

**Mathematische
Schülerzeitschrift**

**Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
17. Jahrgang 1983
Preis 0,50 M
Index 31059**



1

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstudienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (Ltg. Dr. C.-P. Helmholz)

Redaktion:

OSTR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1086 Berlin, Krausenstraße 50, PSF Nr. 1213
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des
Presseamtes beim Vorsitzenden des Minister-
rates der Deutschen Demokratischen Repu-
blik.

Postscheckkonto: Berlin 132626. Erschei-
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft
1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M,
im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Son-
derpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buch-
handel und der Deutschen Post entgegen-
genommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutsch-
land und Berlin(West) erfolgt über den Buch-
handel; für das sozialistische Ausland über
das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und
für alle übrigen Länder über: Buchexport
Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR
7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Gerti Krabbes, LVZ Leipzig (S. 3);
Bette, DLZ Berlin (S. 6); ADN, Berlin
(S. 6); Jugend u. Techn., Berlin (S. 7); Eigen-
foto (S. 8); W. Moese, Berlin (S. 14); J. Leh-
mann, Leipzig (S. 18); Foto Pólya, Lajos,
Toth, MTI Budapest

Titelblatt: W. Fahr, Berlin

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig



Gesamtherstellung: INTERDRUCK

Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97

AN (EDV) 128-ISSN 0002-6395

Auslieferungstermin: 20. Februar 1983

Redaktionsschluß: 15. Oktober 1982



Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 1 Symmetriestrukturen – Geometrie und Algebra [9]*
Dr. H. Kohlhasse, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin
- 3 Eine Aufgabe von Prof. Dr. Bruno de Finetti [8]
Universität Rom
- 4 Wissenschaftler und Revolutionär – Karl Marx 1818 bis 1883 [7]
Dipl.-Phil. M. Bernuth, Humboldt-Universität zu Berlin, aus Technik
- 5 Für den Schachfreund: Figurenzüge über 64 Felder [6]
H. Rüdiger, Schichtleiter im Werk für Fernsehelektronik Berlin
- 6 José Luis Massera – Mathematiker und Kämpfer für Demokratie
und Freiheit [5]
Dipl.-Journalist W. Israel, ADN Berlin
- 7 Die Kreiszahl π – Zum 100. Geburtstag des Beweises der Trans-
zendenz von π [9]
Dr. H. Pieper, Zentralinstitut für Astrophysik der Akademie der Wissenschaften
der DDR
- 8 Was ist Rechnungsführung und Statistik? [9]
Prof. Dr. G. Geißler, Sektion Wirtschaftswissenschaften der Karl-Marx-Universität
Leipzig
- 10 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht – speziell für Klasse 4 bis 6
Geometrische Plaudereien [4]
Dr. L. Flade/Dr. H. Knopf, beide Martin-Luther-Universität Halle/Wittenberg
- 11 Gute Grundkenntnisse gesucht – auch ein wenig Überlegung [4]
Gemixtes aus französischen Mathematiklehrbüchern, Teil 1
Mathematikfachlehrer U. Hauck, Päd. Hochschule Wolfgang Ratke, Köthen
- 12 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]
- 15 Mathematische Schülergesellschaft (MSG) an der Universität
Greifswald gegründet [7]
Studienrat H.-J. Kerber, Rat des Bezirks Neubrandenburg, Abt. Volksbildung
Mathematikolympiaden der Horte des Kreises Bad Langensalza [4]
Oberlehrer Rosemarie Herzog, Pionierhaus W. Eggerath, Bad Langensalza
- 16 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
- 18 Die magische Pyramide [5]
Dr. H.-D. Gronau, Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
- 20 Lösungen [5]
- 24 Historische Aufgabe: Das Lebensalter Diophants [9]
Dr. H. Pieper, Zentralinstitut für Astrophysik der AdW der DDR zu Berlin

III. U.-Seite: *alpha*-Wettbewerb 1981/82 – Abzeichen in Gold

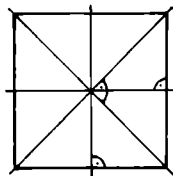
IV. U.-Seite: Mit Zirkel und Zeichendreieck

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Symmetriestrukturen – Geometrie und Algebra

Wie ihr wißt, hat das Quadrat 4 Symmetrieachsen, nämlich die beiden Diagonalen und die Verbindungslinien der Seitenmittelpunkte, die wir Mittellinien nennen wollen. Mittellinien, die Symmetrieachsen sind, stimmen natürlich mit den Mittelsenkrechten überein (Bild 1). Diagonalen und Mittellinien schneiden sich bekanntlich in einem Punkt.

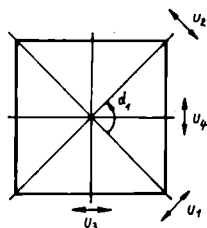
Bild 1



Wenn man das Quadrat an seinen Symmetrieachsen spiegelt oder, was dasselbe ist, um diese Achsen umklappt, dann kommt es mit sich selbst zur Deckung. Wir sprechen von einer Deckabbildung. Der Begriff „Abbildung“ weist darauf hin, daß Spiegelung und Umklappung im mathematischen und nicht im physikalischen Sinne zu verstehen sind, d. h. als Zuordnung von Punkten der Ebene. In Klasse 5 und 6 wurde gezeigt, daß es sich bei der Spiegelung sogar um eine eindeutige Abbildung handelt. Seht euch zur Wiederholung Definition D3, Lehrbuch Klasse 6, S. 96 an!

Wir wollen die vier möglichen Deckabbildungen durch Spiegelung künftig stets Umklappung nennen und entsprechend Bild 2 mit u_1 , u_2 , u_3 , u_4 bezeichnen.

Bild 2



Wie man aus Bild 1 und 2 sofort erkennt, kann man das Quadrat nicht nur durch Umklappungen, sondern auch mit Hilfe von Drehungen um den Schnittpunkt der Symmetrieachsen mit sich zur Deckung bringen. Diese Tatsache gibt Anlaß, von Drehsymmetrie (auch Radialsymmetrie genannt) zu sprechen.

Der kleinste Drehwinkel ist 1 Rechter (1 R). Aber auch Drehungen um 2 R, 3 R und 4 R

bewirken Deckabbildungen. Bei einer Drehung um 4 R ist jeder Bildpunkt mit seinem Original identisch, so als hätten wir gar nicht, d. h. um 0 R, gedreht. Es liegt die sogenannte identische Abbildung vor. Wir bezeichnen die vier Drehungen um 1 R, 2 R, 3 R und 4 R bzw. 0 R mit d_1 , d_2 , d_3 , d_0 .

Auch Drehungen sind eineindeutige Abbildungen. Bekanntlich faßt man Umklappungen, Drehungen und Verschiebungen (die aber hier nicht interessieren – Grund?) zu den Bewegungen zusammen (Lehrbuch Klasse 6, Definition D4). Bewegungen (und nur diese) sind Kongruenzabbildungen.

Unseren weiteren Betrachtungen legen wir die Menge $\{d_0, d_1, d_2, d_3, u_1, u_2, u_3, u_4\}$ aller 8 Deckabbildungen des Quadrats zugrunde, die wir mit D_4 bezeichnen.

Zunächst überlegen wir uns, was wir erhalten, wenn wir zwei Deckabbildungen nacheinander ausführen, sie verknüpfen, wie man auch sagt. Als Verknüpfungszeichen verwenden wir $\circ$ (lies etwa „Kringel“).

Um einen vollständigen Überblick zu bekommen, verknüpfen wir alle Elemente der Menge D_4 miteinander und fertigen eine Tabelle an. Bei der Aufstellung der Tabelle verfahren wir wie folgt:

Wir zeichnen ein Quadrat $ABCD$ auf ein Zeichenblatt und schneiden ein dazu kongruentes Quadrat aus starkem Papier oder Pappe aus. Sodann kennzeichnen wir die Ecken der Schablone beidseitig durch Buchstaben entsprechend dem Quadrat auf dem Blatt. Die Verknüpfung der Abbildungen realisieren wir durch sinngemäßes Arbeiten mit unseren Anschauungsmitteln.

Hinweis: Macht euch jede Deckabbildung anschaulich klar! Etwa so (vgl. Bild 2):

d_1 ist eine Drehung um 1 R, u_1 die Umklappung um die von links oben nach rechts unten verlaufende Diagonale, u_3 die Umklap-

Bild 3

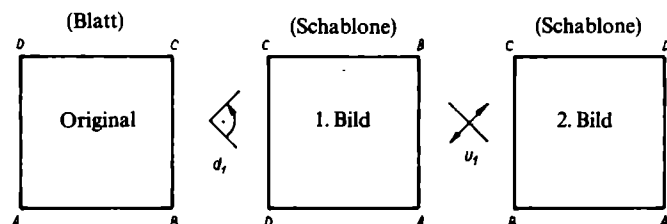
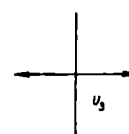


Bild 4



pung um die senkrechte Mittellinie usw. Wir betrachten $d_1 \circ u_1$. Siehe Bild 3!

Das durch Nacheinanderausführung von d_1 und u_1 entstandene 2. Bild kann man aus dem Original auch unmittelbar durch die Umklappung u_3 um die Mittellinie von AB herstellen; somit ist $d_1 \circ u_1 = u_3$. (Bild 4)

Auf dieselbe Weise ermitteln wir auch alle anderen Ergebnisse. Beachtet dabei, daß jedes Element auch mit sich selbst verknüpft wird! Auch muß man auf die Reihenfolge der „Faktoren“ achten; z. B. ist $u_1 \circ d_1 = u_4$, aber $d_1 \circ u_1 = u_3$.

Wir erhalten die folgende Verknüpfungstafel:

$\circ$	d_0	d_1	d_2	d_3	u_1	u_2	u_3	u_4
d_0	d_0	d_1	d_2	d_3	u_1	u_2	u_3	u_4
d_1	d_1	d_2	d_3	d_0	u_3	u_4	u_2	u_1
d_2	d_2	d_3	d_0	d_1	u_2	u_1	u_4	u_3
d_3	d_3	d_0	d_1	d_2	u_4	u_3	u_1	u_2
u_1	u_1	u_4	u_2	u_3	d_0	d_2	d_3	d_1
u_2	u_2	u_3	u_1	u_4	d_2	d_0	d_1	d_3
u_3	u_3	u_1	u_4	u_2	d_1	d_3	d_0	d_2
u_4	u_4	u_2	u_3	u_1	d_3	d_1	d_2	d_0

Tabelle 1

Bei der Betrachtung der Tafel stellen wir als erstes fest, daß beim Verknüpfen keine anderen Abbildungen als die der Menge D_4 angehörenden entstehen. Wir sagen, daß die Verknüpfung $\circ$ nicht aus der Menge D_4 herausführt oder daß diese Menge abgeschlossen bezüglich $\circ$ ist. Es gilt noch genauer: Aus je zwei Deckabbildungen entsteht bei der Verknüpfung eine eindeutig bestimmte dritte Abbildung derselben Menge. Eine solche Verknüpfung heißt eine Operation auf der gegebenen Menge. Euch schon bekannte andere Operationen sind z. B. die Addition und die Multiplikation von Zahlen.

Eine Menge mit einer Operation heißt eine Struktur. Strukturen sind Untersuchungsgegenstand der Algebra. In unserem Fall bildet D_4 mit $\circ$ eine Struktur. Wir nennen sie die Symmetriestruktur des Quadrats und bezeichnen sie mit S_4 . Auch jedes andere Vieleck besitzt eine Symmetriestruktur. Das Rechnen in diesen Strukturen, d. h. das Umgehen mit der Operation $\circ$, beherrschen wir mit Hilfe der Verknüpfungstafeln. Verknüpfungstafeln von Strukturen heißen Strukturtafeln oder Cayleysche Tafeln nach dem englischen Mathematiker Arthur Cayley (1821 bis 1895).

Aufgabe 1: Man gebe die Symmetriestruktur des gleichseitigen Dreiecks an und stelle ihre Strukturtafel auf.

Die Symmetriestrukturen von geometrischen Figuren spiegeln wesentliche Eigenschaften dieser Figuren wider und sind durch die Figur eindeutig bestimmt. Das Umgekehrte gilt jedoch nicht. Es gibt sogar zu jeder Symmetriestruktur unendlich viele nicht ähnliche Figuren (d. h. Figuren unterschiedlicher Form). Das kann man sich an Hand des Quadrats leicht überlegen. Denkt euch von den Ecken des Quadrats gleichschenklige Dreiecke abgeschnitten, die alle zueinander kongruent sind, dann entstehen Restfiguren, deren Form von der Größe dieser vier Dreiecke abhängt. Wann haben sie dieselbe Symmetriestruktur wie das Quadrat?

Wir wollen uns nun Tabelle 1 einmal genauer ansehen. Es fällt sicher ins Auge, daß die Verknüpfung zweier Drehungen wie auch zweier Umklappungen stets eine Drehung, aber die Verknüpfung einer Drehung mit einer Umklappung oder umgekehrt stets eine Umklappung ergibt. Man kann sich leicht überlegen, warum das so ist. Bei einer Drehung haben nämlich Original und Bild denselben Umlaufsinn, bei einer Umklappung hingegen verschiedenen Umlaufsinn. Wir sprechen von gleichsinniger und ungleichsinniger Kongruenz. Führt man z. B. zwei Umklappungen nacheinander aus, dann ist das erste Bild ungleichsinnig kongruent zum ersten, damit aber gleichsinnig kongruent zum Original. Entsprechend überlegt man sich die anderen Verknüpfungsfälle.

Wir sehen uns die Menge $\{d_0, d_1, d_2, d_3\}$ aller Drehungen an und verknüpfen die Elemente miteinander. Nach dem eben Festgestellten ergibt sich stets wieder eine Drehung. Wir können nun mit Hilfe von Tabelle 1 sofort die Verknüpfungstafel angeben (Tabelle 2) und erkennen, daß Abgeschlossenheit bezüglich $\circ$ vorliegt, also eine Struktur gebildet wird.

$\circ$	d_0	d_1	d_2	d_3
d_0	d_0	d_1	d_2	d_3
d_1	d_1	d_2	d_3	d_0
d_2	d_2	d_3	d_0	d_1
d_3	d_3	d_0	d_1	d_2

Tabelle 2

Eine Struktur, die in einer anderen enthalten ist, nennt man eine Unterstruktur. Somit ist die Drehstruktur des Quadrats eine Unterstruktur der gesamten Symmetriestruktur $\mathcal{S}_4$, im folgenden kurz Quadratstruktur genannt. Wir wollen nun weitere Unterstrukturen aufsuchen. Dazu prüfen wir an Hand von Tabelle 1 nach, aus welchen Teilmengen die Verknüpfung $\circ$ nicht herausführt. Das ist z. B. der Fall für $\{d_0, d_2, u_1, u_2\}$ und $\{d_0, d_2, u_3, u_4\}$. Wir können diese Feststellung ohne Schwierigkeit nachprüfen, wenn

wir in Tabelle 1 alle Spalten und Zeilen streichen, die jeweils zu den übrigen Elementen gehören.

Es ergibt sich dann

bzw.				
$\circ$	d_0	d_2	u_1	u_2
d_0	d_0	d_2	u_1	u_2
d_2	d_2	d_0	u_2	u_1
u_1	u_1	u_2	d_0	d_2
u_2	u_2	u_1	d_2	d_0

Tabelle 3

$\circ$	d_0	d_2	u_3	u_4
d_0	d_0	d_2	u_3	u_4
d_2	d_2	d_0	u_4	u_3
u_3	u_3	u_4	d_0	d_2
u_4	u_4	u_3	d_2	d_0

Tabelle 4

Wir suchen nun nach Vierecken, deren Symmetriestrukturen unsere beiden neu gefundenen Unterstrukturen sind. Dazu denken wir an die geometrische Bedeutung der Elemente. Die identische Abbildung d_0 hilft uns hier nicht weiter, wohl aber d_2 , die Drehung um 2 R. Die gesuchten Vierecke kommen nach dieser Drehung (aber nicht schon bei 1 R!) mit sich zur Deckung.

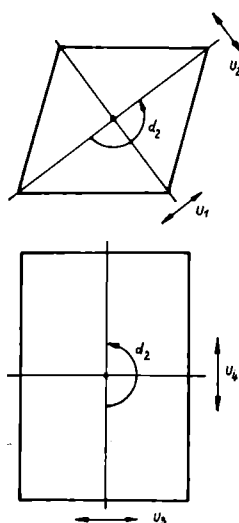
Daher müssen sie von jeder Geraden durch den Drehpunkt in zwei gleichsinnig kongruente Teilfiguren zerlegt werden, insbesondere durch die Diagonalen und Mittellinien. Im Fall der Tabelle 3 ist die gesuchte Figur um die Diagonalen umklappbar, bei Tabelle 4 um die Mittellinien.

Ersteres ist erfüllt für den Rhombus, das zweite für das Rechteck (siehe Bild 3).

(Überzeugt euch davon, daß diese beiden Figuren keine weiteren Deckabbildungen besitzen, sofern sie nicht gleichzeitig auch Quadrate sind!)

Wir haben also mit Tabelle 3 bzw. Tabelle 4 die Rhombus- bzw. die Rechtecksstruktur erfaßt.

Bild 5



Die Tatsache, daß sowohl die Rhombus- als auch die Rechtecksstruktur Unterstrukturen der Quadratstruktur sind, ist übrigens die algebraische Widerspiegelung der Eigenschaft des Quadrats, Rhombus und Rechteck zugleich zu sein.

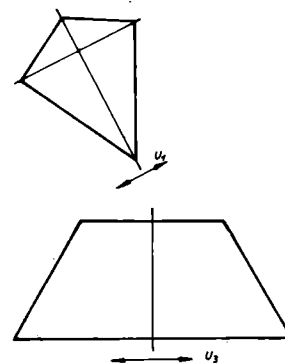
Bemerkung: Beachtet, daß wir ausdrücklich Vierecke suchen wollten (mit Symmetriestrukturen, die durch Tabelle 3 und Tabelle 4 angegeben sind)! Lassen wir offen, um welche

Art von Figur es sich handeln soll, dann haben wir wieder unendlich viele Möglichkeiten.

Aufgabe 2: Man finde andere Figuren mit derselben Symmetriestruktur wie Rhombus und Rechteck. (Hinweis: Berücksichtigt dazu die Bemerkungen nach Aufgabe 1, und seht euch zur Anregung Bild 8 an!)

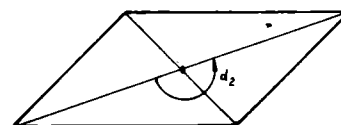
Wir fahren nun fort mit der Suche nach Unterstrukturen von $\mathcal{S}_4$ und erkennen unschwer, daß jede Umklappung u_i ($i=1, 2, 3, 4$) zusammen mit d_0 eine Unterstruktur bildet. Dazu brauchen wir nur zu bedenken, daß stets $u_i \circ u_i = d_0$ gilt. Ist u_i Umklappung um eine Diagonale (also u_1 oder u_2), dann können wir diese Unterstruktur einem Drachenviereck, sonst (also für u_3 oder u_4) einem gleichschenkligen Trapez zuordnen (Bild 6).

Bild 6



Die Drachenstruktur ist Unterstruktur der Rhombusstruktur (siehe Tabelle 3), d. h., jeder Rhombus ist Drachenviereck. Entsprechendes gilt für Rechteck und gleichschenkliges Trapez. Es ist aber z. B. bei dieser Systematisierung der Rhombus kein Trapez. Vergleicht hierzu die Übersicht „Arten der Vierecke“ im Lehrbuch Klasse 6! Welches Ordnungsprinzip wird dort befolgt?

Bild 7



Auch die beiden Drehungen d_0 und d_2 bilden eine Unterstruktur von $\mathcal{S}_4$. Man sieht das am besten aus einer der Tabellen 3 oder 4. Das zu dieser Symmetriestruktur gehörige Viereck ist das Parallelogramm (wenn es nicht zugleich Rechteck oder Rhombus ist – siehe Bild 7), da es aus gleichsinnig kongruenten Teildreiecken besteht, aber keine Symmetrieachsen hat (Begründung?).

Wir wollen uns nun fragen, ob jede beliebige Unterstruktur von $\mathcal{S}_4$ Symmetriestruktur einer Figur ist. Dazu verschaffen wir uns zunächst einen vollständigen Überblick über alle möglichen Unterstrukturen. Entsprechend unseren Tabellen 2, 3 und 4 stellen wir fest, daß es (wenigstens) 3 Unterstrukturen mit 4 Elementen gibt, nämlich die Drehstruktur, die Rhombus- und die Rechtecksstruktur. Die erste enthält die vier möglichen Drehungen,

die zweite ebenso wie die dritte 2 Drehungen (d_0, d_2) und 2 Umklappungen, wobei die Umklappungen beide entweder um die Diagonalen oder die Mittellinien erfolgen. Eine Umklappung um eine Diagonale u_1 oder u_2 in Verbindung mit einer Umklappung um eine Mittellinie (u_3 oder u_4) kann hierbei nicht auftreten, da (siehe Tabelle 1) etwa $u_3 \circ u_1 = d_1$ schon herausführt.

Kann es noch andere Unterstrukturen mit 4 Elementen geben? Diese müßten dann 1 Drehung (das ist dann notwendigerweise die identische Abbildung d_0) und 3 Umklappungen oder 3 Drehungen und 1 Umklappung enthalten. Wir wählen als Beispiele die Mengen $M_1 = \{d_0, u_1, u_2, u_3\}$ und $M_2 = \{d_0, d_1, d_2, u_1\}$.

Im ersten Fall erkennt man mit Hilfe von Tabelle 1, daß wegen $u_1 \circ u_2 = d_2$ ein weiteres Element entsteht, um das M_1 mindestens erweitert werden müßte, damit Abgeschlossenheit bzgl. $\circ$ vorliegt, wie das bei einer Unterstruktur gefordert wird. Im zweiten Fall wäre etwa $d_1 \circ u_1 = u_3$, und wieder führt die Anwendung der Operation aus der gegebenen Menge M_2 heraus. Durch gleichartige Überlegungen lassen sich auch alle anderen Vierermengen ausscheiden. Damit ist klar: Es gibt nur die drei schon angegebenen Unterstrukturen mit 4 Elementen, nämlich die Drehstruktur, die Rhombus- und die Rechtecksstruktur.

Man kann die obige Überlegung aber noch weiterführen und zeigen, daß keine Unterstrukturen mit mehr als 4 Elementen auftreten. Der Tabelle 1 entnimmt man:

Das Vorkommen von 4 Umklappungen zieht das Auftreten aller 4 Drehungen nach sich. Also könnten höchstens 3 Umklappungen vorkommen. Drei Umklappungen und (mindestens) 2 Drehungen erzwingen aber stets die vierte Umklappung und damit auch alle 4 Drehungen.

Bleibt der Fall von 2 Umklappungen und (mindestens) 3 Drehungen. Mit 3 Drehungen kommt aber stets auch die vierte Drehung vor, und 4 Drehungen und 1 Umklappung liefern bereits alle Elemente der $\mathcal{G}_4$.

Also kann eine von $\mathcal{G}_4$ verschiedene Unterstruktur von $\mathcal{G}_4$ höchstens 4 Elemente enthalten.

Die Unterstrukturen mit 2 Elementen haben wir bereits alle angegeben. Es gibt nämlich außer diesen 5 keine weiteren. Denn sie können mit d_0 nur eine Drehung oder eine Umklappung aufweisen. Die Drehung kann nur d_2 sein, weil mit d_1 auch $d_1 \circ d_1 = d_2$ und $d_2 \circ d_1 = d_3$, also die ganze Drehstruktur vorhanden wäre.

Dasselbe gilt auch für d_3 . Hingegen kommt jede der 4 Umklappungen u_i wegen $u_1 \circ u_i = d_0$ wirklich in Frage.

Es verbleibt noch zu untersuchen, ob Unterstrukturen mit 3 Elementen existieren. Dies können nicht nur Drehungen sein, denn mit

drei von ihnen kommt auch die vierte vor. Also müssen Umklappungen mit vorkommen. Für jede Umklappung u_i gilt aber $u_i \circ u_i = d_0$, d. h., es könnten höchstens 2 Umklappungen sein. Aus 2 Umklappungen u_i, u_j erhält man aber (mindestens) zwei Drehungen $u_i \circ u_i = d_0$ und $u_i \circ u_j \neq d_0$, also auch mehr als 3 Elemente. Im letzten verbleibenden Fall einer Umklappung u_i (und zweier Drehungen d_0, d_j) ist dann aber $u_i \circ d_j$ eine weitere Umklappung ($\neq u_i$).

