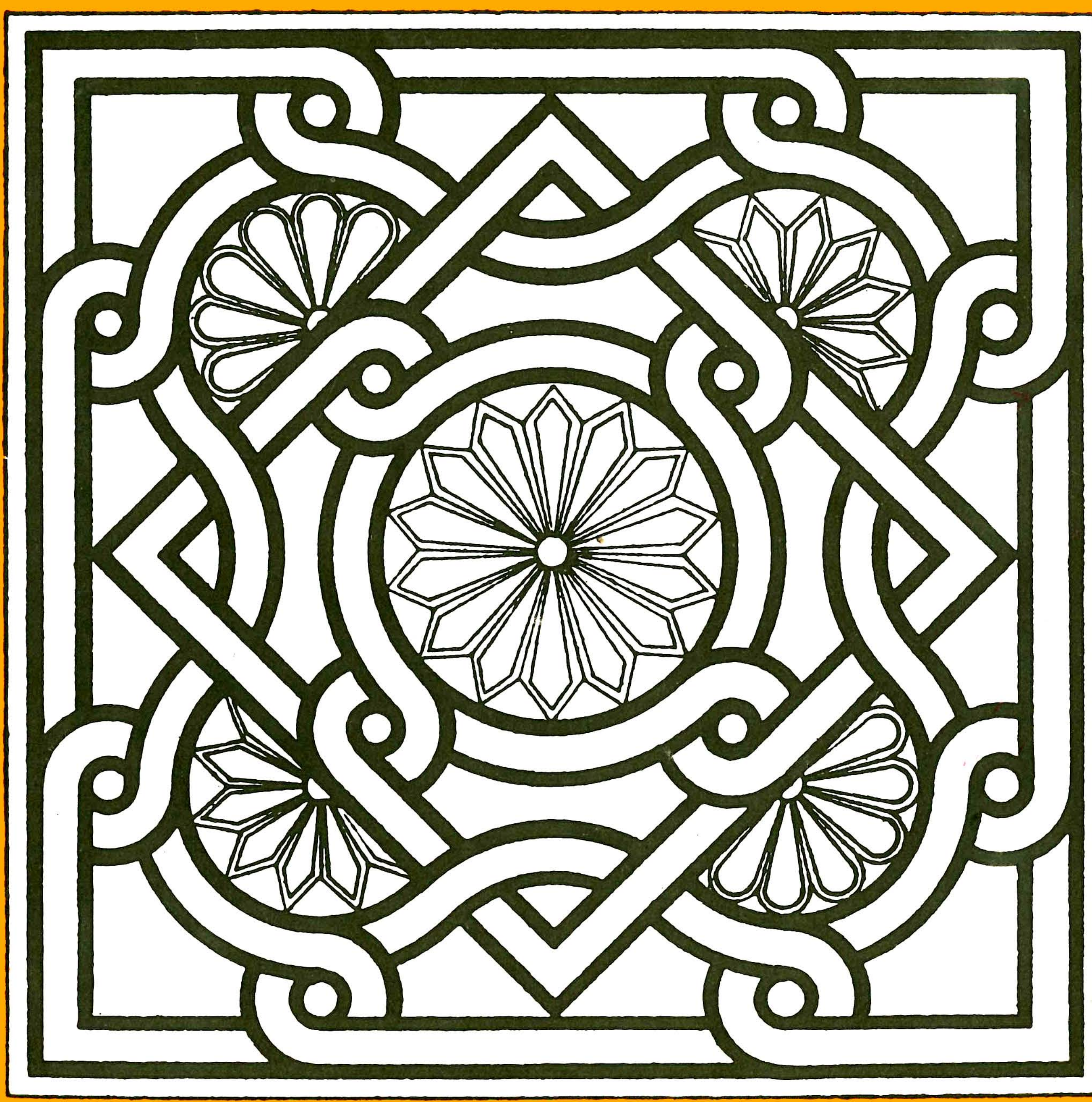
alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
21. Jahrgang 1987
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

4



Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold
Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086
Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig 7027
Redaktion:
Gabriele Liebau (Chefredakteur)
Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstudienrat J. Lehmann, VLdV (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Dr. rer. nat. W. Schmidt (Greifswald); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. rer. nat. W. Schulz (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch, VLdV (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der *Karl-Marx-Universität* Leipzig (Ltg. Dr. C.-P. Helmholz)
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.
Fotos: St. Zopf, Leipzig, Eigenfotos (S. 75); de Laplace, Lithographie von Delpech (S. 77); K. F. Gauß, nach einem Pastellgemälde von Chr. Aug. Schwarz 1803 (S. 77); aus *Spaßvögel*, Kinderbuchverlag, P. Bauer (S. 83); ADN-ZB/Hirndorf (S. 85); Redaktion *practic*, Berlin (III. U.-Seite)
Briefmarken: H. Rüdiger, Berlin (S. 81); P. Schreiber, Stralsund (S. 88)
Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach einer Vorlage: Byzantinisches Ornament
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 13. April 1987
Auslieferungstermin: 11. August 1987

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

[1]) bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben geeignet ab der angegebenen Klassenstufe

Würfeln ohne Würfel

Vorbemerkung: Im folgenden Artikel kommt der Begriff der Wahrscheinlichkeit vor. Für das Verständnis des Artikels ist es wichtig zu wissen, daß die Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses gleich ist dem Quotienten aus der Anzahl der für das Ereignis günstigen Möglichkeiten und der Gesamtanzahl der Möglichkeiten; dabei muß man natürlich davon ausgehen können, daß es nur endlich viele Möglichkeiten gibt und jede dieser Möglichkeiten die gleiche Chance hat realisiert zu werden. Die Formulierung *auf gut Glück*, die wir nachfolgend oft verwenden, bedeutet gerade, daß allen Möglichkeiten die gleiche Chance eingeräumt wird.

Mit einem Spielwürfel, wie wir ihn alle kennen, ist es möglich, Zufallszahlen zu erzeugen. Man denkt dabei in erster Linie natürlich an die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6; und wenn der Würfel *gut* ist, dann werden diese Zahlen alle die gleiche Wahrscheinlichkeit haben, nämlich $\frac{1}{6}$. Dies äußert sich in langen Reihen von Würfelexperimenten darin, daß die einzelnen Zahlen als Augenzahlen ungefähr mit der gleichen relativen Häufigkeit auftreten. (Die relative Häufigkeit z. B. der Augenzahl *1* ist gleich dem Quotienten aus der Anzahl der Würfe, in denen die *1* auftrat und der Gesamtanzahl der Würfe.)

Nun gehen wir einmal davon aus, daß uns kein Würfel zur Verfügung steht und wir dennoch solche Zufallszahlen erhalten wollen. Der einfachste Weg scheint darin zu bestehen, daß man – ohne zu würfeln – eine Liste von Zahlen aufschreibt, die nur die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 enthält; diese Liste möchte natürlich so aussehen, als wäre sie durch Würfeln entstanden. Doch die Sache ist gar nicht so einfach. Ein Fachmann auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung käme leicht dahinter, ob eine ihm vorgelegte Liste *echt* ist oder nicht. In einer Serie von Würfen mit einem Spielwürfel stecken nämlich – so paradox dies auch klingen mag – viele Gesetzmäßigkeiten. Es ist daher ganz lohnenswert, einmal eine Liste z. B. von 216 ($= 6^3$) *echten* Würfelergebnissen und eine solche Liste ohne Würfeln aufzuschreiben und diese beiden Listen miteinander zu vergleichen. Bei 216 Würfen mit einem Spielwürfel erwartet man jede der Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 etwa 36mal; man kann auch damit rechnen, daß insgesamt etwa 36mal zwei gleiche Zahlen hintereinander stehen (!) – und dies muß sich etwa gleichmäßig auf die sechs Paare (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5) und (6, 6) verteilen. Und, um eine weitere Gesetzmäßigkeit anzudeuten, etwa 6mal werden in einer *echten* Liste drei gleiche Zahlen hintereinander stehen. Würde man allein dies alles beim Aufschreiben einer Liste von 216 Augenzahlen – ohne zu würfeln – berücksichtigen können?

Wir wollen uns hier mit *Ersatzwürfeln* beschäftigen, d. h., wir wollen einige Zufallsexperimente beschreiben, die 6 verschiedene Ausgänge haben können und die alle die gleiche Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ besitzen.

Ersatzwürfel 1: In einer Urne – so nennt man üblicherweise in der Wahrscheinlichkeitsrechnung einen Behälter (Becher, Topf), in den man Kugeln hineinlegen und mischen kann – befinden sich fünf weiße Kugeln und eine schwarze Kugel. Man entnimmt *auf gut Glück* eine Kugel. Ist diese Kugel schwarz, so notiert man als Versuchsausgang *1*; ist sie weiß, so entnimmt man – ohne die gezogene Kugel zurückzulegen – neuerlich *auf gut Glück* eine Kugel. Ist die an zweiter Stelle gezogene Kugel schwarz, so notiert man als Versuchsausgang *2*; anderenfalls fährt man in der beschriebenen Weise fort.

In Bild 1 haben wir für die jeweiligen Ziehungen die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Ergebnisse angegeben; die Wahrscheinlichkeit eines *Weges* ergibt sich dann als Produkt der entsprechenden Wahrscheinlichkeiten. Bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit des Auftretens des Versuchsausganges i bei dem oben beschriebenen Zufallsexperiment mit p_i, so erhalten wir also

$$p_1 = \frac{1}{6}$$

$$p_2 = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{6}$$

$$p_3 = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

$$p_4 = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$p_5 = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$p_6 = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}.$$

Somit handelt es sich bei diesem Zufallsexperiment tatsächlich um einen *Ersatzwürfel.*

Ersatzwürfel 2: In einer Urne befinden sich drei Kugeln, eine weiße ○, eine schwarze ● und eine rote Kugel ⊕. Man entnimmt der Urne *auf gut Glück* nacheinander zwei Kugeln, wobei man die bei der ersten Entnahme gezogene Kugel vor der zweiten Kugelentnahme nicht zurücklegt. Den sechs möglichen Ergebnissen – vgl. Bild 2 – ordnen wir in eineindeutiger Weise die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 zu.

Für die Wahrscheinlichkeit des Auftretens des Ergebnisses mit der Nummer i ergibt sich – unabhängig von i – ($i = 1, 2, \ldots, 6$)

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Es liegt also auch bei diesem Zufallsexperiment ein *Ersatzwürfel* vor.

Ersatzwürfel 3: In einer Urne befinden sich zwei weiße und zwei schwarze Kugeln.

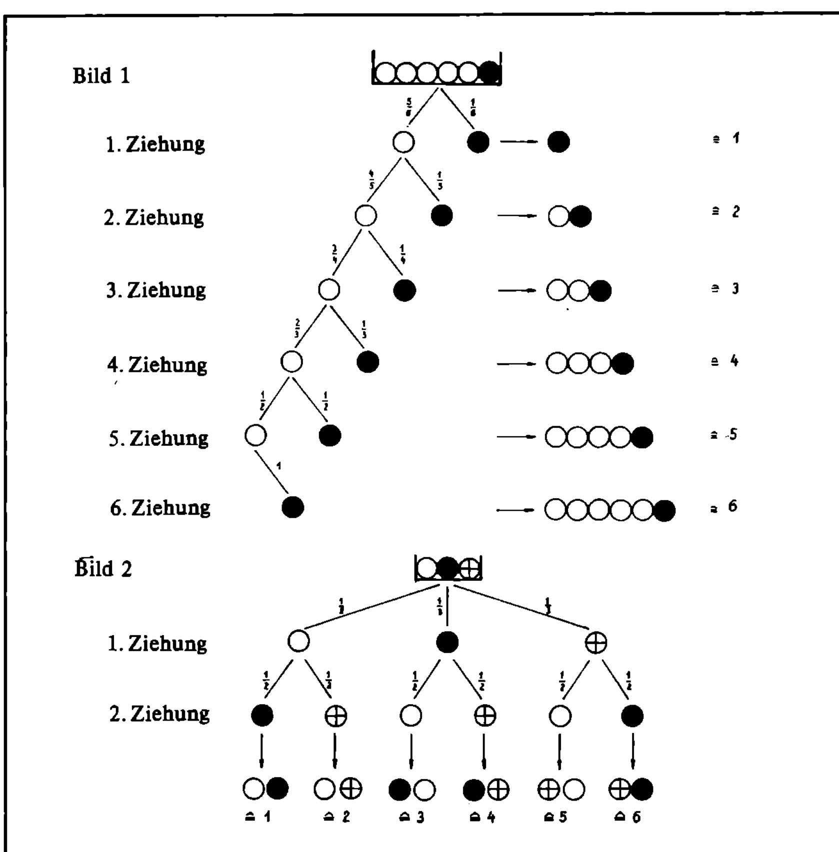
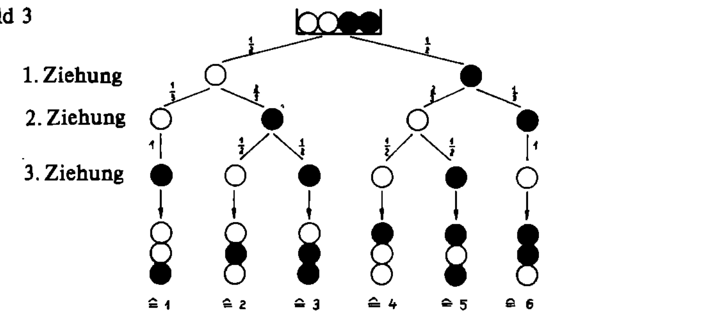


Bild 3



Man entnimmt der Urne *auf gut Glück* nacheinander ohne Zurücklegen drei Kugeln. Die möglichen Ergebnisse lassen sich wiederum in eineindeutiger Weise den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 zuordnen; dies und die Wahrscheinlichkeiten p_i für das Auftreten des Ergebnisses mit der Nummer i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ lassen sich leicht aus Bild 3 ableiten.

$$p_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{6} = p_6,$$

$$p_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} = p_3 = p_4 = p_5.$$

Wir erhalten also auch hier, daß die Zahl i mit der Wahrscheinlichkeit

$p_i = \frac{1}{6}$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ auftritt,

d. h., wir haben einen weiteren *Ersatzwürfel* vor uns.

(Wir bemerken am Rande, daß noch eine vierte Ziehung durchgeführt werden könnte. Da sich die Ergebnisse bei vier Ziehungen von denen nach drei Ziehungen nur dadurch unterscheiden, daß an letztere die einzige in der Urne noch vorhandene Kugel *angehängt* wird, würde sich bei vier Ziehungen also ebenfalls eine gleichmäßige Verteilung der Gesamtwahrscheinlichkeitsmasse 1 auf 6 Möglichkeiten ergeben.)

Es lassen sich ohne große Mühe noch weitere Zufallsexperimente angeben, bei denen 6 Ausgänge möglich sind und die alle die gleiche Wahrscheinlichkeit haben. (So ist z. B. die gleichzeitige Entnahme von zwei Kugeln *auf gut Glück* aus einer Urne, die vier verschiedene Kugeln enthält, ein weiteres solches Zufallsexperiment.)

Wir wollen uns aber noch gewissen Verallgemeinerungen obiger Beispiele zuwenden, wobei es letztlich um die Frage geht, wie man eine gleichmäßige Verteilung (der Gesamtwahrscheinlichkeitsmasse 1) auf eine vorgegebene Anzahl N von Punkten (z. B. auf die Zahlen $1, 2, \ldots, N$) erzeugen kann. (In den obigen Beispielen war $N = 6$.)

Zunächst betrachten wir – im Anschluß an *Ersatzwürfel 3* – folgende Situation: In einer Urne befinden sich n weiße und n schwarze Kugeln; dabei ist n eine beliebige natürliche Zahl. Man entnimmt der Urne *auf gut Glück* nacheinander ohne Zurücklegen $2n - 1$ (oder $2n$) Kugeln. Es ist nicht schwer, sich davon zu überzeugen, daß es

$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!}$ verschiedene Ergebnisse gibt und daß diese alle die gleiche Wahrscheinlichkeit haben. (Diese Wahrscheinlichkeit beträgt dann $\frac{1}{\binom{2n}{n}} = \frac{n! \cdot n!}{(2n)!}$.)

Auf diese Weise kann man also gleichmäßige Verteilungen auf $\binom{2n}{n}$ Punkten herstellen. (Für $n = 2$ ergibt sich 6 – vgl. *Ersatzwürfel 3* –; für $n = 3$ ergibt sich 20, $n = 4$ führt auf 56.)

Nun ist es nicht wesentlich, daß die Anzahl der weißen Kugeln gleich der Anzahl der schwarzen Kugeln ist. Hat man m weiße Kugeln und n schwarze Kugeln, so entsteht durch $m + n - 1$ (oder auch $m + n$) Entnahmen – nacheinander, *auf gut Glück*, ohne Zurücklegen – eine gleichmäßige Verteilung auf $\binom{m+n}{m} = \frac{(m+n)!}{m! \cdot n!}$ Punkten; die Wahrscheinlichkeit jedes Ergebnisses ist also gleich $\frac{1}{\binom{m+n}{m}}$.

Damit ist die oben formulierte Frage, wie man eine gleichmäßige Verteilung auf einer beliebig vorgegebenen Anzahl N von Punkten erzeugen kann, bereits vollständig beantwortet: Man wähle $n = 1$, $m = N - 1$; dann gilt $\binom{m+n}{m} = \binom{N-1+1}{N-1} = \binom{N}{1} = N$.

(Der *Ersatzwürfel 1* beinhaltet den Fall $N = 6$, $m = 5$, $n = 1$.)

Und noch ein letzter Schritt: Es ist auch nicht wesentlich, daß es nur zwei Sorten verschiedener Kugeln gibt. Hat man also n_1 Kugeln der Sorte S_1, n_2 Kugeln der Sorte S_2, ..., n_k Kugeln der Sorte S_k (k ist irgendeine natürliche Zahl $\geqq 2$), so entsteht durch $n_1 + n_2 + \ldots + n_k - 1$

Entnahmen – nacheinander, *auf gut Glück*, ohne Zurücklegen – eine gleichmäßige Verteilung auf

$$\binom{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}{n_1, n_2, \ldots, n_k} := \frac{(n_1 + 5n_2 + \ldots + n_k)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

Punkten; die Wahrscheinlichkeit jedes Ergebnisses ist also gleich

$$\frac{1}{\binom{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}{n_1, n_2, \ldots, n_k}}.$$

Und hier können wir endlich auch unseren Ersatzwürfel 2 einordnen:

$k = 3$, $n_1 = n_2 = n_3 = 1$, $n_1 + n_2 + n_3 = 3$,

$\binom{3}{1, 1, 1} = 6.$

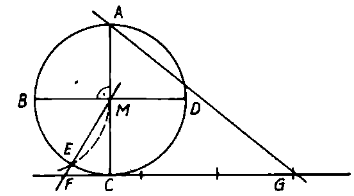
G. Maibaum/A. Płocki

Konstruktion einer Strecke $l \approx \pi$ mit Zirkel und Lineal

In *alpha* 2/84 wurde beschrieben, wie man mittels Zirkel und Lineal eine Strecke $l \approx \pi$ konstruieren kann. Dabei wurde der Bruch

$\frac{355}{113} = 3{,}1415929\ldots \approx 3{,}141596\ldots = \pi$

zugrunde gelegt. Eine andere Möglichkeit, diese Aufgabe zu lösen, ist folgende Konstruktion (siehe Bild):



Man zeichnet um M einen Kreis mit dem Radius $r = 1$ und in diesen Kreis zwei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser, die auf dem Kreis die Punkte A, B, C und D bestimmen. Im Punkt C wird die Tangente an den Kreis gelegt. Ein Kreisbogen um B mit dem Radius $r = 1$ schneidet den Kreis zwischen B und C im Punkt E. Eine durch M und E gelegte Gerade schneidet die Tangente im Punkt F. Von F beginnend wird auf der Tangente in Richtung C (und über C hinaus) eine Strecke $\overline{FG} = 3r$ abgetragen, d. h. auf der Tangente wird der Punkt G festgelegt. Jetzt kann man die Strecke $\overline{AG}$ zeichnen, wobei $\overline{AG} \approx \pi$ ist.

Aufgabe

Die Länge der Strecke $\overline{AG}$ ist als Dezimalbruch zu bestimmen.

Lösung

Die Punkte M, B und E sind Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge r. Aus dem Fakt, daß die Innenwinkel dieses Dreiecks 60° betragen, kann man die Größe des Winkels $\sphericalangle CMF = 30°$ ableiten. Demzufolge kann man das Dreieck MCF als „halbes gleichseitiges Dreieck" mit der Höhe $\overline{MC} = 1$ und der Seitenlänge $\overline{MF}$ $(= 2\overline{CF})$ auffassen. Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras kann man die Strecke $\overline{CF}$ berechnen:

$$\begin{aligned} \overline{CF}^2 + \overline{MC}^2 &= \overline{MF}^2 \\ \overline{CF}^2 + 1 &= 4\overline{CF}^2 \\ \frac{1}{3} &= \overline{CF}^2 \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} &= \overline{CF}. \end{aligned}$$

Somit beträgt in dem rechtwinkligen Dreieck ACG die eine Kathete $\overline{CG} = 3 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$ und die andere Kathete $\overline{AC} = 2$. Die Länge der Hypotenuse kann man nach dem Satz des Pythagoras berechnen:

$$\overline{AG} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CG}^2}$$

$$\overline{AG} = \sqrt{4 + \left(3 - \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2}$$

$$\overline{AG} = \sqrt{4 + 9 - 2\sqrt{3} + \frac{1}{3}}$$

$$\overline{AG} = \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}}$$

$$\overline{AG} = 3{,}1415333\ldots \approx \pi = 3{,}1415926\ldots$$

M. Wilde, Leipzig

Mathematik-Studium in der Ungarischen Volksrepublik

Mein Name ist Steffen Zopf. Zur Zeit arbeite ich als befristeter Assistent an der *Karl-Marx*-Universität in Leipzig. Von 1976 bis 1979 war ich Schüler der *Karl-Marx*-EOS Leipzig. Für Mathematik habe ich mich schon immer interessiert. So war ich seit der 6. Klasse Mitglied der Mathematischen Schülergesellschaft (MSG) Leipzig (wo ich jetzt auch selbst einen Zirkel leite) und in der 10. und 11. Klasse in einem Spezialzirkel bei Dr. H. Englisch. Auf Grund guter Ergebnisse in den Mathematikolympiaden nahm ich 1979 an der XXI. Internationalen Mathematikolympiade (IMO) in London teil.

1980 begann ich dann ein Mathematikstudium – in der Ungarischen Volksrepublik an der Universität *Attila József* in Szeged, gelegen im Länderdreieck Ungarn – Jugoslawien – Rumänien. Dazu kam es so: An der EOS wurden die besten Schüler, falls sie den Wunsch hatten, an die ABF *Walter Ulbricht* in Halle delegiert, um dort ein Vorbereitungsstudium von einem Jahr aufzunehmen.

Dort absolvierte ich also das Abitur und lernte auch – 10 Stunden in der Woche – Ungarisch. Heute hat das Vorbereitungsstudium eine Länge von zwei Jahren; man wird von der Oberschule zum Vorbereitungsstudium delegiert.

Nach einem einmonatigen Sprachkurs im August 1980 in Budapest begann das eigentliche Studium in Szeged. Mit der ungarischen Sprache hatten wir natürlich zu Anfang sehr große Schwierigkeiten – nicht so sehr auf dem Gebiet der Mathematik, als vielmehr in den anderen Fächern, wie Materialismus oder Physik, und im täglichen Gespräch mit unseren ungarischen Kommilitonen und Zimmerkameraden. Aber nach etwa einem Jahr konnten wir uns schon fast mühelos verständigen. In Szeged waren wir recht wenige Studenten aus der DDR: Erst zwei Jahre vor meinem Studienbeginn waren die ersten DDR-Studenten an die dortigen Universitäten gekommen (wissenschaftliche und medizinische Universität). Das hatte aber auch Vorteile. Dieses Studium, das ich 1985 erfolgreich abschloß, werde ich wohl nie vergessen.

Noch etwas zur Universität *Attila József* (die nach einem berühmten Nationaldichter Ungarns benannt ist): Sie gliedert sich in drei Fakultäten, von denen eine die naturwissenschaftliche Fakultät ist, an der auch das mathematische Institut *János Bolyai* arbeitet. Dessen Leiter war auch noch zu der Zeit, als ich studierte, Prof. *Béla Szökefalvi Nagy*, ein bekannter ungarischer Mathematiker. In Mathematik kann man zwei Studienrichtungen belegen: die des *Programmplaners* und die des *modellbildenden Mathematikers*. Beide Ausbildungen dauern fünf Jahre und sind überaus gründlich. Die Schwerpunkte liegen etwas anders als in der DDR, so nehmen Geometrie, Zahlentheorie und Kombinatorik einen wesentlichen Platz ein, wie man auch an den folgenden Aufgaben, die in ungarischen Mathematikzirkeln behandelt werden, sieht:

Aufgaben

▲1▲ **Seien** α, β und γ die Innenwinkel eines Dreiecks. Man beweise die folgende Ungleichung!

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma\leqq\frac{1}{8}$$

In welchen Dreiecken gilt das Gleichheitszeichen?

▲2▲ Für welche reellen Zahlen x gilt $x^{1-x-x^2}<1$?

▲3▲ P sei ein Polyeder, dessen Seitenflächen regelmäßige Fünf- und Sechsecke sind. Dabei ist jedes Fünfeck nur von Sechsecken umgeben, während an die Sechsecke abwechselnd Fünf- und Sechsecke angrenzen. Man beweise, daß es nur einen solchen Polyeder gibt; dieser gleicht einem gewöhnlichen Fußball.

▲4▲ Was geschieht in Aufgabe 3, wenn wir statt Fünfecken regelmäßige Dreiecke und statt Sechsecken regelmäßige Vierecke betrachten?
Hinweis: Aufgabe 3 und 4 lassen sich sehr gut mit dem *Eulerschen Polyedersatz* lösen, wonach in einem (konvexen) Polyeder immer gilt: $e-k+f=2$ (e: Anzahl der Ekken, k: Anzahl der Kanten; f: Anzahl der Seitenflächen).

▲5▲ Man beweise: Sind n und m ungerade natürliche Zahlen, dann sind
2^n+1 und 2^m+1
Teiler von $2^{n\cdot m}+1$!

▲6▲ Es seien n Sorten von Buchstaben gegeben, von jeder Sorte genau zwei Stück. Wieviel verschiedene Wörter lassen sich daraus bilden, die nur aus zwei Buchstaben bestehen? Wie groß wird die Anzahl dieser Wörter, wenn sie alle aus drei Buchstaben bestehen?

Und nun noch eine fast klassische (und auch schwierige) Aufgabe, die mir aber im Studium viel Spaß bereitet hat:

▲7▲ Auf einem Ball sind insgesamt n Paare anwesend. An einem Tanz beteiligen sich alle Teilnehmer des Balls. Wieviele Möglichkeiten gibt es für diesen Tanz, bei dem keiner mit dem Partner tanzt, mit dem er auf den Ball gekommen ist?

