos a - y_n \sin a$$

$$y_{n+1} = x_n \sin a - y_n \cos a$$



### Standard-Abbildung

$$x_{n+1} = x_n + y_n + \varepsilon \sin x_n \quad y_{n+1} = y_n + \varepsilon \sin x_n$$

### McKay-Abbildung

$$x_{n+1} = -y_n + f(x_n) \quad y_{n+1} = x_{n+1} - f(x_{n+1})$$

### Sinai-Gleichung

$$x_{n+1} = x_n + y_n + g/(2\pi) \cos(2\pi y_n) \bmod 1 \quad y_{n+1} = x_n + 2y_n \bmod 1$$

### Cat-Map-Abbildung

$$x_{n+1} = (x_n + y_n) \bmod 1 \quad y_{n+1} = (x_n + 2y_n) \bmod 1$$

### Baker-Map-Abbildung

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n, \text{ für } 0 \leq x_n \leq 0.5 &= 2x_n - 1, \text{ für } 0.5 < x_n \leq 1 \\ y_{n+1} &= 0.5y_n, \text{ für } 0 \leq x_n \leq 0.5 &= 0.5(y_n + 1), \text{ für } 0.5 < x_n \leq 1 \end{aligned}$$

### van-der-Pol-Abbildung

1926 entwickelte der niederländischen Physiker Balthasar van der Pol einen Röhrengenerator. Dieser Oszillator wird durch die Gleichungen

$$L_1 dI/dt + RI + U_g - L_2 dI_a/dt = U_e \cos 4\omega t$$

$$C dU_g/dt = 1$$

$$I_a = \alpha U_g (1 - U_g^2/(3\beta^2))$$

beschrieben.

Van der Pol verfolgte den Verlauf der Schwingungen mit Hilfe eines Telefonhörers. Dabei stellte er fest, dass sich der Ton kurzzeitig stabilisierte um dann sprunghaft von einer Frequenz zur nächsten zu wechseln. Manchmal jedoch, veränderte sich der Ton in unregelmäßigen Abständen völlig irregulär.

Während van der Pol diese Schwankungen als zufällig interpretierte, konnte 1949 durch Cartwright, Littlewood und Levinson gezeigt werden, dass hier ein chaotisches Verhalten vorliegt.

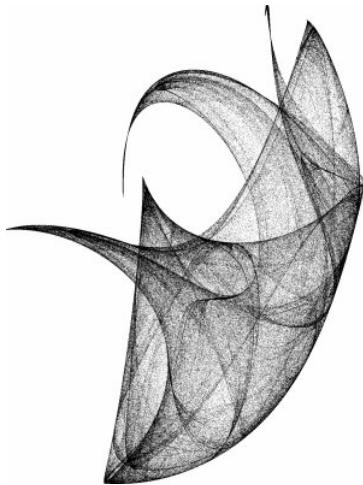
Das zugehörige System wird heute durch die van-der-Pol-Gleichung 2.Ordnung

$$d^2u/dt^2 + a(u^2-1) du/dt + u = k \cos \omega t$$

beschrieben, die in die Gleichungen

$$dy/dt = x \quad dx/dt = -a(y^2-1)x - y + k \cos \omega t$$

zerlegt werden kann. Die Abbildung zeigt einen zugehörigen Phasenplot.



### Pickover-Attraktor

Durch Clifford Pickover wurden drei Bildungsvorschriften entwickelt, die besonders reizvolle grafische Veranschaulichungen besitzen:

Die linke Abbildung wurde mit Formel 3 und den Parametern  $\alpha = 2$  und  $\beta = 1$  erzeugt.

Formel 1

$$(x,y) = (\sin(\beta y) + \sin(\beta x)^2 + \sin(\beta x)^3, \sin(\alpha x) + \sin(\alpha y)^2 + \sin(\beta y)^3)$$

Formel 2

$$(x,y) = (\sin(\beta y) + \sin(\beta x)^2 + \sin(\beta x)^3, \sin(\alpha x) + \sin(\alpha y)^2 + \sin(\alpha y)^3)$$

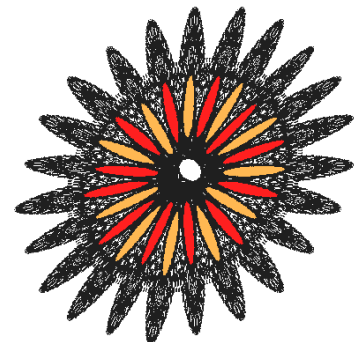
Formel 3

$$(x,y) = (\sin(\beta y) + \sin(\beta x)^2 + \sin(\beta x)^3, \sin(\alpha x) + \sin(\beta y)^2 + \sin(\beta y)^3)$$

Der **Kamtorus-Attraktor** stellt eine Serie von Attraktoren dar. Je Attraktor werden im Parameter a eingestellte Punkte gezeichnet. Parameter b gibt an, um

welchen Wert der Start des nächsten Attraktors erhöht werden soll.

Ausgangspunkt dieses Gebildes ist die quadratische Henon-Gleichung. Der Name "Kamtorus" bezieht sich auf das KAM-Theorem (Kolmogorov (1954), Arnold (1963), Moser (1973)). Ästhetisch sehr schöne Bilder erhalten Sie für die Parameter  $c = 1.3$  bzw.  $c = 1.5732$



### Hopalong-Attraktor, Hüpfer-Attraktor

Der Erfinder von Hopalong ist Barry Martin von der Aston University in

Birmingham/England. A. K. Dewdney beschrieb diese Fraktale im Magazin Scientific American im September 1986 und machte sie so bekannt

$$x = y - \operatorname{sgn}(x) * \sqrt{|b*x - c|} \quad y = a - x$$

INPUT num  
INPUT a,b,c

x ← 0

y ← 0

PLOT(x,y)

FOR i ← 1 TO num

xx ← y - SIGN(x) \* [ABS(b\*x - c)]<sup>1/2</sup>

yy ← a - x

x ← xx

y ← yy

In Dewdeys Aufsatz findet man das folgende Programm.

Erklärung:

Der Ausgangspunkt der Grafik ist der Punkt (x,y)=(0,0). Nach zwei getrennten

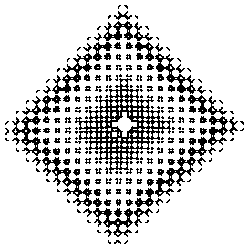
Formeln werden xx und yy berechnet. Dabei tauschen sich x und y aus. Dann wird zum Plotten "umgeladen". Das wiederholt sich bis num erreicht wird. Die Variable i

steht für einen Punkt, num ist die Anzahl der Punkte. Die Vorzeichenfunktion SIGN(x) ist gleich 1, wenn x>0, -1 wenn x<0 ist; SIGN(0)=0.

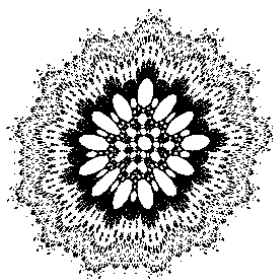
ABS(x) ist die Betragsfunktion und ermöglicht ein Wurzelziehen. Es gibt im

Programm vier Variable, die eine Figur bestimmen. Das sind die Parameter (a, b,

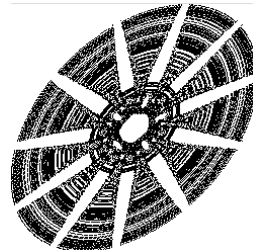
c) und die Anzahl der Punkte num. Im rechten Bild wurden  $a = 300$ ,  $b = 0.405$ ,  $c = 150$  und  $\text{num} = 600000$  gewählt. Weiter Bilder mit den Parametern  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\text{num}$  in Klammern:



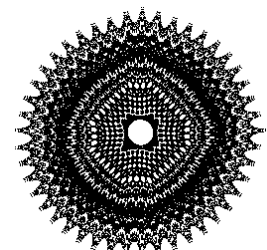
(150, 0.033, -80,  
2000000)



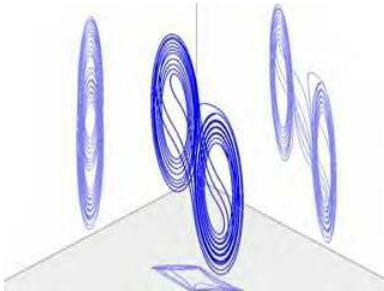
(150, 0.22761, 100,  
300000)



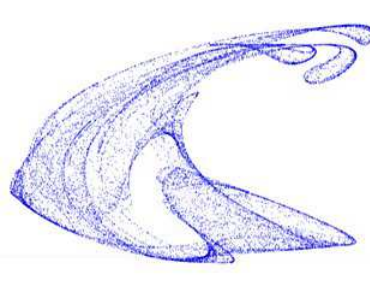
(500, 0.833, 120,  
40000)



(366, 0.07,  
50,1000000)



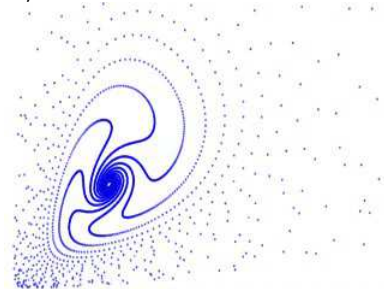
Chua-Attraktor  
 $\frac{dx}{dt} = a * (y - x - g(x))$   
 $\frac{dy}{dt} = b * (x - y + z)$   
 $\frac{dz}{dt} = -c * y$   
 $g(x) = e * x + (d+e) * (|x + 1| - |x - 1|)$   
 $a = 15.6$ ,  $b = 1.0$ ,  $c = 25.58$ ,  $d = -1$ ,  $e = 0$



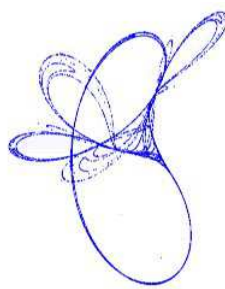
de Jong Attraktor  
 $x_{n+1} = \sin(a * y_n) - \cos(b * x_n)$   
 $y_{n+1} = \sin(c * x_n) - \cos(d * y_n)$   
 $a = 2.01$ ,  $b = -2.53$ ,  $c = 1.61$ ,  $d = -0.33$



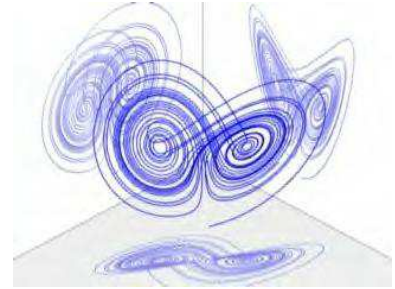
de Jong Attraktor  
 $x_{n+1} = \sin(a * y_n) - \cos(b * x_n)$   
 $y_{n+1} = \sin(c * x_n) - \cos(d * y_n)$   
 $a = 2.24$ ,  $b = 0.43$ ,  $c = -0.65$ ,  $d = -2.43$



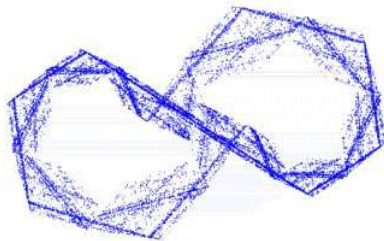
Metz-Attraktor  
 $x_{n+1} = a * x_n * \exp((1 - \sqrt{1 + y_n})/b)$   
 $y_{n+1} = a * x_n - x_{n+1}$   
 $a = 4.15$ ,  $b = 10$



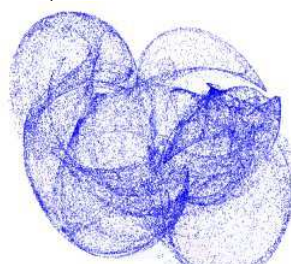
Tinkerbell Attraktor  
 $x_{n+1} = x_n^2 * y_n^2 + a * x_n + b * y_n$   
 $y_{n+1} = 2 * x_n * y_n - 2 * x_n + 0.5 * y_n$   
 $a = 0.9$ ,  $b = 0.6013$



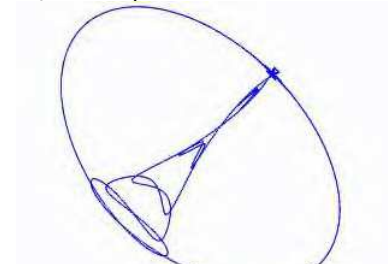
Lorentz-Attraktor  
 $\frac{dx}{dt} = a * (y - x)$   
 $\frac{dy}{dt} = b * x - y - x * z$   
 $\frac{dz}{dt} = x * y - c * z$



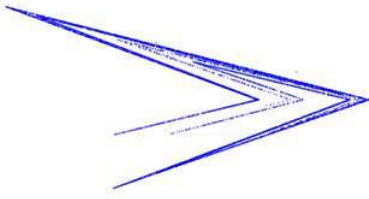
Strick Attraktor  
für  $|x_n| < 0.5$  gilt  
 $x_{n+1} = (2 - a) * x_n - b * y_n$   
 $y_{n+1} = -b * x_n + a * y_n$   
für  $|x_n| \geq 0.5$  gilt  
 $x_{n+1} = a * x_n - b * y_n + (1-a) * \text{sgn}(x_n)$   
 $y_{n+1} = b * x_n + a * y_n - b * \text{sgn}(x_n)$   
 $a = 0.5$ ,  $b = 1.1$



Pickover-Attraktor 1990  
 $x_{n+1} = \sin(a * y_n) - z_n * \cos(b * x_n)$   
 $y_{n+1} = z_n * \sin(c * x_n) - \cos(d * y_n)$   
 $z_{n+1} = x_n * \sin(a)$   
 $a = 2.24$ ,  $b = 0.43$ ,  $c = -0.65$   
 $d = -2.43$



Metzler-Attraktor  
 $x = x + h * (x - x^2 + y)$   
 $y = y + h * (y - y^2 + x)$   
 $h = 1.678$



Lozi-Gleichung

$$x_{n+1} = 1 + y_n - a |x_n|, \quad y_{n+1} = b x_n$$

$a = 1.7, b = 0.5$



Ikeda-Attraktor

$$z_{n+1} = a - b z_n e^{i(c - d/(1+z_n^2))}$$

$$x_{n+1} = a + b(x_n \cos t - y_n \sin t)$$

$$y_{n+1} = b(x_n \sin t + y_n \cos t)$$

mit  $t = c - d/(1+x_n^2+y_n^2)$   
 $a = 0.85, b = 0.90, c = 0.40, d = 9$

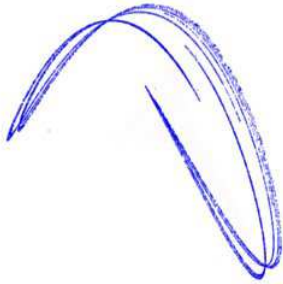


Kakadu Attraktor 1987 (Martin)

$$x_{n+1} = y_n * (1 + \sin(a x_n)) - b * \sqrt{|x_n|}$$

$$y_{n+1} = c - x_n$$

$a = 0.7, b = 1.2, c = 0.21$

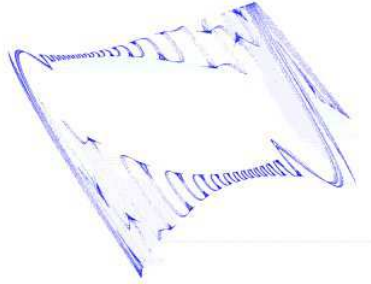


Lauwerier Attraktor

$$x_{n+1} = y_n$$

$$y_{n+1} = x_n - y_n + a * x_n * y_n - b * y_n^2$$

$a = 3, b = 2$

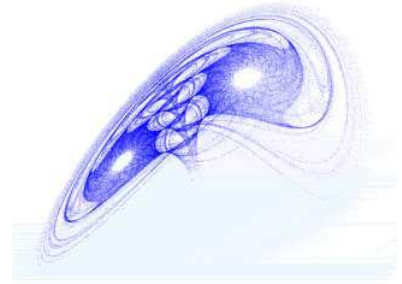


Quadratic Map Attraktor

$$x_{n+1} = a_1 + a_2 x_n + a_3 x_n^2 + a_4 x_n y_n + a_5 y_n + a_6 y_n^2$$

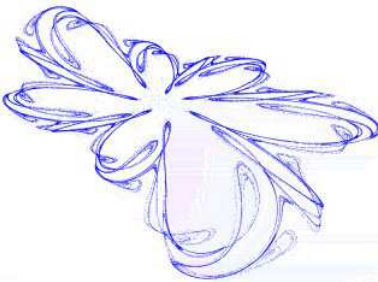
$$y_{n+1} = a_7 + a_8 x_n + a_9 x_n^2 + a_{10} x_n y_n + a_{11} y_n + a_{12} y_n^2$$

Code: AMTMNQXUYGA



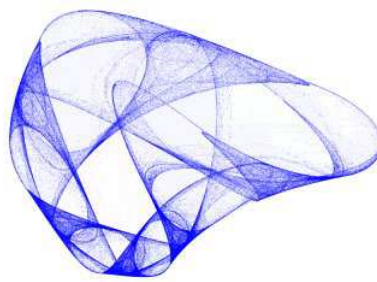
Quadratic Map Attraktor

Code: CVQKGHQTPHTE



Quadratic Map Attraktor

Code: FIRCDERRPVLD



Quadratic Map Attraktor

Code: GIIETPIQRRUL

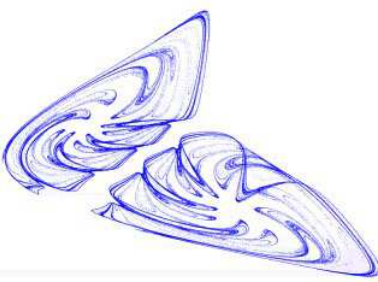


Cubic Map Attraktor

$$x_{n+1} = a_1 + a_2 x_n + a_3 x_n^2 + a_4 x_n^3 + a_5 x_n^2 y_n + a_6 x_n y_n + a_7 x_n y_n^2 + a_8 y_n + a_9 y_n^2 + a_{10} y_n^3$$

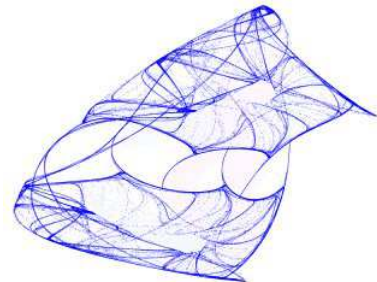
$$y_{n+1} = a_{11} + a_{12} x_n + a_{13} x_n^2 + a_{14} x_n^3 + a_{15} x_n^2 y_n + a_{16} x_n y_n + a_{17} x_n y_n^2 + a_{18} y_n + a_{19} y_n^2 + a_{20} y_n^3$$

Code: IRPGVTFIDGCSXMFPKIDJ



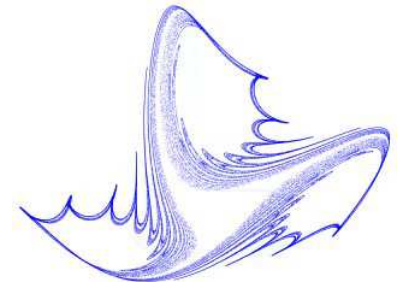
Cubic Map Attraktor

Code: ISMHQCHPDFKFBKEALIFD



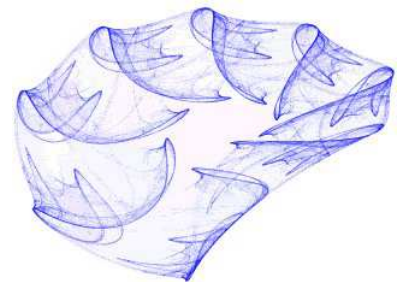
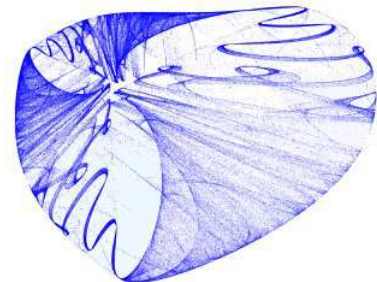
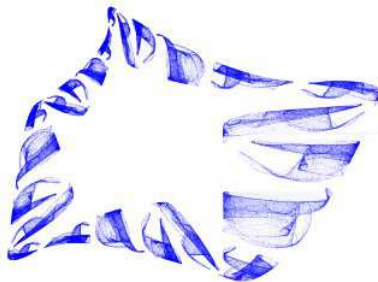
Cubic Map Attraktor

Code: JYCBMNFNYOEYPUGHESU



Cubic Map Attraktor

Code: LGROKJFELDGKXSUEEWEY



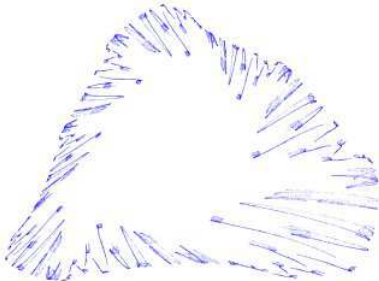


#### Quartic Map Attraktor

$$x_{n+1} = a_1 + a_2x_n + a_3x_n^2 + a_4x_n^3 + a_5x_n^4 + a_6x_n^3y_n + a_7x_n^2y_n + a_8x_n^2y_n^2 + a_9x_ny_n + a_{10}x_ny_n^2 + a_{11}x_ny_n^3 + a_{12}y_n + a_{13}y_n^2 + a_{14}y_n^3 + a_{15}y_n^4$$

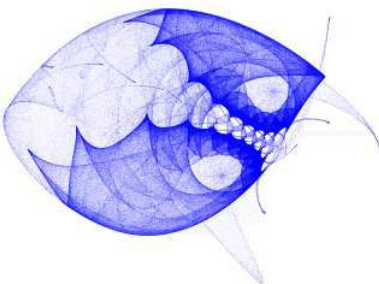
$$y_{n+1} = a_{16} + a_{17}x_n + a_{18}x_n^2 + a_{19}x_n^3 + a_{20}x_n^4 + a_{21}x_n^3y_n + a_{22}x_n^2y_n + a_{23}x_n^2y_n^2 + a_{24}x_ny_n + a_{25}x_ny_n^2 + a_{26}x_ny_n^3 + a_{27}y_n + a_{28}y_n^2 + a_{29}y_n^3 + a_{30}y_n^4$$

Code: FUXRRRUJRDYKDUBPHHOMO  
BRIRBINCS



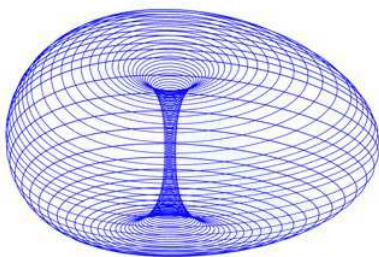
#### Quartic Map Attraktor

Code: PFMQPPBPARGUOLSTATEXQ  
DKEXMLOIF



#### Quintic Map Attraktor

Code: MSMTNCONSQTJOTKOPAOM  
QYNDPUQWVQJUEGNWAYGDLIT



#### Lotka Volterra Attraktor

$$dx/dt = x - xy + cx^2 - azx$$

$$dy/dt = -y + xy$$

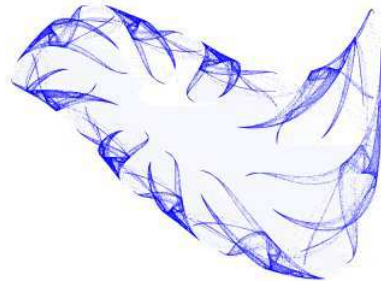
$$dz/dt = -bz + azx^2$$

$a = 2.9851, b = 3, c = 2$



#### Quartic Map Attraktor

Code: GNXYVYASWMMNFFQOFJTMRBN  
RFWREJH

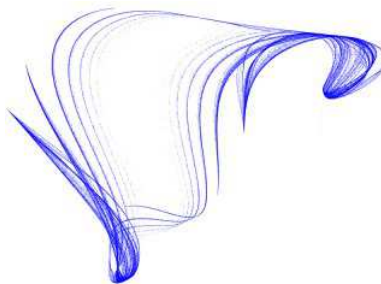


#### Quintic Map Attraktor

$$x_{n+1} = a_1 + a_2x_n + a_3x_n^2 + a_4x_n^3 + a_5x_n^4 + a_6x_n^5 + a_7x_n^4y_n + a_8x_n^3y_n + a_9x_n^3y_n^2 + a_{10}x_n^2y_n + a_{11}x_n^2y_n^2 + a_{12}x_n^2y_n^3 + a_{13}x_ny_n + a_{14}x_ny_n^2 + a_{15}x_ny_n^3 + a_{16}x_ny_n^4 + a_{17}y_n + a_{18}y_n^2 + a_{19}y_n^3 + a_{20}y_n^4 + a_{21}y_n^5$$

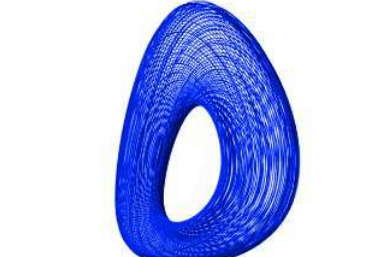
$$y_{n+1} = a_{22} + a_{23}x_n + a_{24}x_n^2 + a_{25}x_n^3 + a_{26}x_n^4 + a_{27}x_n^5 + a_{28}x_n^4y_n + a_{29}x_n^3y_n + a_{30}x_n^3y_n^2 + a_{31}x_n^2y_n + a_{32}x_n^2y_n^2 + a_{33}x_n^2y_n^3 + a_{34}x_ny_n + a_{35}x_ny_n^2 + a_{36}x_ny_n^3 + a_{37}x_ny_n^4 + a_{38}y_n + a_{39}y_n^2 + a_{40}y_n^3 + a_{41}y_n^4 + a_{42}y_n^5$$

