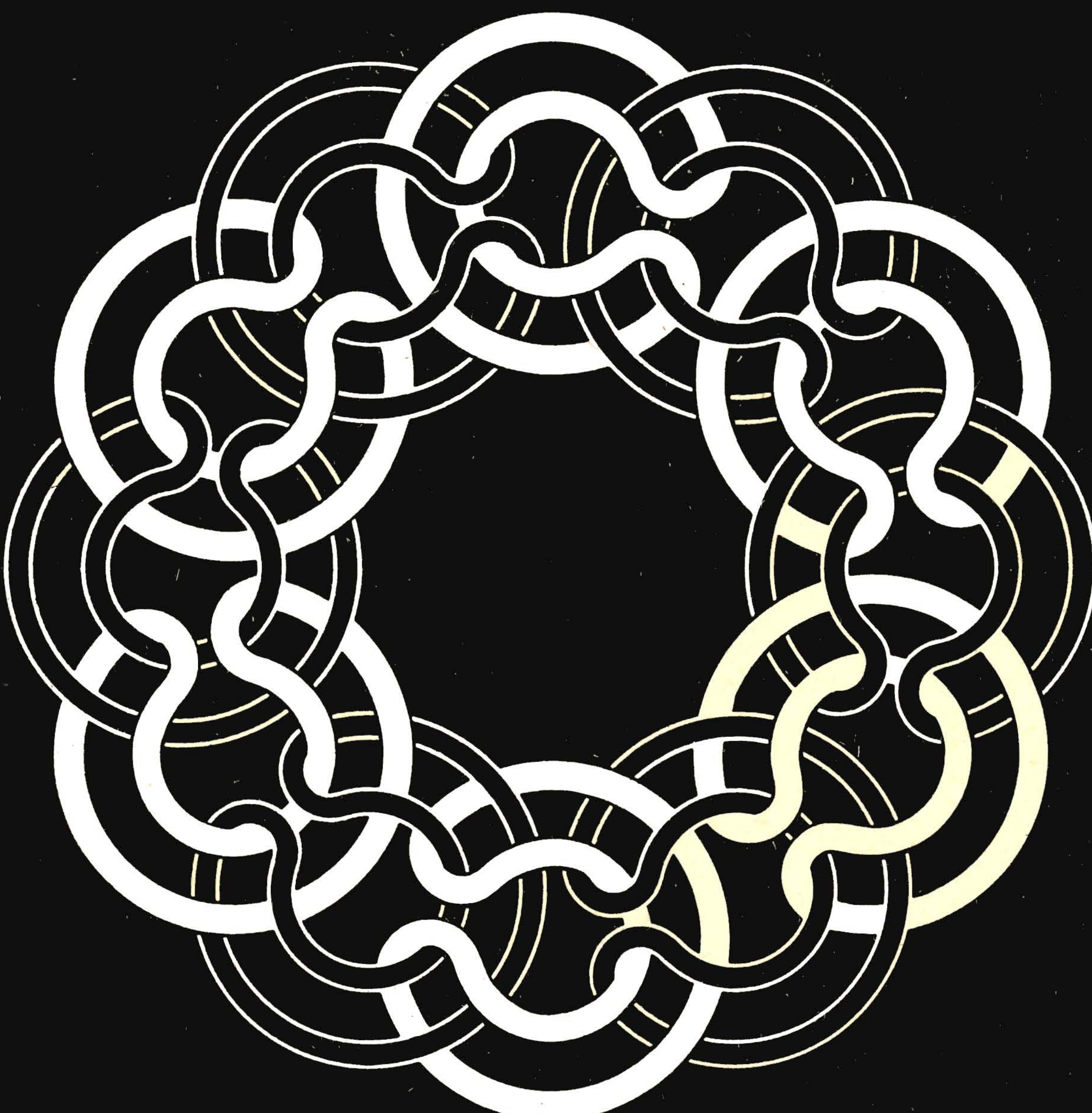
Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
15. Jahrgang 1981
Preis 0,50 M
Index 31059

4



Redaktion:
StR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1080 Berlin, Krausenstraße 50 · Tel. 20430
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: H. Triebel, Eigenfoto (S. 76); Briefmarke, J. Lehmann (S. 80); zwei Fotos aus dem Archiv der OS Georgenthal (S. 82, 83); aus: Technikus 3/81 (S. 83), Vlado Javorský, Praha (III. U.-Seite)
Titelblatt entnommen aus der Sowjetischen mathematischen Schülerzeitschrift *Quant* 6/80, gestaltet von W. Fahr, Berlin
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
AN (EDV) 128–ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 24. April 1981

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

*bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Der Satz von Viviani: ein Spezialfall

1. Aufgabenstellung

Im 17. Jahrhundert wurde eine interessante Eigenschaft der gleichseitigen Dreiecke entdeckt. Zu Ehren des Entdeckers wird diese Eigenschaft als *Satz von Viviani* (1622 bis 1703) bezeichnet und besagt: In jedem gleichseitigen Dreieck ist die Summe der Abstände eines innerhalb des Dreiecks befindlichen Punktes P von den Seiten konstant. Damit wird durch den Satz von Viviani die Lösung der folgenden Aufgabe gegeben:
Für welche inneren Punkte P eines gleichseitigen Dreiecks ist die Summe der Abstände von den Seiten konstant?
Um allgemein für spitzwinklige Dreiecke eine ähnliche Aufgabe formulieren zu können, führen wir zweckmäßigerweise das folgende Funktional f ein. Unter einem Funktional f versteht man eine Abbildung, die jedem Element P einer Menge, hier der Menge aller Dreieckspunkte P, eine reelle Zahl $f(P)$ zuordnet.
Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck und P ein innerer Punkt. Die Fußpunkte der von P auf die Seiten AB, BC und AC gefällten Lote bezeichnen wir mit R, S und T. Dem Punkt P wird nun der folgendermaßen definierte Funktionalwert $f(P)$ zugeordnet:

$$f(P)=\overline{PR}+\overline{PS}+\overline{PT}. \qquad \text{(Bild 1)}$$

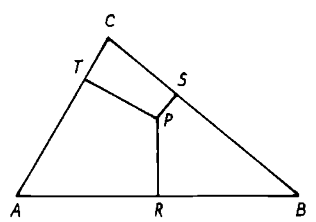
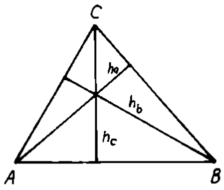


Bild 2



$f(A)=h_a$
$f(B)=h_b$
$f(C)=h_c$

Bei der Definition des Funktionals $f(P)$ kann man von der Voraussetzung abgehen, daß P ein innerer Punkt des Dreiecks ist. Ist P ein Punkt auf einer Dreieckseite, so wird ein entsprechender Summand in der Definition des Funktionals $f(P)$ zu Null. Wenn P ein Eckpunkt ist, dann werden zwei Summanden des Funktionals zu Null, das heißt, $f(A)$, $f(B)$ und $f(C)$ sind die Höhen im Dreieck ABC auf den Seiten, die dem jeweiligen Eckpunkt gegenüberliegen. (Bild 2)
Damit haben wir ein Funktional f definiert, das jedem Punkt P eines spitzwinkligen Dreiecks ABC die Summe der Abstände des Punktes P von den Dreieckseiten als Funktionalwert $f(P)$ zuordnet.

Im weiteren wollen wir uns mit der folgenden Aufgabe befassen:
Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC. Für welche Punkte P des spitzwinkligen Dreiecks ABC gilt $f(P)=k=$ konstant und welche Werte kann k bei einem spitzwinkligen Dreieck annehmen?

Die Lösung der Aufgabe erfolgt in mehreren Teilabschnitten. Zunächst wenden wir uns noch einmal dem Satz von Viviani zu.

2. Der Satz von Viviani

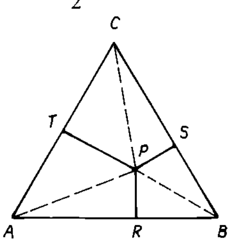
Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck

$$f(A)=f(B)=f(C)=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB}.$$

Dann gilt für jeden Punkt P des gleichseitigen Dreiecks ABC

$$f(P)=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB}=\text{konstant}. \qquad \text{(Bild 3)}$$

Bild 3



Beweis: Zunächst sei P ein innerer Dreieckspunkt. Es seien R, S und T die Fußpunkte der von P auf die Dreieckseiten AB, BC und AC gefällten Lote. Die Fläche F des gleichseitigen Dreiecks ABC ist einerseits gleich

$$F=\frac{1}{2}\overline{AB}f(C)$$

und andererseits gleich der Summe der Flächen der Dreiecke ABP, BCP und CAP. Somit ergibt sich

$$F=\frac{1}{2}\overline{AB}\,\overline{PR}+\frac{1}{2}\overline{BC}\,\overline{PS}+\frac{1}{2}\overline{AC}\,\overline{PT}$$
$$=\frac{\overline{AB}}{2}(\overline{PR}+\overline{PS}+\overline{PT})=\frac{\overline{AB}}{2}f(P).$$

Daraus folgt

$$f(P)=f(A)=f(B)=f(C)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB}=\text{konstant}.$$

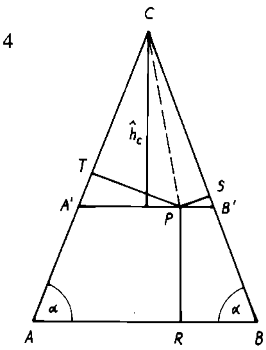
Der Beweis bleibt gültig, wenn P ein beliebiger Punkt auf einer Dreiecksseite oder ein Eckpunkt ist. Der Wert des Funktionals $f(P)$ ist für jeden Dreieckspunkt P gleich der Höhe des gleichseitigen Dreiecks. w.z.b.w.
Wenden wir uns nun als nächstes der Bestimmung aller Punkte P eines spitzwinkligen gleichschenkligen Dreiecks zu, für die $f(P)=$ konstant gilt.

3. Das spitzwinklige gleichschenklige Dreieck

Wir betrachten ein spitzwinkliges gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis AB $[f(A)=f(B)]$ und dem Basiswinkel α ($45° \leqq \alpha$ $\alpha<90°$). Ist R der Fußpunkt des Lotes eines beliebigen Dreieckspunktes P auf die Basis AB, so gilt

$$f(P)=\overline{PR}\left(1-\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\right)+f(A). \qquad \text{(Bild 4)}$$

Bild 4



Das heißt, das Funktional f ist eine lineare Funktion von $\overline{PR}$ und hat für alle Punkte P auf einer Parallelen $A'B'$ zur Basis AB den konstanten Wert

$$k=\overline{PR}\left(1-\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\right)+f(A).$$

Beweis: Wir nehmen zunächst an, daß P ein beliebiger innerer Punkt eines spitzwinkligen gleichschenkligen Dreiecks ist. Die Fußpunkte der von P auf die Dreieckseiten gefällten Lote bezeichnen wir wiederum mit R, S und T. Es sei $A'B'$ eine Parallele zur Basis AB durch den Punkt P. Mit $\hat{h}_c$ bezeichnen wir die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks $A'B'C$ über der Basis $A'B'$.
Aus dem Strahlensatz folgt nun

$$\frac{\hat{h}_c}{f(C)}=\frac{\overline{A'C}}{\overline{AC}}.$$

Unter Verwendung dieser Beziehung ergibt sich die Fläche F des gleichschenkligen Dreiecks $A'B'C$ zu

$$F=\frac{1}{2}\overline{A'B'}\,\hat{h}_c=\frac{1}{2}\overline{A'B'}\,\frac{\overline{A'C}}{\overline{AC}}f(C).$$

Sie ist andererseits gleich der Summe der Flächen der Dreiecke $A'PC$ und $B'CP$

$$F=\frac{1}{2}\overline{A'C}\,\overline{PT}+\frac{1}{2}\overline{B'C}\,\overline{PS}.$$

Daraus folgt

$$\overline{PT}+\overline{PS}=\overline{A'B'}\frac{f(C)}{\overline{AC}}.$$

Somit hat das Funktional f für alle Punkte P auf $A'B'$ den Wert

$$f(P)=\overline{PR}+\overline{A'B'}\,\frac{f(C)}{\overline{AC}}.$$

Nach dem Strahlensatz gilt weiter

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\frac{f(C)-\overline{PR}}{f(C)}$$

und somit

$$\overline{A'B'}=\overline{AB}\frac{f(C)-\overline{PR}}{f(C)}.$$

Durch Einsetzen in $f(P)$ erhalten wir

$$f(P)=\overline{PR}+\overline{AB}\,\frac{f(C)-\overline{PR}}{f(C)}\,\frac{f(C)}{\overline{AC}}=$$

$$=\overline{PR}\left(1-\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\right)+\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\,f(C)=$$

$$=\overline{PR}\left(1-\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\right)+f(A),$$

da aus dem Strahlensatz folgt

$$\frac{f(A)}{f(C)}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

Wird nun die Voraussetzung weggelassen, daß P ein innerer Dreieckspunkt ist, so bleibt der Beweis gültig, w.z.b.w.

Betrachten wir einige Schlußfolgerungen. Für alle Punkte P auf der Basis AB gilt wegen $\overline{PR}=0$

$$f(P)=f(A)=f(B).$$

Fällt P mit dem Eckpunkt C zusammen, so gilt wegen $\overline{PR}=\overline{CR}=f(C)$

$$f(C)=\overline{CR}\left(1-\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\right)+f(A)$$

$$=f(C)-f(C)\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}+f(A)=f(C).$$

Der Wert des Funktionals $f(P)$ variiert linear zwischen $f(A)=f(B)$ und $f(C)$. Im Falle $45°\leqq\alpha<60°$ ergibt sich $f(C)\leqq f(P)\leqq f(A)=f(B)$. Für ein gleichseitiges Dreieck ($\alpha=60°$) folgt wegen $\overline{AB}=\overline{AC}$ für einen beliebigen Dreieckspunkt P die Beziehung $f(P)=f(A)=f(B)=f(C)$, d. h. der Satz von Viviani. Wenn $60°<\alpha<90°$ gilt, so folgt $f(A)=f(B)\leqq f(P)\leqq f(C)$ für alle Dreieckspunkte P.

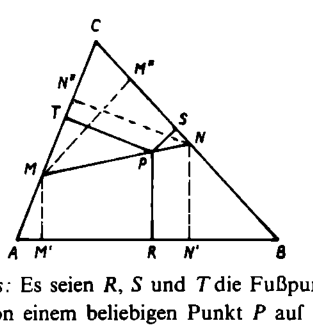
Nach der Betrachtung der beiden Spezialfälle wenden wir uns nun dem allgemeinen Fall eines beliebigen spitzwinkligen Dreiecks zu.

4. Ein beliebiges spitzwinkliges Dreieck

Die Lösung der Aufgabe, alle Punkte P eines beliebigen spitzwinkligen Dreiecks mit $f(P)=k=$ konstant zu bestimmen, führen wir in zwei Teilschritten durch. Dabei wird deutlich, wie sich die bereits betrachteten Spezialfälle einordnen. Im ersten Teilschritt zeigen wir, daß gilt: Wenn auf verschiedenen Seiten eines spitzwinkligen Dreiecks ABC zwei Punkte M und N mit der Eigenschaft $f(M)=f(N)=k$ bekannt sind, dann gilt für jeden Punkt P auf der Strecke MN:

$$f(P)=k. \qquad \text{(Bild 5)}$$

Bild 5



Beweis: Es seien R, S und T die Fußpunkte der von einem beliebigen Punkt P auf MN auf die Dreieckseiten gefällten Lote. Wir setzen im Beweis voraus, daß MN nicht zur Dreieckseite parallel ist, die weder M noch N enthält. Der Fall MN parallel zu dieser Dreieckseite, wie noch deutlich wird, ist nur für das spitzwinklige gleichschenklige Dreieck möglich und wurde bereits behandelt.

Wir nehmen an, M ist ein Punkt auf AC und N ein Punkt auf BC. Die Strecke MN sei nicht parallel zu AB. Dann gilt nach dem Strahlensatz

$$\frac{\overline{PS}}{\overline{MM''}}=\frac{\overline{PN}}{\overline{MN}},\quad \frac{\overline{PT}}{\overline{NN''}}=\frac{\overline{PM}}{\overline{MN}},\quad \frac{\overline{PR}-\overline{MM'}}{\overline{PM}}=\frac{\overline{NN'}-\overline{MM'}}{\overline{NN}}.$$

Werden die drei Beziehungen nach $\overline{PS}$, $\overline{PT}$ und $\overline{PR}$ aufgelöst und in den Ausdruck für $f(P)$ eingesetzt, so folgt

$$f(P)=\overline{PS}+\overline{PT}+\overline{PR}=\overline{MM''}\,\frac{\overline{PN}}{\overline{MN}}+\overline{NN''}\,\frac{\overline{PM}}{\overline{MN}}+\overline{MM'}+\overline{PM}\,\frac{\overline{NN'}-\overline{MM'}}{\overline{MN}}$$

$$=\overline{MM'}\left(1-\frac{\overline{PM}}{\overline{MN}}\right)+\overline{MM''}\,\frac{\overline{PN}}{\overline{MN}}+\overline{NN'}\,\frac{\overline{PM}}{\overline{MN}}+\overline{NN''}\,\frac{\overline{PM}}{\overline{MN}}$$

$$=(\overline{MM'}+\overline{MM''})\,\frac{\overline{PN}}{\overline{MN}}+(\overline{NN'}+\overline{NN''})\,\frac{\overline{PM}}{\overline{MN}}$$

$$=f(M)\,\frac{\overline{PN}}{\overline{MN}}+f(N)\,\frac{\overline{PM}}{\overline{MN}}=k\,\frac{\overline{PN}+\overline{PM}}{\overline{MN}}$$

$=k$, w.z.b.w.

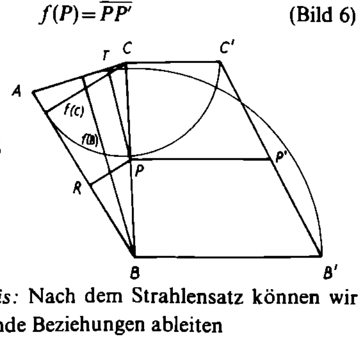
Damit reduziert sich die Lösung der Aufgabe auf die Ermittlung von Punkten M und N auf den Dreieckseiten mit $f(M)=f(N)$. Im zweiten Teilschritt wird dafür eine konstruktive Möglichkeit angegeben.

Als erstes zeigen wir, wie man zu einem beliebigen Punkt P auf einer Seite eines spitzwinkligen Dreiecks den Wert des Funktionals $f(P)$ als Strecke konstruieren kann.

Wir nehmen an, es sei P ein Punkt auf der Seite BC eines spitzwinkligen Dreiecks ABC. Im Punkt B wird unter einem rechten Winkel zur Seite BC die Höhe $f(B)$ antragen. Analog wird unter einem rechten Winkel zur Seite BC im Punkt C die Höhe $f(C)$ angetragen. Wir erhalten die beiden Punkte B' und C'. Es sei P' der Schnittpunkt des im Punkt P auf der Seite BC errichteten Lotes mit der Strecke $B'C'$. Dann gilt

$$f(P)=\overline{PP'} \qquad \text{(Bild 6)}$$

Bild 6



Beweis: Nach dem Strahlensatz können wir folgende Beziehungen ableiten

$$\frac{\overline{PT}}{f(B)}=\frac{\overline{PC}}{\overline{BC}},\quad \frac{\overline{PR}}{f(C)}=\frac{\overline{PB}}{\overline{BC}}.$$

Daraus folgt durch Addition der beiden Beziehungen

$$\frac{\overline{PT}}{f(B)}+\frac{\overline{PR}}{f(C)}=\frac{\overline{PC}+\overline{PB}}{\overline{BC}}=1.$$

Gilt $f(B)=f(C)$ so ergibt sich

$$\overline{PT}+\overline{PR}=f(P)=f(B)=f(C).$$

Dieser Fall liegt genau dann vor, wenn BC die Basis eines spitzwinkligen gleichschenkligen Dreiecks ist.

Es sei nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f(C)<f(B)$.

Durch Anwendung des Strahlensatzes folgt

$$\frac{\overline{PP'}-f(C)}{\overline{PC}}=\frac{f(B)-f(C)}{\overline{BC}}.$$

Daraus leiten wir ab

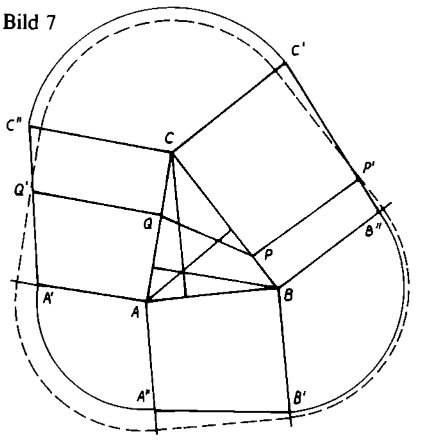
$$\overline{PP'}=f(C)\left(1-\frac{\overline{PC}}{\overline{BC}}\right)+f(B)\,\frac{\overline{PC}}{\overline{BC}}$$

$$=f(C)\,\frac{\overline{PB}}{\overline{BC}}+f(B)\,\frac{\overline{PC}}{\overline{BC}}=f(C)\,\frac{\overline{PR}}{f(C)}$$

$$+f(B)\,\frac{\overline{PT}}{f(B)}=\overline{PR}+\overline{PT}=f(P).\ \text{w.z.b.w.}$$

Wir können jetzt dazu übergehen, alle Punkte P auf den Seiten einschließlich der Eckpunkte eines beliebigen spitzwinkligen Dreiecks ABC mit $f(P)=$ konstant zu ermitteln. In den Eckpunkten des Dreiecks A, B und C werden jeweils rechtwinklig zu den angrenzenden Seiten die Höhen $f(A)$, $f(B)$ und $f(C)$ angetragen und deren Endpunkte durch die Strecken $A''B'$, $B''C'$ und $C''A'$ verbunden. Werden anschließend die Punkte B' und B'' durch einen Kreisbogen mit dem Radius $f(B)$, die Punkte C' und C'' durch einen Kreisbogen mit dem Radius $f(C)$ und die Punkte A' und A'' durch einen Kreisbogen mit dem Radius $f(A)$ verbunden, so ergibt sich ein geschlossener Linienzug $A''B'B''C'C''A'$. (Bild 7)

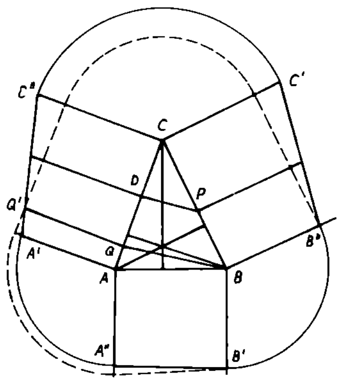
Bild 7



Es sei nun P ein beliebiger Punkt auf den Seiten bzw. ein Eckpunkt des spitzwinkligen Dreiecks ABC. Durch Errichten des Lotes im Punkt P erhalten wir einen Schnittpunkt P' mit dem Linienzug $A''B'B''C'C''A'$. Es gilt $f(P)=\overline{PP'}$. Die Konstruktion einer „Höhenlinie" durch den Punkt P' liefert weitere Schnittpunkte Q' mit dem Linienzug $A''B'B''$

$C'C''A'$. Wird von Q' auf die entsprechende Dreieckseite das Lot gefällt, so ergibt sich ein Punkt Q mit $f(Q)=\overline{QQ'}=\overline{PP'}=f(P)$.
Aus dieser Konstruktion ist sofort ersichtlich, daß für einen beliebigen Punkt P auf den Dreieckseiten gilt
$\min\{f(A), f(B), f(C)\} \leqq f(P)$
$\leqq max\{f(A), f(B), f(C)\}$.
Diese Beziehung bleibt gültig, wenn P ein beliebiger Dreieckspunkt ist, da alle Punkte auf der Verbindungsstrecke PQ zweier Randpunkte P und Q mit $f(P)=f(Q)$ den gleichen Funktionalwert haben.
Es sei nun ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $f(A)<f(B)<f(C)$. Dann gibt es auf der Seite AC genau einen Punkt Q mit $f(Q)=f(B)$. Für alle Punkte P auf QB gilt $f(P)=f(Q)$ $=f(B)$. Wir können sogar noch mehr aussagen. Ist P ein Punkt des Dreiecks BCQ, so gilt $f(B)\leqq f(P)\leqq f(C)$. Wenn dagegen P ein Punkt des Dreiecks ABQ ist, so gilt $f(A)\leqq f(P)\leqq f(B)$. Alle Punkte P des Dreiecks ABC mit $f(P)=$ konstant liegen auf Parallelen zur Strecke BQ. (Bild 8)

Bild 8



Beweis: Aus der Konstruktion folgt, daß die „Höhenlinie" durch B' bzw. B'' mit $C''A'$ einen eindeutigen Schnittpunkt Q' hat, woraus sich auf AC der Punkt Q mit $f(Q)=f(B)$ ergibt. Wenn P ein Punkt des Dreiecks BCQ bzw. des Dreiecks ABQ ist, so folgen die Ungleichungen $f(B)\leqq f(P)\leqq f(C)$ bzw. $f(A)\leqq$ $\leqq f(P)\leqq f(B)$ gleichfalls aus der Konstruktion.
Um zu zeigen, daß alle Punkte P mit $f(P)=$ konstant auf Parallelen zu BQ liegen, wählen wir einen beliebigen Punkt P zum Beispiel auf der Seite BC. Dazu gibt es einen eindeutigen Punkt D auf CQ mit $f(D)=f(P)$. Auf der Strecke PD hat das Funktional f einen konstanten Wert. Durch die Anwendung des Strahlensatzes erhalten wir

$$\frac{f(P)-f(B)}{f(C)-f(B)}=\frac{\overline{PB}}{\overline{BC}},\ \frac{f(D)-f(Q)}{f(C)-f(Q)}=\frac{\overline{QD}}{\overline{QC}},$$

woraus wegen $f(P)=f(D)$ und $f(Q)=f(B)$ die Beziehung

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{QD}}{\overline{QC}}$$

folgt. Das bedeutet aber nach dem Strahlensatz, daß BQ und PD parallel sind. w.z.b.w.