St. Zopf

Studenten bei der Weinernte

Der Vier-Quadrate-Satz

Teil 2

Leonhard Euler

Die unbewiesenen zahlentheoretischen Behauptungen Fermats regten Leonhard Euler (1707 bis 1783, siehe *alpha*, Heft 2/1983) immer wieder an, sich mit ihnen zu beschäftigen. (Auf dem Gebiet der Zahlentheorie gilt Euler als der große Fortsetzer von Fermat.) Aus Eulers Korrespondenz mit Christian Goldbach (1690 bis 1764), einem ideenreichen Gelehrten mit großem mathematischen Verständnis, der erst als Akademie-Mitglied in Petersburg wirkte (wie auch Euler von 1727 bis 1741, und von 1766 bis 1783), seit 1728 aber im russischen Staatsdienst in Moskau tätig war, ist zu ersehen, daß Euler sich mehrere Jahrzehnte auch um den *Beweis des Vier-Quadrate-Satzes* bemühte. Erstmals schrieb er darüber am 4. Juni 1730 an Goldbach. Er hätte die *Opera* Fermats gelesen und wäre dabei auf den Vier-Quadrate-Satz gestoßen. Drei Wochen später mußte er bekennen, daß es ihm nicht gelungen ist, den Satz zu beweisen.

Daß Euler sich wiederholt damit befaßte, zeigen auch die im Leningrader Akademie-Archiv vorhandenen Notizbücher Eulers. Unter den Notizen, die Euler in den Jahren 1736 bis 1740 geschrieben hatte, befindet sich neben anderen sich auf den Vier-Quadrate-Satz beziehende Eintragungen die folgende Produktformel:

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2+d^2)\,(p^2+q^2+r^2+s^2)\\ = (ap+bq+cr+ds)^2\\ + (bp-aq+dr+cs)^2\\ + (cp-dq-ar+bs)^2\\ + (dp+cq-br-as)^2,\end{aligned}$$

die Euler 1748 und 1749 auch in Briefen an Goldbach aufschrieb. Die später als *Eulersche Identität* bezeichnete Formel zeigt, daß ein Produkt von als Summe von vier Quadraten darstellbaren Zahlen selbst wieder als eine solche Summe darstellbar ist. Nun ist jede natürliche Zahl > 1, wenn sie nicht selbst Primzahl ist, ein Produkt von Primzahlen. Es genügt also, den Vier-Quadrate-Satz für ungerade Primzahlen zu beweisen! (Für die einzige gerade Primzahl 2 ist er offensichtlich:

$2 = 0^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2$.)

Am 12. April 1749 schrieb Euler (der seit 1741 in Berlin wirkte) an Goldbach: „Dass eine jede Zahl eine summa quatuor vel pauciorum quadratorum (Summe von vier oder weniger Quadraten) sey, kann ich beynahe beweisen; es fehlt mir nehmlich nur noch an einer Proposition (Satz), welche dem ersten Ansehen nach keine Schwierigkeit zu haben scheint.

Dieses Zeichen $\boxed{4}$ bedeute eine jegliche Zahl, welche eine Summe von 4 oder weniger quadratis (Quadratzahlen) ist, so sind meine Sätze folgende

I. (Satz 8): Si $a = \boxed{4}$ et $b = \boxed{4}$,
erit quoque $ab = \boxed{4}$.
(Wenn $a = \boxed{4}$ und $b = \boxed{4}$,
so wird auch $ab = \boxed{4}$.)

Hiervon ist der Beweis bündig ...“, denn er folgt sofort aus der Eulerschen Identität.

„II. (Satz 9): Si $ab = \boxed{4}$ et $a = \boxed{4}$,
erit etiam $b = \boxed{4}$.
(Wenn $ab = \boxed{4}$ und $a = \boxed{4}$,
so wird auch $b = \boxed{4}$.)

Dieses ist der Satz, worauf die ganze Sache beruhet, und den ich noch nicht beweisen kann.“

Der Satz 9 bedeutet: Ist die Summe von vier Quadraten ganzer Zahlen teilbar durch eine Summe von vier Quadraten ganzer Zahlen, dann ist auch der Quotient eine Summe von vier Quadraten ganzer Zahlen. Aus Satz 8 folgt nur, daß der Quotient eine Summe von vier Quadraten rationaler Zahlen ist. Ist nämlich

$n = ab = c^2 + d^2 + e^2 + f^2$ und
$a = p^2 + q^2 + r^2 + s^2$,

dann gibt es (nach Satz 8) ganze Zahlen u, v, w, x mit

$n \cdot a = u^2 + v^2 + w^2 + x^2$

und es wird in der Tat

$$b = \frac{n}{a} = \frac{na}{a^2} = \left(\frac{u}{a}\right)^2 + \left(\frac{v}{a}\right)^2 + \left(\frac{w}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2.$$

Entscheidend ist also im Satz 9 die Aussage, daß es sich wieder um Quadrate *ganzer* Zahlen handelt!

Aus dem Satz 9 folgt der

Satz 10: Wenn $ab = \boxed{4}$ und $a \neq \boxed{4}$,
dann auch $b \neq \boxed{4}$.

Wäre nämlich $b = \boxed{4}$,
so wegen $ab = \boxed{4}$ nach Satz 9
auch $\frac{ab}{b} = a = \boxed{4}$,
im Widerspruch zur Voraussetzung.

Doch der Satz 9 (und damit der Satz 10) blieb bei Euler unbewiesen. Klar sind nur die folgenden Aussagen, worin $\boxed{4}_B$ eine Zahl bedeutet, die eine Summe von höchstens vier Quadraten von Brüchen ist.

Satz 11: Wenn $ab = \boxed{4}_B$ und $a = \boxed{4}_B$,
so $b = \boxed{4}_B$.

Satz 12: Wenn $ab = \boxed{4}_B$ und $a \neq \boxed{4}_B$,
so $b \neq \boxed{4}_B$.

Am 4. Dezember 1751 beendete Euler die Diskussion mit Goldbach über den Vier-Quadrate-Satz: „Ich habe rigorosissime (streng) bewiesen, daß wenn N ein numerus integer (eine ganze Zahl) ist, allzeit sein müsse $N = A^2 + B^2 + C^2 + D^2$, wo aber A, B, C, D sowohl numeros fractos als integros (sowohl gebrochene als auch ganze Zahlen) andeuten“ (das ist der Vier-Quadrate-Satz C). Hierüber hatte Euler bereits am 17. Juni 1751 in der Berliner Akademie der Wissenschaften vorgetragen. Eine Abhandlung mit dem Beweis des Vier-Quadrate-Satzes C erschien gedruckt erst 1760 in einer Schrift der Petersburger Akademie. Euler bewies darin den folgenden

Satz 13: Ist p eine gegebene Primzahl, so gibt es ganze Zahlen a, b derart, daß $1 + a^2 + b^2$ durch p teilbar ist.

Der Beweis des Vier-Quadrate-Satzes C ergibt sich daraus folgendermaßen. Es genügt zu zeigen, daß sich jede ungerade Primzahl als Summe von vier Quadraten gebrochener Zahlen darstellen läßt. Wäre dies falsch, so gäbe es Primzahlen, die sich nicht als Summe von vier Quadraten von Brüchen darstellen lassen.

Es sei p die kleinste unter diesen Primzahlen. Nach Satz 13 gibt es ganze Zahlen a, b derart, daß $1 + a^2 + b^2$ durch p teilbar ist. Dann gibt es auch ganze Zahlen a_0, b_0 mit $|a_0| < \frac{p}{2}$, $|b_0| < \frac{p}{2}$ so, daß $n = 1 + a_0^2 + b_0^2$ durch p teilbar ist. (Ist nämlich r der Rest von a bei der Division durch p, so setze $a_0 = r$, falls

$r < \frac{p}{2}$ und $a_0 = r - p$, falls $r > \frac{p}{2}$.

Ist s der Rest von b bei der Division durch p, so setze $b_0 = s$, falls $s > \frac{p}{2}$

und $b_0 = s - p$, falls $s > \frac{p}{2}$.)

Aus $1 < \frac{p^2}{4}$, $a_0^2 < \frac{p^2}{4}$, $b_0^2 < \frac{p^2}{4}$

folgt aber $n < 3 \cdot \frac{p^2}{4}$,

also $\frac{n}{p} < \frac{3p}{4} < p$.

Nach der Minimalwahl von p (als kleinster Primzahl mit $p \neq \boxed{4}_B$) muß somit die Zahl $\frac{n}{p}$ Summe von vier Quadraten gebrochener Zahlen sein. Dies ist ein Widerspruch. Denn aus

$\frac{n}{p} \cdot p = n = 0^2 + 1^2 + a_0^2 + b_0^2$
$= \boxed{4} = \boxed{4}_B$ und $p \neq \boxed{4}_B$

müßte nach Satz 12 $\frac{n}{p} \neq \boxed{4}_B$ folgen.

Mit Satz 10 würde analog der Beweis des Vier-Quadrate-Satzes A zu führen sein. Es gelang Euler jedoch nicht, den Satz 10 zu begründen.

Joseph Louis Lagrange

Eulers Arbeit las einige Jahre nach seiner Ankunft in Berlin Joseph Louis Lagrange, der seit 1768 auch zahlentheoretische Forschungen betrieb. Im August 1768 hatte Lagrange an d'Alembert geschrieben: „Ich habe mich in den vergangenen Tagen, um ein wenig Abwechslung in meine Studien zu bringen, mit einigen Problemen der Zahlentheorie beschäftigt und ich versichere Ihnen, daß ich weit mehr Schwierigkeiten als erwartet gefunden habe." Anknüpfend an Eulers Ideen (in dessen Abhandlung von 1760) konnte Lagrange bald ein schwieriges Problem lösen. Es gelang ihm, jene Lücke beim Beweis des Vier-Quadrate-Satzes A zu schließen, die Euler offen gelassen hatte. Er bewies den

Satz 14: Ist eine Summe $a = r^2 + s^2 + t^2 + u^2$ von vier Quadraten ganzer Zahlen teilbar durch eine Primzahl $p > \sqrt{a}$, dann ist p selbst Summe von vier Quadraten ganzer Zahlen, und folgerte daraus statt des Satzes 10 den folgenden

Satz 15: Jede natürliche Zahl, welche die Summe von vier Quadraten ganzer Zahlen teilt, die teilerfremd zueinander sind, ist selbst Summe von vier Quadraten ganzer Zahlen.

Aus Satz 15 folgt nun mit Eulers Satz 13 leicht der Vier-Quadrate-Satz A. Jede Primzahl teilt nach Satz 13 eine Summe $1 + a^2 + b^2$, allgemeiner also eine Summe von vier Quadraten ganzer Zahlen, die teilerfremd zueinander sind; sie ist somit nach Satz 15 selbst die Summe von vier Quadraten ganzer Zahlen. Lagranges Abhandlung darüber (in französischer Sprache, mit dem Titel *Beweis eines arithmetischen Theorems*) erschien im Jahre 1772 in den Memoiren der Berliner Akademie der Wissenschaften. Diese Publikation muß Euler sehr beeindruckt haben. Bereits am 21. September desselben Jahres reichte er bei der Petersburger Akademie eine Arbeit mit dem Titel *Neuer Beweis für die Zerlegung der Zahlen in Quadrate* ein (in lateinischer Sprache). Er zog sie aber 1773 wieder zurück, um sie bei einer Leipziger Zeitschrift zur Veröffentlichung einzusenden, wo sie dann noch im selben Jahr erschien. (Dies wäre so schnell bei der Petersburger Akademie offenbar nicht möglich gewesen. Euler reichte nämlich eine andere Fassung dieser Arbeit im März 1774 bei der Petersburger Akademie ein. In deren Schriften erschien sie erst im Jahr 1780!) In dieser Arbeit wiederholte Euler kurz den von Lagrange gegebenen Beweis, um nun selbst einen einfacheren zu geben.

Ich glaube, daß Newton Euler überlegen ist, ich stelle aber Lagrange über Newton.

G. Monge

Studieren Sie Euler, wenn Sie ein Mathematiker werden wollen, und bemühen Sie sich, selbst die Fragen aufzulösen, die er sich stellt.

J. L. Lagrange

Eine Biographie Lagranges ist im Sammelband *Biographien bedeutender Mathematiker*, herausgegeben von H. Wußing und W. Arnold, Volk und Wissen Verlag, enthalten.

Carl Friedrich Gauß

Am 10. Juli 1796 schrieb der 19jährige Göttinger Student Carl Friedrich Gauß (1777 bis 1855) in sein mathematisches Tagebuch: „Heureka! (Ich hab's gefunden!) Zahl = △ + △ + △."

Die Darstellung von natürlichen Zahlen durch Rechensteine in Form von gleichseitigen Dreiecken

```
                            0
                  0        0 0
         0       0 0      0 0 0
0       0 0     0 0 0    0 0 0 0
```

gehörte zur alten pythagoreischen Zahlentheorie. Man erhält die Dreieckszahlen 1, 3, 6, 10, ...

Gauß war erstmalig der Beweis dafür gelungen, daß sich jede natürliche Zahl als Summe von drei Dreieckszahlen darstellen läßt. In seinem im Sommer 1801 erschienenen Buch *Arithmetische Untersuchungen* (in lateinischer Sprache), mit dem er in strengem Sinne die höhere Zahlentheorie begründete, gab er einen tiefliegenden Beweis des Drei-Quadrate-Satzes (Satz 2), woraus er leicht den Satz über die Darstellung durch Dreieckszahlen und den Vier-Quadrate-Satz A folgern konnte.

Carl Gustav Jacob Jacobi

Euler hatte noch eine andere Idee, den Vier-Quadrate-Satz A zu beweisen. Er setzte mit einer Unbestimmten x

$P(x) = 1 + x + x^4 + x^9 + x^{16} + x^{25} + \ldots$

und entwickelte $(P(x))^4$ wieder in eine Potenzreihe:

$(P(x))^4 = 1 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 \ldots$

Hierin ist aber der Koeffizient von x^n gerade die Anzahl, wie oft n als Summe von vier Quadratzahlen darstellbar ist.

Um den Vier-Quadrate-Satz A zu beweisen, ist somit nachzuweisen, daß alle Koeffizienten a, b, c, d, ... größer als 0 sind. Diese Beweismethode wurde zuerst vollständig von Carl Gustav Jacob Jacobi (1804 bis 1851), den seine Zeitgenossen bewundernd den *Euler des 19. Jahrhunderts* nannten (vgl. *alpha*, Heft 1/1980), in seiner 1829 erschienenen Monographie über sogenannte elliptische Funktionen ausgeführt. Aus Formeln, die seiner Theorie dieser Funktionen entstammen, konnte Jacobi den folgenden Satz beweisen.

Satz 16: Bezeichnet $A(n)$ die Anzahl der geordneten 4-Tupel (w, x, y, z) ganzer Zahlen mit

$$n = w^2 + x^2 + y^2 + z^2,$$

wobei n eine gegebene natürliche Zahl ist, so gilt:

Ist n gerade, so ist $A(n)$ 24mal die Summe aller ungeraden Teiler von n. Ist n ungerade, so ist $A(n)$ 8mal die Summe aller Teiler von n.

Beispiele:

1) $n = 7$, $A(7) = 8(1 + 7) = 64$

Diese 64 Zerlegungen der 7 in vier Quadrate ganzer Zahlen entstehen durch Veränderungen des Vorzeichens und Vertauschen der Summanden:

$7 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2$

$= (-1)^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2$

$= 1^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 1^2 = \ldots$ usw.

2) $n = 6$, $A(6) = 24(1 + 3) = 96$

$6 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 0^2$

$= 0^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + 1^2 = \ldots$ usw.

Im Jahre 1834 konnte Jacobi auch einen rein zahlentheoretischen Beweis (ohne Bezug auf Formeln über elliptische Funktionen) des Satzes 16 geben.

Zahlentheorie

Die genaue Untersuchung der Geschichte des Vier-Quadrate-Satzes zeigt, wie eng er mit der Geschichte der Zahlentheorie, des *reinsten und mathematischsten Gebietes der Mathematik* (K. Hensel), verbunden ist. Gauß' Beweis des Drei-Quadrate-Satzes beruhte auf der Theorie sogenannter quadratischer Formen (mit denen sich auch Euler, Lagrange, Legendre beschäftigt hatten), aus der sich die algebraische Zahlentheorie entwickelte. Mit Jacobis Beweis (und einem Resultat von Dirichlet) wurde de facto die analytische Zahlentheorie eingeleitet. Aus den Bemühungen um den Beweis einer schon 1770 von Waring formulierten (den Satz von Lagrange verallgemeinernden) Vermutung (aber auch anderer, wie der Goldbachschen Vermutungen) entstand die additive Zahlentheorie.

„Immer aber wird", wie schon Jacobi am 5. August 1847 in der Berliner Akademie der Wissenschaften sagte, „dem Diophant der Ruhm bleiben, den tiefer liegenden Eigenschaften und Beziehungen der Zahlen, welche durch die schönen Forschungen der neueren Mathematik erschlossen worden, den ersten Anstoß gegeben zu haben."

H. Pieper

Mit und ohne Taschenrechner

Martina, Susan und Mario nehmen an einer Mathematikarbeitsgemeinschaft ihrer Schule teil. Heute üben sie weiter den Gebrauch des Taschenrechners SR 1. Sie suchen und diskutieren verschiedene Rechenabläufe:

Beispiel 1

$$\frac{2}{3-\sqrt[3]{25}}$$

Um den jeweiligen Rechenablauf zu notieren, wurde vereinbart, daß alles, was sie in den Rechner eingeben, in $\boxed{\text{Eingabekästchen}}$ geschrieben wird, daß eine einzugebende Ziffernfolge in nur ein Eingabekästchen notiert werden kann und daß für eine nachträgliche Kontrolle Zahlenwerte der Anzeigetafel des Schulrechners SR 1 eingefügt werden dürfen. Sie stehen aber dann nicht im Eingabekästchen.
Martina rechnet und notiert:

$\boxed{3}\ \boxed{-}\ \boxed{25}\ \boxed{y^x}\ \boxed{3}\ \boxed{1/x}\ \boxed{=} \nearrow 0{,}07598$

$\boxed{1/x} \nearrow 13{,}161358$

$\boxed{\times}\ \boxed{2}\ \boxed{=} \nearrow 26{,}322717.$

Mario sagt: „Ich kann den Nenner des Bruches auch zuvor rational machen und danach erst den Rechner verwenden.
Da die Formel

$$a^3-b^3=(a-b)\,(a^2+ab+b^2)$$

gilt, erweitere ich den Bruch mit

$$9+3\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{625}\,.$$

Ich erhalte so

$$\frac{2(9+3\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{625})}{(3-\sqrt[3]{25})\,(9+3\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{625})} = 9+3\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{625}\,.\text{“}$$

Marios Rechenablauf ist darum:

$\boxed{625}\ \boxed{y^x}\ \boxed{3}\ \boxed{1/x}\ \boxed{+} \nearrow 8{,}54988$

$\boxed{\sqrt{\ }} \nearrow 2{,}9240178$

$\boxed{\times}\ \boxed{3}\ \boxed{+} \nearrow 17{,}321933$

$\boxed{9}\ \boxed{=} \nearrow 26{,}321933.$

(Mario überlegte sich noch, daß $\sqrt[3]{25}=\sqrt{\sqrt[3]{625}}$ ist.)
Martina ist über die voneinander abweichenden Ergebnisse höchst verwundert. Sie untersucht folgenden Rechenablauf:

$\boxed{25}\ \boxed{y^x}\ \boxed{3}\ \boxed{1/x}\ \boxed{=} \nearrow 2{,}92402$

$\boxed{x\to M}\ \boxed{\times}\ \boxed{3}\ \boxed{+}\ \boxed{MR}\ \boxed{x^2} \nearrow 8{,}549893$

$\boxed{+} \nearrow 17{,}321953\ \boxed{9}\ \boxed{=} \nearrow 26{,}321953$

Susan meint: „Die Abweichungen entstehen durch die unterschiedliche Wurzelberechnung.“

Die Ergebnisse der vier Grundrechenoperationen $\boxed{+}$, $\boxed{-}$, $\boxed{\times}$, $\boxed{\div}$ liefert der SR 1 auf neun Stellen. Davon werden bei Ergebnisausgabe in Exponentendarstellung höchstens fünf angezeigt. Der Rechner hat aber intern in diesen Fällen die maximale Gesamtzahl Stellen zur Verfügung. Beim Arbeiten mit der Taste $\boxed{y^x}$ ist die Genauigkeit jedoch geringer. Es können mindestens fünf Ziffern bei entsprechend genauen Eingangswerten als gültig angesehen werden. Größere Genauigkeit bedarf hier einer Kontrolle.

Bei $\boxed{25}\ \boxed{y^x}\ \boxed{3}\ \boxed{1/x}\ \boxed{=} \nearrow 2{,}92402$ sind es sechs zuverlässige Ziffern; denn

$\boxed{2{,}924017}\ \boxed{\times}\ \boxed{=}\ \boxed{=} \nearrow 24{,}999981$ und

$\boxed{2{,}924018}\ \boxed{\times}\ \boxed{=}\ \boxed{=} \nearrow 25{,}000007.$

Bildet man aber $3-2{,}92402$ (vgl. Martinas 1. Lösung!), so kommt es mit $0{,}07598$ zu einer Verminderung der Anzahl von wesentlichen und zuverlässigen Ziffern auf vier.
Durch das Rationalmachen des Nenners vermeidet Mario diese Verarmung der Anzahl der wesentlichen und zuverlässigen Ziffern. Aufgrund der Rechnung kann er sechs wesentliche zuverlässige Ziffern erwarten. Er muß dies aber überprüfen. Martinas zweites Ergebnis ist nicht so genau wie das von Mario, aber genauer als ihr erstes.

Beispiel 2

$$6\sqrt{\frac{3}{2}-\sqrt{2}}+\sqrt{43+30\sqrt{2}}$$

a) Der numerische Wert ist mit einem Taschenrechner SR 1 zu bestimmen!
b) Wie kann man bei dieser Aufgabe ohne Hilfsmittel (Tafel, Taschenrechner, Rechenstab o. dgl.) den numerischen Wert bestimmen?
Lösung:
a) Man kann folgendermaßen verfahren:

$\boxed{43}\ \boxed{+}\ \boxed{30}\ \boxed{\times}\ \boxed{2}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{=} \nearrow 85{,}426407$

$\boxed{\sqrt{\ }} \nearrow 9{,}2426407\quad \boxed{x\to M}$

$\boxed{1{,}5}\ \boxed{-}\ \boxed{2}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{=} \nearrow 8{,}5786-02$

$\boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{\times}\ \boxed{6}\ \boxed{+}\ \boxed{MR}\ \boxed{=} \nearrow 11.$

Dieser Wert stimmt mit dem exakten überein.
b) Man erhält durch Umformung der Aufgabe

$$\sqrt{54-36\sqrt{2}}+\sqrt{43+30\sqrt{2}} = \sqrt{(6-3\sqrt{2})^2}+\sqrt{(5+3\sqrt{2})^2}=11\,.$$

Bekanntlich ist $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl, deren Dezimaldarstellung ein unendlicher nichtperiodischer Dezimalbruch ist. Der SR 1 bricht die Rechnung nach der neunten Ziffer ab und zeigt einen aus acht Ziffern bestehenden gerundeten Näherungswert an. So steht nach der Tastenfolge $\boxed{2}\ \boxed{\sqrt{\ }}$ im Rechenwerk des SR 1 der Wert 1,41421356, angezeigt wird aber der Wert 1,4142136. Man kann die in der letzten Stelle des Rechenwerks stehende Ziffer durch den folgenden Rechenablauf abfragen:

$\boxed{2}\ \boxed{\sqrt{\ }} \nearrow 1{,}4142136$

$\boxed{-}\ \boxed{1{,}4142136}\ \boxed{=} \nearrow -4,\ -08.$

Im Rechenwerk erfolgte die Differenzbildung

$1{,}41421356 - 1{,}4142136 = -0{,}00000004.$

Die folgende Überlegung zeigt das Bestehen der Ungleichung

$1{,}41421356 < \sqrt{2}\,.$

Beim Rechenablauf $\boxed{2}\ \boxed{\sqrt{\ }} \nearrow 1{,}4142136$

$\boxed{x^2} \nearrow 2\ \boxed{-}\ \boxed{2}\ \boxed{=} \nearrow -1,\ -08$

wird nicht der angezeigte Wert 1,4142136 quadriert, sondern der im Rechenwerk stehende ungerundete Wert 1,41421356. Die Differenzbildung zeigt, das Quadrat ist kleiner als 2.
Dagegen ist beim Rechenablauf

$\boxed{1{,}4142136}\ \boxed{x^2} \nearrow 2{,}0000001$

das Quadrat größer als 2. Man beachte, der aufgerundete Wert 1,4142136 steht bei diesem Rechenablauf im Eingabekästchen! Mit einem Trick kann man eine Ziffer in die letzte Position des Rechenwerkes bringen: Man addiert und benutzt zur Eingabe die Exponentendarstellung. Wir wissen bereits, daß nach $\boxed{2}\ \boxed{\sqrt{\ }}$ im Rechenwerk des SR 1 1,41421356 steht und also nach Addition von 0,00000001 (Exponentendarstellung: $\nearrow 1,\ -08$) der im Rechenwerk stehende Wert 1,41421357 ist. Dieser Wert ist größer als $\sqrt{2}$. Dies kontrollieren wir mit dem Rechenablauf

$\boxed{2}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{+}\ \boxed{EEX}\ \boxed{+/-}\ \boxed{8}$

$\boxed{=}\ \boxed{x^2}\ \boxed{-}\ \boxed{2}\ \boxed{=} \nearrow 2,\ -08.$

Damit folgt $1{,}41421357^2 > 2$ und es ist gezeigt, daß $\sqrt{2} < 1{,}41421357$ ist.

Beispiel 3

Man bestätige mit dem SR 1, daß $1{,}73205080 < \sqrt{3} < 1{,}73205081$ ist!
Wir rechnen

$\boxed{3}\ \boxed{\sqrt{\ }} \nearrow 1{,}7320508$

$\boxed{-}\ \boxed{1{,}7320508}\ \boxed{=} \nearrow 0$

(Schlußfolgerung: Auf 8 folgt 0.)

$\boxed{3}\ \boxed{\sqrt{\ }} \nearrow 1{,}7320508$

$\boxed{x^2} \nearrow 3\ \boxed{-}\ \boxed{3}\ \boxed{=} \nearrow -3,\ -08$

(Schlußfolgerung: $1{,}73205080^2 < 3$ und also $1{,}73205080 < \sqrt{3}$.)

$\boxed{3}\ \boxed{\sqrt{\ }} \nearrow 1{,}7320508\ \boxed{+}\ \boxed{EEX}\ \boxed{+/-}$

$\boxed{8} \nearrow 1,\ -08\ \boxed{=}\ \boxed{x^2}\ \boxed{-}\ \boxed{3}\ \boxed{=} \nearrow 0$

(Schlußfolgerung: Mit Hilfe des SR 1 kann so nur festgestellt werden, daß 1,73205081 eine bessere Näherung für $\sqrt{3}$ ist als 1,73205080.)

