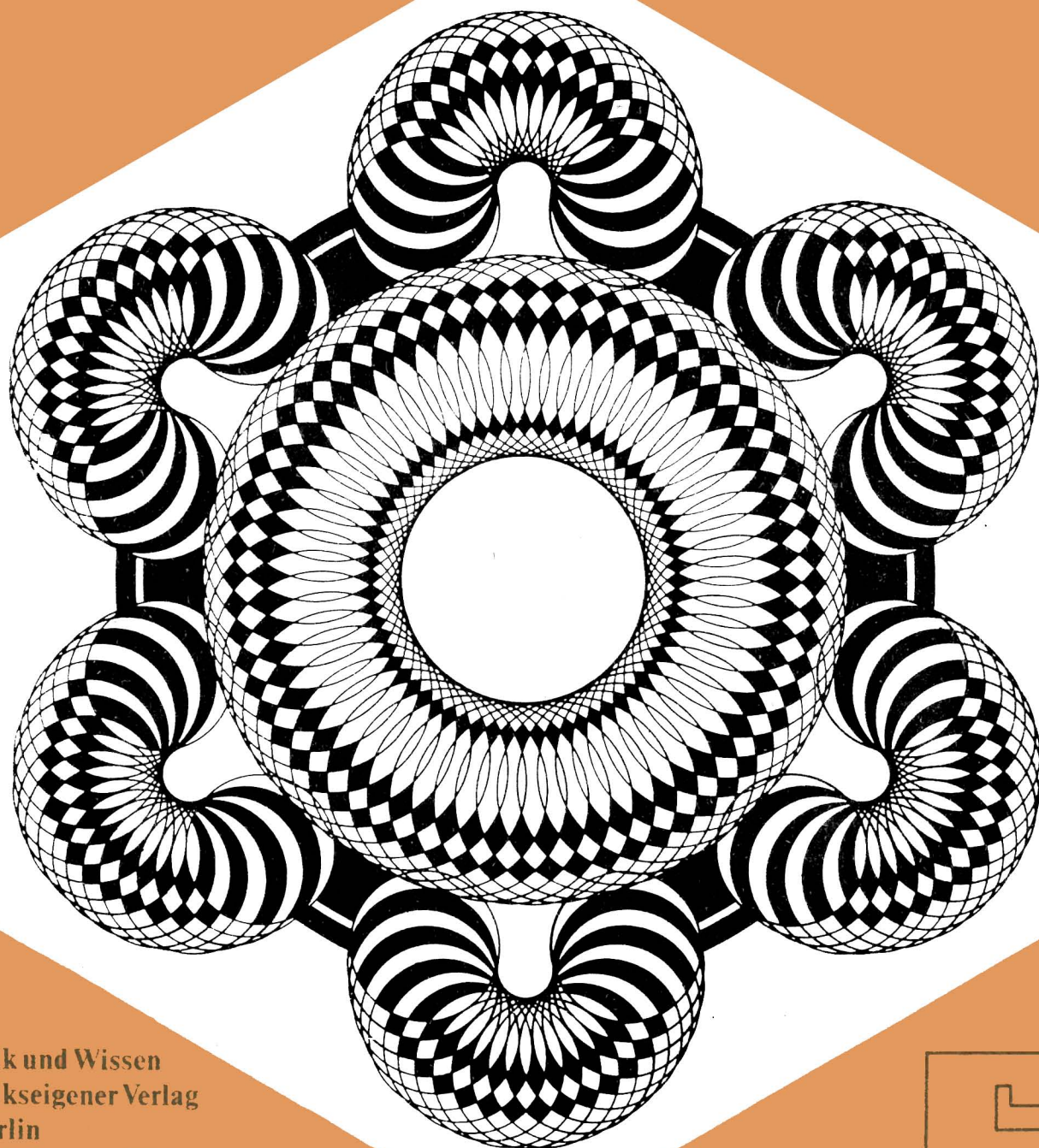
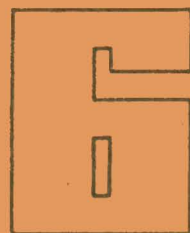


Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
14. Jahrgang 1980
Preis 0,50 M
Index 31059



Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Studienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Dozent Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (Ltg. Diplom-Lehrer C.-P. Helmholtz)

Redaktion:

StR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1080 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des
Presseamtes beim Vorsitzenden des Minister-
rates der Deutschen Demokratischen Repu-
blik.

Postscheckkonto: Berlin 132626. Erschei-
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft
10,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M,
im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Son-
derpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buch-
handel und der Deutschen Post entgegen-
genommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutsch-
land und Berlin(West) erfolgt über den Buch-
handel; für das sozialistische Ausland über
das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und
für alle übrigen Länder über: Buchexport
Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR
7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: H. Büttner, Berlin (S. 130); Schwott,
Beograd (S. 130); Archiv Dr. Schreiber,
Greifswald (S. 132/33, [3]); G. Stelzer, Greifs-
wald (S. 132); A. Nekrassow, Moskau (S.
134); Zentralbild, Berlin (S. 135); B. Henni-
ger, Berlin (S. 138); Vaclav Johans, Prag
(S. 138); Mose, Paris (S. 138); Tscherepanow,
Moskau (S. 139). Das Titelblatt zu diesem
Heft wurde der Zeitschrift *mathematics in
school*, Essex (England), entnommen.

Titelblatt: W. Fahr, Berlin

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig



Gesamtherstellung: INTERDRUCK

Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97

AN (EDV) 128–ISSN 0002–6395

Redaktionsschluß: 24. Juli 1980

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 121 Mit Zirkel, Lineal und Zeichenstift [9]*
Wir bestimmen Funktionswerte und Nullstellen quadratischer Funk-
tionen
Mathematikfachlehrer U. Sonnemann, EOS Ludwigslust
- 122 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt
Pokalwettkampf in Berlin-Lichtenberg [4]
OStR K. Lehmann, VLdV, Fachberater für Mathematik im Stadtbezirk
Berlin-Lichtenberg
- 124 Johannes Kepler – Astronom und Mathematiker, Teil 2 [8]
Dr. H. Pieper, Zentralinstitut für Astrophysik, Abt. Geschichte, Akademie der
Wissenschaften der DDR
- 127 Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann/Th. Scholl
- 128 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]
Aufgaben zu Mathematik, Physik, Chemie
- 131 *alpha*-Wettbewerb 1979/80 [5]
Preisträger · Kollektive Beteiligung · Statistik
- 132 Sektion Mathematik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifs-
wald [7]
Doz. Dr. P. Schreiber, Sektion Mathematik der Universität Greifswald
- 133 Eine Aufgabe von Prof. Dr. habil. Horst Melcher [9]
Sektion Mathematik/Physik der Pädagogischen Hochschule Erfurt
- 134 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht [5]
speziell für Klasse 5/6
Mathematik und Wasserwirtschaft
OL H. Pätzold, Volkshochschule Waren/Müritz
- 136 Schriftliche Abschlußprüfung [9]
Fach Mathematik, Klasse 10, Schuljahr 1979/80
B. Träger/U. Walta, beide Lehrer im Hochschuldienst, Pädagogische Hochschule
Liselotte Herrmann, Güstrow
- 137 VIII. Physikwettbewerb 1980 [9]
- 138 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig/H. Pätzold, Waren/Müritz
- 140 Lösungen [5]
- 144 Glücksbringer wünschen ein frohes und erfolgreiches 1981 [5]
Dipl.-Päd. J. Naumann, Fachbereich Schornsteinfeger, BS *H. Matern*, VEB Bau-
kombinat Leipzig
- III. U.-Seite: *alpha*-Kalender 1981 [5]
AG-Leiter H. Scheibe, Haus der JP *Georg Schwarz*, Leipzig/J. Lehmann, Leipzig
- IV. U.-Seite: Knobeleyen zum Jahreswechsel [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Mit Zirkel, Lineal und Zeichenstift

Wir bestimmen Funktionswerte und Nullstellen quadratischer Funktionen

1. Problemstellung

Funktionswerte und Nullstellen quadratischer Funktion f mit Gleichungen der Form $y = x^2 + px + q$ sollen durch geometrische Konstruktionen mit Hilfe von Zirkel, Lineal und Zeichenstift in einer Ebene bestimmt werden.

2. Beispiel

Von der quadratischen Funktion f mit der Gleichung $y = x^2 + 4x + 3$ sind

- die Funktionswerte an den Stellen $x_1 = -5$; $x_2 = -2$; $x_3 = 0,5$,
- eventuell vorhandene Nullstellen x_{01} und x_{02} zu bestimmen.

Vorbemerkung

Zur geometrischen Lösung der Beispielaufgabe benötigen wir Strecken, deren Längen (bzgl. einer gewählten Längeneinheit – z.B. 1 cm) die Maßzahlen 1; 4; 3; 5; 2 bzw. 0,5 haben.

Wir betrachten unsere Aufgabe als gelöst, wenn es uns gelungen ist, Strecken mit den Längenmaßzahlen $|f(x_1)|$, $|f(x_2)|$, $|f(x_3)|$ und $|x_{01}|$, $|x_{02}|$ zu konstruieren. Aus der Lage der konstruierten Strecken soll dann jeweils das Vorzeichen der Funktionswerte bzw. der Nullstellen abgelesen werden.

Lösung

Bestimmung von Funktionswerten

Wir fertigen eine Zeichnung gemäß Bild 1 an. (Bild 1)

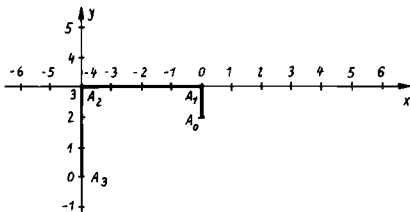
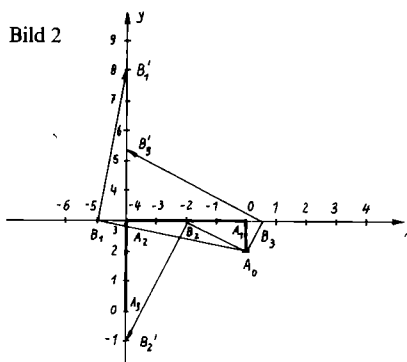


Bild 1

Die Längenmaßzahlen der Strecken $\overline{A_0A_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$ betragen 1, 4 bzw. 3. $\angle A_0A_1A_2$ und $\angle A_1A_2A_3$ sind beide rechte Winkel. Zum Antragen der x -Werte und zum Ablesen der y -Werte verwenden wir zwei Skalen, die

entsprechend der gewählten Längeneinheit geteilt sind. Die x -Skala hat ihren Nullpunkt in A_1 , die y -Skala in A_3 . Wir tragen nun auf der x -Skala einen beliebigen Wert x_1 ab und bezeichnen den entsprechenden Punkt mit B_1 . Den zugehörigen Funktionswert y_1 ($y_1 = f(x_1)$) erhalten wir auf der y -Skala, indem wir auf der Strecke $\overline{A_0B_1}$ in B_1 die Senkrechte errichten und deren Schnittpunkt mit der y -Skala bestimmen. Bezeichnen wir diesen Schnittpunkt mit B'_1 , so markiert dieser den Funktionswert y_1 . (Bild 2)

Bild 2



Aus Bild 2 lesen wir ab:

$$y_1 = f(-5) = 8; y_2 = f(-2) = -1; y_3 = f(0,5) = 5,25.$$

Die Richtigkeit dieser Ergebnisse können wir leicht durch Einsetzen in die Funktionsgleichung $y = x^2 + 4x + 3$ bestätigen.

Natürlich erhebt sich jetzt die Frage: Erhalten wir so für jeden x -Wert den zugehörigen Funktionswert? Wenn ja – auf Grund welcher Gesetzmäßigkeiten?

Begründung des Verfahrens zur Bestimmung von Funktionswerten

Unabhängig von der Lage des Punktes B_1 gilt $\triangle A_0A_1B_1 \sim \triangle A_2B_1B'_1$. (Die Dreiecke stimmen in ihren Winkeln überein, weil die Schenkel paarweise senkrecht aufeinander stehen.) Es ist dann

$$\overline{A_0A_1} : \overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_1} : \overline{A_2B'_1}. \quad (*)$$

Wir bezeichnen mit r die Maßzahl von $\overline{A_2B'_1}$ und beachten, daß $|(-4) - x_1|$ die Maßzahl von $\overline{A_2B_1}$ ist.

Damit geht die Verhältnissgleichung (*) über in

$$1 : |x_1| = |(-4) - x_1| : r. \quad (**)$$

Bezüglich der Größe von x_1 (bzw. der Lage

von B_1) haben wir folgende Fälle zu unterscheiden: (vgl. Bild 2)

Fall 1: $x_1 < -4$

Es ist dann $0 < -4 - x_1$, d.h. $|-4 - x_1| = -4 - x_1$. Außerdem ist $|x_1| = -x_1$. (**) geht über in

$$1 : (-x_1) = (-x_1 - 4) : r$$

$$r = x_1^2 + 4x_1.$$

Wegen $y_1 = 3 + r$ (s. Bild 2)

erhalten wir daraus

$$y_1 = x_1^2 + 4x_1 + 3.$$

Fall 2: $-4 < x_1 < 0$

Es ist dann $-4 - x_1 < 0$, d.h. $|-4 - x_1| = -(-4 - x_1) = 4 + x_1$.

Außerdem ist $|x_1| = -x_1$.

(**) geht über in

$$1 : (-x_1) = (4 + x_1) : r$$

$$r = -x_1^2 - 4x_1.$$

Wegen $y_1 = 3 - r$ erhalten wir daraus

$$y_1 = x_1^2 + 4x_1 + 3.$$

Fall 3: $0 < x_1$

Es ist $|x_1| = x_1$ und wegen $x_1 > 0 > -4$ ist $|-4 - x_1| = 4 + x_1$. (**) geht über in

$$1 : x_1 = (x_1 + 4) : r$$

$$r = x_1^2 + 4x_1.$$

Wegen $y_1 = 3 + r$ erhalten wir daraus

$$y_1 = x_1^2 + 4x_1 + 3.$$

Fall 4: $x_1 = 0$

Nach Konstruktion erhalten wir $y_1 = 3 = f(0)$.

Fall 5: $x_1 = -4$

Nach Konstruktion erhalten wir sofort $y_1 = 3 = f(-4)$.

Für alle $x_1 \in P$ erhalten wir somit nach unserem Verfahren

$$y_1 = x_1^2 + 4x_1 + 3 = f(x_1).$$

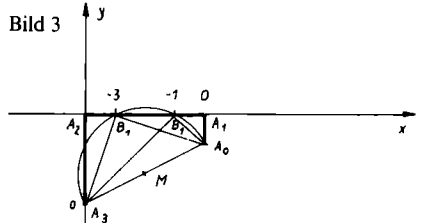
Bestimmung von Nullstellen

Wir suchen alle reellen Zahlen x_0 , für die gilt $f(x_0) = x_0^2 + 4x_0 + 3 = 0$.

Dazu sind alle Punkte B_1 auf der x -Skala zu konstruieren, denen nach unserem Verfahren als B'_1 der Nullpunkt der y -Skala zugeordnet wird. Das sind genau die Punkte der x -Skala, für die $\angle A_0B_1A_3$ ein rechter Winkel ist.

Die Menge aller Punkte C der Ebene, für die $\angle A_0CA_3$ ein rechter Winkel ist, ist bekanntlich der Thaleskreis über der Strecke $\overline{A_0A_3}$. Die gesuchten Punkte B_1 erhalten wir somit als Schnittpunkte des Thaleskreises über $\overline{A_0A_3}$ mit der x -Skala. In unserem Beispiel finden wir die Nullstellen -3 und -1 . (Bild 3)

Bild 3



3. Allgemeines Konstruktionsverfahren

Die Funktionswerte und die Nullstellen einer quadratischen Funktion f mit der Gleichung

$y = x^2 + px + q$ lassen sich mit Hilfe von Zirkel und Lineal folgendermaßen finden:

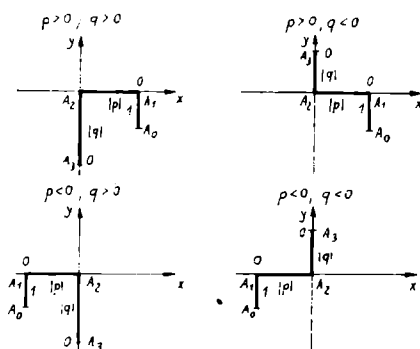
In der Ebene konstruieren wir zwei senkrecht aufeinanderstehende orientierte Geraden und bezeichnen sie – nach Wahl einer gemeinsamen Längeneinheit – als x -Skale bzw. als y -Skale. Den Schnittpunkt beider Skalen nennen wir A_2 .

Auf der x -Skale tragen wir von A_2 aus die Strecke A_2A_1 mit der Längenmaßzahl $|p|$ ab, und zwar für $p > 0$ in positiver Richtung und für $p < 0$ in negativer Richtung der x -Skale. Wir erhalten den Punkt A_1 ; diesen verwenden wir als Nullpunkt der entsprechend der gewählten Längeneinheit geteilten x -Skale. Auf der y -Skale tragen wir von A_2 aus die Strecke A_2A_3 mit der Längenmaßzahl $|q|$ ab, und zwar für $q > 0$ in negativer Richtung und für $q < 0$ in positiver Richtung der y -Skale. Den so gefundenen Punkt A_3 wählen wir als Nullpunkt der entsprechend der gewählten Längeneinheit geteilten y -Skale.

Senkrecht zur x -Skale tragen wir in A_1 die Strecke A_1A_0 mit der Längenmaßzahl 1 in negativer Richtung der y -Skale an und erhalten den Punkt A_0 .

Bild 4 veranschaulicht für $p \neq 0$ und $q \neq 0$ die Lage der Skalen und Strecken.

Bild 4



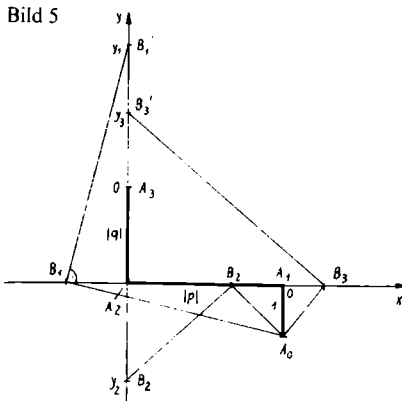
Tragen wir nun auf der x -Skale einen beliebigen Wert x_1 ab und bezeichnen den entsprechenden Punkt mit B_1 , so finden wir den zugehörigen Funktionswert y_1 auf der y -Skale, indem wir auf der Strecke A_0B_1 in B_1 die Senkrechte errichten und deren Schnittpunkt mit der y -Achse bestimmen. Bezeichnen wir diesen Schnittpunkt mit B'_1 und die Maßzahl der Länge von $A_3B'_1$ mit y , so gilt $y_1 = x_1^2 + px_1 + q = f(x_1)$. (Da A_0B_1 für alle B_1 nicht parallel zur x -Skale verläuft, existiert B'_1 stets und ist eindeutig bestimmt.)

Für den Fall $p > 0$; $q < 0$ soll nun bewiesen werden, daß unser Verfahren für alle $x \in P$ die zugehörigen Funktionswerte $f(x)$ liefert.

In diesem Fall ist $|p| = p$ und $|q| = -q$. Unabhängig von der Lage von B_1 ist $\triangle A_0A_1B_1 \sim \triangle A_2B_1B'_1$. Demnach gilt $A_0A_1 : A_1B_1 = A_2B_1 : A_2B'_1$. Wir bezeichnen mit r die Maßzahl von $A_2B'_1$; die Maßzahl von A_2B_1 ist $|-p - x_1|$. Damit erhalten wir die Verhältnisgleichung

$$1 : |x_1| = |-p - x_1| : r. \quad (***)$$

Bild 5



Fall 1: $x_1 < -p$

Es ist $-p - x_1 > 0$ und $x_1 < 0$. (***) geht über in $1 : (-x_1) = (-p - x_1) : r$. Daraus folgt $r = x_1^2 + px_1$ und wegen $y = r - |q| = r + q$ (Bild 5) ist schließlich $y = x_1^2 + px_1 + q$.

Fall 2: $-p < x_1 < 0$

Es ist $-p - x_1 < 0$. (***) geht über in $1 : (-x_1) = (p + x_1) : r$.

Daraus folgt $r = -x_1^2 - px_1$ und wegen $y = -(r + |q|) = -r + q$ ist schließlich $y = x_1^2 + px_1 + q$.

Fall 3: $x_1 > 0$

Es ist $-p - x_1 < 0$ ($x_1 > 0 > -p$). (***) geht über in $1 : x_1 = (p + x_1) : r$. Daraus folgt $r = x_1^2 + px_1$ und wegen $y = r - |q| = r + q$ ist schließlich $y = x_1^2 + px_1 + q$.

Fall 4: $x_1 = 0$

Wir erhalten sofort $y = -|q| = q = f(0)$.

Fall 5: $x_1 = -p$

Wir erhalten sofort $y = -|q| = q = f(-p)$.

Im Fall $p > 0$, $q < 0$ erhalten wir also nach unserem Verfahren für alle $x_1 \in P$ die zugehörigen Funktionswerte $f(x_1)$.

Aufgaben

▲1▲ Führen Sie für die übrigen Fälle (Bild 4) jeweils den Beweis für die Richtigkeit des Verfahrens!

▲2▲ Ist das Konstruktionsverfahren auch dann anwendbar, wenn $p = 0$ oder $q = 0$ ist?

▲3▲ Bestimmen Sie mit Hilfe des Konstruktionsverfahrens die Funktionswerte der quadratischen Funktion mit der Gleichung $y = x^2 - 5x - 2$ an den Stellen $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 6$!

▲4▲ Beweisen Sie! Besitzt die quadratische Funktion mit der Gleichung $y = x^2 + px + q$ Nullstellen, so erhalten wir diese, indem wir die Schnittpunkte des Thaleskreises über der Strecke A_0A_3 mit der x -Skale bestimmen.

▲5▲ Zeigen Sie mit Hilfe des Konstruktionsverfahrens, daß es für $q < 0$ stets zwei Nullstellen x_{01} und x_{02} mit unterschiedlichen Vorzeichen gibt und daß $x_{01} + x_{02} = -p$ ist!

▲6▲ Untersuchen Sie für $q > 0$ die Anzahl der Nullstellen!

U. Sonnemann



Pokal-Wettkampf in Berlin-Lichtenberg



Seit dem Jahre 1966 – allerdings mit einer Unterbrechung – führen wir in unserem Stadtbezirk neben der Mathematik-Olympiade einen weiteren Wettbewerb auf mathematischem Gebiet durch. Er ist in seinem Aufbau dem Europapokal-Wettbewerb der Leichtathleten vergleichbar. Es geht auch um einen von der FDJ-Kreisleitung gestifteten Pokal, der die Gestalt eines Ikosaeders hat.

Während bei der Olympiade die Einzelleistung im Vordergrund steht, geht es hier um mannschaftliche Geschlossenheit und Ausgeglichenheit. Jede teilnehmende Schule stellt eine Mannschaft, die aus je einem Schüler der Klassen 4 bis 9 besteht, also sechs Teilnehmer umfaßt. Jeder Teilnehmer hat innerhalb von zwei Stunden zwei Aufgaben zu lösen. Die Bedingungen entsprechen denen der Olympiade. Die Lösungen werden mit Punkten bewertet. Insgesamt kann jeder Teilnehmer 15 Punkte erreichen. Innerhalb der einzelnen Klassen ergibt sich aus den Punktzahlen eine Rangfolge. Jedem Teilnehmer wird so eine Platzziffer zugeordnet. Die sechs Platzziffern der Schule werden addiert, und die Schule mit der niedrigsten Summe ist Sieger. Sie erhält für ein Jahr den Pokal. Auf einer seiner Flächen werden der Name der Schule und das Schuljahr eingraviert. Mit den Mitgliedern der drei erfolgreichsten Mannschaften wird eine Exkursion oder ein Theaterbesuch durchgeführt.