5. Schlußbetrachtungen

Zur Beantwortung der gestellten Aufgabe läßt sich nun zusammenfassend die folgende Aussage formulieren.
Die Summe der Abstände eines beliebigen Punktes eines spitzwinkligen Dreiecks von den Seiten liegt stets zwischen der kleinsten und der größten Höhe des Dreiecks. Außer für das gleichseitige Dreieck gibt es in jedem spitzwinkligen Dreieck eine Schar von Parallelen, wobei für jede der Parallelen gilt, daß die Summe der Abstände aller ihrer Punkte von den Dreiecksseiten den gleichen Wert hat. Die Aussage, ein spitzwinkliges Dreieck hat paarweise verschiedenlange Seiten ist äquivalent zur Aussage, daß die erwähnte Parallelenschar zu keiner Dreiecksseite parallel ist. Im Falle eines spitzwinkligen nichtgleichseitigen gleichschenkligen Dreiecks ist die Parallelenschar zur Basis parallel. Den Ausnahmefall bildet das gleichseitige Dreieck, für das es keine derartigen Parallelenschar gibt. In diesem und nur in diesem Fall gilt der Satz von Viviani.

6. Zwei Aufgaben

a) In einem beliebigen spitzwinkligen Dreieck ABC sind die Punkte P zu ermitteln, für die $f(P)$ extremal wird.
b) Es sei P der Schnittpunkt der Höhen eines spitzwinkligen Dreiecks ABC. Man bestimme alle Punkte Q des Dreiecks mit $f(Q)=f(P)$.

G. Windisch

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Hans Triebel

Sektion Mathematik
der Friedrich-Schiller-Universität Jena

▲2122▲ Eine Aufgabe zur zweidimensionalen allgemeinen Relativitätstheorie
Albert Einstein, der Begründer der allgemeinen Relativitätstheorie, wurde am 14. 3. 1879 geboren. Anläßlich der hundertsten Wiederkehr dieses Ereignisses erschienen 1979 nicht nur zahlreiche wissenschaftliche, sondern auch viele populärwissenschaftliche Arbeiten über Einstein und sein Werk. Dabei spielen solche Begriffe wie „Krümmung des Raumes" usw. eine große Rolle. Der Nichtfachmann steht einem solchen Begriff wie Krümmung des Raumes etwas hilflos gegenüber und versucht, sich etwas Anschauliches darunter vorzustellen. Es handelt sich aber um rein mathematische Kennzahlen, denen man nicht mit Gewalt einen anschaulichen Sinn unterlegen sollte. Man kann aber doch eine gewisse Vorstellung erlangen, wenn man von 3 Dimensionen (unserem realen Raum) zu 2 Dimensionen übergeht. Wir betrachten eine zweidimensionale krumme Fläche F im dreidimensionalen Raum und nehmen an, daß F die Welt zweidimensionaler Wesen ist. Diese zweidimensionalen Wesen leben auf F, sie haben kein Gefühl für eine dritte Dimension.

Bild 1

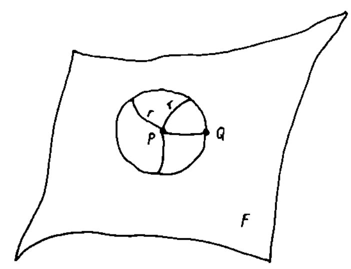
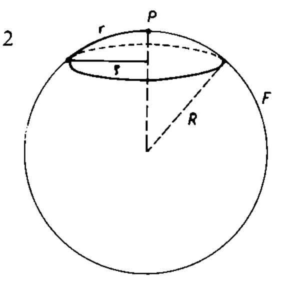


Bild 2



Für sie hat die Aussage „Unsere Welt ist gekrümmt" keinen unmittelbaren geometrischen Sinn. Daß ihre Welt eine Fläche im dreidimensionalen Raum ist, können sie nicht wahrnehmen und eine entsprechende Aussage wäre für diese zweidimensionalen Wesen sinnlos, da diese für sie nicht überprüfbar ist. (Für uns dreidimensionale Wesen wäre eine Aussage der Form, daß unsere Welt eine „Fläche" in einem vierdimensionalen Raum ist, ebenfalls sinnlos). Die Mathematiker und Physiker dieser zweidimensionalen Welt entwickeln nun mathematische und physikalische Theorien, etwa eine zweidimensionale allgemeine Relativitätstheorie und zugehörige geometrische Überlegungen. Sie verkünden ihren staunenden Mitbürgern: „Unsere Welt ist krumm. Wir haben hierfür kein Gefühl, aber wir können eine Formel angeben, die diesen Sachverhalt beschreibt."

Diese Formel wird nun wie folgt gewonnen. Wir nehmen an, daß die Bewohner von F Abstände in ihrer Welt messen können. Dann können sie auch „Kreise" definieren: Der „Kreis" um den Punkt P (auf F) mit dem Radius r ist der geometrische Ort aller Punkte Q (auf F), deren Abstand zu P gleich r ist. $U(r)$ sei der Umfang dieses „Kreises". Dann bezeichnen die zweidimensionalen Mathematiker der Welt die Größe $K(P)$,

$$K(P)=\frac{3}{\pi}\lim_{r\to 0}\frac{2\pi r-U(r)}{r^3}$$

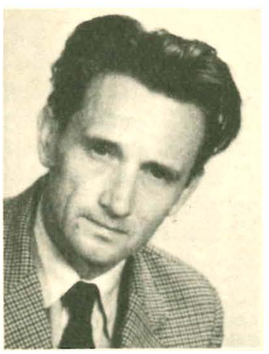
als die Krümmung im Punkt P. Bekanntlich ist $2\pi r$ der Umfang eines euklidischen Kreises (in der Ebene) vom Radius r. In der obigen Formel wird also die Abweichung von $U(r)$ zum euklidischen Kreis als Maß für die Krümmung genommen. Ist F eine Ebene, so ist $K(P)=0$ für alle Punkte P. Die Aufgabe besteht nun darin $K(P)$ zu berechnen, falls F die Oberfläche einer Kugel im dreidimensionalen Raum mit dem Radius R ist. In diesem Fall führt die obige Konstruktion zu einem „Kreis" in F, der auch nach unserem euklidischen Verständnis ein Kreis ist, sein Radius ist ϱ. Die Frage lautet:
Wie groß ist $K(P)$?
Oder anders formuliert: Was erzählen die zweidimensionalen Mathematiker auf F ihren Mitbürgern bezüglich der Krümmung ihrer Welt?

Hinweis: Man benutze die Formel

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

Zusatzaufgabe: Man beweise diese Formel.

Prof. Dr. Hans Triebel



Biographie

1936 in Dessau geboren. Besuch der Grund- und Oberschule in Dessau, Abitur 1954. Von 1954 bis 1959 Mathematikstudium in Jena, 1959 Diplom. Von 1959 bis 1960 Tätigkeit als Mathematiker im VEB Carl Zeiß in Jena. 1961 bis 1963 Assistent am damaligen Mathematischen Institut der Universität Jena, 1962 Promotion (Dr. rer. nat.). 1963 bis 1964 Zusatzstudium an der Universität in Leningrad. Von 1964 bis 1969 Oberassistent an der Universität Jena, 1966 Habilitation (Dr. rer. nat. habil.). 1969 bis 1970 Dozent, seit 1970 Professor für Analysis an der Friedrich-Schiller-Universität in Jena. Seit 1978 korrespondierendes Mitglied der Akademie der Wissenschaften der DDR. Vier Bücher und etwa 80 Publikationen in internationalen Fachzeitschriften.

Optimale Reihenfolge

Im Alltag treffen wir oft auf Situationen, bei denen durch die Wahl einer günstigen Reihenfolge von bestimmten Handlungen viel Zeit oder Geld eingespart werden kann.

Beispiel 1: Im Wartezimmer eines Arztes sitzen die Patienten A, B, C, D, E und F. Der Arzt weiß, daß er etwa 20 Minuten für die Behandlung von A, 30 min für B, 15 min für C, 5 min für D und je 10 min für E und F braucht.
Ruft er die Patienten in der Reihenfolge (A, B, C, D, E, F) herein, so wartet A gar nicht und B 20 min. C bleibt $20+30=50$ min im Wartezimmer, D wartet 65, E 70 und F 80 min. Für alle Patienten zusammen ergibt das eine Wartezeit von 285 min, also 4 Stunden und 45 Minuten. Gibt es eine günstigere Reihenfolge? Für welche Reihenfolge der Patienten wird die Gesamtwartezeit am kleinsten? (Lösungen siehe S. 94.)
Eine Reihenfolge von n verschiedenen Buchstaben oder Zahlen wird in der Mathematik als Permutation bezeichnet. Es ist bekannt, daß es $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$ verschiedene Permutationen von n Objekten gibt. Prüft diese Formel einmal mit 3 oder 4 Buchstaben nach, indem ihr alle möglichen Anordnungen aufschreibt! In unserem Beispiel gibt es $6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=720$ mögliche Reihenfolgen des Empfangs der Patienten.

Es leuchtet ein, daß es aufwendig ist, die günstigen Reihenfolgen durch Probieren zu suchen. Wir werden eine allgemeine Regel für die optimale Reihenfolge ableiten. Wenn ihr diese Regel bei der Lösung von Beispiel 1 noch nicht gefunden habt, schaut euch die Aufgabe noch einmal an oder stellt euch selbst eine ähnliche Aufgabe. Ihr werdet es schnell erraten.
Zunächst wollen wir die Aufgabe etwas allgemeiner formulieren.
Problem 1: In einem Wartezimmer sitzen n Patienten. Die Behandlungsdauer jedes Patienten sei bekannt. Gesucht ist eine solche Reihenfolge der Behandlung, bei der die Summe s der Wartezeiten aller Patienten minimal wird.
Lösung: Wir bezeichnen die Patienten mit A_1, A_2, ..., so, daß (A_1, A_2, ..., A_n) eine optimale Reihenfolge ist. Jetzt leiten wir eine Bedingung für die Behandlungszeiten her, die wir mit a_1, ..., a_n bezeichnen. Es ergeben sich folgende Wartezeiten:

Patient	Wartezeit
A_1	–
A_2	a_1
A_3	a_1+a_2
$\vdots$	$\vdots$
A_{n-1}	$a_1+a_2+\ldots+a_{n-2}$
A_n	$a_1+a_2+\ldots+a_{n-2}+a_{n-1}$

Durch Addieren und Zusammenfassen erhält man als Gesamtwartezeit $s=(n-1)\cdot a_1+(n-2)\cdot a_2+\ldots+2\cdot a_{n-2}+a_{n-1}$. In dieser Summe wird a_1 mit dem größten Faktor multipliziert, a_2 mit dem zweitgrößten usw. Wir haben vorausgesetzt, daß die Reihenfolge (A_1, ..., A_n) bzw. auch (a_1, ..., a_n) so gewählt ist, daß s am kleinsten wird. Das heißt, es muß gelten
$a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n$.
Ergebnis: Die Gesamtwartezeit wird am kleinsten, wenn jeweils der Patient mit der kürzesten noch möglichen Behandlungszeit empfangen wird.
Wenn alle Behandlungszeiten verschieden sind, gibt es genau eine optimale Reihenfolge. Haben zwei oder mehrere Patienten die gleiche Behandlungszeit, so können diese in der Reihenfolge miteinander vertauscht werden, ohne daß sich s ändert. In diesem Fall gibt es mehrere Lösungen.
Bei dem nächsten, allgemeineren Problem werden wir das Ergebnis noch mit einer anderen Überlegung gewinnen. Zunächst zwei Aufgaben. Versucht wieder, eine allgemeine Regel abzuleiten!

Beispiel 2a: Ein Direktor hat in einer Stunde 4 Probleme zu besprechen. Zu jedem Thema ist eine bestimmte Sprechzeit vorgesehen und eine bestimmte Anzahl von Besuchern bestellt, die schon im Vorzimmer warten:

Thema	Sprechzeit in min	Anzahl der Besucher
1	20	5
2	25	8
3	10	10
4	5	2

Wir wollen voraussetzen, daß kein Besucher für mehrere Themen vorgesehen ist. Wie ist die Reihenfolge der Themen festzulegen, damit die Gesamtwartezeit der Besucher minimal wird?
Beispiel 2b: In einem Hafen liegen 6 Schiffe vor Anker, die nacheinander entladen werden müssen. Die Entladezeiten und die Kosten, die für die Liegezeit des Schiffes im Hafen entrichtet werden müssen, sind bei den einzelnen Schiffen unterschiedlich.

Schiff	Entladezeit in Stunden	Liegekosten pro Stunde in Mark
A	2	10000
B	4	8000
C	5	15000
D	2	12000
E	4	18000
F	3	18000

Bei welcher Reihenfolge des Entladens wird die Summe der Liegekosten am kleinsten? Die Zahlenangaben sind durchaus realistisch. Statt die Kosten für die gesamte Liegezeit im Hafen zu betrachten, kann man sich auch auf die Wartezeit beschränken, denn die Entladezeit ist ja fest vorgegeben. Wir versuchen, beide Aufgaben in eine allgemeinere mathematische Problemstellung einzuordnen:

Problem 2: n Objekte (Schiffe oder Besuchergruppen) warten auf ihre Abfertigung, die nacheinander erfolgen soll. Die Abfertigungszeit a_i für jedes Objekt A_i und die Kosten c_i (pro Zeiteinheit) für seine Wartezeit sind bekannt. Gesucht ist eine Reihenfolge der Abfertigung, für die die Gesamtsumme s der Wartekosten am kleinsten wird.

Die Wartekosten für A_i sind das Produkt von c_i mit der Zeit, die A_i warten muß. Im Beispiel 2a spielt die Anzahl der Besucher die Rolle des Kostenfaktors c_i, denn die Wartezeit für alle Besucher einer Gruppe ergibt sich als Produkt aus der Anzahl der Besucher und der Wartezeit der Gruppe.

Unsere Lösung erfordert jedoch überhaupt keine Berechnung von Wartekosten, sondern führt das Problem auf den Fall $n=2$ zurück!

Lösung: Wir betrachten eine Reihenfolge mit den Gesamtwartekosten s_1, bei der die Objekte A_i und A_k direkt nacheinander abgefertigt werden. Bei der abgeänderten Reihenfolge, bei der lediglich A_i und A_k die Plätze getauscht haben und alle anderen Objekte auf ihren Plätzen verbleiben, sei die Summe der Wartekosten s_2. Bei beiden Reihenfolgen sind die Kosten für die Wartezeiten der vor bzw. nach A_i und A_k abgefertigten Objekte gleich und auch die Kosten für die Zeit, die A_i und A_k gemeinsam warten. Bezeichnen wir die Summe dieser Kosten mit t, so ist $s_1 = t + a_i \cdot c_k$, denn es kommen nur die Kosten (c_k pro Zeiteinheit) für die Zeitspanne a_i dazu, die A_k auf die Abfertigung von A_i wartet. Entsprechend erhält man $s_2 = t + a_k \cdot c_i$.

Subtraktion der beiden Gleichungen ergibt $s_1 - s_2 = a_i c_k - a_k c_i$.

Es ist genau dann $s_1 > s_2$, wenn auch die rechte Seite der letzten Gleichung positiv ist: $a_i c_k > a_k c_i$. Da die Kostenfaktoren c_i und c_k größer als Null sind (sonst könnten die entsprechenden Objekte beliebig spät abgefertigt werden), kann man hierfür auch schreiben $\frac{a_i}{c_i} > \frac{a_k}{c_k}$. In Worten ausgedrückt: wenn bei zwei direkt nacheinander abzufertigenden Objekten A_i und A_k der Quotient Abfertigungszeit durch Wartekosten für das erste Objekt größer ist als für das zweite, so kann durch Vertauschen dieser beiden Objekte in der Reihenfolge die Summe der Wartekosten verkleinert werden. Die ursprüngliche Reihenfolge war also nicht optimal.

Ergebnis: Ist $(A_1, \ldots, A_n)$ eine optimale Reihenfolge, so gilt

$$\frac{a_1}{c_1} \leqq \frac{a_2}{c_2} \leqq \ldots \leqq \frac{a_n}{c_n}.$$

Man erhält also die optimale Reihenfolge (es muß ja eine geben), indem man die Quotienten Abfertigungszeit durch Wartekosten bildet und der Größe nach ordnet. Sind einige Quotienten gleich, so gibt es mehrere optimale Lösungen, denn das Vertauschen der entsprechenden Objekte untereinander ändert den Wert von s nicht, wie aus der obigen Überlegung hervorgeht.

Das Ergebnis zu Problem 1 ordnet sich hier als Spezialfall ein, daß $c_1 = c_2 = \ldots = c_n$ ist. – Nun noch eine schwierige Aufgabe:

Beispiel 3a: Ein 3-Familienhaus ist im Rohbau fertig. Ein Maurer und ein Maler kommen, um die Innenarbeiten auszuführen. Sie veranschlagen folgende Arbeitszeit (in Tagen):

	Maurer	Maler
Keller	2	1
Treppenhaus und Abstellräume	6	4
Wohnung 1	4	3
Wohnung 2	3	5
Wohnung 3	5	6

In welcher Reihenfolge ist die Arbeit der beiden zu organisieren, damit das Haus zum frühesten Termin bezugsfertig wird?

Das Problem besteht darin, daß der Maler nur dort mit der Arbeit anfangen kann, wo der Maurer fertig ist.

Diese Art von Aufgaben tritt in der Produktionsplanung häufig auf, wenn eine Reihe von Werkstücken auf mehreren Maschinen nacheinander bearbeitet werden, wobei sie unterschiedliche Zeit für die einzelnen Arbeitsgänge benötigen. Zum Beispiel sägen – feilen – polieren, zuschneiden – nähen. Oder:

Beispiel 3b: Im Beispiel 2b ist vor dem Entladen die Zollkontrolle durchzuführen, die erfahrungsgemäß etwa folgende Zeit in Anspruch nehmen wird: 3 Stunden für Schiff A, 5 für B, 4 für C, 1 Stunde für D, 3 für E und 4 für F. In welcher Reihenfolge sind die Schiffe abzufertigen, wenn wie in 2b die Summe der Liegekosten bzw. Wartekosten möglichst klein gehalten werden soll? Welche Reihenfolge ist zu wählen, wenn das letzte Schiff zum frühestmöglichen Zeitpunkt abgefertigt sein soll?

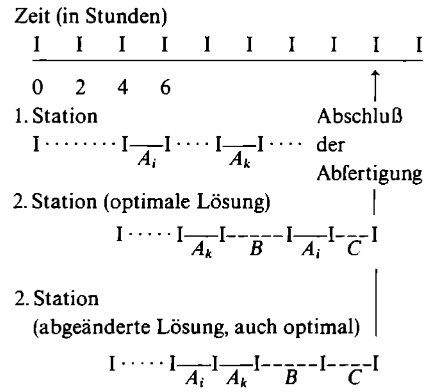
Hier handelt es sich um zwei ganz unterschiedliche Fragestellungen. Die Größe, die möglichst klein (oder groß) gemacht werden soll, nennt man in der mathematischen Optimierung die *Zielgröße*. Was bezüglich der einen Zielgröße günstig oder optimal ist, ist ungünstig bezüglich der anderen. Daher muß man sich bei Optimierungsaufgaben immer im klaren über die Zielgröße sein. Die Losung *Mit minimalem Aufwand maximalen Nutzen zu erreichen* ist mathematisch nicht gerechtfertigt.

Für Beispiel 3a und die zweite Frage von 3b wollen wir zum Abschluß das Problem und die allgemeine Regel formulieren:

Problem 3: n Objekte sollen nacheinander auf 2 Stationen abgefertigt werden. Für jedes Objekt A_i sind die Abfertigungszeit a_i auf der ersten und b_i auf der zweiten Station bekannt. Die zweite Station darf erst nach der ersten durchlaufen werden.

In welcher Reihenfolge sind die Objekte abzufertigen, damit die Abfertigung aller Objekte zum frühestmöglichen Zeitpunkt abgeschlossen ist?

Zunächst ist durchaus nicht klar, daß bei einer optimalen Lösung die Reihenfolge auf beiden Stationen dieselbe ist. Wenn man aber eine optimale Lösung hat, kann man die Reihenfolge auf der zweiten Station so abändern, daß sie mit der Reihenfolge auf der ersten Station übereinstimmt und daß die abgeänderte Lösung auch optimal ist. Die folgende Skizze soll das verdeutlichen und euch gleichzeitig zeigen, wie ihr graphisch an die Lösung solcher Aufgaben gehen könnt.



Die allgemeine Regel wird bewiesen wie bei Problem 2. Allerdings sind Fallunterscheidungen erforderlich.

Ergebnis: Zuerst sind die Objekte abzufertigen, die auf der ersten Station weniger Zeit erfordern als auf der zweiten ($a_i \leqq b_i$). Diese werden nach der ersten Abfertigungszeit geordnet, wobei mit der kleinsten Zeit begonnen wird ($a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots$).

Die anderen Objekte werden nach der zweiten Abfertigungszeit geordnet, wobei mit der größten Zeit begonnen wird ($\ldots \geqq b_{n-1} \geqq b_n$). Beide Stationen werden in gleicher Reihenfolge durchlaufen.

Im Gegensatz zu Problem 1 und 2 erfaßt diese Regel nur einige, aber nicht alle optimalen Lösungen. Vergleiche mit den Beispielen!

Ch. Bandt/F. Käpnick

Funktionen als „Dolmetscher“

Der Schüler A beschäftigte sich im wesentlichen mit der Addition reeller Zahlen, sein Freund M dagegen multiplizierte positive reelle Zahlen. Beide rechneten unabhängig voneinander. A konnte die Lösung der Aufgabe seines Freundes M nicht kontrollieren, und auch M sah sich außerstande, die Rechnungen von A zu verfolgen. Beide rechneten gewissermaßen in verschiedenen Sprachen, A in einer „Additionssprache“ und M in einer „Multiplikationssprache“.

Und dennoch zeigten sich bei genauerem Hinsehen auffällige Übereinstimmungen. Die in der „Multiplikationssprache“ geschriebene wahre Aussage

„(1_M) Für alle $x_1;\ x_2;\ x_3 \in P^+$ gilt $(x_1 \cdot x_3):(x_2 \cdot x_3) = x_1 : x_2$“ geht in die ebenfalls wahre Aussage der „Additionssprache“

„(1_A) Für alle $y_1;\ y_2;\ y_3 \in P$ gilt $(y_1+y_3)-(y_2+y_3) = y_1 - y_2$[1]“

über, wenn man das Operationszeichen „$\cdot$“ formal durch das Operationszeichen „$+$“, das Operationszeichen „$:$“ durch das Operationszeichen „$-$“ und $x_1;\ x_2;\ x_3$ durch $y_1;\ y_2;\ y_3$ ersetzt.

Die beiden Freunde fanden weitere derartige Aussagen: M nannte die Aussage

(2_M) Für alle $x_1;\ x_2 \in P^+$ gilt $x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$

Dazu konnte A die Aussage

(2_A) Für alle $y_1;\ y_2 \in P$ gilt $y_1 + y_2 = y_2 + y_1$

formulieren.

Nun gab A eine wahre Aussage vor:

(3_A) Für alle $y_1;\ y_2;\ y_3 \in P$ gilt:
Aus $y_1 + y_3 = y_2 + y_3$ folgt $y_1 = y_2$

Die formale Übertragung in die „Multiplikationssprache“ lieferte die Aussage

(3_M) Für alle $x_1;\ x_2;\ x_3 \in P^+$ gilt:
Aus $x_1 \cdot x_3 = x_2 \cdot x_3$ folgt $x_1 = x_2$

„Diese Aussage ist ebenfalls wahr“, sagte M und war froh, daß die Zahl Null kein Element von P^+ ist.

„In beiden Sprachen scheinen gleiche grammatikalische Regeln zu gelten“, meinte A. „Man müßte ein Wörterbuch aufstellen, welchem man für jedes ‚Wort‘ der ‚Additionssprache‘ seine ‚Bedeutung‘ in der Multiplikationssprache‘ entnehmen kann“, erwiderte M.

Dabei ist es natürlich völlig gleichgültig, ob man für die Kennzeichnung der „Wörter“ z. B. in der „Additionssprache“ die Variable x oder die Variable y nutzt.

Es müßte also eine Funktion $f\colon P \to P^+$ konstruiert werden, die jedem $x \in P$ ein $y \in P^+$ und jeder Summe $x_1 + x_2$ der in „Additionssprache“ das Produkt $y_1 \cdot y_2$ der in „Multiplikationssprache“ zuordnet, d. h., für die gilt:

(I) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$
für alle $x_1;\ x_2 \in P$

„Eine solche Funktion ist leicht anzugeben“, sagte M, „man hat dazu nur jeder reellen Zahl x die Zahl 1 als Funktionswert zuzuordnen, d. h., $f(x) = 1$ für alle $x \in P$ zu setzen.“

Tatsächlich ist die Bedingung (I) für diese Funktion erfüllt. Um diesen einfachen und wenig nützlichen Fall jedoch auszuschließen, schlägt A vor:

„Wir wollen als zweite Bedingung vorgeben, daß f an der Stelle $x = 1$ den Funktionswert $f(1) = a$ besitzen soll“.

(II) $f(1) = a$ mit $a \in P$ und $a > 1$

Zunächst nutzen die beiden Freunde beim Aufstellen des Wörterbuches diese beiden Bedingungen kräftig aus:

Das Wörterbuch entsteht

- Setzt man in (I) $x_2 = 0$, so folgt $f(x_1) = f(x_1) \cdot f(0)$, also gilt, da $f(x_1)$ nicht gleich Null sein kann, $f(0) = 1$ — $0 \to 1$, $1 \to a$
- Setzt man in (I) $x_1 = x_2 = 1$, so folgt wegen (II) $f(2) = f(1) \cdot f(1) = a \cdot a = a^2$ — $2 \to a^2$
- Setzt man in (I) $x_1 = 2$ und $x_2 = 1$, so folgt $f(3) = f(2) \cdot f(1) = a^2 \cdot a = a^3$ — $3 \to a^3$

Beide Freunde vermuten nun, daß jeder natürlichen Zahl n als Funktionswert a^n zugeordnet wird. — $n \to a^n$

A behauptet, er könne dies (durch vollständige Induktion) beweisen: „Angenommen, wir hätten, in der oben angegebenen Weise fortfahrend, bis zu einer natürlichen Zahl k gezeigt, daß $f(k) = a^k$ gilt. Dann kann man zeigen, daß dem unmittelbaren Nachfolger $k+1$ von k der Funktionswert a^{k+1} zugeordnet wird.

