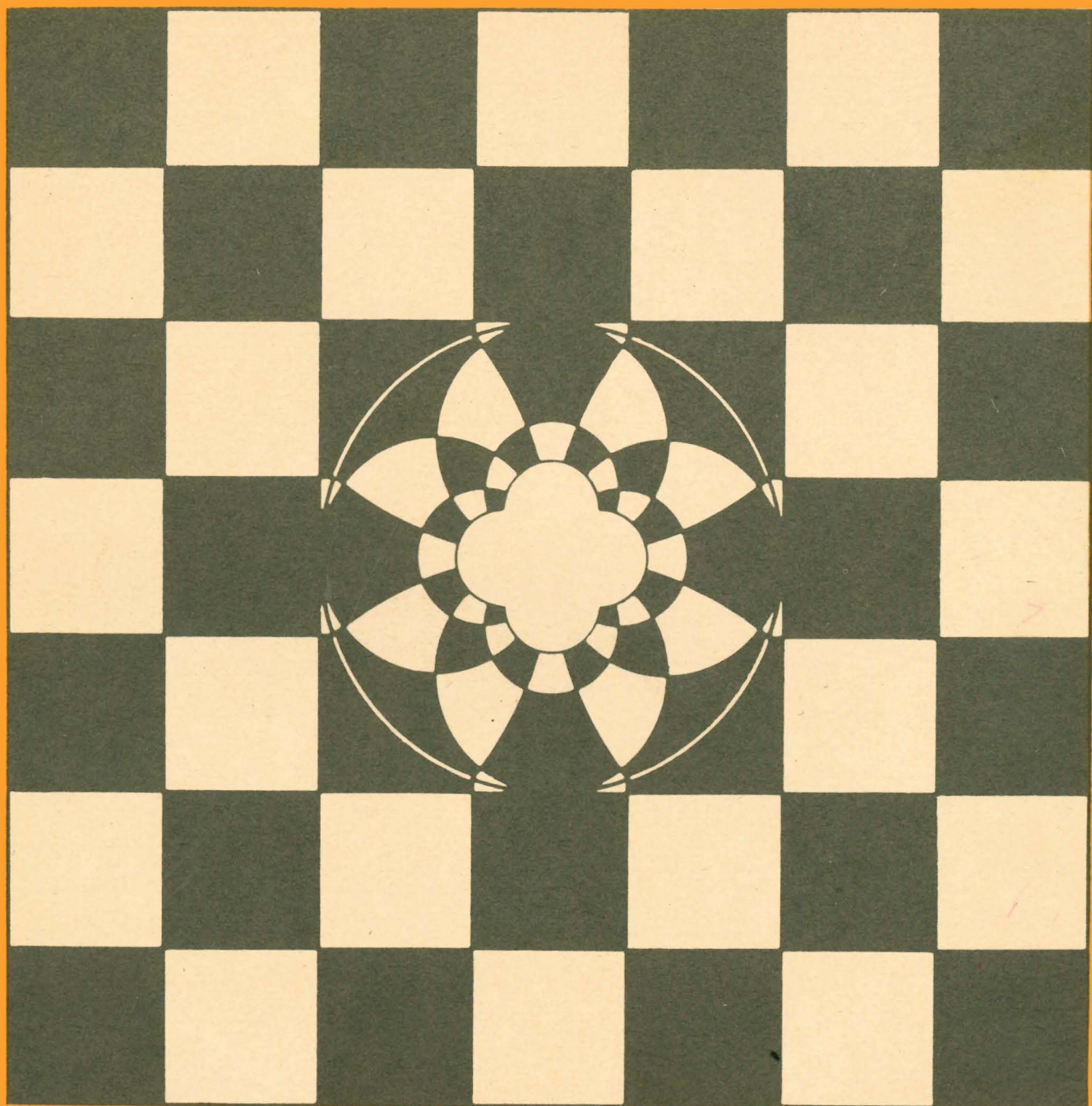


**Mathematische
Schülerzeitschrift**

alpha



1

**Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
19. Jahrgang 1985
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395**

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold

Herausgeber und Verlag:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag

Anschrift des Verlags:

1086 Berlin, Krausenstr. 50, PSF 1213

Anschrift der Redaktion:

7027 Leipzig, PSF 14

Redaktion:

OSTR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn.

G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr.

W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat.

J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent

Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Natio-

nalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Stu-

dienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberleh-

rer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstu-

dienrat J. Lehmann, VLdV (Leipzig);

Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leip-

zig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Mü-

ritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam);

Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifs-

wald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dres-

den); Oberstudienrat G. Schulze (Herz-

berg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Trä-

ger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch,

VLdV (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Ma-

thematik der *Karl-Marx-Universität* Leipzig

(Ltg. Dr. C.-P. Helmholz)

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545
des Presseamtes beim Vorsitzenden des
Ministerates der Deutschen Demokrati-
schen Republik

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzel-
heft 0,50 M, im Abonnement zweimonat-
lich 0,50 M. Bestellungen werden in der
DDR von der Deutschen Post und dem
Buchhandel entgegengenommen. Der Be-
zug für die Bundesrepublik Deutschland
und Berlin (West) erfolgt über den Buch-
handel; für das sozialistische Ausland über
das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt
und für alle übrigen Länder über: Buchexport
Volkseigener Außenhandelsbetrieb der
DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Eigenfoto Ch. Posthoff (S. 2);
B. Schümichen, TU Dresden (S. 3); Vignet-
ten aus *Quant*, Moskau (S. 3); Eigenfotos
L. Püffeld (S. 5); H. Parchau (2×), aus NBI
(S. 11); L. Schneider, aus *Eulenspiegel*
(S. 11); L. Schneider, Berlin (S. 20); Rolf
F. Müller (S. 12)

Typographische Gestaltung: H. Tracksdorf,
Leipzig

Titelblatt: Nach einer Vorlage *Pictorial Ma-*
thematics Serie B, Yeshiva University New
York, gestaltet von W. Fahr, Berlin



Gesamtherstellung: INTERDRUCK. Graphi-
scher Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der aus-*
gezeichneten Qualitätsarbeit, III/18/97

Artikelnummer (EDV) 128

ISSN 0002-6395

Redaktionsschluß: 22. Oktober 1984

Auslieferungstermin: 11. Februar 1985



Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 1 Die Lösung kombinatorischer Probleme mit Hilfe von
Computerprogrammen [9]¹⁾
Prof. Dr. sc. techn. Ch. Posthoff, Sektion Mathematik der Techn. Hochschule
Karl-Marx-Stadt
- 3 Eine Aufgabe von em.o. Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h. c. Helmut
Heinrich [10]
- 4 Daten unserer Schulgeschichte – Vom schweren Anfang [7]
Dr. Rosel Keetmann, *Karl-Marx-Universität* Leipzig, aus DLZ
- 5 *alpha* stellt vor: Dipl.-Ing. Lutz Püffeld, RAW Halberstadt
- 6 Das Pascalsche Dreieck [8]
Prof. Dr. A. Bendukidse, aus *Quant*, Moskau
- 8 Eine Rechteckzerlegung – arithmetisch, geometrisch und
rechentechnisch betrachtet [8]
Dr. W. Dörband, Sektion Mathematik der *E.-M.-Arndt-Universität* Greifswald
- 10 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht
speziell für Klasse 5/6
Schätz doch mal! [5]
Dr. L. Flade, Sektion Mathematik der *Martin-Luther-Universität* Halle
- 12 Ein Besuch in der Knobelwerkstatt, Teil 1: Vielerlei Knebele
[5]
Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der *Karl-Marx-Universität* Leipzig
- 14 Eine empirische Bestätigung der heliozentrischen Theorie von
Copernicus und Kepler (Teil 2) [9]
Dr. H. Pieper, Akademie der Wissenschaften der DDR, Zentralinstitut für
Astrophysik
- 16 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt
Spezialistenlager Mathematik [5]
Dipl.-Lehrer R. Drendel, Leiter des Kreisklubs *Jg. Mathematiker* Senftenberg
- 17 *alpha*-Wettbewerb 1983/84 · Preisträger
- 18 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig
- 20 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]
Wettbewerbsaufgaben zu Mathematik, Physik, Chemie
- 22 Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen [5]
J. Lehmann, Leipzig/Th. Scholl, Berlin
- 23 Lösungen [5]
- IV. U.-Seite: Das Loch im Nichts und andere Dinge, die es gar nicht
gibt [5]

Text: Dr. C.-P. Helmholz, Leipzig – **Bilder:** Ing. R. Breitenfeld, Akademie der
Wissenschaften der DDR, Zentralinstitut für Kernforschung – Rossendorf

¹⁾ bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet.

Die Lösung kombinatorischer Probleme mit Hilfe von Computerprogrammen

Die ständig zunehmende Verbreitung von Computern in allen Gebieten von Wissenschaft und Technik, in allen Zweigen der Volkswirtschaft hat außerordentlich bedeutsame Auswirkungen auf die Gestaltung von Arbeitsplätzen und -weisen, auf die zur Verfügung stehenden Mittel und Methoden zur Lösung von Problemen des jeweiligen Wissenschaftsgebietes. Besonders enge Beziehungen bestehen dabei zwischen Informatik und Methoden der Mathematik. Zum Teil entstehen völlig neue Teilgebiete innerhalb der Mathematik, zum Teil verschieben sich die zu lösenden Teilaufgaben, da u. a. die Arbeitsgeschwindigkeit der Computer ein wesentlicher Faktor wird. Diesen Problembereich wollen wir hier an einem klassischen Beispiel erläutern und dabei einige Überlegungen zur algorithmischen Lösung von Problemen und deren Formulierung durch Programmiersprachen anstellen.

Folgende Aufgabe sei gestellt:

Auf einem Schachbrett sind 8 Damen so zu postieren, daß keine Dame eine andere bedroht.

Wie viele derartige Positionen existieren?

Dabei wird natürlich vorausgesetzt, daß sich die Damen horizontal, vertikal und diagonal bewegen können. Eine Dame gilt dann als bedroht, wenn sie sich in der Zugrichtung einer anderen Dame befindet. Dieses Problem wurde in vergangenen Jahrhunderten viel untersucht (u. a. auch von Gauß) – man fand 92 Lösungen, zum Teil mit sehr feinsinnigen Überlegungen zur Geometrie des Schachbrettes, zu möglichen Symmetrien, Spiegelungen, Drehungen usw.

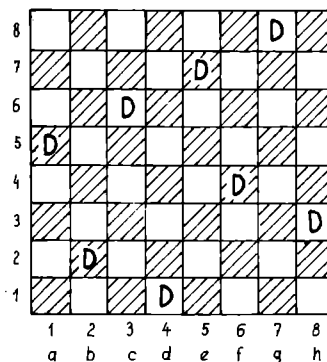
Wie stellt sich nun diese Aufgabe unter Berücksichtigung der Verwendung eines Computers dar?

Es genügt eine kurze Überlegung, um feststellen zu können, daß in jeder Horizontalen (jeder *Reihe*) und in jeder Vertikalen (jeder *Linie*) *genau* eine Dame stehen muß. Gäbe es eine Reihe oder Linie ohne Dame, so müßten in einer anderen zwei Damen stehen, die sich aber dann gegenseitig bedrohen würden.

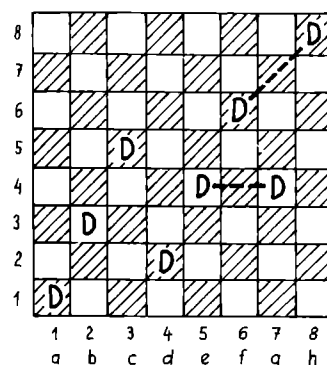
Bild 1 zeigt eine im Sinne der Aufgabe gültige und eine ungültige Aufstellung. Zur Beschreibung der Verteilung der 8 Damen auf dem Brett numerieren wir die acht Linien von 1 bis 8 und definieren einen Vektor POSITION, dessen Komponenten den acht Linien zugeordnet sind: die

Bild 1
Zwei mögliche Positionen auf dem Brett.

a) korrekte Position



b) falsche Position



Werte der Komponenten bezeichnen das Standfeld auf der zugehörigen Linie. Die Positionen von Bild1 werden durch die beiden Vektoren $[5, 2, 6, 1, 7, 4, 8, 3]$ bzw. $[1, 3, 5, 2, 4, 6, 4, 8]$ beschrieben.

Ein erstes, für derartige kombinatorische Probleme sehr typisches Lösungsverfahren ist die *vollständige Durchmusterung* aller möglichen Positionen. Dieses Verfahren besteht aus zwei wesentlichen Schritten:

a) sukzessive Erzeugung *aller möglichen* Positionen;

b) Überprüfung aller Positionen und Aussonderung der geeigneten.

Für den Schritt a) ist wichtig, daß keine Position vergessen und möglichst keine doppelt erzeugt wird. Um dies zu erreichen, verwendet man die *lexikographische Anordnung* der Positionen.

Dieses Prinzip, dem tatsächlich die Anord-

nung der Stichworte in einem Lexikon folgt, machen wir uns an der Aufzählung aller dreibuchstabigen Wörter aus den Buchstaben a, b, c klar:

aaa	aab	aac
aba	abb	abc
aca	acb	acc
baa	bab	bac
bba	bbb	bbc
bca	bcb	bcc
caa	cab	cac
cba	cbb	cbc
cca	ccb	ccc

Es ist $a < b < c$ ($<$ bezeichne die *Vorgängerrelation* im Alphabet), und man setzt alle Komponenten auf den kleinsten Wert (aaa). Anschließend durchläuft die letzte Komponente in der vorgeschriebenen Reihenfolge alle möglichen Werte (aaa, aab, aac). Ist man mit einer Komponente am Ende angelangt, wird die vorhergehende um ein Element erhöht, und alle weiteren werden wieder auf den Anfang zurückgesetzt (aba). Dies wird solange wiederholt, bis sämtliche Komponenten den höchstmöglichen Wert angenommen haben (ccc). Überträgt man diese Methode auf die möglichen Aufstellungen der acht Damen, so erhält man folgende Vektoren:

```

11111111
11111112
    :
11111118
11111121
    :
11111188
11111211
    :
18888888
21111111
    :
88888888

```

Dabei geschieht diese Aufzählung „ohne Sinn und Verstand“; es wird „nur“ gewährleistet, daß keine Position fehlt und keine doppelt vorkommt. Als Anzahl möglicher Positionen erhält man somit

$$n = 8^8 = 2^{24} = 16\,777\,216.$$

Die Prüfung der Korrektheit führen wir in drei Etappen durch. Zwei (oder mehr) Damen in einer Reihe sind dann vorhanden, wenn in einem Positionsvektor eine Zahl mehrfach vorkommt. Etwas schwieriger gestaltet sich die Prüfung, ob sich zwei Damen auf der gleichen Diagonale befinden. Hierzu betrachten wir Bild 2.

Im ersten Diagramm enthält jedes Feld die Summe, im zweiten die Differenz von Horizontale und Vertikale. Absteigende Diagonalen werden also durch konstante Summen, aufsteigende durch konstante Differenzen charakterisiert.

In der obigen Beschreibung einer Position durch Vektoren muß man also für eine bestimmte Dame Summe bzw. Differenz von Komponentennummer und Komponentenwert bilden und prüfen, ob sich diese Werte, die die auf- und die absteigende Diagonale charakterisieren, für weitere Komponenten wiederholen.

Bild 2
Summe und Differenz von Zeilen- und Spaltennummer

a) Summe

9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9

b) Differenz

7	6	5	4	3	2	1	0
6	5	4	3	2	1	0	-1
5	4	3	2	1	0	-1	-2
4	3	2	1	0	-1	-2	-3
3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7

Betrachten wir noch ein zweites Lösungsverfahren, das sich ergibt, wenn man nicht „gar zu viele unnötige“ Positionen prüfen will, sondern „konstruktiv möglichst gute“ Positionen zu erzeugen versucht. Für nicht zu große Problemkomplexität ist die vollständige Durchmusterung zwar völlig legitim, bei ansteigender Komplexität gerät man aber auch schnell an die Grenzen der Leistungsfähigkeit der Computer, auch bei sehr hohen Arbeitsgeschwindigkeiten. Die Idee zur Konstruktion von Lösungen besteht in folgender Vorgehensweise: In jeder Vertikalen (von links nach rechts) wird das *niedrigste zulässige* Feld als Damenposition ausgewählt. Kommt man auf diese Weise bis zur 8. Komponente, so ist eine *korrekte* Position gefunden. Gelangt man in eine Sackgasse (gibt es in der nächsten Vertikalen keine Setzungsmöglichkeit mehr), so nimmt man die letzte Setzung zurück, verwendet dort die nächsthöhere Möglichkeit und „probiert sein Glück“ aufs neue. Diese Methoden werden als *Backtrack-Verfahren* bezeichnet. Sie bilden in der Informatik eine gut untersuchte, weitverbreitete Lösungsmethodik. Betrachten wir dazu den Beginn des Lösungsweges.

1. POSITION [1] = 1;
2. POSITION [2] = 3;
3. POSITION [3] = 5;
4. POSITION [4] = 2;
5. POSITION [5] = 4.

An dieser Stelle versucht man vergeblich, eine Dame auf der 6. Linie unterzubringen, alle Felder sind bedroht. Deshalb wird die letzte Setzung zurückge-

nommen und das nächste freie Feld auf der 5. Linie probiert. Da auch dies nicht zum Erfolg führt, geht man *zurück* zur 4. Linie, Feld 2 – mit dieser Setzung war nämlich die 6. Linie bereits blockiert. Das nächste freie Feld auf der 4. Linie ist 7:

4. POSITION [4] = 7;
5. POSITION [5] = 2;
6. POSITION [6] = 4;
7. POSITION [7] = 6.

Es ist fast geschafft, aber auf der 8. Linie ist nunmehr kein freies Feld mehr vorhanden; also geht es wieder zurück.

Die erste im Sinne der Aufgabenstellung korrekte Position erhält man mit

1. POSITION [1] = 1;
2. POSITION [2] = 5;
3. POSITION [3] = 8;
4. POSITION [4] = 6;
5. POSITION [5] = 3;
6. POSITION [6] = 7;
7. POSITION [7] = 2;
8. POSITION [8] = 4.

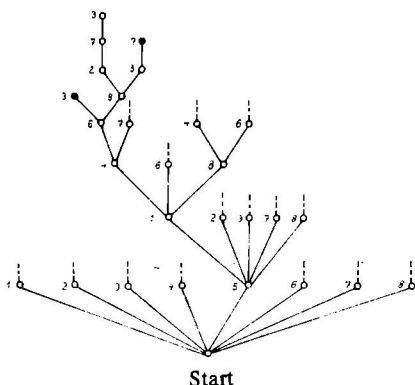
Damit hat man eine Lösung gefunden und strebt die nächste ebenfalls durch Backtracking an.

Diese Methode wird häufig bei der Programmierung von Spielen zur Konstruktion von Varianten (Spiel- oder Variantenbaum), bei Suchprozessen (Suchbaum) u. a. verwendet. Betrachtet man nämlich die Konstruktion einer gewünschten Position als Spiel und schreibt als Spielregeln vor, daß die Linien von 1 bis 8 nacheinander durchlaufen werden, so hat man für den 1. Zug die Felder 1, 2, ..., 8 zur Verfügung.

Hat man etwa den 1. Zug POSITION [1] = 5 ausgeführt, so sind für den 2. Zug die Felder 1, 2, 3, 7, 8 möglich usw.

Bild 3 zeigt einen Ausschnitt aus dem zu dieser Aufgabe gehörenden Spielbaum.

Bild 3
Variantenbaum des Dameproblems



Durch ● sind Situationen markiert, in denen keine regelgerechte Fortsetzung mehr möglich ist. Der Sinn des Backtracking besteht nun einfach darin, daß man von einem solchen Punkt aus rückwärts geht und einen neuen möglichen Weg sucht. Dabei wird nur soweit zurückgegangen, wie es unbedingt erforderlich ist. So führt beispielsweise die Folge 5-1-4-6-3 zu keinem

Erfolg – man geht zurück und wählt 5-1-4-6-8... usw.

Probiert man dieses Verfahren einmal „mit Hand“ durch, so stellt man fest, daß der Aufwand, einen erfolgreichen Weg zu finden, immer noch beträchtlich ist, aber doch bedeutend geringer als bei vollständiger Durchmusterung. Der Vorteil, daß hierbei alle Lösungen erfaßt werden, bleibt aber erhalten.

Die Tabelle zeigt die Anzahl der Lösungen für $n = 1, \dots, 9$.

Tabelle: Die Anzahl der Lösungen für das n -Damen-Problem

	Anzahl der Positionen	Anzahl der Lösungen	
$n = 1$	1	1	100%
$n = 2$	4	0	0%
$n = 3$	27	0	0%
$n = 4$	256	2	0,781%
$n = 5$	3 125	10	0,320%
$n = 6$	46 656	4	0,008 57%
$n = 7$	826 973	40	0,004 84%
$n = 8$	16 777 216	92	0,000 54%
$n = 9$	387 420 489	352	0,000 09%

Ch. Posthoff



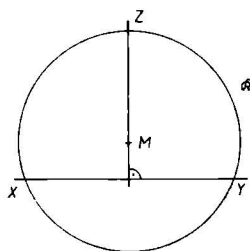
Kurzbiographie

Jahrgang 1943 – Abitur 1961 – NVA 1961 bis 1963 – Mathematikstudium an der Karl-Marx-Universität Leipzig 1963 bis 1968 – seit 1968 in Karl-Marx-Stadt tätig – 1968 bis 1972 in der Industrie tätig (Anwendungen der Mathematik auf betriebliche Probleme) – 1969 bis 1973 außerplanmäßige Aspirantur am Biophysikalischen Institut der KMU Leipzig, 1975 Dissertation A (Anwendung mathematischer Methoden in der kommunikativen Psychotherapie) – seit 1972 als Assistent bzw. Oberassistent an der TH Karl-Marx-Stadt tätig (Arbeitsgebiet: Mathematische Methoden innerhalb des Gebietes *Entwurf digitaler Systeme*) – 1979 Dissertation B (Behandlung dynamischer Erscheinungen in binären Systemen) – 1980 Berufung zum Dozenten an die Sektion Informationstechnik – 1983 Berufung: Lehrstuhl Computerwissenschaften an der Sektion Informatik (Arbeitsgebiete: *Rechnerarchitektur und Künstliche Intelligenz*).

Eine Aufgabe von em. o. Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h. c. Helmut Heinrich

Technische Universität Dresden

▲ 2520 ▲ Das Symbol $XY \cap \mathbb{K} \rightarrow Z$ be-
deute die folgende Konstruktion:

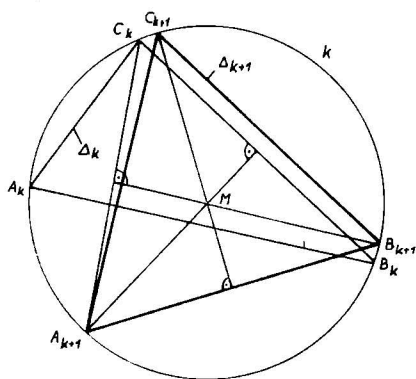


Auf der Sehne XY eines Kreises $\mathbb{K}$ ($r; M$)
wird die Mittelsenkrechte errichtet (Bild 1)
und in dem Punkt Z mit $\mathbb{K}$ geschnitten, für den

$$\angle XZY \leq \frac{\pi}{2} \quad (90^\circ) \quad (1)$$

ist. (Für den Fall, daß XY Durchmesser von
 $\mathbb{K}$ ist, stehen zwei Schnittpunkte gleichbe-
rechtigt zur Wahl. Es gilt dann in (1) das
Gleichheitszeichen.)

