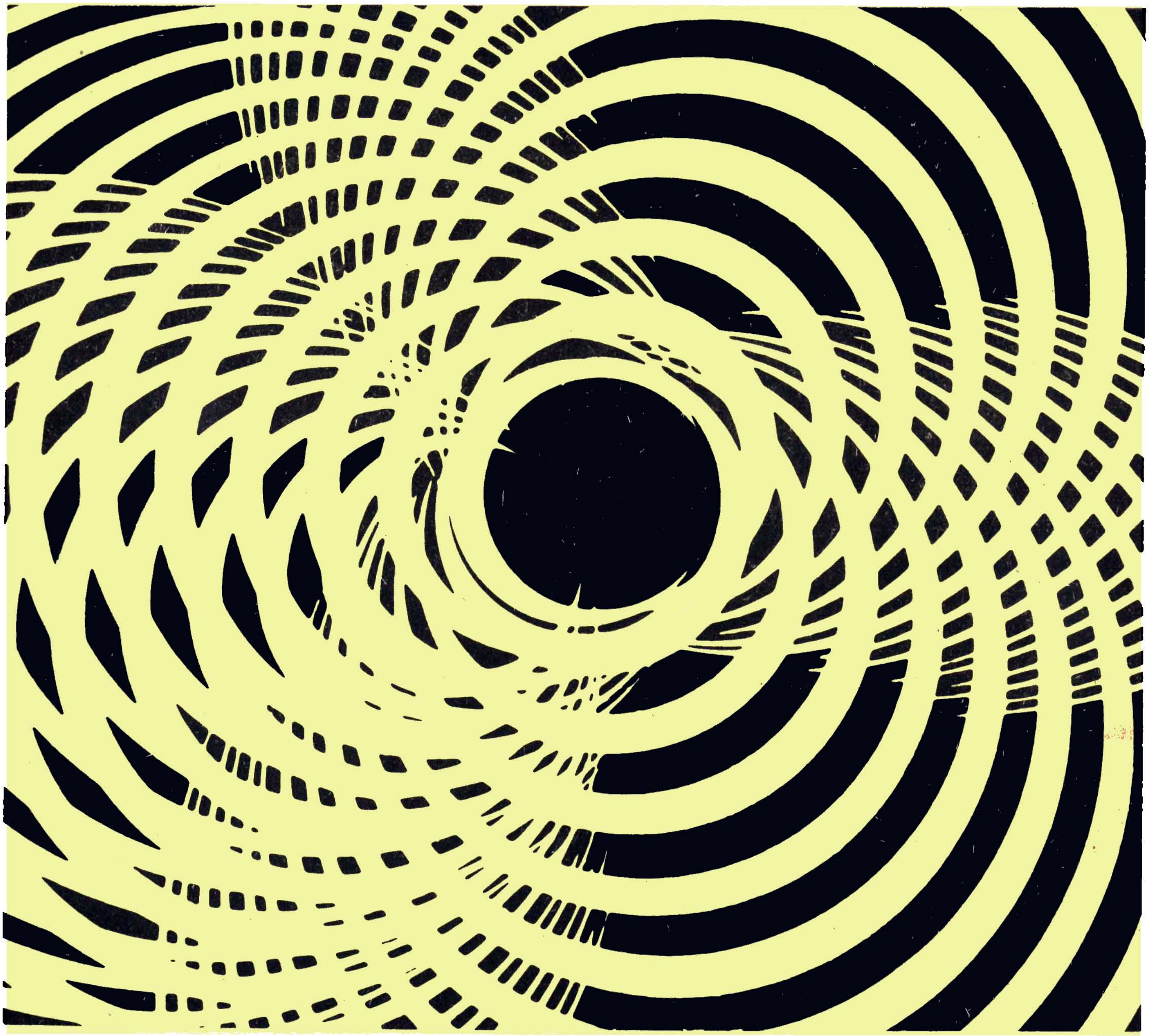
Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
10. Jahrgang 1976
Preis 0,50 M
Index 31059

6

Redaktionskollegium:
Prof. Dr.-Ing. habil. G. Clemens (Leipzig); Prof. Dr. habil. Lilli Görke (Berlin); Dozent Dr. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dr. habil. E. Hameister (Magdeburg); Dozent Dr. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Oberlehrer K. Krüger, Verdienter Lehrer des Volkes (Bad Doberan); Studienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Dozent Dr. H. Lohse (Leipzig); Nationalpreisträger Oberstudienrat Dr. R. Lüders (Berlin); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Prof. Dr. habil. U. Pirl (Berlin); Dozent Dr. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Oberlehrer Dr. H. Schulze (Leipzig); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. habil W. Walsch (Halle), Verdienter Lehrer des Volkes

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430. Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.

Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: J. Flisak, Warschau (S. 126); Učitelské noviny, Prag (S. 127); W. Tschischikow, Moskau (S. 132, S. 144); J. Lehmann Leipzig (S. 134); H. Hardenberg, Stralsund (S. 134); H. Fink, Magdeburg (S. 138)
Typographie: Helmut Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
Redaktionsschluß: 17. August 1976

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Halblogarithmisches und logarithmisches Netz

1. Die allgemeine Form einer exponentiellen Abhängigkeit von y von t wird durch die Formel

$$y = y_0 a^t \qquad (1)$$

beschrieben, wo y_0 der Wert der Größe y bei $t = 0$ ist. Setzen wir

$$k = \lg a,\ z = \lg y,\ b = \lg y_0,$$

so erhalten wir aus (1) $z = kt + b$.

Wir sehen, daß z linear von t abhängt. Graphisch wird diese Abhängigkeit durch eine Gerade wiedergegeben. Zeichnen wir diese auf die übliche Weise, so können wir auf der z-Achse (oder auf einer zu ihr parallelen Geraden) die entsprechenden Werte $y = 10^z$ kennzeichnen. Dann kann man an unserer graphischen Darstellung zu beliebig vorgegebenem t unmittelbar die Größe y ablesen.

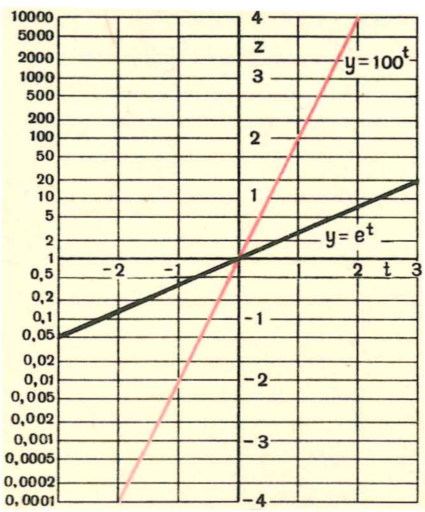


Bild 1

In Bild 1 haben wir ein solches Verfahren angewendet, um die Funktionen $y = 100^t$ und $y = e^t$ ($e = 2{,}718\ldots$) graphisch darzustellen. In einem kartesischen Koordinatensystem sind diese Funktionen in Bild 2 dargestellt.

Im Handel gibt es *halblogarithmisches Papier*. Auf diesem Papier sind wie auf gewöhnlichem Millimeterpapier im Abstand von 1 mm vertikale Linien aufgetragen, die horizontalen Linien sind jedoch so angeordnet, daß ihr Abstand vom unteren Rand gleich $100 \lg y$ ist, wobei y die Werte

1 1,05 1,10 1,15 …
2 2,1 2,2 2,3 … durchläuft.

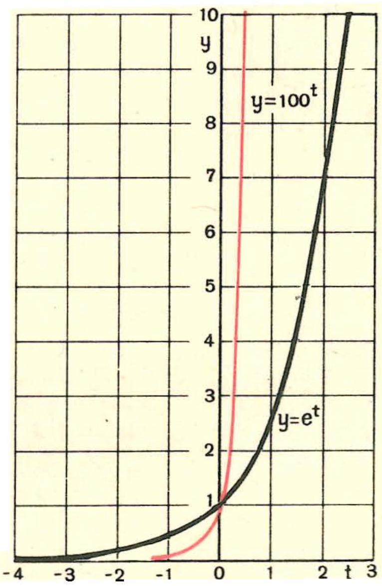


Bild 2

● Untersucht an Hand des Bildes 3, wie diese Skala angelegt ist!

Im unteren Teil des Bildes 3 zeigen wir, wie man an Hand zweier Punkte ($t = 0$, $y = y_0$), ($t = 1$, $y = y_0 a$) auf *halblogarithmischem Papier* graphische Darstellungen von Funktionen der Form (1) konstruieren kann.

Einem Zuwachs von $\Delta t = 1$ entspricht auf *halblogarithmischem Papier* 10 cm. Denselben Maßstab haben wir auf dem Bild 3 bezüglich der y-Achse gewählt. Daher ist der Anstieg unserer Geraden gleich $k = \lg a$. Das ist aber nichts anderes als die *Relativgeschwindigkeit*, mit der sich y mit t ändert:

$$\frac{1}{y} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y'}{y} = \lg a = k$$

(hier ist y' die Ableitung der Funktion $y = f(t) = y_0 a^t$).

Wird der Maßstab auf der y-Achse anders gewählt, so wird eine Umrechnung erforderlich, die ihr euch leicht selbst überlegen könnt.

Man benutzt *halblogarithmisches Papier* zur graphischen Darstellung, wenn es darauf ankommt festzustellen, ob von einer durch eine Tabelle gegebenen Abhängigkeit $y = f(t)$ angenommen werden kann, daß sie näherungsweise einem *exponentiellem Wachstumsgesetz* unterliegt (oder ob $f(t)$ exponentiell fällt).

Wir wollen als Beispiel den Umfang der Industrieproduktion in der UdSSR betrachten, ausgedrückt in Prozenten zur Produktion des Jahres 1940:

1937	1940	1945	1950
77	100	92	173
1955	1960	1965	1970
320	524	791	1190

Eine halblogarithmische Darstellung ist in Bild 4 wiedergegeben (eine Darstellung in natürlichem Maßstab auf der Vertikalen könnt ihr selbst zum Vergleich zeichnen.). An Hand der graphischen Darstellung ist ersichtlich, daß das Wachstum der industriellen Produktion mit Ausnahme des Kriegsjahrfünfts 1940 bis 1945 angenähert einem Exponentialgesetz folgt. Findet selbst heraus, wieviel Prozent Zuwachs im Jahr die mittlere Neigung der Graphik entspricht! Aus der graphischen Darstellung ist ersichtlich, daß das Wachstumstempo in den Jahren 1945 bis 1955 etwas größer als in den Jahren 1960 bis 1970 ist. Es ist interessant, daß wir, wenn wir die den Jahren 1945 und 1950 entsprechenden Punkte außer Betracht lassen, fast eine gerade Linie erhalten. Im Verlauf der Jahre 1945 bis 1955 hat unsere Industrie das in den Kriegsjahren Versäumte aufgeholt.

● Bestimmt den mittleren jährlichen Produktionszuwachs in den Jahren 1947 bis 1970 (in Prozenten pro Jahr)!

2. Es ist klar, daß eine Abhängigkeit der Form

$$y = A \lg t + B$$

auch dann durch eine Gerade graphisch dargestellt wird, wenn man auf der Abszissenachse $s = \lg t$ und auf der Ordinatenachse y abträgt. Als Beispiel wollen wir die in Bild 5 wiedergegebene Abhängigkeit der Geschwindigkeit u vom Wandabstand y bei einer turbulenten Strömung einer Flüssigkeit längs einer ebenen Wand betrachten. Hier sind δ und u_τ geeignet gewählte Längen- und Geschwindigkeitsmaßstäbe. Die Messungen erfolgten bei Werten von $\frac{y}{\delta}$ zwischen 10 und 56000. Daher waren zur graphischen Darstellung der Meßergebnisse drei Graphiken mit verschiedenen Maßstäben auf der Abszissenachse notwendig. Nach Übergang zu einem logarithmischen Maßstab für $\frac{y}{\delta}$ ließen sich alle diese Daten in einer einzigen graphischen Darstellung unterbringen (Bild 6).

Dabei nahm die Kurve eine mehr gerade Form an. Die Gerade in Bild 6 wird durch die Gleichung

$$\frac{u}{u_\tau} = 5{,}5 + 5{,}75 \lg \frac{y}{\delta} \qquad (2)$$

wiedergegeben. Wir sehen, daß diese Gesetzmäßigkeit von $\frac{y}{\delta} = 100$ an sehr genau eingehalten wird. Bei kleineren $\frac{y}{\delta}$ werden systematische Abweichungen bemerkbar, und bei $\frac{y}{\delta} < 15$ werden diese Abweichungen so bedeu-

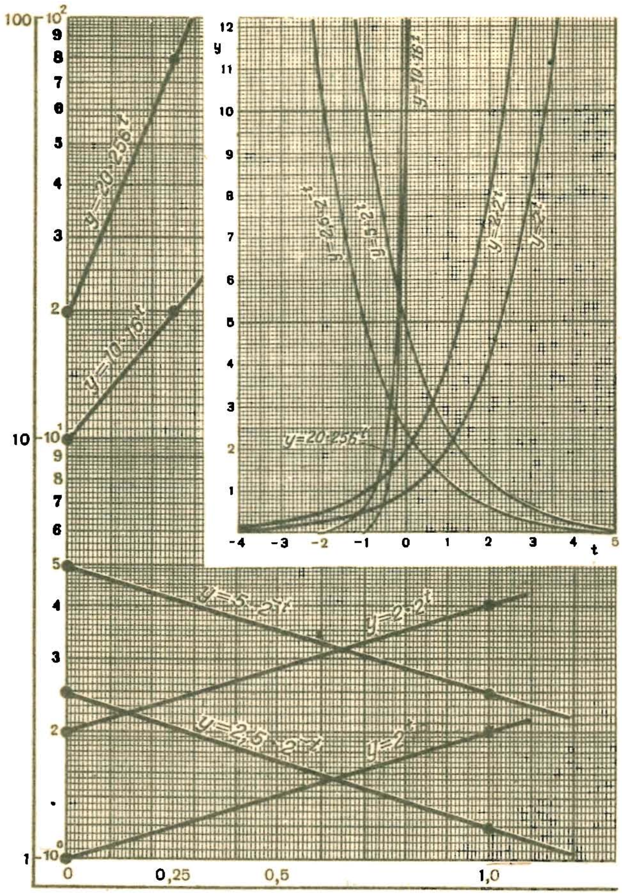
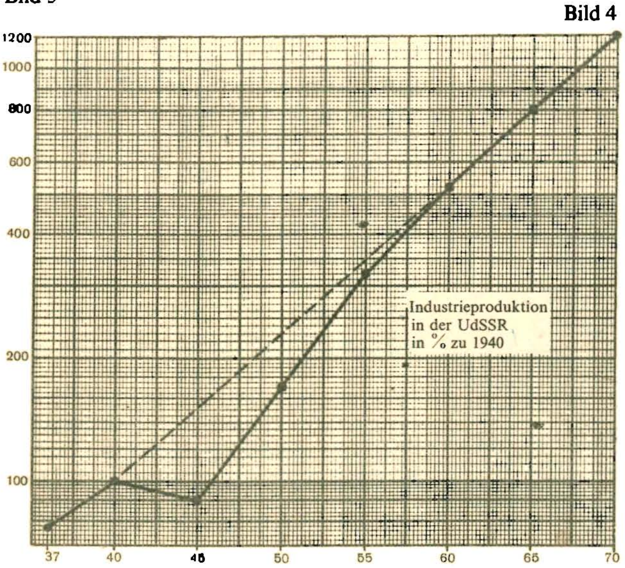


Bild 3

Bild 4



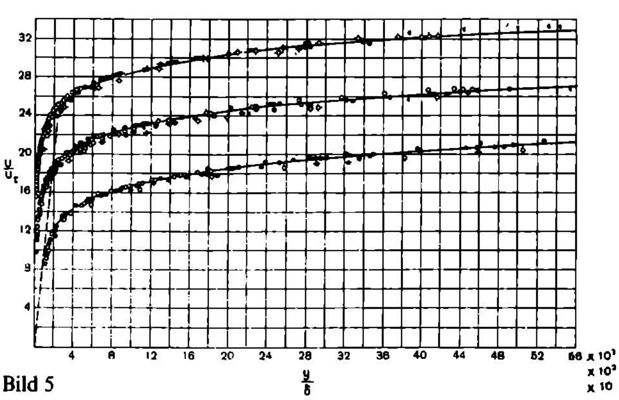


Bild 5

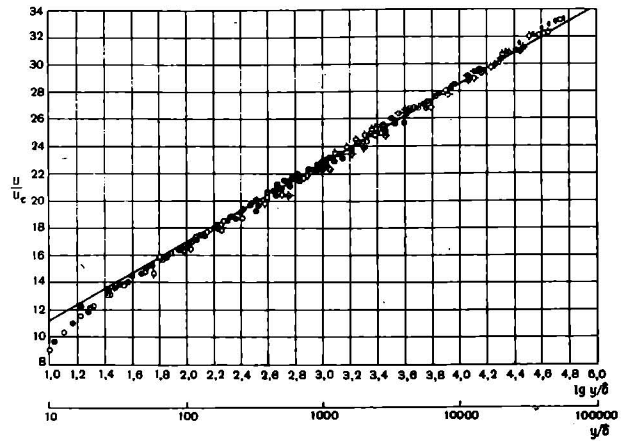


Bild 6

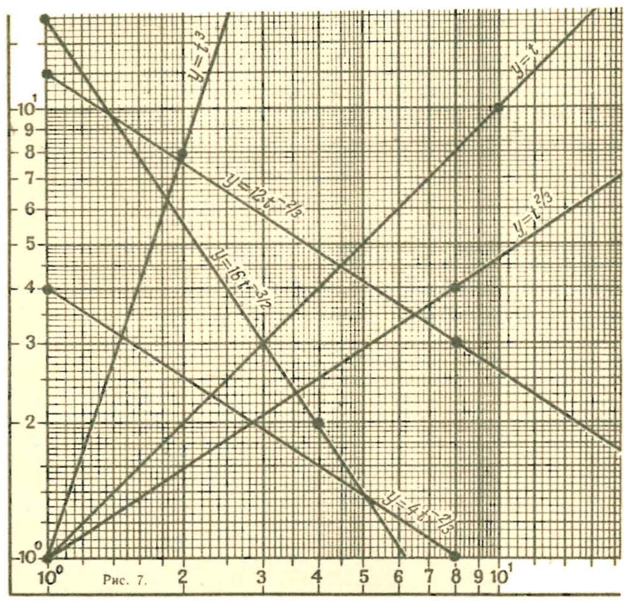


Bild 7

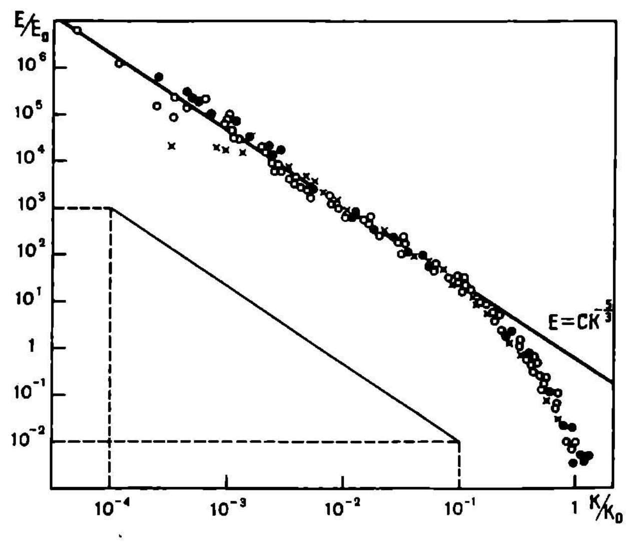


Bild 8

tend, daß hier die Beziehung (2) als überhaupt falsch anzusehen ist.
Eine Abhängigkeit der Form

$$y = ct^{\alpha} \qquad (3)$$

wird durch den Übergang zu den Variablen

$$s = \lg t,\ z = \lg y$$

gleichfalls *geradegebogen*.
In der Tat folgt aus (1)

$$z = \alpha s + b \qquad (4)$$

mit $b = \lg c$. Um Abhängigkeiten der Form (5) durch Geraden darzustellen, benutzt man ein *logarithmisches Netz. Doppeltlogarithmisches Papier* ist gleichfalls im Handel erhältlich. In Bild 7 sind Beispiele für graphische Darstellungen auf doppeltlogarithmischem Papier wiedergegeben. Es ist leicht zu sehen, daß hierbei der Anstieg gleich α ist.
Man benutzt immer dann ein logarithmisches Netz zur graphischen Darstellung, wenn Grund zu der Annahme vorliegt, daß eine gewisse empirische Abhängigkeit näherungsweise einem Gesetz der Form (3) folgt. In Bild 8 sind in einem logarithmischen Netz empirische Daten über die Energieverteilung der Pulsation in einer turbulenten Strömung eingetragen. Hier ist $E(k)$ die Spektraldichte der Pulsationsenergie, die zu der Frequenz k gehört; E_0 und k_0 sind willkürliche Einheiten für E und k. Wir sehen, daß sich unsere Abhängigkeit bei

$$10^{-4}k_0 \leqq k \leqq 10^{-1}k_0$$

gut durch eine Formel der Form

$$E = ck^{-\frac{5}{3}}$$

ausdrücken läßt, die auf Grund theoretischer Überlegungen von *A. M. Obuchov* vorgeschlagen worden ist.
Hier sind die Maßstäbe für $\lg k$ und $\lg E$ verschieden: Daher ist der Anstieg der einem vorgegebenen α entspricht, nicht gleich α. In dem Bild wird gezeigt, wie man graphisch eine Gerade konstruieren kann, deren Anstieg $\alpha = -\frac{5}{3}$ entspricht.

Aufgabe:

Stellt auf halblogarithmischem Papier die Daten der Tabelle (siehe Bild) über das Wachstum der Industrieproduktion der UdSSR an Hand zweier Gruppen dar: Gruppe A – Produktion von Produktionsmitteln, Gruppe B – Produktion von Konsumgütern (in Prozenten, auf das Jahr 1913 bezogen)!

Jahr	Gruppe A	Gruppe B	Jahr	Gruppe A	Gruppe B
1913	100	100	1945	1504	273
1917	81	67	1950	2746	566
1928	155	120	1955	5223	996
1932	424	187	1960	8936	1498
1937	1013	373	1965	14156	2032
1940	1340	460	1970	21359	3281

In welchen Jahren hat das Wachstum der Produktion in der Gruppe A das Wachstum der Produktion in der Gruppe B eingeholt, und in welchen Jahren liegen sie auf gleichem Niveau? Vergleicht die Besonderheiten der Kriegsjahre des ersten und zweiten Weltkriegs!
Bemerkung: Innerhalb der ganzen industriellen Produktion machte die Gruppe A im Jahre 1913 35,1%, im Jahre 1970 dagegen 74,84% aus.

A. N. Kolmogorow

Kurzbiographie

Prof. Dr. Andrej Nikolajewitsch Kolmogorow

Am 25. April 1977 wird einer der hervorragendsten Mathematiker unserer Zeit, Akademiemitglied A. N. *Kolmogorow* 74 Jahre alt. Schon frühzeitig erwachte das Interesse Kolmogorows an der Mathematik. Bereits mit fünf Jahren erkannte er mit Verwunderung, daß

$$1+3+5+\ldots+(2n+1)=n^2$$

ist. Daneben interessierte er sich in den späteren Schuljahren unter anderem für russische Geschichte.
Unter schweren Bedingungen begann er 1920 sein Mathematikstudium. Während seiner Studienzeit entwickelte er eine allgemeine Theorie der *Operationen auf Mengen* und löste ein schwieriges Problem aus der *Theorie der Konvergenz trigonometrischer Reihen*. Daneben interessierte er sich stets (auch heute noch) in starkem Maße für pädagogische Fragen.
Nach seinem Eintritt in die Aspirantur wandte er sich hauptsächlich der wissenschaftlichen Arbeit zu, die er mit dem Unterricht an höheren Lehranstalten, insbesondere an der Moskauer Universität verband, und wurde 1931 dort zum Professor berufen.
Kolmogorow schrieb grundlegende Arbeiten auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Topologie und Mechanik. Neben seiner fruchtbaren wissenschaftlichen Tätigkeit widmete er viel Zeit der Arbeit mit seinen Schülern, von denen sich viele durch bedeutende Arbeiten einen Namen gemacht haben.
Der wissenschaftliche Kontakt mit seinen Schülern spielt sich nicht nur im Institut, sondern auch zu Hause, auf Spaziergängen und touristischen Exkursionen ab. Viele tausend Kilometer ist er schon mit seinem engsten Freund, Akademiemitglied P. S. Alexandroff, und mit anderen Gelehrten gesegelt, gerudert und gepaddelt.
Für seine Verdienste wurde A. N. Kolmogorow mit dem Leninpreis, dem Staatspreis, viermal mit dem Leninorden, mit dem Orden Rotes Banner der Arbeit sowie Medaillen ausgezeichnet. 1963 erhielt er den Ehrentitel eines Helden der Sozialistischen Arbeit.

