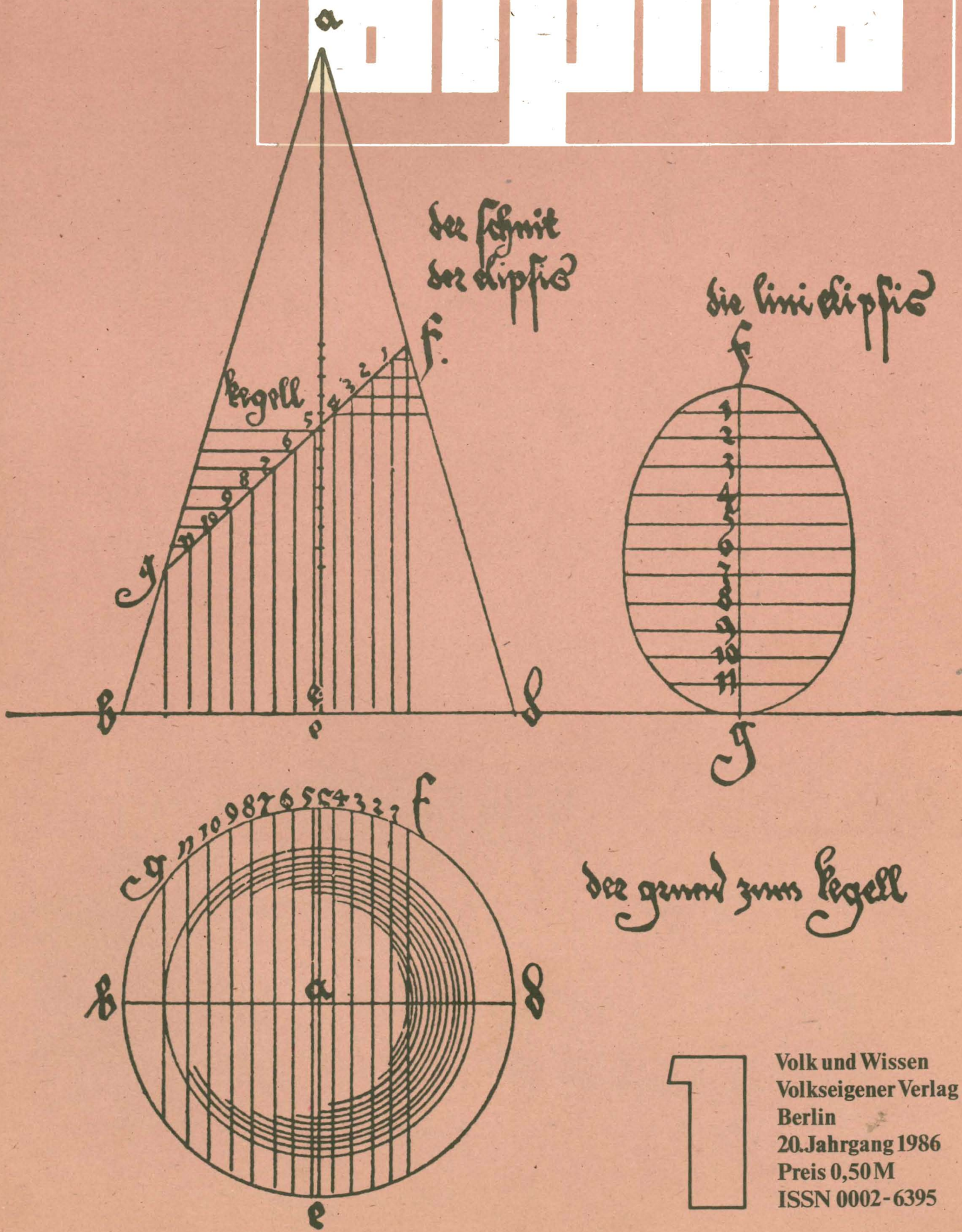


alpha



1

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
20. Jahrgang 1986
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold

Herausgeber und Verlag:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag

Anschrift des Verlags:

1086 Berlin, Krausenstr. 50, PSF 1213

Anschrift der Redaktion:

7027 Leipzig, PSF 14

Redaktion:

OSTR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn.

G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr.

W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat.

J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent

Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); National-

preissträger H. Kästner (Leipzig); Studien-

rat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehr-

er Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstud-

ienrat J. Lehmann, VLdV (Leipzig);

Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leip-

zig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Mü-

ritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam);

Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald);

Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dres-

den); Oberstudienrat G. Schulze (Herz-

berg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Trä-

ger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch,

VLdV (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Ma-

thematik der *Karl-Marx-Universität* Leipzig

(Ltg. Dr. C.-P. Helmholz)

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545

des Presseamtes beim Vorsitzenden des

Ministerrates der Deutschen Demokrati-

schcn Republik

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzel-

heft 0,50 M, im Abonnement zweimonat-

lich 0,50 M. Bestellungen werden in der

DDR von der Deutschen Post und dem

Buchhandel entgegengenommen. Der Be-

zug für die Bundesrepublik Deutschland

und Berlin (West) erfolgt über den Buch-

handel; für das sozialistische Ausland über

das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und

für alle übrigen Länder über: Buchexport

Volkseigener Außenhandelsbetrieb der

DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: ADN/Zentralbild (S. 5); G. Setzer,

Greifswald (S. 6); J. Karsten, G. Stelzer

(2×), Greifswald (S. 8/9); H. Parschau, Ber-

lin (S. 15); P. Schreiber, Greifswald (S. 16)

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Titelbild: Hyperbolischer Schnitt eines

Drehkegels aus Dürers „Unterweysung“,

für *alpha* gestaltet von W. Fahr, Berlin



Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphi-

scher Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der aus-*

gezeichneten Qualitätsarbeit, III/18/97

Artikelnummer (EDV) 128

ISSN 0002-6395

Redaktionsschluß: 14. Oktober 1985

Auslieferungstermin: 15. Februar 1986

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 1 Dem Satz des Pythagoras auf der Spur [9]¹
Prof. R. Rubinow, aus der sowj. Schülerzeitschrift *Quant*
 - 2 Eine Aufgabe von
Prof. Dr. L. G. Aslamasow und Dr. I. S. Slobodezki (†) [9]
Hochschule für Stähle und Legierungen, Moskau/ehem. Institut für
Hochdruckphysik der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, Moskau
 - 3 *alpha*-Wettbewerb 1984/85 [5]
Preisträger
 - 4 Mathematik durchdringt unser Leben [8]
Prof. Dr. J. Kerstan, Ordentliches Mitglied der Akademie der Wissenschaften
der DDR, aus DLZ
 - 6 Rund um den SR 1 – Die %-Taste [7]
Dr. L. Flade, Sektion Mathematik der *Martin-Luther-Universität* Halle/
Wittenberg
 - 8 Karsten – Mathematiker in Mecklenburg [9]
Dr. W. Schmidt, Sektion Mathematik der *E.-M.-Arndt-Universität* Greifswald
 - 10 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht [5]
speziell für Klasse 5/6: Mathematik und Technik
J. Lehmann, Leipzig
 - 11 Geschwindigkeit in Natur und Technik
Ing. W. Lishewski, aus *Nauka i shishn*, Moskau
 - 11 Mathematisches Schülerkabinett – ein Jugendobjekt [5]
stud. math. R. Heinrich, Sektion Mathematik der PH Dresden
 - 12 Ein Besuch in der Knobelwerkstatt – Wir spielen mit Spielen
[5]
Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der *Karl-Marx-Universität* Leipzig
 - 14 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]
Aufgaben zu Mathematik · Physik · Chemie
 - 16 Plastik des Archimedes an der TH Magdeburg [5]
Dr. P. Schreiber, Sektion Mathematik der *E.-Moritz-Arndt-Universität*
Greifswald
 - 16 Lösungen [5]
 - 22 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig
 - 24 Anspruchsvolles Kreuzzahlrätsel [8]
H. Begander, Leipzig
- IV. U.-Seite: Unterhaltsame Figuren und Beweisaufgaben zur
Satzgruppe des Pythagoras [8]
Dr. Elke Goldberg, Sektion Mathematik der *Martin-Luther-Universität* Halle/
Wittenberg

¹ bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben geeignet ab der angegebenen Klassenstufe

Dem Satz des Pythagoras auf der Spur

Euklid bewies den Satz des Pythagoras geometrisch. Er konstruierte über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks Quadrate und zeigte, daß die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten gleich dem Flächeninhalt des Quadrats über der Hypotenuse ist.

Im folgenden soll ein weiterer Beweis dieses Satzes angeführt werden. Anschließend seien noch einige Figuren gezeigt, für die dieselbe *pythagoreische Beziehung* erfüllt ist, wie sie für die obengenannten Quadrate gilt.

Der Beweis des Satzes des Pythagoras geht aus den Bildern 1a bis 1f hervor. Er benutzt die Tatsache, daß die Höhe im rechtwinkligen Dreieck und die Diagonale des Rechtecks, das von den Verlängerungen der Seiten der Kathetenquadrate gebildet wird, auf ein und derselben Geraden liegen. (Dies läßt sich leicht mit Hilfe kongruenter Dreiecke beweisen.) Außerdem ist die Flächengleichheit von Parallelogrammen mit gleicher Grundlinie und Höhe zu beachten.

Verallgemeinert man den Satz des Pythagoras *Sind a und b die Längen der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks und c die Länge seiner Hypotenuse, so gilt $a^2 + b^2 = c^2$* , dann stellt man fest, daß für Figuren A, B, C mit den Flächeninhalten

$$A_A = ka^2, A_B = kb^2 \text{ und } A_C = kc^2$$

die Beziehung
 $A_A + A_B = A_C$ bzw. $ka^2 + kb^2 = kc^2$ gilt.

Insbesondere ist diese *pythagoreische Beziehung* auf die Flächeninhalte zueinander ähnlicher Figuren, die über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks konstruiert sind, anwendbar. Über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks werden jetzt Kreissektoren (Bild 2), Halbkreise (Bild 3), Möndchen (Bild 4) und Kreisbogendreiecke (Bild 5) gezeichnet.

Durch Kombination von Kreissektoren, Kreisen, Möndchen und Kreisbogendreiecken erhält man die Bilder 6 und 7. Auf ihnen ist jeweils wieder die Summe der Flächeninhalte der grauen Figuren gleich dem Flächeninhalt der schraffierten

Figur. Dies läßt sich mit Hilfe der Bilder 2, 3, 4 und 5 nachweisen. Zum Beispiel ist im Bild 6

$$\frac{\pi}{4} a^2 + \frac{\pi}{4} b^2 = \frac{\pi}{4} c^2 \text{ mit } k = \frac{\pi}{4}.$$

Bild 2

$$\frac{\pi}{4} a^2 + \frac{\pi}{4} b^2 = \frac{\pi}{4} c^2$$

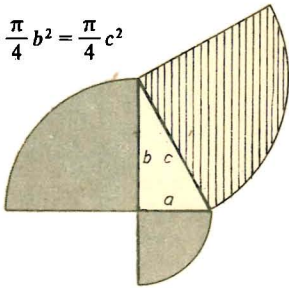


Bild 3

$$\frac{\pi}{8} a^2 + \frac{\pi}{8} b^2 = \frac{\pi}{8} c^2$$

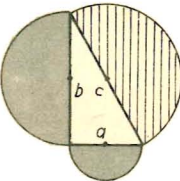


Bild 4a

$$\frac{\pi}{4} a^2 + \frac{\pi}{4} b^2 = \frac{\pi}{4} c^2$$

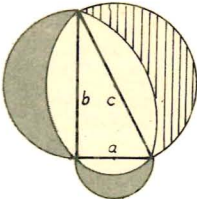


Bild 4b

$$A = \frac{a^2}{4}$$



Bild 1

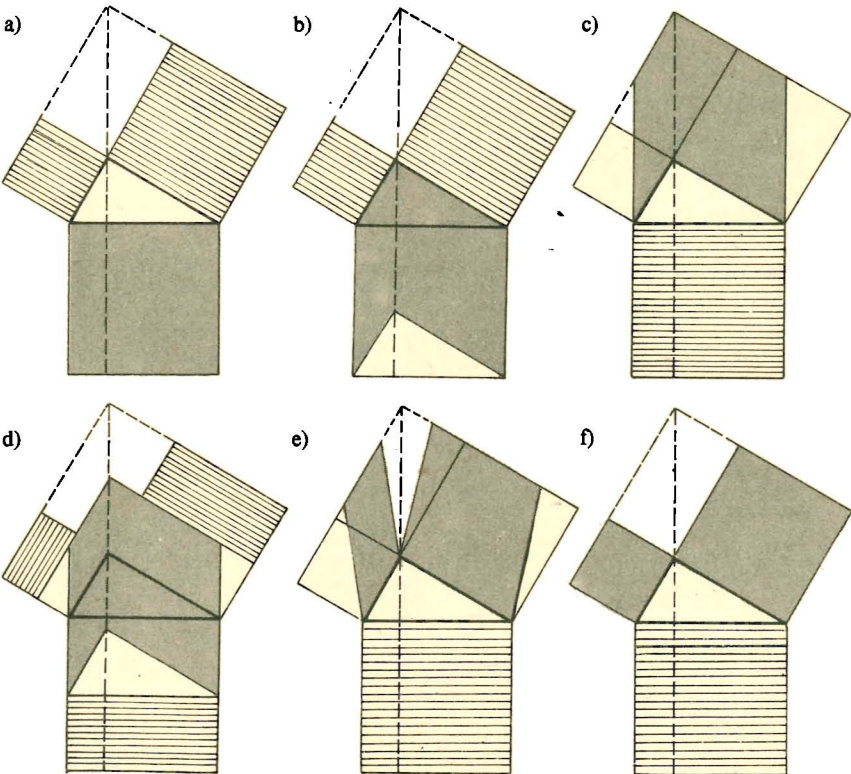


Bild 5a

$$\frac{\pi}{4} a^2 + \frac{\pi}{4} b^2 = \frac{\pi}{4} c^2$$

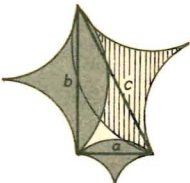


Bild 5b

$$A = \frac{a^2}{4}$$

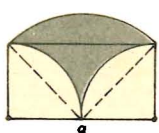


Bild 6a

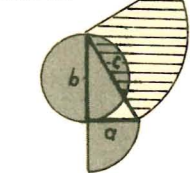


Bild 6b

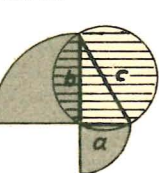


Bild 7a

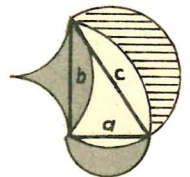
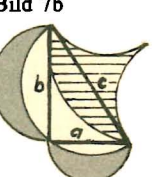


Bild 7b



Auf den Bildern 8 bis 11 sind jeweils drei flächeninhaltsgleiche Figuren gezeichnet. Ist a die Seitenlänge des Quadrates, so gilt für alle Figuren von

Bild 8
 $A = a^2$

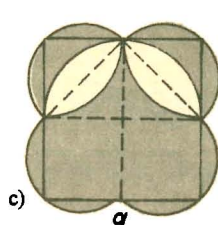
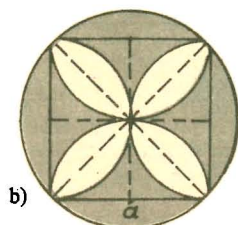
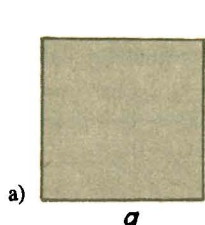


Bild 9
 $A = \frac{a^2}{2}$

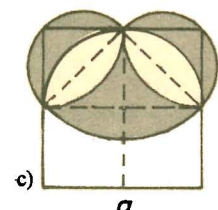
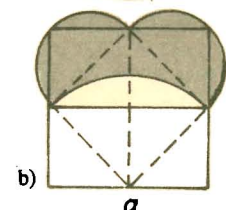
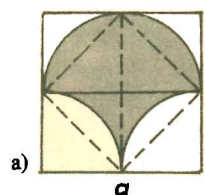


Bild 10
 $A = \frac{3a^2}{4}$

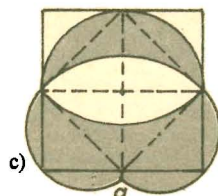
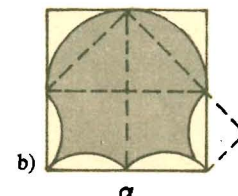
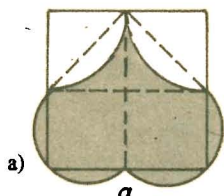
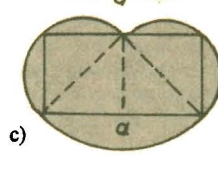
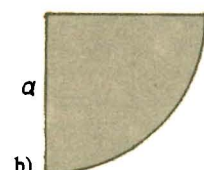
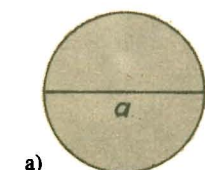


Bild 11
 $A = \frac{\pi a^2}{4}$



Diese Beziehungen kann man nachweisen, indem man die schraffierten Teile in günstige Teilflächen zerlegt, die man dann leichter berechnen kann. Ein Beispiel für eine mögliche Zerlegung ist für Bild 8c) gezeichnet worden. Nach Bild 12 gilt

$$A = 2A_1 + A_2 + A_3 + 2A_4,$$

$$A_1 = \frac{\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 \cdot \pi}{4 \cdot 2} = \frac{\pi}{16} a^2,$$

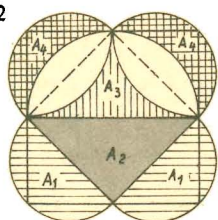
$$A_2 = \frac{\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2}{2} = \frac{a^2}{4},$$

$$A_3 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2 \cdot \pi}{4 \cdot 2} = \frac{a^2}{2} - \frac{\pi}{8} a^2,$$

$$A_4 = \frac{\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2}{4} = \frac{a^2}{8},$$

$$A = 2 \cdot \frac{\pi}{16} a^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2} - \frac{\pi}{8} a^2 + 2 \cdot \frac{a^2}{8} = a^2.$$

Bild 12



Kombiniert man diese Figuren mit den Katheten und der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, so erhält man die Bild 13 bis 16.

Bild 13

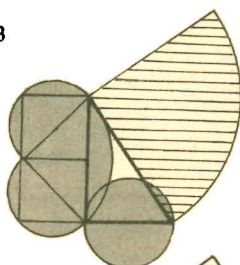


Bild 14

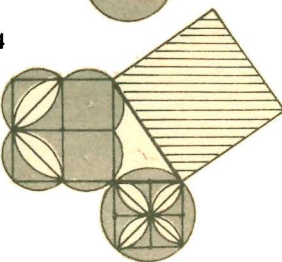


Bild 15

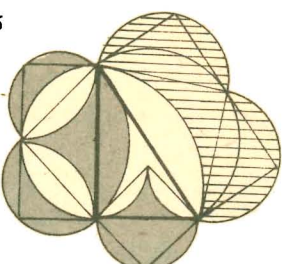
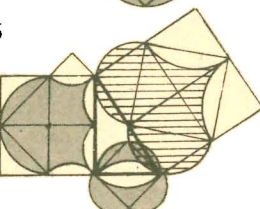


Bild 16



Eine Aufgabe von Prof. Dr. L. G. Aslamasow und Dr. I. S. Slobodezki

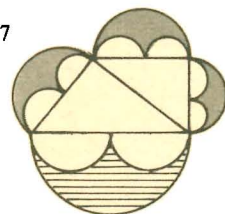
Hochschule für Stähle und Legierungen/
Institut für Hochdruckphysik der
Akademie der Wissenschaften, Moskau

▲ 2635 ▲ In einer Filmkamera und in einem Filmprojektor laufen 16 Bilder pro Sekunde ab. Auf der Leinwand bewegt sich ein Auto, dessen Räder in Wirklichkeit einen Durchmesser von 1 m haben. Die auf die Leinwand projizierten Räder führen 4 Umdrehungen pro Sekunde aus. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Autos?

Die Aufgabe stammt aus dem Buch:
Kniffliges aus der Physik
208 S. mit 171 Abbildungen
Bestell-Nr. 666 189 1 Preis 11,50 M
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft,
Leipzig

Zum Abschluß soll nun bewiesen werden, daß die Summe der Flächeninhalte der drei grauen Bogendreiecke, die über den Seiten eines rechtwinkligen Trapezes konstruiert sind und dessen eine Diagonale senkrecht auf einem seiner Schenkel steht, gleich dem Flächeninhalt des schraffierten Bogendreiecks über der größeren der parallelen Seiten des Trapezes ist (Bild 17).

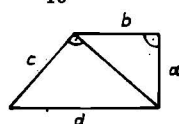
Bild 17



Lösung:
Bezeichnet man die Seiten des Trapezes wie in Bild 18, so gilt die Gleichung

$$\frac{\pi}{16} a^2 + \frac{\pi}{16} b^2 = \frac{\pi}{16} e^2,$$

$$\frac{\pi}{16} e^2 + \frac{\pi}{16} c^2 = \frac{\pi}{16} d^2 \text{ bzw. } \frac{\pi}{16} a^2 + \frac{\pi}{16} b^2 + \frac{\pi}{16} c^2 = \frac{\pi}{16} d^2 \text{ mit } k = \frac{\pi}{16}.$$



Nach einem Artikel von R. Rubinow
aus der sowj. math. Schülerzeitschrift
Quant, Moskau;
bearbeitet von H. Begander, Leipzig

alpha- Wettbewerb 1984/85

Preisträger

Wolfram Schubert, Ulrich Egermann, Matthias und Beatrice List, alle Altenburg; Birger Strauch, Anklam; Veneta Türke, Auerbach; Evelyn Peter, Bad Liebenstein; Ute Partsch, Bad Salzungen; Oliver Maspfuhl, Dörthe Malzahn, Peter Zülsdorff, Anita Winter, Sven Hartmann, Holger Laabs, Jörg Reichenberger, Christian Korner, Katja Geißler, Denise Gemeinhard, alle Berlin; Alice Kraneis, Bernburg; Ingrid und Ulrich Voigt, Böhlen; Christina Werner, Bötzw; Michael Kremmer, Breitung; Mario Leibitzki, Frank Wolf, beide Brotterode; Thomas Gerlach, Buhla; Hendrik Roeke, Thomas Reißner, Silvio Löffler, alle Cottbus; Thomas Kaufhold, Dingelstädt; Karsten Simon, Leonhard Karsch, beide Dresden; Maik Denner, Empfershausen; Andreas Hoyer, Ehn; Jana Reinhardt, Katharina Hildebrandt, beide Fambach; Falk Berger, Glienicke; Michaela Große, Gohrau; Michael Hanke, Gräfenhainichen; Thilo Kuessner, Greifswald; Frank Schneegaß, Großbodungen; Karsten Hennig, Großbörner; Sven Rudolph, Großbörnsdorf; Alois Belter, Hagenow; René Thonfeld, Hammerbrücke; Schulclub der EOS W. Pieck, Birgit Bremer, beide Heiligenstadt; Mathias Hascher, Heinrichsort; Stefan Heiber, Heyda; Henry Wiesjahn, Holzendorf; Steffen Kowalick, Hoyerswerda; Marco Ringel, Jänickendorf; Jan Rüdiger, Niels Neumann, beide Jena; Klaus Erdmann, Joachimsthal; Markus Glück, Jößnitz; Nico Schmidt, Jüdenberg; Henrik Hodam, Klatenordheim; Torsten Thieme, Olaf Vogel, beide Kamen; Astrid Mirle, Kleindehsa; Carsten Blech, Kl. Rodensleben; Torsten Schütze, Klettenberg; Marco Rogozia, Ladeburg; Jaqueline Echhorn, Lauscha; Kathrin Asche, Leimbach; Henrik Holke, Andreas Englisch, beide Leipzig; Hardy Dömpke, Löderburg; Anke Harnisch, Lützen; Gisela Schütze, Magdeburg; Marco Liscker, Nachterstedt; Jens Burmann, Manuela Grewe, beide Neuhaus; Torsten Westphal, Neuruppin; Jürgen Nicolai, Ortrand; Carola Walter, Ottendorf-Okrilla; Carola Sachs, Dörte Schappeler, beide Parchim; Jan Fricke, Pasewalk; Felix Kraenz, Picher; Karen Meyer, Daniela Wulft, Holger Stasch, Mark Bludszuweite, alle Rostock; Matthias Kittner, Schmalkalden; Tobias Franke, Schrebitz; Reiner Möwald, Sommerda; Jörg Büchner, Axel Bichler, beide Sondershausen; Una Brock, Stralsund; Claudia Schwartz, Suhle; Marco Treichel, Unterbreizbach; Frederik Schiller, Voigtsgrün; Claudia Nehring, Edith und Hartmut Boettcher, alle Weimar; Silvio Ladusch, Weißwasser; Cornelia Kurtz, Karin Kurtz, beide Wittenburg; Ralf Klötzer, Wilkau-Haßlau; Dana Wengrzik, Zwickau; Susan Huschke, Grimma

Vorbildliche Leistungen

Uta Schmidt, Altenburg; Frank Gembus, Altnetretow; Claudia Raßbach, Bad Liebenstein; Michael Henning, Marcus Markardt, beide Bad Salzungen; Michael Sternberg, Bärenwalde; Frank Wagner, Silke Baars, Marit Rigow, Nadja Baron, Petra Döring, Robert Krüger, Tom Pfeifer, Martin von Löwis, alle Berlin; Angela Herrmann, Jens Baumann, beide Bernsbach; Winfried Reßler, Bernburg; Alexander Tauchnitz, Borna; Dirk Feuerherdt, Brandenburg; Torsten Peter, Frank Wolff, beide Brotterode; Susan Dreyer, Cottbus; Wolfgang Jäckel, Demitz-Thumitz; Birga Schroeder, Demmin; Angela Hahn, Stefan Diez, Sabine Hermsdorf, Birgit Jeske, alle Dresden; André

Kratzert, Dürörnsdorf; Corinna Mäder, Fambach; Thomas Mittelstädt, Freiberg; Andreas Wahren, Freienhufen; Nadine Koch, Gehofen; Henry Schlosser, Yvette Vogelsberger, Thomas Gießmann, alle Greifswald; Maika Thiele, Grimma; Astrid Gärtner, Großbörnsdorf; Kristin Stöbe, Guben; Jörn Pamperin, Hagenow; Entje Ecksturm, Halberstadt; Gunar Thoß, Hammerbrücke; Antje Stehfest, Havelberg; Volker Reck, Heiligenstadt; Maik Otto, Holzthaleben; Bert Frenzel, Horka; Jan Richling, Hohen Neuendorf; Petra Koglin, Hoyerswerda; Dirk Hübel, Ilmenau; Claudia Docter, Ilsenburg; Andreas Gutsch, Kahla; Jana Hodam, Kaltennordheim; Conny Weschenfelder, Lauscha; Kirsten Schröter, Katrin Anton, beide Leegebruch; Martin Schreiter, Leinefelde; Jens Grundmann, Limbach-O.; Marco Schmidtgen, Luckenwalde; Sven Pfeffer, Magdeburg; Steffen Scharnowski, Möser; Mirko Naumann, Mügeln; Sven Saar, Mühlhausen; Thomas Engel, Nachterstedt; Tobias Otto, Niederwies; Torsten Müller, Ohrdruf; Uwe Anke, Pappendorf; Susanne Kraenz, Picher; Thomas Kuschel, Prenzlau; Susanne Wollanke, Riesa; Silvio Teubner, Martin Wolff, beide Rostock; Christoph Weidling, Riethnordhausen; Sven Ungerlenk, Saalfeld; Marcus Spindler, Sangerhausen; Tino Sander, Springen; Carsten Bühner, René Scheerschmidt, beide Steinbach-Hallenberg; Sabina Kaiser, Chris Janssen, beide Tormau; Silvano Storch, Trusetal; Daniela Scholich, Uecker-münde; Mario Gimpel, Unterbreizbach; Wim Fleischhauer, Andreas Walter, beide Vacha; Michael Fardun, Veltin; Birte Roloff, Vogelsang; Jürgen Rietz, Wehlen; Sven Langer, Weißwasser; Horst Rißmann, Wensleben; Christiane Harth, Wittenburg; Franziska Röher, Susanne Breiting, beide Worbis; Diana Michler, Zschortau; Christian Dorschner, Karl-Marx-Stadt; Steffen Ewert, Neuhaus