Dieser Wettbewerb erfreut sich großer Beliebtheit. Im Schuljahr 1979/80 nahmen 36 der 42 zehnklassigen Oberschulen unseres Stadtbezirks teil. Wir führten daher eine Vorrunde durch, und aus jeder der 6 Gruppen gelangten die beiden besten Mannschaften in die Endrunde.

Die Aufgaben werden von der Fachkommission zusammengestellt. Wir benutzen dabei Aufgaben aus der *alpha*, aus früheren Olympiaden und auch aus Büchern, bilden jedoch einen Teil der Aufgaben auch selbst. Im folgenden seien einige Aufgaben aus dem diesjährigen Wettbewerb vorgestellt.

Aufgaben (Mathematik-Cup 1980)

Klasse 4 – Vorrunde

▲ 1 ▲ Setze in jeder Zeile zwischen die Zahlen Rechenzeichen (in jeder Zeile 3 Zeichen) so ein, daß das angegebene Ergebnis entsteht!

- a) $1 \ 2 \ 3 \ 4 = 1$
- b) $1 \ 2 \ 3 \ 4 = 2$
- c) $1 \ 2 \ 3 \ 4 = 3$
- d) $1 \ 2 \ 3 \ 4 = 24$

▲ 2 ▲ Jens möchte aus Papier eine pyramidenförmige Turmspitze bauen. Sie ist in Bild 1 dargestellt.

Dafür stehen ihm vier Netze zur Verfügung (Bild 2).

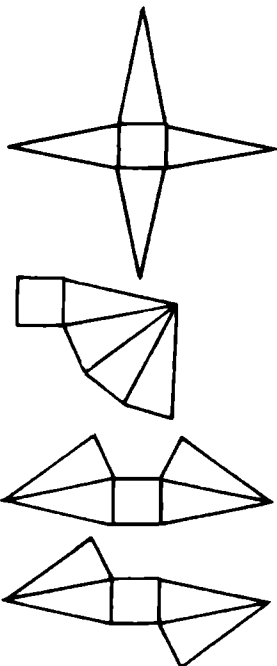
Gib für jedes dieser Netze (durch „ja“ oder „nein“) an, ob sich diese Figur daraus bauen läßt!

In den Fällen, bei denen das möglich ist, bezeichne diejenigen Kantenpaare, die beim Zusammenbau aneinanderstoßen, mit der gleichen Farbe oder mit dem gleichen Buchstaben!

Bild der Turmspitze (Bild 1):



Netze (Bild 2):



Klasse 4 – Endrunde

▲ 1 ▲ Erik denkt sich eine zweistellige Zahl. Wenn man die Hälfte dieser Zahl mit sich selbst multipliziert, dann erhält man dasselbe, als wenn man die Ziffern der gedachten Zahl vertauscht.

Welche Zahl hat Erik sich gedacht?

▲ 2 ▲ Zeichne auf Papier mit quadratischen Kästchen vier Rechtecke, jedes davon 6 Kästchen breit und 4 Kästchen lang!

Jedes dieser vier Rechtecke soll in Quadrate zerlegt werden, und zwar das erste in 3, das zweite in 6, das dritte in 8 und das vierte in 10 Quadrate. Dabei sollen die Trennungslinien entlang der Ränder der Kästchen verlaufen, also kein Kästchen kreuzen.

Trage in deine Zeichnung eine solche Zerlegung ein!

Klasse 5

▲ 1 ▲ An die Tafel ist eine bestimmte Anzahl von Vierecken gezeichnet. Über sie ist folgendes bekannt:

- (1) Unter diesen Vierecken ist genau ein Quadrat.
- (2) Genau vier dieser Vierecke sind Parallelogramme.
- (3) Ein Drittel der Vierecke sind Rechtecke.
- (4) Die Gesamtzahl der Vierecke ist eine ungerade Zahl.

Wieviel Vierecke sind an die Tafel gezeichnet?

Klasse 6

▲ 1 ▲ Gibt es einen Bruch mit dem Nenner 20, der größer ist als $\frac{4}{13}$ und kleiner ist als $\frac{5}{13}$?

▲ 2 ▲ a) Entscheide, ob es Dreiecke gibt, in denen zwei der Winkelhalbierenden senkrecht zueinander stehen! (Beweise deine Aussage!)

b) Entscheide, ob es Dreiecke gibt, in denen zwei der Winkelhalbierenden gleich lang sind! Beweise deine Aussage!

Klasse 7

▲ 1 ▲ Ihr habt vor euch 7 Zeilen mit Ziffern:

- 1 2 3 = 1
- 1 2 3 4 = 1
- ...
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 1

Aus jeder dieser Zeilen soll eine wahre Aussage hergestellt werden. Dazu ist gestattet,

- zwischen Ziffern eines der Rechenzeichen „+“, „-“, „·“, „:“ oder „^“ einzufügen,
- Klammern einzusetzen,
- zwischen Ziffern kein Zeichen einzufügen und sie so als mehrstellige Zahlen aufzufassen.

Es ist nicht gestattet,

- die Reihenfolge der Ziffern zu ändern,
- das Gleichheitszeichen durchzustreichen.

Für jede Zeile ist ein Beispiel anzugeben; eine Begründung wird nicht gefordert.

▲ 2 ▲ Entscheide für jeden der drei angegebenen Fälle a), b), und c), ob die von beiden (richtig) gezeichneten Dreiecke kongruent zueinander sein müssen oder nicht!

a) Richard und Isolde zeichnen unabhängig voneinander je ein gleichschenkliges Dreieck mit einem Innenwinkel von 45° und einer Basis, die 8 cm lang ist.

b) Ludwig und Leonore zeichnen unabhängig voneinander je ein gleichschenkliges Dreieck mit einem Innenwinkel von 90° und einer Basis, die 8 cm lang ist.

c) Wolfgang und Susanne zeichnen unabhängig voneinander je ein gleichschenkliges Dreieck mit einem Innenwinkel von 60° , in dem eine Seite 8 cm lang ist.

Begründe deine Entscheidungen!



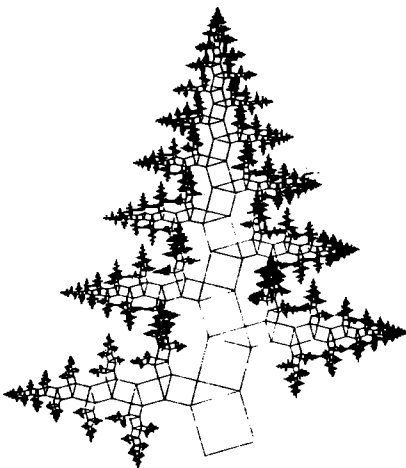
Klasse 8

▲ 1 ▲ Von einem Drachenviereck $ABCD$ sei bekannt:

- (1) Seine Diagonalen sind gleich lang.
 - (2) Eine Seite des Drachenvierecks hat die gleiche Länge wie eine der Diagonalen.
- Berechne die Größe jedes der vier Innenwinkel dieses Drachenvierecks!

K. Lehmann

Lösungen siehe Heft 1/81.



Aus: Pythagoras, Niederlande

Johannes Kepler – Astronom und Mathematiker

Teil 2

Kepler-
Gedenkmünze (DDR 1971)



Kepler schloß aus der Tatsache, daß es nur fünf reguläre Polyeder gibt, nicht auf das Nichtvorhandensein weiterer Planeten, sondern äußerte schon 1596, daß es zwischen Mars und Jupiter noch einen Planeten geben könne. Bekanntlich gibt es zwischen Mars und Jupiter einen ganzen Gürtel jedoch sehr kleiner Planeten (Planetoiden genannt).

Die Geschichte der Entdeckung des ersten Planetoiden sei kurz erzählt: In der Neujaarsnacht des Jahres 1801 entdeckte der in Palermo tätige Astronom Guiseppe Piazzi (1746 bis 1826) im Sternbild Stier ein Objekt 8. Größe, das seinen Ort am Sternenhimmel beträchtlich veränderte und das er zunächst für einen Kometen hielt. Vom Berliner Astronomen Bode (1747 bis 1826) wurde es später als Planet erkannt und Ceres benannt. Piazzi beobachtete die Ceres nur 41 Tage bis Mitte Februar. Der kleine Planet (er hat einen Durchmesser von 768 km) mit seiner verhältnismäßig geringen Helligkeit ging verloren und war nicht mehr zu finden. Es galt, die Bahn der Ceres aus den wenigen von Piazzi gefundenen Beobachtungsdaten zu berechnen. Mehrere Astronomen begannen mit der Bahnberechnung. Die bisher angewandten Methoden gestatteten jedoch nicht eine vollständige Bestimmung der Bahn aus Beobachtungen, die einen kürzeren Zeitraum umfaßten. Nachdem Carl Friedrich Gauß (1777 bis 1855) durch die Zeitschrift „Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde“ von dem Problem erfahren hatte, machte er sich im Herbst 1801 an die Bahnberechnungen. Gauß entwickelte dabei ganz neue Methoden zur Bestimmung einer Keplerbahn aus wenigen Beobachtungen und konnte auf Grund der Piazzischen Beobachtungen die Bahn der Ceres tatsächlich berechnen und damit die Wiederauffindung des Objekts ermöglichen. Ein Jahr nach der Entdeckung fand dann Olbers (1758 bis 1840) in Bremen den ersten der in der Folgezeit entdeckten vielen Planetoiden, die sich auf elliptischen Bahnen zwischen den Bahnen des Mars und des Jupiter um die Sonne bewegen, genau an dem Ort des Himmels wieder, an dem Gauß' Berechnung dies vorausgesagt hatte.

Es sei bemerkt, daß die anderen heute bekannten Planeten 1781 (Uranus durch W.

Herschel), 1846 (Neptun durch Galle nach Berechnungen von Leverrier) und 1930 (Pluto durch Tombaugh) entdeckt worden sind, während die mit bloßem Auge sichtbaren Planeten von Merkur bis Saturn bereits im Altertum bekannt waren.

Wandel des Weltbildes

Euklids rund 300 Jahre vor dem Beginn unserer Zeitrechnung geschriebenes Buch „Elemente“ war ein Höhepunkt des geometrischen Denkens in der Antike. Die „Elemente“ wurden in der Folgezeit zum Vorbild für die Mathematik und für alle anderen Wissenschaften. Einleuchtende Axiome, exakte Definitionen, strenge Beweise gaben dem Denken eine *Sicherheit*, die auf allen Wissensgebieten anzustreben war.

François Viète (1540 bis 1603) und andere Mathematiker der Keplerzeit (siehe auch Anhang) bemühten sich, der wissenschaftlich begründeten Geometrie eine in entsprechender Weise *gesicherte* Algebra an die Seite zu stellen. Es galt insbesondere, algebraische Beziehungen geometrisch zu deuten und umgekehrt, geometrische Probleme algebraisch zu lösen. Eine Verbindung zwischen Algebra und Geometrie, die sogenannte „analytische Geometrie“ wurde 1636/37 gleichzeitig von Pierre de Fermat (1601 bis 1665) und René Descartes (lateinisch Cartesius, 1596 bis 1650) geschaffen.

Konnte Copernicus, den Kepler „den Mann freien Geistes“ nannte, der die Vorurteile seiner Zeit bekämpfte, den man als „Mittler zwischen antiker und neuer Naturwissenschaft“ bezeichnet hat, im 16. Jahrhundert *sicher* sein, daß das schon von Aristarch von Samos (etwa 320 bis 250 v. u. Z.) gelehrt heliozentrische Planetensystem mit der Sonne als Mittelpunkt und der planetarischen Erde im Gegensatz zum geozentrischen Weltbild des Ptolemäus mit der Erde als Mittelpunkt „richtig“ ist? Erst nachdem Tycho Brahe das Beobachtungsmaterial entscheidend verbessert hatte, nachdem Kepler auf Copernicus und Brahe aufbauend seine Planetenbewegungsgesetze formuliert hatte, nachdem die Grundzüge einer neuen Physik von Galilei, Kepler, Descartes, Huygens entwickelt worden waren, nachdem Newton auf Galilei,

Descartes, Huygens aufbauend die neue Physik auf die Himmelsbewegung angewandt und sein Gravitationsgesetz erkannt hatte (was wiederum durch Fortschritte in der Mathematik möglich geworden war), konnte das heliozentrische System – verbessert durch die Keplerellipsen an Stelle der copernicanischen Kreise – als gesichert gelten.

Als ein Irrtum dagegen – und das hatte Kepler selbst erkannt – erwies sich das Keplersche Planetenmodell aus In- und Umkugeln der fünf regulären Polyeder. Alexander von Humboldt (1769 bis 1859) machte in seinem *Kosmos* (3. Band) darauf aufmerksam, wie Keplers „beweglicher Geist Hypothesen aufstellte und schnell wieder verließ, um sie mit anderen zu vertauschen. Immer blieb ihm ein hoffnungsvolles Vertrauen, ... Zahlengesetze zu entdecken.“

Kepler gibt eine Theorie der halbrekulären Polyeder

Es wird berichtet, daß bereits Archimedes (etwa 287 bis 212 v. u. Z.) *nahe Verwandte* der regulären Polyeder suchte und sich mit sogenannten halbrekulären Polyedern befaßt hat. Solche Polyeder haben, wie die fünf regulären, ebenfalls nur regelmäßige Vielecke als Seitenflächen, aber, im Unterschied zu diesen,

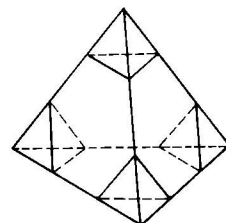


Bild 1
Ebene Schnitte im regulären Tetraeder zur Konstruktion des abgestumpften Tetraeders.

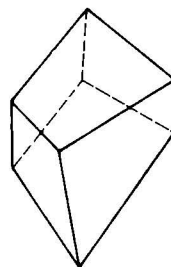


Bild 2
Archimedisches Antiprisma mit quadratischen Grundflächen

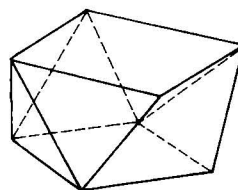


Bild 3
Archimedisches Trapezoeder

regelmäßige Vielecke verschiedener Art. Als Beispiel sei das abgestumpfte Tetraeder angeführt. Man schneide ein Tetraeder mit zu jeweils einer Seitenfläche parallelen Ebenen, deren Abstand von der Ecke $\frac{1}{3}$ der entsprechenden Höhe beträgt. Die Seitenflächen des so *abgestumpften* Tetraeders sind vier regelmäßige Sechsecke und vier gleichseitige Dreiecke. Ähnlich findet man auch aus den anderen regulären Polyedern abgestumpfte Polyeder, die halbbregulär sind. Ein *Antiprisma* genanntes halbbreguläres Polyeder und den dazu *dualen* Körper (*Trapezoeder*) findet man als Abbildung.

Eine vollständige Theorie dieser halbbregulären Polyeder entwickelte Kepler in seinem Buch *Weltharmonik*. (Eine Beschreibung und die Konstruktion der 15 Arten halbbregulärer Polyeder und der dazu *dualen* Körper findet man in dem in Teil 1 angeführten Büchlein von T. Roman.)

In der *Weltharmonik* wird zunächst eine umfassende Darstellung des 10. Kapitels der Euklidischen „Elemente“ gegeben. In diesem auf Theaitetos zurückgehenden Kapitel setzte Euklid sich das Ziel, die bei regulären Polyedern auftretenden irrationalen Zahlen (wie $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $15+7\sqrt{5}$, $\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$), vergleiche Übersicht 3, zu kennzeichnen und zu untersuchen, unter welchen Bedingungen man auf Wurzelschachtelungen in $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ verzichten kann. Die Ergebnisse hatte er dann bei seinen Konstruktionen regulärer Polyeder im 13. Kapitel verwendet.

In den folgenden Teilen der *Weltharmonik* stehen dann die Untersuchungen zur Theorie der regulären und halbbregulären Polyeder, ferner Betrachtungen über sternenförmige Körper, über die die Ebene lückenlos ausfüllenden Vielecknetze, über die musikalische Intervall-Lehre, über Astrologie und Astronomie.

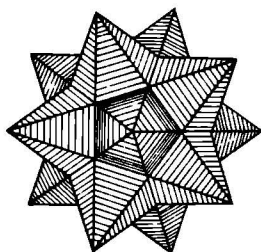


Bild 4
Großes Sterndodekaeder mit konvexen Flächen

Kepler berechnet das Volumen der Weinfässer

„Als ich im November 1613 meine Wiedervermählung feierte, zu einer Zeit, als an den Donauufern bei Linz die aus Niederösterreich herbeigeführten Weinfässer nach einer reichlichen Lese aufgestapelt und zu einem annehmbaren Preis zu kaufen waren, da war

es die Pflicht des neuen Gatten und sorglichen Familienvaters, für sein Haus den nötigen Trunk zu besorgen. Als einige Fässer eingekellert waren, kam am vierten Tag der Verkäufer mit der Meßbrute, mit der er alle Fässer, ohne Rücksicht auf ihre Form, ohne jede weitere Überlegung oder Rechnung ihrem Inhalt nach bestimmte. Es schien mir als Neuvermähltem nicht unzweckmäßig, ein neues Prinzip mathematischer Arbeiten, nämlich die Genauigkeit dieser bequemen und allgemein wichtigen Bestimmung nach geometrischen Grundsätzen zu erforschen und die etwa vorhandenen Gesetze ans Licht zu bringen.“ Dies schrieb Kepler in der Vorrede seiner „Faßlehre“. Er war überaus erstaunt, daß der Verkäufer den Inhalt des Fasses angeben konnte, nachdem er mit der Meßbrute durch den Spund die Entfernung bis zur entgegengesetzten Faßwölbung gemessen hatte, ohne Rücksicht auf die Art der Krümmung der Fässer und ohne sonstige Abmessungen. Kepler dachte nur wenige Tage darüber nach und fand die richtige Berechnung des Faßinhaltes.

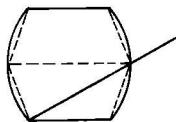


Bild 5
Bestimmung des Faßinhalts mit der Meßbrute

In wesentlich erweiterter Form erschienen seine Resultate 1615 in der lateinischen Schrift *Nova stereometria doliorum vinariorum*, kurz *Faßlehre* (die Kepler auf eigene Kosten drucken lassen mußte) und 1616 in einer volkstümlichen deutschen Bearbeitung („Auszug aus der uralten Messekunst Archimedis“). Das Buch besteht aus drei Teilen. Der erste Teil ist der Inhaltsbestimmung von 92 Körpern gewidmet, zunächst von Körpern, die bereits Archimedes bekannt waren (Zylinder, Kugel, Kegel) und dann von neuen Körpern, von denen einige mit den Namen von Früchten oder anderen Gegenständen des Alltags, denen sie ähneln, versehen wurden (apfelförmiger Körper, zitronenförmiger Körper, olivenförmiger Körper, Kürbis, Ring, Spindel u. a.).

Im zweiten Teil wird gezeigt, daß die damals in Österreich häufigste Faßgestalt zugleich die zweckmäßigste sei, d. h. diejenige, welche bei Verbrauch der geringsten Menge von Faßholz den größten Inhalt besitzt. Als Beispiel eines der sich dabei ergebenden Probleme sei genannt: Es ist der Zylinder größten Volumens in einer Kugel gegebenen Durchmessers zu bestimmen. Dieses Problem läßt sich heutzutage durch Anwenden der Differentialrechnung einfach erledigen. Kepler, dem dieser Kalkül noch nicht zur Verfügung stand, mußte schwierige räumlich-geometrische Überlegungen bei der Lösung anstellen. In einem dritten Teil wird beschrieben, wie man

in der Praxis zu verfahren habe, um den Inhalt von Fässern zu bestimmen.

Kepler schrieb für Praktiker. Die Aussagen und Regeln der *Faßlehre* ergeben sich auf Grund von Analogieschlüssen und durch Betrachtungen von Summen, bei denen *ins unendlich Kleine gehende Größen* eine Rolle spielen (sogenannte Infinitesimalbetrachtungen), durch Zerlegen von Flächen und Körpern in viele *sehr kleine* Teile, nicht auf Grund strenger Beweise (wie bei Archimedes oder heutzutage). Sie zeugen aber von „Keplers großer Erfindungskunst. In der *Faßlehre* sind wichtige Keime neuer Schlußweisen, eine Reihe genialer Ideen und phantasievolle Annahmen enthalten, die später in der Integralrechnung systematisch behandelt wurden.

Die Ergebnisse Keplers diskutierte man in England, Frankreich und Italien. Henry Briggs (1556 bis 1630) in London bestätigte durch Zahlenrechnungen unter Verwendung von Logarithmen, daß beispielsweise tatsächlich (wie Kepler gezeigt hatte) der einer Kugel einbeschriebene Würfel ein größeres Volumen besitzt als ein nur wenig von der Würfelgestalt abweichendes der Kugel einbeschriebenes Parallelepiped (Parallelepiped oder Parallelfäche – ein von drei Paaren von parallelen Ebenen begrenzter Körper mit 6 Seitenflächen, 12 Kanten, 8 Ecken). In Deutschland gab es fast keine Reaktionen. Hier wütete seit 1618 der Dreißigjährige Krieg. Erst in der 2. Hälfte des 17. Jahrhunderts gab es in diesem durch den Krieg materiell und geistig ausgesogenen Land einen erstrangigen Mathematiker: Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 bis 1716). Er wurde zu einem der Begründer der Differential- und Integralrechnung. Unabhängig von ihm wurde dieser Kalkül durch Isaac Newton bei der Herleitung des Gravitationsgesetzes aus den Keplerschen Planetengesetzen entwickelt.

Kepler berechnet Logarithmen

Kaufmännische Rechnungen, Berechnungen zur Astronomie, Navigation und Trigonometrie stellten oft an die Rechenmeister jener Zeit hohe Anforderungen. Sie suchten nach vereinfachenden Rechenverfahren, mit denen z. B. die Multiplikation von Zahlen auf eine Addition zurückgeführt werden sollte. Aber erst nachdem man die dezimale Schreibweise von Brüchen hatte, war die Möglichkeit zur Herstellung von Logarithmentafeln gegeben. (Logarithmen besitzen ja die fundamentale Eigenschaft, die Multiplikation der Zahlen durch die Addition ihrer Logarithmen zu ersetzen.)

Der Schotte John Neper (1550 bis 1617) führte das logarithmische Rechnen ein. Im Jahr 1614 erschien in Edinburgh seine erste Logarithmentafel mit dem Titel „Mirifici logarithmorum canonis descriptio“ (Beschreibung der bewundernswerten Regel der

Logarithmen). Im Juli 1619 gelangte Nepers *Descriptio* in Linz in Keplers Besitz. Es gab darin mehrere Dinge, wie z. B. die Anordnung der Neperschen Tafeln, die Kepler und anderen Gelehrten nicht zusagten. So schuf Kepler seine eigenen Tafeln. Es muß bemerkt werden, daß die *Descriptio* zwar die Tafeln enthielt, aber nicht ihre Herstellung lehrte. (Erst 1620 wurde Nepers *Constructio* – Herstellung der Tafeln der Logarithmen – publiziert, in der sein Verfahren zur Berechnung der Logarithmen beschrieben wurde. In demselben Jahr erschien in Prag eine Logarithmentafel des Schweizers Jobst Bürgi.)

Die Aufstellung von Tafeln fand Kepler somit unabhängig von Neper. Kepler vollendete seine die Zahlen 1 bis 1000 umfassende Tafel im Winter 1621/22. Später verfaßte er eine Anweisung zum Gebrauch der Logarithmen. Die Logarithmen benutzte er auch in seinen 1627 herausgegebenen astronomischen sogenannten Rudolphinischen Tafeln. (Dieses von den beobachtenden Astronomen sehnlichst erwartete Werk verdrängte die älteren, längst als unzuverlässig erkannten astronomischen Tafeln und lieferte den entscheidenden Beitrag zur Anerkennung der Planetentheorie.) Die Verbreitung und Anerkennung der Logarithmen wurde durch diese Verwendung in der Astronomie durch Kepler wesentlich beschleunigt.

