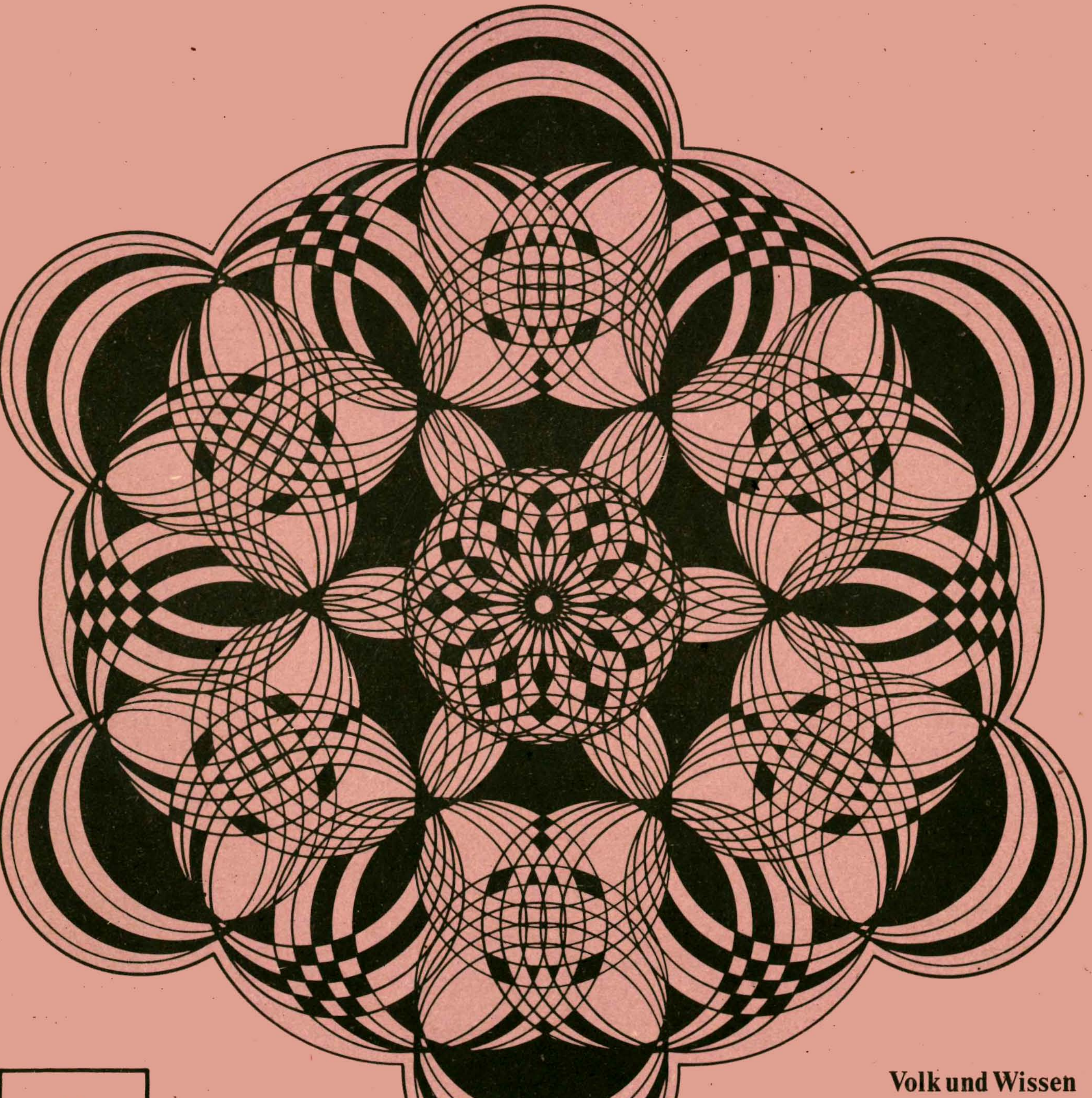
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



6

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
20. Jahrgang 1986
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold
Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
1086 Berlin, Krausenstr. 50, PSF 1213
Anschrift der Redaktion:
7027 Leipzig, PSF 14
Redaktion:
OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Vignette, mittl. Spalte, H. Teske, Leipzig (S. 123); Rolf F. Müller, Gera (S. 128); Louis Rauwolf aus Eulenspiegel, Berlin (S. 130); aus Krokodil, Moskau (S. 131); Bildarchiv Red. *alpha* (S. 133); V. Heinz, aus DLZ (S. 136)

Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach einer Vorlage aus der math. Schülerzeitschrift Lapok, Budapest

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 16. August 1986
Auslieferungstermin: 10. Dezember 1986

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

[1]) bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben geeignet ab der angegebenen Klassenstufe

Minimum – Wege – Strukturen

1. Einführung

Eines der mathematischen Erkenntnisse, denen wir recht früh im Leben begegnen, besagt, daß die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten die Strecke ist. Jeder andere Weg hat eine größere Länge. Will man nun dieses Ergebnis verallgemeinern und den kürzesten Weg bestimmen, der drei oder vier oder mehr Punkte verbindet, so wird das Problem schnell komplizierter. Derartige Aufgaben sind jedoch wichtig, wie z. B. beim Bau von Straßen, die eine Anzahl von Städten miteinander verbinden, oder bei der Verlegung von Pipelines oder Kabeln, die eine Anzahl von Zentren versorgen sollen. In all diesen Fällen sind die Baukosten proportional zur Länge.

Unsere Betrachtungen wollen wir im folgenden auf den Wegebau beschränken und die Eigenschaften der Minimum-Wege-Strukturen herleiten, die eine Anzahl von Städten verbinden. Sind diese z. B. durch irgendein Wegesystem (siehe Bild 1a) miteinander verknüpft, so steht fest, daß diese Minimum-Wege-Strukturen keine sich krümmenden Wege haben können, da jeder gekrümmte Wegabschnitt durch eine kürzere geradlinige Wegelänge ersetzt werden kann (siehe Bild 1b).

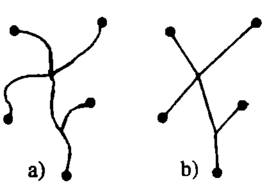
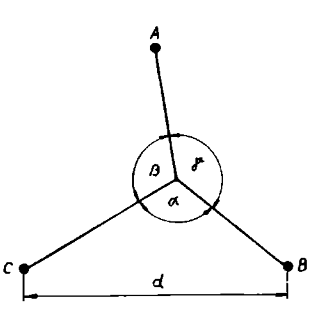


Bild 1 a) b)

2. Drei-Städte-Strukturen

Um einen weiteren Einblick in das Problem zu erhalten, untersuchen wir zunächst die Drei-Städte-Struktur. Die einfachste Aufgabe entsteht, wenn alle Städte A, B und C an den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks (siehe Bild 2) mit den Seiten der Länge d angebracht sind und die kürzeste Verbindung zwischen den drei Punkten gesucht wird.

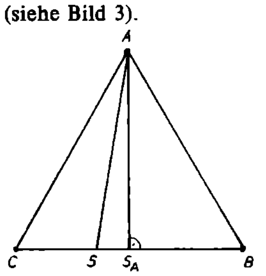
Bild 2



Nun gibt es verschiedene Möglichkeiten, die drei Städte durch Strecken zu verbinden. Man könnte

- entlang zweier Seiten gehen mit $l = 2d$, oder
- entlang dreier geradliniger Wege, die sich in einem Punkt S treffen mit verschiedenen Winkeln α, β und γ zwischen den Wegen (siehe Bild 2) oder
- entlang einer Seite und einem Weg, der einen beliebigen Punkt dieser Seite mit dem gegenüberliegenden Punkt verbindet, also A, B und C mit S auf $\overline{BC}$ (siehe Bild 3).

Bild 3



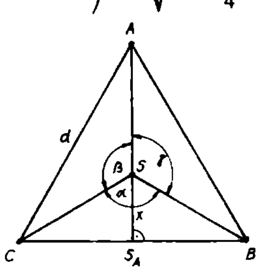
Die Mindestlänge in diesem Fall findet man, wenn S auf S_A, dem Mittelpunkt von $\overline{CB}$, liegt. Dies ergibt $l = \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)d = 1{,}866\ldots d$, was deutlich kürzer als die Zweiseitenlösung mit $l = 2d$ ist.

Betrachten wir jetzt das Drei-Wege-System mit S auf $\overline{AS_A}$ (siehe Bild 4). Mit $\overline{SS_A} = x$ ist dann die gesamte Länge l des Weges angegeben mit

$$l = \overline{AS} + 2 \cdot \overline{CS},$$

$$l = \left(\frac{1}{2}d\sqrt{3} - x\right) + 2\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}d^2}. \qquad (1)$$

Bild 4



Diese Länge wird minimiert, wenn man differenziert

$$\frac{dl}{dx} = -1 + 2x\left(x^2 + \frac{1}{4}d^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 0,$$

$$x = \frac{1}{6}\sqrt{3} \cdot d.$$

Folglich ist $\alpha = 120°$ und wegen der Symmetrie $\beta = \gamma = 120°$.

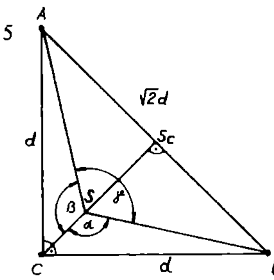
Der Wert von x, in (1) eingesetzt, ergibt das Minimum von

$$l = \sqrt{3} \cdot d = 1{,}73\ldots d.$$

Dieses Ergebnis beweist nicht, daß dies wirklich der absolute Mindestweg ist, aber es zeigt, daß dies wohl der Fall sein kann. Dieser Mindestweg ist sicherlich kürzer als irgendein anderer mit S an einem anderen Punkt der Winkelhalbierenden des Dreiecks. Weitere Analysen sind notwendig, um zu beweisen, daß es *das* wahre Minimum ist.

Bevor wir einen allgemeinen Beweis für das Drei-Städte-Problem bringen, wollen wir ein weiteres Beispiel untersuchen und die Städte an den Ecken eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks mit den Seiten der Länge d und $\sqrt{2}\,d = 1{,}41\ldots d$ wie in Bild 5 betrachten. Dann zeigen ähnliche Argumente, die für das gleichseitige Dreieck dargelegt wurden, daß die Lage von S entlang der Winkelhalbierenden $\overline{CS_c}$ sein könnte, wobei S_c *der Mittelpunkt von* $\overline{AB}$ ist. Wir erhalten wieder einen allgemeinen Ausdruck für die gesamte Länge l des Weges entlang $\overline{CS_c}$ als eine Funktion von $x = \overline{SS_c}$ und minimieren l mit Bezug auf x. Wir finden wiederum $\alpha = \beta = \gamma = 120°$.

Bild 5

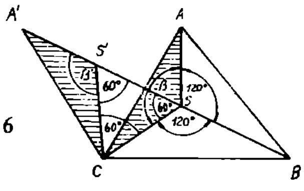


Aufgabe

▲1▲ Berechnen Sie in diesem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck die Mindestweglänge!

In diesem Stadium können wir vermuten, daß bei irgendeiner Anordnung von drei Städten der Mindestweg diese 120°-Eigenschaft hat. Zum Beweis betrachtet man ein beliebiges Dreieck ABC mit einem *Wege*-System der Länge l, das von drei Geraden, die sich in S treffen, gebildet wird (siehe Bild 6).

Bild 6



Dann dreht man das schraffierte Dreieck entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn um C und um 60°, so daß A jetzt auf A' und S auf S' abgebildet werden. Dann ist $\overline{S'C} = \overline{SC}$ und $\sphericalangle S'CS = 60°$, und $\Delta CSS'$ ist ein gleichseitiges Dreieck. Jetzt ist

$l = \overline{AS} + \overline{BS} + \overline{CS} = \overline{A'S'} + \overline{S'S} + \overline{BS}$, da nach der Definition $\overline{A'S'} = \overline{AS}$ und wegen des gleichseitigen Dreiecks CSS' auch $\overline{S'S} = \overline{CS}$ gilt. Nun sind A' und B feste Punkte. Da S beliebig verändert werden kann, wird $l = \overline{A'S'} + \overline{SS'} + \overline{SB}$ minimiert, wenn $\overline{A'B}$ eine gerade Linie ist (siehe Bild 7). In Bild 7 ist $\alpha = \sphericalangle CSB$, und $S'SB$ ist eine gerade Linie. Dann gilt

$$\alpha = 180° - 60° = 120°. \qquad (2)$$

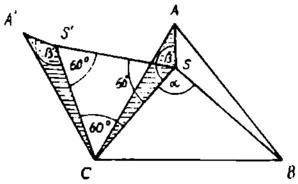


Bild 7

Unter Verwendung der Bezeichnung in Bild 7 ergibt sich demzufolge

$\beta = \beta'$ durch Definition,
$\beta = 180° - 60°$, da $A'B$ eine gerade Linie ist, und
$\beta = 120°$. (3)

Schließlich folgt aus (2) und (3) $\gamma = 360° - \alpha - \beta = 120°$. Auf diese Weise sind die drei 120°-Winkel eine allgemeine Eigenschaft des Mindestweges, der A, B und C verbindet, w.z.b.w.

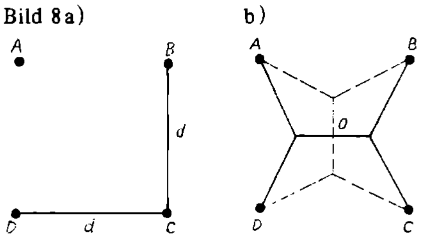
Dieser Beweis ist jedoch nur gültig, wenn die Winkel der Dreiecke kleiner oder gleich 120° sind und wenn S innerhalb oder auf dem Dreieck liegt. Bei Dreiecken mit einem Winkel von 120° beträgt die Mindest-Wege-Länge die Summe der zwei kürzesten Seiten des Dreiecks, d.h. derjenigen, die dem größten Winkel anliegen. Dieses Ergebnis kann auch für Dreiecke mit einem Winkel, der größer als 120° ist, bewiesen werden.

Zusammengefaßt: In einem Dreieck mit keinem Innenwinkel größer als 120° gibt es einen Mindestweg, der durch drei Linien gebildet wird, die sich im Punkt S innerhalb des Dreiecks unter einem Winkel von 120° treffen. Alle anderen Dreiecke haben einen Mindestweg, der durch die beiden dem größten Winkel des Dreiecks anliegenden Seiten gebildet wird.

3. Viel-Städte-Strukturen

Betrachten wir zuerst das Vier-Städte-Problem. Die vier Punkte sollen mit Seiten der Länge d quadratisch angeordnet sein (siehe Bild 8a). Auf Grund der Symmetrie könnte man annehmen, daß der Mindestweg eine x-Struktur mit der Länge $l = 2\sqrt{2} \cdot d$ hat. Wir wissen jedoch, daß der Wegeschnittpunkt aus drei Wegen unter einem Winkel von 120° bestehen muß. Infolgedessen sind die einzig möglichen Lösungen die zwei in Bild 8b gezeigten. In beiden Fällen treffen sich die Linien, sowohl die durchgezogenen als auch die gestrichelten, unter Winkeln von 120°.

Bild 8a) b)



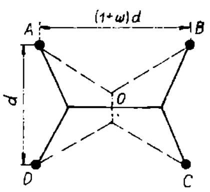
Aufgabe

▲2▲ Berechnen Sie die Länge dieser beiden Wege!

Das Ergebnis ist also kürzer als die X-Struktur der Länge $l = 2\sqrt{2} \cdot d = 2{,}82 \ldots d$. Es wäre nun interessant zu ermitteln, wie sich die Minimum-Wege-Strukturen verändern, wenn die Städte rechteckig mit $\overline{AD} = d$ und $\overline{AB} = (1 + \omega) \cdot d$ angeordnet sind.

Ist $0 < \omega < (\sqrt{3} - 1)$, haben die zwei Strukturen in Bild 9 verschiedene Länge. Die gestrichelte Länge nennt man ein relatives Minimum und die andere ein absolutes Minimum.

Bild 9



Aufgabe

▲3▲ Berechnen Sie die Länge beider Wege!

Erreicht ω den Wert $\sqrt{3} - 1$, so treffen sich die gestrichelten Drei-Wege-Schnittpunkte in 0, und es ist keine Minimum-Wege-Struktur mehr. Wir bilden den Weg mit der kürzeren Länge, indem wir $\overline{A0}$ und $\overline{D0}$ durch drei Wege, die sich unter den Winkeln von 120° treffen, ersetzen. Diese Struktur ist dann das absolute Minimum. Ist $\omega > \sqrt{3} - 1$, gibt es ebenfalls nur einen Mindestweg.

Aufgabe

▲4▲ Berechnen Sie die absolute Mindestlänge des Weges in einem Rhombus $ABCD$ mit $\alpha = 60°$!

4. Seifenfilme

Will man nun eine Lösung finden, die auf eine beliebige Anzahl von Punkten angewandt werden kann, so helfen uns die Eigenschaften von Seifenfilmen. Ein Seifenfilm hat die Eigenschaft, daß seine Energie proportional zu seiner Fläche ist. Es wird sich z.B. ein Seifenfilm, der durch einen Kreisring begrenzt ist, im Gleichgewicht nicht ausbauchen, sondern die kleinste Oberfläche bilden, nämlich die durch den Kreisring begrenzte Fläche.

Um diese Minimum-Flächen-Eigenschaft für die Lösung unserer Minimum-Wege-Strukturen zu benutzen, müssen wir die Minimum-Flächen-Eigenschaft in eine Minimum-Wege-Eigenschaft umwandeln. Dazu wollen wir uns erst dem einfachsten Problem zuwenden, dem Minimum-Weg, der zwei Punkte verbindet. Betrachtet man einen Seifenfilm, der sich zwischen zwei parallelen klaren Plexiglasplatten befindet und von zwei Nadeln begrenzt wird, die senkrecht zu diesen Platten stehen, dann ist auch der Film infolge der Symmetrie senkrecht zu diesen Platten. Er hat die Form eines Bandes mit konstanter Breite, die gleich dem Abstand zwischen den Platten ist. Seine Fläche ist proportional zu seiner Länge, und wenn er ins Gleichgewicht kommt, hat er seine kleinste Fläche und damit auch seine kleinste Länge. Auf diese Weise endet das Band mit der geradlinigen Struktur wie in Bild 10.

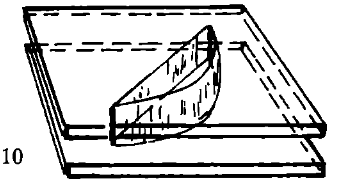


Bild 10

(Die gekrümmte Oberfläche zeigt einen Seifenfilm, der sich nicht im Gleichgewicht befindet.)

Die analoge Lösung kann mit der gleichen Begründung auf jede beliebige Anordnung von Nadeln und Punkten angewandt werden. Die Seifenfilm-Lösung zu dem Vier-Städte-Problem wird in Bild 11 gezeigt.

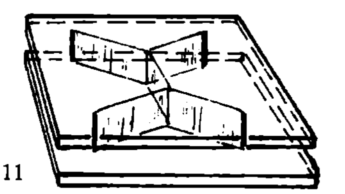


Bild 11

Wir haben gesehen, daß das Vier-Städte-Problem zwei Minimum-Strukturen haben kann. Um das absolute Minimum zu bestimmen, müssen wir die Länge eines jeden Weges berechnen und denjenigen mit der kürzesten Länge unter Verwendung der 120°-Eigenschaft bestimmen. Bei Problemen mit vielen Städten kann es viele Minimum-Strukturen geben. Diese findet man, indem man wieder Seifenfilme zwischen zwei Platten erzeugt. Man taucht die Platten unter verschiedenen Winkeln in ein Bad mit Seifenlösung, oder man stört das Gleichgewicht des Seifenfilms, indem man ihn in eine andere Gleichgewichtsstruktur bläst. Es gibt aber keine einfache analytische Methode, um alle Minimum-Strukturen zu bestimmen.

Ein interessantes Beispiel, wie man drei verschiedene Minimum-Strukturen erhält, zeigt uns die Aufgabe, den Minimum-Weg zu suchen, der sechs Städte verbindet, die in den Eckpunkten eines regelmäßigen

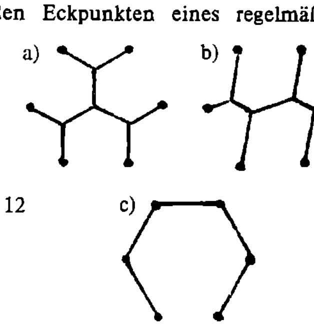


Bild 12

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Jonas Kubilius

Seit 1958 Rektor der Staatlichen V.-Kapsukas-Universität Vilnius (Litauische SSR), Prof. für Mathematik

▲2721▲ Für welche Primzahlen p ist die Zahl $p^4 - 5p^2 + 4$ durch 360 teilbar?

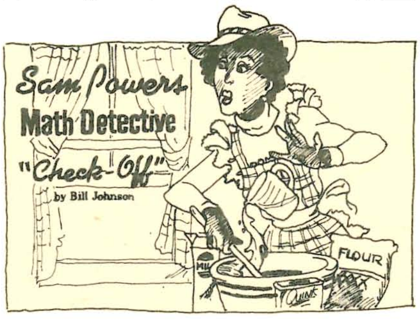
Sechsecks angeordnet sind. Die drei Strukturen, die unter Benutzung von Seifenfilmen leicht entstehen, sind in Bild 12 gezeigt.
Da die Seiten des Sechsecks die einheitliche Länge d haben, können die Längen der Minima unter Benutzung der 120°-Eigenschaft berechnet werden.

Aufgabe

▲5▲ Berechnen Sie die Länge der Mindestwege in den drei Wegestrukturen des Bildes 12!
Die Struktur der kleinsten Länge ist in diesem Fall Bild 12c. In anderen Strukturen kann es jedoch auch einer der inneren Wege sein.

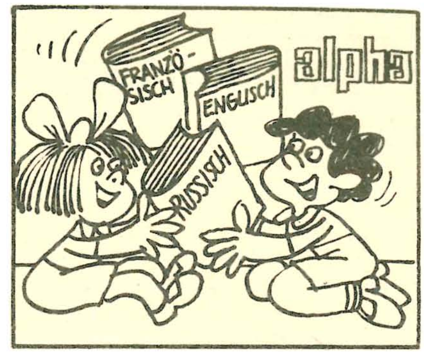
Bild 13

Zum Schluß wollen wir nun diese Methode an einem praktischen Beispiel zeigen. Die Städte London, Bristol, Manchester, Glasgow und Aberdeen sollen durch die kürzesten Wege verbunden werden. Es ist notwendig, eine Karte von Britannien auf eine der parallelen Plexiglasplatten zu zeichnen und bei diesen Städten Nadeln senkrecht zwischen den Platten anzubringen. Nachdem man die Platten in eine Seifenlösung getaucht hat, erhält man die Wege-Struktur, wie sie in Bild 13 gezeigt ist, mit einem Drei-Wege-Punkt östlich von Glasgow und einem südlich von Manchester. Bei dieser Aufgabe gibt es nur eine Minimum-Wege-Struktur. *Cyril Isenberg*



Die Detektivin Sam hatte ihren freien Tag und war gerade dabei, für ihre Freundin Geburtstagstörtchen zu backen. Es war ein ruhiger Tag, bis Sam den Ruf hörte: „Halt! Haltet ihn! Ein Dieb!“ Sam öffnete das Küchenfenster und sah gerade noch, wie ein Mann um die Häuserecke verschwand. Sie rannte zur Tür.
Ein Auto mit vier jungen Männern hielt draußen an. Die vier Teenager halfen einer alten Frau beim Aufstehen.
„Er entriß mir meine Handtasche“, schluchzte die Frau. „Als ich um Hilfe rief, schlug er mich nieder und rannte weg.“
„Wir sahen den Kerl um die Ecke...“, sagte einer der jungen Männer. „Das mußte er sein“, fügte ein anderer hinzu. „Er rannte in ein Haus auf dieser Seite der Straße – aber in welches Haus?“
Die vier begannen alle gleichzeitig zu reden. Dann unterbrach sie Sam. „Moment mal! Laßt uns um die Ecke gehen und Haus für Haus ansehen!“
Es gab sechs Häuser auf dieser Seite des Blocks. Alle sechs hatten ungerade Hausnummern von 21 bis 31.
„Es war kein Haus am Ende der Reihe“, sagte der Fahrer. „Richtig“, fügte ein anderer junger Mann hinzu. Er zeigte auf Nr. 21. „Aber es hatte eine rote Tür wie jenes Haus.“ „Es stand ein Baum davor“, sagte ein anderer. „Und oben war ein Fenster offen“, sagte der vierte.
Jetzt war ein Streifenwagen eingetroffen. Sam und die Polizisten sahen die Häuserreihe entlang. Die Häuser Nr. 21, 25 und 29 hatten rote Haustüren. Vor Nr. 27, 29 und 31 standen Bäume. In Nr. 23, 27 und 29 standen oben Fenster offen.
„Es ist zu verwirrend“, sagte einer der Polizisten. „Wir müssen jedes Haus durchsuchen.“ „Vielleicht nicht“, sagte Sam. Sie holte ein Notizbuch hervor und entwarf schnell eine Tabelle. „Wir setzen ein Zeichen unter jedes Haus für jedes zutreffende Merkmal“, sagte Sam. „Wenn wir Glück haben, finden wir ein Haus mit allen vier Merkmalen.“
Verwende Sams System, und suche das Haus, in dem sich der Dieb versteckt hält!