Code: GEQGOYIKQQPEUJBKPXTV  
USJHOVJDUAYYPNTXFLGAM



#### Quintic Map Attraktor

Code: QBKSKIXQMKEOVVMAHXLB  
OQJXEYMBUMBOEFVDBAPWU



#### Lotka Volterra Attraktor

$$dx/dt = x - xy + cx^2 - azx$$

$$dy/dt = -y + xy$$

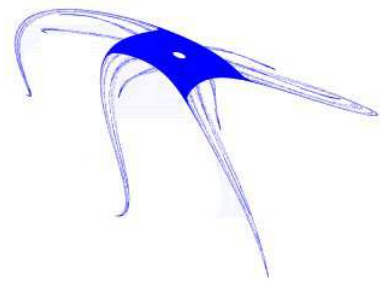
$$dz/dt = -bz + azx^2$$

$a = 3.3, b = 3.5, c = 2$



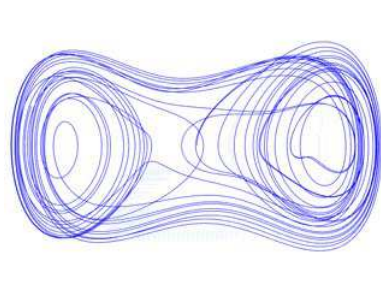
#### Quartic Map Attraktor

Code: LURFSRHWMSKHTQBKXJDXQS  
MFJBWUFG



#### Quintic Map Attraktor

Code: HVOIEGIDJCSFUFJCQGRU  
GMCLHEPWKRCCYFIRQPYAPH



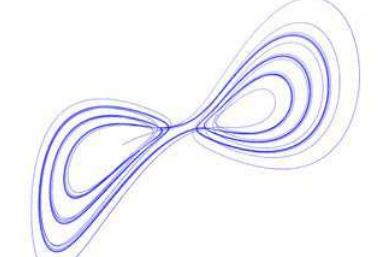
#### Duffing-Attraktor

$$d^2x/dt^2 + a dx/dt + x^3 = b \cos wt$$

$$dx/dt = y$$

$$dy/dt = -ay - x^3 + b \cos wt$$

$a = 0.25, b = 0.3, w = 1$



#### Moore Spiegel Attraktor

$$dx/dt = y$$

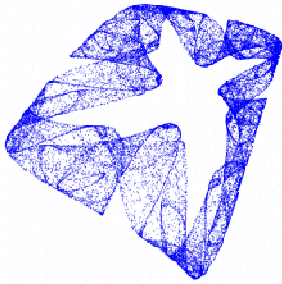
$$dy/dt = z$$

$$dz/dt = -z - (b - a + ax^2)y - bx$$

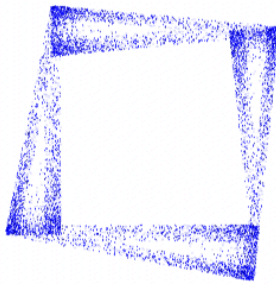
$a = 100.0, b = 26.0$







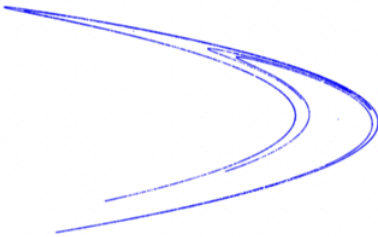
Kaneko-Attraktor  
 $x = ax + (1-a)(1 - by^2)$   
 $y = x$ ;  $a = 0.3$ ,  $b = 2.04$



Kaneko II-Attraktor  
 $x = ax + (1-a)(1 - b|y|)$   
 $y = x$ ;  $a = 0.1$ ,  $b = 1.23$



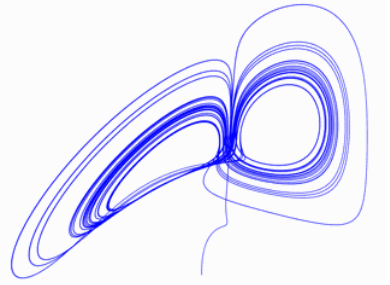
Quadratischer Henon-Attraktor  
 $x_{n+1} = x_n \cos a - (y_n - x_n^2) \sin a$   
 $y_{n+1} = x_n \sin a - (y_n - x_n^2) \cos a$   
 verschiedene Startwerte



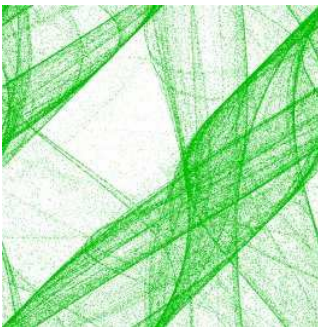
Henon-Attraktor  
 $x = 1 + y - ax^2$   
 $y = bx$ ;  $a = 1.4$ ,  $b = 0.3$



Kaplan-York-Attraktor  
 $x = 3x \bmod 1$   
 $y = ay + 2 \cos(2\pi x)$



Rikitake Attraktor  
 $dx/dt = -bx + zy$ ,  $dy/dt = -by + (z - a)x$ ,  $dz/dt = 1 - xy^2$ ,  $a = 5$ ,  $b = 2$   
 beschreibt das Problem des Polwechsels beim Erdmagnetfeld



### Sinai-Gleichung

Die von Yaschi G.Sinai 1972 in "Introduction to ergodic theory" angegebenen Gleichungen

$$x_{n+1} = x_n + y_n + g/(2\pi) \cos(2\pi y_n) \bmod 1$$

$$y_{n+1} = x_n + 2y_n \bmod 1$$

beschreiben die Sinai-Gleichung.

Sinai konnte zeigen, dass für kleine Werte von  $g$  jeder Punkt des Einheitsquadrates mit gleicher Häufigkeit aufgesucht wird, d.h. das ganze Quadrat  $[0; 1] \times [0; 1]$  Attraktor ist.

Der Phasenplot hat Ähnlichkeit mit der Faserstruktur von Holz.

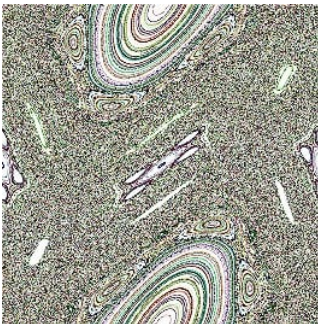
### Cat-Map-Abbildung

Für  $g = 0$  gehen die Sinai-Gleichungen in die sogenannte Cat-Map, bzw. Katzenabbildung, über

$$x_{n+1} = (x_n + y_n) \bmod 1$$

$$y_{n+1} = (x_n + 2y_n) \bmod 1$$

Das System wurde schon 1967 von D.V.Anosow veröffentlicht. Nach der Interpretation als Katzenabbildung durch Arnold und Avez wurde diese Abbildung bekannt. Die Cat-Map ist Grundlage der Poincaré-Transformation.



### Standardabbildung

Die Standardabbildung ist eine flächentreue, chaotische Abbildung.

$$x_{n+1} = x_n + y_n + \varepsilon \sin x_n$$

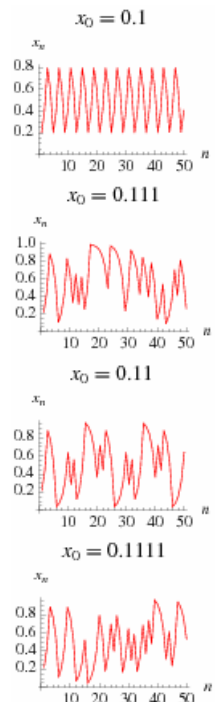
$$y_{n+1} = y_n + \varepsilon \sin x_n$$

Sie wurde von dem sowjetischen Mathematiker und Physiker Boris V.Tschirikow 1969 als Poincaré-Abbildung eines periodisch angestoßenen Pendels eingeführt. Setzt man  $\varepsilon = 0$ , so ist das ungestörte System mit einer Jacobi-Determinante von 1 konservativ. Für kleine Werte von  $\varepsilon$  sieht man die ungestörten Tori. Sie bestehen aus den nichtresonanten Tori des ungestörten Systems.

Erhöht man  $\varepsilon$ , so zerfallen die Tori immer stärker. Ab  $\varepsilon = 4$  entsteht Chaos.

### Ott-Abbildung, $2x \bmod 1$ -Abbildung

Ist eine rationale Zahl  $x_0$  im geschlossenen Intervall  $[0, 1]$  gegeben, so wird die Folge der  $x_i$  mit  $x_{n+1} = 2x_n \bmod 1$  als  $2x \bmod 1$ -Abbildung oder Ott-Abbildung bezeichnet.



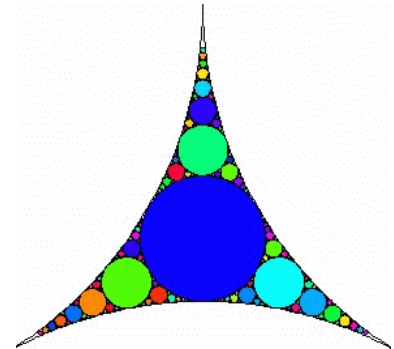
Im Allgemeinen sind die entstehenden Orbits periodisch. Die Anzahl verschiedener Orbits der Länge  $p$ , wenn  $p$  Primzahl ist, beträgt  $N_p = (2^p - 2) / p$ .  
 In der Abbildung sind die Bahnen für vier verschiedene Ausgangszahlen  $x_0$  zu sehen.  
 Wird die Abbildung auf reelle, irrationale Zahlen  $x_0$  erweitert, so ergeben sich für diese keine periodischen Bahnen.  
 E.Ott, "Chaos in dynamical systems", Cambridge 1993

### Apollonische Verdichtung

Gegeben sind drei sich paarweise berührende Kreise. Zeichnet man immer wieder die je drei Kreise berührenden Innenkreise ein, so haben alle Punkte, welche nie innerhalb eines der Kreise liegen, die fraktale Dimension 1,3058 (nach Mandelbrot 1983).

Die dabei zu zeichnenden Kreise sind innere Soddy-Kreise.  
 Haben die 3 Ausgangskreise den Radius  $a$ , so ergibt sich für die Radien der eingeschriebenen Kreise, die mindestens zwei der Ausgangskreise berühren:

$$\begin{aligned} r_1 &= (2/3 \sqrt{3} - 1) a \approx 0,1547005383 a \\ r_2 &= (3/11 - 4/33 \sqrt{3}) a \approx 0,06278172029 a \\ r_3 &= (19/253 - 6/253 \sqrt{3}) a \approx 0,03402251049 a \\ r_4 &= (11/299 - 8/897 \sqrt{3}) a \approx 0,02134179881 a \\ r_5 &= (17/767 - 10/2301 \sqrt{3}) a \approx 0,01463689349 a \\ r_6 &= (73/4897 - 12/4897 \sqrt{3}) a \approx 0,01066273030 a \\ r_7 &= (33/3071 - 14/9213 \sqrt{3}) a \approx 0,008113675099 a \\ r_8 &= (43/5291 - 16/15873 \sqrt{3}) a \approx 0,006381099167 a \\ r_9 &= (163/25597 - 18/25597 \sqrt{3}) a \approx 0,005149942784 a \\ r_{10} &= (67/13067 - 20/39201 \sqrt{3}) a \approx 0,004243743370 a \\ r_{11} &= (81/19199 - 22/57597 \sqrt{3}) a \approx 0,003557388097 a \\ r_{12} &= (289/81793 - 24/81793 \sqrt{3}) a \approx 0,003025085039 a \end{aligned}$$



### Mandelbrotmenge

Die Mandelbrotmenge ist der geometrische Ort aller Punkte  $C$  im Koordinatensystem der komplexen Zahlen, für die  $Z = Z \cdot Z + C$  immer innerhalb des Kreises mit Radius 2 um den Ursprung liegt  
 $y = x^2 + 1$

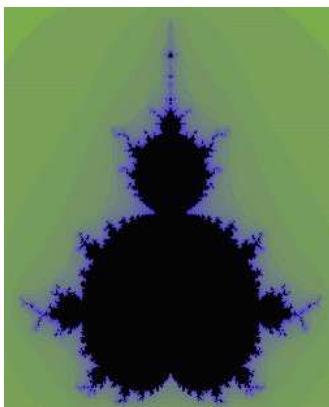
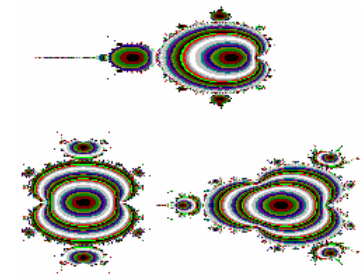
Jede komplexe Zahl als Paar zweier Koordinaten  $x, y$  betrachtet.

Iterationsgleichung  $z_n = z_{n-1}^2 + c$

Startwerte  $x = y = 0$ ; Abbruch  $|z| > 4$  bzw.  $n$  Iterationen

weitere klassische Fraktale Mandelbrot  $z^3 + c$  bzw.  $z^4 + c$

Mandelsinus  $x = x \cdot \sin(x) - y^2 - cr$  und  $y = 2 \cdot x \cdot y - ci$



### Apfelmännchen

Seit Benoit B. Mandelbrot 1980 seine berühmte Figur, welche später von der Bremer Forschungsgruppe für komplexe Dynamik Apfelmännchen genannt wurde, fand, faszinieren graphische Veranschaulichungen fraktaler Gebilde. Fraktale sind nicht mehr durch herkömmliche Begriffe wie Punkt - Linie - Fläche und Körper beschreibbar.

Vielmehr sind dies mit einer Breite 0 unendlich lang, wobei sie sich durch Selbstähnlichkeit auszeichnen. Ordnung geht dabei in Chaos über, wodurch Länge oder Flächeninhalt nicht mehr bestimmbar sind.

Komplexe Iterationsgleichungen und Vereinbarungen über Iterationstiefe und Grenzwerte erzeugen so verblüffende graphische Gebilde.

Mandelbrot untersuchte die Funktion  $y = x^2 + 1$  in der komplexen Zahlenebene, wobei jede komplexe Zahl als Paar zweier Koordinaten  $x$  und  $y$  in der Gaußschen Ebene benutzt wird. Als Iterationsgleichung ergibt sich

$z(n) = z_{n-1}^2 + c$ . Überträgt man dies in den komplexen Zahlenbereich erhält man

$z = x + y \cdot i$  und  $c = c_{\text{reell}} + c_{\text{imaginär}}$ , d.h.

$f(z(n)) = x(n-1)^2 - y(n-1)^2 + c_{\text{reell}} + i \cdot (2 \cdot x(n-1) \cdot y(n-1) + c_{\text{imaginär}})$

Die Mandelbrotmenge  $z_n = z_{n-1}^2 + c$  ist eine Fläche mit unendlich großem Umfang, jedoch mit endlicher Fläche.

Im Jahr 2003 waren die besten bekannten Näherungswerte Fläche  $A = 1,506\,591\,77 \pm 0,000\,000\,08$   
 und für die  $x$ -Koordinate des Schwerpunkts  $x = -0,286\,768\,44 \pm 0,000\,000\,025$

Durch Cyril Soler wurde festgestellt, dass die konstanten Größen

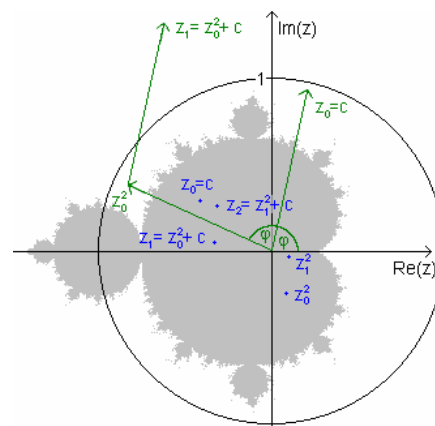
$\sqrt{(6 \pi - 1) - e} = 1,5065916514855032852705345...$

und  $-((\ln 3 - 1/3)^F) = -0,2867682633829350268529586...$

wobei  $F$  die Feigenbaum-Konstante ist, die Werte für den Flächeninhalt und die x-Koordinate des Schwerpunkts sehr gut annähern.  
Ob diese Werte sogar gleich dem Gesuchten sind, ist heute unklar und wird als Hypothese gehandelt.  
siehe auch <http://www.mrob.com/pub/muency/pixelcounting.html>

### Einfaches Turbo-Pascal-Programm

```
program mandelbrotmenge;
uses graph,crt;
var gd,gm,i,j,anz:integer; x,y,cx,cy,xneu,yneu:real;
begin gd:=detect; initgraph(gd,gm,'c:\bp\bgi');
  for i:=1 to 640 do begin   for j:=1 to 480 do begin
    cx:=i/128-2.5; cy:=j/96-2.5; x:=0; y:=0; anz:=0;
    repeat
      xneu:=x*x-y*y+cx; yneu:=2*x*y+cy;
      x:=xneu; y:=yneu;   inc(anz);
    until (x*x+y*y>4) or (anz>100);
    putpixel(i,j,anz mod 16);
  end end;
closegraph; end.
```



### Entstehung der Mandelbrotmenge

Die Berechnungsformel der Mandelbrotmenge lautet vereinfacht "quadriere die Zahl  $z$  und addiere die Zahl  $c$ ". Da  $z$  eine komplexe Zahl ist, kann das Ergebnis in der Gaußschen Zahlenebene veranschaulicht werden.

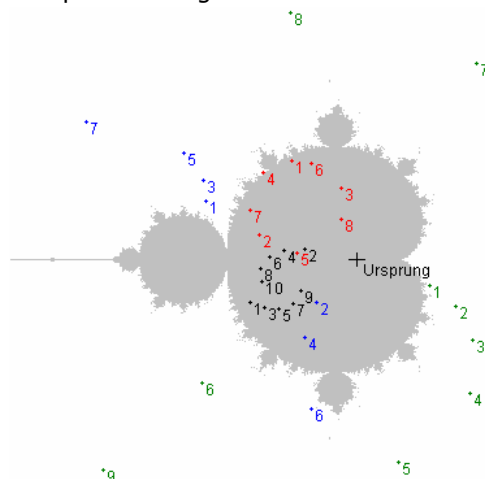
Eine komplexe Zahl besteht aus zwei Teilen (bzw. Zahlen) und kann daher einen Punkt in der zweidimensionalen komplexen Ebene darstellen. Die Berechnungsformel wird benutzt, herauszufinden, welche Farbe solch ein Punkt bekommen soll.

Die Abbildung zeigt den ersten Iterationsschritt zweier Punkte (grün und blau): Der Punkt  $z_0$  (rechter grüner Pfeil) dessen Farbe bestimmt werden soll, wird zunächst quadriert. Das Ergebnis ist der Punkt, auf den der mittlere grüne Pfeil zeigt. Nun wird der Startpunkt  $c$  addiert und man  $z_1$  (ganz oben).

Für weitere Schritte wird der Punkt in die Gleichung  $z_{n+1} = z_n^2 + c$  eingesetzt. Das Ergebnis  $z_{n+1}$  wird solange immer wieder neu als  $z_n$  ein, bis der Abstand des berechneten Punktes vom Ursprung einen bestimmten Wert (z.B. 100) überschreitet:

$$z_0 = c; z_1 = z_0^2 + c; z_2 = z_1^2 + c; \dots$$

Ist der Abstand von  $z_n$  zum Ursprung auch nach einer festgelegten Anzahl von Iterationen immer noch klein, so konvergiert die Zahlenfolge und dieser Punkt wird in der Regel schwarz eingefärbt. Wird der Abstand von 100 jedoch schon bei der  $n$ -ten Iteration überschritten, so wird die  $n$ -te Farbe der Farbpalette ausgewählt.



### Fluchtverhalten an der Mandelbrotmenge

Die Abbildung veranschaulicht das Verhalten einiger Punkte während der Iteration an der Mandelbrotmenge.

Es soll die Farbe des grünen Punktes Nr. 1 bestimmt werden. Punkt Nr. 1 =  $c = z_0$ .  $z_1 = z_0^2 + c$  wird dann Punkt Nr. 2.

Man sieht deutlich, wie sich die Punkte 3,4,5,6,7... immer weiter vom Ursprung entfernen. Man könnte sagen, der Punkt wird vom Unendlichen angezogen.

Die Mathematiker sagen, er "divergiert" bzw. er wird von einem "Attraktor" angezogen. Von diesen Attraktoren gibt es hier zunächst zwei Stück: Einen im Unendlichen, abgekürzt  $A(\infty)$ , und einen im Ursprung:  $A(0)$ .

Nur die Punkte, die vom Attraktor " $\infty$ " angezogen werden, wie z.B. der grüne und der blaue Punkt mit Nr.1, wurden hier weiß eingefärbt. Ob ein Punkt ins Unendliche "flieht" bzw. wie schnell und auf welchem Weg er das tut, bezeichnet man als

Fluchtverhalten.

Anders geschieht es mit den beiden roten und schwarzen Punkten: Diese entfernen sich nicht viel weiter vom Ursprung, und werden auch nach dem 50. Rechenschritt noch nicht weiter entfernt sein. Sie werden von keinem Attraktor angezogen und daher schwarz eingefärbt. Es gibt nur einen Punkt der von  $A(0)$  angezogen wird: Es ist der Ursprung selbst.

Sogar Außerirdische kennen die Mandelbrot-Menge! ☺

**Berechnungsbeispiel:** Setzt man komplexe Zahlen voraus, so ist die Rekursionsformel der Folge  $z_{n+1} = z_n^2 + c$ .  $z_0 = 0$  ist die Anfangszahl. Die Folge ist  $|z_n|$ .





Punktes  $P_1(x_1|y_1) = P_1(-0.40|0.70)$

Ausgangspunkt ist für jeden Punkt der Nullpunkt  $N(0|0)$ .

Es gilt  $x_1 = x_0^2 - y_0^2 + x_1 = 0 - 0 + x_1 = x_1$  und  $y_1 = 2 * x_0 * y_0 + y_1 = 2 * 0 * 0 + y_1 = y_1$ ,  $a_1 = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)} = \sqrt{[(-0.40)^2 + 0.70^2]} = 0.81$ .

$a_1$  ist die Entfernung des Punktes  $P_1$  vom Nullpunkt des Koordinatensystems.

Das zweite Glied der Folge errechnet sich aus den Koordinaten des Ausgangspunktes  $P_1$ .

Dazu bestimmt man für einen zweiten Punkt zwei neue Koordinaten  $x_2 = x_1^2 - y_1^2 + x_1 = (-0.40)^2 - 0.70^2 + (-0.40) = -0.73$  und  $y_2 = 2 * x_1 * y_1 + y_1 = 2 * (-0.40) * 0.70 + 0.70 = 0.14$ . Daraus ergibt sich  $a_2 = \sqrt{(x_2^2 + y_2^2)} = \sqrt{[(-0.73)^2 + 0.14^2]} = 0.74$ .

Das nächste dritte Glied der Folge errechnet sich aus den Koordinaten des vorhergehenden Punktes und des Ausgangspunktes.

Dazu berechnet man für einen dritten Punkt zwei neue Koordinaten  $x_3 = x_2^2 - y_2^2 + x_1 = (-0.73)^2 - 0.14^2 + (-0.40) = 0.11$  und  $y_3 = 2 * x_2 * y_2 + y_1 = 2 * (-0.73) * 0.14 + 0.70 = 0.50$ . Daraus ergibt sich  $a_3 = \sqrt{(x_3^2 + y_3^2)} = \sqrt{(0.11^2 + 0.50^2)} = 0.51$ .

Auf diese Weise erhält man für den Ausgangspunkt  $P_1(-0.40|0.70)$  die Abstandsfolge 0.81, 0.74, 0.51, 1.0, 0.74, 1.1, 1.8, 2.4, ...

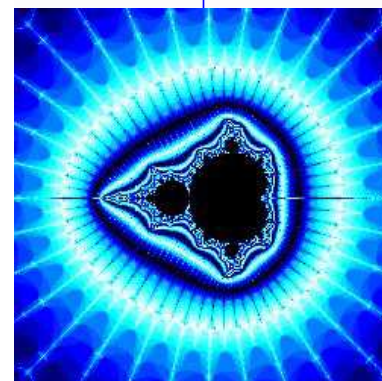
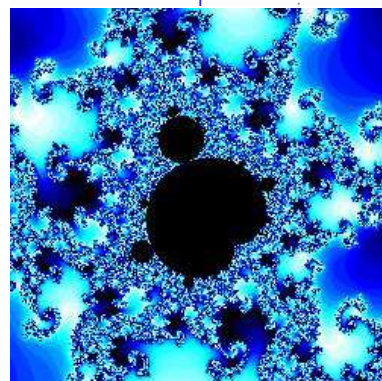
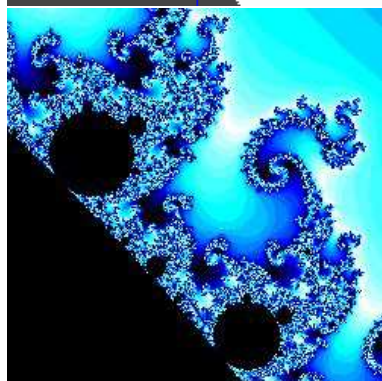
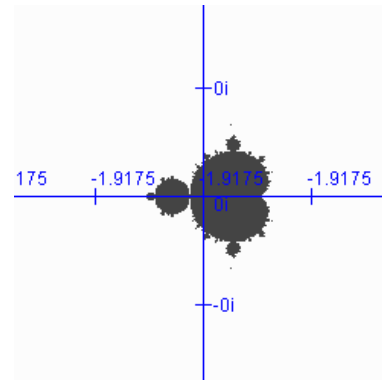
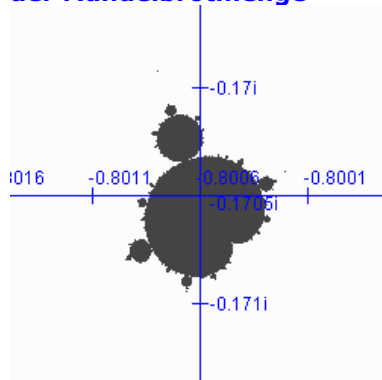
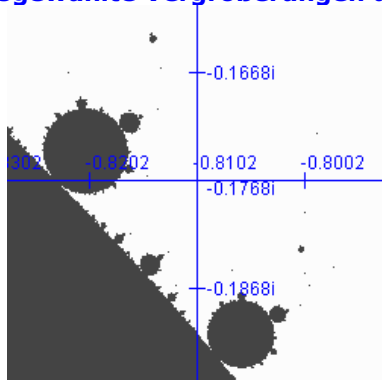
Die folgende Tabelle hält die Folgen zu fünf Punkten fest, die nach der gleichen Methode bestimmt worden sind.

| Punkt<br>Index | (0.20 , 0.20) | (0.10 , 0.65) | (-0.40 , 0.70) | (0.50 , 1.30) | (2 , 2) |
|----------------|---------------|---------------|----------------|---------------|---------|
| 1              | 0.23          | 0.66          | 0.81           | 1.4           | 3.6     |
| 2              | 0.34          | 0.84          | 0.74           | 2.8           | 16      |
| 3              | 0.35          | 0.44          | 0.51           | 6.5           | 260     |
| 4              | 0.33          | 0.57          | 1.0            | 43            | 68000   |
| 5              | 0.30          | 0.91          | 0.74           | 1900          | ...     |
| 6              | 0.30          | 0.83          | 1.1            | 3500000       |         |
| 7              | 0.31          | 0.38          | 1.8            | ...           |         |
| 8              | 0.32          | 0.70          | 2.4            |               |         |
| 9              | 0.32          | 1.0           | 4.9            |               |         |
| 10             | 0.31          | 0.77          | 24             |               |         |
| 11             | 0.31          | 0.83          | 560            |               |         |
| 12             | 0.31          | 1.3           | 360000         |               |         |
| 13             | 0.31          | 2.1           | ...            |               |         |

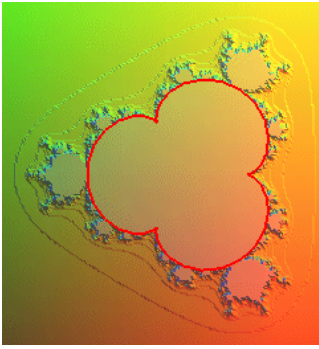
Alle Zahlen wurden auf 2 Ziffern gerundet. Die erste Folge ist konvergent und strebt gegen 0.31.