M. L. Smoljanskij, Chefredakteur der math. Schülerzeitschrift „Quant“, Moskau

Wie man in der Sowjetunion Mathematiker wird

Die Wissenschaft hatte wieder einmal ihre Sensation: Das *zehnte Problem Hilberts* war gelöst worden. An der Jahrhundertwende hatte der große deutsche Mathematiker Grundprobleme formuliert, die dann die Mathematiker des 20. Jahrhunderts lösen sollten. Die Lösung eines jeden dieser Probleme wurde zu einem Ereignis. Mit dem 10. Problem, demgegenüber sich namhafte Mathematiker geschlagen gegeben hatten, war nun der 22jährige Doktorand (heute Dr. rer. nat. habil.) *Juri Matijassewitsch* fertig geworden. Schon vor dieser Leistung, die seinen Namen in wissenschaftlichen Kreisen bekannt werden ließ, hatte der Student *Matijassewitsch* eine Jahresarbeit über mathematische Logik verfaßt, über die er auf einem internationalen Kongreß berichtete.
Der junge talentierte Wissenschaftler ist Absolvent der *Physik-Mathematik-Internatsschule*, die sich unweit der Moskauer Universität befindet. Diese Nachbarschaft ist nicht zufällig: Gegründet haben die Schule Wissenschaftler der Universität, die der Ansicht sind, daß sich mathematische Fähigkeiten bei Kindern bereits im Alter von 14 bis 15 Jahren entwickeln, zu dem Zeitpunkt also, da diese in die 7. oder in die 8. Klasse gehen. An die Schule werden – nach dem 8. Schuljahr – Schüler aus dem ganzen Lande aufgenommen. Hier gibt es nur die beiden Oberklassen: die 9. und die 10. Die Schüler wohnen in einem gemütlichen Wohnheim, für alle Ausgaben kommt der Staat auf. Der Lehrplan entspricht dem der allgemeinbildenden Schule, desgleichen das Reifezeugnis. Nur erhalten hier die Schüler umfangreichere Kenntnisse in Mathematik und Physik.
Es ist bereits zur Tradition geworden, daß jedes Frühjahr unter den sowjetischen Schulkindern Mathematikolympiaden durchgeführt werden. Bei diesen Olympiaden sind Vertreter der Moskauer Universität zugegen, die alle, die an die Physik-Mathematik-Schule aufgenommen zu werden wünschen, einer schriftlichen Prüfung unterziehen.
Auf diese Prüfung folgt noch eine mündliche, die eher einer Unterhaltung gleicht. Auf diese Weise werden mathematisch begabte Kinder ausfindig gemacht. Man lädt sie dann für einen Monat in eine vorbereitende *Sommerschule* ein, die unweit Moskaus in einer malerischen Gegend am Ufer eines Stausees liegt. Vor dem Unterricht wird geturnt, gebadet, an freien Tagen rudern oder wandern

die Kinder, spielen sie Fußball oder Volleyball. Alles ist wie in einem gewöhnlichen Pionierferienlager, doch kann man hier Vorlesungen führender Mathematiker der UdSSR, solcher wie Akademiemitglied *Andrej Kolmogorow* und anderer, hören.
Am 1. September beginnt das Schuljahr. Neben den allgemeinbildenden Fächern werden die Schüler in die Anfänge der höheren Mathematik, in moderne mathematische und physikalische Theorien sowie in Ideen und Probleme der heutigen Wissenschaft eingeweiht. Nach dem obligatorischen Unterricht können die *Jungen Mathematiker* nachmittags nach Wahl an einem der Lehrgänge *Mathematische Logik*, *Relativitätstheorie*, *Radioelektronik* oder *Wahrscheinlichkeitstheorie* teilnehmen. Diese Lehrgänge werden von Studenten und Doktoranden der Moskauer Universität geleitet, von denen einige selbst Absolventen dieser Schule sind.
Auch der Schulunterricht selbst ist hier anders organisiert als in der gewöhnlichen Oberschule: Hier werden Vorlesungen gehalten, hier gibt es Seminargruppen, außerdem Semester, und am Ende jedes Semesters eine Zwischenprüfung. Die Ferien fallen mit den Hochschulferien zusammen.
Die Schüler befassen sich nicht ausschließlich mit Physik und Mathematik. Sie besuchen Museen, Theatervorstellungen und Konzerte, nehmen an einem zweijährigen Kursus über russische Kunst, der von der Tretjakow-Galerie veranstaltet wird, teil. Einmal lud Akademiemitglied *Kolmogorow* eine Gruppe Neulinge zu sich auf die Datsche ein. Alle dachten, daß sie sich dort über Mathematik unterhalten werden. Das Gespräch drehte sich jedoch um Musik, Malerei und Architektur. Die Kinder kannten sich in der Kunst nicht besonders gut aus und waren ein wenig verlegen.
Mehrmals beteiligte sich *Kolmogorow* an Fuß- und Skiwanderungen der Schulkinder, und jedesmal wußte er ihnen viel Interessantes über die Moskauer Umgebung zu erzählen. Einmal hielt er in der Schule einen Vortrag über *Michelangelo*. Auch machte er den Kindern eine Phonotek mit Werken klassischer Musik zum Geschenk. Seit der Gründung der Schule haben sie über 2000 Schüler absolviert, 95 Prozent der Abiturienten bestanden die Hochschulaufnahmeprüfungen und studierten weiter.
Die Fenster der Schule sind bis spät erleuchtet. Der eine ist in die Lösung einer interessanten Aufgabe vertieft, der andere kann es nicht über sich bringen, einen Zukunftsroman beiseite zu legen, ein anderer wieder denkt an seine Nächsten zu Hause. Wer weiß, vielleicht wächst in diesem großen und gemütlichen Haus ein *Kurtschatow* oder ein *Kolmogorow* heran?

Lew Kokin,
(aus: Sozialistitscheskaja Industrija)

$9 \circ 5 = 2$

Die „Uhr-Addition" und andere Verknüpfungen

Wir alle wissen, es gilt: $9+5=14$. Was also bedeutet $9 \circ 5 = 2$ in der Überschrift?
Aus dem Unterricht kennen wir die vier Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Sie alle haben gemeinsam, daß zwei zu verknüpfenden Zahlen wieder genau eine dritte Zahl zugeordnet wird:

$$a, b \xrightarrow{+} c, \quad a, b \xrightarrow{-} d,$$
$$a, b \xrightarrow{\cdot} e, \quad a, b \xrightarrow{:} f.$$

In gewohnter Weise schreiben wir dafür (kürzer):

$$a+b=c, \quad a \cdot b=e,$$
$$a-b=d, \quad a:b=f.$$

Wir sehen aber auch, daß wir wegen der Subtraktion und Division unsere eben festgestellte Gemeinsamkeit präzisieren müssen. Sie muß lauten:
Zwei zu verknüpfenden Zahlen in *vorgegebener Reihenfolge* wird eindeutig eine dritte Zahl zugeordnet.
(Denn im allgemeinen gilt ja $a-b \neq b-a$, $a:b \neq b:a$.)
Wenn die Reihenfolge zweier Zahlen a und b wichtig ist, sprechen wir von den *geordneten Paaren* (a, b) bzw. (b, a).
Auch das Potenzieren können wir als eine Abbildung verstehen, die jedem Paar natürlicher Zahlen wieder genau eine natürliche Zahl zuordnet. Als Zeichen für das Potenzieren wählen wir einen Pfeil

$$(a, b) \xrightarrow{\uparrow} g \text{ oder } a \uparrow b = g.$$

Lesen wir den Pfeil als „hoch", erhalten wir die uns vertraute Schreibweise $a \uparrow b = a^b$.
Beispiel: $2 \uparrow 3 = 8$, $3 \uparrow 2 = 9$.
(Wie zuvor beim Dividieren betrachten wir auch hier nur die Menge der natürlichen Zahlen ohne die Null. Warum?)
Allgemein definieren wir jetzt:
$\circ$ heißt eine *Verknüpfung* über einer (nichtleeren) Menge M,
$=_{Df}$ ist eine eindeutige Abbildung von $M \times M$ in M.
Dabei ist das Kreuzprodukt $M \times M$ die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a, b \in M$. D. h. also mit anderen Worten, eine Verknüpfung $\circ$ ist eine spezielle, nämlich zweistellige Funktion:
Jedem Paar $(a, b) \in M \times M$ wird eindeutig ein Element $c \in M$ zugeordnet:

$$(a, b) \xrightarrow{\circ} c \text{ oder } \circ : (a, b) \rightarrow c;$$

wir schreiben (wie bei den vier Grundrechenarten und beim Potenzieren) dafür $a \circ b = c$.
Der Definitionsbereich $D_\circ$ dieser Funktion $\circ$ besteht aus der Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a, b \in M$:

$$D_\circ = M \times M.$$

Für den Wertevorrat $W_\circ$ gilt:

$$W_\circ \subseteq M.$$

Natürlich ist in unserer Definition auch stets der Fall $a=b$ zugelassen, d. h., die zwei zu verknüpfenden Elemente müssen nicht notwendig verschieden sein.
Die Definition läßt sich besonders einprägsam mit Hilfe eines sogenannten *Automaten* veranschaulichen: (Bild 1).

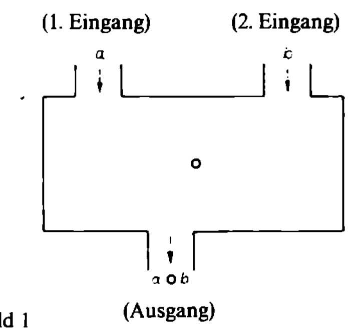


Bild 1

Dabei interessiert uns weniger die innere Wirkungsweise des Automaten als vielmehr, welches Ergebnis die Verknüpfung liefert.
Ob es uns gelingt, über einer Menge M eine Verknüpfung $\circ$ zu definieren, hängt wesentlich von dieser Menge M selbst ab. So ist z. B. die Subtraktion zwar eine Verknüpfung, wenn wir für M die Menge G der ganzen Zahlen wählen, nicht aber, wenn wir die Menge N der natürlichen Zahlen zugrunde legen. Bekanntlich existiert $3-7$ in N nicht. D. h., wenn wir entscheiden sollen, ob die Abbildung $\circ$ eine *eindeutige* Abbildung *von* $M \times M$ *in* M ist, dann steht vor der Frage nach der Eindeutigkeit (von $a \circ b$) erst einmal die Frage der Existenz von $a \circ b$ in M für alle $a, b \in M$. Ist letzteres gesichert, sagen wir, M ist bezüglich $\circ$ abgeschlossen oder $\circ$ führt nicht aus M hinaus.
Ist $\circ$ eine Verknüpfung über einer Menge M, so nennen wir $(M, \circ)$ ein *Verknüpfungsgebilde* mit der *Trägermenge* M und der Verknüpfung $\circ$. Verknüpfungsgebilde sind z. B. $(N, +)$, $(P, -)$, $(G, \cdot)$ und $(R \setminus \{0\}, :)$. Wählen wir dagegen z. B. die Menge der Primzahlen als Trägermenge M, so liefert uns keine der vier Grundrechenarten ein Verknüpfungsgebilde:
$7+3 \notin M$, $7 \cdot 3 \notin M$, $7-3 \notin M$, $7:3 \notin M$.

Aufgabe 1

Welche Zahlbereiche liefern bzgl. einer der vier Grundrechenarten weitere Verknüpfungsgebilde?
Sei $M = \{1, 2, \ldots, 12\}$ die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis 12 und $\circ$ eine Verknüpfung, die auf die folgende Weise über M definiert ist:

Für alle $x, y \in M$:

$$x \circ y =_{Df} \begin{cases} x+y, \text{ falls } x+y \leqq 12 \\ x+y-12, \text{ falls } x+y > 12. \end{cases}$$

Beispiel:
$x=3, y=7: x+y=10 \leqq 12$,
also $3 \circ 7 = 10$,
$x=9, y=5: x+y=14>12$,
also $9 \circ 5 = 2$.

Diese scheinbar ungewöhnliche Verknüpfung vollziehen wir täglich; dazu brauchen wir nur einmal auf unsere Uhr zu schauen! Wir nennen $\circ$ deshalb die *Uhr-Addition* und wollen sie deshalb auch mit $+\oplus$ bezeichnen.

Aufgabe 2

a) Zeige, daß $(M, +\oplus)$ ein Verknüpfungsgebilde ist, d. h., zeige, daß die Definition von $+\oplus$ eine Verknüpfung über M liefert!
b) Welche dir bekannten Eigenschaften der Addition besitzt die *Uhr-Addition*?

Aufgabe 3

Sei $M = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ die Menge der geraden (natürlichen) Zahlen von 0 bis 8. Für alle $x, y \in M$ definieren wir $x \circ y$ als die einstellige Zahl z, deren Ziffer mit der Endziffer der Summe von x und y identisch ist.
Beispiel: $2 \circ 4 = 6$, $4 \circ 8 = 2$, $8 \circ 8 = 6$.
a) Zeige, daß $(M, \circ)$ ein Verknüpfungsgebilde ist!
b) Untersuche, ob die Menge $M' = \{0, 2, \ldots, 8, 10\}$ bezüglich $\circ$ abgeschlossen ist!
c) Vergleiche die Eigenschaften von $\circ$ (über M) mit denen der *Uhr-Addition*!
d) Versuche, die Definition von $\circ$ (über M) in zur *Uhr-Addition* analoger Weise anzugeben: $x \circ y =_{Df} \ldots$!
e) Konstruiere selbst Verknüpfungsgebilde nach dem Muster der Aufgaben 2 und 3.

Um mit den Begriffen *Verknüpfung*, *Trägermenge*, *Verknüpfungsgebilde* ein wenig vertrauter zu werden, bedarf es nun keineswegs eines Ausfluges in uns unbekannte Gebiete – wie man anhand der Aufgabe 3 vielleicht vermuten könnte. Schon im Mathematikunterricht begegnen uns viele Verknüpfungen. Es gilt nur, sie aufzuspüren, zu erkennen! Beginnen wir unsere Entdeckungsreise in Klasse 5/6, so stoßen wir auf die Berechnung des Umfanges eines Rechtecks bzw. Parallelogramms. *Übersetzen* wir die Umfangsformel in unsere *Sprache der Verknüpfungen*, erhalten wir:

Zwei natürlichen bzw. gebrochenen Zahlen a und b wird ihre doppelte Summe zugeordnet.

Wir überzeugen uns leicht davon, daß sowohl $(N, \circ)$ als auch $(R^*, \circ)$ mit
$x \circ y =_{Df} 2 \cdot (x+y)$ für alle $x, y \in N$ (bzw. R^*)
Verknüpfungsgebilde sind, denn Abgeschlossenheit der jeweiligen Trägermenge gegenüber $\circ$ und Eindeutigkeit des Ausdrucks $2 \cdot (x+y)$ sind offensichtlich gesichert.

Aufgabe 4

Ermittle $1 \circ 1$, $2 \circ 1$, $4 \circ 0$, $2 \circ 3$, $0 \circ 3$ und $0 \circ 0$!

Aufgabe 5

In Klasse 6 begegnen uns Flächeninhalt eines Dreiecks sowie Umfang eines gleichschenkligen Dreiecks. Zu welchen Verknüpfungen (genauer: Verknüpfungsgebilden) führen uns diese Begriffe?

Auch hinter dem *Durchschnitt zweier Zahlen* verbirgt sich eine Verknüpfung, nämlich die Bildung des *arithmetischen Mittels:* Für alle $x, y \in R^*$ wird definiert: $x \Delta y =_{Df} \frac{x+y}{2}$.

Neben dem arithmetischen Mittel, das uns auch an die Berechnung der Länge der Mittellinie eines Trapezes erinnert, kennen wir (aus Klasse 9) noch das *geometrische* und das *harmonische Mittel:*

Für alle positiven reellen Zahlen x, y wird definiert:
$x * y =_{Df} \sqrt{x \cdot y}$ und $x \square y =_{Df} \frac{2 \cdot x \cdot y}{x+y}$.

Aufgabe 6

Ermittle $x \Delta y$, $x * y$ und $x \square y$ (über P^+) für
a) $x=2, y=1$,
b) $x=2, y=2$ und
c) $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{8}$.

Aufgabe 7

a) Welche der dir bekannten Zahlbereiche sind bezüglich der Bildung des arithmetischen Mittels (Δ) abgeschlossen; welche nicht?
b) Warum kann für das geometrische Mittel ($*$) nicht N, G, R, R^* oder P als Trägermenge gewählt werden?
c) Sind $(R^* \setminus \{0\}, \square)$ und $(R \setminus \{0\}, \square)$ Verknüpfungsgebilde?

Aufgabe 8

Beweise, daß für die Mittelwerte die folgende Ungleichung gilt!
Für alle $x, y \in P^+$:

$$x \square y \leqq x * y \leqq x \Delta y.$$

Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Auch der Satz des Pythagoras (Klasse 9/10) liefert uns über der Menge P^+ der positiven reellen Zahlen eine Verknüpfung:
$x \bullet y =_{Df} \sqrt{x^2+y^2}$ für alle $x, y \in P^+$.

Aufgabe 9

a) Ergänze die Ungleichung aus Aufgabe 6 derart, daß auch die Verknüpfung $\bullet$ berücksichtigt wird!
b) Untersuche, ob auch $(P^+ \cup \{0\}, \bullet)$ ein Verknüpfungsgebilde ist!

Wiederum schon aus Klasse 6 sind uns die Bildung des *größten gemeinsamen Teilers* sowie des *kleinsten gemeinsamen Vielfachen* geläufig. Um die Eindeutigkeit zu sichern, stützen wir uns dabei auf die Menge N der natürlichen Zahlen.

Für alle $x, y \in N$ wird definiert:
$x \sqcap y =_{Df} \text{ggT}(x, y)$ und $x \sqcup y =_{Df} \text{kgV}(x, y)$.
Beispiele: $136 \sqcap 300 = 4$, $144 \sqcap 189 = 1$, $1125 \sqcup 35 = 7875$, $45 \sqcup 18 = 90$.

Aufgabe 10

a) Wie lautet eine genaue Definition für $x \sqcap y$ und $x \sqcup y$?
In der Definition von $\sqcap$ und $\sqcup$, die du aufschreibst, sollst du die Wörter *größer* ($>$) und *kleiner* ($<$) nicht verwenden, sondern nur von Teilbarkeit sprechen.
b) Ermittle für $a_1 = 24$, $b_1 = 180$ und $a_2 = 476$, $b_2 = 714$ sowohl $a_i \sqcap b_i$ als auch $a_i \sqcup b_i$ $(i = 1, 2)$!
c) Untersuche, wie sich 0 und 1 bezüglich der beiden Verknüpfungen $\sqcap$ und $\sqcup$ verhalten!
d) Beweise, daß für alle $x, y \in N$ gilt:

$$(x \sqcap y) \cdot (x \sqcup y) = x \cdot y.$$

Wie lautet diese Beziehung, wenn x und y teilerfremd sind?
e) Für alle $x, y \in N$ gilt:
$(x \sqcup y) \sqcap x = x$ und $(x \sqcap y) \sqcup x = x$
Veranschauliche dir diese Sätze mittels Automaten!

Aufgabe 11

a) Suche passende Zahlen für die freien Ein- und Ausgänge im folgenden Automaten-*Baum*! (Bild 2)

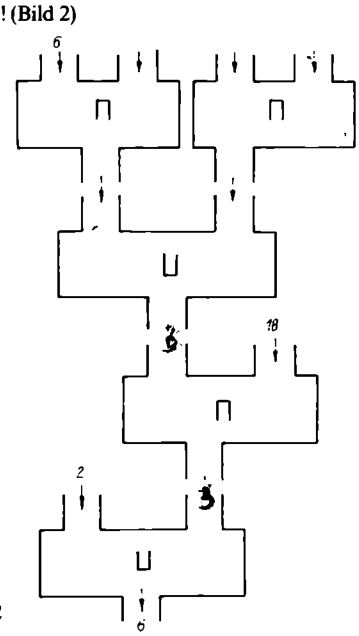


Bild 2

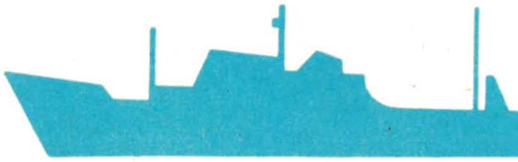
b) Gibt es mehrere Möglichkeiten?

Abschließend wollen wir anhand von zwei weiteren Verknüpfungen zeigen, daß die Trägermenge eines Verknüpfungsgebildes nicht notwendig aus Zahlen bestehen muß. Das sind einerseits die Bildung des *Durchschnitts* (in Zeichen: $\cap$ – Klasse 9) und andererseits die der *Vereinigung* (in Zeichen: $\cup$) zweier Mengen. Sei M eine beliebige (nichtleere) Menge. Dann wählen wir als Trägermenge jeweils die sogenannte *Potenzmenge* $\mathfrak{P}(M)$. Sie besteht aus allen Teilmengen von M, also einschließlich M selbst und der leeren Menge (denn $M \subseteq M$ und $\emptyset \subseteq M$). Die Verknüpfungsgebilde $(\mathfrak{P}(M), \cap)$ und $(\mathfrak{P}(M), \cup)$ verhalten sich ähnlich wie die zuvor betrachteten Verknüpfungsgebilde $(N, \sqcap)$ und $(N, \sqcup)$ – worauf wir mit der Bezeichnung der Verknüpfungen hinweisen wollten.

Ingmar Lehmann

Vollmatrose der Handelsschiffahrt

Berufsbild



Der ständig wachsende Warenaustausch mit vielen Ländern der Erde, insbesondere mit der Sowjetunion und den anderen sozialistischen Staaten, stellt hohe Anforderungen an das Verkehrs- und Transportwesen. Der wichtigste Verkehrsträger im Überseehandel der Deutschen Demokratischen Republik ist die Handelsflotte. Der Transportprozeß wird durch den steigenden Umfang der Teilautomatisierung und Automatisierung der Schiffe bestimmt. Der technische Ausrüstungsgrad an Bord erfordert Vollmatrosen der Handelsschiffahrt, die als vielseitig ausgebildete sozialistische Facharbeiter jederzeit in der Lage sind, die verschiedenen seemännischen Tätigkeiten weitgehend selbständig zu verrichten. Dazu gehören Arbeiten zur

- Gewährleistung einer sicheren Fahrt des Schiffes
- Vorbereitung des Lade- und Löschprozesses sowie zur Betreuung der Ladung
- Aufrechterhaltung und Wiederherstellung der Funktionstüchtigkeit des Schiffes sowie seiner Einzelaggregate und Anlagen.

Die Vollmatrosen der Handelsschiffahrt werden auf allen Schiffen unserer Hochseehandelsflotte eingesetzt. Die Arbeiten im Schiffsbetriebsdienst verlangen eine unbedingte Einordnung in das Kollektiv sowie bewußte, disziplinierte Arbeits- und Befehlsausführung.

Alle Arbeiten müssen mit Umsicht, Entschlußkraft und ständiger Einsatzbereitschaft ausgeführt werden. Speziell im Ladungs- und Betriebsdienst werden hohe Forderungen an die Aufmerksamkeit und das Verantwortungsbewußtsein gestellt, da Unterlassungen und Fehler schwerwiegende Folgen für Besatzung, Schiff und Ladung haben.

Die Vollmatrosen der Handelsschiffahrt müssen in der Lage sein, die mit dem zunehmenden Automatisierungsgrad in den Schiffen installierten Maschinen und Anlagen zu bedienen, zu warten sowie unter Anleitung von Ingenieuren instandzuhalten. Das erfordert eine breite technische Grundlagenbildung, exaktes Wissen und Können auf einem Spezialgebiet sowie Bereitschaft, die Kenntnisse und Fertigkeiten stets dem neuesten Stand anzupassen. Die notwendige Zusammenarbeit mit Werktätigen anderer Länder verlangen ein klassenbewußtes Auftreten im Ausland und das Beherrschen von Fremdsprachen.

Besondere psychische und physische Belastungen ergeben sich aus der Arbeit unter den extremen Bedingungen während der Fahrt bei jedem Wetter und aus dem ständigen Klimawechsel. Die Seefahrt erfordert hohe moralische Qualitäten, Liebe zur Arbeit, Patriotismus, sozialistisches Bewußtsein, Achtung des gesellschaftlichen Eigentums sowie Rücksichtnahme auf Sitten und Gebräuche fremder Völker und Kenntnis ihrer Gesetze.

Voraussetzung zum Erlernen dieses Berufes ist der erfolgreiche Abschluß der 10. Klasse der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule, verbunden mit guten Leistungen in Mathematik, Physik, Chemie, Fremdsprachen und im polytechnischen Unterricht. Weitere Voraussetzungen sind die Ablegung der A-Prüfung (Seesport) im Anschluß an die seemännische Ausbildung bei der GST, die erfolgreiche Teilnahme an einer Ausbildung in der Ersten Hilfe sowie der Nachweis der physischen Voraussetzungen entsprechend den Anforderungen, die in den Bestimmungen des Medizinischen Dienstes des Verkehrswesens der DDR für die Seetauglichkeitsgruppe 1 festgelegt sind.

Der Beruf Vollmatrose der Handelsschiffahrt ist für Mädchen nicht geeignet.

Die Ausbildung dauert zwei Jahre. Sie erfolgt landseitig und an Bord der Ausbildungsschiffe bzw. der Handelsschiffe. Im ersten Lehrjahr werden neben den Grundlagen der Datenverarbeitung, der BMSR-Technik und der Elektronik Gebiete der breiten technischen Grundlagenbildung in Seemannschaft, mechanischer Technologie und allgemeiner Maschinenkunde, Decksbetriebstechnik und Maschinenbetriebstechnik vermittelt.

Im zweiten Lehrjahr erfolgt die Ausbildung in einer der drei beruflichen Spezialisierungsrichtungen Deckbetriebstechnik, Maschinenbetriebstechnik od. Elektrotechnik/Elektronik.