Haus Nr.	21	23	25	27	29	31
Nicht am Ende						
Rote Tür						
Baum davor						
Offenes Fenster						



▲1▲ An uncle came to visit his nieces. Before leaving, he gave them a certain number of dollars, suggesting that the eldest get half the amount, the middle get a fourth, and the youngest get a fifth. The children tried to divide the money, but they didn't succeed because of the fractions. When their dad lent them a dollar, they carried out the division according to the fractions suggested by their uncle, and they even paid back one dollar to their dad. What "certain number of dollars" would fit these requirements?

▲2▲ Un photographe demande 3 Fr. pour le développement d'un film noir/blanc, puis 0,80 Fr. pour le tirage de chaque photographie de format 9/13.
Un deuxième photographe développe gratuitement le film, mais le tirage de chaque photographie de même format coûte 0,90 Fr.
Mathieu désire faire développer un film de 20 poses et Amélie un film de 36 poses. Où irais-tu à leur place? Combient vont-ils payer?

▲3▲ Решите пять „географических“ ребусов (см. рисунок). В каждом ребусе одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным – разные.

Pseudozufallszahlen

Teil 2

Bei Glücksspielen in elektronischen Rechenanlagen benutzt man Pseudozufallszahlen: eine für den Benutzer scheinbar zufällig erzeugte (möglichst gleichmäßig verteilte) Zahlenfolge, die in der Rechenanlage jedoch nach einer vorgegebenen Vorschrift gebildet wird. Wie im ersten Teil (Heft 5/86) dargelegt wurde, können Pseudozufallszahlen beispielsweise als Elemente der Weyl-Folge $x_k = \{k\theta\}$ berechnet werden. Für irrationale Zahlen $\theta > 0$ ist die Weyl-Folge gleichmäßig verteilt, jedoch können irrationale Zahlen in Rechnern nicht dargestellt werden (vgl. *alpha* 2, 1985). Jede irrationale Zahl θ kann aber durch rationale Zahlen $\frac{p}{q}$ mit großem q approximiert werden, und die zugehörige Weyl-Folge besitzt dann „recht gute" Eigenschaften (siehe Heft 5/86). Ein Beispiel verdeutlicht noch einmal die Bildung dieser Folge. Es sei $\theta = \frac{5}{13}$, dann lauten die ersten Glieder der Weyl-Folge

$$\frac{5}{13}, \frac{10}{13}, \frac{2}{13}, \frac{7}{13}, \frac{12}{13}, \frac{4}{13}, \frac{9}{13}, \frac{1}{13}, \frac{6}{13}, \frac{11}{13}, \frac{3}{13}, \frac{8}{13}, 0, \ldots$$

Nach der Vorschrift $z_k = [6x_k + 1]$ lassen sich aus Pseudozufallszahlen x_k „Würfelzahlen" z_k berechnen. In unserem Beispiel sind dies

3, 5, 1, 4, 6, 2, 5, 1, 3, 6, 2, 4, 1, ...

Wie bereits bekannt, müssen sich diese Zahlen in diesem Beispiel nach $q = 13$ „Würfen" wiederholen.

In numerischen Experimenten hat sich die Weyl-Folge nicht immer als effektiv erwiesen. Besser ist häufig die

5. Holton-Folge

Es sei $B \in N, B \geqq 2$. Jede natürliche Zahl k läßt sich in eindeutiger Weise in der Form $k = k_0 + k_1B + k_2B^2 + \ldots + k_rB^r$ darstellen, wobei $0 \leqq k_i < B$ für $i = 1, \ldots, r$ und $k_r > 0$ gilt, dabei hängt r von der jeweiligen Zahl k ab. B wird als Basis eines Zahlensystems aufgefaßt. Die *Positionsschreibweise* für k im Zahlensystem der Basis B ist $k = k_rk_{r-1} \ldots k_1k_0|_B$.

Die fortlaufenden Zahlen $k = 1, 2, \ldots$ in der Darstellung mit der Basis B sind

0;	1;	2;	...; $B-1$;
10;	11;	12;	...; $1(B-1)$;
20;	21;	22;	...; $2(B-1)$;
.	.	.	. .
.	.	.	. .
$(B-1)0$;	$(B-1)1$;	$(B-1)2$;	...; $(B-1)(B-1)$;
100;	101;	102;	...; $10(B-1)$;
.	.	.	
.			

Wir kommen nun zur *Definition der Holton-Folge*. Dazu stellen wir den Index k von x_k im B-System dar:

$k = k_r \ldots k_1k_0|_B$. Nun setze man $x_0 = 0$ und

$x_k = 0, k_0k_1 \ldots k_r|_B$, d. h.

$x_k = k_0B^{-1} + k_1B^{-2} + \ldots + k_rB^{-r-1}$ für $k \geqq 1$.

Für die Holton-Folge soll eine *Rekursionsformel* hergeleitet werden. Man setze $k_{r+1} = k_{r+2} = \ldots = 0$. Dann ist

$k = \ldots k_{r+1}k_r \ldots k_1k_0|_B$ und

$x_k = 0, k_0k_1 \ldots k_rk_{r+1} \ldots|_B$.

Es bezeichne $l = l(k)$ den niedrigsten Index, für den $k_l < B - 1$ ist (wenn $l > 0$ ist,

so muß $k_0 = \ldots = k_{l-1} = B - 1$ sein). Also ist

$k = \ldots k_l(B-1) \ldots (B-1)|_B$ und folglich

$k + 1 = \ldots (k_l + 1)0 \ldots 0|_B$ sowie

$x_k = 0, (B-1) \ldots (B-1)\, k_l \ldots|_B$,

$x_{k+1} = 0, 0 \ldots 0\, (k_l + 1)|_B$. Mithin ist

$$\begin{aligned} x_{k+1} = {} & 0,(B-1) \ldots (B-1)\; k_l \ldots|_B \\ & + 0,0 \quad \ldots 0 \quad 1 \ldots|_B \\ & + 0,0 \quad \ldots 1 \quad 0 \ldots|_B \\ & - 1,0 \quad \ldots 0 \quad 0 \ldots|_B \end{aligned}$$ d. h.

$x_{k+1} = x_k + B^{-l-1} + B^{-l} - 1$ für $k = 0, 1, \ldots$

Sei z. B. $B = 5$.

Entsprechend der Definition ist

Tabelle 1

$k\|_{10}$	$k\|_5$	$x_k\|_5$	$x_k\|_{10}$
0	0	0	0
1	1	0,1	0,2
2	2	0,2	0,4
3	3	0,3	0,6
4	4	0,4	0,8
5	10	0,01	0,04
6	11	0,11	0,24
7	12	0,21	0,44
8	13	0,31	0,64
9	14	0,41	0,84
10	20	0,02	0,08

Die Rekursionsformel liefert im 5-er System

$x_1 = 0 \quad + 5^{-1} + 5^{-0} - 1 = 0{,}1|_5$

$x_2 = 0{,}1 \quad + 5^{-1} + 5^{-0} - 1 = 0{,}2|_5$

$x_3 = 0{,}2 \quad + 5^{-1} + 5^{-0} - 1 = 0{,}3|_5$

$x_4 = 0{,}3 \quad + 5^{-1} + 5^{-0} - 1 = 0{,}4|_5$

$x_5 = 0{,}4 \quad + 5^{-2} + 5^{-1} - 1 = 5^{-2} = 0{,}01|_5$

$x_6 = 0{,}01 + 5^{-1} + 5^{-0} - 1 = 0{,}01 + 0{,}1 = 0{,}11|_5$

. . .

. . .

. . .

Wir geben hier (aus Platzgründen ohne Beweis) an:

Satz 8: Die Holten-Folge ist gleichmäßig verteilt.

6. Die Lehmer-Folge

Es sei $a \in N, a \geqq 2$ und θ eine positive reelle Zahl. Die Zahlen

$x_k = \{a^k\theta\}, k = 0, 1, \ldots$ heißen Elemente der *Lehmer-Folge*. Es werde zuerst wieder der Fall θ rational ($\theta \in R$) betrachtet, d. h.

$\theta = \frac{p}{q}$ mit teilerfremden $p, q \in N$. Es soll auch a und q als teilerfremd vorausgesetzt werden. Wir bilden die Zahlen p, ap, a^2p, ..., a^kp, ... und dazu die Reste dieser Zahlen bei der Division durch q:

$r_0, r_1, r_2, \ldots, r_k, \ldots$ Es sei also

$a^kp = m_k \cdot q + r_k$ mit $0 \leqq r_k < q$, m_k ganz.

Ist z. B. $a = 3$, $p = 5$, $q = 7$, so erhält man die Restefolge 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, ...

Satz 9: Es gibt eine kleinste natürliche Zahl $w < q$, die (kleinste) Periode, so daß $r_{k+w} = r_k$ für alle $k \in N$ ist. Die Periode w ist gekennzeichnet als kleinste natürliche Zahl ($\geqq 1$), so daß $a^w - 1$ durch q teilbar ist. w ist ein Teiler der Euler-Funktion

$$\varphi(q) = q\left(1 - \frac{1}{q_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{q_r}\right),$$

wobei $q = q_1^{n_1} \ldots q_r^{n_r}$ die Primzahlzerlegung von q darstellt.

Beweis: Wegen $r_k \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ für alle $k \in N$ gibt es wenigstens zwei Indizes k und l mit $r_k = r_l$. Es sei j der kleinste Index, zu dem ein $i < j$ mit $r_i = r_j$ existiert. Mithin sind $r_1, \ldots, r_{j-1}$ paarweise verschieden, und es ist $j - 1 \leqq q$. Aus den Darstellungen

$a^ip = m_iq + r_i, \qquad a^jp = m_jq + r_j,$

$a^{i+1}p = am_iq + ar_i, \qquad a^{j+1}p = am_jq + ar_j,$

$a^{i+1}p = m_{i+1}q + r_{i+1}, \quad a^{j+1}p = m_{j+1}q + r_{j+1}$

folgt $r_{i+1} =$ (Rest von $ar_i = ar_j$ bei Division durch q) $= r_{j+1}$, analog $r_{i+2} = r_{j+2}$ usw. Die Annahme $i > 0$ führt zu

$a^{i-1}p = m_{i-1}q + r_{i-1}, \quad a^{j-1}p = m_{j-1}q + r_{j-1},$

$a^ip = am_{i-1}q + ar_{i-1}, \quad a^jp = am_{j-1}q + ar_{j-1},$

$a^ip = m_iq + r_i, \qquad a^jp = m_jq + r_j.$

Dann ist aber $a^ip - a^jp$,

daher $a(r_{j-1} - r_{i-1})$ und folglich auch

$(r_{j-1} - r_{i-1})$ durch q teilbar.

Wegen $r_{j-1} - r_{i-1} \in \{-(q-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, q-1\}$ ist $r_{j-1} = r_{i-1}$, was der Definition von j widerspricht.

Also ist $i = 0$.

Sei $w = j$. Aus $r_0 = p - m_0q, r_w = a^wp - m_wq$ und $r_0 = r_w$ ergibt sich

$(a^w - 1)p = (m_w - m_0)q$.

Daher ist $a^w - 1$ durch q teilbar.

Wenn v irgendeine natürliche Zahl und $a^v - 1$ durch q teilbar ist, d. h. es ein $g \in N$ gibt, so daß $a^v - 1 = gq$ ist, ergibt sich zunächst

$a^v p = (1 + gq)p = m_v q + r_v$, daraus
$r_v = (1 + gq)p - m_v q = p - (m_v - gp)q$ und mit
$r_0 = p - m_0 q$, daß $r_v - r_0$ teilbar durch q ist.
Es folgt $r_v = r_0$ und wie vorher $r_{v+1} = r_1, \ldots$.
Mithin ist w, die (kleinste) Periode, die kleinste natürliche Zahl, so daß $a^w - 1$ durch q teilbar ist.
Aus der Zahlentheorie ist bekannt, daß $a^{\varphi(q)} - 1$ durch q teilbar ist, falls a und q teilerfremd sind (*Satz von Euler*).
Daher finden wir
$a^{\varphi(q)}p = m_{\varphi(q)}q + r_{\varphi(q)}$, $p = m_0 q + r_0$ und
$(a^{\varphi(q)} - 1)p = (m_{\varphi(q)} - m_0)q + (r_{\varphi(q)} - r_0)$.
Folglich ist $r_{\varphi(q)} - r_0$ durch q teilbar
und daher $r_0 = r_{\varphi(q)}$.
Da aber nur $r_0 = r_w = r_{2w} = \ldots$ gilt,
muß $\varphi(q)$ ein Vielfaches von w sein.

Folgerung: Ist q eine Primzahl, so ist $\varphi(q) = q - 1$ und w ein Teiler von $q - 1$.

Für die Lehmer-Folge $\{a^k\theta\}$, $k = 0, 1, \ldots$, ergeben sich im oben betrachteten Fall
$\theta = \frac{p}{q}$ die Elemente

$$\frac{r_0}{q}, \frac{r_1}{q}, \frac{r_2}{q}, \ldots, \frac{r_{w-1}}{q}, \frac{r_0}{q}, \frac{r_1}{q}, \ldots$$

In dem Beispiel mit $a = 3$, $p = 5$, $q = 7$ sind dies

$$\frac{5}{7}, \frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \ldots$$

und es ist $w = 6$.

Satz 10: Wenn θ irrational ist, so sind alle Elemente x_k der Lehmer-Folge verschieden und ungleich 0.

Beweis: Angenommen, es wäre $x_k = x_l$ und $k \neq l$.
Dann ist $x_k = a^k\theta - [a^k\theta]$ sowie $x_l = a^l\theta - [a^l\theta]$
und folglich $\theta = \dfrac{[a^k\theta] - [a^l\theta]}{a^k - a^l}$,
d. h. $\theta \in R$. Widerspruch.

Rekursionsformel:
Für beliebige reelle θ ist $x_0 = \{\theta\}$,
$x_{k+1} = \{a x_k\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Beweis: Es ist $x_0 = \{a^0\theta\} = \{\theta\}$.
Die Rekursionsbeziehung folgt aus der Darstellung
$a^k\theta = [a^k\theta] + \{a^k\theta\} = m_k + x_k$ und
$a^{k+1}\theta = am_k + a\{a^k\theta\} = am_k + ax_k$
$= am_k + [ax_k] + \{ax_k\}$
$a^{k+1}\theta = m_{k+1} + \{a^{k+1}\theta\} = m_{k+1} + x_{k+1}$.

Satz 11: Es gilt auch die Umkehrung:
Aus $x_0 = \{\theta\}$ und $x_{k+1} = \{ax_k\}$ folgt $x_k = \{a^k\theta\}$ für $k = 0, 1, \ldots$

Den Beweis kann man durch vollständige Induktion führen. Die Aussage des Satzes sei für $k = 0, \ldots, l$ bereits richtig, speziell gelte $x_l = \{a^l\theta\}$. Dann ist
$ax_l = a(a^l\theta - [a^l\theta]) = a^{l+1}\theta - a[a^l\theta]$.
Wegen $a[a^l\theta] \in N$ ist $\{ax_l\} = \{a^{l+1}\theta\}$,
d. h. $x_{l+1} = \{a^{l+1}\theta\}$.
Bei der Bildung der Lehmer-Folge kann man sich immer auf $\theta \in [0, 1[$ beschränken. Dies folgt aus dem

Satz 12: Ist $g \in N$ und $\theta' = \theta + g$, so gilt $\{a^k\theta\} = \{a^k\theta'\}$ für alle $k = 0, 1, 2, \ldots$

Der Beweis ist elementar. Die folgende Aussage zu beweisen bereitet etwas mehr Mühe, aus Platzgründen geben wir nur das Resultat an:

Satz 13: Sei $a \in N$, $a \geqq 2$. Es gibt irrationale Zahlen θ, so daß die Lehmer-Folge $\{a^k\theta\}$ auf $[0, 1]$ dicht ist, d. h. zu jedem Teilintervall $[c, d] \subseteqq [0, 1]$ gibt es wenigstens ein Element $x_l = \{a^l\theta\} \in [c, d]$.

Die Rekursionsvorschrift zur Bildung der Lehmer-Folge wird z. B. im Tischrechner K 1002 und K 1003 benutzt (siehe *alpha* 2, 1985). Nach dem Einsetzen des Funktionsblockes STATISTIK in den Tischrechner ist in ein bestimmtes Datenregister die Zahl θ einzugeben. Empfohlen wird, θ als 10stelligen Dezimalbruch zu wählen, bei dem alle Ziffern von 0 bis 9 in möglichst willkürlicher Reihenfolge enthalten sein sollen. Im Rechner wird immer $a = 29$ gesetzt. Die Berechnung der einzelnen Pseudozufallszahlen erfolgt jeweils nach dem Betätigen der Taste ZUF, wobei für die Berechnung die Rekursionsformel
$x_{k+1} = \{29x_k\}$ zugrunde liegt.
Beispiel: Eingabe $\theta = 9{,}038157264$
$x_0 = 0{,}038157264$
Ausgabe auf dem Thermodruckstreifen des K 1003 für $x_1, x_2, \ldots$

Tabelle 2

k	x_k	k	x_k
1	0,1065607	11	0,4634919
2	0,0902590	12	0,4412638
3	0,6175117	13	0,7966509
4	0,9078392	14	0,1028760
5	0,3273363	15	0,9834035
6	0,4927537	16	0,5187025
7	0,2898586	17	0,0423738
8	0,4058987	18	0,2288395
9	0,7710624	19	0,6363456
10	0,3608101	20	0,4540229

7. Aufgaben

a) Zeige, daß im B-System gilt:
(i) $a_r \ldots a_1 \; a_0 < a_{r+1}0\ldots0$ mit $a_{r+1} = 1$
(ii) $(B-1)\ldots(B-1)(B-1) = 1\,0\ldots0 - 1$
(iii) $0,c_1c_2\ldots c_rc_{r+1}\ldots \leqq 0,c_1c_2\ldots c_{r-1}c_r + 0,0\;0\ldots0\;1$
Wann steht das Gleichheitszeichen?
b) Es seien $B = 2$ die Basis des Dualsystems, $k = k_r\ldots k_1k_0|_2$ die Dualdarstellung der natürlichen Zahl k und $\alpha = 0{,}01|_2$ sowie $\beta = 0{,}11|_2$ die Grenzen eines Intervalls $[\alpha, \beta]$ (als Dualzahlen geschrieben). Berechne die ersten elf Elemente der Holton-Folge und ermittle die Anzahl A_{11} derjenigen x_k dieser elf Elemente $x_0, \ldots, x_{10}$, die in das Intervall $[\alpha, \beta]$ fallen!
c) Berechne die ersten zehn Elemente der Holton-Folge für $B = 7$.
d) Es sei B eine beliebige Basis eines Zahlensystems, und es seien p, q natürliche Zahlen mit $q \geqq 2$. Zeige, daß $\frac{p}{q}$ stets ein endlicher oder periodischer Bruch im B-System ist.
e) Berechne die ersten fünf Elemente der Lehmer-Folge für
(i) $a = 3$; $\theta = 0{,}5$
(ii) $a = 3$; $\theta = 0{,}2$
(iii) $a = 5$; $\theta = 0{,}2$
f) Für $a = 5$ und $\theta = \frac{2}{9}$ ist die Lehmer-Folge zu bilden (bis zum Eintritt der Periodizität).
Berechne parallel dazu $A_N\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$.
g) Wann gilt für $a \in N$ die Ungleichung $[a^k\theta] \leqq [a^l\theta]$?
h) Es sei a rational und θ irrational, $a \neq 1$, $a \neq 0$.
Beweise, daß die Folgenelemente $x_k = \{a^k\theta\}$ für $k = 0, 1, \ldots$ paarweise verschieden und stets ungleich 0 sind!
i) Beweise Satz 12!
j) Die meisten für praktische Zwecke verwendeten Algorithmen zur Berechnung von Pseudozufallszahlen benutzen eine *Rekursionsformel (erster Ordnung)*
$x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots$
mit gegebenem x_0. Wie ordnen sich hier die Weyl-Folge, die Lehmer-Folge und die Holton-Folge ein?
k) Die folgende Vorschrift zur Erzeugung von Pseudozufallszahlen geht auf J. v. Neumann (1903 bis 1957) zurück: Gegeben sei der $2k$-stellige Dezimalbruch $x_n = 0, a_1\ldots a_{2k} \in [0, 1[$. Um x_{n+1} zu erhalten, bilde man den $4k$-stelligen Dezimalbruch $x_n^2 = 0, b_1\ldots b_{4k}$ und benutze die mittleren $2k$ Ziffern dieses Quadrates zur Darstellung von x_{n+1} in der Form
$x_{n+1} = 0, b_{k+1}\ldots b_{3k}$. x_0 wird beliebig angenommen, $x_1, x_2, \ldots$ daraus, wie beschrieben, erzeugt.
Zeige, daß die Rekursionsformeln
$x_{n+1} = 10^{-2k}[10^{2k}\{10^k x_n^2\}]$ bzw.
$x_{n+1} = \{10^{-2k}[10^{3k}x_n^2]\}$
bestehen! (Die v. Neumann-Folge ist nicht gleichmäßig verteilt. Es zeigt sich, daß zu viele „kleine" Zahlen erzeugt werden. Diese Folge kann auch ausarten, d. h. es kann $x_n = 0$ auftreten, in diesem Fall sind auch alle $x_{n+m} = 0$ für $m = 0, 1, \ldots$)

Gleichverteilte Zufallszahlen oder gleichmäßig verteilte Pseudozufallszahlen (zwischen ihnen besteht ein prinzipieller Unterschied) verwendet man bei speziellen numerischen Verfahren zur Lösung verschiedenartiger mathematischer Probleme. Diese Verfahren werden *Monte-Carlo-Methoden* genannt, sie sind leicht zu programmieren und für die Anwendung auf Computern sehr geeignet. (Das Roulett in den Spielkasinos von Monte Carlo in Monaco kann als Zufallszahlengenerator aufgefaßt werden.)

L. Bittner/W. Schmidt

ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Mini-BASIC für alpha-Leser, Teil 2

Exquisit-Programm

Betrachten wir nochmals den ausgedruckten Bildschirmtext unseres ersten Programms (siehe Bild 4):

```
? 3.Ø
? 5.Ø
141.372
94.2478
OK
<■
```

Bild 4

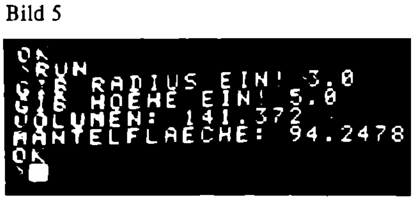
Für den Uneingeweihten sind die Zahlen auf dem Bildschirm wenig informativ. Der Bildschirmtext gibt weder Auskunft darüber, was eigentlich berechnet wurde, noch welche Bedeutung die einzelnen Zahlen haben. Deshalb ist es günstig, wenn auf dem Bildschirm Erläuterungen erscheinen. Diese müssen natürlich auch programmiert werden. Solche Texte sind in einem BASIC-Programm stets in Anführungszeichen zu setzen und von der Variablen durch ein Semikolon zu trennen. Hier nun unser erstes Programm mit erläuternden Texten.

Programm 2

```
1Ø INPUT „GIB RADIUS EIN!“; R
2Ø INPUT „GIB HOEHE EIN!“; H
3Ø LET V = PI*R*R*H
4Ø LET M = 2*PI*R*H
5Ø PRINT „VOLUMEN:“; V
6Ø PRINT „MANTELFLAECHE:“; M
7Ø END
```

Auf dem Bildschirm erscheint dann folgender Text (Bild 5):

Bild 5



▲10▲ Entwickle ein BASIC-Programm zur Berechnung des Volumens und des Oberflächeninhalts gerader Hohlzylinder (gegeben sind die Durchmesser d_1, d_2 mit $d_1 < d_2$)!

▲11▲ Versuche folgendes Programm zu verstehen!
Was kann man damit berechnen lassen?

```
1Ø INPUT „GIB EINE POSITIVE
   ZAHL EIN!“; Z
2Ø LET X = PI*Z
3Ø LET Y = PI*Z*Z/4
4Ø PRINT „ERGEBNISSE:“; X, Y
5Ø END
```

Wie man sieht, ist es möglich mit einer PRINT-Anweisung in Zeile 4Ø zwei Werte auszugeben. (Analog ermöglicht z. B. die Anweisung 8Ø INPUT A, B die Eingabe von zwei Zahlenwerten.)