Unterstrukturen mit 3 Elementen kann es also nicht geben. Somit haben wir durch die Angabe der 5 Unterstrukturen mit 2 und der 3 Unterstrukturen mit 4 Elementen in der Tat alle Unterstrukturen vollständig aufgezählt.

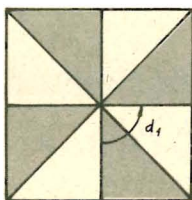
Mit einer Ausnahme, nämlich der Drehstruktur, haben wir auch schon Figuren, und zwar Vierecke, angegeben, deren Symmetriestrukturen diese Unterstrukturen sind.

Gibt es auch ein Viereck, dessen Symmetriestruktur nur aus den 4 Drehungen besteht? Die Antwort lautet: nein.

Zum Beweis dieser Feststellung erinnern wir uns, daß die Drehung d_1 wegen $d_1 \circ d_1 = d_2$, $d_2 \circ d_1 = d_3$ und $d_3 \circ d_1 = d_0$ die ganze Drehstruktur erzeugt. Das hat zur Folge, daß das gesuchte Viereck bei fortlaufender Drehung um jeweils $\frac{1}{4}$ R stets mit sich selbst zur Deckung kommen muß. Dann kann es sich aber offenbar nur um das Quadrat handeln. Dessen Symmetriestruktur $\mathcal{G}_4$ hat aber 8 Elemente, 4 Drehungen und 4 Umklappungen.

Eine Figur, deren Symmetriestruktur gerade die Drehstruktur des Quadrats ist, kann also kein Viereck sein. Eine mögliche Figur ist z. B. die „Windmühle“ Bild 8.

Bild 8

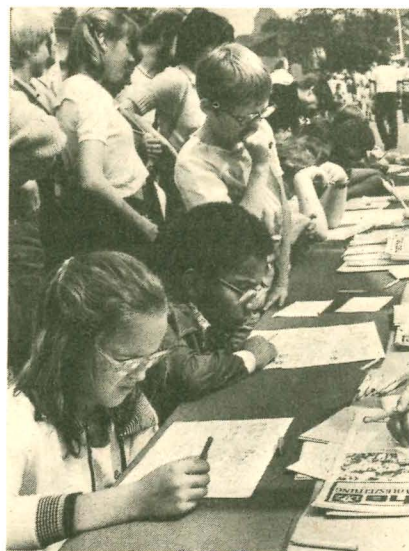
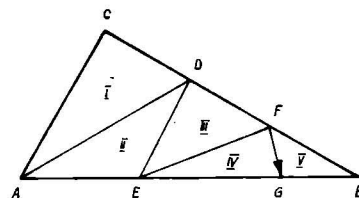


H. Kohlhasse

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Bruno de Finetti

Universität Rom

▲ 2293 ▲ Ein gegebenes Dreieck ABC ist mittels einer Zickzacklinie in fünf Teile mit gleichem Flächeninhalt zu zerlegen.



Mathematik-Olympiade der Horte in Bad Langensalza, siehe S. 15



Wissenschaftler und Revolutionär

Karl Marx • 1818 bis 1883

Über den Sinn des technischen Fortschritts

„In der Mitte des Arbeitszimmers stand ein einfacher kleiner Schreibtisch mit einem hölzernen Lehnstuhl, dem Feuer gegenüber befand sich ein altes Ledersofa... An den Wänden standen Schränke oder Regale, gefüllt mit Büchern und Manuskripten... Auf dem Kamin standen Fotos seiner Frau, der Töchter und der besten Freunde, Friedrich Engels und Wilhelm Wolff.“

Diese Beschreibung finden wir in einer Biographie über Karl Marx, den großen Wissenschaftler und Revolutionär. Am 14. März 1883 jährt sich sein Todestag. Engels sagte einmal über seinen Freund Marx: Er ist „der Mann, der dem Sozialismus und damit der ganzen Arbeiterbewegung unserer Tage zuerst eine wissenschaftliche Grundlage gegeben hat“. Sein ganzes Leben widmete Karl Marx dieser wissenschaftlichen Begründung, der Lehre von der Entwicklung der Gesellschaft, die er uns vor allem in seinem größten Werk „Das Kapital“ gab.

Über 1500 Bücher studierte er, lernte mehr als ein Dutzend Sprachen beherrschen, beschäftigte sich mit der Geschichte, Ökonomie, Physik, Chemie und Mathematik. Dennoch wäre es falsch zu sagen, Marx hätte nur in seiner Studierstube gesessen.

Was ihn auszeichnete? Er war Wissenschaftler und Revolutionär in einem! Stets eng verbunden mit dem Kampf der Arbeiterklasse, sah er seine Aufgabe darin, sagt Engels über ihn: „Mitzuwirken... am Sturz der kapitalistischen Gesellschaft, mitzuwirken an der Befreiung des modernen Proletariats, dem er zuerst das Bewußtsein (Wissen) der Bedingungen seiner Emanzipation (Befreiung) gegeben hatte. Das war sein wirklicher Lebenslauf. Der Kampf war sein Element.“

Dieser Kampf wurde gekrönt durch die Aufdeckung der Gesetzmäßigkeiten der gesellschaftlichen Entwicklung. So fand Karl Marx heraus, daß das grundlegende Entwicklungsgesetz das der Übereinstimmung von Produktivkräften und Produktionsverhältnissen ist. Wobei wir unter Produktivkräften all jene Kräfte verstehen, mit denen der Mensch die Natur nutzbar macht. Angefangen von den ersten primitiven Werkzeugen der Jäger und

Sammler in der Urgesellschaft können wir ersehen, daß sich die Produktivkräfte rasch entwickelten. Neue Arbeitsinstrumente wurden entwickelt, die es ermöglichten, neue Formen der Bodenbearbeitung zu finden. Heute dagegen arbeiten wir auf unseren Feldern mit modernster Landtechnik.

Der Mensch lebt nicht als Einzelwesen, er ist ein Teil der Gesellschaft. So geht er bestimmte Verhältnisse zu anderen Menschen ein. Marx erkannte, daß die grundlegendsten Verhältnisse die Produktionsverhältnisse sind. Sie widerspiegeln, in wessen Händen sich die Produktionsmittel, z. B. die Maschinen, befinden, wer sie besitzt, wie sie eingesetzt und wie die fertigen Produkte verteilt werden. Daraus folgt, daß die Produktivkräfte und die Produktionsverhältnisse nicht losgelöst voneinander bestehen, sondern in enger Wechselwirkung untereinander stehen. Welche Rolle nun spielt in diesem Zusammenhang die Technik? Und, was hatte Marx mit der Technik im Sinn? Im Europa des 19. Jahrhunderts war das Tempo der gesellschaftlichen Entwicklung in den einzelnen

Staaten sehr unterschiedlich. Den Höchststand in der kapitalistischen Entwicklung hatte England erreicht. Dort arbeitete man bereits an der von dem englischen Weber James Hargreaves erfundenen und nach seiner Tochter Jenny benannten Spinnmaschine sowie an mechanischen Webstühlen. In England wurde 1807 erstmals durch Fulton die Dampfkraft in der Flußschifffahrt nutzbar gemacht und somit ein neues Tor für die Entwicklung des Verkehrswesens aufgestoßen. All diese Entdeckungen und Erfindungen führten zur Entwicklung neuer Produktivkräfte, die nun den endgültigen Übergang von der Manufaktur, dem Handbetrieb zur industriellen Großproduktion möglich und notwendig machten. An die Stelle von einzelnen Werkzeugen traten Maschinen. An die Stelle von Manufakturarbeitern trat das Industrieproletariat. Ihm gegenüber – als Eigentümer an den Produktionsmitteln – stand die Bourgeoisie.

Worin lag die eigentliche Ursache und der Zweck für den Einsatz der modernen Maschinen? In der Erleichterung der schweren körperlichen Arbeit für die Werktätigen etwa? Karl Marx beantwortet uns diese Frage im „Kapital“: „Gleich jeder anderen Entwicklung der Produktivkraft der Arbeit soll sie (die Technik) die Waren bewohlfleieren (verbessern) und den Teil des Arbeitstages, den der Arbeiter für sich selbst braucht, verkürzen, um den anderen Teil seines Arbeitstages, den er dem Kapitalisten umsonst gibt, zu verlängern. Sie (die Technik) ist Mittel zur Produktion von Mehrwert.“

Darin allein also besteht der Zweck der vom Kapitalisten eingesetzten Technik! Eine moderne Maschine ist also unter kapitalistischen Bedingungen nicht nur eine Maschine, sondern ist zugleich Kapital, das heißt, ein Instrument zur Ausbeutung und Unterdrückung. Die Einführung der neuen Technik in die Produktion hatte demzufolge unmittelbare Wirkung auf die Lage der Arbeiter. Wurden früher vorwiegend männliche Arbeitskräfte eingesetzt, ermöglichte der Einsatz der Technik dem Ausbeuter nun, auch körperlich schwächere Menschen in die Produktion einzubeziehen. „Weiber- und Kinderarbeit war daher das erste Wort der kapitalistischen Anwendung der Maschinerie“ – stellte Marx fest. So wurden nun auch Frauen und Kinder zu billigen Arbeitskräften für den Kapitalisten. Eine Folge war die hohe Sterblichkeit unter den Arbeiterkindern. Wer von euch das Buch „Mohr und die Raben von London“ kennt, der weiß, wie hart Frauen, Kinder und Jugendliche arbeiten mußten, welch kärgliches Leben sie führten. Vielleicht wird auch mancher von euch sagen: Das ist über 100 Jahre her, seitdem hat sich so viel verändert. Sicher! Aber, wie sieht es heute, wie sieht es in der gegenwärtigen Entwicklung aus? Welchen Nutzen bringt der Einsatz von Wissenschaft und Technik heute,



und vor allem, welcher Zusammenhang besteht zwischen der gesellschaftlichen und der naturwissenschaftlich-technischen Entwicklung? Die Entwicklung der Technik und der Wissenschaften ist zu einem notwendigen Erfordernis der gesellschaftlichen Entwicklung geworden. Wissenschaft wird zur unmittelbaren Produktivkraft. Als in den fünfziger Jahren in den industriell gut entwickelten Ländern die wissenschaftlich-technische Revolution einsetzte, waren bürgerliche Ideologen schnell bei der Hand mit neuen Theorien. So versuchten sie der Arbeiterklasse einzureden, daß nun mit dem Einsatz der modernen Technik in den kapitalistischen Ländern die bestehenden Widersprüche gelöst werden können.

Doch wie steht es mit diesem Versprechen? Zweifellos haben sich auch bestimmte Lebensbedingungen für die Arbeiter verbessert. Aber, die Einführung modernster Technik, die Rationalisierung und die Automatisierung „spart“ Arbeitskräfte. Der Arbeiter im Kapitalismus steht immer vor der Gefahr, seinen Arbeitsplatz deshalb zu verlieren. Heute sind es Millionen, die in den kapitalistischen Staaten arbeitslos sind. Die Folgen dieser Tatsache treffen vor allem die Jugend. In der BRD sind Tausende Jugendliche ohne Lehrstelle und ohne jegliche Aussicht und Hoffnung darauf. Hier wird es deutlich: Der Einsatz der Wissenschaften und der Technik ist nicht zu trennen von der Politik! Wir sollten diesen Zusammenhang, die Frage nach dem „wem nutzt es?“ nie und nimmer vergessen oder als bekannt abtun.

Denn der wichtigste Bereich der Ausnutzung von Wissenschaft und Technik im Imperialismus ist heute die Rüstung. Uns ist das Resultat dieses Strebens bekannt: zwei Weltkriege in diesem Jahrhundert, Abwurf der ersten Atombombe über Hiroshima ... und heute, Entwicklung und Einsatzplanung für die Neutronenbombe. Wo wird der Mißbrauch von naturwissenschaftlich-technischen Erkenntnissen deutlicher als an diesen unmenschlichen Tatsachen?!



Wie sagt doch Karl Marx, vor 100 Jahren schon: „Der Zweck des Einsatzes moderner Technik im Kapitalismus besteht einzig und allein darin, Profit zu erzielen.“

Wir aber, wir leben im Sozialismus! Worin besteht der Gegensatz zum Kapitalismus? Wo liegt bei uns der Sinn des technischen Fortschritts?

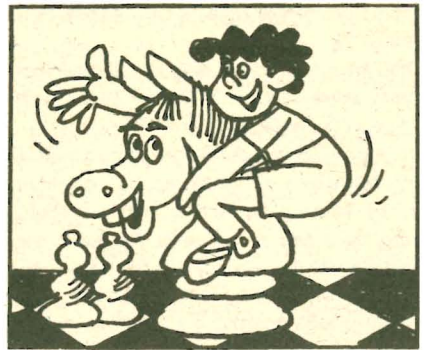
Das Ziel unserer Gesellschaft besteht darin, das Leben aller Menschen zu verbessern. Die Grundlagen dafür werden in unserer Volkswirtschaft gelegt. So sollen die Erzeugnisse in möglichst kurzer Zeit, guter Qualität und mit niedrigsten Kosten produziert werden. Ihr wißt es, unsere Republik ist ein rohstoffarmes Land. Deshalb müssen wir importieren und mit vorhandenem Material sparsam umgehen. Um unsere Ziele zu erreichen, ist es notwendig, neue wissenschaftliche Erkenntnisse zu gewinnen, sie in moderne Technologien umzusetzen und sie auf dem schnellsten Wege in die Produktion zu überführen. Wir können hier auf hervorragende Ergebnisse blicken.

Doch die Entwicklung und Überführung neuester Erkenntnisse von Wissenschaft und Technik steht vor allen Bereichen unserer Volkswirtschaft. Darum haben wir auch einen Staatsplan Wissenschaft und Technik, in dem die Schwerpunkte der weiteren ökonomischen Entwicklung und die Aufgaben der Wissenschaften und der Technik für einen längeren Zeitraum festgelegt sind. So wird im Sozialismus die Technik und so werden die Wissenschaften zu einem entscheidenden Mittel für die Erhöhung der Effektivität unserer Volkswirtschaft und zugleich für die Verbesserung der Arbeits- und Lebensbedingungen der Menschen. Allein diesem Zweck dient unser Streben!

Ihr dürft euch ruhig fragen, wenn ihr diesen Beitrag gelesen habt, was ihr schon heute tun könnt, um bei der Lösung dieser großen Aufgaben mitzuhelfen!

Natürlich ist das Lernen eure erste Pflicht. Ein gutes fachliches Wissen muß man haben, wenn man seinen Mann im Arbeitsleben stehen will. Reicht das allein schon aus? Es gehört noch mehr dazu: zum Beispiel kameradschaftliches, stets verantwortungsvolles Verhalten, gegenseitige Achtung und Hilfe anderen gegenüber – heute bei euch in der Schule, morgen dann im Betrieb oder in einem Forschungsinstitut. Denn ihr werdet ja die zukünftigen Arbeiter, Wissenschaftler und Techniker sein! Überprüft euch einmal; das eigene bewußte Verhalten spielt eine wesentliche Rolle bei der Lösung wissenschaftlich-technischer Probleme.

M. Bernuth



Figurenzüge über 64 Felder

Das Ziehen mit einer Schachfigur auf dem leeren Schachbrett kann natürlich nicht eine spannende Schachpartie oder ein kniffliges Schachproblem ersetzen, aber dennoch schult das Bewegen einer Figur kombinatorisches Denken und schöpferische Phantasie. Es erschließt viele Spielmöglichkeiten auf dem Brett. Brauchen König und Springer jeweils 64 Züge, um über alle Felder des Schachbrettes in Folge zu ziehen, so ist die Anzahl der Züge bei den langschriftigen Figuren Turm und Dame in dieser Hinsicht wesentlich geringer. Der Turm zieht in 16 Zügen über

Diagramm 1

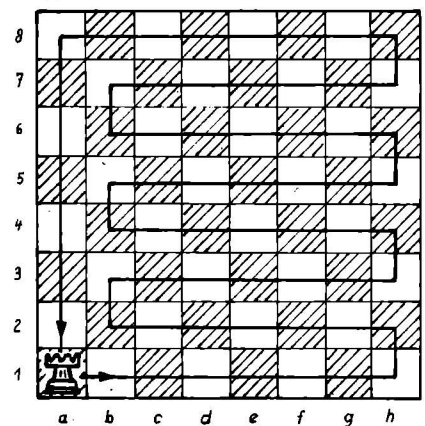
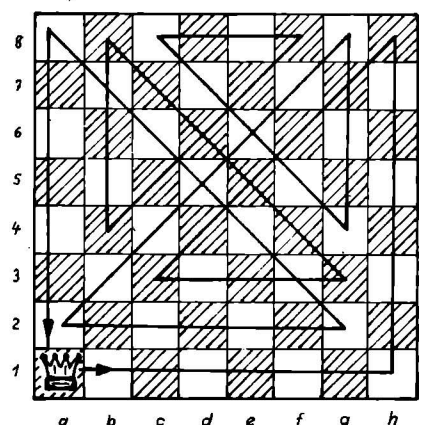


Diagramm 2

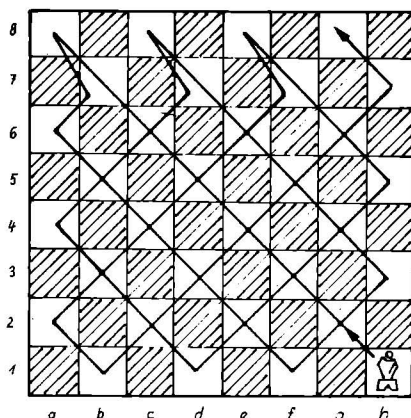


alle 64 Felder des Schachbrettes (siehe Diagramm 1).

Die Dame, die bekanntlich gerade und diagonal ziehen darf, ist mit nur 14 Zügen noch schneller (siehe Diagramm 2).

Auch die „Schnelligkeit“ des Läufers wollen wir betrachten. Er kann ja nur diagonal ziehen, beliebig weit und auch in jede Richtung, doch darf er nur nicht die Farbe der Felder wechseln – also maximal 32 weiße oder 32 schwarze Felder sind ihm zugänglich. Diagramm 3 zeigt uns, daß der Läufer in 16 Zügen die 32 Felder „durchheilen“ kann.

Diagramm 3



Aufgabe soll es sein, eine 64zügige Marschroute für den König, der nach der Seite, vorwärts, rückwärts oder diagonal jeweils nur ein Feld von seinem Standort aus weiterziehen kann, zu finden! Auf dieser Marschroute, die auf dem Feld a8 beginnt, soll er über alle 64 Felder des Schachbrettes ziehen. Als Bedingung gilt dabei, daß die 28 Randfelder des Brettes in Reihenfolge (Uhrzeigerichtung) beschriftet werden! Der König kann z. B. erst auf das Feld h8 ziehen, wenn er zuvor der Reihenfolge nach, die nicht unmittelbar zu sein braucht, die Felder b8, c8, d8, e8, f8 und g8 schon betreten hatte.

Hängepartie



Wunderkind



José Luis Massera

Mathematiker und Kämpfer für Demokratie und Freiheit



In dem unweit der uruguayischen Hauptstadt gelegenen Militärgefängnis „Libertad“ gibt es unter den 1300 dort eingekerkerten politischen Gefangenen einen, der auf seiner Gefängniskleidung die Nummer 2117 trägt. Es ist der weltbekannte Mathematiker Luis José Massera. Das in Uruguay herrschende Regime ließ Massera von einem Militärtribunal wegen „Subversion“ zu zwanzig Jahren Haft verurteilen. Bereits sieben Jahre schmachtet der 66jährige Patriot in einer düsteren Zelle. Nach seiner Festnahme wurde er monatelang schwer gefoltert und leidet gegenwärtig an schweren Kreislaufstörungen, die nicht behandelt werden und sein Leben stark gefährden. Massera ist Wissenschaftler und Kämpfer für eine bessere Welt, für eine Welt, in der Frieden herrscht und die Menschen glücklich sind. Massera leistete einen hervorragenden Beitrag in seiner fast 40jährigen Lehrtätigkeit an der Universität Montevideos. Von Bedeutung sind seine Forschungen, insbesondere die der *Theorie der Differentialgleichungen*. Darüber schrieb er ein bei seinen Kollegen in aller Welt hochgeschätztes Buch *Linear Differential Equations and Function Spaces*, das in der UdSSR und den USA verlegt wurde.

Massera wurde nach seiner Inhaftierung mit der Ehrendoktorwürde der Universitäten von Rom, Berlin (DDR), Nizza, Quito (Ecuador) und Puebla (Mexiko) geehrt. Von dem aufrechten Patrioten und Kommunisten sagte der italienische Wissenschaftler Professor Gaetano Fichera: „Massera, einer der größten uruguayischen Wissenschaftler mit hohem internationalen Ansehen, hätte von der Regierung seines Landes alle Ehrungen und Anerkennungen erhalten, wenn er nur seine politischen Prinzipien aufgegeben hätte. Doch darauf ließ er sich nicht ein, er wählte den Weg des Opfers.“

Massera steht seit seiner Jugend im aktiven politischen Leben seines Landes. Hervorragende Stationen seiner politischen Aktivität sind sein leidenschaftliches Wirken als Sekretär der uruguayischen Solidaritätsbewegung „Acción Antinazi“, während des zweiten Weltkrieges, als die Nazis die Sowjetunion überfielen. Er war zugegen, als in Paris die Weltfriedensbewegung gegründet wurde. Im Jahre 1942 trat Massera der Kommunisti-

schen Partei Uruguays bei, wurde dann Mitglied deren Zentralkomitees und schrieb schöpferische Werke, die als bedeutende Beiträge zur Anwendung des Marxismus-Leninismus auf die uruguayischen Gegebenheiten gewertet werden. Viele Jahre vertrat der Wissenschaftler die Werktätigen Montevideos – der Hauptstadt des Landes – im Parlament. Wo konnte Massera anders stehen, als im Juni 1973 reaktionäre Militärs die Macht ergriffen und die demokratischen Erregenschaften zerschlugen, als an der Seite seines Volkes. Als er verhaftet wurde, bekleidete er höchste Funktionen im illegalen Kampf seiner Partei.



Für seine Freiheit aus dem Kerker des uruguayischen Regimes zu kämpfen, sein Leben zu retten, ist Ehrenpflicht der solidarischen Handlung aller fortschrittlichen Menschen.

Willi Israel

Zitiert: Der uruguayische Sänger Daniel Viglietti sagte: „Es gibt ein Schweigen, das einem Mord gleichkommt. Es darf nicht geschehen, daß die Wissenschaftler, die Demokraten schweigen und sich schrittweise daran gewöhnen, daß ein Gelehrter im Kerker stirbt.“

So haben mehr als 100 Teilnehmer der 21. Konferenz für *Physik der Hohen Energien* in Paris sowie eines Kongresses für *Mathematische Analysen*, der in Brasilien stattfand, sich für die Freiheit Masseras ausgesprochen.

Die Kreiszahl π

Zum 100. Geburtstag
des Beweises
der Transzendenz von π

Teil 2

Aus der Geschichte der Kreismessung

Den Satz B (siehe Heft 6/82) hat wohl Hippokrates von Chios, der berühmteste griechische Geometer des 5. Jahrhunderts v. u. Z., zuerst ausgesprochen. Einen Beweis findet man im 12. Kapitel der „Elemente“ des Euklid (4. Jh. v. u. Z.). Er stammt von Eudoxos von Knidos (4. Jh. v. u. Z.).

Die Glanzleistung der Antike hinsichtlich des Kreises ist die Schrift „Kreismessung“ des Archimedes (3. Jh. v. u. Z.).

