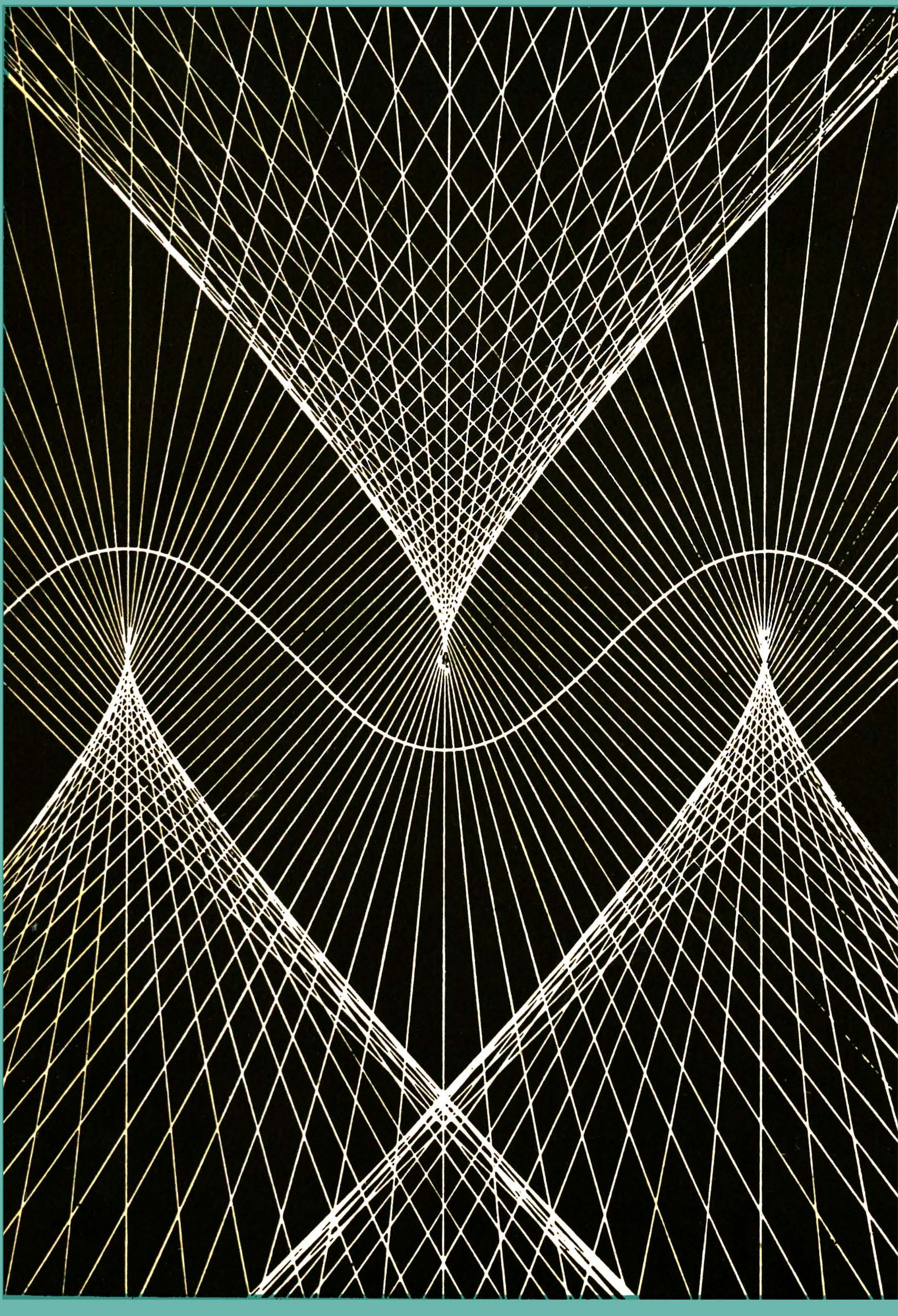
Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



3

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
13. Jahrgang 1979
Preis 0,50 M
Index 31 059

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.
Fotos bzw. Vignetten: André François, Paris (S. 53); Hochschule f. Architektur und Bauwesen, Weimar (S. 54); Eigenfoto R. Schuster, Leipzig (S. 55); Axel Frohn, Berlin (S. IV); R. Neumann, Neubrandenburg (S. 61); Nauka i technika, Riga (S. 63); M. Schestopal, Moskau (S. 66/67); J. Jordan, Leipzig (S. 67); ADN/ZB (S. 67); das Titelbild wurde der niederl. Zeitschrift „Pythagoras“ entnommen.
Titelblatt: W. Fahr, Berlin
Typographie: H. Tracksdorf

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
AN (EDV) 128 – ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 22. Februar 1979

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Geometrie auf der Gummihaut?

Ihr alle kennt doch sicher Luftballons, die mit lustigen Gesichtern bemalt sind. Wenn man den Luftballon verzerrt, kann man erreichen, daß aus einem lustigen Gesicht ein trauriges wird und ähnliches mehr. Wir betrachten folgende Skizze:

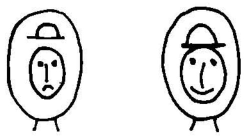
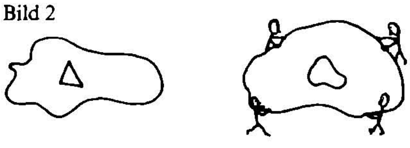


Bild 1

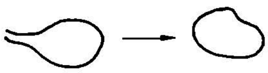
Kann man durch Verzerren des Luftballons erreichen, daß sich der Hut vom Kopf hebt?
Mit diesem Vorgang des Verzerrens, Dehnens und Stauchens einer „Gummihaut" (hier Luftballon) kann man sich Abbildungen veranschaulichen. Eine exakte Begriffsbildung ist aber auch möglich und notwendig und soll hier erfolgen.
Aus dem Geometrieunterricht kennt ihr Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen zwischen Teilmengen der Ebene. Durch derartige Abbildungen werden gegebene geometrische Figuren (Punktmengen der Ebene) auf andere, zu den gegebenen kongruente bzw. ähnliche Figuren abgebildet. Bei diesen Abbildungen wird ein Dreieck immer auf ein Dreieck, ein Kreis auf einen Kreis abgebildet, nie kann ein Dreieck auf einen Kreis abgebildet werden.
Es gibt eine ganze Reihe von Eigenschaften der Figuren, die bei Kongruenz- bzw. Ähnlichkeitsabbildungen erhalten bleiben müssen. Zum Beispiel:
Größe von Winkeln
Länge von Strecken (nur bei Kongruenzabbildungen).
Derartige Eigenschaften nennt man *Invarianten einer Abbildung*. (Das lateinische Wort „invariant" bedeutet so viel wie „unveränderlich".)
Kehren wir zu den Abbildungen zurück, die wir uns zum Anfang veranschaulicht haben. Bei diesen Abbildungen kann es durchaus vorkommen, daß ein Dreieck auf einen Kreis abgebildet wird.

Bild 2



(2) Ist es bei solchen Abbildungen auch möglich, folgende Figuren aufeinander abzubilden?

Bild 3

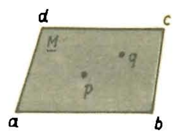


(3) Oder kann man jeden einzelnen Buchstaben des Wortes IDEE so verzerren, daß das Wort SAFT entsteht?
Um die gestellten Fragen beantworten zu können, werden wir zunächst eine genaue Erklärung für die Abbildungen angeben, die durch Verzerrungen einer „Gummihaut" veranschaulicht werden können. Daran anschließend werden wir nach Invarianten dieser Abbildungen suchen.

Einiges über Punktmengen der Ebene

Wir wollen für die Veranschaulichung von Mengen in der Ebene folgendes vereinbaren:
- alle Punkte der Menge werden grau „gezeichnet"
- schwarz markierte Punkte gehören nicht mehr zur Menge M

Bild 4

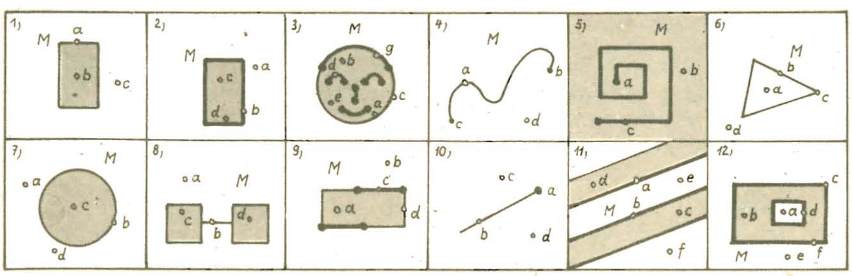


Beispiel:
Die Menge M besteht hier aus der Vierecksfläche *abcd* ohne die Strecke $\overline{cd}$ und ohne die Punkte p und q.
An dieser Stelle möchte ich darauf hinweisen, daß Punkte mit kleinen Buchstaben und Mengen mit großen Buchstaben bezeichnet werden. Das ist hier so üblich und hat sich bei der Unterscheidung von Mengen und Punkten bewährt. Dabei bezeichnet E immer die ganze Ebene, und wenn M eine Menge in der Ebene E ist, so ist $E \setminus M$ (lies: E minus M) die Menge aller Punkte der Ebene, die nicht zu M gehören, also der ganze „Rest von E".
Was ein Kreis ist, wißt ihr. Die Menge K wollen wir als offene Kreisscheibe um den Mittelpunkt m bezeichnen.

Bild 5

(Elemente von K sind all die Punkte, die von m einen Abstand haben, der kleiner ist als eine gegebene positive Zahl ε.) Schauen wir uns einige (markierte) Punkte der folgenden Mengen einmal genauer an.

Bild 6



Wie würdet ihr die markierten Punkte bezüglich ihrer Lage zur Menge M in jedem der Fälle 1 bis 12 unterscheiden?
Zunächst gibt es *innere Punkte* der Menge M. Das sind solche Punkte von M, um die man eine offene Kreisscheibe „zeichnen" kann, die ganz in M liegt.
Beispiele für innere Punkte sind:
im Fall 1 der Punkt b
im Fall 3 die Punkte a und e
im Fall 12 die Punkte b und g
Dann gibt es Punkte, die „etwas entfernt" von der Menge M liegen – *äußere Punkte*. Das sind solche Punkte der Ebene, um die man eine Kreisscheibe „zeichnen" kann, die nur Punkte von $E \setminus M$ enthält. (Skizziere dir für die folgenden Beispiele doch einmal solche Kreisscheiben!) Beispiele für äußere Punkte sind:
im Fall 2 Punkt a
im Fall 4 Punkt d
im Fall 6 Punkte a und d
Schließlich gibt es noch Punkte, die weder innere noch äußere Punkte von M sind. Das sind solche Punkte x der Ebene, bei denen in *jeder* Kreisscheibe um x (egal wie groß oder klein ich sie wähle) sowohl Punkte der Menge M als auch Punkte der Menge $E \setminus M$ liegen. Man nennt solche Punkte Randpunkte von M. Beispiel für *Randpunkte* sind:
im Fall 1 Punkt a
im Fall 3 die Punkte b, c und d
im Fall 6 die Punkte b und c
im Fall 12 die Punkte c, d und f
Bei den Randpunkten einer Menge M fällt auf, daß es Randpunkte von M gibt, die auch Elemente von M sind (z. B. im Fall 3 der Punkt c) und solche, die nicht zu M gehören (z. B. im Fall 3 die Punkte b und d).
Überlege, um was für Punkte es sich bei den hier nicht genannten handelt, z. B. bei den Punkten a, b, c im Fall 5 oder bei den Punkten a, b, c, d im Fall 9!

Stetige Abbildungen

Schauen wir uns einmal folgende Abbildungen an, von denen einige stetig und einige nicht stetig sind (in einigen Punkten unstetig).
Überlege, in welchem Zusammenhang (mit welcher Bedeutung) dieser Begriff stetig in der Umgangssprache benutzt wird!
1. Spiegelung einer Teilmenge der Ebene an einer Geraden g
Dem Punkte x wird durch die Spiegelung der

Punkt $f(x)$ – das Bild von x – zugeordnet. Analog ist $f(a)$ das Bild von a.

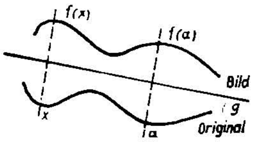
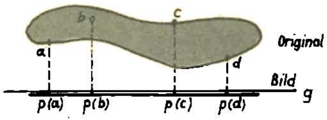


Bild 7

2. Senkrechte Projektion einer Teilmenge der Ebene auf eine Gerade g

Bild 8



3. Senkrechte Projektion einer Teilmenge der Ebene auf eine „Treppe“

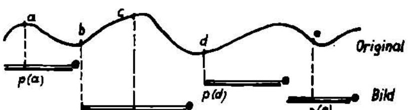


Bild 9

4. Zentrische Streckung einer Teilmenge der Ebene mit dem Streckzentrum z

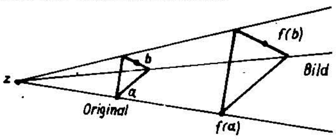


Bild 10

5. „Fensterladen aufklappen“

Original: Viereck *abcd*

Bild: Viereck *hadg* vereinigt mit dem Viereck *befc* ohne die Strecke *ef*.

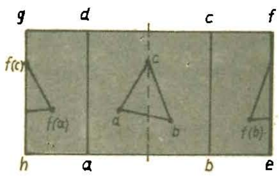


Bild 11

Welche dieser Abbildungen sind nach eurer Meinung stetig?

Bei den Abbildungen 3 und 5 gibt es Unstetigkeitspunkte – Punkte, bei deren Durchlaufen die Bilder durchgehender Linien einen „Sprung“ machen.

Schauen wir uns das an einem Beispiel genauer an.

Bei der dritten Abbildung ist z. B. der Punkt b ein Unstetigkeitspunkt.

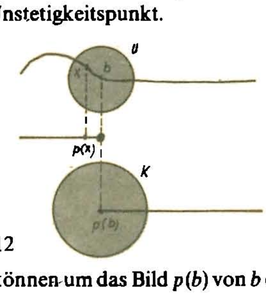


Bild 12

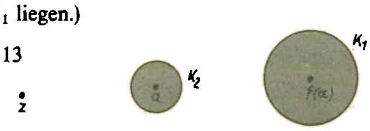
Wir können um das Bild $p(b)$ von b eine offene Kreisscheibe K finden, die die folgende Eigenschaft hat: egal was für eine Kreisscheibe U du um b zeichnest, immer gibt es Punkte von U, deren Bilder nicht in K liegen. In der Skizze trifft das z. B. auf den Punkt x zu, zwar gilt $x \in U$, aber $p(x) \notin K$. Suche weitere Unstetigkeitsstellen in den Abbildungen 3 und 5! Bei den Bildern 1, 2 und 4 handelt es sich dagegen um stetige Abbildungen. Wenn wir von der Erklärung für die Unstetigkeitspunkte ausgehen, die ja bei stetigen Abbildungen auf keinen Punkt zutreffen darf, erhalten wir folgende Definition:

Definition: Seien M und N Teilmengen der Ebene und f eine Abbildung zwischen ihnen. f heißt dann stetig in $a \in M$, wenn es für jede Kreisscheibe $K_1 \subset N$ um $f(a)$ eine Kreisscheibe $K_2 \subset M$ um a gibt, so daß gilt:

$f(K_2) \subset K_1$

(Die Bilder aller Punkte aus K_2 müssen also in K_1 liegen.)

Bild 13



Betrachten wir z. B. eine zentrische Streckung mit dem Zentrum z und dem Streckungsfaktor k in irgendeinem beliebigen Punkt a. Dann geht jede offene Kreisscheibe K_1 um $f(a)$ aus einer Kreisscheibe K_2 um a hervor. Wenn der Radius r_1 von K_1 bekannt ist, können wir genau sagen, wie groß r_2 höchstens sein darf, damit die Bedingungen der obigen Definition erfüllt sind, nämlich $r_2 \leqq \frac{r_1}{k}$, dann gilt $f(K_2) \subset K_1$.

Zentrische Streckungen sind also in jedem Punkt der Ebene stetig.

Betrachten wir folgende durch Skizzen gegebenen Teilmengen der Ebene. In welchen Fällen gibt es deiner Meinung nach eine stetige Abbildung von M_1 auf M_2?

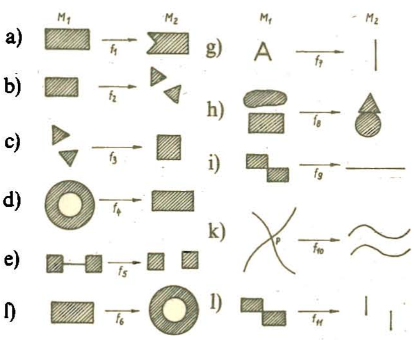


Bild 14

In den Fällen b, e, k und l ist auf keinen Fall eine stetige Abbildung zwischen den Mengen M_1 und M_2 denkbar. Im Fall k wäre z. B. der Punkt p bei jeder möglichen Abbildung zwischen M_1 und M_2 ein Unstetigkeitspunkt. In allen anderen Fällen sind stetige Abbildungen möglich. (Natürlich sind auch unstetige Abbildungen denkbar.)

Wenn wir die Mengen M_1 und M_2 in allen Beispielen betrachten, gibt es unter ihnen *zusammenhängende* Mengen M, das sind solche Mengen, bei denen man zwei beliebige Punkte von M durch einen ganz in M liegenden Weg verbinden kann, und unzusammenhängende Mengen.

Für stetige Abbildungen gilt nun folgende Eigenschaft, die wir hier nicht beweisen wollen:

Bei stetigen Abbildungen sind die Bilder zusammenhängender Mengen wieder zusammenhängender Mengen wieder zusammenhängende Mengen.

Beispiele: Welche der folgenden Mengen sind zusammenhängend?

Die Mengen M_2, M_4 und M_5 sind zusammenhängend. (Skizziere jeweils einen Weg, der die Punkte a und b miteinander verbindet und ganz in der Menge M liegt!)

Aus der Eigenschaft, daß bei stetigen Abbildungen die Bilder zusammenhängender Mengen wieder zusammenhängende Mengen sind, können wir schlußfolgern, daß eine Abbildung f, die M_1 auf M_2 abbilden soll, auf keinen Fall stetig sein kann, wenn M_1 zusammenhängend und M_2 unzusammenhängend ist. Damit haben wir eine Begründung dafür, warum in den Fällen b, e, k und l keine stetigen Abbildungen zwischen M_1 und M_2 möglich sind. Dagegen ist es bei stetigen Abbildungen durchaus möglich, daß unzusammenhängende Mengen auf zusammenhängende Mengen abgebildet werden.

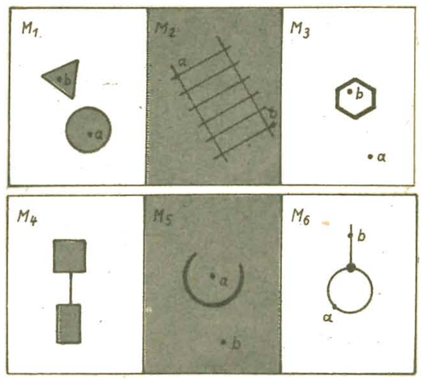


Bild 15

Wenn wir von solchen Abbildungen (z. B. im Fall c) die Umkehrabbildungen betrachten, so können diese aber nicht stetig sein. Die Forderung, daß auch die Umkehrabbildung einer stetigen Abbildung stetig sein soll, führt uns zu dem Begriff der topologischen Abbildung.

Topologische Abbildungen

Definition: Eine Abbildung f zwischen Teilmengen M und N der Ebene heißt topologische Abbildung, wenn

1. f eine eindeutige Abbildung von M auf N ist.

Das heißt, jedem Punkt von M entspricht genau ein Bildpunkt aus N, und jeder Punkt von N hat in M genau einen Originalpunkt.

2. f stetig ist,

3. f^{-1} stetig ist.

Mit dieser Erklärung ergibt sich sofort, daß bei topologischen Abbildungen auch die Originale zusammenhängender Mengen zusammenhängend sein müssen (wegen 3). Im Fall c wäre also zwar eine stetige aber keine topologische Abbildung denkbar. Für welche Beispiele gilt das noch?

Die Eigenschaft einer Abbildung, topologisch zu sein, ist also eine stärkere Forderung als die der Stetigkeit. Wenn wir an unsere Veranschaulichung denken, können wir uns den Unterschied auch folgendermaßen verdeutlichen:

bei stetigen Abbildungen darf man die „Gummihaut" beliebig verzerren, nicht zerreißen, aber zusammenkleben;

bei topologischen Abbildungen ist auch das Zusammenkleben nicht erlaubt. Bei diesen Abbildungen handelt es sich also um diejenigen, die wir uns am Anfang veranschaulicht haben.

Der Zusammenhang einer Menge ist also eine topologische Invariante, d. h., hat man eine zusammenhängende Menge und führt eine topologische Abbildung aus, so erhält man wieder eine zusammenhängende Menge.

Damit können wir bereits eine der zu Beginn aufgeworfenen Fragen beantworten. Es ist nicht möglich, den Luftballon so zu verzerren, daß sich der Hut vom Kopf hebt, da sonst der Zusammenhang der ursprünglichen Figur verloren ginge. Zu dem eingangs erwähnten Hilfsmittel zur Veranschaulichung topologischer Abbildungen können wir greifen, um Vermutungen über weitere Invarianten dieser Abbildungen zu bekommen. Daß es sich wirklich um Invarianten handelt, müssen wir dann erst beweisen.

Viele der hier benötigten Invarianten beruhen auf dem Begriff der Kurve.

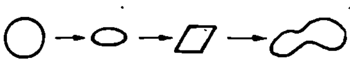
D: Eine Teilmenge C der Ebene heißt Kurve (Kurvenbogen), wenn es eine topologische Abbildung der Einheitsstrecke auf C gibt. (Kurven sind topologische Bilder der Einheitsstrecke.) Geschlossene Kurven sind topologische Bilder des Einheitskreises.

So wie die Nacheinanderausführung zweier Kongruenzabbildungen wieder eine Kongruenzabbildung ist, ist die Nacheinanderausführung zweier topologischer Abbildungen wieder eine topologische Abbildung, und es gilt deshalb:

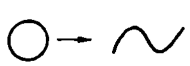
- Kurven gehen bei topologischen Abbildungen in Kurven über.
- Geschlossene Kurven gehen bei topologischen Abbildungen in geschlossene Kurven über.
- Nichtgeschlossene Kurven gehen bei topologischen Abbildungen in nichtgeschlossene Kurven über.

Hier ist lediglich zu zeigen, daß es zwischen der Einheitsstrecke und dem Einheitskreis keine topologische Abbildung geben kann. Überlege, wie man einen (indirekten) Beweis führen könnte! Bei topologischen Abbildungen ist also zwar

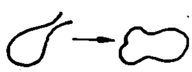
Bild 16



u. ä. denkbar, nicht aber



oder



Damit ist auch die zu Beginn gestellte Frage (2) beantwortet. Auch hier ist keine topologische Abbildung möglich, da es sich bei der einen Figur um eine geschlossene und bei der anderen Figur um eine nicht geschlossene Kurve handelt.

Als nächstes finden wir:

- Schnittpunkte von Kurven gehen bei topologischen Abbildungen in Schnittpunkte von Kurven über.

Diesen Satz wollen wir beweisen:

C_1 und C_2 seien Kurven

$C_1 \cap C_2 = \{p\}$, d. h. C_1 und C_2 haben genau einen Punkt – ihren Schnittpunkt – gemeinsam.

f sei eine topologische Abbildung von $C_1 \cup C_2$ auf $f(C_1) \cup f(C_2)$

Behauptung:

$f(C_1) \cap f(C_2) = \{f(p)\}$, d. h., auch die Bildkurven haben genau einen Punkt – ihren Schnittpunkt – gemeinsam, und dieser ist das Bild von p bei der Abbildung f.

Beweis:

Machen wir uns zunächst eine Skizze.

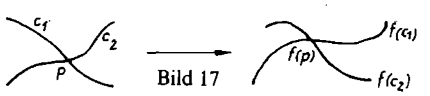


Bild 17

Auf Grund der schon bekannten Invarianten ist klar, daß $f(C_1)$ und $f(C_2)$ Kurven sind.

Da $p \in C_1$ gilt $f(p) \in f(C_1)$ und da $p \in C_2$ gilt $f(p) \in f(C_2)$.

Also $f(p) \in f(C_1) \cap f(C_2)$.

Da f eineindeutig ist, gilt:

$f(C_1 \cap C_2) = f(C_1) \cap f(C_2)$ und somit,

da $C_1 \cap C_2 = \{p\}$

$\{f(p)\} \quad = f(C_1) \cap f(C_2)$.

Diese Invarianz kann man auch etwas anders formulieren:

– Die Eigenschaft eines Punktes, daß von ihm 3 (oder mehr) Kurven ausgehen, ist eine topologische Invariante. (Formuliere diesen Satz, ohne das Wort Invariante zu benutzen!)

Für eine weitere topologische Invariante müssen wir erklären, wann ein Punkt a auf der Kurve C zwischen den Punkten b und c liegt. Da Kurven topologische Bilder der Einheitsstrecke sind, betrachten wir zunächst voneinander verschiedene Punkte x, y, z dieser Strecke.

Dann sagt man „x liegt zwischen y und z", wenn $y < x < z$ oder $y > x > z$.

Mit dieser Überlegung können wir erklären:

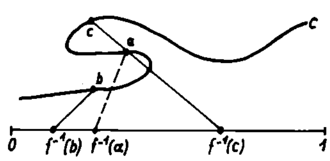
D: Seien a, b, c drei voneinander verschiedene Punkte der Kurve C. Dann liegt a auf C zwischen b und c, wenn gilt:

(1) $\quad f^{-1}(b) < f^{-1}(a) < f^{-1}(c)$ oder

(2) $\quad f^{-1}(b) > f^{-1}(a) > f^{-1}(c)$.

Wobei f die topologische Abbildung ist, die die Einheitsstrecke auf C abbildet.

Bild 18



(1) bedeutet z. B., daß das Urbild von b auf der Einheitsstrecke vor dem Urbild von a liegt

und das Urbild von a auf der Einheitsstrecke vor dem Urbild von c liegt.

Es scheint ganz offensichtlich, daß gilt:

– Wenn auf der Kurve C der Punkt a zwischen den Punkten b und c liegt, liegt nach Anwenden der topologischen Abbildung f der Punkt $f(a)$ auf der Kurve $f(C)$ zwischen den Punkten $f(b)$ und $f(c)$. (Auf einen Beweis wird hier verzichtet.) Auf Grund der Zwischenbeziehung kann ein Endpunkt e der Kurve C als ein Punkt charakterisiert werden, zu dem es keine zwei voneinander verschiedenen Punkte a und b der Kurve C gibt, so daß e zwischen a und b liegt.

Damit gilt sofort:

- Endpunkte von Kurven gehen bei topologischen Abbildungen in Endpunkte von Kurven über.

Jetzt können wir untersuchen, ob zwei gegebene Figuren topologisch äquivalent (gleichwertig) sind, d. h. ob es eine topologische Abbildung gibt, die sie aufeinander abbildet. Betrachten wir ein Beispiel:

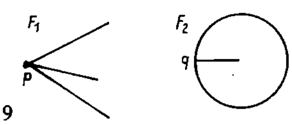


Bild 19

Sind F_1 und F_2 topologisch äquivalent?

Antwort: Nein, da in F_1 nur nicht geschlossene Kurven auftreten, in F_2 dagegen eine geschlossene Kurve. Wir haben also eine topologische Invariante gefunden, die zwar die Figur F_2, nicht aber die Figur F_1 besitzt.

Jetzt können wir auch die letzte der zu Beginn aufgeworfenen Fragen beantworten. Betrachten wir uns die einzelnen Buchstaben, die aufeinander abgebildet werden sollen, genauer.

Bei den Buchstaben I und S handelt es sich um nichtgeschlossene Kurven, sie können topologisch aufeinander abgebildet werden.

Auch D und A sind topologisch äquivalent. Beide bestehen aus einer geschlossenen und zwei nicht geschlossenen Kurven, die je einen Punkt mit der geschlossenen Kurve gemeinsam haben, E und F sind topologisch äquivalent, da beide aus drei nichtgeschlossenen Kurven, die einen gemeinsamen Endpunkt haben, bestehen.

Das gleiche gilt für E und T.

Also kann das Wort *IDEE* durch „Verzerren" jedes einzelnen Buchstabens in das Wort *SAFT* überführt werden.

Betrachten wir noch folgendes Beispiel:

Sind F_1 und F_2 topologisch äquivalent?

F_1

F_2

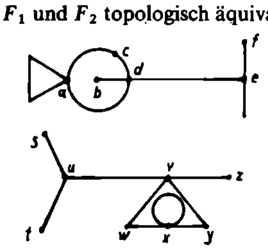


Bild 20

Antwort: Ja! Wir konstruieren eine topologische Abbildung zwischen F_1 und F_2 folgendermaßen: Die Strecke $\overline{be}$ wird auf die Strecke $\overline{uz}$ abgebildet. $\overline{ef}$ auf $\overline{us}$ ($\overline{ut}$ wäre auch als Bild von $\overline{ef}$ denkbar). Der Punkt a wird auf den Punkt x abgebildet. (Gemeinsamer Punkt zweier geschlossener Kurven.) Das Dreieck von F_1 wird auf den Kreis von F_2 und der Kreis von F_1 auf das Dreieck wyv abgebildet.

Auf welchen Punkt muß der Punkt d abgebildet werden? (Wodurch ist er topologisch charakterisiert?)

An diesem Beispiel könnt ihr auch sehen, daß nicht alle topologischen Abbildungen durch „Verzerren einer Gummihaut" veranschaulicht werden können, denn beim Verzerren einer „Gummihaut" geht es immer um eine topologische Abbildung der gesamten Ebene, in dem obigen Beispiel aber nicht.

Weitere Aufgaben:

▲1▲ a) Kann F_1 auf F_2 topologisch so abgebildet werden, daß $f(s)=t$ (t Bildpunkt von s)?

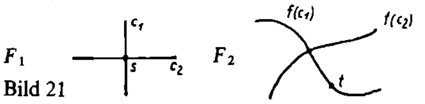


Bild 21

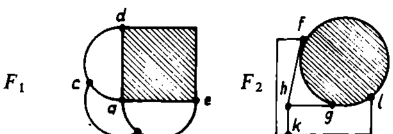
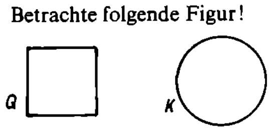


Bild 22

b) Sind F_1 und F_2 topologisch äquivalent? Welche Punkte von F_1 müssen bei irgendeiner topologischen Abbildung in welche Punkte von F_2 übergehen?

▲2▲ Betrachte folgende Figur!

Bild 23



Welche der folgenden Aussagen beschreiben topologische Eigenschaften?

a) Die Figur besteht aus einem Quadrat und einem Kreis.

b) Die Figur besteht aus zwei Kurven, von denen eine vier Ecken hat.

c) Die von K eingeschlossene Fläche ist größer als die von Q eingeschlossene Fläche.

d) Die geschlossenen Kurven Q und K schneiden sich nicht.

▲3▲ Welche der folgenden nur aus Kurven bestehenden Figuren sind topologisch äquivalent? Begründe deine Entscheidung!

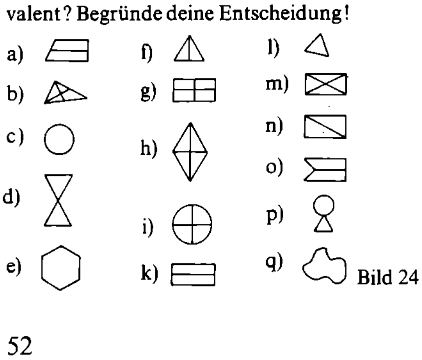


Bild 24

Eine geometrische Deutung der Mittelwert-Ungleichungen

Unter dieser Überschrift gibt Gy. Darvasi in der ungarischen Zeitschrift *A Matematika Tánitása* (Der Mathematikunterricht) eine geometrische Veranschaulichung verschiedener Mittelwerte zweier positiver Zahlen a und b, die auch für uns recht interessant ist. Er betrachtet für zwei positive Zahlen a und b

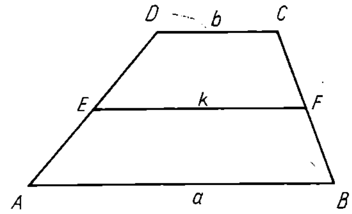
1. das arithmetische Mittel A:
$A=\frac{a+b}{2}$
2. das geometrische Mittel G:
$G=\sqrt{a\cdot b}$
3. das harmonische Mittel H:
$\frac{1}{H}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$
4. das quadratische Mittel Q:
$Q=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Bezeichnet man mit $\min(a,b)$ bzw. $\max(a,b)$ die kleinere bzw. die größere der beiden positiven Zahlen a und b, so gelten die Ungleichungen
$\max(a,b)\geqq Q\geqq A\geqq G\geqq H\geqq\min(a,b)$.

Von ihrer Richtigkeit kann man sich anhand eines Trapezes $ABCD$ mit $\overline{AB}\parallel\overline{DC}$ überzeugen.

