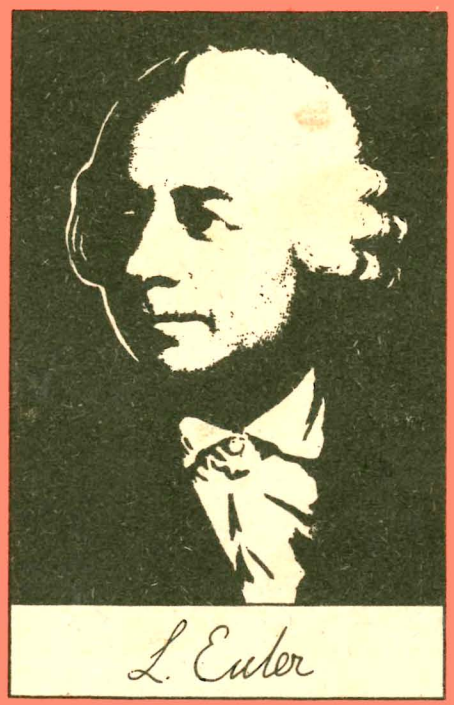
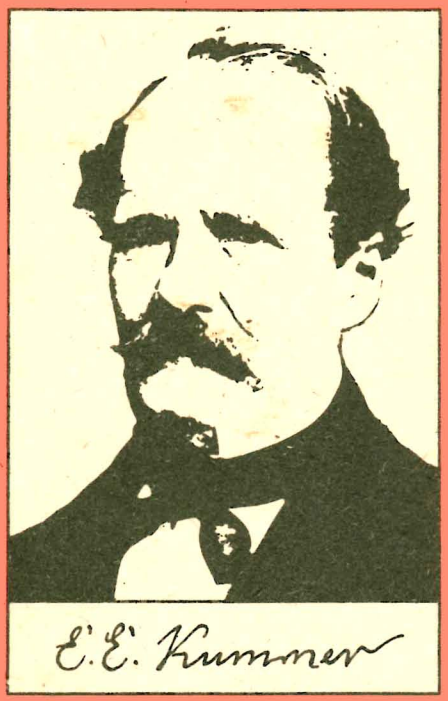
Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha





BERÜHMTE BERLINER MATHEMATIKER

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
21. Jahrgang 1987
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

5

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold

Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086
Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig 7027
Redaktion:
Gabriele Liebau (Chefredakteur)
Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstudienrat J. Lehmann, VLdV (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Dr. rer. nat. W. Schmidt (Greifswald); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. rer. nat. W. Schulz (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch, VLdV (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der *Karl-Marx-Universität* Leipzig (Ltg. Dr. C.-P. Helmholz)
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: H. Pieper (S. 97, 98, 113); J. Lehmann (S. 99, 101, 104, 105); R. Bölling (S. 103); Theiler, aus Für Dich (S. 114)
Titelblatt: W. Fahr, Berlin
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395

Redaktionsschluß: 9. Juni 1987
Auslieferungstermin: 2. Oktober 1987

Mathematische Schülerzeitschrift

Die konzeptionelle und inhaltliche Gestaltung dieses Heftes lag in den Händen von J. Lehmann, Leipzig, und Dr. H. Pieper, Berlin.

Inhalt

97 Mathematiker in Berlin (von 1708 bis 1855)
Von Naudé bis Eisenstein [7][1])
Dr. H. Pieper, Zentralinstitut für Astrophysik der Akademie der Wissenschaften der DDR

99 In alten Berliner Mathematik-Lehrbüchern gestöbert [8]
J. Lehmann, Leipzig/Th. Scholl, Berlin

100 Vollständige Anleitung zur Algebra von Leonhard Euler [7]
Dr. R. Lüders, Berlin

101 Mathematiker in Berlin (von 1855 bis 1897)
Kummer, Weierstraß, Kronecker [7]
Dr. R. Bölling, Karl-Weierstraß-Institut für Mathematik, Berlin

104 Römische Zahlen [5]
Dipl. Phil. H.-D. Schultz, Kustos am Münzkabinett der Staatlichen Museen zu Berlin

106 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]
Aufgaben zu Mathematik, Naturwissenschaft und Technik
Zusammenstellung: Dr. W. Fregin/Dr. W. Riehl, beide Leipzig, OStR Th. Scholl, Berlin

109 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt [7]
Die Mathematische Schülergesellschaft (MSG) *Leonhard Euler*
Prof. Dr. J. Nietzsch

109 Eine Aufgabe von Prof. Dr. J. Nietzsch [8]
Sektion Mathematik der *Humboldt*-Universität zu Berlin

110 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht
Speziell für Klassen 5/7
Mathematisches Unterrichtsbuch für höhere Mädchenschulen [5]
J. Lehmann, Leipzig/Th. Scholl, Berlin

111 Sprachecke [8]
H. Begander/Dr. C.-P. Helmholz/J. Lehmann (alle Leipzig)

112 XXVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR [10]
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Aufgaben für Klassen 10 und 11/12

113 Spezialschule Mathematik/Physik der *Humboldt*-Universität Berlin [7]
Dr. R. Böttcher, Leiter der Spezialschule

114 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig

116 Lösungen [5]

III. U.-Seite: Lösungen und Gewinner des 4. *alpha*-Schachwettbewerbs [5]
H. Rüdiger, Schichtleiter im Werk für Fernsehelektronik Berlin

IV. U.-Seite: Fakten und Daten zum Berliner Bildungswesen seit 1945

[1]) bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet.

Mathematiker in Berlin
(von 1708 bis 1855)
Von Naudé bis Eisenstein

Obwohl über sechs Jahrhunderte seit ihrer Entstehung vergangen waren, hatte die Stadt Berlin (Ersterwähnung: 1237) bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts nur zwei große Zeitalter auf dem Gebiet der Mathematik gehabt: Zwischen 1741 und 1787 wirkten in Berlin Euler, Lambert und Lagrange, zwischen 1828 und 1855 Dirichlet, Steiner, Jacobi und Eisenstein.

In Berlin gab es keine auf dem Boden des Feudalismus gewachsene Universität (wie etwa in Leipzig seit 1409, in Rostock seit 1419, in Greifswald seit 1456, in Wittenberg seit 1502, in Frankfurt (Oder) seit 1506). Die Berliner Universität entstand im Jahre 1810, unbelastet von eigener feudaler Tradition, mit der bürgerlichen Umgestaltung der Gesellschaft. Fast ein Jahrhundert früher, im Jahre 1711, war in Berlin die *Akademie der Wissenschaften* als eine Art von Gelehrtengesellschaft für die Führung von wissenschaftlichen Disputationen eröffnet worden.

Andere Institutionen, an denen sich Gelehrte oder Lehrer mit Mathematik befaßten, waren vor allem die Gymnasien.

In den Gymnasien hat man bis etwa über die Mitte des 18. Jahrhunderts hinaus durchweg Latein für das wesentlichste Lehrobjekt gehalten. Die Mathematik nahm in den Lehrplänen lange Zeit eine untergeordnete und nebensächliche Stellung ein; sie eroberte, sofern sie mehr ist als gewöhnliches Rechnen, erst im Laufe des 18. Jahrhunderts die Gymnasien.

Das *illustre* Joachimsthalische Gymnasium hatte wohl von Anfang an einen eigenen Mathematiker. Schon im Jahre 1615 wurde Benjamin Ursinus (1587 bis 1634), Freund und Gehilfe des Astronomen Kepler, berufen (später war er Professor für Mathematik an der Universität Frankfurt (Oder)). Von 1677 an arbeitete dort Philipp Naudé (1654 bis 1729) (seit 1696 Hofmathematiker und Pagenlehrer, sowie Professor für Mathematik an der *Berliner Maler-Akademie*). Mit seinem Sohn Philipp Naudé (1684 bis 1745) unterrichtete am Joachimsthalschen Gymnasium seit 1708 ein durchaus bedeutender Mathematiker. Von 1747 bis 1762 war der Mathematiker und Philosoph Johann Georg Sulzer (1720 bis 1779) der *Professor matheseos*. Das Berlinisch-Köllnische Gymnasium besaß seit 1778 in dem Professor Johann Andreas Michelsen (1749 bis 1797) einen eigenen Mathematiker. Er hatte ein Lehrbuch verfaßt, das er seinem Unterricht zugrunde legte. Hier unterrichtete seit 1787 auch Ernst Gottfried Fischer (1754 bis 1831), der übrigens dem jungen Alexander von Humboldt Privatunterricht in Mathematik erteilte.

An den verschiedenen Berliner höheren militärischen Lehranstalten des 18. Jahrhunderts waren gute Mathematiker tätig, von denen F. P. Jacobi (1724 bis 1758), J. de Castillon (1708 bis 1791), J. K. G. Schulze (1749 bis 1790), G. F. von Tempelhoff (1737 bis 1807), A. Burja (1752 bis 1816) genannt seien. Diese gehörten auch als ordentliche Mitglieder der mathematischen Klasse der Akademie an.

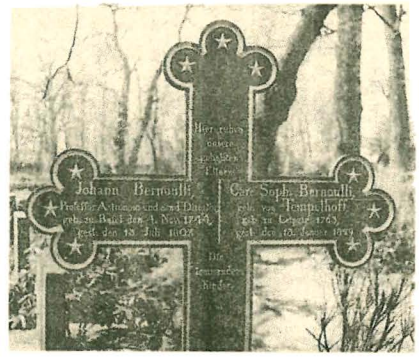
Die auf Veranlassung des Gelehrten Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 bis 1716) durch den brandenburgischen Kurfürsten Friedrich III. (seit 1701 König Friedrich I. von Preußen) im Jahre 1700 gestiftete *Akademie der Wissenschaften* gewann unter Friedrich II. (seit 1740 König von Preußen) hohes Ansehen.

Der König war bestrebt, die hervorragendsten Gelehrten nach Berlin zu berufen. Von 1741 bis 1766 wirkte hier Leonhard Euler (1717 bis 1783), unstreitig einer der größten Mathematiker aller Zeiten. Kein Geringerer als Carl Friedrich Gauß (1777 bis 1855) schrieb über ihn: „Von keinem anderen Mathematiker älterer oder neuerer Zeit kann man eine solche fast unbegreifliche Schnelligkeit in den schwierigsten Arbeiten bei einer solchen unerschöpflichen Fruchtbarkeit an neuen Ideen und Hilfsquellen rühmen. Alle Teile der Mathematik bearbeitete er, und die meisten erhielten unter seinen Händen eine ganz neue Gestalt." Eulers Nachfolger wurde von 1766 bis 1787 Joseph Louis Lagrange (1736 bis 1813). Auch seine Arbeiten gehören „zu dem Vorzüglichsten, was je in der Mathematik geleistet wurde". Obwohl im Jahre 1765 zum Mitglied der physikalischen Klasse der Akademie berufen, war der vielseitige Gelehrte Johann Heinrich Lambert (1728 bis 1777) an erster Stelle Mathematiker. Gleiches gilt für Johann (III) Bernoulli (1744 bis 1807), der von 1764 bis 1787 Direktor der Akademie-Sternwarte war. Diese Mathematiker, die drei Schweizer Euler, Lambert und Bernoulli und der Italo-Franzose Lagrange waren eine Zierde der Berliner Akademie in der friderizianischen Zeit.

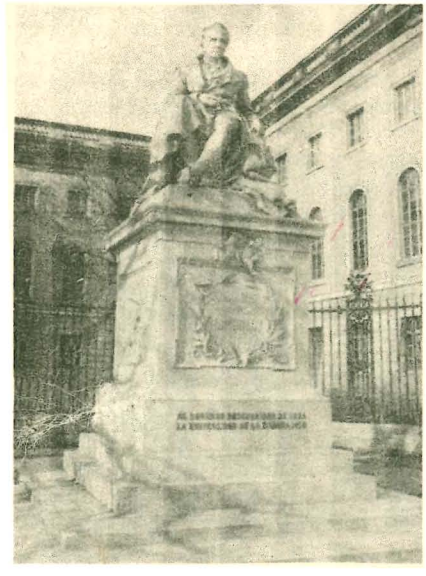
Wer im 18. Jahrhundert in Deutschland Mathematik unter seinen Studienfächern hatte, hörte in den Universitätsvorlesungen kaum etwas von den Problemen und Theorien, mit denen sich die führenden forschenden Mathematiker beschäftigten. (Euler war übrigens nie Universitätsprofessor.) Mit der Gründung der Berliner Universität postulierte die neue bürgerliche Universitätsidee zwar von Anfang an die Einheit von Forschung und Lehre, aber dieses Ideal konnte in der Mathematik in den ersten zwei Jahrzehnten der Berliner Universität noch nicht verwirklicht werden; sie konnte sich nicht über das niedrige Niveau der anderen deutschen Universitäten erheben. Von Carl Friedrich Gauß (1777 bis 1855) in Göttingen abgesehen (aber auch er machte seine Studenten nicht mit den neuesten Erkenntnissen bekannt), blieb die Mathematik in Deutschland (seit der Übersiedlung Lagranges von Berlin nach Paris) bis in die zwanziger Jahre des 19. Jahrhunderts weit hinter der Mathematik in Frankreich zurück.

Im Wintersemester 1825/26 hielt der 21jährige geniale Mathematiker C. G. Jacob Jacobi (1804 bis 1851) an der Berliner Universität eine differentialgeometrische Vorlesung, die „als Anfang der allgemeinen Neugestaltung des mathematischen Universitätsunterrichts angesehen werden" kann. Doch bereits Anfang Mai 1826 sie-

Grabstätte von Johann (III) Bernoulli in Köpenick



Denkmal von Alexander von Humboldt vor der *Humboldt*-Universität zu Berlin



delte Jacobi nach Königsberg (Kaliningrad) über. An der dortigen Universität hat er dann in seinen Forschungen und Vorlesungen derartige Aktivitäten entfaltet, daß sie ihn zu einem der ideenreichsten und produktivsten Mathematiker, einem Reformator des mathematischen Universitätsunterrichts und dem Begründer einer mathematischen Schule werden ließen.

In Berlin blieb der Zustand der mathematischen Lehre und Forschung im Jahre 1826 noch der alte. Das sollte sich erst durch die wissenschaftsfördernde Wirksamkeit von Alexander von Humboldt (1769 bis 1859) und August Leopold Crelle (1780 bis 1855) ändern.

Der berühmte Forschungsreisende und Naturforscher Alexander von Humboldt siedelte im Mai 1827 im Alter von 57 Jahren von Paris nach Berlin über. Durch seinen langjährigen Aufenthalt in Paris, dem damaligen Mittelpunkt des naturwissenschaftlichen und mathematischen Lebens in Europa, hatte Humboldt einen Blick für die Notwendigkeit der Entwicklung der exakten Wissenschaften erworben. Für die Förderung der Naturwissenschaften und der Mathematik in Preußen zu wirken, das war Humboldts erklärtes Ziel bei seiner Übersiedlung. Die objektiven Voraussetzungen waren in der steigenden Bedeutung dieser Wissenschaften und dem wachsenden allgemeinen Interesse an ihnen als Folge der industriellen Revolution (die in Deutschland später als in England und Frankreich einsetzte) gegeben.

Die damals in Berlin tätigen Mathematiker waren nicht so bedeutend, wie einst Euler oder Lagrange oder die zeitgenössischen französischen Mathematiker.

Eine Verbesserung der Berliner mathematischen Verhältnisse wäre dadurch zu erzielen, daß wirklich bedeutende Mathematiker an die Universität oder die Akademie berufen werden. Humboldt, der durch seine Beziehungen zum königlichen Hof und seine vielseitigen Verbindungen in Wissenschaft und Kunst in Berlin eine außergewöhnliche Stellung genoß, bemühte sich mehrfach (jedoch vergeblich) Gauß der Stadt Berlin zuzuführen. Im Zusammenhang mit einer geplanten Berufung von Gauß wurde auch das (jedoch nicht verwirklichte) Projekt erörtert, in Berlin eine mit der Pariser *École polytechnique* (gegründet 1794; eine höhere Schule von Weltruf) vergleichbare neue Lehranstalt zu errichten, an die hervorragende Mathematiker berufen werden sollten (neben Gauß wurde auch der geniale Norweger Abel, ferner Jacobi, die Geometer Plücker und Steiner in Erwägung gezogen).

In Müggelheim (Stadtbezirk Köpenick) wurde 1754 der Geodät Johann Jacob Baeyer geboren.

Zur Verwirklichung seiner Ziele hatte Humboldt in Crelle, dem Gründer (1826) und Herausgeber des *Journals für die reine und angewandte Mathematik*, einen Verbündeten gefunden, der dank Humboldtscher Vermittlung mit dem Amt des Fachreferenten für Mathematik im preußischen Kultusministerium betraut wurde und so zu einem *Vollstrecker der Humboldtschen Pläne auf mathematischem Gebiet* werden konnte.

Humboldt und Crelle förderten und unterstützten (z. B. durch Bemühungen um die Verschaffung einer Professur, um Aufnahme in die Akademie, um finanzielle Sicherstellung, um die Gewährung von Arbeitsurlaub) die Mathematiker Dirichlet, Steiner, Minding, Jacobi und Eisenstein (und viele andere, nicht nur in Berlin).

Als Jacobi im September 1844 wieder nach Berlin zurückkehrte, hatten sich in der mathematischen Lehre und Forschung der Stadt tatsächlich Veränderungen vollzogen.

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 bis 1859) begann schon 1828 seine mathematische Lehrtätigkeit an der Allgemeinen Kriegsschule und ein Jahr später auch an der Universität.

„In demselben Sinne, in welchem Jacobi an der Universität Königsberg den mathematischen Unterricht reformierte", sagte E. E. Kummer später, wurde an der Universität Berlin „die dem Stande und den Anforderungen der Wissenschaft entsprechende Lehrmethode durch Lejeune-Dirichlet eingeführt."

Der aus der Schweiz stammende erfindungsreiche und originelle Geometer Jakob Steiner (1796 bis 1873), von 1821 für vier Jahre Lehrer am Friedrichswerderschen Gymnasium, von 1825 für 10 Jahre Lehrer an der städtischen Gewerbeschule, wurde 1834 Mitglied der Berliner Akademie und Professor an der Universität.

Im Jahre 1830 habilitierte sich der vielseitig talentierte Ferdinand Minding (1806 bis 1885) an der Universität zum Privatdozenten. Er hat den mathematischen Unterricht mit neueren Forschungsergebnissen durchdrungen. Von 1834 an war er gleichzeitig als Lehrer an der Bauakademie tätig.

Diese drei Mathematiker legten den *Grundstein für den unaufhaltsamen und stetigen Aufstieg des Ansehens der Mathematik an der Universität Berlin* und bestimmten bis kurz vor dem Wiedereintreffen Jacobis das mathematische Profil der Universität. Doch in der Fakultät besaßen sie weder Sitz noch Stimme. Immer noch gaben jene mittelmäßigen Mathematiker den Ton an, die schon zu Jacobis Studentenzeit von maßgeblichem Einfluß waren: Gruson (1768 bis 1857), Lubbe (1786 bis 1846), Dirksen (1792 bis 1850) und Martin Ohm (1792 bis 1872), der einzige Mathematikordinarius, den die Akademie nicht zu ihrem Mitglied gewählt hat, der nebenbei zeitweise an der Bauakademie, an der Allgemeinen Kriegsschule und an der Artillerie- und Ingenieurschule tätig war). Die Professoren Dirichlet und Steiner und der Privatdozent Minding blieben von der Beurteilung der Dissertationen, der Beteiligung an Promotionsprüfungen und der Einflußnahme auf die Habilitation weitgehend ausgeschlossen, so daß die Berliner Universität nicht alle Funktionen eines mathematischen Zentrums ausüben konnte, wie die Königsberger Universität (zwischen 1826 und 1843 vor allem durch Jacobi und seine Schüler) oder die Berliner Universität unter Kummer, Kronecker und Weierstraß in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts.

Minding nahm 1843 den Ruf nach Dorpat an. Als ein Jahr später Jacobi nach Berlin kam, wurde zumindest der Schwerpunkt der mathematischen Forschung in Deutschland nach Berlin verlegt.

Damals erregte ein Berliner Mathematikstudent die Aufmerksamkeit der Fachgelehrten: Gotthold Eisenstein (1823 bis 1852). Im Oktober 1843 an der Universität immatrikuliert, bereicherte er ein Jahr später zwei Bände des *Crellschen Journals* bereits mit 25 vor allem zahlentheoretischen Arbeiten. Im Jahre 1852 wurde er zum Mitglied der Akademie der Wissenschaften gewählt, Höhepunkt aber leider zugleich auch Schlußpunkt seines Lebens. Noch nicht 30 Jahre alt, starb Eisenstein wenige Monate später an der Schwindsucht.

Dirichlet (er wurde 1855 Nachfolger von Gauß in Göttingen), Steiner, Jacobi und Eisenstein sind im 19. Jahrhundert als die Begründer des mathematischen Ruhms von Berlin anzusehen.

H. Pieper

▲1▲ Aus der schriftlichen Abiturprüfung am Berlinisch-Köllnischen Gymnasium zum Grauen Kloster vom Jahre 1790:
Wer war der alte berühmte griechische Philosoph, der keinen in seine philosophische Schule aufnahm, als der die Geometrie verstand? Was mag ihn dazu bewogen haben? ...
Wie heißt der griechische Schriftsteller, dessen Buch von der gemeinen Geometrie nicht nur hochgeschätzt, sondern auch von vielen den neueren Lehrbüchern vorgezogen wird?

▲2▲ Problem von Naudé (formuliert am 27. 8. 1740 in einem Brief an Euler): Es ist zu finden, auf wieviel verschiedene Arten b Taler (z. B. $b = 50$) in c Teile (z. B. $c = 7$) zerlegt werden können, so daß alle Teile untereinander verschieden sind, aber nur aus positiven ganzen Zahlen bestehen.

▲3▲ Satz von Euler (formuliert am 17. 2. 1748 in einem Brief an G. W. Krafft in Petersburg): Verbindet man bei einem beliebigen Viereck die Mitten der Diagonalen, so ist die Summe der Quadrate der beiden Diagonalen plus dem vierfachen Quadrat jener Verbindungsstrecke.

Mitgeteilt von H. Pieper

In alten Berliner Mathematik-Lehrbüchern gestöbert

Alexis Clairaut
Anfangsgründe der Algebra
Aus dem Französischen übersetzt von L. Mylius, verlegt von Ch. G. Nicolai Berlin 1752

▲1▲ Zwei Boten brechen vom gleichen Ort auf, der erste 9 Stunden früher als der zweite. Der erste Bote legt durchschnittlich 5 Meilen in 2 Stunden, der zweite 11 Meilen in 3 Stunden zurück.
Nach wieviel Meilen holt der zweite Bote den ersten ein?

Johannes Andreas Christian Michelsen, Prof. der Mathematik und Physik am Berlinischen Gymnasium
Beyträge zur Beförderung des Studiums der Mathematik
Berlin 1760

▲2▲ Ein gegebenes Dreyeck durch eine Parallele zu einer seiner Seiten in zwei flächengleiche Theile zu theilen.

Johann Philipp Grusons
Enthüllte Zaubereyen und Geheimnisse der Arithmetik
Berlin 1800

▲3▲ Jemand stößt beym Hinausgehen aus seinem Hause auf eine gewisse Anzahl

Johann Philipp Grusons,
Königl. Preuß. Professore der Mathematik und ordentlichen Mitgliedes der Königl. Akademie der Wissenschaften in Berlin.

enthüllte

Zaubereyen und Geheimnisse

der

Arithmetik

nebst

einer Einleitung

zur Kenntniß der Rechnung mit Logarithmen und Buchstaben.

Souverains, qui gouvernés les peuples ou qui voulez leur faire secouer le joug de la superstition et de l'ignorance, faites naître des *mathématiciens* parmi eux.
d'Alembert.

Zweyter Theil.

Mit zwey Kupfertafeln.

Berlin,
in der Hellingschen Buchhandlung.
1800.

Arme. Er will das Geld, was er bey sich hat, unter sie theilen, findet aber, daß, wenn er jedem 9 Sous giebt, so hat er zwey und dreyßig zu wenig, und giebt er einem jeden nur 7, so behält er vier und zwanzig übrig.
Wieviel Arme waren es, und wie viel Geld hatte der Mann bey sich?

▲4▲ Ein Hausvater hinterläßt, da er sterben will, seine Frau schwanger und setzt durchs Testament fest, daß, wenn sie mit einem Sohne niederkommen würde, dieser zwey Drittel, und sie ein Drittel von seinem Vermögen ererben sollte; würde sie aber eine Tochter gebähren, so sollte diese nur ein Drittel und die Mutter zwey Drittel bekommen.
Sie kömmt aber mit zwey Kindern, einem Sohn und einer Tochter nieder.
Wieviel bekömmt nun ein jedes?

Aus einer Sammlung von 2000 Aufgaben und Beispielen
Buchstabenrechnung und Algebra
Berlin 1804

▲5▲ 1520 Thlr. sollen unter drei Personen A, B, C so getheilt werden, daß B 100 Thlr. mehr als A, C aber 270 Thlr. mehr als B erhalte.
Wieviel wird jeder bekommen?

▲6▲ Ich habe eine gewisse Zahl im Sinne, spricht A zu B, versuche es, sie zu erraten. Ich multiplicire meine Zahl mit 7, setze zum Produkt 3 hinzu, dividire hierauf durch 2, ziehe von dem Quotienten 4 ab, und ich erhalte 15.
Welche Zahl ist es nun?

▲7▲ M ersteht auf einer Auktion 36 m Stoff für 162 Thl. Beim Tuchhändler kostet ein Meter dieses Stoffes 6 Thl.
Um wieviel kaufte M den Stoff billiger?