Die übrigen Folgen sind offenbar divergent. Die Glieder der Folge gehen über alle Grenzen, allerdings unterschiedlich stark.

### Ausgewählte Vergrößerungen an der Mandelbrotmenge







### Mandelbrot-Epizykloide

Mandelbrotmengen der Form  $f(z) = z^n + c$  besitzen einen Hauptkonvergenzbereich, der von einer Epizykloide begrenzt wird. Im Fall  $z^2 + c$  ist diese Epizykloide eine Kardioide mit der Gleichung

$$f(\theta) = 1/2 e^{i\theta} - 1/4 e^{i 2\theta}$$

Im allgemeinen Fall  $n > 1$  entsteht eine Epizykloide mit  $n-1$  Spitzen

$$f(\theta) = 1/(n-1\sqrt{n}) e^{i\theta} - 1/(n-1\sqrt{(n^n)}) e^{i 2\theta}$$

Links sind die Mandelbrotmenge  $z^4 + c$  und deren innere Epizykloide dargestellt.

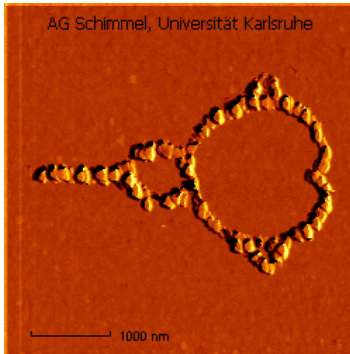
### Randelbrot-Menge

Eine programmtechnische Spielart der klassischen Mandelbrot-Menge ist die sogenannte Randelbrot-Menge. Dieser Begriff wird aus Random = Zufall und Mandelbrot gebildet.

Als Iterationsvorschrift wird dabei

$$z = z^2 + c + \text{Zufallszahl}$$

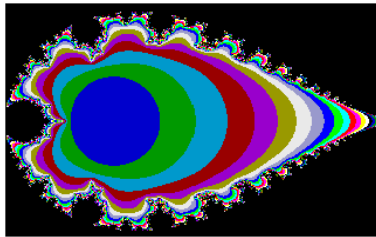
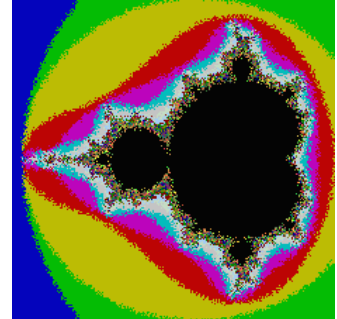
genutzt. Je nach maximaler Größe der Zufallszahlen tritt die ursprüngliche Mandelbrot-Menge mehr oder weniger deutlich hervor.



### Reales Apfelmännchen

Dies ist eine Rasterkraftmikroskop-Aufnahme des wahrscheinlich kleinsten real existierenden Apfelmännchens der Welt. Größe: Knapp 4000 Nanometer.

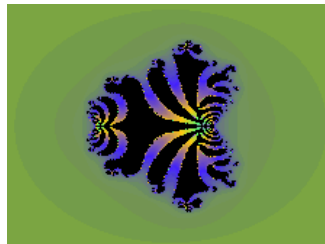
Es wurde durch elektrochemische Abscheidung von Kupfer auf einen Goldfilm aufgetragen: Durch Anlegen einer Spannung zwischen dem Goldfilm und der Spitze einer Nadel, welche sich in einer Kupferionen-Lösung befindet, scheidet sich an der Position der Nadel Kupfer auf dem Goldfilm ab. Die Nadel dient dabei als "Zeichenstift", jedoch muss die Figur mehrmals nachgefahren werden, um genügend Kupfer abzuscheiden.



Inverse Mandelbrotmenge nach Mark Peterson:

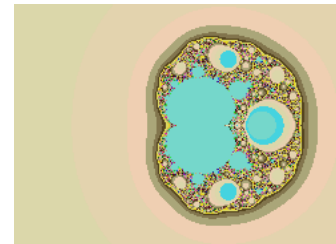
$$z_n = z_{n-1}^2 + c$$

mit  $z_0 = 1 / \text{pixel}$  und  $c = 1 / \text{pixel}$



Spinne:  $c$  bleibt während der Iterationsschleife nicht konstant: Vor dem Eintritt in diese Schleife erhält  $c$  die Anfangswerte  $c(\text{re}) := x\text{-Wert des Pixels}$  und  $c(\text{im}) := y\text{-Wert des Pixels}$ .

Innerhalb der Schleife ändert sich  $c$  gemäß der Vorschrift  $c := c/2 + z$ .  
 $z_{n+1} := z_n^2 + c_n$  mit  $z_0 := \text{pixel}$ ;  $c_{n+1} := c_n/2 + z_{n+1}$  mit  $c_0 := \text{pixel}$



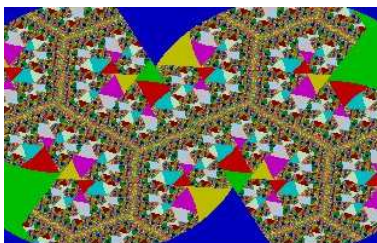
Magnetic-Fraktale

... diese Fraktaltypen werden aus der klassischen Mandelbrotmenge gewonnen.

... das abgebildete Magnetic-1-Fraktal ergibt sich aus:

$$z = [(z^2 + (c-1))/(2*z + (c-2))]^2$$

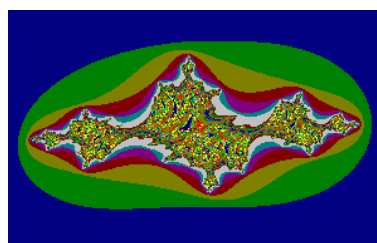
Für das Magnetic-2-Fraktal gilt:  $z = [(z^3 + 3*(c-1)*z + (c-1)*(c-2)) / (3*z^2 + 3*(c-2)*z + (c-1)*(c-2) + 1)]^2$



Barnsleyj2-Fraktal

Parameter: reeller und imaginärer Teile von  $c$

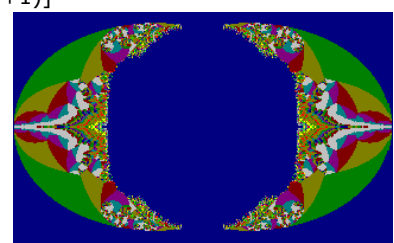
Algorithmus:  $z_0 = \text{pixel}$  wenn  $\text{re}(z) * \text{im}(c) + \text{re}(c) * \text{im}(z) \geq 0$  dann  $z_{n+1} = (z_n - 1) * c$  sonst  $z_{n+1} = (z_n + 1) * c$



Barnsleyj3-Fraktal

Parameter: reeller und imaginärer Teile von  $c$  Algorithmus:  $z_0 = \text{pixel}$

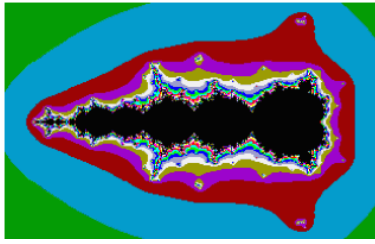
wenn  $\text{re}(z(n)) > 0$  dann  $z(n+1) = (\text{re}(z(n))^2 - \text{im}(z(n))^2 - 1) + i * 2 * \text{re}(z(n)) * \text{im}(z(n))$  sonst  $z(n+1) = (\text{re}(z(n))^2 - \text{im}(z(n))^2 - 1 + \text{re}(c) * \text{re}(z(n)) + i * (2 * \text{re}(z(n)) * \text{im}(z(n)) + \text{im}(c) * \text{re}(z(n))))$



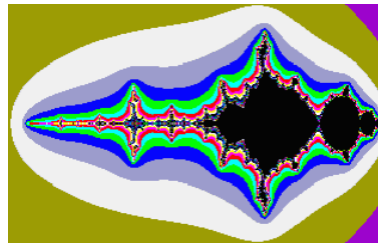
Barnsleym1

$z_0 = c = \text{pixel}$ , wenn  $\text{re}(z) \geq 0$  dann  $z(n+1) = (z-1) * c$ , sonst  $z(n+1) = (z+1) * c$

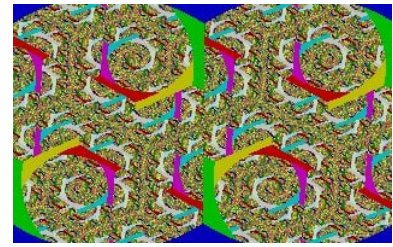
Parameter: reeller und imaginärer Teile von  $c$



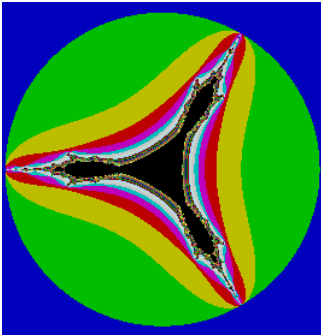
Fraktal nach Barnett  
 $z_n = 1/5 z_{n-1}^3 + z_{n-1}^2 + c$  mit  $z_0 = \text{pixel}$ ,  $c = \text{pixel}$



Fraktal nach Laguerre  
 $z_n = 1/2 z_{n-1}^2 - 2z_{n-1} + 1 + c$  mit  $z_0 = -1 + 0 \cdot i$ ;  $c = \text{pixel}$



Barnsleyj1-Fraktal  
 Parameter: reeller und imaginärer Teile von  $c$ , Algorithmus:  $z_0 = \text{pixel}$   
 wenn  $\text{re}(z) \geq 0$  dann  $z_{n+1} = (z_n - 1) \cdot c$   
 sonst  $z_{n+1} = (z_n + 1) \cdot c$



### Konjugierte Mandelbrotmenge

Für die Original-Mandelbrotmenge wird die Iteration  $z = z^2 + c$  auf der komplexen Zahlenebene ausgeführt und je nach Konvergenz oder Divergenz in der grafischen Darstellung ein Farbpunkt gesetzt. Bei den konjugierten Mandelbrotmengen wird die Iterationsvorschrift durch

$$z = z^* \cdot z + c$$

ersetzt, wobei  $z^*$  die zu  $z$  konjugiert komplexe Zahl ist. D.h. für  $z = a + bi$  wird  $z^* = a - bi$  genutzt.

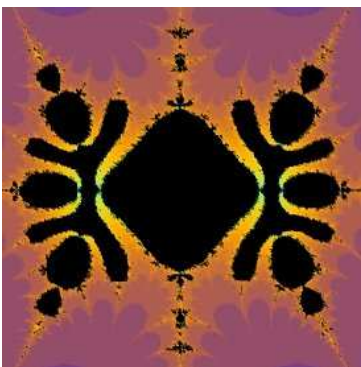
Auch für diese Gebilde ist es möglich, zugehörige konjugierte Juliamengen zu zeichnen.

### Buddhabrot-Fraktal

Das Buddhabrot-Fraktal ist eng mit der Mandelbrot-Menge verwandt. Ihr Name bezieht sich auf die Ähnlichkeit mit der Darstellung des meditierenden Buddha. Das Fraktal wurde 1993 von Melinda Green erstmals beschrieben. Die Mathematikerin nannte das Bild zuerst "Ganesh", da ein indischer Mitarbeiter in der Darstellung den elefantenköpfigen Gott Ganesha sah.

Das Buddhabrot-Fraktal entsteht, in dem für divergierende Punkte der Mandelbrot-Menge die Zwischenpunkte gespeichert werden.

Punkte der komplexen Ebene, die besonders oft als Zwischenwerte auftraten, werden heller dargestellt. Die Darstellung ist somit die Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Verlauf der Trajektorien durch jeweilige Regionen. siehe <http://de.wikipedia.org/wiki/Buddhabrot>



### Collatz-Fraktal

Abbildung: Juliamenge des Collatz-Fraktals

Dieses fraktale Gebilde wurde von Marc Chamberland mit der Collatz-Funktion als Basis untersucht.

$$f(x) = x/2 \cos(\pi/2 x)^2 + 1/2 (3x + 1) \sin(\pi/2 x)^2$$

### Weitere Fraktale

|             | Algorithmus  | Parameter                           |
|-------------|--|-------------------------------------|
| Julia       | $z_0 = \text{pixel}; z_{n+1} = z_n^2 + c$  | komplexe Zahl $c$                   |
| Julia4      | $z_0 = \text{pixel}; z_{n+1} = z_n^4 + c$  | komplexe Zahl $c$                   |
| Julzpower   | $z_0 = \text{pixel}; z_{n+1} = z_n^m + c$  | komplexe Zahl $c$ ,<br>Exponent $m$ |
| Julzppwr    | $z_0 = \text{pixel}; z(n+1) = z(n)^z(n) + z(n)^m + c$  | komplexe Zahl $c$ ,<br>Exponent $m$ |
| Kamtorus    | $x(0) = y(0) = \text{orbit}/3; x(n+1) = x(n) \cdot \cos(a) + (x(n) \cdot x(n) - y(n)) \cdot \sin(a); y(n+1) = x(n) \cdot \sin(a) - (x(n) \cdot x(n) - y(n)) \cdot \cos(a)$ |                                     |
| Lambda      | $z(0) = \text{pixel}; z(n+1) = \text{lambda} \cdot z(n) \cdot (1 - z(n)^2)$  | Lambda                              |
| Lee         | $c_n = z_{n-1} + \text{pixel}^2 / z_{n-1}; z_n = c_n^2$ mit $z_0 = \text{pixel}$   |                                     |
| Marksjulia  | $z(0) = \text{pixel}; z(n+1) = (c^{\exp}) \cdot z(n) + c$  | $c$ und Exponent                    |
| Marksmandel | $z(0) = c = \text{pixel}; z(n+1) = (c^{\exp}) \cdot z(n) + c$  | $c$                                 |
| Newton      | $z(0) = \text{pixel}; z(n+1) = ((p-1) \cdot z(n)^p + 1) / (p \cdot z(n)^{p-1})$  | $p$                                 |

## Newton-Fraktal

Das Newton-Verfahren ist ein Iterationsverfahren zur Bestimmung der Nullstellen einer Funktion. Wendet man es auf komplexe Funktionen der Form

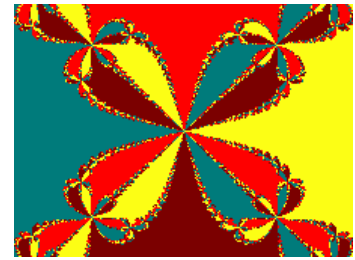
$$f(z) = z^n - 1$$

an, dann kann man die Tatsache ausnutzen, dass alle Lösungen der Gleichung  $z^n - 1 = 0$  komplexe Zahlen sind, die auf dem Einheitskreis um den Ursprung der Gaußschen Zahlenebene liegen. Die Lösungen

(Attraktoren) der Gleichung bilden ein regelmäßiges n-Eck. Wie bei der Berechnung der Mandelbrot-Menge wird der gesamte Bildschirm als Gaußsche Zahlenebene und jeder Bildpunkt des Bildschirms als Startwert  $z$  einer Zahlenfolge aufgefasst. Dabei ist  $z$  eine komplexe Zahl und repräsentiert einen Punkt der Ebene. Jeder Bildpunkt strebt zu einem der  $n$  Attraktoren.

Im Beispiel lauten die vier Attraktoren  $z(1) = i$ ,  $z(2) = -1$ ,  $z(3) = -i$  und  $z(4) = 1$ . Strebt ein Bildpunkt zu  $z(1)$ , wird er gelb gefärbt, strebt er zu  $z(2)$  rot, zu  $z(3)$  blau und zu  $z(4)$  braun - unabhängig davon, nach wieviel Schritten man den Attraktor ermittelt hat (Abbildung). Nimmt man hingegen die Färbung in Abhängigkeit von der Iterationstiefe vor, entsteht ein sogenanntes Geschwindigkeitsdiagramm des Fraktals.

Abbildung: Newton-Fraktal  $f(z) = z^4 - 1$



## Pascal-Programm zum Newtonfraktal $z^3 - 1 = 0$

Nimmt man die Färbung in Abhängigkeit vom gefundenen Attraktor vor, erhält man die sogenannten Einzugsgebiete der 3 Attraktoren. Die Farbe gibt an, welcher Attraktor gefunden wurde. Dabei hat die innere Schleife des Programms folgendes Aussehen:

```

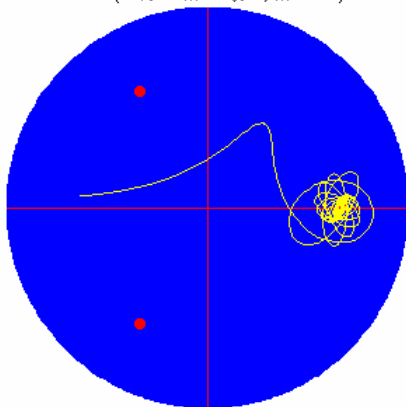
x := a; y := b;
REPEAT nenner := sqr(x*x + y*y);
  xneu := (2*x + (x*x - y*y)/nenner) / 3;
  yneu := 2*y * (1-x/nenner) / 3;
  x := xneu; y := yneu;
  a1 := sqr(x-1) + sqr(y) < 0.09;
  a2 := sqr(x+0.5) + sqr(y+0.866) < 0.09;
  a3 := sqr(x+0.5) + sqr(y-0.866) < 0.09;
UNTIL a1 OR a2 OR a3;
  IF a1 THEN PutPixel (xs, ys, 1); { Punkt blau färben }
  IF a2 THEN PutPixel (xs, ys, 2); { Punkt grün färben }
  IF a3 THEN PutPixel (xs, ys, 3); { Punkt türkis färben }

```

Färbt man hingegen in Abhängigkeit von der Anzahl der Schritte, die erforderlich sind, um einen Attraktor zu finden, spricht man von einem Geschwindigkeitsdiagramm. Jetzt gibt die Farbe an, wie schnell ein Attraktor gefunden wurde.

$$x''(t) + R x'(t) - \sum_{i=1}^3 \frac{x_i - x(t)}{(\sqrt{(x_i - x(t))^2 + (y_i - y(t))^2 + d^2})^3} + C x(t) = 0$$

$$y''(t) + R y'(t) - \sum_{i=1}^3 \frac{y_i - y(t)}{(\sqrt{(x_i - x(t))^2 + (y_i - y(t))^2 + d^2})^3} + C y(t) = 0$$



jedesmal einen der Magnete und kommt zum Stillstand. Zu welchem Magnet das Pendel gezogen wird, kann durch das Newton-Fraktal beschrieben werden. Punkte eines Attraktionsgebietes führen immer zum gleichen Endergebnis.

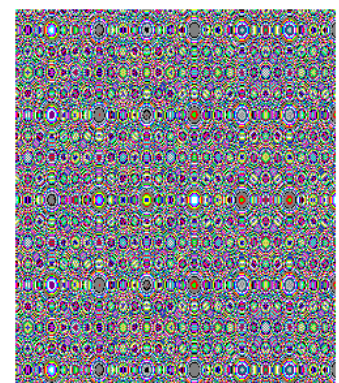
Dazu wird die Anzahl des Durchlaufens der Schleife, z.B. in  $i$ , gezählt und die Farbe mit `PutPixel (xs, ys, i mod 16)`; bestimmt.

## Magnetisches Pendel

Unmittelbar mit dem Newton-Fraktal ist eine physikalische Fragestellung verbunden. Gegeben sind mindestens zwei Magnete auf einer Unterlage, deren o.B.d.A. Nordpole nach oben gerichtet sind. Über der Platte wird ein Pendel mit einem Magneten angebracht, dessen Südpol nach unten zeigt.

Wir das Pendel ausgelenkt, so führt es über den Magneten eine chaotische Bewegung aus, die durch die in der Abbildung angegebenen Differenzialgleichungen beschrieben wird. Dabei sind die  $x_i$ ,  $y_i$  die Koordinaten der festen Magnete;  $x(t)$  und  $y(t)$  der Ort des Pendelmagnets.  $R$  und  $C$  sind Konstanten, die die Stärke der Felder und die rücktreibende Kraft beschreiben.

Für unterschiedliche Ausgangspunkte erreicht das Pendel nach chaotischer Bewegung

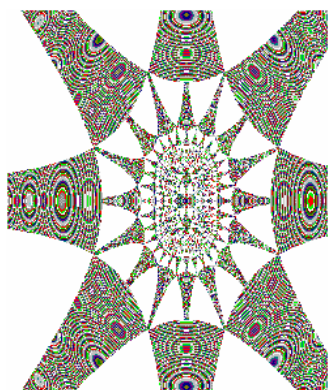


## Fraktale als Transformationen konzentrischer Kreis / Circle-Fraktale

Sehr interessante und vor allem farbenprächige Abbildungen erhält man, wenn die von Connert beschriebene Konstruktionsmöglichkeit genutzt wird. Betrachtet wird die Gaußsche Zahlenebene und die Koordinaten eines Punktes als komplexer Startwert  $x + i*y$  festgelegt.



Der Funktionswert wird mit  $\text{Pixelfarbe} = a \cdot (x^2 - y^2) \bmod \text{Farbanzahl}$  berechnet. Dabei stellt  $a$  eine beliebige Konstante dar. Die Farbe des Pixels wird anschließend aus dem ganzzahligen Anteil von  $z$  modulo einer einzugebenden Farbanzahl gebildet.



### Fraktale nach Pickover

Konstante  $c=0.5$

Abbruch nach  $|x| > 9$ ,  $|y| > 9$  oder Iteration  $> 10$

Farbgebung aus Betrag der komplexen Zahl

### Julia-Mengen

... Während bei der Mandelbrotmenge; jeweils vom Startpunkt  $z=(0;0)$  ausgehend; die Färbung des Pixels durch die veränderliche Konstante  $c$  (Koordinaten des Punktes)

bestimmt wird; bleibt die zur Iteration wichtige Konstante  $c$  konstant.

Als Startwert  $z$  werden die Punktkoordinaten der Gaußschen Zahlenebene genutzt.

Es gibt eine zweite Art von Fraktalen, die mit dem Apfelmännchen verwandt ist: die sogenannte Juliamenge. Die Berechnung einer Juliamenge unterscheidet sich nur in der Addition der Konstanten  $c$ . Während beim Apfelmännchen für jeden zu berechnenden Bildpunkt eine andere Konstante verwendet wird (nämlich die komplexe Koordinate des zu berechnenden Punktes), ist die Konstante  $c$  bei der Juliamenge für jeden Punkt gleich. D.h.: 1.  $z_0$  ist weiterhin der Punkt, dessen Farbe bestimmt werden soll,

2.  $c$  ist jedoch unabhängig von dem zu berechnenden Punkt.

Durch Variation der Konstanten  $c$  kann sehr unterschiedliche Juliamengen erhalten. Dabei gilt:

Wird der Wert aus dem schwarzen Bereich des Apfelmännchens gewählt, so entstehen zusammenhängende Gebilde. Wird ein Wert außerhalb gewählt, entstehen mehrere nicht miteinander verbundene Gebilde.

Die interessantesten Formen entstehen, wenn man  $c$  aus dem Rand des Apfelmännchens wählt.

Die zugehörige Grundidee wurde schon vor 80 Jahren; allerdings ohne großes Interesse seiner Zeitgenossen; von dem französischen Mathematiker Gaston Julia entwickelt. Da ihm aber noch keine rechentechnischen Hilfsmittel zur Verfügung standen, konnte er die Schönheit und Faszination seiner Mengen noch nicht bewundern.

Julia-Mengen weisen eine fantastische Vielfalt auf. Ein Zoom in die Detailstruktur ist von hohem ästhetischen Reiz.

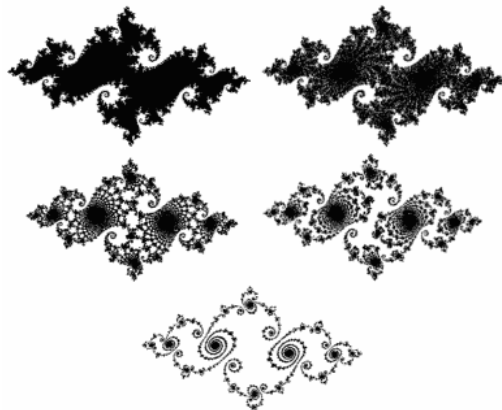
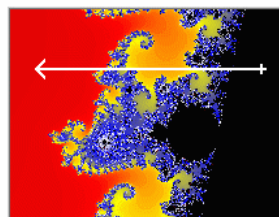
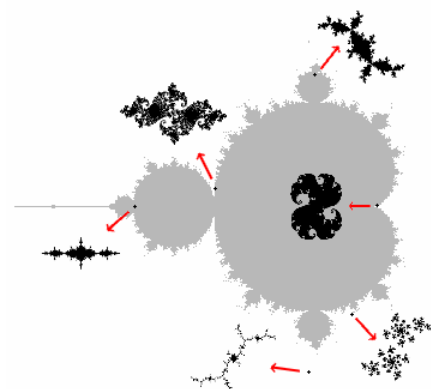
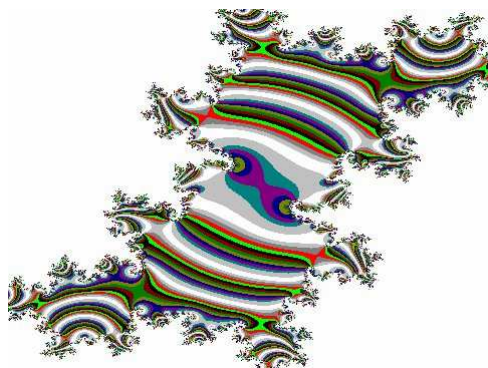
### Grenzgebiete der Julia-Menge

Faszinierend ist der Übergang an der Grenze des schwarzen Bereichs. Als Beispiel wird hier die Konstante  $c$  entlang des weißen Pfeils variiert. Von Rechts nach Links erhält man die unten abgebildeten Juliamengen. Während auf dem ersten Bild ein zusammenhängendes Gebiet zu sehen ist, löst sich dieses immer mehr auf, bis schließlich auf dem letzten Bild getrennte Bereiche zu erkennen sind.

