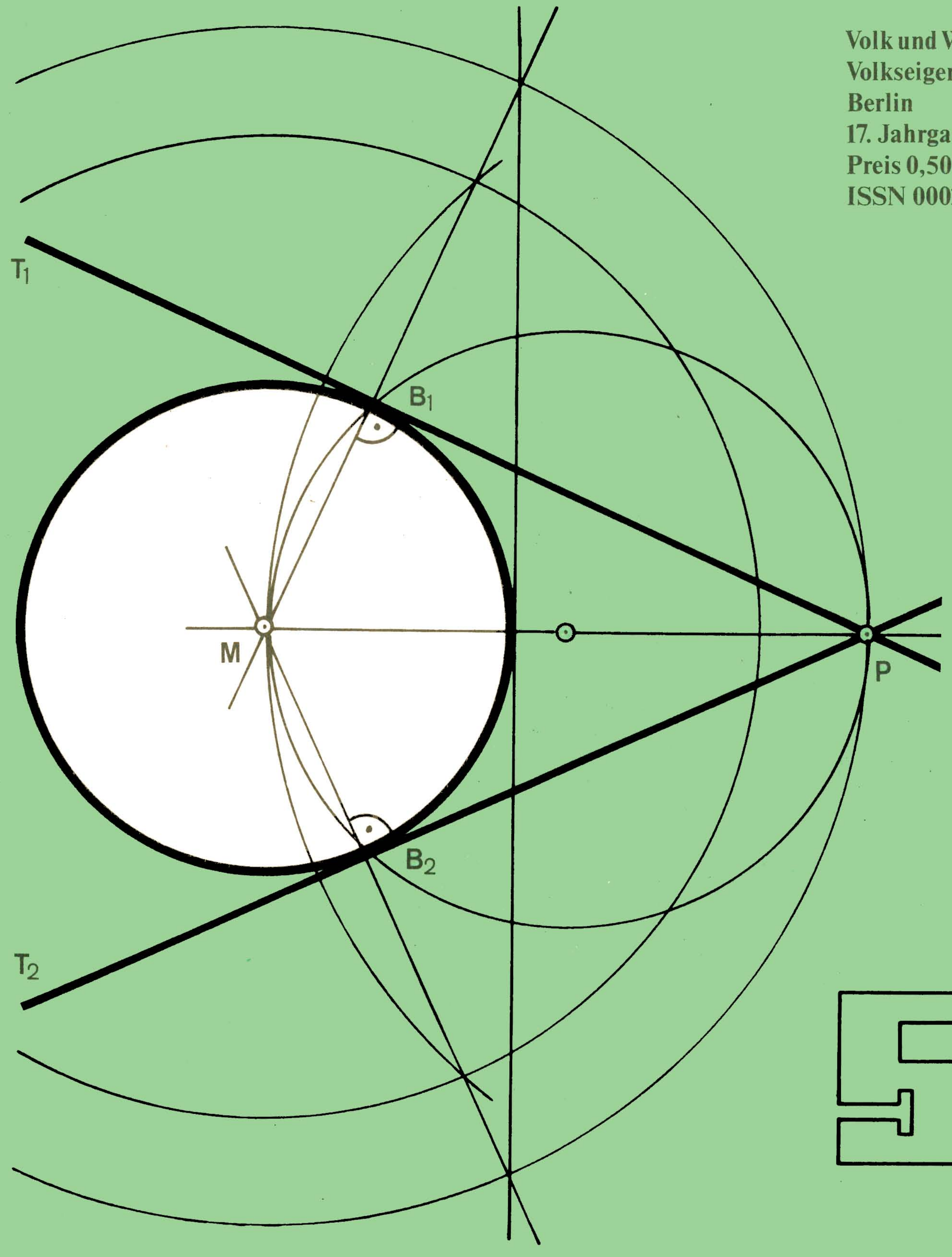
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
17. Jahrgang 1983
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395



5

Redaktion:
OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 1086 Berlin, Krausenstraße 50, PSF Nr. 1213
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 7010 Leipzig, Leninstr. 16.
Fotos: Foto A. Hemmerling, Eigenfoto (S. 102); Illusionismen, aus dem gleichnamigen Buch, Verlag Corin, Bern (S. 103); Ulrich Dröse, Greifswald (S. 110); W. Henker, Karl-Marx-Stadt (S. 115); Briefmarken: J. Lehmann, Leipzig (S. 116).
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig
Titelblatt: W. Fahr, nach einer Idee von Ing. M. Wilde, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit, III/18/97
Redaktionsschluß: 27. Juni 1983
Erscheinungstermin: 20. Oktober 1983

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

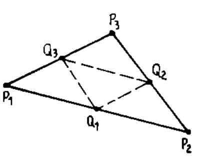
Über die Konstruktion von Vielecken, wenn die Seitenmittelpunkte gegeben sind

Wir wollen uns mit der Frage beschäftigen, wann n gegebene Punkte $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ die Seitenmitten eines Vielecks $P_1P_2\ldots P_n$ sein können, ob dieses Vieleck eindeutig bestimmt ist und wie man es konstruieren kann. Dabei wird nicht vorausgesetzt, daß das Vieleck konvex ist. Auch überschlagene und entartete Vielecke sind zugelassen. So dürfen zum Beispiel Eckpunkte zusammenfallen oder Seiten ganz bzw. teilweise aufeinanderliegen. Für $n=4$ soll uns noch kurz die Frage beschäftigen, wann das entstehende Viereck konvex ist.

I. n = 3

Gegeben: Q_1, Q_2, Q_3. Wir setzen voraus, daß diese drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen.
Gesucht: P_1, P_2, P_3 so, daß Q_1 der Mittelpunkt von $\overline{P_1P_2}$, Q_2 der Mittelpunkt von $\overline{P_2P_3}$ und Q_3 derjenige von $\overline{P_3P_1}$ ist.
Lösungsweg:
a) Es sei $\triangle P_1P_2P_3$ so ein gesuchtes Dreieck, und Q_1, Q_2, Q_3 seien die Mittelpunkte seiner Seiten.
Aus dem Strahlensatz folgt:
Die Seiten des Dreiecks $\triangle Q_1Q_2Q_3$ sind parallel zu den Seiten des Dreiecks $\triangle P_1P_2P_3$ und halb so lang wie diese.

Bild 1



b) Ist das Dreieck $\triangle Q_1Q_2Q_3$ gegeben, so zeichnet man durch jeden Eckpunkt die Parallele zur gegenüberliegenden Seite. Diese Geraden schneiden sich in den Punkten P_1, P_2P_3. Diese Schnittpunkte existieren immer und sind eindeutig bestimmt. Zu einem Dreieck $\triangle Q_1Q_2Q_3$ gibt es also stets genau ein Dreieck $\triangle P_1P_2P_3$, so daß die Q_i die Seitenmittelpunkte sind.
Wir wollen die Konstruktion der P_i noch auf eine andere Weise, nämlich mit Hilfe von Abbildungen, beschreiben, weil uns diese Methode für $n>3$ gute Dienste leisten wird. Dabei verwenden wir für die 180°-Drehung um einen Punkt A die Bezeichnung „Punktspiegelung an A" und schreiben dafür S_A.

Wir wenden auf Q_3 die Verschiebung $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ an und erhalten als Bild den Punkt P_1. Bei der Punktspiegelung an Q_1 gehe P_1 in den Punkt P_2 über. P_3 sei das Bild von P_2 bei der Punktspiegelung an Q_2.

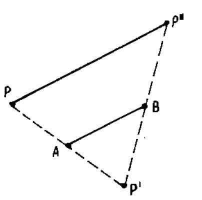
$$S_{Q_1}(P_1)=P_2;\ S_{Q_2}(P_2)=P_3.$$

Es ist nur noch zu zeigen, daß Q_3 der Mittelpunkt von $\overline{P_1P_3}$ ist. P_3 haben wir aus P_1 durch das Hintereinanderausführen der beiden Punktspiegelungen an Q_1 und Q_2 gewonnen. Wir schreiben dafür

$$S_{Q_1}S_{Q_2}(P_1)=P_3. \qquad (*)$$

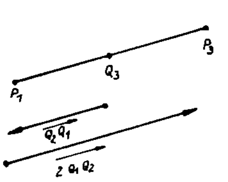
Wir wollen untersuchen, was für eine Abbildung durch das Nacheinanderausführen zweier Punktspiegelungen entsteht.
P sei ein beliebiger Punkt, P' sein Bildpunkt bei der Punktspiegelung an einem Punkt A, P'' das Bild von P' bei der Punktspiegelung an einem Punkt B. Wie aus dem Strahlensatz und seiner Umkehrung folgt, gilt $PP'' \parallel AB$; $\overline{PP''}=2\cdot\overline{AB}$.

Bild 2



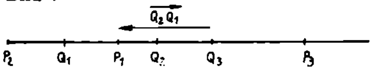
P'' kann man also aus P auch durch Verschieben in Richtung $\overrightarrow{AB}$ um die doppelte Länge von $\overline{AB}$ gewinnen. Wir schreiben für diesen Verschiebungspfeil $2\cdot\overrightarrow{AB}$. Damit ist gezeigt:
Hilfssatz: Das Nacheinanderausführen von zwei Punktspiegelungen an A und B kann man ersetzen durch eine Verschiebung mit dem Verschiebungspfeil $2\overrightarrow{AB}$.
Aus (*) folgt, daß P_3 das Bild von P_1 bei der Verschiebung $2\overrightarrow{Q_1Q_2}$ ist. Da P_1 als Bild von Q_3 bei der Verschiebung $\overrightarrow{Q_2Q_1}$ entstanden war, liegen P_1, Q_3, P_3 auf einer Geraden, und Q_3 ist der Mittelpunkt von $\overline{P_1P_3}$.
$\triangle P_1P_2P_3$ ist also ein Dreieck mit der geforderten Eigenschaft. Es ist eindeutig bestimmt.

Bild 3



Wir können nun auch die Voraussetzung, daß die Q_i $(i=1, 2, 3)$ ein Dreieck bilden, fallen lassen.
Liegen die Punkte Q_i auf einer Geraden, so erhält man durch die Verschiebung von Q_3 um $\overrightarrow{Q_2Q_1}$ und die nachfolgenden Spiegelungen an Q_1, Q_2 die Punkte P_i auf derselben Geraden. Das Dreieck ist entartet.

Bild 4

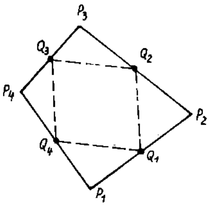


II. n = 4

a) $P_1P_2P_3P_4$ sei so ein gesuchtes Viereck. Wir betrachten die Lage seiner Seitenmittelpunkte Q_i $(i=1, \ldots, 4)$.
Behauptung: Die Q_i bilden ein Parallelogramm.
Beweis: Wendet man auf P_1 nacheinander die Punktspiegelungen an Q_1, Q_2, Q_3 und Q_4 an, so kommt man zum Ausgangspunkt P_1 zurück.

$$S_{Q_1}S_{Q_2}S_{Q_3}S_{Q_4}(P_1)=P_1.$$

Bild 5



Nach dem Hilfssatz ist $S_{Q_1}S_{Q_2}$ gleich der Verschiebung $2\cdot\overrightarrow{Q_1Q_2}$, $S_{Q_3}S_{Q_4}$ ist gleich der Verschiebung $2\cdot\overrightarrow{Q_3Q_4}$. Das Hintereinanderausführen zweier Verschiebungen führt aber nur dann zum selben Punkt zurück, wenn die beiden Verschiebungspfeile gleich lang und entgegengesetzt gerichtet sind. Also gilt

$$\overline{Q_1Q_2}=\overline{Q_3Q_4};\ Q_1Q_2 \parallel Q_3Q_4.$$

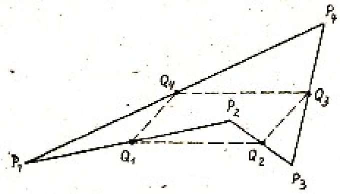
Ein Viereck, bei dem zwei gegenüberliegende Seiten parallel und gleich lang sind, ist aber ein Parallelogramm.
Vier Punkte Q_i können demnach höchstens dann die Seitenmitten eines Vierecks sein, wenn sie ein Parallelogramm bilden.
b) Wir denken uns nun ein Parallelogramm $Q_1Q_2Q_3Q_4$ gegeben und wollen ein Viereck $P_1P_2P_3P_4$ so konstruieren, daß die Q_i die Mittelpunkte seiner Seiten sind.
Behauptung: Man kann einen Eckpunkt des Vierecks frei wählen. Die anderen erhält man dann durch hintereinander ausgeführte Punktspiegelungen an den Q_i.
Beweis: Wir wählen P_1 frei. Die nacheinander ausgeführten Punktspiegelungen an Q_2, Q_3 und Q_4 ergeben die Punkte P_2, P_3 und P_4.

$$S_{Q_1}(P_1)=P_2,$$
$$S_{Q_2}(P_2)=P_3,\ S_{Q_3}(P_3)=P_4.$$

Können wir zeigen, daß $S_{Q_4}(P_4)=P_1$ oder, was dasselbe ist, $S_{Q_1}S_{Q_2}S_{Q_3}S_{Q_4}(P_1)=P_1$ gilt, so ist unsere Behauptung bewiesen. $S_{Q_1}S_{Q_2}$ können wir ersetzen durch die Verschiebung $2\overrightarrow{Q_1Q_2}$, $S_{Q_3}S_{Q_4}$ durch die Verschiebung $2\cdot\overrightarrow{Q_3Q_4}$.

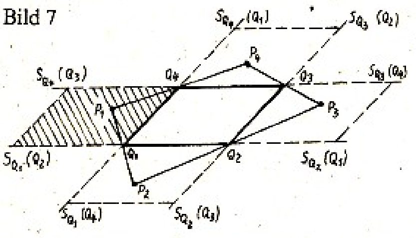
Da die beiden Verschiebungspfeile nach Voraussetzung gleich lang, aber entgegengesetzt gerichtet sind, kommen wir durch das Hintereinanderausführen dieser Verschiebungen zum Ausgangspunkt P_1 zurück.
Die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 bilden also ein Viereck, dessen Seitenmitten die Punkte Q_i sind.

Bild 6



Man kann sich leicht überlegen, daß das Viereck genau dann konvex ist, wenn man P_1 aus dem Inneren des an $\overline{Q_1Q_4}$ angrenzenden, zu $Q_1 \ldots Q_4$ kongruenten Parallelogramms (in Bild 7 schraffiert) wählt.

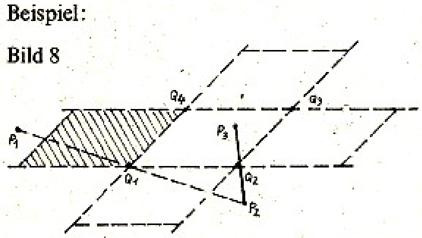
Bild 7



Genau dann liegen nämlich alle Bilder der P_i bei den Spiegelungen an den Q_i innerhalb der an $Q_1Q_2Q_3Q_4$ anliegenden kongruenten Parallelogramme. Dies ist aber die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das Viereck $P_1P_2P_3P_4$ konvex ist. Andernfalls gibt es nämlich einen Bildpunkt P_k ($k \in \{1, \ldots, 4\}$), der innerhalb desjenigen Winkelraumes mit dem Scheitel Q_k liegt, in dem nicht noch so ein kongruentes Parallelogramm eingezeichnet ist. (Das möge der Leser nachprüfen durch Wahl von P_1 aus allen möglichen Bereichen.) Bei anschließender Spiegelung an Q_k erhält man P_{k+1}, und die Strecke P_kP_{k+1} ($P_5=P_1$) schneidet das Parallelogramm der Seitenmitten. Das ist bei einem konvexen Viereck nicht der Fall.

Beispiel:

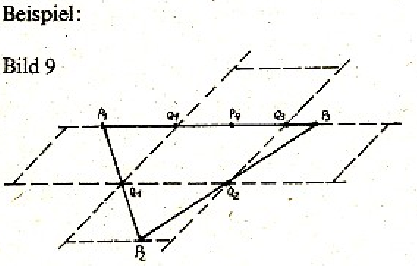
Bild 8



Wählt man P_1 auf einer der Geraden Q_iQ_{i+1}, ($Q_5=Q_1$), so entartet das Viereck.

Beispiel:

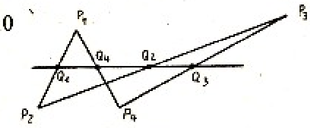
Bild 9



Das Parallelogramm der Q_i darf auch entartet sein zu einem Parallelogramm der Höhe Null. Es entstehen überschlagene Vierecke. (Nicht immer ist bei überschlagenen Vierecken das Parallelogramm der Seitenmitten entartet.)

Beispiel:

Bild 10



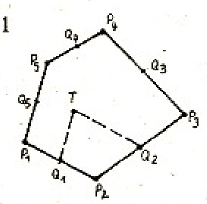
Zu vier Punkten Q_i in Parallelogrammlage ($\overrightarrow{Q_1Q_2}=\overrightarrow{Q_4Q_3}$) gibt es also stets unendlich viele Vierecke, deren Seitenmitten die Q_i sind.

III. n = 5

a) $P_1P_2P_3P_4P_5$ sei ein Fünfeck mit den Seitenmittelpunkten Q_i ($i=1,2,\ldots,5$).
Beim Hintereinanderausführen der Punktspiegelungen an $Q_1, Q_2, \ldots, Q_5$ geht der Punkt P_1 in sich über, d.h. es gilt

$$S_{Q_1}S_{Q_2}S_{Q_3}S_{Q_4}S_{Q_5}(P_1)=P_1.$$

Bild 11



$S_{Q_1}S_{Q_2}$ können wir ersetzen durch die Verschiebung $2\overrightarrow{Q_1Q_2}$ (vgl. Hilfssatz), $S_{Q_3}S_{Q_4}$ durch die Verschiebung $2\overrightarrow{Q_3Q_4}$. Das Bild von Q_2 bei der Verschiebung $\overrightarrow{Q_3Q_4}$ sei T. Dann kann man die beiden Verschiebungen $2\overrightarrow{Q_1Q_2}$, $2\overrightarrow{Q_3Q_4}$ ersetzen durch die eine Verschiebung $2\overrightarrow{Q_1T}$. P_1 ist also ein Punkt, der bei der Verschiebung $2 \cdot Q_1T$ und anschließender Punktspiegelung an Q_5 fest bleibt. So ein Punkt heißt „Fixpunkt". Um die Fixpunkte dieser Abbildung zu bestimmen, wollen wir uns zunächst überlegen, durch welche Abbildung man eine Verschiebung mit anschließender Punktspiegelung ersetzen kann.
Der Verschiebungspfeil sei $\overrightarrow{AB}$, der Fixpunkt der anschließenden Punktspiegelung sei S. P sei ein beliebiger Punkt der Ebene, dessen Bild wir bestimmen wollen.
Bei der Verschiebung $\overrightarrow{AB}$ gehe P in P' über, das Bild von P' bei der Punktspiegelung an S sei P''. Wir zeichnen die Verbindungsstrecke $\overline{PP''}$ und durch S die Parallele zu PP'. Der entstehende Schnittpunkt sei R. Aus dem Strahlensatz folgt:

$$\overrightarrow{SR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{P'P}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}.$$

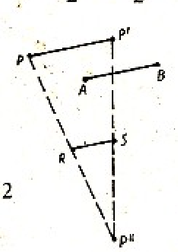


Bild 12

Der Punkt R ist also – unabhängig von der Wahl des Punktes P – gleich dem Bild von S bei der Verschiebung $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$. Da wiederum aus dem Strahlensatz folgt, daß $\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{RP''}$ gilt, erhält man P'' als Bild von P bei der Punktspiegelung an R. Damit ist gezeigt, daß man die Verschiebung $\overrightarrow{AB}$ mit anschließender Punktspiegelung an S ersetzen kann durch die Punktspiegelung an dem Bildpunkt R von S bei der Verschiebung $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$. Diese Abbildung besitzt genau den Fixpunkt R.
Für unsere Aufgabenstellung bedeutet dies, daß man die Verschiebung $2\overrightarrow{Q_1T}$ mit anschließender Punktspiegelung an Q_5 ersetzen kann durch die Punktspiegelung an dem Bildpunkt von Q_5 bei der Verschiebung $\overrightarrow{TQ_1}$. Dieser Bildpunkt ist der einzige Fixpunkt der Abbildung und ist also gleich dem Punkt P_1.
b) Es seien die Seitenmitten Q_i ($i=1,\ldots,5$) gegeben. Für das Fünfeck $P_1P_2\ldots P_5$ ergibt sich folgende Konstruktion: Man bestimmt durch Aneinanderfügen der Verschiebungspfeile $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ und $\overrightarrow{Q_3Q_4}$ den Verschiebungspfeil $\overrightarrow{Q_1T}$. In umgekehrter Richtung ($\overrightarrow{TQ_1}$) trägt man diesen Pfeil an Q_5 an und erhält den Punkt P_1. Durch Punktspiegelungen der P_i an den Q_i ($i=1, 2, 3, 4$) erhält man nacheinander die Eckpunkte P_{i+1} des Fünfecks.

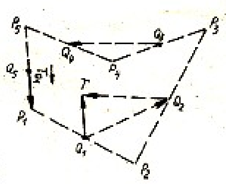


Bild 13

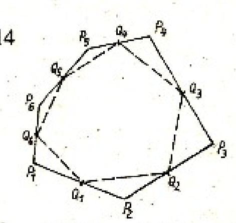
Da der Punkt P_1 als Fixpunkt einer Punktspiegelung immer existiert und eindeutig bestimmt ist, gibt es zu fünf Punkten Q_i ($i=1,\ldots,5$) stets genau ein Fünfeck $P_1P_2P_3P_4P_5$, für das die Q_i die Mittelpunkte der Seiten sind.

IV. n = 6

$P_1P_2\ldots P_6$ sei ein Sechseck mit den Seitenmitten Q_i ($i=1,\ldots,6$). Wendet man auf P_1 die nacheinander ausgeführten Punktspiegelungen an $Q_1, Q_2, \ldots, Q_6$ an, so erhält man als Bild wieder den Punkt P_1,

$$S_{Q_1}S_{Q_2}S_{Q_3}S_{Q_4}S_{Q_5}S_{Q_6}(P_1)=P_1.$$

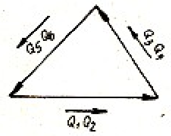
Bild 14



Da die Abbildung $S_{Q_i}S_{Q_{i+1}}$ gleich der Verschiebung $2\cdot\overrightarrow{Q_iQ_{i+1}}$ ist, muß also das Hintereinanderausführen der drei Verschiebungen $2\overrightarrow{Q_1Q_2}$, $2\overrightarrow{Q_3Q_4}$, $2\overrightarrow{Q_5Q_6}$ zum Ausgangspunkt P_1 zurückführen. Da eine Verschiebung, die

nicht gleich der identischen Abbildung (d. h. jeder Punkt wird sich selbst zugeordnet) ist, keinen Fixpunkt besitzt, muß die Zusammensetzung der drei Verschiebungen gleich der identischen Abbildung sein. Für die drei Verschiebungspfeile bedeutet dies, daß sie aneinandergesetzt ein Dreieck bilden. Das ist genau dann der Fall, wenn die Pfeile $\overrightarrow{Q_1Q_2}$, $\overrightarrow{Q_3Q_4}$, $\overrightarrow{Q_5Q_6}$ ein Dreieck ergeben.
Die Punkte Q_i müssen also so angeordnet sein, daß die Verschiebungspfeile $\overrightarrow{Q_1Q_2}$, $\overrightarrow{Q_3Q_4}$, $\overrightarrow{Q_5Q_6}$ bei Zusammensetzung ein Dreieck bilden. (Automatisch bilden dann auch die drei anderen Pfeile $\overrightarrow{Q_2Q_3}$, $\overrightarrow{Q_4Q_5}$, $\overrightarrow{Q_6Q_1}$ ein Dreieck.)
Ist diese Voraussetzung erfüllt, so kann man den Punkt P_1 frei wählen und erhält die anderen Punkte P_{i+1} wieder durch Punktspiegelungen an den Q_i. In diesem Fall gibt es also unendlich viele Sechsecke mit der geforderten Eigenschaft.

