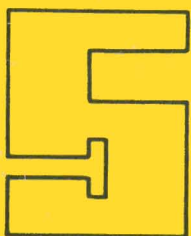
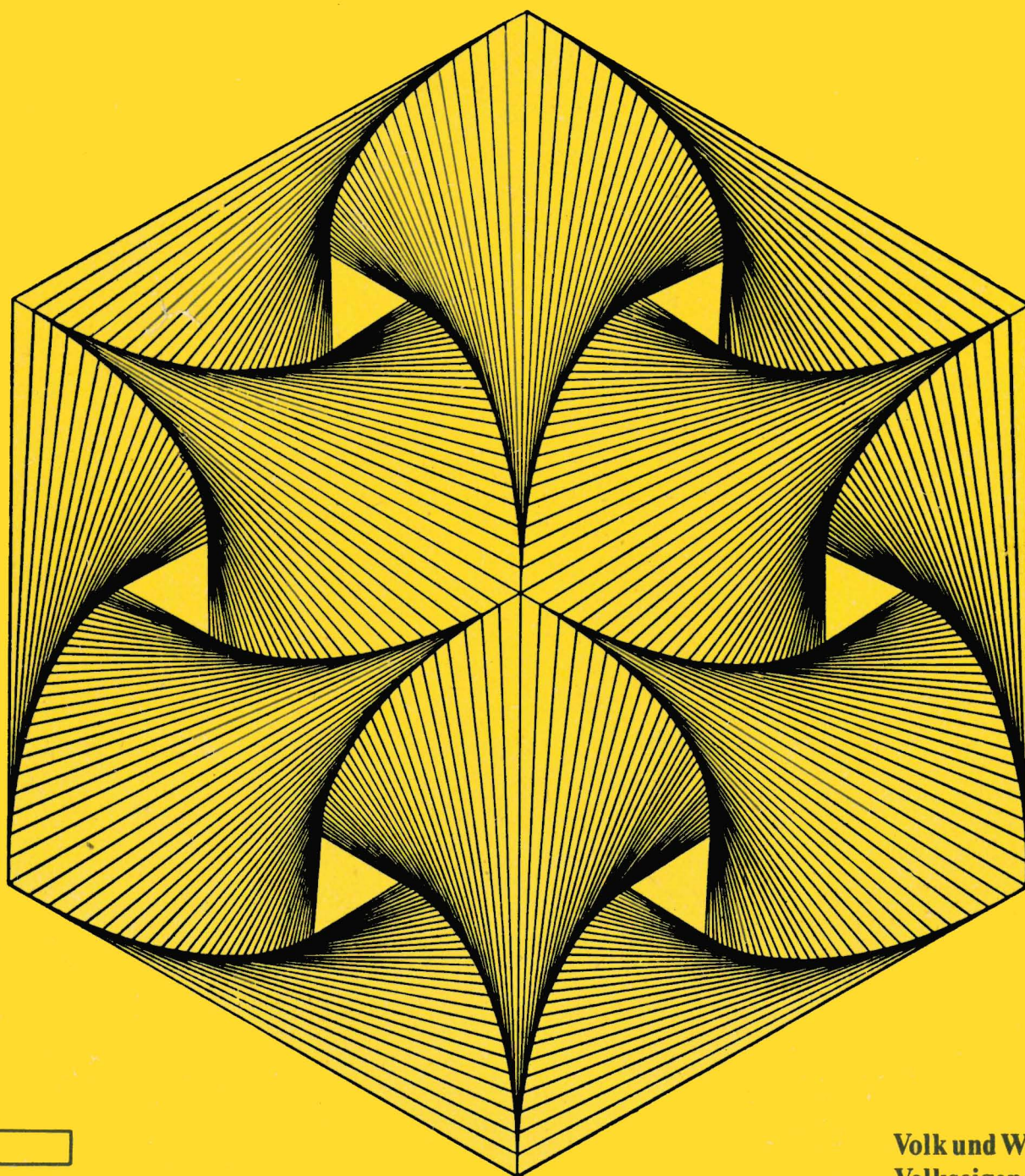


**Mathematische
Schülerzeitschrift**

alpha



**Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
12. Jahrgang 1978
Preis 0,50 M
Index 31 059**

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmal-kalden); Studienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Dozent Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (Ltg. Diplom-Lehrer C.-P. Helmholz)

Redaktion:

StR J. Lehmann, V.L.d.V (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des
Presseamtes beim Vorsitzenden des Minister-
rates der Deutschen Demokratischen Repu-
blik.

Postscheckkonto: Berlin 132626. Erschei-
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft
1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M,
im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Son-
derpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buch-
handel und der Deutschen Post entgegen-
genommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutsch-
land und Berlin(West) erfolgt über den Buch-
handel; für das sozialistische Ausland über
das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und
für alle übrigen Länder über: Buchexport
Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR
701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: J. Roßmann, Rostock (S. 103); M.
Vorbeck, Berlin (S. 108); E. Milatki, Moskau
(S. 110); Postkarte, Foto A. Kříž, Děčín
(S. 110); Eigenfoto J. Flachsmeyer, Greifswald
(S. 113); Vignetten: J. Jordan, Leipzig
(S. 116, S. 120, IV. U-Seite); Eigenfoto A.
Skopetz, Jaroslawl (S. 110); Eigenfoto U.
Reiche, Dresden (III. U-Seite)

Titelblatt: W. Fahr, Berlin

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 97 Der Vierfarbensatz [9]*
Dr. H. Pieper, Zentralinstitut für Mathematik und Mechanik der Akademie der
Wissenschaften der DDR, Berlin
- 99 Eine Aufgabe von Prof. Dr. sc. Z. A. Skopetz [10]
Pädagogische Hochschule K. O. Uschinski, Jaroslawl
- 100 Er rechnete, wie andere atmen [6]
Leonard Euler, der berühmteste Mathematiker des 18. Jh.
K. Reinhard (aus: Magazin 3/78)
- 102 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt [8]
10 Jahre Bezirksklub Mathematik Cottbus
Studienrat G. Standke, Rat des Bezirks Cottbus, Abt. Volksbildung
XI. ISTAM 1978, Beograd [10]
stud. math. J. Roßmann, Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
- 104 Ein rationalisiertes Sieb zum Feststellen von Primzahlen, Teil 2 [6]
Mathematikfachlehrer H. Franke, Zug-Langenrinne
- 107 Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen [5]
J. Lehmann, Leipzig/Th. Scholl, Berlin
- 108 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]
Wettbewerbsaufgaben Mathematik, Physik, Chemie
- 111 Bunte Basteleien [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann
- 112 Kombinatorische Betrachtungen bei Schiebepielen, Teil 2 [9]
Prof. Dr. J. Flachsmeyer, Sektion Mathematik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität
Greifswald
- 114 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann/Leipzig, H. Pätzold, Waren/Müritz
- 116 Lösungen [5]
Lösungen zum *alpha*-Wettbewerb Heft 2/78 (Fortsetzung und Schluß)
- 119 XVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR [10]
4. Stufe (DDR-Olympiade), Lösungen zu der Aufgabe 1
- III. Umschlagseite: Rosetten-Graphik [5]
Schülerin Uta Reiche, Dresden
- IV. Umschlagseite: aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht
Knobeleyen, speziell für Klasse 5/6 [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig/Th. Scholl, Berlin



Gesamtherstellung: INTERDRUCK

Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97

AN (EDV) 128 – ISSN 0002-6395

Redaktionsschluß: 27. Juni 1978

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Der Vierfarbensatz

Ein Fünffarbenspiel

Will man auf einer Landkarte die einzelnen Länder farbig kennzeichnen, so muß man zwei Länder mit einer gemeinsamen Grenze durch verschiedene Farben unterscheiden.

Im folgenden Fünffarbenspiel zeichnen zwei Spieler eine solche farbig markierte Landkarte. Man braucht ein Blatt weißes Papier und fünf Farbstifte verschiedener Farben, z. B. blau, grün, rot, braun und gelb. Der Spieler A zeichnet ein Land; der Spieler B färbt es und zeichnet ein neues Land; der Spieler A färbt es und zeichnet ein neues Land; usw. Wer zuerst eine fünfte Farbe benutzen muß, hat das Spiel verloren. Diese Spielregeln sind zu beachten:

1. Ein Land ist stets zusammenhängend, d. h., irgend zwei Punkte des Landes kann man durch einen Weg verbinden, der ganz innerhalb des Landes verläuft. (Es soll also keine Länder mit Exklaven geben.) (Bild 1)

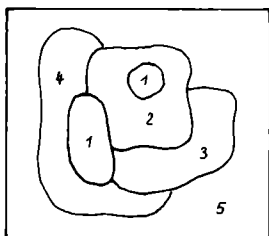


Bild 1

Landkarte mit fünf Ländern. Das Land 1 hat eine Exklave in 2. Es ist nicht zusammenhängend.

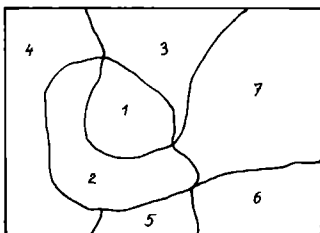


Bild 2

Landkarte mit fünf Ländern. Nachbarländer sind 1 und 3, 1 und 2, 2 und 4, 2 und 5, 2 und 7, 3 und 4, 3 und 7, 4 und 5, 5 und 6, 6 und 7. Die Länder 1 und 4, 1 und 7, 2 und 3, 2 und 6, 5 und 7 sind nicht benachbart!

2. Benachbarte Länder werden verschieden gefärbt. Unter benachbarten Ländern sind solche gemeint, die eine gemeinsame Grenze haben. Zwei Länder, die nur in einem einzigen Punkt oder in einer endlichen Anzahl von Punkten zusammentreffen, werden nicht als benachbart angesehen. (Bild 2)

Das Vierfarbenproblem

Daß wir uns im eben beschriebenen Spiel beim Färben der Landkarte auf vier Farben beschränken wollen, hat seinen Grund. Beim Färben von Landkarten (unter Beachtung der „Spielregeln“ 1. und 2.) ist man nämlich bisher stets mit vier Farben ausgekommen. Die Karte in Bild 3 kann man mit 3 Farben färben.

Bild 3

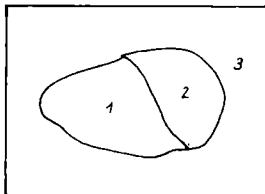
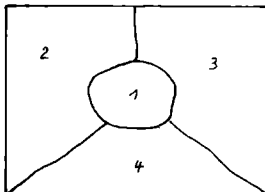


Bild 4



Auf der Karte des Bildes 4 ist jedes Land mit den übrigen drei benachbart, zur Färbung braucht man 4 Farben. Selbst kompliziertere Landkarten konnte man stets mit vier Farben färben. Daß die Färbung oft nicht leicht ist, erkennt man beim Spielen des Fünffarbenspiels. Angenommen wir haben vier Länder in der Karte des Bildes 5 bereits mit den Farben *a*, *b*, *c* gefärbt. Zum Färben der übrigen zwei Länder benötigen wir nun aber noch zwei, also insgesamt fünf Farben. Ist damit bewiesen, daß es Karten gibt, bei denen man nicht mit höchstens vier Farben auskommt? Nein! Die Karte des Bildes 5 läßt

Bild 5

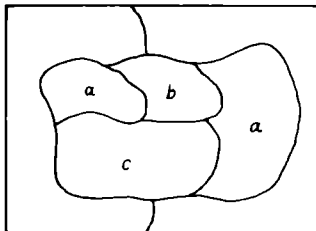
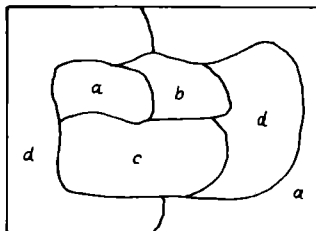


Bild 6



sich ja mit vier Farben färben, nur muß man die Farben geschickter verteilen. (Bild 6) Das Vierfarbenproblem besteht nun darin, den Vierfarbensatz zu beweisen.

Vierfarbensatz: Bei der Färbung jeder Landkarte (unter Beachtung von 1. und 2.) kommt man mit vier Farben aus.

Über die Geschichte des Vierfarbenproblems

Weder in den alten Büchern der Kartographen, noch bei den Mathematikern wie *L. Euler* (1707 bis 1783) und *A. F. Möbius* (1790 bis 1868) finden sich Hinweise auf den Vierfarbensatz (obwohl es gelegentlich behauptet wird). Der Mathematikhistoriker *K. O. May* wies nach, daß das Vierfarbenproblem erstmals in einem Brief (vom 23. Oktober 1852) von *A. de Morgan* (1806 bis 1871), Mathematikprofessor an der Universität London, an seinen Freund *W. R. Hamilton* (1805 bis 1865), Mathematikprofessor an der Universität Dublin, erwähnt wurde. Einer seiner Studenten, *Frederick Guthrie*, hatte den Londoner Mathematiker darauf aufmerksam gemacht. Fast dreißig Jahre später machte der Cambridger Mathematikprofessor *A. Cayley* (1821 bis 1895) durch eine Anfrage auf der Sitzung der Londoner Mathematischen Gesellschaft vom 13. Juni 1878 und durch eine Veröffentlichung (im Jahre 1879) in einer Zeitschrift der *Königlichen Geographischen Gesellschaft* das Problem erst richtig bekannt. Kurz danach publizierten *A. B. Kempe* (1879) und *P. G. Tait* (1880) zwei „Beweise“ für den Vierfarbensatz. Doch beide enthielten Fehler.

In einer kurzen Note an die *Royal Society* in Edinburgh im Jahre 1880 bemerkte der Physiker *Frederick Guthrie*, daß er durch seinen Bruder *Francis Guthrie* (der 1880 bereits Mathematikprofessor in Kapstadt war) vom Problem erfahren hatte und mit dessen Zustimmung seinen Lehrer *de Morgan* darauf hingewiesen hatte.

Guthrie und *de Morgan* kannten sicher die Landkarte in Bild 4, auf der jedes der vier Länder mit den übrigen drei benachbart ist. Da eine solche Landkarte nur mit vier Farben, nicht aber mit drei Farben färbbar ist, ist ein Dreifarbensatz sicher falsch. Drei Farben reichen nicht aus, um alle Landkarten zu färben.

De Morgan bewies, daß es unmöglich ist, fünf Länder so zu zeichnen, daß jedes von ihnen mit den übrigen vier benachbart ist. Diese Behauptung hatte bereits *Möbius* in der Form eines Märchens den Zuhörern seiner Vorlesung vom Jahre 1840 vorgelegt (nach *Tietze*): „Es war einmal im fernen Osten ein Fürst, der hatte fünf Söhne; diese sollten nach seinem Tode sein Reich erben. Die Teilung des Reiches in fünf Teile – so bestimmte er – dürfe aber nur so vorgenommen werden, daß jedes der fünf Teilreiche an jedes andere angrenze. Jeder der Söhne solle

ferner von seinem Regierungssitz zu dem eines jeden anderen eine Straße bauen und diese Straßen sollten – ohne Kreuzungen und überhaupt ohne das Gebiet eines dritten Bruders zu berühren, getrennt verlaufen. Nach dem Tode des Vaters bemühten sich die Brüder, eine Einteilung des Reiches zu finden, die seinem Wunsch entspräche. Aber alles Bemühen blieb vergeblich. Als nun schon mancher Tag über unablässigen Versuchen verstrichen war, wurde von einem Schreibkudigen am Hofe festgestellt, daß die gleiche Bestimmung schon in einem älteren Schriftstück des Verstorbenen sich fand, in dem nur von vier Söhnen die Rede war, da sie aus einer Zeit stammte lange vor der Geburt des wesentlich jüngeren fünften Sohnes. Und es ergab sich, daß dazumal dem Willen des Vaters leicht zu entsprechen gewesen wäre.“

Aufgaben

▲1▲ Wie kann die Teilung des Reiches in vier Teile erfolgen? Zeichne die Hauptstädte und die Verbindungsstraßen!

▲2▲ Wieviel Verbindungsstraßen zwischen den Hauptstädten würde es bei einer Fünfteilung geben?

▲3▲ Beweise: Es ist unmöglich, fünf Punkte so in der Ebene zu zeichnen, daß man jeden von ihnen mit den übrigen durch Kurven verbinden kann, die sich nicht gegenseitig schneiden!

▲4▲ Beweise, daß die Teilung des Reiches in fünf gegenseitig benachbarte Teile unmöglich ist!

Sein Beweis der angegebenen Möbiusschen Behauptung stärkte *de Morgan* in seiner Ansicht, daß der Vierfarbensatz richtig sein könnte. Sein Nachweis, daß es nicht möglich ist, fünf Länder so zu zeichnen, daß jedes von ihnen mit den übrigen vier benachbart ist, ist jedoch kein Beweis des Vierfarbensatzes! (Warum?)

Aufgabe

▲5▲ Zeichne eine Landkarte (mit wenigstens 6 Ländern) mit folgenden zwei Eigenschaften:

a) Höchstens jeweils drei Länder liegen so, daß jedes von ihnen mit den übrigen zwei benachbart ist.

b) Beim Färben kommt man aber nicht mit drei Farben aus.

Im Jahre 1890 konnte *P. J. Heawood* beweisen, daß fünf Farben stets ausreichen, um jede Landkarte so zu färben, daß dabei benachbarte Länder niemals die gleiche Farbe haben. Der Vierfarbensatz wäre falsch, das Vierfarbenproblem also negativ entschieden, wenn man eine Karte finden könnte, bei der man nicht mit weniger als fünf Farben auskommt.

Zahlreiche Mathematiker beschäftigten sich mit dem Vierfarbenproblem. 1922 wies *Ph.*

Franklin nach, daß eine Landkarte, zu deren Färbung fünf Farben notwendig sind, wenigstens 26 Länder enthalten muß, d. h., daß für die Färbung jeder Landkarte mit 25 oder weniger Ländern vier Farben ausreichen. Vierzig Jahre nach *Heawoods* Arbeit konnten *H. Rademacher* und *O. Toeplitz* in ihrem für Laien bestimmten Werk „Von Zahlen und Figuren“ (1930) immer noch schreiben: Man hat „bisher noch keine, wenn auch noch so verwickelte Landkarte zeichnen können, bei der man nicht mit vier Farben im angegebenen Sinne ausgekommen wäre. Man hat aber ebenso wenig zu beweisen vermocht, daß man bei jeder nur denkbaren Landkarte mit vier Farben auskommt. Wir stehen hier wieder vor einem der ganz einfachen und ohne alle mathematischen Kenntnisse zu begreifenden Probleme, die man in wenigen Minuten jedem Laien der Mathematik darlegen kann und die doch noch niemand gelöst hat.“

Daß der Vierfarbensatz für alle Landkarten, die höchstens 35 Länder enthalten, richtig ist, zeigte 1940 *C. E. Winn*.

„Wenn ich so verwegen sein darf, eine Vermutung aufzustellen“, schrieb 1959 *H. S. M. Coxeter*, „würde ich meinen, daß eine Karte, bei der man mindestens fünf Farben braucht, vielleicht doch möglich ist. Sie könnte aber in soviel Einzelflächen (womöglich Hunderttausende) aufgeteilt sein, daß kein Mensch die Geduld aufbrächte, all die Tests effektiv durchzuführen, die man brauchen würde, um die Möglichkeit einer Vierfarbenlösung definitiv auszuschließen.“ 1970 erkannten *O. Ore* und *J. Stemple*, daß der Vierfarbensatz für alle Landkarten mit höchstens 39 Ländern richtig ist. Im selben Jahr erhöhte *G. A. Doney* die Anzahl auf 44, 1974 *W. Stromquist* die Anzahl auf 51 und 1975 *J. Mayer* auf 96.

Endlich, 1976, gelang es den Mathematikern *Wolfgang Haken* und *Kenneth Appel* von der Universität von Illinois in Urbana (USA), mit Hilfe von Computern den Vierfarbensatz für alle Landkarten mit beliebig vielen Ländern zu bestätigen. In insgesamt 1200 Stunden haben drei verschiedene elektronische Rechenmaschinen über 12 Milliarden Ja-Nein-Entscheidungen durchgeführt. Einen derart langen Beweis, der nur mittels Computereinsatz zum Ziel führte, hat es in der Geschichte der Mathematik noch nicht gegeben.

Das Vierfarbenproblem ist damit gelöst. Ob es einen kurzen, computerunabhängigen Beweis des Vierfarbensatzes gibt, ist weiterhin ungewiß. Ob die neue Beweistechnik auch in anderen Zweigen der Mathematik entscheidende Fortschritte mit sich bringen könnte, wird sich zeigen.

Kempes Beweisidee

Auf den Landkarten, die wir betrachten, schließen wir zunächst das Vorkommen so-

genannter mehrfach zusammenhängender Länder aus, das sind solche Länder, die in ihrem Innern weitere Länder vollständig enthalten, deren Begrenzung also in mehrere Teile zerfällt.

Bild 7a

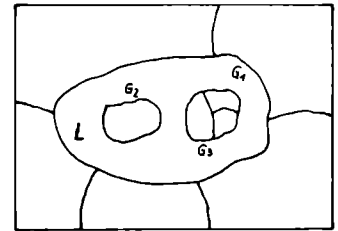


Bild 7b

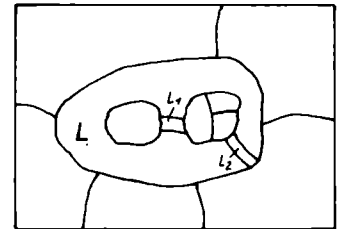


Bild 7a zeigt ein zweifach zusammenhängendes Land *L*, dessen Grenze aus den Teilstücken *G*₁, *G*₂, *G*₃ besteht. Wir fügen zwei Länder *L*₁ und *L*₂ hinzu (Bild 7b). Dann ist das neue *L* einfach zusammenhängend (die Begrenzung ist eine geschlossene sich nirgends schneidende Kurve). Ist die neue Karte zur Unterscheidung benachbarter Länder mit höchstens vier Farben färbbar, so auch die ursprüngliche, da durch die Länder *L*₁ und *L*₂ die Nachbarschaftsbeziehungen nicht zerstört werden.

Bild 8a

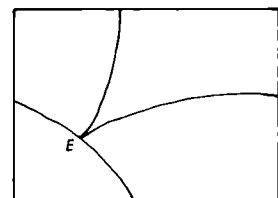
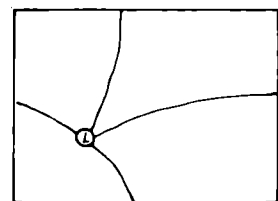


Bild 8b



Die Punkte, in denen sich die Begrenzungskurven der Länder treffen, nennen wir auch Ecken. Wir können annehmen, daß in jeder Ecke nur drei Grenzen zusammentreffen. Treffen in einer Ecke *E* mehr als drei Grenzen zusammen (Bild 8a), so sehen wir den Eckpunkt *E* als Grenzfall eines dehnbaren Kreises an, der ein kleines Land *L* umschließt. (Bild 8b.) Dies ändert die Nachbarschaft der übrigen Länder nicht und gibt uns Ecken der gewünschten Art. Gelingt es, die Karte mit dem Land *L* wie verlangt zu färben, so ist auch die ursprüngliche Karte mit höchstens vier Farben gefärbt.