Es sei nun $A_0 B_0 C_0$ ein beliebiges, dem
Kreis $\mathbb{K}$ einbeschriebenes Dreieck. Von
ihm aus werde eine Folge von dem Kreis $\mathbb{K}$
einbeschriebenen Dreiecken $A_n B_n C_n$
($n = 1, 2, 3, \dots$) erzeugt, indem die folgende
dreigliedrige Konstruktionsvorschrift
durchgeführt wird (Bild 2):



1. $B_k C_k \cap \mathbb{K} \rightarrow A_{k+1}$
2. $A_{k+1} C_k \cap \mathbb{K} \rightarrow B_{k+1}$
3. $A_{k+1} A_{k+1} \cap \mathbb{K} \rightarrow C_{k+1}$

Es ist zu zeigen:

- I. Die Dreiecke $A_n B_n C_n$ konvergieren für
 $n \rightarrow \infty$ gegen ein dem Kreis $\mathbb{K}$ einbeschrie-
benes gleichseitiges Dreieck $A^* B^* C^*$.
- II. Für die Flächeninhalte $\Delta_n = \Delta(A_n B_n C_n)$
und $\Delta^* = \Delta(A^* B^* C^*)$ gilt

$$\Delta_0 \leq \Delta_1 \leq \Delta_2 \leq \Delta_3 \leq \dots \leq \Delta_n \leq \dots \leq \Delta^*$$

$$\Delta^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n = \frac{r^2}{4} \sqrt{3}$$

$$(\Delta = \max \Delta(ABC); A, B, C, \in \mathbb{K})$$



Geboren am 5. 9. 1904 in Gottesberg
(ehem. Schlesien). Schulbesuch von 1910
bis 1923 in Striegau, Posen und Schweid-
nitz (humanistisches Gymnasium) – Rei-
feprüfung im März 1923 – 1923 bis 1928
Studium an der Technischen Hochschule
Breslau – Juli 1928: Dipl.-Ing. der Fach-
richtung Mathematik – 1928 bis 1929 aus-
hilfsweise als Lehrer für Mathematik und
Physik an der Oberrealschule in Glogau
beschäftigt – 1929 wissenschaftliche
Staatsprüfung für das Lehramt an höheren
Schulen (Studienreferendar) – 1931 pädä-
gogische Staatsprüfung für das Lehramt an
höheren Schulen (Studienassessor) – Als
Studienassessor zeitbedingt ohne Stellung,
aber unentgeltlich (!) als Lehrkraft (insbe-
sondere für Physik) an einer höheren
Schule in Liegnitz eingesetzt – In dieser
Situation Bewerbung bei der *Staatlichen
Chinesischen Tungchi-Universität* in Wusung
bei Shanghai, im Februar 1933 Berufung
dorthin – Im Juli 1933 vor der Ausreise
nach China Promotion zum Dr.-Ing. an der
Technischen Hochschule Breslau (Thema:
Über die Pfeilstellung eines Tragflügels) –
1933 bis 1936 Professor für *Mathematik und
Darstellende Geometrie* an der *Tungchi-Uni-
versität* in Wusung – 1936 Rückkehr an die
Technische Hochschule Breslau, daselbst
im Juni 1937 Habilitation und ab 1938 bis
1945 Dozent für *reine und angewandte Ma-
thematik* – 1946 bis 1954 als Spezialist in
der Sowjetunion – Seit der Rückkehr in
die DDR Professor für *Angewandte Mathe-
matik* an der Technischen Hochschule
bzw. Universität Dresden – 1956 bis 1968
als Direktor des Instituts für *Angewandte
Mathematik* – 1968 bis 1970 (Emeritie-
rung) als Direktor der Sektion Mathematik
und Professor für *Numerische Mathematik* –
Seit 1964 Mitglied der *Deutschen Akademie
der Naturforscher Leopoldina* zu Halle –
1971 Ehrenpromotion an der Technischen
Hochschule zu Wien – 1961 Auszeich-
nung mit dem Vaterländischen Verdienst-
orden in Bronze – 1959 bis 1974 Herausge-
ber der Zeitschrift für *Angewandte Mathe-
matik und Mechanik* (ZAMM) als Nachfolger
von R. v. Mises, E. Trefftz und F. A. Wil-
lers – *Arbeitsgebiete*: Angewandte Analysis
(für Mathematiker, Physiker und Inge-
nieure), Praktische Analysis (numerische
und graphische Methoden), Matrizentheo-
rie.



▲ 1 ▲ Construct a square in a given tri-
angle so that the base of the square is along
the base of the triangle and the other two
vertices of the square are on the other two
sides of the triangle.

▲ 2 ▲ With a faucet turned on and the
drain closed, one can fill a tub with water
in 9 minutes; with the faucet turned off
and the drain open, it takes 12 minutes to
drain the tub full of water. How many mi-
nutes does it take to fill the empty tub with
water if the drain is open and the faucet is
turned on?

▲ 3 ▲ Pour construire la Tour Eiffel, on a
utilisé environ 885 m³ de fer; la masse volu-
mique du fer est 7,8 t/m³. Quelle masse de
fer a-t-on utilisée pour cette construction?

▲ 4 ▲ Une baignoire est remplie par son
robinet en 10 minutes et vidée par sa
bonde en $\frac{1}{4}$ d'heure. On ouvre le robinet et
on oublie de fermer la bonde; au bout de
combien de temps la baignoire sera-t-elle
pleine?

▲ 5 ▲ Сломаем пополам спичку. Одну
половинку переломим еще раз. Один из
получившихся кусочков снова попыта-
емся переломить пополам. Почему с ка-
ждым разом ломать спичку становится
все труднее?



▲ 6 ▲ Найдите все пятизначные числа,
равные кубу числа, образованного двумя
их последними цифрами.



Daten unserer Schulgeschichte

Vom schweren Anfang

Alle Kinder und Jugendlichen unserer Republik besuchen vom 6. bis 16. Lebensjahr die zehnklassige allgemeinbildende polytechnische Oberschule. Sie erhalten dort, unabhängig von der sozialen Stellung der Eltern, von Weltanschauung und Religion, eine gleich hohe, fundierte wissenschaftliche Allgemeinbildung. Hochqualifizierte Pädagogen arbeiten an der Erfüllung des anspruchsvollen Erziehungszieles: die allseitige und harmonische Entwicklung jedes Schülers, seine Befähigung zu bewußtem Handeln für die Gesellschaft. Und nichts empfinden die Kinder und Jugendlichen, ihre Eltern und ihre Lehrer selbstverständlicher als gerade dieses, das doch erstmalig in der Geschichte unseres Volkes ist. Und es bliebe für sie ohne besonderen Wert, ließen wir den Prozeß des Werdens dieser „Selbstverständlichkeiten“ der Vergangenheit anheimfallen.

Fort mit den Trümmern...

Der erste Schritt auf diesem Weg war die antifaschistisch-demokratische Schulreform. Ihre Hauptaufgabe bestand darin, die Jugend vom Druck der imperialistischen Ideologie zu befreien und im demokratischen Sinne umzuerziehen. In keinem der 1945 eine sozialistische Entwicklung nehmenden Länder Europas hatte der Faschismus einen solchen Einbruch unter der Bevölkerung erzielt wie in Deutschland und hier ganz besonders unter der Jugend. Die Faschisten gebrauchten die Schule als spezifisches Werkzeug zur Verhetzung der Jugend, und die Lehrerschaft hatte teilweise sogar fanatisch mitgeholfen, die Jugend für die barbarische Kriegführung reif zu machen.

Mehr als 70 Prozent aller Lehrer waren Mitglied der NSDAP.

Schwer wogen auch die materiellen Schäden, die der Faschismus im Schulwesen hinterließ. Im Bombenhagel anglo-amerikanischer Flugzeugangriffe auf deutsche Städte wurden zum Beispiel in Berlin von den 649 Schulgebäuden 149 zerstört, 42 sehr schwer und 85 mittelschwer beschädigt. Das waren 42,5 Prozent aller Gebäude, die demzufolge für den Schulbetrieb ausfielen. Ähnlich sah es in Leipzig aus oder in ländlichen Gegenden, die Frontgebiete gewesen waren. Der Faschismus hinterließ ein schweres Erbe. Aber der Sieg der Sowjetunion und ihrer

Verbündeten bedeutete nicht nur Zerschlagung des faschistischen Staates. Er hatte den deutschen staatsmonopolistischen Kapitalismus in seinen Grundfesten erschüttert und seine Regulierungsmechanismen zusammenbrechen lassen. Damit bot sich dem deutschen Volk die historische Chance, den Faschismus radikal unwiderstehlich zu überwinden. Diese Chance wurde in der sowjetischen Besatzungszone von den Kommunisten und den revolutionären Kräften der Sozialdemokratie genutzt. Dabei gingen sie von der richtigen Erkenntnis aus, daß es nicht möglich war, die Macht- und Eigentumsverhältnisse dauerhaft zu verändern und ein Wiedererstarken des Faschismus für immer zu verhindern, ohne den Einfluß der imperialistischen Bourgeoisie auch auf das Schulwesen ein für allemal zu brechen, den Schulunterricht von allen reaktionären Theorien zu befreien, alle Bildungssperren zu beseitigen, Kirche und Schule voneinander zu trennen, das Bildungsniveau der Werktätigen wesentlich anzuheben und sie zum selbständigen schöpferischen Handeln zu befähigen.

...und was Neues hingebaut

In diesem Sinne gab der *Aufruf der KPD an das deutsche Volk vom 11. Juni 1945* die Orientierung und traf der *Befehl Nr. 40 der Sowjetischen Militäradministration vom 25. August 1945* verpflichtende Festlegungen für die *Wiederaufnahme des Unterrichts an den Schulen am 1. Oktober 1945*.

Der Befehl ordnete an, neue Lehrpläne aufzustellen, alle faschistischen Lehrbücher und Unterrichtsmittel zu vernichten, neue Lehrbücher zum Druck vorzubereiten und nur solche Lehrer wieder im Schuldienst einzustellen, die nicht faschistisch engagiert und zu demokratischer Erziehungsarbeit fähig waren. Zugleich verbot der Befehl Nr. 40 alle allgemeinbildenden und fachlichen Privatschulen.

Gemeinsam mit den sowjetischen Bildungsoffizieren führten die neu geschaffenen Schulverwaltungen und die fortschrittlichen Lehrer einen hartnäckigen Kampf um die Lösung dieser Aufgaben. Es wurden provisorische Lehrpläne erarbeitet, die notgedrungen sehr allgemein bleiben mußten. Sie enthielten aber Minimalbedingungen für einen Unterricht auf antifaschistisch-demokratischer Grundlage. Ähnliches galt für die in kurzer Zeit erarbeiteten Lehrbücher. Für den Geschichtsunterricht war eine provisorische Lösung nicht möglich. Die bisher im Unterricht betriebene Geschichtsfälschung erwies sich von so prinzipieller Natur, daß eine neue Gesamtkonzeption für den Geschichtsunterricht erforderlich war. Bis zur Fertigstellung der neuen Konzeption am Ende des Schuljahres 1945/46 wurde darum an den Schulen kein Geschichtsunterricht erteilt. Mit der Einführung einer modernen Fremdsprache (in der Regel Russisch), des Faches Physik und eines Mathematikunterrichts statt des

volkstümlichen Rechnens erhielt die Volksschule ein deutlich höheres Niveau. Die faschistische Schulpolitik und der Krieg hatten die Lehrerschaft dezimiert. Nach der fristlosen Entlassung der mehr als 20 000 faschistisch gebundenen Lehrer fehlten für einen normalen Schulbetrieb 40 000 Lehrer. Diese Lücke wurde durch eine außergewöhnliche Maßnahme geschlossen – die Gewinnung von *Neulehrern*. Im ersten Nachkriegsschuljahr arbeiteten etwa 15 000 Neulehrer an den Schulen. Sie kamen aus den Reihen der Arbeiter, Bauern und anderer Werktätiger und waren in ihrer Mehrzahl jünger als 30 Jahre. Viele von ihnen besaßen nur Volksschulbildung. Sie waren die ersten Vertreter einer neuen Lehrerergeneration. Mit Begeisterung und hohem persönlichem Einsatz leisteten sie innerhalb und außerhalb der Schule umfängliche und wertvolle Erziehungs- und gesellschaftliche Arbeit. Den Unterricht bereiteten sie oft in später Nacht vor. Ihre Ausbildung war noch unzulänglich. Mitunter waren sie ihren Kindern nur einen Tag im Unterrichtsstoff voraus. Aber ihr Unterricht unterschied sich durch seinen neuen Inhalt, seine Frische und Lebendigkeit, durch ein vertrauensvolles, kameradschaftliches Verhältnis zu den Schülern positiv und grundsätzlich von dem bis dahin typischen Unterricht in deutschen Schulen. Ab Januar 1946 wurden dann weitere 25 000 Werktätige in *Acht-Monate-Lehrgängen* zu Lehrern ausgebildet.

Die vor und während des ersten Nachkriegsschuljahres durchgeführten Maßnahmen, von denen nur einige hier genannt wurden, dienten der Überwindung der Ideologie des Faschismus, der Brechung der Bildungsprivilegien und der Durchsetzung der Hegemonie der Arbeiterklasse im Schulwesen. Damit leitete bereits der Beginn der antifaschistisch-demokratischen Schulreform eine Veränderung des Klassencharakters der Schule ein.

Rosel Keetmann, aus DLZ

Illustration: Rudolph Grapentin



alpha stellt vor:

Dipl.-Ing.
Lutz Püffeld

RAW Halberstadt

Liebe Leser!

Seit nunmehr 18 Jahren beteilige ich mich regelmäßig am *alpha*-Wettbewerb. Manch einer der Leser fragt sich nun, wie ich mit der Zeitschrift *alpha* und damit dem Wettbewerb konfrontiert wurde, ob mir das Knobeln und Rechnen zum Finden von Lösungen Spaß macht oder wie ich am besten zur Lösung einer Aufgabe gelange. Diese und andere Fragen möchte ich im folgenden beantworten.

Als ich in die 5. Klasse ging, kam mein Vater eines Tages mit einer neuen Zeitschrift nach Hause, die den geheimnisvollen Namen *alpha* trug. Natürlich wollte ich wissen, was sich dahinter verbarg, und so blätterte ich diese Zeitschrift durch. Dabei stellte ich fest, daß es sich um eine mathematische Schülerzeitschrift handelt, die Wissenswertes und Informatives vermittelt, die unter der Überschrift *In freien Stunden - alpha-heiter* lustige Knobelaufgaben enthält, und die auch die Leser zur Beteiligung am Lösen von Mathematikaufgaben aufruft. Da ich natürlich wissen wollte, ob es mir gelingt, einige Aufgaben des *alpha*-Wettbewerbs zu lösen, begann ich sofort, mir diese Aufgaben genauer durchzulesen. Ich stellte fest, daß ich einige Aufgaben ohne größere Schwierigkeiten lösen konnte, daß es aber auch welche gab, über die ich länger nachdenken mußte oder die ich überhaupt nicht lösen konnte. Als dann nach einiger Zeit die Antwortkarten bei mir im Briefkasten lagen, freute ich mich darüber. Es gab aber auch Aufgaben, auf deren von mir eingesandte Lösung ich nur eine rote Karte bekam. Dies entmutigte mich aber nicht, sondern im Gegenteil bemühte ich mich beim nächsten Wettbewerb, auch Aufgaben höherer Klassenstufen zu lösen. Bei diesen Aufgaben hat es sich als zweckmäßig erwiesen, wenn ich mich mehrere Tage damit beschäftigt habe. Nicht selten legte ich angefangene Aufgaben wieder weg, um sie nach ein paar

Tagen erneut vorzuholen. So kam ich Schritt für Schritt weiter, bis ich endlich die Lösung gefunden hatte. In der Oberstufe habe ich auch in einem außerschulischen Mathematikzirkel mitgearbeitet. Oft wurden dort mit Hilfe unseres Mathelehrers schwerere *alpha*-Aufgaben gelöst.

Die regelmäßige Teilnahme am *alpha*-Wettbewerb hat sich natürlich auch positiv für mich ausgewirkt. So konnte ich bis zum Abitur mehrere erste bis dritte Plätze bei der Kreisolympiade *Junger Mathematiker der DDR* erringen.

Auch später während meines Elektrotechnikstudiums an der Technischen Hochschule *Otto von Guericke* in Magdeburg benötigte ich gute und fundierte mathematische Kenntnisse. Fast alle elektrotechnischen Probleme lassen sich durch mathematische Gleichungen beschreiben und dann auch durch spezielle Verfahren lösen. So ist es z. B. möglich, den zeitlichen Stromverlauf eines elektrischen Schaltkreises mit Hilfe der Laplace-Transformation (Transformation in den Bildbereich) zu errechnen, wenn zum Zeitpunkt $t = 0$ eine konstante EMK angelegt wird.

Heute bin ich Mitarbeiter in einer Konstruktionsabteilung für Elektrotechnik. Obwohl dort nicht mehr die Mathematik, so wie ich sie in der Schule und beim Studium angewendet habe, im Vordergrund steht, ist es trotzdem notwendig, für die Konstruktion von Schaltplänen Stromstärken, Widerstände oder Leitungsquerschnitte über Formeln auszurechnen. Auch jetzt werde ich mich weiterhin am *alpha*-Wettbewerb beteiligen.

Nun ist es aber nicht so, daß ich mich in meiner Freizeit nur mit Mathematik beschäftige. Ich spiele aktiv in der 1. Mannschaft von *Lok Halberstadt* Tennis und nehme dort auch am Wettkampfgeschehen teil. Einen großen Teil meiner Freizeit widme ich natürlich auch meiner Familie. Abschließend möchte ich euch eine anspruchsvolle Aufgabe vorstellen, deren Lösung ich mit Hilfe der Funktionsanalyse für zwei voneinander unabhängigen Veränderlichen gefunden habe.

Es ist zu beweisen, daß für alle reellen Zahlen x, y folgende Ungleichung eine wahre Aussage wird!

$$x^2 + y^2 + 1 \geq x + y + xy \quad (1)$$

Nach Subtraktion von $2xy$ und Umstellung ergibt sich:

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy + y^2 + 1 &\geq x + y - xy \\ (x - y)^2 + 1 &\geq x + y - xy \\ (x - y)^2 &\geq x + y - xy - 1 \end{aligned} \quad (2)$$

Es ist möglich, durch Probieren festzustellen, daß die Ungleichung (2) für alle reellen Zahlen x, y erfüllt ist. Das wäre jedoch kein Beweis, und man bekäme dafür bestimmt nur eine rote Karte.

Deshalb ist es notwendig, die Ungleichung wie folgt umzustellen:

$$0 \leq x^2 + y^2 - x - y - xy + 1. \quad (3)$$

Faßt man diese Ungleichung als Funktion auf, läßt sich schreiben

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y - xy + 1. \quad (4)$$

$z = f(x, y)$ stellt hierbei die Gleichung einer Fläche dar.

In der weiteren Funktionsanalyse untersuche ich die Funktion $f(x, y)$ auf Extremwerte und berechne diese.

Zunächst bilde ich die partiellen Ableitungen nach x und y .

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= z_x = 2x - 1 - y \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= z_y = 2y - 1 - x \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= z_{xx} = 2 \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= z_{yy} = 2 \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= z_{xy} = -1 \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= z_{yx} = -1 \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung:

$$z_x \stackrel{!}{=} 0$$

$$z_y \stackrel{!}{=} 0$$

Nach dem Nullsetzen von z_x und z_y erhält man ein Gleichungssystem mit den beiden Unbekannten x und y . Als Lösung ergeben sich ein oder mehrere Wertepaare x, y , die Koordinaten von extremwertverdächtigen Punkten der gegebenen Funktion (Fläche) sind.

$$\begin{aligned} 2x - 1 - y &= 0 \\ 2y - 1 - x &= 0 \\ y &= 2x - 1 \\ 4x - 2 - 1 - x &= 0 \\ x &= 1 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung:

Es muß die Determinante $D(x, y)$ bestimmt werden, um zu entscheiden, ob eine Extremstelle vorhanden ist oder nicht, und ob es sich dabei um ein Maximum oder Minimum handelt.

$$\begin{aligned} D(x, y) &= \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} \\ D(x, y) &= z_{xx} \cdot z_{yy} - z_{yx} \cdot z_{xy} \\ D(x, y) &= 2 \cdot 2 - 1 \\ D(x, y) &= 3 \end{aligned}$$

Da $D(x, y) > 0$ folgt, daß eine Extremstelle existiert. Aus $z_{xx} = z_{yy} = 2 > 0$ folgt, daß diese Extremstelle ein Minimum darstellt. Zum Schluß muß noch der zugehörige Funktionswert z berechnet werden.

$$\begin{aligned} z_{\min} &= 1^2 + 1^2 - 1 - 1 - 1 \cdot 1 + 1 \\ z_{\min} &= 0 \end{aligned}$$

Die gegebene Funktion besitzt also ein Minimum im Punkt $P(1, 1, 0)$.

Da $z_{\min} = 0$ ist, ist somit bewiesen, daß die Ungleichung (3) für alle reellen Wertepaare x, y erfüllt ist. Das Minimum wird bei $x = y = 1$ erreicht, d. h., es gilt das Gleichheitszeichen in der Ungleichung (1). Ich hoffe, daß mein gewähltes Beispiel dazu beiträgt, daß ihr beim Lösen eurer Aufgaben vom schematischen Probieren nach Möglichkeit abseht, sondern daß ihr vielmehr eure Kenntnisse dahingehend anwendet, Lösungen durch Gesetzmäßigkeiten und Rechenverfahren zu finden.

L. Püffeld



Das Pascalsche Dreieck

Wir wollen ein Blatt Papier zur Hand nehmen und darauf eine quadratische Tabelle mit 100 Kästchen (zehn Zeilen und zehn Spalten) so groß zeichnen, daß in jedes Kästchen eine höchstens dreistellige Zahl eingetragen werden kann.

Fertig?

Ja! – Dann wollen wir mit dem Ausfüllen anfangen.

In die Kästchen der ersten Spalte schreiben wir jedesmal eine „1“. In die noch offenen Kästchen der ersten Zeile werden Nullen geschrieben. Welche Zahlen in die übrigen Kästchen zu schreiben sind, ergibt sich aus der folgenden einfachen Regel: In jedes Kästchen wird die Summe derjenigen beiden Zahlen eingetragen, die in der vorherigen Zeile direkt darüber und links daneben stehen. Das Bild 1 soll das nochmals verdeutlichen. So ergibt sich für die zweite Zeile in der zweiten Spalte eine 1 (denn $1 + 0 = 1$), und in der dritten Zeile steht in derselben Spalte eine 2 ($1 + 1 = 2$) und so weiter.

Zu eurer Kontrolle schreiben wir hier die vierte

1 3 3 1 0 0 0 0 0

Bild 1

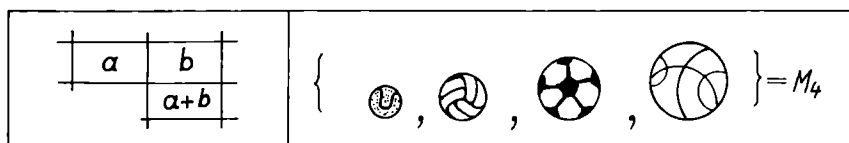


Bild 2

Bild 3

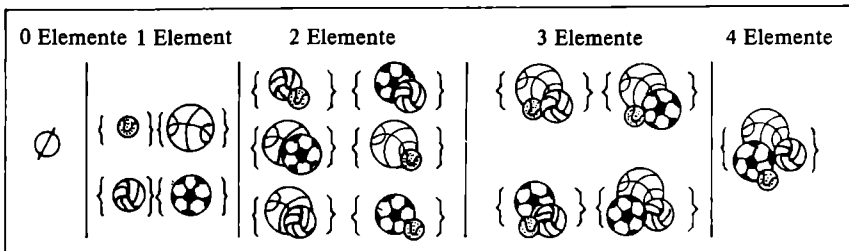
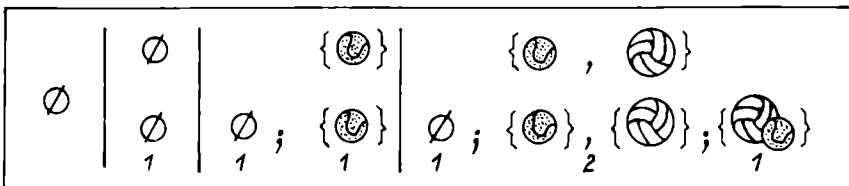


Bild 4



und die neunte Zeile der fertigen Tabelle auf:

1 8 28 56 70 56 28 8 1 0.

Schaut euch jetzt die fertige Tabelle aufmerksam an!

Die Kästchen, in denen keine Nullen stehen, bilden ein Dreieck, bei dem zwei Seiten nur aus Einsen bestehen (die senkrechte und die schräge), während die waagerechte Seite so aussieht:

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1.

(Man kann die Konstruktion der Tabelle selbstverständlich auch weiter fortsetzen oder auch eher beenden, so daß mehr oder weniger als zehn Zeilen ausgefüllt werden!) Das entstandene Zahlendreieck nennt man zum Gedenken an den bedeutenden französischen Gelehrten *Blaise Pascal* (1623 bis 1662), der es zuerst genauer studiert hat, das *Pascalsche Dreieck*. Wozu ist diese Spielerei aber nun eigentlich gut?

Wir zählen Teilmengen

Wir betrachten die aus vier verschiedenen Bällen gebildete Menge M_4 . Ihre Elemente seien also etwa ein Tennis-, ein Volley-, ein Fuß- und schließlich noch ein Basketball (Bild 2).

Jetzt suchen wir alle ihre Teilmengen einschließlich der leeren Menge $\emptyset$ und der ganzen Menge M_4 , sortieren sie nach der Anzahl ihrer Elemente (Bild 3) und schreiben auf, wie viele Mengen jeder Sorte es gibt!

Richtig! Wir finden die Zahlen

1 4 6 4 1.

Kommt euch diese Zeile aber nicht irgendwie bekannt vor?

Aber ja, wir haben die fünfte Zeile des *Pascalschen Dreiecks* gefunden. Und das ist kein Zufall!

Wenn wir die Menge M_3 nehmen, die aus drei Bällen gebildet ist, dann finden wir auf dem eben beschriebenen Wege die Zahlen

1 3 3 1

für die Anzahl der 0-, 1-, 2- oder 3elementigen Teilmengen, und das ist die vierte Zeile des Pascalschen Dreiecks!

Und das gilt ganz allgemein:

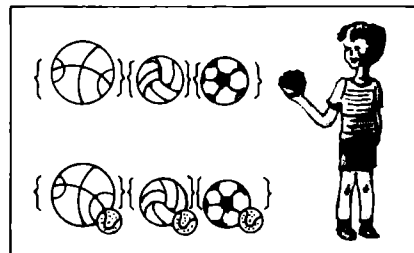
Nimmt man eine aus genau n Elementen bestehende Menge M_n und schreibt die Anzahl ihrer Teilmengen auf, die jeweils kein, ein, zwei, drei, ..., (n - 1) bzw. n Elemente enthalten, dann erhält man gerade die (n + 1)-te Zeile des Pascalschen Dreiecks.

Wir überprüfen diese Behauptung zunächst noch an den Fällen $n = 0$, $n = 1$ und $n = 2$ und finden sie immer bestätigt (Bild 4).

Um die Behauptung aber ganz allgemein beweisen zu können, müssen wir vor allem zeigen, daß jede Zeile aus der vorherigen nach derselben Regel berechnet werden kann, wie sie bei der Bildung des Pascalschen Dreiecks benutzt wird. Davon können wir uns aber überzeugen!