Bild 15



V. Die gleichen Überlegungen wie für $n=4$ und $n=6$ gelten immer, wenn die Anzahl n der Punkte Q_i $(i=1, \ldots, n)$ gerade ist; die entsprechenden Überlegungen wie für $n=3$ bzw. $n=5$ führen bei ungeradem n zum Ziel. Ist P_1 ein Eckpunkt des gesuchten Vielecks, so muß nämlich immer gelten, daß das Nacheinanderanwenden der Punktspiegelungen an $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ auf P_1 zu dem Punkt P_1 zurückführt. P_1 ist also ein Fixpunkt dieser zusammengesetzten Abbildung.

$$S_{Q_1}S_{Q_2}\ldots S_{Q_n}(P_1)=P_1.$$

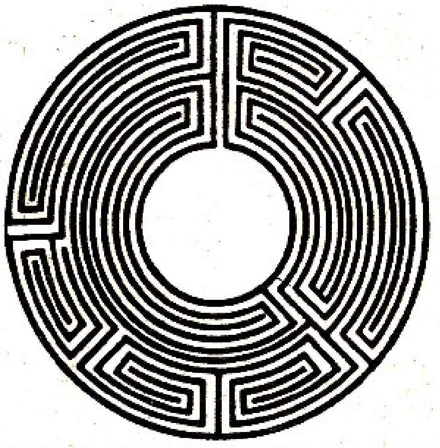
Im Falle n gerade kann man diese n Spiegelungen durch $\frac{n}{2}$ Verschiebungen ersetzen, die zusammen die identische Abbildung ergeben müssen. Dadurch erhält man eine Bedingung für die Q_i. Den Punkt P_1 darf man dann frei wählen. Im Falle n ungerade werden die n Punktspiegelungen ersetzt durch $\frac{n-1}{2}$ Verschiebungen ($\overrightarrow{2Q_1Q_2}$, $\overrightarrow{2Q_3Q_4}$, ..., $\overrightarrow{2Q_{n-2}Q_{n-1}}$) und die anschließende Punktspiegelung S_{Q_n}. Als resultierende Abbildung ergibt sich eine Punktspiegelung. Den Fixpunkt dieser Abbildung kann man bestimmen, indem man den Verschiebungspfeil $\overrightarrow{Q_1T}$ durch Aneinanderfügen der Verschiebungspfeile $\overrightarrow{Q_1Q_2}$, $\overrightarrow{Q_3Q_4}$, ..., $\overrightarrow{Q_{n-2}Q_{n-1}}$ konstruiert und diesen in umgekehrter Richtung an Q_n anheftet.
Das Bild von Q_n bei der Verschiebung $\overrightarrow{TQ_1}$ ist der Fixpunkt P_1 und damit ein Eckpunkt des Vielecks. Aus P_1 gewinnt man in jedem Falle die anderen Eckpunkte P_{i+1} durch Spiegelung an den Q_i.
Wir fassen zusammen:
Ist n gerade $(n>2)$, so ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines n-Ecks $P_1P_2\ldots P_n$ mit der geforderten Eigenschaft, daß die Verschiebungspfeile $\overrightarrow{Q_1Q_2}$, $\overrightarrow{Q_3Q_4}$, ..., $\overrightarrow{Q_{n-1}Q_n}$ ein geschlossenes $\frac{n}{2}$-Eck bilden müssen. Ist dies der Fall, so gibt es unendlich viele solcher n-Ecke $P_1\ldots P_n$. Ein Eckpunkt ist frei wählbar. Die anderen ergeben sich durch Punktspiegelungen.
Ist n ungerade $(n>1)$, gibt es immer genau ein n-Eck $P_1P_2\ldots P_n$, so daß die Punkte Q_i $(i=1, \ldots, n)$ die Seitenmittelpunkte sind. P_1 ist bestimmt als Fixpunkt einer Punktspiegelung, die anderen Eckpunkte erhält man wieder durch Punktspiegelungen an den Seitenmitten.

Waltraud Jagusch

Wie stand es bei Karl Marx mit Fremdsprachen?

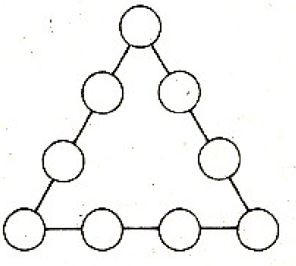
Marx handelte nach dem Wahlspruch: „Eine fremde Sprache ist eine Waffe im Kampf des Lebens." Am Trierer Gymnasium erwarb er sich außerordentliche Kenntnisse des Lateinischen und Altgriechischen und lernte Französisch. Im Londoner Exil eignete er sich die englische Sprache an, die er bald neben Deutsch und Französisch fließend beherrschte. Zum Zeitpunkt seiner Übersiedlung nach London konnte er auch bereits Italienisch lesen. Wenige Jahre später eignete er sich Spanisch an, das er auch mit guter Syntax sprach. Im Alter von 50 Jahren entschloß sich Marx, Russisch zu lernen, da es ihm für die Arbeit am „Kapital" unumgänglich erschien, die ökonomische Entwicklung Rußlands in den Originalquellen zu studieren. Er beherrschte diese Sprache bereits nach sechs Monaten soweit, daß er Puschkin, Gogol und Saltykow-Schtschedrin im Original lesen konnte.
Als Führer der Internationale vermochte er nahezu alle europäischen Sprachen zu verstehen, so u. a. auch Rumänisch und Bulgarisch. Seinen Freunden und Schülern riet er, beim Erlernen einer Sprache vor allem viel zu lesen. Der praktische Gebrauch sei dann leicht erlernt.

F. G.



Irrgarten aus dem Jahre 1664 (G. A. Boeckler)

▲1▲ Волшебный треугольник.
Расставьте в кружочки треугольника цифры от 1 до 9 так, чтобы на каждой его стороне суммы цифр были одинаковы. При этом добейтесь такого расположения цифр, чтобы и суммы квадратов цифр на каждой стороне были равны между собой.



▲2▲ Mark, Paul and Boris are married to Anne, Mary and Susan, not necessarily respectively. Each couple has a pet and the pets are a cat, a guineapig and a pony. Use the following information to match up the husbands, wives and pets:
Paul's and Anne's pets were fighting.
Mary's husband's name has four letters.
Susan went round to feed Mark's pet when he was away.
Mark never goes to town.
Boris's pet is either the cat or the pony.
Susan's pet is not the cat.
The cat's male owner took him to the vet in town.
The guineapig hides when Anne visits its house.
Mary's pet sleeps in a shoe box.

▲3▲ Trois lignes d'autobus ont pour point de départ la gare Montparnasse à Paris. Les autobus de la première ligne sont de retour au bout de 1 h 36 min et restent 4 min à l'arrêt. Les autobus de la deuxième ligne sont de retour au bout de 1 h 48 min et restent 12 min à l'arrêt; ceux de la troisième ligne sont de retour au bout de 2 h 10 min et restent 20 min à l'arrêt. Trois autobus, un pour chaque ligne, partent ensemble de la gare Montparnasse à 8 h.
a) A quelle heure ces trois autobus repartiront-ils ensemble pour la première fois de la gare Montparnasse?
b) Combien de trajets chaque autobus aura-t-il alors accomplis?

Labyrinth-Probleme

eine alte Thematik mit großer Aktualität

Teil 2

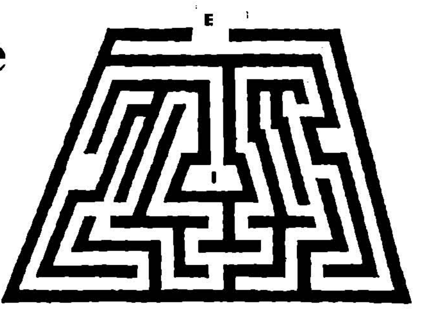


Bild 1

Aufgaben

(*Hinweis:* Man benutze Transparentpapier, das man auf die vorgegebenen Bilder der Labyrinthe legt.)

▲1▲ Die Anweisungen des Tarryschen bzw. des Trémauxschen Verfahrens sollen in dem zuletzt erläuterten Sinne eindeutig verstanden werden. Man konstruiere den entsprechenden Tarry- bzw. Trémaux-Weg bei Start im Punkt I bis zum Erreichen des Ausgangs E
a) für das Labyrinth im Garten von *Hampton Court* (Bild 1),
b) für den Irrgarten von *Altjeßnitz* (Bild 2, siehe auch *alpha* 2/82).

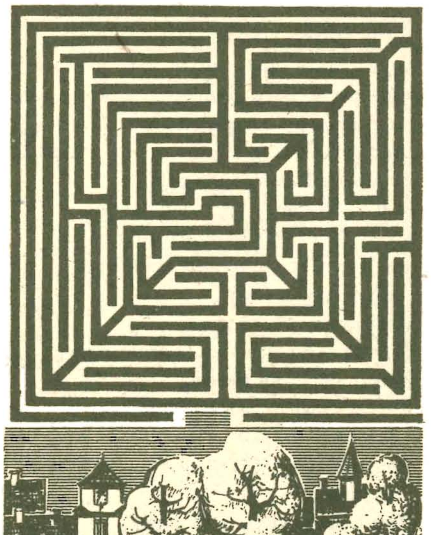


Bild 2

▲2▲ Die Außentür E des Labyrinths im Garten von *Hampton Court* sei geschlossen. Im Punkt I werde eine Maus ausgesetzt, die das Labyrinth
a) nach dem Verfahren von Tarry,
b) nach dem Trémauxschen Verfahren
(jeweils wie bei Aufgabe 1 in eindeutiger Weise) absucht.
An welcher Stelle des Labyrinths hätte man ein Stück Speck abzulegen, damit die Maus es möglichst spät findet?
c) Würde die Maus dann den Speck auch bei offener Außentür finden?

▲3▲ Wenn man den Bauplan eines Labyrinths vollständig kennt, so kann man sich einen guten Überblick über alle möglichen Wege zwischen zwei Punkten (etwa einem Startpunkt im Inneren des Labyrinths und einem Ausgang) verschaffen. Hierzu beschreibt man den zwischen ihnen bestehenden Zusammenhang durch einen Graphen. Als Knotenpunkt nimmt man die beiden vorgegebenen Punkte sowie alle von diesen aus erreichbaren Verzweigungspunkte des Labyrinths. Jedem Verbindungsgang zwischen diesen Punkten im Labyrinth entspricht eine Kante des Graphen. „Sackgassen“ oder „Schleifen“ werden gleich fortgelassen. Eine günstigere Anordnung der Knotenpunkte und Kanten und das Fortlassen weiterer offensichtlich unwesentlicher Details des Graphen erhöht die Übersichtlichkeit.
Man konstruiere solche Graphen
a) für das Labyrinth im Garten von *Hampton Court* (Bild 1),
b) für das Labyrinth von Bild 3,

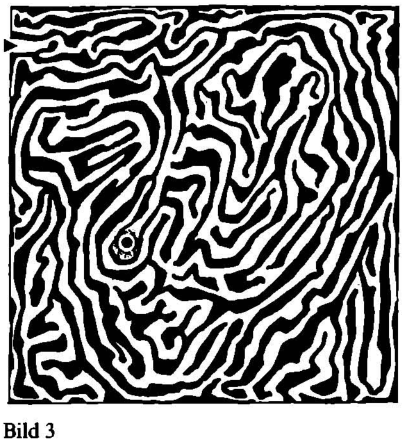
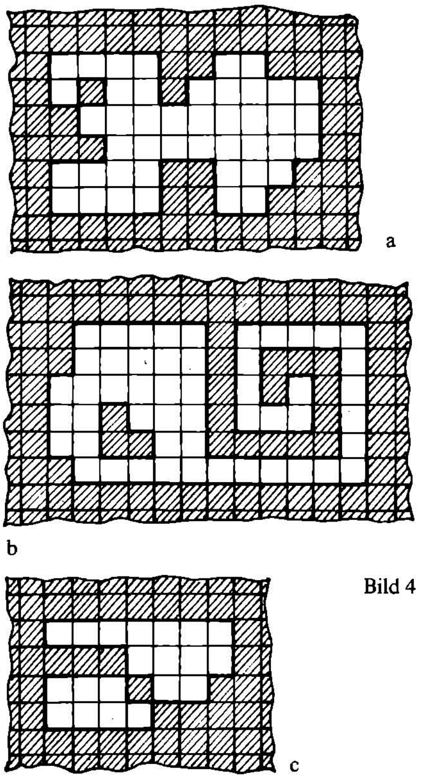


Bild 3

c) für den Irrgarten von *Altjeßnitz* (Bild 2).
Mit ihrer Hilfe berechne man, auf wie vielen Wanderrouten man vom Inneren (Punkt I) des jeweiligen Labyrinths zum Ausgang gelangen kann, wenn bei keiner Wanderung ein Platz des Labyrinths mehrfach betreten werden darf.

3. Das Absuchen von Mustern

Es sollen nun neuere Untersuchungen zur Labyrinth-Problematik behandelt werden. Dabei wollen wir uns der besseren Anschaulichkeit wegen auf die Betrachtung zweidimensionaler Labyrinthe beschränken. Alle Plätze und Gänge eines solchen Labyrinths müssen also in einer Ebene liegen. Außerdem ist nun mit der zweiten Präzisierungsmöglichkeit für den Labyrinth-Begriff zu arbeiten; das sind die (zweidimensionalen) Muster.
Unter einem Muster verstehen wir eine zusammenhängende endliche Zellenmenge der schachbrettartig zerlegten Ebene. Der Zusammenhang bedeutet hierbei, daß je zwei beliebige Zellen des Musters stets durch einen Weg miteinander verbunden sind, der nur Zellen des Musters durchläuft und bei dem nur Schritte in den vier Himmelsrichtungen (Norden: ↑, Westen: ←, Süden: ↓, Osten: →) erlaubt sind. Die Bilder 4a und b zeigen zwei einfache Muster (die Mengen der nicht schraffierten Zellen), während die Zellenmenge in Bild 4c nicht zusammenhängend ist.



a

b

Bild 4

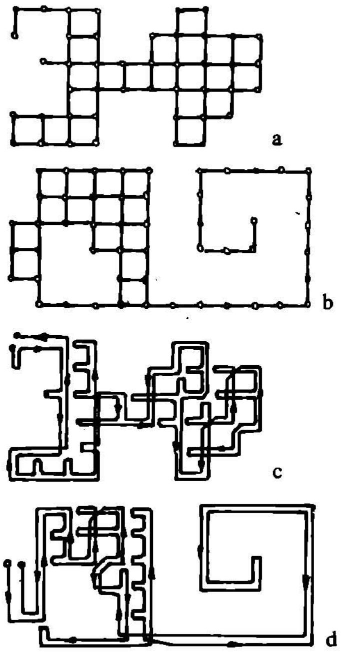
c

Jedem Muster kann man in natürlicher Weise einen ebenen zusammenhängenden endlichen Graphen zuordnen, indem man die Mittelpunkte der Zellen des Musters als Knotenpunkte nimmt und die Knoten zweier benachbarter Zellen des Musters überall durch eine Kante verbindet. Die Kanten entsprechen also den zwischen zwei Zellen des Musters liegenden Wänden, die man sich durchlässig (etwa mit Türen versehen) vorzustellen hat.

Die Bilder 5a und b zeigen die in dieser Weise aus den Mustern des Bildes 4 erhaltenen Graphen.
Vereinfachend gesagt, kann man Muster als spezielle endliche Graphen auffassen. Daher sind alle Lösungen des Absuchproblems für

endliche Graphen unmittelbar auf Muster übertragbar. Die für die Verfahren von Trémaux und Tarry nötigen Markierungen der Wände innerhalb eines Musters können dabei durch geeignete Beschriftungen der Zellen vorgenommen werden. Der Leser möge sich das an Beispielen verdeutlichen.

Bild 5



Die Bilder 5c und d zeigen die in den Mustern des Bildes 4 erhaltenen Tarry-Wege, wobei wir bei mehreren erlaubten Bewegungsmöglichkeiten immer die erste in der Reihenfolge ↑, ←, ↓, → gewählt haben.

Interessant ist nun, daß man eine recht umfassende Klasse von Mustern schon in sehr einfacher Weise absuchen kann, ohne irgendeine Markierung vorzunehmen. Das entsprechende Programm, das wir jetzt betrachten wollen, wurde 1971 von dem westdeutschen Mathematiker C. Döpp veröffentlicht.

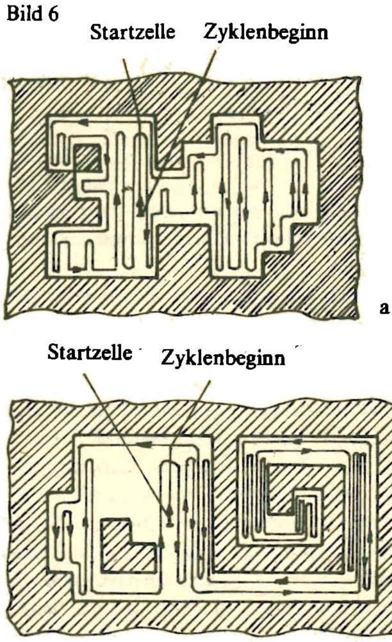
Verfahren von Döpp:

1. Gehe von der Startzelle aus nach Norden, bis der Rand des Musters erreicht ist! Handle weiter nach 2.!
2. Verfolge den Rand des Musters, so daß dieser dabei rechter Hand liegt! Immer wenn eine Zelle erreicht ist, deren südliche Nachbarzelle nicht zum Muster gehört, so handle gemäß 3.!
3. Gehe nach Norden, soweit das möglich ist, und kehre dann nach Süden zurück bis zu der Zelle, deren südlicher Nachbar nicht zum Muster gehört! Handle weiter nach 2.!

Um dieses Verfahren zu realisieren, muß von jeder Zelle des Musters aus zu sehen sein, welche ihrer vier Nachbarzellen noch zum Muster gehören. Damit ist das Verfolgen des Randes gemäß 2. und der immer wieder dazwischen durchzuführende Gang nach Norden und zurück gemäß 3. ausführbar. Allerdings gibt es bei diesem Verfahren keine Stopbedingung, es bricht nie ab. Bei Anwendungen ist dieser Mangel jedoch oft nicht wesentlich. Sucht man das Muster (Labyrinth) etwa nach einem gewissen Merkmal ab (Minotaurus oder Ausgang), so kann das Verfahren ja bei Auffinden einer Zelle mit diesem Merkmal gewissermaßen künstlich gestoppt werden.

Das Bild 6 zeigt Beispiele von Wegen, die nach dem Döppschen Verfahren erhalten wurden. Sie führen alle sehr schnell zu einem Zyklus, der unendlich oft wiederholt wird.

Bild 6



b

Das Bild 6b zeigt, daß nicht alle Muster auf diese Weise abgesucht werden können. Man kann sich aber überlegen, daß das Verfahren für alle einfach zusammenhängenden Muster erfolgreich ist.

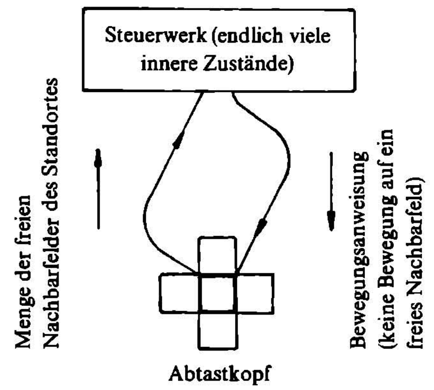
Als einfach zusammenhängend bezeichnet man die Muster ohne Löcher bzw. ohne Binnenseen, wenn man sich einmal die Zellen des Musters als Landteile und die nicht zum Muster gehörenden Zellen als Wasser (Meer bzw. Seen) vorstellt. Dabei sind aber nur solche Gewässer als Binnenseen zu betrachten, die nicht mit dem das Muster umgebenden Ozean durch eine Wasserstraße verbunden sind. Wasserstraßen können hierbei auch „über Eck“ verlaufen, d. h. Wasser-Zellen mit gemeinsamem Eckpunkt gelten als benachbart. In diesem Sinne ist das Muster in Bild 4a einfach zusammenhängend, das in Bild 4b aber nicht.

4. Endliche Automaten in Mustern

Es ist bisher in unseren Überlegungen noch ziemlich offengelassen worden, durch wen die angegebenen Absuchverfahren zu realisieren sind, d. h., wer die Labyrinthe absuchen soll. Der Leser mag sich Theseus in dieser Rolle vorgestellt haben oder einen beliebigen in ein Labyrinth geratenen Menschen. Beim Ausprobieren der Verfahren ist das Absuchen eines Graphen oder Musters natürlich mit dem Bleistift auf dem Papier durchzuführen. Die modernen Labyrinth-Untersuchungen im Rahmen der mathematischen Kybernetik betreffen die Frage, inwieweit Graphen oder Muster durch Automaten der verschiedensten Typen abgesucht werden können. Wir werden im folgenden bei der Erläuterung dieser Problematik vorwiegend Muster als Labyrinthe zugrunde legen.

Den einfachsten zum Absuchen von Mustern geeigneten Typ von Automaten stellen die endlichen Automaten dar. In Bild 7 ist ein solcher endlicher Automat skizziert.

Bild 7



Er besteht aus einem in dem Muster beweglichen Abtastkopf, der mit einem Steuerwerk verbunden ist. Dieses System arbeitet schrittweise. Zu jedem Zeitpunkt steht der Abtastkopf auf einer Zelle des vorgegebenen Musters, und er informiert das Steuerwerk darüber, welche der Nachbarzellen des Standortes noch zum Muster gehören. In Abhängigkeit von dieser Information über das Muster und in Abhängigkeit von dem inneren Zustand des Steuerwerks erfolgt nun eine Anweisung über die durchzuführende Bewegung des Abtastkopfes. Es wird entweder angewiesen, daß er auf seinem Standort verharrt oder daß er sich um eine Zelle in Richtung Norden, Westen, Süden bzw. Osten in dem Muster weiterbewegt. Gleichzeitig kann sich auch der Zustand des Steuerwerks ändern, was ebenfalls durch die vom Abtastkopf gegebene Information über das Muster und durch den (alten) Zustand des Steuerwerks eindeutig festgelegt ist. Nach Ausführung der Bewegung des Abtastkopfes und der Zustandsänderung ist ein Arbeitsschritt des Automaten realisiert, und das Ganze beginnt von vorn. Wesentlich ist noch, daß das Steuerwerk nur endlich viele mögliche innere Zustände haben darf, daher die Bezeichnung „endlicher Automat“.

Uns interessiert hier nicht die technische Realisierung eines solchen Systems. Mathematisch ist ein endlicher Automat eindeutig festgelegt durch die Angabe der endlichen Menge aller möglichen inneren Zustände, die

z	↑, z	←, y	↑, z	↑, z	↑, z	0, y	↑, z	↑, z
y	←, y	←, y	0, y	←, y	←, y	0, y	0, y	←, y

z	←, y	←, y	↑, z	0, y	↑, z	←, y	0, y	0, y
y	←, y	←, y	0, y	0, y	0, y	←, y	0, y	0, y

Bild 8

Festlegung eines solchen Zustandes als Anfangszustand (hiermit startet der Automat stets) und durch seine Überführungstabelle. Letztere gibt an, mit welcher Zustandsänderung und Bewegungsanweisung das Steuerwerk in den einzelnen Zuständen auf die im Labyrinth (in der Nachbarschaft des Abtastkopfes) vorliegende Situation reagiert.

Als Beispiel betrachten wir den endlichen Automaten mit der Zustandsmenge $Z = \{z, y\}$, dem Anfangszustand z und der in Bild 8 angegebenen Überführungstabelle. Dabei geben die Pfeile ↑, ←, ↓, → die Bewegungsanweisungen in die entsprechenden Richtungen an, 0 bedeutet Verharren auf dem Standort.

