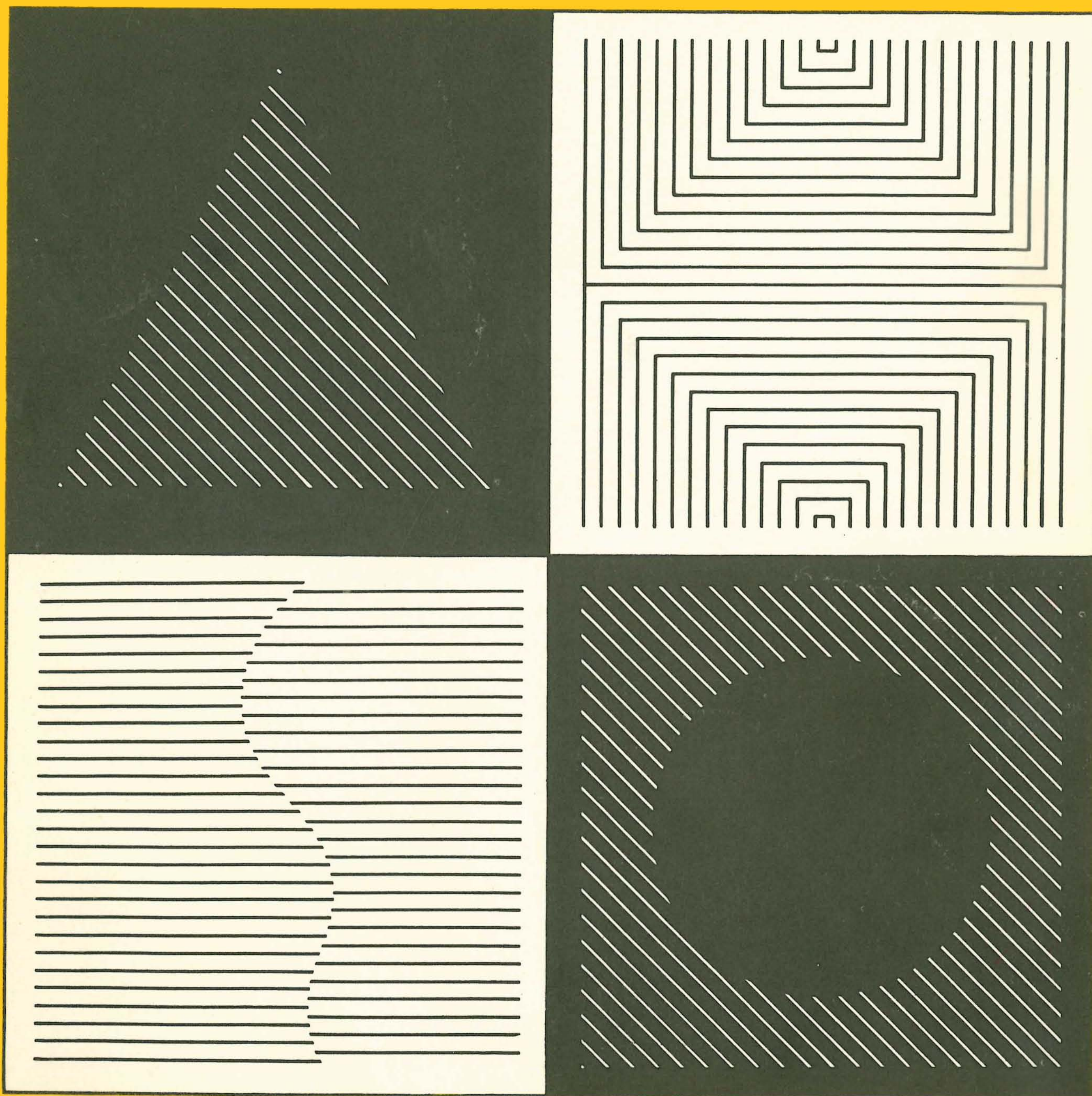
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



4

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
19. Jahrgang 1985
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold

Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
1086 Berlin, Krausenstr. 50, PSF 1213
Anschrift der Redaktion:
7027 Leipzig, PSF 14
Redaktion:
OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: G. Stelzer, Bildstelle der Universität Greifswald (S. 78); Eigenfoto J. W. Schmidt (S. 85); Bildstelle Päd. Kreiskab. Greifswald (S. 86); Franz Fricke, Wochenpost Berlin (S. 77)
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig
Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach einer Vorlage aus *Elemente der Mathematik*, Zürich

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 23. April 1985
Auslieferungstermin: 15. August 1985

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

[1] bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Lineare Gleichungssysteme

Bei der Behandlung sehr vieler Aufgaben aus Mathematik, Physik, Chemie oder Technik und Ökonomie wird man letztendlich auf Systeme linearer Gleichungen geführt. In diesem Artikel soll das allgemeine Lösungsverfahren von Gauß auf der Grundlage elementarer Vorbetrachtungen behandelt werden. Außerdem werden wir zahlreiche einfache Aufgaben untersuchen, bei denen lineare Gleichungssysteme zu lösen sind.

Elimination von Unbekannten

Man versteht die Methode am besten anhand eines Beispiels.
Wir betrachten das System

$$2x + 3y = 5$$
$$7x + 5y = 1.$$

Um es zu lösen, eliminieren wir die Unbekannte x unter Verwendung der ersten Gleichung aus der zweiten. Dazu multiplizieren wir jede der Gleichungen mit einer solchen Zahl, daß die Koeffizienten von x in den beiden neu entstehenden Gleichungen gleich werden. Multiplizieren wir die erste mit 7 und die zweite mit 2, dann bekommen wir das zum gegebenen System äquivalente Gleichungssystem:

$$14x + 21y = 35$$
$$14x + 10y = 2.$$

Jetzt übernehmen wir die erste Gleichung ungeändert und ersetzen die zweite durch die Differenz der ersten und zweiten. Auch dies ist eine äquivalente Umformung, und deshalb stimmt die Lösungsmenge des gegebenen Systems überein mit der Lösungsmenge des Systems:

$$14x + 21y = 35$$
$$11y = 33.$$

Dividieren wir schließlich noch die zweite Gleichung durch 11, so erhalten wir wieder ein zum vorangegangenen äquivalentes System

$$14x + 21y = 35$$
$$y = 3,$$

dessen einzige Lösung $x = -2$ und $y = 3$ wir durch Einsetzen von $y = 3$ in die erste Gleichung sofort erhalten können. Das Gleichungssystem hat also als einzige Lösung das Paar $(-2; 3)$.

Aufgaben

▲1▲ Löse mit dieser Methode die beiden folgenden Gleichungssysteme

a) $2x + 3y = 4$
$3x - 2y = 5,$

b) $\frac{3}{4}x - \frac{5}{6}y = 1$
$\frac{5}{6}x - \frac{3}{4}y = 2!$

▲2▲ Zwei Fahrzeuge bewegen sich auf einer Straße mit den konstanten Geschwindigkeiten $u = -12$ km/h und $v = 12$ m/s. Zu Beginn befindet sich das erste Fahrzeug in einer Entfernung von 3 km, das zweite in einer Entfernung von -500 m von einer Straßenkreuzung. Wann und wo treffen sie sich?

Substitution von Unbekannten

Eine der wichtigsten allgemeinen Methoden der Algebra ist die Ersetzung von Unbekannten durch andere. Damit kann man häufig allgemeinere Aufgaben mit einfachen Methoden lösen.
Wollen wir beispielsweise das folgende nichtlineare Gleichungssystem

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 5$$
$$\frac{7}{x} + \frac{5}{y} = 1$$

lösen, dann ersetzen (substituieren) wir $u := \frac{1}{x}$ und $v := \frac{1}{y}$ und erhalten für diese neuen Unbekannten ein *lineares* Gleichungssystem

$$2u + 3v = 5$$
$$7u + 5v = 1.$$

Seine Lösung war $(-2; 3)$, also erhalten wir $\frac{1}{x} = -2$ und $\frac{1}{y} = 3$ und folglich $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$ als Lösung der Aufgabe.

Aufgabe

▲3▲ Löse die folgenden Systeme!

a) $\frac{1}{2x + 3y - 5} + \frac{7}{5x - 8y + 12} = 1$
$\frac{4}{2x + 3y - 5} - \frac{4}{5x - 8y + 12} = 1,$

b) $x^2 + xy = 5$
$3x^2 + 5xy = 23,$

c) $\frac{xy}{3x + 2y} = \frac{1}{5}, \frac{xy}{5x + 7y} = 1!$

Die geometrische Deutung einer linearen Gleichung

Wollen wir die Gleichung $y = mx + n$ derjenigen Geraden ermitteln, die durch die beiden Punkte $P(1, 2)$ und $Q(3, 1)$ geht, so brauchen wir nur die jeweiligen Koordinaten für x und y einzusetzen und erhalten ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der Unbekannten m und n:

$$2 = m + n$$
$$1 = 3m + n.$$

Lösen wir das System, so erhalten wir

$$m = -\frac{1}{2} \text{ und } n = \frac{5}{2};$$

die gesuchte Gerade hat also die Gleichung

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

Es kann aber auch passieren, daß das entstehende lineare Gleichungssystem *keine* Lösung besitzt!
Sind als Punkte beispielsweise $P(1, 2)$ und $Q(1, 3)$ gegeben, dann erhalten wir mit

$$2 = m + n$$
$$3 = m + n$$

ein System, welches sicher unlösbar ist, weil aus der Gültigkeit der beiden Gleichheiten für zwei reelle Zahlen m und n ja $2 = 3$ folgen würde!
Auf den ersten Blick sieht das wie ein Widerspruch zu der euch allen bekannten Tatsache aus, daß durch zwei verschiedene, beliebig gegebene Punkte P und Q *immer* eine Gerade eindeutig bestimmt ist. Der Widerspruch löst sich dadurch, daß die Gleichung der Geraden durch die oben gegebenen Punkte *nicht* von der Gestalt $y = my + n$ ist, sondern $x = 1$ lautet.
Wir überlegen uns, daß eine Gerade in der Ebene genau dann *nicht* durch eine Gleichung $y = mx + n$ beschrieben wird, wenn sie zur y-Achse parallel verläuft. In diesem Ausnahmefall hat sie immer die Gleichung $x = k (k \in R)$.
Aus diesen Überlegungen folgt aber nun sofort, daß *jede* Gerade in der Ebene durch eine Gleichung der Form

$$ax + by + c = 0, \ (a, b, c \in R,$$
$$a \text{ und } b \text{ nicht beide null})$$

dargestellt werden kann. Im allgemeinen Fall ist dabei

$$m = -\frac{a}{b} \text{ und } n = -\frac{c}{b},$$

während für Parallelen zur y-Achse $b = 0$ und $k = -\frac{c}{a}$ wird.
Jetzt schauen wir uns das System

$$x + \sqrt{2}y = \sqrt{3}$$
$$\sqrt{2}x + \ \ 2y = \sqrt{6}$$

an. Jede der beiden Gleichungen stellt in der (x, y)-Ebene eine bestimmte Gerade dar. Lösungspunkte (x, y) des Systems sind also gerade die Punkte, die *auf beiden* Geraden liegen.
Wenden wir die Methode der Elimination hier an, so ergibt sich

$$\sqrt{2}x + 2y = \sqrt{6}$$
$$\sqrt{2}x + 2y = \sqrt{6}$$

und schließlich:

$$\sqrt{2}x + 2y = \sqrt{6}$$
$$0 = \ \ 0!$$

Das bedeutet aber, daß beide Geraden zusammenfallen und es unendlich viele Lösungspunkte gibt!
Unter Beachtung der geometrischen Deutung für Gleichungssysteme von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten finden wir

so, daß es genau drei Fälle für die Lösbarkeit gibt:
– das System besitzt genau eine Lösung (die beiden Geraden schneiden sich in genau einem Punkt!),
– das System besitzt unendlich viele Lösungen (die Geraden fallen zusammen!),
– das System hat gar keine Lösung (die Geraden sind parallel!).
Ganz analog liegen die Verhältnisse bei n Gleichungen mit n Unbekannten. In der Regel hat ein solches System genau eine Lösung. Ist aber eine der Gleichungen eine *Linearkombination* der übrigen oder widerspricht eine Gleichung einer solchen Linearkombination, dann haben wir unendlich viele oder überhaupt keine Lösungen!

Aufgaben

▲4▲ Gib die Gleichung der Geraden an, die durch die Punkte
a) $P(1,5)$ und $Q(2,3)$,
b) $P(6,1)$ und $Q(6,5)$ geht!

▲5▲ Für welche Zahlen m und c gilt: Die Geraden $y - mx = 2$ und $2y - 6x = c$
a) fallen zusammen,
b) schneiden sich nicht?

▲6▲ Für welches a hat das System
$$\begin{aligned} 2x + (9a^2 - 2)y &= 3a \\ x + \qquad\quad y &= 1 \end{aligned}$$
keine Lösung?

▲7▲ Beweise, daß ein System
$$\begin{aligned} &a_1x + b_1y = c_1 \\ &a_2x + b_2y = c_2 \\ &(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in R) \end{aligned}$$
dann und nur dann genau eine Lösung besitzt, wenn die Zahl $a_1b_2 - a_2b_1$ ungleich null ist! (Diese Zahl heißt *Determinante* des Systems.)

Fehler durch Runden

Bei der Lösung von Aufgaben mit Hilfe von elektronischen Rechenmaschinen (EDVA oder auch ETR) können eigenartige Situationen entstehen. Eine klassische Illustration dafür ist das schon betrachtete System
$$\begin{aligned} x + \sqrt{2}\,y &= \sqrt{3} \\ \sqrt{2}\,x + \ 2y &= \sqrt{6}\,. \end{aligned} \qquad (1)$$
Wie wir gesehen hatten, besitzt es unendlich viele Lösungen. Löst man es aber maschinell (z.B. mit einem elektronischen Taschenrechner), dann ergibt sich *immer genau eine* Lösung. Das kommt daher, daß eine solche Maschine mit irrationalen Zahlen wie $\sqrt{2}$ nicht rechnen kann, sondern dafür stets Näherungswerte in Form von endlichen Dezimal-(oder Dual-)brüchen einsetzt.
Denken wir uns etwa eine Maschine, die anstelle von $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ oder $\sqrt{6}$ lediglich die Näherungswerte mit einer Stelle nach dem Komma, also 1,4; 1,7; oder 2,4, verwenden kann, so ergibt sich das System
$$\begin{aligned} x + 1{,}4y &= 1{,}7 \\ 1{,}4x + 2\ \ y &= 2{,}4\,. \end{aligned} \qquad (2)$$
Die leicht zu errechnende *einzige* Lösung hiervon ist $x = 1$ und $y = 0{,}5$!
Denken wir uns eine andere Maschine, die vier Stellen nach dem Komma verwenden kann, so lautet das von ihr anstelle von (1) gerechnete System
$$\begin{aligned} x + 1{,}4142y &= 1{,}7320 \\ 1{,}4142x + 2y \quad &= 2{,}4494\,, \end{aligned} \qquad (3)$$
das ebenfalls *genau eine*, aber von der vorigen *sehr* verschiedene Lösung $x = 0{,}3178$, $y = 1$ hat.
Jetzt werden wir uns davon überzeugen, daß jedes Gleichungssystem, das aus (1) bei Ersetzung von $\sqrt{2}$ durch eine ganz beliebige positive Zahl a mit $a^2 \neq 2$ entsteht, stets genau eine Lösung besitzt.
Ein solches System lautet dann
$$\begin{aligned} x + ay &= \sqrt{3} \\ ax + 2y &= \sqrt{6}\,. \end{aligned} \qquad (4)$$
Multiplizieren wir die erste Gleichung mit a und subtrahieren die zweite Gleichung, dann bekommen wir das zu (4) äquivalente System
$$\begin{aligned} x + ay \quad &= \sqrt{3} \\ (a^2 - 2)y &= a\sqrt{3} - \sqrt{6}\,. \end{aligned}$$
Wegen $a^2 \neq 2$ erhalten wir daraus eindeutig $y(a\sqrt{3} - \sqrt{6})/(a^2 - 2)$ und durch Einsetzen in die erste Gleichung $x = \sqrt{3} - a(a\sqrt{3} - \sqrt{6})/(a^2 - 2)$.
Damit haben wir die jeweils eindeutig bestimmte Lösung von (4) berechnet, und unsere Behauptung ist bewiesen.
Nun wissen wir aber aus der Schule, daß $\sqrt{2}$ als irrationale Zahl nicht als endlicher Dezimalbruch dargestellt werden kann. Deshalb löst auch die beste EDVA immer ein System (4) statt des verlangten Systems (1), womit nun der eingangs geschilderte Effekt seine Erklärung gefunden hat!
Das eben betrachtete Beispiel lenkt unsere Aufmerksamkeit außerdem auf die Erscheinung, daß sich die Lösung eines einfachen linearen Gleichungssystems schon sehr stark verändern kann, wenn die eigentlich gegebenen Koeffizienten durch Runden verändert werden. Wir haben das beim Übergang von (3) zu (2) ganz deutlich vor uns. Bei Systemen mit noch mehr Unbekannten kann dieser Effekt noch viel stärker ausfallen.
Die Abschätzung der auftretenden Fehler und die Erstellung von Lösungsverfahren, die eine möglichst geringe Fortpflanzung von Eingabefehlern garantieren, sind wichtige und gar nicht einfache Aufgaben. Der berühmte Mathematiker *C. F. Gauß* hat sie zu Beginn des 19. Jahrhunderts als einer der ersten systematisch untersucht, ausreichende Fortschritte sind aber erst in den letzten Jahrzehnten gemacht worden.
Zur Erinnerung an die wesentlichen Beiträge von Gauß zu diesen Fragen trägt eine einfache und universelle Methode zur Lösung linearer Gleichungssysteme seinen Namen.

Das Gaußsche Eliminationsverfahren

Die fortgesetzte Elimination von Unbekannten ist die bequemste Methode für die Lösung linearer Gleichungssysteme auf elektronischen Rechenanlagen. Wir demonstrieren das Vorgehen am Beispiel eines Systems von drei Gleichungen mit ebenso vielen Unbekannten:
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 &= -2\,. \end{aligned}$$
Im ersten Schritt eliminieren wir die Unbekannte x_1 unter Beibehaltung der ersten Gleichung aus den beiden folgenden. Wir erhalten so das zum gegebenen äquivalenten System
$$\begin{aligned} x_1 + \ x_2 + 2x_3 &= -1 \\ -3x_2 - 2x_3 &= -2 \\ -3x_2 - 4x_3 &= \ \ 2\,. \end{aligned}$$
Der zweite Schritt besteht darin, daß unter Verwendung der neuen zweiten Gleichung die Unbekannte x_2 aus der dritten eliminiert wird:
$$\begin{aligned} x_1 + \ x_2 + 2x_3 &= -1 \\ -3x_2 - 2x_3 &= -2 \\ 2x_3 &= -4\,. \end{aligned}$$
Jetzt können wir aus der letzten Gleichung $x_3 = -2$ ablesen. Setzen wir das in die zweite Gleichung ein, so bekommen wir
$$-3x_2 + 4 = -2\,,$$
das heißt $x_2 = 2$.
Nun ergibt sich aus der ersten Gleichung durch Einsetzen der schon errechneten Werte
$$x_1 + 2 - 4 = -1\,, \text{ d.h. } x_1 = 1.$$
Das System besitzt also die einzige Lösung $(1; 2; -2)$.
Ganz analog kann jedes beliebige lineare Gleichungssystem behandelt werden. Die allgemeine Beschreibung des Verfahrens von Gauß lautet demnach:

Man eliminiere unter Verwendung der schließlich unverändert übernommenen ersten Gleichung die Unbekannte x_1 aus allen folgenden.
Mit der neuen 2. Gleichung eliminiere man x_2 aus allen folgenden und behalte sie selbst bei.
Auf analoge Weise verfahre man so lange weiter, bis alle Gleichungen aufgebraucht sind.
Im Ergebnis erhalten wir ein *gestaffeltes* System, dessen Lösung wir von unten her schrittweise berechnen.

Wir sehen, daß wir damit einen Algorithmus besitzen, der *fast* automatisch ablaufen, also einer Maschine zur Abarbeitung übertragen werden kann. Wir müssen nur noch bedenken, daß es zu seiner Abarbeitung nötig ist, daß im k-ten Schritt die *neue* k-te Gleichung die Unbekannte x_k überhaupt noch enthält, denn nur dann können wir diese aus den folgenden eliminieren. Sollte das einmal nicht der Fall sein, dann müssen wir die Gleichungen (oder die Unbekannten!) neu numerieren (vertauschen). Natürlich kann es auch passieren, daß im k-ten Schritt alle noch verbleibenden Gleichungen *alle* noch nicht eliminierten Unbekannten nicht mehr enthalten. Stehen in diesen Gleichungen dann auch auf *allen* ihren rechten Seiten Nullen, dann erhalten wir unendlich viele Lösungen, weil dann $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ ganz beliebig sein können. Steht aber auch nur in einer von ihnen rechts nicht die Null, dann ist das System widersprüchlich, und der Algorithmus zeigt uns seine Unlösbarkeit an.

Alle diese Fälle müssen in einem Programm für eine Rechenanlage von vornherein eingeplant werden, so daß die Maschine stets bis zum Ende rechnen kann.

Wir wollen nun noch darauf hinweisen, daß eine Maschine zum Rechnen natürlich überhaupt nicht die Gleichungen, sondern nur das Schema ihrer Koeffizienten (man nennt das die *Matrix des Gleichungssystems*) benötigt. So wird das oben behandelte System vollständig durch seine Matrix

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right)$$

repräsentiert, und das Gaußsche Eliminationsverfahren hat kurz geschrieben den folgenden Verlauf:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

Auch wenn man größere Gleichungssysteme *von Hand* rechnet, ist die Verwendung dieser Matrixschreibweise sehr zu empfehlen, weil die größere Übersichtlichkeit Fehler vermeiden hilft.

Aufgabe

▲ 8 ▲ Löst das folgende System:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 6x_5 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 8x_5 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 &= 5\,! \end{aligned}$$

W. L. Guterman, aus Quant, Moskau
übersetzt und bearbeitet von R. Hofmann, Leipzig

Aufgaben

Im folgenden geben wir eine Auswahl von Aufgaben wieder.

▲ 9 ▲ Ein Mathematiker machte eine Wanderung. Zunächst ging er auf ebener Straße, dann eine Strecke bergauf, bis er wieder umkehrte und auf gleichem Wege zurückkehrte. Er wußte, daß er insgesamt 5 Std. unterwegs war und seine Geschwindigkeit auf ebener Straße 4 km/h, bergan 3 km/h und bergab 6 km/h betragen hatte. Nach Hause zurückgekehrt, setzte er sich an den Tisch und berechnete die Entfernung von seiner Wohnung bis zum Umkehrpunkt, indem er ein Gleichungssystem aufstellte, in dem diese Entfernung als Unbekannte x und die Länge der Gefällestrecke als y vorkommt. Finde x!

▲ 10 ▲ Um einen Tisch saßen vier Zwerge. Vor jedem stand ein Becher Milch. Ein Zwerg goß $\frac{1}{4}$ seiner Milch in den Becher seines rechten Nachbarn, dieser tat danach dasselbe mit seinem rechten Nachbarn und dieser dann ebenfalls. Schließlich goß auch der vierte Zwerg ein Viertel seines Becherinhaltes in den Becher seines rechten Nachbarn, und damit war der Kreis geschlossen. Zusammen befanden sich zwei Liter Milch in den Bechern. Wieviel war zu Beginn in jedem von ihnen, wenn
a) alle Zwerge zum Schluß gleich viel in ihren Bechern hatten,
b) jeder Zwerg zum Schluß soviel Milch trinken konnte, wie er am Anfang hatte.

▲ 11 ▲ Bestimme Zahlen a, b und c so, daß die Wertetafel

x	0	1	2
y	1	2	2

zur Funktion $y = ax^2 + bx + c$ gehört!

▲ 12 ▲ Berechne Zahlen a, b und c, so daß die Funktion

$$y = a + b(x-1) + c(x-1)(x-2)$$

die folgende Wertetabelle enthält:

x	0	1	2
y	1	2	2

!