Archimedes war der erste, der es unternahm, den Umfang des Kreises mit seinem Durchmesser zu vergleichen. Er bewies zunächst den Satz C indirekt, indem er mittels dem Kreis eingeschriebener bzw. umschriebener Vielecke mit hinreichend großer Seitenzahl zeigt, daß die Annahme, der Kreis sei größer bzw. kleiner als das in Rede stehende Dreieck, jedesmal zu einem Widerspruch führt. Archimedes zeigte dann, daß der Flächeninhalt des Kreises sich zum Quadrat seines Durchmessers beinahe wie 11 : 14 verhält. Hierbei stützte er sich bereits auf seinen dritten Satz:

„Der Umfang eines jeden Kreises ist dreimal so groß wie der Durchmesser und noch um etwas größer, nämlich um weniger als ein Siebentel, aber um mehr als zehn Einundsebenzigstel des Durchmessers“, also

$$\frac{10}{7} < \pi < \frac{22}{7}$$

Archimedes fand diesen Satz, indem er nacheinander die Seiten und den Umfang des ein- und umschriebenen regelmäßigen Sechsecks, Zwölfecks, 24ecks, 48ecks und des 96ecks bestimmte. Ausgangspunkt war der zu große Umfang $q_1 = 4r/\sqrt{3}$ des um den Kreis beschriebenen regelmäßigen Sechsecks und der zu kleine Umfang $p_0 = 3r/\sqrt{3}$ des in den Kreis beschriebenen gleichseitigen Dreiecks (bzw. der Umfang $p_1 = 6r$ des in den Kreis beschriebenen regelmäßigen Sechsecks). Sowohl die von Archimedes verwendeten Ausgangswerte

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

als auch die schrittweise bis zum 96eck weitergeführten Ergebnisse der Zahlenrechnung erscheinen in der „Kreismessung“ ohne Begründung.

Apollonius von Perge (3. Jh. v. u. Z.) soll das Verhältnis des Umfangs eines Kreises zum Durchmesser schärfer als Archimedes angegeben haben. Doch ist seine Schrift darüber verlorengegangen.

Ende des 16. Jahrhunderts berechnete François Viète (oder Vieta, 1540 bis 1603) die Seiten eines einem Kreis eingeschriebenen und umschriebenen Vielecks von $393216 (= 6 \cdot 2^{16})$ Seiten und gab π auf neun Dezimalstellen genau an. Vieta fand auch einen Ausdruck für die Fläche des Kreises durch ein Produkt von einer unendlichen Anzahl Faktoren. Der Kreis mit dem Radius 1 hat den Flächeninhalt

$$(\pi =) \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}}}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}}}}}}}\dots}$$

Ludolph von Ceulen (1539 bis 1610) konnte die oft nach ihm bezeichnete Ludolphsche Zahl π mit bewunderungswürdiger Geduld und Ausdauer bis auf 32 Stellen genau berechnen:

3,141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 50...

Die archimedische Methode zur Berechnung der Zahl π wurde 1654 von Christian Huygens (1629 bis 1695) wesentlich verbessert. So erhielt Huygens bei Benutzung eines regelmäßigen Sechzecks einen bis auf neun Dezimalstellen genauen Wert von π , während nach der Archimedischen Methode das 96eck nötig ist, um zwei genaue Dezimalstellen zu erhalten. (Diese gewann Huygens bereits bei Benutzung eines Zwölfecks.)

In der Folgezeit wurden die verschiedensten solchen Darstellungen von π gefunden, die eine unendliche Anzahl von Operationen (unendliche Produkte, unendliche Summen, unendliche Kettenbrüche) enthalten. Führt man jeweils nur eine endliche Anzahl von Operationen aus, so erhält man gute Näherungswerte für π .

Der englische Mathematiker John Wallis (1616 bis 1703) fand 1659 das unendliche Produkt

$$\pi = 2 \left(\frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \dots} \right)$$

Der Universalgelehrte Leibniz gab 1673 die unendliche Reihe

$$\pi = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \right)$$

an. Dies bedeutet folgendes: Der Flächeninhalt π eines Kreises mit dem Radius 1 wird gefunden, wenn man von dem Quadrat seines Durchmessers ($2^2 = 4$) ein Drittel wegnimmt, sodann ein Fünftel desselben Quadrats wieder hinzufügt, hierauf wieder ein Siebentel wegnimmt, sodann ein Neuntel desselben Quadrats wieder hinzufügt und hierauf nacheinander alle aufeinanderfolgenden ungeraden Teile dieses Quadrats abwechselnd subtrahiert oder addiert. Die Anzahl der Teile, durch deren Addition und Subtraktion der Flächeninhalt zusammen-

gesetzt wird, ist aber unendlich. Nach endlich vielen Schritten erhält man nur Näherungswerte für den gesuchten Flächeninhalt π .

Die bisherigen Erkenntnisse ließen den Gedanken aufkommen, daß Umfang und Durchmesser eines Kreises inkommensurabel sein müßten.

Johann Heinrich Lambert (1728 bis 1777) gab 1766 zunächst 27 teilweise sehr große (Näherungs-)Brüche für das Verhältnis des Umfangs zum Durchmesser an, wie $22:7$, $333:106$, $355:113$, $103993:33102$, aber auch $1019514486099146:324521540032945$ (der letzte Quotient gibt die Ludolphsche Zahl bis auf die 25te Dezimalstelle!).

Lambert betonte jedoch, daß man mit der Aufsuchung weiterer solcher Brüche unnötig seine Zeit verliere. Es gibt keinen Bruch, der das Verhältnis des Umfangs zum Durchmesser exakt ausdrückt. Die Zahl π ist irrational. Die Irrationalität auch von π^2 bewies später der französische Mathematiker Adrien-Marie Legendre (1752 bis 1833).

Sowohl Lambert als auch Euler, aber auch Legendre, sprachen bereits die Vermutung aus, daß die Zahl π nicht zu den algebraischen Irrationalitäten gehört, d. h., daß sie nicht Wurzel sein kann einer algebraischen Gleichung, deren Koeffizienten rationale Zahlen sind.

Auf Grund einer eingehenden Untersuchung der Eigenschaften der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ gelang es im Jahre 1873 Hermite, die Transzendenz von e zu beweisen. Im Jahre 1882 bewies dann Lindemann, indem er sich auf die Hermiteschen Untersuchungen stützte und die Eulersche Gleichung $e^{2\pi i} + 1 = 0$ benutzte, daß auch π eine transzendente Zahl ist.

H. Pieper

$$83 = (1 + 9) \cdot 8 + 3$$

$0 = 1 - 9 + 8 : 3$	$20 = 1 \cdot 9 + 8 + \dots$
$1 = -1 - 9 + 8 + 3$	$25 = 1 + (9 \cdot 8) : 3$
$2 = -1 \cdot 9 + 8 + 3$	$31 = 1 + \sqrt{9 \cdot 8 + 3}!$
$3 = 1 - 9 + 8 + 3$	$40 = (-1 + 9) \cdot (8 - 3)$
$4 = 1 \cdot 9 - 8 + 3$	$50 = (1 + 9) \cdot (8 - 3)$
$5 = 1 + 9 - 8 + 3$	$53 = -1 + (9! : 8!) \cdot 3!$
$6 = (1 + 9 + 8) : 3$	$60 = (-1 + \sqrt{9 \cdot 8}) \cdot 3!$
$7 = \sqrt{-1 + 9 + 8 + 3}$	$63 = -1 + (-\sqrt{9! + 8})^{3!}$
$8 = 19 - 8 - 3$	$66 = 198 : 3$
$9 = (19 + 8) : 3$	$70 = 1 + 9 \cdot 8 - 3$
$10 = -1^9 + 8 + 3$	$80 = -1 \cdot \sqrt{9 + 83}$
$11 = 1^9 \cdot (8 + 3)$	$82 = -1^9 + 83$
$12 = 1^9 + 8 + 3$	$90 = 19 + 8 + 3$
$13 = -1 + 9 + 8 - 3$	$100 = 1 + 9 \cdot (8 + 3)$
$14 = 19 - 8 + 3$	$101 = 1 \cdot 98 + 3$
$15 = 1 + 9 + 8 - 3$	$102 = 19 + 83$
	$= 1 + 98 + 3$

Autoren sind Schüler (alpha-Leser) einer Mathematik-AG des Bundesgymnasiums XIV, Wien, unter Leitung von Prof. OStR Dr. H. Vohla. (Oben: Auswahl aus der Darstellung der Zahlen von 0 bis 102.)

Was ist Rechnungsführung und Statistik?

Es riecht ein bißchen nach Mathematik, ein bißchen nach Ökonomie, vor allem aber nach viel Zahlen, Tabellen, Grafiken. Viele Leute haben direkt oder indirekt damit zu tun, ohne es zu wissen.

Dazu gehören nämlich der Kassenzettel für einen Einkauf ebenso wie die Berichte der Staatlichen Zentralverwaltung für Statistik über die Erfüllung des Volkswirtschaftsplanes, die Rechnung für einen Verkauf, der Nachweis des Nutzens für einen Industrieroboter, die Ermittlung der Kosten für Erzeugnisse oder die Berechnung des National Einkommens.

Solche unterschiedlichen ökonomischen Vorgänge haben eines gemeinsam: Sie zeigen, wie sich das gesellschaftliche Eigentum verändert, entwickelt, reproduziert. Genaue, detaillierte Kenntnisse darüber sind für die Planung der sozialistischen Entwicklung sehr wichtig, denn nur was erarbeitet wurde, kann verteilt werden. Schon Karl Marx verwies darauf, daß die „Buchführung ... notwendiger bei gemeinschaftlicher Produktion als bei kapitalistischer Produktion“ ist. Marx meinte hier eine gesellschaftliche Buchführung. In der DDR wird sie als *Rechnungsführung und Statistik* bezeichnet.

Es gibt sie überall dort, wo mit gesellschaftlichem Eigentum gearbeitet wird, also in allen volkseigenen und genossenschaftlichen Betrieben und Einrichtungen sowie in allen Institutionen der Bezirke, Kreise und Gemeinden.

In Rechnungsführung und Statistik kommt es nicht nur auf das Erfassen von Zahlen und Daten an, sondern vor allem auf das Aufdecken der ökonomischen Zusammenhänge und auf die erforderlichen Schlußfolgerungen. Dazu ist ein umfangreiches politisches und ökonomisches Wissen notwendig.

Die vierjährige Hochschulausbildung in der Fachrichtung Rechnungsführung und Statistik umfaßt neben dem wirtschaftswissenschaftlichen Grundstudium besonders Methoden und Verfahren der Erfassung, Verarbeitung und Analyse von ökonomischen Informationen unter den künftigen Bedingungen der elektronischen Datenverarbeitung.

Auch die Ausbildung in Mathematik hat einen beachtlichen Stellenwert. Dabei stehen Grundlagen und Methoden für die Anwen-

dung von mathematisch-statistischen Verfahren in der Ökonomie im Vordergrund: lineare Algebra (lineare Gleichungssysteme, Matrizenrechnung), Analysis, lineare Optimierung, Wahrscheinlichkeitsrechnung. Vertiefungen gibt es z. B. hinsichtlich Logarithmus- und Exponentialfunktion, Transportoptimierung, Modellierung ökonomischer Prozesse (z. B. Verflechtungsmodelle für Kosten) und ausgewählte Gebiete der mathematischen Statistik (Regression, Testverfahren).

Darauf bauen die Fächer „Allgemeine Statistik“ (u. a. die statistische Untersuchung von Niveau, Struktur, Entwicklung und Zusammenhängen ökonomischer Erscheinungen) und „Wirtschaftsstatistik“ (enthält z. B. Bevölkerungsstatistik einschl. Arbeitskräftestatistik, Produktionsstatistik, Grundmittel- und Investitionsstatistik) auf, in denen die mathematischen Methoden und ökonomischen Erscheinungen in Zusammenhang mit Rechnungsführung und Statistik gebracht werden.

Aber auch für andere Fächer wie „Leitung“, „Sozialistische Betriebswirtschaft“ und „Sozialistische Volkswirtschaft“ bekommen mathematisch-statistische Methoden zunehmende Bedeutung.

Wen also die Mathematik in ihrer Anwendung interessiert, ohne daß er Mathematik studieren will, findet in Rechnungsführung und Statistik ein weites Feld für interessante Arbeiten.

Dabei hat die Ökonomie selbstverständlich den Vorrang.

Deshalb gehören zu den Ausbildungsgebieten neben den bereits erwähnten die KostenLeistungs-Rechnung in Betrieben und Kombinat, Programmierung, moderne Analysemethoden, Planspiele, Praktika.

Der Absolvent der Fachrichtung ist ein Spezialist für ein umfassendes Informationssystem, eben Rechnungsführung und Statistik. Durch die neuen elektronischen Datenerfassungs- und -verarbeitungsgeräte werden von den Absolventen künftig auch neue Organisationslösungen gefordert.

Da Rechnungsführung und Statistik volkswirtschaftlich einheitlich organisiert ist, können die Absolventen sowohl in der Industrie als auch im Handel, im Verkehrswesen, im

Gesundheitswesen oder in anderen staatlichen Einrichtungen arbeiten. Sie können auch tätig sein in Dienststellen der Staatlichen Zentralverwaltung für Statistik, in Planungsabteilungen, Organisations- und Rechenzentren der Betriebe und Kombinate sowie in den Räten der Städte, Kreise und Bezirke.

Einsatzschwerpunkte der Absolventen sind: Analyse der ökonomischen Entwicklung in Betrieben und Kombinat, Erarbeitung des Zahlenwerkes und seiner Ordnungsmäßigkeit, Einsatz der elektronischen Rechentechnik.

Ausbildungsstätte: Karl-Marx-Universität Leipzig, Sektion Wirtschaftswissenschaften.

G. Geißler



Kurzbiographie

Prof. Dr. sc. oec. Günther Geißler, geb. 1926 in Dresden

1949 nach Rückkehr aus Kriegsgefangenschaft Abitur

1949 bis 1952 Studium der Gesellschafts- und Wirtschaftswissenschaften, speziell Finanzökonomie, an der Universität Leipzig

1954 Promotion

1956 bis 1970 als Dozent, Professor und Institutsdirektor an der Technischen Hochschule „Carl Schorlemmer“ Leuna-Merseburg, Fakultät für Ingenieurökonomie bzw. Sektion Wirtschaftswissenschaften

1960 Habilitation an der damaligen Technischen Hochschule Dresden

1970 Umberufung an die Karl-Marx-Universität Leipzig, seit 1972 Leiter der Fachrichtung Rechnungsführung und Statistik an der Sektion Wirtschaftswissenschaften

Autor und Mitautor mehrerer Lehrbücher, Studienanleitungen und vieler Veröffentlichungen im In- und Ausland zu wissenschaftlichen Fragen von Rechnungsführung und Statistik

Beispiel 1

In einem Betrieb wurden in einem Zeitraum zum Zweck der Energieverbrauchsnormung Messungen über die hergestellte Produktion (Ursache = x) und den Produktionsverbrauch an Elektroenergie (Wirkung = y) durchgeführt. Darüber liegen folgende Daten vor:

Monat	produzierte Menge in Tausend Stück	Elektroenergieverbrauch in MW
i	x_i	y_i
1	23,0	16,8
2	24,5	17,6
3	25,0	18,1
4	24,6	17,6
5	26,0	18,0
6	27,0	19,3
7	25,8	19,3
8	24,1	17,3

Aufgaben

▲1▲ Das Zahlenmaterial ist im Koordinatensystem grafisch darzustellen. Welche Erkenntnisse sind daraus zu gewinnen?

▲2▲ Es ist eine Ausgleichsfunktion für die Abhängigkeit des Elektroenergieverbrauchs von der Produktionsmenge zu berechnen.

▲3▲ Es ist die Anpassung der berechneten Funktion an das empirische Zahlenmaterial (Ausgangsmaterial) darzustellen.

▲4▲ Es ist die Elektroenergiemenge zu bestimmen, die durchschnittlich bei einer Produktion von 26,6 Tausend Stück benötigt wird.

Dozent Dr. S. Beiersdorfer

Beispiel 2

Zur Begründung der Kennziffer Grundfondsquote

($= \frac{\text{Warenproduktion}}{\text{eingesetzte Grundmittel}}$) und zur Planung der Warenproduktion in einem Kombinat wurden in einem Zeitraum die Angaben von 10 vergleichbaren Betrieben erfaßt.

Betrieb	Warenproduktion in Tausend M	Grundmittel in Tausend M
i	y_i	x_i
1	4600	2000
2	2300	1600
3	2800	1700
4	3000	1700
5	3900	2300
6	5000	2800
7	1600	700
8	4900	2800
9	5200	2900
10	4700	2500

Aufgaben

▲1▲ Das Zahlenmaterial ist im Koordinatensystem grafisch darzustellen, die Grafik ist auszuwerten.

▲2▲ Für die Abhängigkeit der Warenproduktion von den eingesetzten Grundmitteln ist eine Ausgleichsfunktion zu berechnen.

▲3▲ Es ist die Anpassung der berechneten Funktion an das Ausgangsmaterial darzustellen.

▲4▲ Es ist die Höhe der Warenproduktion zu berechnen, die durchschnittlich bei einem Einsatz von 2600 Tausend M Grundmittel zu erwarten ist. Wie hoch ist in diesem Fall die Grundfondsquote?

Hinweise

1. Die grafische Darstellung bezieht sich auf den I. Quadranten.

2. Die Berechnung der Ausgleichsfunktion erfolgt nach dem Gaußschen Verfahren der kleinsten Summe der Abweichungsquadrate. Es werden zwei Bedingungen gestellt:

- (1) $y_i = f(x_i)$
notwendig, aber nicht hinreichend
- (2) $y_i = -f(x_i)^2 -$
hinreichend

Der entsprechend der Grafik ausgewählte Funktionstyp $f(x)$ wird in die Forderungen eingesetzt. Danach wird die Minimumsforderung (2) nach den gesuchten Parametern ($a, b, c, \dots$) partiell differenziert. Die Ableitungen werden $=0$ gesetzt, umgeformt und ergeben die Normalgleichungen, aus denen die Formeln für die Bestimmung von $a, b, c, \dots$ entwickelt werden.

Zum Beispiel bei $f(x) = a + bx$ folgen aus den partiellen Ableitungen

$\delta a / \delta x$ und $\delta b / \delta x$
schließlich die Normalgleichung:

$$\text{I. } y_i = na + b + x_i$$

$$\text{II. } x_i y_i = a \sum x_i + b \sum x_i^2$$

Dozent Dr. S. Beiersdorfer

► Autor des Beitrags: *Markenmotive zur Statistik* ist Dr. P. Schreiber, Universität Greifswald. Wir empfehlen sein Buch: *Die Mathematik und ihre Geschichte im Spiegel der Philatelie*

Preis: 9.80 M

Bestell-Nr. 6659847

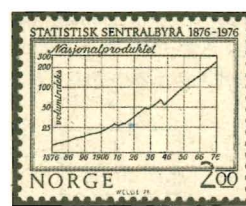
BSB B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft
Leipzig



Markenmotive zur Statistik

Die *mathematische Statistik* ist ein Teilgebiet der Mathematik, in dem unter Benutzung von Begriffen und Denkweisen der *Wahrscheinlichkeitstheorie* exakte Aussagen über die Zuverlässigkeit statistischer Ergebnisse gewonnen werden. Ihr voran geht die *beschreibende Statistik*, sie beschäftigt sich mit der Sammlung und Aufbereitung von konkretem statistischen Material. Aufbereitung umfaßt die Berechnung von Kennziffern wie Mittelwert und Streuung, die Berechnung von Gesamtsummen, Sortierung nach Merkmalen usw., aber auch die graphische Darstellung der Ergebnisse, wodurch diese oft erst für einen größeren Nutzerkreis verständlich werden. Derartige graphische Darstellungen (Kurven, Rosetten, Diagramme, sogenannte Bevölkerungsbäume, siehe die abgebildete österreichische Marke) dienen häufig als Motiv für Briefmarken. Sie veranschaulichen ökonomische und soziologische Fakten und Prozesse. Aber auch dem Einsatz der EDV für statistische Zwecke wurden schon Briefmarken gewidmet (siehe niederländische Marke zur Volkszählung 1971).

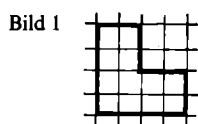
Aus neuen Aufgaben der beschreibenden Statistik erwachsen auch heute noch immer wieder Anregungen für die Mathematik.





Geometrische Plaudereien

▲1▲ Zerlege die in Bild 1 dargestellte Figur in vier zueinander kongruente Teilfiguren!



▲2▲ Zu welchem Würfel gehört das Netz (Bild 2)?

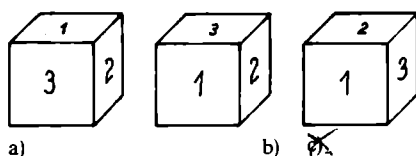
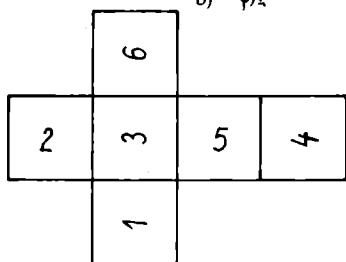
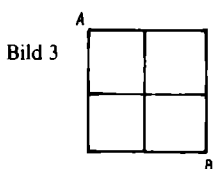


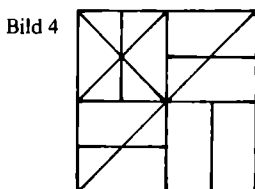
Bild 2



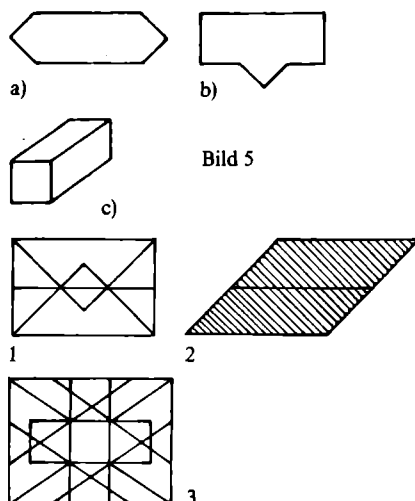
▲3▲ Wieviel verschiedene Wege gibt es, um in Bild 3 von Punkt A zu Punkt B zu gelangen, wenn man nur von links nach rechts und von oben nach unten die vorgezeichneten Bahnen benutzen darf?



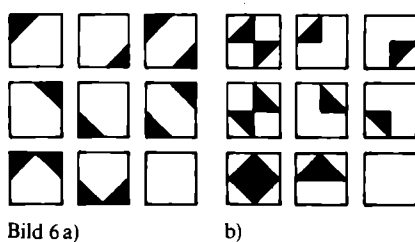
▲4▲ Wieviel Quadrate, Rechtecke bzw. Dreiecke erkennst du in Bild 4?



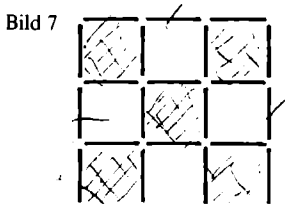
▲5▲ Welche Figuren a) bis c) des Bildes 5 sind in den Figuren 1 bis 3 enthalten?



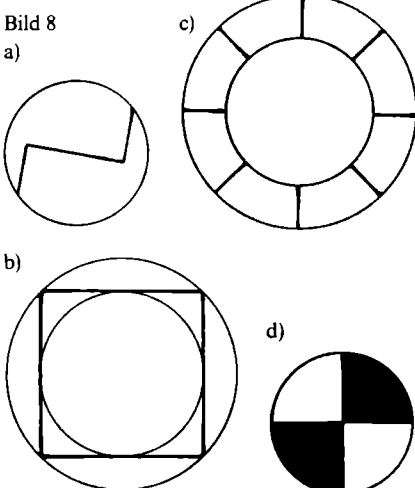
▲6▲ Setze die passenden Zeichen in die leeren Quadrate (Bild 6)!



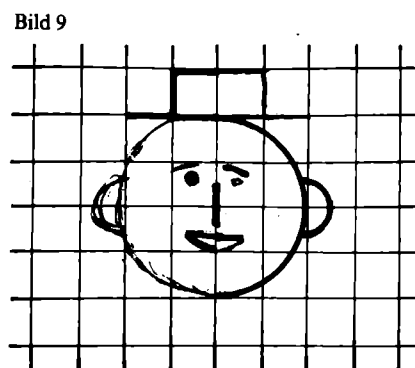
▲7▲ Lege mit Hölzchen die in Bild 7 dargestellte Figur! Nimm nun vier Hölzchen so weg, daß die restlichen Hölzchen fünf Quadrate ergeben!