Astronomie und Mathematik

Das Leben und Wirken des genialen Johannes Kepler macht die engen Beziehungen deutlich, die zwischen der Astronomie und der Mathematik, zwei Wissenschaften mit jahrhundertelanger Geschichte und Tradition, damals bestanden. Diese wurden im 17., 18. und in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts durch Newton, Euler, Gauß, Jacobi, Bessel und viele andere Astronomen und Mathematiker noch enger. In diesen Jahrhunderten entwickelte sich eine äußerst fruchtbare Wechselwirkung zwischen der Astronomie und der Mathematik.

Ohne die Mathematik wäre die Astronomie nur eine Anhäufung von Erfahrungen und Beobachtungen und nicht eine Wissenschaft, die harmonisch aufgebaut ist und einfache und übersichtliche Gesetze enthält.

So wie die Logarithmen ihre ersten Anwendungen bei Keplers astronomischen Berechnungen fanden, so waren auch später die Fortschritte der Astronomie, insbesondere der Himmelsmechanik, aufs engste verbunden mit den Fortschritten in der Mathematik. Andererseits sind die Forschungen in verschiedenen Teilen der Mathematik durch neuartige astronomische, speziell himmelsmechanische Fragestellungen ausgelöst worden.

Würdigung Keplers durch A. v. Humboldt

Alexander von Humboldt, ein Naturforscher von universeller Bildung, versuchte das naturwissenschaftliche Wissen seiner Zeit in seinem Hauptwerk „*Kosmos: Entwurf einer physischen Weltbeschreibung*“ zusammenzufassen. Dazu gehörte auch das astronomische Wissen. Humboldt ging bei seiner Darstellung stets auf die historischen Quellen zurück. So studierte er im Herbst 1846 *zweimal Seite für Seite* (wie er im Brief vom 6. 9. 1847 an Jacobi betonte) Copernicus' Hauptwerk *De revolutionibus*. Er bemühte sich auch, von kompetenten Zeitgenossen über Astronomie und Astronomiegeschichte, verbunden mit Mathematikgeschichte, Auskünfte zu erhalten. In den Briefwechseln mit bekannten Astronomen wie Herschel, Galle, Encke, Bessel und Jacobi spielen diesbezügliche Fragen eine Rolle. Er hat beispielsweise Auskunft darüber erbeten, wie Kepler durch Induktion richtige Ergebnisse erhalten habe; in seinen *Kosmos* gehöre auch, wie er am 8. 11. 1846 an Jacobi schrieb, die „leise Berührung des Aufkeimens der Gedankenfolge ohne welche die Gesetze der Bewegung der Himmelskörper ... nicht hätten ergründet werden können“.

Im 2. Band seines *Kosmos* (1847) hat er Kepler dann so gewürdigt: „Wenn ich in diesen Betrachtungen über den Einfluß der unmittelbaren Sinnesanschauung Kepler vorzugsweise genannt habe, so war es, um daran zu erinnern: wie sich in diesem großen, herrlich begabten und wunderbaren Manne jener Hang zu phantasiereichen Kombinationen mit einem ausgezeichneten Beobachtungstalente und einer ernsten, strengen Induktionsmethode; mit einer mutigen, fast beispiellosen Beharrlichkeit im Rechnen; mit einem mathematischen Tiefsinne vereinigt fand, der, in der ‚*Stereometria doliorum*‘ offenbart, auf Fermat und durch diesen auf die Erfindung der Rechnung des Unendlichen einen glücklichen Einfluß ausgeübt hat. Ein solcher Geist war nicht vorzugsweise vor allen dazu geeignet, durch den Reichtum und die Beweglichkeit seiner Ideen, ja durch die Wagnisse kosmologischer Ahnungen Leben um sich her zu verbreiten; die Bewegung zu vermehren, welche das siebzehnte Jahrhundert unaufhaltsam seinem erhabenen Ziele erweiterter Weltanschauung zuführte.“

Dieser Würdigung dürfen wir uns auch heute anschließen.

H. Pieper

Astronomie, Mathematik und Physik der Keplerzeit

- 1572 An einem Novemberabend beobachtet Tycho Brahe am Zenit im Sternbild Cassiopea einen hellen Stern an einer Stelle, an der zuvor kein Stern zu sehen gewesen war (eine Supernova in unserem Milchstraßensystem, einen veränderlichen Stern, der eine plötzliche riesige Helligkeitszunahme aufweist).
- 1579 François Viète (lateinisch Vieta) berechnet im „*Mathematischen Regelbuch*“ (Canon

mathematicus, lateinisch) die Zahl π , die den für alle Kreise konstanten Quotienten von Kreisumfang und Durchmesser bezeichnet, auf 10 Stellen.

- 1579 Die zweite Auflage der „*Algebra*“ des Rafael Bombelli erscheint. (Verwendung komplexer Zahlen zur Lösung kubischer Gleichungen.)
- 1585 Simon Stevin gibt die „*Arithmetik*“ des Diophant neu heraus.
- 1588 Jobst Bürgi benutzt zur Erleichterung seiner Rechnungen Logarithmen.
- 1591 François Viète führt allgemeine Buchstabenkoeffizienten in Gleichungen ein.
- 1593 François Viète gibt die folgende Darstellung von $\frac{1}{\pi}$ als unendliches Produkt

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}}$$

- 1596 Die genauere Berechnung der Zahl π bildet den Hauptgegenstand der Schriften Ludolph von Ceulens, auch des Werkes „*Van den Circkel*“. (Noch in den Büchern des 19. Jahrhunderts wird darum π als Ludolphsche Zahl bezeichnet.)
- 1596 Der erste periodisch veränderliche Stern wird entdeckt.
- 1596 Keplers „*Mysterium cosmographicum*“ (Weltgeheimnis) erscheint.
- 1599 F. Bacon mißt die Schallgeschwindigkeit der Luft.
- 1600 W. Gilberts Werk über die magnetischen und elektrischen Kräfte erscheint.
- 1600 Giordano Bruno wird als Anhänger des 1542 erschienenen Werkes „*De revolutionibus orbium coelestium*“ (Über die Umdrehungen der Himmelskörper) des Nicolaus Copernicus auf dem Scheiterhaufen verbrannt.
- 1601 Keplers Spekulationen über die elliptische Marsbahn beginnen.
- 1604 Arbeiten Keplers über die Struktur des Auges und die Theorie des Sehens.
- 1604 In einer Schrift zur Kegelschnittlehre erkennt Kepler die Brennpunkteigenschaften der Kegelschnitte und faßt die Parabel als Grenzfeld der Ellipse auf.
- 1604 Galileo Galilei findet die Gesetze der Fallbewegung.
- 1604 Kepler beobachtet im Sternbild Ophiuchus eine Supernova. „Wie mächtig das Erscheinen neuer Sterne ... die Neugierde gefesselt, den Anteil an astronomischen Entdeckungen vermehrt, ja zu phantasiereichen Kombinationen angeregt hat: lehren Keplers Schriften.“ (A. v. Humboldt)
- 1607 Der Halleysche Komet (nachweislich 466 v. u. Z. erstmals beobachtet) ist sichtbar. (Die letzte Wiederkehr war 1910; die nächste wird 1986 erwartet.)
- 1608 Peter Roth spricht in seiner „*Arithmetica philiphica*“ ohne Beweis den Satz aus, daß eine algebraische Gleichung höchstens so viel Lösungen haben kann, wie ihr Grad angibt.
- 1608 Holländische Brillenmacher erfinden das Fernrohr.
- 1609 Galileo Galilei konstruiert auf Grund ihm zugegangener Berichte ein Fernrohr.
- 1609 Keplers „*Astronomia nova*“ (Neue Astronomie) enthält die ersten beiden Gesetze der Planetenbewegung.
- „Durch das Studium der Bahn des Planeten Mars müssen wir zu den Geheimnissen der Astronomie gelangen oder wir bleiben in derselben auf immer unwissend. Es ist mir durch hartnäckig fortgesetzte Arbeit gelungen, die Ungleichheiten der Bewegung des Mars einem Naturgesetz zu unterwerfen“, schreibt Kepler.
- 1610 Galilei wird zum Ersten Mathematiker in Pisa ernannt.
- 1610 Galilei entdeckt die Jupitermonde.

- 1610 Im November meldet Galilei an Kepler, daß der Saturn aus drei Sternen bestehe, die sich gegenseitig berühren (In dieser Beobachtung liegt der Keim zur Entdeckung des Saturnrings.)
- 1611 Keplers Schrift „Dioptrik“ enthält die Theorie des terrestrischen Fernrohrs und die des von Kepler neu erfundenen astronomischen Fernrohrs.
- 1611 Erste Beobachtung der Sonnenflecken.
- 1612 Der Andromedanebel wird als erster Spiralnebel beschrieben.
- 1612 Die von C. G. Bachet de Méziriac gesammelten überlieferten, teilweise uralten zahlen-theoretischen und algebraischen Aufgaben in anekdotenmäßiger Einkleidung erscheinen.
- 1614 Die Logarithmentafeln des John Napier (lateinisch: Neper) erscheinen (zusammen mit einer Erklärung ihrer Verwendung).
- 1615 Keplers „Faßlehre“ (Stereometria doliorum) enthält Volumenbestimmungen von Drehkörpern und zielt auf die zweckmäßigste Form von Weinfässern (dolia) ab. (Kepler erweist sich als Vorläufer der Integralrechnung.)
- 1616 Der Kardinal Bellarmin erklärt im Februar vor Galilei, daß die copernicanische Welt-sicht mit der katholischen Glaubenslehre unvereinbar sei. Im März kommt Copernicus' „De revolutionibus“ bedingt auf den Index der verbotenen Bücher.
- 1617 Henry Briggs, ein Freund Nepers, führt die Berechnung der Logarithmen mit der Basis 10 durch und kann die ersten 1000 Logarithmen mit acht Dezimalstellen veröffent-lichen.
- 1617 John Neper gibt die erste Beschreibung von Rechenstäben.
- 1619 Keplers „Harmonice mundi“ (Weltharmo-nie) enthält das dritte Gesetz der Planeten-bewegung, aber auch Untersuchungen über regelmäßige Vielecke und Sternkörper.
- 1619 Eine vor 1614 verfaßte Schrift, in der Neper die Berechnung seiner Logarithmentafeln erklärt, wird mit Anmerkungen von Briggs herausgegeben.
- 1620 In Prag erscheinen Logarithmentafeln des seit 1605 als Kammeruhrmacher am kaiser-lichen Hof (in Prag) tätigen Freunds von Kepler, J. Bürgi.
- 1620 W. Snellius abstrahiert aus Messungen das Gesetz von der Strahlenbrechung (Bre-chungsgesetz).
- 1621 Bachet gibt die „Arithmetik“ des Diophant in griechischer und lateinischer Sprache mit beigelegten mathematischen Anmerkungen heraus.
- 1624 Kepler leistet mit seinem „Chilias logarith-morum“ einen Beitrag zu dem Fortschritt, der zur Erleichterung des Rechnens dient.
- 1624 Es erscheint die „Arithmetica logarithmica“ von Briggs mit 14stelligen Logarithmen der ersten 20000 Zahlen und der Zahlen von 90000 bis 100000.
- 1627 Keplers astronomische Tafeln „Tabulae Ru-dolphinae“ (Rudolphinische Tafeln) erschei-nen. Sie gehen auf Beobachtungsergebnisse Tycho Brahes zurück. Kepler benutzt Lo-garithmen. (Er hat dadurch die Anerkennung und Verbreitung der Logarithmen wesentlich gefördert.)
- 1627 Mit der „Rechtmäßigen Lehre von Drei-ecken“ (Doctrina triangulorum canonica) des W. Snellius erscheint ein systematisches Lehrbuch der Trigonometrie.
- 1629 In seiner „Invention nouvelle en l'algebre“ (Neue Entdeckung der Algebra) erkennt Albert Girard neben den positiven Lösungen auch negative und komplexe Lösungen an (wobei er sich die Bedeutung negativer Lö-sungen geometrisch veranschaulicht). Er formuliert den Satz: Jede algebraische Gleichung n-ten Grades hat n Lösungen.

Eine Aufgabe — verschiedene Lösungen

Im Heft 6/1979 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:

Ma5 ■ 1913 Von den 36 Schülern einer Klasse nimmt jeder an genau einer der Sportarten Leichtathletik, Tischtennis, Schwimmen, Schach und Judo teil. Der neunte Teil der Anzahl der Schüler dieser Klasse nimmt entweder an der Sportart Schach oder Judo teil; dabei ist die Anzahl der Teilnehmer der Sportart Schach größer als die der Sportart Judo. An der Sportart Tischtennis beteiligen sich zweimal soviel Schüler wie an der Sportart Schach. Mehr als die Hälfte der Anzahl der Schüler dieser Klasse betreibt Leichtathletik. An der Sportart Schwimmen beteiligen sich mehr Schüler als am Tischtennis. Ermittle für jede dieser Sportarten die Anzahl der an ihr teilnehmenden Schüler dieser Klasse!

Im Heft 3/1980 veröffentlichten wir dazu eine Lösung:

Angenommen, an der Sportart Schach nehmen x Schüler, an der Sportart Judo y Schüler teil; dann gilt $x + y = 36 : 9$, also $x + y = 4$. Wegen $y > 0$ und $x > y$ existiert genau eine Lösung, nämlich $x = 3$ und $y = 1$. Es nehmen 3 Schüler an der Sportart Schach und 1 Schüler am Judo teil. Deshalb nehmen $2 \cdot 3 = 6$ Schüler an der Sportart Tischtennis teil. Angenommen, an der Sportart Leichtathletik nehmen a Schüler, an der Sportart Schwimmen b Schüler teil; dann gilt $a + b = 36 - 10$, also $a + b = 26$. Wegen $a > 18$ und $b > 6$ existiert genau eine Lösung, nämlich $a = 19$ und $b = 7$. Es nehmen 19 Schüler an der Sportart Leichtathletik und 7 Schüler am Schwimmen teil.

Wir stellen nun die Lösung von Mario Thiel aus Eilsleben vor, der Schüler der Kl. 5 der Dr.-Richard-Sorge-Oberschule ist. Mario löste diese Aufgabe wie folgt:

Zuerst dividiere ich die Anzahl der Schüler dieser Klasse durch 9, weil jeder neunte Schüler entweder die Sportart Schach oder Judo betreibt. ($36 : 9 = 4$.) Jetzt muß ich vier in zwei Summanden so aufteilen, daß der eine Summand größer ist als der andere. Dafür kommen nur die Zahlen 3 und 1 in Frage. Es nehmen 3 Schüler am Schach und

1 Schüler am Judo teil. Nun muß ich die Anzahl der Teilnehmer am Schach mit 2 multiplizieren. ($3 \cdot 2 = 6$.) Am Tischtennis nehmen 6 Schüler teil. Ich muß jetzt die Hälfte von 36 ermitteln. ($36 : 2 = 18$.)

Mehr als 18 Schüler betreiben also Leichtathletik, und mehr als 6 Schüler sind Schwimmer. ($36 - 10 = 26$.) Nur die Zahlen 19 und 7 kommen in Frage. Es betreiben 19 Schüler Leichtathletik, und 7 Schüler gehen schwimmen.

Wir stellen nun die Lösung von Karin Dietrich aus Brucke vor, die Schülerin der Klasse 4 der POS Friedeburg ist. Karin löste diese Aufgabe wie folgt:

Ich weiß, daß 36 Schüler dieser Klasse angehören. Der 9. Teil beteiligt sich entweder an der Sportart Schach oder Judo. ($36 : 9 = 4$.) Da die Anzahl der Schüler der Sportart Schach größer ist als die für Judo, müssen 3 Schüler sich am Schachspiel, 1 Schüler am Judo beteiligen. ($4 = 3 + 1$.) Nun stelle ich eine Tabelle auf. Dabei beachte ich, daß sich an der Sportart Leichtathletik mehr als die Hälfte der Schüler dieser Klasse, also mehr als 18 Schüler, an der Sportart Tischtennis, zweimal soviel wie am Schach, also 6 Schüler, beteiligen. Weiterhin muß ich beachten, daß sich beim Schwimmen mehr beteiligen als beim Tischtennis.

Anzahl der Teilnehmer an der Sportart

Judo	Schach	Tisch- tennis	Leicht- athletik	Schwim- men
1	3	6	19	7 *
1	3	6	19	8
1	3	6	20	7

* Lösung

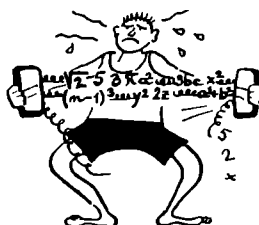
Aus der ersten Zeile der Tabelle ergibt sich die Anzahl der Teilnehmer an den einzelnen Sportarten.

Vorbildliche Hilfe

Unser Dank gilt den Verlagen, die Bücher im Werte von 2400 M für die fleißigsten Wettbewerbsteilnehmer zur Verfügung stellten: BSB B.G. Teubner, Leipzig; Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig, Leipzig; VEB Fachbuchverlag, Leipzig; Der Kinderbuchverlag, Berlin; Militärverlag der DDR, Berlin; Verlag Die Wirtschaft, Berlin; Der Sportverlag, Berlin; VEB Verlag Die Technik, Berlin; Volkseigener Verlag Volk und Wissen, Berlin; Urania-Verlag, Leipzig; Polnisches Informationszentrum, Leipzig; Leipziger Volkszeitung; Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Leipzig.

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 8. März 1981



Aus: rozhledy, Prag

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm x 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1980/81 läuft von Heft 5/80 bis Heft 2/81. Zwischen dem 1. und 10. September 1981 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/80 bis 2/81 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/81 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/80 bis 2/81) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1980/81 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

Mathematik

Ma 5 ■ 2026 In einem Haus wohnen die vier Familien Ackermann, Brauer, Christensen und Dahlmann. Jede dieser vier Familien hat entweder ein Kind oder zwei Kinder. Die Kinder dieser vier Familien haben die Vornamen Egon, Fred, Gudrun, Hans, Inge, Jochen. Die elfjährige Gudrun und der 13jährige Egon sind Geschwister. Hans ist mit dem Sohn von Familie Brauer befreundet. Die beiden Familien Ackermann und Dahlmann haben je ein Kind. Die beiden Kinder der Familie Brauer sind Zwillinge. Der 10jährige Sohn der Familie Brauer hat den Vornamen Fred. Jochen und Fred sind gleichaltrig. Die Tochter der Familie Ackermann ist 8 Jahre alt. Welchen Vor- und Nachnamen haben diese sechs Kinder?

Schülerin Heide Friedemann,
Köthen, Kl. 6

Ma 5 ■ 2027 Heinz geht einkaufen und erhält dafür von seiner Mutter einen bestimmten Geldbetrag. Im ersten Laden gibt er den vierten Teil dieses Geldes aus. Im dritten Laden bezahlt er halb soviel Geld wie im ersten Laden. Im zweiten Laden bezahlt er dreimal soviel Geld wie im dritten Laden. Welchen Geldbetrag hat Heinz von seiner Mutter erhalten, wenn er nach dem Einkauf 10 M übrig behält?

Schülerin Ilonä Glöckel, Prora

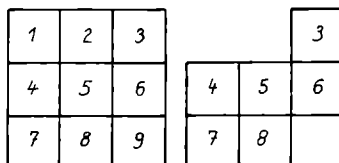
Ma 5 ■ 2028 Jeder der drei Jungen Joachim, Frank und Thomas haben bei der Spartakiade 1979 an einer der drei Sportarten Tischtennis, Speerwurf bzw. 100-m-Lauf teilgenommen. Sie erkämpften zusammen eine Gold-, eine Silber- und eine Bronzemedaille, und zwar jeder eine dieser drei Medaillen.

Es ist folgendes bekannt:

- a) Der Tischtennisspieler, der mit Joachim befreundet ist, erhielt eine Bronzemedaille.
 - b) Im Speerwurf erreichte keiner dieser drei Jungen eine Goldmedaille.
 - c) Thomas ist kein Leichtathlet.
 - d) Joachim ist kein Speerwerfer.
- Wer beteiligte sich an welcher Sportart, und wer erkämpfte welche Medaille?

Schülerin Heike Beringer, Nordhausen

Ma 5 ■ 2029 Das abgebildete Quadrat umfaßt neun kleinere Quadrate, denen jeweils eine der Ziffern 1 bis 9 zugeordnet wurde.



Aus dem großen Quadrat soll ein oben offener, würfelförmiger Behälter gefaltet werden, nachdem die kleineren Quadrate mit den Ziffern 1, 2 und 9 bereits ausgeschnitten worden sind. Welches vierte kleinere Quadrat muß noch ausgeschnitten werden, um einen solchen Behälter falten zu können? Gib alle Möglichkeiten an! Ordne den verbliebenen fünf kleineren Quadraten statt der Ziffern die Buchstaben u, v, h, r, l zu, die zum Ausdruck bringen, welches Quadrat den Behälter unten, vorn, hinten, rechts bzw. links begrenzt!

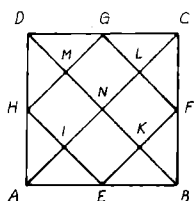
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 2030 a) Schreibe alle Dreiecke auf, die in der abgebildeten Figur den Punkt A als einen Eckpunkt haben (z. B. $\triangle AEI$)!

b) Schreibe alle Vierecke auf, die in der abgebildeten Figur den Punkt G als einen Eckpunkt haben (z. B. Viereck GDNL)!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Thies Luther, 2600 Güstrow, Wendersstr 22		Ma 7 ■ 1369
Kersting-OS, Klasse 7		
30	150	
Prädikat:		
Lösung:		



Ma 5 ■2031 Wenn man vor eine einstellige natürliche Zahl die Ziffer 8 schreibt, ist die so erhaltene Zahl um 9 größer als jene, die man erhält, wenn man die Ziffer 8 hinter die einstellige natürliche Zahl setzt. Um welche Zahl handelt es sich? *Sch.*

Ma 6 ■2032 Es sind drei natürliche Zahlen a, b, c mit $a < b < c$ zu ermitteln, die folgende Eigenschaften besitzen:

- Die größte der drei Zahlen ist gleich dem Quadrat der kleinsten.
- Die mittlere dieser drei Zahlen ist gleich dem Dreifachen der kleinsten.
- Die mittlere dieser drei Zahlen ist gleich dem arithmetischen Mittel aus den beiden anderen Zahlen.

Schüler Eberhard Kerstan, Cottbus

Ma 6 ■2033 Ein Wanderer begegnete einer Schulklasse, die einen Ausflug machte. Er grüßte: „Guten Tag, ihr einhundert Schüler.“ Ein Schüler antwortete darauf: „Wären wir noch einmal soviel und noch $\frac{1}{2}$ mal soviel und noch $\frac{1}{4}$ mal soviel Schüler wie wir sind, und würden wir Sie noch hinzurechnen, dann wären wir genau 100 Personen.“ Wie viele Schüler machten einen Ausflug?

Schüler Armin Singer, Teichwolframsdorf, Kl. 7

Ma 6 ■2034 Bei einer Klassenarbeit im Fach Mathematik, an der alle Schüler teilnahmen, wurde folgendes Ergebnis erzielt: Die Note 2 erhielten doppelt soviel Schüler wie die Note 1. Die Note 3 erhielten 14 Schüler weniger als es Schüler waren, die die Noten 1 oder 2 erreichten. Der fünfte Teil der Anzahl der Schüler dieser Klasse erhielt die Note 4. Die Note 5 erhielt kein Schüler. Dieser Klasse gehören mehr als 16, aber weniger als 24 Schüler an. Wie viele Schüler erhielten die Noten 1, 2, 3 bzw. 4?

Schülerin Heike Brüggemann, Friedeburgerhütte

Ma 6 ■2035 Im Jahre 1977 war Axels Bruder Claus doppelt so alt wie Axel. Wenn man das damalige Lebensalter (in ganzen Zahlen) von Claus mit 3 multipliziert, danach 2 addiert und diese Summe durch 4 dividiert, so erhält man Axels Lebensalter im Jahre 1983. Wie alt war Axel im Jahre 1977?

Schüler Bernd Winkelmann, Schmalkalden

Ma 6 ■2036 Konstruiere ein gleichschenkeliges Dreieck ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$, bei dem die Länge eines Schenkels 6 cm, die Summe aus den Größen eines Basiswinkels und des Win-

kels an der Spitze 110° beträgt! Die Konstruktion ist zu begründen.

Schüler Daniel Hammer, Berlin, Kl. 7

Ma 7 ■2037 Angela geht einkaufen. Von dem Geld, das die Mutter ihr gegeben hat, gibt sie 30% im Fleischerladen aus. Im Milchladen gibt sie 2% weniger Geld aus als im Fleischerladen. Im Gemüsegeschäft gibt sie weitere 21% des Geldes aus. Beim Bäcker schließlich gibt sie doppelt soviel Geld aus, wie sie wieder mit nach Hause bringt. Von dem verbliebenen Geld gibt die Mutter ihr die Hälfte als Taschengeld; das waren genau 2,10 M. Welchen Geldbetrag hat Angela von der Mutter zum Einkauf erhalten?

Schüler Tom Schilling, Oschersleben, Kl. 7

Ma 7 ■2038 Gegeben sei eine Gerade g und ein Punkt M , der von ihr den Abstand 1 cm hat. Es sind alle Punkte P zu konstruieren, die von g den Abstand 2 cm und von M den Abstand 4 cm haben. Die Konstruktion ist zu begründen. *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 7 ■2039 Aus einem Aquarium mit den Innenmaßen 80 cm Länge und 25 cm Breite werden fünf Kannen voll Wasser geschöpft. Anschließend werden sechs Liter frisches Wasser in das Aquarium gefüllt. Danach ist der Wasserspiegel um 7 cm niedriger als zuvor. Wieviel Liter Wasser faßt die Kanne? *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 7 ■2040 Auf einem Tisch steht ein Würfel, der aus einer bestimmten Anzahl gleichgroßer Würfel zusammengesetzt ist. Die Anzahl der kleinen Würfel ist gleich der Anzahl der sichtbaren Flächen der kleinen Würfel. Aus wieviel kleinen Würfeln ist der große Würfel zusammengesetzt?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 8 ■2041 Ein Urlauberschiff hat Kabinen mit einem, mit zwei oder mit drei Betten. Der Fahrgast Müller behauptet, daß es insgesamt 100 Betten sind. Fahrgast Schmidt aber weiß, daß es 5 Dreibettkabinen weniger sind als Einbettkabinen. Er meint, daß Müllers Behauptung falsch sei. Hat Herr Schmidt recht? *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 8 ■2042 $\frac{3}{5}$ aller Schüler der Klassen 8a und 8b entschieden sich für eine Reise in den Spreewald; die anderen wollten gern an die Ostsee fahren. Für die Spreewaldreise waren 12 Schüler mehr als für die Ostseereise. Wieviel Schüler sind in Klasse 8a, wieviel in Klasse 8b, wenn in Klasse 8a zwei Schüler mehr sind als in Klasse 8b?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 8 ■2043 Für welche ein-, zwei- oder dreistelligen natürlichen Zahlen, die von 0 verschieden sind, ist die Summe aus zwei dieser Zahlen gleich der dritten Potenz des ersten Summanden? *Sch.*

Ma 8 ■2044 Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC , dessen Katheten $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ die Längen 4 cm und 6 cm haben. Es ist der Umkreis k dieses rechtwinkligen Dreiecks zu konstruieren. Durch C ist eine Parallele zu $\overline{AB}$ zu zeichnen, die k in D schneidet. Die Geraden BC und AD schneiden sich im Punkte S . Es ist die Länge der Strecke $\overline{CS}$ zu berechnen. *Sch.*

Ma 9 ■2045 Im Inneren oder auf dem Rand eines Rechtecks $ABCD$ mit der Länge von $\overline{AB} = 6$ cm und der Länge von $\overline{BC} = 5$ cm lassen sich 8 Punkte so einzeichnen, daß jeder Punkt von jedem anderen einen Abstand $d > \sqrt{8}$ cm hat. Geben Sie eine solche Lage der Punkte an, und beweisen Sie die Behauptung! *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 9 ■2046 Man konstruiere ein Dreieck ABC , das folgenden Bedingungen genügt:

- der Radius des Umkreises von ABC habe eine Länge von $r_u = 4$ cm,
- die Längen der Seiten des Dreiecks verhalten sich wie 2:3:4.

Schüler Volker Sachse, Mülsen, Kl. 8

Ma 9 ■2047 Die folgende Summe ist auf rationelle Weise zu ermitteln:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \dots + 99^2 - 100^2.$$

Schüler Ralf Krause, Neubrandenburg, Kl. 10

Ma 9 ■2048 Welche der beiden Zahlen 15^{30} und 30^{15} ist die kleinere? *Sch.*

Ma 10/12 ■2049 Ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\gamma = 90^\circ$ habe Kathetenlängen mit den Maßzahlen $a = 1,26$ und $b = 0,74$. Über den Seiten von ABC seien nach außen diejenigen gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecke ADB , BEC und ACF gezeichnet, die $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ jeweils als Hypotenuse haben. Es ist der Flächeninhalt des Dreiecks DEF zu berechnen.

Schüler Volkmar Türke, Auerbach

Ma 10/12 ■2050 Von einem Dreieck ABC ist folgendes bekannt:

- $\alpha_1 + \beta_1 = 240^\circ$
- $u - c = 15$ cm
- $A = \frac{25}{2} \cdot \sqrt{3}$ cm²
- $a < b$.

Es sind a, b, c die Seitenlängen; α, β, γ die Größen der Innenwinkel; α_1 die Größe des Nebenwinkels von α ; β_1 die Größe des Nebenwinkels von β ; A der Flächeninhalt und u der Umfang des Dreiecks ABC . Es sind $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ zu ermitteln!

Schüler Tilo Schaarschmidt, Bad Lauchstädt

Ma 10/12 ■2051 Man ermittle alle geordneten Paare $[p; q]$ mit $p, q \in P$, die die Gleichung

$$3(p-q)(p+q) - 2q(p-q) \cdot (p-q)^2 + 4\sqrt{5p+2q+2} - \sqrt[3]{4p} = 0$$

erfüllen! *Schülerin Katrin Lippuner, Rheinsberg*

Ma 10/12 ■2052 Man konstruiere ein Dreieck ABC , wenn die folgenden Stücke gegeben sind:

Die Winkelhalbierende $\overline{AD}$ des Winkels $\angle BAC$; ihre Länge ω_a betrage 5 cm; die 3 cm lange Strecke $\overline{DE}$, wobei E Mittelpunkt von $\overline{AB}$ ist; der Winkel $\angle ADB$, dessen Größe 105° beträgt.

Die Konstruktion ist zu beschreiben und zu begründen.

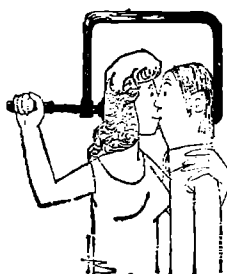
Schülerin Katrin Lippuner, Rheinsberg

Physik

Ph 6 ■86 An einer Zugfeder hängt ein Körper mit einem Gewicht von 600 N (rd. 60 p) und hat die Feder dadurch um 3 cm verlängert. Um wieviel cm wird die Feder ausgedehnt, wenn sie mit 1500 N (rd. 150 p) belastet wird? Löse die Aufgabe mit Hilfe eines Diagramms!

Ph 7 ■87 Ein Fußgänger läuft gegen den Wind mit einem Druck von 5 Pa (rd. 0,5 $\frac{\text{kp}}{\text{m}^2}$)

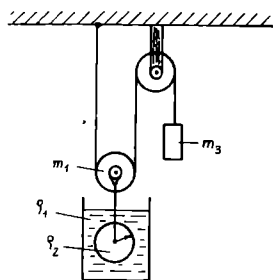
eine Strecke von 150 m. Die vom Wind getroffene Oberfläche des Menschen nimmt man mit rd. 0,45 m^2 an. Welche Arbeit gegen den Luftwiderstand verrichtet der Fußgänger?



Ph 8 ■88 Als zu Hause gebadet wurde, stellte Jens fest, daß das kalte Wasser eine Temperatur von 20°C und das warme Wasser eine Temperatur von 80°C hatte. Wieviel kg von beiden mußte gemischt werden, um 500 kg von 35°C zu erhalten?

Bemerkung: Von Wärmeverlusten durch Erwärmen der Wanne und der Luft soll abgesehen werden.

Ph 9 ■89 In dem skizzierten Rollensystem sei an einer losen Rolle mittels eines geeigneten Verbindungsstückes eine Stahlkugel starr befestigt. Diese Kugel tauche in ein mit Wasser gefülltes Gefäß vollständig ein. Wie groß muß die Masse m_3 sein, mit der die eingetauchte Kugel mitsamt der Rolle im Gleichgewicht gehalten wird?



Es seien: der Kugelradius $r = 2 \text{ cm}$, die Masse der losen Rolle $m_1 = 100 \text{ Gramm}$, die Dichte des Wassers $\rho_1 = 1,0 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$,

die Dichte des Stahls $\rho_2 = 7,85 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$,

das Verbindungsstück masselos angenommen.

Ing. A. Körner, Leipzig

Ph 10/12 ■90 Eine Glühlampe wandelt bekanntlich elektrische Energie in Licht und Wärme um. Um einen bestimmten Lichtstrom Φ [Einheit Lumen (lm)] zu erzeugen, muß eine entsprechende elektrische Leistung P_{el} [Einheit Watt (W)] aufgebracht werden. Das Verhältnis $\Phi : P_{el}$ wird als Lichtausbeute η_L bezeichnet. Edisons Kohlefadenlampen hatten eine Ausbeute von $3 \frac{\text{lm}}{\text{W}}$. Eine moderne 75-Watt-Doppelwendellampe sendet 950 lm aus. Berechnen Sie die Lichtausbeute, und geben Sie die Steigerung in % an!

Karl Eichhorn, Steinach

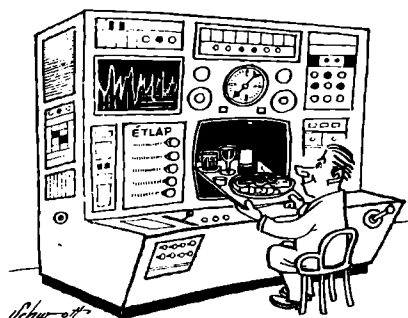
Chemie

Ch 7 ■69 Kaliumsulfat (K_2SO_4) ist ein wichtiger Bestandteil der Kalidüngemittel. Zur Steigerung der Hektarerträge streute eine LPG 380 kg Kaliumsulfat auf 5 ha Boden aus. Wieviel Kilogramm Kaliumoxid wurden auf diesem Wege jedem Hektar zugeführt?

Ch 8 ■70 Eine Sodalösung ist bei 20°C gesättigt, wenn sie in einem Liter Lösung 182 g Natriumkarbonat enthält. (Dichte der Lösung $1,19 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$). Wie groß ist die Gesamtstoffmenge in einem Liter Lösung?

Ch 9 ■71 Wie groß ist die Gesamtoberfläche (in cm^2) aller Tröpfchen von 1 mol Wasser, wenn jedes Tröpfchen einen Radius von 0,002 mm besitzt?

Ch 10/12 ■72 Eine Kochsalzlösung, welche 20 g Natriumchlorid je Liter enthält, wird abgekühlt. Bei welcher Temperatur beginnt die Kristallisation, wenn das Salz zu 70% dissoziiert vorliegt? (Ein Mol Kochsalz bewirkt eine Gefrierpunktserniedrigung des Wassers von $1,86^\circ\text{C}$.)



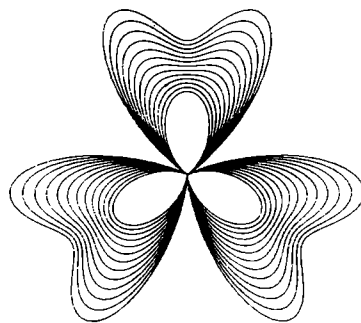
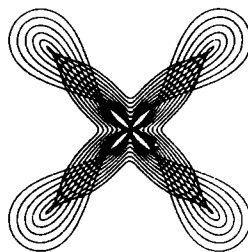
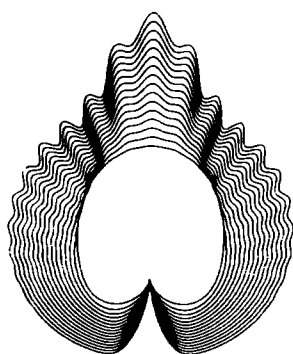
Wir suchen ein Teil des Atoms

a – ach – der – e – genz – glas – koh – le – lek – len – li – lin – meß – nen – neu – nungs – on – ord – re – re – sa – säu – scha – schreib – se – tan – ter – ti – ti – tra – tro – wei – zahl – zy

Aus vorstehenden Silben sind Wörter mit folgender Bedeutung zu bilden:

1. Eine stabile Elektronenanordnung im Atom;
 2. chemisches Element – 4. Nebengruppe;
 3. steht im Periodensystem;
 4. Gerät zum Abmessen von Flüssigkeiten;
 5. Stoff, der durch die Formel H_2CO_3 symbolisiert wird;
 6. Ausführungsart der chemischen Zeichensprache;
 7. für viele Experimente verwendetes chemisches Gerät;
 8. die Reaktion einer Säurelösung mit einer Basenlösung.
- Bei richtiger Lösung ergeben die Anfangsbuchstaben – von oben nach unten gelesen – ein Teil des Atoms.

Vignetten entnommen aus Quant, Moskau



alpha-Wettbewerb 1979/80

Preisträger

Anka Sommer, Augsdorf; Evelyn Heyer, Aue; Beate Gössel, Bad Doberan; Tilo Schaarschmidt, Bad Lauchstädt; Ulrich Zülicke, Bergwitz; Martin Schnauß, Stefan Müller, Karen Böhme, Steffen Padelt, Stefan Röhl, alle Berlin; Gunnar Bittersmann, Bernau; Heiko Prehl, Bernsbach; Helge Dürschke, Bitterfeld; Stephan Wernicke, Brandenburg; Guido Siegel, Breitenworbis; Ramona Blank, Clingen; Uwe Martin, Crossen; Jürgen Anders, Dahlewitz; Bert Kühne, Dahme; Michael Nitsche, Thomas Hübner, beide Dresden; Monika Glaß, Ulf Arnold, beide Eisenach; Ute Berthold, Finsterwalde; Ulf Winkler, Frankenberg; Henry Kost, Freiberg; Udo Schulte, Freienbessingen; Mario Richter, Gadebusch; Annette Grundert, Gräfenhainichen; Mathias Schleif, Gransee; Thomas Hommel, Görlitz; Jens Dietrich, Großberndten; Silke Maulhardt, Großbodungen; Katrin Kießling, Großschönau; Erik Opelt, Gerald Ullerich, beide Güstrow; Beate Thomas, Halle; Heike Reichelt, Matthias Schädlich, beide Hammerbrücke; Jutta Schumann, Havelberg; Mirko Schulze, Hoyerswerda; Silke Umbreit, Ilmenau; Christian Dietrich, Jena; Jens Steiniger, Kleinmachnow; Gert Künzelmann, Krina; Martin Böhm-Schweizer, Lauscha; Cornelia Zinke, Petra Gollewsky, Torsten Tok, Timo Zenker, Matthias Hübner, alle Leipzig; Anett Westland, Leubnitz; Michael Seidel, Leuna; Jörg Zimmermann, Sandra Ernst, beide Lössau; Claudia Popien, Magdeburg; Lutz Büttner, Torsten Ortloff, beide Martinroda; Volker Sachse, Mülsen; Antje Krause, Neubrandenburg; Arndt Kritznier, Neustadt; Dorothee Heidrich, Oberlungwitz; Frank Jäger, Oberschönau; Silke Stieber, Oßersdorf.

Weitere Preisträger und Wettbewerbsteilnehmer mit vorbildlichen Leistungen veröffentlichen wir in Heft 1/81.

Kollektive Beteiligung

P.-Neruda-OS, Ahlbeck; OS Fritz Weineck, Alsleben; Haus der JP, Altenburg; W.-Pieck-OS, Altenweddingen; Walter-Ulbricht-OS, Altwigshagen; Karl-Marx-Schule, Anklam; OS der Botschafter der ARÄ, Kairo; OS G. Titow, Arenshausen; OS Ansbach; Kreis-AG Math., Aschersleben; OS Bad Bibra; OS Bad Gottlieb; OS H. Duncker, Bad Kleinen; R.-Schwarz-OS, Bad Liebenstein; Anton-Saefkow-OS (V), Otto-Grotewohl-OS, Ma-

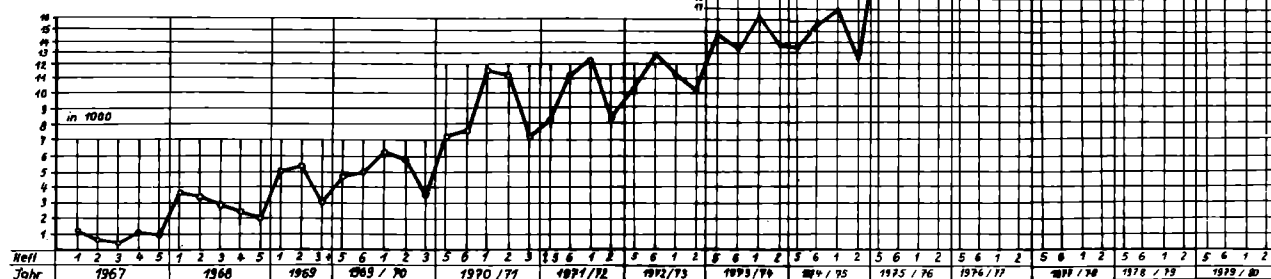
gnus-Poser-OS, alle Bad Salzungen; OS H. Beimler, Bärenklau; OS Fr. Engels, Barby; OS E. Weinert, Berka; 39. OS E. Schönhaar, 26. OS, Wolodja-Dubimin-OS, H.-Weigel-OS, alle Berlin; OS A. Becker, Berlingerode; Kreis-AG Math., OS Fr. Mehning, beide Bernburg; Max-Planck-OS, OS Fr. Schiller, beide Bleicherode; Fr.-Weineck-OS, Blumberg; OS Blumenthal; Diesterweg-OS, Borna; OS Brandshagen; OS Breitenworbis; W.-Seelenbinder-OS, Breitung; Pablo-Neruda-OS, Britz; M.-Poser-OS, Bürgel; TOS Büttstedt; OS Burkau; W.-Pieck-OS, Burow; W.-Estel-OS, Buttlar; Sonderschule f. körperbehinderte Kinder, Station Jg. Naturf. u. Technik, Klub Jg. Math., beide Cottbus; H.-Beimler-OS, Damgarten; OS Deutschenbora; OS I AG Math., OS Makarenko, beide Döbelitz; K.-Bürgel-OS, Döbberitz; Marie-Curie-OS, Dohna; OS K. Niederkirchner, Domersleben; OS Dorfchemnitz; OS Alexander Matrossow, Dorndorf; 39. OS Fritz Schulze, 73. OS Hanns Rothbarth, 38. OS A. Thiele, Paul-Grüner-OS, alle Dresden; Fr.-Wolf-OS, Ebersdorf; OS Effelder; 9. OS Geschw. Scholl, Eisenach; J.-Schehr-OS, Eisleben; E.-Weinert-OS, Empfertshausen; Hugo-Joachim-OS, Espenhain; Th.-Müntzer-OS, Fambach; OS Janusz Korczak, Finsterwalde; B.-Brecht-Floh; OS Frauenhain; OS Frauensee; W.-Pieck-OS, Freital; OS Friedeberg; H.-Heine-Schule, Gadebuxch; AG Math. Friedensschule, Gartz; R.-Arnstadt-OS, Geisa; W.-Pieck-OS, Geißen; E.-Hartsch-OS, Gersdorf; J.-Brinckmann-OS, Goldberg; Kreisklub Jg. Math., Gräfenhainichen; Pestalozzi-OS, Greiffenberg; 10. OS Otto Drews, E.-Thälmann-OS, Karl-Kuell-OS, alle Greifswald; OS Cl. Zetkin, Grotzsch; OS Großbodungen; Haus der JP, AG Math., Großenhain; G.-Dimitroff-OS, Groß Kötis; Lessingschule, Großpostwitz; OS Großschönau; OS Großtreden; Dr.-S.-Allende-OS, Großwetzsch; J.-Gagarin-OS, Grünhain; Haus der JP, Hagenow-Land; VI. OS, Haldensleben; M.-Gorki-OS, Hainichen; OS f. Körperbehinderte, Diesterwegschule, Bezirksklub Jg. Math., alle Halle; W.-Koenen-OS, Halle-Neustadt; OS Hammerbrücke; Schule der DSF, Heiligen-grabe; OS Th. Müntzer, Hermannsdorf; EOS E. Weinert, I. OA H. Beimler, beide Herzberg; OS Hohendodeleben; Goethe-OS, Hohenleipisch; OS Horka; Kreisklub Jg. Math., Hoyerswerda; OS Hundeshagen; G.-Ewald-OS, Ivenack; OS A. Becker, Jatznick; Fr.-Engels-Schule, Kaltennordheim; OS A. Becker, Kamsdorf; Cl.-Zetkin-OS, Kandelin; H.-Beimler-OS, Karbow; E.-Thälmann-OS, Pionierhaus J. Gagarin, Alexander-Matrossow-OS, P.-Tschaikowski-OS, alle Karl-Marx-Stadt; OS Cl. Zetkin, Kaulsdorf; Th.-Neubauer-Schule, Kieselbach; OS E. Schneller, Kirchberg; OS Kirch-worbis; OS Kleinberndten; G.-Eisler-OS, Erw. Spezial-OS, beide Kleinmachnow; OS Th. Müntzer, Klettenberg; OS Könitz; Päd. Hochschule, AG Jg. Math., Köthen; OS Küllstedt; OS Kuhfelde; P.-Fürnberg-OS, Laage; alpha-Club, Latdorf; Schul-kombinat, Lauscha-Ernstthal; R.-Teichmüller-OS,

Leimbach; EOS K. Marx, K.-Liebknecht-OS, Dr.-S.-Allende-OS, alle Leinefelde; 146. OS, Leipzig; OS Liebstadt; W.-Pieck-OS, Lichte; Pestalozzi-OS, Limbach-Oberfrohna; EOS A. Becker, A.-Diesterweg-OS, beide Lobenstein; Pestalozzi-OS, Löbau; OS W. Wallstab, Löderburg; R.-Neddermeyer-OS, Löwenberg; G.-Eisler-OS, Martinroda; Fr.-Heckert-OS, Milkau; OS Mittelherwigsdorf; OS Mittelstille/Springstille; OS Naundorf; OS Neuhaus; OS Neundorf; H.-Beimler-OS, Neustrelitz; Dr.-Th.-Neubauer-Schule, Niederorschel; W.-Pieck-OS, Niederwiesa; EOS W. v. Humboldt, OS J. Gagarin, beide Nordhausen; OS Nordhausen-Niedersalze; Pestalozzi-OS, Oberlungwitz; OS E. Weinert, Oberschönau; W.-Seelenbinder-OS, Oechsen; OS Osternienburg; W.-Pieck-OS, Osterwieck; Station Jg. Naturf. u. Techn. Kreis-Klub Jg. Math., EOS, beide Parchim; EOS R. Fettscher, Pirna; Makarenko-OS, Plessa; A.-Becker-OS, Prenzlau; Station Jg. Naturf. u. Techn., Pritzwalk; OS Franz Plura, Pultitz; OS Quitzöbel; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Rackwitz; OS Radis; Pestalozzi-OS, Radebeul; Cl.-Zetkin-OS, Raschau; J.-Gagarin-Schule, Fr.-Engels-OS, beide Ribnitz; H.-Matern-OS, Riesa; Kreis-AG Rochlitz; Ziolkowski-OS, Rossdorf; Haus d. JP, 34. OS, beide Rostock; alpha-Club W.-Pieck-OS, Rotta; OS S. Kosmodemjanskaja, Rotterode; OS M. Kirchner, Rudolstadt; OS Rüd-nitz; OS Saal; OS II, Saalfeld; W.-Pieck-OS, Sangerhausen; OS H. Matern, Schernberg; M.-Gorki-OS, Schkölen; OS Schleiz; J.-G.-Seume-Schule, OS K. Marx, EOS G. Dimitroff, alle Schmalkalden; H.-Beimler-Schule, Schönhausen; OS Kuba, Schule der DSF, Schorssow; E.-Thälmann-OS, Sebnitz; A.-Hennecke-OS, Senftenberg; OS A. Hennecke, Siersleben; OS W. Seelenbinder, Sitzendorf; OS W. Pieck, Sondershausen; OS A. Becker, K.-Liebknecht-OS, beide Spremberg; OS Stadtlengsfeld; OS E. Thälmann, Steinbach-Hallenberg; O.-Grote-wohl-OS, Stralsund; 12. OS Dr. R. Sorge, Suhl; EOS K. Marx, Tangerhütte; OS E. Schneller, Taubenheim; W.-Schröder-OS, Tetrow; Fr.-Meh-ring-OS, Tiefenort; E.-Schneller-OS, Töplitz; OS W. Pieck, Trusetal; OS Ückeritz; Goetheschule, A.-Nietz-OS, beide Ueckermünde; H.-Beimler-OS, Unterbreizbach; OS J.-G. Seume, Vacha; OS Viena; OS Vitte; EOS J. Fučík, Waldheim; Goethe-schule, Waren; OS Wasungen; OS L. Fürnberg, Wegeleben; Sprachheiloberschule, Weimar; E.-Thälmann-OS, Weinböhla; OS Weißenborn-L.; Kreisklub Jg. Math., Weißwasser; OS Wernshau-sen; OS O. Grotewohl, Westerengel; Cl.-Zetkin-OS, Wiehe; alpha-Kollektiv OS Wingerode; OS W. Loh-mann, Wittenberg; Station Jg. Naturf. u. Techn., OS IV, beide Wittstock; OS H. Heine, Wörlitz; OS H. Beimler, Wolfen; OS Fr. Gießner, Wolf-leben; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Wolmirstedt; OS II, Spezialistenlager d. Kreises, beide Worbis; H.-Eisler-OS, Wusterhusen; OS Zahna; Peter-Lam-berz-OS, Zehdenick; Betriebs-OS Robotron, Lu-therschule, beide Zella-Mehlis; 9. OS, EOS, beide Zittau; OS Zöblitz; Lenin-OS, Zwenkau.