Landkarten, in denen keines der Länder andere Länder vollständig enthält und sich in jedem Eckpunkt nicht mehr als drei Länder treffen, nannte A. B. Kempe normal. Ist der Vierfarbensatz für normale Landkarten bewiesen, so gilt er für alle Landkarten. Bei seinem Beweisversuch für den Vierfarbensatz (für normale Landkarten) benutzte Kempe (1879) die Methode des indirekten Beweises. Er nahm an, daß der Vierfarbensatz falsch ist (d. h., es wenigstens eine Landkarte gibt, deren Färbung fünf Farben erfordert). Aus dieser Annahme ergab sich ein Widerspruch. Folglich ist die Annahme falsch, also der Satz richtig.

Kempes Schlußweise läßt sich so zusammenfassen:

1. Gäbe es eine Landkarte, deren Färbung fünf Farben erfordert, so gäbe es auch eine solche normale Landkarte. Unter allen normalen Landkarten, deren Färbung fünf Farben erfordert, gibt es eine mit einer kleinsten Länderzahl. (Das heißt, jede normale Landkarte mit weniger Ländern ist mit vier oder weniger Farben färbbar.) Eine solche nennen wir eine *minimale fünf-färbbare normale Landkarte*.

2. Jede normale Landkarte enthält ein Land mit zwei, drei, vier oder fünf Nachbarländern. (Das heißt, es gibt keine normale Landkarte, in der jedes Land sechs oder mehr Nachbarländer hat.) (Bild 9)

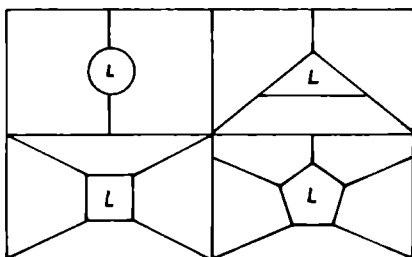


Bild 9

3. Hiernach hat auch eine minimale fünf-färbbare normale Landkarte K ein Land mit weniger als sechs Nachbarländern. Es werden nun folgende Fälle unterschieden:

a) K enthält ein Land mit zwei Nachbarn.
b) K enthält kein Land mit zwei Nachbarn, jedoch eines mit drei Nachbarn.

c) K enthält kein Land mit zwei oder drei Nachbarn, jedoch eines mit vier Nachbarn.

d) K enthält kein Land mit zwei, drei oder vier Nachbarn, also ein Land mit fünf Nachbarn.

4. Es wird in allen vier Fällen der Nachweis geführt, daß es jeweils eine normale Landkarte gibt, deren Färbung fünf Farben erfordert, die jedoch weniger Länder als K enthält. Dies widerspricht der Tatsache, daß K bereits eine minimale fünf-färbbare normale Landkarte ist. Wären diese vier Nachweise richtig, so wäre durch den sich ergebenden Widerspruch gezeigt, daß die Annahme, daß es eine Landkarte gibt, deren Färbung

Eine Aufgabe von Prof. Dr. sc.

Zalman Alexandrowitsch Skopetz

Lehrstuhlleiter an der Päd. Hochschule „K. D. Uschinski“, Jaroslawl

▲1765▲ 1. Eine bekannte Textaufgabe lautet:

Herr Müller fuhr mit dem E-Zug ($66 \frac{\text{km}}{\text{h}}$) bis zur nächsten Station, warf eine Karte in den Briefkasten und lief sofort dem Gleis entlang zurück nach Hause mit der Geschwindigkeit $6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Der Nachbar machte dieselbe Reise mit einem Fahrrad, hin und zurück; er fuhr gleichzeitig ab, als Herr Müller abfuhr, und kehrte auch gleichzeitig zurück. Wie groß war die Geschwindigkeit des Fahrrads?

bung fünf Farben erfordert, falsch ist, d. h., der Vierfarbensatz wäre bewiesen. Der Nachweis in den Fällen a), b), c) ist bei Kempe völlig richtig. Doch der Nachweis im Fall d) ist falsch, was zuerst im Jahre 1890 von P. J. Heawood erkannt wurde.

Computerlösung des Vierfarbenproblems

Kempes Beweisidee ist auch die Grundidee des Beweises von W. Haken und K. Appel. In fast 100 Jahren entstand aus der Arbeit am Vierfarbenproblem die klassische Graphentheorie. Insbesondere wurde Kempes Methode zur Lösung des Problems verbessert. Aus Kempes indirekter Beweismethode wurde eine allgemeinere sogenannte *Reduktionsmethode*. Wesentliche und entscheidende Impulse zur Lösung des Problems sind dem Mathematiker H. Heesch, der sich über 40 Jahre mit dem Vierfarbenproblem beschäftigt hat, zu verdanken. W. Haken und K. Appel konnten Heeschs Methoden vervollkommen und zusammen mit ihrer sogenannten *Vollständigkeitsmethode* unter Einsatz von Computern den Vierfarbensatz (Satz von Guthrie-Kempe-Heesch-Appel-Haken) beweisen.

(Eine anschauliche Beschreibung weiterer Einzelheiten des Beweises findet der interessierte Leser in der Zeitschrift „Wissenschaft und Fortschritt“ 1978, Heft 3, März 1978.)

H. Pieper

Lösungen auf Seite 116

2. Um die Aufgabe richtig zu lösen, muß man verstehen, was „mittlere Geschwindigkeit“ heißt (siehe Lösung S. 116); diese kann man als *harmonisches Mittel* berechnen.

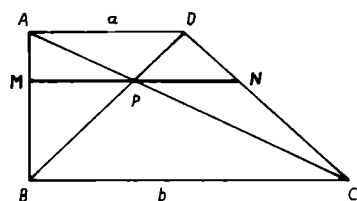
Beispiel: Es seien $a=3$ und $b=6$; das harmonische Mittel x findet man laut Gleichung $\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$; daraus folgt $x=4$. Seien n positive Größen $a_1, a_2, \dots, a_n$ gegeben, dann findet man das harmonische Mittel x aus

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$$

$$\text{oder } x = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

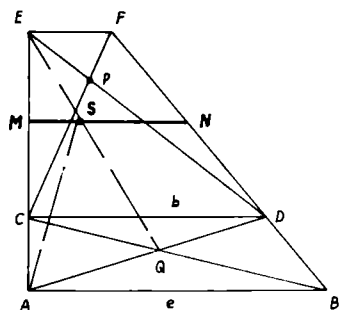
3. Das harmonische Mittel zweier Strecken a und b kann man auch konstruieren. In einem beliebigen Trapez $ABCD$ ($\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, s. Bild 1) sei $\overline{AD} = a$ cm, $\overline{BC} = b$ cm. Die Strecke $\overline{MN}$ verläuft über den Diagonalschnittpunkt P und $\overline{MN} \parallel \overline{AD}$. Es ist ganz leicht zu beweisen, daß $x = \overline{MN}$ der Gleichung

$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ genügt; also ist die Strecke $\overline{MN} = x$ das harmonische Mittel zwischen a und b .



4. Um ein harmonisches Mittel dreier Strecken a, b, c zu finden, zeichne man die drei gegebenen Strecken einander parallel so, daß die Punkte A, C, E bzw. B, D, F auf einer Geraden liegen (s. Bild 2). Dann konstruiere man:

- (1) den Schnittpunkt P von Geraden CF und ED ;
- (2) den Schnittpunkt Q von Geraden BC und AD ;
- (3) den Schnittpunkt S von Geraden AP und EQ ;
- (4) die Strecke $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$ durch den Punkt S ($M \in \overline{AE}, N \in \overline{BF}$).



Satz: Die Strecke $x = \overline{MN}$ ist ein harmonisches Mittel der drei Strecken a, b, c .

Der unter 4. genannte Satz wurde von Prof. Z. A. Skopetz gefunden und heißt **Satz von Skopetz**.

Er rechnete, wie andere atmen

Leonard Euler, der berühmteste Mathematiker des 18. Jahrhunderts

Im Herbst 1726 ging bei der Pariser Akademie eine Bewerbungsschrift um einen von ihr ausgesetzten Preis ein. Es handelte sich um eine damals hochaktuelle Aufgabe: Gefragt war nach denjenigen Stellen, an denen am zweckmäßigsten die Masten im Schiff einzusetzen seien, nach der günstigsten Anzahl und Höhe der Masten. Nach gründlicher Prüfung erhielt diese Einsendung zwar nicht den Preis, wohl aber die nächsthöhere Auszeichnung, eine lobende Anerkennung („Accessit“). Der Verfasser war ein neunzehnjähriger angehender Gelehrter namens *Leonhard Euler* aus Basel. Er hat übrigens später durch seine Preisschriften allein von der Pariser Akademie rund 30 000 Livres, etwa 300 000 Mark in heutiger Kaufkraft, erhalten.

Man prüft den Pudding, indem man ihn isst

Der junge *Euler* hatte noch nie ein Seeschiff auch nur von weitem gesehen. Er hielt es für ratsam, seiner mathematisch-theoretischen Abhandlung hinzuzufügen: „Ich habe es nicht für erforderlich erachtet, diese meine Theorie durch ein Experiment zu bestätigen, weil sie ganz und gar aus den gesichertsten und unangreifbarsten Prinzipien der Mechanik hergeleitet ist. Ein Zweifel, ob sie wahr und in der Praxis anwendbar sei, kann daher überhaupt nicht auftauchen.“

In einem 130 Jahre später in Leningrad aufgefundenen Konzept *Eulers* liest es sich allerdings anders. Hier bekannte er nämlich, daß er mit einem selbst angefertigten Schiffsmo-
dell Versuche in ruhigem Wasser angestellt hätte. . . Bei allem Zutrauen in seinen Kalkül hatte er also doch vorsichtshalber nach dem von *Friedrich Engels* gern zitierten englischen Sprichwort gehandelt: „Man prüft den Pudding, indem man ihn ißt.“

Schon 1727 erreichte *Euler* ein Ruf nach Petersburg an die dortige Akademie der Wissenschaften. Am 26. April schiffte er sich in Travemünde auf einem nach Reval abgehenden Frachter ein. Erst am 24. Mai traf er nach beschwerlicher Reise, schwerem Sturm und heftiger Seekrankheit in Petersburg ein, 50 Tage nach seinem Aufbruch von Basel und 29 Tage nach dem Verlassen Lübecks. Ja, es war damals noch nicht so einfach, nach Reval oder Petersburg zu ge-

langen, wie man heute nach Tallinn oder Leningrad reist.

In Petersburg faßte *Euler* rasch festen Fuß, und schon 1731 wurde er, 24jährig, Professor. Mit vollem Recht konnte er bereits damals von sich sagen: „Was die Mathematik anbelangt, so glaube ich, daß die Zahl derer, welche es weiter oder nur so weit als ich gebracht haben, in ganz Europa sehr klein ist.“ 1741 folgte *Euler* einer vorteilhaft erscheinenden Berufung nach Berlin, an dessen Akademie er bald Direktor der Mathematischen Klasse wurde. Die in Petersburg verbrachten Jahre vergaß er nicht. 1749 erklärte er: „Alles, was wir sind, schulden wir den vorteilhaften Umständen, worin wir uns in der Petersburger Akademie befunden haben.“

Friedrich II. als Kaderpolitiker

Seine Berühmtheit wuchs von Jahr zu Jahr. Aber der Preußenkönig Friedrich II. wußte die Bedeutung dieses Mannes nur sehr begrenzt zu würdigen. Selbst ohne jedes Verständnis für die höhere Mathematik, sah er in ihm in dieser Zeit der Aufklärung, in der die Höfe um den „Besitz“ ausgezeichneter Gelehrter wetteiferten, zwar eine Zierde „seiner“ Akademie, aber es ging ihm doch die Einsicht dafür ab, worin denn eigentlich *Eulers* Genialität bestand. So schrieb er seinem Bruder:

„Ich dachte mir schon, daß Deine Unterhaltung mit Herrn Euler Dich nicht erbauen würde. Seine Epigramme bestehen in Berechnungen neuer Kurven, irgendwelcher Kegelschnitte oder astronomischer Messungen. Unter den Gelehrten gibt es solche gewaltigen Rechner, Kommentatoren, Übersetzer und Kompilatoren, die in der Republik der Wissenschaften nützlich, aber sonst alles andere als glänzend sind. Man verwendet sie wie die dorischen Säulen in der Baukunst. Sie gehören in den Unterstock, als Träger des ganzen Bauwerks und der korinthischen Säulen, die seine Zierde bilden.“

Solche „korinthischen Säulen“ waren für den König Männer mit „Esprit“, Meister im geistreichen Geplauder, meist ohne sonderliche Tiefe. Hiermit konnte nun *Euler* freilich nicht dienen. Die Folge war, daß ihm die Präsi-

denkschaft der Akademie, auf die er sich begründete Hoffnung machte, vorenthalten wurde. Auch fühlte er sich in seinem schweizerischen Freiheitsbegriff durch die ständigen despotischen Eingriffe des Königs in das akademische Leben gekränkt. Allmählich fing er daher an, seine Rückkehr nach Petersburg vorzubereiten. 1766 verließ er dann mit seiner Familie Berlin, um an der alten Stätte seiner Wirksamkeit wieder tätig zu werden.

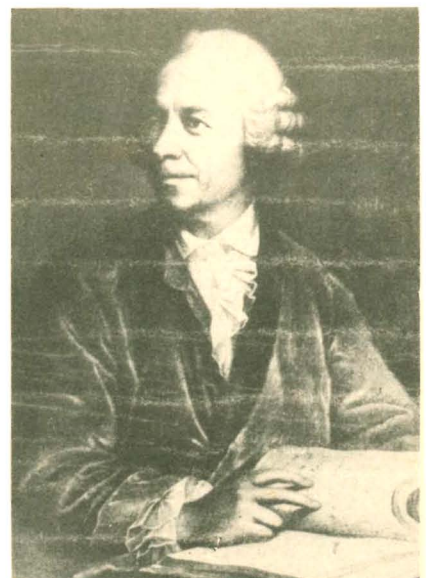
Pionier der deutsch-russischen Zusammenarbeit

Die Beziehungen zu Petersburg hat Euler in den 25 Jahren seiner Arbeit in Berlin nie abgebrochen. Zwar beeinträchtigte der Siebenjährige Krieg 1756/63 die Verbindung zeitweise beträchtlich, aber sie hörte praktisch niemals ganz auf.

Sein kurz nach dem Eintreffen in Berlin gegebenes Versprechen, er werde auch von hier aus mit allen Kräften die Interessen der Petersburger Akademie fördern, hat *Euler* eingelöst. Seine umfangreiche Korrespondenz mit maßgeblichen Mitgliedern und Mitarbeitern der Akademie in Petersburg legt ein beredtes Zeugnis dafür ab. *Euler* arbeitete von Berlin aus weiter an den Schriften der russischen Akademie mit und stellte ihr neben zahlreichen Abhandlungen und Rezensionen

Berechnung von $\sqrt{\pi}$ aus der Kettenbruchentwicklung (undatierte Notiz Eulers)

Spizella monticola *monticola* x at y w for x² y² at double 19
 22 *propheta* *sen* at *pro* $\frac{22}{2} = 11$ for $\frac{22}{2} = 11$ at $\frac{22}{2} = 11$
 23 1. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20.
 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20.
 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40.
 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60.
 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80.
 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100.
 101. 102. 103. 104. 105. 106. 107. 108. 109. 110. 111. 112. 113. 114. 115. 116. 117. 118. 119. 120.
 121. 122. 123. 124. 125. 126. 127. 128. 129. 130. 131. 132. 133. 134. 135. 136. 137. 138. 139. 140.
 141. 142. 143. 144. 145. 146. 147. 148. 149. 150. 151. 152. 153. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160.
 161. 162. 163. 164. 165. 166. 167. 168. 169. 170. 171. 172. 173. 174. 175. 176. 177. 178. 179. 180.
 181. 182. 183. 184. 185. 186. 187. 188. 189. 190. 191. 192. 193. 194. 195. 196. 197. 198. 199. 200.
 201. 202. 203. 204. 205. 206. 207. 208. 209. 210. 211. 212. 213. 214. 215. 216. 217. 218. 219. 220.
 221. 222. 223. 224. 225. 226. 227. 228. 229. 230. 231. 232. 233. 234. 235. 236. 237. 238. 239. 240.
 241. 242. 243. 244. 245. 246. 247. 248. 249. 250. 251. 252. 253. 254. 255. 256. 257. 258. 259. 260.
 261. 262. 263. 264. 265. 266. 267. 268. 269. 270. 271. 272. 273. 274. 275. 276. 277. 278. 279. 280.
 281. 282. 283. 284. 285. 286. 287. 288. 289. 290. 291. 292. 293. 294. 295. 296. 297. 298. 299. 300.
 301. 302. 303. 304. 305. 306. 307. 308. 309. 310. 311. 312. 313. 314. 315. 316. 317. 318. 319. 320.
 321. 322. 323. 324. 325. 326. 327. 328. 329. 330. 331. 332. 333. 334. 335. 336. 337. 338. 339. 340.
 341. 342. 343. 344. 345. 346. 347. 348. 349. 350. 351. 352. 353. 354. 355. 356. 357. 358. 359. 360.
 361. 362. 363. 364. 365. 366. 367. 368. 369. 370. 371. 372. 373. 374. 375. 376. 377. 378. 379. 380.
 381. 382. 383. 384. 385. 386. 387. 388. 389. 390. 391. 392. 393. 394. 395. 396. 397. 398. 399. 400.
 401. 402. 403. 404. 405. 406. 407. 408. 409. 410. 411. 412. 413. 414. 415. 416. 417. 418. 419. 420.
 421. 422. 423. 424. 425. 426. 427. 428. 429. 430. 431. 432. 433. 434. 435. 436. 437. 438. 439. 440.
 441. 442. 443. 444. 445. 446. 447. 448. 449. 450. 451. 452. 453. 454. 455. 456. 457. 458. 459. 460.
 461. 462. 463. 464. 465. 466. 467. 468. 469. 470. 471. 472. 473. 474. 475. 476. 477. 478. 479. 480.
 481. 482. 483. 484. 485. 486. 487. 488. 489. 490. 491. 492. 493. 494. 495. 496. 497. 498. 499. 500.
 501. 502. 503. 504. 505. 506. 507. 508. 509. 510. 511. 512. 513. 514. 515. 516. 517. 518. 519. 520.
 521. 522. 523. 524. 525. 526. 527. 528. 529. 530. 531. 532. 533. 534. 535. 536. 537. 538. 539. 540.
 541. 542. 543. 544. 545. 546. 547. 548. 549. 550. 551. 552. 553. 554. 555. 556. 557. 558. 559. 560.
 561. 562. 563. 564. 565. 566. 567. 568. 569. 570. 571. 572. 573. 574. 575. 576. 577. 578. 579. 580.
 581. 582. 583. 584. 585. 586. 587. 588. 589. 590. 591. 592. 593. 594. 595. 596. 597. 598. 599. 600.
 601. 602. 603. 604. 605. 606. 607. 608. 609. 610. 611. 612. 613. 614. 615. 616. 617. 618. 619. 620.
 621. 622. 623. 624. 625. 626. 627. 628. 629. 630. 631. 632. 633. 634. 635. 636. 637. 638. 639. 640.
 641. 642. 643. 644. 645. 646. 647. 648. 649. 650. 651. 652. 653. 654. 655. 656. 657. 658. 659. 660.
 661. 662. 663. 664. 665. 666. 667. 668. 669. 670. 671. 672. 673. 674. 675. 676. 677. 678. 679. 680.
 681. 682. 683. 684. 685. 686. 687. 688. 689. 690. 691. 692. 693. 694. 695. 696. 697. 698. 699. 700.
 701. 702. 703. 704. 705. 706. 707. 708. 709. 710. 711. 712. 713. 714. 715. 716. 717. 718. 719. 720.
 721. 722. 723. 724. 725. 726. 727. 728. 729. 730. 731. 732. 733. 734. 735. 736. 737. 738. 739. 740.
 741. 742. 743. 744. 745. 746. 747. 748. 749. 750. 751. 752. 753. 754. 755. 756. 757. 758. 759. 760.
 761. 762. 763. 764. 765. 766. 767. 768. 769. 770. 771.



auch große Werke zur Veröffentlichung zur Verfügung. Seine Produktivität war so gewaltig, daß es beide Akademien in Berlin und in Petersburg nicht schafften, alles, was aus seiner Feder hervorging, zu drucken. Er diskutierte in seinen Briefen an die Freunde in Rußland wissenschaftliche Fragen auf den Gebieten der Mathematik, Astronomie, Mechanik, Physik, Chemie, Geographie, Kartographie und machte sie so mit seinem Erkenntnisstand vertraut. Er nahm Einfluß auf die Stellung von Preisaufgaben, die damals eine entscheidende Rolle bei der zielgerichteten Förderung des wissenschaftlichen Fortschritts spielten, indem er Themen vorschlug und bei der Beurteilung der eingegangenen Preisschriften mitwirkte. Er bemühte sich um die Erfüllung von Wünschen nach Literatur und wissenschaftlichen Geräten. Er empfahl talentierte Nachwuchskräfte.

Besonders hervorhebenswert sind seine Aktivitäten zur Ausbildung junger russischer Wissenschaftler. 1743/44 nahm er den späteren Akademiepräsidenten *K. G. Rasmusow* bei sich in Berlin auf und unterrichtete ihn privat. Ihm folgten 1752/56 der Mathematiker *S. K. Kotelnikow*, 1754 der Mathematiker *M. Sofronow*, 1754/56 der Astronom und spätere Vizepräsident *S. J. Rumowski*. In diesem Zusammenhang ist auch die Ermutigung zu nennen, die *Euler* in seinen Briefen den physikalischen und chemischen Arbeiten des genialen *M. W. Lomonossow* zuteil werden ließ. Umgekehrt hielt *Euler*, nach Petersburg zurückgekehrt, seine Beziehungen zur Berliner Akademie aufrecht und ließ sie nicht das entgelten, was er dem König von Preußen gegenüber fühlte. So ist es vollauf begründet, daß 1957, als die Akademien der Wissenschaften der DDR und der UdSSR gemeinsam in Festveranstaltungen und in Gedenkschriften des 250. Geburtstages *Leonhard Eulers* (15. 4. 1707 bis 18. 9. 1783) gedachten, an den hervorragenden Platz erinnert wurde, den er in den Traditionen freundschaftlicher Zusammenarbeit zwischen den Wissenschaftlern der DDR und der UdSSR einnimmt.

Unglaubliche Fruchtbarkeit

Leonhard Euler war wohl der produktivste Mathematiker, den es je gegeben hat. Und oft ist die Frage gestellt worden, wie seine schier unglaubliche Fruchtbarkeit eigentlich zu erklären ist.

Nun, man hat mit Recht gesagt, daß *Euler* rechnete, so, wie andere atmen. Seine großartige Begabung wurde ergänzt durch unermüdlichen Fleiß, durch ein phänomenales Gedächtnis und durch einen sicheren Blick für die Anwendung der Mathematik in der Praxis. Hinzu kam noch eine ungewöhnliche Konzentrationsfähigkeit. „Ein Kind auf den Knien, eine Katze auf dem Rücken, so schrieb er seine unsterblichen Werke“, hat ein Zeitgenosse, der ihn gut kannte, überliefert.

Obwohl *Euler* in seinen letzten Lebensjahren in Petersburg nahezu blind und taub war, blieb er ohne Unterlaß tätig. Mit dem letzten Rest der ihm verbliebenen schwachen Sehkraft schrieb er die Formeln mit großen Lettern auf eine auf dem Tisch liegende Schiefertafel und diktierte den Text aus seinem Erinnerungsvermögen.

