Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
15. Jahrgang 1981
Preis 0,50 M
Index 31059

Redaktion:
StR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 1080 Berlin, Krausenstraße 50 · Tel. 20430
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Die Abbildungen zu diesem Heft stammen aus Bänden der Mathematischen Schülerbücherei.
Idee und Gestaltung: J. Lehmann, Leipzig
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
AN (EDV) 128–ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 15. Februar 1981

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

111 Bände Mathematische Schülerbücherei

Als vor rund 19 Jahren das Politbüro der SED und der Ministerrat den *Mathematikbeschluß* faßten, wurde damit auch die Idee der *Mathematischen Schülerbücherei* (MSB) geboren. Sie sollte dazu beitragen, das Interesse an der Mathematik und die Freude an mathematischer Betätigung zu wecken und damit die mathematischen Kenntnisse der Schüler und Jugendlichen zu verbessern.
Verschiedene Verlage taten sich zusammen, um für alle Klassen- und Altersstufen entsprechende mathematische Literatur herauszubringen, Verlage, die schon eine gewisse Tradition auf diesem Gebiet hatten: Der Teubner-Verlag (BGT), der Deutsche Verlag der Wissenschaften (DVW), der Verlag Volk und Wissen (VWV), der Urania-Verlag (UV), der Fachbuchverlag (FV) und der Kinderbuchverlag (KV).
Als Autoren wurden hauptsächlich Mathematiklehrer und Wissenschaftler an Universitäten und Hochschulen gewonnen, die bereits in der Arbeit mit Schülerzirkeln Erfahrungen gesammelt hatten. So entstanden z. B. die *Übungen für Junge Mathematiker*, die bei der Vorbereitung auf die Mathematik-Olympiade eingesetzt werden, die *Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik* von M. Hasse, das Büchlein *Geometrische Konstruktionen und Beweise in der Ebene* von E. Hameister, die vier Bändchen von H. Belkner über *Determinanten, Matrizen, Metrische Räume* und *Reelle Vektorräume* und viele andere.

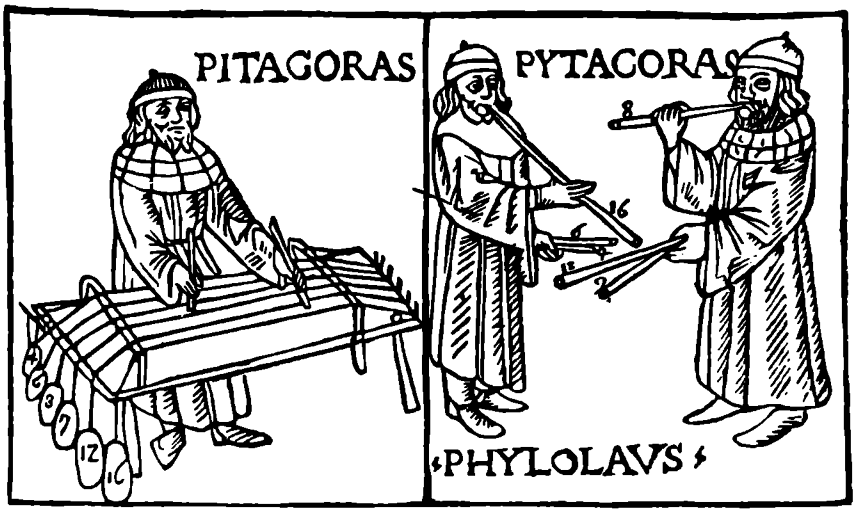
Ein großer Teil der Bändchen der *Mathematischen Schülerbücherei* wurde aus anderen Sprachen übersetzt. An erster Stelle stehen die Übersetzungen aus dem Russischen, denn in der UdSSR ist seit mehreren Jahrzehnten bei vielen Schülern die Beschäftigung mit der Mathematik über den Rahmen der Schule hinaus zu einer beliebten Freizeitbeschäftigung geworden, die mit Ausdauer und Fleiß betrieben wird und deren Erfolge sich z. B. bei den Internationalen Mathematik-Olympiaden zeigen. Zahlreiche bedeutende sowjetische Wissenschaftler unterstützen die Schüler durch entsprechende Literatur.
Aber auch Bücher aus anderen Ländern wurden übersetzt und in diese Reihe aufgenommen, z. B. *Einführung in die Graphentheorie* von J. Sedláček aus dem Tschechischen, *Mathematisches Mosaik* von E. Hodi aus dem Ungarischen und *100 neue Aufgaben* von H. Steinhaus aus dem Polnischen.
Viele von den Bänden der Reihe haben bei den Schülern großes Interesse gefunden und sind schon in mehreren Auflagen erschienen. Es ist ja auch wirklich erstaunlich, wie viele interessante Fragen und Probleme mit Hilfe der Mathematik beantwortet und gelöst werden können. Mancher, der ursprünglich glaubte, die Mathematik sei eine „trockene" Sache, hat sich schon durch interessante Lektüre vom Gegenteil überzeugen lassen.
So zeigt z. B. O. Zich im Buch *Unterhaltsame Logik*, wie man mit Hilfe mathematischer Schlüsse einen Kriminalfall lösen kann. N. J. Wilenkin erzählt in seinem Buch *Unterhaltsame Mengenlehre*, was John Tichy auf seiner 1001. Reise in eine andere Galaxis in einem Hotel mit unendlich vielen Betten erlebt hat; dabei zeigt sich, daß man der „Wunderwelt des Unendlichen" mit mathematischen Mitteln ganz schön beikommen kann! So könnte man noch viele Beispiele bringen, wie in den Büchern heiter und unterhaltsam, aber auch ernst und zielstrebig mathematische Zusammenhänge dargeboten werden. Doch das beste ist, ihr seht euch die Liste der 111 bisher erschienenen oder in nächster Zeit erscheinenden Bändchen in diesem kleinen *alpha*-Sonderheft einmal genauer an; dann wird bestimmt jeder etwas Interessantes für sich finden.

D. Ziegler, Vorsitzende der Literaturarbeitsgemeinschaft Mathematik beim Ministerium für Kultur der DDR

Seit 20 Jahren unterstützen zahlreiche Fachverlage der DDR die außerunterrichtliche Arbeit der Schüler im Fach Mathematik, insbesondere die *Olympiaden Junger Mathematiker* der DDR. Im Rahmen der *Literaturarbeitsgemeinschaft Mathematik* beim Ministerium für Kultur beraten Wissenschaftler, Lehrer und Lektoren über weitere Titel der Mathematischen Schülerbücherei (MSB). *Unser Foto:* Aussprache über Entwicklungstendenzen der MSB, geführt von W. Arnold, Abteilungsleiter Mathematik/Physik beim VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, J. Lehmann, Chefredakteur *alpha*, D. Ziegler, verantw. Lektor und J. Weiß, Lektor, beide BSB B. G. Teubner (v. l. n. r.).

Mathematik im Reich der Töne

Leseprobe aus dem Band 106 der MSB (Vorabdruck)



Den Naturwissenschaftlern der Neuzeit erscheint es befremdlich, daß die Philosophen der Antike bezüglich naturwissenschaftlicher Probleme Behauptungen aufstellten, ohne deren Wahrheitsgehalt jemals mit leicht ausführbaren Experimenten nachzuprüfen. Zum Beispiel läßt sich die Behauptung des Aristoteles (384 bis 322 v. u. Z.), daß schwere Körper schneller fallen als leichte, mit einem einfachen Gedankenexperiment widerlegen. Es ist z. B. ohne Einfluß auf die Fallzeit zweier Kilogrammgewichte, ob man diese getrennt voneinander in einen tiefen Brunnen wirft oder ob man beide Gewichte vor dem Versuch fest zusammenbindet.

Ein echter Durchbruch zur experimentellen Fundierung theoretischer Aussagen wurde erst mit Galilei (1564 bis 1642) vollzogen. Durch seine berühmten Pendel- und Fallversuche klärte er den funktionalen Zusammenhang von Pendellänge und Schwingungszeit bzw. Fallhöhe und Fallzeit auf. Auch die Wurfparabel gehört zu seinen Entdeckungen. Die Zeit der „geistigen Wiedergeburt“, des „Rinascimento“, bildete den Anstoß für eine Fülle naturwissenschaftlicher Entdeckungen, die sich wegbereitend auf das technische Zeitalter der Neuzeit auswirkten.

Eine rühmliche Ausnahme hierzu verkörperte in der Antike (um 550 v. u. Z.) die *Schule der Pythagoreer* bezüglich ihrer Aussagen in der Akustik. Die experimentellen Befunde lieferte ihnen das Monochord. Hierbei handelt es sich um ein einsaitiges Instrument, bei dem über einen quaderförmigen Resonanzkörper eine Saite gespannt ist. Die Saite ist an einem Ende fest verankert, während das andere Ende – über eine feste Rolle geführt – mit einem Gewicht belastet wird. Nun kann die mittels des Gewichtes stets unter gleicher Spannung stehende Saite angezupft und dadurch in Eigenschwingung versetzt werden. Diese Schwingung überträgt sich auf den Resonanzkörper und liefert einen gut vernehmbaren Ton.

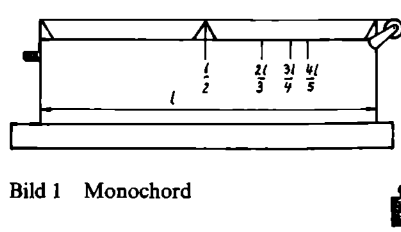


Bild 1 Monochord

Die Pythagoreer experimentierten nun in der Weise mit dem Monochord, daß sie die Länge der unter konstanter Spannung stehenden Saite durch Einschieben eines Steges variierten. Beim Halbieren der Saite ergab sich ein zum Grundton harmonischer Oberton. Diesem harmonischen Zusammenklang zweier Töne entsprach das Zahlenverhältnis 1:2. In der Musiktheorie bezeichnet man diesen Tonschritt als Oktave.

Entsprechend ihrer philosophischen Grundhaltung lag es nahe, den schwingenden Anteil auf zwei Drittel der ursprünglichen Länge zu verkürzen. Auch dieser zugehörige Ton ergab mit dem Ausgangston einen annehmbaren Zusammenklang. In der Musiktheorie wird dieser Zusammenklang als Quinte bezeichnet.

Schließlich gaben sie in ihren Experimenten drei Viertel der ursprünglichen Länge zur Schwingung frei. Der so erzeugte Zweiklang hörte sich ebenfalls erträglich an. In der Musiktheorie wird dieser Tonschritt als Quarte bezeichnet.

Ganz allgemein entspricht dem Nacheinanderausführen zweier Tonschritte das Multiplizieren der entsprechenden Verhältniszahlen. Zur Illustration diene das folgende Beispiel: Quinte + Quarte = Oktave

$$\frac{2}{3} \qquad \frac{3}{4} = \frac{1}{2}.$$

Die Tastenreihe des Klavieres läßt sich in gewissem Sinne mit dem Prinzip eines Rechenschiebers vergleichen. Fügt man an einem Rechenschieber mittels der verschiebbaren Zunge zwei Strecken mit den Skalenwerten a und b aneinander, so entspricht auf der Stabskale der Streckensumme der Skalenwert $a \cdot b$. Hingegen ergibt sich zur Charakterisierung des Tonintervalles zwischen Quarte und Quinte bezüglich des gemeinsamen Grundtones der Quotient der Längenverhältnisse, also $\frac{2}{3}:\frac{3}{4}=\frac{8}{9}$.

Quinte minus Quarte = ganzer Ton

Bei Vogelstimmen und anderen Tierlauten beschränken sich die verwendeten Tonintervalle keineswegs auf Oktave, Quinte und Quarte. Sicher gab es schon zur Zeit des Pythagoras einfache Melodien von Volksliedern und Instrumente (z. B. Hirtenflöten) mit einem größeren Tonumfang. Auf die Pythagoreer geht der Aufbau einer Tonleiter zurück, bei der die reinen Zusammenklänge von Quinte und Quarte systematisch verarbeitet werden.

Für die folgenden Untersuchungen sollen die Intervalle zweier Töne nicht durch das Längenverhältnis der schwingenden Saiten, sondern durch ihre Kehrwerte, also das Verhältnis der Schwingungszahlen, erfaßt werden. Ist l die Länge der schwingenden Saite und n deren Frequenz, so gilt $l=\frac{k}{n}$, wobei k eine dieser zugeschnittenen Größengleichung angepaßte Konstante ist.

Am Monochord ist die Länge des schwingenden Saitenabschnittes bei konstanter Saitenspannung umgekehrt proportional zur Frequenz. Auf Grund dieser physikalischen Sachverhalte kann damit festgehalten werden: Zwei Tonintervalle sind genau dann gleich, wenn ihre Schwingungszahlen im gleichen Verhältnis zueinander stehen.

Ohne uns bereits jetzt auf absolute Schwingungszahlen festzulegen, können wir für die zunächst nur wichtigen Verhältniszahlen die Bezeichnungen der uns geläufigen c-Dur-

Tonleiter übernehmen, also c - d - e - f - g - a - h - c'. Bisher haben wir am Monochord über folgende Verhältniszahlen bezüglich des Grundtones c verfügt:

c . .	f	g . .	c'	Tonbezeichnung
1	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	2	Verhältniszahl
Prime	Quarte	Quinte	Oktave	Intervall

Es sind also noch vier Leerstellen auszufüllen. Die pythagoreische Tonleiter setzt sich aus fünf großen und zwei kleinen Tonschritten zusammen. Der große Tonschritt wird aus Quarte und Quinte wie folgt erklärt: Setzt man $q_1=\frac{3}{2}$ und $q_2=\frac{4}{3}$, so gilt für den großen Tonschritt $q=\frac{q_1}{q_2}=\frac{9}{8}$. Die diesem Verhältnis entsprechende Schrittweite liegt bereits von f nach g vor. Sie wird ferner beim Fortschreiten von c nach d, von d nach e sowie von g nach a und a nach h übernommen. Nun stehen noch die Quotienten offen, welche den Schritt von e nach f und h nach c' beschreiben. Für beide Intervalle ergibt sich zwangsläufig aus den bisherigen Festlegungen das Zahlenverhältnis $\frac{256}{243}$.

Dieser Bruch kann nicht gekürzt werden. Er fällt wegen der Dreistelligkeit von Zähler und Nenner etwas aus dem Rahmen. Auch in akustischer Hinsicht liefern die Töne keinen guten Zusammenklang. Durch eine Zusammenstellung der Zahlenverhältnisse bezogen auf den Grundton bzw. den darunter liegenden Nachbarton wollen wir uns eine Übersicht von dem Pythagoreischen Tonsystem verschaffen:

Tonbezeichnung							
c	d	e	f	g	a	h	c'
Schwingungszahl bezogen auf c							
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2
bezogen auf Nachbarton							
	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$

In einer ganzzahligen fortlaufenden Proportion stellt sich dieses Stimmungsprinzip wie folgt dar:

384 : 432 : 486 : 512 : 576 : 648 : 729 : 768

Auf kleinere Verhältniszahlen läßt sich diese Tonleiter nicht reduzieren.

Die gleiche Tonleiter kann man sich auch über den sogenannten „Quintenzirkel" erzeugt denken. Dabei geht man in folgender Weise vor: Man zeichnet einen Kreis und teilt diesen mit dem Winkelmesser in sieben gleiche Teile. In den Teilungspunkten trägt man im Uhrzeigersinn die Tonbezeichnungen in das Bild ein, wobei wir mit c vom obersten Teilungspunkt ausgehen wollen. Da sich dieser mit c' decken soll, werden wir ihn besonders stark markieren. Nun machen wir, von c ausgehend, im Uhrzeigersinn Quintensprünge. Durch Überspringen von je drei Tei-

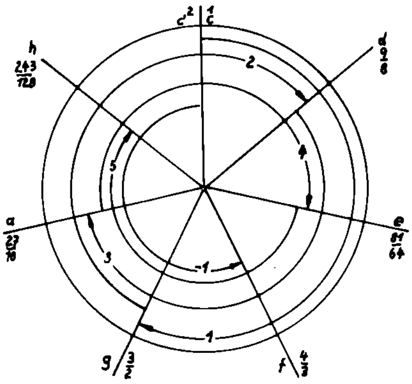


Bild 2 Quintenzirkel

lungspunkten des Kreises gelangt man der Reihe nach auf g, d, a, e und h. Bei jedem Sprung multiplizieren wir die zuletzt erreichte Zahl mit $\frac{3}{2}$. Wird bei einem Quintensprung die zu c gehörige Markierung überquert, so lautet der Faktor $\frac{3}{4}$ statt $\frac{3}{2}$. Man sieht, daß auf diese Weise gleichfalls die Verhältniszahlen der pythagoreischen Tonleiter erzeugbar sind. Die noch fehlende Verhältniszahl für f ergibt sich durch eine Quintendrehung im Gegenzeigersinn. Wir müssen deshalb die zu c gehörige Verhältniszahl mit dem Kehrwert von $\frac{3}{2}$ multiplizieren und – da dieser Sprung als Überschreitung der Markierung zu werten ist – noch mit dem Faktor zwei versehen. Ferner ist zu bemerken, daß sich der Quintenzirkel nicht exakt schließt.

Nach dem beschriebenen Verfahren lassen sich zwar die zu sieben Tönen der Tonleiter gehörigen relativen Schwingungszahlen exakt auffinden. Die zu c' gehörige Zahl 2 kann jedoch nach dem hier beschriebenen Verfahren nicht konstruiert werden. Teilt man nun die fünf großen Intervalle der pythagoreischen Tonleiter in je zwei Teilintervalle, so sind beim Durchlaufen der Oktave von c nach c' insgesamt 12 Tonschritte auszuführen. An Tasteninstrumenten erkennt man deutlich gemäß der Klaviatur die Einschaltung der fünf Zwischentöne. Führen wir nun entsprechend der hier vorgelegten Tonleiter zwölf Quintendrehungen im Uhrzeigersinn mit unserem Zirkel durch und beachten, daß beim Überqueren der c-Marke der Faktor $\frac{3}{4}$ und sonst $\frac{3}{2}$ zu setzen ist, so ergibt sich als Endwert

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{7}=\frac{531441}{524288}=1{,}0137.$$

Hätte sich der Quintenzirkel nach 12 Sprüngen (7 Umläufe) exakt geschlossen, wären wir auf die Zahl eins gekommen. Das diese Abweichung charakterisierende Zahlenverhältnis (531441 : 524288) bezeichnet man in der Musiktheorie als „pythagoreisches Komma".

Durch diesen Quotienten wird also das Intervall zwischen der zwölften Quinte und der siebenten Oktave bezüglich eines gemeinsamen Grundtones zahlenmäßig erfaßt. Das hier erläuterte Stimmungsprinzip, nach welchem alle Töne aus einer Quintenreihe abgeleitet werden, bezeichnet man in der Musiktheorie als pythagoreisches Stimmungsprinzip. Es ist keineswegs nur von theoretischer oder musikgeschichtlicher Bedeutung. Vor allem bei solistischen Darbietungen an Streichinstrumenten neigen die Künstler zur Verwendung dieser pythagoreischen Tonstufen. Sie fördern vor allem den melodiösen Klang der Musik. Auch der Klavierstimmer arbeitet, von c ausgehend, mit Quintensprüngen und Oktaven, wobei dann gewisse Feinkorrekturen in Anpassung an die heute gebräuchliche temperierte Stimmung vorzunehmen sind. Für Oktave und Quinte hat das geschulte Ohr ein sicheres Empfinden über den gesamten Hörbereich. Die numerische Zusammenstellung der relativen Schwingungszahlen vermittelt uns schon eine Vorstellung von den Schwierigkeiten, die beim Bau von Instrumenten mit fester Tonlage hinvon Instrumenten mit fester Tonlage hinsichtlich ihres Zusammenklanges in einem Orchester zu bewältigen sind.

Einige Jahrhunderte später (um 30 v. u. Z.) kam man auf den Gedanken, am Monochord vier Fünftel der vorgegebenen Saitenlänge zur Schwingung freizugeben. So ergab sich als weiteres Intervall die große Terz. Die Schwingungszahlen der beiden Töne stehen im Verhältnis 4 : 5. Aus Quinte, Quarte und großer Terz baute man eine Tonleiter auf, deren relative Schwingungszahlen durch folgende fortlaufende Proportion ganzzahlig erfaßbar sind:

24 : 27 : 30 : 32 : 36 : 40 : 45 : 48.

Diese Tonfolge, auch diatonische Tonleiter genannt, enthält pro Oktave fünf Quinten, fünf Quarten, drei große und drei kleine Terzen. Für polyphone Musik ist die diatonische Stimmung der pythagoreischen Stimmung wegen der größeren Zahl harmonischer Zusammenklänge überlegen. Zum Beispiel stehen die Frequenzen der Töne des Grundakkords im Verhältnis 4 : 5 : 6. Für die musikalische Praxis hat jedoch auch dieses Stimmungsprinzip einen grundsätzlichen Nachteil. Da nämlich Instrumente mit fester Tonlage (Klavier, Orgel u. a. m.) modulationsfähig bezüglich aller möglichen Tonhöhen sein müssen, sind an der Reinheit der Stimmung, wie sie die diatonische Tonleiter bietet, gewisse Abstriche vorzunehmen. In Erfüllung dieser Forderung entstand in neuerer Zeit die temperierte Stimmung, nach der heute in den Konzertsälen aller fünf Kontinente musiziert wird. Bei dieser Tonleiter wird nur noch die Oktave rein geboten, während alle anderen Intervalle mehr oder weniger verfälscht sind.

E. Schröder

Analogiebetrachtungen

Leseprobe aus dem Band 103 der MSB (Vorabdruck)

3.1. Was wir unter einer Analogie verstehen wollen

Analogie – das ist ein häufiges, in unterschiedlichen Zusammenhängen gebrauchtes Fremdwort. In der deutschen Sprache könnte man dafür etwa „Ähnlichkeit" setzen.

Mit „Ähnlichkeit" ist aber nicht der geometrische Begriff gemeint, sondern eine Übereinstimmung von zwei verschiedenen Aussagen oder Strukturen in gewissen wesentlichen Teilen. Was dabei die „gewissen wesentlichen Teile" sind, hängt allerdings stark vom Betrachter ab. Wir haben bereits in den vorangegangenen Kapiteln auf „Ähnlichkeiten" zwischen Sachverhalten der ebenen und räumlichen Geometrie hingewiesen, insbesondere kann man sich von Begriffserklärungen der ebenen Geometrie anregen lassen, „ähnliche" für den Raum einzuführen, wie das in den Abschnitten 1.3, 1.4, 1.5 und 2.1 geschehen ist. Außer diesen Möglichkeiten gilt es, eine Fülle anderer „Ähnlichkeiten" zu finden und vor allem auch nutzbar zu machen. Daß dabei der Begriff „analog" unscharf ist, d. h. gar nicht streng festliegt, welche Sachverhalte „analog" sind, ist kein Nachteil, sondern macht den eigentlichen Reiz der Anwendung aus.

Wir beginnen mit einfachen Beispielen. Es gibt Sätze der ebenen und räumlichen Geometrie, die in ihrer Struktur übereinstimmen und durch Ersetzung gewisser Wörter auseinander hervorgehen.

(3.1) In der Ebene gilt: *Wenn zwei Geraden nicht parallel sind, dann haben sie genau einen Punkt gemeinsam.*

(3.1′) Im Raum gilt: *Wenn zwei Ebenen nicht parallel sind, dann haben sie genau eine Gerade gemeinsam.* (Vgl. (1.5))

Ersetzt man in (3.1) „Ebene" durch „Raum" und „Gerade" durch „Ebene" und „Punkt" durch „Gerade", so erhält man (3.1′).

Die Aussagen (3.1) und (3.1′) bezeichnen wir als zueinander analog, (Ebene, Raum), (Gerade, Ebene) und (Punkt, Gerade) als Paare analoger Begriffe.

Wir betrachten ein weiteres Beispiel:

(3.2) *In der Ebene existieren 3 Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.*

Nach obigem Prinzip würde sich folgende richtige Aussage ergeben:

Im Raum existieren 3 Geraden, die nicht in einer Ebene liegen.

Es wäre aber auch sinnvoll, eine zu (3.2) analoge Aussage wie folgt zu bilden:

(3.2′) *Im Raum existieren 4 Punkte, die nicht in einer Ebene liegen.*

Aus der Analogie von (3.2) und (3.2′) würde sich (Dreieck, Tetraeder) als weiteres Paar analoger Begriffe anbieten.

Wählen wir noch eine Definition als Beispiel:

(3.3) *Der Kreis ist die Menge aller Punkte einer Ebene, die von einem Punkt (dieser Ebene) den gleichen Abstand haben.*

Ersetzt man in (3.3) „Ebene" durch „Raum" und „Punkt" durch „Gerade" (und natürlich „Kreis" durch ein neues Wort), so entsteht zwar wiederum eine Definition, von deren Nützlichkeit wir aber erst noch zu überzeugen wären.

Ersetzt man in (3.3) dagegen nur „Ebene" durch „Raum" und „Kreis" durch „Kugel", so entsteht gerade eine uns bereits bekannte Definition; daher erscheint es uns sinnvoll, (Kreis, Kugel) als ein weiteres Paar analoger Begriffe anzusehen.

Damit ist auch an Beispielen gezeigt, daß der Analogiebegriff kein strenger Begriff ist, daß es zum Beispiel keinen Formalismus gibt, der es ermöglicht, zu einer gegebenen Formulierung *die* analoge zu konstruieren.

Trotzdem kann die Analogiemethode von großem methodischem Wert sein. Wir können sie etwa benutzen, um zu einer Aufgabe der ebenen Geometrie eine analoge der räumlichen Geometrie aufzufinden, bzw. umgekehrt uns beim Lösen einer schwierigen räumlichen Aufgabe die Problemstellung zunächst am analogen (einfacheren!) ebenen Problem deutlich zu machen, d. h. Lösungsmöglichkeiten aufzudecken.

Wir betrachten ein erstes Beispiel:

Aufgabe (3.4) *In einer Ebene sind drei Punkte A, B, C gegeben, die nicht auf einer Geraden liegen. Wie viele verschiedene Geraden (in dieser Ebene) gibt es, so daß die drei Punkte A, B, C jeweils gleichen Abstand von einer solchen Geraden haben?*

Da es keinen Formalismus zur Erzeugung eines analogen räumlichen Sachverhaltes gibt, müssen wir selbst entscheiden, welche der formal möglichen analogen Formulierungen wir auswählen. Unter Beachtung von (3.2) und (3.2′) wählen wir:

Aufgabe (3.4′) *Im Raum sind vier Punkte A, B, C, D gegeben, die nicht in einer Ebene liegen. Wie viele verschiedene Ebenen gibt es, so daß die vier Punkte A, B, C, D jeweils gleichen Abstand von einer solchen Ebene haben?*

Es ist nun zu erwarten, daß sich die Analogie nicht nur auf die Aufgabenstellung, sondern auch auf die Lösung bezieht; sagen wir besser, daß es Lösungen gibt, die als zueinander analog zu betrachten sind.

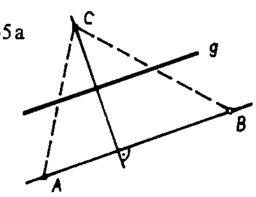
Wir lösen jetzt die Aufgabe (3.4).

Wir gehen zunächst davon aus, daß es eine Gerade g mit der gewünschten Eigenschaft gibt. Auf dieser kann keiner der Punkte A, B, C liegen, sonst müßten sie entgegen der Voraussetzung alle auf einer Geraden (nämlich auf g) liegen. Wir können nun folgende vollständige Fallunterscheidung vornehmen:

1. Fall: A, B, C liegen in ein und derselben Halbebene bez. g. Dann müßten A, B und C auf einer zu g parallelen Geraden liegen; dies widerspricht der Voraussetzung.

2. Fall: Genau einer der drei Punkte wird durch g von den übrigen getrennt; o. B. d. A. treffe das für C zu. Auf Grund der Voraussetzung in (3.4) muß nun g parallel zu der Geraden g_{AB} sein und das Lot von C auf g_{AB} halbieren (Bild 35a). Damit ist g eindeutig bestimmt.