Abzeichen in Gold

Für achtzehnjährige Teilnahme
Lutz Püffeld, Halberstadt

Für siebzehnjährige Teilnahme
Guido Blossfeld, Halle; Bernd Hanke, Löbau

Für sechzehnjährige Teilnahme
Ulrich Riedel, Flöha

Für fünfzehnjährige Teilnahme
Arno Feuerherdt, Brandenburg; Rainer Seifert, Dessau; Thomas Jakob, Gera; Ursula Märker, Greifswald; Norbert Littig, Kleinbörnsdorf; Uwe Bormann, Magdeburg; Frank Aßmus, Oranienburg; Bernhard Tschada, Weimar;

Für vierzehnjährige Teilnahme
Andreas Fittke, Berlin; Bengt Nölting, Greifswald; Wolfgang Seebert, Jena; Rolf Kuhn, Leipzig; Lothar Gruber, Linz (Österreich); Gerald Werner, Meiningen; Volker Schulz, Nauen; Katrin Richter, Wittenberg

Für dreizehnjährige Teilnahme
Andreas Gude, Berlin; Frank Regensburger, Dresden; Eberhard Georgy, Erfurt; Andrea Ziegenbein, Eichicht; Wolfhart Umlauf, Freital; Steffen Langbein, Lichte; Rainer Bauer, Mittweida; Wilfried Röhner, Radebeul; Torsten Löwe, Schleiz; Heinz-Olaf Müller, Schmalkalden; Hans-Dietrich Schwabe, Sondershausen; Ralf Becker, Wolmirstedt

Für zwölfjährige Teilnahme
Annet Körner, Dresden; Daina Semper, Eisleben; Bernd Dübe, Forst; Matthias Weser, Großenhain; Hubert Steinmetz, Grünungen; Rüdiger Düsing, Halle; Ruth Jacobs, Halle-N.; Rolf Kamieth, Kakerbeck; Jörg Pöhlend, Klingenthal; Alois We-

ninger, Knittelfeld (Österreich); Armin Körner, Leipzig; Udo Kretschmann, Markneukirchen; Sigrid Planke, Premnitz; Jana Walther, Röbel; Ina und Uwe Ebert, Ruppendorf; Bernd Hartwig, Thaldorf; Sylvia Kunze, Weißenfels; Frank Erdmann, Zeitz

Für elfjährige Teilnahme
Dieter Koch, Uwe Maaz, beide Arnstadt; Guntram Türke, Auerbach; Karsten Schlutter, Babelsberg; Claudia Reichardt, Berlin; Maik Weide, Callenberg; Harry Höfer, Borndorf; Jörn Wittig, Carolin Engel, Karl-Heinz Jünger, Ingolf Körner, Andreas Winkler, alle Dresden; Dirk-Thomas Orban, Thomas Mittelbach, beide Erfurt; Jörg Butter, Freiberg; Angela Illing, Gersdorf; Heike Kietz, Grimmen; Michael Katzer, Greußen; Volker Reck, Heiligenstadt; René Schüppel, Hoyerswerda; Horst Flieger, Jarmen; Thomas Mader, Jens Pönisch, Marko Hanke, Conchita Röske, Andreas Hengst, alle Karl-Marx-Stadt; Per Witte, Königs Wusterhausen; Steffen Rieth, Klostermansfeld; Knut Hantschel, Neuenkirchen; Karsten Woike, Neustadt; Anett Schulzensohn, Oberseifersdorf; Claudia Trochold, Reichenbach; Klaus-Detlef Gehrke, Rostock; Eva-Maria Wabbel, Schönfeld; Roland Goldenbogen, Stralsund; Heidrun Tiedt, Teterow; Hans Creutzenberg, Thal; Gudrun Thäter, Weimar; Birgit Schultheiß, Wüstenbrand; Olaf Seidel, Weißwasser

Für zehnjährige Teilnahme
Frank Baumgart, Aschersleben; Marc Schewe, Berlin; Werner König, Berlingerode; Tilman Völke, Böhlen; Stefanie Begau, Breitenworbis; Uta Boldt, Burg Stargard; Royald Lenk, Cottbus; Petra Sarodnick, Dallgow; Stefan Edelmann, Dresden; Siegfried Obst, Reinhard Weißnicht, beide Eberswalde; Thomas Pigorsch, Eisleben; Susanne und Matthias Schreiber, Elsterwerda; Volker Georgy, Erfurt; Wilfried Schleinitz, Greifswald; Veit-Thomas Meyen, Grimmen; Dieter Seifert, Hagenow; Günter Schielinsky, Halle-N.; Heinz Wickner, Hermannsdorf; Karsten Milek, Hohen Neuendorf; Matthias Bauer, Genthin; Ralf Häntsch, Köthen; Jörg Drechsel, Leinfelde; Lutz Hübschmann, Löbnitz; Thomas Eller, Meiningen; Uwe Würker, Mülsen; Hans-Dieter Büchler, Neustadt; Ralph Gruber, Plauen; Tim Planke, Premnitz; Manfred Hille, Ina Köhler, beide Riesa; Thomas Merten, Stralsund; Klaus Pfeiffer, Taubach; Birgit Schmidt, Weißwasser; Rolf Heubner, Wolfen; Steffen Klimpel, Wolgast; Birgit Schmidt, Worbis; Karl Oertel, Zeitz; Thorsten Eidner, Zeulenroda; Uta Escher, Zwickau

Für neunjährige Teilnahme
Michael Elte, Ahlum; Jens Fache, Altenburg; Silke Rechner, Baruth; Andreas Jock, Blankenfelde; Christine Pompe, Cottbus; Uwe Schütze, Camin; Roland Damm, Cottbus; Frank Sarodnick, Dallgow; Ulrich Schuster, Demitz-Thumitz; Georg Kirchner, Dermbach; Lutz und Heike Lauter, Titus Ziegler, Catherin Engel, Brigitte Rotter, alle Dresden; Uwe Wollert, Edderitz; Britta und Achmed Schulz, Greifswald; Bettina Weser, Großenhain; Michael Schulze, Anke Misch, beide Halberstadt; Frank Siebert, Dany Lindenberg, beide Halle; Hagen Fritsch, Hosena; Claus Janke, Ilmenau; Heiko Schinke, Leuna; Karl-Heinz Gora, Lohsa; Sabine Oestreich, Oschersleben; Dietmar Polster, Parchim; Gudrun Zirnstein, Pirna; Frank Berndt, Radeburg; Jürgen Schmälisch, Reuden; Ronald Bojarski, Saßnitz; Kurt Schulze, Schemberg; Jens Hoffmann, Sebnitz; Ruth Backhaus, Silberhausen; Birgit Lorenz, Waren; Hartmut Boettcher, Weimar; Christina Voß, Zepemick; Frank Pampel, Zeulenroda

Die Träger des Abzeichens in Gold für acht-, sieben-, sechs-, fünf- und vierjährige Teilnahme am alpha-Wettbewerb veröffentlichen wir im Heft 2/86.

Mathematik durchdringt unser Leben



In der Schule nimmt der Mathematikunterricht einen bedeutenden Teil der Zeit in Anspruch. Grundlegende Kenntnisse und Fähigkeiten mathematischer Natur, so das Rechnen und einige geometrische Begriffe, gehören zu jenen Elementen des Wissens und Könnens, die man ähnlich wie das Lesen und Schreiben nicht vergessen darf.

Viele Berufe erfordern weit höhere Fertigkeiten in der Mathematik. Unser Bildungssystem trägt dem Rechnung, indem in Berufsschule, Fachschulen und Hochschulen vor allem in Ausbildungseinrichtungen ökonomischer und technischer Art die Vermittlung vertiefter und berufsspezifischer mathematischer Kenntnisse einen wichtigen Platz einnimmt. Im Gegensatz zu dieser das Alltagsleben stark durchdringenden Rolle der Mathematik steht die Tatsache, daß die Mehrzahl der Menschen keine oder falsche Vorstellungen vom Beruf des Mathematikers und seiner Notwendigkeit hat.

Weit verbreitet ist die Ansicht, daß der Berufsmathematiker nur an ganz wenigen Stellen und in erster Linie an wissenschaftlichen Einrichtungen sinnvoll eingesetzt werden kann. Dies führt nicht selten dazu, daß junge Menschen, denen Mathematik Spaß macht, die sich in mathematischen Zirkeln neue Gebiete der Mathematik aneignen und durch ihre Teilnahme an den *Olympiaden Junger Mathematiker* in ihrer Beschäftigung mit der Mathematik bestätigt werden, abgeraten wird, Mathematik zu studieren. Dadurch wird es immer schwerer, den Bedarf unserer Volkswirtschaft an Mathematikern qualitätsgerecht zu erfüllen.

Spitzenleistungen erfordern Schöpferium

Wir wollen einige Ursachen betrachten, die zu diesen Erscheinungen führen, und durch einige Überlegungen klarzumachen versuchen, daß die Bewältigung des wissenschaftlich-technischen Fortschritts nicht nur einen verstärkten Einsatz von Mathematik verlangt, sondern auch und insbesondere für Spitzenleistungen in zunehmendem Maße die Arbeit schöpferisch begabter Mathematiker notwendig macht. Noch bevor sich die Mathematik vor mehr als zweitausend Jahren als Wissenschaft und Theorie konstituierte, existierte sie in ihren Anwendungen. Bis heute ist die An-

wendbarkeit der Mathematik vor allem durch zwei Umstände begrenzt, aber zugleich auch gefordert. Die Anwendung der Mathematik auf eine bestimmte reale Erscheinung setzt einmal voraus, daß diese hinreichend gut mathematisch modelliert werden kann. Das bedeutet eine spezifische theoretische Durchdringung der Erscheinung. Zum anderen muß die Möglichkeit bestehen, die auf Grund der Theorie notwendigen Rechnungen auch tatsächlich durchführen zu können.

Bezüglich beider Gesichtspunkte haben sich in den letzten Jahrzehnten in gegenseitiger Abhängigkeit qualitative Veränderungen vollzogen. Die Mathematik wird nicht mehr fast ausschließlich nur bei mechanischen und physikalischen Problemen und statistischen Auswertungen eingesetzt, sie erobert sich immer mehr spezielle Gebiete in den verschiedenartigsten technischen, naturwissenschaftlichen und gesellschaftswissenschaftlichen Disziplinen.

Hinsichtlich des ersten Umstandes spricht man deshalb heute etwas zugespitzt von der Mathematisierung der Wissenschaft.

Selbstverständlich muß man sich dabei immer bewußt bleiben, daß in Abhängigkeit von der Spezifik einer Wissenschaft Grad und Bedeutung der Nutzung der Mathematik sich sehr unterscheiden und keine Wissenschaft durch Mathematik ersetzt wird und ersetzt werden kann.

Hinsichtlich des zweiten Umstandes wurde durch das Entstehen der modernen Rechentechnik eine grundsätzliche Umwandlung eingeleitet. Die Rechengeschwindigkeit moderner Rechner übertrifft die des Menschen oder eines mechanischen Rechners um viele Größenordnungen und kann noch weiter gesteigert werden. Durch die Entwicklung der Mikroelektronik werden – bezogen auf eine feste Leistung – die Dimensionen der Rechner immer kleiner und die Herstellungskosten immer niedriger. Sehr schnell wurde klar, daß der programmierbare Rechner nicht nur – und nicht einmal in erster Linie – numerisch rechnen kann. Vielmehr kann alles, was diskret und endlich ist, exakt auf einem Rechner erfaßt werden.

Damit wurde aus einem technischen Hilfsmittel zur Anwendung der Mathematik ein ungeheuer vielfältig einsetzbares Instrument, das die gesamte moderne Produktion entscheidend umzugestalten hilft. Die grundsätzlich erweiterten Anwendungsmöglichkeiten haben bei unveränderter

Grundstruktur auch zu neuen Bezeichnungen wie Mikroprozessor oder informationsverarbeitendes System geführt. Unabhängig von der Spezifik des Einsatzes eines Rechners steckt hinter jedem Programm zugleich eine mehr oder weniger komplizierte mathematische Modellierung. Daher haben die neuen Anwendungsmöglichkeiten der Rechner sehr befruchtend auf den Mathematisierungsprozeß eingewirkt.

Unbegrenzttes Arbeitsfeld

Die veränderten Anwendungsbedingungen der Mathematik, die durch die moderne Rechentechnik geschaffen wurden, haben dazu geführt, daß die Anzahl der Mathematiker in der Industrie sich absolut und relativ im Vergleich zur ersten Hälfte unseres Jahrhunderts sprunghaft erhöhte. Der Berufsmathematiker hat sich seinen festen Platz in der Volkswirtschaft errungen. Dieser Prozeß verlief aber nicht reibungslos und ohne Widersprüche.

In der Anfangsphase wurden vorwiegend die in langer Entwicklung gesammelten theoretischen Erkenntnisse und Näherungsprinzipien in Verfahren umgesetzt, deren Durchführung mit Hilfe eines Programms dem Rechner übertragen werden konnte. Dadurch wurde die heute überholte und falsche, sich aber hartnäckig haltende Vorstellung hervorgerufen, daß das Programmieren ein abschließender, und zwar aufwendiger, aber mechanischer Teil der Nutzung von Rechentechnik und Mathematik sei und daß der Mathematiker im Grunde genommen seine Tätigkeit mit der Erarbeitung numerischer Algorithmen abschließen kann. Dieser Phase entsprach die Einteilung der Mathematiker eines Rechenzentrums in Problemanalysten und Programmierer. Auch heute noch spielt die Aufbereitung neuer Erkenntnisse und Verfahren der Mathematik in Form von Programmen und Programmsystemen eine wichtige Rolle. Dabei werden immer höhere Ansprüche an die Programmgestaltung gestellt, um die Nutzung mathematischer Verfahren auch Nichtspezialisten möglich zu machen. Neben diesen Anwendungen sind aber andere getreten und haben sie überflügelt.

Bald wurde die Rechentechnik auch für die Organisation und Verwaltung großer Datenmengen und deren elementare, aber massenhafte Verarbeitung mit Erfolg eingesetzt. Hierbei stellte die mathematische Modellierung normalerweise keine besonderen Ansprüche. Hingegen mußten neue Verfahren zur Behandlung von Informationen im Rechner entwickelt werden, die nicht Gegenstand einer herkömmlichen Mathematik waren. Dadurch entstand der Eindruck, daß für die Masse der Anwendung der Rechentechnik tiefere Kenntnisse der Mathematik überflüssig sind. Es konsolidierte sich die Informationsverarbeitung als eigenständige Wissenschaft, und es bildete sich der Beruf des Informatikers heraus, der in den meisten Fällen besser auf die Nutzung von Rechnern vorbereitet war als der Mathematiker.

Heute wird der Einsatz der Rechentechnik vor allem dadurch geprägt, daß komplizierte Prozesse auf Grund einer sachgerechten mathematischen Formulierung durch Rechner im wesentlichen selbständig gesteuert werden und daß geistige Tätigkeiten wie Entwicklung und Konstruktion zunehmend mit Hilfe von Rechnern verbessert und beschleunigt werden können. Der Schwerpunkt der Anwendungen der Rechentechnik verschiebt sich damit erneut.

Erst im Rahmen des neuen Einsatzgebietes wird der Rechner zu einem Organ vergleichbar dem Hirn von Lebewesen, das über geeignete „Sinnesorgane“ Informationen aufnimmt, sie logisch verarbeitet und auf Grund der Ergebnisse durch Impulse zweckmäßige Eingriffe in die Umwelt auslöst. Damit ist eine Revolution in der Technik in Gang gesetzt worden, die den unmittelbaren Anteil der Menschen an der materiellen Produktion weiter vermindert und zugleich die Anforderungen an die ideelle Vorbereitung der Produktion wesentlich erhöht. Der Mensch muß in der Gestalt von Software, von Programmen, dem Gerät, der Maschine, dem Produktionsprozeß einen arbeitsfähigen „Hirninhalt“ liefern.

Modernste Technik will beherrscht sein

Durch diese Entwicklung ist die Erzeugung von Software zu einer Massenaufgabe geworden und bildet bereits heute einen Engpaß. Es ist deshalb sehr wichtig, die Ansprüche zu kennen, die beim Entwurf von Software zu stellen sind, und sich Klarheit darüber zu verschaffen, wer Software erarbeiten kann und muß. Wir stehen zwar erst am Anfang einer Entwicklung, in der die Software zum Massenprodukt wird, es lassen sich aber einige Züge deutlich erkennen. Dabei wird auch der spezifische Anteil des Mathematikers an diesem Prozeß sichtbar.

Die Ansprüche an die Software-Entwicklung variieren außerordentlich breit. Glücklicherweise gibt es darunter auch sehr viele Aufgaben, die sich bei Gewöhnung an die Hilfsmittel leicht lösen lassen. In nicht zu ferner Zukunft werden wohl die Grundkenntnisse zur Erarbeitung von Programmen die einfache Prozesse in unserem Alltag steuern, genauso zur Allgemeinbildung gehören wie Lesen, Schreiben und Rechnen. Auch viele Prozesse und Maschinen in der Industrie erfordern keine allzu komplizierte Steuerungssoftware. Zu ihrer Erarbeitung werden vor allem gründliche Kenntnisse des konkreten Prozesses gebraucht. In Zukunft muß darum jeder Fachingenieur in der Lage sein, die Software-Erarbeitung in nicht zu komplizierten Fällen selbst zu vollziehen. Die Grundlagenkenntnisse des Ingenieurs müssen um eine neue Komponente bereichert werden. Es werden auch Fachingenieure heranwachsen mit vertieften Kenntnissen über die Einsatzmöglichkeiten der Mikroelektronik, die zu Spezialisten für Software-

Entwicklung auf ihrem Fachgebiet werden und wesentlich kompliziertere Probleme bearbeiten können.

Es gibt Prozesse, Geräte, Maschinen, deren Steuerung eine viel härtere Nuß darstellt. Jede Software setzt voraus, daß der Grundprozeß in den für die Steuerung wesentlichen Aspekten mathematisch modelliert werden kann. Bei vielen Prozessen ist das zunächst nicht gegeben. Eine ausreichende mathematische Modellierung kann in komplizierten Fällen nur das gemeinsame Werk von Spezialisten und Mathematikern sein. Oft treffen in konkreten Prozessen sehr verschiedenartige Wirkprinzipien aufeinander. Ihr Zusammenwirken muß komplex erfaßt werden. Gerade dabei werden spezifische intellektuelle Fähigkeiten des Mathematikers zur Synthese in Anspruch genommen. Die Erfahrung zeigt, daß man aber nicht erst ein mathematisches Modell im klassischen Sinne entwickeln darf, sondern nach Möglichkeit von Anfang an nach einem inneren Modell des Rechners und nicht des Menschen suchen muß. Das zwingt dort, wo die mathematische Modellierung die Software-Entwicklung zum Ziele hat, häufig zu neuen Denkweisen. Bei aller Vielfalt und Individualität der einzelnen Aufgaben zeichnet sich für die Erarbeitung von Programmen in komplizierten Fällen die Notwendigkeit zur interdisziplinären Zusammenarbeit, zur führenden Mitwirkung von Mathematikern und zur strikten Beachtung der dialektischen Einheit von Hardware und Software ab. Bei Neuentwicklungen der Zukunft darf man nicht mehr nachträglich die Software auf eine vorgegebene Hardware aufpfropfen, sondern muß davon ausgehen, daß eine zur Erfüllung einer vorgegebenen Funktion notwendige Software eine bestimmte Hardware verlangt.

Kollektive Leistungen sind gefragt

Diese Ausführungen sollten deutlich machen, daß unsere Industrie den Mathematiker gerade dort braucht, wo die kompliziertesten Aufgaben beim Einsatz von Mikroelektronik und von Rechnern zu lösen sind. Seine Hauptaufgabe ist die softwaregerechte mathematische Modellierung in der Zusammenarbeit mit Fachleuten. An ihn werden mit fortschreitender Zeit immer höhere schöpferische Anforderungen gestellt. Seine Aufgabe wird immer interessanter. Sie erfordert immer mehr die Fähigkeit, im Kollektiv nicht nur mitzuwirken, sondern vor allem integrierend über die verschiedenen Spezialdisziplinen zu wirken. Damit wächst auch der Anspruch, jede zu lösende Aufgabe aus gesamtgesellschaftlicher Sicht zu verstehen und zu bearbeiten.

Unsere Absicht war, die Rolle nicht nur der Mathematik, sondern vor allem auch des Mathematikers auf einem Gebiet klarzumachen, das einerseits für den Nachweis der Überlegenheit des Sozialismus und die Sicherung des Friedens von besonderer Bedeutung ist und bei dem andererseits kaum jemand an Mathematik und den Mathematiker denkt. Mathematische Modellierung in komplizierten Fällen wird in Zukunft sicher auch die wichtigste Aufgabe des Mathematikers in der Industrie sein. Trotzdem muß man darauf hinweisen, daß das hier entworfene Bild die Wirkungsmöglichkeiten der Mathematik und des Mathematikers keineswegs vollständig erfaßt. Das war hier nicht möglich. Eine Wissenschaft, die schöpferisch wirksam werden soll, muß auch in sich und in fruchtbarer Wechselwirkung mit ihren Anwendungen weiterentwickelt werden.

J. Kerstan

Manipulator zum Eingeben und Entnehmen von Teilen an Drehmaschinen

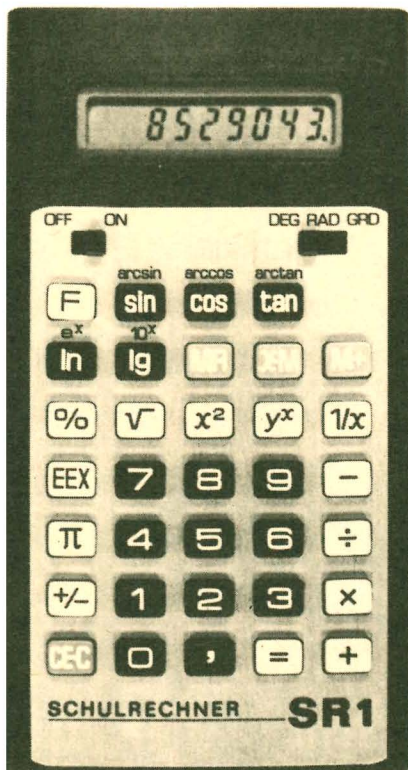


Rund um den SR 1 Die $\boxed{\%}$ -Taste

Auf dem Schulrechner SR 1 – wie auch auf vielen anderen Taschenrechnern – findet man die Taste $\boxed{\%}$. Offensichtlich soll sie helfen, Aufgaben zur Prozentrechnung mit dem Taschenrechner noch leichter zu lösen. Zunächst wollen wir erkunden, was die Taste $\boxed{\%}$ leistet, indem wir nacheinander folgende Tasten betätigen:

- ▲ 1 ▲ a) $\boxed{5} \boxed{\%}$
b) $\boxed{12} \boxed{\%}$
c) $\boxed{2737} \boxed{\%}$

Mit der Tastenfolge $\boxed{a} \boxed{\%}$ (auch Rechenablaufplan genannt) wird stets $\frac{a}{100}$ ermittelt. Für $a = 5$ zeigte der SR 1 0.05, für $a = 12$ zeigte der Taschenrechner 0.12 und für $a = 2737$ erhielt man 27.37. Nachdem wir das wissen, können wir mit dem SR 1 unter Nutzung der $\boxed{\%}$ -Taste Grundaufgaben der Prozentrechnung lösen.



- ▲ 2 ▲ a) Berechne den Prozentwert (W)!
3,7 % von 721 M
b) Berechne den Prozentsatz (p)!
49,50 M von 242 M
c) Berechne den Grundwert (G)!
25,75 M sind 5,4 % des Grundwertes.

Gib für jede dieser Aufgaben einen Rechenablaufplan an!

Verwende dabei die $\boxed{\%}$ -Taste!

Zu all diesen Ablaufplänen trat neben der Prozenttaste auch die Operationstaste $\boxed{\times}$

bzw. $\boxed{\div}$ auf.

Nun wollen wir noch feststellen, welche Aufgabe man u. a. mit Hilfe der Operationstaste $\boxed{+}$ bzw. $\boxed{-}$ im Zusammenhang mit der Taste $\boxed{\%}$ lösen kann.

▲ 3 ▲ Welcher Term wird durch den jeweiligen Ablaufplan ermittelt?

- a) $\boxed{200} \boxed{+} \boxed{3} \boxed{\%} \boxed{=}$
b) $\boxed{400} \boxed{-} \boxed{8} \boxed{\%} \boxed{=}$
c) $\boxed{a} \boxed{+} \boxed{p} \boxed{\%} \boxed{=}$
d) $\boxed{a} \boxed{-} \boxed{p} \boxed{\%} \boxed{=}$

▲ 4 ▲ Berechne 96,7 % von 478,50 M!
Gib einen Rechenablaufplan

- a) unter Verwendung der Tasten $\boxed{\times}$, $\boxed{\%}$;
b) unter Verwendung der Tasten $\boxed{-}$, $\boxed{\%}$ an!

▲ 5 ▲ Im Rahmen der Konsumgüterproduktion stellt ein Betrieb Bratpfannen her. Im September verlassen pro Tag a Bratpfannen den Betrieb. Durch Aufdeckung innerbetrieblicher Reserven konnte die Produktion im Oktober um 3 % und im November um 2 % (jeweils bezogen auf die Produktion des Vormonats) gesteigert werden.

- a) Wieviel Bratpfannen verließen im November täglich den Betrieb, wenn $a = 567$ beträgt?
b) Gib einen allgemeinen Rechenablaufplan an, indem du die Variable a verwendest!

▲ 6 ▲ Klaus aus der Kl. 7b und Ina aus der 7a ermitteln mit dem SR 1 den prozentualen Anteil der Teilnehmer ihrer Klassen an den Arbeitsgemeinschaften Mathematik, Sport, Biologie, Foto und Chor.