1. (Bild 1) $\overline{EF}$ sei die Mittellinie von $ABCD$, ihre Länge sei k. Bezeichnet man die Länge von $\overline{AB}$ mit a und die Länge von $\overline{DC}$ mit b, so gilt $k=\frac{a+b}{2}$, d.h., die Länge der Mittellinie eines Trapezes ist das arithmetische Mittel der Längen der beiden parallelen Trapezseiten.

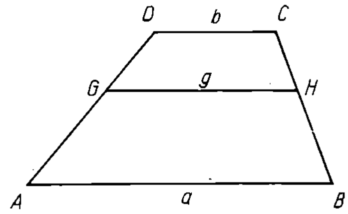
Bild 1



▲1▲ Wie kann man $\overline{EF}$ konstruieren?

2. (Bild 2) Die Trapeze $ABHG$ und $GHCD$ seien einander ähnlich, die Länge von $\overline{GH}$ sei g. Dann gilt $\frac{a}{g}=\frac{g}{b}$, also $g=\sqrt{ab}$, d.h., die Länge der Parallelen[1]) zu $\overline{AB}$, die das Trapez in zwei zueinander ähnliche Trapeze zerlegt, ist das geometrische Mittel der Längen der beiden parallelen Trapezseiten.

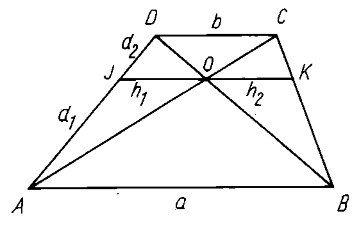
Bild 2



▲2▲ Wie kann man GH konstruieren? (Hinweis: Satzgruppe des Pythagoras!)

3. (Bild 3) O sei der Diagonalenschnittpunkt von $ABCD$; die Parallele durch O zu $\overline{AB}$ (bzw. zu $\overline{DC}$) schneide $\overline{AD}$ (bzw. $\overline{BC}$) in J (bzw. K); die Länge von $\overline{JK}$ sei h. Außerdem seien die Längen von $\overline{AD}, \overline{AJ}, \overline{JD}, \overline{JO}$ bzw. $\overline{OK}$ in dieser Reihenfolge mit d, d_1, d_2, h_1 bzw. h_2 bezeichnet.

Bild 3



Dann gilt nach dem Strahlensatz $\frac{h_1}{a}=\frac{d_2}{d}$ und $\frac{h_1}{b}=\frac{d_1}{d}$, woraus man $\frac{h_1}{a}+\frac{h_1}{b}=\frac{d_1+d_2}{d}=1$ und weiter $\frac{1}{h_1}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ erhält. Entsprechend erhält man $\frac{1}{h_2}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$. Es gilt also $h_1=h_2=\frac{h}{2}$ und damit $\frac{2}{h}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ oder umgeformt $\frac{1}{h}=\frac{1}{2}$

Vergleichen wir zum Schluß die topologischen Abbildungen mit den euch bekannten Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen, so stellen wir fest, daß Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen ganz spezielle topologische Abbildungen sind. (Überlege, warum!) Das heißt also:

- Alle Invarianten, die wir für topologische Abbildungen gefunden haben, sind auch Invarianten von Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen.
- Dagegen gibt es bei Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen weitere, spezielle Invarianten, die allgemeine topologische Abbildungen nicht haben müssen.

M. Grassmann

$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$, d.h., die Länge der Parallelen[1]) zu $\overline{AB}$ durch den Diagonalenschnittpunkt des Trapezes ist das harmonische Mittel der Längen der beiden parallelen Trapezseiten.

4. (Bild 4) Die Trapeze $ABML$ und $LMCD$ seien einander flächeninhaltsgleich, x und y seien die Längen ihrer Höhen; q sei die Länge von $\overline{LM}$. Dann gilt $\frac{a+q}{2}x=\frac{a+b}{4}(x+y)$ und $\frac{q+b}{2}y=\frac{a+b}{4}(x+y)$ oder umgeformt

$$\frac{x}{x+y}=\frac{a+b}{2(a+q)} \text{ und } \frac{x}{x+y}=\frac{a+b}{2(b+q)}.$$

Daraus erhält man

$$\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x+y}=\frac{a+b}{2(a+q)}+\frac{a+b}{2(b+q)}$$

$$1=\frac{(a+b)(b+q)+(a+b)(a+q)}{2(a+q)(b+q)}$$

$$=\frac{(a+b)(b+a+2q)}{2(a+q)(b+q)}$$

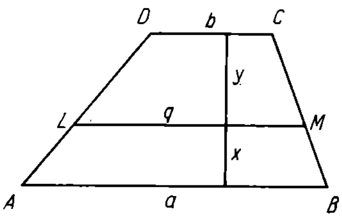
$$2(a+q)(b+q)=(a+b)(a+b+2q)$$

$$2q^2=a^2+b^2$$

$$q=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

d.h., die Länge der Parallelen[1]) zu $\overline{AB}$, die das Trapez in zwei einander flächeninhaltsgleiche Trapeze zerlegt, ist das quadratische Mittel der beiden parallelen Trapezseiten.

Bild 4



▲3▲ Wie kann man $\overline{LM}$ konstruieren? (*Hinweis:* Satzgruppe des Pythagoras!)

Mit diesen Vorbereitungen kann nun gezeigt werden, daß

$\max(a, b) \geqq Q \geqq A \geqq G \geqq H \geqq \min(a, b)$

gilt.

Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a \geqq b$. Dann ist $a \geqq q \geqq k \geqq g \geqq h \geqq b$ zu zeigen. Im folgenden werden die Längen der Höhen der Trapeze $ABCD$ bzw. $ABKI$ bzw. $ABHG$ mit m bzw. m_1 bzw. m_2 bezeichnet (Bild 5).

a) Aus $a \geqq b$ folgt $a+k \geqq b+k$, $\frac{a+k}{2} \geqq \frac{b+k}{2}$ und $\frac{a+k}{2}\cdot\frac{m}{2} \geqq \frac{b+k}{2}\cdot\frac{m}{2}$, d.h. $A_{ABFE} \geqq A_{EFCD}$ (vgl. Bild 1).

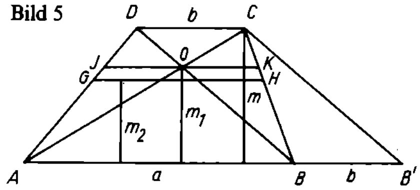
Da $\overline{LM}$ das Trapez $ABCD$ in zwei flächeninhaltsgleiche Trapeze teilt (vgl. Bild 4), ist es nicht möglich, daß $\overline{LM}$ „oberhalb“ von $\overline{EF}$ liegt – es gilt also $q \geqq k$.

b) Wegen $ABHG \sim GHCD$ (vgl. Bild 2) gilt

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{GD}}=\frac{\overline{BH}}{\overline{CH}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{GH}}=\frac{a}{\sqrt{ab}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\geqq 1 \qquad \text{(I)}$$

d.h. $\overline{AG} \geqq \overline{CD}$, $\overline{BH} \geqq \overline{HC}$, weshalb $\overline{GH}$ nicht „unterhalb“ der Mittellinie $\overline{EF}$ liegen kann – es gilt also $k \geqq g$.

Bild 5



c) Wegen $\triangle ABO \sim \triangle AB'C$ gilt $\frac{m_1}{m}=\frac{a}{a+b}$, d.h. $m_1=\frac{a}{a+b}\cdot m$ (II)

(vgl. Bild 5); wegen $ABHG \sim GHCD$ gilt weiter $\frac{m-m_2}{m_2}=\frac{\overline{GH}}{\overline{AB}}=\sqrt{\frac{b}{a}}$ (siehe I). Daraus folgt

$$m=m_2+m_2\sqrt{\frac{b}{a}}=m_2\left(1+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$$

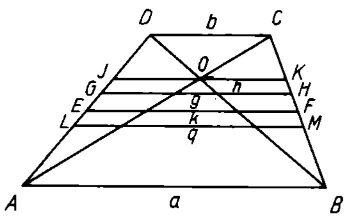
$$=m_2\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=m_2\cdot\frac{a+\sqrt{ab}}{a},$$

also $m_2=\frac{a}{a+\sqrt{ab}}\cdot m$. (III)

Durch Vergleich von (III) mit (II) erhält man $m_1 \geqq m_2$. (Beachte: Aus $a \geqq b > 0$ folgt $\sqrt{ab} \geqq \sqrt{b^2}=b$.)

Deshalb kann $\overline{GH}$ nicht „oberhalb“ von $\overline{JK}$ liegen – es gilt also $g \geqq h$.

Bild 6



Faßt man die Ergebnisse der Überlegungen von a), b) und c) zusammen, so erhält man $a \geqq q \geqq k \geqq g \geqq h \geqq b$ (siehe Bild 6). Dabei besteht die Gleichheit nur im Fall $a=b$, d.h. wenn das Trapez $ABCD$ ein Parallelogramm ist. Es ist dann

$a=q=k=g=h=b$. *W. Türke*

[1]) Unter der „Länge der Parallelen zu $\overline{AB}$“ soll hier die Länge der vom Trapez $ABCD$ aus der entsprechenden zu $\overline{AB}$ parallelen Geraden herausgeschnittenen Strecke verstanden werden.

Denke dir eine Zahl ...

▲1▲ Denk dir eine Zahl, und schreibe sie auf! Multipliziere sie mit 5, addiere dann 2, multipliziere mit 4, und addiere dann 3! Multipliziere jetzt mit 5, ud addiere dann 7! Schreibe das Ergebnis auf! Streiche die beiden letzten Grundziffern weg! Was stellst du fest?

▲2▲ Denk dir eine Zahl, und schreibe sie auf! Multipliziere sie mit 3 und addiere dann 2! Multipliziere nun mit 4 und addiere 4! Dividiere durch 12, und subtrahiere von diesem Ergebnis die gedachte Zahl! Was siehst du nun?

▲3▲ Schreibe 3 verschiedene einstellige Zahlen auf, und bilde daraus 6 verschiedene dreistellige Zahlen! Schreibe diese untereinander, und berechne ihre Summe! Berechne dann die Summe der drei zuerst aufgeschriebenen einstelligen Zahlen! Dividiere die Summe der 6 dreistelligen Zahlen durch die Summe der drei einstelligen Zahlen! Wie lautet stets dein Resultat?

▲4▲ Ich kann deine gedachte Zahl „erraten“, wenn du mir das Ergebnis sagst! Denk dir eine Zahl, und schreibe sie auf! Addiere 1 und multipliziere mit 3! Addiere dann 5 und zuletzt die gedachte Zahl! (Ich subtrahiere vom genannten Ergebnis 8 und dividiere dann durch 4 und erhalte damit die gedachte Zahl.)

▲5▲ Ich kann deinen Geburtstag erraten! Multipliziere die Tageszahl mit 20 und addiere 3! Multipliziere dann mit 5, und addiere die Monatszahl! Multipliziere das Ergebnis mit 20, addiere 3 und multipliziere mit 5! Addiere zum Schluß die Jahreszahl (nur die aus den letzten beiden Grundziffern ablesbare Zahl) dazu!

(Ich subtrahiere von dem genannten Ergebnis 1515 und lese von links nach rechts die Tages-, Monats- und Jahreszahl ab.)

Diese fünf Aufgaben wählten wir für unsere jüngsten Leser aus dem Abschnitt: „Text- und Sachaufgaben in der außerunterrichtlichen Arbeit“ aus. Sie wurden dem Buch entnommen:

E. Geißler

Sachaufgaben in den unteren Klassen

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

142 Seiten Preis: 4,20 M Bestell-Nr. 002024

Hervorragend geeignet zur Verbesserung der Grundkenntnisse!

Eine Aufgabe von einem Kollektiv der Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar unter Leitung von Prof. Dr. sc. techn.

Harald Zrost

Sektion Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Zrost schreibt: „Die von mir im Wissenschaftsbereich Baumechanik geleitete Arbeitsgruppe, der Bauingenieure, Mathematiker und Physiker angehören, sucht nach Lösungen für Probleme der Baumechanik. Bei der numerischen Herstellung solcher Lösungen spielen lineare Gleichungssysteme mit einer großen Zahl von Unbekannten eine bedeutende Rolle. Daher entstand in meiner Arbeitsgruppe die folgende Aufgabe."

▲1878▲ Ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \qquad (1)$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \qquad (2)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \qquad (n)$$

($a_{ik} \neq 0$ für alle $i=1, 2, \ldots, n$ und alle $k=1, 2, \ldots, n$) werde nach dem Gaußschen Algorithmus schrittweise in folgender Form gelöst:
Man stellt im ersten Schritt ein dem gegebenen System äquivalentes System her, dessen erste Gleichung (1′) mit der Gleichung (1) identisch ist und dessen folgende Gleichungen (2′), (3′), ... (n') die Unbekannte x_1 nicht mehr enthalten. Dabei soll jede Gleichung (k') ($k'=2', 3', \ldots, n'$)

$$a'_{k2}x_2+a'_{k3}x_3+\ldots+a'_{kn}x_n=b'_n \qquad (k')$$

nach der folgenden Vorschrift gebildet werden.

Es sei $f_k=\frac{a_{k1}}{a_{11}}$. Dann gilt $a'_{ki}=f_k \cdot a_{1i}-a_{ki}$ und $b'_k=f_k \cdot b_1-b_k$ für alle $i=2, 3, \ldots, n$.
Im zweiten Schritt wird analog ein dem gegebenen System äquivalentes Gleichungssystem gebildet, dessen erste Gleichung (1″) mit der Gleichung (1) und dessen zweite Gleichung (2″) mit der Gleichung (2′) übereinstimmt und dessen weitere Gleichungen (3″), (4″), ... (n'') die Unbekannten x_1 und x_2 nicht mehr enthalten.

Die Vorgehensweise sei die gleiche wie beim ersten Schritt; die Rolle der Gleichung (1) übernimmt die Gleichung (2′). Bei allen weiteren Schritten verfährt man analog, so daß man schließlich ein dem gegebenen System äquivalentes System erhält, dessen letzte Gleichung nur die Unbekannte x_n, dessen vorletzte Gleichung nur die Unbekannten x_n und x_{n-1} enthält usw.

– Es soll vorausgesetzt werden, daß alle in den Zwischenrechnungen bei dieser Methode zu berechnenden Koeffizienten von Null verschieden sind, d. h., daß in keiner Gleichung außer der zu eliminierenden Unbekannten noch eine weitere herausfällt. –

Hat das Gleichungssystem diese Form (Dreiecksgestalt), dann kann man ausgehend von der letzten Gleichung nach der Einsatzmethode die Unbekannten berechnen.

Im folgenden sei jede Addition, Subtraktion, Multiplikation bzw. Division zweier Zahlen als eine Rechenoperation bezeichnet. (Die Summation von n Summanden sind also $n-1$ Rechenoperationen.)

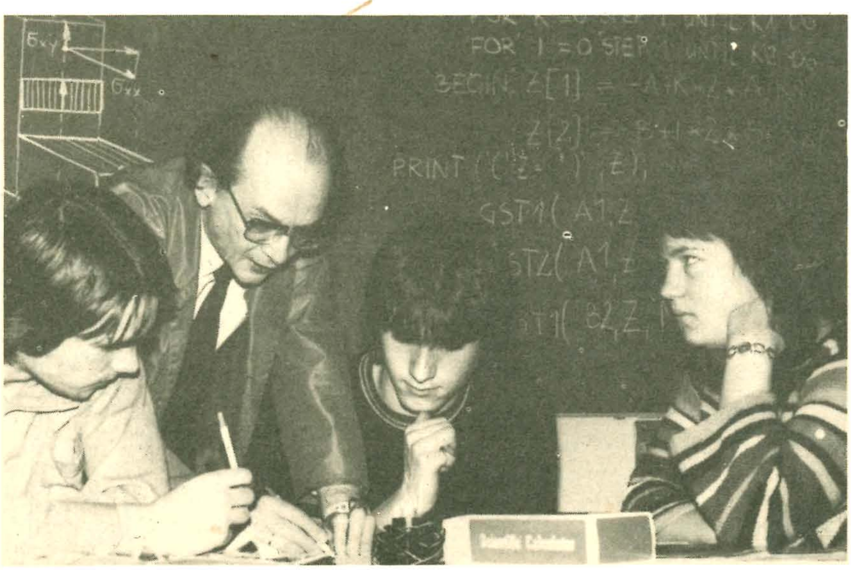
Es sei $z=f(n)$ diejenige ganzrationale Funktion, die für jede natürliche Zahl $n>1$ die Anzahl aller Rechenoperationen angibt, die benötigt werden, um ein lineares Gleichungssystem von n Gleichungen mit n Unbekannten bei den angegebenen Voraussetzungen nach der angegebenen Methode zu lösen.

a) Man ermittle $f(n)$!

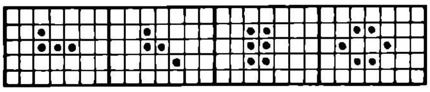
b) Wie lange müßte man rechnen, um ein Gleichungssystem von 50 Gleichungen mit 50 Unbekannten zu lösen, wenn man (ohne technische Hilfsmittel) für jede Rechenoperation 30 s Zeit benötigt?

c) Welche Zeit braucht eine elektronische Rechenanlage für eine Rechenoperation im Durchschnitt, wenn sie ein solches Gleichungssystem von 50 Gleichungen mit 50 Unbekannten in 15 Minuten löst?

In der von Prof. Dr. sc. techn. Zrost geleiteten Arbeitsgruppe werden zwei „Wissenschaftlich-praktische Arbeitsgemeinschaften" aus der EOS „Friedrich Schiller" Weimar von Dr. Heinrich Bode und Dipl.-Math. Karl-Heinz Müller betreut. Die Schüler eignen sich Grundkenntnisse aus bestimmten Teilgebieten der Baumechanik an. Dabei werden die Schulkenntnisse aus der Differential- und Integralrechnung angewendet und vertieft. Außerdem erlernen die Schüler eine Programmiersprache. Sie fertigen für die Untersuchung bestimmter Probleme (Spannungen in ebenen Bauelementen, Einfluß von Zufallsgrößen bei einfachen Bauwerken) Rechenprogramme an, die auf der EDVA der Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar gerechnet werden. Die Auswertung der Ergebnisse vieler Beispiele führt zu Aussagen über Brauchbarkeit von Näherungslösungen, die in der Abschlußarbeit zusammengestellt werden. Diese Aussagen werden in die Forschungsarbeit im Wissenschaftsbereich Baumechanik einfließen.



Life – ein mathematisches Spiel



Das von *John Horton Conway*, einem Mathematiker an der Universität Cambridge, erfundene Spiel erfordert keinen Gegenspieler. Es ist interessant durch die Vielzahl der auftretenden Figuren. Seinen Namen bekam es durch Analogien zur Entwicklung von Gruppen lebendiger Organismen. Über die erstaunliche Vielfalt der Erscheinungen in diesem Spiel werde ich im nächsten Heft berichten. Zunächst möchte ich dem Leser die Spielregeln vorstellen, damit er schon eigenständig experimentieren kann.

Das Spiel wird auf einem (beliebig weit fortgesetzt zu denkenden) GO-Brett gespielt. Kariertes Papier ist auch ausreichend; aber für den Anfänger wird es schwierig sein, die Übersicht zu behalten. Man startet nun mit einer beliebigen Konfiguration, die darin besteht, daß sich in bestimmten Quadraten schwarze Steine befinden (Organismen). Danach betrachtet man, welche Veränderungen sich durch Anwendung von *Conways* „genetischen Gesetzen" über Geburt, Überleben und Tod ergeben. Für das Spiel ist der Begriff des Nachbarquadrates zu einem gegebenen Quadrat von Bedeutung. Man versteht darunter sowohl die 4 Quadrate, die mit dem gegebenen eine gemeinsame Linie haben, als auch diejenigen 4, die nur in einem Punkt an das Ausgangsquadrat grenzen, insgesamt also 8 Stück. Die Spielregeln sind dann folgende:

1. *Überleben:* ein Stein mit 2 oder 3 Nachbarsteinen „überlebt" für die nächste Generation
2. *Tod:* ein Stein mit 4 oder mehr Nachbarn „stirbt wegen Überbevölkerung", und ein Stein mit keinem oder einem Nachbarn „stirbt wegen Isolation"
3. *Geburt:* in jedem leeren Quadrat mit genau 3 Nachbarn wird ein Stein „geboren".

Man beachte unbedingt, daß die Regeln simultan anzuwenden sind. Dadurch entsteht eine neue Generation. Man spricht auch von einer einfachen Bewegung innerhalb der gesamten Lebensgeschichte einer Ausgangskonfiguration. Es ist empfehlenswert, folgende Verfahrensweise anzuwenden, um Fehler bei der gleichzeitigen Anwendung der drei Regeln zu vermeiden:

1. Die Ausgangskonfiguration bestehe aus schwarzen Steinen.
2. Suche alle Steine, die „sterben" werden! Kennzeichne sie durch einen darüber gelegten schwarzen Stein!
3. Suche die Quadrate, in denen Steine „geboren" werden! Kennzeichne sie durch weiße Steine, und beachte, daß diese weißen Steine keine Bedeutung für die Geburt weiterer Steine während dieser Generation haben!
4. Nach doppelter Überprüfung entferne die schwarzen Steine von den Quadraten, auf denen zwei übereinander liegen, und ersetze die weißen durch schwarze Steine! Damit ist ein einfacher Generationswechsel abgeschlossen.

Man überdenke die Regeln an folgendem Beispiel:

Dem Leser wird beim Nachspielen des Beispiels schon aufgefallen sein, daß es notwendig ist, zwei Sorten von Steinen zu verwenden. Da die Regeln simultan auf alle Steine angewendet werden sollen (sonst wäre keine eindeutige Reihenfolge einfach festlegbar), muß einerseits gesichert werden, daß „absterbende" Steine nicht entfernt werden, ehe ihre Wirkung auf die umliegenden Steine betrachtet wurde, und andererseits dürfen die weißen Steine, die für die nächste Generation „geboren" werden, nicht schon Anlaß für Geburt oder Tod anderer Steine in dieser Generation sein. Auf einem GO-Brett ist damit eine günstigere Realisierungsmöglichkeit für das Spiel gegeben als bei der Verwendung von kariertem Papier.

Damit sind die Regeln geklärt. Nun kann der Leser selbst einige Erfahrungen sammeln. Es ist günstig, zunächst mit einfachen Anfangskonfigurationen zu beginnen. In meinem Artikel im nächsten Heft dieser Zeitschrift werde ich u. a. auf einige Fragestellungen eingehen, die der Leser beim Experimentieren aber bereits beobachten sollte:

Wie endet das Spiel?

- Ist es möglich, daß sich unendlich lange Veränderungen ergeben?
- Kann es zu einer explosionsartigen Ausbreitung der Steine kommen?
- Kann es relative Stabilität geben (z. B. Figuren, die in gleichbleibender Form nach jeweils einer bestimmten Anzahl von Bewegungen ins Unendliche abwandern)?

Abschließen möchte ich mit einer Frage, die bei der ersten Veröffentlichung des Spieles im Jahre 1970 noch ungelöst war und für deren Beantwortung damals ein Preis ausgesetzt war:

– Ist es möglich, daß eine endliche Ausgangskonfiguration unbegrenzt wächst, d. h. jede endliche Anzahl von Steinen einmal überschritten wird?

stud. math. R. Schuster

In eigener Sache

Ich studiere Mathematik im 4. Studienjahr in Leipzig und möchte einige Anstöße aufzeigen, die mich auf den Weg zu dieser Wissenschaft brachten. In der 5. Klasse kam ich mehr zufällig als durch besondere Schulerfolge zur Mathematikolympiade. Durch einen kleineren Anfangserfolg angespornt und durch Lehrer und Eltern ermutigt, beschäftigte ich mich mit Aufgabensammlungen und *alpha*-Aufgaben. Im 6. und 7. Schuljahr erhielt ich entscheidende Impulse durch zentrale Mathematikzirkel. Neben diesen trat in den folgenden Jahren zunehmend die selbständige Beschäftigung mit der Mathematik in den Mittelpunkt. Im 9. und 10. Schuljahr begann ich, mich mit Schulstoff und Olympiadeaufgaben der Klassen 11/12 zu beschäftigen. Im 10. Schuljahr legte ich die Abiturprüfung in Mathematik ab; während der Klassen 10, 11 und 12 erarbeitete ich mir den Lehrstoff des ersten Jahres an der Universität und legte die dazugehörigen Prüfungen ab. Neben diesem „solideren" Hintergrund beschäftigte ich mich viel mit olympiadespezifischen Problemen. Es gelang mir, in den Jahren 1973 und 1974 bei der IMO in Moskau und Erfurt Preisträger zu werden. Die Beschäftigung mit der Mathematik half mir, einen auch für die Schule effektiven Arbeitsstil zu finden. So blieb mir noch immer Zeit für mein Hobby und für Entspannung. Das Interesse für Mathematik war bei mir auch ständig begleitet von dem Interesse für andere Wissensgebiete. In der modernen Forschung tritt die interdisziplinäre Arbeitsweise immer mehr in den Mittelpunkt. Heute gibt es selbst die Anwendung mathematisch nicht trivialer Theorien in der Biologie (z. B. Differentialtopologie in der Genetik); ich habe mich bemüht, diese Tendenz im folgenden Artikel anklingen zu lassen.

Endliche und unendliche periodische Dezimalbrüche

Wir wissen: Jede gebrochene Zahl läßt sich als endlicher oder als unendlicher Dezimalbruch schreiben.
Wir erinnern uns: Auf die endlichen Dezimalbrüche werden wir über die sog. Zehnerbrüche geführt. Zehnerbrüche sind solche Brüche, die eine Potenz 10^n (n natürliche Zahl, $n \geqq 1$) als Nenner haben. Alle gebrochenen Zahlen, die sich durch Zehnerbrüche angeben lassen, können auch durch endliche Dezimalbrüche angegeben werden. Endliche Dezimalbrüche besitzen stets (entweder vor oder hinter dem Komma) eine letzte von 0 verschiedene Stelle.
Beispiel:

$\frac{1}{10}=0{,}1 \quad \frac{1}{10^2}=0{,}01 \quad \frac{1}{10^3}=0{,}001$
und so weiter.

$\frac{3}{10}=0{,}3 \quad \frac{23}{10^2}=0{,}23 \quad \frac{34}{10^3}=0{,}034$
und so weiter.

$\frac{25}{10}=2{,}5 \quad \frac{376}{10^2}=3{,}76 \quad \frac{3408}{10^3}=3{,}408$
und so weiter.

Aber auch die Zahlen $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{125}$ oder $\frac{1}{40}$ können mit Hilfe endlicher Dezimalbrüche dargestellt werden, denn auch sie können durch Zehnerbrüche angegeben werden.
Beispiel:

$\frac{1}{4}=\frac{25}{100}=0{,}25 \quad \frac{1}{125}=\frac{8}{1000}=0{,}008$

$\frac{3}{4}=\frac{75}{100}=0{,}75 \quad \frac{7}{125}=\frac{56}{1000}=0{,}056$

$\frac{1}{40}=\frac{25}{1000}=0{,}025$

$\frac{9}{40}=\frac{225}{1000}=0{,}225$

Wie nun aber erkennt man an einem Bruch $\frac{m}{n}$, der eine gebrochene Zahl darstellt, ob er durch einen endlichen Dezimalbruch ersetzt werden kann oder nicht?
Bekanntlich kann jede gebrochene Zahl durch einen gemeinen Bruch mit zueinander teilerfremden Zähler und Nenner angegeben werden. Daher wollen wir uns bei unseren Überlegungen auf einen gemeinen Bruch $\frac{m}{n}$ beschränken, bei dem die natürlichen Zahlen m und n zueinander teilerfremd sind. Außerdem wollen wir uns begnügen mit solchen Brüchen, bei denen $m<n$ und $n \neq 1$ ist.

Treten nun in der Primfaktorzerlegung des Nenners n eines solchen Bruchs höchstens die Primfaktoren von 10, also 2 oder 5 auf, so läßt sich der Bruch durch einen endlichen Dezimalbruch ersetzen. Bedient man sich der Potenzschreibweise, wobei $2^0=1$ und $5^0=1$ festgelegt sein soll, so kann man statt dessen auch sagen:
Die gebrochene Zahl $\frac{m}{n}$ läßt sich als endlicher Dezimalbruch angeben, wenn es natürliche Zahlen a und b gibt, so daß $n=2^a \cdot 5^b$ ist. (Ist 2 bzw. 5 kein Primfaktor von n, so kann man $n=2^0 \cdot 5^b$ bzw. $n=2^a \cdot 5^0$ schreiben, da $2^0=1$ und $5^0=1$ gilt.)
Beispiel:

$\frac{1}{40}=\frac{1}{2^3 \cdot 5^1}=\frac{5^2}{2^3 \cdot 5^1 \cdot 5^2}=\frac{5^2}{2^3 \cdot 5^3}=\frac{25}{10^3}=0{,}025$

$\frac{3}{50}=\frac{3}{2^1 \cdot 5^2}=\frac{3 \cdot 2}{2^1 \cdot 5^2 \cdot 2^1}=\frac{6}{2^2 \cdot 5^2}=\frac{6}{10^2}=0{,}06$

$\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}=\frac{5^2}{2^2 \cdot 5^2}=\frac{5^2}{10^2}=\frac{25}{10^2}=0{,}25$

$\frac{7}{125}=\frac{7}{5^3}=\frac{7 \cdot 2^3}{5^3 \cdot 2^3}=\frac{7 \cdot 8}{10^3}=\frac{56}{10^3}=0{,}056$

Jeder Bruch $\frac{m}{2^a \cdot 5^b}$ läßt sich durch Erweitern auf einen Zehnerbruch bringen, und zwar, falls $a>b$ ist, durch Erweitern mit 5^{a-b}, falls $a<b$ ist, durch Erweitern mit 2^{b-a}. Falls $a=b$ ist, so ist der Bruch bereits ein Zehnerbruch.
Die gebrochene Zahl $\frac{m}{2^a \cdot 5^b}$ läßt sich daher als ein endlicher Dezimalbruch angeben, der a oder b Stellen nach dem Komma hat, je nachdem ob $a \geqq b$ oder $a \leqq b$ ist. Die Anzahl d der Dezimalstellen ist folglich gleich dem größeren der beiden Exponenten a und b oder, falls a und b übereinstimmen, gleich a. (Das gilt für echte Brüche, wogegen die Aussage, daß $\frac{m}{2^a \cdot 5^b}$ durch einen endlichen Dezimalbruch darstellbar ist, für beliebige Brüche richtig ist.)
Beispiel:

$\frac{1}{20}=\frac{1}{2^2 \cdot 5}$
$a=2 \quad b=1.$ Also $d=2.$ (0,05)

$\frac{7}{250}=\frac{7}{2^1 \cdot 5^3}$
$a=1 \quad b=3.$ Also $d=3.$ (0,028)

$\frac{1}{16}=\frac{1}{2^4}$
$a=4 \quad b=0.$ Also $d=4.$ (0,0625)

$\frac{9}{125}=\frac{9}{5^3}$
$a=0 \quad b=3.$ Also $d=3.$ (0,072)

Die gebrochene Zahl $\frac{m}{n}$, wobei m und n teilerfremde natürliche Zahlen sind, läßt sich dagegen nicht durch einen endlichen Dezimalbruch angeben, wenn der Nenner n mindestens einen Primfaktor enthält, der von 2 und 5 verschieden ist, d. h., wenn es eine mit 10 teilerfremde natürliche Zahl $k \neq 1$ und natürliche Zahlen a und b gibt, so daß $n=2^a \cdot 5^b \cdot k$ ist. (Falls 2 oder 5 keine Primfaktoren von n sind, so ist dabei $a=0$ oder $b=0$.)
Wir wollen uns im folgenden zunächst auf solche gemeine Brüche beschränken, deren Zähler gleich 1 sind.
Beispiel:

$\frac{1}{11}=\frac{1}{2^0 \cdot 5^0 \cdot 11} \quad a=0 \; b=0 \; k=11$

$\frac{1}{9}=\frac{1}{2^0 \cdot 5^0 \cdot 3^2} \quad a=0 \; b=0 \; k=3^2=9$

$\frac{1}{12}=\frac{1}{2^2 \cdot 5^0 \cdot 3} \quad a=2 \; b=0 \; k=3$

$\frac{1}{15}=\frac{1}{2^0 \cdot 5^1 \cdot 3} \quad a=0 \; b=1 \; k=3$

$\frac{1}{30}=\frac{1}{2^1 \cdot 5^1 \cdot 3} \quad a=1 \; b=1 \; k=3$

$\frac{1}{880}=\frac{1}{2^4 \cdot 5^1 \cdot 11} \quad a=4 \; b=1 \; k=11$

$\frac{1}{1750}=\frac{1}{2^1 \cdot 5^3 \cdot 7} \quad a=1 \; b=3 \; k=7$

Solche gebrochenen Zahlen lassen sich durch unendliche Dezimalbrüche angeben. Diese Dezimalbrüche besitzen (im Gegensatz zu den endlichen Dezimalbrüchen) keine letzte von 0 verschiedene Stelle nach dem Komma.