Als *Euler* 1783 ruhmgekrönt starb, hatte er ein weiteres Versprechen erfüllt: der Petersburger Akademie so viele Abhandlungen zu hinterlassen, daß sie zu ihrem Druck noch 20 Jahre benötigen werde. Dieser Zeitraum reichte bei weitem nicht aus. Auch heute ist die Gesamtausgabe seiner Werke, die in Basel erscheint, erst zu rund 90 Prozent publiziert. *Euler* hinterließ ein Werk, das 72 Bände im Lexikonformat mit über 30000 Druckseiten füllen wird. Hinzu kommen mehrere Tausend Seiten Manuskripte und Entwürfe, Notizbücher mit über 3000 Seiten und ein Briefwechsel, von dem in der genannten Gesamtausgabe ein Band vorliegt und der etwa 12 Bände mit über 7000 Druckseiten in Anspruch nehmen wird. Das Zentrale Archiv der Akademie der Wissenschaften der DDR und das Hugenottenmuseum in Berlin bergen viele aussagekräftige Belege für *Eulers* Leben und Wirken in dem Vierteljahrhundert, das

er hier verbracht hat. Diese archivalischen Schätze ergänzen den Hauptteil seines Nachlasses, der sich im Leningrader Archiv der Akademie der Wissenschaften der UdSSR befindet. *Leonhard Eulers* Lehrbücher der Differential- und der Integralrechnung sowie seine „Vollständige Anleitung zur Algebra“ haben mehrere Generationen von Wissenschaftlern und Technikern in die Mathematik eingeführt. Das Eulersche Additionstheorem der elliptischen Integrale ist auch in unserer Zeit für die Analysis von Bedeutung, die Euler-Lagrangesche Differentialgleichungen für Physiker, die Eulersche Funktion, das Eulersche Kriterium oder die Eulersche Produktdarstellung für die Zahlentheoretiker.

An die 50 Sätze, Formeln, Funktionen, Gleichungen und andere mathematische Begriffe sind noch heute mit *Eulers* Namen verbunden; das mathematische Instrumentarium der Praktiker auf vielerlei Gebieten trägt wie vor 200 Jahren in wesentlichen Teilen Eulersche Züge.

Die Pflege, Erschließung und schöpferische Aneignung seines Erbes verbinden Wissenschaftshistoriker der UdSSR und der DDR in freundschaftlichem Zusammenwirken.

Kurt Reinhard
aus: Magazin 3/78



VEB Fachbuchverlag Leipzig 1978
131 Seiten, 10 Bilder, 12 cm x 19 cm,
Broschur (Glanzfolie) Preis DDR: 4,80 M
Bestell-Nr. 5463500

Mit diesem Büchlein erhält der Leser keine Bedienungsanleitung, sondern einen Ratgeber, in dem erläutert wird, wie man seinen Taschenrechner sinnvoll einsetzen kann. An Hand vieler Beispiele wird vorgeführt, wie die einzelnen Aufgabentypen optimal gelöst werden können. Besonderes Augenmerk wird der erreichbaren Rechengenauigkeit gewidmet. Da alle Betrachtungen weitgehend rechnerunabhängig durchgeführt werden, wendet sich die Broschüre an die Besitzer sowohl ganz einfacher als auch komplizierter Typen mit Sondertasten und Speichern.

Leserkreis: Lehrer und Schüler an allgemeinbildenden polytechnischen Oberschulen und Berufsschulen, Lehrkräfte und Studenten an Fach-, Ingenieur- und Ingenieurhochschulen sowie Hochschulen, Techniker, Ingenieure, Besitzer von Taschenrechnern.
Das Buch steht in den Bibliotheken und Büchereien zur Verfügung.

Aus dem Inhalt: Vom Abakus zum elektronischen Taschenrechner – Der Aufbau elektronischer Taschenrechner – Zur Rechengenauigkeit elektronischer Taschenrechner – Das Rechnen mit elektronischen Taschenrechnern – Anhang: Gebräuchliche Bezeichnungen auf elektronischen Taschenrechnern, einige wichtige Formeln, Zusammenstellung einiger Näherungsformeln mit Angabe von Fehlerschranken, wichtige Konstanten – Sachwortverzeichnis



Nacheifernswertes

Anläßlich seines zehnjährigen Bestehens führte der *Bezirkssklub Junger Mathematiker* des Bezirkes Cottbus im Jahre 1977 ein einwöchiges Spezialistenlager in der Kreisstadt Herzberg/Elster durch. Das Programm war sehr vielseitig. Neben der Beschäftigung mit der Mathematik, die im Vordergrund stand, gab es interessante und abwechslungsreiche Veranstaltungen. So nahm z. B. der Chefredakteur der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha* anläßlich des 200. Geburtstages des bedeutendsten und schöpferischsten Mathematikers seiner Zeit, *Carl Friedrich Gauß*, eine Ehrung durch einen Vortrag über diesen Wissenschaftler vor. Dr. Paulin von der Humboldt-Universität Berlin und Dr. Küchler von der Technischen Universität Dresden trugen Interessantes aus ihrer Tätigkeit als Mathematiker vor. Auf einer Festveranstaltung würdigten der Stellvertreter des Bezirksschulrates und der Leiter des *Bezirkssklubs Junger Mathematiker* die Leistungen und Verdienste sowohl der Schüler als auch der Pädagogen. Höhepunkte dieser erlebnisreichen Tage waren für die Teilnehmer des Spezialistenlagers Fahrten nach Torgau und Potsdam. Das Besondere dieses Lehrgangs bestand darin, daß jedes Klubmitglied (Schüler verschiedener Klassenstufen) aufgerufen worden war, eine eigene Aufgabe bzw. eine veränderte oder erweiterte aus angegebener Quelle stammende Aufgabe einzureichen. Die Preisträger dieses Aufgabenwettbewerbs trugen ihre Aufgabe selbst vor und stellten ihren Lösungsvorschlag zur Diskussion. Aus der Fülle der eingegangenen Aufgaben wollen wir nun einige vorstellen.

Aufgabe des Schülers Wolfram Würbel, EOS Forst, Klasse 11:

Man beweise, daß die Zahl $z = 3^{8n+3} + 22 \cdot 3^{4n+1} + 7$ für alle natürlichen Zahlen n durch 100 teilbar ist.

Lösung:

Aus $z = 3^{8n+3} + 22 \cdot 3^{4n+1} + 7$ folgt durch äquivalente Umformungen $z = 3^{8n+3} + 3^{4n+1} + 21 \cdot 3^{4n+1} + 7$, $z = 3^{4n+1}(3^{4n+2} + 1) + 7(3^{4n+2} + 1)$,

$z = 3 \cdot 81^n(9 \cdot 81^n + 1) + 7(9 \cdot 81^n + 1)$, $z = (9 \cdot 81^n + 1)(3 \cdot 81^n + 7)$. Für jede natürliche Zahl n endet 81^n auf die Ziffer 1. Somit endet das Produkt $9 \cdot 81^n$ auf die Ziffer 9, und die Summe $9 \cdot 81^n + 1$ endet auf die Ziffer 0. Somit endet das Produkt $3 \cdot 81^n$ auf die Ziffer 3, und die Summe $3 \cdot 81^n + 7$ endet auf die Ziffer 0. Folglich ist das Produkt $z = (9 \cdot 81^n + 1)(3 \cdot 81^n + 7)$ für alle natürlichen Zahlen n durch $10 \cdot 10$, also durch 100 teilbar.

Aufgabe des Schülers Olaf Gutschker, 1. EOS Cottbus, Kl. 9:

Gegeben seien zwei Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ mit den Längen a und b und $a \neq b$. Es ist eine Strecke der Länge

$$x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

zu konstruieren, ohne die im Höhensatz für rechtwinklige Dreiecke formulierte Eigenschaft zu nutzen.

Lösung:

Wir zeichnen ein rechtwinkliges Dreieck ABC , dessen Katheten $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ die Längen a und b haben. Die Länge der Hypotenuse $\overline{AB}$ ist dann $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Wir halbieren die Strecke $\overline{AB}$; der Halbierungspunkt sei M . Die Länge der Strecke $\overline{AM}$ ist dann $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$.

Wir zeichnen um M mit dem Radius $\overline{AM}$ den Kreis k (Thaleskreis) und konstruieren die Senkrechte zu $\overline{AB}$ durch M , die den Kreis k in N schneiden möge, und wir verbinden A mit N .

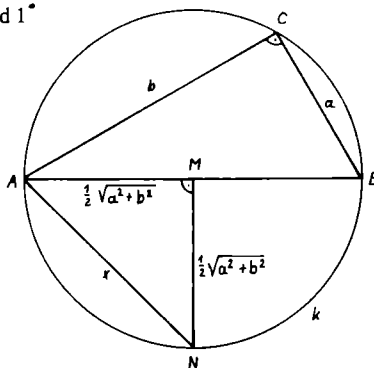
Wegen $\overline{AM} = \overline{MN}$ und $\angle AMN = 90^\circ$ gilt im rechtwinkligen Dreieck ANM somit

$$\overline{AN}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MN}^2 = 2 \cdot \overline{AM}^2 \text{ bzw.}$$

$$x^2 = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot (a^2 + b^2), \text{ also}$$

$$x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Bild 1*



Aufgabe des Schülers Jörg Hörtig, 19. OS Cottbus, Kl. 9b:

Für welche natürlichen Zahlen $n \geq 1$ wird die Gleichung $10 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = 3 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3)$ erfüllt?

Lösung:

Wegen $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

$$= \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1)(2n+1) \text{ und}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \text{ gilt}$$

$$10 \cdot \frac{1}{6} \cdot n(n+1)(2n+1) = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot n^2(n+1)^2,$$

$$\frac{5}{3} \cdot (2n+1) = \frac{3}{4} \cdot n(n+1),$$

$$20(2n+1) = 9n(n+1),$$

$$40n + 20 = 9n^2 + 9n,$$

$$9n^2 - 31n - 20 = 0,$$

$$n^2 - \frac{31}{9}n - \frac{20}{9} = 0,$$

$$n_{1,2} = \frac{31}{18} \pm \frac{41}{18}, \text{ also } n_1 = 4 \text{ und } n_2 = -\frac{5}{9}$$

(entfällt, da keine natürliche Zahl).

Nur die natürliche Zahl 4 erfüllt die gegebene Gleichung. Probe:

$$10 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) = 3 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3),$$

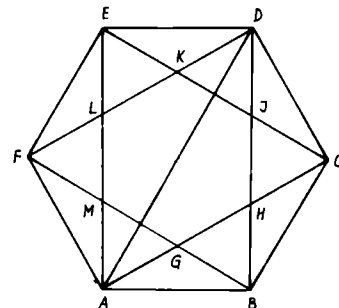
$$10 \cdot (1 + 4 + 9 + 16) = 3 \cdot (1 + 8 + 27 + 64),$$

$$10 \cdot 30 = 3 \cdot 100 = 300.$$

Aufgabe des Schülers Jens-Uwe Schließler, EOS „Artur Becker“ Cottbus, Klasse 9/3:

Gegeben sei ein regelmäßiges Sechseck $ABCDEF$. Durch die Schnittpunkte G, H, J, K, L, M der Diagonalen $\overline{AC}, \overline{AE}, \overline{BD}, \overline{BF}, \overline{CE}, \overline{DF}$ wird ein Sechseck $GHIJKL$ festgelegt. Es ist der Quotient aus den Flächeninhalten dieser beiden Sechsecke zu bestimmen.

Bild 2



Lösung:

Figuren, die bei einer ebenen Drehung um einen Winkel α um einen Punkt P zur Deckung gebracht werden können, heißen radial-symmetrisch. Alle regelmäßigen Vielecke haben diese Eigenschaft. Beim regelmäßigen Sechseck beträgt die Größe dieses Drehwinkels 60° . Bei Drehung des regelmäßigen Sechsecks $ABCDEF$ um den Mittelpunkt M seines Umkreises um den Winkel $\phi = 60^\circ$ wird die Figur mit sich selbst zur Deckung gebracht. Deshalb ist das Sechseck $GHIJKL$ ebenfalls regelmäßig. Wegen $\angle DEF = 120^\circ$ und $\angle KEL = 60^\circ$ gilt $\angle FEL = (120^\circ - 60^\circ) : 2 = 30^\circ$. Ferner gilt $\angle EFL = \angle FEL = 30^\circ$ und somit $\angle ELF = 120^\circ$. Es sei $\overline{EF} = s$ und $\overline{EJ} = x$, dann gilt

$$\frac{x}{s} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Die Flächeninhalte ähnlicher Figuren verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Seiten. Deshalb gilt wegen $\overline{EL} = \overline{LK} = x$

$$\frac{A_x}{A_s} = \frac{x^2}{s^2} = \frac{1}{3}.$$

Der Flächeninhalt des Sechsecks $ABCDEF$ ist dreimal so groß wie der Flächeninhalt des Sechsecks $GHIJKL$.

Aufgabe des Schülers Roland Kaschner, EOS Lauchhammer, Kl. 12:

In einem Park mit ebenem Gelände befindet sich eine Skulptur mit der Höhe h_2 , die auf einem Sockel mit der Höhe h_1 steht. In welcher Entfernung e vom Fußpunkt des Sockels muß ein Betrachter mit der Augenhöhe h_3 stehen, damit er die Skulptur unter maximalem Blickwinkel sieht?

a) Es ist e durch h_1 , h_2 und h_3 auszudrücken!

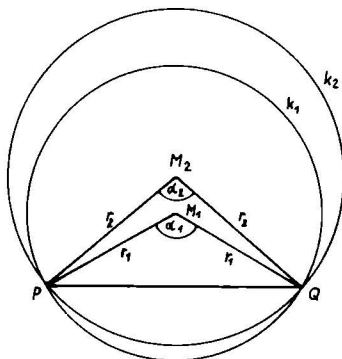
b) Welche Größe hat der maximale Blickwinkel ϕ , wenn $h_1 = 2,00$ m, $h_2 = 1,80$ m und $h_3 = 1,60$ m betragen?

Lösung:

Für den Umkreis k des Dreiecks CDE ist der Winkel $\sphericalangle CED = \phi$ Peripheriewinkel über der konstanten Sehne $\overline{CD}$. Der Winkel ϕ ist dann am größten, wenn der Kreis k die Parallele zu AB durch E zur Tangente hat.

Begründung: Durch die Endpunkte P und Q einer konstanten Strecke $\overline{PQ}$ lassen sich beliebig viele Kreise konstruieren. Mit wachsendem Radius nimmt der zugehörige Zentriwinkel ab.

Bild 3



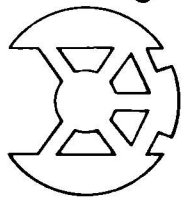
Der Punkt E muß auf der Parallelen zu AB im Abstand h_3 wegen der konstanten Augenhöhe liegen. Zu jedem Punkt E auf dieser Parallelen, der nicht auf der Geraden CD liegt, existiert ein Kreis, der durch C , D und E geht. Von diesen Kreisen besitzt derjenige Kreis den kleinsten Radius, der die Parallele zu AB durch E zur Tangente hat. Alle übrigen Kreise durch die Punkte C , D und E würden diese Parallele in zwei Punkten schneiden; sie hätten damit einen größeren Radius und demzufolge einen kleineren zugehörigen Zentriwinkel.

Nun gilt $\overline{ME} = \overline{MC} = \frac{1}{2} \cdot h_2 + h_1 - h_3$.

Im rechtwinkligen Dreieck MCP gilt somit

$$e^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot h_2 + h_1 - h_3 \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot h_2 \right)^2,$$

XI ISTAM'78 beograd

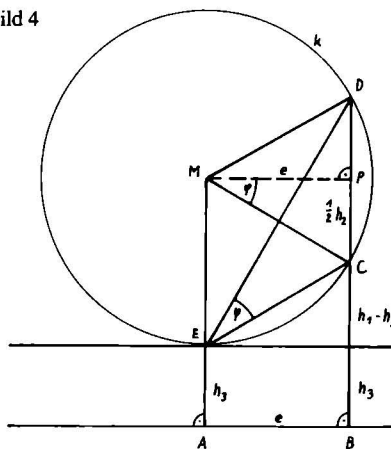


4. april

Vom 31. 3. bis 3. 4. 78 fand in Beograd anlässlich des Studententages an der Naturwissenschaftlich-mathematischen Fakultät der Universität ein Wettbewerb von Mathematikstudenten verschiedener Universitäten statt



Bild 4



$$e^2 = \frac{1}{4} h_2^2 + h_2(h_1 - h_3) + (h_1 - h_3)^2 - \frac{1}{4} h_2^2,$$

$$e^2 = (h_1 - h_3)(h_2 + h_1 - h_3),$$

$$e = \sqrt{(h_1 - h_3)(h_2 + h_1 - h_3)}.$$

Wegen $\sphericalangle CED = \sphericalangle CMP = \phi$ gilt ferner

$$\sin \phi = \frac{h_2}{2r} = \frac{h_2}{h_2 + 2h_1 - 2h_3} = \frac{9}{13},$$

also $\phi \approx 43,8^\circ$.

(XI. Savezni i IV. Internacionalno studentske takmicenije is matematike = XI. ISTAM = XI. Nationaler und IV. Internationaler Studentenwettbewerb in Mathematik). Es beteiligten sich hieran 16 Mannschaften von sieben jugoslawischen Universitäten sowie von Universitäten in Budapest, Szeged, Prag, Wien und erstmalig eine Mannschaft aus der DDR, nämlich von der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock. Die Vertretungen setzten sich jeweils aus drei Studenten und einem Betreuer zusammen. Die Rostocker Universität war vertreten durch Prof. Dr. Engel als Delegationsleiter sowie die Studenten des 2. Studienjahres Konrad Engel, Uwe Lämmler, Jürgen Roßmann. Die Studenten des 1. und 2. Studienjahres hatten in vier Stunden vier Aufgaben aus der Analysis, analytischen Geometrie und Algebra zu lösen, während

sich die Studenten der höheren Studienjahre mit Problemen (teilweise nach Wahl) aus den Gebieten Funktionalanalysis, Programmierung, Gew. Differentialgleichungen, Funktionentheorie, Höhere Algebra, Topologie und Wahrscheinlichkeitstheorie beschäftigen mußten.

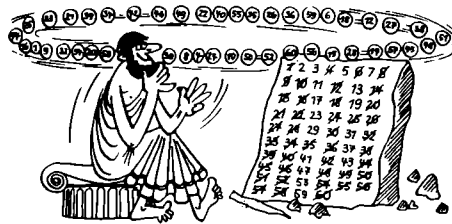
In der Mannschaftswertung belegte unsere Vertretung hinter den Vertretungen aus Budapest, Wien, Prag I und Ljubljana den 5. Platz, wobei Konrad Engel mit einem 4. Platz in der Einzelwertung (von 31 Teilnehmern) an dieser Platzierung den größten Anteil hatte. Nach der Klausur am 1. 4. verlebten die Teilnehmer noch zwei erlebnisreiche Tage in der Hauptstadt der SFR Jugoslawien.

Zum Abschluß äußerten die Veranstalter, die Studenten der Beograder Naturwissenschaftlich-mathematischen Fakultät, den Wunsch, im nächsten Jahr wieder eine Mannschaft der DDR zum Wettbewerb begrüßen zu können.

J. Roßmann

Im Emblem der XI. ISTAM – als Skizze das Königsberger Brückenproblem

Ein ratio- nalisiertes Sieb zum Feststellen von Primzahlen Teil 2



Beweis: Ist a_0 die Einerziffer der Zahl a , a_1 ihre Zehnerziffer, a_2 ihre Hunderterziffer usw., so läßt sie sich darstellen als

$$a = a_0 + 10 \cdot a_1 + 10^2 \cdot a_2 + \dots + 10^n \cdot a_n$$

$$= (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (9a_1 + 99a_2 + \dots + [10^n - 1]a_n).$$

In der ersten Klammer steht nun die Quersumme von a , und die in der zweiten Klammer stehende Zahl ist gewiß durch 3 teilbar. Daraus ergibt sich folgende Übersicht:

| | Die Quersumme von a läßt bei Division durch 3 | | |
|--------------|---|-------------|-------------|
| | den Rest 0 | den Rest 1 | den Rest 2 |
| a gerade | S -Zahl | g_0 -Zahl | g_u -Zahl |
| a ungerade | D -Zahl | Mo -Zahl | Mu -Zahl |

Diese Tabelle kann man zur Vorbereitung des Siebens in einem Bereich großer natürlicher Zahlen benutzen, z. B. im Zahlenraum von 72000 bis 74000.

4. Das Rechnen mit Restklassen

Wir wollen die Klassen aller natürlichen Zahlen, die bei Division durch 6 den Rest a lassen, kurz mit $[a]$ bezeichnen. Die sechs Restklassen, in die die Menge der natürlichen Zahlen bei Division durch 6 zerfällt, sind dann $[0]$, $[1]$, $[2]$, $[3]$, $[4]$, $[5]$. Das sind gerade diejenigen Klassen, die wir früher (in dieser Reihenfolge) S -Zahlen, Mo -Zahlen, g_u -Zahlen, D -Zahlen, g_0 -Zahlen bzw. Mu -Zahlen genannt haben.

Nun zeigen wir:

In welcher Restklasse die Summe zweier natürlicher Zahlen liegt, hängt nur davon ab, aus welchen Restklassen die Summanden stammen. (9)

Beweis: Ist $6m+r$ irgendeine Zahl aus der Restklasse $[r]$, $6n+s$ irgendeine Zahl aus der Restklasse $[s]$ ($0 \leq r \leq 5$, $0 \leq s \leq 5$), so liegt ihre Summe $6(m+n) + (r+s)$ stets in der Restklasse $[r+s]$, falls $r+s < 6$, bzw. in der Restklasse $[r+s-6]$, falls $r+s \geq 6$, denn dann gilt $6(m+n) + (r+s) = 6(m+n+1) + (r+s-6)$. Die Beziehung (9) gestattet, von einer Addition der Restklassen zu sprechen, für die man folgende Additionstafel berechnet.

| + | [0] | [1] | [2] | [3] | [4] | [5] |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| [0] | [0] | [1] | [2] | [3] | [4] | [5] |
| [1] | [1] | [2] | [3] | [4] | [5] | [0] |
| [2] | [2] | [3] | [4] | [5] | [0] | [1] |
| [3] | [3] | [4] | [5] | [0] | [1] | [2] |
| [4] | [4] | [5] | [0] | [1] | [2] | [3] |
| [5] | [5] | [0] | [1] | [2] | [3] | [4] |

Tafel 3: Additionstafel der Restklassen

Aus dieser Tafel liest man z. B. ab: $[1] + [4] = [5]$, was in der früheren Sprechweise bedeutet: Addiert man zu einer Mo -Zahl eine g_0 -Zahl, so ist die Summe stets eine Mu -Zahl. Oder, da eine g_0 -Zahl stets das Doppelte einer Mu -Zahl ist ($[4] = 2[5]$): Die Summe aus einer Mo -Zahl und dem Doppelten einer Mu -Zahl ist stets eine Mu -Zahl.

Aufgabe 1

Das Wievielfache einer Mu -Zahl muß man zu einer D -Zahl addieren, um als Summe eine Mu -Zahl zu erhalten? (das Vierfache)

Aufgabe 2

Das Wievielfache einer Mo -Zahl muß man von einer S -Zahl subtrahieren, um als Differenz eine Mo -Zahl zu erhalten? (das Fünffache)

Für die Multiplikation können wir einen zu (9) gleichartigen Satz aussprechen.