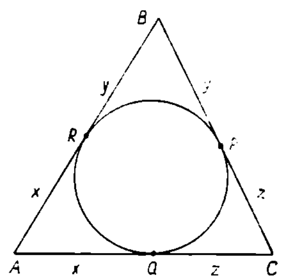
▲ 13 ▲ Es sollen vier Zahlen a, b, c und d bestimmt werden, so daß die Gleichung

$$(x-1)^2(ax+b) + (x^2+x-1)(cx+d) = 1$$

für alle reellen Zahlen x erfüllt ist.

▲ 14 ▲ Im Dreieck ABC (Bild 1) berühre der Inkreis die Seiten in den Punkten P, Q und R. Berechne $\overline{AQ} = \overline{AR} = x$, $\overline{BR} = \overline{BP} = y$ und $\overline{CP} = \overline{CQ} = z$, wenn $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ und $\overline{AB} = c$ gegeben sind!

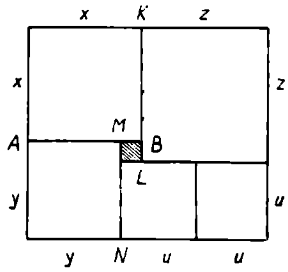
Bild 1



▲ 15 ▲ Auf der Basis AB eines gleichschenkligen Dreiecks ABC werde ein Punkt E gewählt. In die Dreiecke ACE und ECB seien die Inkreise gezeichnet, welche die Strecke EC in den Punkten K und H berühren. Berechne die Länge der Strecke KH, wenn $\overline{AE} = a$ und $\overline{EB} = b$ gegeben sind!

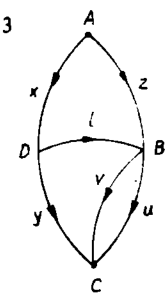
▲ 16 ▲ (23. Ukrainische Mathematikolympiade 1983 / Kl. 8)
Ein Rechteck wird entsprechend Bild 2 in Quadrate zerlegt. Es ist bekannt, daß die Seitenlänge des schraffierten Quadrates gleich eins ist. Berechne die unbekannten Seitenlängen der übrigen Quadrate!

Bild 2



▲ 17 ▲ Die Aufgabe handelt von elektrischen Netzen, die aus Leiterstücken von einheitlichem Widerstand zusammengesetzt sein sollen. Jedes Netz ist mit der Spannungsquelle in genau zwei Punkten (den Polen) verbunden. Die Teilströme in den einzelnen Zweigen genügen dann den sogenannten *Kirchhoffschen Regeln*, die für Netze dieser Art so formuliert werden können:
(a) Die Summe der in einen Knoten eintretenden Ströme ist gleich der der austretenden Ströme (die Pole zählen dabei als Knoten *nicht* mit!).
(b) In jedem geschlossenen Kreis des Netzes ist die Summe der im Uhrzeigersinn fließenden Ströme gleich der gegen den Uhrzeiger gerichteten.
(In Regel (b) sind im allgemeinen die *Spannungsabfälle* zu summieren, wegen des vorausgesetzten einheitlichen Widerstandes im Netz können wir auch hier die Ströme nehmen.)

Bild 3



In Bild 3 ist ein Netz mit den Polen A und B und den Knoten B und D dargestellt. Berechne sämtliche Ströme im Netz, wenn der Strom längs der *Kante BD* gleich 1 angenommen wird! (Die Pfeile bezeichnen für den Ansatz angenommene Stromrichtungen.)

▲ 18 ▲ 13. Allunionsolympiade, Kl. 8 und 10:
Löse das System!

$$(1)\quad \frac{x - y\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}} = a$$

$$(2)\quad \frac{y - x\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}} = b$$

▲ 19 ▲ Zwei Leute spielen folgendes Spiel:
Im Gleichungssystem

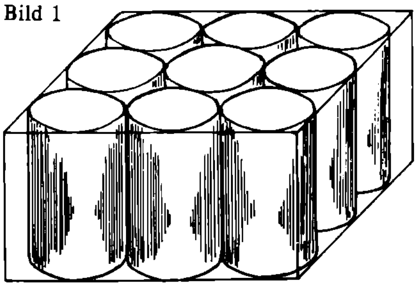
$$\begin{aligned} {*}x + {*}y &= {*} \\ {*}x + {*}y &= {*} \end{aligned}$$

setzen beide abwechselnd je eine beliebige reelle Zahl für eines der Sternchen ein. Der erste Spieler möchte, daß das System am Ende eine Lösung besitzt, während der zweite ein unlösbares System anstrebt.
Wer gewinnt bei regulär verlaufendem Spiel? Und wer gewinnt, wenn die Zielstellungen gerade vertauscht werden?

Punkt-anordnungen in einem Quadrat

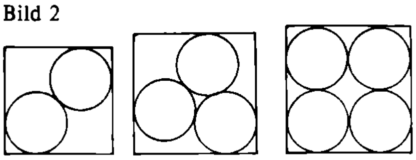
In einem Betrieb sollen kongruente zylinderförmige Werkstücke mit vorgegebenem Durchmesser d in Kisten mit quadratischer Grundfläche einschichtig verpackt werden. Es sind zu diesem Zwecke Kisten herzustellen, in denen man $n = 2, 3, 4, \ldots$ dieser Zylinder unterbringen kann, wobei die Grundflächen der Zylinder auf den Böden der Kisten stehen sollen (siehe Bild 1). Es ist die Forderung vernünftig, daß die Grundfläche der Kiste bei gegebenem n möglichst klein wird. Daraus leitet sich das folgende mathematische Problem ab.

Bild 1



Es werden diejenigen kleinsten Quadrate gesucht, in denen $n = 2, 3, 4, \ldots$ Kreise vom Durchmesser d Platz haben, ohne sich gegenseitig zu überlagern.
Wir bezeichnen mit Q'_n das kleinste Quadrat, in welches wir n Kreise mit dem Durchmesser d einlagern können, die Seitenlänge mit x'_n.
Im Bild 2 sind solche Quadrate für $n = 2$, 3, 4 dargestellt:

Bild 2



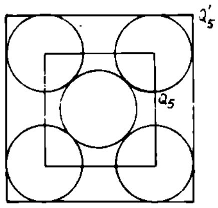
Aufgabe 1

Berechne die Seitenlängen der Quadrate Q'_2, Q'_3 und Q'_4! Bilde anschließend die Quotienten

$$d_n = \frac{n \cdot \frac{1}{4} d^2}{Q'_n}, \quad n = 2, 3, 4!$$

Für $n \geqq 6$ bereitet die Suche nach den kleinsten Quadraten Q'_n mitunter Mühe bzw. ist bisher für gewisse n nicht erfolgreich gewesen.
Es ist in solchen Fällen eine Arbeitsmethode der Mathematiker, aus der gegebenen Aufgabenstellung auf ein analoges Problem zu schließen, um zunächst die Lösung dieses Problems anzustreben. Falls die Lösung gelingt, werden dann Rückschlüsse auf die Ausgangsfrage angestrebt. Dieser Weg soll jetzt am Beispiel beschritten werden.
Dazu zeichnen wir zu dem Quadrat Q'_n ein Quadrat Q_n, das in Q'_n enthalten ist und dessen Seiten im Abstand $\frac{1}{2} d$ parallel zu den entsprechenden Seiten von Q'_n sind. Die Seitenlänge ist $x_n = x'_n - d$.
Im Bild 3 ist diese Situation für $n = 5$ dargestellt. Wir erkennen, daß die Mittelpunkte der in Q'_n eingelagerten Kreise in Q_n enthalten sind.

Bild 3



Betrachten wir nun allgemein ein Quadrat Q, in dem n Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ verteilt sind, wobei keine zwei Punkte P_i, P_j $(i \neq j)$ zusammenfallen sollen. Dann gibt es zwischen diesen n Punkten genau

$$\frac{n(n-1)}{2} \text{ Abstände } P_iP_j,\ i < j,$$
$$i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Aufgabe 2

Beweise diese Formel!
Den kleinsten dieser Abstände bezeichnen wir als Minimalabstand dieser Punktverteilung in dem Quadrat Q.
Den Begriff Minimalabstand können wir auf unser gestelltes Problem anwenden. Es entsteht der folgende Zusammenhang: Wenn Q'_n das kleinste Quadrat ist, in das n Kreise $K_1, K_2, \ldots, K_n$ vom Durchmesser d eingelagert werden können, dann ist das oben beschriebene Quadrat Q_n, das die Kreismittelpunkte $M_1, M_2, \ldots, M_n$ enthält, das kleinste Quadrat, in dem n Punkte mit dem Mindestabstand d verteilt werden können und umgedreht.

Aufgabe 3

Beweise diese Aussage!
Damit steht also die Aufgabe, das kleinste Quadrat Q_n zu bestimmen, das n Punkte $M_1, M_2, \ldots, M_n$ mit dem Mindestabstand d enthält.
Damit wir für verschiedene n in demselben Quadrat arbeiten können, betrachten wir zu der eben gestellten Aufgabe die äquivalente Aufgabe.
In einem Quadrat Q der Seitenlänge 1 bestimme man eine solche Verteilung von n Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_n$, so daß der Mindestabstand a^*_n dieser Verteilung nicht kleiner ist als der größte Wert der Mindestabstände bei allen anderen Verteilungen der n Punkte in Q.

Aufgabe 4

Man mache sich diesen Sachverhalt an Bildern mit $n = 3$ klar.
Eine Verteilung mit dem Mindestabstand a^*_n nennen wir auch *beste Verteilung von n Punkten in dem Quadrat Q*.
Für $n = 2, 3, \ldots, 9$ wurden die besten Punktverteilungen von *J. Schaer* und *A. Meir* (USA) gefunden. Für $n = 16$ und $n = 25$ stammt die Lösung von *G. Wengerodt* (Erfurt). Bild 4 zeigt die besten Verteilungen für diese n.

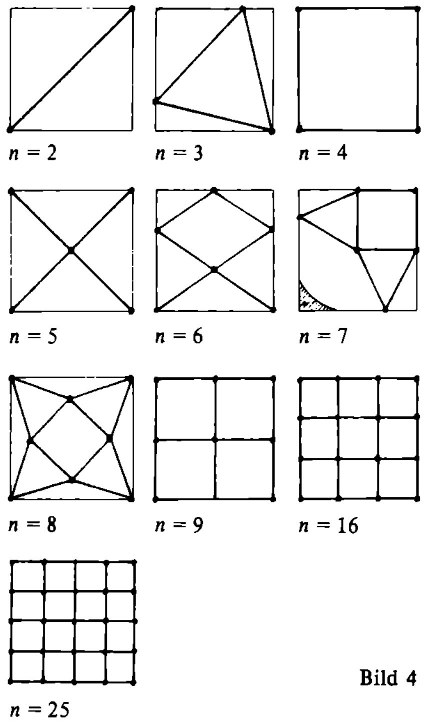


Bild 4

Bemerkenswert ist, daß für $n = 7$ ein Punkt in der schraffierten Fläche beweglich ist, obwohl eine beste Verteilung vorliegt.
Für die Beweise der besten Verteilungen von n Punkten in einem Quadrat nutzt man die Kontraposition des folgenden Satzes, der in der Literatur als *Basissatz* bezeichnet wird.
Ist $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ eine beste Verteilung von n Punkten in einem Quadrat, so liegt auf jeder Quadratseite mindestens ein Punkt von $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$.
Aus diesem Satz folgt sofort die beste Verteilung von $n = 2$ Punkten in dem Quadrat Q.

Aufgabe 5

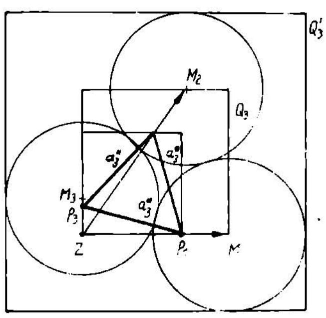
Beweise, daß $a^*_2 = \sqrt{2}$ ist!
Für $n = 3$ und $n = 4$ sollen die Beweise in einem späteren Artikel vorgestellt werden.
Wir haben gesehen, daß bisher nur für sehr wenige Zahlen n die besten Verteilungen gefunden wurden.
Natürlich gibt es für viele andere n Vermutungen für beste Verteilungen dieser n Punkte in einem Quadrat Q.
Es steht also ganz allgemein die Aufgabe, möglichst gute Verteilungen von n Punk-

ten in einem Quadrat der Seitenlänge 1 zu suchen. Eine Orientierung gibt die folgende Tabelle, in der solche Vermutungen zusammengetragen sind.

n	a_n	a_n^*
2		$\sqrt{2}$
3		$\sqrt{6}-\sqrt{2}$
4		1
5		$\sqrt{2}/2$
6		$\sqrt{13}/6$
7		$2(2-\sqrt{3})$
8		$(\sqrt{6}-\sqrt{2})/2$
9		1/2
10	5/12	
11	0,398...	
12	$\sqrt{34}/15$	
13	0,36603...	
14	$2(4-\sqrt{3})/13$	
15	$4/(8+\sqrt{6}+\sqrt{2})$	
16		1/3
17	0,3045...	
18	$\sqrt{13}/12$	
19	0,290	
20	$3/8-\sqrt{2}/16$	
21	0,2704...	
22	$2-\sqrt{3}$	
23	$(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$	
24	$1/(2+\sqrt{3/2}+1/\sqrt{2})$	
25		1/4

Wenn es nun für ein gegebenes n gelingt, die beste Verteilung von n Punkten in einem Quadrat Q der Seitenlänge 1 zu finden, so haben wir mit der folgenden Überlegung auch das Ausgangsproblem gelöst. Das zum Quadrat mit der Seitenlänge 1 gesuchte ähnliche Quadrat Q mit der Seitenlänge x_n erhält man durch zentrische Streckung mit dem Streckfaktor $t=\frac{d}{a_n^*}$ und dem Zentrum in einem Eckpunkt (Bild 5 zeigt den Sachverhalt für $n=3$).

Bild 5



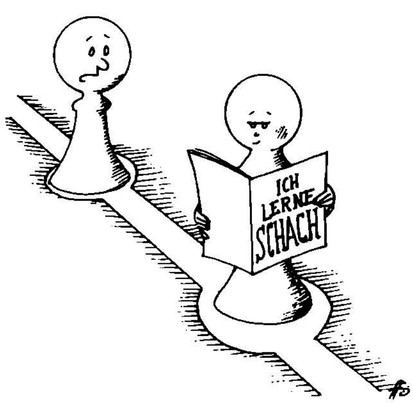
Die gesuchte minimale Grundfläche der quadratischen Kiste hat dann die Seitenlänge $x_n' = x_n + d$, und das anfangs gestellte Problem ist über diesen *Umweg* gelöst.
Die in Aufgabe 1 für $n = 2, 3, 4$ bestimmten Werte d_n geben Dichten der Kreisanordnungen in den Quadraten Q_n' an und sind damit Zahlenwerte für die Güte der Platzausnutzung in den Kisten. Für größer werdendes n streben die Werte d_n gegen $\frac{\pi}{\sqrt{12}} = 0,9068\ldots$.
Auf diesen Sachverhalt werden wir in einem späteren Beitrag zurückkommen.

Den Abschluß dieses Beitrages bildet eine Aufgabe, zu deren Lösung man die geschilderte Methode verwenden kann.

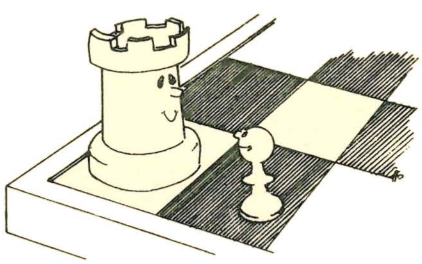
Aufgabe 6

Kann man in einem Quadrat der Seitenlänge 7 cm eine Verteilung von 26 Punkten mit dem Mindestabstand 2 cm finden?

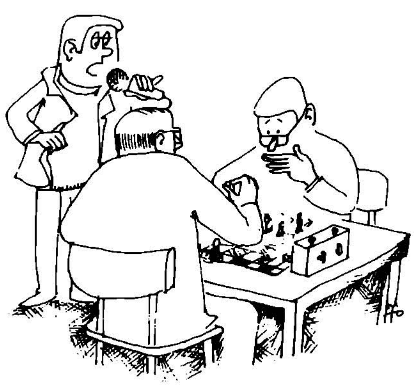
K. Kirchner/M. Schmitz



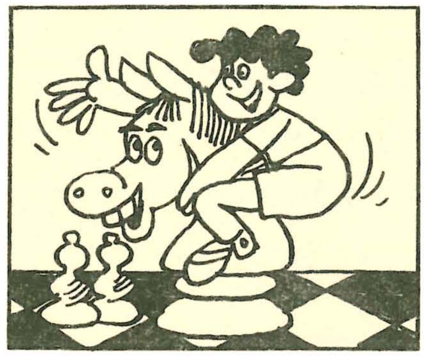
Gib es doch zu, du willst nicht mehr *Mensch ärgere dich nicht* spielen.



Darf ich mal 'raufkommen?

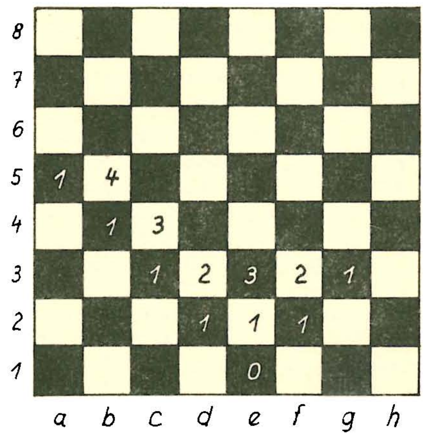


... und jetzt bekommt der Läufer die rote Karte, und Weiß hat nur noch vier Mann auf dem Feld.



Die vielen Wege des Königs

Die Frage, in wieviel Zügen und auf wieviel verschiedenen Wegen ein König von einem bestimmten Feld des Schachbretts auf ein anderes gelangen kann, ist recht interessant. Als Beispiel diene der einfache Fall, daß der König auf kürzestem Wege von e1 nach e8 wandert. Es ist leicht zu sehen, daß die Mindestanzahl der Züge 7 beträgt. Wie groß ist aber die Anzahl der möglichen Wege des Königs, in 7 Zügen von e1 nach e8 zu gelangen?



Mittels einer einfachen Methode kann man die Anzahl der Wege wie folgt auszählen:
Die Felder d2, e2 und f2 bekommen eine 1, denn sie sind von e1 in 1 Zug nur auf 1 Weg zu erreichen. Das Feld c3 erhält ebenfalls eine 1, denn es besitzt nur 1 Zugangsfeld (d2), das selber nur eine 1 trägt. Hingegen gehören zu dem Feld d3 2 Zugangsfelder d2 und e2. Es ist auf zwei Wegen erreichbar und bekommt daher eine 2. Entsprechend erhält das Feld e3 eine 3, und in dieser Weise teilt man allen entfernteren Feldern eine Zahl zu, die jeweils aus der Summe der Zahlen der Zugangsfelder besteht. In dem Diagramm sind schon einige Werte eingetragen.
Nach der vorgegebenen Methode ist der Wert des Feldes e8 zu ermitteln! Dieser Wert gibt die Anzahl der möglichen Wege des Königs, in 7 Zügen von e1 nach e8 zu gelangen, an.

H. Rüdiger

Taschenrechner für den Unterricht

Der VIII. Pädagogische Kongreß erteilte den Auftrag, die Notwendigkeit und Zweckmäßigkeit der Einführung elektronischer Taschenrechner in den Unterricht der allgemeinbildenden Oberschule wissenschaftlich zu untersuchen. Diese Untersuchungen sowie umfangreiche Schulerprobungen erbrachten, daß ein pädagogisch durchdachtes und richtiges methodisches Nutzen von Taschenrechnern als Rechenhilfsmittel im Unterricht bedeutende Potenzen in sich birgt, den Lern- und Aneignungsprozeß im Mathematikunterricht und in den naturwissenschaftlichen und polytechnischen Fächern effektiver zu gestalten. Das schließt die Möglichkeit ein, den Unterricht lebensverbundener zu gestalten und die Schüler auf allgemeinbildende Anforderungen vorzubereiten, die die wissenschaftlich-technische Entwicklung an alle Berufstätigen stellt.

Es hat sich allerdings erwiesen, daß die Nutzung von Taschenrechnern im Unterricht an eine Reihe von Voraussetzungen hinsichtlich des Niveaus der erreichten Fertigkeiten und Fähigkeiten im Rechnen aller Schüler gebunden ist. Dazu gehört in erster Linie, daß sie richtige Zahlenvorstellungen in den einzelnen Zahlenbereichen erworben haben und über sichere Fertigkeiten im mündlichen und schriftlichen Rechnen mit natürlichen und gebrochenen Zahlen verfügen. Dieser Prozeß ist – wie die Erfahrungen zeigen – am Ende der 6. Klasse auf einem für den Einsatz des Taschenrechners erforderlichen Niveau vollzogen.

Unter diesem Blickwinkel und unter Berücksichtigung der qualitativen Anforderungen, die ab Klasse 7 an die mathematische Bildung und Erziehung der Schüler gestellt sind, ist entschieden worden, beginnend mit dem Schuljahr 1985/86 in Klasse 7, an Stelle des Rechenstabs als qualitativ neues Rechenhilfsmittel den elektronischen Schulrechner SR 1 einzuführen. Diese Entscheidung geht einher mit der gleichzeitigen Einführung eines neuen Lehrplans, eines neuen Lehrbuches und neuer methodischer Hilfen für den Mathematikunterricht der Klasse 7. Die ab 2. September 1985 beginnende Arbeit mit neuen Unterrichtsmaterialien einschließlich des Nutzens elektronischer Taschenrechner in dieser Klassenstufe stellt einen bedeutenden Schritt der Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts dar.

Im Hinblick auf den elektronischen Taschenrechner werden die Schüler der Klasse 7 lernen, ihn schrittweise immer umfassender und sicherer zur Bewältigung numerischer Anforderungen und zunehmend auch als Wertespeicher zu verwenden. Dabei wird es darauf ankommen, die Möglichkeiten der schnellen und sicheren Ermittlung von Ergebnissen bei numerischen Anforderungen dafür zu nutzen, intensiver an der Herausbildung soliden Wissens über mathematische Begriffe und Zusammenhänge zu arbeiten. Dabei sind die Schüler zu der Erkenntnis zu führen, daß eine richtige Nutzung des Taschenrechners nur auf der Grundlage sicherer mathematischer Kenntnisse möglich ist.

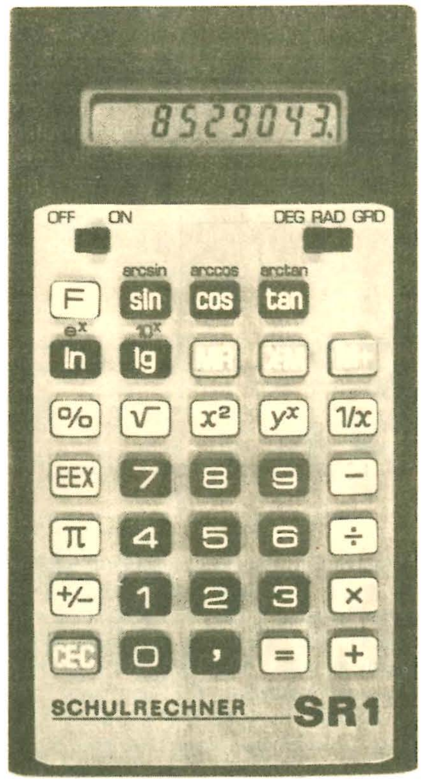
Im Mathematikunterricht wird es auch weiter Phasen geben, wo das hilfsmittelfreie Rechnen im Vordergrund steht. Das ist um so wichtiger, weil durch die Nutzung des Taschenrechners Anforderungen an das Kopfrechnen, das Abschätzen, das Überschlagsrechnen, das Rechnen mit Näherungswerten, das Entwickeln von Größenvorstellungen, die Ausprägung von Fertigkeiten und Gewohnheiten zur Kontrolle von Ergebnissen und das Arbeiten mit sinnvoller Genauigkeit bei Resultatsangaben wachsen. So gesehen erfordert gerade die Anwendung des Taschenrechners eine höhere Qualität der mathematischen Allgemeinbildung insgesamt, die mit den neuen Lehrplänen angestrebt wird.