Da $\sqrt{3}=\frac{1}{5}\sqrt{75}$,

folgt aus dem Rechenablauf

$\boxed{75}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{+}\ \boxed{5}\ \boxed{EEX}\ \boxed{+/-}\ \boxed{8}$

$\boxed{=} \nearrow 8{,}6602541\ \boxed{x^2} \nearrow 75{,}000001$

$\boxed{-}\ \boxed{75}\ \boxed{=} \nearrow 0{,}0000007$

und weil $\frac{1}{25}\cdot 75{,}0000007 > 3$ ist,

daß $\sqrt{3} < 1{,}73205081$ gilt.
Somit gelten auch die obigen Schranken.

Beispiel 4

Gegeben ist $x = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Mit dem SR 1 ist y numerisch zu berechnen, wenn
$y = 3^{24}\left(\frac{1}{99} - x\left(x - \frac{18}{55}\sqrt{5}\right)\right)$ ist.

Lösung:

$\boxed{5}\ \boxed{\sqrt{}}\ \boxed{\div}\ \boxed{3}\ \boxed{-} \nearrow 7{,}4535\ -01$

$\boxed{\text{x}\to\text{M}}\ \boxed{18}\ \boxed{\div}\ \boxed{55}\ \boxed{\text{x}}\ \boxed{5}\ \boxed{\sqrt{}}$

$\boxed{=} \nearrow 1{,}3551\ -02\ \boxed{\text{x}}\ \boxed{\text{MR}}\ \boxed{+/-}$

$\boxed{+}\ \boxed{99}\ \boxed{1/\text{x}}\ \boxed{=} \nearrow -6,\ -10$

$\boxed{\text{x}}\ \boxed{3}\ \boxed{\text{y}^\text{x}}\ \boxed{24}\ \boxed{=} \nearrow -169{,}4574.$

Es ist aber

$$\frac{1}{99} - x^2 + \frac{18\sqrt{5}}{55}x = \frac{1}{99} - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2$$
$$+ \frac{18\sqrt{5}}{55}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{1}{99} - \frac{5}{9} + \frac{6}{11}$$
$$= \frac{1-55+54}{99} = 0,$$

und somit ist $y = 3^{24}\cdot 0 = 0$.
Das Rechnerergebnis ist völlig falsch.
Mit dem Rechner SR 1 ist

$\boxed{6}\ \boxed{\div}\ \boxed{11}\ \boxed{-}\ \boxed{5}\ \boxed{\div}\ \boxed{9}\ \boxed{+}\ \boxed{99}$
$\boxed{1/\text{x}}\ \boxed{=} \nearrow -9,\ -10$ bzw.

$\boxed{99}\ \boxed{1/\text{x}}\ \boxed{-}\ \boxed{5}\ \boxed{\div}\ \boxed{9}\ \boxed{+}\ \boxed{6}$
$\boxed{\div}\ \boxed{11}\ \boxed{=} \nearrow -1,\ -09,$

diese Ergebnisse weichen nur wenig von dem exakten Wert 0 ab. Durch Multiplikation mit der großen Zahl 3^{24} ergibt sich die Rechnerkatastrophe.

Beispiel 5

Mit Hilfe des Schulrechners SR 1 bestimme man auf vier wesentliche und zuverlässige Ziffern nach dem Komma den numerischen Wert von

$\sqrt[4]{\sqrt{6400} + \sqrt{6144} + \sqrt{4800} + \sqrt{4608}}$.

Lösung:

$\sqrt{6400} = 80$ bestimmt man im Kopf.
Der Rechenablauf ist nun

$\boxed{80}\ \boxed{+}\ \boxed{6144}\ \boxed{\sqrt{}} \nearrow 78{,}383672$

$\boxed{+} \nearrow 158{,}38367\ \boxed{4800}\ \boxed{\sqrt{}} \nearrow 69{,}282032$

$\boxed{+} \nearrow 227{,}6657\ \boxed{4608}\ \boxed{\sqrt{}} \nearrow 67{,}882251$

$\boxed{=} \nearrow 295{,}54795\ \boxed{\sqrt{}}\ \boxed{\sqrt{}} \nearrow 4{,}1462644.$

Da $\sqrt[4]{\sqrt{6400} + \sqrt{6144} + \sqrt{4800} + \sqrt{4608}}$
$= 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$
(der Leser führe den Beweis!),
liefert der Rechenablauf

$\boxed{1}\ \boxed{+}\ \boxed{2}\ \boxed{\sqrt{}}\ \boxed{+}\ \boxed{3}\ \boxed{\sqrt{}}\ \boxed{=} \nearrow 4{,}1462644$

auch das Ergebnis. Dieser Rechenablauf ist aber bedeutend kürzer.
Das gerundete Ergebnis ist 4,1463.
Aufgrund der Beispiele wird festgestellt:
Mario: „Mehr als fünf zuverlässige Stellen nach dem Komma darf ich bei meinem Ergebnis nicht erwarten. Es gilt:
Bei der Addition (bzw. Subtraktion) von Näherungszahlen sind nur so viele Stellen nach dem Komma beizubehalten, wie der Summand (bzw. Subtrahend) mit der kleinsten Anzahl von Stellen hinter dem Komma hat. (1)
Betätigt man beim SR 1 die Taste $\boxed{\text{y}^\text{x}}$, so beträgt die Zuverlässigkeitserwartung höchstens sechs wesentliche Ziffern. (2)
Beachte ich eine Schutzstelle, so lautet nach dem Gesagten mein Ergebnis: 26,3219 (vgl. Beispiel 1!).“
Martina: „Meine erste Rechnung (Beispiel 1) ist wegen der Verringerung der Anzahl wesentlicher und zuverlässiger Ziffern nur auf zwei Stellen nach dem Komma genau. Das erste Ergebnis lautet bei mir 26,32. Meine Schlußfolgerung ist:
Habe ich die Differenz zweier fast gleicher Zahlen zu bilden, so muß ich auf eine Verringerung der Anzahl wesentlicher und zuverlässiger Ziffern achten. Besonders gefährlich wird es, wenn eine Differenz zweier fast gleicher Zahlen im Nenner eines Bruches steht.“ (3)
Susan: „Wenn das Ergebnis mit nur höchstens fünf wesentlichen und zuverlässigen Ziffern zu bestimmen ist, kann ich, wenn es die Rechnung erfordert, zweckmäßig die Taste $\boxed{\text{y}^\text{x}}$ des SR 1 benutzen. Sonst meide ich diese Taste, wenn es möglich ist. (4)
Mario vergaß zu sagen, auch beim Rechnen mit dem SR 1 gilt:
Einen irrationalen Nenner macht man nach Möglichkeit rational. (5)
Solange wie möglich arbeite ich mit den mathematisch-exakten Werten (z. B. $\sqrt{2}$) und nicht mit numerischen (z. B. 1,414) und strebe Vereinfachungen an.“ (6)
Martina: „Ich merke mir:
Durch die Rundungsautomatik des SR 1 kann es zu Fehlern kommen. (7)
Sie liegen wie bei jedem Runden in den üblichen Grenzen.
Beim Rechnen mit Brüchen, deren Dezimaldarstellung mehr wesentliche und gültige Ziffern hat, als das Rechenwerk des SR 1 faßt, muß ich auf Rundungsfehler achten.“ (8)
Der Arbeitsgemeinschaftsleiter weist darauf hin: „Kontrollrechnungen sind immer angebracht. (9)
Man soll versuchen, durch Überschlagsrechnung und Abschätzung die Größenordnung des zu berechnenden numerischen Wertes zu bestimmen. (10)
Bei Beispiel 1 überlegt man sich:
$\sqrt[3]{25} < \sqrt[3]{27} = 3$. Schätzung: $\sqrt[3]{25} \approx 2{,}9$,
also $\frac{2}{3-\sqrt[3]{25}} \approx \frac{2}{3-2{,}9} = 20$.
Es können mit Trick in der Weise, wie sie bei den Beispielen 2 und 3 gezeigt wurde, für irrationale Quadratwurzeln Schranken mit neun gültigen Ziffern bestimmt werden. (11)
Wenn die Genauigkeit es erfordert, ist in besonderen Fällen nicht mit Näherungswerten von Brüchen zu rechnen. (12)
Beim Lösen solcher Aufgaben, das zeigen die Beispiele, gibt es also manches zu beachten. Denkt daran!“

Die folgenden Aufgaben sind unter Zuhilfenahme eines Taschenrechners zu lösen:

▲1▲ Man bestimme den numerischen Wert von $\frac{4}{5-\sqrt[3]{121}}$ auf vier zuverlässige Ziffern nach dem Komma!

▲2▲ Es ist $\sqrt{7}$ mit acht gültigen Ziffern hinter dem Komma anzugeben und der Nachweis zu erbringen, daß es sich wirklich um gültige Ziffern handelt!

▲3▲ Man berechne
$\sqrt{\sqrt{5795 + 152\sqrt{19}} - \sqrt{163 + 24\sqrt{19}}}$.
Wie kann man auch ohne Taschenrechner bestätigen, daß der gefundene Wert der exakte ist?

▲4▲ Was ist größer $\sqrt{1984} + \sqrt{1986}$ oder $2\sqrt{1985}$? (aus: Quant, Moskau)

▲5▲ Welche Aussage kann man über den folgenden Bruch machen?

$$\frac{1}{3\left(0{,}00033\cdot 0{,}00099^2 + \frac{1}{13}\right) + \frac{5}{91} - \frac{2}{7}}$$

R. Bergmann

Lösungen zu:
Mit und ohne Taschenrechner

▲1▲ 74,1942.

▲2▲ $\boxed{7}\ \boxed{\sqrt{}} \nearrow 2{,}6457513$
$\boxed{\text{x}\to\text{M}}\ \boxed{-}\ \boxed{2{,}6457513}\ \boxed{=} \nearrow 1,\ -08,$
$\boxed{\text{MR}} \nearrow 2{,}6457513\ \boxed{\text{x}^2} \nearrow 7\ \boxed{-}\ \boxed{7}$
$\boxed{=} \nearrow -1,\ -08,$
folglich $2{,}64575131 < \sqrt{7}$,
$\boxed{\text{MR}}\ \boxed{+}\ \boxed{\text{EEX}}\ \boxed{+/-}\ \boxed{8}\ \boxed{=}\ \boxed{\text{x}^2} \nearrow 7$
$\boxed{-}\ \boxed{7}$
$\boxed{=} \nearrow 4,\ -08 \to 7{,}00000004,$
folglich $\sqrt{7} < 2{,}64575132$.
Ergebnis: $\sqrt{7} = 2{,}64575131\ldots$

▲3▲ $\boxed{5795}\ \boxed{+}\ \boxed{152}\ \boxed{\text{x}}\ \boxed{19}\ \boxed{\sqrt{}}$
$\boxed{=} \nearrow 6457{,}5526\ \boxed{\sqrt{}} \nearrow 80{,}358899\ \boxed{\text{x}\to\text{M}},$
$\boxed{163}\ \boxed{+}\ \boxed{24}\ \boxed{\text{x}}\ \boxed{19}\ \boxed{\sqrt{}}$
$\boxed{=} \nearrow 267{,}61357\ \boxed{\sqrt{}} \nearrow 16{,}358899$
$\boxed{+/-}\ \boxed{\text{M+}}\ \boxed{\text{MR}}\ \boxed{\sqrt{}} \nearrow 8.$

▲4▲ $\boxed{4}\ \boxed{\text{x}}\ \boxed{1985}\ \boxed{=} \nearrow 7940\ \boxed{\sqrt{}}$
$\nearrow 89{,}106678\ \boxed{-}\ \boxed{89.106678}$
$\boxed{=} \nearrow -0{,}0000004 \to 89{,}1066776;$
$\boxed{1984}\ \boxed{\sqrt{}} \nearrow 44{,}542115\ \boxed{+}\ \boxed{1986}$
$\boxed{\sqrt{}} \nearrow 44{,}56456\ \boxed{=} \nearrow 89{,}106675$
$\boxed{\text{x}^2} \nearrow 7939{,}9995.$
Da $\sqrt{1984} + \sqrt{1986} < 89{,}106677$
und $89{,}106677^2 < 7940$, was man durch Rechnung überprüft, gilt
$\sqrt{1984} + \sqrt{1986} < 2\sqrt{1985} = \sqrt{7940}$.

▲5▲ Der Bruch ist definiert.
Durch Umformung folgt zunächst

$$\frac{1}{0{,}00099^3 + \left(\frac{3}{13} + \frac{5}{91} - \frac{2}{7}\right)} = 1 : 0{,}00099^3.$$

Überschlag: $1 : \left(\frac{1}{10^3}\right)^3 = 10^9$.

$\boxed{0{,}00099}\ \boxed{\text{x}^\text{y}}\ \boxed{3}\ \boxed{=} \nearrow 9{,}7029\ -10$
$\boxed{1/\text{x}} \nearrow 1{,}0306\ 09$
Kontrolle: $\boxed{:}\ \boxed{\text{EEX}}\ \boxed{9}\ \boxed{=} \nearrow 1{,}0306102.$
Ergebnis: $1{,}0306\cdot 10^9$

Zur Aufgabe im Text (vgl. Beispiel 5!):

$$\sqrt[4]{\sqrt{6400} + \sqrt{6144} + \sqrt{4800} + \sqrt{4608}}$$
$$= \sqrt[4]{80 + 32\sqrt{6} + 40\sqrt{3} + 48\sqrt{2}}$$
$$= \sqrt[4]{(6 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6})^2}$$
$$= \sqrt[4]{(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^4} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

Prismen! Prismen?

▲1▲ Welche der Körper (Bild 1) sind
a) Quader? b) Prismen?

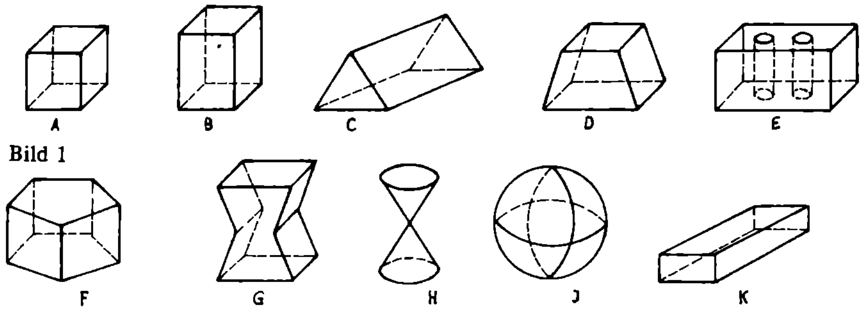


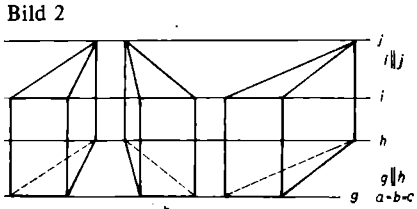
Bild 1

▲2▲ Welches der Volumen der in Bild 1 dargestellten Körper läßt sich mit der Formel $V = G \cdot h$ (G – Grundfläche, h – Höhe) berechnen?

▲3▲ Wahr oder falsch?
a) Jeder Würfel ist ein Quader.
b) Alle Quader sind Prismen.
c) Jeder Quader ist ein Würfel.
d) Es gibt Prismen, die Quader sind.
e) Es gibt Würfel, die Quader sind.
f) Es gibt keine Würfel, die keine Prismen sind.
g) Nicht jeder Quader ist ein Würfel.
h) Alle Quader sind keine Würfel.

▲4▲ Welches der dargestellten Prismen (Bild 2) hat das größte Volumen? (Für die jeweilige Höhe h der Prismen gilt: $h = 5{,}0$ cm.)

Bild 2

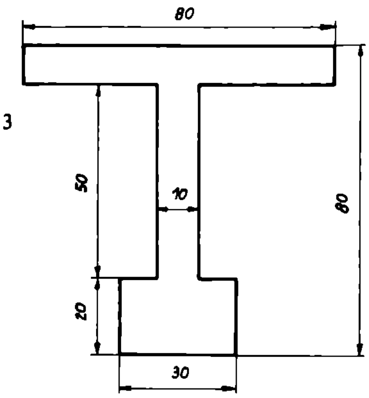


▲5▲ Vervollständige die Tabelle!

Quader				
Länge	(in cm)	2	2	3
Breite	(in cm)	3	3	
Höhe	(in cm)	1		2
Volumen	(in cm³)		12	24
Oberfläche	(in cm²)			

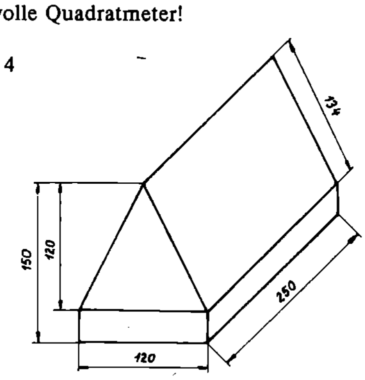
▲6▲ Berechne das Volumen eines Doppel-T-Trägers von 3,200 m Länge (siehe Bild 3/Angaben in mm)!

Bild 3



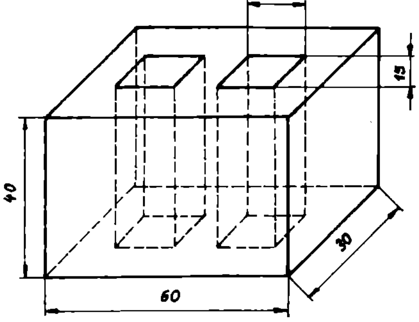
▲7▲ a) Ermittle das Volumen des in Bild 4 dargestellten Zeltes, wenn alle Zeltseiten straff gespannt sind (Angaben in cm)!
b) Das Zelt soll von außen (ohne Boden) mit Imprägnierspray besprüht werden. Wie groß ist die zu besprühende Fläche? Runde auf volle Quadratmeter!

Bild 4



▲8▲ Ermittle Volumen und Oberfläche des in Bild 5 dargestellten Körpers (Angaben in mm)!

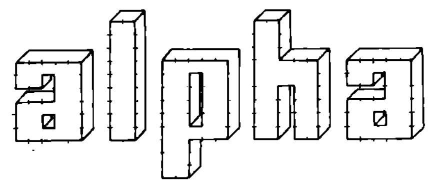
Bild 5



▲9▲ Peter hat ein Aquarium mit den Abmessungen $l = 70{,}0$ cm, $b = 40{,}0$ cm und $h = 30{,}0$ cm. Das Aquarium wird mit Hilfe eines Schlauches mit Wasser gefüllt. Wie hoch ist der Wasserstand nach 12 Minuten, wenn pro Minute 5,0 Liter Wasser einfließen?

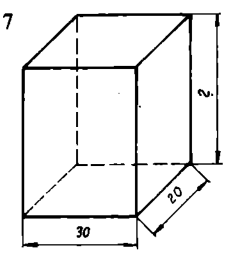
▲10▲ Berechne jeweils Volumen und Oberfläche der in Bild 6 angegebenen Prismen! (Die Körper sind alle eine Längeneinheit *dick*.)

Bild 6



▲11▲ Ermittle die fehlende Seitenlänge des in Bild 7 dargestellten Körpers! Die Oberfläche des Quaders beträgt 52 cm² (Angaben in mm).

Bild 7

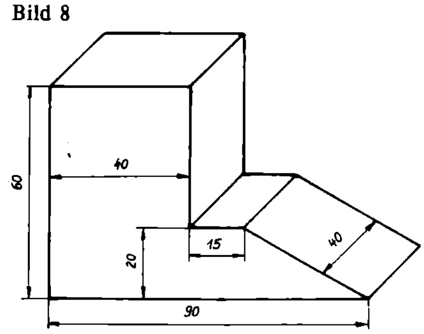


▲12▲ Aus 240,0 cm Draht ist das Kantenmodell eines Quaders erstellt worden, dessen eine Kante 3,0 cm länger und dessen andere Kante 6,0 cm länger als die kürzeste Kante des Quaders ist. Berechne das Volumen des Kantenmodells! (Verschnittverluste bleiben unberücksichtigt.)

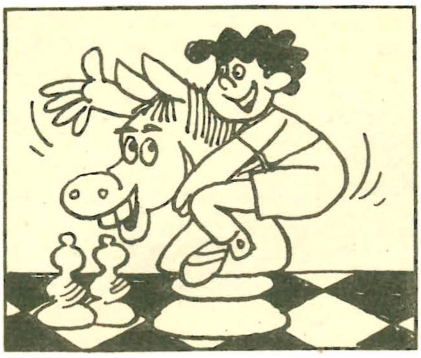
▲13▲ Ein Quader mit den Maßen $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 4$ cm ist außen grün gefärbt. Der Quader wird in kleine Würfel von 1 cm Kantenlänge zersägt. Wieviel Würfel haben keine grüne Fläche?

▲14▲ Wie groß ist das Volumen des in Bild 8 dargestellten Körpers (Angaben in mm)?

Bild 8



L. Flade/H. Knopf



Wer hat die besseren Chancen?

In einem Schachturnier mit 14 Spielern liegen nach 12 Runden Holger und Matthias mit jeweils 8 Punkten in der vorderen Hälfte der Turniertabelle. Holger erzielte dabei folgende Resultate: 5 Gewinne, 6 Remis und 1 Niederlage. Matthias erkämpfte die 8 Punkte mit 4 Gewinnen, 8 Remis und ohne Niederlage

(Gewinn = 1 Punkt, Remis = $\frac{1}{2}$ Punkte, Niederlage = 0 Punkte).

In der 13. Runde spielen Holger und Matthias gegeneinander. Wer hat dabei die besseren Chancen?

Nach den Prinzipien der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung ist die mathematische Wahrscheinlichkeit P für das Eintreffen eines zufälligen Ereignisses A gleich dem Quotienten aus der Anzahl der für A günstigen Ereignisse g und der Anzahl der gleichmöglichen Ereignisse m zu dem entsprechenden Ereignisfeld:

$$P(A) = \frac{g}{m}$$

Mit dieser Form ist die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, daß ein Schachspieler eine bestimmte Partie gewinnt, nicht zu beantworten. Von gleichmöglichen Ereignissen kann bei einer solchen Frage nicht die Rede sein. Deshalb müssen bei derartigen Problemen die Prinzipien der modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung angewendet werden, d. h., bei der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines solchen Ereignisses sind jene Ereignisse zu berücksichtigen, deren Ergebnis bereits feststeht. Mittels einer Methode von C. H. O'D. Alexander erhält man die Möglichkeit zur Bestimmung einer solchen Wahrscheinlichkeit.

Zuerst wird überprüft, ob die jeweiligen Anzahlen der Gewinn-, Remis- bzw. Verlustpartien beider Spieler größer 0 ist. Da Matthias keine Verlustpartie aufzuweisen hat, werden die betreffenden Anzahlen beider Spieler um je 1 erhöht. Danach ergibt sich folgendes:

Holger	*Matthias*
6 Gewinne	5 Gewinne
7 Remis	9 Remis
2 Verluste	1 Verlust

Jetzt werden die erhöhten Gewinnpunkte von Holger mit den erhöhten Verlustpunkten von Matthias und umgekehrt die erhöhten Gewinnpunkte von Matthias mit den erhöhten Verlustpunkten von Holger sowie noch die erhöhten Remispunkte miteinander multipliziert.

Gewinne für Holger:	$6 \cdot 1 = 6$
Gewinne für Matthias:	$5 \cdot 2 = 10$
Remis:	$7 \cdot 9 = 63$
	79

Daraus ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeitswerte:

Gewinn für Holger: $\frac{6}{79} = 0{,}07 = 7\,\%$

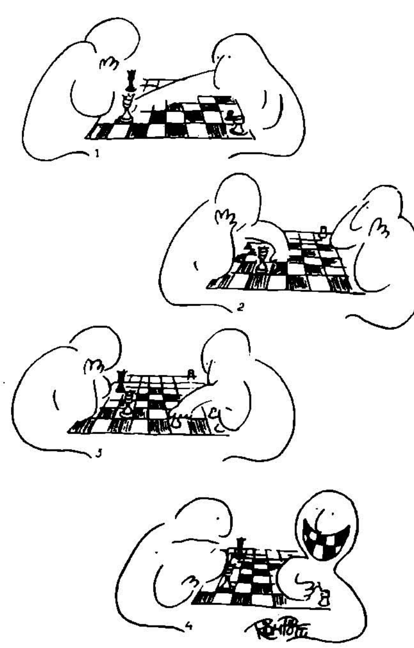
Gewinn für Matthias: $\frac{10}{79} = 0{,}13 = 13\,\%$

Remis: $\frac{63}{79} = 0{,}80 = 80\,\%$

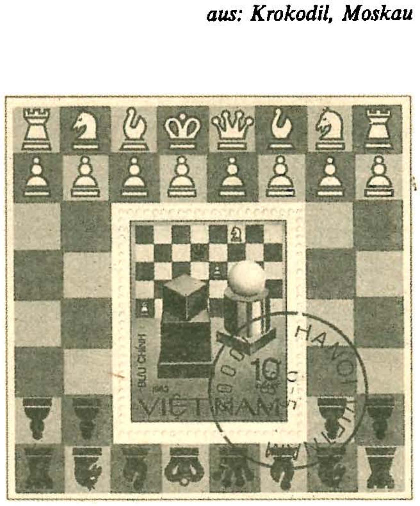
Somit ist erkennbar, daß Matthias – mathematisch betrachtet – über die besseren Chancen in dieser Partie verfügt.

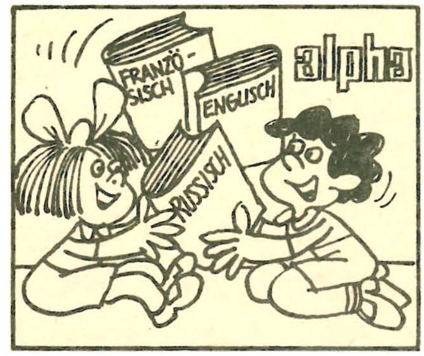
Die Farbverteilung (Weiß oder Schwarz) für die vorangegangenen Partien sowie für die 13. Partie der beiden Spieler blieb bei dieser mathematischen Bestimmung unberücksichtigt.

H. Rüdiger

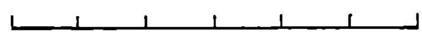


aus: Krokodil, Moskau



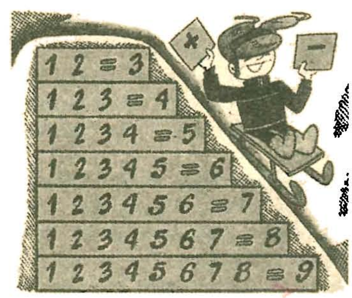


▲1▲ *Counting the segments:*
The drawing shows a segment of a straight line divided into sections of unit length. In this drawing, we can get many segments of different length—of two units, three units, four units, and so on.



Suppose that the total segment has a length of n units. What will be the total number of all the different segments of various lengths?

▲2▲ В числовой пирамиде, изображенной на рисунке, расставьте знаки + и – так, чтобы выполнялись указанные равенства. Между некоторыми соседними цифрами можно не ставить знака, объединяя их в одно число.