Aufgabe 3

Formuliere und beweise einen zu (9) analogen Satz über die Multiplikation von Restklassen! Stelle eine Multiplikationstafel auf! Für unsere Untersuchungen ist folgende Beziehung wichtig:

Das Quadrat einer Primzahl ist stets eine Mo -Zahl. (10)

Beweis: Alle Primzahlen sind Mu - bzw. Mo -Zahlen, d. h. gehören den Restklassen $[1]$ bzw. $[5]$ an, und es gilt nach Aufgabe 3: $[1]^2 = [1]$ und $[5]^2 = [1]$.

5. Das Löschen auf der Mo - und der Mu -Säule

Laut (7) brauchen wir uns bei der Suche nach Primzahlen nur noch auf der Mo - und der Mu -Säule hin und her zu bewegen. So lassen wir die übrigen vier Restklassen ganz aus dem Spiele. Damit werden die Primzahlen 2 und 3 automatisch ihrer Löschfunktion entzogen, weil ihre n -fachen nur auf der g_0 -, g_u -, D - oder S -Säule liegen können. Somit löschen im Zahlenraum bis $R=100$ laut (2) nur noch die Primzahlen 5 und 7, und laut (1) beginnt deren Löschwirkung bei $5^2=25$ bzw. bei $7^2=49$. Beide Quadrate liegen laut (1) auf der Mo -Säule.

Wie aus Tafel 4 ersichtlich, bilden die Zahlen jeder Säule eine arithmetische Folge mit der Differenz $d=6$. Gelöschte Zahlen sind gestrichen; die Löschzahl ist daruntergesetzt. Gelöscht sind entsprechend unserer Vorüberlegung auf der Mo -Säule $5^2=25$ und $7^2=49$, dazu die größeren n -fachen von 5 (nämlich 55 und 85) und von 7 (nämlich 91), auf der Mu -Säule nur n -fache, die größer als die jeweiligen Quadrate der Löschzahlen sind (nämlich 35, 65, 95; 77).

Wir sehen den Löschvorgang auf der Mo -Säule ein wenig genauer an. Für $p=5$ war uns mit $p^2=25$ eine Anfangszahl gegeben. Gehen wir von ihr 5 Schritte – also p Schritte – aufwärts, treffen wir auf die nächste durch $p=5$ gelöschte Zahl, nämlich auf 55, und auf die übernächste, nämlich auf 85, nach wiederum $p=5$ Schritten. Für $p=7$ sind es von $p^2=49$ bis zur nächstgrößeren durch $p=7$ gelöschten Zahl, nämlich bis zur 91, wiederum $p=7$ Schritte.

Von einer durch p gelöschten Zahl bis zur nächstgrößeren durch p gelöschten Zahl muß man auf einer Säule p Schritte gehen. (11)

Beweis: Wurde mittels der Primzahl p eine Zahl der Mo -Säule gelöscht und ist p selbst eine Mo -Zahl, so hat man nach dem kleinsten positiven Vielfachen xp von p zu fragen, das zur gelöschten Mo -Zahl addiert wiederum eine Mo -Zahl ergibt. Da die Mo -Säule genau alle Zahlen der Restklasse $[1]$ enthält, ist also die kleinste positive Lösung der Gleichung

$x[1] + [1] = [1]$ zu bestimmen, man erhält $x=6$.

Für die anderen Fälle, in denen p eine Mu -Zahl ist bzw. die Mu -Säule betrachtet wird, ergeben sich nach denselben Überlegungen die Gleichungen $x[5] + [1] = [1]$; $x[1] + [5] = [5]$ bzw. $x[5] + [5] = [5]$, deren kleinste positive Lösung stets $x=6$ ist. Das bedeutet: Der Abstand zweier auf derselben Säule durch p gelöschter Zahlen ist $6p$, und da die Säulen arithmetische Folgen mit der Differenz 6 sind, trifft man – von einer durch p gelöschten Zahl ausgehend – nach p Schritten auf die nächste durch p zu löschende Zahl.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|-----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Mo | (1) | 7 | 13 | 19 | 25 | 31 | 37 | 43 | 49 | 55 | 61 | 67 | 73 | 79 | 85 | 91 | 97 |
| | | | | 5 | | | | | 7 | 5 | | | | | 5 | 7 | |
| Mu | | 5 | 11 | 17 | 23 | 29 | 35 | 41 | 47 | 53 | 59 | 65 | 71 | 77 | 83 | 89 | 95 |
| | | | | | 5 | | | | | | 5 | | 7 | | | | 5 |

Tafel 4: Die Mo- und die Mu-Säule im Zahlenraum bis $R = 100$ nach der Löschung

6. Die Brückenzahl b

Da laut (1) und (10) sämtliche Primzahlen p ihren Löschrhythmus mit p^2 auf der Mo-Säule beginnen, erhebt sich die Frage:

Welche Zahl auf der Mu-Säule ist die kleinste durch p gelöschte Zahl? Wir versuchen, von unserem Ausgangspunkt p^2 , einer Mo-Zahl, die Brücke zu schlagen, um auf der Mu-Säule ebenfalls eine Anfangszahl für den Löschvorgang zu finden, die wir als Brückenzahl b bezeichnen.

Wir müssen also die kleinste positive Lösung der Gleichung $[1] + x[1] = [5]$ bzw. $[1] + y[5] = [5]$ bestimmen, je nachdem ob die Löschzahl p der Restklasse $[1]$ bzw. $[5]$ angehört.

Man erhält $x = 4$ und $y = 2$; das besagt:

Die erste auf der Mu-Säule durch die Primzahl p gelöschte Zahl ist $b_0 = p^2 + 4p$, falls p aus der Restklasse $[1]$ ist (d. h. eine p_0 -Zahl ist), und ist $b_0 = b^2 + 2p$, falls p aus der Restklasse $[5]$ (d. h. eine p_u -Zahl) ist. (12)

7. Vorausbestimmung der zu erwartenden

Anzahl von Primzahlen im Zahlenraum von 1 bis R (im Beispiel: $R = 200$)

Die Anordnung der Zahlen in M-Säulen und der auf ihnen ablaufende relativ einfache Löschrhythmus, dessen Wesen hauptsächlich durch (1), (10), (11) und (12) aufgezeigt ist, setzt uns instand, die Anzahl der Primzahlen $p \geq 5$ im Zahlenraum bis R vorauszubestimmen, d. h. bevor wir sie im einzelnen ermitteln.

Dazu bedarf es folgender Schritte:

1. Bestimmung der Löschzahlen laut (2)

Im Beispiel ist $\sqrt{R} = \sqrt{200} \approx 14$; Löschzahlen sind somit 5 7 11 13.

2. Bestimmung der Anzahl A_s der S-Zahlen

Auf dem Zahlenstrahl treffen wir nach jeweils sechs Schritte f auf eine S-Zahl. Danach ist die Anzahl A_s der S-Zahlen gleich dem ganzen

Anteil des Quotienten $\frac{R}{6}$.

3. Bestimmung der Anzahl A_m der M-Zahlen

Sie beträgt hier 66, da jeder S-Zahl ober- und unterwärts eine M-Zahl angelagert ist. Allgemein ist $A_m = 2A_s$, falls $\frac{R}{6} > s$, und $A_m = 2A_s - 1$, falls $\frac{R}{6} = s$.

4. Bestimmung der Anzahl der Löschungen (Anschläge)

Wenn wir die Löschungen mit der Schreibmaschine ausführen, können wir dafür den anschaulicheren Ausdruck „Anschläge“ verwenden.

4.1. Anzahl der Anschläge auf der Mo-Säule

Die kleinste Zahl, die durch die Primzahl p auf der Mo-Säule gelöscht wird, ist – laut (1) und (10) – p^2 . Bis zum nächsten Anschlag geht man – laut $11 - p$ Schritte. Da wir auf einer arithmetischen Folge mit der Differenz $d = 6$ vorwärtsschreiten, umfaßt der Raum von einem Anschlag zum anderen $6p$ natürliche Zahlen, die nicht auf der Säule verzeichneten eingerechnet. Danach zerfällt der Raum von p^2 bis R in $\left[\frac{R - p^2}{6p} \right]$ solcher Anschlagsräume, an deren oberem Ende ein Anschlag liegt (dabei bezeichnet $\left[\frac{R - p^2}{6p} \right]$ den ganzen Anteil des Quotienten $\frac{R - p^2}{6p}$). Der Anschlag

für p^2 liegt aber am unteren Ende eines solchen Anschlagraumes und ist deshalb in der Formel noch nicht berücksichtigt. Die tatsächliche durch p bewirkte Anzahl der Anschläge A_0 auf der Mo-Säule ist

$$A_0 = \left[\frac{R - p^2}{6p} \right] + 1. \quad (13)$$

Beispielsweise bewirkt die Primzahl $p = 7$ auf der Mo-Säule im Zahlenraum bis $R = 200$

$$A_0 = \frac{200 - 49}{42} + 1 = 3 + 1 = 4 \text{ Anschläge}$$

(nämlich: 49 91 133 175).

4.2. Anzahl der Anschläge auf der Mu-Säule

Da auf der Mu-Säule die kleinste durch eine Primzahl p gelöschte Zahl die Brückenzahl b ist, so müssen wir – laut (12) – bei p_0 - und bei p_u -Zahlen unterschiedlich verfahren. Unter Zugrundelegung der Überlegungen für (13) erhalten wir für die Anzahl A_{uo} (A_{uu}) der durch p_0 (p_u) auf der Mu-Säule bewirkten Anschläge:

$$A_{uo} = \left[\frac{R - (p_0^2 + 4p_0)}{6p} \right] + 1$$

$$A_{uu} = \left[\frac{R - (p_u^2 + 2p_u)}{6p} \right] + 1. \quad (14)$$

4.3. Berechnung der Anzahl der Anschläge durch die einzelnen Löschzahlen (im Zahlenraum bis $R = 200$):

$$p_u = 5 \text{ (laut 13)} \left[\frac{200 - 25}{30} \right] + 1 = 6$$

$$\text{(laut 14)} \left[\frac{200 - 35}{30} \right] + 1 = 6$$

$$p_0 = 7 \text{ (laut 13 siehe oben!)} \quad 4$$

$$\text{(laut 14)} \left[\frac{200 - 77}{42} \right] + 1 = 3$$

$$p_u = 11 \text{ (laut 13)} \left[\frac{200 - 121}{66} \right] + 1 = 2$$

$$\text{(laut 14)} \left[\frac{200 - 143}{66} \right] + 1 = 1$$

$$p_0 = 13 \text{ (laut 13)} \left[\frac{200 - 169}{78} \right] + 1 = 1$$

(laut 14 kein Anschlag, da $b > R$)

Gesamtzahl der Anschläge $\underline{\underline{23}}$.

Man ist jetzt versucht, als Anzahl der Primzahlen die Differenz zwischen der Anzahl der M-Zahlen und der Anzahl der Anschläge anzunehmen. Jedoch wurde die Mo-Zahl 175 zweimal angeschlagen, nämlich als n -faches von 5 und von 7. Dies sieht fast wie ein belangloser, leicht zu korrigierender Schönheitsfehler aus, ist aber ein Vorgang von außerordentlicher Wichtigkeit: 7 „begegnet“ 5. Im Zahlenraum bis $R = 100$ findet keine solche „Begegnung“ statt, im Zahlenraum bis $R = 200$ diese einzige, und mit wachsendem R nimmt die Anzahl der Begegnungen erstens zu, und zweitens wird der Vorgang komplizierter, indem Mehrfachbegegnungen stattfinden (wie z. B. bei der Märchenzahl 1001 = $7 \cdot 11 \cdot 13$). Die Anzahl G der gelöschten Zahlen ist also nicht gleich der Anzahl der Anschläge, sondern sie ist die Differenz zwischen der Anzahl A der Anschläge und der Anzahl B der Begegnungen:

$$G = A - B \quad (15)$$

und die Anzahl A_p der Primzahlen die Differenz zwischen der Anzahl A_m der M-Zahlen und der Anzahl G der gelöschten Zahlen:

$$A_p = A_m - G = A_m - (A - B) = A_m + B - A. \quad (16)$$

Unter Einsetzung der oben errechneten Zahlen ergibt dies für den Zahlenraum bis $R = 200$:

$$A_p = 66 + 1 - 23 = 44.$$

Im Zahlenraum bis $R = 200$ sind 44 Primzahlen $p \geq 5$ zu erwarten.

8. Das Löschen im Zahlenraum bis $R = 200$ bei Darstellung der M-Zahlen als Punkte

Wenn man die M-Zahlen durch Punkte darstellt, wie dies aus Tafel 5 zu ersehen ist, so spart man Zeit, kommt mit kleineren Darstellungsräumen aus und schneidet die Anordnung besser auf das Anschlagen durch Mechanismen (wie z. B. durch die Schreibmaschinentaste) zu. Diese Vorteile werden um so wirksamer, je größer R ist. (Hiervon kann man sich an Hand von Tafel 7 überzeugen.)

Wegen der Rolle der natürlichen Zahl 6 ist es zweckmäßig, für die Kolonnen- und Zeilenköpfe S-Zahlen zu verwenden.

9. Hinweise zum Verständnis der Tafel 7

Wer sich mit der Handhabung der Tafel 5 vertraut gemacht hat, müßte imstande sein, die Tafel 7 zu lesen. Beide sind nach den gleichen Gesichtspunkten aufgebaut, jedoch geht in Tafel 7 alles sozusagen in größerem Maßstab vor sich. Aus Raumangel sind unter den Anschlägen keine Löschzahlen angegeben; für die Symbole q und b kann man sie der Tafel 6 entnehmen.

Tafel 7: Das Sieb bis $R = 10000$ (genauer bis $R_2 = 10080$)

| | 30 | | 60 | | 90 | | 120 | | 150 | | 180 | | 210 | | 240 | | 270 | | 300 | | 330 | | 360 | | |
|-----------|----|-----|----|---|-----|---|-----|---|-----|-----|-----|---|-----|---|-----|---|-----|-----|-----|---|-----|---|-----|---|-------|
| <i>Mo</i> | 1 | 5 | 1 | 5 | 1 | 5 | 1 | 5 | 1 | 5 | 1 | 5 | 1 | 5 | 1 | 5 | 1 | 5 | 1 | 5 | 1 | 5 | 1 | 5 | |
| <i>Mu</i> | 5 | 9 | 5 | 9 | 5 | 9 | 5 | 9 | 5 | 9 | 5 | 9 | 5 | 9 | 5 | 9 | 5 | 9 | 5 | 9 | 5 | 9 | 5 | 9 | |
| <i>Mo</i> | 1 | ... | q | | | | | | q | ... | | | | | | | | | | q | | | | | 360 |
| <i>Mu</i> | 5 | ... | | b | ... | | | | | b | ... | | | | | b | ... | | | | | b | ... | | |
| <i>Mo</i> | q | ... | | | | b | ... | | | | | q | ... | | | | | | | | | | | | 720 |
| <i>Mu</i> | | | | | | | | | | | | | | | | b | ... | | | | | | | | |
| <i>Mo</i> | | | | | | | | | q | ... | | | | | | | | q | ... | | | | | | 1080 |
| <i>Mu</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <i>Mo</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1440 |
| <i>Mu</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <i>Mo</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | q | ... | | | | | | | 1800 |
| <i>Mu</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | b | ... | | |
| <i>Mo</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 2160 |
| <i>Mu</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <i>Mo</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 2520 |
| <i>Mu</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <i>Mo</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 2880 |
| <i>Mu</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <i>Mo</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 3240 |
| <i>Mu</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <i>Mo</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 3600 |
| <i>Mu</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <i>Mo</i> | | | | | | | | | q | ... | | | | | | | | | | | | | | | 3960 |
| <i>Mu</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <i>Mo</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 4320 |
| <i>Mu</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <i>Mo</i> | | | | | | | | | | | | q | ... | | | | | | | | | | | | 4680 |
| <i>Mu</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <i>Mo</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 5040 |
| <i>Mu</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <i>Mo</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 5400 |
| <i>Mu</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <i>Mo</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 5760 |
| <i>Mu</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <i>Mo</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 6120 |
| <i>Mu</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <i>Mo</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 6480 |
| <i>Mu</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <i>Mo</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 6840 |
| <i>Mu</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <i>Mo</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 7200 |
| <i>Mu</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <i>Mo</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 7560 |
| <i>Mu</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <i>Mo</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 7920 |
| <i>Mu</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <i>Mo</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 8280 |
| <i>Mu</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <i>Mo</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 8640 |
| <i>Mu</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <i>Mo</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 9000 |
| <i>Mu</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <i>Mo</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 9360 |
| <i>Mu</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <i>Mo</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 9720 |
| <i>Mu</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <i>Mo</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 10080 |
| <i>Mu</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

| | K 0 | K 30 | K 60 | K 90 | |
|----|-----|------|------|------|---------|
| Mo | 1 | 5 | 1 | 5 | 1 |
| Mu | 5 | 9 | 5 | 9 | 5 |
| | | | | | Zw= 0 |
| Mo | 1 | q | q | ! | ! |
| Mu | 5 | 5 | 7 | 5 | 5 |
| | | b | ! | b | |
| | | 5 | 5 | 7 | |
| | | | | | Zw= 90 |
| Mo | ! | ! | q | ! | ! |
| Mu | 7 | 5 | 11 | 7 | 5 |
| | ! | ! | ! | b | ! |
| | 5 | 7 | 5 | 11 | 5 |
| | | | 5 | 7 | |
| | | | | | Zw= 180 |
| Mo | ! | ! | ! | ! | ! |
| Mu | 11 | 5 | 7 | 5 | 13 |
| | ! | ! | ! | b | ! |
| | 5 | 7 | 11 | 5 | 13 |
| | | | | | Zw= 270 |

Tafel 5: Die als Punkte dargestellten *M*-Zahlen im Zahlenraum bis *R*=270 nach der Löschung

Zahlenzeichen:

q als Quadrat gelöschte Zahl

b als Brückenzahl gelöschte Zahl

! sonstige gelöschte Zahl

. stehengebliebener Punkt: Primzahl

Ablesen von Zahlen (an einem Beispiel erläutert):

Welche Zahl ist in der zweiten *Mu*-Zeile durch *b* (mit unterlegter 11) dargestellt?

Hierzu sind jeweils vier Summanden zu addieren:

1. Summand:

Kolonnenzahl *K*, links von *b* 30

2. Summand:

Einerwert unter *K* 30, *Mu*-Zeile 5

3. Summand:

$6x$ (x Anzahl der Zahlenzeichen zwischen *b* und Kolonnenlinie *K* 30)
 $= 6 \cdot 3$ 18

4. Summand: Zeilenwert *Zw* über *b* 90

$b = 143$

Unter den gelöschten Zahlen sind die Löschzahlen angegeben:

143 wurde durch 11 gelöscht.

Als Primzahlen im Zahlenraum bis *R*=200 liest man ab:

| | | | | | | | | |
|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|
| Mo | 7 | 13 | 19 | 31 | 37 | 43 | 61 | 67 |
| | 73 | 79 | 97 | 103 | 109 | 127 | 139 | |
| | 151 | 157 | 163 | 181 | 193 | 199 | | |
| Mu | 5 | 11 | 17 | 23 | 29 | 41 | 47 | 53 |
| | 59 | 71 | 83 | 89 | 101 | 107 | 113 | |
| | 131 | 137 | 149 | 167 | 173 | 179 | | |
| | 191 | 197 | | | | | | |

Wie vorausbestimmt: 44 an der Zahl.

Tafel 7 soll einen Eindruck davon vermitteln, daß es nach der hier angegebenen Methode verhältnismäßig leicht ist, mit mechanischen Mitteln oder auch durch Streichen mit der Hand in ziemlich kurzer Zeit auf engem Raum die Primzahlen eines größeren Zahlenraumes auszusondern.

Zum Schluß eine Aufgabe, die noch einen Fingerzeig zur Handhabung der Tafel 7 gibt: Ist *Mo*=6733 eine Primzahl?

Lösung: Man sucht den nächstkleineren Zeilenwert *Zw*: 6480

Man addiert die Kolonnenzahl *K*, die möglichst nahe an *Mo* heran-, aber nicht darüber hinausführt: + 240

6720

Auf der *Mo*-Zeile unter der gewählten Zeilenwertlinie 6480 steht rechts von der gewählten Kolonnenlinie 240 die gelöschte Zahl 6721 und zwei Schritt nach rechts als Punkt: 6733 – eine Primzahl.

F. Franke

Tafel 6: Die Löschzahlen für Tafel 7 nebst ihren Quadraten und Brückenzahlen

| | | | | | | | | | | | | |
|----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| <i>p</i> | 5 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 | 31 | 37 | 41 | 43 |
| <i>q</i> | 25 | 49 | 121 | 169 | 289 | 361 | 529 | 841 | 961 | 1369 | 1681 | 1849 |
| <i>b</i> | 35 | 77 | 143 | 221 | 323 | 437 | 575 | 899 | 1085 | 1517 | 1763 | 2021 |
| <i>p</i> | 47 | 53 | 59 | 61 | 67 | 71 | 73 | 79 | 83 | 89 | 97 | |
| <i>q</i> | 2209 | 2809 | 3481 | 3721 | 4489 | 5041 | 5329 | 6241 | 6889 | 7921 | 9409 | |
| <i>b</i> | 2303 | 2915 | 3599 | 3965 | 4757 | 5183 | 5621 | 6557 | 7055 | 8099 | 9797 | |

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

Wir stellen heute erneut Lösungsvarianten zu Wettbewerbsaufgaben vor, die bei uns eingegangen sind. Sie mögen unseren aktiven Teilnehmern am *alpha*-Wettbewerb weitere Anregungen zum Lösen von Aufgaben geben.

In Heft 5/1977 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:

Ma 5 ■ 1650 Hans kaufte 3 Buntstifte und 4 Hefte und mußte dafür insgesamt 1,08 M bezahlen. Erwin kaufte 7 Buntstifte und 6 Hefte der gleichen Preislage und mußte dafür 2,12 M bezahlen. Wieviel kostete ein Buntstift bzw. ein Heft?

In Heft 1/1978 veröffentlichten wir dazu folgende Lösung:

Von beiden Jungen wurden zusammen $3 + 7 = 10$ Buntstifte und $4 + 6 = 10$ Hefte für einen Gesamtbetrag von $1,08 \text{ M} + 2,12 \text{ M} = 3,20 \text{ M} = 320 \text{ Pf.}$ gekauft. Folglich kosteten 1 Buntstift und 1 Heft zusammen 32 Pf. Für 3 Buntstifte und 3 Hefte wären insgesamt $3 \cdot 32 \text{ Pf.} = 96 \text{ Pf.}$ zu zahlen. Da 3 Buntstifte und 4 Hefte zusammen 108 Pf. kosten, beträgt der Preis für 1 Heft $108 \text{ Pf.} - 96 \text{ Pf.} = 12 \text{ Pf.}$. Der Preis für einen Buntstift beträgt demnach $32 \text{ Pf.} - 12 \text{ Pf.} = 20 \text{ Pf.}$

Wir stellen nun die Lösung der Schülerin Kerstin Kantiem aus Berlin vor, die Schülerin einer 5. Klasse der Erich-Weinert-Oberschule ist. Kerstin löste diese Aufgabe wie folgt:

(1) 3 Buntstifte und 4 Hefte kosten zusammen 1,08 M.

(2) 6 Buntstifte und 8 Hefte kosten zusammen 2,16 M.

Aus (1) und (2) folgt

(3) 9 Buntstifte und 12 Hefte kosten zusammen 3,24 M.

(4) 7 Buntstifte und 6 Hefte kosten zusammen 2,12 M.

(5) 14 Buntstifte und 12 Hefte kosten zusammen 4,24 M.