Sammlung von
Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra
von Meier Hirsch, Berlin 1816

▲8▲ Es soll eine Zahl gefunden werden, welche die Eigenschaft besitzt, daß, wenn man den dritten Theil derselben mit ihrem vierten Theile multiplicirt, und zum Produkte das Fünffache der gesuchten Zahl addirt, das was heraus kommt, die Zahl 200 um eben so viel übertreffe, als die gesuchte Zahl selbst unter 280 ist.
Welche Zahl ist es?

▲9▲ Ein Rechenmeister verlangt von seinen Schülern, daß sie eine Zahl, welche er im Sinn habe, aus folgenden Angaben berechnen sollen.
Wenn ihr diese Zahl, sagt er, mit 5 multiplicirt, von dem Produkte 24 abzieht, den Rest durch 6 dividirt, und zum Quotienten 13 addirt, so erhaltet ihr diese Zahl selbst.
Welche Zahl ist es nun?

▲10▲ Zwei Freunde begegneten einem Pferdehändler, der ein schönes Pferd führte, und entschlossen sich, es gemeinschaftlich zu kaufen. Als sie wegen des Preises einig waren, fand sich, daß der eine nur den fünften, der andere nur den siebenten Theil zu bezahlen im Stande sey; so viel schossen sie denn auch wirklich zusammen, und bezahlten damit dem Verkäufer abschläglich 48 Thlr.
Wie hoch kam das Pferd zu stehen?

▲11▲ Eine Anzahl Männer, Weiber und Kinder machen zusammen eine Lustpartie. Ein Mann verzehrt (für) 19, eine Frau 10 und ein Kind 8 Groschen. Die Männer haben insgesamt 7 Gr. mehr als die Weiber, und 15 Gr. mehr als die Kinder verzehrt.
Wie viele Männer, Weiber und Kinder waren es mindestens?

▲12▲ Die Summe zweier Zahlen soll = a, ihr Produkt = b seyen.
Welche Zahlen sind es?

Aufgaben – Systeme und Sammlungen aus der ebenen Geometrie
von H. v. Holleben und P. Gerwien, Lietenants im Königl. Preuß. Kadetten-Korps, Berlin 1831

▲13▲ Ein gegebenes Dreieck ABC ist durch eine geeignete Konstruktion in vier kongruente Teildreiecke zu zerlegen.

▲14▲ Es ist ein Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ aus den Stükken
$\overline{AB} = a = 95$ mm, $\overline{CD} = c = 30$ mm,
$\overline{AC} = e' = 100$ mm und $\overline{BD} = e = 125$ mm
zu konstruieren.

▲15▲ Gegeben seien zwei Kreise k und k' mit den Mittelpunkten M und M' und den Radien r und r' ($r < r'$), die sich in den Punkten P und Q schneiden. Durch den Punkt ist eine Gerade, die k in A und k' in B schneidet, derart zu konstruieren, daß P die Strecke $\overline{AB}$ halbiert.

T. Richard
Handbuch gebräuchlicher und unterhaltender Anwendungen der Mathematik
Berlin 1838

▲16▲ Ein Mann sucht ein 150 Pfund schweres Faß auf eine Ebene hinaufzubringen, deren waagerechte Länge 10 Fuß und deren Höhe $7\frac{1}{2}$ Fuß beträgt. Er bedient sich dazu eines Strickes, den er um das Faß schlingt; man fragt, welche Kraft er anwenden muß, um das Faß festzuhalten, wenn er mit der Ebene parallel zieht?

Aus einem Mathematikbuch, 1860 in Berlin gedruckt: Eduard D. Braesicke
Der sächsische Rechenmeister

▲17▲ A hat 100 Last 10 Malter 4 Himten 2 Spind $1\frac{1}{2}$ Sechzehntel Getreide vorrätig und verkauft davon 48 Last 14 Malter 5 Himten und 3 Sechzehntel.
Wieviel behält er übrig?
(*Rechne mit:* 1 Last = 16 Malter;
1 Malter = 6 Himten; 1 Himte = 4 Spind;
1 Spind = 4 Metzen;
1 Metze = 1 Sechzehntel;
1 Spind = 4 Sechzehntel!)

J. Lehmann/Th. Scholl

Vollständige Anleitung zur Algebra von Leonhard Euler

Neun ausgewählte Aufgaben

Im Jahre 1770 gab Euler, der damals schon völlig erblindet war, ein leicht verständliches Lehrbuch der Algebra heraus. Dieses Buch erschien zunächst in deutscher Sprache in Petersburg, dem heutigen Leningrad, und wurde in viele Sprachen übersetzt. Dieses Werk war mehr als hundert Jahre lang eines der beliebtesten und meist gelesenen Lehrbücher, es enthielt viele Aufgaben, leichtere und schwerere. Hier eine kleine Auswahl:

▲1▲ Ein Vater hinterläßt seinen drei Söhnen ein Vermögen von 1600 Rthlr. (Reichstaler, deutscher Taler seit 1566). Nach seinem Testament soll der älteste Sohn 200 Rthlr. mehr haben als der zweite, der zweite aber 100 Rthlr. mehr als der dritte; wieviel bekommt jeder?

▲2▲ Ein Mann hinterläßt 11 000 Rthlr. für seine Witwe, zwei Söhne und drei Töchter. Nach seinem Testament soll die Frau zweimal mehr (zweimal so viel) bekommen als ein Sohn, und ein Sohn zweimal mehr als eine Tochter. Wieviel bekommt jeder Erbe?

▲3▲ Teile 25 in zwei Teile, so daß der größere 49mal größer ist als der kleinere.
In moderner Form: Die Zahl 25 ist so in zwei Summanden zu zerlegen, daß der größere Summand 49mal so groß wie der kleinere ist.

▲4▲ 20 Personen, Männer und Frauen, sind in einem Gasthause. Die Männer geben 24 Fl. (franz. Florin, d. h. Gulden), die Frauen geben auch 24 Fl. aus, und es findet sich, daß ein Mann einen Gulden mehr als eine Frau hat zahlen müssen. Wieviel waren es Männer und Frauen?

▲5▲ Ein Maulesel und ein Esel tragen jeder etliche Pud (altes russ. Massemaß, etwa 16 kg). Der Esel beschwert sich über seine Last und sagt zum Maulesel: „Wenn du mir ein Pud von deiner Last gäbest, so hätte ich zweimal so viel als du." Darauf antwortet der Maulesel: „Wenn du mir ein Pud von deiner Last gäbest, so hätte ich dreimal so viel als du." Wieviel Pud hat jeder getragen?

▲6▲ Diese Aufgabe (mit einem recht komplizierten Text, der hier nicht wiedergegeben werden soll) führt auf das folgende Gleichungssystem, das Euler auf eine sehr elegante Weise löst:

$$(1)\quad x+\frac{y+z}{2}=901$$

$$(2)\quad y+\frac{x+z}{3}=901$$

$$(3)\quad z+\frac{x+y}{4}=901$$

▲7▲ Man teile 100 in zwei Teile, so daß der erste durch 7, der zweite aber durch 11 sich teilen läßt.
In moderner Form: Man stelle die Zahl 100 als Summe von zwei natürlichen Zahlen dar, von denen die erste durch 7 und die zweite durch 11 teilbar ist.

▲8▲ Zwei Bäuerinnen haben zusammen 100 Eier. Die erste sagt: „Wenn ich die meinigen zu 8 überzähle, so bleiben 7 übrig." Die zweite sagt: „Wenn ich die meinigen zu 10 überzähle, so bleiben mir auch 7 übrig."
Wieviel Eier hat jede gehabt?

▲9▲ Euler behandelt auch den Fall von zwei diophantischen Gleichungen mit drei Variablen und gibt zur Lösung eine allgemeine Regel an und schreibt dann: „Von dieser Regel machen auch die Münzmeister und Goldschmiede Gebrauch, wenn sie aus drei oder mehreren Sorten Silber eine Masse von einem gegebenen Gehalte zusammenschmelzen wollen, wie aus folgendem Beispiel zu ersehen:
Ein Münzmeister hat dreierlei Silber, das erste ist 14lötig, das zweite 11lötig und das dritte 9lötig. Nun braucht er zu einer Arbeit 30 Mark 12lötiges Silber. Wieviel Mark muß er von jeder Sorte nehmen?"
14lötiges Silber ist eine Silberlegierung mit einem Gehalt an Feinsilber von $\frac{14}{16}$. Mark ist hier eine alte Gewichtseinheit (233,8 g).

R. Lüders

Lösungen

▲1▲ Wenn der dritte Sohn x Rthlr. erhält, so erhält der zweite Sohn $x+100$ Rthlr. und der erste Sohn $x+300$ Rthlr. Daraus folgt
$x+x+100+x+300=1600$; $x=400$.
Der dritte Sohn erhält 400 Rhtlr., der zweite 500 Rthlr., der erste 700 Rthlr., das sind zusammen 1600 Rthlr.

▲2▲ Es sei x das Erbteil einer Tochter, dann ist $2x$ das Erbteil eines Sohnes und $4x$ das Erbteil der Witwe. Daher gilt
$4x+2\cdot 2x+3x=11\,000$; $x=1000$.
Jede Tochter erhält also 1000 Rthlr., jeder Sohn 2000 Rthlr. und die Witwe 4000 Rthlr.

▲3▲ Es sei x der kleinere Summand; dann ist $25-x$ der größere Summand, und es gilt
$25-x=49x$, $x=\frac{1}{2}$; $25-x=24\frac{1}{2}$.
Die Zerlegung ist also $24\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=25$.

▲4▲ Es sei x die Anzahl der Männer; dann ist $20-x$ die Anzahl der Frauen.
Jeder Mann gibt also $\frac{24}{x}$ Fl. aus,
jede Frau $\frac{24}{20-x}$ Fl., also gilt
$\frac{24}{x}-1=\frac{24}{20-x}$,
$x^2-68x+480=0$, $x_{1,2}=34\pm 26$.
Wegen $x<20$ ist daher $x=8$.
Es waren 8 Männer und 12 Frauen.

▲5▲ Es seien x Pud die Last des Maulesels und y Pud die Last des Esels. Dann gilt
$(1)\quad y+1=2(x-1)$
$(2)\quad x+1=3(y-1)$
$x=2\frac{3}{5}\quad y=2\frac{1}{5}$
Der Maulesel hat $2\frac{3}{5}$ Pud,
der Esel $2\frac{1}{5}$ Pud getragen.

▲6▲ Lösung durch Euler:
Setzt man $x+y+z=t$, so erhält man die Gleichungen

$$x+\frac{t-x}{2}=901,\ \text{also}\ x=1802-t, \qquad (4)$$

$$y+\frac{t-y}{3}=901,\ \text{also}\ 2y=2703-t, \qquad (5)$$

$$z+\frac{t-z}{4}=901,\ \text{also}\ 3z=3604-t. \qquad (6)$$

Multipliziert man in (4) mit 6, in (5) mit 3 und in (6) mit 2, so erhält man

$$6x = 10\,812 - 6t, \qquad (7)$$
$$6y = 8\,109 - 3t, \qquad (8)$$
$$6z = 7\,208 - 2t. \qquad (9)$$

Durch Addition ergibt sich hieraus
$6(x+y+z) = 26\,129 - 11t$,
$6t = 26\,129 - 11t$,
$t = 1\,537$.
Wegen (4), (5) und (6) gilt daher
$x = 1802 - 1537 = 265$,
$2y = 2703 - 1537 = 1166$, also $y = 583$,
$3z = 3604 - 1537 = 2067$, also $z = 689$.

▲7▲ Es seien $7x$ der erste Summand, $11y$ der zweite Summand. Dann gilt
$7x+11y=100$, also
$$x=\frac{100-11y}{7}=\frac{98+2-7y-4y}{7}$$
$$=14-y+\frac{2-4y}{7}=14-y+\frac{2(1-2y)}{7}.$$
Wegen
$0\leqq 11y<100$ gilt $0\leqq y<\frac{100}{11}$, also $y\leqq 9$.
Daher ist $1-2y$ nur dann durch 7 teilbar, wenn $y=4$ ist. Dann ist
$$x=14-4+\frac{2\cdot(-7)}{7}=8.$$
Also ist der erste Summand gleich $7x=56$ und der zweite Summand gleich $11y=44$.
Dieses Verfahren zur Lösung diophantischer Gleichungen mit 2 Variablen, das zuerst von Euler systematisch angewandt

wurde, wird häufig als „Eulersches Verfahren“ oder die „Eulersche Methode“ bezeichnet.

▲8▲ Die erste Bäuerin habe $8x + 7$, die zweite $10y + 7$ Eier. Dann gilt

$$8x + 7 + 10y + 7 = 100$$

$$y = \frac{43 - 4x}{5} = 8 - x + \frac{3 + x}{5}.$$

Daher ist $x = 2$ oder $x = 7$, da für $x \geqq 12$ $y < 0$ wird.
Diese Aufgabe hat also genau zwei Lösungen, nämlich:

1. $x = 2$, also $y = 7$,
   d. h., die erste Bäuerin hatte
   $8 \cdot 2 + 7 = 23$ Eier, die zweite 77 Eier.
2. $x = 7$, also $y = 3$,
   d. h., die erste Bäuerin hatte
   $8 \cdot 7 + 7 = 63$ Eier, die zweite 37 Eier.

▲9▲ Der Münzmeister nehme von der ersten Sorte x Mark, von der zweiten Sorte y Mark und von der dritten Sorte z Mark, dann gilt

(1) $x + y + z = 30$,
(2) $14x + 11y + 9z = 30 \cdot 12 = 360$.

Aus (1) folgt $9x + 9y + 9z = 270$, also

$$5x + 2y = 90,\ y = \frac{90 - 5x}{2} = 45 - \frac{5}{2}x.$$

Daher ist $x = 2u$ eine gerade Zahl, und man erhält

$$y = 45 - 5u,\ z = 30 - x - y = 3u - 15.$$

Wegen $y \geqq 0$ ist $u \leqq 9$, und wegen $z \geqq 0$ ist $u \geqq 5$; daher ist $u = 5, 6, 7, 8$ oder 9, und man erhält die folgenden Lösungen:

u	5	6	7	8	9
x	10	12	14	16	18
y	20	15	10	5	0
z	0	3	6	9	12

Stellt man die zusätzliche Bedingung, daß von dem 14lötigen Silber möglichst wenig genommen werden soll, so hat diese Aufgabe genau eine Lösung, nämlich:

$x = 10,\ y = 20,\ z = 0$. *R. Lüders*

Das Studium der Werke Eulers bleibt die beste Schule in den verschiedenen Gebieten der Mathematik und kann durch nichts anderes ersetzt werden. *C. F. Gauß*

Mathematiker in Berlin
(von 1855 bis 1897)
Kummer, Weierstraß, Kronecker

In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts erwarb sich Berlin den Ruf eines mathematischen Forschungszentrums von Weltgeltung. Diese hervorragende Stellung verdankt es vor allem dem Wirken dreier Mathematiker: Ernst Eduard Kummer, Karl Weierstraß und Leopold Kronecker.

Ernst Eduard Kummer

Als Sohn eines Arztes wurde Ernst Eduard Kummer in Sorau (Niederlausitz) am 29. Januar 1810 geboren. Bereits drei Jahre später starb der Vater an Typhus. In ihrem Unglück nahm die Mutter jede Arbeit an, um ihre kleinen Kinder durchzubringen. Lange Zeit nähte sie Soldatenhemden. Trotz der sehr knapp bemessenen Mittel konnte sie es ermöglichen, daß ihre beiden Söhne das Gymnasium in Sorau besuchten. Im Abgangszeugnis von E. E. Kummer wird sein *launiger Witz* hervorgehoben und *daß er sich im Deutschen ohne Schwulst zum Poetischen zu erheben* [...] *vermöge*. 1828 ging er nach Halle, um Theologie zu studieren, wechselte dann aber zur Mathematik über. In Scherk fand er einen Lehrer, unter dessen Anleitung er bald zu eigenen mathematischen Untersuchungen angeregt wurde. Der erste wissenschaftliche Erfolg stellte sich im dritten Jahr seines Studiums ein, als er 50 Reichstaler für eine Preisarbeit erhielt. Noch im gleichen Jahr wurde er, erst 21jährig, zum Doktor promoviert. Nach einem Probejahr am Gymnasium seiner Vaterstadt siedelte Kummer nach Liegnitz über, wo er als Lehrer bis 1842 am Gymnasium unterrichtete (mit 22 bis 24 Wochenstunden). Während dieser Zeit entstanden Arbeiten auf dem Gebiet der Funktionentheorie. Jacobi soll die Ausführungen über die hypergeometrische Reihe, die Kummer ihm zugeschickt hatte, als er seine militärische Dienstzeit ableistete, so kommentiert haben: „Wenn schon Musketiere jetzt so ausgezeichnete mathematische Arbeiten machen, dann möchte ich einmal die der Herren Unteroffiziere sehen“. Auf Grund seiner Arbeiten wird Kummer bereits mit 29 Jahren zum korrespondierenden Mitglied der Berliner Akademie ernannt. 1842 erfolgt seine Berufung als Professor an die Universität Breslau. In den folgenden Jahren entsteht Kummers größte wissenschaftliche Leistung, die Schöpfung der idealen Zahlen. Hier nimmt das, was sich dann später zu dem Gebiet der Idealtheorie entwickelt hat, seinen eigentlichen Anfang. Über diese wahrhaft geniale Erfindung äußerte sich der Mathematiker Hensel (1861 bis 1941) mit Worten, die nichts von ihrer Gültigkeit eingebüßt haben: „Nur ein großer Geist und eine reiche Phantasie konnte in einem Gebiete, in welchem alles regellos jeder Ordnung zu spotten schien, das tiefverborgene aber so einfache Gesetz ahnen; es erforderte eine unbeugsame Energie, auf diesem mühevollen Wege nicht mutlos stehen zu bleiben.“ Für den Mathematiker Frobenius (1849 bis 1917) sind die idealen Zahlen „eine der tiefsten mathematischen Konzeptionen aller Zeiten“. 1855 wird Kummer als Nachfolger Dirichlets nach Berlin berufen. Durch seine sorgfältig vorbereiteten und mit pädagogischem Talent abgehaltenen Vorlesungen (z. B. über analytische Geometrie, Mechanik, Flächentheorie, Zahlentheorie) wird er bald ein beliebter Lehrer. Es wird von Zahlentheorievorlesungen mit der selbst nach heutigen Maßstäben enormen Zahl von mindestens 250 Hörern berichtet. Zusammen mit Weierstraß gründete er 1861 das *Berliner Mathematische Seminar* zur Förderung der Ausbildung befähigter Mathematikstudenten. Kummer war auch als Dekan und Rektor (1868/69) an der Berliner Universität tätig. Als 72jähriger ersuchte er die Fakultät, sich beizeiten um einen Nachfolger für ihn zu bemühen, was er u. a. damit begründete, daß er eine Schwächung seines Gedächtnisses bemerke. 1884 zog er sich dann endgültig aus dem mathematischen Leben zurück. Er starb am 14. Mai 1893 in Berlin.

Aus einem Brief von Kummer

Am 2. Oktober 1844 schrieb Kummer seinem Schüler Kronecker, zu welchen weiteren Ergebnissen über die Teilbarkeit von Primzahlen in gewissen erweiterten Zahlbereichen (die auch für die Fermatsche Vermutung von größter Bedeutung sind) er inzwischen gelangt ist.

▲1▲ *Es wird mir, glaube ich, folgender einfache Satz behilflich sein.*
Es ist immer

$$c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2 \geqq \frac{(c_1 + c_2 + \ldots + c_n)^2}{n}$$

für beliebige n reelle Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_n$ (die Originalbezeichnungen Kummers wurden geringfügig abgeändert).
Wer kann Kummers Satz beweisen?

Karl Weierstraß

Ein Zeitgenosse nannte ihn den *unbestrittenen Beherrscher des mathematischen Betriebes* an der Berliner Universität. Charles Hermite, der bekannte französische Mathematiker, schrieb 1882 an Weierstraß' vielgenannte Schülerin Sonja Kowalewskaja: „Weierstraß – das ist unser aller Meister."
Karl Weierstraß wurde am 15. Oktober 1815 in Ostenfelde, einem Dorf in Westfalen geboren. Sein Vater arbeitete dort als Sekretär beim Bürgermeister. Karl besuchte verschiedene Schulen, weil sein Vater mehrmals versetzt wurde. Kurz vor seinem 12. Geburtstag stirbt seine Mutter. Zu Beginn der zweiten Hälfte des Schuljahres 1828/29 tritt er in das Paderborner Gymnasium ein. Schon nach fünfeinhalb Jahren legt er das Abitur als *Primus omnium* (Erster von allen) ab. Weierstraß hatte in der damals siebenklassigen Schule ein Schuljahr überspringen dürfen. Es war üblich, daß am Schuljahresende für die in mehreren Fächern besten Schüler Musikstücke zur Aufführung gelangten. Zu Ehren von Karl spielte die Kapelle gewöhnlich viermal. Auf Wunsch des Vaters nimmt er danach in Bonn ein Studium auf, das ihn auf die Laufbahn eines höheren Staatsbeamten vorbereiten soll. Aber 1838 verläßt er die Universität ohne Examen, sehr zum Verdruß seines Vaters. An der Akademie in Münster hört er 1839 die einzigen mathematischen Vorlesungen seines Lebens. Eine Vorlesung über elliptische Funktionen hört er zudem als einziger Student. Nach bestandenem Staatsexamen war er von 1842 bis 1855 als Lehrer zunächst in Deutsch-Krone (jetzt VR Polen), danach (ab 1848) in Braunsberg (jetzt VR Polen) tätig. Zu seinen Unterrichtsfächern gehörten neben Mathematik, Physik auch Deutsch, Botanik, Geographie, Geschichte, Turnen und kurze Zeit sogar Schönschreiben. Trotz der umfangreichen Lehrverpflichtungen beschäftigt sich Weierstraß intensiv mit tiefliegenden mathematischen Problemen. Es wird aus Braunsberg berichtet, daß Weierstraß eines Morgens nicht zum Unterricht erscheint. Daraufhin begibt sich der Direktor zur im Gymnasium gelegenen Wohnung von Weierstraß, den er, ganz in seine Arbeit versunken, bei Lampenlicht antrifft. Er hatte die ganze Nacht hindurch gearbeitet, den Anbruch des neuen Tages nicht bemerkt, und bat nun, ihn nicht zu stören, da er einer Entdeckung auf der Spur sei. Die mathematische Fachwelt ist dann auch höchst erstaunt, als 1854 Weierstraß' erste große Arbeit mit der Lösung des sogenannten Jacobischen Umkehrproblems für hyperelliptische Integrale erscheint. Ein unbekannter Lehrer aus der Provinz, abseits von den mathematischen Zentren, präsentierte seine bahnbrechenden Ideen. Das Außerordentliche der Situation wird auch daran deutlich, daß eine Abordnung der Universität Königsberg eigens nach Braunsberg reist, um dem Lehrer Weierstraß den Ehrendoktortitel zu verleihen. Mit seiner 1856 erfolgten Berufung als Professor an das Berliner Gewerbeinstitut beginnt ungewöhnlich spät die akademische Laufbahn des inzwischen 41jährigen Weierstraß. 1864 übernimmt er eine ordentliche Professur an der Berliner Universität. Hier hält er seine großen Vorlesungen, die Hörer des In- und Auslandes anziehen, darunter promovierte Mathematiker und Dozenten. Er berichtet über eigene Forschungsergebnisse, teilt Ideen mit, die man nur bei ihm hören kann. So steigt Weierstraß zur anerkannten wissenschaftlichen Autorität auf. Hohe und höchste Auszeichnungen werden ihm zuteil (darunter der Orden *Pour le mérite*). Während seiner mehr als 30jährigen Vorlesungstätigkeit erwächst ihm eine große Schar von Schülern. Aus der Fülle seiner Anregungen schöpfen sie für ihre eigenen Forschungen. Konnten sie in seinem Sinne Erfolge erringen, so nahm er daran aufrichtigen Anteil und fragte nicht nach geistiger Urheberschaft. Ein besonders herzliches Verhältnis verband ihn mit seiner Schülerin Sonja Kowalewskaja, die später als erste Frau in Europa zum Professor berufen wurde. Als 20jährige war sie 1870 nach Berlin gekommen. Da aber Frauen zu den Vorlesungen nicht zugelassen wurden und auch Weierstraß keine Ausnahmeregelung erwirken konnte, kam es dazu, daß er ihr bis zu ihrer Promotion 1874 (in Göttingen) Privatunterricht erteilte. Erst ihr vorzeitiger Tod 1891 setzte seiner treuen Freundschaft ein Ende. Weierstraß, die letzten Jahre ganz an den Rollstuhl gefesselt, stirbt am 19. Februar 1897 in Berlin. Er hinterläßt eine Fülle mathematischer Erkenntnisse, wie etwa sein großes Hauptwerk über die Abelschen Funktionen und weitere grundlegende Ergebnisse, insbesondere in der Analysis und Funktionentheorie. Weierstraß hat darüber hinaus mit seinen Anforderungen an Exaktheit der mathematischen Begriffsbildungen und Strenge der Beweisführungen – man sprach geradezu von *Weierstraßscher Strenge* – die Maßstäbe gesetzt, die seither zum anerkannten Allgemeingut in der Mathematik geworden sind.