Setzt man nämlich in (I) $x_1 = k$ und $x_2 = 1$, so folgt
$f(x_1 + x_2) = f(k+1) = f(k) \cdot f(1)$
$= a^k \cdot a = a^{k+1}$

Die Eigenschaft, daß einer beliebigen natürlichen Zahl k durch f die Potenz a^k zugeordnet wird, „vererbt“ sich also stets auf den Nachfolger von k.“

Damit weiß man, wie *natürliche Zahlen* von der „Additionssprache“ in die „Multiplikationssprache“ übersetzt werden. Jeder natürlichen Zahl n wird die positive reelle Zahl a^n als Funktionswert zugeordnet. Offenbar gilt dies auch für die Zahl 0, denn es ist ja $f(0) = a^0 = 1$.

Setzt man in (I) $x_2 = -x_1$, so folgt

$f(0) = f(x_1) \cdot f(-x_1)$, also gilt $f(-x_1) = \frac{1}{f(x_1)}$.

Mit Hilfe dieser Beziehung kann man noch eine weitere Funktionalgleichung gewinnen, welcher die Funktion f genügen muß:

Aus $f(x_1 - x_2) = f[x_1 + (-x_2)] =$
$= f(x_1) \cdot f(-x_2) = f(x_1) \cdot \frac{1}{f(x_2)}$ folgt

(I_*) $f(x_1 - x_2) = f(x_1) : f(x_2)$
für alle $x_1;\ x_2 \in P$.

Ist nun m eine natürliche Zahl, so ergibt sich $f(-m) = \frac{1}{f(m)} = \frac{1}{a^m} = a^{-m}$, also kann „$-m \to a^{-m}$“ in das Wörterbuch eingetragen werden. Nachdem man durch diese Überlegung die Funktionswerte aller *ganzzahligen Argumente* ermittelt hatte, untersuchte man *rationale Zahlen* der „Additionssprache“ und ihre Bilder:

Die Freunde vermuten, daß jeder rationalen Zahl $\frac{g}{h}$ ($g \in G;\ h \neq 0$) durch f die Potenz $a^{\frac{g}{h}}$ zugeordnet wird.

Zunächst gilt $f(1) = f\left(\frac{h}{h}\right) = f\left(h \cdot \frac{1}{h}\right) = \left[f\left(\frac{1}{h}\right)\right]^h$ wegen (I), also folgt unter Nutzung von $f(1) = a^{(II)}$ die Beziehung $f\left(\frac{1}{h}\right) = a^{\frac{1}{h}}$.

Hieraus und aus (I) erhält man
$f\left(\frac{g}{h}\right) = \left[f\left(\frac{1}{h}\right)\right]^g = \left(a^{\frac{1}{h}}\right)^g = a^{\frac{g}{h}}$.

In das Wörterbuch kann also eingetragen werden: $\frac{g}{h} \to a^{\frac{g}{h}}$.

„Wir wissen allerdings noch nicht, wie die irrationale Zahl π aus der „Additionssprache“ in die „Multiplikationssprache“ übersetzt wird“, meint A und hofft, daß man als Bild von π die Potenz a^π erhält.

Da es den beiden Freunden jedoch nicht gelingt, dies nachzuweisen, mußten sie sich bei ihrem Mathematiklehrer Hilfe erbitten. Er bestätigte zunächst ihre Vermutung, daß auch jeder irrationalen Zahl – und damit jeder reellen Zahl x – durch f als Bild a^x zugeordnet wird. Allerdings kommt man beim Nachweis dieser Behauptung mit den Bedingungen (I) und (II) allein nicht aus. Man muß noch verlangen, daß f eine „vernünftige“ Funktion ist, deren Bild weder „Sprünge“ noch „Lücken“ aufweist, f muß eine *stetige Funktion* sein. Diese Forderung wird durch

(III) $f(\lim_{x \to x_0} x) = \lim_{x \to x_0} f(x)$ für alle $x \in P$

beschrieben. Sie besagt, daß an jeder beliebigen Stelle x_0 des Definitionsbereiches von f gelten soll: Strebt eine Folge von Argumenten $x_1;\ x_2;\ \ldots,\ x_n;\ \ldots$ gegen die reelle Zahl x_0, so strebt die Folge der zugehörigen Funktionswerte gegen $f(x_0)$. Mit Hilfe von (I), (II) und (III) kann man zeigen, daß auch für jedes irrationale x gilt $f(x) = a^x$.

Dieser Nachweis ist nicht so elementar wie die oben durchgeführten Überlegungen. Dies liegt daran, daß man reelle Zahlen und Rechenoperationen in der Menge der reellen Zahlen nicht auf so einfache Weise mit Hilfe rationaler Zahlen definieren kann wie etwa die gebrochenen Zahlen unter Nutzung der natürlichen. Im Lehrbuch für die Klasse 9 wird auf Seite 139 angedeutet, wie man Potenzen mit irrationalen Exponenten – also z. B. a^{π} – festlegen könnte.

Damit hatten die beiden Freunde A und M mit der Exponentialfunktion $y=f(x)=a^x$ einen „Dolmetscher" gefunden, der die Ausdrücke der „Additionssprache" in solche der „Multiplikationssprache" übersetzen konnte.

„Es gibt unendlich viele ‚Dolmetscher'", meinte A, „wir können ja das Bild der Zahl 1, die reelle Zahl a, noch frei wählen. Für $a=10$ erhalten wir z. B. die Exponentialfunktion $y=10^x$, deren Bild wir im Mathematikunterricht gezeichnet haben."

Daß die Schar der Exponentialfunktionen $y=f(x)=a^x$ ($a \in P$; $a>1$) die Eigenschaft (I) besitzt, kann man auch unmittelbar bestätigen:

Es gilt $f(x_1+x_2)=a^{x_1+x_2}=a^{x_1}\cdot a^{x_2}$
$=f(x_1)\cdot f(x_2)$ für alle $x_1; x_2 \in P$.

Interessant ist die Frage, ob es außer den Exponentialfunktionen noch weitere Funktionen gibt, welche die Bedingungen (I), (II) und (III) erfüllen. Daß dies nicht der Fall ist, zeigen die Überlegungen bei der Konstruktion des Wörterbuches: (I), (II) und (III) sind nicht nur hinreichende sondern auch notwendige Bedingungen dafür, daß f eine Exponentialfunktion ist.

„Die Funktion $y=10^x$ ist eineindeutig, sie besitzt also mit $y=\log_{10}x$ eine inverse Funktion. Damit können wir auch jedem Ausdruck der ‚Multiplikationssprache' eindeutig einen Ausdruck der ‚Additionssprache' zuordnen", ergänzte M. A und M konnten also auch folgendes „Wörterbuch" aufstellen:

„Multiplikationssprache" (Elemente aus P^+)	„Additionssprache" (Elemente aus P)
0,001	-3
0,01	-2
0,1	-1
1	0
10	1
100	2
1000	3
x	$\log_{10}x$

Und sie rechneten: Aufgaben in der

„Multiplikationssprache"		„Additionssprache"
0,01	$\longleftrightarrow$	-2
$\cdot$		$+$
1000	$\longleftrightarrow$	3
=		=
10	$\longleftrightarrow$	1

Für die Funktion $y=g(x)=\log_a x$ gilt bekanntlich für alle $x_1; x_2 \in P^+$ die Beziehung $\log_a(x_1\cdot x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2$

Die Funktion g erfüllt also die Gleichung

(I′) $\quad g(x_1\cdot x_2)=g(x_1)+g(x_2)$
für alle $x_1; x_2 \in P^+$

Man kann nun sogar allgemein beweisen: Gilt für eine Funktion f die Gleichung (I), so ist für ihre inverse Funktion f^{-1} (falls diese existiert) die Gleichung (I′) erfüllt.

Dieser Beweis fiel den beiden Freunden nicht schwer:

Mit $y_1=f(x_1)$ und $y_2=f(x_2)$ gilt $x_1=f^{-1}(y_1)$ und $x_2=f^{-1}(y_2)$, also folgt aus $y_1\cdot y_2=$ $=f(x_1)\cdot f(x_2)=f(x_1+x_2)$ sofort $f^{-1}(y_1\cdot y_2)=$ $f^{-1}[f(x_1+x_2)]=x_1+x_2=f^{-1}(y_1)+f^{-1}(y_2)$.

Die Eigenschaften (I) [bzw. (I′)] sagen aus: Es ist gleich, ob man die Argumente zunächst multipliziert (bzw. addiert) und dann das Produkt (bzw. Summe) abbildet („übersetzt") oder ob man zunächst die Argumente einzeln abbildet und dann die Bilder addiert (bzw. multipliziert). Abbildungen mit dieser Eigenschaft heißen *verknüpfungstreu*.

Jeder Rechnung von M entspricht eine Rechnung von A und umgekehrt; sie unterscheiden sich nur in der Art der Bezeichnungen. So, wie wir früher gezeigt haben, daß mit (I) auch (I_*) gilt, ist nun mit (I′) gleichzeitig (I'_*) erfüllt:

(I'_*) $\quad f^{-1}\left(\frac{y_1}{y_2}\right)=f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y_2)$ für alle $y_1; y_2 \in P^+$

Vertrauter kommt uns diese Beziehung vor, wenn wir statt f^{-1} die Logarithmusfunktion direkt hinschreiben:

$\log_a\frac{y_1}{y_2}=\log_a y_1-\log_a y_2$ für alle $y_1; y_2 \in P^+$.

Nun waren A und M viele Zusammenhänge klar geworden:

Jedem $x \in P^+$ wird durch das „Wörterbuch", das ja nichts anderes ist als ein Ausschnitt aus einer Logarithmentafel, genau eine Zahl $y \in P$ zugeordnet. Umgekehrt gehört zu jedem $y \in P$ genau eine positive reelle Zahl x. Der „Dolmetscher" $\log_a$ bildet also die Menge der positiven reellen Zahlen eineindeutig auf die Menge der reellen Zahlen ab.

Es ist nun nicht schwierig, den eingangs genannten Zusammenhang zwischen (1_M) und (1_A) zu erklären:

Aus (1_M) folgt wegen
$\log_a[(x_1\cdot x_3):(x_2\cdot x_3)]=\log_a(x_1:x_2)$
$\log_a(x_1\cdot x_3)-\log_a(x_2\cdot x_3)=\log_a x_1-\log_a x_2$
$(\log_a x_1+\log_a x_3)-(\log_a x_2+\log_a x_3)$
$=\log_a x_1-\log_a x_2$ die Beziehung
$(1_A)(y_1+y_3)-(y_2+y_3)=y_1-y_2$

Man beweise auch die angedeuteten Zusammenhänge zwischen (2_M) und (2_A) und zwischen (3_M) und (3_A)!

Man kann sich weiter überlegen, wie die Operation des Potenzierens aus der „Multiplikationssprache" in die „Additionssprache" übertragen werden muß:

Wegen $\log_a x^s=s\log_a x=s\cdot y$ gilt:

Jeder Potenz x^s mit beliebigem reellen Exponenten s der „Multiplikationssprache" wird das Produkt $s\cdot y$ (mit $y=\log_a x$) in der „Additionssprache") zugeordnet.

Die beiden Freunde hatten nun Spaß daran, ihr „Wörterbuch" auszubauen. Tragt selbst fehlende „Vokabeln" ein!

„Multiplikationssprache" (Elemente aus P^+)	„Additionssprache" (Elemente aus P)
$x\cdot 1=x$	$\lg x+\lg 1=\lg x$
$x\cdot x^{-1}=1$	$\lg x+(-\lg x)=0$
x_2	…
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\lg x$
x^3	…
	$7\cdot\lg x$
	x
	$n\cdot m\cdot\lg x$
$\sqrt[3]{x^2}$	…
$\sqrt[4]{x_1^7}=\frac{x_2^2}{5}$	$\frac{7}{4}\lg x_1=2\cdot\lg x_2-\lg 5$
…	$\lg x_1-\left(\frac{1}{2}\cdot\lg x_2+\lg x_3\right)$
$\sqrt{\frac{x_1\cdot x_2}{x_3{}^k}}$	

Die erste Zeile dieses „erweiterten Wörterbuches" macht deutlich: Das neutrale Element der Multiplikation positiver reeller Zahlen, die Zahl 1, wird dem neutralen Element der Addition reeller Zahlen, der Zahl 0, zugeordnet. Die durch die Logarithmusfunktion festgelegte Abbildung *„respektiert" die neutralen Elemente*.

Sowohl die positiven reellen Zahlen als auch die reellen Zahlen sind durch eine „Größer-Relation" geordnet. Daß diese Ordnung bei der „Übersetzung" erhalten bleibt, kann man bereits an der oben erwähnten graphischen Darstellung erkennen. Für alle positiven reellen Zahlen $x_1; x_2$ gilt: Aus $x_1<x_2$ folgt $\lg x_1<\lg x_2$. Die durch die Logarithmusfunktion bewirkte Abbildung ist *ordnungstreu*.

Eine weitere Eigenschaft dieser Abbildung wird ebenfalls bereits an der graphischen Darstellung deutlich, die *Umgebungstreue*. Jede Umgebung einer Zahl x wird auf eine Umgebung ihres Bildes $\lg x$ abgebildet, umgekehrt entspricht jeder Umgebung von $\lg x$ eine Umgebung von x. Dies bedeutet nichts anderes, als daß „benachbarte" Zahlen aus P^+ auf „benachbarte" Zahlen in P abgebildet werden.

So werden z. B. alle Zahlen x, die in dem Intervall $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$, also in einer Umgebung von 1 mit dem Radius $\frac{1}{2}$, liegen, für die also $|1-x|<\frac{1}{2}$ gilt, auf eine Umgebung von 0 abgebildet; für alle Bilder $\lg x$ gilt $|0-\lg x|<\left|\lg\frac{1}{2}\right|$.

Man kann sagen: Die beiden Gebilde $[P^+; \cdot; <]$ und $[P; +; <]$ unterscheiden sich offenbar nur durch die Bezeichnung, sie besitzen die gleiche „Struktur", man sagt auch, sie sind zueinander isomorph.

Daß Rechnungen in einer „Sprache" ebensogut stellvertretend in der anderen ausgeführt werden können, macht man sich auch beim Arbeiten mit dem Rechenstab zunutze. Denkt darüber nach!

P. Göthner/H. Kästner

Muhammad ibn Musa al-Huwarizmi

Leseprobe aus: „Wurzel", Jena

Die Flucht des Propheten Mohammad, des Begründers des Islam, im Jahre 622 unserer Zeitrechnung aus seiner Geburtsstadt Mekka, wo er wirkte, nach Medina – Städte im heutigen Saudi-Arabien – ist der Beginn des ungewöhnlichen raschen Aufstiegs der arabischen Welt.

Umgeben von Ägyptern, Syrern, Babyloniern und Persern waren die Bewohner der arabischen Halbinsel nur in ihren Randgebieten von den auf- und niedergehenden Kulturen ihrer Nachbarn beeinflußt worden, während das Innere ihres Landes, das Wüstencharakter zeigt, niemals von diesen Vorgängen berührt worden war.

Hier lebten die Bewohner bis zu dieser Zeit – dem Jahre Eins des heutigen mohammedanischen Kalenders – in primitiven Verhältnissen. Als aber Mohammad im Jahre 632, also 10 Jahre nach seiner Flucht, starb, hatte sein Land bereits starke Machtpositionen aufgebaut. Mohammads Nachfolger – die Kalifen – setzten das von ihm begonnene Werk fort. Sie verbreiteten seine Glaubenssätze mit Feuer und Schwert. Und nicht ganz 100 Jahre genügten, um nicht nur alle Randstaaten zu unterwerfen, sondern auch längs der Küste bis nach Spanien vorzudringen und auch Spanien zum größten Teil zu erobern. Bereits 641 waren die Mohammedaner unter der grünen Fahne ihres Propheten in Ägypten eingedrungen.

Die Eroberer verwüsteten die Universitätsgebäude in Alexandria und verbrannten zum größten Teil die kostbaren Sammlungen, die hier in über 970jähriger Arbeit gesammelt worden waren. Bei diesen wie fast bei allen ihren Siegeszügen trafen die Eroberer auf Völker, die eine höhere Kultur hatten als sie selbst. Sie mußten bald erkennen, daß das Beherrschen solcher Länder und die damit verbundene Ausübung der Verwaltungsfunktionen, die Bewältigung der auftretenden Verkehrsprobleme ob zu Lande oder zu Wasser ohne die Benutzung der bereits vorhandenen Erkenntnisse nicht möglich war. Da sie über Kräfte, die das vermochten, nicht verfügten, bedienten sie sich griechischer, indischer, persischer, auch christlicher und jüdischer Gelehrter, wobei sie ihnen gegenüber, was die religiösen Auffassungen betraf, zunächst tolerant waren.

Ihr besonderes Interesse galt zunächst den mathematischen und astronomischen Erkenntnissen, weil sie nicht nur für die Lösung der ökonomischen Aufgaben notwendig waren, sondern auch zum Erfüllen ihrer religiösen Pflichten, wie sie ihre heilige Schrift, der Koran, vorschreibt. Der Koran enthält z. B. verwickelte Angaben über das Erbrecht, denen ohne mathematische Berechnungen nicht entsprochen werden konnte. Der Koran verlangt auch, daß der gläubige Moslems in seinen täglichen Gebeten sein Antlitz nach Mekka gewandt sich verneigt. Also mußte diese Richtung festgelegt werden. Um dem Rechnung zu tragen, ist in jeder Moschee eine Nische eingebaut, die diese Richtung angibt. Gleichzeitig mit dem Studium der mathematischen und astronomischen Erkenntnisse setzte eine lebhafte Übersetzungstätigkeit der entsprechenden griechischen, lateinischen und indischen Werke in das Arabische ein, das bald in den von den Arabern besetzten Ländern Verständigungsmittel wurde. Nur durch diese Übersetzungen haben wir heute von den Werken von Apollinius, Archimedes, Euklid, Ptolemäus und anderer Wissenschaftler Kenntnis, da die Originale meist verloren gegangen sind oder nur Bruchstücke noch existieren. Von Bedeutung für die Entwicklung der Wissenschaften ist auch, daß in den von Arabern eroberten Ländern bald ein Wohlstand der herrschenden Schicht eintrat und große Paläste, herrliche Moscheen, große Bibliotheken und ausgedehnte Bewässerungsanlagen gebaut wurden.

Im 8. Jahrhundert tauchten auch arabische Übersetzer und Wissenschaftler von Bedeutung auf. Der bekannteste Mathematiker ist Muhammad ibn Musa mit dem Beinamen al-Huwarizmi, dem Namen seiner Geburtsstadt, dem heutigen Chiwa in Usbekistan. Er lebte im ersten Jahrviertel des 9. Jahrhunderts in Bagdad, das sich damals zu einem bedeutenden wissenschaftlichen Zentrum entwickelte. Sein wissenschaftliches Hauptwerk ist in einer lateinischen Übersetzung, die aus dem 13. Jahrhundert stammt, erhalten geblieben und wird in der Universität Cambridge aufbewahrt.

Der Titel der Übersetzung lautet: Algorithmi de numero Indorum (Vom Algorithmus der Zahl der Inder), woraus der in der Mathematik gebräuchliche Ausdruck „Algorithmus" hergeleitet ist.

Durch dieses Werk wurde Westeuropa mit dem indischen System der Zahlenbereiche und dem dezimalen Stellenwertsystem bekannt. Es enthält auch eine eingehende Behandlung der Rechenoperationen. Die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division ganzer Zahlen werden an zahlreichen Beispielen erläutert. Auch die Behandlung von Brüchen erfolgt, ohne daß z. B. die für die Addition und Subtraktion notwendige Auffindung des Hauptnenners erfolgt.

In der Bibliothek der Universität Oxford wird eine arabische Handschrift der Algebra von Muhammad ibn Musa aufbewahrt. Sie ist eine Art Leitfaden, der die Lösung von Aufgaben aus dem täglichen Leben und des Erbrechts behandelt. Diese Algebra enthält die Lehre von der Lösung linearer und quadratischer Gleichungen. Da das Werk für breite Kreise gedacht ist, geht es nicht immer streng wissenschaftlich vor, aber sein Einfluß auf die Entwicklung dieses Gebietes ist groß, und es bewahrte ihn bis in die Mitte des 19. Jahrhunderts. Der Mangel an axiomatischer Fundierung unterscheidet das Werk wesentlich von der Euklidischen Geometrie.

Die lineare Gleichung $ax=b$ wird von Muhammad nach der Regel der zwei Fehler oder, wie sie auch genannt wird, der *Methode der Waagschale* behandelt. Es werden Versuchswerte e_1 und e_2 angenommen, die gegenüber dem gesuchten Wert die Fehler n_1 und n_2 aufweisen. Dabei sind die Zahlen e_1 und e_2 so zu wählen, daß e_1 einen zu großen, e_2 einen zu kleinen Wert für x liefert.

Es gilt also

$$ae_1 = b + n_1$$
$$ae_2 = b - n_2$$

oder

$$ae_1 \cdot n_2 = bn_2 + n_1 \cdot n_2$$
$$ae_2 n_1 \quad = bn_1 - n_1 n_2$$

Aus diesem Ansatz wird durch komplizierte Umformungen das Ergebnis

$$x = \frac{b}{a} = \frac{e_1 \cdot n_2 + e_2 \cdot n_1}{n_2 + n_1}$$

hergeleitet.

Ein Beispiel zeigt die Bedeutung dieses komplizierten Weges.

Vorgelegt sei die Gleichung

$$x - \frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 8.$$

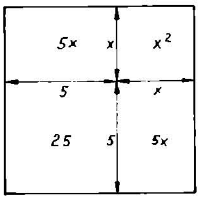
Für	$e_1 \quad = 24$
ergibt sich	$24 - 8 - 6 = 10$
und damit	$n_1 = 10 - 8 = \ 2.$
Für	$e_2 = 12$
erhält man	$12 - 4 - 3 = \ 5$
und damit	$n_2 = 8 - 5 = 3.$
Also	$x = \frac{3 \cdot 24 + 2}{3 + 2} = \frac{96}{5}$

Ziel der Rechnung ist es, das Rechnen mit Brüchen so weit wie möglich zu vermeiden.

Dem Lösen der quadratischen Gleichungen geht eine eingehende Betrachtung der hier möglichen Formen voraus.

Dabei ergeben sich folgende 4 Fälle:

1) $x^2+10x-39=0$
2) $x^2+10x+39=0$
3) $x^2-10x+16=0$
4) $x^2-10x-11=0$,



wobei die Koeffizienten so gewählt werden, daß die Lösungen positive Werte ergeben. Die Lösung der Gleichung 1 erfolgt in folgender Weise:

An das Quadrat x^2 werden zwei Rechtecke von je $5x$ in der skizzierten Weise angelegt und die erhaltene Figur zu einem Quadrat ergänzt, dessen Flächeninhalt dann $x^2+10x+25=39+25=64$ beträgt. Die Seite des so erhaltenen Quadrats ist 8, d.h. $x+5=8$, und so ergibt sich für $x=3$.

In ähnlicher Weise werden die Gleichungen 3 und 4 gelöst. Für die Gleichung 2 gibt es keine Lösung, da die Summe von Quadrat und Rechteck und einer bekannten Fläche (39) nicht Null sein kann.

Zeitgenossen von Muhammad und auch spätere arabische Mathematiker haben diesen Lösungsweg vereinfacht, insbesondere weitgehend die Fallunterscheidungen beseitigen können. Diese Behandlung der quadratischen Gleichung bildet auch die Ausgangsposition bei der Lösung der Gleichung 3. Grades, wie sie sich in dem Werk des italienischen Mathematikers Hieronimo Cardano (1501 bis 1576) findet.

Es sind auch Abhandlungen Muhammads zu geometrischen Problemen vorhanden. Sie sind aber von geringerer Bedeutung und liefern kaum Ergebnisse, die über die der Griechen hinausgehen.

O. Stamfort

Diesen Beitrag entnahmen wir der mathematischen Schülerzeitschrift „Wurzel". Sie hat sich die Aufgabe gestellt, mathematisch interessierten Schülern der Klassen 9, 10, 11, und 12 Anregungen zur außerschulischen Beschäftigung mit der Mathematik zu geben. Durch einen Preisaufgabenwettbewerb und die Veröffentlichung der Aufgaben und Lösungen von Mathematikolympiaden unterstützt sie die Vorbereitung der Schüler auf Olympiaden. Außerdem leistet sie einen Beitrag zur Vorbereitung der Schüler auf ein Mathematikstudium.

„Wurzel" wird von einem Studentenkollektiv an der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena herausgegeben und ist durch ein Abonnement beim PZV erhältlich.

(Bestell-Nr. 1633, Preis 0,20 M, erscheint monatlich)

Napoleon I. Bonaparte

Napoleon I. Bonaparte (1769 bis 1821) war 1951 und 1969 (zum 200. Geburtstag, Bild 1) auf französischen Briefmarken zu sehen. Was aber hat er mit Mathematik zu tun? Das Namenregister des Buches *Biographien bedeutender Mathematiker* (Verlag Volk und Wissen) weist die 15malige Erwähnung Napoleons aus. Das ist nicht verwunderlich, wenn man bedenkt, daß die politischen Ereignisse

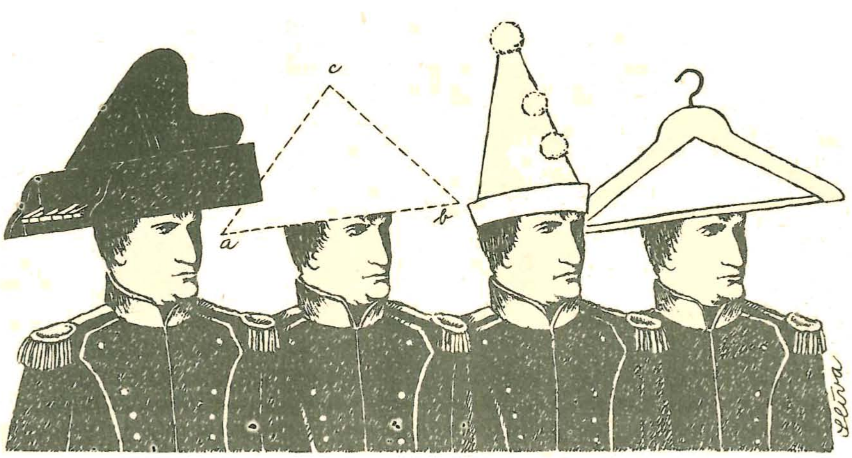
um Napoleon mehr oder weniger entscheidend die Lebensumstände aller Mathematiker der damaligen Zeit bestimmten. Liest man die Stellen nach, so erfährt man manches über engere Beziehungen Napoleons zur Mathematik, insbesondere über seine persönliche Freundschaft mit dem Mathematiker Gaspard Monge (1746 bis 1818), der als Begründer der *Darstellenden Geometrie* gilt. Monge war erster Direktor der 1794 in Paris gegründeten *École Polytechnique*, die von Napoleon sehr gefördert und zur Wirkungsstätte der bedeutendsten französischen Mathematiker des 19. Jh. wurde. 1798/99 beteiligten sich Monge und andere Wissenschaftler am Feldzug Napoleons nach Ägypten, der wegen seiner reichhaltigen wissenschaftlichen Ausbeute als „Ägyptische Expedition" in die Geschichte einging (Bild 2).

