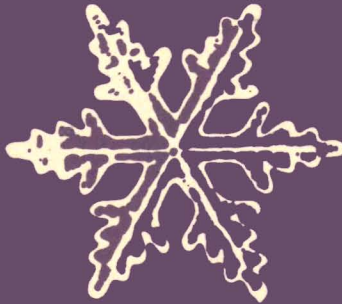
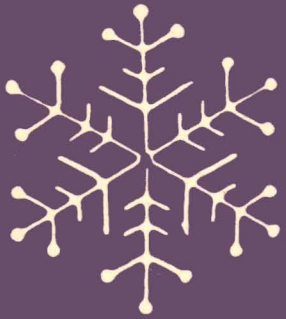
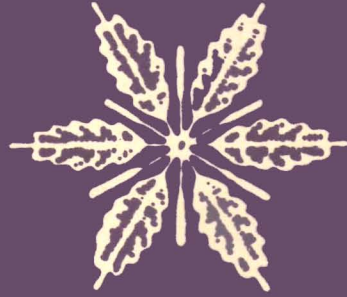
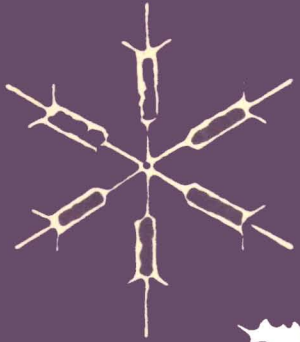
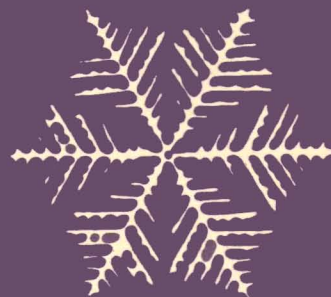
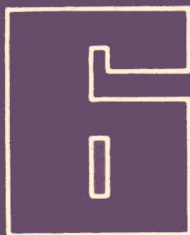


Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
19. Jahrgang 1985
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395



Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold

Herausgeber und Verlag:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag

Anschrift des Verlags:

1086 Berlin, Krausenstr. 50, PSF 1213

Anschrift der Redaktion:

7027 Leipzig, PSF 14

Redaktion:

OSTr J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn.

G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr.

W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat.

J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent

Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); National-

preisräger H. Kästner (Leipzig); Studien-

rat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehr-

er Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstud-

ienrat J. Lehmann, VLdV (Leipzig);

Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leip-

zig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Mü-

ritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam);

Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald);

Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dres-

den); Oberstudienrat G. Schulze (Herz-

berg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Trä-

ger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch,

VLdV (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Ma-

thematik der *Karl-Marx-Universität* Leipzig

(Ltg. Dr. C.-P. Helmholz)

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545

des Presseamtes beim Vorsitzenden des

Ministerrates der Deutschen Demokrati-

schcn Republik

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzel-

heft 0,50 M, im Abonnement zweimonat-

lich 0,50 M. Bestellungen werden in der

DDR von der Deutschen Post und dem

Buchhandel entgegengenommen. Der Be-

zug für die Bundesrepublik Deutschland

und Berlin (West) erfolgt über den Buch-

handel; für das sozialistische Ausland über

das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und

für alle übrigen Länder über: Buchexport

Volkseigener Außenhandelsbetrieb der

DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Aus einer Bildmappe des Verlages

Bild und Heimat Reichenbach/V. (S. 138);

Angelika Drauschke, Neustrelitz (S. 132);

Christian Gehler, Fürstenwalde (S. 127);

Krokodil, Moskau, N. Belewtschew (S. 135)

Titelblatt: W. Fahr, Berlin

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig



Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphi-

scher Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der aus-*

gezeichneten Qualitätsarbeit, III/18/97

Artikelnummer (EDV) 128

ISSN 0002-6395

Redaktionsschluß: 23. August 1985

Auslieferungstermin: 10. Dezember 1985



Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

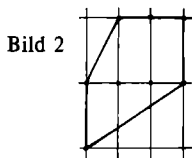
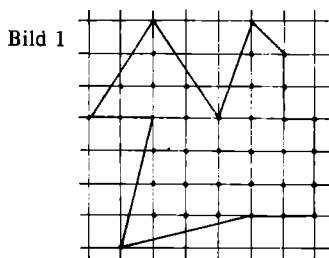
- 121 Gitterpunktpolygone-Flächenberechnung einmal anders [8]¹⁾
Dr. R. Werner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig
- 124 Zum Verhältnis von Kunst und Wissenschaft am Beispiel der Ornamente und der Mathematik, Teil 2 [8]
Prof. Dr. J. Flachsmeyer/Dr. U. Feiste, Sektion Mathematik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald
- 126 Schriftliche Abschlußprüfung – Fach Mathematik
Klassenstufe 10 – Schuljahr 1984/85 – Aufgaben [10]
- 128 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb
Aufgaben zu Mathematik, Physik, Chemie
- 130 *alpha*-Porträt: Niels Neumann, Jena, 14 Jahre (Kl. 8) [8]
- 131 XXVI. Internationale Mathematikolympiade [11]
Finnland, Juli 1985
- 132 Ein Besuch in der Knobelwerkstatt [5]
Teil 5: Zum Jahreswechsel 1985/86
Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig
- 134 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht [5]
speziell für Klasse 5/6
Aufgaben aus der polnischen mathematischen Schülerzeitschrift *plus-minus*
Mathematikfachlehrer K. Meier, Sektion Mathematik der Päd. Hochschule W. Radke, Köthen
Knobeln und kombinieren
Dr. L. Flade, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
- 135 *Historische Aufgabe:* Kohl, Ziege und Kohlköpfe [5]
Dr. H. Pieper, Zentralinst. für Astrophysik der Akademie der Wissenschaften der DDR
- 136 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig
- 138 Einige Aufgaben aus der *Coß* von Adam Ries [6]
NPT Dr. R. Lüders, Berlin
- 140 Lösungen [5]
- 144 *alpha*-Wettbewerb [5]
Kollektive Beteiligung 1984/85
- III. U.-Seite: *alpha*-Schachwettbewerb 1985
J. Lehmann, Leipzig/ H. Rüdiger, Berlin
- IV. U.-Seite: Magische Quadrate mit Jahreszahlen [5]
Eine lebendige Leserdiskussion
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

¹⁾ bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Gitterpunktpolygone – Flächenberechnung einmal anders

Eine merkwürdige Flächenformel

In diesem Beitrag wollen wir den Flächeninhalt von Gitterpunktpolygonen berechnen. Das sind ebene Figuren, die von einem geschlossenen Streckenzug begrenzt sind, wobei die Ecken Gitterpunkte eines vorgegebenen regelmäßigen Rasters (z. B. klein- oder langkariertes Rechenpapier) sind und die Seiten sich gegenseitig höchstens in den Eckpunkten schneiden (Bild 1). Soll der Flächeninhalt einer solchen Figur bestimmt werden, so würde wohl jeder damit beginnen, sie in Drei- und Rechtecke zu zerlegen, deren Inhalte berechnen und anschließend diese Zahlen addieren. Eine andere, verblüffende Methode ist folgende: Wir zählen die Gitterpunkte im Inneren der Figur (für Bild 1: $i = 21$) und die auf dem Rand ($r = 16$), dann bilden wir $i + \frac{1}{2}r - 1 = 28$, welches die Maßzahl des Flächeninhaltes der Figur von Bild 1 ist.



Die Flächeneinheit ist dabei der Inhalt eines kleinsten Gitterpunktquadrates. Die gleiche Beobachtung macht man bei der Figur aus Bild 2

$$\left(i = 2, r = 6, i + \frac{1}{2}r - 1 = 4 = A\right),$$

wenn man berücksichtigt, daß die Flächeneinheit jetzt durch ein kleinstes Gitterpunktrechteck bestimmt wird. Zufall oder Gesetzmäßigkeit? Wir werden im weiteren zeigen, daß für den Flächeninhalt eines Gitterpunktpolygons stets gilt:

$$A = i + \frac{1}{2}r - 1.$$

(Dieser Zusammenhang wurde erstmals 1899 von G. Pick erkannt und bewiesen.)

Gitterpunktrechtecke

Zunächst untersuchen wir Vierecke, deren Eckpunkte Gitterpunkte sind und deren Seiten parallel zu den Geraden des Gitters verlaufen. Die Bezeichnung Gitterpunktrechteck für solche Figuren ist natürlich nur dann sachgemäß, wenn die nichtparallelen Gitterlinien rechtwinklig zueinander verlaufen.

Wir wollen dies vorläufig annehmen. Alle Aussagen gelten aber ebenso auch für andere Gitter (vgl. Aufgabe 1).

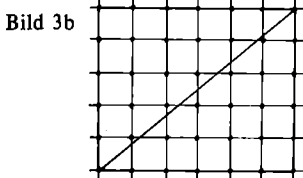
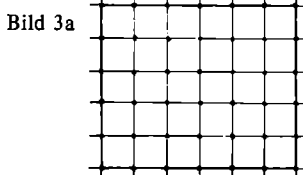
Hat ein Gitterpunktrechteck Seiten der Längen a und b (jeweils in Einheiten der Seitenlänge eines kleinsten Gitterpunktrechtecks), so liegen $r = 2(a + b)$ Gitterpunkte auf dem Rand und $i = (a - 1)(b - 1)$ im Inneren der Figur (vgl. Bild 3.a mit $a = 6$, $b = 5$).

Wir erhalten also:

$$\begin{aligned} i &= ab - a - b + 1 \\ &= ab - (a + b) + 1 \\ &= ab - \frac{1}{2}r + 1 \end{aligned}$$

$$\text{bzw. } ab = i + \frac{1}{2}r - 1.$$

Nun ist $A = ab$ aber genau der Flächeninhalt eines solchen Rechtecks, somit gilt unsere Formel $A = i + \frac{1}{2}r - 1$ also für jedes Gitterpunktrechteck.



Auch für Gitterpunktdreiecke mit zwei parallel zum Gitter liegenden Seiten gilt die Formel. Solche Dreiecke kann man sich entstanden denken aus der Halbierung eines Gitterpunktrechtecks entlang einer seiner Diagonalen (Bild 3.b). Besitzen die auf dem Gitter liegenden Seiten die Längen a und b , so schließen wir für das Dreieck folgendermaßen:

$$r = (a + b) + 1 + r_d.$$

Dabei ist r_d die Anzahl der auf der dritten Seite (Diagonale des zugehörigen Gitterpunktrechtecks) liegenden Gitterpunkte, die nicht Eckpunkte des Dreiecks sind. Wie das Beispiel aus Bild 3.2 zeigt, kann gelten: $r_d = 0$. Für eine weitere Aussage über r_d betrachten wir das zugeordnete Gitterpunktrechteck mit Seitenlängen a und b . Es enthält $(a - 1)(b - 1)$ Gitterpunkte im Inneren.

Zählen wir diese als Punkte der beiden Teildreiecke, die durch Halbierung entlang einer Diagonalen entstehen, so erhalten wir für diese Zahl $(2i + r_d)$. Dabei ist noch zu überlegen, daß die beiden Teildreiecke gleichviel innere Punkte enthalten; dies ist aber richtig, da sie durch Geradenspiegelungen an Gittergeraden und Verschiebungen um ganzzahlige Vielfache der Längeneinheit miteinander zur Deckung gebracht werden können.

Aus der Gleichheit der beiden Ausdrücke für die Anzahl der inneren Gitterpunkte folgt:

$$r_d = (a - 1)(b - 1) - 2i.$$

Setzen wir dies weiter oben ein, so ergibt sich:

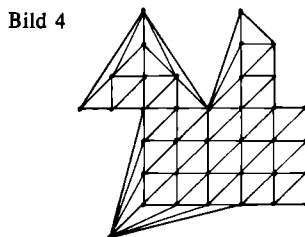
$$r = a + b + 1 + ab - a - b + 1 - 2i$$

$$\text{bzw. } \frac{1}{2}ab = i + \frac{1}{2}r - 1,$$

was wegen $A = \frac{1}{2}ab$ die Richtigkeit der Formel auch für die betrachteten Gitterpunktdreiecke zeigt.

Zerlegung in Elementardreiecke

Um die Gültigkeit der Formel für allgemeine Gitterpunktpolygone zeigen zu können, denken wir uns eine solche Figur in eine endliche Anzahl von Teildreiecken zerlegt, die selbst wieder Gitterpunktdreiecke sind. Sollte es unter diesen Dreiecke geben, die im Inneren noch Gitterpunkte enthalten, so zerlegen wir sie weiter, bis nur noch Gitterpunktdreiecke ohne Gitterpunkte im Inneren vorliegen. Das gleiche geschieht mit Teildreiecken, die außer den drei Eckpunkten noch weitere Gitterpunkte auf ihren Seiten enthalten. Damit erhalten wir unsere Ausgangsfigur zerlegt in eine endliche Anzahl von Gitterpunktdreiecken, die nur in ihren Ecken Gitterpunkte aufweisen. Gitterpunktdreiecke mit dieser Eigenschaft nennen wir



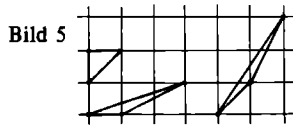
Elementardreiecke. Bild 4 zeigt eine mögliche Unterteilung des Gitterpunktpolygons aus Bild 1 in Elementardreiecke.

Wir zeigen nun, daß unsere Flächenformel für jedes Elementardreieck gilt, d. h., daß

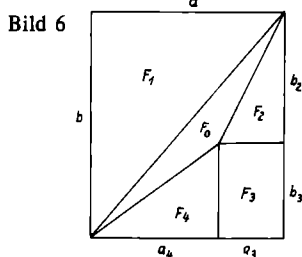
jedes solche Gitterpunktdreieck den Flächeninhalt $\frac{1}{2}$ hat

$$\left(i = 0, r = 3 : i + \frac{1}{2}r - 1 = \frac{1}{2}\right).$$

Für einige Spezialfälle kann man dies sofort nachprüfen, es können aber auch sehr allgemeine Lagen auftreten (Bild 5).



Die Kenntnis von der Richtigkeit der Formel für Gitterpunktrechtecke und deren Halbierungsdreiecke wird uns beim Beweis eine große Hilfe sein. Betrachten wir die längste Seite eines Elementardreiecks als Diagonale eines Gitterpunktrechtecks, so kommt das Elementardreieck ganz im Inneren dieses Gitterpunktrechtecks zu liegen. Ist etwa F_0 ein Elementardreieck (Bild 6), so erhalten wir ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b und in ihm Teilfiguren (sämtlich Gitterpunktdreiecke und -rechtecke) F_1, F_2, F_3, F_4 ($b = b_2 + b_3, a = a_3 + a_4$ - Numerierung entsprechend der angrenzenden Flächen).



Offenbar gilt: $A_0 = A - (A_1 + A_2 + A_3 + A_4)$, wobei für alle Flächeninhalte auf der rechten Seite der Gleichung die Flächenformel anwendbar ist. Wir zählen nun für diese Flächen die Gitterpunkte auf den Seiten bzw. im Inneren:

$$\begin{aligned} F_1: & r_1 = a + b + 1, & \text{im Inneren: } i_1 \\ F_2: & r_2 = a_3 + b_2 + 1, & \text{im Inneren: } i_2 \\ F_3: & r_3 = 2(a_3 + b_3), & \text{im Inneren: } i_3 \\ F_4: & r_4 = a_4 + b_3 + 1, & \text{im Inneren: } i_4 \\ F: & r = a + b + b_2 + b_3 + a_3 + a_4 \\ & i = i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + a_3 + b_3 - 1 \end{aligned}$$

(Man beachte, daß $i_0 = 0$ ist und Punkte auf der gemeinsamen Seite von F_2 und F_3 bzw. von F_3 und F_4 zu inneren Punkten von F werden.)

Also gilt:

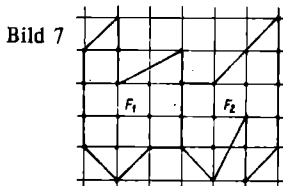
$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 + A_4 &= i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + \frac{1}{2}[a + b \\ &+ 1 + a_3 + b_2 + 1 + 2(a_3 + b_3) \\ &+ a_4 + b_3 + 1] - 4 \\ &= (i - a_3 - b_3 + 1) + \frac{1}{2}(r + 3) \\ &+ a_3 + b_3 - 4 \\ &= i + \frac{1}{2}r - 3 + \frac{3}{2} \\ &= i + \frac{1}{2}r - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

und somit:

$$\begin{aligned} A_0 &= A - (A_1 + A_2 + A_3 + A_4) \\ &= i + \frac{1}{2}r - 1 - \left(i + \frac{1}{2}r - \frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Zusammenfügen aus Teilfiguren

Uns stehen nun Teilfiguren zur Verfügung, für die die Flächenformel gilt und aus denen sich jedes Gitterpunktpolygon zusammensetzen läßt. Speziell für Elementardreiecke hatten wir im vorhergehenden Abschnitt ein Verfahren angegeben, um eine entsprechende Zerlegung zu finden. Betrachten wir nun zwei Gitterpunktpolygone F_1 und F_2 , für die unsere Flächenformel gilt (also am Anfang etwa Elementardreiecke) und die gemeinsame Punkte auf einer Seite haben (Bild 7). Zusammen ergeben sie dann das Gitterpunktpolygon F mit Flächeninhalt $A = A_1 + A_2$. Gilt für die Berechnung von A ebenfalls unsere Flächenformel?



Ja, denn es ist:

$$\begin{aligned} A_1 &= i_1 + \frac{1}{2}r_1 - 1 \\ A_2 &= i_2 + \frac{1}{2}r_2 - 1 \end{aligned}$$

mit $r_k = r'_k + \bar{r} + 2$ ($k = 1, 2$), wobei r'_k die Anzahl der Gitterpunkte auf den Seiten von F_k ist, die nicht gleichzeitig zur zweiten Teilfläche gehören. $(\bar{r} + 2)$ Gitterpunkte gehören gleichzeitig zu F_1 und F_2 , davon werden $\bar{r}$ beim Zusammenfügen zu inneren Punkten von F .

Es gilt also weiter:

$$r = r'_1 + r'_2 + 2, i = i_1 + i_2 + \bar{r}.$$

Somit ist:

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 + \frac{1}{2}[(r_1 - r'_1 - 2) \\ &+ (r_2 - r'_2 - 2)] \\ &= i_1 + i_2 + \frac{1}{2}(r_1 + r_2) - 2 \\ &- \frac{1}{2}r + 1, \\ i + \frac{1}{2}r - 1 &= \left(i_1 + \frac{1}{2}r_1 - 1\right) \\ &+ \left(i_2 + \frac{1}{2}r_2 - 1\right), \end{aligned}$$

also:

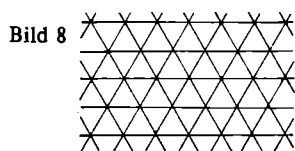
$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = \left(i_1 + \frac{1}{2}r_1 - 1\right) \\ &+ \left(i_2 + \frac{1}{2}r_2 - 1\right) = i + \frac{1}{2}r - 1. \end{aligned}$$

Da wir nun jedes Gitterpunktpolygon schrittweise aus Teilfiguren zusammensetzen können, für die jeweils die Flächenformel gilt, zeigt uns dieser Schluß, daß die Flächenformel auch für die Gesamtfläche gültig ist.

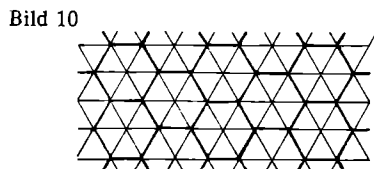
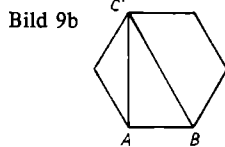
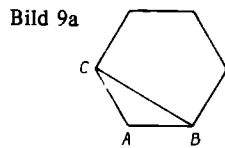
Andere regelmäßige Gitter

In einem Beitrag von R. Klette im Heft 6/1983 der *alpha* ist gezeigt worden, daß neben einem Gitter, das aus Quadraten aufgebaut ist (orthogonales Gitter), nur noch zwei weitere regelmäßige Gitter existieren: das trigonale und das hexagonale (aus regelmäßigen Drei- bzw. Sechsecken). Wie sieht die Flächenformel für Gitterpunktpolygone auf diesen Gittern aus?

In einem trigonalen Gitter können wir ohne Mühe je zwei kleinste Teildreiecke so zusammenfassen, daß ein Gitter entsteht, dessen kleinste Teilfiguren Rhomben sind (Bild 8). Für dieses Gitter gilt die schon bewiesene Flächenformel (vgl. Aufgabe 1). Da ein kleinster Teilrhombus den doppelten Flächeninhalt eines Ausgangsteildreiecks besitzt, folgt also für das trigonale Gitter: $A = 2\left(i + \frac{1}{2}r - 1\right)$.



Für Gitterpunktpolygone auf dem hexagonalen Gitter kann es keine Flächenformel geben, die nur mit inneren und Randpunkten dieses Gitters arbeitet. Dazu betrachten wir ein kleinstes Teilsechseck in diesem Gitter und die Gitterpunktdreiecke ABC und ABC' (Bild 9a, b). Beide besitzen die gleiche Anzahl von inneren und Randpunkten, der Flächeninhalt von ABC' ist jedoch doppelt so groß wie der von ABC . Gibt es einen Ausweg?



Naheliegender ist die Zerlegung jedes Teilsechsecks des Gitters in Dreiecke (Bild 10). Dabei entsteht ein trigonales Gitter, in dem wir die eben gezeigte Flächenformel verwenden können. Jeder Gitterpunkt des hexagonalen Gitters ist auch Gitterpunkt im trigonalen Gitter - aber es entstehen noch weitere Gitterpunkte im Symmetriezentrum der Sechsecke, die wir berücksichtigen müssen! Seien für ein Gitterpunktpolygon i_0 und r_0 die Anzahl dieser zusätzlichen Punkte im Inneren bzw. auf dem

Rand der Figur, so erhalten wir, da ein kleinstes Teilsechseck aus sechs Teildreiecken aufgebaut ist:

$$A = \frac{1}{6} \left[2 \left((i + i_0) + \frac{1}{2} (r + r_0) - 1 \right) \right]$$

$$= \frac{1}{3} (i + i_0) + \frac{1}{6} (r + r_0) - \frac{1}{3}.$$

Für die Gitterpunktdreiecke aus Bild 9 folgen hieraus mit $i = i_0 = 0$, $r = 3$ und $r_0 = 0$ (in a) bzw. $r_0 = 1$ (in b) die richtigen Ergebnisse: $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{3}$.

Aufgaben

▲ 1 ▲ Man überlege sich, warum die Formel für orthogonale Gitter auch für Gitterpunktpolygone auf einem Gitter, deren kleinste Teilfigur ein Rhombus ist, gilt. Als Flächeneinheit verwendet man dann die Fläche eines solchen Teilrhombus.

▲ 2 ▲ Zeige für orthogonale Gitter: Für ein Gitterpunktpolygon F_1 , welches ein „Loch“ F_2 von der Gestalt eines weiteren Gitterpunktpolygons enthält, berechnet sich der Flächeninhalt A_1 nach:

$$A_1 = i_1 + \frac{1}{2} (r_1 + r_2)$$

(i_1 – Anzahl der inneren Punkte von F_1 ; r_1 , r_2 – Anzahl der Punkte auf dem äußeren bzw. inneren Rand von F_1 , $r_2 \geq 3$.)

▲ 3 ▲ Die Betrachtung über die Flächenberechnung auf orthogonalen Gittern lassen sich nicht analog auf die Volumenberechnung von dreidimensionalen Gitterpunktpolyedern übertragen. Man verdeutliche sich dies mit Hilfe einer Pyramide mit Ecken in $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und Spitze in $(1,1,1)$ bzw. $(1,1,k)$ mit $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$.

R. Werner



Mit dem Taschenrechner

Aus Zahlen werden Worte

Wenn man die Ziffernanzeige eines elektronischen Taschenrechners auf den Kopf stellt, können fast alle Ziffern als Buchstaben gelesen werden. Es entspricht:

1 = I	2 = Z	3 = E
4 = h	5 = S	7 = L
8 = B	9 = G	0 = O

Man kann nun Aufgaben formulieren, bei denen als Ergebnis eine Zahl erscheint, die, auf den Kopf gestellt, ein sinnvolles Wort ergibt, zum Beispiel

$9283 \cdot 4 = 37132 = \text{ZEILE}$. Aus diesen Möglichkeiten lassen sich Spiele mit dem Rechner ableiten.

Für ein Spiel, an dem ein Spielleiter und zwei Mitspieler beteiligt sind, können folgende Regeln aufgestellt werden:

Der Spielleiter gibt eine Aufgabe vor.

$000000 : 53 = \text{BEIL}$

Welche sechsstellige Ausgangszahl muß durch 53 dividiert werden, damit als Ergebnis das Wort BEIL abzulesen ist? Beide Mitspieler suchen mit Hilfe eines Rechners die geforderte Zahl. Wer als erster fertig ist, ruft: *Stopp*. Es wird geprüft, ob der Spieler die Ausgangszahl ermittelt hat.

Bei einem richtigen Ergebnis erhält er einen Punkt gutgeschrieben. Hat er falsch gerechnet, erhält sein Gegenspieler den Punkt. (Im Beispiel ist 378314 die richtige Lösung.) Die Art der Bewertung veranlaßt die Mitspieler einerseits zu zügiger Berechnung, hindert aber auch vor zu schneller und oberflächlicher Arbeitsweise, da bei Flüchtigkeitsfehlern der Punkt an den Gegner verlorengelht, auch wenn der noch kein Ergebnis oder ein falsches Ergebnis hatte. Gespielt wird eine vorher vereinbarte Anzahl von Aufgaben; gewonnen hat der Spieler mit den meisten Punkten. Hier noch einige Vorschläge für Aufgaben:

$100\,000 - 00000 = \text{ZIEGE}$
(Lösung: 60688)

$(00)^2 + 113 = \text{EILE}$
(Lösung: 60)

$0000 \cdot 45 = \text{SEGEL}$
(Lösung: 1643)

Dr. H. aus ND v. 30./31. 3. 85

Buchtip für unsere jüngsten Leser

Lehmann, Johannes

3 plus 8 und mitgemacht

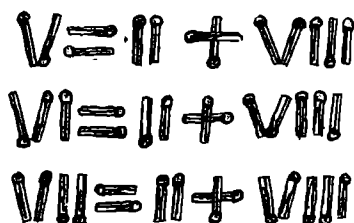
Berlin: Volk und Wissen 1985. 80 S., etwa 120 Abb., 2,60 M
(Mathematische Schülerbücherei Nr. 121)
Bestell-Nr. 7078577

Dieser Band ist eine Fortsetzung des erfolgreichen Titels *2 mal 2 plus Spaß dabei*. Er enthält viele interessante Aufgaben, Rechenspiele und Knocheleien, die geeignet sind, Schüler der Unterstufenklassen zur Beschäftigung mit der Mathematik in der Freizeit anzuregen. Dabei gibt es auch viele Aufgaben, die der Festigung des im obligatorischen Unterricht erworbenen Wissens dienen. Die kapitelweise zusammengestellten Lösungen aller Aufgaben ermöglichen eine schnelle Kontrolle. Durch den ständigen Wechsel von Aufgaben und lustig gestalteten mehrfarbigen Bildern werden Kinder der genannten Altersstufen besonders angesprochen.