Der damit vollständig beschriebene endliche Automat geht stets von seinem Startpunkt aus (im Zustand z) nach Norden, solange das möglich ist. Gehört die nördliche Nachbarzelle seines Standortes nicht mehr zum Muster, so nimmt er den Zustand y an und geht nun nach Westen, solange das möglich ist. Erreicht er dabei eine Zelle, deren westlicher Nachbar nicht zum Muster gehört, so verändert er seinen Zustand y und Standort nicht mehr, d. h., er stoppt. Bild 9 zeigt zwei mögliche Wege des Automaten in einem Muster.

Durch einen solchen endlichen Automaten kann man das Döppsche Absuchverfahren realisieren. Allerdings benötigt man hierfür mehr als zwei innere Zustände des Steuerwerks, und es ist schon nicht ganz einfach, eine entsprechende Überführungstabelle aufzustellen.

Jedenfalls ist es auf diese Weise prinzipiell möglich, einen endlichen Automaten zu konstruieren, der alle einfach zusammenhängenden Muster absucht. Es stellt sich sofort die Frage, ob es einen endlichen Automaten gibt, der jedes Muster absucht, wenn er auf einer beliebigen Zelle startet. Schon Döpp vermutete 1971, daß die Antwort „nein" lautet, konnte das aber nicht beweisen. Der Beweis dieser Behauptung wurde 1975 von L. Budach (Professor an der Humboldt-Universität zu Berlin und ordentliches Mitglied der Akademie der Wissenschaften der DDR) erbracht. Er zeigte, daß sich zu jedem endlichen Automaten ein Muster konstruieren läßt, in dem es eine Zelle gibt, so daß der Automat bei Start auf dieser Zelle das Muster nicht vollständig absucht. Das Absuchproblem für Muster ist also nicht durch einen endlichen Automaten (d. h. einen Automaten mit endlichem Gedächtnis, der keine Hilfsmarkierungen in den Mustern setzen darf) lösbar. Das ist das bisher tiefliegendste und am schwierigsten zu beweisende Resultat zur Labyrinth-Problematik.

Die entsprechende Frage für endliche Graphen ist übrigens wesentlich leichter zu beantworten. Dazu ist der Begriff des endlichen Automaten zunächst natürlich etwas abzuwandeln; der Abtastkopf hat sich dann ja in einem Graphen zu bewegen. Schon 1971 zeigte H. Müller (Professor an der Universität Erlangen-Nürnberg), daß es keinen solchen endlichen Automaten gibt, der jeden ebenen zusammenhängenden endlichen Graphen absucht.

(Fortsetzung im nächsten Heft)

Der Autor: A. Hemmerling

- geboren 1948 in Grambow bei Schwerin
- Besuch der OS und EOS in Lübz, Bezirk Schwerin;
- Teilnahme an Kreis- und Bezirksmathematikolympiaden;
- während des EOS-Besuchs auch Facharbeiterausbildung als Landmaschinen- und Traktorenschlosser
- 1966 bis 1973 Mathematikstudium an der *Ernst-Moritz-Arndt*-Universität Greifswald; 1970 bis 1973 Forschungsstudent in der Fachrichtung Mathematische Kybernetik und Rechentechnik
- 1974 Promotion A (Dr. rer. nat.)
- 1980 Erteilung der Facultas docendi (Lehrbefähigung an Hochschulen) für das Fachgebiet Mathematische Kybernetik
- 1981 Promotion B (Dr. sc. nat.)
- arbeitet als wissenschaftlicher Oberassistent an der Sektion Mathematik der *Ernst-Moritz-Arndt*-Universität Greifswald
- Forschungsgebiet: Automaten- und Algorithmentheorie, insbesondere Fragen des Leistungsvermögens spezieller Automatentypen; bisher etwa 20 wissenschaftliche Arbeiten
- verheiratet, Vater von zwei Kindern (Tochter und Sohn).

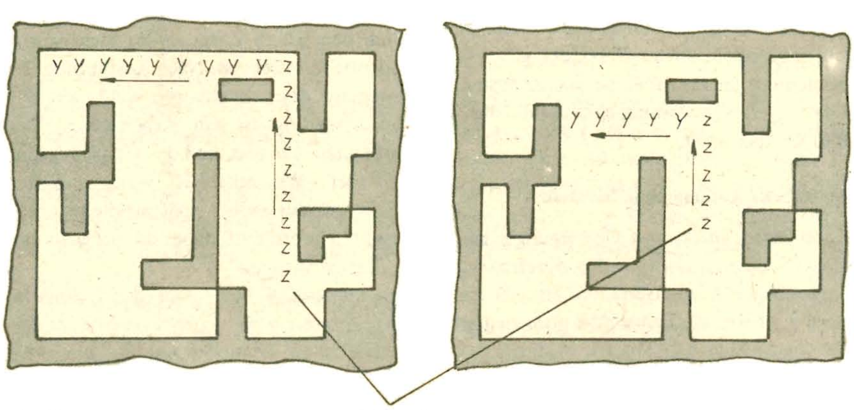
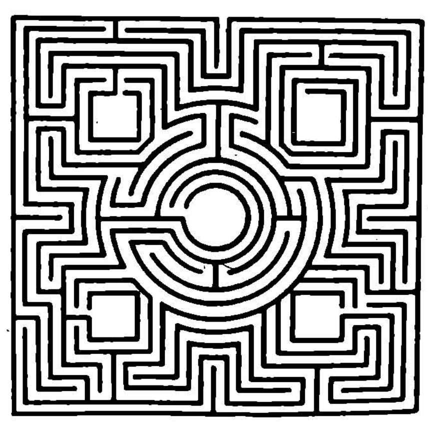


Bild 9



Eine Aufgabe – drei Lösungsvarianten

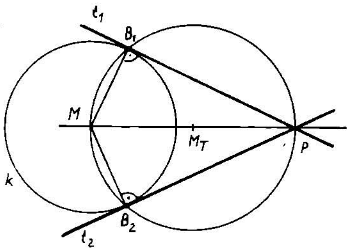
Gedanken zum Titelblatt

Die Aufgabe, von einem Punkt P außerhalb eines Kreises k die Tangenten t_1 und t_2 an diesen Kreis zu legen, ist geometrisch auf verschiedene Weise lösbar.
Auf der Titelseite ist eine Kombination aus drei verschiedenen Varianten zur Lösung dieser Aufgabe dargestellt.

Variante 1

Die hier als Variante 1 bezeichnete Lösung ist bereits seit dem 16. Jahrhundert bekannt und auch im Lehrbuch der Mathematik, Klasse 7, beschrieben.
Konstruktion:

Bild 1

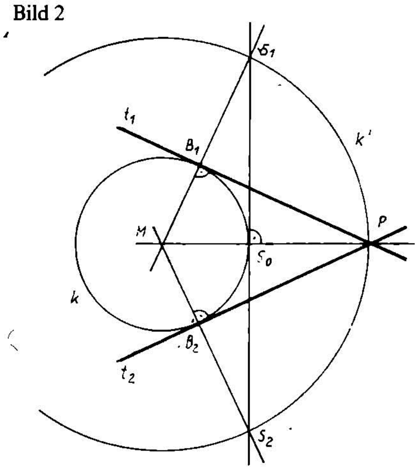


Man verbindet P und M, halbiert die Strecke $\overline{PM}$ und findet so den Punkt M_T, um den man einen Kreis mit $r=\frac{1}{2}\cdot\overline{PM}$ schlägt. Die Schnittpunkte der beiden Kreise sind die gesuchten Berührungspunkte B_1 und B_2 der Tangenten t_1 und t_2.
Beweis: Der Satz des Thales besagt, daß alle Peripheriewinkel über dem Durchmesser eines Kreises rechte Winkel sind. Die Winkel $\sphericalangle MB_1P$ und $\sphericalangle MB_2P$ sind Peripheriewinkel über dem Durchmesser $\overline{PM}$, d. h., sie betragen 90°. Deshalb sind B_1 und B_2 die gesuchten Berührungspunkte der Tangenten t_1 und t_2.

Variante 2

Diese Variante beinhaltet eine Lösung, die etwa 2000 Jahre älter ist als die Lösung nach Variante 1.
Konstruktion:
Man zeichnet die Strecke $\overline{MP}$ und errichtet im Schnittpunkt S_0 dieser Strecke mit dem Kreis k die Senkrechte auf $\overline{MP}$. Danach schlägt man um M einen Kreis k' mit dem Radius $\overline{MP}$. Er schneidet die Senkrechte auf $\overline{MP}$ in den Punkten S_1 und S_2. Wenn man S_1 und S_2 mit M verbindet, erhält man die Schnittpunkte B_1 und B_2 mit dem Kreis k.

Bild 2



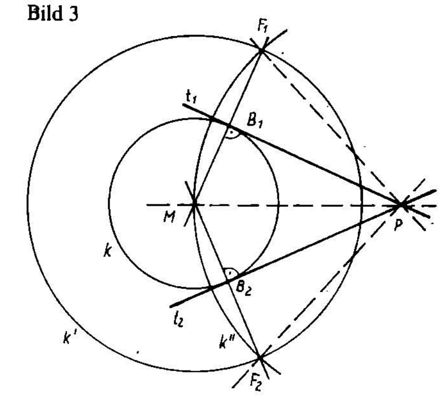
Das sind die gesuchten Berührungspunkte der Tangenten t_1 und t_2.
Beweis: Die Dreiecke $\triangle MS_0S_1$ und $\triangle MS_0S_2$ sind kongruent, da sie in zwei Seiten ($\overline{MS_0}=\overline{MS_0}$ und $\overline{MS_1}=\overline{MS_2}$) und dem Winkel, der der größeren von ihnen gegenüberliegt, übereinstimmen ($\sphericalangle MS_0S_1=\sphericalangle MS_0S_2=90°$). Daraus folgt $\sphericalangle S_0MS_1=\sphericalangle S_0MS_2$.
Wegen $\overline{MB_1}=\overline{MB_2}$, $\overline{MP}=\overline{MP}$ und $\sphericalangle PMB_1=\sphericalangle PMB_2$ gilt $\triangle MPB_1\cong\triangle MPB_2$. Wegen $\overline{MS_0}=\overline{MB_1}=\overline{MB_2}$ und $\overline{MP}=\overline{MS_1}=\overline{MS_2}$ sind alle vier Dreiecke $\triangle MS_0S_1$, $\triangle MS_0S_2$, $\triangle MPB_1$, $\triangle MPB_2$ einander kongruent. Deshalb haben auch die Winkel $\sphericalangle MB_1P$ und $\sphericalangle MB_2P$ die Größe 90°. Somit sind B_1 und B_2 die gesuchten Berührungspunkte der von P an den Kreis k gelegten Tangenten t_1 und t_2.

Variante 3

Variante 3 ist eine Lösung, die erst im 19. Jahrhundert gefunden wurde.

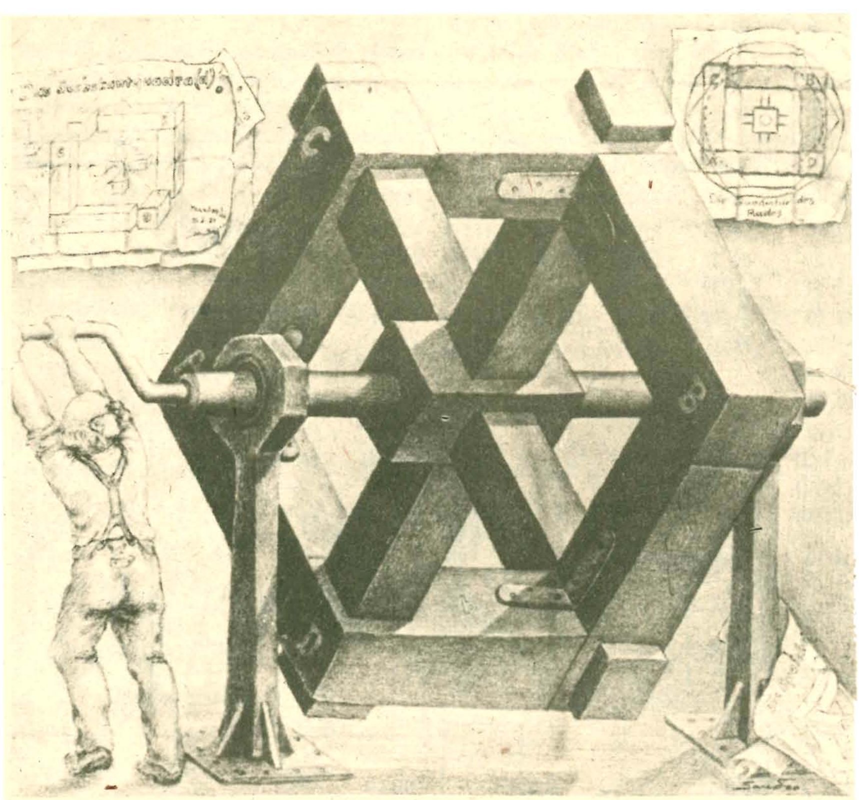
Konstruktion:

Bild 3



Man zeichnet zu dem gegebenen Kreis k einen konzentrischen Kreis k' mit dem Radius $R=2r$ und einen Kreis k'' um P mit dem Radius $\overline{PM}$. Die Schnittpunkte F_1 und F_2 der Kreise k' und k'' verbindet man mit M und erhält so die Punkte B_1 und B_2 auf dem in der Aufgabenstellung gegebenen Kreis k. Das sind die gesuchten Berührungspunkte der Tangenten t_1 und t_2.
Beweis: Die Strecken $\overline{MF_1}$ und $\overline{MF_2}$ sind Sehnen des Kreises k'', deren Länge $2r$ beträgt. Nach Konstruktion gilt $\overline{MB_1}=\overline{B_1F_1}=\overline{MB_2}=\overline{B_2F_2}=r$. Wegen $\overline{PM}=\overline{PF_1}=\overline{PF_2}$ sind die Dreiecke $\triangle MPF_1$ und $\triangle MPF_2$ gleichschenklig. Die Strecke $\overline{PB_1}$ bzw. $\overline{PB_2}$ ist somit Seitenhalbierende der Basis $\overline{MF_1}$ bzw. $\overline{MF_2}$. Folglich sind die Strecken $\overline{PB_1}$ und $\overline{PB_2}$ auch Höhen, d. h., die Winkel $\sphericalangle MB_1P$ und $\sphericalangle MB_2P$ haben die Größe 90°. Deshalb sind B_1 und B_2 die gesuchten Berührungspunkte der Tangenten t_1 und t_2.

M. Wilde



Interessante Koordinaten

▲1▲ Stelle folgende Zahlenpaare in dem Koordinatensystem Bild 1a (bzw. Bild 1b) dar!
Verbinde jeweils die Punkte im Koordinatensystem, deren Zahlenpaare untereinander stehen!

a)

(8;0)	(7;14)	(1;4)	(3;0)
(8;13)	(7;5)	(1;2)	(3;2)
(10;13)	(0;5)	(2;2)	(7;2)
(10;14)	(0;4)	(2;0)	(7;0)

Bild 1a

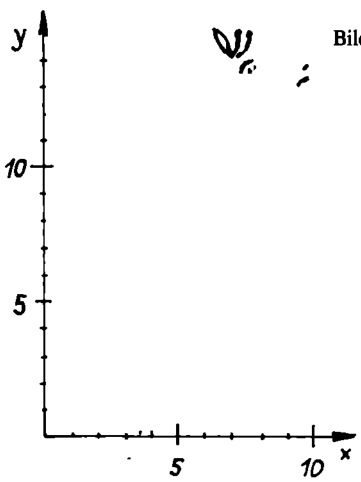
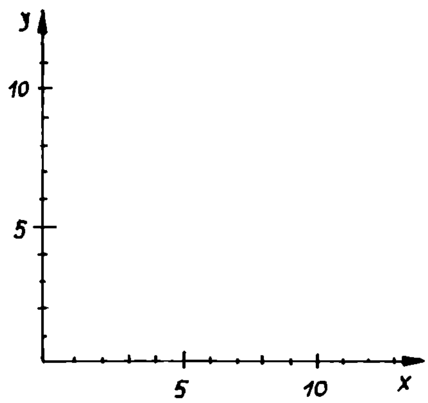


Bild 1b



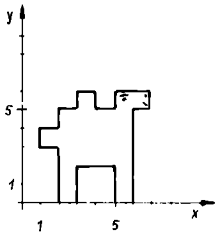
b)

(2;0)	(3;1)	(5;1)	(8;0)	(11;1)
(2;2)	(3;2)	(5;2)	(8;2)	(11;2)
(3;3)	(4;2)	(6;2)	(9;2)	(12;2)
(7;3)	(4;1)	(6;1)	(9;0)	(12;1)
(7;7)	(3;1)	(5;1)		(11;1)
(8;10)				
(9;7)				
(9;3)				
(13;3)				
(14;2)				
(14;0)				

▲2▲ a) Vervollständige!

(2;0)	(;)	(3;0)
(2;3)	(;)	(;)
(;)	(;)	(;)
(;)	(;)	(;)
(;)	(;)	
(;)	(;)	
(;)	(;)	
(;)	(6;0)	

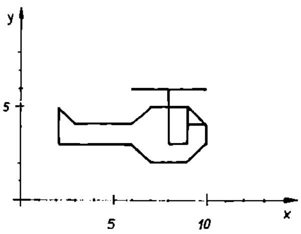
Bild 2a



b) Vervollständige!

(6;3)	(;)	(6;6)	(8;6)	(;)
(2;3)	(;)	(10;6)	(8;)	(;)
(;)	(;)		(;)	
(;)	(;)		(;)	
(;)	(;3)			
(;)	(6;3)			

Bild 2b



▲3▲ Vervollständige!

(5;0)	(;)	(;)
(1;5)	(;)	(;)
(;)	(8;5)	(10;7)
(2;6)	(8;4)	(10;2)
(2;5)	(7;4)	(5;2)
(;)	(;)	
(5;8)	(9;6)	
(11;8)	(9;3)	

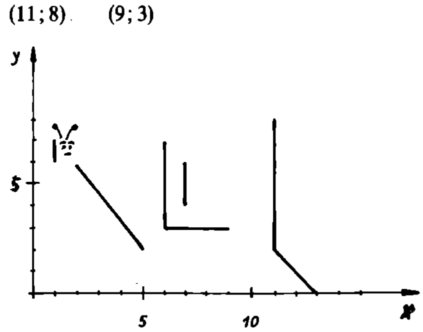
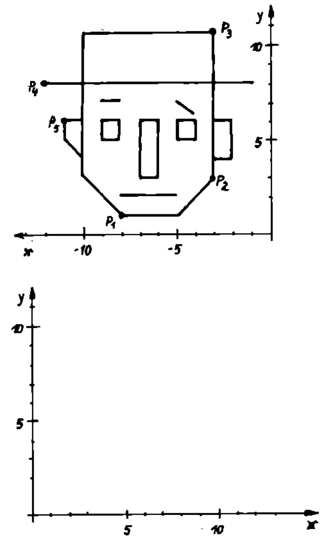


Bild 3

▲4▲ Spiegele an der y-Achse!
Gib die Koordinaten der Punkte P_1', P_2', P_3', P_4' und P_5' an!

Bild 4



▲5▲ Spiegele an der y-Achse!
Gib die Koordinaten der Punkte A', B', C', D', E' an!

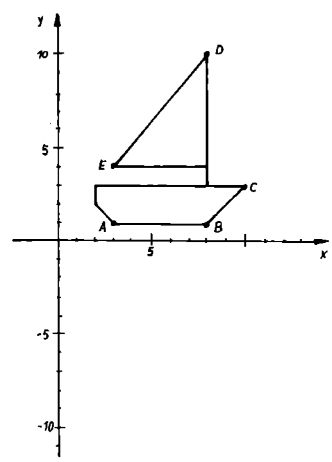
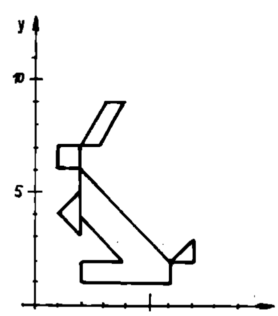


Bild 5

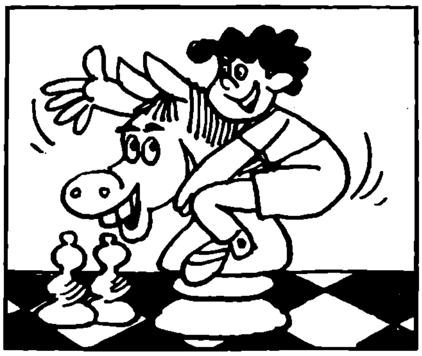
▲6▲ a) Gib die kleinsten Werte für a, b so an, daß für alle y-Werte der Figur (vgl. Bild 6) gilt $a \leqq y \leqq b$!
b) Gib die kleinsten Werte für c, d an, so daß für alle y-Werte der Figur (vgl. Bild 6) gilt $c \leqq x \leqq d$!

Bild 6



L. Flade/J. Lehmann

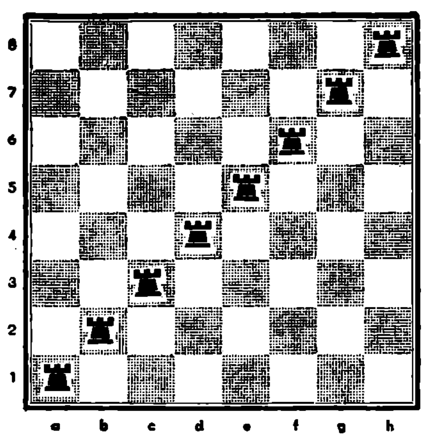
(nach Unterlagen aus dem ungarischen Unterhaltungsbuch Vigyazat! Csak gyerekeknek, Eva Gall)



Ein Beweis von Leonhard Euler

Der Turm ist im Schachspiel eine mächtige Kampfeinheit. Er ist stärker als Läufer oder Springer. Sein Wert entspricht etwa fünf Bauern. Der Turm ist eine weitreichende und wendige Figur. Dabei zeichnet er sich durch eine interessante Besonderheit aus: Die Anzahl der Felder, die er auf dem leeren Schachbrett beherrscht, hängt nicht von seinem Standort ab. Ob der Turm in der Ecke oder in einem der Mittelfelder des Brettes steht, immer sind es vierzehn Felder.

Wie kann man auf dem leeren Schachbrett Türme so aufstellen, daß keine zwei von ihnen einander schlagen können, das heißt, daß je zwei Türme in verschiedenen Reihen und verschiedenen Linien stehen? Es ist einleuchtend, daß man acht Türme auf diese Weise auf dem Schachbrett postieren kann (beispielsweise so, daß man die Türme auf irgendeine Diagonale des Brettes setzt – siehe Diagramm), mehr jedoch als acht nicht.



Euler bewies 1741 eine Aufgabe, die ihm sein Freund Goldbach gestellt hatte. Hier ist zunächst Eulers Antwort auf Goldbachs Brief mit dem gestellten Problem:

„Ew. (Euer) Hochedelgeb. theorema, daß $(3m+2)n^2+3$ kein Quadrat sein könne, ist sehr artig, und ich kann die Richtigkeit desselben auf folgende Art dartun:

Entweder ist n durch 3 divisibel (teilbar) oder nicht, im ersten Fall ist n^2 divisibel durch 9, und bekommt die Expression $(3m+2)n^2+3$ eine solche Form $9p+3$, welche kein Quadrat sein kann, wie bekannt. Im anderen Fall, wann n nicht durch 3 divisibel ist, so ist n^2 eine solche Zahl $3p+1$, und $(3m+2)n^2+3$ bekommt diese Form $9mp+3m+6p+5$, das ist $3q+2$, von welcher Form gleichfalls bekannt ist, daß eine solche niemals ein Quadrat sein kann.“

Wir erläutern den Beweis, wozu wir $(3m+2)n^2+3$ gleich N setzen (m, n natürliche Zahlen). Euler unterscheidet zwei Fälle:

a) 3 teilt n,

b) 3 teilt n nicht.

Eine einfache Folgerung aus der Zerlegung einer Zahl in ihre Primfaktoren ist folgende Aussage: Wenn Q eine Quadratzahl ist, dann enthält Q alle Primteiler in gerader Potenz.