Während dieses Feldzuges fanden französische Soldaten bei Schanzarbeiten den „Stein von Rosetta", der zum Schlüssel für die Entzifferung der altägyptischen Schrift und damit auch zum Ursprung unserer heutigen Kenntnisse über die altägyptische Mathematik wurde. Die Aufnahme von Napoleon-Marken in eine mathematische Briefmarkensammlung ist aber auch schon dadurch gerechtfertigt, daß der in Heft 4/1980 als Aufgabe ▲1994▲ abgedruckte geometrische Satz von Napoleon gefunden wurde und nach ihm benannt ist.

Napoleon, der als Artillerieoffizier natürlich über eine mathematische Bildung verfügte, blieb zeitlebens ein Freund der Geometrie und ein Hobby-Mathematiker.

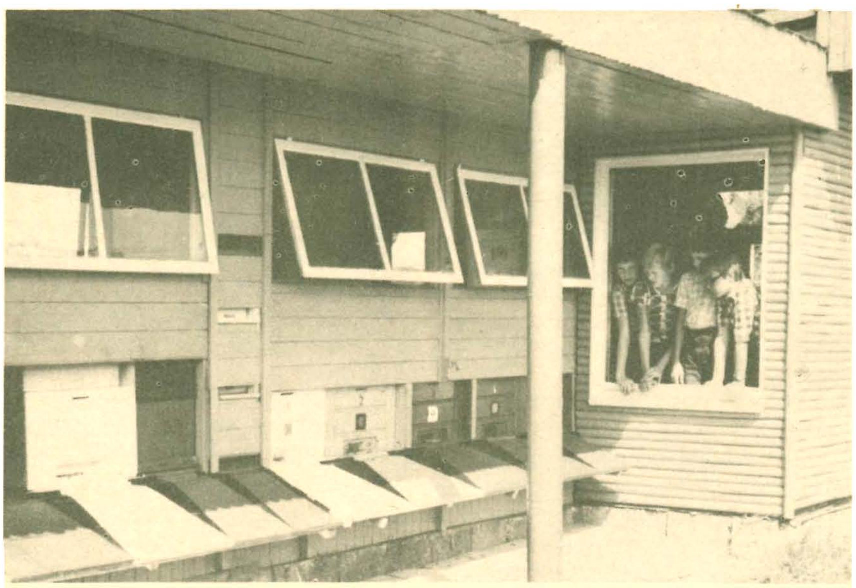
P. Schreiber

BONAPART(I)E von Jiří Slíva (aus Magazin, Berlin)



Die großen Leistungen der kleinen Biene

In unserer Republik bestehen an über 100 polytechnischen Oberschulen Arbeitsgemeinschaften *Junge Imker*. Eine dieser Arbeitsgemeinschaften wollen wir euch heute vorstellen.
Es ist die Arbeitsgemeinschaft *Junge Imker* an der Oberschule *Grete Walter* in Georgenthal (siehe Fotos).
Schon seit 1973 besteht diese Arbeitsgemeinschaft und zählt elf Mitglieder aus Klassen 5 bis 10. Ihr Lehrbienenstand besteht aus neun Völkern und steht im Schulgarten mitten zwischen Beerensträuchern, Obstbäumen und verschiedenen Weiden, die im zeitigen Frühjahr den Bienen die erste Nahrung geben. Ihre Bienenbeuten stehen in einem Haus oder in Einzelstellung, meist am Rande des Schulgartens.
Die *Jungen Imker* stellen die Rähmchen für die Waben her, verrichten notwendige Pflegearbeiten, damit die Völker stark werden und gesund bleiben. Sie schleudern den Honig aus den Waben und füttern im August und September ihre Bienen mit einer starken Zuckerwasserlösung für die kalten Wintermonate. Außerdem müssen in jedem Jahr viele pollen- und nektarspendende Blumen gesät und gepflanzt werden. Dazu gehört besonders auch das Schneiden, Stecken und Verpflanzen von Weiden; denn der Pollen ist ein sehr eiweißhaltiges Bienenfutter, und der Nektar der Blüten wird von den Bienen unter Zusatz von Fermenten zu dem wohlschmeckenden Honig verarbeitet.
Daß zu diesen praktischen Tätigkeiten auch noch eine Menge Theorie gehört, könnt ihr euch sicher vorstellen. Einige Hinweise über die Bienen mögen euer Interesse und Verständnis für diese sinnvolle Freizeitbeschäftigung wecken. Diese folgenden Angaben sind numeriert, weil sie dann in den anschließenden Aufgaben mit verwendet werden. Das geschieht dort durch in Klammer gesetzte Zahlen, die mit den Nummern in den Hinweisen übereinstimmen.



Wußtest du schon?

1. 1 kg Honig entsteht aus etwa 3 kg Nektar.
2. 1 Bienenvolk verzehrt im Jahr etwa 45 kg Honig selbst.
3. Für die Abgabe von 1 kg Honig bekommt der Imker von den staatlichen Aufkaufstellen 8,00 M vergütet.
4. Eine Blüte enthält etwa 0,0005 g Nektar.
5. Die Honigblase der Arbeitsbiene kann 50 bis 60 mm^3 Nektar aufnehmen; dies entspricht etwa 0,05 g.
6. Eine Biene bringt bei einem Flug den Pollen von 100 Blüten ein, der etwa 0,02 g wiegt. An einem Tag fliegt eine Biene etwa 12mal aus.
7. Ein Bienenvolk trägt in einem Sommer im Durchschnitt 190 kg Nektar, rd. 35 kg Pollen und 25 l Wasser ein.
8. Die Tagesstrecke einer Arbeitsbiene (Sammlerin) kann bis zu 100 km betragen.
9. Eine Honigbiene fliegt etwa 22 bis 23 $\frac{m}{s}$.
10. Die Honigbienen müssen 30000 „Flugstunden" absolvieren, um 1 kg Honig zu produzieren.
11. Die AG *Junge Imker* der OS *Grete Walter* Georgenthal betreut zur Zeit 9 Bienenvölker.
12. Ein Bienenvolk setzt sich im Sommer aus folgender Anzahl von Einzelwesen zusammen:
1 Königin (Weisel), 200 bis 2000 Drohnen, etwa 50000 Arbeiterinnen, 10000 Larven.
13. Zur Zeit gibt es in der DDR 34400 Imker im VKSK.
14. Zur Zeit gibt es in der DDR ca. 460000 Bienenvölker.
15. Die Masse einer Arbeitsbiene beträgt ca. 0,08 g.

Aufgaben

▲1.1▲ Wieviel kg Honig erzeugt ein Volk in einem Jahr? (7; 1)

▲1.2▲ Wieviel kg Honig bleiben, nach Abzug des Eigenverbrauchs durch das Volk, etwa für den Imker übrig? (2)

▲1.3▲ Ermittle die prozentualen Anteile für den Eigenverbrauch des Volkes und des geschleuderten Honigs für den Imker!

▲2▲ Wieviel Blüten müssen besucht werden, um 1 kg Honig zu erzeugen? (4; 1)

▲3▲ In der DDR halten die Imker etwa 460000 Völker.

▲3.1▲ Wieviel t Honig können damit im Durchschnitt produziert werden? (Verwende das Ergebnis der Aufgabe 1.2!)

▲3.2▲ In der DDR wird bei normalem Witterungsverlauf mit einem durchschnittlichen Honigertrag von 10 kg pro Volk und Jahr gerechnet.
Welches Produktionsergebnis in t ergibt das für unser Land?

▲4.1▲ Welche Last in kg muß ein Volk in einem Sommer im Durchschnitt bewältigen? (7)

▲4.2▲ Im Bezirk Erfurt bestehen 12 Arbeitsgemeinschaften *Junge Imker* mit 98 Mitgliedern, die 41 Bienenvölker betreuen. Berechne die Lasten, die diese Völker in einem Sommer bewältigen müssen! (7)

▲5▲ Zum Frühstück ein frisches Brötchen mit Butter und Bienenhonig – das ist schon ein Leckerbissen. Im Durchschnitt werden pro Kopf der Bevölkerung in der DDR jährlich 320 g Bienenhonig verbraucht.

▲5.1▲ Welcher Bedarf entsteht bei 16700000 Einwohnern unseres Landes dadurch in t?

▲5.2▲ Vergleiche deine Lösung mit der tatsächlichen Produktionsmenge der Imker der DDR, die sie in jedem Jahr erzielen (s. Ergebnis von Aufg. ▲3.2▲). Wieviel t Bienenhonig müssen zur restlosen Deckung des Bevölkerungsbedarfs importiert werden?

▲6▲ Mit den Angaben aus dem Hinweis (14) sowie aus Aufgabe ▲5▲ kannst du errechnen, welche Anzahl von DDR-Bürgern von einem Bienenvolk mit Honig versorgt werden können.

▲7▲ Die AG *Junge Imker* der OS *Grete Walter* Georgenthal konnte 1977 die Zahl ihrer Völker auf 9 erweitern. Die Mitglieder schleuderten 86 kg Bienenhonig. 70 kg verkauften sie davon an den staatlichen Handel. Welche Einnahme erzielte die AG vom Honigverkauf, um die Einrichtung ihres Schullehrbienenstandes zu verbessern? (3)

▲8▲ Die Sparte Imker aus Königs Wusterhausen in der Nähe von Berlin war der Initiator im sozialistischen Wettbewerb des Verbandes der Kleingärtner, Siedler und Kleintierzüchter und rief zu einem hohen Honigverkauf an den Staat auf. Sie verkauften im Durchschnitt folgende Mengen an den staatlichen Handel:
Wanderimker 17 kg je Volk,
Standimker 6 kg je Volk.

▲8.1▲ Etwa 26% aller Imker der DDR beteiligten sich an der Wanderung. Wieviel Imker wandern mit ihren Bienen? (13)

▲8.2▲ Berechne den Anteil der Wandervölker, 1980 waren es 250000, zur Gesamtzahl der Völker in Prozent! (14)

▲8.3▲ Welche Menge Bienenhonig in t hätte für den Bedarf der DDR-Bevölkerung zur Verfügung gestanden, wenn alle Imker der DDR gleiche Verkaufsergebnisse erzielt hätten wie die Imker aus Königs Wusterhausen?

▲9▲ Im Bezirk Erfurt werden mit modernsten Methoden im Kooperationsverband Thüringen-Obst auf insgesamt 8000 ha Süßkirschen, Äpfel, Pflaumen und Birnen produziert. Da 4 Völker auf einem Hektar Obstanlage reichlich zu tun haben, werden einige tausend Bienenvölker benötigt. In der Nähe sind aber nur 1650 Völker vorhanden. Deshalb müssen Wanderimker für den planmäßigen, vertraglichen Bestäubungseinsatz gewonnen werden, ihre Bienen in die Intensivobstanlagen zu stellen. Der Bieneneinsatz wird für die Bestäubung von Stein- und Kernobstsorten mit 40,00 M je Bienenvolk vergütet. Für die Transportkosten hat der Kooperationsverband 18500,00 M eingeplant.

▲9.1▲ Wieviel Bienenvölker müssen für den Bestäubungseinsatz noch zusätzlich eingesetzt werden?

▲9.2▲ Welchen Betrag muß der Kooperationsverband für diese Völker als Bestäubungsgebühren und für den Transport einplanen?

▲10▲ Eine Bienenkönigin legt im Jahr etwa 150000 Eier. In der Hauptbrutzeit sind dies etwa 2000 Eier täglich. Eine Bienenkönigin kann zwar 5 Jahre alt werden, allerdings sinkt ihre Legeleistung im dritten Jahr sehr ab, so daß der erfahrene Imker sie planmäßig nach zwei Jahren durch eine junge ersetzt. Rechnen wir nur 1500 Eier pro Tag, so entspricht diese Legeleistung der Masse des Körpers der Bienenkönigin.

▲10.1▲ Das Wievielfache der eigenen Körpermasse legt die Bienenkönigin in der Brutzeit eines Jahres an Eiern?

▲10.2▲ Wir wollen die Legeleistung einer Bienenkönigin mit der eines Huhns vergleichen. Ein Huhn wiege 1,5 kg und lege in einem Jahr 200 Eier. Ein Ei soll 60 g wiegen.

▲10.3▲ Eine Bienenkönigin kann an einem Tag soviel Eier legen, wie dies seiner Körpermasse entspricht.
Wieviel Eier müßte ein Huhn an einem Tag legen, um ein gleiches Ergebnis zu erzielen?

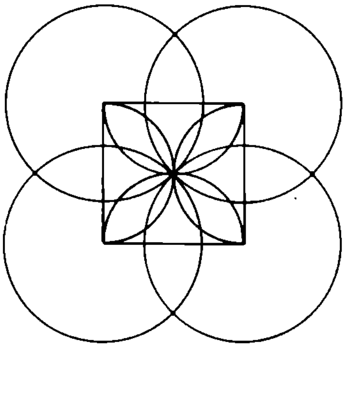
▲11▲ In Mitteleuropa sind 80% aller Blütenpflanzen auf Insektenbestäubung angewiesen. Auszählungen von Insekten auf Obstgehölzen brachten folgende Ergebnisse:
5,5% Wildbienen und Hummeln,
6,5% andere Insekten.
Der Rest, die übergroße Mehrheit der Bestäubungsleistung, wird von den Bienen erbracht.
Fertige davon ein Kreisdiagramm an, und gib an, wieviel Prozent der Auszählung auf die Bienen entfielen! Welcher Winkel ist das?

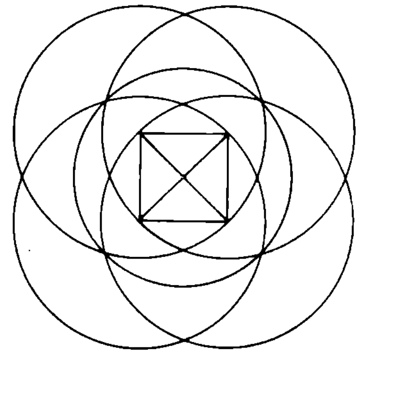
▲12▲ Berechne aus dem arithmetischen Mittel der Angaben (9) die Fluggeschwindigkeit einer Honigbiene in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, die sie natürlich nur für kurze Zeit entwickeln kann!

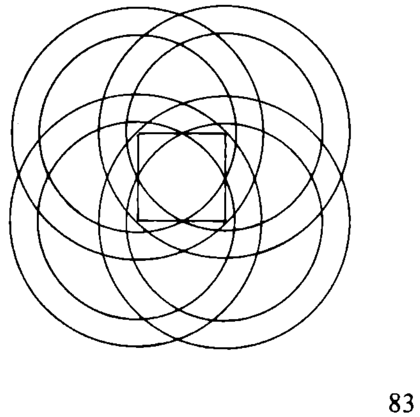
▲13▲ Eine Arbeitsbiene hat eine Körperlänge von 12 mm. Welche Strecke ergibt sich, wenn wir 50000 Arbeitsbienen aneinanderreihen würden?

▲14▲ Ein Wanderwagen mit 32 Bienenvölkern steht in einem großen Rapsschlag. Angenommen von den 50000 Arbeitsbienen je Volk sind 20% Sammlerinnen, und diese entnehmen bei einem Flug rd. 55 mg Nektar. Wieviel kg Nektar sind das bei täglich 12 Ausflügen in 15 Tagen?

Mit Zirkel und Zeichendreieck – Kreis und Quadrat







ARBEITS-GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

II. ABC-Olympiade Stadtbezirk Leipzig-Süd

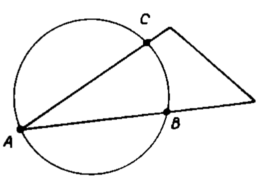
Aufgaben der Olympiadeklasse 3

▲1▲ In der untenstehenden Aufgabe sind die Zeichen „*x*" so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtige gelöste Additionsaufgabe mit der Summe 1981 entsteht. Dabei dürfen wieder nur die Grundziffern 1, 8 und 9 verwendet werden.

$$\begin{array}{r} x\,x\,x \\ +x\,x\,x \\ +x\,x\,x \\ \hline 1\,9\,8\,1 \end{array}$$

Gib ein mögliches Beispiel dafür an!
Schreibe danach die Aufgabe so, daß als erster Summand die kleinstmögliche Zahl und als dritter Summand die größtmögliche Zahl steht!

▲2▲ In der untenstehenden Figur haben das Dreieck und der Kreis die drei Punkte *A*, *B* und *C* gemeinsam. Überprüfe, ob es möglich ist, daß ein Dreieck und ein Kreis keinen, 1, 2, 4, 5, 6, 7 Punkte gemeinsam haben!



Fertige für jeden möglichen Fall mit Zirkel und Lineal eine Zeichnung an.

▲3▲ An einer Arbeitsgemeinschaft *Junger Mathematiker* einer Schule nehmen insgesamt 40 Schüler der 5., 6. und 7. Klasse teil. Der fünfte Teil der Anzahl sind Schüler der 5. Klasse. Aus der 6. Klasse nehmen acht Schüler mehr als aus der 7. Klasse teil.
Wieviel Schüler aus jeder dieser drei Klassen nehmen an der Arbeitsgemeinschaft teil?

Aufgaben der Olympiadeklasse 4

▲1▲ In der untenstehenden Aufgabe sind die Zeichen „*x*" so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe mit der Summe 1981 entsteht. Dabei dürfen wiederum nur die Grundziffern 1, 8 und 9 verwendet werden.
Gib ein mögliches Beispiel dafür an!
Schreibe danach die Aufgabe so, daß als erster Summand die kleinste Zahl und als vierter Summand die größte Zahl steht!

$$\begin{array}{r} x\,x \\ +\ \ x\,x \\ +x\,x\,x \\ +x\,x\,x \\ \hline 1\,9\,8\,1 \end{array}$$

▲2▲ Ein Holzwürfel mit der Kantenlänge 30 cm, dessen Oberfläche schwarz gefärbt ist, soll so zersägt werden, daß man kleinere Würfel mit einer Kantenlänge von je 10 cm erhält. Wieviel Würfel mit 10 cm Kantenlänge erhält man?
Wieviel dieser kleineren Würfel haben keine, eine, zwei, drei, vier schwarze Seitenflächen?

▲3▲ Zwei Bagger beladen in 15 Minuten vier Hänger mit Erde. Ein Arbeiter könnte an einem achtstündigen Arbeitstag zwei solcher Hänger mit Erde beladen.
Vergleiche die Leistungen eines Baggers und eines Arbeiters für einen achtstündigen Arbeitstag!
Wieviel Arbeiter können durch einen einzigen Bagger ersetzt werden?

M. Rehn

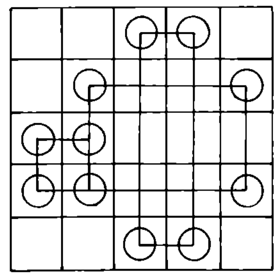
Durchführung des Wettbewerbs:
18. März 1981
Reine Arbeitszeit: 90 Minuten
Teilnehmer:
Klassenstufe 3 10 Mädchen, 12 Jungen
Klassenstufe 4 16 Mädchen, 20 Jungen
Veranstalter: Rat des Stadtbezirkes Leipzig-Süd, Abt. Volksbildung, Olympiadekomitee Mathematik

Mathematisches Spiel

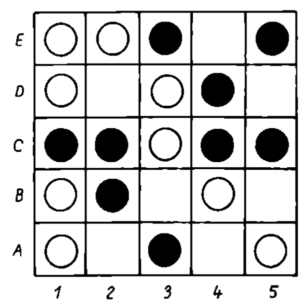
Das Spiel, mit dem wir uns beschäftigen wollen, ist ein einfaches Brettspiel, bei dem jedoch (wie bei fast allen mathematischen Spielen) etwas Spielerfahrung große Vorteile bringt.
Als Spielfeld benötigen wir ein quadratisches Brett mit 5 mal 5 Feldern. Dieses Feld kann man sich beispielsweise leicht aus einem Schachbrett durch Abdecken der restlichen Felder herstellen. Jeder der zwei Spieler benötigt 13 Steine einer Farbe. Ein Zug besteht darin, einen der eigenen Steine auf ein freies Feld zu setzen, einmal gesetzte Steine dürfen nicht mehr bewegt werden. Die Spieler ziehen abwechselnd; Aussetzen ist nicht erlaubt. Derjenige Spieler, der zuerst einen Stein so setzt, daß vier Steine seiner Farbe die Eckpunkte eines Rechtecks (mit Kanten parallel zu den Brettseiten) bilden, hat verloren. In Bild 1 sind einige solcher Rechtecke eingezeichnet. Bild 2 zeigt eine Endspielsituation. Falls Schwarz am Zuge ist, kann er seinen Stein auf *A2*, *B3* oder *A4* setzen, ohne ein Rechteck zu erhalten; ist Weiß am Zuge, so führt jeder mögliche Zug zum sofortigen Verlust für Weiß.

Bemerkenswert bei diesem Spiel ist, daß es kein Unentschieden gibt, daß also stets einer der Spieler gewinnt. Dazu überlegen wir uns, daß kein Spieler mehr als 12 Steine setzen kann, ohne dabei ein Rechteck zu erhalten. In Bild 3 sind zwei Möglichkeiten mit je 12 Steinen angegeben. Wir wollen jetzt möglichst viele Steine einer Farbe auf das Spielfeld setzen, ohne ein Rechteck zu erhalten. (Wir betrachten das Spiel als Einpersonenspiel, und unser Ziel ist es, möglichst viele Züge zu machen.) Wenn wir in eine Zeile fünf Steine legen, können wir in jede der restlichen Zeilen nur noch je einen Stein setzen, also insgesamt neun Steine.
Wollen wir in eine Zeile vier Steine legen, dann können wir in jede der anderen Zeilen

Rechtecke im Sinne des Spiels

Bild 1


Gewinnstellung für Schwarz

Bild 2


12 Steine einer Farbe auf dem Spielfeld

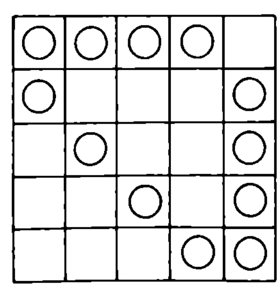
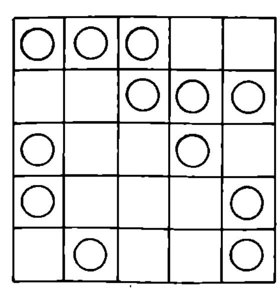
Bild 3 a)


Bild 3 b)


noch höchstens zwei Steine legen, ohne ein Rechteck zu erhalten (Bild 3a), insgesamt setzen wir dann höchstens 12 Steine.
Liegen nun in keiner Zeile vier oder fünf Steine, und wir wollen mindestens 13 Steine setzen, so müssen wir mindestens drei Zeilen mit je drei Steinen belegen. Ihr bemerkt sicher recht schnell, daß man dabei stets ein Rechteck erhält.
Da nun jeder Spieler höchstens 12 Steine setzen kann, ohne zu verlieren, muß der Spieler, der den letzten (25.) Zug macht, bestimmt verlieren. Allerdings wird das nicht sehr oft eintreten, da die meisten Partien viel eher beendet sind. Allgemeiner kann man das Spiel auch auf einem $n \times n$-Brett spielen, wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist. Wie man sich denken kann, ist auch für $n > 5$ kein Unentschieden möglich. Ist n jedoch eine gerade Zahl, so kann der Spieler, der als zweiter zieht, stets das Spiel gewinnen. Er muß nur symmetrisch zum Feldmittelpunkt spielen, also seinen Stein auf dasjenige Feld legen, das dem zuletzt gesetzten gegnerischen Stein gegenüberliegt. Da ein Unentschieden unmöglich ist, muß der erste Spieler automatisch als erster ein Rechteck erhalten.

Zum Abschluß noch einige Aufgaben zu diesem Spiel:

▲1▲ Ist es möglich, daß das Spiel auf dem 5×5-Brett erst mit dem 25. Zug beendet ist? Wenn ja, gebe man ein Beispiel an.

▲2▲ Beweist: Spielt man allein auf einem $n \times n$-Brett, so kann man für $n = 6, 7, 8$ maximal 16, 21 bzw. 24 Züge machen!

▲3▲ Wie viele Rechtecke im Sinne des Spiels gibt es, wenn alle Felder des 5×5-Bretts mit Steinen einer Farbe belegt sind?

R. Lehmann/U. Quasthoff

Die größte Primzahl

Die größte bislang bekannte Primzahl hat 13495 Stellen. Sie lautet „Zwei hoch 44497 minus eins" und wurde von zwei Computertechnikern am *Lawrence Livermoore Laboratory* in Kalifornien mit Hilfe einer Rechenmaschine vom Typ Cray-1 in rund 20 Minuten berechnet.
Primzahlen sind nur durch sich selbst teilbar. Ob es sich um eine Primzahl handelt, läßt sich herausfinden, indem eine Zahl durch alle kleineren Zahlen geteilt wird. Systematisch größte Primzahlen zu finden, ist außerordentlich zeitaufwendig. Im Jahre 1644 veröffentlichte der französische Mönch *Marin Mersenne* ein Verfahren, um wenigstens einige größere Primzahlen schneller berechnen zu können. Nach ihm wurden die Mersenne-Zahlen benannt, von denen 100 Jahre später acht als prim bestätigt worden waren. Mersenne war noch der Meinung, daß ein ganzes Leben nicht ausreiche, um zu prüfen, ob eine 15- bis 20stellige Zahl eine Primzahl sei.