AG	7a (23 Schüler)	7b (22 Schüler)
Sport	12	8
Chor	5	3
Foto	2	7
Mathe	6	3
Bio	4	4

Ina gibt nur einmal den Grundwert 23 in den Taschenrechner ein und ermittelt dann durch Eingabe der Werte 12; 5; 2; 6; 4 den jeweils zugehörigen Prozentsatz. Sie nutzt also die Konstantenautomatik des SR 1.

Gib einen entsprechenden Rechenablaufplan an!

- ▲ 7 ▲ In die Schiller-Schule gehen 537 Schüler.
81,9 % von ihnen nehmen an der Schulspeisung teil.
72,1 % der Schüler nehmen an der Trinkmilchversorgung teil.
11,9 % der Schüler trainieren in einer Sportgemeinschaft.
6,9 % der Schüler erhielten am Jahresende im Fach Mathematik die Note 1.

Gib jeweils die zugehörigen Prozentwerte an! Nutze dazu die Konstantenautomatik des SR 1! Gib einen entsprechenden Rechenablaufplan an!

▲ 8 ▲ Für Sparguthaben bekommt man von der Sparkasse jährlich $3\frac{1}{4}$ % Zinsen.

Der große Bruder von Anja hat am 1. Januar 1985 ein Guthaben von 800 M auf seinem Sparbuch.

Wieviel Jahre muß Anjas Bruder warten, damit sich sein Sparguthaben allein durch die jährlichen Zinsen verdoppelt? (Er will in dieser Zeit kein Geld von diesem Sparguthaben abheben.)

Überlege zunächst!

- a) Wieviel Geld hat Anjas Bruder nach einem Jahr auf seinem Konto?
b) Wieviel Geld hat Anjas Bruder nach zwei Jahren auf seinem Konto?
c) Wieviel Geld hat Anjas Bruder nach drei Jahren auf seinem Konto?

L. Flade

Lösungen:

▲ 2 ▲

- a) z. B. $\boxed{721} \boxed{\times} \boxed{3,7} \boxed{\%} \boxed{=}$ (26.677)
W = 26,68 M
b) z. B. $\boxed{49,5} \boxed{\div} \boxed{242} \boxed{\%} \boxed{=}$ (20.454546)
p = 20,5 %
c) z. B. $\boxed{25,75} \boxed{\div} \boxed{5,4} \boxed{\%} \boxed{=}$ (476.85185)
G = 476,85 M



... Das habe ich vergessen, aber ich kann schon selber einen Rechner basteln ...!!!

Aus: Rohác, Praha

▲ 3 ▲

a) $200 + \frac{200 \cdot 3}{100}$

(das entspricht 103 % von 200)

b) $400 - \frac{400 \cdot 8}{100}$

(das entspricht 92 % von 400)

c) $a + \frac{a \cdot p}{100}$

(das entspricht $(100 + p) \%$ von a)

d) $a - \frac{a \cdot p}{100}$

(das entspricht $(100 - p) \%$ von a)

▲ 4 ▲

a) Z. B. $\boxed{478,50} \times \boxed{96,7} \% = \boxed{462,7095}$

b) $\boxed{478,50} - \boxed{3,3} \% = \boxed{462,7095}$
 $W = 462,71 \text{ M}$

▲ 5 ▲

a) Etwa 596 Bratpfannen.

b) Z. B. $\boxed{a} + \boxed{3} \% = \boxed{+} \boxed{2}$
 $\boxed{\%} = \boxed{\%}$

▲ 6 ▲

$\boxed{12} \div \boxed{23} \% = \boxed{5} = \boxed{2}$
 (52.17...) (21.7...)

$\boxed{=} \boxed{6} \boxed{=} \boxed{4} \boxed{=}$
 (8.6...) (26.0...) (17.3...)

▲ 7 ▲

$\boxed{81,9} \% \times \boxed{537} = \boxed{72,1}$
 (439.803)
 $\boxed{\%} = \boxed{11,9} \% = \boxed{6,9} \% \boxed{}$
 (387.177) (63.903) (37.053)

Es geht auch noch kürzer!

440 Schüler nehmen an der Schulspeisung teil.

387 Schüler nehmen an der Trinkmilchversorgung teil.

64 Schüler trainieren in einer Sportgemeinschaft.

37 Schüler erhielten am Jahresende im Fach Mathematik die Note 1.

▲ 8 ▲

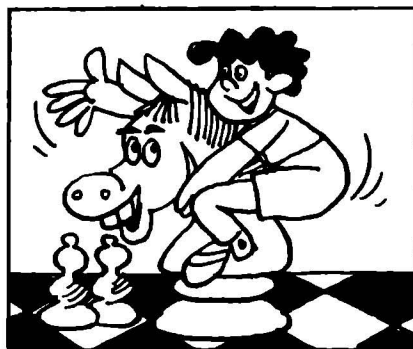
a) $G_1 = 800 + \frac{800 \cdot 3,25}{100}$
 $= 800 \left(1 + \frac{3,25}{100}\right) = 826$, also 826 M.
 b) $G_2 = G_1 + \frac{G_1 \cdot 3,25}{100} = G_1 \left(1 + \frac{3,25}{100}\right)$
 $= 852,845$, also 852,85 M.
 c) $G_3 = G_2 \left(1 + \frac{3,25}{100}\right) = 880,56763$,
 also 880,57 M.

Mit dem SR1 kann man die Berechnung wie folgt durchführen.

(Man vernachlässigt die jeweilige Rundung auf Hundertstel!)

$\boxed{800} \times \boxed{1,0325} = \boxed{826} = \boxed{852,845} = \boxed{880,56246}$
 (826) (852.845) (880.56246)

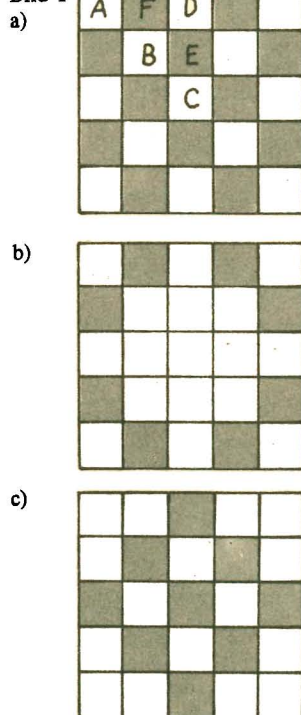
Nach 22 Jahren hat sich das Guthaben verdoppelt.



Ein hüpfender Springer

Bild 1a zeigt ein 5×5-Mini-Schachbrett, auf dem sechs Felder mit A, B, C, D, E, F gekennzeichnet sind. Ein Springer, der in der Mitte auf C platziert ist, könnte sich nach jedem der 8 abgetönten Feldern (Bild 1b) bewegen, die ein symmetrisches Muster mit vier Symmetrielinien bilden. Eine zweite Bewegung könnte den Springer nach jedem der 9 abgetönten Felder (Bild 1c) bringen, die ein anderes Muster mit vier Symmetrielinien bilden.

Bild 1



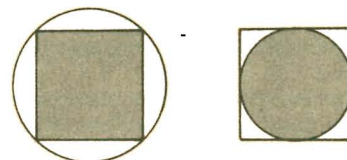
Finde die Muster, die durch die abgetönten Felder, die der Springer in zwei Zügen erreicht, entstehen, wenn er von A, B, D, E oder F startet! Finde die Anzahl der Symmetrielinien in jedem Falle!

Zeige, daß drei Bewegungen von A, B, C, D oder vier Bewegungen von E oder F aus das gleiche abgetönte Muster wie Bild 1a ergeben! Finde die Ergebnisse von vier Bewegungen von A, B, C, D und drei Bewegungen von E oder F aus!

Aus: Mathematics in school, London



▲ 1 ▲ Kreis und Quadrat haben die gleiche Fläche. In den Kreis ein Quadrat einzeichnen, in das Quadrat einen Kreis einzeichnen. Was ist größer – die Fläche des Quadrats, das in den Kreis eingeschrieben ist, oder die Fläche des Kreises, der in das Quadrat eingeschrieben ist?



▲ 2 ▲ The number 1 has only one divisor, the number itself.

Any prime number has two different divisors, 1 and itself. (Note: 1 is not considered to be prime, as it has only one divisor.)

Any integer that is a product of two different primes has four different divisors. If, for instance, the number is pq (where p and q are the prime factors), the divisors are 1, p , q , and the number itself pq .

Any product of three different primes has eight different divisors. If the number is pqr , the divisors are 1, p , q , r , pq , pr , qr , and the number itself pqr .

(I) What can you say about the number of divisors of:

(a) the square of a prime?

(b) the cube of a prime?

(c) the square of any composite integer?

(II) Can you find an integer that is equal to the number of divisors of its square?

▲ 3 ▲ Parmi les diamants célèbres, le diamant Orloff fut trouvé aux Indes au XVII^e siècle. Il est actuellement conservé au Kremlin. Non taillé, sa masse était 300 carats; une fois taillé, sa masse est 189,6 ct. Calculez en grammes la masse de ce diamant avant et après la taille.

▲ 4 ▲ Стальной шарик плавает в ртути. Увеличится или уменьшится глубина погружения, если повысится температура?

Vorbildliche Hilfe

Unser Dank gilt den Verlagen, die Bücher im Werte von 1500 M für die fleißigsten Wettbewerbsteilnehmer zur Verfügung stellten: BSB B.G. Teubner, Leipzig; VEB Fachbuchverlag Leipzig; Der Kinderbuchverlag Berlin; Militärverlag der DDR, Berlin; Sportverlag, Berlin; transpress VEB Verlag für Verkehrswesen, Berlin; VEB Verlag Technik, Berlin; VE Verlag Volk und Wissen, Berlin; VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin. Siehe Seite 3!

Karsten – Mathematiker in Mecklenburg

Zur Erinnerung an Adlige, an Helden und auch an Dichter errichtete man im 19. Jahrhundert viele Denkmäler, Vertreter der Wissenschaft ehrte man seltener. Dennoch sind zuweilen auch Wissenschaftler auf solchen Denkmälern mit dargestellt, entsprechend dem ihnen damals zugewiesenen Platz in der gesellschaftlichen Rangfolge natürlich kleiner als die Hauptpersonen.

In Schwerin ist 1893 ein Denkmal des Großherzogs Friedrich Franz II. aufgestellt worden. Es befindet sich hinter dem Schweriner Schloß am Anfang des Schloßgartens und zeigt den Großherzog hoch zu Roß in der militärischen Ausrüstung des Krieges 1870/71. Am Postament befinden sich zwei figurenreiche Reliefs, auf dem rechten ist die Einweihung des (heutigen) Hauptgebäudes der Universität Rostock (27. 1. 1870) dargestellt. Eine Figur dieses Reliefs stellt den Rostocker Professor für Mathematik und Physik *Hermann Karsten* (geb. 1809 in Breslau, gest. 1877 in Bad Reinerz) dar (Bild 1).

H. Karsten studierte in Bonn und Berlin und promovierte 1829 in Berlin. Anschließend beschäftigte er sich unter Anleitung des Astronomen Bessel in Königsberg mit Astronomie. 1830 habilitierte er sich in Rostock als Privatdozent für Mathematik

und Mineralogie, 1832 wurde er außerordentlicher Professor. Von 1836 bis zu seinem Tode war H. Karsten ordentlicher Professor in Rostock. Seit 1862 (?) leitete er auch die Navigationsschule. Seine Verdienste liegen in Anwendungen der Mathematik. Er veröffentlichte astronomische, meteorologische und mineralogische Arbeiten. So gab er den für Seefahrer bestimmten *Kleinen Astronomischen Almanach* von 1830 bis 1850 heraus.

Hermann Karsten gehörte einer alten mecklenburgischen Familie an, die viele Gelehrte hervorbrachte. Einige von ihnen hatten enge Beziehungen zur Mathematik: *Gustav Karsten* (1820 bis 1900), ein Bruder von H. Karsten, war Professor für Physik und Mineralogie in Kiel. Zu seinen Lehrern zählten *Dirichlet*, *Steiner* und *Plücker*. Als Mitbegründer und erster Vorsitzender der Physikalischen Gesellschaft verkehrte er mit *Joly*, *Joule*, *Faraday*, *Stokes*, *du Bois-Reymond*, *Helmholtz*, *Kirchhoff* und *Virchow*.

Bernhard Lorenz Georg Karsten (1858 bis 1909), ein Sohn von G. Karsten, wirkte von 1894 an als Lehrer für Physik und Mathematik am Technikum Bremen und wurde 1908 zum Professor berufen.

Der Großvater von Hermann und Gustav Karsten, der Professor *Franz Christian Lo-*

renz Karsten (1751 bis 1829), hat sich durch die Errichtung einer landwirtschaftlichen Lehr- und Versuchsstation in Rostock verdient gemacht. Seine erste wissenschaftliche Arbeit war das Büchlein *Die Rechenkunst* (1775, Nachauflagen 1786 und 1805).

Für uns ist der Bruder des zuletzt erwähnten Karsten am interessantesten. Es handelt sich um den Mathematikprofessor *Wenceslaus Johann Gustav Karsten*, den man zu seiner Zeit zu den bedeutenden Mathematikern zählte.

W. J. G. Karsten wurde am 15. 12. 1732 in Neubrandenburg im damaligen Land Mecklenburg-Strelitz als Sohn eines Apothekers geboren. Als eine Feuersbrunst 1737 seine Geburtsstadt fast völlig zerstörte, nahm der Großvater den kleinen *Wenceslaus J. Gustav* zu sich nach Güstrow und erzog ihn bis 1743. Hier konnte *W. J. G. Karsten* die Fürstliche Domschule besuchen, auf der ein bescheidener, vor allem auf das Erlernen von Sprachen ausgerichteter Unterricht erteilt wurde. Seine frühen Neigungen zur Mathematik und den Naturwissenschaften förderte die Schule nicht. Aus Karstens Aufzeichnungen erfahren wir z. B., wie er sich als Schüler erfolglos bemühte, Sonnenuhren zu bauen:

„Ich fing an, mir allein außer meinen Schulstunden Sonnenuhren zu machen, Gläser zu schleifen und dergleichen mehr, erfuhr aber immer mit Betrübnis, daß der Erfolg mit meiner Erwartung nicht überein kam. Ich hatte z. B. gelernt, daß die Sonne binnen 24 Stunden gleichförmig um die Erde liefe. Hieraus schloß ich, wenn ein Kreis in 24 gleiche Theile getheilt sey, so müßte der Schatten eines senkrechten Stifts die Stunde richtig zeigen. Ein kleiner Handzirkel war mir in die Hände gefallen. Daher machte ich Sonnenuhren nach meiner Theorie, ohne sie anders als horizontal zu stellen. Und wenn meine Uhr zu geschwinde oder zu langsam ging, so war ich anfangs wohl dreist genug, die Schuld der Stadtuhr bezumessen, wenn sie mit meiner Sonnenuhr nicht übereintreffen wollte.“

Ein verständnisvoller Lehrer unterwies ihn 1748 in der Naturlehre und erläuterte ihm auch das kopernikanische Weltsystem, so daß Karsten im gleichen Jahr eine Sonnenfinsternis mit halbastronomischen Augen beobachten konnte. Es war ein glücklicher Umstand, daß ihm der ältere Bruder eines Mitschülers Privatunterweisungen in Mathematik nach dem Lehrbuch von *Christian Wolff* erteilte.

Obwohl Karstens Vater in dürftigen Verhältnissen lebte, ermöglichte er 1750 seinem Sohn, in Rostock Theologie, Philosophie und Mathematik zu studieren. Von 1752 bis 1754 setzte dieser die Studien an der ausländischen (!) Universität Jena fort. In Rostock promovierte Karsten 1755 mit einer mathematischen Arbeit zum Magister. Kurze Zeit später habilitierte er sich, und er begann, als Privatgelehrter Vorlesungen über Mathematik, Logik, Metaphysik, Naturrecht und Sittenlehre zu halten. Daneben studierte er viele Bücher und Aufsätze, um sich weiterzubilden. 1758



wurde er als Professor für Logik an die Universität Rostock berufen.

Als Streitigkeiten zwischen dem Herzog und der Stadt Rostock zur Spaltung der Universität führten, ging Karsten an die 1760 neugeschaffene Universität Bützow (sie wurde 1789 wieder mit der Rostocker vereinigt). Die schlechten materiellen Bedingungen und der an mangelnder Disziplin und zu geringen Studentenzahlen krankende Universitätsbetrieb befriedigten ihn nicht. Trotzdem schlug er eine Berufung an die Petersburger Akademie aus. Erst 1778 verließ er Bützow, um als Nachfolger von Andreas Segner die Professur für Mathematik und Physik in Halle zu übernehmen. Karsten wechselte damit von der unbedeutenden, konservativen Universität Bützow zu der damals neben Göttingen den modernen Hochschultyp darstellenden Universität Halle über.

Karsten unterhielt einen regen Briefwechsel mit L. Euler, J. A. Euler, Th. Aepinus, Lagrange, Kästner und Lambert. Leonhard Euler würdigte wiederholt die Arbeiten von W. J. G. Karsten, insbesondere dessen Lehrbücher, die Karstens Ruf als Mathematiker begründeten. Sie zeichnen sich durch Deutlichkeit, Kürze und mathematische Strenge aus. In seinem Hauptwerk, dem zwischen 1767 und 1777 verlegten achtbändigen *Lehrbegriff der gesamten Mathematik*, behandelte Karsten neben der theoretischen Elementarmathematik u. a. auch Statik, Mechanik, Pneumatik und Photometrie. Er befaßte sich auch mit Chemie, Mineralogie und vielfältigen Anwendungen der Mathematik. 1765 gab er Eulers *Mechanik der festen oder starren Körper* und 1779 Lamberts *Pyrometrie* heraus. In seinen Vorlesungen bemühte sich Karsten um eine klare Vortragsweise, bei welcher die Studenten auf das Wesentliche gelenkt

wurden und den Lösungsweg verfolgen konnten. Er forderte, lieber weniger zu behandeln, aber dafür den ausgewählten Lehrstoff ausführlicher darzustellen. Die meisten Studenten beschäftigten sich nämlich nur zur Vorbereitung auf das Magisterexamen mit Mathematik, für sie war Mathematik ein Nebenfach.

W. J. G. Karsten war Mitglied mehrerer wissenschaftlicher Gesellschaften. Er starb am 17. 4. 1787 in Halle.

Aufgaben

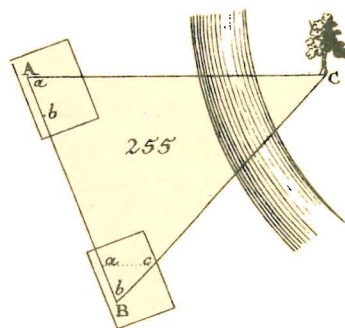
Einige Aufgaben von W. J. G. Karsten sollen hier mitgeteilt werden:

1. *Beweise: Im Dreyeck ABC verhält sich die Summe zweier Seiten $\overline{AC} + \overline{CB}$ zu ihrer Differenz $\overline{AC} - \overline{CB}$, wie die Tangente der halben Summe der gegenüber stehenden Winkel $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ zur Tangente ihrer halben Differenz.*

(Tangente bedeutet hier die Tangensfunktion, d. A.)

2. *Beweise: Die Zahl der Ziffern, woraus die Quadratzahl besteht, ist nie grösser als die doppelte Anzahl der Ziffern der Wurzeln; auch nicht kleiner als die doppelte Zahl der Ziffern der Wurzel weniger Eins.*

3. *Aufgabe aus der Feldmeßkunst: Man soll die Entfernung von A nach C messen, wenn man nach C aber nicht hinkommen kann.*



Karsten löst die Aufgabe so:

Man wähle eine Standlinie $\overline{AB}$, die man messen kann. Man setze den Meßtisch gehörig über A, visire nach B und C, bringe so den Winkel α auf den Meßtisch, und mache $\overline{ab}$ nach dem vernünftigen Maßstabe so groß, als $\overline{AB}$ nach dem grossen Maßstabe ist. Nun trage man den Tisch nach B, stelle ihn wieder wagrecht und so, daß b lothrecht über B und ba in der Richtung der Standlinie $\overline{BA}$ zu liegen komme: so läßt sich auch der Winkel $\beta = B$ auf den Tisch bringen. Alsdenn erhält man das Dreyeck $abc = ABC$ und $\overline{ac}$ ist nach dem vernünftigen Maßstabe so lang, als $\overline{AC}$ nach dem grossen Maßstabe. Das Astrolabium kann auf ähnliche Art gebraucht werden, beyde Winkel an A und B zu messen, da dann $\overline{AC}$ trigonometrisch weit genauer und zuverlässiger gefunden wird.

Welche Möglichkeiten sind euch bekannt, die Streckenlänge $\overline{AC}$ zu bestimmen, wenn man wegen des eingezeichneten Flusses nicht zum Punkt C gelangen kann? Mehr

über solche Aufgaben findet ihr in dem Buch „Unterhaltsame Geometrie“ von J. I. Perelman, das erstmals 1963 beim Verlag Volk und Wissen erschien.

4. *Die Erfahrung: Ein schwerer Körper, der sich völlig selbst überlassen frey bewegt, fällt in 2 Secunden Zeit viermal tiefer, in 3 Secunden 9 mal tiefer als in 1 Secunde; und überhaupt verhalten sich die Höhen des Falles wie die Quadratzahlen der verflossenen Zeiten. Die Höhe aber, wovon ein schwerer Körper in der ersten Zeitsecunde frey fällt, beträgt $15 \frac{5}{8}$*

Rheinländische Fuß.

Könnt ihr angeben, wieviel Rheinländische Fuß einem Meter entsprechen?

5. *Aufgabe: Es ist eine Zahl m gegeben, welche um etwas sehr wenig größer als Eins ist. Man soll in und um den Kreis ein Paar ähnliche reguläre Polygone von so vielen Seiten verzeichnen, daß der Quotient des Verhältnisses der Peripherie des äussern gegen die Peripherie des innern Polygons noch kleiner als jene Zahl m wird. Anschließend ist die Länge der Peripherie des Kreises für den Halbmesser = 1 so genau zu finden, daß der Fehler kleiner sey, als ein gegebener Bruch, so klein man will.* (Vergleiche auch alpha 2 (1985) S. 42 und alpha 2 (1984) S. 44.)

Karsten berechnet z. B. bei vorgegebener Genauigkeit von 0.0001 die Zahl π zu 3.1415. In seinem Lehrbuch ist der halbe Umfang des Einheitskreises, also die Zahl π , mit 33 Ziffern angegeben. Er bemerkt dazu: „Statt des aufgezeigten sehr mühsamen Weges, die Rechnung zu führen, lehrt die höhere Mathematik weit kürzere Methoden, wodurch eben diese Zahl gefunden wird.“

Herrn Dr. Pieper, Berlin, und meinem Schwiegervater J. Karsten danke ich für wertvolle Hinweise, die für das Entstehen des vorliegenden Beitrages förderlich waren.

Mit dem Artikel über Karsten soll auch an den Aufruf *Auf den Spuren von Mathematikern* von J. Lehmann und H. Pieper (alpha 1, 1984, 3. U.-S.) erinnert werden:

Mitarbeiter gesucht

Schaut euch in eurem Heimatgebiet nach Spuren von Mathematikern um (Denkmal, Gedenktafel, Grabstein; aber auch Namen von Straßen, Schulen, Instituten)! Ihr werdet überrascht sein, wie viele Bezüge zur Mathematik und zu Mathematikern es gibt. Beachtet bitte, daß auch viele Astronomen und Physiker auf dem Gebiet der Mathematik tätig gewesen sind.

Über eure Entdeckungen schreibt bitte an die Mathematische Schülerzeitschrift alpha 7027 Leipzig Postfach 14

Kenntwort: Auf den Spuren von Mathematikern.

W. Schmidt

Auszug aus dem Anfangsgründen und dem Lehrbegriffe der Mathematischen Wissenschaften.

Aufgesetzt von
Wencesl. Johann Gustav Karsten,
der Phil. Doctor, Seniors und Professor der Mathematik und
Naturlehre auf der Universität in Halle, der Churf. Academie
der Wissenschaften in München, der Holländischen Gesellschaft
der Wissenschaften in Harlem, und der Königl. Deutschen Gesellschaft
in Copenhagen, auch der Preussischen Gesellschaft
in Berlin Mitglieds.



Greifswald,

gedruckt und verlegt von Anton Ferdinand Hölte, 1781



Mathematik und Technik

Klasse 5

▲ 1 ▲ Um die Wassermenge zu bestimmen, die eine Quelle hergibt, stellen Touristen fest, daß eine Büchse mit zwei Litern Fassungsvermögen in vier Sekunden gefüllt war.

Wieviel Liter Wasser gibt die Quelle in 24 Stunden?

▲ 2 ▲ In einem Klassenraum sind sechs Lampen. Die Schüler, die den Raum verließen, vergaßen das Licht auszuschalten, und es wurde erst nach 15 Minuten ausgeschaltet. Dieses Versäumnis kostete die Schule 0,06 M.

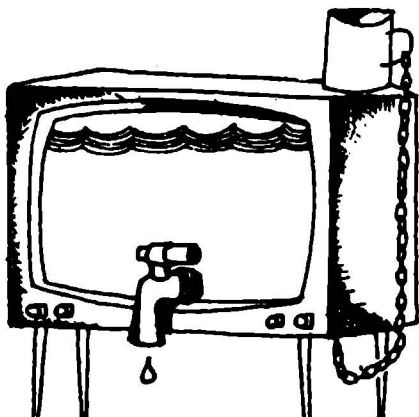
Welche Mehrausgabe ergäbe sich im Monat (30 Tage), wenn in der Schule 210 solcher Lampen sind und diese täglich 5 Minuten unnötig brennen?

▲ 3 ▲ Zwei Kraftfahrer hatten den Auftrag, mit ihrem Lastkraftwagen 170 Tonnen Konsumgüter vom Bahnhof ins Auslieferungslager zu transportieren. Der erste Fahrer, dessen LKW jedesmal mit 4 Tonnen Ware beladen wurde, machte zwanzig Fahrten.

Wieviel Fahrten entfielen auf den zweiten Fahrer, wenn dessen LKW stets mit 5 Tonnen Ware beladen wurde?

▲ 4 ▲ In einem 10-Liter-Kanister befindet sich ein Kraftstoffgemisch im Mischungsverhältnis 1 : 33. Das bedeutet, daß ein Liter Öl mit 33 Litern Benzin gemischt wurde.

Wieviel Liter Öl sind in diesem Kanister enthalten?



▲ 5 ▲ Zu einer Modelleisenbahn der Spur H0 (Maßstab 1 : 87) gibt es Brücken, Autos und Personen.

Wie groß müßte ein Mensch von 1,74 m Körpergröße im Modell sein?

▲ 6 ▲ Damit der Zuschauer eines Filmes das Gefühl hat, die Figuren eines Trickfilmes würden sich bewegen, müssen in einer Sekunde 24 gering veränderte Bilder gezeigt werden.

Wieviele einzelne Bilder müssen für eine Trickfilmsendung von drei Minuten Dauer aufgenommen werden?

▲ 7 ▲ In einer Gießerei fertigen zwei Gießer zusammen 280 Gußstücke. Der erste Gießer stellt 50 Stück mehr her als der zweite.

Wieviele Stück gießt jeder?