Der mit der Einführung von elektronischen Taschenrechnern zu erreichende Effekt erfordert, daß jeder Schüler ab Klasse 7 über einen Taschenrechner im Unterricht und für Hausarbeiten verfügt. Durch die mikroelektronische Industrie unserer Republik wird dazu der Schultaschenrechner SR 1 produziert. Er besitzt neben den notwendigen Rechenarten, Funktionen und Speichern zwei langlebige Knopfzellen zur Energieversorgung (etwa 2 000 Stunden) und eine automatische Abschaltung der Stromversorgung nach sechs Minuten. Die dazugehörige Bedienungsanleitung ist speziell für die Belange der Schule ausgearbeitet worden. Es werden andere im Besitz der Schüler befindliche Taschenrechner, mit Ausnahme programmierbarer Taschenrechner, für die Verwendung im Unterricht zugelassen.

Der Verkauf der Schultaschenrechner im Einzelhandel begann für die Schüler der zukünftigen Klasse 7 im Mai 1985, um allen Elternhäusern die Möglichkeit zu geben, den Kauf bereits vor Ferienbeginn zu tätigen. Gegen Vorlage eines in der Schule ausgegebenen Bestellscheines kann der Schulrechner zu einem Preis von 123 Mark in Fachverkaufsstellen für Rundfunk und Fernsehen käuflich erworben werden. Eine verstärkte Umhüllung sichert den Schulrechner gegen Beschädigung beim Transport in den Schultaschen. Für die Fälle, daß der Kauf des eigenen Schulrechners nicht erfolgen kann oder der eigene Schulrechner durch Reparatur längere Zeit ausfällt, kann der Direktor der Schule in Absprache mit dem Fachlehrer Ausleihexemplare ausgeben. Zu diesem Zweck werden die Schulen mit einer bestimmten Anzahl zentral finanzierter Ausleihexemplare ausgestattet.

Die Reparatur der Rechner erfolgt in speziell dafür benannten Dienstleistungseinrichtungen, wobei gesichert ist, daß in jedem Kreis zumindest eine Annahmestelle für Reparaturen vorhanden ist. Der Zeitraum zwischen Abgabe eines reparaturbedürftigen Rechners in der Annahmestelle und Ausgabe des reparierten Rechners soll im allgemeinen 14 Tage nicht überschreiten.

Dr. Peter Gerstenberger, Ministerium für Volksbildung



Mein Taschenrechner „SR 1", Teil 1

Der Schulrechner SR 1 ist ein sehr leistungsfähiger Taschenrechner aus der Produktion des VEB Mikroelektronik *Wilhelm Pieck* Mühlhausen.

Als *Hauptbestandteile* des SR 1 erkennt man von außen

- das Gehäuse mit einem Tastenfeld,
- die Anzeige,
- den Ein- und Ausschalter und
- den Umschalter für Winkelmaße

(DEG, RAD, GRD).

(Schalterstellung

DEG – der Winkel ist in Grad einzugeben. Ein rechter Winkel hat 90°.

RAD – der Winkel ist in Bogenmaß einzugeben. Einem rechten Winkel entspricht ein Bogenmaß von $\frac{\pi}{2}$.

GRD – der Winkel ist in Neugrad (bzw. Gon) einzugeben. Ein rechter Winkel hat 100 Neugrad (100^g)).

Auf dem Tastenfeld befinden sich eine Reihe von Tasten, die der Eingabe von Zahlen dienen, auch *Eingabetasten* genannt. Zu ihnen gehören die Ziffertasten $\boxed{0}$; $\boxed{1}$; $\boxed{2}$; ... $\boxed{9}$, die Taste für das Komma $\boxed{,}$ (ein Komma erscheint in der Anzeige als Punkt), die Vorzeichenwechseltaste $\boxed{+/-}$, mit der man negative Zahlen eingeben kann (z. B. gibt man $-1{,}2$ durch Drücken folgender Tasten ein: $\boxed{1}$ $\boxed{,}$ $\boxed{2}$ $\boxed{+/-}$), die Taste für die Konstante π $\boxed{\pi}$ und die Taste für die Exponenteneingabe $\boxed{\text{EEX}}$.

Mit der Taste $\boxed{\text{EEX}}$ kann man Zahlen in Darstellungen wie $12 \cdot 10^4$ (also mit abgetrennten Zehnerpotenzen) in den Rechner eingeben:

Tastenfolge	Anzeige
	0.
$\boxed{1}$	1.
$\boxed{2}$	12.
$\boxed{\text{EEX}}$	12. 00
$\boxed{4}$	12. 04

Will man an Stelle von $12 \cdot 10^4$ die Zahl $12 \cdot 10^5$ eingeben, so kann man nach obiger Eingabe wie folgt verfahren:

Tastenfolge	Anzeige
	12. 04
$\boxed{0}$	12. 40
$\boxed{5}$	12. 05

▲1▲ Welche Zahl wird mit folgender Tastenfolge in den SR 1 eingegeben?

a) $\boxed{2}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{\text{EEX}}$ $\boxed{6}$

b) $\boxed{2}$ $\boxed{\text{EEX}}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{3}$

c) $\boxed{14}$ $\boxed{\text{EEX}}$ $\boxed{12}$ $\boxed{+/-}$

d) $\boxed{1{,}2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{EEX}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$

Die Tasten $\boxed{+}$, $\boxed{-}$, $\boxed{\times}$, $\boxed{\div}$, $\boxed{y^x}$ nennt man *Operationstasten*. Operationen werden jeweils mit der *Ergebnistaste* $\boxed{=}$ abgeschlossen.

Aufgabe	Rechenablaufplan	Ergebnis
$2+3$	$\boxed{2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$	5
$2 \cdot 1{,}7$	$\boxed{2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{1{,}7}$ $\boxed{=}$	3,4
2^3	$\boxed{2}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$	8

Der SR 1 verfügt über eine Löschtaste $\boxed{\text{CE}-\text{C}}$. Nach einmaliger Betätigung der Taste $\boxed{\text{CE}-\text{C}}$ wird der zuletzt eingegebene Operand gelöscht. Wird die Löschtaste zweimal gedrückt, so löscht man die gesamte Eingabe.

▲2▲ Erkunde, welchen Term der SR 1 mit den angegebenen Rechenablaufplänen berechnet!

a) $\boxed{2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$

b) $\boxed{2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$

c) $\boxed{6}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$

d) $\boxed{6}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$

e) $\boxed{6}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$

f) $\boxed{2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$

g) $\boxed{2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{3}$ $\boxed{+}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$

h) $\boxed{4}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{0{,}5}$ $\boxed{=}$

i) $\boxed{9}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{0{,}5}$ $\boxed{=}$

k) $\boxed{16}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{0{,}5}$ $\boxed{=}$

Nachdem wir die Aufgabe 2b) gelöst haben, wissen wir, daß bei Betätigung mehrerer Operationstasten hintereinander der SR 1 nur die zuletzt gewählte Operation ausführt. Daß der SR 1 eine *eingebaute* Vorrangautomatik hat, merkten wir beim Lösen der Aufgaben 2f) und 2g). Der SR 1 beachtet also die Regel „Punktrechnung geht vor Strichrechnung".

▲3▲ Gib für folgende Terme einen Rechenablaufplan an!

a) $\dfrac{z}{b \cdot c}$ b) $a \cdot b - c : d$ c) $a - b \cdot c$

▲4▲ Betätige die Tasten des SR 1 in angegebener Reihenfolge, und fülle die Leerstellen aus!

Schritt	Tastenfolge	Anzeige
		0.
1.	$\boxed{4}$	4.
2.	$\boxed{+}$	4.
3.	$\boxed{5}$	5.
4.	$\boxed{=}$	9.
5.	$\boxed{2}$	2.
6.	$\boxed{=}$	...
7.	$\boxed{3}$	...
8.	$\boxed{=}$	...
9.	$\boxed{1{,}5}$	...
10.	$\boxed{=}$	...

Wie man beim Ausfüllen der Leerstellen merkt, wird jeweils zu den in Schritt 5, 7, 9 eingegebenen Zahlen die Zahl 5 (zweiter Operand der Ausgangsaufgabe) addiert. Der SR 1 verfügt also über eine *Konstantenautomatik* bezüglich der Addition.

▲5▲ Erkunde, ob der SR 1 auch bezüglich der anderen Grundrechenoperationen ($\boxed{-}$, $\boxed{\times}$, $\boxed{\div}$) über Konstantenautomatik verfügt!

▲6▲ Fülle die Leerstellen aus!

a) $\boxed{2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{3}$ $\underset{6}{\boxed{=}}$ $\boxed{5}$ $\underset{15}{\boxed{=}}$ $\boxed{2{,}71}$ $\underset{\dots}{\boxed{=}}$

b) $\boxed{2}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{3}$ $\underset{8}{\boxed{=}}$ $\boxed{3}$ $\underset{\dots}{\boxed{=}}$ $\boxed{4}$

$\underset{\dots}{\boxed{=}}$ $\boxed{16}$ $\underset{\dots}{\boxed{=}}$

c) $\boxed{2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{4}$ $\underset{\dots}{\boxed{=}}$ $\boxed{4}$

$\underset{\dots}{\boxed{=}}$ $\boxed{5}$ $\underset{\dots}{\boxed{=}}$ $\boxed{17{,}71}$ $\underset{\dots}{\boxed{=}}$

Das Betätigen einer der Funktionstasten, z. B. $\boxed{x^2}$ (bzw. $\boxed{\sqrt{x}}$ $\boxed{1/x}$) bewirkt, daß die in der Anzeige befindliche Zahl a durch a^2 $\left(\text{bzw. } \sqrt{a}\,;\, \dfrac{1}{a}\right)$ ersetzt wird und der Taschenrechner dann mit a^2 $\left(\text{bzw. } \sqrt{a}\,;\, \dfrac{1}{a}\right)$ weiterrechnet. Will man den Wert des Terms $3^2 + 4^2$ mit dem SR 1 ermitteln, so muß man vor der Betätigung der Wurzeltaste die Taste $\boxed{=}$ drücken, damit die Summe der Quadrate, in unserem Falle 25, in der Anzeige erscheint. Ein entsprechender Rechenablaufplan sieht wie folgt aus:

$\boxed{3}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{4}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$

▲7▲ Stelle zur Berechnung folgender Terme einen Rechenablaufplan auf! Kontrolliere deinen Plan mit Hilfe einfacher Zahlen!

a) $(a+b)^2$

b) $\sqrt{a + \dfrac{1}{b}}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{2a - b}}$

d) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$

e) $\sqrt{a + b \cdot c^5}$

▲8▲ Stelle einen Rechenablaufplan zur Berechnung von u auf!

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

▲9▲ Welcher Term kann mit nachstehendem Rechenablaufplan berechnet werden?

a) a $\boxed{+}$ b $\boxed{\times}$ c $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{=}$

b) a $\boxed{+}$ b $\boxed{\times}$ c $\boxed{=}$

c) a $\boxed{\times}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ b $\boxed{=}$

d) a $\boxed{\times}$ b $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{=}$

e) a $\boxed{+}$ $\boxed{1/x}$ b $\boxed{=}$

f) a $\boxed{1/x}$ $\boxed{+}$ b $\boxed{=}$

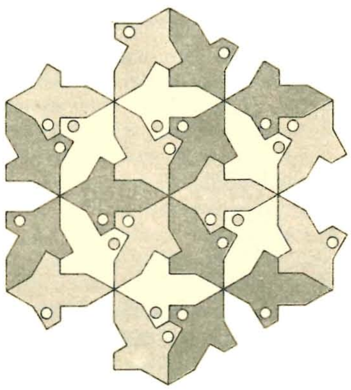
Mit dem Rechenablaufplan 9c) wird nicht der Term $a \cdot \sqrt{b}$, sondern der Wert des Terms $a \cdot b$ ermittelt.
Nach Abarbeitung der Tastenfolge a $\boxed{\times}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ erscheint in der Anzeige der Wert $\sqrt{a}$. Dieser Wert wird jedoch durch die Eingabe von b gelöscht und durch b ersetzt, so daß nach der Betätigung der Taste $\boxed{=}$ der Wert von $a \cdot b$ in der Anzeige sichtbar wird. Für alle Funktionstasten wird beim SR 1 mit dem Rechenablaufplan a $\boxed{\text{Operationstaste}}$ $\boxed{\text{Funktionstaste}}$ b $\boxed{=}$ derselbe Term berechnet wie mit folgendem Rechenablaufplan:
a $\boxed{\text{Operationstaste}}$ b $\boxed{=}$.

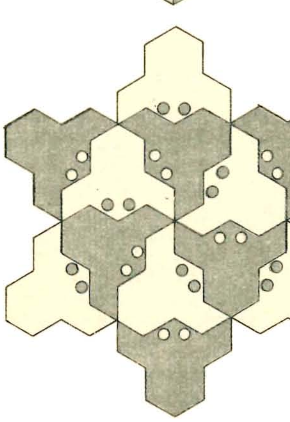
L. Flade

Fortsetzung folgt in Heft 5/85.

Drehsymmetrie

Die beiden Bilder (siehe unten) wird man als symmetrische Figuren empfinden.





Sie lassen sich jedoch nicht in die Symmetriearten einordnen, mit denen wir uns bereits beschäftigt haben.

So wurden im Heft 4/1984 (S. 80 bis 81) die *Axialsymmetrie* und im Heft 2/1985 (S. 42 bis 43) die *Zentralsymmetrie* näher betrachtet:

Eine Figur F heißt *symmetrisch bezüglich der Geraden a (axialsymmetrisch)* bzw. *symmetrisch bezüglich des Punktes Z (zentralsymmetrisch)*, wenn bei der Spiegelung an der Geraden a bzw. bei der Spiegelung am Punkt Z (d. h. Drehung um Z mit 180°) die Figur F in sich übergeht.

Bei der Betrachtung der Titelfigur erkennt man, daß sie weder axial- noch zentralsymmetrisch ist; aber sie geht durch eine Drehung mit 120° um einen Punkt in sich über. (Den geeigneten Drehpunkt erkennt man schon *gefühlsmäßig*.)

Man nennt nun eine Figur F *drehsymmetrisch bezüglich des Punktes M*, wenn es eine (nichtidentische) Drehung ϱ um M gibt, die die Figur F auf sich abbildet. Den Drehwinkel können (und wollen) wir dabei immer zwischen 0° und 360° sowie im gleichen Drehsinn wählen.

Wir betrachten dazu zwei bekannte Figuren, einen Kreis (Bild 1) und ein (einfaches) regelmäßiges Sechseck (Bild 2). (Ein n-Eck heißt *einfach*, wenn sich keine zwei seiner Seiten überschneiden.) Hier gibt es jeweils Drehungen, die die Figur zur Deckung bringen.

Bild 1

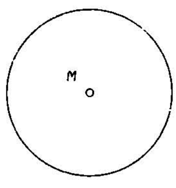
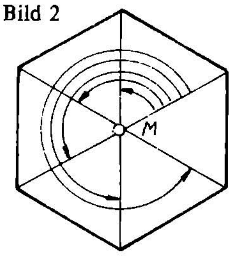


Bild 2



Während dies beim Kreis *jede* Drehung um den Mittelpunkt M leistet, kommen beim Sechseck nur fünf Drehungen um seinen Mittelpunkt M in Frage, nämlich (im gleichen Drehsinn gemessen) mit 60°, 120°, 180°, 240° und 300°, wenn man von der identischen Abbildung absieht, die als spezielle Drehung um M mit 0° aufgefaßt wird.

▲1▲ *Es sei $A_1A_2\ldots A_n$ ein (einfaches) regelmäßiges n-Eck ($n = 3$) und M der Mittelpunkt seines Umkreises. Man bestimme alle Drehungen um M, die diese Figur auf sich abbilden!*

Lösung: Den Winkel, den zwei aufeinanderfolgende Ecken mit M bilden, etwa $\sphericalangle A_1MA_2$, hat die Größe $\frac{360°}{n}$. Die Drehung ϱ um M mit $\left(\frac{360}{n}\right)^\circ$ bildet nun offensichtlich die Figur auf sich ab. Da bei jeder der gesuchten Drehungen um M Ecken auf Ecken zu liegen kommen müssen, ist ihr Drehwinkel φ ein Vielfaches von $\left(\frac{360}{n}\right)^\circ$, genauer $\varphi = m\cdot\left(\frac{360}{n}\right)^\circ$ mit $0 \leqq m < n$, m ganzzahlig. Es gibt also genau n Drehungen um M, die die Figur zur Deckung bringen, wobei wir die identische (mit dem Drehwinkel $\varphi = 0°$) hier und später mit dazuzählen.

Wenn wir bedenken, daß die *Nacheinanderausführung $\varrho_1\cdot\varrho_2$ zweier Drehungen ϱ_1 und ϱ_2 um M, die die Figur F zur Deckung bringen, wieder eine Drehung um M mit dieser Eigenschaft* ist, so kommen wir zu einer anderen Betrachtung unserer Aufgabe.

Die m-fache Nacheinanderausführung der Drehung ϱ um M mit $\left(\frac{360}{n}\right)^\circ$ führt die Ecke A_1 in die Ecke A_{m+1} $(1 < m < n)$ über; die n-fache Nacheinanderausführung von ϱ ist schließlich die identische Drehung, bei der A_1 wieder auf sich abgebildet wird. Die gesuchten Drehungen sind also

$\varrho\cdot\varrho\cdot\varrho, \ldots, \underbrace{\varrho\cdot\varrho\ldots\varrho}_{n\text{-mal}}$

oder kurz in Potenzschreibweise ϱ^m mit $1 \leqq m \leqq n$.

Man erklärt: Eine *Figur F hat bezüglich des Punktes M eine Drehsymmetrie vom Grad n*, wenn es genau n Drehungen um M gibt (einschließlich der identischen), die die Figur F auf sich abbilden. Dabei ist nur $n \geqq 2$ von Interesse.

So hat also die Titelfigur eine Drehsymmetrie vom Grad 3, und ein regelmäßiges n-Eck hat bezüglich seines Mittelpunktes eine Drehsymmetrie vom Grad n. Dagegen hat die Drehsymmetrie des Kreises bezüglich seines Mittelpunktes *keinen* endlichen Grad.

▲2▲ *Man betrachte das Vorderrad des Fahrrades in Draufsicht. Welchen Grad hat die Drehsymmetrie dieses Bildes bezüglich des Punktes, der Bild der Radachse ist?*

▲3▲ a) Für eine systematische Gliederung der Samenpflanzen ist die Anzahl und Stellung der Blütenteile ein wichtiges Hilfsmittel, die man als Grundriß schematisch in einem sogenannten *Blütendiagramm* angibt. *Welchen Grad der Drehsymmetrie besitzt das Blütendiagramm der Tulpe (oder anderer bekannter Blumen)?*

b) *Man zerschneide einen Apfel senkrecht zur Achse Blüte – Stiel. Welchen Grad der Drehsymmetrie zeigt die Schnittfläche?*

Vielfältige Beispiele für Figuren mit Drehsymmetrie bieten Natur, Kunst und Technik; besonders eindrucksvoll sind die Rosetten an alten Bauwerken. Das Bild 3 zeigt ein drehsymmetrisches Kirchenfenster; im Stadtwappen von Erfurt (Bild 4) befindet sich eine drehsymmetrische Figur; das Laue-Diagramm in Bild 5 (ein Röntgenstrahlbeugungsgitter eines Kristalls) besitzt eine Drehsymmetrie vom Grad 6.

Bild 3

Bild 4

Bild 5

Zentral- und *Drehsymmetrie* stehen in einem engen *Zusammenhang*: Besitzt eine Figur F bezüglich des Punktes M eine Drehsymmetrie vom Grad n, so ist F genau dann zentralsymmetrisch bezüglich M, wenn n gerade ist.

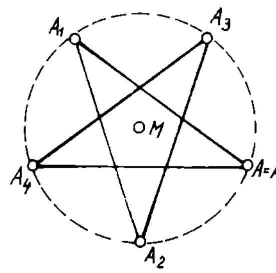
▲4▲ *Es sei ϱ eine Drehung um M mit $\frac{k}{n}\,360°$ und $1 \leqq k < \frac{n}{2}$; k, n* ganzz.; *ferner sei $A \neq M$ ein beliebiger Punkt. Wir bezeichnen mit A_m das Bild von A bei der m-fachen Nacheinanderausführung von ϱ* (speziell sei

A_1 das Bild von A bei der Drehung ϱ) *und verbinden A mit* A_1, A_1 *mit* A_2 usw. *durch eine Strecke. Welche Streckenzüge entstehen auf diese Weise?*

Lösung: Für $m = n$ (> 1) ist die m-fache Nacheinanderausführung von ϱ wegen $m\left(\frac{k}{n}\,360°\right) = k \cdot 360°$ die identische Drehung, also $A_n = A$, d. h., der Streckenzug $\overline{AA_1A_2\ldots A_n}$ schließt sich spätestens mit dem Punkt A_n.

Sind k, n teilerfremd, so ist $\overline{A_1A_2\ldots A_n}$ ein regelmäßiges n-Eck. Dies ist offenbar *einfach*, wenn $k = 1$ gilt. Für $k > 1$ *überschneiden* sich die Seiten; ein solches Vieleck heißt ein *regelmäßiges Sterneck*. So erhält man für $n = 5$ und $k = 2$ das *regelmäßige Sternfünfeck* (Bild 6). (Es gibt genau zwei Arten regelmäßiger Sternsiebenecke; warum?)

Bild 6



Sind k, n nicht teilerfremd, also der größte gemeinsame Teiler von k und n eine Zahl $t > 1$, dann ist bereits $A_{n/t} = A$, d.h., es entsteht ein regelmäßiges $\left(\frac{n}{t}\right)$-Eck.

Nun kann man eine anspruchsvolle Aufgabe lösen:

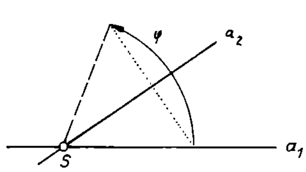
▲ 5 ▲ *Die Nacheinanderausführungen einer Drehung um M mit* $t \cdot 180°$ ($0 < t < 1$, reell) *erzeugen mit einem Punkt* $A = M$ *ein regelmäßiges Vieleck genau dann, wenn t eine rationale Zahl ist.*

Einen bemerkenswerten *Zusammenhang* gibt es *zwischen Axial- und Drehsymmetrie:*

▲ 6 ▲ *Hat eine Figur F zwei sich schneidende Geraden* a_1 *und* a_2 *als Symmetrieachsen, so ist sie bezüglich des Schnittpunktes S von* a_1 *und* a_2 *drehsymmetrisch.*

Beweis: Die Nacheinanderausführung der Spiegelungen σ_1 und σ_2 an den Geraden a_1 und a_2 ist eine Drehung um den Schnittpunkt S von a_1, a_2; der Drehwinkel ϱ läßt sich leicht konstruktiv angeben (Bild 7).

Bild 7



Da σ_1 und σ_2 die Figur jeweils auf sich abbilden, gilt dies dann auch für ϱ.

▲ 7 ▲ Gib Figuren an (insbesondere aus dem Mathematikunterricht), in denen die Voraussetzungen von ▲ 6 ▲ gelten!

Von Interesse ist, ob eine Figur *bezüglich verschiedener Punkte drehsymmetrisch* sein kann und welche Zusammenhänge dabei bestehen.

Die Ebene kann man offensichtlich einfach und lückenlos mit kongruenten Quadraten überdecken (Bild 8). Diese Figur ist drehsymmetrisch bezüglich der Quadratmitten (Grad 4), der Quadratecken (Grad 4) und der Quadratseitenmitten (Grad 2). Entsprechende Grade der Drehsymmetrie treten auch in dem Wandmuster auf, das Bild 9 zeigt.