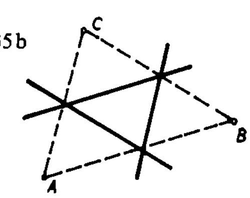
Bild 35a



Umgekehrt besitzt eine derartige Gerade offensichtlich die in (3.4) genannten Eigenschaften.

Da jeder der drei Punkte auf diese Weise durch eine Gerade von den beiden anderen separiert werden kann, gibt es genau drei Geraden mit der gewünschten Eigenschaft (Bild 35b).

Bild 35b



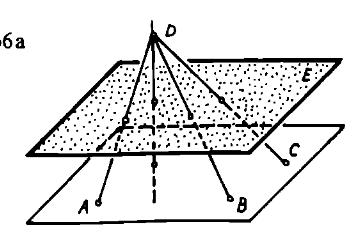
Wir lösen die Aufgabe (3.4′), indem wir die von uns zur Formulierung der Aufgabe verwendete Analogie berücksichtigen.

Eine Ebene ε mit den gewünschten Eigenschaften kann auch hier durch keinen der vorgegebenen Punkte gehen.

1. Fall: A, B, C, D liegen in ein und demselben Halbraum bez. ε. Dann liegen diese Punkte auf einer zu ε parallelen Ebene; dies widerspricht jedoch der Voraussetzung von (3.4′).

2. Fall: Genau einer der vier Punkte wird durch ε von den übrigen getrennt; o. B. d. A. treffe das für D zu. Dann muß parallel zu der Ebene ε_{ABC} sein und das Lot von D auf ε_{ABC} halbieren (siehe Bild 36a). Eine solche Ebene ε ist damit eindeutig bestimmt. Da jeder der

Bild 36a



vier Punkte separiert werden kann, gibt es bez. des 2. Falles genau vier Ebenen der verlangten Art.

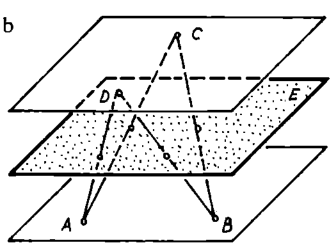
Man erkennt, daß wir bis zu dieser Stelle die Lösung von der zu (3.4) mit den entsprechenden Ersetzungen abgeschrieben haben. In vielen Büchern sparen sich die Autoren berechtigt solche Ausführungen und würden etwa schreiben, daß die Lösung analog zu der des ebenen Problems erfolgt.

Einen wesentlichen Unterschied zur Aufgabe (3.4) gibt es allerdings, unsere Fallunterscheidung ist noch nicht vollständig!

3. Fall: In jedem Halbraum bez. ε liegen genau zwei der vier Punkte; o.B.d.A. mögen die Punkte A und B einem gemeinsamen angehören.

Die Geraden g_{AB} und g_{CD} sind zueinander windschief, da sonst die vier Punkte in einer Ebene liegen würden (vgl. 1.1). Zu zwei windschiefen Geraden existiert nach Satz (1.15) genau ein Paar zueinander paralleler Ebenen durch g_{AB} und g_{CD}. Zu diesen beiden Ebenen existiert genau eine parallele Ebene ε, die von beiden Ebenen (und damit von den vier Punkten) gleichen Abstand hat (siehe Bild 36 b).

Bild 36 b



Da es genau 3 Möglichkeiten gibt, die vier Punkte zu je zwei auf zwei Halbräume aufzuteilen, haben wir im 3. Fall genau drei Ebenen der gesuchten Art. (Diese sind offensichtlich auch voneinander verschieden.)

Die Antwort auf (3.4') lautet also: Es gibt sieben verschiedene Ebenen der gesuchten Art.

3.2. Analogiebetrachtungen helfen uns Aufgaben lösen

Wie schon erwähnt – und wohl mit Aufgabe (3.4) und (3.4') deutlich geworden ist –, kann man die Analogiemethode mitunter auch benutzen, um ein räumliches Problem zu lösen. Man formuliert ein analoges ebenes Problem, löst zunächst dieses, weil es vertrauter ist, und versucht danach, die Lösungsschritte auf das ursprüngliche Problem zu übertragen. Wir betrachten die folgende Aufgabe als Beispiel:

Aufgabe (3.5) *Im Raum sind fünf Punkte gegeben, die weder in einer Ebene noch auf einer Kugel liegen. Wie viele verschiedene Ebenen oder Kugeln gibt es, so daß die fünf Punkte jeweils gleichen Abstand von einer solchen Ebene oder Kugel haben?*

Offensichtlich ist diese Aufgabe als Fortsetzung von Aufgabe (3.4') gedacht. Eine analoge Aufgabe in der Ebene zu formulieren, fällt uns daher leicht:

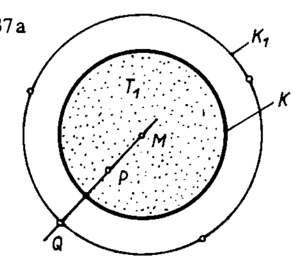
Aufgabe (3.5') *In der Ebene sind vier Punkte gegeben, die weder auf einer Geraden noch auf einem Kreis liegen. Wie viele verschiedene Geraden oder Kreise gibt es, so daß die vier Punkte jeweils gleichen Abstand von einer solchen Geraden oder einem solchen Kreis haben?*

Zur Lösung von (3.5') bemerken wir zunächst, daß eine Gerade g oder ein Kreis K der gewünschten Art die Ebene (ausschließlich der Geraden- bzw. Kreispunkte) vermöge der Halbebenen bzw. des Inneren und Äußeren des Kreises in zwei Teile T_1 und T_2 zerlegt.

1. Fall: Alle Punkte liegen in einer der Teilebenen. Dann müssen sie, da sie von der Geraden g oder dem Kreis K gleichen Abstand haben, auf einer (zu g parallelen) Geraden oder einem (zu K konzentrischen) Kreis liegen, ganz im Widerspruch zur Voraussetzung.

2. Fall: Genau einer der Punkte (etwa mit P bezeichnet) liege in T_1; die anderen drei Punkte liegen dann in T_2. Diese drei Punkte liegen sicher auf einer Geraden oder auf einem Kreis (dem Umkreis des Dreiecks; sein Mittelpunkt sei M). Bei der ersten Lage existiert genau eine Gerade der gesuchten Art (siehe Lösung zu (3.4)). Liegen die drei Punkte auf einem Kreis K_1, so existiert genau ein Kreis K der gesuchten Art. Dieser Kreis K muß zu K_1 konzentrisch sein und $\overline{PQ}$ halbieren, wobei Q der Schnittpunkt von g_{MP} mit K_1 ist (Bild 37 a). In diesem Fall gibt es also genau vier verschiedene Geraden oder Kreise. (Vgl. dazu die Lösung von (3.4)!)

Bild 37 a



3. Fall: Genau zwei der Punkte (etwa P_1, Q_1) liegen in T_1; die beiden anderen Punkte (P_2, Q_2) dann in T_2. Wir betrachten die Verbindungsgeraden g_1, g_2 von P_1, Q_1 und P_2, Q_2. Gilt $g_1 \| g_2$, so existiert genau eine Gerade, die zu g_1 und g_2 parallel ist und von g_1 und g_2 (und damit von den vier Punkten) gleichen Abstand hat. (Vgl. die Lösung zu (3.4)!) Sind aber g_1 und g_2 nicht parallel, so existieren genau zwei konzentrische Kreise K_1 und K_2 mit $P_1, Q_1 \in K_1$ und $P_2, Q_2 \in K_2$. (Siehe Bild 37 b; den Existenznachweis erbringt man leicht konstruktiv.) Zu diesen zwei konzentrischen Kreisen gibt es genau einen dritten, der von K_1 und K_2 und damit von den vier Punkten gleichen Abstand hat. Wir erhalten also stets entweder genau eine Gerade oder genau einen Kreis der gewünschten Art. Da es genau 3 Möglichkeiten gibt, die vier Punkte zu je zwei auf zwei Teilebenen zu verteilen, existieren im 3. Fall genau drei Geraden oder Kreise der gesuchten Art. (Vgl. die Lösung zu (3.4)!)

Bild 37 b

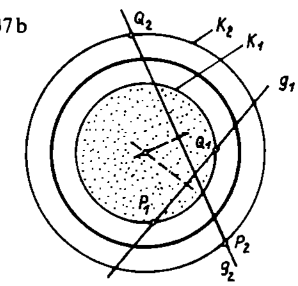
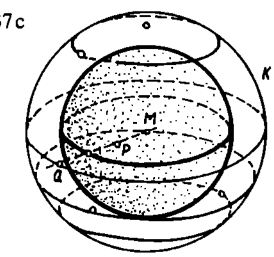


Bild 37 c



Als Ergebnis der Aufgabe (3.5') erhalten wir demnach: Es gibt genau sieben verschiedene Geraden oder Kreise der gesuchten Art.

Interessant ist, daß man allerdings nicht von vornherein angeben kann, wie viele davon Geraden und wie viele davon Kreise sind. Das hängt von der speziellen Lage der Punkte ab! (Der Leser betrachte dazu einmal verschiedene Fälle!)

Mit dieser Lösung haben wir praktisch auch die Lösung von (3.5). Der Leser kann sie „völlig analog" zu (3.5') selbst durchführen. (Man betrachte dazu auch das zu 37 a) analoge Bild 37 c.) Im Unterschied zu den Aufgaben (3.4), (3.4') entsteht für das räumliche Problem sogar kein weiterer Fall!

Der Autor des Buches

Die Mathematik und ihre Geschichte im Spiegel der Philatelie

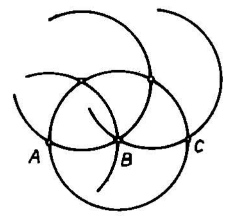
hat das Wort

Es war nicht schwer, ein Buch über Briefmarken zu schreiben, deren Motive oder Ausgabenanlässe in enger Beziehung zur Mathematik stehen, denn es gibt sehr viele solcher Marken, und jedes Jahr erscheinen in zunehmendem Umfang neue. Wer sich für Briefmarken interessiert und gleichzeitig ein Herz für die Mathematik hat, kann mathematische Überlegungen leicht auch an solche Marken anknüpfen, die bei oberflächlicher Betrachtung keinen Bezug zur Mathematik zu haben scheinen. Der polnische Mathematiker *Hugo Steinhaus* behauptete im Vorwort seines mathematischen „Bilderbuches" *Kaleidoskop der Mathematik* (deutsche Übersetzung: Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959): *Mathematik ist universell – kein Ding ist ihr fremd.*

Sehen wir uns also unter diesem Aspekt einmal die uns seit Jahren vertraute Dauerserie *Sozialistischer Aufbau in der DDR* an!
Beim Blick auf die 60-Pf-Marke kann man an den Staatlichen Mathematisch-Physikalischen Salon denken, der im Dresdner Zwinger seine Heimstatt hat. Der Beginn dieser einzigartigen Sammlung mathematischer, geodätisch-geographischer, physikalischer, astronomischer und technischer Instrumente und Uhren, die heute zu den bedeutendsten Spezialmuseen ihrer Art in der Welt zählt, reicht bis zum Jahre 1560 zurück. Stücke aus dem Mathematisch-Physikalischen Salon, die häufig neben dem wissenschaftshistorischen einen bedeutenden kunsthistorischen und Schauwert haben, wurden bereits mehrfach als Motiv für Briefmarken der DDR gewählt.

Der Zirkel aus dem Staatswappen der DDR (2-M-Marke), hier als Symbol der Rolle der Wissenschaft und Technik beim sozialistischen Aufbau, gehört zu den ältesten und wichtigsten geometrischen Konstruktionsinstrumenten. Über die Frage, welche Konstruktionsaufgaben mit Zirkel und Lineal exakt lösbar sind, gibt es eine reichhaltige und komplizierte mathematische Theorie. Unter anderem zeigte der italienische Mathematiker *Lorenzo Mascheroni* (1750 bis 1800), daß man jeden Punkt, der aus einer gegebenen Figur mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, auch mit dem Zirkel allein (d. h. ohne Benutzung des Lineals) konstruieren kann. Zum Beispiel läßt sich die Strecke AB über B hinaus wie folgt mit dem Zirkel allein verdoppeln (C ist der gesuchte Punkt) (Bild 1):

Bild 1



Aufgabe 1: Versucht einmal, die Strecke AB mit dem Zirkel allein zu halbieren!

Das Alte Rathaus in Leipzig (70-Pf-Marke), 1556 von dem bedeutenden Renaissance-Baumeister *Hieronymus Lotter* (1497? bis 1580) erbaut, ist gemäß den damals geltenden kunsttheoretischen Regeln durch seinen Turm nach dem „goldenen Schnitt" geteilt, d. h., die Gesamtlänge l verhält sich zum längeren Teilabschnitt x wie dieser zum kürzeren Abschnitt $l-x$:

$$\frac{l}{x}=\frac{x}{l-x}.$$

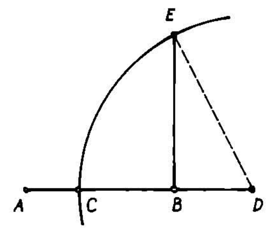
Man glaubte seit der Antike, eine solche Teilung sei besonders harmonisch, dem Auge wohlgefällig. Bei gegebener Länge l ist x die positive Lösung der quadratischen Gleichung $x^2+lx-l^2=0$, d. h.

$$x=\frac{l}{2}(\sqrt{5}-1).$$

Der zu x gehörige Teilpunkt der Strecke AB mit $\overline{AB}=l$ läßt sich mit Zirkel und Lineal leicht konstruieren (Bild 2).

Man verlängere AB über B hinaus um die Hälfte bis D, errichte in B die Senkrechte auf AB und trage auf ihr $\overline{AB}$ ab, so daß $AB \cong BE$ wird. Durch Zirkelschlag um D mit dem Radius DE läßt sich nun $\overline{DE}$ leicht von D aus in Richtung A abtragen. Der erhaltene Punkt C ist der gesuchte Teilpunkt, da DE nach dem Satz von Pythagoras die Länge $\frac{l}{2}\sqrt{5}$ hat, demnach wegen $\overline{DB}=\frac{l}{2}$ die Strecke BC die gewünschte Länge x hat.

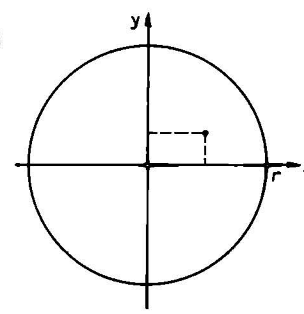
Bild 2



Aufgabe 2: Versucht den Teilpunkt C mit dem Zirkel allein zu konstruieren!

Die interessant gestalteten Dächer des Pavillons auf der Berliner Fischerinsel (15-Pf-Marke) und des Teepotts in Warnemünde (80-Pf-Marke) lassen sich (wie jedes Dach) mathematisch durch eine Funktion f von zwei Veränderlichen x, y beschreiben. Denken wir uns in die Grundrißebene des jeweiligen Gebäudes ein Koordinatensystem gelegt, so läßt sich jeder Punkt des Grundrisses durch ein Paar (x, y) reeller Zahlen beschreiben. Ist der Grundriß z. B. kreisförmig mit dem Radius r, so gehören bei geeigneter Lage des Koordinatensystems genau die Punkte zum Grundriß, für die $x^2+y^2 \leqq r^2$ gilt (Bild 3).

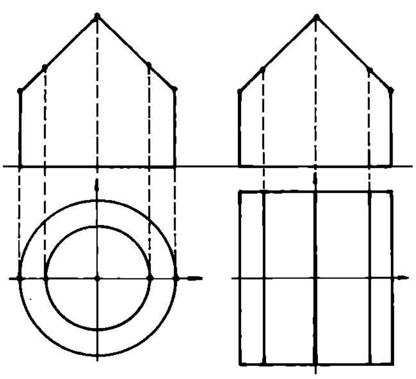
Bild 3



Jedem Paar (x, y), für das der zugehörige Punkt zum Grundriß gehört, wird durch das vorhandene oder gedachte Dach der Wert $z=f(x, y)$ der Höhe des Gebäudes an der Stelle (x, y) über der Grundrißebene zugeordnet. Umgekehrt beschreibt jede Funktion f, die für alle Paare (x, y) von Koordinaten definiert ist, deren zugehörige Punkte einem bestimmten Grundriß in der x-y-Ebene angehören, ein „Dach", falls noch die Bedingung $f(x, y) \geqq 0$ erfüllt ist. (Natürlich ist nicht jede durch eine solche Funktion erfaßte Fläche technisch und ästhetisch als Dachform geeignet!) Eine gute Vorstellung von einer solchen Fläche erhält man, wenn man (analog wie auf geographischen Karten) Punkte mit gleichem Funktionswert durch eine Kurve (eine Höhen- oder Niveaulinie) verbindet.

Für einen runden Turm mit kegelförmigem Dach bilden die Höhenlinien eine Schar konzentrischer Kreise, für ein Bauernhaus mit Satteldach bilden sie eine Schar paralleler Strecken (Bild 4):

Bild 4



Die Funktion f, die das Dach beschreibt, ist im Falle des Turms für (x, y) mit $x^2+y^2 \leqq r^2$ durch $f(x, y)=h+c\cdot\sqrt{x^2+y^2}$ und im Falle des Bauernhauses für (x, y) mit $-a \leqq x \leqq a$ und $-b \leqq y \leqq b$ durch $f(x, y)=h+c\cdot|x|$ definiert. Dabei ist h die Höhe der Turmspitze bzw. des Firstes, c der (negative) Anstieg des Daches; $2a$, $2b$ sind die Seitenlängen des rechteckigen Hausgrundrisses. Nun versucht einmal, andere Dachformen durch eine Funktion von zwei Veränderlichen zu beschreiben! Wer ganz mutig ist, wagt sich vielleicht an das Dach des Teepotts oder gar an das Dach des Pavillons auf der Fischerinsel. (Dabei soll es zunächst nicht auf Einzelheiten ankommen, sondern auf die Erfassung wesentlicher Merkmale der Dachform.) Aber auch schon das Zeichnen des ungefähren Verlaufs der Niveaulinien dieser Dächer ist eine lohnenswerte Aufgabe, die das räumliche Vorstellungsvermögen schult.

Mit diesen Betrachtungen sind die mathematischen Möglichkeiten unserer Dauerserie längst nicht ausgeschöpft. Zählt die Zahl der Stockwerke und Fenster der Hochhäuser, und schätzt ab, wie viele Bewohner dieser Häuser uns wohl aus unseren Briefmarken entgegenblicken könnten! Auch an die Weltzeituhr auf dem Berliner Alexanderplatz (25-Pf-Marke) lassen sich sicher interessante Aufgaben knüpfen. Wir erwarten eure Vorschläge und Anregungen.

P. Schreiber

Leseprobe aus:

Die Mathematik und ihre Geschichte im Spiegel der Philatelie

Das 20. Jahrhundert

Seit Beginn unseres Jahrhunderts hat das mathematische Wissen ebenso sprunghaft zugenommen wie die Vielfalt und das Ausmaß der Anwendungen. Wir vermeiden hier absichtlich statistische Angaben über die Zahl der Veröffentlichungen oder die Zahl der in Forschung und Lehre tätigen Mathematiker, da solche quantitativen Aussagen, so eindrucksvoll sie sein mögen, kein Bild von dem in der Tat vollzogenen qualitativen Sprung gegenüber früheren Jahrhunderten vermitteln können. Zwar gilt auch für die Mathematik das allgemeine Gesetz, daß die Leistung des einzelnen Wissenschaftlers mehr und mehr im Strom des allgemeinen Fortschritts aufgeht, aber noch ist die Mathematik nicht in das von den meisten Natur- und Ingenieurwissenschaften erreichte Stadium getreten, wo der für weitere Fortschritte nötige finanzielle, experimentelle und personelle Aufwand herausragende Einzelleistungen mehr und mehr vermindert. Andererseits war und ist das Ende des 19. und das 20. Jh. wie keine vorhergehende Epoche reif für grundlegende mathematische Erkenntnisse. So weist die Mathematik dieser Zeit eine beachtliche Zahl von Persönlichkeiten auf, die man eines Tages aus größerem historischem Abstand vermutlich mit Copernicus, Galilei oder Newton gleichsetzen wird: Georg Cantor, David Hilbert, Emmy Noether, Kurt Gödel, John v. Neumann, um nur einige Beispiele zu nennen. Aber noch sind diese Namen im allgemeinen nur Mathematikern bekannt und ihre Leistungen nur solchen faßbar. (Man versuche einmal abzuschätzen, für wieviel Prozent der Weltbevölkerung im 16. Jh. der Name Copernicus etwas bedeutet haben mag!)

Es ist also wahrscheinlich objektiv zu früh für die auf eine breite Öffentlichkeit zugeschnittene philatelistische Würdigung der großen Mathematiker der letzten Jahrzehnte. Sogar die hinsichtlich Wertung und Propagierung der Wissenschaft führende SU hat, wie wir sehen werden, bisher die Leistungen ihrer Mathematiker nur in relativ bescheidenem Umfang auf Briefmarken gewürdigt. Demgegenüber haben verschiedene Staaten Marken zum Andenken an Mathematiker von nationaler Bedeutung herausgegeben, deren Lebens- und Schaffenszeit in das 20. Jh. hineinreicht, die aber sogar in der internationalen Fachwelt kaum bekannt sind. Der Leser wird derartige Ausgaben, die wir aus Platzmangel im Text nicht behandeln können, in der Markenzusammenstellung am Ende des Buches finden.

Annotation siehe Seite 7 des MSB-Sonderheftes.

Eine Aufgabe von Dozent Dr. P. Schreiber

Sektion Mathematik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

a) Ein Dreieck soll aus den Seitenlängen a, b und der Differenz $\delta=\alpha-\beta$ der beiden nichteingeschlossenen Winkel konstruiert werden. Man untersuche, unter welchen Bedingungen (an a, b, δ) die Aufgabe keine bzw. genau eine bzw. unendlich viele Lösungen hat, und gebe für den Fall eindeutiger Lösbarkeit ein Konstruktionsverfahren für das gesuchte Dreieck an.

b) Es sei vorausgesetzt, daß es nicht möglich ist, mit Zirkel und Lineal zu jedem gegebenen Winkel ε einen Winkel der Größe $\frac{\varepsilon}{3}$ zu konstruieren. Unter dieser Voraussetzung zeige man, daß die Aufgabe, ein Dreieck aus a, b und $\delta=\gamma-\alpha$ zu konstruieren, ebenfalls nicht allgemein mit Zirkel und Lineal lösbar ist.

c) Man ermittle und löse möglichst viele weitere sinnvolle und wesentlich neue Aufgaben, Dreiecke aus drei Vorgaben zu konstruieren, wenn zu den gegebenen Größen außer Seiten und Winkeln auch Summen und/oder Differenzen von Seiten und/oder Winkeln gehören können.

Hinweise:

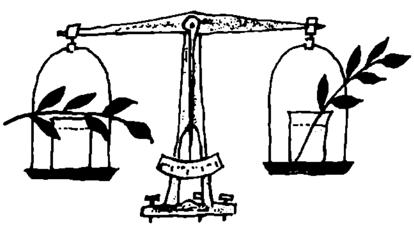
1. Vorgabe von z.B. $\alpha+\beta$ ergibt keine „wesentlich neue" Aufgabe, da sie gleichbedeutend mit der Vorgabe γ ist.
2. Ist z.B. $a+b$ und a oder $a+b$ und $a-b$ gegeben, so lassen sich daraus ohne weiteres a, b einzeln bestimmen. Analoges gilt für Winkel. Diese und ähnliche Fälle ergeben also ebenfalls keine „wesentlich neuen" Aufgaben.

P. Schreiber

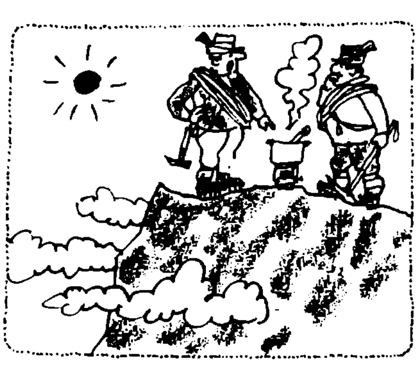
gut gedacht ist halb gelöst

Eine kleine Auswahl von Denksportaufgaben aus dem gleichnamigen Unterhaltungsbuch, MSB Band 53

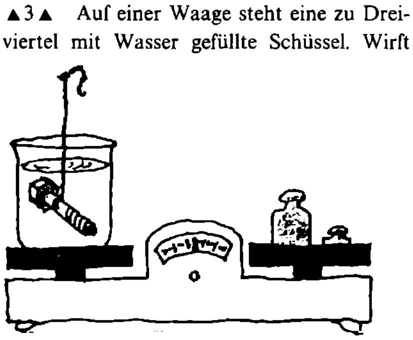
▲1▲ Auf jeder Schale einer Hebelwaage steht ein mit Wasser gefülltes Becherglas. In ein Glas wird ein Zweig gesteckt, ein zweiter, gleich schwerer Zweig wird quer über das andere Glas gelegt, so daß er das Wasser nicht berührt. Zu diesem Zeitpunkt befindet sich die Waage im Gleichgewicht.
Wie verhält sich die Waage, wenn der flach auf dem Glas liegende Zweig vertrocknet?



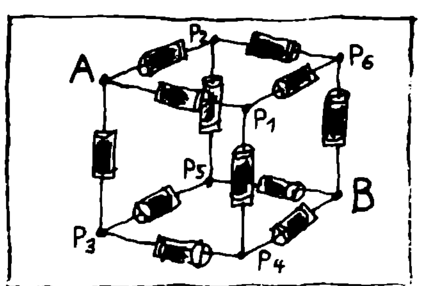
▲2▲ Bei einer Wanderung im Gebirge ergab sich die Frage, wie man die Höhe der Berggipfel bestimmen könne. Ein Tourist behauptete, daß man auch mit einem Thermometer recht genau Höhen messen könne.
Ist eine Höhenbestimmung auf diese Weise möglich?



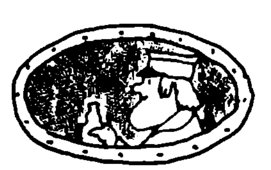
▲3▲ Auf einer Waage steht eine zu Dreiviertel mit Wasser gefüllte Schüssel. Wirft man eine eiserne Schraube hinein, so zeigt die Waage eine Massenzunahme entsprechend dem Gewicht der Schraube an.
Ist auch dann eine Massenzunahme feststellbar, wenn die Schraube, an einem dünnen Faden hängend, in das Wasser gehalten wird?



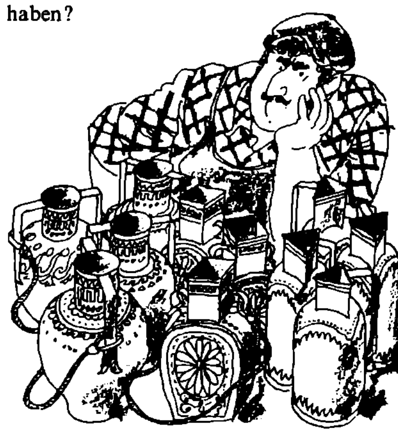
▲4▲ Bekanntlich kann man den Gesamtwiderstand einer Schaltung, die aus mehreren zueinander parallel oder in Reihe geschalteten elektrischen Widerständen besteht, mit Hilfe der Kirchhoffschen Regeln berechnen. Ist eine solche Schaltung aus einer größeren Zahl kompliziert aneinandergeschalteter Widerstände aufgebaut, so müssen zur Bestimmung des Gesamtwiderstandes häufig langwierige Rechnungen durchgeführt werd~n. In manchen Fällen kann jedoch der Rechengang durch Überlegung beträchtlich verkürzt werden, wie an dem folgenden Problem zu erkennen ist.
Bestimmen Sie durch möglichst wenig Rechnung, vielmehr durch etwas Nachdenken, den elektrischen Widerstand zwischen den Punkten *A* und *B* eines „Würfels", der aus zwölf kleinen Widerständen von je 100 Ω als Würfelkanten aufgebaut ist!