Wir erinnern uns: Durch Anwendung des schriftlichen Divisionsverfahrens kann man zu jedem gemeinen Bruch einen entweder endlichen oder aber unendlichen Dezimalbruch erhalten.
Beispiel:

```
1:16=0,0625        1:11=0,090909...
 100                100
  40                 100
   80                  100
    0                    1

1:12=0,0833...
 100
  40
   40
    4
```

Wenn eine solche schriftliche Division einer natürlichen Zahl m durch eine natürliche Zahl n, wobei $m<n$ ist, auf einen unendlichen Dezimalbruch führt, so müssen sich in dessen Dezimalstellen eine bestimmte Grundziffer oder Gruppen von Grundziffern ständig wiederholen. Als Reste bei einer solchen Division sind nämlich höchstens die Zahlen 1 bis $n-1$ möglich, so daß sich spätestens nach der $(n-1)$-ten Stelle ein Rest r $(1 \leqq r \leqq n-1)$ ergeben muß, der bereits einmal vorgekommen ist. Nach dem ersten sich wiederholenden Rest muß daher im unendlichen Dezimalbruch eine Grundziffer oder eine Gruppe von Grundziffern immer wiederkehren. Eine solche Gruppe sich wiederholender Grundziffern nennt man eine Periode und die Anzahl der Grundziffern in einer Periode die Periodenlänge l des unendlichen Dezimalbruchs.

Beispiel:

$\frac{1}{3}=0{,}333333\ldots=0{,}\overline{3}$

Periode: 3 $\quad l=1$

$\frac{1}{11}=0{,}090909\ldots=0{,}\overline{09}$

Periode: 09 $\quad l=2$

$\frac{1}{27}=0{,}037037\ldots=0{,}\overline{037}$

Periode: 037 $\quad l=3$

$\frac{1}{30}=0{,}033333\ldots=0{,}0\overline{3}$

Periode: 3 $\quad l=1$

$\frac{1}{12}=0{,}083333\ldots=0{,}08\overline{3}$

Periode: 3 $\quad l=1$

$\frac{1}{15}=0{,}066666\ldots=0{,}0\overline{6}$

Periode: 6 $\quad l=1$

Da es auch unendliche Dezimalbrüche gibt, die nicht periodisch sind, nennt man die unendlichen Dezimalbrüche, die man bei der Division natürlicher Zahlen erhalten kann, periodische Dezimalbrüche.

Wir fassen zunächst zusammen: Jede gebrochene Zahl $\frac{1}{n}$ läßt sich durch einen endlichen oder durch einen unendlichen, aber periodischen Dezimalbruch angeben.

Unter den unendlichen periodischen Dezimalbrüchen gibt es nun solche, deren Periode unmittelbar hinter dem Komma beginnt $\left(\text{z. B. } \frac{1}{11}=0{,}\overline{09}\right)$, und solche, deren Periode nicht unmittelbar hinter dem Komma anfängt $\left(\text{z. B. } \frac{1}{12}=0{,}08\overline{3}\right)$. Die ersteren nennt man rein-periodische Dezimalbrüche; bei den letzteren sagt man, sie haben eine Vorperiode. Eine Vorperiode ist eine Grundziffer oder Gruppe von Grundziffern, die im unendlichen Dezimalbruch vor der Periode steht. Die Anzahl der Grundziffern in einer Vorperiode nennt man die Länge v der Vorperiode.

Beispiel:

$\frac{1}{15}$	$=0{,}0\overline{6}$	Vorperiode: 0	$v=1$
$\frac{1}{12}$	$=0{,}08\overline{3}$	Vorperiode: 08	$v=2$
$\frac{1}{880}$	$=0{,}0011\overline{36}$	Vorperiode: 0011	$v=4$
$\frac{1}{1750}$	$=0{,}000\overline{571428}$	Vorperiode: 000	$v=3$

Ob zu einer gebrochenen Zahl $\frac{1}{n}$ ein unendlicher rein-periodischer Dezimalbruch oder ein unendlicher Dezimalbruch mit einer Vorperiode gehört, läßt sich nicht nur nach einer schriftlichen Division feststellen, sondern auch dadurch ermitteln, daß man den Nenner n als Produkt $2^a \cdot 5^b \cdot k$ (a, b, k seien natürliche Zahlen mit den Bedingungen $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $k \neq 1$, $2 \nmid k$, $5 \nmid k$) schreibt. Ist nun $a=b=0$, so gehört zu der gebrochenen Zahl $\frac{1}{n}$ ein unendlicher rein-periodischer Dezimalbruch. Sonst gehört zu ihr ein unendlicher Dezimalbruch mit Vorperiode. Die Länge v der Vorperiode eines solchen Dezimalbruchs ist gleich dem (größeren) der beiden Exponenten a und b, bzw. gleich a, falls $a=b$ ist.

Beispiel:

a) Rein-periodische Dezimalbrüche

$\frac{1}{3}$ $\quad n=3=2^0 \cdot 5^0 \cdot 3$

$a=b=0 \quad (k=3) \quad (0{,}\overline{3})$

$\frac{1}{11}$ $\quad n=11=2^0 \cdot 5^0 \cdot 11$

$a=b=0 \quad (k=11) \quad (0{,}\overline{09})$

b) Dezimalbrüche mit Vorperiode

$\frac{1}{12}$ $\quad n=12=2^2 \cdot 5^0 \cdot 3$

$a=2 \quad b=0 \quad (k=3)$. Also $v=a=2$.

$\frac{1}{30}$ $\quad n=30=2^1 \cdot 5^1 \cdot 3$

$a=1 \quad b=1 \quad (k=3)$. Also $v=a=1$.

$\frac{1}{880}$ $\quad n=880=2^4 \cdot 5^1 \cdot 11$

$a=4 \quad b=1 \quad (k=11)$. Also $v=a=4$.

$\frac{1}{1750}$ $\quad n=1750=2^1 \cdot 5^3 \cdot 7$

$a=1 \quad b=3 \quad (k=7)$. Also $v=b=3$.

Auch wenn die gebrochenen Zahlen durch gemeine Brüche dargestellt werden, deren Zähler von 1 verschieden sind, ändern sich die genannten Eigenschaften der zugehörigen unendlichen Dezimalbrüche nicht, sofern die jeweiligen Zähler und Nenner teilerfremd sind und der Zähler kleiner als der Nenner ist.

Beispiel:

$\frac{7}{1250}$ $\quad 1250=2^1 \cdot 5^4 \quad a=1 \quad b=4$

Also endlicher Dezimalbruch; $d=b=4$.

$(0{,}0056)$

$\frac{7}{33}$ $\quad 33=2^0 \cdot 5^0 \cdot 33 \quad a=0 \quad b=0 \quad k=33$

Also rein-periodischer Dezimalbruch.

$(0{,}\overline{21})$

$\frac{3}{880}$ $\quad 880=2^4 \cdot 5^1 \cdot 11 \quad a=4 \quad b=1 \quad k=11$

Also Dezimalbruch mit Vorperiode; $v=a=4$.

$(0{,}0034\overline{09})$

$\frac{11}{1750}$ $\quad 1750=2^1 \cdot 5^3 \cdot 7 \quad a=1 \quad b=3 \quad k=7$

Also Dezimalbruch mit Vorperiode; $v=b=3$.

$(0{,}006\overline{285714})$

Wir wollen uns nun etwas näher mit den rein-periodischen Dezimalbrüchen beschäftigen. Unter ihnen sind besonders diejenigen interessant, die zu gemeinen Brüchen gehören, deren Nenner Primzahlen sind. Jede gebrochene Zahl $\frac{m}{p}$ (p sei Primzahl, aber von 2 und 5 verschieden; m sei natürliche Zahl mit $0<m<p$) liefert einen rein-periodischen Dezimalbruch. Die Periodenlänge l dieser Dezimalbrüche ist, wie bereits gesagt, höchstens $p-1$. Es gibt gebrochene Zahlen $\frac{m}{p}$, die auf Dezimalbrüche der Periodenlänge $p-1$ führen, aber nicht alle derartigen Zahlen liefern Dezimalbrüche der Periodenlänge $p-1$.

Beispiel:

a) $\frac{1}{7}=0{,}\overline{142857}$

$p=7 \quad p-1=6 \quad l=6 \quad l=p-1$

b) $\frac{1}{3}=0{,}\overline{3}$

$p=3 \quad p-1=2 \quad l=1 \quad l \neq p-1$

$\frac{1}{13}=0{,}\overline{076923}$

$p=13 \quad p-1=12 \quad l=6 \quad l \neq p-1$

$\frac{1}{73}=0{,}\overline{01369863}$

$p=73 \quad p-1=72 \quad l=8 \quad l \neq p-1$

$\frac{1}{101}=0{,}\overline{0099}$

$p=101 \quad p-1=100 \quad l=4 \quad l \neq p-1$

Weitere Beispiele neben $\frac{1}{7}$ für gemeine Brüche mit Primzahlnenner p, die tatsächlich auf rein-periodische Dezimalbrüche der Periodenlänge $p-1$ führen, sind $\frac{1}{17}, \frac{1}{19}, \frac{1}{23}, \frac{1}{29}$. Bei der schriftlichen Division $1:p$ müssen in diesen Fällen alle möglichen Reste von 1 bis $p-1$ genau einmal auftreten, bevor sich die Ziffernfolge im Dezimalbruch periodisch wiederholt.

Beispiel: $\frac{1}{7}=1:7=0{,}142857\,1\ldots$

10
30
20
60
40
50
1

Daher läßt sich jedem der möglichen Reste bei der Division $1:p$, also den Zahlen von 1 bis $p-1$, genau eine Ziffer der Periode des zugehörigen periodischen Dezimalbruchs zuordnen.

Beispiel: $p=7$

Rest	1	3	2	6	4	5
Ziffer der Periode	1	4	2	8	5	7

Folglich läßt sich aus dieser Tabelle sofort das Ergebnis der Division $m:p$ $(0<m<p)$, also der zu $\frac{m}{p}$ gehörige periodische Dezimalbruch ablesen.

Beispiel:

$\frac{2}{7}=0{,}\overline{285714}, \quad \frac{3}{7}=0{,}\overline{428571},$

$\frac{4}{7}=0{,}\overline{571428}, \quad \frac{5}{7}=0{,}\overline{714285},$

$\frac{6}{7}=0{,}\overline{857142}$

Entsprechendes ist auch für die anderen genannten Primzahlen möglich.

Beispiel: $p=17$

Rest (Zähler)	1	10	15	14	4	6	9	5
Periodenziffer	0	5	8	8	2	3	5	2

Rest (Zähler)	16	7	2	3	13	11	8	12
Periodenziffer	9	4	1	1	7	6	4	7

$\frac{1}{17}=0,\overline{0588235294117647}$

$\frac{7}{17}=0,\overline{4117647058823529}$

Wenn aber die Periodenlänge l des zu $\frac{1}{p}$ gehörigen rein-periodischen Dezimalbruchs nicht $p-1$ ist, so ist l zumindest ein Teiler von $p-1$.

Beispiel:

$\frac{1}{13}$ $p=13$ $p-1=12$ $l=6$ $6|12$

$\frac{1}{73}$ $p=73$ $p-1=72$ $l=8$ $8|72$

$\frac{1}{101}$ $p=101$ $p-1=100$ $l=4$ $4|100$

In diesen Fällen treten natürlich nicht mehr alle Zahlen von 1 bis $p-1$ als Reste bei der Division $1:p$ auf.

Beispiel: $\frac{1}{13}=0,\overline{076923}$

Rest (Zähler)	1	10	9	12	3	4
Periodenziffer	0	7	6	9	2	3

Also ist: $\frac{12}{13}=0,\overline{923076}$, $\frac{4}{13}=0,\overline{307692}$

Mit Hilfe dieser Tabelle läßt sich $\frac{2}{13}$ allerdings nicht (direkt) ermitteln. Durch Division $2:13$ ergibt sich für $\frac{2}{13}$ der periodische Dezimalbruch $0,\overline{153846}$ und die entsprechende Rest-Periodenziffer-Tabelle:

Rest (Zähler)	2	7	5	11	6	8
Periodenziffer	1	5	3	8	4	6

Also ist $\frac{11}{13}=0,\overline{846153}$.

Da für $p=13$ die Zahl $p-1=12$ das Doppelte von $l=6$ ist, gibt es in diesem Fall genau zwei elementfremde Restfolgen, mit deren Hilfe sich jeder zu $\frac{m}{13}$ $(0<m<13)$ gehörige rein-periodische Dezimalbruch ermitteln läßt. Für $p=73$ gibt es 7 solche elementfremden Restfolgen, da für $p=73$ gilt: $p-1=72$, $l=8$, also $p-1=7\cdot l$.

Man erkennt sofort, daß der Zähler in jedem dieser Fälle keinen Einfluß auf die Periodenlänge der zugehörigen Dezimalbrüche hat.

Ist der Nenner n des gemeinen Bruchs $\frac{1}{n}$ das Produkt zweier Primzahlen p_1 und p_2, die von 2 und 5 verschieden sind, und haben die zu $\frac{1}{p_1}$ und $\frac{1}{p_2}$ gehörigen rein-periodischen Dezimalbrüche die Periodenlängen l_1 und l_2, so hat der zu $\frac{1}{n}$ gehörige rein-periodische Dezimalbruch als Periodenlänge das kleinste gemeinsame Vielfache von l_1 und l_2.

Beispiel:

Der zu $\frac{1}{7}$ gehörige (rein-periodische) Dezimalbruch hat die Periodenlänge $l_1=6$. Der zu $\frac{1}{101}$ gehörige (rein-periodische) Dezimalbruch hat die Periodenlänge $l_2=4$. Folglich hat der zu $\frac{7}{707}\left(=\frac{1}{7\cdot 101}\right)$ gehörige (rein-periodische) Dezimalbruch die Periodenlänge $l=12$, denn das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen 6 und 4 ist 12.

Gehört zu einer gebrochenen Zahl $\frac{1}{n}$ ein rein-periodischer Dezimalbruch, so läßt sich dessen Periodenlänge l auch noch auf andere Weise ermitteln, ohne die Division $1:n$ auszuführen. Die Periodenlänge l ist nämlich die kleinste natürliche Zahl z, die größer als Null ist und für die 10^z-1 durch n teilbar ist.

Beispiel:

a) $\frac{1}{3}$ $n=3$ $10^1-1=9$ $3|9$

Also ist $l=1$.

b) $\frac{1}{7}$ $n=7$ $10^1-1=9$ $7\nmid 9$

$10^2-1=99$ $7\nmid 99$

$10^3-1=999$ $7\nmid 999$

$10^4-1=9999$ $7\nmid 9999$

$10^5-1=99999$ $7\nmid 99999$

$10^6-1=999999$ $7/999999$

Also ist $l=6$.

Umgekehrt lassen sich auf Grund der Primzahlzerlegungen der Zahlen $10^1-1=9$, $10^2-1=99$, $10^3-1=999$, ... die Zahlen n ermitteln, für welche die zu $\frac{1}{n}$ gehörigen rein-periodischen Dezimalbrüche die Periodenlänge 1, 2, 3, ... haben.

$10^1-1=9=3^2$

Folglich sind $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{9}$ die einzigen gebrochenen Zahlen $\frac{1}{n}$ (die sich also durch gemeine Brüche mit dem Zähler 1 darstellen lassen), deren zugehörige Dezimalbrüche rein-periodisch mit der Periodenlänge 1 sind.

$10^2-1=99=3^2\cdot 11$

Folglich sind $\frac{1}{11}, \frac{1}{33}$ und $\frac{1}{99}$ die einzigen gebrochenen Zahlen $\frac{1}{n}$, deren zugehörige Dezimalbrüche rein-periodisch mit der Periodenlänge 2 sind. $\left(\frac{1}{3}\right.$ und $\frac{1}{9}$ sind bereits bei der Periodenlänge 1 erfaßt.$\left.\right)$

$10^3-1=999=3^3\cdot 37$

Folglich sind $\frac{1}{27}, \frac{1}{37}, \frac{1}{111}, \frac{1}{333}$ und $\frac{1}{999}$ die einzigen gebrochenen Zahlen $\frac{1}{n}$, deren zugehörige Dezimalbrüche rein-periodisch mit der Periodenlänge 3 sind. (Bereits zuvor erfaßte Zahlen $\frac{1}{n}$ werden hier selbstverständlich nicht mehr angegeben, da ihre Periodenlänge kleiner als 3 ist.)

$10^4-1=9999=3^2\cdot 11\cdot 101$

Folglich sind $\frac{1}{101}, \frac{1}{303}, \frac{1}{909}, \frac{1}{1111}, \frac{1}{3333}, \frac{1}{9999}$ die einzigen gebrochenen Zahlen $\frac{1}{n}$, deren zugehörige Dezimalbrüche rein-periodisch mit der Periodenlänge 4 sind.

Diese Erkenntnisse lassen sich aber auch nutzen, wenn man die Periodenlänge des zu einer gebrochenen Zahl $\frac{1}{n}$ gehörigen periodischen Dezimalbruchs ermitteln will, falls dieser eine Vorperiode hat.

Beispiel:

a) $\frac{1}{880}=\frac{1}{2^4\cdot 5^1\cdot 11}=\frac{1}{2^4\cdot 5^1}\cdot\frac{1}{11}$

Aus dem Exponenten der Potenz 2^4 im Nenner des ersten Bruchs auf der rechten Seite geht hervor, daß die Länge v der Vorperiode gleich 4 ist. Da im Nenner des zweiten Bruchs auf der rechten Seite die Primzahl 11 steht und der zu $\frac{1}{11}$ gehörige rein-periodische Dezimalbruch die Periodenlänge 2 hat, hat auch der zu $\frac{1}{880}$ gehörige Dezimalbruch die Periodenlänge 2. Zu $\frac{1}{880}$ gehört ein periodischer Dezimalbruch, der eine Vorperiode der Länge 4 hat und dessen Periodenlänge 2 ist. $(0,0011\overline{36})$

b) $\frac{1}{6060}$ $6060=2^2\cdot 5^1\cdot 303$

Folglich ist bei dem zu $\frac{1}{6060}$ gehörigen periodischen Dezimalbruch die Länge der Vorperiode gleich 2 (auf Grund der Exponenten der Potenzen von 2 und 5) und die Periodenlänge gleich 4, da $\frac{1}{303}$ die Periodenlänge 4 hat. $\left(\text{Tatsächlich ist } \frac{1}{6060}=0,00\overline{0165}\right)$

c) $\frac{1}{2376}$ $2376=2^2\cdot 5^0\cdot 3^3\cdot 11$

Folglich ist bei dem zu $\frac{1}{2376}$ gehörigen periodischen Dezimalbruch die Länge der Vorperiode gleich 3 (auf Grund der Exponenten der Potenzen von 2 und 5) und die Periodenlänge gleich 6, da $\frac{1}{3^3}=\frac{1}{27}$ die Periodenlänge 3, $\frac{1}{11}$ die Periodenlänge 2 hat und das kleinste gemeinsame Vielfache von 3 und 2 gleich 6 ist. $\left(\text{Tatsächlich ist } \frac{1}{2376}=0,000\overline{420875}.\right)$

Die hier genannten Eigenschaften sind die wichtigsten der periodischen Dezimalbrüche. Auch die zu beliebigen gebrochenen Zahlen $\frac{m}{n}$ gehörigen Dezimalbrüche haben diese Eigenschaften; sofern nur die natürlichen Zahlen m und n $(\neq 1)$ zueinander teilerfremd sind. Wir haben keine dieser Eigenschaften bewiesen. Wer Freude an der Beschäftigung mit solchen Zahlenproblemen hat, sollte die nachfolgenden Aufgaben selbständig lösen, und wer darüber hinaus sogar diese oder jene Eigenschaft beweisen möchte, der sollte einmal ein Büchlein zur Hand nehmen, in dem er systematisch in das interessante Gebiet der Zahlentheorie eingeführt wird.

Die Leseprobe

Unmöglichkeitsbeweise

In der Mathematik gibt es zahlreiche Probleme, deren Lösung in ihrer Unlösbarkeit besteht. Einer der ältesten Unmöglichkeitsbeweise wurde um 450 v. u. Z. von Hippasos von Metapontion geführt und ergab, daß $\sqrt{2}$ (die Länge der Diagonalen im Einheitsquadrat) keine rationale Zahl ist.

▲1▲ Ermittle mit Hilfe der zu $p=17$ bzw. $p=13$ gehörigen Restfolge-Tabellen die zu $\frac{11}{17}$, $\frac{14}{17}$, $\frac{9}{13}$, $\frac{7}{13}$ gehörigen Dezimalbrüche! Überprüfe die Ergebnisse mit Hilfe der schriftlichen Division!

▲2▲ Ermittle (ohne auszudividieren), welche der folgenden gebrochenen Zahlen endliche und welche unendliche Dezimalbrüche haben! Ermittle ferner je nachdem entweder die Anzahl der Dezimalstellen nach dem Komma oder die Länge der Vorperiode und die Periodenlänge der zugehörigen Dezimalbrüche!

$$\frac{1}{280}, \frac{1}{45}, \frac{1}{34}, \frac{1}{580}, \frac{1}{323}, \frac{1}{80}$$

▲3▲ Ermittle alle natürlichen Zahlen n, für die der zu $\frac{1}{n}$ gehörige Dezimalbruch unendlich und rein-periodisch ist und die Periodenlänge 5 (6, 7, 8) hat! *M. Rehm*

Das Cantorsche Diagonalverfahren zeigte ebenfalls die Unmöglichkeit, die reellen Zahlen abzuzählen. Die Quadratur des Kreises (d. h. seine Verwandlung in ein flächengleiches Quadrat) mit Zirkel und Lineal ist nach Lindemann ebenfalls unmöglich. Da die Fläche eines Kreises mit dem Radius r gleich πr^2 ist, hat ein Quadrat mit den Seitenlängen $r\sqrt{\pi}$ den gleichen Flächeninhalt wie der Kreis. Hier ist genau darauf zu achten, was verlangt wird und was unmöglich ist, denn es gibt zwar eine Strecke der Länge $r\sqrt{\pi}$ und damit ein zugehöriges Quadrat der Fläche πr^2, jedoch läßt sich diese Strecke aus dem Radius r nicht mit Zirkel und Lineal konstruieren. Mit geeigneten anderen Konstruktionsmitteln kann die Aufgabe lösbar sein!

Drei Beispiele sollen zeigen, wie genau darauf zu achten ist, was verlangt wird.

Beispiel: Mit 12 Hölzern können 4 gleichseitige Dreiecke gebildet werden, so daß jedes Hölzchen als Seite dient. Dies geht mit 9 Hölzchen ebenfalls. Ist das auch mit 6 Hölzchen möglich?

Wenn eine Lösung möglich ist, dann muß sie sich aus der im Bild gezeigten Figur ergeben, denn für ein Dreieck sind genau 3 Hölzchen nötig. Die restlichen 3 Hölzchen müssen, damit sie die bereits gelegten Hölzchen als mögliche Seite ausnützen, in den Ecken des Dreiecks angelegt werden. Dann ist es jedoch offenbar unmöglich, alle Hölzchen wie im Bild zu einem Dreieck zu schließen. Unmöglich ja, aber nur in der Ebene, was nicht verlangt wurde, sondern durch die vorausgegangenen Konstruktionen automatisch unterstellt wurde. Im Raum bilden die 6 Kanten eines regelmäßigen Tetraeders vier gleichseitige Dreiecke.

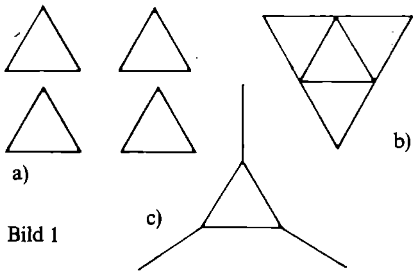
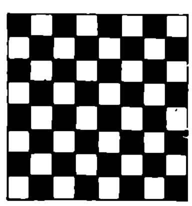


Bild 1

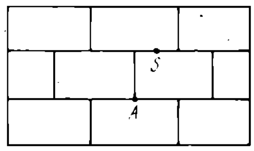
Beispiel: Es ist unmöglich, auf einem Schachbrett mit dem Springer von einer Ecke zur diagonal gegenüberliegenden Ecke zu ziehen und dabei jedes Feld genau einmal zu besetzen. Die Diagonale und damit gegenüberliegende Ecken haben die gleiche Feldfarbe. Der Springer wechselt bei jedem Zug die Farbe des Feldes. Ein Schachbrett hat 64 Felder. Angenommen, die Aufgabe ist lösbar, dann benötigte der Springer 63 Züge. Nach einer ungeraden Anzahl von Zügen besetzt der Springer ein Feld, das eine andere Farbe als sein Ausgangsfeld hat. Also auch nach dem 63. Zug. Das widerspricht der Gleichfarbigkeit der diagonalen Ecken.

Bild 2



Beispiel: Eine Spinne sitzt auf der im Bild gezeigten Mauer an der mit S markierten Stelle. Die Spinne möchte alle Fugen des gezeichneten Mauerstücks ablaufen (der Rand gehört dazu), ohne eine Fuge zweimal zu durchlaufen. Ist das möglich? Auf ihrem Rundgang kommt die Spinne an eine Stelle (z. B. den Punkt A), wo sich die Fuge „gabelt", so daß sie eine der beiden Fugen benutzen muß. Wenn sie alle Fugen durchlaufen soll, dann muß sie irgendwann auch die an der Gabelung nicht benutzte Fuge passieren. In dieser Fuge kommt sie aber nur bis zum Gabelungspunkt, weil die beiden anderen Fugen bereits durchlaufen wurden. Also muß ihr Rundgang hier enden. Da es aber mehrere solcher Gabelungen gibt, bleibt die Spinne auf ihrem Rundgang stecken.

Bild 3



▲1▲ Es ist unmöglich, daß sich bei einer Begrüßung 7 Personen die Hände geben, und zwar so, daß jeder genau zwei Personen nicht die Hand gegeben hat.

▲2▲ Für alle natürlichen Zahlen n ist 7 kein Teiler von 2^n+1.

▲3▲ Auf einem Schachbrett mit 3×3 Feldern befinden sich 9 Figuren, die auf dem gleichen Brett völlig neu aufgestellt werden. Ist eine neue Aufstellung möglich, in der alle ursprünglich benachbarten Figuren wieder benachbart sind?

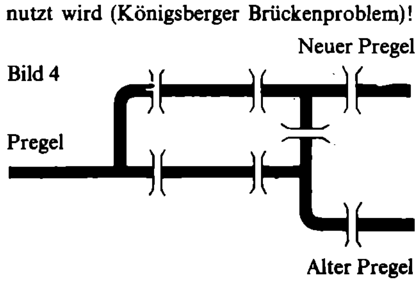
▲4▲ Der Bruch $\frac{21n+4}{14n+3}$ ist für alle n unkürzbar.

▲5▲ In einem Schachbrett (8×8 Felder) fehlen die sich diagonal gegenüberliegenden Ecken. Können die restlichen 62 Felder durch 31 Dominosteine vollständig belegt werden?

▲6▲ Zu drei Häusern soll in einer Ebene eine Zuleitung des Gaswerkes, des Wasserwerkes und der Elektrizitätsanstalt gelegt werden. Beweisen Sie, daß dies nicht kreuzungsfrei möglich ist!

▲7▲ Beweisen Sie, daß es unmöglich ist, über die im Bild gezeichneten Brücken so zu gehen, daß jede Brücke genau einmal benutzt wird (Königsberger Brückenproblem)!

Bild 4



Weitere Bücher aus dem BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft

Bakelman, I. J.
Spiegelung am Kreis (KNB)
132 S. mit 67 Abb., 1976, 7,— M
Bestellangaben:
665 735 8/Bakelman, Spiegelung

Budden, F. J.
Zahlensysteme und Rechenautomaten
224 S. mit 34 Abb., 1972, 8,60 M
Bestellangaben:
665 633 9/Budden, Zahlensysteme

Jaglom, I. M.
Ungewöhnliche Algebra (MSB)
95 S. mit 45 Abb., 1977, 5,50 M
Bestellangaben:
665 789 2/Jaglom, Algebra

Kantor, I. L.; Solodownikow, A. S.
Hyperkomplexe Zahlen (MSB)
156 S. mit 18 Abb., 1978, 9,— M
Bestellangaben:
665 871 3/Kantor, Zahlen

Smogorschewki, A. S.
Lobatschewskische Geometrie (MSB)
75 S. mit 43 Abb., 1978, 6,— M
Bestellangaben:
665 842 2/Smogorschewki, Geometrie

Steinert, K.-G.
Sphärische Trigonometrie (KNB)
mit einigen Anwendungen aus Geodäsie, Astronomie und Kartographie
160 S. mit 69 Abb. und 13 Tab., 1977 9,50 M
Bestellangaben:
665 828 9/Steinert, Trigonometrie

Makowezki, Pl. W.
Schau den Dingen auf den Grund!
Verwunderliches aus der Physik (KNB)
2. Aufl., 241 S. mit 100 Abb., 1974, 8,50 M
Bestellangaben:
665 587 0/Makowezki, Dinge

Lange, W. N.
Physikalische Paradoxa
und interessante Aufgaben (KNB)
2. Aufl., 170 S. mit 48 Abb., 1976, 8,— M
Bestellangaben:
665 701 6/Lange, Paradoxa

Pskowski, J. P.
Novae und Supernovae (KNB)
Ursachen und Folgen von Sternexplosionen
236 S. mit 41 Abb., 1978, 12,50 M
Bestellangaben:
665 889 5/Pskowski, Novae

MSB: Mathematische Schülerbücherei
KNB: Kleine Naturwissenschaftliche Bibliothek

Gute Grundkenntnisse gefragt

Klasse 5

▲1▲ Versuche, bei den folgenden Beispielen in die Kästchen solche Operationszeichen einzusetzen, daß wahre Aussagen entstehen! Für alle natürlichen Zahlen x gilt:

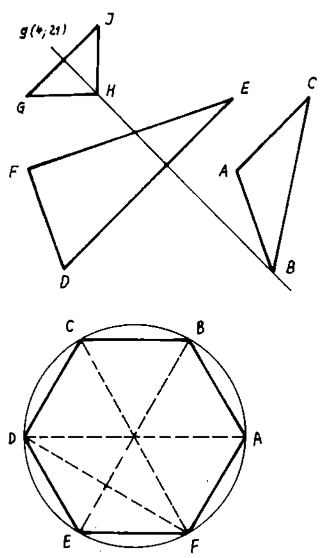
a) $x \square 0 = 0$ d) $x \square x = x$
b) $x \square 1 = x$ e) $x \square 0 = x$
c) $x \square x = 1$ f) $x \square 1 = 0$!

Untersuche, ob es mehrere Lösungen gibt!

▲2▲ Heinz reist mit seinen Eltern in Urlaub. Sie fahren mit ihrem „Trabant“. Am Beginn der Reise werden 20 l Kraftstoff getankt und dafür 30 M bezahlt. 4 l befanden sich noch im Tank. Das Reiseziel ist 150 km entfernt. Vater rechnet mit einem Kraftstoffverbrauch von 8 l für 100 km und mit einer Fahrzeit von etwa 3 h.
Wird es notwendig sein, unterwegs noch einmal zu tanken?

▲3▲ Gib, falls möglich, die kleinste natürliche Zahl an, die kleiner als 9,05 ist! Gib, falls möglich, die größte natürliche Zahl an, die größer ist als 0,85!

▲4▲ Konstruiere die Spiegelbilder folgender Dreiecke bezüglich g!



▲5▲ Versuche, an Stelle der Sternchen (*) jeweils solche Grundziffern einzusetzen, daß wahre Aussagen entstehen! Wo das nicht möglich ist, antworte mit „nicht lösbar“!

a) $8{,}32 < *{,}32$ f) $9{,}97 < 9{,}*8$
b) $4{,}2* > 4{,}28$ g) $0{,}*1 < 0{,}11$
c) $0{,}72 < 0{,}*2$ h) $5{,}99 < 5{,}9**$
d) $6{,}5* < 6{,}51$ i) $0{,}*** < 0{,}01$
e) $2{,}*6 > 2{,}98$

Klasse 6

▲1▲ Kann man zu $a = 24$ eine weitere natürliche Zahl b finden, so daß die Summe $a + b$
a) durch 8 teilbar ist;
b) nicht durch 8 teilbar ist?
Begründe deine Ansicht! Muß b durch 8 teilbar sein?

▲2▲ Klaus sagt: „40 kann man als Summe zweier Zahlen auf unterschiedliche Art darstellen. Da 40 durch 5 teilbar ist, müssen auch die beiden Summanden immer durch 5 teilbar sein, z. B. $40 = 5 + 35$.“
Untersuche an weiteren Beispielen, ob Klaus recht hat!

▲3▲ Gib, falls möglich, alle gebrochenen Zahlen an, die die Gleichung erfüllen!

a) $3 \cdot y = 1$ c) $\frac{2}{3} \cdot z = 1$
b) $\frac{1}{7} \cdot t = 1$ d) $0 \cdot y = 1$

▲4▲ Versuche, je zwei Zahlen anzugeben, für die gilt:

a) $\frac{1}{2} : x > \frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{2} : z > \frac{3}{2}$
b) $7 : t > 7$

▲5▲ Ein PKW fährt von einem Ort zu einem anderen Ort mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 60 km pro Stunde. Er benötigt für die Fahrt 3 Stunden. Ein LKW, der im Durchschnitt nur 40 km pro Stunde fährt, benötigt für die gleiche Strecke 4,5 Stunden.
a) Ist die benötigte Fahrzeit zur Geschwindigkeit (direkt oder umgekehrt) proportional? Nenne den Proportionalitätsfaktor, wenn das zutrifft!
b) Wie groß ist die Entfernung zwischen diesen beiden Orten?