Bild 8

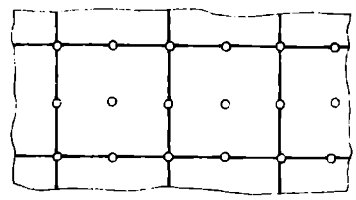
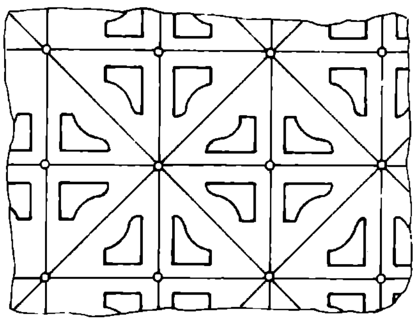
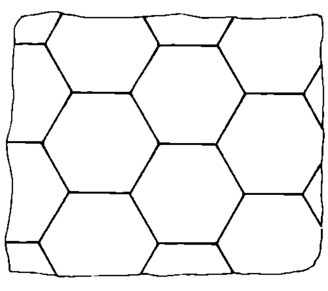


Bild 9



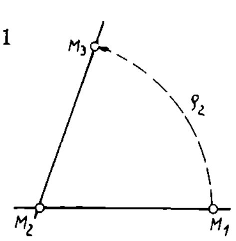
▲ 8 ▲ *Eine Parkettierung der Ebene ist auch*
a) *mit kongruenten gleichseitigen Dreiecken*
b) *mit kongruenten regelmäßigen Sechsecken („Honigwabenmuster“,* Bild 10) *möglich. Man untersuche jeweils die möglichen Drehsymmetrien!*

Bild 10



▲ 9 ▲ *Hat eine Figur F eine Drehsymmetrie von Grad* d_1 *bez.* M_1 *und eine Drehsymmetrie vom Grad* d_2 *bez.* M_2 *und gilt* $d_1 < d_2$, *dann ist F drehsymmetrisch bezüglich eines weiteren Punktes* M_3, *der nicht auf der Verbindungsgeraden von* M_1 *und* M_2 *liegt und bei dem der Grad der Drehsymmetrie* $d_3 = d_1$ *ist.*

Bild 11



Beweis: Nach Voraussetzung gibt es eine Drehung ϱ_1 um M_1 und eine Drehung ϱ_2 um M_2, die die Figur F jeweils zur Deckung bringen. Bei der Drehung ϱ_2 geht wegen $d_2 > d_1$, also $d_2 > 2$, der Punkt M_1 in einen Punkt M_3 über, der nicht auf der Verbindungsgeraden von M_1, M_2 liegt (Bild 11). Die Figur F geht dabei in eine Figur F' über, die offenbar bezüglich M_3 eine Drehsymmetrie vom Grad d_1 besitzt. Nun ist aber F' gleich F, da F nach Voraussetzung bei der Drehung ϱ_2 in sich übergeht. Damit gilt die Behauptung.

Beispiele für den Sachverhalt in ▲ 9 ▲ bieten das Bild sowie die Figuren in ▲ 8 ▲ a) und b).

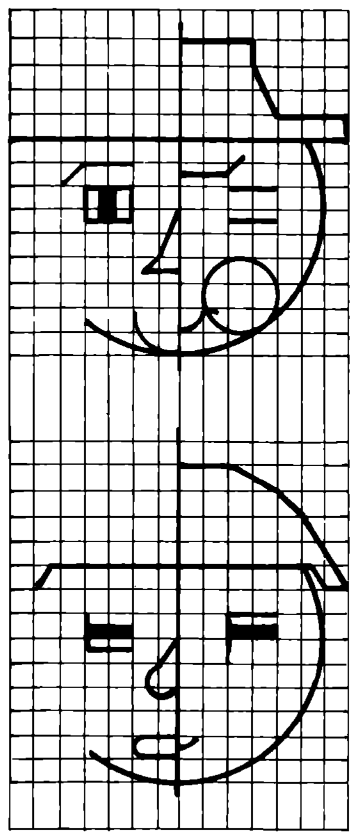
Besonders bemerkenswert ist hier noch, daß unter den Voraussetzungen in ▲ 9 ▲ für die Grade der Drehsymmetrien der Figur F nur folgende Kombinationen möglich sind:
a) alle 3; b) nur 2 und 4;
c) nur 2, 3 und 6.

Dies folgt aus der *kristallographischen Beschränkung*, auf die wir hier nicht näher eingehen können.

▲ 10 ▲ *Betrachte zu Hause (oder in der Schule) die Tapetenmuster hinsichtlich möglicher Drehsymmetrien und diesbezüglicher Grade!*

▲ 11 ▲ *Zeichne ein Muster, bei dem mehrere Drehsymmetrien auftreten, aber alle vom Grad 3 sind!*

E. Quaisser/H.-J. Sprengel



Vervollständige die folgenden Figuren so, daß axialsymmetrische Figuren entstehen, wobei s die Spiegelachse ist!

Heidrun Tittel, Gotha (Kl. 5)

Ein Besuch in der Knobelwerkstatt

Teil 3: Ernste Probleme heiter betrachtet

Liebe Freunde! Nachdem wir in Teil 2 unserer Beitragsserie die Ideenfindung für heitere mathematische Problemaufgaben (Knobelaufgaben) aus der Umwelt am Beispiel von Beobachtungen in der *Messestadt Leipzig* demonstriert haben, wollen wir in diesem Beitrag die *Mathematik* selbst zu Rate ziehen und sie *als Ideenlieferant für Knobelaufgaben* nutzen.

Damit hatten wir ja bereits begonnen, als wir nämlich in Teil 1 einige typische Klassen von mathematischen Knobelaufgaben vorgestellt haben und hierbei die Einteilung nach mathematischen Teildisziplinen (Arithmetik, Gleichungslehre, Kombinatorik, Graphentheorie, Geometrie, Logik u. a.) vorgenommen hatten. Prinzipiell kann man zu jeder mathematischen Teildisziplin Knobelaufgaben gestalten, und sei ihr Inhalt von noch so streng wissenschaftlicher Natur. Der französische Mathematiker *Blaise Pascal* (1623 bis 1662), der euch sicher durch das *Pascalsche Dreieck* bekannt ist, und der zusammen mit *Pierre de Fermat* (1601 bis 1665) als Begründer der Wahrscheinlichkeitsrechnung gilt, hat einmal gesagt: „Die Mathematik als Fachgebiet ist so ernst, daß man keine Gelegenheit versäumen sollte, dieses Fachgebiet ein wenig unterhaltsamer zu gestalten."

Eingedenk dieses Ausspruches wollen wir nun demonstrieren, wie man den mathematischen Objekten, Sätzen und Formeln die unterhaltsame Seite abgewinnen kann, indem wir sie in heiteren Problemaufgaben darstellen bzw. zu Knobelaufgaben umformulieren, so daß sich ihr ernsthaftes Wesen in unterhaltsamer Weise offenbart. Wir wollen das an einigen Beispielen aus der Arithmetik und der Geometrie verdeutlichen.

Zunächst drei Beispiele aus der *Arithmetik*, des Teilgebietes der Mathematik, das die Zahlenarten und ihre Rechengesetze behandelt, wobei die niedere Arithmetik die vier Grundrechenarten und die Potenzrechnung mit ihren Umkehrungen (Wurzelziehen und Logarithmieren) und die höhere Arithmetik die Theorie der Folgen und Reihen, die Zahlentheorie und auch die Kombinatorik umfaßt.

Beispiel 1

Grundobjekte der Mathematik, insbesondere der Arithmetik, sind die *Zahlen*. Ihr kennt bereits eine Reihe von Zahlenarten, wie z. B. natürliche Zahlen (gerade Zahlen, ungerade Zahlen, Primzahlen, Quadratzahlen, vollkommene Zahlen o. ä.), ganze, gebrochene, rationale, irrationale und reelle Zahlen und eventuell auch schon komplexe Zahlen. In Form der *Knobelaufgaben 1 und 2* könnte man sich etwa in unterhaltsamer Weise mit den Zahlen und deren Darstellung beschäftigen.

Beispiel 2

Ihr wißt sicher, daß man eine Zahlenfolge der Form $a_1 = a$, $a_2 = aq$, $a_3 = aq^2$, $a_4 = aq^3$, ..., $a_n = aq^{n-1}$, ... eine *geometrische Folge* mit dem Anfangsglied $a \neq 0$ und dem Quotienten q nennt, und daß man die Summe s_n der ersten n Glieder solch einer Folge mit $q \neq 1$ nach der Formel

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

berechnen kann. Von hier nehmen wir die Ideen für die *Knobelaufgaben* 3 *und* 4, welche die Gesetzmäßigkeiten geometrischer Folgen in unterhaltsamer Weise offenbaren.

Beispiel 3

Bekanntlich besagt der Fundamentalsatz der elementaren Zahlentheorie, daß sich jede natürliche Zahl $n > 1$ bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig in ein Produkt von Primzahlpotenzen $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ zerlegen läßt, wobei $p_1, p_2, \ldots, p_k$ paarweise verschiedene Primzahlen und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ natürliche und von 0 verschiedene Zahlen sind. Beispielsweise gilt: $1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ und $1984 = 2^6 \cdot 31$. Knobelaufgaben, die man zu diesem *Satz von der Primfaktorzerlegung* bauen könnte, wären etwa Wegeprobleme mit Zahlen *(Aufgabe 5)*, magische Figuren mit gleichen Produkten *(Aufgabe 6)*, geometrische Teilungsprobleme – mit Zahlen kombiniert *(Aufgabe 7)*, Aufgaben, welche auf die Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers bzw. kleinsten gemeinsamen Vielfachen zweier oder mehrerer natürlicher Zahlen führen *(Aufgabe 8)*, sowie weitere Denksportaufgaben, die auf der Primfaktorzerlegung basieren; vgl. dazu etwa *alpha*-heiter, Heft 6/84, *Zum Jahreswechsel* a) und c).

Nun noch zwei Beispiele zur Ideenfindung für Knobelaufgaben aus der *Geometrie*, speziell aus der *Planimetrie* (griech. Flächenmessung), also der Geometrie der höchstens zweidimensionalen Gebilde:

Beispiel 4

Grundobjekte der Planimetrie sind u. a. Punkte, Geraden, Strecken, Vielecke, insbesondere Dreiecke und Vierecke (etwa Quadrate, Rechtecke, Trapeze, Parallelogramme), Kreise und die Kegelschnitte (Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln). Hieraus kann man sehr viele Ideen für unterhaltsame Knobelaufgaben schöpfen, z. B. Teilungsprobleme ohne zusätzliche Elemente *(Aufgabe 9)*, Teilungsprobleme mit zusätzlichen Elementen *(Aufgabe 10)*, Legespiele *(Aufgabe 11)*, Hölzchenspiele *(Aufgaben 12 und 13)* und viele andere.

Beispiel 5

Wie der Name *Planimetrie* schon sagt, behandelt sie insbesondere auch die *Berechnung der Flächeninhalte ebener Figuren*. So lauten die Formeln für die Berechnung der Flächeninhalte eines Dreiecks: $A = \frac{1}{2} \cdot gh$, eines Trapezes: $A = \frac{a + c}{2} \cdot h = m \cdot h$, eines Parallelogramms: $A = gh$ und eines Drachenvierecks: $A = \frac{1}{2} \cdot ef$. Die Bedeutung der verwendeten Symbole ist euch sicher klar. Es haben also z. B. alle diejenigen Trapeze den gleichen Flächeninhalt, bei denen das Produkt mh (m: Mittellinie, h: Höhe) den gleichen Wert besitzt. Das gibt die Idee für die *Knobelaufgabe 14*. Analoge Knobelaufgaben könnte man auch zu den anderen drei Formeln gestalten. Abschließend sei mit der *Aufgabe 15* noch eine Knobelaufgabe angegeben, bei der es um den Vergleich der Oberflächen von aus gleichen Quadern (hier Streichholzschachteln) zusammengesetzten Körpern geht.

Übung zum „Eigenbau" von Knobelaufgaben

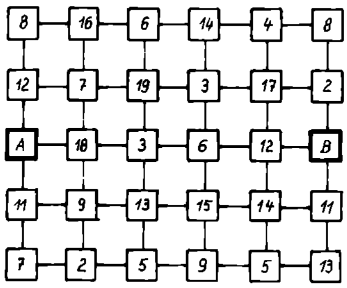
Löst die Aufgaben 1 bis 15 der Knobel-Wandzeitung (3), und versucht dann, zu jeder dieser Aufgaben eine *ähnliche* Knobelaufgabe selbst zu gestalten! Beispielsweise könntet ihr bei Aufgabe 1 Wege mit anderen Zahlenarten einbauen, bei Aufgabe 3 eine andere geometrische Folge wählen und dazu eine andere Geschichte erdichten, bei den Aufgaben 5 bis 8 zur Primfaktorzerlegung andere Zahlen (mit anderen Primfaktorzerlegungen) wählen und diese in andere Wege, Figuren usw. einbauen oder aber zu Aufgabe 14 analoge Aufgaben mit Dreiecken, Parallelogrammen bzw. Drachenvierecken gestalten. Jedoch, wir wollen eurer Phantasie nicht vorgreifen.

Wir wünschen euch beim *Eigenbau* von Knobelaufgaben viel Spaß!

R. Mildner

Knobel-Wandzeitung

▲1▲ Charakteristische Wege
Findet mindestens 4 verschiedene Wege zwischen A und B, von denen ein jeder nur natürliche Zahlen mit einer bestimmten Eigenschaft verbindet!

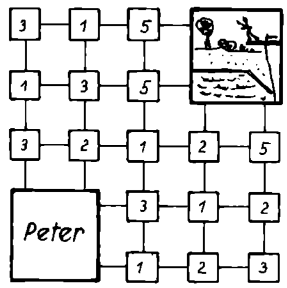


▲2▲ Erstaunliches
Denkt euch irgendeine zweistellige natürliche Zahl aus, und schreibt diese dreimal hintereinander, so daß eine sechsstellige Zahl entsteht! Dividiert diese sechsstellige Zahl jetzt durch 3, das Ergebnis dann durch 7, dieses Ergebnis wiederum durch 13 und letzteres Ergebnis schließlich durch 37! Welche Zahl erhaltet ihr nach Ausführung dieser 4 Divisionsschritte?
Begründet das Ergebnis!

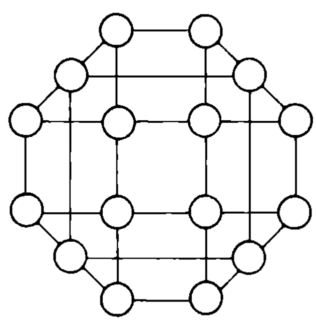
▲3▲ In der Bäckerei
Ein Bäcker hat eines Morgens noch eine gewisse Anzahl Brötchen, und im Laden sind 4 Kunden. Scherzhaft sagt der Bäcker: „Wenn jeder von Ihnen ein Drittel der jeweils noch vorhandenen Brötchen nimmt, so habe ich gerade noch 16 Brötchen übrig."
Wie viele Brötchen hatte der Bäcker noch, und wie viele Brötchen hätte jeder der 4 Kunden nach seinem Vorschlag nehmen müssen?

▲4▲ Seemannsgarn?
In einer Hafenkneipe erzählt ein alter Seemann folgende Geschichte: „Vor vielen Jahren gingen wir einmal an einer romantischen Südseeinsel vor Anker. Als wir die Insel betraten, wurden wir von 21 wunderschönen Mädchen empfangen. Jede von ihnen trug einen goldenen Teller mit köstlichen Apfelsinen. Das erste Mädchen hatte auf seinem Teller 1 Apfelsine, das zweite 2 Apfelsinen, und jedes weitere Mädchen hatte auf seinem Teller doppelt soviel Apfelsinen wie das vorhergehende Mädchen. Dankend nahmen wir die Apfelsinen entgegen und verspeisten sie sogleich mit großem Appetit. Am nächsten Morgen lichteten wir den Anker und nahmen Kurs nach Norden." Was meint ihr, handelt es sich bei dieser Geschichte um Seemannsgarn?

▲5▲ Badefreuden
Peter möchte ins Freibad, doch ist das nur auf dem Wege möglich, bei dem das Produkt der dabei überquerten Zahlen 1000 beträgt. Außerdem darf er jedes Zahlenfeld nur höchstens einmal überqueren. Welchen Weg muß er nehmen?



▲6▲ Primzahl-Magie
Tragt in die Felder der Figur nur Primzahlen derart ein, daß das Produkt der 4 Zahlen in den Eckpunkten der 6 Quadrate sowie der aus drei Quadraten bestehenden Rechtecke und in jedem der 4 Dreiecke jeweils 210 beträgt!



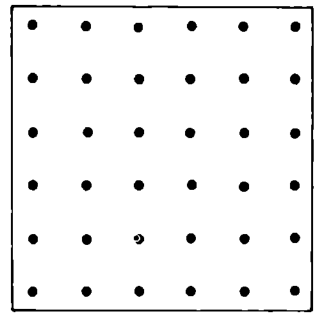
▲7▲ Gerechte Teilung
Zerlegt das abgebildete Rechteck derart in deckungsgleiche Vielecke, daß das Produkt der sich in jedem Vieleck befindlichen Zahlen 525 beträgt!

5	3	5	5	7	3
7	3	5	7	5	5
7	3	5	7	5	5
5	3	5	5	7	3

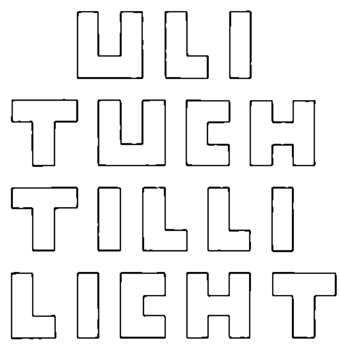
▲8▲ Frage an Aquarianer
Wieviel Liter darf ein Schöpfgefäß höchstens fassen, damit man mit ihm sowohl ein 6-Liter-Aquarium als auch ein 20-Liter-Aquarium bis zum Rand mit Wasser füllen kann (wobei das Schöpfgefäß stets voll gefüllt und dann restlos ausgegossen werden muß)?

▲9▲ Rechteck-Zerlegung
Zeichnet ein beliebiges Rechteck, und zerlegt es sodann in 24 deckungsgleiche rechtwinklige Dreiecke, und zwar a) durch 11 Geraden, b) durch 12 Geraden, c) durch 13 Geraden und d) durch 14 Geraden!

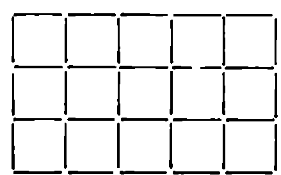
▲10▲ Von jedem etwas
Zerlegt das abgebildete Quadrat durch 5 Geraden so in 9 Teile, daß die Anzahl der Punkte in den einzelnen Teilen jeden (ganzzahligen) Wert von 0 bis 8 annimmt!



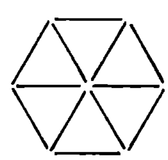
▲11▲ Nur Geduld!
Legt alle abgebildeten Buchstaben zu einer lückenlosen Quadratfläche zusammen!



▲12▲ Verschwundene Quadrate
a) Wie viele Quadrate (kleinere und auch größere) enthält die Hölzchen-Figur?
b) Entfernt aus dieser Figur 9 Hölzchen so, daß die Restfigur kein einziges Quadrat mehr enthält!



▲13▲ Sechseck-Spielereien
Entfernt aus der Figur jeweils 3 Hölzchen, so daß a) 3 gleichseitige Dreiecke, b) 3 Rhomben, c) 4 gleichseitige Dreiecke, d) 1 gleichseitiges Dreieck und 2 Rhomben und e) 2 gleichseitige Dreiecke und 1 Trapez aufgelegt sind! Überlegt euch, wie viele Möglichkeiten der Abänderung es in jedem Falle gibt!



Fortsetzung auf Seite 93

Studium in der Sowjetunion

Ein edler Mensch kann einem engen Kreis nicht seine Bildung danken. Vaterland und Welt muß auf ihn wirken...

Goethe, Tasso

In jedem Jahr begibt sich Ende Juli eine größere Zahl von Abiturienten auf eine weite und lange Reise. Nachdem sie einen Monat in einem Sprachlager verbracht haben, treten sie am ersten September ein Studium an einer sowjetischen Hochschule an. Weitere Schulabgänger fahren zur selben Zeit in andere sozialistische Länder. Die meisten verbringen fünf Jahre im Ausland, manche vier, andere auch fünfeinhalb oder sechs Jahre. Natürlich fahren sie regelmäßig in den Winter- und Sommerferien nach Hause, trotzdem wird vielen die längere Trennung von Eltern, Freundin oder Verlobtem nicht leichtfallen. Der Entschluß zu einem Auslandsstudium will gut überlegt sein. Als Auslandsabsolvent – und ehemaliger Leser der *alpha* – möchte ich einige Erfahrungen weitergeben.

Die Vorbereitung

Die Bewerbung zum Studium im Ausland erfolgt zu Beginn der 10. Klasse. Im Februar findet an der ABF Halle, dem *Institut zur Vorbereitung auf ein Auslandsstudium*, ein Aufnahmegespräch statt. Wer im folgenden Frühjahr den Bescheid erhält, daß er zum Studium angenommen wurde, wird im September feierlich immatrikuliert, um während der 11. und 12. Klasse einen Vorbereitungskurs in Halle zu absolvieren. Hier wird nach modifizierten Lehrplänen unterrichtet. Manche Fächer entfallen, dafür wird für die sprachliche und fachspezifische Ausbildung mehr Zeit verwendet.
Es gibt auch die Möglichkeit, von einer Spezialschule direkt ins Ausland zu fahren. Ich persönlich würde die erste Variante vorziehen, da der Aufenthalt an der ABF nicht nur sprachlich und fachlich etwas gibt, sondern auch zum Leben im Kollektiv zwingt. Die Fähigkeit dazu ist im Ausland besonders wichtig.

Das Studium

Studienrichtungen gibt es viele. Das Angebot reicht von Mathematik und Physik über Biologie, Medizin, Bauwesen, Mechanisierung der Landwirtschaft bis zur Orientalistik und Diplomatie. Einiges kann man überhaupt nur in der UdSSR studieren. Zahlreich sind auch die möglichen Studienorte und Hochschulen. Der Studienablauf ist dem an unseren Hochschulen ähnlich. Umfangreich und auf hohem Niveau sind die gesellschaftswissenschaftlichen Fächer vertreten. Auch Russisch wird unterrichtet, die nötigen Kenntnisse im Englischen muß man sich während oder nach dem Studium selbst aneignen. Natürlich erlernt man die russische Sprache ebenfalls nicht passiv und automatisch, sondern nur durch häufiges Nachschlagen im Wörterbuch – zumindest in der Anfangsphase. Es sei aber betont, daß man vor der fremden Sprache nicht die geringste Scheu zu haben braucht. An ihr ist noch kein Student gescheitert.
Über die Anforderungen im Studium läßt sich pauschal wenig sagen, da sie von Fachrichtung und Hochschule abhängen. Besondere Leistungen werden z. B. an der *Lomonossow-Universität* verlangt.
Man fährt aber nicht in erster Linie ins Ausland, weil dort vielleicht das Studium *besser* wäre als bei uns. Wichtig ist, daß es etwas *anders* ist, daß man dort an manche Probleme anders herangeht. So können die Auslandsabsolventen in gewissen Fällen neue Aspekte für die Wissenschaft in unserem Lande mitbringen. Sehr wichtig sind persönliche Kontakte zu sowjetischen Spezialisten, die vor allem nach einer Aspirantur besonders eng sein werden.

Das Leben im Ausland

Die Anzahl der an den verschiedensten Universitäten studierenden DDR-Studenten ist sehr unterschiedlich. Sie schwankt zwischen einigen zehn in Städten wie Donezk und über tausend in Moskau. Das politische und kulturelle Leben in der FDJ-Organisation ist außerordentlich gut entwickelt. In Moskau hat man natürlich ein breiteres Angebot an deutschsprachigen Veranstaltungen. Doch je weniger man DDR-Studenten um sich hat, um so besser werden im Durchschnitt die Kontakte zu sowjetischen Kommilitonen sein – ein ganz wichtiges Moment des Auslandsstudiums. Ich bedaure es deshalb nicht, in einer in dieser Hinsicht *kleinen* Stadt studiert zu haben. Mit 1,3 Millionen Einwohnern ist Charkow allerdings eine der größten Städte der UdSSR.
Die Konfrontation mit einer fremden Kultur erweitert unbedingt den persönlichen Erfahrungskreis. Sie läßt die eigene Kultur einmal aus anderer Sicht sehen und zwingt zum Nachdenken über die wahren Werte im Leben. In diesem Sinne läßt sich von den sowjetischen Menschen viel lernen.
Besonders beeindruckt hat mich, wie oft in persönlichen Unterhaltungen über Krieg und Frieden gesprochen wird – in der Familie, unter Studenten oder bei zufälligen Bekanntschaften im Zug. Der erste Wunsch für das *Neue Jahr* ist bei allen, daß es ein friedliches wird. Wer fünf Jahre bei ihnen gelebt hat, kann auf die Frage:
„Хотят ли русские войны?"
ohne Zögern antworten.
Zu sehen gibt es natürlich auch einiges. Ich kenne Absolventen, die sämtliche Sowjetrepubliken bereisten. Ein Erlebnis ist auf alle Fälle die Teilnahme an einer sogenannten Baubrigade sowjetischer Studenten in den Sommerferien, auch für den, der nicht das Glück hatte, mit ihr nach Sibirien zu fahren.
Hier konnten nur ganz grobe Vorstellungen vom Studium in der UdSSR vermittelt werden. Wer mit dem Gedanken spielt, sich dafür zu bewerben, sollte sich nach Möglichkeit mit einem Absolventen unterhalten. Rund 16 000 sind es in der ganzen Republik (seit 1955). Ich denke, daß fast alle von ihnen auf die entscheidende Frage, ob sie wieder ins Ausland fahren würden, mit *Ja* antworten würden.