▲5▲ Einige Freunde unterhielten sich darüber, wie schwer es sei, Entfernungen oder Höhen einigermaßen richtig zu schätzen, und sie kamen zu der Meinung, daß das menschliche Schätzungsvermögen unvollkommen sei. Konrad widersprach und behauptete, kleinere Zeitabstände mit großer Genauigkeit ohne Uhr schätzen zu können. Es wurde vereinbart, daß er ohne Uhr eine Zeit von 5 Minuten auf 10 Sekunden genau bestimmen sollte. Trotz strenger Kontrolle gelang es ihm.
Wie hatte er das gemacht?



▲6▲ Branco B., ein jugoslawischer Klempner, stellt als Souvenirs für Touristen drei Serien von Kannen her, deren Öffnungen verschiedene Formen haben: kreisrunde, quadratische und dreieckige. Mit dem Korkverschluß der Kannen will er nicht so viel Arbeit haben, und er überlegt, ob sich dafür nicht eine Form finden ließe, mit der man alle drei Kannenöffnungen verschließen kann.
Welche Form muß ein solcher Korkverschluß haben?

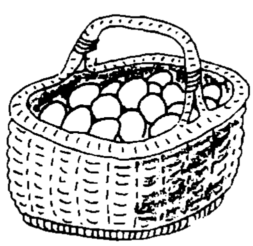


▲7▲ In einem großen Betrieb wurde eine Fußballmannschaft aufgestellt. Drei Spieler der Mannschaft hießen mit Familiennamen Krause, vier Lehmann, zwei Schulz und zwei Meyer. Vier der Spieler hatten den Vornamen Dieter, drei den Vornamen Erhard und weitere drei den Vornamen Kurt. Der Mittelstürmer hieß Günther. Keine zwei Spieler hatten die gleichen Vor- und Familiennamen. Torhüter war Erhard Meyer.
Wie hießen die übrigen zehn Spieler mit ihren vollen Namen?

▲8▲ Einer Anekdote zufolge sollte ein zum Tode Verurteilter entweder erschossen oder erhängt werden. Der Richter erklärte dem Verurteilten zynisch, daß er sich seinen Tod selbst wählen könne. Er solle „erraten", ob er erschossen oder erhängt werde. Treffe seine Aussage zu, so werde er erschossen. Treffe sie nicht zu, werde er erhängt. Trotz dieses grausamen Spiels des Richters merkte der Verurteilte auf. Nach seiner Aussage mußte er am Leben gelassen werden.
Warum konnte das Todesurteil nicht vollstreckt werden?

▲9▲ Auf der längsten Straßenbahnlinie einer Stadt benötigt die Bahn von Endstelle zu Endstelle eine Fahrzeit von genau zwei Stunden. Laut Fahrplan fährt jede volle Viertelstunde von jeder der beiden Endstellen eine Straßenbahn ab. Kürzlich stand in der Zeitung, daß beschlossen worden war, den Straßenbahnverkehr wesentlich zu verbessern und künftig die Bahnen alle zehn Minuten verkehren zu lassen. Dazu sei eine beträchtliche Erweiterung des Fahrzeugparks notwendig.
Wie viele Gegenbahnen trifft eine um zehn Uhr von der Endstelle abfahrende Straßenbahn dieser längsten Linie nach dem alten und nach dem neuen Fahrplan auf ihrer Fahrt zur anderen Endstelle?

▲10▲ Zwei Kleintierzüchter verkauften u.a. regelmäßig je 30 Eier, einer von ihnen 3 Stück für 1 Mark, der andere 2 Stück für eine Mark. Eines Tages jedoch mußte der eine den anderen bitten, seine 30 Eier mit zu verkaufen. Er könne ja dann jeweils 5 Eier für 2 Mark anbieten.
Der Erlös aus dem Verkauf aller 60 Eier betrug 24 Mark. Bei getrennten Geschäften hingegen hätte der eine 10 Mark, der andere 15 Mark eingenommen, also 1 Mark mehr.
Wie ist das Fehlen dieser einen Mark zu erklären?



▲11▲ Auf einer Baustelle arbeitete eine aus 4 Maurern bestehende Gruppe. Nach ihrem Alter befragt, antwortete einer von ihnen: „Wir sind alle vier verschiedenaltrig. Zusammen sind wir 129 Jahre alt. Drei von uns haben je eine Quadratzahl von Jahren hinter sich. Ebenso hatten drei von uns vor 15 Jahren als Alter eine Quadratzahl."
Wie alt waren die vier Kollegen, als sie gefragt wurden?

▲12▲ Stellen wir uns jetzt die Aufgabe, die kleinste natürliche Zahl zu finden, die in ihren vierten Teil übergeht, wenn man ihre erste Ziffer an die letzte Stelle rückt.
Gibt es eine solche Zahl? Wenn ja, wie lautet sie?

▲13▲ Die folgende Figur, auf der 20 natürliche Zahlen verteilt sind, wollen wir in vier zueinander kongruente Teile zerlegen.

	12	14	13			
5	8	11	3	2	7	17
15	10	9	3	18	19	6
			4	16	8	

Dabei soll die Summe aus den Zahlen, die sich auf jedem dieser Teile befindet, den Wert 50 haben.
Wie müssen wir die Figur zerlegen?

▲14▲ Auf einem langen, glatten, schräggestellten Brett ließen Bauhandwerker aus der ersten Etage Ziegelsteine in den Hof hinabgleiten, wo sie von einem Jungen gestapelt wurden. Alle Steine hatten die gleiche Masse, gleiche Abmessungen und gleiche Oberflächenbeschaffenheit. Einer der Männer ließ gleichzeitig zwei dieser Steine abwärtsgleiten, einen auf der Breitseite, den anderen auf der Schmalseite. Beide Steine bewegten sich anfangs mit gleich großen Geschwindigkeiten. Während des Rutschens verringerte der Junge den Neigungswinkel des Brettes.
Welcher der beiden Ziegel kam als erster zur Ruhe?

Die Bücher heute sind die Taten
von morgen. Heinrich Mann

Bücher lesen, heißt wandern gehen
in ferne Welten, aus den Stuben
über die Sterne. Jean Paul

Von den vielen Welten,
die der Mensch nicht von der Natur
geschenkt bekam, sondern sich aus
dem eigenen Geist erschaffen hat,
ist die Welt der Bücher die größte.
Hermann Hesse

Der Geizige liest jedes gekaufte
Buch aufmerksamer, er will etwas
für sein Geld haben. Jean Paul

Einige Bücher soll man schmecken,
andere verschlucken und einige
wenige kauen und verdauen.
Sean O'Casey

Lesen – das ist die beste Lehre.
Den Gedanken eines großen Menschen
zu folgen, ist die unterhaltsamste
Wissenschaft. Alexander Puschkin

Menschen, die glauben, sie haben
keine Zeit zum Bücherlesen, wissen
noch nicht, daß die Literatur ihnen
viel mehr gibt, als sie ihnen Zeit
nimmt. Ruth Werner

Nicht die haben die Bücher recht
lieb, welche sie unberührt in
den Schränken aufheben, sondern
die sie Tag und Nacht in den Händen
haben, und daher beschmutzt sind,
welche Eselsohren darein machen,
sie abnutzen und mit Anerkennung
bedecken. Erasmus von Rotterdam

Wir sollten Bücher wie Leckerbissen
ansehen und nicht nur nach
dem greifen, was uns am meisten
reizt, sondern hauptsächlich auf
das achten, was am gesündesten ist;
nicht, als ob wir auf jenes ganz
zu verzichten brauchten, aber dieses
ist doch bei weitem vorzuziehen.
Plutarch

Man muß vom Alten lernen,
Neues zu machen. B. Brecht

Der echte Schüler lernt
aus dem Bekannten das Unbekannte
zu entwickeln. J. W. v. Goethe

Eine „niederträchtige" Aufgabe

Der große Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1777 bis 1855) erhielt als Kind die von Valentin Heins (1637 bis 1704) verfaßte „Schatzkammer der kaufmännischen Rechnung" geschenkt. Heins war „Rechenmeister" an einer Hamburger Schule und gründete 1690 zusammen mit Heinrich Meis(s)ner die „Mathematische Gesellschaft" in Hamburg. Sein Rechenbuch scheint sich großer Beliebtheit erfreut zu haben, denn das Gaußsche Exemplar entstammt der 6. Auflage, die 75 Jahre nach dem Tode von Heins erschienen war. Es spricht eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür, daß gerade dies Buch es gewesen ist, das in jeder Gauß-Biographie eine Rolle spielt:

Der Braunschweiger Lehrer Büttner, so heißt es in den Lebensbeschreibungen von Gauß, habe eines Tages seinen Schülern die Aufgabe gestellt, sämtliche Zahlen von 1 bis 100 zusammenzuzählen. Gauß, etwa neun Jahre alt, und der kleinste in der Klasse, habe schon nach wenigen Augenblicken seine Tafel mit der Zahl 5050 abgegeben; während seine Mitschüler alle Additionen ausführten, hatte er das Prinzip der Summenformel für die arithmetische Reihe entdeckt und benutzt. Dadurch auf ihn aufmerksam geworden, habe sein Lehrer Büttner für ihn aus Hamburg ein Rechenbuch kommen lassen. Freilich ist auch ein anderes Rechenbuch im Gespräch, das jener Pädagoge für Gauß gekauft haben soll, aber es spricht viel dafür, daß es tatsächlich Heins' „der lieben Jugend zu Lieb und Besten" geschriebenes Buch war, welches Büttner seinem Schüler geschenkt hat. Auf jeden Fall hat es der kleine Gauß benutzt, wie aus mehreren handschriftlichen Eintragungen, u. a. mit dem Datum 2. 1. 1789, zu entnehmen ist. So hat er auch seine Auflösung des ersten Teiles „der besonderen, ganz niederträchtig sich aufführenden Schlußzugabe" auf einer leeren Seite des Buches festgehalten. Diese Aufgabe wollen wir nun hier wiederholen. Wir folgen dabei der Wiedergabe in der Abhandlung von Horst Michling „Aus der Bücherei des Gymnasiasten Johann Friedrich Carl Gauß" in den Mitteilungen der Gauß-Gesellschaft in Göttingen (Heft Nr. 16/1979, S. 5 bis 16) und behalten weitgehend die altertümliche Ausdrucksweise und Rechtschreibung von Heins bei, modernisieren aber ganz überholte und heute praktisch unbekannte, aus der lateinischen Sprache stammende Fachausdrücke. Außerdem haben wir an einigen Stellen zur Erleichterung des Verständnisses geringfügig in den Text eingegriffen, einige Ergänzungen in eckigen Klammern eingefügt und einige Erläuterungen in Anmerkungen beigegeben.

Algebraische Schluß-Zugabe

Gesucht wird ein Anagramm[1]), so aus einem in 15 Buchstaben verwechselten liebwerthen Eigennamen geflossen. Dieses nun arithmetisch zu erforschen, so ordne man dem Alphabet oder ABC die ordentlich aufeinander folgenden Zahlen 1, 2, 3, 4, ..., zu, also daß *Z* die Zahl 24 erhalte[2]). Wenn solches verrichtet, suche man 5 Glieder[3]) einer arithmetischen Folge (welche nemlich von dem kleinsten bis zum grössesten mit I, II, III, IV, V zu bezeichnen) von dieser Eigenschaft: So man multipliciret das erste mit dem 5ten, das 2te mit dem 4ten, und das dritte mit sich selber, gibt das 2te Product die Summe der 5 Glieder der Folge +10. So man aber die drei Producte multipliciret, erscheinen 72765[4]). Nachdem nun diese 5 gesuchten Zahlen der arithmetischen Folge bekannt gemacht, auch mit den 5 ersten römischen Zahlen bezeichnet, dann wird weiter das gesuchte Anagramm, oder dessen Buchstaben, folgender massen eröfnet: Die Zahl bey IV giebt den ersten [Buchstaben], die Zahl bey II weiset den 2ten, die Summe der Zahlen II und III geben den 3ten. Wenn 1/4 des Unterschieds der Zahlen I und V von der mit III bezeichneten Zahl subtrahiret wird, weiset die Differenz den 4ten. Die der IV angehörige Zahl, weniger der halben Differenz der Folge, weiset den 5ten; die beiden Zahlen III und IV zu der halben Differenz der Folge addiret, bringen den 6ten; das Doppelte der Zahl bei IV giebt den 7ten. Die Zahlen bey I und II zu der halben Differenz der Folge addiret, entdeken den 8ten. Das Doppelte der Zahl bey III weniger der halben Differenz der Folge zeiget den 9ten. Von dieser Zahl die Differenz der Folge weniger 2 subtrahiret, weiset die Differenz den 10ten; dazu die doppelte Differenz der Folge addiret, eröfnet den 11ten. Die Zahl bei V weniger die halbe Differenz der Folge, davon die Hälfte zeiget den 12ten; dieser zu der doppelten Differenz der Folge addiret, macht bekannt den 13ten. Dessen Quadrat-Wurzel weiset den 14ten, und wenn aus den Zahlen I und II eine Summe gemachet wird, zeigt sie den 15ten und zugleich letzten Buchstaben des Anagramms.

Wann nun dies Anagramm in seiner Bedeutung gefunden, kann es sehr leicht (massen man willens, allhier keine hohen Sprünge thun zu wollen) folgender Gestalt aufgelöset und der rechte eigne Name daraus vorgestellet werden, wie folgt:

Man bezeichne das ABC bis Z, nemlich A mit der ersten Trigonal-, B mit der 2ten Tetragonal-, C mit der 3ten Pentagonal-, D mit der 4ten Hexagonalzahl, und so ferner bis zum Ende des Alphabets[5]).

Wenn dieses verrichtet, addire man alle diese 24 Zahlen und teile die Summe durch 50. Den Quotienten merkt man sich.

Dann suchet man ferner eine harmonische Folge von 5 Gliedern, und zwar in kleinstem Verhältniß ganzer Zahlen. Deren Summe subtrahire vom eben erhaltenem Quotienten. Von 1/3 der Differenz werden 8 subtrahiret, und weist sodann der Rest den ersten Buchstaben. Bevor wir aber die folgenden Buchstaben entdecken, so werde die Zahl dieses ersten Buchstaben weniger 21 in 5 Glieder einer geometrischen Folge zertheilet, also daß das mittlere Glied sei das Quadrat von 6. Wenn solche 5 Glieder oder Zahlen gefunden, numerire man selbige von der kleinsten bis zur grössesten mit Nr. 1, 2, 3, 4, 5. Zu Nr. 4 addire man 1, so weiset die Summe den 2ten [Buchstaben]. Von dieser Zahl subtrahire das halbe mittlere Glied; die Differenz, multipliciret mit dem Quadrat von 3, zeiget den 3ten. Ferner der Zahl des 2ten Buchstaben weniger 3, ihr 1/4 multiplicire [mit der Summe] aus der Zahl des 2ten vermehrt um die Zahl bey Nr. 2. Das Resultat giebt den 4ten.

Diese, des 4ten Buchstaben Zahl + Quadratwurzel des mittleren Gliedes zu dem Product der beiden mit 1 und 5 bezeichneten Zahlen addiret, macht bekannt den 5ten. Die Zahlen Nr. 2 und Nr. 5 addiret zur Quadratwurzel des mittleren Gliedes:

Das Dreifache der Summe zeiget den 6ten. Aber die der Nr. 2 angehörige Zahl halbiret meldet den 7ten. So man ferner das Quadrat der Zahl 10, +1, von der Zahl des 6ten Buchstaben abzieht, verbleibt die Zahl des 8ten. Die Zahl bey Nr. 2 zu Nr. 3 addiret; zum Ergebnis das Product (aus der Differenz der Zahlen bey Nr. 3 und bey Nr. 2 und dem Ergebnis) hinzugezählet, ferner die Zahl bey Nr. 2 addiret, giebt das Resultat den 9ten. Die Zahl bey Nr. 4 + 1 weiset den 10ten. Dessen Sechsfaches + den zweifachen Quotienten der geometrischen Folge zeiget den 11ten. Setzt man die Pronic-Zahl[6]) von 8 rechts an die Kubikzahl von 3 an, also daß es eine einzige Zahl mache, so zeiget solche den 12ten. Aber diese erwehnte Kubikzahl von 3 an die 4. Trigonalzahl[7]) zur Rechten also angefüget, daß es eine einzige Zahl werde, giebt den 13ten zu erkennen. Die Quersumme dieser Zahl trigonal vermehret[8]) zeiget den 14ten. Endlich, wenn aller vorigen Buchstaben Summe das Zehnfache der Pronic-Zahl von 8 sowie die 4. Trigonalzahl addiret und vom Resultat die Kubikzahl von 20 subtrahiret wird, so eröfnet der Rest den 15ten und letzten Buchstaben des ganzen Vor- und Zunamens.

Frage: 1) wie das Anagramm und 2) der daraus wiederhergestellte Name heißt?

K.-R. Biermann

Anmerkungen:

[1]) Unter einem Anagramm versteht man die Bildung von einem oder mehreren Worten durch Versetzung der Buchstaben eines oder mehrerer Worte. Zwei einfache Beispiele: Aus LEBEN wird durch Buchstabenversetzung NEBEL, aus MADE wird DAME.

[2]) I = J = 1 Buchstabe;
U = V = 1 Buchstabe.

[3]) Ganze Zahlen.

[4]) Von der Gaußschen Lösung wissen wir aus der oben erwähnten Publikation, daß die von ihm aus den genannten Bedingungen hergeleitete Gleichung 5. Grades das absolute Glied 14553 [= 72765 : 5] enthielt.

[5]) Gesucht werden die n-ten p-Eckszahlen von $n=1$, $p=3$ bis $n=24$, $p=26$. Die einzelnen gesuchten Zahlen werden berechnet nach der Formel:

$$\frac{n}{2} \times [\{(n-1) \times (p-2)\} + 2]$$

Für die 4. Hexagonalzahl ($n=4$, $p=6$) ergibt sich beispielsweise

$2 \times [\{(4-1) \times (6-2)\} + 2] = 28.$

[6]) Unter der Pronic-Zahl von n verstand man die Summe von $n^2 + n$.

[7]) Siehe die Formel in Anmerkung [5]);
$n=4$, $p=3$.

[8]) desgleichen, $n=10$, $p=3$.

Lösung der „niederträchtigen" Aufgabe in Valentin Heins' Schatzkammer der kaufmännischen Rechnung, 6. Auflage 1779

Teil 1

A = 1	G = 7	N = 13	T = 19
B = 2	H = 8	O = 14	U, V = 20
C = 3	I, J = 9	P = 15	W = 21
D = 4	K = 10	Q = 16	X = 22
E = 5	L = 11	R = 17	Y = 23
F = 6	M = 12	S = 18	Z = 24

Die 5 Glieder der arithmetischen Folge gebe man sich am einfachsten in der Form $a-2d$, $a-d$, a, $a+d$, $a+2d$ vor;
dann ergeben sich die drei Produkte

(A) $(a-2d)(a+2d) = a^2 - 4d^2$

(B) $(a-d)(a+d) \quad = a^2 - d^2 = 5a + 10$

(C) a^2

mit $(a^2-4d^2)(a^2-d^2)a^2 = 72765$, woraus durch Einsetzen von (B) folgt: $3a^5 - 14a^4 - 80a^3 - 80a^2 + 14533 = 0$. Wegen $14533 = 3^3 \cdot 7^2 \cdot 11$ muß eine ganzzahlige Lösung dieser Gleichung Teiler von $3^2 \cdot 7^2 \cdot 11$ sein. Man findet $a=7$, damit $d=2$ und die arithmetische Folge 3, 5, 7, 9, 11.
(3 = I; 5 = II; 7 = III; 9 = IV; 11 = V)
≪ 3 × 11 = 33
5 × 9 = 45 7 × 7 = 49
5 × 9 = 45 = 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 10
33 × 45 × 49 = 72675 ≫
(Nach einem Faksimile im Heft 17/1980, S. 69, der Mitteilungen der Gauß-Gesellschaft in Göttingen hat Gauß als Lösung des ersten Teils der in Rede stehenden Aufgabe niedergeschrieben:

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= x - 2p = 3 \\ \mathrm{II} &= x - p = 5 \\ \mathrm{III} &= x \quad = 7 \\ \mathrm{IV} &= x + p = 9 \\ \mathrm{V} &= x + 2p = 11 \end{aligned}$$

$xx - pp = 5x + 10$
$xx(xx-pp)(xx-4pp) = 72765$
$xx(5x+10)(-3xx+20x+40) = 72765$
$xx(x+2)(-3xx+20x+40) \quad = 14553$
$-3x^5 + 14x^4 + 80x^{3*} + 80xx - 14553 = 0$
Davon eine Wurzel $x=7$)
IV = 9 = J
II = 5 = E
II + III = 5 + 7 = 12 = M
V − I = 11 − 3 = 8 : 4 = 2; III = 7; 7 − 2 = 5 = E
IV = 9; 9 − 1 = 8 = H
III + IV = 7 + 9 = 16; 16 + 1 = 17 = R
IV = 9; 2 × 9 = 18 = S
I + II = 3 + 5 = 8; 8 + 1 = 9 = I
III = 7; 2 × 7 = 14; 14 − 1 = 13 = N
2 − 2 = 0; 13 − 0 = 13 = N
13 + 2 + 2 = 17 = R
V = 11; 11 − 1 = 10; 10 : 2 = 5 = E
5 + (2 × 2) = 5 + 4 = 9 = I
$\sqrt{9} = 3 = C$
I + II = 3 + 5 = 8 = H
Damit ergeben sich als Lösungsworte:
JE MEHR SINNREICH

* Bei Gauß versehentlich $80xx^3$.

Teil 2

Gesucht wird die n-te Eckszahl von $n=1$, $p=3$ bis $n=24$, $p=26$. Die einzelnen Zahlen werden berechnet nach der Formel

$$\frac{n}{2} \times [\{(n-1) \times (p-2)\} + 2],$$

z. B. ergibt sich für die 4. Hexagonalzahl ($n=4$, $p=6$)

$2 \times [(3 \times 4) + 2] = 28.$

Die Ausführung der Berechnung der gesuchten Zahlen ergibt mit Zuordnung der Buchstaben (A zu $n=1$, ..., Z zu $n=24$) die folgenden Werte:

A = 1	I, J = 333	R = 2329
B = 4	K = 460	S = 2772
C = 12	L = 616	T = 3268
D = 28	M = 804	U, V = 3820
E = 55	N = 1027	W = 4431
F = 96	O = 1288	X = 5104
G = 154	P = 1590	Y = 5842
H = 232	Q = 1936	Z = 6648

Summe = 42850; 42850 : 50 = 857

≪ Die Rechnung wird einfacher, wenn man erkennt, daß die gesuchten Zahlen eine arithmetische Folge 3. Ordnung bilden, deren dritte Differenzenfolge also konstant (= 3) ist:

3 3 3 3 3 3
5 8 11 14 17 20 23
3 8 16 27 41 58 78 ...
1 4 12 28 55 96 154 232 ... ≫

Eine harmonische Folge aus 5 Gliedern (d. i. eine Folge, in der jedes Glied mit Ausnahme der Randglieder harmonisches Mittel seiner beiden Nachbarglieder ist) setzt man am besten in der Form $\frac{c}{n}, \frac{c}{n+1}, \frac{c}{n+2}, \frac{c}{n+3}, \frac{c}{n+4}$ an (c = const.).

Damit die Bedingung des „Kleinsten Verhältnisses in ganzen Zahlen" erfüllt ist, wähle man $n=1$; dann muß c eine durch 1, 2, ..., 5 teilbare Zahl sein. Die kleinste unter diesen ist 60, also erhält man die harmonische Folge 60, 30, 20, 15, 12 oder in natürlicher Reihenfolge 12, 15, 20, 30, 60.

12 + 15 + 20 + 30 + 60 = 137
857 − 137 = 720; 720 : 3 = 240;
240 − 8 = 232 = H
232 − 21 = 211.

Die geometrische Folge erhält man über den Ansatz

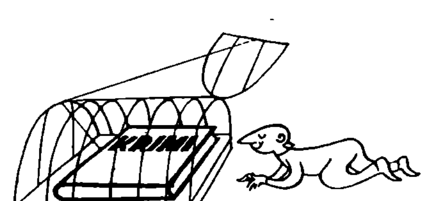
$$211 = \frac{36}{q^2} + \frac{36}{q} + 36 + 36q + 36q^2;$$

$$\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q} + q + q^2 = \frac{175}{36}.$$

Da mit $q = \frac{m}{n}$ auch $\frac{1}{q} = \frac{n}{m}$ die Gleichung löst, erhält man $\frac{n^2}{36}$ und $\frac{m^2}{36}$, woraus $n=2$, $m=3$ oder umgekehrt folgt. Beide Lösungen führen auf die geometrische Folge 16, 24, 36, 54, 81.
Nr. 1 = 16, ..., Nr. 5 = 81

54 + 1 = 55 = E
55 − 18 = 37; 37 × 9 = 333 = I
55 − 3 = 52; 52 : 4 = 13; 13 × (55 + 24) = 1027 = N
1027 + 6 = 1033; 1033 + (16 × 81) = 2329 = R
24 + 81 + 6 = 111; 111 × 3 = 333 = I
24 : 2 = 12 = C
333 − (100 + 1) = 232 = H
24 + 36 = 60; 60 + (12 × 60) = 780;
780 + 24 = 804 = M
54 + 1 = 55 = E
55 × 6 = 330; 330 + (2 × 1,5) = 333 = I
2772 = S
1027 = N
1 + 0 + 2 + 7 = 10; für $n=10$,
$p=3$ ergibt sich 55 = E
9599 + 720 + 10 − 8000 = 2329 = R.

Das Lösungswort lautet also HEINRICH MEISNER (Mitbegründer der 1690 in Hamburg entstandenen Mathematischen Gesellschaft).



Mathe mit Pfiff

Leseprobe aus dem Band 82 der MSB

Überall natürliche Zahlen

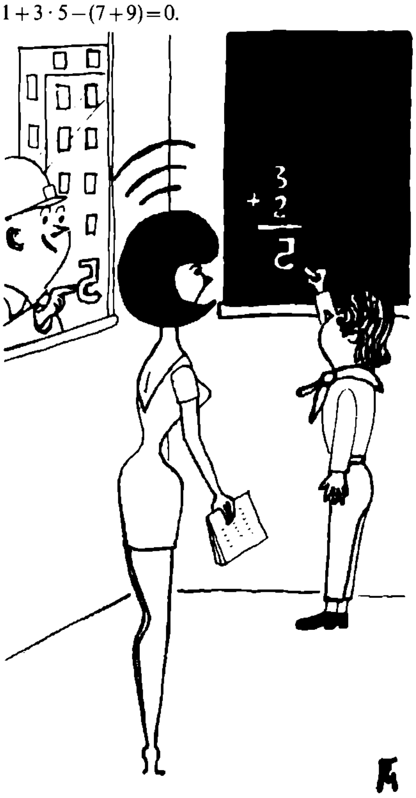
▲1▲ Zum Anfang:
$x = 107 \cdot \{700 - [96 : 2 - (45 + 27) : 9] \cdot 5 - 495\} - 135.$

▲2▲ Die Summe von acht ungeraden natürlichen Zahlen beträgt 20. Wieviel Lösungsmöglichkeiten gibt es, wenn unter diesen acht Zahlen auch gleiche Summanden vorkommen dürfen?

▲3▲ Zwischen den Ziffern 1, 3, 5, 7, 9 sind unter Beachtung dieser Reihenfolge in beliebiger Weise Operationszeichen für die vier Grundrechenarten und eventuell auch Klammern so zu setzen, daß man als jeweiliges Ergebnis folgende natürliche Zahlen erhält:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Beispiel für das Ergebnis 0:
$1 + 3 \cdot 5 - (7 + 9) = 0.$



▲4▲ Von einer zweistelligen Zahl z ist bekannt, daß die Einerziffer eine dreimal so große Zahl darstellt wie die Zehnerziffer. Vertauscht man die Grundziffern, so entsteht eine Zahl, die um 36 größer als die ursprüngliche Zahl ist.
Wie lautet z?