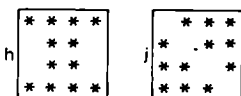
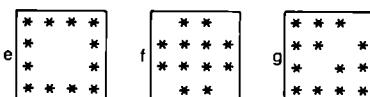
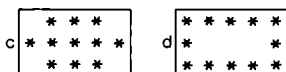
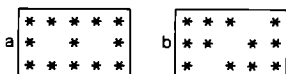
aus: *Mathe i. d. Schule, Berlin*

▲ 1 ▲ Какое число нужно поставить вместо знака „?“ в последовательности: 7, 17, 37, 77, ?, 317, ...?

▲ 2 ▲ Переставьте в каждом ряду по одной спичке так (см. рисунок), чтобы везде оказалось верное равенство.



▲ 3 ▲ Symmetrical Patterns:
What numbers are represented by these symmetrical patterns?



How many lines of symmetry (if any) has each pattern? Which patterns have rotational symmetry?

▲ 4 ▲ Un journal comporte 36 pages et tire à 600 000 exemplaires par jour. Chaque page est un rectangle dont les dimensions sont 50 cm et 33 cm. Autour de chaque page existe une marge non imprimée de largeur égale à 2 cm.

a) Quelle est l'aire de la surface imprimée?
b) Quelle est l'aire du papier nécessaire au tirage quotidien du journal?

Zum Verhältnis von Kunst und Wissenschaft am Beispiel der Ornamente und der Mathematik

Teil 2

Wie unterscheidet der Mathematiker Symmetrien an ebenen Figuren?

Symmetrieabbildungen

Es ist klar, daß für die individuelle konkrete künstlerische Gestaltung von ebenen symmetrischen Gebilden eine unerschöpfliche Skala von Möglichkeiten bereitsteht. Unterschiedliche Einzeldarstellungen können aber dennoch die gleiche Symmetriestruktur aufweisen. So haben beispielsweise alle in Bild 11 angegebenen Zirkelornamente für Folkloremotive die gleichen Symmetrien wie ein regelmäßiges Sechseck.

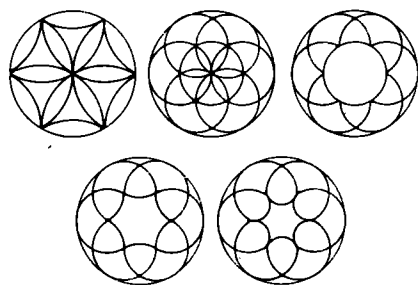


Bild 11
Zirkelsterne und Zirkelrosetten
mit Sechseck-Symmetrie

Für beschränkte ebene Figuren erkennt man zwei unterschiedliche Grundtypen von Symmetrie:

1. Die Figur weist nur Drehsymmetrie auf.
2. Die Figur weist neben Drehsymmetrien auch Spiegelsymmetrien auf.

Musterbeispiele für rein drehsymmetrische Figuren gibt das Wirbelrad her. Die Blattrosette ist darüber hinaus noch spiegelsymmetrisch.

Für jeden dieser beiden Grundtypen kann man durch Auswahl der Anzahl der regel-

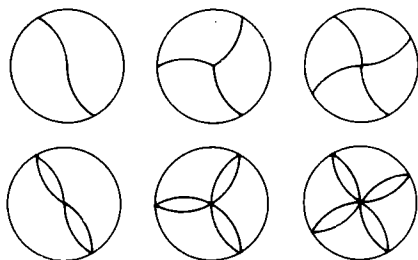


Bild 12
Das Wirbelrad und die Blattrosette

mäßig angeordneten Speichen beim Wirbelrad bzw. der Lanzett-Blätter bei der Blattrosette noch die Symmetriefülle beeinflussen.

Wieviele Drehsymmetrien bzw. Spiegelsymmetrien sind für jedes dieser Beispiele möglich? Die Drehungen müssen sicherlich um den Kreismittelpunkt erfolgen, die Spiegelungen an Geraden durch den Kreismittelpunkt. (Die Geraden, an denen gespiegelt wird, heißen die Spiegelachsen.) Die Anzahl der Spiegelsymmetrien ist eindeutig bestimmt. Bei den Wirbelrädern ist sie 0, bei den Blattrosetten 2, 3 und 4. Hingegen ist die Anzahl der Drehungen erst eindeutig bestimmt, wenn man sich auf Drehwinkel beschränkt, die zwischen 0° und 360° liegen und man die Drehrichtung vorschreibt. Üblicherweise versteht man unter der mathematisch positiven Drehrichtung die Drehrichtung im Gegensinn zur Uhrzeigerdrehrichtung. (Diese Auswahl hängt mit den Koordinatensystemen zusammen.) Weil bei der Voldrehung die ursprüngliche Lage wieder hergestellt ist, sieht man die Nullrotation und die Voldrehung als gleich an. Durch beide wird ja jeder Punkt der Ebene in sich übergeführt. Beide bestimmen also dieselbe Abbildung – die sogenannte *identische Abbildung* der Ebene. Abbildungsmäßig sind sie gleich und ihr Unterschied hinsichtlich der auszuführenden Handlungen spielt für die Symmetriebetrachtungen keine Rolle. Mit dieser Zählung haben dann die Wirbelräder und die Blattrosetten 2, 3 und 4 Drehungen. Der magerste Symmetriefall wird in Bild 13 gezeigt.

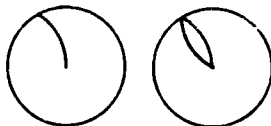


Bild 13
Figuren mit nur einer Drehung:
Das rechte Exemplar weist außerdem
noch eine Spiegelung auf

Außer durch Drehungen oder Spiegelungen könnte eine ebene Figur noch durch Verschiebungen (= Translationen) mit sich zur Deckung gebracht werden. Translationssymmetrien kommen beispielsweise bei den beiderseitig ins Unendliche fortgesetzten Wandfriesen von Bild 10 vor. An dem unteren Wandfries erkennt man noch gut eine weitere Art von Symmetrieabbildung. Das ist eine sogenannte *Gleit- oder*

Schubspiegelung. Das ist eine Zusammensetzung von einer Translation (Verschiebung) mit einer Spiegelung an einer Achse in Verschiebungsrichtung. Diese Achse heißt die *Gleitspiegelachse*. Eine Gleitspiegelung ist völlig bestimmt durch ihre Gleitspiegelachse und den Translationsanteil, der wiederum durch den Richtungssinn und die Länge festgelegt ist.

Gibt es noch weitere Arten von ebenen Symmetrieabbildungen? Im Lehrbuch der 6. Klasse sind die Bewegungen der Ebene (= Kongruenzabbildungen der Ebene) behandelt. Wir haben den dortigen drei Arten noch eine hinzugefügt – die *Gleitspiegelung*. Nun kann man beweisen, daß es mehr nicht gibt.

In der Ebene gibt es nur die folgenden Arten von verschiedenen Bewegungen (= Kongruenzabbildungen = Symmetrieabbildungen).

1. Verschiebungen; 2. Drehungen;
3. Spiegelungen; 4. Gleitspiegelungen.

Zu jeder dieser Art gehören zur konkreten Festlegung gewisse Bestimmungsstücke. So sind dies bei den Verschiebungen die Verschiebungsrichtung, der Richtungssinn und der Verschiebungsbetrag. Bei den Drehungen sind es der Drehpunkt, der Drehwinkel und der Drehwinkel. Die Spiegelungen haben die einfachste Bestimmung – nämlich durch ihre Spiegelachse.

Symmetriegruppen Ornamentgruppen

Aus zwei Symmetrieabbildungen einer gegebenen ebenen Figur F kann durch Zusammensetzung der Abbildungen, indem man sie also hintereinander ausführt, eine neue Symmetrieabbildung von F gewonnen werden. Der einfachste Typ der möglichen Symmetrieabbildungen war, was deren Bestimmungsstücke angeht, die Spiegelung. Wieweit kommt man mit den Zusammensetzungen von Spiegelungen? Aus zwei Spiegelungen an den verschiedenen Geraden g und h entsteht durch deren Zusammensetzung – oder deren *Produkt*, wie man auch sagt – entweder eine Verschiebung oder aber eine Drehung. Die Verschiebung ergibt sich genau in dem Falle, wenn die Spiegelachsen parallel sind.

Eine Drehung entsteht genau dann, wenn sich die beiden Spiegelachsen schneiden. Der Schnittpunkt der Achsen ist zugleich der Drehpunkt. Man sieht hierbei noch, daß im Unterschied zum Produkt von Zahlen, wo die Reihenfolge der Faktoren keinen Einfluß auf das Ergebnis hat, beim Produkt von Symmetrieabbildungen die Reihenfolge sehr wohl ausschlaggebend sein kann für das Resultat.

Eine Gleitspiegelung kann immer als Produkt von drei Spiegelungen dargestellt werden. Eine Spiegelung erfolgt dabei an der Gleitspiegelachse, die beiden anderen an zwei Geraden, die zur Gleitspiegelachse senkrecht stehen. Vom mathematischen Standpunkt ist die Symmetrie einer ebenen Figur erfaßt durch die Gesamtheit der Symmetrieabbildungen dieser Figur. Mit

den der Figur F zugehörigen Symmetriearbeiten kann man rechnen – Produkte bilden. Dieses Rechensystem der Symmetriearbeiten einer Figur F nennt der Mathematiker die *Symmetriegruppe* der Figur F .

Wir betrachten beispielsweise ein Rechteck F , das kein Quadrat ist. Die Symmetriegruppe von F besteht aus vier Elementen:

1. *Drehungen*: Drehung D um Rechteckmittelpunkt mit Drehwinkel 180° und Nullrotation – die identische Abbildung – 1.
2. *Spiegelungen*: S_1 Spiegelung – an einer Mittellinie, Spiegelung S_2 an der dazu senkrechten Mittellinie.

Die Produkttafel für die Gruppe sieht wie folgt aus:

	1	D	S_1	S_2
1	1 1	1 D	1 S_1	1 S_2
D	D 1	$D D$	$D S_1$	$D S_2$
S_1	S_1 1	$S_1 D$	$S_1 S_1$	$S_1 S_2$
S_2	S_2 1	$S_2 D$	$S_2 S_1$	$S_2 S_2$

was schließlich folgendes ergibt

	1	D	S_1	S_2
1	1	D	S_1	S_2
D	D	1	S_2	S_1
S_1	S_1	S_2	1	D
S_2	S_2	S_1	D	1

Zur Symmetriegruppe einer beliebigen Figur gehört stets die Identität 1. Sie hat bezüglich der Produktbildung die gleiche Eigenschaft wie die Zahl 1 bei der Produktbildung von Zahlen; das Produkt aus einer Symmetriearbeitung A der Figur mit 1 ist A , d. h. $1A = A1 = A$. Aus diesem Grund wurde auch die Bezeichnung 1 gewählt. Dieses Gruppenelement heißt auch das *Einselement* der Gruppe.

Zu jedem Element A der Gruppe gibt es außerdem ein sogenanntes *inverses Element* $\bar{A}$ von A . Es ist dadurch gekennzeichnet, daß es die entgegengesetzte Wirkung auf die Figur F ausübt wie A , daß es A in der Bewegungswirkung aufhebt, d. h. es gilt $A\bar{A} = \bar{A}A = 1$.

Eine jede Spiegelung S an einer Geraden ist zu sich selbst invers. Ebenso ist eine 180° -Drehung zu sich selbst invers. Keine Drehung mit einem Drehwinkel φ , $0 < \varphi < 360^\circ$ und $\varphi \neq 180^\circ$, ist zu sich selbst invers. Das inverse Element zu einer Drehung ist die Drehung mit dem gleichen Drehpunkt und dem Drehwinkel $360^\circ - \varphi$. Das mathematische Problem im Zusammenhang mit den Ornamenten (ornamentum, lat. = Schmuck, Verzierung) besteht nun in der Auffindung der möglichen Symmetriegruppen in der Ebene. Der einfach-

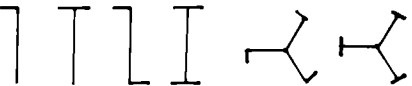


Bild 14
Piktogramme für die ersten endlichen Drehgruppen und die ersten endlichen gemischten Symmetriegruppen

ste Typ sind die endlichen Symmetriegruppen. Diese heißen *Rosettengruppen*, weil zu jeder ebenen Figur mit endlicher Symmetriegruppe eine Rosette mit der gleichen Gruppe gefunden werden kann. Zur Kennzeichnung dieser Gruppen wollen wir folgende Piktogramme benutzen.

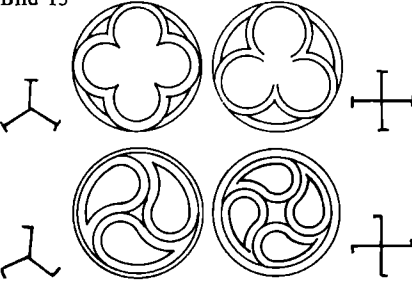
Aufgabe 4

Welche Symmetriearbeiten besitzt ein Quadrat? Gebt die Produkttafel für die Symmetriegruppe an! Durch welches Piktogramm wird diese Gruppe beschrieben?

Aufgabe 5

In *alpha* 5/82 sind auf der Rückseite Rosetten abgebildet. Davon geben wir hier die ersten beiden jeden Typs und ihre Piktogramme in Bild 15 an.

Bild 15



Bestimmt die Rosettengruppen!

Jetzt wollen wir uns den unendlichen Symmetriegruppen in der Ebene zuwenden. Ein *Friesornament* (= *Streifenornament*) entsteht durch eine Wiederholung einer beschränkten ebenen Figur längs einer ausgewählten Richtung (gegeben durch eine Gerade). Die Symmetriegruppe enthält dann also gewisse Translationen nach rechts und links längs dieser Geraden. Es gibt eine Minimaltranslation. Diese wird in ihrem Verschiebungsbetrag ($\neq 0$) in der Gruppe durch keine eigentliche Verschiebung unterschritten. Alle Verschiebungen sind ganze Vielfache dieser minimalen Translation der Symmetriegruppe.

Die zu Friesornamenten gehörigen Symmetriegruppen heißen *Friesgruppen*. Das mathematische Hauptresultat über die Friesgruppen besagt, daß es gerade genau sieben verschiedene Typen gibt.

In Bild 16 haben wir Buchstabenfrieze zu diesen sieben Typen angegeben. Der Typ 1 ist der einfachste. Eine unsymmetrische Figur (ein Buchstabe P) – oder anders gesagt: eine beschränkte Figur mit der denkbar kleinsten Symmetriegruppe (die also nur aus einem Element besteht) – wurde nach links und rechts ins Unendliche durch wiederholte Anreihung fortgesetzt. Die Friesgruppe besteht nur aus den ganzen Vielfachen einer Minimaltranslation, die etwa die Buchstaben in einem Schritt nach rechts verschiebt. Der Typ 2 enthält außer den ganzen Vielfachen der Minimaltranslation noch eine Spiegelung an der Längsachse und die Zusammensetzungen dieser Spiegelung mit den Translationen, das sind also Gleitspiegelungen. So kann man auch die anderen Typen aufschlüsseln.

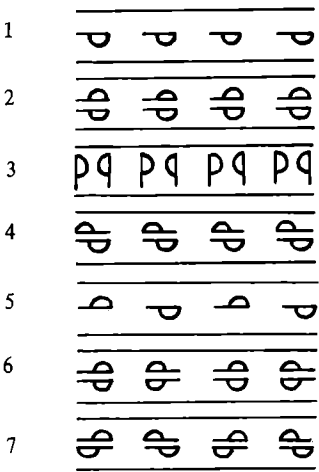


Bild 16

Ein *Wandmusterornament* entsteht, wenn man mit einer ebenen beschränkten Figur durch wiederholte Anreihung die ganze Ebene ausfüllt. Die zugehörigen Symmetriegruppen heißen *Wandmustergruppen*. Das mathematische Hauptresultat lautet hier, daß es gerade genau 17 verschiedene Gruppentypen gibt.

Wir haben in den Bildern 17, 18 und 19 drei flächendeckende Wandmuster nach dem holländischen Maler und Grafiker *M. C. Escher* angegeben. Das Muster in Bild 17 hat nur Translationen. Diese kann man aus zwei minimalen Translationen geeigneter Richtungen durch ganzzahlige Vielfache zusammensetzen. Zur vollständigen Beschreibung aller Translationen der Wandmuster bedient man sich zweckmä-

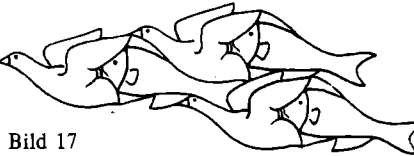


Bild 17

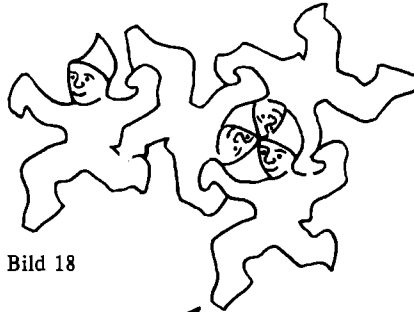


Bild 18

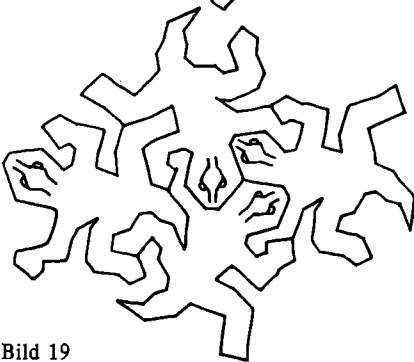


Bild 19

Big eines zugehörigen Translationsgitters. Das ist ein Parallelogrammgitter, welches als die beiden bestimmenden Parallelogrammseiten minimale Translationen hat, die alle anderen Translationen aufspannen.

Aufgabe 6

Bestimmt alle möglichen Symmetrien dieser Beispiele! Es sind also Translationsgitter, die Drehpunkte und die Ordnungen der zugehörigen Drehungen, die Spiegelachsen, die Gleitspiegelachsen und die minimalen Gleitbeträge anzugeben.

Trotz der seinerzeit hochstehenden griechischen Mathematik war damals die Aussage über die Anzahl der Friesgruppen und Wandmustergruppen nicht bekannt. Jedoch weisen die griechischen Bandornamente an Bauten und besonders die Vasenornamente künstlerische Belege für alle sieben mathematisch unterschiedlichen Typen auf. Nach W. Lietzmann findet man sogar schon in der europäischen Steinzeit Beispiele für alle sieben Friessymmetrietypen auf Urnen, Schilden, Spangen usw. Das schwierige Problem der Ermittlung aller möglichen Symmetrietypen von Wandmustern ist im Altertum von den Künstlern nicht bewältigt worden und von Mathematikern überhaupt nicht angegriffen worden. Dekorationsbeispiele für alle 17 Wandustersymmetrietypen finden sich wie schon erwähnt bei den Mauren. Es verbleibt hier noch eine reizvolle mathematisch-historische Fragestellung, welche der 17 Wandmusterarten bei den alten Ägyptern und Chinesen nicht entdeckt wurden. Können für das Fehlen gewisser Typen dafür Kompliziertheitsgründe geltend gemacht werden? Der bekannte Schweizer Gruppentheoretiker Andreas Speiser schreibt in einem seiner Bücher: „Leider sind die ägyptischen und arabischen Ornamente bisher nie nach ihrem geometrischen Gehalt untersucht worden, und so bleibt eines der schönsten Kapitel der Geschichte der Mathematik noch zu schreiben.“

Die Autoren dieses Artikels arbeiten an einem Buch

Mathematik und ornamentale Kunstformen, welches für die Mathematische Schülerbücherei (MSB) vorgesehen ist. Darin werden ausführlich diese und noch weitere Fragen erwogen. Für uns wäre eine Äußerung der Leser dieses Artikels, insbesondere eine Behandlung der Aufgaben, sehr hilfreich. Wir könnten dann sicher besser auf die Schwierigkeiten der Leser eingehen. Vielleicht werden wir sogar auf Ornamentbeispiele aufmerksam, die unsere Sammlung wirkungsvoll bereichern. Für die Mitarbeit setzen wir einige Preise in Form von Büchern bzw. Kunstdruckkarten aus.

Aufgabe 7

Sucht in eurer Umgebung nach vorhandenen Rosettenornamenten, Streifenornamenten und Wandornamenten.

Zeichnet diese nach Möglichkeit. Versucht eine Auflistung ihrer Symmetrien!

U. Feiste/J. Flachsmeyer

Schriftliche Abschlußprüfung Fach Mathematik

Klassenstufe 10 – Schuljahr 1984/85

Pflichtaufgaben

1. Im Jahre 1975 wurden aus dem Staatshaushalt der DDR für das Bildungswesen (einschließlich Hoch- und Fachschulen) 8,3 Mrd. Mark ausgegeben.

a) 1980 waren die Ausgaben um 18 % höher als 1975.

Berechnen Sie die Ausgaben für 1980!

b) 1983 betrugen die Ausgaben 11,1 Mrd. Mark. Auf Wieviel Prozent stiegen sie gegenüber 1975?

c) Stellen Sie die Ausgaben für 1975, 1980 und 1983 in einem Diagramm dar! (Beschriftung!)

2. Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & y = -2x + 7 \\ \text{(II)} \quad & 3y - 6 = 9x \end{aligned} \quad (x, y \in P).$$

a) Lösen Sie dieses Gleichungssystem rechnerisch!

b) Betrachten Sie jede Gleichung des Systems als Gleichung einer linearen Funktion!

– Stellen Sie die beiden Funktionen in ein und demselben Koordinatensystem dar!

– Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der beiden Graphen an!

3. Von einem Dreieck ABC sind gegeben:

$$\overline{AB} = c = 8,9 \text{ cm.}$$

$$\overline{AC} = b = 6,7 \text{ cm.}$$

$$\overline{BC} = a = 9,7 \text{ cm.}$$

a) Konstruieren Sie dieses Dreieck!

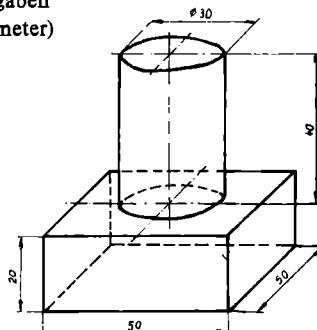
Messen Sie die Größe des Winkels $\angle BAC = \alpha$, und geben Sie diesen Meßwert an!

b) Berechnen Sie die Größe des Winkels α !

4. Die Skizze zeigt ein Werkstück aus Stahl ($\rho = 7,8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$), das aus einem quaderförmigen und einem zylinderförmigen Teil besteht.

Skizze (nicht maßstäblich)

(Maßangaben in Millimeter)



a) Berechnen Sie die Masse des Werkstücks!

b) Stellen Sie das Werkstück in senkrechter Zweitafelprojektion im Maßstab 1:1 dar!

(Benennung der Eckpunkte ist nicht erforderlich.)

5. a) Geben Sie unter Verwendung der Variablen n ($n \in \mathbb{N}$) drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen an, deren kleinste ungerade ist!

b) Beweisen Sie, daß folgende Aussage wahr ist:

„Wenn die kleinste von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ungerade ist, so ist deren Summe durch 6 teilbar.“

c) Zeigen Sie, daß die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen nicht immer durch 6 teilbar ist!

6. a) Berechnen Sie:

$$42a^2b : (-7a) \quad (a \neq 0)!$$

b) Stellen Sie die Formel $A_0 = 4\pi r^2$ nach r um ($r > 0$)!

c) Ermitteln Sie x in der Gleichung $3^x = 81$!

d) Lösen Sie die Ungleichung

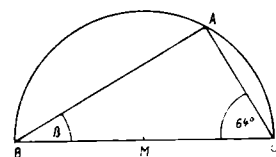
$$5x - 3 < 6 \quad (x \in \mathbb{P})!$$

(Probe wird nicht verlangt.)

Geben Sie alle natürlichen Zahlen an, die diese Ungleichung erfüllen!

e) Ein Dreieck ABC ist einem Halbkreis einbeschrieben (siehe Skizze!). Geben Sie die Größe des Winkels β an!

Skizze (nicht maßstäblich)



Wahlaufgaben

Von den folgenden Aufgaben 7.1., 7.2. und 7.3. brauchen Sie nur eine zu lösen!

7.1. Die Abraumhalde der Schachtanlage Bernhard Koenen im Mansfelder Bergbaurevier hat angenähert die Form eines Körpers, der aus einem halben geraden Kreiskegel und einer Pyramide zusammengesetzt ist (siehe Skizze!).

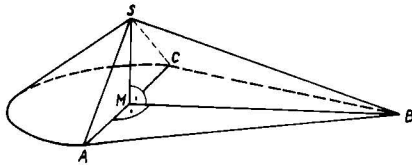
Bekannt sind:

$$\overline{AC} = d = 310 \text{ m,}$$

$$\overline{MS} = h = 115 \text{ m,}$$

$$\overline{BS} = l = 380 \text{ m.}$$

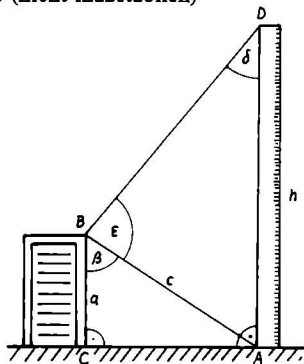
Skizze (nicht maßstäblich)



- Berechnen Sie das Volumen des halben Kreiskegels!
- Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{BM}$!
- Berechnen Sie das Volumen der Pyramide!
- In wieviel Jahren ist diese Halde entstanden, wenn auf ihr jährlich etwa 300 000 m³ Abraum abgelagert wurden?

7.2. Beim Bau eines Schornsteins wird zur Ermittlung der jeweils erreichten Höhe von B aus der Winkel $\angle ABD = \varepsilon$ gemessen (siehe Skizze!).