Für die *alpha*-Leser wählte ich zehn Aufgaben aus, die zu Aufnahmeprüfungen an Hochschulen der UdSSR für sowjetische Schulabgänger der 10. Klasse gestellt wurden. Auslandsstudenten werden delegiert und brauchen keine Prüfungen abzulegen. In Heft 5/85 veröffentlichen wir die übersetzten Aufgabentexte und die Lösungen. Viel Erfolg beim Lösen der Aufgaben!

Aufgaben

▲1▲ Доказать, что при любом натуральном n выражение
$$A_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$$
делится на 133.

▲2▲ Доказать, что произведение трёх последовательных натуральных чисел, среднее из которых есть квадрат натурального числа, делится на 60.

▲3▲ Построить график функции
$$y = \sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x + 1}$$

▲4▲ Доказать тождество
$$\frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

▲5▲ Решить уравнение
$$3^x + 4^x = 5^x$$

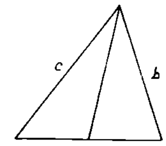
▲6▲ Решить уравнение
$$(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12 = 0$$

▲7▲ Решить уравнение
$$\sqrt{2x^2 + 5x + 2} + \sqrt{2x^2 + 5x - 9} = 1$$

▲8▲ Доказать, что
$$2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) = -1$$

▲9▲ Решить уравнение
$$\cos x \cos 2x = \cos 3x$$

▲10▲ По основанию a, боковым сторонам b и c треугольника определить отрезки, на которые биссектриса внутреннего угла при вершине делит основание.



W. R. Dick

Rational oder irrational?

Eine Aufgabe von
Prof. Dr.
J. W. Schmidt

Sektion Mathematik,
Wissenschaftsbereich Numerik
Technische Universität Dresden

Wenn man im Bereich der *rationalen Zahlen* addiert, subtrahiert, multipliziert oder dividiert (Division durch 0 natürlich ausgeschlossen), dann erhält man als Ergebnis stets wieder eine *rationale* Zahl.
Führt man diese Rechenoperationen in der Menge der *irrationalen* Zahlen aus, dann ist das Ergebnis *nicht* immer eine irrationale Zahl.

Beispiele:

(1) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6}$;
das Produkt der beiden irrationalen Zahlen $\sqrt{3}$ und $\sqrt{2}$ ist eine *irrationale* Zahl ($\sqrt{6}$).

(2) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$;
das Produkt der beiden irrationalen Zahlen $\sqrt{3}$ und $\sqrt{12}$ ist eine *rationale* Zahl.

Die Beispiele (1) und (2) lassen erkennen, daß im Falle der *Multiplikation irrationaler Quadratwurzeln aus natürlichen Zahlen* relativ leicht entscheidbar ist, ob das Produkt rational oder irrational ist:
Wenn a, b natürliche Zahlen und $\sqrt{a}$ sowie $\sqrt{b}$ irrational sind, dann ist $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ genau dann rational, wenn $a \cdot b$ eine Quadratzahl ist.
Wir stellen uns nun die Frage, wie es mit der *Summe* irrationaler Quadratwurzeln aus natürlichen Zahlen ist.

Dazu betrachten wir zunächst ein einfaches Beispiel:

(3) $$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2} = \sqrt{2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + 3} = \sqrt{5 + 2 \cdot \sqrt{6}}$$

Das Ergebnis ist eine *irrationale* Zahl, denn:
Da $\sqrt{6}$ irrational ist, ist es auch $2 \cdot \sqrt{6}$ und damit auch $5 + 2 \cdot \sqrt{6}$. (Produkt oder Summe aus einer rationalen und einer irrationalen Zahl können nicht rational sein, weil sonst die irrationale Zahl als Quotient bzw. Differenz rationaler Zahlen darstellbar wäre – im Widerspruch zur anfangs erwähnten Tatsache, daß man beim Rechnen mit rationalen Zahlen nur rationale Zahlen als Ergebnisse erhält.)
Die Wurzel aus $5 + 2 \cdot \sqrt{6}$ muß dann ebenfalls irrational sein, weil die irrationale Zahl $5 + 2 \cdot \sqrt{6}$ nicht das Quadrat einer rationalen Zahl sein kann.

Die *allgemeine* Frage lautet nunmehr:
In welchen Fällen ist $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ rational, in welchen irrational, wenn a, b natürliche Zahlen und $\sqrt{a}$ sowie $\sqrt{b}$ irrational sind?

Es stellt sich heraus, daß $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ unter den angegebenen Voraussetzungen *stets irrational* ist!
Beweis:
In Analogie zum Beispiel (3) kann man $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ in der Form
$\sqrt{a + b + 2 \cdot \sqrt{ab}}$ darstellen.

Nun lassen sich zwei Fälle unterscheiden:

1. $\sqrt{ab}$ ist irrational.
Dann ist auch $a + b + 2 \cdot \sqrt{ab}$ irrational und $\sqrt{a + b + 2 \cdot \sqrt{ab}}$ ebenfalls. (Die Begründung dafür ist bereits im Beispiel (3) gegeben worden.)

2. $\sqrt{ab}$ ist rational.
Dann muß $a \cdot b$ eine *Quadratzahl* sein, also alle in der Primfaktorzerlegung vorkommenden Primzahlen in *gerader Anzahl* enthalten. Da a und b *keine* Quadratzahlen sind (sonst wären $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ ja *rationale* Zahlen), muß es für a und b folgende Produktdarstellungen geben:
$$a = k^2 \cdot P_1 \cdot P_2 \dots P_n \text{ und}$$
$$b = l^2 \cdot P_1 \cdot P_2 \dots P_n.$$
Dabei sind k^2 und l^2 von 0 verschiedene Quadratzahlen, die nicht weiter zerlegt zu werden brauchen.
P_1 bis P_n sind Primfaktoren, die in *beiden* Produktdarstellungen noch je einmal vorkommen. (Mindestens einen solchen Primfaktor muß es geben, sonst wären a und b Quadratzahlen.)

Setzen wir $P_1 \cdot P_2 \dots P_n = P$, so gilt:
$$a + b + 2 \cdot \sqrt{ab}$$
$$= k^2 \cdot P + l^2 \cdot P + 2 \cdot \sqrt{k^2 \cdot l^2 \cdot P^2}$$
$$= k^2 \cdot P + l^2 \cdot P + 2kl \cdot P$$
$$= P \cdot (k^2 + 2kl + l^2)$$
$$= P \cdot (k + l)^2$$

Damit ist $a + b + 2 \cdot \sqrt{ab}$ als Produkt der Quadratzahl $(k + l)^2$ mit den *je einmal* vorkommenden Primfaktoren $P_1, \dots, P_n$ dargestellt, ist selbst also keine Quadratzahl. Die Wurzel daraus ist somit *irrational.*

W. Walsch

▲2578▲ Es ist eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür anzugeben, daß das Ungleichungssystem
$$2x_{i-1} + x_i \leqq 3a_i,$$
$$x_{i-1} + 2x_i \geqq 3a_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$
mindestens eine Lösung $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ besitzt.

Kurzbiographie

Geboren am 4. 8. 1931 in Neukloster – Schulbesuch in Bützow, Neukloster und Güstrow, 1951 Abitur an der *John-Brinckman*-Oberschule Güstrow – 1951 bis 1955 Mathematikstudium an den Universitäten Rostock und Greifswald, insbesondere bei den Professoren *R. Kochendörffer*, *W. Rinow* und *F. v. Krbek* – danach Dozent an der Fachschule für Landwirtschaft in Greifswald-Eldena – 1956 Beginn der Tätigkeit an der Technischen Hochschule bzw. Universität Dresden als Assistent bei den Professoren *F. A. Willers* und *H. Heinrich*, 1959 Promotion, 1964 Habilitation, 1965 Ernennung zum Dozenten für *Mathematik* und 1967 Berufung zum Professor für *Numerische Mathematik* – Mitglied der Herausgebergremien zu den Zeitschriften *Computing*, *Numerische Mathematik* und ZAMM, 1973 bis 1984 gemeinsam mit *F. Kuhnert* Herausgabe der *Beiträge zur Numerischen Mathematik*, etwa 80 wissenschaftliche Publikationen.

ARBEITS-GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Der Klub Junger Mathematiker der Stadt Greifswald

Am 1. Januar 1968 wurde der *Klub Junger Mathematiker* am Haus der Jungen Pioniere *Martin Andersen Nexö* in Greifswald gegründet. In seinen Zirkeln, die die Klassen 4 bis 12 umfassen, arbeiten zur Zeit 110 Schüler mit. Höhepunkte der Zirkelarbeit bilden die Olympiaden, Leistungsvergleiche mit den Klubs benachbarter Kreise und die Ferienlager im Sommer.

Nachstehend einige Daten aus der Entwicklung des Klubs:

1961 Im Oktober wird ein zentraler Zirkel für Schüler der 8. Klasse eingerichtet, der zweimal monatlich in der EOS zusammentritt.

1962 Ein weiterer zentraler Zirkel für Klasse 6 und 7 wird in der damaligen Saarlandschule aufgestellt, ein dritter für Schüler der EOS.
Bei der Bezirksolympiade für die Klasse 10 und 12 der Erweiterten Oberschulen belegen Eckehard Gardebrecht (12) und Peter Siemer (10) jeweils den 1. Platz.

1963 Für die Klassen 5 bis 12 wird je ein Zirkel eingerichtet.

1964 *Christoph Bandt* (9) und *Wolfgang Strübing* (10) erreichen bei der Bezirksolympiade die volle Punktzahl 40!
Das 1. Ferienlager wird für Klasse 5 in Eldena im *Haus am Bodden* durchgeführt.

1967 *Christoph Bandt* erhält bei der IX. Internationalen Mathematikolympiade in Cetinje (Jugoslawien) einen 1. Preis.

1968 Gründung des *Klubs Junger Mathematiker. Christoph Bandt* erreicht bei der X. IMO in Moskau einen 1. Preis.

1971 *Andreas Stern* (9) erreicht bei der Bezirksolympiade 40 Punkte.

1972 Die Greifswalder Mannschaft belegt erstmalig Platz 1 bei der Bezirksolympiade.

1974 1. Greifswalder Stadtolympiade der 4. Klassen.
Thomas Fiedler (10) erzielt 40 Punkte bei der Bezirksolympiade.

1978 *Katharina Herrmann* (8) erreicht bei der Bezirksolympiade 40 Punkte.

1979 Die 20. Kreisolympiade wird durchgeführt.
Das 15. Ferienlager für die Klasse 6 bis 8 findet in Brüel statt.

1981 *Karin Schmidt* (7) erzielt bei der Bezirksolympiade 40 Punkte.

1982 Bei der Bezirksolympiade geht der Wanderpokal für die erfolgreichste Mannschaft in den Besitz des Stadtclubs über.

1984 *Uta Freiberg* und *Peter Abel* (7) erreichen bei der Bezirksolympiade 40 Punkte. Die 25. Olympiade (2. Stufe der XXIV. DDR-Olympiade) wird durchgeführt. Das 20. Sommerferienlager findet in Brüel statt.

Hinter diesen knappen Sätzen verbergen sich angespannte Arbeit bei den Olympiaden, interessante Zirkelnachmittage und aufgelockerte Stunden in den Ferienlagern. Alle mathematisch interessierten Schüler sind zur Mitarbeit im *Klub Junger Mathematiker* aufgerufen. Die bei den Olympiaden Ausgezeichneten werden von der Klubleitung berufen. Aber auch diejenigen, die nicht vordere Plätze belegt haben, können in den Zirkeln mitarbeiten! Die Teilnehmer treffen sich einmal wöchentlich.
Nicht jeder kann Preisträger werden, aber alle können mathematische Denk- und Arbeitsweisen im späteren Beruf anwenden!

Aufgaben der 1. Greifswalder Mathematikolympiade am 26. 3. 1961

a) *Schriftlicher Teil*

▲1▲ Der Kraftstoffverbrauch bei einer Fahrt mit dem Motorroller *Berlin* über 235 km betrug 8 l.
Wie hoch ist der Verbrauch für 100 km?

▲2▲ Nachdem 2 Traktoren die Frühjahrsbestellung auf einem 6,8 ha großen Feld in $2\frac{1}{2}$ Tagen durchgeführt haben, sollen sie die gleiche Arbeit auf einem 3,8 ha großen Ackerstück in $1\frac{1}{2}$ Tagen erledigen, ist das zu schaffen?

▲3▲ Zwei gemischte Zahlen sollen so ausgewählt werden, daß ihr Produkt 100 ergibt! (Eine Lösung genügt!)

▲4▲ Zeichne einen Winkel von 60°, und trage auf seinen Schenkeln die Strecken $\overline{ST} = \overline{SU} = 5$ cm ab! (S ist der Scheitel des Winkels!)
a) Konstruiere den Kreis, der die Schenkel in T und U berührt!
b) Ist diese Konstruktion auch möglich, wenn sich die Größe des Winkels ändert? (Begründung!)
c) Läßt sich der Kreis beim Winkel von 60° auch dann noch konstruieren, wenn $\overline{ST} = 7$ cm und $\overline{SU} = 5$ cm ist? (Begründung!)

b) *Mündlicher Teil*
(Auswahl aus 38 Aufgaben)

1. Ein Nagel wiegt $2\frac{1}{2}$ g. Die LPG kauft 10 kg.
2. Ein Traktorist pflügt 2 ha, ein anderer in der gleichen Zeit 15 800 qm. Wer schafft mehr?
3. Eine Strecke von 60 m Länge soll im Maßstab 1 : 100 gezeichnet werden. Paßt sie ins Heft?
4. Wie groß ist die Summe aller Augen auf einem Würfel?
5. In welchen Dreiecken halbiert die Höhe die Grundseite?
6. Der Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks ist 42°. Wie groß sind die anderen Dreieckswinkel?
7. In einem Eimer befinden sich 5 l Wasser. Man gießt 500 cm³ dazu. Wieviel Wasser ist jetzt im Eimer?

Bilder von der 25. Kreisolympiade: Auszeichnung und Eröffnung

8. Ein Schüler berechnet die Diagonale eines Quadrats von 4 m Seitenlänge zu 8 m. Was sagst du dazu?

9. Eine LPG will eine rechteckige Koppel von 150 m Länge und 80 m Breite mit einem Elektrozaun abstecken. Wieviel Draht wird benötigt? (Welche Fläche wird eingezäunt?)

10. Die Seite eines 6 m langen Quadrats wird verdoppelt. Wie verändert sich der Flächeninhalt?

11. Welcher Bruch ist größer:
$\frac{5}{12}$ oder $\frac{10}{17}$?

12. Jemand hat 100 DM gespart. Wie oft kann er 8,50 DM abheben?

13. Eine Ziege ist an einem 4 m langen Strick angepflockt. Welche Fläche kann sie abgrasen? (rund)

14. Welche Zahl ist größer:
(-18) oder (-10)?

15. Die Bahn eines Sputniks hat einen Durchmesser von rund 14 000 km. Welche Strecke legt er bei einer Erdumkreisung rund zurück?

16. Eine Klasse von 20 Schülern sammelte 150 kg Schrott, eine von 30 Schülern 200 kg. Welche Klasse war fleißiger? (Begründung!)

17. 1 Zoll sind 2,54 cm. Wieviel Zoll sind 30 cm? (rund)

18. Ein Würfel hat 2 m Kantenlänge. Wie verändert sich sein Volumen, wenn die Kantenlänge verdoppelt wird?

19. Wieviel Augen kann man mit 3 Spielwürfeln mindestens und höchstens werfen?

20. In einer Klasse von 32 Schülern sind 3mal so viele Mädchen wie Jungen. Wie viele Mädchen und Jungen hat die Klasse?

21. Fritz verlor beim Würfeln die Hälfte seiner Nüsse und noch eine halbe Nuß (aber ohne eine Nuß zu zerschlagen). Nun hatte er noch 12 Nüsse.

22. Eine Turmuhr schlägt 2 Uhr in 3 Sekunden. Wie lange braucht sie, um 4 Uhr zu schlagen?

23. Welche Möglichkeiten gibt es, mit 3 Würfeln 5 Augen zu würfeln?

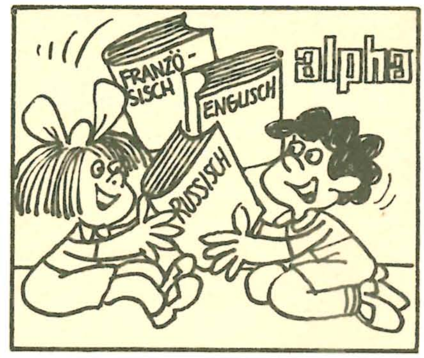
24. Bei der gestrigen Jagd schossen Herr M ein Drittel, Herr K ein Viertel aller Hasen, während die übrigen Teilnehmer die Hälfte der Hasen schossen. Was sagst du dazu?

28. Zu einem Klassenausflug erschienen nur 36 Schüler. Es waren a) 4 mehr, b) 4 weniger als $\frac{4}{5}$ der Klasse.

33. Schreibe die Zahl 11 Tausend 11 Hundert 11! (im Kopf)

34. Wie groß ist der Unterschied zwischen 3 Komma 9 und 3 Komma 10? (im Kopf)

38. Im Gesetz über den Siebenjahrplan heißt es, daß durch die Hochsee- und Küstenfischerei 1965 215 000 t Fisch gefangen werden sollen. Wieviel kg sind das?



Wie Euklids Elemente nach China kamen

Als im Jahre 1583 die ersten europäischen Missionare in China eintrafen, befand sich unter ihnen der Jesuitenpater *Matteo Ricci* (1552 bis 1610), der am Jesuitenkollegium in Rom eine für damalige Verhältnisse hervorragende mathematische Ausbildung bei dem bedeutenden Mathematiker *Christoph Clavius* (1537 bis 1612) erhalten hatte. Ricci gelang es durch diese guten mathematischen und astronomischen Kenntnisse, die Aufmerksamkeit chinesischer Gelehrter auf sich zu ziehen und ihre Hochachtung zu erringen. So erhielt er Zutritt zum kaiserlichen Hof, und unter diesem mächtigen Schutz konnten die Jesuiten dann endlich die angestrebte Missionstätigkeit entfalten. Ricci schrieb in chinesischer Sprache Bücher über praktische Arithmetik, sphärische Geometrie,

den Gebrauch des Astrolabiums u. a. und zeichnete die erste in Europa bekannt gewordene Karte Chinas. Nach einer Teilausgabe 1595 gab er 1603 bis 1607 gemeinsam mit chinesischen Mathematikern die erste vollständige chinesische Übersetzung der *Elemente des Euklid* (um 300 v. u. Z. in Alexandria) heraus. Die vordergründige Absicht war es, die Chinesen mit der Überlegenheit abendländischer Wissenschaft zu beeindrucken. So kann man feststellen, daß das berühmteste mathematische Buch aller Zeiten neben vielen anderen Zwecken auch schon politischen Zielen gedient hat..

P. Schreiber

▲1▲ Ask your friend to jot down his or her age in full years. Then get your friend to carry out the following operations:
1) Multiply the number by 5.
2) Add 25 to the result.
3) Multiply the sum by 2.
4) Add the number of the day of the week on which he or she was born. (Use Monday as day one.)
5) Subtract 50 from the sum.

When the friend gives you the final outcome, you can tell immediately how old he or she is and on what day of the week he or she was born.
How can you tell and why does it work?

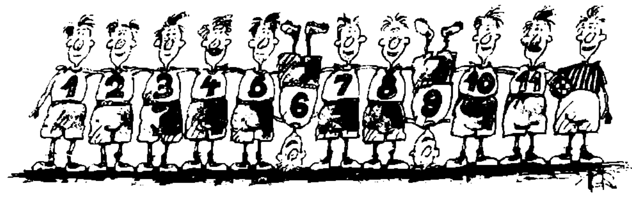
▲2▲ Quel est le rayon du plus grand cercle que l'on peut tracer sur un échiquier et qui ne passe que sur les cases blanches? Prenons comme unité le côté d'une case.

▲3▲ J'ai deux fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez. Quand vous aurez l'âge que j'ai, nous aurons à nous deux 63 ans. Quel est mon âge? Quel est le vôtre?

▲4▲ Арбуз разделили тремя разрезами ножа на 7 частей, а когда его съели, то на столе оказалось 8 корок. Второй арбуз разделили четырьмя разрезами ножа на 10 частей. Когда съели

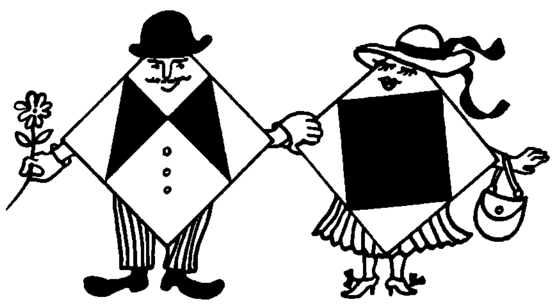
его, то на столе от него осталось 12 корок. Третий арбуз разделили четырьмя разрезами ножа на 15 частей. Как разрезáли арбузы и сколько корок осталось от последнего?

In freien Stunden · alpha-heiter



Aus: Sluota, Vilnius, Hillar Metz

Ein pythagoreisches Pärchen

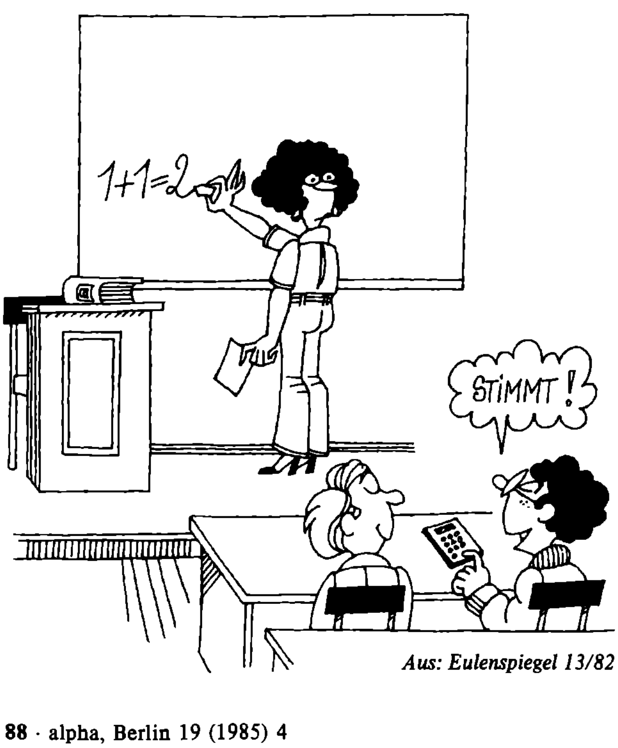


Dr. P. Schreiber, Greifswald

Ein Wägeproblem

Drei Jungen mit Vornamen Peter, Martin und Wenzel überprüften ihr Gewicht auf einer Dezimalwaage. Es stellten sich aber jeweils zwei dieser Jungen zugleich auf die Waage. Für Peter und Martin zeigte die Waage 83 kg, für Peter und Wenzel 85 kg, für Martin und Wenzel 88 kg an.
Wieviel wiegt jeder dieser drei Jungen?

Eine Schulolympiadeaufgabe (Kl. 7) aus der Math. Schülerzeitschrift rozhledy, Prag



Aus: Eulenspiegel 13/82

Ein interessantes Berührungsproblem

Kann man auf einem Tisch acht gleichartige Münzen so anordnen, daß sie sich in 14 Punkten berühren?

plus-minus, math. Schülerzeitschrift, Bialystok

Island-Story

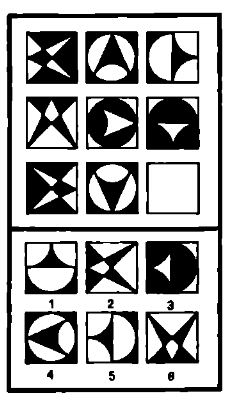
Ein Professor auf Reisen bemerkte, daß der Platz in dem kleinen Verschlag, wo er übernachten mußte, für ihn nicht ausreichte. Deshalb überlegte er: „Ich muß mich quer legen.“ Er maß den Raum aus, der 1,65 m lang und 88 cm breit war. Nachdem er einen Moment überlegt hatte, sagte er zu sich selbst:
„Das reicht; wenn ich mich quer lege, habe ich noch 7 cm mehr Platz, als ich brauche.“
Wie groß war der Professor?