Klasse 7

▲1▲ Von den jeweils angegebenen vier Ergebnissen (es wurde mit dem Rechenstab gerechnet) ist eines richtig. Ermittle es durch Überschlag! Begründe!

Aufgabe	Ergebnisse
30,7 · 8,49	0,26; 26; 260; 2600
1,9 · 0,605	0,0066; 0,066; 0,66; 6,6
24,6 : 0,33	0,745; 7,45; 74,5; 745
0,118 : 25,7	0,0046; 0,046; 0,46; 46

▲2▲ Gib, falls möglich, alle rationalen Zahlen an, die die jeweilige Gleichung erfüllen!

a) $|x| = +9$ d) $|a| = -a$
b) $|y| = -3$ e) $|y| = y$
c) $-|x| = -8$ f) $|v| = 0$

▲3▲ Gib jeweils, falls möglich, alle rationalen Zahlen an, die die folgenden Gleichungen erfüllen!

a) $+3 + x = 0$ c) $-1{,}5 + z = 0$
b) $y + (+7{,}5) = 0$ d) $z + (-3{,}9) = 0$

XVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Bezirksolympiade (3./4. Februar 1979)

Olympiadeklasse 7

1. In einem Spezialistenlager für *Junge Mathematiker* führt Dirk eine Knobelaufgabe vor. Er stellt auf einen Tisch in eine Reihe – für die Zuschauer von links nach rechts – fünf Gefäße auf: eine Flasche, einen Krug, eine Tasse, einen Becher und eine Kanne. Sie sind, nicht notwendig in dieser Reihenfolge, mit je einem der Getränke Tee, Kaffee, Milch, Limonade und Most gefüllt. Den Zuschauern ist nicht bekannt, welches Gefäß welche Flüssigkeit enthält.
Dirk sagt: „Stelle ich die Kanne – wobei ich die anderen Gefäße unverändert stehen lasse – so zwischen zwei der anderen Gefäße, daß unmittelbar links neben ihr das Gefäß mit Tee und unmittelbar rechts neben ihr das Gefäß mit Milch steht, so stehen Milchgefäß und Limonadengefäß unmittelbar nebeneinander, und außerdem steht dann das Gefäß mit Kaffee als mittleres in der Reihe der fünf Gefäße.
Findet nun heraus, womit die einzelnen Gefäße gefüllt sind!"
Untersuche, ob allein aus diesen Angaben ermittelt werden kann, welche Getränke sich in jedem der fünf Gefäße befinden! Gib alle mit Dirks Angaben übereinstimmenden Möglichkeiten einer Verteilung der Getränke auf die Gefäße an!

2. *Definition:* Berührt ein Kreis k eine Seite s eines Dreiecks D und Verlängerungen der beiden anderen Seiten von D, so heißt k „Ankreis des Dreiecks D (an die Seite s)".
Aufgabe: Beweise folgenden Satz:
„Ist k Ankreis eines Dreiecks ABC an die Seite BC und ist M_a der Mittelpunkt von k, so hängt die Größe des Winkels $\sphericalangle BM_aC$ nur von der Größe α des Winkels $\sphericalangle CAB$ ab."
Zum Beweis ermittle eine Formel für die Größe des Winkels $\sphericalangle BM_aC$ in Abhängigkeit von α!

3. Gegeben seien ein Winkel, dessen Größe kleiner als 180° ist, und ein Punkt P im Innern dieses Winkels. Der Scheitel des Winkels sei A.
Konstruiere eine Gerade g, die durch den Punkt P geht und die die Schenkel des Winkels so in Punkten $B \neq A$ bzw. $D \neq A$ schneidet, daß P der Mittelpunkt von BD ist!
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob es genau eine Gerade gibt, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt!

4. In einem Behälter befinden sich genau 25 kg einer 4%igen wäßrigen Lösung, d. h., 4% dieser Lösung bestehen aus der gelösten Substanz, der Rest besteht aus Wasser.
Wieviel Prozent des Wassers sind dieser Lösung zu entziehen, damit eine neue Lösung entsteht, deren Wasseranteil nur noch 90% beträgt?

5. In einem Dreieck ABC sei u die Länge des Umfangs, und r sei die Länge des Umkreisradius.
Beweise, daß dann die Ungleichung $r > \frac{u}{6}$ gilt!

6. Ermittle alle rationalen Zahlen a mit folgender Eigenschaft: Das Produkt aus der Zahl a und ihrem absoluten Betrag ist gleich der Summe aus der Zahl a und ihrem absoluten Betrag!

Olympiadeklasse 8

1. Im Inneren eines spitzwinkligen Dreiecks ABC, dessen Innenwinkel die Größen α, β, γ haben, sei ein Punkt P so gelegen, daß $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$ gilt. Die Größe der Winkel $\sphericalangle PAB$, $\sphericalangle PBC$ bzw. $\sphericalangle PAC$ seien mit δ, ε bzw. η bezeichnet.
a) Berechne δ, ε und η für den Fall, daß $\alpha = 70°$ und $\beta = 80°$ gilt!
b) Ermittle eine Formel für δ in Abhängigkeit von α, β und γ, ebenso eine Formel für ε und eine Formel für η!

2. Von einem Dreieck ABC wird gefordert, daß für die Länge a der Seite BC, die Länge c der Seite AB, die Länge w_α der Halbierenden des Winkels $\sphericalangle BAC$ und für die Größe β des Winkels $\sphericalangle ABC$ die Beziehungen

$$a : c = 2 : 3,$$
$$w_\alpha = 6 \text{ cm},$$
$$\beta = 35°$$

gelten.
a) Konstruiere ein solches Dreieck, und beschreibe deine Konstruktion!
b) Beweise, daß jedes so konstruierte Dreieck die gestellten Forderungen erfüllt! Eine Analysis und eine Determination werden nicht verlangt.

3. Jürgen ist im Ferienlager und will für seine Gruppe Brause zu 0,21 M je Flasche einkaufen. Er nimmt kein Bargeld, sondern nur leere Flaschen mit. Für das eingelöste Pfandgeld (0,30 M für jede leere Flasche) kauft er möglichst viele Flaschen Brause, wobei er für jede volle Flasche außer dem Preis von 0,21 M auch 0,30 M Pfand zu zahlen hat. Es stellt sich heraus, daß er sieben Flaschen weniger erhält, als er abgegeben hat. Außerdem bekommt er noch Geld zurück.
Ermittle alle Möglichkeiten, wie viele leere Flaschen Jürgen mitgenommen haben könnte und wieviel Geld er dann zurückerhielt!

4. Beweise folgenden Satz:
Ist p eine Primzahl größer als 3, so ist die Zahl $(p-1)(p+1)$ durch 24 teilbar!

5. Zum Experimentieren wird eine 30%ige Salzlösung benötigt. Vorhanden sind aber lediglich 2 Liter 10%iger Salzlösung sowie eine Flasche mit 42%iger Salzlösung.
Ermittle, wieviel Liter 42%ige Salzlösung den 2 Litern 10%iger Salzlösung zuzusetzen sind, damit eine 30%ige Salzlösung entsteht!

6. Es sei $\triangle ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck, d die Länge des Durchmessers seines Umkreises, a bzw. b die Längen der Seiten BC bzw. AC und schließlich h die Länge der auf AB senkrecht stehenden Höhe.
Beweise, daß dann stets $d = \frac{a \cdot b}{h}$ gilt!

Olympiadeklasse 9

1. Beweisen Sie folgenden Satz:
Wenn a, b, c und d reelle Zahlen sind, für die $ab - cd \neq 0$ gilt, dann gilt $a^2 + b^2 > 0$ oder $c^2 + d^2 > 0$!

2. In einer Aufgabe der 2. Stufe war zu zeigen, daß unter vier aufeinanderfolgenden sechsstelligen Zahlen nicht notwendig eine sein muß, deren Quersumme durch 4 teilbar ist. Man ermittle die größte natürliche Zahl n, für die die folgende Aussage wahr ist: „Es gibt n aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, unter denen sich keine befindet, deren Quersumme durch 4 teilbar ist!"

3. Gegeben sei ein Würfel, dessen Volumen mit V_1 bezeichnet sei. Verbindet man den Mittelpunkt je einer Seitenfläche dieses Würfels mit den Mittelpunkten aller benachbarten Seitenflächen, so erhält man die Kanten eines regelmäßigen Oktaeders. Das Volumen dieses Oktaeders sei V_2 genannt. Verbindet man nun wieder den Schwerpunkt je einer Seitenfläche dieses Oktaeders mit den Schwerpunkten aller benachbarten Seitenflächen, so erhält man die Kanten eines zweiten Würfels. Sein Volumen sei V_3 genannt.
Berechnen Sie das Verhältnis $V_1 : V_2 : V_3$!

4. In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C teile die von C auf die Hypothenuse AB gefällte Höhe diese im Verhältnis 1 : 3.

Berechnen Sie die Größe der bei A bzw. B liegenden Innenwinkel des Dreiecks ABC!

5. Beweisen Sie, daß für jede Primzahl p der Rest, den p bei Division durch 30 läßt, entweder 1 oder eine Primzahl ist!

6. Gegeben seien ein Dreieck ABC sowie zwei Punkte A_1 und B_1 im Innern dieses Dreiecks. Bei der Verschiebung, die A in A_1 überführt, habe $\triangle ABC$ das Bilddreieck $A_1B_1C_1$. Bei der Verschiebung, die B in B_2 überführt, habe $\triangle ABC$ das Bilddreieck $A_2B_2C_2$. Der Durchschnitt der Dreiecksflächen (ABC) und $(A_1B_1C_1)$ sei die Fläche F_1. Der Durchschnitt der Dreiecksflächen (ABC) und $(A_2B_2C_2)$ sei die Fläche F_2.
Man beweise, daß F_1 entweder durch eine Verschiebung oder durch eine zentrische Streckung in F_2 überführt werden kann!
Hinweis: Ist XYZ ein Dreieck, so verstehen wir unter der Dreiecksfläche (XYZ) die Menge aller Punkte auf dem Rande und im Innern des Dreiecks XYZ.

Olympiadeklasse 10

1. Beweisen Sie folgende Aussage: Wenn eine Funktion f für alle reellen Zahlen x definiert ist und für alle x die Gleichung
$$x \cdot f(x+2)=(x^2-9)f(x)$$
erfüllt, so hat sie mindestens drei reelle Nullstellen!

2. Beweisen Sie: Ein Dreieck ist genau dann gleichseitig, wenn mindestens zwei seiner Seitenhalbierenden auch Winkelhalbierende sind!

3. Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen a, für die erstens die Terme, die auf beiden Seiten der Gleichung
$$\frac{1}{a^2-3a+2}+\frac{1}{a^2-5a+6}+\frac{1}{a^2-7a+12}+\frac{1}{a^2-9a+20}+\frac{1}{a^2-11a+30}+\frac{1}{a^2-13a+42}=\frac{a(a+5)}{a^2-8a+7}$$
stehen, definiert sind und zweitens diese Gleichung gilt!

4. Achim, Bernd und Dirk nehmen jeder genau einen der folgenden Gegenstände an sich: einen Ball, einen Ring, einen Würfel. Danach machen sie folgende Aussagen:
(1) Achim hat nicht den Ball, oder Bernd hat den Ring.
(2) Bernd hat den Ring nicht, oder Dirk hat den Würfel.
(3) Dirk hat den Würfel, und Achim hat den Ball.
(4) Achim hat den Ball, und Bernd hat den Ring nicht.
Ist es möglich, daß
a) alle vier Aussagen, b) genau drei Aussagen, c) genau zwei Aussagen, d) genau eine der Aussagen, e) keine der Aussagen gleichzeitig wahr sind (bzw. ist)?

5. Man untersuche, ob es reelle Zahlen a, b, c, d mit folgender Eigenschaft gibt: Wenn f die für alle reellen Zahlen x durch die Gleichung
$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$
definierte Funktion ist, so gilt
$$f(0)=10; f(1)=12; f(2)=4 \text{ und } f(3)=1.$$
Gibt es solche Zahlen a, b, c, d, so ermittle man alle derartigen Zahlen!

6. Gegeben seien drei Punkte M, S und C, wobei $\overline{CM}=6$ cm, $\overline{CS}=7$ cm und $\overline{MS}=1{,}5$ cm gelte.
Man konstruiere zwei Punkte A und B so, daß sie zusammen mit C ein Dreieck ABC bilden, das den gegebenen Punkt M als Mittelpunkt seines Umkreises und den gegebenen Punkt S als Schnittpunkt seiner Seitenhalbierenden besitzt.
Beschreiben und begründen Sie die Konstruktion! Untersuchen Sie, ob ein solches Dreieck ABC eindeutig durch die gegebenen Punkte M, S, C bestimmt ist!

Olympiadeklasse 11/12

1. Man ermittle alle diejenigen Polynome $f(x)$ (mit reellen Koeffizienten), die für alle reellen x die Gleichung
$$f(x+1)-f(x)=x+1$$
erfüllen!

2. Im Raum seien A, B zwei verschiedene Punkte und ε eine Ebene. Für jede mögliche Lage von A, B, ε ermittle man zu diesen gegebenen A, B, ε alle diejenigen Punkte C auf ε, für die die Abstandssumme $\overline{AC}+\overline{BC}$ möglichst klein ist!

3. Es ist zu untersuchen, ob es in einer Menge M von 22222 Elementen 50 Teilmengen M_i $(i=1, 2, \ldots, 50)$ gibt mit den folgenden Eigenschaften:
(1) Jedes Element m von M ist Element mindestens einer der Mengen M_i.
(2) Jede der Mengen M_i $(i=1, 2, \ldots, 50)$ enthält genau 1111 Elemente.
(3) Für je zwei der Mengen M_i, M_j $(i \neq j)$ gilt: Der Durchschnitt von M_i und M_j enthält genau 22 Elemente.

4. Man beweise: Ist $n \geqq 2$ eine ganze Zahl, so ist die für alle reellen x durch
$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\cos(x\sqrt{k})$$
definierte Funktion f nichtperiodisch!

5. Es sei $n \geqq 2$ eine gegebene ganze Zahl. Man untersuche, ob sich unter allen denjenigen reellen Zahlen $x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$, für die $x_1+\ldots x_n=1$ gilt, auch solche befinden, für die der Wert von $x_1^3+\ldots x_n^3$
a) möglichst groß
b) möglichst klein
ist. Ist dies der Fall, so ermittle man diesen größten bzw. kleinsten Wert!

6A. Es sei (a_n) $(n=0, 1, 2, \ldots)$ eine Folge reeller Zahlen, für die $a_0=0$ sowie $a_{n+1}^3=\frac{1}{2}a_n^2-1$ für alle $n=1, 2, \ldots$ gelte.
Man zeige, daß es dann eine positive reelle Zahl $q<1$ gibt, so daß für alle $n=1, 2, \ldots$
$$|a_{n+1}-a_n| \leqq q\,|a_n-a_{n-1}|$$
gilt, und gebe eine derartige reelle Zahl q an!

6B. Ist $\triangle ABC$ ein Dreieck, so bezeichne
A' den Bildpunkt von A bei Spiegelung an der Geraden durch B und C,
B' den Bildpunkt von B bei Spiegelung an der Geraden durch C und A,
C' den Bildpunkt von C bei Spiegelung an der Geraden durch A und B.
Mit diesen Bezeichnungen beweise man: Genau dann ist $\triangle A'B'C'$ ein zu $\triangle ABC$ ähnliches Dreieck – mit jeweils A, A' bzw. B, B' bzw. C, C' als entsprechenden Ecken –, wenn $\triangle ABC$ gleichseitig ist!

Lösungen

Olympiadeklasse 7

1. Angenommen, es gibt eine Dirks Angaben entsprechende Verteilung der Getränke auf die Gefäße. Dann gibt es – da die Kanne nach dem Umstellen zwischen zwei anderen Gefäßen steht, wobei das Teegefäß jeweils unmittelbar links, das Milchgefäß unmittelbar rechts neben der Kanne steht –, genau die nachfolgend angegebenen drei Möglichkeiten für die Reihenfolge der Gefäße:

(1)	Flasche	Kanne	Krug	Tasse	Becher
	Tee		Milch		
(2)	Flasche	Krug	Kanne	Tasse	Becher
		Tee		Milch	
(3)	Flasche	Krug	Tasse	Kanne	Becher
			Tee		Milch

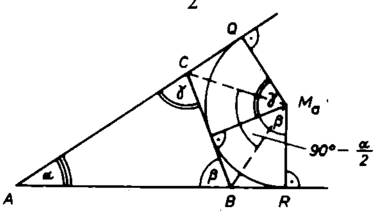
Die Möglichkeiten (1) und (3) scheiden aus, da sie der Angabe widersprechen, daß sich in dem in der Mitte stehenden Gefäß Kaffee befindet.
Somit verbleibt nur die Möglichkeit (2), und dabei ist nach der eben genannten Angabe die Kanne mit Kaffee gefüllt. Hiernach und da außerdem das Limonadengefäß unmittelbar neben dem Milchgefäß steht, verbleibt als einzig mögliche mit Dirks Angaben übereinstimmende Verteilung die folgende:
Die Flasche enthält Most, der Krug Tee, die Kanne Kaffee, die Tasse Milch und der Becher Limonade. Für die Verteilung treffen alle von Dirk gemachten Angaben zu. Sie ist daher die einzige Verteilung der gesuchten Art.

2. Es seien β, γ die Größen von $\sphericalangle ABC$ bzw. $\sphericalangle BCA$. Die Berührungspunkte von k mit den Verlängerungen von AC bzw. AB seien Q bzw. R (siehe Bild).

Dann gilt für die Nebenwinkel von $\sphericalangle ABC$ bzw. $\sphericalangle ACB$:
$$\overline{\sphericalangle CBR}=180°-\beta \text{ und } \overline{\sphericalangle BCQ}=180°-\gamma.$$

Da M_a als Mittelpunkt eines Kreises, der beide Schenkel des Winkels $\sphericalangle CBR$ berührt, auf der Halbierenden dieses Winkels liegt, gilt:

$$\overline{\sphericalangle CBM_a} = 90° - \frac{\beta}{2}. \qquad (2)$$



Entsprechend gilt $\overline{\sphericalangle BCM_a} = 90° - \frac{\gamma}{2}$. (3)

Daraus folgt nach dem Satz über die Summe der Innenwinkel, angewandt auf das Dreieck BM_aC:

$$\overline{\sphericalangle BM_aC} = 180° - \left(90° - \frac{\beta}{2}\right) - \left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}.$$

Nach dem gleichen Satz, angewandt auf das Dreieck ABC, gilt:

$$\beta + \gamma = 180° - \alpha,$$

also $\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$, woraus dann

$$\overline{\sphericalangle BM_aC} = 90° - \frac{\alpha}{2} \text{ folgt.}$$

3. I. Angenommen, es gibt eine Gerade g, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Dann schneidet sie die Schenkel des gegebenen Winkels in Punkten, die mit B bzw. D bezeichnet sind, und es ist ferner P Mittelpunkt von BD. Der Scheitelpunkt des Winkels sei A. Dann gibt es genau einen Punkt C auf dem Strahl von A durch P, so daß P Mittelpunkt der Strecke AC ist. Daher halbieren sich die Strecken BD und AC, d. h., das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm.

Folglich kann eine Gerade g nur dann alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen, wenn sie durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

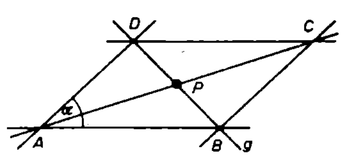
II. (1) Man zeichnet vom Scheitelpunkt A des gegebenen Winkels einen Strahl durch P, auf dem man von A aus eine Strecke der Länge $\overline{2AP}$ abträgt. Ihr anderer Endpunkt sei C genannt.

(2) Durch C zieht man die Parallelen zu den Schenkeln des gegebenen Winkels. Ihre Schnittpunkte mit den jeweils anderen Schenkeln seien B bzw. D.

(3) Man zeichnet die Gerade g durch B und D.

III. Jede so konstruierte Gerade g erfüllt alle Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Nach Konstruktion gilt $AD \parallel BC$ und $AB \parallel CD$ sowie $\overline{AP} = \overline{PC}$. Folglich ist das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm und P der Mittelpunkt seiner Diagonalen AC. Daher geht auch die andere Diagonale BD durch P und wird von P halbiert.



IV. Da die Konstruktionsschritte (1) bis (3) stets eindeutig ausführbar sind, gibt es genau eine Gerade der geforderten Art.

4. In der Ausgangslösung befinden sich genau 4% der gelösten Substanz, das ist bei 25 kg Lösung genau 1 kg.

Diese Menge stellt nach dem Entzug einer Wassermenge genau dann 10% der neuen Lösung dar, wenn die neue Lösung insgesamt 10 kg umfaßt.

Somit beträgt genau dann, wenn man der Ausgangslösung 15 kg Wasser entzogen hat, sein Anteil 90%, wie es gefordert war. Zu ermitteln ist demnach, wieviel Prozent von 24 kg Wasser 15 kg Wasser sind. Für diesen gesuchten Prozentsatz x gilt die Beziehung

$$x : 100\% = 15 : 24$$

und damit $\quad x = \frac{1500}{24}\% = 62{,}5\%$

Demzufolge sind 62,5% des in der Ausgangslösung enthaltenen Wassers dieser Lösung zu entziehen, um eine neue Lösung mit 90% Wasseranteil zu erhalten.

5. Es sei M der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC. Wir unterscheiden nun die folgenden beiden Fälle:

(a) M liegt im Innern oder außerhalb des Dreiecks ABC;

(b) M liegt auf einer der drei Seiten des Dreiecks ABC.

Im Falle (a) sind ABM, BCM und ACM nichtentartete Dreiecke. Wegen $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC} = r$ gilt daher nach der Dreiecksungleichung stets

(1) $\quad 2r = \overline{MA} + \overline{MB} > \overline{AB}$,

(2) $\quad 2r = \overline{MA} + \overline{MC} > \overline{AC}$,

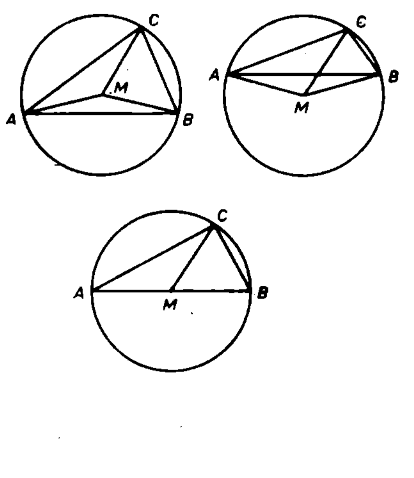
(3) $\quad 2r = \overline{MB} + \overline{MC} > \overline{BC}$.

Durch Addition erhält man daraus

(4) $\quad 6r > \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = u$, also

$$r > \frac{u}{6}.$$

Im Falle (b) entartet genau eines der drei betrachteten Dreiecke zu einer Strecke; an die Stelle genau einer der drei Ungleichungen tritt daher die entsprechende Gleichung. Auch in diesem Falle erhält man aus dieser Gleichung und den beiden restlichen Ungleichungen durch Addition die Ungleichung (4). Da mit (a), (b) eine vollständige Fallunterscheidung getroffen wurde, ist damit der geforderte Beweis erbracht.



6. Angenommen, eine rationale Zahl a habe die genannte Eigenschaft. Dann gilt

$$a \cdot |a| = a + |a|. \qquad (1)$$

Für die Zahl a trifft nun genau einer der folgenden zwei Fälle zu:

1. Fall: $a \geq 0$.

Dann gilt $|a| = a$, also folgt aus (1)

$$a^2 = 2a. \qquad (2)$$

Hiernach verbleiben im 1. Fall nur die Möglichkeiten, daß entweder $a = 0$ gilt, oder falls $a \neq 0$ ist, aus (2) weiter $a = 2$ folgt.

2. Fall: $a < 0$.

Dann gilt $|a| = -a$, und es folgt einerseits $a \cdot |a| \neq 0$, andererseits $a + |a| = 0$. Die Annahme, daß a die Eigenschaft (1) hat, führt somit im 2. Fall auf einen Widerspruch.

Folglich können nur die beiden Zahlen 0 und 2 die genannten Eigenschaften haben. Tatsächlich gilt $0 \cdot 0 = 0 + 0$ sowie $2 \cdot 2 = 4 = 2 + 2$. Also sind genau die Zahlen 0 und 2 die gesuchten Zahlen.

Olympiadeklasse 8

1. a) Nach dem Satz über die Innenwinkelsumme, angewandt auf das Dreieck ABC, gilt

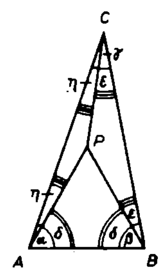
$$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 70° - 80° = 30°.$$

Folglich gilt

$$\delta = \frac{1}{2}(70° + 80° - 30°) = 60°,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(80° + 30° - 70°) = 20°,$$

$$\eta = \frac{1}{2}(30° + 70° - 80°) = 10°.$$



b) Da die Dreiecke ABP, BCP und CAP nach Voraussetzung gleichschenklig sind, gilt laut Basiswinkelsatz

$$\overline{\sphericalangle PBA} = \overline{\sphericalangle PAB} = \delta,$$
$$\overline{\sphericalangle PCB} = \overline{\sphericalangle PBC} = \varepsilon,$$
$$\overline{\sphericalangle PAC} = \overline{\sphericalangle PCA} = \eta.$$

Da P im Inneren des Dreiecks liegt, folgt hieraus

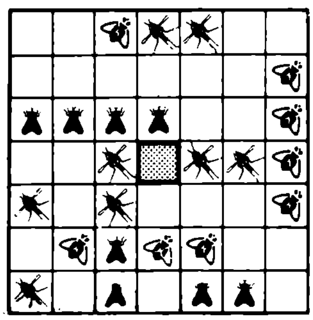
$$\alpha = \delta + \eta,$$
$$\beta = \delta + \varepsilon,$$
$$\gamma = \varepsilon + \eta, \text{ also}$$
$$\alpha + \beta - \gamma = 2\delta,$$
$$\delta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma) \text{ und analog}$$
$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha),$$
$$\eta = \frac{1}{2}(\gamma + \alpha - \beta).$$

2. a) (1) Man konstruiert eine Strecke AB', deren Länge das Dreifache einer beliebig gewählten Länge t ist.

Mit Troll auf Du und Du

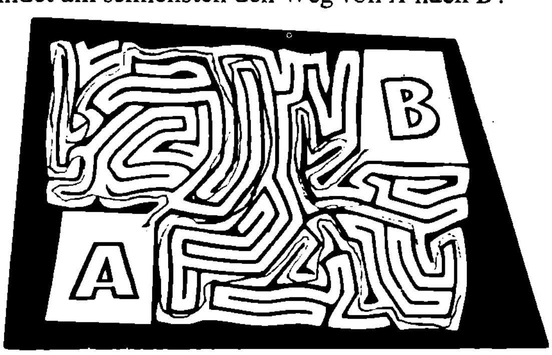
Augenmaß

Die Figur soll in vier gleiche Teile zerlegt werden. Dabei sollen in jedem Stück je zwei der drei verschiedenen Tiere sein.



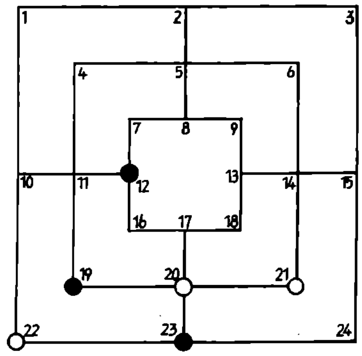
Irrgarten

Wer findet am schnellsten den Weg von A nach B?



Mühleaufgabe

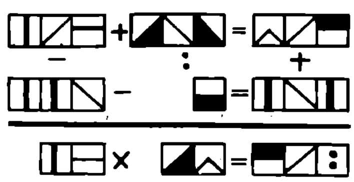
Weiß gewinnt mit dem 5. Zug.



Unauffällig

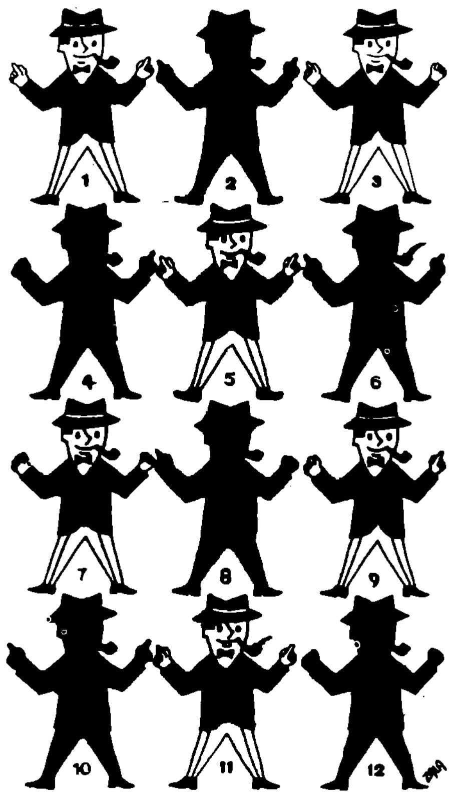
Oben ist der bekannte Schauspieler X in seiner Rolle als Faust zu sehen. Nach dem Verlassen des Theaters befindet er sich unerkannt in der Menschenmenge. Wer findet ihn heraus?

In Ruhe betrachtet



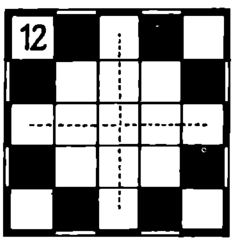
Augen auf!

Welcher Schattenriß gehört zu welcher Figur?



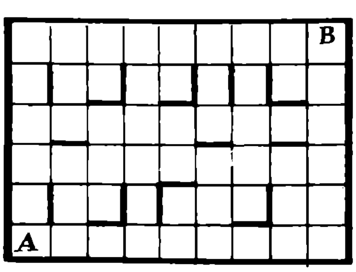
Einsatz

Wie müssen die Zahlen von 1 bis 17 eingesetzt werden, wenn im Mittelkreuz sich jeweils 45 und auch in den beiden Diagonalen 45 ergeben (12 wurde bereits eingesetzt)?



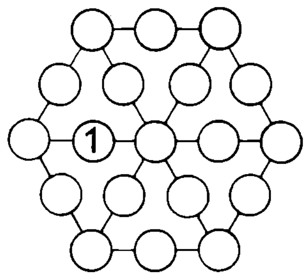
Mit List und Liebe

Wie muß eine Wandergruppe ihren Weg lenken, wenn sie in A beginnt, alle Planquadrate besucht, aber niemals den Weg kreuzt oder gar ein Feld doppelt besucht? Erreichen die Touristen B?



Sachverstand

Es sind noch die Zahlen 2 bis 19 so einzusetzen, daß sich in der Mittelwaagerechten und den beiden Diagonalen jeweils 50, dagegen in allen anderen Linienverbindungen nur 43 ergeben.



Wandert, Freunde

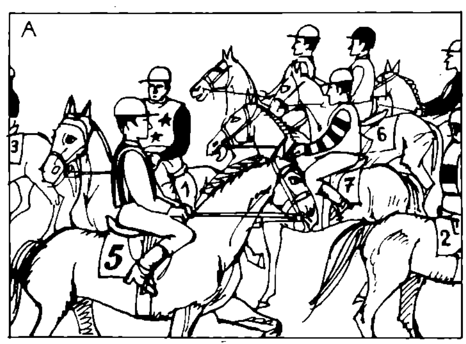
... von 1 zur Zielzahl 118 – über 11 Stationen – aber lauft euch keine „Zahlenblasen", versucht es mit Addieren!

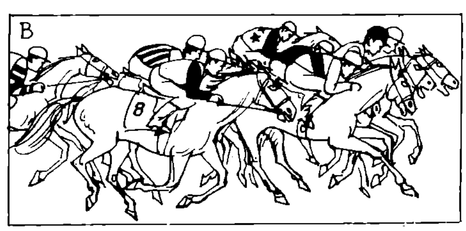
➡	1	4	33	6	60
9	10	8	99	44	55
71	88	11	2	20	3
45	77	66	100	17	13
ZIEL 118	15	12	7	21	5

● „Hör mal", sagt ein Junge zu seiner Schwester, „die Hälfte von deiner Apfelsine mußt du mir abgeben." „Warum?" „Wenn ich dich nicht am Zopf gezogen hätte, dann hättest du nicht geweint und Mutti hätte dir keine Apfelsine gegeben."

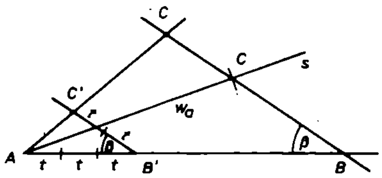
Endspurt

Acht Pferde sind am Start mit den Nummern 1 bis 8 (Bild A). Welches Pferd siegt um Nasenlänge (Bild B)?