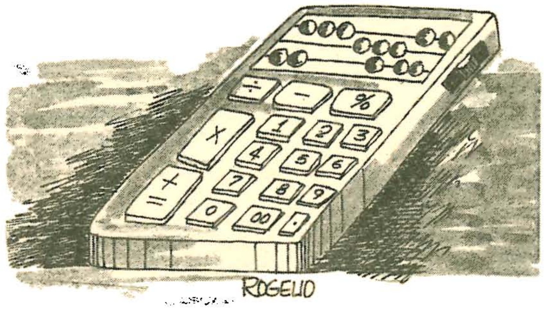


▲3▲ *Plus ou moins:* N, un nombre de trois chiffres, intervient dans toutes les définitions de ce problème! Retrouvez-le et complétez la grille en utilisant judicieusement les deux nombres horizontaux qui y figurent déjà! *aus: Maximath, Belgien*

	1	2	3	4	5	6	7
1				■			
2		■				■	
3			■	7	8	2	8
4	■			■			■
5	7	9	2	5	■		
6		■				■	
7				■			

Horizontalement:	*Verticalement:*
1 N – 83 · N – 600	*1* N – 103 · N – 33
2 N + 50	*2* N – 175
3 N – 808 · 7828	*3* N – 806 · N + 6428
4 N – 777 · N – 807	*4* N – 747 · N – 768
5 7925 · N – 808	*5* N + 1657 · N – 777
6 N – 260	*6* N – 553
7 N – 702 · N – 39	*7* N – 386 · N – 189

Teilbarkeitsregeln: Gewichtete Quersummen



In *alpha* Heft 1/84 wurde ein Beispiel für die Aufstellung von Teilbarkeitsregeln für solche Teiler angegeben, die durch die allgemein bekannten Teilbarkeitsregeln für 2, 4, 5, 8, 10 sowie die einfache bzw. alternierende Quersummenregel für 3, 9 bzw. 11 nicht erfaßt werden. Es soll hier ein anderes Verfahren aufgezeigt werden, welches es gestattet, für alle Teiler und alle möglichen Dividenden die Teilbarkeit zu prüfen.

Ausgangspunkt sei die bekannte Teilbarkeitsregel für 3.

Beispiel 1: Die Bildung der üblichen Quersumme einer m-stelligen auf Teilbarkeit zu prüfenden Zahl

$$Z=\sum_{s=0}^{m-1} a_s\cdot 10^s$$

(geschrieben $a_{m-1}\ldots a_1a_0$) erfolgt zu

$$Q=\sum_{s=0}^{m-1} a_s.$$

Die Teilbarkeit von Q durch 3 ist deshalb mit der Teilbarkeit von Z durch 3 identisch, weil für jede Stelle s ein $n_s\in N$ existiert, so daß $10^s=3\cdot n_s+1$.

Das gleiche gilt für die Teilbarkeit durch 9.

Mit der Teilbarkeitsregel für 7 soll die gewichtete Quersumme an einem Beispiel eingeführt werden.

Beispiel 2: Hier wird zur Zahl Z die *gewichtete Quersumme*

$$Q=\sum_{s=0}^{m-1} a_s\cdot w_s$$

gebildet, wobei für den Teiler 7 in Stelle s die nachfolgende Wichte w_s zu verwenden ist:

s	…7	6	5	4	3	2	1	0
w_s	…	$\overline{(-2}$	$\overline{-3}$	$\overline{-1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{1)}$	

Die Klammer und der Periodenstrich sollen angeben, daß für Stellen $s\geqq 6$ sich die angegebenen Wichten periodisch nach links wiederholen, d. h. $w_s=w_{s-6}$ für $s\geqq 6$.

Durchführung der Teilbarkeitsprüfung durch 7 für $Z=192\,837\,465$:

Stelle s:	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Ziffer a_s:	1	9	2	8	3	7	4	6	5
× Wichte w_s:	2	3	1	−2	−3	−1	2	3	1

Gewichtete Quersumme $Q=$
$2+27\ \ +2-16\ \ -9\ \ -7\ \ +8+18\ \ +5$
$=30$. $Q=30$ ist nicht durch 7 teilbar, daher ist auch Z nicht durch 7 teilbar. Der Beweis für $7\,|\,Z \Leftrightarrow 7\,|\,Q$ wird mit Satz 1 folgen.

Dieser Satz wird auch den Beweis für folgende Feststellung liefern:
Da $Q-2$ durch 7 teilbar ist, gilt dies auch für $Z-2$:
$Z-2=192\,837\,463=7\cdot 27\,548\,209$

Die Anwendung der gewichteten Quersummenregel ist ebenso wie die der herkömmlichen Quersummenregel rekursiv möglich, falls bei einer ersten Anwendung eine Quersumme entsteht, die die Teilbarkeit noch nicht erkennen läßt.

Ableitung der theoretischen Grundlagen der Teilbarkeit von Zahlen

$$Z=\sum_{s=0}^{m-1} a_s\cdot b^s$$

durch beliebige Teiler $t\in\{1,2,3,\ldots\}$ in Zahlensystemen mit beliebiger Basis $b\in\{2,3,4,\ldots\}$:

Satz 1: Eine m-stellige Zahl

$$Z=\sum_{s=0}^{m-1} a_s\cdot b^s \text{ ist genau}$$

dann durch t teilbar, wenn auch

$$Q=\sum_{s=0}^{m-1} a_s\cdot(b^s-n_s\cdot t)$$

mit $n_s\in\{0,1,2,\ldots\}$ durch t teilbar ist. (Schreibweise: $t\,|\,Z\Leftrightarrow t\,|\,Q$).

Dabei heißt der Ausdruck

$$w_s=b^s-n_s\cdot t$$

„Wichte" der Stelle s bzgl. der Teilbarkeit durch t; der Ausdruck

$$Q=\sum_{s=0}^{m-1} a_s\cdot w_s$$

heißt „Gewichtete Quersumme" von Z.

Beweis:

$$\begin{aligned}Z-Q&=\sum_{s=0}^{m-1} a_s\cdot b^s-\sum_{s=0}^{m-1} a_s\cdot(b^s-n_s\cdot t)\\&=\sum_{s=0}^{m-1}(a_s\cdot b^s-a_s\cdot b^s+a_s\cdot n_s\cdot t)\\&=t\cdot\sum_{s=0}^{m-1} a_s\cdot n_s\end{aligned}$$

Demnach ist die Differenz zwischen Z und Q durch t teilbar. Da das Hinzufügen (oder Abziehen) eines ganzzahligen Vielfachen eines Teilers t an der Teilbarkeit einer beliebigen Zahl Z durch t nichts ändert, folgt Satz 1.

Die letzte Zeile des obigen Beweises kann auch geschrieben werden:

$$Z\equiv Q(\mathrm{mod}\,t)$$

Das heißt, daß Z und Q in derselben Restklasse (modulo t) liegen.

Dies bedeutet auch
$t|(Z-n)\Leftrightarrow t|(Q-n)\quad$ mit $n\in N$
Hieraus leitet sich der im Beispiel 2 gezogene Schluß der Teilbarkeit von $Q-2$ auf $Z-2$ ab.

Zur Vereinfachung der Rechnung sollte n_s stets so gewählt werden, daß der Betrag $|w_s|$ jeder Wichte w_s ein Minimum annimmt. Es sei ferner bemerkt, daß die Zahl 0 definitionsgemäß durch jeden beliebigen Teiler t teilbar ist, d. h., eine entstehende Quersumme $Q=0$ bedeutet Teilbarkeit.

Satz 1 gilt für jedes beliebige Zahlensystem. Für $b=10$, d. h. im Dezimalsystem, entsteht der Ausdruck für die Wichten zu

$$w_s=10^s-n_s\cdot t.$$

Einige Spezialfälle:
- Teiler $t=1$: alle $w_s=0$ möglich mit $n_s=10^s$. Das heißt Q stets gleich 0, die Teilbarkeit ist stets gegeben.
- Teiler $t>1$: mit $n_0=0$ ist $w_0=1$ stets möglich.
- Für die Teiler 2…19 ist unten eine Tabelle der Wichten minimalen Betrages angegeben.

Satz 2: Rekursive Berechnung der Wichten w_s $(s\geqq 1)$:
Die Wichte w_{s+1} kann aus w_s gebildet werden zu

$$w_{s+1}=w_s\cdot b-n'_{s+1}\cdot t$$

wobei n'_{s+1} ganzzahlig.

Beweis: Es gilt

$$w_s\ =b^s-n_s\cdot t$$

und

$$w_{s+1}=b^{s+1}-n_{s+1}\cdot t$$

laut Definition der Wichte. Mit

$$n_{s+1}=n_s\cdot b+n'_{s+1}$$

folgt

$$\begin{aligned}w_{s+1}&=b^{s+1}-n_s\cdot b\cdot t-n'_{s+1}\cdot t\\&=b\cdot(b^s-n_s\cdot t)-n'_{s+1}\cdot t\\&=b\cdot w_s-n'_{s+1}\cdot t\qquad\text{q. e. d.}\end{aligned}$$

Demnach können im Dezimalsystem die Wichten w_s für einen Teiler t, beginnend mit $w_0=1$, für $s\geqq 1$ zu

$$w_{s+1}=10\cdot w_s-n'_{s+1}\cdot t$$

gebildet werden, wobei die n'_{s+1} zur Minimierung der Rechenarbeit so gewählt werden sollten, daß die $|w_{s+1}|$ minimal werden. Ferner folgt aus Satz 2: Falls $w_s=0$, so gilt auch $w_{s+i}=0$ für $i\geqq 1$.

Satz 3: Periodizität der Wichten
Gilt für eine Stelle $s=r+d$ $(d>0)$ einer Zahl Z

$$w_s=w_r$$

d. h. $\quad b^s-n_s\cdot t=b^r-n_r\cdot t$
so gilt stets auch

$$w_{s+1}=w_{r+1}.$$

Das heißt, es existieren n_{s+1}, n_{r+1}, so daß

$$b^{s+1}-n_{s+1}\cdot t=b^{r+1}-n_{r+1}\cdot t.$$

Beweis: Mit $w_r = w_s$ folgt aus Satz 2:

$$w_{s+1} = w_s \cdot b - n'_{s+1} \cdot t$$
$$w_{r+1} = w_s \cdot b - n'_{r+1} \cdot t.$$

Wählt man $n'_{r+1} = n'_{s+1}$, so folgt Satz 3. Wenn für die Stellen $s = r \ldots (r + d - 1)$ die gewünschte Minimalität der Beträge der Wichten vorlag, so wird diese Minimalität durch die Wahl $n'_{r+1} = n'_{s+1}$ auch weiterhin periodisch geliefert.

Folgerung: Bei Verwendung von Wichten w_s minimalen Betrages ist jeder Satz von Wichten w_s bzgl. eines Teilers t nach spätestens $t - 1$ Stellen periodisch, oder es gilt für eine Stelle r $(r < t)$ und alle folgenden Stellen

$$r + i \quad (i \geqq 0) \quad w_{r+i} = 0.$$

Beweis: Es treten lt. Voraussetzung nur Wichten aus $w \in \left\{0; \pm 1; \ldots; \pm \llcorner \frac{t}{2} \lrcorner \right\}$ auf, da sich andere nach Satz 1 durch Addition oder Subtraktion von t auf diese zurückführen lassen. ($\llcorner x \lrcorner$ bedeutet: größte ganze Zahl $\leqq x$.) Ferner gilt die Folgerung nach Satz 2 bzgl. $w_{r+i} = 0$.

Beispiele im Dezimalsystem:

Bildung der im Beispiel 2 für $t = 7$ verwendeten Wichten entsprechend Satz 2:

$w_0 = 1$ (nach Satz 1)

$w_1 = 10 \cdot 1 - n'_1 \cdot 7 = 3$ (w_1 von minimalem Betrage für $n'_1 = 1$)

$w_2 = 10 \cdot 3 - n'_2 \cdot 7 = 2$ (w_2 von minimalem Betrage für $n'_2 = 4$)

$w_3 = 10 \cdot 2 - n'_3 \cdot 7 = -1$ (w_3 von minimalem Betrage für $n'_3 = 3$)

$w_4 = 10 \cdot (-1) - n'_4 \cdot 7 = -3$ (w_4 von minimalem Betrage für $n'_4 = -1$)

$w_5 = 10 \cdot (-3) - n'_5 \cdot 7 = -2$ (w_5 von minimalem Betrage für $n'_5 = -4$)

$w_6 = 10 \cdot (-2) - n'_6 \cdot 7 = 1 = w_0$ (w_6 von minimalem Betrage für $n'_6 = -3$)

d. h., nach Satz 3 besteht die Periodizität $w_s = w_{s-6}$ $(s \geqq 6)$.
Schreibweise: $W(7) = \overline{(-2; -3; -1; 2; 3; 1)}$
Eine Kontrolle der so errechneten minimalen Wichten läßt sich stets auch nach Satz 1 ausführen.

Zusammenstellung aller Wichten $W(t)$ für $t = 2 \ldots 19$ im Dezimalsystem:

$W(t)$	t
$(\bar{0}; 1)$	2
$(\bar{1})$	3
$(\bar{0}; 2; 1)$	4
$(\bar{0}; 1)$	5
$(\overline{-2}; 1)$	6
$\overline{(-2; -3; -1; 2; 3; 1)}$	7
$(\bar{0}; 4; 2; 1)$	8
$(\bar{1})$	9
$(\bar{0}; 1)$	10
$\overline{(-1; 1)}$	11
$(\bar{4}; -2; 1)$	12
$\overline{(4; 3; -1; -4; -3; 1)}$	13
$(\overline{(-6; -2; 4; 6; 2; -4)}; 1)$	14
$(\overline{-5}; 1)$	15
$(\bar{0}; 8; 4; -6; 1)$	16
$\overline{(-5; 8; -6; -4; 3; 2; 7; -1; 5; -8; 6; 4; -3; -2; -7; 1)}$	17
$(\overline{-8}; 1)$	18
$\overline{(2; 4; 8; -3; -6; 7; -5; 9; -1; -2; -4; -8; 3; 6; -7; 5; -9; 1)}$	19

$\bar{0}$ bedeutet, daß diese und alle höheren Stellen nicht in die Quersumme eingehen.
$W(7)$, $W(17)$ und $W(19)$ sind Beispiele für Periodizitäten der Länge $t - 1$. $\overline{(\ldots \; \ldots)}$ bedeutet die periodische Wiederholung des Klammerinhalts nach links.

Beispiel 3: Ist $Z = 64\,219\,587\,954$ durch 17 teilbar?

Stelle s:	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Ziffer a_s:	6	4	2	1	9	5	8	7	9	5	4
× Wichte w_s:	2	7	−1	5	−8	6	4	−3	−2	−7	1

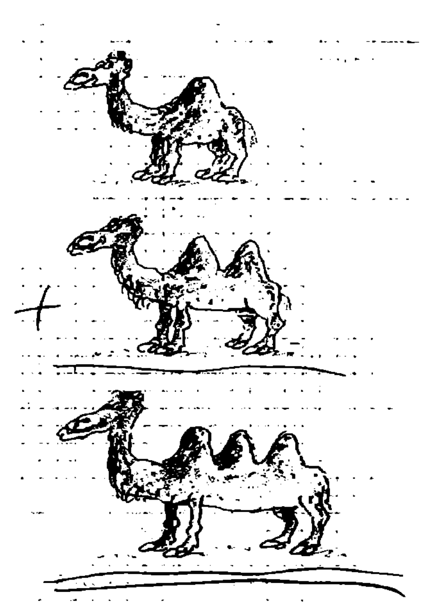
Gewichtete Quersumme $Q =$
$12 + 28 - 2 + 5 - 72 + 30 + 32 - 21 - 18 - 35 + 4 = -37$ ist nicht durch 17 teilbar.
Jedoch ist $Q + 3$ und damit auch $Z + 3 = 64\,219\,587\,957$ durch 17 teilbar.
Ergebnis:
$64\,219\,587\,957 = 17 \cdot 3\,777\,622\,821$.

Andere Zahlensysteme:

Für Teiler $t >> 10$ kann sich die Betrachtung im 100er oder 1000er System empfehlen, d. h., es werden, von rechts beginnend, stets Zweier- oder Dreiergruppen von Ziffern betrachtet, für die zuvor gemeinsame Wichten ermittelt wurden. Allerdings wird auch hier die Rechenarbeit meist noch erheblich sein.

Bedeutungsvoller kann jedoch die direkte Teilbarkeitsprüfung in grundsätzlich anderen Zahlensystemen sein. Selbstverständlich ist $Z = (999)_{10}$ auch in jedem anderen Zahlensystem durch drei und neun teilbar, unabhängig von der Darstellungsweise. Jedoch sieht man dies der Zahl $Z = (1747)_8$ im Oktalsystem ja nicht gleich an, und kann sie trotzdem ohne vorherige Rückkonvertierung ins Dezimalsystem prüfen, indem man z. B. die Wichten für den Neunertest im Oktalsystem ermittelt:
(Beachte hier Satz 2:
$w_{s+1} = 8 \cdot w_s - n'_{s+1} \cdot t$).
$W(9)_8 = \overline{(-1; 1)}$.
Damit entsteht die gewichtete Quersumme zu
$Q = (-1 + 7 - 4 + 7)_8 = (11)_8 \; (= 9_{10})$
und richtig erweist sich auch die oktal geschriebene Zahl Z als durch $9_{10} = (11)_8$ teilbar.

J. Hoppe



ARBEITS-
GEMEINSCHAFTEN
IM BLICKPUNKT

Mini-BASIC für alpha-Leser Teil 6

Oder: Lösen von Gleichungen

Aufgabenbeispiel 8

Gegeben ist ein Quader mit einem Volumen von 770 cm³. Die Zahlenwerte der Kantenlängen des Quaders seien natürliche Zahlen. Außerdem wissen wir, daß die erste Kante um 3 cm länger ist als die zweite und daß die zweite Kante um 4 cm kürzer als die dritte ist.
Gib die Zahlenwerte der Kantenlängen an!
Um die Aufgabe zu lösen, stellen wir zunächst eine Gleichung auf. x sei der Zahlenwert der zweiten Kantenlänge (in cm);
Zahlenwert der 1. Kantenlänge (in cm):
$x+3$;
Zahlenwert der 3. Kantenlänge (in cm):
$x+4$.
Gleichung:

$$(x+3)\,x(x+4) = 770 \text{ bzw.}$$
$$x^3+7x^2+12x-770=0 \quad (x \in N).$$

Aufgrund des Sachverhalts und der Gleichung folgt, daß x größer als Null sein muß und nicht größer als 10 sein kann (grob abgeschätzt).
$x^3+7x^2+12x-770=0$ ist eine Gleichung dritten Grades, für die uns noch kein Lösungsverfahren bekannt ist. Dennoch können wir uns an eine Lösung herantasten, indem wir den linken Term der Gleichung für einige x-Werte aus dem Lösungsbereich berechnen und so versuchen, den x-Wert zu finden, für den die Gleichung erfüllt ist.

x-Wert	linker Term	Feststellung
5	−410	zu klein
8	286	zu groß
7	0	Lösung

Die Lösung der Gleichung in dem Lösungsbereich ist 7. Die Kantenlängen des Quaders betragen somit 10 cm, 7 cm und 11 cm. In diesem Fall war das Problem leicht zu lösen. Wir hätten maximal 9 Zahlenwerte (1; 2; ... 9) für x durchprobieren müssen. Enthält der Grundbereich weit mehr als 9 Zahlen, z.B. 100 oder 1000 oder noch mehr, so ist das Finden einer Lösung bzw. aller Lösungen einer Gleichung dritten Grades auch mit Hilfe eines Taschenrechners eine mühselige Arbeit.

▲35▲ Die Gleichung
$$x^3+7x^2+12x-500=0$$
hat im Intervall $0 \leqq x \leqq 20$ genau eine Lösung. Gib die Lösung mit Hilfe des SR 1 auf Zehntel genau an!
Beim Lösen dieser Aufgabe hast du festgestellt, daß man sich auch an eine solche Lösung, die keine natürliche oder ganze Zahl ist, *herantasten* kann. Man erhält dabei zuweilen Näherungswerte, die um so besser sind, je weniger der berechnete Termwert von Null abweicht. Will man einen Näherungswert auf Hundertstel oder Tausendstel genau ermitteln, ist das auch mit einem Taschenrechner recht zeitaufwendig. Deshalb wollen wir nun den Fleiß eines Computers nutzen, um solche Gleichungen zu lösen. Dazu müssen wir allerdings ein geeignetes BASIC-Programm entwerfen.
Mit einem solchen BASIC-Programm soll der Computer für verschiedene x-Werte die entsprechenden Termwerte ausdrucken lassen. Das kann mit einer FOR-NEXT-Schleife realisiert werden. Damit wir uns an die Lösungen möglichst genau *herantasten* können, gestalten wir das Programm so, daß der Anfang, das Ende und die Schrittweite in unserem Suchintervall frei wählbar sind.

Programm 7 (Wertetabellen für $x^3+7x^2+12x-500$)

```
 10 CLS
 20 INPUT „INTERVALLANFANG:“;A
 30 INPUT „INTERVALLENDE:“;E
 40 INPUT „SCHRITTWEITE:“;S
 50 PRINT „X“, „Y“
 60 PRINT „----------“
 70 FOR X = A TO E STEP S
 80      LET Y = X*X*X
               + 7*X*X
               + 12*X - 500
 90      PRINT X, Y
100 NEXT X
110 PRINT:PRINT:GOTO 20
```

▲36▲ Berechne mit dem Computer eine Lösung der Gleichung
$$x^3+7x^2+12x-500=0$$
so genau wie möglich!

▲37▲ Versuche folgende Aufgaben auf analoge Weise mit dem Computer zu lösen.
a) Die Gleichung
$x^4-5{,}1x^3+5{,}9x^2-9{,}3x+27=0$
hat im Intervall $0 \leqq x \leqq 5$ genau zwei Lösungen. Ermittle sie!
b) Finde die Lösung der Gleichung
$100^{\frac{1}{a}} = 36{,}63^{\frac{1}{25}}$ im Intervall
$10 \leqq a \leqq 40$!
c) Ermittle die drei Lösungen der Gleichung $b^3+1=2b$!
d) Die Gleichung $z^{\frac{3}{4}}-2\sqrt{z}-7=0$
hat im Intervall $0 \leqq z \leqq 100$ genau eine Lösung. Gib sie an!

Mit dem Programm 7 ermittelten wir eigentlich die Nullstelle (n) der in Zeile 80 angegebenen Funktion:
$$y=x^3+7x^2+12x-500.$$

In BASIC kann auch mit Hilfe der Anweisung

$\boxed{\text{DEF FN Name (Argument) = Ausdruck}}$

eine Funktion definiert werden.

Beispiele:

```
DEF FNY(X) = X ∧ 4 - 5.1*X ∧ 3
DEF FNF(B) = B*B*B - 2*B + 1
DEF FNK(Z) = Z ∧ (3/4) - 2*SQR(Z) - 7
```

▲38▲ Finde die Fehler!
a) DEF FN(X) = X*X + 2
b) DEF FNY = 2*Z − 7
c) DEF FNA(X) = 3X ∧ 4

Nutzt man im Programm 7 die Funktionsanweisung, so könnte man folgende Änderungen vornehmen:

```
45 DEF FNY(X) = X*X*X
             + 7*X*X
             + 12*X - 500
```

Dafür wird die Zeile 80 gestrichen.
Die Zeile 90 ist zu ändern:

```
90 PRINT X, FNY(X)
```

Wie man sieht, ist beim Aufruf der in Zeile 45 definierten Funktion die Buchstabenkombination FN dem Namen voranzustellen (vgl. Zeile 90).

▲39▲ Weshalb ist das Vereinbaren von Funktionen innerhalb einer Schleife abzulehnen?
Beim Lösen der Aufgabe 37 konntest du feststellen, daß die Wahl geeigneter Eingabewerte für A (Intervallanfang) und E (Intervallende) für das Finden einer Lösung entscheidende Bedeutung hat. Wenn das neue Intervall im vorherigen enthalten ist und die Termwerte an den Intervallenden verschiedenes Vorzeichen haben, so kommt man der Lösung ein Stück näher. (Diese Aussage gilt allerdings nur für solche Gleichungen, die auf stetige Funktionen führen. Da alle in der Schule behandelten Funktionsklassen stetig sind, soll dieser Begriff hier nicht näher erläutert werden.)
Wenn man auch nach längerem Suchen kein geeignetes Intervall findet, kann daraus noch nicht gefolgert werden, daß es keine Lösungen gibt. Wir wollen im weiteren die Fragen der Lösbarkeit und der Anzahl der Lösungen nicht näher betrachten, da bei Anwendungsaufgaben die Lösbarkeit in einem Intervall meist durch den Sachverhalt gegeben ist.
Wir wollen nun unser Programm 7 noch nutzerfreundlicher gestalten. Bisher nahm uns zwar der Computer viele Rechnungen ab, aber wir hatten noch genug zu tun:
(1) Feststellen, ob es einen x-Wert gibt, für den $y=0$ ist.
(2) Vorzeichenwechsel feststellen.
(3) Neues Intervall ablesen und eingeben.
(4) Neue Schrittweite bestimmen und eingeben.
(5) Entscheidung über Beendigung des Verfahrens.

All diese Aufgaben soll der Computer übernehmen.
Zu (1): Mit Hilfe der Anweisung

```
94   IF FNY(X) = 0 THEN PRINT
     „Y = 0 FUER X = “;X
```

kann der Computer feststellen, ob es einen x-Wert gibt, für den Y = 0 gilt.

Zu (2): Um geeignete Intervallgrenzen zu erkennen, nutzen wir den bekannten Satz, daß das Produkt zweier Zahlen genau dann negativ ist, wenn die Zahlen unterschiedliches Vorzeichen haben.

```
IF FNY(X)*FNY(X + S) < Ø
THEN PRINT „+/– WECHSEL"
```

Zu (3)/(4): Ausgehend von (2) wissen wir, daß eine Lösung der Gleichung (bzw. eine Nullstelle der Funktion Y(X)) im Intervall <X;X + S> liegt. Um sich an diese weiter heranzutasten, sind X und X + S als neue Intervallgrenzen zu wählen:

LET A = X: LET E = X + S.

Darüber hinaus ist die Schrittweite S zu verkleinern (z.B. auf ein Zehntel der vorherigen Schrittweite):

LET S = Ø.1*S.

Also können wir insgesamt folgende BASIC-Programmzeile formulieren:

```
98   IF FNY(X)*FNY(X + S) < Ø
     THEN PRINT„+/–WECHSEL":
     A=X:E=X+S=.1*S:GOTO 7Ø.
```

(Das Schlüsselwort LET kann auch weggelassen werden.)

▲40▲ Ergänze das Programm 7 und löse dann die Aufgabe 37 erneut!

Man erkennt: Sobald ein geeignetes Intervall eingegeben wurde, arbeitet sich der Computer selbständig an die Lösung heran.

Aber: Nachdem die Genauigkeitsgrenze des Computers erreicht ist (6 Ziffern), läuft der Computer in einigen Fällen *rund*, ohne daß eine Änderung eintritt (z.B. bei ▲37▲c) mit $b_1 = -1.618Ø3$).