Die Briefmarke zeigt einen Ausschnitt einer Juliamenge. Auf dem Anhang der Marke sieht man einen größeren Ausschnitt, aber noch interessanter ist die Formel am Rand des Anhangs:

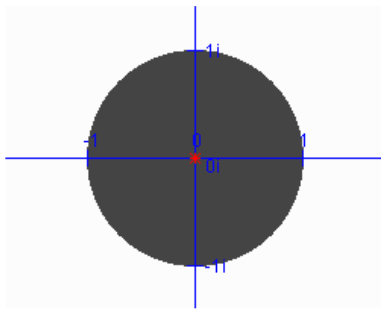
$$z \rightarrow z^2 + c; c = 0,2860 + 0,0115 i.$$

Jede Juliamenge ist durch eine komplexe Funktion eindeutig bestimmt; durch die Angabe dieser Funktion sind wir somit in der Lage, die Entstehung der Abbildung auf der Marke nachzuvollziehen. Die eigentliche

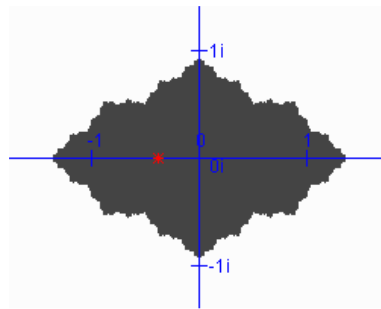




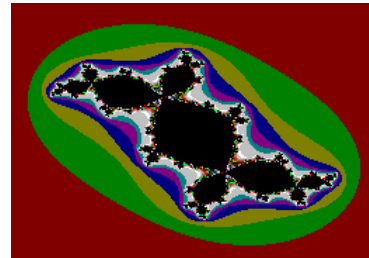
Juliamenge sind wieder alle Punkte, für die die Zahlenfolge konvergiert. Die Farbgestaltung um die Juliamenge herum ist, wie üblich, willkürlich.



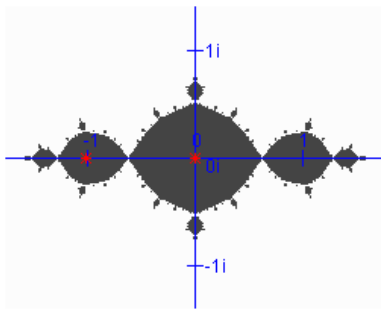
$c = 0$



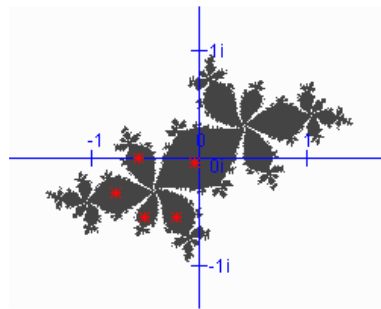
$c = -0.5$



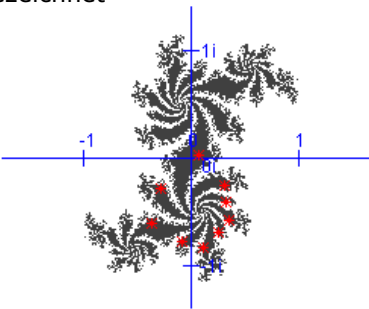
Douadys Kaninchen  $c = -0.123 + 0.745i$  auch als Drachen-Fraktal bezeichnet



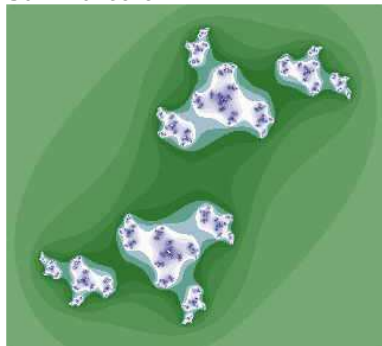
San Marco  $c = -1$



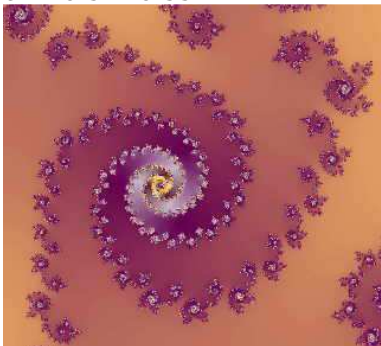
$c = -0.5 + 0.55i$



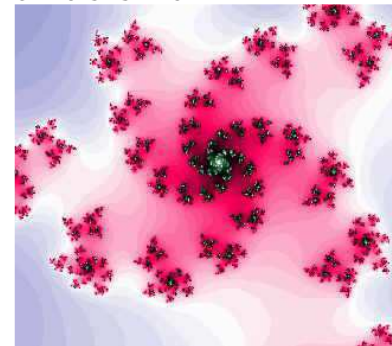
$c = 0.325 + 0.417i$



Fatout-Staub  $c = 0.11301 - 0.67037i$



$c = -0.21 - 0.67i$



$c = 0.23 - 0.6i$

| Bezeichnung   | Realteil $c(\text{reell})$ | Imaginärteil $c(\text{imaginär})$ |
|---------------|----------------------------|-----------------------------------|
| Dentrit       | 0                          | 1                                 |
| Julia-Drachen | 0.360284                   | 0.1                               |

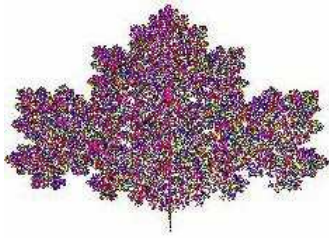
Julia-Mengen können zusammenhängend sein oder in mehrer Bereiche zerfallen. Es gilt:

Ist die Iterationsfunktion von der Form  $f(z) = z^2 + c$ , so ist die zugehörige Julia-Menge genau dann zusammenhängend, wenn der Nullpunkt zur Menge gehört, d.h. wenn  $f^k(0)$  eine beschränkte Folge ist. Da  $f(0) = c$ , lässt sich der Satz auch so formulieren:

Ist die Iterationsfunktion von der Form  $f(z) = z^2 + c$ , so ist die zugehörige Julia-Menge genau dann zusammenhängend, wenn  $c$  zur Menge gehört, d.h. wenn  $f^k(c)$  eine beschränkte Folge ist.

## IFS-Transformationen

„Das wird ja immer merkwürdlicher!“ schrie Alice  
Lewis Carroll, „Alice im Wunderland“



IFS = Iterated Function System

IFS ist ein durch Michael Barnsley (Georgia Institute of Technology) entwickeltes, spezielles Verfahren zur Kompression von Darstellungen natürlicher Gebilde auf der Basis von Fraktalen.

Zweidimensionale IFS entstehen durch multiplikative Verknüpfung quadratischer Matrizen mit Spaltenvektoren (affine Transformationen). Die jeweilige Matrix wird durch zufällige Wahl aus einer gewissen Grundgesamtheit getroffen.

Iterierte Funktionssysteme sind in der Lage, mit wenigen Regeln komplexe, natürlich aussehende Bilder zu erzeugen. Hierbei wird eine Folge von Punkten im  $\mathbb{R}^2$  durch fortgesetzte Anwendung von affinen Transformationen durchlaufen. Werden die einzelnen affinen Abbildungen in unterschiedlichen Farben veranschaulicht, so erkennt man deutlich, die vier zur Farndarstellung notwendigen Abbildungen.

### Beispiele Fraktales Ahornblatt und Fraktaler Farn

#### Beschreibungstabelle

| Abb. | P  | A     | B     | C     | D    | E | F    |
|------|----|-------|-------|-------|------|---|------|
| 1    | 85 | 0.85  | 0.04  | -0.04 | 0.85 | 0 | 1.6  |
| 2    | 7  | 0.2   | -0.26 | 0.23  | 0.22 | 0 | 1.6  |
| 3    | 7  | -0.15 | 0.28  | 0.26  | 0.24 | 0 | 0.44 |
| 4    | 1  | 0     | 0     | 0     | 0.16 | 0 | 0    |



### Barnsley Farn

Das berühmteste Beispiel für Iterierte Funktionensysteme ist die Darstellung eines Farns. Erstmals wurde dieses Gebilde 1988 von Michael Barnsley präsentiert.

#### Parameter

| Abb. | P  | A     | B     | C     | D    | E | F    |
|------|----|-------|-------|-------|------|---|------|
| 1    | 85 | 0,85  | 0,04  | -0,04 | 0,85 | 0 | 1,6  |
| 2    | 7  | 0,2   | -0,26 | 0,23  | 0,22 | 0 | 1,6  |
| 3    | 7  | -0,15 | 0,28  | 0,26  | 0,24 | 0 | 0,44 |
| 4    | 1  | 0     | 0     | 0     | 0,16 | 0 | 0    |

Die ersten 3 affinen Abbildungen rufen Drehungen und Streckungen hervor, die die Farnblätter ausbilden.

Beschreibung der affinen Abbildungen des "Farns"

1) Streckung und Drehung  $k = 0,851$ , Drehwinkel  $-2,694^\circ$

2) Euler-Affinität und Drehung, Streckfaktoren  $0,305$  und  $0,341$ , Fixgeraden  $y = 0$ ,

$y = -7,786 x$ , Drehwinkel  $48,991^\circ$

3) Euler-Affinität mit Streckfaktoren  $-0,288$ ,  $0,378$ , Fixgeraden  $y = -0,493 x$ ,  $y = 1,885 x$

4) Euler-Affinität mit Streckfaktoren  $0$ ,  $0,160$  Fixgeraden  $y = 0$ ,  $x = 0$

Die Parameter  $0, 0, 0, 0,16$  der vierten Abbildung bewirken die Ausbildung des Stils. Ändert man zum Beispiel die erste  $\varepsilon = 0$  gegen  $\varepsilon = 0,01$  oder  $\varepsilon = 0,1$ , so kann man dies nachvollziehen.

### Sierpinski-Teppich, IFS-Beispiel

Dimension = 1,9 (siehe Abbildung)

P je 12,5

A je 0,33

B je 0

C je 0

D je 0,33

E 1 Y 1 Y Y/2 Y 1 Y/2

F 1 1 Y Y 1 Y/2 Y/2 Y

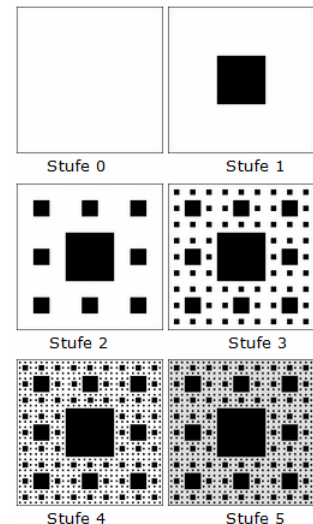
Y...bestimmt die Größe der Abbildung

Der Sierpinski-Teppich ist ein Fraktal, das auf den polnischen Mathematiker Wacław Sierpinski zurückgeht.

Aus einem Quadrat wird in der Mitte ein Neuntel der Fläche entfernt. Aus den von dem Quadrat um das Loch verbliebenen acht quadratischen Feldern wird wiederum je ein Neuntel der Fläche entfernt, usw.

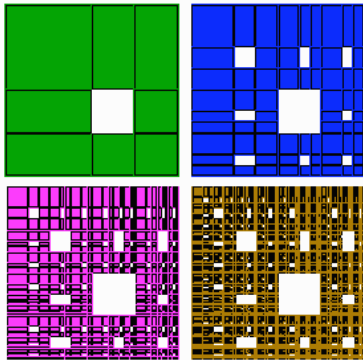
Die fraktale Dimension des Sierpinski-Teppich beträgt  $\ln 8 / \ln 3 = 1,8928\dots$ ; sein Flächeninhalt ist null.

Die Konstruktion ähnelt der Konstruktion der Cantor-Menge, dort wird aus



einer Strecke der mittlere Teil entfernt, oder dem Sierpinski-Dreieck bei dem aus einem Dreieck der Mittelteil entfernt wird.

Im dreidimensionalen Raum wird aus der Konstruktion des Sierpinski-Teppichs die Konstruktion des Menger-Schwamms.



### Asymmetrischer Sierpinski-Teppich

Die Konstruktion des Sierpinski-Teppichs kann auch asymmetrisch, wie in der Abbildung, erfolgen.

Bei Reduzierung auf ein Viertel, d.h. eine Teilung im Verhältnis  $a:b:c = 2:1:1$  erhält man 15 Kopien. Für die fraktale Dimension  $D$  gilt daher:  
 $4^D = 15$   $D = \ln 15 / \ln 4 \approx 1,9534$

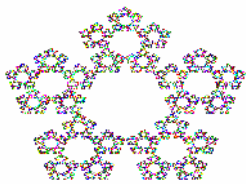
Allgemein gilt: Beim Unterteilen im Verhältnis  $a:b:c$  und Weglassen des jeweils innersten Teils entstehen bei Reduzierung auf  $1/(a+b+c)$  insgesamt  $a^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2 - b^2$  Kopien. Damit wird für die fraktale Dimension  $D$

$$(a + b + c)^D = (a + b + c)^2 - b^2$$

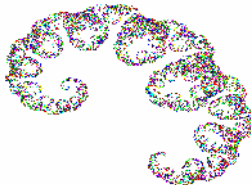
$$D = \ln ((a+b+c)^2 - b^2) / \ln(a+b+c)$$

### IFS-Abbildungsmatrix

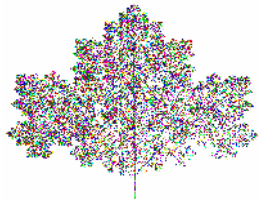
Dürer-Fünfeck  
 5 Abbildungen  
 0.382 0 0 0.382  
 mit unterschiedlichen Translationen



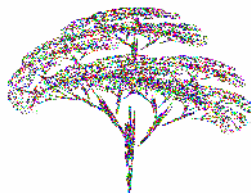
Zwei Bäume  
 0.36 0.48 - 0.36 0.75 1.2  
 0.48  
 0.64 - 0.48 0.64 1.11 1.27  
 0.48  
 1 0 0 1 0 0



Ahornblatt  
 0.352 0.355 - 0.352  
 0.355  
 0.353 - 0.354 0.353  
 0.354  
 0.5 0 0 0.5  
 0.502 - 0.002 0.588  
 0.002  
 0.004 0 0 0.578



Translationen  
 0.354 0.5  
 0.288 0.153  
 0.25 0.462  
 0.25 0.105  
 0.501 0.06  
 Baum  
 - 0 - - - 0.26  
 0.04 0.23 0.65 0.08  
 0.61 0 0 0.31 0.07 3.5  
 0.65 0.18 -0.3 0.48 0.74 0.39  
 0.64 -0.2 0.32 0.56 - 0.9  
 0.66



### Beschreibung der affinen Abbildungen

Zentrische Streckung mit Streckfaktor 0.382

1) Streckung und Drehung  
 Streckfaktor 0.6, Drehwinkel - 53.130°

2) Streckung und Drehung  
 Streckfaktor 0.8, Drehwinkel 36.870°

3) identische Abbildung  
 1) Streckung und Drehung  
 Streckfaktor 0.5, Drehwinkel - 45.243°

2) Euler-Affinität und Drehung  
 Streckfaktoren 0.499, 0.500,  
 Fixgeraden  $y = 0$ ,  $y = 0.994 x$   
 Drehwinkel 45,162°

3) Zentrische Streckung  
 Streckfaktor 0.5

4) Euler-Affinität Streckfaktoren 0.502, 0.588 Fixgeraden  $y = -0.023 x$ ,  $y = -42,977 x$

5) Euler-Affinität Streckfaktorn 0.004, 0.578 Fixgeraden  $y = 0$ ,  $x = 0$

1) Euler-Affinität Streckfaktoren -0.65,-0.04 Fixgeraden  $y=0$ ,  $x=0$

2) Euler-Affinität Streckfaktoren 0.31, 0.61 Fixgeraden  $y=0$ ,  $x=0$

3) Euler-Affinität und Drehung  
 Streckfaktoren 0.511, 0.716,  
 Fixgeraden  $y = 5.426 x$ ,  $y = 0$   
 Drehwinkel -24.775°

4) Euler-Affinität und Drehung  
 Streckfaktoren 0.590, 0.716,  
 Fixgeraden  $y = -1.75 x$ ,  $y = 0$   
 Drehwinkel 26.565°



#### Binär

|     |   |     |     |       |          |
|-----|---|-----|-----|-------|----------|
| 0.5 | 0 | 0   | 0.5 | -     | -        |
|     |   |     |     | 2.563 | 0.000003 |
| 0.5 | 0 | 0   | 0.5 | 2.436 | -        |
|     |   |     |     |       | 0.000003 |
| 0   | - | 0.5 | 0   | 4.873 | 7.56349  |

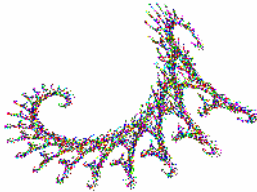
1 und 2) Zentrische Streckungen  
Faktor 0.5  
3) Affindrehung



#### Cantor-Garten

|       |       |   |       |       |       |
|-------|-------|---|-------|-------|-------|
| 0.336 | 0     | 0 | 0.335 | 0.662 | 1.333 |
| 0     | 0.333 | 1 | 0     | 1.333 | 0     |
| 0     | -     | 1 | 0     | 0.666 | 0     |
|       | 0.333 |   |       |       |       |

1) Euler-Affinität Streckfaktoren  
0.336, 0.35 Fixgeraden  $y = 0$ ,  $x = 0$   
2) Euler-Affinität Streckfaktoren  
-0.577, 0.577 Fixgeraden  $y = -1.733$ ,  $x = 1.733$   
3) Affindrehung



#### Drache

|          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|
| 0.824074 | 0.281482 | -        | 0.864198 |
|          |          | 0.212346 |          |
| 0.088272 | 0.520988 | -        | -        |
|          |          | 0.463889 | 0.377778 |

1) Euler-Affinität und Drehung  
Streckfaktoren 0.851, 0.907,  
Fixgeraden  $y = 0$ ,  $y = 0.985$   $x$   
Drehwinkel  $-14.45^\circ$

#### Translationen

|          |          |
|----------|----------|
| -        | -        |
| 1.882290 | 0.110607 |
| 0.785360 | 8.095795 |

2) Euler-Affinität und Drehung  
Streckfaktoren 0.441, 0.472,  
Fixgeraden  $y = -0.066$   $x$ ,  $y = 0$   
Drehwinkel  $-79.226^\circ$



#### Koch-Kurve

|        |          |          |        |
|--------|----------|----------|--------|
| 0.3333 | 0        | 0        | 0.3333 |
| 0.3333 | 0        | 0        | 0.3333 |
| 0.1667 | -        | 0.288867 | 0.1667 |
|        | 0.288867 |          |        |
| -      | 0.288867 | 0.288867 | 0.1667 |
| 0.1667 |          |          |        |

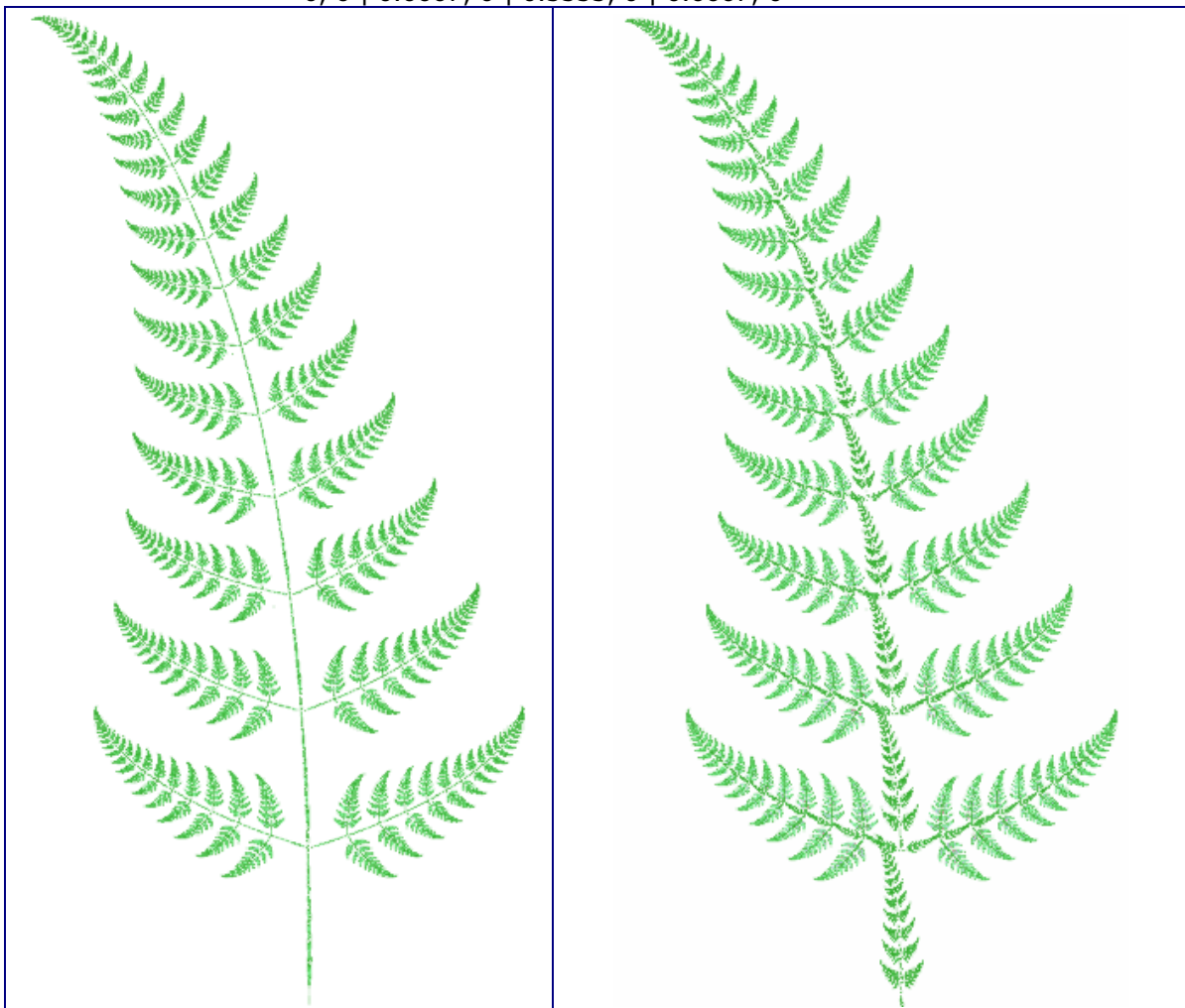
1 und 2) Zentrische Streckung  
Faktor 0.3333

3) Streckung und Drehung  
Streckfaktor 0.334 Drehwinkel  
 $60.012^\circ$

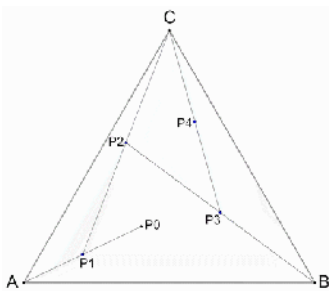
4) Euler-Affinität Streckfaktoren -  
0.334, 0.334 ixgeraden  $y = -0.577$   $x$ ,  $y = 1.732$   $x$

#### Translationen

0, 0 | 0.6667, 0 | 0.3333, 0 | 0.6667, 0



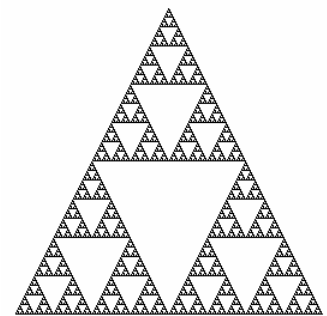




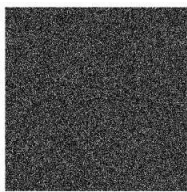
### Chaos-Spiel

Gegeben seien drei Punkte  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  der Ebene, welche ein gleichseitiges Dreieck bilden. Weiterhin sei ein vierter Punkt  $P$  gegeben. Per Zufall wird nun eine Zahl von 1 bis 3 gewählt. Würfelt man eine 1, so werden die neuen Koordinaten von  $P$  als Mittelpunkt der Strecke  $PP_1$  gesetzt, bei einer 2 strebt  $P$  um die Hälfte der Strecke in Richtung  $P_2$ .

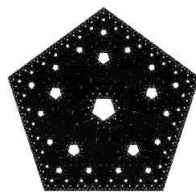
**Ergebnis: Sierpinski-Dreieck**



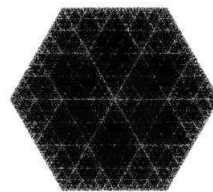
Das Chaosspiel wurde 1988 durch Barnsley auf  $n$  Punkte und Faktor  $f$  erweitert. Der Faktor  $f$  gibt den Anteil der Strecke vom Ausgangspunkt zum Zufallspunkt an. Für  $n = 5$ ,  $f = 5/8$  entsteht das Dürer-Fünfeck.