(2) In B' trägt man an den Strahl aus B' durch A einen Winkel der Größe $35°$ an.
(3) Auf seinem freien Schenkel trägt man von B' aus diejenige Strecke $B'C'$ ab, deren Länge das Zweifache von t ist.
(4) Man konstruiert den Strahl s, der den Winkel $\sphericalangle B'AC'$ halbiert.
(5) Auf s trägt man von A aus die Strecke AD der Länge 6 cm ab.
(6) Man konstruiert die Parallele durch D zu $B'C'$. Sie schneidet den Strahl aus A durch B' in einem Punkt B und den Strahl aus A durch C' in einem Punkt C.



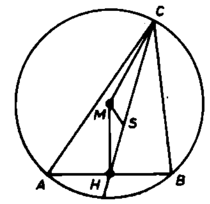
b) Ist $\triangle ABC$ auf diese Weise konstruiert, so folgt:
Nach (6) ist $BC \parallel B'C'$, also
$\sphericalangle ABC = \sphericalangle AB'C'$ (Stufenwinkel an Parallelen)
$\alpha = 35°$ (nach (2)).
Nach (4) ist AD Halbierende des Winkels $\sphericalangle B'AC'$, der wegen (6) mit dem Winkel $\sphericalangle BAC$ zusammenfällt. Ferner hat AD nach (5) die Länge 6 cm. Nach einem Teil des Strahlensatzes gilt wegen $BC \parallel B'C'$
$\overline{BC} : \overline{AB} = \overline{B'C'} : \overline{AB'}$ und daher nach (1), (3)
$= 2t : 3t$
$= 2 : 3.$
Damit sind alle geforderten Eigenschaften für $\triangle ABC$ nachgewiesen.

3. Jürgen habe x leere Flaschen mitgenommen, er habe y Pfennig zurückerhalten. Somit bezahlte Jürgen einen Betrag von $30x - y$, und er erhielt dafür $x - 7$ volle Flaschen zu 0,51 M. Es gilt folglich:
(1) $30x - y = 51(x-7)$ mit $0 < y < 51$, da Jürgen im Falle $y = 51$ noch weitere Flaschen erhalten könnte und im Falle $y = 0$ kein Geld herausbekäme. Aus (1) erhält man:
$y = 357 - 21x = 7(51 - 3x)$, also $0 < 51 - 3x < \frac{51}{7}$. Aus $0 < 51 - 3x$ folgt $x < 17$. Aus $51 - 3x < \frac{51}{7}$ folgt $3x > \frac{6 \cdot 51}{7}$, also $x > \frac{102}{7} > 14$. Daher verbleiben nur die Möglichkeiten $x = 15$ und $x = 16$.
Für $x = 15$ gilt $y = 42$ und für $x = 16$ folgt $y = 21$.
1. Möglichkeit: Jürgen hatte 15 leere Flaschen mitgenommen, das entspricht 4,50 M Pfandgeld. Er kaufte $15 - 7 = 8$ Flaschen Brause und mußte dafür 4,08 M bezahlen. Er erhielt 0,42 M zurück, wofür er keine weitere Flasche Brause kaufen konnte.
2. Möglichkeit: Jürgen hatte 16 leere Flaschen mitgenommen, das entspricht 4,80 M Pfandgeld. Er kaufte $16 - 7 = 9$ Flaschen Brause und mußte dafür 4,59 M bezahlen. Er erhielt 0,21 M zurück, wofür er ebenfalls keine weitere Flasche Brause kaufen konnte.

4. Die natürlichen Zahlen $p-1$, p, $p+1$ sind drei aufeinanderfolgende Zahlen. Von diesen ist genau eine durch 3 teilbar. Die Zahl p kann dies als eine Primzahl $p > 3$ nicht sein, also muß es eine der Zahlen $p-1$, $p+1$ sein. Folglich ist das Produkt $(p-1)(p+1)$ durch 3 teilbar.
Da p eine Primzahl und größer als 3 ist, ist p ungerade; $p-1$ und $p+1$ sind daher zwei aufeinanderfolgende gerade Zahlen. Von diesen Zahlen ist stets genau eine durch 2 und die andere durch 4 teilbar. Folglich ist das Produkt $(p-1)(p+1)$ durch 8 teilbar. Da 3 und 8 teilerfremd sind, ist somit $(p-1)(p+1)$ durch $3 \cdot 8 = 24$ teilbar, w. z. b. w.

5. Angenommen, beim Zusetzen von x Litern 42%iger Salzlösung zu den 2 Litern 10%iger Salzlösung bilden die entstehenden $(x+2)$ Liter eine 30%ige Salzlösung.
Es gilt dann:
2 Liter 10%ige Salzlösung enthalten
0,20 Liter Salz
x Liter 42%ige Salzlösung enthalten
$0{,}42x$ Liter Salz
$(x+2)$ Liter 30%ige Salzlösung enthalten
$0{,}30(x+2)$ Liter Salz.
Da die Salzmenge im Lösungsgemisch stets gleich der Summe der Salzmengen in den gemischten Lösungen ist, muß gelten:
$$0{,}20 + 0{,}42x = 0{,}30(x+2)$$
$$20 + 42x = 30x + 60$$
$$12x = 40$$
$$x = \frac{10}{3}$$
Man muß also $\frac{10}{3}$ Liter 42%ige Salzlösung zusetzen, um die geforderte 30%ige Salzlösung zu erhalten.
Probe: Man erhält als Mischung
$$2 \text{ Liter} + \frac{10}{3} \text{ Liter} = \frac{16}{3} \text{ Liter}$$
einer Lösung mit folgendem Salzgehalt:
2 Liter 10%ige Salzlösung enthalten
0,20 Liter Salz
$\frac{10}{3}$ Liter 42%ige Salzlösung enthalten
1,40 Liter Salz
Das sind zusammen 1,60 Liter Salz.
Von $\frac{16}{3}$ Litern Gesamtflüssigkeit sind diese 1,60 Liter Salz aber $1{,}60 : \frac{16}{3} \cdot 100\% = 30\%$, wie es verlangt war.

6. Es sei M der Mittelpunkt des Umkreises, D der Fußpunkt der auf AB senkrecht stehenden Höhe und E der Schnittpunkt der Verlängerung von CM über M hinaus mit dem Kreis k. Da $\triangle ABC$ spitzwinklig ist, liegt D zwischen A und B, und E ist von A und B verschieden. Die Dreiecke CBD und CEA sind einander ähnlich, da sie in den rechten Winkeln $\sphericalangle CDB$ und $\sphericalangle CAE$ (Satz des Thales) sowie in den Winkeln $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle CEA$ (Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen) übereinstimmen. Ähnliche Dreiecke stimmen in den Verhältnissen gleichliegender Seiten überein, deshalb ist
$d : a = b : h$, also
$d = \frac{a \cdot b}{h}$, w. z. b. w.



Olympiadeklasse 9

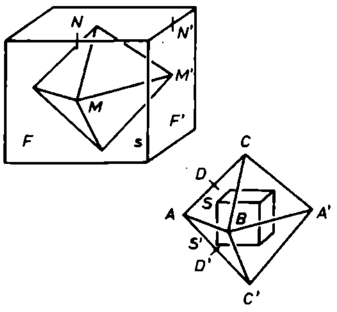
1. Angenommen, es gäbe reelle Zahlen a, b, c, d, für die $ab - cd \neq 0$ gilt und zugleich die Aussage, daß $a^2 + b^2 > 0$ oder $c^2 + d^2 > 0$ sei, nicht zutrifft. Dann wäre für diese Zahlen weder $a^2 + b^2 > 0$ noch $c^2 + d^2 > 0$.
Da für reelle a, b stets $a^2 + b^2 \geqq 0$ gilt, wobei das Gleichheitszeichen nur für $a = b = 0$ zutrifft, müßte demnach $a = b = 0$ sein. Ebenso folgt $c = d = 0$. Also ergäbe sich $ab - cd = 0$, im Widerspruch gegen $ab - cd \neq 0$.
Wegen dieses Widerspruchs ist die eingangs gemachte Annahme falsch; damit ist der geforderte Beweis erbracht.

2. Man beweist die folgenden Behauptungen (1), (2):
(1) Es gibt 6 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, von denen jede als Quersumme eine nicht durch 4 teilbare Zahl besitzt.
(2) Für jede natürliche Zahl $n \geqq 7$ gilt: Unter je n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen gibt es eine, deren Quersumme durch 4 teilbar ist.
Beweis zu (1): Zum Nachweis genügt die Angabe eines Beispiels. Ein solches bilden etwa die 6 aufeinanderfolgenden Zahlen
997, 998, 1000, 1001, 1002;
denn ihre Quersumme 25, 26, 27, 1, 2, 3 sind sämtlich nicht durch 4 teilbar.
Beweis zu (2): Es sei n irgendeine natürliche Zahl, die größer oder gleich 7 ist. Für je n aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gilt dann: Ist a die kleinste unter ihnen, so kommen wegen $n \geqq 7$ unter ihnen mindestens die Zahlen a, $a+1$, ..., $a+6$ vor.
Es gibt nun nur folgende Möglichkeiten:
I) Die Einerziffer x von a ist eine der Ziffern 0, ..., 6. Ist dann s die Summe aller Ziffern, die in a vor der Einerziffer stehen, so haben a, ..., $a+3$ die Quersumme $s+x$, $s+x+1$, $s+x+2$, $s+x+3$.
Da dies 4 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sind, befindet sich unter ihnen eine durch 4 teilbare Zahl.
II) Die Einerziffer von a ist eine der Ziffern 7, 8, 9. Dann hat die Zahl $a+3$ als Einerziffer y eine der Ziffern 0, 1, 2. Ist t die Summe aller Ziffern, die in $a+3$ vor der Einerziffer stehen, so haben $a+3$, ..., $a+6$ die Quersumme $t+y$, $t+y+1$, $t+y+2$, $t+y+3$.

Da dies 4 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sind, befindet sich unter ihnen eine durch 4 teilbare Zahl.
Aus den somit bewiesenen Behauptungen (1), (2) ergibt sich:
Die in der Aufgabenstellung genannte Aussage ist wahr für $n=6$, sie ist falsch für jede natürliche Zahl $n \geqq 7$. Daraus folgt: Die gesuchte Zahl lautet 6.

3. Die Kantenlänge des gegebenen Würfels sei a. Es seien F und F' zwei benachbarte Seitenflächen dieses Würfels; ihre Mittelpunkte seien M bzw. M', die Kante, die F und F' als benachbarte Seitenflächen gemeinsam haben, sei s. Bei einer Verschiebung $\left(\text{parallel zu } s \text{ um den Betrag } \frac{a}{2}\right)$ gehen M, M' in die Mittelpunkte N, N' zweier benachbarter Seitenkanten eines Quadrates der Kantenlänge a über. Daher hat das Oktaeder die Kantenlänge

$$b=\overline{MM'}=\overline{NN'}=\frac{a}{2}\sqrt{2}.$$



Das Oktaeder läßt sich in zwei vierseitige Pyramiden mit einem Quadrat der Kantenlänge b als Grundfläche und $\frac{a}{2}$ als Länge der zugehörigen Höhe zerlegen; daher beträgt das Oktaedervolumen

$$V_2=2\cdot\frac{1}{3}\cdot b^2\cdot\frac{a}{2}$$
$$=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\frac{a}{2}=\frac{a^3}{6}=\frac{1}{6}V_1.$$

Weiter seien die Flächen der Dreiecke ABC und ABC' zwei benachbarter Seitenflächen des Oktaeders; ihre Schwerpunkte seien S bzw. S'; die Mittelpunkte von AC bzw. AC' seien D bzw. D'. Dann teilen S bzw. S' die Strecken BD bzw. BD' im Verhältnis $2:1$, nach dem Strahlensatz (einschließlich Umkehrung) folgt $SS' \parallel DD'$ und $\overline{SS'}=\frac{2}{3}\overline{DD'}$.
Ist ferner A' die gegenüberliegende Oktaederecke zu A, so ist $ACA'C'$ ein Quadrat der Kantenlänge b, also gilt $\overline{DD'}=\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot b$. Daher hat der zweite Würfel die Kantenlänge $\overline{SS'}$ $=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot b=\frac{1}{3}\sqrt{2}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{2}=\frac{a}{3}$ und folglich das Volumen $V_3=\frac{a^3}{27}=\frac{1}{27}V_1$. Somit gilt

$$V_1:V_2:V_3=1:\frac{1}{6}:\frac{1}{27}=54:9:2.$$

4. Die Länge der Hypotenuse sei c. Der Fußpunkt der von c auf AB gefällten Höhe sei D. O.B.d.A. gilt dann $\overline{AD}:\overline{DB}=1:3$,
also $\overline{AD}=\frac{1}{4}c$.
Daraus folgt nach dem Kathetensatz

$$\overline{AC}^2=c\cdot\frac{c}{4}, \text{ also } \overline{AC}=\frac{c}{2}.$$

Spiegelt man das Dreieck ABC an BC, so entsteht das Dreieck $AA'B$, wobei A' das Bild von A ist. Für die Seiten dieses Dreiecks gilt $\overline{AA'}=2\cdot\frac{c}{2}=c$, $\overline{AB}=\overline{A'B}=c$.
Das Dreieck $AA'B$ ist also gleichseitig, folglich gilt

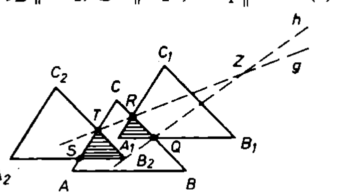
$$\sphericalangle A'AB=\sphericalangle CAB=60^\circ.$$

Die Größe des einen der bei A bzw. B liegenden Innenwinkel des Dreiecks ABC beträgt also 60°, die des anderen daher 30°.

5. Läßt p bei Division durch 30 den Rest r, so ist r eine natürliche Zahl mit $r<30$, für die $p=30n+r$ mit natürlichem n gilt. Ist dabei $n=0$, so ist $r=p$ Primzahl. Ist $n\geqq 1$, so ist r kein Vielfaches von 2, 3 oder 5; denn wäre dies der Fall, so wäre p durch 2, 3 bzw. 5 teilbar und zugleich größer oder gleich 30, also keine Primzahl. Jede natürliche Zahl $r<30$ aber, die nicht Vielfaches von 2, 3 oder 5 ist, ist entweder 1 oder eine Primzahl. (Dies erkennt man durch aufzählendes Probieren oder folgendermaßen:
Wenn eine natürliche Zahl r weder 1 noch Primzahl noch Vielfaches von 2, 3 oder 5 ist, so ist sie das Produkt mindestens zweier Primzahlen, die sämtlich größer oder gleich 7 sind, also gilt dann $r \geqq 49 > 30$.)
Damit ist die Behauptung in jedem Falle bewiesen.

6. Die Strecken A_1B_1, A_1C_1 schneiden BC in je einem Punkt Q bzw. R, die Strecken A_2B_2, C_2B_2 schneiden AC in je einem Punkte S bzw. T. Mit diesen Bezeichnungen sind F_1, F_2 die Dreiecksflächen (A_1QR) bzw. (SB_2T), und wegen ihrer Entstehung bei den genannten Verschiebungen gilt

$$A_1Q \parallel SB_2,\; QR \parallel B_2T,\; RA_1 \parallel TS. \quad (1)$$



Da T, Q, R nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen (und dasselbe für B_2, Q, R gilt, also insbesondere $R \neq T$ sowie $Q \neq B_2$ ist), sind die durch R, T gehende Gerade g und die durch Q, B_2 gehende Gerade h (jeweils eindeutig bestimmt und) voneinander verschieden.
I) Ist $g \parallel h$, so folgt hieraus und aus (1), daß RTB_2Q ein Parallelogramm ist. Es gibt daher eine Verschiebung, die R in T und Q in B_2 überführt.
II) Ist $g \nparallel h$, so haben g und h genau einen Punkt Z ($\neq R$, T, B_2, Q) gemeinsam. Diejenige Streckung mit Z als Zentrum, die R in T überführt, führt Q in den Schnittpunkt von h mit der Parallelen durch T zu RQ über, also nach (1) in den Punkt B_2.
Die in (I) bzw. (II) genannte Verschiebung bzw. Streckung führt die Gerade durch Q, A_1 in die zu ihr parallele Gerade durch B_2 über, also wegen (1) in die Gerade durch B_2, S. Ebenso führt diese Verschiebung bzw. Streckung die Gerade durch R, A_1 in die Gerade durch T, S über. Daher führt sie A_1 in S und somit insgesamt die Fläche F_1 in die Fläche F_2 über, w.z.b.w.

Olympiadeklasse 10

1. Setzt man in der gegebenen Gleichung nacheinander $x=0$, $x=3$, $x=-3$, so erhält man:

$$0\cdot f(2) \;=-9\cdot f(0), \quad \text{also } f(0)\;=0$$
$$3\cdot f(5) \;=\; 0\cdot f(3), \quad \text{also } f(5)\;=0$$
$$-3\cdot f(-1)=\; 0\cdot f(-3), \quad \text{also } f(-1)=0.$$

Die Funktion f hat mithin mindestens die drei Nullstellen
$x_0=0$, $x_1=5$, $x_2=-1$.

2. A) Ein Dreieck ABC sei gleichseitig, d.h., es gelte $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BC}$. Der Mittelpunkt von AB sei M. Dann gilt nach dem Kongruenzsatz sss:

$$\triangle AMC \cong \triangle BMC.$$

Also gilt $\sphericalangle ACM=\sphericalangle BMC$, d.h., die Seitenhalbierende CM ist auch Winkelhalbierende.
Entsprechend beweist man die gleiche Aussage für eine der anderen Seitenhalbierenden.
B) In einem Dreieck ABC sei M der Mittelpunkt von AB, und die Seitenhalbierende CM sei auch Winkelhalbierende. Dann gilt

$$\overline{AM}=\overline{MB} \quad (1)$$
und $$\sphericalangle ACM=\sphericalangle MCB. \quad (2)$$

Die Parallelen zu AC durch B und zu BC durch A schneiden sich in einem Punkt C', und hierfür ist $AC'BC$ ein Parallelogramm. Wegen (1) und da sich die Diagonalen im Parallelogramm halbieren, geht CC' durch M. Somit sind $\sphericalangle MCB$ und $\sphericalangle AC'M$ Winkel an geschnittenen Parallelen und daher einander kongruent; hiernach und wegen (2) gilt

$$\sphericalangle ACM=\sphericalangle AC'M.$$

Also ist das Dreieck $AC'C$ gleichschenklig mit $\overline{AC}=\overline{AC'}$. Hieraus und aus $\overline{AC'}=\overline{CB}$ folgt $\overline{AC}=\overline{BC}$. (3)
Analog zeigt man: Ist etwa die Seitenhalbierende durch B auch Winkelhalbierende, so folgt $\overline{AB}=\overline{CB}$. (4)
Aus (3) und (4) folgt die Gleichseitigkeit von $\triangle ABC$.

3. Für jede reelle Zahl a gilt

$$a^2-\;3a+\;2=(a-1)(a-2),$$
$$a^2-\;5a+\;6=(a-2)(a-3),$$
$$a^2-\;7a+12=(a-3)(a-4),$$
$$a^2-\;9a+20=(a-4)(a-5),$$
$$a^2-11a+30=(a-5)(a-6),$$
$$a^2-13a+42=(a-6)(a-7),$$
$$a^2-\;8a+\;7=(a-1)(a-7).$$

Daher sind die Terme auf beiden Seiten der gegebenen Gleichung genau dann definiert, wenn a keine der Zahlen 1, 2, ..., 7 ist. Trifft dies zu, so gilt ferner für $k=1, \ldots, 6$

$$\frac{1}{(a-k)(a-(k+1))}=-\frac{1}{a-k}+\frac{1}{a-(k+1)}.$$

Also ist für reelles $a \neq 1, 2, \ldots, 7$ die gegebene Gleichung genau dann erfüllt, wenn

$$\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a-7}=\frac{a(a+5)}{a^2-8a+7}$$

oder, für reelles $a \neq 1, 2, \ldots, 7$ gleichbedeutend hiermit,

$$\frac{-(a-7)+(a-1)}{(a-1)(a-7)}=\frac{a^2-5a}{a^2-8a+7},$$

$$\frac{6}{a^2-8a+7}=\frac{a^2+5a}{a^2-8a+7},$$

$$a^2+5a-6=0$$

gilt. Da die letztgenannte Gleichung genau die reellen Lösungen $a=1$ und $a=-6$ hat, ist sie für reelles $a \neq 1, 2, \ldots, 7$ äquivalent mit $a=-6$. Also erfüllt genau diese Zahl die Bedingungen der Aufgabe.

4. Es gibt genau 6 Möglichkeiten, die drei Gegenstände b (Ball), r (Ring), w (Würfel) auf die drei Schüler A (Achim), B (Bernd), D (Dirk) zu verteilen. Aus der Definition der Alternative bzw. Konjunktion ergibt sich:

$A\ B\ D$	wahre Aussagen	falsche Aussagen
$b\ r\ w$	(1), (2), (3)	(4)
$b\ w\ r$	(2), (4)	(1), (3)
$r\ b\ w$	(1), (2)	(3), (4)
$r\ w\ b$	(1), (2)	(3), (4)
$w\ b\ r$	(1), (2)	(3), (4)
$w\ r\ b$	(1)	(2), (3), (4)

Aus der Tabelle ist ersichtlich, daß a) und e) nicht möglich sind, aber b), c) und d).

5. Für alle reellen a, b, c, d sind genau dann die geforderten Bedingungen erfüllt, wenn für sie die folgenden Gleichungen (1) bis (4) gelten:

$$d=10, \quad (1)$$
$$a+b+c+d=12, \quad (2)$$
$$8a+4b+2c+d=4, \quad (3)$$
$$27a+9b+3c+d=1. \quad (4)$$

I) Wenn (1) bis (4) für reelle a, b, c, d erfüllt sind, so folgt durch Einsetzen von (1) in (2), (3) und (4):

$$a+b+c=2,$$
also $$c=2-a-b, \quad (5)$$
$$8a+4b+2c=-6,$$
also $$4a+2b+c=-3, \quad (6)$$
$$27a+9b+3c=-9,$$
also $$9a+3b+c=-3. \quad (7)$$

Setzt man (5) in (6) und (7) ein, so erhält man

$$3a+b=-5, \text{ also } b=-5-3a, \quad (8)$$
$$8a+2b=-5. \quad (9)$$

Durch Einsetzen von (8) in (9) folgt $2a=5$, woraus man

$$a=\frac{5}{2} \quad (10)$$

erhält. Aus (10) und (8) ergibt sich

$$b=-\frac{25}{2}. \quad (11)$$

Daraus und aus (10) und (5) folgt

$$c=2-\frac{5}{2}+\frac{25}{2},$$

also $c=12$. (12)

Daher können nur die in (10), (11), (12), (1) genannten Zahlen die Gleichungen (1) bis (4) erfüllen.

II) Wie man durch Einsetzen dieser Zahlen in (1) bis (4) zeigen kann, erfüllen sie diese Gleichungen.

Die gesuchten Zahlen lauten somit $a=\frac{5}{2}$, $b=-\frac{25}{2}$, $c=12$, $d=10$.

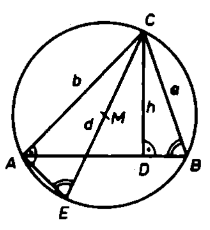
6. I. Angenommen, ein Dreieck ABC erfüllt die Bedingungen der Aufgabe. Ist H der Mittelpunkt von AB, so teilt S die Seitenhalbierende CH im Verhältnis 1 : 2, also liegt H im Abstand $\overline{HS}=\frac{1}{2}\overline{SC}$ auf der Verlängerung von CS. Ferner liegt M als Mittelpunkt des Umkreises auf der Mittelsenkrechten von AB. MH verläuft also senkrecht zu AB. Schließlich liegen A und B auf dem Umkreis, d. h. dem Kreis um M durch C. Daraus folgt, daß ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe genügt, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

II. (1) Man trägt an CS in S auf der Verlängerung von CS über S hinaus die Strecke der Länge $\frac{1}{2}\overline{CS}$ an; ihr zweiter Endpunkt sei H.

(2) Man konstruiert die Gerade durch H, die auf MH senkrecht steht.

(3) Man zeichnet den Kreis um M durch C. Schneidet er die nach (2) konstruierte Gerade in zwei Punkten, so seien diese A und B genannt.

III. Beweis, daß jedes so konstruierte Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe genügt: M ist der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC, da A, B und C nach Konstruktion auf ein und demselben Kreis um M liegen. Ferner gilt nach Konstruktion $\overline{MA}=\overline{MB}$ und $\sphericalangle AHM=\sphericalangle BHM=90°$, also ist $\triangle AHM \cong \triangle BHM$ (Kongruenzsatz ssw; dieser ist anwendbar, da $\sphericalangle AHM$, $\sphericalangle BHM$ als rechter Winkel jeweils der längsten Dreieckseite gegenüberliegen). Somit gilt $\overline{AH}=\overline{BH}$, folglich ist CH Seitenhalbierende im Dreieck ABC. Da sie nach Konstruktion durch S im Verhältnis $\overline{HS}:\overline{SC}=1:2$ geteilt wird, ist S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC.



IV. Konstruktionsschritte (1) und (2) sind eindeutig ausführbar. Die Konstruktion ergibt ferner, daß H im Innern des nach (3) konstruierten Kreises liegt. Also schneidet die in (2) konstruierte Gerade diesen Kreis in zwei Punkten. Da schließlich AB senkrecht zu MH verläuft und $\sphericalangle MHC<90°$ ist, liegt C nicht auf der Geraden durch A und B. Also existiert zu den gegebenen Punkten M, S, C genau ein Dreieck ABC, das den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Lösungen zu alpha-heiter 3/79:

Pfiffige Mädels

Marina ist jünger.

Welchen Beruf haben sie?

Bauingenieur, Vermessungsfacharbeiter, Statistiker.

Kryptarithmetik

$$\begin{array}{ccccccc} 7 & \cdot & 7 & = & 49 \\ \cdot & & + & & - \\ 3 & = & 12 & - & 9 \\ \hline 21 & + & 19 & = & 40 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 20 & - & 5 & = & 15 \\ - & & - & & - \\ 5 & \cdot & 2 & = & 10 \\ \hline 15 & : & 3 & = & 5 \end{array}$$

$$695\,540+32\,665=728\,205$$
$$391+69\,451+972=70\,814$$

Mathematisches Rätsel

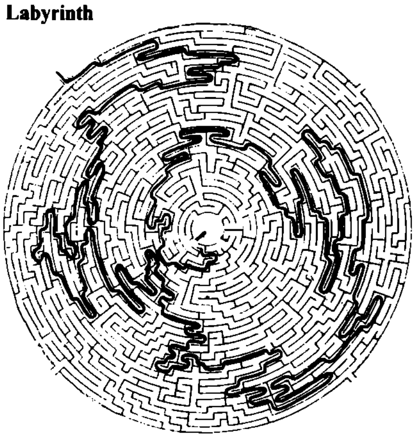
L	A	G	E		
O	■	R	■	M	
T	H	A	L	E	S
		M	I	N	
	O	M	E	G	A
				E	

Zahlenpyramide

$D=1$; $E=2$; $L=3$; $T=4$; $A=5$.

$$1^2 = 1$$
$$11^2 = 121$$
$$111^2 = 12321$$
$$1111^2 = 1234321$$
$$11111^2 = 123454321$$

Labyrinth



Wer berichtet den Lesern der *alpha* über mathematische Aktivitäten im Rahmen der Messe der Meister von morgen?

ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

15 Jahre Bezirksklub Junger Mathematiker Bez. Neubrandenburg

Die *III. Olympiade Junger Mathematiker der DDR* (1964) war mit der 4. Stufe in Berlin abgeschlossen. Ohne besonderen Erfolg kehrte die Neubrandenburger Mannschaft von dieser Olympiade zurück. Da entwickelte sich bei den Schülern und Lehrern der Wunsch, systematische Förderungen im Bezirk und den Kreisen einzurichten. Es bildeten sich der Bezirksklub (BJM) und nach und nach die Kreisklubs (KJM) in den Kreisen.

Im BJM sind etwa 45 Pioniere und FDJler der Klassen 7 bis 12 vereinigt. Durch gute Leistungen bei der Bezirksolympiade muß die Mitgliedschaft immer wieder neu erworben werden. Es ist eine Auszeichnung, Mitglied des BJM zu sein. Jährlich werden sechs Lehrgänge an den Wochenenden oder in den Ferien durchgeführt. Im Sommerlehrgang in Malchow am Fleesensee hatten wir erstmals 10 Pioniere dabei, die gerade in Kl. 6 gekommen waren. Jeder dieser Pioniere erhielt zwei FDJler als Betreuer (siehe Bild). Diese Betreuer halfen auch ihren Pionieren bei der Vorbereitung der 8 Klausuren, die nachmittags geschrieben wurden. Gerlind Kühn aus Demmin erhielt am Ende des Lehrgangs als Preis für den 1. Platz ein Paar Rollschuhe.

Die BJM-Mitglieder, die schon einmal bei einer Bezirksolympiade dabei waren, erhielten jährlich den Auftrag, eine selbst erdachte Aufgabe von Olympiadetyp (mit Lösungsweg) zur Olympiade mitzubringen. Die interessantesten werden am letzten Tag der Olympiade von den Verfassern in AG-Gruppen behandelt. Seit 1970, also seit 10 Jahren, sind insgesamt 390 Aufgaben erdacht und anerkannt worden. Davon sind 272 mit „gut“ oder „sehr gut“ bewertet worden. 140 Aufgaben sind bereits im Bezirk veröffentlicht, z. B. Mathematische Blätter/Bez. Neubrandenburg, 1972, „100 Aufgaben von Jungen Mathematikern“. Einige wollen wir hier vorstellen. (Die Klassenangabe bezieht sich auf den damaligen Zeitpunkt.)

R. Neumann und seine beiden Betreuer im Sommerlehrgang Malchow, 1978

Aufgaben für Klassen 5 bis 7

▲1▲ Uwe Briese, Burg Stargard, Kl. 6, jetzt: Unteroffizier der NVA
Gegeben ist ein Quadrat mit der Seitenlänge $a=32$ cm. Es werden ständig die Mittelpunkte der vier Seiten so verbunden, daß immer wieder neue einbeschriebene Quadrate mit den Seiten $a_1, a_2, \ldots$ entstehen.
Welche Seitenlänge hat das zehnte so einbeschriebene Quadrat?

▲2▲ Sabine Mamerow, Altentreptow, Kl. 7, jetzt: Mathematiklehrerin
Multipliziert man die Summe dreier natürlicher Zahlen mit der Summe zweier dieser Zahlen, so erhält man 72, 96 bzw. 120.
Wie lauten die drei Zahlen?

▲3▲ H.-Ulrich Frömmer, Neustrelitz, Kl. 8, jetzt: Offizier der NVA
Im Jahre 1971 wurde jemand nach seinem Alter gefragt. Er antwortete: Vor 6 Jahren war ich so alt wie es mein Enkel in 50 Jahren sein wird. In einem Jahr ist mein Enkel so alt, wie ein Siebentel der Differenz unser beider Geburtsjahre.
Wie alt war der Großvater? (Welche Angabe ist überflüssig?)

▲4▲ Jürgen Prestin, Waren, Kl. 7, jetzt: stud. math.
Man konstruiere das kleinste Quadrat, das zwei einander berührenden Kreisen von je 2 cm Radius umbeschrieben werden kann!

Aufgaben für Klassen 8/9

▲5▲ Marcus Kasner, Templin, Kl. 8, jetzt: Unterfeldwebel der NVA
Man beweise
a) Von den auf S. 8 im Tafelwerk angegebenen Zahlen n^2 sind 10% genau.
b) Der durchschnittliche prozentuale Fehler aller Zahlen beträgt genau 0,025%.

▲6▲ Heino Rudolf, Waren, Kl. 9, jetzt: stud. math.
Vermehrt man das Produkt von vier aufeinanderfolgenden geraden bzw. ungeraden Zahlen um 16, so erhält man stets eine Quadratzahl. Man beweise beide Aussagen!

▲7▲ Marlies Kolbatz, Gr. Quassow, Kl. 9, jetzt: Lehrling (BBS)
Die Summe aus der Summe der Quadrate zweier Primzahlzwillinge und der Differenz ihrer Quadrate läßt beim Teilen durch 24 stets den Rest 2. (Für P.-Zw. gilt $p_2-p_1=2$, $p_1, p_2 \geq 3$.)

Aufgaben für Klassen 10/12

▲8▲ Jürgen Roßmann, Neubrandenburg, Kl. 10, jetzt: stud. math.
Man beweise, daß
$(a^8+a^7)+2(a^6+a^5)+4(a^4+a^3)+8(a^2+a)$ für jede natürliche Zahl a durch 30 teilbar ist!

▲9▲ Margitta Rudolph, Neustrelitz, Kl. 11, jetzt: Diplom-Mathematiker
Die 5. Potenzen zweier natürlicher Zahlen m_1, m_2 bestehen genau aus den Ziffern $m_1(1, 3, 3, 3, 3, 5, 9, 9)$, $m_2(0, 1, 4, 6, 6, 6, 6, 7)$.
Welche der beiden Zahlen ist die größere?

▲10▲ Sabine Schlorff, Neustrelitz, Kl. 10, jetzt: Diplom-Mathematiker
Es sind alle ganzzahligen x für die Funktion $f(x)=x^2-9$ an der Stelle x_0 zu bestimmen, wobei gilt: $f\{f[f(x_0^2+2x_0)]\}=72$.