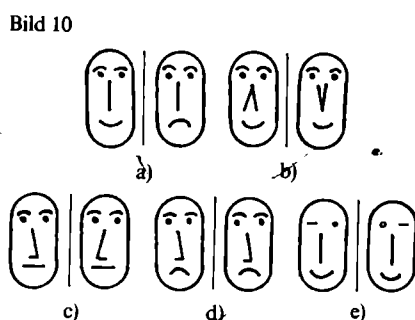
▲8▲ Wieviel Symmetrieachsen hat jede der in Bild 8 gezeichneten Figuren?



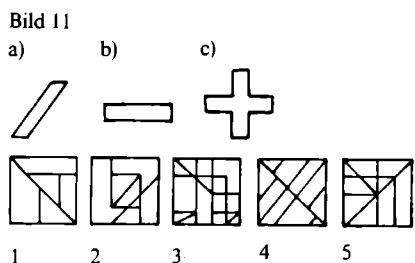
▲9▲ Ergänze Bild 9 so, daß eine symmetrische Figur entsteht!



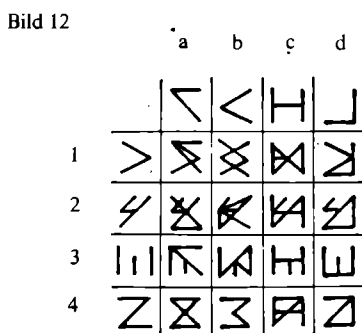
▲10▲ In welchen Beispielen (Bild 10) ist die eine Figur sicher nicht das Spiegelbild der anderen bezüglich der eingezeichneten Geraden?



▲11▲ Sind die Formen a, b, c in den Figuren 1 bis 5 enthalten (Bild 11)?



▲12▲ Es wurde immer ein Zeichen aus der obersten waagerechten Reihe und aus der ersten senkrechten Reihe kombiniert. Dabei sind dem Zeichner in Bild 12 sieben Fehler unterlaufen. Finde sie!



Gute Grundkenntnisse gesucht – auch ein wenig Überlegung

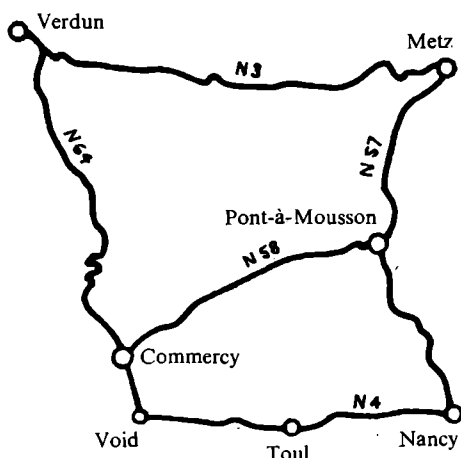
Gemixtes aus französischen Mathematiklehrbüchern
Teil 1 (Klasse 4 bis 6)

Klasse 4

▲ 1 ▲ Claude, Eddy, Philippe, Jacques sind vier Freunde, die in vier verschiedenen Städten wohnen: Paris, Marseille, Lyon, Toulouse. Eddy und Philippe sind aus der Provinz¹⁾ und wohnen nicht am Meer. Philippe besucht oft seinen Freund in Lyon und Claude oft den in Paris Wohnenden.
Finde die Stadt, in der jeder wohnt! (Fertige eine geeignete Tabelle an!)

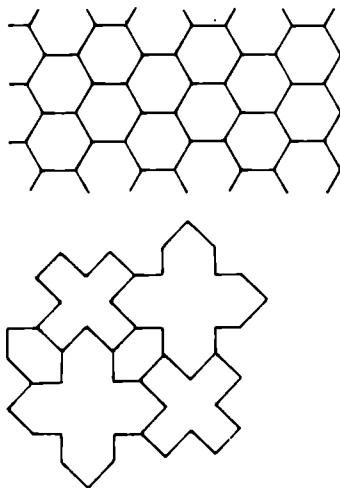
▲ 2 ▲ Anfang des Jahres 1975 fährt ein Reisender von Lyon nach Marseille und zurück. Während der Hinfahrt nimmt er den Expreßzug „Mistral“. Er kauft eine Fahrkarte 1. Klasse nach Marseille für 80 Francs. Im Zug muß er einen Zuschlag von 22 Francs bezahlen. Das Abendessen in Marseille kostet 35 Francs, die Übernachtung und das Frühstück kosten zusammen 60 Francs, das Mittagessen 39 Francs. Die Höhe verschiedener anderer Kosten beträgt 16 Francs. Zur Rückfahrt nimmt er einen normalen Personenzug, er fährt wieder 1. Klasse.
Welches sind die Gesamtkosten?

▲ 3 ▲ Bestimme mit Hilfe eines Fadens und einiger Stecknadeln die folgenden Abstände auf der Karte (siehe Bild) bei einem Maßstab von 1:1 000 000



- von Verdun nach Metz auf der Nationalstraße N3
 - von Metz nach Pont-à-Mousson auf der Nationalstraße N57
 - von Nancy nach Void auf der Nationalstraße N4!
- Wie vielen Kilometern in der Natur entspricht ein Millimeter auf der Karte? Welches sind die wirklichen Abstände?

▲ 4 ▲ Die untenstehende Zeichnung zeigt einen Teil eines Parketts. Nimm ein klein kariertes Blatt Papier, und setze das Muster fort!



Überlege eine weitere Möglichkeit, eine Fläche auszulegen! Unten siehst du z. B. solch eine Möglichkeit mit Hilfe regelmäßiger Sechsecke.

Klasse 5

▲ 1 ▲ Helfen wir dem Inspektor Dupond. Nach einem Verkehrsunfall soll er ein Auto suchen, dessen Kennzeichen eine Zahl, zwei Buchstaben und die Nummer des Départements 75 enthält. Leider stimmen die Aussagen der Zeugen nicht überein.
Als Zahl haben einige 8, andere 6 gesehen. Für den ersten Buchstaben geben einige B an. Andere behaupten, daß es ein R war, und weitere wollen ein P gesehen haben. Für den zweiten Buchstaben haben wiederum einige M, einige N und andere H gesehen.
Wieviel Autos muß Inspektor Dupond ermitteln, um unter ihnen den Unfallverursacher zu suchen? Fertige eine Übersicht an (etwa in Form eines verzweigten Schemas)!

▲ 2 ▲ Ein Kino hat 144 billige Plätze und 96 teure. Eines Samstags gibt es drei Vorstellungen. Bei der ersten sind 18 Sitze leer; bei der zweiten ist der Saal zu zwei Dritteln gefüllt. Bei der dritten ist der Saal zu drei Viertel leer.
Finde die Zahl der Zuschauer für jede Vorstellung und danach die Gesamtzahl der Zuschauer an diesem Tag!

▲ 3 ▲ Jean, Pierre und Dominique machen einen Ausflug mit ihren Mopeds. Zwischen-durch wollen sie eine Essenspause einlegen. Zum Start zeigt Jeans Kilometerzähler 3972 km; zur Pause zeigt Pierres Kilometerzähler 987 km. Bei der Ankunft zeigen die Kilometerzähler: für Jean 4044 km, für Pierre 1030 km und für Dominique 5206 km.
Welches waren die Angaben zum Start und während der Pause? Bediene dich bei der Lösung einer geeigneten Tabelle!

▲ 4 ▲ Francis muß jeden Tag von einem Medikament 5 Tropfen zu Mittag und 5 Tropfen am Abend nehmen. Die Flasche enthält 10 cm^3 des Medikaments. 20 Tropfen nehmen ungefähr einen Rauminhalt von einem Kubikzentimeter ein.
Wieviel Zeit vergeht, bis Francis eine volle Flasche geleert hat?

▲ 5 ▲ Ein rechteckiger Garten ist 34,6 m lang und 22,8 m breit. Durch den Garten verlaufen zwei schmale sich kreuzende Wege. Einer der Wege ist parallel zur Länge und hat als Breite 1,2 m. Der andere Weg ist parallel zur Breite des Gartens und ist 0,6 m breit. Die Wege sollen mit Sand bestreut werden.
Wie groß ist die zu bestreuende Fläche des Gartens?

Klasse 6

▲ 1 ▲ Ein Gastwirt möchte seinen Kunden Wein aus der Bourgogne liefern, für den er bereits Flaschen mit einem Inhalt von 73 cl und von 37,5 cl hat. Er kauft ein Faß des Weines mit 113 l. Den Wein füllt er so in die Flaschen ab, daß er eine gleiche Zahl Flaschen von jeder Art erhält. Dabei bleibt ein Rest von 25 dl. Wieviel Flaschen jeder Sorte hat er gefüllt?

▲ 2 ▲ Eine Badewanne wird durch den Wasserhahn in 10 Minuten gefüllt und in einer Viertelstunde durch den Abfluß geleert. Man öffnet den Hahn und vergißt, den Abfluß zu schließen.
Nach welcher Zeit ist die Wanne voll?

▲ 3 ▲ Gegeben sei ein Parallelogramm ABCD und ein Punkt H auf der Seite AB. Die durch B gehende Parallele zu DH schneidet CD in K.
Beweise zunächst, daß $\overline{BH} = \overline{DK}$. Zeige dann, daß AC, BD und HK den gleichen Mittelpunkt haben!

▲ 4 ▲ Mutti bäckt einen Kuchen für 8 Personen. Sie nimmt $\frac{3}{4} \text{ kg}$ Mehl. Davon kosten 500 g 1,20 Francs. Dazu kommen 6 Eier zu 0,45 Francs das Stück, $\frac{1}{4} \text{ kg}$ Butter zu 17,60 Francs das Kilogramm, 150 g Zucker zu 3 Francs das Kilogramm, 8 cl Rum zu 12,50 Francs der halbe Liter und für 0,25 Francs Backpulver.
Was kostet der Kuchen?

▲ 5 ▲ Gegeben seien ein Quadrat ABCD und die Mittelpunkte H und K der Seiten BC bzw. CD.
Beweise zunächst, daß die Flächen der Dreiecke ABH, AHC, ACK und AKD gleich sind! Berechne danach diese Flächen, wenn die Seitenlänge des Quadrats ABCD 54 mm beträgt!

U. Hauk

¹⁾ „In der Provinz wohnen“ bedeutet „nicht in der Hauptstadt wohnen“.

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Aus: normat, Dänemark

Letzter Einsendetermin: 1. Mai 1983



Mathematik

Ma5 ■2294 Arthur, Bernd, Christian und Dirk wohnen in derselben Straße, aber in verschiedenen Häusern mit den Hausnummern 11, 14, 16 und 17. Anlässlich einer Geburtstagsfeier wurden drei Fotos gemacht.

(1) Auf dem ersten Foto waren genau drei dieser Jungen zu sehen, und zwar Bernd, Christian und der Junge aus dem Haus Nr. 17.

(2) Auf dem zweiten Foto waren ebenfalls genau drei Jungen zu sehen, und zwar Arthur und die Jungen aus den Häusern mit den Hausnummern 14 und 16.

(3) Auf dem dritten Foto waren alle vier Jungen zu sehen, und zwar Christian und Dirk und die Jungen aus den Häusern mit den Hausnummern 11 und 14.

Wer von den vier Jungen wohnt jeweils in den Häusern mit den angegebenen Hausnummern? *Schüler Th. Rademacher, Lübben*

Ma5 ■2295 Die Summe aus vier natürlichen Zahlen, von denen jede folgende doppelt so groß ist wie die vorhergehende, beträgt 255. Um welche Zahlen handelt es sich?

Schülerin Daniela Schulz, Kakerbeck

Ma5 ■2296 Frank geht in die Kaufhalle und kauft dort einige Flaschen Limonade zu 51 Pf je Flasche (einschließlich Flaschenpfand), 9 Flaschen Apfelmarmelade und 3 kg Äpfel. An der Kasse tippt die Kassiererin diese drei Warenposten ein. Die Geldsumme, die Frank bezahlen soll, beträgt 9,10 M. Kann dieser Betrag stimmen, oder hat sich die Kassiererin vertippt? Die Antwort ist zu begründen!

Schüler Jens-Peter Redlich, Wittenberge

Ma5 ■2297 Die Quersumme einer zweistelligen natürlichen Zahl beträgt 12. Multipliziert man diese Zahl mit 2, subtrahiert man vom Produkt 12, so erhält man als Er-

gebnis eine zweistellige natürliche Zahl, die mit den gleichen Grundziffern wie die ursprüngliche Zahl, aber in umgekehrter Reihenfolge geschrieben wird. Wie heißt diese Zahl? *Schülerin Annette Polt, Saalfeld*

Ma5 ■2298 Drei Parallelklassen einer Schule wetteifern um gute Ergebnisse bei der Altstoffsammlung. Die Schüler der Klasse 5b sammelten 22 Gläser weniger als die Schüler der Klasse 5a, aber 7 Gläser mehr als die Schüler der Klasse 5c. Die Schüler aller drei Klassen konnten zusammen 645 Gläser dem Altstoffhandel zuführen. Wie viele Gläser sammelten die Schüler jeder dieser drei Klassen? *Schülerin Manuela Herrmann, Cottbus*

Ma5 ■2299 Kerstin ist gegenwärtig zwölf Jahre alt. Ihre Schwester Gerda ist zwei Jahre jünger als Kerstin. Vor drei Jahren war Kerstins Mutter fünfmal so alt wie ihre Schwester Gerda, Kerstins Vater hingegen viermal so alt wie Kerstin. Wie alt sind Kerstins Eltern gegenwärtig?

Schülerin Kerstin Schuhmann, Halle-Neustadt

Ma6 ■2300 Ulf fragte Peter: „Wie viele Bücher besitzt du?“ Darauf antwortete Peter: „Die Hälfte meiner Bücher sind Abenteuerromane. Ein Fünftel meiner Bücher sind Nachschlagewerke. Ein Achtel meiner Bücher sind Tiergeschichten. Die restlichen Bücher gehören zur populärwissenschaftlichen Literatur. Nun kannst du dir wohl denken, wie viele Bücher ich besitze.“ Ulf rechnete und meinte, eine Angabe fehle noch, um die Anzahl der Bücher zu ermitteln. Daraufhin sagte Peter: „Die Anzahl der populärwissenschaftlichen Bücher ist eine Primzahl.“ Wie viele Bücher besitzt Peter, wenn es weniger als 100 sind? *Schülerin Heike Sator, Plau*

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha

7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm x 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingereicht haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1982/83 läuft von Heft 5/1982 bis Heft 2/1983. Zwischen dem 1. und 10. September 1983 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/82 bis 2/83 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingelangte Antwortkarten werden nur dann zurückgeschickt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/83 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/82 bis 2/83) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1982/83 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

30	Thies Luther, 2600 Güstrow, Wendersstr 22 Kersting-OS, Klasse 7	Ma 7 1369
150	Prädikat:	
	Lösung:	

Ma6 ■ 2301 Setzt man für die Buchstaben des Wortes ERFURT natürliche Zahlen ein, so gilt:

- (1) $R + T - U = 10$,
- (2) $E \cdot R = 28$,
- (3) $F \cdot U = 48$,
- (4) $E + F = 12$.

Welche natürlichen Zahlen erfüllen diese vier Gleichungen? Es ist der Wert der Summe $E + R + F + U + R + T$ zu berechnen.

Schüler Thomas Kraft, Hainichen

Ma6 ■ 2302 Herr A. hatte im Tele-Lotto gewonnen. Sein Nachbar B fragte ihn, welchen Geldbetrag er gewonnen habe. Er antwortete darauf: „Der Gewinn ist kleiner als 3000 M und durch alle natürlichen Zahlen von 2 bis 10 ohne Rest teilbar.“

Welchen Geldbetrag hatte Herr A. im Tele-Lotto gewonnen?

Schüler Thomas Vandahl, Völkershausen

Ma6 ■ 2303 Von vier Mädchen mit den Vornamen Agnes, Babett, Christa und Katja ist uns folgendes bekannt:

- a) Ihre Nachnamen lauten (in anderer Reihenfolge) Jahn, Robert, Meier und Schmidt.
- b) Jedes dieser Mädchen erlernt genau eine der Fremdsprachen Latein, Englisch, Französisch oder Tschechisch.
- c) Das älteste Mädchen, die Schülerin Meier und Christa erlernen nicht die tschechische Sprache.
- d) Das jüngste Mädchen, die Schülerin Meier und Christa lernen nicht Latein.
- e) Katja ist älter als Babett, aber jünger als Christa.
- f) Das Mädchen, das die englische Sprache erlernt, ist mit der Schülerin Schmidt befreundet.
- g) Agnes hat den Nachnamen mit den wenigsten Buchstaben.
- h) Christa erlernt nicht die französische Sprache.

Ermittle die vollständigen Namen dieser Mädchen! Welche Fremdsprache erlernt jedes dieser Mädchen? Ordne die Mädchen nach ihrem Lebensalter; beginne mit dem jüngsten Mädchen!

Schülerin Barbara Schütze, Weißenfels

Ma6 ■ 2304 Primzahlrillinge nennt man drei Primzahlen p_1, p_2, p_3 mit der Eigenschaft $p_2 = p_1 + 2$ und $p_3 = p_2 + 2$. Es ist nachzuweisen, daß es außer dem Primzahlrilling (3; 5; 7) keinen weiteren gibt.

Schüler Jens-Peter Redlich, Wittenberge

Ma7 ■ 2305 Heinz und Klaus haben von ihrem Taschengeld fleißig gespart. Sie vergleichen ihre Ersparnisse und stellen dabei folgendes fest: Würde Klaus an Heinz 2 M abgeben, so hätten beide gleich viel Ersparnisse. Würde Heinz an Klaus 11 M abgeben, so hätte Klaus dreimal soviel Ersparnisse wie Heinz. Wieviel Mark hat jeder der beiden Jungen gespart?

Schülerin Claudia Schwartz, Ilmenau

Ma7 ■ 2306 Zeichne einen Rhombus $ABCD$, konstruiere die Mittelpunkte E, F, G, H der Rhombuseiten, und zeichne die Verbindungsstrecken der Mittelpunkte benachbarter Rhombuseiten! Weise nach, daß das Viereck $EFGH$ ein Rechteck ist! Weise nach, daß der Flächeninhalt A_{Rh} des Rhombus doppelt so groß ist wie der Flächeninhalt A_R des Rechtecks $EFGH$!

Schülerin Heike Sator, Plau

Ma7 ■ 2307

Löse durch systematisches Probieren!

Wie viele verschiedene Autonummern lassen sich herstellen, wenn alle Buchstaben des Alphabets und alle Ziffern von 0 bis 9 für Autonummern folgenden Typs verwendet werden:

z. B. SX · 23–57?

Es dürfen sich Buchstaben und auch Ziffern wiederholen.

Fr.

Ma7 ■ 2308 Es ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC zu konstruieren, dessen Hypotenuse $\overline{AB}$ die Länge 13 cm hat und dessen Kathete $\overline{AC}$ um 7 cm länger ist als die Kathete $\overline{BC}$. Die Konstruktion ist zu begründen.

OSTR K.-H. Lehmann, VdV, Berlin

Ma8 ■ 2309 Es sind alle geordneten Tripel $[a, b, c]$ positiver ganzer Zahlen a, b, c mit $a < b < c$ zu ermitteln, die die Ungleichung

$$\frac{a}{5} + \frac{b}{6} + \frac{c}{7} < 1 \text{ erfüllen.}$$

Sch.

Ma8 ■ 2310

Folgender Satz ist zu beweisen:

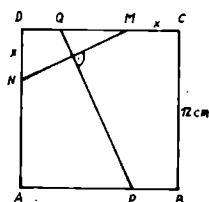
Die um 2 verminderte Summe der Quadrate zweier aufeinanderfolgender ungerader natürlicher Zahlen ist stets durch 8 teilbar.

Schüler M. Enig, Crimmitschau, Kl. 9

Ma8 ■ 2311 In einer Familie war die Mutter bei der Geburt ihrer Tochter 36 Jahre alt. Es sind die Geburtsjahre von Mutter und Tochter zu ermitteln, wenn die Tochter z. Z. Schülerin ist und in der Zifferndarstellung der Geburtsjahre die letzten beiden Ziffern vertauscht sind.

Dipl.-Landwirt H. Boettcher, Weimar

Ma8 ■ 2312 Die Seitenlänge des abgebildeten Quadrates $ABCD$ betrage 12 cm. Auf den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ wurden die Punkte P und Q so angenommen, daß die Länge der Strecke $\overline{BP}$ gleich der Länge der Strecke $\overline{DQ}$ gleich einem Viertel der Länge der Strecke $\overline{AB}$ ist. Auf $\overline{PQ}$ ist eine Senkrechte zu errichten, die $\overline{CD}$ in M und $\overline{AD}$ in N schneidet, so daß $\overline{CM} \cong \overline{DN}$ gilt. Zu berechnen ist die Länge der Strecke $\overline{DN}$.



Skizze nicht maßstäblich.

Ma9 ■ 2313 Welche reellen Zahlen erfüllen die Gleichung

$$y^3 - y^2 = y^2 + y?$$

Schüler M. Enig, Crimmitschau, Kl. 9

Ma9 ■ 2314 Vertauscht man in einer zweiziffrigen natürlichen Zahl mit der Quersumme 7 die beiden Ziffern, so ist das Quadrat der neuen Zahl um 51 kleiner als das Quadrat der Hälfte der ursprünglichen Zahl. Welche Zahl ist es?

aus Österreich

Ma9 ■ 2315 Frau K. rechnet mit den Jahreszahlen 1981 und 1982. Sie dividiert 1981 durch das Alter (in vollen Jahren) von Sohn Stefan und 1982 durch das Alter (in vollen Jahren) von Tochter Susi. Beide Quotienten sind ganzzahlig. Diese addiert sie und dividiert die erhaltene Summe durch ihr eigenes Alter (in vollen Jahren). Sie staunt, daß die Aufgabe nicht nur aufgeht, sondern auch noch das Alter der Großmutter (in vollen Jahren) herauskommt. Wie alt sind Großmutter, Mutter und die beiden Kinder?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma9 ■ 2316 Ein Rechteck hat einen Umfang von 26 cm und einen Flächeninhalt von 40 cm^2 . Wie groß sind die Seitenlängen a bzw. b , wenn gilt $a > b$?

Schüler M. Enig, Crimmitschau, Kl. 9

Ma10/12 ■ 2317 Für die Vereinfachung der Darstellung von Informationen wurde das hexadezimale Zahlensystem geschaffen (Basis 16). Es werden die Ziffern 0 bis 9 und für die Ziffern 10 bis 15 die Buchstaben A bis F verwendet. Die folgenden Darstellungen sind ins Dezimalsystem zu übertragen:

- a) $(AF9)_{16}$
- b) $(BAD)_{16}$.

Die Zahlen 10000 und 1000000 des Dezimalsystems sind in das hexadezimale System zu übertragen.

Dipl.-Ing. H. Mietling, Dresden

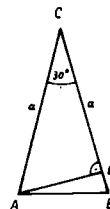
Ma10/12 ■ 2318 Es sind alle natürlichen Zahlen n zu ermitteln, die durch 30 teilbar sind und einschließlich der Zahlen 1 und n genau 30 Teiler besitzen.

Sch.

Ma10/12 ■ 2319 Unter welchem Winkel schneiden sich zwei Seitenflächen eines regelmäßigen Tetraeders?

Schüler U. Schwert, Ruthen, Kl. 9

Ma10/12 ■ 2320 Im abgebildeten Dreieck ABC gelte $\overline{AC} = \overline{BC}$, und $\sphericalangle ACB$ habe die Größe 30° . Das Lot von A auf $\overline{BC}$ schneide



$\overline{BC}$ in D . Der Flächeninhalt des Dreiecks ADC ist in Abhängigkeit von a (Länge der Seite $\overline{AC}$) zu bestimmen.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Physik

Ph6 ■131 Frank hatte in seinem Zimmer ein großes Aquarium. Dieses zersprang ihm so, daß alles Wasser auf den Fußboden floß.

Das Zimmer war 2,70 m lang und $\frac{2}{3}$ mal so breit. Die inneren Grundflächenröße des Aquariums waren $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{6}$ der Bfeite des

Zimmers. Wie hoch war der Wasserspiegel im Aquarium, wenn sich das gesamte Wasser gleichmäßig auf dem Fußboden verteilt und eine Höhe von 2 cm erreichte?