▲ 8 ▲ Entlang einer Straße stehen auf beiden Seiten insgesamt 51 Laternen. Von Laterne zu Laterne beträgt der Abstand 30 m. Die Laternen der einen Straßenseite stehen auf der Lücke zu den Laternen auf der anderen Straßenseite.

Wie lang ist diese Straße, wenn die Straßenseite mit den meisten Laternen mit einer Laterne beginnt und mit einer Laterne endet?

▲ 9 ▲ Ein Düsenflugzeug legt in 3 Stunden die Flugstrecke von 2250 km zurück, ein Propellerflugzeug schafft dagegen in einer Flugzeit von 5 Stunden nur eine Strecke von 2125 km.

Wievielemal so groß ist die Geschwindigkeit des Düsenflugzeuges im Vergleich zu der des Propellerflugzeuges?

▲ 10 ▲ Wenn man die Maßzahlen der Austauschflächen zweier Kondensatoren A und B miteinander multipliziert, so ergibt das 12.

Wieviele Quadratmeter Austauschfläche besitzt jeder der beiden Kondensatoren, wenn Kondensator B eine um 4 m² größere Austauschfläche als Kondensator A hat?

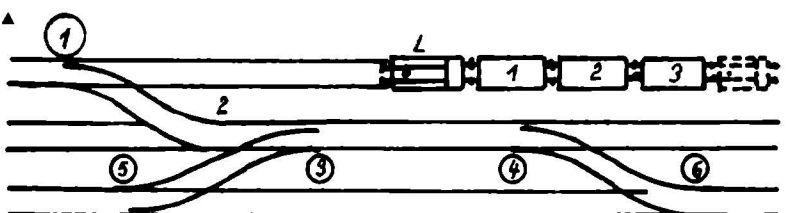
▲ 11 ▲ Das Kettenblatt von Franks Fahrrad hat 54 Zähne. Der Zahnkranz des Hinterrades hat 18 Zähne.

Wie viele Umdrehungen macht das Hinterrad dieses Fahrrades bei fünf Umdrehungen des Kettenblattes? (Das Fahrrad habe keinen Freilauf.)

Klasse 6

▲ 1 ▲ Wassertiefen können mit einem Echolot bestimmt werden. Dabei wird der Zeitunterschied zwischen dem Senden und Empfangen eines Schallsignals gemessen. Im Meerwasser breitet sich der Schall mit einer Geschwindigkeit von 1500 $\frac{m}{s}$ aus.

zu ▲ 3 ▲

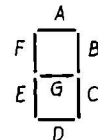


Wie tief ist das Wasser, wenn die gesendeten Schallwellen nach 7,5 s empfangen werden?

▲ 2 ▲ Bei Taschenrechnern oder Digitaluhren sehen alle Ziffern eckig aus. Das liegt an dem Sieben-Segment-Anzeiger. Sieben gerade Teilstücke (Segmente) sind in Form einer eckigen Acht angeordnet. Jedes Segment kann ein- oder ausgeschaltet sein.

a) Welche Segmente werden für die Darstellung der Ziffern 1 bzw. 2 bzw. 9 benötigt?

b) Welche Ziffer erscheint, wenn die Segmente A, B, C, D, E, F bzw. die Segmente A, B, C, D, G eingeschaltet sind?



▲ 3 ▲ Der Lokführer muß die Lokomotive abhängen und an den dritten Wagen des Zuges ankoppeln.

Wie ist das auf kürzestem Wege zu machen?

▲ 4 ▲ Wie lang erscheint ein Gegenstand von a) 0,10 mm, b) 0,70 mm wirklicher Länge unter einem Mikroskop mit 120facher Vergrößerung?

▲ 5 ▲ Auf der Fernverkehrsstraße F6 wurde wegen Bauarbeiten auf einer Strecke von 2 km die Geschwindigkeit auf 30 $\frac{km}{h}$

begrenzt. Herr Meyer durchfuhr mit einem Skoda diese Strecke in 3 Minuten.

Hat sich Herr Meyer an die Geschwindigkeitsbegrenzung gehalten?

▲ 6 ▲ Bei einer Verkehrskontrolle am Wochenende wurden 160 Kraftfahrzeuge durch die Verkehrspolizei überprüft. Von diesen Kraftfahrzeugen waren 105 ohne Mängel. Bei 16 Fahrzeugen waren die Reifen nicht in Ordnung. An 40 Fahrzeugen wurden Beleuchtungsmängel festgestellt. Bei 15 Fahrzeugen traten andere Mängel auf.

Wie viele Fahrzeuge hatten Mängel an der Beleuchtung und zugleich an der Bereifung?

▲ 7 ▲ Im Rahmen des Wiederaufbaues der Leipziger Innenstadt entstanden moderne Wohnkomplexe. Vor den Häusern wurden Rasenflächen, Blumenbeete und Terrassen angelegt. Für eine der rechteckigen Terrassen wurden genau 400 Sandsteinplatten verwendet. Die Platten bedeckten lückenlos den Boden. Jede dieser

Platten ist 60 cm lang und 40 cm breit. Die Länge dieser Terrasse beträgt 10 m. Ermittle die Breite dieser Terrasse!

▲ 8 ▲ Bei einer Verkehrskontrolle in einer geschlossenen Ortschaft durchfuhr ein Motorradfahrer die 100 m lange Teststrecke in einer Zeit von 5 s. Entspricht seine Geschwindigkeit den Vorschriften der Straßenverkehrsordnung?

▲ 9 ▲ Wie lang kann eine Glühlampe von 40 W Leistung brennen, bis $2 \frac{\text{kW}}{\text{h}}$ (1000 W = 1 kW) verbraucht sind?

▲ 10 ▲ In einer Werkstatt wurden aus einer rechteckigen Zinkblechplatte, die 240 mm lang und 150 mm breit war, an den vier Ecken je ein Quadrat von 40 mm Seitenlänge herausgeschnitten. Die verbliebenen Ränder wurden umgebogen und ohne Überlappung zusammengelötet, so daß ein oben offener quaderförmiger Kasten entstand.

Wieviel Quadratzentimeter Zinkblech wurden nach Wegfall der herausgeschnittenen quadratischen Blechstücke zur Herstellung des Kastens benötigt?

Wieviel Liter Flüssigkeit faßt dieser Behälter?

▲ 11 ▲ Es ist die Leistungsaufnahme P einer halbautomatischen Waschmaschine zu berechnen, wenn eine Spannung $U = 220 \text{ V}$ anliegt und dabei ein Strom von $I = 9,1 \text{ A}$ fließt! (Beachte: $P = I \cdot U$.)

▲ 12 ▲ Ein Kompressor drückt die Luft in einen Behälter. Damit der Druckluftbehälter und die gesamte Druckluftanlage vor Überlastung geschützt wird, muß der Druckluftbehälter nach den gesetzlichen Bestimmungen mit einem Sicherheitsventil versehen sein. Der einarmige Hebel des Sicherheitsventils ist 40 cm lang. Am Ende des Hebels ist ein Gewicht von 5 kp befestigt.

Welche Kraft drückt auf das Ventil, wenn es 8 cm vom Drehpunkt des Hebels entfernt ist?

Geschwindigkeiten in Natur und Technik

Der sowjetische Wissenschaftler *B. Lishewski* hat in Heft 4/84 der Zeitschrift *Nauka i shisn* eine umfangreiche Auflistung von Geschwindigkeiten vorgenommen. Eine Auswahl davon sei hier wiedergegeben.

Beginnen wir beim Menschen. Die Schnellsten von uns erreichen beim Lauf etwa 10 m/s. Beim Schwimmen sind es etwa 2 m/s. Die Nervenimpulse in den Neuronenfasern breiten sich mit 120 m/s aus. Das Blut wird mit 0,2 m/s in die Aorta gedrückt. In den feinsten Kapillaren beträgt die Geschwindigkeit aber nur noch $3 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$ (0,3 mm/s). Im ersten Lebensjahr wachsen wir noch mit 10^{-8} m/s . Unsere Fingernägel wachsen mit 10^{-9} m/s und die Haare mit $4 \cdot 10^{-9} \text{ m/s}$ (0,35 mm/Tag). Viele Tiere können sich erheblich schneller als wir fortbewegen. Spitzenreiter auf dem Land ist der Gepard mit 33 m/s

(120 km/h). Der Schwertfisch erreicht im Wasser gar 37 m/s (135 km/h). Und der Goldadler erreicht im Sturzflug bis zu 44 m/s (160 km/h). Aber es gibt auch das Gegenteil. Sprichwörtlich ist die Langsamkeit der Schildkröte ($5 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$) und der Schnecke ($1,6 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$).

Bedeutend langsamer als die Fortbewegungsgeschwindigkeiten der Tiere sind die Wachstumsgeschwindigkeiten der Pflanzen. Sogar der Bambus, der bis zu 40 cm pro Tag wachsen kann, erreicht nur $4,5 \cdot 10^{-8} \text{ m/s}$. Spitzenreiter unserer heimischen Pflanzen sind die Pilze mit bis zu $2 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}$. Gräser erreichen nur die Hälfte.

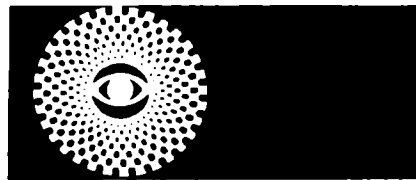
Und in der unbelebten Natur? Schnee fällt mit einer Geschwindigkeit bis zu 0,2 m/s aus den Wolken, bei Regen können es bis zu 8 m/s sein. Die Wolken selbst erreichen bis zu 20 m/s. Die Luft in einem Orkan bis zu 70 m/s. Luftmoleküle bei ihrer thermischen Bewegung erreichen dagegen bei normaler Temperatur und normalem Druck etwa 400 m/s.

Während die bisher genannten Geschwindigkeitswerte nur annähernd angegeben werden konnten, lassen sich viele Geschwindigkeiten im Kosmos auf mehrere Stellen hinter dem Komma genau angeben. Die Geschwindigkeit, mit der sich ein Punkt auf dem Äquator in Meereshöhe durch die Erdrotation bewegt, beträgt $4,65 \cdot 10^2 \text{ m/s}$. Mit $2,98 \cdot 10^4 \text{ m/s}$ bewegt sich die Erde auf ihrer Bahn um die Sonne. Auf die Konstanz dieser Geschwindigkeiten stützt sich von alters her die Zeitmessung. Damit ein Körper, der sich auf Meereshöhe befindet, zum Erdsatelliten wird, muß ihm eine Geschwindigkeit von $7,9 \cdot 10^3 \text{ m/s}$ verliehen werden. Soll er die Erdanziehung überwinden, müssen es $11,18 \cdot 10^3 \text{ m/s}$ sein. Die dritte kosmische Geschwindigkeit – die zum Verlassen unseres Sonnensystems erforderlich ist – beträgt $16,67 \cdot 10^3 \text{ m/s}$.

Noch einige Beispiele, aus dem Bereich der Technik. Der Schall breitet sich in Luft mit etwa $3 \cdot 10^2 \text{ m/s}$ aus. In Eisen ist er wesentlich schneller – $5,2 \cdot 10^3 \text{ m/s}$. Der Elektronenstrahl rast mit $4 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ über den Schirm unseres Fernsehempfängers. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Flamme an einer Zündschnur beträgt 1 cm/s (10^{-2} m/s). Indem der Sprengmeister die Länge der Zündschnur in cm mißt, ermittelt er die Zeit, in der er in Deckung gehen muß. Bis zu 80 m/s beträgt die Geschwindigkeit, mit der Synthesefasern aus der Spindüse gezogen werden. Zum Schluß noch ein Beispiel aus dem Verkehrswesen. Die Geschwindigkeit des Flugzeuges wuchs in 80 Jahren um das 60fache. Der Höchstwert liegt jetzt bei 980 m/s ($= 3\,529,56 \text{ km/h}$).

Es gibt jedoch noch einen anderen Grund für die hohe Wertschätzung der Mathematik: sie allein bietet den Naturwissenschaftlern ein gewisses Maß an Sicherheit, das ohne Mathematik nicht erreichbar wäre.

Albert Einstein



ARBEITS- GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Mathematisches Schülerkabinett – ein Jugendobjekt

Seit September 1984 besteht in der Sektion Mathematik der Pädagogischen Hochschule Karl Friedrich Wilhelm Wander in Dresden das neue Jugendobjekt „Mathematisches Schülerkabinett“.

Ziel dieses Jugendobjektes ist es, eine Sammlung mathematischer Unterrichtsmittel, Spiele und Materialien für Schüler anzulegen, die die Schüler zur Beschäftigung mit mathematischen Problemen anregen sollen und zur selbständigen Aneignung mathematischer Kenntnisse beitragen. Bis jetzt arbeiten Jugendfreunde an diesem Objekt mit und erste Arbeiten im Rahmen des *Wissenschaftlichen Studentenwettstreites* liegen vor. Diese Ergebnisse konnten wir am 2. Mai 1985 im Rahmen des *dies academicus* der Öffentlichkeit vorstellen. So führte *Sybilie Eckhardt* ihre Nachbildung des *Galton-Brettes* vor, mit dem sehr anschaulich Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung dargestellt werden können. *Silke Schlegel* demonstrierte ihr *Zerlegespiel*, mit dessen Hilfe Schüler der Unter- und Mittelstufe ihr geometrisches Vorstellungsvermögen auf unterhaltsame Weise schulen können. *Rainer Heinrich* stellte Teile seiner Aufgabensammlung vor, mit deren Hilfe Schüler selbständig die Arbeitsweise und Einsatzmöglichkeiten des Schulrechners SR1 und anderer Taschenrechner kennenlernen können.

Die angefertigten Exponate können von Schülern, AGs, Klubs Junger Mathematiker usw. an unserer Hochschule benutzt werden, bzw. könnten Mathematiklehrern und AG-Leitern als Anregung dienen. In Zukunft wollen wir auch Lehrplanabschnitte gezielt untersuchen, um deren Potenzen für den Einsatz von Anschauungsmitteln, Materialien usw. aufzudecken und solche Materialien dann herstellen.

Großes Interesse fand auch der im Rahmen des Jugendobjektes organisierte Vortrag mit *J. Lehmann*, dem Chefredakteur der *alpha*, der in seiner kurzweiligen humorvollen Art über 90 Minuten seine Begeisterung für die Mathematik auf das Publikum übertrug.

Student Rainer Heinrich

Ein Besuch in der Knobelwerkstatt

Teil 6: Wir spielen mit Spielen

Liebe Freunde! In den Teilen 2 bis 4 unserer Beitragsserie hatten wir uns mit der Ideenfindung für mathematische Knobelaufgaben aus der Umwelt, der Mathematik sowie der deutschen Sprache beschäftigt, und Teil 5 war dem Anlaß „Jahreswechsel 1985/1986“ gewidmet.

Heute wollen wir nun die Ideen für Knobelaufgaben den bekannten Unterhaltungsspielen, wie Brettspielen, Tischspielen, Kartenspielen, Schiebspielen, Würfelspielen oder Spielen anderer Art, entlehnen. Sicher kennt ihr schon manches dieser Spiele und die entsprechenden Spielregeln. Denkt nur an Brettspiele wie Schach, Go, Dame, Mühle oder Halma; an Tischspiele wie Domino, Lege-Puzzles, Münzspiele oder Streichholzspiele; an Kartenspiele wie Skat, Sechsendsechzig, Rommé, Schwarzer Peter, Canasta oder Bridge; an Schiebspiele wie das Fünfeckerspiel oder an die verschiedensten Würfelspiele. Viele dieser Spiele, allen voran sicherlich Schach und Go, sind anspruchsvolle Strategiespiele, die in hohem Maße logisches Denkvermögen, Kombinationsgabe und Abstraktionsvermögen abverlangen. Bei unserer Zielstellung geht es uns natürlich weniger um die Spiele selbst, sondern vielmehr um die Konstruktion von Problemen, die aus diesen Spielen erwachsen, die sich also durch Variation der Spielregeln, des Spielmaterials oder der Aufgaben- bzw. Zielstellung aus solchen Spielen konstruieren lassen. Wir wollen und können das nur an einigen Beispielen veranschaulichen:

Beispiel 1: Schach

Das Schachspiel, als dessen Heimat Indien gilt, und das Johann Wolfgang von Goethe als „ein Probestein des Gehirns“ und Wladimir Iljitsch Lenin als „Gymnastik des Geistes“ bezeichneten, kennt sicher jeder von euch. Zumindest werdet ihr wissen, wie sich die Akteure, nämlich der König, die Dame, die Türme, die Läufer, die Springer und die Bauern, auf den 64 Feldern eines Schachbrettes bewegen und wie sie gegnerische Figuren schlagen dürfen, und wann der König, die wichtigste Figur des Spiels, im „Schach“ steht bzw. „matt“ ist. Das Schachspiel, das einerseits hinreichend einfach, andererseits aber schier unerschöpflich ist, war seit jeher Ausgangspunkt zu zahlreichen Problemkompositionen. Beispielsweise schuf der amerikani-

sche Mathematiker Samuel Loyd (1841 bis 1911) eine Vielzahl origineller und phantasiereicher Schachaufgaben und -probleme. Die Vielfältigkeit des Schachs erlaubt es aber, daß man sich hierzu immer wieder neue Probleme ausdenken kann. Eine Reihe typischer, aus dem Schachspiel erwachsender Aufgaben ergeben sich beispielsweise durch die folgenden Methoden: 1. Nutzung der Geometrie des Schachbrettes; denkt an das „zersprungene Schachbrett“ (s. Aufgabe 1), an Teilungsaufgaben (s. Aufgabe 2) oder an Aufgaben, die durch Verbindung der Schachbrett-Geometrie mit Zahlen, Münzen (s. Aufgabe 3), anderen Spielsteinen bzw. Würfeln entstehen.

2. Konstruktion mathematischer Probleme, die auf den Bewegungsmöglichkeiten einer bestimmten Figur auf dem Schachbrett basieren (s. Aufgabe 4).

3. Abänderung der Felderanzahl eines Standard-Schachbrettes; denkt an Minischach-Probleme (s. Aufgabe 5) oder an sich hieraus ergebende Probleme mathematischer Natur (s. Aufgabe 6).

4. Abänderung der Quadratform bzw. der Schwarz-Weiß-Färbung eines Schachbrettes z. B. im Zusammenhang mit Rösselsprung-Aufgaben (s. Aufgabe 7; vgl. hierzu auch die Rösselsprünge in den Knobelwandzeitungen (1) und (5)).

5. Konstruktion eigentlicher Schachprobleme, z. B. Vorgabe einer Spielsituation mit dem Ziel, den König einer bestimmten Farbe in einer vorgegebenen Anzahl von Zügen matt zu setzen; denkt an Aufgaben vom Typ „Matt in 2 Zügen“ (Zweizüger), „Matt in 3 Zügen“ (Dreizüger) usw. (s. hierzu den alpha-Schachwettbewerb 1984, Heft 6/1984).

Beispiel 2: Domino

Das Dominospiel, als dessen Erfinder die Chinesen gelten, ist euch sicher bekannt. Die gebräuchlichste Form des Spiels besteht aus 28 jeweils aus 2 quadratischen Halnteilen zusammengesetzten rechteckigen Spielsteinen mit den Augenpaaren von 0-0 bis 6-6, d. h. auf jedem Stein ist eine der möglichen Kombinationen der 7 Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 zur Klasse 2 in Form von Punkten dargestellt. Das Dominospiel, bei dem die Standardregel darin besteht, daß an ein Halnteil eines ausgelegten Steins nur ein Halnteil mit gleicher Augenzahl angelegt werden darf, ist selbst sehr einfach und birgt kaum mathematische

Probleme in sich. Doch lassen sich mit einem vollständigen Satz von Dominosteinen bzw. mit einer bestimmten Teilmenge hiervon allerhand interessante Denksportaufgaben konstruieren. Einige Aufgabentypen seien genannt:

1. Das Zusammenlegen quadratischer oder rechteckiger Rahmen (Quadratränge oder Rechteckringe) mit gleicher Augensumme auf jeder Seite (s. Aufgabe 8).

3. Das Zusammenlegen von Quadrillen, d. h. Figuren, die nur aus quadratischen Blöcken von 4 augengleichen Halnteilen bestehen (s. Aufgabe 10).

4. Aufzeichnung der 56 Quadrate (Halbteile) aller 28 Spielsteine etwa in Rechteckform mit dem Ziel, die Lage der Spielsteine zu rekonstruieren (s. Aufgabe 11). Bei der Lösung solcher Aufgaben muß man systematisch vorgehen, d. h. man stellt zunächst fest, an wieviel Stellen ein Stein plaziert sein könnte, und findet man für einen bestimmten Stein nur 1 Möglichkeit, so hat man damit einen sicheren Ausgangspunkt für die weitere Rekonstruktion gefunden.

5. Aufgaben mit abgeänderten Dominosteinen, etwa mit solchen, bei denen man die Augenpaare durch geometrische Figuren (s. Aufgabe 12), Buchstaben, Silben oder Worte (s. Aufgabe 13) ersetzt.

Weitere Aufgaben mit Dominosteinen wären etwa Ratespiele mit verdeckt liegenden Dominosteinen, geometrische Probleme an zusammengelegten Dominosteinen, Probleme an Domino-Ketten u. a.

Beispiel 3: Schiebe-Puzzles

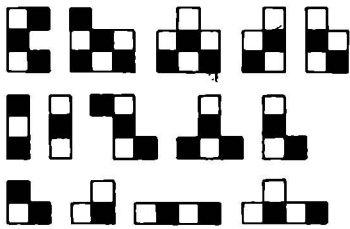
Jeder von euch kennt sicher das bekannte Fünfeckerspiel (Boss-Puzzle), das nach seiner Erfindung in der zweiten Hälfte des vergangenen Jahrhunderts durch S. Loyd rasche Verbreitung fand und eines der beliebtesten Geduldsspiele wurde. Es besteht aus 15 gleichgroßen, quadratischen und von 1 bis 15 durchnummerierten Täfeln, die in einen quadratischen Rahmen gegeneinander verschiebbar eingelagert sind, wobei ein Leerkästchen frei bleibt. Die Aufgabe besteht nun darin, die Täfeln (d. h. die Zahlen von 1 bis 15) aus einer beliebigen Anordnung durch vertikale und horizontale Verschiebung in eine bestimmte Reihenfolge zu bringen (vgl. hierzu auch alpha-Heft 3/1983). Man kann nun durch Abänderung der Quadratstruktur und der Größe der Schiebesteine sowie durch Verwendung anderer Aufschriften (Buchstaben, Worte, Bildausschnitte o. ä.) eine Reihe interessanter Schiebe-Puzzles konstruieren. Die Aufgaben 14 und 15 unserer Knobelwandzeitung mögen euch Anregung geben zum Entwurf solcher Schiebe-Puzzles.

Viel Spaß beim Spielen mit Spielen wünscht euch

R. Mildner

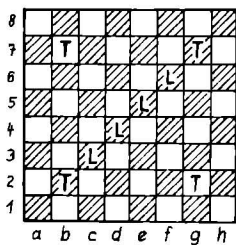
Knobel- Wandzeitung

▲ 1 ▲ Schachbrett-Puzzle



Ein Standard-Schachbrett wurde in die abgebildeten 14 Teile zerlegt. Versucht nun, das Schachbrett wieder zusammenzusetzen!

▲ 2 ▲ Schachbrett-Teilung



Zerlegt das abgebildete Schachbrett derart in 4 kongruente Teile, daß sich in jedem Teil ein Turm und ein Läufer befinden!

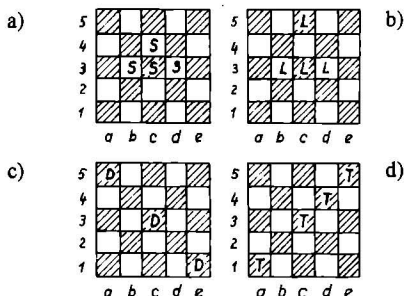
▲ 3 ▲ Schachbrett mit Münzen

Ordnet auf einem Standard-Schachbrett 16 Pfennige, 16 Fünfer, 8 Groschen, acht 20-Pfennig-Münzen, acht 50-Pfennig-Münzen und acht 1-Mark-Münzen so an, daß sich auf jedem Feld genau eine Münze befindet, und daß der Geldwert in jeder Zeile, Spalte und Diagonale jeweils 1,92 Mark beträgt!

▲ 4 ▲ Mit 4 Springern.

Stellt 4 Springer so auf einem Standard-Schachbrett auf, daß diese zusammen 28 Felder des Schachbrettes beherrschen und sich gegenseitig nicht gefährden!

▲ 5 ▲ Mini-Schach

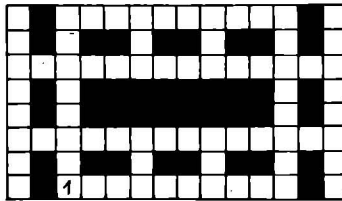


Auf den abgebildeten Mini-Schachbrettern stehen bei a) 4 weiße Springer, bei b) 4 weiße Läufer, bei c) 3 weiße Damen und bei d) 4 weiße Türme. Auf welches Feld muß in jedem Falle der schwarze König gesetzt werden, damit er nicht im „Schach“ steht?

▲ 6 ▲ Damen-Problem

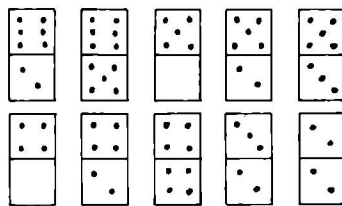
Stellt euch vor, ihr hättet ein Riesenschachbrett mit $1986 \times 1986 = 3944196$ Feldern. Könnte man dann auf diesem Schachbrett 1983 Damen so aufstellen, daß alle Felder des Brettes von ihnen beherrscht werden? (Hinweis: Versucht zunächst einmal, auf einem Standard-Schachbrett 5 Damen so aufzustellen, daß alle Felder von ihnen beherrscht werden, und schließt dann induktiv weiter!)

▲ 7 ▲ Rösselsprung



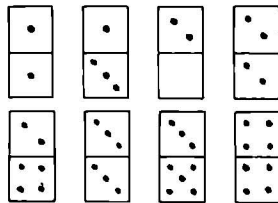
Zieht einen Springer (Gangart wie beim Schach) vom Feld 1 derart zum Feld 1 zurück, daß er zwischendurch jedes weiße Feld der Figur genau einmal betritt! Die schwarzen Felder dürfen dabei übersprungen, aber nicht betreten werden.

▲ 8 ▲ Domino-Rahmen



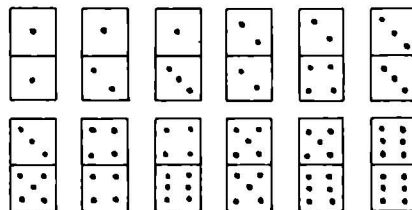
Legt die abgebildeten 10 Domino-Steine derart zu einem quadratischen Rahmen zusammen, daß die Augensumme auf jeder Seite 20 beträgt!

▲ 9 ▲ Magisches Domino-Quadrat



Legt die abgebildeten 8 Domino-Steine so zu einem lückenlosen Quadrat zusammen, daß die Augensumme in jeder waagerechten, senkrechten und diagonalen Reihe jeweils 10 beträgt!

