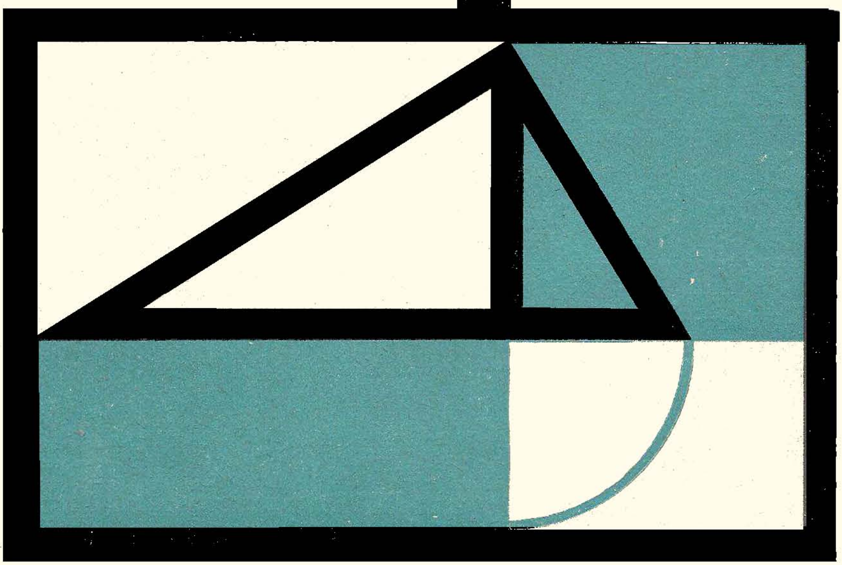
alpha

Mathematische Schülerzeitschrift



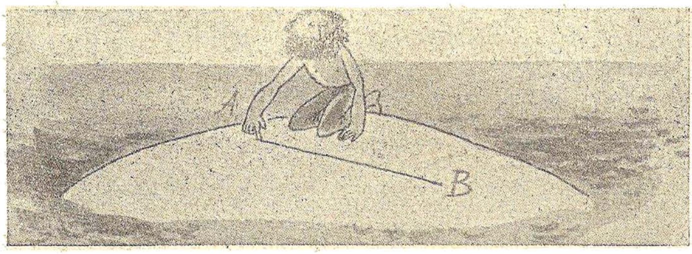
1

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

2. Jahrgang 1968
Preis 0,50

HUGO STEINHAUS # 100 Aufgaben (Arbeitstitel)

Übersetzung aus dem Polnischen
1. Auflage 1968, etwa 240 Seiten, etwa 125 zweifarbige Zeichnungen im Text, 12,5 cm × 20 cm, Halbleinen zelloph. etwa 7,50 M
Erscheint voraussichtlich im 2. Halbjahr 1968



Diese Sammlung elementarer Aufgaben soll den Leser in die Praxis jener universellen Methoden der Behandlung von Erscheinungen einführen, welche die Griechen „Mathematik" nannten; sie soll ihm den Übergang von der Praxis der Schule zur modernen Mathematik erleichtern und ihm diese Wissenschaft an einem Stoff zeigen, der ihm zugänglich ist. Dementsprechend ist diese Sammlung von „100 Aufgaben" vor allem für fortgeschrittene Schüler und Lehrer bestimmt. Der Autor bemühte sich, Aufgaben zu stellen, die ganz naturgemäß aus geometrischen Erscheinungen oder aus realen Umständen hervorgehen, und die so die Aufmerksamkeit auf die Wechselbeziehungen der Mathematik mit der Wirklichkeit lenken.

Die vollständigen Lösungen sind jeder Aufgabe beigegeben und lassen den Geist und die Tendenzen der modernen Mathematik erkennen.

URANIA-VERLAG LEIPZIG · JENA · BERLIN

Eine Aufgabe aus dem Buch lautet:

Ein Wort ist zu erraten

Dr. Sylvester X gab öffentlich bekannt, daß er jedes beliebige Wort erraten würde, wenn man ihm zwanzig Fragen stellen ließe, auf die mit *ja* oder *nein* zu antworten wäre, und wenn das fragliche Wort im Wörterbuch stünde.
Wie kann er seine Behauptung begründen?

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

2. Jahrgang 1968 Heft 1

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin · 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20 05 41

Postscheckkonto: Berlin 132 626
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich (1 Heft) 0,50 M
Zu beziehen durch die Deutsche Post oder den Buchhandel. Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export und-Import GmbH, 701 Leipzig, Leninstraße 16
Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden
Fotos: Aus d. Buch: Raketen-Schild und Schwert (S. 1 bis 3); Archiv: OBM Weidauer, Dresden (S. 6), Vignetten: J. Jordan, Leipzig
Satz und Druck: Buchdruckerei Frankenstein KG, 701 Leipzig
Veröffentlicht unter der Lizenz Nr. 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR

Redaktionsschluß 1. 12. 67

Inhalt

1 50 Jahre Rote Armee (5)*
Buchbesprechung zu: Karl-Heinz Eyermann, Raketen — Schild und Schwert

4 Dresden in Zahlen (5)
1945: Inferno Dresden
Oberbürgermeister a. D. W. Weidauer, Dresden

7 Abstand zweier Punkte im Raum (6)
Dr. E. Schröder, Institut für Geometrie Technische Universität Dresden

10 Nichts Einfacheres als ein Quadrat! (8)
H. Wiesemann, Institut für Mathematik Pädagogische Hochschule Potsdam

13 Eine Aufgabe von Prof. Dr. rer. nat. habil. W. Renneberg (8)
Karl-Marx-Universität Leipzig

14 Ausgewählte Aufgaben aus dem 18. Mathematischen Jahreswettbewerb der USA 1967 (9)

16 Wer löst mit (5)
Information zum *alpha*-Wettbewerb
alpha-Wettbewerb 1/68

19 VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR (5)
Kreisolympiade (Dezember 1967)
Zentrales Komitee für die Olympiaden Junger Mathematiker

22 Hinter die Kulissen geschaut! (5)
W. Träger, Schloßberg-Oberschule, Döbeln

23 Eine schwierige Hausaufgabe
NPT Oberstudienrat Dr. R. Lüders
Institut für Lehrerbildung Groß-Berlin

24 In freien Stunden: *alpha* heiter (5)
H. Pätzold, OS Waren/Müritz

26 Lösungen (5)

31 Wissen, wo . . . (5)
Anleitung zum Selbststudium / Inhaltsverzeichnis
Oberlehrer H. Herzog, V. L. d. V., 22. OS, Leipzig
Studienrat J. Lehmann, V. L. d. V., 29. OS, Leipzig

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angeführten Klassenstufe geeignet

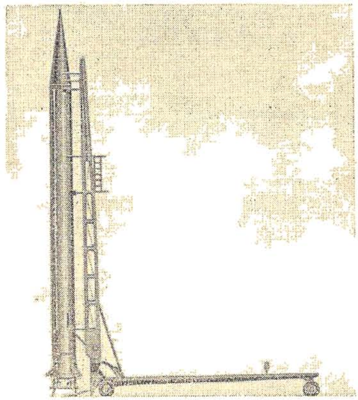
50 Jahre Rote Armee

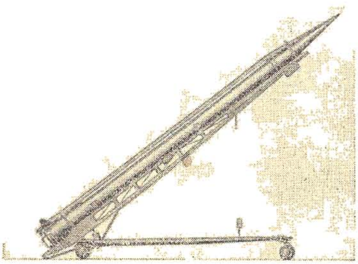
23. Februar 1918

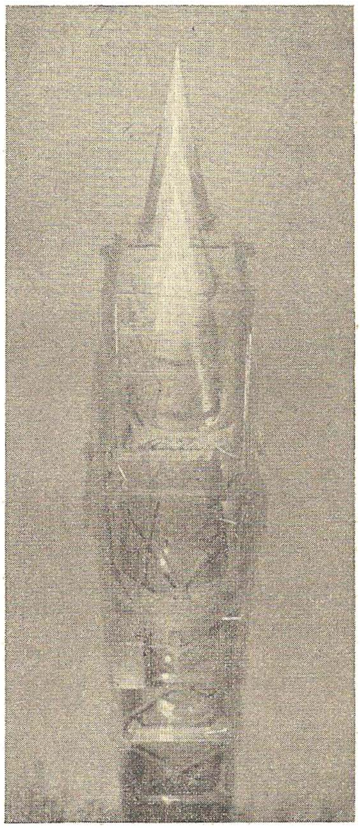
23. Februar 1968

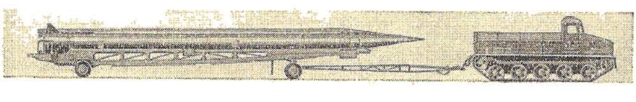
Das Fundament der Macht der Sowjetarmee bilden die Strategischen Raketenwaffen. Sie wurden dank der großen Errungenschaften der sowjetischen Wissenschaft und Technik geschaffen.

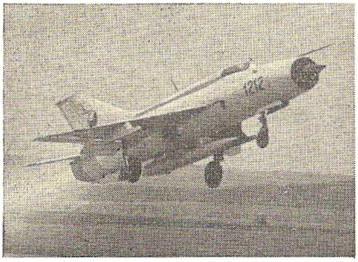
Rodion J. Malinowski († 30. 3. 1967)
Marschall der Sowjetunion



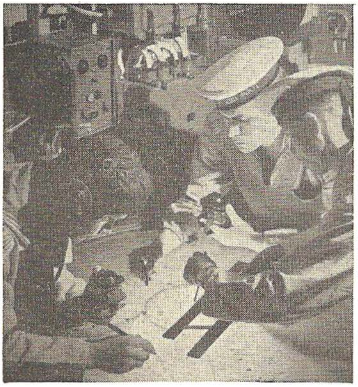






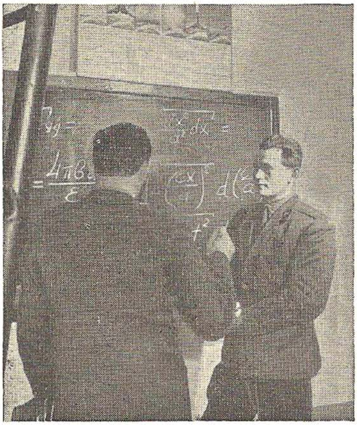


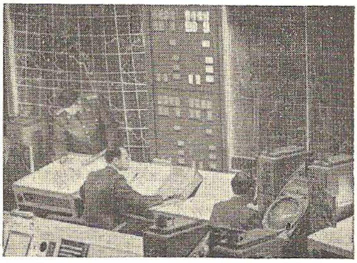
Mod. Abfangflugzeug (theor. Anfangssteigleistung zwischen 10000 und 15000 m/min) mit Luftkampfrakete



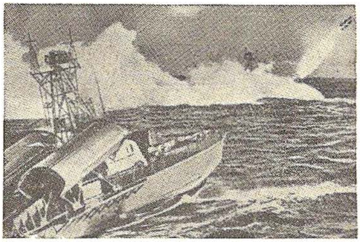
Radiometristen bei der Festlegung der Koordinaten des Zieles

Raketensoldaten beim Mathematikunterricht





Herzstück moderner Militärtechnik: Die Elektronik; Baustein der Feuerleit-, Zielsuch- und Führungssysteme

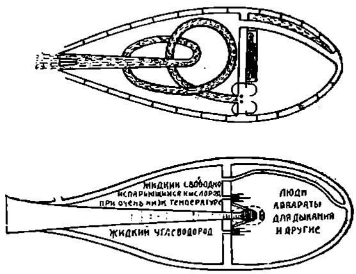


Sowjetisches Schnellboot mit zwei Raketen-Abschußrampen an Deck im Angriff. Im Hintergrund eines der Boote beim Abfeuern einer Rakete.

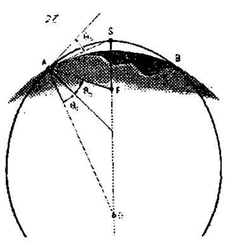
Hauptschlagkraft der Landstreitkräfte: raketentragende Kettenfahrzeuge

etwa 20 Tage	etwa 7,5 Tage	etwa 5 Tage	etwa 3,3 Tage	etwa 2,5 Tage	etwa 11 Stunden
etwa 7 Stunden	etwa 3,5 Stunden	etwa 12 Stunden	etwa 9 Stunden	etwa 6,5 Stunden	etwa 21 Minuten

Wie heute interkontinentale Distanzen — z. B. Sowjetunion — USA: 6000 km — im Zeitbegriff auf wenige Minuten zusammenschrumpfen, zeigt die Tabelle über die Entwicklung der Waffenträger für weiträumige Operationen



Ziolkowski-Projekte für Raketen und Raumschiffe



Schöpfer mächtiger Raketensysteme: Professor Sergej Pawlowitsch Koroljow. Als Schüler Tupolews entwarf er Flugzeuge, als Freund und Sachwalter Ziolkowskis leitete er den Bau sowjetischer Großraketen. Sein Name ist eng verbunden mit den Wörtern: *Sputnik und Wostok*

Raketen bewegen sich auf Ellipsenbahnen, deren einer Brennpunkt mit dem Erdmittelpunkt zusammenfällt

Fotos und Text wurden entnommen aus:

KARL-HEINZ EYERMANN

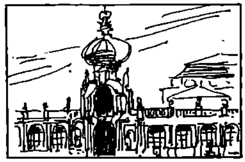
Raketen — Schild und Schwert

Bildband: 304 Seiten, 320 Fotos und 175 plastische Zeichnungen
Ganzleinen mit Schutzumschlag, 28,— MDN

DMV DEUTSCHER MILITÄRVERLAG

Stellvertretend für die 304 Seiten des Buches wurden alle mathematischen Begriffe aus den Seiten 63 und 64 herausgezogen. Sie allein zeigen die Bedeutung der Mathematik als wichtige Grundlage für die Entwicklung und Handhabung von Raketen:
Steuerung, Schußweite, optimale Bahn, Anfangsgeschwindigkeit, Erdumfang, Geschwindigkeit, Abweichungen, Flugbahn, Startmasse, Keplersche Gesetze, Umlaufzeit, Ellipse, Parameter, große Achse, Brennpunkt, Mittelpunkt, Kreis, Ebene im Raum, Flughöhe, Erhöhungswinkel, Abschußwinkel, Entfernung.

Dresden in Zahlen



Die Stadt Dresden hat die schweren Wunden des Krieges und der Bombardierung längst überwunden und ist auf dem besten Wege, eine sozialistische Großstadt zu werden. Sie hat selbst den Entwicklungsstand der besten Jahre vor 1945 um ein Mehrfaches überschritten. Für Euch, liebe junge Leser, stellte ich Zahlen und Fakten zusammen (Stand 31. 12. 1966), die sicher anregen werden, Vergleiche mit Eurer Heimatstadt, Eurem Heimatkreis zu ziehen.