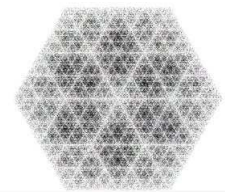
beim Viereck ein statistisch verteiltes Rauschen



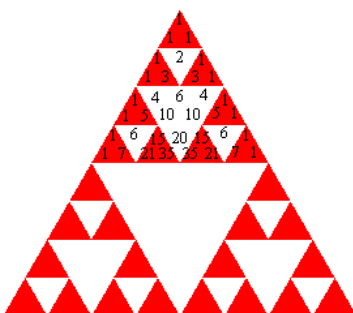
beim Fünfeck verschieden große Fünfecke



beim Sechseck ein System feiner Linien, ...



die mit kleineren Punkten deutlicher werden



Der Mathematiker und Hochschullehrer Sierpinski hat das Sierpinski-Dreieck 1910 zu dem Zweck in die mathematische Welt gesetzt, dass seine Studenten begreifen, dass die Begriffe Linie und Fläche durchaus nicht trivial sind.

Wenn man aus einem Dreieck die Mitte herausnimmt und aus den drei Restdreiecken wieder die Mitte, und wieder und wieder..., ist es dann eigentlich noch eine Fläche?

Nein! Die Dimension ist nicht 2 noch 1, sondern  $\ln(3)/\ln(2) = 1,58...$ ; es ist ein Fraktal. (fractum, lat. = gebrochen)

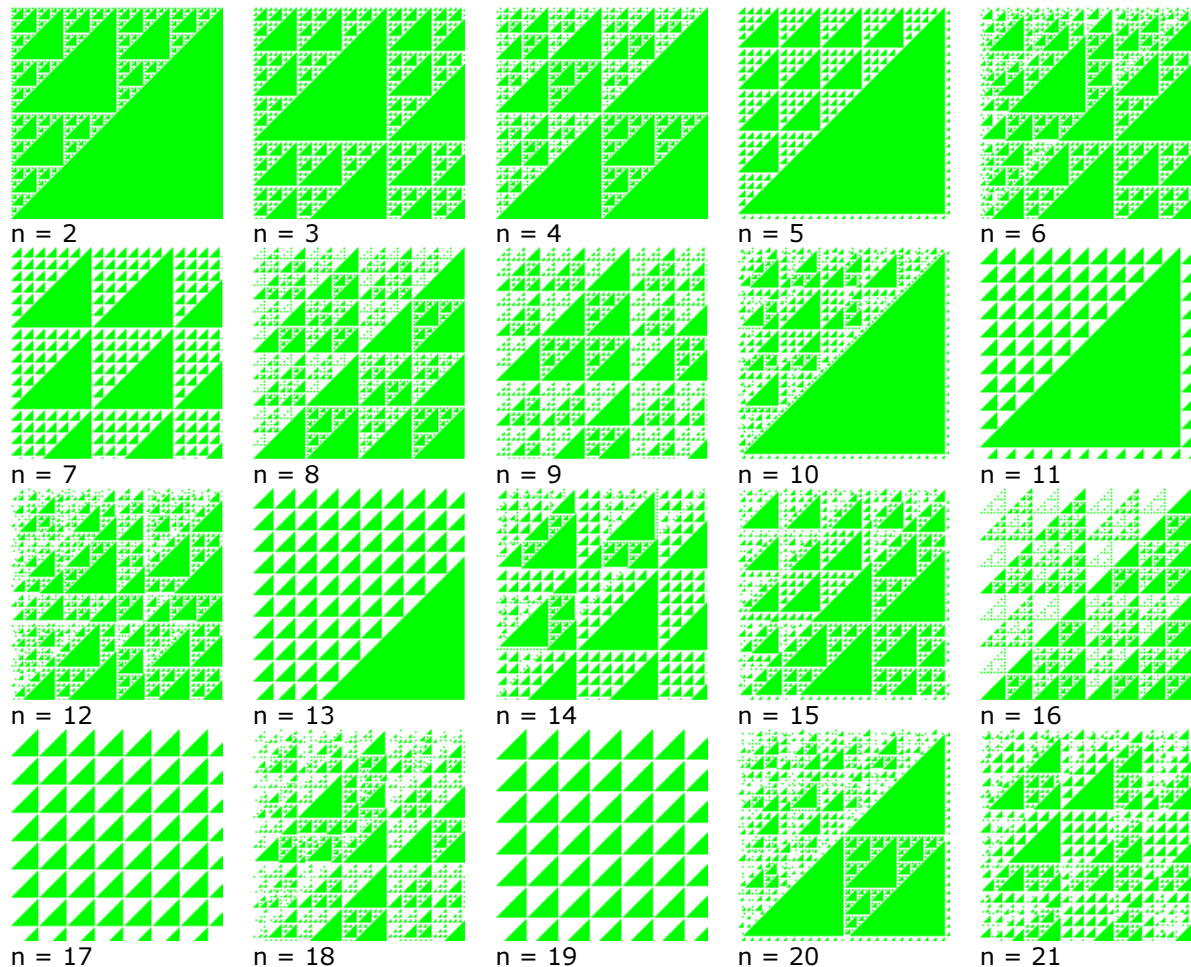
Das Sierpinski-Fraktal ist unmittelbar mit dem Pascalschen Dreieck verbunden. Gerade die Felder des Dreiecks werden gezeichnet, deren Zahl ungerade ist.

## Flächeninhalt des Sierpinski-Dreiecks

Geht man davon aus, dass das Ausgangsdreieck einen Flächeninhalt von  $A(0) = 1$  hat, so wird in der ersten Iteration  $\frac{1}{4}$  der Fläche entfernt, d.h.  $A(1) = \frac{3}{4}$ . In der nächsten Iteration werden 3 Dreiecke, die ein  $\frac{1}{4}$  der Größe des zuerst entfernten Dreiecks besitzen, herausgenommen, d.h. insgesamt  $\frac{3}{16}$ , d.h.  $A(2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{16} = \frac{9}{16} = (\frac{3}{4})^2$ . Mittels Induktion wird  $A(n) = (\frac{3}{4})^n$ .

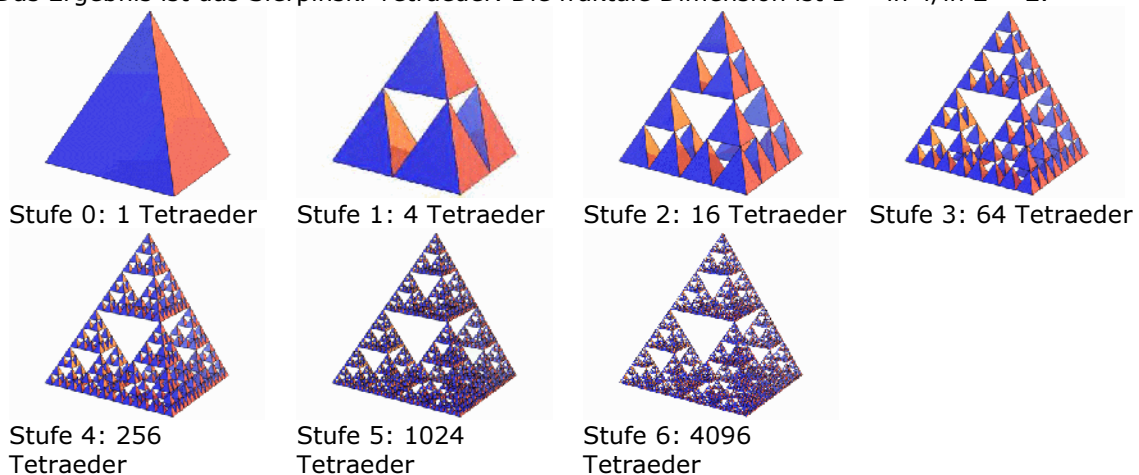
Zu beachten ist, dass die Flächen  $A(n)$  für wachsende  $n$  gegen 0 streben. Damit wird immer mehr der Ausgangsfläche entfernt, dennoch bleiben unendlich viele Punkte im Innern des Sierpinski-Dreiecks übrig.

Trägt man von einem Pascalschen Dreieck für jeden Eintrag  $z$  mit  $z \bmod n = 0$  einen Punkt ein, so entstehen außer dem Sierpinski-Dreieck weitere fraktale Muster:



## Sierpinski-Tetraeder

In Analogie zum berühmten Sierpinski-Dreieck kann auch ein räumliches Äquivalent konstruiert werden. Ausgangspunkt ist ein normales Tetraeder. In den Ecken des Tetraeders werden vier kleinere Tetraeder mit der halben Ausgangskantenlänge platziert. Jedes dieser Tetraeder wird entsprechend wieder ersetzt usw. Das Ergebnis ist das Sierpinski-Tetraeder. Die fraktale Dimension ist  $D = \ln 4 / \ln 2 = 2$ .

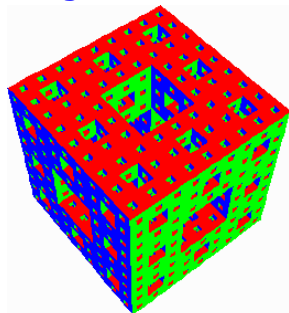


Sind  $n$  die Rekursionstiefe des Sierpinski-Tetraeders,  $N$  die Anzahl der Tetraeder,  $L$  die Länge eines Tetraeders und  $V$  das Volumen des  $n$ -ten Tetraeders, dann gilt für ein Anfangstetraeder der Kantenlänge 1:  
 $L = 2^{-n}$        $N = 4^n$        $V = 2^{-n}$   
 Für  $n$  gegen Unendlich gehen das Volumen und die Oberfläche gegen Null.

## Fraktale Körper

Fraktale Körper sind solche Körper, deren Volumen gegen Null und deren Oberfläche gegen Unendlich strebt. Diese Körper entstehen dadurch, dass man einen einfachen Körper wie einen Würfel oder ein Tetraeder nimmt und nach bestimmten Regeln Volumen in Form von anderen Körpern aus ihm entfernt und dabei seine Oberfläche vergrößert.

## Menger-Schwamm



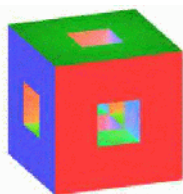
... nach dem österreichischen Mathematiker Karl Menger (1926)  
 Eng verbunden mit dem Sierpinski-Tetraeder ist der sogenannte Menger-Schwamm. Er ist im Prinzip die dreidimensionale Erweiterung des Sierpinski-Teppichs.

Zur Konstruktion wird hier von einem Würfel ausgegangen. In jede Würfelseite wird nun ein quadratisches Loch genau im Schwerpunkt des Seites mit einer Kantenlänge von einem Drittel des Ausgangswürfels gebohrt.

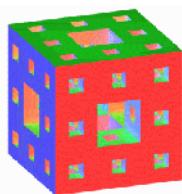
Damit verbleibt ein Restkörper, den man sich auch aus 20 kleinen Würfeln mit  $1/3$  Kantenlänge zusammengesetzt vorstellen kann.

Der beschriebene Vorgang wird nun in jedem der 20 Würfel wiederholt, usw.

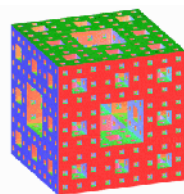
Für die fraktale Dimension wird  $D = \ln(20)/\ln(3) = 2.7268...$



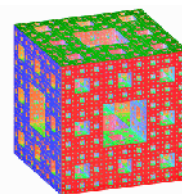
Stufe 1: 20 Würfel



Stufe 2: 400 Würfel



Stufe 3: 8000 Würfel



Stufe 4: 160000 Würfel

In der Stufe 5 besteht der Menger Schwamm aus 3200000 Würfeln. Diese Stufe ist auf einem normalen PC nur mit extremen Speicher- und Zeitaufwand berechenbar.

Ausgehend für einen Ausgangswürfel mit der Kantenlänge 1 wird für das Volumen des Menger-Schwamms: Bei jedem Schritt erhält man  $20/27$  vom vorhergehenden Volumen, d.h.

$$V(1) = 20/27 \quad V(1) = 0,7407... \text{ VE}$$

$$V(2) = (20/27)^2 V(2) = 0,5486... \text{ VE}$$

$$V(3) = (20/27)^3 V(3) = 0,4064... \text{ VE}$$

und allgemein

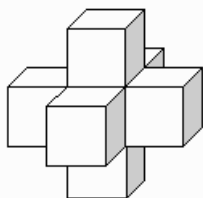
$$V(m) = (20/27)^m$$

D.h. mit zunehmenden Iterationsschritt strebt das Volumen gegen Null. Der Menger-Schwamm ist ein Körper mit einem Volumen = 0!

Für die Oberfläche (auch die im Inneren) wird

$$A(m) = Q(m)/9^m; \quad Q(1) = 72 \text{ und} \quad A(m+1) = (8Q(m) + 24 \cdot 20^m)/9^{m+1} = Q(m+1)/9^{m+1}$$

Wie zu erwarten hat der Menger-Schwamm eine unendlich große Oberfläche.



Herleitung des Volumens über den ausgeschnittenen Körper:

Der Mengerschwamm ist ein Körper, der durch fortgesetztes Herausschneiden von Teilen aus einem Würfel entsteht. Der erste ausgeschnittene Teil hat das Volumen  $7(a/3)^3$  des Ausgangskörpers.

Der große Würfel besteht aus 27 kleinen Würfeln. Nach dem Wegfall von 7 Würfeln bleiben 20 kleine Würfel übrig. Aus jedem dieser Würfel werden wieder 7

herausgeschnitten, d.h. insgesamt  $20 \cdot 7$  herausgeschnittene Würfel, usw. usw.

Die Summe der ausgeschnittenen Teile ist

$$V = 7(a/3)^3 + 20 \cdot 7(a/9)^3 + 20^2 \cdot 7(a/27)^3 + \dots$$

d.h. die unendliche Summe einer geometrischen Reihe mit dem Quotienten  $q = 20/27$

Als Summe wird  $S = V / (1-q) = 7(a/3)^3 \cdot 1 / (1 - 20/27) = a^3$

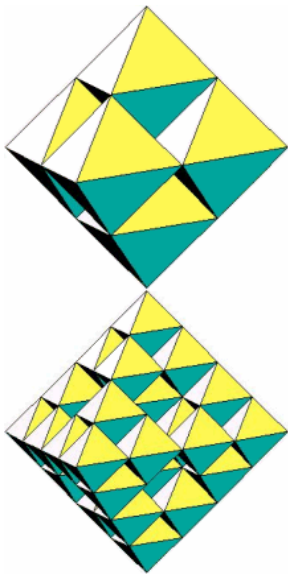
Damit hat der Menger-Schwamm tatsächlich das Volumen von 0.

Nach  $n$  Schritten sind  $V_n^* = 7(a/3)^3 (1 - (20/27)^n) / (1 - 20/27)$

entfernt. Das bedeutet zum Beispiel, dass nach nur 16 Schritten über 99 % des Ausgangsvolumens

fehlen. Für einen Würfel der Kantenlänge hat der Menger-Schwamm nach  $n$  Schritten ein Volumen von

$$V_n = 27(20/27)^n$$



### Oktaeder-Schwamm

In Analogie zum Sierpinski-Tetraeder bzw. zum Menger-Schwamm können auch andere platonische Körper zur Konstruktion fraktaler Gebilde genutzt werden.

Ausgangspunkt ist ein Oktaeder. Im Gegensatz zum Sierpinski-Tetraeder berühren sich die sechs verkleinerten Oktaeder an ganzen Kanten. Einen Eckpunkt haben sie alle sechs Teiloktaeder im Mittelpunkt der Figur gemeinsam. Als Maßstab ergibt sich 2:1, wie beim Tetraeder. Damit passen die sechs Oktaeder gut zusammen. Acht Tetraeder wurden entfernt. Das in einem Schritt verringerte Volumen ist  $6/8 = 62,5\%$  des vorherigen Volumens.

Der Oktaederschwamm hat die topologische Dimension 2, im Gegensatz zu Sierpinski-Tetraeder und Mengerschwamm, welche beide die topologische Dimension 1 besitzen.

### Sierpinski-Würfel

Bei dem Sierpinski-Würfel handelt es sich um ein Fraktal im Raum.

Ausgangspunkt ist ein Würfel, an den drei kleine Würfel mit halber Kantenlänge

angesetzt werden. An diese kleinen Würfel werden jeweils wieder 3 Würfel mit halber Kantenlänge angesetzt usw.

Insgesamt entsteht ein räumliches Gebilde, dass ein endliches Volumen aber eine unendlich große Oberfläche besitzt, allerdings nur wenn man die vollständige Oberfläche aller Teilwürfel addiert.

Berücksichtigt man nur die sichtbare Oberfläche, so ergibt sich für eine Kantenlänge  $a$  des Ausgangswürfels nach dem  $n$ -ten Iterationsschritt

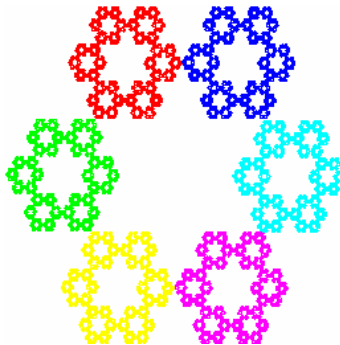
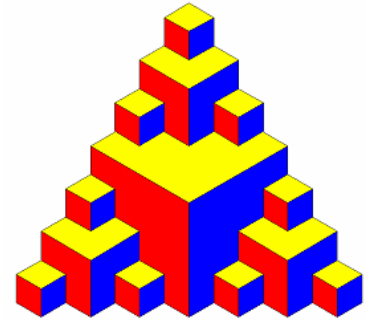
$$A_n = 12 a^2 - 3 a^2 2^{1-n}$$

$$V_n = 8/5 a^3 - a^3/5 2^{-3n} 3^{n+1}$$

Als Grenzwerte ergeben sich mit wachsendem  $n$  dann

$$A = 12 a^2$$

$$V = 8/5 a^3$$



### Sierpinski-Sechseck

Mit Hilfes des Chaosspiels kann auch das Sierpinski-Sechseck erzeugt werden.

Ausgang sind sechs in Form eines regelmäßigen Sechsecks angeordnete Punkte. Ein Anfangspunkt  $P_0$  wird beliebig gewählt.

Je Spielrunde wird nun einer der sechs Punkte zufällig ausgewählt und vom Punkt  $P_0$  zum Zufallspunkt  $2/3$  der Strecke zurückgelegt. Der entstandene Punkt  $P_1$  wird markiert und mit diesem erneut so verfahren.

Wird in dem Teilprogramm

»Chaosspiel

als Verhältnis  $2/3$  eingetragen, so entsteht das Sierpinski-Sechseck.

### Zellularautomat

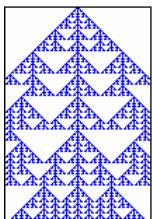
In den 40 und 50ziger Jahren wurden durch John von Neumann und Alan Turing die Anfänge der Automatentheorie geschaffen.

| A | B | C |                  |
|---|---|---|------------------|
| • | • | • | Elterngeneration |
| • | • | • | Kindgeneration   |
|   | • |   | B'               |

Von Interesse sind vor allem Zellularautomaten, in denen einzelne Zellen auf Grund gewisser Regeln und dem Zustand ihrer Nachbarn "leben" bzw. "sterben". Ein berühmtes Beispiel ist Conways "Game of Life"

Interessant sind auch eindimensionale (lineare) binäre Zellularautomaten. Diese bestehen aus einer Reihe von Zellen, welche jeweils den Zustand 0 oder 1 annehmen können.

Von einer Anfangskonfiguration ausgehend sterben bzw. leben die Zellen je gewähltem Automaten in



Abhängigkeit von der Anzahl der Nachbarn (im Beispiel 3)

Die jeweils drei nebeneinander liegenden Zellen beeinflussen die mittlere der drei Zellen für die nächste Generation, in der Darstellung also eine Zeile tiefer. In der Darstellung würden die Belegungen der Zellen A, B und C damit über die Zelle B' entscheiden. Eine Regel (Übergang von der Eltern- zur Kindgeneration) könnte zum Beispiel besagen, dass B' nur dann den Zustand 1 hat, wenn alle drei Elternzellen gesetzt sind.

### Zellularautomat

Für drei Nachbarn gibt es insgesamt  $2^3$  mögliche Übergänge und damit  $2^8 = 256$  verschiedene Bildungsregeln. Interessiert man sich nur für Regeln, welche weder links noch rechts bevorzugen, verbleiben noch 32. Kodiert man die acht wichtigen Übergänge

$$111 \Rightarrow a$$

$$110 \Rightarrow b$$

$$101 \Rightarrow c$$

$$100 \Rightarrow d$$

$$011 \Rightarrow e$$

$$010 \Rightarrow f$$

$$001 \Rightarrow g$$

$$000 \Rightarrow h$$

und codiert man diese acht Variablen nach Wolfram mit einer Codezahl

$$C = 128a + 64b + 32c + 16d + 8e + 4f + 2g + h,$$



so ergeben sich Codierungen C im Bereich von 0 bis 255.

Für die Darstellung des Wolfram-Dreiecks ist  $C=150$ , für das Sierpinski-Dreieck  $C=90$ .

Abbildung: Wolfram-Dreieck für  $C=150$

```
procedure zellu(m:integer);
var p,q,s,xm,i,j:integer; x,y:array[0..1280] of byte; b:array[0..7] of integer;
begin
  fillchar(x,sizeof(x),#0); fillchar(y,sizeof(y),#0); p:=480; n:=640; xm:=n div 2; n:=n div 2; p:=p div 2;
  for j:=0 to 7 do begin q:=m div 2; b[j]:=m-2*q; m:=q end;
  x[0]:=0; x[2*n]:=0; x[n]:=1; j:=1;
  repeat
    for i:=1 to 2*n-1 do begin s:=x[i+1]+2*x[i]+4*x[i-1]; y[i]:=b[s] end;
    for i:=1 to 2*n-1 do begin x[i]:=y[i]; if x[i]=1 then putpixel[xm-n+i,j]:=yellow; end;
    inc(j);
  until (j>2*p+1);
end;
```

Außer den genannten Codierungen sind zum Beispiel folgende Zahlenwerte interessant

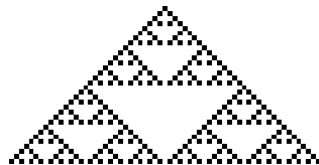
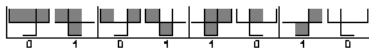
Codierungen

Zellularautomat mit 3 Nachbarn 30, 45, 50, 54, 57, 60, 73, 75, 105, 107, 110, 126, 129, 131, 135, 137, 150, 151, ...

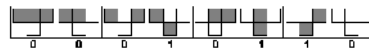
Zellularautomat mit 5 Nachbarn 0, 2, 5, 9, 10, 12, 17, 18, 20-23, 25

Zellularautomat mit 7 Nachbarn 0, 2, 9, 17, 20, 25, 34, 36, 49

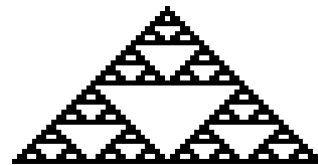
Zellularautomat mit 9 Nachbarn 0, 2, 9, 10, 17, 21, 25, 36, 43, 52, 53



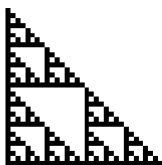
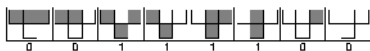
Regel 90  
Sierpinski Dreieck



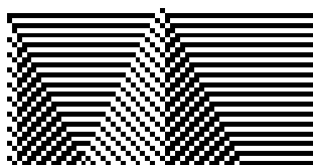
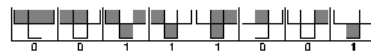
Regel 22  
Sierpinski Dreieck erzeugen, die einzelnen Teile sind identisch.



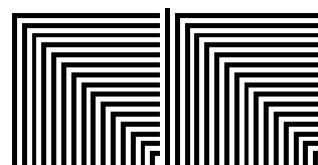
Regel 126  
Sierpinski Dreieck besteht nur aus verbundenen Strukturen



Regel 60, das Dreieck ist um 45° gedreht



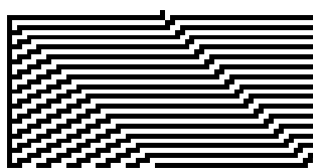
Regel 57



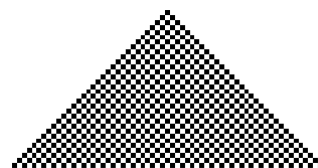
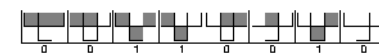
Regel 13



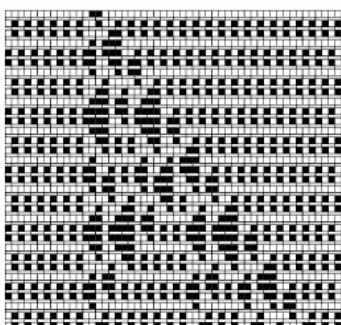
Regel 30, chaotisches Verhalten



Regel 47



Regel 50



### Dualer Zellularautomat

Unter einem dualen Zellularautomaten (engl. block cellular automaton) versteht man einen Automaten mit zwei Zuständen je Zelle, schwarz oder weiß.

Das Regelsystem besteht aus vier Übergangsregeln. Eine Zelle der neuen Generation wird auf Grund der Belegung von zwei benachbarten Zellen der vorhergehenden Generation gefüllt.

Dabei sind die Belegungen schwarz-schwarz, schwarz-weiß, weiß-schwarz und weiß-weiß möglich. (siehe obere Abbildung)

Von Generation zu Generation alternieren zusätzlich die Paare von benachbarten Zellen.

Ein Regelsystem kann als Dualzahl aufgefasst werden. Jeweils schwarze Zellen der ausgetauschten Zellen werden als Bit betrachtet.

Das oben dargestellte Regelsystem ergibt damit  $11100001_2 = 225_{10}$ .  
Für eine Doppelzelle in der ersten Generation erhält man mit diesen Regeln die unten dargestellte Entwicklung des Automaten.



### Ameisensimulation

... erstmals beschrieben im Juli 1994 in "Scientific American"

Chris Langtons Ameise ist eine Turingmaschine mit einem 2-dimensionalen Speicher, mit sehr einfachen Regeln und sehr verblüffenden Ergebnissen.

Nach ihrem Erfinder werden diese Ameisen auch Langton-Ameisen genannt.