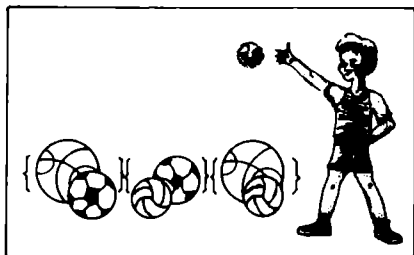
Wenn wir beispielsweise die Zahl der zweielementigen Teilmengen von M_4 feststellen wollen, dann stecken wir für einen Moment den Tennisball in die Tasche und erhalten die Menge M_3 . Sie enthält bereits drei Teilmengen mit je zwei Elementen (Bild 5):

Bild 5



Wollen wir die übrigen zweielementigen Teilmengen von M_4 bekommen, dann brauchen wir offensichtlich den Tennisball aus der Tasche nur in eine der einelementigen Teilmengen von M_3 zu legen (Bild 6):

Bild 6



Wir finden somit genau $3 + 3 = 6$ solche Mengen, genau wie es die Bildungsregel des *Pascalschen Dreiecks* verlangt. Es ist recht einleuchtend, daß dieser Vorgang zur Bestimmung der Zahl aller k -elementigen Teilmengen einer Menge M_n aus n Elementen völlig analog durchgeführt werden kann, wenn $k \leq n$ ist.

Die Anzahl der Selementigen Teilmengen einer Menge aus acht Elementen brauchen wir demnach nicht mühsam abzuzählen, sondern finden sie sofort in der neunten Zeile an fünfter Stelle: 70. Das ist aber nicht die einzige Anwendung des *Pascalschen Dreiecks*.

Der Binomische Satz

Die Potenzen eines Binoms – nehmen wir zunächst einmal $(1+x)$ – können wir durch Ausmultiplizieren und Ordnen nach Potenzen von x noch relativ leicht als Summe schreiben:

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + 1x^2,$$

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + 1x^3,$$

$$(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + 1x^4.$$

Wollen wir auch $(1+x)^5$ oder etwa gar $(1+x)^8$ so ausrechnen, so wird uns das sicher ziemlich beschwerlich werden. Gibt es denn einen leichteren Weg?

Und wieder hilft uns unser Dreieck!

Die Koeffizienten vor den Potenzen von x

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \ 2 \ 1 \\ 1 \ 3 \ 3 \ 1 \\ 1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1 \end{array}$$

stimmen genau mit der 3. bis 5. Zeile des *Pascalschen Dreiecks* überein.

Um zu beweisen, daß diese Beobachtung auch hier kein Zufall, sondern eine allgemeingültige Regel ist, haben wir uns wieder zu überlegen, daß beidemale dasselbe Bildungsgesetz vorliegt.

Betrachten wir beispielsweise

$$(1+x)^5 = (1+x)(1+x)^4$$

$$= (1+x)(1+4x+6x^2+4x^3+1x^4),$$

so sehen wir, daß sich etwa der Koeffizient von x^3 als Summe der Koeffizienten von x^2 und x^3 in der vorhergehenden Potenz ergibt: wie im *Pascalschen Dreieck* erhalten wir $10 = 6 + 4$.

Und der Sachverhalt gilt in der Tat allgemein.

Die Folge der Koeffizienten der 0-ten, ersten, zweiten, ..., n -ten Potenz von x in der n -ten Potenz des Binoms $(1+x)$ stimmt mit der $(n+1)$ -ten Zeile des *Pascalschen Dreiecks* überein.

Wieder hilft uns das Dreieck Zeit sparen. Ganz ohne Rechnung schreiben wir jetzt beispielsweise auf:

$$\begin{aligned} (a+b)^9 = & a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 84a^6b^3 \\ & + 126a^5b^4 + 126a^4b^5 + 84a^3b^6 \\ & + 36a^2b^7 + 9ab^8 + 1b^9. \end{aligned}$$

Eigenschaften des Pascalschen Dreiecks

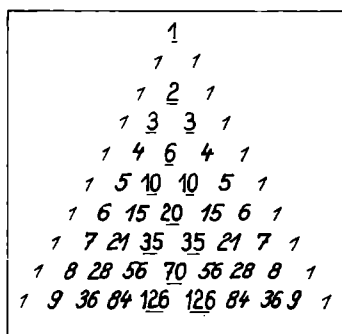
Lassen wir die Nullen weg, so können wir unserer Tabelle eine symmetrische Form geben (Bild 7):

Zwei Eigenschaften der Tabelle wollen wir herausstreichen.

- (1) Jede Zeile ist bezüglich ihrer Mitte symmetrisch besetzt.
- (2) Die Summe der Zahlen in der $(n+1)$ -ten Zeile ist doppelt so groß wie die der vorherigen Zeile und folglich gleich 2^n .

Es ist nicht schwierig, diese Eigenschaften zu beweisen, denn sie sind eine unmittelbare Folgerung aus der Bildungsvorschrift.

Bild 7



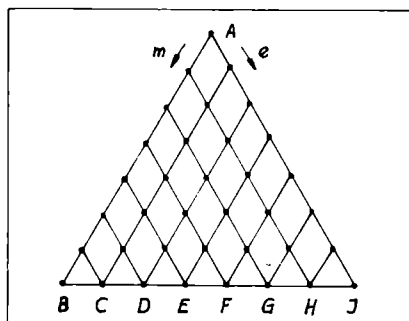
Beide können aber auch noch auf je zwei anderen Wegen bewiesen werden, nämlich unter Verwendung der Anzahl von Teilmengen oder unter Ausnutzung des Binomischen Satzes.

Aufgaben

▲ 1 ▲ Führt die Beweise selbständig durch!

▲ 2 ▲ Vom Punkte A an der Ecke eines Straßennetzes wandert eine Gruppe von 2^7 Leuten los, und zwar so, daß an A und an jeder Abzweigung jeweils die Hälfte der ankommenden Gruppe die Richtung $\vec{m}$, die andere die Richtung $\vec{l}$ einschlägt. Wie viele Leute kommen schließlich in den einzelnen Punkten $B, C, D, \dots, H, I$ am Ende des Netzes (Bild 8) an?

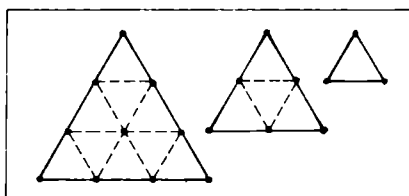
Bild 8



▲ 3 ▲ Wie viele a) zweiziffrige und b) dreiziffrige Zahlen gibt es, wenn die Ziffern der Größe nach fallend geordnet stehen sollen?

▲ 4 ▲ Als *Dreieckszahl* bezeichnet man die Anzahl der Gitterpunkte, die zu einem Teildreieck eines regulären Dreiecksgitters gehören (Bild 9). Wo findet man diese Dreieckszahlen im *Pascalschen Dreieck*?

Bild 9



▲ 5 ▲ Multipliziere aus:

a) $(a-b)^6$; b) $(x-2y)^5$.

A. Bendukidse,

Anmerkungen des Übersetzers: (1) Wenn ihr noch mehr über das Pascalsche Dreieck wissen wollt, so empfehle ich die Lektüre des Büchleins:

L. Lovász, K. L. Vesztegombi, J. Pelikán, Kombinatorik, BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig, 1. Auflage 1977 (Math. Schülerbücherei Nr. 90)

(2) Die in diesem Artikel vorgelegten „Beweise“ von Aussagen der Form: „Für alle natürlichen Zahlen n gilt: ...“ sind eigentlich alle unvollständig. Echte Beweise werden daraus erst, wenn wir die Methode der vollständigen Induktion anwenden. Hier wird immer nur der entscheidende Schluß erläutert. Über mathematische Beweise und die genannte Methode speziell solltet ihr euch in dem Buch: R. Thiele, *Mathematische Beweise*, BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig, 2. Auflage 1981 genauer informieren.

aus Quant, Moskau,
übersetzt von Dr. R. Hofmann, Leipzig

Welchen Ursprung haben die Namen der Monate?

Die ersten acht Monate wurden vorwiegend nach römischen Göttern oder historischen Persönlichkeiten benannt. Das ist heute nicht weiter verwunderlich, da der heute gültige *Julianische Kalender* von dem römischen Feldherrn und Staatsmann Julius Cäsar (100 v. u. Z. bis 44 v. u. Z.) eingeführt wurde. Ihm zu Ehren erhielt gleich der Juli seinen Namen. Auch dem römischen Kaiser Augustus, der einen nach dem Tode Cäsars gemachten Fehler in der Zeitrechnung korrigierte, wurde diese Ehre zuteil – der achte Monat heißt August. Der Monat, der das Jahr eröffnet, wurde nach Janus, dem Gott der Tür, des Ein- und Ausgangs, Januar benannt. Von den Namen des Kriegsgottes Mars, der Göttin Maia und der obersten Göttin Juno, der Schützerin des Staates, leiten sich März, Mai und Juni ab.

Die restlichen Namen hängen mit dem „vorjulianischen Kalender“ zusammen, bei dem das Jahr am 1. März begann. Demzufolge waren September, Oktober, November und Dezember der siebente bis zehnte Monat im Jahr – die lateinischen Zahlen *septem*, *octo*, *novem* und *decem* (7, 8, 9 und 10) verstecken sich in ihren Namen. Im letzten Monat hatte man sich innerlich und äußerlich zu reinigen. So wurde das altrömische Reinigungs- und Sühnefest Februa zum Monatsnamen Februar.

Aus: *technikus*

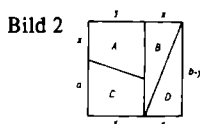
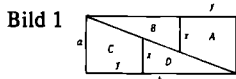
Eine Rechteckzerlegung – arithmetisch, geometrisch und rechentechnisch betrachtet

1. Aufgabe

Man zerlege ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b , $b \geq a$ durch drei geradlinige Schnitte so in vier Teile, daß diese zu einem Quadrat zusammengelegt werden können, das natürlich den gleichen Flächeninhalt wie das gegebene Rechteck hat.

2. Hinweise für die Lösung

Beliebig *schmale* Rechtecke kann man nicht in der geforderten Art zerlegen. So kann man z. B. ein Rechteck mit den Seitenlängen $b = 100$ und $a = 1$ sicher nicht so in vier Teile schneiden, daß alle diese in ein Quadrat der Seite 10 hineinpassen. Man wird sich also auf *kleinere* Seitenverhältnisse beschränken müssen. Wir wollen aber außerdem Zerlegungen, bei denen das Seitenverhältnis eine Konstante sein muß, als uninteressant betrachten. So verhält es sich z. B. mit der Zerlegung, die in Bild 1 und 2 angedeutet ist. (Nach ND vom 23./24. 7. 83, Knobelseite.)



Man erkennt sofort anhand von Bild 2: $a + x = \sqrt{ab}$, $x + y = \sqrt{ab}$, $b - y = \sqrt{ab}$, also besteht zwischen a und b der Zusammenhang

$$b - a = (b - y) + (x + y)$$

$$-(a + x) = \sqrt{ab}$$

$$\text{oder } b^2 - 3ab + a^2 = 0$$

$$\text{oder } \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 3\left(\frac{b}{a}\right) + 1 = 0.$$

Die beiden Wurzeln sind:

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) \quad \text{und}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) = \frac{1}{\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})}.$$

Die zweite Wurzel liefert geometrisch nichts Neues, die Rollen von a und b sind nur vertauscht. Setzt man $b > a$ voraus, so ist also diese Zerlegung nur für das Seitenverhältnis

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) \quad \text{gültig.}$$

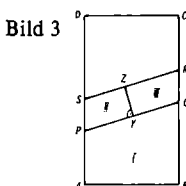
Wir suchen dagegen eine Rechteckzerlegung, bei der das Seitenverhältnis $\frac{b}{a}$ in einem Intervall liegen darf:

$$1 \leq \frac{b}{a} \leq G.$$

Über die Grenze G muß eine Aussage getroffen werden. Bei der vorgeschlagenen Lösung ist $G = 3 + 2\sqrt{2}$, ob es andere Zerlegungen G gibt, ist mir nicht bekannt. Es sei zugelassen, daß beim Zusammenlegen der Teilstücke diese gespiegelt werden dürfen.

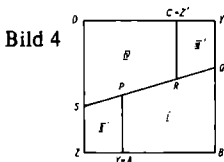
3. Lösung

Ein Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen a und b , $\frac{b}{a} \geq 1$ soll wie folgt in vier Teiltrapeze I bis IV zerlegt werden (Bild 3):



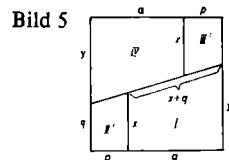
Durch zwei geradlinige und parallele Schnitte PQ und RS soll ein Parallelogramm $PQRS$ aus der Mitte des Rechtecks herausgeschnitten werden. Dabei sollen zwei kongruente Teiltrapeze abfallen: $ABQP$ und $CDSR$. Das Parallelogramm $PQRS$ wird weiter durch einen Schnitt YZ halbiert, der senkrecht zu PQ und RS verläuft, so daß zwei weitere Teiltrapeze entstehen: $PYZS$ und $RZYQ$, die kongruent sein sollen.

Nun soll untersucht werden, welche Bedingungen man an die Schnitte knüpfen muß, damit die vier Teiltrapeze zu einem Quadrat zusammengelegt werden können (Bild 4):



(II' und III' sind Spiegelbilder von II und III aus Bild 3, die Fußpunkte Y und Z des dritten Schnittes treten in Bild 4 doppelt auf: Z und Z' , Y und Y' .)

Bezeichnungen: $\overline{AB} = \overline{CD} = a$
 $\overline{YZ} = \overline{Y'Z'} = p$
 $\overline{AP} = \overline{CR} = x$
 $\overline{BQ} = \overline{DS} = y$
 $\overline{SZ} = \overline{QY'} = q$ (Bild 5)



Die Unbekannten p , q , x , y müssen folgende Bedingungen erfüllen:

$$(1) a + p = \sqrt{ab} \quad (1. \text{ Längenbedingung})$$

$$(2) y + q = \sqrt{ab} \quad (2. \text{ Längenbedingung})$$

$$(3) \frac{x - q}{p} = \frac{y - x}{a} \quad (\text{Geradenbedingung})$$

$$(4) (y - x)^2 + a^2 = (x + q)^2$$

(Rechteckbedingung, da der Pythagoras die Rechtwinkligkeit voraussetzt.) (Inhaltsformeln für Rechteck und Trapez werden nicht benutzt.)

Aus (1) folgt: $p = \sqrt{ab} - a$.

Aus (2) folgt: $q = \sqrt{ab} - y$.

p , q eingesetzt in (3):

$$\frac{x + y - \sqrt{ab}}{\sqrt{ab} - a} = \frac{y - x}{a}$$

$$\text{oder } x + \left(2\sqrt{\frac{a}{b}} - 1\right)y = a$$

q eingesetzt in (4) liefert:

$$(y - x)^2 + a^2 = (x - y + \sqrt{ab})^2$$

$$= (x - y)^2 + 2(x - y)\sqrt{ab} + ab$$

$$\text{oder } -x + y = \frac{1}{2}\sqrt{ab} - \frac{a}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Damit ist für x und y ein lineares Gleichungssystem gefunden:

$$x + \left(2\sqrt{\frac{a}{b}} - 1\right)y = a$$

$$-x + y = \frac{1}{2}\sqrt{ab} - \frac{a}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Dieses System ist eindeutig lösbar.

Man findet:

$$x = \frac{b - a}{4} + \frac{a}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$y = \frac{b - a}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{ab}$$

Beachten wollen wir noch, daß die Variable q als Streckenlänge nicht negativ sein kann. Daher liefert $q = 0$ eine Grenzbedingung:

$$q = \sqrt{ab} - y$$

$$= \sqrt{ab} - \frac{b - a}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{ab} = 0$$

$$\sqrt{ab} = \frac{b - a}{2}$$

$$\text{oder } \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 6\left(\frac{b}{a}\right) + 1 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat die beiden Lösungen

$$\frac{b}{a} = 3 + 2\sqrt{2} \quad \text{und} \quad \frac{b}{a} = 3 - 2\sqrt{2},$$

die reziprok zueinander sind. Die zweite Wurzel ist für uns uninteressant, weil wir $\frac{b}{a} \geq 1$ vorausgesetzt hatten. Sie liefert nebenbei bemerkt auch keinen neuen geometrischen Sachverhalt, denn ist

$$\frac{b}{a} = 3 - 2\sqrt{2}, \text{ so ist } \frac{a}{b} = 3 + 2\sqrt{2}.$$

Die erste Wurzel liefert also den Wert für das maximale Seitenverhältnis unserer Konstruktion

$$\left(\frac{b}{a}\right)_{\max} = 3 + 2\sqrt{2}. \text{ Es ist } \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}.$$

Beim Rechteck mit den Seiten 1 und $3 + 2\sqrt{2}$ zerfällt das aus der Mitte herausgeschnittene Parallelogramm bei der Halbierung in zwei rechtwinklige und gleichschenklige Dreiecke (Bild 6 und 7):

Bild 6

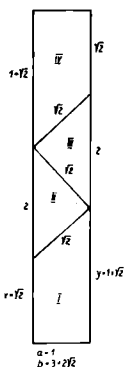
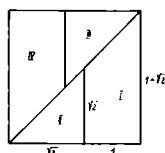


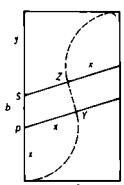
Bild 7



4. Bemerkungen zur praktischen Ausführung

(1) Sind a und b als Zahlen gegeben, so kontrolliert man zunächst die Bedingung $1 \leq \frac{b}{a} \leq 3 + 2\sqrt{2}$. Liegt das Seitenverhältnis in diesem Intervall, ist die Aufgabe nach dem oben beschriebenen Verfahren lösbar. Man zeichnet das Rechteck, berechnet die Größen x und y und trägt sie nach Bild 8 ab.

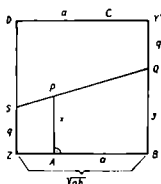
Bild 8



Damit sind die beiden Parallelschnitte PQ und RS festgelegt. Darauf wird die Strecke x noch einmal auf PQ und RS nach Bild 8 abgetragen, dadurch sind die Punkte Y und Z festgelegt. Die Strecke $\overline{YZ}$ ist der dritte gesuchte Schnitt.

(2) Sind a und b als Strecken gegeben, so können die Schnitte auch klassisch, also rein geometrisch mit Zirkel und Lineal konstruiert werden, ohne Numerik. Man konstruiert zum Rechteck mit den Seiten a

Bild 9



und b zunächst das gleich große Quadrat mit der Seite $\sqrt{ab}$. (Hinweis: Benutze Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck.) Auf zwei gegenüberliegenden Seiten trägt man entgegengesetzt a ab. (Bild 9)

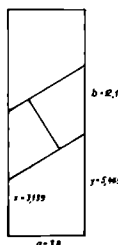
Man erhält die Punkte A und C . Auf den anderen beiden Seiten des Quadrates konstruiert man q nach der Vorschrift $q = \frac{1}{2}\sqrt{ab} - \frac{b-a}{4}$. Dazu wird a auf der

Strecke b abgetragen und zweimal halbiert. Das Ergebnis wird auf der halben Quadratseite abgetragen. So findet man die Punkte S und Q . Sie werden durch eine Gerade verbunden (Bild 9). Ein Lot in A schneidet die Gerade SQ in P . Damit sind $x = \overline{PA}$ und $y = \overline{BQ}$ konstruiert.

Nach den Hinweisen in Bemerkung (1) können nun die drei Schnitte im Rechteck eingetragen werden.

(3) Bei dieser Aufgabe tritt, so elementar sie auch ist, eine bemerkenswerte Berührung von Geometrie und Arithmetik in Erscheinung: Das Problem ist geometrischer Natur (gesucht sind Schnitte in einem Rechteck), und die Lösung überblickt man auch am besten an Hand einer Zeichnung. Nun ist diese Aufgabe rein zeichnerisch lösbar mit Zirkel und Lineal, aber die Zeichengenauigkeit genügt nicht immer den Genauigkeitsansprüchen der Praxis. Deshalb möchte man bei ähnlich gelagerten Aufgaben auf die numerischen Zwischenergebnisse mit weit höherer als Zeichengenauigkeit nicht gerne verzichten. Beide Anforderungen der Praxis, also Geometrie und Arithmetik – Anschaulichkeit und Genauigkeit – können heute durch die Rechentechnik vollständig automatisch behandelt werden. Unsere Rechenautomaten können über Bildschirm oder Zeichengeräte mit Hilfe der Software und Digitalgrafik Zeichnungen erarbeiten. Es ist selbstverständlich, daß in diesen Zeichnungen numerische Resultate einfließen können, wie es bei dieser Aufgabe nahe liegt. Ist die Aufgabe einmal programmiert, so braucht man nur die Zahlwerte für a und b einzugeben, und der Rechenautomat liefert die Schnittfigur im Rechteck oder die Mitteilung, daß das Seitenverhältnis zu groß ist (Bild 10).

Bild 10



Vergessen sollte man aber nicht, daß vor einer Automatisierung erst eine Lösungs-idee erarbeitet werden muß und ein Formelapparat mit eventuellen Grenzbedingungen für die Programmierung bereitzustellen ist. Daher sind Geometrie- und Arithmetikkennntnisse beim Einsatz moderner Rechentechnik nicht überflüssig, sondern Voraussetzung.

(4) Was läßt sich nun über das allgemeine Rechteck mit den Seitenlängen a_0 und b_0 sagen, dessen Seitenverhältnis nicht der abgeleiteten Grenzbedingung $1 \leq \frac{b_0}{a_0}$

$\leq 3 + 2\sqrt{2}$ unterworfen ist? ($b_0 > a_0$).

Durch eine Folge von Halbierungen von b_0 und entsprechenden Verdopplungen von a_0 kann man sich eine Folge von inhaltsgleichen Rechtecken erzeugt denken. Der Prozeß wird so lange fortgeführt, wie für die neuen Seiten a' und b' gilt: $b' \geq a'$. Es sei nach n Schritten $b' = 2^{-n}b_0$ und $a' = 2^n a_0$ mit $b' \geq a'$, aber $\frac{b'}{2} < 2a'$. Also ist $b' < 4a'$

oder $1 \leq \frac{b'}{a'} < 4 < 3 + 2\sqrt{2}$. Mit diesem

Halbierungs-Verdopplungsprozeß kommen wir in den zulässigen Bereich für das Seitenverhältnis. Für das letzte Rechteck unserer Folge kann nun die beschriebene Zerlegung durchgeführt werden. (Bild 11 und 12) Wir können also sagen: Jedes Rechteck mit den Seiten a , b kann durch eine endliche Zahl von geradlinigen Schnitten so zerlegt werden, daß die Teile zu einem Quadrat mit dem Flächeninhalt $a \cdot b$ zusammengelegt werden können. Damit ist aber nicht gesagt, daß es eine feste endliche Schnittzahl für alle Rechtecke gibt. Sie existiert sicher nicht.

Bild 11

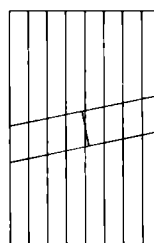
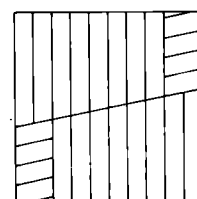


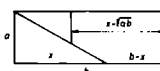
Bild 12



W. Dörband

Nachbemerkung: In alpha 1/84 wird auf den Seiten 15 und 20 (Mit Schere und Köpfchen) nach *The Mathematics Calendar*, 83, Carleton University, Ottawa/Kanada sogar eine Zerlegung mit nur zwei Schnitten mitgeteilt. Sie gilt nicht nur für den angegebenen Spezialfall des 2-mal-5-Rechtecks, sondern für alle Rechtecke mit einem Seitenverhältnis $1 \leq \frac{b}{a} \leq 4$.

Bild 13



Skizze nicht maßstäblich! ($b \geq a$)

Wie man aus der Skizze ablesen kann, müssen die Ungleichungen $\sqrt{ab} \leq 2a$ und $b - \sqrt{ab} \leq \sqrt{ab}$ erfüllt sein. Beide führen auf die Bedingung $\frac{b}{a} \leq 4$.



Schätz doch mal!

Die Aufforderung „Schätz doch mal!“ bzw. die Frage „Was schätzt du?“ hat man schon oft gehört. Im Fernsehen der DDR gibt es sogar eine Sendereihe „Schätzen Sie mal!“ In dieser Unterhaltungssendung wird den Mitspielern wiederholt der Auftrag erteilt, Stückzahlen, Alter, Geschwindigkeiten, Entfernungen usw. näherungsweise *ohne* Verwendung von *Meßinstrumenten* anzugeben. Oft weichen die Antworten sehr stark vom eigentlichen Wert ab. Ja, zuweilen hat man den Eindruck, daß ein Mitspieler gar nicht geschätzt, sondern geraten hat.

Das ist wohl immer dann der Fall, wenn der Befragte keine *Vergleichsgrößen* kennt bzw. über den Sachverhalt nicht hinreichend gut informiert ist.

Will man etwa die Frage beantworten: „Wie groß war schätzungsweise der Elektroenergieverbrauch 1983 in der DDR?“, so wäre es z. B. nützlich zu wissen, wieviel Elektroenergie an einem Tag in unserem Lande verbraucht wird oder wieviel Elektroenergie ein Bezirk oder eine Großstadt ungefähr an einem Tag bzw. in einer Woche benötigt. Man braucht also irgendeine Orientierung, um die Frage durch Schätzen und nicht durch bloßes Raten zu beantworten.