Lösungshinweise

▲1▲ $A=a^2, A_1=\frac{a^2}{2}, A_2=\frac{a^2}{4}, \ldots$ ergibt sich durch Umklappung von vier kongruenten Dreiecken. $\ldots A_{10}=1\text{ cm}^2$, $a=1$ cm.

▲2▲ Aufstellung der drei Gleichungen. $(x+y+z)$ ist gemeinsamer Teiler von 72, 96, 120. ... $(x, y, z)=(2, 4, 6)$. Probe.

▲3▲ Opa x, Enkel y. $x-6=y+50$; $y+1=\frac{1}{7}(1971-y)-(1971-x)$. Vereinfachen ergibt $y=7$, $x=63$. ... Probe. (Angabe 1971 unnötig)

▲4▲ Eine der Diagonalen $(\overline{AC})$ des Quadrates gehe durch die Mittelpunkte der Kreise, die sich in S berühren. Man zeige, daß $\sphericalangle SBA=45°$, $\sphericalangle SBM_1=22{,}5°$, $\sphericalangle SM_1B=67{,}5°$. Daraus folgt die Konstruktion.

▲5▲ b) Bei den Endziffern 1 bis 9 ergeben die Fehler bei den Quadraten $4\cdot 0{,}0001+4\cdot 0{,}0004+0{,}0005$. Bei 10 aufeinanderfolgenden Quadraten sind dies 0,0025, bei 100 ist der Fehler 0,025.

▲6▲ $a(a+2)(a+4)(a+6)+16$, $a \in N$ führt zu $(a^2+b+c)^2$ mit $c=4$, $b=6a$.

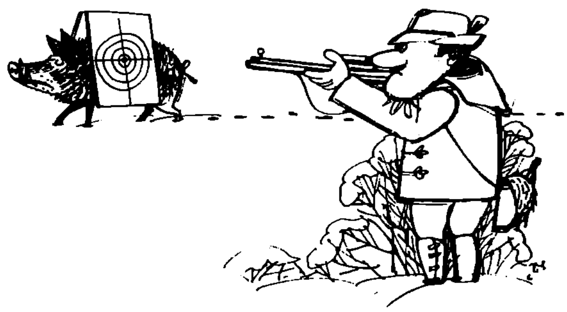
▲7▲ Das Zusammenfassen der Quadrate mit $p_{1;2}=6n\pm 1$, $n>0$ ergibt $24(3n^2+n)+2$. Das Paar (3; 5) speziell untersuchen!

▲8▲ Umformung zu
$a(a+1)(a^2+2)\eta a^4+(a^4+4)$.
Fallunterscheidungen.

▲9▲ $m_2>m_1$

▲10▲ $x_{01}=1$, $x_{02}=-3$ *H.-Joachim Kerber*

Ein Blick in die Praxis: Mathematik und Forstwirtschaft



Wer das Wort Forstwirtschaft hört, denkt dabei zuerst an die Jagd. Die Forstwirtschaft hat aber noch eine Reihe anderer Aufgaben zu lösen.

1. Holznutzung

Die Volkswirtschaft wird durch die planmäßige Nutzung der Wälder kontinuierlich mit Holz versorgt. Es können aber nur 60% des Bedarfs aus eigenen Wäldern gedeckt werden, die restlichen 40% werden importiert. Nutzung des Holzes: Zellstoffindustrie, Bauindustrie, Spanplattenherstellung, Grubenholz.

2. Wildnutzung

Durch die Jäger werden die Wildhandlungen und die Gaststätten regelmäßig mit Wild beliefert. Schwarzwild, Rehwild und Rotwild sind die Hauptlieferanten. Nicht zu unterschätzen ist die volkswirtschaftliche Bedeutung der Bälge von Marder, Fuchs und Iltis. Ein Teil der Trophäen, das sind Geweihe und Gehörne, wird der Schmuckindustrie bzw. der Knopfindustrie zugeführt.

3. Erholungsfunktion

Der Wald als Stätte der Erholung wird von allen naturliebenden Menschen genutzt. Hier sollen nur die Landschaftsschutzgebiete und die Naherholungsgebiete erwähnt werden.

4. Harznutzung

Eine der wichtigsten Rohstoffquellen des Waldes finden wir im Harz der Kiefernwälder. Es wird für die chemische Industrie gewonnen und findet bei der Herstellung von Terpentin, Lacken und Farben Verwendung. Die kosmetische Industrie und die Medizin sind ebenfalls auf Naturharze angewiesen. Die Harzung beginnt erst bei 90- bis 100jährigen Kiefernwäldern, wobei 1 ha Kiefernwald mit etwa 300 Bäumen jährlich etwa 600 kg Harz liefert. Ein Wald kann etwa 10 Jahre für die Harzung genutzt werden.

Berufsmöglichkeiten

Forstfacharbeiter für: Rohholzerzeugung, Harzung, Traktorist, Motorsägenführer;
Meister oder Ingenieur für Rohholzbereitstellung oder im Bereich Technik. Der Beruf „Ingenieur für Rohholzerzeugung“ entspricht dem früheren „Revierförster“. Ausbildungsstätten sind: Rabensteinfeld und Ballenstedt/Harz als Fachschulen und Tharandt als Hochschule.

Aufgaben

Ein Festmeter (fm) ist ein Kubikmeter fester Holzmasse. Der Rauminhalt eines stehenden Stammes läßt sich nach der Formel $J = g \cdot H \cdot f$ berechnen.

J: Rauminhalt in fm

g: Stammgrundfläche in m^2, in Brusthöhe gemessen

f: die Formzahl, ein Reduktionsfaktor, der als Näherungswert für Nadelholz mit $f = 0{,}45$ und für Laubholz mit $f = 0{,}5$ angenommen wird.

Die Höhe H stehender Bäume kann mit dem „Försterdreieck“ ermittelt werden.

▲1▲ Berechne den Rauminhalt einer Buche, die 25 m Höhe und 30 cm Stammdurchmesser hat!

Aus einem Stück Fichtenholz von 10 kg Masse können hergestellt werden:

0,5 m^2 Dielung
oder 6 kg Zeitungspapier
oder 800 Bogen Schreibpapier
oder 6 Flaschen Trinkbranntwein

▲2▲ Fichtenholz hat im Mittel eine Dichte von $0{,}6\,\frac{g}{cm^3}$. Wieviel Fichten von 30 m Höhe und einem Stammdurchmesser von 30 cm sind zur Herstellung einer Tagesauflage von 1 000 000 Zeitungen nötig, wenn eine Zeitung eine Masse von etwa 40 g hat?

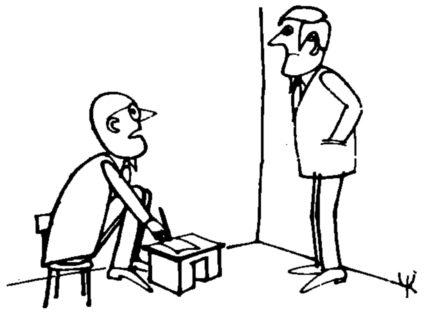
▲3▲ Wieviel fm hat ein Mammutbaum, der eine Höhe von 150 m und einen Stammdurchmesser von 10 m hat?

▲4▲ Ein Kiefernwald von 27 ha wird 8 Jahre lang für die Harzung genutzt.
Wie groß ist der Ertrag, wenn er 5% unter den erwarteten Werten von 600 kg je ha jährlich liegt?

Weshalb effektivere Holzwirtschaft?

Mit 17 Prozent am Rohstoffpotential der DDR beteiligt, ist Holz für die Entwicklung unserer Volkswirtschaft und zur Verwirklichung der Hauptaufgabe von großer Bedeutung. Man rechnet mit rund 4000 Einsatzgebieten, und der Bedarf steigt weiter an. In unserer Republik erfassen die Waldbestände mit 2,8 Millionen Hektar 27 Prozent des Territoriums. Pro Kopf der Bevölkerung entfallen 0,17 Hektar Waldfläche. Damit zählt die DDR zu den waldärmsten Ländern Europas. Es kommt also darauf an, den Waldzuwachs durch komplexe Intensivierungsmaßnahmen zu erhöhen und darauf bedacht zu sein, daß unser Naturreichtum Wald wirksamer für die Steigerung des Nationaleinkommens eingesetzt wird. Schon jetzt decken wir ein Drittel unseres Holzbedarfs durch Einfuhren aus der Sowjetunion und anderen Ländern. Diese Importe lassen sich nicht beliebig ausdehnen.
Deshalb wurden die Aufgaben zur Schaffung entsprechender wissenschaftlich-technischer Lösungen für eine effektivere Holzwirtschaft in den Staatsplan Wissenschaft und Technik aufgenommen.
Gegenwärtig werden nur 60 Prozent der Holzsubstanz eines Baumes der Verwertung zugeführt. Möglichkeiten müssen gefunden werden, um auch Kronen, Ast- und Stockholz zu nutzen. Mehr als 500000 Festmeter Holz werden jährlich noch verbrannt. Deshalb bedarf es neuer Überlegungen, um mehr Holzreste zu verwerten. Holz und Holzerzeugnisse sparsam und klug einzusetzen oder durch andere Werkstoffe gleichwertig zu ersetzen, also aus einem Festmeter Holz mehr Endprodukte mit hohen Gebrauchseigenschaften zu produzieren.
Sehr viel ist noch für eine wirksamere chemische Verwertung des Holzes, die bessere Ausnutzung der natürlichen Inhaltsstoffe zu tun. Eine Tonne Holz ergibt zum Beispiel 170 bis 200 Liter Äthanol für die Spirituosenproduktion, wofür sonst 700 kg Getreide oder 1,7 Tonnen Kartoffeln eingesetzt werden müssen. Daß imprägnierte Schwellen gegenüber ungeschützten eine zehnfache Lebensdauer haben, verdeutlicht den Wert wirksamer Holzschutzmaßnahmen. Mit einem Wort: Überall wo Holz erzeugt, be- und verarbeitet wird, sind strengere Maßstäbe an die ökonomische Nutzung dieses kostbaren einheimischen Rohstoffes anzulegen.

Ursula Sonntag



„Den vorgesehenen Plan der Holzeinsparung konnten wir in diesem Jahr um 100 Prozent übererfüllen."

Wildreichtum

Die Jäger der DDR bewirtschaften 8,9 Millionen Hektar Jagdfläche, die natürlich auch land- und forstwirtschaftlich genutzt wird. Auf ihr kommen heute fast alle europäischen Wildarten vor. Nach der letzten Zählung, vorgenommen im Frühjahr 1977, haben wir bei uns folgende Wildbestände zu verzeichnen:

Rotwild	28000
Damwild	15500
Rehwild	315000
Muffelwild	4200
Schwarzwild	48000
Hasen	198000
Wildenten	150000
Fasanen	62000
Rebhühner	75000
Großtrappen (geschützt)	250
Birkwild (geschützt)	300
Auerwild (geschützt)	200

Die geschützten Wildarten haben ganzjährig Schonzeit.

Weidmanns Heil!

Während der Jagdsaison 1977 wurden beispielsweise 21963 Stück Rotwild, 188188 Stück Rehwild und 117128 Stück Schwarzwild zur Strecke gebracht. Unser Bestand an Rothirschen, Rehen und Wildschweinen ist jedoch nach wie vor zu hoch. Deshalb verstärken jetzt viele Jagdgesellschaften den Abschuß, um dadurch Verbißschäden an land- und forstwirtschaftlichen Kulturen soweit wie möglich zu reduzieren.

Lösungen

▲1▲ $J=(0{,}15)^2\cdot\pi\cdot 25\cdot 0{,}5$
$J=0{,}88$ fm

▲2▲ Rauminhalt einer Fichte: $J=0{,}96$ fm
Masse einer Fichte: $m=576$ kg

Da aus 10 kg Fichtenholz 6 kg Zeitungspapier hergestellt werden kann, kann man aus einer Fichte also 346 kg Zeitungspapier herstellen, das sind etwa 8655 Zeitungen zu 40 g. Für 1 Million Zeitungen benötigt man demnach rund 115 Fichten dieser Größe!

▲3▲ Der Mammutbaum hat einen Rauminhalt von 5888 fm!

▲4▲ Es werden in den 8 Jahren 123120 kg Harz gewonnen.

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

In den letzten Heften der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha* haben wir interessante Lösungen von Schülern zu Wettbewerbsaufgaben vorgestellt. Die Veröffentlichung von Lösungsvarianten hat breite Zustimmung unter unseren Lesern gefunden. In unserem heutigen Heft stellen wir deshalb wieder bei uns eingegangene vorbildliche Lösungen vor.
In Heft 6/77 wurde von uns folgende Aufgabe gestellt:

Ma 7 ■1693 Es sind alle gebrochenen Zahlen $x=\frac{a}{b}$ zu ermitteln, für die $\frac{1}{4}<x<\frac{1}{3}$ und $b-a=12$ gilt!

In Heft 2/78 veröffentlichten wir dazu folgende Lösung:
Aus $b-a=12$ folgt $b=a+12$ und somit $x=\frac{a}{a+12}$. Nun gilt $\frac{1}{4}<\frac{a}{a+12}<\frac{1}{3}$, also $\frac{1}{4}<\frac{a}{a+12}$ und $\frac{a}{a+12}<\frac{1}{3}$, $a+12<4a$ und $3a<a+12$, $12<3a$ und $2a<12$, $4<a$ und $a<6$.
Aus $4<a<6$ folgt $a=5$. Es existiert genau eine solche gebrochene Zahl; sie lautet $x=\frac{5}{17}$.

Unser Leser *Ulrich Sperberg*, Schüler einer 7. Klasse der Theodor-Körner-Oberschule in Freiberg, sandte uns folgende Lösung:
Ich erweitere die Brüche $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{3}$ so, daß der Nenner jeweils um 12 größer ist als der Zähler und erhalte $\frac{1}{4}=\frac{4}{16}$ und $\frac{1}{3}=\frac{6}{18}$. Nun gilt $\frac{4}{16}<\frac{a}{a+12}<\frac{6}{18}$, folglich $x=\frac{5}{17}$.
Ulrich hat eine knappe, aber präzise Lösung gefunden; ihm gilt unsere Anerkennung.

Unsere Leserin *Silke Straubel*, Schülerin einer 7. Klasse der POS in Kußa, sandte uns folgende Lösung:

a	b	$\frac{a}{b}$
1	13	$\frac{1}{13}\approx 0{,}07$
2	14	$\frac{2}{14}\approx 0{,}14$
3	15	$\frac{3}{15}=0{,}20$
4	16	$\frac{4}{16}=0{,}25$
5	17	$\frac{5}{17}\approx 0{,}29$
6	18	$\frac{6}{18}\approx 0{,}33$
7	19	$\frac{7}{19}\approx 0{,}36$

Wegen $\frac{1}{4}=\frac{4}{16}<\frac{5}{17}<\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$ erfüllt nur die gebrochene Zahl $x=\frac{5}{17}$ die Bedingung der Aufgabe.
Silke hat durch systematische Untersuchung aller möglichen Fälle eine Lösung gefunden, die ebenfalls vorbildlich ist.

Was ist ein Karat?

Karat ist das Massemaß für Juwelen, wie z. B. Diamanten, Perlen und Edelsteine. Das Kurzzeichen für diese Maßeinheit ist k, und es gibt dafür keine Vorsätze, wie zum Beispiel Milli-, Mikro- oder Dezi-.
Es wurde festgelegt:
$1\ \mathrm{k}=2\cdot 10^{-4}$ kg ($=0{,}2$ g)
Früher wurde auch der Feingehalt des Goldes nach Karat bestimmt. Das Karat gab an, wie viele Vierundzwanzigstel reines Gold in der Legierungsmasse enthalten sind. Auf Tausendstel bezogen ist dann $1\ \mathrm{k}=41\frac{2}{3}$‰.

24 Karat ≙ Feingehalt 1000, d. h. völlig reines Gold;
14 Karat ≙ Feingehalt 585, d. h. 585 Gewichtsteile Gold sind in 1000 Gewichtsteilen Legierung vorhanden;
8 Karat ≙ Feingehalt 333, d. h. 333 Gewichtsteile Gold sind in 1000 Gewichtsteilen Legierung vorhanden.

Also gibt zum Beispiel der Stempel in Schmuckgegenständen den Feingehalt des Goldes an.

In freien Stunden alpha heiter

Nabil El-Solame,
aus NBI 10/78

Pfiffige Mädels

Zwei Freundinnen, Tanja und Marina, wurden gefragt: „Welche von euch ist jünger?“ Die Mädchen antworteten mit einem Rätsel. Tanja sagte: „Vor zwei Jahren war ich um zwei Jahre jünger als Marina in zwei Jahren sein wird.“ Marina fügte hinzu: „Und ich bin erst in zwei Jahren um zwei Jahre älter als sie vor zwei Jahren war.“
Welche von den beiden ist jünger?

aus: Nauka i Shisn, Moskau

Welchen Beruf haben sie?

INGE RUBIN, AUE

T. STEIKT, RIESA

EVA S. SIGMAR-BENESCH
ERFURT

Fachlehrer D. Knape, Jessen

Kryptarithmetik

A · A = BC		BK − E = AE
· + −		− − −
D = EF − C		E · B = AK
FE + EC = BH		AE : C = E
Christian Wiegand, OS Steinheid (Kl. 6)		*Lutz Tietz, Dresden (12 Jahre)*

MUTTER
+ KOMMT
SOFORT
E < M
U > K

DIE
+ BIRNE
+ IST
SAUER
T < N < B

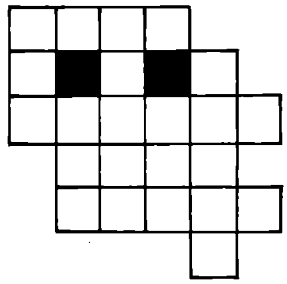
Jindřich Pěnčik, Prag, Musiker

■ „Herr Ober, bringen Sie mir bitte ein Eisbein!“ „Wünschen Sie eins zu drei oder eins zu fünf Mark?“ „Was ist denn da für ein Unterschied?“ „Zwei Mark, mein Herr...“

▲ „Mein Kleiner, kannst du schon zählen?“ „Ja, eins, zwei, drei, vier, fünf...“ „Und weiter?“ „Sechs, sieben, acht, neune, zehn, Ober, Unter, König, As!“

Mathematisches Rätsel

In die untenstehende Figur sind Wörter der folgenden Bedeutung – unabhängig von der angegebenen Reihenfolge – einzutragen. Zur Erleichterung wird für jedes Lösungswort in Klammern die Anzahl der Buchstaben angegeben.



1. griechischer Buchstabe (5)
2. anderes Wort für „Stellung“ (4)
3. Einheit der Masse (5)
4. Abkürzung für eine Zeiteinheit (3)
5. griechischer Mathematiker (Satz über Peripheriewinkel im Halbkreis) (6)
6. norwegischer Mathematiker (1842 bis 1899) (3)
7. Senkrechte (3)
8. Grundbegriff der Mathematik (5)

OStR K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin

Die Zeit mathematisch betrachtet

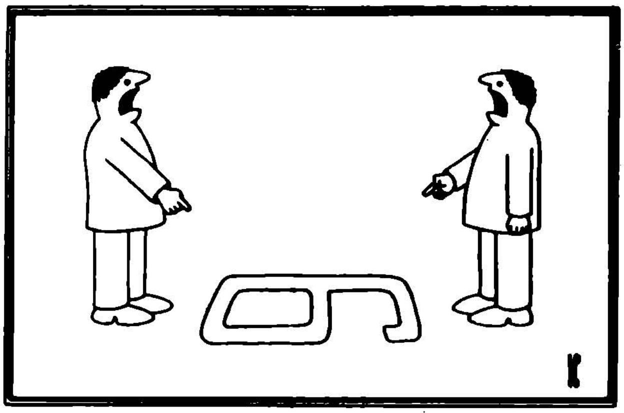
Gestern lag ich in der prallen Sonne und dachte ein wenig mathematisch nach. Dreiviertel sechs, dachte ich, ist ja eigentlich, wenn man sich's mathematisch überlegt, dezimal sozusagen, dreiviertel von sechs, also viereinhalb. Viereinhalb wiederum könnte halb fünf sein, wenn halb fünf nicht die Hälfte von fünf, also zweieinhalb wäre, was wiederum halb drei sein würde, wenn halb drei nicht die Hälfte von drei und somit eineinhalb wäre und dieses angeblich halb zwei sein soll, wobei man aber beachten muß, daß halb zwei ganz schlicht die Hälfte von zwei, also eins, ist, was es dann auch bleibt. Nun, es kommt selbst mir unglaublich vor, aber mathematisch betrachtet ist dreiviertel sechs in der prallen Sonne genau ein Uhr! *aus: Eulenspiegel 32/78*

Zahlenpyramide

$$D^E = D$$
$$DD^E = DED$$
$$DDD^E = DELED$$
$$DDDD^E = DELTLED$$
$$DDDDD^E = DELTATLED$$

Die Buchstaben sind so durch Ziffern zu ersetzen, daß das Potenzieren zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

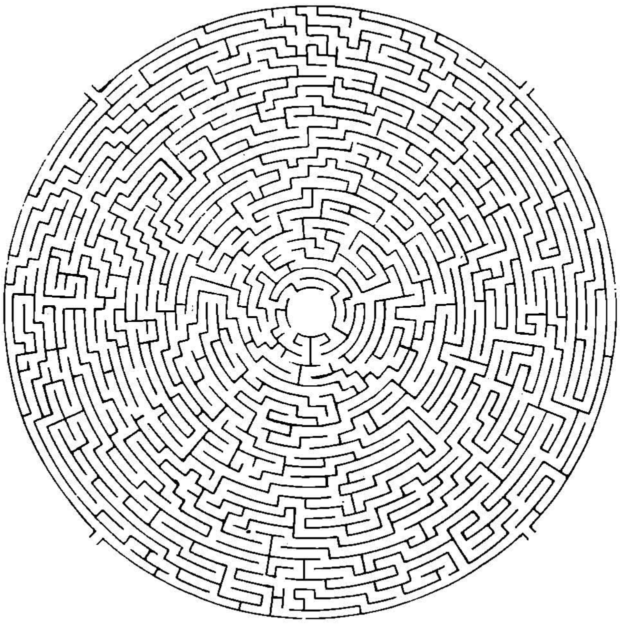
OL Ing. K. Koch, Schmalkalden

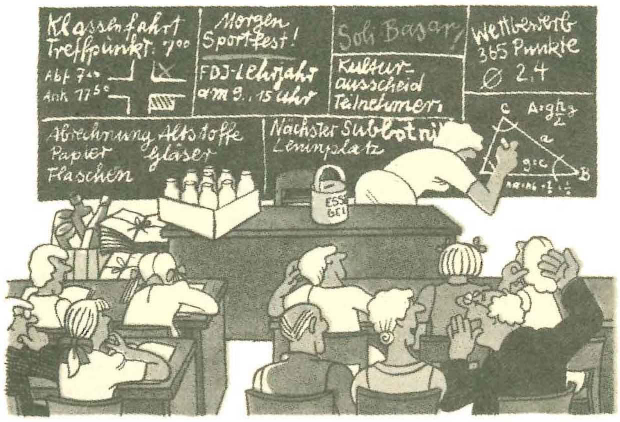


Auf der Suche nach der Wahrheit

Igor Worobjow, Moskau

Labyrinth *aus: Lapok 10/78, Budapest*



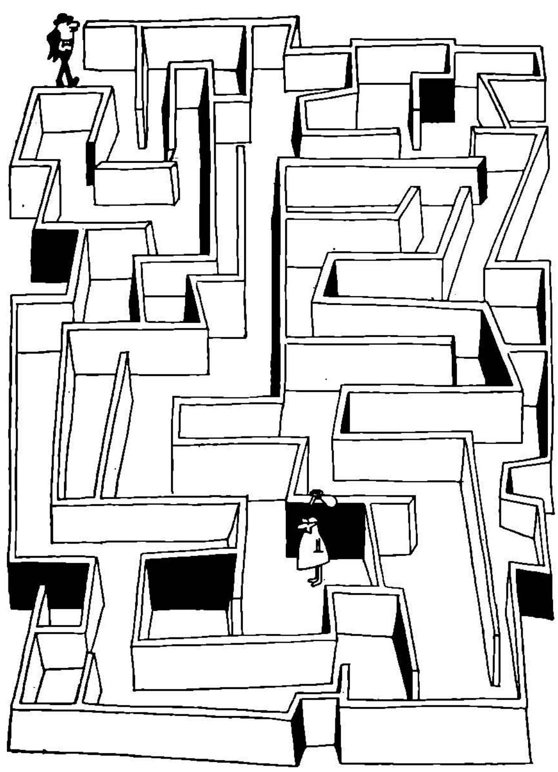


„Ist sie nicht fabelhaft?
Sogar dazu findet sie noch Zeit!"

B. Henniger; aus: Eulenspiegel 37/78

aus: Wurzel 1/79

„Wieviel ist 2 × 2, Kollege?"
„Ich weiß nicht, es ist kein Strom da."

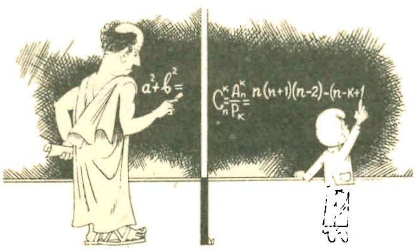


Lösungen auf Seite VIII *aus: Füles, Budapest*

Den Verstand entwickeln

Leseprobe aus: Lerne denken von Jugend an

Jeder gesunde Mensch hat von Natur aus ein Gehirn, das sich als „Organ des Verstandes“ bis zur höchsten Stufe der Begabung, bis zum Talent entwickeln kann. Ob diese Stufe erreicht wird, hängt schon nicht von der Natur ab.



In der Folklore aller Völker kommt die typische Gestalt des Dümmlings vor, der viele ihm eingepaukte Weisheiten von sich gibt, die aber alle fehl am Platz sind. Oder die Gestalt des gelehrten Dilettanten, der stets in eine peinliche Lage gerät, da er es nicht versteht, seine Kenntnisse am richtigen Ort und zur rechten Zeit anzuwenden. Beide, sowohl der Dümmling als auch der gelehrte Dilettant, sind alles andere als klug.

Wissen ist nämlich nicht dasselbe wie Verstand. „Viel Wissen bedeutet noch nicht Verstand“, sagte Heraklit aus Ephesos im Jahre 540 v. u. Z. Schon in jenen alten Zeiten vertraten die Philosophen den Standpunkt, der Verstand sei keine einfache Summe von Kenntnissen, kein mechanisches Beherrschen von Regeln, Termini oder Lehrsätzen, sondern die Fähigkeit, das Wissen zu verwerten. Auch Immanuel Kant war der Meinung, Verstand sei die Fähigkeit zu urteilen, das heißt selbständig über Tatsachen, Ereignisse, Erscheinungen und Menschen ein Urteil abzugeben.

Wie ist das zu erreichen? Erstens müssen dem Menschen alle Schätze der geistigen Kultur zugänglich sein. Zweitens muß man ihm beibringen, wie er diese Schätze auswerten kann,

und ihn mit Wissensdurst anstecken, so daß das Bestreben, Kenntnisse zu erwerben, zum Hauptbedürfnis der Persönlichkeit wird. Diese Aufgabe lösen hieße, daß alle Menschen klug werden. Dann wäre das Talent keine glückliche Ausnahme, sondern etwas Alltägliches.

Es ist somit sinnlos, die Verantwortung auf die Natur abzuwälzen. Manche Erzieher behaupten, die Gene seien an allem schuld, und beruhigen damit ihr Gewissen. Eine derartige Einstellung ist alles andere als demokratisch und zeugt von Unwissen, ja Ignoranz. Es gibt übrigens im Westen „Pädagogen“, die behaupten, nur 6 Prozent aller Kinder seien von Geburt an intelligent und besäßen Fähigkeiten zu schöpferischer Arbeit, während die andern nur imstande seien, die von den „Klugen“ ausgedachten Arbeitsgänge zu wiederholen. Sie wollen uns glauben machen, es sei möglich, durch Intelligenzteste schon im frühesten Alter festzustellen, ob das Kind intelligent oder dumm ist. Letzten Endes bahnt diese Einstellung den einen den Weg zum Wissen und verschließt ihn den anderen. Da ließe sich eben nichts machen. Je nach der Intelligenzstufe werden somit für die einen alle Bedingungen geschaffen, damit sich die „angeborene“ Intelligenz entwickeln kann, dagegen sei es sinnlos, den anderen ebensolche Bedingungen zu schaffen. Wir sowjetischen Wissenschaftler können uns mit dieser Anschauung keinesfalls einverstanden erklären.

Alle Menschen sind begabt

Es ist wissenschaftlich bewiesen, daß die meisten Menschen mit einem biologisch normalen Gehirn geboren werden. Daraus folgt, daß die Natur allen Menschen die gleichen potentiellen Möglichkeiten mit auf den Weg gibt, so daß jeder seine Fähigkeiten entwickeln kann und imstande ist, sich die Erfahrungen anzueignen, die die Menschheit gesammelt hat. Wie leicht, ja spielend eignet sich doch jedes Kind im 20. Jahrhundert die im Laufe von Jahrtausenden herausgebildeten Fähigkeiten und angehäuften Kenntnisse an, eben weil es gebahnte Wege geht und durch die Erfahrungen früherer Generationen vor den Fehlern bewahrt wird, die die Menschheit als Preis gezahlt hat, um das zu erwerben, was wir heute „Wissen“ nennen.

Was in früheren Epochen den reifen Verstand von Männern beschäftigte, so Hegel, ist in späteren Zeiten dem Knabenverstand zugänglich geworden.

Es erhebt sich die Frage: Wie kommt es dann, daß der eine oder andere in seiner Entwicklung auf einer Stufe stehenbleibt, die von der Menschheit schon längst überschritten wurde? Wie mir scheint, liegt der Grund darin, daß der Bildungsprozeß der „geistigen Organe“ des Menschen noch recht mangelhaft „eingerichtet“ ist. Wir versuchen mitunter, die oberen Etagen aufzuführen, ohne den Grundstein für das Fundament der Elementarfähigkeiten gelegt zu haben. Wir sind bemüht, den Kindern schwer verständliche Kenntnisse beizubringen, ohne daß die Grundlage dafür vorhanden ist. Ist das Kind aber nicht imstande, sich einen bestimmten Lehrstoff anzueignen, so lernt es alles mechanisch auswendig, ohne den Sinn zu verstehen. Als Folge entwickelt sich zwar das Gedächtnis, doch keinesfalls die Urteilskraft.

Wenn wir uns aber damit begnügen, daß unsere Schüler Formeln, Gesetze oder Regeln lernen, ohne daß sie verstehen, welche Probleme diesen Formeln usw. zugrunde liegen und auf welche Weise sie gelöst werden, erziehen wir nur pedante Dogmatiker. Der Dogmatiker jedoch ist nicht imstande zu begreifen, daß die ganze menschliche Kultur, das ganze Wissen der Menschheit eine mühevoll errungene und oft nur erratene Antwort auf Fragen ist, vor die das Leben seinerzeit die Menschheit gestellt hat.

Fragen jedoch tauchen vor Menschen gerade bei Auseinandersetzungen auf, im Meinungsstreit, wenn einer etwas behauptet, was der andere zurückweist, und wenn jeder dabei bestrebt ist, seine Meinung zu begründen.

Kultur des Diskutierens

Schon im Altertum hieß es: „Schwöre nicht auf den Namen deines Lehrers, sondern führe Beweise an.“ Da aber ein Mensch mit dogmatischem Verstand nicht imstande ist, Tatsachen oder Erscheinungen, die Meinungsverschiedenheiten hervorrufen, selbständig zu begreifen, nimmt er zu „typischen Lösungen“ Zuflucht. Gelingt ihm das aber nicht, gerät er außer Rand und Band.

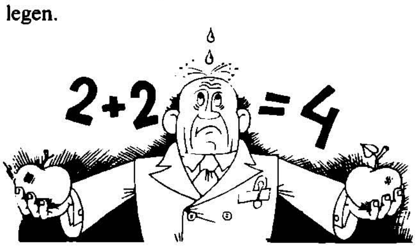
Jedermann muß begreifen, daß seine Meinung nicht die einzig mögliche und auch nicht die einzig richtige ist. Den Dogmatikern fällt es schwer, gerade das zu verstehen.

Die Kultur des Diskutierens setzt die Fähigkeit voraus, Erscheinungen auch vom entgegengesetzten Standpunkt aus betrachten zu können, und die Gewohnheit, seine eigene Meinung zu überprüfen: „Was geschieht, wenn das Gegenteil vorausgesetzt wird?“ Nur auf diese Weise kann die objektive Wahrheit gefunden werden.