Dieser Beruf ist Voraussetzung für die Ausbildung zum Schiffsoffizier für Deckbetriebstechnik, für Schiffbetriebstechnik bzw. für Elektrotechnik an der Fachschule. Bei landseitigem Einsatz ist die Qualifizierung zum Meister für Schiffsanlagen oder zum Erprobungsingenieur für Kooperationsbetriebe des Schiffbaus möglich.

Eine Aufgabe von Prof. Dr. sc. J. Flachsmeyer

Sektion Mathematik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

▲1565a▲ Das um eine Raumdiagonale ergänzte Eckpunkt-Kantensystem eines Würfels stelle das Verdrahtungsschema eines elektrischen Netzwerkes dar.

Man begründe, daß sich die Schaltung nicht als gedruckte Schaltung realisieren läßt, d. h., der durch Bild 1 bzw. Bild 2 dargestellte Graph läßt sich nicht in der Ebene kreuzungsfrei als Verbindungssystem von Kurven darstellen, daß dabei nur die gewünschten 8 Knotenpunkte auftreten.

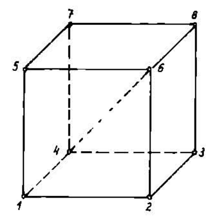


Bild 1

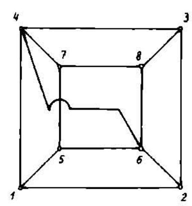


Bild 2

Dabei benutze man die Tatsache, daß der folgende – in zwei gleichwertigen Realisierungen gezeigte – Sechseckgraph nicht plättbar ist, d. h. dieser besitzt keine kreuzungsfreie, ebene Realisierung, wo also nur die 6 Knotenpunkte als Schnittpunkte vorkommen und in jedem nur jeweils 3 Kurven einmünden.

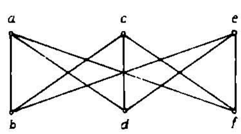


Bild 3

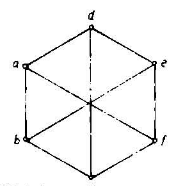


Bild 4

▲1565b▲ Den Koordinateneinheitswürfel denke man sich im Nullpunkt angeheftet und um diesen frei beweglich. Die Endpunkte der 3 Koordinateneinheitsvektoren seien wohlunterschieden markiert.

a) Wieviel verschiedene Lagen des Würfels im ersten Oktanten sind möglich?

b) Man stelle jede der ermittelten Lagen aus der Ausgangslage durch eine Aufeinanderfolge von zwei Drehungen um Koordinatenachsen her!

c) Man stelle jede der ermittelten Lagen durch eine einzige Drehung um eine geeignete Achse (welche?) her!

Mit welchem Winkel muß dabei um diese Achse gedreht werden? (Bild s. S. 143)

Wer löst mit?
alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 8. März 1977

Ma 5 ■1566 Im Jahre 1975 stellt Ute fest, daß sie und ihr sechs Jahre älterer Bruder Axel zusammen 30 Jahre alt sind (in ganzen Zahlen). Utes Mutter ist zwei Jahre jünger als ihr Vater. Alle vier Familienmitglieder werden in diesem Jahr zusammen 120 Jahre alt. Wie alt sind Ute, Axel, deren Vater und Mutter im Jahre 1975 geworden?

Schülerin Gudrun Tappert, Guben

Ma 5 ■1567 Auf einer Geburtstagsfeier wurden von den Gästen 10 Glas Kirschlimonade getrunken, die wie folgt zubereitet waren: Sieben Teile Selterswasser wurden mit einem Teil Kirschsirup vermischt. Die Trinkgläser faßten bis zum Eichstrich genau 0,2 Liter und waren bis dahin gefüllt. Wieviel Liter Kirschsirup wurden verbraucht?

Schülerin Gudrun Tappert, Guben

Ma 5 ■1568 Auf alle Seitenflächen eines Pappwürfels wurden gleichgroße Pappwürfel so aufgeklebt, daß jeweils zwei quadratische Begrenzungsflächen zur Deckung kommen.

a) Wieviel quadratische Flächen begrenzen den so entstandenen Körper?

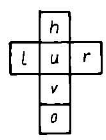
b) Angenommen, alle verwendeten Würfel wären Spielwürfel und diese Würfel wären so aneinandergeklebt, daß die Gesamtaugenzahl der Flächen, die nicht überklebt sind, möglichst groß ist; wie groß ist in diesem Fall die Gesamtaugenzahl?

Studienrat H.-J. Kerber, Neustrelitz

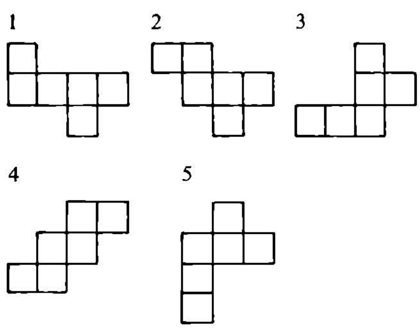
Ma 5 ■1569 Zwei Autobusse fuhren die eingetroffenen Pioniere vom Bahnhof in ihr Sommerlager. Der erste Autobus fuhr dreimal, der zweite fünfmal. Mit dem zweiten Autobus wurden insgesamt 86 Pioniere mehr befördert als mit dem ersten. Jeder der beiden Autobusse beförderten bei jeder Fahrt gleichviel Pioniere; nur bei der letzten Fahrt waren in den zweiten Autobus vier Pioniere weniger als während der Fahrten zuvor eingestiegen. Wieviel Pioniere waren insgesamt eingetroffen?

Studienrat H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■1570 Die sechs Begrenzungsflächen eines Würfels seien durch die Abkürzungen u, o, l, r, v, h für unten, oben, links, rechts, vorn, hinten bezeichnet. Das Netz eines Würfels könnte dann wie folgt aussehen:



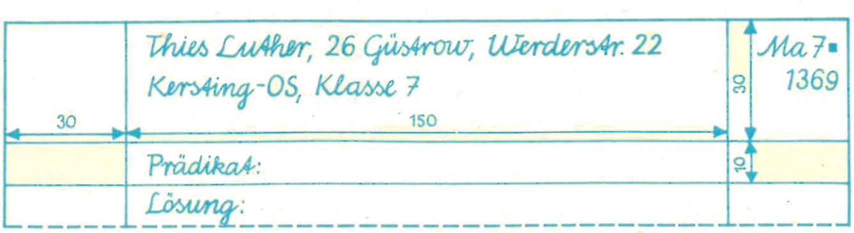
Beschrifte die nachstehend abgebildeten fünf Netze eines Würfels auf gleiche Weise! Aus welchem dieser Netze läßt sich kein Würfel herstellen?



Studienrat H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■1571 Wenn man die beiden Ziffern einer zweistelligen natürlichen Zahl ebenfalls als Zahlen auffaßt, aus ihnen die Differenz bildet und davon 1 subtrahiert, so erhält man den dreizehnten Teil der ursprünglichen zweistelligen natürlichen Zahl. Wieviel Zahlen dieser Art gibt es, wie lauten sie?

Studienrat H.-J. Kerber, Neustrelitz



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 197 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Mitarbeiter korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1976/77 läuft von Heft 5/76 bis Heft 2/77. Zwischen dem 1. und 10. September 1977 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/76 bis 2/77 erworbenen Karten *geschlossen* an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/77 veröffentlicht. Wer mindestens *10* Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/76 bis 2/77) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1976/77 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind, und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

Ma 6 ▪1572 In einem Regal einer Bibliothek befinden sich mehr als 340, aber weniger als 350 Bücher. Genau der vierte Teil dieser Bücher besteht aus Kinderbüchern, genau der dritte Teil aus Erzählungen, die restlichen Bücher sind Romane. Wieviel Kinderbücher, Erzählungen und Romane enthält dieses Regal?

Schülerin Karin Sukowski, Neukloster

Ma 6 ▪1573 Ein Schüler, nach dem von ihm auf einem mathematischen Wettbewerb erreichten Platz befragt, antwortete scherzhaft: „Addiert man zu der Zahl, die der von mir erreichten Platzziffer entspricht, noch 5, dividiert man diese Summe durch 10, vermehrt man diesen Quotienten um 3 und multipliziert man die nunmehr erhaltene Summe mit 5, so erhält man eine Zahl, die um 10 größer ist, als diejenige Zahl, die der von mir erreichten Platzziffer entspricht." Welchen Platz hatte dieser Schüler auf dem mathematischen Wettbewerb erreicht?

Schülerin Carola Senft, Wingerode

Ma 6 ▪1574 Eine Fluglinie verbindet zwei Orte A und B, die 2240 km voneinander entfernt sind. Ein Flugzeug legt drei Viertel der Flugstrecke $\overline{AB}$ mit einer mittleren Geschwindigkeit von $840 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ zurück. Während der restlichen Flugstrecke beträgt die mittlere Geschwindigkeit des Flugzeuges $800 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Es ist die Dauer der gesamten Flugzeit zu berechnen.

Schüler Jörg Bruchertseifer, Dubna, UdSSR

Ma 6 ▪1575 Auf einem Sportfest errang Ursula mehr als 1475, aber weniger als 1500 Punkte. Sabine schaffte nur den dritten Teil der von Ursula erzielten Punktzahl. Auf einer früheren Spartakiade hatte Ursula nur den neunten Teil der Punktzahl erreicht, die sie gegenwärtig auf dem Sportfest erkämpfte. Die auf der früheren Spartakiade von Ursula erzielte Punktzahl war ein Vielfaches der Zahl 5. Wieviel Punkte errang Sabine auf dem Sportfest?

Schülerin Ines Schulze, Milmersdorf

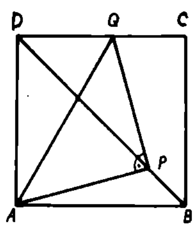
Ma 6 ▪1576 Ein Kraftfahrer fährt mit seinem Wartburg auf der Autobahn mit der durchschnittlichen und höchst zulässigen Geschwindigkeit von $100\,\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$. Er wird von einem Moskwitsch, der mit einer überhöhten Geschwindigkeit von $120\,\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ fährt, überholt. An einer Raststätte am Kilometerstein 87 hält der Wartburg. Dort stand bereits der Moskwitsch, dessen Fahrer den Wartburg am Kilometerstein 54 überholt hatte. Um wieviel Minuten ist der Moskwitsch an der Raststätte früher angekommen als der Wartburg, wenn er die Geschwindigkeit von $120\,\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ beibehalten hat? *Sch.*

Ph 6 ▪1577 An zwei rechtwinklig angeordneten Spiegeln wird jeder in der Ebene der beiden Spiegelnormalen einfallende Strahl nach zweimaliger Reflexion parallel zu sich selbst zurückgeworfen.
Dies ist zu beweisen! *H. B.*

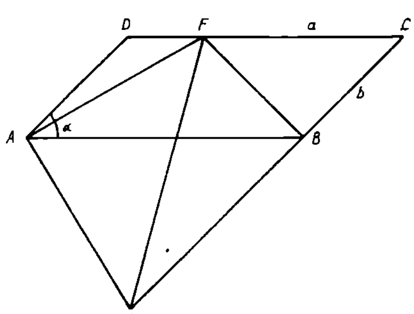
Ma 7 ▪1578 Für welche Paare (a, b) natürlicher Zahlen a und b mit $a \leq b$ ist ihr Produkt zehnmal so groß wie ihre Summe?

Ma 7 ▪1579 Sammelkarten für die Benutzung von Straßenbahnen enthalten bei einem einheitlichen Preis von 1 Mark pro Sammelkarte in Berlin fünf, in Leipzig sechs und in Halle acht Fahrabschnitte. Jemand, der in diesen drei Orten häufig beruflich zu tun hat, verbrauchte während eines Monats insgesamt 12 Sammelkarten mit insgesamt 77 Fahrabschnitten. Wieviel Sammelkarten jeder dieser drei Städte könnten von ihm innerhalb dieses Monats verbraucht worden sein? *Sch.*

Ma 7 ▪1580 Die abgebildete Figur stellt ein Quadrat $ABCD$ dar. Ein innerer Punkt P der Diagonale $\overline{BD}$, der nicht mit dem Mittelpunkt von $\overline{BD}$ zusammenfällt, wurde mit dem Punkt A verbunden. Durch P wurde die Senkrechte zu AP konstruiert, die CD in Q schneidet, und es wurde A mit Q verbunden. Es ist zu beweisen, daß das Dreieck APQ gleichschenklig ist. *Sch.*

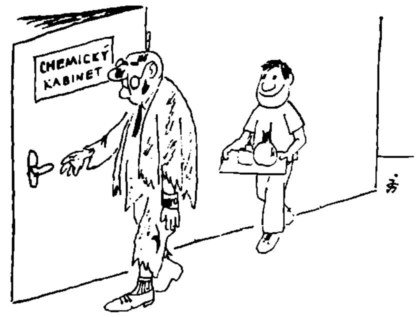


Ma 7 ▪1581 Die abgebildete Figur stellt ein Parallelogramm $ABCD$ mit $\sphericalangle BAD = \alpha < 90°$ und $\overline{AB} > \overline{BC}$ dar. Um D wurde ein Kreis mit dem Radius $\overline{CD} = a$ geschlagen, der BC in E schneidet. Um B wurde ein Kreis mit dem Radius $\overline{BC} = b$ geschlagen, der CD in F schneidet. Es ist nachzuweisen, daß das Dreieck AEF gleichschenklig ist. *Sch.*



Ph 7 ▪1582 In einem Bergwerk wird ein Pumpaggregat von 300 W verwendet. Dieses fördert aus einer Tiefe von 30 m in jeder Minute 40 l Wasser.
Berechne den Wirkungsgrad des Pumpaggregats! *H. B.*

Ch 7 ▪1583 Je 0,5 kg Eisen(II)-oxid, Eisen(III)-oxid und Eisen(II, III)-oxid werden durch Aluminium reduziert. Berechne, wieviel Gramm Eisen bei jeder Redoxreaktion entstehen!



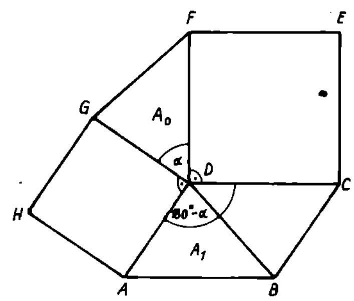
Nach dem Lehrerexperiment

Ma 8 ▪1584 Es soll die Zahl

$$z = \frac{970^2 + 971^2 + 972^2 + 973^2 + 974^2 + 975^2 + 976^2}{972 \cdot 974 + 5}$$

auf eine möglichst einfache Weise berechnet werden.
Anleitung zur Lösung: Man setze $a = 973$ und wende die binomischen Formeln an. *L.*

Ma 8 ▪1585 Über den Seiten $\overline{CD}$ und $\overline{AD}$ eines Parallelogramms $ABCD$ wurden die Quadrate $DCEF$ und $ADGH$ nach außen konstruiert (vgl. das Bild), und es wurden B mit D und F mit G verbunden.

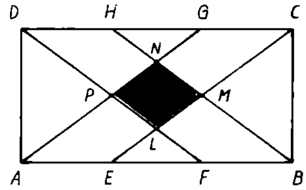


Es seien A_0 der Flächeninhalt des Dreiecks DFG und A_1 der Flächeninhalt des Dreiecks ABD. Welche der nachfolgenden Beziehungen trifft zu:
$A_0 < A_1$ oder $A_0 = A_1$ oder $A_0 > A_1$? *Sch.*

Ma 8 ▪1586 Im Jahre 1948 wurde bei dem Achterrennen der Olympischen Spiele erstmalig eine Zeit von 6 min unterschritten. Das Siegerboot legte die 2000 m lange Strecke in 5 min 56,7 s zurück. Im Jahre 1970, also 22 Jahre später, benötigte der Berliner Dynamo-Achter bei den Weltmeisterschaften in Kanada für die 2000 m lange Rennstrecke nur noch 5 min 36,1 s und wurde Weltmeister.
a) Um wieviel Prozent verringerte sich gegenüber 1948 die Zeit im Jahre 1970?
b) Wie groß waren die Geschwindigkeiten $\left(\text{in } \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ 1948 und 1970?

c) Um wieviel Prozent erhöhte sich gegenüber 1948 die Geschwindigkeit im Jahre 1970?
d) Warum ist der unter a) zu berechnende Prozentsatz kleiner als der unter c) zu berechnende Prozentsatz?
(Die Prozentsätze sollen mit 1 Stelle nach dem Komma berechnet werden, die Geschwindigkeiten jedoch mit 2 Stellen.) *L.*

Ma 8 ▪1587 Es sei $ABCD$ ein Rechteck mit den Seitenlängen $\overline{AB}=a$ und $\overline{BC}=b$. Jede der beiden Rechteckseiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sei in drei gleiche Teile geteilt, d. h., es gilt $\overline{AE}=\overline{EF}=\overline{FB}$ und $\overline{DH}=\overline{HG}=\overline{GC}$ (vgl. das Bild).



Wie verhält sich der Flächeninhalt A_1 des von den Verbindungsgeraden AG, EC, FD und BH begrenzten Vierecks $LMNP$ zu dem Flächeninhalt A_0 des Rechtecks $ABCD$? *Sch.*

Ph 8 ▪1588 Eine Sauerstoffflasche mit 50 l Inhalt steht unter einem Überdruck von 28 at. Wieviel Sauerstoff kann bei einem Barometerstand von 750 Torr entweichen? *H. B.*

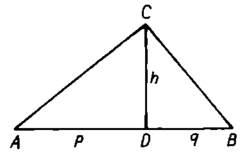
Ch 8 ▪1589 Die Kosten für Umschlag und Ausbringen von Dünger betragen a M je Hektar im agrochemischen Zentrum (ACZ), b M je Hektar in der LPG; sie sind proportional der Größe der landwirtschaftlichen Nutzfläche (LN) in Hektar.
a) Stelle die Funktionsgleichungen auf!
b) In einem ACZ mit 15000 ha Einsatzbereich sind für PK-Dünger die Selbstkosten $a=27{,}42\,\frac{\text{M}}{\text{ha}}$, in der LPG lag der Selbstkostensatz bei $b=47\,\frac{\text{M}}{\text{ha}}$.
Um wieviel Prozent gingen die Selbstkosten zurück?
Wie hoch sind die Kosten im ACZ, und wie groß ist die Ersparnis?
c) Stelle die Kosten für die PK-Düngung in Abhängigkeit von der Größe der LN graphisch dar!

Ma 9 ▪1590 Es sind alle reellen Lösungen des Gleichungssystems

$$xy = 4, \quad (1)$$
$$yz = 16, \quad (2)$$
$$zx = 9 \quad (3)$$

zu ermitteln.
Bemerkung: Diese Aufgabe stammt von dem griechischen Mathematiker ***Diophantos von Alexandria*** (um 250 u. Z.), der nicht nur die nach ihm benannten diophantischen Gleichungen (Gleichungen im Bereich der ganzen Zahlen) behandelt hat. *L.*

Ma 9 ▪1591 Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse $\overline{AB}$ die Länge $c=20$ cm hat (vgl. das Bild).



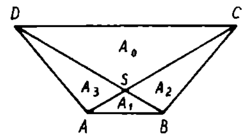
Man berechne die Längen der Hypotenusenabschnitte $\overline{AD}=p$ und $\overline{DB}=q$, wenn die zugehörige Höhe $\overline{CD}=h$ gegeben ist, und zwar für die Fälle:
a) $h=6$ cm, b) $h=10$ cm, c) $h=11$ cm.
Klaus Meier, Osternienburg
Fachlehrer für Mathematik und Physik

Ma 9 ▪1592 Man beweise, daß für alle reellen Zahlen a und b die Ungleichung

$$\frac{a^4+b^4+1}{2} \geq a^2+b^2-a^2b^2$$

erfüllt ist. *F. Sprang, Rochlitz,*
Fachlehrer für Mathematik

Ma 9 ▪1593 Es sei $ABCD$ ein gleichschenkliges Trapez, dessen Grundseite $\overline{CD}$ dreimal so lang wie die Grundseite $\overline{AB}$ ist. S sei der Schnittpunkt der Diagonalen dieses Trapezes. Ferner seien A_0, A_1, A_2 und A_3 die Flächeninhalte der Dreiecke SCD, SAB, SBC und SDA (vgl. das Bild).

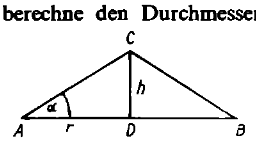


Wie verhält sich die Summe der Flächeninhalte A_1, A_2 und A_3 zu dem Flächeninhalt A_0? *Rolf Kamieth, OS Kakerbeck, Kl. 9*

Ph 9 ▪1594 Welchen Durchmesser müssen zwei Bleikugeln haben, wenn sie sich berühren und sich gegenseitig mit einer Kraft von 0,1 p anziehen sollen? *H. B.*

Ch 9 ▪1595 Durch Eindampfen einer wäßrigen Kalziumnitratlösung werden 10 g festes Salz erhalten.
a) Wieviel Gramm Kalziumhydroxid werden zur Neutralisation benötigt, damit sich diese Masse Salz bildet?
b) Wieviel Gramm 20%ige Säure werden gebraucht, um die gleiche Masse an festem Salz herzustellen?

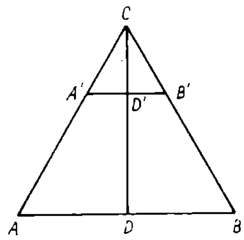
Ma 10/12 ▪1596 Die Ladung eines Lastkraftwagens, der mit 5 t Sand beladen ist, soll zu einem „Schüttkegel" aufgeschüttet werden, d. h. einem geraden Kreiskegel, dessen Achsenschnitt ein gleichschenkliges Dreieck ABC (vgl. das Bild) ist, mit dem Böschungswinkel $\sphericalangle CAB=\alpha=33°$. Dabei beträgt die Dichte des Sandes $\varrho=2{,}4\ \text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$.
Man berechne den Durchmesser und den



Umfang des Grundkreises sowie die Höhe des Schüttkegels.
Helmut Engelmann, Sachsendorf
Fachlehrer für Mathematik

Ma 10/12 ▪1597 Man beweise, daß die Zahl $z=2^{300}-(2^{150}+2^{100}+2^{60})+(2^{50}+2^{30}+2^{20})-2^{10}$ durch 300 teilbar ist.
Eva Kertesz, OS Kecskemet (Kl. 12),
Ungarische VR

Ma 10/12 ▪1598 a) Von einem gleichschenkligen Dreieck ABC sei durch eine Parallele zur Basis ein Dreieck $A'B'C$ so abgeschnitten, daß sich der Flächeninhalt des Dreiecks $A'B'C$ zu dem Flächeninhalt des Dreiecks ABC wie 1 : 64 verhält (vgl. das Bild).



Wie verhalten sich die Höhen dieser beiden Dreiecke zueinander?
b) Von einem geraden Kreiskegel K sei durch eine zur Grundfläche parallele Ebene ein Kreiskegel K' so abgeschnitten, daß sich das Volumen des Kegels K' zu dem Volumen des Kegels K wie 1 : 64 verhält.
Wie verhalten sich die Höhen der Kegel K' und K zueinander? *L.*

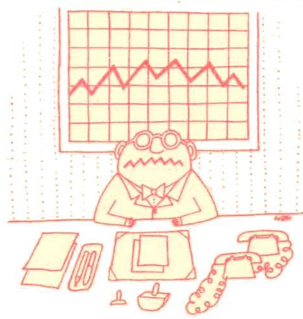
Ma 10/12 ▪1599 Es sind alle reellen Zahlen x anzugeben, die die folgende Eigenschaft haben:
Von den folgenden 7 Bedingungen ist *genau eine* erfüllt; die anderen sind nicht erfüllt:
$x^2<\frac{1}{2}$, (1) $x^4>\frac{1}{4}$, (2) $x<0$ (3)
$-1\leq x\leq 1$, (4) $x>1$, (5)
x ist eine rationale Zahl. (6)
x ist Lösung der Gleichung $x^3=a$, wobei a eine ganze Zahl ist. (7) *L.*

Ph 10/12 ▪1600 Ein Kraftwagen durchfährt eine Kurve von 150 m Krümmungsradius mit einer Geschwindigkeit von $81\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Seine Gesamtmasse beträgt 1,2 t.
a) Berechnen Sie die Zentrifugalkraft!
b) Berechnen Sie die Mindestgröße der Haftreibungszahl, damit das Fahrzeug nicht ins Rutschen gerät!
c) Welchen Winkel gegenüber der Horizontalen müßte die Straße haben, damit bei der angegebenen Geschwindigkeit die Lage des Fahrzeugs genauso stabil ist wie bei der Geradeausfahrt? *H. B.*

Ch 10/12 ▪1601 Berechnen Sie, wieviel Gramm Kaliumnitrat man theoretisch zersetzen müßte, um
a) 2,45 l, b) 3,78 l, c) 4,96 l Sauerstoff (Normzustand) herzustellen!