Im Unterschied zum Raten wollen wir also unter Schätzen *das Bestimmen von Näherungswerten für Größen ohne Verwendung von Meßinstrumenten durch Vergleich mit bekannten Größen* verstehen. Während bei „Schätzen Sie mal!“ das Schätzen nur ein Spiel ist und vor allem den Mitspielern und Zuschauern Spaß machen soll, spielen das Schätzen und die Qualität des Schätzergebnisses im täglichen Leben oft eine große Rolle. So können z. B. beim Lösen von Sachaufgaben gute Schätzungen helfen, Fehler zu erkennen. Schlechte Schätzungen von Geschwindigkeiten oder Entfernungen sind im Straßenverkehr häufig Ursachen von Unfällen. Ein zu grobes Schätzen von Entfernungen im Gebirge hat schon bei mancher Wandergruppe zu einer unfreiwilligen Nachtwanderung geführt.

Das Schätzen von Entfernungen hat für das Orientieren im Gelände und auch für das Schätzen von Flächen- und Rauminhalten, das auf das Schätzen von Streckenlängen zurückgeführt werden kann, große Bedeutung. Aus diesem Grunde wollen wir

uns diesem Aspekt des Schätzens besonders zuwenden und einige Vergleichsgrößen kennenlernen.

Beim Schätzen von Entfernungen im Gelände ist es sinnvoll, bekannte *Grundentfernungen* (z. B. Abstand zwischen Telefonmasten) zu suchen, um dann zu überlegen, wie oft diese in die zu schätzende Entfernung *hineingehen*.

Hier seien einige im Gelände feststehende Entfernungen angegeben:

Abstand zwischen Telefonmasten:

meist 50 m

Abstand zwischen Hochspannungsmasten: 150 m bis 180 m

Abstand zwischen Warnbaken

bei Eisenbahnübergängen: 80 m

Für das Schätzen von Höhen ist es nützlich, einige Grundhöhen zu kennen.

Höhe eines Stockwerkes im Neubau:

etwa 2,80 m

Höhe eines Telefonmastes:

6 m bis 8 m

Höhe einiger Bäume

Roßkastanie: etwa 30 m

Stieleiche: etwa 50 m

Fichte: etwa 60 m

Entfernungen lassen sich auch nach charakteristischen Umrissen schätzen. Dazu muß man wissen, wie weit Gegenstände entfernt sind, die man bei normalen Sichtverhältnissen mit bloßem Auge gerade noch erkennen kann.

Beispiele:

Kirchen

im Abstand bis 15 000 m

Fabrikschornsteine

im Abstand bis 5 000 m

hohe, einzeln stehende Bäume

im Abstand bis 2 000 m

Umriss eines Menschen

im Abstand bis 850 m

Gliedmaßen eines Menschen

im Abstand bis 300 m

Augen des Menschen

im Abstand bis 50 m

Die Angaben sind natürlich Durchschnittswerte. Sie hängen von der Größe der konkreten Objekte ab. In Abhängigkeit von Gelände und Witterung können sich Schätzfehler einstellen.

So lehrt die Erfahrung, daß bei guten Sichtverhältnissen bzw. für den Fall, daß die Sonne im Rücken des Schätzers steht, im allgemeinen zu kurz geschätzt wird. Zu weit wird dagegen bei schlechten Sichtverhältnissen (Regen, Nebel) geschätzt.

Dies trifft auch zu für das Schätzen in der Dämmerung und gegen die Sonne. Das Kennen dieser Schätzfehler ist für alle Verkehrsteilnehmer sehr wichtig, um Unfälle zu vermeiden. Das Schätzen von Entfernungen nach charakteristischen Umrissen von Objekten kann natürlich auch zur Bestimmung von Grundentfernungen im Gelände genutzt werden. Das Schätzen von Entfernungen mit Hilfe der Augen versagt in der Dunkelheit oder wenn die Sicht durch Bäume oder Sträucher versperrt ist. Bei Nachtwanderungen oder Geländespielen im Wald kann man Entfernungen nach der Hörbarkeit von Geräuschen schätzen. Auch dazu braucht man Vergleichsgrößen.

Hörbar sind z. B. (falls keine starken Nebengeräusche vorhanden sind)

Huptöne von Fahrzeugen bis 2 000 m

Geräusche von Motoren bis 1 000 m

Knackende Zweige bis 200 m

Schritte bis 30 m

Um sich in seiner allernächsten Umgebung zu orientieren, kann man als Vergleichsmaße seine Körpermaße heranziehen, wie etwa

die Breite des Daumens ... cm

die Länge des Unterarms ... cm

die Körperlänge ... m

die Schrittlänge ... m

▲ 1 ▲ Nun schätzt selbst einmal

a) den Durchmesser eines 5-Mark-Stücks,

b) den Durchmesser eines 1-Pfennig-Stücks,

c) den Flächeninhalt eines 10-Mark-Scheins,

d) das Volumen einer Streichholzschachtel,

e) die Breite eines Fußballtores,

f) die Leermasse eines PKW Trabant 601 (Limousine)!

Wer schätzt am besten?

Diese Frage ist leicht zu beantworten, wenn z. B. mehrere Personen eine gleiche Entfernung schätzen.

Klaus und Ines, die denselben Schulweg haben, schätzen eines Tages die Länge dieses Weges.

Ines schätzt 1,2 km. Klaus meint, es seien nur 800 m.

Er begründet seine Schätzung wie folgt: Bei Wanderungen legt man in einer Stunde etwa 5 km zurück. Wir brauchen für den Schulweg 10 Minuten, d. h., den 6. Teil einer Stunde. Der tägliche Weg zur Schule

müßte also ungefähr $\frac{5}{6}$ km (rund 800 m)

betragen. Am Nachmittag fährt Klaus die geschätzte Strecke mehrmals mit seinem Fahrrad ab und stellt mit Hilfe seines Kilometerzählers fest, daß der Schulweg 0,9 km lang ist. Nun ist klar, wer von beiden am besten geschätzt hat, nämlich Klaus, denn sein Schätzwert weicht am wenigsten vom Wert 0,9 km ab.

Übrigens nennt man die Differenz zwischen geschätztem Wert a und genauem Wert x auch *absoluten Fehler*. Er kann positiv, negativ, aber auch Null sein. (An Stelle des genauen Wertes einer Größe wird häufig ein Meßwert benutzt. Meßwerte sind wie Schätzwerte Näherungswerte.)

▲ 2 ▲ Fülle folgende Tabelle aus, und gib den besten Schätzer an! (Zu schätzen war das Volumen einer Streichholzschachtel ($30,5 \text{ cm}^3$).)

Schätzer	geschätzter Wert in cm^3	absoluter Fehler in cm^3
Rolf	40	9,5
Anja		-10,5
Mario	25	-5,5
Grit		4,5

Den kleinsten absoluten Fehler hat Anja gemacht, denn es gilt $-10,5 < -5,5 < 4,5 < 9,5$. Das beste Schätzergebnis erzielte

allerdings Grit, denn bei der Beurteilung der Güte einer Schätzung geht es nicht darum, wer den kleinsten absoluten Fehler gemacht hat, sondern es interessiert die geringste Abweichung vom tatsächlichen Wert. Es geht also um den Betrag des absoluten Fehlers ($|4,5| < |-5,5| < |9,5| < |-10,5|$).

Schwieriger wird es, wenn man von mehreren Personen, die z. B. verschiedene Längen zu schätzen hatten, den besten Schätzer ermitteln will.

Beispiel:

Zu schätzen waren

a) die Breite einer (dreiteiligen)

Wandtafel (3,95 m),

b) der Durchmesser eines 5-Mark-Stücks (29 mm),

c) die Länge des Bleistifts von Felix (18,5 cm).

Frank schätzt die Breite der Wandtafel. Er behauptet, sie wäre etwa 4 m breit. Er begründet seine Schätzung wie folgt:

Wenn ich meine Arme seitlich ausstrecke, so beträgt die Entfernung von der einen Hand zur anderen etwa 150 cm. Die Breite der Tafel ist mehr als das Doppelte dieser Strecke. Also gibt er als Schätzwert 4 m an. Michael soll den Durchmesser eines 5-Mark-Stücks schätzen. Er kennt die Breite seines Daumens (1,5 cm). Ein 5-Mark-Stück hat etwa den Durchmesser zweier Daumenbreiten. Also gibt er als Schätzwert 3 cm an.

Felix vergleicht die Länge seines Bleistifts mit seiner Handspanne (etwa 16 cm) und gibt für die Bleistiftlänge 20 cm an. Wer von den drei Jungen hat am besten geschätzt?

Würde man die Beträge der absoluten Fehler zu Rate ziehen, ergäbe sich folgende Reihenfolge:

	absoluter Fehler
1. Platz (bester Schätzer): Michael	1 mm
2. Platz: Felix	1,5 cm
3. Platz (schlechtester Schätzer): Frank	5 cm

Ein solches Vorgehen ist sicher ungerecht, wie auch folgendes Beispiel zeigt. Hätte Michael für den Durchmesser eines 5-Mark-Stücks 6 cm angegeben, d. h. etwa das Doppelte des tatsächlichen Wertes, so wäre der Betrag des absoluten Fehlers noch immer kleiner als der von Franks Schätzung gewesen, obwohl Frank sich nur um rund $\frac{1}{80}$ bezüglich des tatsächlichen Wertes verschätzt hat.

Die Qualität einer Schätzung ist also nicht nur von der Abweichung des Schätzwertes vom tatsächlichen Wert, sondern vom tatsächlichen Wert selbst mit abhängig. Der Betrag des Verhältnisses des absoluten

Fehlers zum tatsächlichen Wert $\left(\frac{a-x}{x}\right)$

ist ein Maß für die Güte der Schätzung. Je kleiner der Betrag dieses Verhältnisses ist, um so besser ist die Qualität der Schätzung. Man bezeichnet die Zahl $\left|\frac{a-x}{x}\right|$ als

relativen Fehler eines Schätzwertes a in be-

zug auf den genauen Wert x einer Größe oder Zahl.

▲ 3 ▲ a) Ermittle den relativen Fehler bei den Schätzungen von Frank, Michael und Felix! Wer von ihnen hat am besten geschätzt?

b) Wie groß ist jeweils die prozentuale Abweichung des Schätzwertes vom gemessenen Wert?

▲ 4 ▲ Vervollständige folgende Tabelle!

tatsächlicher Wert x	Schätzwert a
227	200
425	300
absoluter Fehler $a - x$	relativer Fehler $\left \frac{a-x}{x}\right $
	0,20
-17	

L. Flade

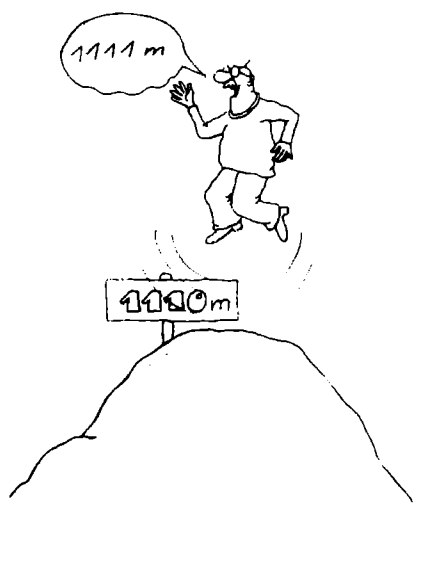
Finder

Vertreib deine Zeit nicht mit Lernen von Fakten, wenn du nicht eines gelernt hast: das Finden.

Wo vor dir alle die Antwort nicht fanden, muß sie noch da sein.

Finde Methoden, zu denken – die Fakten weiß die Maschine!

Heinz Kahlau



Schon gewußt?

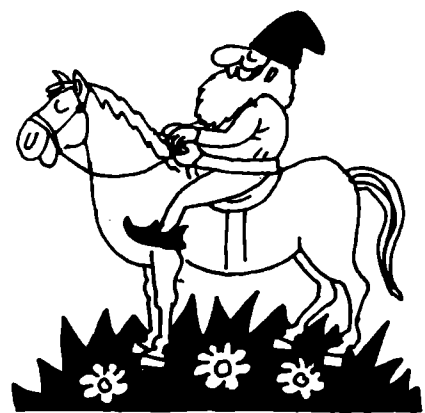
Aus: Technika Molodjoski

● Der größte Mann der Welt ist Mohamed Alam Tschanna (1954 geboren) aus Pakistan. Er mißt 2,50 Meter.



● Das größte Wohnhaus befindet sich in Chicago. Es ist 196,70 Meter hoch und besitzt 70 Etagen.

● Das kleinste Pferd lebt in Argentinien. Es ist etwas größer als ein Huhn und wiegt weniger als 36 Kilogramm.



● Der größte Eisberg wurde in Grönland fotografiert. Seine Höhe betrug 168 Meter.

● Das längste Alphabet hat 72 Buchstaben und stammt aus Kampuchea.

● Die größte heute lebende Frau soll die Chinesin San Tschang Lin (1964 geboren) sein. 1980 maß sie bereits 2,40 Meter; das Mädchen aber wächst weiter...

Ein Besuch in der Knobelwerkstatt

Teil 1: Vielerlei Knochelei

Liebe Freunde!

Mit den nachfolgenden Ausführungen beginnen wir eine mehrteilige *alpha*-Beitragsserie, in der wir euch Anregungen und Hinweise für den *Eigenbau* von heiteren mathematischen Denksportaufgaben, mathematischen Rätseln, Spielen, Zaubereien, Scherzaufgaben und Logeleien, kurz, von mathematischen Knobelaufgaben geben wollen. Obwohl wir uns hierbei nur auf die *heitere Seite* der Mathematik konzentrieren, so gelten die Darlegungen natürlich sinngemäß auch für den *Eigenbau* von Mathematikaufgaben überhaupt. Sicher löst auch ihr in eurer Freizeit gern Knobelaufgaben, und die *alpha* sowie eine Reihe hübscher Knobel-Bücher bieten euch hierfür viel interessantes Aufgabenmaterial. Doch reizt euch nicht auch der Gedanke, selbst einmal *Schöpfer* von neuen Knobelaufgaben zu sein? Ein Versuch lohnt sich bestimmt, und ihr könnt ja eure selbsterdachten Knobelaufgaben nach Absprache mit eurem Mathematiklehrer bzw. Zirkelleiter sogar bei Knobelnachmittagen, im Mathematikzirkel, an einer Wandzeitung oder auch im Mathematikunterricht selbst euren Mitschülern stellen und auf diese Weise mithelfen, das mathematische Klima an eurer Schule zu bereichern.

Mathematische Knobelaufgaben sind für den Erwerb, die Vertiefung und Festigung mathematischen Wissens und für die Entwicklung mathematischer Fähigkeiten und Fertigkeiten nicht etwa weniger wertvoll als andere *ernsthafte* Mathematikaufgaben. So wie alle Problemaufgaben besitzen auch die Knobelaufgaben eine ausgeprägte schöpferische Komponente, die besonders bei der Problemerkennung und im Auffinden von Lösungswegen zum Ausdruck kommt, und sie tragen in hohem Maße bei zur Schulung und Entwicklung solcher wichtiger Eigenschaften wie logisches Denkvermögen, Abstraktionsvermögen, Beobachtungs- und Auffassungsgabe, Scharf- und Spürsinn, Findigkeit, Geduld, Ausdauer und Hartnäckigkeit; außerdem schärfen sie den mathematischen Blick für die Umwelt. Vor allem aber können Knobelaufgaben viele Menschen zur Beschäftigung mit der Mathematik anregen, da ihre meist heitere Problemstellung oft aus sich selbst heraus beim Betrachter Aufmerksamkeit erzwingt, da sie vielfach auch durch Raten oder Probieren oder einfach mittels gesunden Menschenverstands lösbar sind (obwohl diese Aufgaben größtenteils einen tiefen mathe-

matischen Hintergrund haben), da sie meist einen nur geringen Rechenaufwand erfordern und oft ganz verblüffende Lösungen besitzen (Aha-Effekt), eben, weil sie auf vergnügliche Weise bilden und unterhalten.

Natürlich handelt es sich auch beim *Eigenbau* von Knobelaufgaben um eine schöpferische Tätigkeit, und für das *Wie?* einer solchen können auch wir keine allgemeingültigen Rezepte vergeben. Ideen muß man schon haben, und Anregungen für neue mathematische Aufgaben bieten unsere Umwelt, die Mathematik selbst wie auch andere Fachdisziplinen in reicher Fülle. Doch zeigt die Erfahrung, daß Ideen allein noch nicht genügen, sondern daß man diese dann auch in gute Aufgaben umsetzen können muß, wozu auch eine Portion *Handwerk* vonnöten ist. Gemeint ist hiermit ein gezieltes methodisches Vorgehen bei der Ideenfindung und -verarbeitung. Und gerade hierzu wollen wir Erfahrungen vermitteln. Insofern ist also der Titel unserer Beitragsserie *Ein Besuch in der Knobelwerkstatt* natürlich nur im übertragenen Sinne zu verstehen, denn schließlich bauen wir ja die Aufgaben nicht in einer echten *Bastler-Werkstatt* mit Schraubstock, Hammer, Zange, Nägeln o. ä. zusammen. Für den *Eigenbau* von mathematischen Aufgaben genügen uns meistens schon ein Zettel und ein Bleistift und eventuell noch *Werkzeuge* wie Lineal, Zeichendreieck, Zirkel oder – dem modernen Stand der Mikroelektronik entsprechend – ein Taschenrechner.

Wir stellen nun zunächst einmal einige typische *Klassen* von mathematischen Knobelaufgaben vor, wobei die Beispielaufgaben und alle weiteren Aufgaben der Beitragsserie, die wir jeweils zu einer gesonderten *Knobel-Wandzeitung* zusammenstellen, ausschließlich aus der *Werkstatt* des Autors stammen, und ein Teil davon bereits entweder in den Wochenend-Beilagen der *Leipziger Volkszeitung* oder auf den Knobelseiten von *Neues Deutschland* abgedruckt worden ist:

Interessante Knobelaufgaben lassen sich zur Arithmetik, insbesondere zur Arithmetik natürlicher Zahlen, gestalten und dies in erstaunlicher Vielfalt und Variabilität. Hierher gehören Aufgaben zur Darstellung und zu den Eigenschaften von Zahlen, Aufgaben zu den Grundrechenarten (s. Aufg. 1), Kryptogramme (s. Aufg. 2) und

auch magische Quadrate oder allgemeine magische Figuren (s. Aufg. 3).

Natürlich spielen die Zahlen auch bei vielen anderen Aufgabentypen eine grundlegende Rolle wie in der Mathematik überhaupt. So etwa bei Aufgaben, die sich mit Hilfe von Gleichungen bzw. Gleichungssystemen lösen lassen (s. Aufg. 4).

Ein breites Spektrum liefern Aufgaben zur Kombinatorik (s. Aufg. 5), die bekanntlich Anordnungs- und Auswahlprobleme behandelt. Graphentheoretischer Natur sind Knobelaufgaben wie das Zeichnen einer Figur in einem Zuge (s. Aufg. 6), bestimmte Wegeprobleme und auch Labyrinthprobleme (s. Aufg. 7).

Ein weites Feld für interessante Knobelaufgaben bietet natürlich die Geometrie. Hier sind etwa Flächenvergleiche (s. Aufg. 8), geometrische Teilungsprobleme (s. Aufg. 9), Legespiele ähnlich dem *Tangram* (s. Aufg. 10) und Schiebespiele ebenso zu nennen wie die große Klasse der Hölzchen-spiele (s. Aufg. 11).

Groß ist auch die Vielfalt der logisch-kombinatorischen Aufgaben, die in den unterschiedlichsten Bereichen angesiedelt sein können, so etwa logische Vergleichsaufgaben (s. Aufg. 12), geometrische Logeleien (s. Aufg. 13), Aufgaben zum Erkennen der Bildungsgesetze von Zahlen- bzw. Figurenfolgen (s. Aufg. 14), Wägeprobleme (s. Aufg. 15), Überfahrtsprobleme und andere Logeleien.

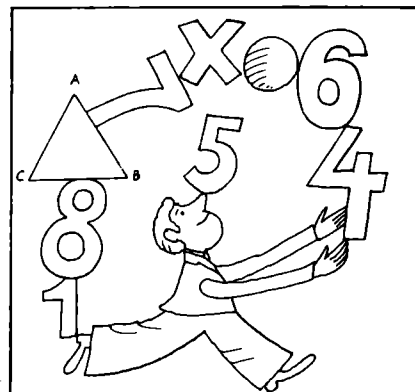
Viele interessante Knobelaufgaben kann man auch den bekannten Brett- bzw. Unterhaltungsspielen (Würfeln, Domino, Schach u. a.) entlehnen, etwa die Rösselsprung-Aufgaben (s. Aufg. 16).

Natürlich ist mit der obigen kurzen Aufzählung die breite Palette interessanter Knobelaufgaben noch lange nicht erschöpft, und auch eurer Phantasie sind beim Erfinden neuartiger Knobelaufgaben keinerlei Grenzen gesetzt.

In unserem nächsten Beitrag werden wir demonstrieren, wie ihr durch aufmerksames Beobachten eurer Umwelt Ideen für mathematische Knobelaufgaben finden könnt. Bis dahin solltet ihr aber erst einmal versuchen, alle 16 Beispielaufgaben unserer nachfolgenden *Knobel-Wandzeitung* (1) zu lösen!

Viel Freude und Erfolg wünscht

R. Mildner



Knobel- Wandzeitung (1)

Vergangenes Jahr

▲ 1 ▲ Setzt in die Kästchen Operationszeichen (+, -, ·, :), so ein, daß wahre Gleichungen entstehen! Beachtet: Punkt- geht vor Strichrechnung!

$$1 \square 9 \square 8 \square 4 = 19$$

$$1 \square 9 \square 8 \square 4 = 8$$

$$1 \square 9 \square 8 \square 4 = 4$$

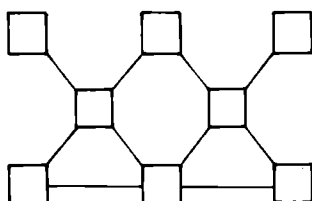
Sternchenklar

▲ 2 ▲ Vervollständigt die Multiplikationsaufgabe, indem ihr die Sternchen durch Ziffern ersetzt!

$$\begin{array}{r} 456 \cdot *7* \\ * * 48 \\ * * * * \\ * * * 6 \\ * * * * * \end{array}$$

Magische Figur

▲ 3 ▲ Setzt die natürlichen Zahlen von 1 bis 8 so in die Felder ein, daß die Zahlen-summe auf jeder geraden Linie 14 beträgt!



Wie alt?

▲ 4 ▲ Das Ehepaar Müller hat 3 Kinder: Jens, Kati und Sven. Herr und Frau Müller sind gleichaltrig, Sven ist 3 Jahre älter als Kati, und Jens ist 3 Jahre älter als Sven. Jens ist so alt wie Kati und Sven zusammen. In drei Jahren wäre der Vater dreimal so alt wie Jens. Wie alt ist jedes Familienmitglied?

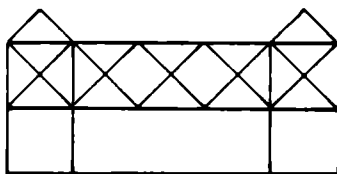
Mal so, mal so

▲ 5 ▲ Wie oft könnt ihr das Wort DEZIMALBRUCH von links oben nach rechts unten auf verschiedene Weise lesen?

D	E	Z	I	M	A	L	B
E	Z	I	M	A	L	B	R
Z	I	M	A	L	B	R	U
I	M	A	L	B	R	U	C
M	A	L	B	R	U	C	H

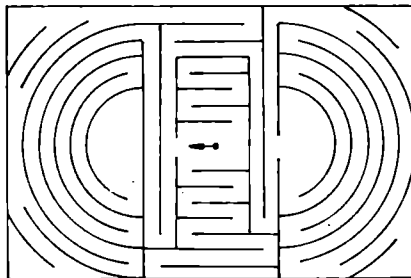
In einem Zuge

▲ 6 ▲ Zeichnet die abgebildete Figur in einem Zuge nach, wobei aber jede Linie nur genau einmal gezogen werden darf!



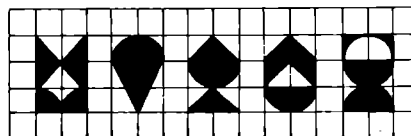
Im Labyrinth

▲ 7 ▲ Auf welchem Weg gelangt die Maus ins Freie?



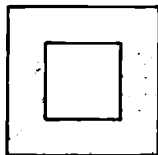
Flächenvergleich

▲ 8 ▲ Welches der fünf schwarzen zusammenhängenden Flächenstücke hat den größten Flächeninhalt?



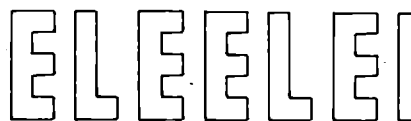
Zerlegung gesucht

▲ 9 ▲ Zerlegt den abgebildeten Quadrating a) durch 2 Geraden in vier, b) durch 3 Geraden in sechs, c) durch 4 Geraden in acht und d) durch 6 Geraden in zwölf kongruente Teilstücke!



Legespiel

▲ 10 ▲ Legt die Ziffern der Zahl 1373373 lückenlos zu einem Quadrat zusammen!



Stuhl-Akrobatik

▲ 11 ▲ Legt 2 Hölzchen so um, daß a) der Stuhl um 90 Grad gedreht wird und b) der Stuhl auf die Lehne gestellt wird!

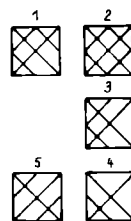
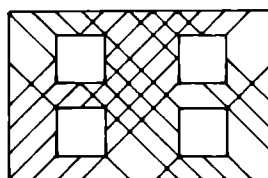


Rollerrennen

▲ 12 ▲ Bei einem Kinderfest wird ein Rollerrennen veranstaltet. Dabei belegen Ben, Dieter, Eva und Katrin die ersten vier Plätze. Ben belegt einen besseren Platz als Eva. Dieter war schlechter platziert als Katrin, er schnitt aber besser ab als Ben. In welcher Reihenfolge waren die vier Kinder ins Ziel gekommen?