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

Wir wollen auch heute wieder Lösungsvarianten zu Wettbewerbsaufgaben vorstellen, die bei uns eingegangen sind. Sie mögen unseren aktiven Teilnehmern am *alpha*-Wettbewerb Anregungen zum Lösen von Aufgaben geben.

In Heft 5/1980 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:

Ma 5 ■ 1998 Klaus und Peter gehen einkaufen. Klaus kauft 5 Bleistifte und 3 Hefte, Peter 2 Bleistifte und 10 Hefte. Wieviel Mark muß jeder von ihnen bezahlen, wenn 2 Bleistifte genausoviel kosten wie 4 Hefte und wenn Peter 11 Pfennige mehr bezahlen mußte als Klaus?

In Heft 1/1981 veröffentlichten wir dazu eine Lösung:
Wenn 2 Bleistifte genausoviel kosten wie 4 Hefte, so kostet 1 Bleistift soviel wie 2 Hefte. 5 Bleistifte kosten demnach soviel wie 10 Hefte. Klaus hätte also denselben Preis bezahlt, wenn er 13 Hefte gekauft hätte, Peter denselben Preis, wenn er 14 Hefte gekauft hätte. Deshalb kostet 1 Heft 11 Pfennige. Somit kostet 1 Bleistift 22 Pfennige. Klaus hatte
$(5 \cdot 22 + 3 \cdot 11)$ Pf $= 143$ Pf $= 1{,}43$ M
und Peter hatte
$(2 \cdot 22 + 10 \cdot 11)$ Pf $= 154$ Pf $= 1{,}54$ M
zu bezahlen.

Wir stellen nun die Lösung von *Dirk Standke* aus Fischbeck vor, der Schüler der Klasse 5b der Hans-Beimler-Oberschule in Schönhausen ist.
Dirk löste diese Aufgabe wie folgt:
Der Preis von 1 Bleistift entspricht dem Preis von 2 Heften. Es sei x der Preis (in Pfennigen) für 1 Heft, also $2x$ der Preis für 1 Bleistift; dann gilt
$10x + 3x = y$ und $4x + 10x = z$ und $z = y + 11$.
Daraus folgt weiter $13x = y$ und $14x = y + 11$, also $x = 11$.
Klaus mußte 1,43 M und Peter 1,54 M bezahlen.

Wir stellen nun die Lösung von *Annerose Schmidt* aus Bleicherode vor, die Schülerin der Klasse 5 der Friedrich-Schiller-Oberschule ist.
Annerose löste diese Aufgabe wie folgt:
Es sei a der Preis für ein Heft (in Pfennigen), also $2a$ der Preis für einen Bleistift. Dann gilt

$$5 \cdot 2a + 3a = 2 \cdot 2a + 10a - 11,$$
$$10a + 3a = 4a + 10a - 11,$$
$$13a = 14a - 11,$$
$$a = 11.$$

Klaus hatte 1,43 M, Peter 1,54 M zu bezahlen.

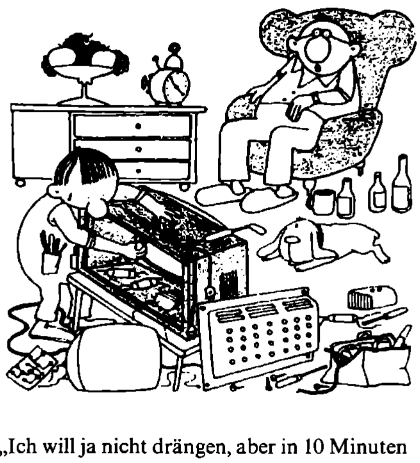
Wir stellen nun die Lösung von *Kristin Straubel* aus Schorssow vor, die Schülerin der Klasse 5 ist.
Kristin löste diese Aufgabe wie folgt:
Ein Bleistift kostet soviel wie 2 Hefte. Da Peter 11 Pf mehr bezahlte als Klaus und da 11 eine Primzahl ist, muß einer der beiden Artikel 11 Pf das Stück kosten. Der Preis für einen Bleistift stellt aber eine gerade natürliche Zahl dar. Deshalb kostet ein Heft 11 Pf, ein Bleistift 22 Pf. Klaus hatte den Betrag von 1,43 M, Peter von 1,54 M zu bezahlen.

Wir stellen nun die Lösung von *Katrin Schulz* aus Böhne vor, die Schülerin der Klasse 5b der POS Milow ist.
Katrin löste diese Aufgabe wie folgt:
Da 1 Bleistift soviel wie 2 Hefte kostet, muß der Preis für einen Bleistift (in Pfennigen) eine gerade natürliche Zahl sein. Ich stelle eine Tabelle auf.

Preis (in Pf) für

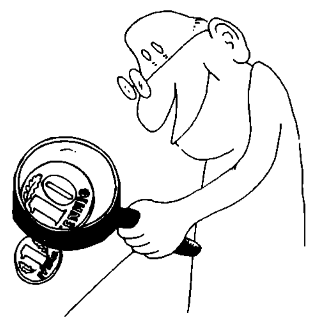
1 Bleistift	1 Heft	Klaus	Peter	Differenz
10	5	$50 + 15 = 65$	$20 + 50 = 70$	5
12	6	$60 + 18 = 78$	$24 + 60 = 84$	6
	⋮	⋮	⋮	⋮
22	11	$110 + 33 = 143$	$44 + 110 = 154$	11

Nur für die letzte Zeile der Tabelle beträgt die Differenz 11. Klaus mußte 1,43 M und Peter 1,54 M bezahlen.



„Ich will ja nicht drängen, aber in 10 Minuten beginnt das Länderspiel..." *E. Gliege*

In freien Stunden · alpha-heiter

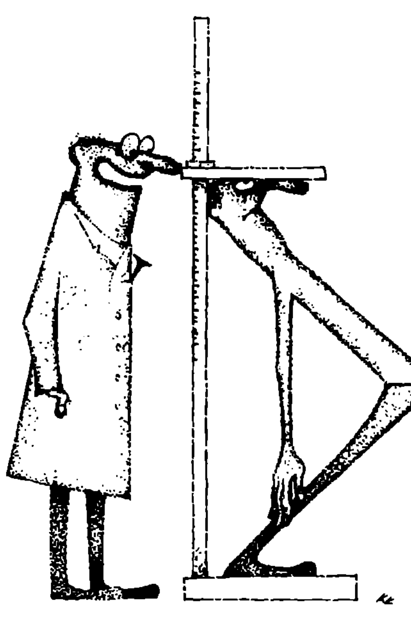


aus: NBI

Guter Rat

Als ein Mathematiklehrer von einem schwachen Schüler gefragt wurde, was er tun solle, damit er nicht sitzenbleiben müsse, antwortete dieser: Das ist nicht schwer zu beantworten.
Schreibe das Wort KLASSENZIMMER und ordne den Buchstaben die Ziffern 0 1 2 3 3 4 5 6 7 8 8 4 9 wie angegeben zu!
Nun rechne so:
1. Suche dir drei beliebige Ziffern daraus aus und schreibe damit die größtmöglichste Zahl!
2. Vertausche die vordere und die hintere Ziffer und subtrahiere diese zweite Zahl von der ersten!
3. Vom Ergebnis vertausche wieder die erste und letzte Ziffer und addiere jetzt diese Zahl zum Endergebnis dazu!
4. Zum Schluß addiere noch die Weisheitszahl 13865!
Das Endergebnis kannst du nun am Wort *Klassenzimmer* entziffern. Damit hast du eine Antwort auf deine Frage!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz



Kurt Hoppe, Berlin

„Hab ich doch gleich gesagt: einssechzig."

Kreuzzahlrätsel

waagerecht: 1. die dritte Stelle dieser Zahl ist das Produkt aus der ersten und zweiten Stelle; 4. die Zahl ist gleich der Quersumme von w9.; 6. eine Primzahl; 7. das Doppelte von s2.; 9. von vorwärts und rückwärts gelesen die gleiche Zahl; 10. das Dreifache von s11.; 12. die Quersumme dieser Zahl ist gleich der Quadratwurzel aus w4.; 14. von vorwärts und rückwärts gelesen die gleiche Zahl; 15. das Dreifache der Quadratwurzel aus s3.

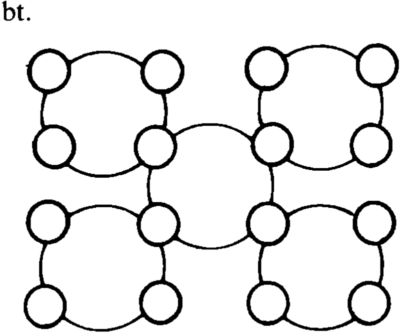
1	2	3	4	5
6		7	8	
9				
10	11	12		13
14			15	

senkrecht: 1. das Quadrat von s2.; 2. eine Kubikzahl; 3. eine Quadratzahl; 5. die Quersumme dieser Zahl ist gleich der Quersumme von s.3.; 8. die Summe aus der ersten und zweiten Stelle ist gleich der Summe aus der dritten und vierten Stelle; 11. eine Primzahl; 12. ist gleich der Quadratwurzel aus w14.; 13. die Zahl ist das Dreifache ihrer Quersumme

Ing. H. Decker, Köln

Magische Kreise

In die Kreisfelder sind die Zahlen 1 bis 16 so einzusetzen, daß sich für jeden Kreis jeweils die Summe 34 ergibt.



Geburtsjahr gesucht

Ermittle die Geburtsjahre der folgenden fünf Mathematiker!

Fachlehrer D. Knape, Jessen

```
  BURG
  BUHR
  BUSE
  BUDE
 +BUHL
 -----
  9679
```

Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern.

Silbenrätsel

Aus den folgenden Silben sind 9 Begriffe zu bilden. Die jeweils dritten Buchstaben der gefundenen Wörter von oben nach unten gelesen ergeben ein besonderes mathematisches Ereignis.

a – a – bel – di – di – falsch – hy – ko – les – me – na – o – on – or – pe – per – ra – ra – ren – sym – symp – te – ten – tha – ti – to – trie – xiom – zie.

1. Zahlenpaar in der graphischen Darstellung
2. ein Wahrheitswert
3. Gerade, die sich einer Kurve beliebig nähert, ohne sie je zu erreichen
4. bei der Spiegelung entstehende geometrische Verwandtschaft
5. ein Kegelschnitt
6. einleuchtendes, nicht beweisbares Grundgesetz
7. griechischer Mathematiker, nach dem ein bekannter Satz über rechte Winkel benannt ist
8. eine Rechenoperation
9. die Verknüpfung mathematischer Größen

Ing. D. Völzke, Greifswald

Aus dem Alltag

● Shozo Hamada, 29jähriger Lehrer aus Saitama (Japan), stellte einen neuen Weltrekord im Seilspringen auf. Er hopste in sechseinhalb Stunden 56236mal. 15 Minuten länger als sein Vorgänger.

● Sie kocht. Er denkt.
Er irrt, wenn er denkt, daß sie kocht.
Er kocht, als er merkt, daß sie denkt.
Sie kocht, da er kocht, weil sie denkt.
Nun kochen beide.

● Am Wochenende wurde unsere Bank renoviert,
Dabei ist Ihr Konto gleich mit gestrichen worden.

Die Sparkasse

● Ein Tourist nimmt sich in Berlin ein Taxi. Nach einer gewagten Fahrt fragt er: „Fahren Sie immer so unvorsichtig? Sie hätten jetzt beinahe den dritten Fußgänger angefahren!"
„Sind Sie eigentlich als Tourist hier oder als Statistiker?" fragt der Taxifahrer ungehalten zurück.

● „Guten Tag! Ich hätte gern einen Film!" „24 mal 36?"
„864. Aber warum fragen Sie?"

● Der Arzt zum Patienten: „Wieviel Stunden schlafen Sie am Tage?" „So ungefähr zwei Stunden." „Das ist aber sehr wenig." „Für mich ist es ausreichend", erwidert der Patient. „Ich schlafe ja in der Nacht zehn Stunden."

● Ein Gast, der bereits längere Zeit in der Wohnung seines Gastgebers saß, erkundigte sich bei diesem nach der Uhrzeit.
Der antwortete ihm: „Es ist 23 Uhr, 22 Minuten und 8 Sekunden."

● „Herr Doktor, Sie möchten bitte zu meiner Schwester kommen, sie hat Fieber!" „Wie hoch ist es denn?" „Zwei Treppen!"

● Eine Frau kommt in ein Fischwarengeschäft.
Es ergibt sich der folgende Dialog:

Frau: „Morgen!"
Verkäuferin: „Morgen!"
Frau: „Karpfen?"
Verkäuferin: „Morgen!"
Frau: „Morgen?"
Verkäuferin: „Morgen!"
Frau: „Morgen!"
Verkäuferin: „Morgen!"

Kryptarithmetik

```
A : B = C
:   :   +
D + B = E
---------
A — D = F
```

Elke Schwatz, 4. OS Schmalkalden, Kl. 5

```
 MATHE
   IST
  MEIN
 -----
 LEBEN
```

Jarmila Pěnčiková, Schülerin, Prag

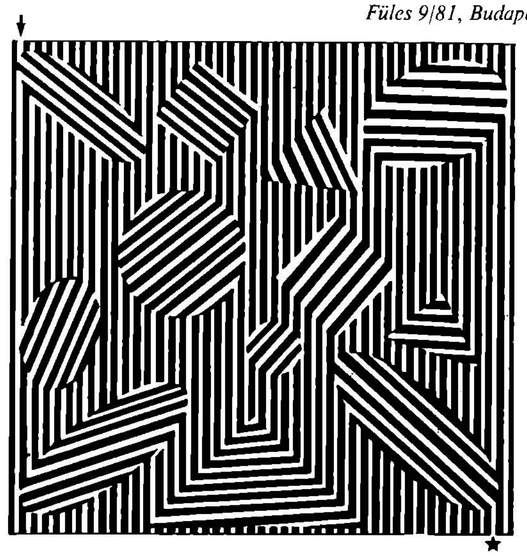
```
xxxxxx : xx = x1x1
xx1
---
 11x
  xx
 ---
  xxx
  1xx
  ---
    xx
    xx
    --
```

Es tritt keine weitere Ziffer 1 auf!

Lehrerin Regina Bricks, 2. OS Saalfeld

Irrgarten

Füles 9/81, Budapest



XXI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

1. Stufe (Schulolympiade)

Abgabetermin beim Mathematiklehrer: Ende September 1981

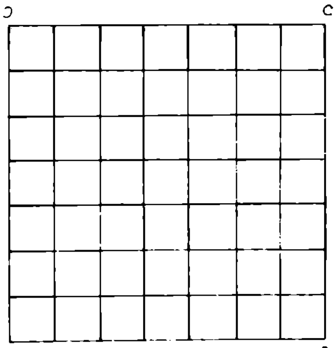
Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen. Die Lösungen und Punktbewertungstabellen werden ab Oktober 1981 veröffentlicht.

Anmerkung: $\sphericalangle \overline{ABC}$ bezeichnet im folgenden die Größe des Winkels ABC. Ferner bezeichnet AB die Strecke mit den Endpunkten A und B, während $\overline{AB}$ die Länge der Strecke AB bedeutet.

Olympiadeklasse 5

210511 Ein Quadrat $ABCD$ mit 14 cm Seitenlänge ist in 7 mal 7 gleichgroße Teilquadrate zerlegt. Aus einigen dieser Teilquadrate ist ein Streifenzug so zusammengestellt, wie das Bild zeigt. Der Streifenzug ist grau hervorgehoben.
Berechne den Umfang und den Flächeninhalt dieses Streifenzuges!

D C



A B

210512 Die Pioniergruppen der Klassen 5a, 5b und 5c einer Schule fertigten für einen Solidaritätsbasar Buchhüllen an. Dabei fertigte die Klasse 5a genau 6 Hüllen mehr als die Klasse 5b an, und die Klasse 5c schaffte das Doppelte von dem, was die Klasse 5b anfertigte. Insgesamt wurden von den Pionieren der drei Klassen 66 Buchhüllen hergestellt.
Wieviel Buchhüllen fertigte jede der drei Pioniergruppen an?

210513 In jedes leere Kästchen des Bildes soll eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so geschrieben werden, daß die drei waagerechten und die drei senkrechten Aufgaben richtig gerechnet sind.
Eine Beschreibung und Begründung der Lösung wird nicht verlangt.

8 0 0	−	□ □	=	□ □ □
:		+		−
□ □	·	□ □	=	6 0 8
2 5	+	□ 3	=	□ □ □

210514 Eine Aufgabe aus einer Leningrader Mathematikolympiade:
Ein „Oktoberkind" (das ist ein Jungpionier bis zur 3. Klasse), ein Pionier und ein Komsomolze fuhren in ein Pionierlager. Ihre Vornamen sind (nicht unbedingt in derselben Reihenfolge) Kolja, Igor und Sascha. Aus ihren Gesprächen im Zug erfuhren wir:
(1) Kolja und der Komsomolze sind zwei begeisterte Angler.
(2) Das Oktoberkind wohnt in Leningrad; Sascha auch, aber in einer anderen Straße.
(3) Sascha ist jünger als der Komsomolze.
Welchen Vornamen hat das Oktoberkind, welchen Vornamen hat der Pionier, und welchen Vornamen hat der Komsomolze?

Olympiadeklasse 6

210611 Von einem Rechteck sind folgende Eigenschaften bekannt:
Wenn seine beiden Seitenlängen in Metern gemessen werden, so ergeben sich natürliche Zahlen als Maßzahlen. Die Differenz der beiden Seitenlängen beträgt 20 m. Der Umfang des Rechtecks beträgt 60 m.
a) Welchen Flächeninhalt hat dieses Rechteck?
b) Welche Längen erhalten seine beiden Seiten im Maßstab 1 : 250? Zeichne das Rechteck in diesem Maßstab!

210612 In jedes leere Kästchen soll eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so geschrieben werden, daß die drei waagerechten und die drei senkrechten Aufgaben richtig gerechnet sind.
Eine Beschreibung und Begründung der Lösung wird nicht verlangt.

6 4 6	:	□ 9	=	□ □
−		·		+
□ □ □	−	□ 6	=	□ 4 □
□ 8 □	−	□ □ □	=	□ □ 0

210613 Die drei Schülerinnen Bianka, Heike und Kerstin ernteten im Schulgarten Weißkohl, insgesamt 128 Kohlköpfe. Dabei hat Bianka genau 8 Kohlköpfe mehr als Heike geerntet, und Kerstin hat genau 5 Kohlköpfe weniger als Bianka geerntet.
Wieviel Kohlköpfe hat jedes der drei Mädchen insgesamt geerntet?

210614 Zwölf Hölzchen, die einzeln in einer Reihe liegen (siehe Bild), sollen folgendermaßen in eine Anordnung von sechs „Doppelhölzchen" (d. h. Häufchen von je zwei zusammenliegenden Hölzchen) gebracht werden: Es soll mehrere Male jeweils ein einzeln liegendes Hölzchen entweder nach rechts oder nach links springen und dabei jedesmal (mit Ausnahme des letzten Males) genau drei Hölzchen (entweder drei einzeln liegende oder ein einzeln liegendes und ein Doppelhölzchen) überspringen. Beim letzten Male sollen genau drei Doppelhölzchen übersprungen werden.

| | | | | | | | | | | |

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Beschreibe eine Serie von Sprüngen, die diese Forderungen erfüllt!

Olympiadeklasse 7

210711 Die FDJler einer Schule haben sich vorgenommen, das Gelände ihrer Schule umzugestalten. Dabei soll eine rechteckige Rasenfläche von 45 m Länge und 26 m Breite mit einem Weg von 2 m Breite umgeben werden. Der Weg soll außerhalb der Rasenfläche verlaufen und ringsum an sie angrenzen. Die Fläche, die von dem Rasen und dem Weg zusammen eingenommen wird, soll insgesamt wieder die Gestalt eines Rechtecks haben.
a) Berechne den Flächeninhalt des vorgesehenen Weges!
b) Wieviel Gehwegplatten müssen auf diesem Weg insgesamt ausgelegt werden, wenn er vollständig von Gehwegplatten bedeckt werden soll und wenn man für jeden Quadratmeter des Weges genau 16 Platten benötigt?

210712 Andreas sagt zu seinem Freund: „Nimm in eine Hand eine gerade, in die andere Hand eine ungerade Anzahl Hölzchen! Verdopple in Gedanken die Anzahl der Hölzchen in der linken und verdreifache die Anzahl der Hölzchen in der rechten Hand! Addiere die beiden Produkte und nenne mir das Ergebnis! Ich werde dir dann mit Sicherheit sagen, in welcher Hand du die gerade Anzahl von Hölzchen hast."

Untersuche, ob man wirklich allein aus dem von dem Freund genannten Ergebnis mit Sicherheit die von Andreas angekündigte Aussage erhalten kann!

21073 Zur Vorbereitung eines Sportfestes soll für die Schülerinnen Andrea, Beate, Christine, Doris, Eva, Frauke und Gerda eine Reihenfolge festgelegt werden. Dabei soll stets von zwei verschieden großen Schülerinnen die größere vor der kleineren stehen. Sind aber zwei Schülerinnen gleichgroß, so soll stets diejenige, deren Vorname einen im Alphabet vorangehenden Anfangsbuchstaben hat, vor der anderen stehen.
Der Organisator, der eine derartige Reihenfolge festlegen soll, kennt die Schülerinnen nicht, aber er meint, sich an folgende Informationen erinnern zu können:
(1) Es ist wahr, daß Doris um genau 2 cm kleiner als Christine ist.
(2) Es ist falsch, daß Andrea nicht dieselbe Größe wie Gerda hat.
(3) Es ist nicht wahr, daß keine der Schülerinnen kleiner als Frauke ist.
(4) Es ist wahr, daß Eva kleiner als Doris, aber größer als Frauke ist.
(5) Es ist unwahr, daß Frauke größer als Christine ist.
(6) Es ist nicht falsch, daß Christine um genau 2 cm größer als Gerda ist und daß Christine größer als Eva ist.
Untersuche, ob es mehr als eine, genau eine oder keine Möglichkeit für die Reihenfolge der Schülerinnen gibt, bei der alle Informationen (1) bis (6) zutreffen!
Falls es sie gibt, ermittle alle möglichen Reihenfolgen, die den genannten Bedingungen entsprechen!

210714 In einem regelmäßigen Fünfeck $ABCDE$ wird eine beliebige Diagonale gezeichnet. Beweise, daß diese Diagonale zu einer der Seiten des Fünfecks parallel ist!
Hinweis: Ein Fünfeck heißt genau dann regelmäßig, wenn alle seine Seiten zueinander gleichlang und alle seine Innenwinkel zueinander gleichgroß sind.

Olympiadeklasse 8

210811 In der Figur soll jedes Zeichen X durch eine der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so ersetzt werden, daß in der zweiten bis neunten Zeile jede Zahl gleich dem absoluten Betrag der Differenz der beiden darüberstehenden Zahlen ist.
Gib eine derartige Ersetzung an!

$X\ X\ X\ X\ X\ X\ X\ X\ X$
$X\ X\ X\ X\ X\ X\ X\ X$
$X\ X\ X\ X\ X\ X\ X$
$X\ X\ X\ X\ X\ X$
$X\ X\ X\ X\ X$
$X\ X\ X\ X$
$X\ X\ X$
$X\ X$
X

210812 Bei einem GST-Wettkampf im Luftgewehrschießen gaben Falk und Heike je 5 Schuß ab.
Auf den Scheiben wurden folgende Treffer ermittelt:
Je genau einmal die 3, zweimal die 5, zweimal die 6, zweimal die 7, einmal die 8, einmal die 9, einmal die 10.
Weiterhin ist bekannt:
(1) Falk erzielte mit seinen letzten vier Schüssen neunmal so viele Ringe wie mit seinem ersten Schuß,
(2) Falk schoß die 9.
Lassen sich nach diesen Angaben die folgenden beiden Fragen eindeutig beantworten?
a) Welcher der beiden Jungen erzielte das bessere Ergebnis?
b) Welcher der beiden Jungen schoß die 10?

210813 a) Beweise den folgenden Satz:
Wenn alle vier Seiten eines Vierecks dieselbe Länge haben, dann stehen die Diagonalen des Vierecks aufeinander senkrecht.
b) Formuliere die Umkehrung dieses Satzes und untersuche, ob sie auch gilt!

210814 Einer Brigade der ausgezeichneten Qualität war der Auftrag erteilt worden, in möglichst kurzer Zeit eine gewisse Anzahl Meßgeräte fertigzustellen. Die Brigade bestand aus einem erfahrenen Arbeiter als Brigadier und neun jungen Arbeitern, die eben erst ihre Ausbildung beendet hatten.
Im Laufe eines Tages stellte jeder von den neun jungen Arbeitern 15 Geräte fertig, der Brigadier aber 9 Geräte mehr als jedes der zehn Brigademitglieder im Durchschnitt.
Wieviel Meßgeräte wurden insgesamt von der Brigade an diesem Arbeitstag fertiggestellt?

Olympiadeklasse 9

210911 Während einer Fußballmeisterschaft spielten im Halbfinale die vier Mannschaften A, B, C und D. Über den Ausgang der Spiele und damit die Ermittlung der beiden Mannschaften für das Endspiel machten Kenner der vier Mannschaften folgende Voraussagen:
(1) Das Endspiel wird lauten: B gegen C.
(2) Das Endspiel wird nicht lauten: A gegen B.
(3) Das Endspiel wird lauten: C gegen D.
(4) Wenn A das Endspiel erreicht, dann erreicht B nicht das Endspiel.
(5) Das Endspiel wird von zwei der Mannschaften B, C, D bestritten.
Nach dem Halbfinale stellte sich heraus, daß genau zwei der Voraussagen (1) bis (5) falsch waren.
Zeigen Sie, daß es aufgrund dieser Angaben möglich ist, die beiden Mannschaften zu ermitteln, die das Endspiel erreichten!