Aus (3) und (5) folgt:

(6) 5 Buntstifte kosten $4,24 \text{ M} - 3,24 \text{ M} = 1,00 \text{ M}$; also kostet ein Buntstift 0,20 M.

Aus (1) und (6) folgt:

4 Hefte kosten $1,08 \text{ M} - 3 \cdot 0,20 \text{ M} = 0,48 \text{ M}$; also kostet ein Heft 0,12 M.

Kerstin gebührt Lob für das folgerichtige Schließen; diese Lösung stellt eine ausgezeichnete Denkleistung dar.

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 11. Januar 1979



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion *alpha*
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm x 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1978/79 läuft von Heft 5/78 bis Heft 2/79. Zwischen dem 1. und 10. September 1979 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/78 bis 2/79 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/79 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten – richtig gelöst – (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/78 bis 2/79) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1978/79 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

Mathematik

Ma 5 ■ 1766 Von einem Schüler, der am *alpha*-Wettbewerb teilnahm und im letzten Jahr mehr als 20, aber weniger als 30 Antwortkarten erhielt, wissen wir folgendes:

Der 12. Teil der Anzahl der Antwortkarten trug das Prädikat „Sehr gut gelöst“, der zweite Teil „Gut gelöst“, der 6. Teil „Gelöst“. Die übrigen Antwortkarten trugen den Vermerk „Nicht gelöst“. Wieviel Antwortkarten erhielt dieser Schüler? Wie viele Karten trugen jeweils eines der genannten Prädikate?

Schüler Andreas Kardos, Köthen

Ma 5 ■ 1767 In einer Gemeinde wurde eine Bibliothek mit einem Bestand von 360 Büchern eröffnet. Bereits nach drei Tagen hatten viele Leser Bücher ausgeliehen. Genau die Hälfte dieser Leser hatte je Person zwei Bücher, die restlichen Leser je Person nur ein Buch ausgeliehen. Wieviel interessierte Leser gab es am dritten Tag nach der Eröffnung der Bibliothek in dieser Gemeinde, wenn nur noch der dritte Teil des Buchbestandes vorhanden war?

Schülerin Birgitt Weyh, Fambach

Ma 5 ■ 1768 Von den drei Geschwistern Birgit, Frank und Petra wissen wir folgendes: Im Jahre 1976 waren Petra und Frank zusammen 28 Jahre alt (in ganzen Zahlen); Frank und Birgit waren zusammen 26 Jahre alt; Petra und Birgit waren zusammen 32 Jahre alt. Wie alt war jedes dieser drei Geschwister im Jahre 1976?

Schüler Frank Creutzburg, Gransee

Ma 5 ■ 1769 Hans ist sechs Jahre jünger als sein Freund Peter. Addiert man das gegenwärtige Lebensalter von Hans und Peter (in ganzen Zahlen), so erhält man das Lebensalter des Vaters von Hans. Zusammen sind alle drei Personen gegenwärtig 76 Jahre alt.

Wie alt ist jede dieser drei Personen gegenwärtig?

Schülerin

Annette Pitzschk, Halle-Neustadt

Ma 5 ■ 1770 Ulrike sammelt Briefmarken. Sie besitzt zur Zeit mehr als 450, aber weniger als 460 Briefmarken. Der dritte Teil der Anzahl aller Briefmarken sind Marken mit Blumenmotiven, der vierte Teil Marken mit Tiermotiven. Die restlichen Briefmarken sind zum Tauschen vorgesehen. Wie viele Briefmarken besitzt Ulrike gegenwärtig? Wie viele davon sind zum Tauschen vorgesehen?

Schülerin Katrin Rupp, Neubrandenburg

Ma 5 ■ 1771 Den Klassen 5a, 5b und 5c einer Schule gehören insgesamt 81 Schüler an. In jeder der Klassen 5a und 5b sind zwei Mädchen mehr als Jungen. In der Klasse 5c ist ein Mädchen weniger als Jungen. In diesen drei Klassen sind gleichviel Jungen.

a) Wieviel Schüler gehören jeder dieser drei Klassen an?

b) Wieviel Jungen und wieviel Mädchen gehören jeder dieser Klassen an?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 1772 Addiert man zu einer zweistelligen natürlichen Zahl ihre Quersumme und multipliziert man diese Summe mit 5, so erhält man 150. Um welche Zahl handelt es sich?

Schüler Sven Tarun, Berlin

Ma 6 ■ 1773 Die Schüler der Klassen 6a und 6b einer Schule hatten eine Mathematikarbeit geschrieben. Der achte Teil der Schüler erhielt die Note 1, der dritte Teil die Note 2, die Hälfte der Schüler die Note 3, drei Schüler die Note 4, kein Schüler die Note 5. Wieviel Schüler gehören jeder dieser beiden Klassen an, wenn alle Schüler an der Mathematikarbeit teilgenommen haben und der Klasse 6a zwei Schüler mehr angehören als der Klasse 6b?

Schülerin Heike Taschenberger, AG Math. POS Deutschenbora

| | | |
|-----|---|--------------|
| 30 | Thies Luther, 26 Güstrow, Werdersstr. 22
Kersting-OS, Klasse 7 | Ma 7
1369 |
| 150 | Prädikat: | |
| | Lösung: | |

Ma 6 ■ 1774 Peter wurde von seinem Vater gefragt, wieviel Punkte er bei der XVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR (Bezirksolympiade) erreicht habe und welchen Platz er damit belegt habe. Scherzhaft antwortete Peter: „Addiert man zu der von mir erreichten Platzziffer, die der kleinsten Primzahl entspricht, die von mir erreichte Punktzahl, dividiert man diese Summe durch 5, multipliziert man den so erhaltenen Quotienten mit 46, so erhält man das Zehnfache der von mir erzielten Punktzahl.“ Wieviel Punkte hatte Peter erreicht? *Schüler Jörg Schmidt, Neubrandenburg, Kl. 7*

Ma 6 ■ 1775 Ein Großvater hatte seinen drei Enkeln einen Korb mit Nüssen mitgebracht, die sie sich ehrlich teilen sollten. Hans, der allein im Hause war, nahm sich als erster seinen Anteil; er entnahm dem Korb den dritten Teil der Anzahl der Nüsse. Bernd, der nicht wußte, daß Hans sich schon bedient hatte, nahm von den verbliebenen Nüssen den dritten Teil. Elke, die nicht wußte, daß Hans und Bernd dem Korb schon Nüsse entnommen hatten, nahm als letzte von den verbliebenen Nüssen ebenfalls den dritten Teil. Danach waren noch 16 Nüsse im Korb. Wieviel Nüsse hat jeder von ihnen dem Korb entnommen? *Schüler Uwe Winkler, Großenhain*

Ma 6 ■ 1776 Von drei Lehrern einer Schule mit den Familiennamen Taubert, Weber und Müller, welche jeweils genau zwei der Fächer Biologie, Mathematik, Geographie, Geschichte, Russisch bzw. Englisch unterrichten, ist folgendes bekannt:

- (1) Der Geographielehrer und der Russischlehrer sind Nachbarn.
 - (2) Herr Müller ist der jüngste dieser drei Lehrer.
 - (3) Herr Taubert hat den gleichen Schulweg wie der Biologie- und der Russischlehrer.
 - (4) Der Biologielehrer ist älter als der Mathematiklehrer.
 - (5) In der Freizeit spielen Herr Müller, der Englischlehrer und der Mathematiklehrer Fußball.
- Welche Fächer unterrichtet jeder dieser drei Lehrer? *Schülerin Astrid Wruck, Rostock*

Ma 7 ■ 1777 Die in dekadischer Darstellung aufgeschriebene achtstellige natürliche Zahl $z = x y y y y y x$ mit $x > y$ sei durch 18 teilbar. Gib alle Zahlen an, die diese Bedingungen erfüllen! *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 7 ■ 1778 Die Variablen a, b, c des Terms $\frac{a \cdot (c-b)}{b-a}$ sollen mit den Zahlen 13, 15 bzw. 20 so belegt werden, daß der Wert des Terms gleich einer positiven ganzen Zahl ist. *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 7 ■ 1779 Es ist ein Rhombus $ABCD$ zu konstruieren aus der Länge der Seite $\overline{AB} = a = 5,5$ cm und aus der Summe der Längen der

beiden Diagonalen $\overline{AC} + \overline{BD} = e + f = 14$ cm. Die Konstruktion ist zu begründen.

Schüler A. und R. Beckmann, POS „Ernst Thälmann“, Steinbach-Hallenberg, Kl. 8b

Ma 7 ■ 1780 Gesucht sind alle dreistelligen, aus verschiedenen Ziffern bestehenden natürlichen Zahlen, die in dekadischer Darstellung die Form $z = \overline{abc}$ haben und folgende Eigenschaften besitzen:

- a) Ihre Quersumme ist eine gerade Zahl.
- b) Die Differenz aus den Zahlen, die den ersten beiden Ziffern entsprechen, ist dreimal so groß wie die Differenz aus den Zahlen, die den letzten beiden Ziffern entsprechen.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 8 ■ 1781 Das Produkt aus dem Vorgänger und dem Nachfolger einer natürlichen Zahl n sei 2208. Ermittle n !

Andreas Fittke, Berlin, H.-Hertz-OS, Kl. 10

Ma 8 ■ 1782 Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen, deren um 1 vermindertes Quadrat eine Primzahl ist!

Andreas Fittke, Berlin, H.-Hertz-OS, Kl. 10

Ma 8 ■ 1783 Es seien a_1, a_2, b_1 und b_2 positive reelle Zahlen.

Man beweise, daß stets gilt:

- (1) $(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1 + a_2)(a_1 b_1^2 + a_2 b_2^2)$ und
- (2) $(a_1 b_1 - a_2 b_2)^2 \geq (a_1 - a_2)(a_1 b_1^2 - a_2 b_2^2)$.

Sh. B. Linkowski,

Fachlehrer f. Math., Moskau

Ma 8 ■ 1784 Zwei Nachbarn wollen ein bisher gemeinsam genutztes Grundstück halbieren. Das Grundstück besitzt die Form eines rechtwinkligen Trapezes mit den Längen der parallelen Seiten $a = 150$ m und $c = 120$ m. Die Länge der anderen dem rechten Winkel anliegenden Seite beträgt $d = 40$ m. Der Zaun soll parallel zu den zwei parallelen Seiten verlaufen.

- a) Wie lang ist der Zaun?
- b) Wie groß ist der Abstand des Zaunes von der Seite $\overline{AB}$?

Ing. K.-H. Gora, Lohsa

Ma 9 ■ 1785 Ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basislänge x cm hat einen Flächeninhalt von 15 cm^2 . Die Höhe von der Spitze auf die Basis ist 1 cm kürzer als diese. Wie breit muß ein Rechteck gleichen Flächeninhalts sein, wenn es x cm lang ist? Wie lang ist die Basis des Dreiecks ABC ? *Fr.*

Ma 9 ■ 1786 Wie lang ist der Radius des Umkreises eines Dreiecks ABC , wenn die Länge der Seite $\overline{AB}$ 5 cm und die Größe des Winkels $\angle ACB$ 80° betragen? *Fr.*

Ma 9 ■ 1787 Bei einer Ferienwanderung werden von den Schülern einer Klasse Getränke gekauft, und zwar Cola zu 35 Pfennig und Limonade zu 25 Pfennig je Flasche. Der

Gesamtpreis beträgt genau 10 Mark. Es müssen aber außerdem noch 9 Mark Flaschenpfand (je Flasche 0,30 M) bezahlt werden. Wieviel Flaschen von jeder Sorte wurden gekauft?

Dipl.-Lehrer Ing. D. Völzke, Greifswald

Ma 9 ■ 1788 Es sei ein rechtwinkliges x - y -Koordinatensystem gegeben. Ermitteln Sie graphisch die Menge aller Punkte der x - y -Ebene, die folgenden Bedingungen genügen:

- (1) $-x + y < 0$ und
- (2) $\frac{y}{4} < -x$ und
- (3) $-y > 1$!

Dipl.-Lehrer Ing. D. Völzke, Greifswald

Ma 10/12 ■ 1789 Man ermittle die Lösungsmenge der Gleichung $(2x+2)^{\sqrt[3]{2x+2}} = 64$

im Bereich der reellen Zahlen!

Schüler André Schlosser, Klingenthal, Kl. 9

Ma 10/12 ■ 1790 In welchem Verhältnis stehen der Flächeninhalt eines regelmäßigen n -Ecks zum Flächeninhalt seines Inkreises?

Andreas Fittke,

Berlin, EOS H. Hertz, Kl. 10

Ma 10/12 ■ 1791 Man ermittle drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, die folgenden Bedingungen genügen sollen:

Das Quadrat der größten Zahl ist gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Zahlen.

Schüler Volker Leutheuser, Sonneberg, Kl. 8

Ma 10/12 ■ 1792 Gegeben sei ein Dreieck ABC mit folgenden Seitenlängen:

| Seite | Länge |
|-----------------|-------------|
| $\overline{AB}$ | $c = 7$ cm |
| $\overline{BC}$ | $a = 5$ cm |
| $\overline{AC}$ | $b = 6$ cm. |

Es ist die Länge s_c der Seitenhalbierenden $\overline{CM}$ des Dreiecks ABC durch die Längen a, b, c der Dreiecksseiten auszudrücken und zu berechnen. (M ist Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$.) *Sch.*

Physik

Ph 6 ■ 41 Das Volumen eines quaderförmigen Eisenstückes soll durch einen Versuch bestimmt werden. Man gießt dazu Wasser in einen Meßzylinder, so daß der Körper voll eintauchen kann, und liest an der Skale den Wasserstand vor und nach dem Eintauchen ab. Er betrage vorher 95 ml und nachher 116,5 ml.

a) Welches Volumen ermittelt man aus diesem Versuch?

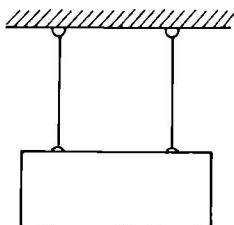
b) Zur Kontrolle des Ergebnisses werden jetzt mit dem Metermaß die Kantenlängen des Quaders gemessen (19 mm, 27 mm, 43 mm) und das Volumen berechnet.

c) Um wieviel mm^3 unterscheiden sich die beiden Ergebnisse, und welches ist genauer?

Ph7 ■42 Ein 96 kp schweres Transparent hängt in der auf dem Bild angegebenen Lage an zwei Seilen.

a) Welche Kräfte F_1 und F_2 treten an den beiden Seilen auf? Trage sie durch Pfeile im geeigneten Maßstab ein!

b) Bestimme durch Zeichnung die Gegenkräfte G_1 und G_2 , die an den Befestigungen an der Decke auftreten!

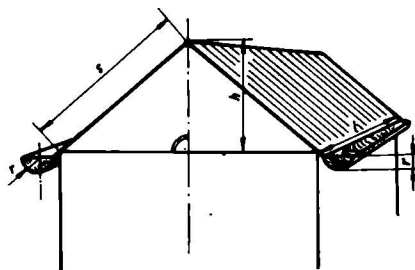


Ph8 ■43 100 g Wasser mit einer Temperatur von 25°C und 250 g Wasser mit einer Temperatur von 40°C werden gemischt. Dabei nimmt das kältere Wasser nur 80% der abgegebenen Wärme auf. Berechne unter diesen Bedingungen die Mischtemperatur!

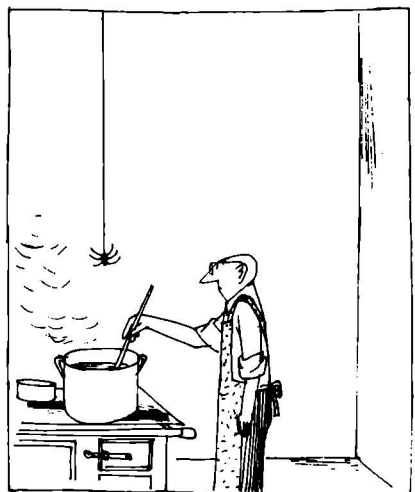
Schüler Jürgen Gräfenstein,
14. OS Dresden, (Kl. 9)

Ph9 ■44 Auf ein Dach vom skizzierten Querschnitt fällt Regen mit einer Menge von 1 mm pro Stunde. Das Dach habe eine Länge von $l = 18\text{ m}$.

$s = 6,25\text{ m}$; $h = 3,75\text{ m}$; $r = 6,00\text{ m}$.

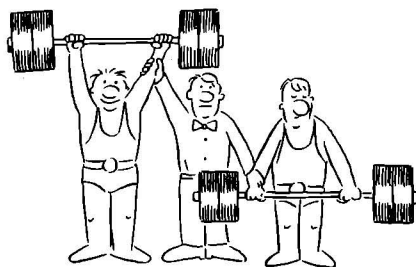


a) Wieviel Regenwasser wird vom Dach aufgefangen, wenn die Dauer des Regens 90 Minuten beträgt und vorausgesetzt wird, daß der Regen senkrecht fällt?



b) Nach welcher Zeit würden die beiden Dachrinnen überlaufen, wenn die darin befindlichen Abflußöffnungen verschlossen sind?

Ing. A. Körner, Leipzig



Ph10/12 ■45 In welcher Höhe über der Erdoberfläche muß sich ein Fernseh-Satellit befinden, damit er stets über derselben Stelle der Erde steht?

Anmerkung: Benutzen Sie dazu eines der Keplerschen Gesetze und als Vergleichskörper den Mond! Dieser hat eine Umlaufzeit von etwa 27,33 Tagen und einen mittleren Bahnradius von 384000 km.

A. Schatz, Leipzig

Chemie

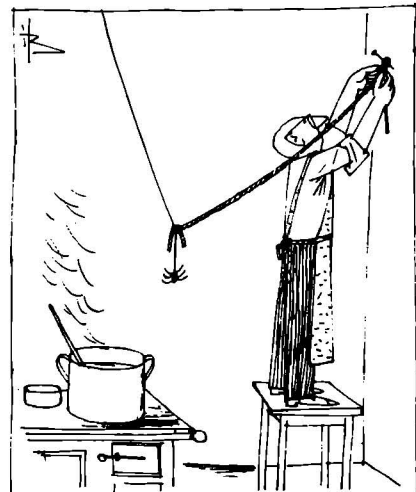
Ch7 ■33 In einem Chemiebetrieb sollen täglich 1500 kg Schwefel aus Schwefelkies gewonnen werden. Im Labor wurde ermittelt, daß in 500 mg Schwefelkies 180 mg Schwefel enthalten sind.

a) Wieviel Kilogramm Schwefelkies müssen dem Betrieb täglich für die Produktion zur Verfügung stehen?

b) Wieviel Kilogramm Schwefelkies muß der Betrieb monatlich erhalten, wenn täglich gearbeitet wird (1 Monat = 30 Tage)?

c) Die produzierte Tagesmenge Schwefelkies entspricht wieviel Prozent der Monatsproduktion?

Ch8 ■34 14 Kilogramm Seifenspiritussollen aus 54 Teilen Öl, 66 Teilen Kalilauge, 278 Teilen Spiritus und 158 Teilen Wasser hergestellt werden. Wieviel Kilogramm werden von jedem Stoff benötigt?



Ch9 ■35 Methan ist zu 35% im Stadtgas enthalten. 7 ml dieses Methangases sollen mit 50% Luftüberschuß verbrannt werden. Wieviel Milliliter Luft werden zur Verbrennung benötigt, wenn der Sauerstoffgehalt der Luft $\frac{1}{5}$ des Volumens beträgt?

Ch10 ■36 Kalziumkarbid ist ein wichtiger Ausgangsstoff zur Herstellung organischer Verbindungen auf Kohlebasis. In einem Karbidofen werden Branntkalk und Koks umgesetzt. Berechnen Sie

a) die Masse an Branntkalk, die für die Erzeugung von 300 t Kalziumkarbid eingesetzt werden muß,

b) den täglichen Verbrauch an Elektroenergie (kWh) eines solchen Karbidofens, wenn für die Erzeugung von einem Mol Kalziumkarbid 0,13 kWh erforderlich sind,

c) die Masse Äthanol, die aus 2 kg Kalziumkarbid gewonnen werden kann! (Die Herstellung von Äthanol verläuft über die Zwischenprodukte Äthin und Äthanal.)

Ein Ausflug



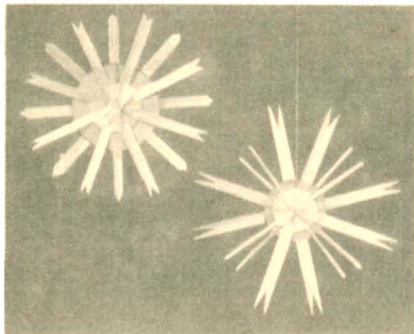
An einem Mittwoch in den Winterferien 1978 fuhr unsere AG Mathematik als *Auszeichnung für sehr gute Arbeit* in die ČSSR. Nach mehrstündiger Busfahrt kamen wir in der Stadt Liberec an. Von dort aus ging es zu Fuß zu unserem Ziel, dem Ještěd. Eine Seilbahn brachte uns hinauf zu dem kegelförmigen, 1012 Meter hohen Bergmassiv. Von hier aus hatten wir einen herrlichen Blick über die tiefverschneiten Wälder und Abhänge. Im modernen Restaurant, das gleichzeitig Hotel und Rundfunk- sowie Fernsehstation ist, sorgten wir für unser leibliches Wohl. Den Rückweg legten wir zu Fuß zurück und hatten noch Zeit, uns die schöne Kreisstadt anzuschauen.

Bärbel Hänig,

AG Mathematik der OS Burkau

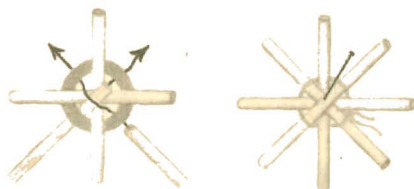
Bunte Basteleien

Geflochtener Strohstern



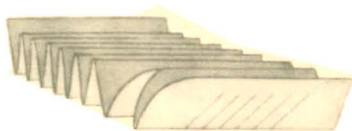
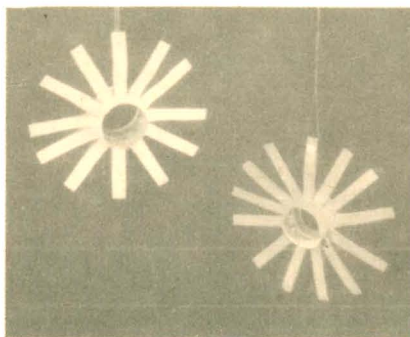
Das Stroh für Sterne muß stets eingeweicht und z. T. geplättet werden. Aus beiderseitig buntem Papier werden ein Ring und dazu 4, 6 oder 8 Halme von gleicher Länge geschnitten. Zwei gekreuzte Halme werden über den Ring gelegt und die nächsten dazwischen geflochten (siehe Bild). Zuletzt wird ein Aufhänger am Ring befestigt. Durch verschiedene Größe der Ringe, Länge und Breite der Halme sind viele Abwandlungen möglich. Ihr könnt diese Technik schnell erlernen, denn der Ring gibt den Halmen sofort Halt.

Gebundener Strohstern



Die einfache Grundform ist Ausgangspunkt für viele Sterne, an ihr übt man das richtige Binden. Von vier gleichlangen Halmstücken werden zwei rechtwinklig gekreuzt, die beiden anderen auf Lücke darübergelegt (siehe Bild). Anfänger können mit einer Stecknadel die Halme leicht zusammenspießen. Nun wird ein dünner Faden um die acht Enden geflochten, verknötet und zum Aufhänger geschlungen. Der Stern hält, wenn die Halme richtig gelegt sind, nach einer Umbindung, er kann aber zur Zierde noch öfter und verschiedenfarbig umwickelt werden. Zum Schluß beschneidet ihr die Zacken gleichmäßig.