Der Computer „läuft“

Wie wir bisher sahen, ist es gar nicht so schlimm, einem Computer in BASIC zu *sagen*, was er für uns tun soll. Man muß allerdings selbst den Lösungsweg kennen und ihn computergerecht aufbereiten. Bei den Aufgaben, die wir bisher mit dem Computer gelöst haben, lohnt sich das Programmieren natürlich nur dann, wenn man viele Aufgaben vom gleichen Typ mit unterschiedlichen Eingabewerten lösen muß. Der Vorteil besteht gegenüber einem (nichtprogrammierbaren) Taschenrechner darin, daß man lediglich die Eingabewerte neu eintippen muß. Den *Rest* erledigt der Computer. Betrachten wir eine andere Aufgabe:

▲12▲ Für die Funktion $y = x^2 - x - 0{,}75$ soll im Intervall $-2 \leqq x \leqq 2$ eine Wertetabelle mit der Schrittweite 0,25 aufgestellt werden. (Schrittweite 0,25 bedeutet, daß x-Werte beginnend mit -2 in Abständen von 0,25 zu nehmen sind.)
a) Gib zur Berechnung der y-Werte einen Rechenablaufplan für den Taschenrechner SR 1 an!
b) Fülle die ersten 5 Spalten der Tabelle aus!

x	-2	$-1{,}75$	$-1{,}5$	$-1{,}25$	…
y					

x	1,5	1,75	2
y			

Mit dem SR 1 müßte man 17mal den Rechenablaufplan durchtippen, um die gesamte Wertetabelle aufzustellen. Die Arbeit ist sehr eintönig, denn außer den x-Werten ändert sich am Rechenablauf nichts, und selbst diese ändern sich ganz regelmäßig.
Mit einem Computer lassen sich solche Aufgaben sehr bequem lösen. Man programmiert dazu in BASIC eine sogenannte *Programmschleife*.

Programm 3

```
1Ø FOR X = -2 TO 2 STEP .25
2Ø       LET Y = X*X - X - Ø.75
3Ø       PRINT X, Y
4Ø NEXT X
5Ø END
```

Die neuen BASIC-Sprachelemente bedeuten:

1Ø Beginne mit $x = -2$ bis 2 in Schritten von 0,25!
Führe aus!

2Ø, 3Ø Schleifenanweisungen (Sie werden wegen der besseren Übersicht eingerückt geschrieben.)

4Ø Nimm das nächste x (solange bis der Endwert 2 erreicht ist)! Führe damit die Schleifenanweisungen aus!

Solche *FOR ... NEXT-Schleifen* werden auch *Laufanweisungen* genannt. Fügen wir im Programm 3 noch folgende Zeilen ein:

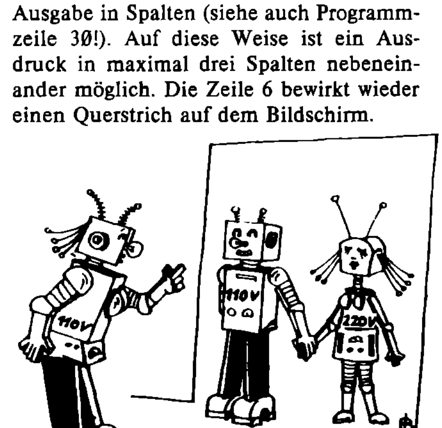
```
1 CLS
2 PRINT „WERTETABELLE FUER
  Y = X*X - X - Ø.75“
3 PRINT„===============“
4 PRINT
5 PRINT „X“, „Y“
6 PRINT„---------------“
```

so erhält man auf dem Bildschirm folgende Wertetabelle (Bild 6).

```
WERTETABELLE FUER
Y = XX - X - Ø.75
=============
X            Y
-------------
-2           5.25
-1.75        4.Ø625
-1.5         3
-1.25        2.Ø625
-1           1.25
-.75         .5625
-.5          Ø
-.25         -.4375
 Ø           -.75
 .25         -.9375
 .5          -1
 .75         -.9375
 1           -.75
 1.25        -.4375
 1.5         Ø
 1.75        .5625
 2           1.25
```

Bild 6

Mit der Anweisung CLS in Zeile 1 (CLS – clean screen [engl.] – Bildschirm löschen) wird ein noch *unbeschriebener* Bildschirm erzeugt. Dem Bildschirmtext ist zu entnehmen, welche Wirkungen die Programmzeilen 2 bis 6 haben. Mit den Anweisungen in den Zeilen 2 und 3 wird die unterstrichene Überschrift ausgedruckt. Die Programmzeile 4 bewirkt auf dem Bildschirm eine Leerzeile. Schließlich sorgt die Anweisung in Zeile 5 dafür, daß die Buchstaben X und Y in zwei Spalten nebeneinander stehend erscheinen. Das Komma als Trennzeichen in einer PRINT-Anweisung bewirkt die Ausgabe in Spalten (siehe auch Programmzeile 3Ø!). Auf diese Weise ist ein Ausdruck in maximal drei Spalten nebeneinander möglich. Die Zeile 6 bewirkt wieder einen Querstrich auf dem Bildschirm.



„Mein Sohn, sie paßt nicht zu dir!“

Der ausgedruckten Wertetabelle ist zu entnehmen, daß die Funktion
$y = x^2 - x - 0{,}75$ bei $x_1 = -0{,}5$
und $x_2 = 1{,}5$ Nullstellen hat.

▲13▲ Für die Funktion $y = \frac{2}{3}x + 0{,}7$ soll im Intervall $-2 \leqq x \leqq 3$ (Schrittweite: 0,5) eine Wertetabelle aufgestellt werden. Erstelle ein entsprechendes BASIC-Programm!

▲14▲ Entwickle ein BASIC-Programm zum Ausdrucken einer Wertetabelle für x-Werte (0; 0,1; 0,2; 0,3 ... 1,8; 1,9; 2) sowie die zugehörigen y-Werte für
$y = x^2 - \sqrt{x}$ und $y = x - 2\sqrt{x}$
(drei Spalten).

▲15▲ Arbeite folgendes Programm ab! Was hast du jeweils berechnet?

```
1Ø LET S = Ø
2Ø LET P = 1
3Ø FOR N = 1 TO 5
4Ø      LET S = S + N
5Ø      LET P = P*N
6Ø NEXT N
7Ø PRINT S, P
8Ø END
```

(In der Laufanweisung kann in Zeile 3Ø „STEP...“ weggelassen werden. Der Computer nimmt dann als Schrittweite automatisch 1.) Bei dem Programm der Aufgabe 15 tritt die Besonderheit der *Wertzuweisung* deutlich hervor.
Mit der Anweisung 1Ø LET S = Ø wird der Variablen S der Wert Ø zugewiesen, d. h., auf dem Speicherplatz mit dem *Namen* S wird Ø gespeichert.
Zeile 2Ø LET P = 1 führt dazu, daß der Computer den Zahlenwert 1 auf den Speicherplatz mit dem Namen P abspeichert.
Zeile 4Ø LET S = S + N bewirkt im ersten Durchlauf, daß der Computer zum Inhalt des Speicherplatzes S (in unserem Falle Ø) den Inhalt des Speicherplatzes N (in unserem Falle 1) addiert und das erhaltene Ergebnis (0 + 1 = 1) auf den Speicherplatz mit dem Namen S abgespeichert wird. Damit wird der alte Wert des Speicherplatzes S gelöscht.
Im zweiten Durchgang bewirkt die Zeile 4Ø, daß zum Inhalt des Speicherplatzes S (S = 1) der neue Inhalt des Speicherplatzes N (nämlich 2) addiert und das Ergebnis (1 + 2 = 3) auf den Speicherplatz mit dem Namen S abgespeichert wird.
Merke: In einer LET-Anweisung darf links vom Zeichen „=“ nur *eine* Variable stehen. Dieser wird der Wert des rechts vom Zeichen „=“ stehenden Ausdrucks zugewiesen.
Beispiele:
LET N = 1
Es soll der Zahlenwert 1 auf den Speicherplatz N abgespeichert werden.
LET P = A/B
Der Inhalt des Speicherplatzes A ist durch den Inhalt des Speicherplatzes B zu dividieren. Das erhaltene Resultat ist auf den Speicherplatz mit dem Namen P abzuspeichern.
LET N = N + 1
Zum Inhalt des Speicherplatzes N ist 1 zu addieren. Das erhaltene Ergebnis ist wieder auf den Speicherplatz mit dem Namen N abzuspeichern. Der Inhalt des Speicherplatzes N wird mit der Anweisung um 1 erhöht.
LET P = P*N
Der Inhalt des Speicherplatzes P ist mit dem Inhalt des Speicherplatzes N zu multiplizieren. Das erhaltene Resultat ist auf den Speicherplatz mit dem Namen P abzuspeichern. Der alte Wert des Speicherplatzes P wird damit gelöscht.
Das Symbol „=“ muß also in einer LET-Anweisung als *Zuweisungssymbol* verstanden werden.
Um im Umgang mit der LET-Anweisung sicher zu werden, wollen wir folgende Aufgaben lösen.

▲16▲ Betrachte folgende Programmteile! Gib jeweils an, mit welchen Werten die Variablen A, B, C nach Zeile 4Ø belegt sind, wenn für C der Wert 3 eingegeben wird!

a)
```
1Ø INPUT C
2Ø LET A = C/2
3Ø LET B = A ∧ 2
4Ø LET C = 4*A
```
b)
```
1Ø INPUT C
2Ø LET C = 2*C
3Ø LET A = 4
4Ø LET A = A + C
```
c)
```
1Ø INPUT C
2Ø LET C = C + 1
3Ø LET A = C
4Ø LET B = 2*C
```

▲17▲ Arbeite folgende BASIC-Programme mit den angegebenen Eingabedaten ab! Notiere jeweils den (bzw. die) Ausgabewert(e)!

a)
```
1Ø INPUT A              Eingabewert: A = 2
2Ø LET B = 5*A - 3/A
3Ø PRINT B
4Ø END                  Ausgabewert: B =
```
b)
```
1Ø INPUT A, B           Eingabewert A = 3
2Ø LET C = INT (A/B)                B = 2
3Ø LET A = A + 1        Ausgabewert: A =
4Ø LET B = SQR(A)                   B =
5Ø PRINT A, B, C                    C =
6Ø END
```

L. Flade/M. Pruzina

Lösungen

▲10▲ Eine Lösungsmöglichkeit:
```
1Ø INPUT „GIB AUSSEN-
   DURCHMESSER EIN!“; A
2Ø INPUT „GIB INNEN-
   DURCHMESSER EIN!“; D
3Ø INPUT „GIB DIE HOEHE EIN!“; H
4Ø LET V = PI*H*(A*A - D*D)/4
5Ø LET O = PI*H*(A + D)
   + PI*(A*A - D*D)/2
6Ø PRINT „VOLUMEN:“; V
7Ø PRINT „OBERFLAECHE:“; O
8Ø END
```

▲11▲ Wenn man die Eingabe als Zahlenwert des Durchmessers eines Kreises auffaßt, wird mit X der Umfang und mit Y der Flächeninhalt des zugehörigen Kreises berechnet.

▲12▲
a) x $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ x $\boxed{-}$,75 $\boxed{=}$
b) Vergleiche mit der Wertetabelle Bild 6.

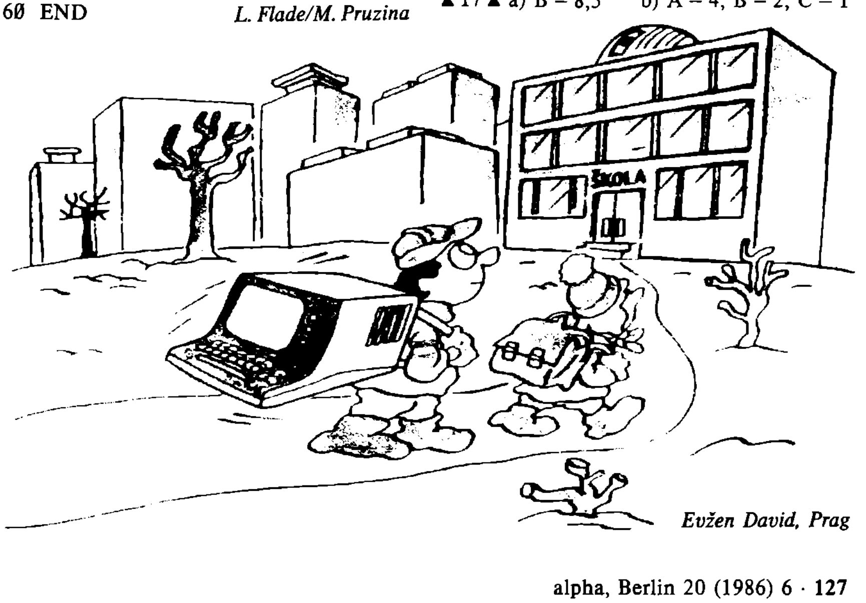
▲13▲ Programm (ohne erläuternden Text):
```
1Ø PRINT „X“, „Y“
2Ø FOR X = -2 TO 3 STEP .5
3Ø      LET Y = 2/3*X + Ø.7
4Ø      PRINT X, Y
5Ø NEXT X
6Ø END
```

▲14▲ Beispiel:
```
1Ø CLS
2Ø PRINT „WERTETABELLE“
3Ø PRINT „―――――――――――――――“
4Ø PRINT „X“, „X*X - SQR(X)“,
   „X - 2*SQR(X)“
5Ø PRINT „- - - - - - - - - - - - - -“
6Ø FOR X = Ø TO 2 STEP .1
7Ø      PRINT X, X*X - SQR(X),
        X - 2*SQR(X)
8Ø NEXT X
9Ø END
```

▲15▲ S = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15
P = 1 · 1 · 2 · 3 · 4 · 5 = 120

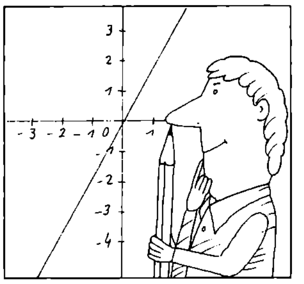
▲16▲	A	B	C
a)	1,5	2,25	6
b)	10	–	6
c)	4	8	4

▲17▲ a) B = 8,5   b) A = 4, B = 2, C = 1



Evžen David, Prag

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 8. März 1987

Mathematik

Ma 5 ■ 2722 Vier Freunde, nämlich Dieter, Susanne, Heiko und Bärbel, mit den Familiennamen Müller, Schulze, Meier bzw. Lehmann betrachten gemeinsam Fotos, die während einer Klassenfahrt aufgenommen worden sind. Auf diesen Fotos ist folgendes zu erkennen:
(1) Zwei Schüler, der mit dem Familiennamen Müller und der mit dem Vornamen Dieter, angeln Fische.
(2) Vier Schüler mit den Familiennamen Müller und Lehmann und den Vornamen Heiko und Susanne baden in einem See.
(3) Zwei Schüler mit dem Familiennamen Meier und Vornamen Heiko stehen vor ihrem Zelt.
Wie heißen die vier Freunde mit vollem Namen? *Student P. Brill, Schwerin*

Ma 5 ■ 2723 Alfons, Bernd, Claus und Dieter sammelten in den Sommerferien zusammen 74 kg Altpapier. Alfons sammelte dreimal soviel Altpapier wie Bernd. Claus und Dieter gaben zusammen 34 kg Altpapier ab. Claus sammelte 8 kg Altpapier mehr als Bernd. Wieviel Kilogramm Altpapier konnte jeder von ihnen an den Altstoffhandel abführen?
Schülerin A. Mißbach, Magdeburg

Ma 5 ■ 2724 Die Ersparnisse der beiden Brüder Peter und Kurt betragen zusammen 205 M. Peter hat 25 M mehr gespart als Kurt. Wieviel Mark hat jeder der beiden Brüder gespart?
Schülerin S. Fiedler, Leinefelde

Ma 5 ■ 2725 Gegeben sei ein Rechteck mit einem Umfang von 140 cm. Eine Rechteckseite ist um 10 cm länger als ihre benachbarte Seite. Es ist der Flächeninhalt des Rechtecks zu ermitteln.
Schülerin C. Pleyer, Eisenach

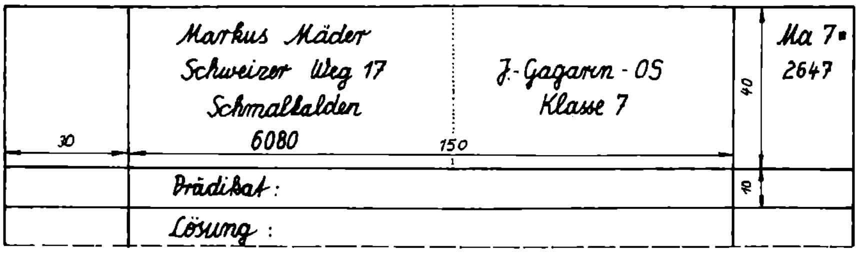
Ma 5 ■ 2726 Peter soll im Konsum Getränke einkaufen, und zwar Limonade und Bier. Dafür erhält er von seiner Mutter 10 M. Peter kauft von beiden Getränkesorten die gleiche Anzahl Flaschen. Für Bier bezahlt Peter 1,56 M mehr als für Limonade. Von den 10 M verbleiben ihm 4 Pf. Wieviel Flaschen Limonade bzw. Bier hat Peter gekauft, wenn eine Flasche Limonade 35 Pf, eine Flasche Bier 48 Pf kostet und kein Flaschenpfand erhoben wird, da die Anzahl der gekauften Flaschen mit der Anzahl der mitgebrachten leeren Flaschen übereinstimmt?
Schüler M. Jödecke, Pützlingen

Ma 5 ■ 2727 Nach einem Wohnungsumzug probiert Herr A aus, welcher der vier äußerlich gleichartigen Schlüssel zu welcher der vier Türen seiner Schrankwand paßt. Genau jeder der vier Schlüssel paßt zu genau einer der vier Schranktüren. Wieviel Schlüsselproben muß Herr A im günstigsten, wieviel im ungünstigsten Fall machen, um für jede Tür den passenden Schlüssel herauszufinden? *Sch.*

Ma 6 ■ 2728 In einem Kindergarten gibt es 24 Bälle in den Farben blau, rot, gelb und weiß. Es sind doppelt soviel rote wie gelbe und dreimal soviel blaue wie weiße Bälle.
a) Wieviel Bälle sind es von jeder Farbe?
b) Weise nach, daß diese Angaben nur eine Lösung ergeben!
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 2729 Welche zweistellige natürliche Zahl ist gleich dem Fünffachen ihrer Quersumme? *Mathematikfachlehrer D. Kluge Michendorf*

Ma 6 ■ 2730 Die Figur stellt ein Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen a und b dar. Die Mittelpunkte E von $\overline{AD}$ und F von $\overline{CD}$ wurden mit dem Punkt B verbunden. Der Flächeninhalt A_V des Vierecks $BFDE$ ist durch den Flächeninhalt A_R des Rechtecks $ABCD$ auszudrücken!
Schüler Th. Thrun, Lodersleben



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
Postfach 14
Leipzig
7027

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Na/Te (Naturwissenschaft und Technik) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12 oder Na/Te 10/12 gekennzeichnet sind.

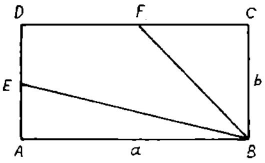
5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1986/87 läuft von Heft 5/1986 bis Heft 2/1987. Zwischen dem 1. und 10. September 1987 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/86 bis 2/87 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden ab Heft 6/87 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/1986 bis 2/87) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1986/87 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha



Ma 6 ■ 2731 Es ist nachzuweisen, daß die Summe von fünf aufeinanderfolgenden geraden natürlichen Zahlen stets durch 10 teilbar ist! *Schüler C. Drusla, Schwerin*

Ma 6 ■ 2732 Von einem Großvater wissen wir, daß sein Sohn soviel Wochen alt ist wie sein Enkel Tage alt ist. Der Enkel ist ferner soviel Monate alt wie der Großvater an Jahren alt ist. Alle drei zusammen sind 100 Jahre alt. Wie alt ist jeder von ihnen? *Schüler A. Burian, Neundorf*

Ma 7 ■ 2733 In einem Ferienheim gibt es 52 Zwei- und Vierbettzimmer mit insgesamt 144 Betten. Wieviel Zwei- bzw. Vierbettzimmer gibt es in diesem Ferienheim? *Schülerin D. Berlt, Grimma*

Ma 7 ■ 2734 Ein Straßenbahnzug, bestehend aus drei Wagen, ist wie folgt mit Fahrgästen besetzt: Im zweiten Wagen befinden sich drei Fahrgäste mehr als im ersten Wagen; im dritten Wagen befinden sich zwei Fahrgäste mehr als im zweiten Wagen.
An der nächsten Haltestelle steigt aus dem ersten Wagen die Hälfte der dort vorhandenen Fahrgäste, aus dem zweiten Wagen steigen sechs Fahrgäste aus. Aus dem dritten Wagen steigt kein Fahrgast aus; es steigen vielmehr drei Fahrgäste hinzu. Nun werden in allen drei Wagen zusammen 60 Fahrgäste befördert. Wie viele Fahrgäste befanden sich vor dem Aus- bzw. Einsteigen an dieser Haltestelle in jedem der drei Wagen? *Sch.*

Ma 7 ■ 2735 Gegeben sei ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$. Es seien E, F bzw. G die Mittelpunkte der Trapezseiten $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ bzw. $\overline{CD}$. Wieviel Prozent des Flächeninhalts des Trapezes beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks EFG? *Schüler A. Meckel, Friesen*

Ma 7 ■ 2736 Vier Brüder wollen eine Anzahl Nüsse zu gleichen Teilen unter sich aufteilen. Da sich die Anzahl der Nüsse nicht durch 4 teilen läßt, schlägt einer der Brüder vor, einem gerade anwesenden Freund fünf Nüsse abzugeben, wodurch eine gleichmäßige Verteilung der Nüsse unter den Brüdern möglich sein würde. Nach der erfolgten Aufteilung macht ein weiterer Bruder den Vorschlag, daß jeder von ihnen dem Freunde außerdem noch den zehnten Teil seiner erhaltenen Nüsse abgeben sollte, weil dann der Freund ebensoviel Nüsse wie jeder der vier Brüder haben würde. Wie viele Nüsse waren es im ganzen? *Sch.*

Ma 8 ■ 2737 Jede der Personen A, B und C macht über eine dreistellige natürliche Zahl n genau eine wahre und genau eine falsche Aussage. Die natürliche Zahl n ist zu ermitteln.

A: (1) n hat die Quersumme 18.
(2) n ist durch 5 teilbar.

B: (1) n ist durch 2, aber nicht durch 4 teilbar.
(2) n ist eine Primzahl.

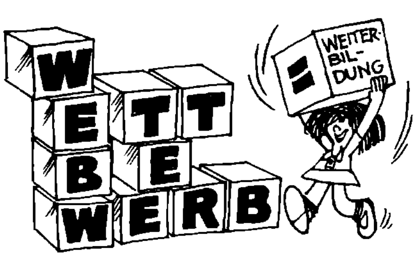
C: (1) n besteht nur aus ungeraden Ziffern.
(2) Die Grundziffern von n stellen Zahlen dar, die von links nach rechts gelesen stets größer werden.

J. Grundmann, Limbach-Oberfrohna

Ma 8 ■ 2738 Begründe, warum die Summe aus einem positiven echten Bruch $\frac{a}{b}$ und seinem Kehrwert $\frac{b}{a}$ größer als 2 ist! *Sch.*

Ma 8 ■ 2739 Im rechtwinkligen Dreieck ABC mit der 8 cm langen Seite $\overline{BC}$, der 6 cm langen Seite $\overline{AC}$ und dem rechten Winkel $\sphericalangle ACB$ seien durch den Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$ die Parallelen zu den anderen Dreiecksseiten gezeichnet. Es sind Umfang und Flächeninhalt des entstandenen Parallelogramms zu berechnen. *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 8 ■ 2740 Gegeben ist ein Rechteck $ABCD$. Die Seite $\overline{AB}$ sei 60 m, die Seite $\overline{AD}$ sei 40 m lang. E sei der Mittelpunkt der Seite $\overline{CD}$. Eine Gerade g durch E soll die Fläche des Rechtecks so in zwei Teilflächen zerlegen, daß die eine Teilfläche halb so groß ist wie die andere. Es ist die Lage des Schnittpunktes der Geraden g mit der Rechteckseite $\overline{AB}$ zu beschreiben. *OL W. Melka, Neubrandenburg*



Ma 9 ■ 2741 Für zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gilt: Subtrahiert man von der Summe ihrer Quadrate ihr Produkt, so erhält man den Nachfolger dieses Produktes. Diese Aussage ist zu beweisen. *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 9 ■ 2742 Wenn der Preis von 9 Äpfeln, vermindert um den Preis einer Birne, 13 Denare beträgt und der Preis von 15 Birnen, vermindert um den Preis eines Apfels, 6 Denare beträgt, so frage ich, wie teuer ein Apfel und wie teuer eine Birne ist. (Aufgabe von *Johannes Butev* aus dem Jahr 1549) *mitgeteilt von Schülerin A. Klinger, Schwedt*

Ma 9 ■ 2743 Ein rechtwinkliges Dreieck hat einen Umfang von 84 cm. Die Summe aus den Quadraten seiner drei Seitenlängen beträgt 2450 cm^2. Wie lang sind die Seiten dieses rechtwinkligen Dreiecks? *Sch.*

Ma 9 ■ 2744 Ralf zeichnet zwei Parallelen g und h. Auf g legt er drei paarweise voneinander verschiedene Punkte A, B, C und auf h zwei voneinander verschiedene Punkte P und Q fest. Er verbindet jeden der beiden Punkte P und Q auf h mit jedem der drei Punkte A, B, C auf g. Er stellt fest, daß diese Verbindungsgeraden sich in genau drei Punkten R, S und T schneiden. Er stellt weiterhin fest: Bei vier statt drei Punkten auf g gibt es genau sechs Schnittpunkte.
a) Wieviel Schnittpunkte wären es, wenn auf g sieben Punkte liegen würden?
b) Es ist die Anzahl der Schnittpunkte zu ermitteln, wenn auf g vierzehn paarweise voneinander verschiedene Punkte liegen würden. *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 10/12 ■ 2745 Die erste Grundziffer einer natürlichen Zahl z ist 7. Nimmt man diese 7 als letzte Grundziffer, so entsteht eine natürliche Zahl z', die fünfmal kleiner als z ist. Es ist die kleinste natürliche Zahl z zu ermitteln, die diese Bedingung erfüllt. *Ch. Bittner, Mühlhausen*

Ma 10/12 ■ 2746 In einem Dreieck ABC seien die Längen der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ bekannt. Außerdem kennt man noch die Länge der Winkelhalbierenden des Winkels der Größe α, den die beiden Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ einschließen. Es ist eine allgemeine Lösung für α anzugeben. *J. Grundmann, Limbach-Oberfrohna*

Ma 10/12 ■ 2747 Ein rechtwinkliges Dreieck habe folgende Eigenschaften:
Das Produkt aus den Längen seiner drei Seiten ist viermal so groß wie das Produkt aus den Längen seiner drei Höhen. Es sind die Größen der beiden spitzen Innenwinkel dieses rechtwinkligen Dreiecks zu bestimmen! *Sch.*

Ma 10/12 ■ 2748 Gegeben sind ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck und ein Rechteck, dessen eine Seite doppelt so lang ist wie die andere. Die Flächeninhalte von Dreieck und Rechteck sind gleich. Wenn das Dreieck um eine Kathete und das Rechteck um seine längere Seite rotieren, erhält man die Rotationskörper K_1 und K_2. Es ist zu zeigen, daß das Verhältnis der Volumina beider Rotationskörper konstant ist. *Ch. Bittner, Mühlhausen*

Naturwissenschaft und Technik

Na/Te 6 ■ 371 Ein Flugzeug fliegt von A nach B. Um 10 Uhr ist es 1200 km vom Ziel entfernt, um 11.30 Uhr 300 km. Wann wird es landen?