Diese Simulation ist ein schönes Beispiel dafür, dass ein einfaches System

mit einfachen Regeln sowohl komplexe chaotische, als auch komplexe geordnete Strukturen aufbauen kann, und das ganz ohne die Verwendung des Zufalls.

### Regeln

Zu Beginn befindet sich die „Ameise“ auf einer; theoretisch unbegrenzten; weißen Zeichenfläche und bewegt sich um einen Punkt vorwärts.

Hat der erreichte Punkt weiße Farbe, färbt die Ameise den Punkt schwarz

und wendet sich um 90° nach links. Ist der Punkt schwarz, wird er weiß

gefärbt und die Ameise dreht sich um 90° nach rechts. Das rechts stehende Muster wurde von derartigen

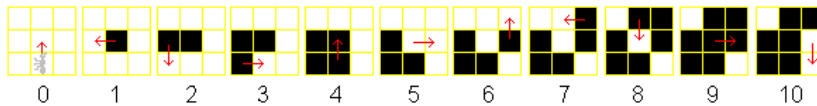
Ameisen erzeugt.



### Ameise im weißen Feld

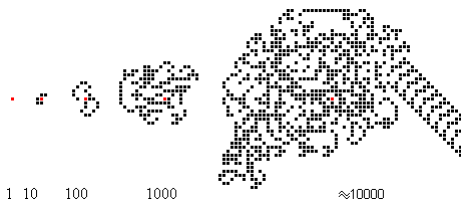
Der einfachste Fall ist die Bewegung einer Ameise in einem quadratischen Gitter mit nur weißen Feldern.

Hier sind die ersten zehn Schritte einer Ameise.



(0) Die an sich unsichtbare Ameise sitzt in einem Feld und bewegt sich

zum Beispiel nach Norden.



(1) Sie findet das nächste Feld weiß vor, färbt es schwarz und dreht sich in Pfeilrichtung. Das ist die Richtung nach links entgegen dem Uhrzeigersinn.

(2) Sie erreicht das nächste Feld, färbt es schwarz und dreht sich in Pfeilrichtung.

(3) (4) Weiter entsteht in den nächsten beiden Schritten ein schwarzes 2x2-Quadrat.

(5) Die Ameise erreicht im fünften Schritt das schwarze Feld, das sie in Schritt 1 gefärbt hatte. Sie färbt es weiß und bewegt sich jetzt aber nach rechts in Richtung des Uhrzeigersinns.

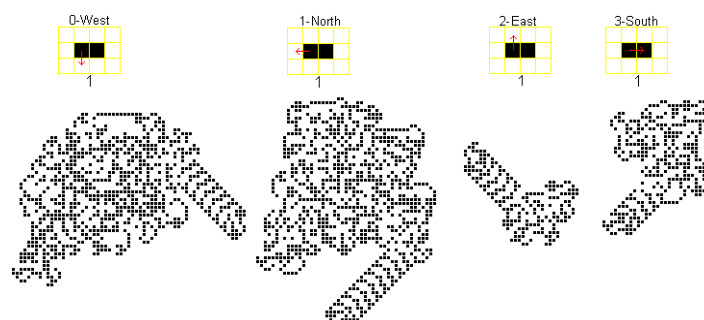
Je weiter die Ameise fortschreitet, desto ausgedehnter wird das chaotische Muster um den Startpunkt herum.

Nach etwa 10000 Schritten passiert etwas Unerwartetes: Sie hinterlässt ein geordnetes Muster, das sich nach unten rechts ohne Ende ausdehnt. Die Ameise baut eine "Autobahn" (Begriff wurde von Langton geprägt, er nannte dies „highway“) aus sich wiederholenden Streifen. Jeder Streifen wird in 104 Schritten gebaut und enthält drei schwarze Tetrominos.

Zur Orientierung: Das rote Feld ist das Quadrat, das die Ameise zu Beginn färbt. Es ist an sich auch schwarz.

### Futter für die Ameise

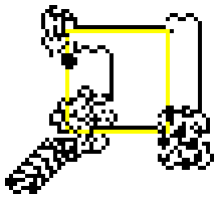
Man gibt als Variation keine weiße Ebene wie oben vor, sondern in ihr ein schwarzes Feld. Es kann als "Futter" bezeichnet werden. Im Folgenden wird untersucht, was passiert, wenn die Ameise ein Feld links des schwarzen Feldes auch schwarz färbt. Es gibt vier Fälle, da die Ameise aus vier Richtungen kommen kann.



Eine 0-West-Ameise lässt sich nicht beeinflussen, wohl aber die anderen Ameisen. Am Ende steht immer die Autobahn.

Viele schwarze Felder beeinflussen den Weg der Ameise stärker. Das zeigt das Beispiel eines Quadrates mit der Seitenlänge 25 als Futter. Eine 1-North-Ameise färbt im ersten Schritt die obere linke Ecke (hier rot) und setzt sich in Bewegung.

Die Ameise läuft auf den Seiten des Quadrates hin und her, löst sie auf und baut parallel dazu neue Strecken auf. Nach etwa 5500 Schritten wird die Autobahn gebaut. Das gelbe Quadrat zeigt zum Vergleich das Ausgangsquadrat.

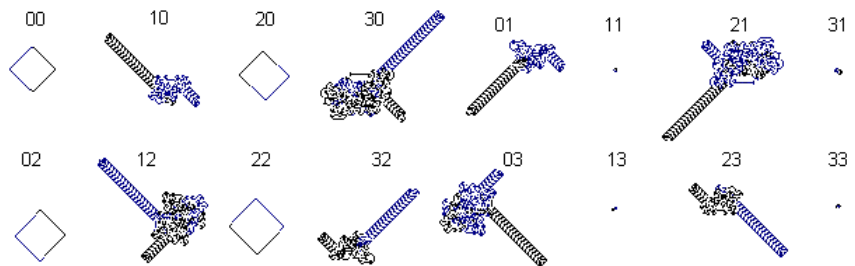


### Zwei Ameisen

Der einfachste Fall ist, wenn die beiden Ameisen in einer weißen Ebene im ersten Schritt zwei nebeneinanderliegende Felder schwärzen. Jede der beiden Ameisen kann sich in die vier Himmelsrichtungen 0-West, 1-North, 2-East und 3-South bewegen. Es gibt 16 Fälle. Die Paare werden durch 00, 10, ..., 23, 33 gekennzeichnet:

Die linke Ameise färbt die Felder schwarz, die rechte dunkelblau. So kann man erkennen, welche Ameise welches Feld färbt. Es gibt die Fälle (I), (II) und (III).

(I) Acht Ameisenpaare benehmen sich so, wie man es erwartet: Erst bewegen sie sich chaotisch, dann bauen sie eine Autobahn. Man beachte die Symmetrien.

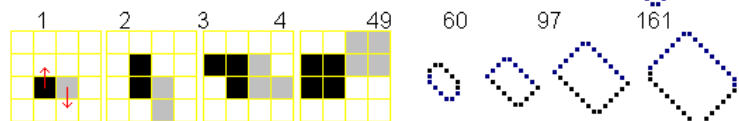


(II) Die erste Überraschung: Vier Paare zeichnen gemeinsam ein immer größer werdendes Parallelogramm.

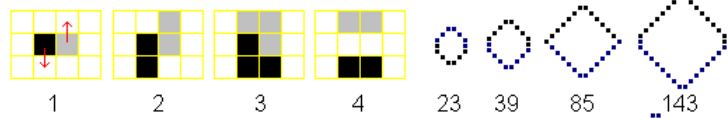
Spuren des Paares 2-East/2-East



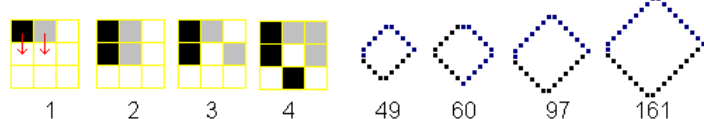
Spuren des Paares 2-East/0-West



Spuren des Paares 0-West/2-East



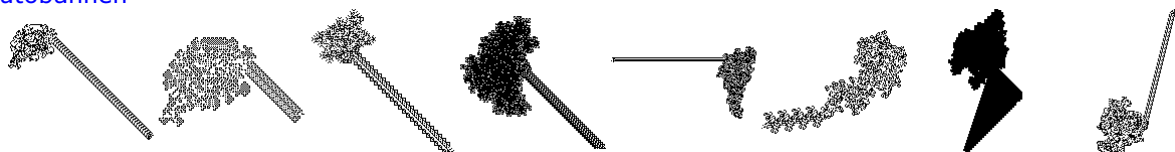
Spuren des Paares 0-West/0-West  
Die Entstehung der Vierecke sieht interessant aus: Die beiden Ameisen bauen gemeinsam eine immer größer werdende Figur und befinden sich dabei auf entgegengesetzten Seiten.



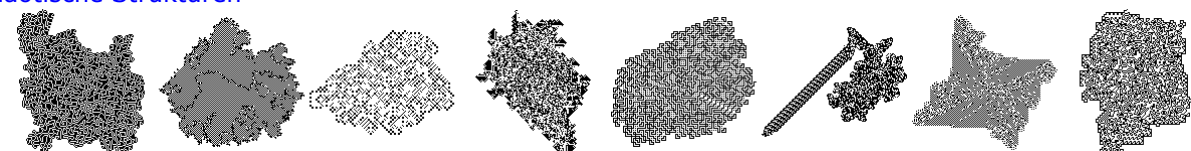
Mit zunehmender Anzahl der Ameisen gleicht das Gewimmel immer mehr einem Ameisenhaufen. In der nebenstehenden Ausgangsstellung kommt es manchmal zu einem neuen Phänomen: Eine Ameise baut an einer Autobahn, eine zweite kommt und "ribbelt" sie wieder auf.

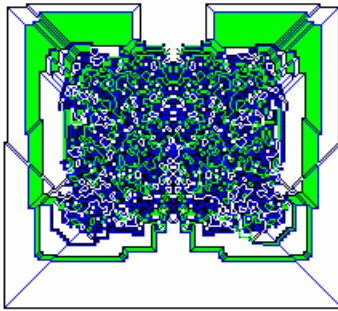
Genauere Analyse dieser Simulation zeigt, dass es zum Beispiel verschiedene Formen dieser Autobahnen gibt. Andererseits können die hier angegebenen Spielregeln modifiziert werden. Dann entstehen völlig neue, ebenso faszinierende Gebilde.

### „Autobahnen“



### Chaotische Strukturen





### Turk-Popp-Langton-Ameisen

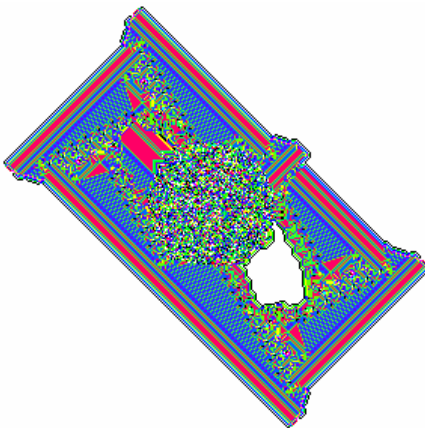
Durch Greg Turk und Jim Propp wurde 1995 eine einfache, aber sehr interessante Erweiterung des klassischen Regelsystems der Langton-Ameisen beschrieben.

Anstelle der Langton-Rechts-Links-Regel RL werden nun Zyklen aus beliebigen R- und L-Bewegungen betrachtet und andersfarbig dargestellt. Mehrere Regeln erzeugen symmetrische Muster mit regelmäßigen und chaotischen Anteilen, z.B. RLLR. Die Abbildung zeigt die Regel LLRR. Andere Bewegungsfestlegungen ergeben vollkommen chaotische Muster, manche nichts, wie z.B. LL und RR.

Zur systematischen Beschreibung der Regeln wird der HHP-Code angewendet. Dazu werden die 'L' und 'R' einer Regel, z.B. 'LRRL', als '0' und '1' interpretiert und die entstehende Dualzahl in das Dezimalsystem transformiert. Um führende 'L' = '0' zu berücksichtigen, wird der Dualzahl eine 1 vorangestellt. Das Beispiel 'LRRL' wird damit zur Dualzahl 10110, d.h. 22 als Dezimalzahl. Jeder natürlichen Zahl größer 3 ist somit eine eindeutige Regel zugeordnet und umgekehrt. Regeln, die mit 'R' beginnen, entsprechen Regeln bei denen alle L gegen R und R gegen L getauscht werden und unterscheiden sich in spiegelsymmetrischer Ausrichtung.

für spezielle HHP-Codes siehe

siehe <http://www.math.sunysb.edu/preprints/ims95-1.pdf>



Für eine Vielzahl von HHP-Codes ergeben sich vollkommen chaotische Strukturen oder Strukturen die sogenannte Ameisen-Autobahnen ausprägen.

Einige HHP-Codes erzeugen symmetrische Gebilde, wenige verblüffende Ergebnisse. Der Code 9040 ergibt z.B. die linke Abbildung.

Weitere interessante Ergebnisse erhält man für HHP-Codes: spezielle Muster

19, 22, 286, 307, 358, 376, 2588, 4339, 4348, 4510, 4600, 4915, 5063, 5068, 5686, 5734, 6112, 6116, 9040, 9856, 10214, 10243, 10255, 10352, 10912, 16804, 17791, 18152, 19201, 19500, 19508, 19551, ...

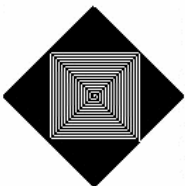
Muster mit eingebetteten Strukturen

1256, 1374, 1416, 2260, 2440, 2464, 2751, 2832, 4287, 4383, 5072, 8575, 8767, 10431, 16524, 16656, 16767, 16927, 17151,

17504, ...

Dreiecke, Vierecke, u.ä.

138, 282, 355, 556, 1143, 2163, 2224, 2286, 4122, 4172, 4200, 4448, 4545, 4572, 4995, 5015, 5215, 8218, 8496, 8500, 8655, 16410, ...



### Turmiten

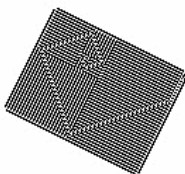
Unter Turmiten versteht man ein zweidimensionale Turing-Maschine, in der ein Objekt je nach Zustand und Regelsystem eine Bewegung auf der Ebene ausführt und dabei Punkte färbt.

Die Langton-Ameisen sind ein Spezialfall der Turmiten, ebenso die Paterson-Würmer.

Nachdem die Langton-Ameisen 1986 beschrieben wurden, erweiterte Allen H. Brady

1988 die Idee auf eine zweidimensionale Turing-Maschine mit Orientierung.

Bekannt wurde das System 1989 durch eine Veröffentlichung von Dewdney.



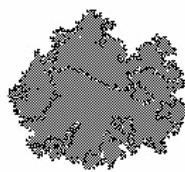
Für Turmiten mit 2 Zuständen und 2 Farben wird eine Regelsystem der Form

1, 8, 0, 1, 2, 1, 0, 2, 0, 0, 8, 1

angegeben.

Der erste Eintrag beschreibt die neue Farbe der aktuellen Zelle, der 2. Eintrag die anschließende Drehung (1 = keine, 2 = nach rechts, 4 = um 180°, 8 = nach links) und der dritte Eintrag den neuen Zustand der Turing-Maschine.

Nach dem Färben der Zelle führen die Turmiten die Drehung aus und bewegen sich eine Zelle vorwärts. Mit dem neuen Zustand wird der Vorgang wiederholt.



Je nach Regelsystem entstehen sehr unterschiedliche Gebilde, u.a. ein spiralförmiges Wachstum, chaotische Formen mit und ohne Textur, ein goldenes Rechteck mit einer Fibonacci-Spirale, aber auch Systeme die in einem Zyklus enden.

### Game of Life

Das Game of Life ist ein System, welches mit einfachen Regeln gestattet, die Dynamik von Anfangssituationen zu simulieren.

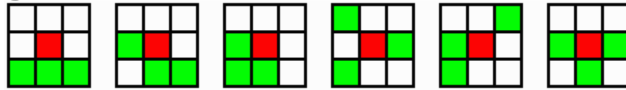
Es wurde in den 1970er Jahren von Conway entwickelt.



Dabei handelt es sich um einen zellulären Automat, bei dem der Zustand einer Zelle vom eigenen Zustand und von dem der Nachbarzellen abhängt.  
In der Ebene werden lebende und tote Zellen betrachtet. Dieses Zellmuster entwickelt sich von Generation zu Generation nach folgenden Regeln:

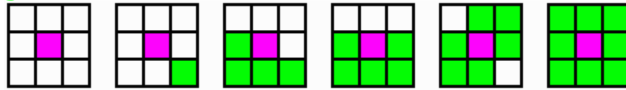
1. Eine lebende Zelle stirbt genau dann, wenn sie weniger als zwei oder mehr als drei lebende Nachbarn besitzt
2. Eine tote Zelle wird lebendig, wenn sie genau drei lebende Nachbarn besitzt, d.h. mindestens drei und höchstens drei.

Erklärung:



rot: Tote Zelle, die in der nächsten Generation geboren wird

grün: Nachbarn der Zelle



magenta: Zelle, die in der nächsten Generation sterben wird

grün: Nachbarn der Zelle

Das Fortbestehen einer Zelle ist damit von ihren acht Nachbarn abhängig und über mehrere Generationen hinweg von der Gesamtpopulation.



Kleinste Veränderungen der Ausgangssituation führen damit zu vollkommen andersartigen Entwicklungen. Als Endstadien sind völliges Aussterben, periodische Bilder, chaotisches Verhalten usw... möglich.

Conway zu "Game of Life":

<http://www.youtube.com/watch?v=E8kUJL04ELA>

<http://www.youtube.com/watch?v=R9Plq-D1gEk>

Abbildung: Interessante Anfangsbilder des "Game of Life"

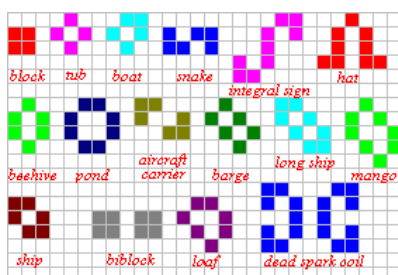
### Strukturen des Game of Life

Oszillierende Objekte sind Objekte, die sich nach einem bestimmten Schema verändern, aber nach einer endlichen, festen Anzahl von Generationen wieder den Ausgangszustand erreichen.

Ein Beispiel für ein oszillierendes Objekt ist der Pulsator.

Die einfachste zyklische Konfiguration ist eine horizontale oder vertikale Reihe von drei lebenden Zellen. Beim horizontalen Fall wird direkt ober- und unterhalb der Zelle in der Mitte eine lebende Zelle geboren, während die äußeren beiden Zellen sterben; so erhält man eine vertikale Dreierreihe.

Eine Reihe von zehn horizontal oder vertikal aneinander hängenden Zellen entwickelt sich sogar zu einem Objekt, das einen Zyklus von fünfzehn Generationen hat, dem Pulsator.



Raumschiffe sind (nicht zwangsläufig) oszillierende Objekte, die während ihres Oszillierens eine feste Strecke zurücklegen und dabei ihre Gestalt erhalten oder sich nach einer bestimmten Anzahl von Generationen selbst erzeugen. Dabei kann man zwischen den diagonalen Raumschiffen und den vertikalen bzw. horizontalen Raumschiffen unterscheiden. Zu den diagonalen Raumschiffen zählen der Gleiter und die Qualle, während die Segler zu den horizontalen Raumschiffen zählen.

Statische Objekte bilden die wohl langweiligste Klasse von Objekten, da sie nichts machen. Manche dieser statischen Objekte haben

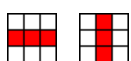
allerdings eine Aufgabe, indem sie z.B. Gleiter „fressen“ oder umlenken können.

Ein Beispiel für ein statisches Objekt ist der Block mit den Ausmaßen 2x2; jede Zelle hat hier drei Nachbarn.

Die stabilen Populationen enthalten nur Lebewesen mit 2 oder 3 Nachbarn und ändern sich nicht mehr. Sie heißen nach Conway Stillleben (still lifes).

Hier ist eine Darstellung einiger bekannter Stillleben.

### Oszillatoren



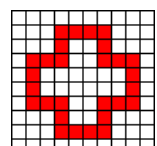
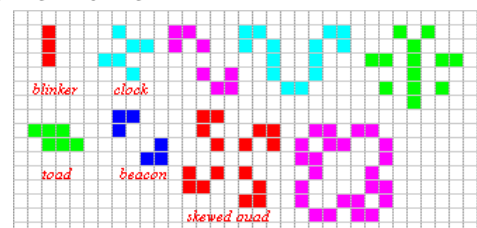
Eine andere auffällige Population ist der Blinker. Er besteht aus drei Lebewesen, die abwechselnd übereinander oder nebeneinander liegen.

Er gehört zu den Periode-2-Oszillatoren (periodic 2 oscillators, p2).

Rechts sind weitere p2-Objekte zu sehen.

Die Perioden können auch größer als 2 sein:

Links ein Periode-3-Oszillator (p3), das Kreuz (cross),



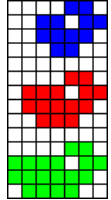


### Gleiter

Es gibt merkwürdige Gebilde, die sich diagonal auf dem Feld bewegen. Sie bringen ein interessantes Moment in die Abfolge der Generationen. Die "Gleiter" bestehen in jeder Phase aus 5 Lebewesen und haben die "Periode" 4.

Auch "Raumschiffe" bewegen sich. Es gibt sie in drei Größen: Sie heißen lightweight spaceship, middleweight spaceship und heavyweight spaceship, abgekürzt LWWS, MWSS und HWWS.

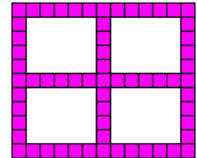
Die Populationen erinnern sowohl im statischen Zustand als auch in der Bewegung mehr an Vögel als an Raumschiffe



Eine beliebte Beschäftigung ist die Entdeckung von Populationen mit interessanten Verläufen. Populationen mit wenigen Lebewesen sind erforscht und katalogisiert.

Eine bekannte Population dieser Art hat die Form eines F-Pentominos. Sie hat eine bewegte Entwicklung:

Stillleben und Blinker entstehen, werden wieder aufgesogen und bilden sich erneut. Insgesamt 6 Gleiter entfernen sich auf Nimmerwiedersehen. Am Ende bleibt nach 1102 Generationen eine Population mit 15 Stillleben



und 4 Blinkern zurück.

Gibt man eine symmetrische Figur vor, so bleibt die Symmetrie in allen nachfolgenden Generationen erhalten. Dadurch ist sie zu jeder Phase ansehnlich.

Manchmal hat man Glück: Wenn man zu Beginn eine Population in Form eines Fensters 13x11 (links) aussetzt, verlassen vier Gleiter die Mitte.



### Game of Life, Primzahlen

Eine Sensation stellt die am 11. Januar 1991 von Dean Hickerson veröffentlichte Ausgangssituation für "Game of Life" dar. Die links schematisch dargestellte Konfiguration wirft aller  $120n+100$  Generationen ein "kleines Raumschiff" aus, genau dann wenn  $n$  eine Primzahl ist. Damit ist es gelungen mittels "Game of Life" ein Primzahlsieb zu realisieren.

### Game of Life-Varianten, Abweichende Regeln

Man kann sich abweichende Regeln zum klassischen "Game of Life" vorstellen. Das folgende Regelwerk

definiert beispielsweise ein sich reproduzierendes System, eine Kopierwelt:

Todes-Regel eine Zelle mit genau 0, 2, 4, 6 oder 8 Nachbarn stirbt

Geburts-Regel 1, 3, 5 oder 7 lebende Nachbarn erzeugen oder erhalten eine lebende Zelle

Wenn man in dieser Kopierwelt eine Struktur in Form des Buchstaben H zeichnet, so werden lauter identische H-Buchstaben erzeugt.

Um sich beim Vergleich verschiedener Regelwerke eine umständliche Umschreibung der Regeln zu ersparen, existiert eine Kurzschreibweise für die Regeln von Game of Life. Man zählt zunächst die Anzahlen von Nachbarn auf, bei der eine Zelle nicht stirbt, und anschließend, durch einen Schrägstrich abgetrennt, die Anzahlen der Nachbarn, bei der eine Zelle geboren wird.

Die klassische Conway-Welt wird durch 23/3 beschrieben, die oben beschriebene Kopierwelt durch 1357/1357.

Sehr dicht an das klassische 23/3-Regelwerk kommen die Regelwerke 34/3 und 35/3. Insgesamt sind  $262144$  ( $2^{18}$ ) Regelwerke denkbar, von denen die meisten jedoch uninteressant sind. Einige der interessanteren werden auf den nachfolgenden Seiten beschrieben.

### Game of Life - Welten

#### 13/3-Welt

Dies ist eine Regelwelt mit wenigen oszillierenden Objekten. Die meisten Objekte sind verkrüppelt. Wenigstens drei oszillierende Objekte gibt es.

#### 34/3-Welt

oszillierendes Objekte der 34/3-Welt: Frosch (siehe Abbildung)

#### 35/3-Welt

in der 35/3-Welt gibt es zum Beispiel diese vier sich bewegenden Objekte, darunter einen Segler

#### 245/3-Welt

Neben den oszillierenden Objekten, die auch in der 24/3-Regelwelt vorkommen, existieren hier auch noch ein paar andere oszillierende Objekte, insgesamt acht. Das Besondere aber ist das Vorkommen eines sich bewegenden 7-Zyklen-Objekts, das in seiner Art der Bewegung einer Qualle ähnelt.

#### 1357/1357-Welt, 1357/02468-Welt

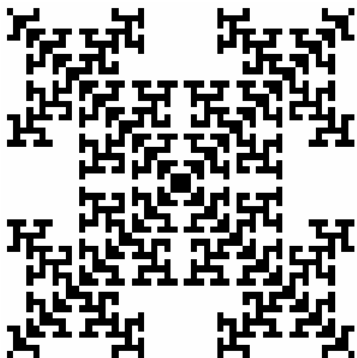
Kopiersysteme, wobei jeweils eine einzige kleine Struktur wunderbare Muster hervorzaubern kann

#### Antiwelten

Zu jeder Regelwelt gibt es eine Antiregelwelt, in der Form, dass alles invertiert ist. Alle Zellen, die sonst tot sind, leben und alle Zellen, die sonst leben, sind tot. Anticonway-Regeln erhält man, wenn man



erstens je Anzahl Nachbarn die Regeln für Geburt und Tod tauscht und zusätzlich die Regeln derart spiegelt, dass 8 Nachbarn das Regelsystem für 0 erhalten, 7 für 1, 6 für 2, ... und 0 für 8. Die Antiwelt zum ursprünglichen Game of Life wäre damit die 01234678/0123478-Welt.