Aus einem isländischen Mathematikbuch

Folgerichtige Ergänzung

Das leere Quadrat in der letzten Spalte ist durch eines der Muster 1 bis 6 so zu ersetzen, daß die letzte Spalte in der gleichen Weise folgerichtig fortgesetzt erscheint wie die beiden Spalten davor.

Aus einer bulgarischen Jugendzeitschrift



Wie alt bin ich?

Im Jahre 1981 ist mein Alter gleich der Summe der Ziffern des Jahres, in dem ich geboren bin. Wie alt bin ich?

Aus dem Arany-Dániel-Wettbewerb, Anfänger bis 15 Jahre, Ungarische VR

Knobelei mit dem Taschenrechner

Suche symmetrische Summen!
Man versteht darunter:

Nimm eine mehrstellige Zahl, z. B.	87
addiere ihre Umkehrung	+ 78
	165
addiere ihre Umkehrung	+ 561
	726
addiere ihre Umkehrung	+ 627
	1353
addiere ihre Umkehrung	+ 3531
	4884

Jetzt ist eine symmetrische Zahl entstanden. Nur wenige Ausgangszahlen ergeben innerhalb der Taschenrechnerkapazität keine symmetrische Summe. Probiert's mal!

Aus: Gilde/Altrichter: Spaß mit dem Taschenrechner, Fachbuchverlag, Leipzig

Kryptarithmetik

a) Setze die Ziffern 1 bis 9 so in die Kästchen ein, daß alle neun Ziffern verwendet werden und die vorliegenden Gleichungen erfüllt sind!

Quant, math. Schülerzeitschrift, Moskau

$$\square \times \square = \square + \square =$$
$$= \square - \square = \square : \square\square$$

b) Welche Zahl entspricht der Gleichung
$(r + o + m + a)^4 = roma$?

Mathematicko-fizika-list, jugoslawische Schülerzeitschrift, Beograd

c) Bestimme alle Ziffern x, für die $x^x + x = \overline{x0}$ gilt!

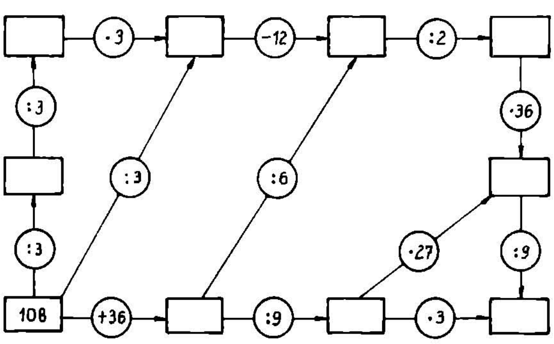
Gazeta Matematika, rumänische Schülerzeitschrift, Bukarest

d) Bestimme alle natürlichen Zahlen a, b, c, für die $ab = 144$, $bc = 240$, $ac = 60$ gilt!

Hisab, äthiopische Schülerzeitschrift, Addis Abeba

Kombiniere!

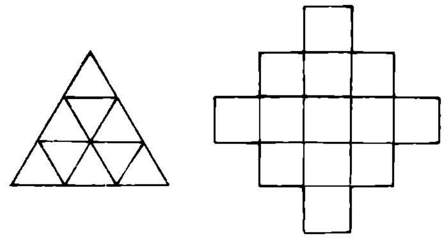
Führe die angegebenen Rechenoperationen aus!



Aus: Mathematicus 4, spanisches Mathematiklehrbuch, vorgestellt auf der Internat. Buchausstellung (IBA), Leipzig

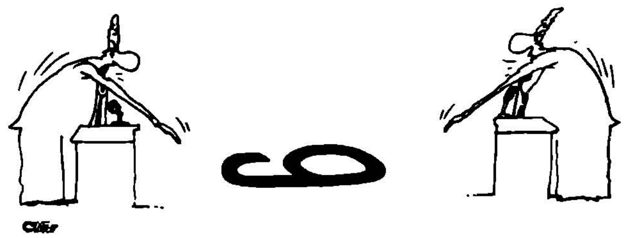
Überprüfe deine Beobachtungsgabe!

a) Wieviel Dreiecke findest du in diesem Mosaik (Bild links)?



b) Das Mosaik in Bild rechts besteht aus Quadraten dreier verschiedener Größenordnungen. Wieviel Quadrate sind es insgesamt?

Aus: J. A. Alenkow: Mathematische Schatztruhe, Kiew



B. Stankowitsch, aus Jesch, Beograd

Nur zum Spaß

Larry gab Mike ½ seiner Murmeln. Mike gab Tom ½ der Murmeln, die Larry ihm gab. Tom gab Sam ½ der Murmeln, die Mike ihm gab. Welchen Bruchteil von Larrys Murmeln hatte Sam?

Mathematical Pie, englische Schülerzeitschrift, London

Dallos, aus Ludos Matyi, Budapest

XXV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Schulolympiade

Abgabe beim Mathematiklehrer: Ende September 1985

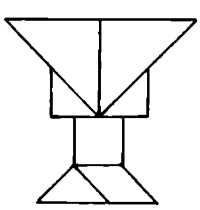
Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen. Die Lösungen werden im Oktober 1985 veröffentlicht.

Hinweis: Unter den Aufgaben der 1. Stufe befinden sich auch solche (in der Regel ist es die 4. Aufgabe), die aus mehreren Teilaufgaben von steigendem Schwierigkeitsgrad bestehen. Dabei ist Teil a) meist recht einfach zu lösen und gibt in der Regel Hilfe für die Lösung der anderen Teilaufgaben. Die Lösung der letzten Teilaufgabe stellt bewußt hohe Anforderungen. Diese Teilaufgabe ist vorwiegend für die leistungsstärkeren Schüler gedacht. Es wird empfohlen, über diese anspruchsvollen Aufgaben in Klassen und Arbeitsgemeinschaften zu diskutieren.

Anmerkung: $\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet im folgenden die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$. Ferner bezeichnet AB die Strecke mit den Endpunkten A und B, während $\overline{AB}$ die Länge der Strecke AB bedeutet.

Olympiadeklasse 5

250511 Die Teilflächen der dargestellten Figur lassen sich
a) zu einer Quadratfläche und
b) zu einer Rechteckfläche, die keine Quadratfläche ist, zusammensetzen.



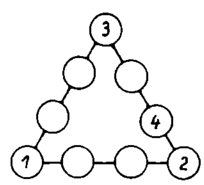
Gib je eine Möglichkeit dafür an!

220512 Bei einem Gruppenfest im Pionierlager verabreden 17 Kinder folgendes Spiel:
Es wird im Kreis herum immer wieder von 1 bis 7 gezählt, wobei sich jedes siebente Kind aus dem Kreis entfernen soll und dann auch beim weiteren Zählen nicht mehr berücksichtigt wird. Wer zuletzt übrigbleibt hat verloren und muß einen Pfand geben. Frank Pfiffig darf vorschlagen, bei welchem Kind mit dem Abzählen begonnen werden soll.
Er will seinen Freund Norbert Nörgel ärgern und beginnt mit dem Abzählen so, daß dieser verliert.
Wie kann er das erreichen?

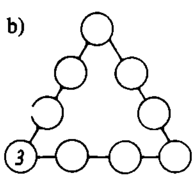
250513 Drei Kunden in einem Eisenwarengeschäft kauften Schrauben. Jede Schraube kostete 7 Pfennig. Der zweite Kunde kaufte vier Schrauben mehr als der erste Kunde. Der dritte Kunde kaufte doppelt so viele Schrauben wie der zweite Kunde. Die drei Kunden bezahlten dafür insgesamt 5 Mark und 32 Pfennig.
Wieviel bezahlte der dritte Kunde?

250514 In jedem der Bilder a, b, c sollen die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 in die Kreise eingetragen werden. Jede dieser Zahlen soll (jeweils bei einer solchen Eintragung) genau einmal vorkommen. Für einige Kreise ist die einzutragende Zahl bereits vorgeschrieben. Ferner soll für jede Eintragung folgendes gelten: Addiert man auf je einer Dreiecksseite die vier Zahlen, so ergibt sich bei jeder der drei Seiten dieselbe Summe.

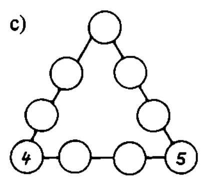
Bild a)



b)



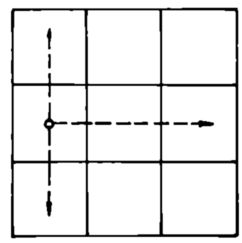
c)



a) Finde eine Eintragung in Bild a, bei der sich für jede der drei Seiten die Summe 17 ergibt!
b) Finde möglichst viele Eintragungen in Bild b, bei denen sich für jede der drei Seiten die Summe 21 ergibt!
c) Finde möglichst viele Eintragungen in Bild c, bei denen sich für jede der drei Seiten derselbe Wert der Summe ergibt! Gib zu jeder dieser Eintragungen diesen Wert an!

Olympiadeklasse 6

250611 Auf einem (3×3)-Felderbrett sollen drei Spielsteine so aufgestellt werden, daß sie sich gegenseitig nicht bedrohen. Dabei soll ein Spielstein genau diejenigen Felder bedrohen, die in der gleichen waagerechten oder in der gleichen senkrechten Reihe wie er liegen.
a) Zeichne alle möglichen Stellungen der geforderten Art für drei solcher Spielsteine!
b) Wie viele verschiedenartige Stellungen gibt es, wenn je zwei Stellungen genau dann als verschiedenartig gelten, wenn die eine nicht aus der anderen durch Drehung um das Mittelfeld hervorgehen kann?



250612

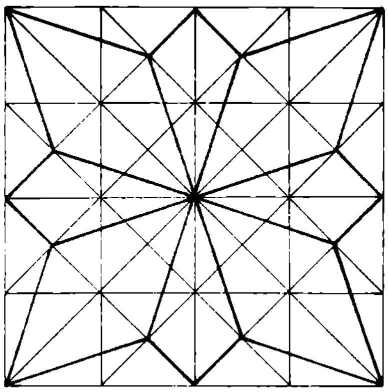
```
      m a t h e
  +     o l y m
  +         p i
  +       a d e
  -------------
    k l a s s e
```

In dem abgebildeten Kryptogramm sind für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) so einzutragen, daß für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern stehen und die Aufgabe richtig gerechnet ist.
Ferner wird folgendes gefordert:
(1) Es gilt $o = m$ und $p = t$ und $y = a$, während sonst für verschiedene Buchstaben stets verschiedene Ziffern einzusetzen sind.
(2) a ist zwei Drittel von m.
(3) e ist zwei Drittel von a.
(4) Die Summe von a und s ist gleich m.
(5) d ist kleiner als h.
a) Zeige, daß es genau eine Eintragung gibt, die alle diese Forderungen erfüllt, und gib diese Eintragung an!
b) Wieviel solche Eintragungen gibt es, wenn man auf Forderung (5) verzichtet?

250613 Dirk und Jörg trafen sich in der Erfassungsstelle für Sekundärrohstoffe. Jörg hat sein Altpapier in mehrere Päckchen zu je 5 kg gebündelt und außerdem noch 3 kg loses Papier. Dirk liefert 32 kg Papier ab.
Als beide ihr Sammelergebnis vergleichen, stellen sie auch fest, daß sie zusammen mehr als 50 kg Altpapier gesammelt hatten.
Wie viele Bündel zu je 5 kg kann Jörg abgeliefert haben, wenn wir außerdem noch wissen, daß Dirk mehr Altpapier als Jörg hatte? Gib alle Möglichkeiten an!

250614 In dem Bild ist – auf einem (mit dünnen Linien gezeichneten) Hintergrund von Quadraten und ihren Diagonalen – mit dicken Linien ein Ornament gezeichnet.

Überprüfe mit durchsichtigem Papier (oder Folie), ob das Ornament axialsymmetrisch ist! Überprüfe ferner, ob es Drehungen gibt, bei denen das Ornament sich selbst als Bild hat!



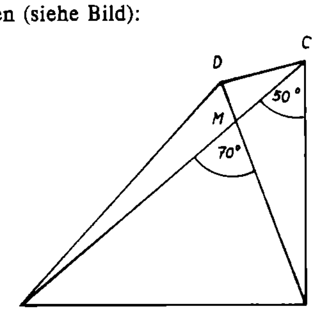
Ist beides der Fall, so nenne
a) die Anzahl aller Symmetrieachsen des Ornaments,
b) alle diejenigen Drehungen, bei denen das Ornament sich selbst als Bild hat!
Zu Aufgabe a) zeichne auch das Ornament und alle seine Symmetrieachsen!

Olympiadeklasse 7

250711 In einer Tüte befindet sich 1 kg Zucker. Mit Hilfe einer Balkenwaage mit zwei Waagschalen (jede ausreichend groß für 1 kg losen Zucker) und genau einem 50-g-Wägestück sollen 300 g Zucker abgewogen werden.
Zeige, daß das mit nur drei Wägungen möglich ist!

250712 Ermittle alle zweistelligen natürlichen Zahlen, die folgenden Bedingungen genügen:
(1) Die Differenz der beiden Ziffern beträgt 5.
(2) Vertauscht man Zehnerziffer und Einerziffer miteinander, so entsteht eine zweistellige Zahl, deren Doppeltes um 4 größer ist als die ursprüngliche Zahl.

250713 Die Schüler Gerd und Uwe diskutieren über folgende Forderungen, die an ein konvexes Viereck $ABCD$ gestellt werden (siehe Bild):



Es soll $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AD}$ gelten, und wenn M der Schnittpunkt der beiden Diagonalen AC und BD ist, so soll der Winkel $\sphericalangle BMA$ die Größe 70° und der Winkel $\sphericalangle BCM$ die Größe 50° haben. Gerd behauptet, daß durch diese Forderungen die Größe des Winkels $\sphericalangle DAM$ eindeutig bestimmt ist. Uwe vertritt die Meinung, daß es konvexe Vierecke gibt, die diese Forderungen erfüllen, aber unterschiedliche Größen des Winkels $\sphericalangle DAM$ aufweisen.
Wer hat recht?

250714 Von einem Rechteck ist bekannt:
(1) Die beiden längeren Seiten des Rechtecks sind jeweils 5 cm länger als die kürzeren.
(2) Wenn man jede Seite des Rechtecks um 10 cm verlängert, wird der Flächeninhalt des Rechtecks um 430 cm² größer.
Ermittle die Seitenlängen des ursprünglichen Rechtecks!

Olympiadeklasse 8

250811 a) Es sei b diejenige Zahl, die man erhält, wenn man die Zahl um 50% vergrößert.
Um wieviel Prozent muß diese Zahl b verkleinert werden, um wieder die Zahl 30 zu erhalten?
b) Überprüfe, ob die für die Zahl 30 gefundene Aussage bei gleicher Aufgabenstellung auch für jede beliebige positive Zahl a zutrifft.

250812 In einer Arbeitsgemeinschaft Mathematik stellen sich die Schüler gegenseitige Aufgaben.
Rainer stellt folgendes Kryptogramm zur Diskussion:

```
***27·**
 *****5
  *****
 ****95
```

Für jedes Zeichen * soll eine Ziffer so eingesetzt werden, daß eine richtig gerechnete Aufgabe entsteht. Die eingesetzten Ziffern dürfen einander gleich oder voneinander verschieden sein. Günter ist der Meinung, daß es zu dieser Aufgabe keine Lösung gibt.
Hat er damit recht?
Begründe deine Antwort!

250813 Beweise folgenden Satz:
Die Summe zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, die beide nicht durch 3 teilbar sind, ist stets durch 3 teilbar.
Ein Quader habe die Kantenlängen a, $2a$ und $\frac{a}{2}$, wobei a vorgegeben ist. Von diesem Quader werde ein gerades Prisma abgetrennt. Die Höhe dieses Prismas habe die Länge $\frac{a}{2}$, seine Grundfläche sei ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit der Schenkellänge a. Der Restkörper sei ein Prisma mit trapezförmiger Grundfläche.
a) Zeichne den Restkörper in Kavalierperspektive und wähle dafür $a = 6$ cm!
b) Ermittle das Volumen des Restkörpers in Abhängigkeit von a!
c) Gib das Verhältnis der Volumina des Restkörpers und des Quaders an!

Olympiadeklasse 9

250911 Aus den Ziffern 1, 9, 8, 5 seien alle möglichen vierstelligen Zahlen gebildet, wobei jede der Ziffern in jeder dieser Zahlen genau einmal vorkommen soll.
Ermitteln Sie die Anzahl aller derartigen Zahlen, die a) durch 2, b) durch 3, c) durch 4, d) durch 5, e) durch 6 teilbar sind, und geben Sie diese Zahlen jeweils an!

250912 Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Paare (a, b) einstelliger natürlicher Zahlen a und b, für die

$$a < \overline{a,b} < b \text{ gilt!}$$

Dabei gilt die 0 als einstellige Zahl, und mit $\overline{a,b}$ sei diejenige Dezimalzahl bezeichnet, die die Ziffer a vor dem Komma und die Ziffer b nach dem Komma hat.

250913 Man beweise: Für jede natürliche Zahl n mit $n \geqq 6$ ist es möglich, eine Quadratfläche in n (nicht notwendig kongruente) Teilquadratflächen zu zerlegen.

250914 Drei Kreise mit dem gegebenen Radius r mögen so in einer Ebene liegen, daß jeder die beiden anderen berührt. An je zwei dieser drei Kreise werde diejenige gemeinsame Tangente gelegt, die keinen Punkt mit dem dritten Kreis gemeinsam hat. Mit diesen drei Tangenten hat man ein gleichseitiges Dreieck konstruiert.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks in Abhängigkeit von r!
Hinweis: Für Zahlenwerte, die bei der Flächeninhaltsangabe auftreten, ist eine Verwendung von Näherungswerten zugelassen (aber nicht gefordert); dann jedoch mit einer Angabe – und Begründung –, auf wie viele Dezimalstellen der Näherungswert genau ist.

Olympiadeklasse 10

251011 a) Beweisen Sie unter Verwendung des Tafelwerkes, daß

$$\sqrt{5} + \sqrt{8} < \sqrt{6} + \sqrt{7} \text{ gilt!}$$

b) Beweisen Sie die Gültigkeit dieser Ungleichung ohne Verwendung von Näherungswerten für die Wurzeln!

251012 Drei Mathematiklehrer, die am selben Tag Geburtstag hatten und von denen jeder zu diesem Zeitpunkt jünger als 50 Jahre, aber älter als 20 Jahre war, trafen sich beim gemeinsamen Geburtstagsfest. Jeder von ihnen hatte zwei Kinder; erstaunlicherweise hatten auch alle diese sechs Kinder am selben Tag Geburtstag. Während eines Gespräches sagte der ältere von ihnen: „Ich bin heute $5\frac{1}{2}$mal so alt wie mein Sohn und 11mal so alt wie meine Tochter geworden. Wenn meine Tochter so alt sein wird, wie mein Sohn jetzt ist, dann werde ich 6mal so alt sein wie sie und 4mal so alt wie mein Sohn."
Nach kurzem Überlegen stellte der zweite Mathematiklehrer fest, daß diese Angaben auch für ihn und sein älteres und jüngstes Kind zutreffen.

Jetzt rechnete auch der jüngste von ihnen nach und sagte: „Es ist doch merkwürdig, die gleichen Aussagen gelten auch für mich und meine beiden Kinder, obgleich wir drei Lehrer doch verschieden alt sind."
Stellen Sie fest, ob es für die drei Lehrer und ihre Kinder Altersangaben gibt, bei denen alle diese Aussagen zutreffen und ob durch die Aussagen die Altersangaben eindeutig bestimmt sind! Wenn das zutrifft, geben Sie das Alter der drei Lehrer und ihrer Kinder an!

251013 Der Querschnitt eines Kanals habe die Form eines gleichschenkligen Trapezes. Seine parallelen Seiten seien waagerecht, die längere oben, die kürzere unten (*Sohle* des Grabens). Die schrägen Seitenwände seien gegen die lotrechte Richtung um 30° geneigt. Wegen der geforderten Durchflußmenge soll der Querschnitt einen vorgegebenen Flächeninhalt F besitzen. Außerdem ist die Länge a der kürzeren der parallelen Seiten des Querschnitts (Sohle des Grabens) vorgegeben.
Ermitteln Sie die Tiefe t des Kanals in Abhängigkeit von a und F! Diese Aufgabe wurde zunächst unter Verwendung trigonometrischer Verfahren bearbeitet. Am nächsten Tage trug Jörg eine Lösung ohne Verwendung der Trigonometrie vor.
Man gebe eine derartige Lösung an.

251014 Stellen Sie die Zahl 1985
a) im 2adischen Positionssystem (Dualsystem)
b) im 3adischen Positionssystem dar!
c) Woran erkennt man bei den Darstellungen in diesen Positionssystemen, daß die Zahl ungerade ist?

Anmerkung: Unter der Darstellung einer Zahl im m-adischen Positionssystem versteht man diejenige, die die Basis m und die Ziffern 0, 1, ..., $m-1$ benutzt; vgl. Lehrbuch Klasse 9, Seiten 81 bis 83.

Olympiadeklassen 11/12

251211 Man ermittle alle diejenigen Paare $(x;y)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen.

$$x^2 + y = 1. \qquad (1)$$
$$x + y^2 = 1. \qquad (2)$$

251212 Einem Kreis k mit dem Radius $r = 1985$ mm sei ein gleichseitiges Dreieck ABC einbeschrieben. Ferner schneide eine durch C verlaufende Gerade s die Gerade g durch A und B in einem Punkt G und den Kreis k in einem weiteren von C verschiedenen Punkt K.
Man beweise, daß bei jeder Wahl der Geraden s unter den genannten Voraussetzungen das Produkt $\overline{CG} \cdot \overline{CK}$ denselben Wert hat und berechne diesen Wert.

Fortsetzung auf Seite 93 (Mitte unten)

XXIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen der Kreisolympiade

Klassenstufe 8 bis 10

Olympiadeklasse 8

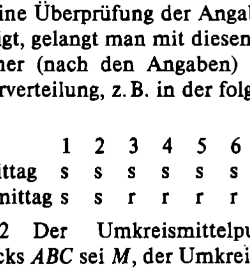
240821 Es sei x die Anzahl der Tage, an denen es vormittags und nachmittags sonnig war, y die Anzahl der Tage, an denen es vormittags sonnig und nachmittags regnerisch war, z die Anzahl der Tage, an denen es vormittags regnerisch und nachmittags sonnig war.
Da es nach (4) keinen Tag gab, an dem es vormittags und nachmittags regnerisch war, folgt aus (1) und (2), daß jeder Tag genau eine der drei bei x, y und z genannten Wetterverteilungen aufwies. Die gesuchte Anzahl der Tage, die Klaus im Ferienlager war, ist somit $x+y+z$. Aus (3), (5) bzw. (6) folgt

$$y + z = 7,$$
$$x + z = 5$$
bzw. $$x + y = 6.$$

Addiert man diese drei Gleichungen, so ergibt sich $2 \cdot (x+y+z) = 18$, also $x+y+z = 9$. Die gesuchte Anzahl läßt sich also eindeutig ermitteln, sie beträgt 9.
Weiter folgt $x = 9 - 7 = 2$, $y = 9 - 5 = 4$, $z = 9 - 6 = 3$ und damit für die Wetterverteilung:
An genau 2 Tagen war es vormittags und nachmittags sonnig, an genau 4 Tagen war es vormittags sonnig und nachmittags regnerisch, an genau 3 Tagen war es vormittags regnerisch und nachmittags sonnig.
Wie eine Überprüfung der Angaben (1) bis (6) zeigt, gelangt man mit diesen Anzahlen zu einer (nach den Angaben) möglichen Wetterverteilung, z. B. in der folgenden Tabelle:

Tag	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Vormittag	s	s	s	s	s	s	r	r	r
Nachmittag	s	s	r	r	r	r	s	s	s

240822 Der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC sei M, der Umkreisradius sei r. Im Umkreis ist $\sphericalangle BAC$ Peripheriewinkel



über der Sehne BC und $\sphericalangle BMC$ der zugehörige Zentriwinkel. Daher hat $\sphericalangle BMC$ nach dem Peripherie-Zentriwinkel-Satz die Größe $2 \cdot 30° = 60°$; nach dem Innenwinkelsatz, angewandt auf $\triangle BMC$, gilt also

$$\sphericalangle BMC + \sphericalangle MCB = 120°. \qquad (1)$$

Ferner ist wegen $\overline{CM} = \overline{BM} = r$ das Dreieck BCM gleichschenklig mit

$$\sphericalangle MBC = \sphericalangle MCB. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt
$\sphericalangle MBC = \sphericalangle MCB = 60°$, also ist $\triangle BCM$ sogar gleichseitig, womit $\overline{BC} = r$ bewiesen ist.