Im ersten Fall hat, da sich n^2 durch 9 teilen lassen muß, N die Form $N=9p+3$ mit gewissem p (p natürliche Zahl). Da 3 natürlich 9 teilt, folgt hieraus, daß 3 auch ein Teiler von N ist. Wenn wir aber annehmen, daß N eine Quadratzahl ist, dann muß neben 3 auch $3^2=9$ ein Teiler von N sein. Weil weiterhin 9 offensichtlich in $9p$ aufgeht, muß 9 auch die Differenz $N-9p$ teilen. Diese ist aber gleich 3, also nicht durch 9 teilbar. Mithin muß unsere Annahme falsch sein, N könne eine Quadratzahl sein.

Im zweiten Fall hat n die Form $3r+1$ oder $3r+2$ ($r=0, 1, 2, \ldots$). Damit ist n^2 von der Gestalt $9r^2+6r+1$ oder $9r^2+12r+4$ bzw. $3(3r^2+2r)+1$ oder $3(3r^2+4r+1)+1$ ist, also für beide Möglichkeiten mit einem gewissen p von der Art $3p+1$. Damit ergibt sich für N die Form $3q+2$ mit einer bestimmten natürlichen Zahl q. Um zu zeigen, daß $N=3q+2$ keine Quadratzahl sein kann, untersuchen wir zunächst allgemein, welche Reste eine Quadratzahl beim Teilen durch 3 lassen kann. Jede natürliche Zahl z kann mit einer gewissen Zahl r in der Form $z=3r+s$ dargestellt werden, wobei für s die Zahlen 0, 1 und 2 in Frage kommen. Damit ergibt sich $z^2=9r^2+6rs+s^2=3(3r^2+2rs)+s^2$ mit s^2 gleich 0, 1 oder 4. Der Ausdruck $3(r^2+2rs)$ ist durch 3 teilbar, so daß sich das Verhalten des Restes aus dem Charakter von s^2 bestimmt. Die Reste, die s^2 beim Teilen durch 3 läßt, sind 0 und 1, wie man leicht nachprüft. Mithin kann eine Quadratzahl beim Teilen durch 3 nur den Rest 0 (teilbar) oder 1 lassen. Eine Quadratzahl der Form $N=3q+2$ würde aber beim Teilen durch 3 als Rest 2 liefern, was nicht möglich ist. Also kann auch im zweiten Fall N keine Quadratzahl sein. Mithin ist es ausgeschlossen, daß N Quadratzahl sein kann.

Mitgeteilt von Dr. R. Thiele, S. Hirzel-Verlag, Leipzig

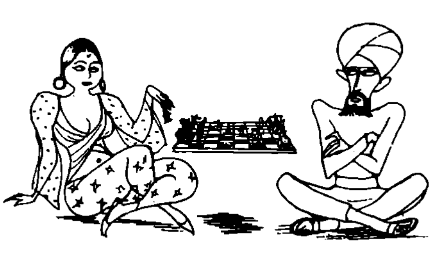
Wir fragen, auf wieviel verschiedene Weisen man acht Türme so auf dem leeren Schachbrett anordnen kann, daß keine zwei von ihnen einander schlagen können? Dabei ist zu bemerken, daß wir die Anordnungen der Türme auf a1, b2, c3, d4, e5, f6, g7, h8 (unser Beispiel) und auf a8, b7, c6, d5, e4, f3, g2, h1, das heißt, solche Anordnungen, die sich auseinander durch Drehung des Brettes beziehungsweise durch Spiegelung gewinnen lassen, als verschieden ansehen.

H. Rüdiger

Schachspielereien

Hans Betcke, aus: DLZ 22/83

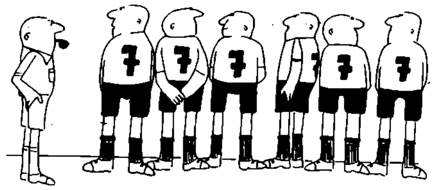
„Damen-Indisch“



„Spanische Eröffnung“

„Zugzwang“

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 11. Januar 1984

„Das ist unsere Glückszahl!"

Mathematik

Ma 5 ▪2350 Ein Obstgarten, der die Form eines Rechtecks hat, ist halb so breit wie lang. Er wird von einem 210 m langen Zaun umgeben. Welchen Flächeninhalt besitzt dieser Obstgarten?

Schülerin Janett Stynka, Rostock

Ma 5 ▪2351 Zu einer Schulklasse gehören genau 36 Schüler, die zusammen 703 Buntstifte besitzen. Ernst hat zwei Buntstifte mehr als Christine. Dieter hat einen Buntstift weniger als Bernd, Frank elf weniger als Dieter, Bernd zwei weniger als Anja, Christine fünf mehr als Bernd. Anja besitzt genau 19 Buntstifte. Wie viele Buntstifte besitzt jeder der nicht genannten Schüler, wenn alle diese Schüler gleich viele Buntstifte haben?

Schülerin Ina Stöckigt, Weißenschirmbach

Ma 5 ▪2352 Von Berlin-Treptow aus machen Fahrgastschiffe der *Weißen Flotte* Seerundfahrten mit Ausflüglern und Touristen. An einer solchen Fahrt nahmen insgesamt 120 Fahrgäste teil, und zwar viermal soviel Kinder wie Frauen. Die Anzahl der mitfahrenden Frauen und Kinder war insgesamt siebenmal so groß wie die der Männer. Wieviel Kinder, Frauen bzw. Männer nahmen an dieser Seerundfahrt teil? *Sch.*

Ma 5 ▪2353 In dem Schema

```
*1* · 3*2
-----------
  *3*
  3*2*
   *2*5
-----------
  ****3*
```

sind die Sternchen so durch Grundziffern zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Multiplikationsaufgabe entsteht. *Sch.*

Ma 5 ▪2354 Von zwei leeren Gefäßen weiß man: Das größere dieser beiden Gefäße ist doppelt so schwer wie das kleinere. Füllt man in das kleinere Gefäß 400 g Zucker und in das größere 200 g, so ist das gefüllte kleinere Gefäß um 50 g schwerer als das gefüllte größere Gefäß. Wie schwer sind die beiden leeren Gefäße?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ▪2355 Zeichne ein Quadrat! Lege auf jeder Quadratseite den Mittelpunkt fest! Verbinde diese vier Mittelpunkte zu einem zweiten Quadrat! Du zählst nun vier Dreiecke und zwei Quadrate. Lege auf jeder Seite dieses zweiten Quadrates wieder die Mittelpunkte fest, verbinde auch diese Punkte zu einem dritten Quadrat!

a) Wieviel Dreiecke hast du bis jetzt erhalten?

b) Jemand bildet auf diese Weise immer wieder neue Quadrate.

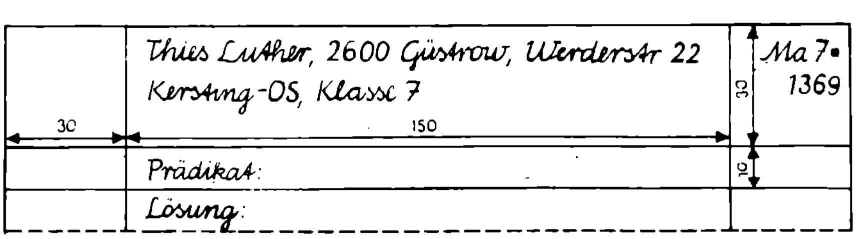
Zum Schluß zählt er genau 176 Dreiecke. Wieviel Quadrate zählt er?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ▪2356 Ina, nach dem Lebensalter ihrer drei Geschwister befragt, antwortet: „Multipliziert man die Zahlen, die das Lebensalter meiner drei Geschwister angeben, miteinander, so erhält man 24. Addiert man diese drei Zahlen, so erhält man eine Primzahl." Wie alt sind Inas Geschwister (in ganzen Zahlen)?

Schülerin Yvonne Lucke, Halle-Neustadt

Ma 6 ▪2357 In einem Saal, in dem ein Kongreß abgehalten werden sollte, waren mehr als 90, aber weniger als 100 Stühle aufgestellt. Es erschienen aber mehr Kongreßteilnehmer als Stühle vorhanden waren. Die Anzahl der Stühle wurde deshalb verdoppelt. Nun blieb der zwölfte Teil der Anzahl der vorhandenen Stühle unbesetzt. Wie viele Teilnehmer waren zum Kongreß angereist?



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst"

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1983/84 läuft von Heft 5/1983 bis Heft 2/1984. Zwischen dem 1. und 10. September 1984 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/83 bis 2/84 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/84 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/83 bis 2/84) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1983/84 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

Ma 6 ▪2358 Eine Klasse schrieb im Fach Mathematik eine Leistungskontrolle. Genau eine Aufgabe wurde von dem achten Teil, genau zwei Aufgaben von dem dritten Teil, genau vier Aufgaben von dem sechsten Teil der Anzahl der teilnehmenden Schüler nicht gelöst. Wieviel Schüler lösten genau eine Aufgabe richtig, wenn nur ein Schüler der Klasse die Arbeit fehlerlos abgab und der Klasse weniger als 30 Schüler angehören?

Schülerin Barbara Schütze, Weißenfels

Ma 6 ▪2359 Otto geht für seine Mutter einkaufen. Den fünften Teil des von der Mutter erhaltenen Geldes gibt er für Fleischwaren aus. Für den zehnten Teil des erhaltenen Geldes kauft er Obst. Für Backwaren gibt Otto doppelt soviel Geld aus wie für Fleischwaren. Für Blumen gibt er genausoviel Geld aus wie für Obst. Vom erhaltenen Gelde hatte Otto danach noch 10 M übrig. Wieviel Mark hatte Otto von seiner Mutter zum Einkaufen erhalten?

Schülerin Anja Rosenbusch, Meiningen

Ma 6 ▪2360 Welche natürliche Zahl läßt bei Division durch 11 den Rest 1, durch 12 den Rest 2, durch 13 den Rest 3 und durch 14 den Rest 4?

Schüler Thomas Kuschel, Prenzlau

Ma 7 ▪2361 Welche natürlichen Zahlen a, b, c mit $0<a<b<c$ erfüllen folgende Bedingungen?
(1) Die zweite dieser drei Zahlen ist gleich dem arithmetischen Mittel aus den beiden anderen Zahlen.
(2) Die fünffache Summe aus diesen drei Zahlen ist gleich dem Produkt aus diesen Zahlen.

Sch.

Ma 7 ▪2362 Gegeben sind die Punkte A, B, C und D, die alle auf ein und derselben Geraden g liegen. Außerdem gilt:
Die Länge der Strecke $\overline{AB}$ beträgt 3 cm, die der Strecke $\overline{AC}$ 4 cm, und die Strecke $\overline{AD}$ ist 6 cm lang. Die Punkte B und C liegen zwischen den Punkten A und D.
Es sind alle Punkte P_i (P_1, P_2, P_3, ...) zu konstruieren, die sämtlich folgenden Bedingungen genügen:
(1) Die Punkte P_i sind gleich weit von A und C oder von B und D entfernt.
(2) Die Punkte P_i haben von C einen Abstand von 3 cm.

Fr.

Ma 7 ▪2363 Ein Rechteck habe die Seitenlängen a und b. Der Flächeninhalt eines Quadrates, das den gleichen Umfang wie das Rechteck hat, ist durch die Längen a und b auszudrücken!

Sch.

Ma 7 ▪2364 Addiert man zu einer dreistelligen natürlichen Zahl, deren erste und letzte Ziffer übereinstimmen, ihre Quersumme, so erhält man als Ergebnis 500. Um welche Zahl handelt es sich?

Sch.

Ma 8 ▪2365 Es ist zu beweisen, daß der Term $n^2(5+n^2)$ für jede natürliche Zahl n eine gerade Zahl ist.

Daniel Küpper, Wirtzfeld, Belgien

Ma 8 ▪2366 Es sind alle geordneten Paare $(a; b)$ rationaler Zahlen a und b mit folgenden Bedingungen zu ermitteln:
a) Die Summe der Quadrate der Zahlen a und b ergibt 176,5.
b) Die Differenz der Quadrate der Zahlen a und b ergibt 136.

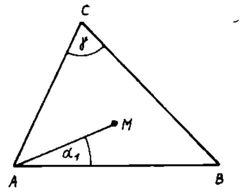
Gerald Wünsch, Berlin

Ma 8 ▪2367 Wie viele verschiedene sechsstellige natürliche Zahlen kann man mit den Ziffern 1, 3, 4, 5, 7, 9 bilden? (Es muß in jeder Zahl jede der sechs Ziffern genau einmal vorkommen!) Wie viele dieser Zahlen sind durch 3, wie viele durch 9 teilbar? Das Ergebnis ist zu beweisen.

Dr. G. Hesse, Radebeul

Ma 8 ▪2368 In dem abgebildeten Dreieck ABC wurde der Eckpunkt A mit dem Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Dreieckseiten verbunden. Es ist die Gültigkeit der Beziehung $\alpha_1 = 90° - \gamma$ zu beweisen.

Schülerin Claudia Popien, Magdeburg



Ma 9 ▪2369 Die Zahl 315 soll in die Differenz zweier Quadratzahlen zerlegt werden. Es sind alle Möglichkeiten anzugeben.

Schüler Jörg Uhlig, Crimmitschau

Ma 9 ▪2370 Das Produkt von vier aufeinanderfolgenden Primzahlen p_1, p_2, p_3, p_4 ist in eine Summe von zwei Primzahlen p_5, p_6 zerlegbar, die beide in jeder achtstelligen Zahl der Form $\overline{abcdabcd}$ (dekadische Darstellung) ohne Rest aufgehen. Es sind die Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_6$ zu ermitteln.

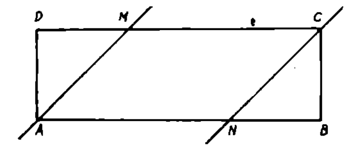
Gerald Wünsch, Berlin

Ma 9 ▪2371 Zur Jugendweihe erwartet Ilka 24 Gäste. Beim Eintreffen begrüßen sie sich untereinander und auch Ilka mit einem Händedruck. Unter den Gästen sind drei Ehepaare ohne Kinder, eine vier- und eine fünfköpfige Familie, die sich natürlich bei der Ankunft nicht jeweils untereinander begrüßen. Wieviel Händedrücke sind gegeben worden, nachdem alle Gäste eingetroffen waren?

Schülerin Claudia Paschwitz, Räckelwitz

Ma 9 ▪2372 In dem abgebildeten Rechteck $ABCD$ halbiert die Gerade durch A den Winkel $\sphericalangle DAB$. Die Gerade durch C ist parallel zur Geraden durch A. Wie lang und wie breit ist das Rechteck $ABCD$, wenn die Strecke $\overline{AM}$ 2,5 cm lang ist und der Abstand beider Geraden 3 cm beträgt?

Skizze, nicht maßstäblich!



Mathematiklehrer K. Gorki, Zittau

Ma 10/12 ▪2373 In welchem Zahlensystem stellt die Gleichung

$$42+242=16^2$$

eine wahre Aussage dar?

Schüler B. Leifheit, Heiligenstadt

Ma 10/12 ▪2374 Die Zahl 115 ist derart in positive Summanden zu zerlegen, daß jeder folgende Summand um 6 größer ist als der vorhergehende.

Sch.

Ma 10/12 ▪2375 Gegeben seien eine Kugel K und ein Würfel W mit gleich großen Volumina.
(1) Es ist zu zeigen, daß das Verhältnis der Oberflächeninhalte beider räumlicher Figuren unabhängig von der Radiuslänge der Kugel und der Kantenlänge des Würfels ist.
(2) Es ist die Maßzahl x für dieses Verhältnis zu berechnen, wenn $A_K : A_W = 1 : x$ gilt.

Klaus Behnke, Schwerin

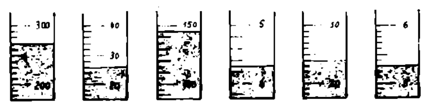
Ma 10/12 ▪2376 Zwei einander berührenden Kugeln von 8 cm bzw. 10 cm Durchmesser soll ein gerader Kreiskegel umbeschrieben werden. Es sind die Länge des Grundkreisradius und die Länge der Höhe dieses Kegels zu ermitteln.

Schüler J. Uhlig, Crimmitschau

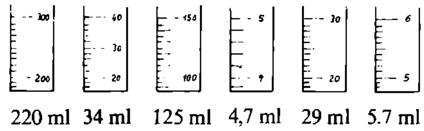
Physik

Ph 6 ▪141 In den folgenden Abbildungen siehst du die Skalen verschiedener Meßzylinder (Angaben in ml).

a)
Lies die angegebenen Flüssigkeitsstände ab!



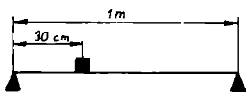
b)
Trage die Flüssigkeitsstände in entsprechende Skalen ein!



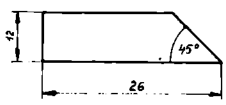
220 ml 34 ml 125 ml 4,7 ml 29 ml 5.7 ml

Ph 7 ▪142 Ein 1 m langer Balken (Gewichtskraft 20 N) liegt auf 2 Schneiden (siehe Bild). Nun wird ein Massestück (Gewichtskraft 30 N) 30 cm von der linken Schneide entfernt auf den Balken gestellt. Berechne die Belastungen auf jede der beiden Schneiden!

Henry Mittel, Schleusingen



Ph 8 ▪ 143 Ein Maschinenbaubetrieb benötigt für den Bahnversand Holzkeile, um die auf offenen Güterwagen verladenen Erzeugnisse gegen Verrutschen zu sichern. Die Keile haben die skizzierte Seitenansicht und quadratischen Querschnitt.



Maße in cm

Wieviel Kubikmeter Holz für Keile braucht der Betrieb mindestens pro Jahr, wenn im Jahr 5000 Erzeugnisse veranschlagt und pro Erzeugnis vier Keile benötigt werden?

Ing. A. Körner, Leipzig

Ph 9 ▪ 144 Ein Junge wirft von einem Turm einen Stein senkrecht in die Höhe. Der Turm ist 15 m hoch. Die Abwurfgeschwindigkeit beträgt 10 m/s. In welcher Zeit erreicht der Stein die Erdoberfläche?

Verena Wegner, Hoyerswerda

Ph 10/12 ▪ 145 Ein Blitz entlädt sich schätzungsweise mit einer Stromstärke von 20000 Ampère. Die dabei umgesetzte Energie wird mit 5000 kWh und die Elektrizitätsmenge mit 20 Coulomb berechnet. Es ist die auftretende Spannung und die Dauer des Blitzes gefragt.

Olaf Parchmann, Blankenheim

Chemie

Ch 7 ▪ 113 In einem Chemiebetrieb sollen täglich 1500 kg Schwefel produziert werden. Als Rohstoff wird Schwefelkies, der pro Kilogramm 360 g Schwefel enthält, eingesetzt. Wieviel Tonnen Schwefelkies müssen dem Betrieb
a) täglich,
b) monatlich (1 Monat = 30 Tage)
zur Verfügung stehen?

Ch 8 ▪ 114 Für die Bestimmung des Eisengehaltes einer Legierung wurden folgende Arbeitsschritte durchgeführt:
1. 0,732 g der Legierung wurden gelöst und das Eisen als Hydroxid gefällt.
2. Nach dem Glühen ergab der Niederschlag 0,23 g Eisen(III)oxid.
Berechne: a) die Menge Eisen in der Einwaage in Gramm, b) den Prozentgehalt an Eisen in der Legierung!

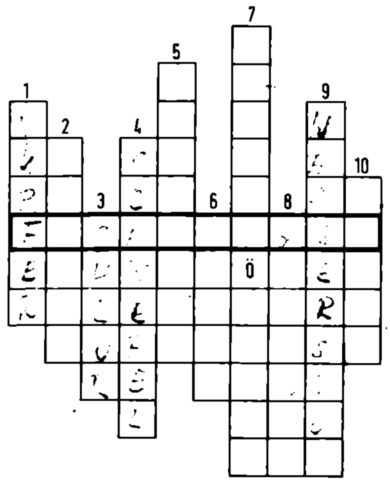
Ch 9 ▪ 115 Zur Herstellung von 212,3 kg Phosphor verwendet man 0,98 t sekundäres Kalziumphosphat $[Ca_2(HPO_4)_2]$. Wieviel Prozent Verunreinigungen enthält das Kalziumphosphat? (Sekundäres Kalziumphosphat zerfällt in folgende Oxide: Kalziumoxid, Phosphorpentoxid, Wasserstoffoxid.)

Ch 10/12 ▪ 116 Die Analyse eines Stadtgases ergab folgende Werte:
45% Wasserstoff
30% Methan
4,5% Äthylen
4% Kohlenmonoxid
2,5% Kohlendioxid
14% Stickstoff
Berechne
a) die zur Verbrennung von 1 m^3 Gas erforderliche Luftmenge (als Abrechnungsbasis dient Luft mit 21% Sauerstoff),
b) die prozentuale Zusammensetzung der Rauchgase bei 120 °C!

Stau auf der Straße

Die auf der rechten Seite des Bildes gezeigten fünf Bilddetails sind auf dem großen Bild wiederzufinden, in der gleichen Stellung. Mit Hilfe der Koordinaten kannst du ihren genauen Platz bestimmen.

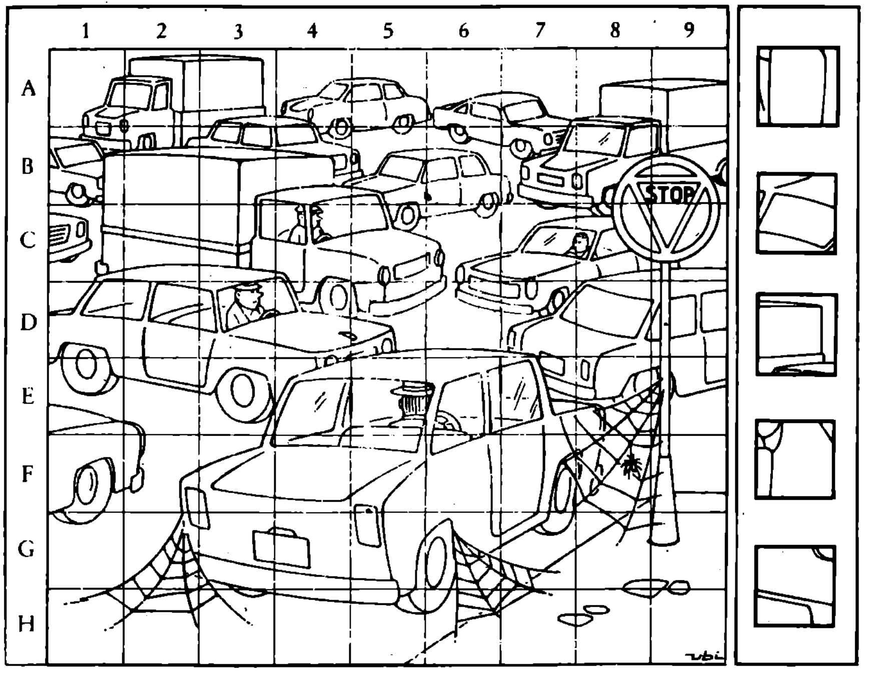
Löse folgendes Rätsel!



Bei richtiger Lösung des Rätsels ergibt sich im umrandeten Feld der Name einer Funktion im Chemieunterricht.

1. Name eines Metalls mit dem Symbol Cu
2. Name eines Geräts zum Entnehmen eines Feststoffes
3. Name eines Gases mit dem Symbol Cl
4. Name eines gelben Nichtmetalls
5. Gerät zur Trennung einer Aufschlämmung
6. Name eines Metalls, welches im Weltmaßstab die größte Verwendung findet
7. Gerät zur Brandbekämpfung
8. Wie wird in der chemischen Zeichensprache das Kurzzeichen für eine chemische Verbindung genannt?
9. Name eines Gases, das durch die Spanprobe nachgewiesen werden kann
10. Wichtiger Rohstoff unserer chemischen Industrie, der aus der Sowjetunion importiert wird und zu einem großen Teil in Schwedt verarbeitet wird.