### Zweidimensionales Wachstum

Ein zweidimensionaler Zellularautomat kann auch mit folgendem Regelsystem aufgebaut werden:

1. Ausgang sind eine oder mehrere linear angeordnete Zellen
2. je Zyklus (Generation) wird eine leere Zelle genau dann gefüllt, wenn sie eine vorgegebene Anzahl von Nachbarn hat
3. dabei werden entweder 4 Nachbarn (links, rechts, oben, unten) oder 8 Nachbarn (auch die Diagonalen) betrachtet

Auch bei diesem Automaten ergeben sich sehr interessante Figuren.

### Munching Squares

Die "Munching Squares" sind eine

Abfolge von Bildern, die auf einem der ersten Minicomputer, dem PDP-1 von 1962, von Jackson Wright erdacht wurden.

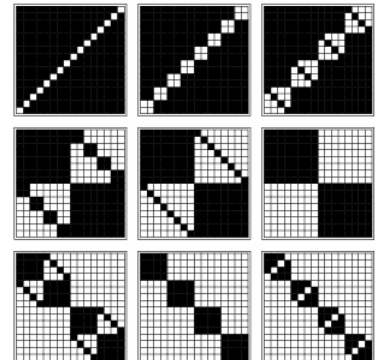
Ziel war es, auf dem Bildschirm des Computers eine Animation mit symmetrischen Mustern zu erzeugen. Im Jahr 1962 war das Ergebnis eine Sensation!

Ausgehend von einem  $n \times n$ -Spielfeld auf dem Display wird für jedes Feld mit den Koordinaten  $a, b$ ; beginnend bei  $(0,0)$ ; der Wert

$XOR(a, b)$

gebildet. Ist das Ergebnis kleiner als ein Parameter  $t$  wird das Feld weiß bezeichnet, andernfalls schwarz.

Der Parameter  $t$  läuft dabei von 0 bis  $n$ .



Während in der Originaldarstellung der 1960er Jahre nur der XOR-Operator benutzt wurde, kann auch der AND- bzw. OR-Operator verwendet werden.

Es ist erstaunlich, dass bei diesen beiden Operatoren das Sierpinski-Dreieck entsteht.

### Donnelly-Simulation

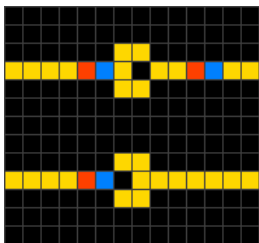
Peter Donnelly vom University College of Swansea in Wals und Dominic Welsh von der Universität Oxford entwickelten dieses faszinierende "Wahl-Spiel".

Gegeben ist eine gewisse Menge von Wählern und eine Anzahl von Parteien bzw. Gruppierungen.

Zu Beginn hat jeder Wähler eine gewisse politische Orientierung. In gewissen Zeitabständen wird ein beliebiger Wähler schwankend und ändert seine Meinung zufällig in die Meinung eines seiner acht Nachbarn.

Lässt man diese einfache Regel über einen längeren Zeitraum laufen, treten erstaunliche Effekte zu Tage. Verblüffend ist, dass jede(!) Ausgangssituation irgendwann einmal zum Totalitarismus führt. Eine Gruppe bleibt übrig, während alle anderen aussterben.

Anmerkung: Der "endgültige Sieg" einer Gruppe ist sicher. Allerdings kann dies länger dauern. Ein Testlauf von 15 Gruppierungen ergab nach 2 Millionen Wählerwanderungen erst das Aussterben von 9 Gruppen, während von den verbleibenden 6 fünf "ums Überleben" kämpften und eine Partei schon eine 2/3-Mehrheit erzielt hatte.



### Wireworld

Abbildung: Wireworld-Dioden, die obere wird in Durchlass-, die untere in Sperrrichtung geschaltet

Wireworld ist ein zellulärer Automat, der erstmals von Brian Silverman 1987 beschrieben wurde. Er eignet sich besonders für die Simulation elektronischer Logikelemente wie Gatter oder Flipflops. Trotz der Einfachheit seiner Regeln ist es möglich, vollständige Computer mittels Wireworld zu implementieren.

Eine Wireworld-Zelle kann vier unterschiedliche Zustände einnehmen:

leer (schwarz)

"elektrischer Leiter" (gelb)

"Elektronenkopf" (blau)

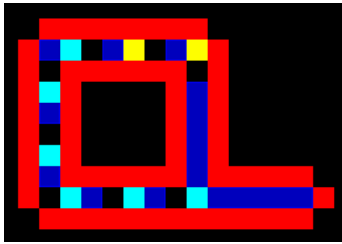
"Elektronenende" (rot)

Die Zeit verläuft in diskreten Schritten, den sogenannten Generationen. Dabei bleibt eine leere Zelle grundsätzlich leer. Die übrigen Zellen verhalten sich beim Übergang von einer Generation zur nächsten wie folgt:

aus einem Elektronenkopf wird ein Elektronenende

aus einem Elektronenende wird ein Leiter.

aus einem Leiter wird ein Elektronenkopf, wenn genau ein oder zwei der benachbarten Zellen Elektronenköpfe sind  
Wendet man diese Regeln auf die Zellen an, so bewegt sich das Elektron in Richtung seines "Kopfes". Durch geeignete Ausbildung von Leiterverzweigungen und -kreuzungen können logische Schaltelemente vom einfachen Gatter bis zum komplexen Rechenwerk realisiert werden.



### Langton-Schleife

Langton-Schleifen (engl. Langton's Loops) stellen eine spezielle Form künstlichen Lebens dar. Sie wurden 1984 von dem theoretischen Biologen Christopher Langton entwickelt.

Die "Organismen" mit der Fähigkeit zur Selbstreplikation bestehen aus einer ringförmigen Anordnung von Zellen, die die genetische Information enthalten.

Diese Zellen sind von einer schützenden Hülle umgeben, in der sie

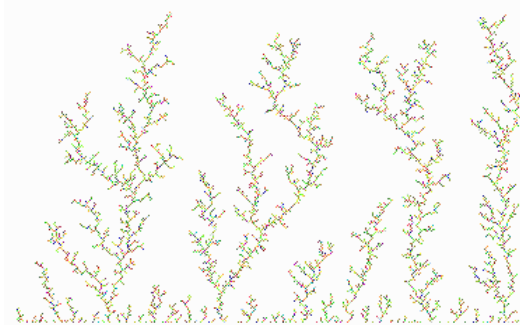
beständig rotieren. An einer bestimmten Stelle bricht der Zellstrang mit den Genen die Hülle auf, und der Organismus bildet hier einen Arm aus, in den eine vollständige Kopie der Gensequenz eintritt. Diese veranlasst den Arm zu wachsen, sich zu einem neuen Ring zu schließen und sich schließlich vom Elternring abzulösen.

Danach sind die beiden genetisch identischen Organismen zu abermaliger Replikation bereit.

Der von Langton entworfene zelluläre Automat ist zweidimensional mit Von-Neumann-Nachbarschaft und acht Zellzuständen.

Die Anfangskonfiguration besteht aus 86 Zellen. Es existieren mehrere hundert Regeln, die die Zustandsänderungen jeder Zelle beim Übergang von einer zur nächsten Generation festlegen.

siehe <http://necsi.org/postdocs/sayama/sdsr/movies/lang-rep.html>



### Clusterbildung

Das Bilden von Clustern findet u.A. statt bei Anlagern von Teilchen an Oberflächen, elektrischen Entladungen, Wachstum von Dendriten und Diffusion von Wasser in Öl. Biochemisch interessante Cluster, wie z.B. aus Peptiden oder Nucleotiden, gelten als Modellsysteme für biologische Reaktionsprozesse. Im Englischen spricht man dabei von Diffusion Limited Aggregation (DLA), d.h. durch Diffusion begrenztes Wachstum.

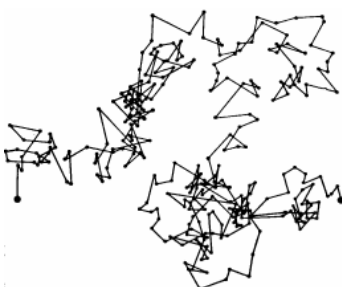
Der Mechanismus der Clusterbildung ist theoretisch auch heute noch (im Jahr 2006) nicht voll verstanden. Daher sind Computer-Simulationen dieser Vorgänge von großem

Interesse, wenn gleich diese sehr rechenaufwendig sind.

Ein einfacher; und die Entwicklung von Clustern gut beschreibender Algorithmus, ist folgender:

- auf der Simulationsfläche wird ein beliebiger Punkt zufällig ausgelost
- innerhalb seiner von-Neumann-Umgebung (d.h. nach links, rechts, oben oder unten) wird dieser Punkt zufällig verschoben
- befindet sich nun in der Moore-Umgebung (d.h. links, rechts, oben, unten, links-oben, links-unten, rechts-oben und rechts-unten) ein Cluster-Teilchen, so wird der Punkt gesetzt. Ist sein Abstand vom Startpunkt größer als der momentane Distanzwert, so wird dieser Wert aktualisiert
- kann der Punkt nicht gesetzt werden, wird er solange in der von-Neumann-Umgebung verschoben und in der Moore-Umgebung getestet bis er entweder markiert werden kann oder sein Abstand zum Startpunkt den aktuellen Distanzwert um 4 Pixel überschreitet. In diesem Fall wird der Punkt verworfen und von vorn begonnen

Hinweis: Der in der Abbildung dargestellte Cluster wurde auf einem Pentium III-Rechner (750 MHz) in etwa 10 Minuten berechnet. Wie rasant sich die Computertechnik weiterentwickelt hat, erkennt man daran, dass die obige Abbildung auf einem „alten“ 386er-PC mehr als einen Tag benötigt.



### Brownsche Molekularbewegung, Brownsche Bewegung

Der englische Botaniker Brown entdeckte 1827, dass mikroskopisch kleine Teilchen, z.B. Staub, in Gasen oder Flüssigkeiten Zitterbewegungen ausführen.

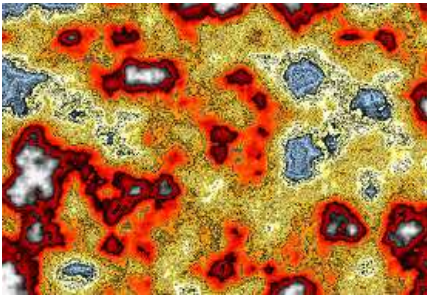
Die Brownsche Molekularbewegung beruht auf den unregelmäßigen Stößen der Moleküle des umgebenden Mediums. Diese Bewegung ist ein stochastischer Vorgang, der chaotisch erfolgt.

In der Mathematik ist eine Brownsche Bewegung ein zentrierter Gauß-Prozess. Der resultierende stochastische Prozess wird zu Ehren von Norbert Wiener, der die Wahrscheinlichkeitstheoretische Existenz 1923 bewies, als

Wiener-Prozess bezeichnet.



Eine Möglichkeit, eine Brownsche Bewegung zu konstruieren, geht von unabhängigen, standardnormalverteilten  $z_0, z_1, \dots$  aus. Dann ist  $S(t) = z_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} z_k \sqrt{2} \sin(k\pi t) / (k\pi)$  eine Brownsche Bewegung.



### Plasma

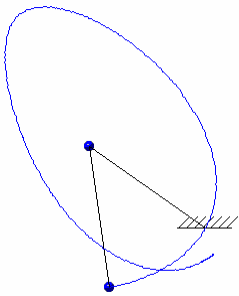
Ein sehr interessantes fraktales Gebilde ist die Konstruktion eines Plasmas. Dabei werden rekursiv aus schon vorhandenen Punkte weitere farblich gekennzeichnete Punkte als Mittelwert mit einem gewissen zufälligen Anteil berechnet. Im Ergebnis entsteht ein Bild, das irgendwie an Wolken oder Aufnahmen von Wärmestrahlung erinnert.

Delphi-Procedure  
 procedure plasma;  
 var q:integer; faktor:real;

```
function _getpixel(x,y:integer):word;
var i:integer; farben:longint; gefunden:boolean;
begin farben:=paintbox1.Canvas.pixels[x,y]; gefunden:=false; i:=0;
  repeat if integer(rgb(pal[i].r,pal[i].g,pal[i].b))=farben then gefunden:=true;
    inc(i); until gefunden or (i>255); dec(i);
  if not gefunden then _getpixel:=0 else _getpixel:=i; end;
function farbmitte(f1,f2,abweich:integer):word;
var m,x:integer;
begin m:=(f1+f2) div 2+ random(abweich)-abweich div 2; if m<0 then m:=0;
  x:=(modus*m) mod 256; if x=0 then inc(x); farbmitte:=x;
end;
procedure fenster(xa,xs,ys,ys:longint);
var farbe1,farbe2,farbe3,farbe4:byte; xm,ym,xxx:integer;
begin if not abbruch then begin xm:=(xa+xs) div 2; ym:=(ys+ys) div 2; if xa>0 then
  farbe1:=_getpixel(pred(xa),ym)
  else begin farbe1:=farbmitte(_getpixel(xa,ys),_getpixel(xa,ys),round((ys-ys)*faktor));
    paintbox1.Canvas.Pixels[xa,ym]:=rgb(pal[farbe1].r,pal[farbe1].g,pal[farbe1].b);
  end;
  if ys>0 then farbe2:=_getpixel(xm,pred(ys)) else begin
    farbe2:=farbmitte(_getpixel(xa,ys),_getpixel(xs,ys),round((xs-xa)*faktor));
    paintbox1.Canvas.Pixels[xm,ys]:=rgb(pal[farbe2].r,pal[farbe2].g,pal[farbe2].b);
  end;
  farbe3:=farbmitte(_getpixel(xs,ys),_getpixel(xs,ys),round((ys-ys)*faktor));
  paintbox1.Canvas.Pixels[xs,ym]:=rgb(pal[farbe3].r,pal[farbe3].g,pal[farbe3].b);
  farbe4:=farbmitte(_getpixel(xa,ys),_getpixel(xs,ys),round((xs-xa)*faktor));
  paintbox1.Canvas.Pixels[xm,ys]:=rgb(pal[farbe4].r,pal[farbe4].g,pal[farbe4].b);
  xxx:=farbmitte(farbmitte(farbe1,farbe3,0),farbmitte(farbe2,farbe4,0),0);
  paintbox1.Canvas.Pixels[xm,ym]:=rgb(pal[xxx].r,pal[xxx].g,pal[xxx].b);
  if xm > xa then begin fenster(xa,xm,ys,ys); fenster(xa,xm,ym,ys); end;
  if xs > succ(xm) then begin fenster(xm,xs,ys,ys); fenster(xm,xs,ym,ys); end;
  application.ProcessMessages;
end; end;
procedure farbtiefe;
var DesktopDC : HDC; BitsPerPixel : integer;
begin DesktopDC := GetDC(0); BitsPerPixel := GetDeviceCaps(DesktopDC, BITSPIXEL);
  if BitsPerPixel < 24 then showmessage('Farbtiefe zu gering'); ReleaseDC(0, DesktopDC);
end;
begin
  farbtiefe; randomize; faktor:=strtoint(edit1.text);
  q:=random(255)+1;
  paintbox1.Canvas.pixels[0,0]:=rgb(pal[q].r,pal[q].g,pal[q].b);
  q:=random(255)+1; paintbox1.Canvas.pixels[breite-1,0]:=rgb(pal[q].r,pal[q].g,pal[q].b);
  q:=random(255)+1; paintbox1.Canvas.pixels[0,hoehe-1]:=rgb(pal[q].r,pal[q].g,pal[q].b);
  q:=random(255)+1; paintbox1.Canvas.pixels[breite,hoehe-1]:=rgb(pal[q].r,pal[q].g,pal[q].b);
  fenster(0,breite-1,0,hoehe-1);
end;
```

Fraktale Strukturen finden sich über all in der Natur. Das rechte Bild zeigt die Umgebung des Assuan-Staudamms





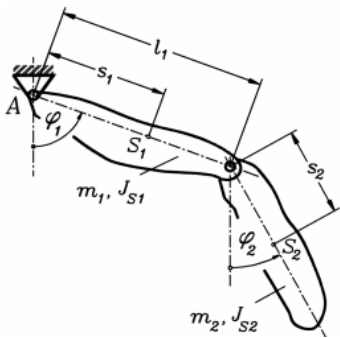
### Chaos-Doppelpendel

Eine der auch heute noch interessantesten Aufgaben der Mechanik ist die Untersuchung des Verhaltens eines mathematischen Doppelpendels. Dabei ist ein Massekörper an einem Faden angebracht (Fadenpendel). Ein zweites Fadenpendel wird nun zusätzlich an dem ersten Massekörper befestigt. Beide Körper können unterschiedlich ausgelenkt werden.

Möchte man die Orte der Körper während der Schwingung wissen, wäre es notwendig zwei Schwingungsdifferenzialgleichungen zu lösen. Extrem schwierig wird es aber dadurch, dass sich der Aufhängepunkt der zweiten Schwingung selbst bewegt und durch die Verbindung beider Schwingungen eine ständige Energieübertragung stattfindet. Dadurch kann das Problem nicht mehr rein

analytisch gelöst werden, sondern bedarf eines Näherungsverfahrens bzw. der Simulation mit dem Computer. Insbesondere zeigt sich, dass die Bewegung eines solchen Pendels extrem stark von den Anfangsbedingungen abhängig ist. Dieses dynamische System besitzt Eigenschaften, welche von der modernen Chaostheorie untersucht werden.

Für bestimmte Anfangswerte führt das Doppelpendel scheinbar unregelmäßige Bewegungen aus. Man kann verfolgen, dass sich das Pendel oft längere Zeit annähernd gleichmäßig bewegt und dann plötzlich ein völlig anderen Weg nimmt. Dieses chaotische Verhalten führte auch zur Bezeichnung Chaospendel für dieses mathematische Doppelpendel.



Ein Doppelpendel wird definiert durch die beiden Pendelmassen  $m_1$  und  $m_2$ , die auf die jeweiligen Schwerpunkte bezogenen Massenträgheitsmomente  $J_{S1}$  und  $J_{S2}$ , die Schwerpunktabstände von den Drehpunkten  $s_1$  und  $s_2$  und den Abstand  $l_1$  der beiden Drehpunkte voneinander.

Die Bewegung wird durch die Funktionen  $\phi_1(t)$  und  $\phi_2(t)$  beschrieben, die für die Zeit  $t = 0, 1, \dots, s$  zu berechnen sind.

Dann gelten die folgenden Differenzialgleichungen:

$$\begin{aligned} & [(s_1/l_1)^2 + J_{S1}/(m_1 l_1^2) + m_2/m_1] d^2\phi_1/dt^2 + [m_2/m_1 s_2/l_1 \cos(\phi_1 - \phi_2)] d^2\phi_2/dt^2 \\ & = -m_2/m_1 s_2/l_1 (d\phi_2/dt)^2 \sin(\phi_1 - \phi_2) - (s_1/l_1 + m_2/m_1) g/l_1 \sin \phi_1 \\ & \text{und} \\ & [m_2/m_1 s_2/l_1 \cos(\phi_1 - \phi_2)] d^2\phi_1/dt^2 + [m_2/m_1 (s_2/l_1)^2 + J_{S2}/(m_1 l_1^2)] d^2\phi_2/dt^2 \\ & = -m_2/m_1 s_2/l_1 (d\phi_1/dt)^2 \sin(\phi_1 - \phi_2) - m_2/m_1 s_2/l_1 g/l_1 \sin \phi_2 \end{aligned}$$

Dieses Differenzialgleichungssystem ist nicht analytisch lösbar und kann nur durch Näherungsverfahren bestimmt werden, z.B. mittels Runge-Kutta-Verfahren.

Quelle: Dankert, [http://www.tm-aktuell.de/TM5/Doppelpendel/doppelpendel\\_matlab.html](http://www.tm-aktuell.de/TM5/Doppelpendel/doppelpendel_matlab.html)

### Fraktale in der Kunst und Unterhaltung

Die Schönheit und Seltsamkeit der fraktalen Gebilde hat deren Einzug in die bildende Kunst nur gefördert. Als eines der unzähligen Beispiele sei erwähnt:

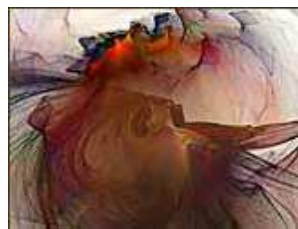
Diese Bilder entstanden auf der Basis von Algorithmen, die man auch als Fraktale bezeichnen könnte. © Karin Kuhlmann



Kopflos



Brennende Geduld



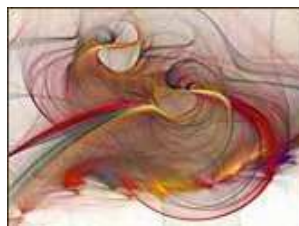
Staub zu Staub



Zeichen



Fluchtversuch



Zündstoff

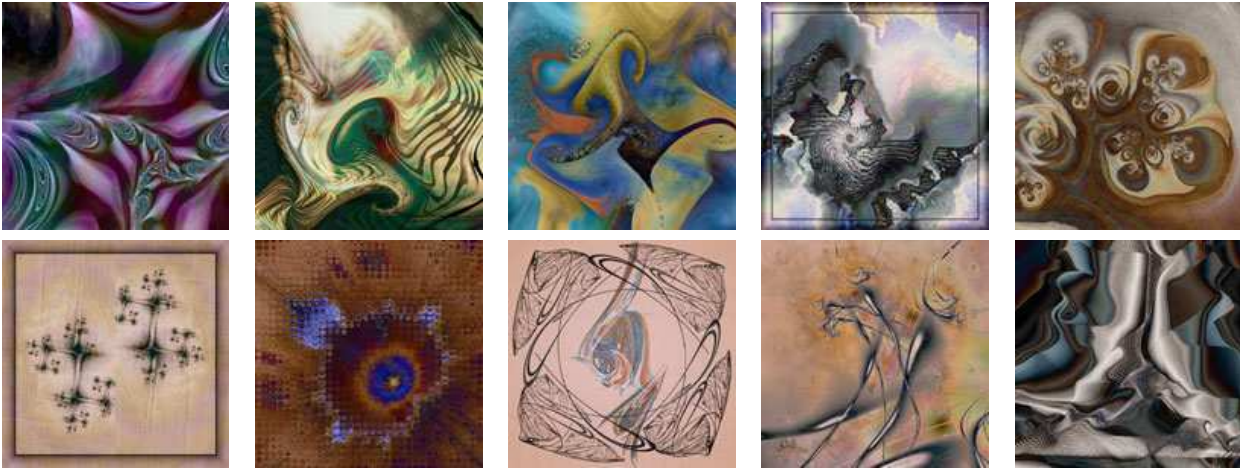


Die dunkle Seite



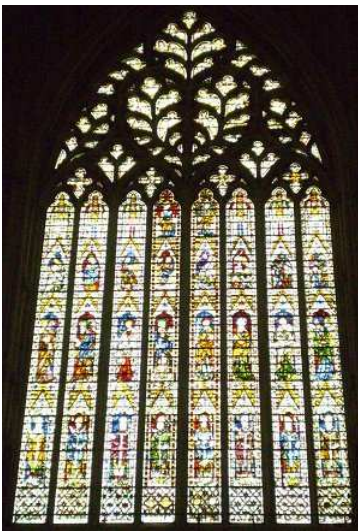
Tiefenrausch





Darüber hinaus treten Fraktale aber auch in anderen Bereichen der Unterhaltung auf. Im faszinierenden Science-fiction-Film „Star Trek“ zerstört ein nicht identifizierter Fremder aus dem Weltall drei mächtige Klingonen-Raumschiffe. Daraufhin übernimmt Captain James T. Kirk erneut das Kommando über das U.S.S. Raumschiff "Enterprise". Die Besatzung der "Enterprise" mobilisiert sofort alle Kräfte, um den fremden Eindringling aus dem Weltall daran zu hindern, die Erde zu vernichten. Und das mathematisch Besondere ist, dass erstmals die räumlichen Strukturen des fremden Gebildes mittels fraktaler Geometrie erzeugt wurden. Star Trek I ist damit der erste Spielfilm, in dem Methoden der Chaostheorie genutzt wurden.

Auch die Pop-Musik kann sich neuen mathematischen Verfahren nicht entziehen, zumindest die Künstler, die ein Anspruchsniveau an ihre eigene Musik stellen. Im Video zu „Morgenrot – Dance Music“ von Herbert Grönemeyer werden fraktale Bäume und Landschaften gezeigt. Außerdem findet man noch das Zerfallen in selbstähnliche Teile, ein Attraktor als Regenbogen, ein Möbius-Band und mehrere Sternpolyeder. Für den Mathematiker eine „wahre Freude“.



### Fraktale in der Architektur

Auch in der Architektur finden sich Ansätze zur Nutzung fraktaler Strukturen.

Das wohl schönste Beispiel aus der Kunst sind die Maßwerk-Fenster einiger gotischer Kathedralen; z.B. die Fenster des "Straßburger-Meisters" (Straßburg).

Das ursprüngliche Fenster wird in zwei Teilfenster unterteilt, jedes dieser Teilfenster wieder in zwei Teilfenster.

Dieser Teilungsprozess kann in der Praxis natürlich nicht unendlich weitergeführt werden; ein nächster Unterteilungsschritt erfolgt mitunter in der Glasmalerei.

Die linke Abbildung zeigt das Westfenster des Münsters von York.

Diese Fenster von 1338 zeigen eine fortgesetzte Zweier-Unterteilung. Das Ostfenster (1405-1408) besitzt sogar eine fortgesetzte Dreier-Unterteilung.

Ein Architekt, der Selbstähnlichkeit zum Thema seiner Gebäude macht, ist der US-Amerikaner Bruce Goff (1904-1982). Er war einer der führenden Vertreter der Art-Deco-Architektur. Bedeutende Bauwerke sind das Bavinger Haus in Norman, das Ruth VanSickle Ford House in Aurora, das Colmorgan Haus in Glenview und der Pavillon für japanische Kunst in Los Angeles.