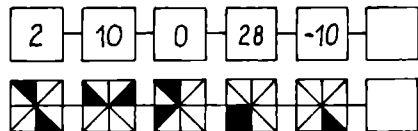
Gut eingepaßt

▲ 13 ▲ Vier der fünf abgebildeten Quadrate passen logischerweise in die vier Aussparungen der Figur. Welches Quadrat paßt nicht hinein?



Fortsetzung gesucht

▲ 14 ▲ Findet eine logische Fortsetzung der angegebenen Zahlen- bzw. Figuren-folge!

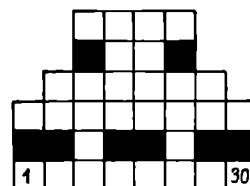


Gewußt wie?

▲ 15 ▲ Einem Päckchen von 75 g Tee sollen 55 g entnommen werden. Man hat aber lediglich eine Balkenwaage (ohne Wägestücke), ein Gewürzpäckchen von 25 g und ein Puddingpäckchen von 40 g zur Verfügung. Wie kann man die Aufgabe lösen?

Rösselsprung

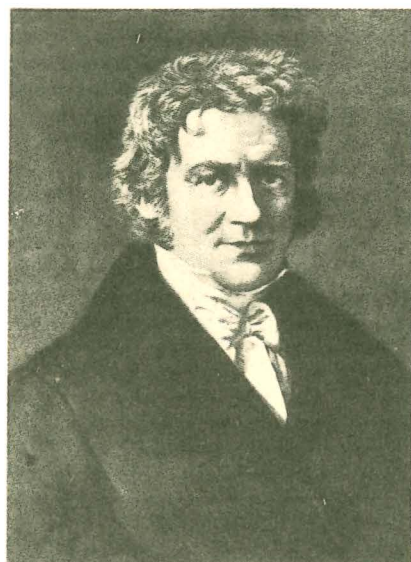
▲ 16 ▲ Zieht den Springer, der wie beim gewöhnlichen Schach zu setzen ist, innerhalb der abgebildeten Figur vom Feld 1 nach dem Feld 30 derart, daß er zwischen durch jedes andere weiße Feld genau einmal betritt! Die schwarzen Felder dürfen dabei übersprungen, aber nicht betreten werden.



Eine empirische Bestätigung der heliozentrischen Theorie von Copernicus und Kepler

Teil 2

Zum 200. Geburtstag des Astronomen und Mathematikers Friedrich Wilhelm Bessel

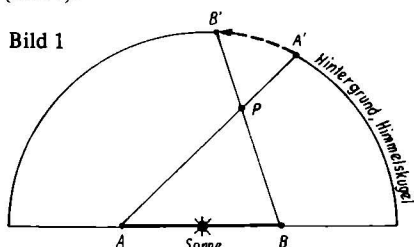


Die Parallaxe der Fixsterne

Die Erde bewegt sich auf einer Ellipse um die in einem Brennpunkt sich befindende Sonne. Diese Ellipse ist annähernd ein Kreis mit einem Radius von rund 150 Millionen km. Diesen mittleren Abstand Erde-Sonne nennt man *Astronomische Einheit* (Bezeichnung: AE), $1 \text{ AE} = 149,597\,870 \cdot 10^9 \text{ m}$.

Es bezeichne B den Punkt, in dem die Erde der Sonne am nächsten steht (*Perihel*, Abstand von der Sonne 147,1 Millionen km) und A den sonnenfernsten Punkt (*Aphel*, Abstand von der Sonne 152,1 Millionen km). Man denke sich die Verbindungsgerade beider Punkte gezeichnet (*Apsidenlinie*, große Achse der Ellipse). Wird nun ein Stern P in A bzw. B beobachtet, so wird er auf der Himmelskugel in den verschiedenen Punkten A' bzw. B' erscheinen (Bild 1).

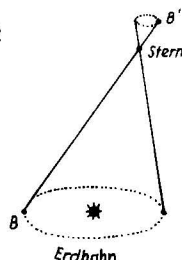
Bild 1



Würde sich ein Beobachter auf der Geraden von A nach B bewegen, so hätte es den Anschein, als bewege sich P in einer der Bewegung des Beobachters entgegengesetzten Richtung (von A' nach B') über den Hintergrund (also in bezug auf weiter entfernte Sternbilder).

Da nun ein Beobachter B auf der Erde mit der Erde im Laufe eines Jahres eine elliptische Bahn um die Sonne beschreibt, beschreibt auch der Punkt B' , in dem der Stern P in B beobachtet wird, auf der Himmelskugel eine Ellipse. Der Stern beschreibt relativ zu den weiter entfernten Sternen scheinbar eine winzige Ellipse, die ein getreues Abbild der Erdbahn um die Sonne ist, wie sie einem Beobachter auf dem Stern erscheinen würde (Bild 2).

Bild 2

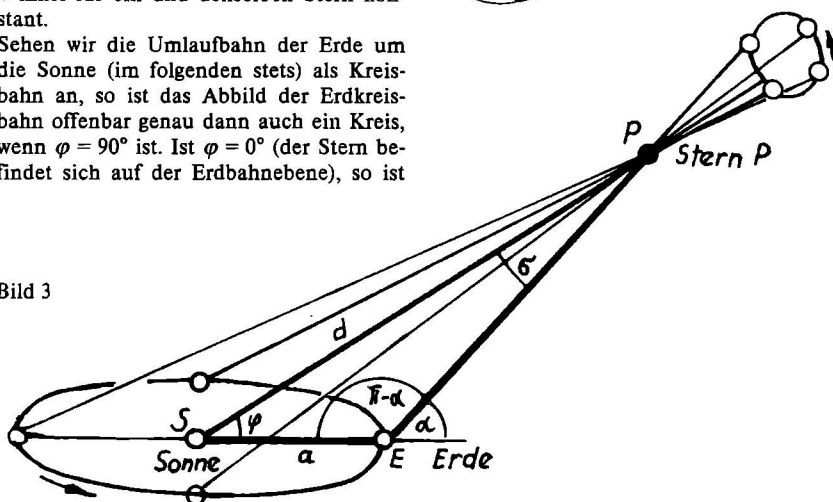


Die Gestalt dieser scheinbaren Bahn hängt von dem Winkel φ zwischen der Verbindungsgeraden Sonne-Stern und der Erdbahnebene (Ekliptik) ab.

Da sich die Lage des Sterns in bezug auf die Sonne im Prinzip nicht ändert (wir sehen von Eigenbewegungen ab), ist dieser Winkel für ein und denselben Stern konstant.

Sehen wir die Umlaufbahn der Erde um die Sonne (im folgenden stets) als Kreisbahn an, so ist das Abbild der Erdbahn offenbar genau dann auch ein Kreis, wenn $\varphi = 90^\circ$ ist. Ist $\varphi = 0^\circ$ (der Stern befindet sich auf der Erdbahnebene), so ist

Bild 3



das Abbild der Erdbahn eine Gerade (der scheinbare Sternort pendelt darauf hin und her). In allen anderen Fällen ($0^\circ < \varphi < 90^\circ$) beschreibt der Stern P als Abbild der Erdbahn am Himmel eine kleine Ellipse. Die Richtung der scheinbaren Bewegung auf der Ellipse ist der Bewegung der Erde entgegengesetzt.

Im Verlaufe eines Jahres wird die Verbindungsgerade Erde-Stern je nach dem Ort E der Erde eine andere Richtung aufweisen und mit der Geraden Sonne-Stern einen anderen Winkel σ einschließen. Ein Beobachter auf E (genauer: „geozentrischer Beobachter“ – im Erdmittelpunkt) sehe (vgl. Bild 3) den Stern unter dem Winkel α (in bezug auf die Erdbahnebene). Dann gilt wegen $\varphi + \sigma + (180^\circ - \alpha) = 180^\circ$

$$\sigma = \alpha - \varphi.$$

Bezeichnet a den Radius der Erdbahn ($a = 1 \text{ AE}$, mittlerer Abstand Erde-Sonne) und d die Distanz Stern (P)–Sonne (S), so gilt nach dem Sinussatz

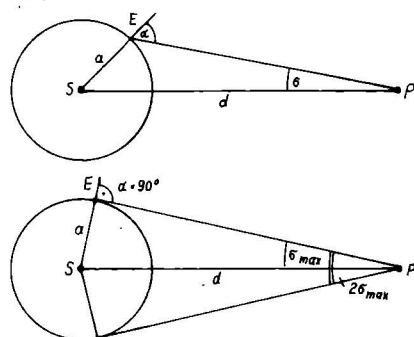
$$\frac{a}{d} = \frac{\sin \sigma}{\sin (180^\circ - \alpha)} = \frac{\sin \sigma}{\sin \alpha}, \text{ d. h.}$$

$$\sin \sigma = \frac{a}{d} \sin \alpha.$$

σ verändert sich in Abhängigkeit von α .

Der Winkel σ wird am größten ($\sigma_{\max}$), wenn die Verbindungsgerade (ES) Erde-Sonne senkrecht auf der Geraden (SP) Sonne-Stern steht, d. h. $\alpha = 90^\circ$ ist (Bild 4). Dieser Winkel $\sigma_{\max}$ (die Astronomen bezeichnen den Winkel meistens mit π) wird als Parallaxe des Sterns bezeichnet. Es ist der Winkel, unter welchem der Radius der Erdbahn bei senkrechter Aufsicht vom Stern aus erscheint.

Bild 4



Im Laufe eines Jahres ändert sich der scheinbare Ort des Sterns um den Winkel $2 \sigma_{\max}$.

Ist $a = \overline{ES}$, $d = \overline{SP}$, so gilt

$$\sin \sigma_{\max} = \frac{a}{d} = \frac{1}{d} a.$$

Drückt man nun die Längen durch die Astronomische Einheit aus, so gilt $a = 1 \text{ AE}$ und damit

$$\sin \sigma_{\max} = \frac{1}{d} \text{ AE}, \text{ also}$$

$$d = \frac{1}{\sin \sigma_{\max}} \text{ AE}.$$

Als Längeneinheit wurde in der Astronomie in diesem Zusammenhang das Parsec (aus Parallaxe und Sekunde, Zeichen: pc) eingeführt. 1 pc ist jene Entfernung, von der aus die Astronomische Einheit (1 AE) unter einem Winkel von $1''$ erscheint. Es gilt $1 \text{ pc} = 30,856\,776 \cdot 10^{15} \text{ m}$.

Der Stern Proxima Centauri (im südlichsten Teil des Sternbildes Centaurus, am südlichen Sternhimmel in der Milchstraße gelegener Fixstern) hat eine Entfernung von 1,31 pc (entsprechend der Parallaxe von $0,765''$), das sind 4,3 Lichtjahre. Er ist der Fixstern mit der geringsten Entfernung von der Erde bzw. mit der größten Parallaxe. Der hellste Fixstern des Himmels ist der Sirius (im Sternbild Großer Hund gelegen). Seine Entfernung beträgt 2,7 pc, das sind 8,8 Lichtjahre. Der Polarstern ist etwa 120 pc (oder 400 Lichtjahre) entfernt. Da durch direkte Beobachtung Parallaxen kleiner als $\frac{1}{100}$ Sekunde nicht meßbar sind, zeigen Sterne, die weiter als etwa 100 pc entfernt sind, keine merkliche Parallaxe.

Auf die astronomischen Methoden zur Messung von Parallaxen kann hier nicht eingegangen werden.

Von Copernicus bis Bessel

Zur Zeit des Nicolaus Copernicus konnten die Gelehrten keine Parallaxe eines Fixsternes feststellen. War aber die Copernicanische Hypothese von der sich um die Sonne bewegendes Erde richtig, so mußte es Fixsternparallaxen geben.

Für Copernicus war das Fehlen des parallaxischen Winkels ein Hinweis darauf, daß die Entfernung der Sterne so groß wäre, daß auch von der Erdbahn eine Parallaxe nicht bemerkt werden kann.

Bis ins 19. Jahrhundert gab es zahlreiche Versuche der Astronomen, die Fixsternparallaxen nachzuweisen. Für die Anhänger der heliozentrischen Hypothese des Copernicus (wie Kepler, Galilei) wäre die Messung von Parallaxen ein Beweis für ihre Richtigkeit, für die Gegner der Copernicanischen Hypothese (wie Brahe) wäre das Mißlingen einer Parallaxenmessung ein Argument gegen ihre Richtigkeit. Über den „Kampf“ um die Messung von Fixsternparallaxen von Copernicus bis Bessel kann hier nicht ausführlich berichtet werden. Es sei auf das Buch „Kosmische Weiten – Geschichte der Entfernungsmessung im Weltall“ von D. B. Herrmann (Leipzig: Verlag J. A. Barth) verwiesen.

Auf dem langen Weg der Versuche, Fixsternparallaxen nachzuweisen, wurden

häufig voreilig Erfolge gemeldet, die sich jedoch schnell als scheinbar erwiesen, weil die Ortsabweichungen auf andere Ursachen zurückgeführt werden konnten.

Um den Nachweis von Fixsternparallaxen bemühten sich Naturforscher und Astronomen wie Tycho Brahe, Johannes Kepler, Galileo Galilei, Robert Hooke, Giovanni Cassini, John Flamsteed, Ole Römer. James Bradleys Beobachtungen (zwischen 1725 und 1728) führten zur Entdeckung der sog. Aberration (eine ungewollte Bestätigung einer Erdbewegung!).

Bradleys Beobachtungen ließen „keinen Zweifel“ darüber, daß die Parallaxen einiger „Sterne der ersten Größe eine Kleinheit besitzen, welche sie unter die Größen versetzt, über deren wirkliches Vorhandensein auch die genauesten Meridianinstrumente der jetzigen Zeit [1838] nur mit großer Schwierigkeit eine sichere Entscheidung herbeiführen können“. Dies schrieb Bessel in seinem im 16. Band der „Astronomischen Nachrichten“ (1838) gegebenen Bericht über seine Bestimmung der Parallaxe und der Entfernung eines Sterns (aus dieser Arbeit wird im folgenden mehrmals zitiert).

Wilhelm Herschel hatte die Idee, „die Beantwortung der schwierigen Frage nach der jährlichen Parallaxe der Fixsterne, welche sich nur ihrer Kleinheit wegen der Bestimmung entzogen hatte, durch die Doppelsterne zu suchen“. Es sollte nicht die Parallaxe eines Sterns direkt, sondern die Parallaxendifferenz zweier optischer (also scheinbarer) Doppelsterne von sehr verschiedener Leuchtkraft bestimmt werden.

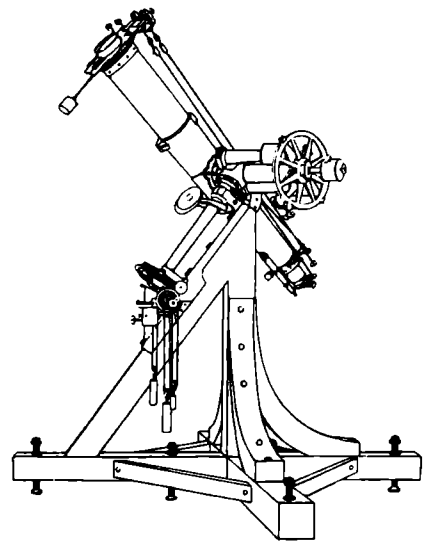
„Unter der Voraussetzung, daß die Entfernungen der beiden einen Doppelstern zusammensetzenden Sterne von unserem Sonnensystem ein beträchtlich von der Gleichheit verschiedenes Verhältnis haben, muß die jährliche Parallaxe periodische Einflüsse auf die scheinbare Entfernung des einen von dem andern erhalten, welche Herschel aus Beobachtungen, zu verschiedenen Zeiten des Jahres angestellt, hervorgehen zu sehen hoffte.“ Herschel entdeckte zahlreiche Doppelsterne, doch die meisten entsprechen nicht seiner Voraussetzung.

Überdies waren die Meßinstrumente zu Herschels Zeit noch zu mangelhaft, als daß Parallaxen hätten gemessen werden können. „Ich glaube nicht“, schrieb Bessel, „daß durch alle die angeführten Versuche, die Parallaxe der Fixsterne zu entdecken, etwas anderes gewonnen ist als die Überzeugung, daß sie *sehr kleine*, sich den gewöhnlichen Beobachtungsarten entziehende Größen sind.“ Eine Voraussetzung zur Messung dieser kleinen Winkel war also eine gezielte Weiterentwicklung der Meßgenauigkeit astronomischer Instrumente.

Es ist dem Physiker Joseph von Fraunhofer vorbehalten gewesen, „das mikrometrische Messen der Kraft selbst sehr starker Fernrohre angemessen zu machen“, betonte Bessel. In den 30er Jahren des 19. Jahrhunderts gab es zwei Apparate, die dieses leisteten:

das große Fernrohr (Fraunhofer-Refraktor) der Sternwarte in Dorpat (heute: Tartu) und das große Fraunhofer-Heliometer der Sternwarte in Königsberg (heute: Kaliningrad).

Bild 5



In Dorpat versuchte Wilhelm Struve ab 1835 am scheinbaren Doppelstern Wega (α Lyrae) mit „Begleiter“ (der die Herschelschen Voraussetzungen erfüllte) eine Parallaxe zu finden. (Die Wega im Sternbild Lyra – einer der Sterne des Sommerdreiecks – gehört zu den hellsten Sternen des Himmels.)

Ende 1829 hatte die Königsberger Sternwarte, deren Direktor F. W. Bessel war, das neue Heliometer aus der Münchener Werkstatt von Fraunhofer erhalten (Bild 5). Die Beobachtungsgenauigkeit dieses Instruments erzeugte in Bessel die Hoffnung, daß es damit gelingen würde, „statt der Überzeugung von der Kleinheit der jährlichen Parallaxe der Fixsterne, in günstigen Fällen ihre Bestimmung zu erhalten“. Schon 1815/16 hatte Bessel versucht, am „durch die stärkste eigene Bewegung ausgezeichneten Doppelstern 61 Cygni“ die jährliche Parallaxe nachzuweisen. Vom Herbst 1834 an beobachtete Bessel diesen Stern 61 Cygni im Sternbild „Schwan“ (Kreuz des Nordens, Cygnus) erneut (Bild 6). Er wählte ihn „nicht allein wegen der größeren Aussicht auf eine merkliche Parallaxe, die er, wegen seiner großen eigenen Bewegung, darzubieten schien, sondern auch weil er ein *Doppelstern* ist, den man mit vorzüglicher Genauigkeit beobachten kann, indem man das Bild, welches die eine Hälfte des Heliometerobjektives von dem zu vergleichenden Stern macht, in die Mitte der beiden Sterne des von der andern Hälfte abgebildeten Doppelsterns legt; auch empfahl er sich durch seinen Ort am Himmel, der zu allen Jahreszeiten, einen Monat ausgenommen, bei *Nacht* in eine hinreichende Höhe über dem Horizont gelangt; endlich durch die zahlreichen kleinen Sterne, die ihn umgeben, unter

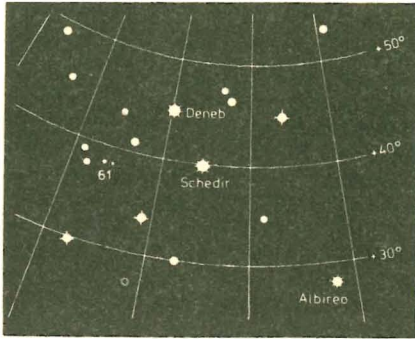


Bild 6

welchen man Vergleichssterne nach Belieben auswählen konnte". 1835/36 mußte Bessel seine Beobachtungen unterbrechen. Vom 16. August 1837 bis zum 2. Oktober 1838 verbrachte Bessel dann nahezu 100 Nächte mit der Beobachtung. Darüber hinaus mußte er zahlreiche Berechnungen machen. Doch dann gab es keinen Zweifel mehr an der Merklichkeit der Parallaxe des Sternes „61 Cygni“. Im 16. Band der „Astronomischen Nachrichten“ vom Dezember 1838 publizierte Bessel eine Abhandlung darüber, die später auch von ausländischen astronomischen Fachzeitschriften übernommen wurde.

Bessel hatte erkannt: Der Stern „61 Cygni“ besitzt eine jährliche Parallaxe von 0,3136". Hieraus berechnete er seine Entfernung zu 657 700 AE und die Zeit, welche das Licht braucht, um diese Entfernung zu durchlaufen, zu 10,28 Jahren.

Mit diesem Erfolg gab Bessel sich nicht zufrieden. Er wollte durch Weiterführung bzw. Wiederholung der Beobachtungen den gemessenen und berechneten Parallaxenwert bestätigen bzw. absichern. Vom 12. November 1838 bis 23. März 1840 richtete Bessel erneut seinen Blick in das Sternbild Schwan. Die rechnerische Auswertung der Messungen sowohl dieser als auch der ersten Meßreihe ergab nun die Parallaxe von $0,3438'' \pm 0,0141''$. „Diese längere Fortsetzung der Beobachtungen hat [also] eine Vergrößerung der jährlichen Parallaxe von 0,0347" herbeigeführt. [Dieser] Bestimmung entspricht die Entfernung = 592 200 mittleren Entfernungen der Erde von der Sonne, welche das Licht in $9\frac{1}{2}$ Jahren durchläuft.“

Nur kurze Zeit nach Bessels erstmaliger Bestimmung einer Fixsternparallaxe (und damit der ersten Bestimmung der Entfernung eines Fixsterns) konnte Wilhelm Struve auf der Dorpater Sternwarte den Parallaxennachweis für die Wega und Thomas Henderson auf der Kapsternwarte in Südafrika den Parallaxennachweis für den sehr hellen Stern α Centauri bekanntgeben.

Das jahrhundertelange Suchen nach dieser astronomischen Bestätigung der heliozentrischen Hypothese hatte endlich Erfolg. Fast 300 Jahre wurde die astronomische Wissenschaft durch diese Suche stimuliert (Verbesserung der Meßkunst, der Beobachtungsgeräte usw.) und durch weitgreifende

Erkenntnisse bereichert (Entdeckung der Aberration, Entdeckung der Doppelsterne u. a.). In diesem Sinne konnte Bessel die Lösung des Problems der Fixsternparallaxe für „fast unbedeutender vergleichsweise mit den weitgreifenden Kenntnissen, welche das Suchen derselben der Wissenschaft hinzugesetzt hat“, halten.

Bessels erfolgreiche Parallaxenbestimmung zeugt von der hohen Vollendung der durch Bessel begründeten neueren astronomischen Meßkunst (seinem Bestreben, überall die größte Genauigkeit zu erreichen) und von der außerordentlichen Genauigkeit der durch das Fraunhofersche Institut hergestellten Instrumente.

Mit diesem Ereignis, dem (noch im 19. Jahrhundert) die ersten astrophysikalischen Versuche zur Erforschung der Sternwelt folgten, begann das bis in die Gegenwart reichende Zeitalter der Stellar- und Astronomie (jener Teilgebiete der Astronomie, die sich mit den Sternen beschäftigen) als einer exakten Wissenschaft.

Der Astronom, Geodät und Mathematiker Friedrich Wilhelm Bessel gilt auch heute noch als unerreichter Meister der astronomischen Meß- und Beobachtungskunst.

Eine ausführliche Bessel-Biographie von J. Hamel erscheint in der Reihe „Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner“ im Leipziger Teubner-Verlag.

H. Pieper

Drei harte Nüsse

Aufgaben

▲ 1 ▲ Für eine Funktion f gelte $f(x+h) = f(x) + h$ und $f(0) = 2$. Berechne $f(3)$!

▲ 2 ▲ Bestimme den größten Wert, den $\sin - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$ annehmen kann!

▲ 3 ▲ Eine Person hat 30 000 Kr. gespart. Der jährliche Zinssatz beträgt 11,6%. Nach wieviel Jahren hat er 100 000 Kr.?

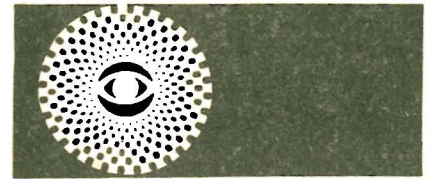
Aus dem Problemheft 1984 der norwegischen Zeitschrift *Tidskrift for Matematik, Fysik och Kemi*; Aufgaben ausgewählt und bearbeitet von Dr. W. Moldenhauer, PH Erfurt

Lösungen

▲ 1 ▲ Aus $x=0$ folgt $f(h) = f(0) + h = 2 + h$ und damit $(h=3) f(3) = 2 + 3 = 5$.

▲ 2 ▲ Es ist $\sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$. Der größte Wert ist damit $\sqrt{2}$. Er wird für $x = \frac{3\pi}{4}$ angenommen.

▲ 3 ▲ Es gilt $30\,000 \cdot 1,116^n = 100\,000$ (siehe z.B. Kleine Enzyklopädie Mathematik), also $n \lg 1,116 = 1 - \lg 3$, $n \approx 10,97$. Nach 11 Jahren hat er den genannten Betrag erspart.



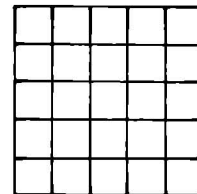
ARBEITS- GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Spezialistenferienlager Mathematik

Der *Kreisklub Junger Mathematiker* Senftenberg führte 1984 bereits zum dritten Mal ein zehntätiges Spezialistenferienlager zu Beginn der Sommerferien durch. Diesmal fand das Lager in Ortrand statt. Vormittags standen 3 bis 4 Stunden Mathematiktraining auf dem Programm. Nachmittags konnten sich die etwa 40 Schüler der 5. bis 9. Klassen vielfältig betätigen. Es wurden ein Schwimmfest, ein Sportfest, ein Kinobesuch, Betriebsbesichtigungen, eine Buchlesung und ein Museumsbesuch organisiert.