Skizze (nicht maßstäblich)



Bekannt sind ferner:

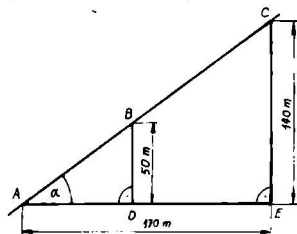
$$\overline{BC} = a = 78,2 \text{ m},$$

$$\angle CBA = \beta = 57,6^\circ.$$

- Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{AB} = c$!
- An einem bestimmten Tag mißt man $\varepsilon = 84,3^\circ$. Berechnen Sie die zu diesem Zeitpunkt erreichte Schornsteinhöhe $\overline{AD} = h$!

7.3. Ein Hubschrauber fliegt mit konstanter Geschwindigkeit auf einer geradlinigen Bahn von A nach C (siehe Skizze!).

Skizze (nicht maßstäblich)



- Berechnen Sie den Anstiegswinkel α dieser Flugbahn!
- Von A nach B benötigt der Hubschrauber 7,5 s. Wie lange braucht er von A nach C?
- Berechnen Sie die Fluggeschwindigkeit des Hubschraubers auf der Strecke $\overline{AC}$! Geben Sie diese Geschwindigkeit in Kilometer je Stunde ($\frac{\text{km}}{\text{h}}$) an!

Station trägt den Namen alpha

Im April 1985 erhielt die Station Junger Techniker und Naturforscher Fürstenwalde/Spree den Namen *alpha* – im Rahmen von zwei Festtagen, die anlässlich der Tage der Stationen Junger Techniker und des Jahrestages des ersten bemannten Weltraumfluges mit J. A. Gagarin (1961) veranstaltet wurden. Die Ehrenurkunde wurde in einer Feierstunde vom Chefredakteur der *alpha* überreicht.



Diese Station kann auf eine 33jährige erfolgreiche Arbeit mit der Jugend für die Jugend zurückblicken. Zur Zeit arbeiten in ihr vier Pädagogen mit Hochschulabschluß und drei technische Kräfte gemeinsam mit 20 Arbeitsgemeinschaftsleitern aus dem gesellschaftlichen Umfeld, aus Betrieben, Schulen, der NVA und anderen Institutionen. Sie führen insgesamt 31 Arbeitsgemeinschaften, Kreisklubs und Interessengruppen, darunter die neu gebildeten Arbeitsgemeinschaften Mikroelektronik und Computertechnik, aber auch Flug- und Eisenbahnmodellbau, Militärtechnik, Bautechnik, Drechseln, Botanik, Aquaristik und die besonders für das Finden und Fördern von technisch begabten Kindern in der Unterstufe gebildeten Arbeitsgemeinschaften: Technische Knebeleien, Bausteine-Konstruieren. Dazu kommen neun Kreisklub-AG's Mathematik, in denen die besten *Jungen Mathematiker* des Kreises wetteifern. Eine neue Qualität bei der Förderung von interessierten und talentierten Pionieren und FDJ-Mitgliedern ab Klasse 7 konnte in der Arbeit der drei Arbeitsgemeinschaften Mikroelektronik und in den vier Arbeitsgemeinschaften Computertechnik erreicht werden.

Red. alpha

Buchtips

Roland Fiedler

Streifzüge durch die Mathematik

224 Seiten, zahlreiche Abb., Pappband
Bestell-Nr.: 631 726 5 Preis: 6,80 M
(Für Leser von 11 Jahren an)
Der Kinderbuchverlag Berlin

Wer Spaß am Knobeln und Denken hat, dem bietet dieses Buch ein reiches Betätigungsfeld. Mathematikaufgaben, von Jahrtausendealten bis zu gegenwärtigen harren ihrer Lösung. Sie ergeben sich bei Streifzügen durch die Mathematikgeschichte. Der Leser erfährt dabei von historischen Problemen der Mathematik, und er kann Lösungswege verfolgen, die berühmte Mathematiker beschritten haben.

Friedrich Kaden

Kleine Geschichte der Mathematik

144 Seiten, zahlr. Abb., Pappband mit Folie
Bestell-Nr.: 631 854 0 Preis: etwa 12,00 M
(Für Leser von 11 Jahren an)
Der Kinderbuchverlag Berlin

Das Buch erzählt Geschichten aus der Geschichte der Mathematik. Es gibt so einen Überblick über die Entwicklung dieser Wissenschaft, die vor vielen Jahrtausenden mit den Bedürfnissen der Menschen entstand. Heute gibt es kaum noch einen Bereich des Lebens, den sie nicht erobert hat.

A. G. Konforowitsch

Guten Tag,

Herr Archimedes

Etwa 168 Seiten mit 94 Abb., Broschur
Bestell-Nr.: 547 006 5 Preis: etwa 12,00 M
VEB Fachbuchverlag Leipzig

In dieser Broschüre sind bemerkenswerte und unterhaltsame mathematische Aufgaben zusammengefaßt. Beginnend mit der Mathematik Ägyptens und Babylons über das klassische Griechenland, Indien, China, den islamischen Raum, das mittelalterliche Europa, die Renaissance, das 17., 18. und 19. Jahrhundert bis zur Gegenwart erstreckt sich die Auswahl der Aufgaben. Jedem Zeitabschnitt ist eine historische Einführung vorangestellt. Den einzelnen Aufgaben sind zumeist historische Persönlichkeiten zuzuordnen.

W. Kryszicki

Keine Angst vor x und y Quadratische Gleichungen und Gleichungssysteme

120 Seiten mit 19 Abb. MSB Nr. 119
Bestell-Nr.: 666 186 7 Preis: 6,50 M
BSB B. G. Teubner, Leipzig

B. Klotzek u. a.

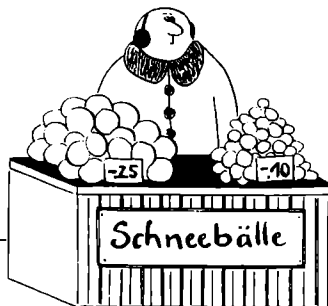
kombinieren · parkettieren · färben

192 Seiten mit 200 Abb. MSB Nr. 122
Bestell-Nr.: 571 353 0 Preis: 13,00 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Der nächste Winter kommt bestimmt.
Aus: DLZ, Egon Neumann

Letzter Einsendetermin: 8. März 1986



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig,
Postfach 14

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend nummeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlusssatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Mathematik

Ma 5 ■ 2608 Einer Arbeitsgemeinschaft gehörten anfangs 21 Schüler an, und zwar sowohl Jungen als auch Mädchen. Nachdem 3 Mädchen hinzu kamen, waren es doppelt soviel Mädchen wie Jungen. Wieviel Jungen bzw. Mädchen gehörten anfangs dieser AG an?

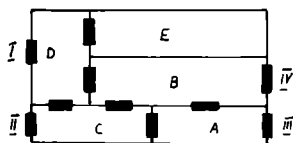
Schüler D. Michaelis, Grevesmühlen

Ma 5 ■ 2609 Der Nachfolger vom Doppelten eines Produktes von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen lautet 1985. Wie lauten die beiden Zahlen?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 2610 Das Bild zeigt fünf Räume A, B, C, D, E. Es gibt vier Eingangstüren I, II, III, IV. Zähle alle Wege auf, wie man von draußen aus zum Raum E gelangen kann! Auf keinem Weg soll dabei ein Raum mehr als einmal betreten werden. (Beispiel: CBDE)

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz



Ma 5 ■ 2611 Ein Viereck hat einen Umfang, dessen Länge 60 cm beträgt. Die Maßzahlen der vier Seitenlängen sind aufeinanderfolgende gerade Zahlen. Wie lang sind die Seiten des Vierecks?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 2612 Vom Rastplatz A fahren ein Moped und ein Trabant gleichzeitig in gleicher Richtung ab. Das Moped fuhr je Stunde rund 90 km, der Trabant rund 80 km. Nach 90 Minuten trifft der Mopedfahrer in B, der Trabantfahrer auf dem Rastplatz C ein. Dort macht der Trabantfahrer 25 Minuten Pause und fährt dann weiter. Wird der Mopedfahrer, der keine

Pause in B einlegt, den Trabantfahrer noch auf dem Rastplatz C treffen?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 2613 Welche natürlichen Zahlen x , y und z erfüllen die drei Gleichungen

$$\begin{aligned}x \cdot y &= 10, \\x \cdot z &= 14 \text{ und} \\x \cdot y \cdot z &= 70\end{aligned}$$

gleichzeitig?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 2614 Gesucht werden alle vierstelligen natürlichen Zahlen, die durch 36, 48 und 54 teilbar sind und kleiner als 4000 sind.

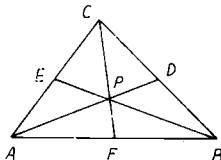
K. Wagner, Plauen

Ma 6 ■ 2615 Gesucht werden alle vierstelligen natürlichen Zahlen, die an zweiter und dritter Stelle die Ziffer 2 haben und durch 24 teilbar sind.

K. Wagner, Plauen

Ma 6 ■ 2616 Das Bild stellt ein Dreieck ABC dar. Die Seitenhalbierenden $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ und $\overline{CF}$ schneiden sich im Punkte P . Das Dreieck ABC habe einen Flächeninhalt von 18 cm^2 . Welchen Flächeninhalt hat in diesem Falle das Viereck $AFPE$?

Schüler A. Meckel, Friesen



Ma 6 ■ 2617 Dorit ist 5 Jahre älter als ihre Schwester Annett. Dorits Mutter ist viermal so alt wie Annett. Dorits Vater ist so alt wie Annett und ihre Mutter zusammen. Addiert man die Lebensalter aller vier Familienmitglieder, so ergibt das 93 Jahre. Wie alt ist jedes Familienmitglied?

Schülerin D. Schiller, Döbeln

Ma 6 ■ 2618 Das Bild stellt ein Dreieck ABC dar, dessen Innenwinkel $\angle BAC$ die Größe $\alpha = 60^\circ$ und $\angle ABC$ die Größe $\beta = 50^\circ$ haben. Die Winkelhalbierende des

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1985/86 läuft von Heft 5/1985 bis Heft 2/1986. Zwischen dem 1. und 10. September 1986 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/85 bis 2/86 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

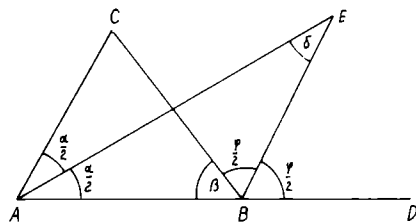
Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden ab Heft 6/86 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/85 bis 2/86) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1985/86 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

Thies Luther, 2600 Güstrow, Werdersstr 22		Ma 7 • 1369
Kersting-OS, Klasse 7		
30	150	
Prüfer:		
Lösung:		

Innenwinkels $\angle BAC$ schneidet die Winkelhalbierende des Außenwinkels $\angle CBD$ im Punkte E . Es ist die Größe δ des Winkels $\angle AEB$ zu ermitteln!

Schüler R. Scheel, Berlin



Ma 7 2619 Welche gebrochene Zahl mit dem Nenner 17 ist größer als $\frac{1}{4}$, aber kleiner als $\frac{1}{3}$? Schülerin A. Strauß, Stendal

Ma 7 2620 Kurt will von Paul wissen, wie alt er und sein jüngerer Bruder Ralf seien. Darauf sagt Paul: „Rechne es dir selber aus! Mein Vater ist 35 Jahre alt. Meine Mutter ist 20 Jahre älter als ich. Zusammen sind wir vier 89 Jahre alt. Mein Lebensalter ist durch 5, das meines Bruders durch 4 teilbar.“ Schüler M. Fleischer

Ma 7 2621 Hugo öffnet seine Sparbüchse und zählt seine Ersparnisse. Er stellt fest, daß die Sparbüchse nur 10-Pf- und 20-Pf-Münzen enthält, und zwar zusammen 109 Stück mit dem Gesamtbetrag von 13,30 M. Wie viele Münzen jeder Sorte sind es?

Schüler G. Griebbach, Hohenstein-E.

Ma 7 2622 Herr Schulz, der im 20. Jahrhundert geboren wurde, erreicht im Jahr 1984 an seinem Geburtstag ein Lebensalter in Jahren, das der vierfachen Quersumme der Zahl seines Geburtsjahres entspricht. In welchem Jahr wurde Herr Schulz geboren? Dipl.-Landwirt H. Boettcher, Weimar

Ma 8 2623 Eine Gaststätte erhielt eine Lieferung von Tischen und Stühlen zum Gesamtpreis von 4190 M. Wie viele Tische bzw. Stühle wurden geliefert, wenn jeder Tisch 113 M und jeder Stuhl 51 M kostet?

Schülerin S. Schubert, Machern

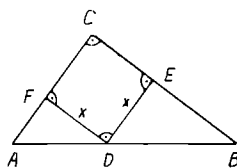
Ma 8 2624 Die Mitglieder einer Familie sind zusammen 111 Jahre alt. Mutter und Sohn sind zusammen 1 Jahr älter als Vater und Tochter zusammen. Der Vater ist viermal so alt wie seine Tochter. Vor einem Jahr war die Mutter viermal so alt wie ihre Tochter. Wie alt sind die einzelnen Familienmitglieder?

Schüler J. Steinbach, Zwickau

Ma 8 2625 Es ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC zu konstruieren, dessen Länge c der Hypotenuse $\overline{AB}$ und dessen Differenz $d = a - b$ der Längen a und b der Katheten $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ gegeben sind. Die Konstruktion ist zu beschreiben und zu begründen!

Dr. E. Umlauf, Hümpfertshausen

Ma 8 2626 Das Bild stellt ein rechtwinkliges Dreieck ABC dar, dessen Katheten die Längen $a = 4$ cm und $b = 3$ cm haben, und dem ein Quadrat $DECF$ (wie aus dem Bild ersichtlich) einbeschrieben wurde. Wieviel Prozent vom Flächeninhalt des Dreiecks ABC beträgt der Flächeninhalt des Quadrates $DECF$? Sch.



Ma 9 2627 Kurz vor der Ladenschließung kauften in einem Gemüseladen drei Kundinnen Pampelmusen. Die erste Kundin verlangte von den noch vorhandenen Pampelmusen die Hälfte und eine halbe Pampelmuse. Die zweite Kundin verlangte danach von den restlichen Pampelmusen ebenfalls die Hälfte und eine halbe Pampelmuse. Auch die dritte Kundin verlangte von den nun noch verbliebenen Pampelmusen die Hälfte und eine halbe Pampelmuse. Es blieb genau eine Pampelmuse übrig, die nicht verkauft wurde. Wie viele Pampelmusen kaufte jede der drei Kundinnen?

Schüler M. Henkel, Ichtershausen

Ma 9 2628 Anton, Bruno und Christian wollen für ihre Mutter zu deren Geburtstag einen Strauß Chrysanthemen kaufen. Anton hat weniger als 4 M, Christian mehr als 5 M bei sich. Ein- und Fünf-Pfennig-Münzen sind nicht darunter. Anton und Bruno können von ihrem Geld zusammen genau 5 Chrysanthemen kaufen, Bruno und Christian zusammen genau 6, Anton und Christian zusammen genau 7 Stück bekommen.

a) Welches ist der Preis für eine Chrysantheme?

b) Wie viele Chrysanthemen wurden der Mutter zu ihrem Geburtstag von den drei Brüdern zusammen überreicht? Sch.

Ma 9 2629 Gegeben sei die Menge

$M = \{1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$.

Es sei $a \in \mathbb{N}$ ein Teiler in M von einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ genau dann, wenn $b \in \mathbb{N}$ existiert und $a \cdot b = n$ gilt.

(1) Bestimmen Sie die ersten fünf Primzahlen in M , d. h., diejenigen Elemente der Menge M , die genau zwei verschiedene Teiler in M besitzen!

(2) Bestimmen Sie die größte vierstellige Primzahl in M , in der zweimal die Grundziffer Null auftritt!

(3) Wie viele Primzahlen in M gibt es, die genau aus den Grundziffern 0, 1, 2, 3 bestehen? StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 9 2630 Vertauscht man in einer zweistelligen natürlichen Zahl z mit der Quersumme 9 die Ziffern, so entsteht die Zahl z' . Addiert man die Quadrate von z und z' und dividiert diese Summe durch das Dreifache der ursprünglichen Zahl z , so erhält man 73. Es gelte $z < z'$. Wie heißt das Zahlenpaar $(z; z')$?

Schülerin E.-M. Uhlig, Leipzig

Ma 10/12 2631 Eine Lehrerin befragte die 26 Schüler ihrer Klasse. Auf die Frage, wer in der AG Foto tätig sei, meldeten sich 10 Schüler. Auf die Frage, wer der AG Basteln angehöre, meldeten sich 8 Schüler. Auf die Frage, wer in der AG Technik mitmache, meldeten sich 7 Schüler. Genau 6 Schüler meldeten sich bei diesen drei Fragen gar nicht. Auf dem Heimweg meint Uta: „Genau drei Schüler sind in allen drei Arbeitsgemeinschaften.“ Heidi hingegen meint: „Genau zwei Schüler sind in genau zwei Arbeitsgemeinschaften.“ Jörg aber meint: „Genau 14 Schüler nehmen nur an einer einzigen Arbeitsgemeinschaft teil.“ Man zeige, daß alle drei Meinungen falsch sind!

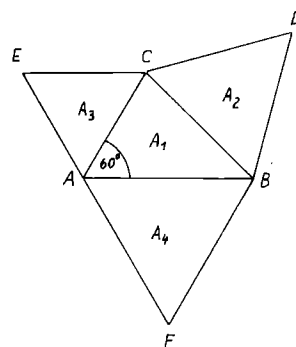
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 10/12 2632 Es sind alle Funktionen $f(x) = x^2 + px + q$, $p \in \mathbb{P}$ und $q \in \mathbb{P}$ zu bestimmen, für die gilt $f(p) = f(q) = 0$!

Schüler I. Warnke, Oranienburg

Ma 10/12 2633 Das Bild stellt ein Dreieck ABC dar, dessen Innenwinkel $\angle CAB$ die Größe $\alpha = 60^\circ$ hat. Über jeder Dreiecksseite wurde ein gleichseitiges Dreieck konstruiert. Es seien A_1, A_2, A_3, A_4 in dieser Reihenfolge die Flächeninhalte der Dreiecke ABC, CBD, ACE, AFB . Weisen Sie nach, daß $A_1 + A_2 = A_3 + A_4$ gilt!

Sch.



Ma 10/12 2634 Ist es möglich, daß ein Dreieck, dessen Seitenlängen sämtlich kleiner als 1 cm sind, einen größeren Flächeninhalt hat als ein Dreieck, bei dem jede Seite länger als 1 m ist?

aus einer sowjetischen Zeitschrift ausgewählt von J. Pönisch, Karl-Marx-Stadt

Physik

Ph 6 187 Ein Eisenträger ($\rho = 0,75$ g/cm³) ist genau so viele Meter lang, wie seine Masse in Kilogramm beträgt. Berechne seinen Querschnitt in cm²!

Ph 7 188 Eine Schraubenfeder wird um 12 cm ausgedehnt. Dazu ist eine Arbeit von 90 Nm aufzuwenden. Wie groß ist die Endkraft, wenn die anfängliche Kraft 500 N beträgt?

Ph 8 189 Bei Dampflokomotiven ist die zulässige Höchstgeschwindigkeit u. a. von der mittleren Kolbengeschwindigkeit der Dampfmaschine abhängig. Die mittlere

Kolbengeschwindigkeit c_m wird berechnet aus

$$c_m = \frac{2 \cdot s \cdot n}{60} \text{ [m/s]}. \quad (1)$$

Hierin sind

s = Kolbenhub in Metern

n = Drehzahl in 1/min der Treibräder.

Nach den Vorschriften der Deutschen Reichsbahn soll c_m nicht größer als 8 bis 9 m/s sein.

a) Welche zulässige Höchstgeschwindigkeiten (km/h) ergeben sich damit, wenn der Durchmesser der Treibräder

1. $D = 2000 \text{ mm}$ (z. B. Baureihe 01),

2. $D = 2300 \text{ mm}$ (z. B. Lok 18 201)

und der Kolbenhub jeweils $s = 660 \text{ mm}$ betragen?

b) Wie groß war die mittlere Kolbengeschwindigkeit bei der Lok 05 002, die im Mai 1936 eine Höchstgeschwindigkeit von $v = 200,4 \text{ km/h}$ erreichte? Der Kolbenhub betrug $s = 660 \text{ mm}$.

Ing. A. Körner, Leipzig

Ph 9 ■ 190 Auf einer Baustelle wird ein Trog mit Hilfe einer Winde in 4 Sekunden um 9,6 m gehoben. Er führt dabei eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung aus.

a) Welche Masse hat der Trog, wenn die zugelassene Zugkraft (am Haken der Winde) von 1320 N um 15 % unterschritten wird?

b) Ist es vertretbar, die Beschleunigung bei gleichbleibender Masse zu verdoppeln, wenn aus Sicherheitsgründen die ausgeschriebene Zugkraft nur mit 90 % erreicht werden darf?

St. Patzschke, Droyßig

Ph 10/12 ■ 191 Der Planet Venus befindet sich in einer Entfernung von $1,0821 \cdot 10^8 \text{ km}$ von der Sonne (große Halbachse der Bahnellipse) und Pluto $5,910 \cdot 10^9 \text{ km}$. Die Umlaufzeit des Pluto beträgt 248,4 Jahre. Berechnen Sie die Umlaufzeit der Venus in Tagen!



„Wasserdicht möchte die Ausrüstung schon sein.“

Chemie

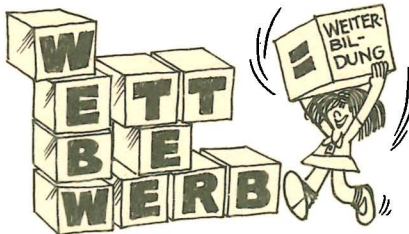
Historische Aufgaben

(aus einem Rechenbuch von 1906)

Ch 6 ■ 149 Ein Essighändler will seinen zu starken Essig mit Wasser verdünnen. Unvermischt würde er den Hektoliter zu 18,75 M verkaufen. Wieviel Wasser muß er

zu 24 hl zusetzen, um das Liter zu 15 Pf verkaufen zu können?

Ch 8 ■ 150 Ein Mühlstein von Basalt von 1,25 m Durchmesser und 0,26 m Dicke ist 814 kg schwer. Wie schwer ist ein Mühlstein von Quarz von 1,12 m Durchmesser und 0,54 m Dicke, wenn zwei gleichgroße Stücke von Basalt und Quarz sich dem Gewichte nach wie 13:15 verhalten?



Ch 9 ■ 151 Um in einem Bergwerke Bleierz aus einer Tiefe von 175 m zu fördern, sind 21 Pferde nötig, von denen jedes in 4 Sekunden 115 kg 3 m in die Höhe zu ziehen imstande ist. In einem anderen Bergwerke, dessen rohe Ausbeute sich zu der des ersteren wie 16:9 verhält, soll Erz aus einer Tiefe von 135 m in die Höhe geschafft werden. Wieviel Pferde sind hierzu nötig, wenn jedes in 15 Sekunden 103,5 kg 10 m hochziehen imstande ist?

Ch 10/12 ■ 152 Aus einem mit 360 l Weingeist gefüllten Fasse nehme ich eine bestimmte Menge heraus und ersetze das Fehlende durch Wasser. Von der gehörig vermischten Flüssigkeit nehme ich zum zweiten Male ebensoviel Liter heraus wie zum ersten Male, und noch 84 l dazu, und fülle das Faß wieder mit Wasser. Nach der zweiten Mischung enthält die Flüssigkeit ebensoviel Wasser wie Weingeist. Wieviel Liter wurden zum ersten Mal herausgenommen?

alpha-Porträt: Niels Neumann, Jena, 14 Jahre, Klasse 8

Aus einem Brief an die Redaktion *alpha*: Ich besuche eine Schule mit erweitertem Russischunterricht. Meine Lieblingsfächer neben Mathematik sind auch Physik, Englisch und Sport. Seit Oktober 1982 besuche ich einmal jede Woche den Spitzenzirkel für Mathematik in Jena. Außerdem gehe ich noch in die AG Schach und Gerätetechnik. Zu Hause verbringe ich einen Teil meiner Freizeit mit Mathematik. Einen 1. Preis sowie den Sonderpreis des Stadtschulrates erhielt ich bei der Kreisolympiade, Klasse 5 (1983). Auch in Klasse 6 erreichte ich 1984 die volle Punktzahl. Bei der Bezirksolympiade (Kl. 7) konnte ich einen 2. Preis erringen.

Aus meinen Aufzeichnungen der 6. Klasse stelle ich euch, liebe *alpha*-Leser, einige Aufgaben vor:

▲ 1 ▲

Eine Aufgabe zum Knobeln und Basteln

Bestimme von einem Körper die Anzahl der Raumdiagonalen, von dem nur bekannt ist, daß er ein Polyeder ist und daß an jeder Ecke die gleiche Anzahl regelmäßiger Sechsecke und die gleiche Anzahl regelmäßiger Fünfecke (als Seitenflächen) zusammenstoßen!

Hinweis: Man versuche zunächst, aus den wenigen Angaben nähere Aussagen über die Gestalt eines solchen Körpers zu gewinnen. Es ist dann nicht so kompliziert, ihn zu basteln. (Lösung siehe S. 140)

▲ 2 ▲ Zeige, daß es nicht möglich ist, mit einem Springer über alle Felder eines 4×4 -Felder-Quadrates so zu springen, daß jedes Feld genau einmal passiert wird! Dabei ist das Ausgangsfeld beliebig.

▲ 3 ▲ Zeige, daß es keine dreistellige Zahl z gibt, die gleich dem Neunfachen ihrer Quersumme ist!

▲ 4 ▲ Konstruiere ein Trapez $ABCD$ aus den Stücken $a = 7 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$, $c = 4,5 \text{ cm}$ und $d = 2,5 \text{ cm}$!

▲ 5 ▲ Jörg war in der Kaufhalle einkaufend. Für ein Drittel des Geldes kaufte er Milch (in Flaschen), für die Hälfte des Geldes Brause, für ein Zwanzigstel Brötchen und für den Rest von 3,50 M Butter und Käse. Wieviel Geld hat Jörg ausgegeben?



▲ 6 ▲ Die vier Schüler Bernd, Torsten, Rainer und Michael trugen untereinander ein kleines Schachturnier aus. Jeder spielte gegen jeden genau einmal. Es ließen sich nun folgende Aussagen machen:

(1) Torsten hatte genau zweimal gewonnen, gegen Michael war er aber Verlierer.