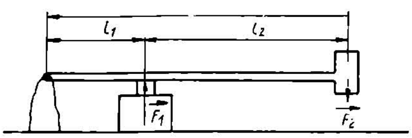
Na/Te 7 ■ 372 Für 332 M kauften wir 13 m Stoff zweier Sorten, und zwar für 27,50 M und 22,40 M je Meter. Wieviel Meter Stoff der einzelnen Sorten haben wir eingekauft?

Na/Te 7 ■ 373 5 h plus $3k$ Minuten ist das gleiche wie sechs Stunden minus $2k$ Minuten. Ermittle die Zahl k!

Na/Te 8 ■ 374 Ein 80 m langer Schnellzug, der eine Geschwindigkeit von 72 km/h hat, fährt an einem stehenden Personenzug vorbei. Marie-Luise stoppt die Zeit. Das Vorbeifahren dauert 10 s. Wie lang ist der Personenzug?

Na/Te 8 ■ 375 Berechne mit dem Taschenrechner und gib einen Ablaufplan! In welchem Verhältnis steht die relative Atommasse von Quecksilber (Hg = 200,5) zur relativen Atommasse von Kohlenstoff (C = 12)?

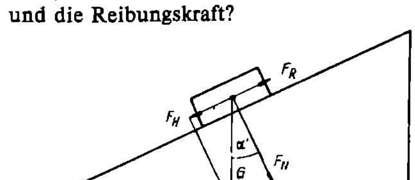
Na/Te 9 ■ 376 An einem Sicherheitsventil wirkt eine Ventildruckkraft von $F_1 = 40$ N. Das Gegengewicht ist mit $F_2 = 8$ N festgelegt. Die Gesamtlänge des Hebels beträgt $l = 12$ cm.
Wie groß sind die Abstände l_1 (vom Drehpunkt bis Ventil) und l_2 (vom Ventil bis zum Gegengewicht) einzustellen?



Na/Te 9 ■ 377 Aus einem slowakischen Mathematikbuch:
a) Berechne, um wieviel Prozent die Produktion absinken würde, wollten wir ohne Steigerung der Arbeitsproduktivität von der achtstündigen auf die siebenstündige Arbeitszeit übergehen.
b) Um wieviel Prozent müßte die Arbeitsproduktivität ansteigen, damit die Produktion nicht absinkt?

Na/Te 10/12 ■ 378 Ein Stahlrohr besitzt folgende Abmessungen: Nennweite 1200 mm, Wanddicke 28 mm, Baulänge 3 m und 2 cm starke Isolierschicht außen. Zur Bereitstellung des richtigen Hebezeugs muß das Gewicht des Rohres ohne Isolierung bestimmt werden. Wieviel Quadratmeter Blech zur Verkleidung der Isolierung ist für das angegebene Rohr notwendig?

Na/Te 10/12 ■ 379 Auf einer Ebene von 25 % Neigung gleite ein Körper von 500 N Gewicht mit gleichbleibender Geschwindigkeit abwärts. Wie groß sind die Druckkraft, die auf die Unterlage ausgeübt wird, und die Reibungskraft?



Die natürlichen Zahlen 1, 9, 8, 7 sollen durch jeweils vier *gleiche* Ziffern α, die durch Operationszeichen bzw. Klammern miteinander verbunden sind, dargestellt werden.

$$1 = (\alpha : \alpha) \cdot (\alpha : \alpha)$$
$$9 = \alpha + \alpha + \alpha : \alpha$$
$$8 = \alpha + \alpha + \alpha - \alpha$$
$$7 = \alpha + \alpha - \alpha : \alpha$$

Interessante Nachbetrachtung

In *alpha* 6/1985, Seite 137, sollten *Zum Jahreswechsel* alle natürlichen Zahlen x, y bestimmt werden, die die Gleichung

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{1985} \qquad (1)$$

erfüllen.
Hans-Henning Wiesner, Merseburg, sandte uns seine interessante Lösung. (Er fand weitere Lösungspaare x, y; wegen der Symmetrieeigenschaften der Variablen sind es insgesamt 9.)
Wir wollen seine Lösungsidee nutzen und sie verallgemeinert für jede beliebige Jahreszahl j ($j \neq 0$) wiedergeben.
(Ähnliche Problematik stellten wir bereits bei den Magischen Quadraten in *alpha* 6/1984.)
Setzt man in (1) für die Jahreszahl die Variable j, so ist nach Multiplikation mit jxy $jy + jx = xy$. Wegen $x > j$, $y > j$ substituiert man

$$x = j + m, \quad y = j + n. \qquad (2)$$

Dann ist

$$\begin{aligned} j(j+n) + j(j+m) &= (j+m)(j+n) \\ j^2 + nj + j^2 + mj &= j^2 + mj + nj + mn \\ j^2 &= m \cdot n \qquad (3) \end{aligned}$$

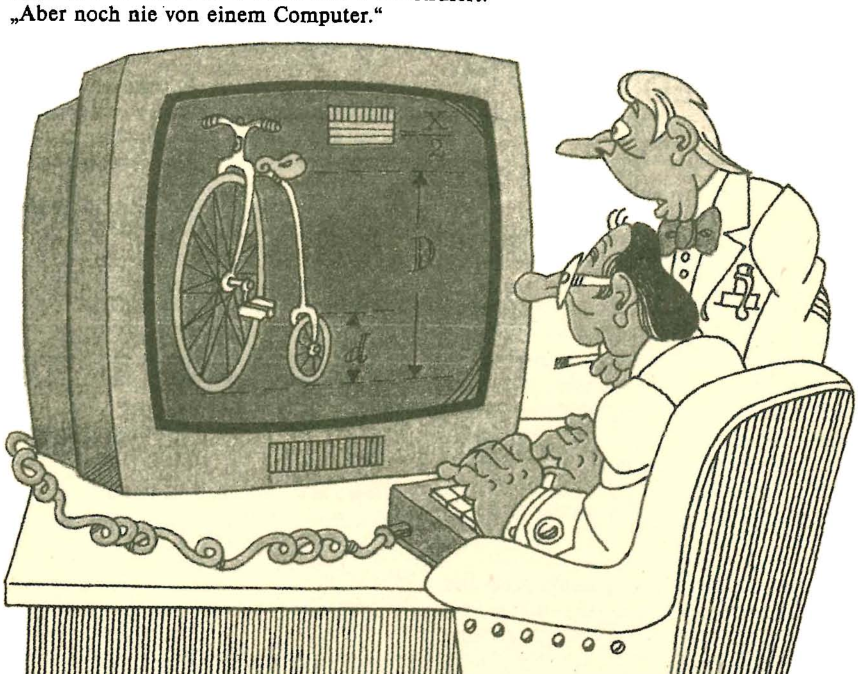
Für $j = 1985$ ergibt sich die Primfaktorenzerlegung $5 \cdot 397$.
Sei $a = 5$, $b = 397$, so ergeben sich für m, n folgende Variationen:
Wegen (3) gilt

m	n
1	a^2b^2
a	ab^2
b	a^2b
a^2	b^2
ab	ab

Da sich die ersten vier Paare noch vertauschen lassen, ergeben sich insgesamt neun Paare und wegen (2) auch neun Lösungspaare für (1), was auch die Probe bestätigt.
Mit (2), (3) ist somit ein Algorithmus für die Lösungspaare aller Jahreszahlen j ($j \neq 0$) gegeben.
Für 1986 ($1986 = 2 \cdot 3 \cdot 331$) gäbe es $2 \cdot 13 + 1 = 27$ Lösungspaare. Für 1987 jedoch (wegen $j = p$, p Primzahl und $m \cdot n = 1 \cdot p^2 = p^2 \cdot 1 = p \cdot p$) sind es genau die drei Lösungen $(p+1, p^2+p)$, $(p^2+p, p+1)$, $(2p, 2p)$.
Bei einer Unterhaltung mit Prof. Dr. *Gronau*, Greifswald, kam es noch zu folgender Ergänzung:
Hat j die Primzahlzerlegung
$j = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_t^{\alpha_t}$,
so gibt es genau
$k = (2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (2\alpha_t + 1)$
geordnete Lösungspaare.
$\left(\text{Bis auf Symmetrie } \frac{k+1}{2}\right)$.
Daraufhin ergeben sich sofort einige Fragestellungen bei Betrachtung der Jahreszahlen von 1 bis 1987, wie z. B.:
a) Gibt es genau 2 bzw. mehr oder weniger als zwei Jahreszahlen, die gleich der Anzahl der Lösungspaare sind?
b) Gibt es nur vier Jahreszahlen (nämlich 2, 4, 6, 12), die kleiner sind als die Anzahl der dazugehörigen Lösungspaare?
c) Für welche Jahreszahl gibt es die meisten Lösungspaare? Ist es 1680 mit 243 Paaren?
Wann wird der *Rekord* erstmals überboten werden? Ist es im Jahre 2520 mit 315 Paaren?

H.-J. Kerber

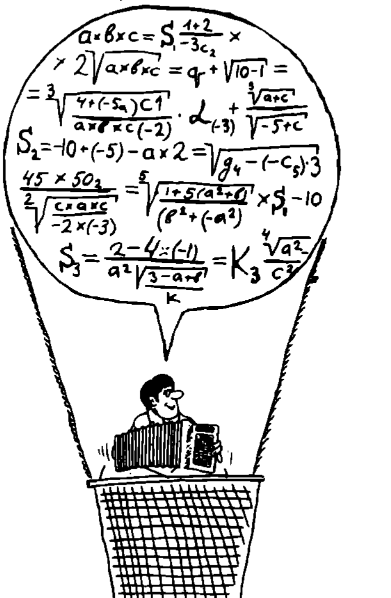
„Mensch, so was wurde doch schon konstruiert!"
„Aber noch nie von einem Computer."



alpha-Wettbewerb

Kollektive Beteiligung am alpha-Wettbewerb 1985/86

Pablo-Neruda-OS Ahlbeck; Fr.-Engels-OS, OS E. Mäder, Haus d. Jungen Pioniere, alle Altenburg; Fr.-Weineck-OS, Alsleben; Haus d. Jungen Pioniere Altentreptow; E.-Schneller-OS, Alt-Sührkow; W.-Pieck-OS, Anklam; OS Asbach; 7. OS Aschersleben; S.-Rädel-OS, Bad Gottleuba; R.-Schwarz-OS, Bad Liebenstein; Stat. Jg. Naturf. u. Techn., EOS E. Thälmann, O.-Grotewohl-OS, alle Bad Salzungen; H.-Duncker-OS, Bad Kleinen; Zentrale OS H. Beimler, Bärenklau; H.-Heine-OS, Barchfeld; O.-Nowack-OS, Bentwisch; M.-Poser-OS, Bad Salzungen; 10. OS, 25. OS Fr. Mehring, 26. OS L. Renn, 33.OS L. Grundig, 41. OS L. Weiskopf-Henrich, Pionierhaus W. Ulbricht, M.-A.-Nexö-OS, alle Berlin; A.-Becker-OS, Berlingerode; H.-Clement-OS Bernsbach; Geschw.-Scholl-OS, Bernsdorf; OS Beuren; OS Bischofferode; OS Bismarck; OS Fr. Schiller, Bleicherode; F.-Weineck-OS, Blumberg; OS Blumenthal; OS C. Wach, Bockendorf; A.-Bebel-OS, Boizenburg; OS W. Komarow, Boxberg; K.-Bürger-OS, Bredenfelde; OS B. Brecht, Brehme; W.-Seelenbinder-OS, OS H. Beimler, beide Breitungen; OS Dr. Th. Neubauer, Brotterode; M.-Poser-OS, Bürgel; W.-Pieck-OS, Burow; W.-Estel-OS, Buttlar; O.-Koschewoi-OS, Callenberg; 1. OS, Coswig; Stat. Jg. Naturf. u. Techn., 5. OS C. Blechen, beide Cottbus; OS B. Kühn, Dambeck; Fr.-Reuter-OS, Demmin; M.-Gorki-OS, Dermbach; OS Dersekow; OS Makarenko, OS K. Kollwitz, beide Dingelstädt; OS K. Niederkirchner, Domersleben; OS A. Matrossow, Dorndorf; O.-Grotewohl-OS, Dreitzsch; Pionierpalast W. Ulbricht, 30.OS, beide Dresden; E.-Weinert-OS, Deuna; M.-Curie-OS, Dohna; OS Dürröhrsdorf; W.-Pieck-OS, Eberswalde; OS Eckartsberga; OS Fr. Engels, Effelder; W.-Pieck-OS, Eichhof; OS Fr. Heckert, Eisleben; OS H. Grundig, Ellrich; 1. OS R. Arnstadt, Elsterwerda; E.-Weinert-OS, Empfertshausen; G.-Dobrowski-OS, Falkenberg; G.-Dimitroff-OS, Falkenstein; OS Th. Müntzer, Fambach; W.-Pieck-OS, Fehrbellin; 5. OS G. Dimitroff, Finsterwalde; alpha-Club, Flessau; B.-Brecht-OS, Floh; Spezialschule C. F. Gauß, Station Jg. Techn. u. Naturf., beide Frankfurt/O.; E.-Thälmann-OS, BBS Edelstahlwerk, beide Freital; OS Friedeburg; OS I Friedland; Station Jg. Naturf. u. Techniker alpha, Fürstenwalde; R.-Arnstadt-OS, Geisa; J.-Gagarin-OS, Geithain; Haus der Jungen Pioniere, Gadebusch; K.-Marx-OS, Gera; E.-Hartsch-OS, Gersdorf; Kalinin-OS, Geschwenda; OS Gielow; K.-Kräpler-OS, Gnoien; 7. OS, 13. OS, beide Görlitz; R.-Schulz-OS, Golzow; Haus d. Jungen Pioniere Br. Kühn, Gotha; Kreisklub Jg. Math. Gräfenhainichen; Kreisklub Jg. Math., E.-Thälmann-OS, beide Greifswald; OS Grabowhöfe; OS H. Beimler, OS J. Gagarin, beide Greußen; A.-Frank-OS, Grimma; OS W. Seelenbinder, Gröden; A.-Walther-OS, Gröditz; OS C. Zetkin, Groitzsch; OS Großbartloff; OS A. Kuntz, Großbodungen; OS E. Hoernle, Großfurra; alpha-Club Großbrückerswalde; J.-Gagarin-OS, Grünhain; Th.-Müntzer-OS, Gumpelstadt; OS Großschönau; OS H. Günther, Hachelbich; M.-Gorki-OS, Hainichen; Stat. Jg. Naturf. H. Rockmann, Marx-Engels-Schule, beide Halberstadt; Kreisklub Halle-Süd; OS f. Körperbehinderte, Halle; Stat. Jg. Techn. u. Naturf. Ziolkowski, W.-Koenen-OS, beide Halle-Neustadt; OS J. Marchlewski, Havelberg; OS Haynrode; OS Hammerbrücke; OS B. Koenen, Hedersleben; Schule der DSF, Heiligengrabe; EOS W. Pieck, Heiligenstadt; P-Schreier-OS, Hennigsdorf; OS Th. Müntzer, Hermannsdorf; M.-Gorki-OS, Hillersleben; OS Hiddensee; Goethe-OS, Hohenleipisch; OS Horka; 21. OS, Hoyerswerda; E.-Egert-OS, Hundeshagen; Goethe-OS, Ilsenburg; G.-Dimitroff-OS, Immelborn; G.-Ewald-OS, Ivenack; A.-Becker-OS, Jatznick; OS M. Poser, OS W. Pieck, beide Jena; OS Kaltennordheim; OS A. Becker, Kamsdorf; Cl.-Zetkin-OS, Kandelin; H.-Beimler-OS, Karbow; N.-Kopernikus-OS, OS f. Körperbehinderte Dr. F. Wolf, E.-Schneller-OS, A.-Matrossow-OS, E.-Thälmann-OS, Fr.-Matschke-OS, P.-Tschaikowski-OS, H.-Menzel-OS, alle Karl-Marx-Stadt; E.-Boberg-OS, Karlsburg; OS Katzow; OS Cl. Zetkin, Kaulsdorf; OS Th. Rybarczyk, Kemberg; OS Th. Neubauer, Kieselbach; OS Kirchworbis; Kreisklub Math. Kleinmachnow; OS Th. Müntzer, Klettenberg; H.-Matern-OS, Klietz; W.-Seelenbinder-OS, Könitz; OS Königsmark; OS E. Thälmann, Köthen; OS Küllstedt; OS Cl. Zetkin, Laage; OS Latdorf; Goetheschule, Lauscha; OS E. Weinert, Legefeld, R.-Teichmüller-OS, Leimbach; K.-Liebknecht-OS, Dr.-S.-Allende-OS, OS R. Luxemburg, 4. OS J. C. Fuhlrott, E.-Thälmann-OS, alle Leinefelde; Haus d. Jungen Pioniere A. Saefkow, O.-Schön-OS, beide Leipzig; M.-Poser-OS, Lengfeld; G.-E.-Lessing-OS, Lengefeld; G.-Dimitroff-OS, Lenzen; E.-Thälmann-OS, Leutenberg; OS Leutersdorf; W.-Pieck-OS, Lichte; O.-Grotewohl-OS, EOS Prof. Dr. Schneider, beide Lichtenstein; AG Math. Lieberose; Pestalozzi-OS, Löbau; OS W. Wallstab, Löderburg; W. Seelenbinder-OS, Lössau; Stat. Jg. Naturf. u. Techn. Lübz; Haus d. Jungen Pioniere Th. Körner, Goethe-OS, beide Ludwigslust; Lenin-OS, Magdeburg; W.-I.-Lenin-OS, Malchin; J.-Gagarin-OS, Meiningen; OS J. Gagarin, Merkers; Fr.-Heckert-OS, Milkau; OS Mittelstille; E.-Steinfurth-OS, Mittenwalde; OS H. Danz, Möser; Kinderheim Munzig; OS Nachterstedt; O.-Grotewohl-OS, Naumburg; OS H. Beimler, Naundorf; OS W. Bykowski, Neetzow; R.-Hallmeyer-OS, Neundorf; Goetheschule, Fr.-Schiller-OS, beide Neustadt; W.-Seelenbinder-OS, Niederlichtenau; Dr.-Th.-Neubauer-Schule, Niederorschel; W.-Pieck-OS, Niederwiesa; OS Niegripp; Haus d. Jungen Pioniere H. Matern, Nordhausen; AG Jg. Math., Nossentiner Hütte; OS Obhausen; OS Oberlichtenau; OS E. Weinert, Oberlichtenau; Humboldtschule, Oberlungwitz; H.-Warnke-Schule, Oederan; OS Olbersdorf; Haus d. Jungen Pioniere H. Coppi, Oranienburg; EOS K. Marx, Oschersleben; E.-Vogel-OS, 2. OS Pestalozzischule, beide Oschatz; OS Osternienburg; OS W. Pieck, Osterwieck; Haus d. Jungen Pioniere P. Göring, Parchim; Haus d. Jungen Pioniere E. Weinert, Pasewalk; OS Dr. Th. Neubauer, Pfaffschenda; Päd. Kreiskabinett, Plauen; OS G. Haak, Pirna; Makarenko-OS, Plessa; OS E. Schneller, Polleben; 5. OS A. S. Makarenko, 17. OS, beide Potsdam; EOS Pritzwalk; OS Pritzerbe; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Rackwitz; OS Pestalozzi, Radebeul; W.-I.-Lenin-OS, Radewege; OS Raßnitz; Fr.-Engels-OS, Rathenow; E.-Weinert-OS, Reichenbach; E.-Thälmann-OS, Reinberg; OS H. Rau, Rheinsberg; OS U. Steinhauer, G.-Hauptmann-OS, J.-Gagarin-OS, alle Ribnitz; Spezialschule Fr. Engels, Riesa; J.-Gagarin-OS, Riethnordhausen; J.-Curie-OS, Röbel; J.-Curie-OS, Ronneburg; H.-Matern-Schule, Rochlitz; Ziolkowski-OS, Roßdorf; Fr.-Schmenkel-OS, Roskow; Haus d. Jungen Pioniere, 66. OS O. Buchwitz, 34. OS M. Reichpietsch, alle Rostock; OS S. Kosmodemjanskaja, Rotterode; W.-Pieck-OS, Rotta; OS K. Niederkirchner, Saal; E.-Weinert-OS, Saalfeld; Stat. Jg. Techn. u. Naturf. Salzwedel; T.-Bunke-OS, Sanitz; W.-Pieck-OS, Stat. Jg. Naturf. u. Techn., beide Sangerhausen; OS H. Matern, Schernberg; OS Schlagsdorf; W.-Pieck-OS, Schlottwitz; G.-Hauptmann-OS, Schleusingen; OS M. Gorki, Schkölen; 4. OS, OS K. Marx, J.-G.-Seume-OS, OS H. Danz, alle Schmalkalden; Schule d. DSF, Schneidlingen; Haus d. Jungen Pioniere, Schönebeck; OS Kuba, Schorssow; OS Fr. Engels, Schwallungen; H.-Beimler-OS, Schwarzenberg; OS F. Fröbel, Schweina; Haus d. Jungen Pioniere, M.-May-OS, beide Sebnitz; Fr.-Reuter-OS, Siedenbollentin; OS Th. Müntzer, Silkerode; OS Sohland; OS J. R. Becher, OS W. Pieck, OS Glück-auf, alle Sondershausen; OS Sponholz; K.-Marx-OS, Spremberg; Kreisklub Jg. Math. Spremberg; Stat. Jg. Naturf. u. Techn. Stahnsdorf; OS K. Liebknecht, Stadtlengsfeld; J.-Fučik-OS, Steinbach; OS Steinsdorf; A.-Becker-OS, Stralendorf; Pionierhaus F. Weineck, Strausberg; Dr.-S.-Allende-OS, Stralsund; OS Ströbeck; OS E. Thälmann, Steinbach-Hallenberg; Schule d. DSF, Struppen; 12. OS Dr. R. Sorge, Suhl; H.-Beimler-OS, Tantow; OS E. Schneller, Taubenheim; J.-Gagarin-OS, Teistungen; OS G. Eisler, K.-Niederkirchner-OS, beide Teterow; K.-Liebknecht-OS, Teuchern; OS Fr. Mehring, Tiefenort; E.-Schneller-OS, Töplitz; A.-Einstein-OS, Pestalozzischule, beide Torgelow; E.-Thälmann-OS, OS W. Pieck, beide Trusetal; Ehm-Welk-OS, Goetheschule, A.-Nitz-OS, alle Ueckermünde; H.-Beimler-OS, Unterbreizbach; E.-Schneller-OS, Urnshausen; OS J. G. Seume, Vacha; OS Vitzenburg; A.-Bebel-OS, Vogelsang; OS Viernau; OS Völkershausen; R.-Luxemburg-OS, Waldau; Goetheschule, Waren; OS Wechmar; H.-Beimler-OS, Wefensleben; OS Weißenborn-L.; OS R. Luxemburg, Werbelow; J.-Gagarin-OS, Werneuchen; OS Wernshausen; OS Wesenberg; OS Westerengel; OS L. Fürnberg, Wegeleben; H.-Matern-OS, Weida; Karl-Marx-OS, Wilkau-Haßlau; OS H. Matern, Wipperdorf; Kreisklub Jg. Math. Wittenberg; Stat. Jg. Naturf. u. Techn., Fr.-Engels-OS, beide Wittstock; Winterlager d. Kreises, OS W. I. Lenin, H.-Werner-OS, alle Worbis; OS Th. Müntzer, Wulfen; OS E. Schultz, Wulkenzin; Stat. Jg. Naturf. u. Techn. Zembschen; OS W. Seng, Zepernick; OS Ziesar; OS J. H. Pestalozzi, Zschornewitz



Die Buchstaben sind so durch die Ziffern 0 bis 9 zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Aufgabe entsteht. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

$$\begin{array}{r} \text{A L L E S} \\ -\ \text{G Ü T E} \\ -\ \text{F Ü R} \\ \hline \text{1 9 8 7} \end{array}$$

20 Jahre alpha

Aufruf

Seit 20 Jahren erscheint die Mathematische Schülerzeitschrift *alpha*. Herausgegeben von ihrem Chefredakteur OStR *J. Lehmann* (Ehrenmitglied der Mathematischen Gesellschaft der DDR) und einem erfahrenen Redaktionskollegium hat diese Zeitschrift entscheidenden Anteil an der mathematischen Bildung unserer Jugend, bei der Förderung der Olympiaden *Junger Mathematiker* und der Pflege des mathematischen Wettbewerbs schlechthin. Ein breiter Leser- und Autorenkreis fühlt sich mit dieser Zeitschrift eng verbunden, zum *alpha*-Wettbewerb gehen jährlich etwa 100000 Lösungen bei der Redaktion ein.
Dennoch sollte jeder Mathematiker und mathematisch interessierte Leser prüfen, ob er nicht in der Lage ist, durch eigene Beiträge (oder Aufgabenstellungen) das Angebot an interessanten Artikeln und Problemen zu stärken, neue Anwendungsbereiche der Mathematik aufzuzeigen und das Interessenfeld Mathematik noch vielseitiger dem Schüler verständlich darzulegen. Deshalb ruft der Vorstand der Mathematischen Gesellschaft der DDR (MGdDDR) alle Mitglieder dieser Gesellschaft, Lehrer, Hochschullehrer und in der Industrie und Volkswirtschaft tätigen Mathematiker der DDR sowie alle aktiven Leser der *alpha* auf, die erzieherische und publizistische Wirksamkeit dieser Schülerzeitschrift durch eigene Beiträge aktiv zu fördern. Besonders gute Einsendungen (an die *alpha*-Redaktion) wird die MGdDDR zu gegebener Zeit mit einer kleinen Anerkennung honorieren.