Einfacher Strahlenstern aus Papier



Ein etwa 6 cm × 6 cm großes Stück beiderseitig buntes Papier oder Bastlerfolie wird in der Mitte gefaltet und vom Bruch her bis etwa 6 mm zum Rand gleichmäßig wie ein Kamm eingeschnitten, auseinandergefaltet und zur Rundung geklebt (siehe Bild). Die kleinen Randmuffen werden vorsichtig zusammengeschoben. Dabei entsteht ein Stern, dessen Strahlen an den Spitzen von innen leicht aneinandergeklebt werden.

Ebenso wird die Kerzenhülle (siehe Bild) gearbeitet. Sie entsteht aus einem Streifen Karton oder starkem Papier von etwa 20 cm × 13 cm. Die Ränder bleiben 1,5 cm breit und werden zur Versteifung nochmals mit einem schmalen Streifen umklebt.



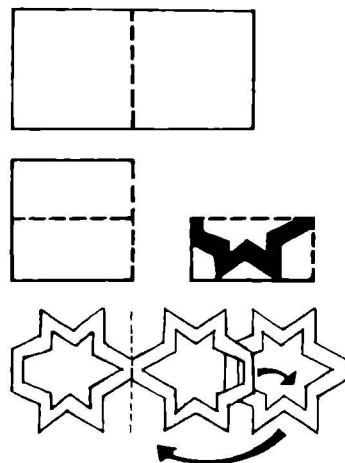
Faltschnitt

mit unterlegtem Velourpapier, als Tischkarte geeignet



Sternenkette

Wir falten Buntpapierrechtecke zweimal und malen uns Schablonen, die wir dann später auseinanderfalten. Zum Schluß stecken wir einen Stern in den anderen.



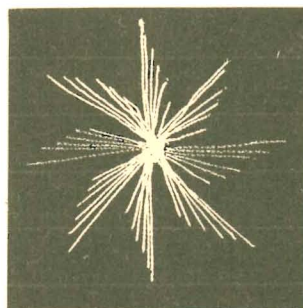
Scherenschnitt

als Baumschmuck oder mit unterlegtem Transparentpapier als Fensterschmuck geeignet.



Stern

mit buntem Garn auf Velourpapier gestickt und auf eine Einladungskarte aufgeklebt



Und wer durch diese Seite Lust bekommen hat, noch mehr zu basteln, der greife zu dem Buch:

Hertha Kürth

Geschickte Hände

Basteln für Fest und Spiel

Rudolf Arnold Verlag Leipzig

Bestell-Nr. 7920410

DDR 4,50 M

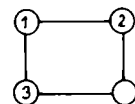
Kombinatorische Betrachtungen bei Schiebe-Spielen

Teil 2

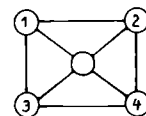
Wir veröffentlichen nun acht Aufgaben zum Teil I unseres Beitrages und wünschen den Lesern beim Lösen viel Erfolg!

Aufgaben

▲ 1 ▲ Welche 3er Permutationen sind auf dem in Bild 13 dargestellten Schiebespiel erspielbar? Aus wieviel Zügen besteht eine Minimalrunde? Welchen Deckbewegungen eines gleichseitigen Dreiecks entsprechen die erspielbaren Permutationen?



▲ 2 ▲ Welche der Permutationen sind auf dem in Bild 14 dargestellten Schiebespiel durch eine Minimalrunde erspielbar? Aus wieviel Zügen besteht eine Minimalrunde? Ist jede Transposition aus S_4 erspielbar? Wie sieht der Überführungsgraph aus?



▲ 3 ▲ Welche Deckbewegungen eines Quadrates gibt es, und wie lauten die ihnen entsprechenden 4er Permutationen?

▲ 4 ▲ Wie lautet die Produkttafel der 4 Drehungen eines Quadrates? Daraus leite man 6 verschiedene Klassen von lateinischen Quadraten der Ordnung 4 ab!

▲ 5 ▲ Kann man jede 4er Permutation mit einer Deckbewegung eines Tetraeders in Verbindung bringen? Welche Bedeutung haben dabei die Spiegelungen an gewissen Ebenen für die Darstellung von Transpositionen?

▲ 6 ▲ Auf dem in Bild 11 dargestellten Graphen spiele man gemäß der folgenden Spielregel: Eine Spielrunde besteht aus 6 Zügen, jeder Stein soll dabei geführt werden, und das unnummerierte Feld werde stets möglichst rasch freigezogen. Welche Permutationen sind erspielbar? Welchen Deckbewegungen eines Tetraeders entsprechen diese Permutationen? Wie sieht der Überführungsgraph aus? Kann man aus den entsprechenden Permutationen ein lateinisches Quadrat bilden?

▲ 7 ▲ Gibt es ein Schiebespiel, auf dem nur die 4er Permutationen, die den Drehungen eines Quadrates entsprechen, erspielbar sind?

▲ 8 ▲ Jede Permutation $P \in S_n$ ist als Produkt von elementfremden Zyklen darstellbar! (Was hat diese Aussage mit dem Zyklendiagramm einer Permutation zu tun?)

| Permutation | Zyklendiagramm | Kartendiagramm | Produkt von Transpositionen minimaler Faktorenanzahl | Anzahl der Fixpunkte |
|--|----------------|----------------|--|----------------------|
| $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ | | | | 4 |
| $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ | | | (12) | 2 |
| $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ | | | (13) | 2 |
| $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ | | | (14) | 2 |
| $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ | | | (23) | 2 |
| $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ | | | (24) | 2 |
| $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ | | | (34) | 2 |
| $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ | | | $(13)(12) = (23)(13) = (12)(23) = (123)$ | 1 |
| $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ | | | $(12)(13) = (23)(12) = (13)(23) = (132)$ | 1 |
| $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ | | | $(14)(12) = (24)(14) = (12)(24) = (124)$ | 1 |
| $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ | | | $(12)(14) = (24)(12) = (14)(24) = (142)$ | 1 |

| | | | | |
|--|--|--|---|---|
| $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ | | | $(14)(13) = (34)(14) = (13)(34) = (1344)$ | 1 |
| $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ | | | $(13)(14) = (14)(34) = (34)(13) = (143)$ | 1 |
| $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ | | | $(24)(23) = (34)(24) = (23)(34) = (234)$ | 1 |
| $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ | | | $(23)(24) = (24)(34) = (34)(23) = (243)$ | 1 |
| $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ | | | $(34)(12) = (12)(34)$ | 0 |
| $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ | | | $(24)(13) = (13)(24)$ | 0 |
| $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ | | | $(23)(14) = (14)(23)$ | 0 |

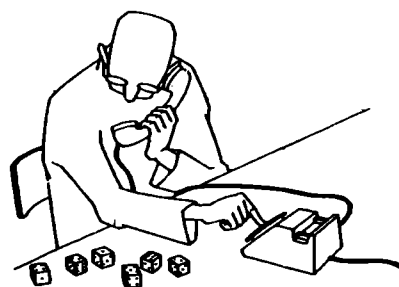
Jeder Zyklus ist als Produkt von Transpositionen darstellbar, damit ist jede Permutation als Produkt von Transpositionen darstellbar. In welchen Fällen ist diese Darstellung eindeutig?

J. Flachsmeier

Aus Platzgründen veröffentlichen wir zu unserem Teil I (Heft 4/78) die dort angeführte Tabelle 2.

| | | | | |
|--|--|--|--|---|
| $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ | | | $(12)(14)(13) = (12)(34)(14) = (12)(13)(34) = (13)(24)(23) = (13)(34)(24) = (13)(23)(34) = (14)(13)(24) = (14)(24)(13) = (23)(12)(34) = (23)(34)(12) = (24)(13)(23) = (24)(23)(12) = (24)(12)(13) = (34)(12)(14) = (34)(14)(24) = (34)(24)(12) = (1342)$ | 0 |
| $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ | | | Alle Produkte von (1342) – jedoch mit umgekehrter Reihenfolge der Faktoren! Also $(13)(14)(12) = (14)(34)(12) = \dots = (1243)$ | 0 |
| $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ | | | $(12)(13)(14) = (12)(34)(13) = (12)(14)(34) = (13)(14)(23) = (13)(23)(14) = (14)(23)(24) = (14)(24)(34) = (14)(34)(23) = (23)(12)(14) = (23)(14)(24) = (23)(24)(12) = (24)(12)(34) = (24)(34)(12) = (34)(12)(13) = (34)(13)(23) = (34)(23)(12) = (1432)$ | 0 |
| $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ | | | Alle Produkte von (1432) – jedoch mit umgekehrter Reihenfolge der Faktoren! Also $(14)(13)(12) = (13)(34)(12) = \dots = (1234)$ | 0 |
| $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ | | | $(12)(24)(13) = (12)(13)(24) = (13)(24)(34) = (13)(23)(24) = (13)(34)(23) = (14)(23)(12) = (14)(12)(13) = (14)(13)(23) = (23)(14)(12) = (23)(24)(14) = (23)(12)(24) = (24)(14)(13) = (24)(34)(14) = (24)(13)(34) = (34)(23)(14) = (34)(14)(23) = (1324)$ | 0 |
| $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ | | | Alle Produkte von (1324) – jedoch mit umgekehrter Reihenfolge der Faktoren! Also $(13)(24)(12) = (24)(13)(12) = \dots = (1423)$ | 0 |

In freien Stunden **alpha** heiter



Aus dem alten Rom

Im alten Rom wurde die Klugheit eines Mannes auch nach seiner Fähigkeit im Kopfrechnen eingeschätzt. Deshalb gaben sich die Römer gegenseitig knifflige Denkaufgaben auf. Hier eine Rinderherdenrechnung:

Auf den Fluren weiden Rinder
vierfach in Herden geteilt,
jede Herde anders gefärbt.

Die erste mildweiß, die andere rabenschwarz,
die dritte braun und die vierte scheckig.

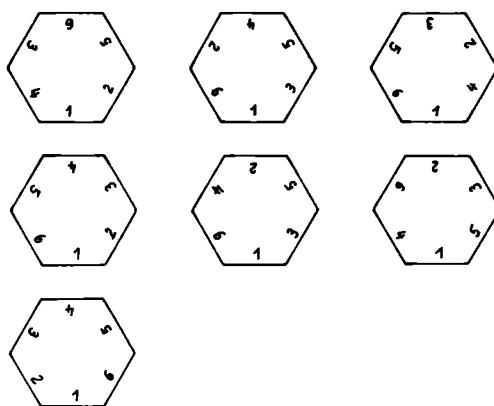
Weiße Rinder weiden 12 insgesamt.

Die braunen Rinder sind den weißen gleich an der Zahl
weniger dem vierten Teil der schwarzen Rinder.

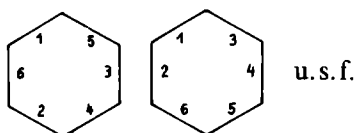
Die Menge der schwarzen ist gleich dem dritten Teil
der weißen, doppelt genommen.

Die scheckigen Rinder ergeben an Zahl die Hälfte der
weißen, vermehrt um sämtliche schwarzen.

Sage mir genau die Zahl der Rinder, die du weiden
siehst! Sage mir auch, wieviel es gibt von jeder Farbe!



können noch andere Sechsecke angefertigt werden, die
eine andere Zahlenverteilung haben, z. B.

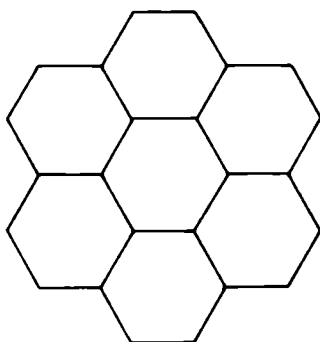


u. s. f.

Nun viel Spaß mit *Sieben–Sechs!*

Sieben–Sechs

Die Arbeitsgemeinschaft *alpha* der Otto-Drews-Ober-
schule, Greifswald, sandte folgendes Spiel (aus Plaste).

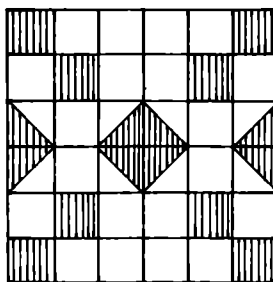


Spielanleitung: Lege die sieben Sechsecke so auf das
Spielfeld, daß sich gleiche Zahlen berühren.

Bei der Zahlenanordnung, wie sie hier vorliegt, ist die
veröffentlichte Lösung möglich. Wer findet eine andere
Lösung? Um das Spiel noch variabler zu machen,

Auf einen Blick

Wie verhält sich der Flächeninhalt der schraffierten
zur nichtschraffierten Fläche?



Wie viele Fische?

Einem Angler wurde folgende Frage gestellt: „Wie
viele Fische hast du heute gefangen?“ Er antwortete:
„Ich habe dreimal soviel Fische wie gestern gefangen;
das sind 10 Fische mehr als gestern.“ Wie viele Fische
hat der Angler an jedem dieser beiden Tage gefangen?

Starker Kraftwagenverkehr

Uwe stand am Wohnzimmerfenster und zählte in gleichen Zeitabständen alle PKW und LKW, die am Haus vorbeifuhren. Er zählte stets viermal soviel PKW wie LKW.

a) Wie viele PKW bzw. LKW fuhren am Haus in dieser Zeit vorbei, wenn Uwe jeweils (wie aus der abgebildeten Tabelle ersichtlich) wie folgt gezählt hat?

| | | | | | | | |
|-----|---|----|---|----|----|----|----|
| PKW | 8 | 12 | | | 16 | | |
| LKW | 2 | | 4 | 25 | 9 | 32 | 10 |

b) Wie viele PKW und LKW wären es, wenn Uwe insgesamt 55 Kraftfahrzeuge gezählt hätte?

Buchstaben-Mosaik

Die Buchstaben sind so durch Ziffern zu ersetzen, daß das Potenzieren zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

| |
|-------------------------------------|
| $A^a = B$ |
| $A A^a = E D C B$ |
| $A A A^a = E E D C C B$ |
| $A A A A^a = E E E D C C C B$ |
| $A A A A A^a = E E E E D C C C C B$ |
| $B B B B^a = B B B C D D D D E$ |
| $B B B B^a = B B B C D D D E$ |
| $B B B^a = B B C D D E$ |
| $B B^a = B C D E$ |
| $B^a = C E$ |

Kreuzzahlrätsel

Waagerecht:

1. Eine vierstellige Zahl, die erste und dritte Ziffer ergeben sich aus 9. waagerecht.
5. Der Durchschnitt von vier Zahlen ist 57. Drei Zahlen heißen 1, 2, 3. Wie heißt die fehlende Zahl?
7. Das Produkt aller geraden Zahlen kleiner als 10.
8. abc , wenn gilt: $2a + 3 = 13$, $\frac{1}{4}b + 2 = 3$ und $3c - 5 = 1$.
9. Der Wert von $2x^2 + 6x + 10$, wenn x die letzte Ziffer von 1. waagerecht ist.
10. Die einzige Quadratzahl zwischen 900 und 1000.
11. Die Angabe der Nordostrichtung bei positivem Drehsinn von der Ostrichtung.
13. Die Summe aller Kubikzahlen von 1 bis einschließlich 1000.

| | | | | | |
|----|---|----|----|---|---|
| 1 | 2 | | 3 | | 4 |
| | | | 5 | 6 | |
| 7 | | | | 8 | |
| 9 | | | 10 | | |
| 11 | | 12 | | | |
| | | 13 | | | |

Senkrecht:

2. $2^2(10^2 + 7^2)^2$.
3. Die Anzahl der Jahre von 2704 Wochen.
4. Berechne $\frac{413 \cdot 9 + 1087}{4}$!
6. Die Summe der Rauminhalte zweier Quader mit den Seitenmaßen 32, 32, 18 bzw. 15, 18, 23.
7. Der Umfang eines Kreises, dessen Radius 6,215 m beträgt (Verwende $\pi = \frac{355}{113}$!).
12. Flächeninhalt des Trapezes mit den Grundseiten 2,861 bzw. 1,379 und der Höhe 2,5.

Aus: Math. Pie, London

Resultat stets 30

Es gilt

$$(1 + 1)^{1+1+1+1+1} - 1 - 1 = 30$$

.

.

.

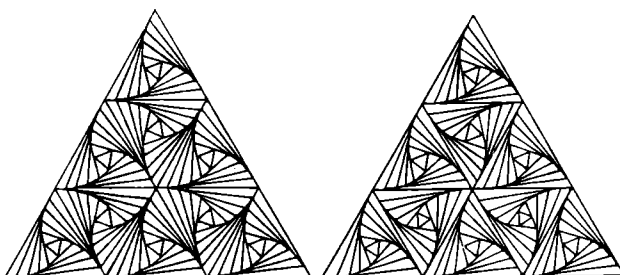
$$9 + 9 + 9 + \frac{9}{9} + \frac{9}{9} + \frac{9}{9} = 30!$$

Wer findet die entsprechenden Gleichungen von neun Zweien, Dreien, ..., Achten?

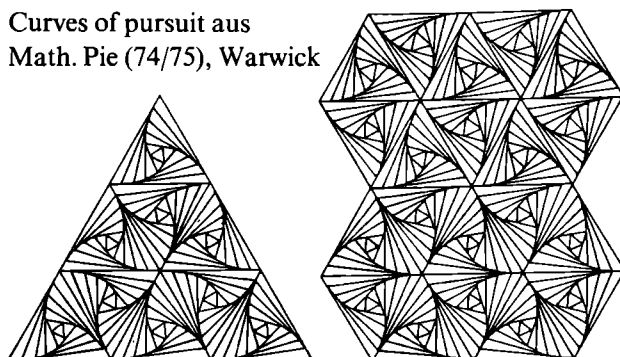
Kryptarithmetik

Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern, die gesucht sind. Vorher sind die vier arithmetischen Zeichen +, -, ·, : an Stelle des Sternchens (*) einzusetzen, wenn man weiß, daß jedes Zeichen nur einmal vorkommt.

- | | |
|----------------------|----------------------|
| (1) $aab * c = adde$ | (2) $adde * c = ccc$ |
| (3) $ccc * f = fff$ | (4) $fff * g = fhd$ |



Curves of pursuit aus
Math. Pie (74/75), Warwick

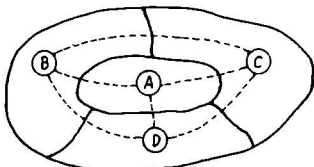


Lösungen



Lösungen zu: Der Vierfarbensatz

▲ 1 ▲

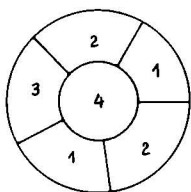


▲ 2 ▲ Zehn. Bezeichnet man die Hauptstädte mit A, B, C, D, E, so wären das die Straßen AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE.

▲ 3 ▲ Angenommen, die fünf Punkte A, B, C, D, E wären einander durch sich gegenseitig nicht schneidende Kurven verbunden. Drei Verbindungskurven bilden stets zusammen eine geschlossene Kurve, z. B. die Kurven AB, BC, AC. Da die Kurve DE die übrigen Kurven nicht schneidet, liegen D und E beide innerhalb oder beide außerhalb der geschlossenen Kurve ABC. Man verbinde nun D mit A, B und C. Man erhält geschlossene Kurven ABD, ACD und BCD. Liegt nun E z. B. innerhalb von ABD, so kann es keine Kurve geben, die E mit C verbindet und keine der übrigen Kurven schneidet. Bei anderer Lage von E gilt Entsprechendes.

▲ 4 ▲ Folgt aus dem in Aufgabe 3 Beweisen.

▲ 5 ▲ Ungarn mit seinen Nachbarn ČSSR, UdSSR, Rumänien, Jugoslawien, Österreich.



Lösung zu:

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Skopetz

▲ 1765 a ▲ Aufgabe und Lösung nach A. Halameisär, Moskau: Nehmen wir an, die Strecke bis zur nächsten Station sei 66 km. Dann fährt Herr Müller *hin* genau eine Stunde, läuft *zurück* 11 Stunden, insgesamt 12 Stunden, während er $66 \text{ km} + 66 \text{ km} = 132 \text{ km}$ zurücklegt; der Nachbar mit dem Fahrrad hat auch 132 km in 12 Stunden zurückgelegt, also mit einer Geschwindigkeit

$$132 : 12 = 11 \left(\frac{\text{km}}{\text{h}} \right).$$

Allgemein, wenn die Strecke $S \text{ km}$ beträgt:

$$V_{\text{mitt}} = S_{\text{ges}} : T_{\text{ges}} = \frac{2S}{\frac{S}{V_1} + \frac{S}{V_2}} = \frac{2S}{\frac{S}{66} + \frac{S}{6}} = 11 \left(\frac{\text{km}}{\text{h}} \right).$$

▲ 1765 b ▲ Lösung nach Prof. Skopetz Betrachten wir zuerst das Dreieck EDQ und die Transversale AP (Bild 3). Laut Satz des Menelaos schneidet die Transversale die Seiten des Dreiecks so, daß das Produkt der Verhältnisse den Wert -1 hat, d. h.:

$$\frac{EP}{PD} \cdot \frac{DA}{AQ} \cdot \frac{QS}{SE} = -1.$$

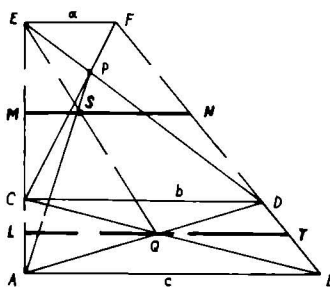
Laut Ähnlichkeit, $\frac{EP}{PD} = \frac{a}{b}$; $\frac{DA}{AQ} = \frac{b+c}{c}$,

also gilt:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b+c}{c} \cdot \frac{QS}{SE} = -1 \text{ oder } \frac{ES}{SQ} = \frac{a(b+c)}{bc}.$$

Man zeichne nun eine Strecke $LT \parallel AB$ ($L \in AE$, $T \in FB$, $Q \in LT$). Wie schon erwähnt, ist LT das harmonische Mittel zwischen b und c , also:

$$\frac{1}{LT} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \text{ oder } LT = \frac{2bc}{b+c}.$$



Offensichtlich

$$MN = \frac{a + \frac{ES}{SQ} \cdot LT}{1 + \frac{ES}{SQ}} \text{ oder, nach der Substitu-}$$

tion,

$$MN = \frac{a + \frac{a(b+c)}{bc} \cdot \frac{2bc}{b+c}}{1 + \frac{a(b+c)}{bc}} = \frac{3abc}{ab+ac+bc}$$

$$\text{und schließlich } \frac{1}{MN} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right), \text{ w. z. b. w.}$$

Z. A. Skopetz



Der sowjetische Geometer Prof. Dr. sc. Z. A. Skopetz (geb. 1917), ist Autor bzw. Mitverfasser verschiedener Lehr- und Hilfsbücher zur Geometrie, Autorenkollektivleiter der modernen Schulbücher *Geometrie 9 und 10*. Viele Schüler von Prof. Dr. sc. Skopetz sind bei mehreren pädagogischen und technischen Hochschulen als Dozenten tätig, einige davon sind selbst schon bekannte Gelehrte und Lehrstuhlleiter.

A. Halameisär

Lösungen zu:

aufgepaßt – nachgedacht – mitgemacht

Kunstliebhaber

Bild 2, an der Seite D aufgehängt.