(2) Bernd spielte nie unentschieden.

(3) Rainer siegte nur einmal.

(4) Michael erreichte genau einmal ein Unentschieden. Gegen Bernd gewann er.

Ermittle daraus, wer in diesem Turnier den ersten, zweiten, dritten und vierten Platz belegte. Ist eine Angabe überflüssig?

Am Ende der 6. Klasse legte ich mir ein kleines mathematisches Tagebuch an. Darin eine Aufgabe, die der Leser mit zahlentheoretischen Kongruenzen lösen kann:

▲ 7 ▲ Welchen Rest läßt die Zahl $z = 29^{117} - 29$ beim Teilen durch 36?

XXVI. Internationale Mathematikolympiade

Helsinki, Juli 1985



Von 4578 erreichbaren Punkten wurden erreicht für	
Aufgabe 1	861 Punkte
Aufgabe 2	767 Punkte
Aufgabe 3	164 Punkte
Aufgabe 4	504 Punkte
Aufgabe 5	381 Punkte
Aufgabe 6	423 Punkte
Summe	3100 Punkte

Die XXVII. IMO findet in der VR Polen statt.

Aufgaben

1. Tag

▲ 1 ▲ Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck und k ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Seite $[A, B]$ liegt und der die anderen drei Seiten $ABCD$ berührt. Ferner sei $ABCD$ ein Sehnenviereck.
Man beweise: $\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB}$!
(Großbritannien)

▲ 2 ▲ Es sei n eine natürliche Zahl und es sei k eine ganze, zu n teilerfremde Zahl mit $0 < k < n$. Ferner sei $M = \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Jede Zahl aus der Menge M sei mit genau einer der Farben Blau oder Weiß gefärbt. Dabei sei vorausgesetzt:

- a) Für alle $i \in M$ haben i und $n-i$ stets die gleiche Farbe, und
- b) für alle $i \in M$, $i \neq k$, haben i und $|k-i|$ stets die gleiche Farbe.

Man zeige, daß dann alle Elemente aus M die gleiche Farbe haben. (Australien)

▲ 3 ▲ Für jedes Polynom P mit

$P(x) = \sum_{j=0}^k a_j x^j$ und ganzzahlige Koeffizienten bezeichne $w(P)$ die Anzahl derjenigen Koeffizienten von P , die ungerade Zahlen sind. Außerdem sei für $i = 0, 1, 2, \dots$

$$Q_i(x) = (1+x)^i.$$

Man beweise: Für jede endliche Folge $\langle i_1, i_2, \dots, i_n \rangle$ ganzer Zahlen mit

$$0 < i_1 < i_2 < \dots < i_n$$

gilt die Ungleichung

$$w(Q_{i_1} + Q_{i_2} + \dots + Q_{i_n}) > w(Q_{i_1}).$$

(Niederlande)

Reine Arbeitszeit: 4,5 Stunden

2. Tag

▲ 4 ▲ Es sei M eine Menge aus 1985 verschiedenen positiven ganzen Zahlen. Keine dieser Zahlen hat einen Primteiler größer als 26.

Man beweise: In M gibt es vier paarweise verschiedene Elemente, für die ihr Produkt die vierte Potenz einer ganzen Zahl ist.

(Mongolische Volksrepublik)

▲ 5 ▲ Es sei ABC ein Dreieck und k_1 ein Kreis durch die Punkte A und C , der die Strecken $[A, B]$ bzw. $[B, C]$ ein weiteres Mal in den voneinander verschiedenen Punkten K bzw. N schneidet. Der Mittelpunkt von k_1 sei mit O bezeichnet.

Ferner sei k_2 der Umkreis des Dreiecks KBN . Der Umkreis des Dreiecks ABC schneide k_2 in genau zwei verschiedenen Punkten B und M .

Man beweise: $\angle OMB = 90^\circ$.

(Sowjetunion)

▲ 6 ▲ Für jede reelle Zahl x_1 sei die Folge $\langle x_1, x_2, \dots \rangle$ durch

$$x_{n+1} = x_n \cdot \left(x_n + \frac{1}{n} \right)$$

für alle $n > 1$ definiert.

Man beweise: Es gibt einen und nur einen Anfangswert x_1 , für den die Bedingung

$$0 < x_n < x_{n+1} < 1$$

für alle $n > 1$ erfüllt ist.

(Schweden)

Reine Arbeitszeit: 4,5 Stunden

Bei jeder Aufgabe konnten 7 Punkte erreicht werden.

Ergebnisse der IMO

Österreich (77 Punkte) – Australien (117) – Belgien (60) – VR Bulgarien (165) – Brasilien (83) – Kanada (105) – Volksrepublik China (27) (2)¹ – Kolumbien (54) – ČSSR (105) – Republik Kuba (74) – Zypern (27) – DDR (136) – Bundesrepublik Deutschland (139) – Algerien (36) – Finnland (25) – Frankreich (125) – Großbritannien (121) – Griechenland (69) – Ungarische VR (168) – Israel (81) – Irland (28) (1)¹ – Island (13) (2)¹ – Italien (20) – Kuwait (7) (5)¹ – Marokko (60) – Mongolische VR (62) – Niederlande (72) – Norwegen (35) – VR Polen (101) – SR Rumänien (201) – Schweden (65) – Spanien (25) – UdSSR (140) – Tunesien (46) – Türkei (54) – USA (180) – Vietnam (144) – Jugoslawien (68) –

(2)¹ bedeutet, daß nur zwei Schüler dieses Landes an der IMO teilnahmen.

Von den 109 Teilnehmern aus 38 Ländern erhielten 14 einen 1. Preis (42 P. bis 34 P.), 35 einen 2. Preis (32 P. bis 22 P.) und 51 einen 3. Preis (21 P. bis 15 P.). Die Schüler Geza Kos (Ungarische VR) und Daniel Tatoru (SR Rumänien) erhielten die volle Punktzahl (42 P.).

Um den Schwierigkeitsgrad der Aufgaben zu charakterisieren, seien die erreichten Gesamtpunktzahlen genannt:



Die Mannschaft der DDR nach der Siegerehrung (im Hintergrund Alexander II. und der Dom von Helsinki):

Volker Brundisch, Ingo Warncke, Georg Hein, Jörg Jahnel (obere Reihe v. l. n. r.);

Angelika Brauschke und Ulrich Meister.

Unsere Mannschaft erhielt drei 2. und drei 3. Preise und erreichte damit den 8. Platz unter 38 Teilnehmerländern.

Die IMO fand in der Stadt Joutsa, mitten in der Welt der finnischen Seen statt, die Auszeichnung an der Universität Helsinki. Unser Foto: Senatsplatz mit Domkirche, erbaut zwischen 1778 und 1840 im Empire-Stil.



Ein Besuch in der Knobelwerkstatt

Teil 5: Zum Jahreswechsel 1985/86

Liebe Freunde!

Nachdem wir uns in den vergangenen Teilen dieser Serie mit der Ideenfindung für mathematische Knobelaufgaben aus der Umwelt, der Mathematik und der deutschen Sprache beschäftigt haben, wollen wir heute den *Eigenbau* solcher Aufgaben unter dem Blickwinkel eines bestimmten gesellschaftlichen, schulischen oder anderen Ereignisses bzw. Höhepunktes demonstrieren.

Es ist an manchen Schulen unserer Republik schon ein guter Brauch, im Rahmen des Mathematikunterrichtes, von Schülern oder Mathematiklagern mathematische Wandzeitungen zu gestalten, die beispielsweise dem Tag der Republik, dem Pionier- oder FDJ-Geburtstag, dem Tag der NVA, dem Lehrertag oder dem Ehrenfest anderer Berufsgruppen, dem Leben und Wirken hervorragender Mathematiker, den Mathematik-Olympiaden, dem Schulsportfest oder einem anderen sportlichen Ereignis, einem Jubiläum der Schule oder aber dem jeweiligen Jahreswechsel gewidmet sind. Will man zu solch einem Anlaß mathematische Aufgaben gestalten, so findet man folgende Ausgangssituation vor: Der inhaltliche Rahmen der Aufgaben ist durch das jeweils zu würdigende Ereignis festgelegt, und seitens des mathematischen Modells können die Aufgaben in den unterschiedlichsten Teilgebieten der Mathematik angesiedelt sein. Man muß sich also vor Beginn der Gestaltung einer solchen thematischen Mathematik-Wandzeitung mit den das Ereignis charakterisierenden Fakten, Schwerpunkten, Bedingungen und Tendenzen vertraut machen und davon ausgehend solche mathematische Aufgaben *bauen*, welche die Adressaten dieser Aufgaben auf mathematisch-unterhaltsame Weise tiefer mit dem Ereignis vertraut machen oder sie bewegen, sich stärker mit dem Ereignis auseinanderzusetzen. Es wird sich also hierbei zum großen Teil um sog. *eingekleidete Aufgaben* (Textaufgaben), speziell um *sachbezogen-eingekleidete Aufgaben* (Sachaufgaben) handeln. Der *Eigenbau* solcher Mathematikaufgaben ist sicher etwas aufwendig und nicht ganz leicht, aber dafür sehr reizvoll und mathematisch fordernd.

Wir wollen dieses sachbezogene Vorgehen beim *Eigenbau* von Knobelaufgaben in zwei Beiträgen demonstrieren: Der heutige Beitrag ist aus gegebenem Anlaß dem Ereignis *Jahreswechsel 1985/1986* gewidmet,

und der letzte Beitrag dieser Serie (*alpha*, Heft 2/1987) wird das sportliche Großereignis VIII. *Turn- und Sportfest der DDR*, das im Sommer 1987 in Leipzig stattfinden wird, zum Inhalt haben.

Für unser heutiges Anliegen haben wir also nur die Jahreszahlen 1985 und 1986 zur Verfügung, und diese sollen nun zu allen möglichen Aufgabentypen *verarbeitet* werden. Eine interessante Spielerei!

Für die Gestaltung guter Aufgaben zu den Grundrechenarten oder zur Teilbarkeit natürlicher Zahlen ist die Primfaktorzerlegung der jeweiligen Jahreszahlen und deren Ziffernfolge oft entscheidend. Die Primfaktorzerlegung von $1984 = 2^6 \cdot 31$ ist offenbar *günstiger* als diejenige von $1985 = 5 \cdot 397$ oder $1986 = 2 \cdot 3 \cdot 331$. Auch ist die Ziffernfolge von 1984 wegen $8:4 = 2$ oder $9:8:4 = 18$ *günstiger* als bei 1985 (hier ist keine Grundziffer durch die nachfolgende teilbar) und bei 1986 (hier gilt wenigstens $9:8:6 = 12$). Dieser Fakt hat für Knobelaufgaben, wie *Aufgabe 1*, zwar keinerlei Nachteile, aber z.B. werden dadurch bei *Aufgabe 2* die Eintragungsmöglichkeiten für Rechenzeichen (ohne Klammernbenutzung) eingeschränkt, bei *Aufgabe 3* (oder der Aufgabe *Silvesterlauf* in *alpha* 6/84, Seite 139) die Unterschiede der einzutragenden Zahlen sehr groß und bei *Aufgabe 4* die Zerlegung in mehr als 3 (natürliche) derartige Summanden verhindert. Trotzdem hat das insgesamt für unser Anliegen nur geringe Auswirkungen.

Bleiben wir noch bei der Arithmetik, so können wir außer den bereits durch die Aufgaben 1 bis 4 demonstrierten Aufgaben zu den rationalen Rechenoperationen, magischen Figuren (mit Produkten) und Summenzerlegungen beispielsweise noch Kryptogramme (*s. Aufgabe 5*), Aufgaben zur Zahlendarstellung in bestimmten Positionssystemen (*s. Aufgabe 6*) bzw. mit römischen Ziffern (*s. Aufgabe 7*), arithmetische Aufgaben in Form von rechentechnischen Flußdiagrammen, Aufgaben zur Teilbarkeit (vgl. etwa *alpha* 6/84, Seite 138, Aufg. b)) und andere Aufgaben gestalten. Man kann auch, und das ist nicht schwer, lineare Gleichungen (*s. Aufgabe 8*), quadratische Gleichungen, lineare Gleichungssysteme oder andere Aufgaben (*s. Aufgabe 9*) konstruieren, bei denen die jeweiligen Jahreszahlen als Lösungen auftreten. Zu diesem Zweck kann man folgendermaßen verfahren: Will man eine lineare Gleichung beispielsweise mit der Lösung

$x = 1985/1986$ haben, so geht man von dieser einfachsten Gleichung $x = 1985/1986$ aus und *verkompliziert* diese rückwärts durch äquivalente Umformschritte. Will man eine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ beispielsweise mit den Lösungen $x_1 = 1985$ und $x_2 = 1986$ haben, so braucht man nur die Koeffizienten p und q nach dem Vietaschen Wurzelsatz ($x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$) oder mit Hilfe der Linearfaktorzerlegung $(x - 1985)(x - 1986) = 0$ zu bestimmen (wobei natürlich bei vierstelligen Jahreszahlen die Koeffizienten sehr groß werden). Will man ein lineares Gleichungssystem beispielsweise mit der eindeutigen Lösung $x_1 = 1$, $x_2 = 9$, $x_3 = 8$ und $x_4 = 6$ haben, so braucht man nur – von diesem Lösungsvektor $(1, 9, 8, 6)$ ausgehend – ein Gleichungssystem in gestaffelter Form (z. B. $x_4 = 6$, $4x_3 - 3x_4 = 14$, $x_2 - x_3 + x_4 = 7$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 24$) aufzuschreiben und dieses gestaffelte System dann durch Linearkombination dieser 4 Gleichungen zu *verkomplizieren*. Hierbei muß man allerdings auf die Erhaltung der Eindeutigkeit der Lösung achten. Die eben gegebenen Hinweise gelten selbstverständlich auch zum Aufbau von Gleichungen bzw. Gleichungssystemen mit irgendwelchen anderszahligen Lösungen. Man kann die Jahreszahlen aber auch in geometrische Aufgaben einbauen, indem man etwa die Grundziffern flächenhaft gestaltet (*s. Aufgabe 10*) oder die Jahreszahlen bei Teilungsproblemen verwendet (*s. Aufgabe 11*) bzw. in Form von Legefiguren darstellen läßt (*s. Aufgabe 12*). Ebenso kann man die Jahreszahlen in logisch-kombinatorische Aufgaben (*s. Aufgabe 13* und *Aufgabe 14*) einbauen, Rätselaufgaben daraus machen (*s. Aufgabe 15*) und vieles andere mehr.

Sicher habt ihr auch noch andere Ideen dafür, was man alles aus den Jahreszahlen 1985 und 1986 machen kann. Zum Schluß wollen wir euch noch zwei Zusatzaufgaben stellen:

Zusatzaufgabe 1:

Bei welcher der demnächst folgenden Jahreszahlen besteht die Primfaktorzerlegung nur aus einer Primzahlpotenz?

Zusatzaufgabe 2:

Ermittelt alle Paare (x, y) nichtnegativer ganzer Zahlen x und y , die der Gleichung $x^2 + y^2 = 1985^2$ genügen!

Wir wünschen euch viel Spaß beim Knobeln und im neuen Jahr Gesundheit und viel Erfolg in der schulischen Arbeit!

R. Mildner

Wo man tatkräftig ans Werk geht
und Trägheit nicht aufkommt,
wo Klugheit und Mut
zusammen gehen,
da waltet sicher volles Glück.

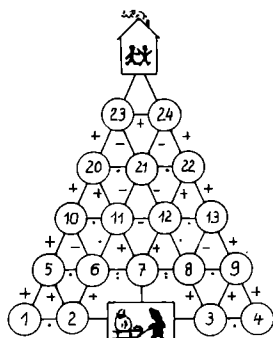
Indisches Sprichwort

Knobel- Wandzeitung

▲ 1 ▲ Lieber guter Weihnachtsmann

Der Weihnachtsmann hat ein großes Problem: Er kann nämlich nur auf demjenigen Wege zu den Kindern gelangen, bei dem das Endergebnis der entlang dieses Weges nacheinander auszuführenden Rechenoperationen 1985 beträgt. Außerdem darf er jedes Zahlenfeld nur höchstens einmal überqueren.

Helft dem Weihnachtsmann, und zeigt ihm den Weg zu den Kindern!



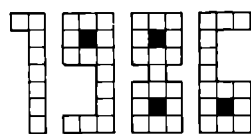
▲ 2 ▲ Rechenspaß zum Jahreswechsel

Setzt zwischen die Grundziffern der beiden Jahreszahlen Zeichen für rationale Rechenoperationen so ein, daß eine wahre Gleichung entsteht! Klammern dürfen nicht benutzt werden. Wer findet mindestens 7 verschiedene derartige Gleichungen?

$$1985 = 1986$$

▲ 3 ▲ Im neuen Jahr

Tragt in die Kästchen der Figur natürliche Zahlen derart ein, daß das Produkt der Zahlen in jeder waagerechten und senkrechten Kästchenreihe 1986 beträgt! Zur Eintragung dürfen aber nur folgende Zahlen verwendet werden: 20mal die „1“, 6mal die „2“, 8mal die „3“, 1mal die „6“, 5mal die „331“, 6mal die „662“, 6mal die „993“ und 1mal die „1986“.



▲ 4 ▲ Zerlegte Jahreszahl

Zerlegt die Zahl 1986 in eine dreigliedrige Summe, bei der ein Summand doppelt so groß und ein zweiter Summand dreimal so groß wie der dritte Summand sind!

▲ 5 ▲ Kryptarithmetik

Löst die drei abgebildeten Kryptogramme!

a) $1985 \cdot ****$

$$\begin{array}{r} ****1* \\ ***8* \\ *7*** \\ **8* \\ \hline ***** \end{array}$$

c) $\begin{array}{r} RIND \\ + RING \\ \hline TIER \end{array}$

b) $\begin{array}{l} \square\square : \square = \square \\ \square\square\square : \square\square = \square\square \\ \square\square\square\square : \square\square = \square\square\square \\ \square\square\square\square\square : \square\square = \square\square\square\square \end{array}$

▲ 6 ▲ Positionssysteme

Die auf der linken Seite der Gleichungen stehenden Zahlen, die in dem uns bekannten Dezimalsystem (Basiszahl $g = 10$) dargestellt seien, sollt ihr in anderen Stellenwert- oder Positionssystemen mit den Basiszahlen $g = 2$, $g = 3$, $g = 4$, $g = 5$ bzw. $g = 6$ darstellen, indem ihr jeweils Grundziffern von 0 bis $g - 1$ so in die Kästchen eintragt, daß Gleichheit besteht. Die in den Kästchen horizontal nebeneinander stehenden Grundziffern ergeben dann die Darstellung der links vom Gleichheitszeichen stehenden Zahl in dem jeweiligen Positionssystem.

$$\begin{array}{l} 19 = \square 2^4 + \square 2^3 + \square 2^2 + \square 2^1 + \square 2^0 \\ 198 = \square 3^4 + \square 3^3 + \square 3^2 + \square 3^1 + \square 3^0 \\ 1985 = \square 5^4 + \square 5^3 + \square 5^2 + \square 5^1 + \square 5^0 \\ 1986 = \square 6^4 + \square 6^3 + \square 6^2 + \square 6^1 + \square 6^0 \\ 986 = \square 4^4 + \square 4^3 + \square 4^2 + \square 4^1 + \square 4^0 \\ 86 = \square 3^4 + \square 3^3 + \square 3^2 + \square 3^1 + \square 3^0 \end{array}$$

▲ 7 ▲ Mit römischen Ziffern

Die abgebildete Hölzchen-Gleichung ist offenbar falsch. Legt nun 3 Hölzchen so um, daß eine wahre Gleichung entsteht!

$$M-EM-EXXX+V=MCMLXXXVIII$$

▲ 8 ▲ Zahl gesucht

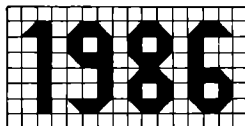
Gesucht ist eine bestimmte (gebrochene) Zahl. Multipliziert man diese Zahl mit 331, subtrahiert man hiervon 5, dividiert man diese Differenz durch 5 und multipliziert man diesen Quotienten mit 6, so erhält man 391. Wie lautet diese Zahl?

▲ 9 ▲ Eine harte Nuß

Ermittelt alle vierstelligen natürlichen Zahlen mit folgenden vier Eigenschaften: 1. Die Quersumme beträgt 24, 2. die alternierende Quersumme beträgt -6 , 3. das Querprodukt beträgt 432, 4. die Differenz aus dem Produkt der beiden letzten Grundziffern und dem Produkt der beiden ersten Grundziffern beträgt 39.

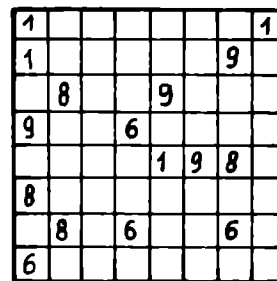
▲ 10 ▲ Jahreszahl in Prozenten

Wieviel Prozent der abgebildeten Rechteckfläche beansprucht die Jahreszahl 1986?



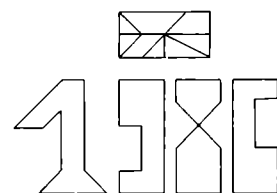
▲ 11 ▲ Gerechte Teilung

Zerlegt die abgebildete Quadratfläche derart in 4 kongruente Flächenstücke, daß jedes dieser Flächenstücke alle Grundziffern der Jahreszahl 1986 enthält!



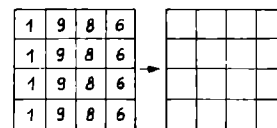
▲ 12 ▲ Legespiel

Zerschneidet ein rechteckiges Stück Karton, das doppelt so lang wie breit ist, in der abgebildeten Weise (oben) und legt sodann mit diesen acht Teilen eine jede Grundziffer der Jahreszahl 1986 (unten) zusammen!



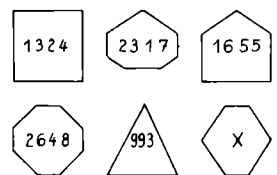
▲ 13 ▲ Umordnung

Ordnet die sich im linken Quadrat befindlichen Ziffern so um, daß sich in jeder Zeile, Spalte und Diagonale 4 verschiedene Ziffern befinden!



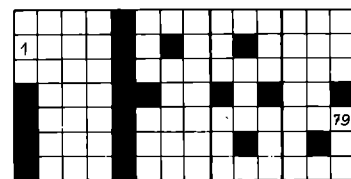
▲ 14 ▲ Das geheimnisvolle x

Wie muß logischerweise die Zahl x lauten?



▲ 15 ▲ Kniffliger Rösselsprung

Zieht den Springer, der wie beim Schachspiel zu setzen ist, vom Feld 1 nach dem Feld 79 derart, daß er zwischendurch jedes andere weiße Feld genau einmal betritt! Dabei dürfen die schwarzen Felder zwar übersprungen, aber nicht betreten werden.





Aufgaben aus der polnischen mathematischen Schülerzeitschrift plus-minus

In der polnischen Zeitschrift *plus-minus*, die für Schüler der Klassen 5 bis 8 bestimmt ist und ungefähr unserer *alpha* entspricht, erscheinen regelmäßig *Knobelaufgaben*. In der Volksrepublik Polen erhält jeder Schüler einen Preis, der dreimal als erster die vollständige Lösung einer Aufgabe anbieten kann.
Hier sind 12 Aufgaben für Schüler der Klassenstufe 5:

▲ 1 ▲ Fünf Jungen schließen eine Wette ab, wer im Laufe einer Stunde die meisten Ostereier findet. Nach einer Stunde Mühe stellen sie fest, daß jeder eine andere Anzahl gefunden hat, der erste hat fünf, der letzte eins.

Stelle die Reihenfolge der Jungen fest, wenn bekannt ist, daß Krzysztof mehr als zwei gefunden hat. Piotr liegt unmittelbar vor Marek, der nicht der zweite ist. Roman ist schlechter als Slawek, der jedoch Piotr unterlag.

▲ 2 ▲ Wir zählen mit den Fingern an einer Hand:

Daumen 1, Zeigefinger 2, Mittelfinger 3, Ringfinger 4, kleiner Finger 5 und nun rückwärts weiter:

Ringfinger 6, Mittelfinger 7, Zeigefinger 8, Daumen 9; Zeigefinger 10, usw.

Welcher Finger gibt die Zahl 1980 an?

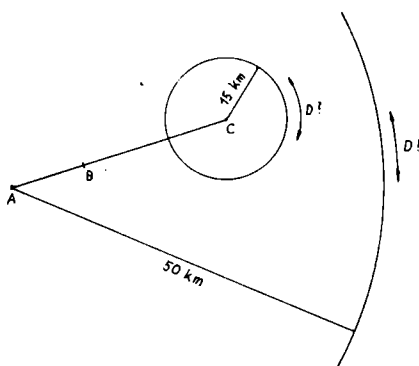
▲ 3 ▲ Großvater hat einen Sohn, einen Enkel und einen Urenkel. Die Summe der Lebensjahre des Großvaters und des Urenkels ist genau so groß wie die Summe der Lebensjahre des Sohnes und des Enkels. Vertauscht man die Ziffern des Alters des Großvaters, so erhält man das Alter des Sohnes. Das Alter des Enkels und des Urenkels unterscheidet sich nur durch die Reihenfolge der Ziffern. Wie alt ist jeder?

▲ 4 ▲ Kann man auf einem Tisch acht gleichartige Münzen so anordnen, daß sie sich in 14 Punkten berühren?

▲ 5 ▲ Auf welche Ziffer endet $11^{1980} - 7^{1980}$?

▲ 6 ▲ Wir wissen von vier Städten A, B, C, D:

von A nach B sind es 10 km,
von C nach D 15 km,
von B nach C 20 km,
von A nach C 30 km und
von A nach D 50 km.
(Entfernungen für gerade Straßen)
Berechne die Entfernung von B nach D!



▲ 7 ▲ Gib die kleinste natürliche Zahl an, deren Quersumme 100 ist und die

- durch 4 teilbar ist,
- durch 5 teilbar ist,
- durch 9 teilbar ist.

▲ 8 ▲ Addiert man zu 37 die 1, so erhält man eine durch 2 teilbare Zahl:

$$37 + 1 = 2 \cdot 19.$$

Addiert man zu 37 die 2, so erhält man eine durch 3 teilbare Zahl:

$$37 + 2 = 3 \cdot 13.$$

Addiert man zu 37 die 3, so erhält man eine durch 4 teilbare Zahl:

$$37 + 3 = 4 \cdot 10.$$

Die Zahl 37 ist nicht die kleinste Zahl mit diesen Eigenschaften. Bestimme die kleinste natürliche Zahl mit diesen Eigenschaften!