Aus einer Vorlesung von Weierstraß

In seinen Vorlesungen über elliptische Funktionen betrachtet Weierstraß Funktionen mit Perioden. Dabei heißt eine reelle Zahl w eine Periode der Funktion $f(x)$, wenn $f(x+w)=f(x)$ für alle reellen Zahlen x gilt. Beispielsweise besitzt $f(x)=\sin x$ die Periode $w=2\pi$. Wenn w eine Periode ist, so sind offensichtlich auch alle ganzzahligen Vielfachen mw Perioden. $f(x)$ soll einfach-periodisch heißen, wenn die Menge aller Perioden von $f(x)$ aus den Vielfachen mw einer gewissen Periode $w \neq 0$ besteht.

▲2▲ Es ist zu beweisen, daß es zu jeder reellen Zahl $r \neq 0$ einfach-periodische Funktionen gibt, deren Perioden genau die Vielfachen von r sind.

▲3▲ Weierstraß betrachtet periodische Funktionen $f(x)$, die für alle reellen x definiert sind (und also wenigstens eine Periode $w \neq 0$ besitzen). Er behauptet, daß dann $f(x)$ entweder beliebig kleine positive Perioden besitzt oder einfach-periodisch ist.
Wer findet einen Beweis hierfür?

▲4▲ Wer den Begriff der Ableitung einer Funktion kennt, kann noch beweisen: eine differenzierbare Funktion hat dann und nur dann beliebig kleine Perioden, wenn sie eine Konstante ist.
Weierstraß formuliert das so: Es gibt keine reellen differenzierbaren doppelt-periodischen Funktionen.

Leopold Kronecker

Kroneckers Mathematiklehrer am Gymnasium war kein geringerer als Kummer. So reicht die bis ans Lebensende währende Freundschaft dieser beiden Männer bis in jene Schulzeit zurück. Leopold Kronecker wurde am 7. Dezember 1823 in Liegnitz als Sohn eines Kaufmannes geboren. Sein Vater sorgte für eine umfassende Erziehung und Ausbildung. 1841 nahm Kronecker sein Studium an der Berliner Universität auf. Hier hörte er Vorlesungen bei Dirichlet, Jacobi, Steiner und später in Breslau auch bei seinem Lehrer Kummer. Außerdem hat er philosophische Studien betrieben und sich mit Sprachen des klassischen Altertums beschäftigt. Noch als Student publiziert er 1845 seine erste Arbeit, die einen kurzen Beweis der von Gauß nachgewiesenen Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung vom Primzahlgrad enthält. Ebenfalls 1845 schließt er sein Studium mit der Promotion ab. In seiner Doktorarbeit gelangt er zu Resultaten über die Einheitengruppe in Kreisteilungskörpern. In den folgenden Jahren verwaltet Kronecker auf väterlichen Wunsch ein Gut, das der Familie gehört. Er kümmert sich um jede Einzelheit des Betriebes und ritt bei Wind und Wetter auf den Feldern umher. Als 1846 sein Onkel starb, übernimmt er mit großem Geschick die Auflösung des von diesem betriebenen Bankgeschäftes. Trotz dieser so ganz anders gearteten Tätigkeiten hat Kronecker seine mathematischen Studien nicht vernachlässigt. Nach Abschluß der geschäftlichen Tätigkeit siedelt Kronecker 1855 nach Berlin über, wo er eine Villa erworben hatte. Kurz darauf kamen Kummer und Weierstraß ebenfalls in diese Stadt. Damit war Berlin Wirkungsstätte von drei Männern geworden, die zu den ersten Vertretern ihrer Wissenschaft gehören. Sie begründen den Ruf Berlins als eines der bedeutendsten mathematischen Zentren. 1861 wird Kronecker zum Mitglied der Berliner Akademie gewählt. Seine Vermögensverhältnisse erlauben ihm, mathematische Studien ohne anderweitige dienstliche Verpflichtungen betreiben zu können. Als Akademiemitglied hatte er das Recht, an der Universität Vorlesungen zu halten, wovon er ausgiebigen Gebrauch machte. Im Unterschied zu Kummer sprach er oft über neueste Forschungsergebnisse, nicht selten sogar über Resultate, die er erst in der Nacht zuvor entdeckt hatte. Allerdings führte das zum raschen

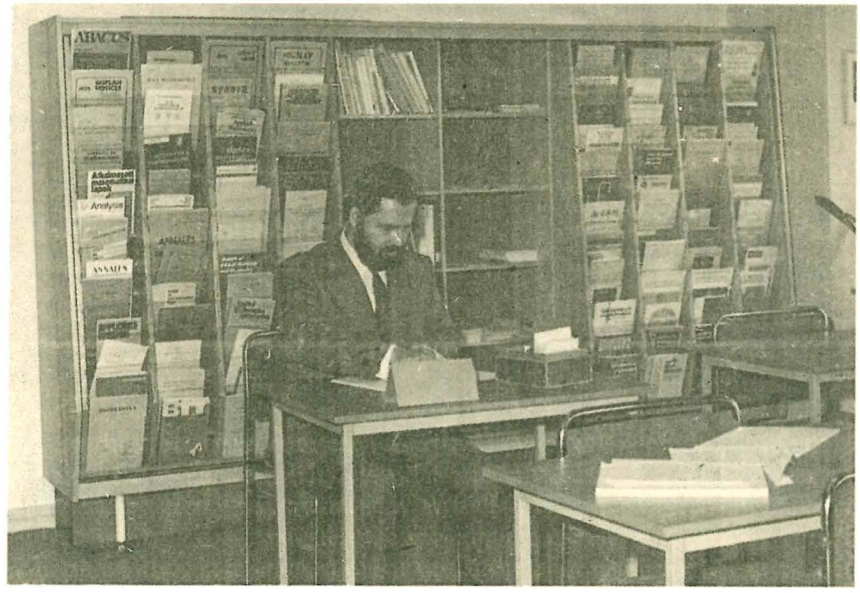
Namenstafel am Karl-Weierstraß-Institut für Mathematik

Absinken der Hörerzahl in jedem Semester. Die Förderung junger Talente lag ihm sehr am Herzen. Oft versammelte sich eine auserwählte Schar von Zuhörern in seinem Hause. Dabei wurde nicht nur über Mathematik gesprochen, sondern beispielsweise auch musiziert. Im Zusammenhang mit dem Ausscheiden seines alten Lehrers Kummer übernahm er, nun ebenfalls im vorgerückten Alter, 1883 eine Professur an der Berliner Universität. Kronecker vertritt die Ansicht, daß für den Aufbau und die Grundlegung der Mathematik nur das eine Existenzberechtigung habe, was in endlich vielen Schritten in jedem Einzelfalle geprüft werden kann. So sucht er etwa, die reellen Zahlen zu vermeiden. „Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk" erklärt er auf der Berliner Naturforscher-Versammlung 1886. Die sich entwickelnde, noch junge Mengenlehre kann er nicht anerkennen, ebenso kritisiert er die Grundlagen der Weierstraßschen Analysis. Weierstraß hat sich öffentlich dazu nicht geäußert. Aus seinen Briefen an seine Schülerin Sonja Kowalewskaja wissen wir aber, wie sehr er die Entfremdung mit Kronecker bedauert und in welchem Maße er darunter gelitten hat. Kronecker ist bis zuletzt mathematisch aktiv. Im August 1891 stirbt seine geliebte Frau. Kurz darauf erliegt er am 29. Dezember 1891 einer Bronchitis. In der Algebra, Zahlentheorie und der Theorie der elliptischen Funktionen hat Kronecker hervorragende Beiträge geliefert. Das noch größere Verdienst besteht aber wohl darin, tiefe Wechselbeziehungen zwischen diesen Gebieten aufgedeckt zu haben.

Aus einer Beweisvariante von Kronecker

Mehrfach hat Kronecker sich mit dem erstmals von Gauß bewiesenen quadratischen Reziprozitätsgesetz beschäftigt und immer andere Beweisvarianten aufgesucht. In einer 1876 publizierten Arbeit zu diesem Thema finden sich folgende Behauptungen (die Bezeichnungen wurden geringfügig abgeändert). Für ungerade natürliche Zahlen m, n betrachtet Kronecker

$\prod\left(\frac{a}{m}-\frac{b}{n}\right)$, *wo das Product auf alle*



Der Autor in der Bibliothek des Karl-Weierstraß-Instituts für Mathematik

Werthe $a = 1, 2, \ldots \frac{m-1}{2}$ *und*

$b = 1, 2, \ldots \frac{n-1}{2}$ *zu erstrecken ist.*

▲5▲ Kroneckers Produkt ist dann und nur dann von Null verschieden, wenn m und n teilerfremd sind.

Für teilerfremde m, n hat es also Sinn, von dem Vorzeichen $e(m, n)$ des Kroneckerschen Produktes zu reden.

▲6▲ Für teilerfremde m, n *folgt aus der Definition* [...] *unmittelbar die Reciprocitätsgleichung*

$$e(m,n)\,e(n,m) = (-1)^{\frac{(m-1)(n-1)}{4}}$$

▲7▲ *[so]wie die Relation*

$$e(m,n) = (-1)^{E} \text{ mit } E = \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{km}{n}\right]$$

([x] bezeichnet die größte ganze Zahl $\leqq x$).

▲8▲ *Hieraus folgt wiederum, daß für positive ungrade Zahlen l und m, welche nach dem Modul n* [...] *einander congruent sind,*

$e(l, n) = e(m, n)$

ist (die Kongruenzbedingung bedeutet, daß $l - m$ durch n teilbar ist).

Wer beweist Kroneckers Behauptungen?

R. Bölling

Zusammen mit anderen Akademie-Instituten ist in diesem Gebäude ein Teil des Karl-Weierstraß-Instituts für Mathematik der AdW der DDR untergebracht

Römische Zahlen

In der Mathematik werden die *umständlichen* römischen Zahlen schon seit Jahrhunderten nicht mehr verwendet. Auf anderen Gebieten aber behaupten sie sich nach wie vor. Es sind wohl vor allem zwei Gründe, auf die sich ihr Weiterleben zurückführen läßt. Einerseits ist die Möglichkeit, unterschiedliche Zahlzeichen nebeneinander benutzen zu können, bei vielen Gelegenheiten ein Vorteil. Beispielsweise wird in Büchern – besonders in wissenschaftlichen – der sogenannte Titelbogen, der außer dem Titelblatt auch Vorworte, Inhalts-, Abbildungs-, Abkürzungsverzeichnisse usw. enthält und der jeweils erst als letzter Teil eines Buches ausgedruckt wird, regelmäßig mit römischen Zahlen paginiert (mit Seitenzahlen versehen). Damit geht man allen Schwierigkeiten der Seitenzählung am Buchanfang aus dem Weg. Auch bei der Anfertigung stärker gegliederter Verzeichnisse und Übersichten greift man gern auf römische Zahlen zurück; sie erhalten dann in der Regel vor den arabischen Zahlen und vor eventuell ebenfalls verwendeten Buchstaben den ersten Rang („I 1 a").

Der zweite Grund für das Weiterleben der römischen Zahlen ist weniger ein praktischer als ein solcher des Stils und der Ästhetik. Der monumentale Charakter der von den Römern als Zahlzeichen verwendeten großen lateinischen Buchstaben und gerade auch die erwähnte *Umständlichkeit* lassen die römischen Zahlen viel gewichtiger und würdevoller erscheinen als die schlanken, beweglichen arabischen Ziffern. Offensichtlich aus diesem Grunde beziffert man z. B. periodisch wiederholte Veranstaltungen gern mit römischen Zahlen („XII. Kongreß"). Ebenso benutzt man sie nicht selten in einfachen Aufzählungen, um den einzelnen Punkten mehr Gewicht zu verleihen. Obligatorisch sind römische Zahlen, wenn es darum geht, gleichnamige Herrscher aus einer und derselben Dynastie durch Bezifferung der Namen voneinander zu unterscheiden („Georg III. von England").

Zu unangenehmen Begegnungen mit römischen Zahlen kann es bei der Besichtigung historischer Bauwerke kommen. Nicht jedem Betrachter gelingt es nämlich, die in den – zumeist lateinischen – Bauinschriften genannten Jahreszahlen zu entziffern. Denn mit den Zahlzeichen I, V und X, die jedem geläufig sind, kommt man nur bis 39. Welche muß man noch kennen?

Zu den antiken Denkmälern, auf denen römische Zahlzeichen authentisch überliefert sind, gehören die Münzen der Römischen Republik und des Kaiserreiches. Vor allem in der sogenannten Titulatur der Kaiser begegnet man vielen Zahlen: sie sagen aus, zum wievielten Mal der Kaiser zum Zeitpunkt der Prägung der Münze die sogenannte *tribunizische Gewalt* (tribunicia potestas) besaß und wie oft er zu diesem Zeitpunkt schon den Ehrentitel *Imperator* erhalten oder das Konsulat bekleidet hatte. Auf der Rückseite eines Sesterzes des Mark Aurel, die den Kaiser zwischen Standarten zeigt (Bild 1), lesen wir TR POT XIX IMP II COS III, d. h. der Kaiser besaß damals zum neunzehnten Mal die – jährlich im Dezember erneuerte – tribunizische Gewalt (Dezember 164 bis Dezember 165 u. Z.), er war schon zweimal zum Imperator ausgerufen worden (zuletzt 163 u. Z.) und hatte dreimal das Konsulat bekleidet (zuletzt 161 u. Z.). Da nun bekannt ist, daß Mark Aurel im Spätsommer 165 u. Z. zum dritten Mal den Imperatortitel erhielt, kann man die Münze auf den Zeitraum Dezember 164 bis Sommer 165 u. Z. datieren. Die Münzen vom Herbst 165 u. Z. haben bereits TR POT XIX IMP III COS III, die vom Dezember TR POT XX IMP III COS III.

Höhere Zahlen kann man, wie leicht erklärlich, nicht in den Kaisertitulaturen, sondern nur in anderen Zusammenhängen finden. Welche Zahlen liest man auf den Rückseiten zweier Denare des Gaius Marius Capito, der ungefähr im Jahre 81 v. u. Z. das Amt eines Münzmeisters ausübte (Bild 2 und 3)? Würden wir diese Zahlen heute genauso schreiben? Welche Bedeutung mögen sie haben? Gibt es außer den unterschiedlichen Zahlen noch andere Unterschiede zwischen den beiden Münzbildern?

Bild 2

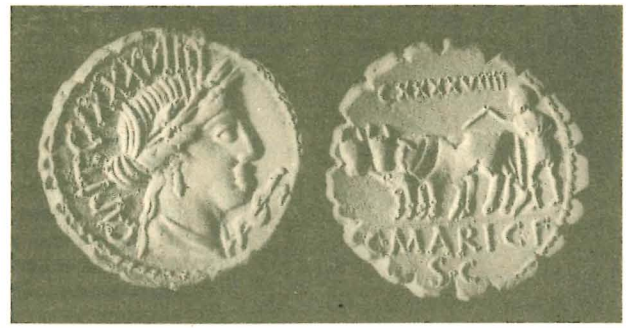


Bild 3

Auf einem Bronzemedaillon des Kaisers Hadrian (Bild 4) ist der Genius der Zirkusspiele abgebildet, in der Rechten ein Rad haltend, mit der Linken eine Zirkussäule (Wendemarke) umfassend.

Bild 1

Bild 4

Die Münzaufschrift lautet:
ANN DCCCLXXIIII NAT VRB P CIR CON, d. h. „im Jahre ... hat (der Kaiser) am Gründungstage der Stadt dem Volk Zirkusspiele gestiftet". In welchem Jahre befinden wir uns, wenn die Gründung Roms nach traditioneller römischer Auffassung im Jahre 753 v. u. Z. stattgefunden hatte?

Das nächste Beispiel – eine Silbermünze des Kaisers Maximianus (Bild 5) – läßt innerhalb eines Kranzes die Buchstaben AQ erkennen, mit denen die Münzstätte Aquileia (Norditalien) bezeichnet wird, und darüber eine römische Zahl, die angibt, wie viele derartige Münzen auf 1 Pfund Silber gehen. Wie schwer ist die Münze, wenn das römische Pfund 324 g wog? Zum besseren Verständnis sei daran erinnert, daß der Wert der alten Gold- und Silbermünzen allein durch das Gewicht bestimmt war.

Bild 5

Eine Goldmünze Konstantins des Großen (Bild 6) zeigt die Siegesgöttin (Viktoria), in der Linken einen Palmzweig, in der Rechten ein Siegesmal (Tropaion) haltend. Im sogenannten Abschnitt der Münze, d. h. unter der Bodenlinie, befindet sich die Signatur der Münzstätte Antiochia (Syrien), rechts neben der Göttin eine Zahl, die auch hier das Verhältnis des Gewichtes der Münze zum römischen Pfund angibt. Welches Gewicht müßte die Goldmünze haben?

Bild 6

Die Zahlen auf den beiden zuletzt erwähnten Münzen sind geeignet, uns auf eine viel diskutierte wissenschaftliche Frage zu führen, nämlich die nach dem theoretischen Gewicht des römischen Pfundes. Um dieses zu ermitteln, muß man von einer der wenigen Münzsorten ausgehen, deren Gewichts- und Wertverhältnis zum römischen Pfund bekannt ist. In Betracht kommen von vornherein nur Goldmünzen, da nur sie einigermaßen genau justiert sind. Man hat auch darauf zu achten, daß nur sehr gut erhaltene, *prägefrische* Exemplare auf die Waage kommen.
Gleichwohl läßt sich das Gewicht des römischen Pfundes nur annähernd bestimmen, sein Ansatz schwankt zwischen 322,560 g und 327,450 g. Es mit 324 g anzusetzen, wie wir es oben gemacht haben, empfiehlt sich nur aus rein praktischen Gründen: 324 ist durch 12 teilbar, was mit Rücksicht auf das duodezimal eingerichtete römische Gewichtssystem von Vorteil ist.

Zuletzt wollen wir eine Kupfermünze des byzantinischen Kaisers Justinian (1. April 527 bis 14. November 565 u. Z.) betrachten (Bild 7). ANNO XIII, „im Jahre 13", bezeichnet natürlich das 13. Regierungsjahr des Kaisers, also 539/40 u. Z. Wer aber in dem großen M das römische Zahlzeichen für „1000" erkennen und

Bild 7

die Münze als „Tausender" verstehen wollte, würde sich sehr irren: M ist hier der griechische Buchstabe my, der als griechisches Zahlzeichen „40" bedeutet. Ebenso ist das unter dem M befindliche A als griechischer Buchstabe *alpha* zu verstehen, der zugleich als Zahlzeichen für „1" dient. Die Münze ist also ein „Vierziger" des Justinian, geprägt im 13. Regierungsjahr in der 1. Offizin des Münzamtes von CONstantinopolis (heute Istanbul).
Über griechische Zahlzeichen auf Münzen wird in einem späteren Beitrag gehandelt werden.

H.-D. Schultz

Lösungen

Gefragt war zunächst nach den römischen Zahlzeichen L (50), C (100), D (500) und M (1000). C ist der Anfangsbuchstabe des Zahlwortes CENTVM (hundert), M der von MILLE (tausend). L und D haben andere Ursprünge, deren Erklärung hier zu weit führen würde. Tausender (ab 2000) werden durch einen waagerechten Strich über dem Zahlzeichen angegeben, z. B. $\overline{V} = 5000$, $\overline{C} = 100\,000$.
Auf den um 81 v. u. Z. geprägten Denaren des Münzmeisters G. Marius Capito liest man XXXXIIII (44) bzw. CXXXXVIIII (149). In neuerer Zeit würde man, um diese langen Zahlen zu verkürzen, XLIV bzw. CXLIX schreiben. Die Römer selbst gebrauchten nebeneinander unterschiedliche Notierungsarten, die jedoch immer unmißverständlich waren. – Mit den Zahlen waren im vorliegenden Fall die Münzprägestempel zu Kontrollzwecken numeriert worden. Mindestens 149 Paare von Münzprägestempeln waren also an der Prägung der Denare des genannten Münzmeisters beteiligt. Da die Stempel von den Graveuren aus freier Hand gearbeitet wurden, zeigten sie immer gewisse Unterschiede und waren untereinander nie völlig gleich. Die Unterschiede der Stempel wiederholten sich auf den Münzen. Nur Münzen, die aus demselben Stempelpaar stammen, haben auch völlig identische Münzbilder.
Die Zirkusspiele, die auf dem Bronzemedaillon des Kaisers Hadrian (117 bis 138 u. Z.) erwähnt sind, wurden im 874. Jahr nach der Gründung Roms (753 v. u. Z.) gestiftet, d. h. im Jahre 121 u. Z.
Die Silbermünze des Kaisers Maximianus (286 bis 305 u. Z.) wiegt $\frac{1}{96}$ des römischen Pfundes von 324 g, das Gewicht müßte also 3,375 g betragen. Tatsächlich sind es aber nur 2,86 g! Der Solidus Konstantins des Großen (306 bis 337 u. Z.) zu $\frac{1}{72}$ römischen Pfund müßte 4,50 g wiegen. Er wiegt aber nur 4,47 g.

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 11. Januar 1988

Im Jahr des 750jährigen Bestehens von Berlin wollen wir unsere *alpha*-Leser mit einem der größten Verlage der DDR, dem Volkseigenen Verlag *Volk und Wissen*, der seinen Sitz in unserer Hauptstadt hat, etwas näher bekannt machen. Dieser Verlag gewährleistet seit seinem Bestehen die gesamte Schulbuchversorgung in unserer Republik. Darüber hinaus hat der Verlag viele Titel für die Hand des Lehrers oder für Studenten, die den Beruf des Lehrers anstreben, aber auch für Eltern herausgebracht, die dazu beitragen, unser Volksbildungswesen ständig weiterzuentwickeln. Die Abteilung Mathematik dieses Verlages hat durch zahlreiche Titel die Förderung junger mathematischer Talente erfolgreich unterstützt. Es seien einige dieser Titel, die auch bei vielen *alpha*-Lesern sich großer Beliebtheit erfreuen, stellvertretend im Anschluß an diesen Wettbewerb genannt. Aus der Fülle dieser Titel haben wir für den *alpha*-Wettbewerb einige Aufgaben ausgewählt, deren Lösung unseren Lesern Freude bereiten möge.

Achtung! Ab diesem Wettbewerbsjahr wird der Wettbewerb in den Heften 5/87, 6/87 und 1/88 mit je 7 Aufgaben durchgeführt.

Ma 5 ■ 2807 Es werden alle Zahlen von 1 bis 99 aufgeschrieben. Wie oft wird die Ziffer 5 geschrieben?

Ma 5 ■ 2808 Wie heißen die mit Sternchen bezeichneten Ziffern in der folgenden Multiplikationsaufgabe?

$$\begin{array}{r} ***\cdot *2 \\ \hline *08 \\ *6* \\ \hline *128 \end{array}$$

Ma 5 ■ 2809 Welche Ziffer steht an der Einerstelle des Produktes aus den folgenden zehn Faktoren?
$11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot \ldots \cdot 25 \cdot 27 \cdot 29$

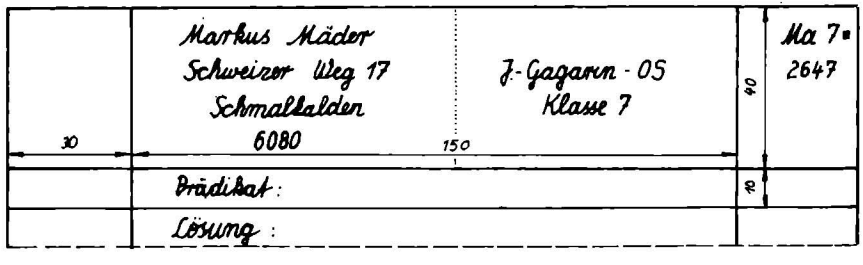
Ma 5 ■ 2810 Wie können die Kugeln verteilt werden? Man denke sich sieben Kugeln, vier rote, eine schwarze und zwei weiße, die sich voneinander nur in der Farbe unterscheiden, im übrigen aber völlig gleich sind. Außerdem denke man sich zwei Kästen A und B, von denen A nicht mehr als drei Kugeln fassen kann und B nicht mehr als vier. Wieviel Möglichkeiten gibt es, die sieben farbigen Kugeln in den Kästen A und B unterzubringen?

Ma 5 ■ 2811 *Die Äpfel:* In einer Kiste liegen vier Sorten Äpfel, von jeder Sorte gleich viel und zusammen 100. Wieviel Äpfel muß man ohne Hinzusehen mindestens herausnehmen, damit man sicher ist, daß von einer Sorte mindestens zehn Äpfel dabei sind?

Ma 5 ■ 2812 *Die künstliche Teilung:* Zwei Ökonomen lassen sich acht Eimer Wein (in einem Achteimerfaß) kommen; zu Hause haben sie weiter kein Gefäß, als ein Fünf- und ein Dreieimerfaß. Nun will jeder vier Eimer haben. Wie haben sie den Wein geteilt?

Ma 5 ■ 2813 In einem alten Buch mit lustigen mathematischen Knobeleien fand sich folgender Vers:
Eine Zahl hab ich gewählt,
107 zugezählt,
dann durch 100 dividiert
und mit 11 multipliziert,
endlich 15 subtrahiert,
und zuletzt ist mir geblieben
als Resultat die Primzahl 7.'
Ermittle alle Zahlen, die diesen Bedingungen genügen!

Ma 6 ■ 2814 Addiert man zur Quersumme einer zweistelligen natürlichen Zahl die Differenz aus den Ziffern im Zehner und Einer, so erhält man 10. Setzt man zwischen die beiden Ziffern eine 9, so ergibt sich eine elfmal so große Zahl. Wie heißt die Zahl?



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alpha-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
Postfach 14
Leipzig
7027

3. Der jeweiligen Aufgabennummer ist ein Ma (Mathematik), Na/Te (Naturwissenschaft und Technik) und eine Ziffer, z. B. 7 vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12 oder Na/Te 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug korrigiert.
Noch eine Bitte an die Schulen: Sendet bitte die Lösungen bereits nach Aufgaben sortiert ein.

6. Teilnehmer, die eine richtige Lösung (nicht nur Antwortsatz) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Anderenfalls erhalten sie eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst". Nach dem Einsendetermin eingehende Lösungen werden nicht mehr bearbeitet!

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1987/88 läuft von *Heft 5/1987 bis Heft 1/1988*. Zwischen dem 1. und 10. September 1988 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/87 bis 1/88 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden ab Heft 6/88 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (von den Wettbewerben der Hefte 5/87 bis 1/88) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein *alpha*-Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1987/88 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunde zurück). Schüler, die schon mehrere Jahre teilnehmen, senden bitte die zuletzt erhaltene Urkunde mit ein. Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

Ma 6 ■ 2815 Ein Schüler kaufte 15 Bleistifte zu 16 Pf, 7 zu 28 Pf und 8 Zeichenstifte. Obwohl der Schüler den Einzelpreis für die Zeichenstifte vergessen hatte, stellte er fest, daß der Preis von 7,50 M nicht stimmte. Wie überlegte er?

Ma 6 ■ 2816 Luise sucht eine natürliche Zahl x, die sie vom Zähler des Bruches $\frac{17}{19}$ subtrahieren und gleichzeitig zum Nenner addieren möchte, wobei der so entstehende Bruch den Wert $\frac{7}{11}$ erhalten soll. Stelle fest, ob es eine Zahl x gibt, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Gib diese Zahl im Falle ihrer Existenz an, und untersuche, ob sie die einzige ist, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt!

Ma 6 ■ 2817 Vier Freunde, Axel, Bernd, Ernst und Fred, sind entweder Abonnent des Jugendmagazins *Neues Leben* oder der Zeitung *Junge Welt*. Von diesen Freunden ist bekannt:
a) Der 19jährige ist nicht Abonnent der *Jungen Welt*, aber der 16jährige und Ernst haben die *Junge Welt* abonniert.
b) Axel und der 17jährige sind Abonnenten von *Neues Leben*, Bernd dagegen nicht.
c) Der 20jährige, der 19jährige und Bernd waren kürzlich Gäste der Geburtstagsfeier von Fred.
Es ist herauszufinden, wie alt jeder der vier Freunde ist und welche Zeitung bzw. Zeitschrift er abonniert hat.

Ma 6 ■ 2818 Wenn man von einer dreistelligen natürlichen Zahl 7 subtrahiert, dann ist die entstandene Zahl durch 7 teilbar, subtrahiert man 8, so ist die entstandene Zahl durch 8 teilbar, subtrahiert man 9, so ist die entstandene Zahl durch 9 teilbar. Wie heißt die gegebene dreistellige Zahl?

Ma 6 ■ 2819 Klaus hat Geburtstag. Fünf Kinder kommen zu Besuch. Die Geburtstagstorte wurde in 24 gleichgroße Stücke geteilt. Axel verzehrte $\frac{1}{8}$, Bernd $\frac{1}{4}$, Christian $\frac{5}{48}$, Dieter $\frac{1}{6}$ und Ernst $\frac{3}{16}$ der Torte. Klaus aß drei von den eingeteilten 24 Stücken. Wieviel eingeteilte Stücke der Torte blieben übrig?

Na/Te 6 ■ 398 Eine Schleusenkammer hat eine Länge von 325 m, ist 25 m breit und 4,30 m hoch. Welches Volumen hat die eingelassene Wassermenge, wenn der Wasserspiegel seinen höchsten Stand 0,50 m unter der Oberkante der Schleusenkammer hat? Runde sinnvoll!

aus: Aufgabensammlung Physik Teil 1, Volk und Wissen, Berlin

Ma 7 ■ 2820 In einem Kreis sollen der Flächeninhalt und der Umfang, in cm^2 bzw. cm ausgedrückt, in den Maßzahlen übereinstimmen. Welchen Flächeninhalt hat ein Quadrat, das in diesen Kreis einbeschrieben wird?

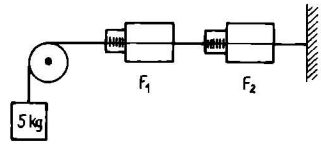
Ma 7 ■ 2821 Vater und Sohn gehen nebeneinander. In der gleichen Zeit, in der der Vater 4 Schritte macht, macht der Sohn jedesmal 5 Schritte. In dieser Zeit legen beide jedesmal genau den gleichen Weg zurück. Die durchschnittliche Schrittlänge des Vaters beträgt 80 cm.
a) Wie groß ist die durchschnittliche Schrittlänge des Sohnes?
b) Wir nehmen an, daß beide gleichzeitig mit dem rechten Fuß beginnen. Nach wie vielen Schritten des Vaters treten beide erstmalig gleichzeitig mit dem linken Fuß auf?

Ma 7 ■ 2822 Für ein Kinderferienlager wurden 300 Flaschen Getränke für 70,00 M gekauft. Eine Flasche Limonade kostet 0,30 M, eine Flasche Tafelwasser 0,20 M. Wieviel Flaschen wurden von jeder Sorte gekauft?

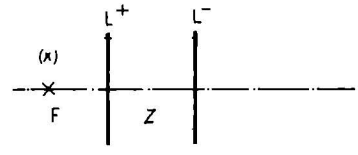
Ma 7 ■ 2823 Eine Familie fährt im *Trabant*. Das Produkt aus der Anzahl der am Auto befindlichen Räder, dem Alter des Fahrers und der Anzahl der mitfahrenden Personen beträgt 444. Wie alt ist der Fahrer? Wieviel Personen sitzen im Auto?

Ma 7 ■ 2824 Der Umfang u eines gleichschenkligen Dreiecks soll 24 cm betragen; eine der Seiten dieses Dreiecks soll $2\frac{1}{2}$mal so lang sein wie eine andere seiner Seiten. Untersuche, ob es eine Möglichkeit gibt, die Seitenlängen eines Dreiecks so anzugeben, daß diese Bedingungen erfüllt sind. Untersuche, ob es genau eine solche Möglichkeit gibt! Wenn dies der Fall ist, so ermittle die zugehörigen Seitenlängen!

Na/Te 7 ■ 399 Was zeigen die Federkraftmesser bei folgender Anordnung an? *R.*



Na/Te 7 ■ 400 Parallelstrahlen (Strahlen, die parallel zur optischen Achse der Linse verlaufen) werden von einer Sammellinse so gebrochen, daß sie einander hinter der Linse im Brennpunkt F schneiden. Parallelstrahlen werden von einer Zerstreuungslinse so gebrochen, als ob sie von einem Punkt vor der Zerstreuungslinse, dem Zerstreuungspunkt Z, herkämen.



a) Konstruiere den Strahlenverlauf für folgende Linsenanordnung, wenn sich eine Lichtquelle in F befindet!
b) Wie erfolgt der Strahlenverlauf, wenn sich die Lichtquelle in einem Punkt (x) der Brennebene befindet? *R.*

Ma 8 ■ 2825 In einem Rechteck sollen die Maßzahlen der Seiten, in Zentimeter ausgedrückt, ganzzahlig sein. Der halbe Umfang soll zahlenmäßig mit dem Flächeninhalt übereinstimmen. Kann diesem Rechteck ein Kreis einbeschrieben werden?

Ma 8 ■ 2826
Die rätselhafte Multiplikation:

$$\begin{array}{r} a\,b\,c \cdot \quad b\,a\,c \\ \hline * \; * \; * \; * \\ * \; * \; a \\ * \; * \; * \; b \\ \hline * \; * \; * \; * \; * \; * \end{array}$$

Das Schema ist zu dechiffrieren.

Ma 8 ■ 2827 Zeige, daß für jede Primzahl $p > 5$ das Produkt $(p-2)(p-1)p(p+1)(p+2)$ durch 360 teilbar ist!

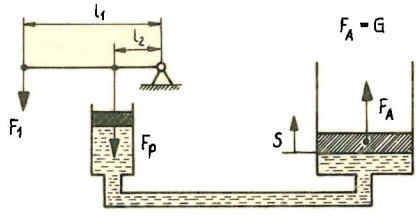
Ma 8 ■ 2828 Beweise den folgenden Satz! Die Diagonalen eines ebenen konvexen Vierecks $ABCD$ schneiden einander rechtwinklig genau dann, wenn $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ gilt, wobei a, b, c, d die Seitenlängen des Vierecks sind.

Ma 8 ■ 2829 Es ist zu beweisen:
Die Zahl $\frac{m}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6}$ ist für jedes ganze m ganzzahlig.

Na/Te 8 ■ 401 Der Boden eines Kajaks hat eine Fläche von 1,6 m^2.
Die mittlere Eintauchtiefe beträgt 20 cm. Welche Druckkraft wirkt auf den Boden des Bootes? *R.*

Na/Te 8 ■ 402 Über einen einseitigen Hebel ($l_1 = 134$ cm, $l_2 = 22$ cm) wirkt auf den Pumpkolben einer hydraulischen Presse eine Kraft $F_p = 180$ N. Der Pumpkolben bewegt sich 6,5 cm nach unten. Der Hebel wird 480mal betätigt. Um welche Strecke wird ein Körper mit der Gewichtskraft von $G = 180\,000$ N durch den Arbeitskolben gehoben? Welche Kraft F_1 muß am Hebel wirken? (Die erforderlichen Ventile sind nicht eingezeichnet.)

aus: Aufgabensammlung Physik Teil 1, Volk und Wissen, Berlin



Ma 9 ■ 2830 Ein Dreher braucht zur Anfertigung eines Werkstückes eine halbe Stunde. Da mehrere gleiche Teile anzufertigen sind, wäre eine Vorrichtung zweckmäßig. Mit einer solchen Vorrichtung könnte ein Teil in 20 Minuten hergestellt werden. Der Bau der Vorrichtung dauert 4 Stunden. Wieviel Teile müßten mindestens hergestellt werden, damit durch den Bau der Vorrichtung Zeit eingespart wird?

Ma 9 ■ 2831 Für ein Kinderferienlager sollen für 83,00 M Tomaten und Bananen gekauft werden. Ein Kilogramm Bananen kostet 5,00 M, ein Kilogramm Tomaten

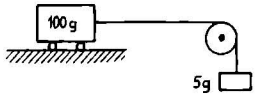
1,30 M. Wieviel Kilogramm Tomaten und wieviel Kilogramm Bananen können gekauft werden?

Ma 9 ■ 2832 Von einem Ort A fährt ein LKW nach einem Ort B; seine Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt $50\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Gleichzeitig fährt von B nach A ein PKW mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $70\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Nach welcher Zeit treffen sich beide Fahrzeuge, wenn die Entfernung von A nach B 144 km beträgt?

Ma 9 ■ 2833 An einer Touristenreise haben 286 Angehörige eines Betriebes teilgenommen. Ihnen standen Autobusse, einerseits mit 19 Sitzen, andererseits mit 17 Sitzen zur Verfügung. Der Kraftfahrer des Autobusses und auch sein Sitz werden in der Aufgabe nicht in Betracht gezogen. Berechnen Sie, wieviel Autobusse jeder der beiden Arten für die Reise gebraucht wurden, wenn alle Sitze besetzt waren und keiner stehen mußte.

Ma 9 ■ 2834 Entscheiden Sie, welcher der beiden Brüche $\frac{100^{100}+1}{100^{90}+1}$ und $\frac{100^{99}+1}{100^{89}+1}$ größer ist!

Na/Te 9 ■ 403 Welchen Weg legt ein Wagen bei folgender Versuchsanordnung in zwei Sekunden zurück? Die Masse der Rolle und die Reibung sollen vernachlässigt werden. *R.*



Na/Te 9 ■ 404 Gegeben sind drei Drahtwiderstände mit einem elektrischen Widerstand von 50 Ohm. Diese drei Widerstände werden in verschiedener Weise zusammengeschaltet und an eine Spannung von 1,5 V gelegt. Geben Sie die Möglichkeiten an (Zeichnung, Gesamtwiderstand, Nennverlustleistung, die an jedem Widerstand in Wärme umgesetzt wird)! *R.*

Ma 10/12 ■ 2835 Das Produkt von vier unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist 110 355 024. Wie lauten die Zahlen?

Ma 10/12 ■ 2836 Dietmar und Jörg sehen bei einem Spaziergang ein Auto, bei dem im Kennzeichen die Zahl 4949 steht. Die Tatsache, daß 49 eine Quadratzahl ist, führt sie auf die Frage, ob auch die Zahl 4949 eine Quadratzahl ist. Nach kurzer Überlegung sagt Dietmar: „Ich kann sogar beweisen, daß keine vierstellige Zahl, deren erste gleich ihrer dritten und deren zweite gleich ihrer vierten Ziffer ist, eine Quadratzahl sein kann. Übrigens läßt sich auch beweisen, daß unter diesen Zahlen genau eine Primzahl ist." Führen Sie diese Beweise durch! (Dietmar faßt dabei alle Kennzeichen von 0001 bis 9999 als vierstellige Zahlen auf.)

Ma 10/12 ■ 2837 Ein Student und eine Studentin gehen in ein Café. Der Student bestellt für sich ein Glas Milch und für die Studentin eine Tasse Kaffee. Er entnimmt seinem Glas einen Teelöffel voll Milch und gießt diesen in die Tasse mit Kaffee. Sie rührt den Inhalt ihrer Tasse gut um und entnimmt ihrem Kaffee-Milch-Mischgetränk einen Teelöffel voll (gleiches Volumen wie vorher) und gießt ihn in das Glas des Studenten. Hat sie am Ende mehr, gleichviel oder weniger (Volumenteile) Milch in ihrer Tasse als er (Volumenteile) Kaffee im Glas?

Ma 10/12 ■ 2838 In
$$\begin{array}{r} \text{FUENF} \\ +\ \text{ZWEI} \\ \hline \text{SIEBEN} \end{array}$$
sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, daß die Addition zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten. Untersuchen Sie, wieviel Lösungen die Aufgabe hat!

Ma 10/12 ■ 2839 Es sei r der Radius eines Kreises, der beide Katheten der Längen a bzw. b eines rechtwinkligen Dreiecks berührt und dessen Mittelpunkt auf der Hypotenuse liegt. Es ist zu beweisen, daß $\frac{1}{r}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ gilt.

Na/Te 10/12 ■ 405 Ein Kraftwagen mit der Gewichtskraft 3925 N fährt über eine nach oben gewölbte Brücke mit einem Krümmungsradius von 200 m mit einer Geschwindigkeit von $50\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Mit welcher Kraft drückt der fahrende Wagen auf die Mitte der Brücke? Wie groß ist die Kraft, wenn die Brücke nach unten gewölbt ist?

aus: Physik für Lehrer Band 2
Verlag der Wissenschaften, Berlin

Na/Te 10/12 ■ 406 Eine Waschmaschine erwärmt 10 l Wasser von 20 °C auf 95 °C. Es wird ein Wirkungsgrad von 80 % angenommen. Wie lange dauert das Aufheizen, wenn die Nennleistung der Heizung 2 kW beträgt, und was kostet es (1 kWh kostet 0,08 M)? *R.*

Achtung! Ab diesem Wettbewerbsjahr wird der Wettbewerb in den Heften 5/87, 6/87 und 1/88 mit je 7 Aufgaben durchgeführt.

Literatur zur außerunterrichtlichen Arbeit im Fach Mathematik aus dem Verlag Volk und Wissen, Berlin

Autorenkollektiv
Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR
Band 1 (ab Kl. 8) Bestell-Nr. 002 170 1
Band 2 (ab Kl. 8) Bestell-Nr. 706 734 1
Klassen 5 bis 8 Bestell-Nr. 707 624 8

Autorenkollektiv
Elementare Zahlentheorie (Gleichungen/Kombinatorik)
Bestell-Nr. 706 730 9 (ab Kl. 7)

Joh. Christ. Schäfer
Die Wunder der Rechenkunst
Bestell-Nr. 707 745 1 (ab Kl. 5)

Autorenkollektiv
Sammlung mathematischer Aufgaben mit Lösungen
Bestell-Nr. 709 146 4 (ab Kl. 9)

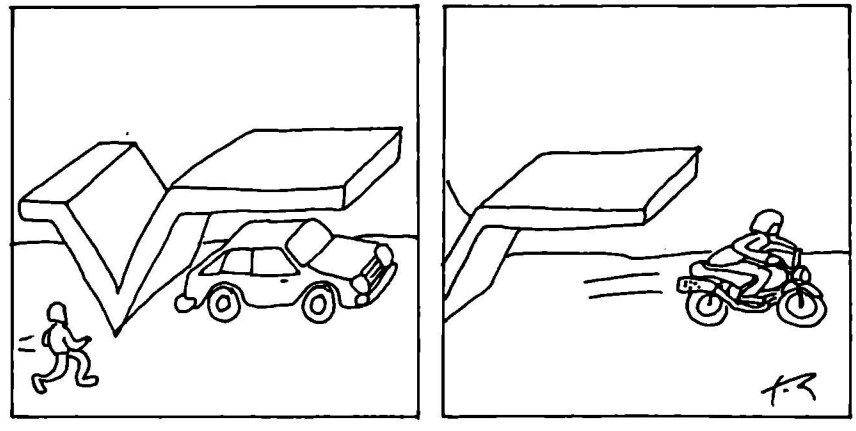
Autorenkollektiv
Mathematische Arbeitsgemeinschaften in den Klassen 5 bis 8
Bestell-Nr. 707 441 0

Autorenkollektiv
Rechnen und Raten
Ein unterhaltsames Mathe-Magazin (ab Kl. 5)
(Zusammenstellung von Beiträgen aus der alpha), erscheint Ende 1987

Joh. Lehmann
2×2 plus Spaß dabei
Bestell-Nr. 707 437 3 (Kl. 1 bis 4)

Joh. Lehmann
3 plus 8 und mitgemacht
Bestell-Nr. 707 857 5 (Kl. 1 bis 4)

Aus: Funktio 5/86, Finnland



ARBEITS-
GEMEINSCHAFTEN
IM BLICKPUNKT

Die Mathematische Schülergesellschaft (MSG) „Leonhard Euler"

bei der Sektion Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin

Die MSG ist eine gemeinsame Einrichtung der Abteilung Volksbildung beim Magistrat der Hauptstadt und der *Humboldt*-Universität. Sie wurde am 8. 10. 1970 gegründet und ist somit die älteste Schülergesellschaft ihrer Art in unserer Republik.
Bei ihrer Gründung waren etwa 150 Mädchen und Jungen Mitglieder der MSG. Im Moment sind es über 500, wobei etwa ein Drittel hiervon Mädchen sind.
Seit 1975 gibt es ein einheitliches Lehrprogramm für die Schuljahre 6 bis 12, dessen neueste und abgestimmte Variante seit September 1986 vorliegt.
Der Unterricht in der MSG wird in Zirkeln mit 12 bis 18 Schülern erteilt, wobei die aktive Gestaltung dieses Unterrichtes durch die Schüler ein Hauptanliegen darstellt. Neben dieser Form der außerunterrichtlichen Tätigkeit arbeiten noch sechs Zirkel in Klassenstufe 8 bis 12 zur Vorbereitung ausgewählter Schüler auf die verschiedenen Stufen der Olympiaden Junger Mathematiker. Für etwa 60 Schüler sind auf verschiedenen mathematischen Gebieten Einzelpatenschaften übernommen worden. In dieser Betreuungsform beschäftigen sich Jungen und Mädchen von Klassenstufe 9 bis 12 tiefer mit konkreten Fragestellungen in der Algebra, der Geometrie, der Analysis, der Numerik, der Statistik und der Informatik.
Erstmals konnten wir für alle Schüler der 8. Klasse, etwa 90 Teilnehmer, einen BASIC-Programmierkurs realisieren.
Im Rahmen unserer Arbeit konnten wir in den letzten sechs Jahren stets die beste Mathematik-Olympiademannschaft zur 4. Stufe der DDR-Olympiade entsenden, ein bis drei Schüler waren stets Mitglieder der Nationalmannschaft bei der IMO.
Viele erfolgreiche MSG-Mitglieder haben ein Mathematikstudium begonnen oder abgeschlossen, die ersten ehemaligen Schüler haben sogar erfolgreich promoviert oder sind, nach Abschluß ihrer Promotion, bereits Hochschullehrer, wie Prof. Dr. sc. J. Grabowski, Dozent Dr. sc. H. Schiemangk, Dr. B. Bellach, Dr. Reimann bzw. Forschungsstudenten oder Studenten wie z. B. H. Neß, K. Peters, K. Gröger, E. Schwarzenecker und F. Fauck. Die genannten Namen repräsentieren nur eine kleine Anzahl erfolgreicher Mitglieder unserer MSG. Alle diese Schüler sind Absolventen der Spezialschule *Heinrich Hertz* bzw. der Spezialschule Mathematik unserer Sektion. Von diesen beiden Bildungseinrichtungen kommen auch heute noch die besten Schüler in Klassenstufe 9 bis 12.
Die meisten unserer Schüler sind vielseitig interessiert, sie musizieren, lernen Sprachen und treiben Sport, was wir als eine gute Bereicherung ihrer Persönlichkeitsentwicklung ansehen.
Innerhalb der MSG sind wir bemüht, ein interessantes und vielseitiges Angebot an zusätzlichen Bildungsmöglichkeiten zu realisieren. Alljährlich, meist im April, findet das Schülerkolloquium statt, hier referieren Schüler vor ihren Klassenkameraden. In den Sommerferien führen wir unser Mathematikspezialistenlager in einem Pionierlager durch, hierbei werden am Vormittag drei Stunden Unterricht in sehr aufgelockerter Form erteilt, während die übrige Zeit für Spiel- und Freizeitfreuden reserviert ist. Als zirkelergänzend bieten wir ein Vortragsprogramm zu allgemein interessierenden Fragen an. Hier referierten die Professoren Kuczynski, Steininger, Porstmann, Lanius und Budach sowie der ehemalige Chefredakteur dieser Zeitung, OStR J. Lehmann, zu vielfältigen Problemen ihres Arbeitsgebietes.
Wir möchten mit unserer Tätigkeit die Propaganda für unser schönes und so interessantes Fachgebiet pflegen, wollen jungen Menschen Voraussetzungen für alle Berufe vermitteln und die Besten befähigen, selbst einmal aktiv als Mathematiker, Informatiker oder Lehrer ihr Fachgebiet weiterzuentwickeln oder bestmöglich zu unterrichten.

J. Nietzsch

Eine Aufgabe von Prof. Dr. sc. nat. J. Nietzsch

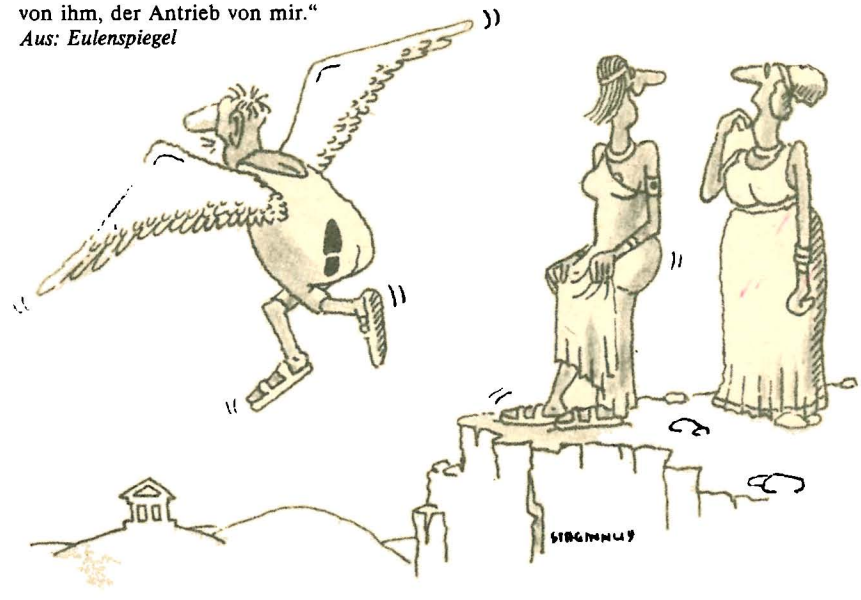
Sektion Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin, Vorsitzender der Mathematischen Schülergesellschaft

▲2806▲ Gegeben seien vier verschiedene Punkte in der Ebene A, B, C, D. Man beweise: Wenn die Schwerpunkte der Dreiecke $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDA$, $\triangle DAB$ auf einem Kreis liegen, so liegen auch A, B, C, D auf einem Kreis.

Kurzbiographie

Josef Nietzsch, geboren am 19. 3. 1938 in Böhmisch Kamnitz (heute ČSSR), Schulbesuch in Torgau/Bezirk Leipzig bis 1956, von 1956 bis 1962 Studium der Physik und Mathematik bei den Professoren Hertz, Kockel, Lösche, Weiß, Beckert, Günter und Kähler in Leipzig. 1962 bis 1964 Mitarbeiter am heutigen *Deutschen Amt für Meßwesen und Warenprüfung*, 1964 bis 1968 Mitarbeiter am Rechenzentrum der *Humboldt*-Universität, 1968 bis 1970 Assistent an der Sektion Mathematik, Promotion A, 1971 bis 1976 Forschungsgruppenleiter, erfolgreiche Promotion von acht Assistenten, Abschluß der eigenen B-Promotion. Seit 1973 Hochschuldozent, 1983 Berufung zum Professor.
Arbeitsgebiete: Rechentechnik, Programmierung, Numerik, Angewandte Kernphysik, Mathematische Physik. Beiträge hierzu auf verschiedenen internationalen Konferenzen, Studienaufenthalte und Gastprofessuraufenthalte in der UdSSR, ČSSR, VR Polen, Berlin (West), Belgien und Kuba. Vorsitzender der Mathematischen Schülergesellschaft seit 1974.

Frau Ikarus: „Die Konstruktion stammt von ihm, der Antrieb von mir."
Aus: Eulenspiegel



Prof. Dr. G. Noodt,
Oberlehrer an der Viktoriaschule
zu Berlin, 1908

Mathematisches Unterrichtsbuch für höhere Mädchenschulen

Angewandte Aufgaben

▲1▲ In einer mit einer Vorschule verbundenen höheren Mädchenschule befinden sich in der Vorschule $\frac{6}{25}$, in der Unterstufe $\frac{3}{10}$, in der Mittelstufe $\frac{1}{4}$ aller Schülerinnen; die Oberstufe (für diese ist das Buch, aus dem wir die vorliegenden 34 Aufgaben auswählten, geschrieben) besuchten 168 Schülerinnen. a) Wie verteilten sich die Schülerinnen auf die einzelnen Stufen? b) Wieviel Schülerinnen besuchten die ganze Anstalt?

▲2▲ Ein Schulkind hatte auf dem Schulwege zu tragen:
eine Schulmappe im Gewichte von 650 g, ein Lesebuch 500 g, ein franz. Übungsbuch 450 g, ein Naturgeschichtsbuch 520 g, ein botanisches Besteck 60 g, ein Rechenbuch 170 g, fünf Schreibhefte 850 g, einen Federkasten 130 g.
Welches Gewicht hatte die Schulmappe mit dem Inhalt?

▲3▲ Ein für 40 Schülerinnen bestimmtes Klassenzimmer ist 5,86 m lang und 5,12 m breit; wie hoch ist das Zimmer, wenn für jede Schülerin und die Lehrer ein Luftraum von 3,25 cbm gerechnet worden ist?

▲4▲ Eine Lehrerin hat jährlich 35 M staatliche Einkommenssteuer, 12 M Gemeindesteuer, 4 M Ergänzungssteuer, 5 M Kirchensteuer, 6 M Prämien für Feuerversicherung und Versicherung gegen Einbruchsdiebstahl, 6 M für die Sterbekasse zu zahlen. Um wieviel wird ihr Einkommen durch diese Steuerleistung geschmälert?

▲5▲ Eine Seminaristin arbeitet täglich $1\frac{1}{4}$ Stunden bei Lampenlicht und reichte so mit einem bestimmten Petroleumvorrat 9 Tage; vor der Prüfung arbeitete sie täglich eine Stunde länger bei Lampenlicht; wie lange reichte jetzt der Petroleumvorrat?

▲6▲ Für 5 l Petroleum bezahlt man 90 Pf. Wieviel zahlt man für 60 l? Den wievielten Teil eines Liters Petroleum erhält man für einen Pfennig?

▲7▲ Ein Mädchen strickte in der letzten Woche vor Weihnachten an den einzelnen Wochentagen 110 Nadeln, 98 N., 104 N., 122 N., 111 N. Wie viele Nadeln hat sie in der Woche vor dem Feste gestrickt?

▲8▲ Ein Mädchen hat eine Stickerei in 30 Tagen vollendet bei durchschnittlich 9stündiger Arbeit am Tage. Wie lange hätte sie an der Stickerei zu tun gehabt, wenn sie täglich 15 Stunden darauf verwendet hätte?

▲9▲ Zu einem Rock gebraucht ein Herr $2\frac{1}{2}$ m, zum Beinkleid $1\frac{1}{2}$ m und zur Weste $\frac{3}{5}$ m; wieviel Stoff ist zum ganzen Anzug erforderlich?

▲10▲ Eine Hausfrau rechnet zum Mittagsmahl für ihren Mann $\frac{1}{5}$ kg, für sich $\frac{3}{20}$ kg und für jedes ihrer Kinder $\frac{1}{8}$ kg Fleisch.
a) Wieviel Fleisch brauchte sie?
b) Infolge der Fleischverteuerung begnügt sie sich mit $\frac{1}{2}$ kg Fleisch. Wieviel kg Fleisch werden dadurch täglich der Familie entzogen?

▲11▲ Um Quittengelee zu kochen, kaufte eine Hausfrau 3 kg Quitten, das kg zu 0,55 M, und ließ dieselben unter Zusatz von 1,5 kg Zucker, das kg zu 0,46 M, einkochen. Wie teuer kam (von der Feuerung abgesehen) das Gelee?

▲12▲ Um Schweinefleisch einzupökeln, nimmt man auf 3 kg Fleisch 0,2 kg Kochsalz und 20 g Salpeter, legt es mit Lorbeer, Pfeffer und Nelken in ein Geschirr fest ein und verwahrt es unter öfterem Umwenden 6 bis 8 Tage kühl an einem Ort. Darauf wird das Fleisch gedampf oder gekocht. Wie teuer stellt sich das Gericht für jede Person, wenn 7 Personen an dem Mahl teilnehmen? (1 kg Schweinefleisch kostet 1,60 M, 1 kg Salz 0,20 M, 100 g Salpeter 15 Pf, für das übrige Gewürz rechnet die Hausfrau 10 Pf.)

▲13▲ Was ist vorteilhafter, Brennholz nach Maß, für 15,50 M das cbm, zu kaufen oder nach Gewicht, wenn das cbm Brennholz $2\frac{1}{2}$ dz wiegt und der dz 6,20 M kostet?

▲14▲ Flur und Treppen eines Hauses werden mit einem Teppichläufer, welcher 0,90 m breit liegt, belegt. Wie hoch stellt sich der Preis für den Belag, wenn für den Flur 6,80 m und für die Treppen $10\frac{1}{4}$ m erforderlich sind und das m Teppichläufer mit 4,80 M berechnet wird? (Welche Angabe ist für die Berechnung überflüssig?)

▲15▲ Eine Familie hatte im Laufe eines Jahres für ärztliche Behandlung 156 M, für Arzeneien 46,75 M zu bezahlen. Elf Tage wurde die Hilfe einer Krankenpflegerin in Anspruch genommen, welche täglich 4,75 M Lohn erhielt; die Bekostung derselben kostete täglich 1,60 M. Wie hoch beliefen sich die Ausgaben, welche der Familie durch Krankheit auferlegt wurden?

▲16▲ Im Jahre 1900 gab es in Berlin 1378 Wohnungen aus einem Wohnraum (mit mehr als 4 Bewohnern) mit insgesamt 7815 Bewohnern und 388 Wohnungen aus 2 Wohnräumen (mit mehr als 9 Bewohnern) mit insgesamt 4028 Bewohnern.
a) Wieviel Wohnungen waren zu jener Zeit in Berlin übervölkert?
b) Wieviel Einwohner mußten in derartig überfüllten Wohnungen hausen?

▲17▲ Im Dezember 1890 gab es in Berlin 11 895 leer stehende Wohnungen, im Dezember 1895 deren 24 236. Wieviel Wohnungen standen im Jahre 1895 mehr leer als 1890?

▲18▲ Londoner Maurer legen, um einer Beschränkung des Arbeitslohnes vorzubeugen, durchschnittlich nicht mehr als 400 Mauersteine den Tag; da der Bau einer großen Fabrikanlage in Manchester dadurch zu langsam gefördert wurde, ließ man amerikanische Maurer kommen, die 2000 Mauersteine den Tag legten. Wieviel Mauersteine verarbeitete eine Kolonne von 20 amerikanischen Maurern täglich mehr als ebensoviel ihrer englischen Kollegen?

▲19▲ Ein Pelzhändler verkauft 35 Zimmer (das Zimmer – 40 Stück) Hermelinpelze mit einem Gesamtgewinn von 575 M für 2500 M.
Wie teuer war das Zimmer eingekauft?

▲20▲ Fünf Seronen (aus Rindshaut bestehende Ballen, die Nähte mit Pech überstrichen) Chinarinde wiegen zusammen 425 kg brutto, das Taragewicht beträgt 63 kg. Wieviel kg Chinarinde sind zu verzollen?

▲21▲ Ein Hausdiener holt in einer Handkarre 1404 Kisten Zigarren vom Bahnhof und muß 52mal fahren. Wieviel Kisten muß er jedesmal aufladen?

▲22▲ Im Jahre 1901/02 wurden in Mainz von 320 Gewürzproben 4, in Eberfeld von 143 Butterproben 13, in Würzburg von 50 Butterproben 5, in Mannheim von 16 Wurstproben 8, in Görlitz von 8 Fleischproben 4 beanstandet. Der wievielte Teil der chemisch untersuchten Nahrungsmittel mußten in den einzelnen Fällen beanstandet werden?

▲23▲ Der Marktpreis für 1 kg Schweinefleisch stellt sich im Monat Oktober auf 1,70 M, im November auf 1,90 M und im Dezember auf 2,10 M. Eine Hausfrau brauchte im Oktober 4 kg, im November 6 kg und im Dezember 18 kg Schweinefleisch. Mit welchem Durchschnittspreis bezahlte die Hausfrau das kg Schweinefleisch?

▲24▲ Ein Kaufmann verspricht dem Verkäufer eine Prämie von 0,015 M für jedes verkaufte kg Zucker; wieviel kg Zucker müssen verkauft werden, damit eine Prämie von 5,10 M erzielt wird?

▲25▲ Von einer Gutsherrschaft werden ständig 25 Tagelöhner und 15 Tagelöhnerinnen beschäftigt. Der Jahresverdienst der männlichen Personen wird auf 630 M, der der weiblichen Personen auf 330 M festgesetzt. Wie hoch kommt der Gutsherrschaft die Versicherung der Arbeiter und Arbeiterinnen vierteljährlich (in 13 Wochen)? Lohnklasse I bis 350 M; Wochenbeitrag 0,14 M, Lohnklasse III 550 M bis 850 M; Wochenbeitrag 0,24 M.

▲26▲ Der Milchertrag einer Kuh im Laufe eines Jahres beträgt bei zweckmäßiger Ernährung durchschnittlich das Fünffache des Körpergewichts der Tiere. Wieviel Milch hat man im Durchschnitt täglich (1 Jahr = 365 Tage) von einer Kuh zu erwarten, deren Körpergewicht 584 kg beträgt?

▲27▲ Im Jahre 1894 standen in Hamburg 15138 Gelasse leer, das waren $\frac{9}{100}$ aller zu vermietenden Räumlichkeiten; im Jahre 1902 gab es nur noch 5219 leerstehende Gelasse in Hamburg, das waren $\frac{17}{625}$ aller vermietbaren Gelasse. Wieviel Gelasse waren in den genannten Jahren in Hamburg zu vermieten?

▲28▲ Die mit 22 Betten belegten Einzelräume der Hamburger Auswandererhalle haben eine durchschnittliche Höhe von $4\frac{1}{2}$ m, eine Länge von $13\frac{1}{5}$ m und eine Breite von $5\frac{7}{50}$ m. Wieviel Luft ergibt sich für den Kopf bei voller Belastung?

▲29▲ Eine Festung ist für 600 Mann 9 Monate verproviantiert; wie lange kann sie sich halten, wenn noch 200 Mann vor der Belagerung hinzukommen?

▲30▲ Beim Zählen der Kollektengelder fanden sich an Kupfermünzen 107 Zweipfennigstücke und 193 Einpfennigstücke. Der Pfarrer wechselt diese Münze gegen ein Fünfmarkstück ein, wieviel Geld hat er aus seiner Tasche zugelegt?

▲31▲ Wie groß ist das Verjüngungsverhältnis einer Kartenaufnahme, bei welcher 10 Schritt zu 0,8 m durch 1 m dargestellt werden?

▲32▲ Ein Schnellzug legt in einer Stunde 82 km zurück und fährt von Berlin nach Hamburg $3\frac{1}{2}$ Stunden.

Wieviel km sind diese Bahnhöfe voneinander entfernt?

▲33▲ Die Schattenlänge eines senkrecht aufgestellten Stabes von $\frac{3}{5}$ m Länge betrug (im Raum) $\frac{3}{8}$ m. Zur selben Zeit warf die Peterskirche in Rom einen $86\frac{1}{4}$ m langen Schatten. Wie hoch ist der Turm dieser Kirche? (Veranschauliche Dir diesen Sachverhalt an einer Skizze.)

▲34▲ Colladom und Sturm haben durch Versuche im Genfer See die Geschwindigkeit des im Wasser fortgepflanzten Schalles zu 1435 m in der Sekunde ermittelt; um wieviel Sekunden durchläuft der Schall die Strecke von 1 km im Wasser schneller als in der Luft, wenn die Geschwindigkeit des Schalls in der Luft zu 340 m angenommen wird?

J. Lehmann/Th. Scholl

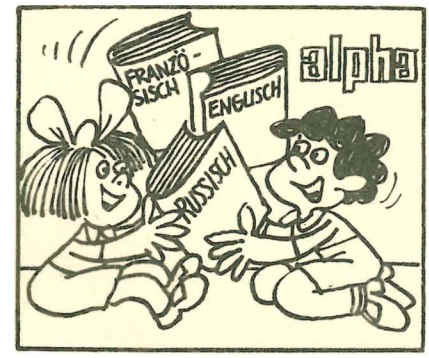
Neuerscheinung

Gilde/Altrichter

Schneller, leichter, genauer – Möglichkeiten des Taschenrechners

aus der Reihe *Polytechnische Bibliothek*
Etwa 160 Seiten mit 18 Bildern, Broschur
Bestell-Nr. 547 243 1
Preis etwa: 5,50 M
VEB Fachbuchverlag Leipzig

Der moderne Taschenrechner ist nicht nur ein Instrument, das schnell die verschiedensten Rechenaufgaben löst. Rechner wie der Schulrechner SR 1 lassen alle in der Praxis vorkommenden Rechenoperationen zu. Zudem ermöglichen sie völlig neue Einsichten in wissenschaftliche und technische Zusammenhänge.
Bisher wurden viele Zahlenwerte ohne weiteren Einspruch hingenommen, weil das Prüfen viel zu umständlich war. Heute gestattet es ein guter Taschenrechner, auch komplizierte Zahlenangaben schnell zu kontrollieren. Er läßt es außerdem zu, aus vorhandenen Zahlen neue, mit neuen Erkenntnisinhalten, zu errechnen.
Bewußt wird in diesem Buch auf den SR 1 orientiert, obwohl auch jeder ähnliche Rechner die Aufgaben lösen kann. Auf Bedienungsanleitungen wird verzichtet. Das ist Unterrichtsstoff und es gibt bereits Bücher darüber. Hauptsächlich für Schüler gedacht, soll das Buch die Freude am Umgang mit dem Taschenrechner fördern, denn Rechnen ist keine Arbeit, sondern ein Vergnügen – wenn man interessante Probleme schnell lösen kann. Die Autoren haben aus ihren Titeln *Mehr Spaß mit dem Taschenrechner* und *Noch mehr Spaß mit dem Taschenrechner* einige Aufgaben ausgewählt und die interessantesten Abschnitte zusammengefaßt. Dabei behandeln sie in zwangloser Folge mathematische Probleme aus Naturwissenschaft und Technik sowie aus dem Alltag: Der immerwährende Kalender. Der goldene Schnitt. Was ist eine Sekunde? Wieviel Kilometer lief der Autoreifen? Was ist ein Faß? –
Solche und ähnliche Themen vermitteln Denkanstöße und regen dazu an, selbst Aufgaben zu stellen und Lösungswege zu finden. Dieses Buch erleichtert den Schritt vom Taschenrechner zum Computer.

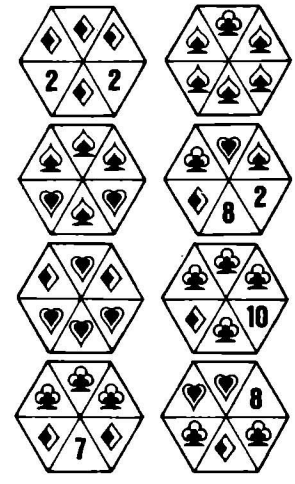


▲1▲ Sixteen players compete in a 'knock-out' tennis tournament. Each player plays a first match against one other player, and the winners of these matches go on into the second round. There are no draws, and the losers drop out.
The process is repeated in the second round and continues until there only one winner left.
How many matches are played altogether?

▲2▲ Возьмите шестизначное число, которое делится хотя бы на одно из чисел из списка: 7, 13, 11, 37. Переставьте первую цифру в конец числа. Проверьте, что полученное число вновь будет иметь тот же делитель из списка, что и первоначальное.
Почему?

▲3▲ Un avion part de Paris-Orly à 7 heures et se dirige vers Marseille-Marignane; sa vitesse constante est 680 km/h.
Un autre avion part Marseille-Marignane à 7 h 30 et se dirigee vers Paris-Orly, sa vitesse constante est 520 km/h.
La distance de Paris-Orly à Marseille-Marignane est 720 km.
a) A quelle heure les avignons se croisent-ils?
b) A quelle distance de Paris-Orly le croisement a-t-il lieu?

▲4▲ La valeur des signes



Sachant qu'un même signe représente toujours un même chiffre, et que chaque figure géométrique contient le même nombre de points, retrouvez ce nombre.

Aus: Maximath

XXVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Erfurt, 18. bis 21. Mai 1987

Olympiadeklasse 10

261041 Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck. Ferner sei x eine beliebig vorgegebene Streckenlänge. Die Seiten des Dreiecks ABC seien jeweils um eine Strecke dieser Länge x verlängert, und zwar BA über A hinaus bis A', CB über B hinaus bis B' und AC über C hinaus bis C'.
Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen das Dreieck $A'B'C'$ stets denselben Umkreismittelpunkt wie das Dreieck ABC hat!

261042 Man ermittle die kleinste natürliche Zahl $n > 0$, die die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllt:
(1) Es gibt genau 144 natürliche Zahlen, die Teiler von n sind.
(2) Unter den Teilern von n befinden sich 10 unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.

Von den nachstehenden Aufgaben 261043A und 261043B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

261043A Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (x_1, x_2, x_3) von reellen Zahlen x_1, x_2, x_3, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen!

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3, \quad (1)$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3, \quad (2)$$

$$x_1 x_2 x_3 = 1. \quad (3)$$

261043B a) Beweisen Sie, daß fünf paarweise verschiedene reelle Zahlen existieren, mit denen die folgende Aussage gilt! Für jede Auswahl von drei der fünf Zahlen existiert ein Dreieck, dessen Seitenlängen die drei ausgewählten Zahlen als Maßzahlen haben (wobei zum Messen aller drei Seitenlängen dieselbe Maßeinheit benutzt wird).
b) Ermitteln Sie, wenn fünf derartige Zahlen vorliegen, wie viele paarweise nicht kongruente Dreiecke insgesamt sich aus diesen fünf Zahlen auf die in a) genannte Art gewinnen lassen!
c) Beweisen Sie, daß stets dann, wenn fünf derartige Zahlen vorliegen, mindestens eines der genannten Dreiecke spitzwinklig ist!

261044 Ermitteln Sie für jede natürliche Zahl $k \geq 2$ die Anzahl aller Lösungen (x, y, z, t) der Gleichung

$$\overline{xy} + \overline{zt} = \overline{yz},$$

worin für x, y, z, t nur natürliche Zahlen mit

$1 \leq x \leq k-1$, $1 \leq y \leq k-1$,
$1 \leq z \leq k-1$, $0 \leq t \leq k-1$
zugelassen sind!
Dabei bezeichnet jeweils $\overline{pq}$ diejenige Zahl, die im Positionssystem der Basis k mit den Ziffern p, q (in dieser Reihenfolge) geschrieben wird.

261045 Bei einem Dominospiel mit den Zahlen 0, 1, ..., 6 ist jeder Spielstein in zwei Hälften eingeteilt, jede Hälfte trägt eine der Zahlen. In einem Dominospiel kommen alle Kombinationen von je zwei der Zahlen 0, 1, ..., 6 je genau einmal vor.
Eine *Kette* entsteht, wenn man mehrere Steine in einer Folge so nebeneinanderlegt, daß benachbarte Hälften nebeneinanderliegender Steine stets einander gleiche Zahlen tragen. Eine Kette heißt *geschlossen*, wenn auch die beiden Steinhälften an den beiden freien Enden der Kette einander gleiche Zahlen tragen. Eine geschlossene Kette aus drei verschiedenen Steinen werde kurz *Dreierkette* genannt. Zwei Dreierketten gelten genau dann als gleich, wenn sie aus denselben Steinen bestehen.
Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen aus je genau 7 verschiedenen Dreierketten $K_1, \ldots, K_7$ bestehenden Mengen $\{K_1, \ldots, K_7\}$ bei denen jeder Stein des Dominospiels in höchstens einer der Ketten $K_1, \ldots, K_7$ vorkommt!
(Wie üblich heißen zwei Mengen $M = \{K_1, \ldots, K_7\}$ und $M' = \{K_1', \ldots, K_7'\}$ genau dann einander gleich, wenn jede in der Menge M enthaltene Kette K_i auch in M' enthalten ist und umgekehrt auch jede in M' enthaltene Kette in M.)

261046 Beweisen Sie, daß es einen Körper mit den folgenden Eigenschaften (1) bis (4) gibt!
(1) Die Oberfläche des Körpers besteht aus genau sechs ebenen Vierecken.
(2) Unter diesen Vierecken gibt es zwei, die keine Seitenkante miteinander gemeinsam haben.
(3) Außer den Seitenkanten dieser beiden Vierecke hat der Körper noch genau vier weitere Seitenkanten.
(4) Die Mittelpunkte dieser vier Seitenkanten liegen nicht in einer gemeinsamen Ebene.

Olympiadeklassen 11/12

261241 500 Bonbons sollen unter Verwendung von Umhüllungen passender Größen so zu einem Scherzpaket zusammengepackt werden, daß die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllt sind. Dabei soll sich (2) auf jede Möglichkeit beziehen, alle Bonbons auszupacken, indem man nach und nach jeweils eine zugängliche Umhüllung öffnet und entfernt (falls mehrere Umhüllungen zugänglich sind, in beliebiger Reihenfolge):
(1) Es gibt genau eine Umhüllung, die das gesamte Paket enthält.
(2) Beim Öffnen dieser und jeder weiteren Umhüllung zeigt sich, daß deren Inhalt entweder aus mindestens drei sämtlich mit Umhüllung versehenen Teilpaketen oder aus genau einem nicht umhüllten Bonbon besteht.
Ermitteln Sie die größtmögliche Anzahl von Umhüllungen, die ein solches Paket aufweisen kann!

261242 Man ermittle alle diejenigen Zahlenfolgen (a_n) mit $n = 1, 2, 3, \ldots$, die die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllen:
(1) Für alle ganzen Zahlen m, n mit $n > m > 0$ gilt
$a_{n+m} \cdot a_{n-m} = a_n^2 - a_m^2$.
(2) Es gilt $a_1 = 1$ und $a_2 = \frac{5}{2}$.

261243 Es seien $k_1, \ldots, k_n$ Kugelkörper, jeder einschließlich seiner Randpunkte verstanden. Diese Kugeln seien beliebig im Raum gelegen; es sei auch zugelassen, daß sie einander durchdringen oder berühren. Die Vereinigungsmenge der k_i habe das Volumen V.
Man beweise, daß es unter diesen Voraussetzungen stets möglich ist, eine Auswahl aus den Kugeln k_i so zu treffen, daß je zwei der ausgewählten Kugeln keinen gemeinsamen Punkt haben und daß die Vereinigungsmenge der ausgewählten Kugeln ein Volumen $U \geq \frac{1}{27} V$ hat.

261244 Man ermittle die kleinste positive ganze Zahl a, für die
$(a+1)^5 - a^5 - 1$ durch 18 305 teilbar ist.

261245 Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen $n \geq 3$, mit denen die folgende Aussage gilt:
Jede ebene konvexe n-Ecksfläche $A_1A_2 \ldots A_n$ wird vollständig überdeckt von den Flächen der n Kreise, die die Strecken A_iA_{i+1} als Durchmesser haben ($i = 1, \ldots, n$; es sei $A_{n+1} = A_1$ gesetzt).
Dabei sei jede n-Ecksfläche und jede Kreisfläche einschließlich ihrer Randpunkte verstanden.

Von den nachstehenden Aufgaben 261246A und 261246B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

261246A Im Mathematiklager schlägt ein Zirkelleiter den n Schülern ($n \geq 3$) seiner Gruppe vor, den Schüler, der den Tafeldienst wahrzunehmen hat, nach folgender Methode auszuwählen:
Die Schüler werden mit $P_1, P_2, \ldots, P_n$ numeriert und stellen sich in dieser Reihenfolge im Kreis auf. Dabei folgt (im Umlaufsinn $P_1, P_2, \ldots$) auf P_n wieder P_1. Durch

Münzwurf wird zunächst entschieden, ob P_1 oder P_2 aus dem Kreis ausscheidet.
Liegt *Wappen* oben, so scheidet P_1 aus, bei *Zahl* P_2. Danach wird der Ausscheid mit denjenigen beiden noch nicht ausgeschiedenen Schülern fortgesetzt, die auf den soeben zuletzt ausgeschiedenen Schüler im genannten Umlaufsinn folgen. Bei *Wappen* scheidet wieder der in dem Umlaufsinn erste von diesen beiden aus, bei *Zahl* der zweite. Dies wird solange wiederholt, bis nur noch ein Schüler übrigbleibt, der dann als Diensthabender bestimmt wird.
a) Man berechne im Fall $n = 3$ die Wahrscheinlichkeiten W_1, W_2, W_3 dafür, daß P_1, P_2 bzw. P_3 als Diensthabender bestimmt werden.
b) Man beweise für jedes $n \geq 3$, daß die Auswahlmethode ungerecht ist, d. h. daß die Wahrscheinlichkeit, als Diensthabender bestimmt zu werden, nicht für alle Schüler $P_1, P_2, \ldots, P_n$ gleich ist.
Bemerkung: Tritt irgendein zufälliges Ereignis A als Folge irgendeines von m Ereignissen aus einer Gesamtzahl von N möglichen Ereignissen (die einander ausschließen und gleichwahrscheinlich sind) ein, so bezeichnet man als Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A die Zahl $p = \frac{m}{N}$.

261246B Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_{1987}$ nichtnegative reelle Zahlen, für die die Summe der Quadrate gleich 10 und die Summe der dritten Potenzen größer als 1 ist.
Untersuchen Sie, ob es unter diesen Voraussetzungen stets möglich ist, eine Auswahl
a) von 9 dieser Zahlen,
b) von 10 dieser Zahlen
so zu treffen, daß die Summe der ausgewählten Zahlen größer als 1 ist!
(Kommt eine Zahl mehrmals unter den $x_1, \ldots, x_{1987}$ vor, so darf sie auch höchstens ebenso oft unter die ausgewählten Zahlen aufgenommen werden.)

Die XXVI. OJM der DDR fand in der Pädagogischen Hochschule *Dr. Theodor Neubauer* in Erfurt vom 18. Mai bis zum 22. Mai statt.

Einen ersten Preis in Klasse 10 erhielten: Hans-Peter Störr, Torsten Ehrhardt, beide Spezialschule *Hans Beimler*, Karl-Marx-Stadt (Kl. 9)

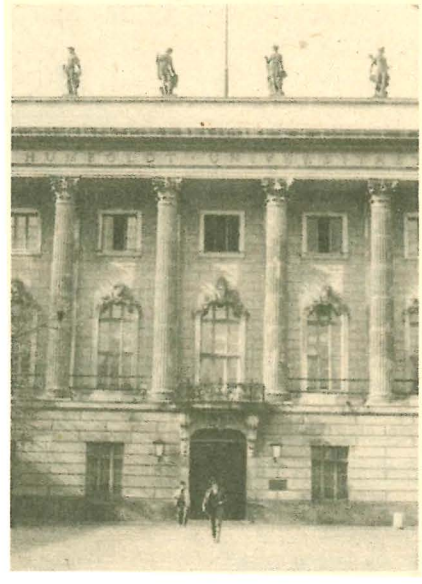
Einen ersten Preis in Klasse 11/12 erhielten: Uta Hövel, Spezialschule *Heinrich Hertz*, Berlin; Gunter Döge, Spezialschule *Friedrich Engels*, Riesa; Ingo Warnke, Spezialschule *Georg Thiele*, Kleinmachnow; Andreas Siebert, Spezialschule *Heinrich Hertz*, Berlin (Kl. 10); Dirk Liebscher, Spezialschule *Georg Thiele*, Kleinmachnow
Einen zweiten Preis erhielten 16 Schüler, einen 3. Preis 32 Schüler und eine Anerkennungsurkunde 30 Schüler.
An der OJM nahmen 165 Schüler, davon 20 Mädchen, teil.

Die internationale Mathematikolympiade wird im Juli dieses Jahres in Kuba stattfinden.

Spezialschule Mathematik/Physik der Humboldt-Universität Berlin

Seit 1964 existiert an der hauptstädtischen *Humboldt*-Universität eine Spezialschule, die es sich zur Aufgabe gemacht hat, leistungsstarke, gesellschaftlich aktive Absolventen der 10. Klasse der Polytechnischen Oberschulen, die besonderes Interesse an mathematischen oder physikalischen Fragestellungen haben, gezielt auf ein Hochschulstudium vorzubereiten.
Bei der Ausbildung unserer Schüler nutzen wir ganz bewußt die materiellen und personellen Möglichkeiten unserer Universität. Unseren Schülern werden durch Wissenschaftler der entsprechenden Sektionen unserer Hochschule gefestigte Grundlagenkenntnisse in all jenen Fächern vermittelt, die auch Bestandteil der an erweiterten Oberschulen geltenden Stundentafel sind. Darüber hinaus werden unsere Schüler in vielfältiger Weise gefordert und gefördert. Dem Unterricht in den Fächern Mathematik und Physik liegen Sonderstudienpläne zugrunde, die weniger auf einen Vorgriff des Hochschulstoffes abzielen, sondern vielmehr auf die Aneignung eines gediegenen festen und anwendungsbereiten Wissens gerichtet sind. Alle Schüler erhalten über drei Semester wöchentlich eine zweistündige Zusatzausbildung in Informatik, die mit praktischen Übungen an aktuell verfügbarer Rechentechnik verbunden ist.

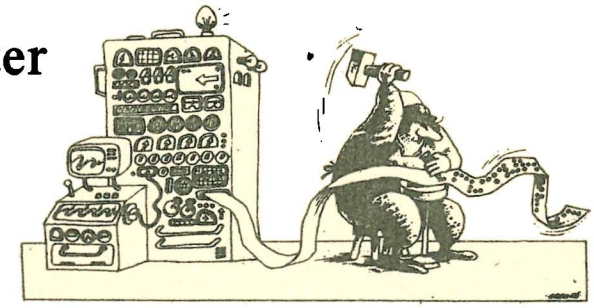
Humboldt-Universität zu Berlin



Außerdem wird jeder Schüler individuell durch Wissenschaftler der Sektionen Mathematik und Physik angeleitet und behutsam zu ersten wissenschaftlichen Tätigkeiten geführt, die in die Anfertigung sogenannter Jahresarbeiten münden. Viele Schüler nutzen auch die Möglichkeit, im Rahmen der an unserer Universität bestehenden Mathematischen Schülergesellschaft *Leonhard Euler* auch außerhalb des obligatorischen Unterrichts ihr Hobby, die Beschäftigung mit der Mathematik, zu pflegen.
Die Absolventen unserer Spezialschule haben sich im Studium an den Hochschulen bewährt, wo sie in der Regel zu den leistungsstärksten Studenten ihrer Studienjahre gehörten.
Von den 342 Abiturienten, die in den 23 Jahren ihres Bestehens unsere Spezialschule absolviert haben, nahmen mehr als 250 ein Studium an der *Humboldt*-Universität auf, darunter 171 an der Sektion Mathematik und 69 an der Sektion Physik.
Viele dieser Studenten haben sich über ein Forschungsstudium so weiterqualifizieren können, daß sie heute als promovierte Kader in Forschungskollektiven der Akademie der Wissenschaften und im Hochschulbereich ihren Beitrag für die Weiterentwicklung von Wissenschaft und Technik leisten. Wir freuen uns, daß sich einige von ihnen zu Doktoren der Wissenschaft qualifizieren konnten sowie zu Dozenten und Professoren berufen wurden.
Absolventen unserer Spezialschule nehmen in verschiedenen Schwerpunkten unserer Volkswirtschaft eine geachtete Stellung ein und leisten ihren Beitrag bei der Einführung und Anwendung von Schlüsseltechnologien.
Im Jubiläumsjahr unserer Hauptstadt werden wir unsere Spezialschule um eine zusätzliche Klasse erweitern. Damit ergeben sich für uns weitere Möglichkeiten, junge begabte Schüler aus verschiedenen Bezirken unserer Republik an der Humboldt-Universität nach erfolgreichem Abschluß der 10. Klasse der POS weiter zu fördern und sie damit besonders gründlich auf ein Hochschulstudium vorzubereiten.

R. Böttcher

In freien Stunden · alpha-heiter

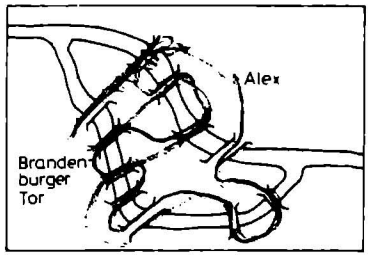


Unterhaltsame Mathematik
aus Berliner Zeitschriften und Zeitungen
aufgestöbert von J. Lehmann, Leipzig

Berlinbummel

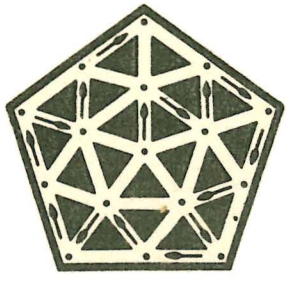
Das Berliner Stadtzentrum erstrahlt im alten-neuen Glanze. Reizvoll und lehrreich ist ein Bummel durch dieses Gebiet. „Spreeathen" wird die Hauptstadt liebevoll genannt, schließlich überspannen zahlreiche Brücken die Spree und ihre Seitenflüsse.
Gibt es für einen Fußgänger nach dieser Skizze einen Weg über alle Brücken, ohne eine davon mehr als einmal zu betreten, wenn er vom Alex zum Brandenburger Tor gelangen will?

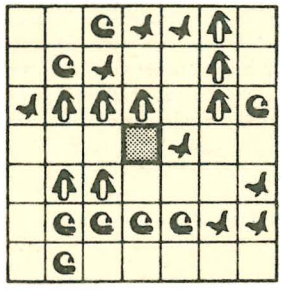
nach ND



Nachgedacht – mitgemacht

a) *Sternlauf:* Wie kommt man von der Mitte zu allen Punkten? Pfeilrichtung beachten!





b) *Guten Schnitt:* Wie muß man die Figur in vier Teile zerschneiden? Es sollen immer 12 Felder und von jeder Sorte je zwei Figuren sein.

Aus Berliner Rätselzeitung: Troll

Rätselspaß mit π

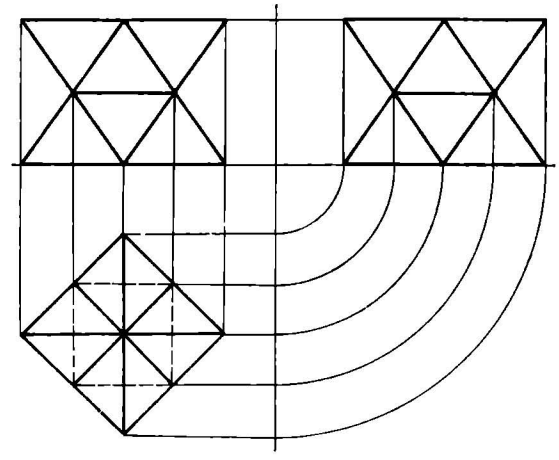
Für diese Aufgabe benötigen wir ein normales Skatspiel (32 Karten) und acht Kinder. Bei mir waren es vier Geschwisterpaare, die die Karten restlos unter sich aufgeteilt hatten.
Dabei ergab sich, daß Anna nur eine, Berta zwei, Cäcilie drei und Dora vier Karten hatten. Ralf Müller hatte soviel Karten wie seine Schwester, Steffen Fischer dagegen doppelt soviel wie seine Schwester, Tom Schmidt sogar dreimal soviel wie seine Schwester. Und Ulf Müller endlich viermal soviel wie seine Schwester.
Wie sind die Familiennamen der Mädchen?

Aus: Magazin

Unsere Mathematikaufgabe

Im Bild sind Grund-, Auf- und Seitenriß eines Körpers dargestellt. Man beschreibe diesen Körper eindeutig in einem Satz und gebe eine Skizze in schräger Parallelprojektion.

Aus: Wissenschaft und Fortschritt



Schwierig

Welche Figur ergeben die graphischen Darstellungen folgender Funktionen, wenn man sie in ein gemeinsames Koordinatensystem überträgt?

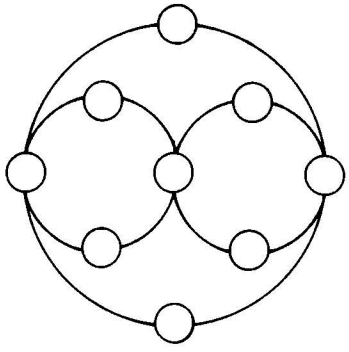
$$y_1 = \frac{3}{4} \cdot \left[\frac{x^2 + |x| - 5}{x^2 + |x| + 1} + \sqrt{25 - x^2} \right]$$

$$y_2 = \frac{3}{4} \cdot \left[\frac{x^2 + |x| - 5}{x^2 + |x| + 1} - \sqrt{25 - x^2} \right]$$

Aus: technikus, Michael Kühne, Lauscha

Alle knobeln mit

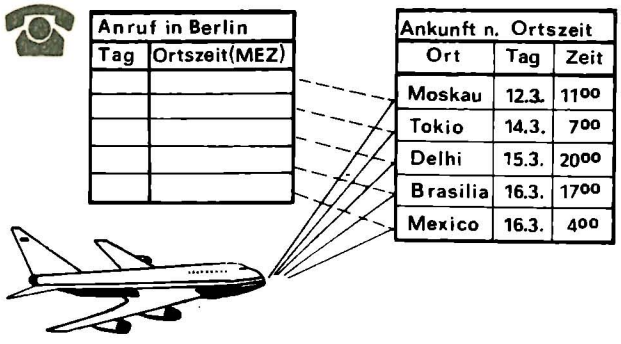
Wie müssen die Zahlen 1 bis 9 in die freien Felder der Kreise eingetragen werden, damit die Summe der auf einem Kreis liegenden Zahlen jeweils 19 beträgt? *Aus: Junge Welt, Fred Leisner, Blankenburg*



Wann klingelt es wo?

Auf der Leipziger Messe kommt es zwischen der DDR und Handelspartnern aus Moskau, Tokio, Delhi, Brasilia und Mexico zu erfolgreichen Vertragsabschlüssen. In bezug auf die Liefertermine sind von den ausländischen Vertretern im Heimatland noch Rücksprachen erforderlich. Es wird vereinbart, daß die Vertreter genau 48 Stunden nach Ankunft in ihrem Heimatland telefonisch mit dem Partner in Berlin Kontakt aufnehmen.
An welchem Tag und zu welcher Zeit klingelt in Berlin das Telefon, wenn die ausländischen Vertreter, wie in der Tabelle angegeben in ihrem Heimatland eintreffen?

Aus: Neue Berliner Zeitung/NBI Gedankentraining



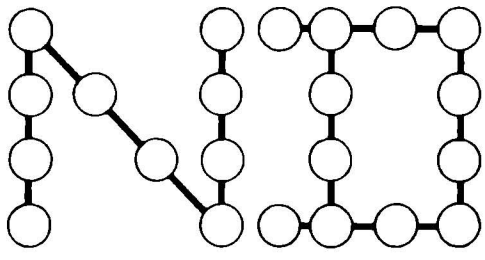
Anruf in Berlin	
Tag	Ortszeit(MEZ)

Ankunft n. Ortszeit		
Ort	Tag	Zeit
Moskau	12.3.	11^{00}
Tokio	14.3.	7^{00}
Delhi	15.3.	20^{00}
Brasilia	16.3.	17^{00}
Mexico	16.3.	4^{00}

Magische ND-Knobelei

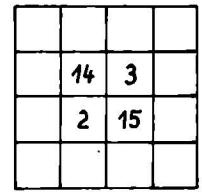
Trage die natürlichen Zahlen von 1 bis 22 so in die ND-Figur ein, daß die Zahlensumme auf jeder geraden Linie a) 45, b) 46, c) 47 beträgt!

Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig



Denken · Raten · Knobeln

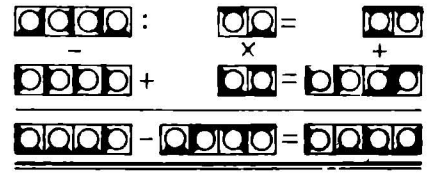
a) *Mathematisches:* Welches ist die kleinste natürliche Zahl, in der alle zehn Ziffern genau einmal vorkommen?
b) *Rechenrätsel:* Setze die fehlenden Zahlen von 1 bis 16 so in die leeren Felder der Figur ein, daß die vier waagerechten, senkrechten und diagonalen Felder jeweils 34 ergeben! *Aus: Trommel*



Raten und rechnen

Jedes Karo bedeutet eine Ziffer; gleiche Karos bedeuten immer gleiche Ziffern. Diesen Angaben entsprechend sind die Ziffern zu finden, die – in die runden Mittelfelder eingesetzt – die waagerechten und senkrechten Aufgaben richtig lösen.

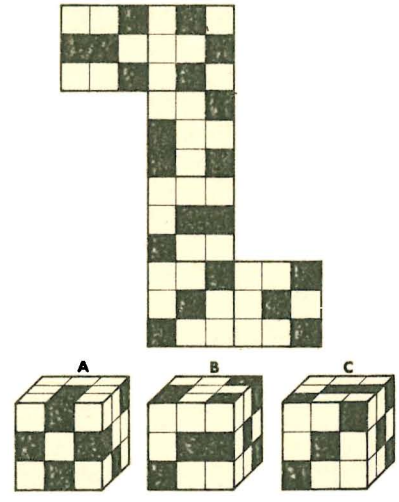
Aus: Freie Welt



Karo-Kisten

Welcher der drei Würfel entspricht der „Abwicklung"?

Aus: Für Dich



Mathe-Knobelei

Wer hat eine größere Geschwindigkeit:
– ein 100-m-Läufer, der seine Strecke in 10,3 s zurücklegt oder
– ein Wasserspringer vom 10-Meter-Brett (freier Fall), wenn er ins Wasser taucht?

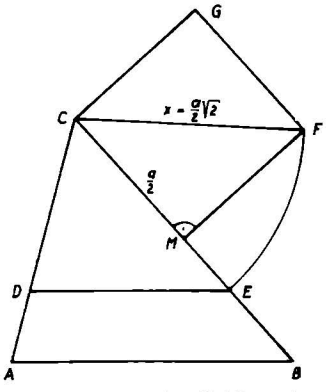
Aus: technikus, Mathe-Knobelei Nr. 260

Lösungen

Lösungen zu: In alten Berliner Mathematikbüchern gestöbert

▲1▲ Wegen $s_1 = s_2$ gilt $v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2$.
Aus $v_1 = \frac{5}{2}$, $v_2 = \frac{11}{3}$, $t_1 = t_2 + 9$
folgt $\frac{5}{2} \cdot (t_2 + 9) = \frac{11}{3} \cdot t_2$, also
$t_2 = \frac{135}{7}$ und somit $s_2 = \frac{11 \cdot 135}{3 \cdot 7} = 70\frac{5}{7}$.
Nachdem jeder Bote $70\frac{5}{7}$ Meilen zurückgelegt hat, wird der erste vom zweiten Boten eingeholt.

▲2▲ Es gilt $A_{DEC} : A_{ABC} = 1 : 2$
$= \overline{EC}^2 : \overline{BC}^2 = x^2 : a^2$, also $x = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2}$.
Es habe $\overline{CM}$ die Länge $\frac{a}{2}$; dann hat die Diagonale $\overline{CF}$ des Quadrates $CMFG$ die Länge $\frac{a}{2} \cdot \sqrt{2}$. Der Kreis um C mit dem Radius $\overline{CF}$ schneide $\overline{BC}$ in E. Die Parallele zu $\overline{AB}$ durch E erzeugt zwei flächengleiche Teile.



▲3▲ Angenommen, das Geld werde an x Personen verteilt; dann gilt
$9x - 32 = 7x + 24$, also $x = 28$. Es wurden 220 Sous an 28 Personen verteilt.

▲4▲ Für die Erbanteile s und f von Sohn und Frau gilt
$s : f = \frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2 : 1 = 4 : 2$;
für die von Frau und Tochter gilt
$f : t = \frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2 : 1$.
Daraus folgt $s : f : t = \frac{4}{2} : 2 : 1$.
Wegen $4 + 2 + 1 = 7$ erhält der Sohn $\frac{4}{7}$, die Frau $\frac{2}{7}$, die Tochter $\frac{1}{7}$ des Vermögens.

▲5▲ Angenommen A erhält x Thlr., B also $(x + 100)$ Thlr., C aber $(x + 370)$ Thlr.; zusammen sind das $(3x + 470)$ Thlr.; nun gilt $3x + 470 = 1520$, $x = 350$. Die Personen A, B bzw. C erhalten 350 Thlr., 450 Thlr. bzw. 720 Thlr.

▲6▲ Es sei x die von A gedachte Zahl; dann gilt
$(x \cdot 7 + 3) : 2 - 4 = 15$, $x = 5$.
A hat sich die Zahl 5 gedacht.

▲7▲ $162 : 36 = 4\frac{1}{2}$; $6\frac{3}{4} - 4\frac{1}{2} = 2\frac{1}{4}$;
$3 \cdot 2\frac{1}{4} = 6\frac{3}{4}$. M kauft den Stoff auf der Auktion um $2\frac{1}{4}$ Thlr. billiger als beim Tuchhändler; er spart $\frac{1}{3}$ des Preises des Händlers ein.

▲8▲ Es sei x die gesuchte Zahl; dann gilt
$\frac{x}{3} \cdot \frac{x}{4} + 5x = y$ und $y - 200 = 280 - x$,
also $y = 480 - x$.
Durch Einsetzen erhält man
$\frac{1}{12} \cdot x^2 + 5x = 480 - x$,
$x^2 + 72x - 5760 = 0$, $x_1 = 48$
und $x_2 = -120$ (entfällt, da negativ).
Die zu findende Zahl lautet 48.

▲9▲ Es sei x die vom Rechenmeister gedachte Zahl; dann gilt
$(x \cdot 5 - 24) : 6 + 13 = x$, also $x = 54$.
Somit handelt es sich um die Zahl 54.

▲10▲ Angenommen, das Pferd kostet x Thlr.; dann gilt
$\frac{x}{5} + \frac{x}{7} = 48$, $x = 140$.
Das Pferd kostet 140 Thlr.

▲11▲ Angenommen, es sind m Männer, f Frauen und k Kinder; dann gilt
(1) $19m + 10f + 8k = s$.
Aus $19m = 10f + 7 = 8k + 15$ folgt
(2) $10f = 8k + 8$ bzw. (3) $8k = 10f - 8$.
Durch Einsetzen in (1) erhalten wir (4)
$19m + 16k + 8 = s$ und
(5) $19m + 20f - 8 = s$. Subtrahieren wir (5) von (4) erhalten wir $16k - 20f + 16 = 0$,
$k = \frac{5f}{4} - 1$. Erst für $f = 24$, also $k = 29$ erhalten wir eine ganzzahlige Lösung für m; nämlich $19m = 10f + 7 = 247$, $m = 13$. Für diese diophantische Gleichung existieren weitere ganzzahlige Lösungen. Es waren mindestens 13 Männer, 24 Frauen und 29 Kinder.

▲12▲ Aus $x + y = a$ bzw. $y = a - x$ und $x \cdot y = b$ folgt durch Einsetzen
$x(a - x) = b$, $x^2 - ax + b = 0$, also
$x_1 = \frac{1}{2} \cdot (a + \sqrt{a^2 - 4b})$ und
$x_2 = \frac{1}{2} \cdot (a - \sqrt{a^2 - 4b})$,
$y_1 = \frac{1}{2} \cdot (a - \sqrt{a^2 - 4b})$ und
$y_2 = \frac{1}{2} \cdot (a + \sqrt{a^2 - 4b})$.

▲13▲ Wir halbieren die Seite $\overline{AB}$; ihr Mittelpunkt sei D. Durch D zeichnen wir die Parallele zur Seite $\overline{AC}$; sie schneide $\overline{BC}$ in E. Durch D zeichnen wir die Parallele zur Seite $\overline{BC}$; sie schneide $\overline{AC}$ in F. Wir verbinden E mit F. Die so entstandenen vier Teildreiecke $\triangle ADF$, $\triangle DBE$, $\triangle DEF$ und $\triangle FEC$ sind untereinander kongruent. Der Nachweis dafür sei dem Leser überlassen.

▲14▲ Wir zeichnen $\overline{AB} = a = 95$ mm, verlängern $\overline{AB}$ über B hinaus um $c = 30$ mm bis E. Wir zeichnen je einen Kreis um A mit $\overline{AC} = e' = 100$ mm und um E mit $e = 125$ mm; ihr Schnittpunkt sei C. Wir zeichnen die Parallele zu $\overline{AB}$ durch C und die Parallele zu $\overline{CE}$ durch B; die beiden Parallelen mögen sich in D schneiden. Wir verbinden A mit D.

▲15▲ Wir drehen den Kreis k um P als Drehzentrum um einen Winkel der Größe 180°. Es sei E das Bild von M. Der Schnittpunkt des Bildes von k mit dem Kreis k' sei B. Die Gerade BP schneide k in A. Dann halbiert P die Strecke $\overline{AB}$.

▲16▲ Für die Länge l der geneigten Ebene gilt nach dem Satz des Pythagoras $l = \sqrt{10^2 - 7{,}5^2} = 12{,}5$. Aus der Formel $F = \frac{G \cdot h}{l}$ folgt $F = \frac{100 \cdot 7{,}5}{12} = 90$.
Damit beträgt die erforderliche Gesamtkraft 90 Pfund. Da jedoch das Seil, an dem der Mann zieht, auf dem einen Ende an einem unbeweglichen Punkt befestigt ist, benötigt der Mann nur die Hälfte dieser Gesamtkraft, also nur 45 Pfund anzuwenden.

▲17▲ 100 Last 10 Malter 4 Himten 2 Spind $1\frac{1}{2}$ Sechzehntel sind dasselbe wie 99 Last, 25 Malter, 10 Himten 1 Spind $5\frac{1}{2}$ Sechzehntel. Davon sind zu subtrahieren 48 Last 14 Malter 5 Himten 0 Spind 3 Sechzehntel. Es bleiben übrig 51 Last 11 Malter 5 Himten 1 Spind $2\frac{1}{2}$ Sechzehntel.

Lösungen zu: Mathematisches Unterrichtsbuch für höhere Mädchenschulen

▲1▲
a) $1 - \frac{6}{25} - \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{21}{100}$;
$\frac{21}{100} \cdot x = 168$, $x = 800$.
Diese Mädchenschule besuchten 800 Schülerinnen.
b) Auf die Vorschule entfallen
$\frac{800 \cdot 6}{25} = 192$, auf die Unterstufe
$\frac{3 \cdot 800}{10} = 240$, auf die Mittelstufe
$\frac{800}{4} = 200$, auf die Oberstufe 168 Schülerinnen.

▲2▲ $650 + 500 + 450 + 520 + 60 + 170 + 850 + 130 = 3330$; die Schulmappe einschließlich ihres Inhaltes hatte ein Gewicht von 3330 g bzw. 3,330 kg.

▲3▲ $5{,}86 \cdot 5{,}12 \cdot x = 41 \cdot 3{,}25$, $x \approx 4{,}4$.
Das Klassenzimmer ist etwa 4,40 m hoch.

▲4▲ $35 + 12 + 4 + 5 + 6 + 6 = 68$;

das jährliche Einkommen der Lehrerin wird durch die Steuerleistungen um 68 M geschmälert.

▲5▲ $x:9=1\frac{1}{4}:2\frac{1}{4}$, $x=5$.

In der Zeit vor der Prüfung reicht der Petroleumvorrat nur 5 Tage.

▲6▲ a) $60:5=12$; $12\cdot 90\text{ Pf}=1080\text{ Pf}=10{,}80\text{ M}$.
Für 60 l Petroleum zahlt man 10,80 M.

b) $\frac{5}{90}=\frac{1}{18}$.

Für 1 Pf erhält man $\frac{1}{18}$ l Petroleum.

▲7▲ $110+98+104+122+111=545$; das Mädchen hat in der Woche vor dem Feste 545 Nadeln gestrickt.

▲8▲ $x:30=9:15$; $x=\frac{9\cdot 30}{15}=18$.

Das Mädchen hätte die Stickerei in 18 Tagen vollendet.

▲9▲ $2\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}+\frac{3}{5}=4\frac{3}{5}$. Für den ganzen Anzug sind $4\frac{3}{5}$ m Stoff erforderlich.

▲10▲ a) $\frac{1}{5}+\frac{3}{20}+3\cdot\frac{1}{8}=\frac{29}{40}=0{,}725$.
Die Hausfrau braucht für ein Mittagsmahl 0,725 kg Fleisch.

b) $\frac{29}{40}-\frac{1}{2}=0{,}725-0{,}500=0{,}225$.
Der Familie werden täglich 0,225 kg Fleisch entzogen.

▲11▲ $3\cdot 0{,}55\text{ M}+1{,}5\cdot 0{,}46\text{ M}=2{,}34\text{ M}$.
Das Gelee kostete 2,34 M.

▲12▲ $(3\cdot 1{,}60+0{,}2\cdot 0{,}20+0{,}15:5+0{,}10)\text{ M}=4{,}97\text{ M}$; $4{,}97\text{ M}:7=0{,}71\text{ M}$.
Das Gericht kostete 0,71 M je Person.

▲13▲ $2\frac{1}{2}\cdot 6{,}2\text{ M}=15{,}50\text{ M}$.
Brennholz nach Maß ist genau so teuer wie Brennholz nach Gewicht.

▲14▲ $(6{,}80+10{,}25)\cdot 4{,}80\text{ M}=17{,}05\cdot 4{,}80\text{ M}=81{,}84\text{ M}$.
Der Preis für den Teppichläufer beträgt 81,84 M. Die Angabe der Breite (0,90 m) des Läufers ist überflüssig.

▲15▲ $156+46{,}75+11\cdot(4{,}75+1{,}60)=272{,}60$. Die Ausgaben, welche der Familie durch Krankheit auferlegt wurden, beliefen sich auf 272,60 M.

▲16▲ a) $1378+388=1766$. Zu jener Zeit waren in Berlin 1766 Wohnungen übervölkert.
b) $7815+4028=11\,843$. In derart überfüllten Wohnungen mußten 11 843 Einwohner hausen.

▲17▲ $24\,236-11\,895=12\,341$. Im Jahre 1895 standen 12 341 Wohnungen mehr leer als im Jahre 1890.

▲18▲ $20\cdot(2000-400)=20\cdot 1600=32\,000$. Eine Kolonne von 20 amerikanischen Maurern verarbeitet täglich 32 000 Mauersteine mehr als ebensoviel ihrer englischen Kollegen.

▲19▲ Das Zimmer kaufte er für 55 M.

▲20▲ Brutto: 425 kg, Tara: 63 kg, Netto: 362 kg. Es sind 362 kg Chinarinde zu verzollen.

▲21▲ $1404:52=27$. Der Hausdiener muß jedesmal 27 Kisten Zigarren aufladen.

▲22▲
$\frac{4}{320}=\frac{1}{80}$ der Gewürzproben in Mainz,
$\frac{13}{143}=\frac{1}{11}$ der Butterproben in Elberfeld,
$\frac{5}{50}=\frac{1}{10}$ der Butterproben in Würzburg,
$\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$ der Wurstproben in Mannheim,
$\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ der Fleischproben in Görlitz
mußten beanstandet werden.

▲23▲ $(4\cdot 1{,}7+6\cdot 1{,}9+18\cdot 2{,}1):28=2$. Die Hausfrau zahlte für Schweinefleisch einen Durchschnittspreis von 2 M je kg.

▲24▲ $5{,}10:0{,}015=340$. Um eine Prämie von 5,10 M zu erzielen, müssen 340 kg Zucker verkauft werden.

▲25▲ $13\cdot(15\cdot 0{,}14\text{ M}+25\cdot 0{,}24\text{ M})=105{,}30\text{ M}$. Die vierteljährliche Versicherung der Arbeiter und Arbeiterinnen beträgt 105,30 M.

▲26▲ $\frac{5\cdot 584}{365}\text{ kg}=8\text{ kg}$. Von einer Kuh hat man im Durchschnitt täglich 8 kg Milch zu erwarten.

▲27▲ $\frac{9}{100}\cdot x=15\,138$, $x=168\,200$;
$\frac{17}{625}\cdot y=5219$, $y=191\,875$.
Im Jahre 1894 waren in Hamburg 168 200 Gelasse, im Jahre 1902 waren 191 875 Gelasse zu vermieten.

▲28▲ $\left(4\frac{1}{2}\cdot 13\frac{1}{5}\cdot 5\frac{7}{50}\right):22=13{,}878$.
Pro Person ergeben sich 13,878 m³ Luft.

▲29▲ $x:9=600:800$; $x:9=3:4$;
$x=\frac{9\cdot 3}{4}=6\frac{3}{4}$. Der Proviant für 800 Mann reicht für $6\frac{3}{4}$ Monate.

▲30▲ $500-(2\cdot 107+1\cdot 193)=93$.
Der Pfarrer mußte 93 Pf aus seiner Tasche zulegen.

▲31▲ $10\cdot 0{,}8\text{ m}=8\text{ m}$. 8 m in der Natur entsprechen 1 m auf der Karte. Das Verjüngungsverhältnis der Kartenaufnahme beträgt 1 : 8.

▲32▲ $82\frac{\text{km}}{\text{h}}:3\frac{1}{2}\text{ h}=287\text{ km}$.
Diese Bahnhöfe sind 287 km voneinander entfernt.

▲33▲ $x:86\frac{1}{4}=\frac{3}{5}:\frac{3}{8}$, $x=138$.
Der Turm der Peterskirche in Rom ist 138 m hoch.

▲34▲
$\frac{1}{0{,}34}-\frac{1}{1{,}435}=2{,}94-0{,}69=2{,}25$.
Die Strecke von 1 km durchläuft der Schall im Wasser um rund 2,25 Sekunden schneller als in der Luft.

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ Sechzehn Spieler nehmen an einem „k. o." Tennis-Turnier teil. Jeder Spieler spielt sein erstes Spiel gegen einen anderen Spieler und der Gewinner dieses Spiels kommt in die zweite Runde. Es gibt keine Unentschieden und der Verlierer scheidet aus. Dieser Prozeß wird in der zweiten Runde wiederholt und weitergeführt bis nur ein Gewinner übrig bleibt. Wie viele Spiele sind insgesamt durchgeführt worden?

Lösung: In der ersten Runde spielen 16 Spieler 8 Spiele. In der zweiten Runde spielen die 8 Gewinner der ersten Runde 4 Spiele. Die vier Gewinner der zweiten Runde spielen 2 Spiele in der dritten Runde. In der vierten Runde spielen die zwei Gewinner der dritten Runde ein Spiel gegeneinander, um den Turniergewinn zu ermitteln. Die Zahl der insgesamt gespielten Spiele ist $8+4+2+1=15$.
Von den 16 Spielern kann nur einer Gesamtsieger sein, so daß 15 Spieler Verlierer sein müssen. Um 15 Verlierer zu ermitteln, müssen 15 Spiele durchgeführt werden.

▲2▲ Nehmt eine sechsstellige Zahl, die durch eine der Zahlen 7, 13, 11, 37 teilbar ist. Streicht ihre erste Ziffer und hängt sie als letzte Ziffer an.
Weist nach, daß die so erhaltene Zahl genau dieselben Teiler aus obiger Liste hat wie die ursprüngliche!

Lösung: Die sechsstellige Zahl sei A, ihre erste Ziffer a. Wenn man die erste Ziffer streicht, kann man die entstandene Zahl in der Form $A-100\,000a$ schreiben. Die Zahl, die man daraus durch Anhängen der Ziffer a erhält ist
$10(A-100\,000a)+a$ bzw.
$10A-999\,999a$.
Es ist aber $999\,999=7\cdot 11\cdot 13\cdot 37\cdot 27$.
Wenn also A durch einen dieser Faktoren teilbar ist, so ist es auch die neue Zahl.

▲3▲ Ein Flugzeug startet um 7 Uhr von Paris-Orly und fliegt nach Marseille-Marignane. Seine konstante Geschwindigkeit beträgt 680 km/h. Ein anderes Flugzeug startet um 7.30 Uhr von Marseille-Marignane und fliegt nach Paris-Orly. Seine konstante Geschwindigkeit beträgt 520 km/h. Die Entfernung von Paris-Orly nach Marseille-Marignane beträgt 720 km.
a) Zu welcher Zeit begegnen sich beide Flugzeuge?
b) In welcher Entfernung von Paris-Orly findet die Begegnung statt?

Lösung: Berücksichtigen wir, daß ein Flugzeug bereits 7 Uhr von Paris-Orly startet, so haben beide Flugzeuge zusammen von 7.30 Uhr an eine Strecke von 720 km − 340 km zurückzulegen, bevor sie sich kreuzen, daraus folgt
$720-340=680\cdot t+520\cdot t$
(t in Stunden) und damit $t=\frac{19}{60}$.
a) Die Flugzeuge kreuzen sich um 7.49 Uhr.
b) Die Flugzeuge begegnen sich etwa 555 km vor Paris-Orly entfernt.

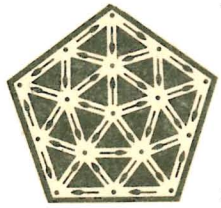
▲4▲ Der Wert der Zeichen
Ein gleiches Zeichen bedeutet immer eine gleiche Ziffer, und jede geometrische Figur enthält die gleiche Summe.
Ermitteln Sie diese!

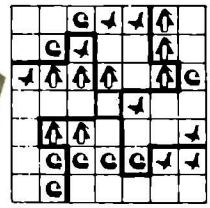
Lösung: In jedem Sechseck ist die Summe 28 mit Treff = 3, Karo = 6, Herz = 4 und Pik = 5.

Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

Berlinbummel
Die Abwandlung des bekannten Eulerschen Brückenproblems ist nicht lösbar. Wenn man vom Alex zum Brandenburger Tor gehen will, muß man eine Brücke zweimal überqueren.

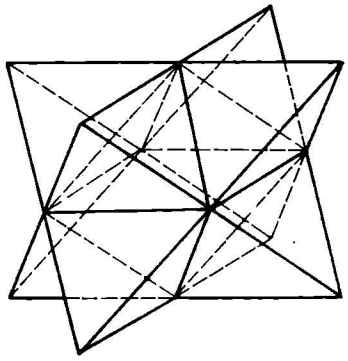
Nachgedacht – mitgemacht
a) b)



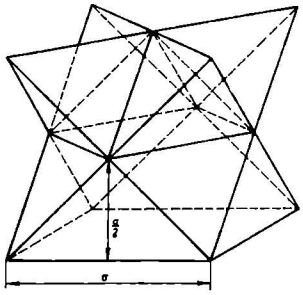


Rätselspaß mit π
Die Mädchen heißen: Anna Schmidt, Berta Müller (Schwester von Ulf Müller), Cäcilie Müller (Schwester von Ralf Müller), Dora Fischer.

Unsere Mathematikaufgabe
Der Körper wird aus zwei kongruenten, einander symmetrisch durchdringenden regulären Tetraedern gebildet (Bild 1).

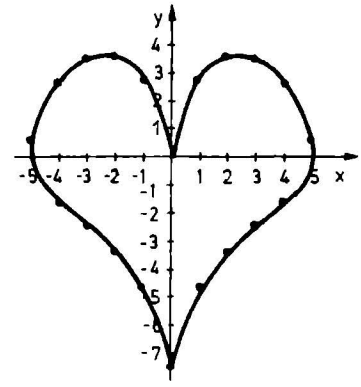


Man könnte den Körper auf folgende Weise anfertigen: Von einem quadratischen Prisma mit der Grundkante a und der Höhe $0{,}5a$ werden die vier oberen Körperecken so abgeschnitten, daß die verbleibende Deckfläche ein Quadrat mit der Seite $0{,}5a\sqrt{2}$ ist. Auf diese Deckfläche



wird eine quadratische Pyramide mit der Grundkante $0{,}5a\sqrt{2}$ und der Höhe $0{,}5a$ gesetzt. Auf die Seitenflächen dieser Pyramide werden regelmäßige Tetraeder mit der Kantenlänge $0{,}5a\sqrt{2}$ gesetzt (Bild 2).

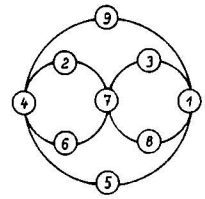
Schwierig
Die Funktionen ergeben zusammen eine herzförmige graphische Darstellung.



x	0	±1	±2	±3	±4	±5
y_1	0	2,923	3,54	3,4	2,785	0,604
y_2	−7,5	−4,423	−3,33	−2,595	−1,71	0,604

Alle knobeln mit
Reihenfolge der Zahlengruppen:
Außenkreis – linker Innenkreis – rechter Innenkreis:

3457	2197	6481	2467	3187	5491
4357	1297	6362	1387	4267	5392
4762	5392	1783	1782	6382	4753
2791	6481	3754	3781	5491	2764
6382	1792	4357	5392	4762	1387
6481	1791	3457	und Abb.		



Wann klingelt es wo?
Die Anrufe kommen in Berlin zu folgenden Zeiten an:
Moskau, 14. 3.; 9.00 Uhr – Tokio, 15. 3.; 23.00 Uhr – Delhi, 17.3.; 15.30 Uhr – Brasilia, 18. 3.; 21.00 Uhr – Mexico, 18. 3.; 12.00 Uhr.
Die Differenz der Ortszeiten der genannten Städte gegenüber der Ortszeit von Berlin betragen:
Moskau +2 h; Tokio +8 h; Delhi +4 h 30 min; Brasilia −4 h; Mexico −8 h.

Denken · Raten · Knobeln
a) Die natürliche Zahl lautet:
1 023 456 789.

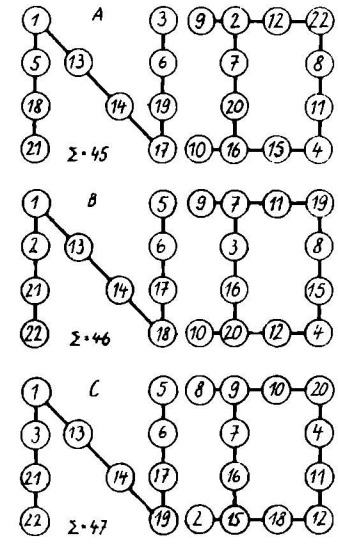
b)

4	7	10	13
9	14	3	8
5	2	15	12
16	11	6	1

Raten und rechnen

5332	:	62	=	86
−		·		+
1111	+	48	=	1159
4221	−	2976	=	1245

Magische ND-Knobelei



Karo-Kisten
Zu der Abwicklung gehört Würfel C.

Mathe-Knobelei
Läufer: l, Springer: s;
Geschwindigkeiten:

$$v_l = \frac{100\text{ m}}{10{,}3\text{ s}} = 9{,}7\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\ (\text{rd. } 35\text{ km/h})$$

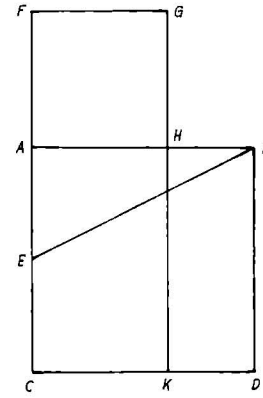
$$v_s = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}\ \text{ mit }\ g = 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

und $h = 10$ m $\quad s = \sqrt{196{,}2\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \approx 14{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

(rd. 50,4 km/h),
also $v_s > v_l$.

Lösungen zu:
Sechs Aufgaben von Euklid
Heft 4/87

▲1▲ Man konstruiere über $\overline{AB}$ das Quadrat $ACDB$ und halbiere $\overline{AC}$; der Mittelpunkt von $\overline{AC}$ sei E. Man verbinde B mit E. Der Kreis um E mit dem Radius $\overline{EB}$ schneide die über A hinaus verlängerte Strecke $\overline{CA}$ in F. Man konstruiere über $\overline{AF}$ das Quadrat $AHGF$. Die Gerade GH schneide $\overline{CD}$ in K. Dann hat man $\overline{AB}$ in H so geteilt, daß $\overline{AB} \cdot \overline{BH} = \overline{AH}^2$ gilt. Die Strecke $\overline{AB}$ habe die Länge a, also $\overline{AE}$ die Länge $\frac{a}{2}$, $\overline{BE}$ die Länge $\frac{a}{2}\sqrt{5}$ nach dem Satz des Pythagoras, $\overline{AF}$ die Länge



$\frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\cdot(\sqrt{5}-1)$

und $\overline{BH}$ die Länge

$a - \frac{a}{2}\cdot(\sqrt{5}-1) = \frac{a}{2}\cdot(3-\sqrt{5})$.

Für den Flächeninhalt des Rechtecks $BHKD$ gilt deshalb

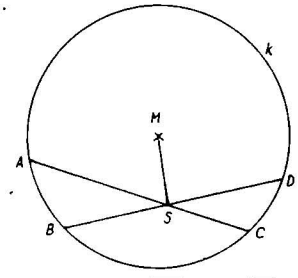
$A_R = a\cdot\frac{a}{2}\cdot(3-\sqrt{5}) = \frac{a^2}{2}(3-\sqrt{5})$;

für den Flächeninhalt des Quadrates $AHGF$ gilt

$A_Q = \frac{a^2}{4}(\sqrt{5}-1) = \frac{a^2}{4}(6-2\sqrt{5})$

$= \frac{a^2}{2}(3-\sqrt{5})$, also $A_R = A_Q$.

▲2▲ Im abgebildeten Kreis k mit dem Mittelpunkt M mögen sich zwei nicht durch den Mittelpunkt gehende Sehnen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ im Punkt S schneiden. Wir verbinden M mit S. Würde S die Sehne $\overline{AC}$ halbieren, dann müßte der Winkel MSA ein rechter sein. Würde S die Sehne $\overline{BD}$ halbieren, dann müßte Winkel MSB ebenfalls ein rechter sein. Das heißt, die Punkte A und B müßten zusammenfallen. Dies ist aber nicht möglich, da die Sehnen sich nach Voraussetzung in S schneiden sollen.

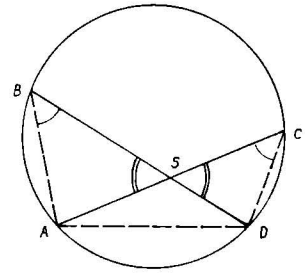


▲3▲ Die Sehnen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ mögen sich in S schneiden. Als Peripheriewinkel über der Sehne $\overline{AD}$ sind die Winkel $\sphericalangle ABD$ und $\sphericalangle ACD$ kongruent. Als Scheitelwinkel sind die Winkel $\sphericalangle ASB$ und $\sphericalangle CSD$ ebenfalls kongruent. Deshalb gilt

$\triangle ASB \sim \triangle CSD$.

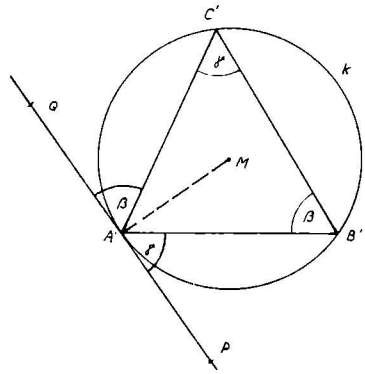
Daraus folgt $\overline{AS}:\overline{BS} = \overline{DS}:\overline{CS}$ bzw.

$\overline{AS}\cdot\overline{CS} = \overline{BS}\cdot\overline{DS}$.



▲4▲ Auf dem Kreis k legen wir einen beliebigen Punkt A' fest. Im Punkte A' konstruieren wir die Tangente $QA'P$ an den Kreis k. In A' tragen wir an $A'P$ den Winkel der Größe γ an, dessen freier Schenkel k in B' schneidet. In A' tragen wir an $A'Q$ den Winkel der Größe β an, dessen freier Schenkel k in C' schneidet. Wir verbinden B' mit C'. Da ein Sehnen-Tangenten-Winkel kongruent ist jedem Peripheriewinkel über demselben Kreisbogen, hat Winkel $A'C'B'$ die Größe γ, Winkel $A'B'C'$ die Größe β.

Daraus folgt $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.



▲5▲ Die Geraden FG und CD mögen sich in H, die Geraden FE und CB in K schneiden. Auf Grund der Voraussetzungen liegen die Punkte H, A und K auf einer Geraden. Nach dem Strahlensatz gilt $(\overline{KB}+\overline{BC}):\overline{KB} = (\overline{CD}+\overline{DH}):\overline{AB}$ bzw. wegen

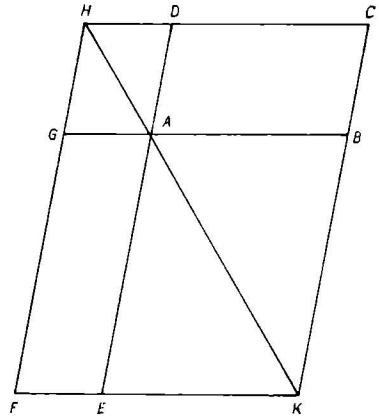
$\overline{KB} = \overline{AE}$ und $\overline{DH} = \overline{AG}$ und $\overline{CD} = \overline{AB}$

$(\overline{AE}+\overline{AD}):\overline{AE} = (\overline{AB}+\overline{AG}):\overline{AB}$, also

$1 + \overline{AD}:\overline{AE} = 1 + \overline{AG}:\overline{AB}$,

also $\overline{AD}:\overline{AE} = \overline{AG}:\overline{AB}$ und somit auch

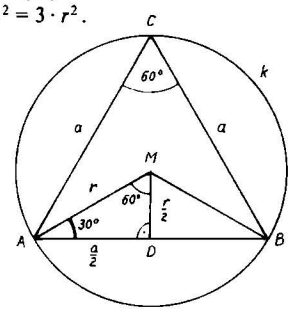
$\overline{AB}:\overline{AE} = \overline{AG}:\overline{AD}$.



▲6▲ Wir verbinden M mit A und B, fällen das Lot $\overline{MD}$ von M auf $\overline{AB}$. Der Zentriwinkel AMB ist doppelt so groß wie der Peripheriewinkel ACB. Deshalb hat der Winkel AMD die Größe 60°, der Winkel MAD die Größe 30°. Im rechtwinkligen Dreieck ADM gilt somit $\overline{AM} = 2\cdot\overline{DM}$. Nach dem Satz des Pythagoras gilt somit

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2$, $\frac{a^2}{4} + \frac{r^2}{4} = r^2$,

also $a^2 = 3\cdot r^2$.



Lösungen zum alpha-Wettbewerb
Heft 2/87

Ma 5 ■ 2778 Es gibt 6 verschiedene Wege von 40 m Länge, 4 verschiedene Wege von 60 m Länge und 2 verschiedene Wege von 80 m Länge, um von A nach E zu wandern.

Ma 5 ■ 2779 a) Halbiert man ein herausgeschnittenes Dreieck, so lassen sich die beiden Hälften zu einem Quadrat mit 2 cm Seitenlänge zusammensetzen. Die vier Dreiecke haben einen Flächeninhalt von $4\cdot 4\ \text{cm}^2 = 16\ \text{cm}^2$. Die Seite des großen Quadrates ist $(2+4)\ \text{cm} = 6\ \text{cm}$ lang; sein Flächeninhalt beträgt $36\ \text{cm}^2$. Die übriggebliebene Fläche beträgt somit $20\ \text{cm}^2$.

b) Der Unterschied der Flächeninhalte beträgt $4\ \text{cm}^2$.