Schüler G. Eichler, Dresden, Kl. 9

Ph7 ■132 Die sowjetische Windkraftmaschine TW8 hat eine maximale Nutzleistung von 4 kW. Sie nutzt 42% der Windenergie aus und treibt eine Wasserpumpe an, die einen Wirkungsgrad von 85% hat.

a) Wieviel Prozent der Windleistung werden insgesamt genutzt?

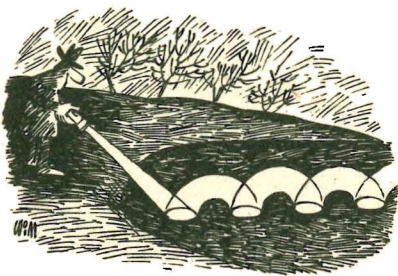
b) Welche Leistung muß der Wind zur Verfügung stellen?

c) Welche Leistung gibt die Wasserpumpe ab, wenn die Anlage mit Höchstleistung arbeitet?

d) Wieviel m^3 Wasser können mit dieser Pumpe im Fall c) in einer Stunde aus 5 m Tiefe gefördert werden?

(1 m^3 Wasser hat ein Gewicht von 1 Mp.)

Ph8 ■133 Um einen stählernen Reifen auf ein Rad aufzuziehen, muß er vorher erwärmt werden. Der Durchmesser des Rades beträgt 75,0 cm und der innere Durchmesser des Reifens 74,6 cm. Um wieviel $^{\circ}C$ muß der Reifen erwärmt werden, damit er auf das Rad paßt? ($\alpha = 0,000013 \frac{1}{K}$)



Ph9 ■134 In einem Haushalt verwendet die Hausfrau ein trichterförmiges Gefäß zum „Abmessen“ von Mehl, Zucker, Zutaten usw. nach Augenmaß. Sie bittet ihre Tochter, die sehr gute schulische Leistungen in Mathematik aufweist, an der Gefäßinnenseite Eichmarken für die halbe Füllung und für eine Füllung von 100 cm^3 anzubringen. Das Gefäß hat einen Durchmesser von $d = 8$ cm und eine Höhe von 16 cm. In welcher Entfernung von der Spitze des Trichters sind die Eichmarken anzubringen?

Dr. W. Lorenz, Leipzig

Ph10/12 ■135 Ein Lastkraftwagen mit einer Gesamtmasse von 10 Tonnen ist eben noch in der Lage, eine Steigung von 25%

mit einer konstanten Geschwindigkeit v zu befahren. Welche Steigung kann dieser LKW mit gleicher Geschwindigkeit noch befahren, wenn er zusätzlich einen Anhänger von 5 Tonnen Gesamtmasse zu ziehen hat? (Reibungskräfte und Fahrwiderstände sollen unberücksichtigt bleiben.)

Ing. A. Körner, Leipzig

Chemie

Ch7 ■105 Während einer Unterrichtsstunde reduzieren sechs Arbeitsgruppen je 0,8 g Kupfer(II)-oxid mit Kohlenstoff.

a) Wieviel Gramm Kupfer werden insgesamt von allen Arbeitsgruppen bei vollständiger Reduktion gebildet?

b) Wieviel Liter Kohlendioxid entweichen dabei aus den TiegeIn in das Zimmer?

Ch8 ■106 Ein moderner großer Kalkschachtofen verarbeitet täglich 160 t 98%igen Kalkstein.

a) Wieviel Tonnen Branntkalk liefert der Schachtofen täglich?

b) Wieviel Kubikmeter Kohlendioxid entstehen bei einer Temperatur der Außenluft von 16 $^{\circ}C$ und einem Barometerstand von 765 Torr?

c) Wieviel Tonnen Löschkalk erhält man aus der gegebenen Menge Kalkstein?

Ch9 ■107 Ein Gemisch aus Magnesiumkarbonat und Magnesiumoxid wird zum Glühen gebracht. Dabei verliert es 12% seiner Masse. Wieviel Gramm der beiden Stoffe sind im Gemisch enthalten?

Ch10/12 ■108 Schwefelsäure besitzt große Bedeutung für die Volkswirtschaft.

a) Wieviel Tonnen Pyrit mit einem Gehalt von 82% FeS_2 müssen zur Herstellung von 3 t 90%iger Schwefelsäure abgeröstet werden?

b) Wieviel Tonnen Kiesabbrand mit einem Gehalt von 75% Eisen(III)-oxid entstehen dabei?

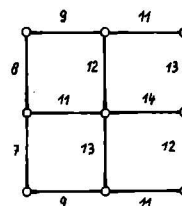
c) In welchem Verhältnis ist die 90%ige Schwefelsäure mit Wasser zu mischen, um eine 15%ige Säure zu erhalten?

d) Wieviel Milliliter der 15%igen Schwefelsäure ($\rho = 1,102 g \cdot ml^{-1}$) braucht man zur Herstellung von 70 g kristallisiertem Zinnsulfat ($ZnSO_4 \cdot 7H_2O$)?



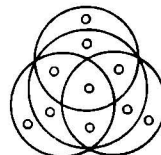
▲1▲ Квадрат цифр.

Впишите в кружочки на рисунке цифры от 1 до 9 так, чтобы сумма цифр в любых двух соседних кружочках равнялась числу, написанному между этими кружочками.



▲2▲ Магические круги.

Расставьте в красные кружки на рисунке числа от 1 до 10 так, чтобы суммы чисел в четырех больших кругах были одинаковыми.



Mrs. Puffem's Cigarettes

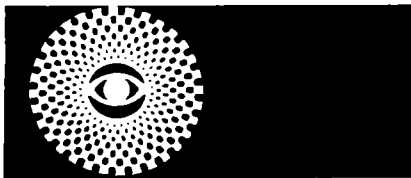
▲3▲ Mrs. Puffem, a heavy smoker for many years, finally decided to stop smoking altogether. "I'll finish the 27 cigarettes I have left," she gasped to herself, "and never smoke another one." It was her practice to smoke exactly two-thirds of each cigarette. It did not take her long to realize that with the aid of some tape she could stick three butts together to make a new cigarette. With the 27 cigarettes on hand, how many cigarettes can she smoke before she gives up?

Get 34

▲4▲ Take these four pieces and rearrange them to make a square so that the sum of each of the four rows and two diagonals is 34.

1	15	5	12	11	6	16	9
8	10	4		14	3		2
							13
							7

▲5▲ Un bassin circulaire est entouré d'une grille placée à 50 cm du bord; la longueur de cette grille est 22 m. Quel est le diamètre du bassin?



ARBEITS- GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Mathematische Schüler- gesellschaft an der Universität Greifswald

Pünktlich um 14 Uhr saßen am Montag, dem 23. August 1982, die ausgewählten Schüler der Klassenstufe 10 der Bezirke Neubrandenburg und Rostock im Hörsaal der Sektion Mathematik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald. Diese Schüler wollen einmal einen Beruf ergreifen, der eng mit der Mathematik verbunden ist. Drei Ferienlehrgänge sollen ihnen den Eingang in das Studium erleichtern und gute Voraussetzungen hierzu schaffen. Prof. Dr. Griepentrog, Direktor der Sektion, begrüßte die Gäste und die Schüler sowie den Prorektor der Universität Prof. Dr. Wegner.

Prof. Dr. Wegner sprach über *Sinn und Bedeutung der Mathematischen Schülergesellschaft* (MSG). Die offizielle Gründung der MSG wurde dann durch starken Beifall der Hörerschaft unterstrichen. Prof. Dr. Terpe, der Vorsitzende der MSG, gab in seinem Vortrag zur Gründungsveranstaltung einen interessanten Überblick über die Entwicklung der Greifswalder Universität und zeigte überzeugend dabei die gesellschaftlichen Zusammenhänge auf.

Die Woche war dann angefüllt mit Vorlesungen und Übungen zum Hauptthema „Einführung in die Gruppentheorie und geometrische Anwendung“ (Dr. Feiste/Dipl.-Math. Kulicke). Diese Veranstaltungen wie auch der Vortrag „Was ist Schaltalgebra?“ (Prof. Dr. Griepentrog) zeigten den Schülern viele mathematisch neue Erkenntnisse und Zusammenhänge auf. Aus dem Freizeitprogramm war sicher die Führung durch die historischen Räume der Universität – Konzilsaal, Aula und Karzer – durch den Archivar, Herrn Herling, der Höhepunkt.

Eine gutbewältigte Klausur über zwei Stunden überzeugte die Schüler, daß sie den Anforderungen der MSG gewachsen sind.

Für den Lehrgang in den Winterferien werden wieder Bewerbungen ausgeschrieben und weitere 25 Schüler (Klassenstufe 9) in die nun bereits bestehende MSG aufgenommen.

H.-J. Kerber

Mathematikolympiaden der Horte des Kreises Bad Langensalza

Der Wettbewerb wird seit etwa 10 Jahren in unserem Kreis durchgeführt. Die Aufgaben werden von erfahrenen Unterstufenlehrern erarbeitet und im Oktober in die Horte gegeben. Dort werden sie in den jeweiligen Gruppen von allen Kindern gelöst. Der beste *Junge Mathematiker* der Gruppe darf dann am Kreisausscheid, der in den Winterferien stattfindet, teilnehmen. Beim Kreisausscheid erhalten die Kinder, getrennt nach Altersstufen, neue Aufgaben mit einem höheren Schwierigkeitsgrad.

Die Auswertung erfolgt gleich im Anschluß. Die Kinder werden in der Zwischenzeit von Mitarbeitern des Pionierhauses betreut. Als Auszeichnung erhalten die drei Erstplatzierten jeder Altersstufe Urkunden und Sachpreise. Des weiteren erhält jeder Teilnehmer ein kleines Erinnerungsgeschenk für die Teilnahme an der Kreisolympiade. Die organisatorische Vorbereitung des Wettbewerbes wird von der Fachberaterin der Horterzieher und einem Mitarbeiter des Pionierhauses übernommen.

Rosemarie Herzog

Aufgaben

Kreisolympiade der Horte 1982

Klasse 4

▲1▲ Wieviel Zentimeter Bindfaden benötigt man für das Verschnüren des abgebildeten Paketes?

Es ist 44 cm lang, 44 cm breit und 12 cm hoch. Für den Knoten benötigt man 20 cm.



▲2▲ Wieviel dreistellige Zahlen lassen sich unter Verwendung der Ziffern 1, 2 und 3 schreiben, wenn jede Ziffer in jeder Zahl nur einmal vorkommen darf?

▲3▲ Wie groß ist die Summe dieser Zahlen?

$$\begin{array}{r} 673\,294 \\ + 631\,852 \\ + 81\,905 \\ + 21\,384 \\ \hline \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 839\,763 \\ - 156\,382 \\ - 421\,860 \\ - 261\,521 \\ \hline \hline \end{array}$$

▲4▲ Rechne um!

$$\begin{array}{ll} 4\,m\,7\,dm = & \text{cm;} \\ 6\,km\,7\,cm = & \text{m;} \end{array} \quad \begin{array}{ll} 26\,t = & \text{kg;} \\ 13\,M\,33\,Pf = & \text{Pf;} \end{array}$$

▲5▲ $25893 \cdot 6;$ $7386 \cdot 4;$

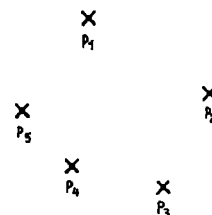
▲6▲ $2709 : 7;$ $1640 : 5;$

Probe!

▲7▲	$a-4$	a	$a+4$
		368 942	
	536 802		
	762 438		
			446 872

▲8▲ Zeichne alle Geraden ein, die durch mindestens 2 Punkte verlaufen!

Wie viele solcher Geraden gibt es?



Einige Knobelaufgaben aus vergangenen Wettbewerben zur Wiederholung von Grundkenntnissen

▲1▲ Zeichne zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$!
a) Trage $\overline{CD}$ an die Strecke $\overline{AB}$ über B hinaus an!

b) Trage $\overline{AB}$ an die Strecke $\overline{CD}$ über D hinaus an!

▲2▲ „Wie alt ist die Eiche?“ fragten die Schüler den Förster.

„Nun überlegt einmal!“ antwortete er.

„Addiert die größte einstellige Zahl, die größte zweistellige Zahl und die größte dreistellige Zahl! Von dieser Summe subtrahiert die kleinste vierstellige Zahl! Dann wißt ihr, wie alt die Eiche ist.“

▲3▲ Zeichne einen Punkt S ! Von S aus zeichne nun 5 Strahlen so, daß du zwei parallele Geraden, die alle fünf Strahlen schneiden, einzeichnen kannst!

▲4▲ Eine LPG verkauft 280 kg Gemüse. Die Hälfte davon sind Möhren. 115 kg sind Weißkohl, der Rest Tomaten. Wieviel kg Tomaten sind es?

▲5▲ Wandle um!

$$\begin{array}{ll} 16000\,m = & \text{km} \\ 370\,cm = & \text{m} \\ 6000\,kg = & \text{t} \\ 2\,m = & \text{dm} \\ 5\,t = & \text{kg} \\ 51\,kg = & \text{g} \end{array}$$

▲6▲ Berechne die Differenz aus dem Achtfachen von 1 000 000 und dem dritten Teil von 6093!

▲7▲ Für welche Zahl y gelten folgende Ungleichungen?

a) $278 + y < 282$

b) $4718 - y > 4711$

c) $1808 + y < 1813$

▲8▲ Jedes Quadrat ist durch eine Ziffer zu ersetzen!

$$\begin{array}{r} 10 : 2 + \square = 9 \\ + 14 : 2 - \square = 3 \\ + \square - \square - 2 = 7 \\ \hline 36 - 7 - \square = 19 \end{array}$$

In freien Stunden · alpha-heiter

Unterhaltungsmathematik international



Kryptogramm

Ersetzt in den nachstehenden Tabellen (Diagrammen) die Buchstaben durch Ziffern derart, daß die dabei entstehenden Zahlen in allen Zeilen und Spalten (dreiziffrige) Quadratzahlen ganzer Zahlen darstellen!

a)

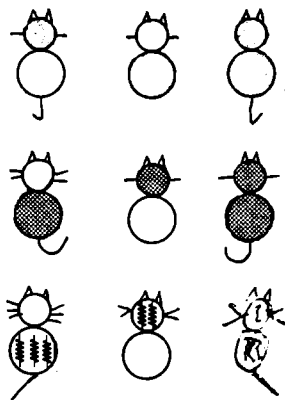
A	B	B
B	C	B
B	B	A

b)

K	L	M
L	N	L
M	L	K

Dr. Jaromir Maláč, Brno, aus: Rhozledy, Prag

Welches Muster fehlt?



Keith Austin,
Universität Sheffield
aus: Math. Spectrum,
Sheffield

Psychologisches Praktikum

Fünf Jungen, 16, 17, 18, 19 und 20 Jahre alt, bringen ihren Mädchen – Lisa, Katja, Mascha, Ljuba und Olga – Blumen: Mimosen, Astern, Nelken, Rosen und Tulpen. Juri, Igor, Nikolai, Michail und Sergej schenkten ihren Altersgefährtinnen Blumen und jeder eine andere Anzahl: 16, 17, 18, 19 bzw. 20, wobei aber jeder Strauß aus Blumen nur einer Art besteht. Finde heraus, wer wem wieviel Blumen überreicht und was für welche, wenn wir dir verraten:

1. daß Igor mehr Jahre zählt als der Strauß Mimosen;
2. daß Lisa älter als Mascha ist, daß sie keine Mimosen, Nelken oder Rosen bekommen hat und daß die Zahl ihrer Lebensjahre kleiner als die der Nelken ist;
3. daß Sergej weniger Lebensjahre zählt als der Tulpenstrauß Blumen;
4. daß Mischa Astern oder Mimosen gebracht hat und jünger als Mascha ist;
5. daß Kolja jünger als Katja ist und er mehr Jahre zählt als der Strauß Astern;
6. daß sich das Alter der vier Mädchen von der Zahl der jeder überreichten Blumen um zwei unterscheidet;
7. daß Olga jünger als Juri ist, daß sie keine Rosen, Tulpen oder Astern bekommen hat und daß sie mehr Jahre zählt als der Rosenstrauß Blumen;
8. daß Maschas Alter größer ist als die Zahl der Tulpen und der Mimosen.

aus: Nauka i Shisn, Moskau

Etwas Sonderbares

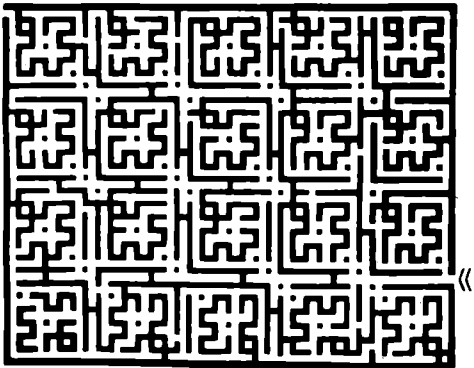
Betrachte die zwei Zahlensäulen recht sorgfältig! Wenn man sie addiert, welches Ergebnis ist wohl größer?
Schätze erst, und rechne dann! Die Antwort ist recht sonderbar.

987654321	123456789
087654321	123456780
007654321	123456700
000654321	123456000
000054321	123450000
000004321	123400000
000000321	123000000
000000021	120000000
+000000001	+100000000

aus: Scholastic Math. Magazine

Labyrinth

aus: Mathematica List, Beograd



Würfelnetze

Es gibt genau 11 wesentlich verschiedene Netze, aus denen man alle überhaupt denkbaren Netze durch Drehung oder Spiegelung gewinnen kann. Bild 1 zeigt den ganzen Würfel, während die restlichen Bilder alle seine verschiedenen Netze darstellen. Auf den Würfel-seiten stehen die Ziffern 1 bis 6 so, wie wir es Bild 1 und 2 entnehmen können.

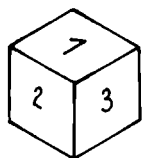


Bild 1

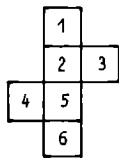


Bild 2

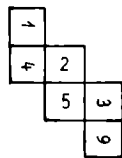


Bild 3

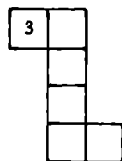
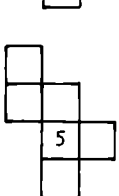
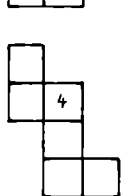
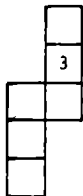
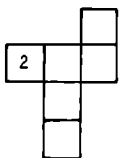
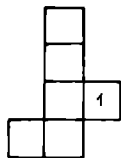
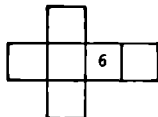
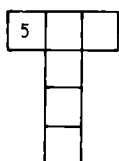
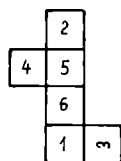


Bild 4



Greifen wir uns jetzt irgendein anderes Netz heraus, dann stehen die Ziffern in anderer Anordnung und auch noch verdreht in den Feldern. Ein Beispiel zeigt uns Bild 3. Eure Aufgabe besteht nun darin, die Ziffern, von denen jeweils eine bereits vorgedruckt ist, so in die Felder der verschiedenen Netze zu schreiben, daß es sich immer um ein Netz unseres beschrifteten Würfels aus Bild 1 handelt.

aus: *Quant*, sowjetische Schülerzeitschrift, Moskau

Sind alle vier Bilder gleich?

Nein! Auf dem 2., 3. und 4. Bild fehlen je vier Details. Welche?

aus: *Füles*, Budapest



Knifflige Frage

Die dezimale Multiplikation

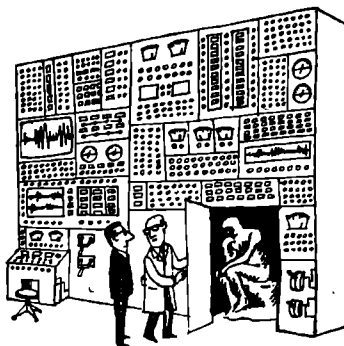
$$\text{MIT} \cdot \text{ZA} = \text{HLEN}$$

soll mit neun verschiedenen Ziffern M, I, T, Z, A, H, L, E, N aus 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 durchgeführt werden. Von letzteren muß also eine fortbleiben. Darf das jede sein?

Dr. I. Paasche, aus: *Kosmos*, Stuttgart

Denker

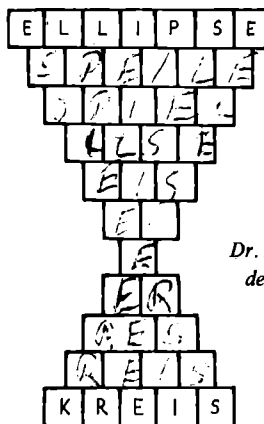
Tibor Kajan, „Apropos“, Budapest



Von der Ellipse zum Kreis

Rätsel-Metamorphose: Die gesuchten Zwischenbegriffe entstehen entweder durch Streichen oder Hinzufügen eines Buchstabens und durch anschließende geeignete Permutation der derart entstandenen Buchstabenmenge. Die Begriffe, die hier nicht in der Reihenfolge der Rätselfigur angegeben sind, haben folgende Bedeutung:

Fluß im Harz / tierisches Produkt / Basis des natürlichen Logarithmus / Getreideart / chem. Element, Ordnungszahl 68 (Formelz.) / unterhaltsame Beschäftigung / Sache, Ding (lat.) / Holzstäbchen (Pl.) / Wasser in festem Zustand.



Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig

Die magische Pyramide

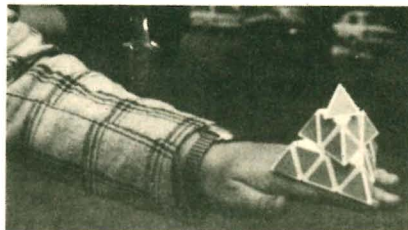


Bild 1

Wer kennt ihn nicht, den ungarischen magischen Würfel, den *Rubik's Cube*? Vor etwa vier Jahren begann sein Siegeszug um die Welt. Nicht nur mathematisch Interessierte sind von ihm fasziniert und kommen nicht mehr von ihm los. Die Schar der Würfel-Bezwinger wächst und wächst, und es ist kein Ende der Begeisterung abzusehen. Schon geht es darum, ihn in minimaler Zeit aus einer verdrehten Stellung zu ordnen. *Rubik's Cube* wurde bereits als die Erfindung des Jahrhunderts auf dem Gebiet der Unterhaltungsmathematik bezeichnet. Das sicher nicht nur, weil er einen solchen Begeisterungssturm hervorgerufen hat, sondern auch weil er der Anfang einer ganzen Welle von logisch-kombinatorischen Spielen war. So gibt es, ähnlich dem *Rubik's Cube*, die magische Pyramide, das magische Domino und das magische Prisma, aber auch andere, nicht weniger interessante Spiele, wie den Turm von Babylon und die Teufelstonne. Viele weitere Spiele werden sicher bald folgen. Sicher kennen bereits viele *alpha*-Leser einige von diesen Spielen. Für alle diese Knebelien

benötigt man zum Bezingen, d. h. zum Zurückdrehen in die Ausgangsstellung, einen Algorithmus, d. h. ein Verfahren, nach dem man schrittweise zum Ziel kommt.

Das eigentlich interessanteste, aber auch schwierigste Problem ist, einen solchen Algorithmus zu finden, also sich selbst ein Verfahren zu erarbeiten, mit dem man das Ziel erreichen kann. So besagt die Erfahrung des englischen „Würfelmeisters“ Prof. David Singmaster, daß selbst Mathematiker durchschnittlich etwa zwei Wochen brauchen, um einen solchen Algorithmus zu finden. Damit wird vielleicht deutlich, wie kompliziert der „*Rubik's Cube*“ ist. Für einen „Anfänger“ ist es oft schon nicht ganz einfach, eine Methode zu finden, wie man Drehungen zweckmäßig aufschreibt.

Mit diesem Artikel wollen wir eine Reihe beginnen, in der wir verschiedene dieser Spiele vorstellen werden. Neben einigen allgemeinen Bemerkungen wollen wir jeweils auch einen Algorithmus beschreiben, und zwar wollen wir versuchen klarzumachen, wie man selbst so einen Algorithmus finden kann.

Wir wollen mit der *Magischen Pyramide* beginnen.