So projektierte er das "Joe D.Price-Haus" (1956-1976) mit selbstähnlichen Dreiecken, Sechsecken und Trihexa, vom größten bis zum allerkleinsten Detail. Die Abbildung zeigt eine der Eingangstüren des Hauses.

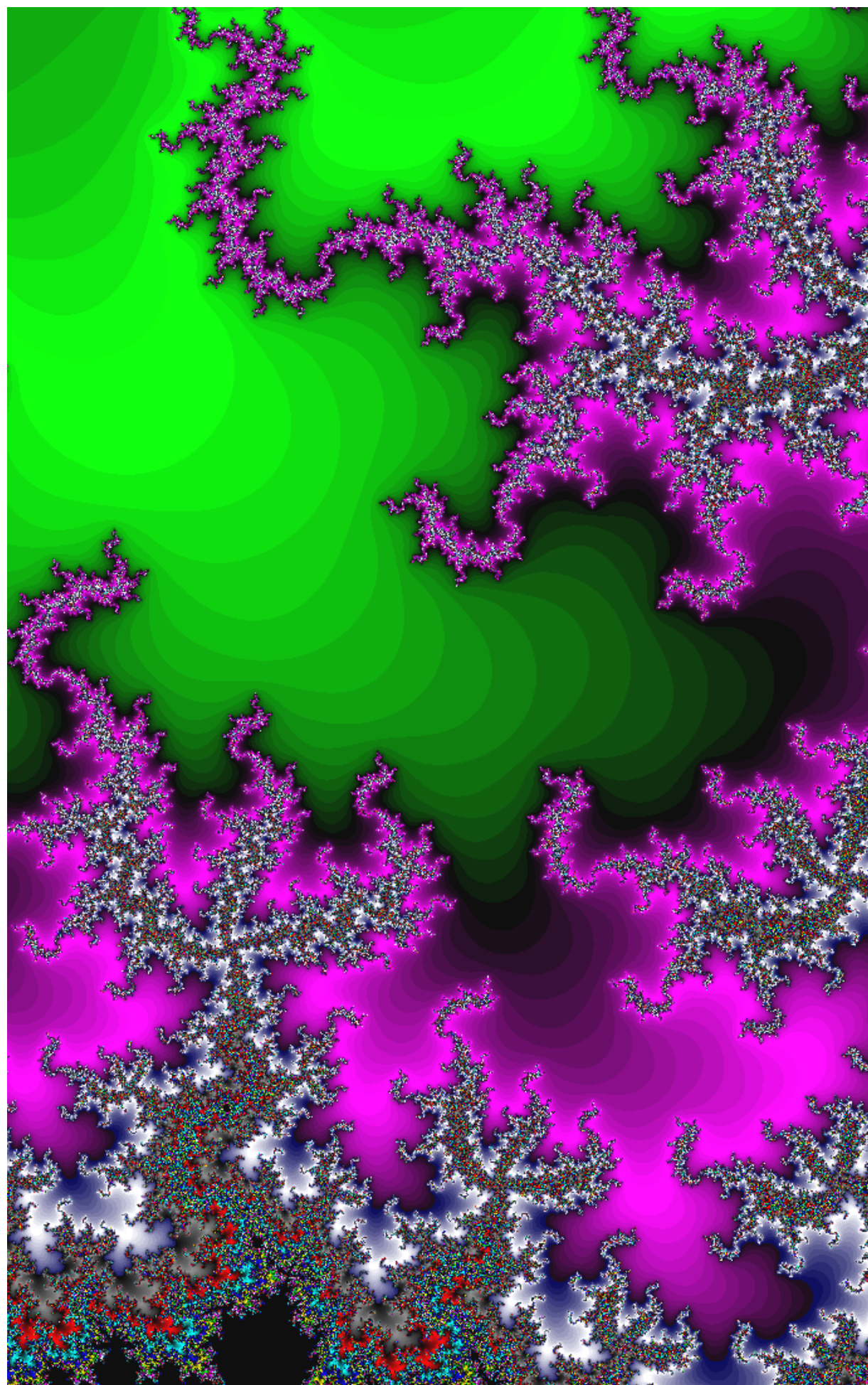
Winkel von 60°, ihr Vielfaches und Bruchteile davon treten in allen Formen und Materialien auf.

Das Price-Haus wurde 1996 durch Brandstiftung zerstört.

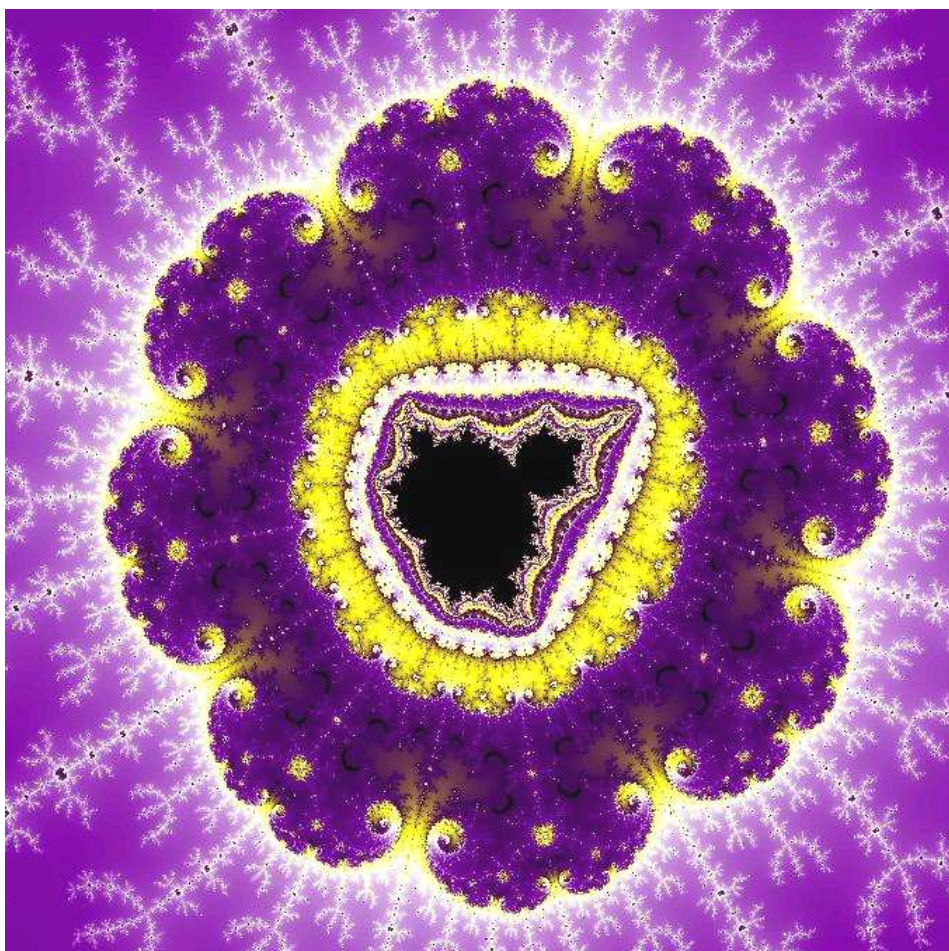
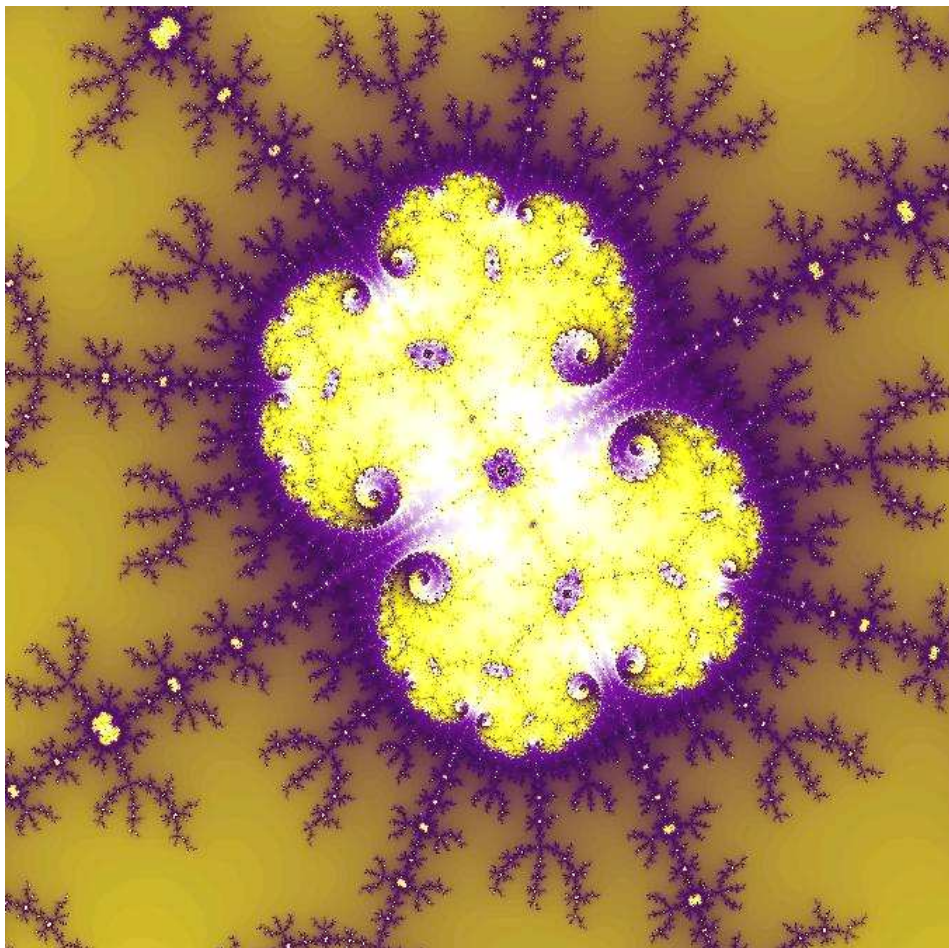




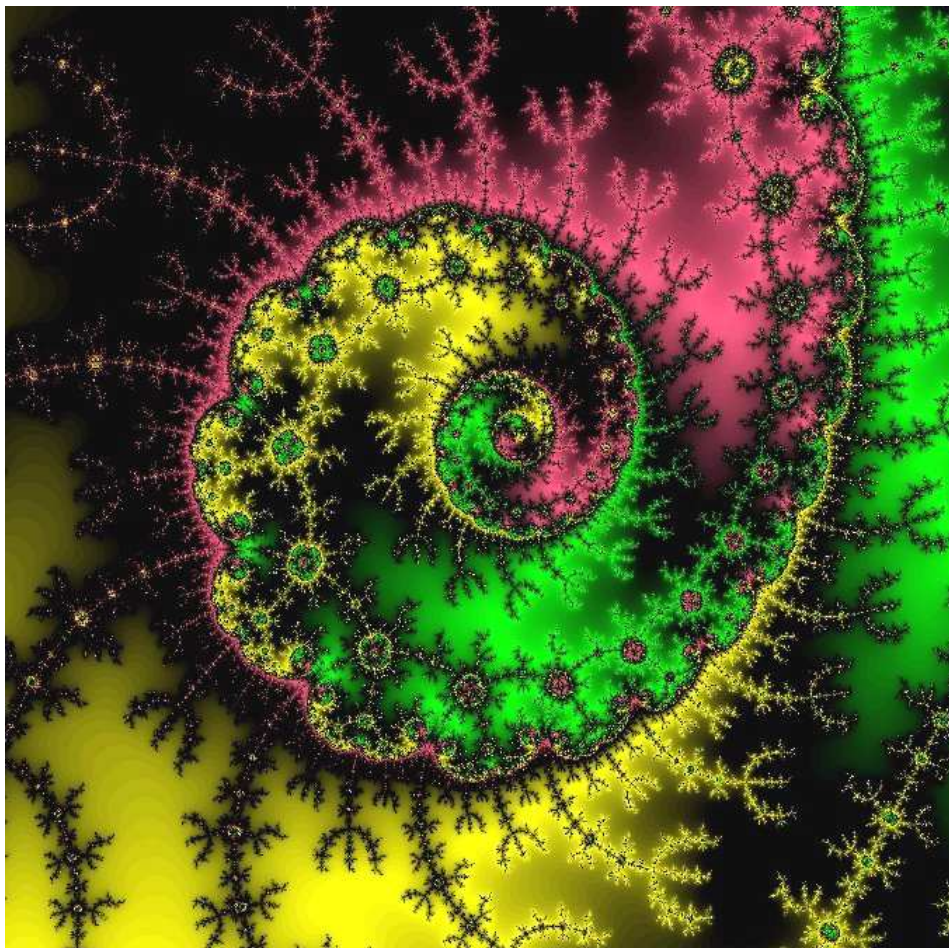




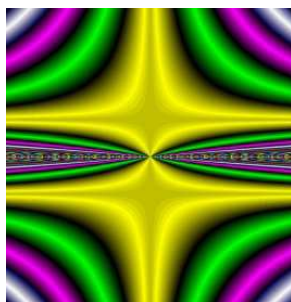




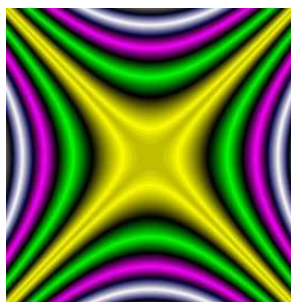




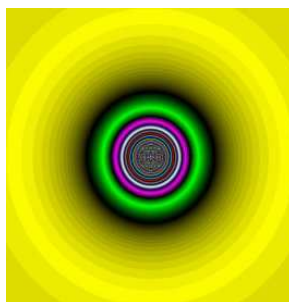




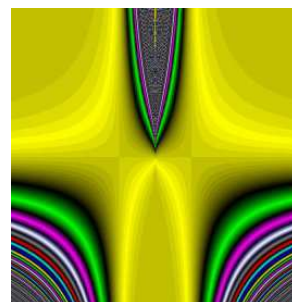
$xy - x + \sin y$



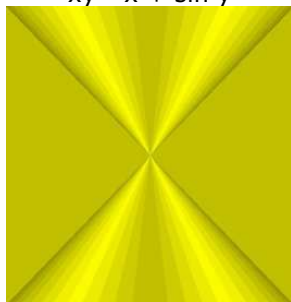
$(x + y)(x - y)$



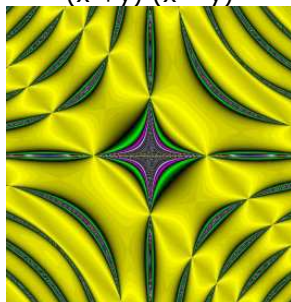
$1/(x^2 + y^2)$



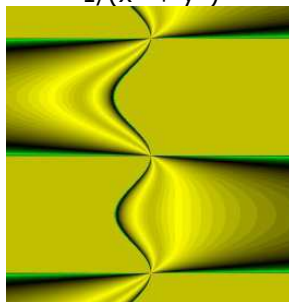
$|x|^y$



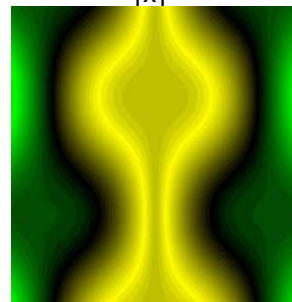
$\arcsin(x/y)$



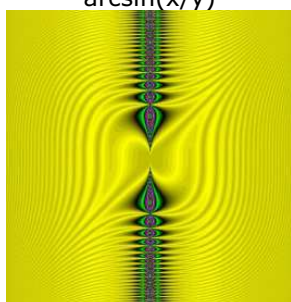
$\cos x / \sin(xy)$



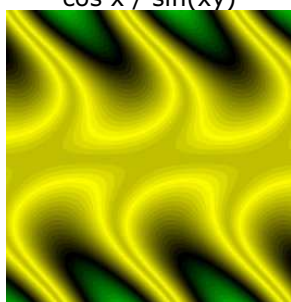
$\ln(x / \sin y + \sin y)$



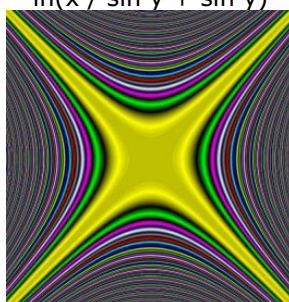
$\sin x \sin y + x$



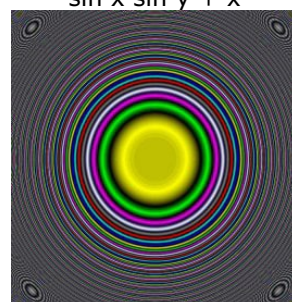
$\sin(x^3 + y^3)/x$



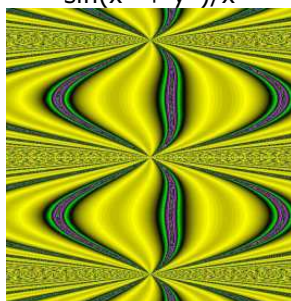
$y \sin(x + \sin y)$



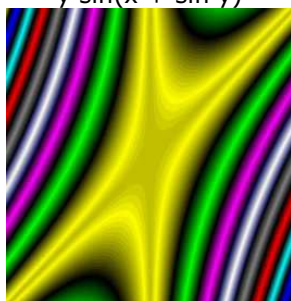
$((x - y)(x + y))^2$



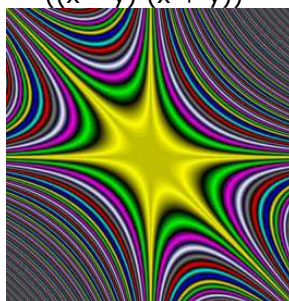
$(x^2 + y^2)^2$



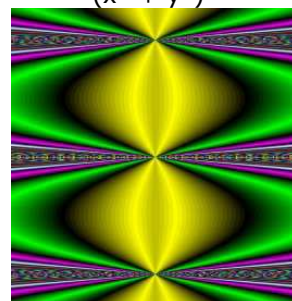
$\tan(x/\sin y + \sin y)$



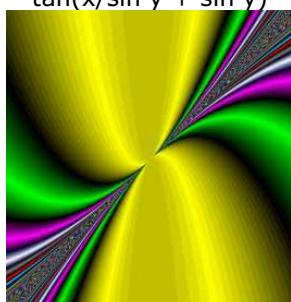
$x(x + y)$



$xy(x - y)$



$x / \sin y$



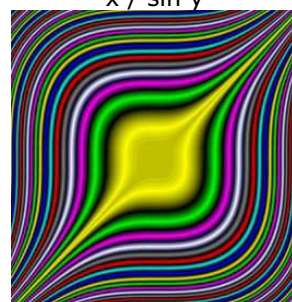
$x^2 / (x + y)$



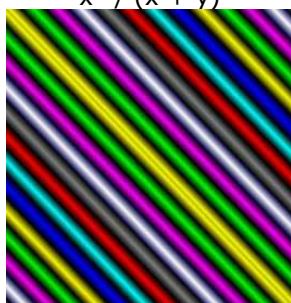
$x^2 / \sin(x - y)$



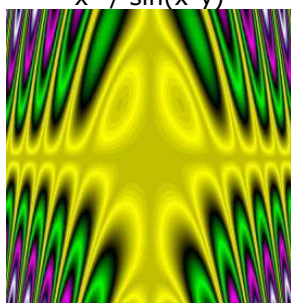
$x^2 + \sin(xy)$



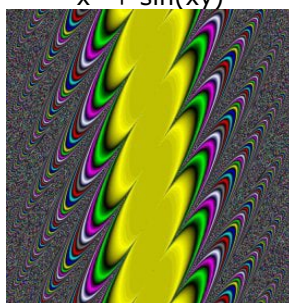
$x^3 + y^3$



$x - y$



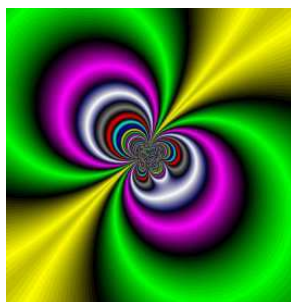
$x^2 / \sin(x - y)$



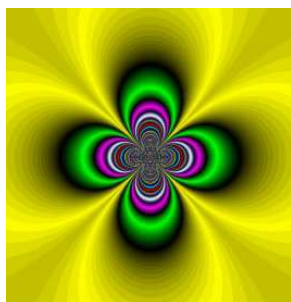
$x^2 + \sin(xy)$

**Circle-Fraktale**

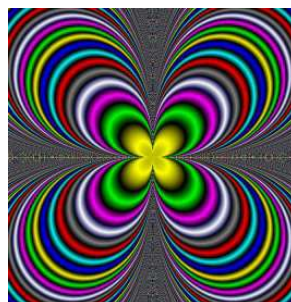




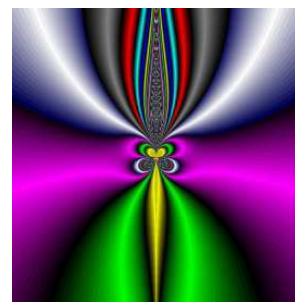
$xy - (x + \sin y)$  invers



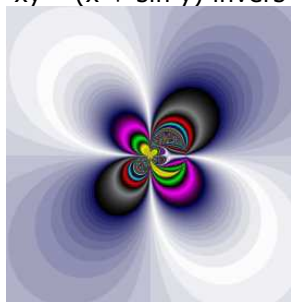
$(x+y)(x-y)$  invers



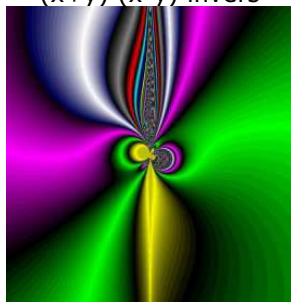
$1/(xy)$  invers



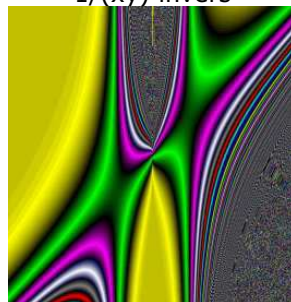
$|x|^y$  invers



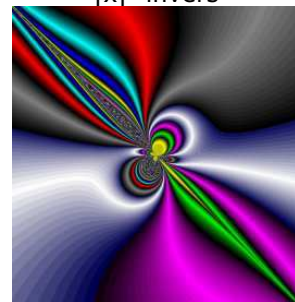
$|1-x|^y$  invers



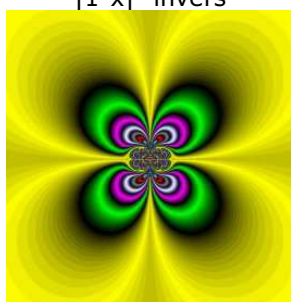
$|1-x|^{y+x}$  invers



$|1-x|^{y+x}$



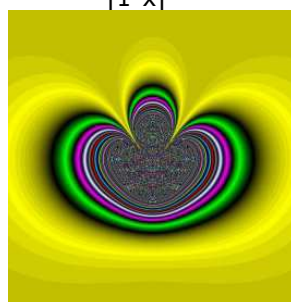
$|x-y|^y$  invers



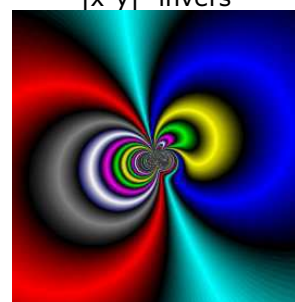
$\cos x \sin(xy)$  invers



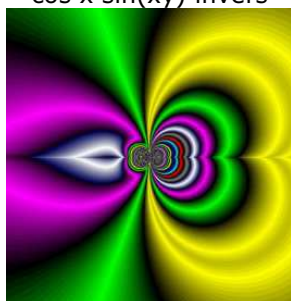
$\Gamma(x-y)$  invers



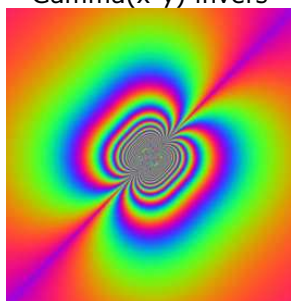
$(x^2+y^3)^2$  invers



$x^2 + y - 3 \sin x - 4$



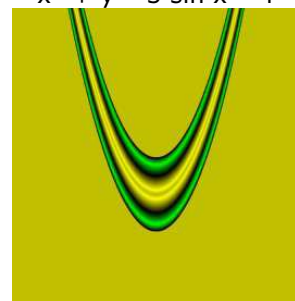
$x^2 + \sqrt{|y|} - 3 \sin x - 4$



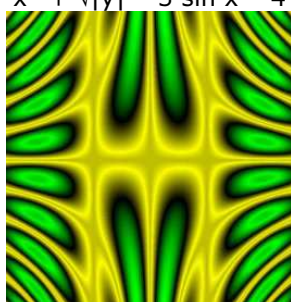
$\sqrt{|x^3 + y^3|}$  invers



$\ln(\ln^2(x^2 + y^2))$  invers



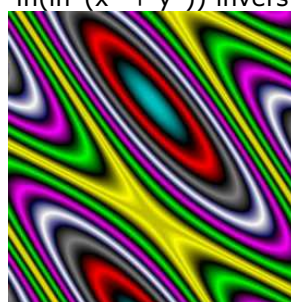
$\arcsin(x^2+y-1)$



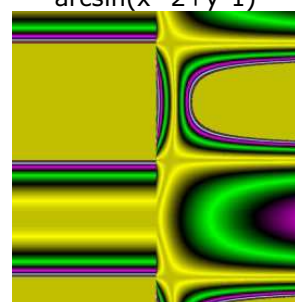
$\cos x \sin(xy)$



$\cos x + \sin(xy)$



$\cos(x/2) + \sin(x-y)$



$\ln(x^{\sin y} + \sin y)$



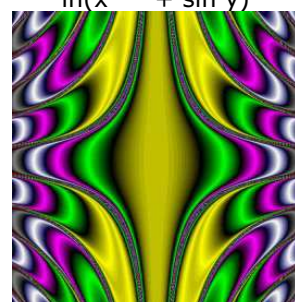
$\sin(2x)/x + y$



$|x+|x-y||$



$|x+|x*y||/x$



$x^2 + \sec(xy)$



## Schrittweises Zoomen in die Mandelbrotmenge