210912 Herr Schulze trifft nach langer Zeit Herrn Lehmann und lädt ihn zu sich nach Hause ein. Unterwegs erzählt er Herrn Lehmann, daß er Vater von drei Kindern ist. Herr Lehmann möchte wissen, wie alt diese sind; ihm genügen Angaben in vollen Lebensjahren.
Herr Schulze antwortet: „Das Produkt der drei Altersangaben beträgt 72. Die Summe der drei Altersangaben ist meine Hausnummer. Wir sind gerade an unserem Haus angekommen; Sie sehen meine Nummer." Darauf erwidert Herr Lehmann: „Aus diesen Angaben kann man aber die drei Altersangaben nicht eindeutig ermitteln." „Das stimmt", meint Herr Schulze, „aber irgendwann zwischen der Geburt des zweiten und des dritten Kindes hat der Bau dieses Hauses stattgefunden. Ein Jahr und einen Tag lang haben wir an dem Haus gebaut." „Vielen Dank! Nun kann man die Altersangaben eindeutig ermitteln", beschließt Herr Lehmann das Gespräch.
Untersuchen Sie, ob es eine Zusammenstellung von drei Altersangaben gibt, für die alle Aussagen dieses Gespräches zutreffen! Untersuchen Sie, ob es nur eine solche Zusammenstellung gibt! Wenn das der Fall ist, ermitteln Sie diese!

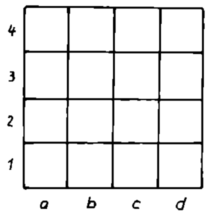
210913 Elsa behauptet: „Man kann die Zahl 1981 folgendermaßen darstellen: Man schreibt die natürlichen Zahlen von 1 bis zu einer geeigneten Zahl n der Reihe nach auf und setzt zwischen je zwei dieser Zahlen jeweils genau eines der vier Operationszeichen $+$, $-$, $\cdot$, $:$. Dabei braucht nicht überall dasselbe Operationszeichen gewählt zu werden; es brauchen auch nicht alle vier Operationszeichen vorzukommen. An der Reihenfolge der natürlichen Zahlen darf nichts geändert werden; Klammern und weitere Rechenzeichen sollen nicht auftreten. Das Ergebnis der so aufgeschriebenen Rechenaufgabe ist 1981."
Ist Elsas Behauptung wahr?

210914 Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus $\sphericalangle BAC = \alpha = 70°$, $\sphericalangle ACB = \gamma = 50°$ und $r = 5$ cm, wobei r der Radius des Umkreises des Dreiecks ABC ist!
Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion! Untersuchen Sie, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Olympiadeklasse 10

211011 Ein Reisender legte den ersten Teil einer Dienstfahrt mit dem PKW und den Rest mit dem Zug zurück.
Als er die mit dem PKW zurückgelegte Teilstrecke sowie genau ein Fünftel der Bahnstrecke durchfahren hatte, stellte er fest, daß er zu diesem Zeitpunkt genau ein Drittel der Gesamtstrecke zurückgelegt hatte. Später, als er genau die Hälfte der Gesamtstrecke zurückgelegt hatte, war er mit dem Zug bereits 20 km mehr gefahren als zuvor mit dem PKW.
Wie lang war die Gesamtstrecke dieser Reise?

211012 Das Bild zeigt ein Quadrat, das in 16 untereinander kongruente quadratische Felder $a1$, $a2$, $a3$, $a4$, ..., $d1$, $d2$, $d3$, $d4$ zerlegt ist. Von diesen Feldern sollen genau vier so markiert werden, daß in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen genau ein markiertes Feld auftritt.
Ermitteln Sie alle voneinander verschiedenen Markierungen, die diese Bedingungen erfüllen! Dabei gelten zwei Markierungen genau dann als nicht verschieden, wenn sie aus einander durch eine Drehung, eine Spiegelung, oder mehrere solcher Abbildungen hervorgehen.



211013 Für Kreisflächen ist bekanntlich der Begriff Durchmesser definiert. Man kann aber auch für andere Flächenstücke F eine „längste Strecke" als „Durchmesser" bezeichnen.
(Das heißt, man kann definieren: Wenn es zwei Punkte P, Q in F mit der Eigenschaft gibt, daß für beliebige Punkte X, Y in F stets $\overline{PQ} \geqq \overline{XY}$ gilt, so heißt die Länge $d = \overline{PQ}$ der „Durchmesser" von F.)
Ist beispielsweise F die Fläche eines Dreiecks ABC (einschließlich des Randes) und gilt $\overline{AB} \geqq \overline{AC}$ sowie $\overline{AB} \geqq \overline{BC}$, so ist die Länge $\overline{AB}$ der Durchmesser d von F; denn dann läßt sich beweisen, daß für beliebige Punkte X, Y der Dreiecksfläche F stets $\overline{AB} \geqq \overline{XY}$ ist.
Untersuchen Sie, ob die beiden folgenden Aussagen (1), (2) wahr sind!
(1) Man kann nicht jede Dreiecksfläche F so durch eine Gerade in zwei Dreiecksflächen F', F'' zerlegen, daß jede der beiden Flächen F', F'' einen kleineren Durchmesser hat als F.
(2) Es gibt eine Dreiecksfläche F, die man so durch eine Gerade in zwei Dreiecksflächen F', F'' zerlegen kann, daß jede der beiden Flächen F', F'' einen kleineren Durchmesser hat als F.

211014 a) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f und g, die im Intervall $-1 \leqq x \leqq 3$ durch

$$f(x) = |x|,$$
$$g(x) = x^2 - 3x + 2$$

definiert sind!
b) Im Intervall $-1 \leqq x \leqq 3$ seien nun durch

$$h(x) = f[g(x)],$$
$$k(x) = g[f(x)]$$

zwei weitere Funktionen h und k definiert.
Hinweis: Man erhält also z. B. den Funktionswert $h(x)$ zu einer Zahl x des Intervalls stets dadurch, daß man erst den Wert $z = g(x)$ und dann $f(z) = f[g(x)] = h(x)$ bildet. So ist etwa für $x = -1$ erst $z = g(-1) = (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 2 = 6$ und dann $h(-1) = g(6) = |6| = 6$ zu bilden. Entsprechend erhält man $k(-1) = g[f(-1)] = g(|-1|) = g(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$.)
Zeichnen Sie die Graphen der so definierten Funktionen h und k und beschreiben Sie, wie man diese Graphen dadurch aus dem Graphen von g gewinnen kann, daß man auf Teilstück des Graphen von g geeignete Spiegelungen anwendet!

Olympiadeklasse 11/12

211211 Gegeben sei die Seitenlänge a eines gleichseitigen Dreiecks ABC. Auf diesem Dreieck als Grundfläche soll eine Pyramide $ABCD$ mit den folgenden Eigenschaften (1), (2) errichtet werden:
(1) Die Kanten AD, BD und CD haben einander gleiche Länge s.
(2) Die Höhe h der Pyramide ist das arithmetische Mittel aus a und s.
Man untersuche, ob es eine derartige Pyramide $ABCD$ gibt und ob dann h und s eindeutig durch a bestimmt sind. Ist dies der Fall, so ermittle man h und s.

211212 Man ermittle alle geordneten Paare $(x; y)$ von Null verschiedener reeller Zahlen x, y, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen:

$$(x+y)^2 + 3(x+y) = 4, \qquad (1)$$
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{6}. \qquad (2)$$

211213 Eine Menge M enthalte genau 55 Elemente. Für jede natürliche Zahl k mit $0 \leqq k \leqq 55$ bezeichne A_k die Anzahl aller derjenigen Teilmengen von M, die genau k Elemente enthalten.
Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen k, für die A_k am größten ist!

211214 Jede natürliche Zahl läßt sich bekanntlich eindeutig als Produkt von Primzahlpotenzen darstellen.
In welcher der beiden natürlichen Zahlen $1981!$ und $1000! \cdot 981!$ erhält bei dieser Darstellung die Primzahl 7 den größeren Exponenten?
Hinweis: Wenn n eine natürliche Zahl mit $n \geqq 1$ ist, so ist $n!$ definiert durch

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

alphaismen

„Ich werde mein Wissen verdoppeln", sagte die Null.

„Ich will vorwärts kommen", sagte das Quadrat, „ich will in bessere Kreise."

Wenn man von beliebig vielen Punkten beliebig viele Striche zieht, gibt es ein beliebig großes Durcheinander.

Lösungen

Eine Aufgabe von Prof. Dr. H. Triebel

Zusatzaufgabe: Es ist

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \text{Terme mit } x^4, x^5, \ldots.$$

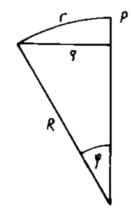
Dann gilt

$$\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6} + \text{Terme mit } x, x^2, \ldots,$$

also $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$.

Aufgabe: Es ist $r = R \cdot \phi$, wobei ϕ der angegebene Winkel (in Bogenlänge) ist (Bild 3). Hieraus folgt $\varrho = R \sin \phi$.
Für $K(P)$ erhält man nun

Bild 3



$$K(P) = \frac{3}{\pi} \lim_{r \to 0} \frac{2\pi r - 2\pi\varrho}{r^3} = 6 \lim_{r \to 0} \frac{r - \varrho}{r^3}$$
$$= 6 \lim_{\phi \to 0} \frac{R_\phi - R\sin\phi}{R^3 \phi^3}$$
$$= \frac{6}{R^2} \lim_{\phi \to 0} \frac{\phi - \sin\phi}{\phi^3} = \frac{1}{R^2}.$$

Lösungen zu: Die großen Leistungen der kleinen Biene

▲1.1▲ 190 kg : 3 = 63,333 kg ≈ 63 kg
Ein Volk erzeugt in einem Jahr rund 63 kg Honig.
▲1.2▲ 63 kg − 45 kg = 18 kg
Für den Imker bleiben etwa 18 kg Honig übrig.
▲1.3▲ 4500 : 63 ≈ 71%
Das Volk verbraucht rund 71% und der Imker rund 29%.
▲2▲ 1 kg Honig ≙ 3 kg Nektar;
3000 g : 0,0005 g = 6000000
Es müssen 6000000 Blüten besucht werden.
▲3.1▲ 460000 · 18 kg = 8280000 kg = 8280 t
Es können 8280 t Honig produziert werden.
▲3.2▲ 460000 · 10 kg = 4600000 kg = 4600 t
Das Produktionsergebnis beträgt 4600 t.
▲4.1▲ 190 kg + 35 kg + 25 kg = 250 kg

Ein Volk muß im Sommer durchschnittlich eine Last von 250 kg bewältigen.

▲4.2▲ $41 \cdot 250\,\text{kg} = 10250\,\text{kg}$
Diese Völker müssen 10,25 t bewältigen.

▲5.1▲ $16700000 \cdot 0{,}320\,\text{kg} = 5344000\,\text{kg} = 5344\,\text{t}$.
Der Bedarf der Bevölkerung beträgt 5344 t.
▲5.2▲ $5344\,\text{t} - 4600\,\text{t} = 744\,\text{t}$
Es müssen 744 t Honig importiert werden.
▲6▲ $16700000 : 460000 \approx 36$
Es können 36 Bürger mit Honig versorgt werden.
▲7▲ $70 \cdot 8\,\text{M} = 560\,\text{M}$
Die AG erzielte eine Einnahme von 560 M.
▲8.1▲ $34400 \cdot 0{,}26 = 8944$
8944 Imker wanderten mit ihren Bienen.
▲8.2▲ $250000 : 460000 = 0{,}54 = 54\%$
Der Anteil der Wandervölker beträgt 54%.
▲8.3▲ $250000 \cdot 17\,\text{kg} + 210000 \cdot 6\,\text{kg} = 5510000\,\text{kg} = 5510\,\text{t}$
Der Bevölkerung würden 5510 t Honig zur Verfügung stehen.
▲9.1▲ $8000 \cdot 4 = 32000$;
$32000 - 1650 = 30350$
Es müssen noch 30350 Bienenvölker zusätzlich eingesetzt werden.
▲9.2▲ $30350 \cdot 40\,\text{M} = 1214000\,\text{M}$
$1214000\,\text{M} + 18500\,\text{M} = 1232500\,\text{M}$
Der Kooperationsverband muß 1232500 M einplanen.
▲10.1▲ $150000 : 1500 = 100$
Es ist das 100fache ihrer Körpermasse.
▲10.2▲ $\dfrac{200 \cdot 60}{1500} = 8$
Es ist das 8fache seiner Körpermasse.
▲10.3▲ $1500 : 60 = 25$
Das Huhn müßte an einem Tag 25 Eier legen.
▲11▲ $100\% - 5{,}5\% - 6{,}5\% = 88\%$
Es sind 88% Bienen.
Zum Kreisdiagramm: $5{,}5\% \mathrel{\widehat{=}} 19{,}8°$; $6{,}5\% \mathrel{\widehat{=}} 23{,}4°$; $88\% \mathrel{\widehat{=}} 316{,}8°$.
▲12▲ $\dfrac{(22+23) \cdot 3600}{2 \cdot 1000} = 81$
Die Biene kann eine Geschwindigkeit von $81\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$ erreichen.

▲13▲ $50000 \cdot 12\,\text{mm} = 600000\,\text{mm} = 600\,\text{m}$
Es käme eine Strecke von 600 m heraus.

▲14▲ $32 \cdot 50000 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}055\,\text{g} \cdot 12 \cdot 15 = 3168000\,\text{g} = 3168\,\text{kg}$
Es sind 3168 kg Nektar.

Lösungen zu alpha-Wettbewerb,

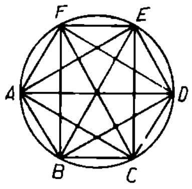
Heft 1/1981:

Ma 5 ■2055
a) $(160 - 2 \cdot 24)\text{mm} : 4 = 28\,\text{mm}$
b) $28\,\text{mm} - 18\,\text{mm} = 10\,\text{mm}$

Ma 5 ■2056 Es seien A, B, C, D, E, F die Ecken des Sechsecks (siehe Bild). Man kann insgesamt 9 Diagonalen in dem Sechseck einzeichnen, nämlich AC; AD; AE; BD; BE; BF; CE; CF; DF. Allgemein gilt für die Anzahl d der Diagonalen im n-Eck:

$$d = \frac{n \cdot (n-3)}{2};$$

denn man kann von jeder der n Ecken zu jeder der $n-1$ übrigen Ecken außer zu den beiden benachbarten Ecken genau je eine Diagonale ziehen, insgesamt also $n(n-3)$ Diagonalen. Dabei wird jede Diagonale doppelt gezählt. Die so ermittelte Anzahl muß also noch durch 2 geteilt werden.



Ma 5 ■2057 Die durch Vertauschung der Ziffern entstehende Zahl muß größer sein als die ursprüngliche Zahl, da sie gleich dem um 2 verminderten Dreifachen dieser Zahl sein soll. Bei der ursprünglichen Zahl ist also die Anzahl der Zehner kleiner als die der Einer. Man braucht daher unter Berücksichtigung der Bedingung, daß die Summe der beiden Anzahlen 10 beträgt, nur die Zahlen 19, 28, 37 und 46 in Betracht zu ziehen. Von ihnen erfüllt 28 und nur 28 die Bedingung der Aufgabe.

Ma 5 ■2058 Aus $8 - \boxed{\wedge} = 3$ folgt $\boxed{\wedge} = 5$. Setzt man für $\boxed{\wedge}$ in Spalte 3 jeweils 5 ein, so erhält man $\square = 2$ und $\diamond = 0$. Schließlich ermittelt man auf diese Weise aus Zeile 1, daß $\triangle = 7$ sein muß. Tatsächlich erfüllen die angegebenen Ziffern alle Bedingungen der Aufgabe; denn in

$$\begin{array}{c} 27 + 8 = 35 \\ - \quad - \quad - \\ \underline{10 + 5 = 15} \\ 17 + 3 = 20 \end{array}$$

sind alle waagerecht und senkrecht stehenden Aufgaben richtig gelöst.

Ma 5 ■2059 Da bei einem Teilnehmerbeitrag von 1,40 Mark genau 1,10 Mark zu wenig, bei einem Beitrag von 1,50 Mark genau 1,10 Mark zu viel zusammengekommen wäre, so hätte das gesammelte Geld genau das Doppelte der Kosten des einen Sammelfahrscheines betragen, wenn jeder Teilnehmer 2,90 Mark eingezahlt hätte. Folglich wären genau die Kosten des einen Sammelfahrscheines zusammengekommen, wenn jeder der Teilnehmer 1,45 Mark bezahlt hätte. Jeder der Teilnehmer hatte also 0,05 Mark zu viel bezahlt.

Ma 5 ■2060 Im ungünstigsten Falle kann Ulrike zunächst 8 rote, 8 blaue, 8 schwarze, 8 weiße und die beiden grünen Kugeln herausnehmen. Nimmt sie zu diesen 34 Kugeln nun noch eine weitere heraus, dann kann diese Kugel nur eine der vier Farben Rot, Blau, Schwarz oder Weiß tragen. In diesem Fall erhält Ulrike also 9 Kugeln gleicher Farbe. Die kleinste Anzahl von Kugeln, bei denen das mit Sicherheit der Fall ist, beträgt daher 35.

Ma 6 ■2061 Jede Station braucht 14 verschiedene Fahrkarten. Insgesamt werden daher $15 \cdot 14$ Fahrkarten $= 210$ Fahrkarten benötigt.

Ma 6 ■2062 In $1\frac{1}{2}$ Tagen würden 3 Hühner doppelt soviel Eier wie $1\frac{1}{2}$ Hühner, also 3 Eier legen. Ein Huhn würde in dieser Zeit den dritten Teil, das ist 1 Ei, legen. Also würden 7 Hühner in $1\frac{1}{2}$ Tagen 7 Eier legen. Da 6 Tage viermal so viel sind wie $1\frac{1}{2}$ Tage, würden mithin die 7 Hühner in 6 Tagen 28 Eier legen.
Oder: 1 Huhn würde in $1\frac{1}{2}$ Tagen 1 Ei legen, also 1 Huhn in 6 Tagen (wegen $4 \cdot 1\frac{1}{2} = 6$) 4 Eier, und 7 Hühner in 6 Tagen $7 \cdot 4 = 28$ Eier.

Ma 6 ■2063 (1) Ist nach Ergänzung der beiden fehlenden Ziffern eine durch 36 teilbare Zahl entstanden, so ist diese sowohl durch 4 als auch durch 9 teilbar.
(2) Ist eine mehrstellige Zahl durch 4 teilbar, so stellen ihre letzten beiden Ziffern (in gleicher Reihenfolge) ebenfalls eine durch 4 teilbare Zahl dar. Daher kann als Einerziffer nur 0; 4 oder 8 eingesetzt werden.
(3) Ist eine Zahl durch 9 teilbar, so ist es auch ihre Quersumme. Nun beträgt die Summe der drei gegebenen Ziffern 9.
Lautet daher die Einerziffer

$$\left.\begin{array}{c} 0 \\ 4 \\ 8 \end{array}\right\} \text{so kann die Hunderterziffer nur} \quad \left\{\begin{array}{c} 0 \text{ oder } 9 \\ 5 \\ 1 \end{array}\right\} \text{sein.}$$

Also können nur die Zahlen 52020; 52920; 52524; 52128; die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Die Probe zeigt, daß sie dies auch sämtlich tun.

Ma 6 ■2064 (4) Wegen der Aussagen (1) und (2) ist die Volleyballspielerin weder Marion noch Petra. Ruth ist also die Volleyballspielerin.
(5) Da die Tischtennisspielerin wegen (3) nicht Marion und wegen (4) nicht Ruth sein kann, ist Petra die Tischtennisspielerin.
(6) Aus (4) und (5) ergibt sich: Marion ist die Schwimmerin.

Ma 6 ■2065 Angenommen, die Längen a, b, c haben die geforderten Eigenschaften. Dann gilt:

$a+b+c=168$ m, ferner
$b=3a$ sowie
$c=4a$.
Daraus folgt:
$a+3a+4a=168$ m, also
$8a=168$ m, woraus man
$a=21$ m, also
$b=63$ m und $c=84$ m erhält.
Deshalb können nur diese Längen die gestellten Bedingungen erfüllen. Wegen $63\text{ m}=3\cdot 21\text{ m}$, $84\text{ m}=4\cdot 21\text{ m}$ und $21\text{ m}+63\text{ m}+84\text{ m}=168\text{ m}$ haben sie die geforderten Eigenschaften tatsächlich.

Ma 7 ■2066 Diagonale ist Quadratseite, halbe Diagonale ist Quadratseite, Beweis durch Kongruenz.

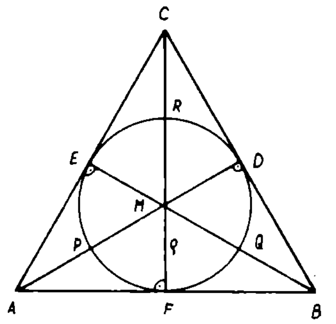
Ma 7 ■2067 Die Anzahl der Ziffern 9 beträgt an der Tausenderstelle 0, an der Hunderterstelle (von 1 bis 999, von 1000 bis 1999, von 2000 bis 2999, von 3000 bis 3999, von 4000 bis 4999 je 100mal die Ziffer 9)
$5\cdot 100=500$,
an der Zehnerstelle (in jedem Hunderterbereich 10mal, in 55 Hunderterbereichen also)
$10\cdot 55=550$,
an der Einerstelle (in jedem Zehnerbereich eine Ziffer 9, in 555 Zehnerbereichen also)
$1\cdot 555=555$.
Insgesamt wird die Ziffer 9 dabei 1605mal aufgeschrieben.

Ma 7 ■2068 Ist x die Anzahl der Pflaumen, die der Korb enthält, dann bekommt der erste Freier $\left(\frac{x}{2}+1\right)$ Pflaumen. Als Rest verbleiben Pflaumen in der Anzahl $x-\left(\frac{x}{2}+1\right)=\frac{x}{2}-1$.
Die Anzahl der Pflaumen, die der zweite Freier bekommt, ist hiernach
$\frac{\frac{x}{2}-1}{2}+1=\frac{x}{4}+\frac{1}{2}$, und als nunmehriger Rest verbleiben Pflaumen in der Anzahl $\left(\frac{x}{2}-1\right)-\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{x}{4}-\frac{3}{2}$. Die Anzahl der Pflaumen, die der dritte Freier bekommt, ist dann
$\frac{\frac{x}{4}-\frac{3}{2}}{2}+3=\frac{x}{8}+\frac{9}{4}$.
Danach ist der Korb geleert, woraus die Gleichung $\left(\frac{x}{4}-\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{x}{8}+\frac{9}{4}\right)=0$ folgt. Aus dieser ergibt sich $\frac{x}{8}=\frac{15}{4}$, also $x=30$. Daher kann die gesuchte Anzahl nur 30 betragen.

Ma 7 ■2069 Augustpreis A
Septemberpreis $S=(100\%=20\%)\cdot A=80\%\cdot A$
$S=0{,}8\cdot A$
Novemberpreis $N=(100\%+20\%)\cdot S=120\%\cdot S$
$N=1{,}2\cdot S$
$N=1{,}2\cdot 0{,}8\cdot A$
$N=0{,}96A$
$N=96\%\cdot A$
Im November waren die Äpfel billiger als im August. Die Preisabweichung beträgt 4%.

Ma 8 ■2070 Man denke sich durch die Adern senkrecht zur Aderachse einen ebenen Schnitt gelegt. Dann lautet die Frage:
Wieviel Kreise gleichen Durchmessers lassen sich so um einen gleichgroßen Innenkreis anordnen, daß sie einander berühren? Da der Abstand jedes Kreismittelpunktes von den Mittelpunkten der Nachbarkreise stets 2r beträgt, entstehen aus den Verbindungslinien der Kreismittelpunkte 6 gleichseitige Dreiecke, die ein regelmäßiges Sechseck bilden. Man braucht also einschließlich der Mittelader 7 Adern.

Ma 8 ■2071 (I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei gleichseitig und habe den Inkreisradius der Länge ϱ. Der Mittelpunkt M des Inkreises ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden AD, BE, CF des Dreiecks. Diese sind gleichzeitig die Höhen, also sind MD, ME, MF die Lote von M auf die drei Seiten, und es hat daher jede von ihnen die Länge ϱ. Die Winkel $\sphericalangle AMF$, $\sphericalangle FMB$, $\sphericalangle BMD$, $\sphericalangle DMC$, $\sphericalangle CME$, $\sphericalangle EMA$ sind paarweise einander kongruent, und jeder von ihnen hat daher die Größe 60°.



(II) Daraus ergibt sich die folgende Konstruktion. Man zeichnet den Kreis K um M mit dem Radius der Länge ϱ und auf seinem Umfang sechs Punkte D, R, E, P, F, Q mit $\overline{DR}=\overline{RE}=\overline{EP}=\overline{PF}=\overline{FQ}=\overline{QD}$. Die Senkrechten in D, E, F, auf MD bzw. ME bzw. MF erzeugen dann das gesuchte Dreieck $\triangle ABC$.
(III) *Beweis:* Es gilt: $\overline{AF}=\overline{FB}=\overline{BD}=\overline{DC}=\overline{CE}=\overline{EA}$, da die Teildreiecke $\triangle AFM$, $\triangle BFM$, $\triangle BMD$, $\triangle CMD$, $\triangle CME$ und $\triangle AME$ einander paarweise kongruent sind; denn sie stimmen in den Winkeln und einer Seite überein.
Also ist $\triangle ABC$ gleichseitig; AD, BE, CF sind seine Seitenhalbierenden, also auch Winkelhalbierenden und Höhen, also ist der gezeichnete Kreis sein Inkreis.
Die Konstruktion ist immer möglich und bis auf Kongruenz eindeutig, da die Größe und Gestalt der erwähnten Teildreiecke nur von ϱ und nicht von der Lage der sechs auf K gleichmäßig verteilten Punkte D, R, E, P, F und Q abhängt.

Ma 8 ■2072 (I) Angenommen, bei einer Angabe von Ziffern für die Buchstaben $A, \ldots, J$ seien die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Dann folgt:
Da AJ und BJ je zweistellig, also kleiner als 100 sind, ist ihre Summe kleiner als 200. Da sie dreistellig ist, hat sie die erste Ziffer $A=1$. (1)
Da somit $AJ<20$ und $AAC\geqq 110$ ist, folgt $BJ>90$, also $B=9$. (2)
Wegen $A=1$ ist $ABC<200$; wegen $ABC:H=BJ$ gilt daher $H<200:90<3$. Da andererseits H Anfangsziffer ist, also $\neq 0$ gilt, und da $H\neq A=1$ ist, folgt $H=2$. (3)
Damit ergibt sich $CH=H\cdot HA=2\cdot 21=42$, also $C=4$. (4)
Weiter folgt $BJ=ABC:H=194:2=97$, also $J=7$. (5)
Sodann erhält man $DE=HA+AJ=21+17=38$, also $D=3$ (6) und $E=9$. (7)
Schließlich ergibt sich $AFG=ABC-DE=194-38=156$, also $F=5$ (8) und $G=6$. (9)
Daher kann nur

$$\begin{array}{c} 194-38=156 \\ :\quad\;\; -\quad\;\; - \\ \underline{\;\;2\cdot 21=\;\;42} \\ 97+17=114 \end{array} \qquad (10)$$

Lösung des Kryptogramms sein.
(II) Da die Angaben (1) bis (9) den verschiedenen Buchstaben $A, \ldots, J$ verschiedene Ziffern zuordnen, die, wie aus (10) ersichtlich ist, alle waagerecht und senkrecht stehenden Aufgaben des Kryptogramms richtig lösen, hat dieses somit genau die angegebene Lösung.