Wir müssen also eine Abbruchbedingung formulieren.

Zu (5):

▲41▲ Übernimm folgende Programmzeile!

```
95   IF S < 1E – 6 THEN PRINT
     „NAEHERUNGSLOESUNG:",
     X:END
```

a) Warum wurde die Abbruchbedingung vor den Anweisungen zur Intervallveränderung bei einem Vorzeichenwechsel eingefügt?

b) Löse folgende Gleichungen!

$x^3 - 2x + 5 = 0$

$x^3 - 2x + 50\,000 = 0$

c) Überlege, warum die gleiche Abbruchbedingung bei der zweiten Gleichung versagt!

Will man Abbruchbedingungen formulieren, so ist die gewünschte Genauigkeit anzugeben. Dazu wurde in Zeile 95 die Schrittweite S genutzt.

S gibt eine Schranke für den *absoluten Fehler* des Näherungswertes X an; der absolute Fehler von X soll kleiner sein als 0,000001. Damit wird verständlich, weshalb die Abbruchbedingung in der letzten Aufgabe mit der Näherungslösung $x = -36{,}8584$ nicht erfüllt werden kann.

Für S = 0,000001 z. B. ist der Wert von X + S = –36,858399. Da der Kleincomputer nur 6 Ziffern anzeigt, intern aber auch nur mit 7 Ziffern arbeitet, führt dieser Wert zu keiner Änderung, und die Schrittweite S wird nicht weiter verkleinert.

Der absolute Fehler für sich genommen reicht also noch nicht aus, um eine in jedem Fall geeignete Abbruchbedingung zu formulieren. Man muß ihn in Bezug zum Näherungswert setzen.

Deshalb empfiehlt es sich, stets den *relativen Fehler* für eine Abbruchbedingung zu verwenden.

$$\text{Relativer Fehler} = \left|\frac{\text{Absoluter Fehler}}{\text{Näherungswert}}\right|$$

Aber auch dem relativen Fehler sind durch die beschränkte Stellenzahl Grenzen gesetzt.

Es gilt: Wenn ein Näherungswert n zuverlässige Ziffern hat, dann liegt der relative Fehler in der Größenordnung $\frac{1}{10^n}$ (und umgekehrt).

Damit erhalten wir allgemein folgende Abbruchbedingung, wenn S den absoluten Fehler und X den Näherungswert angibt:

ABS(S/X) < 1 E – 6

Für X = 0 führt diese Bedingung jedoch zu einer Fehlermeldung.

Deshalb sollte X = 0 gesondert untersucht werden.

Insgesamt erhalten wir damit ein Programm zur Lösung *beliebiger* Gleichungen bzw. zur Ermittlung von Nullstellen beliebiger (stetiger) Funktionen.

Programm 8

```
1Ø  CLS
2Ø  INPUT „INTERVALLANFANG:";A
3Ø  INPUT „INTERVALLENDE:";E
4Ø  INPUT „SCHRITTWEITE:";S
5Ø  DEF FNY(X) = ...
6Ø  PRINT „X", „Y"
7Ø  PRINT „– – – – – – – – – –"
8Ø  FOR X = A TO E STEP S
9Ø       PRINT X,FNY(X)
1ØØ      IF FNY(X) = Ø THEN PRINT
         „Y = Ø FUER X = ";X
11Ø      IF X = Ø THEN PRINT „X = Ø
         EXTRA BEHANDELN!":GOTO
         2Ø
12Ø      IF ABS(S/X) < 1E – 6 THEN
         PRINT „NAEHERUNGS-
         LOESUNG:";X:END
13Ø      IF FNY(X)*FNY(X + S) < Ø
         THEN PRINT
         „+/–WECHSEL!":
         A = X:E
         = X + S:S = .1*S: GOTO 8Ø
14Ø NEXT X
15Ø PRINT:PRINT:GOTO 2Ø
```

▲42▲ Ergänze das Programm 8, so daß man die Genauigkeit der Näherungslösung wählen kann!

▲43▲ Entwickle ein Programm zur Lösung beliebiger Gleichungen nach folgender Idee:

Wenn $<a; b>$ ein geeignetes Lösungsintervall ist, dann bilde den Funktionswert in der Mitte des Intervalls $<a; b>$. Von den beiden Teilintervallen wird mit dem weitergearbeitet, für das die Funktionswerte an den Intervallenden verschiedenes Vorzeichen haben. Wiederhole die Intervallhalbierung solange, bis der relative Fehler der Näherungslösung kleiner als 0,00001 ist!

L. Flade/M. Pruzina

Lösungen

▲35▲ $x = 5.8$

▲36▲ $x = 5.799Ø1$

Hierbei stellst du auch fest, daß der Computer im *Inneren* mit einer etwas größeren Genauigkeit arbeitet, als auf dem Bildschirm angezeigt wird.

▲37▲ a) $x_1 = 2.5$ $x_2 = 3.6$

b) $a = 31.9727$;

c) $b_1 = -1.618Ø3$ $b_2 = Ø.618Ø34$ $b_3 = 1$

d) $z = 66.6597$

▲38▲ a) Der Name der Funktion fehlt.

b) Das Argument der Funktion fehlt.

c) Das Multiplikationszeichen fehlt.

▲39▲ Die Funktionsvereinbarung innerhalb einer Schleife würde unnötigerweise bei jedem Schleifendurchlauf erneut erfolgen.

▲41▲ a) Wenn die gewünschte Genauigkeit erreicht ist, kann auf weitere Untersuchungen verzichtet werden.

b) $x_1 = -2.Ø9455$ $x_2 = -36.8584$

c) Die Abbruchbedingung versagt, weil die Schrittweite nicht kleiner als 0,000001 werden kann.

▲42▲

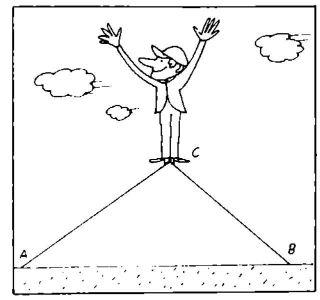
```
45 INPUT „RELATIVER
FEHLER:";G
12Ø   IF ABS(S/X) < G
THEN ...
```

▲43▲ Eine Möglichkeit:

```
1Ø  CLS
2Ø  INPUT „INTERVALLANFANG:";A
3Ø  INPUT „INTERVALLENDE:";E
4Ø  DEF FNY(X)=...
5Ø       X = .5*(A + E)
6Ø       IF FNY(X) = Ø THEN
         PRINT „X=";X:END
7Ø       IF FNY(A)*FNY(X) < Ø
         THEN E=X:ELSE A=X
8Ø       IF X=Ø THEN PRINT „X=Ø
         EXTRA BEHANDELN!":
         GOTO 2Ø
9Ø       IF ABS(E–A)/X) < 1E–5
         THEN PRINT
         „NAEHERUNGSLOESUNG:"
         ;X:END
1ØØ GOTO 5Ø
```

In der Betriebsberufsschule des Wohnungsbaukombinates Erfurt erhalten jährlich 550 Lehrlinge eine Ausbildung im Computerkabinett.

In freien Stunden · alpha-heiter

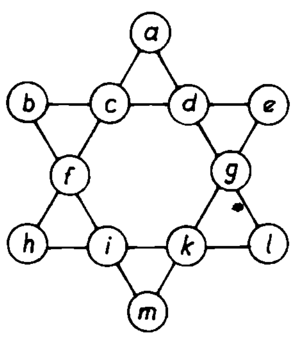


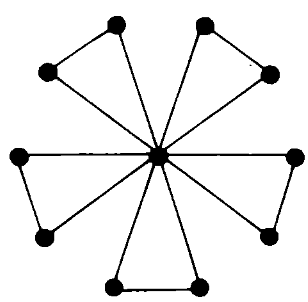
Rolf Felix Müller, Gera

Magische Sternfiguren

a) Das im linken Bild gezeigte Sternsechseck hat sechs äußere und sechs innere Ecken (a, e, l, m, h, b bzw. c, d, g, k, i, f). Sie sind mit den Zahlen 1, 2, 3, ..., 12 so zu besetzen, daß immer je vier längs einer Geraden liegenden Zahlen dieselbe Summe ergeben.

Oberlehrer O. Chromy, Coswig



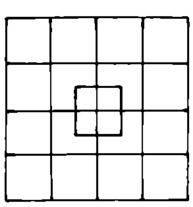


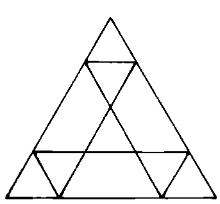
b) Anstelle der Punkte sind im rechten Bild die Zahlen 1 bis 11 so zu ergänzen, daß die Summe am Umfang jedes Dreiecks zunächst 14, dann 18 beträgt.

Jindřich Pěnčik, Prag

Wie viele Quadrate, wie viele Dreiecke?

L. L.





Ein Taschengeldproblem

Ein Schüler hatte in seiner Geldbörse nur Münzen zu 15 Kopeken und zu 20 Kopeken; es waren mehr Münzen zu 20 Kopeken als Münzen zu 15 Kopeken. Den 5. Teil seines Geldes gab dieser Schüler für eine Kinokarte aus, die er mit genau zwei Münzen bezahlte. Die Hälfte des ihm noch verbliebenen Geldes gab er für das Mittagessen aus, das er mit genau drei Münzen bezahlte.
Wieviel Münzen zu 15 Kopeken und zu 20 Kopeken hatte dieser Schüler anfangs?

aus einem sowj. Unterhaltungsbuch

Geburtstag erraten

Multipliziere die Tageszahl mit 20 und addiere 3! Multipliziere dann mit 5, und addiere die Monatszahl! Multipliziere das Ergebnis mit 20, addiere 3, und multipliziere mit 5! Addiere zum Schluß die Jahreszahl (nur die aus den letzten beiden Grundziffern ablesbare Zahl) dazu!
(Ich subtrahiere von dem genannten Ergebnis 1515 und lese von links nach rechts die Tages-, Monats- und Jahreszahl ab.)

L. L.

Erstaunliche Skatabrechnung

Vier Freunde rechnen ihre Spielergebnisse beim Skat mit $\frac{1}{10}$ Pf je Punkt ab. Letztens sah die Abrechnung so aus (relative Differenz mit jedem anderen Spieler):

Jürgen	Jochen	Dieter	Hannes	
+ 75	−219	+165	− 21	
+294	−294	+ 90	− 96	
− 90	−384	+384	+198	
+ 96	−198	+186	−186	
+300 : 10	−876 : 10	+660 : 10	− 84 : 10	
+ 30	− 88	+ 66	− 8	(Pf)

Da meinte Dieter: „Wollten wir heute nicht eigentlich um $\frac{1}{4}$ Pf spielen?“ „Ja“, meinten auch die anderen, „dann müssen wir zum Schluß eben durch 4 dividieren.“ „Nicht nötig“, antwortete Dieter nach kurzem Überlegen, „diesmal können wir das Ergebnis sofort aus dem Spielergebnis ablesen.“ Die Freunde zweifelten und dividierten die letzte Zeile jeweils durch 4. Erstaunt stellten sie fest, daß Dieter recht hatte.
Wie läßt sich das erklären?

Studienrat H.-J. Kerber, Neustrelitz

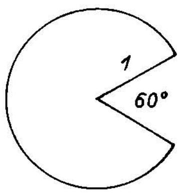
Möglich oder nicht möglich?

Ist es möglich, genau die Zahlen 1, 2, ..., 12 so auf einem Kreis anzuordnen, daß für je drei aufeinanderfolgende Zahlen a, b, c; $b^2 - ac$ durch 13 teilbar ist?

aus der ungarischen math. Schülerzeitschrift Lapok

Das Monster

In einem Spiel ist das „Monster“ der Sektor eines Kreises mit dem Radius 1 cm, das in der Figur gezeigt wird. Das fehlende Stück (der Mund) hat einen Zentriwinkel von 60°.
Wie groß ist der Umfang des Monsters (in cm)?

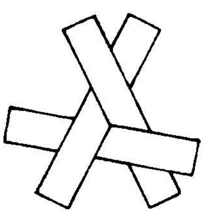


A $\boxed{\pi + 2}$ B $\boxed{2\pi}$ C $\boxed{5/3\pi}$ D $\boxed{5/6\pi + 2}$
E $\boxed{5/3\pi + 2}$

aus einem britischen Schulwettbewerb 1985

Gute Beobachtungsgabe gefragt!

Zwei Minuten anschauen, dann nachzeichnen!

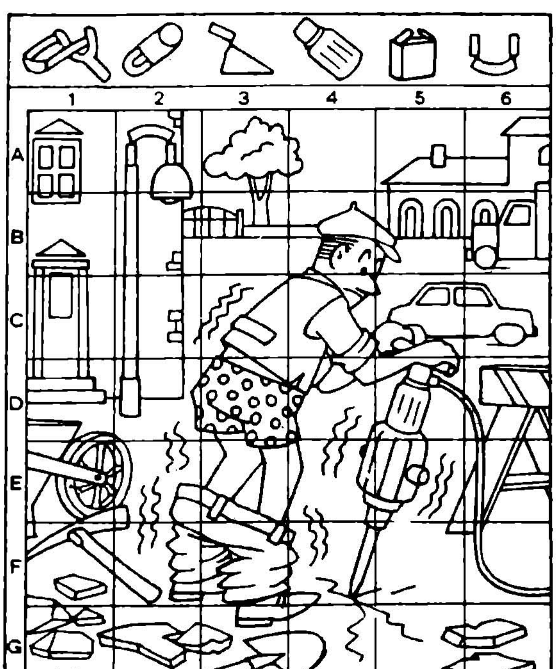


aus der niederländischen math. Schülerzeitschrift Pythagoras

Suchbild

Von den in der oberen Reihe dargestellten Gegenständen befinden sich vier auch in der Zeichnung. Welche?

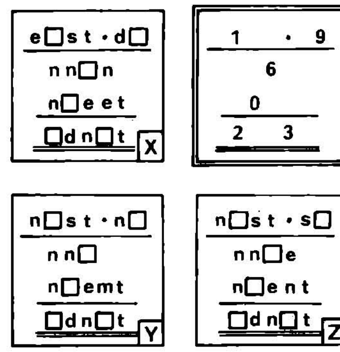
aus Füles, Budapest



Kryptarithmetik

Die Buchstaben auf den Datenträgern X, Y, Z sind verschlüsselte Zahlen, wobei gleiche Buchstaben gleiche Zahlen bedeuten. Welcher Datenträger löst die rechts oben fixierte Multiplikationsaufgabe?

W. Neugebauer, Berlin



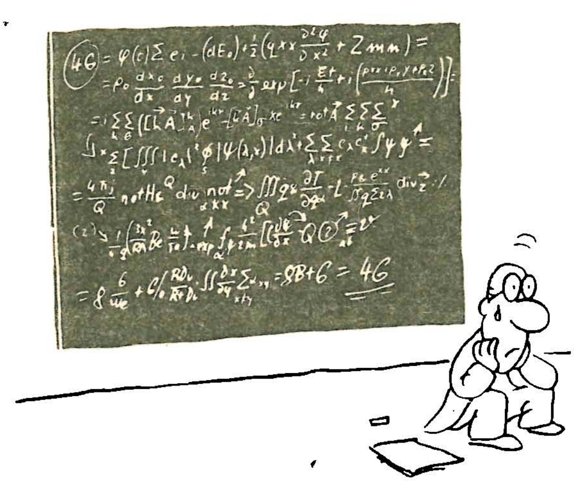
Zahlen in Begriffen

Ergänze die folgenden Wortbruchstücke jeweils so durch das Zahlwort für eine natürliche Zahl, daß sich sinnvolle Begriffe ergeben:

A) ...sassa, ...guldenkraut.
B) ...meter, ...ung, ...teinium, ...tagsfieber, ...sachen, ...fel, ...e, ...erbahn, ...stigkeit, ...tschrift, ...amkeit, ...g, ...gebirge, ...erdeck, ...schaft, ...jähriger Krieg, ...enbein, ...t.
C) ...malklug, ...errat, ...los, Jahr..., ...kampf, ...riede, ...waldstätter See, ...enbeinküste.

Wenn a die Summe der unter A eingefügten, b die Summe der unter B eingefügten und c die Summe der unter C eingefügten Zahlen ist, so gibt $a - b$ das Geburtsjahr und $a - c$ das Todesjahr eines französischen Physikers und Mathematikers, nach dem die SI-Basiseinheit der elektrischen Stromstärke benannt ist, an.
Wer ist es, und wann lebte er?

Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität



aus: Mathematical pie, London

Evariste Galois

Verständlicherweise kommt es auch heute noch selten vor, daß Mathematiker durch Briefmarken gewürdigt werden, deren wissenschaftliche Leistungen auf die *reine* Mathematik beschränkt sind und nicht unmittelbar in Naturwissenschaften, Technik oder anderen Praxisbereichen wirksam werden, so daß es schwer ist, ihren Inhalt und ihre Bedeutung einem breiteren Publikum verständlich zu machen. Zu den wenigen Ausnahmen gehört die hier gezeigte französische Briefmarke aus dem Jahre 1984, die dem *Revolutionär und Geometer* Evariste Galois (1811 bis 1832) gewidmet ist. *Geometer* ist hier als Mathematiker zu verstehen, denn das Arbeitsgebiet von Galois war die Algebra, wenngleich seine Ergebnisse von Bedeutung für die Theorie der geometrischen Konstruktionen sind.

Ein uraltes zentrales Problem der Mathematik ist die Suche nach Lösungsformeln und -methoden für Gleichungen in einer Unbekannten x, die auf die Form

(1) $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

gebracht werden können. Nachdem im wesentlichen schon in der Antike die Lösungsformel

$$x_{1/2} = \frac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\right)$$

für die quadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

bekannt war und im 16. Jh. ähnliche, auf den Grundoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und zweite bzw. dritte Wurzel $\sqrt[2]{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$ beruhende Lösungsformeln (sogenannte Radikale, abgeleitet von radix [lat.] = Wurzel) für Gleichungen dritten und vierten Grades, d. h. für die Fälle $n = 3, 4$ in (1) gefunden worden waren, konzentrierte sich das Streben der Mathematiker auf die Suche nach analogen Lösungsformeln in Gestalt von Radikalen für Gleichungen höheren Grades.

1799 bewies der Italiener P. Ruffini (1765 bis 1822) mit noch unzulänglichen Mitteln und 1822 der Norweger N. H. Abel (1802 bis 1829) in aller Strenge, daß es eine solche Lösungsformel für die allgemeine Gleichung (1) im Fall $n \geqq 5$ nicht gibt. Derartige Resultate, vergleichbar ist z. B. die Unmöglichkeit, die Gleichung $x^2 = 2$ durch eine rationale Zahl zu lösen oder eine Strecke der Länge π aus der Einheitsstrecke mit Zirkel und Lineal zu konstruieren, stoßen meist auf das Unverständnis der Nichtmathematiker, obwohl jeder versteht, daß im täglichen Leben bestimmte Aufgaben mit dafür ungeeigneten Hilfsmitteln unlösbar sein können. Auch innerhalb der Mathematik erfordern solche Unmöglichkeitsbeweise, jedenfalls die ersten auf einem neuen Gebiet, meist grundsätzlich neue Überlegungen, Begriffe und Methoden, das Durchbrechen gewisser psychologischer Barrieren, und sie bewirken das Entstehen neuer mathematischer Disziplinen und weiterführender Fragen, lösen manchmal eine innermathematische Revolution aus. So geschah es auch mit dem Satz von Ruffini und Abel. Er besagt ja keineswegs, daß keine Gleichung der Form (1) durch ein Radikal lösbar ist. Zum Beispiel ist $x = \sqrt[5]{a}$ eine Lösungsformel in Gestalt eines Radikals für die Gleichung $x^5 - a = 0$ und

(2) $x = \pm\sqrt{a \pm \sqrt{b \pm \sqrt{c}}}$

ein Lösungsradikal für die Gleichung

(3) $x^8 - 4ax^6 + (6a^2 - 2b)\,x^4 + (4ab - 4a^3)\,x^2 + a^4 - 2a^2b + b^2 - c = 0,$

d. h. alle 8 im allgemeinen verschiedenen Werte, die die rechte Seite der Formel (2) bei allen möglichen Wahlen der vorkommenden Vorzeichen annimmt, erfüllen die Gleichung (3) oder, was gleichbedeutend ist:

Bezeichnet man diese 8 Werte mit x_1, x_2, ..., x_8, so ist die linke Seite von (3) gleich dem Produkt $(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_8)$. (Man prüfe beides nach!) Aber in diesen Fällen genügen die Koeffizienten der gelösten Gleichungen sehr speziellen Bedingungen: Im ersten Beispiel sind fast alle gleich Null, im zweiten Beispiel hängen sie auf eine sehr spezielle Weise von nur drei Parametern a, b, c ab.

Der Satz von Ruffini und Abel besagt nur, daß für die Gleichung (1) keine für alle Werte von a_{n-1}, ..., a_0 einheitlich anwendbare Radikal-Lösungsformel existiert, die aus den Koeffizienten a_0, ..., a_{n-1} als Variablen mittels der zulässigen Operationen aufgebaut ist.

Galois stellte sich mit dem Einfallsreichtum, dem ungestümen Temperament und revolutionärem Elan, die ihn auch in seinem kurzen, dramatischen Leben auszeichneten, der überaus schwierigen Frage, ob und wie man aus den Koeffizienten einer speziellen Gleichung erkennen kann, ob sie durch Radikale lösbar ist und wie diese Radikale gegebenenfalls von der Struktur der Koeffizienten der gegebenen Gleichung abhängen. Das dazu erforderliche völlig neue Begriffssystem, auf dem heute unter dem Namen Gruppentheorie eine grundlegende und äußerst vielseitig verwendbare mathematische Disziplin aufgebaut ist, benötigte rund 100 Jahre vom Tode Galois' an gerechnet, bis es ungefähr die heutige Gestalt annahm und von allen Mathematikern verstanden, anerkannt und gehandhabt wurde. Es ist also nicht gar so verwunderlich, daß die sehr kurzen, in fast aphoristischem Stil und provokatorischem Ton gehaltenen Schriften des so jungen Galois von den berühmten, erfolgreichen und sich ihrer Bedeutung bewußten Mathematikern der französischen Akademie nicht verstanden oder beachtet wurden.

Die *Galoistheorie* gehört zu den genialsten mathematischen Leistungen aller Zeiten, vollbracht von einem jungen, unbekannten und mathematisch nur notdürftig gebildeten, überdies politisch mißliebigen Mann. Sie findet heute teils direkt, vor allem aber durch die von ihr erzeugte neue Denkweise Anwendungen in vielen Richtungen, von denen Galois selbst und seine Zeitgenossen nichts ahnen konnten. Zugleich muß man sagen, daß sie für die tatsächliche numerische Lösung algebraischer Gleichungen von sehr geringem Wert ist. Aber auch diese Erkenntnis, eingebettet in die umfassendere Wahrheit, daß das letzte Ziel der Mathematik nicht so sehr die schönen, eleganten Sätze und Theorien als vielmehr die rationell anwendbaren Verfahren und Methoden sein müssen, ist das Resultat einer innermathematischen Revolution, die sich in unseren Tagen vollzieht. Man darf überzeugt sein, daß Galois, der sich zu seiner Zeit den aktuellsten, am meisten in die Zukunft weisenden Fragen der Mathematik widmete und so viel zur Vollendung der *klassischen* Mathematik beigetragen hat, auch heute auf der Seite des Fortschritts zu finden wäre.

Wir haben zugunsten eines Versuchs, die wissenschaftliche Leistung von Galois mit einfachen Mitteln zu erläutern und aus heutiger Sicht zu werten, auf jegliche Details aus dem Leben und politischen Wirken von Galois verzichtet. Hierzu möchten wir den Leser auf die Galois-Biographie in den *Biographien bedeutender Mathematiker* (Verlag Volk und Wissen, 3. Aufl. 1983) und auf den biographischen Roman *Wen die Götter lieben* von L. Infeld (deutsch 1954) sowie auf den Artikel über Galois in der *alpha* 1969, Heft 4, verweisen[1]).

P. Schreiber

[1]) Nur wenige heutige Leser haben die *alpha* schon seit so langer Zeit abonniert und aufgehoben, aber es ist eine interessante und nützliche Aufgabe, einmal nachzuforschen, wo in Eurem Umkreis die alten *alpha*-Jahrgänge noch zugänglich sind und darin zu stöbern. Wir möchten Euch anregen, alte *alpha*-Hefte aufzuspüren, Stil und Inhalt von damals mit der heutigen *alpha* zu vergleichen und uns Eure Eindrücke und Entdeckungen zu schreiben.

XXVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

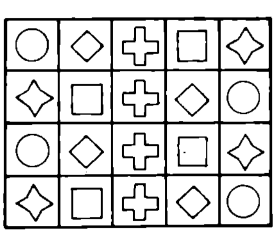
Aufgaben der Schulolympiade

Abgabe beim Mathematiklehrer: Ende September 1987

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.
Hinweis: Unter den Aufgaben der 1. Stufe befinden sich auch solche (in der Regel ist es die 4. Aufgabe), die aus mehreren Teilaufgaben von steigendem Schwierigkeitsgrad bestehen. Dabei ist Teil a) meist recht einfach zu lösen und gibt in der Regel Hilfe für die Lösung der anderen Teilaufgaben. Die Lösung der letzten Teilaufgabe stellt bewußt hohe Anforderungen. Diese Teilaufgabe ist vorwiegend für die leistungsstärkeren Schüler gedacht. Es wird empfohlen, über diese anspruchsvollen Aufgaben in Klassen und Arbeitsgemeinschaften zu diskutieren.
Anmerkung: $\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet im folgenden die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$. Ferner bezeichnet AB die Strecke mit den Endpunkten A und B, während $\overline{AB}$ die Länge der Strecke AB bedeutet.

Olympiadeklasse 5

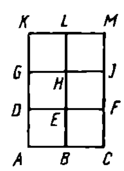
270511 Jemand will die abgebildete Figur in genau vier Teile zerschneiden. Keines der 20 kleinen Quadrate soll dabei zerschnitten werden. Die vier Teile sollen sich so übereinander legen lassen, daß sie sich dann völlig gleichen (gleiche Gestalt und gleiche Verteilung der Muster).



Es gibt fünf Möglichkeiten für eine derartige Zerlegung.
Zeichne diese fünf Zerlegungen!
Eine Begründung wird nicht verlangt.

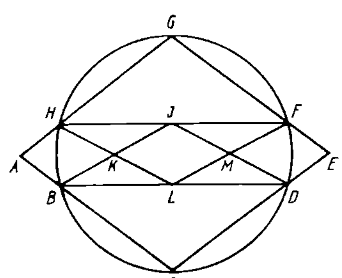
270512 Eine Strecke von 240 mm Länge soll in zwei Teilstrecken zerlegt werden. Die größere Teilstrecke soll genau 47mal so lang sein wie die kleinere. Wie lang muß dann die kleinere Teilstrecke sein und wie lang die größere? Begründe deine Antwort!