Prof. Dr. R. Klötzler
Vorsitzender der MGdDDR

Zitiert aus der alpha 1/1967

...Die Zeitschrift dient der Förderung der mathematisch Interessierten unter Euch, liebe Mädel und Jungen, und der Entwicklung eines breiten Interesses für die bedeutende und schöne Wissenschaft Mathematik...
Möge die Zeitschrift *alpha* dem großen und schönen Ziel dienen, Euch zu hohen mathematischen Leistungen zu befähigen und dafür zu begeistern, Euer Wissen und Können mit ganzem Herzen für die Sache des Sozialismus einzusetzen.
In diesem Sinne wünsche ich Eurer Zeitschrift viel Erfolg.

M. Honecker, Minister für Volksbildung

Die „Redaktion" besteht aus einem Chefredakteur und einer Redaktionsassistentin. Wertvollste Helfer waren in diesen beiden Jahrzehnten die Gutachter Dr. *R. Hofmann*, NPT *H. Kästner* und Dr. *C.-P. Helmholz* von der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig. Mit Rat und Tat half das Redaktionskollegium. In gemeinsamer Arbeit entstanden 120 *alpha*-Hefte für unsere 54000 Leser. Persönlicher Einsatz bei der Beschaffung und *alpha*-gerechten Bearbeitung zahlreicher Beiträge und Aufgabenzusammenstellungen garantierten ein hohes Niveau unserer Zeitschrift.

Unser Dank gilt den zahlreichen Wissenschaftlern, den Lehrern, den zahlreichen Mitstreitern aus der gesellschaftlichen Praxis und nicht zuletzt den Schülern. Durch ihre Artikel halfen sie tausenden *Jungen Mathematikern*, ihr Wissen und Können zu überprüfen, zu vertiefen und zu erweitern, gaben Impulse, sich mit spezieller, weiterführender Literatur zu beschäftigen. Arbeitsgemeinschaften, Kreis- und Bezirksklubs, Mathematische Schülergesellschaften, Korrespondenzzirkel nutzten in ihren Kollektiven das Material, stellten aber gleichzeitig ihre Arbeitsergebnisse zur Verfügung.

Zwischen den mathematischen Schülerzeitschriften der sozialistischen Bruderländer bestehen seit langem enge Patenschaftsbeziehungen, die sich besonders durch Austausch von Beiträgen, Literatur, durch Aufgabenzusammenstellungen und persönlichen Aussprachen, meist im Rahmen der Internationalen Mathematikolympiaden, mit dem Chefredakteur der *alpha* zeigten. Mit zahlreichen weiteren Zeitschriften besteht ein ständiger Austausch. Bild 1 zeigt einen Erfahrungsaustausch des Chefredakteurs der finnischen Schülerzeitschrift *Functio* (im Bild Mitte) mit dem der *alpha* (im Bild rechts).

Ein *alpha*-Schwerpunkt ist die Veröffentlichung aller gestellten Aufgaben der *Olympiaden Junger Mathematiker* der DDR und der Internationalen Mathematikolympiade (IMO). Darüber hinaus werden die reichen Erfahrungen besonders der sozialistischen Länder auf dem Gebiete der verschiedensten Wettbewerbe veröffentlicht. Sie wekken Interesse, fördern Talente in unserem Fachgebiet. Bild 2 zeigt einen Ausschnitt aus der Siegerehrung in dem Auditorium maximum der Humboldt-Universität anläßlich der IV. DDR-Olympiade.

alpha wird in 17 Ländern der Erde abonniert, besonders in der Sowjetunion und in Österreich. Im Jahr verlassen etwa 1400 Briefe die Redaktion, sei es in deutsch, russisch, englisch oder französisch. Sie sind ein Spiegelbild unserer Verbindung mit dem Leser. Aus dieser Korrespondenz entspringen ebenso viele Impulse wie anläßlich der zahlreichen Leserkonferenzen im Rahmen der Arbeitsgemeinschaften, der Olympiadebewegung und zahlreichen persönlichen Kontakten der Redaktionsmitglieder im In- wie im Ausland.

In zwanzig Jahren sorgten die Druckerei Frankenstein (Leipzig), die Staatsdruckerei der DDR (Berlin) und seit 1976 der Graphische Großbetrieb INTERDRUCK für eine *jederzeit* sach- und fachgerechte Herstellung, eine pünktliche Auslieferung der Hefte. Unser Dank gilt auch den Angestellten der Deutschen Post und dem seit zwei Jahrzehnten unermüdlich für die hervorragende graphische Gestaltung Verantwortlichen H. Tracksdorf sowie dem für die zahlreichen, oft nicht leichten technischen Zeichnungen tätigen OL G. Gruß (beide Leipzig). Bild 3 zeigt den Chefredakteur bei einer Beratung mit zwei Ingenieuren der Abt. Herstellung.

In unserer Republik gibt es Tausende von Arbeitsgemeinschaften und Interessengemeinschaften. *alpha* unterstützt ihre Teilnehmer kontinuierlich in vielfältiger Weise, sei es durch „mathematischen Speck", d.h., durch altersgerechte Fachartikel, durch Beispiele für eine lebendige außerunterrichtliche Tätigkeit. Aus zahlreichen Leserbriefen spricht das stete Interesse für unsere Wandzeitungsarbeit, durch die Sprach-, Schach-, Briefmarkenecke, lustige Knobeleien, Vignetten und Spiele. Am beliebtesten dabei ist die Doppelseite: In freien Stunden · *alpha*-heiter. Bild 5 zeigt die Wissensstraße Mathematik des *alpha*-Clubs der J.-Schehr-OS Leipzig auf dem Pressefest der Leipziger Volkszeitung.

Mit dem ersten *alpha*-Heft (1/67) wurde durch Initiative des Chefredakteurs der Wettbewerb ins Leben gerufen. Wir waren stolz, denn mit dem Jahrgang 1967 gingen 5100 Lösungen ein. Heute, zwei Jahrzehnte später, erreichen uns pro Jahr etwa 100000 Lösungen, d.h., in 20 Jahren wurden insgesamt 1386300 Lösungen eingesandt, sortiert, korrigiert und Antwortkarten geschrieben, eine stolze Bilanz.
Wir danken allen Wettbewerbsteilnehmern für ihre fleißige und gewissenhafte, meist ausdauernde Mitarbeit. Pro Jahr gehen rund 4500 Urkunden und Abzeichen in alle Teile der DDR und ins Ausland. Verlage unserer Republik unterstützen uns dankenswerterweise mit Buchpreisen im Werte von 2500 bis 3000 Mark. Der Verlag Volk und Wissen stellt jährlich 24000 Mark zur ökonomischen Sicherung dieses Wettbewerbs zur Verfügung. Unser Dank gilt den beiden Korrektoren J. Lehmann, Ch. Döhler, beide Leipzig, den fleißigen Helfern, welche die Antwortkarten schreiben, der stets emsigen Redaktionsassistentin, die alles termingerecht bewältigt und vor allem den beiden langjährigen Aufgabenexperten Dr. W. Fregin (Leipzig) und OStR Th. Scholl (Berlin), welche mit Herz und Sachverstand Heft um Heft lehrplangerecht, im Inhalt den Klassenstufen angemessen und interessant, eine bunte Palette von Problemen zusammenstellten aus der erfreulich hohen Zahl von Aufgabenvorschlägen aus der Leserschaft. Bild 4 zeigt den Chefredakteur und die Redaktionsassistentin. In Kleinarbeit haben sie (innerhalb einer Sero-Stelle) die 26332 Lösungen eines Heftes (6/1981) gestapelt.

Bild 1

Bild 4

Bild 2

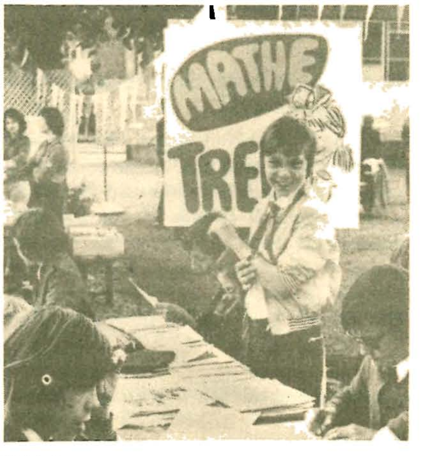


Bild 5

Bild 3

Ausblick

Wer die *alpha* aufmerksam studiert, wird eine stete inhaltliche Weiterentwicklung spüren. Seit 1975 z.B. gingen wir verstärkt auf naturwissenschaftliche Probleme ein, erweiterten den Wettbewerb aus eigener Initiative mit Physik- und Chemie-Aufgaben. Selbstverständlich unterstützen wir seit 1984 die Arbeit mit dem Schultaschenrechner.

Bald werden wir – Zug um Zug – durch Beiträge, Informationen und Literaturhinweise die Wechselwirkung zwischen der Rechentechnik und der Mathematik aufzeigen. Für 1987 liegen Aufgaben aus Natur und Technik, Komplexaufgaben, Beiträge, welche die Wechselwirkung von Mathematik und Praxis zeigen, historische Abrisse vor. Im Kollektiv entstand – in Auswertung der Beschlüsse des XI. Parteitages der SED – ein langfristiger Plan zur Weiterentwicklung der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha*.

XXVII. Internationale Mathematikolympiade

Warschau, 4. bis 15. Juli 1986

Aufgaben

1. Sei d eine positive ganze Zahl $\neq 2, 5, 13$.
Man zeige:
In der Menge $\{2, 5, 13, d\}$ gibt es zwei verschiedene Elemente a, b, für die $ab - 1$ keine Quadratzahl ist. (BRD)

2. In der Ebene ist ein Dreieck $A_1A_2A_3$ und ein Punkt P_0 gegeben. Wir setzen $A_s = A_{s-3}$ für alle $s \geqq 4$. Wir konstruieren die Folge $P_0, P_1, P_2, \ldots$ von Punkten, so daß P_{k+1} sich als Bild von P_k bei der Drehung um A_{k+1} um 120° im Uhrzeigersinn (mathematisch negativ) ergibt $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.
Man zeige:
Wenn $P_{1986} = P_0$ ist, dann ist das Dreieck $A_1A_2A_3$ gleichseitig. (China)

3. Den Eckpunkten eines regelmäßigen Fünfecks ist je eine ganze Zahl so zugeordnet, daß die Summe dieser fünf Zahlen positiv ist. Sind X, Y bzw. Z drei aufeinanderfolgende der fünf Punkte und x, y bzw. z die ihnen zugeordneten Zahlen, wobei $y < 0$ ist, so ist folgende Operation erlaubt: Die Zahlen x, y bzw. z werden in dieser Reihenfolge durch $x + y$, $-y$ bzw. $z + y$ ersetzt.
Diese Operation wird so oft wiederholt, wie sich ein $y < 0$ findet.
Man entscheide, ob man dabei stets nach endlich vielen Schritten abbrechen muß. (DDR)

4. Es seien A, B zwei benachbarte Ecken eines regelmäßigen n-Ecks ($n \geqq 5$) mit dem Mittelpunkt O. Es wird ein zu OAB kongruentes Dreieck XYZ zunächst mit dem Dreieck OAB zur Deckung gebracht und dann so bewegt, daß sich der Punkt X stets innerhalb des n-Ecks und die Punkte Y und Z stets auf den Seiten desselben befinden.
Man bestimme alle möglichen Lagen, die X einnehmen kann, wenn Y und Z gemeinsam den Rand des n-Ecks durchlaufen. (Island)

5. Man bestimme alle Funktionen f, die auf der Menge R_0^+ der nichtnegativen reellen Zahlen definiert sind, nur nichtnegative reelle Werte annehmen und die folgenden drei Bedingungen erfüllen:

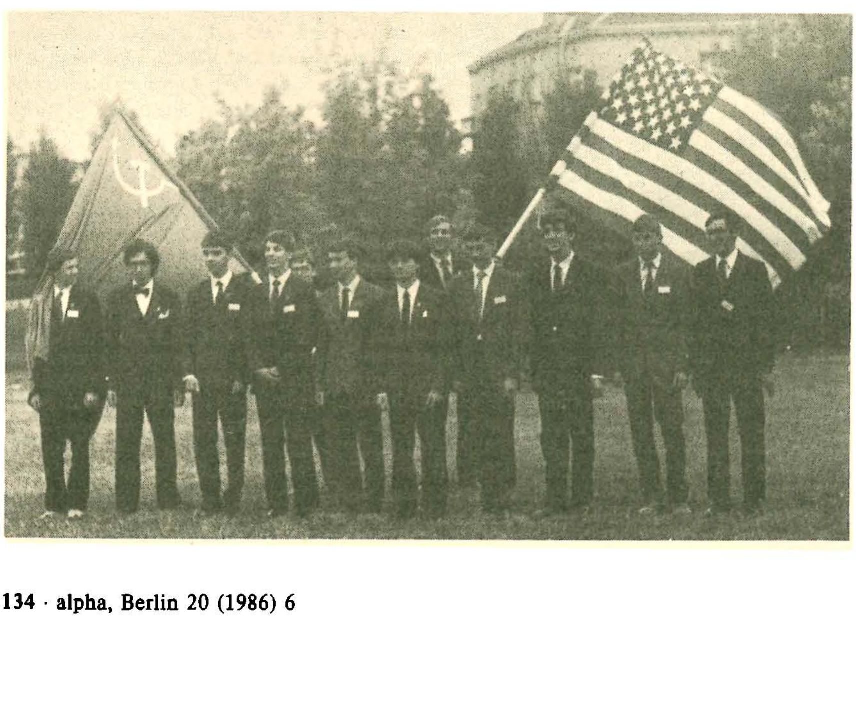
a) $f(x \cdot f(y)) \cdot f(y) = f(x + y)$ für alle $x, y \in R_0^+$
b) $f(2) = 0$
c) $f(x) \neq 0$ für $0 \leqq x \leqq 2$ (Großbritannien)

6. In der Ebene sei eine endliche Menge von Punkten gegeben, die bezüglich eines festen Koordinatensystems lauter ganzzahlige Koordinaten haben.
Man entscheide, ob es stets möglich ist, einige dieser Punkte rot und die übrigen dieser Punkte weiß zu färben, so daß sich für jede Gerade, die zu einer der Koordinatenachsen parallel verläuft, die Anzahl der auf ihr gelegenen roten Punkte von der Anzahl der auf ihr liegenden weißen Punkte um höchstens Eins unterscheidet. (DDR)

Unsere Mannschaft der IMO 86:

Prof. Dr. Burosch, Delegationsleiter
Prof. Dr. Gronau, stellv. Delegationsleiter
Jörg Jahnel, 1. Preis 41 Punkte
Stefan Günther, 2. Preis 31 P.
M.-Torsten Tok, 2. Preis 31 P.
Ingo Warnke, 2. Preis 26 P.
Günter Döge, 3. Preis 24 P.
Harald Heidler, 3. Preis 19 P.

Die zwei Siegermannschaften der USA und der UdSSR



Inoffizielle Länderwertung – Preisverteilung

Platz	Land	Punkte	1. Preis	2. Preis	3. Preis
1	USA	203	3	3	-*
	UdSSR	203	2	4	-
3	BRD	196	2	4	-
4	VR China	177	3	1	1
5	DDR	172	1	3	2
6	SR Rumänien	171	2	2	1
7	VR Bulgarien	161	1	3	2
8	Ungarische VR	151	1	2	2
9	ČSSR	149	-	3	3
10	SR Vietnam	146	1	2	2
11	Großbritannien	141	-	2	3
12	Frankreich	131	1	1	2
13	Österreich	127	-	2	2
14	Israel	119	-	2	2
15	Australien	117	-	-	5
16	Kanada	112	-	2	1
17	VR Polen	93	-	-	3
18	Marokko	90	-	1	2
19	Tunesien	85	-	-	1
20	Jugoslawien	84	-	-	2
21	Algerien	80	-	-	2
22	Belgien	79	-	1	2
23	Spanien (4)	78	-	1	2
24	Brasilien	69	1	-	-
25	Norwegen	68	-	1	-
26	Griechenland	63	-	-	2
27	Finnland	60	-	-	1
28	Kolumbien	58	-	-	-
29	Schweden	57	-	-	1
30	Türkei	55	-	-	-
31	Mongolische VR	54	-	-	-
32	Zypern	53	-	1	-
33	Kuba	51	-	-	-
34	Italien (3)	49	-	-	2
35	Kuweit (5)	48	-	-	-
36	Island (4)	37	-	-	-
37	Luxemburg (2)	22	-	-	-
			18	41	48

Jede Mannschaft bestand aus 6 Schülern bzw. aus der in Klammern angegebenen Anzahl von Schülern.

* Sowie ein Sonderpreis für die elegante Lösung einer Aufgabe.

Schriftliche Abschlußprüfung Fach Mathematik

Klassenstufe 10 – Schuljahr 1985/86

Pflichtaufgaben

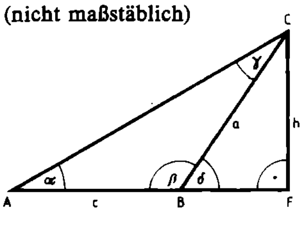
1. In der DDR werden jährlich erhebliche Mittel aus dem Staatshaushalt zur Sicherung stabiler und niedriger Preise für Waren des Grundbedarfs bereitgestellt.
a) Im Jahre 1982 betrugen die Gesamtausgaben des Staatshaushalts der DDR 182 Milliarden Mark. Davon wurden 11,7 Milliarden Mark zur Stützung von Lebensmittelpreisen ausgegeben. Wieviel Prozent der Gesamtausgaben sind das?
b) Für das Jahr 1983 wurde der Betrag von 11,7 Milliarden Mark um 3,4 Prozent erhöht. Wieviel Milliarden Mark wurden 1983 zur Stützung von Lebensmittelpreisen ausgegeben?

2. a) Lösen Sie die Ungleichung
$2(3x+5) > 9x-(5-2x) \quad (x \in P)$!
b) Geben Sie von den vier Zahlen
$-3{,}01;\ 0;\ 3;\ \frac{37}{10}$
diejenigen an, die diese Ungleichung erfüllen!

3. Durch die Gleichung
$y = x^2 + 2x - 1{,}25 \quad (x \in P)$
ist eine Funktion gegeben.
a) Berechnen Sie die Nullstellen dieser Funktion!
b) Der Graph dieser Funktion ist eine Parabel. Ihr Scheitelpunkt sei S.
Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten von S!
c) Zeichnen Sie die Parabel mindestens im Intervall $-3 \leqq x \leqq 1$!
d) Welche Zahl ist in die Gleichung $y = x^2 + 2x + q$ für q einzusetzen, damit die dadurch gegebene Funktion genau eine Nullstelle hat?

4. Um die Höhe $\overline{CF}$ eines Turmes zu ermitteln, dessen Fußpunkt F unzugänglich ist, kann man wie folgt vorgehen:

Skizze (nicht maßstäblich)

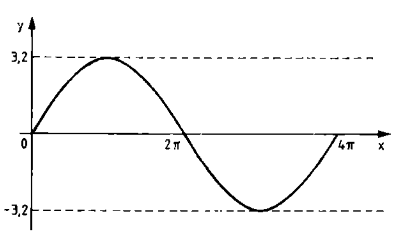


Man steckt eine Standlinie $\overline{AB}$ so ab, daß A, B und F auf einer Geraden liegen, und miß die Erhebungswinkel $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle FBC$ (siehe Skizze!).

Bei einer solchen Messung ermittelte man folgende Werte:
$\overline{AB} = c = 65{,}0\,\text{m}$,
$\sphericalangle BAC = \alpha = 35{,}0°$,
$\sphericalangle FBC = \delta = 62{,}0°$.
a) Ermitteln Sie mit Hilfe einer maßstäblichen Konstruktion die Turmhöhe $\overline{CF} = h$! (Geben Sie diese Höhe in Metern an!)
b) Berechnen Sie
- die Größe des Winkels $\sphericalangle ACB = \gamma$,
- die Länge der Strecke $\overline{BC} = a$,
- die Turmhöhe $\overline{CF} = h$!

5. Gegeben ist ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit den Höhen $h_c = \overline{CD}$ und $h_a = \overline{AE}$.
a) Zeichnen Sie eine entsprechende Planfigur!
b) Beweisen Sie, daß die Dreiecke ABE und DBC einander ähnlich sind!

6. a) Schreiben Sie die Zahlen 625 000 und 0,074 in der Darstellung mit abgetrennten Zehnerpotenzen (d. h. in der Form $a \cdot 10^m$ mit $a \in R$; $1 \leqq a < 10$; $m \in G$)!
b) Die Abbildung zeigt den Graph einer Funktion mit der Gleichung $y = a \cdot \sin bx$ im Intervall $0 \leqq x \leqq 4\pi$.
Geben Sie für diese Funktion a und b an!



c) Geben Sie denjenigen Wert von x an, für den der Term
$$\frac{5}{3x-6}$$
nicht definiert ist!
d) Ein Kreis hat einen Umfang von 17,0 m. Wie groß ist sein Durchmesser?

Wahlaufgaben

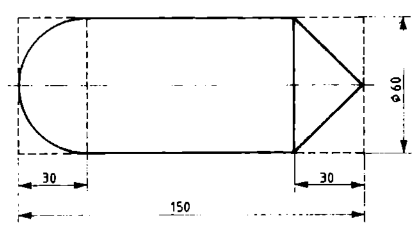
Von den folgenden Aufgaben 7.1., 7.2. und 7.3. brauchen Sie nur eine zu lösen.

7.1. Gegeben ist die Funktion $y = \frac{1}{x^2}$ $(x \in P;\ x \neq 0)$.
a) Übertragen Sie die folgende Tabelle auf Ihr Arbeitsblatt!
Berechnen Sie die fehlenden Funktionswerte!

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y								

b) Tragen Sie die so erhaltenen Wertepaare in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein, und zeichnen Sie den Graph dieser Funktion!
c) Zeigen Sie, daß das Zahlenpaar $\left(\sqrt{50};\ \frac{1}{50}\right)$ zur Funktion gehört!
d) Geben Sie einen Wert für x an, so daß für den zugehörigen y-Wert gilt: $y > 4$!
e) Geben Sie alle positiven Werte für x an, so daß für die zugehörigen y-Werte gilt: $y < \frac{1}{100}$!

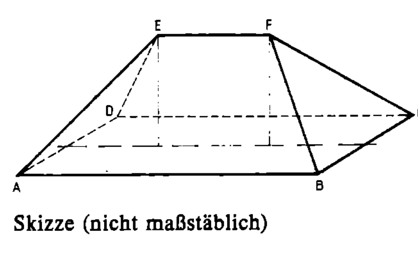
7.2. Aus einem zylinderförmigen Rundstahl mit dem Durchmesser $d = 60\,\text{mm}$ und der Länge $l = 150\,\text{mm}$ soll ein Werkstück hergestellt werden, das aus einer Halbkugel, einem Zylinder und einem Kegel besteht (siehe Skizze!).



Skizze (nicht maßstäblich)
(Maßangaben in Millimeter)

Wieviel Prozent beträgt der Materialabfall, der bei der Herstellung des Werkstücks entsteht?