10 Jahre alpha-Wettbewerb

alpha-Wettbewerb 1975/76

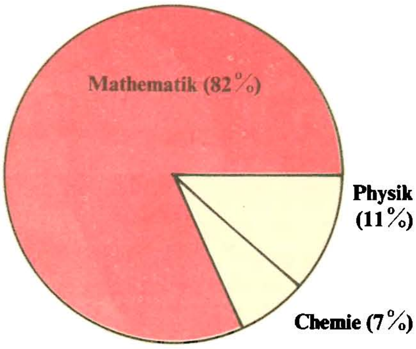


Preisträger

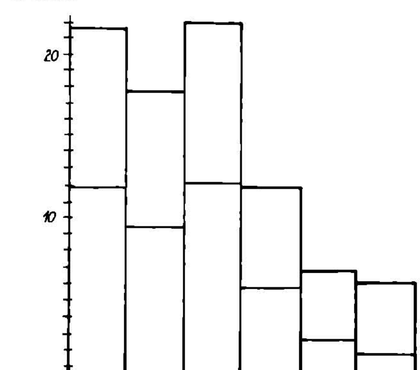
Bodo Heise, Görlitz; **Jürgen Gräfenstein,** Dresden; **Gunter Rothämel,** Steinbach-Hallenberg; **Ines Bauer,** Leipzig; **Guntram Türke,** Auerbach; **Uwe Würker,** Mülsen; **Jens Pönisch,** Karl-Marx-Stadt; **Annette Meurer,** Dietzhausen; **Steffen Ewald,** Frankenberg; **Matthias Kasparek, Yvonne Pforr,** beide Rotta; **Ralf Hortig,** Cottbus; **Frank Blinkrei,** Boizenburg; **Steffen Romeneik,** Dresden; **Heike Macionga,** Hammerbrücke; **Axel Schüler,** Kleinmachnow; **Thomas Brückner,** Vacha; **Carolin Engel,** Dresden; **Kerstin Zirnstein,** Pirna; **Frank Eisenhaber,** Güstrow; **Susanne Zöllner,** Halle; **Gabriele Schubert,** Zittau; **Andreas Hempler,** Rüdnitz; **J.-Uwe Sprengel, Uta Klose,** Wolgast; **Henri Kriechling,** Asbach; **Thomas Gerth,** Schmalkalden; **Jürgen Lembcke,** Dresden; **Matthias Bernstein,** Wernshausen; **Evelin Schmidt,** Kieselbach; **Petra Zachert,** Sachsendorf; **Rainer Nolte,** Dingelstädt; **Falk Holland-Nell,** Steinbach-Hallenberg; **Birgit Uhlmann,** Oberlungwitz; **Uwe Welz,** Wesenberg; **Silke Behrends,** Potsdam; **Meike Pfützenreuter,** Niederorschel; **Kerstin Schulze,** Halle; **Susanne Stadler,** Leimbach; **Ute Großkopf,** Ahlbeck; **Karsten Ihlenburg,** Kairo (AR Ägypten) (Kl. 4); **Steffen Beck,** Kuhfelde; **Kerstin Wickner,** Hermannsdorf; **Kerstin Fey, Ingeborg Rehm,** beide Unterbreizbach; **Karsten Meißner,** Forst (Kl. 2); **Peter Seifert,** Pinnau (Kl. 4)

alpha-Wettbewerb 1975/76

Eingesandte Lösungen: 86000



in 1000



Kl.	5	6	7	8	9	10/12
Kn in %	44	45	44	52	61	72
Mä in %	56	55	56	48	39	28

Vorbildliche Leistungen

Evelyn Heyer, Aue; Sabine Sentker, Hettstedt; Heidi Seidel, Bernsbach; Harry Höfer, Dorndorf; Gabriele Orgis, Bernsbach; Uwe Schulz, Pirna-Jessen; Heinz Roitner, Linz (Österreich); Jörg Hempelt, Radebeul; Frank Herzel, Güstrow; Burkhard Fleck, Geisa; Dirk-Thomas Orban, Erfurt; Gabriele Sprotte, Döbeln; Thomas Jez, Herzberg; Holger Nörenberg, Teltow; Frank Eiselt, Dresden; Birger Wirth, Nermsdorf; Peggy Unger, Hammerbrücke; Steffen Grützner, Burkau; Jens-Uwe Schlüßler, Cottbus, Rainer Schmidt, Vacha; Torsten Töpfer, Rotta; Uwe Zscherpel, Meerane; Andreas Schütte, Halle; Kerstin Wegner, Braunsbedra; Klaus Baumgart, Dresden; Dietmar Berthold, Crimmitschau; Uwe Maaz, Arnstadt; Reinhard Brettschneider, Falkensee; Detlef Christ, Schmalkalden; Sabine Ender, Trusetal; Delia Krech, Springstille; Andrea Schulze, Glindow; Antje Wulf, Teltow; Peter Wenzel, Zittau; Bärbel Häfner, Knut Enter, Anette Recknagel, alle Steinbach-Hallenberg; Susanne Watterott, Andrea Milke, beide Großbodungen; Karsten Mielke, Ahlbeck; Dirk Honsu, Caputh; Fred Völz, Teltow; Silke Marquardt, Meiningen; Angela Illing, Gersdorf; Guido Bluhm, Altentreptow; Cornelia Schädlich, Floh; Egbert Tzschoppe, Horka; Dagmar Schunck, Dingelstädt; Sven Rißmann, Wesenberg; Dirk Hörschelmann, Kieselbach; Katrin Gerber, Sondershausen; Carmen Schwaab, Christine Hatzky, beide Haynrode; Kerstin Sperling, Oranienburg; Kerstin Manß, Eisenach; Simone Hennecke, Ines Linsert, beide Timmenrode; Volkmar Schütze, Tünschütz; Anke Müller, Sachsendorf; Christine Reuter, Rüdnitz; Michael Wagner, Fambach; Andreas Kraska, Breitenworbis; Sylvia Linke, Lobenstein; Jens Gollmer, Schmalkalden; Annette Rennhack, Beate Engelhaupt, beide Roßdorf; Karla Kemlein, Wernshausen; Birgit Reilinger, Goldberg; Steffen Gaßmann, Bleicherode; Andrea Knies, Klausdorf; Kerstin Ziesch, Rico Hentsche, Kathrin Merz, alle Burkau; Hartmut Lipke, Ribnitz-Damgarten; Kerstin Thämlitz, Angela Metscher, beide Stralsund; Kerstin Meister, Zschornewitz; Birgit Georgi, Karl-Marx-Stadt; Peer Forberg, Dresden; Volker Hiebsch, Bad Gottleuba; Heike Ender, Lössau; Ralf-Torsten Scheel, Ziddorf; Gerlach Pfitzenreuter, Leinefelde; Ines Linke, Menteroda; Jürgen Fenzal, Schmalkalden; Andre Kühnhardt, Oberschönau; Ina Graul, Leinefelde; Silvio Milek, Kamsdorf; Kerstin Tietze, Riesa; Almut Nehring, Rolf Brada, beide Wiehe; Torsten Zahn, Kandelin; Heike Thurley, Töplitz; Birgit Fischer, Deutschenbora; Silke Mimel, Westewitz; Marko Schmidt, Michendorf

Kollektive Beteiligung am alpha-Wettbewerb 1975/76

P.-Neruda-OS Ahlbeck; E.-Schneller-OS Altentreptow; OS Altenweddingen; OS Alt-Töplitz; OS Asbach; AG Math. 7. OS Aschersleben; AG Math. OS I Auerswald; Os Bad Bibra; *alpha*-Zirkel OS Bad Gottleuba; EOS Ernst Thälmann, Otto-Grotewohl-Schule, Th.-Neubauer-OS, alle Bad Salzungen; AG Math. (Kl. 5) OS Bärenstein; *alpha*-Club Bergwitz; 11. OS V. Tereschkowa Bernburg; AG Jg. Math. OS Berlingerode; OS Bernterode; AG Jg. Math. J.-Gagarin-OS Blankenstein; OS Fr.-Schiller Bleicherode; F.-Weineck-OS Blumberg; OS Boddin; H.-Matern-OS Boizenburg; AG Math. (Kl. 6) OS Breddin; OS Bregenstedt; OS Breitenworbis; OS II Breitungen; M.-Poser-OS Bürgel; TOS Büttstedt; OS Burkau; H.-Grundig-OS Cossebaude; Klub Jg. Math. Cottbus; Station Jg. Naturf. Cottbus; AG Math. OS Cunersdorf; OS Dambeck; OS Deutschenbora; Oberschulkombinat Diedorf –Fischbach–Klings; OS Diesdorf; K.-Kollwitz-OS, OS Makarenko, beide Dingelstädt; AG Prakt. Math. OS Domersleben; Klub Jg. Math., 73. OS H. Rothbarth, beide Dresden; OS M. Poser Drognitz; OS Friedrich Engels Effelder; 9. OS Geschw. Scholl Eisenach; J.-Schehr-OS Eisleben; OS Ellrich; OS Fambach; OS Floh; OS Frankfurt (OT Booßen); Schiller-OS Freital; OS Friedeburg; OS V H. Günther Fürstenwalde; OS Gammelin; R.-Arnstadt-OS Geisa; E.-

Hartsch-OS Gersdorf; K.-Gräpler-OS Gnoien; OS Görlsdorf; E.-und-Ch.-Garske-OS Görsdorf; J.-Brinckmann-OS Goldberg; Kreisklub Jg. Math. Gräfenhainichen; O.-Drews-OS Greifswald; OS Juri Gagarin Greußen; OS Großbodungen; OS Großfurra; Lessing-Schule Großpostwitz; OS Großtreben; Dr.-S.-Allende-OS Großweitzschen; OS Güsen; OS II Hainichen; Friedens-OS Halberstadt; Diesterwegschule Halle; OS Hammerbrücke; OS Haynrode; Schule der DSF Heiligengrabe; OS Th. Müntzer Hermannsdorf; Goethe-OS Hohenleipisch; *alpha*-Club OS Horka; Goethe-OS Ilsenburg; OS Immelborn; OS Kaltennordheim; OS A. Becker Kamsdorf; Cl.-Zetkin-OS Kandelin; K.-Liebknecht-OS, OS Rottluff, P.-Tschaikowski-OS, alle Karl-Marx-Stadt; Th.-Neubauer-OS Kieselbach; E.-Schneller-OS Kirchberg; OS Kirchworbis; OS Kitzen; B.-Tesch-OS Klausdorf; EOS Kleinmachnow; Station Jg. Naturf. Köthen; OS Küllstedt; Klub Jg. Math. OS Kuhfelde; Schulkomb. Lauscha-Ernstthal; R.-Teichmüller-OS Leimbach; Dr.-Salvador-Allende-OS, Karl-Liebknecht-OS, beide Leinefelde; 29. OS Leipzig; OS Lichte; OS Lichtenhain; OS Liebstadt; Diesterweg-OS Lobenstein; OS W. Wallstab Löderburg; *alpha*-Club OS Lössau; OS Lüderitz; R.-Baumsch-OS Meiningen; OS Mittelherwigsdorf; OS Mittelstille; OS Naundorf; TOS Neuenhofe; OS Neukloster; Dr.-Th.-Neubauer-OS Niederorschel; OS Nordhausen-Niedersalze; Pestalozzischule Oberlungwitz; OS E. Weinert Oberschönau; OS Olbersdorf; Comeniusschule Oranienburg; E.-Vogel-OS Oschatz; OS Osternienburg; OS Otto Grotewohl Pappenheim; AG Math. Goethe-OS Parchim; AG Math. EOS R. Fetscher Pirna; Schule 16 Potsdam; E.-Rietschel-OS Pulsnitz; Dr.-Th.-Neubauer-OS Rackwitz; AG Jg. Math. OS Raguhn; Cl.-Zetkin-OS Raschau; OS Geschw. Scholl Rathenow; EOS Goethe Reichenbach; Juri-Gagarin-OS Ribnitz-Damg.; OS Röbel; OS Rossdorf; Haus der JP Rostock; *alpha*-Club OS Rotta; OS Rüdnitz; OS M. Kirchner Rudolstadt; OS Sachsendorf; Wilhelm-Pieck-OS Sangerhausen; OS Schernberg; OS Schlatkow; EOS, J.-G.-Seume-OS, Karl-Marx-OS, OS H. Danz, alle Schmalkalden; J.-R.-Becher-OS Schneeberg; OS Schweina; Schule d. DSF Schorssow; F.-Reuter-OS Siedenbollentin; OS A. Saefkow, AG Math. OS Geschw. Scholl, beide Sondershausen; OS Springstille; EOS Staßfurt; OS E.-Thälmann Steinbach-Hallenberg; Haus d. JP, Klub Jg. Math., W.-Heinze-OS, beide Stralsund; OS Struth-Helmersdorf; OS Sünna; H.-Rieke-Schule Tangerhütte; OS Teistungen; OS K. Niederkirchner Teterow; *alpha*-Club OS Timmenrode; *alpha*-Zirkel OS Treben; OS Tripkau; OS Wilhelm Pieck Trusetal; H.-Beimler-OS Unterbreizbach; OS J. G. Seume Vacha; OS Vitte; OS Viernau; EOS J. Fučik Waldheim; OS Wedendorf; OS Wernshausen; J.-Haerder-OS Wesenberg; Cl.-Zetkin-OS Wiehe; OS Wingerode; OS Wörmlitz; OS VI Wolgast; EOS Worbis; Spezialistenlager Math. d. Kreises Worbis; OS Wredenhagen; H.-Eisler-OS Wusterhusen; Geschw.-Scholl-OS Zaatzke; Pestalozzi-OS Zeithain; Lutherschule Zella-Mehlis; 5. OS, EOS, Pestalozzi-OS, alle Zittau; Goethe-OS Zossen; OS Zschornewitz; Elke Specht, OS Mittelstille

Preisträger

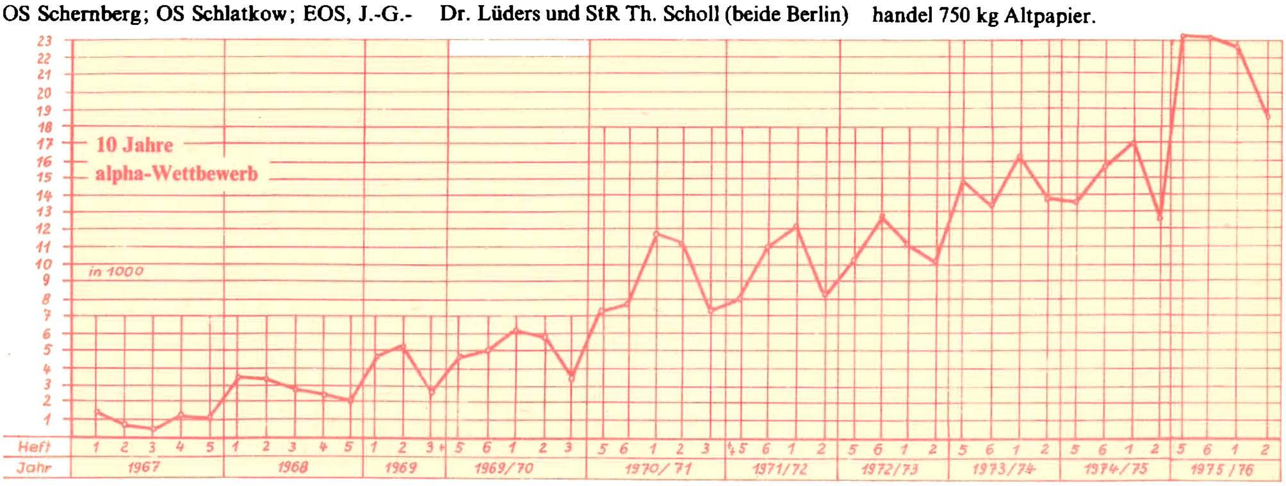
Chemie-Wettbewerb (Heft 4/76)
Annegret Kirsten, Ernst-Haeckel-Schule, Merseburg; Thomas Köhler, EOS Erich Weinert, Flöha; Michael Reissig, Halle; Ulf Krabisch, Leipzig; Michael Weicker, Mügeln

Vorbildliche Hilfe

Unser Dank gilt den Verlagen, die Bücher im Werte von 2500,– M für die fleißigsten Wettbewerbsteilnehmer zur Verfügung stellten: BSB B. G. Teubner, Leipzig; Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig, Leipzig; VEB Fachbuchverlag, Leipzig; Der Kinderbuchverlag, Berlin; Militärverlag der DDR, Berlin; transpress VEB Verlag für Verkehrswesen, Berlin; Verlag Die Wirtschaft, Berlin; Der Sportverlag, Berlin; VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin; VEB Verlag Die Technik, Berlin; Volkseigener Verlag Volk und Wissen, Berlin; Urania-verlag, Leipzig; Polnisches Informationszentrum, Leipzig.

Wußtest du schon?

- Im Schuljahr 1975/76 gingen 86000 Lösungen zum *alpha*-Wettbewerb ein (davon 1600 von unseren 2000 ausländischen Lesern).
- 5600 Lösungen erhielten das Prädikat „falsch gelöst".
- Alle Lösungsblätter, ausgebreitet, ergeben eine Fläche von 7500 m^2 (dreiviertel Hektar), aneinandergereiht ein Band von 30 km Länge.
- Die 90000 bereitgestellten Antwortkarten wiegen rund 320 kg, ihr Satz und Druck kostet 2200 M, ein Abzeichen 0,48 M, eine Urkunde 0,05 M.
- Für den Versand der Antwortkarten, Urkunden und Preise wurden der Post 4500 M überwiesen.
- 75 Prozent aller veröffentlichten Aufgaben stammen aus der Feder unserer Leser. OStR Dr. Lüders und StR Th. Scholl (beide Berlin) sichteten, bearbeiteten und ordneten die Aufgaben den Klassenstufen zu, steuerten selbst welche bei. OStR G. Schulze, Herzberg (Kl. 8 bis 10/12) und StR J. Lehmann, Leipzig (Kl. 5 bis 7) korrigierten die Lösungen.
- Die schönsten Briefmarken von den rund 20000 Briefen, die 1975/76 eingingen, wurden von Philatelisten abgelöst, in kleine Tüten verpackt und im Rahmen von Solidaritätsbasaren verkauft.
- Zum Öffnen und Sortieren der pro Heft eingehenden rund 21000 Lösungen sind rund 40 Arbeitsstunden nötig. Fleißige Helfer der Redaktionssekretärin waren Schüler des *alpha*-Clubs der 29. OS. Sie verkürzten die Zeit für den Beginn der Korrektur.
- Die Redaktion *alpha* übergab dem Altstoffhandel 750 kg Altpapier.



ARBEITS-GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Aus der Arbeit der AG Mathematik der Oberschule I Königs Wusterhausen

Die AG Mathematik besteht seit über zehn Jahren. 5 bis 6 Schüler der Klassenstufe 5 bis 8 arbeiten in diesem Jahr in jeweils einer Gruppe nach einem gesonderten Wochenplan bzw. Wochenprogramm. Die Aufgaben und Themen werden zum überwiegenden Teil der Zeitschrift *alpha* entnommen. Wir verfügen über ein lückenloses Archiv der *alpha* von der Erstausgabe des Jahres 1967 bis zum letzten Heft des Jahres 1976.
Bei Diskussionen über die verschiedenen Lösungsvarianten versuchen die Schüler unter Anleitung des AG-Leiters, nach Zusammenhängen zu anderen Stoffgebieten zu suchen. Dabei bietet sich oft die Möglichkeit, selbständig neue Aufgaben in einer anderen Variante zu entwickeln. Zur Zeit arbeiten die beiden Gruppen aus der 5. und 7. Klasse an einer Zusammenstellung von Aufgaben dieser Art, die sie als *Messeexponat* auf der *MMM* der Schule ausstellen werden.
1972 wurden die Mitglieder der AG für ihr Messeexponat auf der Bezirksmesse in Potsdam mit einer Urkunde und einer Geldprämie ausgezeichnet. Die AG gestaltete mit diesem Geld den ersten Fachunterrichtsraum für Mathematik an unserer Schule. Vieles wurde selbst gebaut.

G. Stolz

An einem Beispiel möchten wir zeigen, wie wir versuchen, die in der *alpha* veröffentlichten Aufgaben nicht nur zu lösen, sondern dabei auch Zusammenhänge zu anderen Stoffgebieten zu erkennen. Dabei ergeben sich weiterführende Untersuchungen, die uns als Ergebnis neue Erkenntnisse bringen.

W 6 ■1050 *Eine sechsstellige natürliche Zahl z_1 beginnt an der höchsten Stelle mit der Grundziffer 1. Streicht man diese Ziffer und hängt sie hinten wieder an, so erhält man eine sechsstellige Zahl z_2, die dreimal so groß ist wie die Ausgangszahl. Wie heißen die beiden Zahlen?*

Lösung:
$$3(100000+x)=10x+1$$
$$300000+3x=10x+1$$
$$7x=299999$$
$$x=42857$$

Die Zahl z_1 lautet somit 142857 und die Zahl z_2 lautet 428571, und es gilt $3\cdot 142857=428571$.
Die Ziffernfolge von x ergibt einen Teil der Periode des Bruches von $\frac{1}{7}$.

$\frac{1}{7}=0,\overline{142857}$ $\frac{4}{7}=0,\overline{571428}$

$\frac{2}{7}=0,\overline{285714}$ $\frac{5}{7}=0,\overline{714285}$

$\frac{3}{7}=0,\overline{428571}$ $\frac{6}{7}=0,\overline{857142}$

Beim genauen Betrachten der Perioden der echten Brüche mit dem Nenner 7 läßt sich folgende Aufgabe entwickeln:
Eine sechsstellige Zahl z_1 beginnt an der höchsten Stelle mit der Grundziffer 2. Streicht man diese Ziffer und hängt sie hinten wieder an, so erhält man eine sechsstellige Zahl z_2, die dreimal so groß ist wie die Ausgangszahl. Wie heißen die beiden Zahlen?

Lösung:
$$3(200000+x)=10x+2$$
$$7x=599998$$
$$x=85714$$

Die Zahl z_1 lautet somit 285714 und die Zahl z_2 lautet 857142, und es gilt $3\cdot 285714=857142$.
Die Gleichungen für die anderen Perioden der echten Brüche mit dem Nenner 7 lauten:
$$400000+x=(10x+4)\,1,5$$
$$1,25(500000+x)=10x+5$$
$$700000+x=(10x+7)\,5$$
$$800000+x=(10x+8)\,1,5$$
Versucht, zu jeder dieser Gleichungen selbst einen Aufgabentext zu verfassen! Löst die Gleichungen, und kontrolliert die Ergebnisse! Wenn man nun die Perioden der echten Brüche mit dem Nenner 13 betrachtet, müßte es euch nicht schwerfallen, selbst die entsprechenden Gleichungen zu finden.

$\frac{1}{13}=0,\overline{076923}$ $\frac{7}{13}=0,\overline{538461}$

$\frac{2}{13}=0,\overline{153846}$ $\frac{8}{13}=0,\overline{615384}$

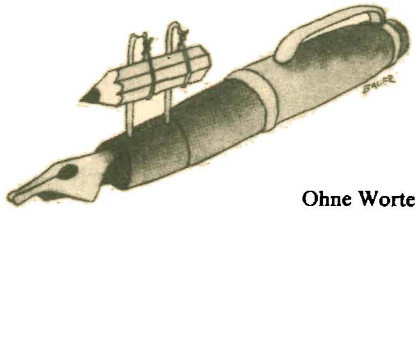
$\frac{3}{13}=0,\overline{230769}$ $\frac{9}{13}=0,\overline{692307}$

$\frac{4}{13}=0,\overline{307692}$ $\frac{10}{13}=0,\overline{769230}$

$\frac{5}{13}=0,\overline{384615}$ $\frac{11}{13}=0,\overline{846153}$

$\frac{6}{13}=0,\overline{461538}$ $\frac{12}{13}=0,\overline{923076}$

(Lösung siehe Seite 142.)
Wir verraten kein Geheimnis, wenn wir euch sagen, daß es noch weitere Perioden von echten Brüchen gibt (z. B. mit dem Nenner 21), die sich für eure selbständigen Untersuchungen eignen.