Magisches Quadrat

| | | | | |
|----|----|----|----|----|
| 3 | 16 | 9 | 22 | 15 |
| 20 | 8 | 21 | 14 | 2 |
| 7 | 25 | 13 | 1 | 19 |
| 24 | 12 | 5 | 18 | 6 |
| 11 | 4 | 17 | 10 | 23 |

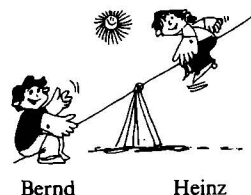
Auf der Wippe

Es seien a, b, h die Maßzahlen des Körpergewichts von Alfred, Bernd, Heinz; dann gilt $a < h$ und $b < a$. Daraus folgt $b < a < h$.

a) Heinz ist am schwersten.

b) Ja.

c)



Bernd

Heinz

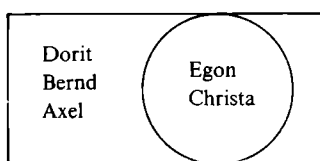
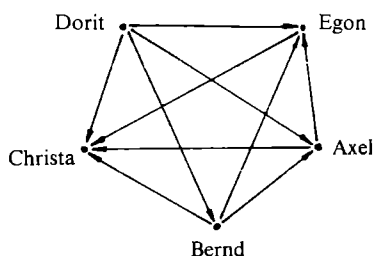
Kombiniere!

| | 1 M | 2 M | 5 M | | | | |
|-----|-----|-----|-----|------|----|---|---|
| 3 M | 3 | 0 | 0 | | 8 | 0 | 0 |
| | 1 | 1 | 0 | | 6 | 1 | 0 |
| | | | | | 4 | 2 | 0 |
| 4 M | 4 | 0 | 0 | 8 M | 3 | 0 | 1 |
| | 2 | 1 | 0 | | 2 | 3 | 0 |
| | | | | | 1 | 1 | 1 |
| | | | | | 0 | 4 | 0 |
| 5 M | 5 | 0 | 0 | | 9 | 0 | 0 |
| | 3 | 1 | 0 | | 7 | 1 | 0 |
| | 1 | 2 | 0 | | 5 | 2 | 0 |
| | 0 | 0 | 1 | 9 M | 4 | 0 | 1 |
| | | | | | 3 | 3 | 0 |
| | | | | | 2 | 1 | 1 |
| | | | | | 1 | 4 | 0 |
| | | | | | 0 | 2 | 1 |
| 6 M | 6 | 0 | 0 | | 10 | 0 | 0 |
| | 4 | 1 | 0 | | 8 | 1 | 0 |
| | 2 | 2 | 0 | | 6 | 2 | 0 |
| | 1 | 0 | 5 | 10 M | 5 | 0 | 1 |
| | | | | | 4 | 3 | 0 |
| | | | | | 3 | 1 | 1 |
| | | | | | 2 | 4 | 0 |
| | | | | | 1 | 2 | 1 |
| 7 M | 7 | 0 | 0 | | 0 | 0 | 2 |
| | 5 | 1 | 0 | | | | |
| | 3 | 2 | 0 | | | | |
| | 2 | 0 | 1 | | | | |
| | 1 | 3 | 0 | | | | |
| | 0 | 1 | 1 | | | | |

| | | | |
|------|----|---|---|
| | 11 | 0 | 0 |
| | 9 | 1 | 0 |
| | 7 | 2 | 0 |
| | 6 | 0 | 1 |
| 11 M | 5 | 3 | 0 |
| | 4 | 1 | 1 |
| | 3 | 4 | 0 |
| | 2 | 2 | 1 |
| | 1 | 5 | 0 |
| | 1 | 0 | 2 |
| | 0 | 3 | 1 |

Kinder unter sich

Es seien a, b, c, d, e die (ganzen) Zahlen, die das Lebensalter von Axel, Bernd, Christa, Dorit, Egon angeben; dann gilt $d < b < a < e < c$. Daraus folgt weiter $d < a, d < c, d < e, b < c, b < e, a < c$; diese sechs Ungleichungen sind durch fehlende Pfeile zu ergänzen.



Negativ – positiv

Positiv 2 gehört zum abgebildeten Negativ.

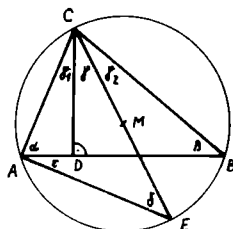
Zahlenfolgen

- Jede folgende Zahl ist um 6 größer als die vorangehende. Die Zahl 25 gehört nicht in die Folge.
- Jede folgende Zahl beträgt die Hälfte der vorangehenden. Die Zahl 6 gehört nicht in die Folge.
- Jede Zahl beträgt das Dreifache der vorangehenden. Die Zahl 0,9 gehört nicht in die Folge.
- Die Folge entsteht, indem der Folge nach die Zahlen 8, dann 9, dann 10, dann 11 addiert werden. Die Zahl 34 gehört nicht zur Folge.
- Die Folge entsteht, indem der Reihe nach die Zahlen 5, dann 4, dann 3, dann 2, dann 1 subtrahiert werden. Die Zahl 2 gehört nicht in die Folge.
- Die Folge entsteht, indem man jeweils den Zähler um 4 vergrößert, den Nenner aber halbiert. Die Zahl $\frac{9}{12}$ gehört nicht zur Folge.

Lösungen zu den Aufgaben des alpha-Wettbewerbs, Heft 2/78

Fortsetzung:

Ma8 ■ 1753 Zur Veranschaulichung diene die folgende Skizze:



Behauptung: $\gamma_1 = \gamma_2$

1. Wenn $\alpha = \beta$, so ist das Dreieck ABC gleichschenkelig. Die Geraden CM und CD fallen dann zusammen. Folglich gilt $\gamma_1 = \gamma_2$.

2. Es sei $\alpha \neq \beta$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit gelte $\alpha > \beta$. Dann gilt

$$\varepsilon = \gamma_2$$

(Peripheriewinkel über der Sehne $\overline{BE}$)

$$\varepsilon + \alpha = 90^\circ \text{ (Satz des Thales)}$$

$$\text{Folglich gilt } \gamma_2 + \alpha = 90^\circ.$$

$$\alpha + \gamma_1 = 90^\circ \text{ (Winkelsumme im Dreieck)}$$

$$\text{Folglich gilt } \gamma_1 = \gamma_2, \text{ w. z. b. w.}$$

Ma8 ■ 1754 a) $10\alpha = 360^\circ$; $\alpha = 36^\circ$; $\beta = 72^\circ$; $\gamma = 108^\circ$, $\delta = 144^\circ$

b) $ABCD$ ist ein Trapez. Es gilt: $\alpha + \delta = \gamma + \beta = 180^\circ$.

c) Dreieck ACD ist gleichschenkelig. Da $\delta = 144^\circ$, gilt für die Größe jedes Basiswinkels 18° .

$$\text{Also } \angle DAC = \frac{1}{2}\alpha.$$

d) Es gilt $180^\circ - 72^\circ - 18^\circ = 90^\circ$ für die Größe des Winkels $\angle BCA$.

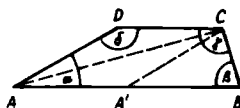
e) Zeichnet man durch C die Parallele zu $\overline{AD}$, die $\overline{AB}$ in A' schneidet, so ist das Viereck $AA'CD$ ein Parallelogramm, und es gilt $\overline{A'C} \cong \overline{AD}$. Im Dreieck $A'BC$ ist die Größe des Winkels $\angle A'BC$ gleich $\beta = 2\alpha$. Aus $\alpha < \beta$ folgt, daß $\overline{BC}$ kürzer ist als $\overline{AD}$.

f) Dreieck $A'BC$ ist gleichschenkelig.

Begründung: Die Winkel $\angle C A' B$ und $\angle A' C D$ haben jeweils die Größe α , der Winkel $\angle B C D$ die Größe 3α , folglich hat der Winkel $\angle A' C B$ die Größe $3\alpha - \alpha = 2\alpha$. Da auch der Winkel $\angle A' B C$ die Größe 2α hat, folgt, daß $\overline{A'C} \cong \overline{A'B} \cong \overline{AD}$ ist. Wegen $\overline{AA'} \cong \overline{AD}$ folgt:

$\overline{AB}$ ist doppelt so lang wie $\overline{AD}$.

Skizze:



Ma9 ■ 1755 Nach dem Distributivgesetz der Multiplikation bezüglich der Addition im Bereich der reellen Zahlen gilt

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq ab + ac + ad + ae.$$

Wegen der Monotonie der Subtraktion in P gilt

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - ab - ac - ad - ae \geq 0.$$

Nach dem Kommutativgesetz der Addition in P gilt

$$b^2 - ab + c^2 - ac + d^2 - ad + e^2 - ae + a^2 \geq 0.$$

Wegen $a^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$ kann man weiter umformen zu

$$\left(b^2 - ab + \frac{a^2}{4}\right) + \left(c^2 - ac + \frac{a^2}{4}\right) + \left(d^2 - ad + \frac{a^2}{4}\right) + \left(e^2 - ae + \frac{a^2}{4}\right) \geq 0.$$

Die in den Klammern stehenden Summen lassen sich wie folgt in Produkte umformen (binomische Formeln):

$$\left(b - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(d - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(e - \frac{a}{2}\right)^2 \geq 0$$

Da das Quadrat einer reellen Zahl nicht negativ sein kann und da alle Umformungen äquivalente Umformungen sind, ist die Gültigkeit der Ungleichung für alle reellen a, b, c, d, e bewiesen.

Ma9 ■ 1756 Es handelt sich hier um eine arithmetische Folge 1. Ordnung mit 25 Gliedern. Das erste Glied ist 800, das letzte 2504. Die Summe aller Glieder kann mit der Formel

$$s_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

berechnet werden, wobei n die Anzahl der Glieder, a_1 das Anfangsglied und a_n das Endglied bedeuten. Es gilt also

$$s_{25} = \frac{25}{2} (800 + 2504)$$

$$s_{25} = 25 \cdot 1652$$

$$s_{25} = 41\,300$$

Das Stadion verfügt über 41 300 Sitzplätze.

Ma9 ■ 1757 Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, $\log_4 12$ sei eine rationale Zahl. Dann müßte sie sich in der Form $\log_4 12 = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ und $b \neq 0$ darstellen lassen. Dann gilt

$$4^{\frac{a}{b}} = 12$$

$$4^a = 12^b.$$

Das bedeutet: Es gibt eine Zahl, die sowohl als Vierer- wie auch als Zwölferpotenz darstellbar ist.

Da 12^b für alle $b \in \mathbb{N}$ durch 3 teilbar ist und 4^a für kein $a \in \mathbb{N}$ durch 3 teilbar ist, haben wir unsere Annahme zum Widerspruch geführt. Es gilt nun das Gegenteil der Annahme, d. h., $\log_4 12$ ist keine rationale Zahl, w. z. b. w.

2. Möglichkeit:

$$4^a = 12^b$$

$$4^a = (4 \cdot 3)^b$$

$$4^a = 4^b \cdot 3^b$$

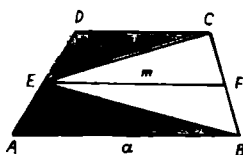
$$4^{a-b} = 3^b$$

$$2^{2(a-b)} = 3^b$$

Alle Potenzen von 3 sind ungerade; alle Potenzen von 2 sind gerade. Deshalb gilt

$$2^{2(a-b)} \neq 3^b \text{ für } a \neq b.$$

Ma9 ■ 1758 Man zeichnet durch E eine Parallele zu $\overline{AB}$, die BC in F schneidet. Es seien m die Länge der Strecke $\overline{EF}$, a die Länge von $\overline{AB}$ und c die Länge von $\overline{DC}$. Dann gilt $m = \frac{a+c}{2}$ (Mittellinie des Trapezes). Für den Flächeninhalt A_1 des Dreiecks ECD gilt dann $A_1 = \frac{c \cdot h}{4}$ (h sei die Länge der Höhe des Trapezes). Für den Flächeninhalt A_2 des Dreiecks ABE gilt $A_2 = \frac{a \cdot h}{4}$, und für den Flächeninhalt A des Dreiecks EBC gilt $A = \frac{(a+c) \cdot h}{4}$. Nach der Behauptung $A_1 + A_2 = A$ müßte gelten: $\frac{c \cdot h}{4} + \frac{a \cdot h}{4} = \frac{(a+c) \cdot h}{4}$. Wie man sieht, ist das der Fall, w. z. b. w.



Ma 10/12 ■ 1759 a) Für den Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ gilt: $A_1 = a \cdot b$. Für den Flächeninhalt des über einer der Diagonalen des Rechtecks errichteten Quadrats gilt: $A_2 = a^2 + b^2$ (Satz des Pythagoras). Es wird behauptet, daß gilt:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Durch äquivalente Umformung erhält man $(a-b)^2 \geq 0$, und das gilt für alle reellen Zahlen a und b , q. e. d.

b) Es soll also gelten: $a^2 + b^2 = 3ab$ bzw. $a^2 - 3ab + b^2 = 0$. Löst man diese quadratische Gleichung nach a auf, so erhält man

$$a_{1,2} = \frac{3}{2}b \pm \sqrt{\frac{9}{4}b^2 - b^2}$$

und nach weiterer Umformung

$$a_{1,2} = \frac{1}{2}b(3 \pm \sqrt{5}).$$

Setzt man für b eine beliebige reelle (positive) Zahl ein, z. B. 2, so erhält man mit

$$a_1 = \frac{1}{2}b(3 + \sqrt{5}) \text{ und } a_2 = \frac{1}{2}b(3 - \sqrt{5}) \text{ stets Lösungen der Gleichung } a^2 + b^2 = 3ab.$$

Für $b=2$ ergibt sich $a_1 = 3 + \sqrt{5}$ bzw. $a_2 = 3 - \sqrt{5}$.

Hat z. B. die Rechteckseite a die Maßzahl $3 + \sqrt{5}$ und die Rechteckseite b die Maßzahl 2, so werden die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Ma 10/12 ■ 1760 Voraussetzung: Es gilt

$$\tan(\alpha + \beta) = \cot(\alpha + \beta)$$

Behauptung: Es gilt dann

$$\cos(\alpha + 2\beta) = \sin \alpha$$

Beweis: Aus der Voraussetzung folgt

$$\alpha + \beta = 45^\circ + 180^\circ \cdot k \quad (k \in \mathbb{G}), \text{ d. h.}$$

$$\beta = 45^\circ + 180^\circ \cdot k - \alpha \quad (k \in \mathbb{G}).$$

$$\text{Nun ist } \cos(\alpha + 2\beta)$$

$$= \cos(\alpha + \beta + \beta)$$

$$= \cos(\alpha + 45^\circ + 180^\circ \cdot k - \alpha + 45^\circ + 180^\circ \cdot k - \alpha)$$

$$= \cos(90^\circ + 360^\circ \cdot k - \alpha)$$

$$= \cos(90^\circ - \alpha)$$

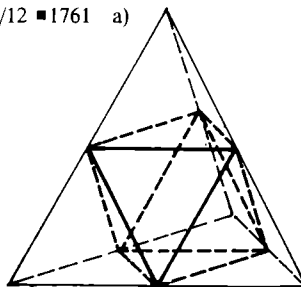
$$= \sin \alpha, \text{ q. e. d.}$$

Die meisten Löser haben bemerkt, daß sich hier ein Druckfehler in die Aufgabe eingeschlichen hatte.

Es mußte richtig heißen:

$$\tan(\alpha + \beta) = \cot(\alpha + \beta).$$

Ma 10/12 ■ 1761 a)



b) Es ist ein Achtföhrner. Der Körper hat 8 Flächen, 6 Ecken und 12 Kanten.

$$(8 + 6 - 12 = 2; \text{Eulerscher Polyedersatz!})$$

c) Es sei s_1 die Länge der Kante des regelmäßigen Tetraeders, und es sei s_2 die Kantenlänge des eingeschriebenen Achtföhrners. Dann gilt $s_1 : s_2 = 2 : 1$.

Der Tetraeder mit der Kantenlänge a hat das Volumen $V = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$. Der Achtföhrner

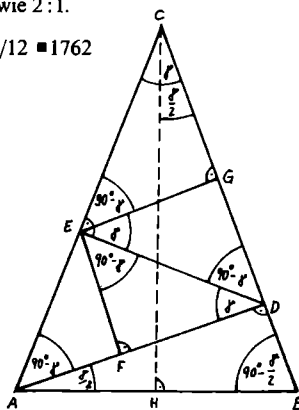
„schneidet“ vier kleine Tetraeder ab, die je die Kantenlänge $\frac{a}{2}$ haben, also das Volumen

$$V = \frac{a^3}{96}\sqrt{2}; \text{ die vier Tetraeder haben deshalb}$$

das Volumen $V = \frac{a^3}{24}\sqrt{2}$. Dieses gleiche Vo-

lumen bleibt für den Achtföhrner noch übrig. Demzufolge verhalten sich beide Volumina wie 2 : 1.

Ma 10/12 ■ 1762



(Skizze nicht maßstabgerecht)

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; \frac{\gamma}{2} = 19,48^\circ; \gamma = 38,86^\circ.$$

$$\overline{AB} : \overline{BD} = \overline{BC} : \overline{HB} = 6 : 2 = 3;$$

$$\overline{BD} = \frac{1}{3} \overline{AB} = \frac{4}{3} \text{ cm.}$$

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 = 16 - \frac{16}{9};$$

$$\overline{AD} = \frac{8}{3}\sqrt{2} \text{ cm} = 3,77 \text{ cm}$$

$$\sin(90^\circ - \gamma) = \frac{\overline{ED}}{\overline{AD}}; \overline{ED} = 3,77 \text{ cm} \cdot \sin 51,14^\circ; \overline{ED} = 2,94 \text{ cm.}$$

$$\cos \gamma = \frac{\overline{FD}}{\overline{ED}}; \overline{FD} = 2,29 \text{ cm.}$$

$$\tan \gamma = \frac{\overline{EF}}{\overline{FD}}; \overline{EF} = 1,85 \text{ cm.}$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC beträgt

$$A_1 = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2}; A_1 = \frac{4 \cdot 5,66}{2} \text{ cm}^2;$$

$$A_1 = 11,32 \text{ cm}^2.$$

Der Flächeninhalt des Rechtecks $FDGE$ beträgt

$$A_2 = \overline{EF} \cdot \overline{FD}; A_2 = 1,85 \text{ cm} \cdot 2,29 \text{ cm};$$

$$A_2 = 4,21 \text{ cm}^2.$$

Das Rechteck $FDGE$ nimmt etwa 37,2% des Flächeninhalts des Dreiecks ABC ein

$$\left(p = \frac{4,21 \cdot 100}{11,32}; p = 37,2\%\right)$$

Alle Zahlen sind Näherungswerte!

Aus Platzgründen veröffentlichen wir zu den Aufgaben des Physik- und Chemiewettbewerbs des Heftes 2/78 nur die Antwortsätze:

Ph6 ■ 36 Die Schneehöhe beträgt rund 8,3 cm.

Ph7 ■ 37 Für einen Lasthub von 30 cm sind 80 Pumpenhube erforderlich.

Ph8 ■ 38 In der Aufgabe wurden versehentlich neben die Abbildung die Werte für s , h und r nicht eingefügt. Wir veröffentlichen diese Aufgabe nochmals im Wettbewerb des Heftes 5/78, d. Red. (siehe S. 110).

Ph9 ■ 39 Die Steighöhe des Ballons beträgt rund 600 m.

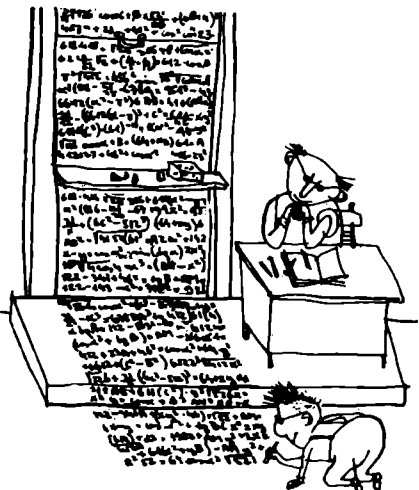
Ph 10/12 ■ 40 Aus einem Kubikmeter Wasser könnte man bei dem angenommenen Reaktionszyklus $2,75 \cdot 10^9$ kcal Energie gewinnen.

Ch7 ■ 29 226 t Roheisen enthalten noch 7910 bis 9040 kg Kohlenstoff.

Ch8 ■ 30 Beim Brennen von 2 t Kalkstein erhält man 0,77 t Kohlendioxid.

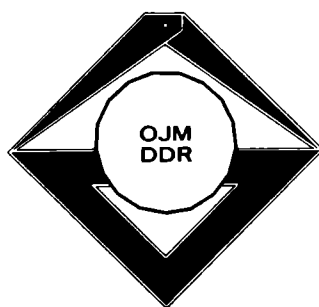
Ch9 ■ 31 Es entstehen bei der Reaktion 8,8 g Natriumchlorid und 27 g Wasser, 17,3 g Natriumphenolat und 27 g Wasser, 12,3 g Natriumazetat und 27 g Wasser.

Ch 10/12 ■ 32 Superphosphat enthält 28% Phosphorpentoxid.



XVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)



Olympiadeklasse 10

I. I. Analysis: Angenommen, es existiert ein Quadrat $ABCD$, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Dann ist nach den Eigenschaften des Quadrates die Gerade g eine seiner Symmetrieachsen, und die nicht auf g liegenden Eckpunkte B und D liegen bezüglich g symmetrisch. Demzufolge liegt D sowohl auf k_2 als auch auf dem Kreis k_1' , der durch Spiegelung von k_1 an g entsteht. Ferner ist der Schnittpunkt E von g und BD der Diagonalschnittpunkt des Quadrates $ABCD$, der von allen vier Eckpunkten gleichweit entfernt ist. Daraus ergibt sich:

Wenn ein Quadrat $ABCD$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so kann es durch folgende Konstruktion erhalten werden:

II. Konstruktion: (1) Man spiegelt k_1 an g ; das Bild sei k_1' .

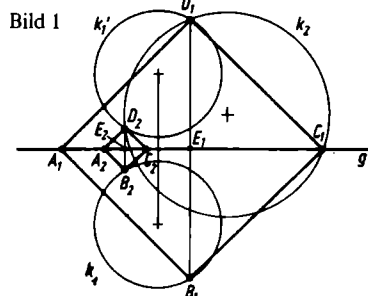


Bild 1

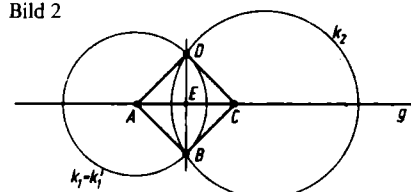
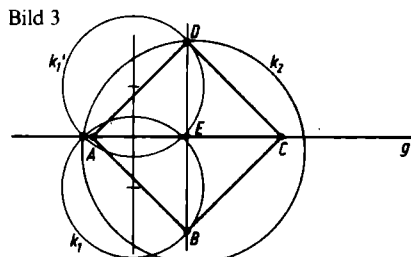


Bild 2



- (2) Wenn k_1' und k_2 einen gemeinsamen, nicht auf g liegenden Punkt besitzen, so werde ein solcher mit D bezeichnet.
(3) Man spiegelt D an g , der Bildpunkt sei B .