Mit freundlichen Grüßen

W. Weidauer, Oberbürgermeister a. D.

Einwohnerzahl	505189
d. s. männlich	223093
weiblich	282096
Einwohner je km²	2237
Haushalte	219497
Berufstätige	277099
Fläche (in km²)	225,8
Straßenlänge, gesamt (in km)	ca. 933
Länge der Stadtgrenze (in km)	ca. 101
Höhenlage (Elbspiegel, über NN, in m)	105,7
Geographische Lage	
nördliche Breite	51° 02′ 55″
östl. von Greenwich	13° 44′ 29″
Niederschlagsmenge (in mm)	781
Lufttemperatur °C	
Höchsttemperatur	34,6
Tiefsttemperatur	— 18,0
Monatsmittel	9,7
1966 gab es in Dresden	
Kinderkrippen	48
Plätze	3035
Kindergärten	139
Plätze	10085
Allgemeinbildende Oberschulen	92
Schüler	59667
Ingenieur- und Fachschulen	6
Hochschulen	6
Stud. an Hoch- und Fachschulen	32845
Krankenhäuser	11
Betten in Krankenhäusern	5153

Theater	5
Plätze	3781
Lichtspielhäuser	24
Plätze	10646
Kultur- und Klubhäuser	14

- Die Nahverkehrsmittel beförderten

1938	155500000 Personen
1966	367200000 Personen

- Wohnungsbau im Jahre 1966
  1795 Wohnungen mit 72710 m² Wohnfläche

- Geschaffene Werte im NAW

geleistete Stunden	3205457 Std.
geschaffene Werte	16,3 Mio M

- Besucherzahlen

Deutsches Hygienemuseum	118486
Math.-Physikalischer Salon	40000
Gemäldegalerie	1169284
Verkehrsmuseum	143368
Zoologischer Garten	935000

- Industrielle Bruttoproduktion

1955	1,782 Milliarden M
1966	3,341 Milliarden M

- Einzelhandelsumsatz

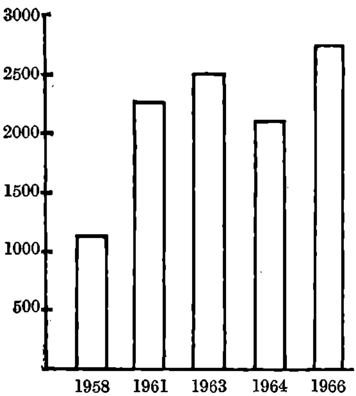
1958	1,295 Milliarden M
1966	1,826 Milliarden M
davon entfielen 1966 auf Nahrungs-	
und Genußmittel	1,001 Milliarden M
Industriewaren	0,825 Milliarden M

Was Dresden in einem Jahr verzehrte

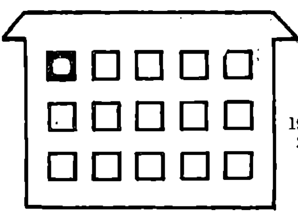
(Warenbereitstellung wichtiger Nahrungs- und Genußmittel)

Kartoffeln	59111 t
Frischgemüse	ca. 23000 t
Frischobst	9509 t
Südfrüchte	5613 t
Zucker	7721 t
Kakaoerzeugnisse	1212 t
Zuckerwaren	1376 t
Fleisch, Fleisch- u. Wurstw.	26777 t
Frischfisch u. Fischw.	4117 t
Trinkvollmilch u. Sahne	35939 t
Fettkäse	1980 t
Butter	6739 t
Tierische Fette	1193 t
Pflanzenöle u. Fette	778 t
Margarine	2749 t
Röstkaffee	1279 t
Wein und Sekt	27626 hl
Eier	78739700 St

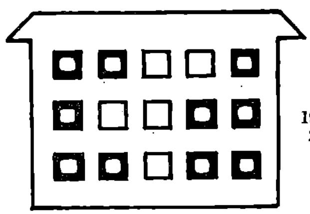
Bereitstellung von Personenkraftwagen



Fernsehteilnehmer je 1000 Einwohner



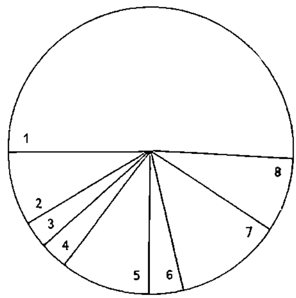
1958
23



1966
245

Lehrlinge nach Wirtschaftsbereichen 1966

1	Industrie	8072
2	Bauwirtschaft	1205
3	Prod. Handwerk	488
4	Land- und Forstwirtschaft	478
5	Verkehr	1651
6	Post und Fernmeldewesen	553
7	Handel	1863
8	Bereiche außerhalb der materiellen Produktion	1403
	zusammen	15713



Ausgaben aus dem Staatshaushalt 1966 in M

Insgesamt pro Kopf der Bevölkerung	538
Pro Kind im Kindergarten	885
Pro Schüler in Allgemeinb. OS	684
Pro Kind in Kinderkrippen	2839

Liebe Leser!
Nutzt die Statistischen Jahrbücher, die in der DDR jährlich herausgegeben werden!

Inferno Dresden

Am 13./14. Februar jährt sich zum 22. Male der Tag der Bombardierung Dresdens. Innerhalb kurzer Zeit wurde eine der schönsten Städte Deutschlands zerstört. Zahlen und Fakten sollen uns das Ausmaß der Zerstörungen zeigen. Sie sollen eine Mahnung sein, für Frieden und Fortschritt zu kämpfen.
An den drei Angriffen am 13./14. Februar 1945 auf Dresden haben 773 viermotorige englische *Lancaster*-Bomber und 311 amerikanische *Fliegende Festungen* teilgenommen. Außerdem waren am letzten Angriff über 200 amerikanische Langstreckenjäger beteiligt. Es wurden 3761 t Bomben (darunter 600000 Stabbrandbomben) abgeworfen.

Von den vorhandenen 222000 Wohnungen wurden

75000 total zerstört,
11000 schwer beschädigt,
7000 mittelschwer beschädigt und
81000 leicht beschädigt.

Das waren 79% der Wohnungen in 70% der vorhandenen Wohnhäuser. Von 30 bedeutenden kulturhistorischen Gebäuden wurden

11 zerstört,
9 sehr schwer beschädigt,
10 schwer beschädigt.

Vollständig zerstört wurden außerdem:

20 Kirchen,
8 Kapellen,
40 Krankenhäuser und Lazarette,
35 Schulen,
68 sonstige Kulturstätten sowie
114 öffentliche Gebäude.

Das Kanalisationsnetz hatte an 605 Stellen Bombenschäden. 35000 Menschen kamen bei diesen drei Angriffen ums Leben. Dresden hatte 1939 rund 629000 Einwohner. Im Sommer 1945 waren es nur noch 454000. Neben den 35000 Luftkriegstoten sind 110000 Einwohner evakuiert worden. Den Rest bildeten gefallene oder noch kriegsgefangene Soldaten sowie Kriegsverbrecher und Faschisten, die sich nach dem Westen abgesetzt hatten. Die Zerstörung der Dresdner Innenstadt hatte keinerlei militärischen Wert. Rüstungsbetriebe kamen nur minimal zu Schaden. Der Terrorangriff sollte, wie der damalige englische Premierminister Churchill sagte, für die Angloamerikaner in Jalta günstigere Verhandlungspositionen schaffen. Churchill wollte Stalin erschrecken. Aber die Sowjetunion hat sich nicht erpressen lassen.

W. Weidauer

Luftbildaufnahme Dresdens aus dem Jahre 1943, von einem Aufklärer der *Royal Air Force* angefertigt. Sie diente als Angriffsplan für die Nachtangriffe im Jahre 1945. Das Gebiet des weiß eingezeichneten Viertelkreissektors (mit Zentrum: heutiges *Heinz-Steyer-Stadion*) sollte bombardiert werden. Es enthielt keine strategischen Ziele.

Abstand zweier Punkte im Raum

Bei Betrachtung des nächtlichen Sternhimmels vermittelt uns das Auge zunächst den Eindruck, als seien sämtliche Fixsterne auf einer großen, die Erde überspannenden Halbkugel angeordnet. Gemäß dieser Vorstellung faßte man bereits im Altertum gewisse Sterngruppierungen zu Bildern zusammen, nach denen man sich auch heute noch am Sternhimmel orientiert. Hierbei besteht jedoch nicht immer Klarheit darüber, daß auf diese Weise auch Sterne zu Bildern vereinigt werden, deren Abstände vom menschlichen Auge sich wie 1 : 1000000 verhalten. Mit unserem Auge allein sind wir nicht in der Lage, uns von der Tiefe des Raumes, in dem gewisse Dinge angeordnet sind, eine Vorstellung zu verschaffen. Da jedoch die Astronomie heute zum Teil recht genaue Angaben über die Entfernung von Fixsternen machen kann, erhebt sich die Frage, wie diese Größen bestimmt werden.

Der Schlüssel für die Distanzbestimmung von Fixsternen liegt in der Tatsache begründet, daß wir über die jährliche Eigenbewegung unserer Erde um die Sonne recht gut Bescheid wissen. Auf der angenäherten Kreisbahn, die die Erde um die Sonne beschreibt, sehen wir die Fixsterne von verschiedenen Standorten im Weltraum aus. Der Abstand zweier innerhalb eines halben Jahres von der Erde durchlaufener Standorte beträgt maximal etwa 300 Millionen Kilometer. Nach unseren irdischen Erfahrungen zeigt unsere Umgebung bereits nach einem Standortwechsel von wenigen Metern ein anderes Bild. Wie verhält es sich nun mit den Bildern des Fixsternhimmels, z. B. des Großen Bären, von dem wir im Frühjahr und im Herbst je eine Aufnahme gemacht haben? Mit gewöhnlichen Mitteln werden wir an den beiden Bildern keine Unterscheidung bezüglich der Stellung der Sterne zueinander registrieren können. Dies liegt daran, daß der Erdbahndurchmesser (300000000 km) außerordentlich klein gegenüber den Entfernungen ist, die zwischen den Fixsternen bestehen, und es bedarf gut ausgeklügelter Methoden, um eine solche „parallaktische“ Verschiebung eines Fixsternes innerhalb eines halben Jahres messen zu können. In der Tat gelang es erstmals dem Astronomen Friedrich Wilhelm Bessel (1784—1846) durch eine fortlaufende Beobachtungsreihe von August 1837 bis Oktober 1838, eine Fixsternparallaxe (scheinbare Verschiebung eines Fixsternes innerhalb eines halben Jahres infolge der Umlaufbewegung der Erde) mit 0,35″ zu bestimmen. Zur Messung dieses außerordentlich kleinen Winkels benutzte er ein von Fraunhofer hergestelltes Heliometer. Da einer parallaktischen Verschiebung von 1″ die Entfernung von 206265 Erdbahnhalbmessern entspricht, hatte der von Bessel beobachtete Stern eine Entfernung von etwa 600000 Erdbahnhalbmessern. (Größe der parallaktischen Verschiebung und Abstand eines Fixsternes stehen im umgekehrten Verhältnis!)

Heute kennt man die Parallaxen und damit auch die Entfernungen von Tausenden von Fixsternen. Darüber hinaus hat man mit anderen Methoden die Entfernungen von Sternnebeln erschlossen, die auf dem hier beschriebenen Wege nicht bestimmbar sind.

Wir wollen als Ergebnis festhalten: Die Entfernungsbestimmung von gewissen Fixsternen geschieht dadurch, daß man die von verschiedenen Beobachtungsorten aus aufgenommenen Bilder der Sterne rechnerisch auswertet.

Die Praxis stellt uns oft vor die Aufgabe, die Entfernung zweier Punkte eines Gegenstandes zu bestimmen, wenn zwei Bilder des Gegenstandes und ein darin befindlicher Maßstab als gegeben vorliegen. Am einfachsten läßt sich die Aufgabe lösen, wenn die Bilder des Körpers in zugeordneten Normalrissen gegeben sind.
Am Beispiel eines durch Grund- und Aufriß im Maßstab 1 : 1 gegebenen Werkstückes interessiert uns der Abstand der Spitzen A und B (Bild 1). Dieser Abstand läßt sich gewiß nicht dem Grundriß entnehmen, da die ersten Tafelabstände von A und B nicht übereinstimmen. Auch aus dem Aufriß ist der Abstand nicht ablesbar, weil die zweiten Tafelabstände von A und B verschieden sind. Es ist leicht einzusehen, daß die Länge einer Strecke $\overline{AB}$ bei Normalprojektion genau dann im Bild in wahrer Größe erscheint, wenn sie parallel zur Bildebene liegt. Dies läßt sich in vorliegendem Fall bei der Strecke $\overline{AB}$ sehr leicht durch eine Drehung erreichen. Wir halten etwa den Punkt A fest und drehen die Strecke $\overline{AB}$ um eine Achse durch A senkrecht zur Bildebene π_1 so weit, bis die zweiten Tafelabstände von A und B_0 übereinstimmen. Nach Drehung der Strecke $\overline{AB}$ in die Stellung $\overline{AB_0}$ kann man im Aufriß die wahre Länge der Strecke $\overline{AB} = d$ ablesen.
Die Bahn der Drehbewegung von B nach B_0 erscheint im Grundriß als ein Kreisbogen und im Aufriß als eine Parallele zur Rißachse durch B''. Das hier angewandte Verfahren zur Bestimmung der wahren Länge einer Strecke (Abstand zweier Punkte) bezeichnet man als die „Methode des Paralleldrehens." Dieses Verfahren kommt mit den wenigsten Konstruktionslinien aus und ermöglicht noch zusätzlich die Bestimmung des Neigungswinkels einer Strecke gegen die Bildebenen. Wir stellen das Wesentliche der Konstruktion nochmals heraus: (Bild 2)

1. Kreisbogen um A' mit der Strecke $\overline{A'B'}$ als Radius.
2. Parallele zur Rißachse durch A'. Sie schneidet den Kreisbogen in B_0'.
3. Parallele zur Rißachse durch B''.
4. Ordnungslinie durch B'_0. Sie schneidet die unter Punkt 3 gezeichnete Parallele zur Rißachse in B''_0.

Aus $A''B_0''$ ergibt sich der gesuchte Abstand d der Punkte A und B. Der Winkel $\gamma_1 = \sphericalangle\, A''B_0''B''$ ist gleich dem Neigungswinkel der Geraden durch die Punkte A und gegen die Bildebene π_1.
Abschließend sei vermerkt, daß man die Drehachse auch durch A senkrecht zur Bildebene π_2 ansetzen könnte. Man erhielte nach entsprechender Vertauschung der Konstruktion die wahre Länge der Strecke $\overline{AB}$ im Grundriß und außerdem den Neigungswinkel γ_2 der Geraden durch A und B gegen die Aufrißtafel. Auch die Wahl des Drehpunktes auf der Geraden ist im Prinzip gleichgültig. Man wird seine Lage jedoch stets so wählen, daß ein Minimum an Konstruktionsaufwand erforderlich ist. (Bild 3)

E. Schröder

Aufgaben

☐ An einem durch Grund- und Aufriß gegebenen Quader bestimme man konstruktiv die wahre Länge der Strecke $\overline{AB}$ (Raumdiagonale des Quaders). Ferner ist der Neigungswinkel der Diagonalen gegen die Bildebene π_1 zu ermitteln. (Bild 4)

☐ Bestimme die wahre Gestalt des Dreiecks ABC, indem Du zunächst die wahren Längen der Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$ ermittelst und mit den gefundenen Stücken das Dreieck konstruierst.
Zeichne in das gefundene Dreieck die Höhe h_c ein. Wie bildet sich h_c in Grund- und Aufriß ab? (Bild 5)

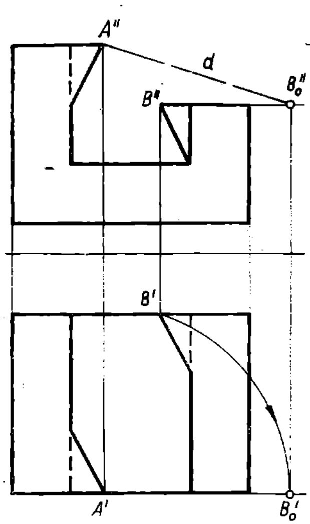


Bild 1

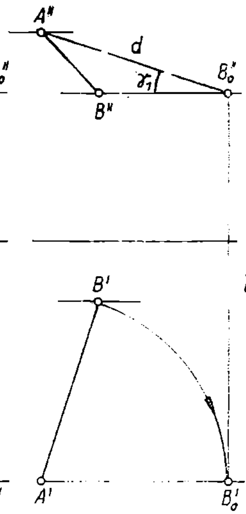


Bild 2

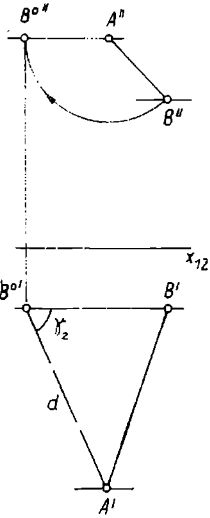


Bild 3

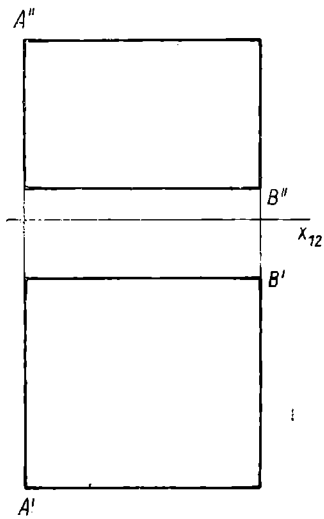


Bild 4

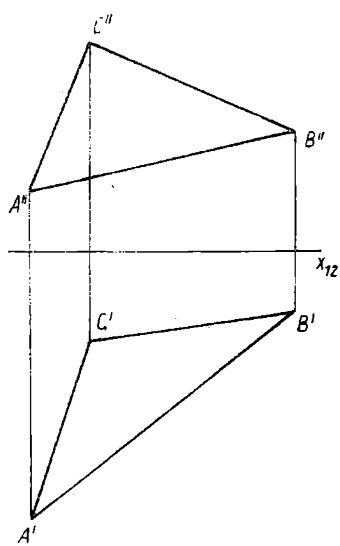


Bild 5

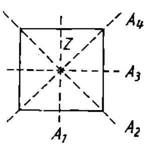
Nichts Einfacheres als ein Quadrat!