▲5▲ Für sechs von Null verschiedene natürliche Zahlen a, b, c, d, e und f gelte $a + 3b + 5c = 12$ und $d + 3e + 5f = 20$.
Wie groß ist die Summe $a + b + c$, wenn $d + e + f = a + b + c$ gilt? (Löse die Aufgabe mit Hilfe einer Tabelle! Verschiedene Buchstaben können dieselbe Zahl bedeuten!)

▲6▲ Bilde das Produkt aus der Summe und aus der Differenz der Zahlen 8 und 4, und subtrahiere den Quotienten aus den gegebenen Zahlen!

▲7▲ Es seien a und b beliebige natürliche Zahlen mit $a > b$.
a) Man berechne alle Zahlen x, für die die Summe aus x und dem Produkt von a und b das Quadrat der Zahl a ergibt.
b) Man berechne alle Zahlen y, für die die Differenz aus dem Produkt von a und b und der Zahl y das Quadrat der Zahl b ergibt.

▲8▲ Die Summe zweier natürlicher Zahlen beträgt 968. Ein Summand endet mit einer Null. Streicht man diese Null, so erhält man den anderen Summanden.
Wie lauten diese beiden Zahlen?

▲9▲ Das Produkt dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist 21mal so groß wie die Summe dieser Zahlen.
Um welche Zahlen handelt es sich?

▲10▲ Gesucht ist die größte fünfstellige Zahl, für die gilt:
a) Die Zehnerziffer stellt eine halb so große Zahl wie die Tausenderziffer dar.
b) Die Einer- und die Hunderterziffer kann man vertauschen, ohne daß sich die fünfstellige Zahl ändert.

▲11▲ Ermittle alle zweistelligen natürlichen Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllen!
a) Die Differenz aus der Zehnerziffer und der Einerziffer beträgt 4, wobei die Einerziffer von Null verschieden sein soll.
b) Vertauscht man die Ziffern einer solchen Zahl, so erhält man eine neue zweistellige Zahl, die kleiner als der dritte Teil der ursprünglichen Zahl ist.

▲12▲ Es sind alle natürlichen Zahlen n anzugeben, für die die Zahl

$$z = \frac{n + 17}{n - 3}$$

ebenfalls eine natürliche Zahl ist.

▲13▲ Von den hintereinander in einer Zeile aufgeschriebenen natürlichen Zahlen 12345678910111213...9899100 sind 10 Ziffern so wegzustreichen, daß die übrigbleibende Zahl möglichst groß ist.

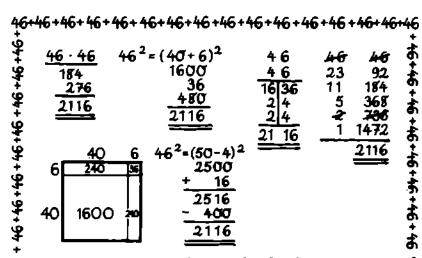
▲14▲ Die Maßzahlen der Seitenlängen eines Dreiecks sind drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Der Umfang des Dreiecks beträgt 42 cm.
Wie lang ist jede der drei Seiten des Dreiecks?

▲15▲ Versuche, mit Rechenvorteil zu arbeiten!
a) $16 \cdot 19 = x$; b) $26 \cdot 86 = x$; c) $62 \cdot 68 = x$.
Der Rechenvorteil ergibt sich z. B. bei c) dadurch, daß man den (gemeinsamen) Zehner mit dem um 1 vermehrten Zehner multipliziert, also $6 \cdot 7 = 42$ (eigentlich $60 \cdot 70 = 4200$), und an das Ergebnis das Produkt aus den Einern, also $2 \cdot 8 = 16$, „anhängt" (eigentlich $4200 + 16$), $x = 4216$.

▲16▲ Ein Mathematiklehrbuch unserer Republik umfaßt 196 Seiten. Die Seitenzahlen für die ersten beiden Seiten und für die letzte Seite wurden nicht gedruckt.
a) Wieviel Ziffern wurden zum Numerieren der übrigen Seiten verwendet?
b) Wie oft wurde dabei die Ziffer 0 gedruckt?

▲17▲ Axel sagt zu Bernd: „Denk dir eine natürliche Zahl, die größer als 1, aber kleiner als 10 ist! Multipliziere die gedachte Zahl mit 27 und das erhaltene Produkt mit 37! Nenne mir die letzte Ziffer deines Ergebnisses!"
Bernd nannte 7 als letzte Ziffer. Daraus konnte Axel sofort angeben, welche Zahl sich Bernd gedacht hatte. Gib eine Begründung dafür!

▲18▲ Eine vierstellige Kraftfahrzeugnummer weist folgende Besonderheiten auf:
a) Die erste Ziffer ist gleich der zweiten und die dritte gleich der vierten Ziffer;
b) die vierstellige Zahl ist eine Quadratzahl.
Wie lautet die Kraftfahrzeugnummer?



Lehmann, J.

Mathe mit Pfiff

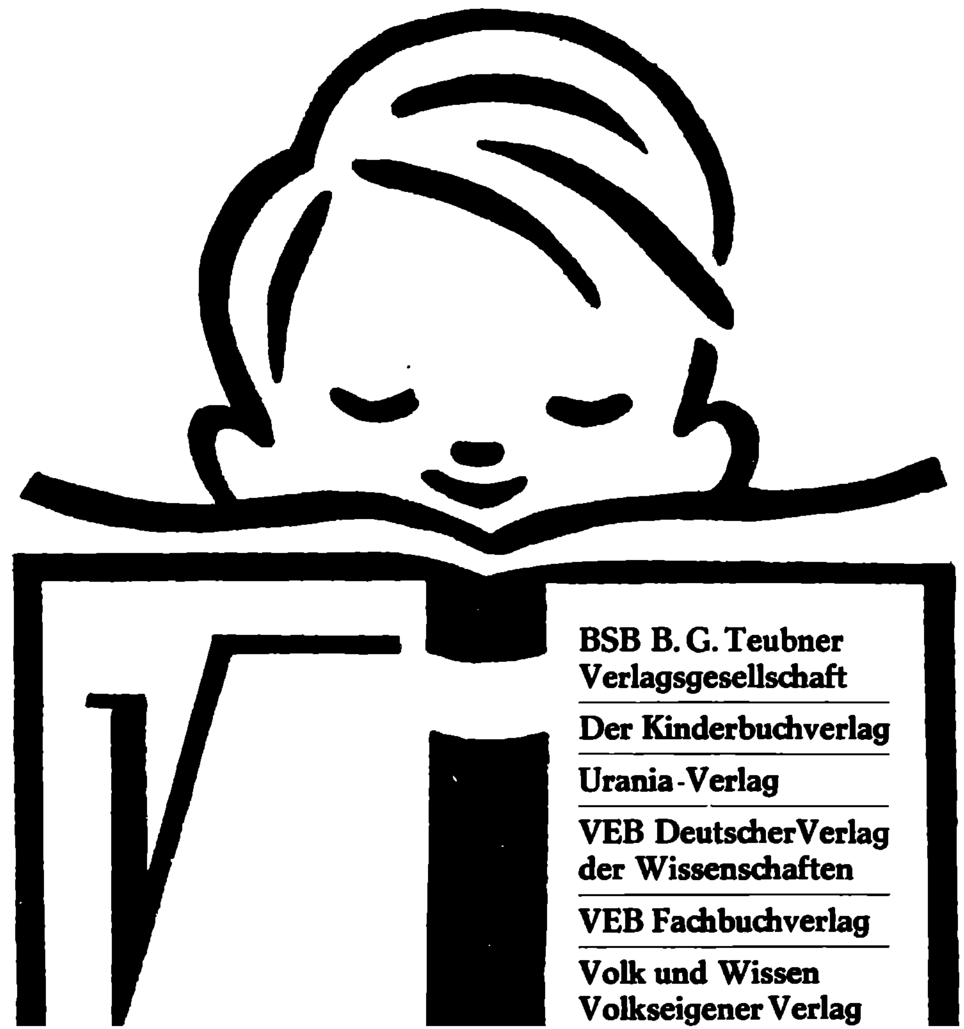
128 Seiten mit 18 farbigen Vignetten und 93 farbigen Zeichnungen, 4,50 M
Bestell-Nr. 653 364 6

Vorliegendes Bändchen der „akzent"-Reihe ist kein Lehrbuch, es bietet Elementarmathematik zur Unterhaltung, als Rätsel und Spiel, zur geistvollen Freizeitbeschäftigung. Es macht Spaß, die lustigen Vignetten und farbigen Zeichnungen anzuschauen. Wer die Mathematik von dieser freundlichen Seite betrachtet, wird viel Freude daran haben.

Notizen

GESAMTVERZEICHNIS

MATHEMATISCHE SCHÜLERBÜCHEREI 1981



BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft

Der Kinderbuchverlag

Urania-Verlag

VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

VEB Fachbuchverlag

Volk und Wissen Volkseigener Verlag

Rusza, Imre

Die Begriffswelt der neuen Mathematik

472 Seiten mit 132 Abbildungen, 21,50 M
Bestell-Nr. 706 732 5 (VWV)

Autorenkollektiv

Biographien bedeutender Mathematiker

536 Seiten mit zahlreichen Abbildungen,
41 Biographien, 22,00 M
Bestell-Nr. 706 107 0 (VWV)

Tobies, R.

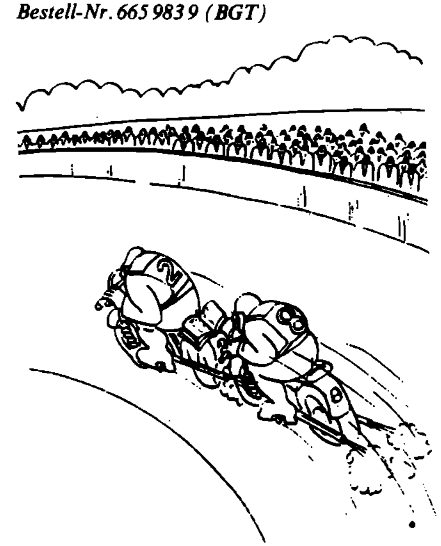
Felix Klein

104 Seiten mit 12 Abbildungen,
6,80 M
Bestell-Nr. 666 026 6 (BGT)

Ilgauds, H.-J.

Norbert Wiener

86 Seiten mit 6 Abbildungen
und 4 Schemata, 4,80 M
Bestell-Nr. 665 983 9 (BGT)



Simon, H./K. Stahl/H. Grabowski

Mathematik

Nachschlagbuch für Grundlagenfächer
671 Seiten mit 445 Bildern, 13,50 M
Bestell-Nr. 546 440 7 (FV)

Autorenkollektiv

Kleine Enzyklopädie Mathematik

Ein Ratgeber für Schule und Praxis
820 Seiten mit 950 Textabbildungen,
davon über 700 farbig, und 56 Bildtafeln,
18,00 M
Bestell-Nr. 576 288 5
VEB Bibliographisches Institut Leipzig

Wilenkin, N. J.

Methoden der schrittweisen Näherung

Übersetzung aus dem Russischen
108 Seiten mit 34 Abbildungen, 5,90 M
Bestell-Nr. 665 723 5 (BGT)

Steinert, K.-G.

Sphärische Trigonometrie mit einigen Anwendungen aus Geodäsie, Astronomie und Kartographie

160 Seiten mit 69 Abbildungen, 9,50 M
Bestell-Nr. 665 828 9 (BGT)

Gilde, W./S. Altrichter

Mehr Spaß mit dem Taschenrechner

215 Seiten mit 22 Abbildungen, 5,50 M
Bestell-Nr. 546 409 5 (FV)

Sonderheft der mathematischen
Schülerzeitschrift „alpha“
in Zusammenarbeit mit sechs Verlagen

Höfner, G./M. Wittwer

Wiederholungsprogramm Elementarmathematik

239 Seiten mit 110 Bildern
und 6 Leistungskontrollen, 7,80 M
Bestell-Nr. 546 131 0 (FV)

Budden, F. J.

Zahlensysteme und Rechenautomaten

Übersetzung aus dem Englischen
224 Seiten mit 34 Abbildungen, 8,60 M
Bestell-Nr. 665 633 9 (BGT)

Halmos, P. R.

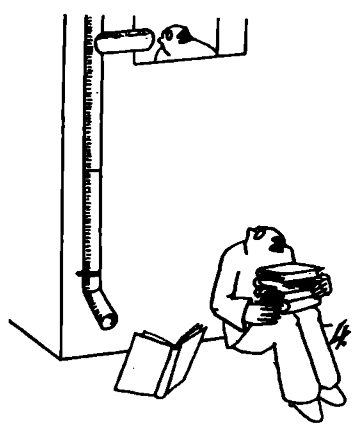
Wie schreibt man mathematische Texte?

Übersetzung aus dem Englischen
64 Seiten, 3,50 M
Bestell-Nr. 665 820 3 (BGT)

Bakelman, I. J.

Spiegelung am Kreis

Übersetzung aus dem Russischen
132 Seiten mit 67 Abbildungen, 7,00 M
Bestell-Nr. 665 735 8 (BGT)



Wentzel, J. S.

Elemente der Spieltheorie

66 Seiten mit 25 Abbildungen, 4,20 M
Bestell-Nr. 665 511 7

René Descartes

Ausgewählte Schriften

Abhandlungen über die Methode
(Discours de la méthode)
437 Seiten, 2,50 M
Verlag Philipp Reclam jun. Leipzig
Bestell-Nr. 660 876 7

Schröder, E.

Dürer – Kunst und Geometrie

aus der Sicht seiner „Unterweysung"
79 Seiten mit 61 Abbildungen, 15,00 M
Bestell-Nr. 762 736 1 (6555)
Akademie-Verlag Berlin

Gilde, W.

Gespiegelte Welt

118 Seiten mit 176 Bildern, 24,00 M
Bestell-Nr. 546 369 0

Nikiforowski, W. A./L. S. Freiman

Wegbereiter der neuen Mathematik

222 Seiten mit 37 Bildern, 5,50 M
Bestell-Nr. 546 411 6 (FV)

Wußing, H.

Carl Friedrich Gauß

100 Seiten mit 9 Abbildungen, 4,70 M
Bestell-Nr. 665 700 8 (BGT)

Goetz, D.

Georg Christoph Lichtenberg

108 Seiten mit 10 Abbildungen, 6,80 M
Bestell-Nr. 665 986 3 (BGT)

Band	1	Alexandroff, Einführung in die Gruppentheorie (DVW)
Band	2	Hasse, Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik (BGT)
Band	3	Markuschewitsch, Streifzüge durch die Mathematik I (U)
Band	4	Hameister, Geometrische Konstruktionen und Beweise in der Ebene (BGT)
Band	5	Vyšin, Methoden zur Lösung mathematischer Aufgaben (BGT)
Band	6	Lietzmann, Der Pythagoreische Lehrsatz (BGT)
Band	7	Varga, Mathematische Logik für Anfänger I (VWV)
Band	8	Sominski, Die Methode der vollständigen Induktion (DVW)
Band	9	Korowkin, Ungleichungen (DVW)
Band	10	Gnedenko/Chintschin, Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung (DVW)
Band	11	Lietzmann, Wo steckt der Fehler? (BGT)
Band	12	Lietzmann, Altes und Neues vom Kreis (BGT)
Band	13	Lietzmann, Riesen und Zwerge im Zahlenreich (BGT)
Band	14	Miller, Rechenvorteile (BGT)
Band	15	Natanson, Einfachste Maxima- und Minimaaufgaben (DVW)
Band	16	Natanson, Summierung unendlich kleiner Größen (DVW)
Band	17	Dubnow, Fehler in geometrischen Beweisen (DVW)
Band	18	Dynkin/Uspenski, Mathematische Unterhaltungen I (DVW)
Band	19	Worobjow, Die Fibonaccischen Zahlen (DVW)
Band	20	Dynkin/Uspenski, Mathematische Unterhaltungen II (DVW)
Band	21	Kurosch, Algebraische Gleichungen beliebigen Grades (DVW)
Band	22	Gelfond, Die Auflösung von Gleichungen in ganzen Zahlen (DVW)
Band	23	Schafarewitsch, Über die Auflösung von Gleichungen höheren Grades (DVW)
Band	24	Markuschewitsch, Streifzüge durch die Mathematik II (U)
Band	25	Markuschewitsch, Rekursive Folgen (DVW)
Band	26	Dynkin/Uspenski, Mathematische Unterhaltungen III (DVW)
Band	27	Steinhaus, 100 Aufgaben (U)
Band	28	Perelman, Unterhaltsame Geometrie (VWV)
Band	29	Perelman, Unterhaltsame Algebra (VWV)
Band	30	Kolosow, Kreuz und quer durch die Mathematik (VWV)
Band	31	Teplow, Grundriß der Kybernetik (VWV)
Band	32	Jaglom/Boltjanski, Konvexe Figuren (DVW)
Band	33	Belkner, Determinanten (BGT)
Band	34	Autorenkollektiv, Rund um die Mathematik (KB)
Band	35	Schmidt, Kein Ärger mit der Algebra (KB)
Band	36	Übungen für Junge Mathematiker, Teil 1: Lehmann, Zahlentheorie (BGT)
Band	37	Übungen für Junge Mathematiker, Teil 2: Grosche, Elementargeometrie (BGT)
Band	38	Übungen für Junge Mathematiker, Teil 3: Kleinfeld, Ungleichungen (BGT)
Band	39	Krysicki, Zählen und Rechnen einst und jetzt (BGT)
Band	40	Sedláček, Einführung in die Graphentheorie (BGT)
Band	41	Gelfand/Glagolewa/Kirillow, Die Koordinatenmethode (BGT)
Band	42	Markuschewitsch, Komplexe Zahlen und konforme Abbildungen (DVW)
Band	43	Markuschewitsch, Flächeninhalte und Logarithmen (DVW)
Band	44	Donath, Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks (DVW)
Band	45	Roman, Reguläre und halbreguläre Polyeder (DVW)
Band	46	Autorenkollektiv, Kompendium der Mathematik (VWV)
Band	47	Lehmann, Lineare Optimierung für Junge Mathematiker (BGT)
Band	48	Belkner, Matrizen (BGT)
Band	49	May, Differentialgleichungen (BGT)
Band	50	Sobol, Die Monte-Carlo-Methode (DVW)

Band 51 Zich/Kolman, Unterhaltsame Logik (BGT)
Band 52 Worobjow, Teilbarkeitskriterien (DVW)
Band 53 Freyer/Gäbler/Möckel, Gut gedacht ist halb gelöst (U)
Band 54 Bürger/Wittmar, Was ist, was soll Datenverarbeitung? (U)
Band 55 Cendrowski, Bande der unsichtbaren Hand (KB)
Band 56 Göttner, Was ist, was soll Operationsforschung? (U)
Band 57 Dege, EDV Maschinelles Rechnen (U)
Band 58 Gelfand/Glagolewa/Schnol, Funktionen und graphische Darstellungen (BGT)
Band 59 Kaloujnine, Primzahlzerlegung (DVW)
Band 60 Trachtenbrot, Wieso können Automaten rechnen? (DVW)
Band 61 Boltjanski-Gochberg, Kombinatorische Geometrie (DVW)
Band 62 Varga, Mathematische Logik für Anfänger II (VWV)
Band 63 Maibaum, Wahrscheinlichkeitsrechnung (VWV)
Band 64 Wilenkin, Unterhaltsame Mengenlehre (BGT)
Band 65 Belkner, Metrische Räume (BGT)
Band 66 Jäckel, Mathematik heute (U)
Band 67 Sedláček, Keine Angst vor Mathematik (FV)
Band 68 Schreiber, Die Mathematik und ihre Geschichte im Spiegel der Philatelie (BGT) (1980)
Band 69 Gronitz, Praktische Mathematik (VWV)
Band 70 Hilbert, Matrizen (VWV)
Band 71 Wissensspeicher Mathematik (VWV)
Band 72 Steinhaus, 100 neue Aufgaben (U)
Band 73 Miller, Gelöste und ungelöste mathematische Probleme (BGT)
Band 74 Solodownikow, Lineare Ungleichungssysteme (DVW)
Band 75 Golowina/Jaglom, Vollständige Induktion in der Geometrie (DVW)
Band 76 Rehm, Zahl, Menge, Gleichung (KB)
Band 77 Lehmann, Kurzweil durch Mathe (U)
Band 78 Kordemski, Köpfchen, Köpfchen! (U)
Band 79 Glade/Manteuffel, Am Anfang stand der Abacus (U)
Band 80 Baschmakowa, Diophant und diophantische Gleichungen (DVW)
Band 81 Pieper, Zahlen aus Primzahlen (DVW)
Band 82 Lehmann, Mathe mit Pfiff (U)
Band 83 Jaglom, Ungewöhnliche Algebra (BGT)
Band 84 Belkner, Reelle Vektorräume (BGT)
Band 85 Stahl/Wenzel, Elektronische Datenverarbeitung (VWV)
Band 86 Göttner/Fischer/Krieg, Was ist, was kann Statistik? (U)
Band 87 Übungen für Junge Mathematiker, Teil 4: Borneleit, Gleichungen (BGT)
Band 88 Kolman, Die vierte Dimension (BGT)
Band 89 Drews, Lineare Gleichungssysteme und lineare Optimierungsaufgaben (DVW)
Band 90 Lovász/Pelikán/Vesztergombi, Kombinatorik (BGT)
Band 91 Rehm, Strecke, Kreis, Zylinder (KB)
Band 92 Fanghänel/Vockenberg, Arbeiten mit Mengen (VWV)
Band 93 Fehringer, Näherungsrechnung (VWV)
Band 94 Lohse, Elementare Statistik (VWV) (1981)
Band 95 Kantor/Solodownikow, Hyperkomplexe Zahlen (BGT)
Band 96 Smogorschewski, Lobatschewskische Geometrie (BGT)
Band 97 Berg, Differentialgleichungen 2. Ordnung mit Anwendungen (DVW)
Band 98 Ruben, Philosophie und Mathematik (BGT)
Band 99 Thiele, Mathematische Beweise (BGT)
Band 100 Lehmann, 2 × 2 plus Spaß dabei (VWV)

BÜCHER helfen beim Studieren

Autorenkollektiv
(Karl-Marx-Universität Leipzig)

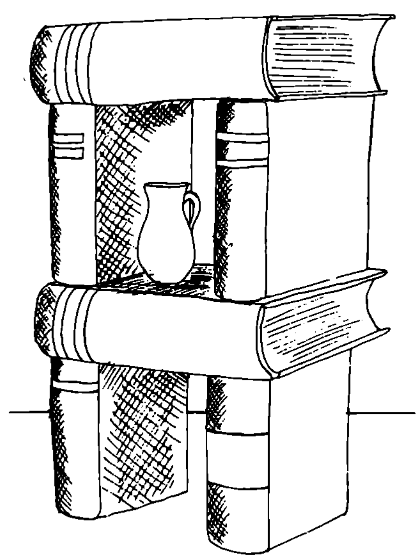
Studienwunsch Mathematik

162 Seiten mit 8 Abbildungen, 7,90 M
Bestell-Nr. 665 781 7 (BGT)

Engel, W./U. Pirl

Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR

Band I, Band II je 6,00 M
Bestell-Nr. 00 21 70-1 bzw. 00 21 71-1 (VWV)



Hilbert, A.

Mathematische Arbeitsgemeinschaften

272 Seiten mit 120 Abbildungen, etwa 7,65 M
Bestell-Nr. 707 441 0 (VWV)

Petigk, J.

Mathematik in der Freizeit

167 Seiten mit zahlreichen Abbildungen, 8,80 M, Bestell-Nr. 685 694 7
Verlag Tribüne, Berlin

Koch, S.

Anleitung zum Lösen mathematischer Aufgaben

136 Seiten mit 61 Bildern, 7,80 M
Bestell-Nr. 545 850 9 (FV)

Berge, M.

Außerunterrichtliche Leistungsvergleiche in der Unterstufe

183 Seiten mit zahlreichen Abbildungen, 6,50 M, Bestell-Nr. 28 15 12-3 (VWV)

Berane, E./K.-H. Gärtner/H. Lohse

Wiederholungsprogramm Gleichungen und Funktionen

214 Seiten mit 92 Abbildungen, 7,80 M
Bestell-Nr. 546 528 2 (FV)

Im vorliegenden Buch werden iterative und direkte Verfahren der Numerischen Mathematik in relativ elementarer Form dargestellt. Die numerischen Methoden, mit denen der Leser vertraut gemacht wird, werden an Beispielen erläutert, bei denen sich alle Rechenschritte vollständig in Formeln ausführen lassen. – Während an Vorkenntnissen nicht einmal der gesamte Schulstoff erforderlich ist, wird jedoch vom Leser eine gewisse Gewandtheit im Umgang mit algebraischen Ausdrücken erwartet. Die jedem Abschnitt beigefügten Aufgaben sollen helfen, das erworbene Wissen zu überprüfen und zu vertiefen.

Ruben, P.

Philosophie und Mathematik (Bd. 98)

122 Seiten, 8,50 M
Bestell-Nr. 665 909 7

Der Autor gibt eine marxistische Darstellung der Grundzüge der Philosophie der Mathematik in kurzer und übersichtlicher Form, wobei die dialektische Betrachtungsweise eine hervorragende Rolle spielt.

Thiele, R.

Mathematische Beweise (Bd. 99)

176 Seiten mit 67 Abbildungen, 8,60 M
Bestell-Nr. 665 919 3

In dem Buch wird gezeigt, welche Beweismethoden es gibt, was beispielsweise ein Existenz- oder Unitätsbeweis bezweckt, wie die einzelnen Beweisverfahren funktionieren und wie man sie einsetzt. Viele Beispiele und historische Anmerkungen helfen, das Verständnis für mathematische Beweise zu vertiefen und dienen gleichzeitig zur Auflockerung der Darstellung.

Drinfel'd, I. G.

Quadratur des Kreises und Transzendenz von π (Bd. 101)

Übersetzung aus dem Russischen
138 Seiten mit 18 Abbildungen,
8,00 M, Bestell-Nr. 570 895 0

Das Buch behandelt das bekannte klassische Problem, allein mit Hilfe von Zirkel und Lineal einen beliebigen Kreis in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln. In diesem Zusammenhang werden folgende Probleme behandelt: algebraische und transzendente Zahlen, das Cantorsche Diagonalverfahren, der binomische Satz, die Zahl e, die Eulersche Formel, Logarithmen komplexer Zahlen, der Hauptsatz über symmetrische Polynome und der Beweis der Transzendenz von π.
Eine Einleitung und drei Anhänge stellen historische Bezüge her und bereichern den Stoff u. a. durch die Lösungen einiger vom Autor gestellter Aufgaben.

Autorenkollektiv

Mathematisches Mosaik (Bd. 102)

Herausgeber Endre Hódi
Übersetzung aus dem Ungarischen
318 Seiten mit 220 Zeichnungen, 9,50 M
Bestell-Nr. 653 447 0

Der Band enthält 16 in bunter Folge aneinandergereihte Aufsätze, in denen namhafte ungarische Mathematiker interessante Probleme in unterhaltsamer Form behandeln. Die geometrischen Aufsätze – Graphentheorie, Parkettierungs- und Färbungsprobleme – oder die Beiträge über Mathematik auf dem Schachbrett, mathematische Probleme des Toto-Lotto-Spiels sowie die Aufsätze über Wahrscheinlichkeitsrechnung werden eine große Leserzahl zum Mitknobeln auffordern.