▲ 9 ▲ Schreibe die folgenden Zahlen als Produkte mit zwei gleichen Faktoren:

$$121$$

$$12321$$

$$1234321$$

$$123454321$$

$$12345654321$$

$$1234567654321!$$

▲ 10 ▲ Bestimme die natürlichen Zahlen x und y , wenn man für $x + y$, $x - y$, $x \cdot y$, $x : y$ die Zahlen 48; 26; 22; 12 erhält (Reihenfolge der Ergebnisse ist hier beliebig gewählt).

▲ 11 ▲ Gegeben sei das Produkt

$$(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot \dots \cdot (x-98) \cdot (x-99) \cdot (x-100)$$

a) Berechne das Produkt, wenn du für $x = 13$ einsetzt.

b) Bestimme alle natürlichen Zahlen für x , für die gilt

$$(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot \dots \cdot (x-98) \cdot (x-99) \cdot (x-100) = 0$$

Hinweis: Das Produkt in Aufgabe a) und b) ist abgekürzt aufgeschrieben, es besteht aus 100 Faktoren, nur die ersten drei und die letzten drei sind aufgeschrieben. Zum Beispiel heißt der 25. Faktor $(x-25)$.

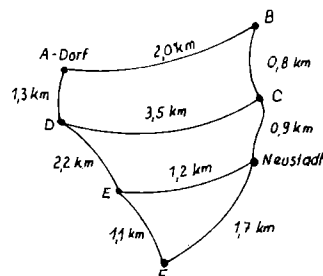
▲ 12 ▲ Gegeben sind vier Quadrate: eins mit der Seitenlänge 5 cm, das zweite mit der Seitenlänge 6 cm,

das dritte mit der Seitenlänge 10 cm und das vierte mit der Seitenlänge 1 cm. Ist es möglich, zwei der drei angegebenen Quadrate derart zu einem neuen Quadrat zusammenzufügen, daß die Seitenlänge des neuen Quadrates eine natürliche Zahl ist?

Ausgewählt und aus dem Polnischen übertragen von K. Meier, PH Köthen

Knobeln und kombinieren

▲ 1 ▲ Von A-Dorf kann man auf verschiedenen Wegen nach Neustadt gelangen.



Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es, von A-Dorf nach Neustadt zu gelangen, wenn keine Wegstrecke doppelt gegangen werden darf?

Gib jeweils die Länge des Weges an!

▲ 2 ▲ Susanne hat 4 Röcke und 3 Blusen.

a) Auf wieviel verschiedene Arten kann sie sich damit kleiden?

b) Zu Weihnachten bekommt sie einen weiteren Rock.

Wieviel Kombinationen sind nun möglich?

▲ 3 ▲ Frank hat auf ein Fahrrad gespart. Im Fahrradgeschäft gibt es drei verschiedene Typen (Klapprad, Sportrad, Tourenrad) in je vier verschiedenen Farben (Grün, Rot, Blau, Silbergrau).

Unter wieviel Möglichkeiten kann Frank wählen?

▲ 4 ▲ Michael fertigt für die Solitombola Lose mit allen zweistelligen Zahlen. Er legt fest, daß ein Hauptgewinn vorliegt, wenn die Zehnerziffer 2; 5 oder 8 und die Einerziffer 0; 5 oder 7 ist.

Wieviel Hauptgewinne sind es?

▲ 5 ▲ Für den F-Laut gibt es verschiedene Schriftzeichen F, V, Ph. Für den x-Laut gibt es die Schriftzeichen x, ks, chs, gs, cks, cs.

Auf wieviel verschiedene Arten kann man das Wort *Felix* falsch schreiben?

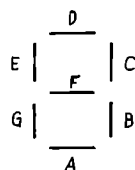
▲ 6 ▲ Hartmut lernt Klavier spielen. Nach den ersten Stunden spielt er schon kleine Stücke im 5-Ton-Raum mit den Tönen c, d, e, f, g.



Wieviel Möglichkeiten gibt es, diese 5 Töne (ohne Wiederholung) in verschiedener Reihenfolge zu spielen?

▲ 7 ▲ In den Zahlen 575, 775 kommen nur die Ziffern 5 und 7 vor. Wieviel solcher dreistelligen Zahlen gibt es?

▲ 8 ▲ Taschenrechner geben die Ziffern 0 bis 9 mit Hilfe einer sogenannten *Sieben-segmentanzeige* an. Sieben gerade Teilstücke (Segmente) sind in folgender Form angeordnet:



a) Welche Segmente sind für die Ziffer 4 eingeschaltet?

b) Welche Segmente müßte man einschalten, um den Buchstaben S darzustellen?

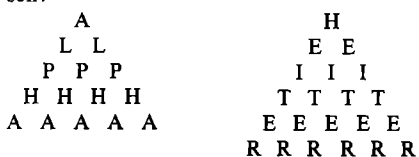
c) Wieviel verschiedene Zeichen mit und ohne Bedeutung können mit Hilfe der 7 Segmente dargestellt werden?

▲ 9 ▲ Für einen 100-m-Lauf werden die Bahnen 1 bis 4 unter 4 Läufern ausgelost. Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es?

▲ 10 ▲ Wieviel zusammengesetzte Wörter kann man aus einem der Wörter *Mathematik*, *Biologie*, *Musik* und einem der Wörter *Buch*, *Heft*, *Stunde*, *Arbeit* bilden, wenn letztere als Grundwörter verwendet werden?

▲ 11 ▲ Katrin, Michael, Claudia, Hartmut, Hannes und Anja begrüßen sich am 1. Schultag mit Handschlag. Wie oft gibt man sich insgesamt die Hand?

▲ 12 ▲ Auf wieviel verschiedene Arten läßt sich in der jeweiligen Abbildung das Wort ALPHA (bzw. das Wort HEITER) lesen?

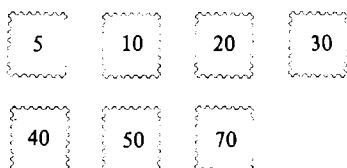


▲ 13 ▲ Frank, Michael und Lars wollen mit Sabine, Claudia, Ute, Grit Tischtennis spielen. Jeder Junge soll gegen jedes Mädchen einmal spielen.

Wie viele Spiele müssen sie durchführen?

▲ 14 ▲ Klaus will seinem Freund in Leipzig einen Eilbrief (Porto: 0,70 M) schicken. Folgende Briefmarken stehen ihm in genügender Anzahl zur Verfügung:

Wieviel verschiedene Frankierungen sind möglich?



L. Flade/H. Knopf



Wolf, Ziege und Kohlköpfe

Die älteste mathematische Aufgabensammlung in lateinischer Sprache ist Anfang des 9. Jahrhunderts am fränkischen Hof entstanden. Keine der überlieferten Handschriften, die vor allem im 10./11. Jahrhundert mehr oder weniger sorgfältig von Kopisten angefertigt worden sind, nennt einen Autor. Doch durch die Untersuchungen des Mathematikhistorikers M. Folkerts gewinnt die Vermutung, daß der angelsächsische Mönch *Alkuin* (735 bis 804) Verfasser dieser Sammlung sei, wieder an Wahrscheinlichkeit.

Alkuin war 781 als Gesandter an den Hof Karls des Großen (Karl I., seit 768 König der Franken) gekommen. Er machte St. Martin in Tours zu einer der führenden Bildungsstätten des Fränkischen Reiches und amtierte als Leiter der Hofschule in Aachen. Er setzte sich dafür ein, das Wissen des Altertums zu pflegen und weiterzutragen. Die Klöster und Bischofsitze im Frankenreich sollten nach seinen Plänen Schulen erhalten. In den Elementarschulen sollten Lesen und Schreiben, einfaches Rechnen sowie Religion und Psalmenge-sang, in den höheren Schulen die Sieben freien Künste gelehrt werden. Zu diesen gehörten die *Unterstufe*, Trivium genannt, mit Grammatik (der lateinischen Sprache), Rhetorik (Redeübungen auf dem Gebiet des Rechtswesens) und Dialektik (Denk-lehre, Erörterung wissenschaftlicher Fra-gen) und die *Oberstufe*, Quadrivium ge-nannt, mit Arithmetik, Geometrie (zu-gleich mit Erdkunde und Naturgeschichte), Musik (Theorie und Pflege des Kirchengesangs) und Astronomie.

Die dem *Alkuin* zugeschriebene Aufgabensammlung enthält 56 Aufgaben. Unmittelbar auf die jeweilige Aufgabe folgt die Lösung.

Die Probleme stehen überwiegend in der römischen Tradition, daneben sind griechisch-byzantinische und arabische Einflüsse anzunehmen. Einige Aufgaben treten erstmals in dieser Aufgabensammlung auf. Dazu gehören die Aufgaben 17 bis 20, die *Transportprobleme* behandeln: Bestimmte Lebewesen sind über einen Fluß zu setzen.

Die Aufgabe 18 ist besonders populär geworden:

Ein Mann mußte einen Wolf, eine Ziege und ein Bündel Kohl über einen Fluß hinüberbringen und konnte kein anderes Boot finden, außer ein solches, das nur den Mann und mit ihm entweder den Wolf oder die Ziege oder die Kohlköpfe zu tragen vermochte. Natürlich wollte er alles unverletzt hinüberbringen. Es durften also weder der Wolf mit der Ziege noch die Ziege mit den Kohlköpfen allein gelassen werden. Wer es kann, der möge zeigen, auf welche Weise der Mann alles unverletzt hat hinüberbringen können.

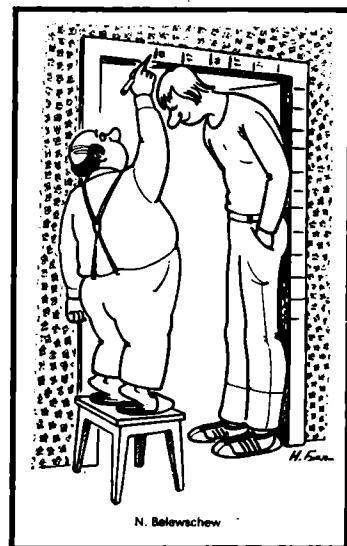
In der Aufgabe 19 wollen ein Mann, eine Frau und zwei Kinder über den Fluß (der Kahn trägt aber entweder nur den Mann oder die Frau oder die beiden Kinder); in der Aufgabe 20 handelt es sich um zwei Igel mit ihren Jungen; in der Aufgabe 17 sind drei Männer mit ihren Frauen über den Fluß zu setzen (keine der Frauen soll sich ohne ihren Bruder mit anderen Männern auf demselben Ufer befinden).

Mehrere der mittelalterlichen Aufgabensammlungen sind von der des *Alkuin* beeinflusst worden. In unterschiedlichen Varianten befinden sich die Transportaufgaben, später z.B. auch bei *Chuquet*, *Tartaglia* und *Bachet*.

H. Pieper

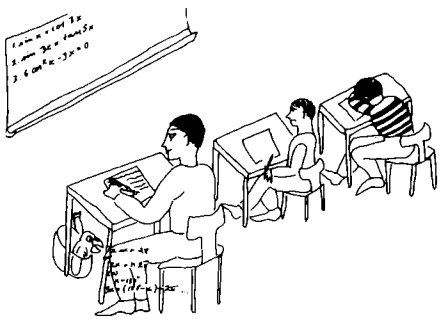
Scherzfrage Alcuins an Kaiser Karl den Großen (768 bis 814)

Alcuin bat den Kaiser, als sie nach der Jagd zusammensaßen, doch zu verraten, nach wieviel Sprüngen sein Jagdhund einen in der Entfernung von 150 Fuß voraushoppelnden Hasen einholt, wenn der Hase bei jedem Sprung 7 Fuß zurücklegt, der Jagdhund jedoch schneller ist und 9 Fuß weit springt.



N. Belweschew

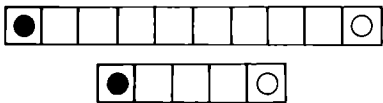
In freien Stunden · alpha-heiter



Das Groschenspiel

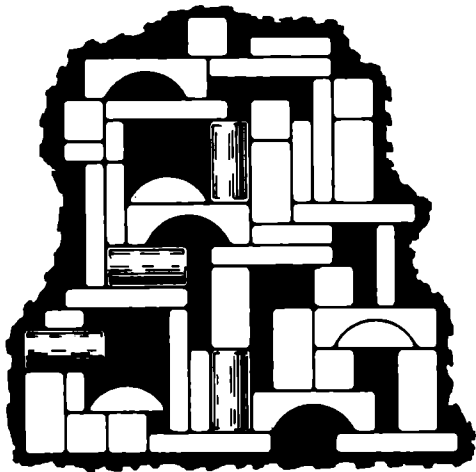
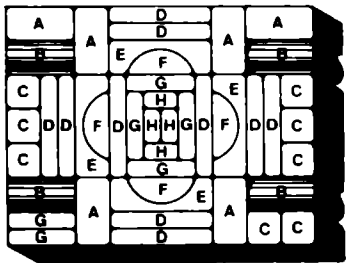
Im Handumdrehen hast du zwei Bahnen mit je 10 bzw. 5 Feldern aufgezeichnet. Die linken Enden beider Bahnen besetzt du, die rechten Enden der Gegner mit je einer Münze. Ihr zieht beide abwechselnd nach Belieben eine eurer Münzen so viele Felder vorwärts oder rückwärts, wie du bzw. dein Gegner es für günstig hältst. Züge sind nur bis zur gegnerischen Münze erlaubt, gesprungen werden darf nicht. Versuche, deinen Gegner in die Ecke zu treiben! *Varianten:* Ändert die Bahnlängen und die Anzahl der Bahnen! Das gesamte Schachbrett, jedoch auch Teile, liefern reizvolle Spielpläne.

Aus: Urania, Berlin



Spiel mit dem Baukasten

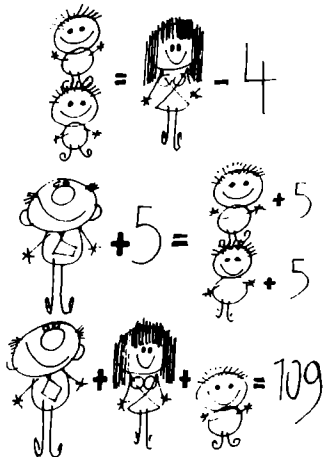
Marie-Luise hat sich ein Märchenschloß aus den Steinen ihres Baukastens gebaut. Einen Stein hat sie nicht verwendet. Welchen? *Aus: Füles, Budapest*



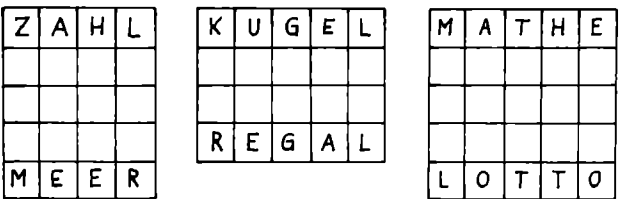
Wie alt sind Vater, Mutter und der Sohn?

Ein junger Mann, nach seinem und dem Alter seiner Eltern befragt, antwortet scherzhaft in folgender Weise: Meine Mutter war vor vier Jahren doppelt so alt, wie ich jetzt bin. Mein Vater wird in fünf Jahren doppelt so alt sein, wie ich dann sein werde. Addiert man zu meinem Alter das Alter meines Vaters und das meiner Mutter, so ergeben sich 109 Jahre.

Aus: ND, Berlin



Wortspiele

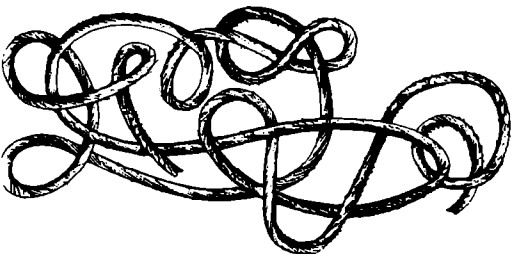


Schüler A. Suchanow, Neubrandenburg

Verheddert

Wie viele Knoten hat diese Schnur?

Aus: NBI, Berlin



Knacknüsse

Zum Jahreswechsel werden Nüsse unter Kinder verteilt. Das erste Kind bekommt eine Nuß und $\frac{1}{10}$ des Restes, das zweite Kind bekommt zwei Nüsse und $\frac{1}{10}$ des neuen Restes usw. Am Ende hat jedes Kind gleich viele Nüsse. Es sind max. 200 Nüsse vorhanden. Wie viele Kinder sind anwesend und wieviel Nüsse bekommt jedes von ihnen?

Schüler U. Schwekendieck, Crimmitschau

Silvesterlauf

Gib Name, Haarfarbe, Körpergröße und Platzierung jedes der drei Medaillengewinner eines Silvesterlaufes an, wenn gilt:

- (1) Die Namen der drei Erstplatzierten sind Axel, Bernd und Christian.
- (2) Die Haarfarben der Medaillengewinner sind blond, brünett und schwarz.
- (3) Die Körpergrößen der Medaillengewinner sind 162 cm, 164 cm und 165 cm.
- (4) Wenn Axel schwarzes Haar hat, so ist Christian nicht der Sieger.
- (5) Der Sieger ist blond und größer als Bernd.
- (6) Der Drittplatzierte hat schwarzes Haar.
- (7) Axel ist kleiner als Bernd.

Mathematikfachlehrer W. Träger, Döbeln

Verschlüsselter Wunsch für 1986

Die folgende Wortreihe stellt die verschlüsselte Form eines Wunschsatzes dar. Der Code besteht in einer eindeutigen Abbildung des Alphabets auf sich. Findet diesen Code und entschlüsselt den Satz: XIS XUEPTDJEP EUDJ WIEM ESGOMH IP FES TDJUME UPF WIEM TQATT CEIN LPOCEMP!

Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig

Auf der Ski-Piste

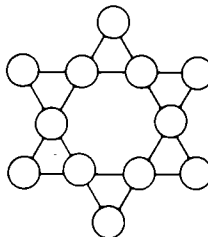
Vergleiche die beiden Bilder miteinander! Bei genauer Betrachtung ergeben sich mindestens 15 Unterschiede.



Der Zauberstern

Verteile die Zahlen 1, 2, 3, ..., 11, 12 so auf den Stern, daß in jeder Geraden die Summe 26 beträgt. Die Summe der (sechs) Zahlen an der Spitze soll dabei einerseits 30 und andererseits 26 betragen.

Aus einer sowjetischen Tageszeitung



Zum Jahreswechsel

$$1985 = 1 + 2 + 34 \cdot 56 + 78 + 9 \cdot 0$$

$$1 + 9 - 8 + 5 = \sqrt{1 \cdot 9 + 8 \cdot 5} = 1 + 9 + 8 + 5 - (1 + 9) \cdot 8 : 5$$

$$1 \cdot (9 - 8) \cdot 5 = \sqrt{1 \cdot 9 + 8 \cdot 5 + (1 - 9) \cdot (8 - 5)}$$

$$1 = 1 \cdot \sqrt{9} : (8 - 5) \quad 1 = (-1 + \sqrt{9}) : (8 - 6)$$

$$9 = 1 \cdot \sqrt{9} \cdot (8 - 5) \quad 9 = (1 + \sqrt{9})! : 8 + 6$$

$$8 = (-1 + \sqrt{9})! + (8 - 5)! \quad 8 = 1 + 9 - 8 + 6$$

$$5 = 1 - 9 + 8 + 5 \quad 6 = 1 \cdot (9 - 8) \cdot 6$$

$$7 = 1 + 9 - 8 + 5 = 1 \cdot 9 - 8 + 6$$

$$= -1 + 9 - 8 + 7 = 7$$

$$13 = 1 + 9 + 8 - 5 = -1^9 + 8 + 6$$

$$= -1^9 + 8 + 6 = 13$$

Bestimme alle Paare natürlicher Zahlen x und y , welche die folgende Gleichung erfüllen!

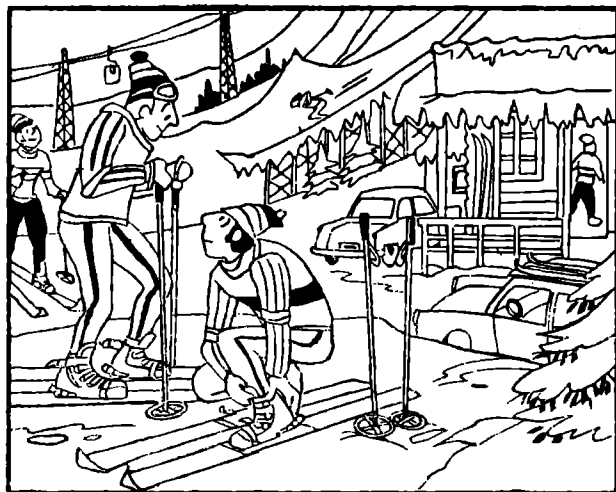
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{1985}$$

Setze an Stelle der Sternchen in $1 * 9 * 8 * 6$ so Grundziffern, daß die so erhaltene siebenstellige Zahl aus lauter verschiedenen besteht und durch $1 + 9 + 8 + 6$ teilbar ist!

Gib alle Möglichkeiten an!

Mit diesen Zauberzahlen grüßen alle alpha-Leser: H. Förg, Schwaz (Österreich); H. Gössler, Köln; A. Körner, Leipzig; Mathias Müller, Erfurt; F. Rahm, Schönebeck; Heike Simmank, Niesky; Thomas Thurn, Lodersleben; „Pythagoras“, Groningen (Niederlande).

Aus der finnischen math. Schülerzeitschrift *Funktio*, gezeichnet von Rukka Kosonen, Hameen Unna

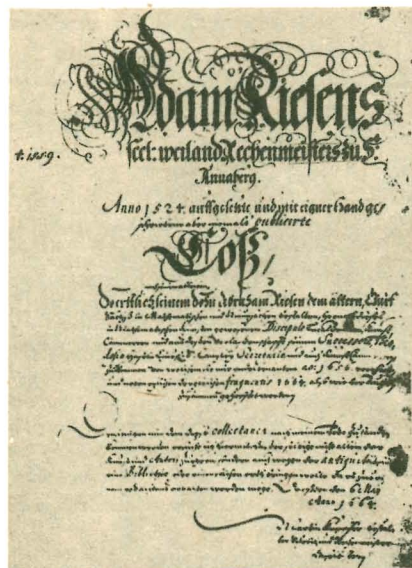


Einige Aufgaben aus der Coß von Adam Ries



Adam Ries

Adam Ries (1492 bis 1559) schrieb die *Coß*, ein Lehrbuch der Algebra, in den Jahren 1523 bis 1524 in Annaberg. Man bezeichnete damals die Algebra oder die Lehre von den Gleichungen mit dem Ausdruck *Coß*, aus dem italienischen *regola de la cosa*. Das italienische Wort *cosa* (aus dem Lateinischen *causa*, Ursache) bezeichnete ursprünglich das Ding, die Sache, später im 14. und 15. Jahrhundert eine zu berechnende Größe sowie die Lösung einer Gleichung. Daher wurde auch die Algebra mit *Coß* bezeichnet, die Algebraiker nannte man *Cossisten*. Die *Coß* von Adam Ries ist im Druck nicht erschienen, da damals das Bedürfnis nach einem Lehrbuch der Algebra in deutscher Sprache nicht so groß war wie das Bedürfnis nach Rechenbüchern. Dagegen gehörten die Rechenbücher von Adam Ries zu den am weitesten verbreiteten Lehrbüchern des 16. und 17. Jahrhunderts. So erschienen von dem 1518 bis 1522 geschriebenen Buch „Rechnung auff der Linien und Federn...“ von 1522 bis 1656 insgesamt 108 Auflagen. Erst Bruno Berlet konnte 1860 im Programmheft der Annaberger Progymnasial- und Realanstalt einen Auszug aus der ersten *Coß*-Fassung veröffentlichen und diesen 1892, zum 400. Geburtstag von Adam Ries, nochmals als Sonderdruck herausgeben.¹⁾ Die Handschrift der *Coß* von 1524 wird in dem 1984 eingerichteten Adam-Ries-Museum zu Annaberg-Buchholz aufbewahrt.



Sie enthält die *Rechenkunst* (das Rechnen mit der Feder wie in den Rechenbüchern von Ries), die *Coß* (Algebra) und 318 Aufgaben, die überwiegend mit Hilfe linearer Gleichungen zu lösen sind. In dem theoretischen Teil werden die Regeln für das Lösen von Gleichungen, auch von quadratischen Gleichungen, angegeben. Adam Ries benutzt bereits das Zeichen ξ^2 (aus dem später wahrscheinlich das „x“ entstanden ist) für die zu berechnende Zahl bzw. für die Wurzel einer Gleichung. Zahlen, insbesondere natürliche Zahlen werden mit dem Zeichen „0“ versehen, z.B. bedeutet bei Ries 2 0 die natürliche Zahl 2. Auch für Quadrate, Kuben usw. von Zahlen führt Ries besondere Zeichen ein. Von den 318 Aufgaben der *Coß* werden bei Berlet 144 Aufgaben abgedruckt.

1. Drei Aufgaben aus der Coß, die mit Hilfe einer linearen Gleichung mit einer Variablen zu lösen sind

Aufgabe 1 (Nr. 5)

Wir geben zunächst diese Aufgabe im Originaltext von Ries wieder:

Item mach mir auß 10 Zwey teyl also, so ich eyenn teyl vom andern hinweg nim Das 2 vorlasenn ader vberleiben werdenn.

Lösung von Ries In moderner Fassung
Setz Die ein Zal sey 1 ξ , x
so muß nothalbenn Die

grossere Zahl seyn $x + 2$
1 $\xi + 2$ 0,

addir Zusammenn komen $2\xi + 2$ 0 gleich 10 0. $2x + 2 = 10$

Nim hinweg vff peydenn -2
teylenn 2 0 bleiben 2ξ gleich 8 0. $2x = 8$

Machs so komen 4 Die kleiner Zal, $x = 4$
muß nothalbenn Die ander $x + 2 = 6$

6 sein.

In moderner Fassung lautet diese Aufgabe:
Die Zahl 10 ist so in zwei Summanden zu zerlegen, daß die Differenz dieser Summanden gleich 2 ist.

¹⁾ Berlet, Bruno: Adam Riese, sein Leben und seine Art zu rechnen. Die *Coß* von Adam Riese. Leipzig, Frankfurt a./M. 1892. Vergleiche auch Deubner, Fritz: ... nach Adam Ries. Leben und Wirken des großen Rechenmeisters. Leipzig/Jena: Urania-Verlag 1959.

²⁾ Aus satztechnischen Gründen wird dieses Zeichen mit „ ξ “ wiedergegeben.