(trotzdem erst für Schüler ab Klasse 8)

Wir wollen gemeinsam eine merkwürdige Eigenschaft des Quadrats kennenlernen. Man könnte meinen, das Quadrat sei eine so einfache geometrische Figur, daß es gar nichts gäbe, was daran „des Merkens würdig“ ist. Das Quadrat wird ja definiert als ein gleichseitiges und gleichwinkliges Viereck. Daß es gleichlange Seiten und gleichgroße Winkel hat, liegt also schon in seiner Definition. Nicht in der Definition steckt allerdings, daß alle Winkel *rechte* Winkel sein müssen. Es ergibt sich zwar sehr leicht, muß aber doch bewiesen werden. Versucht es! Nehmt Zirkel, Zeichendreieck und Bleistift zur Hand, ich brauche Eure aktive Mitarbeit!

Aufgabe 1: Beweise, daß in jedem Quadrat die Winkel rechte Winkel sind!
Hinweis: Benutze dazu am einfachsten den Satz über die Summe der Winkel in jedem Viereck! Den kennst Du doch. Wenn nicht, dann finde zunächst diesen Satz!

Jedes Quadrat hat vier *Symmetrieachsen* (Figur 1).



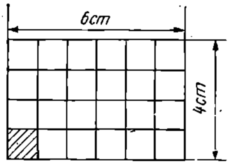
Ob wir also das Quadrat an der Achse A_1, A_2, A_3 oder A_4 spiegeln, immer geht es in sich über. Nennen wir den Schnittpunkt dieser Symmetrieachsen Z, so gibt es auch einige *Drehungen* um Z, die das Quadrat in sich selbst übergehen lassen.

Aufgabe 2: Wieviel Drehungen um Z gibt es, die das Quadrat in sich überführen? Beachte dabei, daß man angeben muß, um welchen Winkel man dreht! (Eigentlich muß man auch noch beachten, ob man links herum oder rechtsherum dreht.)

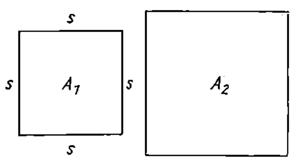
Gewiß habt Ihr auch schon gemerkt, daß die *Diagonalen* des Quadrats einige einfache Gesetzmäßigkeiten aufweisen. Diese will ich Euch nicht nennen; findet sie selbst!

Aufgabe 3: Finde und beweise wenigstens fünf Sätze über die Diagonalen im Quadrat und die dadurch entstehenden Teildreiecke!

(1) Schließlich erinnere ich Euch daran, daß Quadrate als sogenannte „Einheitsquadrate" zur *Flächenmessung* gebraucht werden. Wenn ich sage: „Dieses Rechteck hat den Flächeninhalt 24 cm²", so bedeutet das, daß ich das Rechteck aus 24 Quadraten von der Seitenlänge 1 cm zusammensetzen kann. Figur 2 zeigt *eine* Möglichkeit.



Daran wollen wir uns erinnern, wenn ich Euch nun folgende Geschichte erzähle.
Im alten Griechenland gab es zwischen zwei Männern einen Streitfall, wem ein Esel gehöre. Jeder brachte Argumente zur Bekräftigung seiner Ansicht vor; es konnte aber keine Einigung zwischen ihnen erzielt werden. Da brachten sie den Fall vor das *Orakel von Delphi*. Die Sage erzählt jedenfalls, daß es damals in der Stadt Delphi eine Frau gegeben habe, die weissagen konnte. Das Orakel hörte sich die Männer an und sagte dann: „Wer von Euch in der Lage ist, ein Quadrat zu verdoppeln, der bekommt den Esel!" Die Männer machten sich mit Eifer an die Sache, und wir wollen es ihnen nachmachen. Unsere Aufgabe soll also lauten: *Wie muß man eine Quadratseite vergrößern, damit sich die Quadratfläche verdoppelt?* (Fig. 3)



1. Quadrat 2. Quadrat

Den Flächeninhalt des 1. Quadrates nennen wir A_1, den des 2. Quadrates entsprechend A_2. Dann soll gelten

$$A_2 = 2A_1$$

Wer macht einen Vorschlag? Versuchen wir es zuerst damit, die Seite s des 1. Quadrats zu verdoppeln!

Aufgabe 4: Berechne A_2, wenn die Seite des 2. Quadrats gleich $2s$ ist!

Lösung: $A_2 = 4s^2$

Aufgabe 5: Ermittle, ob A_2 jetzt das Doppelte von A_1 ist!

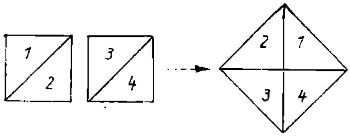
Lösung: Nein, A_2 ist das *Vierfache* von A_1!

Dieser erste Versuch ist also fehlgeschlagen. Ich sagte Euch ja, daß wir eine merkwürdige Eigenschaft des Quadrats kennenlernen wollen. Sie ist schuld daran, daß wir gescheitert sind. Ich hoffe aber, daß Ihr gemerkt habt, warum bei der Verdopplung der Seite des Quadrats gerade eine Vervierfachung des Flächeninhalts herauskam!

Aufgabe 6: Beweise allgemein, daß sich bei n-facher Quadratseite der n^2-fache Flächeninhalt ergibt! ($n = 1, 2, 3, \ldots$)

Aufgabe 7: Wie verhalten sich die Flächeninhalte ähnlicher Figuren? (Alle Quadrate sind untereinander ähnlich!)

Wir brauchen also eine neue Idee! Vielleicht versuchen wir es einmal mit Schere und Papier (Figur 4):



Da das neue Quadrat den *doppelten* Flächeninhalt des Ausgangsquadrates haben soll, zerschneiden wir *zwei* Ausgangsquadrate längs je einer Diagonalen. Die entstehenden vier rechtwinkligen Dreiecke kann man tatsächlich zu einem Quadrat zusammensetzen!

Aufgabe 8: Beweise, daß das aus den rechtwinkligen Dreiecken 1, 2, 3 und 4 zusammengesetzte Viereck ein Quadrat ist! Beweise dazu (a), daß die Seiten dieses Vierecks gleichlang sind!
Beweise (b), daß die Winkel gleichgroß sind!

Aufgabe 9: Trage zusammen, welche der Eigenschaften des Quadrates zum Beweis verwendet werden mußten!

Aufgabe 10: Genügt es, anstelle von (b) in Aufgabe 8 folgendes zu beweisen:
(b'): Die Winkel des Vierecks sind rechte Winkel?

Beim Lösen der Aufgabe 8a habt Ihr bestimmt etwas Neues entdeckt: *Die Seite des neuen Quadrats muß gerade die Diagonale des alten Quadrats sein!* Das ist ein wichtiges Ergebnis, auf das wir mit Recht stolz sind. Haben wir damit unsere Ausgangsfrage beantwortet? Sie lautete: Wie muß man eine Quadratseite vergrößern, damit sich die Quadratfläche verdoppelt? Wir können eine vorläufige Antwort geben: Die Quadratseite muß so lang wie die Quadratdiagonale gemacht werden. Wie Ihr seht, ist damit unser Problem leider noch nicht gelöst, sondern nur anders formuliert:
Wie muß man eine Quadratseite vergrößern, damit sich die Quadratdiagonale ergibt?
Darüber werden wir uns im nächsten Beitrag unterhalten.

H. Wiesemann

$$1 + 9 + 6 + 8 = 1 \quad 9 \quad 6 \quad 8$$

Setze auf der rechten Seite dieser Gleichung Rechenzeichen und Klammern zwischen die Ziffern so, daß eine wahre Aussage entsteht! Dabei darf aber das Zeichen + nicht benutzt werden.

Viel Spaß beim Knobeln wünscht

Studienrat H.-J. Kerber

Bezirksklub Jg. Mathematiker Neubrandenburg

Eine Aufgabe von

Prof. Dr. rer. nat. habil. Werner Renneberg

Professor mit Lehrstuhl an der Philosophischen Fakultät der Karl-Marx-Universität
Leiter der Fachgruppe Mathematik am Institut für Pädagogik

168 Ein PKW *Trabant* (W_1) fährt auf gerader, ebener Straße mit der konstanten Geschwindigkeit v_1. Ein PKW *Wartburg* (W_2) mit der konstanten Geschwindigkeit $v_2 > v_1$ ist im Begriff, ihn zu überholen. In der schematischen Darstellung wird W_1 als ruhend angenommen, die Abmessungen der Wagen sind vernachlässigt (Abb. 1).

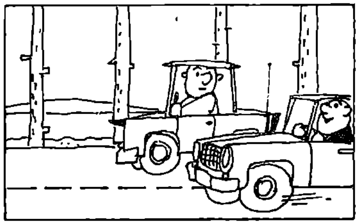
a) Wie lange dauert das Überholen (Zeit t)?

b) Welche Länge l hat die Strecke, auf der dieser Vorgang stattfindet (Abb. 2)? (Das Ausweichen des überholenden Kraftwagens aus der Fahrspur wird nicht berücksichtigt.)

c) Wie hängen t und l von v_1 und v_2 ab?

d) Den beiden Wagen kommt ein PKW *Moskwitsch* (W_3) mit der konstanten Geschwindigkeit v_3 entgegen. In welcher Mindestentfernung l_{min} von W_3 muß W_2 mit dem Überholen beginnen, damit dieser Vorgang beendet ist, wenn sich beide begegnen (siehe Abb. 2)?

e) An Hand der aufgestellten Beziehungen ist vorauszusagen, welchen Einfluß die folgenden Änderungen der Geschwindigkeiten auf die Zeit t und die Strecke l des Überholens sowie auf die Mindestentfernung l_{min} haben (bei konstanten e_1 bis e_4).



(1) Die Geschwindigkeit v_1 des zu überholenden Wagens wird $\frac{\text{größer}}{\text{kleiner}}$ (bei unveränderten v_2 und v_3).

(2) Die Geschwindigkeit v_2 des überholenden Wagens wird $\frac{\text{größer}}{\text{kleiner}}$ (bei unveränderten v_1 und v_3).

(3) Die Geschwindigkeit v_3 des entgegenfahrenden Wagens wird $\frac{\text{größer}}{\text{kleiner}}$ (v_1 und v_2 bleiben fest).

Zahlenfälle:

f) $e_1 = 15$ m, $e_2 = 5$ m, $e_3 = 10$ m, $e_4 = 20$ m. $v_1 = 40\ \mathrm{km\,h^{-1}}$, $v_2 = 50\ \mathrm{km\,h^{-1}}$.

g) $e_1 = 30$ m, $e_2 = 10$ m, $e_3 = 20$ m, $e_4 = 40$ m. $v_1 = 60\ \mathrm{km\,h^{-1}}$, $v_2 = 80\ \mathrm{km\,h^{-1}}$, $v_3 = 70\ \mathrm{km^{-1}}$.

h) e_1 bis e_4 wie g). $v_1 = 65\ \mathrm{km\,h^{-1}}$, $v_2 = 75\ \mathrm{km\,h^{-1}}$, $v_3 = 70\ \mathrm{km\,h^{-1}}$.

i) Der Abstand der Wagen W_2 und W_3 beträgt 1 km. Darf der Wartburg überholen?

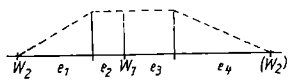


Abb. 1

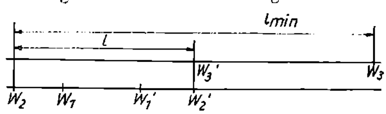


Abb. 2

Mehr Mathematikstudentinnen

Ende August 1967 erhielten die jüngsten Kommilitonen der *Alma mater lipsiensis*, nachdem sie sich traditionsgemäß in die ausgelegten Matrikelbücher eingeschrieben hatten, Studentenausweis und Studienbuch. 1800 Direktstudenten erwartet eine Zeit hoher Anforderungen, die ihnen vielfach Gelegenheit zum Erringen wissenschaftlicher Erkenntnisse und zu politischer Bewährung bietet.

Erfreulich ist, daß erstmalig in der Universitätsgeschichte der Karl-Marx-Universität Leipzig auffallend viele Mädchen Mut zur Mathematik fanden. Beispielsweise sind in der Fachkombination Geographie/Mathematik 58 Prozent, Chemie/Mathematik 62 Prozent weibliche Studierende immatrikuliert worden. Entdeckte man in den Vorjahren unter den künftigen Diplommathematikern nur vereinzelt Studentinnen, so ist in diesem Jahr jeder vierte Kommilitone dieser Fachrichtung ein Mädchen.

Ausgewählte Aufgaben aus dem

18. Mathematischen Jahreswettbewerb der USA 1967

Eighteenth Annual Mathematics Examination 1967

1. Zur dreistelligen Zahl $2a3$ ist die Zahl 326 zu addieren. Als Summe erhält man die dreistellige Zahl $5b9$, die durch 9 teilbar ist. Es ist die Summe $a + b$ zu ermitteln. Welche der folgenden fünf Lösungen ist richtig?

a 2	*b* 4	*c* 6	*d* 8	*e* 9

2. Der Term

$$\frac{x^2+1}{x} \cdot \frac{y^2+1}{y} + \frac{x^2-1}{y} \cdot \frac{y^2-1}{x} \text{ mit } x \neq 0,\ y \neq 0$$

ist so weit wie möglich zu vereinfachen. Aus den folgenden fünf Lösungen ist die richtige zu ermitteln!

a 1	*b* $2xy$	*c* $2x^2y^2 + 2$	*d* $2xy + \frac{2}{xy}$	*e* $\frac{2x}{y} + \frac{2y}{x}$

3. Einem gleichseitigen Dreieck von der Seitenlänge s ist ein Kreis, diesem wiederum ein Quadrat einbeschrieben. Der Flächeninhalt des Quadrates ist durch s auszudrücken. Welche der fünf angeführten Lösungen ist richtig?

a $\frac{s^2}{24}$	*b* $\frac{s^2}{6}$	*c* $\frac{s^2\sqrt{2}}{6}$	*d* $\frac{s^2\sqrt{3}}{6}$	*e* $\frac{s^2}{3}$

4. Gegeben ist ein Dreieck, dessen Umfang p cm und dessen Flächeninhalt k cm² beträgt. Der Inkreis dieses Dreiecks habe den Radius ϱ cm. Es ist der Quotient $\frac{p}{k}$ durch den Inkreisradius ϱ auszudrücken. Aus den fünf angegebenen Lösungen ist die richtige herauszufinden.

a $\frac{\sqrt{2}}{\varrho}$	*b* $\frac{2}{\sqrt{\varrho}}$	*c* $\frac{2}{\varrho}$	*d* $\frac{\varrho}{2}$	*e* der Quotient ist unabhängig von ϱ

5. Der Umfang eines Rechtecks $ABCD$ beträgt 20 cm. Es ist die Maßzahl der kleinsten Diagonale $\overline{AC}$ eines solchen Rechtecks, die möglich ist, zu ermitteln. Entscheiden Sie, welche der nachstehenden fünf Lösungen richtig ist!

a 0	*b* $\sqrt{50}$	*c* 10	*d* $\sqrt{200}$	*e* keine der Zahlen a bis d

6. Die Gleichung $x^2 + px + 8 = 0$ habe die beiden voneinander verschiedenen reellen Wurzeln r_1 und r_2. Welche der fünf über die Wurzeln der Gleichung gemachten Aussagen ist richtig?

a	$\lvert r_1 + r_2 \rvert > 4\sqrt{2}$
b	$\lvert r_1 \rvert > 3$ oder $\lvert r_2 \rvert < 3$
c	$\lvert r_1 \rvert > 2$ und $\lvert r_2 \rvert > 2$
d	$r_1 < 0$ und $r_2 < 0$
e	$\lvert r_1 + r_2 \rvert < 4\sqrt{2}$

7. Es seien die Ungleichung $x^2 - 5x + 6 < 0$ und die Gleichung $p = x^2 + 5x + 6$ beide zugleich erfüllt. Welches der angegebenen fünf Lösungsintervalle trifft für p zu?

a	p kann jede reelle Zahl sein
b	$20 < p < 30$
c	$0 < p < 20$
d	$p < 0$
e	$p > 30$

8. Es seien p, d, q, r, d', q', r' natürliche Zahlen. Die Zahl p ergebe bei Division durch d den Rest r: $p = qd + r$. Die Zahl q ergebe bei Division durch d' den Rest r': $q = q'd' + r'$. Dividiert man jetzt p durch dd', so entsteht der folgende Rest:

a	$r + r'd$
b	$r' + rd$
c	rr'
d	r
e	r'

Welche dieser fünf Lösungen ist richtig?