Ma 8 ■2073 Ist d der Erddurchmesser und u (in m) der Umfang des gegebenen kleineren Kreises, so gilt $\pi\cdot d=u$. Ist x der in Peters Aufgabe gesuchte Abstand, so ist der Durchmesser des zweiten (größeren) Kreises $d+2x$. Andererseits ist dessen Umfang $u+1=\pi d+1$; also gilt $\pi(d+2x)=\pi d+1$, woraus $2\pi x=1$, $x=\frac{1}{2\pi}$ folgt. Analoge Schlüsse gelten aber auch für die Aufgabe von Fritz, wenn $d(=1\text{ mm})=0{,}001$ m ist, da nämlich der erhaltene Wert $x=\frac{1}{2\pi}$ nicht von d abhängt.
Somit stimmt die Behauptung von Fritz. Der gesuchte Abstand beträgt in beiden Fällen $\frac{1}{2\pi}$ (in m), das sind etwa 16 cm.

Ma 9 ■2074 Wir setzen zunächst an die Stelle der Sternchen die Buchstaben A bis N wie folgt:

$$\begin{array}{r} \underline{1AB\cdot CD} \\ \underline{EFG1} \\ \underline{HIJ1} \\ KLM1N \end{array}$$

Dabei bedeuten die Buchstaben jeweils eine der Ziffern von 0 bis 9.
Angenommen, die Aufgabe hat eine Lösung, dann ist $KLM1N$ die Summe der Teilprodukte $EFG1$ und $HIJ1$, und es folgt sofort $N=1$ und $J=0$. Die vierstelligen Teilprodukte sind entstanden durch Multiplikation der dreistelligen Zahl $1AB$ mit C bzw. D. Wegen

$199 \cdot 9 < 2000$ sind diese Teilprodukte beide kleiner als 2000, also ist $E = H = 1$, und wegen $199 \cdot 99 < 20000$ ist auch $K = 1$. Außerdem gilt $C, D \neq 1$, da sonst keine vierstelligen Zahlen als Produkt entstehen könnten. Beide Teilprodukte enden auf die Ziffer 1, daher kommen für die Ziffern B, C, D nur 3, 7 oder 9 und wegen $199 \cdot 5 < 1000$ mithin für C, D nur 7 oder 9 in Frage. Von allen vierstelligen Zahlen der Form 1 mal 01 sind nur 1001 und 1701 durch 7 oder 9 teilbar; und zwar ist 1001 durch 7, aber nicht durch 9 teilbar und 1701 durch 7 und durch 9 teilbar. Wegen $1701 : 7 = 243 \neq 1AB$ bleiben davon genau zwei Möglichkeiten, und zwar

(1) $\;143 \cdot C7$ und (2) $189 \cdot C9$

(1)	(2)
$143 \cdot C7$	$189 \cdot C9$
$1FG1$	$1FG1$
1001	1701
$1LM11$	$1LM11$

Im Falle (1) muß $C = 7$ sein, da 7 die einzige einstellige Zahl ist, die mit 3 multipliziert ein auf 1 endendes Produkt ergibt. Damit erhalten wir

$143 \cdot 77$
$\;\;1001$
$\;\;\;\;1001$
11011, also $F = G = M = 0$ und $L = 1$.

Im Falle (2) muß analog $C = 9$ sein, und wir erhalten

$189 \cdot 99$
$\;\;1701$
$\;\;\;\;1701$
18711, also $F = M = 7$, $G = 0$ und $L = 8$.

Das sind die beiden einzigen Lösungen der Aufgabe.

Ma 9 ■2075 (1) Wenn die Angaben von Herrn X zutreffen, so ist das Quadrat der erwähnten Quersumme genau dreimal so groß wie die Anzahl der Lebensjahre und diese wiederum genau dreimal so groß wie die erwähnte Quersumme. Daher ist das Quadrat dieser Quersumme genau neunmal so groß wie die Quersumme selbst. Daraus folgt, daß die Quersumme 9 und somit das Alter von Herrn X 27 Jahre beträgt.

(2) Wenn Herr X 27 Jahre alt ist, so ist die Quersumme der Anzahl seiner Lebensjahre 9, also ein Drittel dieser Anzahl. Ferner ist dann das Quadrat 81 der Quersumme genau dreimal so groß wie die Anzahl der Lebensjahre des Herrn X. Daher treffen die Angaben von Herrn X dann zu.

Aus (2) folgt, daß die Angaben von Herrn X zutreffen können. Hieraus und aus (1) folgt, daß Herr X 27 Jahre alt ist.

Ma 9 ■2076 Im Dreieck $\triangle ABC$ seien CM die Seitenhalbierende der Seite AB und S der Schwerpunkt des Dreiecks. Dann gilt nach einem Satz über die Seitenhalbierenden im Dreieck:

$$\overline{SM} : \overline{SC} = 1 : 2. \qquad (1)$$

Wir zeigen nun, daß nicht jede Gerade durch S die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$ in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt. Die Parallele g zu AB durch S schneide AC bzw. BC in D bzw. E. Diese Punkte existieren stets, da AC und BC nicht parallel zu AB und damit auch nicht parallel zu g sind.

Das Lot CG von C auf die Gerade durch A und B schneide g in F. Dieser Punkt existiert stets, da $CG \perp AB$ und damit $CG \perp g$ gilt. Nach den Strahlensätzen und wegen (1) gilt dann:

$\overline{DE} : \overline{AB} = 2 : 3$, d. h. $\overline{DE} = \frac{2}{3}\overline{AB}$ und

$\overline{CF} : \overline{CG} = 2 : 3$, d. h. $\overline{CF} = \frac{2}{3}\overline{CG}$.

Also beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle CDE$ nur $\frac{4}{9}$ von dem des Dreiecks $\triangle ABC$.

Damit ist gezeigt, daß nicht alle Geraden durch S die Dreieckfläche in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegen.

Ma 9 ■2077 Es sei s die genaue Länge der Strecke, und es seien a bzw. f die Schätzwerte von Andreas und Frank. Dann gilt:

$a - \frac{a}{10} = s$, woraus $a = \frac{10}{9} s$ folgt.

Der absolute Fehler der Schätzung von Andreas beträgt demnach $\frac{1}{9} s$, sein absoluter Betrag ist $\frac{1}{9} s$. Ferner gilt:

$f + \frac{f}{10} = s$, woraus $f = \frac{10}{11} s$ folgt.

Der absolute Fehler von Franks Schätzung beträgt demnach $-\frac{1}{11} s$, sein absoluter Betrag $\frac{1}{11} s$.

Wegen $\frac{1}{11} s < \frac{1}{9} s$ ist daher der absolute Betrag des absoluten Fehlers bei Franks Schätzung kleiner.

Ma 10/12 ■2078 Es seien die Überträge aus der Einerspalte mit e, aus der Zehnerspalte mit z und aus der Hunderterspalte mit h bezeichnet.

Dann gilt $e, z, h \in \{0; 1; 2\}$, da die Summe dreier einstelliger Zahlen nicht größer als 27 sein kann und auch mit einem eventuellen Übertrag aus der nächsten niederen Stelle 29 nicht überschreitet.

Angenommen, es gäbe eine Lösung, dann müßte gelten

$$3I = 10e + N \text{ und}$$
$$3D + h = N.$$

Durch Subtraktion erhält man

$$3I = 10e + h + 3D, \text{ also}$$
$$3(I - D) = 10e + h.$$

Daraus folgt wegen $10e + h \geq 0$ zunächst $I \geq D$, wegen $I \neq D$ also

(1) $\quad I > 0$ und daher $10e + h > 0$. Ferner folgt

(2) $\quad I - D = \frac{10e + h}{3}$.

Unter Berücksichtigung der für e und h geltenden Einschränkungen kommen nur folgende beiden Möglichkeiten in Frage

(3a) $\quad e = 1;\ h = 2;\ I - D = 4,$

(3b) $\quad e = 2;\ h = 1;\ I - D = 7.$

Aus $3D = N - h$, $N < 10$ und $h \in \{1; 2\}$ folgt $3D < 9$, wegen $D > 0$, also

(4) $\quad D \in \{1; 2\}$ und damit wegen (3)

(5) $\quad I \in \{5; 6; 8; 9\}$.

Aus $3I = 10e + N$ und $I \neq N$ folgt $I \neq 5$ und daher

(6) $\quad I \in \{6; 8; 9\}$ sowie

(7) $\quad N \in \{8; 4; 7\}$.

Ferner ist

$3E + e = U + 10z$ und

$3R + z = 10h + E$ d. h. $E = 3R + z - 10h$.

Durch Substitution erhält man

$9R + 3z - 30h + e = U + 10z$, also

(8) $\quad R = \frac{30h + 7z - e + U}{9}$.

Nach (6) kommen für I höchstens drei Zahlen in Frage. Wir untersuchen der Reihe nach diese drei Möglichkeiten.

Fall 1: Es sei $I = 6$.

Dann ist $N = 8$, $e = 1$ und daher wegen (3a) $h = 2$, $D = 2$.

In diesem Fall erhält man aus (8)

$$R = \frac{59 + 7z + U}{9}.$$

Wegen der für die Variablen geltenden Einschränkungen wird diese Gleichung höchstens von folgenden Zahlen erfüllt:

$z = 0$, dann $U = 4$, $R = 7$, $E = 1$;

$z = 1$, dann $U = 6$, $R = 8 = N$, was im Widerspruch zu $N \neq R$ steht;

$z = 2$, dann $U = 8 = N$, was im Widerspruch zu $N \neq U$ steht.

Das führt auf folgende Lösung

$$\begin{array}{r} 2716 \\ +2716 \\ +2716 \\ \hline 8148. \end{array}$$

Fall 2: Es sei $I = 8$.

Dann ist $N = 4$, $e = 2$ und daher wegen (3b) $h = 1$, $D = 1$.

In diesem Falle erhält man aus (8)

$$R = \frac{28 + 7z + U}{9}.$$

Wegen der für die Variablen geltenden Einschränkungen wird diese Gleichung höchstens von folgenden Zahlen erfüllt:

$z = 0$, dann $U = 8 = I$, was im Widerspruch zu $I \neq U$ steht;

$z = 1$, dann $U = 1$ und $R = 4 = N$, was im Widerspruch zu $N \neq R$ steht;

$z = 2$, dann $U = 3$ und $R = 5$.

Das führt auf folgende Lösung:

$$\begin{array}{r} 1578 \\ +1578 \\ +1578 \\ \hline 4734. \end{array}$$

Fall 3: Es sei $I = 9$.

Dann ist $N = 7$, $e = 2$ und daher wegen (3b) $h = 1$, $D = 2$.

In diesem Falle erhält man aus (8)

$$R = \frac{28 + 7z + U}{9}.$$

Wegen der für die Variablen geltenden Einschränkungen wird diese Gleichung höchstens von folgenden Zahlen erfüllt:

$z = 0$, dann $U = 8$, $R = 4$ und $E = 2 = D$, was im Widerspruch zu $D \neq E$ steht;

$z=1$, dann $U=1$, $R=4$ und $E=3$;
$z=2$, dann $U=3$, $R=5$ und $E=7=N$, was im Widerspruch zu $N \neq E$ steht.
Das führt auf folgende Lösung

$$\begin{array}{r} 2439 \\ +2439 \\ +2439 \\ \hline 7317. \end{array}$$

Da andere Fälle nicht existieren, hat die Aufgabe genau die angegebenen drei Lösungen.

Ma 10/12 ▪2079 (I) Da laut Bericht der Handel stattgefunden hat, besitzt die Aufgabe eine Lösung.
Angenommen der Viehhändler habe zunächst für jedes Tier a Groschen verlangt, dann beträgt die Einsparung $a \cdot \frac{a}{100}$ Groschen, und es gilt

$a - \frac{a^2}{100} = 21$. Daraus folgt
$100a - a^2 = 2100$ und
$a^2 - 100a + 2100 = 0$.

Hieraus folgt, daß $a=70$ oder $a=30$ sein muß.
Im Falle $a=30$ hätte der Bauer 90 Groschen gehabt. Da 90 nicht durch 21 teilbar ist, entfällt diese Möglichkeit. Daher kann nur $a=70$ den Bedingungen der Aufgabe entsprechen. Laut Aufgabe wurden von dem ursprünglichen Preis (70 Groschen pro Tier) 70%, d. h. 49 Groschen, heruntergehandelt. Somit lautet der neue Preis 21 Groschen pro Tier, und das gesamte Geld von 210 Groschen, das bei dem alten Preis für genau 3 Tiere reichte, wurde bei dem neuen Preis (für eine Anzahl von Tieren) vollständig ausgegeben, da 210 durch 21 teilbar ist.
Diese Anzahl betrug somit 10.

Ma 10/12 ▪2080 Die Summe s der natürlichen Zahlen von 1 bis n ist laut Zahlentafel $s = \frac{n(n+1)}{2}$.

a) Angenommen, für eine natürliche Zahl n sei s eine zweistellige Zahl aus zwei gleichen Ziffern. Dann ist s, also auch $2s = n(n+1)$ durch 11 teilbar. Da 11 Primzahl ist, ist somit entweder n oder $n+1$ durch 11 teilbar. Wäre $n \geqq 14$, so wäre $s \geqq 7 \cdot 15 > 100$, also nicht zweistellig. Daher ist $n < 14$, $n+1 < 15$, so daß entweder $n=11$ oder $n+1=11$, d. h. $n=10$ folgt.
Tatsächlich erhält man für $n=11$ den Wert $s = \frac{11 \cdot 12}{2} = 66$ und für $n=10$ entsprechend $s = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$; also ist für $n=10$ und $n=11$ die Bedingung a) erfüllt.
b) Angenommen, für eine natürliche Zahl n sei s eine dreistellige Zahl aus drei gleichen Ziffern. Dann ist s, also auch $2s = n(n+1)$ durch 111 teilbar. Wäre $n \geqq 45$, so wäre $s \geqq 45 \cdot 23 > 1000$, also nicht dreistellig. Daher ist $n < 45$, $n+1 < 46$.
Also muß wegen $111 = 3 \cdot 37$ und, weil 3 und 37 Primzahlen sind, einer der beiden Faktoren n, $n+1$ durch 3 teilbar und der andere gleich 37 sein. Da $n+1$ für $n=37$ nicht durch 3 teilbar ist, verbleibt nur $n+1=37$. Tatsächlich erhält man dabei $s = \frac{36 \cdot 37}{2} = 666$, also eine dreistellige Zahl aus drei gleichen Ziffern als einzige Lösung.

Ma 10/12 ▪2081 Eine reelle Zahl $x (\neq -3)$ erfüllt genau dann (1), wenn

$$-\frac{2}{5} \geqq \frac{3}{x+3} \text{ gilt.} \qquad (2)$$

Für alle $x > -3$ ist $\frac{3}{x+3}$ positiv, also (2) nicht erfüllt. Für $x < -3$ ist (2) gleichbedeutend mit jeder der Ungleichungen

$-2(x+3) \leqq 15$,
$x+3 \geqq -7{,}5$,
$x \geqq -10{,}5$.

Also wird (2) und folglich ebenso auch (1) genau von denjenigen Zahlen x erfüllt, für die $-10{,}5 \leqq x < -3$ gilt.

Lösungen zu: alpha-heiter

Guter Rat

Mit $a > b > c$ laute die Differenz
$100a + 10b + c - (100c + 10b + a)$.
Wegen $c < a$ übertragen wir 10 aus den Zehnern, also rechnen wir $10 + c - a$ (Einer). Bei den Zehnern rechnen wir entsprechend. Da $10b - 10 < 10b$, rechnen wir $100 + (10b - 10) - 10b$; das sind $90 = 9 \cdot 10$ (also 9 Zehner). Bei den Hundertern müssen wir dann rechnen $(100a - 100) - 100c$. Das sind $100(a - c - 1)$.
Also nun:
$100(a-c-1) + 9 \cdot 10 + (10 + c - a)$
$+ 100(10 + c - a) + 9 \cdot 10 + (a - c - 1)$
Das ergibt dann:

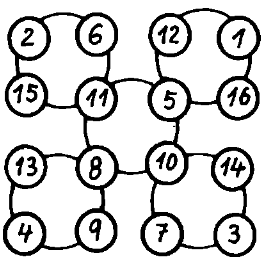
$$\begin{array}{lr} 100(a-c-1+10+c-a) = 100 \cdot 9 = & 900 \\ +9 \cdot 10 + 9 \cdot 10 = 90 + 90 = & 180 \\ +10 + c - a + a - c - 1 = & 9 \\ \hline \text{Wir erhalten stets} & 1089 \\ \text{Addieren wir jetzt} & 13865 \\ \hline \end{array}$$

so ergibt das 14954 und „entziffert": Lerne!

Kreuzzahlrätsel

4	2	8	2	5
6	1	4	3	2
6	6	1	6	6
5	1	2	1	2
6	7	6	8	7

Magische Kreise



Geburtsjahr gesucht

$1902 + 1930 + 1945 + 1965 + 1937 = 9679$

Silbenrätsel

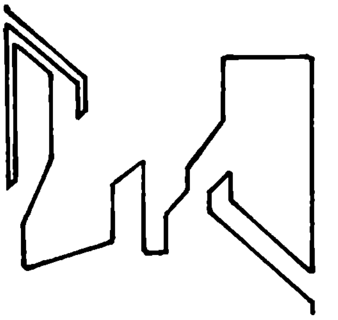
Lösungswort: Olympiade

Kryptarithmetik

$$\begin{array}{ccc} 8 : 2 = 4 & \text{oder} & 8 : 4 = 2 \\ : \quad : \quad + & & : \quad : \quad + \\ 1 + 2 = 3 & & 1 + 4 = 5 \\ \hline 8 - 1 = 7 & & 8 - 1 = 7 \end{array}$$

$84763 + 157 + 8310 = 93230$;
$302757 : 97 = 3121$

Irrgarten



Lösungen zu: Optimale Reihenfolge

1. Die günstigsten Reihenfolgen sind (D, E, F, C, A, B) und (D, F, E, C, A, B) mit je 145 min Gesamtwartezeit.
2a. (3, 4, 2, 1)
2b. (D, F, A, E, C, B) und (F, D, A, E, C, B)
3a. Die Reihenfolge (Wohnung 2, Wohnung 3, Treppenhaus, Wohnung 1, Keller) erfordert 22 Arbeitstage.
3b. Bei der Reihenfolge (D, E, F, C, A, B) werden die Liegekosten am kleinsten; insgesamt 1015000 Mark. Die Entladung ist nach 24 Stunden beendet. Bei den Reihenfolgen (D, E, C, B, F, A) und (D, E, C, B, A, F) ist die Entladung am schnellsten beendet: nach 22 Stunden. Die Liegekosten belaufen sich aber auf 1091000 bzw. 1097000 Mark.

Lösung des Kreuzworträtsels
(IV. U.-Seite)

I. Waagerecht: 5. Detonation, 6. Transformation, 7. RT, 9. Ta, 11. Sechseck, 12. Möbius, 13. 19, 14. 91, 18. Meer, 22. Kosmos, 24. Gent, 25. Usus, 27. old, 28. tla, 29. NVA, 31. RFT, 32. Giga, 34. Diaz, 35. Nernst, 36. Rast, 39. 16, 40. 71, 41. Kepler, 42. Variable, 47. Mn, 48. AN, 49. Parallelogramm, 54. Rauminhalt, 57. Bor, 58. WPU, 59. NTZ, 60. Nis, 62. Sn, 63. Ca, 64. PS, 65. Ti, 67. Ra, 69. ES, 70. Es, 72. Ne, 75. Ina, 76. Tee, 77. Weg, 78. Inn.
II. Senkrecht: 1. MTS, 2. Hof, 3. atm, 4. Dia, 7. Re, 8. Tc, 9. Te, 10. Ac, 13. 19, 15. 18, 16. Hankel, 17. Galois, 18. Mond, 19. est, 20. Emu, 21. Rost, 22. Kelvin, 23. Sulfat, 24. Gong, 26. Satz, 30. Ager, 31. Rist, 33. Ara, 34. DNS, 37. 61, 38. 81, 43. Am, 44. Rn, 45. Ba, 46. In, 50. Lux, 51. lmh, 52. Ohr, 53. Gas, 55. Kongruenzsätze, 56. Proportion,

Aufgaben aus Freundesland

Wir stellen unseren *alpha*-Lesern ausgewählte Aufgaben aus der ČSSR, die sicher das Interesse vieler finden werden, und wir wünschen Erfolg beim Lösen dieser Aufgaben.

▲1▲ Ein Dreieck ABC habe die Seitenlängen $a=9$ cm, $b=4$ cm und $c=6$ cm. Die Punkte P, Q und R seien in der gegebenen Reihenfolge Mittelpunkte der Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$. Es ist die Länge des Umfangs des Dreiecks PQR zu berechnen.

▲2▲ Eine LPG bestellte ein trapezförmiges Feld, dessen parallele Grundseiten 280 m und 220 m lang sind und dessen Höhe die Länge 140 m besitzt, mit Zuckerrüben. Je Hektar wurden durchschnittlich 38 t Zuckerrüben geerntet.
Wieviel Tonnen Zucker erbrachte die Ernte, wenn der Zuckergehalt der Zuckerrüben 16% betrug?

▲3▲ Auf der Seite $\overline{AB}$ eines Quadrates $ABCD$ mit der Seitenlänge $a=6$ cm ist ein innerer Punkt P so festzulegen, daß $\overline{AP}$ die Länge 2 cm hat. Das Quadrat $ABCD$ ist an der Geraden $\overline{CP}$ als Symmetrieachse zu spiegeln; sein Bild sei $A'B'C'D'$.

▲4▲ Das Material für ein Bauvorhaben wurde auf drei LKW mit unterschiedlicher Ladekapazität verladen. Die Masse der Ladung des zweiten LKW war um 20% größer als die des ersten LKW. Die Masse der Ladung des dritten LKW war um 20% größer als die des zweiten LKW. Insgesamt wurden von allen drei LKW 18,2 t Material geladen. Berechne die Masse der Fracht für jeden der drei LKW!

▲5▲ Die Kanten $\overline{AB}$ bzw. $\overline{BC}$ eines Quaders $ABCDEFGH$ haben die Länge 12 cm bzw. 5 cm. Die Raumdiagonale $\overline{AG}$ bildet mit der Diagonalen $\overline{AC}$ der Grundfläche einen Winkel, dessen Größe um 20° kleiner ist als die Größe des Winkels, der von der Raumdiagonalen $\overline{AG}$ und der Kante $\overline{CG}$ gebildet wird.
Es ist das Volumen des Quaders zu berechnen.

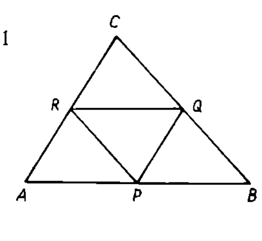
▲6▲ Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $a=6$ cm.
Es ist ein Kreis k zu konstruieren, der die Quadratseiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ berührt und durch den Punkt D geht. Die Konstruktion ist zu begründen.

Lösungen

▲1▲ Die Verbindungsgerade der Mittelpunkte zweier Dreieckseiten ist parallel zur dritten Dreieckseite. Folglich sind die Vierecke $APQR$ und $PBQR$ Parallelogramme, und es gilt $\overline{AR}\cong\overline{PQ}$, $\overline{AP}\cong\overline{QR}$, $\overline{BQ}\cong\overline{PR}$. Für den Umfang des Dreiecks PQR gilt somit

$u=\frac{1}{2}\cdot(a+b+c)=\frac{1}{2}\cdot(9+4+6)\,\text{cm}=9{,}5\,\text{cm}.$ (Bild 1)

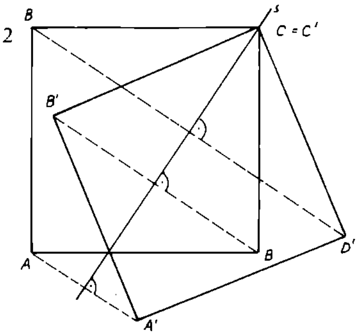
Bild 1



▲2▲ $A=\frac{1}{2}\cdot h\cdot(a+c)=$
$\frac{1}{2}\cdot 140\cdot(280+220)\,\text{m}^2=35\,000\,\text{m}^2$
$=3{,}5\,\text{ha};\ x=3{,}5\cdot 38\cdot\frac{16}{100}\,\text{t}=21{,}28\,\text{t}.$
Die Ernte erbrachte 12,28 t Zucker.

▲3▲ Die Konstruktion ist der Zeichnung zu entnehmen. (Bild 2)

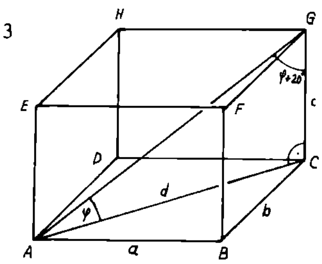
Bild 2



▲4▲
1. LKW: x t
2. LKW: $\left(x+\frac{20}{100}\right)$ t $=1{,}2x$ t
3. LKW: $1{,}2x$ t $+\frac{20\cdot 1{,}2x}{100}$ t $=1{,}44x$ t
Insgesamt: $3{,}6x$ t
Nun gilt $3{,}64\cdot x=18{,}2$, also $x=5$.
Die Ladung des ersten LKW betrug 5 t, die des zweiten 6 t und die des dritten 7,2 t.