Entwicklung des alpha-Wett-bewerbs (absolut)

* umgestellt von Kalenderjahr auf Schuljahr

** ab 1971/72 nur noch 4 Wett-bewerbe pro Jahr



Sektion Mathematik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald



Die 1456 gegründete Greifswalder Universität ist nach denen in Leipzig (1409) und Rostock (1419) die drittälteste der heute auf dem Territorium der DDR bestehenden Universitäten und zugleich nach Rostock die zweit-älteste im gesamten nordeuropäischen Raum. Sie trägt heute den Namen des Patrioten und Kämpfers gegen die Leibeigenschaft Ernst Moritz Arndt (1769 bis 1860), der in Greifswald studierte und dort einige Jahre als Professor für Geschichte wirkte. Greifswald war jahrhundertlang ein verträumtes Städtchen am Rande des Weltgeschehens, dessen einzige Bedeutung in der kleinen, aber ehrwürdigen Universität bestand. In den letzten Jahren hat sich die Stadt vor allem auf Grund des in unmittelbarer Nähe entstehenden Kernkraftwerks *Bruno Leuschner* und der neuangesiedelten elektronischen Industrie sprunghaft entwickelt und zählt heute bereits über 70000 Einwohner.

Die Mathematik hat in der Greifswalder Universität bis zum Ende des 19. Jh. keine bedeutende Rolle gespielt. Erst in unserem Jh. gab es hier eine Reihe in der Fachwelt bekannter Mathematiker. Unter diesen ragt Felix Hausdorff (1868 bis 1942, siehe Foto) hervor, der von 1913 bis 1921 in Greifswald

wirkte und zu den Begründern der Punktmengenlehre und der mengentheoretischen Topologie zählt. Er gilt heute international als einer der bedeutendsten Mathematiker in der ersten Hälfte des 20. Jh. Die Topologie ist ein junges und relativ abstraktes Gebiet der modernen Mathematik, das ähnlich der Mengenlehre, der mathematischen Logik und der allgemeinen Algebra zu den Grundlagen vieler anderer mathematischer Disziplinen beiträgt. Vereinfacht gesagt geht es in der Topologie darum, gewisse sehr allgemeine geometrische Begriffe wie z. B. Umgebung eines Punktes, Abstand zweier Punkte, Rand einer Menge, Dimension einer Menge, zusammenhängende Menge u. ä. und auf solche Begriffe bezügliche Sachverhalte von ihrer ursprünglichen anschaulichen Bedeutung im gewöhnlichen dreidimensionalen Raum auf möglichst allgemeine „Räume“ (d. h. Mengen, deren Elemente irgendwelche mathematische Objekte sind) zu übertragen und damit weite Teile der Mathematik für die geometrische Denkweise zu erschließen. Die Topologie und die ihr benachbarten Disziplinen (u. a. Maßtheorie, metrische Geometrie, Differentialgeometrie) haben aber auch viel für die kritische Analyse unserer anschaulichen Vor-

stellungen vom realen physikalischen Raum geleistet. Zum Beispiel zeigte Hausdorff, daß es möglich ist, eine Kugel so in drei Teilmengen A, B, C und einen unwesentlichen Rest R zu zerlegen, daß A, B, C, R paarweise keine gemeinsamen Punkte besitzen, A, B, C paarweise kongruent sind, aber auch $A \cup B$ kongruent C ist. Hieraus folgt, daß es unmöglich ist, *allen* beschränkten räumlichen Mengen ein Volumen V so zuzuordnen, daß dabei die folgenden Grundforderungen erfüllt sind:

1. Für jede beschränkte (d. h. in einem genügend großen Würfel enthaltene) Punktmenge M ist $V(M)$ als nichtnegative reelle Zahl definiert.
2. Sind M und N kongruent, so ist $V(M) = V(N)$.
3. Haben M und N höchstens Randpunkte gemeinsam, so ist $V(M \cup N) = V(M) + V(N)$.
4. Für einen Würfel E der Kantenlänge 1 ist $V(E) = 1$.

Aus der sogenannten „paradoxalen Kugelerlegung“ von Hausdorff ergibt sich, falls man annimmt, daß die beteiligten Mengen A, B, C, R ein Volumen besitzen:

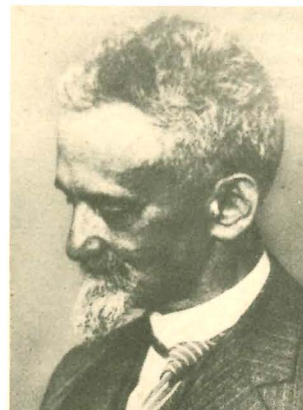
$$V(A) = V(B) = V(C) = V(A) + V(B),$$

d. h. $V(A) = V(B) = V(C) = 0$. Da auch $V(R) = 0$

Das 1747 bis 1750 vom ehemaligen Greifswalder Mathematikprofessor Andreas Maier erbaute Hauptgebäude der Greifswalder Universität (Bild links)

Die 1956 anlässlich des 500jährigen Bestehens der Greifswalder Univ. erschienene Briefmarke, die das Siegel der Univ. zeigt (oben)

Felix Hausdorff



sein muß, folgt, daß die betrachtete Kugel (und damit jede Kugel) das Volumen 0 hat. Dies steht im Widerspruch zu den Forderungen 1. bis 4. Überlegt selbst, wieso! Warum wurde in diesem Rahmen so ausführlich auf die Topologie eingegangen? Sie und die mit ihr nahe verwandte Maßtheorie (zu der das dargelegte Volumenproblem gehört) werden in Greifswald besonders gepflegt. Von 1950 bis 1971 wirkte in Greifswald der international bekannte Topologe W. Rinow (1907 bis 1979, siehe Foto) als Direktor des Mathematischen Instituts bzw. der 1968 daraus hervorgegangenen Sektion Mathematik, der 1964 für seine Forschungen auf dem Gebiet der Topologie den Nationalpreis erhielt. Die durch Hausdorff und Rinow in Greifswald begründete Tradition wird heute im Wissenschaftsbereich *Analysis* der Sektion Mathematik weitergeführt und fließt in die Ausbildung der Diplommathematiker der Fachstudienrichtung *Analysis* ein. Im Wissenschaftsbereich *Analysis* gibt es außerdem Forschungskollektive, die sich mit harmonischer *Analysis* bzw. optimaler Steuerung von Prozessen beschäftigen. Diese Theorien finden Anwendung u. a. in der Physik der Elementarteilchen bzw. im Kernkraftwerksbetrieb.



W. Rinow

Der Wissenschaftsbereich *Mathematische Kybernetik/Rechentechnik/Grundlagen der Mathematik*, der der zweiten in Greifswald bestehenden Fachstudienrichtung für Diplommathematiker entspricht, besitzt ebenfalls eine nun schon 20jährige Tradition, die 1960 mit der Berufung von G. Asser nach Greifswald begann. Eine 1976 unter Leitung des jetzigen Sektionsdirektors E. Griepentrog gegründete Forschungsgruppe dieses Wissen-

schaftsbereiches beschäftigt sich vorwiegend mit mathematischen Problemen in der Entwicklung der Mikroelektronik. Sie hat in der VVB Nachrichtenelektronik, speziell im Greifswalder Betrieb NEG, einen wichtigen Praxispartner gefunden. Die Studenten beider Fachstudienrichtungen wachsen durch die enge Verbindung von Lehre und praxisverbundener Forschung frühzeitig in ihre zukünftigen Einsatzgebiete hinein.

Außer Diplommathematikern der beiden genannten Fachstudienrichtungen werden an der Universität Greifswald

Diplomlehrer in den Kombinationen Physik/Mathematik, Mathematik/Geographie und Geographie/Mathematik

ausgebildet. Die beiden letztgenannten Kombinationen gibt es sonst nur an der PH Dresden. Sie haben bisher vorwiegend weibliche Studenten „angelockt“, was aber von der Sache her keineswegs begründet ist. Es gibt zwischen diesen beiden Fächern kaum weniger interessante Verbindungen als zwischen dem traditionsreichen Gespann Mathematik/Physik. Verwiesen sei nur auf mathematische Aspekte der Kartographie und Geodäsie, auf den Einsatz statistischer Methoden in der ökonomischen, Bevölkerungs- und Verkehrsgeographie und auf die immer bedeutsamer werdenden Probleme des Umweltschutzes, deren erfolgreiche Lösung ohne Mathematik undenkbar ist. Ein weiterer charakteristischer Zug der Lehrerausbildung an der Greifswalder Sektion Mathematik besteht darin, daß die Studenten im Rahmen der zur Diplomarbeit führenden wahlobligatorischen Fachausbildung näher mit einem von mehreren kleineren mathematischen Gebieten bekannt werden, die in enger Beziehung zur Schulmathematik stehen bzw. sich besonders für Schülerarbeitsgemeinschaften eignen, z. B. Mengenlehre, Kombinatorik, Graphentheorie, anschauliche Topologie, geometrische Konstruktionen.

Nicht zuletzt sei bemerkt, daß die trotz modernen, pulsierenden Lebens in mancher Hinsicht immer noch romantische Stadt Greifswald mit ihren historischen Gebäuden und der nicht nur wegen der nahen Ostseeküste reizvollen Umgebung und die kleine Universität mit ihrem persönlicheren Verhältnis zwischen Studenten und Lehrkräften manchen Ausgleich für die fehlenden Attraktionen einer Großstadt zu bieten vermag.

P. Schreiber

Kepler-Gedenkmünze (s. Bild S. 124)

Gesetzliches Zahlungsmittel seit 15. 10. 1971. Auflage 100000 Stück; Nennwert Mark 5,-; Prägestätte Berlin; Neusilber-Legierung – Kupfer (Cu 620/1000), Nickel (Ni 180/1000), Zink (Zn 200/1000); Gewicht 12,2 g; Durchmesser 29 mm; Darstellung des 2. Kepl. Gesetzes mit der elliptischen Erdumlaufbahn um die Sonne.

Eine Aufgabe von Prof. Dr. habil. Horst Melcher

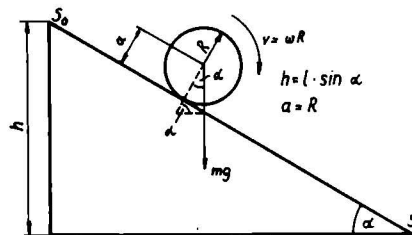
Sektion Mathematik/Physik
der Pädagogischen Hochschule
Dr. Theodor Neubauer, Erfurt

▲ 2025 ▲ Ein rotationssymmetrischer homogener Körper der Masse m rollt auf einer geneigten Ebene abwärts. Es ist die Energiebilanz aufzustellen, aus der die Endgeschwindigkeit ermittelt werden kann. Die Gleichung ist zu erläutern.

Welche Endgeschwindigkeiten erreichen auf der geneigten Ebene (Bild, $a = R$) folgende homogene Rollkörper gleicher Masse:

A) Vollkugel v_K , B) Vollzylinder v_V , C) Hohlzylinder v_H ?

Das Ergebnis ist zu erläutern.



Rollkörper auf der geneigten Ebene (Kugel, Voll- und Hohlzylinder). Meßstrecke $s-s_0$.

Unterhaltsamer Mathe-Unterricht

1. Welches Stundenthema behandelt

RENE VELT
7901 REICH?

2. Welches Stundenthema behandelt

N. LUNG-GUN
1501 EICHE?

3. Mit welchem Arbeitsmittel arbeitet

M. KESSLER · WIEN

4. Mit welchem Arbeitsmittel arbeitet

J. Z. DRENCKE
EICHE?

5. Welchen Beruf hat

SIEGESMUND REEDERS-
NELFEN
WIEN?

Fachlehrer D. Knappe, Jessen



Mathematik und Wasserwirtschaft

Der Wasserhaushalt und das Wasserdargebot der Erde

Die Erde ist außerordentlich reich an Wasser. Ihre Gesamtvorräte belaufen sich auf die gewaltige Zahl von 1 386 000 000 km³. Leider ist der größte Teil davon Salzwasser (Ozeane) und damit einer direkten Nutzung nicht zugänglich. Von der Oberfläche der Meere und des Festlandes verdunsten durchschnittlich jährlich 570 000 km³ Wasser. Die gleiche Menge fällt in Form atmosphärischer Niederschläge.

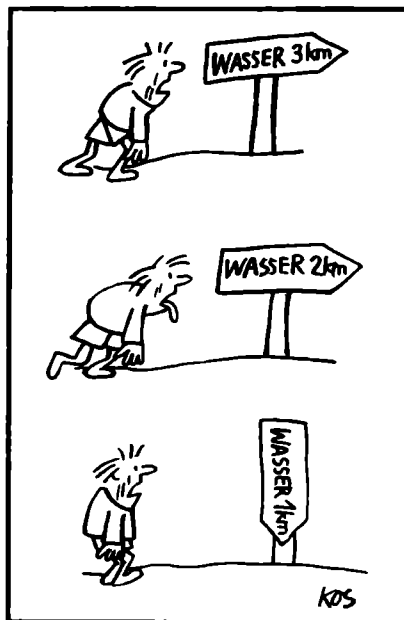
Im Prozeß des Wasserkreislaufs erfolgt in der Natur eine Erneuerung und Selbstreinigung des Wassers, und im Unterschied zu anderen Ressourcen ist das Wasserdargebot unerschöpflich. Die Kompliziertheit des Problems der Wasserversorgung besteht nicht darin, daß 96,5% Salzwasser sind. Die für 100 Jahre reichenden Süßwasservorräte der Erde sind beschränkt, sie betragen nur 35 Millionen km³ oder 2,5% der gesamten Wasservorräte der Erde. Dabei ist ihr größter Teil (über 70%) in den Gletschern der Antarktis und Grönlands enthalten und damit für eine Nutzung nur schwer zugänglich.

Das sich im Kreislauf des Wassers regenerierende Süßwasserdargebot, das gegenwärtig die Hauptwasserquelle zur Befriedigung der vielfältigen Bedürfnisse der menschlichen Gesellschaft ist, beträgt nur 45 000 km³ pro Jahr (ohne den Gletscherwasserabfluß der Antarktis) oder etwas über 0,003% der gesamten Wasservorräte der Erde für 100 Jahre.

Die Perspektiven der Wasserversorgungsbilanz: Nach Angaben der Monographie ist in der Welt der Wasserverbrauch in der Industrie von 1900 bis 1975 um mehr als das Zwanzigfache gestiegen und steigt weiterhin. Von 45 000 km³ sich erneuerndem Süßwasser werden gegenwärtig auf der ganzen Erde rund 3000 km³ jährlich genutzt. Im Jahre 2000 werden es mindestens 6000 km³ sein, was rund 13% ausmacht. Am angespanntesten ist die Wasserversorgungsbilanz in Europa, wo 7% des sich regenerierenden Süßwasserdargebots der Welt rund 20% der Bevölkerung zur Verfügung stehen.

Auf den ersten Blick kann aus den angeführten Zahlen der optimistische Schluß gezogen werden, daß sogar in Europa die Nutzung des Wasserdargebots im Jahre 2000 25% nicht übersteigen wird.

Die Monographie zeigt allerdings, daß von den 45 000 km³ des sich jährlich regenerierenden Süßwasserdargebots, unter Beachtung dessen ungleichmäßiger Verteilung in Zeit und Raum, kaum mehr als 40% praktisch genutzt werden können. Folglich beträgt der Anteil des im Jahre 2000 zu nutzenden Wasserdargebots nicht 13%, sondern über 30%. Zweitens wird dabei nicht die qualitative Verschlechterung des Wasserdargebots berücksichtigt. Für die Verdünnung sogar gereinigter industrieller, gewerblicher und häuslicher Abwässer, deren Volumen um die Jahrhundertwende 2000 km³ übersteigen wird, sind jährlich über 20 000 km³ frisches Wasser erforderlich.



Unter Beachtung des Gesagten wird die Wasserversorgungsbilanz der Erde im Jahre 2000 äußerst angespannt sein. In vielen Gebieten wird sich der Wasserbedarf dem realen Süßwasserdargebot nähern.

Erforderliche Maßnahmen: Die Bekämpfung unwiederbringlicher Verluste, der Kampf um die Einsparung von Wasser, die Einführung wasserfreier Fertigungsverfahren in die Produktion, die Verhütung von Wasserverschmutzung und die Mehrfachnutzung des Wassers sind die wichtigsten Maßnahmen.

Novosti Junesko 79

DDR-Wasserwirtschaft

Zur ausreichenden Bereitstellung von Trink- und Brauchwasser sind der Wasserwirtschaft unseres Landes folgende Aufgaben gestellt:

1. Gewährleistung eines stabilen Wasserdargebots in allen Jahreszeiten (Ausgleich des unterschiedlichen Wasserabflusses durch

Speicherung in Talsperren, Speicher- und Rückhaltebecken, Bau von Wehren, Erschließen von Grundwasser usw.);

2. Bau von Anlagen zur Überleitung größerer Wassermassen von Überfluß- in Mangelgebiete;

3. Verstärkung der Mehrfachnutzung des Brauchwassers in den Industriebetrieben;

4. Erhöhung der Kapazität der Wasserwerke in den Großstädten und in Wasserspeichergebieten entsprechend dem steigenden Trinkwasserbedarf durch eine moderne Technologie der Aufbereitung von Oberflächen- und Grundwasser;

5. Erhöhung der Kapazität der Abwasserreinigungsanlagen (Kläranlagen der Städte; Abwasserreinigung als „letzte Produktionsstufe“ in der chemischen Industrie);

6. Durchführung von Maßnahmen zur Überwachung, Reinhaltung und Sanierung der Gewässer;

7. Einflußnahme auf die Entwicklung wassersparender oder wasserfreier industrieller Produktion.

● Täglicher Wasserbedarf in der DDR 1977: Industrie 17 Mill. l, Landwirtschaft 3,8 Mill. l (13 Prozent der landwirtschaftlichen Nutzfläche werden bewässert, d.s. 800 000 ha), Haushalte 3,3 Mill. l. 900 kommunale Kläranlagen bereiten täglich nahezu 2,3 Mill. m³ Abwasser auf. (Sie enthalten etwa 40 000 t Stickstoff, 20 000 t Kali, 15 000 t Phosphorsäure, 400 000 t organische Substanzen.)

● Der Verbrauch in der DDR ist heute 10mal so groß wie zur Jahrhundertwende auf unserem Gebiet. Für 1990 rechnet man mit einem um zwei Drittel höheren Wasserbedarf. 5300 Wasserwerke sorgen dafür, daß 1980 im Durchschnitt täglich 6,8 Mill. m³ Trinkwasser in das zentrale Netz fließen.

● Es bestehen 78 500 km Trinkwasserleitungen mit 1500 Pumpstationen und 31 000 km Kanalisation. 31 000 km Wasserläufe, 13 200 Seen und Teiche, 162 Talsperren, Speicher und Rückhaltebecken, 4200 km Deiche und die 340 km lange Ostseeküste werden von den Werktätigen der Wasserwirtschaft betreut.

Neun von zehn Bürgern entnehmen ihr Trinkwasser aus dem zentralen Netz. Mehr als zwei Drittel der Wohnungen sind an die Kanalisation angeschlossen.

● In 100 Tagen ist der Verbrauch der Berliner Bevölkerung so groß wie die Masse an Wasser im Berliner Müggelsee (7,5 km², bis zu 8 m tief).

Der Wasserverbrauch für die Herstellung einiger Produkte:

1 t Stahl 86 000 l, 1 t Roheisen 1000...12 000 l, 1 t Aluminium 1,2 Mill. l, 1 t synthetischer Kautschuk 2,3 Mill. l Wasser.

● Das Kombinat VEB Chemische Werke Buna braucht in einer Stunde mehr Wasser als Halle in 24 Stunden.

Mecklenburgische Oberseen im Spiegel der Mathematik

Auch der Bereich Wasserwirtschaft benötigt zur Lösung verschiedener Probleme die Mathematik. Am Beispiel der „Mecklenburgischen Oberseen“ sei das hier gezeigt.

Zu den „Mecklenburgischen Oberseen“ gehören die Müritz, der Kölpin-See, der Fleesensee, der Plauer See und das Elde-Quellgebiet. Das sind insgesamt 235 km² Wasseroberfläche. Davon hat die Müritz, als größter See unserer Republik, allein 117 km². Der Fluß Elde, nicht verwechseln mit der Elbe, durchfließt die Oberseen bis zum Plauer See und mündet dann bei Dömitz (Wittenberge) in die Elbe.



Aufgaben der Wasserwirtschaft

1. Wasserreservoir

Die Speicherkapazität der „Mecklenburgischen Oberseen“ beträgt 100 000 000 m³ Wasser, das entspricht etwa dem Fassungsvermögen der Rappbodetalsperre, die 105 mal 10⁶ m³ Wasser aufnehmen kann. Die Aufgabe als Wasserreservoir besteht darin, den landschaftlich notwendigen Mindestabfluß zu garantieren. Das bedeutet unter anderem, daß die Elde ab Plau ganzjährig als Wasserstraße erhalten bleibt. Ab Schleuse Mirow wird durch Wasserabgabe in die Havel ebenfalls der Schiffsverkehrsverkehr aufrechterhalten. Es fließen in jeder Sekunde 5 m³ Wasser in die Elde und 3,5 m³ Wasser in die Havel. Das sind in jeder Sekunde 8500 Liter Wasser! Es ist von Fachleuten berechnet worden, daß diese Menge 200 Tage im Jahr ohne Gefahr für die Oberseen abfließen kann.

2. Bereitstellung von Bewässerungswasser

Neben der Aufgabe, den Schiffsverkehrsverkehr auf Elde und Havel zu gewährleisten, müssen die Oberseen auch Wasser für die Beregnung und für die Einstaubewässerung in Gräben zur Verfügung stellen. Diese Leistung ist

nicht auf das Müritzgebiet beschränkt. Nach dem Bericht des IX. Parteitages der SED soll die Müritz für die Beregnung von 40 000 ha Havellandschaft genutzt werden. Man bedient sich dabei der „Riesenwasserleitung“ Elde-Havel-Kanal!