H. Rochlitzer, aus: Chemie in der Schule 11/81



ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Wir verbreiten Begeisterung für unsere Wissenschaft

Gespräch mit
Dozent Dr. sc. nat. Josef Nietzsch
Vorsitzender der Mathematischen Schülergesellschaft der Humboldt-Universität zu Berlin (MSG)

Frage: *Sie sind maßgeblich daran beteiligt, mathematische Talente systematisch und zielgerichtet zu fördern. Wie geschieht das?*

Josef Nietzsch: Die Talenteförderung mathematischer Begabungen erfolgt hauptsächlich im außerunterrichtlichen Bereich, auf dem Hintergrund eines differenzierten Förderungssystems in allen Bezirken der DDR. Sie geht von den Schularbeitsgemeinschaften für Mathematik aus, denen Kreisklubs Junger Mathematiker folgen. Die höchste Form dieser Förderung geschieht in Schülergesellschaften, Schülerakademien und Bezirksklubs *Junger Mathematiker*.

In Berlin wird die höchste Form der Förderung durch die Mathematische Schülergesellschaft bei der Sektion Mathematik der Humboldt-Universität garantiert. In diesen Schülergesellschaften usw. erhalten 12 bis 15 Schüler – zusammengefaßt in Zirkeln – in der Regel wöchentlich einen zweistündigen Unterricht nach einheitlichem Lehrplan. Bei uns beginnt die Ausbildung im 6. Schuljahr und endet mit der 12. Klasse. Die Delegierung der Schüler erfolgt durch die Abteilung Volksbildung.

Neben diesen Zirkeln wurden von unserer Sektion Spezialfördermaßnahmen realisiert. Zum ersten werden Schüler in Zirkeln von sechs bis acht Teilnehmern gezielt zur erfolgreichen Teilnahme an den Olympiadewettstreiten *Junger Mathematiker* befähigt. Weiterhin gibt es Zirkel mit einer speziellen mathematischen Problematik (z. B. Zahlentheorie, Analysis) gleicher Stärke, und schließlich fördern wir Schüler durch Einzelpatenschaften, die Hochschullehrer für zwei bis drei Schüler über mehrere Jahre übernehmen. Dabei arbeiten sich Schüler in ein Spezialgebiet ein, z. B. die Differentialgeometrie mit der Anwendung auf einige Fragen der Relativitätstheorie.

Mit all diesen Aktivitäten hilft unsere Sektion, qualifizierten Nachwuchs für alle Facharbeiterberufe technischer Richtung zu gewinnen: für die gezielte Ausbildung von Lehrern, auch solche für Hochschulen und den Akademiebereich sowie für alle Unteroffiziers- und Offiziersberufe in unseren bewaffneten Organen zur Stärkung unseres Staates und Erhöhung seiner Verteidigungsbereitschaft.

Frage: *Wie dringend benötigen wir zur Forcierung des wissenschaftlich-technischen Fortschritts in unserer Volkswirtschaft mathematische Talente?*

Josef Nietzsch: Ohne Polemik kann gesagt werden, daß die Mathematisierung aller Wissenschaften ein objektiver Vorgang unseres Zeitalters ist. Somit ist die Anwendung mathematischer Methoden, speziell in allen wissenschaftlich-technischen Einrichtungen, dringend gefordert. Das heißt, in diesen Bereichen werden besonders selbständig und kreativ arbeitende Mathematiker dringend benötigt. Ein Beispiel: In der Elektronik und im Roboterbau geht es um den Entwurf und die Fertigung außerordentlich komplexer technischer Gebilde, deren Arbeitsweise in irgendeinem näher zu bestimmenden Sinne optimal sein soll. Hier ist ohne gezielte mathematische Untersuchungen, Testrechnungen, Entwurfsplanungen und ähnliches kaum eine erfolgreiche Verwirklichung der Zielstellung möglich: Allerdings verlangt die Bearbeitung solcher Fragestellungen vom Mathematiker ein besonders breites und vielseitiges Wissen und den Willen, sich auch teilweise – und wenn nötig sogar umfangreich – in ein nichtmathematisches Gebiet einzuarbeiten, um qualifizierte und effektive Lösungen ansteuern zu können. Darüber hinaus verlangt all das von einem Mathematiker solide Kenntnis auf dem Gebiet der Rechentechnik, da es sich immer um konstruktive Fragestellungen handelt, die ohne Verwendung solcher technischen Hilfsmittel wie EDV-Anlagen nicht mehr zu lösen sind. Daß Rechentechnik Schülern großen Spaß bereiten kann und sie hier bereits selbst kleine Probleme lösen können, zeigen die in unserer Sektion jährlich durchgeführten und überlegten Programmierkurse für ESER-Anlagen für Klassenstufe sieben bis acht.

Aus: DLZ, Berlin

Aus dem Kreisklub Junger Mathematiker Berlin-Köpenick berichtet

Der Kreisklub *Junger Mathematiker* des Stadtbezirks Berlin-Köpenick feiert in diesem Jahr sein 10jähriges Bestehen. Einmal wöchentlich treffen sich für zwei Stunden zur Zeit 124 Schüler der Klassenstufen 5 bis 9 in acht verschiedenen Zirkeln. Es werden Olympiadeaufgaben gelöst und mathematische Probleme nach einem Rahmenprogramm behandelt.

Auf Grund der guten Unterstützung durch das *Institut für Nachrichtentechnik* als Trägerbetrieb für unseren Klub konnte in den Winterferien das 10. Spezialistenlager, diesmal in Görlitz, durchgeführt werden. Die Klausur am letzten Tag bewies, daß alle Schüler die in den Vormittagsstunden behandelten Stoffgebiete gut durchdacht hatten.

5. Klasse: Gleichungslehre
6. Klasse: Einführung in die Graphentheorie
7. Klasse: Lösung diophantischer Gleichungen
8./9. Klasse: „Kramersche Regel“

Neben zahlreicher sportlicher Betätigung bildeten Denkspiele jeder Art einen Höhepunkt der Freizeitbeschäftigung. Traditionsgemäß wurden wieder Skat-, Schach- und Tischtennisturniere durchgeführt. Stadtbesichtigungen, Theaterbesuche und eine Tagesfahrt gehören schon seit Jahren zum festen Programm unseres Lagers. Den 60 Teilnehmern hat es wieder so gut gefallen, daß es auch im nächsten Jahr genügend Bewerber geben wird.

Weitere Höhepunkte in unserem Klubleben bilden eine Tagesfahrt am Ende des Schuljahres, eine Klausur als Bewährungssituation für die Zirkelteilnehmer im Juni und jeweils eine Auszeichnungsveranstaltung mit Vorträgen o. ä. im Dezember und am letzten Zirkelnachmittag im Schuljahr.

Diese gemeinsamen Veranstaltungen fördern das Kollektiv des Kreisklubs, so daß es uns auch in diesem Jahr gelungen ist, ehemalige Mitglieder als Zirkelleiter für das Spezialistenlager zu gewinnen.

M. Krause

Aufgabe

Von den Schülern einer Klasse gehören genau 12 der AG Fotoamateure, genau 14 Schüler der AG Mathematik und genau 15 Schüler der AG Musikfreunde an. Genau ein Schüler ist in allen drei Arbeitsgemeinschaften tätig. Genau 4 Schüler gehören sowohl der AG Fotoamateure als auch der AG Mathematik an. Genau 3 Schüler gehören sowohl der AG Fotoamateure als auch der AG Musikfreunde an. Genau 5 Schüler gehören sowohl der AG Musikfreunde als auch der AG Mathematik an. Wie viele Schüler gehören zu dieser Klasse, wenn jeder Schüler wenigstens eine dieser Arbeitsgemeinschaften besucht? (Lösung siehe Seite 118)

Prof. Dr. Franz von Krbek zu seinem 85. Geburtstag

Prof. Dr. *Franz von Krbek* gehört seit über 40 Jahren zum Lehrkörper der Universität Greifswald und hat seit dem Tage der Wiedereröffnung unserer Universität nach der Befreiung vom Faschismus am 15. Februar 1946 seine ganze Kraft für den Wiederaufbau der mathematischen Lehre und Forschung in selbstloser Weise eingesetzt. In Ungarn geboren, studierte er in Budapest Mathematik und Physik. Als Student im 1. Semester war er Sieger der dort schon damals stattfindenden Mathematikolympiaden auf nationaler Ebene. Nach dem Doktorexamen mit *summa cum laude* 1921 ging er mit einem Forschungsstipendium für mehrere Jahre nach Göttingen und Paris und lernte dort bedeutende Mathematiker persönlich kennen. Dann arbeitete er als Wissenschaftler und Publizist in mehreren Städten, u. a. auch in Berlin. 1942 kam er nach der völligen Zerstörung seiner Wohnung in Berlin durch den Luftkrieg als akademischer Lehrer nach Greifswald an die Universität.

Internationales Ansehen hat er sich vor allem als Verfasser mathematischer und physikalischer Bücher erworben. Seine erste Monographie von 1936 „Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik“ ist von *Max Planck* empfohlen worden. In hoher Auflage erschien 1941 seine *Erlebte Physik*, sie wurde in mehrere Sprachen übersetzt. In Greifswald schrieb er eine umfassende Mathematikgeschichte mit dem Titel *Eingefangenes Unendlich* und ein drittes physikalisches Buch *Grundzüge der Mechanik, Lehren von Newton, Einstein und Schrödinger;* auch hier erschienen mehrere Auflagen. Einen breiten Leserkreis haben sich seine populärwissenschaftlichen Bücher mathematischen Inhalts im Teubner-Verlag erworben mit den Titeln: *Geometrische Plaudereien, Über Zahlen und Überzahlen* und *Formen und Formeln.* Sie sind alle in mehreren Auflagen erschienen und von dem bekannten amerikanischen Mathematiker *Edwin Hewitt* ins Englische übertragen worden. Sowjetische Rezensionen heben vor allem den hohen mathematischen Sachgehalt dieser Bücher hervor.

Am 12. März dieses Jahres beging Professor *von Krbek* als einer der Senioren unter den Mathematikern der DDR seinen 85. Geburtstag, dazu unseren herzlichen Glückwunsch!

Nach wie vor verfolgt er mit Interesse die Entwicklung der Mathematik und hat Spaß an mathematischen Knobeleien, z. B. stellte er umfassende Überlegungen zu Eulers Königsberger Brückenproblem an (siehe *alpha* 2/83).

Abschließend wollen wir die *Berliner Brückenaufgabe* für die Leser stellen: Die 3 Gebiete: Ufer A zum Alex, Insel B und Ufer C zum Brandenburger Tor sind durch 11 Brükken verbunden. Kann man nun von A, B oder C aus zum Brandenburger Tor gehen, ohne eine Brücke auszulassen oder mehrmals zu benutzen? Wie muß der Beweis erfolgen? (Vgl. ND vom 24. 12. 82.)

J. Buhrow/E. Griepentrog

Biographisches

Geboren am 12. März 1898 in Komarom, Ungarn

1916 Studium der Mathematik und Physik in Budapest
1921 Doktorexamen mit *summa cum laude* in Budapest
1929 wissenschaftliche Tätigkeit in Berlin, Bonn und anderen Städten
1942 (am 25. August) Lehrauftrag in Greifswald, Universität
1945 Habilitation, Dozent
1946 Dozent nach der Wiedereröffnung der Universität
1948 Professor mit Lehrauftrag
1953 Professor mit Lehrstuhl
1963 Emeritierung
1967 letzte Vorlesung

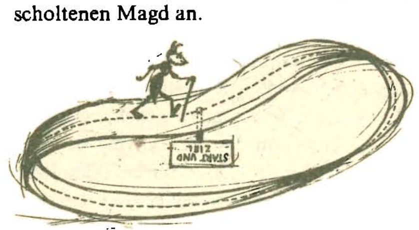
Leseprobe aus dem Buch von Franz von Krbek

Geometrische Plaudereien

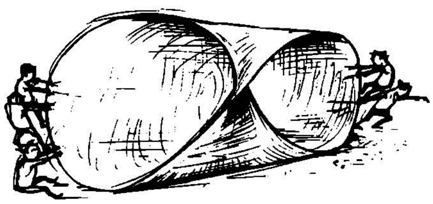
Flächen ohne zweite Seite

Vom bekannten Leipziger Mathematiker Möbius wurde vor etwa einem Jahrhundert folgende Anekdote erzählt: Frau Professor hatte eine „unzuverlässige“ Magd, die lauter Unfug trieb. Das „unnütze“ Ding sollte diesmal runde Strumpfbänder nähen. Und was tat sie? Das eine Band hat sie halb umgedreht, ehe sie die Enden zusammennähte! Frau Professor wurde recht ärgerlich und nahm sich vor, mit ihrem Mann zu sprechen, ob sie diese unverbesserliche „Person“ doch nicht lieber entlassen sollte. Um daran erinnert zu werden, legte sie das mißratene Strumpfband auf den Tisch. Als dann ihr hochgelehrter Mann endlich nach Hause kam und das corpus delicti in die Hand bekam, erwachte in ihm beim ungewohnten Anblick plötzlich der Forscher. Er wendete das Band hin und her und entdeckte auf diese Weise die erste Fläche, die nur eine Seite besitzt. Nach einer anderen Version soll das Mißgeschick der Frau Professor selber zugestoßen sein. So hätte es sich zwar zutragen können, aber in Wirklichkeit verlief die Sache ganz anders. Möbius, ein Schüler von Gauß, verdankt seine paradoxe Entdeckung keineswegs dem Zufall, sondern systematischer Beschäftigung mit Flächen. Und das 68jährig!

Man denkt sich Flächen aus Dreiecken zusammengefügt. Es kommt darauf an, wie sich die Dreiecke zusammenfügen. Man entdeckte erstaunliche Möglichkeiten, an die früher niemand gedacht hätte. Der vorhin erdichtete Fall gehört dazu. Wir möchten ihn jedoch nicht von der hohen Warte des Möbius aus betrachten, sondern mehr anschaulich, und knüpfen daher an die Fehlleistung der gescholtenen Magd an.

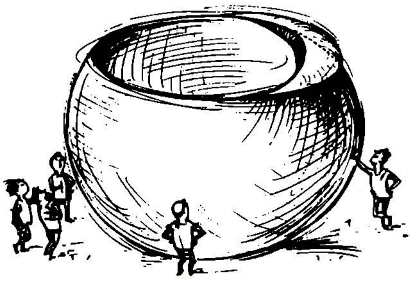


Einem langen Papierstreifen erteile man eine halbe Drehung, ehe die Enden zusammengeklebt werden. Setzt man unsere Freundin Ameise irgendwo darauf, nur nicht auf den Rand, und verpflichtet sie loszuwandern, aber so, daß sie ihre Entfernung von der Berandung immer wahrt, dann wird sie und wir mit ihr, eine Überraschung erleben. Wenn die Ameise auf diese Weise einen Weg von der ursprünglichen Länge des Papierstreifens zurückgelegt hat, befindet sie sich ihrem Ausgangsort gegenüber als Antipode! Erst wenn sie noch einmal soweit wandert, gelangt sie an ihren Ausgangsort zurück, eine Folge davon, daß der Papierstreifen eine Halbdrehung erhielt, ehe die Enden zusammengeklebt wurden. Die Fläche besitzt zwar örtlich zwei Seiten, aber man kann von der einen zur anderen Seite gelangen, ohne die Berandung zu passieren. Das ist damit gemeint, daß diese Fläche nur eine Seite hat.

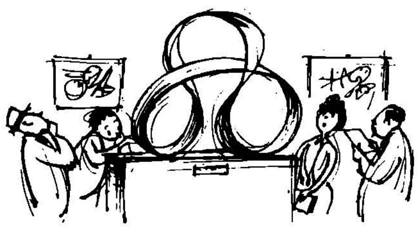


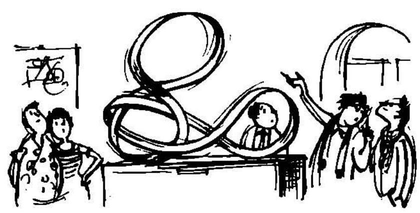
Aber auch die beiden Ränder des Bandes bereiten eine Überraschung. Sie bilden zusammen eine einzige geschlossene Linie! Stellt man das Band an Stelle von Papier aus sehr dehnbarem Gummi her, dann läßt es sich so verzerren, daß aus der Berandung ein Kreis wird. Das Band selbst bildet dann eine Tasche, die nur eine Seite besitzt, weil sich so etwas durch Verzerren nicht ändert. Eine solche Tasche sei der Beachtung von Zauberkünstlern empfohlen.

Schneidet man das Band von Möbius der Länge nach auf, dann zerfällt es nicht etwa in zwei Ringe, wie man es erwarten würde, sondern bleibt ein einziger Streifen, der allerdings zwei Seiten besitzt. Den Rand bilden diesmal

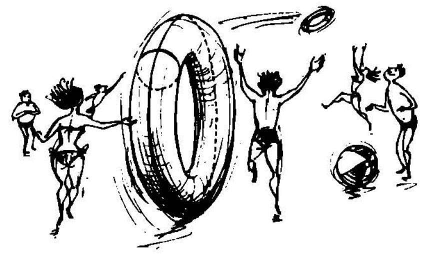


zwei geschlossene Linien, die miteinander verschlungen sind. Erneutes Zerschneiden ergibt zwei ineinander verschlungene Ringe. Führt man das alles an einem Modell zum erstenmal durch, dann wird man immer wieder überrascht; ein Zeichen, daß unsere Anschauung versagt, weil sie an derlei Gebilden nicht geschult wurde.

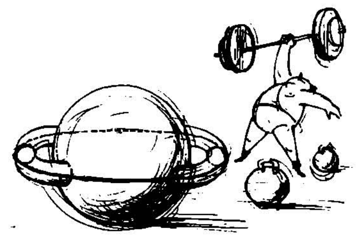




Vor die Frage gestellt, ob es möglich sei, auf einer Fläche einen Kreis so zu zeichnen, daß zwei Punkte der Fläche, die nicht auf dem Kreis liegen, stets Enden einer Linie bilden können, die den Kreis nicht trifft, würde man, sich auf eine voreilige Anschauung verlassend, die Frage zunächst wohl verneinen. Man würde unwillkürlich daran denken, daß man aus dem Kreisinneren nicht hinaus kann, ohne den Kreis zu passieren. Es gibt jedoch Flächen mit Kreisen, bei denen man nicht von einem Kreisinneren auf der Fläche reden kann. Solch eine Fläche, den Torus, kennt jeder, der mit einem Gummiring jemals Fangen gespielt hat. Denkt man sich den Kreis durch einen senkrechten Schnitt erzeugt, so leuchtet es ein, daß unsere vorhin gestellte Frage zu bejahen ist.

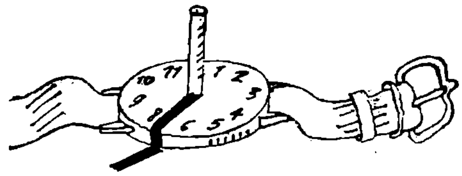


Auch noch einen zweiten Kreis senkrecht zum ersten könnte man auf dem Torus anbringen, ohne den Zusammenhang, um den es geht, zu zerstören, aber keinen weiteren Kreis. Daher müssen wir fragen, ob es überhaupt Flächen gibt, auf denen man drei oder gar gleich *n* Kreise ziehen kann, ohne den Zusammenhang zu zerstören. Die Frage läßt sich sofort bejahen. Man hat nur Henkel an einer Kugel anzubringen. Wird an jedem Henkel ein Kreis ähnlich wie vorhin auf dem Torus und zwischen diesen senkrecht dazu ein weiterer Kreis markiert, der die beiden ersten Kreise verbindet, so bleibt der Zusammenhang gewahrt: Noch immer kann man zwei Punkte durch eine Linie verbinden, die auf der Fläche verläuft und die Kreise nicht trifft.



Festkolloquium für Prof. Dr. Franz von Krbek anläßlich seines 85. Geburtstages an der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald. Unser Foto: Festansprache des Rektors, Prof. Dr. Birnbaum. Im Vordergrund links vorn der Jubilar.

In freien Stunden · alpha-heiter



Messeneuheit
... in der Uhrenindustrie

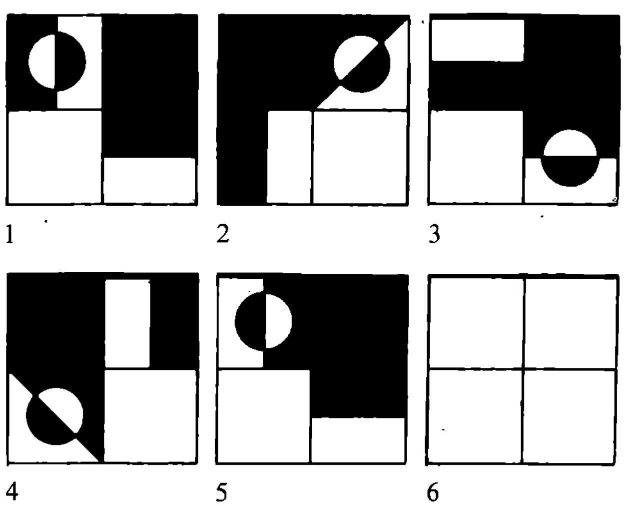
Wer hat weißes Haar?

Frau Braun, Frau Schwarz und Frau Weiß haben braunes, schwarzes und weißes Haar, aber keine von ihnen hat eine Haarfarbe, die ihrem Namen entspricht.
Wenn Frau Weiß kein schwarzes Haar hat, welche Farbe hat dann das Haar von Frau Schwarz?

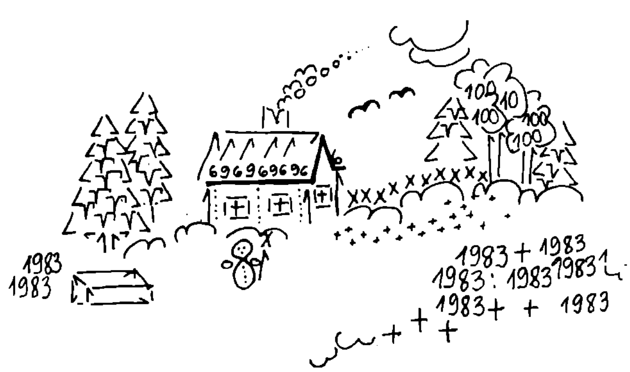
Math. pie, London

Logisch

Welche Figur gehört folgerichtig in das 6. Fach?



Humor aus Finnland



Zeichnung von Schülerin Minna Vuoristo, Turku, aus: Functio, Helsinki

Dialoge

- „Kannst du mir sagen, wie viele Leute bei uns im Büro arbeiten?"
– „Ich schätze, so an die 60 Prozent!"

- „Wie geht es übrigens dem Patienten, der sich für ein Genie hält?" – „Ach, es geht ihm schon besser. Er hält sich jetzt für ein Talent."

- Lehrerin: „Furchtbar, wieder alles falsch gerechnet! Hast du denn keine Schwester oder einen Bruder, der dir ein bißchen helfen könnte?" – „Nein, aber Mutti hat mir gesagt, nächste Woche kriegen wir einen."

- Aus Gabrowo: Bai kam nach Sofia und stieg mit einem großen Bündel in die Straßenbahn ein.
„Drei Stotinki für die Fahrkarte und sechs Stotinki für das Bündel", sagte der Schaffner. Da öffnete Bai Georgi das Bündel und sagte: „Pentscho komm heraus! Als Bündel kostest du mehr!"

Bruchlandung

Uwe setzt seine Mitschüler in Erstaunen, wie „elegant" er den Bruch $\frac{26}{65}$ „kürzt".
Er sagt: „Streicht bei diesem Bruch einfach die beiden Ziffern 6 weg, und ihr habt schon das Ergebnis, also

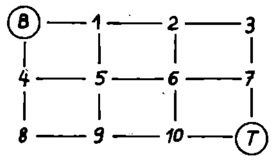
$$\frac{26}{65}=\frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5}=\frac{2}{5}.\text{"}$$

Die Mitschüler merken, daß Uwe einen Scherz mit ihnen gemacht hat. Seine Methode klappt offenbar nur für *diesen* genannten Bruch. Oder nicht?
Eure Aufgabe ist es nun herauszufinden, ob es noch andere Paare von zweistelligen Zahlen mit *insgesamt* 3 verschiedenen Ziffern gibt, bei denen dieses „Kürzen" mittels eines Schrägstriches möglich ist!
Es soll dabei nicht geraten werden, sondern es ist ein möglichst einfaches Rechenschema zu entwickeln, das gestattet, in kurzer Zeit die Existenz oder Nichtexistenz der betreffenden Zahlenpaare festzustellen.