240823 Die geforderte Ungleichung ist nur für positive Zahlen möglich, und für diese ist sie äquivalent mit
$\frac{15}{11} > \frac{x}{7} > \frac{11}{15}$, dies mit $\frac{105}{11} > x > \frac{77}{15}$,
und dies wird wegen
$\frac{105}{11} = 9\frac{6}{11}$, $\frac{77}{15} = 5\frac{2}{15}$ genau von den natürlichen Zahlen $x = 6, 7, 8, 9$ erfüllt.

240824 1. Jeder der beiden Teile hat eine Gestalt, die aus einem Rechteck der Seitenlängen $\frac{a}{2} = 180$ mm, $b = 120$ mm entsteht, indem an allen vier Ecken Quadrate der Seitenlänge $x = 25$ mm herausgeschnitten sind. Ein daraus hergestellter oben offener quaderförmiger Kasten der Höhe $x = 25$ mm hat als Grundfläche ein Rechteck der Seitenlängen $\frac{a}{2} - 2x = 130$ mm, $b - 2x = 70$ mm.
Daher ist sein Volumen

$$V = 130\text{ mm} \cdot 70\text{ mm} \cdot 25\text{ mm} = 227\,500\text{ mm}^3.$$

2. Mit gleicher Begründung wie in 1. ergibt sich

$$V = \left(\frac{a}{2} - 2x\right) \cdot (b - 2x) \cdot x.$$

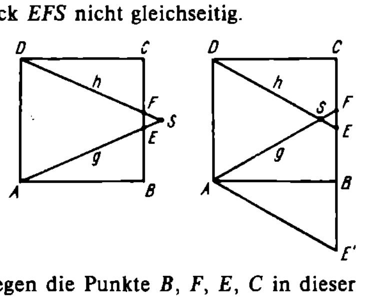
3. Als Längenangabe muß x positiv sein. Ferner wird ein Herstellen der genannten Kästen genau dann möglich, wenn auch $\frac{a}{2} - 2x$ und $b - 2x$ als Längenangaben (nämlich für Kantenlängen eines Kastens) positiv sind, d. h. genau dann, wenn außer der Ungleichung $x > 0$ auch die Ungleichungen
$\frac{a}{2} - 2x > 0$ und $b - 2x > 0$ gelten.
Diese sind äquivalent mit $2x < \frac{a}{2}$ und $2x < b$ und diese mit $x < \frac{a}{4}$ und $x < \frac{b}{2}$.
Die gesuchten Werte sind also alle diejenigen positiven Werte x, die kleiner sind als die kleinere der beiden Längenangaben $\frac{a}{4}$, $\frac{b}{2}$.

Olympiadeklasse 9

240921 Ankes Behauptung ist wahr. Dies kann folgendermaßen bewiesen werden: Gäbe es eine Liste, in der 510 Personen stehen, von denen keine zwei das gleiche Datum als Geburtstag haben, so gäbe es mindestens 510 verschiedene Daten, d. h. mindestens 510 verschiedene Tage im Jahr. Da das nicht zutrifft, gibt es keine solche Liste, w. z. b. w.
Bertolds Behauptung ist falsch. Beispielsweise kann man eine Liste von 510 Personen so zusammenstellen, daß jeder der ersten 255 Tage des Jahres das Geburtsdatum von genau 2 dieser Personen ist. Auf einer solchen Liste befinden sich dann keine drei Personen mit gleichem Geburtstag, w. z. b. w.

240922 a) Für jedes reelle $x < 5$ ist das Bestehen der Ungleichung $\frac{x}{5-x} < 4$ äquivalent (wie das Multiplizieren mit der positiven Zahl $5 - x$ bzw. für die umgekehrte Schlußweise das Dividieren durch diese Zahl zeigt) mit $x < 20 - 4x$, dies mit $5x < 20$ und dies mit $x < 4$.
b) Für jedes reelle $x > 5$ ist das Bestehen der Ungleichung $\frac{x}{5-x} < 4$ äquivalent (wie das Multiplizieren mit der negativen Zahl $5 - x$ bzw. für die umgekehrte Schlußweise das Dividieren durch diese Zahl zeigt) mit $x > 20 - 4x$, dies mit $x > 4$, was aber bereits für alle Zahlen $x > 5$ gilt, d. h. für diese mit der ursprünglichen Bedingung $x > 5$ äquivalent ist. Da für jedes reelle $x \neq 5$ entweder $x < 5$ oder $x > 5$ gilt, ist mit a) und b) bewiesen: Die gesuchten Zahlen sind genau diejenigen reellen Zahlen x, für die $x < 4$ oder $x > 5$ gilt.

240923 Aus $\overline{AB} = \overline{DC}$, $\sphericalangle ABE = \sphericalangle DCF$ und $\overline{BE} = \overline{FC}$ folgt $\triangle ABE \cong \triangle DCF$, also $\sphericalangle BAE = \sphericalangle CDF$. Daher ist $\triangle ADS$ gleichschenklig mit $\sphericalangle DAS = \sphericalangle ADS$.
Wegen $\sphericalangle FES = \sphericalangle DAS$ und $\sphericalangle EFS = \sphericalangle ADS$ (entweder Stufenwinkel oder Wechselwinkel) ist folglich auch $\triangle EFS$ gleichschenklig mit $\sphericalangle FES = \sphericalangle EFS$.
a) Liegen die Punkte B, E, F, C in dieser Reihenfolge auf BC, so gilt $\overline{AS} > \overline{AE}$. Da ferner AE im rechtwinkligen Dreieck ABE als Hypotenuse die längste Seite ist, gilt erst recht $\overline{AS} > \overline{AB} = \overline{AD}$. Somit ist das Dreieck ADS nicht gleichseitig; es gilt $60° \neq \sphericalangle ASD = \sphericalangle ESF$; also ist auch das Dreieck EFS nicht gleichseitig.



b) Liegen die Punkte B, F, E, C in dieser Reihenfolge auf BC, so gilt: Wäre $\triangle EFS$ gleichseitig, also $\sphericalangle FES (= \sphericalangle BEA) = 60°$, so wäre für den Bildpunkt E' von E bei Spiegelung an AB (der wegen $EB \perp AB$ auf der Verlängerung von EB liegt) $\triangle AEE'$ gleichseitig. Daher wäre $\overline{AE} = \overline{E'E} = 2 \cdot \overline{BE}$. Zerlegt man BE in 41 gleich lange Teilstrecken, von denen nach Voraussetzung 11 auf FE, also 30 auf BF kommen, so hätte $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{BF} + \overline{FC} = \overline{BF} + \overline{BE}$ die Länge von $30 + 41 = 71$ Teilstrecken. Nach dem Satz des Pythagoras müßte dann $\overline{AB}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{AE}^2$, also $71^2 + 41^2 = (2 \cdot 41)^2$ gelten.
Es ist aber $71^2 + 41^2 = 5041 + 1681 = 6722$ und $(2 \cdot 41)^2 = 82^2 = 6724$.
Dieser Widerspruch beweist, daß $\triangle EFS$ nicht gleichseitig sein kann.

240924 Es gilt
$z = (a - b) \cdot (a + b) \cdot (a - 2b)$
$\cdot (a + 2b) \cdot (a + 3b)$, (1)
was man durch Ausmultiplizieren bestätigen kann.
Von den in (1) auftretenden Faktoren sind keine zwei einander gleich; denn aus $a + nb = a + n'b$ (n, n' zwei verschiedene der Zahlen -1, 1, -2, 2, 3) folgte $(n - n') \cdot b = 0$ und daraus wegen $n \neq n'$, also $n - n' \neq 0$ weiter $b = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Olympiadeklasse 10

241021 (I) Wenn reelle Zahlen a, b, c, d das Gleichungssystem erfüllen, so folgt: Ist $b = 0$, so folgt aus (1) und (4), daß $a = 0$ und $d = 0$ gilt. Ist $b \neq 0$, so folgt aus (1), daß $c = -\frac{a^2}{b}$ gilt, und aus (2) folgt $a + d = 0$, also $d = -a$.
Daher können nur die folgenden Quadrupel das Gleichungssystem (1), (2), (3), (4) erfüllen:
(A) Alle Quadrupel (0, 0, c, 0) mit beliebigem reellen c,
(B) alle Quadrupel $\left(a, b, -\frac{a^2}{b}, -a\right)$ mit beliebigem reellem a und beliebigem reellem $b \neq 0$.
(II) Für jedes in (A) genannte Quadrupel gilt
$0^2 + 0 \cdot c = 0, 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0,$
$0 \cdot c + c \cdot 0 = 0, 0 \cdot c + 0^2 = 0,$
d. h., es sind alle vier Gleichungen (1), (2), (3), (4) erfüllt.
Für jedes in (B) genannte Quadrupel gilt

$$a^2 + b \cdot \left(-\frac{a^2}{b}\right) = 0,$$
$$a \cdot b + b \cdot (-a) = 0,$$
$$a \cdot \left(-\frac{a^2}{b}\right) + \left(-\frac{a^2}{b}\right) \cdot (-a) = 0,$$
$$b \cdot \left(-\frac{a^2}{b}\right) + (-a)^2 = 0.$$

Mit (I) und (II) ist bewiesen: Das Gleichungssystem (1), (2), (3), (4) wird genau von allen in (A) und (B) genannten Quadrupeln erfüllt.
Auf die Lösungen der Aufgaben 2, 3 und 4, Kl. 10 sowie zu den Olympiadeklassen 11/12 wird aus Platzgründen verzichtet.

Aufgaben der Schulolympiade

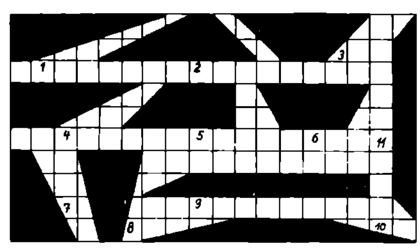
Fortsetzung von Seite 90

251213 Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, die folgende Eigenschaften haben:
(1) n läßt bei der Division durch 3 den Rest 1,
(2) n^2 läßt bei der Division durch 11 den Rest 1,
(3) es gilt: $100 < n < 200$.

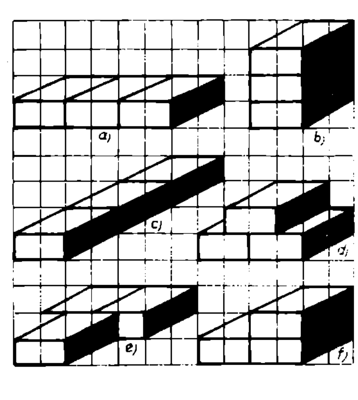
251214 Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel:
Zu Beginn geben sie sich (z. B. durch ein Zufallsverfahren) eine natürliche Zahl K ($K \geq 17$) vor. Sodann wählt A aus der Menge $M = \{2, 4, 8, 16\}$ eine Zahl aus; sie sei mit a_1 bezeichnet. Daraus multipliziert B die Zahl a_1 mit einer Zahl der Menge M und erhält die Zahl b_1. Danach multipliziert A die Zahl b_1 erneut mit einer Zahl der Menge M und erhält die Zahl a_2. Anschließend setzen B und A diesen Prozeß abwechselnd fort, bis einer der Spieler ein Produkt erreicht hat, das größer als die vorher festgelegte Zahl K ist. Gewonnen hat derjenige Spieler, der als erster ein Produkt erreicht, das größer als K ist.
a) Wie muß Spieler A spielen, um mit Sicherheit zu gewinnen, wenn $K = 100$ vorgegeben ist?
b) Welcher der beiden Spieler kann den Gewinn stets erzwingen, und welche Gewinnstrategie muß er anwenden, wenn $K = 1\,000\,000$ vorgegeben ist?
c) Wie kann man bei beliebig vorgegebenem K entscheiden, welcher der beiden Spieler den Gewinn erzwingen kann, und wie muß dieser Spieler vorgehen?

Fortsetzung von Seite 83

▲14▲ **Am Trapez**
Welches der abgebildeten Trapeze hat den größten Flächeninhalt?



▲15▲ **Mit Streichholzschachteln**
Legt aus Streichholzschachteln die abgebildeten Körper zusammen, und ordnet diese 6 Körper nach der Größe ihrer Oberflächen, ohne diese auszumessen oder zu berechnen!



Lösungen

Lösungen zum alpha-Wettbewerb
Heft 6/84 (Fortsetzung)

Ph 6 ■ 166 Die Gleichung $s = v \cdot t$ löst man nach t auf, also $t = \frac{s}{v}$.
Dann gilt

$$t = \frac{5\,\text{km} \cdot h}{3 \cdot 8\,\text{km}} + \frac{5\,\text{km} \cdot h}{3 \cdot 10\,\text{km}} + \frac{5\,\text{km} \cdot h}{3 \cdot 12\,\text{km}},$$

$$t = \frac{5}{3}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}\right) h = 0{,}514\ h.$$

$0{,}514 \cdot 60\,\text{min} = 30{,}84\,\text{min}$
$0{,}84 \cdot 60\,\text{s} \approx 50\,\text{s}$
Der Sportler legt die gesamte Strecke in etwa 30 Minuten und 50 Sekunden zurück.

Ph 7 ■ 167 Geg.: Rest 64 l; 3mal $p = 20\,\%$ von den verbliebenen Resten
Ges.: Ursprünglicher Benzinvorrat x l
Nach der ersten Fahrt waren es

$$x - \frac{xp}{100} = x\left(1 - \frac{p}{100}\right) \text{ Liter,}$$

nach der zweiten Fahrt $x\left(1 - \frac{p}{100}\right)$

$$- x\left(1 - \frac{p}{100}\right)\frac{p}{100} = x\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 \text{ Liter,}$$

nach der dritten Fahrt $x\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2$

$$- x\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 \frac{p}{100} = x\left(1 - \frac{p}{100}\right)^3 \text{ Liter}$$

bzw. 64 Liter.
Also gilt die Gleichung

$$x\left(1 - \frac{p}{100}\right)^3 = 64,$$

$$x = \frac{64}{\left(1 - \frac{p}{100}\right)^3},$$

$$x = \frac{64}{(1 - 0{,}2)^3},$$

$$x = 125.$$

Der Benzinvorrat betrug ursprünglich 125 Liter.

Ph 8 ■ 168
Geg.: $m_1 = 28\,\text{l} \mathrel{\widehat{=}} 28\,\text{kg}$ Ges.: m_2
$\vartheta_1 = 10\,°\text{C}$
$\vartheta_2 = 100\,°\text{C}$
$\vartheta_m = 30\,°\text{C}$
Da beim Wärmeaustausch die aufgenommene gleich der abgegebenen Wärmemenge ist, gilt

$$W_{\text{auf}} = c \cdot m_1(\vartheta_m - \vartheta_1),$$

$$W_{\text{ab}} = c \cdot m_2(\vartheta_2 - \vartheta_m), \qquad (c \neq 0)$$

$$m_2 = \frac{m_1(\vartheta_m - \vartheta_1)}{\vartheta_2 - \vartheta_m},$$

$$m_2 = \frac{28\,\text{kg}\,(30 - 10)\,\text{K}}{(100 - 30)\,\text{K}}$$

$$m_2 = 8\,\text{kg}.$$

Es müssen noch 8 kg bzw. 8 Liter Wasser dazugegeben werden.

Ph 9 ■ 169
Geg.: Zugkraft $F_1 = 35\,\text{kp} \cdot 0{,}95^n$
$= 35 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}95^N$
Last $m = 150\,\text{kg}$
Ges.: Anzahl der Rollen n
Nach der Gleichung für das Gleichgewicht am Flaschenzug gilt $F_1 = \frac{F_2}{n}$ bzw. nach den Bedingungen der Aufgabe

$$n \geqq \frac{F_2}{F_1} \text{ mit } F_2 = m \cdot g = 150 \cdot 9{,}81\,N,$$

$$n \geqq \frac{150 \cdot 9{,}81\,N}{35 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}95^n\,N} = \frac{150}{35 \cdot 0{,}95^n}.$$

Diese Ungleichung wird erfüllt für $n \geqq 6$; denn

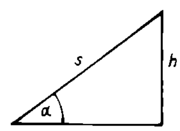
$$6 > \frac{150}{35 \cdot 0{,}95^6} \approx 5{,}8 \text{ und}$$

$$5 < \frac{150}{35 \cdot 0{,}95^5} \approx 5{,}5.$$

Der Flaschenzug muß mindestens 6 Rollen haben.

Ph 10/12 ■ 170
Geg.: Zeit $t_1 = 26\,\text{s}$ (stehend)
$t_2 = 19\,\text{s}$ (steigend)
Höhe $h = 5{,}40\,\text{m}$
Steigungswinkel $\alpha = 30°$
Ges.: a) Geschwindigkeit v_1 (stehend)
b) Geschwindigkeit v_2 (steigend)
Zuerst ist die Länge s der Fahrtreppe zu ermitteln. Es gilt (siehe Bild)

$$\sin\alpha = \frac{h}{s}, \quad s = \frac{h}{\sin\alpha}.$$



a) Die Geschwindigkeit v_1 ist dann nach

$$v_1 = \frac{s}{t_1} \text{ und mit } s = \frac{h}{\sin\alpha}$$

$$v_1 = \frac{h}{t_1 \cdot \sin\alpha},$$

$$v_1 = \frac{5{,}40\,\text{m}}{26\,\text{s} \cdot \sin 30°}$$

$$v_1 = 0{,}415\,\text{m/s}.$$

Die Geschwindigkeit beträgt stehend 0,415 m/s.
b) Die Geschwindigkeit v_2 ist dann entsprechend

$$v_2 = \frac{s}{t_2} = \frac{h}{t_2 \cdot \sin\alpha},$$

$$v_2 = \frac{5{,}40\,\text{m}}{19\,\text{s} \cdot 0{,}5} = 0{,}568\,\text{m/s}.$$

Die Geschwindigkeit beträgt steigend 0,568 m/s.

Lösung zu: Spaß mit Brüchen
Heft 3/85, Seite 55

Es seien x und y ganze Zahlen, dann ist $\frac{x}{y}$ ein gemeiner Bruch.

a) Es gilt $\frac{x+2}{y+2} = \frac{2x}{y}$.
Dann ist $2xy + 4x = xy + 2y$
bzw. $xy + 4x - 2y = 0$
oder $(x - 2)(y + 4) = -8$
mit den ganzzahligen Lösungspaaren $(-1; 8)$; $(-2; 4)$; $(-4; 2)$ usw.
Davon erfüllen nur $(x - 2) = -1$ und $y + 4 = 8$ die Bedingungen der Aufgabe, und $x = 1$; $y = 4$. Der Bruch ist $\frac{1}{4}$.

b) Entsprechend a) gilt $\frac{x+3}{y+3} = \frac{2x}{y}$,

$$xy + 6x - 3y = 0,$$

$$(x - 3)(y + 6) = -18.$$

Mögliche Lösungen sind $(-1; 18)$, $(-2; 9)$, $(-3; 6)$ usw.
Davon erfüllen
$x_1 - 3 = -1$ und $y_1 + 6 = 18$ bzw.
$x_2 - 3 = -2$ und $y_2 + 6 = 9$
die Bedingungen der Aufgabe und
$x_1 = 2$; $y_1 = 12$ bzw. $x_2 = 1$; $y_2 = 3$.
Die Brüche lauten $\frac{2}{12}$ und $\frac{1}{3}$.

c) Entsprechend a) gilt $\frac{x+3}{y+3} = \frac{3x}{y}$,

$$2xy + 9x - 3y = 0,$$

$$(2x - 3)(2y + 9) = -27.$$

Das führt zu dem Bruch $\frac{1}{9}$.

d) Nach Multiplikation mit dem Hauptnenner erhält man

$$3n + 3m = 2mn, \quad 3(n + m) = 2mn.$$

O. B. d. A. ist dann m durch 3 teilbar. Nur $m = 3$ und $m = 6$ führt zu den geforderten Lösungen.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ und } \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$

e) $$\frac{p}{q} + \frac{q}{p} + 2 = \frac{p^2 + q^2 + 2pq}{p \cdot q} = \frac{(p+q)^2}{m^2}$$

f) Es sei $m < n$, dann ist $m + n < 2n$, und demzufolge gilt

$$\frac{2}{m+n} > \frac{1}{n}.$$

Ferner ist $m + n > 2m$ und demzufolge

$$\frac{2}{m+n} < \frac{1}{m}.$$

Lösung zu: Umfüllaufgabe, Heft 3/85
Es bezeichne A das 12-Maß-Gefäß, B das 8-Maß-Gefäß und C das 5-Maß-Gefäß. Das schrittweise Umfüllen kann wie in den folgenden Tabellen angegeben erfolgen:

A	12	4	4	9	9	1	1	6
B	0	8	3	3	0	8	6	6
C	0	0	5	0	3	3	5	0

A	12	7	7	2	2	10	10	5	5	0
B	0	0	5	5	8	0	2	2	7	7
C	0	5	0	5	2	2	0	5	0	5

A	0	8	8	3	3	11	11	6	6
B	8	0	4	4	8	0	1	1	6
C	4	4	0	5	1	1	0	5	0

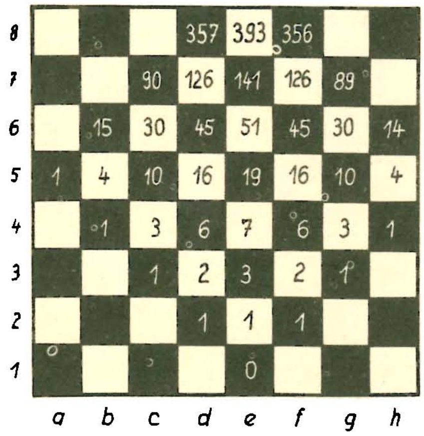
Jetzt bezeichne K den 8-Maß-Krug, L den 5-Maß-Krug und M den 3-Maß-Krug.

K	0	3	3	6	6	1	1	4
L	5	5	2	2	0	5	4	4
M	3	0	3	0	2	2	3	0

K	0	5	5	2	2	7	7	4	4
L	5	0	3	3	5	0	1	1	4
M	3	3	0	3	1	1	0	3	0

Lösungen zu:
Die vielen Wege des Königs

Der König hat 393 verschiedene Möglichkeiten, in 7 Zügen von dem Feld e1 nach dem Feld e8 zu gelangen.



Lösungen zu:
Mein Taschenrechner SR 1

▲1▲
a) $-2\cdot10^{6}$; b) $2\cdot10^{-3}$; c) $14\cdot10^{-12}$; d) $1{,}2\cdot10^{3}=1200$

Das Betätigen der $\boxed{\times}$-Taste vor der Taste $\boxed{\text{EEX}}$ ist nicht erforderlich, führt aber auch nicht zu einer falschen Eingabe.

▲2▲
a) $2\cdot3\cdot4=24$; b) $2\cdot4=8$;
c) $\frac{6\cdot2}{3}=4$; d) $\frac{6}{3}\cdot2=4$;
e) $\frac{6}{3\cdot2}=1$; f) $2+3\cdot4=14$;
g) $2\cdot3+3\cdot4=18$; h) $\sqrt[2]{4}=2$;
i) $\sqrt[2]{9}=3$; k) $\sqrt[2]{16}=4$

▲3▲
a) $z\ \boxed{\div}\ b\ \boxed{\div}\ c\ \boxed{=}$
b) $a\ \boxed{\times}\ b\ \boxed{-}\ c\ \boxed{\div}\ d\ \boxed{=}$
c) $a\ \boxed{-}\ b\ \boxed{\times}\ c\ \boxed{=}$

▲4▲

Schritt	Tastenbetätigung	Anzeige
6.	$\boxed{=}$	7.
7.	$\boxed{3}$	3.
8.	$\boxed{=}$	8.
9.	$\boxed{1{,}5}$	1.5
10.	$\boxed{=}$	6.5

▲5▲
Die Konstantenautomatik tritt bei allen Grundrechenoperationen auf.