3. Erholungsfunktion der Gewässer

Im Müritz-Seenpark verleben jährlich etwa 150 000 Urlauber mit Zelt oder vom Boot aus ihren Urlaub. Dazu kommen noch Tagesurlauber, die mit dem PKW anreisen, und die Urlauber, die im FDGB-Urlauberkomplex Klink wohnen. Dem Sportangler bieten die Seen, neben der Möglichkeit einen guten Fisch zu fangen, bleibende Naturerlebnisse in landschaftlich einmaliger Umgebung. Aktiver Sport wird überall auf den Oberseen betrieben, dabei sind Segeln und Wasserski an erster Stelle zu nennen.

4. Fischwirtschaft

Die Fischereiproduktionsgenossenschaften fangen Zander, Barsch, Aal, Brachsen, Hecht, Schleie und Karpfen. An verschiedenen Stellen gibt es Forellennastanlagen, die bis zu 550 t Forellen jährlich liefern.

5. Bedeutung als Wasserstraße

Neben dem Transport von Kies, Getreide, Steinen und Schrott darf die Funktion als Wasserstraße für die Urlauber nicht unterschätzt werden. Von der Müritz aus kann man mit dem Sportboot bis Prag fahren, und man sieht jedes Jahr Boote aus Polen und der CSSR auf den Oberseen.

6. Einige Zahlen

Richtwasserstand für die Oberseen: Am 1. Mai eines jeden Jahres soll der Wasserstand 62,3 m über NH (Normalhöhe) betragen. Anfang Mai ist stets der höchste, Anfang November stets der niedrigste Wasserstand. Das Einzugsgebiet für die „Mecklenburgischen Oberseen“ beträgt 2300 km². Man rechnet mit 600 mm Niederschlag je Jahr, davon verdunsten 500 mm, und es bleiben als Nutzungsmenge jährlich nur 100 mm. Der Eldequerschnitt bei Dömitz beträgt etwa 18 m². Bei hohem Wasserstand fließt die Elde 0,6 m pro Sekunde, bei niedrigem Wasserstand nur 0,1 m pro Sekunde.

7. Berufsmöglichkeiten

1. Wasserbaufacharbeiter oder Wasserwerkstechniker

Zentrale Ausbildungsstätte: Neubrandenburg beim VEB WAB (Wasserversorgung und Abwasserbehandlung)

2. Ingenieur für Wasserwirtschaft

Ingenieurhochschule für Wasserwirtschaft Magdeburg

3. Hochschulstudium Wasserwirtschaft und Hydrologie an der TU Dresden.

Aufgaben

▲1▲ Wie groß ist die jährliche Nutzungsmenge im gesamten Gebiet der Oberseen in m³, wenn 100 mm als Nutzung zugrunde gelegt werden?

▲2▲ Die stärksten Beregner, die in der Landwirtschaft eingesetzt werden, haben eine Leistung von 16 Liter je Sekunde. Sie beregnen eine kreisförmige Fläche mit einem Radius von 35 m.

a) Wie groß ist die beregnete Fläche in m²?

b) Wieviel Kubikmeter Wasser werden bei einem Einsatz von 80 derartigen Beregnern in 4 Stunden auf das Feld gebracht?

c) Wie lange müßte diese Anlage arbeiten, damit der Wasserspiegel der Müritz um 1 cm fällt?

▲3▲ Eine Schleuse ist 38 m lang, 5,40 m breit und hebt bei jedem Schleusenvorgang die Schiffe um 3,50 m.

Wieviel Liter Wasser werden dabei jedesmal vom Oberlauf in den Unterlauf befördert?

▲4▲ Bei Sturm rechnet man mit der doppelten Tiefe für die notwendige Länge der Ankerleine, um einen sicheren Halt des Ankers zu gewährleisten. So nimmt man bei 8 m Wassertiefe 16 m Ankertau.

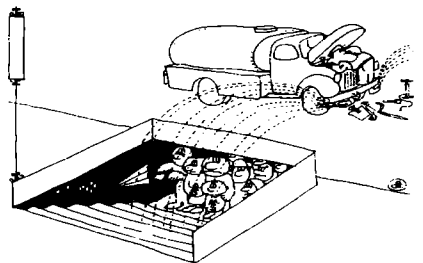
Unter welchem Winkel steht dann die Ankerleine zum Grund?

▲5▲ Der Preis für einen Kubikmeter Wasser beträgt 0,30 M. Man rechnet pro Person und Tag mit einem durchschnittlichen Verbrauch von 330 Liter in einem Eigenheim.

Wieviel Haushaltsgeld muß eine vierköpfige Familie für ein Jahr für diese Ausgabe einplanen?

▲6▲ Ein Abwasserkanal hat einen trapezförmigen Querschnitt. Die untere Breite beträgt 2,80 m, die obere Breite 3,60 m. Die Höhe beträgt 1,60 m. Wieviel m³ Abwasser fließen in einer Stunde durch den Kanal, wenn er bis zur halben Höhe gefüllt ist und die Strömungsgeschwindigkeit 1,8 m/s beträgt?

H. Pätzold



Schriftliche Abschlußprüfung

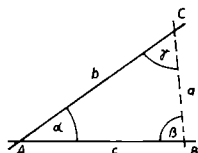
Fach Mathematik
Klasse 10 –
Schuljahr 1979/80

Pflichtaufgaben

1. In der sowjetischen Weltraumstation Salut 6 arbeiteten bisher drei Stammbesatzungen, die jeweils Weltrekorde im Langzeitflug aufstellten. Der Flug der ersten Stammbesatzung dauerte 96 Tage. Der Flug der zweiten Stammbesatzung, mit der auch unser Kosmonaut Sigmund Jähn zusammenarbeitete, dauerte 140 Tage.

- Um wieviel Prozent überbot die zweite Stammbesatzung die Flugzeit der ersten?
- Nach internationaler Festlegung muß die Dauer eines Weltraumfluges mindestens 10% über der bisherigen Rekordzeit liegen, um als neuer Weltrekord anerkannt zu werden. Nach wieviel Tagen ihres Fluges hatte die dritte Stammbesatzung diese Bedingung erfüllt?

2. Zwei Straßen schneiden einander im Punkt A. Durch Punkt B auf der einen Straße wird eine Rohrleitung gelegt, welche die andere Straße im Punkt C schneidet (siehe Skizze!).



Bei der Vermessung wurden folgende Werte ermittelt:

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= c = 4,7 \text{ km}, \\ \sphericalangle BAC &= \alpha = 35^\circ, \\ \sphericalangle CBA &= \beta = 85^\circ. \end{aligned}$$

- Konstruieren Sie das Dreieck ABC in einem geeigneten Maßstab!
- Berechnen Sie die Größe des Winkels $\sphericalangle ACB = \gamma$!
- Berechnen Sie die Länge a des Abschnittes $\overline{BC}$ der Rohrleitung!
- Um einen Näherungswert a_N für die Länge des Abschnitts $\overline{BC}$ zu erhalten, wurde für den Winkel $\sphericalangle CBA = \beta$ der Näherungswert 90 verwendet. Die Werte für $\overline{AB} = c$ und $\sphericalangle BAC = \alpha$ blieben unverändert. Berechnen Sie den Näherungswert a_N !
- Geben Sie den absoluten Fehler $a_N - a$ an!

3. Gegeben ist das Gleichungssystem
(1) $y = -x + 5$ (2) $3y = 4x - 6$.

- Lösen Sie dieses Gleichungssystem rechnerisch!

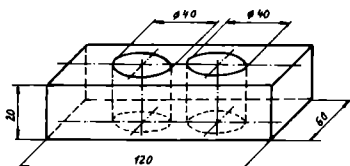
b) Betrachten Sie jede Gleichung des Systems als Gleichung einer linearen Funktion! Stellen Sie die beiden Funktionen in ein und demselben Koordinatensystem graphisch dar!

c) Bezeichnen Sie den Schnittpunkt beider Graphen mit S! Geben Sie die Koordinaten von S an, und vergleichen Sie mit dem Ergebnis von a)!

4. Die Skizze zeigt ein quaderförmiges Werkstück mit zwei durchgehenden zylinderförmigen Bohrungen.

a) Berechnen Sie das Volumen des Werkstücks, und geben Sie es in Kubikzentimeter an!

b) Das Werkstück besteht aus Stahl ($\rho = 7,8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$). Berechnen Sie seine Masse!



5. a) Für alle natürlichen Zahlen gilt folgende Aussage:

„Wenn die kleinste von fünf aufeinanderfolgenden Zahlen gerade ist, so ist deren Summe durch 10 teilbar.“

– Geben Sie mit Hilfe von Variablen fünf derartige Zahlen an!

– Beweisen Sie, daß die obenstehende Aussage wahr ist!

b) Zeigen Sie, daß folgende Aussage falsch ist!

„Die Summe von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer durch 10 teilbar.“

6. a) Gegeben ist die Ungleichung $3x < 9,6$ ($x \in P$).

– Lösen Sie diese Ungleichung!
– Geben Sie alle ungeraden natürlichen Zahlen an, die diese Ungleichung erfüllen!

b) Zeichnen Sie eine beliebige Strecke $\overline{CD}$, und konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal die Mittelsenkrechte dieser Strecke!

c) Gegeben ist $\cos x = 0,6782$ ($0^\circ \leq x \leq 360^\circ$). Geben Sie alle Lösungen im vorgegebenen Intervall an!

b) Berechnen Sie x!

$$x = \frac{1,2 \cdot 10^7 \cdot 4,5 \cdot 10^{-2}}{3,6 \cdot 10^3}$$

Wahlaufgaben

Von den folgenden Aufgaben 7.1, 7.2 und 7.3 brauchen Sie nur eine zu lösen.

7.1. a) Durch $y = x^2 - 2$ ($x \in P$) ist eine Funktion gegeben.

– Zeichnen Sie den Graph der Funktion in ein rechtwinkliges Koordinatensystem mindestens im Intervall $-3 \leq x \leq +3$!

– Geben Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes S dieses Graphen an!

– Geben Sie den Wertebereich dieser Funktion an!

b) Durch die Gleichung

$$y = \frac{1}{2}x^2 \quad (x \in P)$$

ist eine weitere Funktion gegeben.

– Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion in dasselbe Koordinatensystem mindestens im Intervall $-3 \leq x \leq +3$!

– Berechnen Sie alle Werte x dieser Funktion, für die der Funktionswert $y = 4,5$ ist!

c) Die Graphen beider Funktionen schneiden einander in zwei Punkten. Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes an, der im II. Quadranten liegt!

7.2. Ein Dreieck PQR soll zentrisch gestreckt werden.

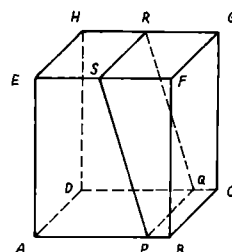
a) Zeichnen Sie in ein Koordinatensystem auf Millimeterpapier (Koordinateneinheit: 1 cm) das Dreieck PQR mit P (2;1), Q (5;1) und R (2;3)!

b) Zeichnen Sie das Dreieck P'Q'R', das bei der zentrischen Streckung des Dreiecks PQR mit dem Streckungszentrum Z (0;0) und dem Streckungsfaktor $k = 2$ entsteht!

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt A des Dreiecks PQR!

d) Es sei A' der Flächeninhalt des Dreiecks P'Q'R'. Geben Sie das Verhältnis A' : A an!

7.3. Gegeben ist ein Quader, der von einer Ebene in den Punkten P, Q, R, S geschnitten wird (siehe Skizze).



$$\overline{AB} = \overline{BC} = 6,0 \text{ cm}$$

$$\overline{AE} = 7,0 \text{ cm}$$

$$\overline{AP} = \overline{DQ} = 5,0 \text{ cm}$$

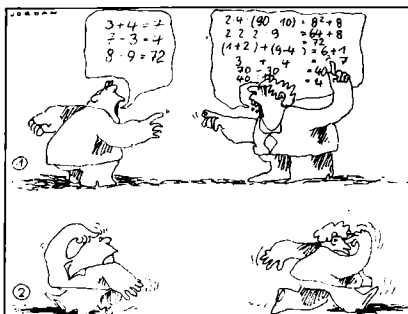
$$\overline{ES} = \overline{HR} = 2,0 \text{ cm}$$

a) Stellen Sie den Quader einschließlich der Schnittfigur in senkrechter Zweitafelprojektion (auf unliniertem Papier) dar!

Bezeichnen Sie alle Punkte entsprechend der Skizze!

b) Konstruieren Sie die Schnittfigur in wahrer Größe und Gestalt!

c) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{PS}$!



VIII. Physikwettbewerb 1980

Der VIII. Physikwettbewerb der DDR fand vom 25. bis zum 29. Februar 1980 an der Pädagogischen Hochschule *Liselotte Herrmann* in Güstrow statt. Es wurden dazu die 50 besten Teilnehmer der Auswahlklausur im November 1979 eingeladen, je 25 aus den Klassenstufen 9/10 und 11/12.

Im ersten Teil des Wettbewerbs wurden den Teilnehmern vier theoretische Aufgaben aus den Gebieten Mechanik, Wärmelehre, Elektrizitätslehre und Optik gestellt. Für die Lösung standen ihnen fünf Stunden zur Verfügung. Im zweiten Teil sollten sie – ebenfalls in 5 Stunden – eine experimentelle Aufgabe lösen. Für die Lösung jeder theoretischen Aufgabe wurden bis zu 10 Punkten, für die vollständig richtige Lösung der experimentellen Aufgabe 20 Punkte vergeben, so daß insgesamt höchstens 60 Punkte erreicht werden konnten.

Zum Abschluß des Wettbewerbs wurden die erfolgreichsten Teilnehmer ausgezeichnet.

B. Träger/U. Walta

Klassenstufe 11/12

1. Preis: Ralf Muschall (Kl. 11), EOS *Ernst Abbe*, Eisenach; Axel Fröhlich (Kl. 12), Spezialschule *Carl Friedrich Gauß*, Frankfurt (O); Stefan Müller-Pfeiffer (Kl. 11), Spezialschule *Carl Zeiss*, Jena

2. Preis: Peter Wüstner (Kl. 11), EOS *Karl Marx*, Leipzig; Jürgen Gräfenstein (Kl. 11), Spezialschule *Martin Andersen Nexö*, Dresden; Ralf Fritsch (Kl. 12), Spezialklasse an der TH Karl-Marx-Stadt; Bernd König (Kl. 12), Thomas-EOS Leipzig

3. Preis: Ralf Malz (Kl. 11), Spezialschule *Carl Zeiss*, Jena

Klassenstufe 9/10

1. Preis: Volker Leutheuser (Kl. 10), EOS *Hermann Pistor*, Sonneberg; Ulf Heim (Kl. 9), Spezialschule *Carl Friedrich Gauß*, Frankfurt (O); Gert Hagner (Kl. 9), Spezialschule *Carl Zeiss*, Jena

2. Preis: Frank Hietze (Kl. 10) und Karsten Kunze (Kl. 10), beide Spezialschule *Martin Andersen Nexö*, Dresden; Günther-Matthias Trausch (Kl. 10), EOS *Max Klinger*, Leipzig; Jens-Uwe Umbreit, EOS *J. W. Goethe*, Ilmenau

3. Preis: Lutz Hille (Kl. 10), EOS *Heinrich Hertz*, Berlin; Axel Stiebritz (Kl. 10), Spezialschule *Carl Friedrich Gauß*, Frankfurt (O); Arndt Stietritz (Kl. 9), Spezialschule *Carl Zeiss*, Jena; Peter Damaschke (Kl. 10), EOS Worbis; Jörg Neugebauer (Kl. 10), EOS *Heinrich Hertz*, Berlin

Theoretische Aufgaben (Klasse 9 und 10)

▲1▲ Eine 5 mm dicke quadratische Aluminiumplatte (Seitenlänge 20 cm) hat in der Mitte ein kreisförmiges Loch (Durchmesser 10 cm). Auf diesem Loch liegt eine Eisenkugel (Durchmesser 10,02 cm). Platte und Kugel haben zunächst die gleiche Temperatur. Die Platte wird durch eine elektrische 100-W-Heizung gleichmäßig erwärmt, bis die Kugel durch das Loch fällt. Durch Wärmeleitung wird auch die Kugel erwärmt. Deren Temperatur erhöht sich bis zum Durchfallen durch das Loch um halb so viel wie die der Platte. Es wird angenommen, daß keine Wärmeverluste auftreten.

Stoffkonstanten für Aluminium:

Dichte $\rho_{Al} = 2,7 \text{ g cm}^{-3}$,
linearer Ausdehnungskoeffizient
 $\alpha_{Al} = 23,4 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$,
spezifische Wärmekapazität
 $c_{Al} = 909 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Stoffkonstanten für Eisen:

Dichte $\rho_{Fe} = 7,86 \text{ g cm}^{-3}$,
linearer Ausdehnungskoeffizient
 $\alpha_{Fe} = 12,1 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$,
spezifische Wärmekapazität
 $c_{Fe} = 465 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Wie lange dauert es, bis die Kugel durch das Loch fällt?

▲2▲ An die Klemmen einer Batterie (Ursprungsspannung $U = 12 \text{ V}$, Innenwiderstand $R_i = 0,5 \Omega$) sind zwei parallel geschaltete Widerstände R_1 und R_2 angeschlossen. An diesen Widerständen wird während 1,5 Stunden eine Wärme von $W_w = 62,1 \text{ kJ}$ frei.

a) Wie groß ist der Gesamtwiderstand von R_1 und R_2 ?

b) Wie groß ist die Gesamtstromstärke I im Stromkreis?

c) Wie groß sind R_1 und R_2 , wenn nach dem Ausschalten von R_2 die Stromstärke auf die Hälfte sinkt?

▲3▲ Ein Elektron bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v_0 = 4 \cdot 10^7 \text{ ms}^{-1}$ auf einer waagerechten Bahn und tritt dann senkrecht zu den Feldlinien in das elektrische Feld eines Plattenkondensators ein (quadratische Platten, Plattenlänge $l_1 = 4 \text{ cm}$, Plattenabstand $d = 1,6 \text{ cm}$, Längskanten parallel zur Anfangsbahn des Elektrons). Die Spannung zwischen den Platten beträgt $U = 910 \text{ V}$. Im Abstand $l_2 = 10 \text{ cm}$ hinter dem Kondensator steht senkrecht zur Anfangsgeschwindigkeit des Elektrons ein Fluoreszenzschirm.

a) Welche Kraft wirkt zwischen den Platten auf das Elektron?

b) Welche Form hat die Bahn des Elektrons vom Eintritt in das elektrische Feld bis zum Auftreffen auf den Schirm?

c) Welche Geschwindigkeit hat das Elektron beim Austritt aus dem elektrischen Feld?

d) Wie groß ist auf dem Schirm der Abstand zwischen dem Auftreffpunkt des Elektrons und dem Punkt, auf den es ohne Ablenkung getroffen wäre?

e) Welche Form hätte die Bahn des Elektrons in einem magnetischen Feld?

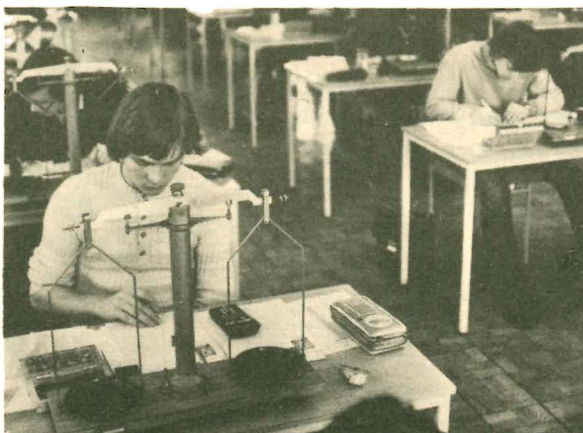
Die relativistische Massenänderung kann vernachlässigt werden. Das Elektron bewege sich immer im Vakuum.

▲4▲ Ein zylindrisches Gefäß mit der Grundfläche A ist bis zur Höhe h mit Wasser gefüllt und schwimmt auf Wasser. Die Eintauchtiefe ist H .

Wie verändern sich die Höhen h und H , wenn in das Gefäß ein Würfel mit dem Gewicht $G = 12 \text{ p}$ gebracht wird, dessen Kantenlänge a) $l_1 = 2,5 \text{ cm}$, b) $l_2 = 2 \text{ cm}$ ist?

Die Dicke der Gefäßwand wird vernachlässigt.

Hinweis: Die experimentelle Aufgabe Klasse 9 bis 12 sowie die theoretischen Aufgaben zu den Klassen 11 und 12 findet der interessierte Leser in der Zeitschrift *Physik in der Schule*, Heft 6/80, d. Red.



Der beste Teilnehmer des Wettbewerbs, Ralf Muschall, EOS *Ernst Abbe* Eisenach, bei der experimentellen Klausur

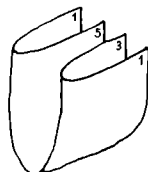


In freien Stunden • alpha heiter



Gefalztes

Man kniffe einen unbeschriebenen Bogen Papier zweimal, um so ein unaufgeschnittenes „Minitagebuch“ zu erhalten. Numeriert nun, ohne das Tagebuch zu entfalten, die einzelnen Seiten hintereinander von 1 bis 8! Faltet den Bogen dann auseinander! Es ergibt sich auf der Vorder- und Rückseite eine bestimmte Anordnung der Zahlen (s. die beiden unteren Abbildungen). Versucht nun, die Aufgabe in umgekehrter Weise zu bewältigen, indem ihr ein weißes Blatt beiderseits in vier Teile teilt und diese dann so numeriert, daß beim Zusammenfalten des Bogens die Seiten fortlaufend richtig numeriert sind!



4	1	2	3
5	8	6	9

Dann wagt euch an eine schwierigere Aufgabe: Teilt einen unbeschriebenen (größeren) Bogen in 8, 16 oder 32 Teile, numeriert diese und faltet den Bogen dann entsprechend zusammen! Wie müßte beispielsweise die Vornumerierung für ein 32seitiges derartiges Tagebuch aussehen?

NBI, Berlin

alpha-Produkte

In nachfolgenden Gleichungen sind die Buchstaben so durch die Ziffern 0 bis 9 zu ersetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Dabei sind gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.

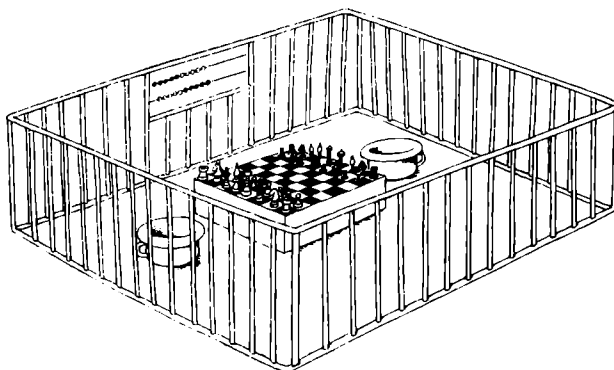
$$\begin{array}{ll}
 \alpha \cdot \alpha \cdot \text{EVE} = \text{PEPE} & \text{D} \cdot \alpha \cdot \text{EVE} = \text{UDUD} \\
 \text{P} \cdot \alpha \cdot \text{EVE} = \text{RTRT} & \text{U} \cdot \alpha \cdot \text{EVE} = \text{KOKO} \\
 \text{R} \cdot \alpha \cdot \text{EVE} = \text{OKOK} & \text{K} \cdot \alpha \cdot \text{EVE} = \text{TRTR} \\
 \text{O} \cdot \alpha \cdot \text{EVE} = \text{DUDU} & \text{T} \cdot \alpha \cdot \text{EVE} = \text{EPEP}
 \end{array}$$

OL Ing. K. Koch, Schmalkalden

Vier Züge auf dem Schachbrett

Auf dem leeren Schachbrett (8 × 8 Felder) soll die Schachfigur „Turm“ durch vier Züge aus dem linken unteren Eckfeld in das rechte obere Eckfeld gebracht werden. Man bestimme die Anzahl der Vierzüger, wenn nur Züge nach rechts und nach oben verwendet werden, also keine rückläufigen wie beim Schachspiel.