Band 101	Drinfel'd, Quadratur des Kreises und Transzendenz von π (DVW)
Band 102	Hódi, Mathematisches Mosaik (U)
Band 103	Quaisser/Sprengel, Räumliche Geometrie (DVW) (1981)
Band 104	Kufner, Raum und Entfernung (Wie man in der Mathematik mißt) (BGT) (1981)
Band 105	Klotzek, Einführung in die Differentialgeometrie I (DVW) (1981)
Band 106	Schröder, Mathematik im Reich der Töne (BGT) (1982)
Band 107	Kästner, Algebra für Schüler (BGT) (1983)
Band 108	Klotzek, Einführung in die Differentialgeometrie II (DVW) (1982)
Band 109	Belkner/Brehmer, Riemannsche Integrale (DVW) (1982)
Band 110	Pieper, Die komplexen Zahlen (DVW) (1982)
Band 111	Lehmann, 222 historische Aufgaben aus 444 Jahrzehnten (U) (1983)

BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft (BGT)
7010 Leipzig, Postfach 930

Der Kinderbuchverlag (KB)
1080 Berlin, Postfach 1225

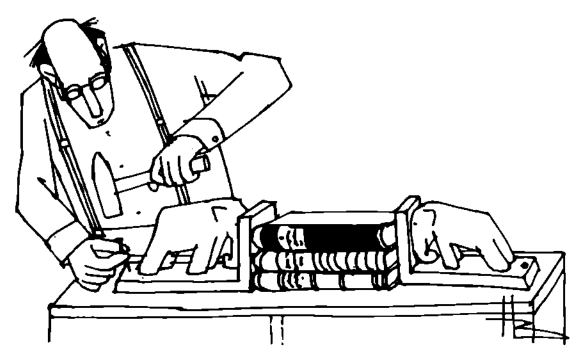
Urania-Verlag (U)
7010 Leipzig, Postfach 969

VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften (DVW)
1080 Berlin, Postfach 1216

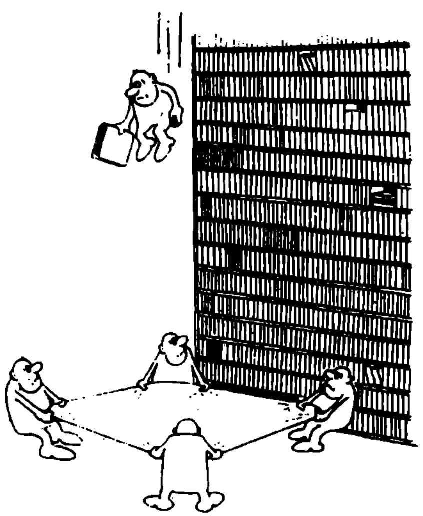
VEB Fachbuchverlag (FV)
7031 Leipzig, Postfach 67

Volk und Wissen Volkseigener Verlag (VWV)
1080 Berlin, Postfach 1213

Redaktionsschluß: 22. April 1981



Eine Auswahl mathematischer Jugendliteratur



Görke, L., K. Ilgner, G. Lorenz, G. Pietzsch, M. Rehm

Rund um die Mathematik (Bd. 34)

160 Seiten mit etwa 260 Abbildungen, 9,80 M, Bestell-Nr. 628 190 1

Das Buch führt unterstützt von einer ansprechenden grafischen Gestaltung und zahlreichen Illustrationen auf unterhaltsame Weise in die Mathematik ein. Durch interessante Problemstellungen (Wie findet man aus einem Labyrinth heraus?), verblüffend wirkende Fragen (Was hat Häkeln mit Mathematik zu tun?) und humorvolle Anknüpfungspunkte (Wie die Schildbürger ihre Glocke versenkten) werden die einzelnen Kapitel des Buches aufgelockert, wird die Neugier des Lesers geweckt. Jeweils ausgehend von einem reizvollen Problem der Umwelt wird dessen mathematischer Kern herausgearbeitet, wobei der Leser stets zum Mitdenken, zum selbständigen Durchdenken angeregt wird.

Übungen für Junge Mathematiker

Lehmann, E.

Teil 1 Zahlentheorie (Bd. 36)

159 Seiten mit 22 Abbildungen, 6,50 M
Bestell-Nr. 665 102 8

In Form von Beispielen, Aufgaben, Lösungen, Beweisen und Bemerkungen wird der Schüler mit dem Stoff vertraut gemacht. Die reine Theorie bleibt auf ein Mindestmaß beschränkt, um einem breiten Leserkreis ohne besondere Vorkenntnisse ein Eindringen in die Zahlentheorie zu ermöglichen.

Grosche, G.

Teil 2 Elementargeometrie (Bd. 37)

92 Seiten mit 74 Abbildungen, 4,50 M
Bestell-Nr. 665 466 7

An Hand von Aufgaben wird Lehrstoff aus der Elementargeometrie vermittelt. Auf längere theoretische Unterweisungen hat der Verfasser zugunsten praktischer Übungen weitgehend verzichtet.

Kleinfeld, G.

Teil 3 Ungleichungen (Bd. 38)

134 Seiten mit 20 Abbildungen, 5,50 M
Bestell-Nr. 665 467 5

Dieses Büchlein bringt eine Aufgabensammlung über Ungleichungen, die methodisch geschickt zusammengestellt sind, so daß der Leser beim Lösen der Aufgaben auch immer in die Theorie eindringt. Zur Vorbereitung der Mathematikolympiaden ist dieser Titel zu empfehlen.

Rauminhaltsmessung ein. Durch anregende Fragen wird die Freude am Knobeln und Experimentieren geweckt.
Es ist vor allem für Schüler der Klassen 4 und 5 geeignet.

Fanghänel, G. und H. Vockenberg

Arbeiten mit Mengen (Bd. 92)

152 Seiten mit 28 Abbildungen, 3,50 M
Bestell-Nr. 707 053 2

Das Buch dient als Lehrmaterial für die Durchführung der Arbeitsgemeinschaft „Arbeiten mit Mengen" im Rahmen des Wahlunterrichts in den Klassen 9 und 10 im Fach Mathematik. Es schließt sich inhaltlich eng an den obligatorischen Unterricht an. Neben den stofflichen Erläuterungen sind zahlreiche Beispiele und Aufgaben mit Lösungen enthalten, die zur Festigung und Vertiefung der Kenntnisse aus dem obligatorischen Unterricht beitragen.

Fehringer, K.

Näherungsrechnen – Gleichungen – Ungleichungen (Bd. 93)

Einige Probleme
der praktischen Mathematik

156 Seiten mit 61 Abbildungen, 3,70 M
Bestell-Nr. 707 150 0

Auf der Grundlage des Rahmenprogramms für die Arbeitsgemeinschaft „Praktische Mathematik" der Klassen 9 und 10 werden Kenntnisse vermittelt, die unmittelbar auf den Stoff des Mathematikunterrichts der Klassen 8 bis 10 aufgebaut sind.

Kantor, I. L. und A. S. Solodownikow

Hyperkomplexe Zahlen (Bd. 95)

Übersetzung aus dem Russischen
156 Seiten mit 18 Abbildungen, 9,00 M
Bestell-Nr. 665 871 3

Die uns aus dem täglichen Leben bekannten Zahlen sind vielfach verallgemeinert worden, um mathematische und naturwissenschaftliche Probleme lösen zu können. Das Buch behandelt Erweiterungen des reellen Zahlenkörpers und kann somit als Arbeitsmaterial für Schülerarbeitsgemeinschaften verwendet werden. Nachdem kurz über reelle und komplexe Zahlen gesprochen wird, wendet sich das Buch insbesondere den Quaternionen zu, die sowohl in der Mathematik als auch Physik von großer Bedeutung sind.

Smogorschewski, A. S.

Lobatschewskische Geometrie (Bd. 96)

Übersetzung aus dem Russischen
75 Seiten mit 43 Abbildungen, 6,00 M
Bestell-Nr. 665 842 2

Die Entwicklung der nicht-euklidischen Geometrie ist mathematikgeschichtlich, aber auch mathematisch gesehen eines der interessantesten und merkwürdigsten Gebiete, dessen Bedeutung weit über die Mathematik hinausgeht und bis in die Physik, Kosmologie und Philosophie reicht. In populärwissenschaftlicher Weise legt der Autor die von Lobatschewski entwickelte Geometrie dar.

Berg, L.

Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Anwendungen (Bd. 97)

131 Seiten mit 35 Abbildungen, 8,20 M
Bestell-Nr. 570 774 7

Das Lehrmaterial dient Schülern der Klassen 9 und 10 für ihre Tätigkeit in einer Arbeitsgemeinschaft. Nach Hinweisen zur Bedeutung und zur Geschichte der elektronischen Datenverarbeitung sowie nach einigen Ausführungen zur Kybernetik, zur mathematischen Logik und zum dualen Zahlensystem werden die Bestandteile eines Computers, also Rechenwerk, Speicher, Eingabewerk usw., beschrieben.

Borneleit, P.

Teil 4 Gleichungen (Bd. 87)

125 Seiten mit 6 Abbildungen, 6,50 M
Bestell-Nr. 665 788 4

Das Büchlein stellt Übungsmaterial für mathematische Schülerzirkel, insbesondere in Vorbereitung der Mathematikolympiaden bereit. Es ist eine echte Ergänzung des entsprechenden Schullehrstoffes, da auch Gleichungen und Gleichungssysteme betrachtet werden, die u. a. Beträge und Fakultäten enthalten. Auch Diophantische Gleichungen treten auf.

Drews, K.-D.

Lineare Gleichungssysteme und lineare Optimierungsaufgaben (Bd. 89)

154 Seiten mit 14 Abbildungen
und 28 Tabellen, 7,50 M
Bestell-Nr. 570 221 7

Dieses Bändchen gibt einen Einblick in die Problematik linearer Gleichungssysteme, die Matrizenrechnung und die Bestimmung von Lösungen linearer Optimierungsaufgaben. Es ist bestimmt für Schüler der Abiturstufe und Studenten, die die Mathematik als Handwerkszeug gebrauchen. Deshalb werden die Matrizenrechnung und die Theorie der linearen Gleichungssysteme mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus und der Äquivalenz von Gleichungssystemen behandelt. Dann folgt die Einführung allgemeiner Begriffe (lineare Unabhängigkeit, Rang, usw.).
Die Darstellung wird ergänzt durch das Gauß-Seidel-Verfahren, die Simplexmethode und eine Methode zur Lösung des Transportproblems. Zahlreiche Flußdiagramme und Aufgaben zu allen Kapiteln fördern das Verständnis des Stoffes.

Lovász, L., J. Pelikán
und K. L. Vesztergombi

Kombinatorik (Bd. 90)

Übersetzung aus dem Ungarischen
132 Seiten mit 62 Abbildungen, 6,00 M
Bestell-Nr. 665 824 6

Das Buch führt in erzählender Form in Abzählprobleme ein und geht dann weiter zu arithmetischen Anwendungen der Kombinatorik, zu kombinatorischen Fragen der Geometrie (Färbungsprobleme, Graphen, ...) und zu Blocksystemen. Es wird stets, von interessanten Einzelfällen ausgehend, die Verallgemeinerung gewonnen.

Rehm, M.

Strecke, Kreis, Zylinder (Bd. 91)

Reihe Mein kleines Lexikon
80 Seiten mit 115 Abbildungen, 5,80 M
Bestell-Nr. 629 770 0

Dieses Büchlein ist ein reichhaltig illustriertes, kleines Lexikon, das Eigenschaften und gegenseitige Beziehungen einfacher ebener und räumlicher Gebilde erklärt, erworbene Kenntnisse festigt und erweitert. Es stellt alphabetisch geordnet mathematische Figuren und Körper vor, weist auf deren Vorkommen in unserer Umwelt hin und geht auf Umfangsberechnung sowie auf Flächen- und

Gelfand, I. M., E. G. Glagolewa
und E. E. Schnol

Funktionen und ihre graphische Darstellung (Bd. 58)

Übersetzung aus dem Russischen
127 Seiten mit 132 Abbildungen
und 9 Tafeln, 7,00 M
Bestell-Nr. 665 600 5

Der Behandlung von Funktionen und ihrer graphischen Darstellung wird in der Schule ein weiter Raum gegeben, da sie in nahezu allen Bereichen von Wissenschaft und Technik eine hervorragende Rolle spielen. Der Inhalt des vorliegenden Buches ist eine Erweiterung und Vertiefung des Lehrplanstoffes; wesentliche Teile knüpfen genau dort an, wo die schulmäßige Behandlung endet. Mit elementaren Mitteln wird die systematische Kurvendiskussion wirksam vorbereitet und ergänzt.

Maibaum, G.

Wahrscheinlichkeitsrechnung (Bd. 63)

224 Seiten mit 48 Abbildungen, 7,00 M
Bestell-Nr. 706 214 5

Das Buch kann als Lehrmaterial im Rahmen des fakultativen Unterrichts in der Abiturstufe verwendet werden. Darüber hinaus soll es interessierten Erwachsenen wie auch Studenten technischer, natur- und geisteswissenschaftlicher Fachrichtungen ein relativ bequemer, da pädagogisch wohldurchdachter, Zugang zu einer mathematischen Disziplin sein, die sich in den verschiedenartigen Anwendungsgebieten (Ökonomie, Psychologie, Medizin, Biologie u. a.) zunehmender Verbreitung erfreut.

Wilenkin, N. J.

Unterhaltsame Mengenlehre (Bd. 64)

Übersetzung aus dem Russischen
184 Seiten mit 82 Abbildungen, 6,50 M
Bestell-Nr. 665 636 3

In dem Buch wird die für alle mathematischen Disziplinen fundamentale Mengenlehre aufgelockert, interessant, aber trotz alledem streng dargestellt. Die Behandlung der abstrakten mathematischen Tatsachen wird durch viele interessante Beispiele, z. B. aus der Theorie der reellen Zahlen, den sogenannten Paradoxien der Mengenlehre u. a. immer wieder belebt.

Schreiber, P.

Die Mathematik und ihre Geschichte im Spiegel der Philatelie (Bd. 68)

104 S. mit 16 Tafeln,
9,80 M, Bestell-Nr. 665 984 7

Das Buch soll sowohl breite Kreise zur Beschäftigung mit Wissenschaftsgeschichte anregen als auch Anleitung zur Gestaltung von Motivsammlungen geben. Die Markensammlung gibt einen chronologischen Überblick über die Entwicklung der Mathematik und ihrer nächsten Nachbargebiete von der Antike bis zur Gegenwart, insbesondere auch die Wechselwirkung zwischen Mathematik und ihren Anwendungen in Naturwissenschaft, Technik und Ökonomie.

Hilbert, A.

Matrizenrechnung (Bd. 70)

160 Seiten mit zahlr. Abbildungen, 4,00 M
Bestell-Nr. 706 733 3

In verständlicher Form werden Schüler der Klassen 11 und 12, die am Kurs *Matrizenrechnung* im Rahmen des fakultativen Unterrichts teilnehmen, in die Grundlagen dieses Teilgebiets der Mathematik eingeführt. Dabei wird auch auf die Anwendung der Matrizenrechnung in der Elektrotechnik und in der Ökonomie eingegangen.

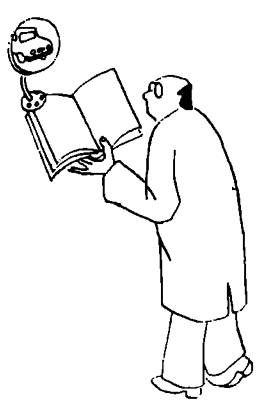
Mader, O. und D. Richter

Wissensspeicher Mathematik (Bd. 71)

Differentialrechnung – Integralrechnung – Vektorrechnung
Das Wichtigste bis zum Abitur in Stichworten und Übersichten

216 Seiten mit zahlr. Abbildungen, 6,00 M
Bestell-Nr. 706 975 0

Der Wissensspeicher gibt eine zusammengefaßte Darstellung des Unterrichtsstoffes Mathematik der Klassen 11 und 12. Er eignet sich besonders für Wiederholungen, Vertiefungen und Systematisierungen sowie zur Vorbereitung auf Prüfungen. Das Nachschlagewerk stellt die Fortsetzung der Ausführungen im bekannten Buch *Mathematik in Übersichten* dar, das den Unterrichtsstoff bis einschließlich zur 10. Klasse enthält.



Rehm, M.

Zahl, Menge, Gleichung (Bd. 76)

Reihe Mein kleines Lexikon
96 Seiten, etwa 70 Abbildungen, 5,80 M
Bestell-Nr. 629 077 9

Das Büchlein ist ein reichhaltig illustriertes, kleines Lexikon, das erworbene Kenntnisse über Begriffe, Grundgesetze und Verfahren in der Arithmetik der natürlichen Zahlen auf unterhaltsame Weise festigt, erweitert und vertieft, einige wichtige Zusammenhänge einsichtig macht und begründet sowie Freude am Mitdenken und Knobeln erweckt. Es ist vor allem für Schüler der Klassen 4 und 5 geeignet.

Lehmann, J.

Kurzweil durch Mathe (Bd. 77)

200 Seiten mit 171 teilweise mehrfarbigen Abbildungen, 19 vierfarb. Illustrationen, 10,00 M, Bestell-Nr. 653 575

Anliegen dieses Buches ist es, das Interesse für Mathematik zu wecken, mathematische Grundkenntnisse zu wiederholen und zu vertiefen, zum logischen Denken anzuregen und die Rechenfertigkeiten zu üben. In 266 mathematischen Aufgaben zu verschiedenen Sachgebieten werden unterhaltsame Probleme dargestellt, deren oft überraschende Lösungen mit logischen Betrachtungen und zumeist geringem Rechenaufwand auffindbar sind.

Kordemski, B. A.

Köpfchen, Köpfchen! (Bd. 78)

Mathematik zur Unterhaltung

328 Seiten mit 493 zweifarbigen Zeichnungen, 12,00 M
Bestell-Nr. 653 034 9

„Köpfchen, Köpfchen" muß man haben, wenn verzwickte Aufgaben zu lösen sind. Manche „Nuß" läßt der Autor dieses ebenso reizvollen wie lehrreichen Buches den Leser knacken, um ihn plaudernd ins Reich der Zahlen und Figuren und ihren fesselnden Zusammenhängen und Gesetzen zu führen. Spannend enthüllt er anhand der vier Grundrechenarten die vielfältigen Eigenschaften der Zahlen.

Baschmakowa, I. G.

Diophant und diophantische Gleichungen (Bd. 80)

Übersetzung aus dem Russischen
97 Seiten mit 6 Abbildungen, 4,40 M
Bestell-Nr. 570 151 3

Neben den einschlägigen Teilen des Werkes von Euklid sind es die erhalten gebliebenen Bände des alexandrinischen Mathematikers Diophant, die den Ausgangspunkt der Zahlentheorie bilden. Diophantische Gleichungen höheren Grades führten zu interessanten Fragestellungen, die sich bis in unser Jahrhundert hinein erstrecken. Die bekannte sowjetische Mathematikhistorikerin I. G. Baschmakowa zeichnet den Bogen nach, der sich von den alten Griechen bis zu modernen Forschungsrichtungen und -ergebnissen spannt.

Pieper, H.

Zahlen aus Primzahlen (Bd. 81)

167 Seiten, 6,70 M
Bestell-Nr. 570 150 5

In diesem Bändchen wird der Begriff der p-adischen Zahlen als ein Grundbegriff der Zahlentheorie und Algebra für einen breiten Leserkreis verständlich dargestellt. p-adische Zahlen sind additiv aus einer Primzahl p aufgebaute Zahlen, mit denen man in geeigneter Weise addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren kann. Diese von K. Hensel eingeführten Zahlen sind heute aus der Zahlentheorie und Algebra nicht mehr wegzudenken. In der Zahlentheorie hat ihre Einführung zu einer neuartigen Betrachtungsweise geführt, die heute große Teile der modernen Algebra beherrscht.

Jaglom, I. M.

Ungewöhnliche Algebra (Bd. 83)

Übersetzung aus dem Russischen
95 Seiten mit 45 Abbildungen, 5,50 M
Bestell-Nr. 665 789 2

Das Buch führt in die Grundlagen der Booleschen Algebra ein, die eine wesentliche Rolle in der mathematischen Logik, der Kybernetik u. a. mathematischen Disziplinen spielt. Ein Kapitel über Schaltalgebra stellt den Bezug zur praktischen Anwendung in der Rechentechnik vor.
Gemeinschaftsausgabe mit dem Verlag MIR, Moskau

Belkner, H.

Reelle Vektorräume (Bd. 84)

174 Seiten mit 49 Abbildungen, 9,50 M
Bestell-Nr. 665 711 2

Es werden wichtige Grundbegriffe der Mathematik, wie z. B. Vektor, Zahlenfolge, Linearkombination, Basis, Dimension, Unterraum, Abstandsfunktion, Metrik, euklidischer Vektorraum u. a. m. in für Schüler, bei völliger Exaktheit, leicht verständlicher Form dargeboten. Das Bändchen ist deshalb gut geeignet, dem Schüler den Übergang zur Hochschulmathematik zu erleichtern.

Stahl, F. und E. Wenzel

Elektronische Datenverarbeitung (Bd. 85)

112 Seiten mit 59 Abbildungen, 3,00 M
Bestell-Nr. 706 491 7

Ein mathematischer Zweikampf

Leseprobe aus: Wegbereiter der neuen Mathematik

Die wesentlichsten Entdeckungen europäischer Mathematiker in der Algebra wurden im Renaissancezeitalter (15. bis 16. Jahrhundert) gemacht, und in erster Linie muß man hier die Lösung der kubischen Gleichung nennen. Scipio del Ferro (1456 bis 1526), Professor an der Universität Bologna, fand eine Lösung der Gleichung

$$x^3 + ax = b \quad (b > 0)$$

in Radikalen, veröffentlichte sie aber nicht, sondern teilte sie seinem Schüler Fiore mit. Die Geheimhaltung mathematischer Entdeckungen war typisch für jene Zeit – es war üblich, wissenschaftliche Zweikämpfe durchzuführen, auf denen die Parteien einander eine Reihe von Aufgaben stellten, und das alleinige Wissen um Lösungsmethoden konnte einer der Seiten beträchtliche Vorteile verschaffen. Der Gewinner des Zweikampfes erhielt eine Auszeichnung, Anerkennung und die sich daraus ergebenden Vorteile.

In einem solchen Zweikampf traf Fiore auf N. Tartaglia (1499 bis 1557), dessen wirklicher Name wahrscheinlich Fontano lautete. Den Spitznamen Tartaglia (= Stotterer) trug er seit einer in der Kindheit erlittenen schweren Verwundung des Kehlkopfs, die ihm zugefügt worden war, als seine Vaterstadt von den Truppen des französischen Königs Franz I. besetzt war.

Die Armut erlaubte es Tartaglia nicht, sich eine ausreichende Bildung zu erwerben, und er konnte nur bis zu seinem vierzehnten Lebensjahr studieren. In seinem Buch „Fragen und verschiedene Erfindungen" schreibt er über die Schwierigkeiten und die erlittene Entbehrungen: „Von da an mußte ich mich selbst weiterbilden, und ich hatte keinen anderen Erzieher als den Begleiter der Armut – die Unternehmungslust." Später lehrte Tartaglia in Verona, Piacenza, Venedig und Brescia Mathematik. Er ist durch seine Arbeiten aus der Mathematik und Mechanik bekannt. Der Zweikampf war auf den 12. Februar 1535 festgelegt. Tartaglia hatte angenommen, Fiore leicht besiegen zu können; als er jedoch erfuhr, daß Fiore das Geheimnis von del Ferro kannte, setzte er alle Kunst und Mühe daran, die Regel von del Ferro auch herauszufinden. Er fand sie acht Tage vor dem festgelegten Zeitpunkt. Auf dem Zweikampf löste er alle ihm vorgelegten Aufgaben. Fiore jedoch (nach Tartaglias Worten) nicht eine. Einen Tag nach dem Zweikampf löste Tartaglia auch die Gleichung

$$x^3 = ax + b.$$

Die Gleichung $x^3 + ax = b$ mit a, $b > 0$ löste Tartaglia folgendermaßen: Er führte zwei Hilfsgrößen u und v ein, die den Bedingungen

$$u - v = b;\ uv = \left(\frac{a}{3}\right)^3$$

gehorchen. Diese Größe fand er als Wurzeln der quadratischen Gleichung $y^2 - by - \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 0$ und kam zu einer Lösung der gegebenen Gleichung in der Form $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$, d. h.

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3} + \frac{b}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3} - \frac{b}{2}}.$$

Analog verfuhr Tartaglia auch mit der Gleichung $x^3 = ax + b$, nur setzte er hier $u + v = b$; $uv = \left(\frac{a}{3}\right)^3$, was zur quadratischen Gleichung $y^2 + by + \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 0$ und dem Ergebnis $x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$, d. h. zu

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3} + \frac{b}{2}} + \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3} - \frac{b}{2}}$$

führte.

Man muß bedenken, daß die Lösung nicht in der heutigen Symbolik, sondern rhetorisch gegeben wurde. Allerdings benutzte Tartaglia in seinem „Allgemeinen Traktat über Zahlen und Maße" (1556 bis 1560) Bezeichnungen (z. B. x = co, x^2 = ce, x^3 = cu, x^4 = ce ce), die sich durch Abkürzungen der Worte cosa (Ding), censo (Quadrat), cubo (Würfel) und censo de censo (Quadrat des Quadrats) ergeben. Tartaglia folgte darin L. Paccioli (etwa 1445 bis 1514).

Der Mathematiker, Philosoph und Arzt G. Cardano erfuhr von Tartaglias Entdeckung und unternahm alles, um in den Besitz derselben zu gelangen. 1539 gelang es ihm unter dem heiligen Versprechen, nichts davon zu veröffentlichen, die Formulierung des Lösungsweges von Tartaglia zu erfragen. Tartaglia war vorsichtig – er gab seine Regel in Form eines 25zeiligen Gedichts weiter, das so begann:

Quando che'l cubo con le cose appresso,
Se agguaglia a qualche numero discreto,
Trovan dui altri, differenti in esso ...

(Wenn Rüfel und Ding zusammen irgendeiner Zahl gleich sind, dann finde zwei andre, von ihm unterschiedliche ...)

Cardano dechiffrierte die Regel von Tartaglia und bewies ihre Richtigkeit. Er suchte auch del Ferros Schwiegersohn in Bologna auf und erfuhr von dessen Lösung, die mit der von Tartaglia übereinstimmte. 1545 brach er sein Tartaglia gegebenes Versprechen und veröffentlichte in dem Traktat „Hohe Kunst in Fragen der Algebra" die Lösung von del Ferro und Tartaglia, wobei er allerdings auf Tartaglias Autorenschaft hinwies.

Seitdem wird jedoch die entsprechende Formel nach Cardano benannt. Im selben Traktat veröffentlichte Cardano eine Methode zur Lösung von Gleichungen vierten Grades, die sein Schüler L. Ferrari (1522 bis 1565) gefunden hatte.

Nikiforowski, Wiktor A., und Leon S. Freiman

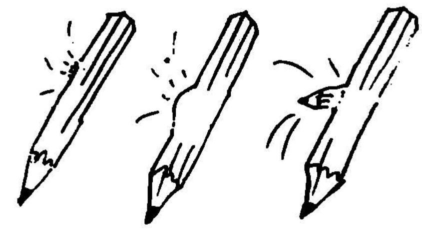
Wegbereiter der neuen Mathematik

Übersetzung aus dem Russischen
VEB Fachbuchverlag Leipzig 1978
222 Seiten mit 37 Bildern,
12,5 cm × 20 cm, Broschur 5,50 M
Bestell-Nr. 546 411 6

In diesem populärwissenschaftlichen Buch wird ein bedeutender Abschnitt aus der Geschichte der Mathematik beschrieben: die erste Hälfte des 17. Jahrhunderts, in der die Grundlage zur analytischen Geometrie und zur Infinitesimalrechnung gelegt wurden. Vier große Männer stehen im Mittelpunkt des Geschehens: Descartes, Fermat, Torricelli, de Roberval. Ihre wissenschaftlichen Ergebnisse werden im Zusammenhang mit den gesellschaftlichen Verhältnissen jener Zeit allgemeinverständlich dargestellt. Leserkreis: alle an populärwissenschaftlichen Darstellungen Interessierten, Oberschüler, Studenten an Fachschulen, Lehrer, Mathematiker.
Inhaltsverzeichnis: Vorgänger; Descurtes; Fermat; Torricelli; Roberval; Schlußwort.
Gemeinschaftsausgabe des Verlags MIR Moskau und des VEB Fachbuchverlag Leipzig

In freien Stunden · alpha heiter

Unterhaltungsmathematik
aus der Mathematischen Schülerbücherei



Stanisław Skowryski

Eine Wägungsaufgabe

In seinem Mathematikbuch stellt der berühmte Mathematiker Leonardo von Pisa (13. Jh.) folgende Aufgabe: Es sind fünf Wägestücke anzugeben, mit denen man jeden Körper von 1 kg bis 30 kg wiegen kann, dessen Maßzahl eine ganze Zahl ist, wenn man die Wägestücke nur auf *eine* Waagschale legen darf.

aus: Bausteine des Wissens, Mathematik (MSB Bd. 3)

Rund um das Schachbrett

Wir verbinden zwei benachbarte Ecken des Schachbretts $ABCD$ mit dem Mittelpunkt M der gegenüberliegenden Seite. Dadurch entsteht ein Dreieck T. Es ist festzustellen, wie viele geschlossene Felder des Schachbretts in die rechtwinkligen Dreiecke ABM und DCM fallen.

aus: Methoden zur Lösung mathematischer Aufgaben (MSB Bd. 5)

Wo steckt der Fehler?