Eine Tagesfahrt führte die *Jungen Mathematiker* nach Dresden. Höhepunkte waren für alle die Lagerolympiade, bestehend aus zwei Klausuren und die Spielereien um das Jahr 1985, von denen wir zwei vorstellen möchten.

▲ 1 ▲ Die Zahlen von 385 bis 409 sind in ein magisches Quadrat fünfter Ordnung einzutragen, so daß sich in jeder Zeile, in jeder Spalte und in beiden Diagonalen die gleiche Summe ergibt! Wie lautet diese Summe?



▲ 2 ▲ Stellt die Zahlen 0...150 unter alleiniger Verwendung der Ziffern 1, 9, 8, 5 (in dieser Reihenfolge) und aller möglichen Rechenzeichen dar! Viel Spaß beim Knobeln!

R. Drendel

Wer besonders elegante Lösungen gefunden hat, oder wer Zahlen über 150 auf diese Weise elegant gelöst hat, sende seine Beispiele an: R. Drendel, 7846 Senftenberg, Bergbastr. 8, Kennwort: 1985!

alpha- Wettbewerb 1983/84

Preisräger

Birger Strauch, Anklam; Veneta Türke, Auerbach; Beatrice List, Altenburg; Claudia Raßbach, Bad Liebenstein; Mario Winter, Sven Völker, Marcus Markardt, Ute Patsch, René Wohlfahrt, Michael Henning, alle Bad Salzungen; Bernd Trappe, Robert Krüger, Jeannette Schmiedel, Wilko Wohlauf, Peter Zülsdorff, alle Berlin; Alice Kraneis, Bernburg; Angela Herrmann, Jens Baumann, beide Bernsbach; Matthias Jurke, Silvio Löffler, Thomas Reißner, alle Cottbus; Wolfgang Jäckel, Demitz-Thumitz; Thomas Kaufhold, Dingelstädt; Ramona Kaiser, Dörfel; Ulrich Hartung, Hans Wirth, Birgit Jeske, Hans-Harald Neschke, alle Dresden; Martin Welk, Eisenach; Olaf Krause, Eisenhüttenstadt; Dirk Lange, Elsterwerda; Irena Thiele, Gniest; Christoph Kothe, Birgit Sommer, Matthias Grau, alle Görlitz; Michaela Große, Gohrau; Michael Hanke, Gräfenhainichen; Katrin Dierschke, Thilo Kuessner, beide Greifswald; Sven Rudolph, Großröhrsdorf; Bernd Rieche, Halle; Thomas Gerlach, Haynrode; Birgit Bremer, Heiligenstadt; Klub Jg. Math. der P.-Schreier-OS, Hennigsdorf; Ivette Roscher, Hermannsdorf; Stefan Heiber, Heyda; Glenn Hofmann, Hohenstein-E.; Henry Wiesjahn, Holzendorf; Christine Priplata, Jena; Klaus Erdmann, Joachimsthal; Nico Schmidt, Jüdenberg; Antje Fischer, Kleinmachnow; Günter Doppler, Josef Pernersdorfer, Josef Blauensteiner, alle Krems (Österreich); Henrik und Jana Hodam, Kaltennordheim; Christian Dorschner, Karl-Marx-Stadt; Jaqueline Eichhorn, Lauscha; Andreas Englisch, Roland Hildebrand, beide Leipzig; Giselher Schütze, Magdeburg; Andreas Hübler, Mittelbach; Christian Eisele, Mölkau; Steffen Scharnowski, Möser; Steffen Ewert, Jens Burmann, Rüdiger Grewe, alle Neuhaus; Michael Herrmann, Oberlichtenau; Carola Sachs, Parchim; Felix Kraenz, Picher; Wolfgang Schneider, Radeberg; Falk Klätte, Dirk Gemeinhardt, beide Riesa; Ute Möller, Annett Kistner, Karen Meyer, Daniela Wulff, Doris Bräuer, Barbara Menzel, alle Rostock; Jens Krüger, Remo Karius, beide Rotta; Marcus Spindler, Sangerhausen; Ronald Bojarski, Saßnitz; Christian Mudra, Schmalkalden; Tobias Franke, Schrebitz; Reiner Möwald, Sömmerda; Ilka Fibry, Sondershausen; Daniel Potts, Stavenhagen; Thomas Heublein, Steinach; Thomas Reumerschüssel, Steinbach-Hallenberg; Uta Dietze, Christiane Ellenbeck, beide Stendal; Una Brock, Stralsund; Claudia Schwartz, Suhle; Anja Tippe, Teterow; Veronika Fischer, Annett Wiesner, beide Töplitz; Mario Gimpel, Michael Pforr, Simone Schwarz, alle Unterbreizbach; Frederik Schiller, Voigtsgrün; Sven Langer, Weißwasser; Ralf Klötzer, Wilkau-Haßlau; David Reuter, Frank Schräpel, Gereon Begau, Kirsti Linke, alle Worbis; Katrin Kadow, Wusterhusen; Markus Lehmann, Zittau

Vorbildliche Leistungen

Uta Schmidt, Altenburg; Stefan Ulbrich, Bad Liebenstein; Gerit Glock, Bad Salzungen; Petra Döring, Matthias Röder, Anja Pruchnewski, alle Berlin; Karsten Hille, Bernau; Ingrid Voigt, Böhlen; Christina Werner, Bötzw; Dirk Feuerherdt, Brandenburg; Martin Leitel, Cottbus; Anke Mehner, Dörfel; Jens Meyer, Dresden; Yvonne Arnold, Elsterwerda; Maik Denner, Empfertshausen; Jörg Simon, Engelsdorf; Axel Pätzold,

Flecken Zechlin; Holger Hänchen, Forst; Ramona Dietrich, Gräfenhainichen; Yvette Vogelsberger, Greifswald; Angelika Dengel, Grotzsch; Britta Struwe, Halberstadt; Schulclub der EOS W. Pieck, Heiligenstadt; Rafael Göpfert, Hermannsdorf; Hagen Reimann, Horka; Marco Ringel, Jänickendorf; Tobias Walke, Peter Wendt, beide Karl-Marx-Stadt; Torsten Schütze, Klettenberg; Markus Bauer, Krems (Österreich); Gert Wollny, Leipzig; Sven Pfeffer, Magdeburg; Karina Kramp, Menz; Swen Funk, Mülsen; Roland Schrugler, Rosa Flint, Martina Schulz, alle Neuhaus; Jens Sbresny, Oberschöna; Falk Müller, Oelsnitz; Carola Walter, Ottendorf; Uwe Anke, Pappendorf; Michael Taeschner, Parchim; Gunter Döge, Riesa; Holger Franke, Roskow; Ulf Gebhardt, Mirek Riedewald, Karin Stüpmann, alle Rostock; Matthias Fuhrland, Schmalkalden; Stefan Erb, Schwallungen; Daniel Küstner, Schöneiche; Axel Bichler, Sondershausen; Sven Janssen, Sabine Kaiser, Chris Janssen, alle Tornau; Daniela Scholich, Ueckermünde; Ellen Stephan, Unterbreizbach; Edith und Hartmut Boettcher, Weimar; Silvio Ladusch, Weißwasser; Andrea Maas, Wilhelmsburg; Christiane Lehmer, Marko Reuter, Frank Raabe, Marko Bock, alle Worbis; Ines Hauke, Zehdenick; Sascha Hempel, Zella-Mehlis; Ilka Gehrke, Unterbreizbach; AG Math. d. Fr.-Schmenkel-OS Roskow

Abzeichen in Gold

Für siebzehnjährige Teilnahme
Lutz Püffeld, Hennigsdorf

Für sechzehnjährige Teilnahme
Guido Blossfeld, Halle; Bernd Hanke, Löbau

Für fünfzehnjährige Teilnahme
Ulrich Riedel, Flöha

Für vierzehnjährige Teilnahme
Arno Feuerherdt, Brandenburg; Rainer Seifert, Dessau; Ursula Märker, Greifswald; Thomas Jakob, Gera; Norbert Littig, Kleinröhrsdorf; Uwe Bormann, Magdeburg; Frank Abmus, Oranienburg; Bernhard Tschada, Weimar

Für dreizehnjährige Teilnahme
Andreas Fittke, Berlin; Bengt Nölting, Greifswald; Wolfgang Seebler, Jena; Rolf Kuhn, Leipzig; Lothar Gruber, Linz (Österreich); Gerald Werner, Meiningen; Volker Schulz, Nauen; Katrin Richter, Wittenberg; Kurt Oertel, Zschornitz

Für zwölfjährige Teilnahme
Andreas Gude, Berlin; Frank Regensburger, Dresden; Andrea Ziegenbein, Eichicht; Eberhard Georgy, Erfurt; Wolhart Umlauf, Freital; Steffen Langbein, Lichte; Rainer Bauer, Mittweida; Wilfried Röhnert, Radebeul; Thomas Apel, Reichenbach; Torsten Löwe, Schleiz; Heinz-Olaf Müller, Schmalkalden; Hans-Dietrich Schwabe, Sondershausen; Ralf Becker, Wolmirstedt

Für elfjährige Teilnahme
Henry und Dieter Koch, Arnstadt; Jens Purand, Cottbus; Annett Körner, Dresden; Daina Semper, Eisleben; Bernd Dübe, Forst; Silvio Klose, Gera; Matthias Weser, Großenhain; Hubert Steinmetz, Gruningen; Rüdiger Düsing, Halle; Ruth Jacobs, Halle-Neustadt; Rolf Kamieth, Kakerbeck; Alois Weninger, Knittelfeld (Österreich); Martina Wolf, Magdeburg; Udo Kretschmann, Markneukirchen; Jörg Pöhland, Klingenthal; Sigrid Planke, Premnitz; Roland Brachold, Riesa; Jana Walter, Röbel; Ina und Uwe Ebert, Ruppendorf; Siegrid Kretschmann, Schlagsdorf; Torsten Jeschke, Schwarzheide; Bernd Hartwig, Thaldorf; Frank Erdmann, Zeitz

Für zehnjährige Teilnahme
Guntram Türke, Auerbach; Claudia Ziehm, Eike Harmel, beide Berlin; Maik Weide, Callenberg; Harry Höfer, Dornsdorf; Jörn Wittig, Andreas

Winkler, Karl-Heinz Jünger, Carolin Engel, Ingrid Körner, alle Dresden; Thomas Mittelbach, Erfurt; Jörg Butter, Freiberg; Angela Illing, Gersdorf; Michael Katzer, Greußen; Heike Klitz, Grimmen; Volker Reck, Heiligenstadt; Mathias Grundmann, René Schüppel, beide Hoyerswerda; Horst Fliegner, Jarmen; Thomas Mader, Jens Pönisch, Andreas Hengst, Conchita Röske, alle Karl-Marx-Stadt; Steffen Rieth, Klostermansfeld; Per Witte, Königs Wusterhausen; Gudrun Hebestreit, Mühlhausen; Stefan Göckeritz, Neuenkirchen; Sigrun Massanek, Neusornzig; Karsten Woike, Neustadt; Birgit Uhlmann, Oberlungwitz; Anett Schulzensohn, Oberseifersdorf; Jens-Peter Planke, Premnitz; Claudia Trochold, Reichenbach; Klaus-Detlef Gehrke, Rostock; Roland Goldenbogen, Stralsund; Heidrun Tiedt, Teterow; Hans und Michael Creutzburg, Thal; Gudrun Thäter, Weimar; Olaf Seidel, Weißwasser; Eva-Maria Heubner, Wolfen; Birgit Schulttheiß, Wüstenbrand; Dirk-Thomas Orban, Erfurt; Uwe Maaz, Arnstadt

Für neunjährige Teilnahme

Frank Baumgart, Aschersleben; Karsten Schlüter, Babelsberg; Marc Schewe, Berlin; Axel Schüler, Birkenhügel; Tilman Völzke, Böhlen; Stefanie Begau, Breitenworbis; Uta Boldt, Burg Stargard; Guido Mehne, Calbe; Royald Lenk, Cottbus; Petra Sarodnik, Dallgow; Jörg Hempelt, Stefan Edelmann, Ulf Riechen, alle Dresden; Siegfried Obst, Reinhard Weidnicht, beide Eberswalde; Matthias und Susanne Schreiber, Elsterwerda; Matthias Bauer, Genthin; Wilfried Schleinitz, Greifswald; Veit-Thomas Meyen, Grimmen; Dieter Seifert, Hagenow; Günter Schielinsky, Halle-Neustadt; Heinz Wickner, Hermannsdorf; Ralf Häntsch, Köthen; Roger Fischl, Lehmitz; Jörg Drechsel, Leinefelde; Lutz Hübschmann, Löbnitz; Uwe Würker, Mülsen; Hans-Dieter Büchler, Neustadt; Ralph Gruber, Plauen; Tim Planke, Premnitz; Manfred und Ina Hille, Riesa; Gunnar Jeschke, Schwarzheide; Thomas Merten, Stralsund; Klaus Pfeiffer, Taubach; Birgit Schmidt, Weißwasser; Rolf Heubner, Wolfen; Steffen Klimpel, Wolgast; Karl Oertel, Zeitz; Kerstin Hoffmann, Zittau; Uta Escher, Zwickau; Torsten Eidner, Zeulenroda; Karsten Milek, Hohen-Neuendorf.

Für achtjährige Teilnahme

Michael Elte, Ahlum; Jens Fache, Altenburg; Silke Rechner, Baruth; Andreas Jock, Blankenfelde; Thomas Streich, Marlis Schröder, beide Brandenburg; Ralph Voigtländer, Calbe; Uwe Schütze, Camin; Roland Damm, Cottbus; Andreas Mann, Cunersdorf; Frank Sarodnik, Dallgow; Ulrich Schuster, Demitz-Thumitz; Georg Kirchner, Dermbach; Stefan Franze, Brigitte Rotter, Heike Lauter, Lutz Lauter, Titus Ziegler, Catherin Engel, alle Dresden; Uwe Wollert, Edde-ritz; Achmed und Britta Schulz, Greifswald; Bettina Weser, Großenhain; Kirsten Schlegel, Grünhain; Michael Schulze, Halberstadt; Dany Lindenberg, Frank Siebert, beide Halle; Holger Hartmann, Hartmannsdorf; Hagen Fritsch, Hosena; Claus Janke, Ilmenau; Andreas Niepel, Ricarda Damm, beide Karl-Marx-Stadt; Heiko Schinke, Leuna; Karl-Heinz Gora, Lohsa; Anke Misch, Magdeburg; Sabine Oestreich, Oschersleben; Gudrun Zirstein, Pirna; Iljana Planke, Premnitz; Frank Berndt, Radeburg; Ines Gülden, Roitzsch; Jürgen Schmalisch, Reuden; Gitta Schöne, Rostock; Kurt Schulze, Schernberg; Ronald Bojarski, Saßnitz; Sylke Lüder, Schönborn; Frank Pampel, Schneeberg; Jens Hoffmann, Sebnitz; Mario Jäpel, Spremberg; Birgit Lorenz, Waren; Hartmut Boettcher, Weimar; Dietmar Polster, Zeithain; Christina Voß, Zepernick; Ruth Backhaus, Leinefelde

Die Träger des Abzeichens in Gold für sieben-, sechs-, fünf- und vierjährige Teilnahme am *alpha*-Wettbewerb veröffentlicht wir im Heft 2/85.

In freien Stunden · alpha-heiter



Kryptarithmetik

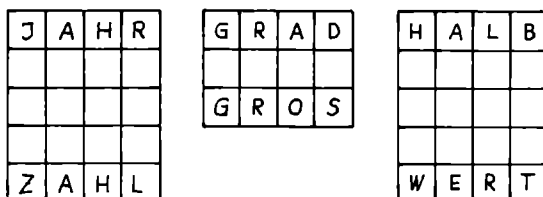
● Angeregt durch die Wettbewerbsaufgaben aus *alpha* 6/83 probierte Andreas Englisch aus Leipzig, ob die Aufgabe (Bild links) eindeutig lösbar ist. Er fand gemeinsam mit seinem Vater einen Lösungsweg.

$$\begin{array}{r} \text{S E C H S} \\ + \text{S E C H S} \\ \hline \text{Z W O E L F} \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{S I E} \\ - \text{E R} \\ \hline \text{E S} \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{D O R F} \\ + \text{S T A D T} \\ \hline \text{K R E I S} \end{array}$$

● Birgit Sommer (Kl. 6) aus Görlitz schlägt dem *alpha*-Leser vor, folgende Subtraktionsaufgabe zu lösen (Bild Mitte) und

● Andreas Suchanow (Kl. 6) aus Neubrandenburg schlägt folgende Aufgabe vor (Bild rechts).

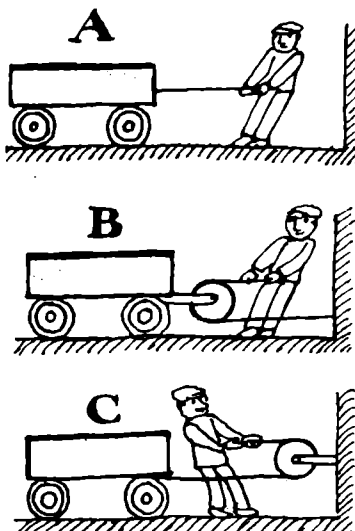
Wortspiele



Fachlehrer D. Knape, Jessen

Hau ruck

Wer bewegt den Wagen mit dem geringsten Kraftaufwand?



Aus:
Pionierleiter,
Berlin

Alpha-Logeleien

● Er: „Welches Datum haben wir eigentlich heute?“ – Sie: „Weiß ich auch nicht, aber schau doch mal in der Zeitung nach!“ –

Er: „Zwecklos, die ist doch von gestern.“

● „Hör mal“, sagt Monika zu Marie-Luise, „warum antwortest du auf jede Frage mit einer Gegenfrage?“ – „Tu ich das wirklich?“

● „Vati, heute mußten wir in der Schule den gemeinsamen Nenner suchen.“ – „Was, den haben sie immer noch nicht gefunden? Den mußten wir doch auch schon suchen!“

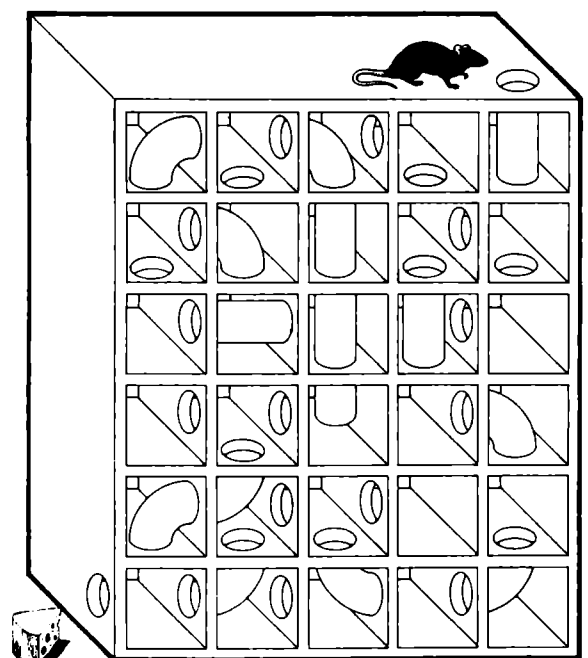
● „Haben wir uns nicht schon einmal zur Kreisolympiade getroffen?“ – „Nein, ich bin noch nie zur Kreisolympiade gewesen.“ – „Ich auch nicht, da werden es wohl zwei andere gewesen sein!“

● 2g liegen auf der rd. – L4a spielt Kla4. – 8tung, das sn ist fertig. – R riß dn Zl nt2. – Man ist nie 1am, wenn man eine Run3se m8.

Labyrinth

Welchen Weg muß die Maus nehmen, um zum Käse zu gelangen?

Aus: Füles, Budapest



Tierisches

● Die Seite eines einjährigen Tieres kostet 12 Cent je kg weniger als die Seite eines Lammes. Die Seiten beider Tiere wiegen zusammen 24 kg. Das Lamm kostet \$ 16,35 und das einjährige Tier \$ 59,85.

Wieviel wiegt jede Seite?

● Ein Kaninchen wiegt mit Kiste 4 kg, eine Ente mit Kiste 5 kg. Ente und Kaninchen wiegen zusammen 3 kg.

Welche Masse hat die Kiste?

Aus: The Australian Mathematics Teacher

Autonummern-Mathematik

Auf dem Heimweg von der Schule studieren Peter und Klaus die Kennzeichenschilder auf der Straße parkender Autos.

Peter zeigt auf ein Nummernschild 28-57 und sagt: „Sieh mal, Klaus, die Summe der beiden zweiziffrigen Zahlen 28 und 57 ist gleich der aus den beiden Innenziffern 8 und 5 gebildeten zweistelligen Zahl 85. Wieviel derartige Möglichkeiten bei vierziffrigen Autonummern wird es wohl geben, und wieviel Prozent von allen Autonummern werden sie ausmachen?“

Am nächsten Tage bringt Klaus Lösungsweg und Lösung in die Schule mit. Kommst du auch darauf?

Dr. W. Lorenz, Leipzig

Bruchrechnung

$$\frac{\text{SCH}}{8} \quad \frac{\text{H}}{\text{O}} \quad \frac{\text{K}}{\pi} \quad \frac{\text{WIL}}{\text{HELM}}$$

Dipl.-Ing. M. Wilde, Leipzig

Mathematiker gesucht

In dem folgenden Brief sind die Nachnamen von 20 bedeutenden Mathematikern aus der Vergangenheit versteckt (als aneinandergereihte Buchstabenfolgen, wobei Satzzeichen, Zwischenräume und die Groß-Klein-Schreibung unberücksichtigt bleiben sollen). Findet diese Namen heraus!

Liebe Eltern!

Im Ferienlager gefällt es mir sehr gut. Ich bewohne mit Alice Vatter, Eva Belger und Marie Mannheim ein Viernannzelt. Auch Adam Arden, Simon Gerlach, Alfred Holm, Petra Schmidtgen und Regina Möbius aus meiner Klasse sind hier. Unser Lagerleiter ist Herr May; er ist sehr groß, und wir nennen ihn den „Riesen“. Auch Anke Liebers, so heißt unsere Pionierleiterin, ist nicht gerade klein. Beide sind sehr nett und immer guter Laune.

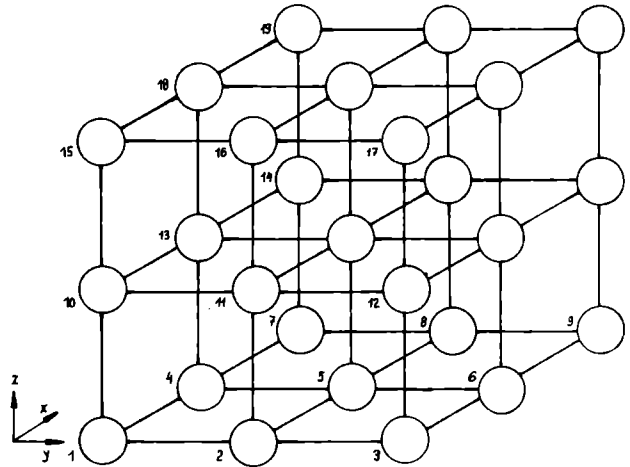
Gestern habe ich bei einem Ausflug nach Parchim Edes Schwester Dana getroffen. Sie ging aus sich heraus und erzählte mir einiges: Ede ist inzwischen Major; Dana will nächstes Jahr heiraten. Ihr Freund heißt Helmut Stein; er studiert in Halle. Hier im Lager ist jeder Tag wie neu. Lernen kann man auf

Schritt und Tritt. Ich habe eine neue Freundin. Sie heißt Ines Ristok. Es ist immer sehr interessant, sich mit ihr zu unterhalten. Liebe Mutti, bitte sag Alois Bescheid, daß ich ihm gleich nach meiner Rückkehr die geliehenen Bücher zurückgebe. Herzliche Grüße, Eure Viola!

Dr. R. Mildner, Karl-Marx-Universität Leipzig

Kreuzzahlrätsel – dreidimensional

In jeden Kreis ist eine Ziffer einzutragen, so daß sich in den Richtungen (Koordinaten) x , y und z die unten definierten dreistelligen Zahlen ergeben. Richtung x :



$x1$) eine Quadratzahl; 2) die Quersumme dieser Zahl ist eine Quadratzahl; 3) zugleich Quadratzahl und Kubikzahl; 10) die Quersumme dieser Zahl ist gleich der Quersumme von $y14$; 11) Zahl aus gleichen Ziffern; 12) ist die Quersumme von $z9$; 15) Spiegelzahl von $z6$; 16) die Zahl aus den beiden ersten Ziffern ist das Doppelte der letzten Zahl; 17) eine Primzahl.

Richtung y :

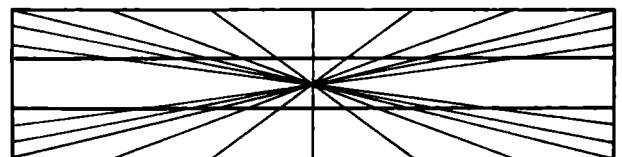
$y1$) eine Primzahl; 4) diese Zahl ist das Querprodukt von $z1$; 7) eine Primzahl; 10) die Fakultät der Quersumme von $x16$; 13) eine Quadratzahl; 14) diese Zahl ist das Querprodukt von $x3$; 15) eine Primzahl; 18) Nachfolger von $x16$; 19) eine Primzahl.