Ohne Worte

Ein Gespräch in der Straßenbahn

Speziell für Klasse 5/6

Mit meinem Enkel *Mischa* stieg ich in Leningrad in die Straßenbahn ein. Ich warf 6 Kopeken in die Zahlbox und riß zwei Fahrscheine ab. „Gib mir den zweiten!" forderte *Mischa*. „Bitte, nimm dir den, der dir besser gefällt. Aber sie sind doch völlig gleich, mit jedem von ihnen kann man die gesamte Strecke fahren." „Das stimmt, aber ganz gleich sind sie dennoch nicht. Das hier ist ein ganz gewöhnlicher Fahrschein mit der Nummer 286357. Der nächste aber ist ein *glücklicher* – die Summe der ersten drei Ziffern ist gleich der Summe der letzten drei: 286358."
Da erinnerte ich mich, daß wirklich oft gesagt wird, ein Fahrschein mit gleichen Ziffernsummen bringe Glück. „Hast du oft solche *glücklichen* Fahrscheine?" fragte ich. „Aber nein, sehr selten. Etwa einmal im Monat. Ich fahre täglich ins Institut und zurück, mit Ausnahme der freien Tage natürlich, und so kommt also im Mittel ein *glücklicher* auf 50 gewöhnliche Fahrscheine." „Unsinn", mischte sich ein Fahrgast ein, „ich bin an der vorletzten Haltestelle zugestiegen, und habe aus derselben Box auch einen *glücklichen* Fahrschein gezogen – Nummer 286349. Ja, und jetzt müßte gerade jemand die Nummer 286367 ziehen und bald kommt 286376, danach 286385, alles *glückliche* Nummern. Also gibt es unter 10 Fahrscheinen mindestens einen *glücklichen*." „Das stimmt nicht ganz", widersprach der Besitzer des *glücklichen* Fahrscheins Nummer 286367. „Ihr Beispiel beweist noch gar nichts. Von Nummer 286394 bis 286439 gibt es keinen *glücklichen* Fahrschein, zwischen zwei *glücklichen* also ein Intervall von 45 Fahrscheinen. Solche Beispiele gibt es noch mehrere. In unserer Fahrscheinrolle, deren Anfangsziffern 286 sind, liegt zwischen den *glücklichen* Fahrscheinen 286097 und 286169 ein Intervall von 71 *normalen* Fahrscheinen. „Sag ich doch", freute sich *Mischa*, „ein *glücklicher* Fahrschein kommt im Mittel auf fünfzig normale." „Das ist auch eine wacklige Hypothese", bemerkte ich. „Um die Frage richtig zu beantworten, müßte man sie erst einmal sorgfältig untersuchen. Vor allem ist sie richtig zu formulieren. Sagen wir, so: ‚Wieviel *glückliche* sechsstellige Zahlen, d. h. Zahlen, für die die Summe der ersten drei Ziffern

gleich der Summe der letzten drei ist, gibt es zwischen 000000 und 999999?'" „Nun ja", sagte Mischa nach kurzem Überlegen, „genau kann ich jetzt nicht antworten, aber ich kann eine Lösungsmöglichkeit angeben. Wir schreiben alle Zahlen von 000000 bis 999999 der Reihe nach auf und prüfen jede von ihnen. So finden wir die Anzahl der *glücklichen* unter ihnen." „So eine Methode ist möglich. Damit kann man Aufgaben lösen, die Eigenschaften einer endlichen Anzahl von Zahlen oder anderer Objekte zum Inhalt haben. Allerdings hat diese Methode zwei Unzulänglichkeiten:

Erstens ist sie sehr aufwendig. Sieh selbst, man hat eine Million Zahlen zu überprüfen! Wenn du für die Kontrolle jeder Zahl eine Sekunde rechnest, so gibt das 1000000 Sekunden oder fast 278 Stunden. Das wären bei acht Stunden Arbeit täglich 35 Tage." „Aber das kann doch eine elektronische Rechenanlage tun?" „Natürlich, aber lohnt es sich wirklich, mit der Kanone auf Spatzen zu schießen? Außerdem hat diese Methode eine zweite Schwäche, welche auch eine Rechenmaschine nicht beseitigt. Du löst jedesmal nur eine konkrete Aufgabe, kannst also meist nicht verallgemeinern oder Gesetzmäßigkeiten finden. Darum ist diese Methode mathematisch uninteressant." „Erlauben Sie mir, mich nochmals einzumischen", sagte da der Besitzer des *glücklichen* Fahrscheins Nummer 286367, „ihre Aufgabe interessiert mich, und ich habe bereits eine Lösung. Nicht die genaue Lösung, das gebe ich zu, eher das, was wir Mathematiker Näherungslösung nennen. Ach, ich vergaß, mich vorzustellen: *Georgi Wladimirowitsch*, ich bin Dozent am Lehrstuhl für Mathematik einer technischen Hochschule.

Also, junger Mann", wandte er sich an *Mischa*, „führen wir erst einmal eine neue Definition ein. Unter einem *hübschen* Fahrschein wollen wir einen Fahrschein verstehen, dessen Summe der ersten drei Ziffern den gleichen Rest bei Teilung durch 9 gibt, wie die Summe der letzten drei. Klar?" „Klar!", antwortete *Mischa*, „aber warum durch 9?" „Weil in unserem Dezimalsystem jede Zahl bei Division durch 9 den gleichen Rest hat wie die Summe ihrer Ziffern. Diese Eigenschaft ermöglicht es uns, die Zahl der *hübschen* Fahrscheine relativ leicht zu finden: Unter den Zahlen von 1 bis 999 gibt es genau 111, die bei Division durch 9 den Rest 1 lassen, ebensoviele für den Rest 2 und so weiter. Wieviel verschiedene *hübsche* Zahlen mit dem Rest 1 gibt es nun aber? Für die erste Dreiergruppe gibt es 111 Möglichkeiten, für die zweite nochmals 111. Es gibt demnach $111 \cdot 111 = 12321$ *hübsche* Fahrscheine mit dem Rest 1. Ebensoviele Fahrscheine gibt es mit dem Rest 2, 3 usw. Zu den Zahlen mit dem Rest 0, oder, wie wir sagen, die sich ohne Rest teilen, muß noch 000 hinzugefügt werden, so daß sich hier $112 \cdot 112 = 12544$ Möglichkeiten ergeben. Insgesamt erhalten wir somit $8 \cdot 12321 + 12544 = 111112$ *hübsche* Fahrscheine." „Nun ja, aber die Anzahl der *glücklichen*, die ist doch anders?" „Es ist doch so: Wenn die Ziffernsumme gleich sind, so sind auch die Reste bei Division durch 9 gleich.

Folglich ist jeder *glückliche* Fahrschein gleichzeitig auch ein *hübscher*. Allerdings ist nicht jeder *hübsche* Fahrschein auch ein *glücklicher*. Der Fahrschein 100748 ist zum Beispiel *hübsch*, aber nicht *glücklich*. Wenn wir die Anzahl der *glücklichen* Fahrscheine mit C bezeichnen, gilt also die Ungleichung $C < 111112$." „Aber damit ist doch die Aufgabe noch nicht vollständig gelöst", sagte *Mischa*, „wir erfahren, daß die Zahl der *glücklichen* Fahrscheine kleiner als 111112 ist, aber nicht, um wieviel. Kann man vielleicht zeigen, daß C größer als irgendeine Zahl ist? Ich hörte, man nennt das *Näherung von unten*." „Das geht auch", antwortete *Georgi Wladimirowitsch*, „ich fürchte nur, sie wird ziemlich grob. Nennen wir *schöne* Fahrscheine alle die, deren Nummer aus zwei völlig gleichen Hälften besteht, zum Beispiel 287287. Fahrscheine dieser Art gibt es genau 1000, und zwar 000000, 001001, 002002 usw. bis 999999. *Schöne* Fahrscheine gibt es weniger als glückliche, also gilt $1000 < C < 111112$. Hierbei ist die Näherung von oben das mehr als Hundertfache der Näherung von unten. So eine Abschätzung kann man schwerlich als befriedigendes Resultat der Aufgabe ansehen." „Ich glaube, die Näherung von oben kann etwas verfeinert werden", sagte ich darauf, „wenn man die Teilbarkeit durch 11 benutzt." „Gibt es da eine Teilbarkeitsregel?" fragte *Mischa*, „wir haben keine in der Schule kennengelernt."

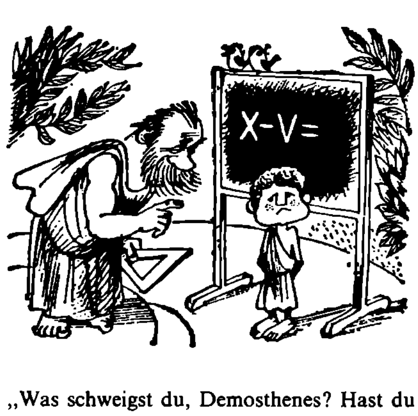
„Die Regel ist sehr einfach: Wir addieren alle Ziffern auf ungeraden Positionen (Einer, Hunderter, ...). Danach addieren wir alle Ziffern auf geraden Positionen. Wenn die Differenz dieser Summen sich durch 11 teilt, teilt sich die Zahl durch 11 und umgekehrt, alle durch 11 teilbaren Zahlen weisen diese Eigenschaft auf."

„Was hat denn das mit unseren *glücklichen* Fahrscheinen zu tun?" fragte verwundert *Mischa*. „Wirst du gleich hören. Aber sag mal, weißt du, daß in Moskau andere Fahrscheine als *glückliche* bezeichnet werden, als bei uns in Leningrad?" „Ja, die Moskauer *glücklichen* Fahrscheine haben gleiche Ziffernsummen auf geraden und ungeraden Positionen." „Siehst du, und da ist es leicht zu zeigen, daß die Nummern der *glücklichen* Fahrscheine der Moskauer sich durch 11 teilen." „Stimmt", sagte Mischa. „Und solche Fahrscheine gibt es nicht mehr als durch 11 teilbare Zahlen von 0 bis 999999." „Also nicht mehr als 90910!" rief verwundert *Georgi Wladimirowitsch*. „Gibt es eigentlich mehr *glückliche* oder mehr *glückliche Moskauer Art* unter unseren Fahrscheinen?" fragte *Mischa*. „Na, das ist nicht schwer festzustellen. Ihre Anzahl ist gleich." „Wie denn das?" wunderte sich *Mischa*, „wir kennen ja weder die Anzahl der einen, noch der anderen." „Muß man denn die Anzahl genau kennen?", gab *Georgi Wladimirowitsch* zu bedenken, „setz die ersten drei Ziffern eines *glücklichen* Fahrscheins auf die geraden Positionen, die letzten drei auf die ungeraden, und du erhältst einen *Moskauer glücklichen* Fahrschein. Umgekehrt erhält man aus einem *Moskauer glücklichen* einen *glücklichen* Fahrschein, wenn man die Ziffern auf geraden Positionen in der ersten Hälfte der Zahl versammelt und die auf ungeraden in der zweiten. Wir haben also eine umkehrbar eindeutige Verbindung oder, wie wir sagen, eine eineindeutige Abbildung zwischen beiden Fahrscheinarten festgestellt. Daraus folgt, daß ihre Anzahl gleich ist. Stimmt das?" „Stimmt!" rief *Mischa*, „wir wissen also, daß es weniger als 90910 *glückliche* Fahrscheine gibt!"

„Wie wird denn die Ziffernsumme, wenn man im *glücklichen* Fahrschein die drei letzten Ziffern durch die Differenz von 9 und diesen Ziffern ersetzt?" fragte *Georgi Wladimirowitsch*. „Moment", bat *Mischa*, „soo, ... dreimal drei – siebenundzwanzig ... minus ... plus ... 27! Und wieder eine eineindeutige Abbildung! *Georgi Wladimirowitsch*, die Zahl der *glücklichen* Fahrscheine ist gleich der Anzahl der Fahrscheine mit der Ziffernsumme 27!"

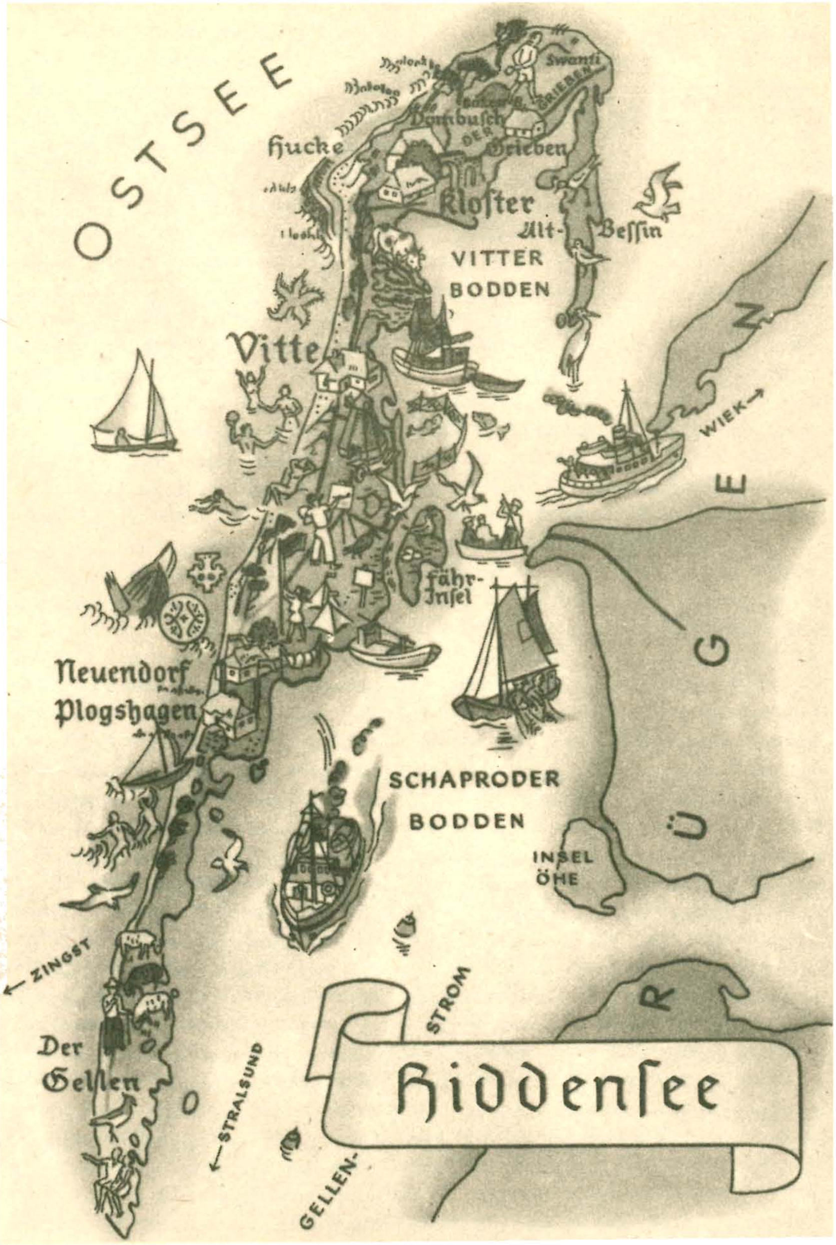
„Richtig!" antwortete er. „Aber wieviele *glückliche* Fahrscheine gibt es denn nun wirklich?" wandte sich *Mischa* an mich. „Nun die Antwort lautet 55252, also etwa jeder achtzehnte Fahrschein. Wie man darauf kommt? Nun ... verabschiede dich von *Georgi Wladimirowitsch*, wir müssen aussteigen!"

A. P. Sawin, L. M. Fink
aus: Quant 7/1975



„Was schweigst du, Demosthenes? Hast du Kaugummi im Mund?" – „Nein, Steine!"

Hiddenseer Mathe-Skizzen



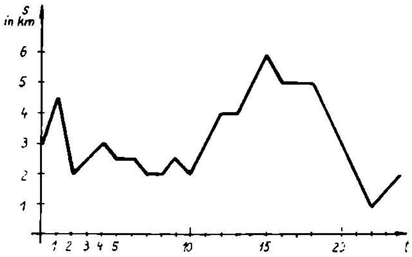
Aufgaben aus der gesellschaftlichen Praxis

▲1▲ Das Heimatmuseum auf Hiddensee ist vom 1. Juni bis 30. September 1976 täglich geöffnet. Man erwartet in den einzelnen Monaten täglich die folgenden Besucherzahlen:
1. 6. bis 30. 6. täglich 500 Besucher,
1. 7. bis 31. 7. täglich 850 Besucher,
1. 8. bis 31. 8. täglich 900 Besucher,
1. 9. bis 30. 9. täglich 350 Besucher.
Der Eintritt pro Person kostet 0,50 M. Ein Viertel der Besucher sind Rentner, Schüler und Studenten, die nur die Hälfte des Eintrittspreises zahlen.
Wieviel Besucher werden durchschnittlich an jedem Tag der Saison erwartet?
Mit welcher Gesamteinnahme rechnet die Museumsleitung?

Maria Rosenow, Klasse 6

▲2▲ Das Nebelhorn der *Station Dornbusch* wird automatisch von einem elektrischen Sichtmesser ein- und ausgeschaltet. Der Sichtmesser prüft jede 20 s die Sicht. Ist diese unter 3,5 km, so schaltet sich automatisch das Nebelhorn ein. Bessert sich die Sicht, wird es auch wieder automatisch abgeschaltet. Das Nebelhorn hat eine Nachlaufzeit von 20 min. An einem kühlen Oktobertag legte der Sichtmesser das folgende Diagramm dar. Berechne nach dem Diagramm die Betriebszeit des Nebelsignals!

Jörg Hoerenz, Klasse 6



▲3▲ An Tagesausflüglern kommen täglich von Stralsund etwa 600 Personen, von Schaprode etwa 450 Personen, von Lietzow etwa 100 Personen und von Zingst etwa 180 Personen nach Hiddensee.
Wieviel Personen sind es täglich insgesamt? Und wieviel Tagesausflügler werden es im Sommer bei 150 Tagen insgesamt und wieviel aus jedem Ort sein? *Sylvia Krüger, Klasse 6*

▲4▲ Feriengäste auf Hiddensee:

1900 – 320	1954 – 18674
1902 – 500	1960 – 24000
1935 – 8500	1970 – 31300
1947 – 46	1974 – 33252
1951 – 8500	

Stelle diese Entwicklung in Streifendiagrammen dar!

▲5▲ In der Arbeitsgemeinschaft *Mathematik* der OS Vitte sind 10 Schüler der 6. und 7. Klasse. Die Anzahl der Mädchen ist größer als $\frac{1}{3}$ der Anzahl der Jungen und kleiner als die Hälfte der Anzahl der Jungen.
Wieviel Jungen und Mädchen arbeiten in der Arbeitsgemeinschaft mit?

▲6▲ Die neue Straße zwischen Vitte und Neuendorf ist 5,5 km lang, 2 m breit und 22 cm dick.
Wieviel Kubikmeter Beton wurden zu ihrer Herstellung verbraucht?

▲7▲ 1974 beringten in der DDR 319 Mitarbeiter 134900 Vögel. Auf Hiddensee arbeiten fünf Beringer, die 1974 8400 Vögel beringten.
Vergleiche die durchschnittlichen Leistungen!
Die durchschnittliche Wiederfundrate beträgt 2,5%. Errechne die Anzahl der Vögel!

▲8▲ Ein Stellnetz zum Fangen der Vögel besteht aus quadratischen Maschen von 22 mm Seitenlänge.
Aus wieviel Maschen besteht ein Netz, das 6 m lang und 2 m hoch ist?

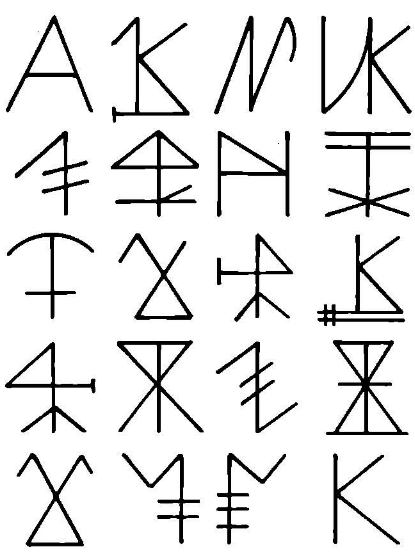
▲9▲ Eine Fischkiste hat folgende Maße: Länge 85 cm, Breite 50 cm, Höhe 29 cm. Sie ist oben offen.
Wieviel m^2 Holz werden für eine Kiste benötigt?

▲10▲ Die FPG verarbeitete 1975 67 t Hering zu Salzhering.
Wieviel Kilogramm Salzhering konnten verkauft werden, wenn die Salzzugabe 20% beträgt und man mit einem Masseverlust von 12% des Rohfisches rechnen muß?

▲11▲ Eine Kolonie Seeschwalben besteht aus 25 Paaren.
Mit wieviel Nachwuchs ist zu rechnen, wenn man bei jedem Paar mit drei Eiern rechnet und einen Verlust von $\frac{1}{5}$ der Eier durch den Fuchs einkalkuliert?

▲12▲ Der Präparator der Vogelwarte Hiddensee stellt für die Sammlung Standpräparate und Vogelbälge her. Für ein Standpräparat benötigt er 3 Stunden und für einen Balg 35 Minuten.
In einer Woche stellt er 16 Präparate her und brauchte dafür eine Arbeitszeit von 19 Stunden. Wieviel Standpräparate und wieviel Bälge waren es?

▲13▲ Ein Rotkehlchen wurde innerhalb der Aktion „Baltic“ am 18. 9. 74 auf Hiddensee beringt und am 13. 11. 74 in Algerien gefangen.
Wieviel Kilometer legte das Rotkehlchen durchschnittlich pro Tag zurück, wenn die Entfernung rund 2000 km beträgt?



AG „Mathematik“ in Vitte/Hiddensee

Die AG *Mathematik* der OS Vitte besteht seit drei Jahren. Ursprünglich waren es fünf Mitglieder, und inzwischen hat sich ihre Anzahl auf 10 erhöht.
Der größte Erfolg der Arbeitsgemeinschaft war der zweite Platz eines Mitgliedes bei der Kreisolympiade der Klasse 6 im Jahre 1974. Dieser Schüler ist seitdem Mitglied des Kreisclubs.
Die Mitglieder beteiligen sich am *alpha*-Wettbewerb, vier Schüler errangen 1974 das „alpha-Abzeichen“, fünf Schüler 1975. Im letzten Jahr nahmen fünf Schüler an der Kreisolympiade teil, und zwei fuhren zum Spezialistenlager.

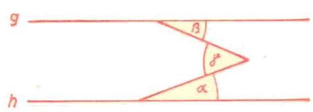
9. Mathematik-Leistungsvergleich Greifswald–Rügen–Stralsund (30. Mai 1976 in Vitte/Hiddensee)

Mit dem Schiff waren 80 *Junge Mathematiker* der Klassenstufen 7 und 8 nach Hiddensee gekommen, um in einer zweistündigen Klausur ihre Kräfte zu messen, ein Stück der Insel Hiddensee kennenzulernen und einen Vortrag über die *XVII. Internationale Mathematikolympiade* vom Chefredakteur der *alpha* zu hören. Gastgeber des 10. Leistungsvergleichs ist Greifswald (Frühjahr 1977).

Aufgaben: Klassenstufe 7

1. Bezogen auf seine Masse enthält Meerwasser 5% Salz.
Mit wieviel Kilogramm Süßwasser muß man 80 kg Meerwasser mischen, damit der Salzgehalt der Mischung 2% beträgt?

2. Gegeben sei die in der Abbildung dargestellte Figur ($g \parallel h$).
Die Winkel α und β seien bekannt.
Wie groß ist der Winkel γ?
Beweise deine Behauptung!



3. Ein Holzwürfel mit einer Kantenlänge von 30 cm soll in Würfel von 10 cm Kantenlänge zersägt werden.
a) Wieviel Schnitte muß man dabei ausführen? (Das Sägen im Paket soll nicht gestattet sein!)
b) Wieviel Würfel erhält man?

Klassenstufe 8

1. Das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist 110355024.
Wie lauten die Zahlen? Der Lösungsweg ist ausführlich zu begründen!

2. Bei einem Spiel verstecken drei Schülerinnen Anna, Brigitte und Claudia in ihren Handtaschen je einen Gegenstand, und zwar einen Ball, einen Bleistift und eine Schere. Dieter soll feststellen, wer den Ball, wer den Bleistift und wer die Schere hat.
Auf seine Fragen erhält er folgende drei Antworten, von denen verabredungsgemäß nur eine wahr ist, die beiden anderen sind falsch:
1. Anna hat den Ball
2. Brigitte hat den Ball nicht
3. Claudia hat die Schere nicht.
Wer hat den Ball, wer den Bleistift und wer die Schere?

3. Von dem Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sind gegeben:
$\overline{AB} = 6$ cm, $\overline{BC} = 4$ cm, $\overline{CD} = 4{,}5$ cm, $\overline{DA} = 3$ cm.
Konstruiere das Trapez, und begründe deine Entscheidung!

alpha-Wandzeitung

Das sind sie, die beiden Mathematiklehrer der OS Vitte, das Ehepaar Jeschek. (Frau Jeschek ist AG-Leiterin Mathe.) Sie trugen mit ihren Schülern die Aufgaben aus der gesellschaftlichen Praxis zusammen.

Würfeleien

Jeder von Euch kennt einen Spielwürfel: ein Würfel, auf dessen Seitenflächen ein bis sechs Punkte aufgemalt wurden.
In verschiedenen Ländern sind Würfelspiele schon von jeher verbreitet. Gewürfelt haben d'Artagnan und Hodscha Nasreddin, byzantinische Kaufleute und die Goldgräber von Nevada, erlauchte Grafen und gewöhnliche Seeräuber. Vor allem wurde mit zwei Würfeln gespielt: jeder der Partner warf seinen Spielwürfel auf den Tisch oder ein spezielles Würfelbrett; gewonnen hatte derjenige, bei dem sich die Summe der Augen als größer erwies.
Beim Würfeln verlor man nicht selten sein ganzes Vermögen. Das Spiel zog deshalb gewöhnlich viele Fanatiker an, die mitunter nicht weniger mitgerissen wurden als die Spieler selbst.
Vor mehr als 20 Jahren bemerkte ich in einem Park zwei Jungen, die allen Interessenten anboten, mit ihnen zu würfeln. Als Spielregel gaben sie aber etwas Ungewöhnliches an:
„Jeder kann 100 Rubel gewinnen! Bezahle einen Zehner und Du gewinnst einen Hunderter!", rief der eine und warf drei Würfel hoch.
Der zweite erklärte die Spielregel: „Wer zu spielen wünscht, zahlt zehn Rubel, wirft die drei Würfel und liest ab, wieviel Augen er hat. Gewonnen wird nach Tabelle, von 15 Rubel bis 100 Rubel." Der Junge zeigte auf eine große Tabelle auf einer Sperrholzplatte.

3 Punkte gewinnen 100 Rubel
4 Punkte gewinnen 50 Rubel,
5 Punkte gewinnen 25 Rubel
6 Punkte gewinnen 20 Rubel
7 Punkte gewinnen 15 Rubel
8, 9, 10, 11, 12, 13 Punkte gewinnen nichts
14 Punkte gewinnen 15 Rubel
15 Punkte gewinnen 20 Rubel
16 Punkte gewinnen 25 Rubel
17 Punkte gewinnen 50 Rubel
18 Punkte gewinnen 100 Rubel.