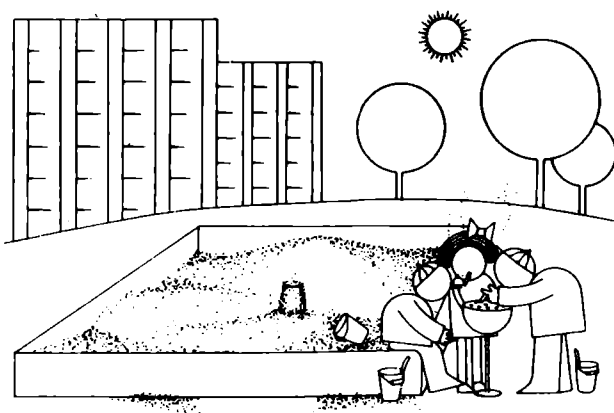
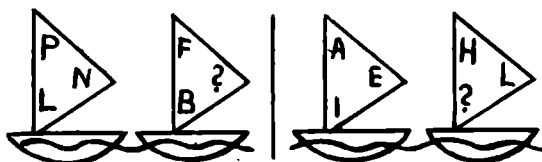
Dr. G. Hesse, Radebeul



Logische Überlegung

Betrachte die beiden Bilder! Welche Buchstaben gehören an Stelle der Fragezeichen?

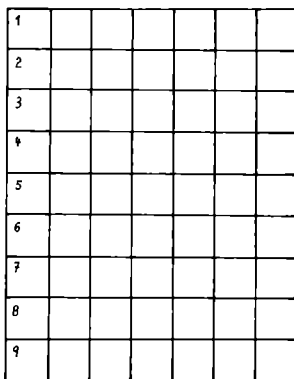
Aus: Troll, Berlin



Füllrätsel

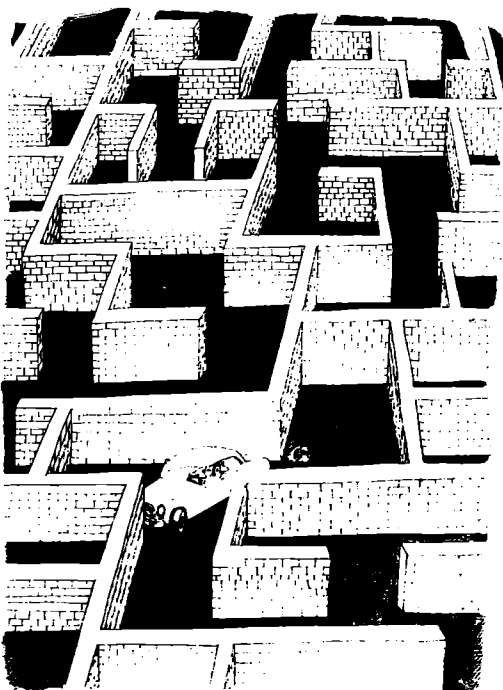
Waagrecht:

1. Tschechischer Math. (1781 bis 1848), der u. a. die Infinitesimalrechnung vervollständigte
2. Ein Kegelschnitt
3. Parallelogramm, dessen Seiten alle gleich lang sind
4. Begriff aus der Logarithmenrechnung
5. Größenbeziehung in der Mengenrechnung
6. Gleichmäßig gekrümmte Kurve, die für jedes Dreieck existiert
7. Deutscher Math. (1646 bis 1716), Begründer der Infinitesimalrechnung
8. Deutscher Math. (1728 bis 1777), leistete u. a. Vorarbeiten zur Begründung einer nichteuklidischen Geometrie
9. Gleichmäßig gekrümmte Kurve, die die Seiten eines Vielecks berührt.



Die Anfangsbuchstaben, von oben nach unten gelesen, nennen den Namen einer Schweizer Gelehrtenfamilie, der große Mathematiker entsprangen.

Dipl.-Lehrer Ing. D. Völzke, Greifswald



Kryptarithmetik

Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern.

- a) Es sind die kleinste und die größte Summe zu finden.
- b) Es ist die größte Summe zu finden.
- c) Es ist eine Summe zu finden.

$$\begin{array}{r} \text{a) WEBER} \\ \text{REGER} \\ \text{BERG} \\ \hline \text{MUSIK} \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{b) UHU} \\ \text{EULE} \\ \text{FALKE} \\ \hline \text{VÖGEL} \end{array} \quad H < K$$

$$\begin{array}{r} \text{c) LILIE} \\ \text{TULPE} \\ \text{NELKE} \\ \hline \text{BLUMEN} \end{array} \quad P < K$$

Dirigent Jindrich Pěncík, Praha

Zahlenmagie

Fünf Quadrate mit je vier Zahlen ergeben jeweils die Summe 27. Viel Spaß!

27	4	8	2	12	16	25	24	27
3	11	9	13	5	9	9	4	26
7	22	26	11	11	4	6	8	11
11	13	9	2	17	2	23	2	14
3	3	6	10	12	55	4	34	5
13	8	1	15	6	15	26	18	3
9	17	21	2	13	9	17	5	25
14	20	5	3	1	6	14	1	47
18	20	4	35	7	19	2	10	9
27	2	1	20	10	12	5	9	27

Die Angst der Ochsen

Als seinerzeit im alten Griechenland, wo Weise gerne von sich reden machten, Pythagoras zu seinem Lehrsatz fand, ließ er vor Freude hundert Ochsen schlachten. Seither, so heißt es, fangen überall auf dieser Welt die Ochsen an zu zittern, wenn sie, wie im erwähnten Beispielsfall, das Werden einer neuen Wahrheit wittern. . . R. S.

Aus: Freie Welt 12/80

Abschied von 1980

Ein Großvater, seine Tochter und ihr kleiner Sohn haben am selben Tag Geburtstag. Bei der Feier stellt man fest, daß das Produkt aus den Zahlen, die ihre Lebensalter in vollen Jahren angeben, genau 1980 ergibt.

Die Summe der drei Altersangaben ergibt eine Primzahl. Auch die Summe der Jahre von Großvater und Enkel ergibt ebenso wie die Summe der Lebensjahre von Mutter und Sohn eine Primzahl.

Wie alt sind Großvater, Mutter und Sohn?

Schuldirektor W. Förg, Schwaz (Österreich)

Lösungen zu: Knoeleien zum Jahreswechsel, IV. U.S.

Silvester 1980



Winterliche Pracht



Weihnachtliche Freuden

1. Der Tannenbaumschmuck links hängt in der Luft;
2. eine Kerze ist verkehrt gezeichnet;
3. der Baumstamm hängt über dem Topf;
4. auf dem Päckchen neben dem Baum ist das Band nicht vollständig;
5. eine Tür ist kleiner als die andere auf der Kommode;
6. auf dem Bild an der Wand ragt die Spitze des Bootes über den Rahmen hinaus;
7. die Gardine ist unter dem Arm des Jungen länger, als sie sein dürfte;
8. ein Fensterriegel ist auf der Fensterscheibe;
9. ein Ärmel ist länger als der andere auf dem Hemd des Jungen;
10. der linke Arm des Weihnachtsmannes ist mangelhaft gezeichnet.

Lösungen zu alpha-Wettbewerb, Heft 2/80 (Fortsetzung):

Ma 6 ■ 1973 Eine dreistellige natürliche Zahl läßt sich darstellen durch $100a + 10b + c$ mit $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$ und $0 \leq c \leq 9$; ihre Quersumme beträgt $a + b + c$. Nun gilt

$$\begin{aligned} 100a + 10b + c &= 40(a + b + c), \\ 100a + 10b + c &= 40a + 40b + 40c, \\ 30b &= 60a - 30c - 9c, \\ b &= 2a - c - \frac{3c}{10}. \end{aligned}$$

Nur für $c=0$, also für $b=2a$ wird diese Gleichung unter den einschränkenden Bedingungen erfüllt. Es gibt genau vier Zahlen mit der geforderten Eigenschaft; sie lauten 120, 240, 360, 480.

Ma 6 ■ 1974 Angenommen der Autobus verfügt über x Sitzplätze, dann waren $\left(\frac{1}{3} \cdot x\right)$ Plätze von Kindern, $\left(\frac{1}{3} \cdot x + 6\right)$ Plätze von Erwachsenen besetzt, und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x + 6 + 9 &= x, \\ \frac{1}{3}x &= 15, \text{ also } x = 45. \end{aligned}$$

Der Autobus verfügt über 45 Sitzplätze.

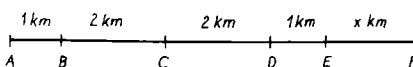
Ma 6 ■ 1975 Der Zeichnung ist folgendes zu entnehmen:

$$\begin{aligned} [(6+x) + (3+x)] \cdot 10 \\ = [(5+x) + (1+x) + x] \cdot 10, \\ 2x + 9 = 3x + 6, \text{ also } x = 3. \end{aligned}$$

Die Orte E und F sind 3 km voneinander entfernt.

Zusteigeort Fahrstrecke Fahrpreis

A	9 km	0,90 M
B	8 km	0,80 M
C	6 km	0,60 M
D	4 km	0,40 M
E	3 km	0,30 M



Ma 7 ■ 1976 Es seien a, b, c, m, v die Zahlen, die das gegenwärtige Lebensalter von Axel, Bernd, Christine, ihrer Mutter und ihres Vaters angeben; dann gilt

$$a + b + c + m + v = 71. \quad (1)$$

$$m = 14a, \text{ also } a = \frac{m}{14}, \quad (2)$$

$$m = 7b, \text{ also } b = \frac{m}{7}, \quad (3)$$

$$m = 4c, \text{ also } c = \frac{m}{4}, \quad (4)$$

$$m = v - 2, \text{ also } v = m + 2. \quad (5)$$

Setzt man (2), (3), (4) und (5) in (1) ein, so erhält man

$$\frac{m}{14} + \frac{m}{7} + \frac{m}{4} + m + (m + 2) = 71,$$

$$\frac{m}{14} + \frac{m}{7} + \frac{m}{4} + 2m = 69,$$

$$2m + 4m + 7m + 56m = 69 \cdot 28,$$

$$69m = 69 \cdot 28,$$

$$m = 28.$$

Gegenwärtig sind Axel 2 Jahre, Bernd 4 Jahre, Christine 7 Jahre, die Mutter 28 Jahre, der Vater 30 Jahre alt.

Ma 7 ■ 1977 Für den Betrag von 22,81 M wird mindestens eine 1-Pf-Münze benötigt. Für den Betrag von 22,81 M $- 0,02$ M = 22,79 M wären weitere Pfennigmünzen erforderlich. Deshalb hatte Susanne genau eine 1-Pf-Münze. Aus 22,81 M $- 6,15$ M = 16,66 M und 10,00 M $< 16,66$ M $< 20,00$ M folgt, daß Susanne kein 20-M-Stück und höchstens ein 10-M-Stück hatte. Wegen

$2 \cdot (5 \text{ M} + 2 \text{ M} + 1 \text{ M} + 50 \text{ Pf} + 20 \text{ Pf} + 10 \text{ Pf} + 5 \text{ Pf}) = 2 \cdot 8,85 \text{ M} = 17,70 \text{ M}$ und $17,70 \text{ M} < 22,80 \text{ M}$ hatte Susanne genau ein 10-Mark-Stück. Wegen $22,81 \text{ M} - 10 \text{ M} - 5 \text{ M} - 0,01 \text{ M} = 7,80 \text{ M}$ und $2 \cdot (2 \text{ M} + 1 \text{ M} + 50 \text{ Pf} + 20 \text{ Pf} + 10 \text{ Pf} + 5 \text{ Pf}) = 2 \cdot 3,85 \text{ M} = 7,70 \text{ M}$ und $7,70 \text{ M} < 7,80 \text{ M}$ hatte Susanne genau zwei 5-Mark-Stücke. Für den Betrag von 6,15 M wird mindestens eine 5-Pf-Münze benötigt. Für den Betrag von 22,81 M $- 6,15$ M = 16,66 M wird eine weitere 5-Pf-Münze benötigt. Deshalb hatte Susanne genau zwei 5-Pf-Münzen. Nun verbleibt ein Restbetrag von $22,81 \text{ M} - 10 \text{ M} - 2 \cdot 5 \text{ M} - 2 \cdot 0,05 \text{ M} - 0,01 \text{ M} = 2,70 \text{ M}$, der näher zu untersuchen ist. Susanne könnte höchstens ein 2-Mark-Stück gehabt haben. Wegen $1 \text{ M} + 2 \cdot 50 \text{ Pf} + 2 \cdot 20 \text{ Pf} + 2 \cdot 10 \text{ Pf} = 2,60 \text{ M}$ und $2,60 \text{ M} < 2,70 \text{ M}$ hatte sie genau zwei 1-M-Stücke. Wegen $2,70 - 2,00 \text{ M} = 0,70 \text{ M}$ und $2 \cdot (20 \text{ Pf} + 10 \text{ Pf}) = 0,60 \text{ M}$ und $0,60 \text{ M} < 0,70 \text{ M}$ hatte sie genau eine 50-Pf-Münze. Für die Beträge von 6,15 M und von 16,66 M werden

Münzen zu 10 Pf benötigt. Deshalb hatte Susanne keine 20-Pf-Münze, aber zwei 10-Pf-Münzen.

Ma 7 ■ 1978 Nach den Bedingungen der Aufgabe gilt:

$$(1) \quad BP + PDA = IAP$$

$$(2) \quad PDA = 0,1 \cdot IAP$$

$$(3) \quad 180 + PDA = IAP.$$

Durch Umstellung erhalten wir

$$180 = IAP - PDA,$$

$$180 = IAP - 0,1 \cdot IAP$$

$$(\text{durch Einsetzen von (2)}),$$

$$180 = 0,9 \cdot IAP,$$

$$200 = IAP.$$

Nun gilt $200000 - 180000 = 20000$.

Der Betrieb muß 20000 M Produktions- und Dienstleistungsabgabe entrichten.

Ma 7 ■ 1979 Wegen $r + e = e$ gilt $r = 0$

Wegen $e + e + e + e = 4e = 10k$ mit $k \in \mathbb{N}$ gilt $e = 5$.

Wegen $o + o = 20 < 10$ gilt $o < 5$, also $o + o + o + o = 40 < 20$; somit gilt $f = 1$.

Wegen $40 \geq 10 + o - 3$, also $30 \geq 7$ gilt $o \geq 3$.

Aus $3 \leq o < 5$ folgt $o = 3$ oder $o = 4$. Es sei $o = 4$:

Dann gilt $4 \cdot 4 + x = 14$, was nicht möglich ist.

Also gilt $o = 3$. Ferner gilt $4n + 2 = 10 + u$; wegen $n \neq 3$ und $u \neq 0$ erhalten wir $n = 4$ und somit $u = 8$, also $v = 2$ und $i = 7$.

Es gibt also genau eine Lösung, nämlich

$$\begin{array}{r} 345 \\ + 345 \\ + 345 \\ + 345 \\ \hline 1380 \end{array}$$

Ma 8 ■ 1980 Die letzte Ziffer des Termwertes entspricht einer Zahl, die als Rest bleibt, wenn man den Term durch 10 dividiert. Deshalb betrachtet man die Reste, die die einzelnen Summanden bei Division durch 10 lassen:

1. 17 läßt bei Division durch 10 den Rest 7; wir können schreiben: $17 = 10 \cdot 1 + 7$.

17^2 läßt bei Division durch 10 den Rest $7 \cdot 7 = 49$, und 49 läßt den Rest 9.

17^3 läßt den Rest $9 \cdot 7 = 63$, und 63 läßt den Rest 3.

17^4 läßt den Rest $3 \cdot 7 = 21$, und 21 läßt den Rest 1.

2. 13 läßt den Rest 3; 13^2 läßt Rest 9; 13^3 läßt Rest 7; 13^4 läßt Rest 1; 13^5 läßt Rest 3.

3. 29 läßt Rest 9; 29^2 läßt Rest 1; 29^3 läßt Rest 9; 29^4 läßt Rest 1; 29^5 läßt Rest 9; 29^6 läßt Rest 1.

4. $17^4 + 13^5 - 29^6$ endet wegen $17^4 + 13^5 < 29^6$ auf 7.

Ma 8 ■ 1981 Wir nehmen an, der große Zeiger überstreicht x Minuten, bis er mit dem kleinen Zeiger einen gestreckten Winkel bildet. In dieser Zeit überstreicht der kleine Zeiger $\frac{x}{12}$ Minuten. Wenn beide Zeiger einen gestreckten Winkel bilden, liegt zwischen ihnen eine Differenz von 30 Minutenstrichen.

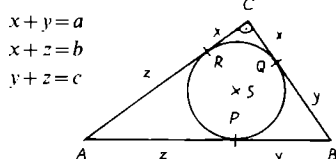
Deshalb gilt:

$$\begin{aligned}x - \frac{x}{12} &= 30, \\12x - x &= 360, \\11x &= 360, \\x &= 32\frac{8}{11}.\end{aligned}$$

Die Zeiger bilden nach $32\frac{8}{11}$ Minuten einen gestreckten Winkel.

Ma 8 ■ 1982 Die Längen der Strecken $\overline{CR}$ und $\overline{CQ}$ sind gleich (Satz über die Tangentenabschnitte) und wurden mit x bezeichnet. Das gleiche gilt für die mit y bzw. z bezeichneten Längen. Setzt man $y = a - x$ und $z = b - x$ in $c = y + z$ ein, so erhält man $c = a - x + b - x$ bzw. $c = a + b - 2x$ und damit

$$x = \frac{a+b-c}{2}. \quad (1)$$



Setzt man (1) in $y = a - x$ und $z = b - x$ ein, so erhält man

$$y = \frac{a-b+c}{2} \text{ und } z = \frac{-a+b+c}{2}.$$

Für das Produkt yz gilt:

$$yz = \frac{(a-b+c)(-a+b+c)}{4} \text{ bzw.}$$

$$yz = \frac{-a^2 - b^2 + c^2 + 2ab}{4}. \quad (2)$$

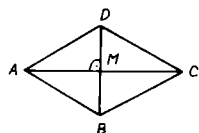
Nun gilt für das abgebildete Dreieck ABC nach dem Satz des Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$. Dadurch geht (2) über in

$$yz = \frac{ab}{2}. \quad (3)$$

Da der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks ABC nach der Formel $A = \frac{ab}{2}$ berechnet wird, ist die Behauptung bewiesen.

Ma 8 ■ 1983 Aus (2) und (3) folgt: $\overline{BD}$ ist 4 cm lang.

Aus (1) folgt: Das Viereck $ABCD$ ist ein Rhombus. (Skizze nicht maßstäblich)



Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2, \\ \overline{AB}^2 &= 16 \text{ cm}^2 + 4 \text{ cm}^2, \\ \overline{AB} &= \sqrt{20 \text{ cm}^2}, \\ \overline{AB} &\approx 4,47 \text{ cm}.\end{aligned}$$

Der Umfang u des Rhombus $ABCD$ ist gleich der vierfachen Länge einer Seite. Es gilt $u \approx 4 \cdot 4,47 \text{ cm}$; $u \approx 17,88 \text{ cm}$.

Der Flächeninhalt des Rhombus $ABCD$ ist gleich dem halben Produkt aus den Längen der beiden Diagonalen. Es gilt:

$$A = \frac{8 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm}}{2}; A = 16 \text{ cm}^2.$$

$$\begin{aligned}\text{Ma 9} \blacksquare 1984 \quad &(2n-1)^2 + (2n+1)^2 + 38 \\ &= 3(2n-2)^2, \\ n^2 - 6n - 7 &= 0, \\ n &= 3 \pm 4, \\ n_1 &= 7, \\ n_2 &= -1 \text{ (entfällt)}.\end{aligned}$$

Die Zahlen lauten 13 und 15, und es gilt $13^2 + 15^2 + 38 = 3 \cdot 12^2$.

Ma 9 ■ 1985 Angenommen, das Schiff hat eine Länge von x Metern, eine Breite von y Metern und einen Tiefgang von z Metern: dann gilt

$$x + y + z = 181, \quad (1)$$

$$x = 4y + 20, \quad (2)$$

$$y + z = 41. \quad (3)$$

Wir subtrahieren (3) von (1) und erhalten $x = 140$. Durch Einsetzen in (2) erhalten wir

$$140 = 4y + 20,$$

$$4y = 120,$$

$$y = 30 \text{ und damit } z = 11.$$

Der Atomisbrecher „Arktika“ hat einen Tiefgang von 11 m.

Ma 9 ■ 1986 Da jedes ebene konvexe n -Eck $\frac{n}{2}(n-3)$ Diagonalen hat, gilt nach Aufgabenstellung

$$\frac{n}{2}(n-3) = 119.$$

Nach Multiplikation der Gleichung mit 2 und Auflösen der Klammer erhält man die quadratische Gleichung

$$n^2 - 3n - 238 = 0.$$

Man wendet die bekannte Lösungsformel an und erhält schließlich die beiden Lösungen 17 und -14. Letztere entfällt. Ein ebenes konvexes 17eck hat 119 Diagonalen.

Ma 9 ■ 1987 Bezeichnet man den Inhalt der im Äußeren des Quadrats liegenden Flächen mit A_o und den Inhalt der im Inneren des Quadrats liegenden Flächen mit A_i und gilt $A_o = A_i$, so ist der Flächeninhalt des Quadrats gleich dem des Kreises.

Folglich gilt:

$$\frac{d^2 \cdot \pi}{4} = a^2;$$

$$d^2 = \frac{4a^2}{\pi};$$

$$d = \sqrt{\frac{4a^2}{\pi}};$$

$$d = \frac{2a}{\sqrt{\pi}};$$

$$d \approx 1,128 \cdot a.$$

Der Durchmesser des Kreises ist etwa 1,128-mal so lang wie die Quadratseite.

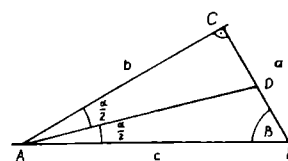
Ma 10/12 ■ 1988 9 läßt bei Division durch 4 den Rest 1; also läßt auch 9^5 bei Division durch 4 den Rest 1. Da jede Potenz mit der Basis 9 und mit einem natürlichen Exponenten bei Division durch 4 den Rest 1 läßt, gilt das auch für 9^{5u} unter den Bedingungen der Aufgabe.

Das gleiche gilt für die Potenz 5^{3u} .

Nun läßt der Term $9^{5u} - 5^{3u}$ bei Division durch 4 den Rest $1 - 1 = 0$. Das heißt aber,

daß der gegebene Ausdruck stets durch 4 teilbar ist, w. z. b. w.

Ma 10/12 ■ 1989 (Skizze nicht maßstäblich)



Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

$$c^2 = 8^2 + 6^2,$$

$$c^2 = 100,$$

$$c = 10.$$

Weiter gilt $\tan \beta = 8 : 6 = 1,333$, also $\beta = 53,12^\circ$; somit gilt $\alpha = 90^\circ - \beta = 36,88^\circ$ und $\frac{1}{2}\alpha = 18,44^\circ$.

Im rechtwinkligen Dreieck ADC gilt

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}; 8,$$

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = 8 \cdot \tan 18,44^\circ$$

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = 2,67.$$

Da der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks gleich dem halben Produkt aus den Längen der Katheten ist, gilt weiter:

$$A_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2,67 = 10,66,$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24,$$

$$A_{ABD} = 24 - 10,66 = 13,34.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABD beträgt $13,34 \text{ cm}^2$, der des Dreiecks ADC beträgt $10,66 \text{ cm}^2$ (alles Näherungswerte!).

Ma 10/12 ■ 1990 Das Dreieck ABC ist gleichschenkelig, da $\overline{AB} = \overline{BC}$ Radien von k sind. Man berechnet zuerst die Länge r des Radius von k :

$$100^\circ : 360^\circ = 5 \text{ cm} : \pi \cdot d;$$

$$d = \frac{5 \text{ cm} \cdot 360^\circ}{100^\circ \cdot \pi};$$

$$d = 5,73 \text{ cm, also } r = 2,86 \text{ cm}.$$

Für den Flächeninhalt des Kreises k gilt:

$$A_k = \pi \cdot r^2; A_k = \pi \cdot 2,86^2 \text{ cm}^2; A_k = 25,7 \text{ cm}^2.$$

Für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC gilt:

$$A_D = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin \beta \text{ und wegen } a = c:$$

$$A_D = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin \beta;$$

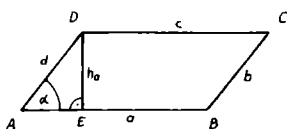
$$A_D = \frac{1}{2} \cdot 2,86^2 \text{ cm}^2 \cdot \sin 100^\circ;$$

$$A_D = 4,03 \text{ cm}^2.$$

Es gilt $A_D : A_k = 1 : 6,38$.

Die Fläche des Dreiecks ABC ist in der Fläche des Kreises K etwa $6\frac{1}{2}$ mal enthalten.

Ma 10/12 ■ 1991 (Skizze nicht maßstäblich)



Wegen $a = c$ und $b = d$ gilt für den Umfang des Parallelogramms $u = 2a + 2d$ bzw.

$$\frac{u}{2} = a + d. \quad (1)$$

Im rechtwinkligen Dreieck AED gilt $h_a = d \cdot \sin \alpha = d \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} d$, also

$$2 \cdot h_a = d. \quad (2)$$

Für den Flächeninhalt des Parallelogramms gilt $A = a \cdot h_a$ bzw. $2A = a \cdot 2h_a$.

Setzt man (2) in (3) ein, so erhält man $2A = a \cdot d$. Man erhält ein Gleichungssystem mit zwei Variablen, das man wie folgt löst:

$$a + d = 34; d = 34 - a$$

$$a \cdot d = 225$$

$$a \cdot (34 - a) = 225$$

$$34a - a^2 = 225$$

$$a^2 - 34a + 225 = 0$$

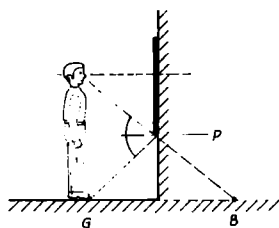
$$a_{1,2} = 17 \pm 8$$

$$a_1 = 25; \text{ also } d_1 = 9$$

$$a_2 = 9; \text{ also } d_2 = 25.$$

Die Seite $\overline{AB}$ ist 25 cm, die Seite $\overline{AD}$ ist 9 cm lang.

Ph 6 ■ 76 Da am ebenen Spiegel der Bildpunkt B ebenso weit hinter dem Spiegel wie der Gegenstandspunkt G vor dem Spiegel liegt, läßt sich der Reflexionspunkt P leicht konstruieren (siehe Bild).



Man erkennt, daß sich der unterste Rand des Spiegels nicht höher als in der halben Größe des Betrachters befinden darf.

Für unseren Fall sind das 75 cm.

Ph 7 ■ 77 Geg.:

Druck im Inneren $p_1 = 0,025$ at

Luftdruck $p_2 = 760$ Torr $\approx 1,033$ at

Durchmesser $d = 10$ cm

Ges.: Druckkraft F

Die Druckkraft errechnet man nach der Formel $F = p \cdot A$ mit $p = p_2 - p_1$ und $A = \frac{\pi d^2}{4}$. Also ist

$$F = (p_2 - p_1) \cdot \frac{\pi d^2}{4}$$

$$F = (1,033 - 0,025) \text{ kp} \cdot \frac{3,14 \cdot 10^2 \text{ cm}^2}{4 \text{ cm}^2}$$

$$F \approx 79 \text{ kp.}$$

Der Deckel wird mit einer Kraft von rund 79 kp (rd. 775 N) auf das Glas gepreßt.

Ph 8 ■ 78 Geg.:

Spannung $U = 0,23$ V

Spez. Widerstand $\varrho = 0,0178 \frac{\Omega \text{ mm}^2}{\text{m}}$

Querschnittsfläche $A = 70 \text{ mm}^2$

Länge $l = 6$ m

Ges.: Stromstärke I

Nach dem Ohmschen Gesetz gilt $I = \frac{U}{R}$ mit

$$R = \frac{\varrho \cdot l}{A}. \text{ Also ist}$$

$$I = \frac{U \cdot A}{\varrho \cdot l},$$

$$I = \frac{0,23 \text{ V} \cdot 70 \text{ mm}^2 \cdot \text{m}}{0,0178 \frac{\text{V}}{\text{A}} \cdot \text{mm}^2 \cdot 6 \text{ m}}$$

$$I \approx 150,74 \text{ A.}$$

In der Leitung ist eine Stromstärke von rund 151 A enthalten.

Ph 9 ■ 79 Geg.:

Masse des

$$\text{Mondes: } m_M = 7,347 \cdot 10^{22} \text{ kg}$$

Masse der

$$\text{Erde: } m_E = 5,979 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Radius des

$$\text{Mondes: } r_M = 1,738 \cdot 10^3 \text{ km}$$

Entfernung

$$\text{Erde-Mond: } s = 3,844 \cdot 10^5 \text{ km}$$

Gravitations-

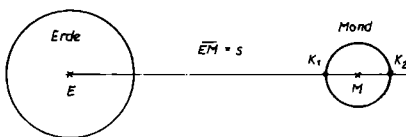
$$\text{konstante: } \gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$$

Ges.: Differenz der Gewichtskräfte ΔG

Das Gewicht eines Körpers ist davon abhängig, welche Fallbeschleunigung auf ihn einwirkt. Es gilt die Formel $G = mg = F$. Die Fallbeschleunigung, die von der Erde aus in den Punkten K_1 und K_2 einwirkt, wird wie folgt berechnet. Aus dem Gravitationsgesetz

$$F = \frac{\gamma \cdot m_1 m_2}{r^2} \text{ und } F = mg \text{ ergibt sich}$$

$$mg = \frac{\gamma \cdot m_1 m_2}{r^2}$$



In unserem Fall gilt dann mit $m_1 = m$ und $r = (s \mp r_M)$

für K_1 :

$$g_{E1} = \frac{\gamma \cdot m_E}{(s - r_M)^2} = \frac{6,67 \text{ kg m}^3 \cdot 5,979 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{10^{11} \text{ kg}^2 \text{ s}^2 \cdot (3,82662 \cdot 10^8)^2 \text{ m}^2}$$

$$g_{E1} \approx 0,002723 \text{ ms}^{-2},$$

für K_2 :

$$g_{E2} = \frac{\gamma \cdot m_E}{(s + r_M)^2} = \frac{6,67 \text{ kg m}^3 \cdot 5,979 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{10^{11} \text{ kg}^2 \text{ s}^2 \cdot (3,86138 \cdot 10^8)^2 \text{ m}^2}$$

$$g_{E2} \approx 0,0026747 \text{ ms}^{-2}.$$

Für die Fallbeschleunigung, die vom Mond auf K_1 und K_2 einwirkt, gilt:

$$g_M = \frac{\gamma \cdot m_M}{r_M^2} = \frac{6,67 \text{ kg m}^3 \cdot 7,347 \cdot 10^{22} \text{ kg}}{10^{11} \text{ kg}^2 \text{ s}^2 \cdot (1,738 \cdot 10^6)^2 \text{ m}^2} \\ g_M \approx 1,6223 \text{ ms}^{-2}.$$

Für K_1 wirken nun g_M und g_{E1} genau gegeneinander. Es gilt:

$$G_1 = m(g_M - g_{E1}) = m \cdot 1,6196 \text{ N.}$$

Für K_2 wirken g_M und g_{E2} in gleicher Richtung. Es gilt:

$$G_2 = m(g_M + g_{E2}) = m \cdot 1,625 \text{ N.}$$

Für die gesuchte Differenz ΔG gilt nun:

$$\Delta G = |G_2 - G_1| \\ \Delta G = (0,0054 \text{ N}).$$

Die Differenz der Gewichtskräfte G_1 und G_2 der Körper K_1 und K_2 beträgt (0,0054 m) Newton.

Ph 10/12 ■ 80

Geg.: $r = 200$ m

Ges.: a) v

$$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

b) α

$$\mu = 0,25$$

a) Die Geschwindigkeit des Kraftrades errechnet man aus der Formel für die Zentrifugalkraft F_Z (Fliehkraft):

$$F_Z = \frac{m \cdot v^2}{r}, \quad v^2 = \frac{F_Z \cdot r}{m}. \quad (1)$$

Nun ist die Zentrifugalkraft dem Betrage nach gleich der Zentripetalkraft, und diese ist in unserem Fall gleich der Haftreibungskraft F_R (siehe Bild).

Also ist $F_Z = F_R$, und da $F_R = \mu \cdot F_G$ ist, muß

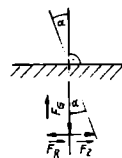
$$F_R = F_Z = \mu \cdot F_G \text{ sein}$$

$$\text{bzw. } F_Z = \mu \cdot m \cdot g. \quad (2)$$

Setzt man (2) in (1) ein, erhält man

$$v^2 = \frac{F_Z \cdot r}{m}, \quad v^2 = \frac{\mu \cdot m \cdot g \cdot r}{m}, \\ v = \sqrt{\mu \cdot g \cdot r}, \quad v = \sqrt{0,25 \cdot 9,81 \cdot 200} \frac{\text{m}}{\text{s}}, \\ v \approx 22,14 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 80 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Der Motorradfahrer kann die Kurve mit einer Geschwindigkeit von rund $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ durchfahren. Dabei spielt die Masse keine Rolle.



b) Um das Kippen des Kraftrades infolge der Zentrifugalkraft F_Z zu vermeiden, muß (im Idealfall) die Schräglage so groß sein, daß die Resultierende aus F_Z und der Gewichtskraft F_G durch den Berührungspunkt der Reifen mit der Fahrbahn geht (siehe Bild).

Also gilt $\tan \alpha = \frac{F_Z}{F_G}$ mit $F_G = mg$ und nach (2)

$$F_Z = \mu mg \text{ und } \tan \alpha = \frac{F_Z}{mg}$$

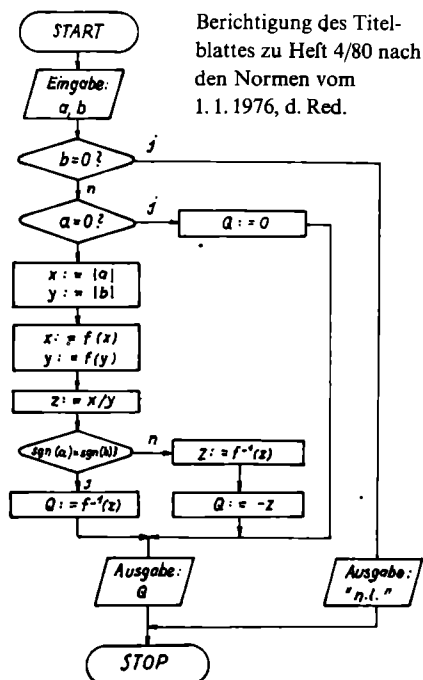
$$\tan \alpha = \frac{\mu \cdot m \cdot g}{m \cdot g}, \quad \tan \alpha = \mu,$$

$$\alpha \approx 14^\circ.$$

Der Winkel gegenüber der Senkrechten beträgt rund 14° .

Aus Platzgründen muß auf die Lösungen der Aufgaben des Chemiewettbewerbs verzichtet werden.





Berichtigung zum Beitrag

„Helft dem Kosmonauten“, 3/80, S. 56

Der Impulssatz besagt, daß in einem System, in welchem nur innere Kräfte wirken, der Gesamtimpuls konstant bleibt. Kosmonaut und Pickhammer bilden ein solches System – also driftet er mit konstanter Geschwindigkeit weiter von der Station weg, wobei der Pickhammer die im Punkt (1) der Problemdiskussion beschriebenen Schwingungen vollführt. Also:

Der funktionierende Pickhammer nutzt dem Kosmonauten wenig. Nur wenn er das Gerät als Masse in der richtigen Richtung mit hinreichend großer Geschwindigkeit wegstößt, dann kann er sich durch Rückstoß zur Station zurückbringen.

Lösung zu: Eine Aufgabe von

Prof. Dr. D.-E. Liebscher, Heft 4/80

1. Der Winkel B_1CB ist gleich dem Winkel ACA_1 . Die Dreiecke B_1BC und AA_1C sind kongruent, insbesondere ist $B_1B = AA_1$. Der gleiche Schluß an den anderen Ecken führt auf $BB_1 = AA_1 = CC_1$.

2. Der Winkel B_2CA_2 ist gleich dem Winkel B_1CB . Weiterhin gilt für die Streckenverhältnisse

$$\frac{CB_2}{CB_1} = \frac{CA_2}{CB}$$

Umkreisrad. d. gleichseitigen Dreiecks
= Seitenlänge d. gleichseitigen Dreiecks = q .

Die Dreiecke B_1BC und B_2A_2C sind ähnlich. Das Verhältnis der Strecken B_2A_2 zu B_1B ist gleich q . Analoges zeigen wir für die Strecken B_2C_2 und C_2A_2 . Wegen dieser Ähnlichkeit und der unter 1. gefundenen Gleichheit der jeweiligen Bezugsstrecken ist der Satz bewiesen.

Glücksbringer wünschen ein frohes und erfolgreiches 1981

Wer glaubt, daß der Schornsteinfeger nur zum Kehren der Schornsteine da ist oder geeignet erscheint, als Glücksbringer zu fungieren, der hat sich nicht nur früher, sondern erst recht heute geirrt.

Natürlich ist es auch heute noch so, daß der Schornsteinfeger die Feuersicherheit der Wohn- und Gesellschaftsbauten durch das Abkehren des feuergefährlichen Rußes entscheidend mit gewährleistet. Infolge der Veränderung der Bauweise nimmt der Anteil der Wartung und Überprüfung von Schornsteinsystemen, die der Abführung von Luft aus den Wohnräumen dienen, weiterhin zu. Der Schornsteinfeger reinigt darüber hinaus auch Öfen und Zentralheizungskessel. Durch teilweise falsche Bedienung von Öfen kommt es vor, daß sich Teerstoffe im Schornstein absetzen, die den Schornsteinquerschnitt verengen und vor allem eine Brandgefahr darstellen. Mit einem üblichen Kehrgerät können solche festklebenden Teersubstanzen nicht vom Schornsteinmauerwerk abgekehrt werden. Hier bedient sich der Schornsteinfeger der Technik des sogenannten *Ausbrennens*. Etagenweise wird zum Beispiel Petroleum eingespritzt, entzündet und der Teer abgebrannt.

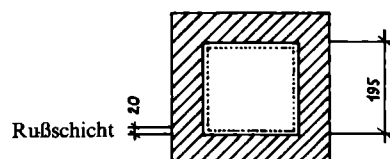
Diese gefährliche Arbeit darf natürlich nur von zwei Schornsteinfegern ausgeführt werden, da der Schornstein durch die entstehenden hohen Temperaturen stark belastet wird. Großes fachliches Können und eine ganze Menge Berufserfahrung gehören natürlich dazu, um zu erkennen, welche Faktoren dazu beigetragen haben, daß sich solche Teerstoffe abgelagert. Oftmals muß der Schornsteinfeger dann den einzelnen Bürger über das richtige Bedienen der Feuerstätten, natürlich höflich aber deutlich, beraten, damit größere Schäden am Schornstein gar nicht erst aufkommen. Der Schornsteinfeger unterstützt aber auch die Gebäudewirtschaft bei kleineren Instandsetzungsarbeiten, hauptsächlich den Arbeits- und Schutzeinrichtungen über Dach, denn in dieser Höhe wird Sicherheit ganz groß geschrieben.

Unsichere Zeiten, wie es sie noch im vorigen Jahrhundert gab und wo die Hausbesitzer sich für die Reinigung der Schornsteine den Schornsteinfeger mit der geringsten Reinigungsgebühr herausuchen konnten, gehören

zum Glück der Vergangenheit an. Es ist selbstverständlich, daß jeder Schornsteinfeger wie jeder andere Bürger in der DDR ein gesichertes Einkommen hat. Heute hat auch jeder Schornsteinfegerlehrling seine gesicherte Perspektive, auch über das Jahr 2000 hinaus, da durch den Einsatz von Braunkohle die Ofenheizung auch zukünftig keine untergeordnete Rolle spielen wird.

Da insbesondere in der berufstheoretischen Ausbildung die Mathematik eine bedeutende Rolle spielt, füge ich einige Aufgaben zum Knobeln bei:

▲1▲ Ein Schornstein mit einem lichten Querschnitt von $195 \text{ mm} \cdot 195 \text{ mm}$ wird durch eine gleichmäßige Rußschicht von 20 mm verengt (siehe Bild). Wieviel Prozent beträgt die Querschnittsverengung?



▲2▲ Ein Rauchgas nimmt im Normzustand (273 K , $101,3 \text{ kPa}$) ein Volumen von 8 m^3 pro kg Brennstoff ein. Wenn dieses Rauchgas in den Schornstein einströmt, besitzt es eine Temperatur von 150°C . Welches Volumen nimmt das Rauchgas ein, wenn der Druck konstant bleibt?

▲3▲ Welche Reibungsfläche in m^2 würde sich für die entlangströmenden Rauchgase ergeben, wenn der lichte Querschnitt $260 \text{ mm} \cdot 260 \text{ mm}$ und die Schornsteinhöhe 12 m betragen?

J. Naumann

Rund 700 Schornsteinfeger aus der gesamten DDR erhielten seit 1971 in Eilenburg ihre berufstheoretische Ausbildung. In diesem Monat absolvierten wiederum 80 künftige „Glücksbringer“ die dortige Berufsschule des Leipziger Baukombinates, die einzige derartige Bildungsstätte in der Republik. Insgesamt gibt es in der DDR etwa 3000 Schornsteinfeger.

alpha-Kalender

Zwischen dem Haus der JP Georg Schwarz Leipzig und dem Haus der JP Brno bestehen seit langem partnerschaftliche Beziehungen. Anlässlich des 30jährigen Bestehens des Pionierpalastes Brno wurden an alle interessierten tschechischen Pioniere im Rahmen von außerunterrichtlichen Veranstaltungen Modellbogen – sie enthalten eine Würdigung dieses Jahrestages – als Geschenk überreicht. Auch die Leipziger Delegation, die an den Feierlichkeiten teilnahm, erhielt solche Blätter zum Basteln.

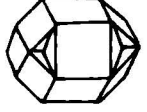
H. Scheibe

Die Redaktion *alpha* entwickelte anlässlich des 20. Jahrestages des Bestehens der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR einen Kalender. Viel Freude und Erfolg beim Bau des Vielfächners!

alpha-Kalender 1981



20 Jahre Mathematik-olympiaden										HEUREUSE NOUVEAU • C HOBBYM TOZOM MAGYAR POSTA • C HOBBYM TOZOM 1981. VI. 1.		HEUREUSE NOUVEAU • C HOBBYM TOZOM MAGYAR POSTA • C HOBBYM TOZOM 1981. VI. 1.	
1981	Mai	Juni		Juli		August		Februar		1981	März	1981	April
		Mo 4 11 18 25 Di 5 12 19 26 Mi 6 13 20 27 Do 7 14 21 28 Fr 1 8 15 22 29 Sa 2 9 16 23 30 So 3 10 17 24 31	Mo 1 8 15 22 29 Di 2 9 16 23 30 Mi 3 10 17 24 Do 4 11 18 25 Fr 5 12 19 26 Sa 6 13 20 27 So 7 14 21 28	Mo 6 13 20 27 Di 7 14 21 28 Mi 1 8 15 22 29 Do 2 9 16 23 30 Fr 3 10 17 24 31 Sa 4 11 18 25 So 5 12 19 26	Mo 3 10 17 24 31 Di 4 11 18 25 Mi 5 12 19 26 Do 6 13 20 27 Fr 7 14 21 28 Sa 1 8 15 22 29 So 2 9 16 23 30	Mo 3 10 17 24 Di 4 11 18 25 Mi 5 12 19 26 Do 6 13 20 27 Fr 7 14 21 28 Sa 1 8 15 22 So 1 8 15 22	Mo 2 9 16 23 30 Di 3 10 17 24 31 Mi 4 11 18 25 Do 5 12 19 26 Fr 6 13 20 27 Sa 7 14 21 28 So 1 8 15 22 29						
1981	XX. OJM Bezirks-olympiade 7./8. 2. 81	alpha		XX. OJM DDR-Olympiade 13.-16. 4. 81		Einsendetermine alpha-Wettbewerb 5/80 11. 1. 81 6/80 8. 3. 81 1/81 1. 5. 81 2/81 12. 6. 81		XXI. OJM Schul-olympiade Sept. 1981		1981	alpha Mathematische Schüler-zeitschrift	XXI. OJM Kreisolympiade 18. 11. 1981	Wer alpha liest, kann auch beta sagen!
		alpha Mathematische Schüler-zeitschrift		alpha		Mathematische Schüler-zeitschrift		alpha					
alpha		alpha		alpha		alpha		alpha		alpha		alpha	



Knobeleyen zum Jahreswechsel

$$\begin{array}{rcl}
 1 - 9 + 8 + 1 & = & 1 \\
 1^{9+8} + 1 & = & 2 \\
 1 + 9 - 8 + 1 & = & 3 \\
 1 \cdot \sqrt{9+8-1} & = & 4 \\
 1 + \sqrt{9+8-1} & = & 5 \\
 1 \cdot \sqrt{9} + \sqrt{8+1} & = & 6 \\
 1 + \sqrt{9} + \sqrt{8+1} & = & 7 \\
 -1^9 + 8 + 1 & = & 8 \\
 1^9 + 8 \cdot 1 & = & 9 \\
 19 - 8 - 1 & = & 10
 \end{array}$$

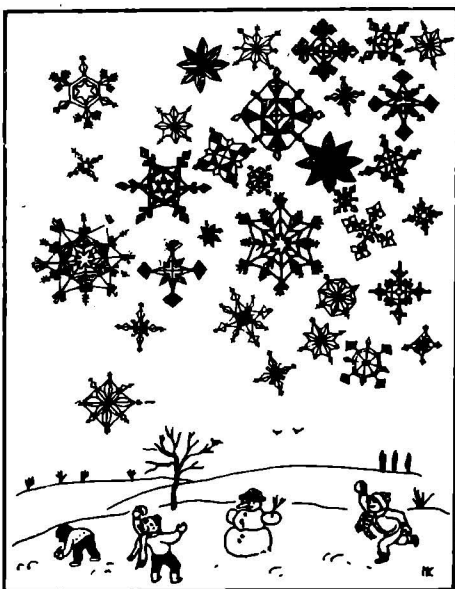
Silvester 1980

Die Uhr ist so in drei Felder einzuteilen, daß die Summe eines jeden 26 beträgt. Zu jedem Feld gehören vier Zahlen.



Winterliche Pracht

Was in der Natur nur ganz selten vorkommt, hier sind zwei Schneekristalle völlig gleich. Wenn ihr das Bild genau betrachtet, findet ihr sie heraus.



Gesellschaftsspiel

Ein Würfel und für jeden Mitspieler eine Figur aus dem Spielzeugdorf sind notwendig. Die Spieler werfen nacheinander mit dem Würfel und rücken, ausgehend vom „Start“, den Augen des Würfels entsprechend auf den nummerierten Feldern weiter. Sieger ist, wer die bunte Kugel an der Spitze als erster erreicht hat. Bis dahin sind aber einige Hindernisse zu überwinden:

Derjenige, der auf ein Feld mit dem Fisch trifft, muß aufs vorhergehende Feld mit dem Fischbild zurück, von 5 aus zurück zum Start. Auf dem Feld mit einem Herzen darf der Spieler dagegen aufs nächste Feld mit einem Herzen vorrücken, von 47 auf 56. Beim Sternbild muß der Spieler einmal, bei der Glocke zweimal mit Würfeln aussetzen. Beim Bild mit einem Apfel dagegen darf er zweimal würfeln. Viel Spaß!



Weihnachtliche Freuden

Der Weihnachtsmann spielt mit. Der Vater des Jungen hat die Szene schnell aufgezeichnet, allerdings nicht ohne Makel. Er hat nämlich 10 Fehler begangen. Findet sie!