9. Gegeben ist die Gleichung $3x + 5y = 501$; es ist die Anzahl aller geordneten Paare $(x; y)$ von positiven ganzen Zahlen x, y zu ermitteln, welche diese Gleichung erfüllen. Aus den folgenden fünf Lösungen ist die richtige herauszufinden!

a	33
b	34
c	35
d	100
e	keine der Zahlen unter a bis d

10. Zwei Kerzen gleicher Länge sind aus verschiedenen Rohstoffen hergestellt. Werden beide Kerzen zur gleichen Zeit angezündet, so brennt die eine in drei, die andere in vier Stunden völlig ab. Um welche Uhrzeit müssen beide Kerzen zugleich angezündet werden, so daß um 16 Uhr ein Kerzenstumpf doppelt so lang wie der andere ist?

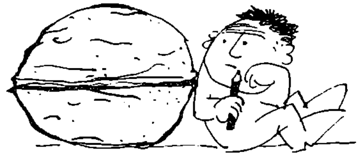
a	13^{24} Uhr
b	13^{28} Uhr
c	13^{36} Uhr
d	13^{40} Uhr
e	13^{48} Uhr

Der 18. Mathematische Schülerwettbewerb der USA wurde am 9. März 1967 durchgeführt; er steht allen Klassenstufen der höheren Schulen offen. Die insgesamt 40 Aufgaben sind in drei Schwierigkeitsstufen eingeteilt, entsprechend sind auch die Punktzahlen gestaffelt (erreichbare Höchstpunktzahl: 150).
Für die Lösung aller Aufgaben stehen 80 Minuten zur Verfügung. Diese Zeitspanne erscheint sehr kurz, wenn man das angewandte Verfahren der Ergebnisangabe nicht kennt. Die Lösungen sind vorprogrammiert, und zwar nach der Methode des Mehrfach-Auswahlantwort-Prinzips. Der Schüler hat auf einem Antwortbogen lediglich anzukreuzen, welches der fünf vorgegebenen Ergebnisse a, b, c, d, e (von denen genau eines richtig ist) er für das richtige hält. Dieses Prinzip hat für die Auswertung enorme Vorteile, für die objektive Messung der tatsächlich gezeigten Leistungen allerdings auch Nachteile. Es gibt aber Möglichkeiten, programmierte Wettbewerbe oder Leistungskontrollen durchzuführen, bei denen diese Nachteile auf ein Minimum reduziert sind. (Wir kommen später auf solche Möglichkeiten zurück.) Die Zahl von 285000 Schülern aus den USA (180 Mill. Einw.) und einer Reihe anderer Länder, die sich am Wettbewerb beteiligen, ist nicht sehr hoch, wenn man bedenkt, daß sich an der 1. Stufe unserer Mathematikolympiaden etwa 1000000 Schüler beteiligen. Darüber hinaus sollte nicht vergessen werden, daß es bei uns allen Schülern möglich ist, am Wettbewerb teilzunehmen, in den USA aber nur denen, die eine höhere Schule besuchen können. — Die beiden amerikanischen Schüler Yen und Gutman wurden mit 98,75 bzw. 82,00 Punkten die besten. — Die vorliegende Auswahl von 10 Aufgaben soll die Unterschiede zu dem bei uns angewandten System zeigen. Das Material wurde uns freundlicherweise von Frau Prof. Nora D. Turner zur Verfügung gestellt.

Wer löst mit?

alpha-Wettbewerb

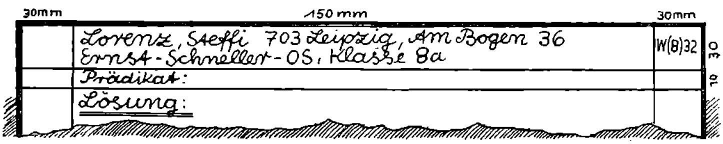
letzter Einsendetermin 1. 5. 68



Für die Beteiligung am *alpha*-Wettbewerb gelten folgende Bedingungen:

1. Am Wettbewerb können sich alle Schüler der 5. bis 12. Klasse beteiligen, auch dann, wenn diese Schüler eine Berufs- oder Volkshochschule besuchen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr zu richten an:
Redaktion *alpha*, 7027 Leipzig, Postfach 14
3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgaben fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer in Klammern, z. B. (7) vorgesetzt (d. h., für Klasse 7 geeignet).
4. Von dem Teilnehmer sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Nur dann erfolgt eine Bewertung. Schüler der 11./12. Klassen lösen die Aufgaben, welche mit W (10/12) gekennzeichnet sind oder veröffentlichte Olympiadeaufgaben 11/12. (Wir kommen damit einem vielfach geäußerten Wunsch bisheriger Teilnehmer und Schülern der Klassen 11/12 nach.)
5. Zur Erleichterung der Korrektur und aus technischen Gründen werden nur nach dem auf dieser Seite angegebenen Muster eingesandte Lösungen bearbeitet und bewertet. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 298 mm), denn jede Aufgabe wird von einem anderen Experten korrigiert. Besonders freuen wir uns natürlich über saubere, übersichtliche Gestaltung.
6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur den Antwortsatz oder das Endergebnis!) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „vorbildlich gelöst" oder „gut gelöst". Wer keine Nachricht erhält, hat die Aufgabe unvollständig, teilweise, nicht gelöst oder die vorgegebene Form nicht beachtet.
7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben.
8. Zwischen dem 15. und 31. Januar 1969 sind alle im Jahre 1968 erworbenen Antwortkarten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eine Jury wertet diese Antwortkarten aus, übergibt die Namen der Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender der Redaktion zur Veröffentlichung.
9. Aussicht auf Preise und namentliche Veröffentlichung haben Teilnehmer, die im Laufe des Jahres 1968 Antwortkarten mit einem der beiden Prädikate erhalten haben. Anerkennung wird also der Teilnehmer finden, der regelmäßig, gewissenhaft und fleißig mitarbeitet.

So muß der Kopf der Lösung einer Wettbewerbsaufgabe aussehen!



5 **169** Herr Meier betritt ein Fachgeschäft für Fotoartikel. Er weist auf einen Fotoapparat und fragt die Verkäuferin: „Wieviel kostet diese Kamera?" „Mit Bereitschaftstasche zusammen 235 M", entgegnet die Verkäuferin. „Und wieviel kostet die Kamera ohne Tasche?" fragt Herr Meier weiter. Verschmitzt erwidert die Verkäuferin: „185 M mehr als die Tasche". Daraufhin kauft dieser Kunde die Kamera ohne Tasche. Welchen Betrag muß Herr Meier bezahlen?

170 Die Schüler einer fünften Klasse sollen das Produkt $21 \cdot 12 \cdot 25$ berechnen. Heinz schlägt sein Heft auf und will diese Aufgabe schriftlich lösen. Da flüstert ihm sein Banknachbar zu: „Rechenvorteil beachten!" Sofort erkennt Heinz einen Lösungsweg, der es ihm ermöglicht, die Aufgabe im Kopf zu rechnen. Wie rechnet Heinz?

171 Ein Düsenflugzeug legt in 3 Stunden die Flugstrecke von 2550 km zurück, ein Propellerflugzeug schafft dagegen in einer Flugzeit von 5 Stunden nur eine Strecke von 2125 km. Wievielmal so groß ist die Geschwindigkeit des Düsenflugzeuges im Vergleich zu der des Propellerflugzeuges?

W(5)172 Jedes der zwanzig Klassenzimmer einer Schule ist mit der gleichen Anzahl an Stühlen ausgestattet. Aus jedem Klassenzimmer trägt man zehn Stühle in die Aula.

In den Klassenzimmern verbleiben danach insgesamt soviel Stühle, wie vorher in fünfzehn Zimmern standen. In den übrigen Räumen der Schule befinden sich außerdem noch zusammen 60 Stühle. Wieviel Stühle besitzt diese Schule insgesamt?

W(5)173 Eine Bibliothek mußte 1200 Bücher neu einbinden lassen. Drei Buchbindereien erklärten sich bereit, diesen Auftrag zu übernehmen. Die erste wollte den gesamten Auftrag in 12 Tagen, die zweite in 20 Tagen und die dritte in 30 Tagen erledigen. Um das Einbinden der Bücher so schnell wie möglich zu beenden, wurden die drei Werkstätten beauftragt, den Auftrag sofort gemeinsam zu übernehmen. Nach wieviel Tagen standen der Bibliothek diese Bücher wieder zum Verleih an die Leser zur Verfügung?

6 **174** Es ist die kleinste natürliche Zahl zu finden, die bei der Division durch 2, 3, 4, 5 u. 6 jeweils den Rest 1 läßt, aber durch 7 teilbar ist. Nenne zwei weitere Zahlen mit dieser Eigenschaft und gib an, wie man beliebig viele solcher Zahlen erhalten kann.

175 Warum können zwischen zwei benachbarten Zahlen der Zehnerfolge 10, 20, 30, 40, ... nie mehr als vier Primzahlen liegen?

176 Eine Schülerin kauft in einem Schreibwarengeschäft 6 Hefte zu je 8 Pf, 4 Bleistifte zu je 18 Pf, 4 Hefte zu je 15 Pf und drei Kopierstifte. Der Verkäufer sagt ihr, daß sie 2,30 M zu zahlen habe. Ohne nachzurechnen, sagt das Mädchen, daß der Verkäufer sich verrechnet habe. Der Verkäufer rechnet nach und entdeckt seinen Fehler. Wie konnte die Schülerin, ohne nachzurechnen, diesen Fehler bemerken?

W(6)177 Die Länge der Seite $\overline{BC} = a$ eines Dreiecks ABC betrage 5 cm, die Länge der Seite $\overline{AC} = b$ dieses Dreiecks betrage 3 cm. Aus diesen beiden Stücken sollen alle diejenigen Dreiecke konstruiert werden, deren Maßzahlen der Längen ihrer Umfänge durch 3 teilbare natürliche Zahlen sind. Wieviel einander nicht kongruente Dreiecke dieser Art lassen sich konstruieren? Gib für jedes mögliche Dreieck die Länge der Seite $\overline{AB} = c$ und die Länge des zugehörigen Umfanges an.

W(6)178 Nach Abschluß eines Sportfestes vergleichen Heinz, Uwe, Gerd und Jochen ihre im Hochsprung erzielten Leistungen. Dabei ergibt sich folgendes: Jochen sprang höher als Gerd. Die Summe der Maßzahlen der Sprunghöhen von Heinz und Uwe war gleich der Summe der Maßzahlen der von Jochen und Gerd erreichten Höhen. Dagegen war die Summe der Maßzahlen der Sprunghöhen von Uwe und Gerd größer als die Summe der von Heinz und Jochen geschafften Höhen. Ordne auf Grund dieser Angaben die Schüler nach ihrer Sprungleistung, indem du mit dem Schüler, der am niedrigsten sprang, beginnst!

179 Ein Sohn fragt seinen Vater, wie alt er 7
sei. Der Vater antwortet: „Wenn du wärest auch so alt wie ich und halb so alt und ein Viertel so alt und ein Jahr dazu, so wärest du 134 Jahre alt." Wie alt ist der Vater? (Die Aufgabe ist einem Rechenbuch von Adam Ries, der von 1492 bis 1559 lebte, entnommen.)

180 Der Produktionsplan eines Betriebes sah vor, daß zehn Werkstücke in einer bestimmten Zeit hergestellt werden sollten. Durch Rationalisierungsmaßnahmen gelang es jedoch, in der gleichen Zeit zwölf Werkstücke zu produzieren; dadurch wurde die ursprünglich für die Herstellung eines dieser Werkstücke vorgesehene Zeit um zwei Minuten unterboten. Welche Zeit war für die Fertigung eines solchen Werkstückes ursprünglich geplant?

181 Die Summe von drei natürlichen Zahlen beträgt 185. Die zweite Zahl ist um 9 größer als die erste, die dritte Zahl ist um 19 kleiner als die erste Zahl. Wie groß sind die Zahlen?

W(7)182 Es soll ein Dreieck ABC konstruiert werden, bei dem die Seite $\overline{BC}$ die Länge a, die zugehörige Seitenhalbierende die Länge s_a und die vom Eckpunkt C des Dreiecks ausgehende Höhe die Länge h_c hat. Welchen Bedingungen müssen die Größen a, s_a und h_c genügen, damit die Konstruktion ausführbar ist?

W(7)183 Die Schüler der Klassenstufe 7 einer Merseburger Oberschule, die drei Parallelklassen mit insgesamt 95 Schülern umfaßt, beschlossen, einen Wettbewerb durchzuführen! Das Ziel dieses Wettbewerbs war, die Leistungen in allen Fächern zu verbessern. Eine Zwischenauswertung des Wettbewerbs erfolgte auf Grund der Leistungskontrollen in den Fächern Deutsch, Mathematik und Russisch; sie ergab, daß mit Ausnahme eines Schülers alle übrigen Schüler in mindestens einem dieser drei Fächer bessere Noten als zuvor erreichten. Eine Leistungssteigerung erzielten — genau zwei Schüler nur im Fach Russisch, — genau drei Schüler nur im Fach Deutsch, — genau drei Schüler nur in den beiden Fächern Russisch und Mathematik, genau 6 Schüler nur in den beiden Fächern Deutsch und Mathematik, genau 50 Schüler nur in den beiden Fächern Russisch und Deutsch, genau 25 Schüler in allen drei Fächern. Ermittle aus diesen Angaben, wieviel Schüler insgesamt ihre Noten im Fach Mathematik verbesserten und wieviel Schüler nur in einem Fach, und zwar in Mathematik, ihre Leistungen steigerten!

Mathematikfachlehrer Waldemar Hermann, V.L.d.V
Altenburger OS, Merseburg

8 **184** Gegeben sind die beiden rationalen Zahlen

$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{98}{99} \cdot \frac{99}{100}$$

und $$b = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{97}{99} \cdot \frac{99}{101}.$$

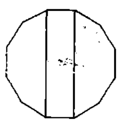
Es ist zu entscheiden, ob $a > b$, $a = b$ oder $a < b$ gilt. Ferner ist die Differenz $a - b$ zu berechnen.

185 Zwei Freunde, die in den 36 km voneinander entfernten Orten A und B wohnen, fahren gleichzeitig mit dem Fahrrad von ihren Wohnorten ab und auf der schnurgeraden Landstraße zwischen diesen Orten einander entgegen. In welcher Entfernung von dem Ort A werden sie einander treffen, wenn sie mit konstanter Geschwindigkeit fahren und sich die Geschwindigkeit des von A abfahrenden zu der Geschwindigkeit des von B abfahrenden Freundes wie 5 : 7 verhält?

Volker Kugelberg 35. OS, Leipzig, Kl 7a

W(8)186 Vor zwei Jahren lasen wir in der Zeitung die folgende lustige Nachricht: „Als dieser Tage ein Kleintierhalter im Kreis Wittstock ein Huhn schlachtete, gab es neben dem Sonntagsbraten auch noch eine Summe Bargeld als Zusatz. Im Magen des Huhnes befanden sich nämlich 17 Münzen, insgesamt 34 Pfennig. Irren ist nicht nur menschlich.“ Wir nehmen an, daß die 17 Münzen gültige Münzen waren, also nur 1-Pfennigstücke, 5-Pfennigstücke, und 10-Pfennigstücke. Wieviel Münzen von jeder Sorte befanden sich in dem Magen des Huhns?

W(8)187 Ein regelmäßiges Zwölfeck ist, wie die nebenstehende Abbildung zeigt, in drei Teilfiguren zerlegt worden. Welche Teilfigur hat den größeren Flächeninhalt, die mittlere oder eine der beiden äußeren?



9 **188** Es sind alle reellen Lösungen des Gleichungssystems

$$x^2 - y^2 = a$$
$$x - y = b$$

anzugeben. (Fallunterscheidung!)

189 Der neue sowjetische Personenkraftwagen *Moskwitsch* erreicht 16 Sekunden nach dem Start eine Geschwindigkeit von 80 km/h.
a) Wieviel Meter hat er in dieser Zeit zurückgelegt, wenn man eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung annimmt?
b) In wieviel Sekunden nach dem Start erreicht der *Moskwitsch* die Höchstgeschwindigkeit von 120 km/h, und wieviel Meter hat er in dieser Zeit zurückgelegt, wenn man wieder eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung wie unter a) annimmt?

W(9)190 Es ist ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren, bei dem die Summe aus der Länge einer Seite und der Länge der Höhe 7,5 cm beträgt.

Günther Mann, EOS Helmholtz, Leipzig, Kl. 10b$_3$

W(9)191 Eine Familie besteht aus sieben Personen, nämlich dem Vater, der Mutter, einem Sohn, zwei Töchtern, einem Großvater und einer Großmutter. Alle zusammen sind 248 Jahre alt. Der Vater und der Sohn sind zusammen 62 Jahre alt. Vor drei Jahren war der Vater dreimal so alt wie der Sohn. Vor fünf Jahren war der Sohn doppelt so alt wie die ältere Tochter. In vier Jahren wird die Mutter dreimal so alt wie die ältere Tochter sein. In einem Jahr wird der Sohn dreimal so alt wie die jüngere Tochter sein. Der Großvater ist doppelt so alt wie seine drei Enkelkinder zusammen. Wie alt ist jedes der Familienmitglieder?

Jutta Schmidt, EOS Helmholtz, Leipzig Kl. 10b$_3$

192 Ein gerader Kreiskegel mit dem Grundkreisradius $r = 6$ cm und Höhe $h = 6$ cm 10
wird durch eine zur Grundfläche parallele Ebene in einen Kegel und einen Kegelstumpf zerlegt. Der Rauminhalt des Kegels verhält sich zu den Rauminhalt des Kegelstumpfes wie 1 : 7. Wie groß ist der Abstand der Schnittebene von der Grundfläche des gegebenen Kegels?

OStR Dr. Rolf Lüders, Berlin

193 Für alle nicht negativen reellen Zahlen a und b gilt

$$\sqrt{ab} \leqq \frac{a+b}{2};$$

d. h., das geometrische Mittel ist kleiner oder gleich dem arithmetischen Mittel der Zahlen a und b.
Beweisen Sie diese Behauptung a) algebraisch, b) geometrisch!

StR Dr. Walter Schramm, V.L.d.V. Berlin

W(10/12)194 Gegeben sind zwei reelle Zahlen, deren Differenz 6 und deren Produkt 91 beträgt. Wie lauten die Zahlen? Hat die Aufgabe mehrere Lösungen?

OStR Dr. Rolf Lüders, Berlin

Zweite Wettbewerbsaufgabe W(10/12)195 siehe Seite 21!

VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

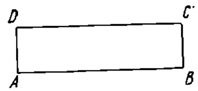
Aufgaben der Kreisolympiade (6./7.12.1967)

Klassenstufe 5

1. Die Schüler einer Klasse sammelten insgesamt 336 kg Altpapier. Aus 1 kg Altpapier stellt man in einer Papierfabrik genau 700 g reines weißes Papier her und aus je 30 g von diesem ein Schreibheft.*
Gib die größtmögliche Anzahl von Heften an, die aus dem gesammelten Altpapier hergestellt werden kann!

2. Von einer zweistelligen Zahl z ist bekannt, daß die Einerziffer eine dreimal so große Zahl darstellt wie die Zehnerziffer. Vertauscht man die Ziffern, so entsteht eine Zahl, die um 36 größer als die ursprüngliche ist.
Wie lautet z im Dezimalsystem?

3. Gegeben ist ein Rechteck $ABCD$ mit folgenden Seitenlängen: $\overline{AB} = 6$ cm und $\overline{BC} = 2$ cm.



Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal das rechtwinklige Dreieck $\triangle DAD_1$, bei dem der Punkt D_1 auf der Seite AB liegt und der Winkel $\sphericalangle D_1DA$ eine Größe von 45° hat!

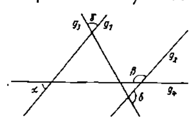
4. Nachdem der Mathematiklehrer sämtliche 4 Olympiadeaufgaben seiner 36 Schüler korrigiert und ausgewertet hatte, gab er den Mitgliedern seiner Arbeitsgemeinschaft die folgende Tabelle und führte dazu aus: „Die Anzahl der Schüler, die keine Aufgabe richtig lösten, ist gleich der Anzahl derjenigen, die alle Aufgaben richtig lösten. Die Anzahl derjenigen, die nur 1 Aufgabe richtig bewältigten, ist doppelt so groß wie die Anzahl der Teilnehmer, die alle Aufgaben richtig lösten, und gleich der Anzahl derjenigen, die genau 3 richtige Lösungen abgaben. Die Anzahl aller richtigen Lösungen (siehe Spalte III, Zeile f) ist genau dreimal so groß wie die Anzahl der Teilnehmer mit genau 2 richtigen Lösungen und doppelt so groß wie die Anzahl aller Teilnehmer. Mit diesen Angaben seid ihr in der Lage, die Tabelle zu vervollständigen.“

	I Anzahl der richtigen Lös. pro Schüler	II Anzahl der Schüler	III Anzahl der richtigen Lös. insgesamt
a)	0	...	...
b)	1	...	...
c)	2	...	...
d)	3	...	...
e)	4	...	...
f)	Gesamtzahlen	36	...

* In der Produktion wird weißes Papier nicht unmittelbar aus Altpapier hergestellt. Durch Zusatz von Altpapier wird aber eine entsprechende Menge Rohstoff eingespart.

Klassenstufe 6

1. Die Geraden g_1, g_2, g_3 und g_4 schneiden einander in der aus der Abb. ersichtlichen Weise. Von den Größen α, β, γ und δ der dadurch entstehenden Winkel sei
$\alpha = 50^\circ$ $\beta = 130^\circ$ $\gamma = 70^\circ$. Ermittle δ!



2. Jedes der beiden Vorderräder eines Wagens hat einen Umfang von 210 cm, jedes der beiden Hinterräder einen Umfang von 330 cm. Ermittle die kürzeste Strecke (in m), die der Wagen auf einer ebenen geraden Straße durchfahren haben muß, damit jedes seiner Räder genau eine ganze Anzahl von Umdrehungen durchgeführt hat!

3. Nach einem Scheibenschießen verglichen Elke, Regina, Gerd und Joachim ihre Schußleistungen. Es ergab sich folgendes:
(1) Joachim erzielte mehr Ringe als Gerd.
(2) Elke und Regina erreichten gemeinsam dieselbe Ringzahl wie Joachim und Gerd zusammen.
(3) Elke und Joachim erzielten zusammen weniger Ringe als Regina und Gerd.
Ermittle auf Grund dieser Angaben die Reihenfolge der Schützen nach fallender Ringzahl!

4. Von den Teilnehmern einer Schule eines Landkreises an der 1. Stufe der Mathematikolympiade wurden genau $\frac{3}{40}$ zur 2. Stufe delegiert. Von diesen Schülern erhielten bei der 2. Stufe (Kreisolympiade) genau $\frac{2}{9}$ Preise oder Anerkennungsschreiben. Einen ersten Preis in seiner Klassenstufe erhielt genau ein Schüler, genau ein weiterer Schüler erhielt in seiner Klassenstufe einen zweiten Preis, genau zwei weitere bekamen dritte Preise. Außerdem wurden genau vier anderen Schülern dieser Schule für besonders gute Lösungen einer Aufgabe Anerkennungsschreiben überreicht.
Gib die Zahl aller Teilnehmer dieser Schule an der 1. Stufe der Mathematikolympiade an!

Klassenstufe 7

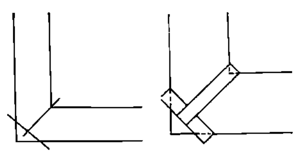
1. Einem gegebenen rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit dem rechten Winkel bei C ist ein Quadrat so einzubeschreiben, daß der rechte Winkel des Dreiecks zum Quadratwinkel wird und der ihm gegenüberliegende Eckpunkt des Quadrates auf der Hypotenuse AB des Dreiecks liegt.
2. Horst sagte zu Klaus: Nenne mir eine dreistellige natürliche Zahl, von deren Ziffern keine Null ist und keine zwei einander gleich sind! Notiere sie und schreibe darunter sämtliche dreistellige Zahlen, die durch Umstellen der Ziffern der genannten Zahl entstehen können! Addiere alle diese Zahlen! Ehe Klaus fertig war, hatte Horst schon längst das Ergebnis im Kopf gefunden. Er rechnete: $2Q \cdot 111$, wobei Q die Quersumme der erstgenannten Zahl bedeutet.
Begründe sein Verfahren allgemein und gib dann ein Zahlenbeispiel!
3. Gegeben ist ein Dreieck $\triangle ABC$. M sei der Mittelpunkt der Seite AC. Die Parallele zu der Seite AB durch den Punkt M schneide die Seite BC im Punkte N.
Beweise, daß N der Mittelpunkt der Seite BC ist!
4. Auf einer Exkursion fuhren mit Autobussen genau 319 Schüler, auf einer anderen Exkursion genau 232.
In jedem der Autobusse, die insgesamt dabei fuhren, saß genau die gleiche Anzahl Schüler. Ermittle diese Anzahl! (Wir setzen dabei voraus, daß in jedem Autobus mehr als 1 Schüler saß.)

Klassenstufe 8

1. Errichtet man auf den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks die Quadrate nach außen, so bilden die äußeren Eckpunkte der Quadrate die Ecken eines konvexen Sechsecks. Wir bezeichnen den Flächeninhalt des Dreiecks mit A_3; den jedes der Quadrate mit A_4 und den des Sechsecks mit A_6. Gesucht sind ganze Zahlen n und m so, daß die Gleichung $A_6 = nA_3 + mA_4$ gilt.
2. Gegeben sind ein Kreis k (Mittelpunkt M, Radius der Länge $r = 6$ cm) und ein Kreis k_1 (Mittelpunkt M_1, Radius der Länge $r_1 = 2$cm) Beide Kreise berühren einander von außen.
Konstruiere alle Kreise mit dem Radius der Länge 2 cm, die die beiden gegebenen Kreise berühren!
Konstruiere auch die Berührungspunkte der gesuchten Kreise mit den gegebenen!
3. Jemand würfelte mit n Würfeln bei einem einzigen Wurfe zusammen die Augenzahl $3n + 4$, und zwar zeigte dabei jeder Würfel die gleiche Augenzahl.
Man ermittle sämtliche Werte von n, für die das möglich ist!
4. Beweise den Satz: Unter n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ($n \geqq 2$) gibt es stets eine, die durch n teilbar ist.

Klassenstufe 9

1. Man ermittle die Anzahl aller Paare zweistelliger natürlicher Zahlen (m, n), für die
$$m + n = 111$$ gilt!
2. Für zwei rationale Zahlen a und b gelten die vier Ungleichungen $a + b \neq 3$; $a - b \neq 10$; $a \cdot b \neq 5$; $a : b \neq 18{,}75$. Die Zahlen 3; 10; 5 und 18,75 stimmen jedoch (in anderer Reihenfolge) mit je einer der Zahlen $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$ und $a : b$ überein.
Ermitteln Sie die Zahlen a und b!
3. In einer alten Denksportaufgabe soll man einen Graben, der überall gleich breit ist und einen rechtwinkligen Knick macht, mit Hilfe von zwei Bohlen überqueren, die genau so lang sind, wie der Graben breit ist. Die gesuchte Lösung ist (ohne Berücksichtigung der Breite der Bretter), die in der Abb. gezeichnete!



a) Zeigen Sie durch eine Rechnung, daß diese Lösung richtig ist!
b) Die Breite des Grabens und die Länge der Bohlen sei a, die Breite der Bohlen sei b. Welchen Wert hat das Verhältnis $b : a$, wenn die Bretter die in der Abb. gezeigten Lage haben?

(Ein Durchbiegen der Bohlen und eine bedingte Tragfähigkeit des Grabenrandes sollen nicht berücksichtigt werden.)

4. Einem regelmäßigen Oktaeder ist eine Kugel umbeschrieben. Berechnen Sie das Verhältnis der Oberflächeninhalte beider Figuren!

Klassenstufe 10

1. In

$$\begin{array}{r} \text{FUENF} \\ +\ \text{ZWEI} \\ \hline \text{SIEBEN} \end{array}$$

sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, daß die Addition zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten.

Untersuchen Sie, wieviele Lösungen die Aufgabe hat!

2. Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$. Der Mittelpunkt von AB sei M. Man verbinde C und D mit M und A mit C. Der Schnittpunkt von AC und MD sei S.

Ermitteln Sie das Verhältnis des Flächeninhalts des Rechtecks $ABCD$ zum Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle SMC$!

3. Beweisen Sie, daß für jedes natürliche n, $n > 1$, die Zahl $2^{2^n} + 1$ mit der Ziffer 7 endet!

4. Auf einem ebenen Tisch liegen 4 Holzkugeln, von denen jede den Radius der Länge r hat und die sich gegenseitig so berühren, daß ihre Berührungspunkte mit der Tischplatte die Ecken eines Quadrates bilden. Auf die entstehende mittlere Lücke wird eine fünfte Holzkugel mit gleichem Radius gelegt. Geben Sie den Abstand d des höchsten Punktes dieser fünften Kugel von der Tischebene an!

Klassenstufe 11/12

1. Tag

1. Es seien x_k und y_k ganzrationale Zahlen, die die Bedingungen $0 \leqq x_k \leqq 2$ und $0 \leqq y_k \leqq 2$ erfüllen.

a) Ermitteln Sie die Anzahl aller (nicht entarteten) Dreiecke mit Eckpunkten $P_k\,(x_k; y_k)$ wobei x_k, y_k die rechtwinkligen kartesischen Koordinaten von P_k bedeuten!

(Dabei gelten zwei Dreiecke $\triangle_1$ und $\triangle_2$ genau dann als gleich, wenn jede Ecke von $\triangle_1$ auch Ecke von $\triangle_2$ ist.)

b) Geben Sie die Maßzahlen der Flächeninhalte aller dieser Dreiecke an!

2. Beweisen Sie den folgenden Satz:

Gegeben seien gewisse Gegenstände, von denen jeder eine bestimmte Farbe und eine bestimmte Form hat. Wenn es unter diesen Gegenständen zwei von verschiedener Farbe und zwei von verschiedener Form gibt, dann befinden sich unter diesen Gegenständen mindestens zwei solche, die sich sowohl in der Farbe als auch in der Form unterscheiden.

3. Beweisen Sie, daß für alle nicht negativen Zahlen a, b, c

$a^3 + b^3 + c^3 \geqq a^2 \cdot \sqrt{bc} + b^2 \cdot \sqrt{ac} + c^2 \cdot \sqrt{ab}$

gilt!

2. Tag

4. Beweisen Sie, daß das Produkt von vier aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen nicht das Quadrat einer positiven ganzen Zahl sein kann!

5. Es sind alle geordneten Paare reeller Zahlen (x, y) anzugeben, für die das Gleichungssystem

$$x\,(ax^2 + by^2 - a) = 0 \qquad (1)$$
$$y\,(ax^2 + by^2 - b) = 0 \qquad (2)$$

erfüllt ist. Dabei sind a und b reelle Zahlen mit $a \neq 0$, $b \neq 0$ und $a \neq b$.

6. Gegeben sei eine regelmäßige sechseckige Pyramide. Man lege einen ebenen Schnitt durch die Pyramide, der durch die Mittelpunkte zweier nicht benachbarter und nicht paralleler Seiten der Grundfläche und durch den Mittelpunkt der Höhe der Pyramide verläuft. Es ist das Verhältnis des Flächeninhalts der dabei entstehenden Schnittfigur und des Flächeninhalts einer Seitenfläche der Pyramide zu ermitteln.

Die Lösungen zu den Aufgaben der Klassenstufen 5 bis 10 werden im Heft 4/68 veröffentlicht, d. Red.

Fortsetzung von S. 18:

W(10/12)195 Ein Autofahrer will in die Stadt fahren. An einer Straßenkreuzung, an der die Wegweiser fehlen, kann er seine Fahrt auf drei verschiedenen Wegen, die wir als a, b und c bezeichnen wollen, fortsetzen. Es führt jedoch nur einer dieser drei Wege in die Stadt. An der Straßenkreuzung stehen drei Personen, nämlich Klaus, Horst und Günter, die dem Autofahrer je drei Auskünfte geben:

Klaus:
1. Der Weg c führt nicht in die Stadt
2. der Weg b führt in die Stadt;
3. Horst macht immer wahre Aussagen.

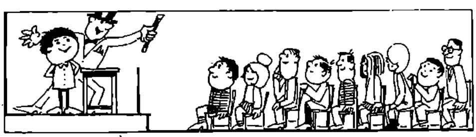
Horst:
1. Klaus irrt, wenn er sagt, der Weg b führe in die Stadt,
2. der Weg a führt in die Stadt;
3. Günter macht nie falsche Aussagen.

Günter:
1. Der Weg c führt in die Stadt;
2. Klaus macht immer falsche Aussagen;
3. Ich mache immer wahre Aussagen.

Nun wissen wir, daß von diesen drei Personen genau eine Person nur wahre Aussagen und genau eine Person nur falsche Aussagen gemacht hat. Welcher der drei Wege führt in die Stadt? Peter Euskonatus, stud. math., Berlin

Hinter die Kulissen geschaut!

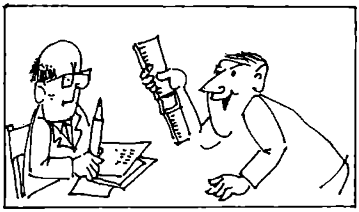
Jörg besuchte auf dem Rummelplatz seiner Heimatstadt eine Schaubude, in der unter anderem ein Zuschauer in einen Blumenstrauß verwandelt werden sollte. Jörg beobachtete: Nachdem im Zuschauerraum das Licht erloschen war, betrat die Versuchsperson einen auf der Bühne stehenden großen Kasten, in dessen erleuchtetes Oberteil man hineinsehen konnte. Ganz plötzlich war dann anstelle der Versuchsperson ein Strauß Kunstblumen zu sehen. Die Verwandlung war geglückt. Sauber gearbeitet, dachte Jörg. Die „Rückverwandlung“ wurde langsam vollzogen: Während der Blumenstrauß immer undeutlicher zu sehen war, wurde gleichzeitig die Versuchsperson zunächst verschwommen und dann immer deutlicher genau an der Stelle sichtbar, an der sich der Blumenstrauß „auflöste“. Die Rückverwandlung war noch imponierender!
Da Jörg aus diesen Beobachtungen das Rätsel nicht lösen konnte, besuchte er die Schaubude ein zweites Mal und meldete sich dabei als Versuchsperson. Er betrat den Kasten und bemerkte, daß er im Kasten von oben angeleuchtet wurde. Jetzt können mich also die Zuschauer sehen, dachte er . . . Da stand er mit einem Male im Dunkeln. Die ihn von oben anstrahlenden Lampen im Kasten mit schwarzen Innenwänden waren plötzlich erloschen. Die Zuschauer, so dachte er, meinen jetzt an der Stelle, an der ich mich befinde, einen Blumenstrauß zu sehen, der sich gar nicht hier befindet! Noch während sein Hirn diesen Gedanken verarbeitete, gewöhnten sich Jörgs Augen langsam an die Dunkelheit. Jörgs Gedanken arbeiteten schnell: „Mittels eines Spiegels muß den Zuschauern das Trugbild des Blumenstraußes vorgegaukelt werden.“ Wo kam der Spiegel plötzlich her?
„Ich verspürte keinen Luftzug und sah auch nichts sich bewegen.“ Endlich hatte Jörg den entscheidenden Gedanken: Eine Glasplatte läßt nicht nur Licht durch sich hindurchtreten, sondern wirkt zugleich ebenso wie eine Wasseroberfläche als Spiegel. „Sollte sich zwischen mir und dem Zuschauerraum eine Glasplatte befinden?“ Da er eine solche nicht erkennen konnte, tasteten seine Blicke die Seitenwände des Kastens ab. Kaum merklich erkannten seine Blicke an den Seitenwänden eine unter 45° gegen die Waagerechte geneigte Nut. „Aha, also doch! Eine Glasplatte ist des Rätsels Lösung!“ Jetzt begannen über ihm die Lampen langsam wieder aufzuflammen. Für die Zuschauer beginnt jetzt die „Rückverwandlung“, dachte er. Also müssen die Lampen, die den Blumenstrauß anleuchten, jetzt langsam erlöschen, schloß Jörg.

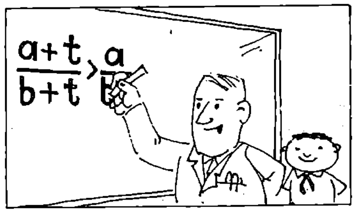


Zu Hause angelangt, fertigte sich Jörg eine Zeichnung des Kastens an, in die er die Versuchsperson, den Blumenstrauß und die Glasplatte einzeichnete. Probiert das auch! Überlegt euch weiterhin einen Schaltplan der elektrischen Anlage!

W. Träger

Eine schwierige Hausaufgabe





Neulich kam Herr Schlottermann zu Herrn Windwebel und klagte ihm sein Leid: „Es ist doch furchtbar, welche schwierigen Hausaufgaben die Schüler heutzutage lösen müssen. Da kam mein Enkel zu mir und bat mich, ihm zu helfen. Er sollte entscheiden, welche der beiden Zahlen

$$x = \frac{365\,000\,001}{783\,000\,001} \qquad \text{oder} \qquad y = \frac{365\,000\,000}{783\,000\,000}$$

größer sei. Ich habe zwei Stunden lang gerechnet, mich dreimal verrechnet und schließlich

$$x = 0{,}4661558116\ldots \qquad \text{und} \qquad y = 0{,}4661558109\ldots$$

herausbekommen. Also ist wohl x größer als y.
Zu meiner Zeit waren die Schüler besser dran, da ging die Division immer auf, und der Divisor war höchstens dreistellig."
Darauf sagte Herr Windwebel: „Ich hätte das einfacher gemacht; ich hätte mit dem Rechenstab gerechnet und $x = y$ herausbekommen, und das stimmt ja auch ungefähr."
Herr Pfiffikus, der an dem Gespräch teilnahm, bemerkte dazu:
„Ihr beide habt von der Mathematik nicht viel Ahnung. Ihr rechnet entweder zu umständlich oder sogar falsch. So eine Aufgabe löst man nämlich einfacher mit Variablen. Sind a und b zwei positive reelle Zahlen mit $a < b$ und ist t eine positive reelle Zahl, so würde aus

$$\frac{a+t}{b+t} \leqq \frac{a}{b} \text{ folgen}$$

$$(a+t)\,b \leqq a\,(b+t),$$

$$ab + bt \leqq ab + at,$$

$$(b-a)\,t \leqq 0.$$

Das ist aber ein Widerspruch, weil $b - a$ und t positive Zahlen sind. Also gilt

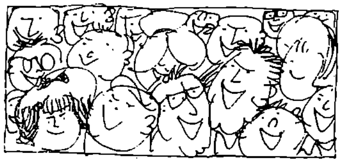
$$\frac{a+t}{b+t} > \frac{a}{b}, \text{ d. h., in unserem Falle } x > y,$$

womit ohne eine umständliche Rechnung die gestellte Aufgabe gelöst ist."

R. Lüders

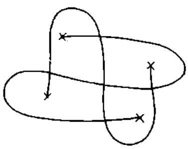
In freien Stunden

alpha heiter



Ein Trick

Stelle deinen Freunden folgende Aufgabe: In der Ebene sind 4 Punkte gegeben (Eckpunkte eines Rechtecks). Je zwei Punkte sollen durch einen Linienzug derart verbunden werden, daß jeder der 4 Punkte eingeschlossen ist. Ihr könnt die Lösung sogar verraten, trotzdem wird man die Linienzüge kaum nachzeichnen können.



Raten und Rechnen

Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. Ersetze die Buchstaben so durch Ziffern, daß in den Zeilen und Spalten wahre Aussagen entstehen.

$$\begin{array}{ccccc} ba & : & c & = & d \\ + & & : & & + \\ b & \cdot & b & = & c \\ \hline bc & : & b & & eb \end{array}$$

Waltraut Kühne, EOS Helmholtz, Leipzig, Kl. 10 b_2

Für „Junge Gärtner"

Ein Platz, der die Form eines regelmäßigen Sechseckes hat, soll so mit Bäumen bepflanzt werden, daß auf jeder der sechs Seiten drei Bäume stehen. Wieviele Möglichkeiten der Anordnung gibt es? (Spiegelungen und Drehungen bleiben unberückrücksichtigt!)

Jäger und Hasen

Auf einer Hasenjagd stellte man nach dem ersten Kessel fest, daß man die Schützen genau in Gruppen zu je drei Mann ordnen konnte, so daß jeder Erste einer jeden Gruppe genau einen, jeder Zweite genau zwei und jeder Dritte genau drei Hasen geschossen hatte. Außerdem sei bekannt, daß gerade jeder dritte Hase aller im Kessel vorhandenen Hasen geschossen wurde. In welchem Verhältnis standen Jäger und Hasen?

Erika bekommt den falschen Brief

Klaus schreibt 5 Briefe und die 5 notwendigen Briefumschläge. Als er die Briefe verschlossen hat, weiß er nicht mehr genau, ob er die Briefe richtig in die Umschläge gesteckt hat.
Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es, die Briefe falsch einzustecken, so daß kein Brief im richtigen Umschlag steckt?

Aus dem Physikunterricht

Der Lehrer fragt die Schüler, bei welcher Temperatur Wasser siedet und erhält von einem Schüler die Antwort: „Wasser siedet bei 90°!" Er berichtigt das falsche Ergebnis, worauf der Schüler sagt: „Natürlich, ich hatte das verwechselt mit dem rechten Winkel!"

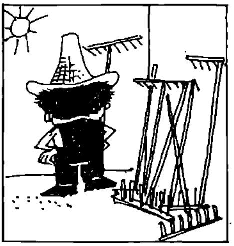
Anekdote

Während der Vorlesung soll der Berliner Mathematiker *E. E. Kummer* (29. 1. 1810 bis 14. 5. 1893) einmal auf die schwierige Aufgabe 7 · 9 gestoßen sein.
Er bittet die Studenten um Hilfe. Einer ruft: „62", ein anderer: „65". Prof. Kummer: „Aber meine Herren, das ist doch unmöglich, 7 · 9 kann doch nur 62 *oder* 65 sein!"

Zu jedem der 12 mathematischen Begriffe ist die jeweilige Figur zu suchen. Die Buchstaben ergeben — aneinandergereiht — einen im FDJ-Leben wichtigen Begriff.

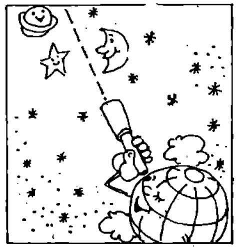
W. Weber, EOS Schkeuditz bei Leipzig, Mathematikfachl.

1 Archimedische Spirale	7 Pyramide
2 Astroide	8 Sehnentangentenwinkel
3 Bogen	9 Sekante
4 Diagonale	10 Satz des Thales
5 Innenwinkel	11 Trapez
6 orthogonale Geraden	12 Umkreis

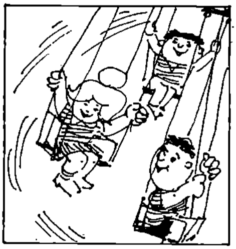


Rechenzentrum

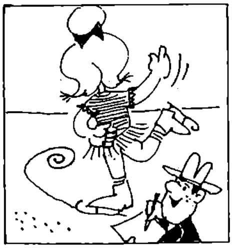
Wurzelkriterium



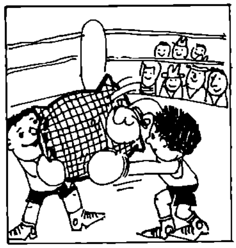
unendlich ferner Punkt



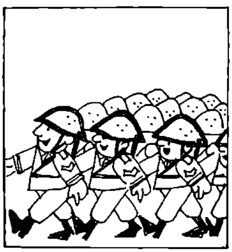
Rotationskörper



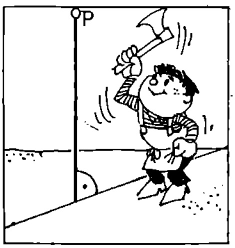
Kurvendiskussion



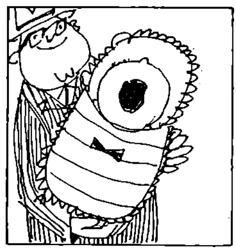
gedämpfte Schwingung



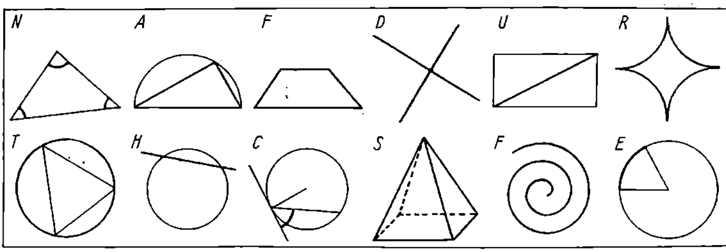
wohl geordnete Menge



das Lot fällen



k. g. V.



Lösungen

102 Wir können diese Aufgabe durch systematisches Probieren leicht lösen. Denn die zweite Bäuerin hat, da bei Division durch 10 jeweils der Rest 7 verbleibt,
7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 77, 87 oder 97 Eier.
Dann hätte die erste Bäuerin
93, 83, 73, 63, 53, 43, 33, 23, 13 oder 3 Eier, da die Gesamtzahl der Eier 100 beträgt. Unter den Zahlen der zweiten Zeile lassen aber nur die Zahlen 63 und 23 bei Division durch 8 den Rest 7.
Die Aufgabe hat daher die folgenden beiden Lösungen:

a) Die erste Bäuerin hat 63 Eier, die zweite 37 Eier.
b) Die erste Bäuerin hat 23 Eier, die zweite 77 Eier.

Bemerkung: Das obige Verfahren ist nur dann brauchbar, wenn nicht zu viele Fälle untersucht werden müssen. Euler gibt daher ein anderes Verfahren an, das im Prinzip stets anwendbar ist:
Die erste Bäuerin habe $8x + 7$ Eier und die zweite $10y + 7$ Eier. Dann ist

$$\begin{aligned} 8x + 7 + 10y + 7 &= 100 \\ 8x &= 86 - 10y, \\ 4x &= 43 - 5y \\ &= 40 + 3 - 4y - y, \\ x &= 10 - y - \frac{y-3}{4}. \end{aligned}$$

$y - 3$ ist also durch 4 teilbar; man setzt daher $y - 3 = 4z$ und erhält $y = 4z + 3$
$x = 10 - (4z + 3) - z = 7 - 5z.$
Da x eine positive ganze Zahl ist, sind nur die Fälle $z = 0$ und $z = 1$ möglich. Man erhält daher:
I. $z = 0$: $x = 7$, $y = 3$. Die erste Bäuerin hat 63 Eier, die zweite 37 Eier.
II. $z = 1$: $x = 2$, $y = 7$. Die erste Bäuerin hat 23 Eier, die zweite 77 Eier.

103 Euler gibt hier zwei Lösungswege an; die folgende Lösung ist besonders elegant: Es seien x und y die gesuchten positiven reellen Zahlen; dann gilt:

$$x + y = xy, \tag{1}$$
$$x^2 - y^2 = x + y. \tag{2}$$

Aus (2) folgt
$(x + y)(x - y) = x + y$ und, da
$x + y \neq 0$ ist, $x - y = 1$, d. h., $y = x - 1$.
Man erhält daher aus (1)

$$x + x - 1 = x(x - 1),$$
$$x^2 - 3x + 1 = 0. \tag{3}$$

Die quadratische Gleichung (3) ist erfüllt, wenn entweder

a) $x = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - 1} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, d. h.,
$y = x - 1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ oder
b) $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, d. h., $y = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ ist.

Nur die Lösung zu a) entspricht den Bedingungen der Aufgabe.
Man erhält für $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \approx 2{,}618$ und

$$y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$$

$x + y = xy = x^2 - y^2 = 2 + \sqrt{5}.$
Im Fall b) ist $y < 0$, was den Bedingungen der Aufgabe widerspricht.

104 Es sei x die Anzahl der Pferde und y die Anzahl der Ochsen. Dann gilt

$$\begin{aligned} 31x + 21y &= 1770 \\ 21y &= 1770 - 31x \\ &= 1764 + 6 - 21x - 10x, \\ y &= 84 - x - \frac{10x - 6}{21}. \end{aligned}$$

$10x - 6$ ist also durch 21 teilbar, mithin auch $5x - 3$.
Man setzt daher $21z = 5x - 3$
und erhält $y = 84 - x - 2z$,

$$x = \frac{21z + 3}{5} = 4z + \frac{z + 3}{5}.$$

Man setzt ferner $5u = z + 3$, d. h., $z = 5u - 3$ und erhält

$$x = 4(5u - 3) + u = 21u - 12,$$
$$y = 84 - 21u + 12 - 10u + 6 = 102 - 31u.$$

Da y eine positive Zahl ist und u wegen $z = 5u - 3$ nicht gleich Null sein kann, sind nur die Fälle $u = 1$, $u = 2$ und $u = 3$ möglich.
Man erhält daher die folgenden drei Lösungen

1. $u = 1$: $x = 9$, $y = 71$,
2. $u = 2$: $x = 30$, $y = 40$,
3. $u = 3$: $x = 51$, $y = 9$.

Man überzeugt sich leicht davon, daß in allen drei Fällen $31x + 21y = 1770$ ist.

W(5)106 Es gilt:
$1680 : 4 = 420$; $2 \cdot 420 - 185 = 655$;
$1680 - (420 + 655) = 605$.
Die Jungen Pioniere der 4. Klasse sammelten 420, die der 5. Klasse 655 und die der 6. Klasse 605 Flaschen.

W(6)107 Zwischen den 5 Schlägen der Uhr liegen vier Zeitintervalle von je $1\frac{1}{4}$ Sekunden Dauer, da $5 : 4 = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$. Zwischen den 10 Schlägen liegen neun Zeitintervalle von je

$1\frac{1}{4}$ Sekunden Dauer. Aus $9 \cdot \frac{5}{4} = 11\frac{1}{4}$ folgt, daß die Uhr zu den 10 Schlägen um 10 Uhr die Zeit von $11\frac{1}{4}$ Sekunden benötigt.

W(7)108 Beim Numerieren der Seiten des Lehrbuches werden die Zahlen von 3 bis 195 gedruckt. Für die Zahlen von 3 bis 9 benötigen wir 7 Ziffern; für die Zahlen von 10 bis 99 braucht man $90 \cdot 2 = 180$ Ziffern; für die Zahlen von 100 bis 195 dagegen $96 \cdot 3 = 288$ Ziffern; das sind insgesamt 475 Ziffern. Die Ziffer 0 kommt dabei 29mal vor.

W(8)109 Ist x die Anzahl der Äpfel, die die Frau geerntet hat, so erhält der erste Wächter $\frac{x}{2}$, der zweite $\frac{x}{4}$, der dritte $\frac{x}{8}$ und der vierte Wächter $\frac{x}{16}$ Äpfel. Nun gilt:

$$\frac{x}{16} = 10, \text{ also } x = 160.$$

Die Frau hat 160 Äpfel geerntet.

W(9)110 Bezeichnet man die Anzahl der Goldmedaillen, die die einzelnen Länder erhielten, in der gegeben Reihenfolge mit s, d, n, f, g und i, so gilt

$$i + g + f + n + d + s = 23, \quad (1)$$
$$s \geqq 12, \quad (2)$$
$$\text{also} \quad i + g + f + n + d \leqq 11. \quad (3)$$

Andererseits ist wegen $i = g \geqq 1$, $f \geqq 2$, $n \geqq 3$, $d \geqq 4$

$$i + g + f + n + d \geqq 1 + 1 + 2 + 3 + 4 = 11. \quad (4)$$

Aus (3) und (4) folgt $i + g + f + n + d = 11$. Das ist aber nur möglich, wenn

$$i = g = 1, \quad f = 2, \quad n = 3, \quad d = 4, \quad s = 12 \text{ ist.}$$

Es erhielten also die UdSSR 12, die DDR 4, die Niederlande 3, Frankreich 2, Großbritannien 1 und Italien 1 Goldmedaillen.

W(10)111 Die Geschwindigkeit des Schiffes flußaufwärts beträgt

$$\frac{8{,}6}{\frac{55}{60}}\,\text{km/h} = \frac{8{,}6 \cdot 60}{55}\,\text{km/h} = 9{,}38\,\text{km/h},$$

dagegen flußabwärts

$$\frac{8{,}6}{\frac{30}{60}}\,\text{km/h} = \frac{8{,}6 \cdot 60}{30}\,\text{km/h} = 17{,}20\,\text{km/h}.$$

Bezeichnet man die Maßzahl der Geschwindigkeit (in km/h) des Schiffes in ruhendem Gewässer mit x und die Maßzahl der Strömungsgeschwindigkeit mit y, so gilt

$$x - y = 9{,}38,$$
$$x + y = 17{,}20;$$

also $2x = 26{,}58$, $x = 13{,}29$ und $y = 3{,}91$. Die Strömungsgeschwindigkeit beträgt also 3,91 km/h, die Geschwindigkeit des Schiffes in ruhendem Gewässer 13,29 km/h.

Lösungen: Mathematikolympiade, Schulstufe, Sofia 1967

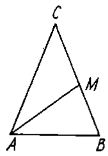
Klassenstufe 5

1. $[6264 - (4690 + 56 \cdot 112 - 5360)] \cdot 101 - 16862 = [6264 - (4690 + 6272 - 5360)] \cdot 101 - 16862 = (6264 - 5602) \cdot 101 - 16862 = 662 \cdot 101 - 16862 = 66862 - 16862 = \underline{\underline{50000}}$

$50000 : 125 = \underline{\underline{400}}$

W(5)112 Die Zahl der Schüler dieser Klasse muß durch 6 und durch 4 teilbar sein; die Klasse umfaßt weniger als 50 Schüler. Es kommen also nur die folgenden Zahlen in Betracht: 12, 24, 36, 48. Scheidet ein Schüler aus der Marschkolonne aus, so verbleiben für die Anzahl der übrigen Schüler nur die folgenden Möglichkeiten: 11, 23, 35, 47. Von diesen Zahlen ist nur die Zahl 35 durch 5 teilbar. Die Klasse umfaßt daher 36 Schüler.

3. Für das gleichschenklige Dreieck ABC gilt: $\overline{AC} = 2 \cdot \overline{MC}$; $\overline{AC} + \overline{MC} = 3 \cdot \overline{MC}$; $3 \cdot \overline{MC} = 15$ cm; $\overline{MC} = 5$ cm.



Jeder Schenkel des Dreiecks ist also 10 cm lang. $\overline{AB} + \overline{BM} = \overline{AB} + \overline{MC}$; $\overline{AB} + \overline{MC} = 11$ cm; $\overline{AB} = 6$ cm.
Die Basis des Dreiecks ist 6 cm lang.

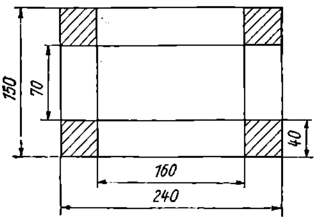
Klassenstufe 6

$$1.\ 3{,}7 + \frac{3}{2}\left(2{,}04 - \frac{47}{30} + \frac{3}{50}\right) \cdot [19{,}21 - (4{,}26 - 0{,}35)]$$
$$= 3{,}7 + \frac{3}{2}\left(\frac{102}{50} + \frac{3}{50} - \frac{47}{30}\right) \cdot (19{,}21 - 3{,}91)$$
$$= 3{,}7 + \frac{3}{2}\left(\frac{21}{10} - \frac{47}{30}\right) \cdot 15{,}3$$
$$= 3{,}7 + \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{153}{10}$$
$$= 3{,}7 + 12{,}24 = 15{,}94$$
$$15{,}94 \cdot \frac{3}{20} = 15{,}94 \cdot 0{,}15 = 2{,}391.$$

W(6)113 0,5 t Rosenblüten liefern 1 kg Rosenöl, 0,1 t Rosenblüten liefern 0,2 kg Rosenöl, 0,8 t Rosenblüten liefern 1,6 kg Rosenöl. 0,001 kg Rosenöl ergeben 25 Tropfen Rosenöl, 1,6 kg Rosenöl ergeben 40000 Tropfen Rosenöl. 2 Tropfen Rosenöl werden für 1 l Parfüm benötigt, 40000 Tropfen Rosenöl sind in 20000 l Parfüm enthalten.

Es lassen sich also 200 hl Parfüm herstellen.

3. $A = (24 \cdot 15 - 4 \cdot 4^2)\ \text{cm}^2$
$= (360 - 64)\ \text{cm}^2 = 296\ \text{cm}^2$;
$V = 7 \cdot 16 \cdot 4\ \text{cm}^3 = 448\ \text{cm}^3$.



Zur Herstellung des Kastens werden 296 cm² Zinkblech benötigt; er faßt 448 cm³, das sind 0,448 l Flüssigkeit.

Klassenstufe 7

$$1.\ z = \left(0{,}3a - \frac{1}{3} - b - \frac{a}{3} - \frac{2}{3} + b\right) - \left[4{,}6c^2 - 201{,}75a^3 + 7 - \left(7 + \frac{a^3}{4} - 8{,}5c^2 - d\right)\right]$$
$$= \left(-\frac{1}{30}a - 1\right) - \left(4{,}6c^2 - 201{,}75a^3 + 7 - 7 - \frac{a^3}{4} + 8{,}5c^2 + d\right)$$
$$= -\frac{1}{30}a - 1 - (13{,}1c^2 - 202a^3 + d)$$
$$= -\frac{1}{30}a - 1 - 13{,}1c^2 + 202a^3 - d$$
$$= 202a^3 - \frac{1}{30}a - 13{,}1c^2 - d - 1.$$

Für die Belegung mit $a = -0{,}1$, $c = 3\frac{1}{3}$ und $d = -1\frac{1}{9}$ erhalten wir:

$$z_1 = 202 \cdot (-0{,}1)^3 - \frac{1}{30} \cdot (-0{,}1) - 13{,}1 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^2 - \left(-\frac{10}{9}\right) - 1 = -0{,}202 + \frac{1}{300} - \frac{1310}{9} + \frac{10}{9}$$
$$-1 = -0{,}202 + \frac{1}{300} - \frac{1300}{9} - 1 = -1{,}202 - \frac{129997}{900} = -1{,}202 - 144{,}44\bar{1} \approx -145{,}643.$$

2. Aus der Abbildung wird folgendes ersichtlich:

$\sphericalangle\, CAB = \sphericalangle\, AMD = \alpha$ (Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen);

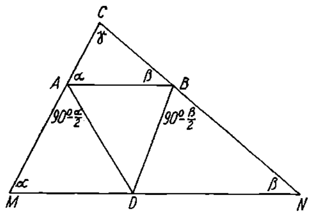
$\sphericalangle\, CBA = \sphericalangle\, BND = \beta$ (Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen);

$\sphericalangle\, MAD = \sphericalangle\, DAB = 90° - \frac{1}{2}\alpha$ (die Gerade AD halbiert den Winkel MAB);

$\sphericalangle\, NBD = \sphericalangle\, DBA = 90° - \frac{1}{2}\beta$ (die Gerade BD halbiert den Winkel NBA);

$\sphericalangle MDA = 180° - (\alpha + 90° - \frac{1}{2}\alpha) = 90° - \frac{1}{2}\alpha$;

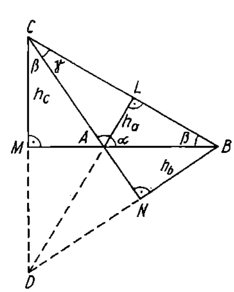
$\sphericalangle NDB = 180° - \left(\beta + 90° - \frac{1}{2}\beta\right) = 90° - \frac{1}{2}\beta$.



Daraus folgt: $\sphericalangle\, MAD = \sphericalangle\, MDA$ und $\sphericalangle\, NBD = \sphericalangle\, NDB$.

Die Dreiecke MDA und DNB sind also gleichschenklig; es gilt $\overline{AM} = \overline{DM}$ und $\overline{BN} = \overline{DN}$. Damit gilt die Beziehung $\overline{MN} = \overline{MD} + \overline{DN}$ bzw. $\overline{MN} = \overline{AM} + \overline{BN}$.

W(7)114 Die Summe der beiden spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks beträgt 90°.



Für das rechtwinklige Dreieck MBC gilt: $\sphericalangle\ BCM = 90° - \beta$. Für das rechtwinklige Dreieck LCD gilt: $\sphericalangle\ BCM + \sphericalangle\ CDL = 90°$. Daraus folgt: $\sphericalangle\ CDL = \beta$.
Für das rechtwinklige Dreieck NBC gilt: $\sphericalangle\ NBC = 90° - \gamma$. Für das rechtwinklige Dreieck LDB gilt: $\sphericalangle\ NBC + \sphericalangle\ LDB = 90°$. Daraus folgt: $\sphericalangle\ LDB = \gamma$.
Die verlängerten Höhen h_a und h_c schließen den Winkel β ein; die verlängerten Höhen h_a und h_b schließen den Winkel γ ein; die verlängerten Höhen h_b und h_c schließen den Winkel $\beta + \gamma$ ein.

W(8)115 Das Passagierflugzeug habe die mittlere Geschwindigkeit v km/min und benötigt die Flugzeit t min. Dann hat das Militärflugzeug die mittlere Geschwindigkeit $2{,}5v$ km/min und benötigt die Flugzeit $(t - 35)$ min. Man erhält die Gleichung

$$tv = (t - 35)\, 2{,}5v = 400,$$

also $t = 2{,}5t - 87{,}5,$

$$1{,}5t = 87{,}5, \quad \text{d. h.,} \quad t \approx 58{,}3.$$

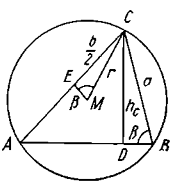
Das Passagierflugzeug landet also in Varna um 11,58 Uhr, das Militärflugzeug um 11,53 Uhr.
Aus (1) erhält man ferner

$$v = \frac{400}{t} \approx \frac{400}{58{,}3} \approx 6{,}86.$$

Die mittlere Geschwindigkeit des Passagierflugzeuges betrug also rd. 6,86 km/min, d. s. rd. 412 km/h und die mittlere Geschwindigkeit des Militärflugzeuges rd. 1030 km/h.

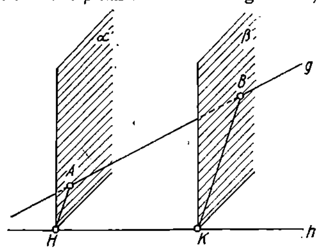
W(9)116 Es seien ABC ein Dreieck, M der Mittelpunkt seines Umkreises, r die Maßzahl des Radius des Umkreises, h_c die Maßzahl der Höhe $\overline{CD}$, sowie a und b die Maßzahlen der Seiten $\overline{BC}$ bzw. $\overline{AC}$. E sei der Mittelpunkt von $\overline{AC}$. Dann folgt aus der Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke DBC und EMC

$$a : h_c = r : \frac{b}{2}, \text{ also } ab = 2r \cdot h_c, \text{ w. z. b. w..}$$

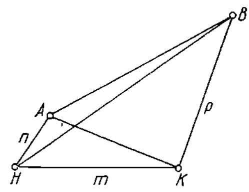


Die verlangte Konstruktion ist sehr einfach. Man zeichnet einen Kreis mit den gegebenen Durchmesser, nimmt auf der Peripherie einen beliebigen Punkt C an und schlägt um C Kreise mit den Radien b und a, die den Kreis in A bzw. B schneiden. ABC ist dann das verlangte Dreieck.

W(10)117 Es sei α eine Ebene, die senkrecht auf der Geraden h steht und durch den Punkt A geht. Dann ist H der Schnittpunkt von h mit α. Ferner sei β eine Ebene, die senkrecht auf der Geraden h steht und durch den Punkt B geht. Dann ist K der Schnittpunkt von h mit β. (In der Abb. sind die Ebenen α und β durch Schraffur angedeutet).



a) Die Punkte H und K fallen zusammen, wenn die Ebenen α und β zusammenfallen, d. h., wenn die Gerade g orthogonal (senkrecht) zur Geraden h verläuft.
b) $AH \parallel BK$, wenn die Geraden g und h in einer Ebene liegen.
c) Die Geraden AH und BK fallen zusammen, wenn die Geraden g und h einander schneiden und senkrecht aufeinander stehen.
d) Da die Fälle a), b) und c) nicht zutreffen, sind die Geraden h und g zusammen windschief. Man legt daher durch h eine Ebene, auf der g senkrecht steht. Der Schnittpunkt dieser Ebene mit g ist der gesuchte Punkt A.



e) Das Viereck $AHKB$ (vgl. Abb.) ist nicht notwendig ein ebenes Viereck; jedoch sind die Dreiecke

AHK mit $\sphericalangle\ AHK = 90°$,
HKB mit $\sphericalangle\ HKB = 90°$
und BAH mit $\sphericalangle\ BAH = 90°$ nach Voraussetzung rechtwinklig. Man erhält daher

$$\overline{AK} = \sqrt{m^2 + n^2}, \quad \overline{BH} = \sqrt{m^2 + p^2},$$
$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{BH}^2 - n^2} = \sqrt{m^2 + p^2 - n^2}.$$

118 $20 \cdot 4 = 80$; mit dem ersten Lkw wurden 80 t Ware befördert. $170 - 80 = 90$; mit dem zweiten Lkw wurden 90 t Ware befördert. $90 : 5 = 18$; der zweite Fahrer machte 18 Fahrten.

119 810 t sind 8100 dt; 640 t sind 6400 dt. 8100 : 180 = 45; das erste Feld ist 45 ha groß. 6400 : 200 = 32; das zweite Feld ist 32 ha groß. Das erste Feld ist um 13 ha größer als das zweite.

120 Aus $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ folgt, daß der Quader in 60 Würfel zerschnitten wurde. Bei 8 Würfeln waren drei, bei 24 Würfeln waren zwei, bei 22 Würfeln war eine quadratische Fläche gefärbt. Bei 6 Würfeln war die Oberfläche ungefärbt.

121 Es seien α und β die beiden spitzen Winkel des rechtwinkligen Dreiecks; aus $\alpha + \beta = 90°$ und $\alpha = 2\beta$ folgt $\beta = 30°$. Die Winkel des Dreiecks betragen also 30°, 60° und 90°.

122
$$\begin{aligned} & 107 \cdot \{700 - [48 - 72 : 9] \cdot 5 \\ & - 495\} - 135 \\ & = 107 \cdot \{700 - [48 - 8] \cdot 5 - 495\} \\ & - 135 \\ & = 107 \cdot \{700 - 200 - 495\} - 135 \\ & = 107 \cdot 5 - 135 = 535 - 135 = 400. \end{aligned}$$

123

	Bruttogewicht	Tara	Nettogewicht
1. Behälter	12,500 kg	2,375 kg	10,125 kg
2. Behälter	11,750 kg	2,375 kg	9,375 kg

19,5 — 9,8 = 9,7; dem Koch standen am zweiten Tag noch 9,7 kg Fleisch zur Verfügung.

124 $0{,}3 : \frac{3}{200} = 20$; bei Planerfüllung hätte der Betrieb für 20 Millionen Rubel Waren erzeugt.

125 $A = 4 \cdot \frac{g \cdot h}{2} = 2 \cdot 3{,}8 \cdot 2{,}8 = 21{,}28$
Zur Anfertigung des Zeltes wurden 21,28 m² Stoff verbraucht.

126 $\frac{23{,}4}{11{,}7} + \frac{1{,}5}{1{,}2} = 2 + \frac{5}{4} = 3\frac{1}{4}$

127 $V = \pi r^2 h$; $h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{12}{\pi \cdot 1{,}41^2} \approx 2$.
Die Höhe des Wasserspiegels über der Grundfläche beträgt nahezu 2 dm.

128 Aus $u = 2\pi r$ folgt $r = \frac{u}{2\pi}$ und $r^2 = \frac{u^2}{4\pi^2}$
Aus $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ und $r^2 = \frac{u^2}{4\pi^2}$ folgt
$V = \frac{u^2 h}{12\pi} = \frac{625}{3\pi}$.
Das Gewicht des kegelförmig aufgeschütteten Schotters beträgt demnach $G = \frac{375}{\pi}$ Tonnen.
Aus $x : 100 = \frac{375}{\pi} : 3{,}5$ folgt $x = \frac{75000}{7\pi}$.
$\frac{75000}{7\pi} : 6 \approx 570$.
Mit dem vorrätigen Schotter können ungefähr 570 m Straßenlänge asphaltiert werden.

129 Im ersten Speicher lagerten ursprünglich x Tonnen, im zweiten $p - x$ Tonnen Korn. Dem ersten Speicher wurden $a \cdot t$ Tonnen, dem zweiten $b \cdot t$ Tonnen Korn entnommen.

$$\begin{aligned} x - at &= p - x - bt \\ 2x &= at - bt + p \\ x &= \frac{1}{2}[t(a - b) + p]. \end{aligned}$$

Im ersten Speicher lagerten ursprünglich $\frac{1}{2}[p + t \cdot (a - b)]$ Tonnen, im zweiten
$p - \frac{1}{2}[t \cdot (a - b) + p] = \frac{1}{2}[p - t(a - b)]$
Tonnen.

130 $3 + 2 + 2 = 7$; $2{,}8 : 7 = 0{,}4$;
$3 \cdot 0{,}4 = 1{,}2$; $2 \cdot 0{,}4 = 0{,}8$.
2,8 kg der Mischung enthalten 1,2 kg Kalk, 0,8 kg Roggenmehl und 0,8 kg Öl.

Gedenktage

Georg Cantor (3. 3. 1845 bis 6. 1. 1919)
(Siehe unsere Beiträge in Heft 1, 2, 3/67)
Wirkte in Halle. Schöpfer der Mengenlehre.

Hendrik A. Lorentz (18. 7. 1853 bis 4. 2. 1928)
Wirkte in Leyden. Schöpfer der klassischen Elektronentheorie und der Bewegungsgleichung des Elektrons. Durch seine Arbeiten zur Elektrodynamik ist er der unmittelbare Vorgänger Einsteins in der Relativitätstheorie.

David Hilbert (23. 1. 1862 bis 14. 2. 1943)
Wirkte in Königsberg und Göttingen. Seine grundlegenden Arbeiten auf fast allen Gebieten der Mathematik waren für deren weitere Entwicklung von tiefgehendem Einfluß, insbesondere waren es die 23 mathematischen Probleme, auf die H. in seinem aufsehenerregenden Pariser Vortrag (1900) hingewiesen hat und die das Interesse der mathematischen Welt bis heute besitzen.

Edmund Landau (14. 2. 1877 bis 19. 2. 1938)
Wirkte hauptsächlich in Göttingen. Grundlegende Arbeiten zur analytischen Zahlentheorie und zur Funktionentheorie. Verfasser des *Handbuches über die Verteilung der Primzahlen.*

Gekürzt aus: J. Naas, H. L. Schmidt, Mathematisches Wörterbuch

Wissen, wo . . .

Eine Anleitung zum Selbststudium

(Siehe Artikel Heft 2/67, S. 48/49)

alpha (Zeitschrift alpha)

2/67	*Wissen, wo . . . (Eine Anleitung zum Selbststudium)*	*H. Herzog / J. Lehmann*

***alpha*-Wettbewerb**

1/67	*Bedingungen und Hinweise*	*Redaktion*
4/67	*Bedingungen und Hinweise*	*Redaktion*
6/67	*Information zum alpha-Wettbewerb, Vorstellung der Jury*	

Ähnlichkeitslehre

4/67	*Guter Mond, du gehst so stille . . .*	*L. Görke*

Berichte

1/67	*Bericht über die VIII. IMO 1966*	*J. Lehmann*
1/67	*Die Deutsche Bücherei im Spiegel von Zahlen und Fakten*	*S. Günther*
1/67	*Internationaler Mathematikerkongreß 1966 (Moskau)*	*D. Ziegler*
2/67	*alpha berichtet aus aller Welt*	
2/67	*Mathematischer Leistungsvergleich Praha – Neubrandenburg*	*J. Lehmann*
3/67	*Mathematischer Mannschaftswettbewerb*	*M. Mäthner / G. Schulze*
3/67	*Schwankt der Fernsehturm?*	*W. Zill*
3/67	*Der Berliner Fernsehturm*	*W. Zill*
3/67	*Mathematische Wettbewerbe in England*	
4/67	*Auf den Spuren Roald Amundsens*	*S. Meier*
4/67	*Mathematikolympiaden in Bulgarien*	*S. Bodurow*
5/67	*Nowosibirsk*	*W. Friedrich*
5/67	*Aufgaben aus Mathematikbüchern der Estnischen SSR*	*O. Prinits*
5/67	*Aus der Sowjetunion berichtet*	
5/67	*Erfahrungsaustausch mit sowj. Wissenschaftlern (Bratsk)*	*H. Werner*
6/67	*Als Diplommathematiker in Dubna*	*G. Laßner*
6/67	*Als Mathematiklehrer in Tansania*	*H. Büchel*
6/67	*Ernährung und Leistungsfähigkeit*	*W. Kraack*

Berufe

3/67	*Vermessungsingenieur mit Hochschulstudium*	*W. Zill*
6/67	*Als Diplommathematiker in Dubna*	*G. Laßner*
6/67	*Als Mathematiklehrer in Tansania*	*H. Büchel*

Beweise

2/67	*Beweise durch vollst. Induktion (1)*	*W. Stoye*
3/67	*Beweise durch vollst. Induktion (2)*	*W. Stoye*

Biographien

2/67	*G. Leibniz als Mathematiker (250. Todestag)*	*W. Purkert*

4/67	*Leonhard Euler (1707 bis 1783)*	*H. Bernhard*
4/67	*Gaspard Monge (1746 bis 1818)*	*E. Schröder*
5/67	*A. J. Chintschin*	*H. Bernhardt*
5/67	*Aus der Jugend A. J. Chintschins*	*Artisow / Muromzewa*

Geometrie, darstellende

6/67	*Darst. von Punkt und Gerade in zugeordn. Normalrissen*	*E. Schröder*

Mengenlehre

1/67	*Mit Mengen fängt es an! (1) und Aufgaben dazu*	*W. Walsch / H. Lohse*
2/67	*Wir operieren mit Mengen (2)*	*W. Walsch*
3/67	*Wir untersuchen Abbildungen (3)*	*W. Walsch*
4/67	*Wir lösen Aufgaben aus der Mengenlehre*	*W. Walsch*

Olympiadeaufgaben

1/67	*Wir lösen eine Aufgabe der VIII. IMO*	*H. Bausch*
1/67	*VI. Olympiade DDR, Aufgaben d. Kreisolympiade*	
2/67	*VI. Olympiade DDR, Aufgaben d. Bezirksolympiade*	
3/67	*VI. Olympiade DDR, Aufgaben d. DDR-Olympiade*	
3/67	*Preisträger der VI. OJM*	
4/67	*Aufgaben der MO, Schulstufe, Sofia 1967*	
4/67	*VI. Olympiade DDR, Lös. zur Kreisolympiade 1966*	
5/67	*MO in der UdSSR, Allunionsolymp. Tbilissi 1967*	*I. Petrakow*
5/67	*VI. Olympiade DDR, Lös. zur Bezirksolympiade*	
5/67	*Eine vorbildliche Jahresarbeit*	*R. Höppner*
6/67	*Heiße Tage in Cetinie, IX. IMO 1967*	*H. Bausch*
6/67	*VI. Olympiade DDR, Lös. zur DDR-Olympiade*	

Zahlenfolgen

6/67	*Einige Aufg. über Folgen aus den Schriften des Altertums*	*A. A. Kolosow*

Zirkel (Arbeitsgemeinschaften)

1/67	*Eine AG erlebte die Deutsche Bücherei*	*AG 29. OS Leipzig*
5/67	*Mathematischer Wettstreit*	*W. Werner*

Schlagwortübersicht

A	*alpha (Zeitschrift α)*	K	*Kombinatorik*	R	*Rechenhilfsmittel*
	alpha-Wettbewerb		*Kryptarithmetik*		*Relationen*
	Ähnlichkeitslehre		*Kybernetik*	S	*Sport und Mathematik*
	Astronautik	L	*Literatur*		*Statistik*
B	*Berichte*		*Logarithmen*		*Stereometrie*
	Berufe		*Logik*	T	*Trigonometrie*
	Beweise	M	*Mathematikunterricht*	U	*Ungleichungen*
	Biographien		*Mengenlehre*		*Unterhaltung*
D	*Determinanten*	N	*Nomographie*	V	*Vektorrechnung*
F	*Fernsehen*		*Normung*	W	*Wahrscheinlichkeitsrechnung*
	Funktionen	O	*Olympiade-Aufgaben*		*Wandzeitung*
G	*Geschichte der Mathematik*		*Optimierung*	Z	*Zahlenbereiche*
	Geometrie, analytische	P	*Philosophie*		*Zahlenfolgen*
	Geometrie, darstellende		*Planimetrie*		*Zahlentheorie*
	Gleichungen		*Potenzen*		*Zeitschriften*
	Gruppentheorie		*Programmierung*		*Ziffernsysteme*
I	*Infinitesimalrechnung*		*Prüfungen*		*Zirkel (Arbeitsgemeinschaften)*