Dr. W. Lorenz, Leipzig

Theaterbesuch

Auf wieviel verschiedenen Wegen kann man vom Bahnhof B zum Theater T gelangen (z. B. B–1–2–3–7–T)?



Dr. R. Mildner, Karl-Marx-Universität Leipzig

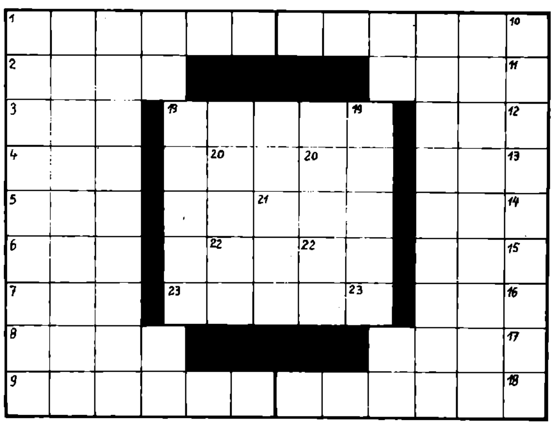
Wortspiele

Z	E	I	T
W	E	R	T

R	A	U	T	E
H	A	L	B	E

Fachlehrer Dr. Knape, Jessen

Symmetrische Begriffe gesucht

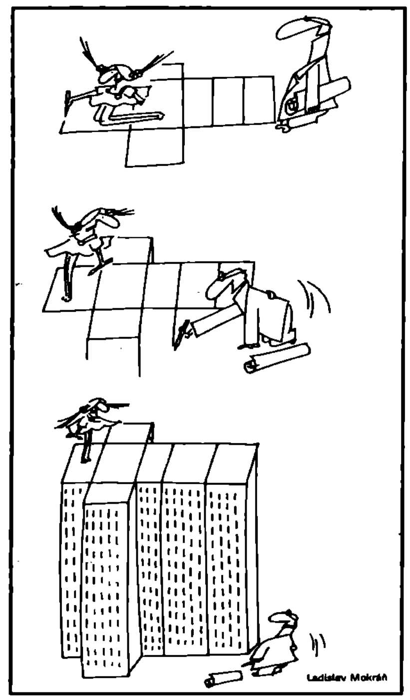


Die gesuchten symmetrischen Begriffe (von vorn und von hinten gelesen ergibt sich derselbe Begriff) sind in die numerierten Zeilen einzutragen – unabhängig davon, an welcher Stelle der Zeile diese Nummer steht:

1. gerbsaures Salz, 2. Unterarmknochen, 3. Aktion, 4. Nebenfluß der Maas, 5. Sittichpapagei, 6. Lebensbund, 7. demokratische Frauenorganisation der DDR (Abk.), 8. landwirtschaftliches Gerät, 9. führender Austromarxist (1870 bis 1950), 10. Helfender in der Not, 11. eine der Meeresgezeiten, 12. von 1867 bis 1918 bestehende österreichisch-ungarische Doppelmonarchie (gebräuchl. Kurzbez.), 13. Nachtraubvogel, 14. selten, 15. Notruf auf See, 16. Zufluß zum Balchaschsee, 17. Vorname eines deutschen Chemikers und Physikers (1879 bis 1968), 18. hersagen, aufzählen, 19. sich drehender Teil von Elektromaschinen, 20. eingliedriger math. Ausdruck, 21. Funkortung und Entfernungsmessung (engl. Abk.), 22. Ring zum Aufreihen des Stagsegels, 23. schwedischer Ingenieur (1845 bis 1913), Erfinder einer speziellen Dampfturbine.

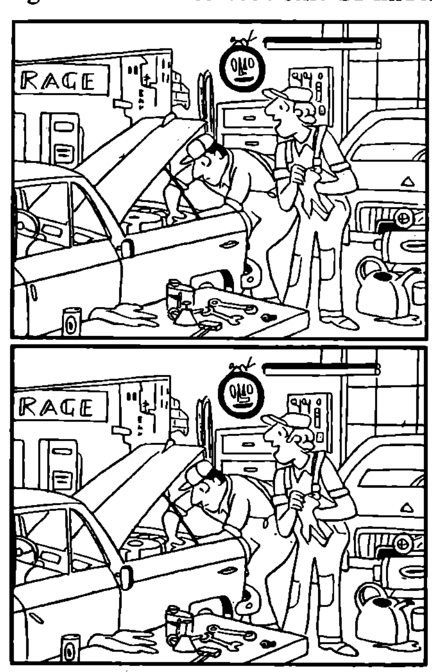
Bei richtiger Auflösung ergeben sich in den beiden Randspalten „ein Eulersches Polyeder" (1 bis 9) und „eine typische mathematische Verfahrensweise" (10 bis 18) sowie in der Haupt- und Nebendiagonale der Mittelfigur „ein Wintersportgerät, dessen Benutzung viel Freude bereiten kann" (19 bis 23).

Ohne Worte *Ladislav Mokráň, Dikobraz, Prag*



Autoreparatur

Zwanzig kleine Unterschiede sind zu finden.



Füles, Budapest

XXII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Olympiadeklasse 10

221041 Beweisen Sie folgende Aussage!
Zu jeder natürlichen Zahl $n \geqq 2$ gibt es von Null verschiedene natürliche Zahlen a_1, a_2, ..., a_n, für die $a_1+a_2+\ldots+a_n=a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ gilt.

221042 In einem Mathematikzirkel wird diskutiert, für welche Paare $(x; y)$ natürlicher Zahlen x, y mit $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x \neq y$ die Zahl $z=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x+y}$ irrational ist.
Rolf meint: Für unendlich viele der genannten Paare $(x; y)$ ist z rational.
Eva meint: Für unendlich viele der genannten Paare $(x; y)$ ist z irrational.
Untersuchen Sie sowohl für Rolfs als auch für Evas Meinung, ob sie wahr oder falsch ist!
Von den nachstehenden Aufgaben 1043A und 1043B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

221043A a) Jemand fragt nach reellen Zahlen a, b mit der Eigenschaft, daß die Gleichung

$$a^x=b \cdot \cos x \qquad (1)$$

genau 1983 positive reelle Lösungen x hat (unabhängig von der Anzahl der eventuell vorhandenen nicht positiven Lösungen).
Geben Sie ein solches Paar $(a; b)$ reeller Zahlen an, und beweisen Sie, daß es die genannte Eigenschaft besitzt!
b) Ermitteln Sie zu dem von Ihnen angegebenen Paar $(a; b)$ für eine positive Lösung x_0 der Gleichung (1) die Zahl $[x_0]$, d. i. diejenige ganze Zahl $g=[x_0]$, für die $g \leqq x_0 < g+1$ gilt!
c) Gibt es auch eine reelle Zahl a mit $a>0$ und $a \neq 1$ derart, daß für jede reelle Zahl $b \neq 0$ die Gleichung (1) unendlich viele positive reelle Lösungen x hat?
Hinweise:
1. Als Näherungswert für π kann auf 4 Dezimalen genau $\pi=3{,}1416$ verwendet werden.
2. Bei der Herleitung von Aussagen über Lösungen der Gleichung (1) sind auch grafisch-anschaulich begründete Beweismittel zugelassen.

221043B Fünf Kugeln K_1, ..., K_5 mit gleichem Radius r seien so angeordnet, daß jede Kugel genau zwei andere berührt und daß ihre Mittelpunkte M_1, ..., M_5 ein ebenes regelmäßiges Fünfeck bilden. Eine sechste Kugel K_6 mit dem Radius r berühre jede der fünf Kugeln K_1, ..., K_5.
Untersuchen Sie, ob K_6 die Ebene durch M_1, ..., M_5 schneidet, berührt oder nicht erreicht!

221044 Beweisen Sie folgenden Satz!
Wenn ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $\overline{AC}=\overline{BC}$ ist und wenn D der Mittelpunkt von AB, D' der Fußpunkt des Lotes von D auf BC und H der Mittelpunkt von DD' ist, dann stehen AD' und CH aufeinander senkrecht.

221045 Beweisen Sie, daß die Gleichung

$$x^4+5x^3+6x^2-4x-16=0$$

genau zwei reelle Lösungen hat!

221046 Beweisen Sie, daß sich in einem würfelförmigen Hohlkörper von der Kantenlänge a zwei regelmäßige Tetraeder der Kantenlänge a vollständig und ohne einander zu druchdringen unterbringen lassen!

Olympiadeklassen 11/12

221241 a) Untersuchen Sie, ob es reelle Zahlen $a \neq 0$, b und c so gibt, daß die für alle reellen x durch

$$f(x)=ax^4+bx^2+c \qquad (1)$$

definierte Funktion f die Funktionswerte $f(0)=1$, $f(2)=1$ hat und bei $x=1$ einen lokalen Extremwert besitzt!
b) Gegeben seien zwei beliebige reelle Zahlen x_1 und x_2 mit $0<x_1<x_2$.
Ermitteln Sie (in Abhängigkeit von x_1 und x_2) alle diejenigen reellen $a \neq 0$, b, c mit der Eigenschaft, daß die durch (1) definierte Funktion f die Funktionswerte $f(0)=1$, $f(x_2)=1$ hat und bei $x=x_1$ einen lokalen Extremwert besitzt!

221242 Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen a, zu denen es nichtnegative reelle Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 gibt, die die folgenden Gleichungen (1), (2), (3), (4) erfüllen:

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4&=1, && (1)\\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4&=a, && (2)\\ x_1+2^2x_2+3^2x_3+4^2x_4&=a^2, && (3)\\ x_1+2^3x_2+3^3x_3+4^3x_4&=a^3. && (4) \end{aligned}$$

221243 Man untersuche, ob es nichtnegative
a) reelle Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4,
b) ganze Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4
mit $x_1+x_2+x_3+x_4=4$ und $x_2+2x_3+3x_4=4$ gibt, so daß die Summe $s=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$ einen kleinsten Wert annimmt. Ist das der Fall, so ermittle man jeweils zu a) bzw. b) solche Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 sowie den zugehörigen Wert s.

221244 Man beweise, daß das Polynom

$$f(x)=\frac{1}{630}x^9-\frac{1}{21}x^7+\frac{13}{30}x^5-\frac{82}{63}x^3+\frac{32}{35}x$$

für alle ganzzahligen x ganzzahlige Werte annimmt.

221245 Es seien a_1, a_2, ..., a_n reelle Zahlen. Bei einem „ungestörten technischen Prozeß" sei

$$x_1=a_1+a_2+\ldots+a_n \qquad (1)$$

die Maßzahl einer von a_1, a_2, ..., a_n abhängigen Größe. Bei einem „gestörten technischen Prozeß" betrage die Maßzahl dieser Größe dagegen

$$x_2=\frac{a_1}{1+\varepsilon_1}+\frac{a_2}{1+\varepsilon_2}+\ldots+\frac{a_n}{1+\varepsilon_n}. \qquad (2)$$

Dabei seien ε_1, ε_2, ..., ε_n reelle Zahlen, zu denen es eine natürliche Zahl $m \geqq 1$ derart gibt, daß für alle $\mu=1, 2, \ldots, n$ die Ungleichung

$$|\varepsilon_\mu| \leqq 10^{-m} \qquad (3)$$

gilt. Beweisen Sie, daß aus diesen Voraussetzungen (1), (2), (3) stets die Ungleichung

$$|x_1-x_2| \leqq \frac{1}{10^{m}-1}\,(|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|)$$

folgt!
Von den nachstehenden Aufgaben 1246A und 1246B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

221246A Es sei $ABCD$ ein Tetraeder, bei dem die drei Kanten AD, BD und CD paarweise senkrecht aufeinander stehen. Die Längen dieser Kanten AD, BD bzw. CD seien mit a, b bzw. c bezeichnet. Ferner sei P ein beliebiger Punkt auf dem Rande des Dreiecks ABC, und dann sei jeweils g die Gerade durch D und P.
a) Man beweise, daß dann hiernach für die Summe s der Abstände der Punkte A, B und C von g stets

$$s \leqq \sqrt{2(a^2+b^2+c^2)} \text{ gilt.} \qquad (1)$$

b) Man untersuche (in Abhängigkeit von den gegebenen Kantenlängen a, b, c), ob es einen Punkt P derart gibt, daß in (1) das Gleichheitszeichen gilt.
Wenn das der Fall ist, so ermittle man (in Abhängigkeit von a, b, c) alle diese Punkte P.

221246B Bei der Untersuchung von Häufigkeitsverteilungen in der mathematischen Statistik treten Funktionen auf, die für endlich viele natürliche Zahlen definiert sind und für die gefordert wird, daß sie sogenannte Funktionalgleichungen (Gleichungen zwischen verschiedenen Funktionswerten) erfüllen. Ein Beispiel hierfür ist das folgende:
Gegeben seien eine natürliche Zahl $n \geqq 2$ und eine reelle Zahl p mit $0<p<1$. Man ermittle (in Abhängigkeit von n und p) diejenigen Funktionen f mit der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ als Definitionsbereich, die für $k=1, 2, \ldots, n$ die folgende Gleichung (1) erfüllen:

$$\sum_{x=1}^{n} x(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-k+1)\cdot f(x) = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot p^k. \quad (1)$$

Hinweis: Für $k=1$ ist die Gleichung (1) sinngemäß als $\sum_{x=1}^{n} x\cdot f(x)=n\cdot p$ aufzufassen.

Die diesjährige DDR-Olympiade fand vom 27. bis 30. März 1983 an der Pädagogischen Hochschule *Dr. Theodor Neubauer* in Erfurt statt. Wieder waren aus allen Bezirken Mädchen und Jungen gut vorbereitet angereist. An zwei Tagen mußten jeweils in einer viereinhalbstündigen Klausur drei Aufgaben gelöst werden. Bis in die Abendstunden wurden die Lösungen von 70 Korrektoren und 14 Koordinatoren bewertet

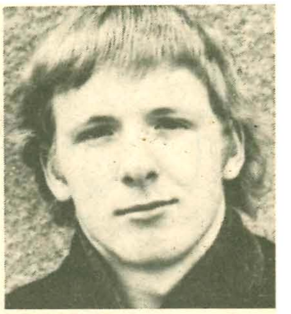
In der Olympiadeklasse 10 starteten 73 Schüler, darunter 5 Schüler der Klassenstufe 8 und 28 Schüler der Klassenstufe 9 (sogenannte Frühstarter). Die Jury konnte zwei 1. Preise, neun 2. Preise und elf 3. Preise vergeben. Besonders erwähnen wir hier den 2. Preis für Jörg Wensch (Halle) und den 3. Preis für Jörg Jahnel (Gera), die beide Schüler der Klassenstufe 8 sind.

In den Olympiadeklassen 11 und 12 starteten 53 bzw. 52 Schüler, darunter 2 Schüler der Klassenstufe 10, Georg Hein und Udo Bellack (beide Berlin), die mit einem 1. bzw. 2. Preis geehrt werden konnten. Insgesamt wurden hier sieben 1. Preise, zwölf 2. Preise und fünfzehn 3. Preise vergeben.

Zum Rahmenprogramm gehörten ein Besuch der *Nationalen Mahn- und Gedenkstätte Buchenwald*, Führungen durch das historisch interessante Stadtzentrum von Erfurt und ein Theaterbesuch. *W. Henker*

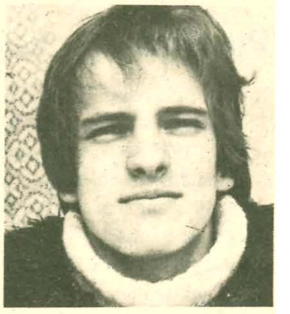

1


2

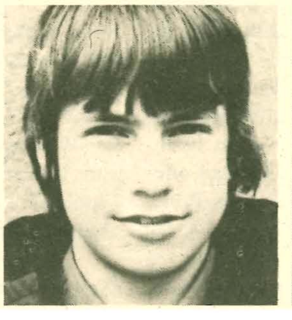

3

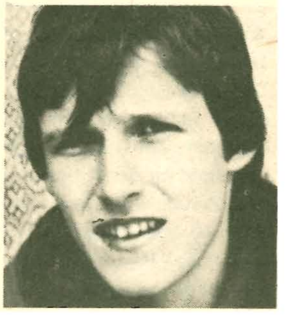

4


5


6


7


8


9

Einen ersten Preis erhielten:

1 Klaus Mohnke, EOS *Georg Schumann*, Calau (Bez. Cottbus) (Olympiadeklasse 12)
2 Bernd Schmutzler, Spezialklasse Math. der TH Karl-Marx-Stadt (Olympiadeklasse 12)
3 Uwe Birkemeyer, EOS *Heinrich Hertz*, Berlin (Olympiadeklasse 12)
4 Bernd Kirchheim, ABF *Walter Ulbricht*, Halle (Olympiadeklasse 12)
5 Karin Gröger, EOS *Heinrich Hertz*, Berlin (Olympiadeklasse 11)
6 Alexander Schmidt, EOS *Heinrich Hertz*, Berlin (Olympiadeklasse 11)
7 Georg Hein, EOS *Heinrich Hertz*, Schüler der Klasse 10 (Olympiadeklasse 11)
8 Tilo Schaarschmidt, Goethe-Oberschule Bad Lauchstädt (Bez. Halle) (Olympiadeklasse 10)
9 Uwe Müller, EOS *J. W. v. Goethe*, Brandenburg (Bez. Potsdam) (Olympiadeklasse 10)

Seit vielen Jahren erfolgreich: Die Delegation des Bezirkes Karl-Marx-Stadt – hier beim Interview für die *Aktuelle Kamera*.

Polnische Mathematiker

Im historisch sehr kurzen Zeitraum von der Jahrhundertwende bis zur faschistischen Besetzung 1939 entwickelte sich eine polnische Mathematikerschule von Weltgeltung, die besonders auf den damals jungen Gebieten der mathematischen Logik, Mengenlehre, Topologie, Theorie der reellen Funktionen und Funktionalanalysis die führende Position übernahm. Äußerer Ausdruck dessen war die Gründung der polnischen Zeitschrift „Fundamenta mathematicae“ durch Z. Janiszewski, W. Sierpiński und St. Mazurkiewicz im Jahre 1920, die auf die oben genannten Disziplinen spezialisiert und damit eine der ersten mathematischen Spezialzeitschriften der Welt war. (Heute spielen die im 19. Jh. entstandenen, der gesamten Mathematik offenen Zeitschriften kaum noch eine Rolle, während andererseits die Spezialisierung der zahlreichen Fachzeitschriften auf immer engere Gebiete zunimmt.) Während der faschistischen Besetzung erlitt die polnische Mathematikerschaft schwerste Verluste. Der erste Band der „Fundamenta mathematicae“, der nach der Befreiung wieder erscheinen konnte, nennt mehr als 15 namhafte ständige Mitarbeiter allein dieser Zeitschrift als unmittelbare physische Opfer der Nazibarbarei. Zu berücksichtigen ist aber auch der Verlust durch die Emigration zahlreicher bedeutender Wissenschaftler in die USA. Trotzdem nahm die polnische Mathematik sehr bald wieder einen geachteten Platz in der Welt ein. 1972 unterzeichneten Vertreter der Akademien der Wissenschaften Bulgariens, der DDR, Polens, Rumäniens, der UdSSR, Ungarns und der ČSSR ein Abkommen über die Gründung des „Internationalen Mathematischen Zentrums Stefan Banach“ (kurz Banach-Zentrum) in Warschau, das in den nun 10 Jahren seines Bestehens zu einem Mekka von Mathematikern aus aller Welt (keineswegs nur aus den sozialistischen Staaten) geworden ist. Im Sommer 1983 war Warschau (als zweite sozialistische Hauptstadt nach Moskau) Gastgeber des Internationalen Mathematikerkongresses, der in der Regel in vierjährigem Abstand stattfindet, auch dies ein Zeichen hoher internationaler Anerkennung für die polnischen Mathematiker. Im Vorfeld dieser Ereignisse bzw. Jubiläen gab die polnische Post Ende 1982 vier Sonderpostwertzeichen zum Gedenken an Pioniere der polnischen Mathematikertradition heraus, die nicht nur durch Ausgabeanlaß und Motiv, sondern auch durch die digitalgraphische Gestaltung interessant für Mathematiker und Informatiker sind. Die vier so Geehrten sind (in der Reihenfolge der Wertstufen):

Stanislaw Zaremba (1863 bis 22. 11. 1942, studierte in Odessa, Petersburg und Paris, Prof. an der Universität Krakow, Arbeitsgebiete Analysis, mathematische Logik, theoretische Mechanik),

Waclaw Sierpiński (14. 3. 1882 bis 21. 10. 1969, geb. in Warschau, Studium und ab 1918 Prof. an der dortigen Universität, 1952 bis 1957 Vizepräsident der Polnischen Akademie der Wissenschaften, Arbeitsgebiete Mengenlehre, Zahlentheorie, Funktionentheorie und Topologie, zahlreiche, auch populärwissenschaftliche Bücher),

Zygmunt Janiszewski (12. 7. 1888 bis 3. 1. 1920, geb. in Warschau, studierte in Lwow, Zürich, Göttingen, Graz, Paris, 1918 Prof. an der Universität Warschau, Arbeitsgebiete Topologie und mathematische Logik),

Stefan Banach (30. 3. 1892 bis 31. 8. 1945, geb. in Krakow oder Umgebung, wurde nach autodidaktisch begonnenen Studien von H. Steinhaus „entdeckt“ und studierte dann in Lwow, ab 1922 dort Prof., einer der Begründer der Funktionalanalysis, gründete 1929 gemeinsam mit seinem Lehrer Steinhaus die Spezialzeitschrift „Studia Mathematica“ für diese Disziplin. Der früh versorbene Banach gilt heute als eines der bedeutendsten mathematischen Talente unseres Jahrhunderts, dessen Ideen und Ergebnisse richtungweisend für die moderne Analysis gewesen sind).

P. Schreiber

Eine Aufgabe von Prof. Dr.
E. I. Ignatjew

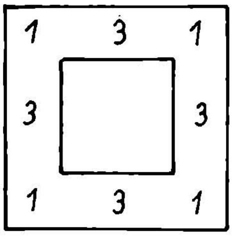
Lomonossow-Universität Moskau

Aus dem soeben im Urania-Verlag erschienenen Buch

„Mathematische Spielereien“

(Bestell-Nr. 653 728 4, Preis 9,80 M) entnahmen wir die folgende Aufgabe:

▲2377▲ An den Wänden einer Bastion mit quadratischem Grundriß sollten 16 Wachtposten aufgestellt werden. Der Kommandant verteilte sie so, daß an jeder Seite fünf Wachtposten standen (siehe Bild).



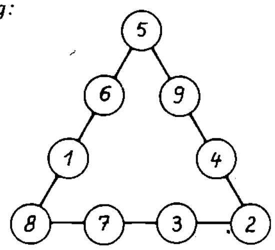
Der Oberst jedoch war mit dieser Verteilung der Wachtposten unzufrieden und befahl, die Soldaten so aufzustellen, daß auf jede Seite sechs Mann kämen. Der General aber geriet in Zorn über den Obersten und seine Anordnung und verteilte die Soldaten so, daß sich nun je sieben Mann an jeder Seite befanden. Wie waren die Soldaten in den beiden letztgenannten Fällen verteilt?