Es handelt sich hier um die „kleine Schwester“ des *Rubik's Cube*. Ähnlich zum magischen Würfel können wir die 4 kleinen Spitzen drehen und jeweils entlang der Ebene parallel zur Grundfläche. Also hat man insgesamt 8 verschiedene Drehmöglichkeiten; sogar noch mehr als beim Würfel (6). Trotzdem ist die magische Pyramide wesentlich einfacher als der Würfel, es gibt hier nur rund 75 Millionen verschiedene Möglichkeiten, die Pyramide zu verdrehen, wobei es beim Würfel rund $43 \text{ Millionen} \times \text{Millionen} \times \text{Millionen}$ sind.

Aber auch die Pyramide will erst bezwungen sein!

Überlegen wir uns zunächst, wie wir uns Drehungen aufschreiben wollen. Wir wollen die Pyramide immer so halten, daß wir auf eine Seite schauen und dieses Dreieck „auf einer Seite steht“.

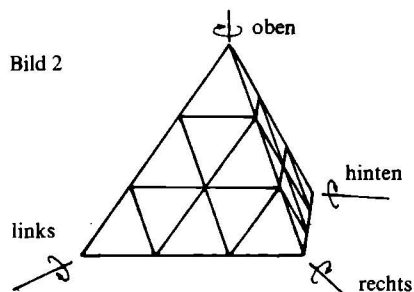


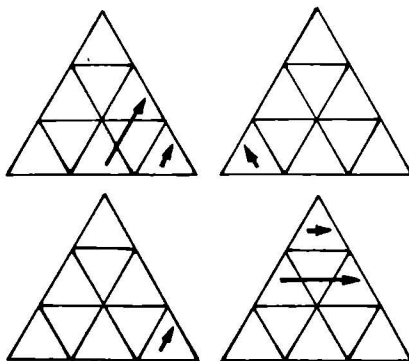
Bild 2

Die Drehachsen bezeichnen wir nun mit rechts, links, oben und hinten. Drehen wir nur die Spitze um die Drehachse rechts um 120° rechts herum (siehe Bild), bezeichnen wir diese Drehung mit r . Drehen wir diese Spitze um 120° nach links um die Drehachse rechts, so schreiben wir r^{-1} (oder, was dasselbe ist, r^2 , d. h. 240° nach rechts). Analog schreiben wir R und R^{-1} , wenn wir die Spitze und gleichzeitig die angrenzende Schicht drehen.

Die Drehungen um die anderen Drehachsen werden in analoger Weise erklärt. Man achte immer auf die Drehrichtung!

Haben wir zum Beispiel die Operation $Rl^{-1}r0^{-1}$, so sind folgende Drehungen (in dieser Reihenfolge) auszuführen:

Bild 3



Ernö Rubik,
der Erfinder
des
Zauberwürfels



Jetzt wollen wir uns die Pyramide etwas genauer ansehen. Wir sehen, daß es 3 Sorten von Steinen gibt.

1. Die 4 Spitzen. Diese kleinen Tetraeder haben 3 farbige Flächen.

2. Die 4 Basissteine. Das sind die Teile, an denen die Spitzen angrenzen. Es sind Teile (Oktaeder), die auch 3 gefärbte Flächen haben.

3. Die 6 Mittelsteine. Sie haben zwei gefärbte Flächen. Bei beliebigen Drehungen bleiben Spitzen und Basissteine auf ihren Plätzen, während die Mittelsteine ihre Plätze austauschen können.

Nach diesen Vorbemerkungen können wir zum Lösungsalgorithmus kommen. Es ist naheliegend, das Ziel in 3 Etappen erreichen zu wollen. Zunächst ordnen wir die Spitzen, dann die Basissteine und zum Schluß die Mittelsteine.

1. Spitzen. Die Spitzen sind völlig harmlos, da sie nur mit den Basissteinen verbunden sind. Wir drehen die Spitzen so, daß die Farben der benachbarten Flächen von Spitzen und Basissteinen übereinstimmen.

Im folgenden drehen wir nur noch Basissteine und Spitzen gemeinsam. Dadurch stimmen die entsprechenden Farben von Basissteinen und Spitzen immer überein, d. h., wir benutzen nur Drehungen, die wir mit großen Buchstaben bezeichnen.

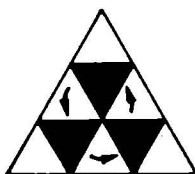
2. Basissteine. Wir überlegen uns jetzt, welche Farbe die Frontfläche haben muß. Das ist nicht beliebig, wie man annehmen könnte, sondern diese Farbe ist eindeutig bestimmt. Die Frontfläche kann natürlich nur die Farbe haben, die an den drei Spitzen, die auch in der Frontfläche liegen, vorkommen. Wir schauen uns die drei Spitzen an und ermitteln die Farbe, die sie gemeinsam haben. Ist es etwa blau, so drehen wir die entsprechenden Basissteine und Spitzen, so daß ihre Flächen, die in der Frontfläche der gesamten Pyramide liegen, sämtlich blau sind. Analog drehen wir den hinteren Basisstein mit Spitze. Auch dieser Schritt war recht einfach, und auf die Mittelsteine sind wir bereits fertig.

3. Mittelsteine. Jetzt beginnt das Schwierigste. Wie drehen wir die Mittelsteine auf ihre Plätze, ohne das Erreichte wieder zu zerstören?

Wir versuchen Operationen zu finden, die aus mehreren Einzeldrehungen zusammengesetzt sind, und zwar so, daß mit R auch R^{-1} oder auch dreimal R auftritt. Dieses muß natürlich für alle Drehachsen gelten. Damit bleibt gewährleistet, daß die Basissteine und Spitzen nach Ausführung dieser Operationen wieder ihre Lage einnehmen. Zum Beispiel interessieren wir uns für Operationen wie $R0^{-1}R^{-1}0$ oder $R0R0R0$ (oder $(R0)^3$ abkürzend geschrieben).

In der Tat ist die erste Operation sehr wichtig. Wir sehen, daß die drei Mittelsteine, die eine Fläche in der Frontfläche der Pyramide haben, ihre Plätze zyklisch vertauschen.

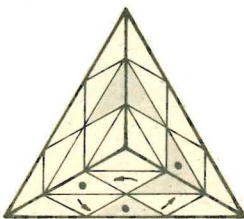
Bild 4



Will man eine (beliebige) Operation umgekehrt ausführen, so muß man die Reihenfolge der einzelnen Drehungen umdrehen und jeweils die Drehrichtung. Die Umkehrung von $R0^{-1}R^{-1}0$ ist $0^{-1}R0R^{-1}$.

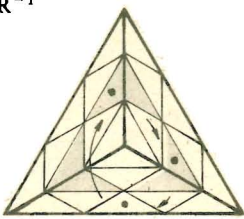
Es ist zweckmäßig, auch gleich zu beachten, in welcher Weise die Mittelsteine übergehen. Um das klarzumachen, betrachten wir die Pyramide von oben. Man sieht dann, wohin die einzelnen Flächen der Mittelsteine gedreht werden (man beachte den Punkt!). $R0^{-1}R^{-1}0$

Bild 5



Genau genommen reicht diese Operation bereits aus, die gesamte Pyramide wieder in die Ausgangsstellung zurückzudrehen. Will man beispielsweise folgende Vertauschung $0R0^{-1}R^{-1}$

Bild 6

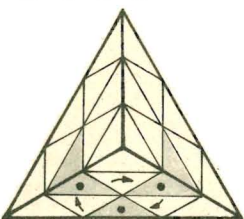


erreichen, so führt man zunächst 0 aus und erhält die Situation wie oben, dann $R0^{-1}R^{-1}0$ und anschließend wieder 0^{-1} . Führt man diese sechs Drehungen hintereinander aus, so merkt man, daß die letzten beiden Drehungen sich gerade wieder aufheben 00^{-1} ; wir haben also nur $0R0^{-1}R^{-1}$ auszuführen.

Wir wollen jetzt noch drei recht gute Operationen anfügen.

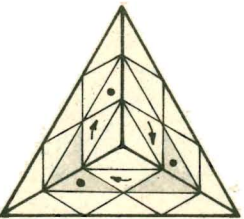
$LR^{-1}L^{-1}R^{-1}0^{-1}R^{-1}0$

Bild 7



$R0^{-1}R^{-1}0^{-1}R0^{-1}R^{-1}$

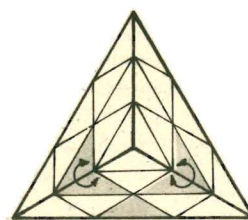
Bild 8



Als letzte Operation wollen wir noch eine angeben, die es uns erlaubt, Mittelsteine auf ihren Plätzen zu drehen.

$LR^{-1}L^{-1}R0^{-1}R0R^{-1}$

Bild 9



Durch systematisches Vorgehen und etwas Übung wird es jetzt sicher nicht sehr schwierig sein, das Ziel zu erreichen. Mit etwas mehr Übung wird es euch bald unter 1 Minute gelingen. Zwei Bemerkungen sind noch wichtig. Euch wird aufgefallen sein, daß wir nur jeweils drei Mittelsteine zyklisch tauschen können und nicht nur zwei und auch nur zwei Mittelsteine auf ihren Plätzen drehen können und nicht nur einen alleine. Das liegt aber nicht an unserem Unvermögen, sondern an der Pyramide. Man kann beweisen, daß es unmöglich ist, nur zwei Mittelsteine zu tauschen oder einen auf seinen Platz zu drehen (gerade Permutationen).

Man kann sich natürlich jetzt auch einen größeren Katalog von Operationen anlegen und bekommt dann für spezielle Situationen günstige Algorithmenschritte. Zum Beispiel liefert die erwähnte Operation $(R0)^3$ einen 5er Zyklus von Mittelsteinen-Vertauschungen. Für interessante neue Operationen, Fragen oder Hinweise ist der Autor stets dankbar.

H.-D. Gronau

Spiel, Aufgabe oder Sport?

Die Meisterschaft erinnerte stark an die Wettkämpfe der Gewichtheber – die Halle, das Podest, hinter welchem eine große Tafel stand, die Teilnehmer, die sich mit ihren Kräften (oder ihren Ideen?) vor ihrem Auftritt vor Richtern und Zuschauern versammelt hatten. Nur anstelle der Gewichte war auf dem Podium ein kleiner Tisch mit einem elektronischen Zeitnehmer aufgestellt, die Tafel zeigte keine Kilogramme an, sondern Sekunden, anstatt des Metallklanges herrschte von Zeit zu Zeit leises Knarren, ja, und die „Sportler“ selbst zeichneten sich nicht durch den kräftigen Körperbau der Schwerathleten aus.

Hier, in Budapest, fand am 5. und 6. Juni 1982 die erste Weltmeisterschaft mit dem Zauberwürfel Rubiks statt. Zu ihr kamen Meister aus 19 Ländern von drei Kontinenten – hauptsächlich Schüler und Mathematikstudenten.

Die Wettkämpfe verliefen folgendermaßen: Der Teilnehmer, der an der Reihe war, nahm vor den Augen der Zuschauer einen Würfel aus dem Köfferchen, studierte ihn 15 Sekunden lang. Dann hatte er, wie ein Turner, noch einige Sekunden lang Zeit, um im Geiste die Kombinationen zu überdenken. Und danach demonstrierte er schon seinen Algorithmus und natürlich seine Fingerfertigkeit. Es wurden drei Serien von Versuchen durchgeführt; ins Ergebnis ging die beste Zeit ein. Auf die Einhaltung der Regeln achtete eine Jury, deren Vorsitzender der Erfinder des Würfels, Professor E. Rubik, selbst war.

Die Resultate, die die „Großmeister des Würfels“ erzielten, waren verblüffend: Sogar die schlechteste Zeit lag nur wenig über 55 Sekunden. (Zum Vergleich sagen wir, daß ein

Untrainierter, der den Würfel kennt und sich der Niederschrift des Algorithmus bedient, ungefähr zwei Stunden benötigt.)

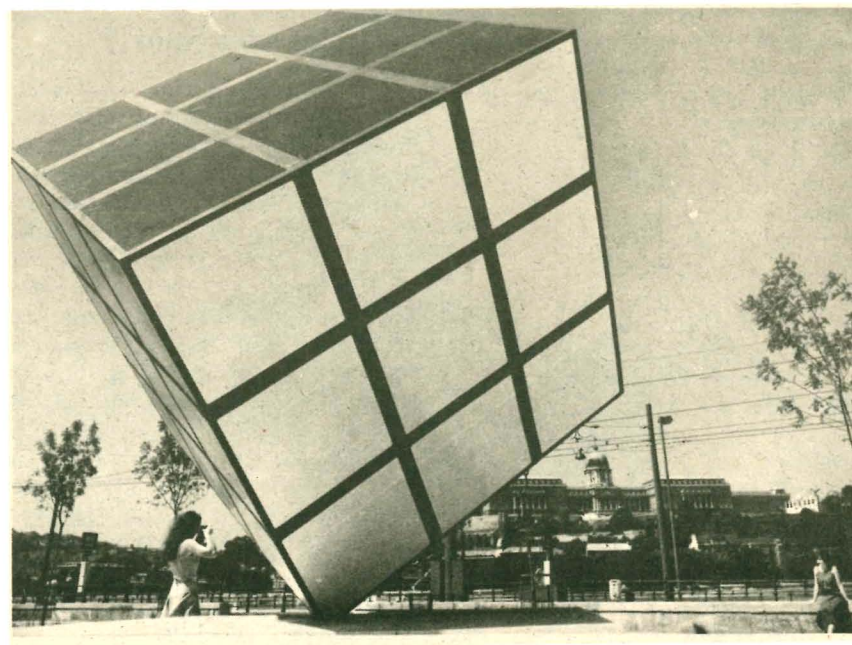
Es ging auch nicht ohne Zwischenfall ab: Der Meister aus Finnland war so in Eile, daß er nacheinander zwei Würfel zerbrach. Den 1. Platz belegte der sechzehnjährige Amerikaner Min Tai. Seine Zeit – 22,95 Sekunden! Was ist nun also der „Zauberwürfel“ – ein Spiel, eine mathematische Aufgabe oder ... eine neue Sportart?

Aus der sowj. math. Schülerzeitschrift „Quant“ (9/82), übersetzt und mitgeteilt von der eifrigen alpha-Leserin Petra Winter, Nünchritz, z. Zt. Studentin an der ABF Halle



Die Landesmeister von 19 Staaten, welche sich zur 1. Weltmeisterschaft einfanden.

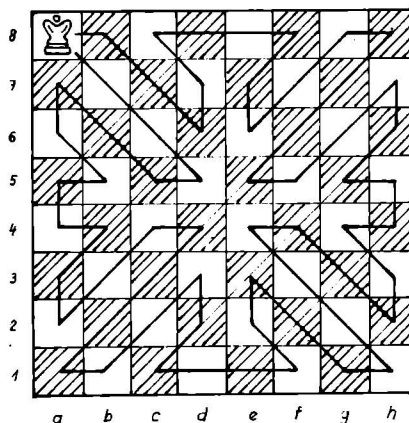
Ein großer Rubik-Würfel lenkt die Aufmerksamkeit der Spaziergänger am Ufer der Donau auf die stattgefundene Weltmeisterschaft.



Lösungen



Lösung zu: Figurenzüge über 64 Felder



Lösungen zu: Unsere Sprachecke

▲ 1 ▲ Zahlenquadrat

Schreibt die Zahlen von 1 bis 9 so in die Kreise in der Zeichnung, daß die Summe der Zahlen in zwei beliebigen benachbarten Kreisen gleich der zwischen diesen Kreisen stehenden Zahl ist!

Lösung:

2	7	4
6	5	9
1	8	3

Die Knochelei durch Probieren zu lösen, ist ermüdend. Die Lösung ist erstaunlich einfach: Wir ermitteln die Summe der Zahlen, die vier sich nicht überschneidenden Paaren von Kreisen entsprechen, und subtrahieren sie von 45 ($1+2+\dots+9=45$). Das Resultat ist die Zahl, die in den neunten (nicht in einem Paar erfaßten) Kreis einzusetzen ist.

▲ 2 ▲ Magische Kreise

Schreibt die Zahlen von 1 bis 10 so in die kleinen Kreise in der Zeichnung, daß die Summen der Zahlen in den vier großen Kreisen alle gleich sind!

Lösung:

8
3
6 4
7
1 2
9 5 10

Es ist auch eine andere Lösung möglich.

Die Zigaretten der Frau Puffem

▲ 3 ▲ Frau Puffem, viele Jahre lang eine starke Raucherin, entschloß sich, das Rauchen endlich aufzugeben. „Ich werde nur noch meine restlichen 27 Zigaretten verbrauchen“, versprach sie sich, „und niemals wieder rauchen.“ Es war ihre Gewohnheit, genau $\frac{2}{3}$ jeder Zigarette zu rauchen, und sie erkannte nun, daß sie mit Hilfe von Zigarettenpapier 3 Stummel zu einer neuen Zigarette zusammenfügen konnte.

Wieviele Zigaretten, einschließlich der 27 vorhandenen, konnte sie noch rauchen, bevor sie damit aufhörte?

$$\text{Lösung: } 27 \cdot \frac{1}{3} = 9; 9 \cdot \frac{1}{3} = 3; 3 \cdot \frac{1}{3} = 1;$$

$$27 + 9 + 3 + 1 = 40.$$

Frau Puffem konnte noch 40 Zigaretten rauchen.

Ergänze zu 34!

▲ 4 ▲ Übertrage die folgenden 4 Figuren maßstabgerecht auf ein Blatt Zeichenpapier, schneide sie aus, und lege sie so zusammen, daß ein Quadrat entsteht! Die Summe jeder Zeile, Spalte und Diagonalen soll 34 betragen.

1	11	6	16
8	14	3	9
15	5	12	2
10	4	13	7

▲ 5 ▲ Ein rundes Bassin wird von einem Gitter umgeben, das 50 cm vom Rand entfernt angebracht ist; die Länge dieses Gitters beträgt 22 m. Wie groß ist der Durchmesser des Bassins?

Lösung: Der Radius des äußeren Kreises ist $r = u : 2\pi = 22 \text{ m} : 6,28 \approx 3,5 \text{ m}$. Dann ist der Radius des Bassins $3,5 \text{ m} - 0,5 \text{ m} = 3 \text{ m}$ und der Durchmesser $3 \text{ m} \cdot 2 = 6 \text{ m}$.

Lösungen zu: Gute Grundkenntnisse gesucht – auch ein wenig Überlegung

Klasse 4

▲ 1 ▲ Zur Erarbeitung der Lösung sei die folgende Tabelle gewählt. Zunächst werden die angegebenen Bedingungen eingetragen. Dann wird ergänzt, und man erhält schließlich:

	Paris	Marseille	Lyon	Toulouse
Claude	nein	ja	nein	nein
Eddy	nein	nein	ja	nein
Philippe	nein	nein	nein	ja
Jacques	ja	nein	nein	nein

Die Auflösung beginnt bei Philippe, geht über Eddy, danach zu Claude, und schließlich endet sie bei Jacques. Marseille ist die einzige der vier Städte, die am Meer liegt.

▲ 2 ▲ Die Gesamtkosten betragen 332 Francs.

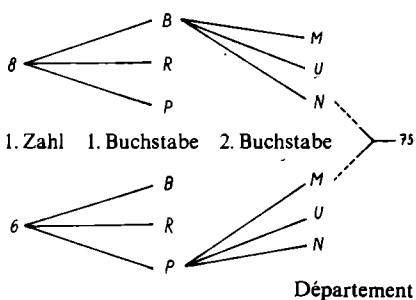
▲ 3 ▲ Für die Abstände auf der Karte wurden gemessen: Verdun–Metz: 63 mm; Metz–Pont-a-Mousson: 27 mm; Nancy–Void: 44 mm. Ein Millimeter auf der Karte entspricht einem Kilometer in der Natur. Damit erhalten wir für die wirklichen Abstände: Verdun–Metz: 63 km; Metz–Pont-a-Mousson: 27 km; Nancy–Void: 44 km.

▲ 4 ▲ ohne Lösungsangabe

Klasse 5

▲ 1 ▲ Überlegen wir uns zunächst eine Möglichkeit, die aus den Zeugenaussagen folgt: 8 R M 75

Um alle Möglichkeiten zu erfassen, entwickeln wir das folgende Schema. Vervollständige es!



Betrachten wir jeweils die Anzahl der verschiedenen Zeichen pro Position, erhalten wir:

2 bzw. 3 bzw. 3 Zeichen. Damit muß Inspektor Dupond $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ verschiedene Autos ermitteln.

▲ 2 ▲ 1. Vorstellung: 222 Zuschauer, 2. Vorstellung: 160 Zuschauer, 3. Vorstellung: 60 Zuschauer, Gesamtzahl: 442 Zuschauer.

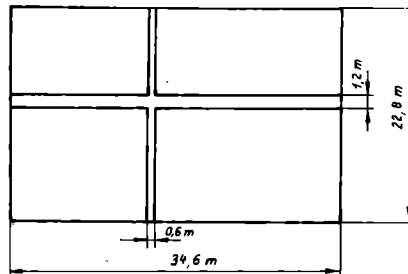
▲ 3 ▲ Man trägt die gegebenen Werte in die Tabelle ein, ergänzt und erhält folgende Resultate:

	Start	Pause	Ziel
Jean	<u>3972</u>	4001	<u>4044</u>
Pierre	958	<u>987</u>	<u>1030</u>
Dominique	5134	5163	<u>5206</u>

Die gegebenen Werte sind unterstrichen.

▲ 4 ▲ Francis muß täglich 10 Tropfen nehmen. Damit verbraucht er ungefähr $\frac{1}{2} \text{ cm}^3$ täglich. Daraus folgt, daß Francis in ungefähr 20 Tagen eine volle Flasche geleert hat.

▲ 5 ▲ Man beachte zuerst, daß die Fläche der Wegkreuzung nicht zweifach in die Rechnung eingeht. Dann ergibt die Rechnung $54,48 \text{ m}^2$. Das Ergebnis wird sinnvoll gerundet, und man gibt $54,5 \text{ m}^2$ zu bestreuernde Fläche an.



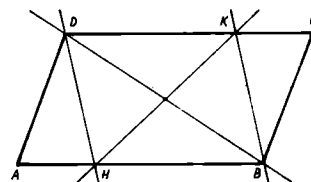
Klasse 6

▲ 1 ▲ Da der Wein so abgefüllt wird, daß die gleiche Zahl Flaschen von jeder Art erhalten wird, betrachtet man zunächst ein Paar Flaschen (d. h. je eine Flasche jeder Art). Ein Paar enthält insgesamt 110,5 cl Wein. Wegen des Restes von 25 dl wurden vom Wirt 110,5 l abgefüllt, das sind genau 100 Paare. Also wurden 100 Flaschen jeder Sorte abgefüllt.

▲ 2 ▲ Angenommen, es ist unter den gegebenen Bedingungen eine Viertelstunde vergangen. Dann wurde die Badewanne in diesen $10 + 5 \text{ Minuten} \cdot \frac{1}{2}$ mal gefüllt und 1 mal geleert. Also ist sie halbvoll. Dann muß sie nach 30 Minuten voll sein.

▲ 3 ▲ Da $ABCD$ ein Parallelogramm ist, gilt: $DC \parallel AB$. Damit gilt auch $DK \parallel HB$. Nach Voraussetzung ist auch $DH \parallel KB$. Also ist auch $HBKD$ ein Parallelogramm.

DB ist Diagonale sowohl im Parallelogramm $ABCD$ als auch im Parallelogramm $HBKD$. Da sich Diagonalen in jedem Parallelogramm halbieren, haben AC , BD und HK den gleichen Mittelpunkt.



Zutat	Preis
$\frac{3}{4} \text{ kg}$ Mehl	1,80 Francs
6 Eier	2,70 Francs
$\frac{1}{4} \text{ kg}$ Butter	4,40 Francs
150 g Zucker	0,45 Francs
8 cl Rum	2,00 Francs
Backpulver	0,25 Franc

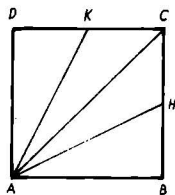
Gesamtkosten 11,60 Francs

Der Kuchen kostet 11,60 Francs.

▲ 5 ▲ Weil $BH = HC$ und AB Höhe der Dreiecke ABH und AHC ist, haben in beiden Dreiecken die Grundlinien gleiche Längen und auch die Höhen sind längengleich. Damit sind ABH und AHC flächengleich. Ebenso schließt man für ACK und AKD . Da $ABCD$ ein Quadrat ist, gilt schließlich die Flächengleichheit aller vier Dreiecke. Flächenberechnung:

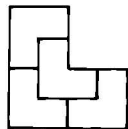
$$F = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{27 \cdot 54}{2} = 27^2 = 729$$

Die Fläche beträgt 729 mm².



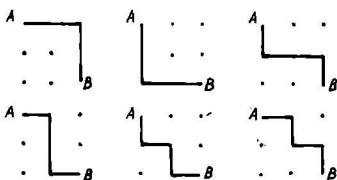
Lösungen zu: Geometrische Plaudereien

▲ 1 ▲



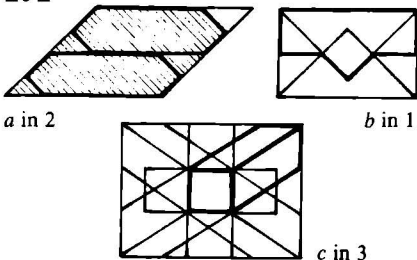
▲ 2 ▲ c)

▲ 3 ▲ 6 verschiedene Wege



▲ 4 ▲ 5 Quadrate, 21 Rechtecke
(mit Quadraten), 24 Dreiecke

▲ 5 ▲



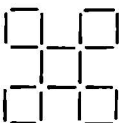
▲ 6 ▲ a)



b)

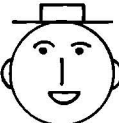


▲ 7 ▲



▲ 8 ▲ a/keine; b/8; c/4; d/2

▲ 9 ▲



▲ 10 ▲ a, b, d

▲ 11 ▲ z. T. nämlich: a in 4; b in 3; c kommt nicht vor.

▲ 12 ▲ 1c, 2a, 2b, 3a, 3b, 4b, 4c

Lösungen zu:

In freien Stunden · alpha-heiter

Kryptogramm

Aus Zahlentafeln stellen wir fest:

1. Die Quadratzahlen zu 12 und 21 – also 144 und 441 – haben an der Zehnerstelle die

Ziffer 4; sie entsprechen daher den Zeilen 1 und 3 im Fall a).

2. Nur drei dreiziffrige Zahlen, die Quadratzahlen ganzer Zahlen sind, haben an der Einer- und Hunderterstelle gleiche Ziffern $121 = 11^2$, $484 = 22^2$, $676 = 26^2$.

Die Zahl 121 entspricht aber nicht dem Kryptogramm b). Der Buchstabe L kann nicht die Zahl 1 bedeuten, weil es keine dreiziffrige Quadratzahl (ganzer Zahlen) gibt, deren Zehnerstelle die Ziffer 1 ist.

Für die zweite Zeile der Tabelle a) paßt offenbar die Zahl 484. Für die zweite Zeile der Tabelle b) bleibt nur die Zahl $676 = 26^2$, und für die Spalten bleiben die Zahlen $169 = 13^2$ und $961 = 31^2$.

Damit ergeben sich die Lösungen:

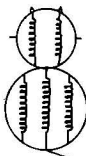
a) 144 b) 161

484 676

441 961

(übersetzt von O. Langer, Döbeln)

Welches Muster fehlt?



Psychologisches Praktikum

1. Serjoscha und Ljuba sind 16. Ljuba bekam 18 Astern. 2. Mischa und Olga sind 17. Olga hat 19 Mimosen geschenkt bekommen. 3. Juri und Mascha sind 18. Mascha erhielt 16 Rosen. 4. Kolja und Lisa sind 19. Lisa wurden 17 Tulpen geschenkt. 5. Igor und Katja sind 20. Katja bekam 20 Nelken.

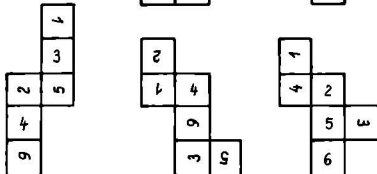
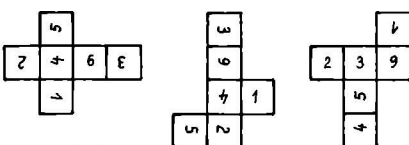
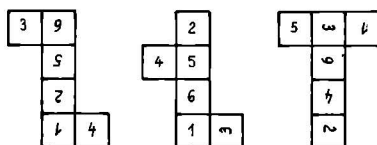
Etwas Sonderbares

Beide Ergebnisse sind gleich:

1083676269.

Würfelnetze

(übersetzt von Dr. R. Hofmann, Leipzig)



Sind alle vier Bilder gleich?

2. Bild: Tribünenstreppe; Schirm der Mütze des Jockeys darunter; Punkt am Hals des Pferdes; Strich unter den Buchstaben der Tafel oben rechts. 3. Bild: Teil der Decke des

Pferdes im Hintergrund; Bauchgurt des Pferdes links; Zügelteil des Pferdes vorn; hinterer Teil des Peitschenstiels des Jockeys vorn. 4. Bild: Die 1. Fahne von links oben; die 6 auf der Satteldecke des linken Pferdes; Hufeisen des Pferdes vorn; Schwanz des Pferdes hinten.

Knifflige Frage

Aus einer Vielzahl von Lösungen bieten wir die folgenden (fehlende Ziffern davor in Klammern):

(0) $483 \cdot 12 = 5796$ (5) $409 \cdot 18 = 7362$

(1) $092 \cdot 53 = 4876$ (6) $253 \cdot 19 = 4807$

(2) $453 \cdot 19 = 8607$ (7) $326 \cdot 15 = 4890$

(3) $168 \cdot 54 = 9072$ (8) $154 \cdot 63 = 9702$

(4) $392 \cdot 18 = 7056$ (9) $406 \cdot 13 = 5278$

Von der Ellipse zum Kreis

Ellipse, Speile, Spiel, Ilse, Eis, Ei, e, Er, Res, Reis, Kreis.

Lösungen zu: Mathematik macht Freude, Heft 6/82

1 $45307 + 213 + 47267 = 92787$

2 $5 \cdot 2697 = 13485$ oder $5 \cdot 9712 = 48560$

3 $5 \cdot 18467 = 92335$

4 $961 + 42183 + 7218 = 50362$ oder

$941 + 52183 + 7218 = 60342$

5 $76092 + 76390 = 152482$ oder

$79068 + 79360 = 158428$

6 $1212 + 2121 = 3333$

7 $9 : 3 = 3$; $7 \cdot 2 = 14$; $7 + 10 = 17$

8 $281 \cdot 332 = 93292$

9 $10 + 12 = 22$; $12 : 6 = 2$; $22 : 2 = 11$

10 $41 + 7 = 48$; $19 - 2 = 17$; $22 + 9 = 31$

11 $714 + 734 = 1448$ oder $816 + 846 = 1662$

12 $289 : 17 = 17$

13 $\sqrt{50625} = 225$

Lösung zu:

Wägaufgabe des Leonardo Fibonacci,

Heft 6/82

Es dürfen beide Wagschalen mit Wägesteinen belastet werden. Dies bedeutet, daß auch Wägestücke subtrahiert werden können. Die Frage ist somit: Welche vier Zahlen a, b, c, d sind so beschaffen, daß jede natürliche Zahl bis 40 teils durch Addition, teils durch Subtraktion wenigstens einer und höchstens vier dieser vier Zahlen erhalten werden kann?

Die Zahlen $a = 1$, $b = 3$, $c = 9$, $d = 27$ leisten das Verlangte!

In der Tat: Mit den vier Potenzen von 3: 1, 3, 9, 27 kann man alle Zahlen von 1 bis 40 in der gewünschten Form darstellen:

$1 = 1$

$2 = 3 - 1$

$3 = 3$

$4 = 3 + 1$

$5 = 9 - 3 - 1$

$40 = 27 + 9 + 3 + 1$

Allgemeiner gilt übrigens, daß man mit Hilfe der addierten oder subtrahierten Potenzen der 3:

$1, 3, 9, 27, 81, \dots, 3^n$

alle Zahlen von 1 bis $\frac{3^{n+1} - 1}{2}$ darstellen kann;

also mit 1, 3, 9, $27=3^3$ alle Zahlen von 1 bis $40=\frac{3^4-1}{2}$,
mit 1, 3, 9, 27, $81=3^4$ alle Zahlen von 1 bis $121=\frac{3^5-1}{2}$,
mit 1, 3, 9, 27, 81, $243=3^5$ alle Zahlen von 1 bis $364=\frac{3^6-1}{2}$ usw.

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. Georg Pólya, Heft 6/82

▲ 2265 ▲ a) a bezeichne das Alter des Kapitäns, b die Länge seines Bootes und k die Anzahl seiner Kinder. Es gilt: a, b, k sind natürliche Zahlen größer als 1, und es ist $abk = 32118$. Wir zerlegen diese Zahl in Primfaktoren, wobei wir drei Faktoren benötigen. Es gibt folgende Möglichkeiten:
 $32118 = 6 \cdot 53 \cdot 101 = 3 \cdot 101 \cdot 106 = 3 \cdot 53 \cdot 202 = 2 \cdot 101 \cdot 159 = 2 \cdot 53 \cdot 303 = 2 \cdot 3 \cdot 5353$. Es verbleibt genau die Möglichkeit $a=53$, $b=101$, $c=6$.

b)	Brote	Eis	Brause
Bernd	4	2	3
Alfred	2	6	1
Christian	3	1	5

Diesmal wird die Zahl 9 in drei Summanden zerlegt, und es ergeben sich gewisse Möglichkeiten, von denen genau eine Lösung ist.

c) Jeder Mann kauft x Dinge zu x Pf, bezahlt also x^2 Pf. Jede Frau kauft y Dinge zu y Pf, bezahlt also y^2 Pf. Es gilt $y^2 - x^2 = (y-x)(y+x) = 75$ Pf.

Es ergibt sich:		Frau	Mann
$y-x$	$y+x$	y	x
1	75	38	37
3	25	14	11
5	15	10	5

Hieraus ergeben sich folgende Namen: Ann Lehmann (38), Bernd Lehmann (37), Johannes Schmidt (11), Betty Müller (10), und es verbleibt Marion Schmidt.

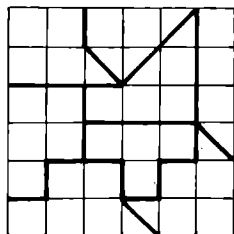
Hier wird also die Zahl 75 in die Differenz zweier Quadrate zerlegt.

Lösung zu: Knocheien am laufenden Band, Heft 6/82

Logelei: Rechts unten steht die 1.

Würfelei: Bei Würfeln ist die Summe gegenüberliegender Augenzahlen immer 7, also $4+7=3=25$.

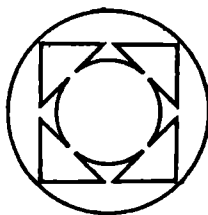
Legespiel:



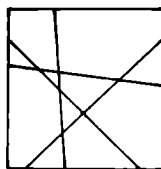
Vexierbild:

Man betrachte das Bild von links. Der Hund ist unter dem Arm. Augen auf! Bild 6

In einem Zug:



Streckenverteilung:



Vier Lampen: Lampe B

Park-Prüfung: AZ-1-99; BY-2-98; CX-3-97; DW-4-96; EV-5-95; FU-6-94; GT-7-93.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 5/1982:

Ma 5 ■ 2238 Es sei $z = \overline{abc}$ eine dreistellige natürliche Zahl in dekadischer Schreibweise mit den Grundziffern a, b und c . Diese Zahl läßt sich auch durch $z = 100a + 10b + c$ darstellen. Nun gilt für das Endergebnis x

$$x = [(a \cdot 2 + 3) \cdot 5 + b] \cdot 10 + c,$$

$$x = (10a + 15 + b) \cdot 10 + c,$$

$$x = 100a + 10b + c + 150,$$

$$x - 150 = z.$$

Bernd braucht vom Endergebnis nur 150 zu subtrahieren, um die von Fritz gedachte dreistellige natürliche Zahl zu erhalten.

Ma 5 ■ 2239 Es sei n die Anzahl der Pioniere der Brigade A; dann gilt $(n-2) \cdot 40 + 2 \cdot 20 = 200$, also $(n-2) \cdot 40 = 160$, $n-2=4$, $n=6$. Der Brigade A gehören 6 Pioniere an. Der Brigade B gehören $200:40=5$ Pioniere an. Es sei m die Anzahl der Pioniere der Brigade C; dann gilt $(m-1) \cdot 32 + 8 = 200$, also $(m-1) \cdot 32 = 192$, $m-1=6$, also $m=7$. Der Brigade C gehören 7 Pioniere an. Somit gehören 18 Pioniere zu dieser Pioniergruppe.

Ma 5 ■ 2240 Zur Erläuterung des Lösungsweges schreiben wir die Aufgabe wie folgt: $ab8816:4 = 1c2de4$. Daraus folgt $1c2de4 \cdot 4 = ab8816$.

Wegen $4 \cdot 4 = 16$ muß $e=0$ sein, denn nur $4 \cdot 0 = 0$ und $0 + 1 = 1$. Wegen $4 \cdot 2 = 8$ und $4 \cdot 7 = 28$ könnte $d=2$ oder $d=7$ gelten. Wegen $4 \cdot 7 = 28$ und $4 \cdot 2 = 8$ und $8 + 2 = 10$ und $0 + 8$ entfällt $d=7$. Also gilt $d=2$. Wegen $4 \cdot 11 = 44$ lautet die richtig gelöste Aufgabe $448816:4 = 112204$.

Ma 5 ■ 2241 Angenommen, am ersten Tag wurden der ersten Schale n Äpfel entnommen; in dieser Schale verblieben dann $(10-n)$ Äpfel. Der zweiten Schale wurden somit $(8-n)$ Äpfel entnommen. Das sind zusammen genau 8 Äpfel. Am ersten Tag erhielt jedes der vier Kinder 2 Äpfel. Jede der beiden Schalen enthielt dann 6 Äpfel.

Angenommen, am zweiten Tag wurden der ersten Schale m Äpfel entnommen; in dieser Schale verblieben dann $(6-m)$ Äpfel. Der zweiten Schale wurden somit $(4-m)$ Äpfel entnommen. Das sind zusammen genau 4 Äpfel. Am zweiten Tag erhielt jedes der vier Kinder 1 Äpfel. Für den dritten Tag ver-

blieben 8 Äpfel. Am dritten Tag erhielt jedes der vier Kinder nochmals 2 Äpfel.

Ma 5 ■ 2242 Für die Anzahl n der Fotos gilt $87 < n < 103$. Nun ist n ein Vielfaches von 3 und von 4, also ein Vielfaches von 12. Daraus folgt $n=96$. Ferner gilt $96 - 96:3 - 96:4 = 96 - 32 - 24 = 40$. Es weisen 40 Fotos verschiedene Motive auf.

Ma 5 ■ 2243 Aus (3) folgt: Peter war besser als Mario, Mario besser als Uwe. Peter war besser als Rolf, Rolf besser als Uwe. Aus (1) folgt: Uwe war besser als Olaf. Aus (3) und (1) folgt deshalb, beginnend mit dem Besten, die Reihenfolge Peter, Mario, Uwe, Olaf oder die Reihenfolge Peter, Rolf, Uwe, Olaf. Da nach (1) Peter nicht die Goldmedaille errang, einer dieser sechs Schüler aber die Goldmedaille erhielt, kann dies nur Bert sein; also war Bert besser als Peter. Da Rolf eine Medaille erhielt, kann dies nur für die Bronzemedaille zutreffen. Deshalb war Rolf besser als Mario. Wir erhalten somit genau eine Reihenfolge; sie lautet: Bert (Goldmedaille), Peter (Silbermedaille), Rolf (Bronzemedaille), Mario (4. Platz), Uwe (5. Platz), Olaf (6. Platz).

Ma 6 ■ 2244 Es sei s_A der Weg, den das in A gestartete Fahrzeug, s_B der Weg, den das in B gestartete Fahrzeug bis zum Zeitpunkt der Begegnung zurückgelegt hat; dann gilt

$$s_A = \frac{2}{3} \cdot s_B \text{ und } s_A + s_B = 100 \text{ km. Durch Einsetzen erhalten wir } \frac{2}{3} \cdot s_B + s_B = 100 \text{ km,}$$

$$\frac{5}{3} \cdot s_B = 100 \text{ km, } s_B = 60 \text{ km, also } s_A = 40 \text{ km.}$$

Für die Zeit, die das schnellere Fahrzeug bis zum Zeitpunkt der Begegnung benötigte, gilt demnach $t_B = \frac{60}{80} \text{ h} = \frac{3}{4} \text{ h} = 45 \text{ min}$. Die beiden Fahrzeuge treffen sich nach 45 Minuten.

Das langsamere Fahrzeug hatte eine mittlere Geschwindigkeit von $\frac{40 \cdot 4 \text{ km}}{3 \text{ h}} \approx 53,3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

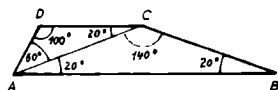
Ma 6 ■ 2245 Angenommen, Aussage (3) ist falsch, und die Aussagen (1) und (2) sind wahr. Aus (1) folgt dann: Birgit nahm an der Russisch-Olympiade teil. Aus (3) folgt: An der Mathematik-Olympiade nahm doch ein Mädchen teil, und zwar Doris. Dann nahm Frank an der Physik-Olympiade teil. Die übrigen Annahmen, daß entweder Aussage (1) oder Aussage (2) falsch sind, führen zu einem Widerspruch, wovon man sich leicht selbst überzeugen kann.

Ma 6 ■ 2246 Es gilt $a > 25$, $b > 25$, $c > 25$, also $a+b+c > 75$, und $a+b+c=100$. Aus $17|a$ und $a > 25$ folgt $a=34$. Für $a=51$ wäre $b+c=49$, was wegen $b+c > 50$ nicht möglich ist. Aus $15|c$ und $c > 25$ folgt $c=30$. Für $c=45$ wäre $a+c=96$, also $b=4$, was wegen $b > 25$ nicht möglich ist. Daraus folgt $b=100-34-30=36$. Die drei Freunde A, B bzw. C sind 34, 36 bzw. 30 Jahre alt.

Ma 6 ■ 2247 Angenommen, es sind g Gänse, e Enten, p Puten und h Hühner. Dann gilt $g + e + p + h = 16$ und $g = e$ und $e + p = h$. Durch Einsetzen erhalten wir $e + e + p + e + p = 16$, also $3e + 2p = 16$. Nun muß e eine gerade natürliche Zahl sein. Für $e = 6$ gilt $3 \cdot 6 = 18$; wegen $18 > 16$ ist dies nicht möglich.

Es gilt somit $e = 2$ oder $e = 4$. Wenn $e = 2$, so $p = 5$, was wegen $e > p$ nicht möglich ist. Auf dem Hof sind folglich 4 Enten, 4 Gänse, 2 Puten und 6 Hühner.

Ma 6 ■ 2248 Aus $\overline{AC} = \overline{BC}$ folgt $\angle ABC = \angle CAB$. Der Winkel $\angle CAB$ hat somit die Größe 20° . Der Winkel $\angle DAB$ hat die Größe $180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$. Somit hat der Winkel $\angle CAD$ die Größe $80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$. Der Winkel $\angle ACB$ hat die Größe $180^\circ - 2 \cdot 20^\circ = 140^\circ$. Der Winkel $\angle BCD$ hat die Größe $180^\circ - 20^\circ = 160^\circ$. Der Winkel $\angle ACD$ hat somit die Größe $160^\circ - 140^\circ = 20^\circ$.



Ma 7 ■ 2249 Es sei $z = 100a + 10b + c$ eine dreistellige natürliche Zahl; dann ist $q = a + b + c$ ihre Quersumme. Ferner gilt $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$ und $0 \leq c \leq 9$. Nun gilt

$$\begin{aligned} 100a + 10b + c &= 12(a + b + c), \\ 100a + 10b + c &= 12a + 12b + 12c, \\ 2b &= 88a - 11c, \\ 2b &= 11(8a - c). \end{aligned}$$

Wegen $0 \leq b \leq 9$ und wegen $8a - c \geq 0$ kann nur $b = 0$ gelten. Daraus folgt weiter $8a - c = 0$, also $c = 8a$. Wegen $a \neq 0$ und $c \leq 9$ kann nur $a = 1$ und $c = 9$ gelten. Es existiert genau eine solche Zahl; sie lautet 108, und es gilt $108 = 12(1 + 0 + 8)$.

Ma 7 ■ 2250 Der eine Summand sei n ; der zweite Summand ist dann $90 - n$. Nun gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \cdot n + \frac{3}{4} \cdot (90 - n) &= 30, \\ \frac{1}{4}n + \frac{270}{4} - \frac{3}{4}n &= 30, \quad n = 75. \end{aligned}$$

Die beiden natürlichen Zahlen lauten 75 und 15; denn es gilt

$$\frac{1}{4} \cdot 75 + \frac{3}{4} \cdot 15 = \frac{75 + 45}{4} = \frac{120}{4} = 30.$$

Ma 7 ■ 2251 Die vier Dreiecke $\triangle AEH$, $\triangle BFE$, $\triangle CGF$, $\triangle DHG$ sind untereinander kongruent; sie stimmen in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen rechten Winkel überein. Außerdem sind diese Dreiecke gleichschenkelig-rechtwinklig. Die Winkel $\angle AEH$ und $\angle BEF$ haben somit die Größe 45° ; folglich hat der Winkel $\angle HEF$ die Größe 90° . Aus der Kongruenz der Dreiecke folgt $\overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HE}$. Das Viereck $EFGH$ ist deshalb ein Quadrat. Nun gilt

$$a^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = 50, \quad a^2 - \frac{a^2}{2} = 50, \quad \frac{1}{2}a^2 = 50,$$

also $a^2 = 100$ und somit $a = 10$.

Das Quadrat $ABCD$ hat eine Seitenlänge von 10 cm.



Das Lebensalter Diophants

In der Algebra werden zwei Arten von Gleichungen unterschieden: Eine Gleichung, in der nur eine einzige unbekannte Größe enthalten ist, heißt eine „bestimmte Gleichung“ (z. B. $x^2 + px = q$); eine solche, worin zwei oder mehr Variable vorkommen, heißt eine „unbestimmte Gleichung“ (z. B. $x^2 + y^2 = z^2$). Die Beschäftigung mit den folgenden zwei Problemen führte zur Entwicklung der Algebra als Teilwissenschaft der Mathematik:

1. Die Lösung von (algebraischen) bestimmten Gleichungen in Radikalen (durch allgemeine „Auflösungsformeln“).
2. Die Lösung unbestimmter Gleichungen in rationalen (oder ganzen) Zahlen.

Mit dem zweiten Problem beschäftigte sich der griechische Mathematiker Diophant ausführlich in einem Buch mit dem Titel „Arithmetica“, einer Sammlung von 189 sorgfältig ausgewählten Aufgaben mit Lösungen, die zur Illustration bestimmter wohldurchdachter Methoden dienten. Die „Arithmetica“ diente sowohl den Gelehrten im mittelalterlichen Osten als auch den Mathematikern im 16. und den folgenden Jahrhunderten, wie Bombelli, Vieta, Fermat, Euler, Jacobi, Gauß, Poincaré, als Ausgangspunkt ihrer Studien. Über das Leben Diophants gibt es nur spärliche und unzuverlässige Quellen. Er wird der „Alexandriener“ genannt. Wahrscheinlich lebte er im 3. Jh. u. Z. in Alexandria, einem Zentrum des wissenschaftlichen Denkens in der Antike. Alles was wir von seinem Lebenslauf wissen, ist in dem folgenden Rätselgedicht überliefert. (Als Verfasser gilt Metrodorus, der im 4. oder 6. Jh. u. Z. gelebt haben soll.)

„Hier dies Grabmal deckt Diophantus.

Schaut das Wunder!

Durch des Entschlafenen Kunst lehret sein Alter der Stein.