Bild 4

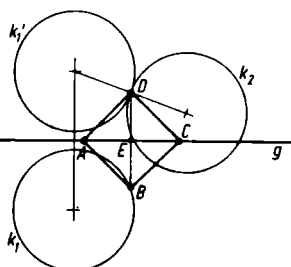


Bild 5

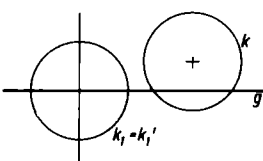


Bild 6

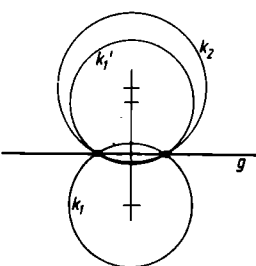
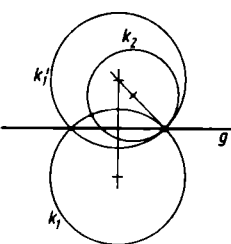


Bild 7



(4) Die Gerade g schneidet als Mittelsenkrechte die Strecke BD in deren Mittelpunkt E . Von E aus trägt man auf g nach jeder Seite eine Strecke der Länge $\overline{EB} = \frac{\overline{BD}}{2}$ ab. Die so konstruierten Punkte seien mit A bzw. C bezeichnet.

III. Beweis: Die unter II. beschriebene Konstruktion führt stets zu einem Quadrat der geforderten Art:

A, C liegen auf g . Wegen der geforderten Eigenschaft von D liegt D auf k_2 und B als Spiegelungspunkt auf k_1 . Wegen $\overline{DE} = \overline{EB} = \overline{EC} = \overline{EA} \neq 0$ und $DB \perp AC$ ist $ABCD$ ein Quadrat.

IV. Determination: Entsprechend der Lage von k_1, k_2 und g zueinander können folgende Fälle unterschieden werden:

1. k_1' und k_2 haben keinen Punkt gemeinsam.
2. k_1' und k_2 haben genau einen Punkt gemeinsam.
- 2.1. der auf g liegt,
- 2.2. der nicht auf g liegt.
3. k_1' und k_2 haben genau zwei Punkte gemeinsam,
- 3.1. die beide nicht auf g und nicht symmetrisch zu g liegen,
- 3.2. die beide nicht auf g , aber symmetrisch zu g liegen,
- 3.3. von denen genau einer auf g liegt,
- 3.4. die beide auf g liegen.
4. k_1' und k_2 fallen zusammen.
- A) Im Fall 4. gibt es unendlich viele Quadrate, die den Bedingungen genügen.
- B) Im Fall 3.1. gibt es genau zwei Quadrate der verlangten Art (Bild 1).
- C) In den Fällen 2.2., 3.2., 3.3. gibt es genau ein den angegebenen Bedingungen genügendes Quadrat (Bild 2, 3, 4).
- D) In den Fällen 1., 2.1., 3.4. gibt es kein Quadrat, das die Bedingungen erfüllt (Bild 5, 6, 7).

Die Fallunterscheidung ist vollständig, die Fälle schließen einander aus. Also gilt:

Genau in den unter A), B) und C) genannten Fällen existiert ein solches Quadrat, dessen Existenz genau in den unter C) genannten Fällen eindeutig bestimmt ist.

Bemerkungen: Entgegen den Erwartungen erwies sich die Aufgabe für alle Teilnehmer als schwer. Keinem einzigen Schüler gelang es, die volle Zahl von 7 Punkten für diese Aufgabe zu erreichen. Auch 6 Punkte konnten nur an einen einzigen Schüler vergeben werden. Annähernd die Hälfte der 93 Teilnehmer fand keinen Zugang zu dieser Aufgabe.

Die Hauptschwierigkeit dieser Aufgabe bestand offensichtlich in der ungewohnt großen Zahl von Fällen, die von den Schülern zu unterscheiden waren. Eine relativ große Zahl der Teilnehmer verwendete zwar die konstruktive Grundidee der Spiegelung des Kreises k_1 an der Geraden g , alle Teilnehmer aber waren nicht imstande, eine übersichtlich geordnete und vollständige Determination vorzunehmen. Insbesondere wurde die mögliche Lage von Schnittpunkten der Kreise k_1' und k_2 auf der Geraden g bzw. symmetrisch bezüglich g nicht gesondert untersucht. Diese gesonderte Untersuchung erforderte keinerlei zusätzliche mathematische Mittel. Die Unvollständigkeit der Lösungen muß also auf nicht ausreichend entwickeltes geometrisches Vorstellungsvermögen, aber auch auf eine gewisse Oberflächlichkeit bei der Lösung derartiger Aufgaben zurückgeführt werden.

| | | | | | | | | |
|--------|----|---|---|---|----|----|---|---|
| Punkte | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Anzahl | 45 | 7 | 4 | 3 | 11 | 22 | 1 | 0 |

Dipl.-Math. Bernd Noack, Berlin
(Die Lösungen zu den weiteren 6 Aufgaben siehe Heft 6/78, d. Red.)

Lösungen zu alpha-heiter:

Aus dem alten Rom

Die weißen Rinder seien w , die braunen Rinder b , die schwarzen Rinder s , und die scheckigen k :

$$w = 12 \quad w = 12$$

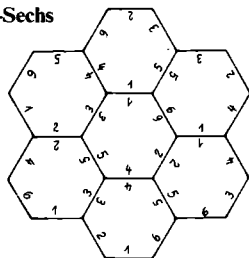
$$b = 12 - \frac{s}{4} \quad b = 10$$

$$s = \frac{12}{3} \cdot 2 \quad s = 8$$

$$k = \frac{12}{2} + s \quad k = 14$$

Auf den Fluren weiden 44 Rinder, davon 12 weiße, 10 braune, 8 schwarze und 14 scheckige.

Sieben-Sechs



Auf einen Blick

Wegen der Symmetrie ist das Verhältnis am einfachsten aus einem Viertel berechenbar: 3 schraffierte – 6 weiße Felder $\rightarrow 3:6 = 1:2$.

Wie viele Fische?

Angenommen, der Angler hatte gestern n Fische, heute also $3 \cdot n$ Fische gefangen; dann gilt

$$3 \cdot n = n + 10.$$

Nur für $n=5$ wird diese Gleichung erfüllt. Gestern fing der Angler fünf, heute 15 Fische.

Starker Kraftwagenverkehr

a)

PKW 8 12 16 100 36 128 16 40
LKW 2 3 4 25 9 32 4 10

b) Es seien n LKW, also $4 \cdot n$ PKW, insgesamt also $5 \cdot n$ Kraftfahrzeuge von Uwe gezählt worden; dann gilt $5 \cdot n = 55$, also $n = 11$. Es waren 11 LKW und 44 PKW.

Buchstaben-Mosaik

Die erste Gleichung hat zwei Lösungen:

$$1. A = 2; \alpha = 3; B = 8, \text{ also } 2^3 = 8$$

$$2. A = 3; \alpha = 2; B = 9, \text{ also } 3^2 = 9$$

Wegen $B^\alpha = CE$ (letzte Gleichung) entfällt die erste Lösung der ersten Gleichung, denn 8^3 ist nicht zweistellig.

Somit gilt: $A = 3; \alpha = 2;$

$$B = 3^2 = 9$$

$$33^2 = 1089$$

$$333^2 = 110889$$

$$3333^2 = 11108889$$

$$33333^2 = 1111088889$$

$$99999^2 = 9999800001$$

$$9999^2 = 99980001$$

$$999^2 = 998001$$

$$99^2 = 9801$$

$$9^2 = 81$$

Kreuzzahlrätsel

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9 | 8 | 0 | 5 | 1 |
| | | 8 | | 2 | 2 |
| 3 | 8 | 4 | | 4 | 0 |
| 9 | 0 | | 9 | 6 | 1 |
| 0 | 4 | 5 | | 4 | |
| 5 | | 3 | 0 | 2 | 5 |

Resultat stets 30

$$\begin{aligned} (2+2+2)^2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 \\ = 3^3 + 3 + 3 - 3 + 3 - 3 + 3 - 3 \\ = 4 \cdot 4 \left(\frac{4+4}{4} \right) - \frac{4}{4} - \frac{4}{4} \\ = 5 \cdot 5 + 5 + 5 - 5 + 5 - 5 + 5 - 5 \\ = 6 \cdot 6 - 6 + 6 - 6 + 6 - 6 + 6 - 6 \\ = 7 + 7 + 7 + 7 + \frac{7+7}{7} + 7 - 7 \\ = 8 + 8 + 8 + 8 - \frac{8+8}{8} + 8 - 8 = 30 \end{aligned}$$

Kryptarithmetik

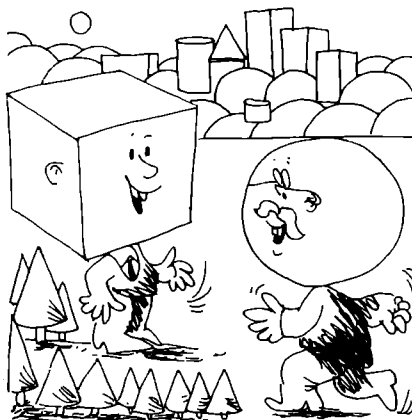
$$(1) \quad 112 \cdot 9 = 1008$$

$$(2) \quad 1008 - 9 = 999$$

$$(3) \quad 999 : 3 = 333$$

$$(4) \quad 333 + 7 = 340$$

Begegnung vom Kreis und Würfel



Herr Kreis trifft beim Spaziergehen Herrn Würfel wohl nur aus Versehen. Obgleich man sich nicht sonders mag, sagt man doch höflich „Guten Tag“, denn einer ist gerundet nur, der andre kantig von Statur. Jedoch Herr Kreis fühlt mit Instinkt, daß ein Gespräch sie näher bringt. Er meint Herrn Würfel zugewendet: „Wie sind die Menschen doch verblendet! Sie plagen unter Geistesqualen mit Zirkeln sich und Linealen.“

Mit Scharfsinn und sehr viel Probieren woll'n sie die Strecke konstruieren, die auf 'ner G'raden dann entsteht, wenn ich mich einmal abgedreht. – Vom Zirkel, dem ich dank' mein Leben, wird nie mein Umfang preisgegeben!

Dann gibt es ganz besondere Gecken, die suchen auf mir sieben Ecken zu einem Vieleck, regulär, doch gibt auch dies kein Zirkel her. Ein Gauß entdeckt' auch für die Blinden 'ne Regel, daß hier nichts zu finden; sie forschen jedoch ungetrübt nach Konstruktionen, die's nicht gibt. Manch Schläuer sucht dann noch sein Glück. Er nimmt von mir ein Bogenstück und meint dann ohne viel Verweilen, man könnt' es in drei Stücke teilen, mit Zirkel, klassisch-konstruktiv; doch geht auch dieser Zauber schief. Er nennt sich Winkeltrisektierer und ist doch nur ein Bleistiftschmierer.

Ein anderer, der sonst nichts erklommen, glaubt, meinem Inhalt beizukommen, mit Zirkel und Lineal exakt, doch bleibt auch dies ein leerer Akt. Er meint, Axiome umzuwerfen und fällt der Mitwelt auf die Nerven. Vom Schicksal ist es mir beschieden, daß ich 'ne Falle bin für Niete!“

Herr Würfel nickt verständnisvoll und klagt ihm ohne jeden Groll: „Auch mir wird übel mitgespielt, so lang der Mensch auf Erden wühlt. Mal bin ich Sinnbild dieser Erde, dann trag ich Säulen ohn' Beschwerde. Man brennt mir Augen in die Seiten und läßt im Glücksspiel mich entscheiden. Zu Delos dient' ich als Altar, man brachte Opfer auf mir dar. Den Göttern schien ich nicht genehm. Sie stellten daher ein Problem.“

Orakelhaft stand da verkoppelt, daß man den Inhalt mir verdoppelt, beschränkt auf Zirkel und Lineal. – Dies macht uns beide kongenial! Vergebens sucht seit alten Zeiten der Mensch die Maße dieser Seiten. Als Früchte all' der Geistesmühn entstanden viele Theorien. Manch kluger Kopf hat zwar erkannt, daß man auf irrealem Land.

Doch finden sich stets neue Gimpel, für die die Frage völlig simpel und ohne Wissen lösbar scheint. – Sie sehen nun, was uns vereint!“

Der Kantige hat durch den Runden 'nen kleinen Trost für sich gefunden. Nachdem die Herren so erkannt, daß sie sich geistig eng verwandt, vom Phänotypus zwar verschieden, hab'n künftig sich nicht mehr gemieden.

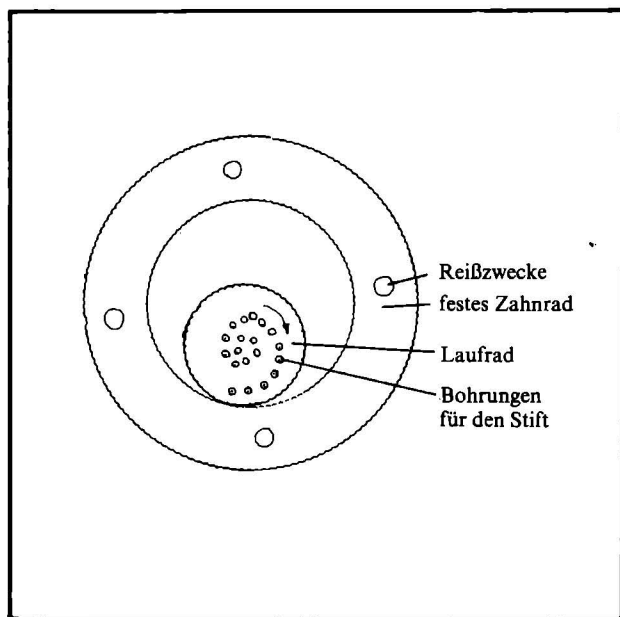
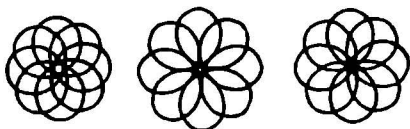
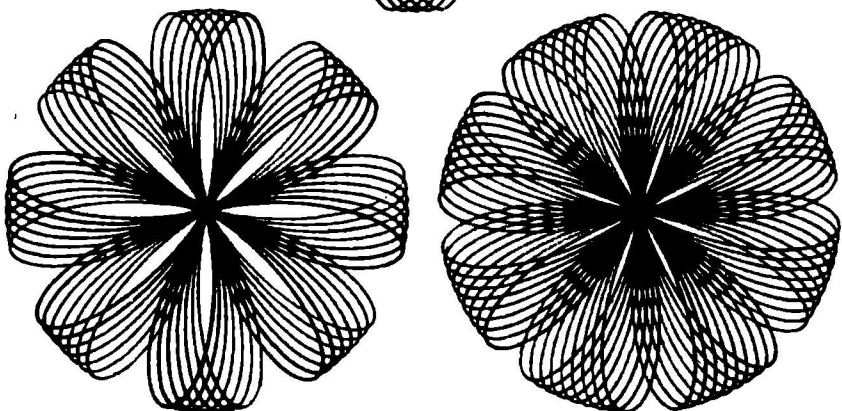
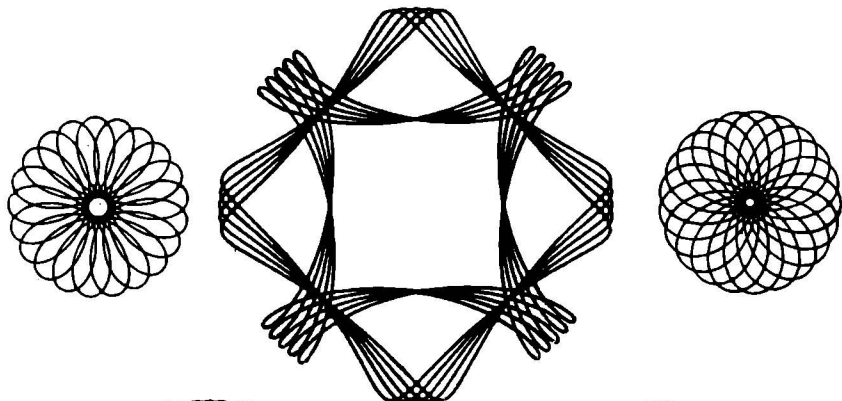
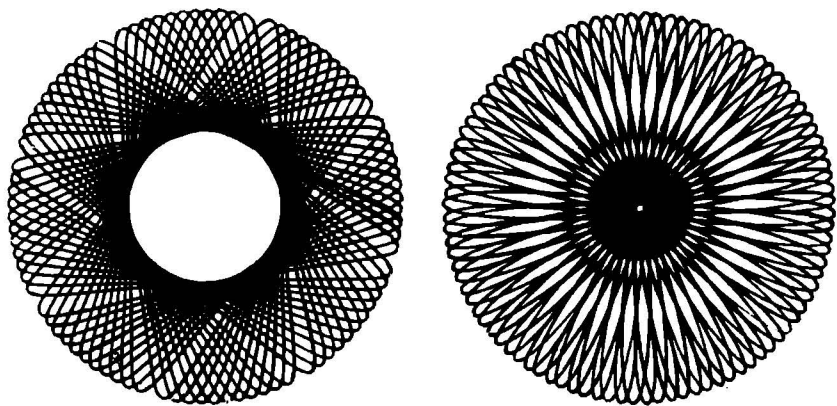
Dr. sc. nat. Eberhard Schröder, TU Dresden

Rosetten-Graphik

Uta Reiche aus Dresden (Klassenstufe 8) sandte uns ein Foto, das sie bei unterhaltsamem Spiel mit dem Spirographen *Inspiro* aus der ČSSR zeigt. Gleichzeitig sandte sie uns Hinweise zur Handhabung des Gerätes (das auch selbst gebaut werden kann):

Auf einer glatten Unterlage werden mit Hilfe von Reißzwecken ein Blatt Papier und dasjenige Zahnrad befestigt, das beim Zeichnen feststehen soll. Nun wird das Laufrad so angesetzt, daß seine Zähne in die des feststehenden Rades eingreifen.

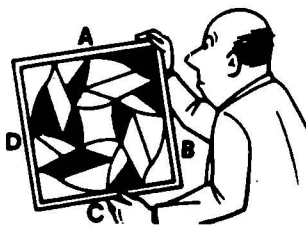
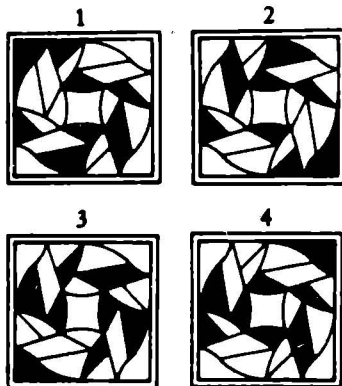
Dann wird die Spitze eines Stiftes durch die gewünschte Bohrung des Laufrades gesteckt und dieses das feststehende Rad entlang geführt. Schöne Zeichnungen ergeben sich, wenn das Laufrad des feststehenden Rades entlang oder zwischen mehreren festen Rädern geführt wird. Durch die Verwendung unterschiedlicher Laufräder oder verschiedener Bohrungen ergeben sich viele Kombinationsmöglichkeiten. Ich habe für die *alpha*-Leser einige schöne Spirographenbilder mitgeschickt.





Für Kunstliebhaber

Ein Kunstliebhaber erstand auf einer Ausstellung ein abstraktes Gemälde. Es ist eines der gezeigten vier. Welches ist es, und mit welcher Seite (A, B, C oder D) wurde es aufgehängt?



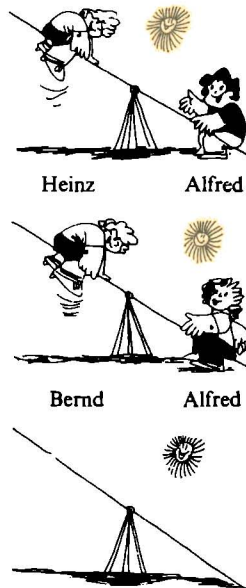
Magisches Quadrat

Setze die Zahlen 1 bis 25 so in das Quadrat ein, daß in jeder Reihe, Spalte und Diagonale die gleiche Summe erscheint! (17 Zahlen sind bereits eingesetzt.)

| | | | | |
|----|----|----|----|----|
| | 16 | | 22 | 15 |
| 20 | 8 | 21 | | 2 |
| | 25 | 13 | 1 | |
| 24 | 12 | | 18 | 6 |
| 11 | | | 10 | 23 |

Auf der Wippe

Wenn die drei Schüler Bernd, Alfred und Heinz auf der Wippe sitzen, dann sieht es wie folgt aus:



- Wer ist am schwersten von den drei Jungen?
- Ist Heinz schwerer als Bernd?
- Wo müßten Heinz und Bernd auf der abgebildeten Wippe sitzen, damit diese Stellung der Wippe erreicht wird?

Kombiniere!

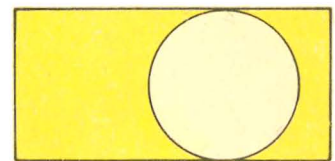
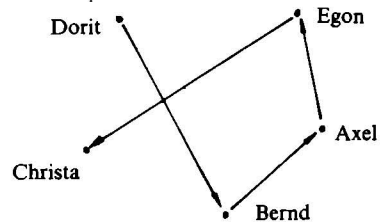
Wir haben Münzen im Werte von 1 M, 2 M und 5 M in ausreichender Menge zur Verfügung. Wie viele Münzen jeder Art benötigt man, um die in der Tabelle angeführten Geldbeträge bilden zu können?

| | 1 M | 2 M | 5 M |
|------|-----|-----|-----|
| 2 M | 2 | 0 | 0 |
| | 0 | 1 | 0 |
| 3 M | | | |
| 4 M | | | |
| 5 M | | | |
| 6 M | | | |
| 7 M | | | |
| 8 M | | | |
| 9 M | | | |
| 10 M | | | |
| 11 M | | | |

Kinder unter sich

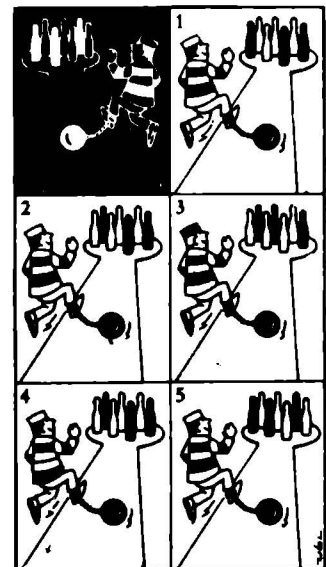
Jeder Pfeil zeigt in dem Bild auf den Namen eines älteren Kindes.

- Zeichne die noch fehlenden Pfeile ein!
- Schreibe die Namen der fünf Kinder in das abgebildete rechteckige Feld! Im Kreis sollen die Namen derjenigen Kinder stehen, die älter als Axel sind.



Negativ – positiv

Welches der fünf Positive gehört zum abgebildeten Negativ?



Zahlenfolgen

Die Zahlenfolgen 1 bis 6 enthalten jeweils eine Zahl, die nicht in die Folge gehört. Wer findet sie?

| | | | | | | |
|---|----------------|----------------|----------------|---------------|----------------|----------------|
| 1 | 7 | 13 | 19 | 22 | 25 | 31 |
| 2 | 16 | 8 | 6 | 4 | 2 | 1 |
| 3 | 0,3 | 0,6 | 0,9 | 2,7 | 8,1 | 24,3 |
| 4 | 7 | 15 | 24 | 33 | 34 | 45 |
| 5 | 18 | 13 | 9 | 6 | 4 | 2 |
| 6 | $\frac{1}{32}$ | $\frac{5}{16}$ | $\frac{9}{12}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{13}{4}$ | $\frac{17}{2}$ |