270513 Das Bild zeigt ein Rechteck $ACMK$, das aus sechs kleinen Quadraten zusammengesetzt ist. Man kann im Bild außer diesem Rechteck noch weitere Rechtecke finden, die sich aus solchen kleinen Quadraten zusammensetzen und die selbst keine Quadrate sind. Zum Beispiel ist $DFJG$ ein derartiges Rechteck.

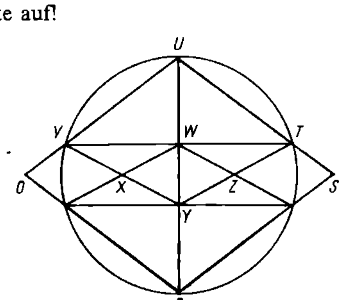


Nenne alle derartigen Rechtecke außer $ACMK$!
Eine Begründung wird nicht verlangt.

270514 a) Die Figur des Bildes soll so *in einem Zuge* gezeichnet werden, daß dabei keine Linie zweimal durchlaufen wird.



Ein solcher *Zug* kann z. B. im Punkt L beginnen und über die Punkte M, J, K, L, B, A, H, G, H, J, F, G, F, M, D, F, E, D, C, B, H, K, B, C, D nach Punkt L zurückführen.
Suche mindestens einen weiteren derartigen *Zug* und schreibe ihn wie im Beispiel mit Hilfe der bei ihm zu durchlaufenden Punkte auf!

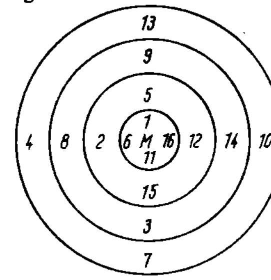


zu b)

b) Auch die Figur des Bildes läßt sich *in einem Zuge* so zeichnen, daß jede Linie genau einmal durchlaufen wird.
Gib mindestens einen derartigen *Zug* an!
c) Vergleiche Anfangs- und Endpunkt der von dir in den Bildern a und b gefundenen Wege! Was stellst du fest?

Olympiadeklasse 6

270611 Vier Kreisscheiben sind jede für sich um ihren gemeinsamen Mittelpunkt M so zu drehen, daß danach immer vier Zahlen auf je einem Strahl mit dem Anfangspunkt M liegen. Dabei soll die Summe der vier Zahlen auf jedem Strahl 34 betragen.



Gib mindestens eine Möglichkeit solcher Drehungen an!
Eine Begründung wird nicht verlangt.

270612 In jedes leere Feld des abgebildeten Quadrats ist eine der Zahlen 2, 3, 4, 5 einzutragen. Dabei soll in keiner Spalte oder Zeile eine dieser Zahlen mehrfach vorkommen. Ferner soll in keiner Spalte oder Zeile neben einer Zahl deren Nachfolger oder Vorgänger stehen.

1			
	1		
		1	
			1

Gib mindestens zwei solche Eintragungen an!
Eine Begründung wird nicht verlangt.
(*Hinweis:* Es gibt sogar mehr als zwei solche Eintragungen.)

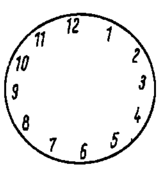
270613 Auf einer Wippe stellt sich heraus:
(1) Andreas ist leichter als Frank, aber schwerer als Dirk.
(2) Stefan ist leichter als Andreas, aber schwerer als Dirk.
(3) Peter ist leichter als Jürgen, aber schwerer als Michael.
(4) Jürgen ist leichter als Dirk.
Ordne die Jungen nach ihrem Gewicht; beginne bei dem schwersten!
Überprüfe, ob bei der von dir angegebenen Reihenfolge alle Aussagen (1) bis (4) wahr sind!

270614 Kerstin zerschneidet ein rechteckiges Stück Papier so, daß der Schnitt vom Mittelpunkt einer Rechteckseite zum Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite verläuft. Es entstehen zwei kleinere Rechtecke; Kerstin legt sie genau übereinander, so daß nur noch ein kleineres Rechteck zu sehen ist, das aus zwei Schichten besteht.

Kerstin zerschneidet dieses aus zwei Schichten bestehende Rechteck in gleicher Weise und legt wieder die entstandenen rechteckigen Papierstücke genau übereinander.
Entsprechend wird fortgesetzt: Übereinanderliegende Rechtecke werden zerschnitten, die entstandenen Papierstücke werden übereinandergelegt. (Natürlich geht das nicht beliebig oft; denn der Papierstapel, der zerschnitten werden soll, wird immer dicker.)
(1) Nenne die Anzahl der Papierstücke, die nach dem
a) zweiten, b) dritten, c) vierten
Zerschneiden entstanden sind!
(2) Angenommen, das Zerschneiden wäre beliebig oft möglich. Warum könnten dann trotzdem niemals nach einem Schnitt genau 160 Papierstücke entstehen?

Olympiadeklasse 7

270711 Klaus ließ versehentlich seinen Wecker zu Boden fallen. Dabei zersprang das Zifferblatt (vgl. das Bild) in drei Flächenstücke. Nachdem der erste Schreck über das Mißgeschick vorüber war, bemerkte Klaus, daß keine der 12 Zahlen beim Zerspringen des Zifferblattes auseinandergerissen worden war.



Er berechnete für jedes der drei Flächenstücke die Summe derjenigen Zahlen, die auf diesem Flächenstück standen. Dabei stellte er fest, daß sich in allen drei Fällen dieselbe Summe ergab.
Wie könnte das Zifferblatt zersprungen sein? Gib eine Möglichkeit hierfür an und überprüfe, daß die von Klaus gemachte Feststellung für deine Angabe zutrifft!

270712 In einer Kiste befinden sich genau 100 Kugeln, und zwar 30 rote, 30 blaue, 30 grüne sowie 10 Kugeln, von denen nur bekannt ist, daß sie schwarz oder weiß sind und daß mindestens eine schwarze Kugel dabei ist. Durch das Tastgefühl lassen sich verschiedenfarbige Kugeln nicht voneinander unterscheiden.
Untersuche, ob es trotzdem möglich ist, mit geschlossenen Augen eine jeweils geeignete Anzahl von Kugeln, aber nicht alle, so herauszugreifen, daß man mit Sicherheit vorhersagen kann:
a) Unter den herausgegriffenen Kugeln befinden sich mindestens 12 Kugeln von gleicher Farbe.
b) Unter den herausgegriffenen Kugeln befindet sich mindestens eine schwarze Kugel.
c) Unter den herausgegriffenen Kugeln befinden sich mindestens 5 weiße Kugeln.

270713 In einem Dreieck seien die Maßzahlen der in Zentimeter gemessenen Längen aller Seiten ganzzahlig, gerade und untereinander verschieden.
Bekannt ist $a = 6$ cm und $b = 4$ cm.
Untersuche, ob aus diesen Angaben der Umfang des Dreiecks eindeutig ermittelt werden kann! Ist dies der Fall, dann gib den Umfang an!

270714 Bekanntlich hat jedes Viereck genau zwei Diagonalen.
a) Ermittle die Anzahl der Diagonalen eines Fünfecks und eines Sechsecks!
b) Finde eine Formel für die Anzahl der Diagonalen eines Vielecks in Abhängigkeit von der Eckenzahl n des Vielecks!
Die Formel soll für alle natürlichen Zahlen $n \geqq 4$ gelten.
Begründe diese Formel!
c) Welchen Wert gibt diese Formel, wenn man sie für $n = 3$ anwendet? Läßt sich auch dieser Wert in eine geometrisch anschauliche Aussage fassen?

Olympiadeklasse 8

270811 Steffen stellt den Mitgliedern der AG Mathematik folgende Aufgabe:
„Jeder denke sich eine Zahl, multipliziere diese mit 2, addiere zum Produkt 30, dividiere die Summe durch 2, subtrahiere von dem erhaltenen Ergebnis die anfangs gedachte Zahl!
Schreibe das Ergebnis auf!"
Es stellt sich heraus, daß alle Schüler der Arbeitsgemeinschaft das gleiche Ergebnis hatten.
Müssen sich Steffens Mitschüler unbedingt auch die gleiche Zahl gedacht haben?

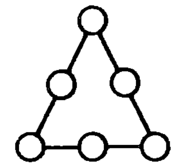
270812 In einem rechtwinkligen Koordinatensystem seien die Punkte $A(1;5)$, $B(4;4)$, $C(2;8)$, $A'(8;4)$, $B'(7;1)$, $C'(11;3)$ gegeben. Sie sind so gelegen, daß es eine Drehung gibt, bei der A, B und C die Bildpunkte A', B' bzw. C' haben.
Konstruiere das Drehzentrum D dieser Drehung!
Beschreibe deine Konstruktion!
Beweise folgende Aussage: Wenn D das gesuchte Drehzentrum ist, dann läßt sich D nach deiner Beschreibung konstruieren.

270813 Es sei ABC ein Dreieck, bei dem der Innenwinkel $\sphericalangle BAC$ die Größe 30° hat. Beweise, daß unter dieser Voraussetzung die Länge der Seite BC gleich der Länge des Umkreisradius dieses Dreiecks ist!

270814 Es soll die Summe der Quadrate zweier beliebiger natürlicher Zahlen gebildet werden. Dann ist eine *Division mit Rest* durchzuführen, und zwar soll die eben genannte Summe durch 4 dividiert werden. Man will nun untersuchen, welche Zahlen bei einer derartigen Division als Rest auftreten können und welche nicht.
a) Bilde zunächst einige Beispiele, indem du jedesmal selbst zwei natürliche Zahlen wählst, die Summe ihrer Quadrate durch 4 dividierst und den auftretenden Rest notierst! Setze das Bilden solcher Beispiele so oft fort, bis es *nur noch eine* natürliche Zahl kleiner als 4 gibt, die in deinen Beispielen *nicht* als Rest auftrat!
b) Nun kann man vermuten, daß diese Zahl *niemals* als Rest auftritt, wenn die Summe der Quadrate zweier beliebiger natürlicher Zahlen durch 4 dividiert wird. Beweise diese Vermutung!

Olympiadeklasse 9

270911 In die Kreisfelder der Figur sollen die Zahlen 1 bis 6 so eingetragen werden, daß jede Zahl genau einmal vorkommt, und daß die Zahlen auf jeder Dreiecksseite die gleiche Summe ergeben.



Geben Sie eine solche Eintragung an! Überprüfen Sie, daß die von Ihnen angegebene Eintragung alle geforderten Bedingungen erfüllt!

270912 Bei einem Dominospiel mit den Zahlen 0, 1, ..., 6 ist jeder Spielstein in zwei Hälften eingeteilt, jede Hälfte trägt eine der Zahlen. In einem Dominospiel kommen alle Kombinationen von je zwei der Zahlen 0, 1, ..., 6 je genau einmal vor (und zwar auch diejenigen, bei denen auf den beiden Hälften eines Steines dieselbe Zahl steht).
Eine *Kette* entsteht, wenn man mehrere Steine in einer Folge so nebeneinanderlegt, daß benachbarte Hälften nebeneinanderliegender Steine stets einander gleiche Zahlen tragen (Domino-Spielregel). Eine Kette heißt *geschlossen*, wenn auch die beiden Steinhälften an den beiden freien Enden der Kette einander gleiche Zahlen tragen (so daß man die Kette, wenn sie aus genügend vielen Steinen besteht, an ihren Anfang zurückführen und dort schließen kann).
a) Ermitteln Sie die Anzahl aller zu einem Dominospiel gehörenden Steine!
b) Ermitteln Sie die größte Zahl solcher Steine eines Dominospiels, aus denen sich eine geschlossene Kette bilden läßt!

270913 Jemand möchte die Frage beantworten, ob 1987 eine Primzahl ist. Er hat unter seinen Rechenhilfsmitteln (Zahlentafel, Taschenrechner) zwar auch eine Primzahltabelle; sie enthält aber nur die Primzahlen unter 100.
Wie kann (ohne weitere Hilfsmittel) die Untersuchung geführt werden; welche Antwort erbringt sie?

270914 Für jedes Rechteck seien die Seitenlängen mit a, b bezeichnet, die Diagonalenlänge mit d und der Flächeninhalt mit A.
Beweisen Sie mit diesen Bezeichnungen die folgende Aussage:
Es gilt $d = 2a - b$ genau dann,
wenn $A = \frac{3}{4} a^2$ gilt!

Olympiadeklasse 10

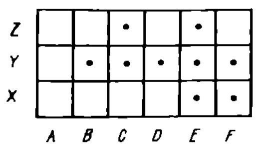
271011 Wie viele geordnete Paare von ganzen Zahlen (x, y) gibt es insgesamt, für die $x \cdot y = 1987$ gilt?

271012 a) Gibt es eine *ganze Zahl* x, für die $\frac{1}{x-1} > 1987$ gilt?

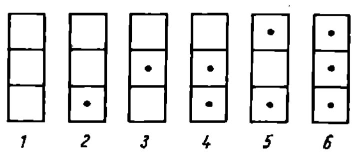
b) Ermitteln Sie alle diejenigen *reellen Zahlen* x, für die $\frac{1}{x-1} > 1987$ gilt!

271013 Das Rechteck in dem Bild a kann (mit Berücksichtigung des eingezeichneten Punktmusters) aus den sechs Teilen in Bild b zusammengesetzt werden.

a)



b)



Geben Sie eine Möglichkeit für eine solche Zusammensetzung an und untersuchen Sie, ob die von Ihnen angegebene Möglichkeit die einzige ist!
(Zur Bezeichnung der Teilquadrate sollen die im Bild a angegebenen Buchstaben benutzt werden. So wird z.B. das rechte obere Feld mit *FZ* bezeichnet.)

271014 Ist es möglich, einen Quader mit den Kantenlängen $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ und $\sqrt{8}$ vollständig mit Würfeln gleicher Kantenlängen auszufüllen?

Olympiadeklassen 11/12

271211 Man ermittle alle diejenigen Paare (x,y) reeller Zahlen x, y, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen:

(1) $x + xy + y = -1$

(2) $x^2 + y^2 = 5$!

271212 Man ermittle alle diejenigen zweistelligen und alle diejenigen dreistelligen natürlichen Zahlen, bei denen das Produkt der Ziffern doppelt so groß ist wie die Quersumme!

271213 Es seien wie üblich a, b, c die Seitenlängen eines beliebigen Dreiecks.
Man untersuche, ob für jedes Dreieck die Ungleichung

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + ac + bc)$$

gilt!

271214
Man ermittle den Rest, den die Summe

$$s = 1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + 1987^5$$

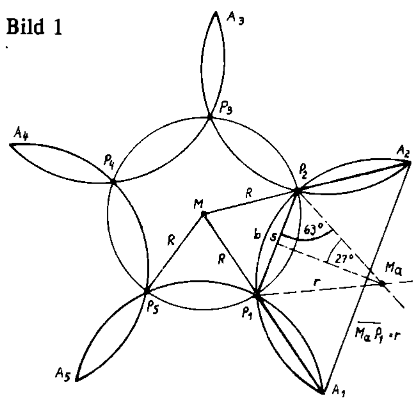
bei Division durch 25 läßt!

Lösungen

Lösung zu:
Unterhaltsame Kreisfigur
Heft 3/87

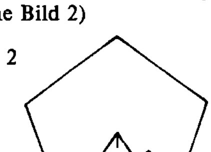
Laut Aufgabenstellung seien alle Bogenstücke kongruent, also $\overset{\frown}{P_1P_2}$; $\overset{\frown}{P_2P_3}$; $\overset{\frown}{P_3P_4}$; $\overset{\frown}{P_4P_5}$; $\overset{\frown}{P_1A_1}$ und $\overset{\frown}{A_1P_1}$; usw.

Bild 1



$P_1P_2P_3P_4P_5$ ist ein regelmäßiges Fünfeck, M sei der Mittelpunkt des Umkreises (siehe Bild 1). $A_1A_2P_2P_1$ ist ein gleichschenkliges Trapez, die Bogen $\overset{\frown}{A_2P_2}$, $\overset{\frown}{P_2P_1}$, $\overset{\frown}{P_1A_1}$ bilden einen Bogen, der ein Teil des Umkreises dieses gleichschenkligen Trapezes ist. Die Winkelhalbierenden von $\sphericalangle A_1P_1P_2$ und $\sphericalangle P_1P_2A_2$ schneiden einander im Mittelpunkt des Umkreises M_a dieses gleichschenkligen Trapezes. Der Radius dieses Kreises sei r, der Radius des Umkreises des Fünfecks sei R.
Nun gilt für die Seitenlänge s des Fünfecks (siehe Bild 2)

Bild 2



(1) $s = 2 \cdot R \cdot \sin 36°$

wegen $\frac{s}{2} = R \cdot \sin 36°$

$\overline{M_aP_1} = r$

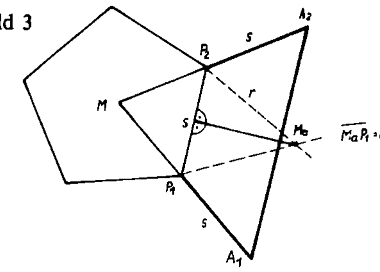
Für das gleichschenklige Trapez $A_1A_2P_2P_1$ gilt

$$\overline{A_1P_1} \cong \overline{P_1P_2} \cong \overline{P_2A_2} = s$$
$$\sphericalangle A_1P_1P_2 = 126° \text{ sowie}$$
$$\sphericalangle P_1P_2A_2 = 126°$$
$$\sphericalangle P_1M_aP_2 = 54°$$

$\frac{s}{2} : r = \sin 27°$, also

$$r = \frac{\frac{s}{2}}{\sin 27°} \text{ und wegen (1)}$$

Bild 3



(2) $r = \frac{R \cdot \sin 36°}{\sin 27°}$.

Der Bogen b errechnet sich somit nach der Formel

(3) $b = \frac{\pi r \cdot 54}{180} = \frac{3 \cdot \pi \cdot R \cdot \sin 36°}{10 \cdot \sin 27°}$

Einsender der Lösung:
Mathematikfachlehrer H. Schaller,
Institut für Lehrerbildung, Leipzig

Lösungen zu:
Der Vier-Quadrate-Satz
Heft 3/87

▲1▲ Jede natürliche Zahl der Form $4m + 1$ ist (nach Satz 2) in höchstens drei Quadratzahlen zerlegbar. Jede natürliche Zahl der Form $4m + 2$ ist ebenfalls (nach Satz 2) in höchstens drei Quadratzahlen zerlegbar. Jede natürliche Zahl der Form $n = 4m + 3$ läßt sich als Summe $n = (n-1) + 1^2$ schreiben, worin $n - 1$ als Zahl der Form $4m + 2$ in höchstens drei Quadratzahlen zerlegbar ist; also ist n als Summe von höchstens vier Quadratzahlen darstellbar. Dies gilt auch für jede durch 4 teilbare natürliche Zahl n.
Man kann sie nämlich in der Form
$n = 4^l(4m + r) = (2^l)^2(4m + r)$
mit $r = 1, 2$, oder 3 schreiben (4^l soll also die höchste in n aufgehende Potenz von 4 sein).
$4m + r$ ist aber für $r = 1$ oder 2 in höchstens drei Quadratzahlen, für $r = 3$ in höchstens vier Quadratzahlen zerlegbar.

▲2▲ Der Satz 6 ergibt sich folgendermaßen aus Satz 3: Es sei $r = \frac{p}{q}$ eine gebrochene Zahl, worin p und q natürliche Zahlen sind. Nach Satz 3 ist jede natürliche Zahl Summe von höchstens vier Quadratzahlen.
1. Fall: Es ist $pq = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ mit natürlichen Zahlen a, b, c, d.
Dann ist

$$r = \frac{p}{q} = \frac{pq}{q^2} = \left(\frac{a}{q}\right)^2 + \left(\frac{b}{q}\right)^2 + \left(\frac{c}{q}\right)^2 + \left(\frac{d}{q}\right)^2$$

Summe von vier Quadraten gebrochener Zahlen.
2. Fall: Es ist $pq = a^2 + b^2 + c^2$ mit natürlichen Zahlen a, b, c.
Dann ist

$$r = \frac{p}{q} = \left(\frac{a}{q}\right)^2 + \left(\frac{b}{q}\right)^2 + \left(\frac{3c}{5q}\right)^2 + \left(\frac{4c}{5q}\right)^2$$

Summe von vier Quadraten gebrochener Zahlen (beachte $5^2 = 3^2 + 4^2$).

3. Fall: Es ist $pq = a^2 + b^2$ mit natürlichen Zahlen a, b. Dann ist

$$r = \frac{p}{q} = \frac{pq}{q^2} = \left(\frac{a}{q}\right)^2 + \left(\frac{b}{3q}\right)^2 + \left(\frac{2b}{3q}\right)^2 + \left(\frac{2b}{3q}\right)^2$$

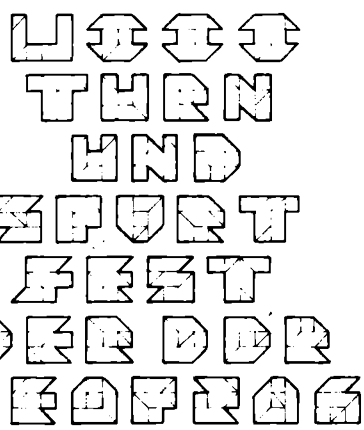
Summe von vier Quadraten gebrochener Zahlen (beachte $3^2 = 1^2 + 2^2 + 2^2$).

4. Fall: Es ist $pq = a^2$ mit einer natürlichen Zahl a. Dann ist

$$r = \frac{p}{q} = \frac{pq}{q^2} = 4\left(\frac{a}{2q}\right)^2 = \left(\frac{a}{2q}\right)^2 + \left(\frac{a}{2q}\right)^2 + \left(\frac{a}{2q}\right)^2 + \left(\frac{a}{2q}\right)^2$$ Summe von vier Quadraten gebrochener Zahlen.

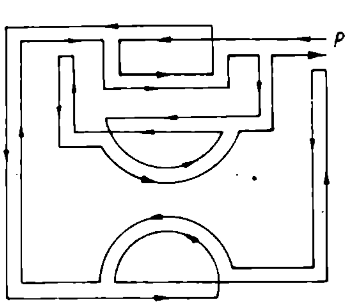
Lösungen zu:
Knobel-Wandzeitung (8)
Heft 3/87

▲1▲ Das Bild zeigt mögliche Legefiguren sowie je eine Legemöglichkeit.



▲2▲ a) 21 Gold-, 37 Silber- und 22 Bronzemedaillen.
b) 11,4 % der Leipziger Einwohner waren 1980 im DTSB, das ist gegenüber 1951 eine Steigerung um 109,68 %.
c) Jeder leistete durchschnittlich rund 4 Stunden.
d) In einem normalgefüllten Becken befinden sich 562,5 m³ Wasser.
e) Die Zahl der Studenten stieg auf das 25fache, und die Zahl der Lehrkräfte auf (rund) das 33fache.

▲3▲ Das Bild zeigt eine Möglichkeit zum zweimaligen Durchlaufen des Liniennetzes. (Es ist nicht möglich, das Liniennetz hintereinander so zu durchlaufen, daß man jede Linie des Netzes genau einmal durchschreitet. Warum?)



Die zurückgelegte Wegstrecke beträgt 736,66 m. Diese ergibt sich als doppelte Länge des Liniennetzes, die 368,33 m beträgt und sich zusammensetzt aus der Länge der Seitenlinien (100 m), der Tor- und Mittellinie (120 m), der Strafraumlinien (73,32 m), der Torraumlinien (29,32 m), des Mittelhalbkreises ($\pi \cdot 9{,}15$ m = 28,75 m) und der Strafraum-Kreislinie (16,94 m).

▲4▲ Die Kryptogramme 1, 2, 5, 6 und 8 sind mehrdeutig lösbar. Es gibt z. T. sehr viele Lösungen, z. B.

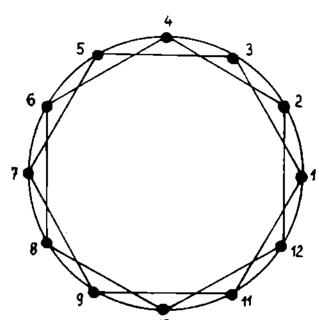
1	6233 + 1588 = 7821	7255 + 1366 = 8621	6	6211 + 8300 = 14511	9311 + 7200 = 16511
2	8977 + 6055 = 15032	6988 + 7544 = 14532	8	3788 + 5622 = 9410	5722 + 3688 = 9410
5	2399 + 5411 = 7810	3199 + 5277 = 8476			

Die übrigen Kryptogramme sind nicht lösbar. Ihr gelangt in all diesen Fällen zu einem Widerspruch.

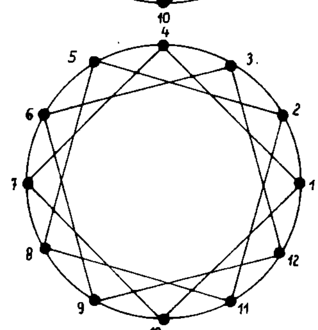
▲5▲ Allgemein: Ist die Zahl 12 durch die Stellung des angewiesenen Vordermanns (hier 2. und 3. Vordermann) teilbar, so teilt sich der Kreis ($12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$), wenn nicht (hier 5. Vordermann), so bleibt ein Kreis.

Ausführungsschema:

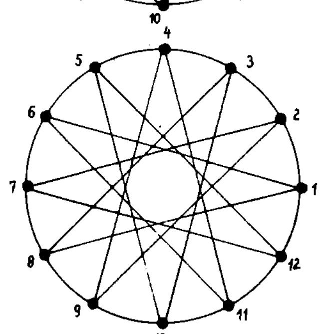
a)



b)

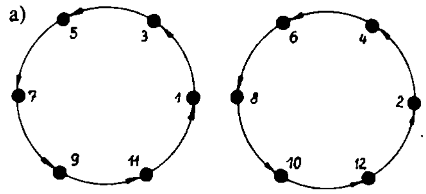


c)

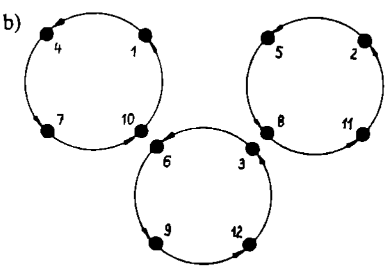


Lauffiguren:

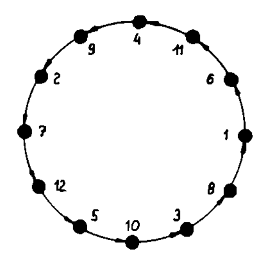
a)



b)



c)



▲6▲ 1. BEN HEGEWICHT – GEWICHTHEBEN;
2. BEN OX – BOXEN;
3. ELLA BRAWSS – WASSERBALL;
4. ELLA BYLLOV – VOLLEYBALL;
5. ERNA FLEUHUD – HUERDENLAUF;
6. ERNI TE – REITEN;
7. HORST SPANGBUCH – STABHOCHSPRUNG;
8. INGE WURPST – WEITSPRUNG;
9. MARTHA LOFUNA – MARATHONLAUF;
10. RENATO SPRUNNK – KANURENNSPORT;
11. RUDI SPRENG – DREISPRUNG;
12. SUSEN STOLEGK – KUGELSTOSSEN;
13. SUSI WEKFREND – DISKUSWERFEN;
14. WERNER FESPE – SPEERWERFEN;
15. WERNER HEMMAF – HAMMERWERFEN

▲7▲ oben: LEICHTATHLETIK, unten (v. l. n. r.): HAMMERWERFEN, SPEERWERFEN, HUERDENLAUF, MARATHONLAUF.