Die Gleichung $\frac{a-x}{1-ax} = \frac{1-bx}{b-x}$ ist zu lösen.

Lösung:

$$(a-x)(b-x) = (1-ax)(1-bx)$$
$$ab - ax - bx + x^2 = 1 - bx - ax + abx^2$$
$$x^2 = 1 + abx^2 - ab$$
$$x^2 - 1 = ab(x^2 - 1)$$
$$1 = ab$$

aus: Wo steckt der Fehler (MSB Bd. 11)

Kryptarithmetik

Als Schüler den Fachunterrichtsraum betraten, fanden sie an der Wandtafel einen unvollständigen Text, den ihnen ein gewitzter Lehrer in der Pause angeschrieben hatte. Wer vervollständigt ihn?

aus: Kurzweil durch Mathe (MSB Bd. 77)

a) $\frac{5}{*} - \frac{*}{3} = \frac{1}{6}$ a) $37{,}3 * \frac{1}{2} = 74\frac{3}{5}$

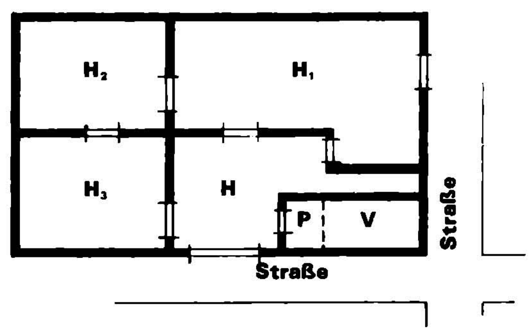
b) $\frac{9}{*} - \frac{*}{21} = \frac{17}{42}$ b) $\frac{33}{40} * \frac{10}{11} = 0{,}75$

c) $\frac{1}{2} + \frac{*}{4} = \frac{*}{4}$ c) $0{,}45 * \frac{1}{20} = \frac{2}{5}$

d) $\frac{*}{8} - \frac{1}{*} = \frac{3}{8}$ d) $0{,}375 * \frac{1}{40} = 0{,}4$

In einem Zuge

Das Bild zeigt den Plan eines Werkgeländes mit dem Hof H, den Hallen H_1, H_2, H_3 und dem Verwaltungsgebäude V, in das die Pförtnerloge P eingebaut ist. Der Betriebsschutz will auf seinem Nachtrundgang alle Tore und Türen nur einmal durchschreiten und sie danach sofort verschließen. Selbstverständlich soll der Gang in P enden, und das Verschließen von P vor dem Rundgang wird nicht mitgerechnet. Ist ein solcher Gang möglich? Wo müßte er beginnen, und auf welchem Wege könnte er erfolgen?



Begegnung von zwei Eisenbahnzügen

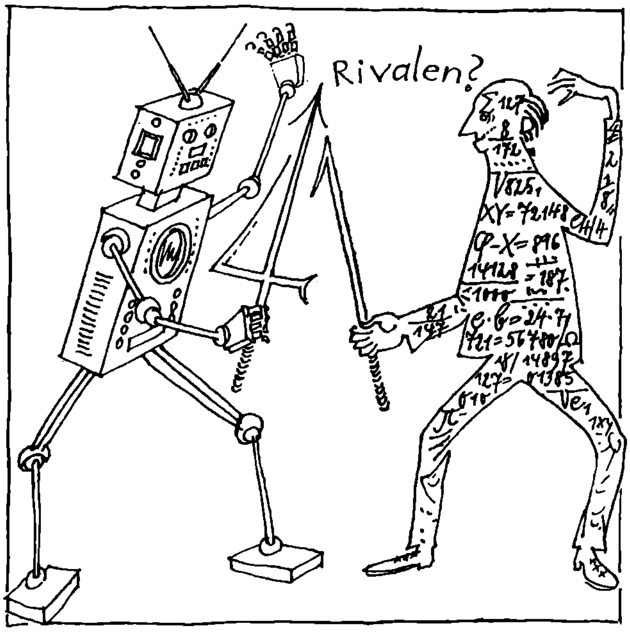
Zwei Güterzüge, jeder 250 m lang, begegnen einander mit der gleichen Geschwindigkeit von $45\,\text{km} \cdot h^{-1}$. Wieviel Sekunden verstreichen von dem Augenblick, in dem die Lokführer einander begegnen, bis zu dem Augenblick, in dem die Zugführer in den letzten Waggons einander begegnen?

aus: Köpfchen, Köpfchen! (MSB Bd. 78)

Kombinatorik

In einem Sportgeschäft kann man Fußballdresse in vier Farben, Hosen in drei Farben und Wadenschutz in zwei Farben kaufen. Wieviel verschiedene Ausrüstungen kann man hieraus zusammenstellen?
(Je zwei sollen sich in mindestens einem Kleidungsstück unterscheiden.)

aus: Kombinatorik (MSB Bd. 90)



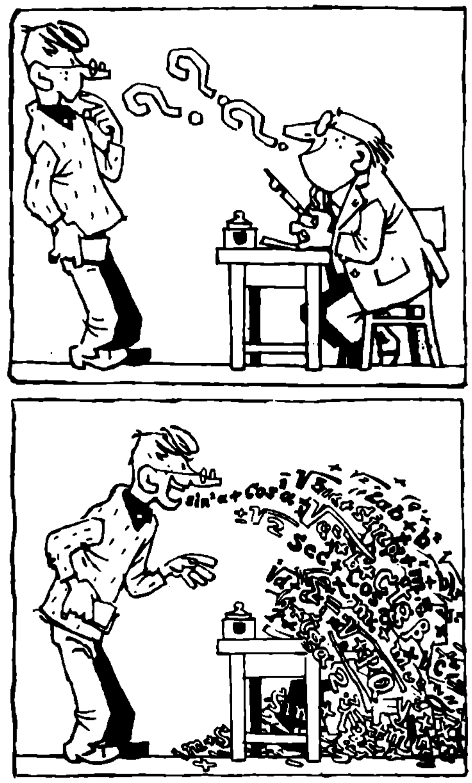
aus: Mathematik heute (MSB Bd. 66)

Ein wenig Mengenlehre

In einer Klasse sind 12 Schüler aktive Fußballer in der Schulmannschaft, 18 Schüler besuchen den Zirkel „Junge Sanitäter“, 14 Schüler sind Mitglieder des Schulchores, und nur 2 Schüler gehören keiner dieser AGs an.
Die Anzahl der Schüler läßt sich dann genau ermitteln, wenn man zusätzlich folgende Angaben kennt:
8 Fußballer nehmen am Zirkel „Junge Sanitäter“ teil.
5 Fußballer sind Mitglieder des Chores.
7 Chormitglieder nehmen am Zirkel „Junge Sanitäter“ teil.
2 Schüler sind Fußballer, Chormitglieder und außerdem gehören sie auch dem Zirkel „Junge Sanitäter“ an.

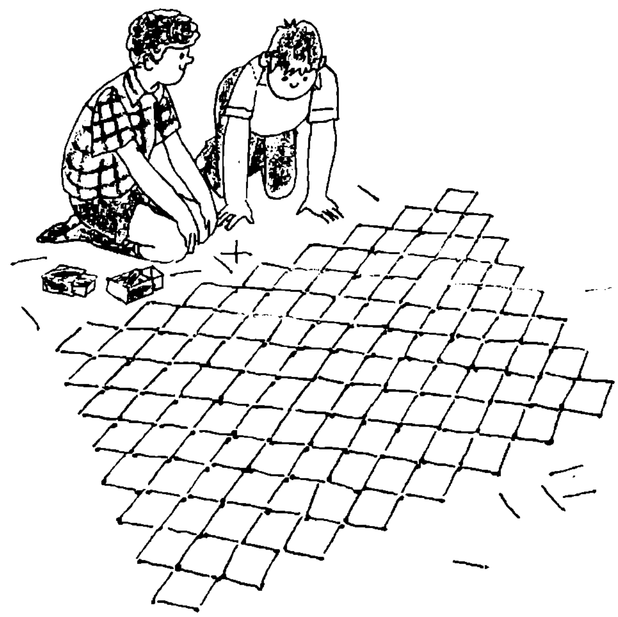
aus: Arbeiten mit Mengen (MSB Bd. 92)

Ein Vorkommnis während der Prüfung



aus: Mathe mit Pfiff (MSB Bd. 82)

Spiel mit Hölzchen



Karl zeigt seinem Freund Friedrich stolz die abgebildete Figur, die, wie er ihm erklärt, aus 114 Quadraten bestehe. Friedrich besieht sich Karls Werk und behauptet kühn, er könne, ohne die Lage auch nur eines der Hölzchen zu verändern, erreichen, daß die Figur nur noch 113 Quadrate besitze. Karl glaubt ihm das einfach nicht, aber Friedrich hatte tatsächlich nicht zu viel versprochen. Was meinst du zu Friedrichs Behauptung? *aus: Gut gedacht ist halb gelöst (MSB Bd. 53)*

XX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Bezirksolympiade (7./8. Februar 1981)

Aufgaben

Olympiadeklasse 7

1. Von einer natürlichen Zahl z wird gefordert, daß sie sich in vier Summanden zerlegen läßt, die die folgenden Bedingungen erfüllen:
Der erste Summand beträgt zwei Drittel der Zahl z,
der zweite Summand beträgt ein Viertel des ersten Summanden,
der dritte Summand beträgt vier Fünftel des zweiten Summanden,
der vierte Summand beträgt ein Viertel des dritten Summanden,
der dritte Summand beträgt 48.
Untersuche, ob diese Bedingungen erfüllbar sind!
Ist dies der Fall, so ermittle alle natürlichen Zahlen z und ihre Zerlegungen in vier Summanden, die diese Bedingungen erfüllen!

2. Gegeben seien sieben Strecken mit den Längen 1 cm, 3 cm, 5 cm, 7 cm, 9 cm, 11 cm und 15 cm.

a) Gib die Anzahl aller verschiedenen Möglichkeiten an, drei von diesen sieben Strecken auszuwählen! Dabei sollen solche Möglichkeiten, die sich nur in der Reihenfolge der ausgewählten Strecken unterscheiden, nicht als verschieden gewertet werden.

b) Gib unter den in a) gefundenen Möglichkeiten alle diejenigen an, bei denen aus den Längen der drei ausgewählten Strecken als Seitenlängen ein Dreieck konstruiert werden kann!

c) Berechne, wieviel Prozent der in a) gefundenen Möglichkeiten die in b) gefundenen Möglichkeiten sind! (Der Prozentsatz ist auf eine Dezimale nach dem Komma gerundet anzugeben.)

3. Es sei S der Scheitel eines spitzen Winkels, dessen Schenkel mit s_1 und s_2 bezeichnet seien. Es werde vorausgesetzt, daß auf dem Strahl s_1 zwei voneinander und von S verschiedene Punkte A, B liegen und daß auf dem Strahl s_2 drei voneinander und von S verschiedene Punkte C, D, E liegen, wobei folgendes gilt: Die Punkte S, A, B sind auf s_1 in dieser Reihenfolge angeordnet; die Punkte S, C, D, E sind auf s_2 in dieser Reihenfolge angeordnet; es ist

$$\overline{SC}=\overline{CA}=\overline{AD}=\overline{DB}=\overline{BE}$$

und $\overline{SB}=\overline{SE}$.
Ermittle aus diesen Voraussetzungen die Größe α des Winkels $\sphericalangle BSE$!

4. Horst, der aktiv Sport treibt, erzählt seinem Freund: „In vier Jahren habe ich insgesamt an 21 Wettkämpfen teilgenommen, in jedem Jahr an mindestens einem Wettkampf. Dabei war die Anzahl der Wettkämpfe von Jahr zu Jahr größer; im vierten Jahr war sie genau dreimal so groß wie im ersten Jahr."
Untersuche, ob es für die Wettkämpfe in den einzelnen Jahren Anzahlen gibt, die Horsts Angaben entsprechen, und ob aus den Angaben diese Anzahlen eindeutig hervorgehen! Ist das der Fall, so ermittle diese vier Anzahlen!

5. Von einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ wird vorausgesetzt, daß sich die beiden Kreise, die die Seiten AD bzw. BC des Trapezes als Durchmesser haben, von außen berühren.
Beweise aus dieser Voraussetzung, daß die Summe der Längen der Seiten AB und CD gleich der Summe der Längen der Seiten AD und BC ist!

6. In eine Leihbibliothek kamen während eines Tages Schüler aus jeder der Klassenstufen 6, 7 und 8; dies waren insgesamt 85 Schüler. Genau ein Drittel der Schüler der Klassenstufe 6, genau ein Drittel der Schüler der Klassenstufe 7 und genau ein Viertel der Schüler der Klassenstufe 8, das waren insgesamt 26 Schüler, entliehen Bücher aus der Bibliotheksreihe „Mathematische Schülerbücherei". Außerdem ergab sich aus Gesprächen, daß genau ein Zehntel der Schüler der Klassenstufe 7 an der Mathematikolympiade des Kreises teilgenommen hatte.
Untersuche, ob aus diesen Angaben die Anzahlen der Schüler der Klassenstufe 6, der Klassenstufe 7 und der Klassenstufe 8 eindeutig hervorgehen! Ist das der Fall, so ermittle diese drei Anzahlen!

Olympiadeklasse 8

1. Uwe erzählt: „In den Winterferien machten wir mit einer Reisegesellschaft eine Fahrt in den Harz. Daran nahmen nicht mehr als 80 Personen teil, und zwar waren es genau 3 Männer weniger als Frauen und genau 20 Erwachsene mehr als Kinder. Unterwegs wurden wir in genau 7 Gruppen von gleicher Personenzahl aufgeteilt."
Ermittle alle Möglichkeiten, die Anzahlen der Männer, Frauen und Kinder so anzugeben, daß Uwes Aussagen zutreffen!

2. Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen n mit der Eigenschaft, daß das Produkt aus den einzelnen Ziffern von n gleich dem Fünffachen der Quersumme von n ist!

3. Konstruiere ein Dreieck ABC aus $r=4$ cm; $b=6$ cm und $c=7$ cm! Dabei seien r der Umkreisradius des Dreiecks und b, c die Längen der Seiten AC bzw. AB des Dreiecks ABC.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

4. Auf einem Tisch liegen vier Spielkarten mit der Bildseite nach unten. Sie sind von links nach rechts in einer Reihe angeordnet, mit gleich großen Abständen jeweils zwischen unmittelbar benachbarten Karten (siehe Bild).

Den Mitspielern werden folgende Angaben mitgeteilt: Die vier Karten sind ein Bube, eine Dame, ein König und ein As, jede Karte in einer der vier Farben Kreuz, Pik, Herz, Karo, wobei jede dieser Farben genau einmal vertreten ist. Ferner gilt:
(1) Die Dame ist weiter vom As entfernt als das As vom König.
(2) Der Bube liegt näher am As als der König.
(3) Von der Herzkarte bis zur Karokarte ist der Abstand geringer als von der Kreuzkarte bis zur Herzkarte.
(4) Die Karokarte liegt weiter entfernt von der Herzkarte als von der Pikkarte.
(5) Die Pikkarte liegt unmittelbar benachbart links neben der Dame.
Beweise, daß aus diesen Angaben eindeutig hervorgeht, um welche Karten es sich handelt und in welcher Reihenfolge von links nach rechts sie auf dem Tisch liegen!

5. Zwei Strahlen s_1 und s_2, die von einem Punkt S ausgehen und miteinander einen rechten Winkel bilden, mögen von zwei zueinander parallelen Geraden g und h geschnitten werden. Die Gerade g schneide s_1 in A und s_2 in C, die Gerade h schneide s_1 in B und s_2 in D. Ferner gelte $\overline{SB}=5$ cm, und der Flächeninhalt des Dreiecks SAC betrage genau 36% des Flächeninhalts des Dreiecks SBD.

Ermittle aus diesen Voraussetzungen die Länge der Strecke SA!

6. Von zwei Dreiecken ABC_1 und ABC_2 werden die folgenden Eigenschaften (1), (2) und (3) vorausgesetzt:

(1) $\sphericalangle C_1AB = \sphericalangle C_2AB$,

(2) $\overline{BC_1} = \overline{BC_2}$

(3) $\overline{AC_1} < \overline{AC_2}$.

Beweise aus dieser Voraussetzung, daß die Umkreise der Dreiecke ABC_1 und ABC_2 gleiche Radien haben!

Olympiadeklasse 9

1. In dem folgenden Schema sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtig gerechnete Divisionsaufgabe ohne Rest entsteht. Dabei können verschiedene Buchstaben auch durch die gleiche Ziffer ersetzt werden. Wie üblich darf eine mehrstellig geschriebene Zahl nicht die Anfangsziffer 0 haben.
Beweisen Sie, daß es genau eine Ersetzung dieser Art gibt, die den Anforderungen der Aufgabe genügt! Ermitteln Sie diese Ersetzung!

$$\begin{array}{l} a\ b\ c\ 5\ 5 : 5\ d\ e = f\ 5\ g \\ h\ i\ 5 \\ \hline j\ k\ m\ n \\ p\ 5\ q\ r \\ \hline \quad s\ t\ u\ v \\ \quad w\ x\ y\ z \end{array}$$

2. Es seien a, b, c, d positive reelle Zahlen, für die $a > b > c > d$ sowie $a + d = b + c$ vorausgesetzt wird.
Beweisen Sie, daß dann stets $a^2 + d^2 > b^2 + c^2$ gilt!

3. Von einem Rechteck $ABCD$ und einem Punkt P in seinem Innern wird
$\overline{PA} = \sqrt{2}$ cm, $\overline{PB} = \sqrt{3}$ cm, $\overline{PC} = \sqrt{5}$ cm
vorausgesetzt.
Beweisen Sie, daß die Länge $\overline{PD}$ durch diese Voraussetzungen eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie diese Länge!

4. Ermitteln Sie alle Paare $(a; b)$ natürlicher Zahlen a, b mit $a > b$, für die die folgenden Aussagen (1), (2), (3) zutreffen!
(1) Die Zahl a ist (in dekadischer Ziffernschreibweise) zweistellig, die Zahl b ebenfalls.
(2) Vertauscht man die Ziffern von a miteinander, so erhält man b.
(3) Subtrahiert man b^2 von a^2, so erhält man eine Quadratzahl.

5. Beweisen Sie, daß man den Körper eines regulären Tetraeders $ABCD$ so durch eine Ebene schneiden kann, daß die Schnittfläche ein Quadrat ist!
Berechnen Sie aus der gegebenen Kantenlänge a des Tetraeders $ABCD$ den Flächeninhalt I eines solchen Quadrates!
Hinweis: Unter dem Körper eines regulären Tetraeders $ABCD$ versteht man denjenigen Körper, der von den Flächen der Dreiecke ABC, ABD, ACD und BCD begrenzt wird, wobei
$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{BD} = \overline{CD}$ gilt.

6. Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus $b = 7$ cm, $\beta = 40°$ und $h_b = 5$ cm!
Dabei sollen b die Länge der Seite AC, β die Größe des Winkels $\sphericalangle CBA$ und h_b die Länge der von B ausgehenden Höhe bedeuten.
Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion! Untersuchen Sie, ob es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck ABC gibt, das die geforderten Größen b, β und h_b aufweist!

Olympiadeklasse 10

1. In einem Stadtbezirk Berlins nahmen in der Olympiadeklasse 10 insgesamt 50 Schüler an der 2. Stufe der OJM teil. Die folgenden Angaben beziehen sich auf diesen Teilnehmerkreis:
(1) Es nahmen ebensoviel Jungen wie Mädchen teil.
(2) Genau 24 der Teilnehmer, darunter genau 15 Jungen, waren Mitglieder einer AG Mathematik.
(3) Genau 13 der Teilnehmer erhielten Preise oder Anerkennungsurkunden. (Diese 13 Teilnehmer werden im folgenden „Preisträger" genannt.)
(4) Genau 12 der Preisträger waren Mitglieder einer AG Mathematik.
(5) Genau 6 der Preisträger waren Mädchen.
(6) Es waren nur solche Mädchen Preisträger, die einer AG Mathematik angehörten.
Ermitteln Sie die Anzahl derjenigen teilnehmenden Jungen, die weder Preisträger waren noch einer AG Mathematik angehörten!

2. Ermitteln Sie alle reellen Zahlen a mit der Eigenschaft, daß das folgende Ungleichungssystem (1), (2), (3) mindestens eine (aus reellen Zahlen x, y bestehende) Lösung hat!

$$2y + x < 20, \qquad (1)$$
$$y - x < 4, \qquad (2)$$
$$y - ax \geq 6. \qquad (3)$$

3. Gegeben sei ein Punkt P in einer Ebene ε. Untersuchen Sie, ob es in ε ein Quadrat $ABCD$ gibt, für das
$\overline{PA} = \sqrt{2}$ cm, $\overline{PB} = \sqrt{5}$ cm, $\overline{PC} = \sqrt{8}$ cm
gilt! Wenn das der Fall ist, so ermitteln Sie für jedes derartige Quadrat seine Seitenlänge!

4. Ermitteln Sie alle Tripel (a, h, x) von Null verschiedener natürlicher Zahlen mit folgender Eigenschaft!
Wenn a und h die Maßzahlen der in Zentimeter gemessenen Grundkantenlänge bzw. Höhenlänge einer geraden quadratischen Pyramide sind, dann hat sowohl die in Quadratzentimeter gemessene Oberfläche als auch das in Kubikzentimeter gemessene Volumen dieser Pyramide die Maßzahl x.

5. Tausend reelle Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_{1000}$ seien durch die Festsetzung bestimmt, daß

$$x_1 = 3$$

und für alle $n = 1, 2, \ldots, 999$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 4}{2x_n}$$

gelten soll.
Beweisen Sie, daß (nach diesen Festsetzungen) für jedes $n = 1, 2, \ldots, 1000$ die Ungleichung

$$x_n > 2$$

gilt!

6. Konstruieren Sie ein Dreieck ABC, in dem die Längen a, b, c der Seiten BC, CA, AB und die Größen β, γ der Winkel $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$ die Bedingungen
$a = 8$ cm, $b + c = 12$ cm, $\beta + \gamma = 100°$
erfüllen!
Begründen und beschreiben Sie Ihre Konstruktion!
Beweisen Sie, daß alle Dreiecke, die diesen Bedingungen genügen, einander kongruent sind!
Hinweis: In dieser Aufgabe werden auch Dreiecke ABC, $A'B'C'$ als „einander kongruent" bezeichnet, bei denen A', B', C' in irgend einer anderen Reihenfolge mit A, B, C zur Deckung gebracht werden können.

Olympiadeklasse 11/12

1. Man ermittle alle reellen Zahlen x, für die das folgende System von Ungleichungen (1), (2), (3) erfüllt ist:

$$x^4 + x^2 - 2x \geq 0, \qquad (1)$$
$$2x^3 + x - 1 < 0, \qquad (2)$$
$$x^3 - x > 0. \qquad (3)$$

2. Es sei f die durch
$f(x) = x^4 - (x+1)^4 - (x+2)^4 + (x+3)^4$
definierte Funktion, wobei der Definitionsbereich von f
a) die Menge aller ganzen Zahlen,
b) die Menge aller reellen Zahlen ist.
Man untersuche sowohl für den Fall a) als auch für den Fall b), ob die Funktion f einen kleinsten Funktionswert annimmt, und ermittle, falls das zutrifft, jeweils diesen kleinsten Funktionswert!

3.A Es sind alle natürlichen Zahlen n zu ermitteln, die die folgende Eigenschaft haben:
Für alle reellen Zahlen a und b mit $0 < a < b$ gilt

$$a + \frac{1}{1 + a^n} < b + \frac{1}{1 + b^n}.$$

3.B Ist f eine im Intervall $0 \leq x \leq 1$ definierte Funktion, so seien für sie die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) betrachtet:
(1) Für jedes reelle x mit $0 \leq x \leq 1$ gilt $f(x) \geq 0$.
(2) Es gilt $f(1) = 1$.
(3) Für jedes reelle x_1 mit $0 \leq x_1 \leq 1$ und jedes reelle x_2 mit $0 \leq x_2 \leq 1$ und $x_1 + x_2 \leq 1$ gilt $f(x_1 + x_2) \geq f(x_1) + f(x_2)$.

a) Man beweise:

Wenn f eine Funktion ist, die den Bedingungen (1), (2), (3) genügt, so gilt $f(x)<2x$ für jedes reelle x mit $0<x\leqq 1$.

b) Man überprüfe, ob auch die folgende Aussage wahr ist: Wenn f eine Funktion ist, die den Bedingungen (1), (2), (3) genügt, so gilt $f(x)\leqq 1{,}99\cdot x$ für jedes reelle x mit $0<x\leqq 1$.

4. Man ermittle alle diejenigen ganzen Zahlen k, für die die Gleichung
$$\frac{x}{k-4}+\frac{k}{2(k-4)}+\frac{k+4}{x}=0$$
lösbar ist (d. h. mindestens eine Lösung x besitzt), wobei alle Lösungen x ganzzahlig sind.

5. Man beweise, daß für jede natürliche Zahl n die folgende Aussage gilt:
Wenn die Anzahl der Ecken eines regelmäßigen Vielecks gleich $3n$ ist, dann gibt es kein rechtwinkliges Koordinatensystem, in dem beide Koordinaten jedes Eckpunktes dieses Vielecks rationale Zahlen sind.

6. Man zeige, daß zu jeder natürlichen Zahl $n\geqq 1$ und jeder natürlichen Zahl $B>1$ eine natürliche Zahl $C\geqq 1$ existiert, die im Positionssystem mit der Basis B nur aus Ziffern „Null" und „Eins" besteht und durch n teilbar ist.