7.3. Bei der Rekonstruktion eines Altbaus wird das Dach erneuert.
Die rechteckige Grundfläche $ABCD$ dieses Daches hat die Abmessungen $\overline{AB} = 16{,}0\,\text{m}$, $\overline{BC} = 10{,}0\,\text{m}$.
Der Dachfirst $\overline{EF}$ ist 6,0 m lang und liegt 5,0 m über der Grundfläche. Gegenüberliegende Seitenflächen des Daches sind kongruent (siehe Skizze!).



Skizze (nicht maßstäblich)

a) Stellen Sie dieses Dach in senkrechter Zweitafelprojektion im Maßstab 1 : 200 dar!
Bezeichnen Sie die Eckpunkte entsprechend der Skizze!
b) Konstruieren Sie die wahre Größe und Gestalt der trapezförmigen Seitenflächen $ABFE$ ebenfalls im Maßstab 1 : 200!
c) Berechnen Sie die Länge des Dachbalkens $\overline{BF}$!

Buchtips

für Mathematik, Naturwissenschaften und Technik

Kaden, Friedrich
Kleine Geschichte der Mathematik
176 S., zahlreiche Abbildungen
Bestell-Nr. 631 854 0 Preis: 12,50 M

Zilch, Reinhold
Auf Mark und Pfennig
112 S., zahlreiche Abb., Pappband
Bestell-Nr. 631 860 4 Preis: 6,80 M

Fiedler, Roland
Streifzüge durch die Mathematik
224 S., zahlr. Abb., Pappband
Bestell-Nr. 631 726 5 Preis: 6,80 M

Kleffe, Hans
Menschen messen Jahr und Tag
Aus der Geschichte der Zeitmessung und des Kalenders
77 S., zahlr. Abb., z. T. farbig
Bestell-Nr. 632 121 3 Preis: 8,20 M

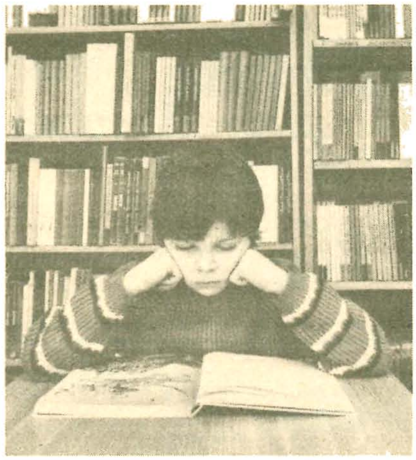
Alle 4 Titel: Der Kinderbuchverlag Berlin

Konforowitsch, Andrej G.
Guten Tag, Herr Archimedes
168 S., mit 94 Bildern und 1 Tabelle
Bestell-Nr. 547 006 5 Preis: 12,00 M
VEB Fachbuchverlag Leipzig

Grabow, Rolf
Simon Stevin
Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner, Bd. 77
116 S. mit 32 Abb.
Bestell-Nr. 666 250 1 Preis: 6,80 M
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig

Purkert, W./Ilgauds, H.-J.
Georg Cantor
Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner, Bd. 79
136 S. mit 16 Abb.
Bestell-Nr. 666 252 8 Preis: 6,80 M
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig

Gilde, Werner
Über Rekorde in der Technik
144 S. mit 40 Abb.
Bestell-Nr. 547 026 8 Preis: 5,50 M
VEB Fachbuchverlag Leipzig



Lehmann, Johannes
3 plus 8 und mitgemacht
80 S., zahlr. mehrfarbige Abb.
Bestell-Nr. 707 857 7 Preis: 3,00 M
(Für Klassen 1 bis 5)
Verlag Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

Quaisser, Erhard
Bewegungen in der Ebene und im Raum
128 S. mit 99 Abb.
Bestell-Nr. 571 194 9 Preis: 10,00 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin

Sprengel, H.-J./Wilhelm, O.
Funktionen und Funktionalgleichungen
80 S. mit 23 Abb.
Bestell-Nr. 571 195 7 Preis: 5,00 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin

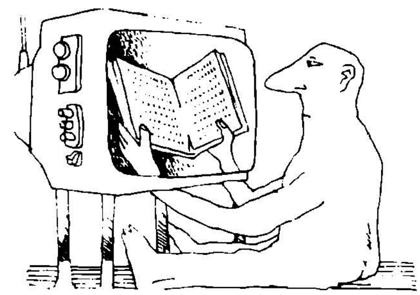
Klotzek, B.
Differentialgeometrie, Band II
140 S. mit 45 Abb.
Bestell-Nr. 571 050 8 Preis: 8,00 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin

Quaisser, E./Sprengel, H.-J.
Extreme
130 S., 51 Abb., MSB Nr. 127
Bestell-Nr. 571 442 9 Preis: etwa 13,00 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin

Boltjanskij, V. G./Efremovic, V. A.
Anschauliche kombinatorische Topologie
200 S., 210 Tafeln, MSB Nr. 129
Bestell-Nr. 571 501 8 Preis: etwa 18,00 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin

Conrad, Walter
Technische Kuriositäten
216 S., 79 einfarbige und 62 zweifarbige Zeichnungen
Bestell-Nr. 653 875 0 Preis: 20,00 M
Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin

Buchreihe: Wir wiederholen Physik
Band 1: Bewegungen
Bestell-Nr. 547 012 9 Preis: 6,80 M
Band 2: Kräfte
Bestell-Nr. 547 014 5 Preis: 6,80 M
Band 3: Flüssigkeiten und Gase
Bestell-Nr. 547 013 7 Preis: 6,80 M
Band 4: Wärme
Bestell-Nr. 547 136 7 Preis: 6,80 M
Band 5: Elektrische Ströme
Bestell-Nr. 547 137 5 Preis: 6,80 M
Band 6: Schwingungen
Bestell-Nr. 547 138 5 Preis: 6,80 M
alle 6 Titel: VEB Fachbuchverlag Leipzig



Perelman, Jakow I.
Unterhaltsame Physik
462 S. mit zahlr., z. T. farbigen Bildern
Bestell-Nr. 547 028 4 Preis: 19,80 M
VEB Fachbuchverlag Leipzig

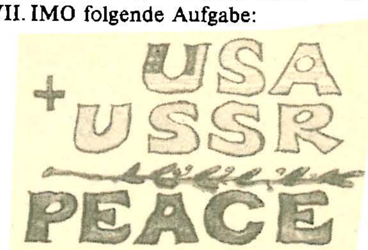
Haase, K./Lehmann, D.
Nanos Physik-Abenteuer
230 S. mit zahlr. Abb.
Bestell-Nr. 653 968 5 Preis: 12,00 M
Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin

Kaden, Friedrich
Rund um die Astronomie
144 S. mit zahlr. mehrfarbigen Abb.
Bestell-Nr. 630 545 9 Preis: 17,80 M
Der Kinderbuchverlag Berlin

Ein Teil der Bücher ist durch Vorbestellungen bei den Verlagen vergriffen. Sie sind möglicherweise beim Buchhandel z. Z. noch vorrätig. Wir weisen auf die Möglichkeit der Ausleihe in Bibliotheken hin.

Kryptogramm

Die SU- und die USA-Delegationsleiter stellten allen IMO-Teilnehmern der XXVII. IMO folgende Aufgabe:



Es war für alle, die diese Aufgabe lösten, besonders beeindruckend, daß dieses Kryptogramm (verschiedene Buchstaben ≙ verschiedene Ziffern) *eindeutig lösbar* ist.

Aufgaben für Arbeitsgemeinschaften Junger Mathematiker, herausgegeben im Bezirk Rostock

▲ 1 ▲ a) In der Tabelle findest du jeweils drei bzw. vier Begriffe. Jedesmal ist ein unpassender dabei. Welcher?

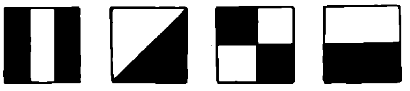
Hammer	Nagel	Zange		
Linde	Tulpe	Rose		
rot	dunkel	blau		
Reh	Rind	Gans	Hase	
Dreieck	Quadrat	Würfel	Trapez	
Meter	Kilometer	Gramm	Zentimeter	
45	103	82	78	
16	32	26	14	21

b) In der Tabelle ist jedesmal – wie in a) – ein Begriff der nicht dazugehört. Für jede der vier Gruppen gibt es aber hier zwei Lösungen für das Finden dieses Fremdlings:

Ruderboot	Handwagen	Fahrrad	Auto	
36	26	15	18	
64	16	25	14	
Reh	Fuchs	Hund	Fasan	Dachs

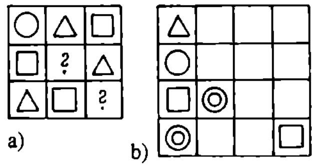
▲ 2 ▲ Welches a) der Quadrate und b) der Rechtecke gehört nicht in diese Reihe?

a)

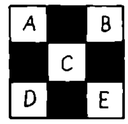


b)

▲ 3 ▲ a) Welche Figur fehlt logischerweise?
b) Welche Figuren müssen logischerweise in die leeren Quadrate eingesetzt werden?



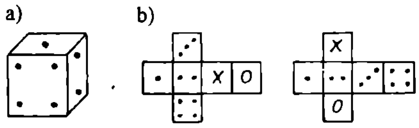
▲ 4 ▲ Ersetze die Buchstaben durch Zahlen!



A ist die Hälfte von C;
B ist die größte einstellige Zahl;
B ist das Dreifache von A;
C ist die Differenz von B und A;
die Summe auf der Diagonalen DCB beträgt 27.
Die Summe aller Zahlen ist 35.

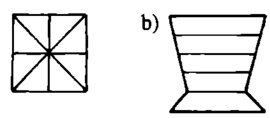
▲ 5 ▲ Welches der Würfelnetze gehört zum abgebildeten Würfel?

a) b)



▲ 6 ▲ a) Wer findet die meisten Dreiecke und
b) wer die meisten Trapeze?

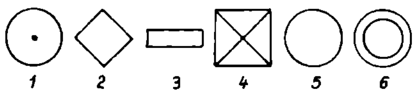
a) b)



▲ 7 ▲ a) Ein Rechteck hat die Seitenlänge $\overline{AB} = 40$ cm und $\overline{BC} = 30$ cm.
Wie lang ist die Seitenlänge eines Quadrates, das denselben Umfang hat wie das Rechteck *ABCD*?
b) Ein Rechteck hat einen Umfang von 18 cm. Welche verschiedenen Rechtecke gibt es mit diesem Umfang? Die Seitenlängen sollen dabei jedoch ganzzahlige Zentimeter sein.

▲ 8 ▲ Aus einem Stück Draht von 1,60 m Länge soll ein gleichschenkliges Dreieck gebogen werden. Alle Seitenlängen sollen Vielfache von 10 cm sein.
Welche verschiedene Möglichkeiten (verschiedene Dreiecke) gibt es?

▲ 9 ▲ Das Bild zeigt die Grundrisse von sechs Gegenständen. Es handelt sich um
a) einen Fußball,
b) einen leeren Blumentopf,
c) ein Zehnpfennigstück,
d) einen Würfel,
e) einen Kegel,
f) eine Pyramide.
Stelle fest, um welche Bilder es sich handelt!



1 2 3 4 5 6

▲ 10 ▲ Von den 27 Schülern einer Klasse können 14 radfahren, 19 schwimmen und 9 Schüler beides.
Wieviel Schüler können weder radfahren noch schwimmen?

▲ 11 ▲ Ulf, Ria, Beate, Astrid, Werner und Heiko vergleichen ihr Alter:
Astrid ist älter als Beate, aber jünger als Heiko. Ria wurde genau eine Woche früher als Heiko geboren. Ulf ist älter als Astrid. Heiko ist älter als Ulf. Werner ist der Jüngste. Schreibe die Vornamen nach dem Alter auf! Beginne mit dem jüngsten Kind!

▲ 12 ▲ Astrid, Bärbel, Cilli, Doris, Elke und Flora bilden eine Turnriege. Sie sollen sich nach der Größe aufstellen. Astrid ist größer als Doris, aber kleiner als Elke. Keine andere Schülerin ist größer oder so groß wie Cilli. Bärbel ist größer als Elke. Flora ist kleiner als Astrid; sie ist aber nicht die kleinste der Turnerinnen.
Finde heraus, in welcher Reihenfolge die Mädchen stehen!
Beginne mit dem größten Mädchen!

▲ 13 ▲ Wer wurde Sieger?
Petra, Ute und Renate belegten beim 60-m-Lauf die ersten drei Plätze. Die Siegerin und Renate trainieren in derselben Gruppe. Die Gewinnerin der Bronzemedaille ist Klassenkameradin von Ute, Renate wurde nicht Dritte.
Welchen Platz erhält jedes Mädchen?

▲ 14 ▲ Wer findet alle Wimpelarten?
Aus vier Sorten Stoff (rot, gelb, blau, schwarz) sollen zweifarbige Wimpel genäht werden.
Wieviel verschiedene Wimpelarten kann man herstellen?

▲ 15 ▲ a) Welche Zahl erhält man, wenn man die Differenz des Produkts der Zahlen 3 und 4 und des Quotienten der Zahlen 48 und 6 mit der Zahl 16 addiert?
b) Was ist größer,
- die Summe der Differenz der Zahlen 35 und 20 und der Zahlen 18 und 9 oder
- die Differenz der Summen der Zahlen 35 und 20 und der Zahlen 18 und 9?

▲ 16 ▲ Wir suchen alle Zahlen für die gleichzeitig gilt:
a) Die Zahlen sind zweistellig.
b) In allen Zahlen soll das Vielfache von 10 doppelt so groß sein wie das Vielfache von 1.
c) Die Zahlen sollen gerade sein.

▲ 17 ▲ Welche Zahlwörter enthält der folgende Satz?
Ein Seehund reißt ganz weit sein Maul auf, zeigt die Zähne und sagt: „Gute Nacht".

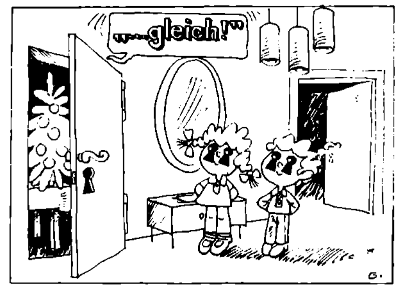
▲ 18 ▲ Zwei Radiergummis und zwei kleine Kalender kosten zusammen 2,40 M. Dabei ist ein Kalender genau 50 Pf teurer als ein Radiergummi.
Wie teuer ist jeder Gegenstand?

▲ 19 ▲ Ein Betrag von 300 M wird mit Geldscheinen zu 20 M und zu 50 M bezahlt. Es waren zusammen genau 9 Scheine.
Wieviel Scheine von jeder Art waren es?

▲ 20 ▲ Die 16 Busse eines Verkehrsbetriebes haben insgesamt 512 Plätze. Es sollen 160 Personen befördert werden.
Wieviel Busse werden benötigt?

Dr. M. Bendler/Dr. W. Luchtmann, IfL Jacques Duclos, Rostock

In freien Stunden · alpha-heiter

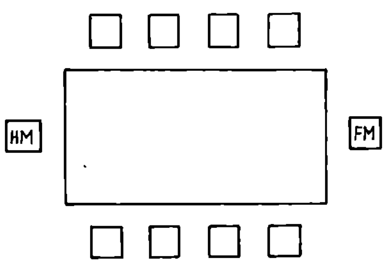


aus: LVZ, Guckuck

Sitzordnung

Zur Silvesterfeier hatte das Ehepaar Müller die vier Ehepaare A, B, C und D eingeladen und sie an den Längsseiten des Tisches plaziert. Herr Müller (HM) und Frau Müller (FM) hatten an den Stirnseiten des Tisches Platz genommen. Für die Sitzordnung der Gäste galt: Eheleute saßen stets nebeneinander; die Frau zur rechten Seite des Ehemannes. Herr A saß neben Frau C und ihm gegenüber saß Frau D. Herr C saß neben Frau Müller.

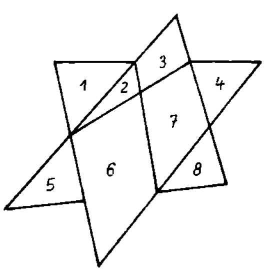
aus: Leipziger Volkszeitung



Weihnachtliches Vierfarbenproblem

Die Felder in diesem Stern sind mit vier Farben auszumalen. Benachbarte Felder dürfen aber nicht die gleiche Farbe erhalten.

aus: Rohacz, Prag



Das Weihnachtsgeschenk

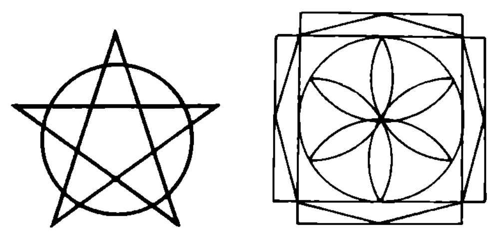
Maximilian und seine Schwester Franziska legen ihre Ersparnisse zusammen, um für die Mutter ein Geschenk zu kaufen. Dabei stellen sie fest, daß ihre Ersparnisse zusammen 72 Mark betragen und daß Franziska 8 Mark mehr als Maximilian gespart hat. Wieviel Mark hat jedes der beiden Geschwister gespart?

aus: Quant, Moskau

In einem Zug

Die beiden Figuren sind in einem Zug nachzuzeichnen ohne eine Linie mehrfach zu zeichnen.

aus: Füles, Budapest



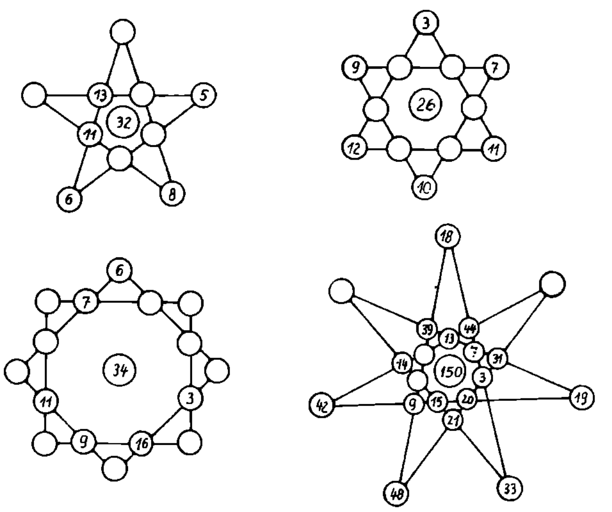
Wintersport

Zehn Dinge sind auf dem unteren Bild anders. Schaut genau hin! Bestimmt findet ihr sie heraus.

aus: NBI, Berlin

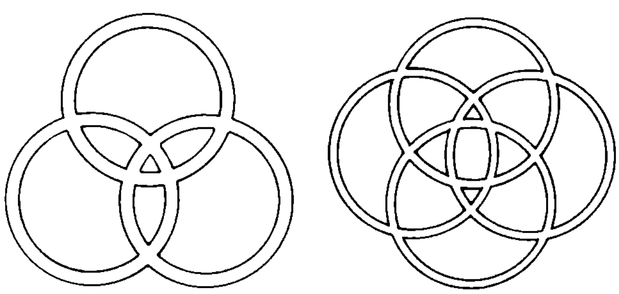
Magisches Zahlenspiel

Ergänze die beiden Sterne so, daß sich als Konstante die im Zentrum jedes Sterns stehende Zahl ergibt! *Kermeth Kelsey, London*



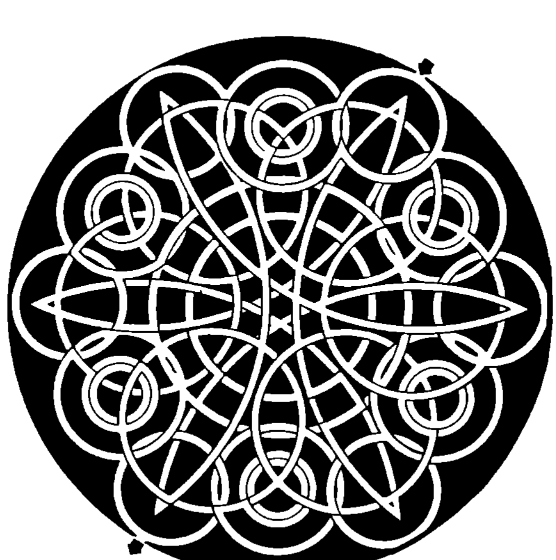
Wunderringe

Vervollständige die Ringe so, daß sie ineinandergehängt und nicht zu trennen sind, obwohl keiner von ihnen durch den anderen geht. *aus: urcina, Bukarest*



Labyrinth

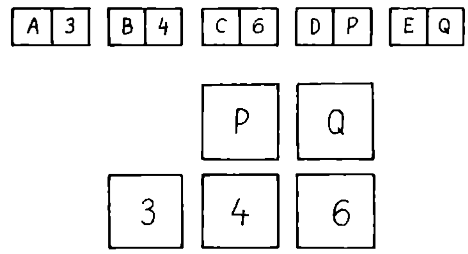
Wer findet am schnellsten den Weg durch dieses schöne Ornament? *aus: Füles, Budapest*



Mary und Jane im Disput

Fünf Karten liegen auf einem Tisch, wie das Bild zeigt. Jede Karte hat auf einer Seite einen Buchstaben und auf der anderen eine Grundziffer. Jane sagt: „Wenn sich ein Vokal auf einer Seite einer Karte befindet, dann befindet sich auf der anderen Seite eine gerade Zahl." Mary zeigt, daß Jane nicht recht hat, indem sie eine Karte umdreht. Welche Karte drehte Mary um?

aus einem finnischen Mathematikwettbewerb



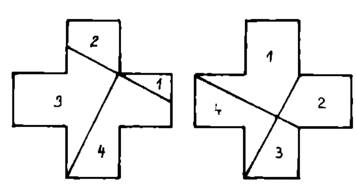
Süße Sache

Du sollst eine Tafel Schokolade, die aus 6 mal 8 Stücken besteht, in 48 Stückchen teilen. Brich immer entlang einer Riefe! Wieviel Brüche mußt du mindestens machen? *aus: Mathematical Spectrum, Sheffield*

Kreuz und quer

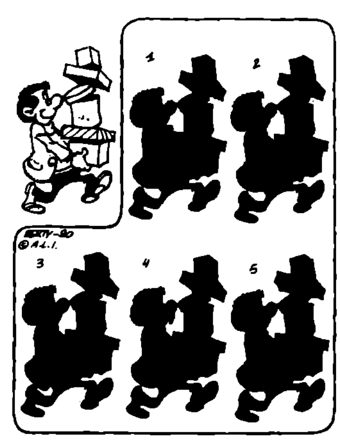
Zu Silvester teilt Marie-Luise zwei Legespiele aus. Wer ist wohl der Schnellste? Die jeweils vier Teile sind zu einem Quadrat zusammenzulegen.

aus: Matematicko Fizički List, Beograd



So eine Bescherung

Herr Lehmann kommt mit Weihnachtsgeschenken nach Hause. Von ihnen wurden Schattenrisse angefertigt. Aber nur einer davon ist genau übereinstimmend mit dem Original. Welcher? *aus: Troll, Berlin*



Edmund Halley –
der ungläubige Mathematiker

Das Wiedererscheinen des Halleyschen Kometen Anfang 1986 und seine erstmalige umfangreiche Erforschung durch mehrere Raumsonden haben den Namen des englischen Astronomen und Mathematikers E. Halley weltweit ins Blickfeld der Öffentlichkeit gerückt und – wie erwartet – auch eine gewisse philatelistische Resonanz[1]) gefunden. Halley hatte am Ende des 17. Jh. die Bahnen der in den Jahren 1531, 1607 und 1682 beobachteten Kometen (später bezog er auch noch die Kometenerscheinungen von 1305, 1380 und 1456 ein) mit Hilfe der von Newton geschaffenen neuen mathematischen Hilfsmittel berechnet, aus ihrer bemerkenswerten Ähnlichkeit die Hypothese abgeleitet, daß es sich in allen Fällen um den gleichen, die Sonne auf einer langgestreckten elliptischen Keplerbahn umlaufenden kleinen Himmelskörper handelt, und sein Wiedererscheinen für 1758 vorausgesagt. Als dies eintraf (der Komet wurde zuerst am 25. 12. 1758 von dem sächsischen Bauern und Amateurastronomen Johann Georg Palizsch gesehen), hieß der Komet fortan Halleyscher Komet. Nachdem Kometen jahrhundertelang als Zuchtruten Gottes und Unglücksbringer abergläubisch gefürchtet worden waren und sogar ein Galilei die Ansicht des Astronomen Tycho de Brahe, Kometen seien bewegliche Himmelskörper ähnlich den Planeten, verworfen und verspottet hatte, ist der exakte Nachweis der Bahneigenschaften der Kometen und ihrer periodischen Wiederkehr durch Halley ein bedeutender Schritt auf dem Weg zu einem materialistisch-naturwissenschaftlichen Weltbild gewesen. Damit ist jedoch die Bedeutung Halleys keineswegs ausgeschöpft, und wir wollen hier gerade den anderen Seiten seiner vielseitigen wissenschaftlichen Tätigkeit einige Bemerkungen widmen.