Lösungen

Lösungen zu: Unsere Sprachecke

Zauberdreieck

▲1▲ Schreibt die Zahlen von 1 bis 9 so in die Kreise auf dem Dreieck, daß die Zahlen auf jeder Dreiecksseite dieselbe Summe haben! Verteilt die Zahlen dabei so, daß auch die Summen der Quadrate der Zahlen auf jeder Seite untereinander gleich sind!
Lösung:

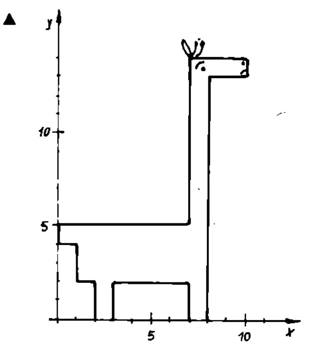


▲2▲ Mark, Paul und Boris sind mit Anne, Mary und Susan verheiratet, nicht notwendigerweise in dieser Reihenfolge. Jedes Paar hat ein Lieblingstier, und die Lieblingstiere sind eine Katze, ein Meerschweinchen und ein Pony. Benutze die folgenden Angaben, um die Zusammengehörigkeit von Ehemännern, Ehefrauen und Lieblingstieren festzustellen!
Pauls und Annes Lieblingstiere kämpften miteinander.
Der Name von Marys Ehemann hat vier Buchstaben.
Susan ging hinüber, um Marks Lieblingstier zu füttern, wenn er fort war.
Mark geht niemals in die Stadt.
Boris' Lieblingstier ist entweder die Katze oder das Pony.
Susans Lieblingstier ist nicht die Katze.
Der männliche Besitzer der Katze brachte diese zum Tierarzt in die Stadt.
Das Meerschweinchen versteckt sich, wenn Anne zu Besuch kommt.
Marys Lieblingstier schläft in einem Schuhkarton.
Lösung: Mark und Mary haben das Meerschweinchen. Paul und Susan haben das Pony. Boris und Anne haben die Katze.

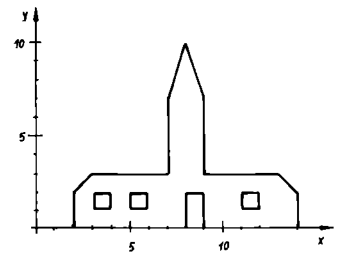
▲3▲ Drei Autobuslinien haben als Abfahrtsplatz den Bahnhof Montparnasse in Paris. Die Autobusse der ersten Linie sind nach 1 h 36 min zurück und haben 4 min Pause.
Die Autobusse der zweiten Linie sind nach 1 h 48 min zurück und haben 12 min Pause; die der dritten Linie sind nach 2 h 10 min zurück und haben 20 Minuten Pause.
Drei Autobusse, einer auf jeder Linie, fahren gemeinsam um 8 h am Bahnhof Montparnasse ab.
a) Wann fahren die drei Autobusse das erste Mal wieder gemeinsam vom Bahnhof Montparnasse ab?
b) Wieviel Fahrten hat dann jeder Autobus durchgeführt?
Lösung: a) Der erste Bus braucht bis zur nächsten Abfahrt vom Bahnhof Montparnasse $96+4=100$ min, der zweite $108+12=120$ min und der dritte $130+20=150$ min. Die nächste gemeinsame Abfahrt ergibt sich dann als kleinstes gemeinsames Vielfaches von 100, 120 und 150, also nach 600 min. Die Autobusse fahren um 18 Uhr wieder gemeinsam vom Bahnhof ab.
b) Dann hat der erste Bus $600:100=6$ Fahrten, der zweite Bus $600:120=5$ Fahrten und der dritte Bus $600:150=4$ Fahrten durchgeführt.

Lösungen zu: Koordinaten

▲1▲
a)



b)



▲2▲ a)

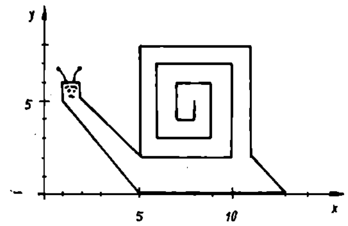
(2;0)	(4;6)	(3;0)
(2;3)	(4;5)	(3;2)
(1;3)	(5;5)	(5;2)
(1;4)	(5;6)	(5;0)
(2;4)	(7;6)	
(2;5)	(7;5)	
(3;5)	(6;5)	
(3;6)	(6;0)	

b)

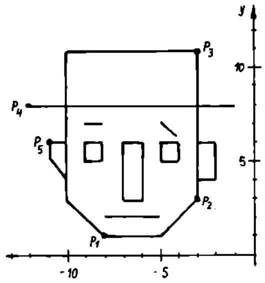
(6;3)	(9;5)	(6;6)	(8;6)	(9;4)
(2;3)	(10;4)	(10;6)	(8;3)	(10;4)
(2;5)	(10;3)		(9;3)	
(3;4)	(9;2)		(9;5)	
(6;4)	(7;2)			
(7;5)	(6;3)			

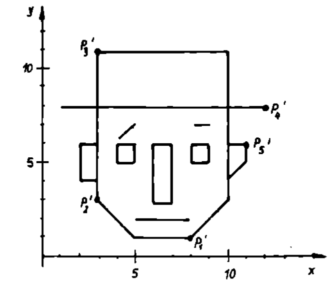
▲3▲

(5;0)	(8;5)	(5;8)	(6;3)
(1;5)	(8;4)	(11;8)	(6;7)
(1;6)	(7;4)	(11;2)	(10;7)
(2;6)	(7;6)	(13;0)	(10;2)
(2;5)	(9;6)		(5;2)
(5;2)	(9;3)		

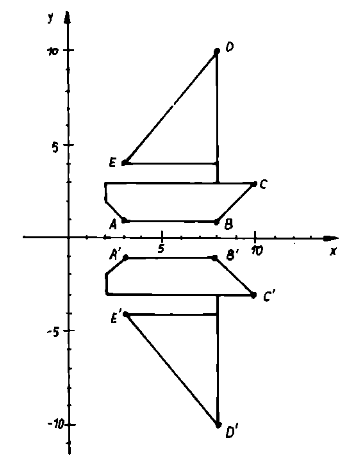


▲4▲ $P_1'(8;1)$ $P_4'(12;8)$
$P_2'(3;3)$ $P_5'(11;6)$
$P_3'(3;11)$





▲5▲ $A'(3;-1)$ $D'(8;-10)$
$B'(8;-1)$ $E'(3;-4)$
$C'(10;-3)$



▲6▲ $1 \leq x \leq 7$ $1 \leq y \leq 9$

Lösung zu: Schach und Mathematik

Es gibt 40320 Möglichkeiten, die acht Türme auf dem leeren Schachbrett so anzuordnen, daß keine zwei von ihnen einander schlagen können.
Auf die überraschend große Zahl kommt man wie folgt. Wenn wir acht Türme so auf dem

Schachbrett stellen, daß keine zwei von ihnen einander schlagen können, so wird in jeder Reihe ein und nur ein Turm stehen. Den ersten Turm können wir an jede Stelle der ersten Reihe (also an insgesamt 8 Stellen) setzen. Den zweiten Turm stellen wir in die zweite Reihe, wobei wir darauf achten, daß er nicht in dieselbe Linie wie der erste Turm gerät. Wir können ihn also auf 7 verschiedene Stellen setzen, unabhängig davon, wo wir den ersten hingestellt haben. Ebenso erkennt man, daß man den dritten Turm auf sechserlei Weise in die dritte Reihe stellen kann. Durch Fortsetzung des Verfahrens ergibt sich, daß man die acht Türme auf

$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$ Arten anordnen kann.

Lösung zur Aufgabe S. 109

$4+4+6+3+4+5+1=27$

Fotoamateure (12)

Junge Mathematiker (14) Musikfreunde (15)

Zu der Klasse gehören 27 Schüler.

Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

Wer hat weißes Haar?

Da Frau Weiß kein schwarzes Haar hat und auch kein weißes Haar haben kann, muß sie braunes Haar haben. Demzufolge müssen Frau Schwarz weißes Haar und Frau Braun schwarzes Haar haben.

Logisch

Bruchlandung

Bezeichnet man die in einem derartigen Bruch vorkommenden Ziffern mit x, y und z, so gilt:

$$\frac{10x+y}{10y+z} = \frac{x}{z}$$

$$10xz + yz = 10xy + xz$$

$$9xz + yz = 10xy$$

$$z = \frac{10xy}{9x+y}$$

Dieser Bruch muß gekürzt eine ganze Zahl ergeben, x und y können alle Zahlen von 1 bis 9 annehmen. Der Aufbau der Tabelle ist denkbar einfach.

In den Spalten folgen im Zähler die Vielfachen der Zahlen 10(..., 20, 30, 40 bis 90), 20 (20, ..., 60, 80, 100 bis 180), 30 bis 90.

Im Nenner folgen die Zahlen 11, 12, 13 usw. bis 89. Leicht festzustellen ist, daß nur die Brüche

$\frac{60}{15}=4$, $\frac{90}{18}=5$, $\frac{120}{24}=5$, $\frac{360}{45}=8$ gekürzt eine ganze Zahl $(=z)$ ergeben. An den Zahlenleisten x und y ist abzulesen:

$x=1$, $y=6$ bzw. $x=1$, $y=9$ bzw. $x=2$, $y=6$ bzw. $x=4$, $y=9$. Demnach können also die Brüche $\frac{16}{64}$, $\frac{19}{95}$, $\frac{26}{65}$, $\frac{49}{98}$ nach der „Methode" von Uwe mittels Schrägstrich gekürzt werden.

Auch die Brüche $\frac{64}{16}$, $\frac{95}{19}$, $\frac{65}{26}$, $\frac{98}{49}$ sind mittels Schrägstrich kürzbar, nur läuft dieser von links oben nach rechts unten.

y \ x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		$\frac{20}{19}$	$\frac{30}{28}$	$\frac{40}{37}$	$\frac{50}{46}$	$\frac{60}{55}$	$\frac{70}{64}$	$\frac{80}{73}$	$\frac{90}{82}$
2	$\frac{20}{11}$		$\frac{60}{29}$	$\frac{80}{38}$	$\frac{100}{47}$	$\frac{120}{56}$	$\frac{140}{65}$	$\frac{160}{74}$	$\frac{180}{83}$
3	$\frac{30}{12}$	$\frac{60}{21}$		$\frac{120}{39}$	$\frac{150}{48}$	$\frac{180}{57}$	$\frac{210}{66}$	$\frac{240}{75}$	$\frac{270}{84}$
4	$\frac{40}{13}$	$\frac{80}{22}$	$\frac{120}{31}$		$\frac{200}{49}$	$\frac{240}{58}$	$\frac{280}{67}$	$\frac{320}{76}$	$\frac{360}{85}$
5	$\frac{50}{14}$	$\frac{100}{23}$	$\frac{150}{32}$	$\frac{200}{41}$		$\frac{300}{59}$	$\frac{350}{68}$	$\frac{400}{77}$	$\frac{450}{86}$
6	$\frac{60}{15}$	$\frac{120}{24}$	$\frac{180}{33}$	$\frac{240}{42}$	$\frac{300}{51}$		$\frac{420}{69}$	$\frac{480}{78}$	$\frac{540}{87}$
7	$\frac{70}{16}$	$\frac{140}{25}$	$\frac{210}{34}$	$\frac{280}{43}$	$\frac{350}{52}$	$\frac{420}{61}$		$\frac{560}{79}$	$\frac{630}{88}$
8	$\frac{80}{17}$	$\frac{160}{26}$	$\frac{240}{35}$	$\frac{320}{44}$	$\frac{400}{53}$	$\frac{480}{62}$	$\frac{560}{71}$		$\frac{720}{89}$
9	$\frac{90}{18}$	$\frac{180}{27}$	$\frac{270}{36}$	$\frac{360}{45}$	$\frac{450}{54}$	$\frac{540}{63}$	$\frac{630}{72}$	$\frac{720}{81}$	

Theaterbesuch

Man kann auf 10 Wegen vom Bahnhof B zum Theater T gelangen:

1. B–1–2–3–7–T, 2. B–1–2–6–10–T,
3. B–1–2–6–7–T, 4. B–1–5–9–10–T,
5. B–1–5–6–10–T, 6. B–1–5–6–7–T,
7. B–4–5–9–10–T, 8. B–4–5–6–10–T,
9. B–4–5–6–7–T, 10. B–4–8–9–10–T.

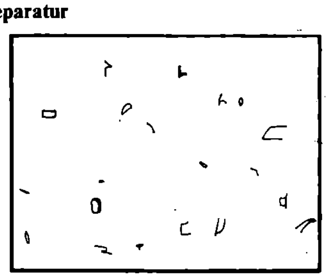
Wortspiele

Zeit – Zelt – Welt – Wert; Raute – Laute – Laube – Haube – Halbe

Symmetrische Begriffe gesucht

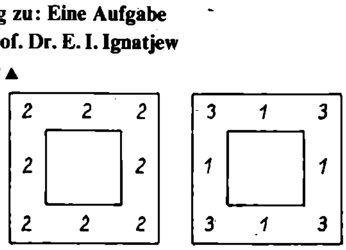
1. Tannat, 2. Elle, 3. Tat, 4. Rur, 5. Ara, 6. Ehe, 7. DFD, 8. Egge, 9. Renner, 10. Retter, 11. Ebbe, 12. k.u.k., 13. Uhu, 14. rar, 15. SOS, 16. Ili, 17. Otto, 18. nennen, 19. Rotor, 20. Monom, 21. Radar, 22. Legel, 23. Laval. Kontrollbegriffe: (1 bis 9): Tetraeder, (10 bis 18): Rekursion, (19 bis 23): Rodel.

Autoreparatur



Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. E. I. Ignatjew

▲2349▲



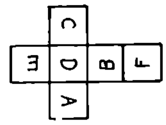
Lösungen zu: Heiterer Denksport

Heimatkunde

Die kürzeste Route: Berlin–Rostock–Dresden–Cottbus–Frankfurt (O.)–Berlin oder umgekehrt.

Würfeleien

Auf der Grundfläche der drei unteren Würfel befindet sich der Buchstabe E.



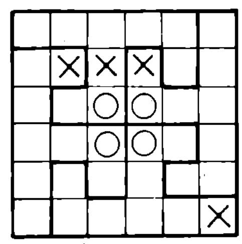
Zahlenquadrat

$2 + 16 - 12 = 6$
$+ \quad - \quad - \quad +$
$3 + 15 - 11 = 7$
$- \quad + \quad + \quad -$
$1 + 13 - 9 = 5$
$= \quad = \quad = \quad =$
$4 + 14 - 10 = 8$

Kombiniere!

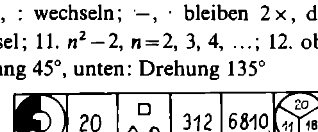
Teil Nr. 4 gehört in die linke obere Ecke des Irrgartens. Das vollständige Labyrinth sieht so aus:

Von gleicher Form



Mit scharfem Blick

1. außen: Drehung 120°; innen: Drehung 90°; 2. $n(n-1)$, $n = 1, 2, \ldots, i$; 3. Permutationen von ○ △ □; 4. Permutationen von 1, 2, 3; 5. Zahlen aus n, $n+2$, $n+4$, $n=1, 2, 3, \ldots$; 6. u.l.: $2n-1$; u.r.: $3n$, $n=1, 2, 3, \ldots$ $\sum = n^2$, $n = 2, 3, \ldots$; 7. p, $p+1$, $p+2$, $p+3$, p Primzahlen, $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13$, Eintrag um 90° gedreht; 8. alphaalphaalpha..., 3 Buchstaben; 9. Alphabet, 1 Buchstabe ausgelassen; 10. +, : wechseln; –, · bleiben 2×, dann Wechsel; 11. $n^2 - 2$, $n = 2, 3, 4, \ldots$; 12. oben: Drehung 45°, unten: Drehung 135°



Irrgarten

Lösungen zu Heft 3/83

Lösung zu: Ein Blick in das „geistige Labor“ von Leibniz

Es geht Leibniz um die Bestimmung der Anzahl von Variationen mit Wiederholung, die ein bestimmtes Element, das wir mit n_f bezeichnen, enthalten.
Spalte I: Anzahl der Würfel r mit je $n=6$ Elementen $n_a, \ldots, n_f$
Spalte II: n^r = Anzahl der Variationen m.W. aus n Elementen zur $r$ten Klasse
Spalte III: In $(n-1)^r$ Variationen ist das Element n_f nicht enthalten.
Spalte IV: In $n^r-(n-1)^r$ Variationen tritt das Element n_f auf.
Spalte V bis X: Die Anzahl der Variationen, in denen das Element n_f p-mal auftritt (in Spalte V ist $p=1, \ldots$, in Spalte X ist $p=6$), ist $\binom{r}{p}\cdot(n-1)^{r-p}$.

Lösung zu: Die historische Mathematikaufgabe
Das „Erraten“ einer natürlichen Zahl

Die durchzuführenden Divisionen mit Rest sind
$$x=a q_1+r_1$$
$$x=(a+1)q_2+r_2$$
$\left(\text{worin } q_1=\left[\frac{x}{a}\right]\right.$ die größte ganze Zahl $\leqq\frac{x}{a}$, $0\leqq r_1<a$, $q_2=\left[\frac{x}{a+1}\right]$ die größte ganze Zahl $\leqq\frac{x}{a+1}$, $0\leqq r_2<a+1$; vgl. H. Pieper, Zahlen aus Primzahlen, Berlin 1974, S. 25$\left.\right)$.

Multipliziert man die erste Gleichung mit $a+1$, die zweite Gleichung mit a^2 und addiert beide Gleichungen, so ergibt sich
$(a+1)x+a^2x=(a^2+a+1)x=a(a+1)x+x$
$=(a+1)aq_1+a^2(a+1)q_2+(a+1)r_1+a^2r_2$
$=a(a+1)\,[q_1+aq_2]+s$ und somit
$s-x=a(a+1)x+a(a+1)\,[q_1+aq_2]$, also
$s-x=a(a+1)\,[x-q_1-aq_2]$.
Hierin ist $x-q_1-aq_2$ eine natürliche Zahl.
$(x-q_1-aq_2$ ist eine ganze Zahl.
Wäre $x-q_1-aq_2\leqq 0$, so wäre auch $a(a+1)$ $(x-q_1-aq_2)\leqq 0$, also
$a(a+1)x\leqq aq_1(a+1)+(a+1)q_2\,a^2=(x-r_1)$ $(a+1)+(x-r_2)a^2$, woraus $a(a+1)x\leqq a(a+1)$ $x-s$, d. h. $s\leqq 0$ folgt, obwohl s positiv ist.
Also muß $x-q_1-aq_2>0$ sein.)
Somit ist $a(a+1)$ ein Teiler von $s-x$. Hieraus folgt $s-x=a(a+1)q$ mit einer natürlichen Zahl q, d. h. $s=a(a+1)q+x$ (worin $0<x<a(a+1)$ nach Wahl von x).
x ist in der Tat der Rest bei der Division $\frac{s}{a(a+1)}$.

Lösungen zu: Knifflige Aufgaben mit Kreisen

▲1▲ Es sei a die Länge einer Quadratseite. Für die schraffierten Flächen gilt dann im Quadrat

(Bild 1) $A_1=a^2-\frac{1}{4}a^2\cdot\pi=a^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$,
(Bild 2) $A_2=a^2-\frac{1}{4}\pi a^2 \quad =a^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$,
(Bild 3) $A_3=a^2-\pi\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2=a^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$,
(Bild 4) $A_4=a^2-\frac{1}{4}a^2\cdot\pi \quad =a^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$.

Die vier schraffierten Flächen haben den gleichen Flächeninhalt; es gibt keine mit dem größten Flächeninhalt.

▲2▲ Die beiden Kreisbögen erzeugen im Quadrat drei Flächen. Für eine der nicht schraffierten Flächen gilt
$$A_x=a^2-\frac{1}{4}\pi\cdot a^2=a^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$
Für den schraffierten Flächeninhalt gilt somit
$$a^2-2a^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$
Daraus folgt weiter
$$a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right):a^2=\frac{\pi}{2}-1\approx 0{,}57.$$
Die schraffierte Fläche macht rund 57% vom Flächeninhalt des Quadrates aus (Bild 4).

▲3▲ Es sei A_x die Summe der Flächeninhalte der vier Kreisbogenzweiecke; dann gilt
$$A_x=a^2+2\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2$$
$$=a^2+\pi\cdot\frac{a^2}{2}-\pi\cdot\frac{a^2}{2}=a^2. \text{ (Bild 5).}$$

▲4▲ Für die schraffierte Fläche der Figur (Bild 6) gilt
$$F_6=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\pi\cdot d^2-\frac{1}{4}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$$
$$=\frac{1}{8}\pi d^2-\frac{1}{16}\pi d^2=\frac{1}{16}\pi d^2.$$
Für die schraffierte Fläche der Figur (Bild 7) gilt
$$F_7=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\pi\cdot d^2+\frac{1}{4}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$$
$$=\frac{1}{8}\pi d^2+\frac{1}{16}\pi d^2=\frac{3}{16}\pi d^2.$$
Für die schraffierte Fläche der Figur (Bild 8) gilt
$$F_8=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\pi d^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\pi\left(\frac{d}{4}\right)^2$$
$$=\frac{1}{8}\pi d^2+\frac{1}{32}\pi d^2-\frac{1}{64}\pi d^2=\frac{9}{64}\pi d^2.$$
Für die schraffierte Fläche der Figur (Bild 9) gilt
$$F_9=\frac{1}{4}\pi\cdot\left(\frac{3d}{4}\right)^2-\frac{1}{4}\pi\cdot\left(\frac{d}{4}\right)^2=\frac{9}{64}\pi d^2-\frac{1}{64}\pi d^2$$
$$=\frac{8}{64}\pi d^2=\frac{1}{8}\pi d^2.$$
Daraus folgt $F_1<F_4<F_3<F_2$.

▲5▲
$$F_{10}=(2a)^2-\frac{1}{4}\pi(2a)^2-a^2-\frac{1}{4}\pi a^2$$
$$-\left(a^2-\frac{1}{4}\pi a^2\right)=a^2\cdot(4-\pi),$$
$$F_{11}=a^2+\frac{1}{4}\pi a^2+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2=a^2\cdot\left(1+\frac{3}{8}\pi\right),$$
$$F_{12}=(2a)^2-4\cdot\frac{1}{4}\pi a^2=a^2\cdot(4-\pi),$$
$$F_{13}=4\cdot a^2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=2a^2\cdot(\pi-2),$$
$$F_{14}=a\cdot 2a=2a^2,$$
$$F_{15}=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\pi a^2$$
$$+\left(a^2-\frac{1}{4}\pi a^2\right)=\frac{1}{8}a^2\cdot(12+\pi),$$
$$F_{16}=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}\pi a^2$$
$$+\left[\frac{1}{4}\pi a^2-\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]=\frac{1}{8}a^2\cdot(3\pi+4).$$

▲6▲ Aus $k=\frac{1}{2}\cdot 2\pi r=\pi\cdot r$ und
$s=4\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{r}{4}=\pi\cdot r$ folgt $k=s$. (Bild 17)

▲7▲ Aus $F_{18}=\frac{1}{4}\pi d^2$ und
$F_{19}=4\cdot\frac{1}{4}\pi\cdot\left(\frac{d}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\pi d^2$ folgt $F_1=F_2$.
(Bild 18 und 19)

▲8▲
$$F_{20}=3a\cdot a+\frac{1}{2}\pi a^2=3a+\frac{1}{2}\pi a^2=\frac{a^2}{2}\cdot(6+\pi)$$
$$=\frac{1}{2}(6+\pi)\text{ cm}^2\approx 4{,}57\text{ cm}^2,$$
$$F_{21}=4a\cdot a+(4a^2-\pi a^2)=8a^2-\pi a^2$$
$$=a^2(8-\pi)=(8-\pi)\text{ cm}^2\approx 4{,}86\text{ cm}^2,$$
$$F_{22}=2\cdot\left[\frac{1}{4}\pi(2a)^2-2\cdot\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]$$
$$+\frac{1}{2}\pi a^2=2\pi a^2=2\pi\text{ cm}^2\approx 6{,}28\text{ cm}^2.$$

Lösungen zu: Wer löst mit?
alpha-Wettbewerb, Heft 1/83

Ma 9 ■2313 Man erkennt sofort, daß 0 eine Lösung ist. Es sei nun $y=0$, dann gilt
$$y(y^2-y)=y(y+1),$$
$$y^2-y=y+1,$$
$$y^2-2y-1=0,$$
$$y_{1,2}=1\pm\sqrt{2}.$$
Nur die drei reellen Zahlen $1-\sqrt{2}$; 0 und $1+\sqrt{2}$ erfüllen die gegebene Gleichung. Probe!