Lösungen

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. K. Rosenbaum,
Heft 1/81:

▲2053▲ a) Lösung von Domingo Lovis, Kl. 11 der Lenin-Schule, Havanna, Kuba:
In den Bezeichnungen von Bild 1 ergibt sich aus der Aufgabenstellung
$$\frac{\overline{B'A_2}}{\overline{AB'}}=\frac{\overline{A'B_1}}{\overline{BA'}}=\frac{2}{3};$$
folglich ist $AB\parallel A'B'$.
Analog ergibt sich $AC\parallel A'C'$ und $BC\parallel B'C'$, womit die Ähnlichkeit
(1) $\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$
gezeigt ist.
Zum Nachweis der Eigenschaft (2) gehen wir von
$$\frac{\overline{B'A_2}}{\overline{AB'}}=\frac{2}{3}\text{ über zu }\frac{\overline{B'A_2}}{\overline{AB'}}+1=\frac{\overline{B'A_2}+\overline{AB'}}{\overline{AB'}}=\frac{5}{3}.$$
Analog ist auch $\dfrac{\overline{C'A_1}+\overline{AC'}}{\overline{AC'}}=\dfrac{5}{3}$.
Nach dem Strahlensatz folgt hieraus
$$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{B'C'}}=\frac{5}{3},\text{ also }\overline{BC}=3\overline{A_1A_2}=5\overline{B'C'}.$$
Analog ist $\overline{AB}=5\overline{A'B'}$ und $\overline{AC}=5\overline{A'C'}$, so daß sich für die betrachteten Flächeninhalte wie behauptet
$F=25F'$ ergibt.

b) Lösung von Domingo Lovis, Kl. 11 der Lenin-Schule, Havanna, Kuba:
In den Bezeichnungen von Bild 2 ergibt sich aus der Aufgabenstellung
$$\frac{\overline{B'A_{n-1}}}{\overline{AB'}}=\frac{\overline{C'B_{n-1}}}{\overline{BC'}}=\frac{n-1}{n}.$$
Folglich ist $AB\parallel A'B'$.
Analog ergibt sich $AC\parallel A'C'$ und $BC\parallel B'C'$, womit (1) gezeigt ist.
Zum Nachweis von (2) gehen wir von
$$\frac{\overline{B'A_{n-1}}}{\overline{AB'}}=\frac{n-1}{n}\text{ über zu }\frac{\overline{B'A_{n-1}}}{\overline{AB'}}+1=\frac{\overline{B'A_{n-1}}+\overline{AB'}}{\overline{AB'}}=\frac{2n-1}{n}.$$
Analog ist auch $\dfrac{\overline{C'A_1}+\overline{AC'}}{\overline{AC'}}=\dfrac{2n-1}{n}$.
Nach dem Strahlensatz folgt hieraus
$$\frac{\overline{A_1A_{n-1}}}{\overline{B'C'}}=\frac{2n-1}{n}.$$
Wegen $\overline{BC}=\dfrac{n}{n-2}\overline{A_1A_{n-1}}$ ist daher
$$\overline{BC}=\frac{n\overline{A_1A_{n-1}}}{n-2}=\frac{2n-1}{n-2}\overline{B'C'}.$$
Analog ist
$$\overline{AB}=\frac{2n-1}{n-2}\overline{A'B'}\text{ und }\overline{AC}=\frac{2n-1}{n-2}\overline{A'C'}.$$
Hieraus ergibt sich für die betrachteten Flächeninhalte wie behauptet
$$F=\left(\frac{2n-1}{n-2}\right)^2F'.$$

Lösungen zu: Grundkenntnisse in Geometrie gefragt

▲1▲ Der Winkel $\sphericalangle CAB$ hat die Größe $180°-90°-45°=45°$. Aus $\sphericalangle CAB=\sphericalangle CBA$ folgt $\overline{AC}=\overline{BC}$. Somit stellt die erste Figur ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck dar. Das Lot von C auf $\overline{AB}$ habe den Fußpunkt M; dann ist M Mittelpunkt von $\overline{AB}$, und $\overline{CM}$ hat die Länge 4 cm. Daraus folgt für den Flächeninhalt $A=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 4\text{ cm}^2=16\text{ cm}^2$.

▲2▲ Aus $\overline{CB}\cong\overline{CD}$ und $\overline{AB}\cong\overline{AD}$ folgt, daß die zweite Figur ein Drachenviereck darstellt. Somit hat auch der Winkel $\sphericalangle ADC$ die Größe 105° und folglich der Winkel $\sphericalangle BAD$ die Größe 60°. Da das Dreieck ABD gleichschenklig ist, hat jeder der Winkel $\sphericalangle ABD$ und $\sphericalangle ADB$ ebenfalls die Größe 60°. Das Dreieck ABD ist somit gleichwinklig, also auch gleichseitig. Es sei S der Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$; dann hat $\overline{CS}$ die Länge 4 cm und $\overline{AS}$ die Länge $4\cdot 3$ cm. Für den Flächeninhalt des Drachenvierecks $ABCD$ gilt somit
$$A=\frac{1}{2}\cdot e\cdot f=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot(4+4\cdot\sqrt{3})\text{ cm}^2$$
$$=16\cdot(1+\sqrt{3})\text{ cm}^2\approx 43{,}7\text{ cm}^2.$$

▲3▲ Da drei Innenwinkel des Vierecks $ABCD$ die Größe 90° haben, ist auch der vierte Innenwinkel ein Rechter. Das Viereck $ABCD$ ist somit ein Rechteck. Der Winkel $\sphericalangle ACB$ hat die Größe 60°. Aus der Kongruenz der Dreiecke $\triangle ACB$ und $\triangle ACD$ folgt, daß der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ gleich dem Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge 8 cm ist. Für den Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ gilt deshalb $A=\frac{1}{4}\cdot 8^2\cdot\sqrt{3}\text{ cm}^2=16\cdot\sqrt{3}\text{ cm}^2$
$\approx 27{,}7\text{ cm}^2$.

▲4▲ Das Lot von D auf $\overline{AB}$ habe den Fußpunkt F. Im Dreieck AFD hat der Winkel $\sphericalangle ADF$ die Größe 30°. In einem rechtwinkligen Dreieck, dessen spitze Winkel die Größen 60° und 30° besitzen, ist die Hypotenuse doppelt so lang wie die kürzere der beiden Katheten. Wegen $\overline{AF}=\frac{1}{2}\cdot(8-4)\text{ cm}=2$ hat $\overline{AD}$ die Länge 4 cm. Verbinden wir den Mittelpunkt M von $\overline{AB}$ mit C und D, so erhalten wir drei gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge 4 cm. Für den Flächeninhalt des gleichschenkligen Trapezes $ABCD$ gilt deshalb
$$A=3\cdot\frac{1}{4}\cdot 4^2\cdot\sqrt{3}\text{ cm}^2=12\cdot\sqrt{3}\text{ cm}^2$$
$$\approx 20{,}8\text{ cm}^2.$$

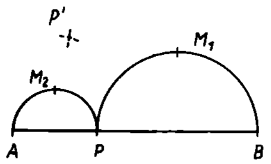
▲5▲ Der Winkel $\sphericalangle ACD$ hat die Größe 45°. Das Dreieck ACD ist somit ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck. Der Winkel $\sphericalangle ACB$ hat die Größe 30° und folglich der Winkel $\sphericalangle CAB$ die Größe 60°. Deshalb hat $\overline{AC}$ die Länge $2\cdot 8\text{ cm}=16$ cm. Für den Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$ gilt somit
$$A=a=\left(\frac{1}{2}\cdot 16^2+\frac{1}{4}\cdot 16^2\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$$
$$=64\cdot(2+\sqrt{3})\text{ cm}^2\approx 238{,}9\text{ cm}^2.$$

Lösungen zu: Zwei Geometrieaufgaben von Jörg Pietschmann

▲2082▲ Nach dem Höhensatz gilt
$$h_c^2=p\cdot q. \quad (1)$$
Nach dem Kathetensatz gilt
$$a^2=p\cdot c\text{ bzw. }p=\frac{a^2}{c} \quad (2)$$
und $$b^2=q\cdot c\text{ bzw. }q=\frac{b^2}{c}. \quad (3)$$
Setzt man (2) und (3) in (1) ein, so erhält man
$$h_c^2=\frac{a^2\cdot b^2}{c^2}$$
und wegen des Satzes des Pythagoras
$$h_c^2=\frac{a^2\cdot b^2}{a^2+b^2}.$$
Daraus folgt
$$\frac{1}{h_c^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2\cdot b^2}\text{ bzw.}$$
$$\frac{1}{h_c^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\text{ bzw.}$$
$$h_c^{-2}=a^{-2}+b^{-2},\text{ w. z. b. w.}$$

▲2083▲ Nach dem Satz des Thales beträgt die Größe der Winkel $\sphericalangle AM_2P$ und $\sphericalangle BM_1P$ jeweils 90°.
Die Größe der Winkel $\sphericalangle AP'P$ und $\sphericalangle PP'B$ beträgt jeweils 45°, da diese Winkel Peripheriewinkel über denselben Bögen wie die Zentriwinkel $\sphericalangle AM_2P$ bzw. $\sphericalangle PM_1B$ sind.

Damit beträgt die Größe des Winkels $\sphericalangle AP'B$ 90°. Nach der Umkehrung des Satzes des Thales liegt der Punkt P' auf dem Halbkreis über $\overline{AB}$, w.z.b.w.



Die beiden Aufgaben und Lösungen wurden bearbeitet von dem langjährigen Aufgabenexperten der *alpha*, Oberlehrer Dr. W. Fregin, IfL Leipzig.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 6/80:

Ma 5 ■2026 Da in diesem Haus vier Familien mit insgesamt sechs Kindern wohnen, und da jede Familie entweder genau ein oder genau zwei Kinder hat, sind es zwei Familien mit genau einem und zwei Familien mit genau zwei Kindern. Da die beiden Familien Ackermann und Dahlmann je genau ein Kind haben, gehören zu den Familien Brauer und Christensen je genau zwei Kinder. Da Gudrun 11 Jahre und die Tochter der Familie Ackermann 8 Jahre alt ist und unter den 6 Kindern nur zwei Mädchen vorkommen, hat Inge den Nachnamen Ackermann. Da die 11jährige Gudrun und der 13jährige Egon Geschwister sind, zur Familie Brauer aber Zwillinge gehören, haben Gudrun und Egon den Nachnamen Christensen. Hans heißt nicht Brauer, da er mit dem Sohn der Familie Brauer befreundet ist; deshalb hat Hans den Nachnamen Dahlmann. Folglich sind Fred und Jochen die Zwillinge mit dem Nachnamen Brauer.

Ma 5 ■2027 Angenommen, Heinz hat im dritten Laden n Mark ausgegeben; dann hat er im zweiten Laden $3n$ Mark, im ersten Laden $2n$ Mark bezahlt. Insgesamt hat Heinz von seiner Mutter $4 \cdot 2n = 8n$ Mark erhalten. Nun gilt

$$\begin{aligned} 2n+3n+n+10 &= 8n,\\ 8n &= 6n+10,\\ 2n &= 10,\\ n &= 5. \end{aligned}$$

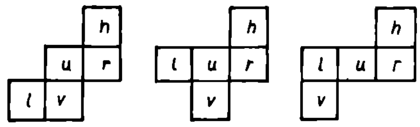
Heinz erhielt von seiner Mutter $8 \cdot 5$ M $= 40$ M zum Einkauf.

Ma 5 ■2028 Aus (a) folgt: Der Tischtennisspieler heißt nicht Joachim. Aus (d) folgt: Der Speerwerfer heißt nicht Joachim. Folglich ist Joachim der 100-m-Läufer.
Aus (a) und (b) folgt: Die Bronzemedaille wurde im Tischtennis, die Silbermedaille im Speerwurf, also die Goldmedaille im 100-m-Lauf erkämpft.
Aus (c) folgt: Der Tischtennisspieler heißt Thomas. Folglich heißt der Speerwerfer Frank.

Sportart	Medaille	Name
100-m-Lauf	Gold	Joachim
Speerwurf	Silber	Frank
Tischtennis	Bronze	Thomas

Ma 5 ■2029 Es müßte entweder das Quadrat mit der Ziffer 4 oder das mit der Ziffer 7 oder das mit der Ziffer 8 noch ausgeschnitten werden. Wir erhalten dann folgende drei Würfelnetze für oben offene Würfel:

a) b) c)



Ma 5 ■2030 a) Die Figur enthält acht Dreiecke, die den Punkt A als Eckpunkt haben; es sind die Dreiecke AEI, AEH, ABD, ABN, AIH, AND, ACD, ABC.
b) Die Figur enthält 14 Vierecke, die den Punkt G als Eckpunkt haben; es sind die Vierecke $GCNM$, $GCIH$, $GCBM$, $GCAH$, $GDNL$, $GDKF$, $GDBF$, $GDAL$, $GMNL$, $GMKF$, $GMBF$, $GHEF$, $GHIL$, $GHAL$.

Ma 5 ■2031 Es seien n die einstellige natürliche Zahl und z_1, z_2 die beiden zweistelligen natürlichen Zahlen. Dann gilt $z_1 - 9 = z_2$ mit $z_1 = 80 + n$ und $z_2 = 10 \cdot n + 8$. Durch Einsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned} 80+n-9 &= 10n+8,\\ 71+n &= 10n+8,\\ 9n &= 63,\\ n &= 7. \end{aligned}$$

Probe: $87 - 9 = 78$.
Es existiert genau eine solche Zahl; sie lautet 7.

Ma 6 ■2032 Für die zu ermittelnden natürlichen Zahlen a, b, c gilt

$$a^2 = c \qquad (1)$$
$$3a = b \qquad (2)$$
und $$b = \frac{a+c}{2}, \text{ also } 2b = a + c. \qquad (3)$$

Aus (2) und (3) folgt $2 \cdot 3a = a + c$, $6a = a + c$, $c = 5a$. (4)
Aus (1) und (4) folgt $a^2 = 5a$ und wegen $a \neq 0$ gilt $a = 5$, also $b = 15$, $c = 25$.
Die gesuchten Zahlen sind 5, 15 und 25.

Ma 6 ■2033 Angenommen, n Schüler machten einen Ausflug; dann gilt

$$n + n + \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}n + 1 = 100,$$
$$\frac{11}{4} \cdot n = 99,$$
$$n = \frac{99 \cdot 4}{11} = 36.$$

Am Ausflug beteiligten sich 36 Schüler.

Ma 6 ■2034 Es sei n die Anzahl der Schüler dieser Klasse; dann gilt $16 < n < 24$. Da der fünfte Teil der Anzahl der Schüler dieser Klasse die Note 4 erhielt, muß n ein Vielfaches von 5 sein. Das trifft nur zu für $n = 20$. Dieser Klasse gehören 20 Schüler an. Aus $20 : 5 = 4$ folgt, daß 4 Schüler die Note 4 erhielten. Aus $20 - 4 = 16$ folgt, daß 16 Schüler die Noten 1, 2 oder 3 erhielten. Angenommen, x Schüler haben die Note 1, also $2x$ Schüler die Note 2 und $(3x - 14)$ Schüler die Note 3 erhalten; dann gilt

$$\begin{aligned} x+2x+(3x-14) &= 16,\\ 6x &= 30,\\ x &= 5. \end{aligned}$$

Es erhielten 5 Schüler die Note 1, 10 Schüler die Note 2 und 1 Schüler die Note 3.

Ma 6 ■2035 $1983 - 1977 = 6$. Angenommen, im Jahre 1977 war Axel n Jahre alt, also Claus $2n$ Jahre alt. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{2n \cdot 3 + 2}{4} &= n + 6,\\ 6n+2 &= 4 \cdot (n+6),\\ 6n+2 &= 4n+24,\\ 2n &= 22,\\ n &= 11. \end{aligned}$$

Im Jahre 1977 war Axel 11 Jahre alt.

Ma 6 ■2036 Es seien α, β die Größen der Basiswinkel, γ die Größe des Winkels an der Spitze des zu konstruierenden gleichschenkligen Dreiecks ABC. Wegen $\alpha = \beta$ und $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ gilt $2\alpha + \gamma = 180°$. Ferner gilt $\alpha + \gamma = 110°$. Daraus folgt $\alpha = 70°$ und somit $\gamma = 40°$. Wir zeichnen einen Winkel von der Größe 40° mit seinem Scheitelpunkt C. Auf den beiden Schenkeln tragen wir von C bis A und von C bis B Strecken der Länge 6 cm ab, und wir verbinden A mit B.

Ma 7 ■2037 $100\% - (30\% + 28\% + 21\%) = 21\%$. Angenommen, Angela bringt x Mark wieder mit nach Hause; dann hat sie beim Bäcker $2x$ Mark ausgegeben, und es gilt

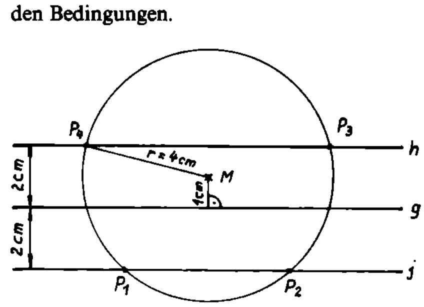
$$x + 2x = 21, 3x = 21, \text{ also } x = 7.$$

Angela brachte 7% des erhaltenen Geldes wieder mit nach Hause; als Taschengeld erhielt sie 3,5%. Nun gilt

$$3{,}5 : 100 = 2{,}1 : y, \text{ also } y = 60.$$

Also hat Angela von ihrer Mutter 60 M zum Einkauf erhalten.

Ma 7 ■2038 Alle Punkte, die von der gegebenen Geraden g den Abstand 2 cm haben, liegen auf den beiden zu g parallelen Geraden h und j, von denen jede den Abstand 2 cm von g hat. Alle Punkte, die von M den Abstand 4 cm haben, liegen auf dem Kreis k um M als Mittelpunkt mit dem Radius $r = 4$ cm. Die Schnittpunkte P_1, P_2, P_3, P_4 des Kreises k mit den Geraden h und j sind die zu konstruierenden Punkte; sie genügen beiden Bedingungen.



Ma 7 ▪2039 Angenommen, die Kanne faßt x Kubikzentimeter; dann gilt

$$5x=80\cdot 25\cdot 7+6000,$$
$$x=80\cdot 5\cdot 7+1200,$$
$$x=400\cdot 7+400\cdot 3,$$
$$x=400\cdot(7+3)$$
$$x=4000.$$

Die Kanne faßt 4000 cm³, das sind 4 Liter.

Ma 7 ▪2040 Angenommen, der große Würfel besteht aus n^3 Würfeln. Da von den kleinen Würfeln $5\cdot n^2$ Flächen sichtbar sind, gilt

$n^3=5\cdot n^2$, also

$n=5$ und somit $n^3=125$.

Der große Würfel besteht aus 125 kleinen gleich großen Würfeln.

Ma 8 ▪2041 Herr Schmidt hat recht.

Begründung: Es seien x, y bzw. z die Anzahl der Ein-, Zwei- bzw. Dreibettkabinen. Dann gilt für die Anzahl der Betten die folgende Gleichung

$$x+2y+3z=100. \qquad (1)$$

Nach Aufgabenstellung gilt die Nebenbedingung $z=x-5$. (2)

Setzt man (2) in (1) ein, so erhält man

$$x+2y+3(x-5)=100 \text{ bzw.}$$
$$4x+2y=115.$$

Die linke Seite der Gleichung kann bei keiner Belegung der Variablen x und y mit natürlichen Zahlen den Wert 115 annehmen, da $4x+2y$ stets eine gerade Zahl ergibt. Deshalb kann es nicht möglich sein, daß es insgesamt genau 100 Betten sind.

(*Bemerkung:* Die diophantische Gleichung $4x+2y=115$ ist nicht lösbar, da der größte gemeinsame Teiler der Zahlen 4 und 2, nämlich 2, kein Teiler von 115 ist!)

Ma 8 ▪2042 Wenn $\frac{3}{5}$ für die Spreewaldreise sind, so sind nach Aufgabenstellung $\frac{2}{5}$ für die Ostseereise. $\frac{1}{5}$ entspricht demnach 12 Schülern. Daraus folgt, daß in beide Klassen zusammen 60 Schüler gehen. Nach der angegebenen Bedingung sind in Klasse 8a 31 Schüler, in Klasse 8b 29 Schüler.

Ma 8 ▪2043 Der erste Summand sei m, der zweite n; dann gilt

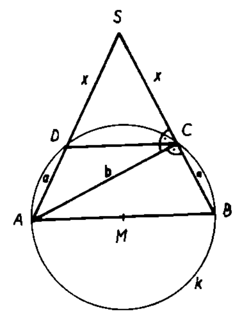
$$m+n=m^3,$$
$$n=m^3-m,$$
$$n=m(m^2-1),$$
$$n=(m-1)\cdot m\cdot(m+1).$$

Wegen $n\neq 0$ muß $m\geqq 2$ sein. Für $m=11$ erhalten wir $n=10\cdot 11\cdot 12=1320>99$. Daraus folgt $2\leqq m\leqq 10$.

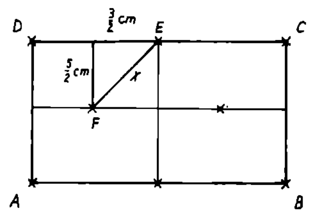
m	n	$m+n$	m^3
2	6	8	2^3
3	24	27	3^3
4	60	64	4^3
5	120	125	5^3
6	210	216	6^3
7	336	343	7^3
8	504	512	8^3
9	720	729	9^3
10	990	1000	10^3

Ma 8 ▪2044 Der Mittelpunkt M der Hypotenuse $\overline{AB}$ ist der Mittelpunkt des Umkreises k des rechtwinkligen Dreiecks ABC; $\overline{AM}$ ist gleich dem Radius r dieses Umkreises. Aus Symmetrieeigenschaften folgt, daß das Viereck $ABCD$ ein gleichschenkliges Trapez ist und somit auch $\overline{CS}=\overline{DS}$ gilt. Es sei x die Länge von $\overline{CS}$ bzw. $\overline{DS}$. Nach dem Satz des Pythagoras erhalten wir

$$(a+x)^2=b^2+x^2,$$
$$a^2+2ax+x^2=b^2+x^2,$$
$$2ax=b^2-a,$$
$$x=\frac{(b-a)(b+a)}{2a}$$
$$=\frac{(6-4)(6+4)}{2\cdot 4}\text{ cm}=2{,}5\text{ cm}.$$



Ma 9 ▪2045 Skizze nicht maßstäblich! Aus der Skizze ist ersichtlich, daß der kleinste Abstand zweier solcher Punkte die Länge der Strecke EF ist.

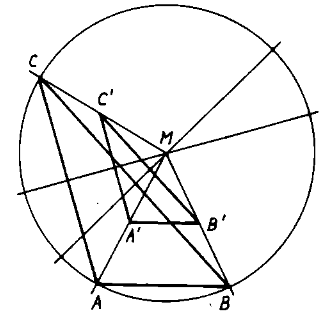


Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$x=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}\text{ cm},$$
$$x=\sqrt{\frac{34}{4}}\text{ cm}>\sqrt{8}\text{ cm, w.z.b.w.}$$

Ma 9 ▪2046 Man konstruiert zunächst ein Dreieck $A'B'C'$ mit den Seitenlängen 2 cm, 3 cm und 4 cm.

Danach konstruiert man den Umkreismittelpunkt von $A'B'C'$; dieser sei mit M bezeichnet.



Um M zeichnet man einen Kreis mit einem Radius der Länge 4 cm. Die Strahlen MA', MB' und MC' schneiden diesen Kreis in A, B und C. Das Dreieck ABC erfüllt die geforderten Bedingungen. Konstruktion (maßstäblich M 1 : 2)

Ma 9 ▪2047 $1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+\ldots$
$+99^2-100^2=(1+2)(1-2)+(3+4)(3-4)$
$+(5+6)(5-6)+\ldots+(99+100)(99-100)$
$=-(3+7+11+15+19+\ldots+199)$
$=-(202\cdot 25)$
$=-5050$

Ma 9 ▪2048 Es gilt $30^{15}=(2\cdot 15)^{15}=2^{15}\cdot 15^{15}$ und $15^{30}=15^{15}\cdot 15^{15}$. Daraus folgt weiter

$2^{15}\cdot 15^{15}<15^{15}\cdot 15^{15}$, also $30^{15}<15^{30}$.

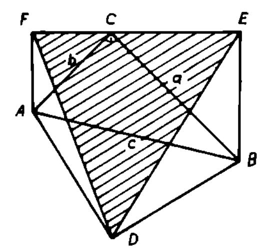
Ma 10/12 ▪2049 (Skizzen nicht maßstäblich)

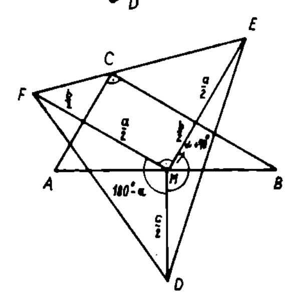
Die Mittelsenkrechten von $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ schneiden einander im Mittelpunkt der Hypotenuse $\overline{AB}$. Es gilt

$$A_{DEF}=A_{DEM}+A_{EFM}+A_{FDM}.$$

Für die Längen der folgenden Strecken gilt:

$$\overline{MF}=\frac{a+b}{2},\ \overline{ME}=\frac{a+b}{2},\ \overline{MD}=\frac{c}{2}.$$





Dann gilt für die Flächeninhalte der folgenden Dreiecke:

$$A_{EFM}=\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2;$$
$$A_{FDM}=\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{a+b}{2}\cdot\sin(180°-\alpha)$$

und wegen $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha=\frac{a}{c}$:

$$=\frac{1}{8}\cdot a(a+b);$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{a+b}{2}\sin(\alpha+90°)$$

und wegen $\sin(\alpha+90°)=\cos\alpha=\frac{b}{c}$:

$$=\frac{1}{8}\cdot b(a+b).$$

Daraus folgt:

$$A_{DEF}=\frac{1}{8}\cdot(a+b)\left[(a+b)+a+b\right]$$
$$=\frac{(a+b)^2}{4}=1.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks DEF hat die Maßzahl 1.

Ma 10/12 ■2050 Wegen (1) gilt $\alpha+\beta=360° - 240° = 120°$, und damit $\gamma=60°$.

Wegen (3) gilt $\frac{ab\cdot\sin\gamma}{2}=\frac{25}{2}\sqrt{3}\,\text{cm}^2$

bzw. $ab\cdot\sin\gamma=25\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ bzw.

$$ab=50\,\text{cm}^2.$$

Nun gilt $a+b=15$ cm und

$$ab=50\,\text{cm}^2 \text{ bzw. } b=\frac{50\,\text{cm}^2}{a}.$$

Durch Einsetzen folgt (ohne Maßeinheiten)

$$a+\frac{50}{a}=15 \text{ bzw.}$$

$$a^2-15a+50=0.$$

Daraus folgt (auch wegen (4)) $a=5$ cm und $b=10$ cm.

Nach dem Kosinussatz gilt

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma$$

$$c^2=5^2+10^2-2\cdot5\cdot10\cdot\cos 60°,$$

$$c^2=\sqrt{75},$$

$$c=5\sqrt{3}\approx 8{,}66 \text{ cm}.$$

Nach dem Sinussatz gilt

$$\sin\alpha:\sin\gamma=5:8{,}66,$$

$$\sin\alpha=\frac{5\cdot\sin 60°}{5\sqrt{3}},$$

$$\alpha=30°.$$

Daraus folgt $\beta=90°$.

Es gilt $a=5$ cm, $b=10$ cm, $c=8{,}66$ cm, $\alpha=30°$, $\beta=90°$, $\gamma=60°$.

Ma 10/12 ■2051 Man vereinfacht zunächst den ersten Summanden des linken Terms der Gleichung:

$$3^{[(p-q)(p+q)-2q(p-q)]\cdot(p-q)^2}$$

$$=3^{(p^2-2pq+q^2)(p-q)^2}$$

$$=3^{(p-q)^4}.$$

Nun ist $\sqrt[2p]{4^p}=4^{\frac{p}{2p}}=4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=2$, und damit ist die Gleichung

$$3^{(p-q)^4}+4^{\sqrt{3p+2q+2}}=2$$

zur gegebenen Gleichung äquivalent.

Weiter gilt sicher

$$(p-q)^4\geqq 0 \qquad (1)$$

und $\sqrt{3p+2q+2}\geqq 0.$ (2)

Aus (1) folgt $3^{(p-q)^4}\geqq 1$ (3)

und aus (2) folgt $4^{\sqrt{3p+2q+2}}\geqq 1.$ (4)

Wegen (3) und (4) gilt nun

$$3^{(p-q)^4}=1 \text{ und } 4^{\sqrt{3p+2q+2}}=1.$$

Dann ist aber

$$(p-q)^4=0, \text{ d. h. } p=q \qquad (5)$$

und $\sqrt{3p+2q+2}=0$, d. h. $3p+2q+2=0.$ (6)

Setzt man (5) in (6) ein, so erhält man

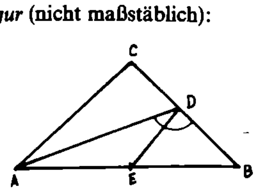
$$3q+2q=-2,$$

$$5q=-2 \text{ und damit } q=p=-\frac{2}{5}.$$

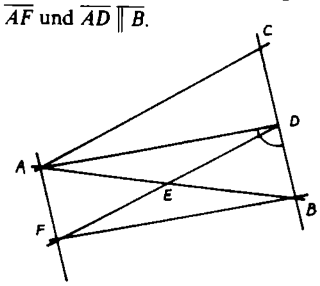
Nur das geordnete Paar $\left[-\frac{2}{5}; -\frac{2}{5}\right]$ erfüllt die gegebene Gleichung.