Lösung: Es sei x der kleinere Summand. Dann ist $x + 2$ der größere Summand, und es gilt
 $x + x + 2 = 10$, also $2x = 8$, $x = 4$ und $x + 2 = 6$.

Der kleinere Summand ist also gleich 4 und der größere Summand gleich 6.

Man sieht, daß Ries der modernen Lösung dieser Aufgabe recht nahe kommt, nur mit dem Unterschied, daß er das Gleichheitszeichen noch nicht benutzt und daher den Sachverhalt sprachlich darstellen muß.

Aufgaben dieser Art, die zu einem ganzzahligen Ergebnis führen, können bereits Schüler der 4. Klasse durch inhaltliche Überlegungen lösen.

In dem vorliegenden Falle kann die Aufgabe mit der folgenden Tabelle gelöst werden:

kleinerer Summand x	größerer Summand $x + 2$	Summe
1	3	4
2	4	6
3	5	8
4	6	10
>4	>6	>10

Nur für $x = 4$ und $x + 2 = 6$ wird die verlangte Summe 10 erreicht.

Aufgabe 2 (Nr. 23)

Ein Vater hat 4 Söhne. Er vermacht dem ersten $\frac{1}{4}$, dem zweiten $\frac{1}{5}$, dem dritten $\frac{1}{6}$

seines Vermögens und dem vierten 92 fl. Wie groß war das Vermögen des Vaters?

(fl. (Gulden) ist eine alte Goldmünze; die Abkürzung ist aus dem französischen *florin* zu erklären.

Hier und bei den folgenden Aufgaben ist der Aufgabentext sprachlich und orthographisch modernisiert worden.)

Lösung: Das Vermögen des Vaters betrage x fl. Dann gilt

$$\frac{x}{4} + \frac{x}{5} + \frac{x}{6} + 92 = x,$$

$$15x + 12x + 10x + 5520 = 60x,$$

$$23x = 5520,$$

$$x = 240.$$

Das Vermögen des Vaters betrug also 240 fl.

Adam Ries gibt die folgende Lösung an: Setz des Geldes sei gewesen 1 ξ x nim hinweg

$$\frac{1}{4}\xi \frac{1}{5}\xi \text{ und } \frac{1}{6}\xi \quad \frac{x}{4} + \frac{x}{5} + \frac{x}{6} = \frac{37}{60}x$$

$$\text{bleiben } \frac{23}{60} \text{ gleich } 92 \quad \frac{23}{60}x = 92$$

$$\text{Machs, so komen 240 die Zall. } x = 240.$$

Aufgabe 3 (Nr. 118)

Drei Windmühlen mahlen gleichzeitig. So der Wind geht, werden in 8 Stunden auf der ersten 20 Scheffel, auf der zweiten 17 Scheffel, auf der dritten 15 Scheffel gemahlen.

In wieviel Stunden werden 24 Scheffel von den drei Windmühlen gemahlen? (Scheffel ist ein altes deutsches Hohlmaß für Getreide mit unterschiedlichem Rauminhalt, 23 l bis 223 l.)

Lösung: In x Stunden werden gemahlen (jeweils in Scheffeln) auf der 1. Windmühle $\frac{20}{8}x$, auf der 2. Windmühle $\frac{17}{8}x$, auf der 3. Windmühle $\frac{15}{8}x$. Daher gilt

$$\frac{20}{8}x + \frac{17}{8}x + \frac{15}{8}x = 24,$$

$$20x + 17x + 15x = 24 \cdot 8,$$

$$52x = 24 \cdot 8,$$

$$x = \frac{24 \cdot 8}{52} = \frac{48}{13} = 3 \frac{9}{13}.$$

Also werden 24 Scheffel von den drei Windmühlen in $3 \frac{9}{13}$ Stunden gemahlen.

2. Eine Optimierungsaufgabe

Aufgabe 4 (Nr. 119)

Ein Münzmeister hat 100 mk. gekornetes Silber, wobei 1 mk. 7 Lot Feinsilber enthält. Ferner hat er 50 mk. gekornetes Silber, wobei 1 mk. 12 Lot Feinsilber enthält. Wieviel mk. gekornetes Silber, bei dem 1 mk. 10 Lot Feinsilber enthält, kann er daraus höchstens herstellen, wenn er keinen Zusatz nimmt, also weder weitere Mengen an Silber noch an anderen Legierungsmetallen verwenden soll? [mk. (Mark) ist hier eine alte Gewichtseinheit (233,8 g). Lot ist ebenfalls eine alte Gewichtseinheit:

1 Lot = $\frac{1}{16}$ mk. Gekornetes Silber ist eine Silberlegierung; der Gehalt an Feinsilber wird dabei in Lot je 1 mk. angegeben.]

Lösung: Verwendet der Münzmeister von der 1. Sorte (7lötiges Silber) x mk. und von der 2. Sorte (12lötiges Silber) y mk., um 10lötiges Silber herzustellen, so gilt

$$7x + 12y = 10(x + y). \quad (1)$$

Dabei ist $x \leq 100$ und $y \leq 50$.

Aus (1) folgt $7x + 12y = 10x + 10y$,

$$\text{also } 2y = 3x, x = \frac{2}{3}y.$$

Wegen $y \leq 50$ gilt $x = \frac{2}{3}y \leq \frac{100}{3} = 33 \frac{1}{3}$,

$$\text{also } x + y \leq 50 + 33 \frac{1}{3} = 83 \frac{1}{3}.$$

Der Münzmeister kann also aus den beiden Sorten höchstens $83 \frac{1}{3}$ mk. 10lötiges Silber herstellen, wenn er keinen Zusatz nehmen soll.

Die Lösung von Ries ist etwas umständlicher; er benutzt aber ebenfalls die Variable ξ .

In seiner Lösung kritisiert Ries den Wardein (Münzprüfer) Hans Conrad und den Wardein Scheurlein aus Nürnberg, die sich „vil Rechens vermessen und das geringste exempel der ξ nichtt hat machen mugenn“, also mit der Variablen nicht arbeiten und daher diese Aufgabe nicht lösen konnten. In der Originalfassung der Aufgabe von Ries wird das Edelmetall nicht angegeben; es konnte auch Gold gewesen sein.

3. Eine Aufgabe aus der Coß, die auf ein lineares Gleichungssystem mit 3 Variablen führt

Aufgabe 5 (Nr. 122)

Drei Personen A, B und C kaufen ein Pferd für 12 fl.

Keiner kann es allein bezahlen.

Nun spricht A zu B und C: „Wenn mir jeder von euch $\frac{1}{2}$ seines Geldes gibt, so kann ich das Pferd bezahlen.“

Darauf spricht B zu A und C: „Wenn mir jeder von euch $\frac{1}{3}$ seines Geldes gibt, so kann ich das Pferd bezahlen.“

Schließlich spricht C zu A und B: „Wenn mir jeder von euch $\frac{1}{4}$ seines Geldes gibt, so kann ich das Pferd bezahlen.“

Nun frage ich, wieviel Geld jeder gehabt hat.

Lösung: A möge a fl., B möge b fl. und C möge c fl. gehabt haben.

Dann gilt

$$a + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} = 12, \text{ also } 2a + b + c = 24, \quad (1)$$

$$b + \frac{c}{3} + \frac{a}{3} = 12, \text{ also } a + 3b + c = 36, \quad (2)$$

$$c + \frac{a}{4} + \frac{b}{4} = 12, \text{ also } a + b + 4c = 48, \quad (3)$$

$$\text{Aus (2) und (3) folgt } -2b + 3c = 12. \quad (4)$$

$$\text{Aus (2) folgt } 2a + 6b + 2c = 72, \quad (5)$$

$$\text{also wegen (1) } 5b + c = 48, \quad (6)$$

$$15b + 3c = 144, \quad (7)$$

$$\text{also wegen (4) } 17b = 132, b = \frac{132}{17} = 7 \frac{13}{17}.$$

Hieraus folgt wegen (5)

$$c = 48 - 5b = 9 \frac{3}{17}$$

und wegen (2)

$$a = 36 - 3b - c = 3 \frac{9}{17}.$$

Es hatten also A $3 \frac{9}{17}$ fl., B $7 \frac{13}{17}$ fl. und C $9 \frac{3}{17}$ fl.

Adam Ries gibt auch (in der analogen Aufgabe Nr. 47) ein Lösungsverfahren für derartige Aufgaben an, das zwar in Worten dargestellt wird, im Prinzip aber dem obigen Lösungsverfahren entspricht.

Er bemerkt ferner, daß der Münzprüfer Hans Conrad einem schwarzen Mönch des Prediger-Ordens, namens Aquinas, für die Lösung dieser Aufgabe einen Gulden gegeben habe, von dem auch der erfahrene Mathematicus Andreas Alexander gelernt habe. Er sagt dazu: „Hab dir es besser herausgestrichen. Magst sein Exemplar sehen oder seine Operation.“

Die Lösung von Ries mit Hilfe der Variablen ξ bedeutete damals einen beachtlichen Fortschritt gegenüber den Verfahren der zeitgenössischen Rechenmeister.

4. Adam Ries und die Anwendung der regula falsi

In seiner Coß wendet Adam Ries die *regula falsi*, die damals von den Rechenmeistern zur Lösung linearer Probleme häufig benutzt wurde, nicht mehr an, da er mit Hilfe der Variablen ξ zu einem besseren Lösungsverfahren gelangte. In der *Practica* des großen Rechenbuches von 1550 findet sich aber noch die folgende Aufgabe:

„Gott grüß euch Gesellen all 30.“ Antwortet einer: „Wenn unser sind noch so viel und halb so viel, so wären unser 30.“

Die Frage ist, wie viel ihr gewesen.

Lösung: Aus $x + x + \frac{x}{2} = 30$ folgt

Eine interessante, anspruchsvolle Aufgabe

Herrn Nationalpreisträger

Prof. Dr. Herbert Beckert gewidmet

▲ 2607 ▲ Es sei ein konvexes Sechseck $P_1P_2P_3P_1'P_2'P_3'$ mit Durchmesser d gegeben. Die Diagonalen P_1P_1' und P_3P_3' schneiden sich in S und bilden den Winkel $\psi = \angle P_1SP_3$. Dann gilt für den Flächeninhalt F des Sechsecks

$$F \leq d^2 \sin \frac{\psi}{2}.$$

Für $0 < \psi \leq \frac{\pi}{3}$ ist diese Abschätzung scharf, und zwar wird das Gleichheitszeichen für den Grenzfall des Drachenvierecks mit $P_1' = P_2' = P_3' = S$ und $SP_1 = SP_2 = SP_3 = d$ angenommen.

Dies ist zu beweisen.

(Aus einem Beitrag über *Starke Konvexität beim Standortproblem* – Autor: Prof. Dr. Joachim Focke, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig)

Das ZK der SED gratulierte Prof. Dr. H. Beckert im Oktober 1985 zum 65. Geburtstag. Zitiert (ADN/LVZ):

...Große Anerkennung finden Ihre Arbeiten zur Verbindung von Mathematik und Mechanik sowie Physik auf hohem theoretischen Niveau und Ihr erfolgreiches Wirken zur Förderung des wissenschaftlichen Nachwuchses...

$4x + x = 60$, $5x = 60$, also $x = 12$. Es waren also 12 Gesellen.

Adam Ries löst diese Aufgabe wie folgt:

Nimm eine Zahl, die durch 2 teilbar ist, z. B. 16; dann ist $16 + 16 + 16/2 = 40$, also 10 zu viel. Nimm 14; dann ist $14 + 14 + 14/2 = 35$, also 5 zu viel.

Nun nimmt er einen linearen Verlauf an (was nicht bewiesen wird) und erhält durch Extrapolation die Anzahl der Gesellen:

$$\frac{14 \cdot 10 - 16 \cdot 5}{5} = \frac{60}{5} = 12.$$

Schüler der 4. Klasse können diese Aufgabe mit Hilfe einer Tabelle lösen, wobei aber nicht extrapoliert wird, sondern die Tabelle fortgesetzt wird, bis der richtige Wert erscheint:

x	$x + x + \frac{x}{2}$
16	40
14	35
12	30
<12	<30

Nur im Falle $x = 12$ ist $x + x + \frac{x}{2} = 30$.

Also waren es 12 Gesellen.

R. Lüders

Lösungen



Lösungen zur: Sprachecke

▲ 1 ▲ **Aufgabe:** Welche Zahl ist in der Folge 7, 17, 37, 77, ?, 317, ... anstelle des Fragezeichens einzusetzen?

Lösung: Man gelangt in der Folge von einer Zahl zur nächsten, indem man zum Doppelten der Zahl 3 addiert. Folglich ist 157 einzusetzen.

▲ 2 ▲ **Aufgabe:** Legt in jeder Reihe ein Streichholz so um, daß überall eine wahre Gleichung entsteht!

Lösung:

$$\begin{aligned} X &= II + VIII \\ -VI &= II - VIII \\ VII &= I - VIII \end{aligned}$$

$$(7 = |1 - 8|)$$

▲ 3 ▲ **Aufgabe:** Symmetrische Muster: Welche Zahlen werden durch diese symmetrischen Muster dargestellt? Wie viele Symmetrieachsen (wenn vorhanden) hat jedes Muster? Welche Muster sind radialsymmetrisch?

Lösung: Radialsymmetrisch sind alle Muster außer g.

	a	b	c	d
Zahlen	13	12	11	12
Symmetrieachsen	2	0	2	2

	e	f	g	h	j
Zahlen	12	12	13	12	12
Symmetrieachsen	4	4	1	4	2

▲ 4 ▲ **Aufgabe:** Eine Zeitung umfaßt 36 Seiten und hat eine tägliche Auflage von 600 000 Exemplaren. Jede Seite ist ein Rechteck, dessen Ausmaße 50 cm und 33 cm betragen. Um jede Seite gibt es einen unbedruckten Rand von 2 cm Breite.

a) Wie groß ist die bedruckte Fläche?
b) Wie groß ist die Fläche des Papiers, das für die tägliche Auflage der Zeitung notwendig ist?

Lösung: a) Die bedruckte Fläche beträgt $0,46 \text{ m} \cdot 0,29 \text{ m} \cdot 36 \cdot 600\,000 = 2\,881\,440 \text{ m}^2$.

b) Die benötigte Fläche des Papiers beträgt $0,5 \text{ m} \cdot 0,33 \text{ m} \cdot 36 \cdot 600\,000 = 3\,564\,000 \text{ m}^2$.

Lösung zu: Eine Aufgabe zum Knobeln und Basteln

von Niels Neumann, nach Kürzungen durch die Redaktion:

In jeder Ecke des Polyeders muß die Summe der Größe der Innenwinkel der Seitenflächen, die hier zusammenstoßen, kleiner als 360° sein. Da die Größe der Innenwinkel beim regelmäßigen Sechseck 180° und beim regelmäßigen Fünfeck 108° beträgt, müssen in jeder Ecke entweder (a) genau zwei Sechsecke und ein Fünfeck oder (b) genau ein Sechseck und zwei Fünfecke zusammenstoßen. Wir betrachten die Ecken eines regelmäßigen Fünfecks. Würde in vier Ecken die Eigenschaft (b) bestehen, so müßte für die fünfte Ecke die Eigenschaft (a) eintreten. Also können nur in jeder Ecke zwei regelmäßige Sechsecke und ein regelmäßiges Fünfeck zusammenstoßen.

Für die folgenden Rechnungen sei E die Anzahl der Ecken des Körpers, K die Anzahl der Kanten, s die Anzahl der Sechsecke und f die Anzahl der Fünfecke. Die Anzahl der Seitenflächen ist also $F = s + f$. Jede Ecke wird von drei Kanten gebildet; und dabei wird jede Kante zweimal genutzt. Also gilt:

$$3E = 2K.$$

Jedes Fünfeck wird von fünf Sechsecken umgeben; ein Sechseck grenzt aber nur an drei Fünfecke. Deshalb ist:

$$5f = 3s.$$

Jede Kante des Körpers ist Seite für genau zwei der Seitenflächen; und deshalb gilt:

$$5f + 6s = 2K. \quad (3)$$

Aus (2) und (3) erhalten wir

$$2K = 3s + 6s = 9s. \quad (4)$$

Aus (1) ergibt sich dann

$$3E = 9s$$

und damit

$$E = 3s \quad (5)$$

Nach dem Eulerschen Polyedersatz ist $E + F - K = 2$ und damit $10E + (10s + 10f) - 10K = 20$. Wegen (2), (4) und (5) folgt daraus

$$10(3s) + 10s + 6s - 5 \cdot 9s = 20$$

und

$$s = 20.$$

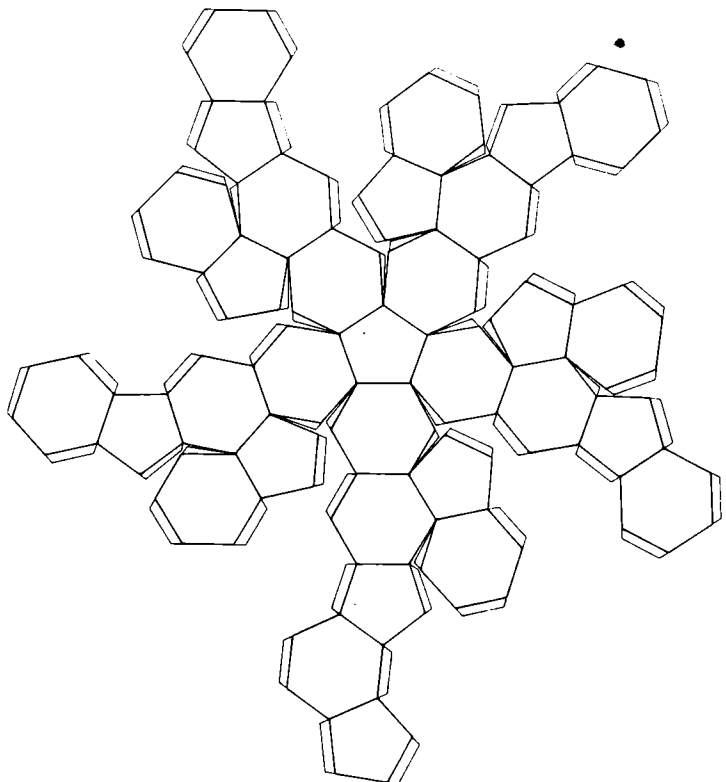
Aus $5f = 3s = 3 \cdot 20$ ergibt sich $f = 12$.

Weiterhin ist $E = 3s = 3 \cdot 20 = 60$.

Das Polyeder besteht also aus 12 Fünfecken und 20 Sechsecken, und es hat 60 Ecken. Daß es einen solchen Körper überhaupt gibt, kann man nun durch Basteln nachweisen. (Das Bild zeigt ein Körpernetz, das ich entworfen habe.)

Von jeder Ecke des Körpers gehen 11 Verbindungsstrecken zu anderen Ecken aus, die keine Raumdiagonalen sind; dies sind drei Kanten des Körpers, $2 \cdot 3 = 6$ Flächen-diagonalen von zwei Sechsecken und zwei Flächendiagonalen eines Fünfecks. Folglich gibt es von jeder Ecke aus genau $60 - 11 - 1 = 48$ Ecken, zu denen die Verbindungsstrecke eine Raumdiagonale ist. Dabei wird jede Raumdiagonale genau zweimal erfaßt; also hat der Körper genau $\frac{60 \cdot 48}{2} = 1440$ Raumdiagonalen.

Anmerkung der Redaktion: Nimmt man beim Fernsehfußball die fünf- und sechseckigen Oberflächenteile als ebene Flächen



an, so erhält man gerade einen Körper der obigen Art. Zu unserem Körper kommt man auch auf folgende Weise: Einem (Pentagon-)Dodekaeder werden die 20 Ecken durch jeweils einen ebenen Schnitt so abgetrennt, daß ein Drittel der von einer Ecke ausgehenden Kante verlorengeht. (Diese Schnitte sind regelmäßige Fünfecke, und von den Seitenflächen des Dodekaeders bleiben dabei regelmäßige Sechsecke übrig.) *E. Quaisser*

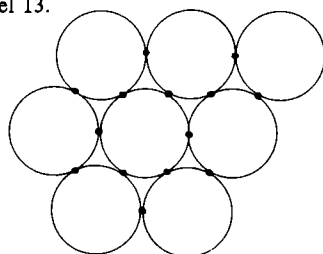
Ergebnisse bzw. Lösungshinweise zu: **Aufgaben aus der polnischen** **math. Schülerzeitschrift plus-minus**

▲ 1 ▲ Krzysztof 5, Piotr 4, Marek 3, Sławek 2, Roman 1.

▲ 2 ▲ Der Ringfinger.

▲ 3 ▲ Großvater 97, Sohn 79, Enkel 31, Urenkel 13.

▲ 4 ▲



▲ 5 ▲ Multipliziert man 11 beliebig oft mit sich selbst, erhält man immer eine Zahl mit der Einerziffer 1, denn $1 \cdot 1 = 1$. Wir bestimmen die letzte Ziffer der Potenzen von 7:

$$7^2 = 7 \cdot 7 = 49 \quad 7^5 = \dots 1 \cdot 7 = \dots 7$$

$$7^3 = 49 \cdot 7 = 543 \quad 7^6 = \dots 7 \cdot 7 = \dots 9$$

$$7^4 = 543 \cdot 7 = \dots 1, \text{ denn } 3 \cdot 7 = 21$$

und stellen unsere Untersuchung in einer Tabelle zusammen:

(n Exponent, z Einerziffer)

n	2	3	4	5	6	7	8
z	9	3	1	7	9	3	1

1980 ist durch 4 teilbar für $n = 1980$, endet 7^n (siehe Tabelle) auf 1. Die Differenz der beiden Potenzen endet deshalb auf 0.

▲ 6 ▲ Wegen $\overline{AB} + \overline{BC} = 30 \text{ km} = \overline{AC}$ liegen A, B, C auf einer Geraden. D kann nicht auf dieser Geraden liegen, denn dann wäre $\overline{CD} = 15 \text{ km}$. D liegt einerseits auf einem Kreis um A mit $\overline{AD} = 50 \text{ km}$ und andererseits auf einem Kreis um C mit $\overline{CD} = 15 \text{ km}$. Beide Kreise haben keinen gemeinsamen Punkt, die Aufgabe ist deshalb nicht lösbar.

▲ 7 ▲ a) 399 999 999 988
b) 599 999 999 995
c) n.l.

▲ 8 ▲ Die Zahl 13 hat auch diese Eigenschaften:

$$13 + 1 = 2 \cdot 7; 13 + 2 = 3 \cdot 5;$$

$$13 + 3 = 4 \cdot 4$$

▲ 9 ▲ $11 \cdot 11$; $111 \cdot 111$; $1111 \cdot 1111$;
 $11111 \cdot 11111$; $111111 \cdot 111111$;
 $1111111 \cdot 1111111$;
 $11111111 \cdot 11111111$.

▲ 10 ▲ $x = 24$; $y = 2$.

▲ 11 ▲ a) 0; b) Jede natürliche Zahl von 1 bis 100 ist Lösung.

▲ 12 ▲ Die Aufgabe ist nicht lösbar.

Lösungen zu:

Knobeln und Kombinieren

▲ 1 ▲ A B C N
A D C N
A D E N
A D E F N
A B C D E N
A B C D E F N

3,7 km; 5,7 km; 4,7 km; 6,3 km; 9,7 km;
11,3 km.

▲ 2 ▲ a) 12, b) 15.

▲ 3 ▲ 12 ▲ 4 ▲ 9

▲ 5 ▲ 17 ▲ 6 ▲ 120

▲ 7 ▲ 8 ▲ 8 ▲ a) E, F, C, B

b) D, E, F, B, A c) 127

▲ 9 ▲ 24 ▲ 10 ▲ 12 ▲ 11 ▲ 15

▲ 12 ▲ a) 16, b) 32 ▲ 13 ▲ 12

▲ 14 ▲ 43

Lösung zu:

Wolf, Ziege und Kohlköpfe

Der Mann brachte zuerst die Ziege an das andere Ufer. Darauf holte er den Wolf und brachte anschließend die Ziege wieder zurück. Am Ausgangsufer angekommen, nahm er die Kohlköpfe in den Kahn und ließ die Ziege dort. Die Kohlköpfe brachte er zum Wolf an das andere Ufer. Abschließend holte er die Ziege.

Lösungen zu:

In freien Stunden · alpha-heiter

Das Groschenspiel

Die Versuchung, einen deiner Groschen im ersten Zug dem Gegner vor die Nase zu setzen, führt zu einer glatten Niederlage, denn der Gegner kontert dann auf der anderen Bahn auf die gleiche Weise, und du mußt Schritt für Schritt zurück in deine Niederlage. Dieser (theoretische) Reifall zeigt, daß es günstig wäre, in beiden Reihen gleiche Abstände zu haben. Dein Gegner würde diese Abstände mit jedem Zug verändern, aber du hättest im nächsten Zug stets die Möglichkeit des Ausgleichs, also stets einen Antwortzug, mithin auch den letzten Zug. Ein gleicher Abstand läßt sich im ersten Zug erreichen, wenn du 5 Felder vorrückt. Marschierst dein Gegner n Felder vor, so rückst du auf der anderen Bahn n Felder vor; ist dein Gegner am Rückmarsch (k Felder), so gehe auf der gleichen Bahn k Felder nach vorn.

Spiel mit dem Baukasten

Ein Baustein der Serie F wurde nicht verwendet.

Wie alt sind Vater, Mutter und der Sohn?

V ist das Alter des Vaters, M das Alter der Mutter und S das Alter des Sohnes.

$$M - 4 = 2S$$

$$V + 5 = 2(S + 5)$$

$$M + V + S = 109.$$

Durch Lösen dieses Gleichungssystems erhält man $V = 45$, $M = 44$ und $S = 20$. Der Vater ist also 45 Jahre, die Mutter 44 Jahre und der Sohn 20 Jahre alt.

Wortspiele

Zahl – Mahl – Mehl – mehr – Meer;

Kugel, Kegel, Regel, Regal;
Mathe, Matte, Motte, Lotte, Lotto.

Verheddert

Die Schnur enthält einen Knoten.

Knacknüsse

Es müssen jeweils Zahlen der 9er Malfolge sein:

$$81 - 1 = 80; 80 : 10 = 8; 80 - 8 = 72;$$

$$72 - 2 = 70$$

$$9 - 9 = 0$$

$$8 + 1 = 9$$

$$7 + 2 = 9$$

$$0 + 9 = 9$$

Es sind 9 Kinder; 81 Nüsse werden verteilt, jeder bekam 9 Stück.

Silvesterlauf

Aus 1, 5 und 7 folgt: *Christian ist blond, 165 cm groß und Goldmedaillengewinner, Bernd ist 164 cm groß und Axel ist 162 cm groß.* Aus 2 und 4 und aus *Christian ist Sieger und blond* folgt:

Axel ist brünett. Aus 1 und 6 sowie aus *Christian ist Sieger und blond* und *Axel ist brünett* folgt: *Bernd ist schwarz und Bronzemedaillengewinner und Axel ist Silbermedaillengewinner.*

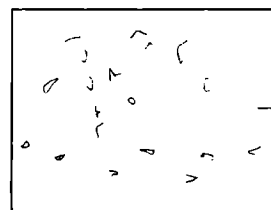
Verschlüsselter Wunsch für 1986

Kodierung: Unser Alphabet wird auf sich abgebildet nach der Vorschrift: Vokale bleiben fest und Konsonanten werden durch den im Alphabet nachfolgenden Konsonanten ersetzt (durch B).

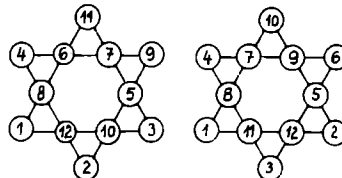
Dekodierung: Vokale bleiben fest und Konsonanten werden durch den im Alphabet vorangehenden Konsonanten ersetzt.

Folglich lautet der Satz: WIR WUENSCHEN EUCH VIEL ERFOLG IN DER SCHULE UND VIEL SPASS BEIM KNOBELN!

Auf der Ski-Piste



Der Zauberstern



Zum Jahreswechsel

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a} \quad (1)$$

$$\text{setze: } x = am \quad (2)$$

es folgt:

$$\frac{1}{am} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a} \quad (3)$$

$$\text{hieraus: } y = a \frac{m}{m-1} \quad (4)$$

setze nunmehr:

$$y = bc \quad (5)$$

$$\text{und: } b = m - 1 \quad (6)$$

$$\text{bzw.: } m = b + 1 \quad (7)$$

folgt: $y = \frac{am}{b}$

mit (2) und (8) erhalten wir:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{am} + \frac{b}{am} = \frac{b+1}{am} \quad (9)$$

(kontrolliere, daß mit (7) wieder (1) folgt).
Zerlege nun die gegebene Konstante:
 $1985 = 5 \cdot 397!$

a) Setze: $b = 5$ dann folgt mit (7): $m = 6$
mit (4) folgt:

$$y = 1985 \cdot \frac{6}{5} = 2382 \text{ mit (2) folgt:}$$

$$x = 1985 \cdot 6 = 11910;$$

b) setze: $b = 397$ dann folgt mit (7):

$$m = 398$$

$$\text{mit (4) folgt: } y = 1985 \cdot \frac{398}{397} = 1990$$

mit (2) folgt: $x = 1985 \cdot 398 = 790030;$

c) setze: $b = 1$ (einfachste Variante, die aber dazu gehört) dann folgt mit (7): $m = 2$
mit (4) folgt: $y = 1985 \cdot 2 = 3970$

mit (2) folgt: $x = 1985 \cdot 2 = 3970!$

Die Lösung heißt also:

	$x =$	$y =$
1.	11910	2382
2.	790030	1990
3.	3970	3970

Die Zahl muß durch $24 = 3 \cdot 8$ teilbar sein. Um durch 8 teilbar zu sein, werden die letzten drei Stellen untersucht. Teilbar durch 8 sind 816, 856 und 896, wobei die erste und letzte Möglichkeit wegen Ziffernwiederholung ausscheiden. Auf die durch 3 teilbare Ziffernsumme fehlen 4, 7 oder 10, daher können folgende Ziffern eingesetzt werden: 0-4, 4-0, 0-7, 7-0, 3-4, 4-3, 3-7, 7-3.

Lösungen zu: Knobel-Wandzeitung Heft 5/85

Bumerang

▲ 1 ▲ Man hätte beispielsweise folgende symmetrische Palindrome eintragen können: 1. ELLE, 2. EBBE, 3. EGGE, 4. ANNA, 5. ESSE, 6. KAJAK, 7. RADAR, 8. MONOM, 9. ROTOR, 10. NEBEN, 11. RENNER, 12. TANNAT, 13. RETTER, 14. NEFFEN, 15. NENNEN.

Schüttel-Tiere

▲ 2 ▲ LECH-ELCH, SAUM-MAUS, GRETI-TIGER, MAKEL-KAMEL, PIRAT-TAPIR, RADEL-ADLER, REGIE-GEIER, ROTTE-OTTER, SELMA-AMSEL, SCHROT-STORCH, TELEFAN-ELEFANT, SCHLAGEN-SCHLANGE, WEBSCHAL-SCHWALBE, LEBE-SCHATZ-BACHSTELZE, LICHT-GALAN-NACHTIGALL.

Lesevielfalt

▲ 3 ▲ Ist ein Wort nebendiagonal in einer Matrix mit m Zeilen und n Spalten angeordnet, so gilt für die Anzahl L der Lese-möglichkeiten:

$$L = \frac{(m+n-2)!}{(m-1)!(n-1)!}$$

Für die einzelnen Begriffe ergeben sich:

$$\text{ALPHA: } L = \frac{4!}{1!3!} + 1 = 4 + 1 = 5,$$

$$\text{HOCHZAHL: } L = \frac{7!}{4!3!} = 35,$$

$$\text{EUKLID: } L = \frac{5!}{2!3!} = 10,$$

$$(8) \text{ MATRIZEN: } L = \frac{7!}{5!2!} + 1 = 21 + 1 = 22.$$

Mehr oder weniger

▲ 4 ▲ Möglich wäre: SEITE-SEIT-SEI-SI (Silizium)-S-ES-EIS-REIS-KREIS, BREITE-BREIT-BREI-BEI-EI-EIL-EILE-TEILE-TEILER.

Aus VIER mach ZEHN

▲ 5 ▲ VIER-TIER-TEER-MEER-MEHR-WEHR-WEHE-ZEHE-ZEHN, RAUM-RAUB-LAUB-LAUS-MAUS-MASS, ZAHL-ZAHN-BAHN-BANN-BAND-RAND-RIND-RIED-RIES.

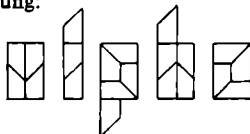
Mathematiker-Lexikon

▲ 6 ▲

FERMAT				EUKLID				GALOIS				CANTOR			
M	E	T	R	A	D	G	L	I	O	S	T				
F	E	U	K	L	I	A	C	N	A	R	O				
O	M	B	I	S	Ö	C	P	S	A	L	C				
N	P	L	A	T	U	A	C	Y	H	U	A				
PLATON				MÖBIUS				CAUCHY				PASCAL			

alpha-Spaß

▲ 7 ▲ Das Bild zeigt eine mögliche Zerlegung:



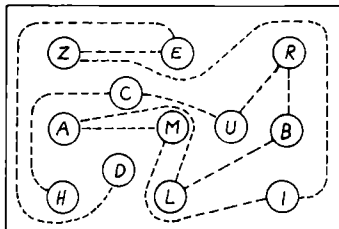
Name gesucht

▲ 8 ▲



Der Reihe nach

▲ 9 ▲



Dreierlei

▲ 10 ▲ a) Dieses Kryptogramm ist eindeutig lösbar:

$$7201 + 7201 = 14402.$$

b) Dieses Kryptogramm ist mehrdeutig

$$\text{lösbar, z. B. } 1397 + 1397 = 2794,$$

$$3102 + 3102 = 6204, 3204 + 3204 = 6408,$$

$$3295 + 3295 = 6590, 4295 + 4295 = 8590.$$

c) Dieses Kryptogramm ist nicht lösbar, denn es muß S gleich 1 sein, folglich $2I = 1$ oder $2I = 11$, was der Ganzzahligkeit von I widerspricht.

Im 20. Jahrhundert

▲ 11 ▲ Es muß $E = 1$ und $I = 9$ sein. Man erhält: S1.1M.19L1. S, M und L sind also noch in sinnvoller Weise durch verschiedene Ziffern zu ersetzen. Für $S = 0$ sind nur sechs Daten möglich: 01.12.1931 (1941, 1951, 1961, 1971, 1981).

Für $S = 2$ sind auch nur sechs Daten möglich: 21.10.1931 (1941, 1951, 1961, 1971,

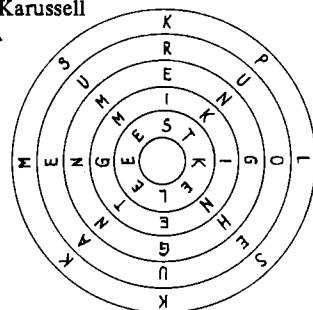
1981). Für $S = 3$ sind 12 Daten möglich: 31.10.1921 (1941, 1951, 1961, 1971, 1981) oder 31.12.1901 (1941, 1951, 1961, 1971, 1981). Insgesamt sind also 24 Daten des 20. Jahrhunderts durch SE.EM.EILE verschlüsselbar.

Mathematische Lyrik

▲ 12 ▲ In der Reihenfolge des Textes sind versteckt: Archimedes (von Syrakus: etwa 287 bis 212 v.u.Z.), Lie (Sophus: 1842 bis 1899), Klein (Felix: 1849 bis 1925), Hankel (Hermann: 1839 bis 1873), Abel (Niels Henrik: 1802 bis 1829), Gauss (Carl Friedrich: 1777 bis 1855).

Wort Karussell

▲ 13 ▲



Zahlenfenster

▲ 14 ▲ Bezeichnen wir den Buchstaben in der i -ten Zeile und k -ten Spalte der Buchstabenmatrix mit a_{ik} , so kann man mit der Schablone folgende acht Zahlennamen lesen:

$$\text{EINS} = a_{22}a_{23}a_{33}a_{34}, \text{ ZWEI} = a_{11}a_{12}a_{22}a_{23},$$

$$\text{DREI} = a_{31}a_{32}a_{22}a_{23}, \text{ VIER} = a_{13}a_{23}a_{22}a_{32},$$

$$\text{FÜNF} = a_{45}a_{55}a_{54}a_{64}, \text{ ACHT} = a_{24}a_{25}a_{35}a_{36},$$

$$\text{NEUN} = a_{33}a_{43}a_{44}a_{54},$$

$$\text{ZEHN} = a_{47}a_{43}a_{53}a_{54}.$$

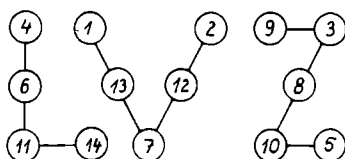
Magische Wortquadrate

▲ 15 ▲

R	O	S	E	G	E	R	A	E	S	E	R
O	B	E	R	E	B	E	R	S	O	S	A
S	E	I	L	R	E	I	M	E	S	E	L
E	R	L	E	A	R	M	E	R	A	L	F

Spaß mit der LVZ (Leipziger Volkszeitung)

▲ 16 ▲



ELFer-Probe

▲ 17 ▲ Aus der ersten Gleichung ergeben sich $E = 0$ oder $E = 1$. Aus der zweiten Gleichung ergeben sich für $E = 0$: $L = 0$ oder $L = 1$, und für $E = 1$: $L = -1$ oder $L = 2$. Aus der dritten Gleichung ergeben sich nun für $E = 0$, $L = 0$: $F = 0$ oder $F = 1$, für $E = 0$, $L = 1$: $F = -1$ oder $F = 2$, für $E = 1$, $L = -1$: $F = 0$ oder $F = 1$, für $E = 1$, $L = 2$: $F = -2$ oder $F = 3$. Jedes der acht Tripel $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, -1)$, $(0, 1, 2)$, $(1, -1, 0)$, $(1, -1, 1)$, $(1, 2, -2)$ und $(1, 2, 3)$ ist eine Lösung des Gleichungssystems, wovon man sich durch Einsetzen leicht überzeugt.

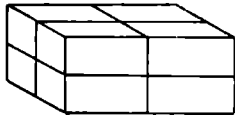
Lösungen zum alpha-Wettbewerb
Heft 2/1985

Ma 5 ■ 2550 Der Vorgänger einer natürlichen Zahl n ist $n-1$, der Nachfolger $n+1$. Wir stellen eine Tabelle auf:

a	b	$a-1$	$b+1$	$(a-1) \cdot (b+1)$
0	8	-	9	-
1	7	0	8	0
2	6	1	7	7
3	5	2	6	12
4	4	3	5	15
5	3	4	4	16
6	2	5	3	15
7	1	6	2	12
8	0	7	1	7

- a) $a = 1, b = 7$
b) $a = 3, b = 5$ oder $a = 7, b = 1$
c) $a = 5, b = 3$.

Ma 5 ■ 2551 Auf dem Bild sind drei Seiten des Paketes sichtbar; dafür werden $4 \cdot 25 \text{ cm} + 2 \cdot 40 \text{ cm} = 180 \text{ cm}$ Schnur benötigt. Insgesamt werden also $2 \cdot 180 \text{ cm} + 10 \text{ cm} = 370 \text{ cm}$ Schnur benötigt.



Ma 5 ■ 2552 Ulfs Würfel hat ein Volumen von $20 \cdot 20 \cdot 20 \text{ cm}^3 = 8000 \text{ cm}^3$. Der zweite Teilkörper hat ein Volumen von $8000 \text{ cm}^3 - 5600 \text{ cm}^3 = 2400 \text{ cm}^3$. Wegen $2400 : 400 = 6$ ist die kürzere Kante des zweiten Teilkörpers 6 cm lang. Die kürzere Kante des ersten Teilkörpers ist deshalb $20 \text{ cm} - 6 \text{ cm} = 14 \text{ cm}$ lang. Die Oberfläche des ersten Teilkörpers beträgt deshalb $2 \cdot 400 \text{ cm}^2 + 4 \cdot 14 \cdot 20 \text{ cm}^2 = 1920 \text{ cm}^2$.

Ma 5 ■ 2553

Heft	Anzahl der Einsendungen
1	$x + 2000$
2	$x - 4000$
5	$x + 3000$
6	x
Insg.	$4x + 1000$

Aus $4x + 1000 = 93000$ folgt schrittweise $4x = 92000, x = 23000$. Zu den Heften 1, 2, 5, 6 gab es in dieser Reihenfolge 25000, 19000, 26000, 23000 Einsendungen im alpha-Wettbewerb.

Ma 5 ■ 2554 Die nachfolgende Tabelle, die das mögliche Alter der vier Schüler enthält, zeigt, daß es 16 verschiedene Tippmöglichkeiten gibt.

A	B	C	D	A	B	C	D
10	10	10	10	11	10	10	11
10	10	10	11	11	10	11	10
10	10	11	10	11	11	10	10
10	11	10	10	10	11	11	11
11	10	10	10	11	10	11	11
10	10	11	11	11	11	10	11
10	11	10	11	11	11	11	10
10	11	11	10	11	11	11	11

- Ma 5 ■ 2555 a) $963 + 825 + 741$
b) 2529
c) 921, 923, 925, 941, 943, 945, 961, 963, 965

Ma 5 ■ 2556 Es könnte $a = 1, 2$ oder 3 sein. Aus $a = 3$ folgt für $b = 0$ und $c = 3$ dann $1981 + 3030 + 1982 + 3300 = 10293 > 8888$. Damit entfällt $a = 3$. Aus $a = 1$ folgt für $b = 9$ und $c = 9$ dann $1981 + 1919 + 1982 + 1199 = 7081 < 8888$. Damit entfällt $a = 1$. Somit gilt $a = 2$. Aus $b = 0$ folgt $c = 5$ wegen $1 + b + 2 + c = 8$. Dann müßte aber $1981 + 2020 + 1982 + 2255 = 8238$ gelten, was nicht möglich ist. Aus $c = 0$ folgt analog dazu $b = 5$, was wegen $1982 + 2525 + 1982 + 2200 = 8688$ ebenfalls nicht möglich ist. Systematisch so fortfahrend, erkennen wir, daß genau eine Lösung existiert, nämlich $b = 6$ und $c = 9$. Es gilt somit $1981 + 2626 + 1982 + 2299 = 8888$.

Ma 6 ■ 2557 Das Volumen des ausgeschöpften Wassers beträgt $V = 9 \cdot 3 \cdot 2 \text{ dm}^3 = 54 \text{ dm}^3$. 1 Liter Wasser ist soviel wie 1 dm^3 Wasser. $54 : 6 = 9$. Dem Aquarium wurden 9 Kannen Wasser entnommen.

Ma 6 ■ 2558 Die Kisten A, B, C seien $x \text{ kg}, 2x \text{ kg}, 3x \text{ kg}$ schwer. Aus $3x + 7,5 = 2x + 15$ folgt $x = 7,5$. Die Kisten B und C sind somit $2 \cdot 7,5 \text{ kg} + 15 \text{ kg} = 30 \text{ kg}$ schwer. Wegen $30 - 7,5 = 22,5$ müssen in Kiste A noch $22,5 \text{ kg}$ Altpapier gelegt werden.

Ma 6 ■ 2559 a) Der Zaun besteht aus $2 \cdot 6 + 2 \cdot 4 = 20$ Würfeln.

b) Von jedem Würfel sind genau drei Flächen sichtbar. Insgesamt sind also $3 \cdot 20 = 60$ Würfelflächen sichtbar.

c) Ein solcher Zaun würde aus $156 : 3 = 52$ Würfeln bestehen.

Ma 6 ■ 2560 a) $912 + 834 + 756 = 2502$

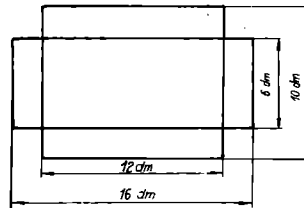
b) Von allen möglichen Beispielen sind nur die Summanden der drei folgenden Beispiele sämtlich durch 6 teilbar.

$$912 + 834 + 756 = 936 + 852 + 714 = 954 + 816 + 732 = 2502.$$

Nur im Falle $954 + 816 + 732$ ist keiner der drei Summanden durch 7 teilbar.

Ma 7 ■ 2561 a) Aus $a \cdot b \cdot c = 144 \text{ dm}^3$ und $b = 2a$ und $c = 2 \text{ dm}$ folgt $a \cdot 2a \cdot 2 = 144 \text{ dm}^3$, also $a = 6 \text{ dm}$ und $b = 12 \text{ dm}$.

b)



$$c) 0 = 16 \cdot 10 \text{ dm}^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 \text{ dm}^2 = 144 \text{ dm}^2.$$

Ma 7 ■ 2562 Es seien a, b, c, d, e die Massen der Körper A, B, C, D, E; dann gilt

$$a + b + c + d + e = 44, \quad (1)$$

$$a + b + c = d + e, \quad (2)$$

$$a + b + c + e = 36, \quad (3)$$

$$a + b = c + e, \quad (4)$$

$$a + d = e. \quad (5)$$

Aus (1) und (3) folgt $d = 8$. Aus (2) und (1)

folgt $2 \cdot (d + e) = 44$, also $d + e = 22$, und wegen $d = 8$ somit $e = 14$. Aus (5) folgt $a + 8 = 14$, also $a = 6$. Aus (2) folgt $6 + b + c = 8 + 14$, also $b + c = 16$. Aus (4) folgt $6 + b = c + 14$, also $b = c + 8$.

Daraus folgt weiter $c + 8 + c = 16, 2c = 8$, also $c = 4$ und somit $b = 12$. Die Körper A, B, C, D bzw. E haben eine Masse von 6 kg, 12 kg, 4 kg, 8 kg bzw. 14 kg.

Ma 7 ■ 2563 Es seien α, β, γ die Größen der Innenwinkel des Dreiecks, und es seien α', β' die Größen derjenigen Außenwinkel, die α bzw. β zu 180° ergänzen. Dann gilt $\alpha' = \beta + \gamma, \beta' = \alpha + \gamma, \alpha' + \beta' = \alpha + \beta + \gamma + \gamma, \alpha' + \beta' = 180^\circ + \gamma$, also $\alpha' + \beta' - 180^\circ = \gamma$.

Ma 7 ■ 2564 Es sei $z = \overline{abcd}$ die gesuchte vierstellige natürliche Zahl mit $1 \leq a \leq 9, 0 \leq b, c, d \leq 9$. Wegen $c = 4 \cdot d$ und $c + d = 10$ gilt $4d + d = 10, 5d = 10$, also $d = 2$ und somit $c = 8$. Wegen $b = a + c$, also $b > c$ gilt $b = 9$ und somit $a = 1$. Die gesuchte Zahl lautet 1982.

Ma 8 ■ 2565 Aus (1) folgt: Herr Voigt ist kein Geschichtslehrer.

Aus (2) folgt: Herr Schröter ist kein Russisch- und kein Deutschlehrer.

Aus (3) folgt: Herr Schröter ist kein Geschichtslehrer. Herr Müller ist Geschichtslehrer.

Aus (4) folgt: Herr Müller ist kein Chemie- und kein Biologielehrer.

Aus (5) folgt: Herr Schröter ist kein Chemielehrer. Herr Voigt ist Chemielehrer.

Aus (6) folgt: Herr Voigt ist kein Deutschlehrer. Herr Müller ist Deutschlehrer. Herr Voigt ist Russischlehrer, und Herr Schröter ist Biologie- und Englischlehrer.

Lehrer	Russisch	Biologie	Chemie
Schröter	nein	ja	nein
Voigt	ja	nein	ja
Müller	nein	nein	nein

Lehrer	Geschichte	Englisch	Deutsch
Schröter	nein	ja	nein
Voigt	nein	nein	nein
Müller	ja	nein	ja

Ma 8 ■ 2566 Es sei $100a + 10b + c$ mit $1 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9, 0 \leq c \leq 9$ eine dreistellige natürliche Zahl mit den Grundziffern a, b, c ; dann gilt nach Aufgabenstellung $100a + 10b + c + 135 = 100c + 10a + b, 90a + 9b + 135 = 99c, 10a + b + 15 = 11c$ und wegen $a + b + c = 9$ $10a + (9 - a - c) + 15 = 11c, 9a + 24 = 12c, 4c = 8 + 3a,$

$$\text{also } c = 2 + \frac{3a}{4}.$$

Für $a = 4$ gilt $c = 5$ und $b = 0$.

Für $a = 8$ gilt $c = 8$, was wegen $a + b + c = 9$ nicht möglich ist. Es existiert genau eine solche Zahl; sie lautet 405, und es gilt $405 + 135 = 540$.

Die Veröffentlichung der restlichen Lösungen Mathematik des Wettbewerbs 2/85 erfolgt in alpha 1/86. Auf die Lösungen zu Ph/Ch muß aus Platzgründen verzichtet werden.

alpha-Wettbewerb

Kollektive Beteiligung am alpha-Wettbewerb 1984/85

Pablo-Neruda-OS, Ahlbeck; Fr.-Engels-OS, OS E. Mäder, Haus d. Jungen Pioniere, alle Altenburg; E.-Schneller-OS, Alt-Sühkow; Haus d. Jungen Pioniere, Altentreptow; W.-Pieck-Schule, Anklam; W.-Seelenbinder-OS, Arneburg; OS Asbach; Haus d. Jungen Pioniere Th. Müntzer, Bad Blankenburg; H.-Duncker-OS, Bad Kleinen; H.-Beimler-OS, Bad Köstritz; R.-Schwarz-OS, Bad Liebenstein; OS Fr. Engels, Bad Liebenwerda; Stat. Jg. Techn. u. Naturf., A.-Saefkow-OS (IV), O.-Grotewohl-OS, M.-Poser-OS, EOS E. Thälmann, alle Bad Salzungen; R.-Siewert-OS, Bad Suderode; H.-Heine-OS, Barchfeld; Zentrale OS H. Beimler, Bärenklau; OS Fr. Mehrling, 26. OS L. Renn, 25. OS, Kreispionierhaus, K.-Tucholsky-OS., 2. OS E. Baron, alle Berlin; OS Berlingerode; OS J. R. Becker, Bernburg; H.-Ament-OS, Bernsbach; G.-Scholl-OS, Bernsdorf; E.-Köcher-OS, Bernstadt; OS Bernterode; OS Beuren; OS C. Zetkin, Bischofferode; OS Blankenhagen; OS Fr. Schiller, Bleicherode; G.-Ewert-OS, Blumenthal; OS Boddin; A.-Bebel-OS, Boizenburg; Dinter-OS, Borna; OS Brandshagen; H.-Beimler-OS, Braunsdorf; OS B. Brecht, Brehme; OS Breitenworbis; OS H. Beimler, OS W. Seelenbinder, beide Breiten; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Brotterode; M.-Poser-OS, Bürgel; W.-Pieck-OS, Burrow; W.-Estel-OS, Buttlar; Station Jg. Naturf. u. Techn. Prof. Dr. G. Hertz, Calbe; 1. OS, Coswig; Station Jg. Naturf. u. Techn. Cottbus; OS H. Wiedner, Dahlen; OS B. Kühn, Dambeck; Fr.-Reuter-OS, Demmin; M.-Gorki-OS, Dermbach; OS Dersekow; OS K. Kollwitz, OS Makarenko, beide Dingelstädt; OS K. Niederkirchner, Dörmersleben; OS A. Matrossow, Dörmdorf; O.-Grotewohl-OS, Dreitzsch; Pionierpalast, 106. OS, 120. OS W. Koenen, alle Dresden; OS Dürrhörsdorf; 2. OS W. Pieck, Ebersdorf; OS Fr. Engels, Ebfelder; W.-Pieck-OS, Eichhof; OS F. Heckert, Eisleben; OS H. Grundig, Ellrich; 1. OS R. Arndt, Elsterwerda; E.-Weinert-OS, Empfertshausen; OS 56, Erfurt; W.-I.-Lenin-OS, Erkner; Haus d. Jungen Pioniere, Falkensee; G. Dimitroff-OS, Falkenstein; Th.-Müntzer-OS, Fambach; W.-Pieck-OS, Fehrbellin; 5. OS G. Dimitroff, Finsterwalde; B.-Brecht-OS, Floh; OS E. Weinert, Fleussau; Spezialschule C. F. Gauß, 15. OS K. Marx, beide Frankfurt/O.; E.-Thälmann-OS, Glückauf-OS, AG Naturw. der BBS Edelstahlwerk, alle Freital; OS Friedeburg; OS I. Friedland; Station alpha, Fürstenwalde; R.-Arnstadt-OS, Geisa; J.-Gagarin-OS, Geithain; E.-Hartsch-OS, Gersdorf; Kalinin-OS, Geschwenda; K.-Neuhof-OS, Glienicke; K.-Kräppler-OS, Gnoien; 5. OS J. Gagarin, 7. OS, beide Görlitz; W.-Husemann-OS, Goldberg; Kreisklub Jg. Math. Gräfenhainichen; E.-Thälmann-OS, Greifswald; OS H. Beimler, OS J. Gagarin, beide Greußen; A.-Frank-OS, Grimma; A.-Walther-OS, Gröditz; OS C. Zetkin, Groitzsch; OS W. Seelenbinder, Gröditz; OS A. Kuntz, Großbodungen; A.-Becker-OS, Großenstein; OS Großschönau; OS K. Gottwald, Großrückerswalde; Juri-Gagarin-OS, Grünhain; Th.-Müntzer-OS, Gumpelstädt; Station Jg. Naturf. u. Techn. Halberstadt; OS f. Körperbehinderte, OS S. M. Kirow, beide Halle; W.-Koenen-OS, Station Jg. Techn. u. Naturf., beide Halle-Neustadt; OS Hammerbrücke; OS Haynrode; OS Hedersleben; Schule d. DSF, Heiligengrabe; P.-Schreier-OS, Hennigsdorf; OS Th. Müntzer, Hermannsdorf;

M.-Gorki-OS, Hillersleben; Goethe-OS, Hohenleipisch; O.-Schlag-OS, Hohenmölsen; OS Horka; 21. OS, Hoyerswerda; E.-Egert-OS, Hundeshagen; Goethe-OS, Ilseburg; G.-Dimitroff-OS, Immelborn; G.-Ewald-OS, Ivenack; OS A. Becker, Jatznick; E.-Weinert-OS, Jocketa; OS Kaltenuordheim; OS A. Becker, Kamsdorf; C.-Zetkin-OS, Kandelin; H.-Beimler-OS, Karbow; A.-Becker-OS, W.-Komarow-OS, E.-Schneller-OS, P.-Tschaikowski-OS, E.-Thälmann-OS, Pionierhaus J. Gagarin, EOS K. Marx, H.-Menzel-OS, F.-Wolf-OS, alle Karl-Marx-Stadt; OS C. Zetkin, Kaulsdorf; OS Th. Rybaczky, Kemberg; Th.-Neubauer-OS, Kieselbach; OS Kirchworbis; Kreisklub Math., E.-Spezial-OS G. Thiele, beide Kleinmachnow; OS Th. Müntzer, Kleinow; OS Th. Müntzer, Klettenberg; OS E. Thälmann, Klosterfelde; W.-Seelenbinder-OS, Könitz; OS E. Thälmann, Köthen; OS Küllstedt; OS C. Zetkin, Laage; alpha-Club R. Breitscheid, Latdorf; Goetheschule, Lauscha; OS E. Weinert, Legefild; R.-Teichmüller-OS, Leimbach; Dr.-S.-Allende-OS, K.-Liebknecht-OS, R.-Luxemburg-OS, EOS K. Marx, alle Leinefelde; O.-Schön-OS, Haus d. Jungen Pioniere A. Saefkow, beide Leipzig; M.-Poser-OS, Lengfeld; G.-Dimitroff-OS, Lenzen; E.-Thälmann-OS, Leutenberg; OS Leutersdorf; W.-Pieck-OS, Lichte; O.-Grotewohl-OS, EOS Prof. Dr. M. Schneider, beide Lichtenstein; Pestalozzi-OS, Löbau; OS W. Wallstab, Löderburg; W.-Seelenbinder-OS, Lössau; Goethe-OS, Haus d. Jungen Pioniere Th. Körner, beide Ludwigslust; Station Jg. Naturf. u. Techn. Lütz.; K.-Bürgel-OS, Lützow; J.-Gagarin-OS, Meiningen; OS J. Gagarin, Merkers; OS Mittelstille; E.-Steinfurth-OS, Mittenwalde; OS H. Danz, Möser; OS W. Pieck, Mühlberg; Kinderheim Munzig; OS Nachterstedt; OS J. Fußik, Naundorf; OS W. Bykowski, Neetzow; R.-Hallmeyer-OS, Neundorf; F.-Schiller-OS, H.-Beimler-Schule, beide Neustadt; Dr.-Th.-Neubauer-Schule, Niederorschel; W.-Pieck-OS, Niederwiesa; Haus d. Jungen Pioniere H. Matern, OS J. Gagarin, beide Nordhausen; Pestalozzi-OS, Nossen; OS Obhausen; W.-Seelenbinder-OS, Oechsen; Pestalozzischule, E.-Vogel-OS, beide Oschatz; EOS K. Marx, Oschersleben; OS O. Grotewohl, Pappenheim; Haus d. Jungen Pioniere P. Göring, Parchim; OS Dr. Th. Neubauer, Pfaffschwenda; OS Plauen, Spezialistenlager Math. Plauen-Land; Makarenko-OS, Pleissa; OS E. Schneller, Polleben; OS 16, Potsdam-B.; OS Pritzerbe; Station Jg. Naturf. u. Techn., Goetheschule II, beide Pritzwalk; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Rackwitz; OS Pestalozzi, Radebeul; W.-I.-Lenin-OS, Radewege; OS Raßnitz; Fr.-Engels-OS, Geschw.-Scholl-OS, beide Rathenow; OS K. Kollwitz, Rehna; E.-Weinert-OS, Reichenbach; J.-Gagarin-OS, OS U. Steinhauer, Fr.-Engels-OS, alle Ribnitz; Spezialschule Fr. Engels, Riesa; OS H. Rau, Rheinsberg; J.-Curie-OS, Röbel; J.-Curie-OS, Ronneburg; Ziolkowski-OS, Roßdorf; Fr.-Schmenkel-OS, Roskow, 34. OS M. Reichpietsch, 66. OS O. Buchwitz, Haus d. Jungen Pioniere, alle Rostock; W.-Pieck-OS, Rotta; K.-Niederkirchner-OS, Saal; E.-Weinert-OS, Saalfeld; W.-Pieck-OS, Station Jg. Naturf. u. Techn., beide Sangerhausen; T.-Bunke-OS, Sarnitz; OS H. Matern, Schernberg; OS Schlagsdorf; W.-Pieck-OS, Schlottwitz; OS M. Gorki, Schkölen; OS H. Danz, OS K. Marx, OS J. G. Seume, alle Schmalkalden; OS Schleiz; Haus d. Jungen Pioniere, Schönebeck; EOS Schollene; OS Kuba, Schorssow; OS Schneidlingen; OS F. Engels, Schwallungen; U.-May-OS, Sebnitz; OS F. Reuter, Siedenbollentz; OS A. Wölk, Senftenberg; F.-Fröbel-OS, Schweina; OS Sohland; J.-R.-Becher-OS, OS Glückauf, OS W. Pieck, alle Sondershausen; K.-Marx-OS, OS A. Becker, beide Spremberg; OS K. Liebknecht, Stadtengsfeld; Pionierhaus E. Grube, Staßfurt; OS J. Fußik, Steinbach; OS E. Thälmann, Steinbach-Hallenberg; R.-Luxemburg-OS, Steinsdorf; A.-Becker-

OS, Stralendorf; O.-Felfe-OS, Straßgräbchen; 12. OS Dr. R. Sorge, Suhla; H.-Riecke-Schule, Tangerhütte; H.-Beimler-OS, Tantow; OS E. Schneller, Taubenheim; OS G. Eisler, K.-Niederkirchner-OS, beide Tetow; K.-Liebknecht-OS, Teuchern; F.-Mehring-OS, Tiefenort; A.-Einsteint-OS, Torgelow; E.-Schneller-OS, Töplitz; E.-Thälmann-OS, OS W. Pieck, beide Trusetal; A.-Nitz-OS, Ehm-Welk-OS, Goetheschule, alle Ueckermünde; H.-Beimler-OS, Unterbreizbach; E.-Schneller-OS, Urnshausen; J.-G.-Seume-OS, Vacha; OS Vitzsburg; A.-Bebel-OS, Vogelsang; R.-Luxemburg-OS, Waldau; Goetheschule, Kreisklub Jg. Math., beide Waren; H.-Beimler-OS, Wefensleben; OS L. Fünberg, Wegeleben; H.-Matern-OS, Weida; OS Weißenborn-L.; Neustadtschule I, Weißenfels; POS V, Kreisklub Jg. Math., beide Weißwasser; OS Wernshausen; OS O. Grotewohl, Westerland; J.-Harder-OS, Wessenberg; C.-Zetkin-OS, Wiehe; OS R. Luxemburg, Werbelow; Haus d. Jungen Pioniere, Wismar; Station Jg. Naturf. u. Techn. Wittstock; OS H. Matern, Wippersdorf; Station Jg. Naturf. u. Techn. Wittenberg; OS A. Trützschler, Wölfs; OS H. Beimler, Station Jg. Naturf. u. Techn., beide Wolfen; OS Wolkenburg; OS H. Werner, OS W. I. Lenin, beide Worbis; OS Th. Müntzer, Wulfen; G.-Walter-OS, OS S. Allende, beide Wustrow; Station Jg. Naturf. u. Techn. Zembchen; F.-Schiller-OS, Zeulenroda; Th.-Müntzer-OS, Ziesar; Goetheschule, Zossen.

Leserpost

Leider gibt es bei uns keinen Mathematikzirkel. Da freue ich mich über jede Knobelaufgabe, die ich lösen kann, denn *Übung macht den Meister*. ... Ihr könnt außer Mathe, Physik und Chemie auch elektronische Beiträge bringen. ... Auch daß ihr Bücher vorstellt, finde ich große Klasse!

Andreas Gutsch, Kahla

... Ich heiße Daniela Scholid, gehe in die 8. Klasse. Mein Hobby ist Mathe. Ich löse gern Geometriaufgaben, aber am liebsten denke ich mir welche aus. Die *alpha*-Aufgaben löse ich nun schon das vierte Jahr. Bei schwierigen Problemen helfen mir der AG-Leiter des Kreisklubs und mein Mathe-Lehrer. Daniela Scholid, Ueckermünde

Ich möchte mich bei Ihnen bedanken. Diese schöne Zeitschrift, auf die ich immer mit Ungeduld warte, gehört in meine Freizeit, die ich mir ohne die *alpha* nicht denken kann. Mathematik und Physik machen mir großen Spaß. Wir haben den Unterricht mit der *alpha* interessanter gestaltet. Ich möchte mich bei allen Mitarbeitern bedanken.

Romy Vogel, Weida (14 Jahre)

... Auch Dank Eurer Hilfe. Mittels des Wettbewerbs gelang es mir, meine Leistungen so zu steigern, daß ich an die EOS *Immanuel Kant* delegiert wurde. Ich hoffe, daß ich noch weitere Jahre fähig bin, Eure Knobelnülleraufgaben zu lösen. Euer Stammleser, das 6. Jahr im Wettbewerb erfolgreich!

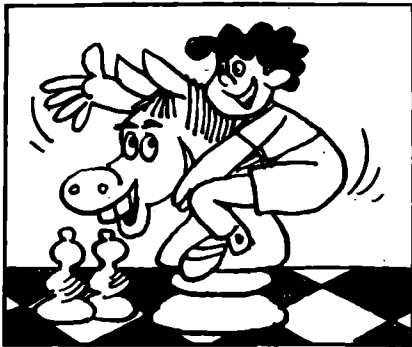
Torsten Brand, Berlin

Seit zwei Jahren nehme ich am *alpha*-Wettbewerb teil. Die Antwortkarten zeigten mir, daß es gut klappt. Mein Berufswunsch ist, einmal Lehrerin zu werden. Ich sammle jetzt schon die Hefte fleißig.

Petra Döring, Berlin-Biesdorf-Süd

... An dieser Stelle sei mir erlaubt, einen Wunsch zu äußern: Mit der Entwicklung der Computertechnik ist man heute schon recht weit. So ist es sogar schon möglich, chemische Formeln verschlüsselt dem Computer einzugeben. Es würde bestimmt auch andere *alpha*-Leser interessieren, wie so eine Eingabe erfolgt. ...

Veit-Thomas Meyen, Grimma (10jähriger Teilnehmer am alpha-Wettbewerb)



alpha-Schachwettbewerb 1985

Zum dritten Mal fordert *alpha* alle Schachfreunde zur Teilnahme an einem Lösungswettbewerb auf!

Es können wiederum acht Schachaufgaben von unterschiedlicher Schwierigkeit gelöst werden. Die jeweilige Punktzahl, die in etwa den Schwierigkeitsgrad wiedergibt, ist bei den Aufgaben mit angegeben. In allen acht Aufgaben beginnt Weiß und setzt trotz bester Gegenwehr von Schwarz in der geforderten Zügezahl matt.

Unter allen Teilnehmern, die zumindest eine Aufgabe richtig gelöst haben, werden Bücher verlost.

Die Teilnehmer, die die volle Punktzahl zu den Aufgaben Nr. 1 bis Nr. 7 erreichen, erhalten eine Urkunde und nehmen an einer weiteren Verlosung von Büchern teil. Für Teilnehmer bis zum Alter von 14 Jahren reicht schon die volle Punktzahl zu den Aufgaben Nr. 1 bis Nr. 4 aus, um in diese Verlosung zu kommen.

Die achte Aufgabe (Nr. Z) ist eine Zusatzaufgabe, die nicht unmittelbar zum Wettbewerb gehört. Sie ist für leistungsstärkere Schachspieler gedacht. Diese Aufgabe bleibt zwar ohne Punktbewertung, jedoch ersetzt sie jede andere Aufgabe im Punktwert. Unter den Teilnehmern, die alle Aufgaben einschließlich der Zusatzaufgabe richtig gelöst haben, werden zwei Bücher verlost.

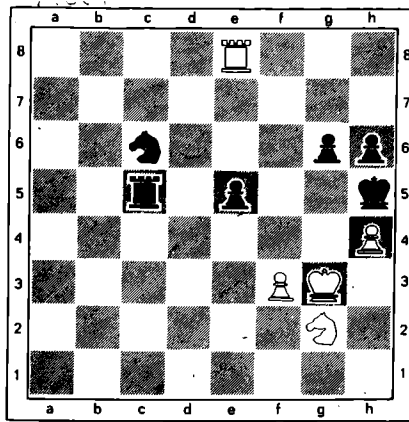
Teilnahmeberechtigt sind alle *alpha*-Leser. Als vollständig gilt die Lösung, wenn die wesentlichen Abspiele bis zum Matt angegeben sind.

Meinungen, Anregungen, Kritiken zu den Aufgaben und zum Wettbewerb sind erwünscht, aber nicht Bedingung.

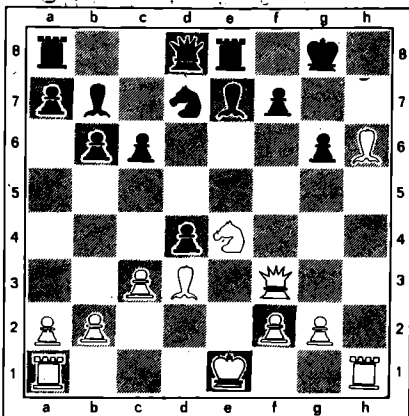
Die Einsendung der Lösungen (jeweilige Aufgaben-Nummer angeben) ist bitte bis zum 1. März 1986 unter Angabe von Name, Vorname, Adresse und Alter zu richten an

Redaktion *alpha*
7072 Leipzig
PSF 14

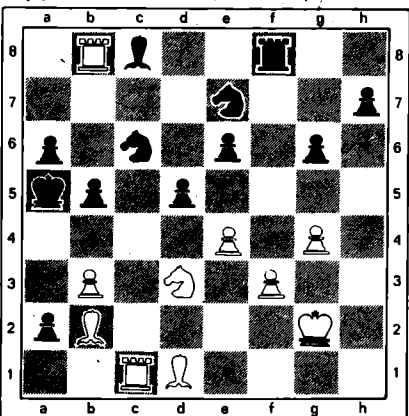
Die Lösungen sowie die Gewinner werden in *alpha* 4/1986 veröffentlicht.



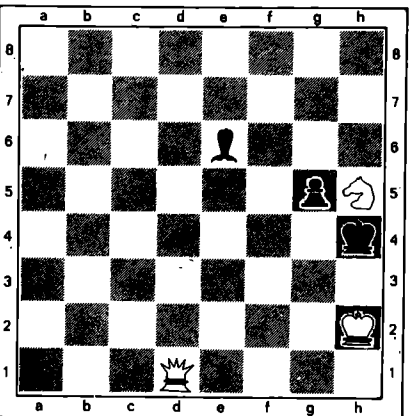
Nr. 1 Matt in zwei Zügen 1 Punkt



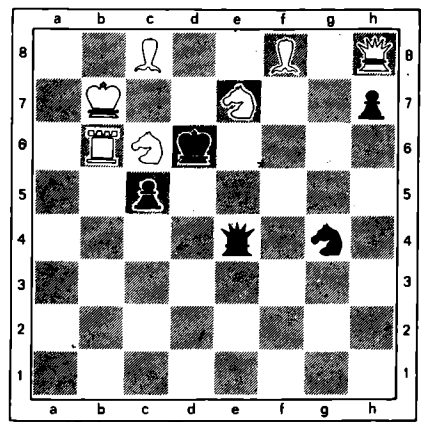
Nr. 2 Matt in zwei Zügen 2 Punkte



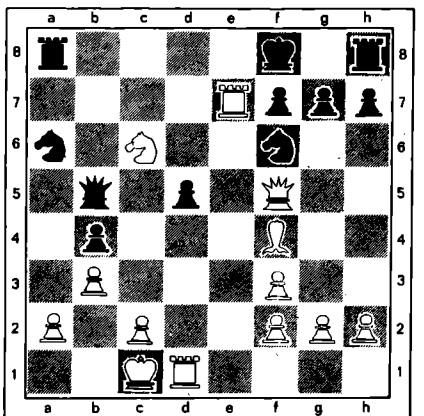
Nr. 3 Matt in zwei Zügen 3 Punkte



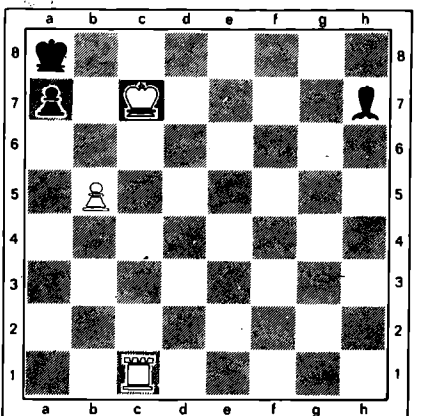
Nr. 4 Matt in zwei Zügen 4 Punkte



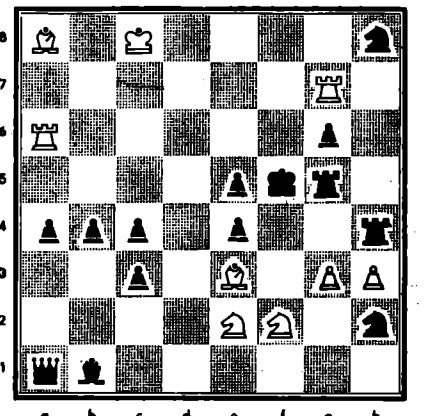
Nr. 5 Matt in zwei Zügen 5 Punkte



Nr. 6 Matt in vier Zügen 6 Punkte



Nr. 7 Matt in drei Zügen 6 Punkte



Nr. Z Matt in drei Zügen

Magische Quadrate mit Jahreszahlen

Eine lebendige Leserdiskussion

Auf dem Titelblatt der *alpha* 6/1984 wurde ein *Magisches Quadrat* 10. Ordnung mit der Jahreszahl 1984 abgebildet.

15	89	81	83	82	17	18	90	14	16
36	39	31	38	32	67	63	70	64	65
06	09	01	98	02	97	93	10	94	95
26	79	80	78	72	27	73	21	24	25
66	69	61	68	62	37	33	40	34	35
45	42	50	43	49	54	58	51	57	56
75	22	30	28	29	74	23	71	77	76
96	92	91	03	99	04	08	100	07	05
55	52	60	53	59	44	48	41	47	46
85	12	20	13	19	84	88	11	87	86

Bild 1

Der Empfehlung, sich mit weiteren Jahreszahlen in *Magischen Quadraten* zu beschäftigen, folgte eine unerwartet große Anzahl unserer Leser. Alle Einsender brachten mindestens die Jahreszahlen 1985 und 1986, wobei es keine zwei gleichgearteten Quadrate gab. Da wir nur einige Arbeiten veröffentlichen können, möchten wir an dieser Stelle allen Einsendern recht herzlich danken. Allgemein wurde bestätigt, daß ihnen das Knobeln viel Spaß gemacht hat.

Ausgangspunkt unserer Idee war, wie schon in *alpha* 6/1984 erwähnt, Dürers *Melancholie* (Bild 2, Detail) mit dem *Magischen Quadrat* 4. Ordnung und der Jahreszahl 1514.

Bild 2



Zu Bild 3a, b: Merkt man sich die symmetrisierte A als Streckenzug für die Zahlen 1 bis 8, so lassen sich bei zentraler Drehung des A um 180° wegen der Symmetrieeigenschaft des Quadrates danach auch die Zahlen 9 bis 16 eintragen.

16	03	02	13
05	10	11	08
09	06	07	12
04	15	14	01

Bild 3a

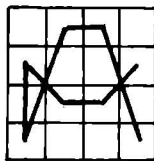


Bild 3b

Unser *schnellster Einsender* (und auch *jüngster*) war Wieland Koban, Dresden, Kl. 5; Roland Jancke, Berlin, Kl. 8 und Michael Rühling, Dresden, Kl. 10 begründeten ihre Lösungswege für 1985, ..., 1988 klar und übersichtlich. Hartmut Boettcher, Weimar, 48 Jahre, Dipl.-Landwirt, brachte 6 Jahreszahlen zu Papier. Olaf Krause, Eisenhüttenstadt, Kl. 10, arbeitete schon auf das Jahr 2000 hin, indem er dazu die Zahlenfolge 00, ..., 99 benutzte ($\bar{K}_{10} = 495$).¹⁾ Rainer Bauer, Mittweida, 21 Jahre, Student, entwickelte ein *Magisches Quadrat* 20. Ordnung mit 1985. Thomas Mittelstadt, Freiberg, Kl. 6, sandte *Magische Quadrate* mit 1985, ..., 1995 (!). Dabei ist bemerkenswert, daß ihm 1985 – als einzigem Einsender – bereits mit 3 Zweiertauschen gelang (Bild 4a). Rolf Kamieth, Kakerbeck, 23 Jahre, Student, erreichte 1986 bereits mit 2 Dreiertauschen in der 1. und 10. Zeile (Bild 4b).

(Zeile 1)	83	82	16	18	90	14	17
...	...	...	...	...	...	...	...
76	22	30	28	(Zeile 7)	71	77	75
...	...	...	...	...	...	...	...
84	12	20	13	19	85	(Zeile 10)	...

16	89	81	83	82	15	18	90	14	17
...	...	...	...	(Zeile 1)	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
84	12	20	13	19	86	88	11	87	85

Siegfried Linßner, Leipzig, 32 Jahre, Elektromonteur, konstruierte ein *Magisches Quadrat* 8. Ordnung ($K_8 = 260$) mit 1985 in den 4 zentralen Mittelfeldern. Ein wahres Meisterstück stellt aber Bild 5 dar. Unter geschickter Ausnutzung der Einer- und Zehnerziffern gelang es ihm, sechsmal die Jahreszahl 1986 unterzubringen.

Tibor Bakos, Budapest, 76 Jahre,²⁾ benutzte als Ausgang ein *Magisches Quadrat* von L. Weisner (1959). Die Zahlen 0 bis 99 sind so angeordnet, daß das Quadrat auch dann magisch bleibt, wenn man alle Zahlen in ihren Zehner- und Einerziffern vertauscht. (Spiegelung aller Zahlen $\overline{XY}$ an der Nebendiagonalen als $\overline{YX}$. T. Bakos änderte dieses Quadrat, indem er – gegenüber dem Weisnerschen Quadrat – beide

15	55	21	37	65	73	69	10	79	81
91	46	49	33	67	80	22	24	64	29
85	47	77	56	84	27	05	40	16	68
63	45	34	75	58	59	78	26	31	36
02	88	100	20	1	9	50	97	94	44
04	95	14	96	8	6	25	72	92	93
12	60	71	52	51	35	99	66	48	11
90	18	74	43	98	41	32	53	17	39
82	38	62	23	54	89	42	30	57	28
61	13	03	70	19	86	83	87	07	76

Bild 6

64	75	97	48	32	29	56	13	81	00
49	34	25	90	51	72	83	07	66	18
12	96	59	87	05	63	28	44	70	31
03	10	71	26	47	54	99	82	38	65
58	89	04	73	60	11	45	36	27	92
91	67	42	39	88	06	74	50	15	23
20	41	16	55	93	37	62	78	09	84
86	08	33	61	24	40	17	95	52	79
35	22	80	14	76	98	01	69	43	57
77	53	68	02	19	85	30	21	94	46

Diagonalen magisch machte und es durch die 1985 erweiterte. Sie erscheint auch gespiegelt an der linken Seite noch einmal sowie bei den 4 Mittelfeldern der Nebendiagonalen (Bild 6). (Durch Tausch der Einerziffern 5 mit 7 und 4 mit 6 wäre 1987 zu erreichen.)

80	92	90	12	82	16	15	14	13	91
26	01	99	08	94	27	73	34	68	75
25	96	06	97	03	70	32	71	29	76
24	98	04	95	05	72	30	69	31	77
18	07	93	02	100	33	67	28	74	83
84	35	65	42	60	43	57	50	52	17
81	62	40	63	37	54	48	55	45	20
78	64	38	61	39	56	46	53	47	23
79	41	59	36	66	49	51	44	58	22
10	09	11	89	19	85	86	87	88	21

Mit Bild 7 entwickelte T. Bakos ein *Magisches Quadrat* besonderer Art. Im Innern ergeben sich nämlich zusätzlich vier Quadrate 4. Ordnung, die auch magisch sind ($K_4 = 2(100 + 1) = 202$). Dieses *Magische Quadrat* ist für 1985 bis 1989 verwendbar, was durch einen einzigen Zweiertausch in der 1. und 10. Zeile erreichbar ist, z. B. 16 mit 15 und 85 mit 86.

H.-J. Kerber

¹⁾ Die magische Konstante für *Magische Quadrate* n -ter Ordnung lautet

$$K_n = \frac{n}{2} (n^2 + 1) \text{ bei Zahlen von 1 bis } n,$$

$$\bar{K}_n = \frac{n}{2} (n^2 - 1) \text{ bei Zahlen von 0 bis } n - 1.$$

²⁾ Bekannt aus *Mathematisches Mosaik*, Math. Schülerbücherei Nr. 102, Kapitel: *Magische Quadrate*.