Richtung z :

$z1$) liest man diese Quadratzahl rückwärts, bleibt sie dieselbe; 2) eine Primzahl; 3) von vorwärts und rückwärts gelesen die gleiche Zahl; 4) eine Primzahl; 5) Spiegelzahl von $z8$; 6) eine Kubikzahl; 7) eine Kubikzahl; 8) eine Quadratzahl; 9) eine Quadratzahl.

Ing. H. Decker, Köln

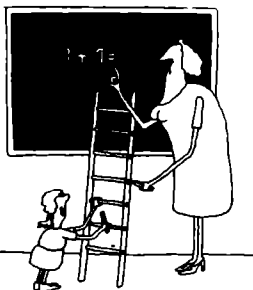
Optische Täuschung



Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 1. Mai 1985

Höhere Mathematik
Lothar Schneider



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig,
Postfach 14

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm x 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1984/85 läuft von Heft 5/1984 bis Heft 2/1985. Zwischen dem 1. und 10. September 1985 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/84 bis 2/85 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/85 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/84 bis 2/85) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1984/85 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

Mathematik

Ma 5 ■ 2522 Zwei befreundete Touristen kaufen Ansichtskarten von unserer Hauptstadt Berlin. Jeder von ihnen gibt dafür den gleichen Betrag aus. Der erste kauft Ansichtskarten zu 25 Pf, der zweite zu 35 Pf das Stück, der zweite aber 2 Ansichtskarten weniger als der erste. Wieviel Ansichtskarten hat jeder dieser beiden Touristen gekauft?

Ma 5 ■ 2523 Es ist die kleinste natürliche Zahl zu ermitteln, die bei Division durch 12 den Rest 2, bei Division durch 16 den Rest 6 läßt.

Schülerin Sandra Fabian, Liederstadt

Ma 5 ■ 2524 In einem Ferienlager werden 170 Kinder der unteren Klassen betreut. Von ihnen können 70 Kinder radfahren und 125 Kinder schwimmen. Sowohl radfahren als auch schwimmen können genau 45 dieser Kinder. Ermittle die Anzahl derjenigen Kinder, die weder radfahren noch schwimmen können!

Schüler Tilo Taupitz, Weinböhla

Ma 5 ■ 2525 In dem Kryptogramm

DREI
+ EINS.
VIER

sollen die Buchstaben durch Grundziffern ersetzt werden. Für gleiche Buchstaben sollen gleiche, für verschiedene Buchstaben sollen verschiedene Grundziffern eingesetzt werden. Begründe, daß es keine Lösung dieser Aufgabe für die geforderten Bedingungen geben kann!

Ma 5 ■ 2526 Jeder der 13 Spieler einer Mannschaft A spielt gegen jeden Spieler einer Mannschaft B genau einen Satz Tischtennis. Es werden 117 Spiele ausgetragen.

- a) Wie viele Spieler gehören zur Mannschaft B?
- b) Wie lange dauert das Turnier, wenn gleichzeitig an 8 Platten gespielt wird und

einschließlich kurzer Pausen für ein Spiel 15 Minuten angesetzt werden?

- c) Wie viele Sätze Tischtennis wären nur auszutragen, wenn Mannschaft A mit 5 Spielern weniger, Mannschaft B mit 3 Spielern weniger antreten würde?

- d) Ist es die gleiche Anzahl von Sätzen, wenn Mannschaft A mit 3 Spielern weniger, Mannschaft B mit 5 Spielern weniger antreten würde?

Ma 5 ■ 2527 Ersetze in dem Schema

52.***
**
**

die Sternchen so durch Grundziffern, daß man eine richtig gelöste Multiplikationsaufgabe erhält!

Schülerin Annett Hildebrandt, Görcke

Ma 6 ■ 2528 Von den $\overline{xy}$ Schülern einer Schulklasse waren $\overline{yx}$ Schüler infolge einer Grippe erkrankt. Wie viele Schüler gehören dieser Klasse an, und wie viele Schüler waren erkrankt, wenn $\overline{xy}$ und $\overline{yx}$ Primzahlen in dekadischer Schreibweise sind, $x \neq y$ ist, und dieser Klasse weniger als 36 Schüler angehören?

Schüler Hugo Engelsrecht,
Gymnasium Krems, Österreich

Ma 6 ■ 2529 Für einen Besuch des Berliner Kulturparks entnahm Klaus seiner Sparsbüchse den fünften Teil seiner Ersparnisse. Von dem mitgenommenen Gelde gab Klaus $\frac{3}{4}$ aus. Es blieben 1,50 M übrig,

die er wieder in die Sparsbüchse steckte. Wieviel Mark gab Klaus auf dem Berliner Kulturpark aus? Wieviel Mark sind danach wieder in der Sparsbüchse?

Fachlehrer für Mathematik
Claußnitzer, 26. POS Berlin-Marzahn

Ma 6 ■ 2530 Gib alle Teiler der Zahl 567 an! Wie lautet der Dividend, wenn der Divisor 567 und der Quotient $\frac{4}{3}$ betragen?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

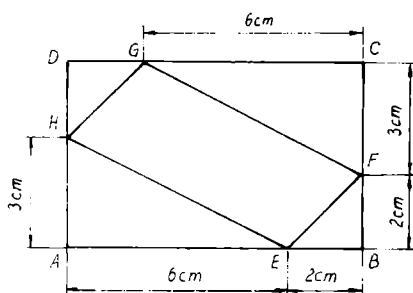
	Thies LuAher, 2600 Güstrow, Wendersstr 22 Kersting-OS, Klasse 7	Ma 7 1369
30	150	
	Prädikat:	
	Lösung:	

Ma 6 ■ 2531 Kay sagt zu Ute: „Wenn du mir einen von deinen Äpfeln geben würdest, so hätte ich dreimal soviel Äpfel wie du.“ Darauf antwortet Ute: „Gib mir lieber einen von deinen Äpfeln; dann hätten wir beide gleich viel Äpfel.“ Wieviel Äpfel hatte jeder von ihnen? Begründe, daß es nur eine Möglichkeit gibt!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 2532 Von einem Rechteck $ABCD$ sollen vier Dreiecke $\triangle AEH$, $\triangle EBF$, $\triangle FCG$ und $\triangle GDH$ abgeschnitten werden. Welchen Flächeninhalt besitzt das übrigbleibende Viereck $EFGH$?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz



Ma 7 ■ 2533 Die Weglänge von Erfurt bis Suhl beträgt 50 km. Anton fährt morgens um 8 Uhr mit dem Fahrrad von Erfurt nach Suhl mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von $14 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Bruno reitet am gleichen Tag und zum gleichen Zeitpunkt hoch zu Roß von Suhl nach Erfurt mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von $11 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Um welche Uhrzeit treffen beide aufeinander? Wie weit ist der Treffpunkt von Erfurt entfernt?

Schüler A. Steinmetz, Göllingen

Ma 7 ■ 2534 Es ist zu untersuchen, ob der Quotient $\frac{378 \cdot 436 - 56}{378 + 436 \cdot 377}$ gleich 1 oder kleiner bzw. größer als 1 ist.

Die Antwort ist zu begründen! Die Produkte in Zähler und Nenner sollen nicht ausgerechnet werden!

Schülerin Dorit Granzow, Neustadt/D.

Ma 7 ■ 2535 Es sei n eine natürliche Zahl. Das Produkt aus dem Vorgänger und dem Nachfolger von n betrage 483. Um welche natürliche Zahl n handelt es sich?

Ma 7 ■ 2536 Ein Kleintierhalter verfügt über einen Kaninchenstall mit vier Boxen, in denen insgesamt 30 Kaninchen untergebracht sind. In der vierten Box befinden sich mehr Kaninchen als in der dritten, in der dritten mehr als in der zweiten, in der zweiten mehr als in der ersten. In keiner Box befinden sich mehr als 10 Kaninchen. Der Unterschied in der Anzahl der Kaninchen zwischen der vierten und dritten, der dritten und zweiten, der zweiten und ersten Box ist stets gleich. Wieviel Kaninchen befinden sich in jeder der vier Boxen?

Ma 8 ■ 2537 Gegeben sei eine beliebige zweistellige natürliche Zahl z . Ihre Quer-

summe sei mit $q(z)$ bezeichnet. Es ist zu beweisen, daß die Differenz $z - q(z)$ stets neunmal so groß ist wie die Zahl, die durch die erste Ziffer von z dargestellt wird.

Schüler Ralf Kühnel, Wilhelm-Pieck-Stadt Guben

Ma 8 ■ 2538 Drei Angler hatten zusammen 30 Fische gefangen, die nun in einem Gefäß lagen. Bei der Aufteilung der Fische gab es Streit.

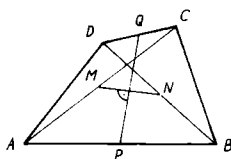
Als jeder der drei Angler A, B, C sagen sollte, wie viele Fische er geangelt hatte, nannte C eine um 1 größere Anzahl. A meinte daraufhin, daß er ebenso viele Fische geangelt habe wie C. Wie viele Fische hatte jeder der drei geangelt, wenn B genau einen Fisch mehr als das Doppelte der vom Angler C tatsächlich gefangenen Fische geangelt hatte?

Schüler Olaf Gleim, Timkenberg

Ma 8 ■ 2539 In ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck ist ein Rechteck derart einzuschreiben, daß zwei Seiten auf je einer Kathete und ein Eckpunkt auf der Hypotenuse liegen. Die Fläche des Rechtecks soll halb so groß wie die Dreiecksfläche sein. Die Konstruktion ist zu beschreiben und zu begründen!

Oberlehrer Werner Melka, Neubrandenburg

Ma 8 ■ 2540 Das Bild stellt ein Viereck $ABCD$ mit den kongruenten Seiten $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ dar. Die Mittelpunkte P und Q der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sowie die Mittelpunkte M und N der Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ wurden miteinander verbunden. Es ist nachzuweisen, daß die Verbindungsstrecken $\overline{PQ}$ und $\overline{MN}$ aufeinander senkrecht stehen.



Ma 9 ■ 2541 Gesucht sind drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, für die gilt: Die Summe aus dem Quadrat der kleinsten Zahl und dem Quadrat der Hälfte der mittleren Zahl ist gleich dem Quadrat der größten Zahl.

Schüler Jörg Steinbach, Zwickau

Ma 9 ■ 2542 Es sind alle reellen Zahlen a, b, c mit $c \neq 0$ zu ermitteln, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$(1) \quad a + b + c = 6$$

$$(2) \quad \frac{ab}{c} = 6$$

$$(3) \quad a^2 - b - c = 6$$

Schüler Gunnar Jeschke, Schwarzeide

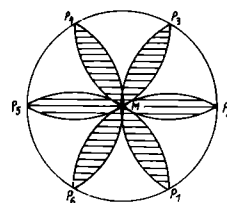
Ma 9 ■ 2543 Die Terme der Gleichung $(abc)^a = bc(a-1)bc$ stellen Zahlen in dekadischer Darstellung dar. Welche Ziffern sind für a, b und c einzusetzen, damit diese Gleichung erfüllt wird?

Sch.

Ma 9 ■ 2544 Das Bild zeigt einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M und einem Radius der Länge $r = 3$ cm. Wieviel Prozent der

Kreisfläche wird von der schraffiert dargestellten Fläche der Rosette eingenommen?

Schüler Matthias Eger, Hohleborn



Ma 10/12 ■ 2545 Es ist zu beweisen, daß der Term

$$(13^x - 5^x)(13^x + 5^x)$$

für alle natürlichen Zahlen x durch $(5^2 - 13)^2$ teilbar ist!

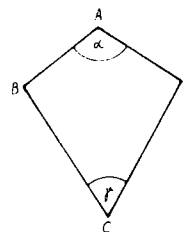
Ints Indriksons, Riga, UdSSR

Ma 10/12 ■ 2546 In einem rechtwinkligen Dreieck sei c die Länge der Hypotenuse, a und b seien die Längen der Katheten. Es ist nachzuweisen, daß stets $(a + b + c)^2 > 8ab$ gilt.

Sch.

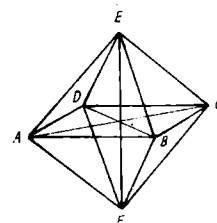
Ma 10/12 ■ 2547 Im abgebildeten Drachenviereck seien $\alpha = 108^\circ$ und $\gamma > 36^\circ$. Es ist ein regelmäßiges Fünfeck derart zu konstruieren, daß auf jeder Seite des Drachenvierecks ein Eckpunkt des Fünfecks liegt und der fünfte Eckpunkt mit A zusammenfällt.

Schüler Frank Steudel, Berlin



Ma 10/12 ■ 2548 Das Bild stellt ein Schrägbild eines regelmäßigen Oktaeders dar. (Kantenmodell) Welchen Winkel schließen die Flächen der Dreiecke BCE und BCF ein?

Technologe Klaus-Detlef Gehrke, Rostock



Physik

Ph 6 ■ 171 Ein Stück Bleirohr mit einer Masse von 282,5 g wird in ein Überlaufgefäß eingetaucht. Wieviel cm^3 Wasser fließen aus?

Ph 7 ■ 172 Eine Balkenwaage wiegt ungenau. Auf der einen Seite beträgt das Gewicht eines Gegenstandes 144 N, auf der anderen dagegen 169 N.

Wie groß ist das wahre Gewicht des Gegenstandes?

Ph 8 ■ 173 In einigen Ländern (u. a. in Großbritannien und den USA) wird zur Temperaturmessung nicht die Einheit Grad Celsius (°C), sondern Grad Fahrenheit (°F) verwendet. Dabei entsprechen 0°C dem Wert von +32°F und +100°C dem Wert von +212°F.

a) Wieviel °C sind es, wenn das Thermometer +41°F bzw. -49°F anzeigt? Gib die Umrechnung mit Hilfe von Variablen an!

b) Wieviel °F sind es, wenn das Thermometer +20°C bzw. -15°C anzeigt? Gib die Umrechnung mit Hilfe von Variablen an!

c) Bei wieviel Grad sind die Maßzahlen von Celsius und Fahrenheit gleich?



Ph 9 ■ 174 Der PKW Škoda 105L hat eine Gesamtmasse von 1285 kg und eine Spitzenleistung von 38 kW.

In welcher Zeit kann er beim Anfahren eine Geschwindigkeit von 80 km/h erreichen?

Ph 10/12 ■ 175 Bei der Briefwaage wird das Auslenken eines Gewichtes auf einem Kreisbogen für das Wägen benutzt. Die Hebel stehen hierbei winklig zueinander. Der Arm, an dessen Ende ein Gewicht von 500 N montiert sei, wurde bei einer Länge von 10 cm um 20° ausgelenkt. Der Lastarm von 2,5 cm soll hierbei gerade eine waagerechte Stellung einnehmen.

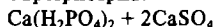
Welches Gewicht hat der aufgelegte Brief? Die Hebel selbst seien masselos.

Dipl.-Ing. H. Miethig, Dresden

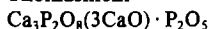
Chemie

Ch 7 ■ 137 Zur Erhöhung der Bodenfruchtbarkeit werden in der Landwirtschaft hochwertige Phosphordüngemittel eingesetzt. Wieviel Prozent P_2O_5 sind in folgenden Düngemitteln enthalten?

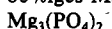
1. Superphosphat



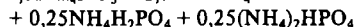
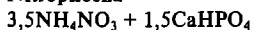
2. Thomasmehl



3. 80%iges Magnesiumphosphat



4. Nitrophoska



Ch 8 ■ 138 Beim Versetzen von Aluminiumpaste mit Kalkwasser und Wasser entsteht Gasbeton, welcher wie folgt zusammengesetzt ist:



Als weiteres Reaktionsprodukt bildet sich Wasserstoff.

a) Wieviel Kubikmeter Gas werden bei dieser Reaktion ausgetrieben, wenn man 1,25 kg Aluminiumpaste mit einem Aluminiumgehalt von 95% zur Reaktion bringt?

b) Wieviel Kilogramm der restlichen Ausgangsstoffe werden benötigt?

Ch 9 ■ 139 Ein großer Teil des in der metallurgischen Industrie erzeugten Stahles wird zu Rohren verarbeitet. Aus einer Tonne Stahl kann ein Rohr folgender Abmessung hergestellt werden:

Länge: 600 m

Innendurchmesser: 30 mm

Wandstärke: 4 mm

Wieviel Kilometer Rohr der gleichen Abmessung können aus einer Tonne Polyvinylchlorid-hart ($\rho = 1,38 \frac{g}{cm^3}$) hergestellt werden?

Ch 10/12 ■ 140 Es soll eine 23,2%ige Aluminiumsulfat-Lösung hergestellt werden. Zur Verfügung stehen Aluminium und Schwefelsäure. Wievielprozentig muß die Schwefelsäure sein?

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

In Heft 5/83 stellten wir folgende Aufgabe:

Ma 7 ■ 2363 Ein Rechteck habe die Seitenlängen a und b . Der Flächeninhalt eines Quadrates, das den gleichen Umfang wie das Rechteck hat, ist durch die Längen a und b auszudrücken.

OStR Th. Scholl, Berlin

In Heft 1/84 veröffentlichten wir einen Lösungsvorschlag. Er lautete: Das Quadrat habe die Seitenlänge c , dann gilt:

$$4c = 2 \cdot (a + b), \quad c = \frac{a + b}{2}$$

und somit

$$A_Q = c^2 = \frac{1}{4} (a + b)^2.$$

279 Mädchen und 265 Jungen sandten Lösungen ein. 85 von ihnen erhielten eine rote Karte mit dem Prädikat: falsch gelöst. 7 Arbeitsgemeinschaften sandten Lösungen als Kollektiv ein. 6 Einsender gaben eine falsche Aufgabennummer an und wurden aus den 17 weiteren Stößen herausgefischt, konnten also erst nach Auswertung der insgesamt zu Heft 5/83 eingegangenen 25 000 Lösungen bearbeitet werden. Mußte das sein?

Bei der Korrektur stieß der Chefredakteur *alpha* – er korrigiert die Lösungen der Klassenstufen 5 bis 7 – auf die unterschiedlichsten Endergebnisse. Hier sind 33 von ihnen ausgewählt und zu einem *Formelsalat* zusammengestellt. 9 entsprechen nicht der von der Aufgabengruppe veröffentlichten Gleichung $A_Q = \frac{1}{4} (a + b)^2$.

Welche? Viel Spaß beim Knobeln wünschen
J. Lehmann/Th. Scholl

$$(1) [0,5(a + b)]^2$$

$$(2) 4 \cdot \left(\frac{a + b}{2}\right)$$

$$(3) \frac{a^2 + b^2}{4} + \frac{ab}{2}$$

$$(4) \left[\frac{1}{2}(a + b)\right]^2$$

$$(5) \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$$

$$(6) \left(\frac{2a + b}{4}\right)^2$$

$$(7) \left(\frac{b + a}{2}\right)^2$$

$$(8) \frac{(a + b)^2}{2^2}$$

$$(9) \frac{2(a + b)}{4}$$

$$(10) \frac{a + b}{2} \cdot \frac{a + b}{2}$$

$$(11) \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} ab + \frac{1}{4} b^2$$

$$(12) \left(\frac{a + b}{2}\right)^2$$

$$(13) [2(a + b) : 4]^2$$

$$(14) \frac{(a + b) \cdot (a + b)}{4}$$

$$(15) \frac{a^2}{2} + \frac{a \cdot b}{2}$$

$$(16) \frac{a^2}{4} + \frac{ab}{2} + \frac{b^2}{4}$$

$$(17) \left(\frac{a^2 + b^2 + 2ab}{4}\right)$$

$$(18) ((a + b) : 2)^2$$

$$(19) \frac{a \cdot b}{2} \cdot \frac{a \cdot b}{2}$$

$$(20) 0,25 \cdot (a + b)^2$$

$$(21) \frac{a + a + b + b}{4} \cdot \frac{a + a + b + b}{4}$$

$$(22) \left(\frac{2a + 2b}{4}\right) \cdot \left(\frac{2a + 2b}{4}\right)$$

$$(23) \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)^2$$

$$(24) [(a + b) : 2] \cdot [(a + b) : 2]$$

$$(25) \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right) \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)$$

$$(26) ((2a + 2b) : 4)^2$$

$$(27) \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right)^2$$

$$(28) \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}$$

$$(29) \frac{(a + b)^2}{4}$$

$$(30) \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2$$

$$(31) \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right)^2$$

$$(32) \frac{1}{4}(a^2 + 2ab + b^2)$$

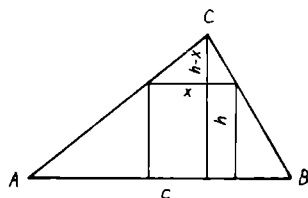
$$(33) \left(\frac{2(a + b)}{4}\right)^2$$

Lösungen



Lösungen zu: Sprachecke

▲ 1 ▲ Konstruiere ein Quadrat in ein gegebenes Dreieck, so daß die Grundseite des Quadrates auf der Grundseite des Dreiecks liegt und die zwei anderen Eckpunkte des Quadrates sich auf den beiden anderen Seiten des Dreiecks befinden!



Lösung: Man zeichne in das $\triangle ABC$ die Höhe h . Dann gilt die Proportion $x:c = (h-x):h$, und x ist konstruierbar.

▲ 2 ▲ Mit einem aufgedrehten Auslaufventil und einem geschlossenen Abfluß kann man eine Badewanne in 9 Minuten mit Wasser füllen. Mit geschlossenem Auslaufventil und geöffnetem Abfluß werden 12 Minuten benötigt, um die mit Wasser gefüllte Badewanne zu leeren.

Wieviel Minuten dauert es, die leere Badewanne mit Wasser zu füllen, wenn der Abfluß geöffnet und das Auslaufventil aufgedreht ist?

Lösung: Die Zeit zum Füllen der Badewanne sei x min; dann gilt die Gleichung

$$\frac{x}{9} - \frac{x}{12} = 1,$$

$$12x - 9x = 108,$$

$$x = 36.$$

Die Badewanne ist in 36 min gefüllt.

▲ 3 ▲ Zum Bau des Eiffelturms wurden ungefähr 885 m^3 Eisen verwendet; die Dichte des Eisens beträgt $7,8 \text{ t/m}^3$. Welche Masse Eisen wurde für diese Konstruktion benötigt?

Lösung: $m = V \cdot \rho$

$$m = \frac{885 \text{ m}^3 \cdot 7,8 \text{ t}}{\text{m}^3}$$

$$m = 6903 \text{ t}.$$

Für den Bau wurden 6903 t Eisen benötigt.

▲ 4 ▲ Eine Badewanne wird durch ihren Wasserhahn in 10 Minuten gefüllt und durch ihren Abfluß in $\frac{1}{4}$ Stunde geleert.

Man öffnet den Wasserhahn und vergißt, den Abfluß zu schließen. Nach welcher Zeit ist die Badewanne gefüllt?

Lösung: Die Anzahl der Minuten sei x , dann gilt die Gleichung

$$\frac{x}{10} - \frac{x}{15} = 1,$$

$$\frac{5x}{150} = 1,$$

$$x = 30.$$

Die Badewanne ist nach 30 Minuten gefüllt.

▲ 5 ▲ Wir zerbrechen ein Streichholz in der Mitte. Eine der Hälften zerbrechen wir noch einmal. Eines der erhaltenen Stücke versuchen wir nochmals zu halbieren. Warum wird das Zerbrechen des Hölzchens jedesmal schwieriger?

Lösung: Jedesmal wird der Hebelarm halbiert, und man muß die doppelte Kraft aufbringen.

▲ 6 ▲ Bestimme alle fünfstelligen Zahlen, die gleich der 3. Potenz der aus ihren letzten beiden Ziffern gebildeten Zahlen sind!

Lösung: 13 824 und 15 625.

Laut Aufgabe ist $z = 10000a + 1000b + 100c + 10d + e = (10d + e)^3$. Dies kann man umformen zu $100(100a + 10b + c) = (10d + e + 1)(10d + e)(10d + e - 1)$.

Auf der rechten Seite steht ein Produkt aus drei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen. Von diesen kann nur eine durch 5 teilbar sein, die dann sofort auch durch 25 teilbar sein muß.

1. Fall: $10d + e + 1 = 25 \dots z = 13\,824$

2. Fall: $10d + e = 25 \dots z = 15\,625$

3. Fall: $10d + e - 1 = 25 \dots 4$ teilt nicht 27, 26, 25, aber 4 teilt 100.

Ist der durch 25 teilbare Faktor größer als 25 (d. h. 50 oder 75), so ist das Produkt nicht kleiner als $50 \cdot 49 \cdot 48 = 117\,600$, also mindestens sechsstellig.

Lösungen zu:

Das Pascalsche Dreieck

▲ 1 ▲ Wegen des Zusammenhanges mit den Binomialkoeffizienten stellt $(1 + 1)^n = 2^n$ gerade die Summe der Zahlen in der $(n + 1)$ -ten Zeile des Pascalschen Dreiecks dar.

▲ 2 ▲ Die gesuchten Zahlen findet man in der achten Zeile des Dreiecks.

▲ 3 ▲ a) 45. Die gesuchte Anzahl stimmt gerade mit der Anzahl von 2elementigen Mengen der Menge $\{1, 2, 3, \dots, 9, 0\}$ überein. b) 120 – die Zahl der 3elementigen Teilmengen derselben Menge.

▲ 4 ▲ Die gesuchten Dreieckszahlen stehen gerade in derjenigen Schrägreihe des Pascalschen Dreiecks, die mit 1, 3, 6, 10, ... beginnt.

$$\text{▲ 5 ▲ a) } a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$$

$$\text{b) } x^5 - 10x^4y + 40x^3y^2 - 80x^2y^3 + 80xy^4 - 32y^5$$

(Das Wechseln der Rechenzeichen ergibt sich leicht aus der Betrachtung $(a - b)^6 = (a + [-b])^6$)

Lösungen zu: Schätz doch mal!