Ma 5 ■ 2780 Eine mögliche Lösung ist die folgende, in der für gleiche Ziffern gleiche Farben zu denken sind. Es werden mindestens vier Farben benötigt.

1	3	1	3	1
2	4	2	4	2
1	3	1	3	1
2	4	2	4	2
1	3	1	3	1

Ma 5 ■ 2781 a) Vorgänger und Nachfolger der Zahl x sind entweder beide gerade oder beide ungerade. Dann ist die Summe aus ihnen stets gerade. 1987 ist aber eine ungerade Zahl. Daher kann es keine solche Zahl x geben.

b) Man dividiert die Jahreszahl durch 2. Die Summe aus dem Vorgänger und Nachfolger des Quotienten ist dann die Jahreszahl.

Ma 5 ■ 2782 Wegen des Übertrags gilt $A = 2$. Dann muß B wegen des Übertrags 7 sein. Somit bleibt für C die Ziffer 1.
Wir erhalten $271 + 27 + 2 = 300$.

Ma 5 ■ 2783
Es gibt folgende vier Möglichkeiten:

9898	9798	9878	9178
−7911	−7811	−7891	−7191
1987	1987	1987	1987

Ma 6 ■ 2784 Angenommen, der Sohn sei n Jahre, die Mutter also $3n$ Jahre und der Vater $(3n+3)$ Jahre, alle drei zusammen somit $(7n+3)$ Jahre alt; dann gilt
$7n + 3 = 108$, $7n = 105$, $n = 15$.
Der Sohn ist 15, die Mutter 45, der Vater 48 Jahre alt.

Ma 6 ■ 2785 Es seien a^3, b^3, c^3 die Rauminhalte der Würfel W_1, W_2, W_3.
Wegen $c^3 = 3a^3$ und $b^3 = 6a^3$ gilt
$a^3 + 6a^3 + 3a^3 = 90\ \text{cm}^3$, $10a^3 = 90\ \text{cm}^3$,
$a^3 = 9\ \text{cm}^3$, also $c^3 = 27\ \text{cm}^3$, $c = 3\ \text{cm}$.
Daraus folgt weiter
$6c^2 = 6\cdot 9\ \text{cm}^2 = 54\ \text{cm}^2$. Der Würfel W_3 hat eine Oberfläche von $54\ \text{cm}^2$.

Ma 6 ■ 2786 Es sei $7n$ die gesuchte Zahl; dann ist $7n + 1$ durch 2, 3, 4, 5 und 6 teilbar. Das k. g. V. von 2, 3, 4, 5, 6 ist 60. Die Zahlen 60, 120, 180, ... sind deshalb zu untersuchen.
Der Fall $7n + 1 = 60$, $7n = 59$ entfällt, da 59 nicht durch 7 teilbar ist.
Der Fall $7n + 1 = 120$, $7n = 119$, $n = 17$ stellt eine Lösung dar.
Die Zahl 119 ist die kleinste Zahl mit den geforderten Eigenschaften.

Ma 6 ■ 2787 Wegen $36 = 4\cdot 9$ müssen die Zahlen durch 4 und 9 teilbar sein. Wegen

der Teilbarkeit durch 4 kommen die Zahlen 1*00, 1*20, 1*40, 1*60, 1*80 in Frage. Wegen der Teilbarkeit durch 9 muß die Quersumme der Zahlen durch 9 teilbar sein. Das trifft für die Zahlen 1800, 1620, 1440, 1260 und 1080 zu.

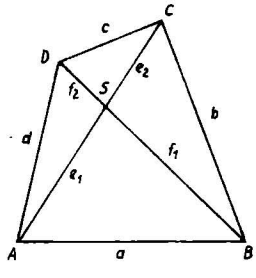
Ma 6 ■ 2788 Aus $1986 = 1 \cdot 1986$ folgt $a = 1$ und $b = 1986 - 1 = 1985$;
aus $1986 = 2 \cdot 993$ folgt $a = 2$ und $b = 993 - 2 = 991$; aus $1986 = 3 \cdot 662$ folgt $a = 3$ und $b = 662 - 3 = 659$;
aus $1986 = 6 \cdot 331$ folgt $a = 6$ und $b = 331 - 6 = 325$.
Es existieren genau vier solcher Zahlenpaare $(a; b)$; sie lauten
(1; 1985), (2; 991), (3; 659), (6; 325).

Ma 7 ■ 2789 Wegen $40^2 = 1600$ gilt $A < 4$. Sowohl $A = 3$ als auch $A = 2$ entfallen, da keine Quadratzahl auf die Ziffer 3 bzw. 2 endet. Daher gilt $A = 1$. Da nur das Quadrat von 1 bis 9 auf die Ziffer 1 endet und $B \neq 1$ sein muß, gilt $B = 9$.
Aus $19^2 = 361$ folgt $C = 3$ und $D = 6$.

Ma 7 ■ 2790 Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:
(1) $x + 90 = 450 - 90$, $x = 270$ (cm^3 Wasser)
(2) $x - 0{,}2x = 450 + 0{,}2x$; $x = 750$ (cm^3 Wasser)

Ma 7 ■ 2791 Die sechsstellige Zahl sei $z = 1 \cdot 10^5 + x$; die daraus zu bildende neue Zahl ist dann $z' = 10x + 1$. Ferner gilt $10x + 1 = 3 \cdot (10^5 + x)$; $10x + 1 = 300\,000 + 3x$, $7x = 299\,999$, $x = 42\,857$.
Die beiden Zahlen sind $z = 142\,857$ und $z' = 428\,571$, und es gilt $3 \cdot 142\,857 = 428\,571$.

Ma 7 ■ 2792 Es sei S der Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ des Vierecks $ABCD$, $\overline{AS}$ habe die Länge e_1, $\overline{CS}$ die Länge e_2, $\overline{BC}$ die Länge f_1, $\overline{DS}$ die Länge f_2. Dann gilt
$e_1 + f_1 > a$, $e_2 + f_1 > b$, $e_2 + f_2 > c$, $e_1 + f_2 > d$, also
$2e_1 + 2e_2 + 2f_1 + 2f_2 > a + b + c + d$
und somit $2 \cdot (e_1 + e_2 + f_1 + f_2) = 2(e + f) > a + b + c + d$ bzw.
$e + f > \frac{a + b + c + d}{2}$.
Ferner gilt $e < a + b$, $e < c + d$, $f < a + d$, $f < b + c$, also
$2(e + f) < 2(a + b + c + d)$ bzw.
$e + f < a + b + c + d$. Daraus folgt
$\frac{a + b + c + d}{2} < e + f < a + b + c + d$.



Ma 8 ■ 2793 Es sei a die Anzahl der Flaschen, die Arthur, b die Bert, d die Dieter und e, die Ede sammelten.
Dann gilt
(1) $b < d$,
(2) $a + e = b + d$
(3) $a + d < b + e$.
Aus (2) und (3) folgt durch Addition $2a + d + e < 2b + d + e$, $2a < 2b$, also $a < b$. Wegen (1) gilt dann $a < b < d$.
Aus (2) und (3) folgt durch Subtraktion $e - d > d - e$, $2e > 2d$, also $d < e$.
Deshalb gilt $a < b < d < e$.
Arthur sammelte die wenigsten, Ede die meisten Flaschen.

Ma 8 ■ 2794 $63! - 61!$
$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 63 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 61$
$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 61 \cdot (62 \cdot 63 - 1)$
$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 61 \cdot 3905$
$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 61 \cdot 55 \cdot 71$

Ma 8 ■ 2795 Aus $A = \frac{b \cdot r}{2}$ und $u = 2r + b$ folgt nach Voraussetzung
$\frac{b \cdot r}{2} = 2r + b$, $b \cdot r = 4r + 2b$,
$b \cdot r - 2b = 4r$, $b \cdot (r - 2) = 4r$,
$b = \frac{4r}{r - 2}$, $b = 4 + \frac{8}{r - 2}$.
Nur für r gleich 3, 4, 6 oder 10 wird b ganzzahlig und positiv.

r	3	4	6	10
b	12	8	6	5

Ma 8 ■ 2796 In der ersten Zeile (waagerechte Reihe) kann man wahlweise jedes der fünf Felder belegen (5 Belegungen). In der 2. Zeile kann man wegen der vorgegebenen Bedingungen nur vier Felder wahlweise belegen (zusammen mit der 1. Zeile nun 20 Belegungen). In der 3. Zeile kann man nur über drei, in der 4. Zeile über zwei Felder verfügen, und in der 5. Zeile erfüllt stets nur ein Feld die vorgegebenen Bedingungen.
Somit gibt es $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ unterschiedliche Belegungen.

Ma 9 ■ 2797 Bekannt sei a^2 ($a \in N$).
Nach den Bedingungen der Aufgabe soll gelten:
$(a + 1)^2 = a^2 + a + (a + 1)$.
Wir formen äquivalent um und erhalten
$(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$,
$(a + 1)^2 = (a + 1)^2$.
Diese Aussageform wird bei jeder Belegung von a mit einer natürlichen Zahl zu einer wahren Aussage. Da wir nur äquivalente Umformungen vorgenommen haben, ist auch
$(a + 1)^2 = a^2 + a + (a + 1)$
allgemeingültig, w. z. b. w.

Ma 9 ■ 2798 Angenommen, es waren x Geschenke zu 2,– M, y zu 3,– M und z zu 5,– M das Stück, dann gilt

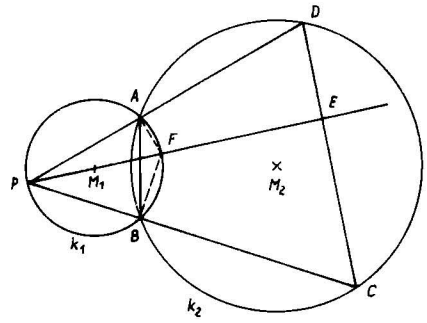
$$\begin{aligned} 2x + 3y + 5z &= 100 \\ x + y + z &= 34 \\ \hline 2x + 3y + 5z &= 100 \\ 2x + 2y + 2z &= 68 \\ \hline y + 3z &= 32 \\ 3z &= 30 + 2 - y \\ z &= 10 - \frac{y - 2}{3} \end{aligned}$$

Die folgende Tabelle gibt alle möglichen Belegungen für x, y, z an:

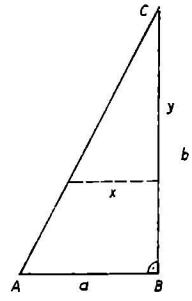
x	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4
y	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29
z	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Nur für $x = 16$, $y = 11$, $z = 7$ gilt $x > y > z$. Es wurden 16 Geschenke zu 2,– M, 11 Geschenke zu 3,– M und 7 Geschenke zu 5,– M überreicht.

Ma 9 ■ 2799 Die Gerade PM_1 schneide k_1 in F. Nun gilt $\sphericalangle BPF = \sphericalangle BAF$ als Peripheriewinkel über demselben Bogen BF, und der Winkel PAF habe die Größe 90° (Thaleskreis). Der Winkel BAF habe die Größe φ. Dann hat Winkel BAD die Größe $90° + \varphi$. Viereck $ABCD$ ist ein Sehnenviereck. Folglich hat Winkel BCD die Größe $90° - \varphi$. Da im Dreieck PCE Winkel CPE die Größe φ hat, muß Winkel PEC die Größe 90° haben, d. h., $PE \perp CD$.

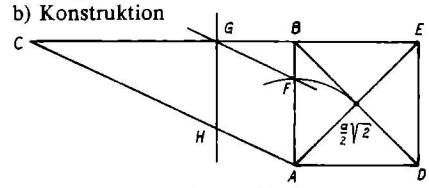


Ma 9 ■ 2800 a) Nach der Skizze gilt



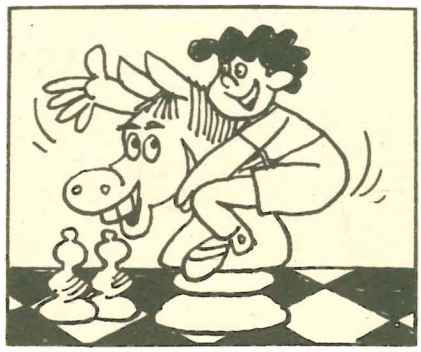
$\frac{xy}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ab}{2}$ bzw. $\frac{xy}{2} = \frac{ab}{4}$ (1)
und $x : y = a : b$ (2)
Es ist also
$x^2 = \frac{ab}{2y} \cdot \frac{ay}{b}$, $x^2 = \frac{a^2}{2}$, $x = \frac{a}{2}\sqrt{2}$.

b) Konstruktion



c) Eine mögliche Beschreibung:
Man zeichnet über $\overline{AB}$ das Quadrat, so daß dieses mit dem Dreieck ABC die Seite $\overline{AB}$ und keinen weiteren Punkt gemeinsam hat. Um A zeichnet man einen Kreis mit einem Radius der halben Länge von $\overline{AE}$, der $\overline{AB}$ in F schneidet. Die Parallele zu $\overline{AC}$ durch F schneidet $\overline{CB}$ in G; die Parallele zu $\overline{AB}$ durch G schneidet $\overline{AC}$ in H. $\overline{HG}$ ist die gesuchte Strecke. Der Flächeninhalt des Dreiecks HGC ist gleich dem Flächeninhalt des Vierecks (Trapezes) $ABGH$.

Fortsetzung folgt in Heft 6/87

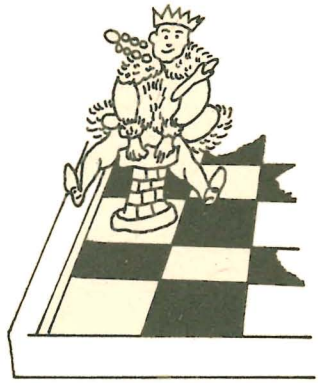


4. alpha-Schachwettbewerb

Es beteiligten sich 484 Leser. Die volle Punktzahl zu den Aufgaben Nr. 1 bis Nr. 7 erzielten 170 Teilnehmer. Erfreulich war wiederum der breite Altersquerschnitt der Wettbewerbsteilnehmer. Er umfaßte den Bereich von 7 Jahre (Axel Märker, Greifswald und Thomas Neumann, Berlin) bis 83 Jahre (Erwin Huth, Schulpforte).

Neben den Lösungen brachten auch viele Leser ihr Gefallen am alpha-Schachwettbewerb zum Ausdruck. „Das Lösen der Schachaufgaben bereitete mir viel Spaß und Freude, obwohl ich ganz schön zu knobeln hatte" (Karen Wendeborn, Dessau). „Euren Schachwettbewerb zu lösen, hat mir sehr viel Spaß gemacht" (Wiete Dorn, Jena). „Es war mir wieder ein wahres Vergnügen, die Aufgaben des alpha-Schachwettbewerbs zu lösen" (Hans Burbach, Hilversum/Niederlande).

Mit einer Zeichnung gab Richard Nacke (Dresden) seinen Spaß und Dieter Koch (Arnstadt) mit einigen Versen seine Freude an dem Wettbewerb zu verstehen.



Der alpha-Wettbewerb ist Klasse,
bringt Schach für viele Mathe-Asse.
Diese Rateform in vierter Runde
ist Denksport für manch volle Stunde.
Ich löste sieben Schachaufgaben,
hiermit könnt ihr's schriftlich haben.
Auf den wichtigsten Zug als Beginn
weisen meine Zeilen hin.
Bei der ersten Aufgabe war das Brett fast leer,
Dame nach a1 war wirklich nicht schwer.
Die zweite Lösung hatte einen kleinen
Aufwand;
das Damenopfer auf c6 schnell ich fand.
Das dritte Problem, eine leichte Knobelei,
Abzugsschach durch König nach g3.
Bei Nummer vier mit manchen Abweg
nur Dame nach h6 letztendlich geht.
Für die fünfte Lösung war erneut gefragt der Mut,
denn nur mit dem Damenopfer auf h7 geht's gut.
Das sechste Problem erscheint für mich unlösbar,
ob es wohl ein Dreizüger war?
Die Lösung zur Aufgabe 7 war schnell erreicht,
mit dem Dameschach auf h1 ging's leicht.
Die Anstrengung für die Zusatzaufgabe blieb gering,
die Lösung, Dame nach e4, auf Anhieb ging.

Lösungen

▲1▲	1. Da1	Kh7	
	2. Dg7	matt	(2 P.).

Dieses kleine Schachproblem von W. A. Shinkman (*Dubuque Chess Journal*, 1873) erwies sich für fast alle Teilnehmer als leicht zu lösen.

▲2▲	1. Dc6+	b:c6, L:c6	
	2. Sa6	matt	(2 P.).
▲3▲	1. Kg3+	Lh5	
	2. T:h5+	K:h5/g:h5	
	3. Dh1/Df6	matt	(3 P.).
▲4▲	1. Dh6	Tag8	
	2. D:h7+	T:h7	
	3. T:g8	matt	(4 P.).

Mehrere Löser gaben hier
1. S:h7 T:h7/Kg8
2. Df6+/Dh6 Tg7/beliebig
3. D:g7/Sf6 matt als Lösung an.
Jedoch führt 1. S:h7 nach 1. ... L:f5 (!) nicht zum Matt im dritten Zug.

▲5▲	1. D:h7+	K:h7	
	2. Th4+	Kg7	
	3. Lh6+	Kh7, Kh8	
	4. Lf8	matt	(4 P.).
▲6▲	1. Th8	Tf1 beliebig	
	2. S:f2	matt	(1 P.).
	1. ...	La3, Lc5	
	2. Sc3	matt	(1 P.).
	1. ...	Ld2, Le1	
	2. S:d6	matt	(1 P.).
	1. ...	f3	
	2. Dh7	matt	(1 P.).
	1. ...	e:d4	
	2. Te8	matt	(1 P.).

Dieses Problem von dem populären Dresdner Schachproblemkomponist Hans Vetter (1894 bis 1973) bereitete dem Großteil der Löser die meiste Mühe und es gab viele falsche Lösungen. Zugwechsel ist der Inhalt dieses Zweizügers. Wäre Schwarz zuerst am Zuge
1. ... Tf1 beliebig/La3/Le1/e:d4,
so könnte Weiß gleich daraufhin mit
2. S:f2/Sc3/S:d6/T:f4 jeweils mattsetzen. Aber Weiß ist zuerst am Zuge und verfügt weder über einen neutralen Wartezug, noch über die Möglichkeit eine Mattdrohung aufzustellen. Mit dem feinen Schlüsselzug 1. Th8 kommt Weiß seiner Zugpflicht nach, erhält die Mattdrohungen für die schwarze Zugpflicht aufrecht und bahnt der Dame den Weg nach h7.

▲7▲	1. Dh1+	K:h1	
	2. S:g4	Lh2	
	3. S:f2	matt	(3 P.).
	1. ...	Kg3	
	2. Df3+	Kh4/Kh2	
	3. D:g4/S:g4	matt	(3 P.).

Auch mit dieser Aufgabe (aus „New York Albion", 1858) konnte der berühmte Schachproblemkomponist und Rätselautor Sam Loyd (1841 bis 1911) wiederum viele Teilnehmer erfreuen. Das überraschende Hineinziehungsopfer der weißen Dame in der Schachbrettecke begeistert auch heute noch die Schachfreunde.

▲Z▲	
1. De4 (droht 2. D:a8 matt)	
1. ...	Tb8
2. Dh4	Kd8/Kf8/O–O
3. D:e7+/D:e7+, D:h5/Dg5+	Kc8/Kg8, beliebig/Kh8
4. Dd7/Df7(g7), Df7/Dg7	matt.
1. ...	Tc8
2. Dh4	Kf8/O–O
3. D:h5, D:e7+/Dg5+	beliebig, Kg8/Kh8
4. Df7, Df7(g7)/Dg7	matt.
1. ...	Td8
2. Dc6+	Td7/Kf8
3. D:d7+/Df3+	Kf8/Kg8, Ke8
4. Dc8(d8)/Df7	matt.
1. ...	O–O
2. Dg2+	Sg3
3. D:g3+	Kh8
4. Dg7	matt.

Zahlreiche Löser gaben zu der Aufgabe von Günter Schiller (*Schach*, 1970) als Lösung
1. Dh4 Kd8; 2. De4, D:h1 Tb8/Tc8/c6
3. Dc6 nebst 4. Dd7 matt an.

Dagegen hat jedoch Schwarz eine gute Verteidigung parat – 1. ... O–O–O! Nach dieser langen Rochade wäre in einer Partie der Gewinn für Weiß wohl dahin.

Diese Aufgabe gibt uns Anlaß, noch auf eine Schachregel hinzuweisen: In einer beliebigen Schachaufgabe sind jeweilige Rochadeformen durchführbar, so lange nicht aus der Stellung heraus nachgewiesen werden kann, daß der betreffende König oder Turm schon einmal gezogen haben.

Unter den Einsendern, die die volle Punktzahl erzielten, sowie unter jenen bis zum Alter von 14 Jahren, welche die Aufgaben Nr. 1 bis 4 richtig gelöst hatten, wurden folgende Gewinner ermittelt:
Claudia Bachmann (Syrau), Dennis Heuer (Eilenburg), Falk Nestler (Zschopau), Ralph Schlosser (Boßdorf), Matthias Zeitz (Karith).

Weiterhin wurden Preise unter allen Teilnehmern verlost, die zumindest eine Aufgabe korrekt gelöst hatten:
Michaela Kitta (Ziddorf), Astrid Quapp (Leipzig), Jens Schmiedek (Ammelshain), Jan Witt (Röbel), Frank Wolff (Brotterode).

Die zwei Buchpreise für die Einsender, welche alle Aufgaben einschließlich der Zusatzaufgabe richtig gelöst hatten, gehen an: Andreas Lasarow (Wittenberg) und Reiko Wöllert (Berlin).

In Heft 6/1987 folgt der 5. *alpha*-Schachwettbewerb.

H. Rüdiger

Fakten und Daten zum Berliner Bildungswesen seit 1945

1945 Ende Juni nehmen etwa 130 000 Kinder am behelfsmäßigen Unterricht teil. Von 22 740 Schulräumen der Vorkriegszeit waren nur noch 1 300 halbwegs wetterfeste Räume übrig geblieben, die meisten ohne Fensterscheiben und ohne Beleuchtung. Fast jedes zweite Kind lebte zu Hause in einer nicht heizbaren Wohnung. Mehr als 70 Prozent der Berliner Kinder verfügten nicht über ausreichendes Schuhwerk.
1. Oktober – Eröffnung aller Schulen in der Sowjetischen Besatzungszone und in Berlin. Mehr als 2 400 Neulehrer werden eingestellt.
18. Oktober – Gemeinsamer Aufruf von KPD und SPD zur demokratischen Schulreform.
1946 Juli – Eröffnung der Vorstudienanstalt (später ABF) an der Berliner Universität
1947 Juli – Einführung des 9. Schuljahres als Pflichtjahr
1948 Januar – Verbot der körperlichen Züchtigung in den Berliner Schulen
1950 Juli – III. Parteitag der SED orientiert auf Einführung der 10-Klassen-Schule und des Gegenwartskundeunterrichts
1955 April – Erste Jugendweihefeiern
1957 Produktionsarbeiter aus Berliner Betrieben werden für den Lehrerberuf gewonnen und vorwiegend als Werklehrer ausgebildet
1958 Juli – V. Parteitag der SED. Orientierung auf den Aufbau der zehnklassigen polytechnischen Oberschule
September – Einführung des Unterrichtstages in der Produktion (UTP) und des Faches „Einführung in die sozialistische Produktion" (ESP)

meinbildenden Schulen
1961 Februar – 1. Berliner Mathematikolympiade
1962 Einführung der Berufsausbildung mit Abitur
Dezember – „Mathematikbeschluß" des ZK der SED
1965 Juli – Berlin ist Gastgeber der VII. Internationalen Mathematikolympiade (IMO)
1971 Juni – VIII. Parteitag der SED legt fest, den Übergang zur allgemeinbildenden zehnklassigen Oberschulbildung bis 1975 im wesentlichen zu vollenden.
1972 In der Hauptstadt bestehen 194 Oberschulen und 20 Hilfs- und Sonderschulen mit Schulhorten
1974 Juli – Abschluß der XVI. Internationalen Mathematikolympiade im Haus des Lehrers, Berlin (Austragungsort der IMO: Erfurt)
1977 82 690 Schüler besuchen eine der mehr als 5 000 außerschulischen Arbeitsgemeinschaften
Oktober – VIII. Pädagogischer Kongreß – 1 200 Berliner Pädagogen nehmen teil
1983 Polytechnischer Unterricht wird in 93 Betrieben der Hauptstadt durchgeführt. Die Anleitung erfolgt durch 1 728 Lehrfacharbeiter sowie Lehrmeister und 301 Diplomlehrer
1986 April – XI. Parteitag der SED bestimmt die Aufgaben, die sich aus der weiteren Gestaltung der entwickelten sozialistischen Gesellschaft – eingeschlossen die Ansprüche aus der wissenschaftlich-technischen Revolution – für die inhaltliche Vervollkommnung des Bildungswesens ergeben.
1987 entstehen in Berlin 19 Schulen, 21 Sporthallen, 39 Kindergärten. Seit 1971 wurden 210 polytechnische Oberschulen gebaut. Bis 1990 werden 70 neue Schulen und 160 Kindergärten hinzukommen.

ISSN 002-6395 · alpha · Berlin 21 (1987) 5 · Seiten 97 bis 120