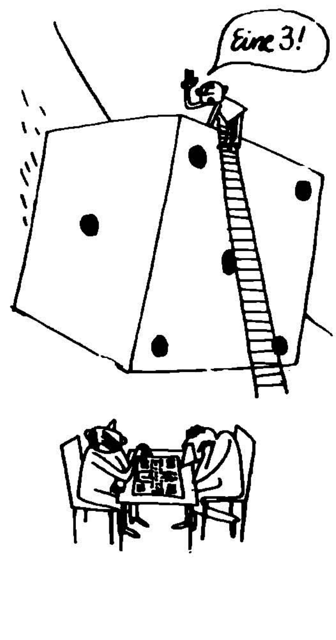
Ein Zehner entsprach in der damaligen Zeit einem heutigen Rubel (≙ 3,20 M). Die Zahl derer, die eine solche Summe riskierten, war nicht gering. Aber vor meinen Augen gingen die Beteiligten mit bitterer Miene einer nach dem anderen davon und hinterließen auf dem Würfelbrett 10 Rubel. Es fand sich auch eine große Zahl Fanatiker ein, die nicht mit guten Ratschlägen sparten.
Einige Leute, die 7 oder 14 Augen warfen, gewannen 5 Rubel über ihren Einsatz; einzelne warfen 6, 15 oder 16 Augen; nur ein einziger gewann 50 Rubel. Dabei hatten schon mehr als vierzig Leute ihre Zehner eingesetzt.
Die Verlierer schauten mürrisch drein, sie überprüften mißtrauisch die Würfel, doch diese hatten eine streng kubische Form und waren völlig homogen, mit einem Wort – sie waren nicht präpariert.
Nach etwa einer halben Stunde hatten die Jungen an die zweihundert Rubel „gewonnen". Sie trollten sich die Allee entlang und man hörte die Rufe: „Jeder kann 100 Rubel gewinnen! Bezahle einen Zehner und Du gewinnst einen Hunderter!"
Das Geheimnis des Gewinns in diesem Spiel ist denkbar einfach. Wenn wir einen Würfel werfen, können wir 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 Augen bekommen, d. h., wir haben 6 verschiedene Möglichkeiten (6 Varianten). Wenn der Würfel eine kubische Form hat und aus einem homogenen Material besteht, sind alle 6 Varianten gleichmöglich („gleichwahrscheinlich") und bei einer Vielzahl Würfe wird jede Augenzahl ungefähr gleich oft fallen.
Werfen wir den Würfel zweimal (oder zwei Würfel gleichzeitig), ergeben sich 36 verschiedene mögliche Varianten:

$1+1$;
$1+2$;
$1+3$;

.

$6+5$;
$6+6$.

Dabei tritt die Summe 2 nur einmal auf; 4 Augen ergeben sich dreimal, aber 7 Augen schon in 6 Varianten. Damit sind unterschiedliche Summen *nicht gleichwahrscheinlich:* die Summe von 4 Augen kommt *im Durchschnitt* doppelt so oft vor, wie die von 2 Augen, aber die Summe von 7 Augen tritt 6mal so oft auf, wie die Summe von 12 Augen. Der Leser kann sich leicht davon überzeugen, wenn er viele Male (nicht weniger als 100mal) gleichzeitig 2 Würfel wirft und exakt mitschreibt, wie oft jede Summe von Augen gefallen ist.



Es ist nicht schwer zu errechnen, daß sich, wenn man 3 Würfel wirft, 216 (oder 6^3) *verschiedene Möglichkeiten* ergeben: und nur eine von diesen ergibt die Summe von drei Augen:

$1+1+1=3$.

Fünf Augen ergeben sich in 6 verschiedenen Varianten:

$1+1+3=5$
$1+3+1=5$
$3+1+1=5$
$1+2+2=5$
$2+1+2=5$
$2+2+1=5$.

Für zehn Augen existieren 27 Varianten (findet sie selbst!). Das heißt, *im Durchschnitt* werden 10 Augen 27mal so oft fallen wie 3 Augen. Genau so oft können auch 11 Augen fallen. Für 9 oder 12 Augen ergeben sich 25 Varianten und für 8 oder 13 Augen 21. (Prüfe nach!) In 146 von 216 möglichen Fällen erhält man zwischen 8 und 13 Augen. Und Ihr trauert tief um die verlorenen Rubel!
Natürlich kann jemand zufällig 3 oder 18 Augen werfen, aber das bleibt ein außergewöhnlich seltenes Ereignis. Bei fortwährendem Spiel garantiert Euch die Wahrscheinlichkeitstheorie einen ständigen Verlust. *Im Durchschnitt* verliert Ihr bei 216 Würfen 510 Rubel.
Wenn Ihr also diesen beiden Jungen begegnen solltet – spielt nicht mit ihnen!

A. Halameisär

Leseproben aus:
A. Kitaigorodski: Unwahrscheinliches – möglich oder unmöglich?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit?

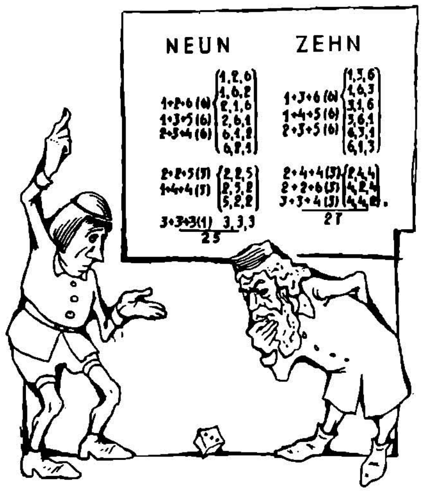
Der Fall des Würfels ist das klassische Beispiel für ein zufälliges Ereignis. Dennoch bleibt die Frage interessant, ob man das Resultat eines solchen Ereignisses im voraus erraten, vorhersehen und schließlich auch berechnen kann, und wie man so etwas macht. Die Gruppe möglicher Ergebnisse des Ereignisses umfaßt den Fall einer Eins, Zwei, Drei, Vier, Fünf oder Sechs. „Ergebnis eines Ereignisses" klingt etwas geschwollen, und wir hoffen, daß niemand in Verwirrung gerät, weil das erste Wort meist weggelassen wird. Wir haben also eine Gruppe von 6 Ereignissen; 6 ist die vollständige Anzahl der Ereignisse.

Die Frage, die man sich nun zu stellen hat, lautet: Wie viele von diesen Ereignissen sind im gegebenen Fall von Interesse?
Nehmen wir an, uns interessiert die Wahrscheinlichkeit, mit der man eine Drei würfelt, das heißt, uns liegt am Eintreffen eines Ereignisses aus einer Gruppe von 6. Dann müssen wir die Anzahl günstiger Varianten (1 – der Wurf einer Drei) durch die Gesamtzahl Ereignisse teilen und erhalten die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des uns interessierenden Ereignisses. In unserem Beispiel ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, eine Drei zu würfeln, die Zahl $\frac{1}{6}$. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, daß eine gerade Zahl gewürfelt wird? Offenbar $\frac{3}{6}$, denn man teilt 3 günstige Fälle durch die Gesamtzahl möglicher Ereignisse, nämlich 6. Die Wahrscheinlichkeit, daß sich ein Vielfaches von 3 beim Würfeln ergibt, ist demzufolge gleich $\frac{2}{6}$.
Spielt man aber mit 3 oder auch nur mit 2 Würfeln, gibt es sofort Probleme, und man kann einmal die folgende Frage stellen: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß 2 Sechsen geworfen werden? Jede von ihnen unabhängig erscheint mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6}$. Wenn der eine Würfel eine Sechs zeigt, kann der andere 6 verschiedene Zahlen zeigen. Also ist die Wahrscheinlichkeit für einen Sechser-Pasch gleich dem Produkt der beiden Wahrscheinlichkeiten $(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6})$. Das ist ein Beispiel für die Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten. Aber damit sind noch nicht alle neuen Probleme gelöst.
Anfang des 17. Jahrhunderts erschien bei Galilei ein Bekannter und bat ihn um die Aufklärung eines seltsamen Widerspruchs. Er hatte beim Würfelspiel mit 3 Würfeln bemerkt, daß die Summe der Augen auf den 3 Würfeln häufiger 10 ergibt als 9. „Wie kann das sein", fragte er, „es gibt doch sowohl im Falle der Neun als auch im Falle der Zehn die gleiche Anzahl, nämlich 6 mögliche Kombinationen aus 3 Zahlen?" Damit hatte der Bekannte Galileis völlig recht. Sehen wir auf Bild 2 – so ist dort gezeigt, wie man die Neun und die Zehn als Summe aus 3 Zahlen erhalten kann.
Galilei fand den Grund für diesen Widerspruch und löste damit eine der ersten Aufgaben der sogenannten Kombinatorik, eines Hauptinstruments bei Wahrscheinlichkeitsrechnungen.
Wie ist das nun also mit den 3 Würfeln? Wichtig ist nicht, auf wie viele Arten man die Summe in Summanden zerlegen kann, sondern auf wie viele Arten die 3 Würfel fallen können, um in der Summe „9" oder „10" zu ergeben. Galilei stellte fest, daß es für „10" 27 Arten, für „9" 25 Arten gibt. Damit hatte er die theoretische Erklärung für eine empirisch beobachtete Tatsache gefunden. Was ist aber nun der Unterschied zwischen der Anzahl Darstellungen einer Summe durch Summanden und der Anzahl der Varianten beim Würfeln?

Dieses Buch, Umfang 253 Seiten, 38 lustige Vignetten, erschien als Gemeinschaftsausgabe des Verlags Mir, Moskau und des VEB Fachbuchverlag Leipzig
Preis: 5,50 M; Bestellnummer: 546 051 0
A. Kitaigorodski, ein bekannter sowjetischer Wissenschaftler, hat die Gabe, populär schreiben zu können. Mit wachsendem Interesse lesen wir Originelles und Wissenswertes über die Wahrscheinlichkeitstheorie. Wichtige Grundbegriffe, z. B. werden im Zusammenhang mit Spielen, wie dem Würfel- oder Kartenspiel, erläutert. Wir verstehen bald, daß wir Wahrscheinlichkeiten von etwa einem Millionstel zwar vernachlässigen dürfen (also kaum mit einem Lottogewinn zu rechnen haben), dennoch aber Wahrscheinlichkeiten von einem Tausendstel beachten müssen. Kitaigorodski bedient sich interessanter Beispiele: Soll man den Urlaub abbrechen, wenn es ununterbrochen regnet? Muß es Familienkrach geben, wenn braunäugige Eltern ein blauäugiges Kind bekommen?
Alles in allem: ein fesselndes Buch, das unterhält und unauffällig belehrt.

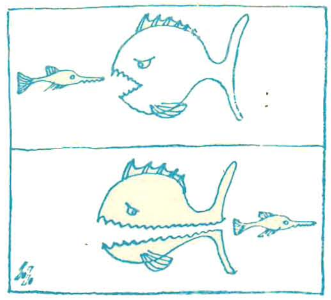
Varianten beim Würfeln?

Hier muß man eine besondere Feinheit beachten. Nehmen wir zuerst den Fall, daß die 3 Würfel 3 verschiedene Ziffern, z. B. eine Eins, eine Zwei und eine Sechs zeigen. Dieses Resultat kann in 6 Varianten auftreten – eine Eins auf dem ersten, eine Zwei auf dem zweiten und eine Sechs auf dem dritten Würfel; Eins auf dem ersten, Sechs auf dem zweiten, Zwei auf dem dritten; genauso gibt es 2 Varianten mit einer Zwei und noch zwei mit einer Sechs auf dem ersten Würfel (in der Abbildung sind alle Möglichkeiten gezeigt).
Anders ist die Sache, wenn die Summe 2 gleiche Summanden enthält, z. B. $1+4+4$. Wenn beim ersten Würfel die Eins kommt, gibt es bei dieser Verteilung nur eine Variante mit der Vier auf den beiden anderen, denn ein Austausch der Ziffern des zweiten und dritten Würfels ergibt keine neue Variante. Die zweite Variante haben wir, wenn die Eins auf dem zweiten Würfel erscheint, und die dritte, wenn sie auf dem dritten Würfel zu sehen ist, insgesamt also 3 Möglichkeiten.
Klar ist schließlich, daß die Verteilung $3+3+3$ beim Würfeln nur durch eine einzige Variante realisiert werden kann.



Die Anzahl Varianten ist in unserer Tabelle hinter den Summanden in Klammern angegeben. Wenn wir die Zahlen in den Klammern addieren, erhalten wir 25 bzw. 27, dasselbe wie auch Galilei. Die Wahrscheinlichkeit, mit 3 Würfeln die Summen 9 bzw. 10 zu erzielen, verhalten sich wie 25 zu 27.
Diese auf den ersten Blick einfache Erklärung ist gar nicht so offensichtlich. Als Illustration kann dienen, daß Leibniz der Meinung war, man könne mit 2 Würfeln mit gleich großer Wahrscheinlichkeit 11 oder 12 würfeln. Galileis Arbeit macht deutlich, daß diese Annahme falsch ist: 12 ist nur auf eine einzige Art (durch 2 Sechsen) zu erzielen, 11 ergibt sich jedoch in 2 Fällen, nämlich wenn der erste Würfel Sechs und der zweite Fünf zeigt und umgekehrt.
Mit 2 Würfeln ergibt sich am häufigsten die Summe 7, dafür gibt es 6 verschiedene Möglichkeiten. Die Summen 6 und 8 sind nur durch 5 Kombinationen darstellbar. Wenn du willst, kannst du diese Behauptung selbst nachprüfen.

In freien Stunden alpha heiter



alpha-Kurzweil

Die Buchstaben sind so durch die Ziffern 1 bis 9 zu ersetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

(1) $\alpha \cdot U \cdot UE = \alpha\,\alpha\,\alpha$
(2) $K \cdot U \cdot UE = KKK$
(3) $U \cdot U \cdot UE = UUU$
(4) $R \cdot U \cdot UE = RRR$
(5) $Z \cdot U \cdot UE = ZZZ$
(6) $W \cdot U \cdot UE = WWW$
(7) $E \cdot U \cdot UE = EEE$
(8) $I \cdot U \cdot UE = III$
(9) $L \cdot U \cdot UE = LLL$

Wer sich in der Teilbarkeit von natürlichen Zahlen auskennt, kann die Gleichungen in wenigen Sekunden lösen.
Folgende Hinweise sollten erst nach mehrmaligen Lösungsversuchen in Anspruch genommen werden:
a) Beginne mit Gleichung (3) oder mit Gleichung (7)! (Jede dieser Gleichungen besitzt genau eine Lösung. Die übrigen Gleichungen besitzen je 7 Lösungen.)
b) U, E und UE sind Primzahlen
c) Beachte, daß $\alpha\alpha\alpha : \alpha = KKK : K = \ldots = LLL : L = U \cdot UE$ gilt!

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

Maße und Gewichte

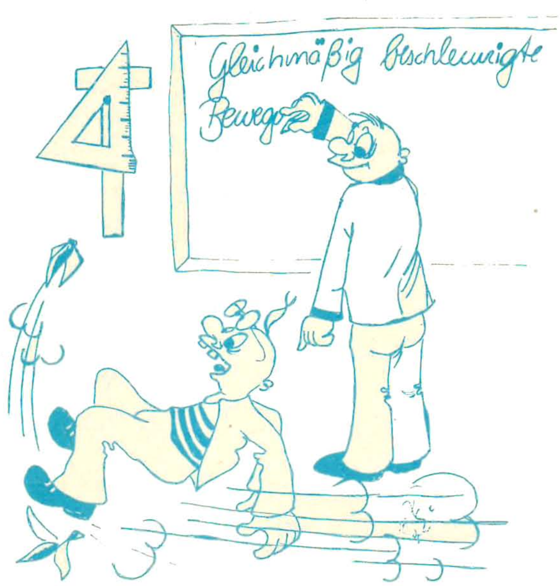
Peter kam aufgeregt vom Pioniernachmittag am Kindertag nach Hause und sprudelte auch gleich los: „Heute war's gut, Vati! Ich habe drei *Gläser* Limonade getrunken und vier *Stücken* Kuchen gegessen! Und mindestens zehn *Kilos* Bonbons hat Frau Meier aus den Tüten verstreut! Und beim Rollerrennen waren die Kurven mit 20 *Säcken* Stroh abgesichert. Das war gut so..."
„Nun höre erst einmal auf", unterbrach ihn der Vater. „Vor Aufregung erzählst du gleich vieles falsch."
„Wieso? So war es doch!"
„Das bestreite ich gar nicht, aber höre einmal zu: Du kannst für die Altstoffsammlung von uns mehrere *Gläser* bekommen, aber du kannst nur drei *Glas* Limonade trinken, weil in diesem Zusammenhang Glas nicht für das Gefäß steht, sondern als Maßeinheit. Ebenso hast du vier *Stück* Kuchen gegessen, und deine Lehrerin hat 10 *Kilo* Bonbons gehabt, und zu eurem Sackhüpfen habt ihr vielleicht 20 *Säcke* benutzt, aber die Rollerstrecke war mit 20 *Sack* Stroh abgesichert. Maßeinheiten werden nämlich fast immer in der Einzahl gebraucht!"
„Also habe ich für die Bockwurst auch nicht 85 *Pfennige*, sondern 85 *Pfennig* bezahlt?"
„Falls du nicht 85 einzelne 1-Pfennig-Stücke hingelegt hast, stimmt das. Aber du scheinst ja mächtig viel gegessen und getrunken zu haben! Außerdem ist es Zeit, ins Bett zu gehen.
Es ist gleich 21 *Uhr* – und nicht 21 *Uhren*!"

nach Hansgeorg Stengel von
Dipl.-Math. Ch. Pollmer, Dresden

Kryptarithmetik

MOON	TWO
+ MAN	+ THREE
+ CAN	+ SEVEN
REACH	TWELVE

aus: Mathematical log, USA



Wie viele Möglichkeiten?

Wie viele Möglichkeiten gibt es, das Wort „Dreieck“ zu lesen?
(Eine Möglichkeit ist angeführt.)

D-R-E I E C K
R E I-E C K
E I E C-K
I E C K
E C K
C K
K

aus: Quant 5/75, Moskau

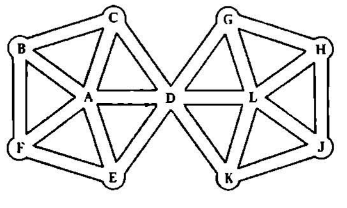
Sekunde hoch 4

Man nehme von vielen nur eine Sekunde
und beschäftigt sich mit ihr nur eine Stunde.
Man sollte sie ins Quadrat ergänzen
und erhebe sie in die vierten Potenzen.
Man sollte ihre Form erklären
und sich mit ihr in der Praxis bewähren.
Wie befreiend wirkt dann das Klingelzeichen.
Man kann endlich dieser Sekunde entweichen.
Man schließt schnell hinter sich die Tür,
und trotzdem verfolgt uns die Sekunde hoch vier.
Man sieht sie in allen Ecken lauern
und des Nachts auf unserem Bette kauern.
Der Traum wird schrecklich,
man träumt von ihr, von der Sekunde hoch vier.
Man sieht sie dann als Mathematikerschreck
und schiebt sie schnell aus dem Gedächtnis weg.

stud. phil. Hannelore Helbig,
Karl-Marx-Universität Leipzig

Festung Eulersburg

Eulersburg ist eine spätmittelalterliche Festung, die nach italienischen Vorbildern aus zwei zusammenhängenden regelmäßigen Fünfecken besteht. Jedes dieser Fünfecke hat in seiner Mitte einen Bergfried, von dem aus gedeckte Gänge nach den Eck-Basteien laufen. Die Basteien sind durch Wehrmauern (Eskarpen) untereinander verbunden. Die Länge der Gänge beträgt 60 m, die der Wehrmauern 70 m.



Die Wache hat Befehl, jede Stunde einmal sämtliche Gänge und Wehrmauern abzuschreiten. Dies wäre ein Gesamtweg von 1 300 m, doch zeigt sich, daß der Weg der Wache tatsächlich größer ist, da in Ausführung des Befehls nicht zu vermeiden ist, daß einige Strecken mehrfach gegangen werden müssen.
Wie lang ist der kürzest mögliche Weg der Wache, bei dem alle zwanzig Kontrollstrecken mindestens einmal begangen werden?

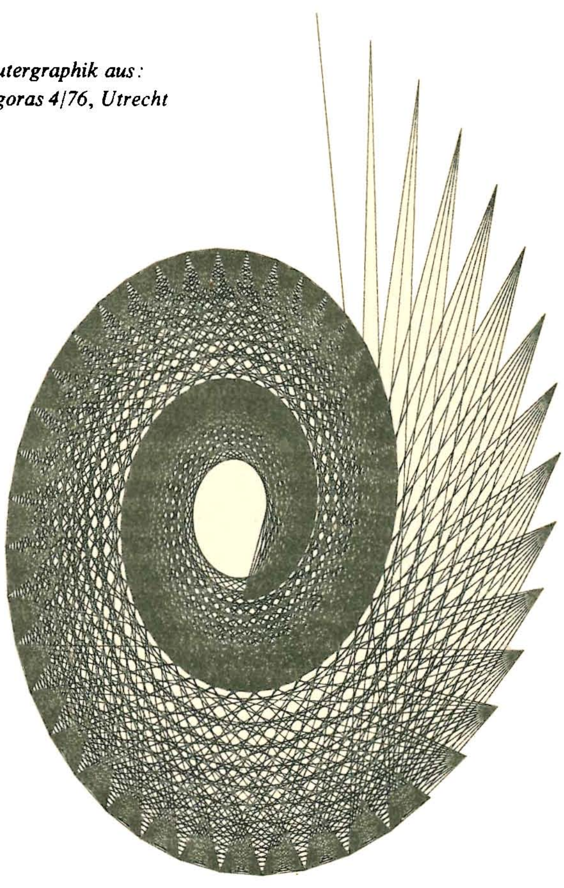
D. St. P. Barnard, London

Eine wahre Begebenheit

Vater erklärt der staunend zuhörenden Familie den Begriff der *Dimension*.
„Also, die *erste Dimension* ist eine Gerade, wie z. B. die Tischkante hier. Verständlich, nicht wahr?!
– Die *zweite Dimension* stellt eine Ebene dar, wie z. B. der Tisch, an dem wir sitzen. Klar!
– Die *dritte Dimension* spannt einen Raum auf, wie unser Zimmer z. B. von drei gedachten Koordinatenachsen bestimmt wird.
– Ja, das ist alles noch einzusehen, wie aber soll man sich die *vierte Dimension* vorstellen???“
Tante Trudchen, für jeden Fortschritt zu begeistern, wirft dazwischen: „Ganz einfach – das ist unser Haus!“

Mathematikfachlehrer F.-J. Fischer, Dresden

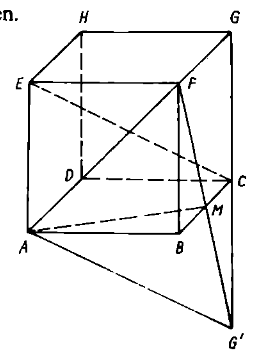
Computergraphik aus:
Pythagoras 4/76, Utrecht



Lösungen

XV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR – Lösungen
DDR-Olympiade
Olympiadeklasse 10

1. (Lösung des Schülers Peter Dittrich, EOS *Dr. Th. Neubauer*, Rudolstadt)
Der Punkt auf der Geraden $g(GC)$, der vom Punkt C den Abstand a hat und auf der anderen Seite von C als G liegt, sei G'. Die Punkte A, G', C, E liegen in der Ebene, die durch die beiden Geraden $g(EA)$ und $g(GC)$ aufgespannt wird, und wegen $EA \parallel GC$ und $\overline{EA}=\overline{G'C}=a$ gilt $AG' \parallel EC$. Daraus folgt, daß die Schnittebenen, die A enthalten und zu EC parallel sein sollen, auch die Gerade $g(AG')$ und somit den Punkt G' enthalten müssen.