▲ 10 ▲ Eine Quadrille



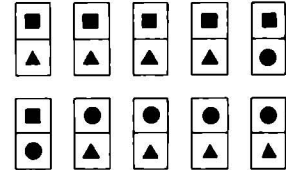
Legt die abgebildeten 12 Domino-Steine zu einer rechteckförmigen Quadrille zusammen!

▲ 11 ▲ Lage-Rekonstruktion

4	2	4	2	1	6	2	5
0	1	5	0	5	5	0	5
4	5	4	6	6	0	3	3
4	4	1	3	2	0	3	3
1	6	6	6	2	6	2	0
0	4	3	5	2	0	2	4
5	6	1	3	1	1	1	3

Die Abbildung zeigt die 56 Halfteile eines vollständigen Domino-Spielsatzes, wobei die Augenzahlen durch Ziffern ersetzt wurden. Wie sind die 28 Domino-Steine zusammengelegt?

▲ 12 ▲ Kinderleicht



Legt die abgebildeten 10 Figurendomino-Steine so zu einem quadratischen Rahmen zusammen, daß sich auf jeder Seite 2 Dreiecke, 2 Quadrate und 2 Kreise befinden!

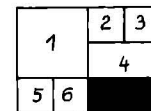
▲ 13 ▲

Magisches Domino-Wort-Quadrat

E	E	I	L
R	R	L	E
O	R	S	S
B	O	E	E

Legt die abgebildeten 8 Buchstaben-domino-Steine derart zu einem lückenlosen Quadrat zusammen, daß ein magisches Wortquadrat zu lesen ist!

▲ 14 ▲ Schiebe-Puzzle



Bringt durch horizontale bzw. vertikale Verschiebung der abgebildeten 6 Spielsteine innerhalb des rechteckigen Rahmens den Stein 1 (großes Quadrat) in die rechte untere Ecke, und das mit möglichst wenig Zügen!

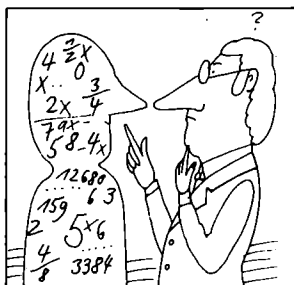
▲ 15 ▲ IMO-Teilnehmer

M	neh	
	mer	l ei
I	T	O

Die abgebildeten 8 Spielsteine (mit den entsprechenden Aufschriften) sollt ihr so innerhalb des rechteckigen Rahmens horizontal bzw. vertikal gegeneinander verschieben, daß man am Schluß „IMO“ (in der oberen Zeile) und „Teilnehmer“ (in der unteren Zeile) lesen kann. Wer schafft es mit 16 Zügen?

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 1. Mai 1986



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig,
Postfach 14

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend nummeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1985/86 läuft von Heft 5/1985 bis Heft 2/1986. Zwischen dem 1. und 10. September 1986 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/85 bis 2/86 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden ab Heft 6/86 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/85 bis 2/86) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1985/86 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

Mathematik

Ma 5 ■ 2636 Egon hat einen Bücherscheck im Werte von 50,- M erhalten. Von einer Buchserie, in der Bücher zu 3,- M und 4,- M je Exemplar angeboten werden, möchte er möglichst viele Bücher erwerben. Wie viele Bücher zu 3,- M bzw. 4,- M kann er mit dem Bücherscheck kaufen, wenn der Betrag restlos verbraucht wird? *Sch.*

Ma 5 ■ 2637 Ein Vater ist gegenwärtig 55 Jahre, sein Sohn 23 Jahre alt. Vor wieviel Jahren war der Vater dreimal so alt wie sein Sohn? *Sch.*

Ma 5 ■ 2638 In einer Kiste befinden sich vier verschiedene Sorten Äpfel, von jeder Sorte gleichviel. Insgesamt sind es 100 Äpfel. Wie viele Äpfel muß man der Kiste wahllos entnehmen, um mit Sicherheit zehn Äpfel der gleichen Sorte zu erhalten? *Sch.*

Ma 5 ■ 2639 Auf wieviel Arten ist es möglich, ein 1-Mark-Stück in 10-Pf-, 20-Pf- oder 50-Pf-Stücke zu wechseln? *Sch.*

Ma 5 ■ 2640 Wie viele dreistellige natürliche Zahlen mit der Quersumme 10 gibt es? Stelle sie alle zusammen! *Sch.*

Ma 5 ■ 2641 Welche Grundziffern müssen für a, b, c eingesetzt werden, damit wir aus $12a76:23b=c2$ eine richtig gelöste Divisionsaufgabe erhalten? *Sch.*

Ma 6 ■ 2642 Man verknüpfe eine beliebige Anzahl aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge durch die Operationszeichen der vier Grundrechenarten so, daß man als Ergebnis stets die Zahl 20 erhält. Dabei dürfen auch Klammern gesetzt werden. (Beispiel: $5 \cdot 6 + 7 - 8 - 9 = 20$.) Gib mindestens weitere acht Beispiele an!

Schülerin Heike Simmank, Niesky

Ma 6 ■ 2643 Welche natürlichen Zahlen, a, b, c erfüllen die Gleichung

$a \cdot (b + c) = b \cdot (a + c)$, wenn $a = 9$ gelten soll und

- (1) c der Nachfolger von b sein soll?
- (2) b der Nachfolger von c sein soll?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 2644 Von einem Faß Gurken blieben am 1. Tag 8 kg Gurken mehr übrig als verkauft wurden. Am 2. Tag verkaufte man die Hälfte der noch vorhandenen Gurken; am 3. Tag verkaufte man die übriggebliebenen 22 kg Gurken. Wieviel Kilogramm Gurken waren anfangs im Faß? Begründe deine Feststellung!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 2645 Altstoffe sind wertvolle Rohstoffe für unsere Volkswirtschaft. Die Klassen 6a, 6b und 6c einer Schule führten einen Wettbewerb beim Altpapierfassen durch. Dabei erreichte die Klasse 6b 40 kg weniger als das Doppelte der Klasse 6a; die Klasse 6c die Hälfte des Sammelergebnisses der Klasse 6b.

Insgesamt erfaßten die drei Klassen 4,8 dt Altpapier. Wieviel Kilogramm entfallen auf jede dieser Klassen?

K. Wagner, Plauen

Ma 6 ■ 2646 Zeichne ein spitzwinkliges Dreieck ABC . Zeichne eine Parallele zu AB , die BC in E und AC in D derart schneide, daß $AD + BE = DE$ gilt! *Sch.*

Ma 7 ■ 2647 Die Sternchen in Bild 1 wurden in Bild 2 durch natürliche Zahlen ersetzt. Dabei beträgt die Summe S dieser Zahlen in der linken und rechten Spalte,

*	*	*
*	*	*
*	*	*

Bild 1

1	7	2
7	-	7
2	7	1

Bild 2

aber auch in der oberen und unteren Zeile jeweils 10. Die Gesamtsumme G aller Zahlen beträgt 34. Welche natürlichen Zahlen muß man einsetzen, wenn gelten soll

- $S = 10$ und $G = 35$?

Thies Luthar, 2600 Güstrow, Wendersstr 22		Ma 7 1369
Kersting-OS, Klasse 7		
30	150	
Prädikat:		
Lösung:		

- b) $S = 50$ und G die kleinstmögliche Zahl?
 c) $G = 50$ und S die kleinstmögliche Zahl?
 (Es genügt jeweils die Angabe einer Lösung.)

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

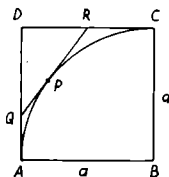
Ma 7 ■ 2648 Über der Seite $\overline{AB}$ eines Quadrates $ABCD$ ist ein gleichseitiges Dreieck ABE derart zu konstruieren, daß der Punkt E des Dreiecks im Innern des Quadrates liegt. Es ist die Größe φ des Winkels CED zu bestimmen!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 7 ■ 2649 Zeichne ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ derart, daß $\overline{AB}$ länger ist als $\overline{CD}$. Ziehe die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$, falle von C das Lot auf $\overline{AB}$; sein Fußpunkt sei F . Es möge $\overline{CF}$ die Diagonale $\overline{BD}$ in G schneiden, und es sei E der Schnittpunkt der Diagonalen. Weise nach, daß das Dreieck CEG gleichschenkelig ist!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 7 ■ 2650 Dem abgebildeten Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a wurde ein Viertelkreis einbeschrieben, dessen Mittelpunkt mit B zusammenfällt und dessen Radius gleich der Seitenlänge a des Quadrates ist. An einen von A und C verschiedenen Punkt P des Viertelkreises wurde die Tangente gelegt, die $\overline{AD}$ in Q und $\overline{CD}$ in R schneidet. Es ist nachzuweisen, daß der Umfang des Dreiecks QRD gleich dem halben Umfang des Quadrates $ABCD$ ist! Sch.



Ma 8 ■ 2651 Es ist zu beweisen, daß die Summe zweier positiver rationaler Zahlen, deren Produkt gleich 1 ist, niemals kleiner als 2 sein kann. Schüler M. Jurke, Cottbus

Ma 8 ■ 2652 Es ist zu entscheiden, ob man lieber eine Apfelsine kaufen sollte, die einen Durchmesser von 12 cm hat, dafür aber eine 1 cm dicke Schale oder 7 Apfelsinen, deren jeweiliger Durchmesser und auch die Schale halb so dick sind wie bei der großen Apfelsine. (Man nehme an, daß die Apfelsinen kugelförmig und von gleicher Qualität sind.)

Dipl.-Ing. H. Miethig, Dresden

Ma 8 ■ 2653 Auf welche Weise kann man einen Betrag von 500,00 M in 100-Mark-Scheinen, 50-Mark-Scheinen und 20-Mark-Scheinen erhalten, wenn man mehr 20-Mark-Scheine als 50-Mark-Scheine, mehr 50-Mark-Scheine als 100-Mark-Scheine und sozst keine weiteren Banknoten oder Geldmünzen ausgehändigt erhält. Sch.

Ma 8 ■ 2654 In einem Quadrat sei die Diagonale einen Zentimeter länger als eine Seite. Wie groß ist der Flächeninhalt dieses

Quadrates? Wie viele Quadrate mit dieser Eigenschaft gibt es?

K. Richter, Karl-Marx-Stadt

Ma 9 ■ 2655 Es ist nachzuweisen, daß die Summe $\frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$ für jede Belegung der Variablen n mit einer natürlichen Zahl ganzzahlig ist! Sch.

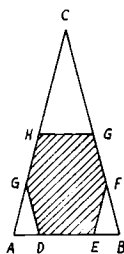
Ma 9 ■ 2656 Es ist zu beweisen, daß unter allen natürlichen Zahlen, deren Quersumme im dekadischen Positionssystem 33 beträgt, keine Quadratzahl ist!

G. Jeschke, Schwarzheide

Ma 9 ■ 2657 Es seien $n^2 = \overline{abcd}$ und $(k \cdot n)^2 = \overline{dcba}$ zwei natürliche Zahlen in dekadischer Darstellung. Welche Zahlen n erfüllen diese Gleichungen?

Nach der sowjetischen mathematischen Schülerzeitschrift „Quant“, Moskau

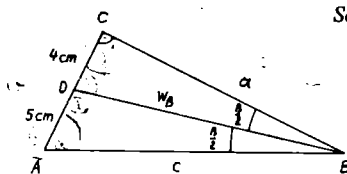
Ma 9 ■ 2658 Dem abgebildeten gleichschenkligen Dreieck ABC , dessen Basis $\overline{AB}$ halb so lang ist wie dessen Schenkel $\overline{AC}$, wurde ein gleichseitiges Sechseck $DEFGHK$ einbeschrieben. Wieviel Prozent des Flächeninhalts A_0 des gleichschenkligen Dreiecks ABC beträgt der Flächeninhalt des ihm einbeschriebenen Sechsecks? Sch.



Ma 10/12 ■ 2659 Der Term $\sqrt{99 + 70\sqrt{2}} - \sqrt{99 - 70\sqrt{2}}$ ist soweit wie nur möglich zu vereinfachen! Sch.

Ma 10/12 ■ 2660 Die Brüche $\frac{19}{95}$, $\frac{199}{995}$ und $\frac{1999}{9995}$ ergeben, soweit wie möglich gekürzt, $\frac{1}{5}$. Es ist zu untersuchen, ob auch $\frac{199\dots 9}{99\dots 95} = \frac{1}{5}$ gilt. Sch.

Ma 10/12 ■ 2661 Im abgebildeten rechtwinkligen Dreieck ABC mit der Hypotenuse $\overline{AB}$ teilt die Winkelhalbierende w_B die Kathete $\overline{AC}$ so, daß $\overline{AD} 5 \text{ cm}$ und $\overline{CD} 4 \text{ cm}$ lang ist. Es sind die Seitenlängen des rechtwinkligen Dreiecks ABC zu berechnen. Sch.



(Zeichnung nicht maßstäblich)

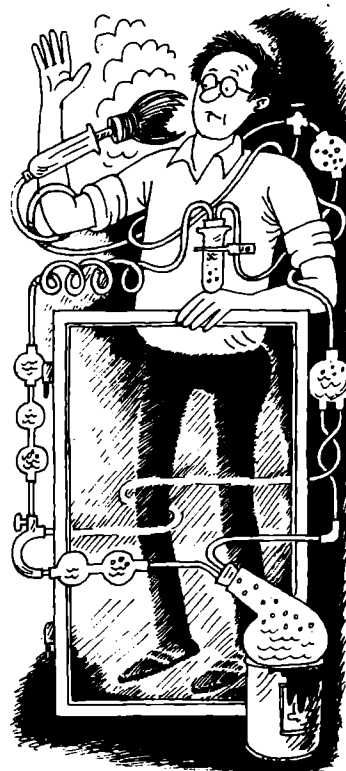
Ma 10/12 ■ 2662 Es sei n die Basis eines Zahlensystems. Für welche $x, y, z, n \in \mathbb{N}$; $x \neq 0$; $x, y, z < n$ gilt

$$[xyz]_n = (n+1)^2$$

Schülerin H. Bernsee, Sallgast

Chemie

Ch 7 ■ 153 Wieviel Kilogramm Phosphor und Kalziumoxid sind im menschlichen Skelett enthalten, wenn man davon ausgeht, daß es durchschnittlich 12 kg Knochensubstanz, deren Gehalt an Kalziumphosphat etwa 62 % beträgt, enthält?



„Was habt ihr denn heute in der Chemiestunde gemacht?“

„Wir haben Sprengstoff hergestellt.“

„Und was macht ihr morgen in der Schule?“

„In welcher Schule?“

Ch 8 ■ 154 In einem Heizhaus eines Betriebes werden stündlich 100 kg Anthrazit mit der Zusammensetzung 93,2 % Kohlenstoff, 3,8 % Wasserstoff und 3,0 % Sauerstoff verbrannt. Berechne die Gesamtmolzahl des Sauerstoffs!

Ch 9 ■ 155 Von einem Gasgemisch, das aus 15 Vol.-% Schwefeldioxid und 85 Vol.-% Sauerstoff besteht, sollen 90 % des Schwefeldioxids nach dem Kontaktverfahren in Schwefeltrioxid umgewandelt werden. Berechne

a) die im Gleichgewicht vorliegenden Stoffmengen in Liter,

b) das Gesamtvolumen im Gleichgewicht!

Ch 10/12 ■ 156 Für die katalytische Hydrierung von 0,229 g einer ungesättigten organischen Verbindung mit der Molaren Masse von 148 g mol^{-1} wurden 149 ml Wasserstoff von 20°C und $101,3 \text{ kPa}$ verbraucht. Berechne die Zahl der Doppelbindungen, die die unbekannte Verbindung enthält!

Physik

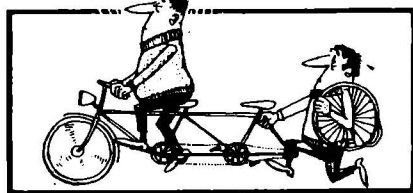
Ph 6 ■ 192 Ein Mühlenrad wird durch einen Wasserlauf angetrieben. Der kleine Kanal, durch den das Wasser zufließt, hat eine Breite von 1,30 m und eine Tiefe von 0,5 m. In einer Sekunde strömen 0,4 m der Länge des Kanals Wasser über das Mühlenrad. Wieviel m^3 Wasser fließen in einer Stunde durch den Kanal?

Ph 7 ■ 193 In der Wasserleitung eines Gebäudes herrscht ein Druck von 0,3 MPa. Mit welcher Kraft drückt das Wasser auf die Hahnöffnung, wenn ihr Durchmesser 8 mm beträgt?

Ph 8 ■ 194 Zur Beheizung einer Produktionshalle wird eine Wärmemenge von $P = 165 \text{ kWh/h}$ benötigt. Als Brennstoff wird Braunkohle mit einem Heizwert $W_H = 1,18 \cdot 10^4 \text{ kJ/kg}$ eingesetzt.

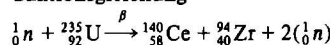
Bestimme den Jahresbedarf an Braunkohle in kg, wenn durchgängig im Dreischichtbetrieb gearbeitet und mit durchschnittlich 150 Heiztagen im Jahr gerechnet wird!

Ing. K. H. Milde, Dresden

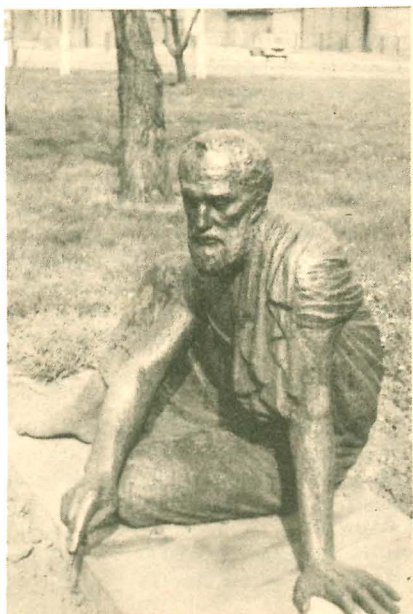


Ph 9 ■ 195 Ein frei fallender Körper legt in der letzten Sekunde ein Drittel seines Weges zurück. Bestimmen Sie die Fallzeit und die Fallhöhe!

Ph 10/12 ■ 196 Welche Energie wird bei der Spaltung von 1 Gramm reinem $^{235}_{92}\text{U}$ frei, wenn die Kernspaltung nach der Reduktionsgleichung



verläuft? Wie vielen Tonnen Steinkohle entspricht diese Energie, wenn deren Heizwert 30 MJ/kg beträgt?



Plastik des Archimedes an der TH Magdeburg

Diese von dem Bildhauer Gerhard Thieme geschaffene Plastik wurde 1978 vor der Bibliothek der Technischen Hochschule Otto von Guericke in Magdeburg aufgestellt. (Eine Kopie befindet sich auf dem Marktplatz in Güstrow.) Obwohl die Plastik keine Bezeichnung trägt, sieht man sofort, daß es sich nur um Archimedes handeln kann, und diese eindeutige Identifizierbarkeit schließt ein großes Lob für den Künstler ein.

Die Legende berichtet ja bekanntlich, daß Archimedes während der Eroberung seiner Heimatstadt Syrakus im Jahre 212 v. u. Z. durch die Römer von einem römischen Soldaten beim Zeichnen geometrischer Figuren in den Sand angetroffen worden sein soll.

Störe mir meine Kreise nicht! – sollen seine letzten Worte gewesen sein, bevor der Soldat ihn erschlug. Er tat dies vermutlich aus Angst vor dem vermeintlichen Zauberer, obwohl der römische Feldherr Marcellus strengen Befehl gegeben hatte, den Gelehrten unversehrt zu ihm zu bringen. Es war wesentlich dem technischen Genie des Archimedes zu verdanken, daß Syrakus sich zwei Jahre lang erfolgreich gegen die römische Übermacht verteidigen konnte, bevor es durch Verrat in die Hände der Römer fiel. Die von Archimedes erfundenen und in die Tat umgesetzten Verteidigungsmaschinen hatten den abergläubischen und ungebildeten römischen Soldaten als übernatürliche Kräfte erscheinen müssen.

Archimedes hat uns durch sein Leben und Werk drei große Beispiele gegeben:

Er war ein hervorragender Mathematiker, er verstand es hervorragend, die Mathematik in der Praxis anzuwenden, und er setzte alle seine Kräfte und Fähigkeiten für die Verteidigung seiner Heimat ein. So hätte die TH Otto von Guericke keine bessere Wahl eines Sujets für ein Kunstwerk zum Schmuck ihres Geländes treffen können.

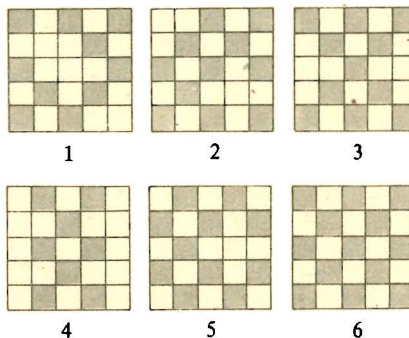
P. Schreiber

Lösungen



Lösung zu: Ein hüpfender Springer

Die Muster mit zwei Bewegungen von A und B aus haben je eine diagonale Symmetrielinie, und diejenigen von D aus haben zwei Symmetrielinien. Wenn aber von E oder F gestartet wird, hat das Muster eine Symmetrielinie. Das Muster mit vier Symmetrielinien ist das Ergebnis von vier Bewegungen von A, B, C, D oder drei Bewegungen von E und F aus.



Lösungen zu: Sprachcke

▲ 1 ▲ Ein Kreis und ein Quadrat haben denselben Flächeninhalt. Dem Kreis wurde ein Quadrat und dem (ursprünglichen) Quadrat ein Kreis einbeschrieben. Was ist größer – der Flächeninhalt des dem Kreis einbeschriebenen Quadrats oder der Flächeninhalt des dem Quadrat einbeschriebenen Kreises?

Lösung: Sei a die Seitenlänge des Quadrats und r der Radius des gegebenen Kreises. Dann wird die Flächengleichheit ausgedrückt durch $a^2 = \pi r^2$. Der Radius des dem Quadrat einbeschriebenen Kreises ist $\frac{a}{2}$, und die Seitenlänge des dem Kreis ein-

beschriebenen Quadrats ist $r\sqrt{2}$. Die Flächeninhalte sind $\frac{\pi a^2}{4}$ und $2r^2$ bzw. (wegen

$a^2 = \pi r^2$) $\frac{\pi^2 r^2}{4}$ und $2r^2$. Es ist $\pi^2 > 9$, also

$\frac{\pi^2}{4} r^2 > 2r^2$, d. h. der Flächeninhalt des einbeschriebenen Kreises ist größer als der des einbeschriebenen Quadrats.

▲ 2 ▲ Die Zahl 1 hat nur einen Teiler, die Zahl selbst. Jede Primzahl hat zwei verschiedene Teiler, 1 und sich selbst. (Bemerkung: 1 ist nicht als Primzahl anzusehen, da sie nur einen Teiler hat.)

Jede ganze Zahl, die ein Produkt von zwei verschiedenen Primzahlen ist, hat vier verschiedene Teiler. Wenn z.B. die Zahl pq ist (wobei p und q Primfaktoren sind), sind die Teiler 1, p , q und die Zahl pq selbst. Jedes Produkt von drei verschiedenen Primzahlen hat acht verschiedene Teiler. Wenn die Zahl pqr ist, sind die Teiler 1, p , q , r , pq , pr , qr und die Zahl pqr selbst.

- (I) Was ist über die Anzahl der Teiler von
- dem Quadrat einer Primzahl,
 - der 3. Potenz einer Primzahl,
 - dem Quadrat einer zusammengesetzten Zahl zu sagen?
- (II) Kannst du eine ganze Zahl ermitteln, die gleich der Anzahl der Teiler ihres Quadrates ist?

Lösung: Das Quadrat jeder Primzahl p hat 3 Teiler 1, p und p^2 . Die 3. Potenz jeder Primzahl p hat 4 Teiler 1, p , p^2 , p^3 . Das Quadrat jeder zusammengesetzten ganzen Zahl hat eine ungerade Anzahl von Teilern. Die einzige ganze Zahl, die gleich der Anzahl der Teiler ihres Quadrates ist, ist 3. Die Zahl 9, das Quadrat von 3, hat 3 Teiler 1, 3, 9.

▲ 3 ▲ Von den berühmten Diamanten wurde der Diamant Orlov in Indien im 17. Jahrhundert gefunden. Er wird gegenwärtig im Kreml aufbewahrt. Ungeschliffen betrug die Masse 300 Karat; einmal geschliffen betrug sie 189,6 Karat. (1 Karat = 0,20 g) Berechne die Masse dieses Diamanten vor und nach dem Schliff in Gramm!

Lösung: $300 \cdot 0,20 \text{ g} = 60 \text{ g}$;

$189,6 \cdot 0,20 \text{ g} = 37,92 \text{ g}$.

Die Masse des Diamanten betrug 60 g vor und 37,92 g nach dem Schliff.

▲ 4 ▲ Eine Stahlkugel schwimmt in Quecksilber. Vergrößert oder verkleinert sich die Eintauchtiefe, wenn die Temperatur erhöht wird?

Lösung: Beim Erwärmen dehnt sich Quecksilber stärker aus als Stahl. Dabei verringert sich die Auftriebskraft, und die Kugel sinkt tiefer ein.

Lösungen zu:

In freien Stunden · alpha-heiter

Anschaun – Denken – Lösen

Aus den Gleichungen (1) und (6) folgt:

$$(1') \quad \beta = 2\alpha$$

(1') in (6) eingesetzt:

$$9\alpha^2 = 9\alpha^3$$

$$(\alpha \neq 0)$$

$$\alpha = 1$$

$$\beta = 2$$

und weiter: $\gamma = 3$, $\delta = 4$

Die Proben bestätigen die Richtigkeit der Lösung

$$(1) \quad 3 = 1 + 2$$

$$(2) \quad 6 = 1 + 2 + 3$$

$$(3) \quad 10 = 1 + 2 + 3 + 4$$

$$(4) \quad 100 = 1 + 8 + 27 + 64$$

$$(5) \quad 36 = 1 + 8 + 27$$

$$(6) \quad 9 = 1 + 8$$

In einem TEE-Zug

$$1986 = 2 \cdot 3 \cdot 331.$$

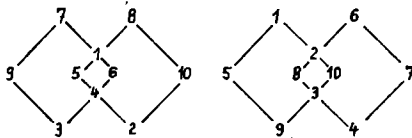
Es sind also 331 Fahrgäste und

$$2 \cdot 3 = 6 \text{ Schaffner.}$$

Magisches Quadrat

2	7	6
9	5	1
4	3	8

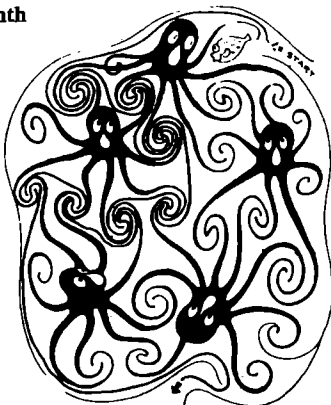
Zahlenspiel



Königszug

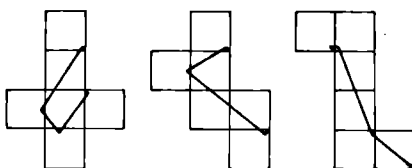
Ihr glücklichen Augen,
was je ihr gesehn,
es sei wie es wolle,
es war doch so schön.

Labyrinth



Die Ameise auf dem Würfel

Beispiele:

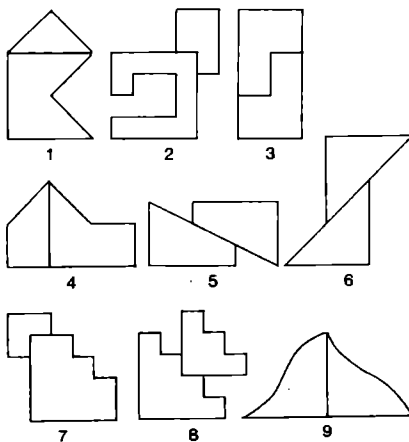


Geometrischer Körper gesucht

Lösung vom Schüler Hans v. d. Berg, Venlo: Bezeichnet man den Mittelpunkt des regelmäßigen Sechsecks mit C, dann kannst du die Figur aus einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide mit dem Quadrat als der Grundfläche und C als der Spitze (wobei alle Kanten die Länge 1 haben) und zwei regelmäßigen Vierflachs (dreiseitigen Pyramide, deren Kanten ebenfalls alle die Länge 1 haben) aufbauen. Der Inhalt einer

Pyramide ist gleich $\frac{1}{3} \times \text{Höhe} \times \text{Grundfläche}$, und eine einfache Berechnung liefert für den Inhalt der vierseitigen Pyramide $\frac{\sqrt{2}}{6}$ und für den der Vierflachs jeweils $\frac{\sqrt{2}}{12}$. Der Gesamtinhalt ist somit $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Mit einem Schnitt



Einfach fabelhaft

Die Lösung sei dem Leser überlassen.

Beweis gefordert

Die beiden dreistelligen natürlichen Zahlen seien

$$\overline{abc} = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$$

$$\text{und } \overline{def} = d \cdot 100 + e \cdot 10 + f.$$

Ihre Summe ist $\overline{abc} + \overline{def} = (a + d) \cdot 100 + (b + e) \cdot 10 + c + f = (a + d) \cdot 99 + (b + e) \cdot 9 + a + b + c + d + e + f$

$\cdot a + b + c + d + e + f$ ist die Summe der Quersummen beider natürlichen Zahlen. Für diese gilt $a + b + c + d + e + f = n \cdot 9$ mit $n \in \mathbb{N}$. Damit gilt $\overline{abc} + \overline{def} = [(a + d) \cdot 9 + 11 + b + e + n] \cdot 9$, d. h. $\frac{9}{\overline{abc} + \overline{def}}$.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 2/85

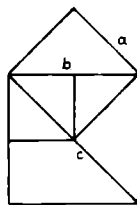
Ma 8 ■ 2567 Nach dem Satz des Pythagoras gilt $a^2 + a^2 = b^2$

$$\text{bzw. } 2a^2 = b^2 \text{ bzw. } b = \sqrt{2} \cdot a.$$

Es gilt weiter $2b^2 = c^2$,

$$\text{d. h. } c^2 = 4a^2 \text{ bzw. } c = 2a.$$

Wegen $a \in \mathbb{N}$, so $2a \in \mathbb{N}$, w. z. b. w.



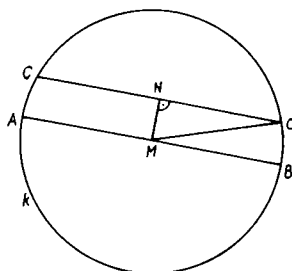
Ma 8 ■ 2568 Aus der nicht maßstabgerechten Skizze ist erkennbar, daß nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$\overline{ND}^2 = \overline{MD}^2 - \overline{MN}^2,$$

$$\overline{ND} = \sqrt{9^2 - 3^2} \text{ cm},$$

$$\overline{ND} = \sqrt{72} \text{ cm},$$

$$\overline{ND} \approx 8,5 \text{ cm}.$$



Nun gilt aus Symmetriegründen $\overline{CD} = 2\overline{ND}$, also $\overline{CD} \approx 17$ cm. Die Länge s der Sehne $\overline{CD}$ beträgt etwa 17 cm.

Ma 9 ■ 2569 Es sei aaa eine dreistellige natürliche Zahl mit gleichen Ziffern in dekadischer Schreibweise, wobei $1 \leq a \leq 9$ gilt. Dann gilt weiter

$$\begin{aligned}\frac{n}{2} \cdot (n+1) &= 111a, \\ n(n+1) &= 222a, \\ n^2 + n - 222a &= 0, \\ n &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{888a + 1}.\end{aligned}$$

Nur für $a=6$ erhalten wir unter den einschränkenden Bedingungen eine Lösung, nämlich

$$n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 73, \text{ also } n = 36.$$

Probe: $1 + 2 + 3 + \dots + 36$

$$= \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot 37 = 666.$$

Ma 9 ■ 2570 Es ist zu zeigen:

$$4 \leq ab \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^2;$$

$a, b \in \mathbb{P}$ und $a \neq 0, b \neq 0$.

Man formt äquivalent um und erhält

$$4 \leq ab \cdot \frac{(b+a)^2}{(ab)^2},$$

$$4 \leq \frac{(b+a)^2}{ab},$$

$$4ab \leq a^2 + 2ab + b^2,$$

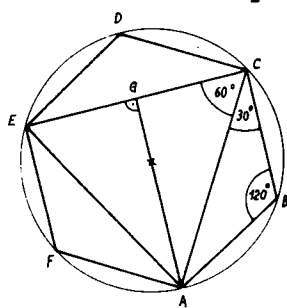
$$0 \leq a^2 - 2ab + b^2,$$

$$0 \leq (a-b)^2.$$

Diese Aussageform ist allgemeingültig. (Das Quadrat einer reellen Zahl ist niemals negativ.)

Da nur äquivalent umgeformt wurde, ist die Behauptung bewiesen.

Ma 9 ■ 2571 Die erste Zuführung füllt an einem Tag 1 Becken, die zweite $\frac{1}{2}$ Becken,



die dritte $\frac{1}{3}$ Becken und die vierte $\frac{1}{6}$ Becken. Wenn alle gleichzeitig laufen, füllen sie an einem Tage $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 2$ Becken.

Es würde also genau einen halben Tag dauern, bis das Becken gefüllt ist.

Ma 9 ■ 2572 Die Dreiecke ABC , ECD und AEF sind paarweise kongruente gleichschenklige Dreiecke. Daraus folgt, daß das Dreieck ACE gleichseitig ist und somit Innenwinkel von je 60° hat. Da die Innenwinkel des regelmäßigen Sechsecks je 120° betragen, gilt für die Basiswinkel der drei gleichschenkligen Dreiecke je 30° .

Daher betragen die Größen der Winkel $\angle FEG$ und $\angle BCG$ je 90° , d. h. die Sechseckseiten $\overline{FE}$ und $\overline{BC}$ sind parallel zur Höhe $\overline{AG}$.

Die weiteren Beweise verlaufen analog.

Ma 10/12 ■ 2573 Die drei Grundziffern seien mit x , y und z bezeichnet. Mit diesen drei Ziffern lassen sich die folgenden sechs dreistelligen natürlichen Zahlen bilden:

$$\begin{aligned}100x + 10y + z, \\ 100x + y + 10z, \\ 10x + 100y + z, \\ x + 100y + 10z, \\ x + 10y + 100z, \\ 10x + y + 100z.\end{aligned}$$

Die Summe aller dieser Zahlen beträgt $222x + 222y + 222z$ bzw. $222(x+y+z)$.

Nun ist 74 ein Teiler von 222, denn $74 \cdot 3 = 222$; also ist 74 auch ein Teiler von $222(x+y+z)$, w. z. b. w.

Ma 10/12 ■ 2574 Da dem größten Winkel die längste Seite gegenüber liegt, ist der Winkel $\angle ACB$ mit der Größe γ der größte Winkel in diesem Dreieck.

Nach Aufgabenstellung gilt $b = \frac{4}{3}a$

und $c = \frac{4}{3}b = \frac{16}{9}a$. Nun ist

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \text{ d. h.}$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{16}{9}\right)^2}{2a \cdot \frac{4}{3}a},$$

$$\cos \gamma = \frac{3\left(a^2 + \frac{16}{9}a^2 - \frac{256}{81}a^2\right)}{8a^2},$$

$$\cos \gamma = \frac{-31a^2 \cdot 3}{8a^2 \cdot 81};$$

$$\cos \gamma \approx -0,1435; \quad \gamma \approx 98,25^\circ.$$

Der größte Innenwinkel dieses Dreiecks beträgt etwa $98,25^\circ$.

Ma 10/12 ■ 2575 Es habe $\overline{BE}$ die Länge x , also $\overline{CE}$ die Länge $a-x$ und $\overline{CD}$ die Länge $b-e$. Ferner habe Winkel $\angle ACB$ die Größe γ . Dann gilt für die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle DEC$ und $\triangle ABC$

$$2 \cdot A_{DEC} = A_{ABC} \text{ bzw.}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (a-x)(b-e) \cdot \sin \gamma$$

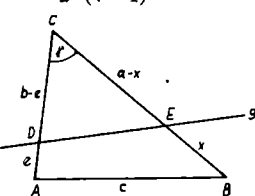
$$= \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma,$$

$$2(a-x)(b-e) = ab,$$

$$a-x = \frac{ab}{2(b-e)},$$

$$x = a - \frac{ab}{2(b-e)} = \frac{a(b-2e)}{2(b-e)},$$

$$\text{also } x = \frac{6 \cdot (4-2 \cdot 1)}{2 \cdot (4-1)} \text{ cm} = 2 \text{ cm.}$$

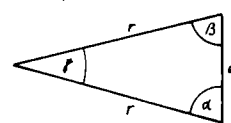


Ma 10/12 ■ 2576a) Das Zehneck läßt sich in 10 paarweise kongruente gleich-

schenkliche Dreiecke mit den Basiswinkeln der Größe $\alpha = \beta = 72^\circ$ und dem Winkel an der Spitze mit der Größe $\gamma = 36^\circ$ zerlegen. Das Bild zeigt ein solches Dreieck:

Nach dem Sinussatz gilt

$$\begin{aligned}\frac{e}{\sin \gamma} &= \frac{r}{\sin \alpha} \text{ bzw. } e = \frac{r \sin \gamma}{\sin \alpha}, \\ e &= \frac{3,5 \text{ cm} \cdot 0,5878}{0,9511}, \\ e &= 2,16 \text{ cm.}\end{aligned}$$



Der Umfang des Zehnecks beträgt also $u_z = 21,6$ cm. Der Umfang des Kreises ist $u_K = 2\pi r$, $u_K = 22$ cm.

$$\text{b) } \frac{u_z}{u_K} = \frac{21,6}{22} = 0,9818.$$

Der Umfang des Zehnecks ist also um etwa 1,8% kürzer als der Umfang des Kreises.

c) Für den Flächeninhalt des Zehnecks gilt

$$A_z = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin \gamma,$$

$$A_z = 36 \text{ cm}^2.$$

Der Flächeninhalt des Kreises beträgt

$$A_K = \pi \cdot r^2, \quad A_K = 38,5 \text{ cm}^2.$$

Nun gilt

$$\frac{A_z}{A_K} = \frac{36}{38,5} = 0,9351.$$

Der Flächeninhalt des Zehnecks ist also um etwa 6,5% kleiner als der Flächeninhalt des Kreises.

Auf die Lösung der Aufgaben der Physik-Chemie-Wettbewerbs müssen wir aus Platzgründen verzichten.

Lösungen zu:

Wolf, Ziege und Kohlköpfe
Heft 6/85

Der Mann brachte zuerst die Ziege an das andere Ufer. Darauf holte er den Wolf und brachte anschließend die Ziege wieder zurück. Am Ausgangsufer angekommen, nahm er die Kohlköpfe in den Kahn und ließ die Ziege dort. Die Kohlköpfe brachte er zum Wolf an das andere Ufer. Abschließend holte er die Ziege.

Lösungen zu:

Knobel-Wandzeitung, Heft 6/85

Lieber guter Weihnachtsmann

Gesuchter Weg:

$$(3 \cdot 4 + 9) \cdot 8 \cdot 12 - 11 - 21 - 23 + 24 = 1985$$

Rechenspaß zum Jahreswechsel

7 mögliche Gleichungen sind:

$$1 \cdot 9 - 8 + 5 = 1 - 9 + 8 + 6 (= 6)$$

$$1 + 9 - 8 + 5 = 1 \cdot 9 - 8 + 6 (= 7)$$

$$1 \cdot 9 + 8 - 5 = 1 \cdot 9 \cdot 8 : 6 (= 12)$$

$$1 \cdot 9 + 8 - 5 = 1 + 9 + 8 - 6 (= 12)$$

$$1 + 9 + 8 - 5 = 1 + 9 \cdot 8 : 6 (= 13)$$

$$1 + 9 + 8 + 5 = 1 \cdot 9 + 8 + 6 (= 23)$$

$$1 + 9 \cdot 8 + 5 = 1 \cdot 9 \cdot 8 + 6 (= 78)$$

Im neuen Jahr

$$\text{Es ist } 1986 = 1 \cdot 1986 = 2 \cdot 993 = 3 \cdot 662 = 6 \cdot 331 = 2 \cdot 3 \cdot 331.$$

Die Abbildung zeigt eine mögliche Eintragung.

19	86	1	1	993	2	3	662	1	3	331	2
1	1	993	1	662	662	1	1	1	1	1	1
1	2	993	1	1	662	3	1	1	1	1	1
6	1	1	1	331	1	1	331	1	1	1	1
1	1	1	1	662	3	1	1	993	2	1	1
1	1	1	1	3	3	3	1	1	993	1	1
331	2	331	3	1	3	662	2	993	1	1	1

Zerlegte Jahreszahl

Aus $1986 = x + 2x + 3x = 6x$
folgt $x = 331$. Man erhält:
 $1986 = 331 + 662 + 993$.

Kryptarithmetik

a) $1985 \cdot 1986$

11910
15880
17865
1985
3942210

b) Durch einfache arithmetische Überlegungen und Fallunterscheidungen findet man aus der ersten Gleichung die Ziffer 1, aus der zweiten Gleichung die Ziffern 2, 0 und 9, aus der dritten Gleichung die Ziffern 5, 7 und 8 und aus der vierten Gleichung die Ziffern 4 und 6. Die Abbildung zeigt die (eindeutige) Lösung des Kryptogramms:

$$\boxed{40} : \boxed{40} = \boxed{1}$$

$$\boxed{209} : \boxed{11} = \boxed{19}$$

$$\boxed{2990} : \boxed{15} = \boxed{199}$$

$$\boxed{21096} : \boxed{11} = \boxed{19096}$$

c) Dieses Kryptogramm ist mehrdeutig lösbar. Unter den zahlreichen Lösungen, wie z. B. $1035 + 1036 = 2071$, $2015 + 2017 = 4032$, $3024 + 3029 = 6053$ oder $4015 + 4019 = 8034$, befindet sich auch die Lösung $1985 + 1986 = 3971$.

Positionssysteme

Die dekadisch dargestellten Zahlen 19, 198, 1985, 1986, 986 und 86 haben in den jeweiligen anderen Positionssystemen folgende Darstellung:

$19 = 10011$ (Basis $g = 2$)
 $198 = 21100$ (Basis $g = 3$)
 $1985 = 30420$ (Basis $g = 5$)
 $1986 = 13110$ (Basis $g = 6$)
 $986 = 33122$ (Basis $g = 4$)
 $86 = 10012$ (Basis $g = 3$)

Mit römischen Ziffern Zahl gesucht

$M + CM + CXXX + VI = MCM LXXXVIII$

Aus $\frac{(331x - 5)6}{5} = 391$ ergibt sich

$$x = \frac{1985}{1986}$$

Eine harte Nuß

Angenommen, es gäbe (mindestens) eine Zahl $n = 10^3a + 10^2b + 10c + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{N}$, $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b, c, d \leq 9$), welche die vier Eigenschaften hat.

Dann gelten die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 24 & (1) \\ a - b + c - d &= -6 & (2) \\ abcd &= 432 & (3) \\ cd - ab &= 39. & (4) \end{aligned}$$

Durch Addition bzw. Subtraktion von (1) und (2) ergeben sich

$$a + c = 9 \quad (5)$$

$$\text{und } b + d = 15. \quad (6)$$

Setzt man $cd = ab + 39$ aus (4) in (3) ein, so erhält man $ab(ab + 39) = 432$, also mit $x = ab$ die quadratische Gleichung $x^2 + 39x - 432 = 0$, welche die Lösungen $x_1 = -48$ ($ab = -48$ entfällt) und $x_2 = ab = 9$ besitzt. Es gilt also

$$ab = 9 \quad (7)$$

$$\text{und } cd = 48. \quad (8)$$

Aus den Zerlegungen $9 = 1 \cdot 9 = 9 \cdot 1 = 3 \cdot 3$ und $48 = 6 \cdot 8 = 8 \cdot 6$ in ein Produkt mit zwei einstelligen Faktoren erhält man nach (7) und (8) folgende Möglichkeiten:

a	b	c	d
1	9	8	6
1	9	6	8
9	1	8	6
9	1	6	8
3	3	8	6
3	3	6	8

Die fünf letzten Möglichkeiten aber widersprechen den Gleichungen (5) bzw. (6). Es gibt also nur eine Zahl, welche die geforderten Eigenschaften besitzt, nämlich $n = 1986$, wovon man sich durch Einsetzen in (1) bis (4) leicht überzeugt.

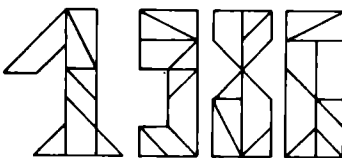
Jahreszahl in Prozenten

Das Rechteck hat einen Flächeninhalt von 128 FE (1 FE = 1 Kästchenfläche), die Jahreszahl 1986 beansprucht 39,5 FE; das sind rund 30,9 Prozent der Rechteckfläche.

Gerechte Teilung

1						1
1						9
	8			9		
9			6			
				1	9	8
8						
	8		6			6
6						

Legespiel



Umordnung

Die Abbildung zeigt eine mögliche Umordnung:

1	9	8	6
6	8	9	1
9	1	6	8
8	6	1	9

Das geheimnisvolle x

Es ist $x = 1986 = 6 \cdot 331$, denn jede Zahl ist gleich dem Produkt der Eckenanzahl des umgrenzenden Vielecks mit 331.

Kniffliger Rösselsprung

10	7	2	5	31	26	29	56	59	54	67	64	63
1	4	11	8	28	32	53	57	70	61	66		
12	9	6	3	25	30	27	58	55	60	65	68	63
22	13	24		33	42		52		62	71		
19	16	21		41	36	39	44	49	46	77	74	79
14	23	18		38	43	34	47		51	72		76
17	20	15		35	40	37	50	45	48	75	78	73

Zusatzaufgabe 1: $2048 = 2^{11}$.

Zusatzaufgabe 2: Bekanntlich erhält man alle pythagoreischen Tripel (x, y, z) , also alle Lösungen der diophantischen Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ durch den Ansatz $x = k(m^2 - n^2)$, $y = 2kmn$, $z = k(m^2 + n^2)$, wobei k, m und n ganze Zahlen sind. Bei unserer Gleichung $x^2 + y^2 = 1985^2$ ist $z = k(m^2 + n^2) = 1985$ vorgegeben. Da $1985 = 1 \cdot 1985 = 5 \cdot 397 = 397 \cdot 5 = 1985 \cdot 1$ und nur nichtnegativ-ganzzahlige Paare (x, y) gesucht sind, so kann man o. B. d. A. k positiv, also $k = 1, 5, 397$ oder 1985 , und $m \geq n$ annehmen. Durch systematisches Durchrechnen (Fallunterscheidung!), am besten mit Hilfe eines Taschenrechners, findet man die folgenden Zerlegungen von 1985:

$$\begin{aligned} 1985 &= 1 \cdot (44^2 + 7^2) = 1 \cdot (32^2 + 31^2) \\ &= 5 \cdot (19^2 + 6^2) = 397 \cdot (2^2 + 1^2) \\ &= 1985 \cdot (1^2 + 0^2). \end{aligned}$$

Man erhält also die folgende Tabelle:

k	m	n	$x = k(m^2 - n^2)$	$y = 2kmn$
1	44	7	1887	616
1	32	31	63	1984
5	19	6	1625	1140
397	2	1	1191	1588
1985	1	0	1985	0

Da mit jedem Paar (x, y) auch das Paar (y, x) Lösung von $x^2 + y^2 = 1985^2$ ist, so erhält man die folgenden 10 Lösungspaare (x, y) unserer Ausgangsgleichung: $(1887, 616)$, $(616, 1887)$, $(63, 1984)$, $(1984, 63)$, $(1625, 1140)$, $(1140, 1625)$, $(1191, 1588)$, $(1588, 1191)$, $(1985, 0)$, $(0, 1985)$. (Geometrisch gesehen sind das alle Punkte $P(x, y)$ mit ganzzahligen Koordinaten auf dem Viertelkreis $x^2 + y^2 = 1985^2$, $x \geq 0, y \geq 0$.)

Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 5/85

Ma 5 ■ 2580 Wir rechnen $320 - 40 = 280$, $280 : 2 = 140$, $140 + 40 = 180$, $2 \cdot 140 = 280$, $2 \cdot 280 + 10 = 570$. Dieter besitzt 140 Marken aus Ungarn, 180 aus Polen, 280 aus der ČSSR, 570 aus der UdSSR, also insgesamt 1170 Marken aus Freundesland.

$$\begin{aligned} \text{Ma 5} \blacksquare 2581 \quad A &= c^2 - b^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 \\ &= c^2 - b^2 - 2a^2; \\ A &= (15^2 - 5^2 - 2 \cdot 6^2) \text{ cm}^2 \\ &= (225 - 25 - 72) \text{ cm}^2 = 128 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Ma 5 ■ 2582 Aus a) folgt: Peter hilft entweder Frau Dahlke oder Frau Fuhrmann. Da nach b) Frau Dahlke von Volkmann be-

treut wird, hilft Peter somit Frau Fuhrmann.

Aus c) folgt dann weiter: Michael hilft Frau Anders, Rüdiger somit Frau Beier.

Ma 5 ■ 2583 Die Strecke $\overline{AB}$ sei x cm lang; die Strecke $\overline{BC}$ ist dann $3 \cdot x$ cm, die Strecke $\overline{CD}$ $4 \cdot x$ cm lang. Nun gilt $x + 3x + 4x = 168$, $8x = 168$, $x = 21$.

Die Strecke $\overline{AB}$ ist 21 cm, die Strecke $\overline{BC}$ 63 cm und die Strecke $\overline{CD}$ 84 cm lang.

Ma 5 ■ 2584 Angenommen, Frau C kaufte n Brötchen; dann kaufte Frau A $2 \cdot n$ und Frau B $3 \cdot n$ Brötchen. Das sind zusammen $6 \cdot n$ Brötchen, und es gilt $6 \cdot n = 30$, also $n = 5$. Frau A kaufte 10, Frau B 15 und Frau C 5 Brötchen.

Ma 5 ■ 2585 Vor 8 Jahren war das Lebensalter der Mutter ein Vielfaches von 4 und 9, also betrug es 36 Jahre; denn $36 < 40$. Vor 8 Jahren war deshalb die jüngste Tochter $36 : 9 = 4$ Jahre, die älteste Tochter $36 : 4 = 9$ Jahre alt. Gegenwärtig ist die Mutter $36 + 8 = 44$ Jahre, die jüngste Tochter $4 + 8 = 12$ Jahre, die älteste Tochter $9 + 8 = 17$ Jahre alt; somit ist die dritte Tochter gegenwärtig $44 - 12 - 17 = 15$ Jahre alt.

Ma 6 ■ 2586 Da kein Kaffee nachgegossen wurde, hat Frau L. genau eine volle Tasse Kaffee getrunken. An Milch wurde nachgegossen $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1$ Tasseninhalt. Frau L. hat also genau soviel Kaffee wie Milch getrunken, je eine Tasse voll.

Ma 6 ■ 2587 Angenommen, Robert steuert für das Geschenk x Mark bei; dann gibt Elvira $5 \cdot x$ M und Peter $2,5 \cdot x$ M dafür aus. Nun gilt $x + 5x + 2,5 \cdot x = 51$, $8,5x = 51$, also $x = 6$. Robert gibt 6 M, Elvira 30 M, Peter 15 M für das Geschenk aus.

Ma 6 ■ 2588 Angenommen, an diese Kaufhalle wurden x kg Äpfel, also $2x$ kg Birnen, $(2x + 10)$ kg Tomaten und $(x - 20)$ kg Pfirsiche geliefert. Das sind insgesamt $(6x - 10)$ kg Obst. Nun gilt $6x - 10 = 290$, $6x = 300$, $x = 50$. Somit wurden 50 kg Äpfel, 100 kg Birnen, 110 kg Tomaten und 30 kg Pfirsiche an diese Kaufhalle geliefert.

Ma 6 ■ 2589 Eine solche zweistellige natürliche Zahl läßt sich durch $10a + b$ mit $1 \leq a \leq 9$ und $1 \leq b \leq 9$ wegen $b \neq 0$ darstellen. Nun gilt $10a + b - (10b + a) = a + b$, $10a + b - 10b - a = a + b$, $8a = 10b$, $4a = 5b$, also $a = 5$ und $b = 4$. Es existiert genau eine solche Zahl; sie lautet 54, und es gilt $54 - 45 = 5 + 4$.

Ma 6 ■ 2590 Die erste Person schälte in x Minuten $3 \cdot x$ Kartoffeln; die zweite Person schälte in $(x + 25)$ Minuten $2 \cdot (x + 25)$ Kartoffeln. Nun gilt $3x + 2(x + 25) = 400$, $5x = 350$, $x = 70$. Die erste Person arbeitete 70 min, die zweite 95 min.

Ma 7 ■ 2591 Es sei x die erste der getippten Zahlen, also $3x$ die dritte, $(3x - 2)$ die zweite, $(3x + 7)$ die vierte und y die fünfte

Zahl. Dann gilt $10x + y + 5 = 84$, $10x + y = 79$.

Nun könnte y eine der beiden Primzahlen 23 oder 29 sein. Nur für $y = 29$, also $x = 5$ erhalten wir eine ganzzahlige Lösung. Anja hat die Zahlen 5, 13, 15, 22 und 29 getippt.

Ma 7 ■ 2592 Es soll gelten $\frac{1}{4} < \frac{x}{17} < \frac{1}{3}$.

Daraus folgt $17 \cdot \frac{1}{4} < 4 \cdot x$ und $3 \cdot x < 17 \cdot \frac{1}{3}$ bzw. $x \geq 5$ und $x \leq 5$, also $x = 5$. Die gebrochene Zahl $\frac{5}{17}$ erfüllt die gestellten Bedingungen.

Ma 7 ■ 2593 Angenommen, an diesem Obststand wurden x kg Kirschen, also $2x$ kg Pflaumen, $(2x + 180)$ kg Birnen, $(2x + 240)$ kg Äpfel und $(2x - 20)$ kg Bananen gekauft. Das sind insgesamt $(9x + 400)$ kg Obst. Nun gilt $9x + 400 = 850$, also $x = 50$. An diesem Obststand wurden 50 kg Kirschen, 100 kg Pflaumen, 280 kg Birnen, 340 kg Äpfel und 80 kg Bananen gekauft.

Ma 7 ■ 2594 Auf Grund der Konstruktion ist das Viereck $EDCF$ ein Parallelogramm, und es gilt $\overline{CF} = \overline{ED}$. Aus $AC \parallel ED$ folgt $\angle CAD = \angle ADE = \frac{\alpha}{2}$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen). Aus $\angle EAD = \angle EDA = \frac{\alpha}{2}$ folgt $\overline{AE} = \overline{ED}$. Aus $\overline{CF} = \overline{ED}$ und $\overline{AE} = \overline{ED}$ folgt $\overline{AE} = \overline{CF}$.

Ma 8 ■ 2595 Sinnvolle Zerlegungen der Zahl 112 in Produkte aus jeweils drei Faktoren, die der Aufgabenstellung entsprechen, sind

$$112 = 2 \cdot 8 \cdot 7 \text{ und } 112 = 4 \cdot 4 \cdot 7.$$

Das Problem ist nur dann eindeutig lösbar, wenn der Hinweis auf Zwillinge gegeben wird.

Da kein Kind älter als 13 Jahre ist, muß ein Kind 7 Jahre alt sein. Die anderen beiden könnten dann entweder jedes 4 Jahre alt oder eins 2 Jahre und das andere 8 Jahre alt sein.

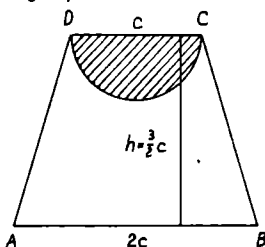
Ma 8 ■ 2596 Es sei c die Länge von $\overline{CD}$. Für den Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ gilt:

$$A_T = \frac{2c + c}{2} \cdot \frac{3c}{2}, \quad A_T = \frac{9c^2}{4}$$

und für den Flächeninhalt des Halbkreises mit dem Durchmesser $\overline{CD}$ gilt:

$$A_{HK} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2}{2}, \quad A_{HK} = \frac{\pi \cdot c^2}{8}$$

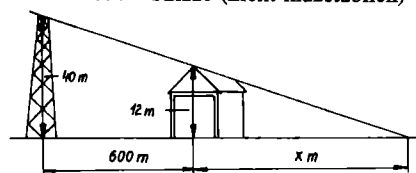
Nun ist $\frac{\pi}{8} : \frac{9}{4} \approx 0,1745$.



Skizze (nicht maßstäblich)

Der prozentuale Anteil der Halbkreisfläche an der Trapezfläche beträgt etwa 17,5%.

Ma 8 ■ 2597 Skizze (nicht maßstäblich)



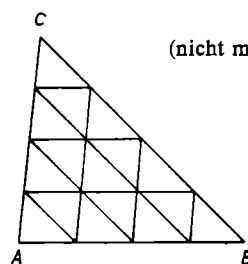
Nach dem Strahlensatz gilt für die Maßzahlen

$$\begin{aligned} 40 : 12 &= (600 + x) : x; \\ 40x &= 12x + 7200; \\ 28x &= 7200; \\ x &\approx 257. \end{aligned}$$

Der Beobachtungsposten kann ein etwa 257 m langes Stück der Straße nicht einsehen.

Ma 8 ■ 2598 Man verbindet zunächst die Mittelpunkte der drei Seiten des Dreiecks ABC , so daß 4 paarweise kongruente Dreiecke entstehen. Es gilt der Satz Die Strecke, deren Randpunkte zwei Seitenmittelpunkte eines Dreiecks sind, ist parallel zur dritten Seite und halb so lang wie diese. Danach verfährt man mit jedem der 4 Teildreiecke in gleicher Weise, so daß die Fläche von ABC in 16 paarweise kongruente Dreiecksflächen zerlegt wird. Die Länge einer jeden Seite eines solchen kleinen Dreiecks beträgt ein Viertel der Länge der ihr gegenüberliegenden Seite des Dreiecks ABC . Für den Umfang eines der 16 Dreiecke erhalten wir also

$$\begin{aligned} u &= 2,5 \text{ cm} + 3 \text{ cm} + 3,25 \text{ cm}; \\ u &= 8,75 \text{ cm}. \end{aligned}$$



Skizze (nicht maßstäblich)

Ma 9 ■ 2599 Sicher gilt $x \neq 0$ und $y \neq 0$ (wegen (2)). $x = 4$ oder $y = 4$ sind nicht möglich, da für $x = 4$ und $y = 1$ die Ungleichung (2) nicht erfüllt würde und für $x = 4$ und $y = 2$ die Ungleichung (1) nicht, für jedes größere y erst recht nicht.

$x = 3$ und $y = 3$ ist wegen (1) nicht möglich. $x = 3$ und $y = 2$ erfüllt beide Ungleichungen; $x = 3$ und $y = 1$ hingegen erfüllt (2) nicht.

Nach weiteren Untersuchungen erkennt man, daß die geordneten Paare (1; 1), (2; 2), (2; 3) und (3; 2) und nur diese die beiden gegebenen Ungleichungen erfüllen.

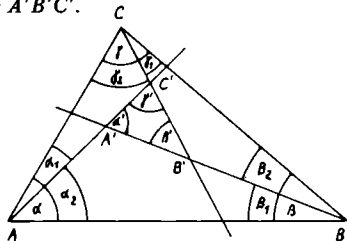
Ma 9 ■ 2600 Jede der Zahlen 5291 und 3913 muß in ein Produkt aus drei Faktoren derart zerlegt werden, daß jeder Faktor das Alter eines Familienmitgliedes in vollen Jahren angeben kann. Es ergeben sich die Produkte

$$5291 = 11 \cdot 13 \cdot 37$$

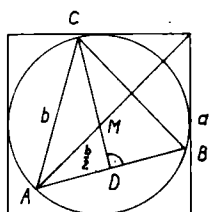
$$\text{und } 3913 = 7 \cdot 13 \cdot 43.$$

Daraus folgt, daß die 13jährigen Zwillinge unterschiedlichen Geschlechts sind.

Ma 9 ■ 2601 Nach dem Außenwinkelsatz gilt $\alpha_2 + \beta_1 = \alpha'$ und wegen $\beta_1 = \alpha_1$ gilt weiter $\alpha_2 + \alpha_1 = \alpha'$, also $\alpha = \alpha'$. Nach dem Außenwinkelsatz gilt $\beta_2 + \gamma_1 = \beta'$ und wegen $\beta_1 = \gamma_1$ gilt weiter $\beta_2 + \beta_1 = \beta'$ also $\beta = \beta'$. Nach dem Außenwinkelsatz gilt $\alpha_1 + \gamma_2 = \gamma'$ und wegen $\alpha_1 = \gamma_1$ gilt weiter $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma'$, also $\gamma = \gamma'$. Nach dem Hauptähnlichkeitssatz (www) folgt $ABC \sim A'B'C'$.



Ma 9 ■ 2602 Bezeichnet man die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks ABC mit b , so gilt für den Flächeninhalt $A_{ABC} = \frac{b^2}{4} \cdot \sqrt{3}$. Die Höhe $\overline{CD}$ des gleichseitigen Dreiecks ABC hat die Länge $\frac{3}{4}a$, denn es gilt $d = a$; $\overline{CM}$ hat die Länge $\frac{d}{2} = \frac{a}{2}$; $\overline{DM} : \overline{CM} = 1 : 2$, folglich hat $\overline{DM}$ die Länge $\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{4}$, also $\overline{CD}$ die Länge $\frac{a}{2} + \frac{a}{4} = \frac{3}{4}a$.



Nun gilt im rechtwinkligen Dreieck ADC

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = b^2 - \left(\frac{3}{4}a\right)^2,$$

$$\frac{b^2}{4} = b^2 - \frac{9}{16}a^2,$$

$$\frac{3}{4}b^2 = \frac{9}{16}a^2,$$

$$b^2 = \frac{3}{4}a^2 \text{ bzw. } b = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

Das setzt man nun in die Flächenformel für das gleichseitige Dreieck ein und erhält

$$A = \frac{\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2}{4} \cdot \sqrt{3}; \quad A = \frac{3\sqrt{3}}{16}a^2.$$

Ma 10/12 ■ 2603 $T_1 < T_2$ wird eine wahre Aussage, wenn man die gegebenen Terme einsetzt.

Begründung:
Wir formen T_1 um und erhalten

$$T_1 = (3 \cdot 125 \cdot 256 \cdot 27 \cdot 4)^{120},$$

$$T_1 = 86 \, 400 \, 000^{120}$$

Wir rechnen: $\lg 86 \, 400 \, 000 \approx 7,9$

$$\lg 86 \, 400 \, 000^{120} \approx 948.$$

T_1 hat mehr als 948 Stellen, da abgerundet wurde.

Wir formen T_2 um und erhalten

$$T_2 = 5^{49}; \quad T_2 = 5^{262 \, 144}.$$

Wir rechnen: $\lg 5 \approx 0,698$.

$$\lg 5^{262 \, 144} \approx 182 \, 977.$$

T_2 hat mehr als 182 977 Stellen, da abgerundet wurde. Da T_1 nicht mehr als 960 Stellen haben kann, gilt in diesem Fall $T_1 < T_2$.

Ma 10/12 ■ 2604 Da unter den vier Kindern Drillings sind, müssen entweder zwei der Mädchen oder zwei der Jungen Drillingskinder sein. Es muß deshalb eine Zerlegung der Art $a + b + b = 61$ geben, wobei a die Anzahl der Lebensjahre des Vaters oder der Mutter und b die Anzahl der Lebensjahre eines Drillingskinds bedeuten. Nach Aufgabenstellung und aus biologischen Gründen gilt $28 < a < 61$. Da a eine Primzahl ist, muß a ein Element der Menge $A = \{29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59\}$ sein.

Nur für $a = 47$ ist eine Zerlegung im angegebenen Sinne möglich:
 $47 + 7 + 7 = 61$.

Daraus folgt, daß das Alter eines Drillingskinds 7 Jahre und das des Vaters 47 Jahre ist.

Für die Anzahl der Lebensjahre der Mutter (c) und des vierten Kindes (d) gilt: $c + d + 7 = 61$, also $c + d = 54$.

Unter Berücksichtigung aller Bedingungen gibt es nur die Möglichkeit $c = 37$. Daraus folgt, daß das älteste Kind der Familie 17 Jahre alt ist.

Ma 10/12 ■ 2605 Wegen der Einschränkung $x \neq \frac{\pi}{2} \cdot k$; $k \in G$ ist sowohl $\tan x$ als auch $\cot x$ stets definiert. Es ergeben sich die folgenden äquivalenten Gleichungen:

$$\sin x \cdot \cos x = \tan x \cdot \cot x,$$

$$\sin x \cdot \cos x = \tan x \cdot \frac{1}{\tan x},$$

$$\sin x \cdot \cos x = 1,$$

$$2 \cdot \sin x - \cos x = 2,$$

$$\sin 2x = 2.$$

Das ist ein Widerspruch. Es gilt $\sin 2x \leq 1$ für alle $x \in P$. Die Gleichung hat keine Lösung. Es gibt also kein $x \in P$, das die gegebene Gleichung erfüllt.

Ma 10/12 ■ 2606 Wir bezeichnen die Flächeninhalte der Dreiecke ADC mit A_1 , DEC mit A_2 , EBC mit A_3 und ABC mit A .

Dann gilt $A = A_1 + A_2 + A_3$ (1) und

$$A_1 = \frac{1}{2}ad \cdot \sin 45^\circ; \quad A_2 = \frac{1}{2}de \cdot \sin 45^\circ;$$

$$A_3 = \frac{1}{2}eb \cdot \sin 45^\circ; \quad A = \frac{1}{2}ab \cdot \sin 45^\circ.$$

$$(\sin 135^\circ = \sin (180^\circ - 135^\circ) = \sin 45^\circ).$$

Es ist weiter

$$A_1 + A_2 + A_3 = \frac{1}{2} \sin 45^\circ (ad + de + eb)$$

und wegen (1) $\frac{1}{2} \sin 45^\circ (ad + de + eb)$

$$= \frac{1}{2} \sin 45^\circ ab. \text{ Daraus folgt}$$

$$ad + de + eb = ab \text{ bzw.}$$

$$de + eb = ab - ad, \text{ d. h.}$$

$$e(d + b) = a(b - d)$$

und wegen $a \neq 0$ und $e \neq 0$ folgt

$$\frac{b + d}{a} = \frac{b - d}{e}, \text{ w. z. b. w.}$$

Ph 6 ■ 182 Es handelt sich um einen Quader mit den Kantenlängen 250 cm, 150 cm und 0,009 cm. Demzufolge ist das Volumen

$$V = 2 \cdot a \cdot b \cdot c,$$

$$V = 2 \cdot 250 \text{ cm} \cdot 150 \text{ cm} \cdot 0,009 \text{ cm},$$

$$V = 675 \text{ cm}^3.$$

Es werden 675 cm³ Lack gebraucht.

Ph 7 ■ 183

$$W_1 = 1,5 \text{ m} \cdot 13,5 \text{ m} = 20,25 \text{ m}^2$$

$$W_2 = 4 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} = 20 \text{ m}^2$$

$$W_3 = 4,5 \text{ m} \cdot 4,5 \text{ m} = 20,25 \text{ m}^2$$

W_1 und W_3 sind gleich groß, und W_2 die kleinste Hubarbeit.

Ph 8 ■ 184 Zunächst ist $L = P + Q$. Unter Gleichgewichtsbedingung gilt das Gleichungssystem

$$(1) \quad P \cdot a = R \cdot b$$

$$(2) \quad R \cdot b + Q \cdot a = G \cdot 10a.$$

(1) in (2) eingesetzt ergibt

$$P \cdot a + Q \cdot a = G \cdot 10a,$$

$$a(P + Q) = a \cdot 10 \cdot G, \quad a \neq 0$$

$$L = P + Q = 10G, \text{ w. z. b. w.}$$

Ph 9 ■ 185

$$\text{Geg.: } P_{AB} = 294 \text{ W}$$

$$U_{AB} = 210 \text{ V}$$

$$R_1 : R_2 : R_3 = 1 : 2 : 5$$

Ges.: $R_1; R_2; R_3$

Für die parallel geschalteten Widerstände gilt

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1 + R_2},$$

$$R_{AB} = \frac{(R_1 + R_2) R_3}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Dann folgt $R_1 R_3 + R_2 R_3 = R_1 R_{AB} + R_2 R_{AB} + R_3 R_{AB}$ und mit $R_2 = 2R_1$ sowie $R_3 = 5R_1$

$$5R_1^2 + 10R_1^2 = R_{AB} R_1 + 2R_{AB} R_1 + 5R_{AB} R_1 \quad (R_1 \neq 0)$$

$$\text{bzw. } 15R_1 = 8R_{AB}. \quad (R_1 \neq 0)$$

Da für die Leistung $P_{AB} = \frac{U_{AB}^2}{R_{AB}}$ gilt,

$$\text{ist } R_{AB} = \frac{U_{AB}^2}{P_{AB}} = \frac{4410 \text{ V}^2}{294 \text{ VA}} = 15.$$

$$\text{Schließlich folgt } R_1 = \frac{8}{15} R_{AB} = 8 \, \Omega,$$

$$R_2 = 2R_1 = 16 \, \Omega \text{ und } R_3 = 5R_1 = 40 \, \Omega.$$

Ph 10/12 ■ 186

$$\text{Geg.: } m_1 = 785 \text{ kg}; \quad \rho_w = 0,09 \text{ kg/m}^3;$$

$$m_2 = 150 \text{ kg}; \quad V = 2 \, 200 \text{ m}^3;$$

$$\rho_L = 1,3 \text{ kg/m}^3; \quad g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

Ges.: Dichte der erwärmten Luft ρ_G ;

Tragkraft F

a) Damit der Ballon schweben kann, muß die Gleichung $F_A = G$ gelten; d. h. Auftriebskraft gleich dem Gewicht des Körpers.

In unserem Fall ist $F_A = V \cdot \rho_L \cdot g$

$$\text{und } G = m_1 g + m_2 g + V \cdot \rho_G \cdot g.$$

Demzufolge erhält man

$$V \cdot \rho_L \cdot g = m_1 g + m_2 g + V \cdot \rho_G \cdot g,$$

$$\rho_G = \rho_L - \frac{m_1 + m_2}{V},$$

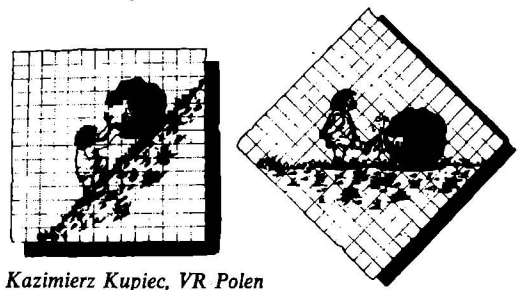
$$\rho_G = 1,3 \text{ kg/m}^3 - \frac{785 + 150}{2 \, 200} \text{ kg/m}^3,$$

$$\rho_G \approx 0,875 \text{ kg/m}^3.$$

Die Luft muß auf eine Dichte von etwa 0,875 kg/m³ gebracht werden.

b) Es könnten etwa 25 Personen getragen werden.

In freien Stunden · alpha-heiter



Kazimierz Kupiec, VR Polen

Anschauen – Denken – Lösen

Welche von Null verschiedenen natürlichen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ erfüllen das Gleichungssystem?

- (1) $3\alpha = \alpha + \beta$
- (2) $6\alpha = \alpha + \beta + \gamma$
- (3) $10\alpha = \alpha + \beta + \gamma + \delta$
- (4) $(10\alpha)^2 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3$
- (5) $(6\alpha)^2 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$
- (6) $(3\alpha)^2 = \alpha^3 + \beta^3$

Oberlehrer Ing. K. Koch,
Schmalkalden

In einem TEE-Zug

In einem TEE-Zug zählen die Schaffner die Anzahl der Passagiere und stellen fest, daß diese Zahl kleiner als 600 ist. Zu ihrem Erstaunen gibt diese Zahl, multipliziert mit der Zahl der Schaffner, die Jahreszahl 1986. Wie viele Fahrgäste und wie viele Schaffner sind im Zug?

Schuldirektor W. Förg, Schwaz (Österreich)

Magisches Quadrat

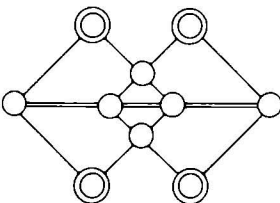
$1 + (9-8)^6$	$1 + \sqrt[9]{9} - 1d8 + 6$	$(1 + \sqrt[9]{9}) \cdot 1d8 - 6$
$\sqrt[9]{9}$ $1 + \sqrt[9]{8} + 6$	$1 \cdot (\sqrt[9]{9} + 8 - 6)$	1^{986}
$-1-9+8+6$	$1^9 + 8 - 6$	$1+9-8+6$

$\hat{=}$

?	?	?
?	?	?
?	?	?

AG-Leiter Mathë, V. Pöschel, Haus d. JP B. Kühn

Zahlenspiel



Trage die Zahlen von 1 bis 10 so ein, daß die Summe in den Quadraten und entlang der Doppel- linie 30 beträgt und die Summe der Zahlen in den Doppelkreisen 20 beträgt.

AG-Leiter V. Pöschel

Königszug

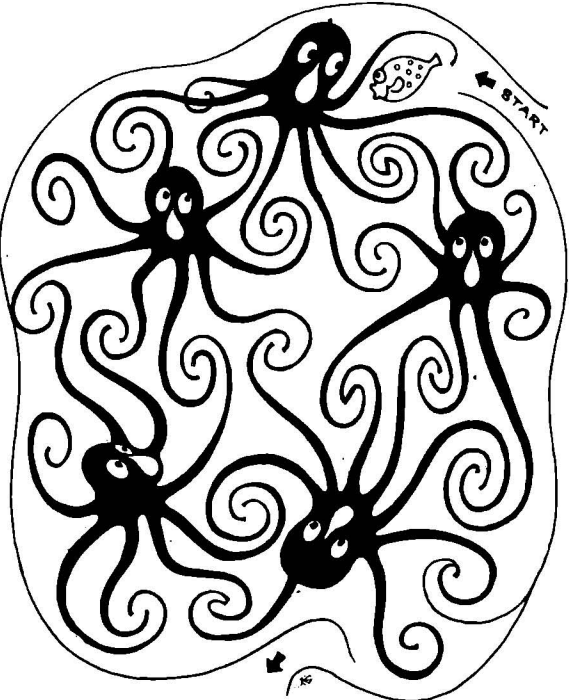
Der Schachkönig darf immer nur von einem Feld auf das nächste, also nach links, rechts, oben, unten oder schräg. In unserer Rätselfigur sind alle 64 Fel- der mit Buchstaben versehen, und wenn man sie – oben links beginnend – im Königszug miteinander verbindet, ergibt sich ein Zitat oder Sprichwort. Würden alle Buchstaben des Zitats durch Striche verbunden, so muß die Linie symmetrisch sein. In unserem Beispiel wird ein Zitat aus Goethes *Faust* gesucht.

Aus: NBI, Berlin

I	H	R	G	I	W	S	W
K	C	O	L	E	I	E	A
L	W	A	S	S	E	E	R
I	N	S	E	N	E	L	D
C	E	J	H	E	S	L	O
H	G	E	E	S	W	O	C
E	U	I	G	S	O	S	H
N	A	H	R	C	H	O	N

Labyrinth

Aus: Füles, Budapest



Die Ameise auf dem Würfel

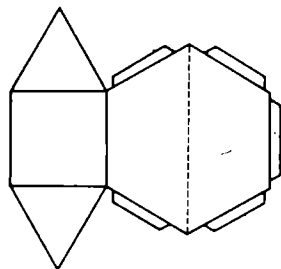
Gegeben sei ein Würfel. An einer Würfecke sitze eine Ameise, die sich auf der Oberfläche dieses Würfels frei bewegen kann. Diese Ameise möchte jede Seitenfläche betreten und anschließend an einem benachbarten Eckpunkt ankommen, wobei zwei Eckpunkte als benachbart gelten, die genau eine Kantenlänge voneinander entfernt sind. Gibt es einen Weg, der kürzer als der Umfang einer Seitenfläche ist? Wenn ja, so gebe man einen möglichen Weg auf einem Würfelnetz an. Eine Begründung wird nicht verlangt.

Mathematikfachlehrer G. Roesch, Apolda

Geometrischer Körper gesucht

Wie groß ist der Inhalt derjenigen Figur, die du erhältst, wenn du das dargestellte Bastelbild verwirklichtest? (Die Figur ist aus einem Quadrat, einem in der Mitte zu faltenden regelmäßigen Sechseck und zwei gleichseitigen Dreiecken aufgebaut, deren aller Seiten die Länge 1 haben.)

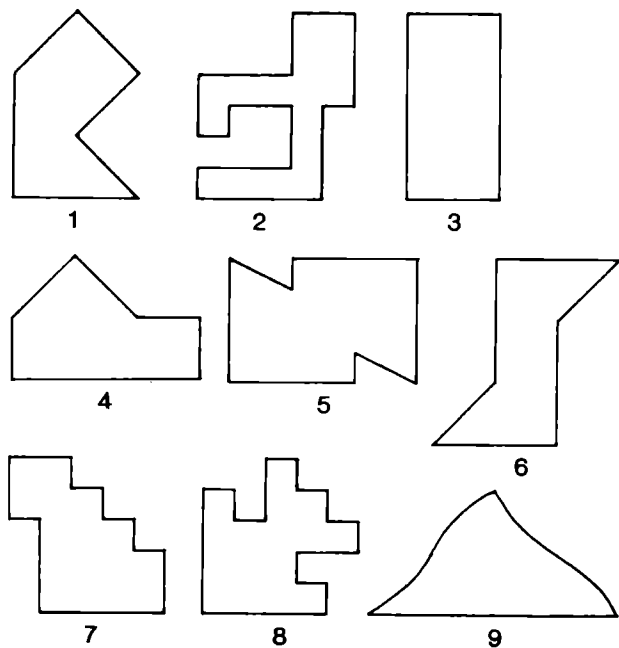
Aus: Pythagoras, Niederlande



Mit einem Schnitt

Zerschneide jede der neun Flächen so in zwei Teile, daß du ein Quadrat aus ihnen legen kannst.

Math. in School, London



Einfach fabelhaft

So ähnlich wie unsere Darstellung es zeigt, könnte es sich bei der Fabel vom Fuchs und dem Raben abgespielt haben. Unsere Zeichnungen wimmeln von Fehlern. Gelingt es dir, mindestens ein Dutzend Unterschiede zu finden?

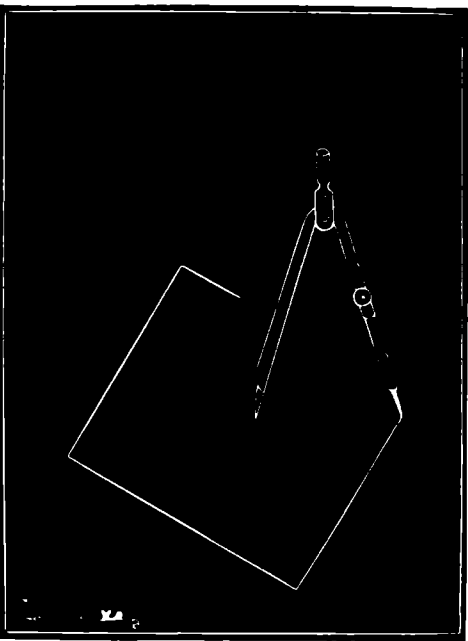


Beweis gefordert

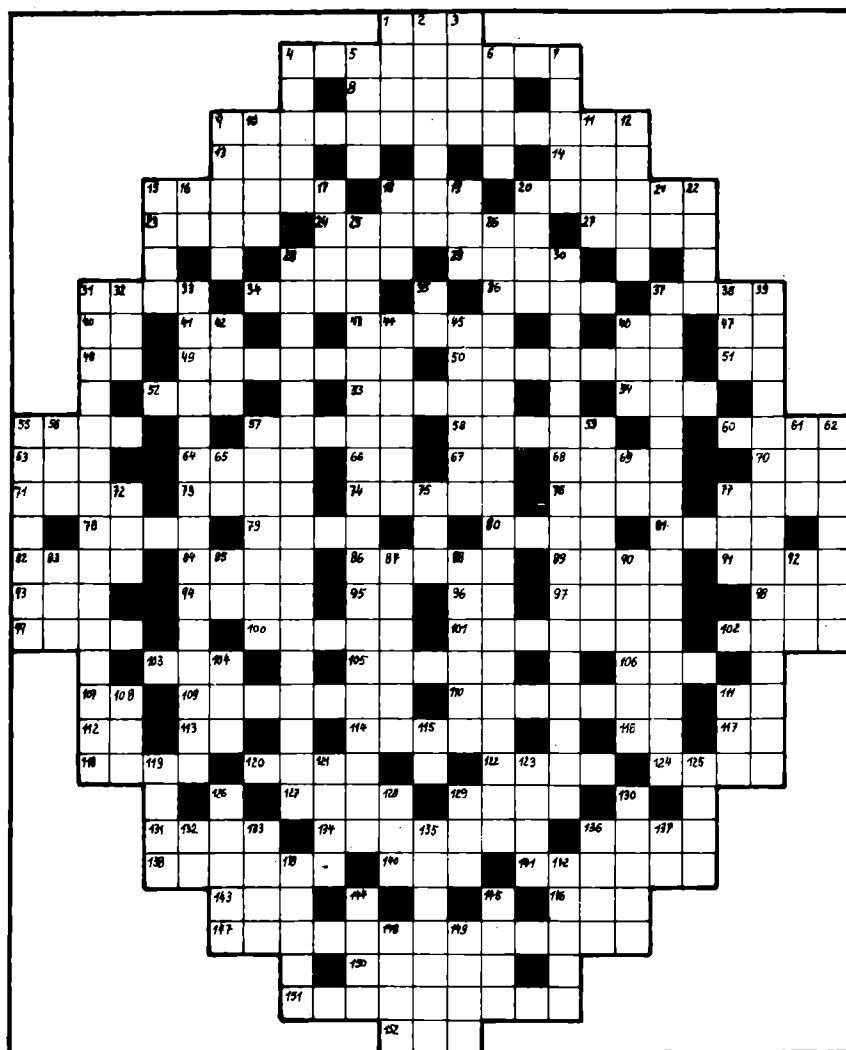
Zeige: Ist die Summe der Quersummen zweier dreistelliger natürlicher Zahlen durch 9 teilbar, so ist die Summe der beiden natürlichen Zahlen auch durch 9 teilbar.

Mathematikfachlehrer W. Träger, Döbeln

Giokas Panaiotis, Griechenland



Anspruchsvolles Kreuzzahlrätsel



Hinweise:

Bei Brüchen sind die Ergebnisse in Dezimalstellen umzurechnen. Alle Aufgaben müssen so genau wie möglich gelöst und evtl. gerundet werden. (Z. B. ist π mit mindestens 4 Dezimalstellen anzugeben.) Rechenstabgenauigkeit genügt nicht.

Bei Gleichungen ist stets der Wert von x bzw. α usw. zu berechnen. Wie international üblich, werden die Kommas in die Felder nicht mit eingetragen. (Statt 0,49 ist 049 zu schreiben.) Die Anzahl der Ziffern wird durch die Zahl der Felder bestimmt.

Waagerecht:

- 1) $(112 : 14 + 17 \cdot 4) \cdot 3 + 52$;
- 4) die größte Potenz, die durch zwei Ziffern auszudrücken ist;
- 8) Umrechnungskoeffizient von Torr in Pascal;
- 9) 11111^2 ;
- 13) dritte astronautische Geschwindigkeit in km/s;
- 14) $1 : 5^{-3}$;
- 15) Quadrat der größten dreistelligen Zahl;
- 18) Schallgeschwindigkeit in der Luft bei 20°C und 1013 hPa in m/s;
- 20) Lichtgeschwindigkeit im Vakuum in km/s;
- 23) Carl Friedrich Gauß geb.;
- 24) $14^0 \cdot 14^1 \cdot 14^2 \cdot 14^3 - 4 \cdot 14^4 - 2 \cdot 14^5$;
- 27) Johannes Kepler geb.;
- 28) MCDXVII;
- 29) $\tan 795,2^\circ$;

- 31) $\arccos \alpha = 0,9$;
- 34) positive reelle Lösung der Gleichung $x^4 + x^2 = 156$;
- 36) Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski geb.;
- 37) Blaise Pascal geb.;
- 40) $\binom{12}{10}$;
- 41) eine Nullstelle der Funktion $y = 50x^2 - 21x + 1,6$;
- 43) Summe der ersten 32 Quadratzahlen um 558 vergrößert;
- 46) eine Primzahl;
- 47) positive Lösung der Gleichung $x^2 - 3x - 180 = 0$;
- 48) geometrisches Mittel von 8 und 72;
- 49) 14041 : 90909;
- 50) 88 077 + 2 222 · 3 678;
- 51) durch welche Zahl muß man 595 teilen, um 17 zu erhalten?
- 52) mittlere Proportionale von 729 und 841;
- 53) Summe der ersten 24 Kubikzahlen vergrößert um 2008;
- 54) $\lg x = 8,3219$;
- 55) Fläche eines Quadrates mit der Seite 57 cm;
- 57) Wert der Funktion $y = x^3 - 2$ an der Stelle $x = 45$;
- 58) $6^6 + 66 \cdot 666 : 6 + 66 \cdot 66 - (6 + 6)$;
- 60) Evariste Galois geb.;
- 63) DCIL;
- 64) Vielfaches von 907;
- 66) Zahl ist durch 13 und 5 teilbar;

- 67) Umfang eines Quadrates mit der Fläche 289 cm^2 ;
- 68) Umfang eines Kreises mit $r = 69 \text{ cm}$;
- 70) kleinstes gemeinsames Vielfaches von 42, 399, 114 und 266;
- 71) Produkt der Ziffern der Zahl ist 405;
- 73) Fläche eines Zylindermantels in cm^2 mit $r = 10 \text{ cm}$, $h = 97 \text{ cm}$;
- 74) Quersumme der Zahl beträgt 27;
- 76) geometrisches Mittel zweier Zahlen beträgt 900. Die eine ist 180. Und die andere?
- 77) $\frac{68}{x-20} - \frac{35}{x+80} = \frac{33}{x-120}$;
- 78) Länge des Thaleskreises über $\overline{AB} = 33 \text{ cm}$;
- 79) Isaac Newton geb.;
- 80) Fläche eines Rechteckes mit den Seiten 36 cm und 241 cm;
- 81) Fläche eines Kreises in cm^2 mit $r = 1,6 \text{ cm}$;
- 82) $43^\circ 19' 12''$ in Grad;
- 84) Quersumme der Zahl beträgt 17;
- 86) Produkt der Ziffern der Zahl beträgt 700;
- 89) Volumen eines Quaders mit den Kanten 49 cm, 16 cm, 10 cm;
- 91) Länge einer Seemeile in km;
- 93) Raumdiagonale eines Quaders mit den Kanten 216 cm, 72 cm, 54 cm;
- 94) $\cot 190,9^\circ$;
- 95) $6 \frac{4}{27} \cdot 4 \frac{1}{11} \cdot 3 \frac{3}{10}$;
- 96) Hypotenuse 53 cm, eine Kathete 28 cm, andere Kathete?
- 97) $1 \frac{1}{36} + 1 \frac{1}{4} + 1 \frac{1}{16} + 1 \frac{11}{36} + 1 \frac{1}{48}$;
- 98) andere Nullstelle von 41) waager.;
- 99) $\sqrt{x+88} - \sqrt{x-19} = 1$;
- 100) Fläche eines Kreises in m^2 mit $d = 0,996 \text{ m}$;
- 101) $\left(\frac{2}{3} + \frac{14}{27}\right) \cdot 33 \frac{3}{16}$;
- 102) $\sin 1146,2^\circ$;
- 103) IV · XXXIX;
- 105) Würfel mit Oberfläche $229\,154\,400 \text{ mm}^2$, Summe aller Kanten in mm?
- 106) $10 : 6^{-2}$;
- 107) Gleichungssystem $\begin{matrix} 2x + 3y = 102 \\ 3x + 2y = 123 \end{matrix}$, Wert von x ?
- 109) $185 \cdot (186 \cdot 187 - 20) + 24$;
- 110) $2^3 \cdot 8^3 \cdot 11^3 - 12^3 + 10$;
- 111) Summe der ersten 5 natürlichen Zahlen;
- 112) Wert von y in 107) waager.;
- 113) eine Lösung der Gleichung $x^2 - 105x + 2106$;
- 114) Summe von 3 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen $10\,434 \leq n \leq 10\,436$;
- 116) andere Lösung der Gleichung von 113) waager.;
- 117) $\binom{8}{4}$;
- 118) $(4\,095,5 + (9,25 - 1,5) \cdot 125,5 - 25 \cdot 0,225) : 2,5$;
- 120) Raumdiagonale eines Würfels mit 26,05 cm Kantenlänge;
- 122) Wert der Ordinate für $x = 20$ in $y = f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 113$;
- 124) jemand erhält bei 3,25% Verzinsung in 1 Jahr 275,60 M Zinsen, Höhe des Sparguthabens?
- 127) $\arccos 25^\circ = x$;
- 129) 17. Glied der arithmetischen Folge 1,025; 0,98; 0,935; ...;
- 131) Leonhard Euler geb.;
- 134) $1\,234 \cdot 4\,321 + 1\,583 \cdot 1\,592$;
- 136) Galileo Galilei geb.;
- 138) $\sqrt{2\pi}$;
- 140) eine vollkommene Zahl;
- 141) Zahl hat am Anfang und am Ende je 3 gleiche Ziffern;
- 143) spezifische Verdampfungswärme des Wassers in kcal/kg;
- 146) Schmelztemperatur des Zinns in $^\circ\text{C}$;
- 147) Länge eines Lichtjahres in km bei

- $c = 300\,000 \text{ km/s}$ und 365 Tagen;
 150) mittlere Bahngeschwindigkeit der Erde in km/s ;
 151) Produkt von 4 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen $137 < n < 142$;
 152) Summe der ersten 23 ungeraden Zahlen.

Senkrecht:

- 1) $\frac{x}{15} + \frac{x}{18} + \frac{x}{27} = 387$;
- 2) $444\,444 + 2\,222 \cdot 3\,333 + 380\,470$;
- 3) Ordinate des Scheitelpunktes der Funktion $y = x^2 - 0,52x + 0,1066$;
- 4) $\lg 9\,440$;
- 5) größte Fläche einer geometrischen Figur mit Umfang $300,3 \text{ cm}$ in cm^2 ;
- 6) Umfang eines Rechteckes mit den Seiten 530 cm und $1\,600 \text{ cm}$;
- 7) eine symmetrische Zahl;
- 9) $(109 - \sqrt{2})(109 + \sqrt{2})$;
- 10) Dualzahl LLOOOLLOLL im Dezimalsystem;
- 11) $\tan 253,1^\circ$;
- 12) Summe der ersten 177 natürlichen Zahlen vermindert um 3;
- 15) Länge der Diagonale eines Quadrates mit der Seite $644,5 \text{ cm}$;
- 16) größte zweistellige Primzahl;
- 17) Gottfried Wilhelm Leibniz geb.;
- 18) arithmetisches Mittel von 239 und 375;
- 19) Produkt zweier Primzahlzwillinge;
- 20) $\frac{829}{x} = \frac{1}{3}$;
- 21) $9409^{0,5}$;
- 22) $\cot 25,3^\circ$;
- 25) π ;
- 26) Eulersche Zahl e ;
- 28) $\sqrt{2}$;
- 30) $5^{2,4}$;
- 31) $2^{4,9}$;
- 32) $(x + 16) : (x - 44) = 3 : 2$;
- 33) $88\,825^3$;
- 35) Dichte von Kupfer in g/cm^3 ;
- 37) $\sqrt{3}$;
- 38) $\frac{x + 87}{x - 63} = 2$;
- 39) $17!$;
- 42) Dichte von Blei in g/cm^3 ;
- 44) die ersten 6 Glieder der Fibonacci'schen Folge;
- 45) Normalfallbeschleunigung auf der Erde in m/s^2 ;
- 46) Dichte von Gold in g/cm^3 ;
- 55) Länge eines Tropischen Jahres in Dezimalschreibweise in Tagen (365 d; 5 h; 48 min; 46 s);
- 56) CCIL;
- 57) Produkt der ersten 8 Primzahlen vermindert um $8 \cdot 10^3$;
- 59) Erdradius an den Polen in km (Stand 1972);
- 61) harmonisches Mittel von 144 und 288;
- 62) $25 \cdot 81 \cdot 889$;
- 65) $(x + 12)(2x + 22) = (2x + 13)(x + 18)$;
- 69) Wert von $10x$, wenn $x^2 = 27$;
- 72) planetare Fluchtgeschwindigkeit in km/s ;
- 75) drei gleiche Ziffern;
- 77) teilbar durch 31;
- 83) Doppeltes einer Quadratzahl;
- 85) LLLL + LOOOO;
- 87) Anzahl der verschiedenen Wertscheine beim Fußballtoto für 12 Spiele;
- 88) Äquatordurchmesser des Jupiters in km (Stand 1971);
- 90) LOLLLO;
- 92) $\sqrt{281\,961}$;
- 104) Siedepunkt des Methanols bei 1013 hPa in $^\circ\text{C}$;
- 106) Siedepunkt des Quecksilbers in $^\circ\text{C}$;
- 108) $\frac{x}{64} = 5$;
- 111) Dichte von Helium bei 1013 hPa und 20°C in g/m^3 ;

- 115) Produkt zweier Primzahlzwillinge;
- 119) XXIV · LXXXVIII;
- 121) Nikolaj Kopernikus geb.;
- 123) wieviel Stellen hat die größte bekannte Primzahl $2^{19937} - 1$?
- 125) $\frac{x^3}{11} = 8$;
- 126) $1,18 : x = 200$;
- 128) die 4. Proportionale zu 175; 763 und 150;
- 129) Abszisse des Scheitelpunktes von 3) senkr.;
- 130) $\ln 722$;
- 132) harmonisches Mittel zweier Zahlen ist 60, die eine ist 50, die andere?
- 133) Mantisse zum $\lg 58$;
- 135) $1\,750^2 - 319^2 + 13$;
- 136) die ersten 3 Glieder einer arithmetischen Folge sind 5; 30; 55. Wie heißt das 50. Glied?
- 137) größter gemeinsamer Teiler von 3060 und 1904;
- 139) $3 \cdot [100(435 - 91,5) - 2\,000 - 10(238 + 673,9)]$;
- 142) kleinstes gemeinsames Vielfaches von 16; 11; 125;
- 144) $0,1(8 + 7 \cdot 5^{-3})$;
- 145) $\frac{1000}{x-1} + \frac{500}{x+1} = \frac{584}{x^2-1}$;
- 148) Wert von $\sin \alpha$, wenn $\cos \alpha = 0,2622$;
- 149) $\frac{829+x}{1001} = x$.

Lösung

Waagerecht:

- 1) 280; 4) $9^\circ = 387\,420\,489$; 8) 133,32;
- 9) $1\,371\,700\,960\,631$; 13) 16,5; 14) 125;
- 15) $999^2 = 998\,001$; 18) 343; 20) $299\,792$;
- 23) $1\,777$; 24) $6\,300\,244$; 27) $1\,571$; 28) $1\,417$;
- 29) $3,785$; 31) $51,57$; 34) $3,464$; 36) $1,792$;
- 37) $1\,623$; 40) 66 ; 41) $0,1$; 43) $11\,998$; 46) 17 ;
- 47) 15 ; 48) 24 ; 49) $0,154\,451$; 50) $8\,260\,593$;
- 51) 35 ; 52) 783 ; 53) $92\,008$; 54) 320 ; 55) $3\,249$;
- 57) $91\,123$; 58) $61\,666$; 60) $1\,811$; 63) 649 ;
- 64) $8\,163$; 66) 65 ; 67) 68 ; 68) $433,5$; 70) 798 ;
- 71) $5\,991$; 73) $6\,095$; 74) $58\,752$; 76) $4\,500$;
- 77) $3\,420$; 78) $51,84$; 79) $1\,643$; 80) $8\,676$;
- 81) $8,042$; 82) $43,32$; 84) $6\,362$; 86) $55\,714$;
- 89) $7\,840$; 91) $1\,852$; 93) 234 ; 94) $5,193$; 95) 83 ;
- 96) 45 ; 97) $5,667$; 98) $0,32$; 99) $2\,828$;
- 100) $0,7791$; 101) $39,333$; 102) $0,915$; 103) 156 ;
- 105) $74\,160$; 106) 360 ; 107) 33 ; 109) $6\,430\,994$;
- 110) $5\,450\,058$; 111) 10 ; 112) 12 ; 113) 27 ;
- 114) $31\,305$; 116) 78 ; 117) 70 ; 118) $2\,025$;
- 120) $45,12$; 122) $8\,627$; 124) $8\,480$; 127) $0,436$;
- 129) $0,305$; 131) $1\,707$; 134) $7\,852\,250$;
- 136) $1\,564$; 138) $2,506\,63$; 140) 496 ;
- 141) $222\,888$; 143) 539 ; 146) 232 ;
- 147) $9\,460\,800\,000\,000$; 150) $29,785$;
- 151) $378\,652\,680$; 152) 529 .

Senkrecht:

- 1) $2\,430$; 2) $8\,230\,840$; 3) $0,039$; 4) $3,9750$;
- 5) $7\,176$; 6) $4\,260$; 7) $91\,619$; 9) $11\,879$;
- 10) $3\,607$; 11) $3,291$; 12) $15\,750$; 15) $911,5$;
- 16) 97 ; 17) $1\,646$; 18) 307 ; 19) 323 ; 20) $2\,487$;
- 21) 97 ; 22) $2,116$; 25) $3,141\,592\,653\,589\,793\,238$;
- 26) $2,718\,281\,828\,459\,045\,835$;
- 28) $1,414\,213\,562\,373\,095\,0$;
- 30) $59\,604\,644\,775\,390\,625$;
- 31) $562\,949\,953\,421\,312$; 32) 164 ;
- 33) $700\,818\,646\,515\,625$; 35) $8,9$;
- 37) $1,732\,050\,807\,568\,88$; 38) 213 ;
- 39) $355\,687\,428\,096\,000$; 42) $11,3$; 44) $112\,358$;
- 45) $9,806\,65$; 46) $19,3$; 55) $365,242\,2$; 56) 249 ;
- 57) $9\,691\,690$; 59) $6\,356,863$; 61) 192 ;
- 62) $1\,800\,225$; 65) 10 ; 69) 30 ; 72) $11,2$; 75) 777 ;
- 77) 341 ; 83) 338 ; 85) 31 ; 87) $531\,441$;
- 88) $143\,650$; 90) 46 ; 92) 531 ; 104) $64,7$;
- 106) 357 ; 108) 320 ; 111) 178 ; 115) 35 ;
- 119) $2\,112$; 121) $1\,473$; 123) $6\,002$; 125) $4,448$;
- 126) $0,005\,9$; 128) 654 ; 129) $0,26$; 130) $6,582\,0$;
- 132) 75 ; 133) $7\,634$; 135) $2\,960\,752$; 136) $1\,230$;
- 137) 68 ; 139) $69\,693$; 142) $22\,000$; 144) $0,828$;
- 145) $0,056$; 148) $0,965$; 149) $0,829$.

Flinke Zahlenzauberei

Spiel mit dem Taschenrechner

Man fordert den Mitspieler auf, sich eine beliebige ganze Zahl von 1 bis 99 zu denken. Die Zahl gibt er in den Rechner ein, ohne daß der *Gedankenleser* sie sehen kann. Auch alle nachfolgenden Rechenoperationen sind von dem Partner verdeckt auszuführen. Der *Gedankenleser* fordert, nacheinander folgende Operationen mit der jeweils in der Anzeige des Rechners stehenden Zahl auszuführen: Multipliziere mit 2; multipliziere mit 3; multipliziere mit 5; multipliziere mit 9; multipliziere mit 27; addiere die gedachte Zahl; multipliziere mit 5,5. Nun wird der Mitspieler aufgefordert, die in der Anzeige des Rechners stehende Zahl zu zeigen. Der *Gedankenleser* nennt nach einem kurzen Blick auf die sehr große Zahl die gedachte Zahl.

Beispiel:

Der Mitspieler denkt sich die 53.

Er rechnet $53 \cdot 2 = 106$;
 $106 \cdot 3 = 318$; $318 \cdot 5 = 1\,590$;
 $1\,590 \cdot 9 = 14\,310$; $14\,310 \cdot 27 = 386\,370$;
 $386\,370 + 53 = 386\,423$;
 $386\,423 \cdot 5,5 = 2\,125\,326,5$.

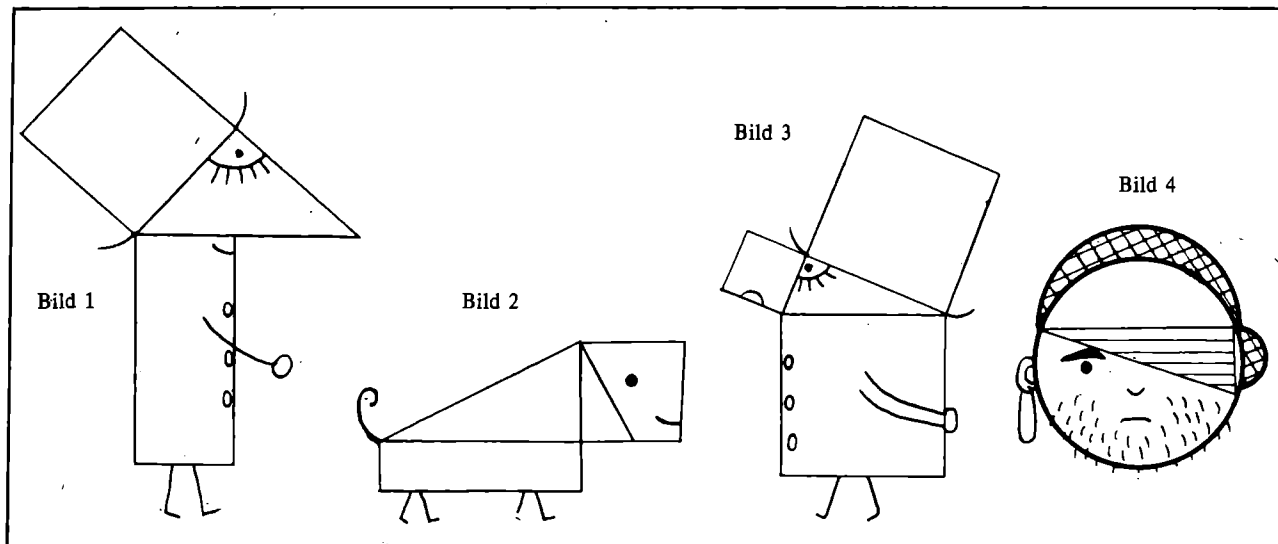
Der Trick ist schnell erklärt: Durch die vorgeschriebenen Rechenoperationen wird die gedachte Zahl mit $40\,100,5$ multipliziert. Dadurch erscheint (bei maximal zweistelligen Zahlen) bei der Endzahl von der 4. und 3. Stelle vor dem Komma immer die gedachte Zahl, die der *Gedankenleser* nur abzulesen braucht. Bei einstelliger Zahl erscheint an der 4. Stelle vor dem Komma eine Null. Falls Ihnen der Trick noch zu durchsichtig ist, können Sie für gedachte Zahlen von 1 bis 99 auch folgende Methode verwenden, die am Beispiel der gedachten Zahl 73 erläutert werden soll:

$73 \cdot 3 = 219$; $219 \cdot 5 = 1\,095$;
 $1\,095 \cdot 7 = 7\,665$; $7\,665 \cdot 11 = 84\,315$;
 $84\,315 \cdot 13 = 1\,096\,095$;
 $1\,096\,095 : 30 = 36\,536,5$.

Nach Multiplikation der gedachten Zahl mit den Faktoren 3, 5, 7, 11 und 13 und Division durch 30 erscheint in der 2. und 1. Stelle vor dem Komma (bei ungeraden Ausgangszahlen ist auch die Stelle nach dem Komma zu berücksichtigen) die halbe gedachte Zahl. Der Trick beruht darauf, daß die gedachte Zahl durch die Rechenoperationen insgesamt mit $500,5$ multipliziert wird.

Aus: ND, Dr. H.

Unterhaltsame Figuren zur Satzgruppe des Pythagoras



Beweise!

▲ 1 ▲ Die Frau hat einen riesengroßen Hut: er ist genauso groß wie ihr Mantel. (Bild 1)

▲ 2 ▲ Der Hund ist wohl sehr klug: er hat im Kopf genausoviel Platz wie im Bauch. (Bild 2)

▲ 3 ▲ Der Mann ist dicker als die Frau: bei ihm sind Hut und Nase zusammen gerade so groß wie der Mantel. (Bild 3)

▲ 4 ▲ Bei diesem Seeräuber ist das Kopftuch (karierte Fläche) ebenso groß wie die Augenklappe (schraffierte Fläche, Bild 4).

Elke Goldberg

Lösungen

▲ 1 ▲ Hutfläche: $A_1 = b^2$;
Mantel: $A_2 = q \cdot c$; $b^2 = q \cdot c$
(Kathetensatz) also: $A_1 = A_2$ w. z. b. w.
Voraussetzung: (Bild 1a)

▲ 3 ▲ Hut: $A_1 = a^2$; Nase: $A_2 = b^2$;
Bauch: $A_3 = c^2$; $c^2 = a^2 + b^2$
(Satz des Pythagoras)
also: $A_1 + A_2 = A_3$ w. z. b. w.
Voraussetzung: (Bild 3a)

▲ 4 ▲ Die Inhalte der Teilflächen seien folgendermaßen bezeichnet:
Kopftuch (karierte Fläche): A_1 ; Augenklappe (schraffierte Fläche): A_2 ;
Halbkreis über $\overline{AB}$: A_3 ; Halbkreis über $\overline{AC}$: A_4 ; Halbkreis über $\overline{BC}$: A_5 .
Behauptung: $A_1 = A_2$

$$\begin{aligned} \text{Beweis } A_1 &= A_2 + A_4 + A_5 - A_3 \\ &\rightarrow A_1 = A_2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot b^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot a^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot c^2 \\ &\rightarrow A_1 = A_2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (b^2 + a^2 - c^2) \\ &\rightarrow A_1 = A_2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0 \quad (\text{Satz des Pythagoras}) \\ &\rightarrow A_1 = A_2 \text{ w. z. b. w.} \end{aligned}$$

Voraussetzung: (Bild 4a)

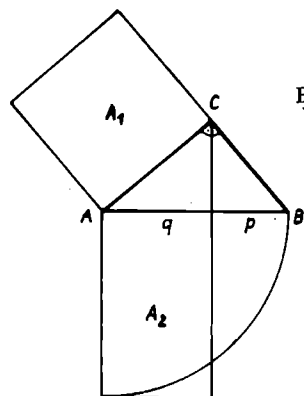


Bild 1a

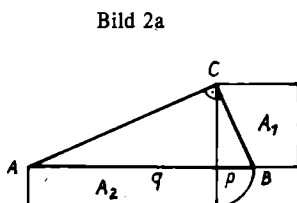


Bild 2a

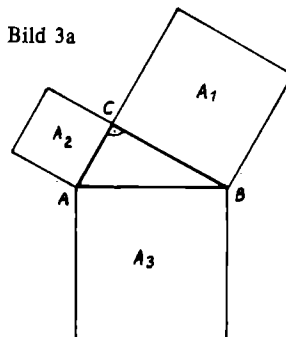


Bild 3a

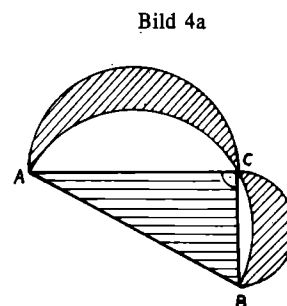


Bild 4a