▲ 1 ▲

- a) 29 mm c) 64 cm² e) 7,32 m
b) 17 mm d) 30,5 cm³ f) 615 kg

▲ 2 ▲

Schätzer	geschätzter Wert in cm ³	absoluter Fehler in cm ³
Rolf	40	9,5
Anja	20	-10,5
Mario	25	-5,5
Grit	35	4,5

▲ 3 ▲

a) 1. Platz (bester Schätzer) Frank (relativer Fehler: 0,01)

2. Platz Michael

(relativer Fehler: 0,03)

3. Platz Felix

(relativer Fehler: 0,08)

b) Frank: 1%; Michael: 3%; Felix: 8%

▲ 4 ▲

tatsächlicher Wert x	Schätzwert a
227	200
425	340
	510
317	300

absoluter Fehler $a - x$	relativer Fehler $\left \frac{a - x}{x} \right $
-27	0,12
-85	0,20
85	
-17	0,05

Lösungen zu:

Knobel-Wandzeitung (1)

Vergangenes Jahr

$$\text{▲ 1 ▲ } 1 + 9 \cdot 8 : 4 = 19$$

$$1 + 9 \cdot 8 : 4 = 8$$

$$1 - 9 + 8 + 4 = 4$$

Sternchenklar

$$\text{▲ 2 ▲ } \frac{456 \cdot 678}{3648}$$

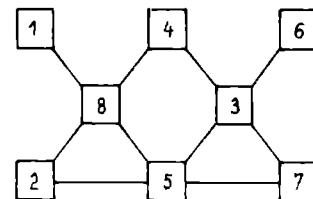
$$3192$$

$$2736$$

$$309168$$

Magische Figur

▲ 3 ▲



Wie alt?

▲ 4 ▲ Aus dem Text ergibt sich folgendes Gleichungssystem (V, M, J, K bzw. S bezeichnen das Alter des Vaters, der Mutter, von Jens, Kati bzw. Sven):

$$\begin{aligned} V &= M \\ S &= K + 3 \\ J &= S + 3 \\ J &= S + K \\ V + 3 &= 3(J + 3) \end{aligned}$$

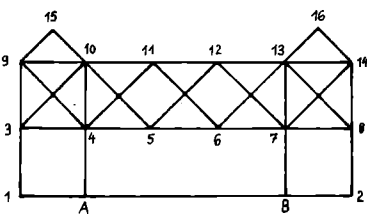
Aus (3) und (4) ergibt sich $K = 3$. Aus (2) folgt $S = 6$. Weiter folgen aus (3) oder (4) $J = 9$, aus (5) $V = 33$ und aus (1) $M = 33$ (Altersangaben in Jahren).

Mal so, mal so

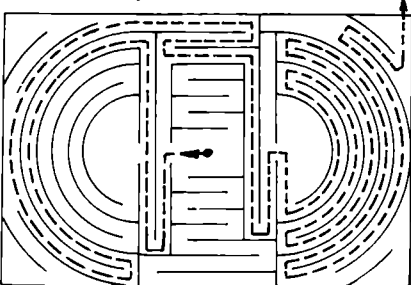
▲ 5 ▲ Für das Wort DEZIMALBRUCH gibt es 330 verschiedene Lesemöglichkeiten (Anzahl der Permutationen mit Wiederholung von 11 Elementen - 7 Abschnitte nach links und 4 Abschnitte nach unten - mit der Klassenbildung (7,4); $330 = 11! / 7!4!$).

In einem Zuge

▲ 6 ▲ Man muß bei A (bzw. B) beginnen und bei B (bzw. A) enden; z.B. A-B-7-4-A-1-3-4-9-10-15-9-3-10-4-11-6-13-10-5-12-7-8-13-14-16-13-7-14-8-2-B.



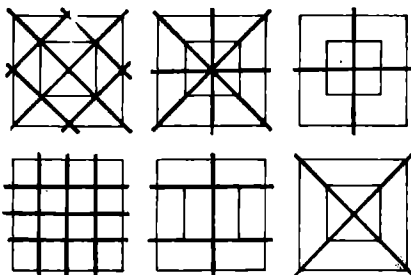
▲ 7 ▲ Im Labyrinth



Flächenvergleich

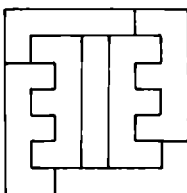
▲ 8 ▲ Alle 5 Flächenstücke haben den gleichen Flächeninhalt, der sich aus dem Flächeninhalt eines Halbkreises (Durchmesser entspricht zwei Kästchenseiten) und dem Flächeninhalt von 2 Quadratkästchen zusammensetzt.

▲ 9 ▲ Zerlegung gesucht



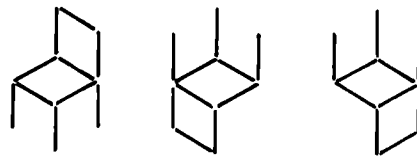
Legespiel

▲ 10 ▲



Stuhl-Akrobatik

▲ 11 ▲



Rollerrennen

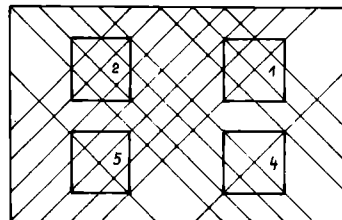
▲ 12 ▲

	1.	2.	3.	4.
a	B	E	K	D
b	B	K	E	D
c	B	K	D	E
d	K	B	E	D
e	K	B	D	E
f	K	D	B	E

Die ersten beiden Aussagen lassen die angegebenen sechs Möglichkeiten zu (B = Ben, D = Dieter, E = Eva, K = Katrin). Die dritte Aussage, daß Dieter besser abschnitt als Ben, sondert hieraus eindeutig die Möglichkeit f aus: 1. Platz: Katrin, 2. Platz: Dieter, 3. Platz: Ben, 4. Platz: Eva.

Gut eingepaßt

▲ 13 ▲ Das Bild zeigt die vervollständigte Figur. Das Quadrat Nr. 3 paßt nicht hinein.



Fortsetzung gesucht

▲ 14 ▲ Bildungsgesetz der Zahlenfolge: $a_n = 3n + (-1)^n n^2$; $a_6 = 54$. Bildungsgesetz der Figurenfolge: Das obere schwarze Dreieck springt jeweils ins nächste Dreieck, das untere schwarze Dreieck jeweils ins übernächste Dreieck (in mathematisch positiver Richtung). 6. Glied:



Gewußt wie?

▲ 15 ▲ Eine Möglichkeit wäre folgende: Durch eine erste Wägung entnimmt man mit Hilfe des Puddingpäckchens 40 g Tee. Dann legt man das Gewürzpäckchen auf die eine und das Puddingpäckchen auf die andere Waagschale und entnimmt durch Zuschütten von Tee zur Schale mit dem Gewürzpäckchen die noch fehlenden 15 g Tee.

Rösselsprung

▲ 16 ▲

		12	17	10	15		
			14	19			
	13	18	11	16	9	20	
25	2	23	4	27	6	29	8
		26			21		
1	24	3	22	5	28	7	30

Lösungen zu:

In freien Stunden · alpha-heiter

Kryptarithmetik

Bild links:

$$Z = 1 \quad W = F + 1 \quad S \geq 5 \quad E \geq 5$$

$$\text{Fall 1) } S = 5 \rightarrow W = 1 = Z$$

(= Widerspruch!)

$$\text{Fall 2) } S = 6 \rightarrow F = 2, \quad W = 3$$

$$\text{Fall 2.1) } E = 5 \rightarrow 0 = 0 \rightarrow C = 2 = F$$

Wd!

$$\text{Fall 2.2) } E = 7 \rightarrow C = 8 \rightarrow 0$$

$$= 5 \rightarrow H = 9 = L \quad \text{Wd!}$$

$$\text{Fall 2.3) } E = 8 \rightarrow 0 = 7 \rightarrow C$$

$$= 9 \rightarrow H = 4 \rightarrow L = 9 = C \quad \text{Wd!}$$

$$\text{Fall 2.4) } E = 9 \rightarrow 0 = 8 \rightarrow C$$

$$= 4 \rightarrow H = 7 \rightarrow L = 5$$

$$\text{Fall 3) } S = 7 \rightarrow F = 4, \quad W = 5$$

$$\text{Fall 3.1) } E = 6$$

$$\text{Fall 3.1.1) } 0 = 2 \rightarrow C = 3 \rightarrow H$$

$$= 0 \rightarrow L = 1 = Z \quad \text{Wd!}$$

$$\text{Fall 3.1.2) } 0 = 3 \rightarrow C = 8 \rightarrow H = 0$$

$$\text{oder } H = 2 \rightarrow L = 1 = Z$$

$$\text{oder } L = 4 = F \quad \text{Wd!}$$

$$\text{Fall 3.2) } E = 8 \rightarrow 0 = 6 \rightarrow C = 4 = F \quad \text{Wd!}$$

$$\text{Fall 3.3) } E = 9 \rightarrow 0 = 8 \rightarrow C = 4 = F \quad \text{Wd!}$$

$$\text{Fall 4) } S = 8 \rightarrow F = 6, \quad W = 7$$

$$\text{Fall 4.1) } E = 5 \rightarrow 0 = 1 = Z \quad \text{Wd!}$$

$$\text{Fall 4.2) } E = 9 \rightarrow 0 = 8 = S \quad \text{Wd!}$$

$$\text{Fall 5) } S = 9 \rightarrow F = 8, \quad W = 9 = S \quad \text{Wd!}$$

Es gibt also genau eine Lösung

$$69476 + 69476 = 138952.$$

Bild Mitte:

$$126 - 65 = 61; \quad 147 - 76 = 71;$$

$$168 - 87 = 81; \quad 105 - 54 = 51.$$

$$\text{Bild rechts: z. B. } 6508 + 13963 = 20471.$$

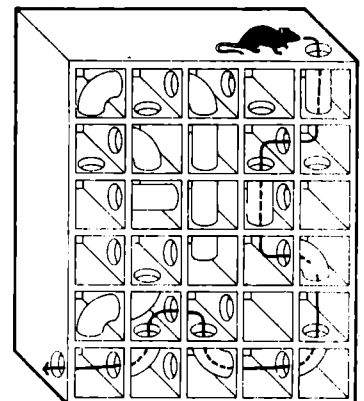
Wortspiele

Jahr, Lahr, Lahn, Zahn, Zahl; Grad, Gras, Gros; halb, Halt, hart, Wart, Wert.

Hau ruck

Der Arbeiter auf der Skizze b bewegt den Wagen mit dem geringsten Kraftaufwand, weil er eine lose Rolle verwendet.

Labyrinth



Tierisches

● Eine Seite Lammfleisch kostet x \$ je kg und wiegt y kg. Eine Seite des einjährigen Tieres kostet $(x - 0,12)$ \$ je kg und wiegt $(24 - y)$ kg. Dann gilt das Gleichungssystem

$$x \cdot y = 16,35$$

$$(x - 0,12)(24 - y) = 59,85.$$

$$24x - xy - 0,12 \cdot 24 + 0,12y = 59,85$$

$$24x - 16,35 - 2,88 + 0,12y = 59,85$$

$$24x + 0,12y = 79,08$$

$$\frac{24 \cdot 16,35}{y} + 0,12y = 79,08$$

$$x = \frac{16,35}{y}$$

$$24 \cdot 16,35 + 0,12y^2 = 79,08y$$

$$y^2 - 659y + 3270 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{659 \pm \sqrt{659^2 - 4 \cdot 3270}}{2}$$

$$y_1 = 5$$

$$y_2 = 654 \text{ (entfällt)}$$

Eine Seite Lammfleisch wiegt 5 kg und eine Seite des einjährigen Tieres 19 kg.

● Die Masse der Kiste sei x kg. dann gilt die Gleichung

$$3 + 2x = 4 + 5,$$

$$x = 3.$$

Die Masse der Kiste beträgt 3 kg.

Autonummern-Mathematik

Bezeichnet man die vier Ziffern der Autonummer mit w , x , y und z , so gilt

$$(10w + x) + (10y + z) = 10x + y.$$

Nach Umstellung erhält man

$$10w + z = 9x - 9y$$

$$\frac{10w + z}{9} = x - y.$$

Die Summe $10w + z$ muß durch 9 teilbar sein, und dieser Quotient entspricht der Differenz der beiden Innenziffern.

Für den Zähler kommen also nur die Zahlen 9, 18, 27, ..., 81 in Frage. Die beiden Außenziffern können also nur 0.-9; 1.-8; 2.-7; ...; 8.-1 lauten.

Zu 1.-8 (18) gehört die Differenz $(18:9) = 2$. Dadurch ergeben sich die Möglichkeiten der Differenzbildung 2-0; 4-2; 5-3; ...; 9-7.

Die Autonummern lauten dann 12-08; 13-18; 14-28; ...; 19-78 (vgl. $19 + 78 = 97$; die aus den beiden Innenziffern gebildete Zahl lautet auch 97).

Folgende Autonummern haben also die in der Aufgabenstellung geschilderte Eigenschaft:

01-09; 02-19; 03-29; 04-39; 05-49; 06-59; 07-69; 08-79; 09-89; 12-08; 13-18; 14-28; 15-38; 16-48; 17-58; 18-68; 19-78; 23-07; 24-17; 25-27; 26-37; 27-47; 28-57; 29-67; 34-06; 35-16; 36-26; 37-36; 38-46; 39-56; 45-05; 46-15; 47-25; 48-35; 49-45; 56-04; 57-14; 58-24; 59-34; 67-03; 68-13; 69-23; 78-02; 79-12; 89-01. Die Anzahl beläuft

sich auf $n = \frac{9}{2} (1 + 9) = 45$. Die Häufigkeit

beträgt bei 10000 aus vier Ziffern bestehenden möglichen Autonummern 0,45%.

Bruchrechnung

Schachtel, Hotel, Kapitel, Wilhelm Tell.

Mathematiker gesucht

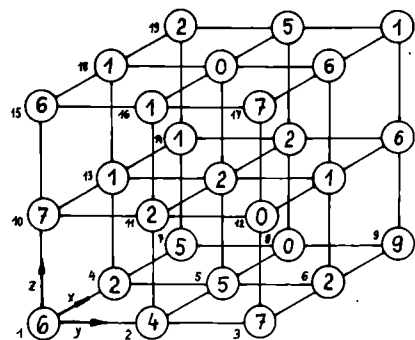
Die versteckten Mathematiker waren:

Lie, Sophus (1842 bis 1899); Ceva, Giovanni (1647 bis 1734); Abel, Niels Henrik (1802 bis 1829); Riemann, Bernhard (1826 bis 1866); Hadamard, Jacques Salomon (1865 bis 1963); Monge, Gaspard (1746 bis 1818); Fredholm, Ivar Erik (1866 bis 1927); Schmidt, Erhard (1876 bis 1959); Möbius, August Ferdinand (1790 bis 1868); Mayer, Adolph (1839 bis 1908); Ries, Adam (1492 bis 1559); Hankel, Hermann (1839 bis 1873); Klein, Felix (1849 bis 1925); Archi-

medes von Syrakus (etwa 287 bis 212 v. u. Z.); Gauss, Carl Friedrich (1777 bis 1855); Jordan, Camille (1838 bis 1922); Steiner, Jakob (1796 bis 1863); Euler, Leonhard (1707 bis 1783); Stokes, George Gabriel (1819 bis 1903); Galois, Evariste (1811 bis 1832).

Kreuzzahlrätsel

Ein möglicher Lösungsweg: x_3 , z_9 , x_{12} , z_6 , x_{15} , z_1 , y_{19} mit y_{18} und x_{16} , y_{15} , x_{17} , x_{16} , y_4 , x_1 , z_7 , y_{14} , x_{11} , y_{13} , z_8 , x_2 .



Lösungen zum alpha-Wettbewerb

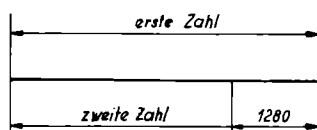
Heft 5/84

Ma 5 ■ 2464 Angenommen, die Schüler hätten am zweiten Tag genausoviel Kilometer zurückgelegt wie am ersten Tag, dann hätten sie an allen drei Tagen insgesamt $65 \text{ km} + 10 \text{ km} = 75 \text{ km}$ geschafft. Dann würde gelten $5 \cdot x = 75$, also $x = 15$. Das heißt, am ersten Tag legten sie $2 \cdot 15 \text{ km} = 30 \text{ km}$, am zweiten Tag legten sie $30 \text{ km} - 10 \text{ km} = 20 \text{ km}$, am dritten Tag legten sie $30 \text{ km} : 2 = 15 \text{ km}$ zurück.

Ma 5 ■ 2465 Vom Ergebnis 15 ausgehend wenden wir die Umkehroperationen auf die zuvor ausgeführten Rechenoperationen an. $15 + 20 = 35$; $35 : 5 = 7$. Somit ist 7 die gedachte Zahl.

Ma 5 ■ 2466 3 m Kunstfaserstoff sind um $3 \cdot 30 \text{ M} = 90 \text{ M}$ billiger als 3 m Wollstoff. Hätte man nur Wollstoff gekauft, so würde der Preis $470 \text{ M} + 90 \text{ M} = 560 \text{ M}$ betragen. Deshalb kosten 1 m Wollstoff $560 \text{ M} : 7 = 80 \text{ M}$ und somit 1 m Kunstfaserstoff $80 \text{ M} - 30 \text{ M} = 50 \text{ M}$.

Ma 5 ■ 2467 Wenn die Differenz zweier Zahlen 1280 beträgt, so ist die erste Zahl um 1280 größer als die zweite. Wenn wir also von der Summe dieser beiden Zahlen 1280 subtrahieren, erhalten wir das Zweifache der zweiten Zahl. Die zweite Zahl ist somit $(4120 - 1280) : 2 = 2840 : 2 = 1420$. Somit gilt für die erste Zahl $1420 + 1280 = 2700$.



Ma 5 ■ 2468 $6 \text{ m} = 600 \text{ cm}$;

$600 \text{ cm} - 60 \text{ cm} = 540 \text{ cm}$;

$540 \text{ cm} : 2 = 270 \text{ cm}$;

$270 \text{ cm} + 60 \text{ cm} = 330 \text{ cm}$. Der eine Teil muß 2,7 m, der andere 3,3 m lang gewählt werden.

Ma 5 ■ 2469 Es waren $8 : 2 = 4$ Waggon mit einer Ladung von je 12 t vorhanden. Deshalb waren $5 \cdot 4 = 20$ Waggon mit einer Ladung von je 10 t vorhanden. $4 \cdot 12 \text{ t} + 20 \cdot 10 \text{ t} = 48 \text{ t} + 200 \text{ t} = 248 \text{ t}$. Insgesamt wurden 248 t Getreide verladen.

Ma 6 ■ 2470 Der zweite Winkel habe die Größe α . Die beiden anderen Winkel haben dann die Größe $\alpha + 4^\circ$ und $\alpha + 14^\circ$. Nun gilt $3 \cdot \alpha + 18^\circ = 180^\circ$, $3 \cdot \alpha = 162^\circ$, $\alpha = 54^\circ$. Die Winkel des Dreiecks haben die Größe 54° , 58° und 68° .

Ma 6 ■ 2471 Es sei x die eine, also $(165 - x)$ die andere Zahl.

Dann gilt $\frac{4}{6} \cdot x = \frac{4}{5} \cdot (165 - x)$,

$$\frac{1}{6} \cdot x = \frac{1}{5} \cdot (165 - x), \quad \frac{1}{6} \cdot x = 33 - \frac{1}{5} \cdot x,$$

$$\frac{1}{5} \cdot x + \frac{1}{6} \cdot x = 33, \quad \frac{11}{30} \cdot x = 33, \quad x = 90.$$

Es handelt sich um die Zahlen 90 und 75.

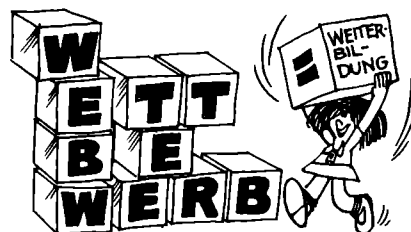
Ma 6 ■ 2472 $72 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Um am

Personenzug vorbeizufahren, muß der D-Zug eine Strecke zurücklegen, die seiner Länge und der Länge des Personenzuges gleicht. Es sei x die Länge des Personenzuges; dann gilt $x + 80 \text{ m} = 10 \text{ s} \cdot 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, also $x = 120 \text{ m}$. Der Personenzug ist 120 m lang.

Ma 6 ■ 2473 In jeder Stunde legt der Autobus 10 km mehr zurück als der LKW. Als der Autobus in Banská Bystrica eintraf, hatte der LKW noch 1 h und 45 min, also 1,75 h zu fahren und legte in dieser Zeit $1,75 \text{ h} \cdot 30 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 52,5 \text{ km}$ zurück. Als der

Autobus in Banská Bystrica ankam, war der LKW vom Ziel noch 52,5 km entfernt. Dieser Abstand entsteht zwischen beiden Fahrzeugen nach $52,5 : 10 = 5,25 \text{ h}$. Der Autobus fuhr also 5,25 h. In dieser Zeit legte er eine Strecke von $5,25 \cdot 40 \text{ km} = 210 \text{ km}$ zurück. Das ist die Entfernung zwischen diesen beiden Orten.

Ma 6 ■ 2474 Es sei x die kleinste Zahl; dann ist $x + 3$ die nächstfolgende und $x + 6$ die größte Zahl. Nun gilt $x + (x + 3) + (x + 6) = 63$, $3x + 9 = 63$, $3x = 54$, $x = 18$. Es handelt sich um die Zahlen 18, 21 und 24.



Fortsetzung der Wettbewerbs-Lösungen siehe Heft 2/85!

Das Loch im Nichts und andere Dinge, die es gar nicht gibt

Spezielle Abbildungen (Projektionen) bilden räumliche Gebilde (z. B. Körper) auf eine Ebene ab. Dabei entstehen mehr oder weniger anschauliche Bilder der räumlichen Originale. Auf Grund unserer Erfahrungen können wir aus dem ebenen Bild Rückschlüsse auf das Original ziehen, z. B. können wir uns abgebildete Körper vorstellen.

Auf diese Weise wird zwar jedem Körper ein ebenes Bild zugeordnet, jedoch ist nicht jede ebene Figur Bild eines Körpers bei irgendeiner Abbildung. Gezeichnet man jedoch geschickt entsprechende ebene Figuren, so ist der Betrachter versucht, sie räumlich zu interpretieren, d. h., in ihnen einen Körper o. ä. zu erkennen. Daß man dabei leicht aufs Glatteis geführt werden kann, zeigen die Bilder auf dieser Seite. Sie stellen alle *unmögliche Körper* dar. Im Detail, z. B. an einer Ecke, stimmt noch alles, aber im Ganzen ergeben sich dann Widersprüche.

Diese interessante psychologische Erscheinung regte zahlreiche Künstler an, unmögliche Körper zu erfinden. Die bekanntesten Künstler sind der Holländer *M. C. Escher*, der Schwede *Oscar Reuterswärd* und der Schweizer *Sandro Del-Prete*.

In unserer Republik beschäftigt sich der Dresdner *Reinhard Breitenfeld* mit diesem Problemkreis. Anlässlich eines Wettbewerbs im Oktober 1983 wurde er in Budapest mit einem Preis ausgezeichnet. Wir stellen einige seiner Arbeiten vor.

Einige biographische Angaben: geb. 1924 in Ottmachau (ehem. Oberschlesien), Grundschule 1930 bis 1934, Abitur 1942, 1946 bis 1949 als Arbeiter beim Wiederaufbau tätig, 1950 bis 1953 Techn. Zeichner, Teilkonstrukteur, 1954 bis 1957 Techniker und Konstrukteur, 1952 bis 1957 Fachschulabendstudium (Ingenieur), seit 1957 Konstrukteur, Forschungsingenieur in der Akademie der Wissenschaften der DDR, Zentralinstitut für Kernforschung in Rossendorf, seit 1982 Konstruktionen „Unmögliche Figuren“.

Die Bilder 1 bis 3 zeigen das Entstehen eines unmöglichen Körpers: Im Bild 1 ist ein gerades quadratisches Prisma dargestellt.

Wir wissen, daß solche Körper existieren. Es ist möglich, daß solch ein Körper, z. B. aus Holz, vor dem Zeichner auf dem Tisch stand. Aber wir werden gleich sehen, daß man nicht allem trauen kann, was man sieht. Zunächst ergänzen wir Bild 1 durch

zwei weitere Zeichnungen (Bild 2). Auch hier gelten die zu Bild 1 getroffenen Feststellungen. Zu Bild 3 führt nur ein kleiner Schritt: Man schiebt die drei Einzelstücke zusammen. Vor uns liegt jetzt ein *Dreieck mit drei rechten Winkeln*, ein Ding, das es nicht gibt.

Auch einen Körper, wie er in Bild 4 dargestellt zu sein scheint, gibt es nicht. Die mechanische Verbindung der drei Teile – z. B. ein Nagel – soll die Figur noch anschaulicher machen.

Die Bilder 5 bis 10 sind nach dem gleichen Prinzip aufgebaut. Interessant ist das *Loch im Nichts* (Bild 11). Die Figur ist in drei Teilen zu betrachten: Oben der unmögliche *Bügel*, in der Mitte *nichts* (da man oben durch den Bügel, genau wie bei dem Unterteil, hindurchschauen kann) und in dem *Nichts* ein *Loch*, durch das man ebenfalls den *Hintergrund* sieht. *C.-P. Helmholtz*



R. Breitenfeld