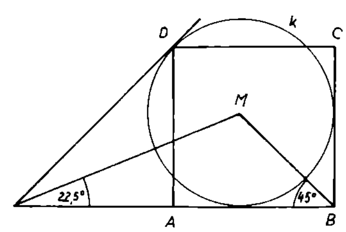
▲5▲ Die Länge von $\overline{AC}$ beträgt $d=\sqrt{144+25}\,\text{cm}=13\,\text{cm}$. Für das Dreieck ACG gilt $\phi+(\phi+20°)=90°$, also $\phi=35°$. Für die Länge c der Seite $\overline{CG}$ gilt dann $c=13\cdot\tan 35°$ und somit $V=abc=$
$12\cdot 5\cdot 13\cdot\tan 35°\,\text{cm}^3\approx 546\,\text{cm}^3$. (Bild 3)

Bild 3



▲6▲ Der Mittelpunkt M des zu konstruierenden Kreises k liegt auf der Winkelhalbierenden des Winkels ABC und auf der Winkelhalbierenden des Winkels AED. Auf Grund der vorliegenden Symmetrieeigenschaften hat der Winkel AED die Größe 45°. (Bild 4)

Bild 4



Übersetzung: OL F. Kriesche, Eilenburg
Bearbeitung: StR Th. Scholl, Berlin

61. Analysis, 62. Sc, 64. Pt, 66. Frequenz, 68. As, 71. Se, 73. Scheitelwinkel, 74. Einermenge.
III. Von links oben nach rechts unten: 1. Ulme, 2. Geel, 3. BAM, 4. Ire, 7. Lot, 8. TP, 9. Ni, 11. km, 14. mm, 16. Br, 17. EOS, 18. nm, 21. Heu, 22. Irre, 23. Mann, 24. Ede.
IV. Von rechts oben nach links unten: 27. Rehe, 28. Dill, 29. Set, 30. Lew, 33. Pik, 34. Li, 35. Er, 37. Ga, 40. Ag, 42. La, 43. Phi, 44. ha, 47. Chi, 48. Him, 49. anal, 50. sin.
V. Auf den oberen Kreisbahnen (math. negativer Umlaufsinn): 3. Blei, 5. Kamera, 6. Wärmelehre, 8. Ton, 10. Optik, 12. IMO, 29. Seil, 31. Fehler, 32. Mittelwert, 34. Lie, 36. Mikro, 38. Wal.
VI. Auf den unteren Kreisbahnen (math. positiver Umlaufsinn): 13. IMU, 15. Ebene, 19. Rom, 20. Archimedes, 25. Gerade, 26. Urne, 39. Hai, 41. alpha, 45. AHA, 46. Stochastik, 51. Chinin, 52. Iran.
Lösungswort: *Erster Mathematikerkongress der DDR 1981*

Kreuzworträtsel

Fortsetzung der IV. Umschlagseite

II. Senkrecht: 1. Landtechnische Station der fünfziger Jahre (K), 2. durch Lichtbeugung hervorgerufene atmosphärische Lichterscheinung, 3. bisher gebräuchliche Druckeinheit ($= 101325 \frac{N}{m^2}$), 4. Diapositiv (K), 7. Metall, OZ 75 (S), 8. künstlich herstellbares Metall, früher auch Masurium genannt (S), 9. chem. Element, OZ 52 (S), 10. radioaktives Element, 1899 von Debierne entdeckt (S), 13. Lösung der Gleichung $114 - 5x = x$, 15. kleinste durch 9 teilbare gerade natürliche Zahl, 16. deutscher Mathematiker (1839 bis 1873), 17. französischer Mathematiker (1811 bis 1832), 18. Himmelskörper, 19. lateinisches Zeitwort, 20. straußenähnlicher Vogel, 21. Zersetzungsschicht an Eisenmetallen, 22. Temperatureinheit, 23. Säurerest der Schwefelsäure, 24. Signalgerät, 26. Form mathematischer Aussagen, 30. altrömisches Staatsland in den eroberten Ländern, 31. Fußrücken, 33. Sittichpapagei, 34. Desoxyribonukleinsäure (K), 37. Primzahl p mit $60 < p < 70$, deren Quersumme eine einstellige Primzahl ist, 38. addiert man zu der gesuchten Zahl die Basiszahl des Dezimalsystems, so erhält man die Lösung von 14. waagerecht, 43. radioaktives Element, OZ 95 (S), 44. radioaktives Edelgas, 45. Erdalkalimetall (S), 46. Logarithmus zur Basis e (K), 50. Einheit der Beleuchtungsstärke, 51. Maßeinheit der Lichtmenge, 52. Organ zur akustischen Wahrnehmung, 53. Aggregatzustand der Materie, 55. mathematische Aussagen über deckungsgleiche Dreiecke, 56. Verhältnisgleichung, 61. Teilgebiet der Mathematik, 62. seltenes Erdmetall, OZ 21 (S), 64. Schwermetall (S), 66. Begriff aus der Schwingungslehre, 68. chem. Element, tritt in grauer metallischer und gelber nichtmetallischer Modifikation auf (S), 71. chem. Element, Halbleiter (S), 73. an sich schneidenden Geraden auftretende Winkel, 74. Menge, die genau ein Element enthält.

III. Von links oben nach rechts unten:
1. Laubbaum, 2. Stadt in Belgien, 3. bedeutsamer Schienenweg der Sowjetunion (K), 4. Einwohner eines europäischen Staates, 7. geometrischer Begriff, 8. Hilfspunkt für die Landvermessung (K), 9. Metall (S), 11. Einheit für geographische Entfernungsangaben (K), 14. Längeneinheit (K), 16. Halogen, OZ 35 (S), 17. Bildungseinrichtung der DDR (K), 18. kleine Längeneinheit (K), 21. natürlich getrocknete grüne Futterpflanzen, 22. Geistesverwirrung, 23. maskuline Person, 24. eine Titelgestalt eines Kinderbuches von Alex Wedding.

IV. Von rechts oben nach links unten:
27. Waldtiere, 28. Gewürzpflanze, 29. Maßeinheit für die Breite der Monotypeschrift, 30. bulgarische Währungseinheit, 33. Bergspitze, 34. das leichteste Metall (S), 35. chem. Element, OZ 68 (S), 37. Metall, OZ 31 (S), 40. Edelmetall (S), 42. chem. Element, OZ 57 (S), 43. griechischer Buchstabe, 44. Flächenmaß (K), 47. griechischer Buchstabe, 48. Hauptteil des Zentralnervensystems (K), 49. medizinischer Begriff, 50. periodische Funktion (K).

V. Auf den oberen Kreisbahnen (math. negativer Umlaufsinn):
3. Schwermetall, 5. fotografisches Aufnahmegerät, 6. Teilgebiet der Physik, 8. sinusförmige Schallschwingung im hörbaren Frequenzbereich, 10. Teil der Lehre von den elektromagnetischen Wellen, 12. mathematischer Wettstreit (K), 29. Hilfsmittel für Bergsteiger, 31. Abweichung vom wahren Wert einer Größe, 32. Erwartungswert einer Zufallsgröße, 34. norwegischer Mathematiker (1842 bis 1899), 36. Kurzzeichen vor Maßeinheiten, 38. Meeressäugetier.

VI. Auf den unteren Kreisbahnen (math. positiver Umlaufsinn):
13. Internationale Mathematikerunion (K), 15. geometrisches Gebilde, 19. Hauptstadt Italiens, 20. griechischer Mathematiker und Naturforscher (um 287 bis 212 v. u. Z.), 25. geometrischer Begriff, 26. Behältnis, 39. Raubfisch, 41. mathematische Schülerzeitschrift der DDR, 45. populärwissenschaftliche Jugendsendung des DDR-Fernsehens, 46. Teilgebiet der Mathematik, 51. Alkaloid der Chinarinde, 52. Staat in Mittelasien.

Die Buchstaben und Ziffern der im folgenden angegebenen Kästchen weisen bei richtiger Auflösung und in entsprechender Reihenfolge gelesen auf ein für die mathematische Wissenschaft der DDR bedeutsames Ereignis hin, das in Kürze in Leipzig stattfinden wird:

I/II: 19, 21, 23, 28, 19, 54
1, 10, 28, 16, 19, 47, 48, 65, 75, 22, 19, 54, 55, 27, 29, 32, 36, 19, 62, 71
III/VI: 28, 35, 19
28, 28, 27
I/II: 13, 14, 38, 39

R. Mildner

Spezialschule für Mathematik

Die Spezialschule für Mathematik und Physik an der Humboldt-Universität zu Berlin fördert seit nunmehr 17 Jahren mathematische Talente. Die Schüler studieren anschließend Mathematik und Physik oder werden als Lehrer in der Fachkombination Mathematik/Physik ausgebildet.

Nach Abschluß der 10. Klasse werden an der Spezialschule in zwei Jahren neben einer soliden Ausbildung in allen Fächern der Abiturstufe breite und tiefe Kenntnisse in den Fächern Mathematik und Physik vermittelt

Schüler, die ihren Hauptwohnsitz nicht in Berlin haben, werden in Studentenheimen der Humboldt-Universität untergebracht.

Mathematiksendungen im Schulfunk

RADIO DDR II

Sicher haben viele von euch schon Schulfunksendungen gehört. Manchem ist aber vielleicht nicht bekannt, daß es seit einigen Jahren auch Mathematikschulfunksendungen gibt. Die Sendungen bauen auf dem Stoff, der im Mathematikunterricht bzw. in den Arbeitsgemeinschaften vermittelt wurde, auf. Sie ergänzen, vertiefen und bereichern das angeeignete Wissen vor allem in zwei Richtungen.

Erstens werden Sendungen ausgestrahlt, die die Bedeutung der Mathematik in der Produktion, im alltäglichen Leben demonstrieren. Dabei wird gezeigt, welches mathematische Wissen und Können erforderlich ist, um den gestellten Anforderungen in den verschiedenen Berufen gerecht zu werden. Zweitens gehen diese Sendungen der historischen Entwicklung der Mathematik nach. Dabei könnt ihr erfahren, auf welch oft kompliziertem Wege mathematische Erkenntnisse gewonnen und angewendet wurden und welchen Nutzen sie heute noch haben. Die Sendungen sind so gestaltet, daß ihr Einblick nehmen könnt in die Gedankenwelt großer Erfinder und Entdecker und mit ihnen die „Abenteuer der Erkenntnis" – wie Einstein einmal sagte – erlebt. Es wird gezeigt, welche Probleme und Schwierigkeiten, Wege und Irrwege von den Mathematikern überwunden wurden, um zu neuen Erkenntnissen zu gelangen. Dabei wird zugleich deutlich, daß sich die Mathematik stets in Abhängigkeit von den gesellschaftlichen Bedürfnissen, den Erfordernissen der Praxis entwickelt hat.

Folgende Mathematikschulfunksendungen werden im Schuljahr 1981/82 ausgestrahlt: (Die Schulfunksendungen werden vom Sender Radio DDR II ausgestrahlt. Die Angaben erfolgen nur für das Fach Mathematik. Die verwendeten Symbole bedeuten: Kl = Klassenstufe; T = Termin.)

1. Zur Geschichte der Entwicklung und Einführung der Symbolik in die Mathematik
Kl. 8, 9 T.: 1. 9. 1981, 13.30 Uhr

Bereits in der Antike erkannte man die Vorteile einer mathematischen Symbolik. Zunächst wurde eine gewisse Übersichtlichkeit bei der Formulierung mathematischer Theorien und bei der Lösung von Aufgaben durch die Verwendung von Abkürzungen, meist Anfangs- oder Endbuchstaben der Zahlen oder mathematischen Operationen, erreicht. Der Prozeß der Entwicklung und Einführung der Symbolik – so wie sie uns heute bekannt ist – war sehr langwierig. Welche Mathematiker sich um die Entwicklung und Einführung einer einheitlichen Symbolik in die Mathematik verdient gemacht haben, und welche Schwierigkeiten sie dabei zu überwinden hatten, kann man in dieser Sendung erfahren.

---

2. Adam Ries – Rechenmeister zu Annaberg-Buchholz
Kl. 6 bis 8 T.: 29. 10. 1981, 17.15 Uhr
5. 11. 1981, 10.15 Uhr

Nach Adam Ries macht es...! Dieser Ausspruch wird heute noch oft verwendet, um die Richtigkeit eines Ergebnisses zu beweisen. Warum wir Adam Ries als Zeugen für die Richtigkeit eines mathematischen Ergebnisses benennen, welche Leistungen er auf dem Gebiet der Mathematik vollbracht hat, wird in dieser Sendung dargestellt.

---

3. Die Ähnlichkeitslehre, ihre Anwendung in der Praxis
Kl. 8 T.: 24. 11. 1981, 13.30 Uhr

In dieser Sendung wird erläutert, wie Thales von Milet mit Hilfe der Kenntnis des Strahlensatzes die Höhe der Pyramide aus der Länge ihres Schattens berechnete, wie der Kapitän eines in Seenot geratenen Schiffes mit einem zerbrochenen Jakobstab seine Position auf hoher See bestimmen konnte. Die Sendung bringt auch Beispiele vom großen Nutzen der Ähnlichkeitslehre für unsere Volkswirtschaft (Schiffbau). In der Sendung wird deutlich, wie sich die Ähnlichkeitslehre zu einer selbständigen mathematischen Disziplin entwickelt hat.

---

4. Zur Entwicklungsgeschichte der Trigonometrie
Kl. 10 T.: 26. 11. 1981, 17.15 Uhr
3. 12. 1981, 10.15 Uhr

Im 15./16. Jahrhundert stellte die Schiffahrt, die sich von den Küsten lösen und die hohe See erreichen wollten, erhöhte Forderungen an Nautik, Astronomie und damit letztlich an die Trigonometrie. Es wurde an Ansätzen aus der Antike und an Kenntnisse aus dem islamischen Kulturgebiet angeknüpft und zunächst astronomische und trigonometrische Tafeln entwickelt. Man begann, sich verstärkt mit der Trigonometrie zu beschäftigen und sie als eine mathematische Disziplin zu begründen. Welche Mathematiker dabei eine entscheidende Rolle spielten, erfährt man in dieser Sendung.

---

5. Geschichten von Riesenzahlen
Kl. 7 bis 10 T.: 21. 1. 1982, 17.15 Uhr
28. 1. 1982, 10.15 Uhr

In dieser Sendung wird erläutert, was alles passieren kann, wenn man die Potenzgesetze nicht beherrscht. Im Mittelpunkt stehen zwei Anekdoten:
1. Belohnung: Der Heerführer Terentius kehrt nach einem siegreichen Feldzug nach Rom zurück. Der Kaiser belohnt ihn auf eine ganz ungewöhnliche Weise.
2. Das Schachspiel: Der indische Kaiser Sheram war begeistert von der Scharfsinnigkeit und Vielfalt der möglichen Situationen beim Schachspiel. Er möchte den Erfinder dieses Spieles belohnen, was ihm letztlich nicht möglich war.

---

6. Anwendungen mathematischer Modelle bei Rationalisierungsvorhaben
Kl. 9 bis 12 T.: 28. 1. 1982, 17.15 Uhr
4. 2. 1982, 10.15 Uhr

Es werden in jeweils 15 Minuten zwei Beispiele der Anwendung der Mathematik erläutert:
1. Entwicklung des Werkzeug- und Rationalisierungsmittelbaus der Betriebe im Kreis Suhl: Es wurde ein Modell erarbeitet, das die Einrichtung eines zentralen Materiallagers mit mechanisierter Lagertechnologie und EDV-orientierter Lagerhaltung, Havarie- und Reparaturdienst für Kleinbetriebe und Konstruktionsabteilungen für die Betriebe im Kreis Suhl erforderlich machte.
2. Verbesserung des Arbeiter- und Berufsverkehrs: Es wurde ein Modell erarbeitet, das bei der Realisierung des Arbeiter-, Berufs- und Personenverkehrs in einem abgeschlossenen Territorium die auftretenden Kosten aller beteiligten Betriebe und Einrichtungen minimierte, bei gleichzeitiger Maximierung des Gewinns, bei Realisierung optimaler Arbeits- und Lebensbedingungen der Werktätigen und bei Nichtbeeinträchtigung des Produktionsprozesses.

---

7. Sonja Kowalewskaja
Kl. 9 bis 12 T.: 11. 3. 1982, 17.15 Uhr
18. 3. 1982, 10.15 Uhr

In dieser Sendung wird gezeigt, wie schwer es Frauen noch im 19. Jahrhundert hatten, eine wissenschaftliche Ausbildung zu erhalten und für ihre wissenschaftlichen Leistungen Anerkennung zu finden. Sonja Kowalewskaja beschäftigte sich nicht nur mit der mathematischen Theorie, sondern sie war bestrebt, die gewonnenen Erkenntnisse auf Probleme der Praxis anzuwenden.

---

8. Zahlen, Zeichen und Systeme – Ungleichungssysteme und ihre Anwendung in der Praxis
Kl. 9 bis 12 T.: 23. 3. 1982, 13.30 Uhr

In dieser Sendung erfährt man, unter welchen Bedingungen die Optimierungsrechnung entstand und welche Verantwortung der Mathematiker für seine gewonnenen Ergebnisse trägt. Am Beispiel des rentabelsten Anbauverhältnisses (Roggen, Kartoffeln) für ein durch Melioration gewonnenes Feld werden die wesentlichen Schritte der Optimierungsrechnung erläutert. Weitere Beispiele demonstrieren die enorme Bedeutung der Optimierungsrechnung in unserer Volkswirtschaft.

---

9. Anwendung mathematischer Modelle im Verkehrswesen
Kl. 9 bis 12 T.: 25. 3. 1982, 17.15 Uhr
1. 4. 1982, 10.15 Uhr
22. 6. 1982, 13.30 Uhr

Es werden in jeweils 15 Minuten zwei Beispiele der Anwendung der Mathematik erläutert:
1. Rechnergesteuerte Ampeln: Das Steuergerät für die mikrorechnergesteuerte Ampelregelung im Straßenverkehr hat die Aufgabe, die Verkehrssicherheit zu erhöhen, Wartezeiten an den Verkehrsknotenpunkten zu reduzieren und der Straßenbahn Vorrang einzuräumen. Man errechnete an einer mit dem Gerät ausgestatteten Kreuzung eine jährliche Einsparung von 5000 Liter Kraftstoff und 15000 kWh Elektroenergie.
2. Automaten für den Fahrkartenverkauf: Für Einzelfahrscheine im S-Bahnbereich wurden Automaten und für Zeit- und Fernfahrkarten Dialogautomaten entwickelt. Die Funktions- und Wirkungsweise dieser Automaten werden erläutert.

---

10. Überblick über die Anfänge der Rechenkunst
Kl. 6 bis 9 T.: 1. 6. 1982, 13.30 Uhr

Die Sendung wird die Entwicklung der Zähl- und Rechenhilfsmittel bis zum 17. Jahrhundert darstellen. Man erfährt, wie solche Ausdrücke, wie „seine Rechnung glattmachen", „etwas auf dem Kerbholz haben" entstanden sind und welche Bedeutung sie hatten. Die Entwicklung, Funktionsweise und Anwendung der ersten Rechenhilfsmittel werden erläutert.

---

11. Geschichte der Rechenanlagen
Kl. 7 bis 12 T.: 15. 6. 1982, 13.30 Uhr

In dieser Sendung werden wesentliche Etappen des Prozesses von der Konstruktion erster mechanischer Rechenmaschinen bis zur Schaffung moderner elektronischer Rechenanlagen demonstriert. Es werden die Leistungen solcher Mathematiker, wie Schikkardt, Pascal, Leibniz und Babbage gewürdigt. Die Hörer werden über einige wichtige Einsatzgebiete von Computern und Tendenzen der künftigen Entwicklung auf diesem Gebiet informiert.

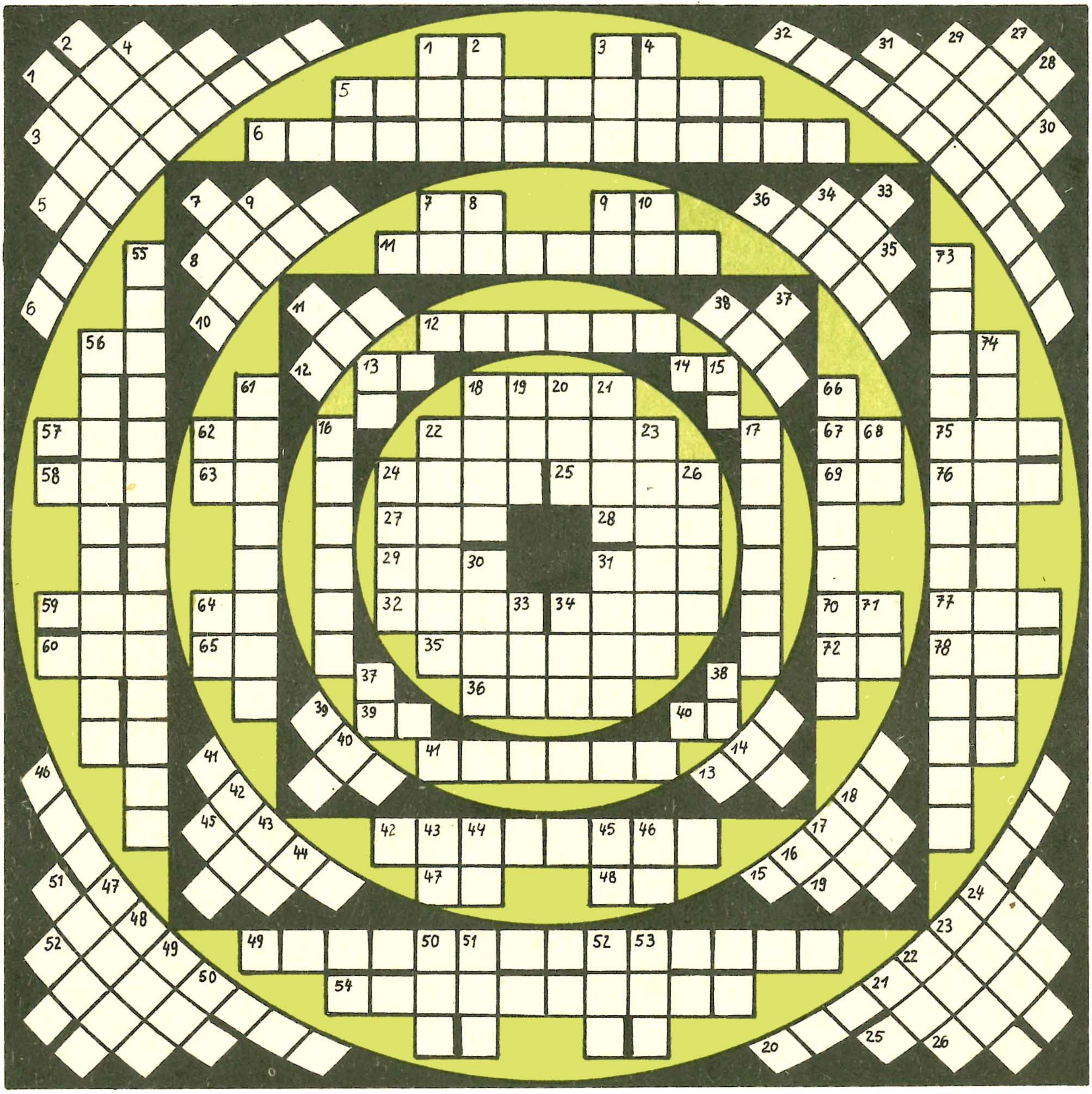
---

12. Zuwachs für die ESER-Familie
Kl. 7 bis 12 T.: 17. 6. 1982, 17.15 Uhr
24. 6. 1982, 10.15 Uhr

Vom Mini-Rechner bis zum Rechenkomplex mit 12 Millionen Operationen in der Sekunde: Innerhalb von nur zehn Jahren ist das Einheitliche System der elektronischen Rechentechnik (ESER) zu einem sich ständig weiterentwickelnden Komplex von Geräten geworden. Mit seiner Hilfe lassen sich verschiedene Systeme der Erfassung und Verarbeitung von Daten schaffen – von automatisierten Leistungssystemen in einzelnen Betrieben bis hin zu Zentren der kollektiven Nutzung im Rahmen eines ganzen Landes. Die ESER-Baureihe ist im Ergebnis der gemeinsamen Arbeit von Spezialisten der RGW-Länder entstanden.

S. Schwidtmann

Kreuzworträtsel



Aus Mathematik, Naturwissenschaft und Technik

Abkürzungen:
OZ.. Ordnungszahl, (S).. Chemisches Symbol, (K).. Kurzbezeichnung

I. Waagerecht: 5. heftige Explosion, 6. Abbildung, Umwandlung, 7. Raummaß in der Schiffahrt (K), 9. chemisches Element, 1802 von Ekeberg entdeckt (S), 11. Vieleck, 12. Leipziger Mathematiker und Astronom (1790 bis 1868), 13. Primzahl p mit $10 < p < 30$ und der Quersumme 10, 14. dividiert man die gesuchte Zahl durch 13 und subtrahiert davon 6, so erhält man 1, 18. großes Gewässer, 22. Weltall, 24. Stadt in Belgien, 25. Sitte, Brauch (latein.), 27. alt (engl.), 28. ungerade Permutation der drei Buchstaben a, l, t, 29. Schutzorgan der DDR (K), 31. Rundfunktechnik (K), 32. Kurzzeichen vor Maßeinheiten, 34. portugiesischer Seefahrer (um 1450 bis 1500), 35. deutscher Physiker (1864 bis 1941), Nobelpreisträger, 36. Ruhepause, 39. die vierte Wurzel aus der gesuchten positiven Zahl ist gleich 2, 40. eine Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 - 70x - 71 = 0$, 41. Mathematiker und Astronom (1571 bis 1630), entdeckte die Gesetze der Planetenbewegung, 42. veränderliche Größe, 47. eisenähnliches Metall, OZ 25 (S), 48. sowjetischer Flugzeugtyp, 49. spezielles Viereck, 54. Volumen, 57. chem. Element mit der relativen Atommasse 10,81, 58. Rostocker Universität (K), 59. Naturwissenschaftlich-Theoretisches Zentrum (K), 60. Stadt in Jugoslawien, 62. silberweißes, sehr geschmeidiges und dehnbares Metall (S), 63. Erdalkalimetall, 1808 von Davy entdeckt (S), 64. bisherige, vor allem in der Kraftfahrzeugtechnik gebräuchliche Leistungseinheit (K), 65. Metall, OZ 22 (S), 67. radioaktives chem. Element (S), 69. Motorrad-Typ, 70. radioaktives Element, nach dem Begründer der Relativitätstheorie benannt (S), 72. Edelgas (S), 75. Fluß in Polen, 76. asiatisches Gewächs, 77. physikalische Größe, 78. Nebenfluß der Donau.

Fortsetzung auf Seite 96