Ma 10/12 ■2052

Planfigur (nicht maßstäblich):



Begründung: Verlängert man $\overline{DE}$ über E hinaus um sich selbst bis F, so ist $FBDA$ ein Parallelogramm mit den Diagonalen $\overline{AB}$ und $\overline{FD}$, die einander in E halbieren. Es gilt dann $\overline{DB} \parallel \overline{AF}$ und $\overline{AD} \parallel \overline{B}$.

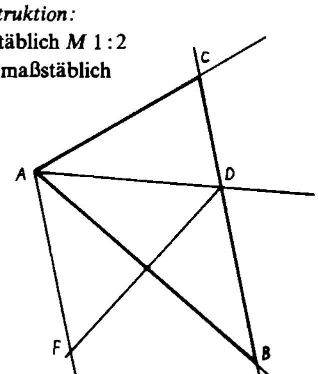


Beschreibung: Man zeichnet die Strecke $\overline{AD}$ mit der Länge 5 cm. In D trägt man an $\overline{DA}$ den Winkel $\sphericalangle ADB$ mit der Größe 105° an. Zu diesem freien Schenkel des Winkels $\sphericalangle ADB$ zeichnet man die Parallele durch A. Der Kreis um D mit einem Radius der doppelten Länge von $\overline{DE}$ schneidet diese Parallele in F. Die Parallele zu $\overline{AD}$ durch F schneidet den freien Schenkel des Winkels $\sphericalangle ADB$ in B. Da $\overline{AD}$ Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle BAC$ ist, hat der Winkel $\sphericalangle BAD$ die halbe Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$. Man trägt in A an $\overline{AD}$ den Winkel $\sphericalangle BAD$ in die andere Halbebene an. Der freie Schenkel dieses Winkels schneidet die Gerade BD in C.

Konstruktion:

maßstäblich M 1 : 2

nicht maßstäblich

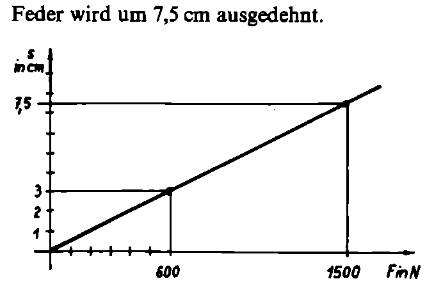


Ph 6 ■86 Geg.: $F_1=600$ N Ges.: s_2

$s_1=3$ cm

$F_2=1500$ N

Bei $F_2=1500$ N liest man $s_2=7{,}5$ cm ab. Die Feder wird um 7,5 cm ausgedehnt.



Ph 7 ■87 Geg.: $A=0{,}45\,\text{m}^2$ Ges.: W

$$p=5\,\text{Pa}=5\,\frac{N}{m^2}$$

$$s=150\,\text{m}$$

Man rechnet mit der Formel $W=F\cdot s$. Dann gilt

$$W=F\cdot s \text{ mit } F=p\cdot A,$$

$$W=p\cdot A\cdot s,$$

$$W=5\,\frac{N}{m^2}\cdot 0{,}45\,m^2\cdot 150\,m,$$

$$W=337{,}5\,Nm=337{,}5\,\text{J}.$$

Der Fußgänger muß eine Arbeit von 337,5 J (rd. 33,75 kpm) verrichten.

Ph 8 ■88 Geg.: $m=500$ kg Ges.: m_1 u. m_2

$\vartheta_1=20\,°\text{C}$

$\vartheta_2=80\,°\text{C}$

$\vartheta_m=35\,°\text{C}$

Da die aufgenommene Wärmemenge gleich der abgegebenen Wärmemenge ist, gilt nach der Formel $W=\text{cm}\,\Delta\vartheta$

$$W_1=cm_1(\vartheta_m-\vartheta_1)$$

$$W_2=cm_2(\vartheta_2-\vartheta_m),$$

und da $m_1+m_2=m$ bzw. $m_1=m-m_2$ ist, gilt weiterhin

$$c(m-m_2)(\vartheta_m-\vartheta_1)=cm_2(\vartheta_2-\vartheta_m), \quad (c\neq 0)$$

$$m(\vartheta_m-\vartheta_1)-m_2(\vartheta_m-\vartheta_1)=m_2(\vartheta_2-\vartheta_m),$$

$$m_2(\vartheta_2-\vartheta_1)=m(\vartheta_m-\vartheta_1),$$

$$m_2=\frac{m(\vartheta_m-\vartheta_1)}{\vartheta_2-\vartheta_1},$$

$$m_2=\frac{500\,\text{kg}(35-20)}{60}=125\,\text{kg}.$$

Dann ist $m_1=500\,\text{kg}-125\,\text{kg}=375\,\text{kg}$.

Es müssen 125 kg Wasser von 80 °C mit 375 kg Wasser von 20 °C gemischt werden.

Ph 9 ■89 Geg.: $r=2$ cm Ges.: m_3

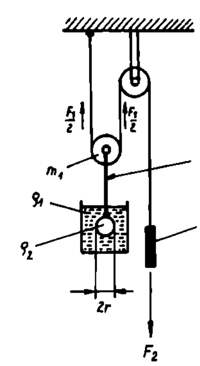
$m_1=100$ kg

$\varrho_1=1{,}0\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

$\varrho_2=7{,}85\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

$g=9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Die Masse m_3 findet man mit Hilfe der Zugkraft F_2 (siehe Bild) nach der Formel



$$F_2=m_3\cdot g \text{ bzw. } m_3=\frac{F_2}{g}. \qquad (1)$$

Für die Zugkraft F_2 gilt aber auch nach dem Bild

$$F_2=\frac{F_1}{2}. \qquad (2)$$

Wird (2) in (1) eingesetzt, erhält man

$$m_3=\frac{F_1}{2g}. \qquad (3)$$

Nun ist $F_1=m_2g+m_1g-F_A$, (4)

wobei m_2 die Masse der Eisenkugel und F_A die Auftriebskraft sind. Da nach dem Archimedischen Prinzip $F_A=G_F$ gilt, ist $F_A = V \cdot \varrho_1 \cdot g$ mit $V = \frac{4}{3}\pi r^3$,

also $F_A = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \varrho_1 \cdot g$. (5)

Ferner ist

$$m_2 = V \cdot \varrho_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \varrho_2. \qquad (6)$$

Jetzt werden (5) und (6(in (4) eingesetzt und (4) in (3), und es ergibt sich

$$m_3 = \frac{1}{2g}\left(\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_2 g + m_1 g - \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_1 g\right),$$

$$m_3 = \frac{1}{2}\left[m_1 + \frac{4}{3}\pi r^3 (\varrho_2 - \varrho_1\right],$$

$$m_3 = \frac{1}{2}\left[100 + \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 2^3 (7{,}85 - 1)\right] \mathrm{g},$$

$m_3 \approx 165$ g.

Eine Masse von 165 g hält die Kugel im Gleichgewicht.

Ph 10/12 ▪90 Geg.: Lichtausbeute der Kohlenfadenlampe $\eta_{L_1} = 3\,\frac{\mathrm{lm}}{\mathrm{W}}$

Lichtstrom der 75-Watt-Lampe $\Phi = 950$ lm

Ges.: Lichtausbeute der 75-Watt-Lampe η_L

Steigerung in %

Die Lichtausbeute berechnet man nach der Formel $\eta_L = \frac{\Phi}{P_{el}}$. Für die 75-Watt-Doppelwendellampe ergibt sich

$$\eta_L = \frac{950\,\mathrm{lm}}{75\,\mathrm{W}}, \quad \eta_L \approx 12{,}66\,\frac{\mathrm{lm}}{\mathrm{W}}.$$

Die Steigerung in % erhält man durch die Proportion

$$100 : x = 3 : (12{,}66 - 3),$$
$$x = 322.$$

Die Lichtausbeute der 75-Watt-Doppelwendellampe beträgt rd. $12{,}7\,\frac{\mathrm{lm}}{\mathrm{W}}$ und die Steigerung 322%.

Ch 7 ▪69 Jedem Hektar wurden 41 kg Kaliumoxid zugeführt.

Ch 8 ▪70 Ein Liter Lösung besteht aus insgesamt 1,7 ml + 56,0 mol = 57,7 mol.

Ch 9 ▪71 Die Gesamtoberfläche beträgt $25{,}12 \cdot 10^4\ \mathrm{cm}^2$.

Ch 10/11 ▪72 Die Kristallisation beginnt bei 70%iger Dissoziation bei $-1{,}1\ ^\circ\mathrm{C}$.

Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

Eine Wägungsaufgabe

Man benötigt nur die folgenden fünf Wägestücke: 1 kg, 2 kg, 4 kg, 8 kg, 16 kg.

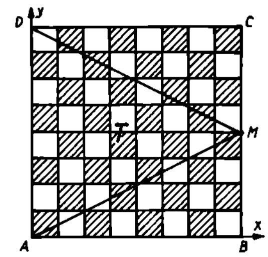
Rund um das Schachbrett

Wir erhalten im Dreieck ABM zwölf Quadrate: [2,0], [3,0], [4,0], [4,1], [5,0], [5,1], [6,0], [6,1], [6,2], [7,0], [7,1], [7,2].

Die gleiche Anzahl Schachfelder liegt im Dreieck DCM. Insgesamt sind es somit 24 Felder.

Wo steckt der Fehler?

Richtige Lösung: $x_1 = x$; $x_2 = -1$. Es wurde durch $(x^2 - 1)$ dividiert. Selbst wenn $x^2 - 1 \neq 0$ wäre, bliebe die Verringerung der Anzahl von möglichen Lösungen (Graderniedrigung).



Kryptarithmetik

a) $\frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$; b) $\frac{9}{14} - \frac{5}{21} = \frac{17}{42}$

c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$; d) $\frac{5}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

a) Division b) Multiplikation
c) Subtraktion d) Addition

In einem Zuge

Der Gang müßte auf dem Hof H beginnen und könnte verlaufen:

$H - H_3 - H_2 - H_1 - H - S - H_1 - H - P.$

Begegnung von zwei Eisenbahnzügen

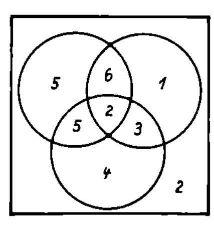
Im Augenblick der Begegnung der Lokführer beträgt der Abstand zwischen den Zugführern 250 m + 250 m = 500 m. Weil jeder Zug mit einer Geschwindigkeit von $45\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$ fährt, nähern sich die Zugführer einander mit einer Geschwindigkeit von $90\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$ oder $25\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$. Die gesuchte Zeit ist $500\ \mathrm{m} : 25\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} = 20\ \mathrm{s}$.

Kombinatorik

$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$, man kann 24 Ausrüstungen zusammenstellen.

Ein wenig Mengenlehre

Addiert man die im Bild gekennzeichneten Zahlen, so erhält man die Anzahl der Schüler der Klasse: 2 + 6 + 3 + 1 + 5 + 5 + 4 + 2 = 28.



8 = 2 + 6 Fußballer besuchen den Zirkel „Jg. Sanitäter".

2 Schüler sind Fußballer, Chormitglieder, und außerdem gehören sie dem Zirkel „Jg. Sanitäter" an.

12 = 2 + 3 + 6 + 1 Schüler sind aktive Fußballer in der Schulmannschaft.

5 = 2 + 3 Fußballer sind im Chor.

2 Schüler sind in keiner der drei Arbeitsgemeinschaften.

14 = 5 + 2 + 3 + 4 Schüler sind Mitglieder des Chors.

18 = 5 + 2 + 6 + 5 Schüler nehmen am Zirkel „Jg. Sanitäter" teil.

7 = 2 + 5 Chormitglieder nehmen am Zirkel „Jg. Sanitäter" teil.

Spiel mit Hölzchen

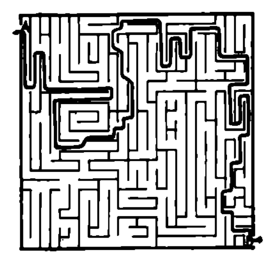
Betrachte die Figur genau, und berechne die Anzahl der Quadrate! Du wirst feststellen: Es sind nicht 114, sondern 113 Quadrate, denn

$2(1 + 3 + 5 + \ldots + 13) + 15 =$

$2\left(\frac{7}{2} \cdot 14\right) + 15 = 98 + 15 = 113.$

Lösungen zum
Heiteren alpha-Ferienmagazin

Troll: Labyrinth



Folgende Schuhpaare gehören zusammen: A und 7, B und 3, C und 4, D und 2.

technikus: Das Aquarium enthält 18,75 l Wasser. Es können sechs Fische darin gehalten werden.

Skatspiel: 27, 28 und 29 Augen sind nicht möglich.

Jugend + Technik: Bei einer maßstabgerechten Vergrößerung der Abmessungen der Wanderkarte wird ihr Maßstab verringert. Es gilt 20 : 50 = 35 : 87,5 = x : 10000. Hieraus folgt $x = 4000$; der neue Maßstab ist also 1 : 4000.

Frösi:

3	4	5
6	4	2
3	4	5

Beim unteren Bild betrachte man die Diagonale!

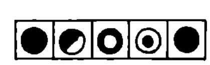
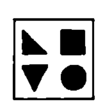


Bild rechts: Anstelle des Fragezeichens muß stehen:

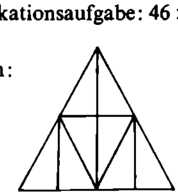


Trommel: In der Mitte des Bildes sitzt eine Katze.

Das Magazin: Von B aus ist es möglich, zum Beispiel über die Reihenfolge 3 - 5 - 6 - 8 - 7 - - 4 - 2 - 1. Von C aus ist es nicht möglich.

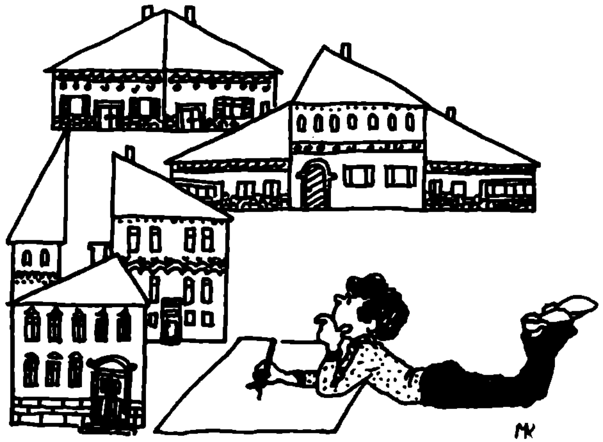
Multiplikationsaufgabe: 46 × 715 = 32890.

Für Dich:



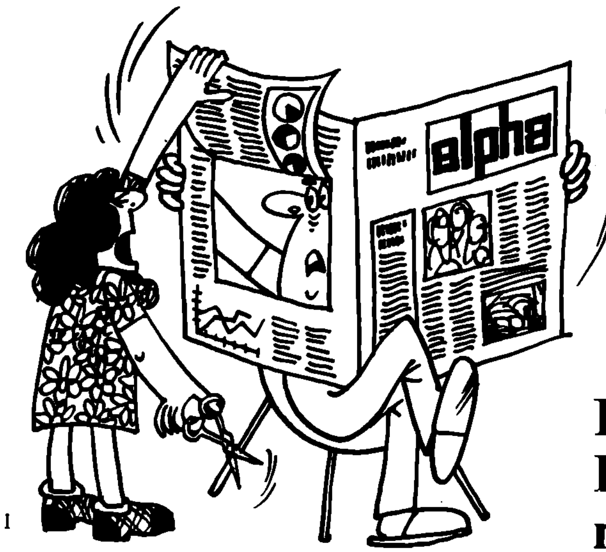
FÜR DICH

Aus den Flächen dieser acht kleinen Dreiecke soll ein großes entstehen. Wie sieht das aus?



Lösungen s. S. 70.

8

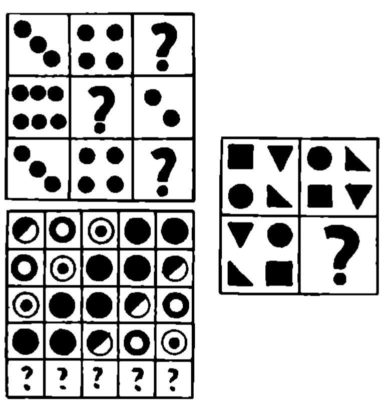


Heiteres Ferien-magazin

1

FRÖSI

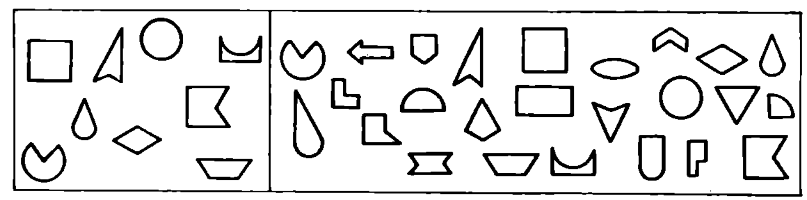
Entschlüsselt die Fragezeichen!



TROMMEL

Was regt den Vogel auf?

NBI - Gedächtnisübung



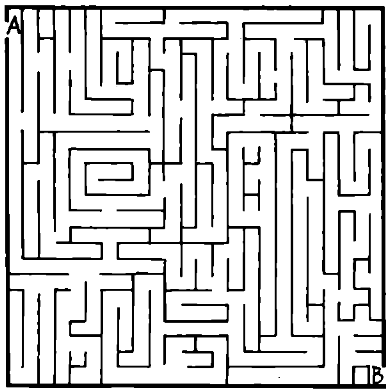
Die Abbildung zeigt neun einfache geometrische Figuren. Betrachtet sie 10 bis 15 Sekunden lang, und prägt sie euch gut ein, während die untere Tafel verdeckt ist! Dann haltet ihr die obere Tafel zu und öffnet die untere mit den 25 Figuren.

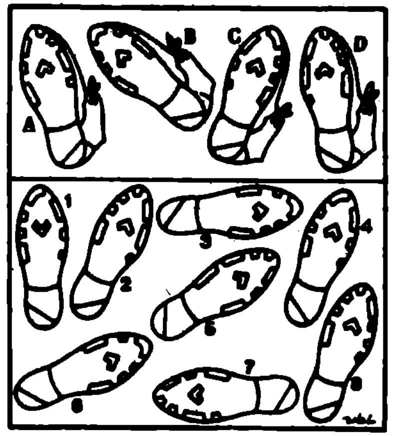
Neun davon waren in der ersten Tafel enthalten. Wißt ihr noch, welche?

3

TROLL

Von *A* nach *B* ist ein Weg durch das Labyrinth zu finden.



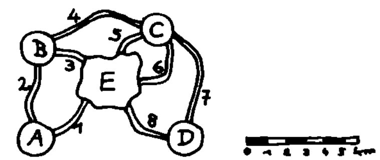


Welche Schuhe von den oben dargestellten gehören zu den unten gezeichneten Profilen?

2

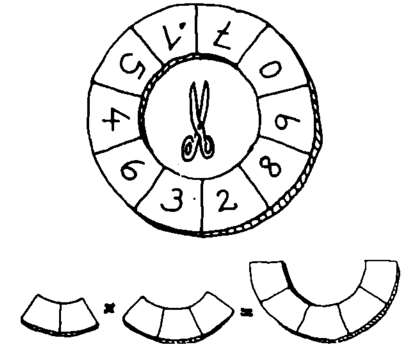
DAS Magazin

Die Urlaubsorte *A*, *B*, *C*, *D* sind alle durch Straßen mit der Kreisstadt *E* und zum Teil untereinander verbunden. Der Radfahrer möchte nun zur Kreisstadt radeln und dabei alle 8 Straßen befahren, aber keine doppelt. Ist das überhaupt möglich? Er soll einmal von *B*, beim zweiten Mal von *C* aus starten.



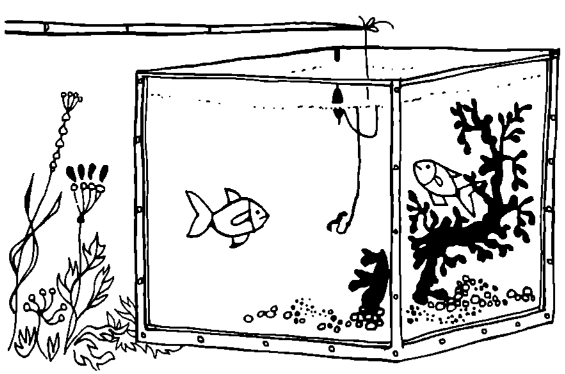
7

Im dargestellten Zahlenkreis liegt eine Schere. Zerschneidet bitte damit symbolisch den Kreis durch zwei Schnitte in drei Teile, die wie angedeutet eine Multiplikationsaufgabe mit stimmender Lösung ergeben sollen.



technikus

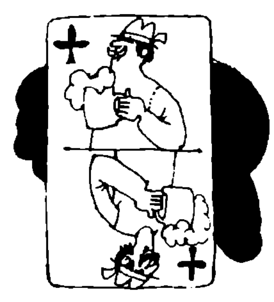
Ein quaderförmiges Aquarium, dessen Grundkanten jeweils 25 cm und dessen Höhe 35 cm betragen, ist bis 5 cm unter den oberen Rand mit Wasser gefüllt. Wieviel Fische können in dem Aquarium gehalten werden, wenn jeder Fisch 3 l Wasser braucht?



4

JUGEND + TECHNIK

Ein Skatfan fragt: Der niedrigste Augenstich beim Skat beträgt zwei Augen (1 Bube, 2 leere Karten). Sind alle Augenstiche durchgehend von 2 bis 33 möglich?



5

Ein Fotofan vergrößert eine Wanderkarte mit den Abmessungen 20 cm × 35 cm und einem Maßstab 1 : 10000 maßstabgerecht auf ein Format von 50 cm × 87,5 cm. Welchen Maßstab besitzt die neu angefertigte Wanderkarte?

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

Im Heft 6/1979 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:

Ma6 ■1916 In dem Schema

$$\begin{array}{r} ab \\ +bc \\ +ca \\ \hline abc \end{array}$$

sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

Im Heft 3/1980 veröffentlichten wir dazu eine Lösung:

Aus $ab+bc+ca=abc$ folgt $a=1$ oder $a=2$. Dabei gilt $1 \leqq a, b, c \leqq 9$. Nun gilt $(10a+b)+(10c+a)=100a+10b+c$, $b+10c=89a$.

Für $a=2$ erhalten wir $b+10c=178$. Wegen $b, c \leqq 9$ hat diese Gleichung keine Lösung. Für $a=1$ erhalten wir $b+10c=89$, $10c=80+9-b$, $c=8+\frac{9-b}{10}$. Nur für $b=9$ und damit für $c=8$ erhalten wir eine positive ganzzahlige Lösung; sie lautet

$$19+98+81=198.$$

Wir stellen nun die Lösung von *Dirk Jürgeleit* aus Malchin vor, der Schüler der Klasse 6a der Richard-Ehrlich-OS ist.

Dirk löste diese Aufgabe wie folgt:

Die Summe aus drei zweistelligen natürlichen Zahlen ist kleiner als 300; deshalb muß a gleich 1 oder gleich 2 sein. Unter Beachtung der Einerstellen der drei Summanden müßte $b=8$ sein, wenn $a=2$ ist. Wegen $c \neq 0$ würde dann für die Zehnerstellen $2+8+c=28$ gelten, was nicht möglich ist. Somit entfällt $a=2$. Für $a=1$ müßte $b=9$ sein. Ich stelle eine Tabelle auf.

a	b	c	ab	bc	ca	Ergebnis	
1	9	1	19	91	11	121	191
1	9	2	19	92	21	132	192
1	9	3	19	93	31	143	193
.	.	.					
1	9	8	19	98	81	198 =	198

Probe: $19+98+81=198$.

Wir stellen nun die Lösung von *Kati Merkel* aus Theuma vor, die Schülerin der Klasse 6 ist; Kati löste diese Aufgabe wie folgt:

Wegen $1 \leqq a \leqq 9$, $1 \leqq b \leqq 9$, $1 \leqq c \leqq 9$, $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$ kann nur $a+b+c \leqq 24$ gelten. Die Summe aus drei zweistelligen natürlichen Zahlen ist kleiner als 300. Deshalb kann $a=1$ oder $a=2$ gelten. Ferner gilt $b+c+a=10+c$, also $a+b=10$ und $a+b+c+1=10+b$, also $c+11=10+b$ bzw. $b=c+1$. Daraus folgt wePter $a_1=1, b_1=9, c_1=8$ oder $a_2=2, b_2=8, c_2=7$.

Nur $19+98+81=198$ hat eine Lösung; denn $28+87+72 \neq 287$ führt zum Widerspruch.

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Lothar Berg

Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Vorsitzender der Bezirkssektion Nord der Mathematischen Gesellschaft der DDR.

▲2121▲ In einer Ebene sei ein beliebiges Dreieck $\triangle ABC$ gegeben. Man wähle in dieser Ebene zwei weitere Punkte D, E so, daß $\triangle CBD$ und $\triangle ACE$ das gegebene Dreieck zu einem Fünfeck $ABCDE$ ergänzen. Unter der weiteren Voraussetzung, daß diese drei Dreiecke (in der angegebenen Reihenfolge der Eckpunkte) zu einander ähnlich sind, beweise man:

a) Das Fünfeck entartet im Punkt C, ist also lediglich ein Viereck $ABDE$.

b) Die Gerade durch die Punkte D, C, E ist die Tangente des Kreises durch die Punkte A, B, C im Punkt C.

Zusatzaufgaben:

c) Nach Einführung eines rechtwinkligen Koordinatensystems stelle man die Gleichung der Geraden durch die Punkte D, C, E auf und berechne ihre Nullstelle x.

d) Man interpretiere die vorhergehende Berechnung von x als Näherungsverfahren zur Bestimmung einer Nullstelle einer gegebenen Funktion durch die Punkte A, B, C.

Literatur zur Teilaufgabe d):

L. Berg, Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Anwendungen. Math. Schülerbücherei Nr. 97, DVW, Berlin 1979

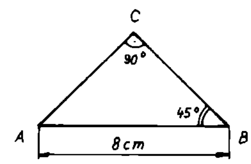
L. Berg, Ein ableitungsfreies Dreistufenverfahren mit quadratischer Konvergenz zur Berechnung von Nullstellen. Rostocker Math. Kolloquium 13 (1980), 119–122

(Diese Aufgabe wurde 1979 anläßlich des Jubiläums des Bezirksklubs Neubrandenburg [10jähriges Bestehen] den Jungen Mathematikern gestellt, d. Red.)

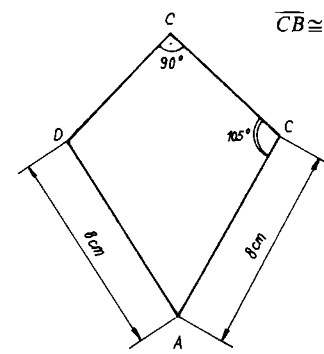
Grundkenntnisse in Geometrie gefragt

Von den nachstehend abgebildeten Figuren ist jeweils der Flächeninhalt zu berechnen.

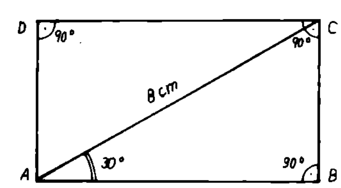
▲1▲



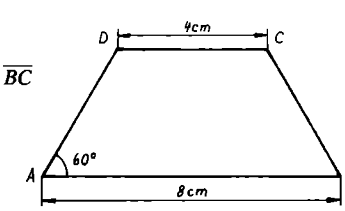
▲2▲ $\overline{CB} \cong \overline{CD}$



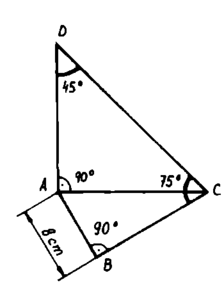
▲3▲



▲4▲ $\overline{AD} \cong \overline{BC}$



▲5▲



J. Kreusch/Th. Scholl

Mathematische Schülerzeitschriften sozialistischer Länder

1 SR Vietnam
2 SFR Jugoslawien
3 ČSSR
4 SR Rumänien
5 SR Rumänien, Rayon Timişoara
6 Ungarische VR
7 UdSSR
8 VR Polen
9 Kuba
10 DDR
11 VR Bulgarien
12 DDR