Die Kunst, sachlich zu diskutieren, ohne sich mit dem Opponenten, der als gleichwertig betrachtet wird, in die Haare zu geraten, liegt einer anderen Eigenschaft zugrunde, und zwar der Fähigkeit, mit sich selbst zu diskutieren, d. h. selbstkritisch zu denken. Ohne diese Eigenschaft bleibt der Verstand stets vom Denken anderer Menschen abhängig, die immer anwesend sein müßten, um die Einseitigkeit des dogmatischen Verstandes und seine kindische Neigung, die Erscheinungen nur von seinem engen Standpunkt aus zu betrachten, zu kritisieren.
Die Kunst, mit sich selbst diskutieren zu können, ist ein Merkmal höchster geistiger Kultur. Ein dialektisch denkender Mensch erforscht alle Seiten eines Problems, auch diejenigen, die anfangs unbedeutend schienen, denn er weiß, daß in einem gewissen Moment das scheinbar Unbedeutende „offensichtliche Wahrheiten" und „widerspruchslose Konstruktionen" umwerfen kann.
Solch ein Mensch durchdenkt noch vor dem Treffen mit dem Opponenten alle „Für" und „Wider" seines Standpunktes. Um in der Diskussion vor einem starken Gegner nicht hilflos dazustehen, durchdenkt er sowohl alle seine Beweisgründe als auch die eventuellen Gegengründe und verhält sich mißtrauisch zu den sogenannten absoluten Wahrheiten.

Die Tücke abstrakter Wahrheiten

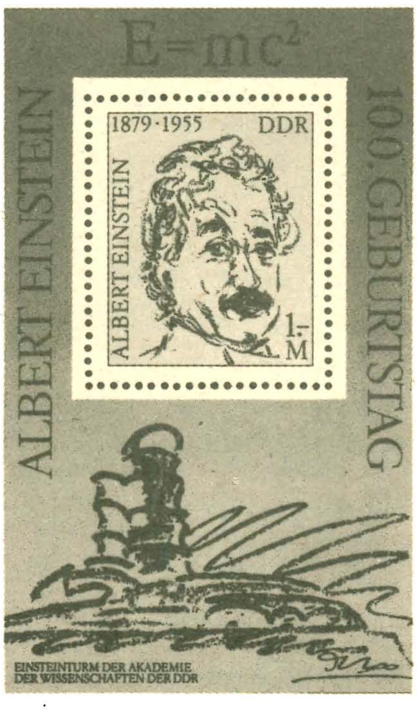
Je „absoluter" die eine oder die andere „abstrakte Wahrheit" scheinen mag, um so hinterhältiger kann sie in Wirklichkeit sein. Deshalb ist es geraten, sehr vorsichtig mit ihr umzugehen. Absolute Wahrheiten sind stets an bestimmte Bedingungen gebunden und nur innerhalb dieser Bedingungen unumstößlich. Das sachkundige Verhalten zu absoluten Wahrheiten will von früher Jugend an gelernt sein, jedenfalls von der Schulbank an. Sonst kommt der Mensch früher oder später in eine Lage, in der die „offensichtlichen Tatsachen" mit den in der Schule erlernten Binsenwahrheiten in Widerspruch geraten und sie widerlegen.



$2+2=4$. Das scheint eine unumstößliche Wahrheit zu sein. Ja, solange Stäbchen oder Äpfel addiert werden. Doch was ergibt sich, sobald zwei und zwei Wassertropfen vereint werden? Ein Tropfen oder vierundvierzig Spritzer?
Die Physiker von heute wissen, daß wenn im Laufe eines Experiments eine neue „unerwartete" Erscheinung auftritt, die alle Rechnungen widerlegt, diese Erscheinung erforscht werden muß, damit die Rechnungen richtiggestellt werden können. Für einen Dogmatiker ergibt sich jedoch in solch einem Fall eine tragische Situation. Er beeilt sich, die wissenschaftlichen Erkenntnisse als „lebensfremde Klügeleien" abzutun, anstatt die Widersprüche zu erforschen. Er kann es nicht verstehen, daß nicht die Formel falsch ist, sondern daß sie im gegebenen Falle falsch angewandt wurde.
Der Mensch, der nicht gelernt hat, selbständig zu denken, schenkt den abstrakten Formeln einen zu ehrfürchtigen Glauben und befindet sich deshalb in einem ständigen Zustand der Kollision mit dem Leben. Immer wieder wird er zwischen abstrakten Wahrheiten und konkreten Lebenssituationen hin- und hergerissen. Er ist dem Leben böse, daß „es sich nicht nach den Gesetzmäßigkeiten der Wissenschaft entwickelt", oder er verschließt die Augen vor Tatsachen, wenn sie sich nicht in sein wissenschaftliches Schema zwängen lassen.
Wenn Sie also ein kluger Mensch sein wollen, der es versteht, seine Kenntnisse beim Beurteilen von Widersprüchen des realen Lebens anzuwenden, so gewöhnen Sie sich daran, den Ursprung jeder allgemeinen Wahrheit zu ergründen und die mühevollen Wege zu erforschen, die die Menschen zurücklegen mußten, um diese Wahrheit zu erkämpfen.

E. Iljenkow

Dem 100. Geburtstag des Gelehrten Albert Einstein wurde am 20. 2. 1979 dieser Block mit dem Porträt Einsteins und der bildlichen Bezugnahme auf sein Wirkungsbereich in Potsdam – dem Einsteinturm – gewidmet.



Aus dem Hauptreferat auf dem VIII. Pädagogischen Kongreß:

- Mit der Schaffung gleicher Bildungschancen in der DDR ist nicht mehr nur für eine Elite, sondern für alle der Weg geebnet zur Entfaltung aller Begabungen und Talente, sind alle Bildungswege für jeden geöffnet.
- Die Jugend muß vor allem lernen, daß es nur vorwärts gehen kann, wenn man selbst etwas tut, vor allem müssen wir sie befähigen, Probleme selbst zu lösen, Schwierigkeiten selbst zu überwinden.
- Auf allen Gebieten der außerunterrichtlichen Arbeit geht es nicht nur darum, Bedürfnisse zu befriedigen, sondern anspruchsvolle Bedürfnisse zu wecken und auszuprägen.
- Die Schüler sollen basteln und knobeln können, forschen und konstruieren lernen, denn gerade dies fördert Liebe zur Wissenschaft, Interesse für Technik, das Bedürfnis nach schöpferischer Tätigkeit.

Aus dem Diskussionsbeitrag des Vizepräsidenten der Akademie der Wissenschaften der DDR, Prof. Dr. Heinrich Scheel:

- Fundierte Allgemeinbildung also! Mein Anliegen fordert, daß ich die Betonung auf das Attribut lege: Fundierte Allgemeinbildung – das heißt eine Allgemeinbildung, die auf einem soliden, dauerhaften Wissen aufbaut, ein Wissen um Fakten und Sachverhalte, die einfach und schlicht gelernt werden müssen, um zu wahrhaft begründeten theoretischen Verallgemeinerungen und wissenschaftlichen Gesetzen gelangen zu können.
- Solides dauerhaftes Wissen ist undenkbar ohne andauernden Fleiß. Die Erziehung zum andauernden Fleiß ist von fundamentaler Bedeutung für jeden und für den, der einmal wissenschaftlich tätig sein will, insbesondere Fleiß sichert solides, dauerhaftes Wissen, aber darin erschöpft sich nicht seine Bedeutung. Ausdauernder Fleiß kann auch schon allein durch seine Quantität in Qualität umschlagen und zu überaus wertvollen Leistungen führen, die den Weltstand mitbestimmen.
- Wer in der Wissenschaft etwas leisten will, muß schon schwitzen können.

Lösungen

Hartes Training für Junge Mathematiker Olympiadeaufgaben aus Freundesland, Heft 1/79, S. 45:

▲6▲ Ohne Benutzung eines Tafelwerks ist die folgende Summe zu berechnen:

$$s=\tan^6\frac{\pi}{18}+\tan^6\frac{5\pi}{18}+\tan^6\frac{7\pi}{18}.$$

Lösung: Die Werte $z_1=\tan^2\frac{\pi}{18}$, $z_2=\tan^2\frac{5\pi}{18}$,

$$z_3=\tan^2\frac{7\pi}{18} \qquad (1)$$

mit $0<z_1<z_2<z_3$ lassen sich zwar – ohne Benutzung eines Tafelwerks – nicht unmittelbar angeben, es gilt aber

$$\tan^2 3\cdot\frac{\pi}{18}=\tan^2\frac{\pi}{6}=\frac{1}{3}, \qquad (2)$$

$$\tan^2 3\cdot\frac{5\pi}{18}=\tan^2\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{3}, \qquad (3)$$

$$\tan^2 3\cdot\frac{7\pi}{18}=\tan^2\frac{7\pi}{6}=\frac{1}{3}. \qquad (4)$$

Andererseits gilt (vgl. die Lösung zu Aufgabe 5) für alle reellen x mit $\tan^2 x\neq\frac{1}{3}$

$$\tan 3x=\frac{\tan x(3-\tan^2 x)}{1-3\tan^2 x},$$

$$\frac{\tan^2 x(3-\tan^2 x)^2}{(1-3\tan^2 x)^2}=\tan^2 3x. \qquad (5)$$

Ist nun – wie in (2), (3) und (4) – $\tan^2 3x=\frac{1}{3}$ und setzt man $\tan^2 x=z$, so folgt aus (5)

$$\frac{z(3-z)^2}{(1-3z)^2}=\frac{1}{3},$$

$$z(9-6z+z^2)=\frac{1}{3}(1-6z+9z^2),$$

$$z^3-9z^2+11z-\frac{1}{3}=0. \qquad (6)$$

Diese kubische Gleichung hat genau die drei Wurzeln

$$z_1=\tan^2\frac{\pi}{18},\ z_2=\tan^2\frac{5\pi}{18},\ z_3=\tan^2\frac{7\pi}{18}; \qquad (7)$$

denn sie hat einerseits höchstens drei reelle Wurzeln, andererseits ist sie wegen (2), (3), (4) und (5) für z_1, z_2 und z_3 mit $z_1<z_2<t_3$ erfüllt.

Daher gilt nach dem Vietaschen Wurzelsatz

$$z_1+z_2+z_3=9, \qquad (8)$$

$$z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3=11, \qquad (9)$$

$$z_1z_2z_3=\frac{1}{3}. \qquad (10)$$

Ferner gilt

$$(z_1+z_2+z_3)^3=z_1^3+z_2^3+z_3^3+3(z_1+z_2+z_3)(z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3)-3z_1z_2z_3,$$

$$z_1^3+z_2^3+z_3^3=(z_1+z_2+z_3)[(z_1+z_2+z_3)^2-3(z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3)]+3z_1z_2z_3.$$

Daraus folgt wegen (8), (9) und (10)

$$s=\tan^6\frac{\pi}{18}+\tan^6\frac{5\pi}{18}+\tan^6\frac{7\pi}{18}$$

$$=z_1^3+z_2^3+z_3^3=9[9^2-3\cdot 11]+3\cdot\frac{1}{3}$$

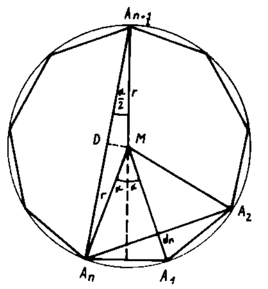
$$=9\cdot 48+1=433.$$

▲7▲ Es sind alle regelmäßigen n-Ecke ($n\geqq 4$) anzugeben, die die folgende Eigenschaft besitzen:

Die Differenz der Länge der größten Diagonale und der Länge der kleinsten Diagonale ist gleich der Länge der Seite des regelmäßigen n-Ecks.

Lösung: a) Es sei n eine ungerade natürliche Zahl, also $n\geqq 5$. Ferner seien $A_1A_2\ldots A_n$ ein regelmäßiges n-Eck, M der Mittelpunkt des Umkreises dieses n-Ecks und $2\alpha=\frac{360°}{n}$ die Größe des zu der Seite $\overline{A_nA_1}$ gehörenden Zentriwinkels; es gilt also

$$\alpha=\frac{180°}{n} \text{ (siehe Bild).}$$



Bezeichnet man mit
r den Radius des Umkreises,
s_n die Länge der Seite $\overline{A_nA_1}$,
d_n die Länge der kleinsten Diagonale $\overline{A_nA_2}$,
D_n die Länge der größten Diagonale $\overline{A_{\frac{n+1}{2}}A_n}$,
so gilt

$$\sin\alpha=\frac{s_n}{2r},\ s_n=2r\sin\alpha,$$

$$\sin 2\alpha=\frac{d_n}{2r},\ d_n=2r\sin 2\alpha,$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{D_n}{2r},\ D_n=2r\cos\frac{\alpha}{2},$$

Nach Voraussetzung soll gelten

$$D_n-d_n=s_n,$$

also $s_n+d_n=D_n$.

Daraus folgt

$$2r\sin\alpha+2r\sin 2\alpha=2r\cos\frac{\alpha}{2}$$

und daher wegen $r\neq 0$

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha=\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Wegen $\sin\alpha+\sin\beta$

$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ folgt hieraus

$$2\sin\frac{3}{2}\alpha\cos\frac{\alpha}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Wegen $0<\alpha<45°$, also $\cos\frac{\alpha}{2}\neq 0$, gilt daher

$$\sin\frac{3}{2}\alpha=\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\alpha=30°,\ \alpha=20°.$$

Aus $\alpha=20°=\frac{180°}{n}$ folgt $n=9$.

Ist also n ungerade, so sind die Bedingungen der Aufgabe nur für das regelmäßige 9-Eck erfüllt.

b) Es sei n eine gerade natürliche Zahl, also $n\geqq 4$. Dann ist die Länge der längsten Diagonale gleich dem Durchmesser des Umkreises, also $D_n=2r$.

Ferner gilt wie unter a)

$$s_n=2r\sin\alpha,\ d_n=2r\sin 2\alpha,$$

$$\alpha=\frac{180°}{n},$$

also $2r\sin\alpha+2r\sin 2\alpha=2r$,

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha=1.$$

Nun ist für $n=4$, 6 und 8, d.h. $\alpha=45°$, 30°, 22,5°

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha>1.$$

Für $n\geqq 10$ ist $\alpha\leqq 18°$, also

$$\sin\alpha<0{,}31,\ \sin 2\alpha<0{,}59,$$

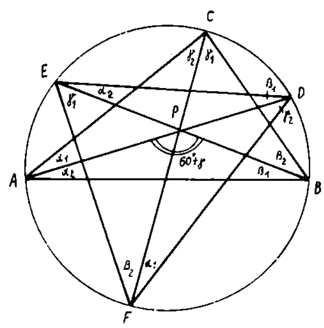
$$\sin\alpha+\sin 2\alpha<0{,}9<1.$$

Für gerade n sind daher die Bedingungen der Aufgabe in keinem Falle erfüllt.

c) Es gibt also nur ein regelmäßiges n-Eck, für das die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind, nämlich das regelmäßige 9-Eck.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 6/78:

Ma 7 ■1807 Es seien $\sphericalangle CAP=\alpha_1$, $\sphericalangle BAP=\alpha_2$, $\sphericalangle ABP=\beta_1$, $\sphericalangle CBP=\beta_2$, $\sphericalangle BCP=\gamma_1$, $\sphericalangle ACP=\gamma_2$. Als Peripheriewinkel über derselben Sehne sind jeweils folgende Winkel kongruent: $\sphericalangle CAD=\sphericalangle CFD=\alpha_1$, $\sphericalangle BAD=\sphericalangle BED=\alpha_2$,
$\sphericalangle ABE=\sphericalangle ADE=\beta_1$, $\sphericalangle CBE=\sphericalangle CFE=\beta_2$,
$\sphericalangle BCF=\sphericalangle BEF=\gamma_1$,



Für das Dreieck ABP gilt ferner
$\alpha_2+\beta_1+(60°+\gamma)=180°$ bzw. $\alpha_2+\beta_1+\gamma=120°$.

Für das Dreieck CAP gilt weiterhin
$\alpha_1+\gamma_2+(60°+\beta)=180°$ bzw.
$\alpha_1+\gamma_2+\beta=120°$.

Durch Addition dieser Gleichungen erhalten wir
$(\alpha_1+\alpha_2)+\beta+\gamma+(\beta_1+\gamma_2)=240°$ und wegen $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$ durch Einsetzen
$\alpha+\beta+\gamma+(\beta_1+\gamma_2)=240°$, also
$\beta_1+\gamma_2=60°$ bzw. $\sphericalangle EDF=60°$.
Analog dazu gilt $\sphericalangle EFD=\sphericalangle DEF=60°$.

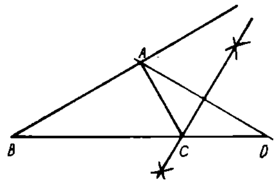
Ma 8 ■1808 Es sei a eine beliebige natürliche Zahl, dann ist $a+1$ ihr Nachfolger und $2\cdot a\cdot(a+1)$ das in der Aufgabenstellung geforderte doppelte Produkt.

Für die in der Aufgabe angegebene Summe gilt: $a^2+(a+1)^2$. Soll das Produkt um 1 kleiner sein als die Summe, so muß gelten:
$2a(a+1)+1=a^2+(a+1)^2$.

Die äquivalente Umformung dieser Gleichung ergibt
$2a^2+2a+1=a^2+a^2+2a+1.$
Da diese Aussageform allgemeingültig ist, gilt die Behauptung für alle natürlichen Zahlen, w. z. b. w.

Ma 8 ▪1809 Die beiden Zahlen seien mit a bzw. b bezeichnet, und es gelte ohne Einschränkung der Allgemeinheit $a>b$.
Dann gilt nach Aufgabenstellung
(1) $\sqrt{ab}=b+4$ und
(2) $\frac{a+b}{2}=a-6.$
Aus (2) folgt $a+b=2a-12$ bzw. $b=a-12$.
Setzt man das in (1) ein, so erhält man
$$\sqrt{a(a-12)}=a-12+4,$$
$$a^2-12a=(a-8)^2,$$
$$a^2-12a=a^2-16a+64,$$
$$a=16.$$
Durch Einsetzen ergibt sich $b=4$.
Die Probe zeigt, daß die Zahlen 16 und 4 den Bedingungen der Aufgabe genügen.

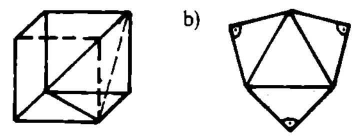
Ma 8 ▪1810 Man zeichnet zunächst eine Strecke $\overline{BD}$ mit der Länge $a+b=7$ cm. Dann trägt man in B an $\overline{BD}$ den Winkel mit der Größe $\beta=30°$ an. Um B zeichnet man jetzt einen Kreis mit einem Radius der Länge $r=c=4$ cm, der den freien Schenkel des angetragenen Winkels in A schneidet.



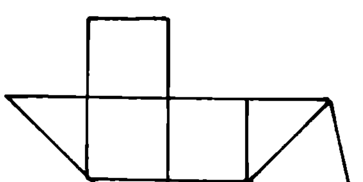
Die Mittelsenkrechte von $\overline{AD}$ schneidet $\overline{BD}$ in C. Man verbindet A mit C.
Da C auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AD}$ liegt, gilt $\overline{AC}\cong\overline{CD}$. Da die Summe der Längen von $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ 7 cm beträgt, gilt auch für die Summe der Längen von $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ 7 cm!

Ma 8 ▪1811

a) b)



c) Tetraeder (gerade; unregelmäßig)

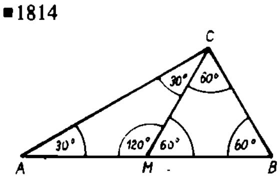


Ma 9 ▪1812 Jeder Term der Form a^k-1 läßt sich zerlegen in $(a^{\frac{k}{2}}+1)(a^{\frac{k}{2}}-1)$. Wir zerlegen $3^{8192}-1$ wie folgt:
$3^{8192}-1=(3^{4096}+1)(3^{4096}-1)$. Damit ist bereits gezeigt, daß die Zahl z keine Primzahl ist.

Wir zerlegen nun den zweiten Faktor analog und verfahren so weiter:
$$3^{8192}-1=(3^{4096}+1)(3^{2048}+1)(3^{2048}-1)$$
$$=(3^{4096}+1)(3^{2048}+1)\ldots$$
$$\cdot(3^4+1)(3^2+1)(3^1+1)(3^1-1).$$
Wie man jetzt erkennt, sind z. B. 2; 4; 5; 10 und 82 Teiler von z.
Hinweis: Der Term $3^{8192}-1$ hat die Form $a^{2n}-1$ mit nN. Das läßt sich umformen zu $(a^n)^2-1$ bzw. $(a^n+1)(a^n-1)$. Diese Zerlegung liefert das gleiche Ergebnis.

Ma 9 ▪1813 Angenommen, zur Familie gehören n Kinder, dann ist das Jüngste n Jahre alt. Die folgenden Kinder sind stets zwei Jahre älter, also $n+2$, $n+4$ usw. Jahre alt. Nach Aufgabenstellung gilt:
$$n+(n+2)+(n+2\cdot 2)+(n+3\cdot 2)$$
$$+\ldots+[n+(n-1)\cdot 2]=9n.$$
Nach der Summenformel für arithmetische Folgen erster Ordnung gilt dann weiter:
$$\frac{n}{2}(n+n+(n-1)\cdot 2)=9n.$$
Weitere Umformungen ergeben
$$\frac{n}{2}(4n-2)=9n$$
$$n(4n-2)=18n$$
$$4n-2=18$$
$$4n=20$$
$$n=5$$
Das Jüngste Kind ist 5 Jahre alt; folglich gehören nach Aufgabenstellung 5 Kinder zur Familie. Die anderen Kinder sind 7, 9, 11 bzw. 13 Jahre alt.
Es gilt $5+7+9+11+13=5\cdot 9$.

Ma 9 ▪1814



Nach Voraussetzung gilt $\overline{AM}=\overline{BM}=\overline{CM}=3$ cm. Wegen $\overline{AM}=\overline{CM}$ gilt $\sphericalangle CAM=\sphericalangle ACM=30°$. Folglich gilt $\sphericalangle AMC=180°-2\cdot 30°=120°$ und $\sphericalangle BMC=60°$ als Nebenwinkel.
Wegen $\overline{BM}=\overline{CM}$ gilt $\sphericalangle MBC=\sphericalangle MCB=\frac{1}{2}(180°-60°)=60°$. Das Dreieck MBC ist somit gleichseitig.
Folglich gilt $\overline{BC}=3$ cm und $\sphericalangle ACB=90°$.
Nach dem Satz des Pythagoras gilt im rechtwinkligen Dreieck ABC
$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2-\overline{BC}^2$$
$$\overline{AC}^2=27\text{ cm}^2$$
$$\overline{AC}=\sqrt{27}\text{ cm}$$
$$\overline{AC}=5{,}2\text{ cm}.$$
Die Seite $\overline{AC}$ des Dreiecks ABC ist etwa 5,2 cm lang.

Ma 9 ▪1815 Es seien a und b die Längen der Grundkanten und h die Länge der Höhe der Pyramide.
Aus $a+b=66$ folgt $b=66-a$.
Für das Volumen der Pyramide gilt somit
$$V=\frac{1}{3}abh=\frac{1}{3}\cdot a(66-a)\cdot 6=1978.$$
Daraus folgt $a(66-a)=989$.
Diese quadratische Gleichung hat die Lösung 43 und 23. Durch Einsetzen erhalten wir $b=23$ bzw. $b=43$. Die Grundkanten dieser Pyramide sind 43 cm bzw. 23 cm lang.

Ma 10/12 ▪1816 Die zweistellige Zahl sei $10a+b$ mit $a,b\in N$ und $1\leq a\leq 9$ und $0\leq b\leq 9$. Dann läßt sich die der Aufgabenstellung entsprechende sechsstellige Zahl wie folgt darstellen:
$10^5a+10^4b+10^3a+10^2b+10a+b.$
Nach Vereinfachen erhält man
$$a(10^5+10^3+10)+b(10^4+10^2+1)$$
$$=101010a+10101b$$
$$=10101(10a+b)$$
$$=273\cdot 37(10a+b).$$
Da $37(10a+b)$ eine natürliche Zahl ist, gilt die Behauptung!

Ma 10/12 ▪1817 Die Logarithmusfunktion ist nur für positive reelle Zahlen definiert.
Daraus folgt
$91-x^3>0$ und $7-x>0$,
d. h. $x<7$ und $x<\sqrt[3]{91}$, d. h.
$x<\sqrt[3]{91}$. ($\sqrt[3]{91}\cong 4{,}498$)
Man formt die Gleichung wie folgt äquivalent um:
$$\frac{\lg(91-x^3)}{\lg(7-x)}=3$$
$$\lg(91-x^3)=3\lg(7-x)$$
$$\lg(91-x^3)=\lg(7-x)^3$$
$$91-x^3=(7-x)^3$$
$$91-x^3=343-147x+21x^2-x^3$$
$$21x^2-147x+252=0$$
$$x^2-7x+12=0$$
$$x_{1,2}=3{,}5\pm\sqrt{0{,}25}$$
$$x_1=4$$
$$x_2=3$$
Es gibt genau zwei reelle Zahlen x, die die Gleichung erfüllen! Es sind die Zahlen 3 und 4.

Ma 10/12 ▪1818 Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion. Für $n=1$ ist die Ungleichung (1) erfüllt, denn es gilt
$$\frac{1}{\sqrt{1}}\leq 2\sqrt{1}-1=1.$$
Angenommen, die Ungleichung (1) sei für $n=k$ mit $k=1$ erfüllt. Dann gilt
(2) $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}\leq 2\sqrt{k}-1.$
Daraus folgt
(3) $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$
$\leq 2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}-1$
Es soll nun bewiesen werden, daß
(4) $2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}.$
(4) ist erfüllt, wenn
(5) $2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})>\frac{1}{\sqrt{k+1}},$
d. h. $k+1-\sqrt{k(k+1)}>\frac{1}{2}$, d. h.
(6) $\sqrt{k(k+1)}<k+\frac{1}{2}.$

Nun ist die Ungleichung (6) erfüllt, wenn

$$k(k+1)<\left(k+\frac{1}{2}\right)^2, \text{ d. h.}$$

(7) $\quad k^2+k<k^2+k+\frac{1}{4}.$

Die Ungleichung (7) ist für alle natürlichen Zahlen k erfüllt, also auch die Ungleichungen (6), (5) und (4), womit (4) bewiesen ist. Aus (3) und (4) folgt daher

(8) $\quad \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$
$\quad <2\sqrt{k+1}-1$

d. h., wenn die Ungleichung (1) für $n=k$ erfüllt ist, so auch für $n=k+1$. Da sie, wie oben gezeigt wurde, auch für $n=1$ gilt, ist sie also für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geqq 1$ erfüllt, w. z. b. w.

Ma 10/12 ■1819 Es seien c die Länge der Hypotenuse, a und b die Längen der Katheten des rechtwinkligen Dreiecks ABC.
Für den Umfang des Dreiecks ABC gilt

(1) $\quad a+b+c=30\text{ cm};$

für den Flächeninhalt gilt

(2) $\quad \frac{a \cdot b}{2}=30\text{ cm}^2$ bzw. $a \cdot b=60\text{ cm}^2.$

Außerdem gilt nach dem Satz des Pythagoras

(3) $\quad c^2=a^2+b^2.$

Aus (2) folgt $a=\frac{60}{b}$.

Setzt man das in (1) ein, so erhält man

(4) $\quad \frac{60}{b}+b+c=30.$

Daraus folgt $c=30-\frac{60}{b}-b$ bzw.

(5) $\quad c^2=\left(30-\frac{60}{b}-b\right)^2$ bzw.

$$c^2=900-\frac{1800}{b}-30b-\frac{1800}{b}+\frac{3600}{b^2}+60-30b+60+b^2.$$

Setzt man das in (3) ein, so ergibt sich nach Vereinfachung

(6) $\quad 1020-\frac{3600}{b}-60b=0$

bzw. $b^2-17b+60=0.$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $b_1=12$ und $b_2=5$. Durch Einsetzen ergeben sich $a_1=5$ bzw. $a_2=12$ und $c_1=c_2=13$. Die Hypotenuse dieses Dreiecks ist 13 cm lang, die Katheten sind 12 cm bzw. 5 cm lang. Wie die Probe zeigt, erfüllen diese Größen die Bedingungen der Aufgabe.

Ph 6 ■46 Geg.:
Schrittlänge $l=65\text{ cm}=0{,}65\text{ m}$
$=0{,}00065\text{ km}$

Zeit $\quad t=1\text{ min}=\frac{1}{60}\text{ h}$

Anzahl der Schritte $n=80$

Ges.: Wandergeschwindigkeit v in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$

Die Wandergeschwindigkeit errechnet man nach der Formel

$$v=\frac{s}{t},$$

wobei $s=n \cdot l$, also $s=80 \cdot 65\text{ cm}$

$$v=\frac{80 \cdot 0{,}00065\text{ km}}{\frac{1}{60}\text{ h}}$$

$$v=3{,}12\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Peters Wandergeschwindigkeit beträgt $3{,}12\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Ph 7 ■47 Geg.:
$h_1=h_2=\ldots=h_9=6{,}5\text{ cm}=0{,}065\text{ m}$
$G_1=G_2=\ldots=G_9=7\text{ kp}$
Ges.: Hubarbeit W in kp

Es müssen 18 Stück = 9 Paar Steine auf verschiedene Höhen gehoben werden, dabei wiegt 1 Paar 7 kp. Nur bei dem 1. Paar, das auf dem Boden liegt, ist keine Hubarbeit notwendig. Es gilt also:

1. Paar $\quad 0\text{ kpm}$
2. Paar $\quad W_1=G_1 \cdot h_1$
$\quad W_1=7\text{ kp} \cdot 1 \cdot 0{,}065\text{ m}$
3. Paar $\quad W_2=G_2 \cdot h_2$
$\quad W_2=7\text{ kp} \cdot 2 \cdot 0{,}065\text{ m}$

. . .

10. Paar $\quad W_9=G_9 \cdot h_9$
$\quad W_9=7\text{ kp} \cdot 9 \cdot 0{,}065\text{ m}$

Die gesamte Hubarbeit W ist dann

$W=0+7 \cdot 1 \cdot 0{,}065+7 \cdot 2 \cdot 0{,}065$
$\quad +\ldots+7 \cdot 9 \cdot 0{,}065\text{ kpm}$
$W=7 \cdot 0{,}065(1+2+\ldots+9)\text{ kpm}$
$W=7 \cdot 0{,}065 \cdot 45\text{ kpm}$
$W=20{,}475\text{ kpm} \approx 20\text{ kpm}$

Jens muß insgesamt eine Hubarbeit von rund 20 kpm verrichten.

Ph 8 ■48 Geg.:
$a=6\text{ m}, b=8{,}5\text{ m}, c=3{,}5\text{ m}$
$T_1=288\,°\text{K}, T_2=298\,°\text{K}$
$p_1=p_2=770\text{ Torr}$
Ges.: Volumen V der ausströmenden Luft

Das Volumen V der ausströmenden Luft ergibt sich aus der Differenz des Luftvolumens V_2 bei 25 °C und V_1 bei 15 °C. Es ist

$V_1=abc$
$V_1=6\text{ m} \cdot 8{,}5\text{ m} \cdot 3{,}5\text{ m}$
$V_1=178{,}5\text{ m}^3$

V_2 erhält man aus der Zustandsgleichung der Gase

$$\frac{V_1 \cdot p_1}{T_1}=\frac{V_2 \cdot p_2}{T_2}$$

$$V_2=\frac{V_1 \cdot p_1 \cdot T_2}{T_1 \cdot p_2}$$

$$V_2=\frac{178{,}5\text{ m}^3 \cdot 770\text{ Torr} \cdot 298\,°\text{K}}{288\,°\text{K} \cdot 770\text{ Torr}}$$

$$V_2 \approx 184{,}7\text{ m}^3$$

Nun ist $V=V_2-V_1$, also $V=184{,}7\text{ m}^3-178\text{ m}^3=6{,}2\text{ m}^3$.
Aus dem Zimmer strömen 6,2 m³ Luft.

Ph 9 ■ ■49 Geg.: $\mu_1=0{,}16$
$\mu_2=0{,}10$
$m=35\text{ t}$
$v=6\frac{\text{m}}{\text{s}}$
$g=9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
Ges.: Bremsweg s

Den Bremsweg findet man nach der Formel für die gleichmäßig verzögerte Bewegung:

$$s=\frac{a}{2} \cdot t^2 \text{ mit } v=at \text{ und } t=\frac{v}{a}.$$

$$s=\frac{v^2}{2a} \qquad (1)$$

Wenn F_b die Reibungskraft ist, gilt $F_b=ma$ bzw. $a=\frac{F_b}{m}$. In (1) eingesetzt, ist dann

$$s=\frac{v^2 \cdot m}{2 \cdot F_b}. \qquad (2)$$

Gemäß Aufgabe wird jede Achse mit der Kraft $\frac{F_g}{2}$ belastet. Damit drückt jedes Rad mit einer Kraft $\frac{F_g}{4}$ auf die Schiene. Die Bremskräfte sind also:

- beim Hemmschuh $F_{b_1}=\mu_1 \cdot \frac{F_g}{4}$,
- beim anderen, blockierten Rad $F_{b_2}=\mu_2 \cdot \frac{F_g}{4}$.