Edmund (oder Edmond) Halley wurde am 8. 11. 1656 als Sohn eines wohlhabenden Seifensieders in Haggerston nahe London geboren. Nach einem Studium in Oxford unternahm er 1676 eine Reise zur Insel St. Helena im Südatlantik, um den ersten Fixsternkatalog der südlichen Himmelshalbkugel zusammenzustellen. Diese Arbeit wurde 1678 mit der Aufnahme in die Royal Society, die britische Akademie der Wissenschaften, gewürdigt. 1698 bis 1700 unternahm er zwei weitere Forschungsreisen in den Atlantik, um die Deklination des Magnetkompasses, d. h. seine ortsabhängige Abweichung von der Nordrichtung, systematisch zu untersuchen. Als Ergebnis dieser Expeditionen erschien 1701 die erste Karte der Mißweisungen im Druck, auf der die Orte gleicher Abweichung übersichtlich durch Kurven verbunden waren. Übrigens gab Halley auch die erste Erklärung für den Erdmagnetismus durch die Annahme großer Metallmassen im Erdinnern und deutete 1718 das Nordlicht als erdmagnetisches Phänomen. Weitere Arbeiten Halleys betrafen u. a. die Ursache und Richtung von Winden und Meeresströmungen und die Herkunft des Salzgehaltes der Weltmeere. Die bis hier sichtbare Ausrichtung astronomischer und geographisch-geodätisch-geophysikalischer Forschung auf die Bedürfnisse der Schifffahrt ist – besonders in England – ganz typisch für die Naturwissenschaft im 17. und 18. Jh. Ebenso typisch ist auch die zwischenzeitliche Beschäftigung mit rein mathematischen Problemen, die manchmal, jedoch keineswegs immer von naturwissenschaftlich-technischen Fragen angeregt wurden. Auch Halley publizierte Arbeiten über Arithmetik, Algebra und Geometrie, bewies z. B. 1695 elementar die Reihenentwicklung

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \quad (|x| < 1),$$

leistete aber auch mit der Berechnung von Tabellen der Sterblichkeitsquote (in Abhängigkeit von Alter und Geschlecht) einen wichtigen Beitrag zum sich damals stürmisch entwickelnden Versicherungs- und Rentenwesen. 1703 wurde er als Nachfolger des bedeutenden Mathematikers John Wallis auf den berühmten Geometrielehrstuhl der Universität Oxford berufen. Während seiner 17 Jahre in diesem Amt übersetzte er auch antike Mathematiker aus dem Griechischen, insbesondere 1707 die sphärische Geometrie des Menelaos (um 100) und 1710 die Kegelschnittslehre des Apollonios von Perge (um 262 bis 190 v. u. Z.). 1720 wurde er als Nachfolger von John Flamsteed zum Royal Astronomer und Direktor der Sternwarte in Greenwich berufen (vgl. hierzu *alpha* Heft 2, 1985, S. 40 bis 42). Zieht man noch in Betracht, daß er von 1713 bis 1721 nebenamtlich Sekretär der Royal Society war, so hat Halley fast alle damals für einen Mathematiker und Astronomen erreichbaren höchsten Ämter innegehabt.

Die vielleicht wichtigste Seite im Leben und Schaffen Halleys betrifft seine Beziehungen zu Newton und seinen Anteil an der Entstehung von Newtons fundamentalem Buch „Mathematische Prinzipien der Naturphilosophie“. Gegen Ende des 17. Jh. lagen als bereits mathematisch formulierte Bewegungsgesetze die Keplerschen Gesetze der Planetenbewegung, das Galileische Fallgesetz und das Huygenssche Pendelgesetz vor. Das Nachdenken über den gemeinsamen Kern aller dieser Gesetze war ein aktuelles Problem geworden, um dessen Lösung die führenden Gelehrten der damaligen Zeit rangen. Um 1679 wußten Halley, Christopher Wren und Robert Hooke bereits, daß die Anziehungskraft zwischen verschiedenen Massen dem Quadrat ihres Abstandes umgekehrt proportional sein muß. Es fehlte ihnen jedoch der mathematische Kalkül, um hieraus weiterreichende Schlußfolgerungen zu ziehen wie z. B. die Begründung der Ellipsengestalt der Planetenbahnen. Speziell für die Lösung dieses Problems setzte der wohlhabende Halley 1684 sogar einen Preis aus. Bekanntlich lösten Newtons „Pricipia“ (1686/87) das Problem in vorbildlicher Weise und wurden für Jahrhunderte zum Maßstab aller exakten Naturwissenschaft. Halley, der Newton immer wieder mit Fragen provoziert und zur Niederschrift seines umfangreichen Werkes gedrängt hatte, zahlte schließlich sogar die Druckkosten aus seiner eigenen Tasche. Im Vorwort der „Pricipia“ würdigte Newton Halleys Verdienst mit folgenden Worten:

Bei der Herausgabe dieses Werkes hat Edmond Halley, dieser höchst scharfsinnige und vielseitig gelehrte Mann, vielfache Mühe verwandt. Er hat nicht nur die Korrektur und die Holzschnitte besorgt, sondern war überhaupt auch derjenige, welcher mich zur Abfassung dieses Werkes veranlaßt hat. Da er nämlich von mir einen Beweis der Gestalt, welche die Bahnen der Himmelskörper haben, verlangt hatte; so bat er mich, ich möchte denselben der Königlichen Gesellschaft mitteilen. Diese bewirkte hierauf durch ihre Aufforderung und Oberleitung, daß ich anfing, an die Herausgabe des Werkes zu denken.

Der Sturz des mittelalterlichen Weltbildes durch die sich mathematischer Mittel bedienende Naturwissenschaft stieß auf erbitterte Feindschaft seitens kirchlicher und anderer reaktionärer Kräfte, und die begrifflichen Unklarheiten, die der Fluxionsrechnung Newtons (der heutigen Differentialrechnung entsprechend) anhafteten, boten einen willkommenen Angriffspunkt. Durch scharfe Kritik an den logisch nicht hinreichend fundierten „verschwindenden Zuwächsen“, „ersten und letzten Verhältnissen“ Newtons usw., die sich aber letztlich positiv auf die logische Durcharbeitung der Infinitesimalrechnung auswirkte, hat sich vor allem der englische Bischof George Berkeley hervorgetan. Seine berühmte Streitschrift von 1734 richtete sich aber nicht direkt gegen den inzwischen verstorbenen, durch ein Staatsbegräbnis geehrten und praktisch zum Nationalhelden gewordenen, überdies überaus fromm gewesenen Newton, sondern gegen seinen als Freigeist berüchtigten Mitstreiter Halley. Ihr Titel lautet in deutscher Übersetzung: Der Analytiker, oder eine Erörterung, gerichtet an einen ungläubigen Mathematiker, worin untersucht wird, ob der Gegenstand, die Prinzipien und die Schlußweisen der modernen Analysis deutlicher begriffen oder einleuchtender hergeleitet sind als die religiösen Geheimnisse und Glaubenspunkte.

Der zu dieser Zeit bereits 78jährige Halley, der auf ein Lebenswerk von rund 80 wissenschaftlichen Publikationen zurückblikken konnte, hat sich selbst nicht mehr zu den Vorwürfen Berkeleys geäußert. Er konnte darauf vertrauen, daß inzwischen eine neue Generation von Mathematikern und Naturwissenschaftlern herangewachsen war, die die Leistungsfähigkeit der von Newton und Leibniz geschaffenen Infinitesimalmethoden durch stete Anwendung überzeugend demonstrierten. Halley starb am 25. 1. 1742 in Greenwich. *P. Schreiber*

¹) u. a. Großbritannien 4 Werte, Nikaragua 6 Werte, SR Vietnam 3 Werte

Fünf harte Nüsse

Aufgaben der Aufnahmeprüfung der Mathematischen Fakultät des Moskauer Staatlichen Pädagogischen Instituts V. I. Lenin (schriftliche Prüfung 1983)

1. Berechne!

$$\frac{8{,}4\cdot\left(1\frac{5}{8}+\frac{17}{18}\right)-15\frac{59}{60}}{646{,}8:21}$$

2. Löse die Ungleichung!

$$\left(\frac{2}{9}\right)^{x^2+x} \geqq (20{,}25)^{2x-7}$$

3. Löse die Gleichung!
$\sin x - \cos x = -1$

4. Die Grundfläche der Pyramide *SABCD* sei das Quadrat *ABCD*, dessen Seitenlänge sei *a*. Die Kante *BS* steht senkrecht auf der Grundfläche und habe die Länge $2a$. Bestimme den Umfang der Schnittfigur, die durch die Seite *AD* und die Mitte der Kante *BS* geht!

5. Einem Kreis mit dem Radius *R* sei ein gleichschenkliges Dreieck mit einem Winkel von 120° umbeschrieben.
Bestimme die Länge der Dreiecksseiten!

Lösungen

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ Ein Onkel kam, um seine Nichten zu besuchen. Vor dem Weggehen gab er ihnen eine gewisse Anzahl Dollar mit dem Vorschlag, daß die Älteste die Hälfte, die Mittlere ein Viertel und die Jüngste ein Fünftel bekommt. Die Kinder versuchten, das Geld zu teilen, aber es gelang ihnen nicht wegen der Brüche. Als ihnen ihr Vater einen Dollar lieh, führten sie die Division nach den von ihrem Onkel genannten Brüchen durch und zahlten dann sogar noch den einen Dollar an ihren Vater zurück. Welche „gewisse Anzahl Dollar" würde diesen Bedingungen entsprechen?

Lösung: Die Summe der drei Brüche $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ ist $\frac{19}{20}$. Der Onkel gab seinen Nichten nicht den ganzen Betrag. Er ließ $\frac{1}{20}$ daran fehlen. Was er seinen Nichten gab, waren 19 Dollar.
Die Kinder konnten das Geld nicht teilen. Aber als der Vater ihnen 1 Dollar lieh, hatten sie 20 Dollar.

Die Älteste nahm $\frac{1}{2}\cdot \$\,20 = \$\,10$,

die Mittlere nahm $\frac{1}{4}\cdot \$\,20 = \$\,5$,

die Jüngste nahm $\frac{1}{5}\cdot \$\,20 = \$\,4$.

$10 + 5 + 4 = 19$, so daß sie ihrem Vater den geliehenen $ 1 zurückgeben konnten.

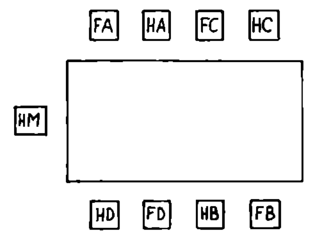
▲2▲ Ein Fotograf verlangt 3 Fr. für die Entwicklung eines Schwarzweißfilms, dazu 0,80 Fr. für jeden Abzug eines Fotos im Format 9×13. Ein zweiter Fotograf entwickelt den Film kostenlos, aber der Abzug eines jeden Fotos im gleichen Format kostet 0,90 Fr.
Mathieu möchte einen Film mit 20 Aufnahmen und Amélie einen Film mit 36 Aufnahmen entwickeln lassen.
Wohin würdest du an ihrer Stelle gehen?
Wieviel werden sie bezahlen müssen?

Lösung: Bei dem ersten Fotografen kosten 20 Aufnahmen
3 Fr. + 20 · 0,80 F. = 19 Fr.
und 36 Aufnahmen
3 Fr. + 36 · 0,80 Fr. = 31,80 Fr.
Bei dem zweiten Fotografen kosten 20 Aufnahmen
20 · 0,90 Fr. = 18 Fr.
und 36 Aufnahmen
36 · 0,90 Fr. = 32,40 Fr.
Mathieu geht zum zweiten Fotografen und bezahlt 18 Fr., Amélie zum ersten und bezahlt 31,80 Fr.

▲3▲ Löst die fünf „geographischen" Zahlenrätsel (s. Bild)!
In jedem Rätsel entsprechen gleiche Buchstaben gleichen Ziffern, und verschiedene Buchstaben verschiedenen Ziffern.
Lösung: $2^7 = 128$; $19^2 = 361$; $289 = 17^2$; $87^2 = 7659$; $6084 = 78^2$.

Lösungen zu
In freien Stunden · alpha-heiter

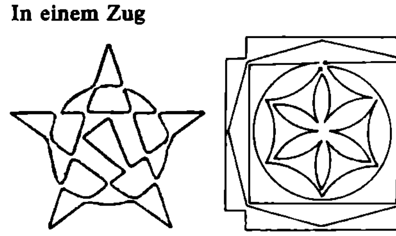
Sitzordnung



Weihnachtliches Vierfarbproblem
Es werden z. B. gezeichnet: 1 und 6 gelb; 3 und 4 rot; 2 und 8 blau; 5 und 7 grün.

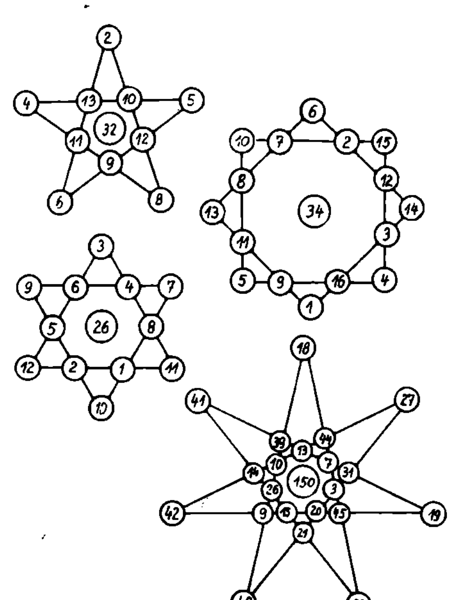
Das Weihnachtsgeschenk
$72 - 8 = 64$; $64 : 2 = 32$; $32 + 8 = 40$.
Maximilian hat 32 Mark, Inge 40 Mark gespart.

In einem Zug

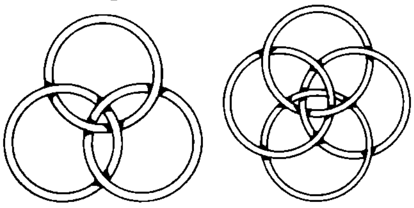


Wintersport
Die Lösung sei dem Leser selbst überlassen.

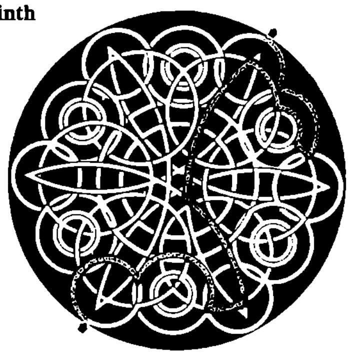
Magisches Zahlenspiel



Wunderringe



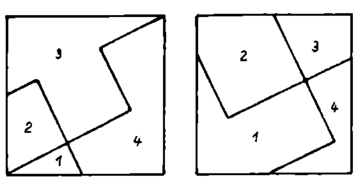
Labyrinth



Mary und Jane im Disput
Wenn Jane nicht recht hat, dann gibt es eine Karte, die auf einer Seite eine ungerade Zahl hat. Diese Karte kann also keinen Konsonanten und keine gerade Zahl auf einer der Seiten haben. Daher kann Jane als einzige Karte die „3“ genommen haben. A ist also richtig.

Süße Sache
Es sind 47 Brüche zu machen.

Kreuz und quer



So eine Bescherung
Nur Schattenriß Nr. 2 stimmt genau mit dem Original überein.

alpha-Wettbewerb
Heft 1/86 (Fortsetzung)

Ma 10/12 ■ 2660

$$\frac{19}{95}=\frac{20-1}{100-5}=\frac{20-1}{5(20-1)}=\frac{1}{5}.$$

$$\frac{199\ldots9}{99\ldots95}=\frac{200\ldots00-1}{100\ldots00-5}=\frac{2\cdot10^n-1}{10^{n+1}-5}$$

$$=\frac{5^n\cdot2^{n+1}-1}{5(5^n\cdot2^{n+1}-1)}=\frac{1}{5}.$$ Brüche

dieser Art ergeben gekürzt stets $\frac{1}{5}$.

Ma 10/12 ■ 2661

Aus $\sin\frac{\beta}{2}=\frac{4}{w\beta}$ folgt $w_\beta=4:\sin\frac{\beta}{2}$.

Aus $w_\beta:5=\sin(90^\circ-\beta):\sin\frac{\beta}{2}$

folgt $w_\beta=\frac{5\cdot\cos\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}$. Durch Gleichsetzen erhalten wir $4=5\cdot\cos\beta$, $\cos\beta=\frac{4}{5}$.

Wegen $\cos\beta=\frac{a}{c}$ gilt $\frac{a}{c}=\frac{4}{5}$, also $a=\frac{4}{5}c$.

Ferner gilt $a^2+9^2=c^2$,

also $\left(\frac{4}{5}c\right)^2+81=c^2$, $c=15$. Daraus folgt

$a=\frac{4}{5}\cdot15=12$ und $b=4+5=9$.

Die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks ABC sind 12 cm, 9 cm und 15 cm lang.

Ma 10/12 ■ 2662 Wir übertragen die linke Seite der Gleichung ins dekadische Positionssystem und erhalten

$x\cdot n^2+y\cdot n^1+z\cdot n^0=(n+1)^2$ bzw.

$xn^2+yn+z \qquad =(n+1)^2$. Es folgt

$xn^2+yn+z=n^2+2n+1$.

Aus dieser Beziehung läßt sich ablesen:

$x=1$; $y=2$; $z=1$.

Also gilt: $[121]_n=(n+1)^2$.

Die vorgegebene Gleichung gilt nur für $x=1$, $y=2$ und $z=1$, aber für jedes $n>2$.

Beispiele:

(1) $[121]_4=(4+1)^2$
$1\cdot4^2+2\cdot4+1=25$

(2) $[121]_8=(8+1)^2$
$1\cdot8^2+2\cdot8+1=81$

Ph 6 ■ 192 In einer Stunde fließen 936 m³ durch den Kanal.

Ph 7 ■ 193 Das Wasser drückt mit einer Kraft von 15 N auf die Öffnung.

Ph 8 ■ 194 Es werden rund 181 kg Braunkohle pro Jahr verbraucht.

Ph 9 ■ 195 Wird die Zeit in Sekunden und die Fallbeschleunigung in m/s² angegeben, erhält man für die Fallzeit etwa 5,45 Sekunden und für die Fallhöhe etwa 146 m.

Ph 10/12 ■ 196 Bei der Spaltung von 1 g Uran werden 85 520 MJ an Energie frei. Das entspricht dem Heizwert von etwa 2,85 Tonnen Steinkohle.

Ch 7 ■ 153 Das menschliche Skelett enthält 1,5 kg Phosphor und 4,0 kg Kalziumoxid.

Ch 8 ■ 154 Die Gesamtmolzahl des Sauerstoffs beträgt 8622,9 mol.

Ch 9 ■ 155 Im Gleichgewicht liegen folgende Stoffmengen vor: 1,5 l Schwefeldioxid, 78,25 l Sauerstoff, 13,5 l Schwefeldioxid. Das Gesamtvolumen im Gleichgewicht beträgt 93,25 l.

Ch 10/12 ■ 156 Das Molekül enthält 4 Doppelbindungen.

Lösungen zu:
Knobeleien mit dem Taschenrechner
(Heft 5, S. 106)

▲1▲ SO ILSE HOL ESSIG; ILSE

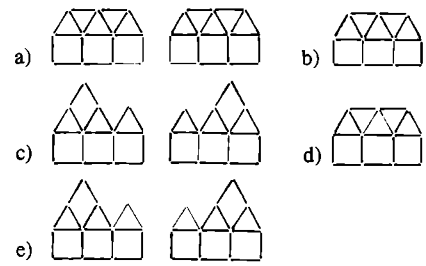
▲2▲

I
E I
S E I
S I E B
S I L B E
S E I L
E I L
I E
E

▲3▲ GLEIS, EBBE, OBOE, LEI, OELIG, GLOSSE, ESEL, GEOLOGE, SEEIGEL

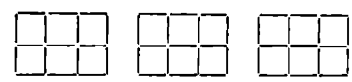
Lösungen zu „Knobel-Wandzeitung“
Heft 5/86, S. 109

▲1▲ Geometrische Vielfalt

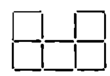


▲2▲ Hölzchen-Lokomotive

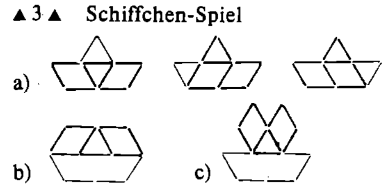
a)



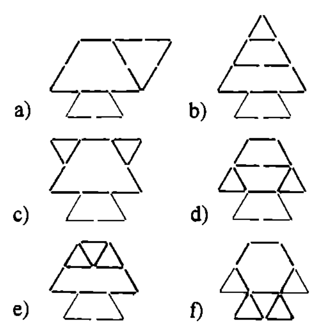
b) 2 Hölzchen sind umzulegen:



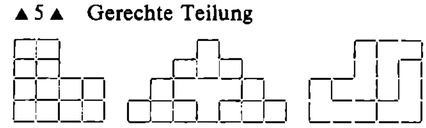
▲3▲ Schiffchen-Spiel



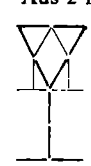
▲4▲ Hölzchen-Tischlampe Die Abbildungen zeigen je eine Legemöglichkeit:



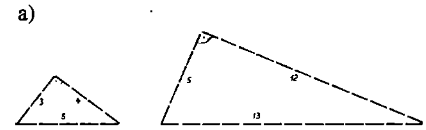
▲5▲ Gerechte Teilung



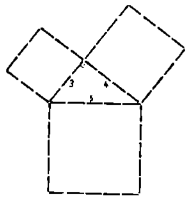
▲6▲ Aus 2 mach 1



▲7▲ Rechtwinklige Dreiecke
a)

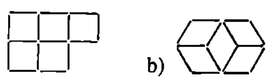


b) Das Tripel (3, 4, 5) ist offenbar unter den pythagoreischen Tripeln mit positiven Komponenten dasjenige mit der kleinsten Komponentensumme. Also benötigt man zum Auflegen der Figur mindestens $4(3+4+5)=48$ Hölzchen.

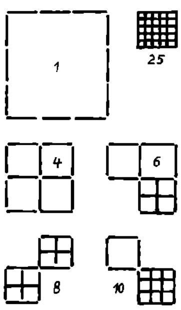


▲8▲ Fünf Vierecke

a) b)

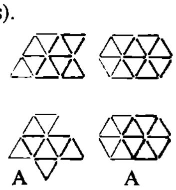


▲9▲ Mit 12 Hölzchen
Man kann mit 12 Hölzchen höchstens 25 Quadrate auflegen (rechnet man noch die 30 größeren in der Figur enthaltenen Quadrate hinzu, so sind es 55 Quadrate). Die anderen Abbildungen zeigen Legemöglichkeiten für weniger Quadrate.

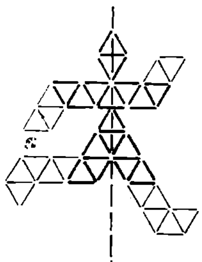


▲10▲ Verschiebung und Drehung
Man muß im Falle a) jeweils 7 Hölzchen und im Falle b) 6 bzw. 7 Hölzchen umlegen (beim regelmäßigen Sechseck liefern Verschiebung und Drehung dasselbe Ergebnis).

a) b)



▲11▲ Spiegelung
Hölzchenpaare bzw. Hölzchen, die bezüglich der Achse spiegelbildlich liegen (dick gezeichnet) können liegenbleiben. 30 Hölzchen aber besitzen kein Spiegelbild, müssen folglich umgelegt werden.



▲12▲ Flächenberechnung

$A_1 = 3 + \frac{3}{4}\sqrt{3} \approx 4{,}30$; $A_3 = \frac{3}{2}\sqrt{3} \approx 2{,}60$;

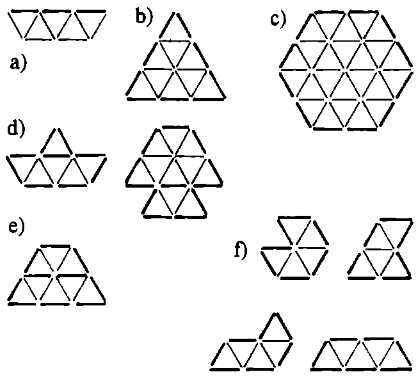
$A_4 = \frac{11}{4}\sqrt{3} \approx 4{,}76$; $A_{5,1} = 12$; $A_{5,2} = 16$;

$A_{5,3} = 16$; $A_8 = 5$; $A_{10,1} = \frac{5}{4}\sqrt{3} \approx 2{,}17$;

$A_{10,2} = \frac{3}{2}\sqrt{3} \approx 2{,}60$; $A_{11} = 8\sqrt{3} \approx 13{,}86$

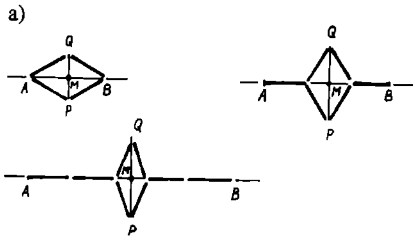
(Angaben in FE: 1 FE = 1 (LE)²)

▲13▲ Geometrische Konstruktionen mit Hölzchen



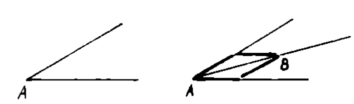
▲14▲ Grundkonstruktionen mit Hölzchen und Lineal

a)



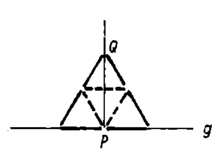
Mit Hölzchen ermittelt man die Punkte P und Q, die man markiert. Die Gerade PQ (die man nach Wegnahme der Hölzchen mit dem Lineal zeichnet) schneidet die Gerade AB im Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$. Begründung: Die Diagonalen im Rhombus halbieren einander.

b)



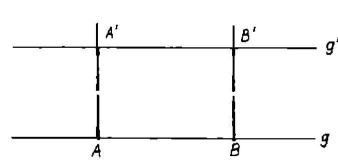
Mittels eines aufgelegten Hölzchen-Rhombus bestimmt man den Punkt B. Der Strahl AB ist die gesuchte Winkelhalbierende. Begründung: Die Diagonalen im Rhombus halbieren die Innenwinkel.

c)



Mit Hilfe von Elementardreiecken bestimmt man den Punkt Q. Die Gerade PQ ist die gesuchte Senkrechte auf g. Begründung: Im gleichseitigen Dreieck gilt: Seitenhalbierende = Höhe.

d)



Man legt auf g zwei verschiedene Punkte A und B fest, errichtet in ihnen die Senkrechte (vgl. c)) und ermittelt mit je zwei Hölzchen die Punkte A' und B'. Die Gerade $A'B'$ verläuft parallel zu g.