▲8▲ *Waagerecht:* 3. Helm (Rüdiger, DDR); 5. Kim (Nelli, UdSSR); 6. Ovett (Steven, Großbritannien); 9. Beck (Volker, DDR); 11. Walle (Robert van de, Belgien); 12. Jon (Corneliu, Rumänien); 14. Varga (Karoly, Ungarn); 15. Coe (Sebastian, Großbritannien).
Senkrecht: 1. Koch (Marita, DDR); 2. Jahl (Evelin, DDR); 4. Diers (Ines, DDR); 7. Mate (Ilja, UdSSR); 8. Fink (Rudi, DDR); 10. Colon (Maria, Kuba); 13. Baron (Bengt, Schweden).

Lösungen zu: Unterhaltungsmathematik aus der äthiopischen Schülerzeitschrift Hislab
Heft 3/87

▲1▲ Der Preis für ein Brot sei x Cent, dann hat der dritte a Cent an den ersten und b Cent an den zweiten zu zahlen.
Das ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rlrl} 3x-a= & 35 & 3x-a= & 35 \\ 4x-b= & 35 & a= & 45-35 \\ a+b= & 35 & a= & 10 \\ \hline 4x-b= & 35 & a+b= & 35 \\ 3x+b= & 70 & b= & 25 \\ \hline 7x= & 105 & & \\ x= & 15 & & \end{array}$$

Der erste Reisende müßte 2 Fünf-Cent-Stücke und der zweite Reisende 5 Fünf-Cent-Stücke erhalten.

▲2▲ 100 Küken fressen in 100 Tagen 100 Scheffel. 100 Küken fressen in 10 Tagen 10 Scheffel. 10 Küken fressen in 10 Tagen 1 Scheffel.

▲3▲ Unter den vielen Möglichkeiten, 2450 in ein Produkt aus drei Faktoren zu zerlegen, gibt es zwei, in denen die Summe der Faktoren gleich 64 ist:
$5\cdot 10\cdot 49=2450;\quad 5+10+49=64;$
$7\cdot\ 7\cdot 50=2450;\quad 7+\ 7+50=64.$
Da das Produkt der beiden kleineren Faktoren größer sein muß als der größte Faktor, sind die Personen 5, 10 und 49 Jahre alt.

▲4▲ Die Zahl der Nur-Fußballspieler sei a. Die Zahl der Fußball- und Basketballspieler sei b. Die Zahl der Spieler aller drei Sportarten sei c. Die Zahl der Fußball- und Volleyballspieler sei d. Die Zahl der Basket- und Volleyballspieler sei e.
Die Zahl der Nichtspieler sei f.
Es ist $a+b+c+d=90$ und damit $e+f=10$. Ferner gilt $b+e+c=80$, dann ist $b+c\geqq 70$ und $a+d+e+f\leqq 30$, also auch $d+e\leqq 30$.
Nun ist $c+d+e=70$ und schließlich $c\geqq 40$ und $c\leqq 70$. Da c ein Vielfaches von 19 ist, ergibt sich $c=57, f=3$, $e=7$, $b=16$, $d=6$ und $a=11$.
Es spielen 11 Mitglieder Fußball.

▲5▲ Der Ähnlichkeitsfaktor beträgt $k=100$.
a) $V'=k^3\cdot V=1\,000\,000\cdot V$.
Das Volumen der großen Maus ist 1 000 000mal so groß.
b) Die Masse ist proportional dem Volumen.
$m'=1\,000\,000\cdot m=1\,000\,000\cdot 30\,\mathrm{g}$
$=30\,000\,000\,\mathrm{g}=30\,000\,\mathrm{kg}$.
Die Masse der großen Maus beträgt 30 000 kg.
c) $A'=k^2\cdot A=10\,000\cdot A$
$=10\,000\cdot 1\,\mathrm{cm}^2=10\,000\,\mathrm{cm}^2=1\,\mathrm{m}^2$.
Die Querschnittsfläche der großen Maus beträgt für die Beine $1\,\mathrm{m}^2$.

▲6▲ Die Volumina der beiden Behälter stehen im Verhältnis $V':V=k^3=1000$. Demzufolge ist der Ähnlichkeitsfaktor $k=10$.
Für die Höhe des großen Behälters ist
$h'=10\cdot h=10\cdot 12{,}8\,\mathrm{cm}=128\,\mathrm{cm}$
und der Durchmesser
$d'=10\cdot d=10\cdot 10\,\mathrm{cm}=100\,\mathrm{cm}$.
Der große Behälter hat die Ausmaße 100 cm und 128 cm.

▲7▲ Der Zug legt, wenn der Anfang in den Tunnel einfährt, bis der letzte Wagen aus dem Tunnel herauskommt, eine Strecke von $s=2$ km zurück. Die Fahrzeit erhält man aus der Gleichung

$s=v\cdot t$ mit $t=\frac{s}{v}$,

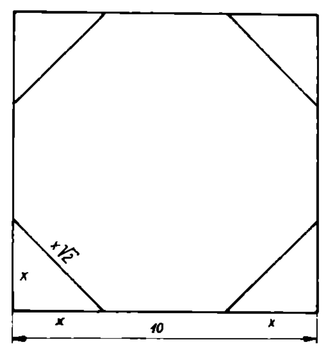
$t=\frac{2\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}}{15\,\mathrm{km}}=\frac{2}{15}\,\mathrm{h}=8\,\mathrm{min}.$

Der Zug braucht 8 Minuten.

▲8▲ Bezeichnet man die Länge der abzuschneidenden Ecken mit x cm (siehe Bild), dann muß gelten

$$\begin{aligned} 2x+x\sqrt{2} &= 10,\\ x(2+\sqrt{2}) &= 10,\\ x &= \frac{10}{2+\sqrt{2}}=\frac{10(2-\sqrt{2})}{4-2},\\ x &= 5(2-\sqrt{2}),\quad x=2{,}9289\ldots \end{aligned}$$

Die Ecken müssen in etwa 2,9 cm Länge abgeschnitten werden.

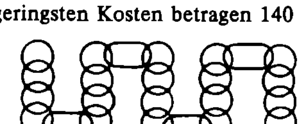


▲9▲ Die Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist. Deshalb gelten die Gleichungen $a+b=6$ oder $a+b=15$ mit $0\leqq a;\ b\leqq 9$.
Die Zahl ist durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist. Deshalb gilt die Gleichung
$a-b=-1$ mit $0\leqq a;\ b\leqq 9$.
Von den zwei Möglichkeiten der Gleichungssysteme

$$\begin{array}{ll} a+b=6 \quad \text{und} & a+b=15 \\ a-b=1 & a-b=-1 \end{array}$$

führt das erste zum Widerspruch ($a=3{,}5$), und das letzte hat die Lösungen $a=7$ und $b=8$. Der Wert von a ist 7 und von b ist 8.

▲10▲ Die geringsten Kosten entstehen, wenn man alle vier Glieder eines Kettenteils öffnet und dann mit jedem einzelnen Glied jeweils zwei der verbliebenen fünf Kettenteile der Reihe nach zusammenschweißt (siehe Bild). Die Kosten sind dann
$4\cdot 10+4\cdot 25=140$.
Die geringsten Kosten betragen 140 Cent.



▲11▲ Masse, Gewicht und Volumen sind proportional. Die Höhen des Menschen und des Riesen stehen im Verhältnis $k=6:2=3:1=3$,
demzufolge gilt $V'=k^3\cdot V=27\cdot V$
bzw. $m'=27\,m$ für die Masse
und $G'=27\,G$ für das Gewicht.
Nun muß in beiden Fällen der Druck p gleich sein, dann ist, wenn man den Querschnitt des Knochens z. B. kreisförmig betrachtet,

$p=\frac{G}{A_k},\ p=\frac{G\cdot 4}{\pi\cdot d^2}$ und $p=\frac{27\cdot G\cdot 4}{\pi(x\cdot d)^2}$.

Durch Gleichsetzen erhält man

$\frac{G\cdot 4}{\pi d^2}=\frac{27\cdot G\cdot 4}{\pi\cdot x^2\cdot d^2},\quad (F\neq 0;\ d\neq 0)$

$x^2=27,\ x=3\sqrt{3}$.

Die Knochen des Riesen sind $3\sqrt{3}$mal so dick.

▲12▲ Wenn Sara die zwei Sorten Äpfel getrennt verkauft, erhält sie $\frac{30}{2}+\frac{30}{3}$ $=25$ Cent. Mischt sie die beiden Sorten und verkauft die Mischung mit 5 Stück zu 2 Cent, bekommt sie $\frac{60}{5}\cdot 2=24$ Cent.

Saras Problem liegt in ihrer Rechnung. Sie dachte, daß der Verkauf der Mischung mit 5 Stück zu 2 Cent dasselbe ist wie der Verkauf von 2 teuren Äpfeln zu 1 Cent und von 3 billigen zu 1 Cent. Aber es ist eben nicht dasselbe. Diese beiden Arten des Verkaufs würden nur dann dasselbe Ergebnis haben, wenn beide Sorten Äpfel ursprünglich im gleichen Verhältnis 2 : 3 gemischt worden wären. Würde man also z. B. 30 teure Äpfel mit 45 billigen mischen, so erhält man in beiden Fällen 30 Cent.

$\frac{30}{2}+\frac{45}{3}=30$ und $\frac{75}{5}\cdot 2=30$.

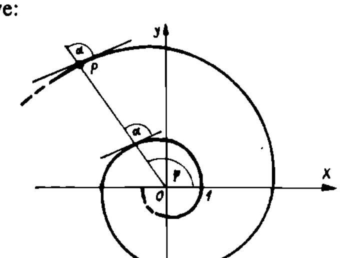
Lösungen zu: Eine alte Vorlesungsmitschrift entdeckt
Heft 3/87

▲1▲ $\triangle OPz$ ist ähnlich $\triangle OwP$,
also $\frac{\overline{OP}}{\overline{Ow}}=\frac{\overline{Oz}}{\overline{OP}}$. Mit $\overline{OP}=1$
folgt die gesuchte Relation!

▲2▲ $\overline{Ow}=a\cos\alpha-b\cos\beta$ und
$\overline{Oz}=a\cos\alpha+b\cos\beta$, also
$\overline{Ow}\cdot\overline{Oz}=a^2\cos^2\alpha-b^2\cos^2\beta$.
Da $\overline{AQ}=a\sin\alpha$ und auch $\overline{AQ}=b\sin\beta$,
gilt nun

$$\begin{aligned} \overline{Ow}\cdot\overline{Oz} &= a^2\cos^2\alpha-b^2(1-\sin^2\beta)\\ &= a^2\cos^2\alpha-b^2+a^2\sin^2\alpha\\ &= a^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)-b^2\\ &= a^2-b^2. \end{aligned}$$

▲3▲ Benutzt man ein x,y-Koordinatensystem und faßt r als Abstand vom Koordinatenursprung auf und φ als Winkel des Strahls OP mit der positiven x-Achsenrichtung, so ergibt sich eine spiralförmige Kurve:



Diese auf *René Descartes* (1596 bis 1650) und *Evangeliste Torricelli* (1608 bis 1647)[1]) zurückgehende logarithmische Spirale wird auch oft als *gleichwinklige Spirale* bezeichnet, da alle Strahlen, die von ihrem Zentrum O ausgehen, immer unter dem gleichen Winkel α geschnitten werden.

[1]) Viele Einzelheiten über diese beiden Wissenschaftler erfährst du in dem Buch *Wegbereiter der neuen Mathematik* von Nikiforowski und Freiman, Fachbuchverlag Leipzig 1978.

▲4▲ Im Fall a gibt es keine solche Kurve, im Fall b sind es 4! Die geschlossene Kurve 8 kann man auf einen Punkt zusammenziehen!

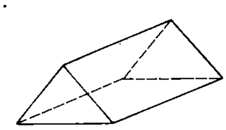
Lösungen zu:
Mathematik-Studium in der UVR

▲1▲ Es sei $f(\alpha, \beta, \gamma)$:
$= \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma$.
Zuerst bestimmen wir das Maximum von f bei festem γ.
Es ist dann $\alpha + \beta = 180° - \gamma$
und nach Additionstheoremen:
$f(\alpha, \beta, \gamma)$
$= \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \cdot \cos\gamma$
$= \frac{1}{2}(\cos(180° - \gamma) + \cos(\alpha - \beta)) \cdot \cos\gamma$
$= \frac{1}{2}(-\cos\gamma + \cos(\alpha - \beta)) \cdot \cos\gamma$.
Für $\gamma \geqq 90°$ ist $f(\alpha, \beta, \gamma) \leqq 0$,
also genügt es, $\gamma < 90°$ zu betrachten.
Dann ist aber $f(\alpha, \beta, \gamma)$ maximal,
wenn $\cos(\alpha - \beta)$ maximal ist, also $= 1$,
d.h. aber wegen $0 \leqq \alpha, \beta < 180°: \alpha = \beta$.
Für diesen Fall ist:
$f(\alpha, \alpha, \gamma) = \frac{1}{2}(1 - \cos\gamma) \cdot \cos\gamma$.
Wegen $\sqrt{(1-x) \cdot x} \leqq \frac{1}{2} \cdot (1 - x + x)$
$= \frac{1}{2}$ für $x \in [0; 1]$
$\left(\text{Gleichheitszeichen gilt nur für } x = \frac{1}{2}\right)$
folgt dann aber:
$f(\alpha, \beta, \gamma) \leqq f(\alpha, \alpha, \gamma) \leqq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$
und Gleichheitszeichen gilt nur für
$\alpha = \beta$ und $\cos\gamma = \frac{1}{2}$,
d.h. aber $\alpha = \beta = \gamma = 60°$.

▲2▲ Offensichtlich muß gelten $x > 0$ und $x \neq 1$. (Für $x = 1$ gilt $x^{1-x-x^2} = 1$.)
1. Fall: $0 < x < 1$.
Die Ungleichung ist äquivalent zu
$1 - x - x^2 > x$
d.h. $1 - 2x - x^2 > 0$
d.h. $x^2 + 2x - 1 < 0$.
$x^2 + 2x - 1 = 0$ gilt
für $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$, d.h. aber:
$-1 - \sqrt{2} < x < -1 + \sqrt{2}$ und wegen
$0 < x < 1: 0 < x < -1 + \sqrt{2}$.
2. Fall: $x > 1$.
Dann ist die Ungleichung äquivalent zu
$1 - x - x^2 < x$
d.h. $x^2 + 2x - 1 > 0$.
$x^2 + 2x - 1 = 0$ gilt für
$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$, d.h. also
$x < -1 - \sqrt{2}$ oder $x > -1 + \sqrt{2}$.
Wegen $x > 1$ gilt also: $x > 1$.
Endergebnis: $L = (0; -1 + \sqrt{2}) \cup (1, \infty)$.

▲3▲ Es sei m die Anzahl der 5-Ecke, n die Anzahl der 6-Ecke.
Dann gilt sicher: $f = m + n$.
In jeder Ecke treffen drei Vielecke aufeinander. Zählen wir also die Ecken der 5- bzw. 6-Ecke zusammen, erhalten wir die dreifache Anzahl der Ecken von P, also $e = \frac{1}{3}(5m + 6n)$. Analog gilt für die Kantenzahl $k = \frac{1}{2}(5m + 6n)$.
Wegen $e - k + f = 2$ muß also gelten:
$\frac{1}{3}(5m + 6n) - \frac{1}{2}(5m + 6n) + m + n$
$= 2$, d.h. aber: $m = 12$.
Damit ist die Anzahl der 5-Ecke eindeutig bestimmt. Da an jedes Sechseck drei 5-Ecke und an jedes 5-Eck fünf 6-Ecke angrenzen, muß gelten:
$5m = 3n$, d.h. aber: $n = 20$.

▲4▲ Sei wieder m die Anzahl der Dreiecke, n die Anzahl der Vierecke.
Wieder gilt:
$f = m + n$ und $k = \frac{1}{2}(3m + 4n)$.
Auch jetzt können nur drei Seitenflächen in einer Ecke aufeinandertreffen,
also: $e = \frac{1}{3}(3m + 4n)$. Mithin gilt:
$2 = e - k + f = \frac{1}{3}(3m + 4n) - \frac{1}{2}(3m + 4n)$
$+ m + n$, d.h.: $12 = 3m + 2n$.
Da an jedes Dreieck drei Vierecke und an jedes Viereck zwei Dreiecke angrenzen, gilt: $3m = 2n$ also $12 = 6m$; $m = 2$ und $n = 3$:



▲5▲ Es genügt offensichtlich,
$(2^n + 1) \mid (2^{m \cdot n} + 1)$ zu zeigen. m ist ungerade, also existiert ein natürliches k mit $m = 2k + 1$.
Es gilt:
$x^m + 1 = x^{2k+1} + 1 = (x + 1)$
$\cdot (x^{2k} - x^{2k-1} \pm \ldots - x + 1)$
also gilt für ganzes x: $(x + 1) \mid (x^m + 1)$.
Mithin ist für $x = 2^n$:
$(2^n + 1) \mid (2^{n \cdot m} + 1)$, q.e.d.
Der Beweis ist auch über vollständige Induktion durchführbar.

▲6▲ Für den ersten Buchstaben eines zweibuchstabigen Wortes gibt es n Möglichkeiten, aber auch für den zweiten, da von jedem Buchstaben zwei Stück vorhanden sind. Also lassen sich insgesamt $m \cdot n = n^2$ Wörter bilden, die aus zwei Buchstaben bestehen.
Das Wort bestehe nun aus drei Buchstaben. Auch jetzt gibt es für den ersten und zweiten Buchstaben je n Möglichkeiten. Ist der zweite mit dem ersten Buchstaben identisch (dafür gibt es insgesamt nur $n \cdot 1$ Möglichkeiten), dann kann man den dritten nur noch auf $n - 1$ Art und Weisen auswählen.
Ansonsten (das sind $n \cdot (n - 1)$ Möglichkeiten) gibt es auch für den dritten Buchstaben noch n Möglichkeiten.
Also insgesamt:
$n \cdot 1 \cdot (n - 1) + n \cdot (n - 1) \cdot 1$
$= n(n - 1) \cdot (1 + n) = n(n^2 - 1)$
dreibuchstabige Wörter.

▲7▲ Es bezeichne a_n die Anzahl der Möglichkeiten, daß bei n Tanzpaaren keiner mit seinem Partner tanzt. Es ist offensichtlich $a_1 = 0$ und $a_2 = 1$. Wir numerieren nun die Paare mit 1 bis n und betrachten Herrn 1. Für ihn gibt es $n - 1$ Möglichkeiten, seine Tanzpartnerin auszuwählen. Er tanze z.B. mit Frau k. $1 < k \leqq n$ $(n > 2)$.
1. Fall: Herr k tanzt mit Frau 1. Dann erfüllen die Paare $2, \ldots, k - 1, k + 1, \ldots, n$ ebenfalls die Bedingungen der Aufgabe; für sie gibt es also a_{n-2} Möglichkeiten zu tanzen.
2. Fall: Herr k tanzt nicht mit Frau 1. Wenn wir jetzt Frau 1 und Frau k austauschen, so tanzen zwar Herr und Frau 1 zusammen, die restlichen Paare erfüllen aber wieder die Bedingungen der Aufgabe und dafür gibt es a_{n-1} Möglichkeiten.
Also muß gelten:
$a_n = (n - 1) \cdot (a_{n-1} + a_{n-2})$.
Das heißt aber:
$a_n - na_{n-1} = (n - 1)\, a_{n-2} - a_{n-1}$.
Sei $b_n := a_n - n \cdot a_{n-1}$.
Dann gilt:
$b_n = -b_{n-1} = b_{n-2} = \ldots = (-1)^k b_{n-k}$
$= (-1)^{n-2} b_2 = (-1)^n b_2$.
Nun ist $b_2 = a_2 - 2 \cdot a_1 = 1$,
also: $b_n = (-1)^n$. Daraus folgt:
$a_n = (-1)^n + n \cdot a_{n-1}$
$na_{n-1} = n \cdot ((-1)^{n-1} + (n - 1)\, a_{n-2})$
$= n \cdot (-1)^{n-1} + n(n - 1)\, a_{n-2}$
$n(n - 1)\, a_{n-2} = n(n - 1)\,(-1)^{n-2}$
$+ n(n - 1)\,(n - 2)\, a_{n-3}$
.
.
.
$n(n - 1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot a_2 = n(n - 1) \cdot \ldots$
$\cdot 3 \cdot (-1)^2 + n(n - 1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot a_1$.
Addiert und vereinfacht ergibt sich:
$a_n = (-1)^1 + n(-1)^{n-1} + n(n - 1)$
$\cdot (-1)^{n-2} + \ldots + n \cdot (n - 1) \cdot \ldots$
$\cdot 3 + n(n - 1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 0$ $\quad (a_1 = 0)$
oder anders geschrieben:
$a_n = \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \frac{n!}{4!} \mp \ldots + \frac{n!}{(n-1)!}(-1)^{n-1}$
$+ \frac{n!}{n!}(-1)^n = n! \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$
oder auch: $a_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
Bemerkung: Insgesamt gibt es ja $n!$ Möglichkeiten für die Zusammenstellung von Paaren und für die, die schon einmal etwas von Grenzwerten gehört haben, können wir nun schreiben:
$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e},$$
wobei e die Eulersche Zahl ist:
$e = 2{,}712\ldots$.

Lösungen zu: Prismen! Prismen?

▲1▲ a) Quader: A, B, K;
b) Prismen: A, B, C, E, F, G, K.

▲2▲ A, B, C, E, F, G, K.

▲3▲ a) wahr, b) wahr, c) falsch, d) wahr, e) wahr, f) wahr, g) wahr, h) falsch.

▲4▲ Die dargestellten Prismen haben alle gleiches Volumen.

▲5▲

Länge	2	2	3
Breite	3	3	4
Höhe	1	2	2
Volumen	6	12	24
Oberfläche	22	32	52

▲6▲ $V = 6{,}08\ \mathrm{dm}^3$.

▲7▲ a) $V = 2{,}70\ \mathrm{m}^3$;
b) $A_0 = 10\ m^2$ (10,36)

▲8▲ $V = 54\ \mathrm{cm}^2$; $A_0 = 1{,}47\ \mathrm{dm}^2$

▲9▲ 21 cm (21,428571)

▲10▲

	a	l	p	h
V (in VE)	25	18	32	32
A_0 (in FE)	84	58	102	100

▲11▲ 4,0 cm

▲12▲ $a = 17$ cm, $b = 20$ cm, $c = 23$ cm, $V = 7{,}8\ \mathrm{dm}^3$ (7,82)

▲13▲ 4

▲14▲ $V = 0{,}122\ \mathrm{dm}^3$

In Klammern sind jeweils die mit dem SR 1 ermittelten Zahlenwerte angegeben.

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ *Zählung der Stücke:*
Das Bild zeigt ein Stück einer geraden Linie, die in Abschnitte gleicher Länge unterteilt ist. Daraus kann man viele Abschnitte verschiedener Länge erhalten, wie z. B. zwei Einheiten, drei Einheiten, vier Einheiten usw.
Angenommen, das ganze Stück hat eine Länge von n Einheiten, wie hoch ist dann die Gesamtzahl aller verschiedenen Abschnitte unterschiedlicher Länge?
Lösung: Die letzte Spalte zeigt deutlich, daß man die Folge der Partialsummen der natürlichen Zahlen (Dreieckszahlen) erhält. Die n-te Partialsumme s ist demzufolge $s = \frac{n(n+1)}{2}$, und diese ergibt die Gesamtzahl aller verschiedenen Abschnitte unterschiedlicher Länge.

Vollst. Länge	1 Einh.	2 Einh.	3 Einh.	4 Einh.	5 Einh.	6 Einh.	Gesamtheit d. Abschn.
└┘	1	–	–	–	–	–	1
└┴┘	2	1	–	–	–	–	3
└┴┴┘	3	2	1	–	–	–	6
└┴┴┴┘	4	3	2	1	–	–	10
└┴┴┴┴┘	5	4	3	2	1	–	15

▲2▲ Setzt in der Zahlenpyramide auf der Zeichnung die Zeichen + und − so ein, daß die gezeigten Gleichungen gültig werden. Man braucht zwischen benachbarte Ziffern kein Zeichen zu setzen, wenn man sie zu einer Zahl vereinigt.
Lösung:
$1 + 2 = 3$
$-1 + 2 + 3 = 4$
$12 - 3 - 4 = 5$
$1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 = 7$
$1 + 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 = 8$
$12 + 3 + 4 - 5 - 6 - 7 + 8 = 9$.

▲3▲ *Mehr oder weniger:*
N, eine dreistellige Zahl, erscheint in allen Teilaufgaben. Ermitteln Sie sie, und ergänzen Sie das Gitter, indem Sie die beiden bereits waagerecht eingetragenen Zahlen benutzen!
Lösung: $741 \cdot 224$; $2 \cdot 874 \cdot 3$;
$16 \cdot 7828 \cdot 47 \cdot 17 \cdot 7925 \cdot 16$; $9 \cdot 564 \cdot 3$;
$122 \cdot 785$; $N = 824$.

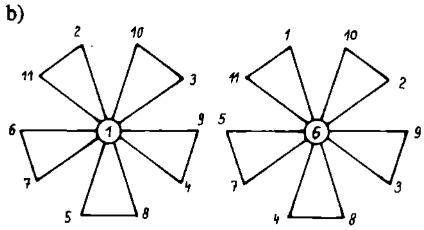
Lösungen zu: alpha-heiter

Magische Sternfiguren

a) z. B.

```
        9                         12
  4   7   10  5          9    2     7   8
    8       6                1     3
2    11   12   1          11    6   5   4
        3                         10
```

b)



Wie viele Quadrate, wie viele Dreiecke?
Es sind 35 Quadrate, 14 Dreiecke.

Ein Taschengeldproblem

$15x + 20y = 150$
$3x + 4y = 30$

Der Schüler hatte anfangs zwei Münzen zu 15 Kopeken und sechs Münzen zu 20 Kopeken.

Erstaunliche Skatabrechnung
Sind a, b, c, d die Ergebnisse der Spieler A, B, C, D, so ergibt sich z. B.
für A $(a - b) + (a - c) + (a - d)$
$= 3a - b - c - d$.
Oder $4a - a - b - c - d = 4a - S$, mit $S = a + b + c + d$.
Somit gilt für A $(4a - S) : 4 = a - \frac{S}{4}$.
Wegen $S = 0$ in diesem Falle ist a das Ergebnis (in Pf.) für A.