Ma 9 ■2314
$q=a+b=7$, also $b=7-a$.
$z_1=10a+b=10a+7-a=9a+7;$
$z_2=10b+a=10(7-a)+a=70-9a.$
$z_2{}^2=51=\frac{1}{4}z_1{}^2$, $(70-9a)^2+51=\frac{1}{4}(9a+7)^2$,
$a^2-\frac{574}{27}a+\frac{2195}{27}=0,$
$a_1=5$; a_2 entfällt, da gebrochene Zahl. Die Zahl lautet 52. Es gilt $25^2+51=26^2$.

Ma 9 ■2315 Es gilt $1981=7\cdot 283$ und
$1982=2\cdot 991$.
Da das Primzahlzerlegungen sind, gibt es für das Alter von Stefan bzw. Susi jeweils nur eine Möglichkeit:
Stefan ist 7 Jahre, Susi 2 Jahre alt.
Nun gilt
$283+991=1274$ und
$1274=2\cdot 7\cdot 7\cdot 13.$
Daraus folgt:
Die Mutter ist $2\cdot 13=26$ Jahre alt; die Großmutter ist $7\cdot 7=49$ Jahre alt. $(1274:26=49)$

Ma 9 ▪2316 Nach Aufgabenstellung gilt

$u=2(a+b)=26\text{ cm}$ (1)

und $A=a\cdot b \quad =40\text{ cm}^2.$ (2)

Aus (1) folgt $a=13\text{ cm}-b$. Das setzt man in (2) ein und erhält

$(13\text{ cm}-b)b=40\text{ cm}^2$ bzw.

$b^2-13b\text{ cm}+40\text{ cm}^2=0$. Es folgt $b_1=8$ cm und $b_2=5$ cm. Die Längen der Rechteckseiten betragen $a=8$ cm und $b=5$ cm.

Ma 10/12 ▪2317 $(AF9)_{16}=2809$; $(BAD)_{16}=2989$; $10000=(2710)_{16}$; $1000000=(F4240)_{16}$.

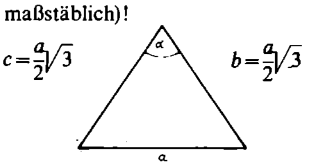
Heft 1/83:

Ma 10/12 ▪2318 Es sei $n=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_s^{k_s}$ die Zerlegung von n in Potenzen von Primfaktoren. Für die Anzahl t der Teiler von n gilt dann $t=(k_1+1)(k_2+1)\cdot\ldots\cdot(k_s+1)$. Nun hat n die Primfaktoren 2, 3 und 5, da $30=2\cdot 3\cdot 5$, und zwar nur diese drei, weil $t=30=2\cdot 3\cdot 5$ gilt.

Wegen $n=2^{k_1}\cdot 3^{k_2}\cdot 5^{k_3}$ gibt es nun die folgenden Möglichkeiten:

k_1	k_2	k_3	n
4	2	1	$2^4\cdot 3^2\cdot 5^1=\ 720$
4	1	2	$2^4\cdot 3^1\cdot 5^2=1200$
2	4	1	$2^2\cdot 3^4\cdot 5^1=1620$
2	1	4	$2^2\cdot 3^1\cdot 5^4=7500$
1	4	2	$2^1\cdot 3^4\cdot 5^2=4050$
1	2	4	$2^1\cdot 3^2\cdot 5^4=11250$

Ma 10/12 ▪2319 Die Kantenlänge des Tetraeders sei a. Dann beträgt die Länge der Höhe einer Seitenfläche nach dem Satz des Pythagoras $h=\frac{a}{2}\sqrt{3}$. Zwei verschiedene vom Mittelpunkt einer Kante ausgehende Höhen bilden den gesuchten Winkel. Die Größe dieses Winkels berechnen wir mit Hilfe des Cosinussatzes im dargestellten Dreieck (nicht maßstäblich)!



Es gilt $\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,

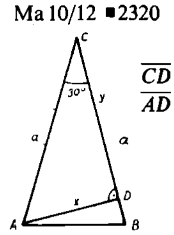
und wegen $b=c$ gilt $\cos\alpha=\frac{2b^2-a^2}{2b^2}$,

$\cos\alpha=1-\frac{a^2}{2b^2}$, und wegen $b=\frac{a}{2}\sqrt{3}$ gilt

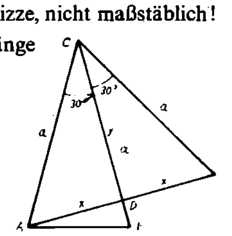
$\cos\alpha=1-\frac{a^2}{\frac{3a^2}{4}}$, $\cos\alpha=\frac{1}{3}$. Es folgt $\alpha\approx 70{,}52°$.

Zwei Seitenflächen eines regelmäßigen Tetraeders schneiden sich unter einem Winkel von etwa 70,52°.

Ma 10/12 ▪2320 Skizze, nicht maßstäblich!



Länge
$\overline{CD}$ y
$\overline{AD}$ x



Aus $\sin 30°=\frac{x}{a}$ folgt $x=\frac{a}{2}$.

Aus $\cos 30°=\frac{y}{a}$ folgt $y=\frac{a}{2}\sqrt{3}$.

Nun gilt

$A_{ADC}=\frac{\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3}}{2}$, d. h.

$A_{ADC}=\frac{a^2}{8}\cdot\sqrt{3}$.

$A_{ADC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\sin 60°$, $A_{ADC}\approx 0{,}216\,a^2$.

Ph 6 ▪131

Geg.:

Zimmerlänge $a=2{,}70$ m

Zimmerbreite $b=\frac{2}{3}\cdot 2{,}70\text{ m}=1{,}80\text{ m}$

Höhe des Wasserstandes im Zimmer

$c=2\text{ cm}=0{,}02\text{ m}$

Aquariumlänge $x=\frac{1}{3}\cdot 1{,}80\text{ m}=0{,}60\text{ m}$

Aquariumbreite $y=\frac{1}{6}\cdot 1{,}80\text{ m}=0{,}30\text{ m}$

Ges.: Die Höhe des Wasserstandes im Aquarium z.

Das Volumen V des Wassers im Aquarium beträgt $V=x\cdot y\cdot z$

bzw. $z=\frac{V}{x\cdot y}$. (1)

Nun ist V aber gleich dem Volumen des Wassers im Zimmer. Also gilt auch

$V=a\cdot b\cdot c.$ (2)

Setzt man (2) in (1) ein, erhält man

$z=\frac{a\cdot b\cdot c}{x\cdot y}$,

$z=\frac{2{,}70\text{ m}\cdot 1{,}80\text{ m}\cdot 0{,}02\text{ m}}{0{,}60\text{ m}\cdot 0{,}30\text{ m}}$,

$z=0{,}54$ m.

Der Wasserstand im Aquarium betrug 54 cm.

Ph 7 ▪132 Geg.:

Nutzleistung der Windkraftmaschine $P_1=4$ kW, Wirkungsgrad der Windkraftmaschine $\eta_1=42\%$, Wirkungsgrad der Wasserpumpe $\eta_2=85\%$

Pumphöhe $h=5$ m

Zeit $t=1\text{ h}=3600\text{ s}$

Ges.: Gesamter Wirkungsgrad η

Zugeführte Windleistung P_{zu}

Gesamte Leistung P_{ges}

Gewicht des Wassers G

a) Der gesamte Wirkungsgrad η der Anlage ergibt sich aus

$\eta=\eta_1\cdot\eta_2$,

$\eta=0{,}42\cdot 0{,}85=0{,}357$.

Es werden insgesamt 35,7% der Windleistung ausgenutzt.

b) Die Windkraftmaschine hat einen Wirkungsgrad von $\eta_1=\frac{P_1}{P_{zu}}$,

also $P_{zu}=\frac{P_1}{\eta_1}=\frac{4\text{ kW}}{0{,}42}=9{,}524\text{ kW}\approx 9{,}5\text{ kW}$.

Der Wind muß eine Leistung von 9,5 kW zur Verfügung stellen.

c) Bei Höchstleistung der Anlage gilt

$\eta=\frac{P_{ges}}{P_{zu}}$, also $P_{ges}=\eta\cdot P_{zu}$, $P_{ges}=\frac{\eta_1\cdot\eta_2\cdot P_1}{\eta_1}$,

$P_{ges}=\eta_2\cdot P_1=0{,}85\cdot 4\text{ kW}=3{,}4\text{ kW}$.

Die Wasserpumpe gibt bei Höchstleistung der Anlage eine Leistung von 3,4 kW ab.

d) Es steht eine Leistung von

$3{,}4\text{ kW}=3{,}4\cdot 102\,\frac{\text{kpm}}{s}=346{,}8\,\frac{\text{kpm}}{s}$

zur Verfügung. Nun gilt

$P_{ges}=\frac{W}{t}$ und mit $W=G\cdot h$

$P_{ges}=\frac{G\cdot h}{t}$. Dann ist

$G=\frac{P_{ges}\cdot t}{h}$,

$G=\frac{346{,}8\text{ kpm}\cdot 3600\text{ s}}{5\text{ m}\cdot\text{s}}$,

$G=249696$ kp,

$G\approx 250000\text{ kp}=250\text{ Mp}\mathrel{\hat{=}}250\text{ m}^3$.

Mit dieser Anlage können in einer Stunde 250 m³ Wasser aus 5 m Tiefe gepumpt werden.

Ph 8 ▪133 Geg.: $d_1=75{,}0$ cm Ges.: $\Delta\vartheta$

$d_0=74{,}6$ cm

$\alpha=0{,}000013\,\frac{1}{\text{K}}$

Für die Längenänderung eines festen Körpers gilt die Gleichung

$\Delta l=l_0\cdot\alpha\cdot\Delta\vartheta$, also $\Delta\vartheta=\frac{\Delta l}{l_0\cdot\alpha}$.

Nun ist der Umfang des Reifens $l_0=\pi\cdot d_0$, der des Rades $l_1=\pi\cdot d_1$, und es ergibt sich ein Längenunterschied von

$\Delta l=l_1-l_0$,

$\Delta l=\pi d_1-\pi d_0$,

$\Delta l=\pi(d_1-d_0)$.

Damit erhält man für

$\Delta\vartheta=\frac{\pi(d_1-d_0)}{\pi d_0\cdot\alpha}$,

$\Delta\vartheta=\frac{d_1-d_0}{d_0\cdot\alpha}$,

$\Delta\vartheta=\frac{(75{,}0-74{,}6)\text{ cm}\cdot\text{K}}{74{,}6\text{ cm}\cdot 0{,}000013}$,

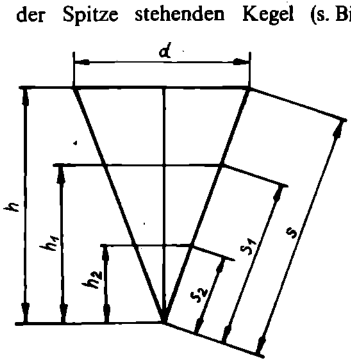
$\Delta\vartheta\approx 412\text{ K}\mathrel{\hat{=}}412\,°\text{C}$.

Der Reifen muß um 412 °C erwärmt werden.

Ph 9 ▪134 Geg.: $d=\ 8$ cm Ges.: s_1 und s_2

$h=16$ cm

Es handelt sich stereometrisch um einen auf der Spitze stehenden Kegel (s. Bild) mit



$V=\frac{1}{12}\pi d^2h$. Weiterhin gilt, da $h=16$ cm und $d=8$ cm ist, $h:d=2:1$ bzw. $d=\frac{h}{2}$, und damit ist $V=\frac{1}{48}\pi h^3$ bzw. $h=\sqrt[3]{\frac{48\cdot V}{\pi}}$.

(Fortsetzung Heft 6/83)

Eine kleine Lektion in Tangram

Tangram ist ein Spiel, das schon vor 2000 Jahren in China bekannt gewesen sein soll. Tangram besteht aus 7 Elementen, die 5 größeren Elemente kann man sich aus 2 bzw. 4 der kleinen Elemente, also aus gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken zusammengesetzt denken. Bild 1 zeigt, wie ihr ein Quadrat zerlegen müßt, um die Teile des Tangram-Spieles zu erhalten. Aus der Fülle möglicher Figuren habe ich 7 ausgewählt, an denen ihr euch probieren könnt (Bild 2). Ihr seid nun besser für Hexatrion und Pentamino gerüstet und solltet euch diese Spiele noch einmal vornehmen (siehe *alpha*, Heft 4/83).

Wer Freude daran findet, schöne Figuren und Muster zu entwerfen, sollte sich die „runde" Variante des Tangrams ansehen (ND, 8./9. 5. 1982). Die Konstruktionsvorschrift entnehmt ihr dem Bild 3. Ein mögliches Muster ist in Bild 4 dargestellt.

Denkbar sind nun ähnliche Spiele mit anderen Elementen. Das Bild 5 gibt die Zerlegung eines Quadrates in 14 Elemente an, von denen jedes aus vier gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken besteht, allerdings sind die 8 schraffierten Dreiecke (6 Flächen) überflüssig. In diesem Spiel tragen die Elemente folgende Bezeichnungen (siehe Bild der Wissenschaft, 8, 1979): Quadrat (1), Obelisk (2), Bumerang (3), Tempel (4), Pfeil (5), Rechteck (6), Bahnhof (7), Haken (8), Trapez (9), Schlange (10), Breitparallelogramm (11), Unterstand (12), Schmalparallelogramm (13), Dreieck (14). Legt aus diesen Elementen Figuren! Dabei ist es erlaubt (wie bei den vorher beschriebenen Spielen auch), die Elemente umzudrehen, also ihre Rückseite nach oben zu legen.

Das Trapez (Bild 6) ist aus 9 Elementen zusammengesetzt. Parallelogramm, Quadrat und Rechteck (Bild 7) bestehen aus jeweils 4 Elementen. Findet weitere Figuren!

Zum Schluß soll ein Spiel ganz anderer Art beschrieben werden: Смекалка (was frei übersetzt „Köpfchen" bedeutet). Übertragt dazu das in Bild 8 dargestellte Quadrat im Maßstab 1 : 2 auf Pappe, es ist die Grundfläche des Spieles. Schneidet dann aus einem gleich großen Quadrat von dicker Pappe oder Sperrholz die in dem Bild nicht getönte Fläche aus, und klebt die Restflächen entsprechend der Skizze auf die Grundfläche! Fertigt euch nun 16 runde Spielsteine von der Größe eines Pfennigs an! Je 4 dieser Steine werden rot, gelb, blau bzw. grün angemalt. Setzt je 4 Steine nebeneinander in die Ecken der Spielfläche, z. B. so, daß die 4 Steine einer Farbe in je einer Ecke liegen! Erzeugt nun neue Anordnungen, indem ihr in jedem Zug nur einen Spielstein bewegt! Man kann sich etwa die Aufgabe stellen, die Steine so zu verschieben, daß in jeder Ecke je ein Stein von jeder Farbe liegt. Ihr könnt euch natürlich allgemein als Problem stellen, aus einer vorgegebenen Anordnung der 16 Steine irgendeine gewünschte Anordnung herzustellen, indem ihr erlaubte Züge (Schieben von jeweils einem Spielstein) ausführt. Ihr werdet bald merken, daß es gar nicht sehr schwer ist, eine Lösung zu erhalten. Aber welcher Spieler benötigt dazu die kleinste Anzahl von Zügen? Viel Spaß beim Spielen und Knobeln!

W. Schmidt

Bild 1

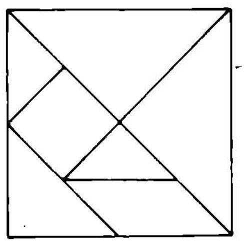


Bild 2

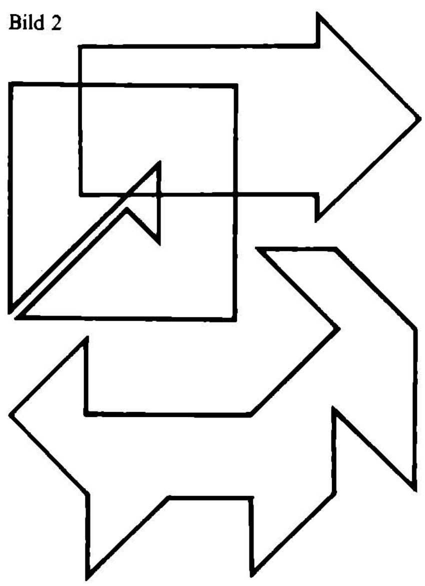
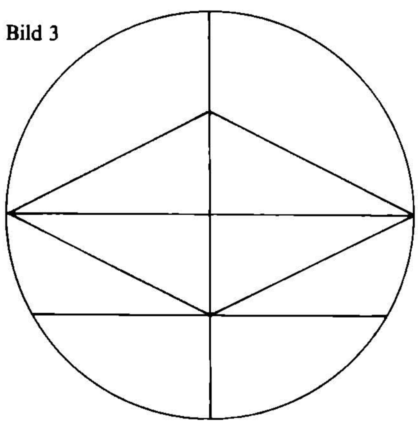


Bild 3



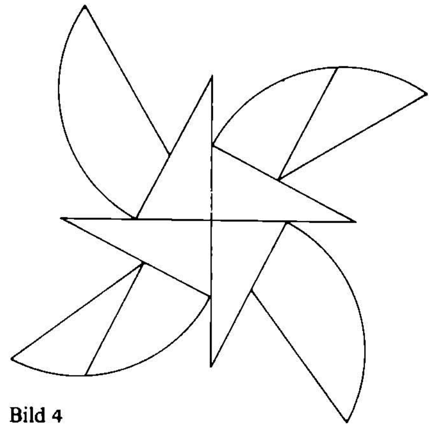


Bild 4

Bild 5

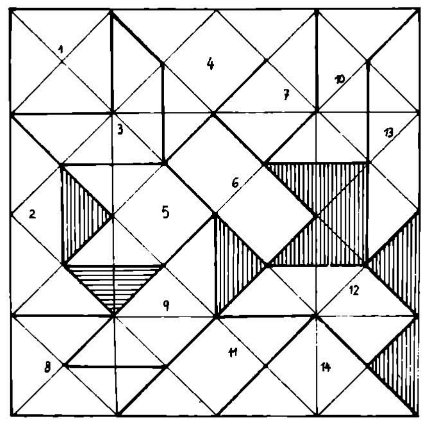


Bild 6

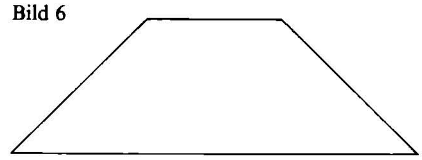


Bild 7

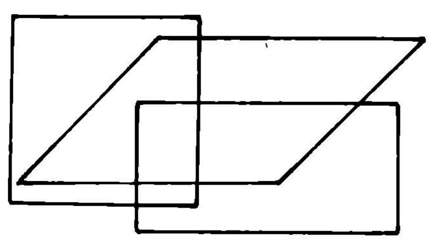
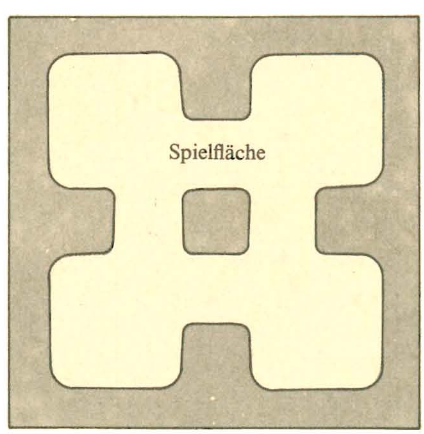


Bild 8

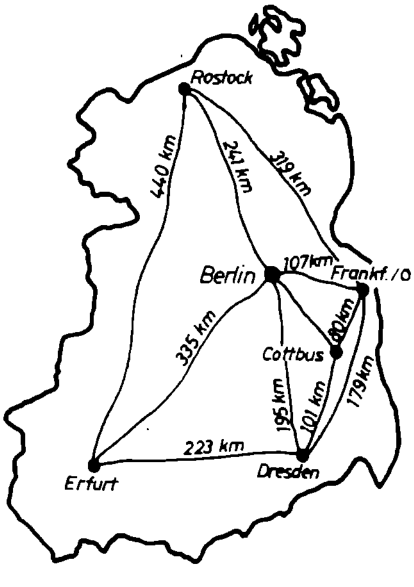


Heiterer Denksport

Heimatkunde

Von Berlin aus soll eine Rundreise durch die 5 angegebenen Städte gemacht werden. Welches ist die kürzeste Reiseroute?

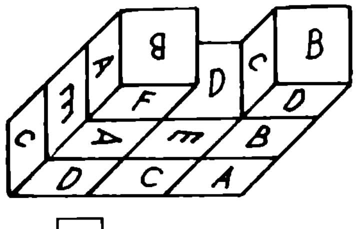
Aus: Technikus, Berlin

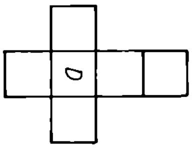


Würfeleien

Alle acht Würfel in der abgebildeten Figur sind gleich.

Finde heraus, wie die Buchstaben auf dem daneben abgebildeten Netz anzuordnen sind und – zweitens – welche drei Buchstaben sich auf den Grundflächen der drei unteren Würfel befinden! *Quant, Moskau*





Zahlenquadrat

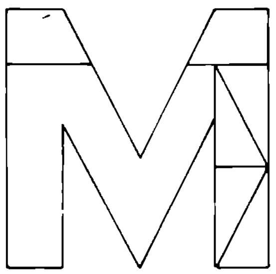
Setzt die natürlichen Zahlen von 1 bis 16 richtig in die Leerfelder ein!

Dr. R. Mildner, Sekt. Math. der Karl-Marx-Universität Leipzig

2	+		−		=	6
+		−		−		+
	+		−		=	
−		+		+		−
	+		−		=	
=		=		=		=
4	+		−		=	8

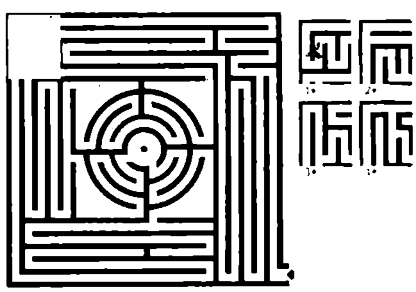
Gut kombinieren

Übertrage dieses M auf Transparent, zerschneide es in seine sieben Teile und versuche, es möglichst schnell wieder zusammenzusetzen! *Mathem. pie, London*



Kombiniere!

delta, Warschau



Irrgarten

Janos sucht gemeinsam mit seinem Hund den Weg zur Datsche. Hilf ihm dabei!

Füles, Budapest

Von gleicher Form

Dieses 6 × 6-Quadrat soll in vier Teile von gleicher Form und Größe in der Weise zerschnitten werden, daß sich in jedem dieser Teile ein Kreuz und ein Kreis befindet.

LVZ, Leipzig

	X	X	X		
		O	O		
		O	O		
					X

Mit scharfem Blick

Bei genauer Betrachtung der einzelnen Zeilen werdet ihr gewisse Gesetzmäßigkeiten in der Aufeinanderfolge erkennen. Füllt dementsprechend die Leerfelder aus!

Dr. R. Mildner, Leipzig

1						
2	0	2	6	12		20
3	○ △ □	○ □ △	□ ○ △		△ □ ○	△ ○ □
4	123	132	213	231		321
5	135	246	357	468	579	
6	0 1 3	0 3 6	2 5 9	6 7 12	12 9 15	
7	3 2 4 5	3 6 4 5	8 7 5 6	9 8 10 7	12 11 13 14	
8	alp	haa	lph	aal	pha	
9	ace	gik	moq	suw		egi
10	+ − • :	: − • +	+ • − :		+ − • :	: − • +
11	2	7	14	23		47
12						

ISSN 002-6395 · alpha · Berlin · 17 (1983) 5 · Seiten 97 bis 120