▲15▲ Hölzchen-Gleichungen

7 + 9 = 16	VI − IV = III
8 + 2 = 6	XII + VIII = IV
8 + 4 = 10	C − XLI = IX

▲16▲ Zerlegung der 18
a) $2+8+8=18$, b) $6+6+6=18$,
$0+9+9=18$, c) $3+6+9=18$,
$4+6+8=18$, $5+5+8=18$,
d) $1+8+9=18$, $3+7+8=18$,
$4+5+9=18$, e) $2+7+9=18$,
$5+6+7=18$, f) $4+7+7=18$.

▲17▲ Hölzchen-Ungleichungen

a) $5+3>8-5$
$9-3>8-5$
$5+3>6-6$
$6-3>6-6$
$9-3>6-6$
$9-3>9-6$
$5+3>9-6$

b) $8-4<8+1$
$8-4<6+7$
$0+4<8+1$
$0+4<6+7$
$6+4<6+7$

c) $7+2>3-3$
$7-2>3-9$
$7+2>5-3$
$7-2>6-3$

▲18▲ Hölzchen-Brüche

$\frac{\text{II}}{\text{X}}$ $\frac{\text{II}}{\text{XVI}}$ $\frac{\text{II}}{\text{LI}}$

Lösungen zum alpha-Wettbewerb
Heft 2/86

Ma 5 ■ 2663 Die letzte Grundziffer der kleineren Zahl muß 8 sein. Dann ist 8 aber auch die mittlere Grundziffer der größeren Zahl. Aus der angegebenen Summe erkennt man nun leicht, daß die beiden Summanden 88 und 880 lauten müssen.

Ma 5 ■ 2664 Die zweite Gruppe muß um 10.00 Uhr aufbrechen, da sie in einer Stunde die gleiche Strecke zurücklegt, für die die erste Gruppe 3 Stunden benötigt. Beide Gruppen treffen um 11.00 Uhr gleichzeitig in Neuendorf ein.

Ma 5 ■ 2665 a) Vom Schüler Lutz Schulz können wir mit absoluter Sicherheit Vor- und Zunamen angeben.
b) Es gibt vier Schüler, die mit Vornamen Lutz, aber nur drei Schüler, die mit Zunamen nicht Schulz heißen.

Ma 5 ■ 2666
a) Der Thälmann-Pionier erzielte 35 Punkte.
b) Wir rechnen rückwärts: $100 - 10 = 90$, $90 : 2 = 45$, $45 - 10 = 35$.

Ma 5 ■ 2667 Insgesamt sind 90 Fahrgäste in den Abteilen. Wären in jedem Abteil gleich viele Personen, dann wären es je 30 Personen. Wegen $42-12=30$ waren ursprünglich im ersten Abteil 42 Personen. Wegen $27+12-9=30$ waren ursprünglich im zweiten Abteil 27 Personen. Wegen $21+9=30$ waren ursprünglich im dritten Abteil 21 Personen.

Ma 5 ■ 2668 Die Zahl 180 läßt sich nur wie folgt in zwei Faktoren a und b (mit natürlichen Zahlen a und b) zerlegen:

$$180 = 180\cdot 1 = 90\cdot 2 = 60\cdot 3 = 45\cdot 4 = 36\cdot 5 = 30\cdot 6 = 20\cdot 9 = 18\cdot 10 = 15\cdot 12.$$

Dabei ist wegen $15 - 12 = 3$ nur für $a = 15$ und $b = 12$ auch die Bedingung (1) erfüllt.

Ma 6 ■ 2669 Vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen bestehen stets aus zwei geraden und zwei ungeraden Zahlen. Die Summe zweier gerader, aber auch die Summe zweier ungerader Zahlen ist stets eine gerade Zahl. Deshalb ist die Summe aus vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen stets eine gerade Zahl, also keine Primzahl.

Ma 6 ■ 2670 a)
$1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$; 1000 km entsprechen $\frac{4}{15}$ des Weges.
$\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$; 1500 km entsprechen $\frac{6}{15}$ des Weges.
$\frac{1}{3} = \frac{5}{15}$; 1250 km entsprechen $\frac{5}{15}$ des Weges.
b) Die Gesamtstrecke betrug
$(1500 + 1250 + 1000)\,\text{km} = 3750\,\text{km}$.

Ma 6 ■ 2671 Der Vater ist
$40 + 5 = 45$ Jahre alt. Lotte ist
$45 : 3 = 15$ Jahre alt. Emil ist
$15 - 4 = 11$ Jahre alt. Paul ist
$11 - 3 = 8$ Jahre alt.

Ma 6 ■ 2672 Da 26 Schüler radfahren und 12 Schüler schwimmen können und jeder Schüler mindestens eins von beiden kann, gehören der Klasse mindestens 26, höchstens 38 Schüler an. Da die Anzahl der Schüler durch 6 teilbar ist, könnten es 30 oder 36 Schüler sein. Von diesen beiden Zahlen erfüllt nur 30 alle Bedingungen. Diese Klasse besuchen 30 Schüler.

Ma 6 ■ 2673 In $1\frac{1}{2}$ Tagen würden 3 Hühner doppelt so viele Eier wie $1\frac{1}{2}$ Hühner, also 3 Eier legen. Ein Huhn würde in dieser Zeit den dritten Teil, also 1 Ei legen. Also würden 7 Hühner in $1\frac{1}{2}$ Tagen 7 Eier legen. Wegen 6 Tage gleich $4\cdot 1\frac{1}{2}$ Tage, würden 7 Hühner in 6 Tagen 28 Eier legen.

Ma 7 ■ 2674 Würde man die Fenster ohne Läden mit je einem Laden der kompletten Fenster versehen, dann fehlte an jedem Fenster ein Laden. Also braucht man 28 neue Fensterläden.

Ma 7 ■ 2675
a) Heidrun schoß $5 + 8 + 10 + 7 + 6 = 36$ Ringe und gewann; denn Günther schoß nur $3 + 5 + 6 + 7 + 9 = 30$ Ringe.
b) Heidrun schoß die 10. Begründung: Da Günther mit den letzten vier Schüssen die neunfache Ringzahl des ersten Schusses erzielte, muß sein erster Schuß die 3 gewesen sein, usw.

Ma 7 ■ 2676

$$\frac{378\cdot 436 - 56}{378 + 436\cdot 377} = \frac{377\cdot 436 + 436 - 56}{377\cdot 436 + 378} = \frac{377\cdot 436 + 380}{377\cdot 436 + 378};$$

da der Zähler größer ist als der Nenner, ist die Zahl größer als 1.

Ma 7 ■ 2677 Die Anzahl n der Schüler dieser Klasse muß ein Vielfaches von 9, 6 und 3 sein, also ein Vielfaches von 18 sein. Wegen $20 < n < 40$ gilt $n = 36$.

Zensur	1	2	3	4
Schüler	4	12	14	6

Ma 8 ■ 2678 Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises liegt sowohl auf der Symmetrieachse zu $\overline{AB}$ als auch auf der Senkrechten zu g durch B.

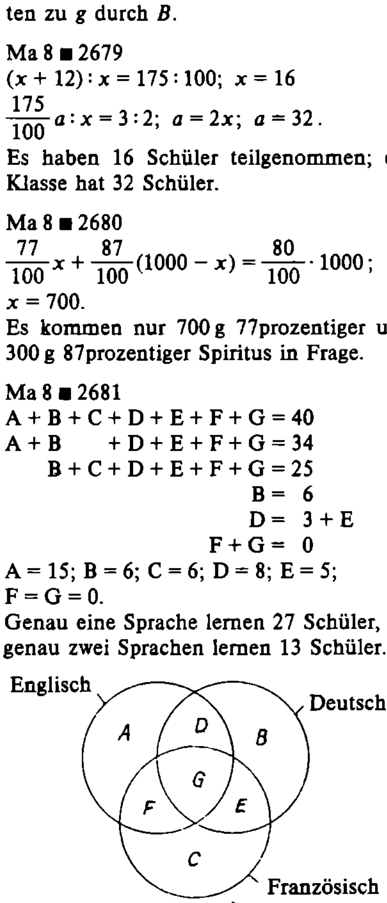
Ma 8 ■ 2679
$(x + 12) : x = 175 : 100$; $x = 16$
$\frac{175}{100}a : x = 3 : 2$; $a = 2x$; $a = 32$.
Es haben 16 Schüler teilgenommen; die Klasse hat 32 Schüler.

Ma 8 ■ 2680
$\frac{77}{100}x + \frac{87}{100}(1000 - x) = \frac{80}{100}\cdot 1000$;
$x = 700$.
Es kommen nur 700 g 77prozentiger und 300 g 87prozentiger Spiritus in Frage.

Ma 8 ■ 2681

$$\begin{aligned}
A + B + C + D + E + F + G &= 40\\
A + B \quad\;\; + D + E + F + G &= 34\\
B + C + D + E + F + G &= 25\\
B &= 6\\
D &= 3 + E\\
F + G &= 0
\end{aligned}$$

A = 15; B = 6; C = 6; D = 8; E = 5; F = G = 0.
Genau eine Sprache lernen 27 Schüler, genau zwei Sprachen lernen 13 Schüler.

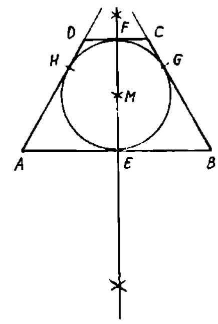


Ma 9 ■ 2682
$a + b = a\cdot b$ und $a\cdot b = \frac{a}{b}$ mit $b \neq 0$.
$\left(\frac{1}{2}; -1\right)$ ist das einzige Paar, das die Bedingungen erfüllt.

Ma 9 ■ 2683 Durch logisches Schließen erhält man die einzige mögliche Lösung: Brigitte hat den Ball; Claudia hat den Bleistift und Anna hat die Schere.

Ma 9 ■ 2684
2^1 endet auf 2
2^2 endet auf 4
2^3 endet auf 8
2^4 endet auf 6
.
.
.
$2^{4\cdot m}$ ($m \in N$; $m \neq 0$) endet auf 6
$2^{4\cdot 25} = 2^{100}$ endet auf 6.

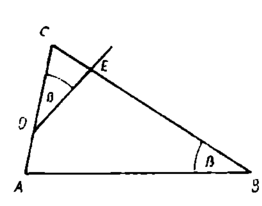
Ma 9 ■ 2685 $\overline{AB}$ mit 6 cm Länge zeichnen; Mittelsenkrechte auf $\overline{AB}$ errichten; einbeschriebenen Kreis zeichnen.
Die Kreise um A und B mit $r = 3$ cm schneiden den einbeschriebenen Kreis in G und H (Berührungspunkte der Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$). Die Parallele durch F zu $\overline{AB}$ schneidet die Strahlen BG und AH in C bzw. D.



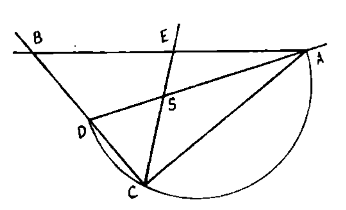
Ma 10/12 ■ 2686 Es ist
$2^{256} - 1 = (2^{128} + 1)(2^{128} - 1)$, also keine Primzahl. Primfaktoren sind 3, 5, 17, 257, …

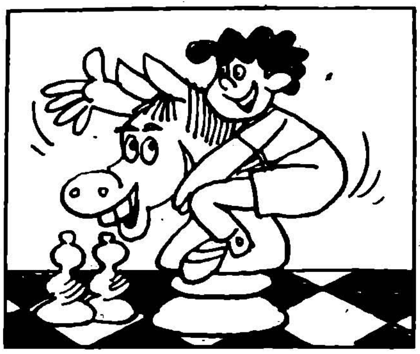
Ma 10/12 ■ 2687 a) 1 oder 2 Augen sind nicht zu erreichen: W(1) = 0; W(2) = 0.
b) 3 oder 18 Augen in genau einem aller 216 Fälle:
$W(3) = \frac{1}{216}$; $W(18) = \frac{1}{216}$.
c) 17 Augen in 3 von 216 Fällen:
$W(17) = \frac{1}{72}$
d) 16 Augen in 6 von 216 Fällen:
$W(16) = \frac{1}{36}$.

Ma 10/12 ■ 2688 ABC beliebig zeichnen; auf $\overline{AC}$ den Punkt D beliebig festlegen; an $\overline{AC}$ in D den Winkel $\measuredangle ABC$ so antragen, daß sein freier Schenkel die Seite $\overline{BC}$ in E schneidet. Das Dreieck DEC ist zum Dreieck ABC nach dem Hauptähnlichkeitssatz (w, w, w) ähnlich.



Ma 10/12 ■ 2689 $\overline{AD}$ (Länge s_a) zeichnen; Thaleskreis über $\overline{AD}$. Auf $\overline{AD}$ liegt S mit $\overline{DS} = \frac{1}{3}\overline{DA}$. Um S Kreis mit $r = \frac{2}{3}s_c$, schneidet Thaleskreis in C. $\overline{CS}$ um $\frac{1}{3}$ verlängern bis E; Strahlen AE und CD schneiden einander in B.





alpha-Schachwettbewerb 1986

Erneut ruft *alpha* alle Schachfreunde zur Teilnahme an einem Lösungswettbewerb auf!

Acht Schachaufgaben von unterschiedlicher Schwierigkeit gilt es zu lösen. Auch wer nur eine Aufgabe oder einige Aufgaben löst, hat Gewinnchancen. Doch sollte der Wettbewerb vorrangig jedem einzelnen dazu dienen, Gefallen an den Knobeleien auf dem Schachbrett zu finden und sein Leistungsvermögen zu überprüfen.

In allen acht Aufgaben beginnt Weiß und setzt trotz bester Gegenwehr von Schwarz in der geforderten Zügezahl matt. Die jeweilige Punktzahl, die in etwa den Schwierigkeitsgrad wiedergibt und aus der Bepunktung der Abspiele resultiert, ist bei den Aufgaben mit angegeben. Als vollständig gilt die Lösung, wenn alle Abspiele bis zum Matt angeführt werden.

Unter allen Teilnehmern, die zumindest eine Aufgabe richtig gelöst haben, werden Bücher verlost.

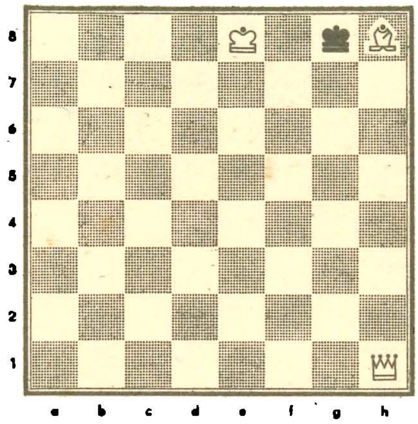
Die Teilnehmer, die die volle Punktzahl zu den Aufgaben Nr. 1 bis Nr. 7 erreichen, erhalten eine Urkunde und nehmen an einer weiteren Verlosung von Buchpreisen teil. Für Teilnehmer bis zum Alter von 14 Jahren reicht schon die volle Punktzahl zu den Aufgaben Nr. 1 bis Nr. 4 aus, um in diese Verlosung zu kommen.

Die Aufgabe Nr. 8 ist eine Zusatzaufgabe. Sie ist für leistungsstärkere Schachspieler gedacht. Diese Aufgabe bleibt zwar ohne Punktbewertung, jedoch ersetzt sie jede andere Aufgabe im Punktwert. Unter den Teilnehmern, die alle Aufgaben einschließlich der Zusatzaufgabe richtig gelöst haben, werden zwei Bücher verlost.

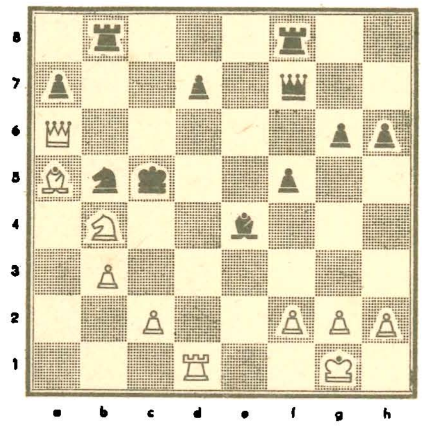
Teilnahmeberechtigt sind alle *alpha*-Leser. Die Einsendung der Lösungen (jeweilige Aufgaben-Nummer angeben) ist bitte bis zum 8. März 1987 unter Angabe von Name, Vorname, Alter und Adresse zu richten an

Redaktion alpha
PSF 14
Leipzig
7027

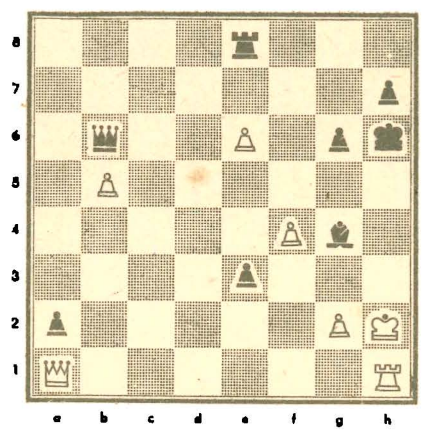
Die Lösungen sowie die Gewinner werden voraussichtlich in alpha 4/1987 veröffentlicht.



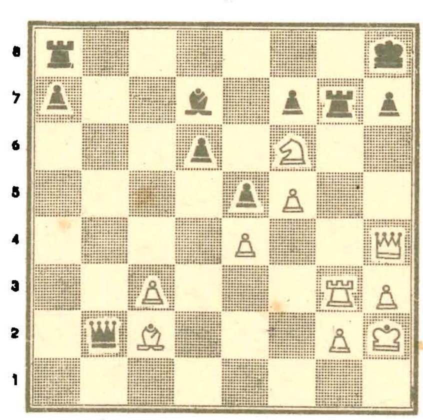
Nr. 1 Matt in zwei Zügen 2 Punkte



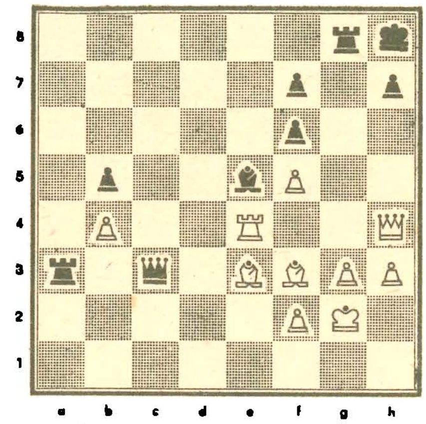
Nr. 2 Matt in zwei Zügen 2 Punkte



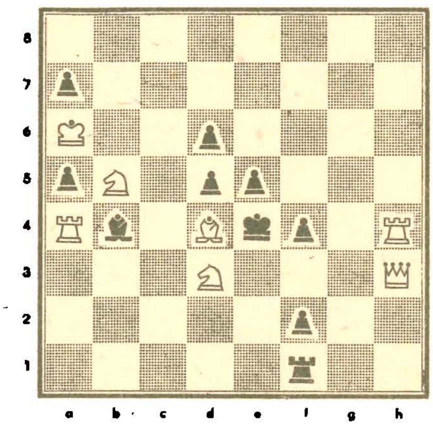
Nr. 3 Matt in drei Zügen 3 Punkte



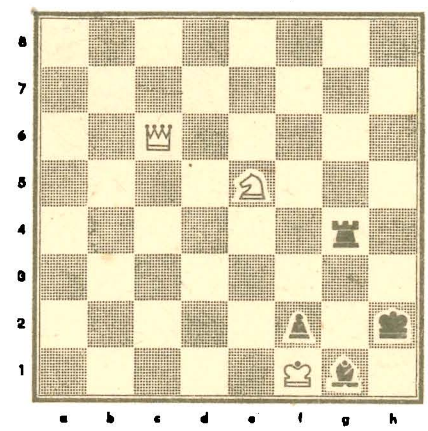
Nr. 4 Matt in drei Zügen 4 Punkte



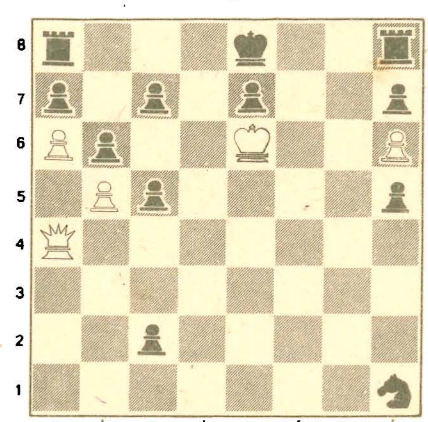
Nr. 5 Matt in vier Zügen 4 Punkte



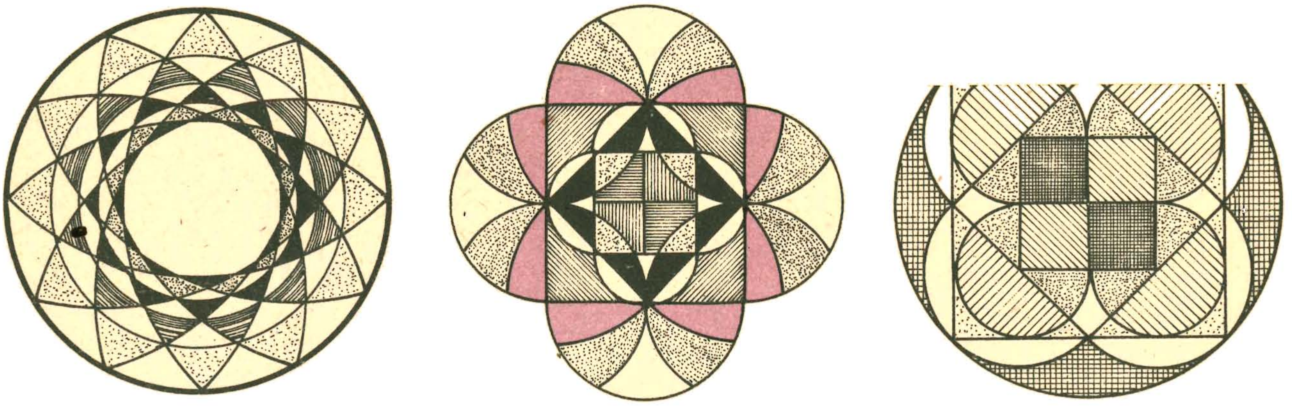
Nr. 6 Matt in zwei Zügen 5 Punkte



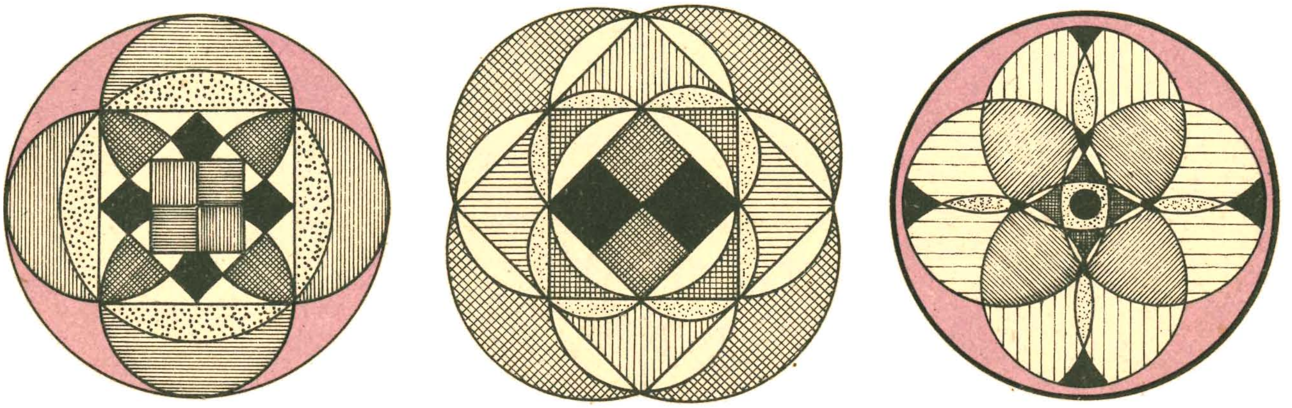
Nr. 7 Matt in drei Zügen 6 Punkte



Zusatzaufgabe: Matt in vier Zügen



aus: *Matematicko Fizički List*, Beograd



うできり

aus einem japanischen Unterhaltungsbuch

あやとり いととり

さいとう たま 採取・文　つじむら ますろう 絵

123