Möglich oder nicht möglich?
Die beiden einzigen Möglichkeiten sind (man beginnt z. B. mit $b = 12$ und führt eine vollständige Fallunterscheidung durch):

(1) 2→12-7-3-5-4-11-1-6-10
↑______ 9-8
(2) 3-12-9-10-1-4-3 Widerspruch
(3) 4-12-10-4 Widerspruch
(4) 5-12-8-1-5 Widerspruch
(5) 6→12-11-9-5-10-7-1-2-4
↑______ 3-8

Das Monster
Der Kreisumfang beträgt 2π. $\frac{1}{6}$ dieses Umfangs ist abgeschnitten, da der Zentriwinkel mit 60° ein Sechstel von 360° ist. Somit gilt für den Umfang des Monsters

$$2\pi - \frac{1}{6}2\pi + 2 = \frac{5}{3}\pi + 2$$

und damit gilt E.

Kryptarithmetik
Datenträger Y; $1165 \cdot 19$.

Zahlen in Begriffen
A. M. Ampère 1775 bis 1836.

Lösung zu:
Aus der Geschichte der Schiffahrt
Heft 3/87

Das Volumen des Tankers in m^3 ist:
$V_T = 158{,}987 \cdot 20\,000\ \mathrm{dm}^3$
$= 158{,}987 \cdot 20\ \mathrm{m}^3$; $V_T = 3179{,}74\ \mathrm{m}^3$.
Das Volumen des Zylinders berechnet man nach der Formel $V_Z = \pi \cdot r^2 \cdot h$ mit der gesuchten Länge (Höhe) h des Zylinders. Also ist $3179{,}74 = \pi \cdot 9 \cdot h$ und daher $h = \frac{3179{,}74}{9\pi}$ [m]. Der Schulrechner zeigt $h = 112{,}4603$ an. Der Zylinder ist folglich etwa 112,5 m lang.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb
Heft 1/87, Fortsetzung

Ma 6 ■ 2756 3 Arbeiter schafften früher in 8 Stunden 960 Säcke;
2 Arbeiter schaffen jetzt in 2 Stunden 960 Säcke;
1 Arbeiter schaffte früher in 1 Stunde $\frac{960}{3 \cdot 8} = 40$ Säcke;
1 Arbeiter schafft jetzt in 1 Stunde $\frac{960}{2 \cdot 2} = 240$ Säcke.
Es werden 6 Arbeiter von damals durch 1 Arbeiter heute ersetzt.

Ma 6 ■ 2757 $5\ \mathrm{m} = 500\ \mathrm{cm} = 25 \cdot 20\ \mathrm{cm}$; für eine Länge der Sandfläche werden 25, für beide Längen also 50 Steine benötigt.
$84 - 50 = 34$; $34 : 2 = 17$; $17 - 2 = 15$.
Nun gilt $15 \cdot 20\ \mathrm{cm} = 300\ \mathrm{cm} = 3\ \mathrm{m}$.
Die Sandfläche wird 3 m breit.

Ma 6 ■ 2758 Wegen (1) heißt Schüler Hausmann weder Christian noch Bernd. Wegen (2) kann Schüler Hausmann nicht Alfred heißen. Sein vollständiger Name lautet somit Detlef Hausmann. Wegen (1) heißt Schüler Erdbach weder Christian noch Bernd. Er heißt aber auch nicht Detlef. Sein vollständiger Name lautet somit Alfred Erdbach.
Wegen (1) heißt Schüler Freimuth entweder Bernd oder Christian. Wegen (2) hat Schüler Freimuth kein Buch geschenkt, Bernd aber Rosen. Sein vollständiger Name lautet somit Bernd Freimuth. Der vierte Gast heißt deshalb Christian Giebler.

Ma 6 ■ 2759 Angenommen, es parkten dort x Motorräder mit Beiwagen, also $2x$ Pkw und somit $6x$ Mopeds; dann gilt

$3 \cdot x + 4 \cdot 2x + 2 \cdot 6x = 322$,
$3x + 8x + 12x = 322$,
$23x = 322$, $x = 14$.
Es parkten dort 14 Motorräder mit Beiwagen, 28 Pkw und 84 Mopeds.

Ma 6 ■ 2760 a) Von 10.05 Uhr bis 11.20 Uhr sind 75 min = 1,25 h verflossen. In dieser Zeit legte das Flugzeug 2100 km − 600 km = 1500 km zurück.
Das ergibt eine Geschwindigkeit
$v = 1500 : 1{,}25 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 1200 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

b) Wegen $v = 1200 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ benötigt das Flugzeug für den restlichen Weg von 600 km noch $\frac{1}{2}$ h = 30 min. Es wird somit um 11.50 Uhr in B landen.

Ma 7 ■ 2761 Es gilt $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$ usw., also endet 2^{4n} auf die Grundziffer 6. Wegen $12^{100} = 12^{4 \cdot 25} = 12^{4 \cdot n}$ endet diese Zahl auf die Grundziffer 6.

Ma 7 ■ 2762 Angenommen, der dritte Bagger bewegt täglich x Kubikmeter Abraum, der zweite somit $(x - 1000)\,\text{m}^3$, der erste $[2(x - 1000) - 3000]\,\text{m}^3$ $= (2x - 5000)\,\text{m}^3$. Dann gilt
$x + x - 1000 + 2x - 5000 = 36\,000$, also
$x = 10\,500$. Der erste Bagger bewegt täglich $16\,000\,\text{m}^3$, der zweite $9500\,\text{m}^3$, der dritte $10\,500\,\text{m}^3$ Abraum.

Ma 7 ■ 2763 Angenommen, Klaus ist x Jahre alt; dann ist Claudia $2x$ Jahre, der Vater $4x$ Jahre, die Mutter $(x + 31)$ Jahre, alle zusammen sind $(8x + 31)$ Jahre alt. Nun gilt $8x + 31 = 127$, also $x = 12$. Klaus ist 12, Claudia 24, die Mutter 43, der Vater 48 Jahre alt.

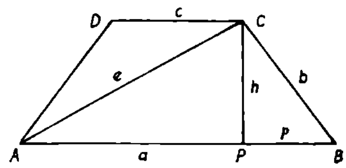
Ma 7 ■ 2764 Die Zehnerstelle der zweistelligen natürlichen Zahl sei a; dann ist $(9 - a)$ die Einerstelle. Nun gilt
$[10a + (9 - a)] \cdot 2 - 9 = 10(9 - a) + a$,
also $a = 3$.
Es handelt sich um die Zahlen 36 und 63.

Ma 8 ■ 2765 Es sei a eine beliebige natürliche Zahl. Wenn man diese um 0,5 vermehrt und dann das Quadrat bildet, erhält man
$(a + 0{,}5)^2 = a^2 + a + 0{,}25$
$= a(a + 1) + 0{,}25$.
Die letzte Zeile entspricht der Behauptung. (Beispiel: $19{,}5^2$
$= 19 \cdot 20 + 0{,}25 = 380 + 0{,}25 = 380{,}25$.)

Ma 8 ■ 2766 Angenommen, René lügt. Dann lügt auch Mike, und das ist ein Widerspruch zur Feststellung des Lehrers. Folglich sagt René die Wahrheit. Damit sagen auch Mike und Thomas die Wahrheit; nur Reiko lügt.
Das Fenster hat Reiko zerschlagen. Alle anders begonnenen Überlegungen führen zum gleichen Ergebnis.

Ma 8 ■ 2767 Es gilt $p^2 + 2$
$= p^2 - 1 + 3 = (p - 1)(p + 1) + 3$.
Von den drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen $p - 1, p, p + 1$ ist genau eine durch 3 teilbar. Angenommen $p \neq 3$; dann ist entweder $p - 1$ oder $p + 1$ Vielfaches von 3. Dann ist die Summe $(p - 1)(p + 1) + 3$ ebenfalls durch 3 teilbar, also keine Primzahl.
Für $p = 3$ gilt $p^2 + 2 = 9 + 1 = 11$.
Es existiert somit genau eine Lösung, nämlich $p = 3$.

Ma 8 ■ 2768 In dem abgebildeten gleichschenkligen Trapez gilt o. B. d. A.
$e^2 = h^2 + (a - p)^2$ und $b^2 = h^2 + p^2$.



Bildet man die Differenz der Quadrate, so erhält man
$e^2 - b^2 = (h^2 + (a - p)^2) - (h^2 + p^2)$
$= h^2 + (a - p)^2 - h^2 - p^2$
$= h^2 + a^2 - 2ap + p^2 - h^2 - p^2$
$= a(a - 2p)$.
Wegen $a - 2p = c$
gilt nun $e^2 - b^2 = a \cdot c$, q. e. d.

Ma 9 ■ 2769 Das heutige Alter des Herrn Müller in Jahren sei mit x und das seiner Frau mit y bezeichnet. Herr Müller war vor $x - y$ Jahren y Jahre alt, seine Frau war $y - (x - y)$, also $2y - x$ Jahre alt. Wenn nun Herr Müller heute doppelt so alt ist, gilt $x = 2(2y - x)$ bzw. $3x - 4y$.
Frau Müller wird in $x - y$ Jahren x Jahre alt sein (so alt, wie Herr Müller heute ist); sie ist dann also $y + x - y$ Jahre alt. Dann wird Herr Müller $x + x - y$ Jahre alt sein. Wenn beide dann zusammen 108 Jahre alt sein werden, gilt
$y + x - y + x + x - y = 108$,
$3x - y = 108$.
Nun gilt (1)
$3x = 4y$ und (2) $3x = y + 108$,
also $4y = y + 108$,
$3y = 108$, $y = 36$ und $3x = 36 + 108$,
$3x = 144$, $x = 48$.
Herr Müller ist heute 48 Jahre, seine Frau 36 Jahre alt. Die Probe zeigt die Richtigkeit der Ergebnisse.

Ma 9 ■ 2770 Wenn p_1 und p_2 die gleichen Endziffern haben, so endet $p_2 - p_1$ auf die Ziffer 0, d. h. $p_2 - p_1$ ist Vielfaches von 10. Keine der Primzahlen p_1 und p_2 ist durch 3 teilbar. Keine der Primzahlen p_1 und p_2 läßt bei Division durch 3 den Rest 1; denn sonst wären die Zahlen $p_1 + 2$ und $p_2 + 2$ durch 3 teilbar, also keine Primzahlen (Widerspruch!).
Folglich gibt es natürliche Zahlen a und b derart, daß
$p_1 = a \cdot 3 + 2$ und $p_2 = b \cdot 3 + 2$,
also $p_2 - p_1 = (b - a) \cdot 3$ gilt,
d. h. $3 \mid p_2 - p_1$.
Aus $10 \mid p_2 - p_1$ und $3 \mid p_2 - p_1$ folgt
$30 \mid p_2 - p_1$, w. z. b. w.

Ma 9 ■ 2771 Man formt zunächst (2) um und erhält (2′) $(b + a)(b - a) = a + b$ und für $a \neq 0$ und $b \neq 0$ gilt weiter
$b - a = 1$, $b = a + 1$.
Das setzt man in (1) ein und erhält
(1′) $a^3 + (a + 1)^3 = c^3 + 1$,
$2a^3 + 3a^2 + 3a = c^3$.
Nun stellt man (3) um, erhält
(3′) $2a^3 - 6a + 4a^2 = c^3$ und setzt nun (1′) ein. Das führt zu
(4) $2a^3 - 6a + 4a^2 = 2a^3 + 3a^2 + 3a$,
$a^2 - 9a = 0$, $a_1 = 0$ entfällt
(siehe (2′)!) $a_2 = 9$.
Aus (2′) folgt dann $b = 10$. Nun läßt sich auch $c = 12$ berechnen. Das einzige Tripel natürlicher Zahlen, das das gegebene Gleichungssystem erfüllt, ist (9; 10; 12). Die Probe bestätigt die Richtigkeit.

Ma 9 ■ 2772 Aus $\frac{4^6}{5^6} = \left(\frac{4}{5}\right)^6 = \left(\frac{4^3}{5^3}\right)^2$
$= \left(\frac{64}{125}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ folgt $\frac{4^6}{5^6} > \frac{1}{4}$
und somit $4^7 > 5^6$. Aus
$\frac{5^6}{6^6} = \left(\frac{5^3}{6^3}\right)^2 = \left(\frac{125}{216}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^2$
$= \frac{1}{4}$ folgt $4 \cdot 5^6 > 6^6$, also
$5^6 > \frac{6^6}{4} > \frac{6^6}{6} = 6^5$.
Die weiteren Beweisschritte erfolgen in analoger Weise.

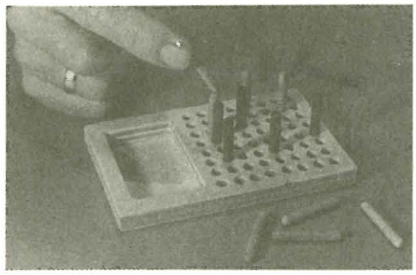
Ma 10/12 ■ 2773 Das geordnete Paar (2; 5) ist einzige Lösung.

Ma 10/12 ■ 2774 Zuerst quadrieren wir die gegebene Gleichung und erhalten
$\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$.
Weitere äquivalente Umformungen ergeben
$1 - \sin 2x = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$, $-\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,
$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $2x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{6}$.
Nun ist $\cot 3x = \cot \frac{\pi}{2} = 0$.

Ma 10/12 ■ 2775 Es gibt keine reelle Zahl, die die gegebene Gleichung erfüllt. Der Term $\sqrt{2 - x}$ hat den Definitionsbereich $D_1 = \{x \in P; x \leqq 2\}$; der Term $\sqrt{x - 3}$ hat den Definitionsbereich $D_2 = \{x \in P; x \geqq 3\}$; die gegebene Gleichung hat somit den Definitionsbereich $D = D_1 \cap D_2$, d. h. $D = \emptyset$. Es gilt also $L = \emptyset$. Würde man den Definitionsbereich nicht beachten und *einfach drauflos rechnen*, so käme man nach entsprechenden Umformungen auf die Gleichung
$x_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{28}{4}}$ und müßte erkennen, daß die Diskriminante negativ ist. Daraus folgt $L = \emptyset$.

Ma 10/12 ■ 2776 Aus $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \varrho + \frac{1}{2}$
$\cdot b \cdot \varrho + \frac{1}{2} \cdot c \cdot \varrho = \frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot (a + b + c)$
folgt $\frac{a + b + c}{2 \cdot A} = \frac{1}{\varrho}$, $\frac{a}{2 \cdot A} + \frac{b}{2 \cdot A}$
$+ \frac{c}{2 \cdot A} = \frac{1}{\varrho}$.
Wegen $2 \cdot A = a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$
gilt deshalb $\frac{a}{a \cdot h_a} + \frac{b}{b \cdot h_b}$
$+ \frac{c}{c \cdot h_c} = \frac{1}{\varrho}$, $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{\varrho}$.

Taschenspiele (reien)

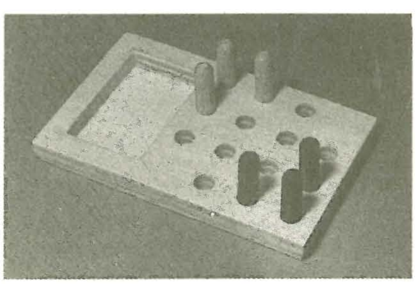


Hier stellen wir ein paar ganz einfach herzustellende Spiele vor, die man schon in der Hosentasche mit sich führen kann, um bei passender Gelegenheit mit einem Partner im kurzweiligen Spiel taktische Geschicklichkeit zu erproben.

Die Spielplatten bestehen jeweils aus 10 mm dicken und 74 mm × 116 mm großen Holztäfelchen, in die nach Zeichnung Löcher zum Einstecken der Spielsteine (8-mm-Holzdübel bzw. 5-mm-Rundholzstückchen gleicher Länge) mit ein bzw. zwei Zehntel Millimeter mehr Durchmesser gebohrt werden. In dem auszusägenden rechteckigen Fach werden die Spielsteine beim Transport untergebracht.

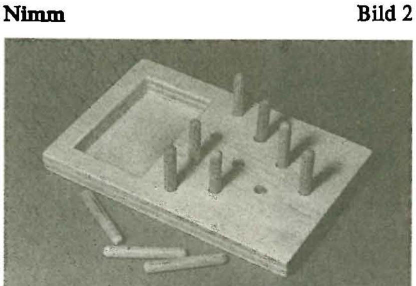
Unter die Spielplatten wird ein etwa 1 mm dicker Boden aus Furnier, Sperrholz oder Pappe geklebt. Aus festem Karton ist dann noch eine einfache Schiebehülse anzufertigen, die verhindert, daß die eingelegten Spielsteine beim Transport herausfallen können.

Mini-Halma Bild 1



Bei dieser kleinen Halma-Version stehen jedem Spieler drei Spielsteine zur Verfügung. Wer zuerst wie beim großen Halma seine Stäbchen durch Ziehen und Springen von der Ausgangsposition (Bild 1) in die gegenüberliegende Spielfeldecke gebracht hat, ist Sieger.

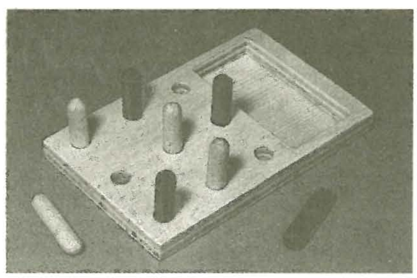
Nimm Bild 2



Bei diesem Spiel (Bild 2) werden die 10 Stäbchen in die dreieckförmig angeordneten Löcher gesteckt. Für die Spieler besteht die Aufgabe darin, abwechselnd 1 bis 4 Spielsteine einer Reihe zu nehmen. Wer das letzte Stäbchen nehmen muß, hat verloren.

Tic-Tac-Toe und Mini-Mühle Bild 3

Auf dieser Platte mit neun Löchern



(Bild 3) lassen sich zwei Spiele austragen. Beim Tic-Tac-Toe, einem Spiel, das schon in der Antike in Ägypten und Griechenland gespielt worden sein soll, setzen die Spieler ihre Steine abwechselnd auf das Spielfeld und ziehen dann jeweils einen Stein mit dem Ziel, eine waagerechte oder senkrechte Dreierreihe aus den eigenen Spielsteinen zu bilden.

Das Spiel kann beendet werden, wenn der erste Spieler eine solche Reihe erreicht hat. Eine andere Variante wäre, weiterzuspielen, bis es einem der Spieler gelungen ist, durch Ziehen oder Springen fünfmal oder zehnmal eine Dreierreihe aufzubauen.

Mini-Mühle

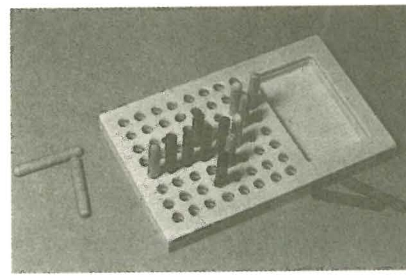
Für die auf der gleichen Platte zu spielende Mini-Mühle erhält jeder Spieler 3 Stäbchen einer Farbe und muß nun wie bei der großen Mühle versuchen, durch Setzen und Ziehen der Spielsteine eine Dreierreihe waagerecht, senkrecht oder diagonal zu bilden.

Fünferreihe und Spring

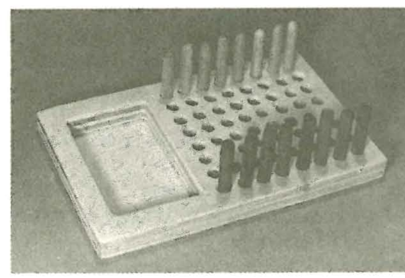
Auch die auf Bild 4 gezeigte Platte mit 64 Löchern bietet die Möglichkeit für zwei verschiedene Spiele.

Bei der *Fünferreihe* handelt es sich um ein älteres Spiel aus Japan, wo es auf einem Go-Spielbrett gespielt wird. Bei der hier vorgestellten Abwandlung wird auf 64 *Feldern* gespielt und jeder der beiden Spielpartner erhält acht Spielsteine. Diese werden abwechselnd gesetzt und dürfen dann jeweils von einem Loch gezogen werden. Sieger ist, wem es zuerst gelingt, aus fünf der acht Spielsteine eine waagerechte, senkrechte oder diagonale Reihe zu bilden.

Bild 4



Spring Bild 5



Auf der gleichen Grundplatte läßt sich ein zweites Spiel mit ebenfalls je acht Stäbchen spielen. Diese werden auf den Grundlinien aufgestellt (Bild 5). Die Steine können in jeder Richtung zu einem benachbarten Loch gezogen werden, also senkrecht, waagerecht oder diagonal und dabei auch rückwärts.

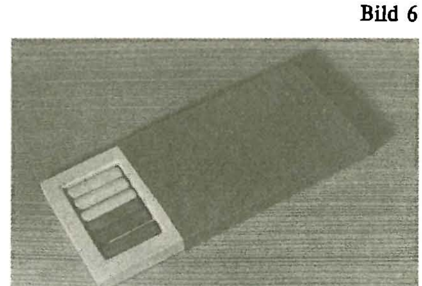
Stehen sich zwei gegnerische Spielsteine auf Nachbarfeldern gegenüber, kann der Spieler, der am Zuge ist, den anderen Stein durch Überspringen schlagen und vom Feld nehmen, soweit das Feld hinter dem gegnerischen Stein frei ist. Es darf aber bei einem Zug nur ein Spielstein des Gegners geschlagen werden.

Sieger ist, wer als letzter noch einen oder mehrere Steine auf dem Spielfeld hat.

Bild 6 zeigt eines der Spiele mit der aus festem Karton gefertigten Transport-Schiebehülse.

aus: practic 2/86

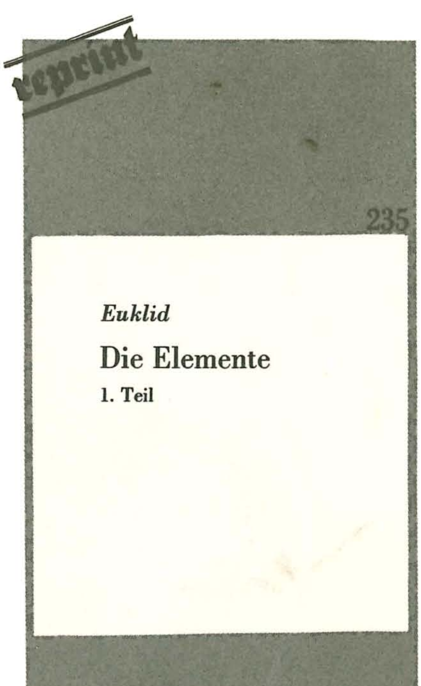
Bild 6



Sechs Aufgaben von Euklid von Alexandria

365? bis 300 v. u. Z.

Mit den dreizehn Büchern der „Elemente" des hellenistischen Mathematikers Euklid tritt uns das erfolgreichste Werk der mathematischen Weltliteratur entgegen. In meisterhafter Darstellung vereinigte und systematisierte Euklid das gesamte mathematische Wissen seiner Zeit mit Ausnahme der Anwendungen der Mathematik.
Das von Euklid gewählte Darstellungsschema Definition, Satz, Beweis wurde für mehr als zwei Jahrtausende zum Muster der in der griechischen Tradition stehenden Mathematik.
Es ist das Verdienst der *Akademischen Verlagsgesellschaft Geest und Portig K.-G.* Leipzig, daß sie die dreizehn Bücher nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzen ließ und im Jahre 1933 in fünf kleinen Bänden herausgab. Im Jahre 1984 erschienen davon Reprints in der Reihe: Ostwalds Klassiker der Wissenschaft: Euklid, Die Elemente;
1. Teil, Bestell-Nr. 669 654 1,
Preis 13,00 M;
2. Teil, Bestell-Nr. 669 653 3,
Preis 11,00 M;



3. Teil, Bestell-Nr. 669 652 5,
Preis 12,00 M;
4. Teil, Bestell-Nr. 669 651 7,
Preis 17,00 M;
5. Teil, Bestell-Nr. 669 650 9,
Preis 16,00 M.

Diese Titel enthalten die Euklidischen Bücher: Vom Punkt bis zum Pythagoreischen Lehrsatz; Geometrische Algebra; Kreislehre; Ausdehnung der Größenlehre auf Irrationalitäten; Proportionen und Anwendung auf Planimetrie; Quadrat- und Kubikzahlen, geometrische Reihen; Lehre von Gerade und Ungerade; Mit geometrischen Mitteln zu führende Beweise; Elementare Stereometrie, Exhaustionsmethode: Pyramide, Kegel, Kugel; Reguläre Polyeder.
Für die *alpha*-Leser wählten wir sechs geometrische Probleme – textlich modernisiert – aus:

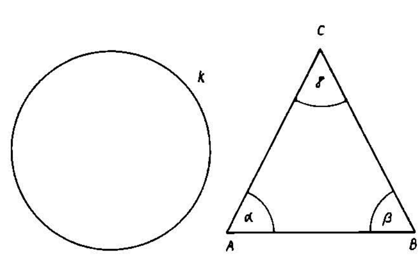
Aufgaben

▲1▲ Eine gegebene Strecke $\overline{AB}$ ist durch einen inneren Punkt H so zu teilen, daß das Rechteck aus der ganzen Strecke $\overline{AB}$ und dem Abschnitt $\overline{BH}$ flächengleich ist dem Quadrat über dem Abschnitt $\overline{AH}$.

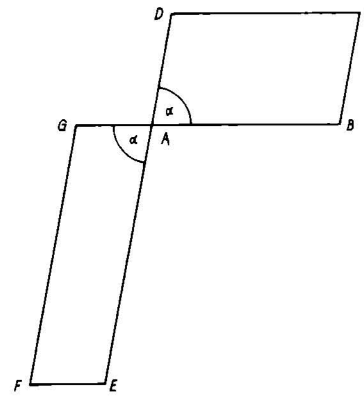
▲2▲ Es ist zu beweisen, daß zwei nicht durch den Mittelpunkt gehende Sehnen eines Kreises einander im Schnittpunkt nicht halbieren können!

▲3▲ Schneiden im Kreise zwei Sehnen einander, so ist das Rechteck aus den Abschnitten der einen Sehne flächengleich dem Rechteck aus den Abschnitten der anderen Sehne. Dieser Satz ist zu beweisen!

▲4▲ Gegeben sei ein Kreis k und ein Dreieck ABC. Diesem Kreis k ist ein Dreieck $A'B'C'$ einzubeschreiben, das dem Dreieck ABC ähnlich ist.



den kongruenten Scheitelwinkeln BAD und EAG. Es ist nachzuweisen, daß sich die Seiten dieser Parallelogramme umgekehrt proportional verhalten, d. h., daß $\overline{AB} : \overline{AE} = \overline{AG} : \overline{AD}$ gilt.



▲6▲ Beschreibt man einem Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge a ein, so ist der Flächeninhalt des Quadrates über einer Dreieckseite dreimal so groß wie der Flächeninhalt des Quadrates über dem Radius r des Umkreises k. Diese Aussage ist zu beweisen!

J. Lehmann/Th. Scholl

Zeitgenössische Darstellung eines griechischen Lehrers, vermutlich eines Sklaven, beim Privatunterricht: Auf dem Schoß liegt die Schreibtafel; mit der Rechten schwingt er den Griffel.

Freie wohlhabende Griechen bei wissenschaftlichen Diskussionen

ISSN 002-6395 · alpha · Berlin · 21 (1987) 4 · Seiten 73 bis 96