▲6▲
a) 8, 13. b) 27; 64; 4096.
c) 14; 16; 17; 29, 71
Da der SR 1 über Vorrangautomatik verfügt, wird durch diese Schaltung bei mehreren Operationen verschiedener Stufe eine andere Arbeitsweise der Konstantenautomatik hervorgerufen. So wird in unserem Beispiel nicht der zuletzt eingegebene Operand als Konstante multipliziert, sondern zu jeder Eingabe wird 12 ($3\cdot4$) addiert.

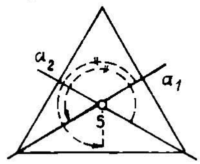
▲7▲
a) $a\ \boxed{+}\ b\ \boxed{=}\ \boxed{x^2}$
b) $a\ \boxed{+}\ b\ \boxed{1/x}\ \boxed{=}\ \boxed{\sqrt{\ }}$
c) $2\ \boxed{\times}\ a\ \boxed{-}\ b\ \boxed{=}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{1/x}$
d) $a\ \boxed{1/x}\ \boxed{+}\ b\ \boxed{1/x}\ \boxed{=}$
e) $a\ \boxed{+}\ b\ \boxed{\times}\ c\ \boxed{y^x}\ 5\ \boxed{=}\ \boxed{\sqrt{\ }}$

▲8▲ $a\ \boxed{1/x}\ \boxed{+}\ b\ \boxed{1/x}\ \boxed{=}\ \boxed{1/x}$

▲9▲ a) $a+b\sqrt{c}$ d) $a\cdot\sqrt{b}$
b) $a+b\cdot c$ e) $a+b$
c) $a\cdot b$ f) $\frac{1}{a}+b$

Lösungen zu: Drehsymmetrie

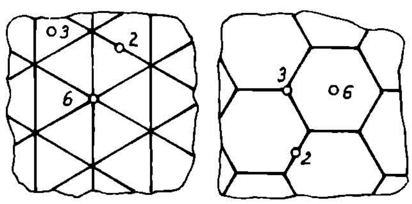
▲2▲ Das Vorderrad eines 28er Tourenrades hat 36 Speichen. Auf Grund der Art der Speichenverspannung kann eine Speiche erst mit der nächsten 4. durch Drehung zur Deckung gebracht werden. Der Grad der Drehsymmetrie ist also $\frac{36}{4}=9$.



▲3▲ a) 3; b) 5.

▲7▲ Einfache Beispiele sind der Kreis, das Quadrat und das gleichseitige Dreieck.

▲8▲ a) b)



▲11▲ Bei aufmerksamer Betrachtung des Titelbildes erkennt man, daß sich die Lagerung der Teilfiguren zu einer Parkettierung der Ebene fortsetzen läßt. Diese Figur besitzt Drehsymmetrien bezüglich nichtkolinearer Punkte, aber alle vom Grad 3.

Lösungen zu: Sprachecke

▲1▲ Bitte deinen Freund, sein Alter in vollen Jahren aufzuschreiben und dann folgende Rechenoperationen durchzuführen:
1) Multipliziere die Zahl mit 5!
2) Addiere zu dem Ergebnis 25!
3) Multipliziere die Summe mit 2!
4) Addiere die Zahl des Wochentages, an dem er geboren wurde. (Montag ist der erste Tag.)
5) Subtrahiere von der Summe 50!

Wenn dir dein Freund das Endergebnis nennt, kannst du sofort sagen, wie alt er ist und an welchem Wochentag er geboren wurde. Wie ist das möglich?

Lösung: Das Alter A des Freundes in vollen Jahren sei $10x+y$ und der Wochentag z. Dann gilt die Gleichung
$A=[(10x+y)\cdot5+25]\cdot2+z-50$,
$A=100x+10y+z$.
Demzufolge ergibt sich aus der Hunderter- und Zehnerstelle das Alter des Freundes, und die Einerstelle zeigt den Wochentag an.

▲2▲ Welches ist der Radius des größten Kreises, den man auf einem Schachbrett ziehen kann und der nur auf den weißen Feldern verläuft?
Als Einheit nehmen wir die Seite eines Feldes.

Lösung: Man muß drei Fälle unterscheiden.
Fall 1: Der einfachste Fall ist der Kreis, der vollständig innerhalb eines weißen Feldes verläuft. Sein Radius ist gleich oder kleiner als $\frac{1}{2}$, also $r\leq\frac{1}{2}$.
Fall 2: (s. Bild 1). Der Kreis verläuft durch die Endpunkte der Seite eines weißen Feldes, dann geht er durch vier weiße Felder. Sein Radius ist gleich der halben Hypotenuse des Quadrates $ABCD$, also $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bild 1

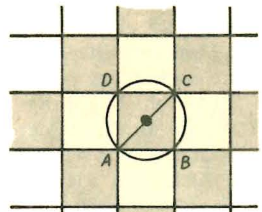
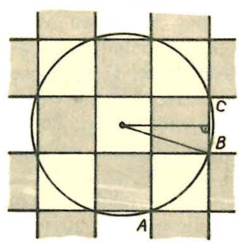


Bild 2



Fall 3: (s. Bild 2). Der Kreis verläuft durch die Endpunkte der Diagonalen eines weißen Feldes, dann geht er durch acht weiße Felder. Sein Mittelpunkt ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$. Den Radius r erhält man aus

$$r^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2 \text{ bzw. } r=\frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Der größte Kreis, der nur durch die weißen Felder verläuft, hat den Radius $r=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

▲3▲ Ich habe zweimal das Alter, das Sie hatten, als ich das Alter hatte, das Sie haben. Wenn Sie das Alter haben werden, das ich habe, dann werden wir zusammen 63 Jahre alt sein. Welches ist mein Alter? Welches ist Ihres?

Lösung: Es seien mein Alter x Jahre, Ihr Alter y Jahre und d die Differenz $x-y$ Jahre, die während aller Jahre konstant bleibt. Als ich das Alter hatte, das Sie haben, also y Jahre, dann hatten Sie $y-d=y-(x-y)=2y-x$ Jahre. Und da ich zweimal dieses Alter habe, heißt das $x=2(2y-x)$ bzw. $3x=4y$. Wenn Sie das Alter haben werden, das ich habe, also x Jahre, wird mein Alter $x+d=x+(x-y)=2x-y$ Jahre sein. Wir beide werden zusammen $x+(2x-y)$

$= 3x - y = 63$ Jahre alt sein. Das ergibt das Gleichungssystem

$$3x = 4y$$
$$3x - y = 63$$

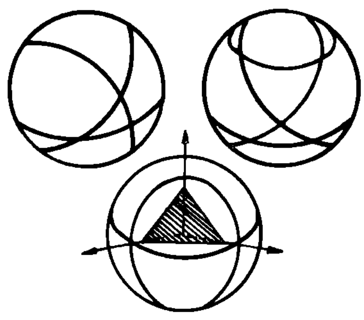
mit den Lösungen $x = 28$ und $y = 21$. Ich bin 28 Jahre alt, und Sie sind 21 Jahre alt.
Die Tabelle zeigt noch einmal den Sachverhalt.

	Heute	Als ich das Alter hatte, das Sie haben
Mein Alter	28	21
Ihr Alter	21	14

	Wenn Sie das Alter haben werden, das ich habe
Mein Alter	35
Ihr Alter	28

▲4▲ Eine Melone wurde mit drei Messerschnitten in 7 Teile zerlegt. Diese wurden aufgegessen, und auf dem Tisch blieben 8 Schalen zurück. Eine zweite Melone wurde mit 4 Messerschnitten in 10 Teile zerlegt. Als sie aufgegessen waren, blieben auf dem Tisch von ihr 12 Schalen zurück. Eine dritte Melone wurde mit vier Schnitten in 15 Teile zerlegt. Wie wurden die Melonen zerschnitten, und wieviel Schalen blieben von der letzten liegen?

Lösung: Das Bild zeigt, welche Schnitte geführt wurden. Bei der ersten Melone hat das Mittelstück zwei Schalen, bei der zweiten Melone haben zwei Teile je zwei Schalen. Die dritte Melone wurde zunächst in drei paarweise senkrechten Ebenen, die durch ihren Mittelpunkt verlaufen, geschnitten. Es entstanden 8 Teile. Dann wurde als vierter ein schräger Schnitt geführt, der alle diese Teile, außer das hintere, zweiteilt. Man erhielt 15 Stücke, von denen eines keine Schale hat. Von dieser Melone blieben 14 Schalen übrig. Es sind auch andere Schnittvarianten möglich.



Lösungen zum alpha-Wettbewerb 1/85

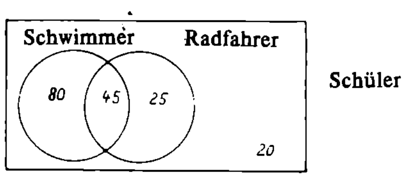
Ma 5 ■ 2522 Wir fertigen eine Tabelle an. Es seien n bzw. m die Anzahl der von den beiden Touristen gekauften Ansichtskarten und p und q die dafür zu zahlenden Geldbeträge in Pfennigen.

n	m	p	q
3	1	75	35
4	2	100	70
5	3	125	105
6	4	150	140
7	5	175	175
8	6	200	210

Nur für $n = 7$ und $m = 5$ gilt $p = q$. Der erste Tourist kaufte 7 Ansichtskarten zu 25 Pf, der zweite 5 zu 35 Pf das Stück, und es gilt $7 \cdot 25$ Pf $= 5 \cdot 35$ Pf $= 175$ Pf.

Ma 5 ■ 2523 Die Folge derjenigen natürlichen Zahlen, die bei Division durch 12 den Rest 2 lassen, lautet 2, 14, 26, 38, ...; die Folge derjenigen natürlichen Zahlen, die bei Division durch 16 den Rest 6 lassen, lautet 6, 22, 38, 54, ...
Die kleinste natürliche Zahl, die beide Bedingungen zugleich erfüllt, lautet 38.

Ma 5 ■ 2524 Aus $70 + 125 = 195$ und $195 - 45 = 150$ und $170 - 150 = 20$ folgt, daß 20 Schüler weder radfahren noch schwimmen können.



Ma 5 ■ 2525 Wegen $E + N = E$ gilt $N = 0$ oder $N = 9$. Wegen $R + I = I$ gilt $R = 0$ oder $R = 9$.
Wenn $N = 0$, so auch $R = 0$, was wegen $N \neq R$ nicht möglich ist. Wenn $N = 9$, so auch $R = 9$, was wegen $N \neq R$ nicht möglich ist.
Somit existiert keine Lösung der Aufgabe für die geforderten Bedingungen.

Ma 5 ■ 2526 a) $117 : 13 = 9$. Zur Mannschaft B gehören 9 Spieler.
b) Wegen $117 = 8 \cdot 14 + 5$ müssen $15 \cdot 15\,\text{min} = 225\,\text{min} = 3\,\text{h}\ 45\,\text{min}$ Spielzeit für das Turnier angesetzt werden.
c) $(13 - 5) \cdot (9 - 3) = 8 \cdot 6 = 48$. Es wären nur 48 Sätze Tischtennis auszutragen.
d) $(13 - 3) \cdot (9 - 5) = 10 \cdot 4 = 40$. In diesem Falle wäre die Anzahl der Sätze 40, also kleiner.

Ma 5 ■ 2527 Wegen $2 \cdot 52 = 104$ und $104 > 99$ und da die Teilprodukte nur zweistellig sind, existiert genau eine Lösung, nämlich $52 \cdot 11 = 572$.

Ma 6 ■ 2528 Die zweistelligen Primzahlen $\overline{xy}$, die kleiner als 36 sind und mit verschiedenen Grundziffern dargestellt werden, lauten 13, 17, 19, 23, 29 und 31. Von diesen Zahlen erfüllt nur die Zahl 31 die gestellten Bedingungen, und es gilt $31 - 13 = 18$. Dieser Klasse gehören 31 Schüler an; es waren 13 Schüler erkrankt.

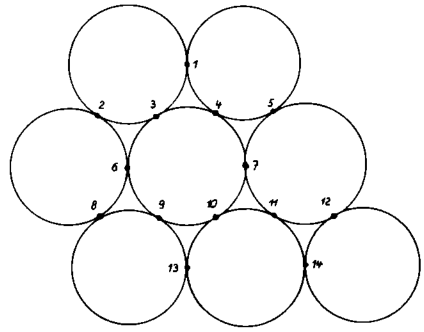
Ma 6 ■ 2529 Aus $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ und $4 \cdot 1{,}50\,\text{M} = 6\,\text{M}$ folgt, daß Klaus seiner Sparbüchse 6 M entnahm. Davon gab er $\frac{3}{4} \cdot 6\,\text{M} = 4{,}50\,\text{M}$ aus. Danach enthielt die Sparbüchse $(5 \cdot 6 - 6 + 1{,}50)\,\text{M} = 25{,}50\,\text{M}$.

Ma 6 ■ 2530 Wegen $567 = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ hat die Zahl 567 die Teiler 1, 3, 7, 9, 21, 27, 63, 81, 189, 567; sie besitzt also genau zehn Teiler.
Aus $x : 567 = \frac{4}{3}$ folgt $x = 756$.

Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

Ein Wägeproblem
Martin wiegt 43 kg, Peter 40 kg, Wenzel 45 kg.

Interessantes Berührungsproblem



Island-Story
$l = \sqrt{(1{,}65\,\text{m})^2 + (0{,}88\,\text{m})^2} - 0{,}07\,\text{m}$
$= 1{,}87\,\text{m} - 0{,}07\,\text{m} = 1{,}80\,\text{m}$.
Der Professor ist 1,80 m groß.

Folgerichtige Ergänzung
Das Muster 5 ist zu wählen. Jedes folgende Muster der Spalten 1 und 2 ist das um 90° im Uhrzeigersinn gedrehte Negativ des vorangehenden in der Spalte.

Kryptarithmetik
a) $56 : 8 = 9 - 2 = 3 + 4 = 1 \times 7$;
b) roma $\hat{=}$ 2401;
c) ist $x \geqq 4$, so gilt $x^x + x \geqq 4^4 = 260$; d.h. $x^x + x$ ist mindestens dreistellig. Für $x = 1$, 2 besteht die Gleichung offenbar nicht. Für $x = 3$ ist $3^3 + 3 = 30$, d.h., $x = 3$ ist die einzige Lösung.
d) Wir multiplizieren die drei Gleichungen miteinander und erhalten:
$(abc)^2 = (2^5 3^2 5)^2$, also $abc = 2^5 3^2 5$.
Dividieren wir diese Gleichung nacheinander durch die gegebenen Faktoren, so erhalten wir $c = 10$, $b = 24$, $a = 6$.

Kombiniere! Die Zahl 48.

Überprüfe deine Beobachtungsgabe!
a) 13 Dreiecke; b) 18 Quadrate

Wie alt bin ich?
Das gesuchte Alter sei $\overline{xy} = 10x + y$. Wir untersuchen nur den Fall $\overline{xy} \leqq 81$. Die restlichen (biologisch noch möglichen) Fälle kann der Leser analog ausschließen.
Für $y \leqq 1$ ist
$10x + y = 1 + 9 + (8 - x) + (1 - y)$,
also $11x + 2y = 19$. Es folgt $x = 1$, $y = 4$. Dieses Paar ist wegen $y \leqq 1$ keine Lösung.
Für $y > 1$ ist
$10x + y = 1 + 9 + (7 - x) + (11 - y)$,
also $11x + 2y = 28$. Es folgt $x = 2$, $y = 3$. Tatsächlich ist 23 die Lösung, da $23 = 1 + 9 + 5 + 8$ ist.

Nur zum Spaß
Larry $1/1$, Mike $1/2$, Tom $1/4$, Sam $1/8$. Sam hatte ein Achtel von Larrys Murmeln.

Lösungen zur IV. U.-Seite:
Lustige Knobelei
1. Platz: Serjosha; 2. Pl.: Nadja; 3. Pl.: Kolja; 4. Pl.: Wanja; 5. Pl.: Kolja.

40

1945
1985

Zwei historische Dokumente

Aufgaben aus dem Rechenbuch Volk und Wissen Verlagsgesellschaft m. b. H. Berlin/Leipzig · Teil II · 1945

Auswahl von praxisbezogenen Aufgaben (Kl. 7)

▲1▲ Ein Landmann hatte 25 dz 90 kg Roggen von 1 ha Ackerland geerntet; die Aussaat hatte $\frac{2}{37}$ der Ernte betragen. Wieviel war das?

▲2▲ Ein Eimer mit Marmelade wog (brutto) $4\frac{1}{4}$ kg, der Eimer allein (tara) $\frac{1}{2}$ kg. Wieviel wog die Marmelade (netto)?

▲3▲ Eine Hausfrau hat noch Milch zu bezahlen, und zwar einmal $2\frac{3}{4}$ l, dann $1\frac{1}{2}$ l und zweimal $2\frac{1}{4}$ l; wieviel macht alles zusammen, wenn 1 l 35 Rpf kostet?

▲4▲ Ein Edelsteinhändler rechnet neben g auch nach Karat $\left(=\frac{1}{5}\text{ g}\right)$. Wieviel Karat sind 1 g, $1\frac{3}{5}$ g, $2\frac{2}{5}$ g, $7\frac{3}{4}$ g, $3\frac{1}{5}$ g?

▲5▲ 1 Quadratrute hat rund 14 m². Verwandle 1 a in Quadratruten!

▲6▲ Ein junges Mädchen hat ein Kissen, welches $49\frac{1}{2}$ cm breit und $43\frac{1}{4}$ cm hoch ist, mit Perlen bestickt. Auf 1 cm lassen sich von den Perlen $9\frac{1}{2}$ nebeneinander und 8 übereinander legen. Wieviel Perlen hat das junge Mädchen verbraucht:
a) auf 1 cm²; b) auf 1 dm²; c) für das ganze Kissen?

▲7▲ Die Dampfmaschine einer Fabrikanlage braucht täglich $1\frac{3}{8}$ dz Steinkohle. Wieviel sind das an den 6 Werktagen einer Woche?

▲8▲ Eine Lokomotive verbraucht in 4 Std. 21 dz Steinkohlen; wieviel dz verbraucht sie dann in 2 Std. 20 Minuten $\left(=2\frac{1}{3}\text{ Std.}\right)$, in $1\frac{1}{2}$ Std.?

▲9▲ 8 Mann mähen in 1 Tg. 5 ha Sommergetreide; wieviel ha bringen in derselben Zeit 20 Mann fertig?

▲10▲ a) Eine Petroleumlampe verbrennt in 5 Std. für rund 14 Pf Petroleum, wieviel verbrennt sie in 1 (in 9) Std.?
b) Eine Gasglühlichtlampe brennt heller als eine Petroleumlampe und braucht in 5 Std. für nur 9 Rpf Gas. Rechne die entsprechenden Aufgaben für Gas wie unter a)!

▲11▲ Im Lichtbildtheater sieht man in $\frac{1}{2}$ Minute etwa 500 Bilder. Wieviel Bilder sind das in $2\frac{3}{4}$ Min.? Wieviel einzelne Bilder hat ein Film, der $8\frac{2}{3}$ Min. (6 Min. 39 Sek.) dauert?

▲12▲ Durch Verwendung einer Kochkiste (zweimal so hoch und breit wie der Topf) kommt eine Hausfrau nur auf $\frac{3}{4}$ des sonst eintretenden Gasverbrauches. Wieviel RM könnten demnach durch die Verwendung der Kochkiste in 1 000 000 Haushaltungen jährlich gespart werden, wenn die durchschnittliche Monatsrechnung mit 10 RM angesetzt wird?

▲13▲ Ein Gastwirt hat $2\frac{1}{4}$ kg Rindfleisch holen lassen und 540 Rpf bezahlt. Welchen Teil von 540 Rpf muß er berechnen, wenn er den Preis von 1 kg wissen will. Erkläre die folgende Ausrechnung:

1 kg Fleisch kostet x Rpf
$2\frac{1}{4}$ kg Fleisch kosten 540 Rpf

$$\text{1 kg Fleisch kostet } x = \frac{540}{2\frac{1}{4}}\text{ Rpf}$$

$$= 540 \cdot \frac{4}{9}\text{ Rpf} = 240\text{ Rpf}.$$

Ergebnis: 1 kg Fleisch kostet 2,40 RM.

▲14▲ Eine deutsche Meile beträgt $7\frac{1}{2}$ km, wieviel km sind 4, 9, 18 Meilen?

Aus der Bibliothek
von Neulehrer J. Lehmann,
jetzt Chefredakteur
der Schülerzeitschrift alpha

Schriftliche Abschlußprüfung, Klasse 8, Fach Mathematik, 1949

Im Juni 1949 erhielten alle Schüler, welche die 8klassige Grundschule verließen, folgende Aufgaben gestellt:

Gruppe I (Aufgaben 1–4)

1. 736,248 kg + 69 kg + 750 g + 7 438 g + 5 1,48 dz + 876,564 kg = ? kg.
2. Ziehe 187,25 von 332 ab, und nimm das Ergebnis mit 7,08 mal!
3. a) $3{,}2 \cdot 3\frac{1}{8}$; b) $1\frac{3}{5} : 0{,}16$.
4. $78{,}416 : 2{,}9$.

Gruppe II (Aufgaben 5–7)

5. Im Jahre 1947 wurden in der Ostzone 26 Mill. t Briketts erzeugt. Im Jahre 1950 soll die Briketterzeugung 32 Mill. t betragen. Berechne die geplante Steigerung der Produktion in t und in Prozenten!

6. In unserer Zone wurden durch den Krieg 1 131 Brücken zerstört. Im Jahre 1947 waren bereits 84 % wieder instand gesetzt. Wieviel Brücken waren wieder benutzbar?

7. In einem Bitterfelder Braunkohlentagebau wurde durch Anregung von Aktivisten eine Verbesserung der täglichen Arbeitsleistung erzielt. Von den über der Braunkohle lagernden Erdschichten wurden 11 260 t mehr abgeräumt als bisher. Das bedeutete eine Steigerung der Arbeitsleistung um 62,5 %. Berechne die frühere Tagesleistung und die neue Gesamtleistung!

Gruppe III (Aufgaben 8–10)

8. Vergrößert man eine Zahl um 8 und multipliziert die Summe mit 4, so erhält man 52. Errechne die Zahl, indem du eine Gleichung aufstellst!

9. Eine Flüssigkeit soll aus einem zylinderförmigen Gefäß mit dem Durchmesser 20 cm, das sie nur 3 cm hoch füllt, in ein kleineres zylindrisches Gefäß umgegossen werden, dessen Durchmesser nur halb so lang ist. Wie hoch füllt sie das zweite Gefäß?

10. $25(3x + 10) - 13(8 + 9x) = (87 - 12x) - 8(7x - 9)$.

Bewertungsmaßstab, empfohlen von der Landesregierung Brandenburg

sehr gut (1): Alle Aufgaben richtig rechnerisch gelöst.
gut (2): Alle Aufgaben der Gruppen I und II richtig gelöst.
Ausgleichsmöglichkeit: waren in Gruppe I und II Aufgaben falsch, so konnten sie durch die schweren richtigen der Gruppe III ersetzt werden.
genügend (3): Alle Aufgaben der Gruppe I und eine Aufgabe der Gruppe II, oder 3 Aufgaben der Gruppe I und 2 Aufgaben der Gruppe II usw. gelöst. Eine Ausgleichsmöglichkeit besteht ebenso mit Aufgaben der Gruppe III.
mangelhaft (4): Wer nur die Aufgaben der Gruppe I gelöst hat.
ungenügend (5): Wer nur eine Aufgabe der Gruppe I gelöst hat.

Ergebnisse der Mädchenklasse 8 der Steinschule Luckenwalde
(damals waren Jungen und Mädchen in getrennten Klassen):

Note	Zahl	Prozent
1	6	16,2
2	20	54,1
3	9	24,3
4	1	2,7
5	1	2,7
	37	100

StR O. Schulze, Luckenwalde
als Klassenlehrer dieser Mädchenschule, 1949

ISSN 002-6395 · alpha · Berlin · 19 (1985) 4 · Seiten 73 bis 96