Die erste der in der Aufgabe genannten Schnittebenen wird demnach durch die Punkte A, F und G', die nicht auf einer Geraden liegen, eindeutig festgelegt. Hieraus ergibt sich, daß sie die Ebene durch F, B, C und G, in der auch G' liegt, in der Geraden $g(FG')$ schneidet und folglich, wie man durch Anwendung des Strahlensatzes leicht erkennt ($\overline{FB}=\overline{CG'}$, $FB \parallel CG'$), die Kante BC in deren Mittelpunkt M; sie trennt also vom Würfel genau das Tetraeder $ABFM$ ab.
Sieht man das Dreieck ABF als Grundfläche und BM als Höhe dieses Tetraeders an, so folgt für sein Volumen V_T die Formel

$$V_T=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{1}{2}a=\frac{1}{12}a^3.$$

Analog erhält man für die beiden anderen Schnitte ebenfalls als abgetrennte Körper Tetraeder mit dem Volumen V_T, wobei je zwei dieser Tetraeder keine gemeinsamen inneren Punkte haben. Daher gilt für das Volumen des Restkörpers

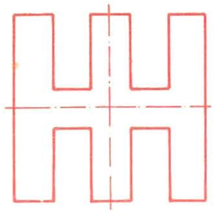
$$V_R=a^3-\frac{3}{12}a^3,$$
$$V_R=\frac{3}{4}a^3.$$

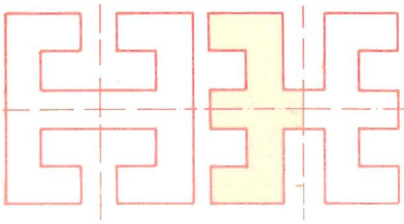
Bemerkungen: Die Schwierigkeit dieser Aufgabe bestand nicht im Errechnen der Formel für V_R, sondern in korrekten Begründungen für die als Ergebnis naheliegenden Sachverhalte. Dabei lag die eigentliche Klippe in dem Nachweis, daß der Punkt M, in dem die durch A und F parallel zu EC verlaufende Ebene ε die Strecke BC schneidet, gerade der Mittelpunkt von BC ist.
Dies konnten nur wenige Schüler beweisen. Viele gingen vom Mittelpunkt M_1 des Quadrates $ABFE$ aus und betrachteten entweder die Gerade $g(M_1M)$ oder die Parallele h zu $g(EC)$ durch M_1; im ersten Fall fehlte oft eine korrekte Begründung dafür, daß $g(EC)$ und $g(M_1M)$ parallel sind, was keineswegs mit einem Hinweis auf die Parallelität zwischen der Geraden $g(EC)$ und der Ebene ε abgetan werden kann, und im zweiten Fall wurde als selbstverständlich angenommen, daß h die Strecke BC schneidet.
Im weiteren Lösungsgang unterblieb vielfach die Bemerkung, daß die drei abgetrennten Teilkörper keine gemeinsamen inneren Punkte haben. Die folgende Tabelle über die erreichten Punktzahlen bestätigt, daß die Aufgabe angemessen schwer war.

Punkte	0	1	2	3	4	5
Anzahl	19	23	18	11	22	6

Dr. Klaus-Dieter Drews,
W.-Pieck-Universität Rostock

2. Ein Quadrat besitzt genau vier Symmetrieachsen: zwei enthalten die Diagonalen, und zwei gehen durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten.
Im vorliegenden Fall liegen auf den Symmetrieachsen, die die Diagonalen enthalten, jeweils sechs Gitterpunkte. Hätte ein Streckenzug s mit den Eigenschaften (1), (2), (3), eine die Diagonale d enthaltende Symmetrieachse, so gäbe es in s einen Teilstreckenzug t von einem der sechs Punkte auf d zu einem anderen, wobei t außer seinen Endpunkten keinen weiteren Punkt auf d enthielte. Dann käme in s auch der durch Spiegelung an d aus t entstehende Streckenzug t_1 vor. Dieser aber würde mit t zusammen bereits einen geschlossenen Streckenzug bilden, ohne daß alle gegebenen Punkte auf ihm liegen. Deshalb scheiden die die Diagonalen enthaltenden Geraden als Symmetrieachsen aus.
Die restlichen zwei Achsen teilen das Quadrat in vier Teilquadrate. Angenommen, ein Streckenzug s mit den Eigenschaften (1), (2), (3) könnte, nachdem er einmal (aus einem anderen Teilquadrat kommend) in das linke obere Teilquadrat q, das die Punkte 1, 2, 3, 7, 8, 9, 13, 14, 15 enthält, eingetreten ist und dort einen Teilstreckenzug t durchlaufen hat, q wieder verlassen, ohne alle neun Punkte von q durchlaufen zu haben. Dann enthielte s auch den durch Spiegelung an der einen Symmetrieachse aus t entstehenden Streckenzug t_1 sowie die durch Spiegelung an der anderen Symmetrieachse aus t und t_1 entstehenden Streckenzüge t_2 und t_3. Die Streckenzüge t, t_1, t_2 und t_3 würden bereits einen geschlossenen Streckenzug bilden, der nicht alle gegebenen Punkte enthielte. Daher genügt es, diejenigen Teilstreckenzüge zu untersuchen, die alle neun Punkte von q durchlaufen. Der gesamte Streckenzug liegt aus Symmetriegründen dann fest und hat die geforderten Eigenschaften.
Der Streckenzug von 2 nach 1 und von dort nach 7 kann bereits eingezeichnet werden, da der Punkt 1 nicht anders erreichbar ist. Der Streckenzug s komme vom rechten oberen Teilquadrat.
Fall 1: s erreiche den Punkt 3; dann gibt es genau die folgenden vier Möglichkeiten:
a) Verläuft s dann zu 2, 1, 7 und von dort weiter zu 13, so liegt der restliche Verlauf eindeutig fest, da vom letzten der neun Punkte das linke untere Quadrat erreicht werden muß: 13, 14, 8, 9, 15, (21).
b) Verläuft s dann zu 2, 1, 7 und von dort weiter zu 8, so liegt der restliche Verlauf ebenfalls eindeutig fest:
8, 9, 15, 14, 13, (19).
c) Verläuft s zu 9 und von dort weiter zu 15, so ergibt sich ein Streckenzug, der aus dem im Fall 1 b) erhaltenen Streckenzug durch Spiegelung an einer Diagonale hervorgeht.
d) Verläuft s zu 9 und von dort weiter zu 8, so ist der übrige Verlauf wieder eindeutig festgelegt:
8, 2, 1, 7, 13, 14, 15, (21).
Fall 2: s erreiche den Punkt 9; bei der Weiterführung über die Punkte 8 oder 15 wäre der Punkt 3 nicht mehr erreichbar, wenn der Streckenzug zum linken unteren Teilquadrat weitergeführt werden soll. Der Streckenzug könnte also nur über die Punkte 9, 3, 2, 1 und 7 verlaufen. Bei der Weiterführung nach 13 könnte 8 nicht mehr einbezogen werden. Bei der Weiterführung nach 8 würde 13 oder 15 unerreichbar sein. Es gibt in diesem Fall also keinen derartigen Streckenzug.
Fall 3: s erreiche den Punkt 15; dann gibt es genau die folgenden zwei Möglichkeiten:
a) Verläuft s dann zu 9, so ergibt sich ein Streckenzug, der aus dem im Fall 1d) erhaltenen Streckenzug durch Spiegelung an einer Diagonalen hervorgeht.
b) Verläuft s nach 14, so ergibt sich ein Streckenzug, der aus dem im Fall 1a) erhaltenen Streckenzug durch Spiegelung an einer Diagonalen hervorgeht.
Damit ist gezeigt, daß es drei und nicht mehr als drei Streckenzüge der geforderten Art gibt. Die geschlossenen Streckenzüge haben folgende Formen:
Bemerkungen: Das gestellte Problem war als Olympiadeaufgabe sehr geeignet, da fast jeder Schüler durch mehr oder weniger systematisches Probieren zumindest einen Lösungs-





ansatz finden konnte. Eine wesentliche Schwierigkeit dieser Aufgabe bestand aber darin, eine vollständige Fallunterscheidung vorzunehmen, d. h. alle Fälle zu erkennen und jeden dieser Fälle zu diskutieren.

Punktabzüge gab es jedoch vor allem auch dadurch, daß unzureichend bzw. fehlerhaft begründet wurde, daß die die Quadratdiagonalen enthaltenden Geraden nicht als Symmetrieachsen für die entstehende Figur möglich sind, und warum es ausreichend ist, nur die „nach unten und rechts offenen" Streckenzüge zu untersuchen, die alle neun Punkte von q durchlaufen. Von sehr vielen Schülern wurde ferner von vornherein davon ausgegangen, daß die entstehende Figur genau und nicht mindestens zwei Symmetrieachsen besitzt. Einige Schüler erkannten auch nicht die Kongruenz von Figuren.

Ergebnisspiegel:

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	6	8	10	11	16	29	15	4

Dr. M. Rehm, Humboldt-Universität Berlin

3A. Offensichtlich gilt $[x^2]=[x]^2$ für alle ganzen Zahlen x.

Wir beschränken uns daher im folgenden auf die Betrachtung reeller Zahlen x, die nicht ganz sind.

1. $x<0$: Dann läßt sich x in der Form $x=g+a$ mit g negativ, ganz und $0<a<1$ darstellen. Es gilt $x^2=g^2+2ag+a^2$ und damit $[x^2]=[x]^2$ genau dann, wenn $0\leqq 2ag+a^2<1$. Letzteres ist aber ein Widerspruch zu den Voraussetzungen, da ja gilt $0>2g+a$. Die Gleichung $[x^2]=[x]^2$ wird also von keinem negativen nicht ganzzahligem x erfüllt.

2. $x>0$: a) Es gelte $g<x<\sqrt{g^2+1}$ (1) (mit $g\geqq 0$ und g ganz). Da dann $\sqrt{g^2+1}\leqq\sqrt{g^2+2g+1}=g+1$ gilt, folgt $[x]=g$ und $[x]^2=g^2$. Andererseits folgt aus (1) auch $g^2<x^2<g^2+1$ und damit $[x^2]=g^2$. Damit ist die Gleichung $[x^2]=[x]^2$ für alle positiven reellen Zahlen x erfüllt, für die (1) gilt.

b) Es gelte $\sqrt{g^2+1}\leqq x<g+1$. Dann gilt ebenso wie unter a), daß $[x]^2=g^2$. Andererseits aber $[x^2]=g^2+1$. Für diesen Fall ist also $[x^2]=[x]^2$ nicht erfüllbar.

Insgesamt gilt $[x^2]=[x]^2$ genau dann, wenn x eine negative ganze Zahl ist oder eine Zahl aus einem der Intervalle $g\leqq x<\sqrt{g^2+1}$ (mit $g\geqq 0$ und g ganzzahlig).

Die weitere Bedingung $-10\leqq x\leqq 2$ ergibt eine Einschränkung auf die Lösungsmenge $\{-10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 2\}\cup\{x: 0\leqq x<\sqrt{2}\}$.

Bemerkungen: Der obige Lösungsweg ist gewählt worden, um zu zeigen, daß die Aufgabe auch ohne die zusätzliche Einschränkung für die 4. Stufe angemessen gewesen wäre. Keiner der Schüler versuchte aber eine solche Verallgemeinerung. Vorherrschend war vielmehr eine Unterteilung in die Intervalle $g\leqq x<g+1$ im angegebenen Gesamtintervall und die Durchführung von Überlegungen in jedem der Teilintervalle. Dabei traten die größeren Schwierigkeiten im Fall $x<0$ auf. Zu bemängeln ist der logisch unklare Aufbau der Lösungen bei vielen Schülern. So wurde die Äquivalenz von Umformungen häufig nicht erkannt oder zumindest nicht beachtet. Prinzipielle Schwierigkeiten traten wohl nur bei sehr wenigen Schülern auf. Auch die Tatsache, daß etwa 75% der Schüler diese von den beiden Wahlaufgaben zu lösen versuchten, spricht dafür, daß der Schwierigkeitsgrad nicht zu hoch war.

So ergab sich auch ein guter Durchschnitt für die erreichte Punktzahl:

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Anzahl	5	3	6	3	7	6	8	21	14

Dr. Hans-Jürgen Sprengel, Päd. Hochschule „Karl Liebknecht", Potsdam

3B. Wie aus dem Aufgabentext hervorgeht, ist zweierlei zu zeigen. Erstens die Existenz einer Zahl c, für die die Punkte von k die gegebene Beziehung zwischen den Abständen erfüllen. Zweitens ist nachzuweisen, daß alle Punkte der Ebene, für die die gegebene Relation zwischen den Abständen von F_1, F_2 mit c erfüllt ist, auf k liegen. Wir geben für den ersten Teil die mehrfach von den Schülern – mit geringfügigen Modifikationen – gefundene Lösung. Für den zweiten Teil zitieren wir die Lösung der Aufgabenkommission, die auch bei einigen Schülern anzutreffen ist.

Teil 1: Für einen Punkt P auf k mit den Koordinaten $\left(x;\frac{1}{x}\right)$ gilt

$$d_1=\overline{F_1P}=\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+\left(\frac{1}{x}-\sqrt{2}\right)^2},$$

$$d_2=\overline{F_2P}=\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+\left(\frac{1}{x}+\sqrt{2}\right)^2}.$$

Damit erhält man nach einigen Umformungen

$$(d_1-d_2)^2=2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+8-2\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{x^2}+4+2\sqrt{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}+4-2\sqrt{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)}$$

$$=2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+8-2\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{x^2}+4\right)^2-8\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$=2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+8-2\sqrt{\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\right)^2-8\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$=2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+8-2\sqrt{\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right)^2}$$

$$=2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+8-2\left|\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right|.$$

Wegen $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\geqq 4\ (x\neq 0)$ folgt $(d_1-d_2)^2=8$ und somit $c=2\sqrt{2}$.

Teil 2: Wenn ein Punkt P mit den Koordinaten $(x;y)$ die Eigenschaft $|\overline{F_1P}-\overline{F_2P}|=2\sqrt{2}$ hat, so folgt

$$\left|\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2}-\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2}\right|=2\sqrt{2}$$ und hieraus

$$2x^2+2y^2+8-8=2\sqrt{x^4+y^4+2x^2y^2-16xy+16},$$

$$(x^2+y^2)^2=x^4+y^4+2x^2y^2-16xy+16,$$

$$16xy=16,$$

also $x\neq 0$ und $y=\frac{1}{x}$, d. h., P liegt auf k. Somit ist k die Menge aller Punkte, für die $|\overline{F_1P}-\overline{F_2P}|=c=2\sqrt{2}$ gilt.

Bemerkungen: Diese Wahlaufgabe wurde von 26 der insgesamt 99 Teilnehmer gewählt. Häufig wurde übersehen, daß zur Lösung dieser Aufgabe – wie oben angegeben – zweierlei zu zeigen ist.

Von vielen Schülern wurde nur Teil 1 erledigt. Eine vollständige Lösung haben lediglich die Schüler B 134 und B 102 vorgelegt. Trotzdem dürfte der Schwierigkeitsgrad dieser Aufgabe für eine DDR-Olympiade angemessen sein.

Bei dieser Aufgabe waren 8 Punkte zu erreichen, über die Verteilung der Punkte mag folgende Tabelle Aufschluß geben:

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Anzahl	5	5	1	0	1	12	0	0	2

Dr. Klaus Zacharias, Zentralinstitut f. Math. u. Mechanik, Berlin

4. Wenn die natürlichen Zahlen x, y den Bedingungen der Aufgabe genügen, o.B.d.A. sei dabei $x>y$, so gibt es natürliche Zahlen $a, b\leqq 9$ mit $\frac{x+y}{2}=10a+b$ und $xy=(10b+a)^2$.

Somit ist

$$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$$
$$=4(10a+b)^2-4(10b+a)^2$$
$$=4\cdot 9\cdot 11(a^2-b^2)$$

eine Quadratzahl und da $x\neq y$ gilt, ist $a>b$.

Folglich muß

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

durch 11 teilbar sein. Da $0<a-b<9$ und $0<a+b<18$ gilt, erhalten wir: $a+b=11$, $b>1$ und $a-b=11-2b$ ist eine Quadratzahl. Daraus folgt, daß $b=5$ und $a=6$ ist.

Wir erhalten somit
$x+y=2(10a+b)=130$ und
$x-y=2\cdot 3\cdot 11=66$, woraus $x=98$ und $y=32$ folgt. Damit erfüllt also höchstens das ungeordnete Paar (98, 32) die Bedingungen der Aufgabe.
In der Tat gilt

$$\frac{x+y}{2}=65 \text{ und } \sqrt{xy}=\sqrt{3136}=56.$$

Damit ist das ungeordnete Paar (98, 32) die einzige Lösung.
Bemerkungen: Die Aufgabe kann, wie auch der Ergebnisspiegel ausweist, als relativ leicht eingeschätzt werden. Dennoch traten einige Fehlschlüsse auf, von denen hier zwei genannt werden sollen:
Seien x, y, n, r, s, p natürliche Zahlen und p prim.
1. Fehlschluß: Wenn $xy=n^2$ ist, so ist $x=r^2$ und $y=s^2$.
2. Fehlschluß: Wenn $xy=p^2$ ist, so ist $x=y=p$.
Des weiteren wurde des öfteren nur nachgewiesen, daß höchstens (98, 32) Lösung ist.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6
Anzahl	19	17	5	5	1	18	34

Dr. W. Harnau,
W.-Pieck-Universität Rostock

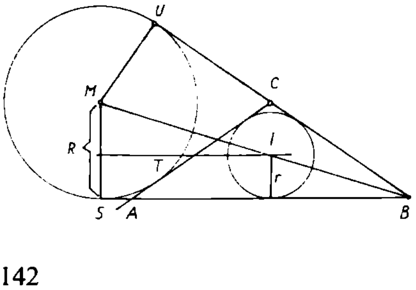
5. Als Lösung einer Konstruktionsaufgabe ist die Lösung wie allgemein üblich in Analyse (I), Konstruktion (II), Beweis der Konstruktion (III) und Determination, d. h. Diskussion von Existenz und Eindeutigkeit der Konstruktion (IV) gegliedert.
I. Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe genügt. Der Berührungspunkt des Ankreises mit der Seite AC sei T, die Berührungspunkte dieses Ankreises mit den Strahlen aus B durch C bzw. aus B durch A seien U bzw. S. Der Mittelpunkt des Ankreises sei M, der des Inkreises I. Dann gilt nach dem Satz über Tangentenabschnitte von einem Punkt an einen Kreis:

$$\overline{BS}=\overline{BU},\ \overline{AS}=\overline{AT},\ \overline{CT}=\overline{CU}.$$

Ferner gilt
$\overline{AB}=\overline{BS}-\overline{AS}=\overline{BU}-\overline{AS},\ \overline{BC}=\overline{BU}-\overline{CU},$
$\overline{CA}=\overline{CT}+\overline{AT}=\overline{CU}+\overline{AS}$ und mithin
$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{BU}-\overline{AS}+\overline{BU}-\overline{CU}+\overline{CU}+\overline{AS}=2\overline{BU}$, also

$$s=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})=\overline{BU}.$$

Da die Strahlen aus B durch S bzw. U die genannten Kreise mit den Mittelpunkten M und I berühren, liegen M und I nach einem bekannten Satz auf der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle SBU$ (siehe Bild).



Daraus ergibt sich, daß ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe genügt, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
II. (1) Man zeichnet eine Strecke der Länge s mit den Endpunkten B und S.
(2) Man errichtet in S die Senkrechte auf SB und trägt darauf eine Strecke der Länge R ab. Der andere Endpunkt dieser Strecke sei M.
(3) Man spiegelt SB an MB und erhält UB.
(4) Man zeichnet zu SB die Parallele im Abstand r. Schneidet sie MB in einem Punkt zwischen B und M, so sei I dieser Schnittpunkt.
(5) Man zeichnet die Kreise um M bzw. I mit den Radien R bzw. r.
(6) Man konstruiert, falls die unter (5) konstruierten Kreise sich nicht schneiden, eine ihrer inneren Tangenten. Ist das der Fall, so seien A bzw. C die Schnittpunkte dieser Tangente mit SB bzw. BU.
III. Jedes so konstruierte Dreieck ABC entspricht den Bedingungen der Aufgabe.
Beweis: Laut Konstruktion hat das Dreieck ABC einen Inkreis vom Radius r und einen Ankreis an die Seite AC vom Radius R. Laut Konstruktion gilt ferner

$$s=\overline{BS}=\overline{BU}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}).$$

IV. Die Konstruktionsschritte (1), (2), (3) und (5) sind stets eindeutig ausführbar. Der Konstruktionsschritt (4) ist genau dann ausführbar, wenn $R>r$ gilt, und in diesem Falle eindeutig ausführbar. Konstruktionsschritt (6) ist genau dann ausführbar, wenn $\overline{MI}\geqq R+r$ gilt. Wegen $\overline{MI}=\overline{MB}-\overline{BI}$ und $\overline{MB}=\sqrt{s^2+R^2}$ (Pythagoras) sowie $\overline{BI}=\dfrac{\overline{MB}\cdot r}{R}$ (Strahlensatz) ist diese Bedingung gleichwertig mit $\overline{MB}-\overline{BI}\geqq R+r$, also auch mit $\sqrt{s^2+R^2}\left(1-\frac{r}{R}\right)\geqq(R+r)$. (*)
Für $\overline{MI}=R+r$ erhält man genau eine gemeinsame Tangente und damit auch genau ein Dreieck ABC.
Für $\overline{MI}>R+r$ erhält man genau zwei gemeinsame Tangenten und genau zwei spiegelbildlich zu MB liegende kongruente Dreiecke. Daher existiert genau dann ein den Bedingungen der Aufgabe entsprechendes Dreieck, wenn (*) gilt; und ist dies der Fall, so gibt es bis auf Kongruenz genau ein derartiges Dreieck.
Bemerkungen: Wie aus der Tabelle unten ersichtlich ist, konnte an etwa ein Drittel der Schüler kein Punkt erteilt werden; diese Schüler fanden keinen Zugang zur Lösung. Den Schülern, die drei oder vier Punkte erhielten, gelang es, den Teil (I) der Lösung im wesentlichen zu erbringen, sie erkannten also, daß die Länge der Strecke $\overline{BU}$ gleich dem halben Umfang des Dreiecks ist und hatten hiermit den „springenden Punkt" bewältigt, um an die anderen Teile der Lösung gehen zu können. Sie scheiterten im allgemeinen daran, die Konstruktion exakt anzugeben und vor allem an Teil (IV) der Lösung, für den eine neue Idee notwendig war, nämlich die Erkenntnis, daß der Konstruktionsschritt (6) eindeutig ausführbar ist genau dann, wenn $\overline{MI}\geqq R+r$ ist. Bei Vorhandensein der beiden skizzierten Ideen hing dann der Erfolg nur noch von der gewissenhaften Handhabung des „mathematischen Handwerkzeugs" ab, das für solche Aufgaben beherrscht werden muß. Und hierbei ist festzustellen, daß es leider eine ganze Reihe von Schülern gab, die durch Unexaktheit oder Unvollständigkeit wertvolle Punkte verschenkten.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	30	5	8	11	17	11	8	9

Dr. Monika Noack,
Humboldt-Universität Berlin

6. Wir zeigen: Ist f eine für alle reellen Zahlen x definierte nullstellenfreie Funktion, so folgt daraus nicht die Nullstellenfreiheit der Funktion $F(x)=f(2x)+f(3x)$.
Es sei z. B. $f(x)=\begin{cases} 1 \text{ für } x<3 \\ -1 \text{ für } x\geqq 3.\end{cases}$
Diese Funktion entspricht den Bedingungen der Aufgabe: sie ist für alle reellen Zahlen x definiert und nullstellenfrei.
Für $F(x)=f(2x)+f(3x)$ gilt aber:

$$F(1)=f(2)\ +f(3)=1+(-1)=0.$$

Es gibt also eine reelle Zahl x, nämlich $x=1$, mit $F(1)=0$, d. h. $F(x)$ ist nicht nullstellenfrei. q.e.d.
Bemerkungen: Fast die Hälfte der Schüler untersuchte nur solche Funktionen $f(x)$, die für alle reellen Zahlen x stets dasselbe Vorzeichen besitzen. Typische Fehler waren auch das Gleichsetzen von $f(2x)$ mit $2f(x)$ bzw. von $(-1)^a$ mit -1^a bei der Konstruktion eines Beispiels.
Punkteverteilung:

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	24	18	22	3	5	3	5	20

Dr. Ingeborg Bartsch,
Institut für Lehrerbildung Rostock

Lösungen zu: AG's im Blickpunkt (S. 132)
Lösung für den Nenner 13

$$\frac{7}{2}(100000+x)=10x+1;$$
$$\frac{4}{3}(200000+x)=10x+2;$$
$$300000+x=(10x+3)\cdot 4;$$
$$\frac{11}{5}(300000+x)=10x+3;$$
$$\frac{4}{3}(400000+x)=10x+4;$$
$$500000+x=(10x+5)\frac{7}{5};$$
$$600000+x=(10x+6)\cdot 4;$$
$$\frac{4}{3}(600000+x)=10x+6;$$
$$700000+x=(10x+7)\cdot\frac{10}{9};$$
$$900000+x=(10x+9)\cdot 4.$$

Lösungen zu: Abschied von 1976 (6/76)

▲1▲ $(2)\ 48 \cdot 39+(1+2+5)(6+7)$;
$(3)\ 2^{11}-2^6-2^3$; $(4)\ 3^7-3^5+3^2+3^3-3^1-3^0$;
$(5)\ 44 \cdot 44+44-4$; $(6)\ 45^2-7^2$;
$(7)\ 13^3-6^3-2^3+1^3+1^3+1^3$.

▲2▲ Es gilt:

$$\begin{aligned} Z &= 1976^{1976}-1976 = 1976\,(1976^{1975}-1) \\ &= 1976(1976-1)\,(1976^{1974}+1976^{1973} \\ &\quad +\ldots+1) \\ &= 1976 \cdot 1975 \cdot P \end{aligned}$$

wobei P die Summe der Glieder in der letzten Klammer ist. Die Klammer enthält 1975 Summanden, wovon 1974 die Endziffer 6 haben und einen Summanden 1. Daher endet P auf die Ziffer 5: $P=5 \cdot R$

Wir haben also

$$\begin{aligned} 1976 &= 8 \cdot 247 \\ 1975 &= 25 \cdot 79 \\ P &= 5 \cdot R \end{aligned}$$

Somit ist Z durch 8 und 125, also auch durch 1000 teilbar.