Knabe zu sein gewährte ihm Gott ein Sechstel des Lebens;

Noch ein Zwölftel dazu, sproßt' auf der Wange der Bart;

Dazu ein Siebentel noch,

da schloß er das Bündnis der Ehe,

Nach fünf Jahren entsprang

aus der Verbindung ein Sohn.

alpha-Wettbewerb 1981/82

Abzeichen in Gold

Für siebenjährige Teilnahme

Frank Baumgart, Aschersleben; Kirsten Rechner, Baruth; Marc Schewe, Berlin; Henry Fischer, Bitterfeld; Tilman Völzke, Böhlen; Uta Boldt, Burg Stargard; Christine Pompe, Royald Lenk, beide Cottbus; Petra Sarodnik, Dallgow; Gabriele Sprotte, Döbeln; Manuela Schwenke, Dohna; Ralph Gruber, Stefan Edelmann, Birgit Wittwer, Ulf Riechen, alle Dresden; Reinhard Weißnicht, Eberswalde; Thomas Pigrosch, Eisleben; Matthias und Susanne Schreiber, Elsterwerda; Heike Heber, Erfurt; Siegfried Obst, Eberswalde; Karsten Meißner, Forst; Matthias Bauer, Genthin; Kerstin Schneider, Goßwitz; Wilfried Schleinitz, Greifswald; Veit-Thomas Meyen, Grimmen; Petra Brandstädter, Güstrow; Roger Fischl, Günter Schlielinsky, beide Halle-Neustadt; Kerstin und Heinz Wickner, Hermannsdorf.

Güstrow; Roger Fischl, Günter Schlielinsky, beide Halle-Neustadt; Kerstin und Heinz Wickner, Hermannsdorf; Veit-Thomas Meyen, Grimmen; Andreas Berner, Karl-Marx-Stadt; Axel Schüler, Kleinmachnow; Antje Schlosser, Klingenthal; Ralf Häntsch, Köthen; Stefanie Begau, Ute Hansmann, Rainer Nolte, Meike Pfützenreuter, Jörg Drechsel, alle Leinefelde; Lutz Lämmer, Leipzig; Birgit Arndt, Loitz; Matthias Neundorf, Carola Hönn, beide Meiningen; Uwe Würker, Mülsen; Dieter Seifert, Pinnau; Sigurd Assing, Karsten Milek, Axel Schulz, alle Potsdam; Tim Planke, Premnitz; Lutz Hübschmann, Raschau; Uwe Mattutat, Ina und Manfred Hille, alle Riesa; Anette Müller, Ines Dalisda, beide Rostock; Matthias Brandt, Michael Gerth, beide Schmalkalden; Anke Krukenberg, Schönberg; Gunnar Jeschke, Schwarzheide; Klaus Pfeiffer, Taubach; Christine Mohr, Teterow; Joachim Braun, Thalberg; Lars Herrmann, Töplitz; Birgit Schmidt, Weißwasser; Ralph Nemitz, Wittenförden; Uwe Eix, Steffen Klimpel, beide Wolgast; Rolf Heubner, Wolfen; Claudia Groh, Wüstenbrand; Karl Oertel, Zeitz; Thorsten Eidner, Zeulenroda; Kerstin Hoffmann, Ingrid Soblik, Gabriele Schubert, alle Zittau; Birgit Schenke, Zschornowitz; Uta Escher, Zwickau

Für sechsjährige Teilnahme

Michael Elte, Ahlum; Sven und Jens Fache, Altenburg; Roland Hesse, Bad Blankenburg; Silke Schröder, Bad Kleinen; Margret Detsch, Bad Salzungen; Silke Rechner, Baruth; Uwe Prochno, Berlin; Sabine Mantel, Berlin; Heidrun Sourell, Bernau; Gabriele Kabel, Beyernaumburg; Andreas Jock, Blankenfelde; Marlis Schröder, Thomas Streich, beide Brandenburg; Cornelia Kopte, Callenberg; Roland Damm, Christian Kunze, Karsten Mittag, alle Cottbus; Uwe Schütze, Camin; Ulrich Schuster, Demitz

Wehe das Kind, das vielgeliebte, die Hälfte der Jahre

Hatt' es des Vaters erreicht, als es dem Schicksal erlag.

Drauf vier Jahre hindurch durch der Größen Betrachtung den Kummer Von sich scheuchend auch er kam an das irdische Ziel.“

(Zitat nach Georg H. F. Nesselmann.)

Wie alt wurde Diophant?

(Die Aufgabe führt auf eine lineare bestimmte Gleichung.) H. Pieper

Thumitz; Georg Kirchner, Dermbach; Frank Sarodnick, Dallgow; Mario Dette, Astrid Schunck, Ruth Backhaus, alle Dingelstädt; Heiko Richter, Dietlas; Mario Jäpel, Dohna; Karsten Zosel, Grit Kammer, Maja Oelschlägel, Ute Schulze, Titus Ziegler, Catherin Engel, Lutz und Heike Lauter, Brigitte Rotter, Stefan Franze, Tobias Mahlow, Werner und Christine Kirsch, Rainer Schultke, alle Dresden; Christine Frei, Ebeleben; Uwe Wollert, Edderitz; Matthias Eger, Floh; Fred Mettke, Antje Hollstein, beide Frankfurt (Oder); Thomas Heidrich, Freiberg; Sylvia Döring, Gotha; Achmed und Britta Schulz, beide Greifswald; Jörn Wintsche, Grimma; Bettina Weser, Großenhain; Kirsten Schlegel, Grünhain; Michael Schulze, Anke Misch, beide Halberstadt; Frank Siebert, Matthias Schöne-mann, Dany Lindenberg, alle Halle; Cordelia Krippner, Hammerbrücke; Holger Hartmann, Hartmannsdorf; Frank Pampel, Heinrichsort; Axel Herbst, Hohendodeleben; Hagen Fritsch, Hosena; Claus Janke, Ilmenau; Kerstin Vinke, Kandelin; Eske Röhrich, Andreas Niepel, Ricarda Damm, alle Karl-Marx-Stadt; Elke Willek, Kriebitzsch; Grit Heyde, Latdorf; Uta Hubrig, Leipzig; Stefan Hähnel, Heiko Schinke, beide Leuna; Karl-Heinz Gora, Lohsa; Sabine Gerlach, Lübs; Frank Thieme, Marienberg; Jürgen Welz, Meyenburg; Beate Krause, Menteroda; Michael Simang, Mittelherwigsdorf; Olaf Wender, Mühlhausen; Kerstin Paul, Nordhausen; Petra Köbke, Oranienburg; Sabine Oestreich, Oschersleben; Steffen Gottschlich, Pirna; Manuela Krause, Plauen; Torsten Kühn, Potsdam; Iljana Planke, Premnitz; Frank Berndt, Radeburg; Andreas Korb, Raschau; Gunther Siebenhaar, Roßdorf; Gitta Schöne, Rostock; Ines Gülden, Roitzsch; Jürgen Schmalisch, Rotta; Ronald Bojarski, Saßnitz; André Wiegand, Bernd Winkelmann, Birgit Nöbler, Sibylle Heuer, alle Schmalkalden; Sylke Lüder, Schönborn; Kerstin Freitag, Schwarzheide; Jens Hoffmann, Sebnitz; Stephan Meyerhöfer, Strassburg; Ralph-Birger Häfner, Steinbach-Hallenberg; Doris Grünler, Thierbach; Silke Raßmann, Annette Stephan, beide Unterbreizbach; Birgit Lorenz, Waren; Hartmut Boettcher, Weimar; Beate Hentschke, Sylvia Feige, beide Weißwasser; Dietmar Polster, Zeithain; Christina Voß, Zepernick; Jörg Steinbach, Zwickau; Ines Hoffmann, Weißwasser; Gudrun Zirnstein, Pirna; Margit Mollhoff, Piesau;

Für fünfjährige Teilnahme

Arnt Löber, Ahrenshoop; Frank Schönherr, Anklam; Beate Zimmer, Asbach; Eckhard Heinrich, Aschersleben; Heike Eckardt, Manuela Wines, Kerstin Messerschmidt, alle Bad Liebenstein; Berit Kleinbauer, Andris Möller, Holger Neye, Udo Bellack, René Damm, Susanne Krüger, Kerstin Kantiem, alle Berlin; Beate Weber, Bernburg; Peter Rößler, Bischofswerda; Kai Fischer, Bitterfeld; Kerstin Westphal, Borna; Jens Przybilla, Mathias Tauscher, Susanne Kraska, alle Breitenworbis; Heike Köhler, Callenberg; Uta Bolz, Andreas Heinze, Peter Strempel, Karsten Kehler, alle Cottbus; Falk-Uwe Koppelt, Crostau; Ulf Fache, Culitzsch; Holger Schmidt, Demmin; Katrin und Dieter Horn, Dessau; Beate Meinhardt, Thomas Strecker, beide Dingelstädt; Ines Lauter, Pedro Thiele, Martin Bismark, Horst Seidel, Christian Donath, Susann Piry, Heiko Ringel, Astrid Roll, Jens Danzer, Gerald Eichler, alle Dresden; Claudia Pleyer, Eisenach; Una Heinecke, Eisenberg; Enrico Dietrich, Stefan Nitzsche, beide Elsterwerda; Lars Mönch, Kerstin Heer, Bodo Bricks, alle Erfurt; Mathias Gerlach, Friedeburg; Sonfried Lätsch, Görlitz; Ingolf Hintzsche, Christian Röhl, beide Gräfenhainichen; Thomas Wedekind, Grimma; Bianka Potthoff, Gr. Wüstenfelde; Peter Meusel, Guben; Annett Eichner, Halle-N.; Thomas Benusch, Heidrun Schmidt, beide Hoyerswerda; Gabi Missal, Insel; Detlef Ritter, Jena; Andreas Paukert, Karbow; Katrin Richter, Hendrik Pönisch, beide Karl-Marx-Stadt; Silvia Kriesche, Klaus;

Axel Dübler, Klausdorf; Kerstin Vogel, Knehlen; Edith Löffler, Königshain; Ingolf Raabe, Langen-grassau; Andreas Helbig, Langenleuba-Ndr.; Frank Herzog, Langenwolchendorf; Uta und Sabine Mersowsky, Langewiesen; Matthias Heller, Lauscha; Carmen Schwab, Sabine Hartung, Solveig Woitek, alle Leinefelde; Andreas Eißler, Leipzig; Holger Schinke, Leuna; Jens Grundmann, Limbach-O.; Jörg Ladendorf, Lübtheen; Angela Zschörpel, Maltitz; Norbert Fuchs, Meiningen; Ute Krampitz, Mengersgereuth; Hagen Haberland, Me-sekenhagen; Jens Schumacher, Metschow; André Wiegand, Mittelschmalkalden; Detlef-Sven Saar, Mühlhausen; Uwe Knispel, Neuburxdorf; Heike Engelhard, Niedersachswerfen; Timo Kaiser, Niederschmalkalden; Volker Franke, Petra Hahn, beide Nordhausen; Andy Marr, Oberschöna; Olaf Winkler, Oschatz; Jörg Stark, Plauen; Iris Bernhardt, Podelwitz; Steffen Hoffmann, Potsdam; Antje Hertzschuch, Radebeul; Peter Wenke, Radibor; Katrin Dorendorf, Riesa; Ralf Heidenreich, Roßleben; Birgit Kroll, Grit Maciejewski, Lutz Andrews, alle Rostock; Jens Richter, Schkölen; Sabine Schüler, Schöna; Carmen Meikies, Schlagsdorf; Ingo Lohde, Schönefeld; Heiko Schulz, Schwedt; Carola Paetow, Schwerin; Michael Galetzka, Senftenberg; Frank Zöllner, Sondershausen; Birgit Götz, Sonneberg; Peter Lehmann, Kay-Uwe Weber, André Seling, Dagmar Rothämel, alle Steinbach-Hallenberg; Christian Wiegand, Steinhaid; Cordula Gottwald, Stendal; Erhard und Anke Zilinske, Stralsund; Nicole Gößner, Syrau; Ralf Gössinger, Ole Glänzer, beide Unterbreizbach; Dirk Wenzlaff, Vitte; Regina Frindt, Udo und Irene Michallik, alle Waren; Dirk Lehmann, Stefan Thäter, Margret Boettcher, alle Weimar; Barbara Schütze, Weidenfels; Annett Seidel, Agnes Jorczik, beide Wismar; Thomas Peuker, Karsten Busse, beide Wittenberg; Kerstin Jung, Wöbbelin; Claudia Bock, Wolfen; Astrid Keller, Wolgast; Erika Schreiber, Kerstin Barthelmes, beide Zella-Mehlis; Birgit Erdmann, Heide Hilse, beide Zittau; Romi Riedel, Zollschwitz; Mathias Goltzsche, Zschopau

Für vierjährige Teilnahme

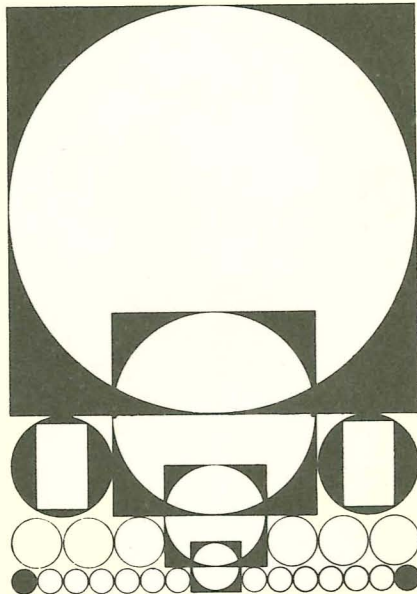
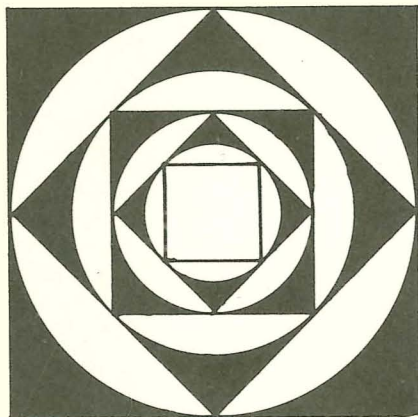
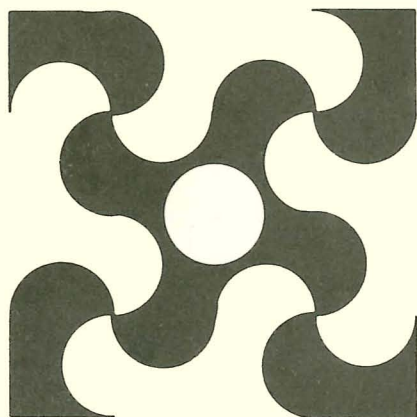
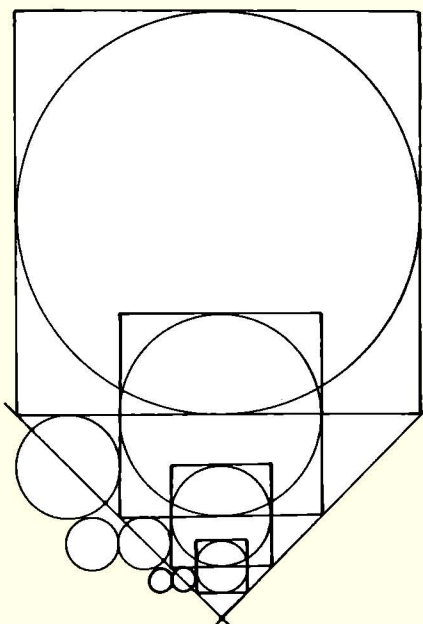
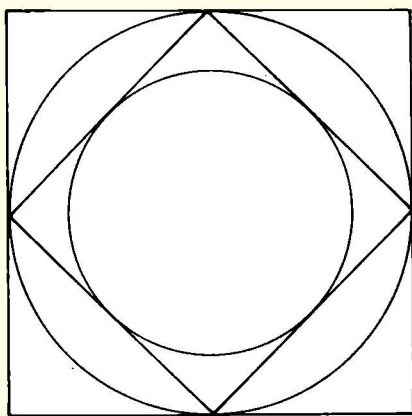
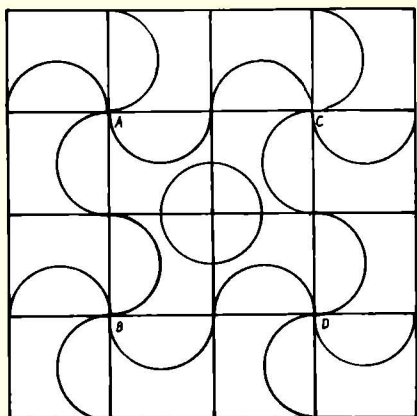
Carsten Karl, Aken; Sylvia Köthig, Apolda; Anka Sommer, Augsdorf; Sönke Maeß, Bad Doberan; Jens Humpisch, Bad Gottleuba; Sibylle Kerner, Bad Salzungen; Jens Prochno, Cornelia Wolf, Thomas Honigmann, Norbert Dorn, Reinhard Wegener, Bernhard Napiontek, Stefan Müller, Beate Müller, Steffen Padelt, alle Berlin; Jörg Leine, Berlestedt; Marlies Reschke, Karen Sourell, beide Bernau; Oliver und Heiko Haase, Bestensee; Helge Dürschke, Bitterfeld; Corina Mahnke, Boizenburg; Christian Sitz, Calau; Ramona Blank, Clingen; Matthias Winkler, Cossebaude; Sylke Riedel, Coswig; Tino Seidler, Manfred Roßius, Andreas Stenzel, Jens Leberwurst, Anke Richter, Thomas Lundershausen, alle Cottbus; Jörg Uhlig, Crimmitschau; Uwe Martin, Crossen; Jörn Fache, Culitzsch; Bert Kühne, Dahme; Ute Fehrmann, Deutschenbora; Heike Förster, Dingelstädt; Kornelia Tolkemit, Dobbertin; Carola Schwerdtner, Dohna; Michael Beetz, Dreetz; René Pratsch, Stefan Mattausch, Silke Riechen, Helmut und Carsten Schreiber, Rolf Dach, Oliver Geupel, Martin Jäger, Iris Wislicenus, Michael Nitsche, Peter Förster, Anett Jünger, Thomas Hübner, alle Dresden; Steffen Patzschke, Droyßig; Jana Schwabe, Ulf Arnold, Holger Fey, Monika Glaß, alle Eisenach; Eike Sühnholz, Erfurt; Heike Morgner, Falkenstein; Astrid Abt, Silke Weisheit, Manuela Mäder, Andreas Möller, Uwe Weyh, alle Fambach; Hans Schröer, Finsterwalde; Annette Spangenberg, Frankfurt (Oder); Henry Kost, Freiberg; Henry Mäder, Froburg; Ansgar Heise, Görlitz; Ingolf Thurm, Gößnitz; Andreas Kersten, Gräfenhainichen; Mathias Schleif, Gransee; Thomas Rauschenbach, Grochwitz; Rainer Mielke, Gr. Bademeusel; Babette Maulhardt, Großbodungen; Thorsten Han-nusch, Guben; Katrin Strathaus, Halberstadt;

Guido Vollbeding, Haldensleben; Henning Salz, Halle; Jutta und Uta Schumann, Havelberg; Robert Siegel, Hecklingen; Uta Reck, Heiligenstadt; Falk Hartmann, Hermannsdorf; Rita Soering, Hohen-ossig; Carsten Leibnitz, Hohenstein-E.; Peter Hermann, Hoyerswerda; Claudia Docter, Ilseburg; Elke Schumann, Jahnishausen; Jens Katzschmann, Ulrich Scheler, beide Jena; Andreas Israel, Ingolf Knopf, Annegret Schatte, Rüdiger Gränitz, Sebastian Horbach, Carla Umlauf, Hildegard Geisler, alle Karl-Marx-Stadt; Udo Steller, Kleinmach-now; Helge Müller, Königsee; Heiko Witte, Friedhelm Reichert, beide Königs Wusterhausen; Karsten Schmidt, Kolochau; Andreas Blaudzun, Krakow; Gerd Künzelmann, Krina; Uwe Rümmler, Krumhermersdorf; Steffen Heyde, Latdorf; Matthias Poller, Lauter; Anne Weigang, Leinefelde; Bernd Fucke, Thomas Kluge, Matthias Hübner, Petra Gollewsky, Sylvia Richter, Bianka Schulze, Thomas, Klemens und Stephan Rebbelmund, Ralf Laue, alle Leipzig; Michael Seidel, Leuna; Olaf Engelke, Löbau; Stefan Brünner, Löderburg; Ulf Brandes, Lüblow; Rainer Gerlach, Lübs; Susanne Wolf, Frank Wunderling, beide Magdeburg; Wolfram Hoppe, Marienberg; Lutz Büttner, Martinroda; Simone Brungräber, Marxwalde; Volker Sachse, Mülsen; Tilo Grünberger, Nerchau; Anja Voß, Hans-Dieter Büchler, beide Neustadt; Thomas Engelhardt, Niedersachswerfen; Uwe Lippmann, Niederwürschnitz; Frank Schmidtsche, Niedercrinitz; Torsten Linß, Nordhausen; Frank Jäger, Oberschöna; Steffen Zielinski, Osternienburg; Gerlinde Lehmann, Pahrenz; Tibor Leitz, Aike Hinrichs, beide Parchim; Katja Uhlemann, Prausitz; Hellmut Schenk, Pirna; Henning Schulz, Potsdam; Wieland Handke, Pulsnitz; Annett Schmidt, Klaus-Peter Lindner, Ingolf Pitz, alle Rackwitz; Bettina Beurich, Katrin Prescher, beide Radebeul; Dietrich Zwicker, Rastenberg; Irma Großmann, Rheinsberg; Andreas Didzuns, Ribnitz; Axel Kaminski, Riesa; Susanne Arnrich, Antje Rexhäuser, Susanne Gräumlich, alle Roßdorf; Andreas Gahabka, Ruhla; Sabine Wileck, Ruhland; Marian Klima, Saßnitz; Annette Schubert, Schalkau; Jörg Jähnel, Schkölen; Kurt Schulze, Schernberg; Annett Spalteholz, Schladitz; Ronald Kaiser, Schleid; Beate Malsch, Babett Müller, Winfried Ullrich, Torsten Häfner, alle Schmalkalden; Tobias und Maik Schönherr, Schmölln; Olaf Putensen, Uta Möbius, beide Schwerin; Susanne Krieger, Sömmerda; Angelika Heubel, Heidi Böttger, Frank Vollborth, alle Sondershausen; Ralf Stentzel, Schwarzenberg; Bernd Urbanek, Spremberg; Mike Selig, Stauchitz; Jan Recknagel, Michael Rommel, Gundi Schütz, Andre Albrecht, Uwe Pfannschmidt, Andrea Wiegandt, Thomas Hoffmann, Peter Luck, Michael Holland-Moritz, Rene Bieber, Christian Usbeck, Constanze Aster, Jacqueline Häfner, Angela Müller, Simone König, Heike Zimmermann, Silke Recknagel, Silvana Menz, Kathrin Möller, Ines Maschke, Sabine König, Kai-Uwe Bartsch, Andreas Gräf, Eckhard Holland-Cunz, Uwe Oehring, Christian Wahl, Roman Wirth, Peggy Holland-Letz, Steffi Kaiser, Andrea Neuber, Beate Nothnagel, Ute Recknagel, alle Steinbach-Hallenberg; Helmut Sauerbrei, Suhl; Torsten Roßnick, Stendal; Armin Singer, Teichwollframsdorf; Joachim Krug, Tiefenort; Wolfram Fischer, Torgau; Andrea Bähr, Bert Minske, Dolores Toth, alle Torgelow; Ralf Krüger, Uebigau; Kerstin Schmidt, Bettina Landsiedel, Wiebke Fleischhauer, Christine Becker, Lars Brückner, alle Vacha; Uta Michallik, Waren; Steffen Schröder, Weißwasser, Horst Rißmann, Wesenberg; Ralph Bock, Wolfen; Antje Grosch, Wolferstedt; Jürgen Jahns, Wilsleben; Cornelia Axt, Andreas Wolter, beide Wolgast; Pier Bierbach, Zeitz; Andrea Schmidt, Zella-Mehlis; Harald Hempel, Zschopach; Maik Dröbler, Marion Nemczak, Kerstin Kowaczek, alle Zschornowitz; Heidrun Boldt, Burg Stargard; Thomas Bartmuß, Burow

Nachtrag: Für neunjährige Teilnahme: Udo Clemens, Altenburg

Mit Zirkel und Zeichendreieck

Mach's mal nach!



aus: mathématique contemporaine, magnard Paris

Grasornamente aus Sri Lanka

Entnommen aus: Sri Lanka, Legende, Märchen, historische Überlieferung und Bericht,
Kiepenheuer Verlag Leipzig und Weimar