Insgesamt ist dann

$F_b=F_{b_1}+F_{b_2}=\frac{F_g}{4}(\mu_1+\mu_2)$. In (2) eingesetzt ist dann

$$s=\frac{v^2 \cdot m \cdot 4}{2 \cdot F_g(\mu_1+\mu_2)},$$

und da $F_g=m \cdot g$ gilt, ist

$$s=\frac{v^2 \cdot m \cdot 4}{2 \cdot mg(\mu_1+\mu_2)}$$

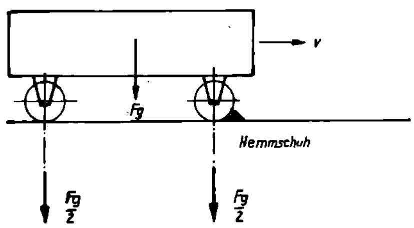
$$s=\frac{v^2 \cdot 2}{g(\mu_1+\mu_2)}$$

(Beachten Sie: Die Masse kürzt sich aus der Gleichung heraus!)

$$s=\frac{6\text{ m}^2 \cdot 2 \cdot s^2}{s^2 \cdot 9{,}81\text{ m}(0{,}16+0{,}10)}$$

$$s \approx 28{,}2\text{ m}.$$

Der Abbremsweg beträgt rund 28 Meter.



Ph 10/12 ■50 Geg.: $R_r=10\text{ Ohm}$
$R_p=1{,}6\text{ Ohm}$
Ges.: R_1, R_2

Für die Reihen- bzw. Parallelschaltung zweier Widerstände gelten die Beziehungen

$$R_r=R_1+R_2 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{R_p}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) erhält man eine quadratische Gleichung in R_1:

$$R_{1(I,II)}=\frac{R_r}{2} \pm \sqrt{\frac{R_r^2-4R_rR_p}{4}}$$

$$=\frac{10}{2} \pm \sqrt{\frac{100-4 \cdot 10 \cdot 1{,}6}{4}}$$

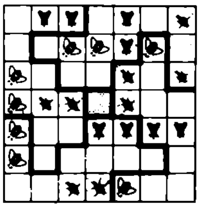
$$=5 \pm 3$$

$R_{1_I}=8$
$R_{1_{II}}=2$

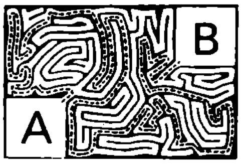
Dies in (2) eingesetzt, ergibt $R_2=2$ Ohm bzw. 8 Ohm. Die gesuchten Widerstände betragen 8 bzw. 2 Ohm.

Lösungen zu: Mit Troll auf Du und Du,
Seite IV/V

Augenmaß



Irrgarten



Mühleaufgabe

1. 20 – 14 bel. – 6,
2. 21 – 15 bel. – 13,
3. 14 – 3 bel. – 24,
4. 15 – 1 bel.,
5. Mühle

Unauffällig
Der Herr mit Hut und Brille

In Ruhe betrachtet

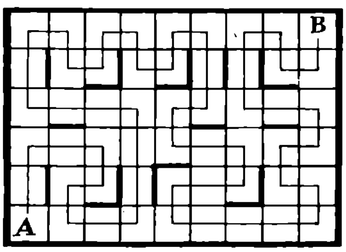
$$\begin{array}{r} 123 + 504 = 627 \\ - \quad : \quad + \\ 110 - \;\;9 = 101 \\ \hline 13 \cdot \;\;56 = 728 \end{array}$$

Augen auf!
1–10, 3–8, 2–5, 7–12, 4–9, 6–11

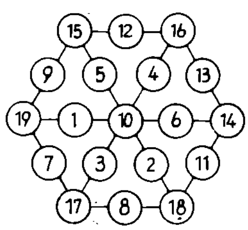
Einsatz

12		13		3
	6	16	14	
10	7	9	11	8
	4	2	17	
15		5		1

Mit Lust und Liebe



Sachverstand



Wandert, Freunde!
$1+4+8+11+2+20+17+21+7+12+15 = 118.$

Endspurt
Sieger ist Pferd Nummer 4.

Zum „ewigen Kalender“

„Ewige Kalender“, besser Mehrjahrkalender, sind Formeln, Tabellen oder Spezialrechenschieber, mit denen man zu jedem Datum den dazugehörigen Wochentag ermitteln kann. Sie gelten nur so lange, wie der dazugehörige Kalender Geltung hat.
Die „Kleine naturwissenschaftliche Bibliothek“ (BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft) brachte einen Band „Ewige Kalender“ von Butkewitsch und Selikson, der neben vielen, verschiedenen langjährigen Kalendern viel Wissenswertes über Kalender enthält. Es fehlt aber die Ableitung der Kalenderformel, die es erst möglich macht, Tabellen zu berechnen und Rechenschieber zu entwerfen.
Die Ableitung der Formeln für den julianischen und den gregorianischen Kalender soll hier gezeigt werden.

Lösungen zu: Unmöglichkeitsbeweise, S. 59

▲1▲ Wenn A mit B einen Händedruck wechselt, so auch B mit A. Folglich ist die Gesamtzahl der Händedrücke stets gerade, aber $5 \cdot 7 = 35$.

▲2▲ $2^n \equiv 1, 2, 4$ modulo 7, also $2^n + 1 \not\equiv 0$ modulo 7.

▲3▲ Es gibt 4 weiße und 5 schwarze Felder (oder umgekehrt). Ein zu einem weißen Feld benachbartes ist schwarz und umgekehrt, also keine Aufstellung möglich.

▲4▲ Wenn $\frac{21n+4}{14n+3} = 1 + \left(1 + \frac{7n+1}{4n+3}\right)$ kürzbar ist, so auch $\frac{14n+3}{7n+1} = 2 + \frac{1}{7n+1}$, was wegen $\frac{1}{7n+1}$ unkürzbar auf einen Widerspruch führt.

▲5▲ Die fehlenden Felder haben gleiche Farbe. Die 31 Dominosteine benötigen aber je 31 weiße und schwarze Felder.

▲6▲ Die Zuleitung vom Gas- und Wasserwerk ist bei beliebiger Werkslage möglich. Die Zuleitungen begrenzen zwei Gebiete in der Ebene. Gleichgültig, ob das E-Werk innerhalb eines Gebietes oder außerhalb beider liegt, stets muß eine Leitung eine Berandung kreuzen.

▲7▲ Da mehr als zwei ungerade Knoten, mehr als ein Weg nötig.

Für die Geltungsdauer der Kalender muß man einige geschichtliche Tatsachen wissen. Kalender wurden im Altertum von der Priesterschaft errechnet, die die Gelehrten stellte und viel Macht und Ansehen besaß. Der oberste Priester war für die Einführung eines neuen Kalenders verantwortlich.
Julius Caesar lebte von 102 bis 44 v. u. Z., war ein begabter römischer Feldherr, Staatsmann und Priester des höchsten röm. Gottes Jupiter und wurde schließlich Diktator. Als er die Regierung antrat, fand er einen verwilderten Kalender vor. Um das große Römische Reich zu regieren, brauchte er einen geordneten, einheitlichen Kalender. Im Jahre 46 v. u. Z. war er „Pontifex Maximus“, also oberster Priester, und führte nach Berechnungen des Ägypters Sosigenes und des Römers Scriba M. Flavius einen neuen Kalender ein. In diesem Kalender, der nach ihm genannt ist, hat das Jahr 365,25 Tage, eine Verbesserung gegenüber dem ägyptischen Kalender, in dem das Jahr 365 Tage hatte. Er galt von seiner Einführung an bis 1582 in Italien. In Rußland war er sogar bis zur Großen Sozialistischen Oktoberrevolution gültig. Auf dem Konzil (einer Versammlung von katholischen geistlichen Würdenträgern zur Regelung gesamtkirchlicher Anliegen) von Nicaea, 325 v. u. Z., wurde er für die Christenheit verbindlich. Im Jahre 525 führte der römische Abt Dionysius Exiguus die Zeitrechnung „nach Christi Geburt“ ein. Bis dahin waren die Jahre „von der Gründung der Stadt Rom an“, „ab urbe condita = a. u. c.“ gezählt worden.
Wie Dionysius den Zeitpunkt von Christi Geburt bestimmt haben will, ist nicht bekannt. Auch weiß man nicht, ob er diesen Geburtstag auf den 25. Dezember im Jahre 1 vor oder u. Z. festlegte. Ein Jahr 0 führte er nicht ein.
Am 15. 10. 1582 führte Papst Gregor VIII. den nach ihm benannten „gregorianischen“ Kalender ein. Die Notwendigkeit einer Kalenderreform ergab sich daraus, daß das julianische Jahr um 0,0078 Tage zu lang war und sich diese Differenz über einen großen Zeitraum hinweg bemerkbar machte. Auf dem Konzil von Nicaea war die Frühlingstag- und -nachtgleiche auf den 21. März gefallen; dies sollte nun in allen folgenden Jahren so bleiben und das Jahr von einer Frühlingstag- und -nachtgleiche bis zur nächsten dauern. In den 1257 Jahren von 325 bis 1582 war die Frühlingstag- und -nachtgleiche um fast 10 Tage auf den 11. März gewandert. So ließ Papst Gregor VIII. auf Donnerstag den 4. 10. 1582 julianischer Rechnung Freitag, den 15. 10. 1582 gregorianischer Rechnung folgen.
Nun waren durchaus nicht alle Fürsten mit der Neuerung des Papstes einverstanden, obwohl sein Kalender genauer war. Erst 1700 war in ganz Deutschland der neue Kalender eingeführt. In Europa, bis auf die Länder der Ostkirche, wurde 1750 allgemein nach dem

gregorianischen Kalender gerechnet. Allerdings galt in Frankreich vom 24. 11. 1793 bis 1. 1. 1806 ein Revolutionskalender. 1940 wurde der gregorianische Kalender in der Sowjetunion eingeführt.

Auf die Zeiten der Gültigkeit der verschiedenen Kalender ist bei der Anwendung der „ewigen Kalender" zu achten.

Die Voraussetzungen zur Ableitung der Kalenderformeln sind durch die Struktur der Kalender gegeben. Für beide Kalender gilt

1. die Woche hat 7 Tage, sie fängt mit Montag an;
2. die Monate haben die uns bekannte Anzahl von Tagen;
3. das Gemeinjahr hat 365, das Schaltjahr 366 Tage;

4a. der julianische Kalender setzt ein Jahr von 365,25 mittleren Sonnentagen voraus. Im bürgerlichen Jahr kann man aber nur ganze Tage zählen. Deswegen müssen Schalttage eingeführt werden. Daraus ergibt sich die julianische Schaltregel: Jedes Gemeinjahr hat 365 Tage, jedes Jahr, dessen Jahreszahl ohne Rest durch 4 teilbar ist, ist ein Schaltjahr zu 366 Tagen.

4b. Das gregorianische Jahr hat 365,2422 mittlere Sonnentage. In 10000 Jahren sind also 2422 Schalttage unterzubringen. In 400 Jahren also 96,88 Schalttage, die auf 97 aufgerundet werden. In 400 Jahren werden also 0,12 Tage zu viel gerechnet. Erst in $3333\frac{1}{3}$ Jahren macht dieser Fehler 1 Tag aus. Nach dieser Zeit muß also ein Schalttag eingespart werden. Die 97 Schalttage werden in je 400 Jahren nach der gregorianischen Schaltregel im Kalender untergebracht: Die Gemeinjahre haben 365 Tage. Jedes Jahr, dessen Jahreszahl ohne Rest durch 4 teilbar ist, ist ein Schaltjahr mit 366 Tagen bis auf die Jahre, die ohne Rest durch 100 teilbar sind. Da das aber nur 96 Tage wären, gibt es noch eine zweite Ausnahme. Die Jahre, die ohne Rest durch 400 teilbar sind, sind wieder Schaltjahre.

So sind die Jahre 1800 und 1900 Gemeinjahre, dagegen ist 2000 ein Schaltjahr.

Butkewitsch und Selikson schreien $|a:b|$ für den Rest der Division $a:b$, also $a:b$ zwischen zwei senkrechten Strichen, und $[a:b]$ für das größte Ganze von $a:b$, also $a:b$ in eckigen Klammern. Das brauchen wir bei der Ableitung der Kalenderformeln, bei der wir noch von folgenden Überlegungen ausgehen.

Wir ordnen den Wochentagen, beim Montag beginnend, die Kennzahlen 1, 2, ..., 7 zu und und da $|7:7|=0$, setzen wir für 7 die Zahl 0.

Ist der letzte Wochentag eines Monats bekannt, so können wir zu seiner Kennzahl die Nummer Q des gesuchten Tages des nächsten Monats addieren und von dieser Summe den Rest bei der Division durch 7 bestimmen und bekommen die Kennzahl des gesuchten Wochentages. Zum Beispiel: Der März hört mit Donnerstag auf. Donnerstag hat die Kennzahl 4. Wir suchen den Wochentag des 23. April. Wir addieren $4+23=27$. $|27:7|=6$. Der 23. April ist ein Tag mit der Kennzahl 6, also ein Sonnabend.

Ist uns der letzte Tag des Jahres j–1 bekannt, so können wir alle Wochentage des Jahres j bestimmen. Wir erleichtern uns die Rechnung durch Tabelle 1. Darin ist T die Anzahl der Tage, die am 1. eines Monats verflossen sind; $Km=|T:7|$ die Kennzahlen der Monate, die den letzten Tag des Vormonats angeben. g und s sind die Zeichen für Gemein- und Schaltjahr.

Ist uns die Kennzahl Kj des Jahres j bekannt, so können wir die Summe $Kj+Km+Q$ bilden und bekommen als Rest bei der Division durch 7 die Kennzahl d und damit den Wochentag des gesuchten Datums.

Um Kj auszurechnen, bestimmen wir die Zahl Sj der Tage, die seit Einführung unserer Zeitrechnung bis Ende des Jahres j–1 vergangen sind, aus den Schaltregeln, dazu die Kennzahl x des 31. 12. des Jahres 1 v. u. Z. Dann ist $Kj=|Sj:7|+x$. Ist dieser Wert größer als 6, so müssen wir von diesem Wert noch einmal den Rest bei der Division durch 7 bilden.

Wir fangen mit dem gregorianischen Kalender an. Für diesen gilt

$$Sj=(j-1)\cdot 365+[(j-1):4]-[(j-1):100]+[(j-1):400]$$

und daraus

$$|Sj:7|=|\{(j-1)\cdot 365+[(j-1):4]-[(j-1):100]+[(j-1):400]\}:7|$$

und da $|365:7|=1$ ist, bekommen wir

$$|Sj:7|=|\{(j-1)+[(j-1):4]-[(j-1):100]+[(j-1):400]\}:7|$$

Die Kennzahl K_{1976} ist 3, denn der 31. 12. 1975 war Mittwoch. Wir bekommen die Gleichung

$$|(1975+[1975:4]-[1975:100]+[1975:400]):7|+x=3$$
$$|2453:7|+x=3$$
$$3+x=3$$
$$x=0.$$

Das Jahr 1 unserer Zeitrechnung hat im gregorianischen Kalender die Kennzahl 0. (Es hätte also mit einem Montag angefangen.)

Damit haben wir die Kalenderformel für den gregorianischen Kalender

$$1.\quad d=|\{(j-1)+[(j-1):4]-[(j-1):100]+[(j-1):400]+Km+Q\}:7|.$$

Beispiel: Auf welchen Wochentag fiel der Start des ersten künstlichen Erdtrabanten am 4. 10. 1957?

Wir setzen in die Formel ein und entnehmen Kmg für Oktober aus Tabelle 1 und bekommen

$$d=|(1956+[1956:4]-[1956:100]+[1956:400]+0+4):7|$$
$$=|(1956+489-19+4+4):7|$$
$$=|2434:7|=5$$

$d=5$. Der 4. 10. 1957 war ein Freitag.

Für den julianischen Kalender bekommen wir nach der julianischen Schaltregel

$$Sj=(j-1)\cdot 365+[(j-1):4]$$

und da $|365:7|=1$ ist $d=|(|Sj:7|+Km+Q):7|+x$.

Aus der Geschichte wissen wir, daß der 4. 10. 1582 ein Donnerstag war, also $d=4$, und daraus können wir x errechnen. Da $Km=0$ für Oktober und $Q=4$ ist, bekommen wir

$$|\{|(1581+[1581:4]):7|+0+4\}:7|+x=4$$
$$|\{2+4\}:7|+x=4$$
$$6+x=4$$
$$x=-2.$$

Zu negativen Resten addieren wir den Divisor, um einen positiven Rest zu bekommen. So bekommen wir $x=5$ anstelle von $x=-2$.

Die Kalenderformel für den julianischen Kalender sieht dann so aus

$$2.\quad d=|(j-1+[(j-1):4]+5+Km+Q):7|,$$

da die Summe der Divisionsreste der Summanden dem Divisionsrest der Summe entspricht.

Beispiel: Johannes Kepler wurde am 27. 12. 1571 geboren. Welcher Wochentag war es?

$$d=|(1570+[1570:4]+5+5+27):7|$$
$$d=|1999:7|=4.$$

4 entspricht dem Donnerstag. Johannes Kepler wurde an einem Donnerstag geboren.

Mit Hilfe der Formeln 1.) und 2.) können wir einen Spezialrechenschieber zur Bestimmung der Wochentage aus dem Datum entwickeln. Die Formeln zeigen, daß wir die Kennzahl des Wochentages finden, wenn wir die Kennzahlen des Jahres Kj, die Kennzahl des Monats Km und die Nummer Q des Tages im Monat addieren und von dieser Summe den Rest bei der Division durch 7 bilden.

Mit Hilfe von Skalen mit gleichmäßiger Einteilung kann man auf zwei Arten Additionen ausführen.

Die untere bewegliche Skale b wird gegen die feststehende obere Skale a so bewegt, daß die 0 der Skale b unter dem Summanden auf der Skale a steht. Auf Skale b wird der 2. Summand aufgesucht. Auf Skale a erscheint über diesem die Summe. Unser Beispiel zeigt $3+5=8$. Jede Summe hat ihren eigenen Platz auf Skale a.

Bei Bild 2 sind die Skalen gegenläufig aufgetragen. Zur Addition von $3+5$ stellen wir die Skale b so ein, daß die 3 unter der 5 der Skale

Tabelle 1

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Tg	0	31	59	90	120	151	181	212	243	273	304	334
Ts	0	31	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
Kmg	0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
Kms	0	3	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6

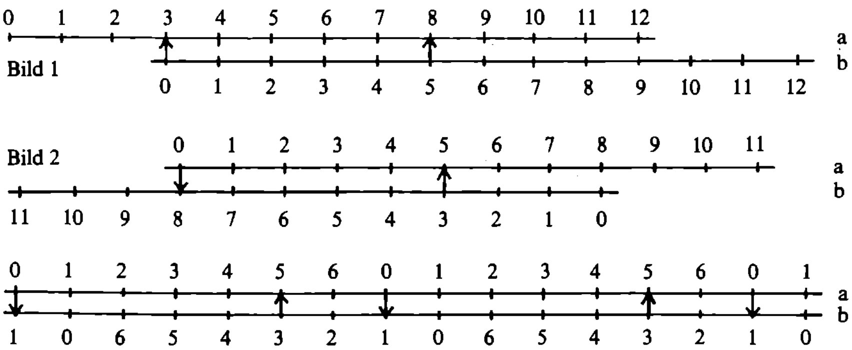


Bild 3

a steht. Die Summe 8 erscheint unter der 0 der festen Skale a. Bei jeder Addition erscheint die Summe an dieser festen Stelle.

Rechnen wir mit den Resten bei der Division durch 7, so erscheinen die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0 periodisch, und wir tragen sie gegenläufig auf die beiden Skalen a und b auf und bekommen Bild 3.

Um die Summe 3 + 5 zu bilden, stellen wir die Skale b so ein, daß die 3 unter die 5 von Skale a kommt. Unter der 0 von Skale a steht das Ergebnis 1. Es ist aber $1 = |8:7|$. Wir bekommen also gleich den Rest der Summe bei der Division durch 7. Dieses Ergebnis erscheint wegen der Periodizität unter jeder 0 der Skale a.

Tabelle 2 zeigt uns alle Zahlen Q, die ein Monat haben kann, in 7 Spalten geordnet. Addiert man zu diesen die Summe Kj + Km und bildet den Rest bei der Division durch 7, so bekommen wir die Kennzahl des entsprechenden Wochentages.

Die Werte für die Monate in einem Gemeinjahr aus Tabelle 1 schreiben wir um und ordnen die Monate unter ihre Kennzahlen ein und bekommen Tabelle 3. Nun können wir unseren Kalender bauen.

Um eine Drehscheibe zeichnen wir einen Kreisring, den wir in 28 gleiche Teile teilen. In diese Kreisringsektoren tragen wir im Gegenzeigersinn, also mathematisch positiv, die Zahlen 0, 1, ..., 6 als Kennzahlen Kj der Jahre und außerdem 3mal die Wochentage von Sonntag bis Samstag ein, die ja auch den Kennzahlen 0, 1, ..., 6 entsprechen.

Auf einem festen Blatt zeichnen wir einen Kreis von der Größe der Drehscheibe. Außerhalb dieses Kreises tragen wir oben und unten in zwei sich gegenüberliegenden Quadranten, die wir je in 7 Spalten unterteilen, die Tabellen 3 oben und 2 unten auf. Die Drehscheibe befestigen wir konzentrisch auf dem festen Blatt. Ist uns die Kennzahl Kj des gegebenen Jahres bekannt, so addieren wir sie zu Km, indem wir Kj auf dem Kreisring durch Drehung unter die Kennzahl Km des gegebenen Monats einstellen. Dann erscheint nach Bild 3 die Summe unter der Spalte 0 (Jan., Okt.) und wegen der Periode 7 auch im 7. Feld mathematisch positiv gezählt, also genau vor der Tabelle 2. In dieser suchen wir die Zahl Q auf, die zu (Kj + Km) nach Bild 1 addiert wird. Darüber erscheint auf dem Kreisring der Drehscheibe der Wochentag. Wir bekommen aber noch mehr. Die Wochentage auf dem Kreisring ergeben in der gefundenen Stellung mit Tabelle 2 zusammen das Kalenderblatt für den gegebenen Monat des gegebenen Jahres.

Um die Kennziffern Kj zur Hand zu haben, ordnen wir in Tabelle 4 die Jahre eines Jahrhunderts, bei 01 beginnend, fortlaufend in ein Schema von 7 Spalten und 18 Zeilen ein. Wir tragen die Schaltjahre 2mal hintereinander ein. Die Kennzahlen Kms der Monate nach dem 29. Februar sind in Tabelle 1 im Schaltjahr also um 1 größer als die entsprechenden Kmg. Bei der Addition von Kj + Km gibt es dasselbe Resultat, ob wir Kj oder Kmg um 1 erhöhen.

In die erste Zeile der Tabelle 4 haben wir die Kennzahlen unseres Jahrhunderts geschrieben, die wir aus Formel 1 errechnen. Die letzten Zahlen in der 18. Zeile der Jahreszahlen sind unter den Kennziffern 5 und 6 je 100. Tabelle 4 tragen wir auf der Drehscheibe ein. Nach Dionysius Exiguus ist das Jahr 2000 das letzte unseres Jahrhunderts.

Ein solcher vom deutschen Mathematiker Goldstein errechneter Kalender war in der 2. Hälfte des vorigen Jahrhunderts im Handel. Er galt für die Jahre 1866 bis 1915. In der Schrift von Butkewitsch/Selikson ist dieser Kalender nicht erwähnt.

Unser Kalender verliert für das Jahr 2001 seine Gültigkeit. Die Tabelle mit den Jahren im Jahrhundert läßt sich weiter verwerten. Man müßte die Kennzahlen für die Jahre 2001 u.ff. ausrechnen und die oberste Zeile ändern. Da die Zahlen in der Periode 1, 2, ..., 6, 0 immer wiederkehren, ersetzen wir die oberste Zeile Kj durch einen Schieber S, der die Periode 1, 2, ..., 6, 0 mehrmals trägt, und können ihn, wenn wir nur die Kennzahlen der Jahre $a \cdot 100 + 1$ ausrechnen, für jedes Jahrhundert u. Z. einstellen. Über 01 müssen wir $K_{a \cdot 100+1}$ einstellen.

Wir errechnen 2 Tabellen 5 und 6 nach den Formeln 1 und 2 für den julianischen und den gregorianischen Kalender. Aus diesen können wir die $K_{a \cdot 100+1}$ entnehmen und den Schieber danach einstellen.

Diese Tabellen tragen wir links und rechts von Tabelle 4 auf der Drehscheibe ein.

Durch den Schieber und die Tabellen bekommen wir einen langjährigen Kalender, der vom Jahre 1 u. Z. bis weit über die Gegenwart hinaus reicht. Aus unserer Konstruktion geht die Gebrauchsanweisung hervor.

1. Beispiel: Der erste Abschnitt der Eisenbahn Leipzig–Dresden von Leipzig bis Althen wurde am 24. April 1837 eingeweiht. Welcher Wochentag war damals?

In Tabelle 6 finden wir $K_{1801} = 3$ und stellen den Schieber S so ein, daß die 3 über 01 steht. In Tabelle 4 suchen wir das Jahr 37 und finden darüber auf dem Schieber 5 die Zahl 6. Die 6 suchen wir auf dem Kreisring der Drehscheibe auf und stellen sie unter April auf Tabelle 3. Auf Tabelle 2 suchen wir den 24. und finden darüber Montag. Also war der 24. April 1837 ein Montag.

2. Beispiel: An welchem Wochentag entdeckte Kolumbus Amerika? Es war der 12. 10. 1492. 1401 hat in Tabelle 5 für den julianischen Kalender die Kennzahl 5. Den Schieber stellen wir so, daß über dem Jahre 01 die Kennzahl 5 steht. 1492 ist durch 4 ohne Rest teilbar, ist also ein Schaltjahr. Für Oktober gilt die zweite 92 auf Tabelle 4. Sie hat die Kennzahl 0 auf dem Schieber. Die 0 auf dem Rand der Drehscheibe stellen wir auf Oktober ein und finden über der 12 in Tabelle 2 für den Wochentag der Entdeckung Amerikas einen Freitag.

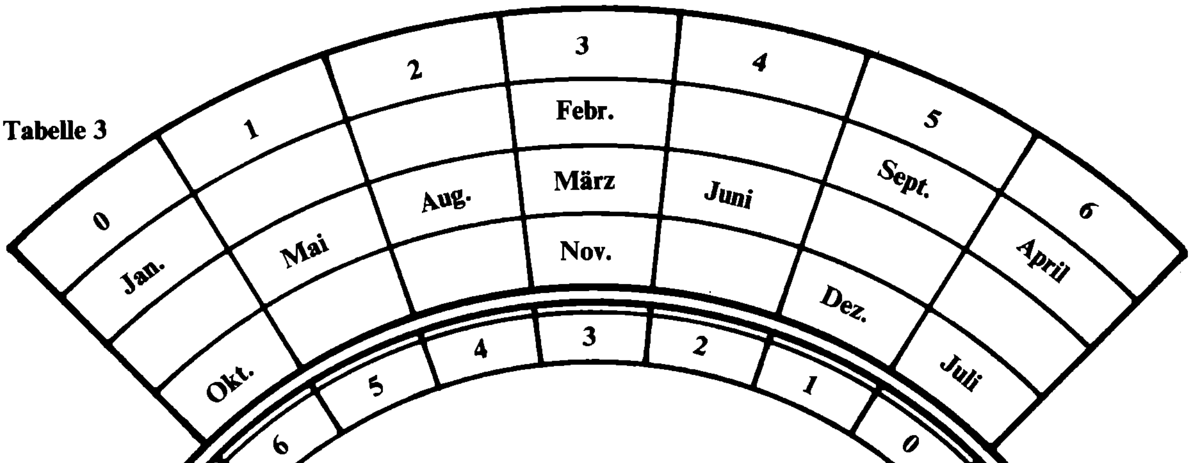
Wenn wir Daten suchen, die auf einen bestimmten Wochentag fallen sollen, gibt uns der Kalender auch Auskunft. Interessiert uns z. B., in welchen Jahren dieses Jahrhunderts der 1. Mai auf Sonntag fällt, so stellen wir den Schieber für dieses Jahrhundert ein. Aus Tabelle 6 entnehmen wir für 1901 die Kennzahl 1, die wir über die 01 von Tabelle 4 einstellen. Die Drehscheibe stellen wir so ein, daß Sonntag über der 1 von Tabelle 2 steht. Dann erscheint unter Mai auf Tabelle 3 die Kennzahl 5 auf der Drehscheibe. In allen Jahren, die auf Tabelle 4 unter der Kennzahl 5 stehen, bis auf die Schaltjahre, die unterstrichen sind, für die die Kennzahl nur für Januar und Februar gilt, fällt der 1. Mai auf Sonntag.

Die Mehrjahrkalender werden in der Planwirtschaft und von Historikern gebraucht. Für die Wirtschaft wäre allerdings eine Kalenderreform von Nutzen. Der neue Kalender müßte so genau wie der gregorianische sein. Zu jedem Tag im Jahr müßte aber ein fester Wochentag gehören. Das könnte man erreichen, wenn man die Woche von 7 Tagen und die Zahl der Tage im Monat, so wie wir sie kennen, beibehalten würde, bis auf den 31. 12., der ein wochentagsloser Festtag wäre. In Schaltjahren könnte man in der Mitte des Jahres auch einen wochentagslosen Festtag einschalten.

Es liegen schon viele Vorschläge zu einer solchen Kalenderreform vor. *H. Möller*

EWIGER KALENDER Anleitung: Kreis ausschneiden und auf Karton kleben, gestrichelte Linien einschneiden; Zeichnung und Tabellen 2 und 3 auf Karton kleben. Beide Teile durch Druckknopf verbinden(x). Schieber ausschneiden und durch Einschnitt schieben.

Tabelle 3



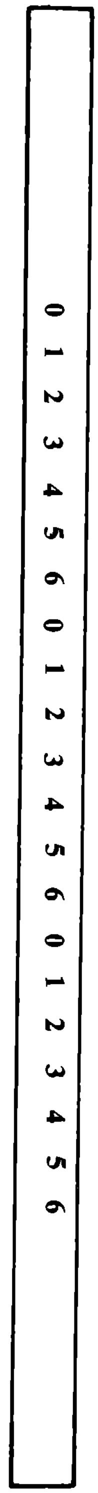


Tabelle 4

Kj / j						
	01	02	03	04	04	05	06
	07	08	08	09	10	11	12
	12	13	14	15	16	16	17
	18	19	20	20	21	22	23
	24	24	25	26	27	28	28
	29	30	31	32	32	33	34
	35	36	36	37	38	39	40
	40	41	42	43	44	44	45×
	46	47	48	48	49	50	51
	52	52	53	54	55	56	56
	57	58	59	60	60	61	62
	63	64	64	65	66	67	68
	68	69	70	71	72	73	73
	74	75	76	76	77	78	79
	80	80	81	82	83	84	84
	85	86	87	88	88	89	90
	91	92	92	93	94	95	96
	96	97	98	99	100	100	

Jahre im Jahrhundert

Kennzahlen für die Jahre $a \cdot 100 + 1$, julianisch

Tab. 5

Kj	a		
0	5	12	19
1	4	11	18
2	3	10	17
3	2	9	16
4	1	8	15
5	0	7	14
6		6	13

Kennzahlen für die Jahre $a \cdot 100 + 1$, gregorianisch

Tab. 6

Kj	a		
0	16	20	24
1	15	19	23
2			
3		18	22
4			
5		17	21
6			

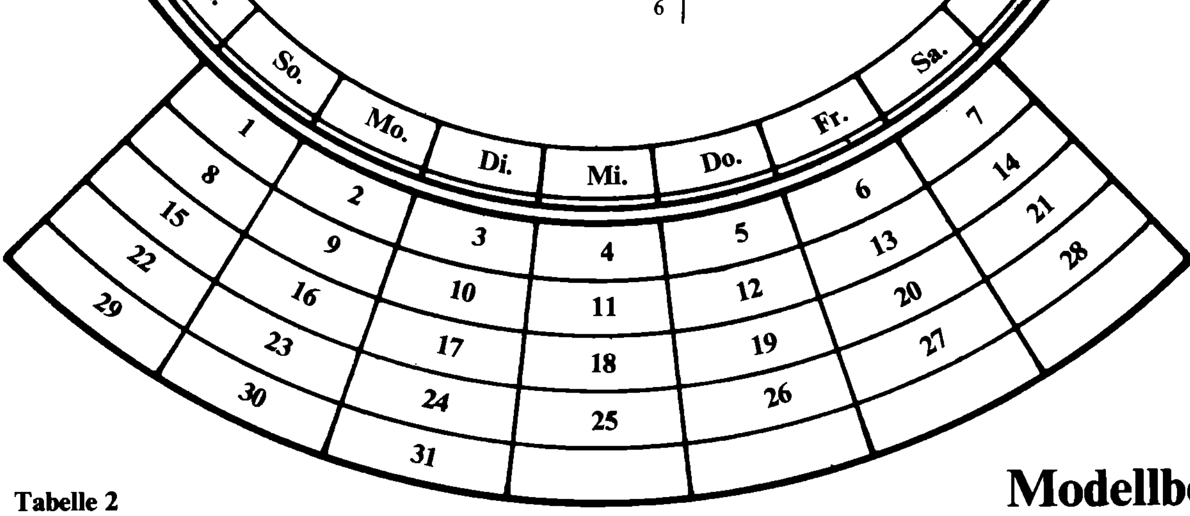


Tabelle 2

Modellbogen