Lösungen zu: alpha-heiter 6/76

alpha-Kurzweil

$1 \cdot 3 \cdot 37 = 111$	$6 \cdot 3 \cdot 37 = 666$
$2 \cdot 3 \cdot 37 = 222$	$7 \cdot 3 \cdot 37 = 777$
$3 \cdot 3 \cdot 37 = 333$	$8 \cdot 3 \cdot 37 = 888$
$4 \cdot 3 \cdot 37 = 444$	$9 \cdot 3 \cdot 37 = 999$
$5 \cdot 3 \cdot 37 = 555$	

Kryptarithmetik

$$9552+902+382=10836$$

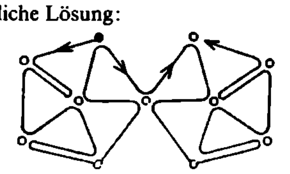
Wir suchen Einsender der Lösungen für das zweite Kryptogramm!

Wieviele Möglichkeiten?

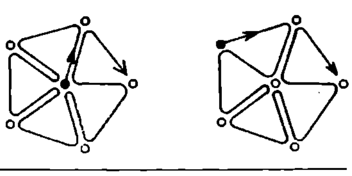
Es gibt genau 64 Lösungen.

Festung Eulersburg

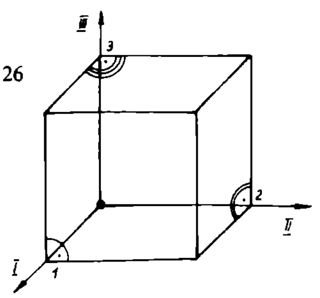
Mögliche Lösung:



Vergebliche Versuche:



zu S. 126



Junge Mathematiker, Physiker und Chemiker an Universitäten und Hochschulen

Die zielstrebige Förderung besonderer Begabungen und Interessen junger Menschen auf den verschiedensten Gebieten ist in unserem Staat nicht nur Gesetz, sondern in der Praxis bewährte Realität. Viele Schüler konnten zum Beispiel bei den Mathematikolympiaden, in Mathematikzirkeln und Arbeitsgemeinschaften diesen Vorzug unserer Gesellschaftsordnung selbst erleben.

Ein Beispiel für die zielgerichtete Förderung von Schülern, die sich bei insgesamt guten schulischen Leistungen besonders durch sehr gutes mathematisches und naturwissenschaftliches Wissen und Können auszeichnen, ist die Ausbildung von Schülern der Klassenstufen 11 und 12 in Spezialklassen an Universitäten und Hochschulen. Außerdem werden in einigen mathematisch-naturwissenschaftlichen Spezialschulen z. B. der *Heinrich Hertz*-Oberschule in Berlin, Schüler der Klassen 9 bis 12 unterrichtet.

Die Spezialklassen bestehen nunmehr 12 Jahre und können auf eine sehr erfolgreiche Tätigkeit zurückblicken. Beispielsweise kommt seit mehreren Jahren etwa ein Viertel aller Preisträger der Bezirks-Mathematik-Olympiade in Berlin aus der Spezialklasse der Humboldt-Universität, und auch im DDR-Maßstab und bei den *Internationalen Mathematikolympiaden* findet man Angehörige von Spezialklassen unter den Preisträgern. Fast alle Spezialklassenschüler konnten bisher nach dem Abitur ein Studium aufnehmen, und zwar vorwiegend in den Grundstudienrichtungen Mathematik, Physik, Chemie, in technischen Grundstudienrichtungen, ein Lehrerstudium bzw. ein Studium in anderen naturwissenschaftlichen oder gesellschaftswissenschaftlichen Fachrichtungen. Die überwiegende Mehrheit der ehemaligen Spezialklassenschüler kann auf hervorragende Studienergebnisse und aktive gesellschaftliche Arbeit in ihren Studienkollektiven verweisen.

Die Ausbildung in den Spezialklassen entspricht bis auf die Spezialfächer (Mathematik, Physik bzw. Chemie) der Ausbildung in den Erweiterten Oberschulen. In den Spezialfächern wird besonderer Wert auf die Entwicklung des wissenschaftlichen Denkens und Arbeitens, die sehr gründliche Behandlung des Stoffes und die Selbständigkeit der Schüler gelegt. Der Unterricht wird vorwiegend durch Wissenschaftler der Universitäten und Hochschulen durchgeführt, die langjährige Erfahrungen in der Ausbildung von Schülern haben. Auch die musische und sportliche Betätigung kommt nicht zu kurz.

Selbstverständlich stellt die Ausbildung in den Spezialklassen hohe Anforderungen. Deshalb kommen nur solche Schüler der 10. Klassen der Oberschule und der Vorbereitungsklassen für die Abiturstufe zur Eignungsprüfung für die Spezialklasse an die Hochschule, die bereits zur Aufnahme in die Abiturstufe bestätigt worden sind. Die Vorschläge für die Aufnahme von Schülern in die Spezialklassen erfolgen nach Auswahl durch die Direktoren der Oberschulen und werden über die Kreis- und Bezirksschulräte jeweils bis zum 31. 12. für das kommende Schuljahr an die Universitäten und Hochschulen eingereicht. Die Hochschulen können von Schülern Bewerbungen, denen die Zustimmung der Eltern beiliegt, unmittelbar entgegennehmen. Sie fordern in solchen Fällen vom zuständigen Bezirksschulrat das Einverständnis zur Aufnahme des Schülers in die Spezialklasse sowie die entsprechenden Unterlagen an.

Die Arbeitsweise von Spezialklassen ist in einer Anweisung (15/76) des Ministers für Hoch- und Fachschulwesen vom 14. Juni 1976 geregelt, die in den „Verfügungen und Mitteilungen des Ministeriums für Hoch- und Fachschulwesen" veröffentlicht wurde.

J. Geburtig, Berlin

Übersicht über die bestehenden Spezialklassen

- Schwerpunkt Mathematik/Physik:
  - Humboldt-Universität zu Berlin
  - Martin-Luther-Universität Halle
  - Die Bildung einer Spezialklasse an der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock wird vorbereitet
- Schwerpunkt Mathematik/Physik/Technik:
  - Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt
- Schwerpunkt Chemie:
  - Technische Hochschule Carl Schorlemmer Leuna-Merseburg

Übung macht den Meister

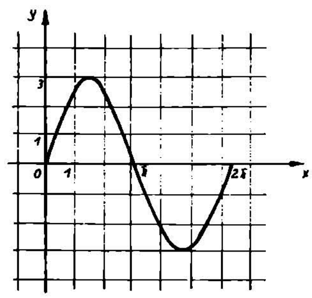
1972
Ermitteln Sie alle Winkel x im Intervall $0° \leqq x \leqq 360°$, für die gilt:
$\sin x = 0{,}6600$!

1970
Ermitteln Sie $\cos 120°$! Bestimmen Sie x in $x = \log_5 125$!

1969
Ermitteln Sie die Winkel α, für die gilt:
$\sin\alpha = 0{,}9011$, $0° \leqq \alpha \leqq 360°$!

Arbeit mit trigonometrischen Funktionen

1976
a) Durch die Gleichung $y = \frac{3}{2}\sin 2x (x \in P)$ ist eine Winkelfunktion gegeben.
Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion genau im Intervall $-\pi \leqq x \leqq \pi$, und geben Sie den Wertebereich dieser Funktion an!
b) In dem nachfolgenden Bild ist eine Winkelfunktion mit der Gleichung $y = a \cdot \sin bx$ (a, b, $x \in P$) im Intervall $0 \leqq x \leqq 2$ dargestellt. Wie lautet die Gleichung in diesem speziellen Fall?



c) Gegeben sei der Term $\frac{1}{1 - \sin x}$ $(x \in P)$.
Für welchen Wert von $x (0 \leqq x \leqq 2\pi)$ ist dieser Term nicht definiert?

1975
Skizzieren Sie den Graph der Funktion $y = \sin\frac{1}{2}x$ $(x \in P)$ im Intervall $0 \leqq x \leqq 4\pi$!

1974
Gegeben sind Funktionen durch die folgenden Gleichungen:
$y = \sin x$, $y = 2\sin x$, $y = \sin 2x$
a) Zeichnen Sie die Graphen dieser Funktionen im Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$! Benutzen Sie dabei ein und dasselbe rechtwinklige Koordinatensystem, und kennzeichnen Sie jeden Graph durch die entsprechende Gleichung!
b) Geben Sie für $y = 2\sin x$ alle im angegebenen Intervall auftretenden Nullstellen an!
c) Geben Sie für $y = \sin 2x$ die kleinste Periode an!

1973
Skizzieren Sie den Graph der Funktion mit der Gleichung $y = 2\sin x$ $x \in P$, im Intervall $0 \leqq x \leqq 3$! Geben Sie den Wertebereich dieser Funktion an!

Ärger, nichts als Ärger

Mein Bruder hat sich über die 5 in der Mathearbeit geärgert, und dann hat er sich über mich geärgert,
weil ich mich nicht auch über seine 5 in der Mathearbeit geärgert habe.
Dann hat er sich über sich selbst geärgert, weil er sich über mich geärgert hat,
weil ich mich nicht über seine 5 in der Mathearbeit geärgert habe.

K. Koch, Schmalkalden

Abschied von $1 - 9 + 7 + 6 = -\sqrt{(1^9)^7} + 6$

$-1-9+7+6 = \sqrt{1+9-7+6} = \frac{-1+9+7+6}{-1+9-7+6}$

Matthias Heinewetter, Heilbad Heiligenstadt

$1 \cdot 9 \cdot 76 = \sqrt{19}(-7+6+19) \cdot \sqrt{76}$

Sabine Bruns, Braunschweig

$(19 \cdot 76) - (19 \cdot 7 \cdot \dot{6}) - (1 \cdot 97 \cdot \dot{6}) = (1+9) \cdot 7 - 6$

Helmut Hörmeyer, Innsbruck

$(\sqrt{19} \cdot \sqrt{76}) \cdot (1+9+7 \cdot 6) = 1976$

Sven Malies, Berlin(West)

$(1+97+6) \cdot (1 \cdot \sqrt{9}! + 7 + 6) = 1976$

Rudolf Gutsch, Wien

$\frac{1976}{19} + \frac{1976}{76} = (1+9) \cdot (7+6)$

Prof. Dr. M. Wilke, Frankfurt (Main)

Zwei Aufgaben für unsere alpha-Leser:

▲1▲ Die Zahl 1976 läßt sich durch Zahlen, die durch die vier Grundrechenarten verknüpft sind und ganz bestimmten Bedingungen genügen, darstellen:
(1) Nur mit Hilfe von Zahlen, die mit der Ziffer 1 gebildet werden können:

$1976 = (1111 - 111 - 11 - 1) \cdot (11 + 11) : 11$

(2) durch Zahlen, in denen alle Ziffern von 1 bis 9 vorkommen (jede Ziffer darf dabei nur einmal verwendet werden)

(3) nur mit Hilfe von Potenzen mit der Basis 2

(4) nur mit Hilfe von Potenzen mit der Basis 3

(5) nur mit Zahlen, die mit der Ziffer 4 gebildet werden können

(6) nur als Summe von Quadratzahlen

(7) nur als Summe von Kubikzahlen

Mathematikfachlehrer H. Kampe, Neuseddin

▲2▲ Man zeige, daß $1976^{1976} - 1976$ durch 1000 ohne Rest teilbar ist.

H. Oehl, München

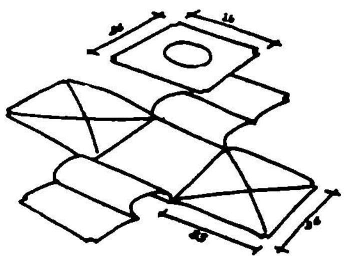
(Lösungen siehe S. 143)

Laßt Euer Licht leuchten!

Vliseline ist ein Material, das in der Schneiderei Verwendung findet. Es ist zwar nicht sonderlich steif, hat aber dafür schöne Transparenz.

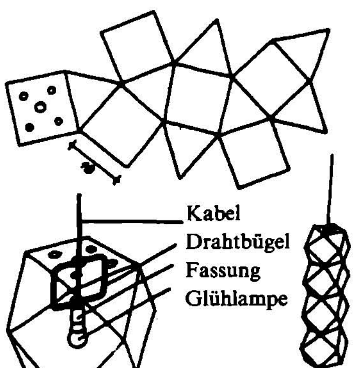
Modell 1

Dieses Modell ist denkbar einfach. Der Zuschnitt erfolgt wie in Bild 1. Man kann noch einige Bügelfalten anbringen. Es empfiehlt sich evtl. Bemalung vor der Montage vorzunehmen. Die acht Holzstäbchen sind etwa 28 cm lang und werden mit der Vliseline verklebt und an den Enden zusammengebunden. *L. Brandt, Berlin*



Modell 2

Das Material ist Zeichenkarton, eine Schere und etwas Duosan. Der Schnitt setzt sich aus sechs Quadraten und sechs gleichseitigen Dreiecken zusammen. Wenn du das Modell gleich viermal baust, kann sogar eine Art Stehlampe, die von der Decke hängt, werden. *L. Brandt*

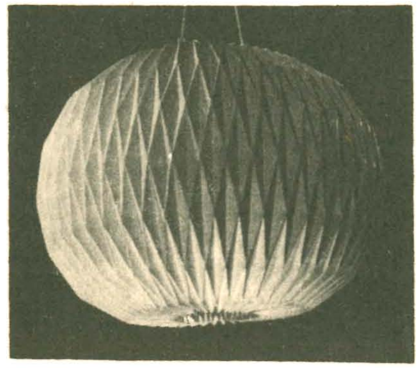


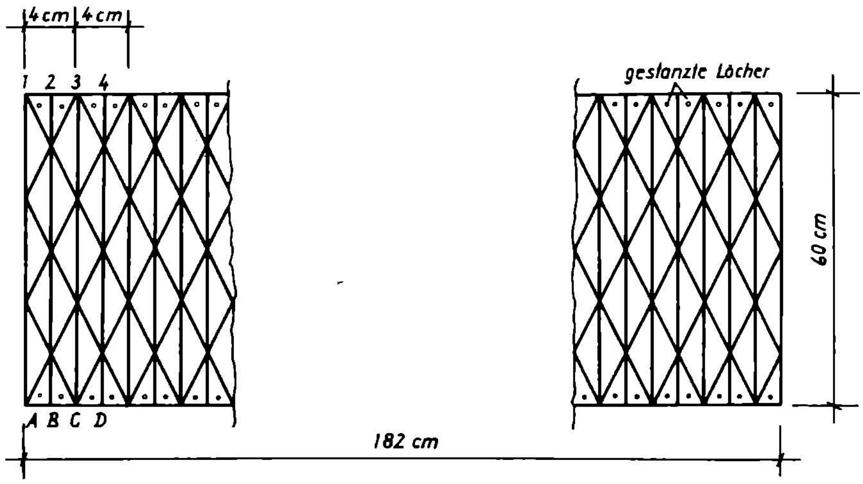
Modell 3

Zur Herstellung des auf dem Bild sichtbaren Lampenmodells führe die folgenden Arbeitsgänge aus.

Schneide von einer Rolle Zeichenkarton einen Bogen etwa vom Format 2,00 m mal 0,70 m ab. Darauf zeichne mittig ein Rechteck mit den Abmessungen 1,82 m × 0,60 m. Markiere auf der oberen und unteren Rechteckseite von dem linken oberen bzw. linken unteren Eckpunkt aus in 4 cm Abstand Punkte.

Bezeichne den linken oberen Eckpunkt und die 3 folgenden markierten Punkte der oberen Rechteckseite mit 1, 2, 3, 4 und den linken unteren Eckpunkt und die drei folgenden markierten Punkte der unteren Rechteckseite mit *A*, *B*, *C*, *D*.





Ritze mit einer Ziehfeder

a) zu $\overline{1, D}$ parallele Geraden (1. Parallelenschar) und

b) zu $\overline{A, 4}$ parallele Geraden (2. Parallelenschar) durch alle markierten Punkte in den Zeichenkarton ein;

c) im Abstand von 2 cm Parallele zur kleinen Rechteckseite in den Zeichenkarton ein (3. Parallelenschar).

Schneide das gezeichnete Rechteck (1,82 m mal 0,60 m) aus. Stanze am oberen und unteren Rand des Rechteckes Löcher aus (siehe Skizze).

Falte den Zeichenkarton längs jeder eingeritzten Geraden.

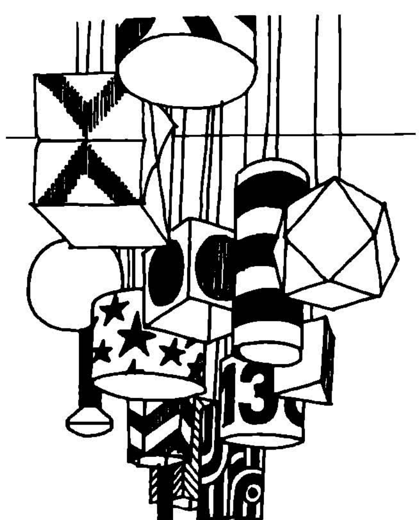
a) der 1. und dann der 2. Parallelenschar, so daß die eingeritzte Gerade innerhalb des gefalteten Zeichenkartons liegt;

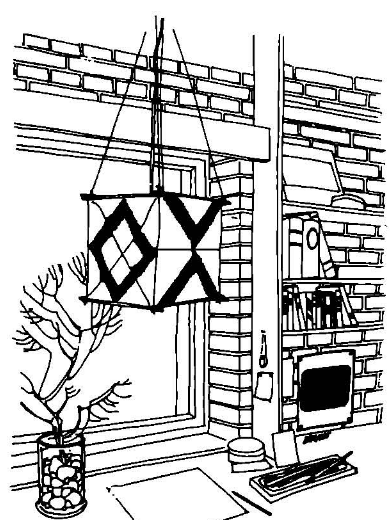
b) der 3. Parallelenschar, so daß bei jeder Faltung die eingeritzte Gerade von außen sichtbar ist.

Klebe die beiden kleinen Rechteckseiten längs eines möglichst schmalen Streifens zusammen. Die geritzten Linien sind von außen nicht sichtbar.

Fädele durch die vorhandenen Löcher zwei Fäden, ziehe sie jeweils zu einem kleinen Kreis zusammen und verknote sie.

E. Kühn, Weimar





Porträt eines Wissenschaftlers

Zum 500. Todestag von Johannes Müller

(Regiomontanus) 1436 bis 1476

Regiomontanus ist der herausragende europäische Mathematiker des 15. Jahrhunderts. Seine Zeit war durch ein Anwachsen der antifeudalen Klassenkämpfe in Stadt und Land und die Entwicklung neuer Elemente in der Wirtschaft auf Grundlage einer breiten Entfaltung der Warenproduktion gekennzeichnet. Auf geistigem Gebiet zeigten sich erste antifeudale Gedanken in der Philosophie des *Nicolaus Cusanus*. Die äußerten sich vor allem in seiner Hinwendung zu den Naturwissenschaften, zur dialektischen Betrachtungsweise aller Erscheinungen und zu humanistischen Gedanken. Gleichzeitig eröffnete die bahnbrechende Erfindung des Buchdrucks mit beweglichen Lettern durch *J. Gutenberg* um 1445 völlig neue Möglichkeiten zur Verbreitung des Wissens.

Als theoretische Grundlage für die Entwicklung der Produktivkräfte und als ideologische Waffe des Bürgertums formte sich in dieser Zeit die wissenschaftliche Naturforschung. Zudem wurden mathematische Methoden vervollkommnet und neu entdeckt. Zu den bedeutenden mathematischen Disziplinen entwickelten sich *Trigonometrie* und *Algebra* als Vorstufe der modernen Algebra. Die Herausbildung der Trigonometrie als mathematische Disziplin war eng mit dem Wirken von *Regiomontanus* verknüpft.

Johannes Müller wurde am 6. Juni 1436 in Königsberg oder im nahegelegenen Dorf Unfinden geboren. Nach der Stadt Königsberg nannte er sich latinisiert *Regiomontanus* oder auch *Johannes de monte Regio*.

Bereits mit elf Jahren nahm er ein Studium an der Universität Leipzig auf, das er drei Jahre später in Wien fortsetzte. Die Universität Wien zeichnete sich durch eine besondere Pflege der Mathematik aus. Gleichzeitig nahmen staatlich-politische Aufgaben einen vorrangigen Platz ein, da Wien die Residenzstadt der Habsburger war. Auf diese Weise konnte *Regiomontanus* in Wien nicht nur seine mathematischen Kenntnisse vervollständigen, sondern kam in noch stärkerem Maße mit Fragen des Kalenderwesens, der Zeit- und Ortsbestimmung und der Astrologie in Berührung. Außerdem übte der Mathematiker und Astronom *Georg Peuerbach* (1423 bis 1461) als Anhänger der neuen humanistischen Bildung einen maßgeblichen Einfluß auf den Werdegang *Regiomontanus*' aus. *Peuerbachs* besonderes Verdienst bestand darin, daß er seine Schüler auf die Auswertung des antiken Wissens lenkte.

1461 ging *Regiomontanus* im Gefolge des Kardinals *Johannes Bessarion*, der in der Kirchenpolitik eine bedeutende Rolle spielte und besonderes Interesse für Mathematik, Astronomie und das antike Erbe zeigte, für mehrere Jahre nach Italien. Das war eine der wissenschaftlich fruchtbarsten Zeiten für *Regiomontanus*. Hier setzte er die Neubearbeitung und Übersetzung des „Almagest" von *Ptolemäus* fort, die sein inzwischen verstorbener Lehrer *Peuerbach* begonnen hatte. In Verbindung mit diesem Werk, das ausführliche Kapitel über trigonometrische Berechnungen enthält, fertigte *Regiomontanus* seine bedeutende Arbeit über Trigonometrie an. Die Beschäftigung mit der historischen Entwicklung mathematischer Kenntnisse befähigten *Regiomontanus*, das bis zu seiner Zeit angesammelte Wissen über Trigonometrie zu ordnen und zum Teil weiterzuentwickeln.

In den folgenden Jahren setzte *Regiomontanus* seine Tätigkeit in Nürnberg, eine der größten Handelsstädte Deutschlands, fort. Mit Unterstützung des wohlhabenden Nürnberger Patriziers, des Instrumentenbauers *Bernhard Walther*, errichtete er eine eigene Druckerei und eine Werkstatt zur Anfertigung astronomischer Geräte. Gemeinsam betrieben sie astronomische Beobachtungen und nutzten die Vorzüge des Buchdrucks, um antike Schriften, die Werke *Regiomontanus*' und *Peuerbachs* zu verbreiten. In Nürnberg berechnete und vervollständigte *Regiomontanus* eine Reihe von „Ephemeriden", astronomische Tafelwerke, die für jeden Tag eines gewissen Zeitraumes die Stellung der Planeten angaben. Die Genauigkeit seiner Berechnungen übertraf alle vorhergehenden weit.

Die erfolgreiche Tätigkeit in Nürnberg, seine umfangreichen wissenschaftlichen Vorhaben wurden 1475 durch eine Reise nach Italien unterbrochen. Der Papst hatte *Regiomontanus* nach Rom gerufen, um sein Urteil über die notwendige Kalenderform zu erfahren.

In Rom starb *Johannes Müller* am 6. Juli 1476 im Alter von vierzig Jahren.

Dr. Renate Tobies, aus: technikus 6/76

Mathematiker aus 37 Jahrhunderten

Carl Friedrich Gauß behauptete von sich, daß er eher rechnen als sprechen gelernt hätte. Und es ist überliefert, daß er mit drei Jahren in einer Lohnabrechnung seines Vaters einen Fehler aufspürte. Mit neun oder zehn Jahren machte er seine erste mathematische Entdeckung: Als der Lehrer die Aufgabe stellte, die Zahlen eins bis einhundert zu addieren, sah er auf einen Blick:

$1+2+\ldots+100=(1+100)+(2+99)+(50+51)=50\cdot 101=5050$, und fand somit die Summenformel für die arithmetische Reihe.

Im Laufe seines Lebens vollbrachte Gauß, einer der größten Wissenschaftler, hervorragende Leistungen auf allen Gebieten der Mathematik, aber auch in der Statistik, Astronomie, Geodäsie, Physik und Geophysik.

Gauß ist einer von rund 50 Gelehrten, deren Leben und Werk in den „Biographien bedeutender Mathematiker" ausführlich vorgestellt werden. Das Buch aber bringt mehr, als sein Titel aussagt. Überblick zur Mathematik in einzelnen Perioden, von der Antike bis zum 20. Jahrhundert, beleuchten diese Wissenschaft vor dem gesellschaftlichen Hintergrund der jeweiligen Zeit. So ist das Werk, auch wenn es diesen Anspruch nicht erheben will, fast eine „Geschichte der Mathematik", denn es wird immerhin auf das Wirken von rund 50 Mathematikern und anderen Persönlichkeiten eingegangen. Eine solche Darstellung hat in unserer Fachliteratur seit langem gefehlt. Der historische Bogen ist, wie das bei der Mathematik nicht anders sein kann, weit gespannt. Er beginnt schon lange vor dem ersten namentlich bekannten Mathematiker, dem ägyptischen Königsschreiber *Ahmes* aus dem 17. Jahrhundert vor unserer Zeit und erfaßt schließlich hervorragende sowjetische Mathematiker, die heute entscheidend diese Wissenschaft beeinflussen.

Das Buch soll nicht nur Schülern, Lehrern, Studenten und Dozenten empfohlen werden, sondern allen, die sich für die Geschichte einer Wissenschaft interessieren. Es bringt eine Menge interessanter Fakten und ist in verständlicher Form geschrieben.

Dr. Christian Heermann

Biographien bedeutender Mathematiker
536 S., 346 Abb., Hlw. *Preis: 22,00 M*
Bestell-Nr. 706 107 0
Kurzwort: 002505 Biographien Mathe
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin