

# alpha

|    |    |    |    |    |    |    |     |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|-----|----|----|
| 15 | 89 | 81 | 83 | 82 | 17 | 18 | 90  | 14 | 16 |
| 36 | 39 | 31 | 38 | 32 | 67 | 63 | 70  | 64 | 65 |
| 06 | 09 | 01 | 98 | 02 | 97 | 93 | 10  | 94 | 95 |
| 26 | 79 | 80 | 78 | 72 | 27 | 73 | 21  | 24 | 25 |
| 66 | 69 | 61 | 68 | 62 | 37 | 33 | 40  | 34 | 35 |
| 45 | 42 | 50 | 43 | 49 | 54 | 58 | 51  | 57 | 56 |
| 75 | 22 | 30 | 28 | 29 | 74 | 23 | 71  | 77 | 76 |
| 96 | 92 | 91 | 03 | 99 | 04 | 08 | 100 | 07 | 05 |
| 55 | 52 | 60 | 53 | 59 | 44 | 48 | 41  | 47 | 46 |
| 85 | 12 | 20 | 13 | 19 | 84 | 88 | 11  | 87 | 86 |

**Redaktionskollegium:** Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Frey (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstudienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaiser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (Ltg. Dr. C.-P. Helmholtz)

Redaktion:

OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)  
Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14  
Anschrift des Verlags: Volk und Wissen  
Volkseigener Verlag Berlin

1086 Berlin, Krausenstraße 50, PSF Nr. 1213  
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545  
des Presseamtes beim Vorsitzenden des  
Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Postscheckkonto: Berlin 132 626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.  
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegen genommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

**Fotos:** Fotoabtlg. Humboldt-Universität (S. 123); Vignette aus „Quant“, Moskau (S. 123); Briefmarken: J. Lehmann, Leipzig (S. 125); Foto: H. Tracksdorf, Leipzig (S. 126); Ing. G. Grebenstein (S. 126); OStR G. Schulze, Herzberg (S. 128); J. Gottwald, DLZ (S. 132); Füles, Budapest (S. 132); J. Lehmann, Leipzig (S. 133; S. 135); LVZ, Naumann, Leipzig (S. 136)

**Typographie:** H. Tracksdorf, Leipzig

**Titelblatt:** W. Fahr, Berlin, nach einer Vorlage von StR H.-J. Kerber, Neustrelitz



Gesamtherstellung: INTERDRUCK  
Graphischer Großbetrieb Leipzig, Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit,  
III/18/97

AN (EDV) 128

Redaktionsschluß: 24. August 1984

Auslieferungstermin: 15. Dezember 1984



# Mathematische Schülerzeitschrift

## Inhalt

- 121 Ein Minimalproblem in der Ebene und im Raum [9]<sup>1</sup>  
Dr. D. Cieslik, Sektion Mathematik der *E.-M.-Arndt-Universität* Greifswald/  
Dr. H.-J. Schmidt, *Zentralinstitut für Astrophysik* der Akademie der  
Wissenschaften der DDR
- 122 Informatikstudium an der Sektion Mathematik der Humboldt-  
Universität zu Berlin [9]  
Prof. Dr. L. Budach, Vors. des *Wissenschaftlichen Beirats Mathematik* beim Min.  
für Hoch- und Fachschulwesen
- 123 *Zum Titelblatt:* Knobeleien am Ostseestrand [7]  
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz
- 124 Eine empirische Bestätigung der heliozentrischen Theorie von  
Copernicus und Kepler, Teil 1 [9]  
Zum 200. Geburtstag des Astronomen und Mathematikers  
Friedrich Wilhelm Bessel  
Dr. H. Pieper, *Zentralinstitut für Astrophysik* der Akademie der Wiss. d. DDR
- 126 ... die Beckerprob allhier ganz gründlich gemacht [5]  
Zum 450. Todestag von Adam Ries  
Ing. G. Grebenstein, Leipzig
- 126 *Adam-Ries-Wettbewerb* in Annaberg-Buchholz [5]  
Dr. H. Jähnig, EOS Annaberg-Buchholz
- 127 *Für den Briefmarkenfreund:* Lewis Carroll's Nonsens-Welt [5]  
Dr. P. Schreiber, Sektion Mathematik der *E.-M.-Arndt-Universität* Greifswald
- 128 *alpha*-Porträt: Oberstudienrat Gerhard Schulze, Herzberg [7]  
Oberlehrer B. Weiße, Bezirkskabinett für außerunterrichtl. Tätigkeit, Cottbus
- 130 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]  
Autor aller Mathematikaufgaben: StR H.-J. Kerber, Neustrelitz
- 133 *alpha*-Porträt: Studienrat Hans-Joachim Kerber, Neustrelitz  
Dr. H.-D. Gronau/J. Prestin, Sektion Mathematik der *W.-Pieck-Universität*  
Rostock
- 134 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht, speziell für Klasse 4/5  
Unterhaltsame Aufgaben aus dem Mathematiklehrb. Kl. 4
- 135 Die Magischen Ringe [5]  
Dr. H.-D. Gronau/J. Prestin, Sektion Mathematik der Universität Rostock
- 136 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt, Sonnenfinsternis 1984 [9]  
Dipl.-Lehrer A. Dietzel, EOS Spezialschule phys.-techn. Richtg. Carl Zeiss, Jena
- 137 Schriftliche Abschlußprüfung [10]  
Mathematik, Schuljahr 1983/84, Oberschule, Klasse 10
- 138 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]  
*Zusammenstellung:* J. Lehmann, Leipzig
- 140 Lösungen [5]
- 144 *alpha*-Wettbewerb 1983/84, Kollektive Beteiligung [5]
- 144 Eine Aufgabe von Prof. Dr. A. S. Solodownikow [9]  
Lomonossow-Universität Moskau
- III. U.-Seite: *alpha*-Schachwettbewerb 1984 [5]  
J. Lehmann, Leipzig/H. Rüdiger, Schichtl./Werk für Fernsehelektronik Berlin
- IV. U.-Seite: Mit Papier und Schere [5]  
*Zusammenstellung:* J. Lehmann, Leipzig

<sup>1</sup> bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

# Ein Minimalproblem in der Ebene und im Raum

In Heft 3/1982 war von Prof. Dr. W. Jungk, Päd. Hochschule Köthen, unter der Überschrift: *Eine Aufgabe und vier Lösungen* folgendes Problem gestellt worden: „Drei Orte A, B und C sollen eine gemeinsame Trafostation erhalten. Aus ökonomischen Gründen soll sie so gelegen sein, daß die Summe der Entfernungen zu den drei Orten ein Minimum ist.“ In diesem Artikel wollen wir auf einige Verallgemeinerungen dieses nach Jakob Steiner benannten Problems eingehen. Zunächst kann man die Zahl der vorgegebenen Punkte vergrößern. Die Aufgabe lautet dann in anderer Einleitung:

**Problem S:** Die  $n$  Bahnhöfe  $A_1, \dots, A_n$  sollen durch ein Eisenbahnstreckennetz so verbunden werden, daß man von jedem Bahnhof  $A_i$  zu jedem anderen Bahnhof  $A_j$  gelangen kann und dafür möglichst wenig Schienen verbraucht werden.

Daß dieses Problem stets mindestens eine Lösung hat, soll hier ohne Beweis angegeben werden. Da eine Strecke die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten ist, ist die optimale Lösung aus Strecken zusammengesetzt, die jeweils zwei Bahnhöfe miteinander verbinden, wobei eventuell einer oder mehrere Umsteigebahnhöfe (d. h. von den  $A_i$  verschiedenen Punkte, in denen mindestens 3 Strecken zusammentreffen) eingerichtet werden müssen. Die den Umsteigebahnhöfen entsprechenden Punkte werden *Steinerpunkte* genannt.

Um ein Gefühl für das Problem zu bekommen, sollte der Leser bevor er weiter liest, jetzt erst einmal versuchen, Aufgabe 1 selbstständig zu lösen.

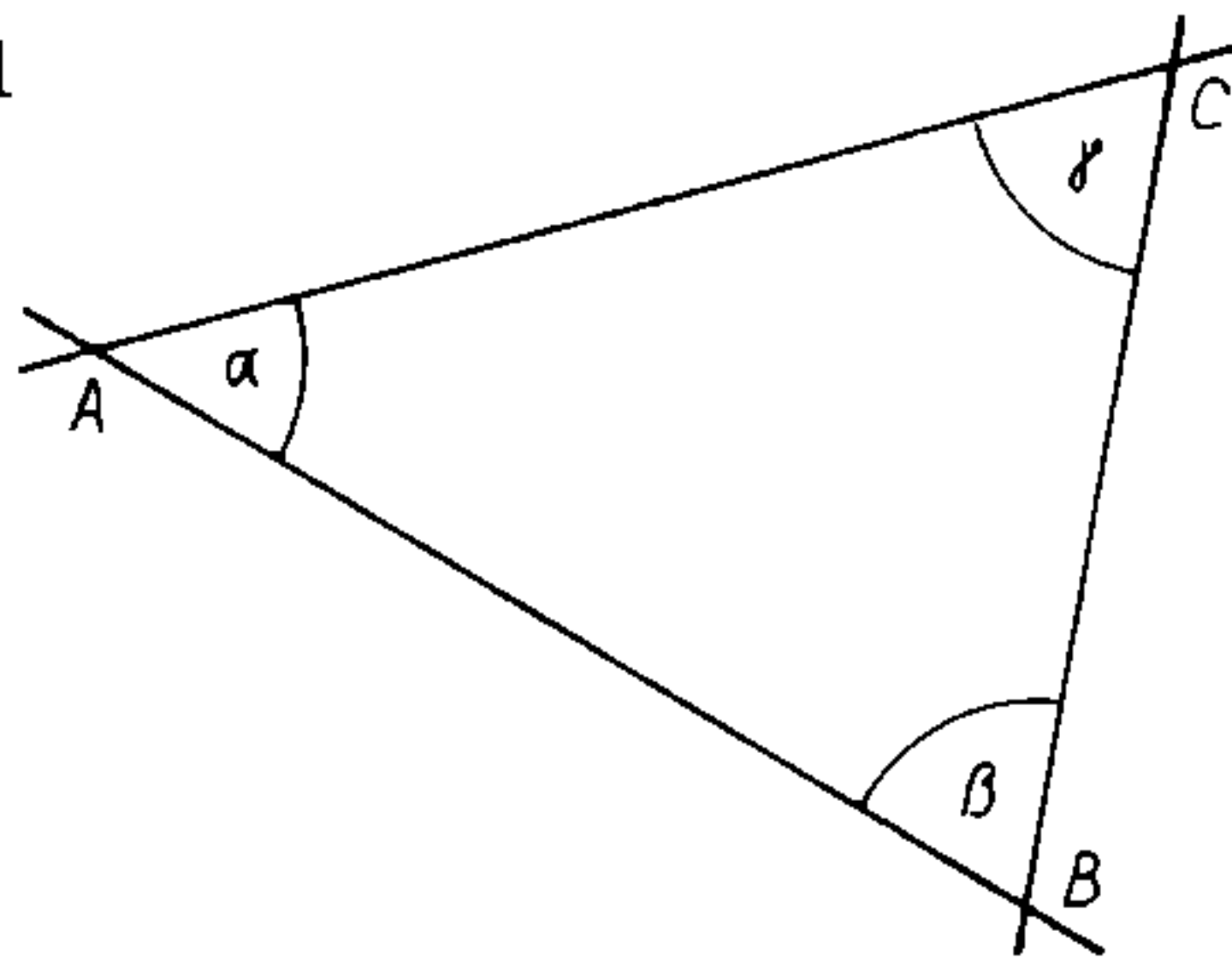
▲ 1 ▲ Problem S soll für  $n = 4$ , wobei  $A_1, \dots, A_4$  die Ecken eines Quadrats der Seitenlänge  $a$  sind, gelöst werden. Vermutlich denkt man zunächst daran, drei Seiten des Quadrates zu nehmen, so daß man  $3a$  an Schienenlänge benötigt (Bild 5). Kürzer ist jedoch die Lösung, die durch die beiden Diagonalen gebildet wird, sie ergibt  $2\sqrt{2}a$  (Bild 7). Um zu untersuchen, ob das tatsächlich bereits die optimale Lösung ist, ist es sinnvoll (wie oft bei mathematischen Problemen) eine allgemeinere Frage (Aufgabe 2) zu stellen, deren Antwort dann bei der Lösung des speziellen Problems weiterhilft.

▲ 2 ▲ In einer optimalen Lösung des Problems S mögen von irgendeinem Bahnhof A (mindestens) zwei Strecken ausgehen;

diese mögen den Winkel  $\alpha$  einschließen. Man zeige, daß dann  $\alpha \geq 120^\circ$  gilt.

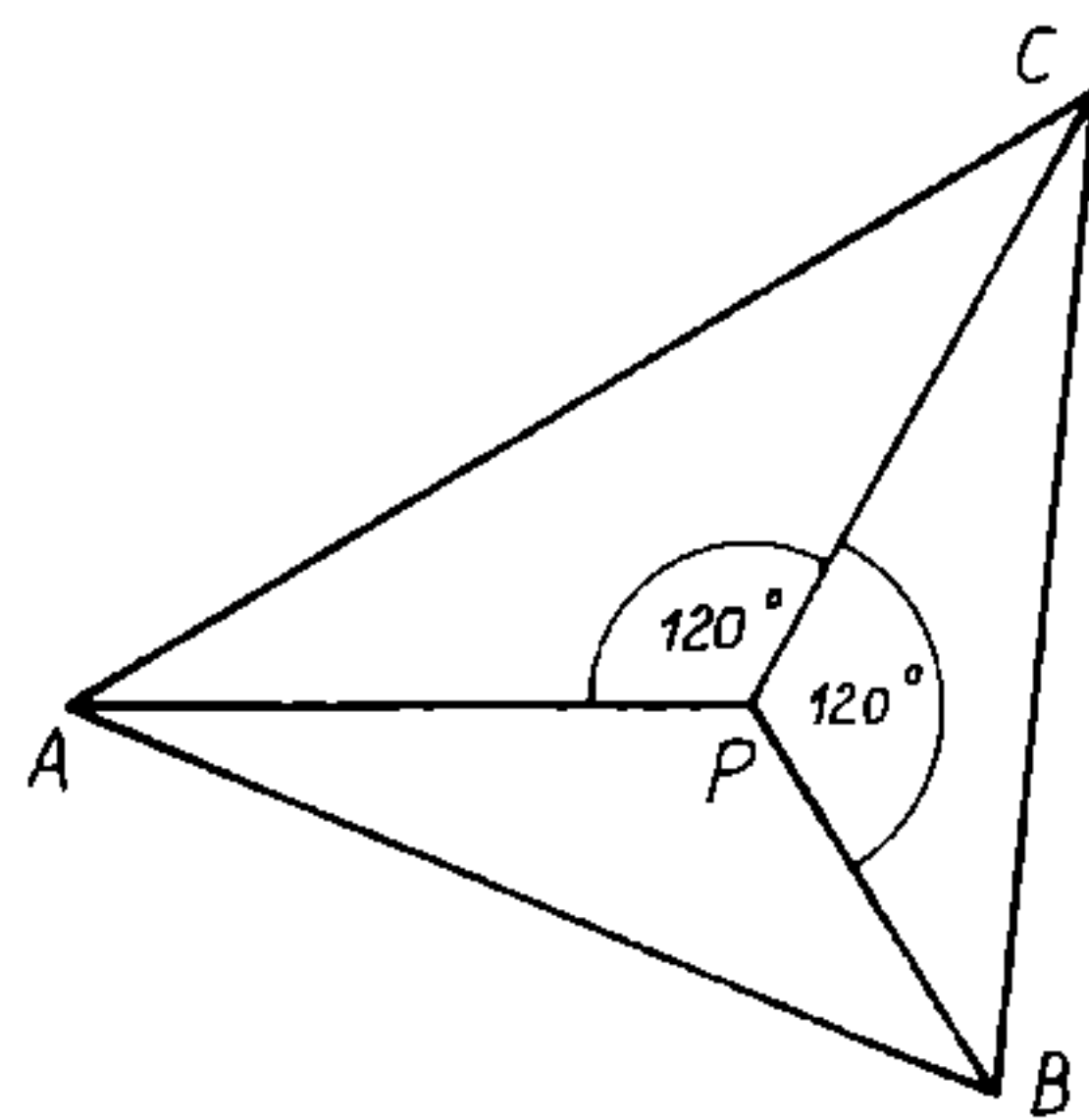
**Lösung indirekt:** Angenommen, es wäre  $\alpha < 120^\circ$ , dann könnte man, wie in Bild 1 gezeichnet, ein gleichschenkliges Dreieck  $\triangle ABC$  angeben, das so klein ist, daß innerhalb dieses Dreiecks kein Bahnhof liegt. Ferner ist  $\beta = \gamma$ , also beides spitze Winkel.

Bild 1



Wenn man jetzt die Strecken AC und AB aus dem Streckennetz entfernt und dafür die Strecken AP, BP und CP einfügt, wobei der Punkt P durch die Bedingungen (Bild 2)  $\angle BPC = \angle CPA = 120^\circ$  eindeutig bestimmt ist, erhält man wegen  $\alpha < 120^\circ$  ein kürzeres Streckennetz, das auch die Bahnhöfe  $A_i$  miteinander verbindet. (Zur Konstruktion Punktes P und den Beweis, daß das Streckennetz tatsächlich kürzer wird, vgl. den oben erwähnten Artikel von W. Jungk.)

Bild 2



Folglich ist das ursprüngliche Streckennetz doch nicht optimal, Widerspruch. Damit ist die Behauptung bewiesen.

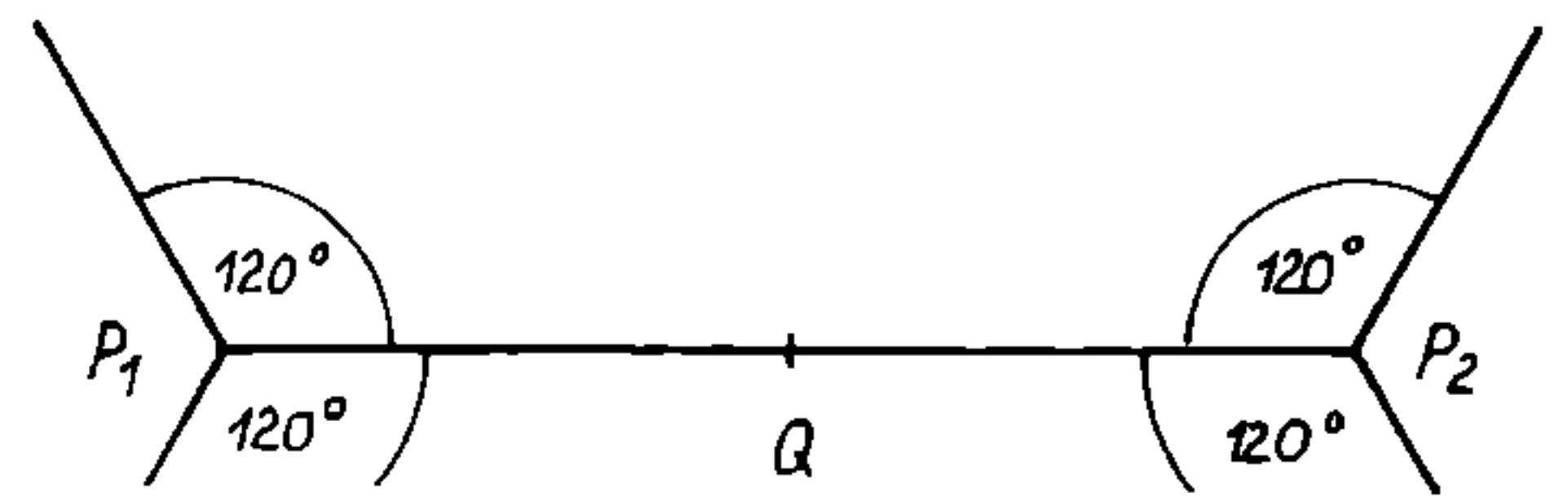
Aus Aufgabe 2 ergibt sich sofort, daß von einem Bahnhof höchstens drei Strecken ausgehen können, und wenn es genau drei Strecken sind, diese dann jeweils Winkel von genau  $120^\circ$  einschließen. Folglich ist die Diagonalenlösung von Aufgabe 1 nicht optimal, und man muß Lösungen mit mehr als einem Umsteigebahnhof betrachten. Es gilt:

▲ 3 ▲ Zur Lösung des Problems S braucht man höchstens  $(n - 2)$  Steinerpunkte.

Der Beweis sei dem interessierten Leser überlassen.

Als Folgerung ergibt sich, zusammen mit dem oben Gesagten, daß die Lösung von Aufgabe 1 genau 2 Umsteigebahnhöfe enthält und das Streckennetz folgende Gestalt hat (Bild 3).

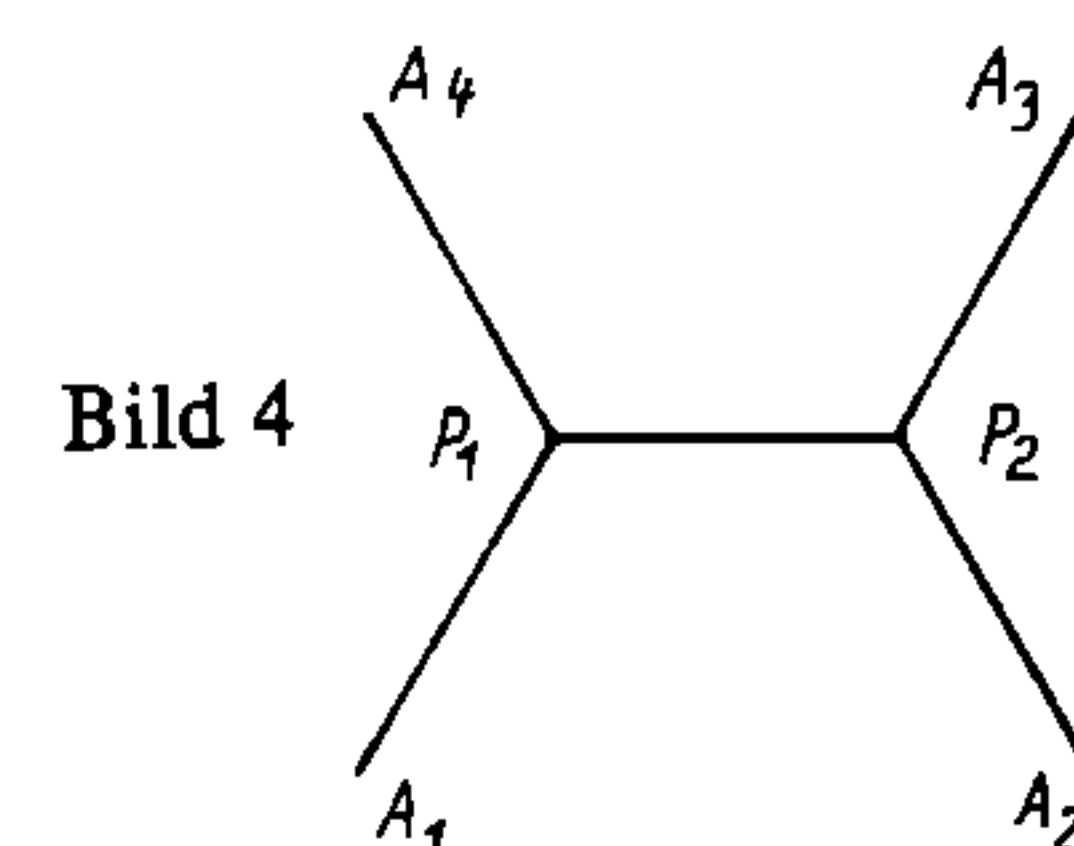
Bild 3



Darauf müssen die Bahnhöfe  $A_1, \dots, A_4$  so auf die 4 Strahlen verteilt werden, daß sie die Ecken eines Quadrats bilden. Die Lösung hat letztendlich folgende Gestalt

(Bild 4, dort ist  $\overline{A_1A_2} = a$  und  $\overline{A_1P_1} = \frac{a}{\sqrt{3}}$ )

mit einer Streckenlänge von  $(\sqrt{3} + 1)a$ , was tatsächlich kleiner als  $2\sqrt{2}a$  ist.



So wurde durch Betrachtung einer wesentlich allgemeineren Aufgabe die Lösung einer ganz speziellen Aufgabe gefunden. Hätte man sich nur auf Aufgabe 1 konzentriert, wäre man vermutlich auch nicht schneller ans Ziel gelangt.

Jetzt soll Problem S dahingehend verallgemeinert werden, daß die Punkte  $A_i$  nicht in einer Ebene, sondern beliebig im Raum verteilt sind. Viele geometrischen Probleme werden ja beim Übergang zum Raum wesentlich komplizierter, hier hat man jedoch das andere Extrem: Die Lösung sieht im Prinzip genauso aus, d. h., man richtet (maximal  $n - 2$  Stück) Umsteigebahnhöfe ein, verbindet die Bahnhöfe  $A_i$  und  $P_j$  so miteinander durch Strecken, daß von jedem Bahnhof maximal drei Strecken ausgehen, die jeweils Winkel  $\geq 120^\circ$  einschließen, und das solange, bis man von jedem Bahnhof zu jedem anderen gelangen kann. Die Lösung von Aufgabe 2 sieht im Raum genauso aus, da man sich in der Betrachtung auf die durch die beiden Strecken aufgespannte Ebene beschränken kann. Die Folgerung aus Aufgabe 2 ist jedoch nicht ganz so einfach zu erhalten, es gilt aber:

▲ 4 ▲ Von einem Punkt P im Raum mögen 4 Strahlen ausgehen. Man zeige, daß unter ihnen zwei Strahlen existieren, die einen Winkel  $< 120^\circ$  einschließen.

Folglich gehen auch im Raum bei einer optimalen Lösung des Problems S von jedem Punkt höchstens drei Strecken aus.

Der Beweis ist unter Benutzung der Vektorrechnung ganz einfach: Man heftet in einem Punkt vier Einheitsvektoren an und zeigt, daß die 6 Ungleichungen, die ausdrücken, daß die Winkel paarweise  $\geq 120^\circ$  sein sollen, einander widersprechen. Der Beweis ist aber auch ganz elementar möglich. Das einfachste echt dreidimensionale Problem ist:

▲ 5 ▲ Es soll Problem  $S$  im Raum gelöst werden, wobei  $A_1, A_2, A_3, A_4$  die Ecken eines regulären Tetraeders der Seitenlänge  $a$  bilden. Wegen Aufgabe 4 braucht man gar nicht erst zu versuchen, die vier Strecken  $\overline{A_i Q}$ , wobei  $Q$  den Schwerpunkt des Tetraeders bezeichnet, als optimale Lösung zu bestimmen. Tatsächlich ergibt sich die optimale Lösung wieder gemäß Bild 3, wobei diesmal die linke Hälfte um  $Q$  verdreht werden muß, und zwar um  $90^\circ$ . Wie groß muß man  $\overline{P_1 P_2}$  in Abhängigkeit von  $a$  wählen?

Eine andere Art der Verallgemeinerung des Problems  $S$  ist das Problem  $S_k$ :

Es soll das Problem  $S$  gelöst werden, jedoch nicht mehr als  $k$  Umsteigebahnhöfe eingerichtet werden.

Ähnlich wie bei Aufgabe 2 zeigen wir zuerst:

▲ 6 ▲ In einer optimalen Lösung des Problems  $S_k$  mögen von irgendeinem Bahnhof  $A$  (mindestens) zwei Strecken ausgehen; diese mögen den Winkel  $\alpha$  einschließen. Man zeige, daß dann  $\alpha \geq 60^\circ$  gilt.

**Beweis:** Angenommen, es wäre  $\alpha < 60^\circ$ . Am Ende der Strecken, die von  $A$  ausgehen und den Winkel  $\alpha$  einschließen, mögen die Bahnhöfe  $B$  und  $C$  liegen und im Dreieck  $\triangle ABC$  die Winkel  $\beta$  und  $\gamma$  entsprechend Bild 1 bezeichnet werden. Da  $\alpha < 60^\circ$ , ist der Winkel  $\alpha$  im Dreieck  $\triangle ABC$  sicher nicht der größte Winkel.

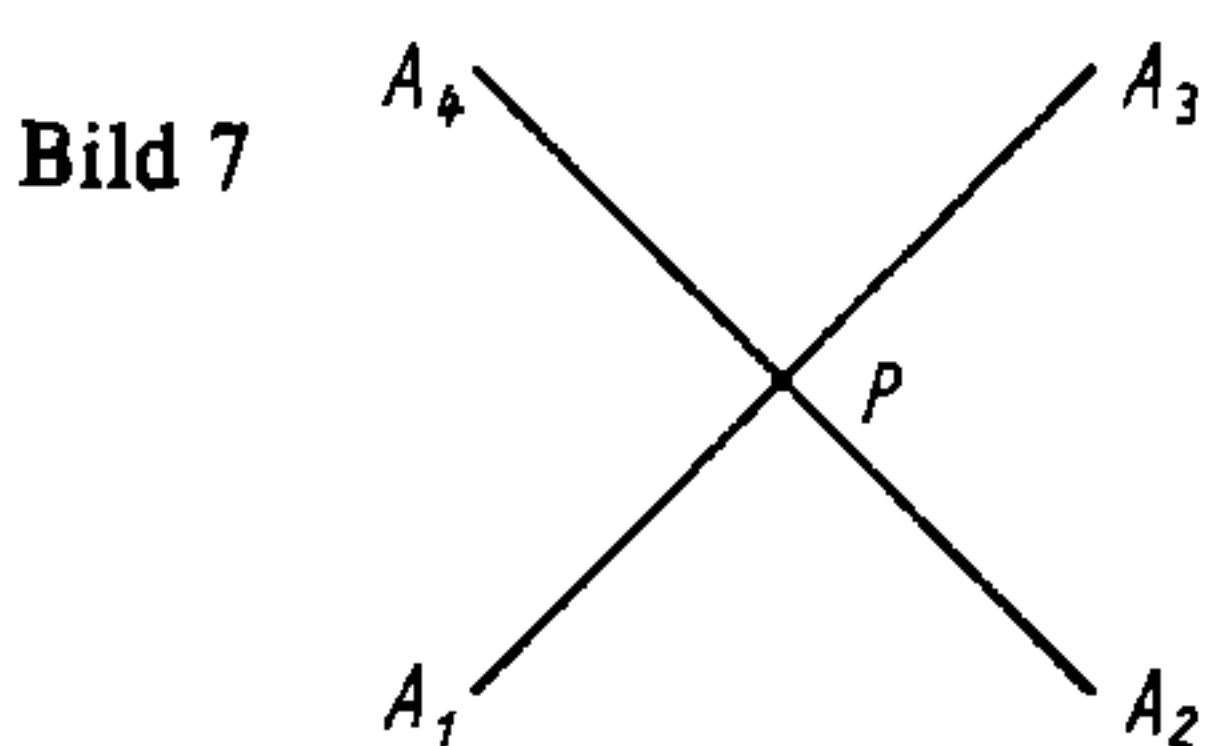
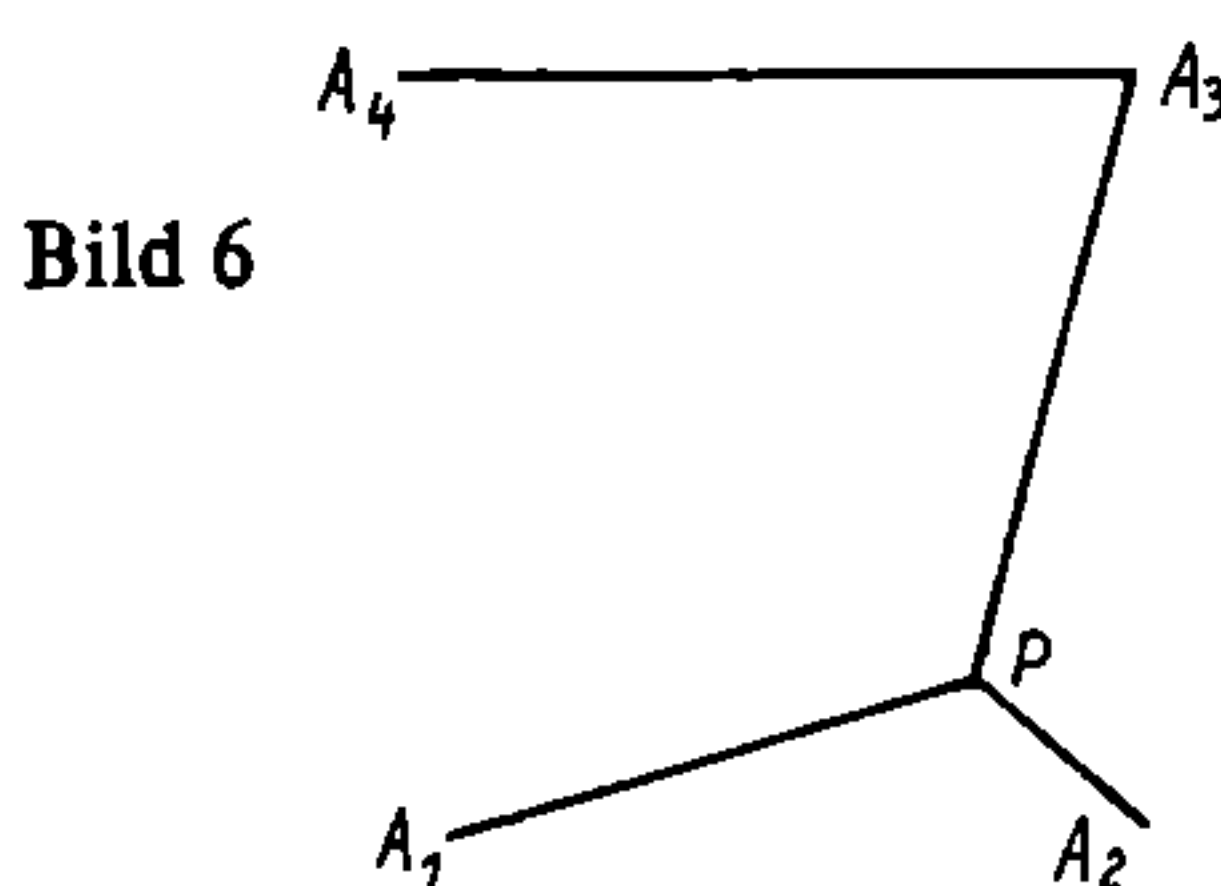
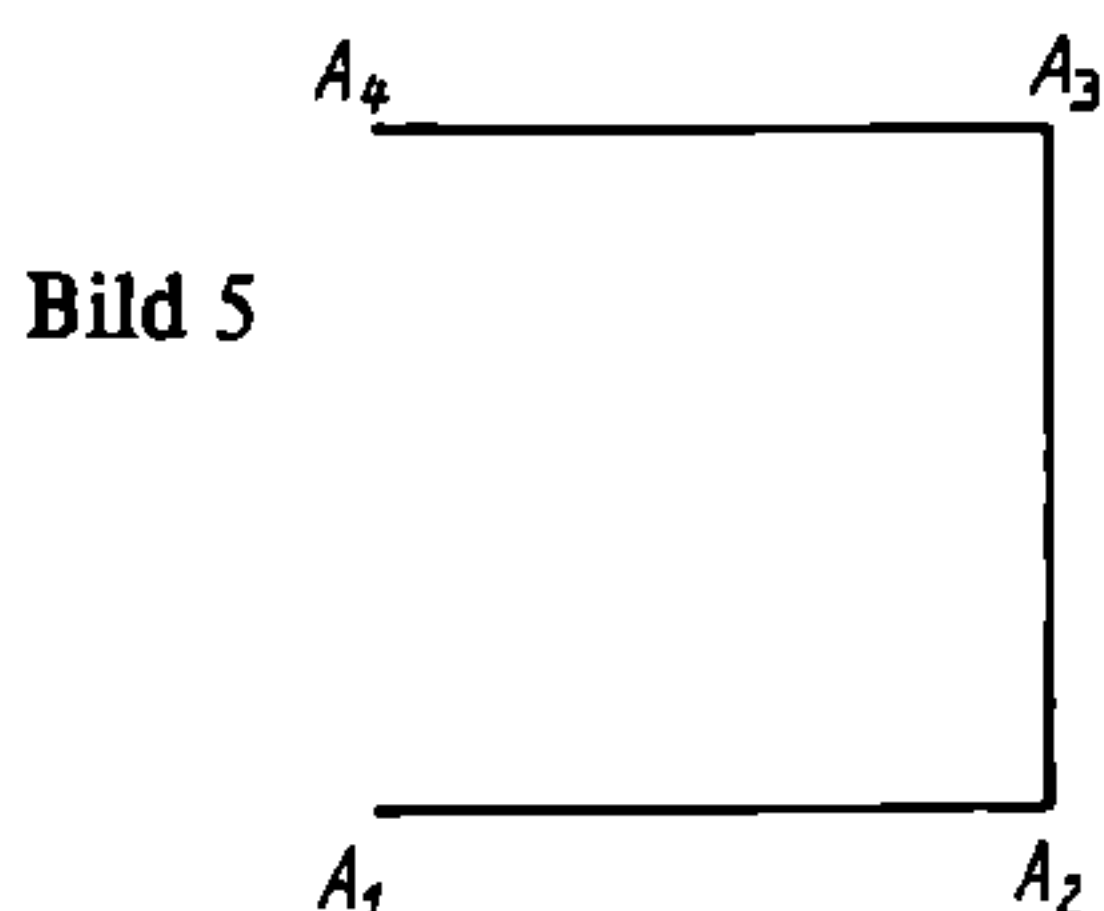
Sei  $\beta$  der größte Winkel im Dreieck, so liegt ihm die größte Seite, nämlich  $\overline{AC}$ , gegenüber. Entfernen wir die Strecke  $\overline{AC}$  und fügen dafür  $\overline{BC}$  hinzu, so erhielten wir somit ein kürzeres Streckennetz, welches auch die Bahnhöfe miteinander verbindet und keinen weiteren Umsteigebahnhof benötigt. Dies ist aber ein Widerspruch zur Optimalität des ursprünglichen Streckennetzes. Damit ist  $\alpha \geq 60^\circ$  nachgewiesen. Aus der Aufgabe 6 ergibt sich sofort, daß von einem Bahnhof höchstens sechs Strecken ausgehen können. Aus dem Beweis von Aufgabe 6 kann man noch eine weitere Aussage (Aufgabe 7) ableiten, deren Beweis wir dem Leser überlassen wollen.

▲ 7 ▲ a) Es gibt stets eine optimale Lösung des Problems  $S_k$ , in der von jedem Bahnhof höchstens fünf Strecken ausgehen.

b) Man gebe ein Beispiel für ein Problem  $S_1$  an, bei dem mehrere optimale Lösungen existieren, und bei einer dieser Lösungen von einem Bahnhof 6 Strecken ausgehen.

Es ist wichtig zu wissen, wieviel Strecken maximal von den Umsteigebahnhöfen (Steinerpunkten) in optimalen Lösungen des Problems  $S_k$  ausgehen können. Wir überzeugen uns zunächst davon, daß im Gegensatz zum Problem  $S$  bei optimalen

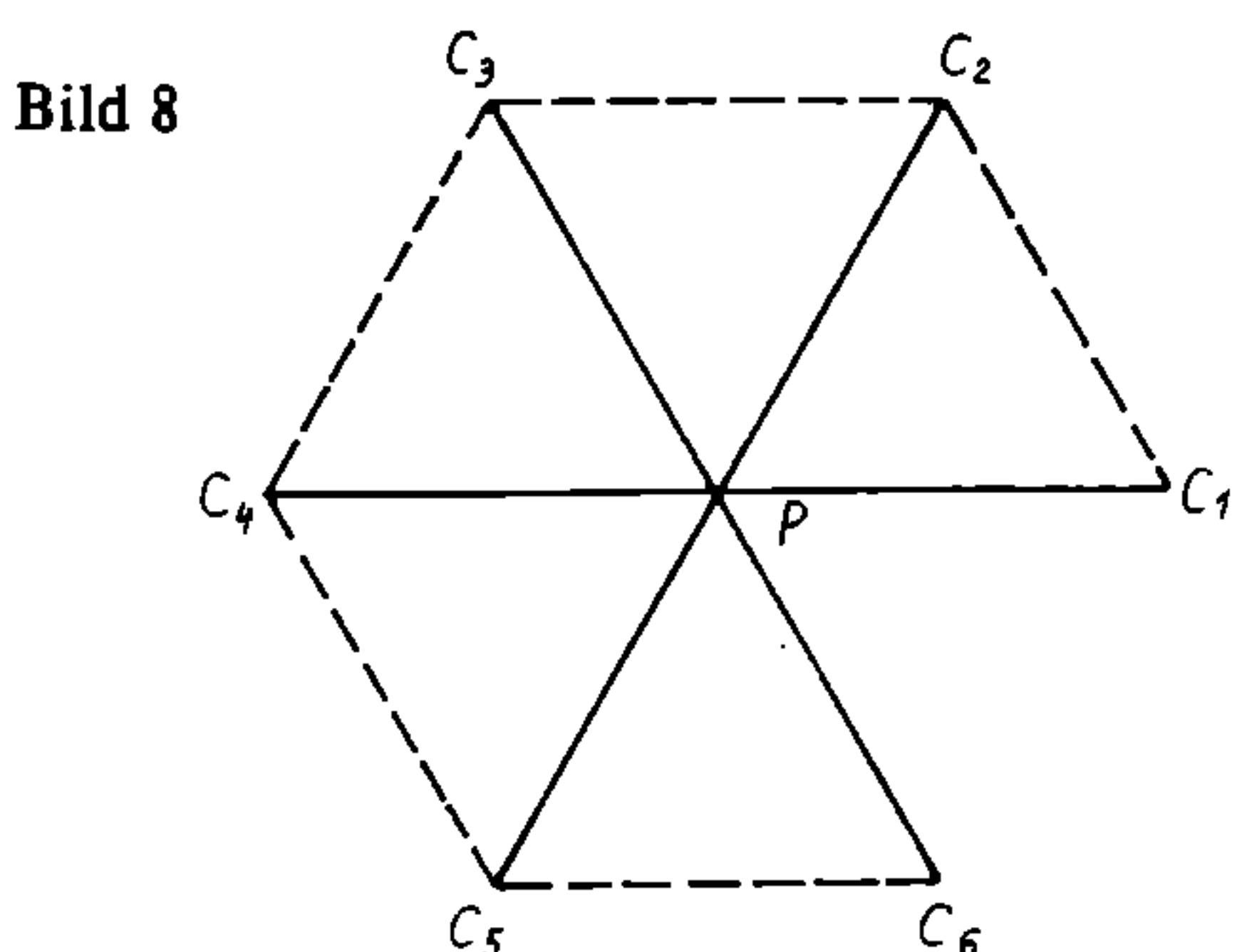
Lösungen des Problems  $S_k$  auch Umsteigebahnhöfe auftreten können, von denen vier Strecken ausgehen. Dazu wählen wir  $A_i, i = 1, \dots, 4$  als Eckpunkte eines Quadrats und lösen dafür das Problem  $S_1$  (Bild 5, 6, 7). Der Leser überzeuge sich davon, daß nur das in Bild 7 angegebene Streckennetz das Problem  $S_1$  löst. Dort gehen vom Umsteigebahnhof aber vier Strecken aus.



▲ 8 ▲ In einer optimalen Lösung des Problems  $S_k$  sei  $P$  ein Steinerpunkt. Dann gehen von  $P$  höchstens fünf Strecken aus. Wegen Aufgabe 6 müssen wir zum Beweis nur noch ausschließen, daß von einem Steinerpunkt sechs Strecken ausgehen können. Sollten von  $P$  sechs Strecken nach  $C_1, \dots, C_6$  ausgehen, so bilden die  $C_i$  ein regelmäßiges Sechseck, in deren Mittelpunkt  $P$  liegt (Bild 8). Somit gilt

$$\overline{PC_1} = \overline{PC_2} = \dots = \overline{PC_6} = \overline{C_1 C_2} = \overline{C_2 C_3} = \dots = \overline{C_5 C_6} = \overline{C_6 C_1}.$$

Jetzt ist klar, daß der punktierte Weg in Bild 8 kürzer ist, als der von  $P$  ausgehende Stern. Es wird sogar noch der Umsteigebahnhof  $P$  „eingespart“. Das ist mit der Annahme, daß dies Streckennetz das Problem  $S_k$  optimal löst, nicht zu vereinbaren. Damit ist Aufgabe 8 gelöst.



Es ist den Mathematikern bis heute unbekannt, ob ein optimales Streckennetz des Problems  $S_k$  für irgendwelche Punkte  $A_1, \dots, A_n$  existiert, das einen Steinerpunkt

hat, von dem fünf Strecken ausgehen. Wir vermuten, daß das nicht möglich ist:

In einer optimalen Lösung des Problems  $S_k$  sei  $P$  ein Steinerpunkt. Dann gehen von  $P$  höchstens vier Strecken aus. Vielleicht ist diese Aussage aber auch falsch!

Die Probleme von  $S$  und  $S_k$  finden in der Praxis vielfach Anwendung. Immer wenn mehrere Punkte (Bahnhöfe, Telefonanschlüsse, Städte u. a.) durch kürzeste Streckennetze (Bahnstreckennetz, Telefonnetz, Straßennetz u. a.) verbunden sein müssen, ist ein solches Minimalbaumproblem zu lösen. Da man nicht immer beliebig viele Steinerpunkte (Umsteigebahnhöfe, Telefonzentralen, Kreuzungen u. a.) einrichten darf (sie verursachen in der Praxis zusätzliche Kosten), löst man dann statt des Problems  $S$  ein Problem  $S_k$  mit vorgegebenem  $k$ . Besonders einfach löst sich das Problem  $S_0$ , d. h., es darf kein Steinerpunkt eingesetzt werden.

Der Leser kann sich das selbst überlegen oder in einem Lehrbuch der Graphentheorie nachlesen.  $S_1$  ist schon schwieriger zu lösen usw.

Wenn wir für  $n$  Punkte das Problem  $S_{n-2}$  lösen, so ist dies wegen Aufgabe 3 nichts anderes als die Lösung des Problems  $S$ . So kann man durch die Problemfolge  $S_0, S_1, \dots$  das Problem  $S$  näherungsweise lösen.

Der interessierte Leser sei abschließend noch auf das Buch von H. Walther „Anwendungen der Graphentheorie“, Berlin 1979, verwiesen.

D. Cieslik/H.-J. Schmidt

## Informatikstudium an der Sektion Mathematik der Humboldt-Universität Berlin

Seit September 1982 werden an der Sektion Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin Studenten in der neu eingerichteten Studienrichtung *Mathematische Informatik* ausgebildet. Dabei handelt es sich um eine spezielle Variante des Mathematikstudiums, die über die gesamte Studiendauer nach einem eigenen Plan abläuft. Der allgemeine Verlauf und die Stundenzahl je Semester stimmen mit der Grundstudienrichtung Mathematik überein.

Der Einführung eines solchen Studienfaches lag die Einsicht zugrunde, daß der rasche Fortschritt der elektronischen Rechentechnik es dringend erforderlich macht, geeignete mathematische Theorien auf das engste mit den Erkenntnissen und technologischen Methoden der Informationsverarbeitung zu verbinden. Daher zielt das Studium der *Mathematischen Informatik* darauf ab, die enge Wechselwirkung zwischen Mathematik und Informatik als Denkgewohnheit bei den Studenten auszuprägen. Daneben wurde breiter Raum für die Ausbildung praktischer Fähigkeiten



und Fertigkeiten im Umgang mit komplexen Rechner- und Programmsystemen geschaffen. Die Studenten werden mit der Informationsverarbeitung und der Programmierung von Mikrorechnern und Robotersteuerungen vertraut gemacht. Sie erlernen moderne Programmiersprachen wie PASCAL und MODULA-2. Damit wird die Möglichkeit eröffnet, bereits im ersten Semester elementare mengentheoretische Begriffe in den Programmiersprachen darzustellen. Vom ersten Tag des Studiums an können die Informatikstudenten elektronische Rechentechnik als Hilfsmittel nutzen. Die Studierenden beschließen ihre Ausbildung als Diplommathematiker. Die Absolventen werden in Forschungs- und Entwicklungszentren der Industrie, der Akademie der Wissenschaften der DDR, des Hoch- und Fachschulwesens sowie in Rechenzentren eingesetzt. L. Budach

## Wer möchte Mathematik/Physik-Lehrer werden?

Seit 1969 werden in der Spezialschule Mathematik/Physik an der Humboldt-Universität zu Berlin jedes Jahr in einem einjährigen Lehrgang politisch gefestigte und fachlich befähigte Absolventen der polytechnischen Oberschulen auf die Aufnahme eines Diplomlehrerstudiums in der Fachkombination Mathematik/Physik vorbereitet.

Die Ausbildung stützt sich auf wesentliche Lehrplaninhalte der Abiturstufe und berücksichtigt bewußt die besonderen Anforderungen des künftigen Studiums. Für das Studium 1985/86 gibt es noch einige freie Plätze.

Informationswünsche sind zu richten an Humboldt-Universität zu Berlin Spezialschule Mathematik/Physik 1020 Berlin

Burgstraße 26  
Telefon 2 82 65 85

## Zum Titelbild: Knotelei am Ostseestrand

**Magisches Quadrat 10. Ordnung mit der Jahreszahl 1984**

Sicher sind euch *Magische Quadrate* (3. oder 4. Ordnung) bekannt.

Das Bild 1 zeigt so ein *Magisches Quadrat* 4. Ordnung mit  $4^2$  natürlichen Zahlen, so daß die Summe der Zahlen jeder Zeile, Spalte und Diagonalen gleich ist.

Albrecht Dürer hat in seinem Bild *Melancholie* das Entstehungsjahr 1514 in solch einem *Magischen Quadrat* festgehalten, indem die Zahlen 15, 14 in der Mitte der letzten Zeile stehen (Bild 2).

Als im Feriensommer 1983 Neubrandenburger und Rostocker Schüler der *Mathematischen Schülergesellschaft* der Universität Greifswald an der Ostsee ihren 3. Lehrgang durchführten, hörten sie abends einen zusätzlichen Vortrag über *Magische Quadrate*, ihren Aufbau und ihre Gesetzmäßigkeiten. Ein *Magisches Quadrat* 10. Ordnung mit den Zahlen 1 bis 100 entstand. Ihre Zeilen, Spalten und Diagonalen ergaben die Summe 505.

Da wurde spontan von der Lehrgangsleitung ein beachtlicher Preis für den oder für diejenigen ausgesprochen, denen es gelingen würde, das Quadrat so umzustellen, daß die Jahreszahl 1984 in die Mitte der letzten Zeile zu stehen kommt (nach dem Dürerbeispiel). Tagelang wurde in der Freizeit am Ostseestrand und anderswo geknobbelt und kombiniert. Schließlich gelang einer Gruppe von mehreren Schülern die Lösung des Problems (siehe Titelbild). Vielleicht gelingt jemandem nach gründlichem Studium entsprechender Literatur ein *Magisches Quadrat* mit der Jahreszahl 1985 oder 1986?

H.-J. Kerber

▲ 1 ▲ In a triangle, the lengths of the three medians are 9, 12 and 15. Find the length of the side to which the longest median is drawn.

▲ 2 ▲ Le boulanger sait que la masse du pain qu'il fabrique est les  $\frac{10}{9}$  de la masse de la farine utilisée.

a) Quelle quantité de pain obtient-il avec 72 kg de farine? avec 117 kg? avec 108 kg?

b) Quelle masse de farine faut-il pour fabriquer 100 kg de pain? 150 kg? 190 kg?

▲ 3 ▲ Мой знакомый Саша однажды мне сказал: „Позавчера мне было 10 лет, а в будущем году мне исполнится 13 лет“. Может ли такое быть?



▲ 4 ▲ Две высоты треугольника не меньше сторон, на которые они опущены. Найти углы треугольника.

**Wer fremde Sprachen nicht kennt, weiß nichts von seiner eigenen.**

J.W.von Goethe

## Eine harte Nuß

Ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge  $a$  werde durch eine Gerade, die parallel zu einer Seite verläuft, so durchgeschnitten, daß die Umfänge der dabei entstehenden Teilfiguren (Dreieck und Trapez) einander gleich sind. In welchem Verhältnis stehen dann ihre Flächeninhalte?

Dr. R. Mildner,  
Karl-Marx-Universität Leipzig

# Eine empirische Bestätigung der heliozentrischen Theorie von Copernicus und Kepler, Teil 1

Zum 200. Geburtstag des Astronomen und Mathematikers Friedrich Wilhelm Bessel

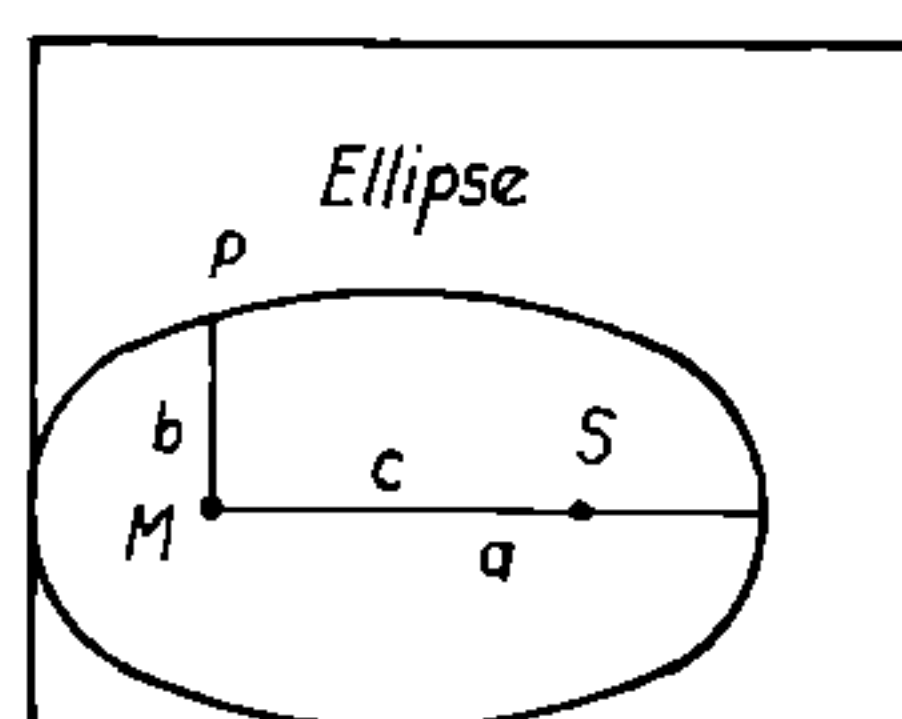
*In medio vero omnium residet Sol!* (Lateinisch: In der Mitte von allem aber steht die Sonne!) Dies ist ein Satz aus dem 1543 erschienenen Hauptwerk von Nicolaus Copernicus, jenem polnischen Astronomen der Renaissance, der die heliozentrische Planetentheorie aufstellte (helios – griechisch: Sonne, centrum – lateinisch: Mittelpunkt). Bereits in der Antike waren einzelne Gelehrte darauf aufmerksam geworden, daß die Erklärung der (scheinbaren) Bewegungen der Planeten einfacher werden würde, wenn man die Sonne statt der Erde als Mittelpunkt der Bewegung annehmen würde.

Wie Ptolemäus in seinem geozentrischen Planetensystem (geo – griechisch: Erde), ging auch Copernicus vom antiken Prinzip der gleichförmigen Kreisbewegung aus. Um die Sonne herum würden sich die Planeten auf Kreisbahnen in folgender Reihenfolge bewegen:

Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter und Saturn. (Die anderen uns heute bekannten Planeten wurden erst später entdeckt: F. W. Herschel fand 1781 den Planeten Uranus, J. G. Galle entdeckte 1846 den von Leverrier vorausgerechneten Planeten Neptun, C. W. Tombaugh machte 1930 den sonnenfernsten Planeten Pluto ausfindig.) Um gewisse Ungleichmäßigkeiten der Bewegung dieser Himmelskörper zu erklären, mußte Copernicus exzentrische Kreise annehmen (der Standpunkt der Sonne ist nicht im Kreismittelpunkt, sondern ein wenig außerhalb des Mittelpunkts). Copernicus mußte den Planeten überdies noch kleine Sonderbewegungen zuschreiben (sogenannte Epizyklen, wie sie auch für die Theorie des Ptolemäus typisch sind). Erst Johannes Kepler, der auf der Grundlage der *Copernicanischen Theorie* nach den Planetenbewegungsgesetzen forschte, kam zur richtigen, 1609 veröffentlichten Erkenntnis, daß die Planeten sich nicht auf Kreisbahnen, sondern auf elliptischen Bahnen um die Sonne bewegen. Die Sonne befindet sich in einem Brennpunkt dieser Ellipsen.

Ist  $a$  die große Halbachse (Bild 1),  $b$  die kleine Halbachse der elliptischen Bahn, so beträgt die *Abplattung*  $\frac{a-b}{a}$  z. B. bei der Erdbahn weniger als  $\frac{1}{7000}$ , bei der Marsbahn  $\frac{1}{230}$ . In der Astronomie wird meist die (sog. numerische) Exzentrizität  $e$  der

Bild 1



Ellipse angegeben. Bezeichnet  $c$  die Entfernung des Brennpunktes  $S$  der Ellipse vom Mittelpunkt  $M$ , so gilt  $e = \frac{c}{a}$ . Diese Ex-

zentrizität ist eine Zahl zwischen 0 und 1. Je kleiner  $e$  ist, je kleiner ist  $c$ , um so weniger weicht  $S$  von  $M$  ab. Liegt  $S$  in  $M$ , so ist  $c = 0$ ,  $e = 0$ ,  $a = b$ , die Ellipse ist ein Kreis. Die Exzentrizitäten der Planetenbahnen sind tatsächlich nur sehr gering. Für die Erde ist  $e = 0,0167$ , für den Mars ist die Exzentrizität etwa 5mal so groß. (Die Bahn des Plutos hat mit 0,247 von allen Planetenbahnen die größte Exzentrizität.)

Kepler formulierte noch weitere Gesetze über die Bewegung der Planeten, durch die die Anhänger der heliozentrischen Theorie des Copernicus sicher in ihrer Überzeugung gestärkt worden sind. Doch bewiesen war die Theorie keineswegs.

Spiegelte diese Theorie in ihrer verbesserten Keplerschen Fassung tatsächlich die wahre Bewegungsstruktur des Systems der Sonne und der Planeten (einschließlich der Erde) wider, oder war sie nur ein mögliches mathematisches Modell, das den Beobachtungen besser entsprach als etwa das Ptolemäische Modell?

Die Theorie von Copernicus und Kepler ist in der Folgezeit durch verschiedene theoretische und praktische Resultate der Astronomie unwiderlegbar bestätigt worden. Zwei Beispiele:

Der italienische Naturforscher Galileo Galilei, der sich konsequent für die Copernicanische Lehre einsetzte, entdeckte mit seinem 1609 gebauten Fernrohr den Phasenwechsel der Venus, bemerkte also, daß die Venus ähnlich wechselnde Lichtgestalten (z. B. die Sichelgestalt) aufweist, wie wir sie vom Mond kennen. Diese Erscheinung läßt sich durch die Erdbewegung (um die Sonne) plausibel erklären, und Galilei sah sie dann auch als Beweis für die Richtigkeit der Copernicanischen Hypothese an. (Es sei jedoch angemerkt, daß auch eine von Tycho Brahe aufgestellte Hypothese mit dem Phasenwechsel der Venus verträglich ist: Die Erde steht unbewegt als

Bewegungszentrum für die Bahnen des Mondes und der Sonne im Mittelpunkt, während die fünf anderen Planeten sich um die Sonne bewegen.)

Der englische Astronom James Bradley entdeckte im Jahre 1728 die sogenannte jährliche Aberration, eine scheinbare Ortsveränderung der Sterne, die sich nur als Folge der endlichen Geschwindigkeit des Lichtes (schon 1676 vom dänischen Astronomen Ole Römer aus den Verfinsterungszeiten der Jupitermonde berechnet) und des jährlichen Umlaufs der Erde um die Sonne erklären läßt.

Doch eine schon von Copernicus gestellte Aufgabe zur empirischen Bestätigung seiner heliozentrischen Theorie wurde erst nach fast 300 Jahren vom Astronomen, Geodäten und Mathematiker Friedrich Wilhelm Bessel (22. 7. 1784 bis 17. 3. 1846) gelöst. Copernicus wußte, daß die Bewegung der Erde um die Sonne zu sogenannten Fixsternparallaxen führen müßte. Der Nachweis solcher Parallaxen würde also tatsächlich eine astronomische Bestätigung der Heliozentrik (der Theorie von Copernicus und Kepler) bedeuten.

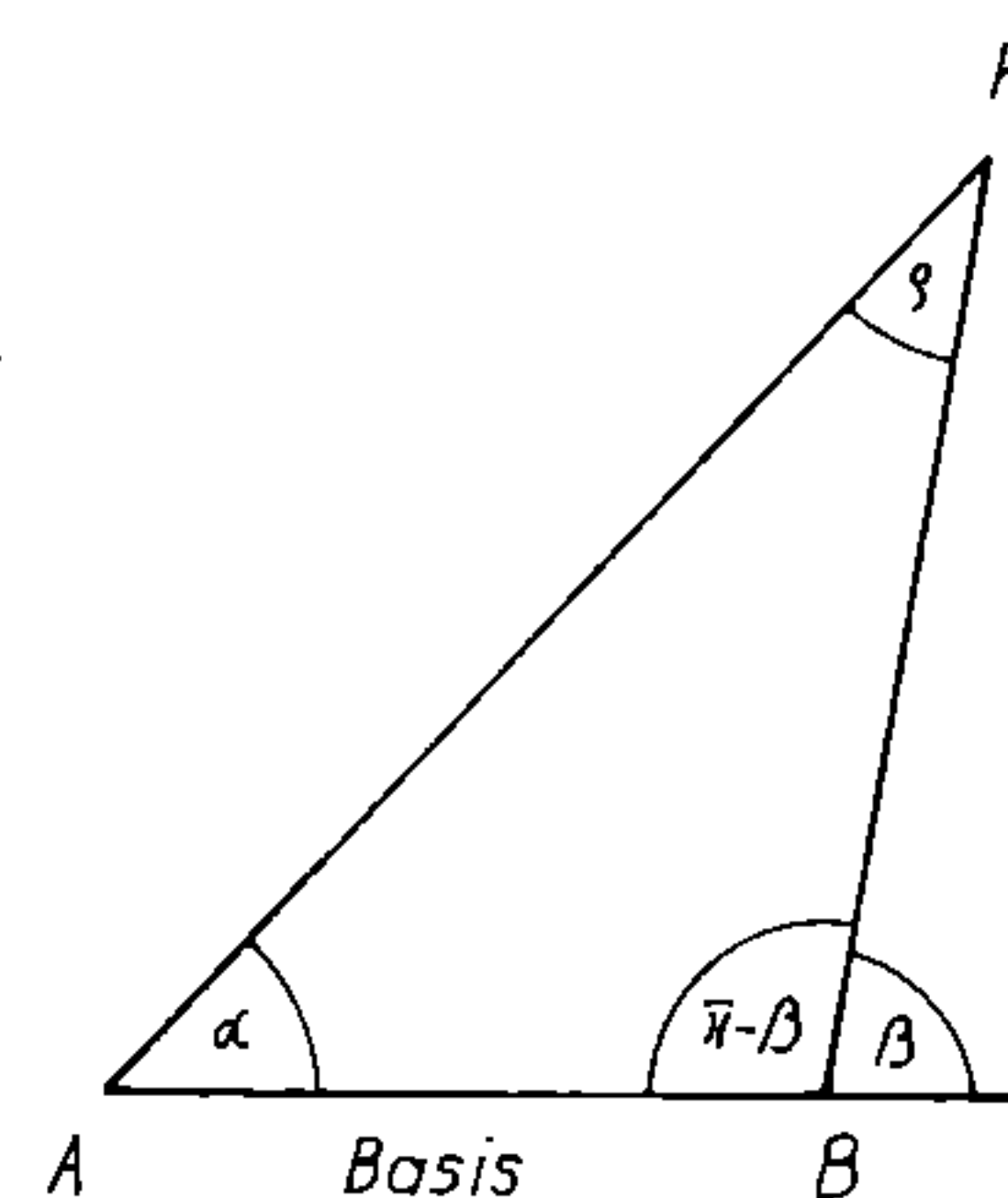
Die Gegner der Copernicanischen Theorie konnten lange Zeit auf die Nichtauffindbarkeit der parallaktischen Bewegung der Fixsterne verweisen.

Erst 1838 gab Bessel die erste erfolgreiche Messung einer solchen Parallaxe bekannt. Worum handelt es sich dabei?

## Parallaxe und Entfernung

Beobachtet man einen Punkt  $P$  von zwei verschiedenen Beobachtungsorten  $A$  und  $B$  (Bild 2), so erscheint  $P$  unter verschiedenen Winkeln  $\alpha$ ,  $\beta$  (bezüglich der durch  $A$  und  $B$  verlaufenden Geraden).

Bild 2

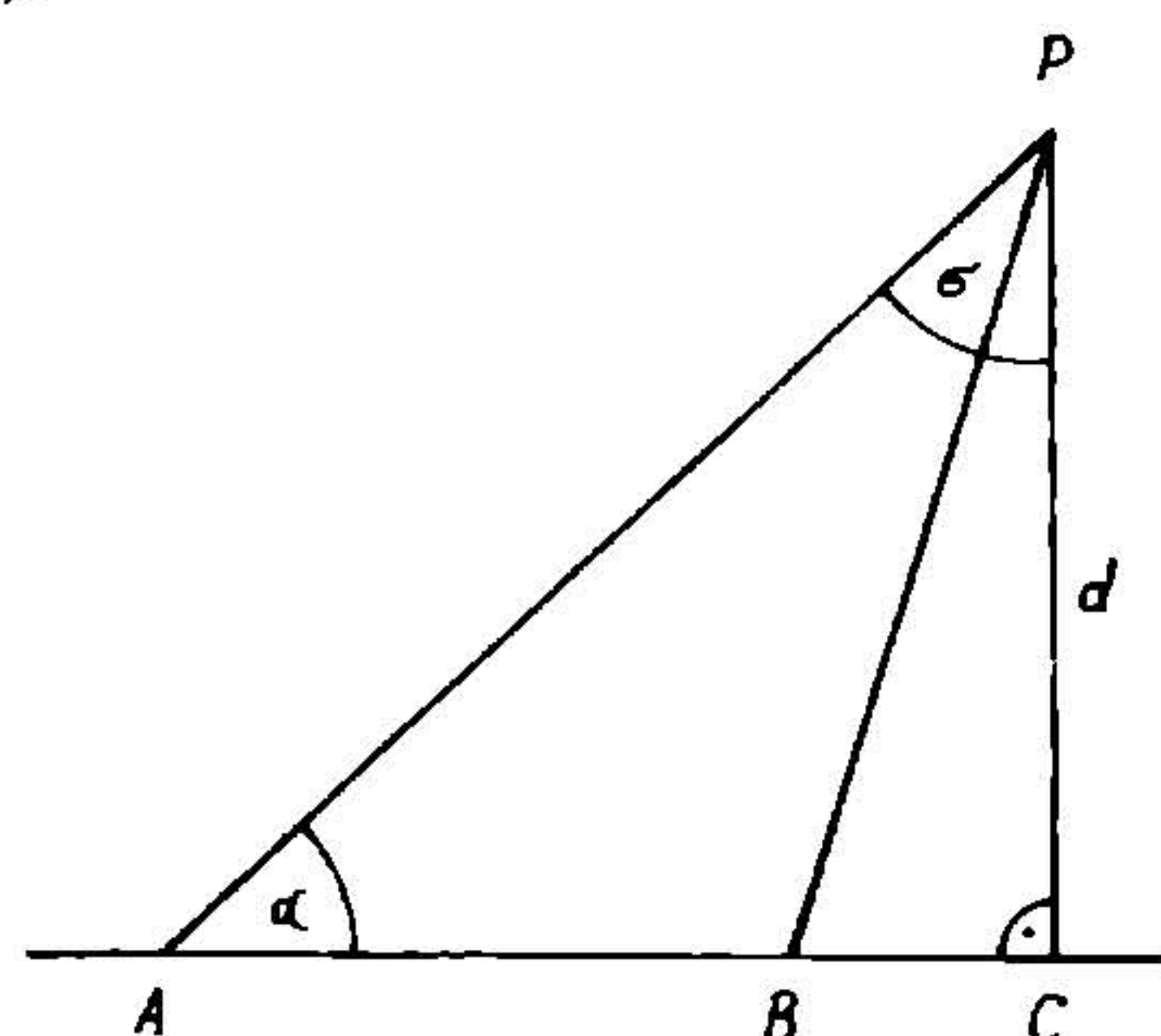


Der Winkel  $\rho$ , den die Sehstrahlen von  $A$  und  $B$  zu  $P$  bilden, unter dem also die Verbindungsgerade  $AB$  (Basis) von  $P$  aus erscheint, heißt Parallaxe (griechisch: Abweichung) des Punktes  $P$  bezüglich der Basis  $AB$ . Da die Winkelsumme im Dreieck  $ABP$   $180^\circ$  beträgt, gilt  $\alpha + (180 - \beta) + \rho = 180$ , d. h.  $\rho = \beta - \alpha$ . Mißt man also die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$ , so findet man daraus die Parallaxe  $\rho$ .

Bei naheliegenden Objekten  $P$  tritt schon durch den Augenabstand ( $A$  – das linke Auge,  $B$  – das rechte Auge) bei wechselseitigem Sehen eine Parallaxe auf. (Deshalb entsteht bei beidseitigem Sehen ein räumliches Bild!)

Bei konstanter Basis  $AB$  (also bei festen Beobachtungspunkten  $A, B$ ) ist die Parallaxe eines Punktes  $P$  bzgl. der Basis  $AB$  offenbar um so kleiner, je weiter entfernt der beobachtete Punkt  $P$  ist. Wird man die Parallaxe als ein Maß für die Entfernung des Punktes  $P$  ansehen können? Entfernung des Punktes, wovon? Es möge etwa nach der Entfernung des Punktes  $P$  von der Geraden durch  $A$  und  $B$  gefragt werden. Es wird also nach der Länge  $d$  der Strecke  $PC$  (Höhe des Dreiecks  $ABP$  auf  $AB$ ) gefragt (Bild 3).

Bild 3



Ist  $\sigma$  die Parallaxe von  $P$  bzgl. der Basis  $AC$  (der Länge  $r$ ), so gilt (im rechtwinkligen Dreieck  $ACP$ )

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{r}{d},$$

also 
$$d = \frac{r}{\operatorname{tg} \sigma}.$$

Aus der Länge  $r$  der Basis  $AC$  und der Parallaxe von  $P$  bzgl. der Basis  $AC$  läßt sich also die Entfernung des Punktes  $P$  von  $C$  bestimmen (wobei die Geraden  $PC$  und  $AC$  den Winkel  $90^\circ$  einschließen). Aus  $d \cdot \operatorname{tg} \sigma = r$  folgt: Je größer  $d$ , je kleiner  $\operatorname{tg} \sigma$ , d. h., je kleiner  $\sigma$ , und umgekehrt. (Wie groß ist der Abstand  $P$  von  $A$ ?) Die Kenntnis der Parallaxe eines Punktes  $P$  bzgl. einer geeigneten Basis ermöglicht also die Bestimmung seiner Entfernung.

### Die Entfernung des Mondes

So kann man aus einer geeigneten Parallaxe, z. B. des Mondes, seine Entfernung von der Erde bestimmen.

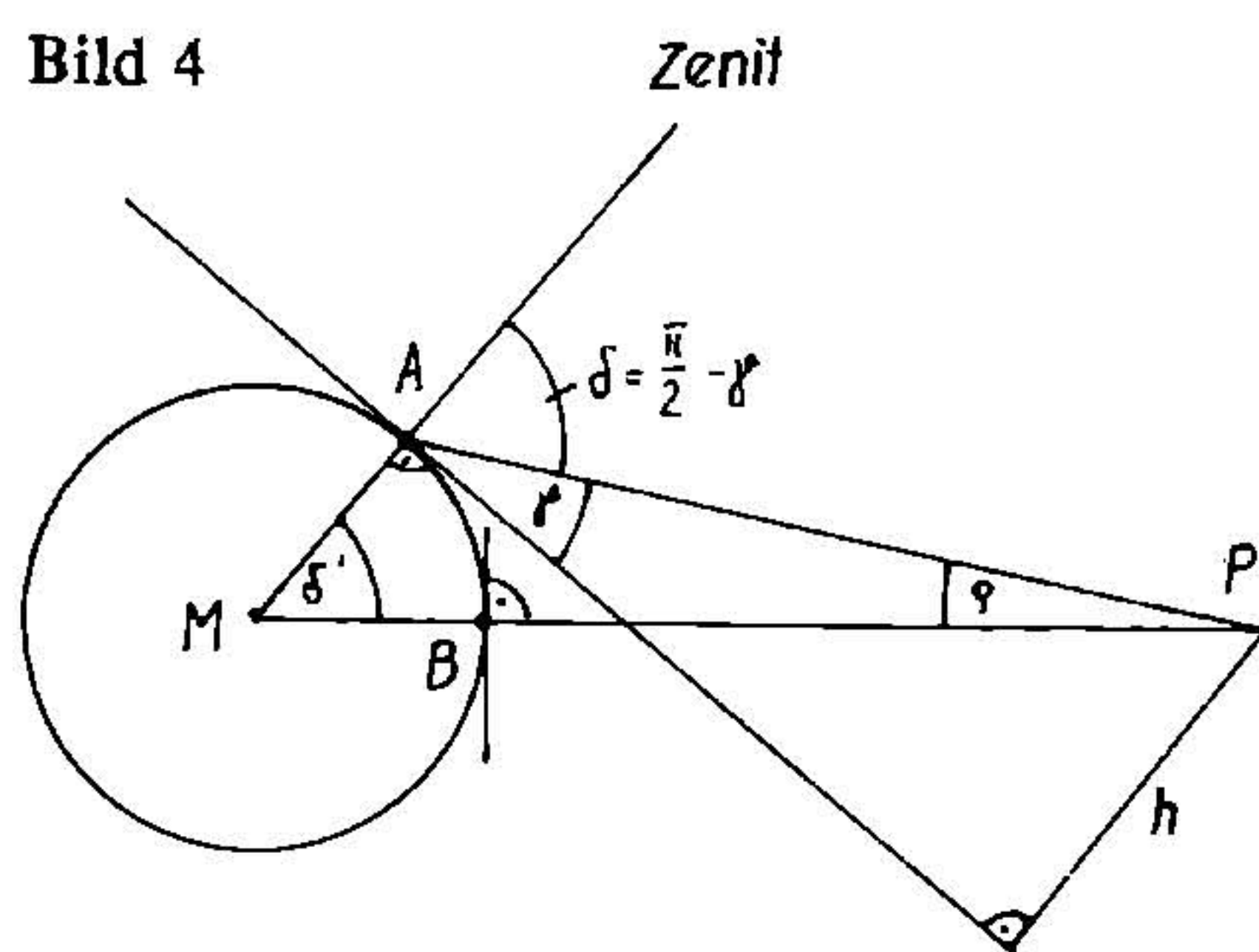
In der Tat zeigt sich bei diesem markantesten Himmelsobjekt die Parallaxe in verschiedenen Erscheinungen.

Betrachtet man den Mond gleichzeitig von verschiedenen Orten der Erde, so scheint er an verschiedenen Stellen der Himmelskugel, also an verschiedenen Stellen bezüglich der als Hintergrund angesehenen Sternbilder zu stehen.

Eine Bedeckung eines Sterns durch den Mond (der Mond tritt in die Sichtlinie Beobachter – Stern) oder die Bedeckung der Sonne durch den Mond (Sonnenfinsternis) wird von verschiedenen Orten der Erde aus zu verschiedener Zeit und in verschiedener Weise gesehen.

Der Mond werde nun von einem Punkt  $A$  der Erdoberfläche aus betrachtet (Bild 4). Wir sehen die Erde als eine Kugel an. Wir zeichnen den durch den Punkt  $A$  gehenden Längengreis mit dem Mittelpunkt  $M$  (Erdmittelpunkt). Der über  $A$  verlängerte Erdradius  $AM$  zeigt nach oben auf den Zenit

Bild 4



des Beobachters. Die auf  $AM$  senkrecht stehende Gerade durch  $A$  kennzeichnet den Horizont. Ein Beobachter in  $A$  sieht den Mondmittelpunkt  $P$  unter dem Winkel  $\gamma$  in der Höhe  $h$ .

Der Winkel  $\delta$  ( $= 90^\circ - \gamma$ ) heißt Zenitdistanz.

Ein zweiter Beobachtungspunkt  $B$  werde nun auf demselben Längengreis so gewählt, daß der Mond im Zenit erscheint. ( $B$  ist der Schnittpunkt von  $PM$  mit dem Längengreis.  $A$  und  $B$  mögen einen großen geographischen Breitenunterschied haben.)

Der Winkel  $\delta'$  (Winkel  $AMP$ ) heißt geozentrische Zenitdistanz. Aus

$$\delta' + \varrho + (90^\circ + \gamma) = \delta' + \varrho + 90^\circ + (90^\circ - \delta) = 180^\circ \text{ folgt } \delta' + \varrho - \delta = 0, \text{ also } \varrho = \delta - \delta'.$$

Im Dreieck  $AMP$  mit den Winkeln  $\delta'$ ,  $\varrho$ ,  $180^\circ - \delta$  gilt nach dem Sinussatz (zwei Seiten, hier:  $PM$  und  $AM$ , verhalten sich wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel, hier:  $180^\circ - \delta$ ,  $\varrho$ ) unter Beachtung von  $\sin(180^\circ - \delta) = \sin \delta$

$$\frac{AM}{PM} = \frac{\sin \varrho}{\sin \delta}, \text{ also}$$

$$\sin \varrho = \frac{AM}{PM} \sin \delta,$$

worin  $AM$  den Erdradius,  $PM$  die geozentrische Entfernung Mond – Erde,  $\delta$  die Zenitdistanz bezeichnet.

Der Winkel  $\varrho$  (Winkel  $APM$ ) heißt Höhenparallaxe des Mondes (in bezug auf den Erdradius  $MA$  als Basis). Sie ist natürlich nicht konstant. Kommt der Mond dem Zenit näher, so wird  $\varrho$  kleiner. Die Höhenparallaxe wird während der täglichen Bewegung des Mondes ihren größten Wert erreichen, wenn der Mond (der Punkt  $P$ ) für den Punkt  $A$  im Horizont steht, d. h.  $\delta = 90^\circ$  ist. Dann heißt sie Horizontalparallaxe, im folgenden mit  $\varrho_{\max}$  bezeichnet (Bild 5). Es ist

$$\sin \varrho_{\max} = \frac{AM}{PM} \text{ (folglich)}$$

$$\sin \varrho = \sin \varrho_{\max} \cdot \sin \delta,$$

$$\text{und } PM = \frac{1}{\sin \varrho_{\max}} AM.$$

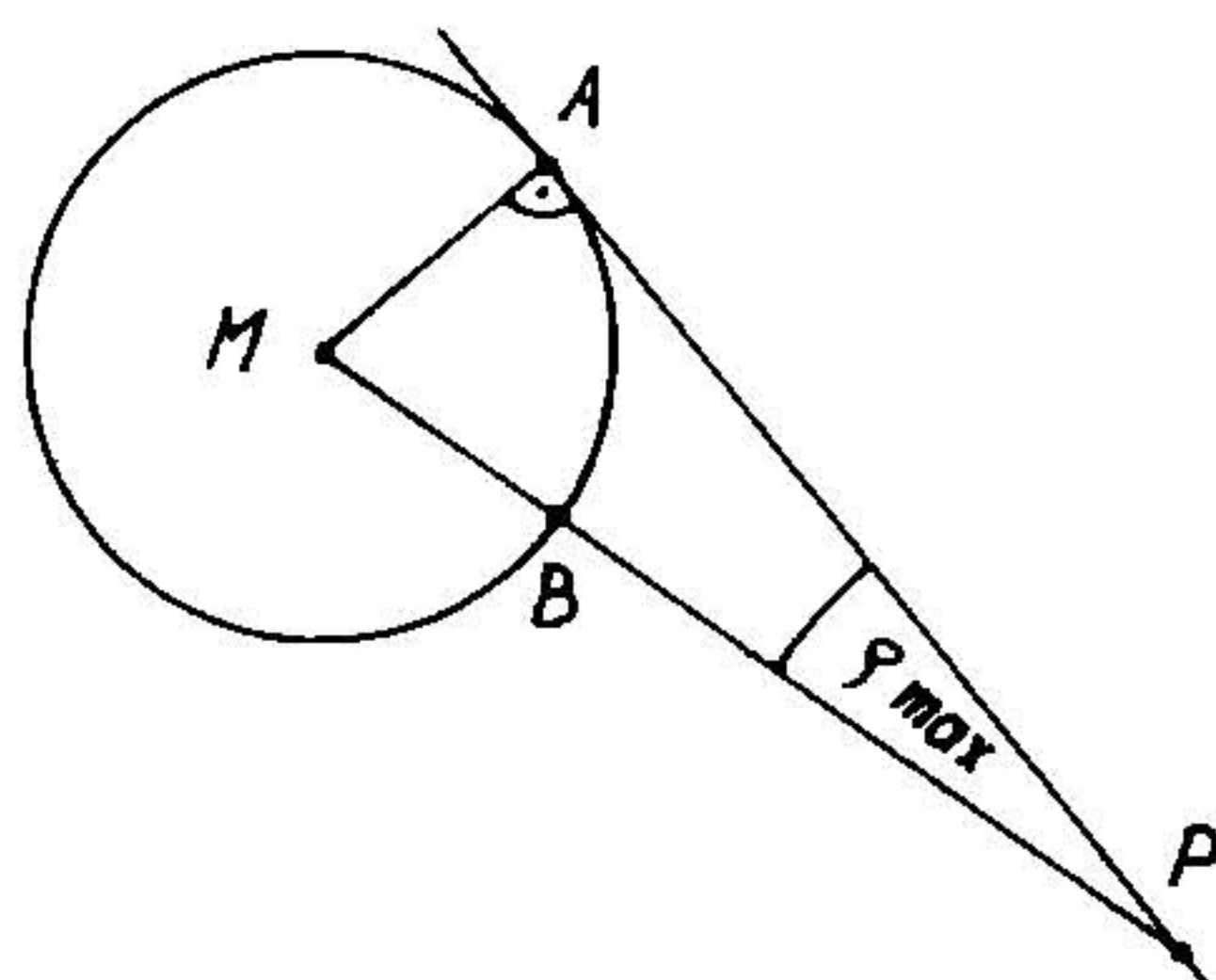


Bild 5

Die Bestimmung der Horizontalparallaxe  $\varrho_{\max}$  des Mondes läuft also darauf hinaus, die geozentrische Entfernung  $PM$  des Mondes zu bestimmen.

Auf die Methoden zur Bestimmung der Horizontalparallaxe des Mondes soll hier nicht eingegangen werden. Die Astronomen fanden für den Mond eine Horizontalparallaxe von ungefähr  $1^\circ$ . Der Wert schwankt zwischen  $54'$  und  $61'$  ( $1^\circ = 60'$ ). Dem Mittelwert von etwa  $57'$  entspricht eine mittlere Mondentfernung von etwa 60 Erdradien.

Analog kann man Horizontalparallaxen für die Planeten und für die Sonne bestimmen. Es ergeben sich nur wenige Sekunden betragende Winkel ( $1^\circ = 60' = 3600''$ ). Die Horizontalparallaxe für die Sonne beträgt ungefähr  $9''$ . Unter diesem Winkel erscheint der Erdradius vom Sonnenmittelpunkt aus gesehen. Die entsprechende Parallaxe für Fixsterne ist wegen ihrer großen Entfernung zu klein, um bemerkt zu werden. Da aber die Erde – wie Copernicus und Kepler richtig annahmen – im Lauf eines Jahres eine elliptische Bahn um die Sonne durchläuft, so müßte wohl der Sehstrahl zu einem Punkte im Weltraum (einem Stern) während des Erdumlaufs eine merkliche Richtungsänderung erfahren.

H. Pieper

(Fortsetzung in *alpha*, Heft 1/1985)



# ... die Beckerprob allhier gantz gründlich gemacht

Die Rechenkunst Adam Ries'  
nutzten auch die Ratsherren von Leipzig



Mit dem Wiederaufbau des 1943 durch anglo-amerikanische Luftangriffe zerstörten Gebäudes der *Alten Waage* (1556 erbaut) sind auch Erinnerungen an den Rechenmeister Adam Ries verbunden. Er hatte in Leipzig zwei Freunde, mit denen er Rechenaufgaben austauschte; den Waagmeister Bernecker und den Rechenmeister Seehofer.

Das erste Mal dürfte Adam Ries 1536 in Leipzig gewesen sein, als die Buchdruckerei Melchior Lotter sein „Gerechnet Büchlein“ druckte. Nachweislich war er 1550 wegen seines großen Rechenbuches in unserer Stadt, Kurfürst Moritz hatte die Druckkosten vorgeschossen. Kaiser Karl V. gewährte darauf Adam Ries auf dem Reichstag zu Augsburg ein Privileg, nachdem Fachgelehrte der Universität zu Leipzig das Buch geprüft und zur Annahme empfohlen hatten. Bei diesem Besuch hatte Adam Ries laut Eintragung in den Stadtkassenrechnungen dem Rat „etzliche Rechenbüchlein verehret“, wofür er als Anerkennung den Betrag von 2 Schock, 48 Groschen erhielt.

Somit war Adam Ries kein Unbekannter, als der Rat 1557 seine Hilfe zur Aufstellung der Leipziger Brotordnung in Anspruch nahm. Sie machte sich notwendig, weil das Korn vor der Einführung der Kartoffel das Hauptnahrungsmittel war und die Getreidepreise durch eine gute und schlechte Ernte sehr stark schwankten,

während die Arbeitslöhne dagegen konstant blieben. Aus diesem Grunde wurde auch nicht der Brotpreis, sondern stets das Gewicht des Brotes geändert. Es war nun die Aufgabe des Rechenmeisters Adam Ries, anhand der verschiedenen Getreidepreise das Brot- und Semmelgewicht zu ermitteln und in Tabellen aufzustellen, damit „der gemeine Mann nicht übervorteilt wurde“. Der Rat konnte bei Beschwerden der Bevölkerung sofort anhand der Tabellen feststellen, ob das Gewicht in Ordnung war oder der Bäcker bestraft werden mußte. Kostete ein Scheffel Korn (212 Pfund) sechs Groschen, dann wog ein Drei-Pfennig-Brot über sechsdreiviertel Pfund. Bei einem Scheffelpreis von 26 Groschen, diese Preisschwankungen waren keine Seltenheit, hatte das Drei-Pfennig-Brot nur noch ein Gewicht von etwa eindreiviertel Pfund. In solchen Zeiten mußte manche Familie den ganzen Wochenlohn und noch mehr allein für Brot ausgeben.

So fand am Freitag nach Matthäi 1557 auf der Waage das Messen und Wiegen eines Scheffels Metzgetreide im Beisein von vier Bäckermeistern durch den Rechenmeister Adam Ries statt. Der Vorgang wiederholte sich nach dem Ausmahlen des Kornes und dem Ausbacken des Mehls, um den Abgang zu ermitteln. Den genauen Hergang schildert ein umfassendes Aktenstück mit den darin aufgestellten Tabellen. Es schließt mit den Worten: „bey solchem

Malen und Begken bin ich Adam Ries vom S. Annabergk auf erforderung gewesen, wie es ergangen die rechnung gantz gründlich gestellt.“

Für seine geleistete Arbeit wurde Ries am 2. Oktober 1557 (anderthalb Jahr vor seinem Tode) „zur Verehrung gegeben, daß er die Becker prob allhier gemacht, 50 Gulden“. Dieser hohe Betrag entsprach dem Jahreslohn des damaligen Leipziger Waserkunstmeisters.

Auffällig ist, daß der Leipziger Chronist Vogel, ein Pfarrer, in seinen Annalen wohl die Bäckerprobe mit den Namen der daran teilnehmenden Ratspersonen anführt, aber Adam Ries nicht nennt.

Wohl deshalb, weil der Rechenmeister kein studierter Mann gewesen war.

G. Grebenstein

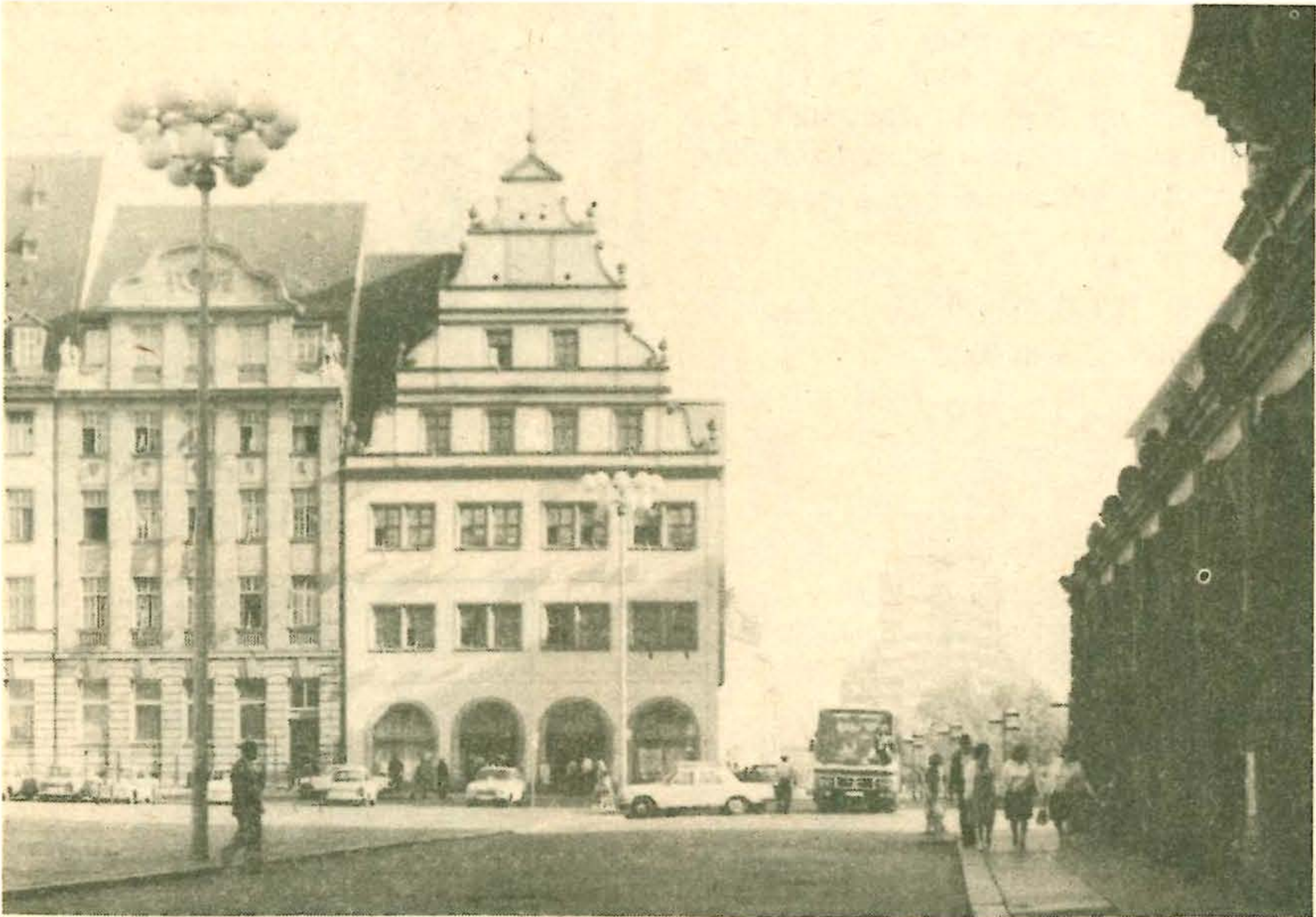
| Preis<br>1/500 | ein<br>mal<br>wogen | ein<br>mal<br>wogen |
|----------------|---------------------|---------------------|
| 10             | 1 11                | 2 5 1/2             |
| 11             | 1 0                 | 1 31                |
| 12             | 1 4                 | 1 26                |
| 13             | 1 2                 | 1 21 1/2            |
| 14             | 0 31                | 1 17 1/2            |
| 15             | 0 20                | 1 14                |
| 16             | 0 27                | 1 11 1/2            |
| 17             | 0 26 1/2            | 1 8 1/2             |
| 18             | 0 24                | 1 6 1/2             |
| 19             | 0 22 1/2            | 1 4 1/2             |
| 20             | 0 21 1/2            | 1 2 1/2             |
| 21             | 0 20 1/2            | 1 1                 |
| 22             | 0 19 1/2            | 0 31 1/2            |
| 23             | 0 18 1/2            | 0 30                |
| 24             | 0 18                | 0 29                |
| 25             | 0 17                | 0 27 1/2            |
| 26             | 0 16 1/2            | 0 26 1/2            |
| 27             | 0 16                | 0 25 1/2            |
| 28             | 0 15 1/2            | 0 24 1/2            |
| 29             | 0 15                | 0 24                |
| 30             | 0 14 1/2            | 0 23                |
| 31             | 0 14                | 0 22                |
| 32             | 0 13 1/2            | 0 21 1/2            |
| 33             | 0 13                | 0 21                |
| 34             | 0 12 1/2            | 0 20 1/2            |
| 35             | 0 12                | 0 19 1/2            |
| 36             | 0 12                | 0 19                |

Getreide      Semmel-      Pfennigbrot-  
preis          gewicht      gewicht

Tabelle aus der Leipziger Brotordnung von 1557

## Adam-Ries-Wettbewerb in Annaberg-Buchholz

Seit 1981 wird im Kreis Annaberg alljährlich an zwei Tagen der ersten Woche in den Winterferien der *Adam-Ries-Wettbewerb* durchgeführt. Gastgeber ist die Adam-Ries-Oberschule der Kreisstadt. Die Vorbereitung liegt in den Händen eines Komitees. Aus dem Bezirk Karl-Marx-Stadt treffen sich die drei besten *Jungen Mathematiker* der Klassenstufe 5 eines jeden Kreises. In einer dreistündigen Klausur sind drei Aufgaben zu lösen. Die Korrekturgruppen setzen sich aus Kollegen der beteiligten Kreise zusammen. Für diesen Wettbewerb gibt es eine Mannschafts- und Einzelwertung. Die beste Mannschaft erhält den Wanderpokal des Bezirksschulrates, der Einzelsieger seit 1984 die *Adam-Ries-Gedenkmedaille* vom Rat der Stadt Annaberg-Buchholz. Außerdem werden Ehrenpreise und Urkunden vergeben.



Neben dem Wettbewerb gibt es ein Freizeitprogramm. Dabei werden historische Stätten aufgesucht wie der Frohnauer Hammer, das Erzgebirgsmuseum und die restaurierte Annenkirche mit dem von Hans Hesse geschaffenen Bergaltar. Von 1985 an wird die Besichtigung des Adam-Ries-Hauses, das am 30. März 1984 anlässlich des 425. Todestages eröffnet worden ist, in das Programm einbezogen. Außerdem werden die Teilnehmer in einem Lichtbildervortrag über Leben und Wirken des Rechenmeisters und Bergbeamten Adam Ries informiert.

Die Entdeckung mathematischer Talente der Klassenstufe 5 ist das erklärte Ziel des Adam-Ries-Wettbewerbs. Aus den ersten drei Wettbewerben konnten 49 Teilnehmer ausgewählt und als Schüler der Klasse 6 auf einen Frühstart in der Klasse 7 der Bezirksolympiade vorbereitet werden. Diese erfolgreichen Wettbewerbsteilnehmer werden in Korrespondenzzirkeln des Bezirks sowie in Spezialistenlagern besonders gefördert. Im 4. Wettbewerb 1984 hatten wir erstmalig einen Schüler der Klasse 4 als Frühstarter dabei. Er erhielt einen 2. Preis. Jährlich nehmen am Wettbewerb 72 bis 78 Mädchen und Jungen teil.

G. Jähnig

## Aufgaben des 4. Adam-Ries-Wettbewerbs 1984

▲ 1 ▲ Auf drei Bäumen sitzen insgesamt 56 Vögel. Nachdem vom ersten Baum 7 Vögel auf den zweiten Baum geflogen und dann vom zweiten Baum 5 Vögel auf den dritten Baum geflogen waren, saßen nun auf dem zweiten Baum doppelt so viel Vögel wie auf dem ersten Baum und auf dem dritten Baum doppelt so viel Vögel wie auf dem zweiten Baum.

Berechne, wieviel Vögel ursprünglich auf jedem der Bäume saßen!

▲ 2 ▲ In einem Regal einer HO-Verkaufsstelle liegen sechs Geschenkartikel im Preis von 15 M, 16 M, 18 M, 19 M, 20 M, 31 M, von jeder Sorte genau ein Stück.

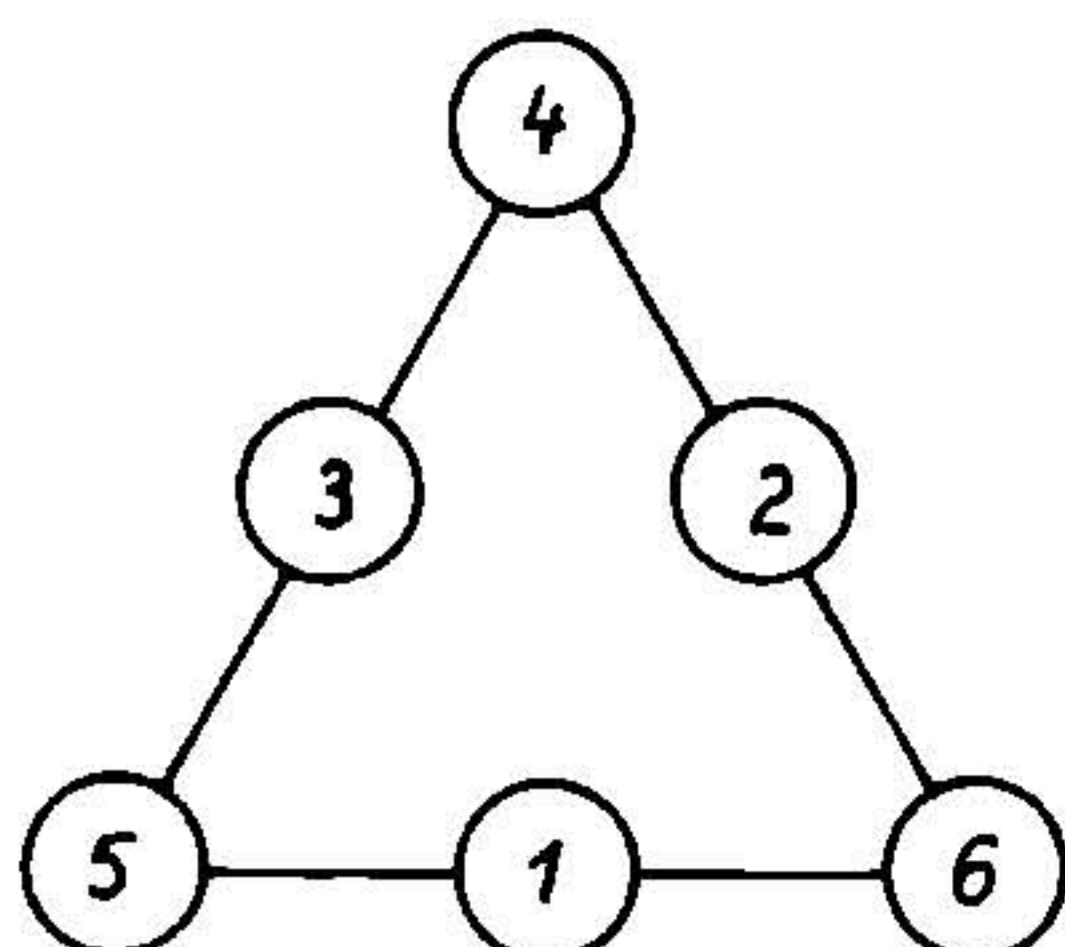
Ein Käufer kaufte genau zwei dieser Geschenke, ein anderer genau drei. Der zweite Käufer hatte doppelt so viel zu bezahlen wie der erste Käufer.

Zeige, daß sich aus diesen Angaben eindeutig ermitteln läßt, welche der sechs Geschenke vom ersten und welche vom zweiten Käufer gekauft wurden!

▲ 3 ▲ a) In Bild 1 sind die Zahlen von 1 bis 6 so eingetragen, daß die drei Seitensummen  $S$  gleich groß sind und daß stets  $S = 12$  gilt:

$$4 + 3 + 5 = 5 + 1 + 6 = 6 + 2 + 4 = 12$$

Bild 1



## Lewis Carroll's Nonsens-Welt

In vielen Ländern der Erde gehört „Alice im Wunderland“ zu den bekanntesten und beliebtesten Kinderbüchern. Davon zeugen auch verschiedene Briefmarken. (Wir zeigen eine britische von 1979 und eine aus der ČSSR aus dem Jahr 1977.) Bei uns ist „Alice“ nicht so populär wie z. B. in der Sowjetunion oder gar in ihrem Herkunftsland Großbritannien, jedoch gab es auch in der DDR schon Buchausgaben (Holz-Verlag 1967f.). Wenigen ist bekannt, daß Lewis Carroll (1832 bis 1898), der Verfasser dieses Buches, in Wirklichkeit Charles Lutwidge Dodgson hieß und Professor für Ma-

thematik am Christ Church College in Oxford war. Dieses Amt war an die Bedingung geknüpft, Geistlicher der anglikanischen Kirche zu sein und unverheiratet zu bleiben.



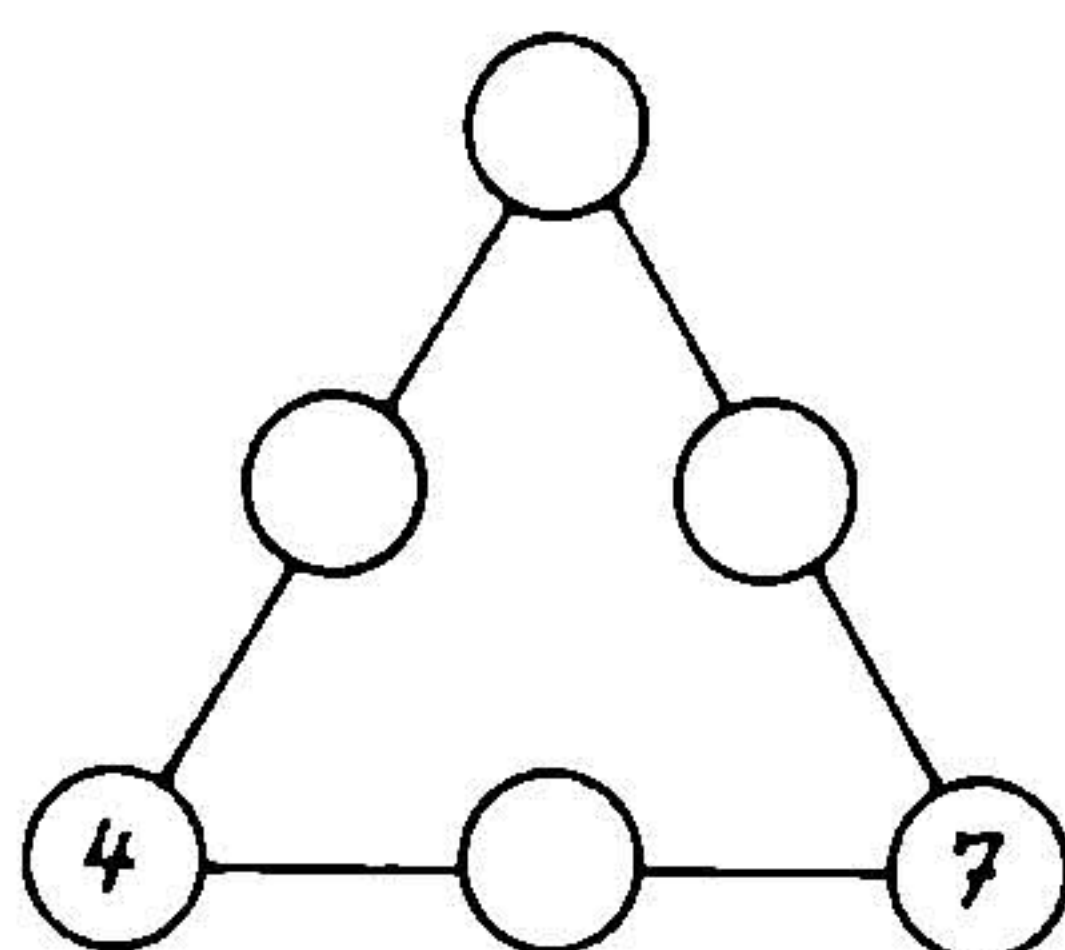
So erschien Dodgson, der Kinder sehr gern hatte, seiner zahlreichen Verwandtschaft als idealer Kinderhüter und Ferienonkel. Bei solchen Anlässen entstanden seine skurrilen Erzählungen, mit denen er eine eigene Literaturgattung, die sogenannte „nonsens-Literatur“ begründete, die im englischsprachigen Bereich viele Nachahmer gefunden hat. Da wird man durch mysteriöse Medizinen winzig klein oder riesengroß, entdeckt im Kaninchenbau ein sonderbares Märchenreich, in dem alle Tiere sprechen, weinende Schildkröten Harfe spielen, Spielkartenkönige regieren und aus Alices Tränen ein großer See entsteht. Außer „Alice im Wunderland“ (zuerst 1865 erschienen und vom Autor selbst illustriert) gibt es von L. Carroll noch Alices Abenteuer im Hinterspiegelland (1872, ebenfalls deutsch im Holz-Verlag, hier ist eine ganze Schachpartie als Nonsens-Geschichte verschlüsselt), die Abenteuer von Bruno und Sylvie (2 Bände, 1888 bzw. 1893) und andere Kinderbücher, jedoch auch einige mathematische bzw. populärwissenschaftliche Werke, z. B. „Curiosa Mathematica“ (2 Bände, 1888, 1893), „Euklid und seine modernen Rivalen“ (1897) und ein Buch über ebene algebraische Geometrie (1860).



Gib je eine Eintragung der Zahlen von 1 bis 6 in ein solches Schema an, so daß  $S = 9$  bzw.  $S = 10$  bzw.  $S = 11$  gilt!

b) In Bild 2 sind die Eckenzahlen 1, 4, 7 mit der Eckensumme  $E = 12$  eingetragen.

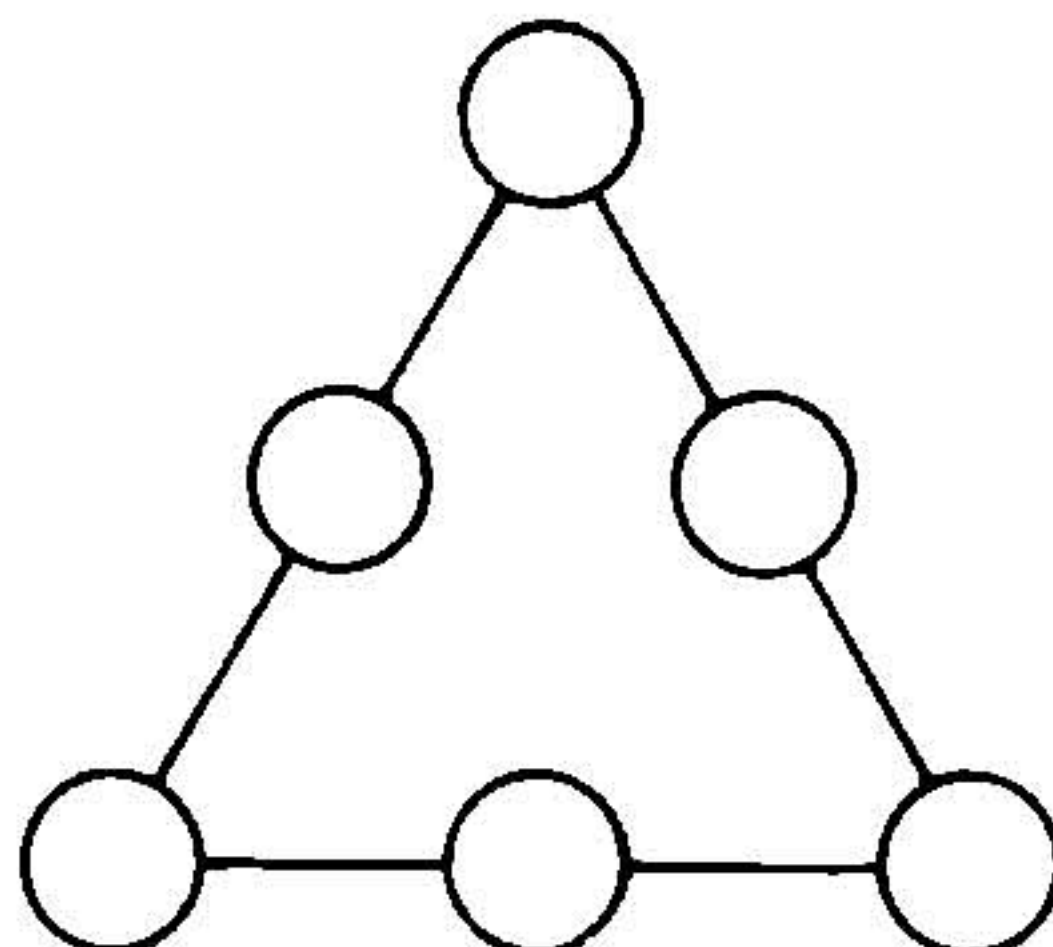
Bild 2



Trage die Zahlen 2, 3, 5, 6, 8, 9 so in das Schema ein, daß die drei Seitensummen  $S$  gleich groß sind und daß  $S = 19$  gilt! Finde möglichst viele solcher Eintragungen!

c) In Bild 3 sind die Zahlen von 1 bis 9 so einzutragen, daß die Seitensummen  $S$  gleich groß werden.

Bild 3



Außer  $S = 19$  kann noch  $S = 17$ ,  $S = 21$  und  $S = 23$  gelten. Finde möglichst viele solche Eintragungen!

Hinweis: Die Eckensumme  $E$  ist stets durch 3 teilbar. Versuche, eine Gleichung zu finden, mit deren Hilfe man  $E$  aus  $S$  berechnen kann!

In der englischsprachigen mathematischen Fachliteratur ist es eine verbreitete Sitte, den einzelnen Kapiteln kurze Zitate aus der belletristischen Literatur voranzustellen, die in einem mehr oder weniger direkten Zusammenhang zur folgenden Problematik stehen. Neben Shakespeare behauptet hier „Alice“ einen guten Platz. Will man als Mathematiker derartige Anspielungen bzw. Bezüge verstehen, so muß man sich schon bequemen, Lewis Carroll's Nonsens-Literatur auch einmal im Zusammenhang zu lesen.

P. Schreiber

# alpha-Porträt

Oberstudienrat Gerhard Schulze –  
am 30.5.1984 65 Jahre alt

Mehr als 30 Jahre arbeitete Gerhard Schulze als Mathematiklehrer und Fachberater im Kreis Herzberg. Unermüdlich und mit großem Ideenreichtum befähigte er die Mathematiklehrer des Kreises, die im Mathematikbeschuß des Jahres 1962 festgelegten Ziele und die sich daraus ergebenden aktuellen Aufgaben immer besser zu erfüllen. Seine reichen Erfahrungen gab er im Kollektiv der Fachberater Mathematik des Bezirkes Cottbus zum Nutzen aller weiter.

Darüber hinaus wirkte er längere Zeit aktiv im Wissenschaftlichen Rat des Ministeriums für Volksbildung und in der zentralen Aufgabenkommission für die schriftlichen Reifeprüfungen im Fach Mathematik mit. Er war Autor zahlreicher Artikel in der Zeitschrift *Mathematik in der Schule* und erarbeitete ein Kapitel für die *Methodik des Mathematikunterrichtes*.

Seine Liebe jedoch gehört bis heute der außerunterrichtlichen mathematischen Tätigkeit. An ihrer Entwicklung im Bezirk Cottbus trägt Gerhard Schulze großen Anteil. Als Mitbegründer des Bezirksklubs Junger Mathematiker förderte er in unermüdlicher Arbeit die mathematischen Talente, die sich oftmals bei nationalen und internationalen Wettbewerben bewährten.

Als langjähriger Leiter einer zentralen Aufgabenkommission bestimmte er die Inhalte der Mathematikolympiaden mit. Bis heute gehört Gerhard Schulze dem Redaktionskollegium der *alpha* an. Einige Jahre lang korrigierte er viele Schülereinsendungen des *alpha-Wettbewerbs*.

Aber auch an seiner Schule selbst hat er zahlreiche Schüler für die Mathematik interessiert. In der Arbeitsgemeinschaft Mathematik des Klubs Junger Pädagogen der EOS Herzberg befähigte er die angehenden Mathematiklehrer zur Leitung von Arbeitsgemeinschaften in den unteren Klassen. Seinen Niederschlag fand diese Arbeit in einer Pädagogischen Lesung, die eine Vielzahl von Programmen zur Gestaltung von mathematischen Arbeitsgemeinschaften in den Klassen 3 und 4 enthielt. Nach seinem krankheitsbedingten Ausscheiden aus dem aktiven Schuldienst entwickelte er die Programme für die AG-Tätigkeit in der Richtung weiter, daß eine breite, lustbetonte mathematische Tätigkeit der Schüler erreicht werden kann. Die ersten Ergebnisse dieser Arbeit stellte er in einer stark beachteten Ausstellung vor. Methodisch und gestalterisch hervorragend aufgearbeitet, stellt Gerhard Schulze auf einer Vielzahl von Tafeln mathematische Spiele für die

AG-Tätigkeit, die Hortarbeit und sogar für die Unterrichtsarbeit vor. Anforderungen aus mehreren Bezirken unterstreichen das Interesse an derartigem Material. Auch gegenwärtig arbeitet er an der Erweiterung und Vervollkommnung dieses Ausstellungsmaterials.

Oberstudienrat Gerhard Schulze wurde für sein langjähriges intensives und schöpferisches Wirken bei der Bildung und Erziehung unserer Schuljugend und für die Qualifizierung unserer Mathematiklehrer mit hohen staatlichen und gesellschaftlichen Auszeichnungen gewürdigt.

B. Weiße

## Aufgaben des 17. Mannschaftswettbewerbs der Klassenstufe 7, Schuljahr 1983/84

### 1. Kreisausscheid

▲ 1 ▲ Die Warenproduktion in der Volkswirtschaft der DDR betrug 1949: 32 Milliarden Mark und 1982: 421 Milliarden Mark.  
a) Auf das Wievielfache ist die Warenproduktion im angegebenen Zeitabschnitt gestiegen? Runde auf Zehntel!  
b) Um das Wievielfache ist sie gestiegen?

▲ 2 ▲ Anett behauptet, daß die Zahl  $z = 10^{1963} + 2$  durch 3 teilbar ist. Hat sie recht? Begründe diese Entscheidung!

▲ 3 ▲ Gegeben ist die gebrochene Zahl  $a = \frac{5}{3}$ .

a) Berechne  $b = \frac{a}{a-1}$ !

b) Berechne  $a + b$  und  $a \cdot b$ !

c) Vergleiche  $a + b$  mit  $a \cdot b$ !

OStR G. Schulze mit zwei Jungen Mathematikern bei der Herstellung von Bausteinen des „Herzberger Quaders“.



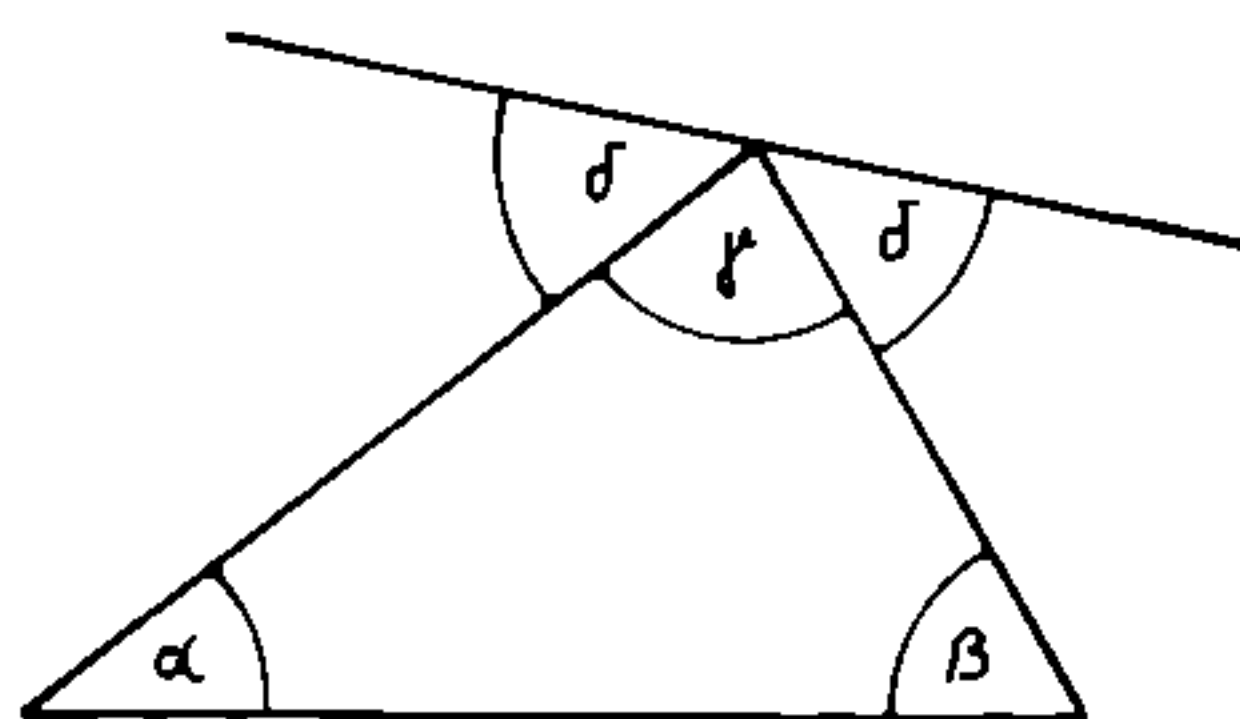
OStR G. Schulze und sein Sohn, Dipl.-Math. J. Schulze, beim Aufbau der Ausstellung „Herzberger Spiele“.

▲ 4 ▲ Die Verpackung eines Fernsehgerätes ist aus Wellpappe und hat folgende Maße: Länge 65 cm, Breite 0,35 m, Höhe 5 dm. Wieviel Quadratmeter Pappe werden insgesamt für die Verpackung von 25 Fernsehgeräten benötigt, wenn für jeden der Kartons  $\frac{1}{5}$  des errechneten Pappebedarfs zusätzlich für notwendige Überlappungen gebraucht wird?

▲ 5 ▲ Die Summe der Zahlen, die jeweils das Lebensalter (in ganzen Jahren) von Anita und Bernd angeben, ist 20. Ihr Cousin Christian ist genau 3 Jahre älter als Anita und fünf Jahre jünger als Bernd. Wie alt ist jedes der drei Kinder?

▲ 6 ▲ Konstruiere einen Rhombus  $ABCD$  aus  $\overline{AC} = e = 4,4$  cm und Winkel  $DAB = \alpha = 125^\circ$ ! Beschreibe kurz die Konstruktion!

▲ 7 ▲ Beweise, daß in der abgebildeten Figur gilt:  $\delta = \frac{\alpha + \beta}{2}$ !



▲ 8 ▲ In der verschlüsselten Additionsaufgabe  $xy + xy + xy = zx$  sind die Buchstaben so durch Grundziffern zu ersetzen, daß die Addition zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Grundziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Grundziffern.

Ermittle alle Lösungen dieser Aufgabe!

▲ 9 ▲ Gegeben sind 27 gleich große Spielwürfel mit den Augenzahlen 1 bis 6. Sie werden zu einem größeren Würfel so zusammengesetzt, daß nur gerade Augenzahlen zu sehen sind.

Wie groß ist die Summe der auf der Oberfläche sichtbaren Augenzahlen, wenn sie

- möglichst klein und
- möglichst groß sein soll?

▲ 10 ▲ Die Familien Andreas, Beier und Christensen besitzen je ein Kraftfahrzeug vom Typ „Wartburg“, „Trabant“ bzw. „Škoda“. Die Pkw sind von verschiedener Farbe, einer ist rot, einer grau und einer blau. Uns ist noch bekannt:

- Familie Andreas hat weder einen blauen Pkw noch ein Fahrzeug vom Typ „Trabant“.
- Familie Christensen besitzt einen grauen Pkw.
- Der Pkw vom Typ „Wartburg“ ist nicht von roter Farbe.
- Familie Beier besitzt nicht den „Trabant“.

Es sind jeweils der Fahrzeugtyp und die Fahrzeugfarbe für die Familien anzugeben!

## Bücher mit Mathe



H. Pieper

### Die komplexen Zahlen

Theorie · Praxis · Geschichte  
256 S., 91 Abb., 8 Tabellen, MSB Nr. 110  
Bestell-Nr. 571 051 6 Preis: 12,00 M  
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

K. G. Steinert

### Sphärische Trigonometrie

mit einigen Anwendungen aus Geodäsie, Astronomie und Kartographie  
Kl. Naturw. Bibl., Reihe Mathe., Bd. 8  
160 S., 69 Abb., 13 Tab.  
Bestell-Nr. 655 828 9 Preis: 9,50 M  
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig

R. Thiele

### Die gefesselte Zeit

Spiele, Spaß und Strategien  
215 S., 167 Farbfotos, 260 meist farbige Zeichnungen  
Bestell-Nr. 653 798 9 Preis: 32,00 M  
Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin

G. Höfner/W. Klein

### Wahrscheinlich ganz einfach

Mathematik zwischen Astrologie und Trendrechnung  
175 S., 42 zweifarb. Zeichnungen, 38 mehrfarb. Z., Bestell-Nr. 653 796 2  
Preis: 8,50 M  
Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin

E. Quaisser

### Bewegungen in der Ebene und im Raum

128 S., 99 Abb., MSB Nr. 116  
Bestell-Nr. 571 194 9 Preis: 10,00 M  
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin

H. Pieper

### Zahlen aus Primzahlen

Eine Einführung in die Zahlentheorie  
204 S., zahlr. Abb., MSB Nr. 81  
Bestell-Nr. 570 150 5 Preis: 9,80 M  
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin

F. S. Salewski

### Die Zeit und ihre Messung

266 S., 71 Bilder  
Bestell-Nr. 546 133 7 Preis: 9,50 M  
VEB Fachbuchverlag Leipzig

F. S. Salewski

### Die Masse und ihre Messung

223 Seiten mit 52 Bildern  
Bestell-Nr. 546 265 5 Preis: 9,50 M  
VEB Fachbuchverlag Leipzig

S. Kiese/E. Naumann

### Roboter im Blickpunkt

208 S., 107 Bilder, 5 Tab.  
Bestell-Nr. 546 841 6 Preis: etwa 16,00 M  
VEB Fachbuchverlag Leipzig

M. Miller

### Rechenvorteile

7. Aufl., 95 S., 1 Abb., MSB Nr. 14  
Bestell-Nr. 665 065 8 Preis: 3,75 M  
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig

I. M. Sobal

### Die Monte-Carlo-Methode

72 S., 30 Abb., 5 Tab., MSB Nr. 50  
Bestell-Nr. 569 879 9 Preis: 3,80 M  
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin

W. Körner

### Physik – kurz gefaßt

136 S., 150 Abb.  
Bestell-Nr. 546 709 3 Preis: etwa 6,00 M  
VEB Fachbuchverlag Leipzig

H. Kleffe

### Der gefangene Schall

128 S., zahlr. mehrfarb. Ill.  
Bestell-Nr. 631 347 5 Preis: 6,80 M  
Kinderbuchverlag Berlin

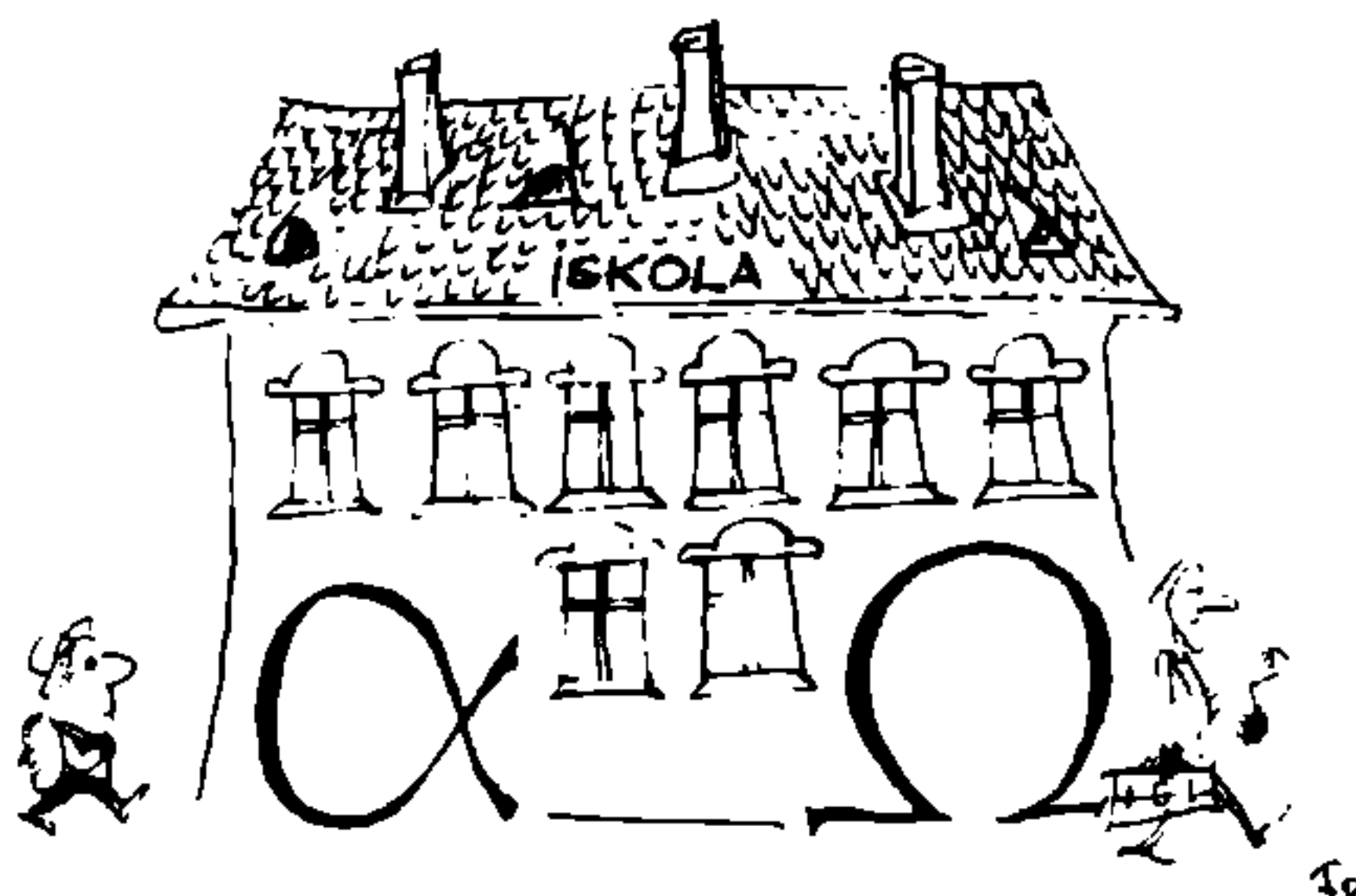
R. Fiedler

### Streifzüge durch die Mathematik

200 S., zahlr. mehrfarb. Ill.  
Bestell-Nr. 631 726 5 Preis: etwa 6,50 M  
Kinderbuchverlag Berlin

# Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

*Letzter Einsendetermin:* 8. März 1985



Das langjährige Mitglied des Redaktionskollegiums der Mathematischen Schülerzeitschrift *alpha*, unser geschätzter Kollege Studienrat H.-J. Kerber aus Neustrelitz, feierte in diesem Jahr seinen 65. Geburtstag. Seit dem Jahre 1971 stellte er für den *alpha*-Wettbewerb 300 Knobelaufgaben bereit, eine beachtliche Leistung. Sämtliche Aufgaben dieses Heftes zum *alpha*-Wettbewerb stammen wiederum aus der Feder von H.-J. Kerber.  
Unseren Lesern viel Spaß beim Knobeln!

Dem Kollegen Kerber wünscht *alpha* Gesundheit, persönliches Wohlergehen und Schaffensfreude. Wir sind davon überzeugt, daß unsere *alpha*-Leser auch künftig harte mathematische Nüsse, ausgetüftelt von Studienrat H.-J. Kerber, zum Knacken dargereicht bekommen.

## Mathematik

**Ma 5 ■ 2493** Am 7. Oktober 1984 feierten wir den 35. Geburtstag der DDR. Familie K. hat drei Kinder. Mathias, das älteste Kind, knobelt gern. Er hat folgendes mit der Zahl 5 herausgefunden:  
a) Die DDR ist 1984 fünfmal so alt wie seine Schwester Susanne.  
b) Vor 5 Jahren war die DDR fünfmal so alt wie sein Bruder Stefan zu dieser Zeit.  
c) Zwischen Mathias und Susanne beträgt der Altersunterschied 5 Jahre.  
In welchem Jahr wurde jedes der drei Geschwister geboren?

**Ma 5 ■ 2494** Katrins Taschengeld besteht aus genau zehn Geldstücken, und zwar aus 10-Pf-Stücken und aus 1-Pf-Stücken. Zuerst gibt sie vom Taschengeld die Hälfte aus, vom Rest dann wieder die Hälfte und vom neuen Rest nochmals die Hälfte. Wieviel Geld behält sie von ihrem Taschengeld danach übrig?  
Begründe deine Antwort!

**Ma 5 ■ 2495** In einem Wagen des Pionierzuges sitzen 24 Pioniere. Bei der ersten Station steigen 11 Pioniere aus und 8 dazu. Bei der zweiten Station steigen noch 4 Pioniere hinzu. Wie viele Jungen stiegen bei der zweiten Station aus, wenn dort genau fünf Mädchen ausstiegen und noch genau 13 Pioniere weiterfuhren?  
Begründe deine Lösung!

**Ma 5 ■ 2496** Susi hat sechs Kugeln, und zwar zwei weiße, zwei rote und zwei grüne (w, w, r, r, g, g). Sie soll in Schachtel A eine Kugel, in Schachtel B zwei Kugeln und in Schachtel C drei Kugeln legen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es? Fertige dazu eine Tabelle für alle möglichen Farbverteilungen an!

**Ma 5 ■ 2497** Von 31 Schülern einer Klasse sind genau 6 Schüler in der AG Mathematik. Genau 5 Schüler sind nur in der AG Russisch und in keiner weiteren AG. In der AG Mathematik und in der AG Russisch zugleich sind genau 4 Schüler. Wieviel weitere Schüler sind noch in anderen Arbeitsgemeinschaften, wenn genau 7 Schüler in keiner AG sind? Begründe deine Behauptung!

**Ma 5 ■ 2498** a) Zeichne einen Punkt A und einen Punkt B, der 4 cm von A entfernt ist! Zeichne einen Punkt A' als Bild von A! Dabei soll die Verschiebungsweite 2 cm betragen und A, B, A' sollen nicht auf einer Geraden liegen.  
b) Zeichne nun B' als Bild von B bei gleicher Verschiebung!  
c) Ermittle das Bild B'' von B bei der Verschiebung  $\overrightarrow{A'A}$ ! Welche Aussage kannst du über die Lage von B'' machen?

**Ma 6 ■ 2499** a) Gib die kleinste natürliche Zahl mit der Quersumme 20 an!  
b) Gib die kleinste, durch 5 teilbare natürliche Zahl mit der Quersumme 15 an!  
*Hinweis:* Die Quersumme z. B. der Zahl 14403 lautet  $1 + 4 + 4 + 0 + 3 = 12$ .

## Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an  
**Redaktion alpha**  
7027 Leipzig,  
Postfach 14

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).
4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.
5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.
6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1984/85 läuft von Heft 5/1984 bis Heft 2/1985. Zwischen dem 1. und 10. September 1985 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/84 bis 2/85 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.  
Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/85 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/84 bis 2/85) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1984/85 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

|                                                          |                                                                    |                                   |  |
|----------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|--|
| <div>30</div> <div>150</div> <div>30</div> <div>20</div> | Thies Luther, 2600 Güstrow, Werdersstr 22<br>Kersting-OS, Klasse 7 | <div>Ma 7 ■</div> <div>1369</div> |  |
|                                                          | Prädikat:                                                          |                                   |  |
|                                                          | Lösung:                                                            |                                   |  |

Ma 6 ■ 2500 Es sind alle fünfstelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, die folgende Eigenschaften haben:

Wenn man die Grundziffern als Zahlen auffaßt, so ist die erste Grundziffer größer als die letzte, die zweite dreimal so groß wie die erste, die dritte um 4 kleiner als die zweite und die vierte um 1 größer als die zweite.

Ma 6 ■ 2501 Olaf hat ein Aquarium. Es ist dreimal so lang wie breit. Alle 14 Tage erneuert er einen Teil des Aquariumwassers. Als er neunmal eine 3-Liter-Kanne voll mit Wasser dem Aquarium entnommen hatte, war der Wasserspiegel um 10 cm gesunken. Wie lang und wie breit ist sein Aquarium?

Ma 6 ■ 2502 a) Zeichne auf kariertem Papier ein Quadrat  $ABCD$  mit einer Seitenlänge von 4 cm! Zeichne die Mittelpunkte  $E, F$  bzw.  $G$  der Seiten  $\overline{DC}$ ,  $\overline{AD}$  bzw.  $\overline{AB}$  ein! Zeichne die Gerade  $g$ , die durch  $E$  und  $F$  und die Gerade  $h$ , die durch  $F$  und  $G$  geht!

b) Konstruiere das Bild  $A'B'C'D'$  des Quadrates  $ABCD$  bei Verschiebung parallel zu  $h$  so, daß  $A'B'C'D'$  genau einen Eckpunkt mit  $g$  gemeinsam hat! Konstruiere dann das Bild  $A''B''C''D''$  des Quadrates  $A'B'C'D'$  bei Verschiebung parallel zu  $g$  so, daß  $A''B''C''D''$  genau einen Eckpunkt mit  $h$  gemeinsam hat!

c) Zeichne die zu b) gehörenden beiden Verschiebungspfeile!

d) Zeichne einen einzigen Verschiebungspfeil, der zum gleichen Ergebnis führt!

e) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es zu b)? Hinweis: Zeichne farbig!

Ma 6 ■ 2503 a) Zeichne ein Quadrat  $ABCD$  mit 3 cm Seitenlänge! Ein Punkt  $E$  auf  $\overline{AB}$  liegt von  $A$ , ein Punkt  $F$  auf  $\overline{AD}$  liegt von  $D$  jeweils 1 cm entfernt. Zeichne diese Punkte!

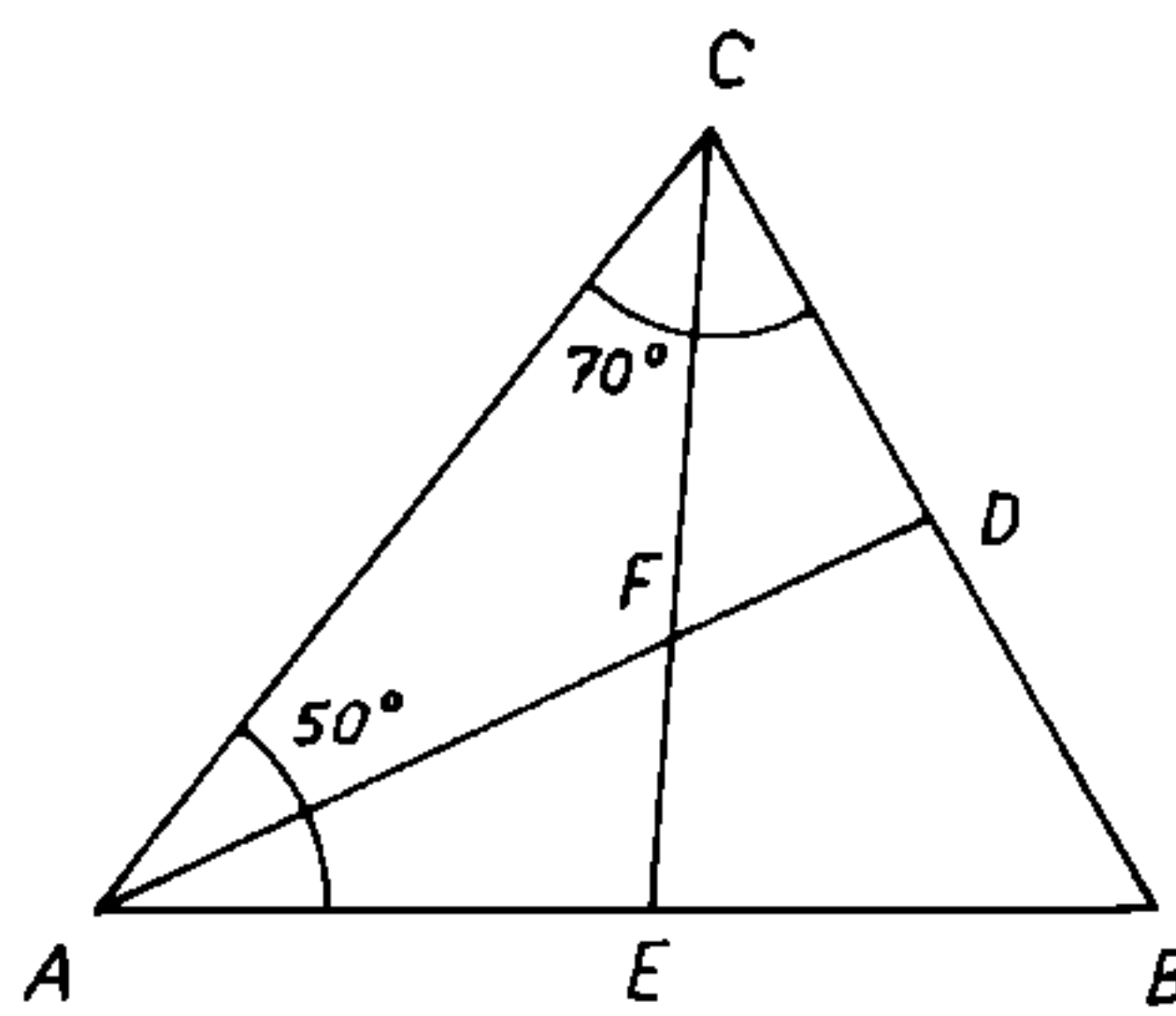
b) Konstruiere das Bild  $A'B'C'D'$  des Quadrates  $ABCD$  bei Spiegelung an der Geraden, die durch  $E$  und  $F$  geht!

Ma 7 ■ 2504 Zeichne ein spitzwinkliges Dreieck  $ABC$  und eine Gerade  $g$ , die  $\overline{BC}$  in einem inneren Punkt  $D$ ,  $\overline{AC}$  in einem inneren Punkt  $E$  und die Verlängerung der Strecke  $\overline{AB}$  über  $A$  hinaus in  $F$  schneidet! Der Winkel  $\angle DFB$  habe die Größe  $\varphi$ . Beweise, daß stets gilt:  $\beta + \gamma + \varphi < 180^\circ$ ! (Es habe der Winkel  $\angle ABC$  bzw.  $\angle ACB$  die Größe  $\beta$  bzw.  $\gamma$ .)

Ma 7 ■ 2505 Von 11 Schülern eines Fotozirkels sind genau 3 Schüler auch im Mathematikzirkel. Im Bastelzirkel sind 12, im Mathematikzirkel 13 Schüler. Genau ein Schüler aus dem Bastelzirkel ist auch im Fotozirkel und genau ein anderer auch im Mathematikzirkel. In allen drei Zirkeln zugleich ist kein Schüler. Um wieviel Schüler handelt es sich insgesamt? Wieviel Schüler sind nur in einem Zirkel? Begründe deine Behauptungen!

Ma 7 ■ 2506 Im abgebildeten Dreieck  $ABC$  hat der Winkel  $\angle CAB$  die Größe  $50^\circ$ , der Winkel  $\angle ACB$  die Größe  $70^\circ$ . Die Strecken  $\overline{AD}$  und  $\overline{CE}$ , die sich in  $F$  schnei-

den, sind beide Winkelhalbierende des Dreiecks  $ABC$ . Bestimme die Größen der vier Innenwinkel des Vierecks  $EBDF$ !



Ma 7 ■ 2507 Stefan hat neun Kugeln, und zwar drei rote, drei weiße und drei blaue. Er soll in den Kasten A zwei, in den Kasten B drei und in den Kasten C vier Kugeln legen. In jedem Kasten müssen aber mindestens zwei Kugeln verschiedener Farben vorkommen. Wie viele Möglichkeiten gibt es? Fertige eine Tabelle für alle Möglichkeiten an!

Ma 8 ■ 2508 Mathias liest ein Buch. Von den 342 Seiten des Buches will er an jedem Tag die gleiche Anzahl Seiten lesen. Welche Seite las er zuletzt, als er zu seinem Freund Peter sagte: „Heute, Dienstag, am 7. Tag seit Beginn meiner Lektüre, habe ich schon 20 Seiten gelesen“? An welchem Wochentag wird er die letzte Seite des Buches lesen? Begründe deine Feststellungen!

Ma 8 ■ 2509 Zwei Rechtecke, von denen eines ein Quadrat ist, haben den gleichen Umfang.

a) Die Quadratseite ist 4,5 cm lang. Eine der Rechteckseiten ist 5 mm länger als die Quadratseite. Um wieviel Quadratzentimeter unterscheiden sich die Flächeninhalte der beiden Vierecke?

b) Weise die Allgemeingültigkeit folgender Aussage nach:

„Habe ein Quadrat und ein Rechteck den gleichen Umfang, so ist die Quadratseite halb so lang wie die Summe aus den Längen zweier benachbarter Rechteckseiten!“

Ma 8 ■ 2510 30 Schüler einer Klasse wurden gefragt, welches ihre Lieblingsfächer wären. Dabei ergab sich folgendes:

Genau 5 Schüler antworteten: „Mathematik und Russisch“.

Genau 4 Schüler antworteten: „Deutsch und Mathematik“.

Genau 3 Schüler antworteten: „Russisch und Deutsch“.

Genau 2 Schüler nannten nur Mathematik. Genau 1 Schüler gab alle drei Fächer an, nämlich Mathematik, Russisch und Deutsch.

Genau 5 Schüler nannten andere als diese drei Fächer.

Wie viele Schüler nannten Mathematik, Russisch bzw. Deutsch als ihre Lieblingsfächer, wenn sich für Deutsch und Russisch gleich viele Schüler entschieden haben?

Ma 8 ■ 2511 Einem Halbkreis  $k$  mit dem Durchmesser  $\overline{AB}$  wurde, wie aus der Zeichnung ersichtlich, ein Viereck  $ABCD$  einbe-

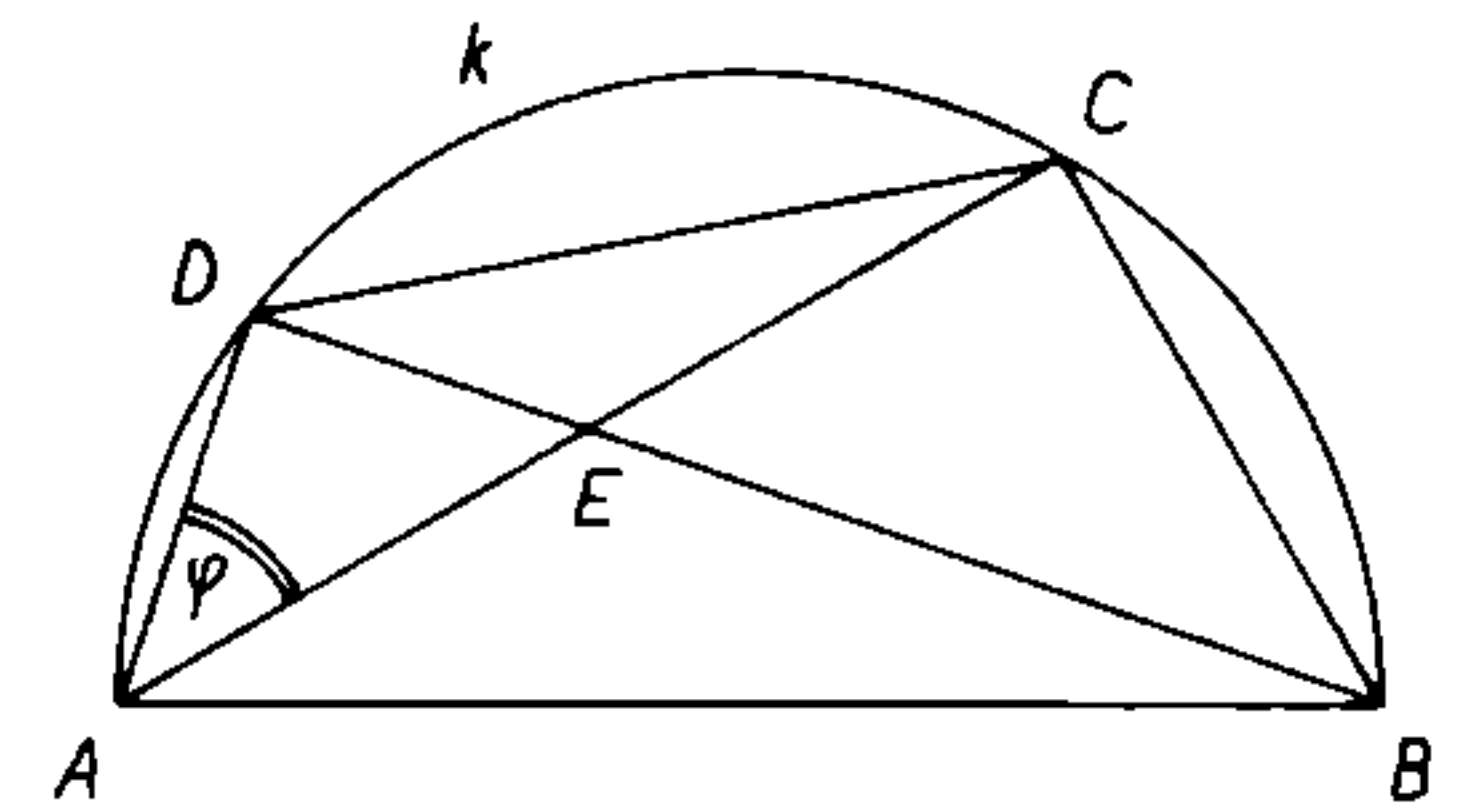
schrieben, dessen Diagonalen  $\overline{AC}$  und  $\overline{BD}$  sich in  $E$  schneiden. Weise nach, daß im Viereck  $ABCD$  zwischen den angeführten Winkeln folgende Beziehungen gelten, wenn der Winkel  $\angle DAC$  die Größe  $\varphi$  hat:

(1)  $\angle DAC \cong \angle DBC$ ;

(2)  $\angle ADB \cong \angle ACB$ ;

(3)  $\angle AEB$  hat die Größe  $90^\circ + \varphi$ ;

(4) die Summe aus den Größen der Winkel  $\angle DAB$  und  $\angle ABD$  beträgt  $90^\circ + \varphi$ .



Ma 9 ■ 2512 Gegeben seien zwei aufeinanderfolgende, von Null verschiedene natürliche Zahlen. Das Produkt aus dem Vorgänger und dem Nachfolger der kleineren der beiden Zahlen vermehrt um den Vorgänger ist stets gleich dem Produkt aus dem Vorgänger und dem Nachfolger der größeren der beiden Zahlen vermindert um den Nachfolger. Geben Sie dafür ein Beispiel an, und beweisen Sie diese Behauptung!

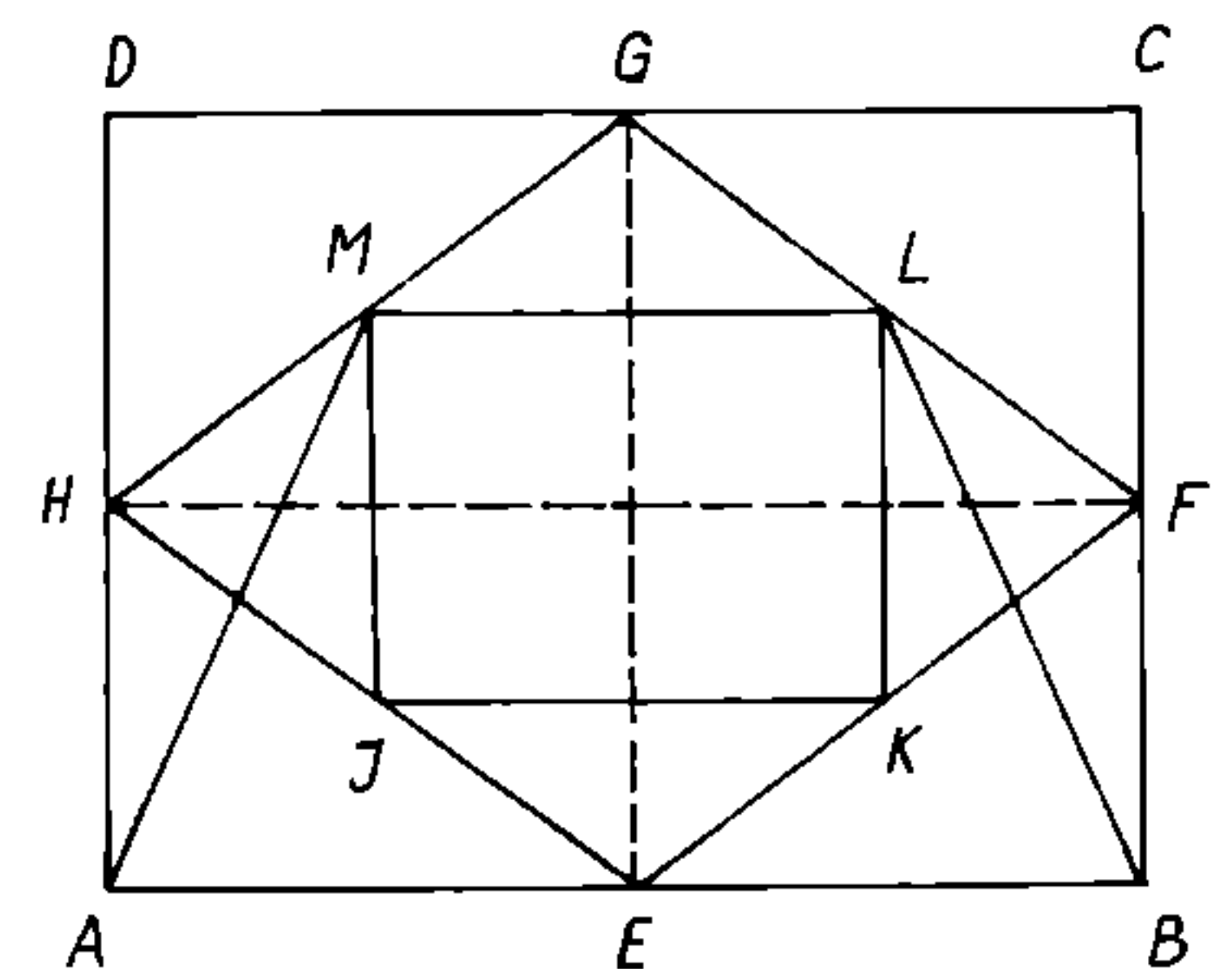
Ma 9 ■ 2513 Geben Sie alle Quadrupel  $(a, b, c, d)$  von natürlichen Zahlen an, die zugleich die beiden Gleichungen

$$1983 = (a - 1) \cdot b \cdot (c + 1) \quad \text{und}$$

$$1984 = a \cdot b \cdot (c - d) \text{ erfüllen!}$$

Ma 9 ■ 2514 In einem gleichschenkligen Trapez  $ABCD$ , das einen Flächeninhalt von  $20 \text{ cm}^2$  besitzt, ist die Summe aus den Längen der beiden Schenkel  $\overline{AD}$  und  $\overline{BC}$  gleich der Summe aus den Längen der beiden parallelen Seiten  $\overline{AB}$  und  $\overline{CD}$ . Ferner ist die Seite  $\overline{AB}$  viermal so lang wie die Seite  $\overline{CD}$ . Bestimmen Sie den Umfang des Trapezes!

Ma 9 ■ 2515 Dem abgebildeten Rechteck  $ABCD$ , dessen Seite  $\overline{AB}$  20 cm und dessen Seite  $\overline{BC}$  16 cm lang ist, wurde ein Viereck  $EFGH$ , diesem ein weiteres Viereck  $JKLM$  derart einbeschrieben, daß die Punkte  $E, F, G, H$  bzw.  $J, K, L, M$  die Seiten des Rechtecks  $ABCD$  bzw. Vierecks  $EFGH$  jeweils halbieren.



a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks  $ABLM$ !

b) Berechnen Sie den Umfang des Vierecks  $ABLM$ !

Ma 10/12 ■ 2516 Schon die Babylonier benutzten für die Bestimmung von Quadratwurzeln die Näherungsformel

$$\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$$

a) Bestimmen Sie nach dieser Formel  $\sqrt{102}$ ,  $\sqrt{10,2}$ ,  $\sqrt{35,6}$ !

b) Ist der Näherungswert größer oder kleiner als der wahre Wert?

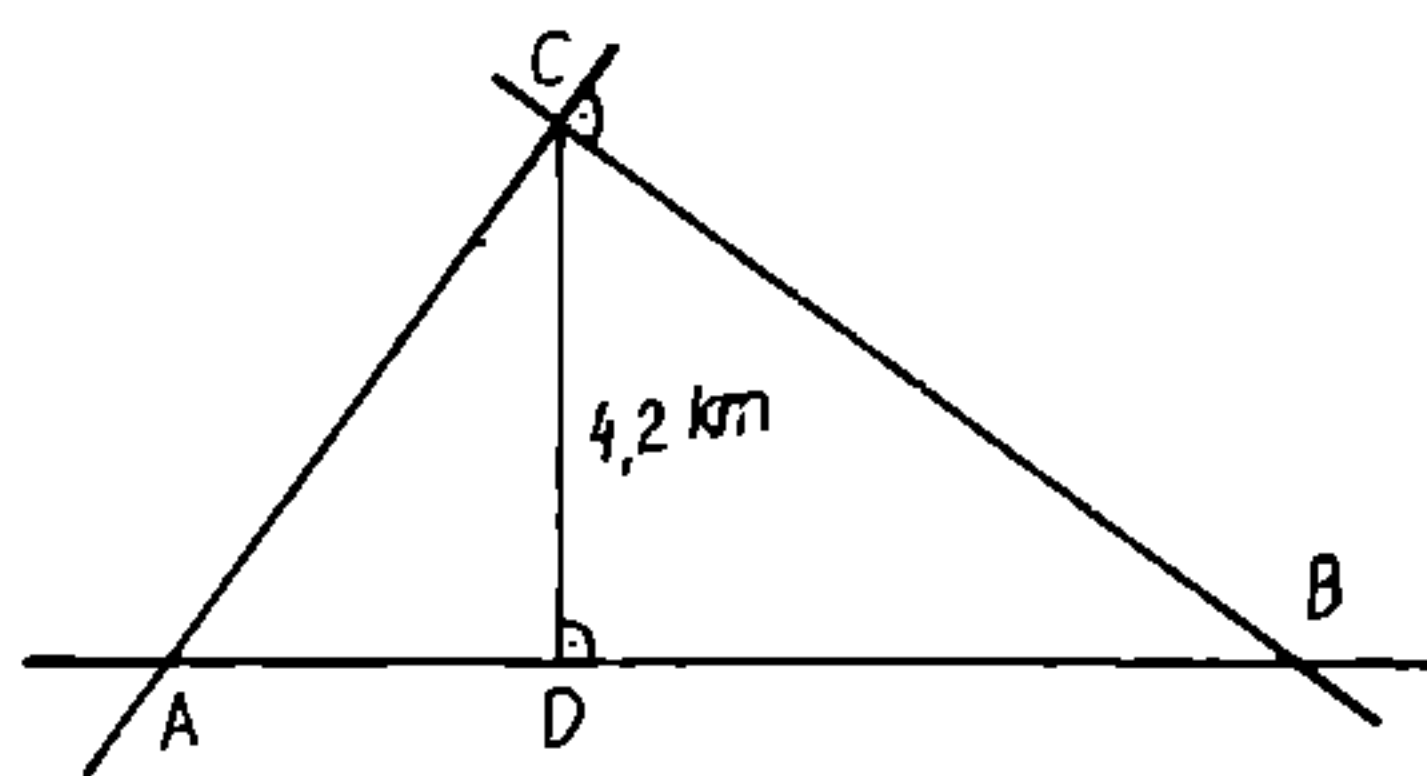
Die Antwort ist zu begründen!

Ma 10/12 ■ 2517 Welche natürlichen Zahlen  $x$  erfüllen die Gleichung

$$1 + \sqrt[3]{x + 77} = x?$$

Ma 10/12 ■ 2518 Gegeben sei ein Trapez  $ABCD$  mit den parallelen Seiten  $\overline{AB}$  und  $\overline{CD}$ , dessen Diagonale  $\overline{AC}$  den Winkel  $\angle DAB$  halbiert und genau so lang ist wie die Seite  $\overline{BC}$ . Beweisen Sie, daß die Maßzahl der Länge der Diagonalen  $\overline{AC}$  geometrisches Mittel der Maßzahlen der Längen der beiden parallelen Trapezseiten ist!

Ma 10/12 ■ 2519 Das Bild zeigt die Marschskizze einer NVA-Einheit, die von  $C$  nach  $D$  gelangen soll. Die 4,2 km lange Strecke  $\overline{CD}$  ist nicht passierbar. Der Weg, der von  $C$  über  $A$  nach  $D$  führt, ist 8,4 km lang. Die Straßen  $AC$  und  $BC$ , aber auch



$AB$  und  $CD$  kreuzen sich unter einem rechten Winkel. Es ist zu untersuchen, welcher der beiden Wege, der von  $C$  über  $A$  nach  $D$  oder der von  $C$  über  $B$  nach  $D$ , der kürzere ist!

## Physik

Ph 6 ■ 166 Im Training läuft ein Sportler eine Strecke von 5 km, das erste Drittel mit einer Geschwindigkeit von 8 km/h (Einlaufen, Geländeanstieg), den Mittelteil mit 10 km/h und das letzte Drittel mit 12 km/h (Geländeabstieg). In welcher Zeit legt er die gesamte Strecke zurück? (Gib die Zeit in Minuten und Sekunden an!)

Dipl.-Ing. H. Miethig, Dresden

Ph 7 ■ 167 Von einem Benzinvorrat werden bei der ersten Fahrt 20% verbraucht, bei der zweiten Fahrt 20% der restlichen Benzinmenge und bei der dritten Fahrt noch einmal 20% des verbliebenen Restes. Nach drei Fahrten befanden sich noch 64 l im Vorratsbehälter. Wieviel l betrug der ursprüngliche Benzinvorrat?

Ph 8 ■ 168 Man soll in ein Gefäß Wasser von 30°C füllen. Es stehen 28 l Wasser von 10°C zur Verfügung. Wieviel Liter Wasser von 100°C müssen noch dazugegeben werden?

Ph 9 ■ 169 Eine Masse von 150 kg soll von einem Schüler, dessen Körpergewicht 35 kp beträgt, gehoben werden. Wieviel Rollen muß der zu verwendende gewöhnliche Flaschenzug mindestens haben, wenn jede einzelne Rolle einen Wirkungsgrad von 0,95 hat?

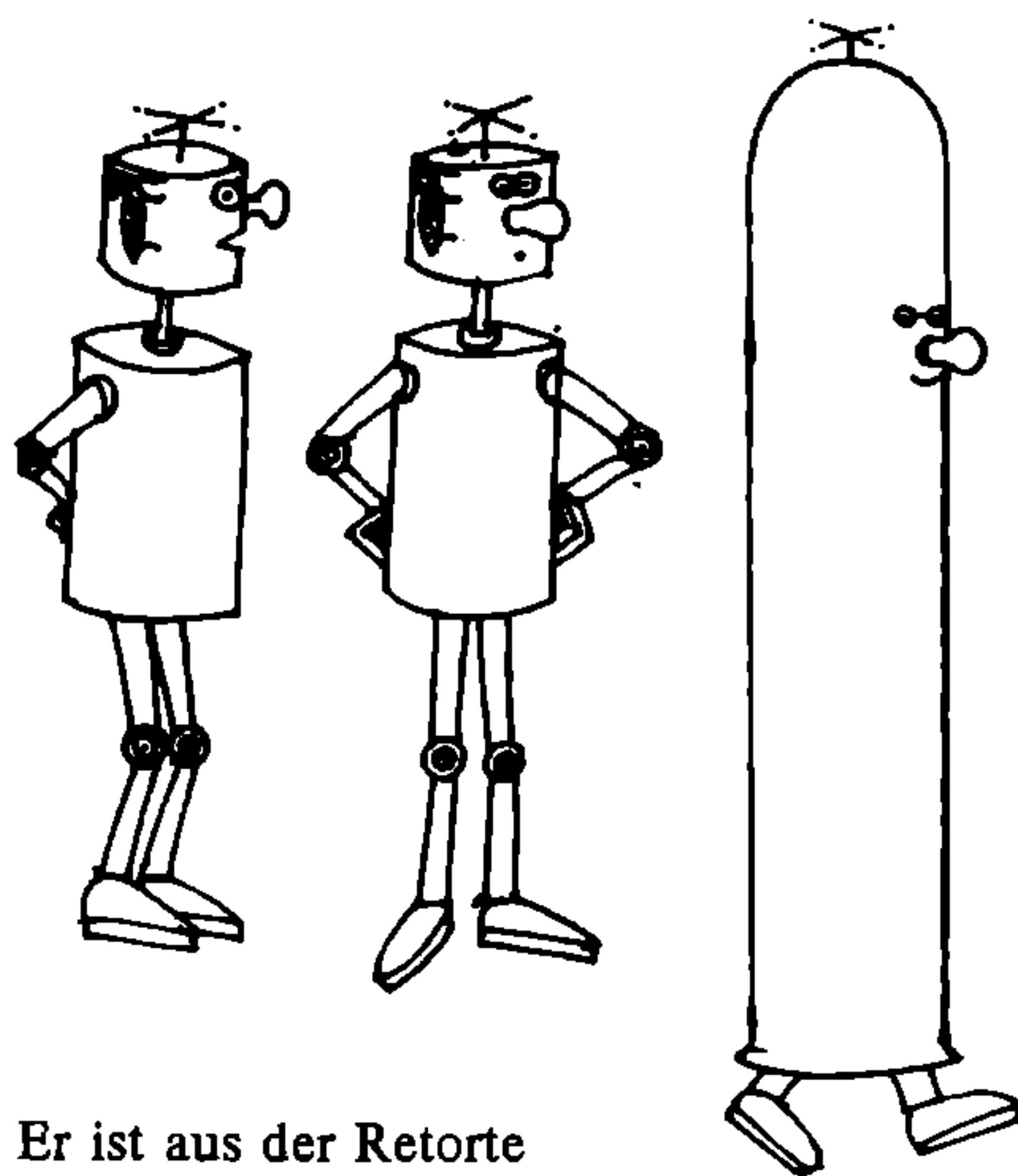
Dipl.-Ing. H. Miethig, Dresden

Ph 10/12 ■ 170 In einem Warenhaus führt von Etage zu Etage eine Fahrtreppe (oft Rolltreppe genannt) mit einem Steigungswinkel von 30°; die Höhe zwischen zwei Etagen ist 5,40 m.

a) Wie hoch ist die Geschwindigkeit, wenn man auf der Fahrtreppe stehend in 26 s von Etage zu Etage gelangt?

b) Mit welcher Geschwindigkeit wird die nächste Etage erreicht, wenn man auf der laufenden Treppe in Fahrtrichtung steigt und 7 s früher als auf der Treppe stehend ankommt?

Cl. Thielecke, Berlin



Er ist aus der Retorte

## Chemie

Ch 7 ■ 133 24 kg Soda sollen zu einer 3%igen Lösung verarbeitet werden. In welche Wassermenge muß das Soda eingetragen werden?

Ch 8 ■ 134 Im VEB Eisenhüttenkombinat wird in sechs Hochöfen Roheisen für die Volkswirtschaft der DDR erzeugt.

a) Für einen Hochofen werden täglich 177 t Eisenerz benötigt. Der in diesem Kombinat unter anderen eingesetzte Magnetkiesstein enthält etwa 58%

Eisen(II,III)-oxid.

Berechne die Masse an Eisen, die theoretisch daraus hergestellt werden kann!

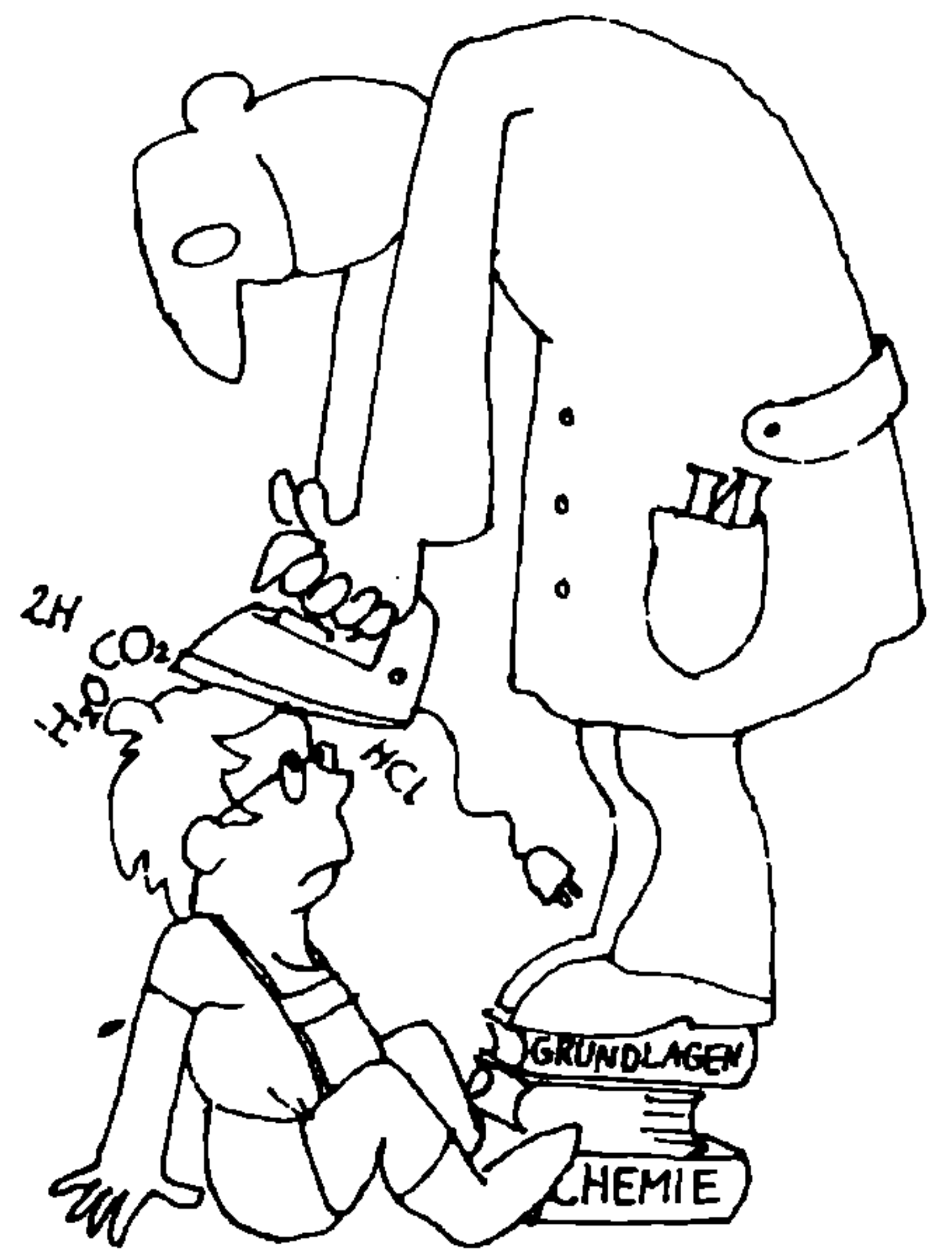
b) Das erzeugte Roheisen enthält bis zu 10 Prozent Verunreinigungen, darunter elementare Stoffe (C, Si, P, Mn, S). Welche Masse von Roheisen erhält man tatsächlich?

Ch 9 ■ 135 Der VEB Kombinat Agrochemie Piesteritz erzeugt Synthesegas für die Düngemittelproduktion aus sowjetischem Erdgas. Aus einem Kubikmeter Methan lassen sich drei Kubikmeter Wasserstoff

herstellen. Erdgas aus der Sowjetunion hat einen Methangehalt von etwa 90 Prozent.

a) Welches Volumen an Wasserstoff erzeugt unsere chemische Industrie aus einem Kubikmeter dieses Erdgases?

b) In Piesteritz werden an einem Tag 2 700 t der wertvollen Stickstoffverbindung Ammoniak erzeugt. Berechnen Sie das erforderliche Erdgasvolumen, wenn aus einem Kubikmeter etwa 1,4 kg Ammoniak gewonnen werden!



Ch 10/12 ■ 136 Das Heizkraftwerk Neugersdorf (Kr. Löbau) erhält jährlich 200 kt Rohbraunkohle zur Gewinnung von Wärmeenergie.

a) Bei der vollständigen Oxydation von 1 mol (12 g) Kohlenstoff entsteht eine Wärmemenge von 393,3 kJ (94 kcal). Das Heizkraftwerk erzielt bei der Verbrennung von Braunkohle (relativ geringer Kohlenstoffgehalt und andere Faktoren) jedoch nur 14 Prozent dieser Wärmemenge. Stellen Sie die Reaktionsgleichung auf, geben Sie die Reaktionswärme an und rechnen Sie!

b) Während des Winterhalbjahres werden im Heizkraftwerk in einer Stunde 75 t Rohbraunkohle verbrannt. Berechnen Sie die stündlich erzeugte Wärmemenge!

c) Wieviel Kilojoule werden davon je Stunde dem angeschlossenen Wohngebiet „Oberland“ zur Verfügung gestellt, wenn rund 11 Prozent der Wärmeenergie für eine ausreichende Versorgung genügen?



---

# alpha-Porträt

## StR Hans-Joachim Kerber – einer der erfolgreichsten OJM-Trainer

---

Im Mai 1964 kehrte die Bezirksmannschaft Neubrandenburg von der DDR-Mathematik-Olympiade ohne Preis und Anerkennung und damit als Schlußlicht in der Bezirkswertung nach Hause zurück. In diesem Jahr brachten die Neubrandenburger Schüler zwei 2. Preise, vier 3. Preise und 5 Anerkennungen auf ihr Konto und erreichten damit, bezogen auf die Schülerzahl im Bezirk, das viertbeste Ergebnis (nach Berlin 1982, 83 und 84), das von einem Bezirk in der 23jährigen Olympiade-Geschichte überhaupt erzielt wurde. Wie kommt ein kleiner (bzgl. Bevölkerung bzw. Schülerzahl) Agrarbezirk, ohne Universitäten oder Hochschulen, zu so einem phantastischen Resultat?

Es ist keineswegs ein Zufallsergebnis, sondern basiert auf einer 20jährigen intensiven, kontinuierlichen und engagierten Suche und Förderung von mathematisch talentierten Schülern im Bezirk Neubrandenburg. Zuerst und vor allem ist das das Werk von StR *Hans-Joachim Kerber*.

Wir wollen den 65. Geburtstag von Herrn Kerber zum Anlaß nehmen, um ihn den *alpha*-Lesern vorzustellen:

Beide Bezirksmannschaften, von 1964 und 1984 (und auch alle dazwischen), standen unter seiner Leitung. Auf der Rückreise von der DDR-Olympiade 1964 analysierten die begleitenden Lehrer StR H. Birken, StR W. Kempcke, OL H. Pätzold und eben StR H.-J. Kerber das schlechte Abschneiden der Schüler. Sie gingen von der These aus, daß auch im Bezirk Neubrandenburg mathematisch talentierte Schüler existieren.

Aber wie sollte man die geeigneten Schüler finden und dann fördern?

Viel wurde überlegt und diskutiert; Erfahrungen, auf die man hätte zurückgreifen können, gab es nicht. Im Ergebnis wurde noch 1964 der Bezirksklub Junger Mathematiker gegründet. Die etwa 10 besten Schüler der Bezirksolympiaden in jeder Klassenstufe werden für ein Jahr in den Klub aufgenommen. Die Zusammenkünfte des Klubs, früher monatlich 1 bis 2 Tage, jetzt etwa sechsmal jährlich 3 bis 5 Tage, bilden die Hauptform der Arbeit im Klub. Hier werden die Schüler mit mathematischen Problemen aus den verschiedensten Gebieten vertraut gemacht. Besonderer Wert wird darauf gelegt, daß die Schüler ihr Wissen auch anwenden können. Während der Lehrgänge wird z. B. durch kleine Klausuren eine anspornende Olympiade-stimmung erreicht. Nach und nach kamen

weitere Formen der Förderung hinzu, so z. B. die persönliche Betreuung von jeweils 3 Schülern durch einen Mentor per Korrespondenz. Besonders wichtig und erfolgreich sind Aktivitäten bei der Talentsuche in den Klassen 4, 5 und 6. Hier ist es H.-J. Kerber in den letzten Jahren gelungen, durch großen eigenen Elan und viele gute Ideen die besten 10 Schüler aus Klasse 5 für die Mitarbeit im Bezirksklub zu motivieren, so daß es noch nie Nachwuchssorgen gegeben hat. Besonders bemerkenswert ist der Enthusiasmus, mit dem sich H.-J. Kerber die vielen eigenen Aufgaben für das System der Vorentscheide ausdenkt. Jeder *alpha*-Leser kennt vom *alpha*-Wettbewerb viele dieser schönen Knobeleyen.

Erfolge bei den DDR-Olympiaden ließen nach 1964 nicht lange auf sich warten. Erste Höhepunkte waren 1968 ein 5. Platz in der Bezirkswertung und 1969 der erste IMO-Preisträger aus dem Bezirk. Der erste 1. Preis 1972, weitere 7 IMO-Teilnahmen, meist mit Preisen, zwischen 1973 und 1979, sowie das absolute Rekordergebnis in diesem Jahr waren die Sternstunden für die Mentoren und Schüler des Bezirksklubs. Viele weitere sehr schöne Ergebnisse könnte man nennen. Die gute Arbeit in den unteren Klassen zahlte sich durch viele erfolgreiche Frühstarter aus. Acht 2. Preise, drei 3. Preise und 14 Anerkennungsurkunden sind eine stolze Bilanz unserer Frühstarter.

Aber die Arbeit im Bezirksklub wäre unvollständig und falsch eingeschätzt, würde man sie nur an den Erfolgen bei DDR-Olympiaden messen.

Viel wichtiger ist noch, daß sich die dort geweckte Begeisterung für die Mathematik sehr positiv auf die weitere Entwicklung auswirkt. Die erfolgreichsten Bezirksklubmitglieder leisteten und leisten Überdurchschnittliches im Studium und im Beruf.

Aus Anlaß des 20jährigen Jubiläums des Klubs und des 65. Geburtstages von Herrn Kerber berichteten viele ehemalige Mitglieder über ihre weitere Entwicklung. Die meisten von ihnen haben nicht nur schöne Erinnerungen an die Zeit der Mitgliedschaft, sondern sie meinen, daß ihnen die Klubarbeit auch im Studium und im Beruf sehr genützt hat. Und das bezieht sich nicht nur auf konkretes mathematisches Wissen im Falle eines Mathematik-Studiums. In der Tat wird eine weite Palette von Berufen durch unsere ehemaligen Mitglieder überstrichen: vom Experten der EDV über Ärzte bis zum Offizier, vom Statiker über Mathematik-Dozenten bis zur Pianistin.

Unter den Schülern hat der Klub einen sehr guten Namen. So empfinden die meisten Schüler die Mitgliedschaft nicht als zusätzliche Belastung, sondern als Auszeichnung und Chance. Das Klima im Klub war stets ausgezeichnet. Auch daran hat H.-J. Kerber als ideenreicher Lehrgangsleiter immer großen Anteil gehabt. Für die Begeisterung der Schüler gibt es viele Beispiele.

So fuhr z. B. ein Schüler mehrere Kilome-

ter mit Skiern zum nächsten Bahnhof, um zum Klub kommen zu können; Busse verkehrten wegen Schneefalls an dem Tage nicht. Einen anderen Schüler konnten weder Kälte noch Nebel von einer 40-km-Mopedfahrt abhalten, um den persönlichen Mentor zu konsultieren. Die Arbeit im Bezirksklub wird natürlich nicht von H.-J. Kerber allein gemacht. Ein Kreis von etwa zwanzig erfahrenen Mathematiklehrern und engagierten ehemaligen Mitgliedern stehen ihm jetzt zur Seite. Auch wäre die gesamte Arbeit ohne die Unterstützung durch die Volksbildung, insbesondere den Bezirksschulrat, zweifelsohne nicht möglich gewesen. Doch entscheidend war das initiativreiche, beharrliche Wirken von H.-J. Kerber als Voraussetzung für die Einführung neuer Fördermethoden und deren effektiven Gestaltung.

Nicht alle Lehrer und Direktoren bewerteten die Arbeit der Mitglieder mit dem entsprechenden Stellenwert, so daß H.-J. Kerber auch hier Hemmnisse durch Überzeugungsarbeit ausräumen mußte. Insgesamt war die Arbeit von H.-J. Kerber in diesen zwanzig Jahren sicher nicht immer leicht und problemlos, doch letztlich haben sich alle Bemühungen sehr gelohnt, sowohl bzgl. der Erfolge bei DDR-Olympiaden als auch bzgl. der späteren Tätigkeit der Mitglieder. Und wir meinen, daß damit ein vorbildlicher Beitrag zum Problem der Talentsuche und -förderung geleistet wurde – ganz im Sinne des Berichtes von E. Hon-ecker auf dem X. Parteitag der SED (S. 98): „Die großen Aufgaben im Kampf um wissenschaftlich-technische Spitzenleistungen und auf allen anderen Gebieten machen es erforderlich, alle Möglichkeiten noch besser auszuschöpfen, um Begabungen und Talente rechtzeitig zu erkennen, zielstrebig zu entwickeln und systematisch zu fördern.“

Die große Schar von ehemaligen Mitgliedern des Bezirksklubs möchte den 65. Geburtstag zum Anlaß nehmen, um Herrn Kerber für alles ein herzliches Danke zu sagen.

*Im Namen  
aller ehemaligen Klubmitglieder  
Hans-Dietrich Gronau/Jürgen Prestin*

StR Kerber mit Dr. Gronau, seinem ehemaligen Schüler, im Gespräch (1976)





## Unterhaltsame Aufgaben aus dem Mathematik- lehrbuch, Klasse 4

### Aufgaben

▲ 1 ▲ a) Ute denkt sich eine dreistellige Zahl:

$$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c \cdot 1 \quad (a, b, c < 10).$$

$a$  ist doppelt so groß wie  $b$ , und  $b$  ist doppelt so groß wie  $c$ . Welche Zahl kann das sein?

b) Jens denkt sich auch eine dreistellige Zahl. Bei ihm ist  $b$  dreimal so groß wie  $a$ , und  $c$  ist dreimal so groß wie  $b$ .

▲ 2 ▲ 7 Studenten sind als Helfer im Ferienlager. Jeder betreut eine Gruppe von 9 Pionieren. Für einen Ausflug erhalten sie für jeden Pionier 2,80 M Fahrgeld und für jede Gruppe 48 M für Verpflegung. Für jeden Helfer werden 6,80 M zur Verfügung gestellt.

a) Wieviel Geld kann eine Gruppe mit dem Betreuer verbrauchen?

b) Wieviel Geld wurde für diesen Ausflug bereitgestellt?

▲ 3 ▲ Nach der Schulordnung müssen für 6 Unterrichtsstunden mindestens 70 min Pausenzeit vorgesehen werden, und keine Pause darf kürzer als 10 min sein.

a) An der Goethe-Oberschule beginnt die erste Unterrichtsstunde um 7.50 Uhr. Wann endet die sechste Stunde frühestens?

b) Die Thälmann-Oberschule beginnt schon um 7.45 Uhr mit dem Unterricht. Carsten hat einen Schulweg von 10 Minuten. Wann muß er spätestens das Haus verlassen, wenn sein Unterricht mit der zweiten Stunde beginnt?

▲ 4 ▲ Jens und Klaus fahren mit dem Fahrrad gleichzeitig von einem Ort ab. Jens legt je Stunde 24 km zurück. Klaus 20 km. Wieviel Kilometer muß Klaus nach 3 h noch fahren, um dorthin zu kommen, wo Jens zu diesem Zeitpunkt schon ist?

▲ 5 ▲ Löse die Gleichungen! Gleiche Buchstaben bedeuten in einer Aufgabe gleiche Zahlen. Erfüllen deine Lösungen auch die letzte Gleichung?

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad 3000 + a = 7000 \\ \quad \quad a - b = 2000 \\ \quad \quad a + b = 6000 \\ \text{b)} \quad 50000 + a = 90000 \\ \quad \quad a + b = 100000 \\ \quad \quad 80000 - c = b \\ \quad \quad b - a = c \end{array}$$

▲ 6 ▲ Klaus kauft Hefte für je 10 Pf und Bleistifte für je 15 Pf. Er bezahlt 1 M. Wieviel Hefte und wieviel Bleistifte kann er gekauft haben?

▲ 7 ▲ Gib an, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind!

Begründe dein Urteil!

a) Es gibt eine natürliche Zahl  $a$ , für die gilt  $30000 \cdot a < 90000$ .

b) Es gibt eine natürliche Zahl  $b$ , für die gilt  $50000 \cdot b < 10000$ .

c) Für alle natürlichen Zahlen  $c$  gilt  $350000 + c > 300000$ .

d) Für alle natürlichen Zahlen  $d$  gilt  $70000 + d > 70000$ .

### Lösungen

▲ 1 ▲ a) Wenn  $a$  doppelt so groß ist wie  $b$  und  $b$  doppelt so groß ist wie  $c$ , dann ist  $a$  viermal so groß wie  $c$ . Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:

Für  $c = 0$  gilt  $b = 0$  und  $a = 0$ ; wir erhalten keine dreistellige natürliche Zahl.

Für  $c = 1$  gilt  $b = 2$  und  $a = 4$ ; wir erhalten die Zahl 421.

Für  $c = 2$  gilt  $b = 4$  und  $a = 8$ ; wir erhalten die Zahl 842.

Für  $c \geq 3$  gilt  $b \geq 6$  und  $a \geq 12$ , was wegen  $a < 10$  entfällt.

Es existieren genau zwei solche Zahlen; sie lauten 421 und 842.

b) Wenn  $b$  dreimal so groß wie  $a$  ist und  $c$  dreimal so groß wie  $b$  ist, dann ist  $c$  neunmal so groß wie  $a$ . Für  $a = 1$  gilt  $b = 3$  und  $c = 9$ ; wir erhalten die Zahl 139. Für  $a \geq 2$  gilt  $b \geq 6$  und  $c \geq 18$ , was wegen  $c < 10$  entfällt. (Lehrbuch Kl. 4, Aufg. 6, S. 7)

▲ 2 ▲ a) Auf den Helfer entfallen 6,80 M. Für die 9 Pioniere werden  $9 \cdot 2,80 \text{ M} = 25,20 \text{ M}$  Fahrgeld bereitgestellt. Hinzu kommen 48 M für Verpflegung. Deshalb kann die Gruppe mit dem Betreuer insgesamt  $6,80 \text{ M} + 25,20 \text{ M} + 48,00 \text{ M} = 80,00 \text{ M}$  verbrauchen.

b) Für diesen Ausflug wurden  $7 \cdot 80,00 \text{ M} = 560,00 \text{ M}$  bereitgestellt. (Lehrbuch, Kl. 4, Aufg. 2, S. 115)

▲ 3 ▲ a) Eine Unterrichtsstunde dauert 45 min. Sechs Unterrichtsstunden dauern  $6 \cdot 45 \text{ min} = 270 \text{ min}$ . Hinzu kommen 70 min Pausenzeit. Das sind zusammen 340 min bzw. 5 h 40 min. 7 h 50 min + 5 h 40 min = 12 h 30 min = 13 h 30 min. Die sechste Stunde endet frühestens um 13.30 Uhr.

b) 7 h 45 min + 45 min = 7 h 90 min = 8 h 30 min. Die erste Stunde endet um 8.30 Uhr. Die zweite Stunde beginnt frühestens um 8.40 Uhr. Als vorbildlicher Schüler ist Carsten bereits um 8.30 Uhr in der Schule; er muß also um 8.20 Uhr (spätestens) das Haus verlassen. (LB Kl. 4, Aufg. 11, S. 49)

▲ 4 ▲ Jens legt in 3 Stunden  $3 \cdot 24 \text{ km} = 72 \text{ km}$  zurück. Klaus legt in 3 Stunden  $3 \cdot 20 \text{ km} = 60 \text{ km}$  zurück.  $72 \text{ km} - 60 \text{ km} = 12 \text{ km}$ .

Klaus muß noch 12 km fahren, um dorthin zu kommen, wo sich Jens nach 3 Stunden Fahrzeit befand. (LB Kl. 4, Aufg. 14, S. 49)

▲ 5 ▲ a) Aus der ersten Gleichung folgt  $a = 4000$ ; denn  $3000 + 4000 = 7000$ . In der zweiten Gleichung ersetzen wir  $a$  durch 4000 und erhalten  $b = 2000$ ; denn  $4000 - 2000 = 2000$ . In der dritten Gleichung ersetzen wir  $a$  durch 4000 und  $b$  durch 2000 und erhalten  $4000 + 2000 = 6000$ . Also erfüllen die Lösungen  $a = 4000$  und  $b = 2000$  auch die dritte (letzte) Gleichung.

b) Aus der ersten Gleichung folgt  $a = 40000$ ; denn  $50000 + 40000 = 90000$ . In der zweiten Gleichung ersetzen wir  $a$  durch 40000 und erhalten  $40000 + b = 100000$ . Daraus folgt  $b = 60000$ ; denn  $40000 + 60000 = 100000$ . In der dritten Gleichung ersetzen wir  $b$  durch 60000 und erhalten  $80000 - c = 60000$ . Daraus folgt  $c = 20000$ ; denn  $80000 - 20000 = 60000$ . In der vierten Gleichung ersetzen wir  $b$  durch 60000,  $a$  durch 40000 und  $c$  durch 20000 und erhalten die wahre Aussage  $60000 - 40000 = 20000$ . Also erfüllen die Lösungen  $a = 40000$ ,  $b = 60000$  und  $c = 20000$  auch die vierte (letzte) Gleichung. (LB Kl. 4, Aufg. 12, S. 12)

▲ 6 ▲ Klaus könnte 2, 4 oder 6 Bleistifte gekauft haben. Dafür hätte er 30 Pf, 60 Pf oder 90 Pf bezahlen müssen. Für den Kauf von Hefen würden 70 Pf, 40 Pf oder 10 Pf verbleiben. Dafür erhält Klaus 7, 4 oder 1 Hefte. (LB Kl. 4, Aufg. 7, S. 108)

▲ 7 ▲ a) Diese Aussage ist wahr; denn für  $a = 0$  gilt  $30000 \cdot 0 < 90000$ , also  $0 < 90000$ . Für  $a = 1$  gilt  $30000 \cdot 1 < 90000$ , also  $30000 < 90000$ . Für  $a = 2$  gilt  $30000 \cdot 2 < 90000$ ; denn  $60000 < 90000$ . Für  $a \geq 3$  gilt nicht mehr  $30000 \cdot 3 < 90000$ , sondern  $30000 \cdot 3 = 90000$ . Wir können die Aussage wie folgt präzisieren:

Es gibt genau drei natürliche Zahlen  $a$ , für die gilt  $30000 \cdot a < 90000$ . Es sind dies die Zahlen  $a = 0$ ,  $a = 1$  und  $a = 2$ .

b) Diese Aussage ist wahr; denn für  $b = 0$  gilt  $50000 \cdot 0 < 10000$ , also  $0 < 10000$ . Für  $b \geq 1$  gilt bereits  $50000 \cdot b > 10000$ . Wir können die Aussage präzisieren: Es gibt genau eine natürliche Zahl  $b$ , für die gilt  $50000 \cdot b < 10000$ . Es ist dies die Zahl  $b = 0$ .

c) Diese Aussage ist wahr; denn bereits für  $c = 0$  gilt  $350000 + 0 > 300000$ , also  $350000 > 300000$ . Für jede natürliche Zahl  $c \geq 1$  gilt erst recht  $350000 + c > 300000$ .

d) Diese Aussage ist falsch; denn sie gilt nicht für alle natürlichen Zahlen  $d$ . Für  $d = 0$  gilt  $70000 + 0 = 70000$ , also  $70000 = 70000$ . Bereits ein Gegenbeispiel reicht, um eine Allaussage zu widerlegen. (LB Kl. 4, Aufg. 4, S. 32)

Zusammenstellung:  
J. Lehmann, Th. Scholl

**Bekanntlich ist man auf nichts so stolz wie auf das, was man seit zwei Minuten weiß.**

Kurt Tucholsky

**Alles gelernt, nicht um es zu zeigen, sondern um es zu nutzen.**

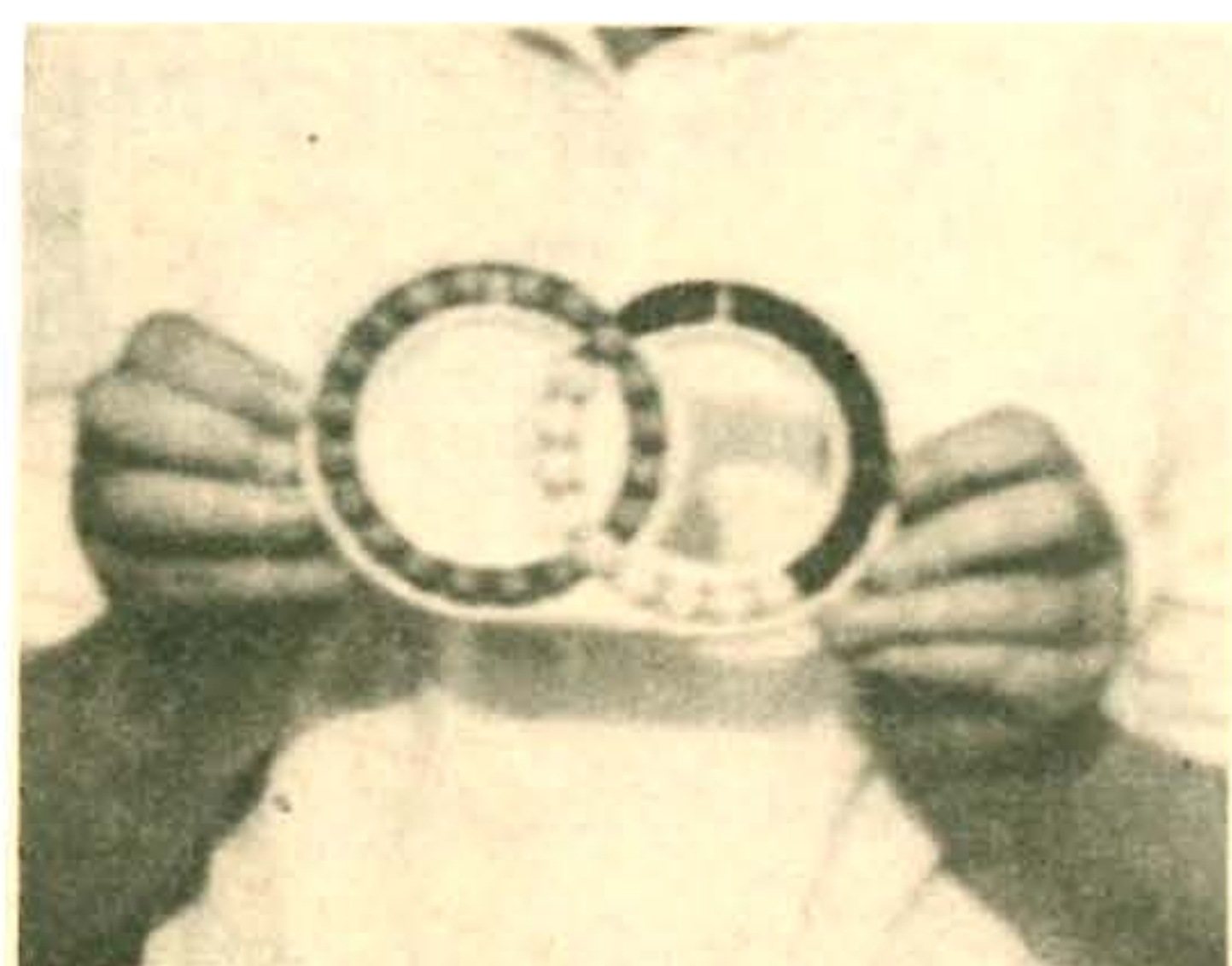
Georg Christoph Lichtenberg

# Die magischen Ringe

Gewidmet Studienrat H.-J. Kerber  
zum 65. Geburtstag

In diesem Beitrag wollen wir ein weiteres logisch-kombinatorisches Spiel aus Ungarn vorstellen, die *magischen Ringe*. Man kann sie sich als zwei sich schneidende Kugellager denken (siehe Bild 1). In jedem Ring befinden sich 20 Kugeln. Zusammen sind es also 38 Kugeln, und zwar 10 schwarze, 10 rote, 9 blaue und 9 gelbe. Jetzt werden die Kugeln jeweils in einem Ring wie in einem Kugellager beliebig gedreht. Durch Kombination von Drehungen in beiden Ringen kann man eine Kugel in jede beliebige Position bringen.

Bild 1



Stellen wir uns also zunächst einmal die Frage nach der Anzahl der Möglichkeiten, die 38 Kugeln anzuordnen. Wären alle Kugeln verschieden, gäbe es insgesamt  $38! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 37 \cdot 38$  Anordnungen (Permutationen ohne Wiederholung). Überraschend ist, daß bei numerierten Kugeln tatsächlich jede der  $38!$  Permutationen nur durch die beschriebenen möglichen Drehungen erzeugt werden kann. Nun brauchen wir aber die Vertauschungen von gleichfarbigen Kugeln nicht weiter zu unterscheiden. Davon existieren je  $10!$ , die nur die Schwarzen oder die Roten untereinander permutieren, und je  $9!$  für blau und gelb. Dementsprechend existieren insgesamt

$$\frac{38!}{10! \cdot 10! \cdot 9! \cdot 9!} \approx 3,016 \cdot 10^{20}$$

Möglichkeiten (Permutationen mit Wiederholung). Die Anzahl ist etwas größer als beim Rubiks Cube ( $\approx 4,3 \cdot 10^{19}$ ) und wesentlich kleiner als beim Turm von Babylon ( $\approx 1,03 \cdot 10^{40}$ ) (vgl. auch *alpha* 6/83). Der Schwierigkeitsgrad aber entspricht ungefähr dem des Turmes von Babylon und ist nicht zu vergleichen mit der Komplexiertheit des  $3^3$ -Würfels.

Zur Beschreibung des Spiels seien die Kugelplätze auf folgende Art und Weise durchnummeriert (Bild 2). Dabei sei der geschlossene Ring stets rechts.

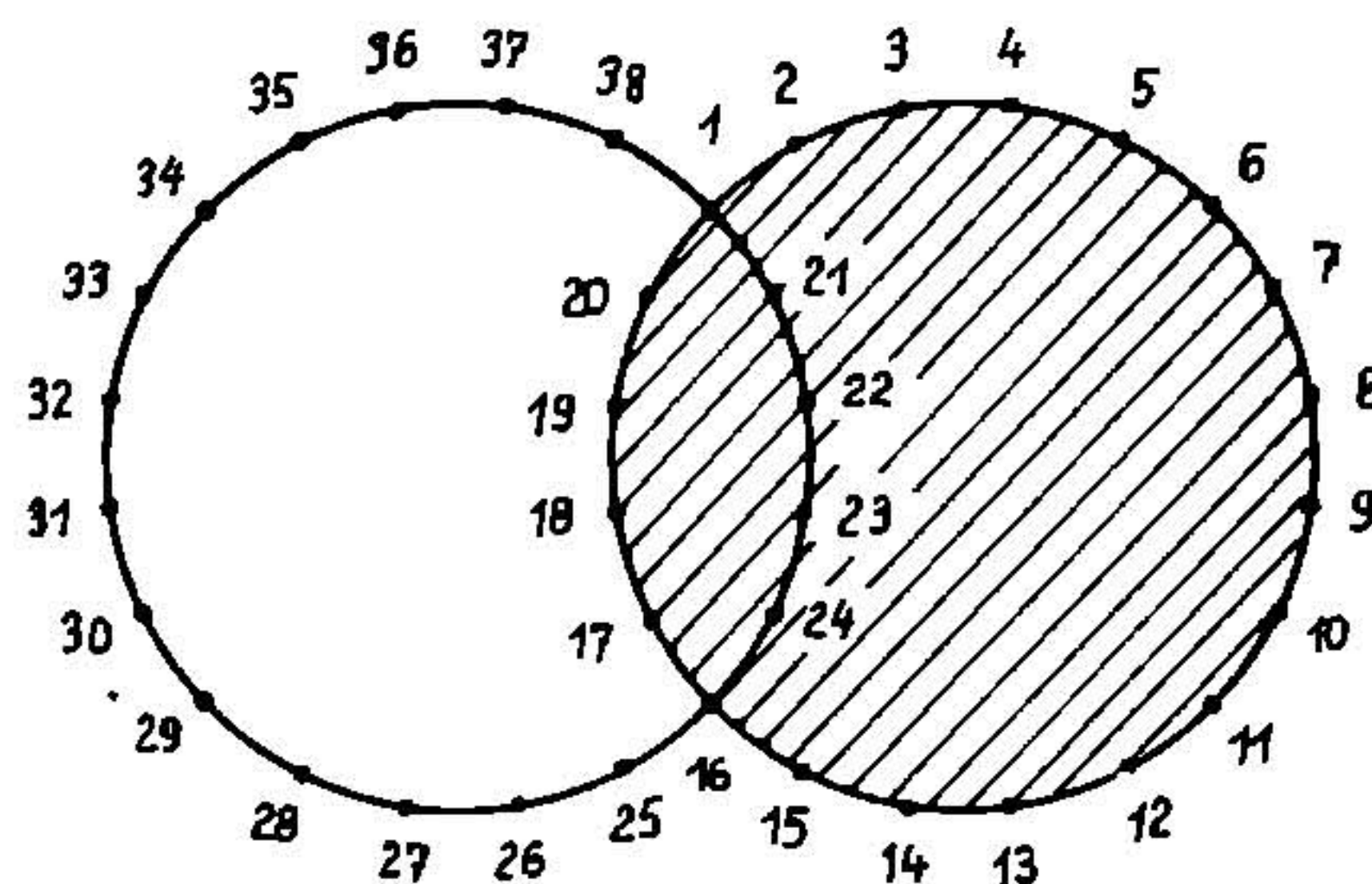


Bild 2

Ziel des Spiels ist es jetzt natürlich, alle Kugeln zu gewünschten Farbmustern zu ordnen, z. B. 2–11 rot; 12–20 blau; 25–34 schwarz und 1, 21–24, 35–38 gelb. Es erweist sich wieder als relativ einfach, gewisse Segmente der Ringe fertigzustellen, etwa die mit den roten und schwarzen Kugeln. Um aber z. B. die *letzten* 5 Kugeln an den gewünschten Platz zu setzen, braucht man einige Überlegungen. Und es gelingt bestimmt nicht auf Anhieb!

Weiterhin müssen wir die Drehungen bezeichnen können. Die Bewegung der Kugeln des rechten schraffierten Ringes  $R$  um  $i$  Plätze im Uhrzeigersinn sei definiert als  $R^i$ , entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn als  $R^{-i}$ . Entsprechende Bewegungen im linken Ring seien  $L^i$  und  $L^{-i}$ . Man erkennt sofort, daß für alle ganzzahligen  $i$

$$R^i = R^{-(20-i)} \text{ und}$$

$$L^i = L^{-(20-i)} \text{ gilt.}$$

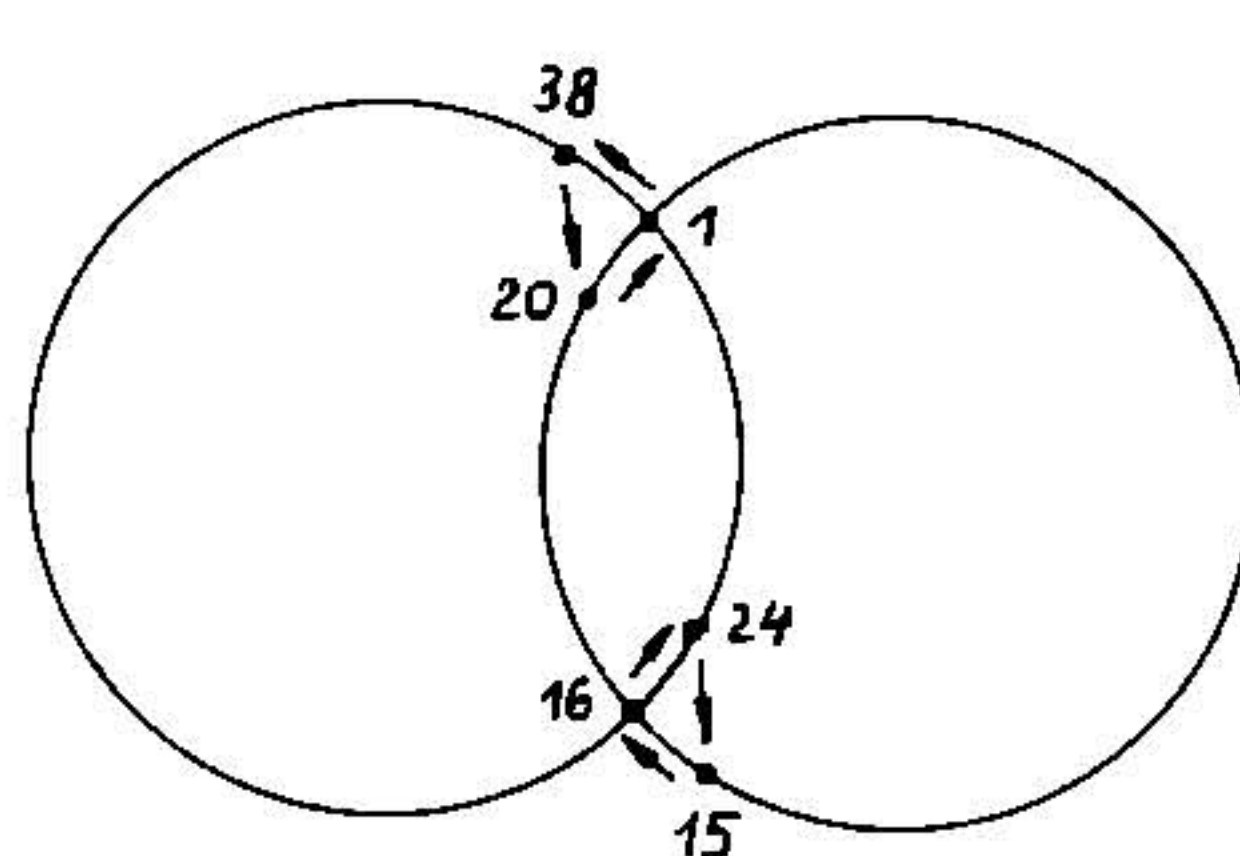
Auch hier geben wir kein Rezept für alle Ausgangsstellungen (s. *alpha* 6/83), sondern wollen wesentliche Operationsfolgen angeben, die es uns ermöglichen, das Ziel zu erreichen. Wiederum werden wir Operationsfolgen zusammenstellen, die möglichst viele Kugeln an ihren Plätzen belassen, also überschaubare Wirkungen haben. Optimal wäre es, wenn wir immer genau zwei Kugeln miteinander vertauschen könnten. Das ist zwar möglich, doch ist die dazu nötige Operationsfolge sehr lang und basiert letztlich auch nur auf folgenden Operationen. Wir drehen einen Ring um  $i$  Plätze, dann den anderen Ring um  $j$  Plätze und anschließend drehen wir den ersten Ring um  $i$  und den zweiten Ring um  $j$  Plätze zurück.

Als einfaches Beispiel probieren wir einmal folgendes aus:

$$R^1 L^1 R^{-1} L^{-1}.$$

Dabei vertauschen je drei Kugeln ihre Plätze (Bild 3):

Bild 3



Wir wollen dafür die kurze Zyklenschreibweise verwenden

$$(1\ 38\ 20)\ (16\ 24\ 15).$$

Analog dazu kann man weitere Operationsfolgen aufstellen:

$$R^1 L^{-1} R^{-1} L^1 \text{ liefert } (1\ 21\ 20)\ (16\ 25\ 15),$$

$$L^{-2} R^3 L^2 R^{-3} \text{ liefert } (1\ 18\ 22)\ (16\ 13\ 26).$$

Falls immer  $i$  und  $j$  (die Länge der Drehungen) nicht durch 5 teilbar sind, erhalten wir zwei Dreierzyklen, in denen die Knoten 1 und 16 enthalten sind. Würde man sich eine Sammlung solcher Operationsfolgen übersichtlich aufschreiben, käme man auch sicher zum Ziel. Es erfordert aber sehr viel Überlegungen, sechs zu vertauschende Kugeln vorher in eine für unsere Operationsfolgen günstige Ausgangsposition zu bringen.

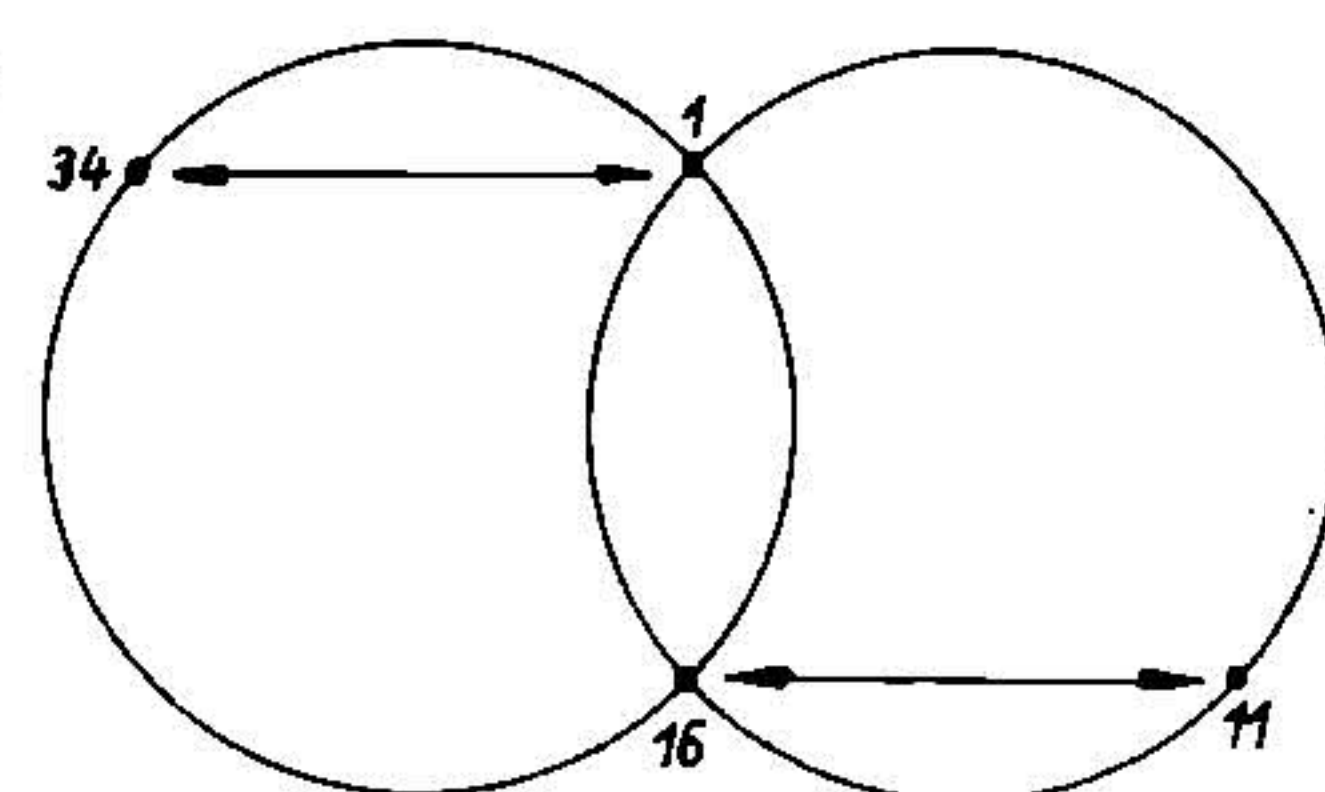
Wir suchen also weiter nach Operationen, die weniger als sechs Kugeln vertauschen. Dazu drehen wir einen Ring um fünf Plätze, z. B.  $R^{-5} L^{-1} R^5 L^1$ .

Dies liefert einen Zyklus der Länge 5  $(1\ 16\ 25\ 21\ 6)$ . Eine sehr unübersichtliche Anordnung der vertauschten Kugeln ist dabei entstanden!

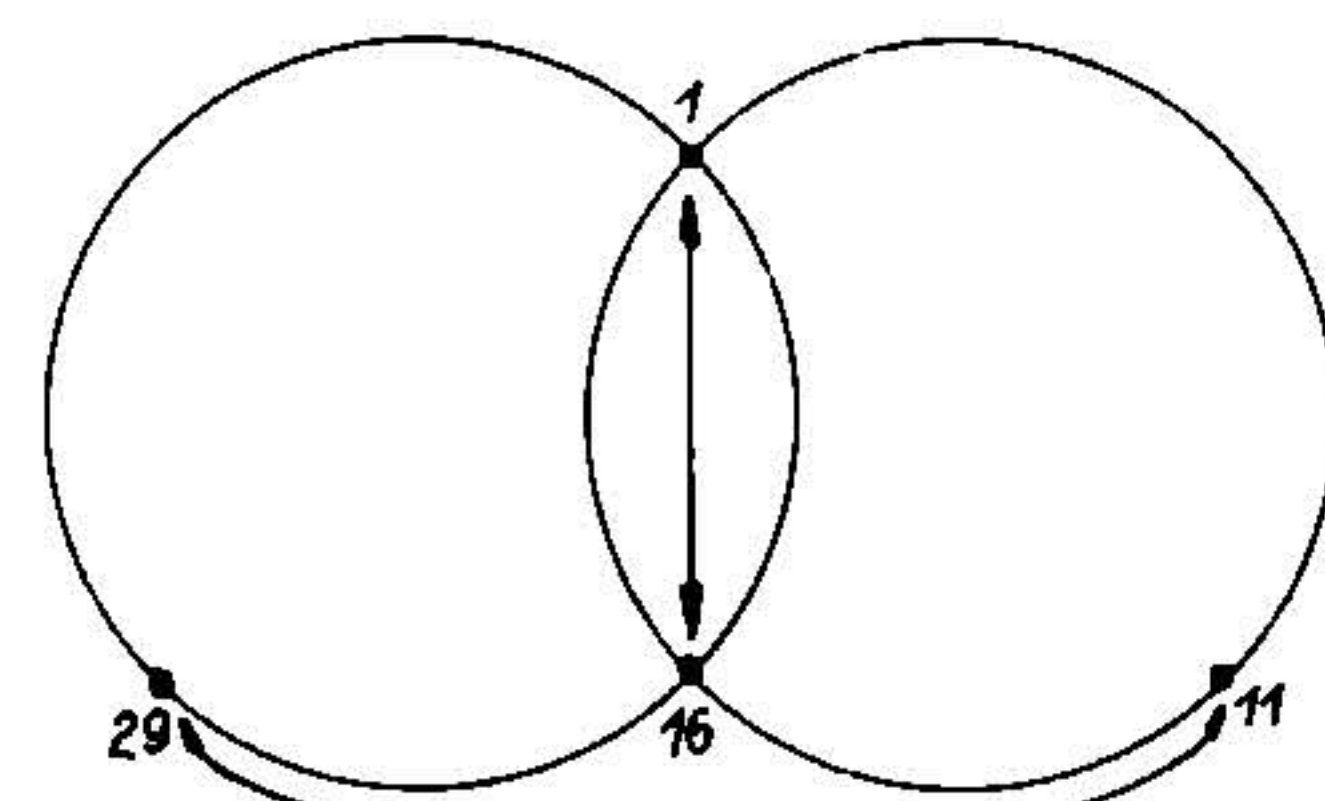
Als wesentlich günstiger erweisen sich Drehungen beider Ringe um je fünf Plätze. Wir erhalten die folgenden vier wichtigen Operationen:

I.  $R^5 L^5 R^{-5} L^{-5} (1\ 34)\ (16\ 11)$

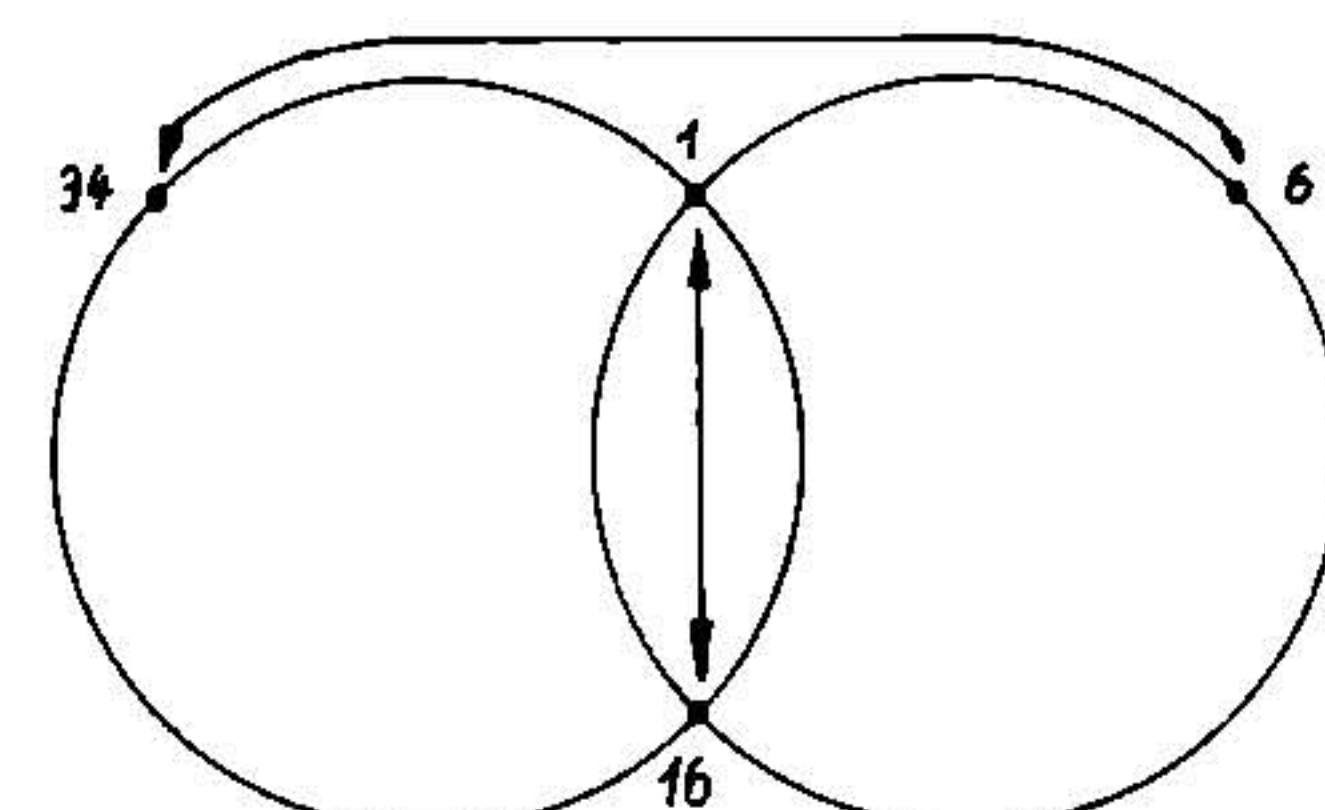
Bild 4



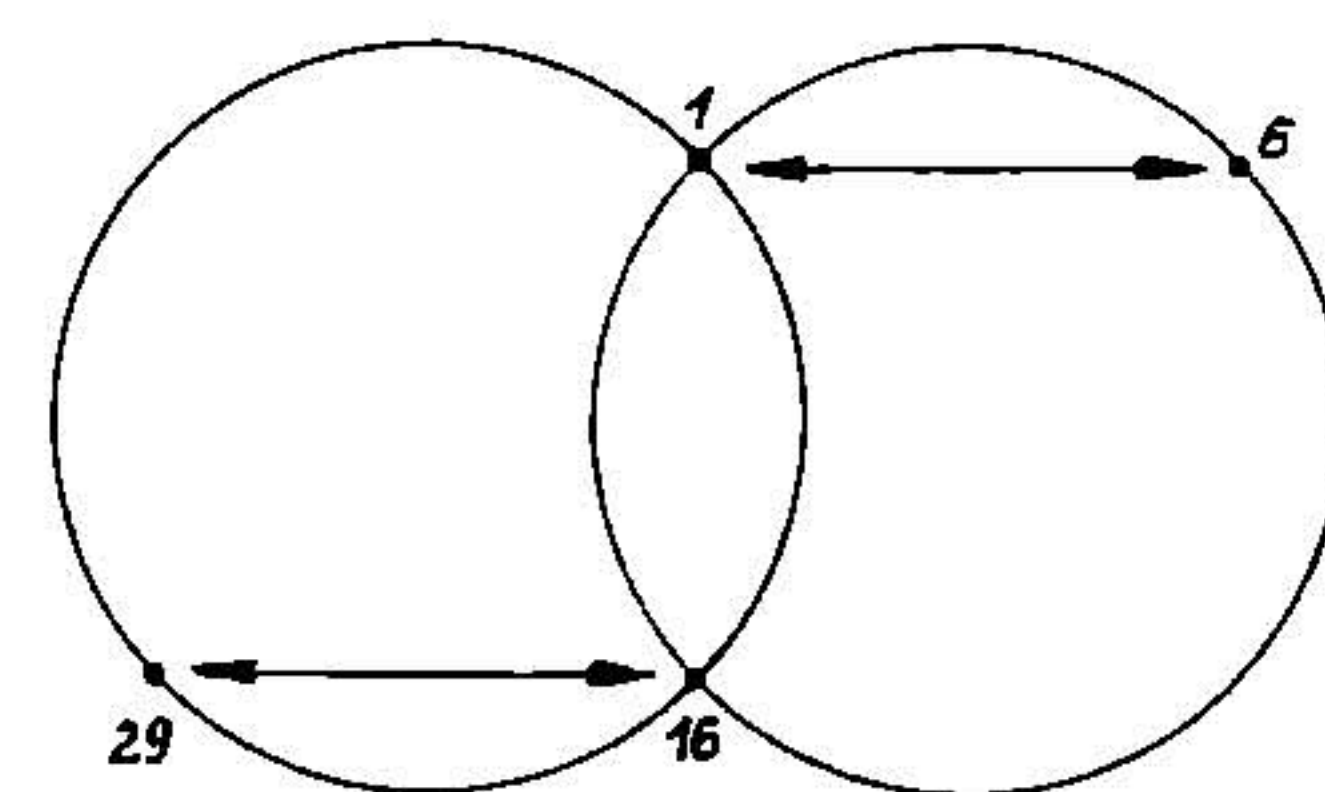
II.  $R^5 L^{-5} R^{-5} L^5 (1\ 16)\ (11\ 29)$



III.  $R^{-5} L^5 R^5 L^{-5} (1\ 16)\ (6\ 34)$



IV.  $R^{-5} L^{-5} R^5 L^5 (16\ 29)\ (1\ 6)$



Mit diesen Operationen sind wir unserem Ziel, immer genau zwei Kugeln miteinander zu vertauschen, sehr nahe. Wir brauchen nur folgende Ausgangsposition zu erzeugen (die zum Schluß natürlich wieder rückgängig gemacht werden muß): Die zu vertauschenden Kugeln stehen an den Plätzen 1 und 34; 11, 16; 1, 16; 11, 29; 6, 34;

16, 29 oder 1, 6 und die sich jeweils bei den Operationen I bis IV außerdem vertauschenden Kugeln sind von gleicher Farbe. Schreiben wir das etwas ausführlicher auf. Zuerst bringen wir die zu vertauschenden Kugeln o.B.d.A. in die Positionen 2 und 17, was man sofort ohne Angabe eines gesonderten Algorithmus ausführen kann. Wir betrachten jetzt die Farben der Kugeln 7 und 12. Existiert im linken Ring noch eine Kugel mit dieser Farbe? Wenn ja, dreht man sie auf Platz 29 oder 34, wendet  $R^1$  und Operation II oder III an. Wenn nicht, bringt man so eine Kugel (außer 2, 7, 12, 17) in den linken Ring auf Position 29 oder 34 und verfährt dann genauso mit  $R^1$  und Operation II oder III.

Zum Schluß muß man die Hilfsoperationen wieder rückgängig machen. Hierzu braucht man etwas Gedächtnis oder man notiert sich die vorher ausgeführten Drehungen.

Das Ganze sei an einem Beispiel illustriert. Wir wollen die Kugeln 4 und 12 miteinander vertauschen. Mit

$$R^4 L^1 R^3 L^{-1} R^6$$

stehen die Kugeln auf den Plätzen 2 und 17. Die Farben der jetzigen Kugeln 7 und 12 mögen im linken Ring nicht mehr existieren. Kugel 7 habe aber jetzt z. B. die gleiche Farbe wie Kugel 4. Wir drehen also

$$R^{-3} L^{-5} R^2.$$

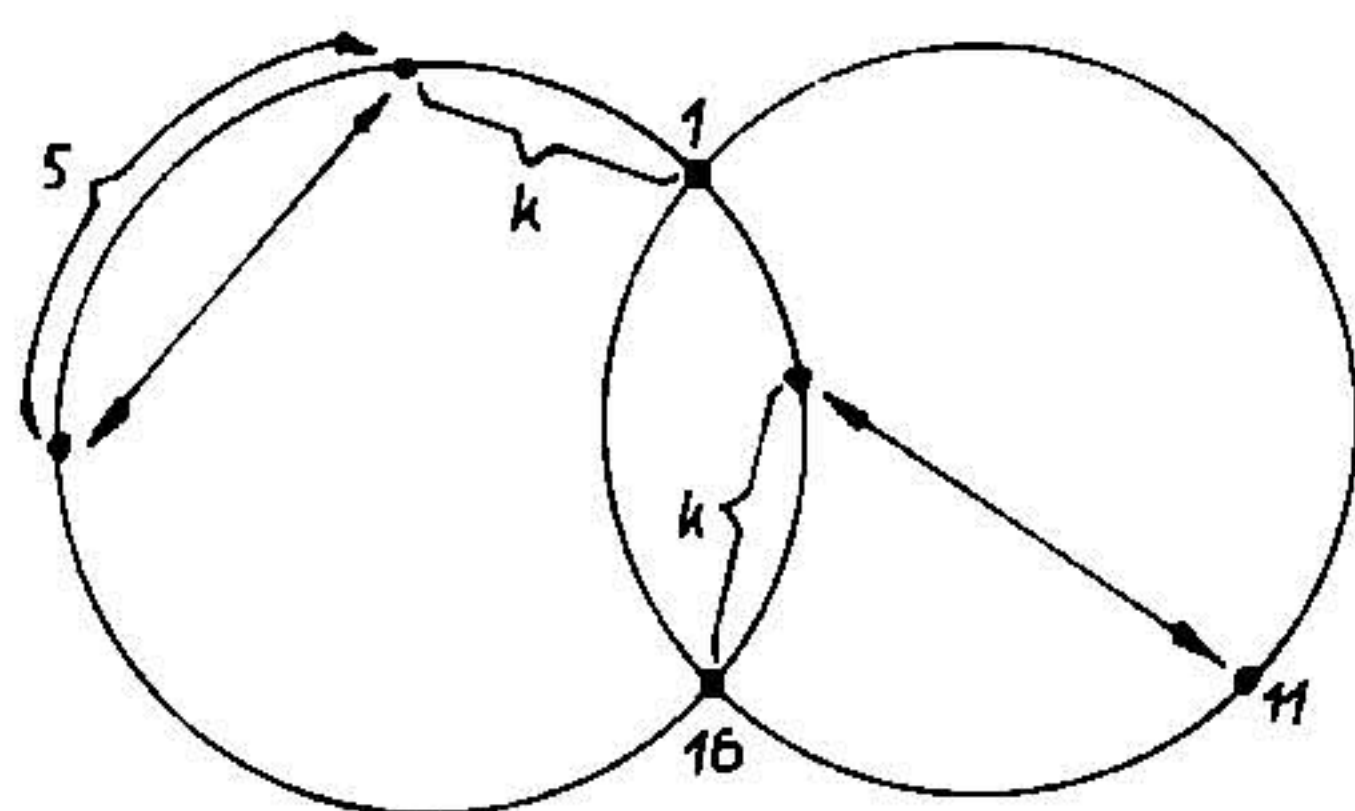
Dann stehen die zu vertauschenden Kugeln in Position 1 und 16, und die Kugeln 6 und 34 haben gleiche Farbe. Durch Anwendung der Operation III wechseln also genau die Farbe der Kugeln von 1 und 16. Zum Schluß werden die Hilfsoperationen in umgekehrter Reihenfolge wieder rückgängig gemacht, d. h. man dreht

$$R^{-2} L^5 R^{-3} L^1 R^{-3} L^{-1} R^{-4}.$$

Dies war die Beschreibung eines möglichen Weges. Eine weitere oftmals nützliche Operation ist folgende:

$$L^{k+5} R^5 L^{-5} R^{-5} L^{-k}.$$

Bild 5

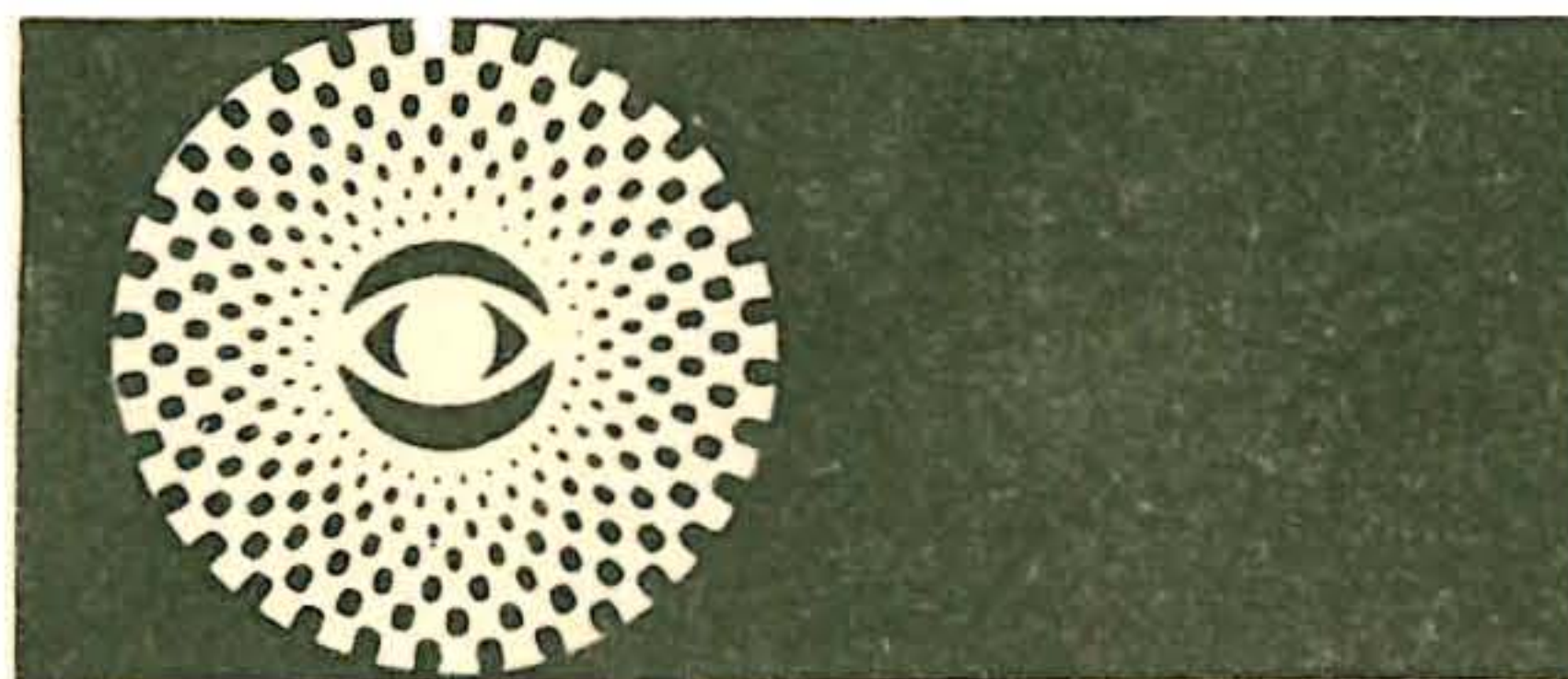


Hat man z. B. schon die schwarzen Kugeln im linken Ring geordnet, so gehen (bei geeignetem  $k$ ) die schwarzen Kugeln in sich über und durch Benutzung von  $R^i$  läßt sich jede Kugel des rechten Ringes zum Punkt A bringen und von A auch wieder im rechten Ring platzieren.

Legt man sich aber eine kleine Sammlung von Operationsfolgen an, wie in den Bildern 3, 4 und 5 angedeutet, kommt man sicherlich oft wesentlich schneller ans Ziel.

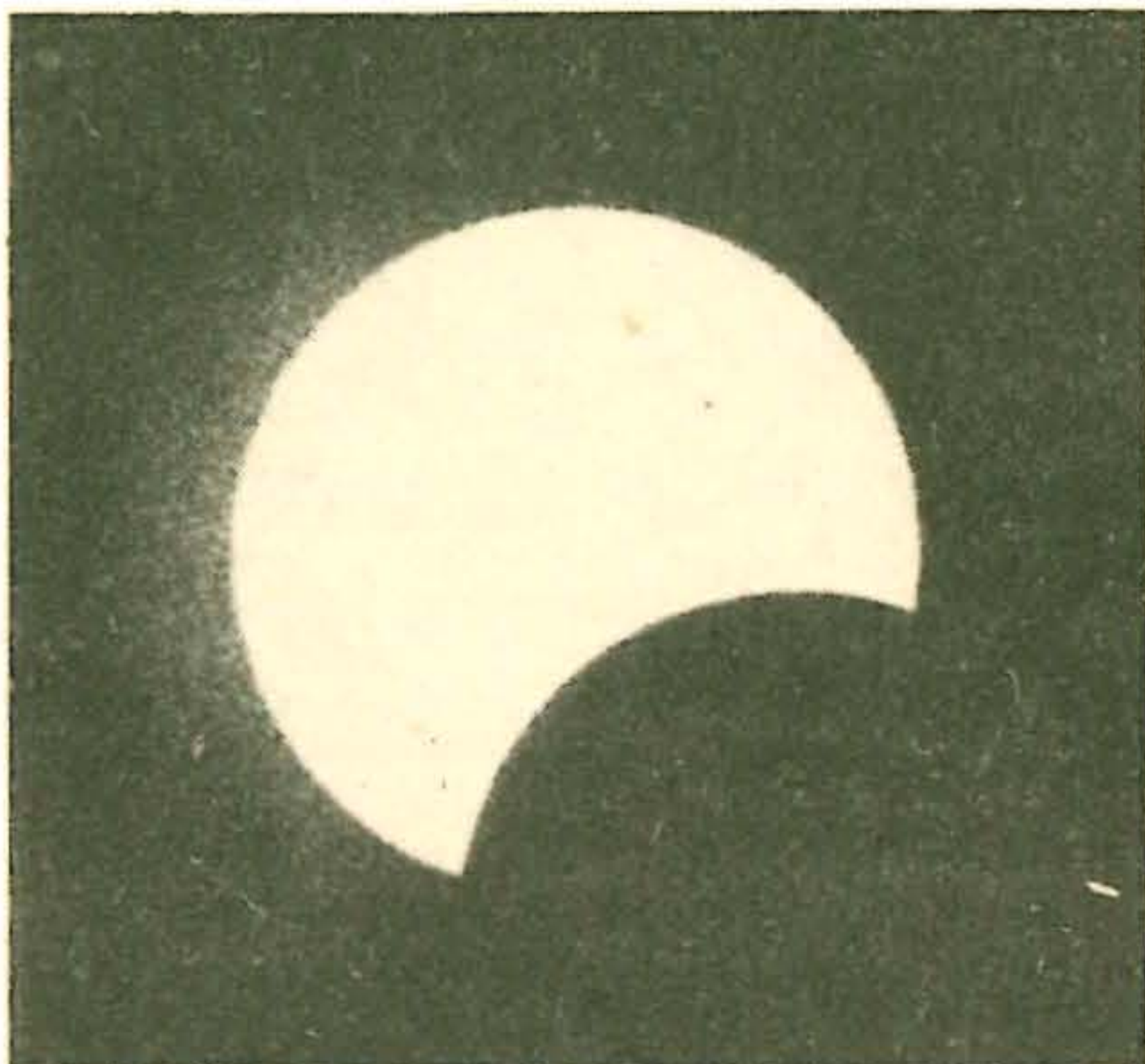
Wir haben nur ein Farbmuster zu Beginn angegeben. Ihr findet bestimmt noch andere hübsche Möglichkeiten. Vielleicht baut ihr euch aus Murmeln selbst so ein Spiel?

H.-D. Gronau/J. Prestin



## ARBEITS- GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

### Sonnenfinsternis 1984



Wie groß war in Jena der maximale Bedeckungsgrad während der Sonnenfinsternis vom 30. 5. 1984?

Schüler der EOS Spezialschule physikalisch-technischer Richtung Carl Zeiss beobachteten am 30. 5. 1984 (19.20 Uhr bis 20.53 Uhr Sommerzeit) die ringförmige Sonnenfinsternis mit dem Schulfernrohr durch Projektion des Bildes auf einen Schirm als partielle Finsternis. Wegen der späten Ereigniszeit und der damit geringen Sonnenhöhe wurde ein gegenüber dem Westhorizont relativ hoher Standort gewählt. Während des gesamten Finsternisverlaufs wurden zu diesem Projektionsbild Messungen zur Berechnung des prozentualen Bedeckungsgrades ausgeführt.

Für den Höhepunkt der Bedeckung der Sonne durch den Mond möchten wir die Meßergebnisse angeben und die *alpha*-Leser auffordern, das mathematische Problem der Berechnung der prozentualen Bedeckung zu lösen. Auf dem Schirm wurden mit Lineal und Zeichendreieck 3 Meßwerte ermittelt:

1. Durchmesser des Sonnenbildes:  $d_s = 200 \text{ mm}$
2. Abstand der Schnittpunkte der Kreisbilder von Sonne und Mond:  $a = 162 \text{ mm}$
3. Bogenhöhe über der Sehne  $a$ :  $h = 43 \text{ mm}$

Während der gesamten Finsternis registrierten die Schüler die Veränderung von  $a$  und  $h$ . Der Wert für  $d_s$  wurde durch den Abstand Okular-Schirm konstant gehalten. Aus den drei Meßwerten wurde jeweils der prozentuale Bedeckungsgrad zu den verschiedenen Zeitpunkten ermittelt. Natürlich sind diese Ergebnisse mit Fehlern

behaftet, die sich aus der Messung mit Lineal am „wandernden“ Bild auf dem Projektionsschirm durch die Relativbewegungen von Erde, Sonne und Mond ergeben. Wir möchten noch ergänzen, daß eine eindrucksvolle Sonnenfleckengruppe mitbeobachtet werden konnte.

Bild 1

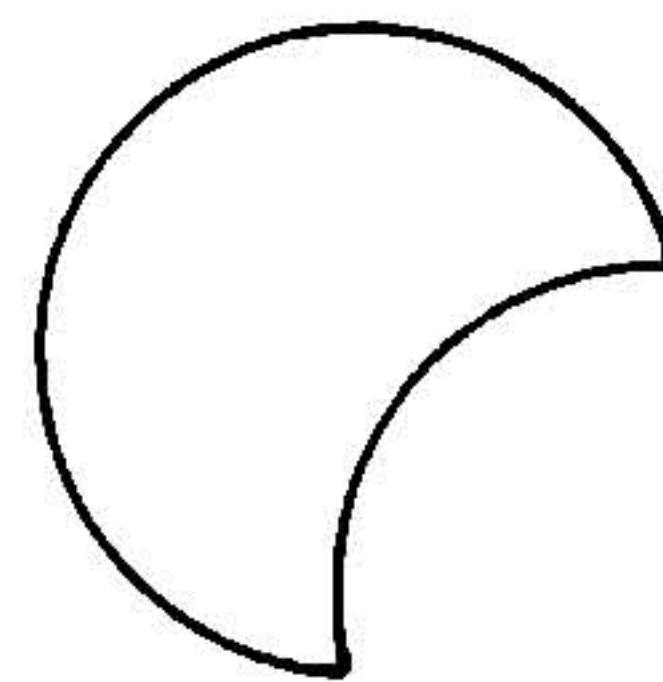
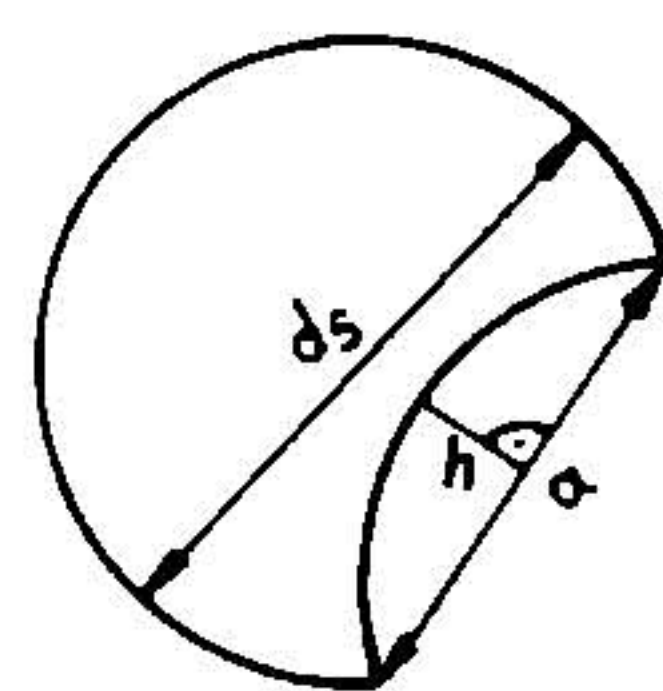


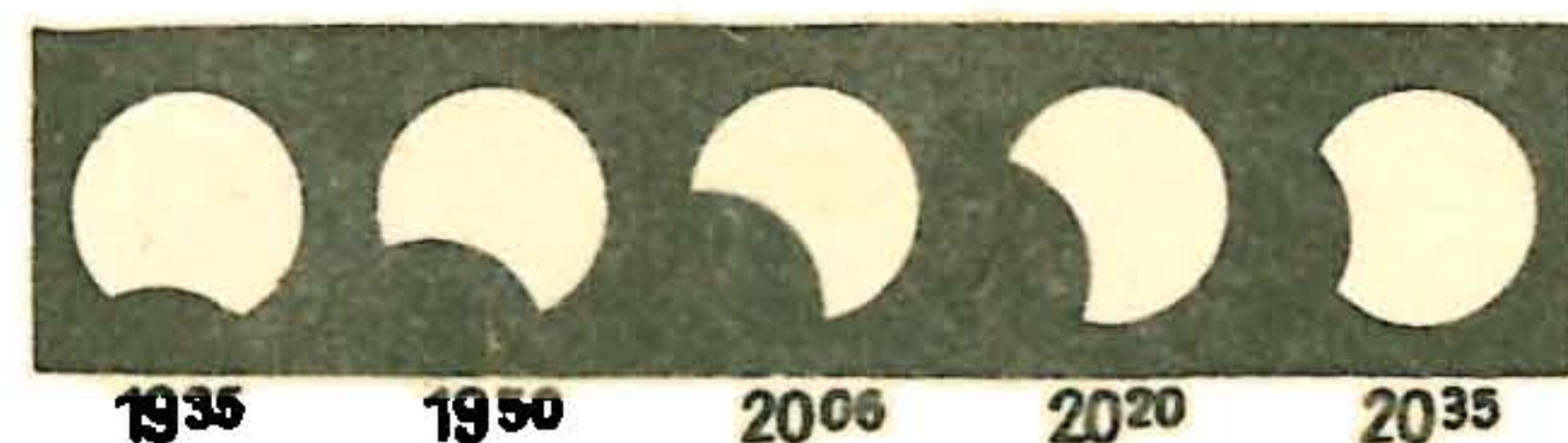
Bild 2



Welcher Lösungsweg führt zum Ziel, die prozentuale Bedeckung zu berechnen?

Hinweis: Für Schüler bis Kl. 9 ist die Lösung nur möglich, wenn benötigte Winkelgrößen einer Zeichnung entnommen werden.

A. Dietzel



### Zwei Aufgaben für Freunde der Astronomie

▲ 1 ▲ Welchen Durchmesser hat das etwa in der Mondmitte gelegene Ringgebirge Albategnius? Mit einem Fernrohr (mit Fadenzug) wurde die Durchgangszeit von Ost- und Westwall durch die Relativbewegung von Erde-Mond zu  $t = 4,9 \text{ s}$  gemessen.

▲ 2 ▲ Vergleiche den Durchmesser eines Sonnenflecks (beobachtet am 30. 5. 84) mit dem Erddurchmesser! Ein mit dem Fernrohr projiziertes Sonnenbild hatte den Durchmesser von 20 cm, und der Sonnenfleck (in der Nähe der Sonnenmitte gelegen) hatte 4 mm Durchmesser.

### Antwort auf eine Leserzusage

Im *alpha*-Wettbewerbsjahr 1983/84 gingen insgesamt 93 500 Lösungen ein (siehe Heft 4/84, III. U.-Seite).

a) A-4-Papierformat

$$0,210 \text{ m} \cdot 0,297 \text{ m} \cdot 93\,500 \approx 5832 \text{ m}^2$$

A-6-Papierformat

$$0,105 \text{ m} \cdot 0,148 \text{ m} \cdot 93\,500 \approx 1453 \text{ m}^2$$

Für das Format A4 werden rd. 5832 m<sup>2</sup> und für A6 werden rd. 1453 m<sup>2</sup> gebraucht.

b) A4  $93\,500 \cdot 4,1 \text{ g} \approx 383\,000 \text{ g} = 383 \text{ kg}$

A6  $93\,500 \cdot 2,6 \text{ g} \approx 243\,000 \text{ g} = 243 \text{ kg}$

$$383 \text{ kg} + 243 \text{ kg} = 626 \text{ kg}$$

Insgesamt werden 626 kg Papier verwendet.

# Schriftliche Abschlußprüfung

Mathematik,  
Schuljahr 1983/84  
Oberschule, Klasse 10

## Pflichtaufgaben

1. In einem Maschinenbaubetrieb wird ein Schweißroboter eingesetzt.

a) Die bisherige Tagesproduktion von 425 Teilen konnte dadurch um 84,0% gesteigert werden.

Wieviel Teile werden nun täglich gefertigt?

b) Die Herstellungskosten je Stück sanken dadurch von ursprünglich 8,60 M auf 6,90 M.

Auf wieviel Prozent wurden die Herstellungskosten gesenkt?

2. Lösen Sie folgende Gleichung!

$$3(5x + 3) = 3x - (6x - 18) \quad (x \in P) \quad (\text{Probe!})$$

3. a) Durch die Gleichung  $y = x^3$  ( $x \in P$ ) ist eine Funktion gegeben.

Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion in ein rechtwinkliges Koordinatensystem!

b) Durch die Gleichung  $y = \frac{1}{x}$  ( $x \in P; x \neq 0$ ) ist eine weitere Funktion gegeben.

– Übertragen Sie die zu dieser Funktion gehörende Tabelle auf Ihr Arbeitsblatt, und vervollständigen Sie die Tabelle!

|   |    |    |    |                |   |   |   |   |
|---|----|----|----|----------------|---|---|---|---|
| x | -4 | -3 | -2 | $-\frac{1}{2}$ |   |   |   | 4 |
| y |    |    |    | -2             | 4 | 2 | 1 |   |

– Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion in dasselbe Koordinatensystem!

c) Die Graphen der beiden Funktionen schneiden einander in den Punkten  $P_1$  und  $P_2$ .

Geben Sie von jedem der beiden Punkte die Koordinaten an!

4. Ein Schwimmkran hat die Auflagebreite  $\overline{AB} = 31$  m. Sein schwenkbarer Ausleger hat die Länge  $\overline{BC} = 24$  m (siehe nachfolgende stark vereinfachte Darstellung!).

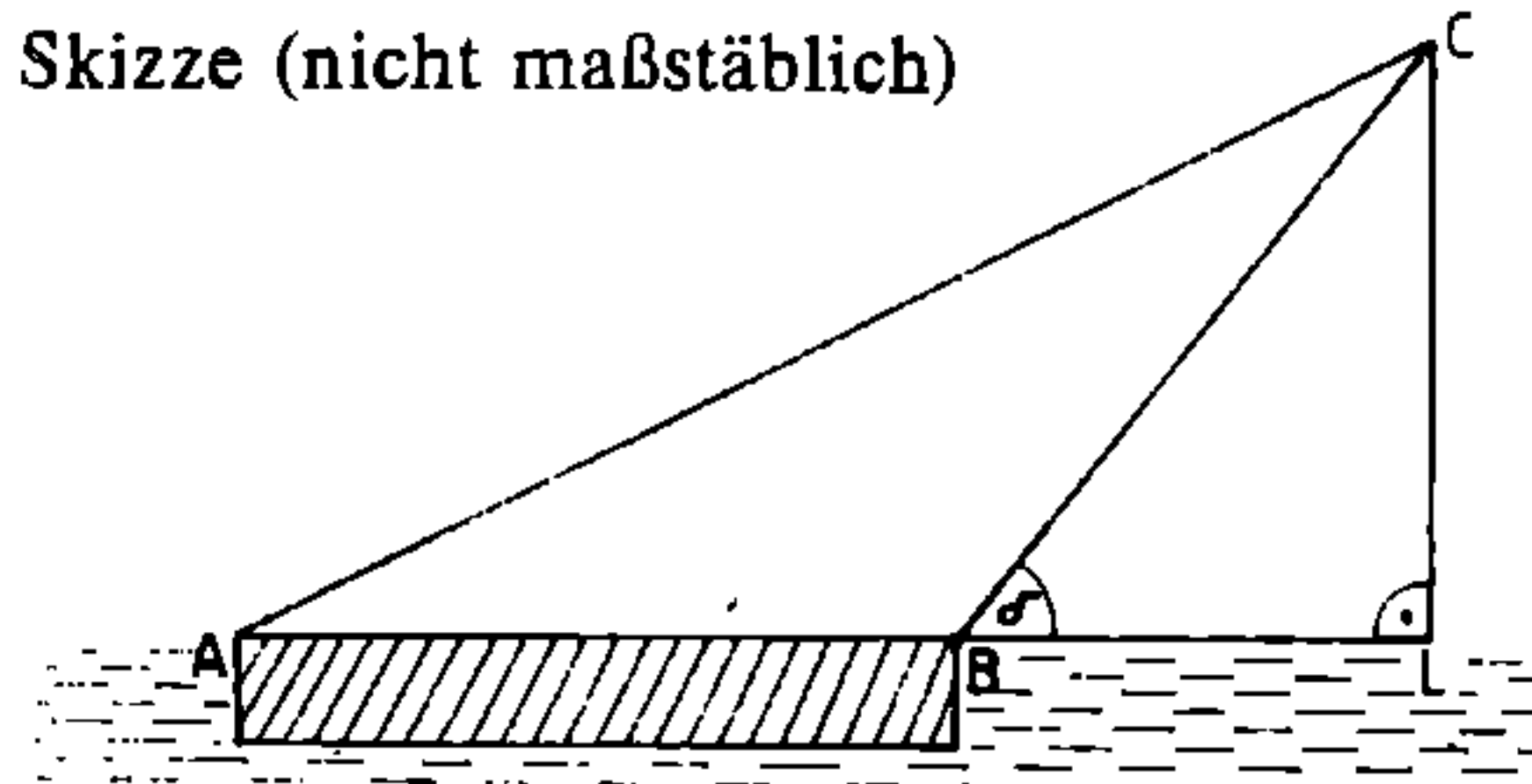
Skizze (nicht maßstäblich)

Berechnen Sie für den Neigungswinkel  $\angle LBC = \delta = 60^\circ$

a) die Arbeitsweite  $\overline{BL}$ ,

b) die Länge  $\overline{AC}$  des Spannseiles!

Skizze (nicht maßstäblich)



5. Gegeben sei ein Kreis mit einer Sehne  $\overline{AB}$ , die nicht durch den Mittelpunkt des Kreises verläuft. Ferner seien  $\overline{AC}$  und  $\overline{BD}$  Durchmesser des Kreises.

a) Zeichnen Sie eine entsprechende Planfigur, und tragen Sie die Strecken  $\overline{AD}$  und  $\overline{BC}$  ein!

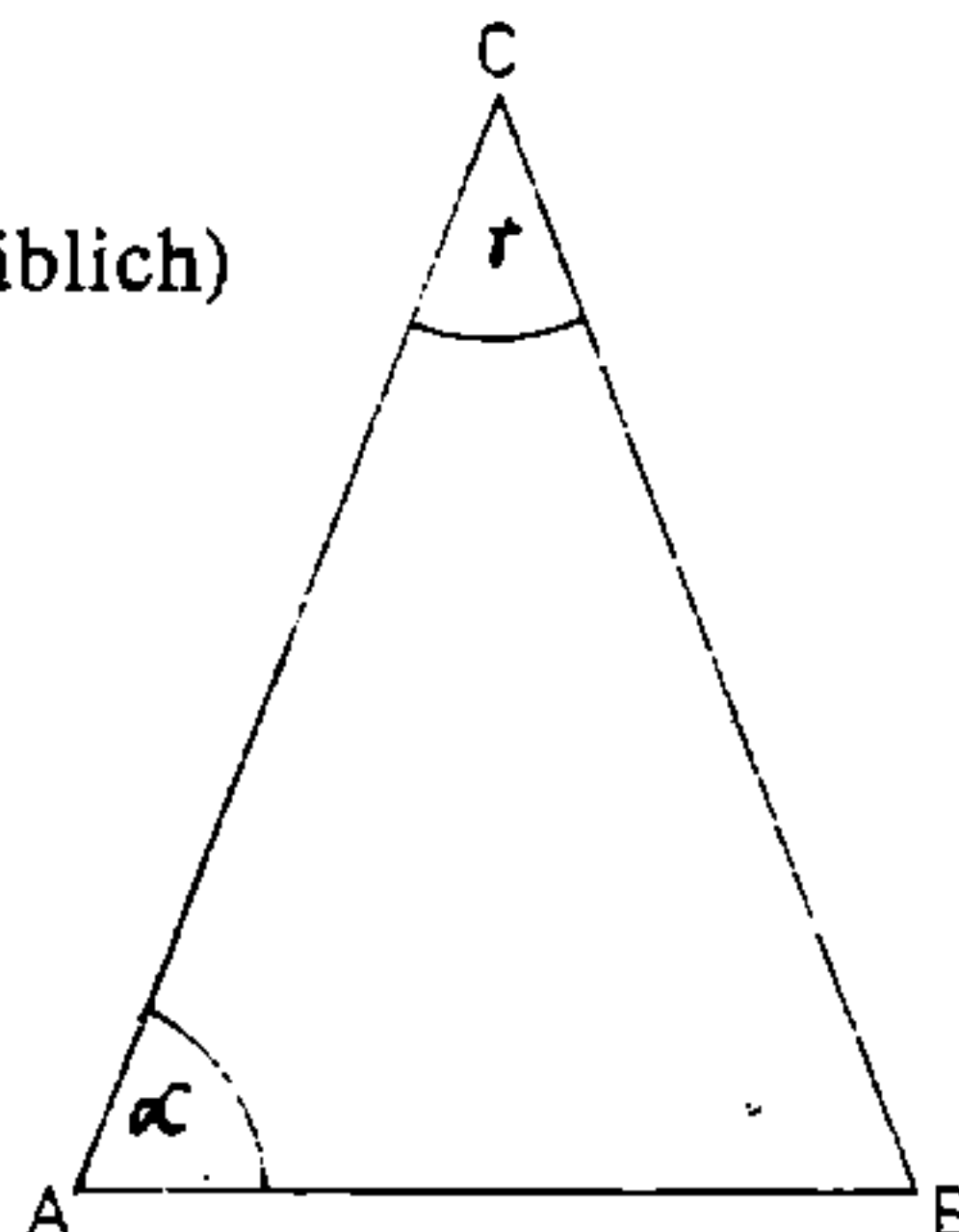
b) Bestimmen Sie die Größe des Winkels  $\angle BAD$  und die des Winkels  $\angle CBA$  unter Verwendung eines geeigneten Satzes! Welchen Satz haben Sie benutzt?

c) Beweisen Sie, daß die Dreiecke  $ABC$  und  $ABD$  zueinander kongruent sind!

6. a) Für ein Dreieck  $ABC$  mit  $\overline{AC} = \overline{BC}$  (siehe Skizze!) sei  $\alpha = 50^\circ$ .

Geben Sie die Größe von  $\gamma$  an!

Skizze  
(nicht maßstäblich)



b) Ermitteln Sie das Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge  $a = 3,35$  m!

c) Berechnen Sie  $(3x + 5y)^2$ !

d) Durch die Gleichung  $y = 2x - 4$  ( $x \in P$ ) ist eine Funktion gegeben.

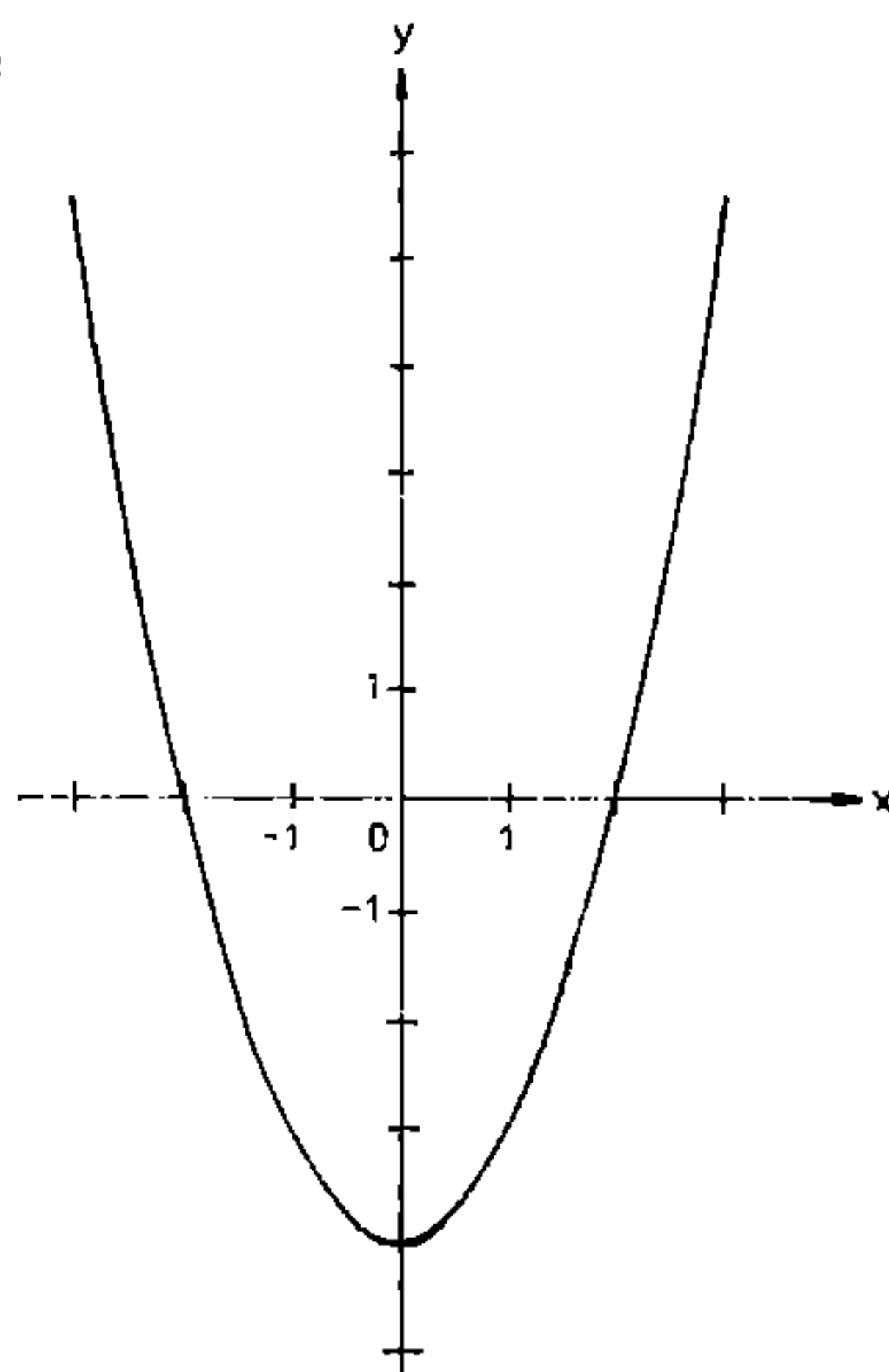
– Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion!

– Berechnen Sie deren Nullstelle!

e) Nebstehende Skizze zeigt den Graph einer quadratischen Funktion.

Geben Sie deren Gleichung an!

Skizze



## Wahlaufgaben

Von den folgenden Aufgaben 7.1., 7.2. und 7.3. brauchen Sie nur eine zu lösen.

7.1. a) Durch die Gleichung  $y = 3 \cdot \sin 2x$  ist eine Winkelfunktion gegeben.

Skizzieren Sie den Graph dieser Funktion mindestens im Intervall  $0 \leq x \leq 2\pi$ !

b) Von einer Funktion  $y = a \cdot \sin bx$  ( $a, b > 0; x \in P$ ) sind bekannt: Wertebereich:  $-1,5 \leq y \leq 1,5$ ;

kleinste Periode:  $4\pi$ !

– Wie lautet die Gleichung dieser Funktion?

– Geben Sie die Nullstellen dieser Funktion im Intervall  $0 \leq x \leq 2\pi$  an!

c) Zur Beschreibung harmonischer Schwingungsvorgänge wird die Gleichung

$$y = f(t) = y_{\max} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

verwendet.

Skizzieren Sie in einem geeigneten Koordinatensystem den zeitlichen Verlauf einer vollen Schwingung für den Fall  $y_{\max} = 6$  cm und  $T = 2$  s!

7.2. Das Dach eines Turmes hat die Form einer geraden Pyramide. Ihre Grundfläche ist ein Quadrat mit der Seitenlänge  $a = 4,4$  m.

Die Höhe  $h$  der Pyramide beträgt 6,1 m.

a) Stellen Sie diese Pyramide im Maßstab 1:100 in Kavalierperspektive dar!

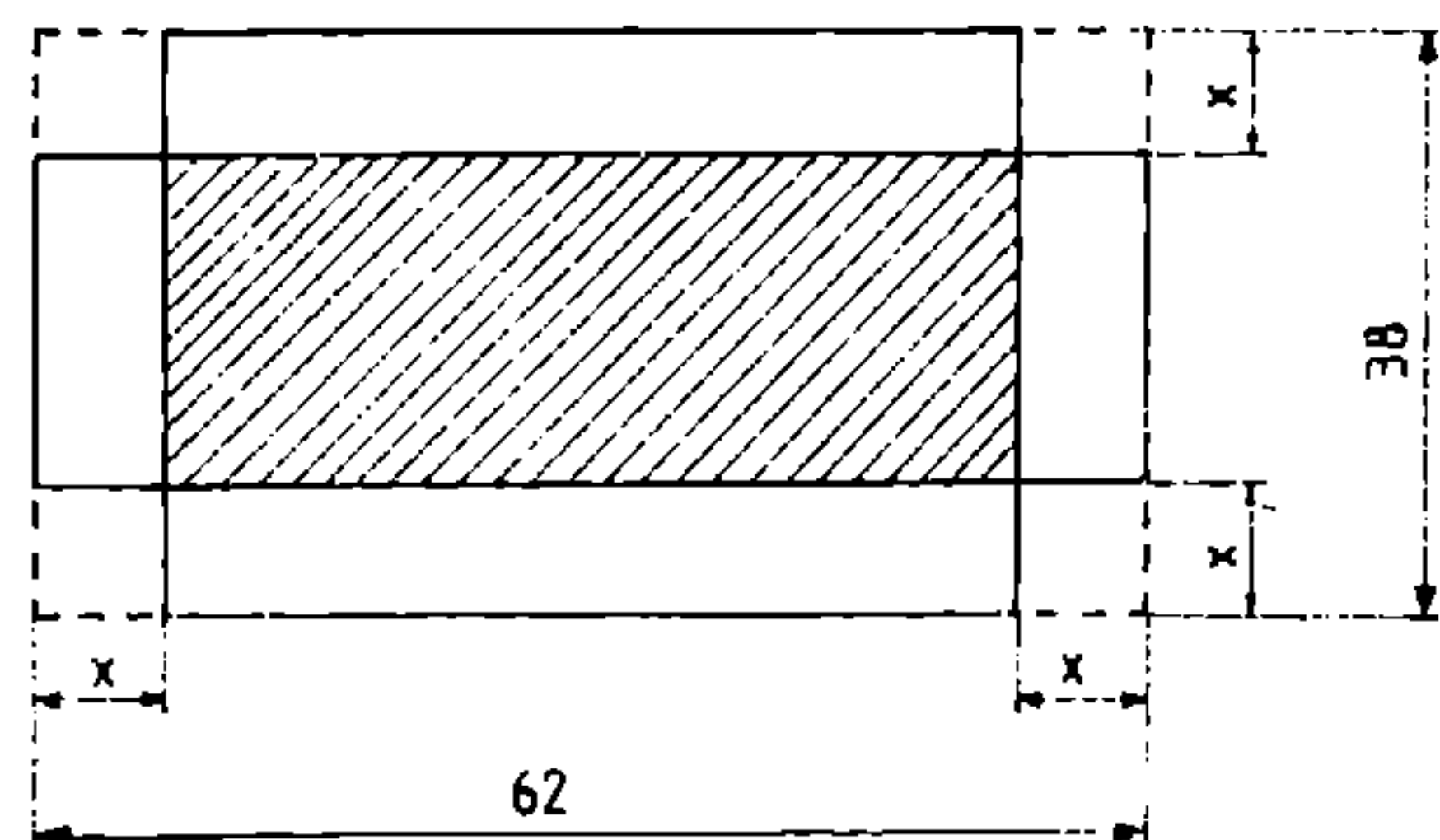
Zeichnen Sie die Höhe  $h$  der Pyramide und die Höhe  $h_s$  einer Seitenfläche ein!

b) Das Dach dieses Turmes soll neu gedeckt werden. Für 1 m<sup>2</sup> Dachfläche sind 54 Ziegel zu planen.

Berechnen Sie, wieviel Dachziegel insgesamt bereitgestellt werden müssen!

7.3. Zur Herstellung oben offener quaderförmiger Kästen stehen gleich große rechteckige Blechplatten mit 62 cm Länge und 38 cm Breite zur Verfügung.

Von ihnen werden an den Ecken quadratische Flächen mit der Seitenlänge  $x$  cm herausgeschnitten. Der schraffierte rechteckige Teil wird zur Grundfläche des Kastens (siehe Skizze!).



Skizze (nicht maßstäblich)  
(Maßangaben in Zentimeter)

a) Es sei  $x = 2,5$ .

Berechnen Sie für diesen Fall das Volumen des Kastens!

b) Der Inhalt der Grundfläche des Kastens betrage 1300 cm<sup>2</sup>.

Berechnen Sie für diesen Fall den Wert von  $x$ ! Berechnen Sie das Volumen dieses Kastens!

## Für Könnner

Lösen Sie das folgende Gleichungssystem!

$$(1) \quad \sqrt{x} - \sqrt{y} = x + \sqrt{xy}$$

$$(2) \quad (x + y)^2 = 2(x - y)^2$$

Bestimmen Sie den reellen Wert von  $x$ !

$$x = \frac{\sqrt{7 - \sqrt{21 + \sqrt{80}}}}{1 + \sqrt{7 + \sqrt{48}} - \sqrt{4 - \sqrt{12}}}$$

# In freien Stunden · alpha-heiter



Wolfgang Teiler

## Zum Jahreswechsel

$$1 + 9 = 8 + \sqrt{4} \quad \sqrt{198 - \sqrt{4}} = 1 + 9 + 8 - 4$$

$$1 - \sqrt{9} = \sqrt[3]{8} - 4 \quad 1^2 + 9^2 - 8^2 - 4^2 = -1 - \sqrt{9} + 8 - \sqrt{4}$$

$$19 \cdot (8 - 4) = 9 \cdot 8 + 4 \cdot 1 = 84 + 1 - 9$$

$$= -4 + (1 + 9) \cdot 8$$

$$12 = \lg(1 + 9)^{8+4} \quad 35 = 19 - 8 + 4!$$

$$50 = (-1 + \sqrt{9}!) \cdot (8 + \sqrt{4}) \quad 100 = 1 \cdot 98 + \sqrt{4}$$

## Betrachte die Summen!

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| 529 | 991 | 199 | 265 |
| 397 | 67  | 859 | 661 |
| 331 | 133 | 925 | 595 |
| 727 | 793 | 1   | 463 |

$$1 = 1 - \sqrt{9} + 8 - 5$$

$$2 = [(-1 + \sqrt{9}) + 8] : 5$$

$$3 = -1 - 9 + 8 + 5$$

$$4 = 1^9 + 8 - 5$$

$$5 = (1 \cdot 9 - 8) \cdot 5$$

$$6 = 19 - 8 - 5$$

$$7 = 1 + 9 - 8 + 5$$

$$8 = -1 + \sqrt{9}! + 8 - 5$$

$$9 = (1 \cdot \sqrt{9})! + 8 - 5$$

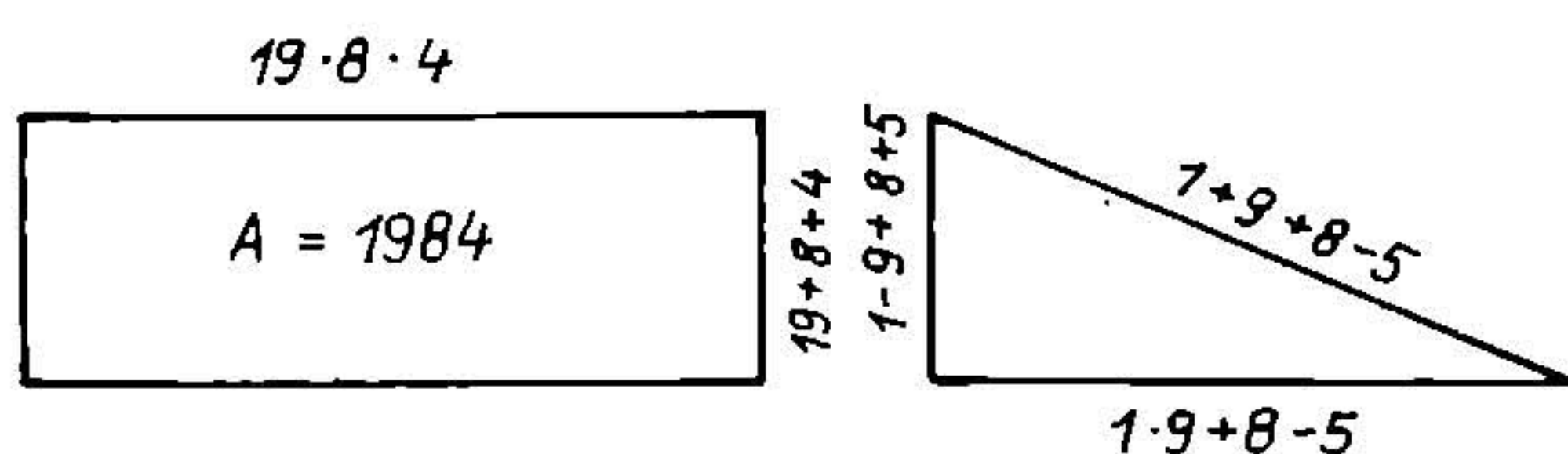
$$10 = (1 + 9 - 8) \cdot 5$$

$$20 = 1 + \sqrt{9} \cdot 8 - 5$$

$$30 = -1 - 9 + 8 \cdot 5$$

## Betrachte die Produkte!

|      |      |      |
|------|------|------|
| 62   | 1984 | 32   |
| 7936 | 16   | 31   |
| 8    | 124  | 3968 |



$$A = 1 + 9 + 8 + 5 + 1 + 9 - 8 + 5 \quad FE$$

$$U = 1 + 9 + 8 + 5 + 1 + 9 - 8 + 5 \quad LE$$

a) Stefan sagt zu seinem Freund: „Wenn ich das Alter (in Jahren) meiner beiden Eltern und meines kleinen Bruders miteinander multipliziere, erhalte ich 1984. Außerdem gibt die Summe der Grundziffern in den drei Altersangaben mein Alter an.“ Wie alt ist Stefan, wenn bekannt ist, daß die Eltern beide jünger als 60 Jahre sind?

b) Ermittle alle 6stelligen und durch 12 teilbaren natürlichen Zahlen, die dadurch entstehen, daß

man an die Zahl 1985 auf der linken als auch auf der rechten Seite jeweils genau eine Ziffer anfügt!

**Hinweis:** Sicher werden euch bestimmte Teilbarkeitsregeln, die ihr im Mathematikunterricht kennengelernt habt, bei der Lösung der Aufgabe sehr von Nutzen sein.

c) Frau Schulze erklärt, daß das Produkt aus der Zahl, die ihr Alter (in ganzen Jahren) angibt, und den Zahlen, die jeweils das Alter ihrer drei verschiedenen alten Töchter angeben (ebenfalls in ganzen Zahlen), genau 1984 ergibt. Frau Meier stellt fest, daß dies auch für sie und ihre vier Kinder gelte. Wie alt sind die beiden Frauen und ihre Kinder?

d) Setzt in die Kästchen je ein mathematisches Operationszeichen (+, -, ·, :) derart ein, daß sich Gleichungen ergeben!

Beachte dabei: Punktrechnung geht vor Strichrechnung!

$$1 \square 9 \square 8 \square 4 = 22$$

$$1 \square 9 \square 8 \square 4 = 13$$

$$1 \square 9 \square 8 \square 4 = 12$$

$$1 \square 9 \square 8 \square 4 = 7$$

$$1 \square 9 \square 8 \square 4 = 6$$

$$1 \square 9 \square 8 \square 4 = 5$$

$$1 \square 9 \square 8 \square 5 = 5$$

$$1 \square 9 \square 8 \square 5 = 6$$

$$1 \square 9 \square 8 \square 5 = 7$$

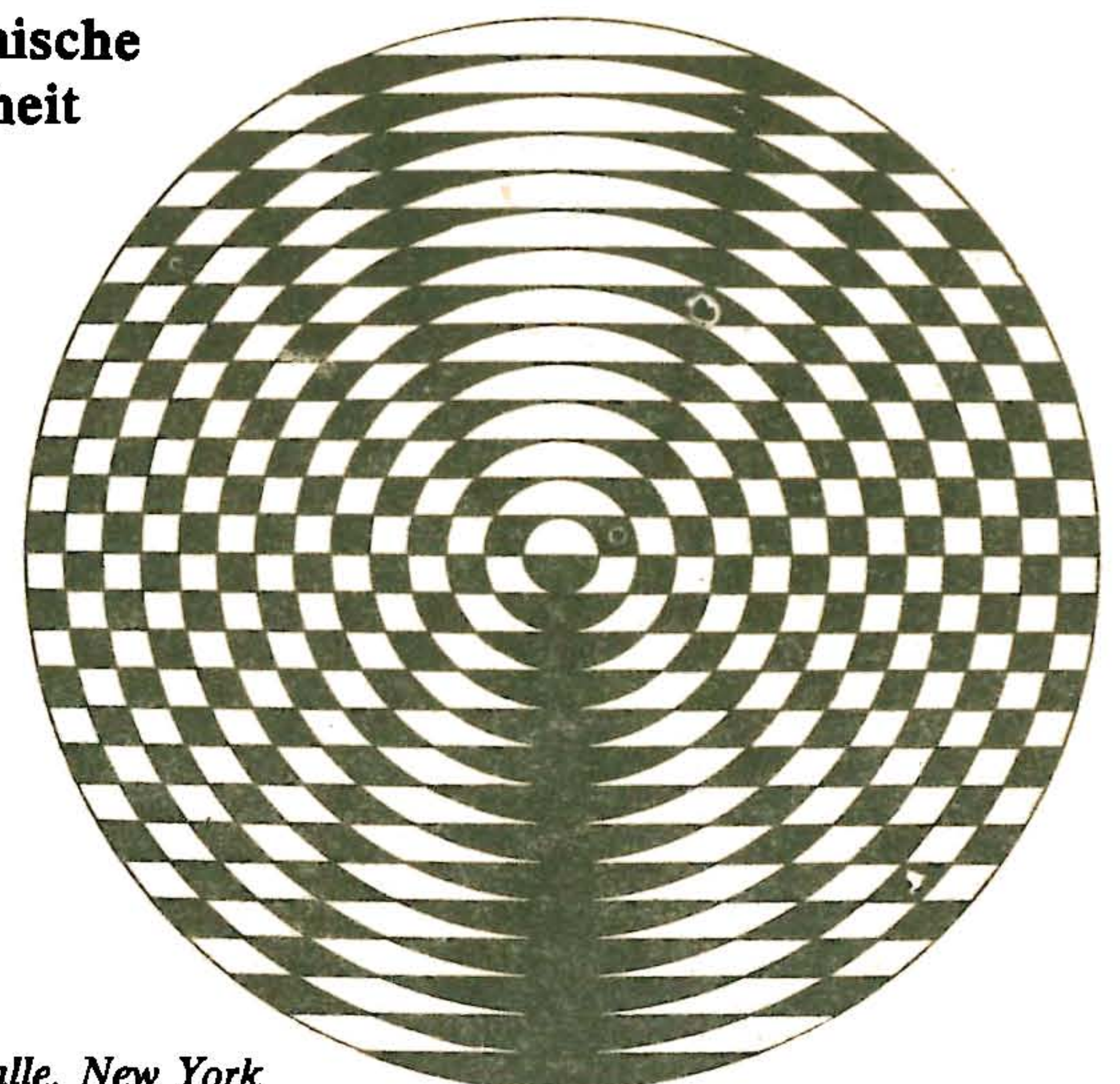
$$1 \square 9 \square 8 \square 5 = 12$$

$$1 \square 9 \square 8 \square 5 = 13$$

$$1 \square 9 \square 8 \square 5 = 22$$

**Autoren:** AG Mathe, Pionierhaus Gotha; AG Mathe, St. Jg. Techniker, Lütz; Dipl.-Math. A. Fittke, Berlin; Dir. H. Förg (Schwaz, Österr.); Schüler R. Jonack, Tambach-Dietharz; Jiří Mann, Prag; Dr. R. Mildner, Leipzig; Dejan Predić, Sremske Mitrovica (Jug.); Dr. J. Riehl, Egeln; Sab. u. S. Arnhold, Drebkau; Schülerin K. Krasemann, Friedland; Diesterweg-OS K.-M.-Stadt

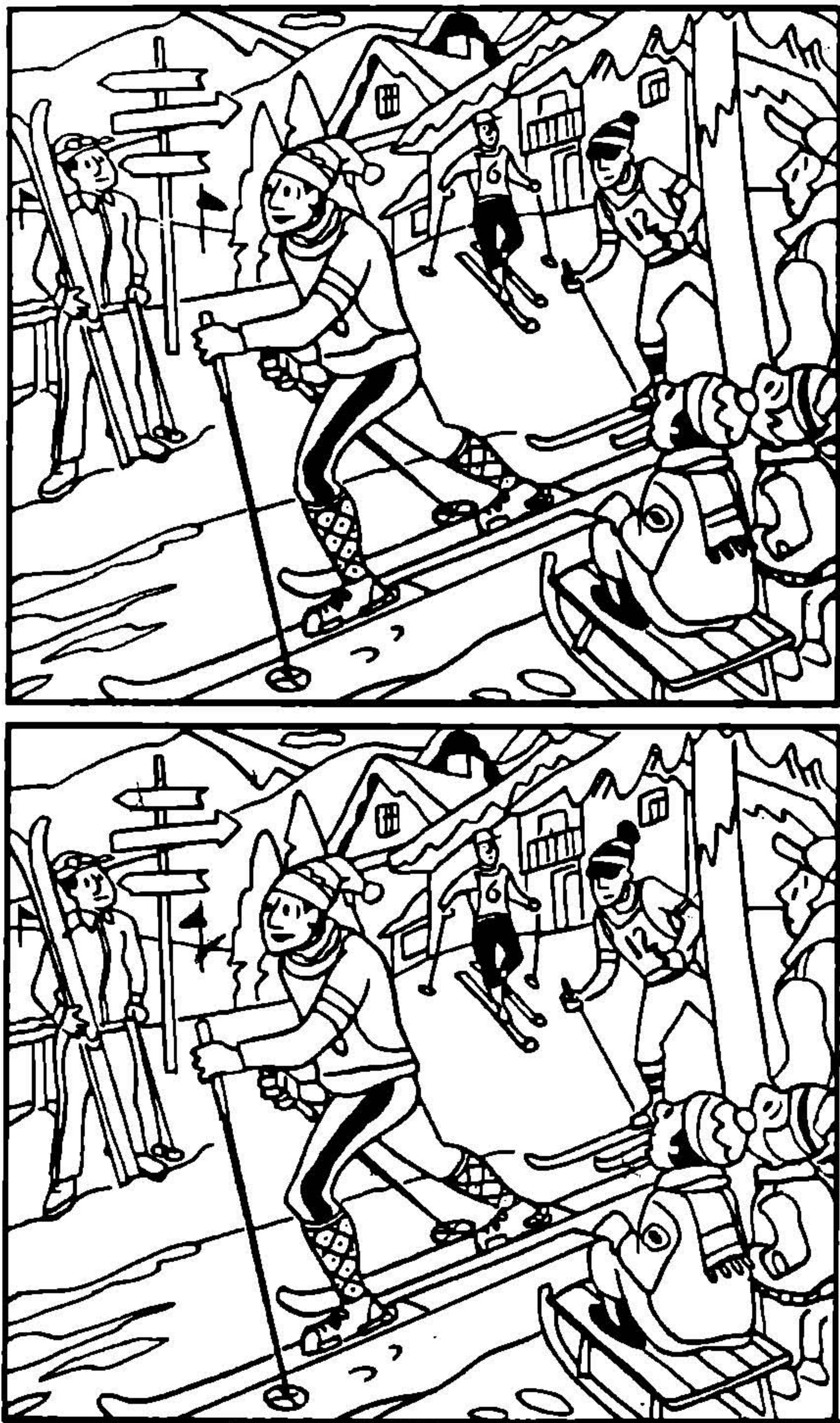
## Dynamische Schönheit



H. Baravalle, New York

Wintersport

25 Unterschiede werden gesucht!

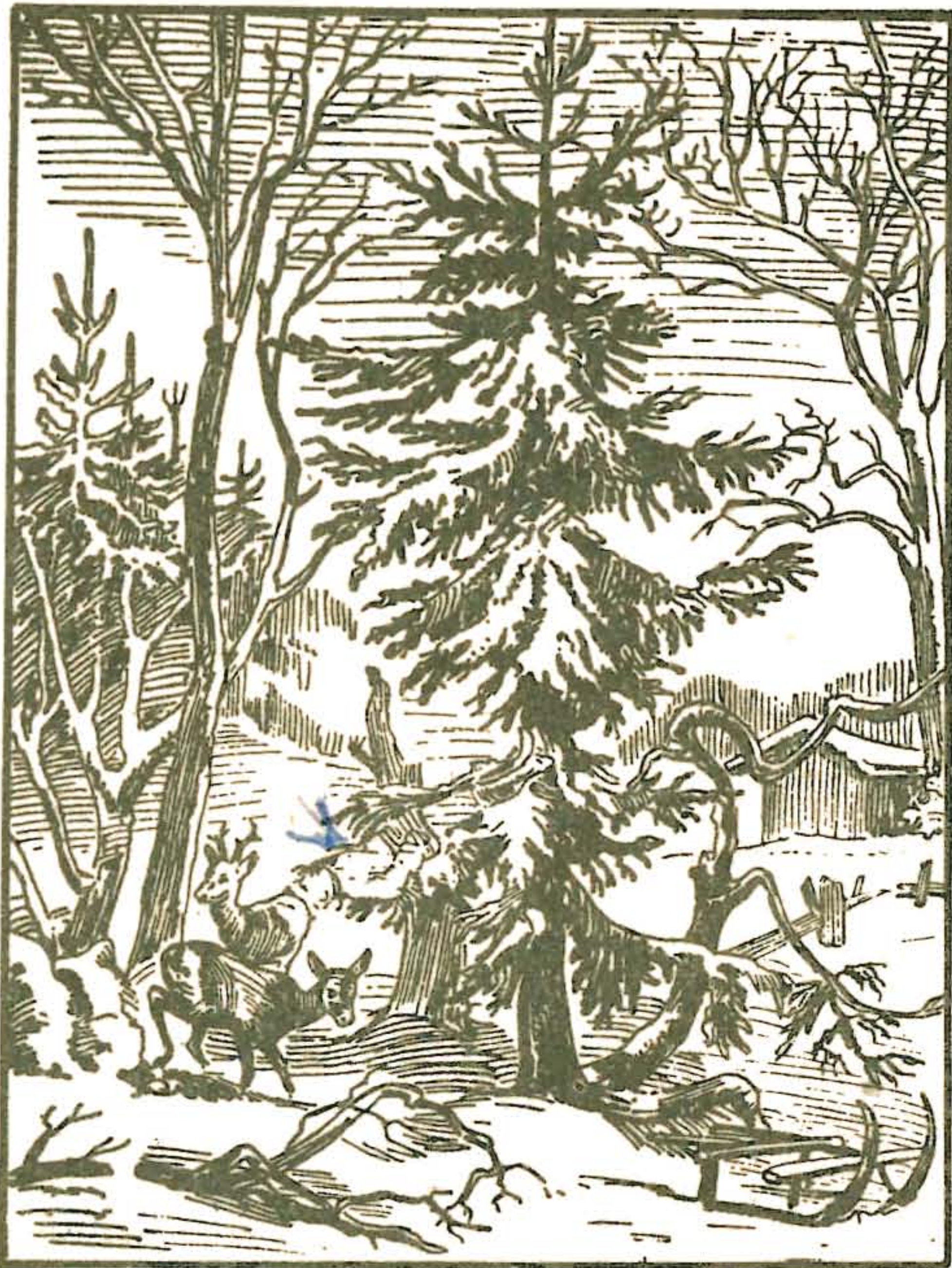


Aus: Füles, Budapest

Gut versteckt

Wer hat sich in der Winterlandschaft versteckt, etwa ein Mensch – so dicht beim Wild?

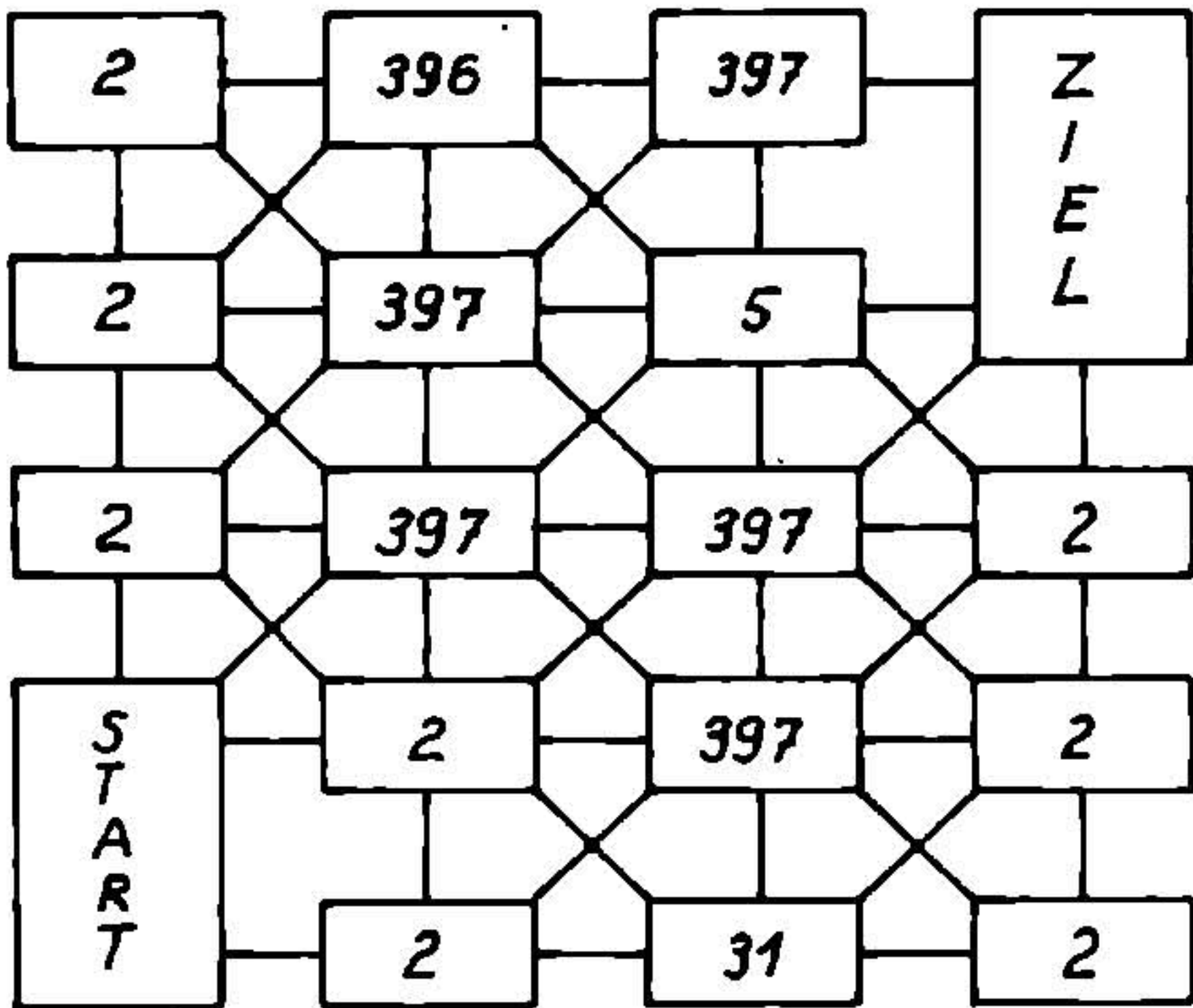
Aus: Troll, Berlin



Silvesterlauf

Der Langläufer gelangt auf 4 bestimmten Wegen ins Ziel: Bei Weg 1 bzw. Weg 2 soll die Summe der überquerten Zahlen 1984 bzw. 1985 und bei Weg 3 bzw. Weg 4 das Produkt der überquerten Zahlen 1984 bzw. 1985 betragen. Findet diese vier Wege! Welcher Weg ist der kürzeste?

Dr. R. Mildner, Karl-Marx-Universität Leipzig



Nun schlägt's 13!

Stellt eine jede der natürlichen Zahlen von 1 bis 13 durch 5 Dreien dar, indem ihr zwischen diese jeweils vier der mathematischen Operationszeichen +, -, ·, : setzt! Sicher werdet ihr in manchen Fällen mehrere Betrachtungsmöglichkeiten für dieselbe Zahl finden. Beachtet dabei: Da keine Klammern stehen, so geht Punkt- vor Strichrechnung!

Dr. R. Mildner, Karl-Marx-Universität Leipzig

|        |   |   |   |   |   |   |
|--------|---|---|---|---|---|---|
| 1 = 3  | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 2 = 3  | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 3 = 3  | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 4 = 3  | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 5 = 3  | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 6 = 3  | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 7 = 3  | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 8 = 3  | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 9 = 3  | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 10 = 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 11 = 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 12 = 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 13 = 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

Zum Jahresausklang

Varnei, Budapest



# Lösungen

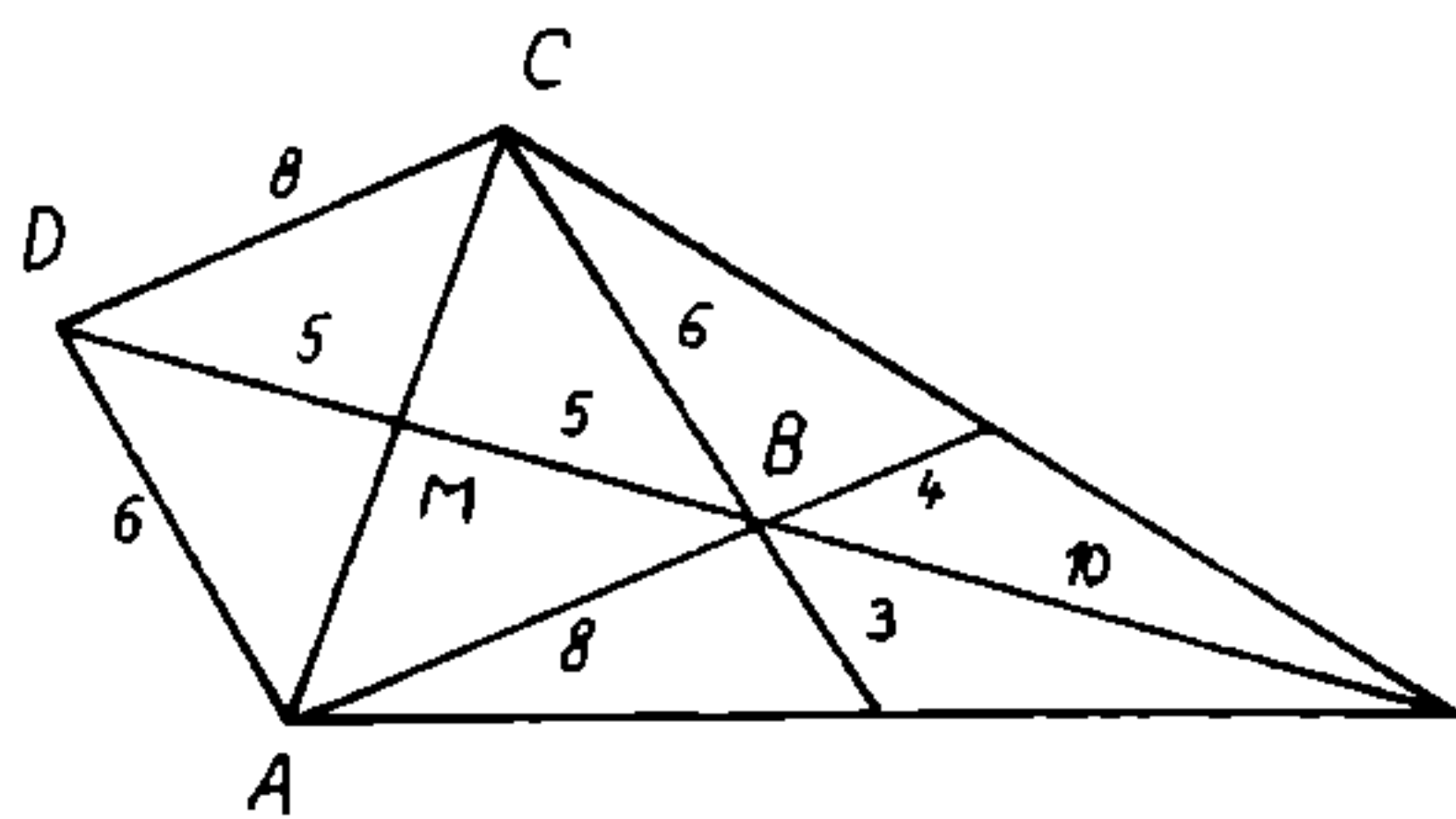


## Lösungen zur: Sprachecke

▲ 1 ▲ In einem Dreieck sind die Längen der drei Seitenhalbierenden 9, 12 und 15. Berechne die Länge der Seite, zu der die längste Seitenhalbierende gezogen ist!

**Lösung:**  $B$  teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1. Betrachte das Parallelogramm  $ABCD$ , das durch eine Drehung des  $\triangle ABC$  um  $M$  entstanden ist! Da sich die Diagonalen eines Parallelogramms halbieren, ist  $\overline{BD} = 2 \cdot \overline{BM} = 2 \cdot 5 = 10$ . Außerdem ist  $\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 = 6^2 + 8^2 = 100 = \overline{BD}^2$ .

$\triangle BCD$  ist also  $90^\circ$ , und das Parallelogramm muß ein Rechteck sein. Da die Diagonalen in einem Rechteck die gleiche Länge haben, ist  $\overline{BD} = \overline{AC} = 10$ .



▲ 2 ▲ Der Bäcker weiß, daß die Masse des Brotes, das er herstellt,  $\frac{10}{9}$  der Masse des verwendeten Mehls ausmacht.

- a) Welche Menge Brot erhält er aus 72 kg, aus 117 kg und aus 108 kg Mehl?  
b) Welche Masse Mehl braucht er, um 100 kg, 150 kg und 190 kg Brot herzustellen?

**Lösung:** a)  $72 \text{ kg} \cdot \frac{10}{9} = 80 \text{ kg}$ ;

$117 \text{ kg} \cdot \frac{10}{9} = 130 \text{ kg}$ ;  $108 \text{ kg} \cdot \frac{10}{9} = 120 \text{ kg}$

b)  $100 \text{ kg} \cdot \frac{9}{10} = 90 \text{ kg}$ ;

$150 \text{ kg} \cdot \frac{9}{10} = 135 \text{ kg}$ ;  $190 \text{ kg} \cdot \frac{9}{10} = 171 \text{ kg}$

▲ 3 ▲ Mein Freund Sascha sagte eines Tages zu mir: „Vorgestern war ich 10 Jahre alt, aber im nächsten Jahr werde ich 13.“ Kann das sein?

**Lösung:** Ja. Am 31. Dezember wurde Sascha 11 Jahre alt, und das Gespräch fand am nächsten Tag, dem 1. Januar, statt.

▲ 4 ▲ In einem Dreieck sind zwei der Höhen nicht kürzer als die Seiten, auf denen sie stehen. Bestimme die Innenwinkel des Dreiecks!

**Lösung:** Ein Winkel ist ein rechter, die beiden anderen betragen je  $45^\circ$ . Seien  $h_a$  und  $h_b$  die betrachteten Höhen, und es sei  $h_a \leq h_b$ . Laut Aufgabe ist  $a \leq h_a$ . Es ist aber  $h_b \leq a$ , da das Lot die kürzeste Verbindung von einem Punkt zu einer Geraden ist. Daraus folgt  $a \leq h_a \leq h_b \leq a$ , also  $a = h_a = h_b = b$ , und das Dreieck  $ABC$  ist gleichschenkelig und rechtwinklig.

## Lösung zu: Sonnenfinsternis 1984

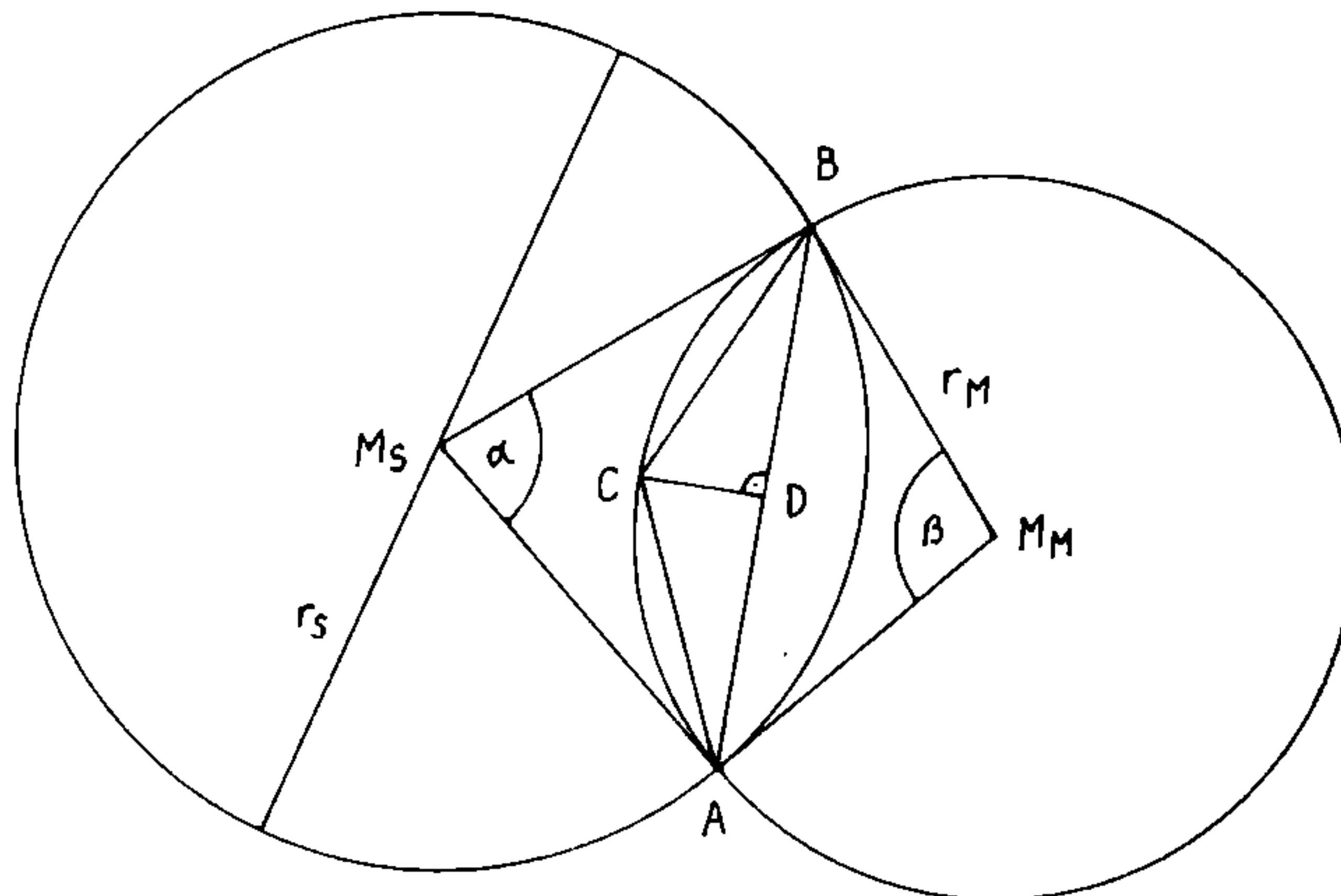


Bild der Sonne

Bild des Mondes

$$d_s = 2r_s = 200 \text{ mm}$$

$$\overline{AB} = a = 162 \text{ mm}$$

$$\overline{CD} = h = 43 \text{ mm}$$

$M_s$ : Mittelpunkt des Bildes der Sonne

$M_m$ : Mittelpunkt des Bildes des Mondes

$r_m = \overline{M_m A} = \overline{M_m B} = \overline{M_m C}$ : Radius des Bildes des Mondes

Für das rechtwinklige Dreieck ( $ADM_m$ ) gilt:

$$\overline{AD} = \frac{a}{2}, \quad \overline{CD} = h$$

$$r_m^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (r_m - h)^2 \rightarrow r_m = \frac{a^2}{8h} + \frac{h}{2} \rightarrow r_m = 9,8 \text{ cm}$$

Damit lassen sich die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  bestimmen:

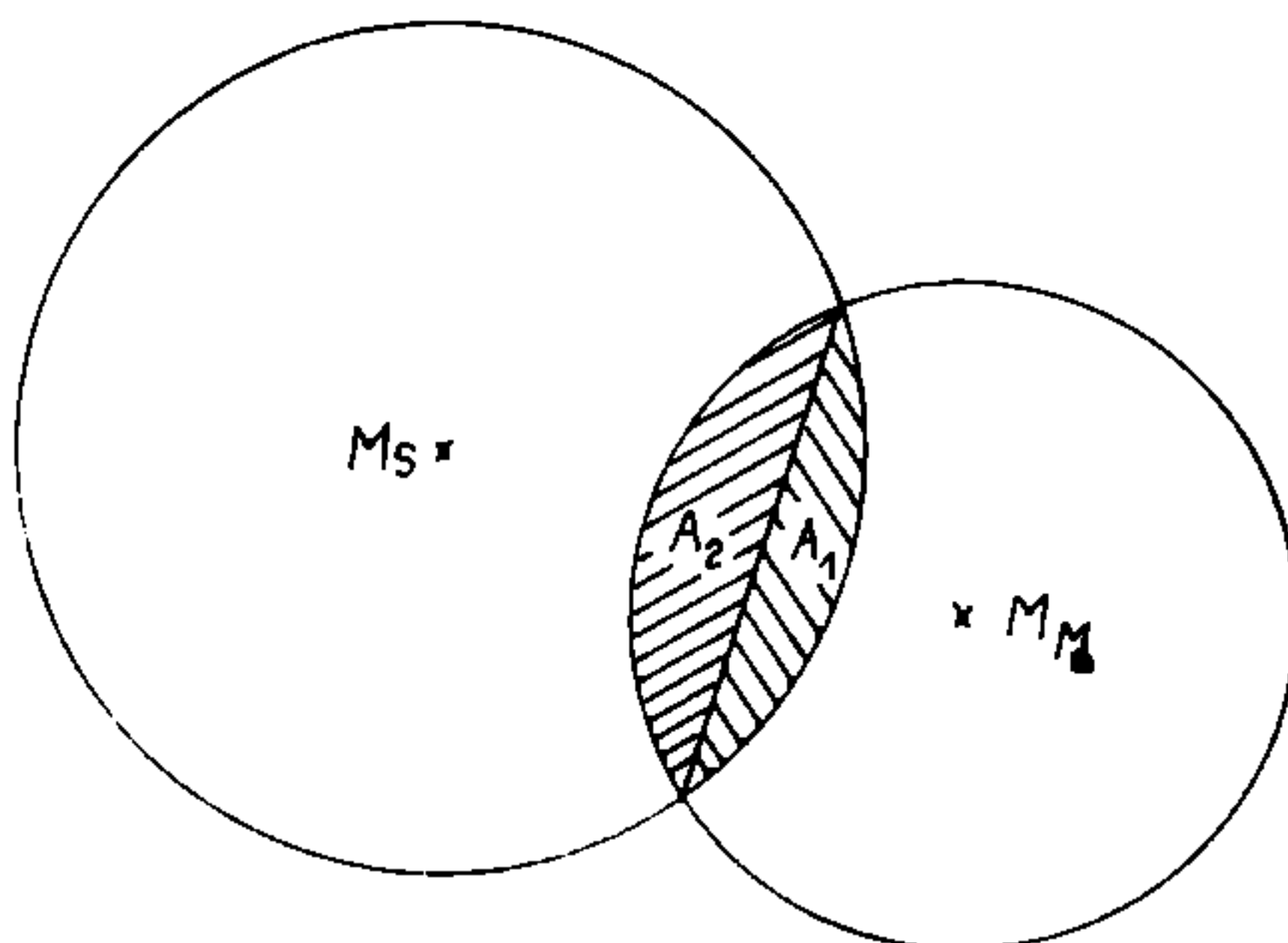
$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2 \cdot r_s} = 0,810 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 54^\circ \rightarrow \alpha = 108^\circ$$

$$\sin \frac{\beta}{2} = \frac{a}{2 \cdot r_m} = 0,828 \rightarrow \frac{\beta}{2} = 56^\circ \rightarrow \beta = 112^\circ$$

Damit lassen sich die Flächen  $A_1$  und  $A_2$  berechnen:

$$A_1 = \left(\frac{\pi \cdot \alpha}{180^\circ} - \sin \alpha\right) \cdot \frac{r_s^2}{2}$$

$$A_2 = \left(\frac{\pi \cdot \beta}{180^\circ} - \sin \beta\right) \cdot \frac{r_m^2}{2}$$



$$A_1 = 4669 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = 4934 \text{ mm}^2$$

Es ergibt sich eine „abgedunkelte“ Fläche  $A' = A_1 + A_2 = 9603 \text{ mm}^2$ .

Die Fläche der vollen Bildscheibe der Sonne beträgt

$$A = \pi \cdot r_s^2 = 31415 \text{ mm}^2.$$

Damit erhält man  $\frac{A'}{A} \cdot 100\% = 30,5\%$ .

Aus dieser Berechnung ergibt sich, daß in Jena eine 30,5%ige Sonnenfinsternis beobachtet wurde.

## Lösungen zu: Zwei Aufgaben für Freunde der Astronomie

▲ 1 ▲ Die angegebene Lösung kann nur eine Näherung sein. Unter Vernachlässigung der Bewegung des Mondes um die Erde ( $360^\circ \cong \approx 29d$ ) erhält man für die Rotation der Erde  $24^h \cong 360^\circ$ . Damit ergibt sich für  $t = 4,9 \text{ s}$  der Winkel  $\alpha = 0,0204^\circ$ . Bei einer mittleren Mondentfernung von  $3,84 \cdot 10^5 \text{ km}$  und bei Vernachlässigung der Mond- und Erdradien (Bezugspunkte befinden sich ja an der Oberfläche der Himmelskörper) kann man ansetzen

$$d = 3,84 \cdot 10^5 \text{ km} \cdot \sin \alpha.$$

$d = 136 \text{ km}$  beträgt der Durchmesser des Ringgebirges. (In der Literatur sind etwa 130 km angegeben.)

▲ 2 ▲ Hier führt eine Verhältnisgleichung zum Ziel. Der wahre Durchmesser des Sonnenfleckes beträgt  $d = \frac{4 \text{ mm}}{200 \text{ mm}} \cdot$

Sonnendurchmesser

$$d = 0,02 \cdot 1,39 \cdot 10^6 \text{ km} = 2,78 \cdot 10^4 \text{ km}.$$

Bei einem Erddurchmesser von  $1,27 \cdot 10^4 \text{ km} = r_E$  erhält man  $d = 2,2 r_E$ . Der angegebene Sonnenfleck hat einen mehr als doppelt so großen Durchmesser wie unsere Erde.

## Lösungen zu: In freien Stunden · alpha-heiter

a) Aus der Zerlegung von 1984 in Primfaktoren  $1984 = 2^6 \cdot 31$  folgt, daß ein Elternteil 31 Jahre alt sein muß (da es ja jünger als 60 Jahre ist). Somit ist das Produkt der Altersangaben in Jahren des anderen Elternteils und des kleinen Bruders  $2^6 = 64$ . Unter den Bedingungen der Aufgabe ist das nur zu erfüllen mit  $64 = 32 \cdot 2$ .

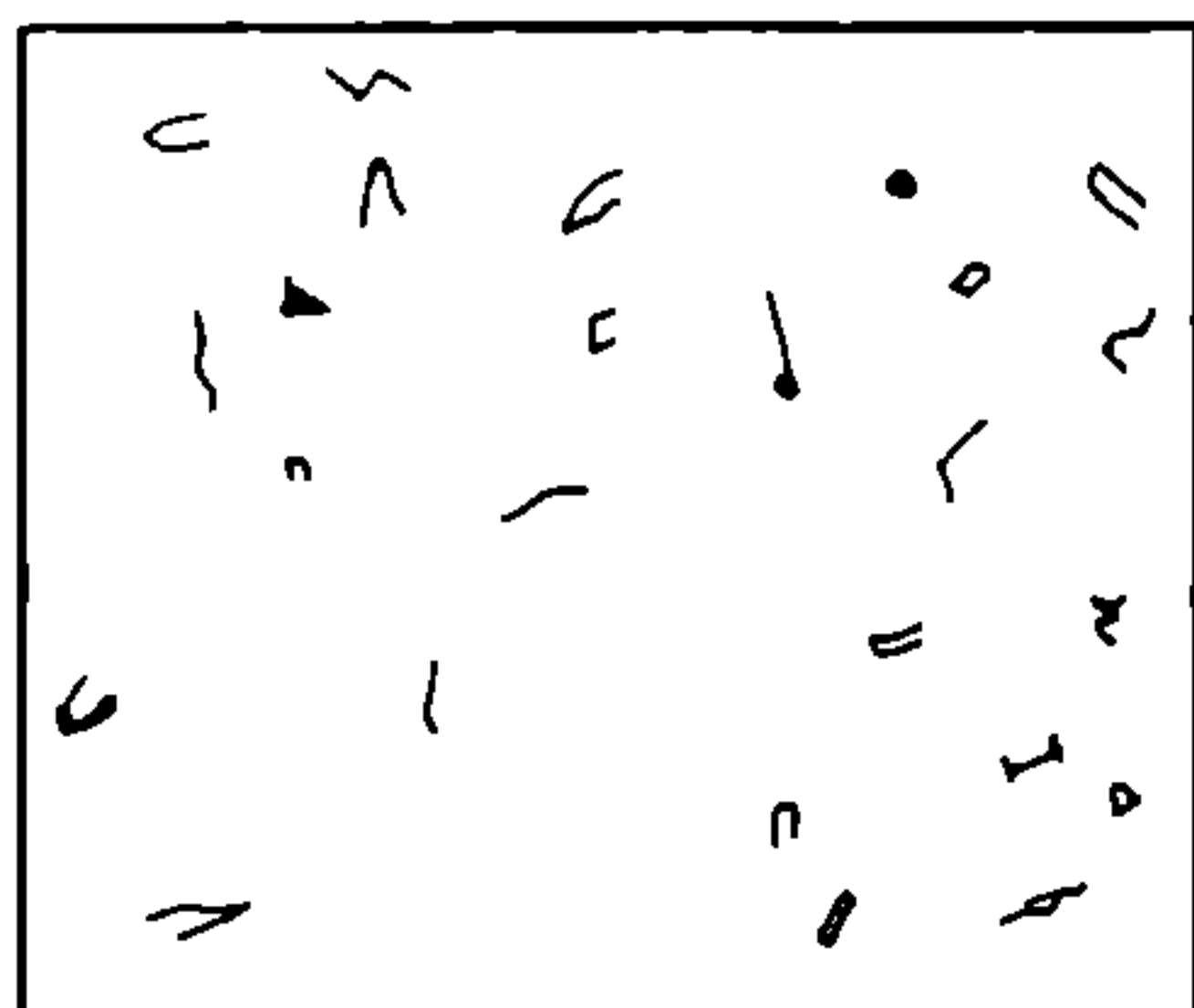
Also sind die Eltern 31 bzw. 32 und der Bruder 2 Jahre alt. Stefan ist damit  $3 + 1 + 3 + 2 + 2 = 11$  Jahre alt.

b) Wegen  $12 = 3 \cdot 4$  muß jede der gesuchten Zahlen sowohl durch 4 als auch durch 3 teilbar sein. Die Teilbarkeit durch 4 verlangt, daß die aus den letzten beiden Ziffern gebildete Zahl durch 4 teilbar ist. Also können rechts an 1985 nur die Ziffern 2 oder 6 angefügt werden. Die Teilbarkeit durch 3 verlangt, daß die Quersumme durch 3 teilbar ist. Somit können links an 19852 (Quersumme: 25) nur die Ziffern 2, 5 oder 8 und bei 19856 (Quersumme: 29) nur die Ziffern 1, 4 oder 7 angefügt werden. Man erhält also die folgenden sechs Zahlen mit den geforderten Eigenschaften: 219852, 519852, 819852, 119856, 419856 und 719856.

c)  $1984 = (1) \cdot (2) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 31$   
Daraus ergibt sich für die beiden Frauen ein Alter von 31 Jahren. Frau Schulzes Töchter zählen 2, 4 und 8 Jahre. Die Kinder von Frau Meier sind 1, 2, 4 und 8 Jahre alt.

d)  $1 + 9 + 8 + 4 = 22$      $1 - 9 + 8 + 5 = 5$   
 $1 \cdot 9 + 8 - 4 = 13$      $1 \cdot 9 - 8 + 5 = 6$   
 $1 + 9 + 8 : 4 = 12$      $1 + 9 - 8 + 5 = 7$   
 $1 \cdot 9 - 8 : 4 = 7$      $1 \cdot 9 + 8 - 5 = 12$   
 $1 + 9 - 8 + 4 = 6$      $1 + 9 + 8 - 5 = 13$   
 $1 \cdot 9 - 8 + 4 = 5$      $1 \cdot 9 + 8 + 5 = 22$

#### Wintersport



#### Silvesterlauf

Weg 1:

$$1984 = 397 + 397 + 397 + 396 + 397$$

Weg 2:

$$1985 = 397 + 397 + 397 + 397 + 397$$

Weg 3:  $1984 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 31 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

Weg 4:  $1985 = 397 \cdot 5$     2    396    397

Weg 4 ist der kürzeste.

2    397    5  
 2    397    397    2  
       2    397    2  
 S  
       2    31    2

#### Nun schlägt's 13

$1 = 3 - 3 : 3 - 3 : 3$   
 $2 = 3 \cdot 3 : 3 - 3 : 3$   
 $3 = 3 + 3 + 3 - 3 - 3$   
 $4 = 3 \cdot 3 : 3 + 3 : 3$   
 $5 = 3 + 3 : 3 + 3 : 3$   
 $6 = 3 \cdot 3 \cdot 3 : 3 - 3$   
 $7 = 3 \cdot 3 - 3 + 3 : 3$   
 $8 = 3 + 3 + 3 - 3 : 3$   
 $9 = 3 + 3 + 3 + 3 - 3$   
 $10 = 3 + 3 + 3 + 3 : 3$   
 $11 = 3 \cdot 3 + 3 - 3 : 3$   
 $12 = 3 + 3 \cdot 3 + 3 - 3$   
 $13 = 3 \cdot 3 + 3 + 3 : 3$

#### Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. A. S. Solodownikow, Heft 6/84

Löst man die Teilsysteme

$$\begin{aligned} x + y + 1 &= 0 & 2x - y - 4 &= 0, \\ x - 2y - 2 &= 0, & x - 2y - 2 &= 0, \\ x + y + 1 &= 0, & 2x - y - 4 &= 0, \end{aligned}$$

so findet man die drei Punkte

$$(0, -1), (1, -2), (2, 0),$$

von denen nur der zweite und der dritte alle gegebenen Ungleichungen erfüllen. Das bedeutet: Ecken des Bereiches  $\kappa$  sind die Punkte  $A_1(1, -2)$  und  $A_2(2, 0)$ .

#### Lösung zu: Wo steckt der Fehler? (Heft 6/84)

Die Lösung ist deswegen falsch, weil die gegebene Gleichung nicht nach  $x$  aufgelöst wurde!

Nach dem Ausmultiplizieren ist weiter zu rechnen:

$$\begin{aligned} abx^2 - x^2 &= ab - 1 \\ x^2(ab - 1) &= ab - 1 \\ x^2 &= 1 \text{ und: } x = \pm 1 \end{aligned}$$

#### Lösungen zum alpha-Wettbewerb Heft 2/1984

Ma 5 ■ 2435 Es sei  $\overline{xy}$  die einzufügende zweistellige natürliche Zahl in dekadischer Schreibweise; dann gilt

$$\begin{array}{r} 198xy3 \\ -19xy83 \\ \hline 360 \end{array}$$

Wir rechnen:

$$\begin{aligned} 0 + 3 &= 3, \\ 6 + 8 &= 14, \text{ also } y = 4, \\ 3 + 4 + 1 &= x, \text{ also } x = 8. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \text{Probe: } 198843 \\ -198483 \\ \hline 360 \end{array}$$

Ma 5 ■ 2436

$$\begin{aligned} 18 \text{ dm} &= 3 \cdot 5 \text{ dm} + 1 \cdot 3 \text{ dm}, \\ 19 \text{ dm} &= 5 \cdot 5 \text{ dm} - 2 \cdot 3 \text{ dm}, \\ 20 \text{ dm} &= 4 \cdot 5 \text{ dm}, \\ 21 \text{ dm} &= 3 \cdot 5 \text{ dm} + 2 \cdot 3 \text{ dm}, \\ 22 \text{ dm} &= 5 \cdot 5 \text{ dm} - 1 \cdot 3 \text{ dm}. \end{aligned}$$

Ma 5 ■ 2437 Angenommen, die zweite Aussage von Klaus ist wahr; dann heißt die gesuchte Zahl 8. Somit ist die erste Aussage von Regina wahr, die zweite falsch.

Angenommen, die erste Aussage von Klaus ist wahr. Dann könnte nur 9 die gesuchte Zahl sein. In diesem Fall wären beide Aussagen von Regina wahr, was der Voraussetzung widerspricht. Somit gibt es genau eine Lösung. Die zu erratende Zahl heißt 8.

Ma 5 ■ 2438 Da die Zahlen durch 2 teilbar sein sollen, muß die letzte Grundziffer 2, 6 oder 8 lauten, da die Grundziffer 4 nicht vorkommen soll. Auch die Grundziffer 0 entfällt, da eine solche Zahl rückwärts gelesen nicht dreistellig wäre. Es sind folgende Zahlen näher zu untersuchen: 202, 212, 232, 252, 262, 272, 282, 292, 606, 616, 626, 636, 656, 676, 686, 696, 808, 818, 828, 838, 858, 868, 878, 898. Für diese Zahlen treffen die geforderten Eigenschaften sämtlich zu.

Ma 5 ■ 2439 Aus dem dritten Satz der Aufgabe folgt: Mario, aber auch Roger heißen mit dem Zunamen weder Müller noch Krause. Aus dem vierten Satz der Aufgabe folgt: Mario hat auch nicht den Zunamen Schneider, also den Zunamen Meier. Somit hat Roger den Zunamen Schneider. Aus dem vierten Satz der Aufgabe folgt weiter: Jürgen heißt mit dem Zunamen weder Schneider noch Krause. Folglich hat Jürgen den Zunamen Müller, Uwe den Zunamen Krause.

Ma 5 ■ 2440 Die anfangs gekauften Flaschen „Berliner Pilsner“ bringen als Pfandgeld den Betrag von 9,00 M. Wegen  $900 = 5 \cdot 158 + 110$  erhält dieser Kunde beim zweiten Mal 5 Flaschen Bier, und es verbleiben ihm 1,10 M. Für diese 5 Flaschen Bier erhält er 1,50 M Pfandgeld; er verfügt beim dritten Mal über 2,60 M. Dafür erhält er 1 Flasche Bier; ihm verbleiben 1,02 M. Für diese Flasche erhält er 0,30 M Pfandgeld. Ihm verbleiben 1,32 M, und er hat 36 Flaschen Bier insgesamt erworben.

Ma 6 ■ 2441 Angenommen, Dirk hat  $x$  Flaschen gesammelt; dann haben Steffen  $3x$  Flaschen, Klaus  $4x$  Flaschen und Frank  $(4x - 22)$  Flaschen gesammelt. Das sind zusammen  $(12x - 22)$  Flaschen. Nun gilt  $12x - 22 = 194$ ,  $12x = 216$ ,  $x = 18$ . Dirk hat 18, Steffen 54, Klaus 72 und Frank 50 Flaschen gesammelt.

Ma 6 ■ 2442 Angenommen, Frank ist  $n$  Jahre alt. Dann ist Gerd  $2 \cdot n$  und seine Mutter  $6 \cdot n$  Jahre alt, und es gilt  $6n = n + 25$ ,  $5n = 25$ , also  $n = 5$ . Frank ist 5 Jahre, Gerd 10 Jahre, ihre Mutter 30 Jahre alt.

Ma 6 ■ 2443 Aus (1) folgt:  $z \leq 45$ ; aus (2) folgt  $10 \leq a + b \leq 18$ , wobei  $a$  die Grundziffer der Zehner- und  $b$  die der Einerstelle ist. Aus (3) folgt  $b$  gleich 1, 3, 5, 7 oder 9. Aus (4) folgt  $a$  gleich 2, 4, 6 oder 8. Auf Grund dieser Angaben existiert genau eine Zahl; sie lautet 29. Herr L. wurde 29 Jahre alt.

Ma 6 ■ 2444 Eine Zahl endet genau dann auf Null, wenn sie durch  $10 = 2 \cdot 5$  teilbar ist. Das gegebene Produkt

$$\begin{aligned} &1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 2 \\ &\quad \cdot 5 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13 \end{aligned}$$

enthält genau zweimal den Faktor 5 und zehnmal den Faktor 2; somit endet das Produkt auf genau zwei Nullen. Folglich sind die Ergebnisse von Rita und Sven falsch. Da 10000 ohne Rest durch 16 teilbar ist ( $10000 : 16 = 625$ ), muß Tonis Ergebnis  $6227029800$  überprüft werden. Da  $29800 : 16 = 16 \cdot 1862 + 8$  gilt, trifft die Teilbarkeit durch 16 nicht zu. Folglich ist auch das Ergebnis von Toni falsch.

Ma 6 ■ 2445 Aus  $70 + 7 + 7 = 84$  und  $84 : 3 = 28$  folgt, daß jeder der drei Söhne 28 Weinfässer erhielt. Aus

$$7 \cdot \frac{2}{2} + 7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{21}{2} \text{ und } \frac{21}{2} : 3 = \frac{7}{2} \text{ folgt,}$$

daß jeder der drei Söhne 7 halbvollte Weinfässer erhielt. Hierfür gibt es genau drei

Möglichkeiten für eine gleichwertige Aufteilung:

- (1) 1 halbvoller und 3 volle Fässer, also noch 24 leere Fässer;
- (2) 3 halbvoller und 2 volle Fässer, also noch 23 leere Fässer;
- (3) 5 halbvoller und 1 volles Faß, also noch 22 leere Fässer.

Es seien  $A, B, C$  die Namen der drei Brüder; die nachstehende Tabelle enthält die möglichen Aufteilungen:

| Name | Anzahl der Fässer<br>leer | voll | halbvoll |
|------|---------------------------|------|----------|
| $A$  | 24                        | 3    | 1        |
| $B$  | 24                        | 3    | 1        |
| $C$  | 22                        | 1    | 5        |
| $A$  | 24                        | 3    | 1        |
| $B$  | 23                        | 2    | 3        |
| $C$  | 23                        | 2    | 3        |

Bei beiden möglichen Aufteilungen erhalten genau zwei Söhne gleichviel volle, halbvoller und leere Fässer.

Ma 7 ■ 2446 Angenommen, in dem Haus gibt es  $x$  Wohnungen; dann gilt

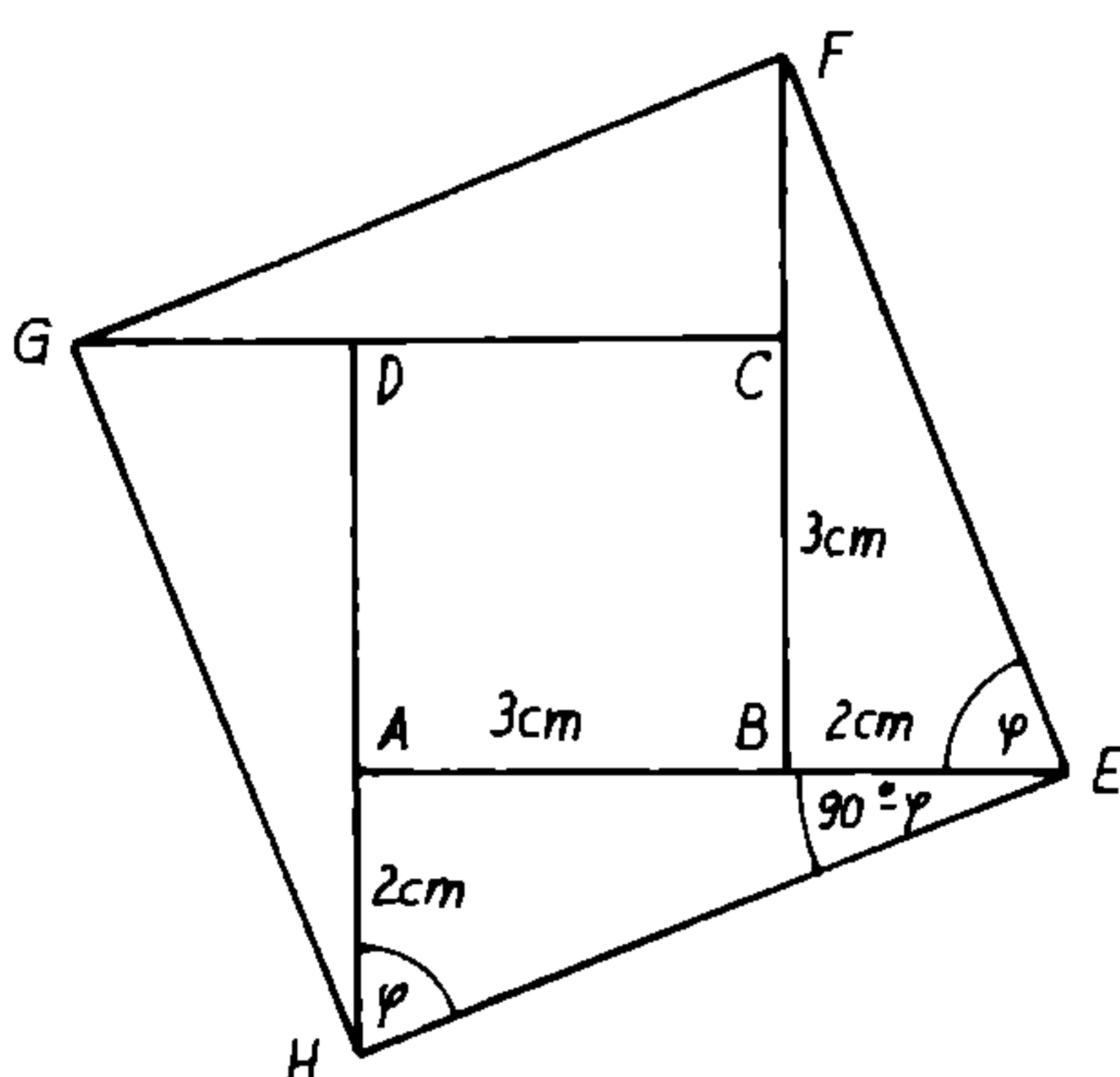
$20 \leq x \leq 70$ . In diesem Haus gibt es  $\frac{x}{12}$

4-Zimmer-Wohnungen, also  $\frac{11}{12}x$  Wohnungen mit zwei und drei Zimmern. Angenommen, es gibt  $y$  3-Zimmer-Wohnungen; dann gibt es  $2 \cdot y$  2-Zimmer-Wohnungen. Zusammen sind es  $3 \cdot y$  Zwei- und Drei-Zimmer-Wohnungen. Deshalb gibt es  $\frac{11 \cdot x}{12 \cdot 3} = \frac{11x}{36}$  3-Zimmer-Wohnungen. Somit ist  $x$  ein Vielfaches von 36. Wegen  $20 \leq x \leq 70$  gibt es genau eine Lösung, nämlich  $x = 36$ . In diesem Haus gibt es drei 4-Zimmer-, elf 3-Zimmer- und 22 Zweizimmer-Wohnungen.

Ma 7 ■ 2447 Der Flächeninhalt des Vierecks  $EFGH$  beträgt

$$A = \left( 3^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 \right) \text{ cm}^2 = 29 \text{ cm}^2.$$

Die vier Dreiecke  $\triangle HEA$ ,  $\triangle EFB$ ,  $\triangle FGC$ ,  $\triangle GHD$  sind auf Grund ihrer Konstruktion kongruent. Es habe Winkel  $\angle AHE$  die Größe  $\varphi$ , also Winkel  $\angle AEH$  die Größe  $90^\circ - \varphi$ . Dann hat der Winkel  $\angle FEB$  die Größe  $\varphi$  und somit der Winkel  $\angle HEF$  die



Größe  $90^\circ$ . Somit ist das Viereck  $EFGH$  ebenfalls ein Quadrat.

Ma 7 ■ 2448 Es gilt

$$\left( 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \right) \text{ cm}^2 = 39 \text{ cm}^2$$

für die abgeschnittenen Flächenstücke. Das übrig gebliebene Flächenstück hat somit einen Flächeninhalt von  $(8^2 - 39) \text{ cm}^2 = 25 \text{ cm}^2$ .

Ma 7 ■ 2449 Angenommen, Frau  $A$  kaufte  $a$  Stück Butterkuchen, Frau  $B$   $b$  Stück Bienenstich, Frau  $C$   $c$  Brötchen. Dann kaufte Frau  $A$  noch  $(c + 7)$  Brötchen und  $(b - 1)$  Stück Bienenstich, Frau  $B$  noch  $(a + 3)$  Stück Butterkuchen und  $(c + 2)$  Stück Brötchen, Frau  $C$  noch  $(b + 2)$  Stück Bienenstich und  $(a + 1)$  Stück Butterkuchen. Das sind zusammen  $(3a + 3b + 3c + 14)$  Stück Backwaren. Nun gilt  $3a + 3b + 3c + 14 = 32$ ,  $3a + 3b + 3c = 18$ ,  $a + b + c = 6$ . Wegen  $a < b < c$  existiert genau eine Lösung, nämlich  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $c = 3$ .

Frau  $A$  kaufte 1 Stück Butterkuchen, 1 Stück Bienenstich und 10 Brötchen; Frau  $B$  kaufte 4 Stück Butterkuchen, 2 Stück Bienenstich und 5 Brötchen; Frau  $C$  kaufte 2 Stück Butterkuchen, 4 Stück Bienenstich und 3 Brötchen.

Ma 8 ■ 2450 Es sei  $n$  eine beliebige natürliche Zahl, dann läßt sich eine ungerade durch 3 teilbare Zahl mit  $3(2n + 1)$  darstellen. Vermehrt man diese um 9, so erhält man  $3(2n + 1) + 9$ . Die Behauptung lautet nun  $6 \mid 3(2n + 1) + 9$ . Wir formen den Term  $3(2n + 1) + 9$  um, so daß sich  $6(n + 2)$  ergibt. Es gilt für alle  $n$ :  $6 \mid 6(n + 2)$  und damit auch  $6 \mid 3(2n + 1) + 9$ .

Vermindert man  $3(2n + 1)$  um 9, so erhält man  $3(2n + 1) - 9$ . Man muß  $n > 0$  voraussetzen, da sonst der Term keine natürliche Zahl ergäbe. Nun formt man wieder um und erhält  $6(n - 1)$ . Es gilt  $6 \mid 6(n - 1)$ , folglich gilt  $6 \mid 3(2n + 1) - 9$ . Damit ist die Behauptung bewiesen.

Ma 8 ■ 2451 Es sei  $a$  eine beliebige natürliche Zahl. Dann läßt sich die Summe aus sieben aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen wie folgt darstellen:

$$a + a + 1 + a + 2 + a + 3 + a + 4 + a + 5 + a + 6.$$

Wir fassen zusammen und erhalten  $7a + 21$ . Es gilt  $7a + 21 = 7(a + 3)$  und  $7 \mid 7(a + 3)$ , w. z. b. w.

Ma 8 ■ 2452 Es sei  $a$  die Kantenlänge des Würfels und  $d$  der Durchmesser der Kugel, dann gilt für die Volumina:

$$V_W = a^3 \text{ bzw. } V_K = \frac{1}{6} \pi d^3.$$

Da die Raumdiagonale des Würfels gleich dem Durchmesser der Kugel ist, also  $e = a\sqrt{3} = d$  gilt,

$$\text{ist } V_K = \frac{1}{6} \pi (a\sqrt{3})^3 = \frac{1}{2} \pi a^3 \sqrt{3}.$$

Nun bilden wir die Proportion

$$V_W : V_K = x : 1,$$

$$a^3 : \frac{\pi}{2} a^3 \sqrt{3} = x : 1,$$

$$1 : \frac{\pi \sqrt{3}}{2} = x : 1,$$

$$x = \frac{2}{\pi \sqrt{3}}$$

$$x \approx 0,37.$$

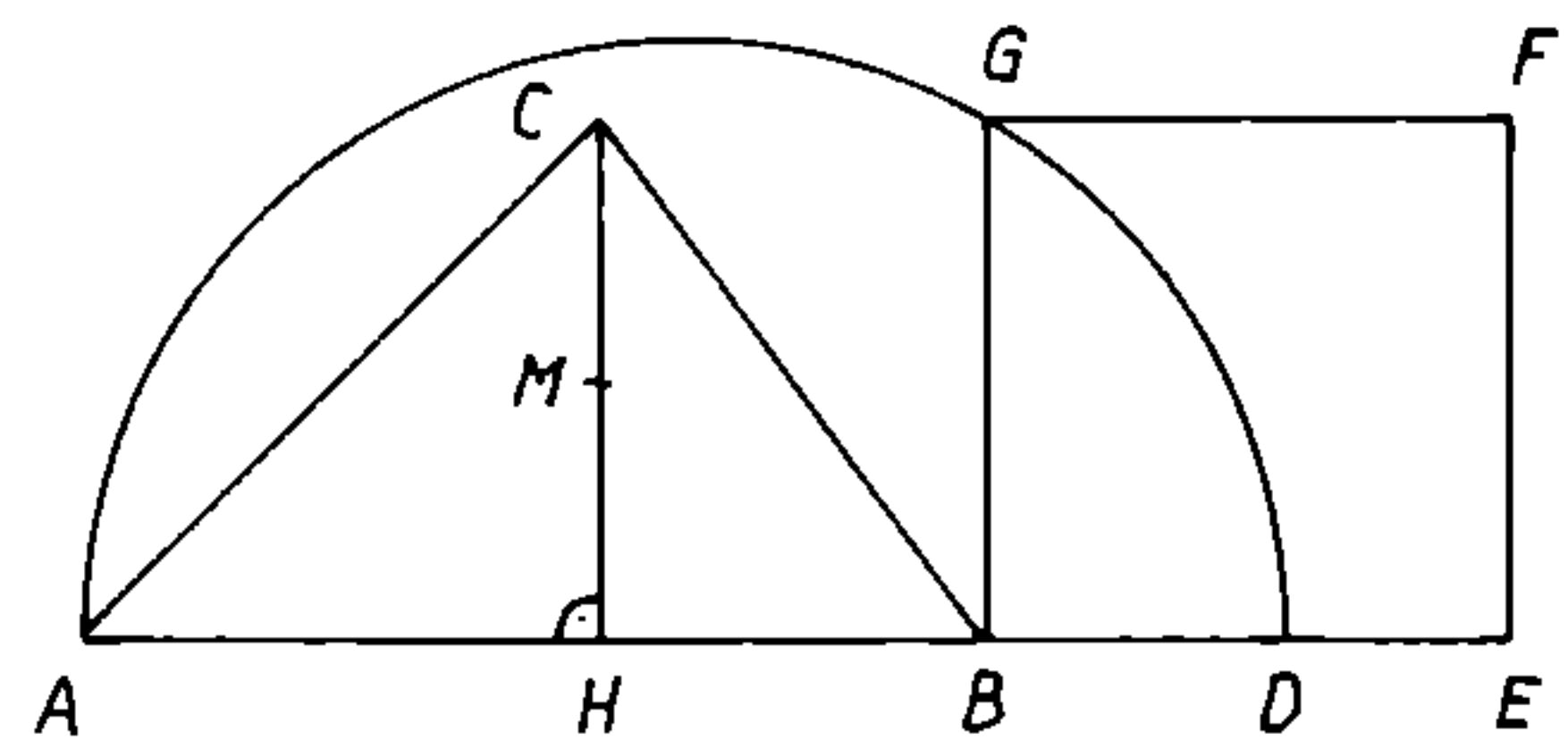
Der Würfel nimmt etwa 37% des Volumens der Kugel ein.

Ma 8 ■ 2453 In dem Dreieck  $ABC$  konstruieren wir die Höhe  $\overline{CH}$  auf  $\overline{AB}$ . Wir konstruieren ferner den Mittelpunkt  $M$  von  $\overline{CH}$ . Für den Flächeninhalt  $A_D$  des Dreiecks  $ABC$  gilt dann

$$A_D = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CH} \text{ und wegen}$$

$\frac{1}{2} \cdot \overline{CH} = \overline{HM}$  auch  $A_D = \overline{AB} \cdot \overline{HM}$ . Wir verlängern  $\overline{AB}$  über  $B$  hinaus um  $\overline{HM}$  bis  $D$  und konstruieren über  $\overline{AD}$  als Durchmesser einen Halbkreis. Das in  $B$  auf  $\overline{AD}$  errichtete Lot schneide diesen Halbkreis in  $G$ . Nach dem Höhensatz gilt dann  $\overline{AB} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{HM} = \overline{BG}^2$ .

Wir konstruieren ein Quadrat  $BEFG$ , das  $\overline{BG}$  zur Quadratseite hat.



Ma 9 ■ 2454

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= 2\sqrt[3]{x} \\ x\sqrt{x} &= 8x \\ x^3 &= 64x^2, \\ x^3 - 64x^2 &= 0, \\ x^2(x - 64) &= 0, \\ x_1 &= 0, \\ x_2 &= 64. \end{aligned}$$

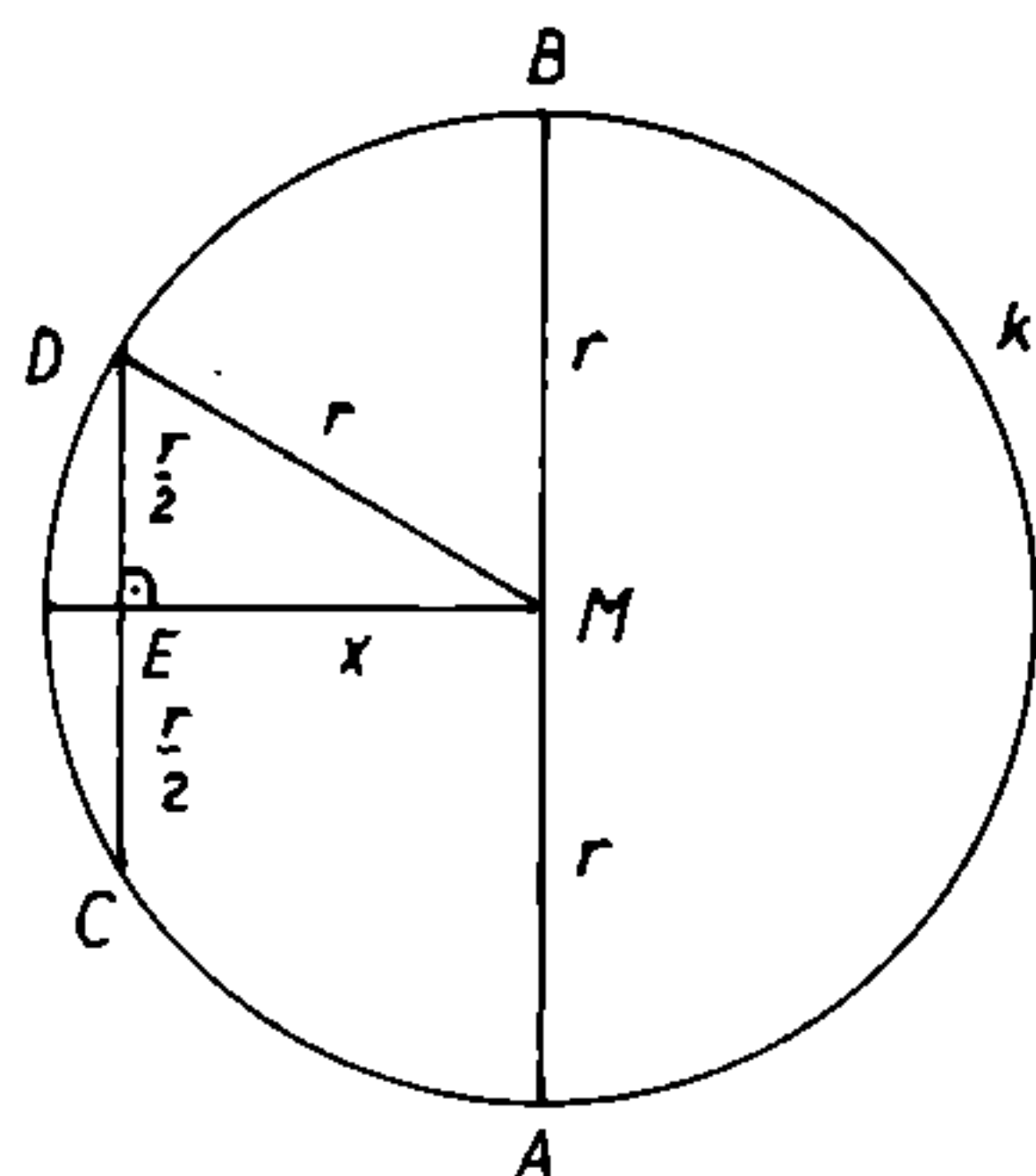
Nur für  $x = 0$  und  $x = 64$  wird  $\sqrt{x} = 2\sqrt[3]{x}$  wahr.

Ma 9 ■ 2455 Weil  $101 \mid 91809$  gilt, ist Franks Aussage (1) falsch, folglich muß Franks Aussage (2) wahr sein. Weil  $9 \mid 27$  gilt, ist Ernsts Aussage (1) falsch, folglich muß Ernsts Aussage (2) wahr sein. Da die Zahl durch 101 und durch 9 teilbar ist, ist sie durch 909 teilbar. Daraus folgt, daß Doras Aussage (1) falsch und somit ihre Aussage (2) wahr ist. Nun ist  $909 = 101 \cdot 3 \cdot 3$ . Wegen Doras Aussage (2) und Ernsts Aussage (2) kann nur noch der Faktor 101 auftreten.  $909 \cdot 101 = 91809$  entfällt wegen Franks Aussage (1).  $909 \cdot 101^2$  entfällt, da  $909 \cdot 101^2 > 9 \cdot 10^6 > 1 \cdot 10^6$ . Die gesuchte Zahl lautet 909.

MA 9 ■ 2456 Angenommen, es waren  $x$  Banknoten zu 10 M,  $y$  zu 20 M und  $z$  zu 50 M; dann gilt  $10x + 20y + 50z = 500$  und  $x + y + z = 16$ . Daraus folgt weiter  $x + 2y + 5z = 50$  und  $x + y + z = 16$ . Durch Subtraktion der zweiten von der ersten Gleichung erhält man  $y + 4z = 34$ ,

also  $y = 34 - 4z$ . Ferner gilt  $x < y < z$ . Wegen  $4 \cdot 9 = 36 > 34$  gilt  $z \leq 8$ . Für  $z = 8$  gilt  $y = 34 - 32$ , also  $y = 2$  und somit  $x = 6$ , was wegen  $6 > 2$  der Voraussetzung  $x < y$  widerspricht. Für  $z = 7$  gilt  $y = 34 - 28$ , also  $y = 6$  und somit  $x = 3$ . Für  $z \leq 6$  existieren keine weiteren Lösungen, da in diesem Fall  $y = 34 - 4z \geq 10$ , also  $y > z$  wäre, was der Voraussetzung  $y < z$  widerspricht. Herr A. erhielt 3 Banknoten zu 10 M, 6 zu 20 M und 7 zu 50 M ausgezahlt.

Ma 9 ■ 2457 Skizze:



Im rechtwinkligen Dreieck EMD gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$x^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2,$$

$$x^2 = r^2 - \frac{r^2}{4},$$

$$x^2 = \frac{3}{4} \cdot r^2,$$

$$x = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{3}.$$

Der Abstand beträgt  $\frac{r}{2} \cdot \sqrt{3}$ .

Ma 10/12 ■ 2458 Man multipliziert die Ungleichung zunächst mit 4 und erhält

$$4\sqrt{a} + 4\sqrt{b} \geq a + 1 + 4b + 4$$

und nach weiterer Umformung

$$0 \geq a - 4\sqrt{a} + 4 + 4b - 4\sqrt{b} + 1 \quad \text{bzw.}$$

$$0 \geq (\sqrt{a} - 2)^2 + (2\sqrt{b} - 1)^2. \quad (1)$$

Nun gilt

$$(\sqrt{a} - 2)^2 \geq 0 \quad \text{und} \quad (2\sqrt{b} - 1)^2 \geq 0. \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$(\sqrt{a} - 2)^2 = 0 \quad \text{und} \quad (2\sqrt{b} - 1)^2 = 0, \quad \text{d.h.}$$

$$\sqrt{a} - 2 = 0 \quad \text{und} \quad 2\sqrt{b} - 1 = 0 \quad \text{bzw.}$$

$$a = 4 \quad \text{und} \quad b = \frac{1}{4}.$$

Nur die Zahlen  $a = 4$  und  $b = \frac{1}{4}$  erfüllen die vorgelegte Ungleichung.

Probe:

$$\sqrt{4} + \sqrt{\frac{1}{4}} \geq \frac{4+1}{4} + \frac{1}{4} + 1$$

$$2,5 \geq 2,5.$$

Ma 10/12 ■ 2459 Der erste Summand dieser Summe, der auf die Ziffer 0 endet, ist  $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ . Damit endet jeder weitere Summand von  $6!$  bis  $100!$  auf die Ziffer Null.

Wir brauchen also nur die Summe  $1! + 2! + 3! + 4!$  zu berechnen. Diese ist  $1 + 2 + 6 + 24 = 33$ . Damit endet die gegebene Summe auf die Ziffer 3.

Ma 10/12 ■ 2460 Es seien  $a$  und  $b$  die Maßzahlen der Längen der Katheten und  $c$  die Maßzahl der Länge der Hypotenuse eines solchen rechtwinkligen Dreiecks; dann gilt

$$a + b + c = \frac{a \cdot b}{2} \quad \text{und} \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Daraus folgt

$$a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{a \cdot b}{2},$$

$$a^2 + b^2 = \left[ \frac{a \cdot b}{2} - (a + b) \right]^2,$$

$$a^2 + b^2 = \frac{a^2 b^2}{4} - ab(a + b) + a^2 + 2ab + b^2$$

und wegen  $a \neq 0$  gilt

$$0 = \frac{ab^2}{4} - b(a + b) + 2b$$

und wegen  $b \neq 0$  gilt

$$0 = \frac{ab}{4} - (a + b) + 2, \quad \text{also}$$

$$0 = ab - 4a - 4b + 8;$$

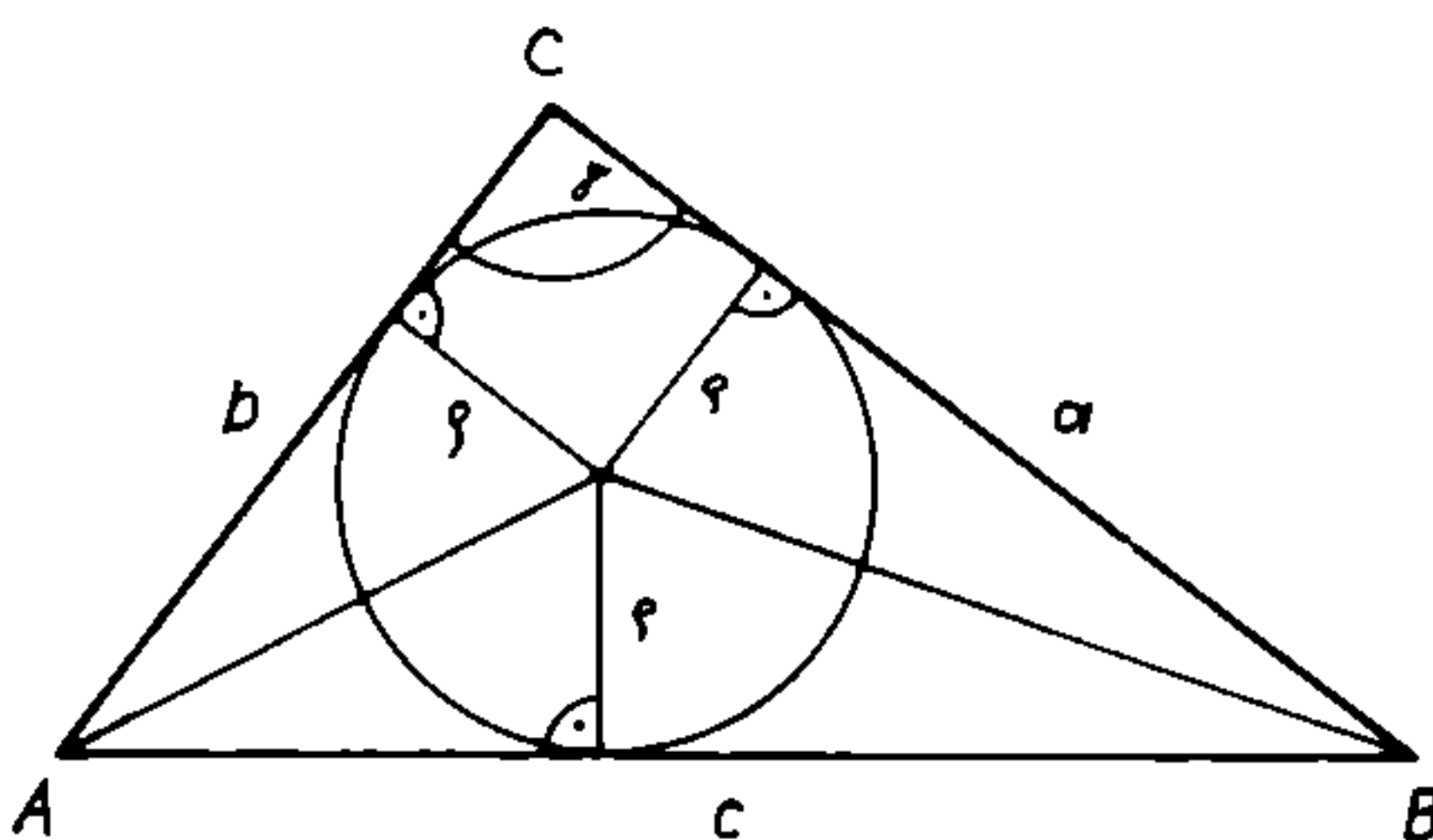
$$ab - 4a = 4b - 8,$$

$$a = \frac{4b - 8}{b - 4} = 4 + \frac{8}{b - 4}.$$

Nur für  $b$  gleich 5, 6, 8, 12 erhalten wir positive ganzzahlige Lösungen für  $a$ , und zwar 12, 8, 6, 5. Es existieren genau vier solcher rechtwinkligen Dreiecke. Für die Maßzahlen ihrer Seitenlängen gilt:

| $a$ | $b$ | $c$ |
|-----|-----|-----|
| 12  | 5   | 13  |
| 8   | 6   | 10  |
| 6   | 8   | 10  |
| 5   | 12  | 13  |

Ma 10/12 ■ 2461 Skizze:



$M$  sei der Mittelpunkt des Inkreises. Dann gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks  $ABC$

$$A_{ABC} = A_{ABM} + A_{BCM} + A_{CAM}.$$

Wegen  $A = \frac{g \cdot h}{2}$  gilt dann weiter

$$A_{ABC} = \frac{Q}{2} \cdot c + \frac{Q}{2} \cdot b + \frac{Q}{2} \cdot a;$$

$$A_{ABC} = \frac{Q}{2} (a + b + c);$$

$$A_{ABC} = \frac{Q}{2} \cdot u. \quad (1)$$

Außerdem gilt

$$A_{ABC} = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \sin \gamma. \quad (2)$$

Setzt man (2) in (1) ein, so erhält man

$$\frac{Q}{2} \cdot u = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \sin \gamma$$

bzw.  $Q \cdot u = a \cdot b \cdot \sin \gamma$  und somit

$$\sin \gamma = \frac{Q \cdot u}{a \cdot b}, \quad \text{was zu zeigen war.}$$

Ph 6 ■ 156  $40\,200\,000\,000 : 300\,000 = 134\,000\,000$

Das Licht braucht 134 000 000 Sekunden.

Ein Jahr hat

$$3\,600 \cdot 24 \cdot 365 = 31\,536\,000 \text{ Sekunden.}$$

$134\,000\,000 : 31\,536\,000$  sind 4 Jahre und 7 856 000 Sekunden.

Ein Tag hat  $24 \cdot 3\,600 = 86\,400$  Sekunden.

$7\,856\,000 : 86\,400$  sind 90 Tage und

80 000 Sekunden.  $80\,000 : 3\,600$  sind

22 Stunden und 800 Sekunden.

Das Licht braucht 31 536 000 Sekunden bzw. 4 Jahre, 90 Tage und 22 Stunden.

Ph 7 ■ 157 Geg.:  $d = 40 \text{ mm} = 0,04 \text{ m}$

$$V = 4,53 \text{ m}^3$$

$$t = 1 \text{ h} = 3\,600 \text{ s}$$

Ges.: a)  $v_1$  b)  $v_2$

a) Beim Durchfluß durch Röhren gilt die Gleichung  $V = Avt$ .

Dann ist

$$v_1 = \frac{V}{A \cdot t} \quad \text{mit} \quad A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4},$$

$$v_1 = \frac{4V}{\pi \cdot d^2 \cdot t},$$

$$v_1 = \frac{4,53 \text{ m}^3 \cdot 4}{3,14 \cdot 0,04^2 \text{ m}^2 \cdot 3\,600 \text{ s}},$$

$$v_1 \approx 1 \text{ m/s}.$$

Die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers beträgt rund 1 m/s.

b) Nach dem Durchflußgesetz gilt die Gleichung  $A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$ .

Dann ist

$$v_2 = \frac{A_1 \cdot v_1}{A_2} \quad \text{mit} \quad A_2 = \frac{\pi d^2}{16},$$

$$v_2 = \frac{\pi d^2 \cdot 16}{4 \cdot \pi d^2} \cdot v_1 = 4v_1 = 4 \text{ m/s}.$$

Die Strömungsgeschwindigkeit beträgt dann 4 m/s.

Ph 8 ■ 158 Geg.:  $l_0 = 15 \text{ m}$  Ges.:  $\vartheta_{\max}$

$$\Delta l = 45 \text{ mm} = 0,045 \text{ m}$$

$$\vartheta_0 = 12^\circ \text{C}$$

$$\alpha = 0,000\,012\,1/\text{grd}$$

$$\vartheta_{\max} = \vartheta_0 + \Delta \vartheta$$

Aus  $\Delta l = l_0 \cdot \alpha \cdot \Delta \vartheta$  folgt

$$\Delta \vartheta = \frac{\Delta l}{l_0 \cdot \alpha},$$

$$\Delta \vartheta = \frac{0,045 \text{ m} \cdot \text{grd}}{15 \text{ m} \cdot 0,000\,012} = 250^\circ \text{C},$$

$$\vartheta_{\max} = 12^\circ \text{C} + 250^\circ \text{C} = 262^\circ \text{C}.$$

Während des Brandes betrug die Maximaltemperatur des Trägers  $262^\circ \text{C}$ .

Ph 9 ■ 159 a) Die Lstg. berechn. sich aus

$$p = \frac{Q_{\text{ngs}}}{\eta}. \quad \text{b) Die Leistung beträgt } 4,23 \text{ kW.}$$

c) Der Stromkreis muß mit 20 A abgesichert werden.

Ph 10/12 ■ 160 Der Anstiegswinkel der schiefen Ebene beträgt  $6,8^\circ$ .

## Vorbildliche Hilfe

Unser Dank gilt den Verlagen, die Bücher im Werte von 1 500 M für die fleißigsten Wettbewerbsteilnehmer zur Verfügung stellten: BSB B. G. Teubner, Leipzig; VEB Fachbuchverlag Leipzig; Kinderbuchverlag Berlin; Militärverlag der DDR, Berlin; Sportverlag, Berlin; VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin; Volkseigener Verlag Volk und Wissen, Berlin; Urania-Verlag, Leipzig.

# alpha- Wettbewerb

## Kollektive Beteiligung am alpha-Wettbewerb 1983/84

Pablo-Neruda-OS, Ahlbeck; Fr.-Engels-OS, Haus der Jungen Pioniere, beide Altenburg; E.-Schneller-OS, Alt-Sühkow; W.-Pieck-Schule, Anklam; OS G. Titow, Arenshausen; OS Asbach; Haus der Jungen Pioniere, Aschersleben; E.-Thälmann-OS, Bad Bibra; Haus der Jungen Pioniere Th. Müntzer, Bad Blankenburg; S.-Rädel-OS, Bad Gottleuba; E.-Thälmann-OS, Bad Langensalza; R.-Schwarz-OS, Bad Liebenstein; O.-Grotewohl-OS, A.-Saefkow-OS, M.-Poser-OS, Station Jg. Techn. u. Naturf., alle Bad Salzungen; R.-Siewert-OS, Bad Suderode; 2. OS H. Beimler, Bärenklau; 25. OS F. Mehring, 26. OS, M.-A.-Nexö-OS, 39. OS E. Schönherr, Spezialistenlager (Berlin-Pankow), alle Berlin; OS Bernsbach; C.-Zetkin-OS, Bischofferode, OS F. Schiller, Bleicherode; F.-Weineck-OS, Blumberg; OS Blumenthal; A.-Bebel-OS, Boizenburg; OS W. Komarow, Boxberg; Dinter-OS, Borna; H.-Beimler-OS, Braunsdorf; K.-B.-OS, Bredenfelde; OS B. Brecht, Brehme; W.-Seelenbinder-OS, Breitungen; OS Brandshagen; OS Freundschaft u. Frieden, Brieselang; OS Dr. Th. Neubauer, Brotterode; M.-Poser-OS, Bürgel; W.-Pieck-OS, Burow; W.-Estel-OS, Buttlar; TOS Büttelstedt; W.-Pieck-OS, Coswig; Station Jg. Naturf. u. Techn. Cottbus; H.-Wildner-OS, Dahlen; OS B. Kühn, Dambbeck; M.-Gorki-OS, Dermbach; OS Dersekow; K.-Niederkirchner-OS, Deutschenbora; OS Diesdorf; OS K. Kollwitz, OS Makarenko, beide Dingelstädt; K.-Niederkirchner-OS, Domersleben; OS A. Matrossow, Dorndorf; O.-Grotewohl-OS, Dreitzsch; Pionierpalast, 106. OS, beide Dresden; OS Dürröhrsdorf; 2. OS W. Meck, Eberswalde; OS Fr. Engels, Effelder; EOS Egeln; W.-Pieck-OS, Eichhof; Geschw.-Scholl-OS, Eisenach; 1. OS R. Arnstadt, Elsterwerda; E.-Weinert-OS, Empfertshausen; H.-Joachim-OS, Espenhain; Haus d. Jungen Pioniere, Falkensee; Th.-Müntzer-OS, Fambach; E.-Weinert-OS, Flessau; B.-Brecht-OS, Floh; Zentrale OS, Frankenheim; Spezialschule C. F. Gauß, Frankfurt (Oder); BBS ESW, AG Naturw., Freital; OS Friedeburg; Schulkombinat Friedersdorf; OS I, Friedland; OS H. Günther, Fürstenwalde; Dr.-R.-Sorge-OS, Kreisklub Jg. Math., beide Gadebusch; K.-Marx-OS, Gebesee; R.-Arnstadt-OS, Geisa; J.-Gagarin-OS, Geithain; E.-Hartsch-OS, Gersdorf; Kalinin-OS, Geschwenda; OS Gielow; K.-Neuhof-OS, Glienicke; K.-Gräpler-OS, Gnoißen; 7. OS, Görlitz; W.-Husemann-OS, Goldberg; OS J. Gagarin, Grabowhöhe; Kreisklub Jg. Math. Gräfenhainichen; OS J. Gagarin, Greußen; OS H. Beimler, Greußen; OS W. Seelenbinder, Gröden; A.-Walther-OS, Gröditz; OS Cl. Zetkin, Groitzsch; OS Großbodungen; OS F. Engels, Großeuchnick; OS K. Gottwald, Großrückerswalde; Pestalozzischule Großschönau; J.-Gagarin-OS, Grünhain; Th.-Müntzer-OS, Gumpelstadt; Station Jg. Naturf. u. Techn. Guben; M.-Gorki-OS, Hainichen; W.-Pieck-OS, Hagenow; Station Jg. Naturf. u. Techn., M.-Engels-Schule, beide Halberstadt; OS f. Körperbehinderte, Halle; Station Jg. Techn. u. Naturf. Halle-Neustadt; OS Hammerbrücke; OS Haynrode; OS B. Koenen, Hedersleben; Schule d. DSF, Heiligengrabe; EOS W. Pieck, Heiligenstadt; P.-Schreier-OS, Hennigsdorf; OS Th. Müntzer, Hermannsdorf; 2. OS Fr. Engels, Herzberg; M.-Gorki-OS, Hillersleben; Goethe-OS, Hohenleipisch; OS Horka; 21. OS Hoyerswerda; Goethe-OS, Ilsenburg; G.-Dimitroff-OS, Immelborn; G.-Ewald-OS, Ivenack; A.-Becker-OS, Jatznick; E.-Weinert-OS, Jocketa; F.-Engels-Schule, Kaltennordheim; E.-Weinert-OS,

Kamenz; OS A. Becker, Kamsdorf; Cl.-Zetkin-OS, Kandelin; H.-Beimler-OS, Karbow; H.-Menzel-OS, E.-Thälmann-OS, W.-Verner-OS, Wl.-Komarow-OS, E.-Schneller-OS, S.-Wenig-OS, Haus der Jungen Pioniere J. Gagarin, alle Karl-Marx-Stadt; OS Cl. Zetkin, Kaulsdorf; OS Kelbra; OS Kemberg; OS Kirchworbis; G.-Eisler-OS, Kleinmachnow; OS Th. Müntzer, Klettenberg; H.-Matern-OS, Klietz; OS E. Thälmann, Klosterfelde; W.-Seelenbinder-OS, Könitz; OS N. Ostrowski, Krebes; Bundesgymnasium Krems (Österreich); Th.-Neubauer-OS, Kieselbach; OS I, Laage; OS R. Breitscheid, Latdorf; OS Lauscha; R.-Teichmüller-OS, Leimbach; E.-Thälmann-OS, OS IV, K.-Liebknecht-OS, EOS, 4. OS J. C. Fuhlrott, alle Leinefelde; Haus d. Jungen Pioniere A. Saefkow, OS O. Schön, beide Leipzig; E.-Thälmann-OS, Leutenberg; OS Leutersdorf; W.-Pieck-OS, Lichte; E.-Thälmann-OS, Limbach; OS Linda; Pestalozzi-OS, Löbau; OS W. Wallstab, Löderburg; W.-Seelenbinder-OS, Lössau; Station Jg. Naturf. u. Techn. Lütz; Haus d. Jungen Pioniere Th. Körner, Ludwigslust; Fr.-L.-Jahn-OS, Lübbtheen; F.-Dzierzynsky-OS, Magdala; Haus d. Jungen Pioniere, Magdeburg; 7. OS M. I. Kalinin, Meiningen; II. OS, AG Mengenlehre, Mieste; OS Mittelherwigsdorf; OS Mittelstille; OS H. Danz, Möser; Kinderheim Munzig; OS J. Fučík, Naundorf; W.-Bykowski-Schule, Neetzow; OS O. Grotewohl, Neukloster; R.-Hallmeyer-OS, Neundorf; H.-Beimler-OS, Fr.-Schiller-OS, beide Neustadt; H.-Beimler-OS, Neustrelitz; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Niederorschel; W.-Pieck-OS, Niederwiesa; P.-Voitel-OS, Niederwürschnitz; OS E. Weinert, Oberschönau; OS Ockrilla; OS W. Seelenbinder, Oechsen; OS Fr. Weineck, Oranienbaum; Pestalozzischule Oschatz; EOS K. Marx, Oschersleben; OS Osterzienburg; W.-Pieck-OS, H.-Matern-OS, beide Osterwieck; Station Jg. Naturf. u. Techn., EOS, beide Parchim; Zentrale OS, Petersdorf; OS Dr. Th. Neubauer, Pfaffschwenda; OS Pfiffelbach; M.-Zimmering-OS, Pima; Herbert-OS, Plauen; MOS, Plessa; OS E. Schneller, Polleben; A.-Bekker-OS, Prenzlau; OS Pritzerbe; OS II Goetheschule, Station Jg. Techn. u. Naturf. Kreisklub Math., beide Pritzwalk; B.-Koenen-Schule, Kreisklub Math., beide Quedlinburg; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Rackwitz; Neue OS, OS Pestalozzi, beide Radebeul; H.-Zille-OS, Radeburg; OS G. Eisler, Rücknitz; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Raguhn; Geschw.-Scholl-OS, Rathenow; E.-Weinert-OS, Reichenbach; J.-Gagarin-OS, OS U. Steinhauer, beide Ribnitz-Damgarten; H.-Matern-OS, Spezialschule Fr. Engels, beide Riesa; J.-Curie-OS, Röbel; J.-Curie-OS, Ronneburg; Fr.-Schmenkel-OS, Roskow; Ziolkowski-OS, Rossdorf; 34. OS M. Reichpietsch, 72. OS, Haus der Jungen Pioniere, alle Rostock; W.-Pieck-OS, Rotta; OS Rotterode; OS O. Grotewohl, Rudolstadt; OS Saal; E.-Weinert-OS, Saalfeld; T.-Bunke-OS, Saßnitz; Station Jg. Naturf. u. Techn., Sangerhausen; OS H. Matern, Schernberg; OS M. Gorki, Schkölen; OS Schlottwitz; OS J. G. Seume, OS K. Marx, 4. OS, alle Schmalkalden; OS Schneidlingen; OS H. Beimler, Schönhausen; EWOS, Schollene; Haus d. Jungen Pioniere W. Sonnenberg, Schönebeck; OS Kuba, Schorssow; OS Fr. Engels, Schwallungen; OS M. May, Sebnitz; OS K. Uhlich, Kreisklub Math., Senftenberg; Fr.-Reuter-OS, Siedenbollentin; OS Sohländ; OS W. Pieck, OS Glückauf; beide Sondershausen; OS A. Becker, OS K. Marx, beide Spremberg; K.-Liebknecht-OS, Stadtlengsfeld; J.-Fučík-OS, Steinbach; OS E. Thälmann, Steinbach-Hallenberg; R.-Luxemburg-OS, Steinsdorf; A.-Becker-OS, Stralendorf; O.-Grotewohl-OS, Dr.-S.-Allende-OS, beide Stralsund; O.-Telfe-OS, Straßgräbchen; 12. OS Dr. R. Sorge, 11. OS A. S. Schumawzow, OS Fr. Köhler, alle Suhla; H.-Rieke-Schule, Tangerhütte; OS E. Schneller, Taubenheim; OS G. Eisler, OS K. Nie-

## Eine Aufgabe von Prof. Dr.

## A. S. Solodownikow

Lomonossow-Universität Moskau

▲ 2520 ▲ Man finde sämtliche Ecken des durch das Ungleichungssystem

$$\begin{aligned}x + y + 1 &\geq 0, \\x - 2y - 2 &\geq 0, \\2x - y - 4 &\geq 0\end{aligned}$$

definierten Bereiches  $\kappa$ .

## Wo steckt der Fehler?

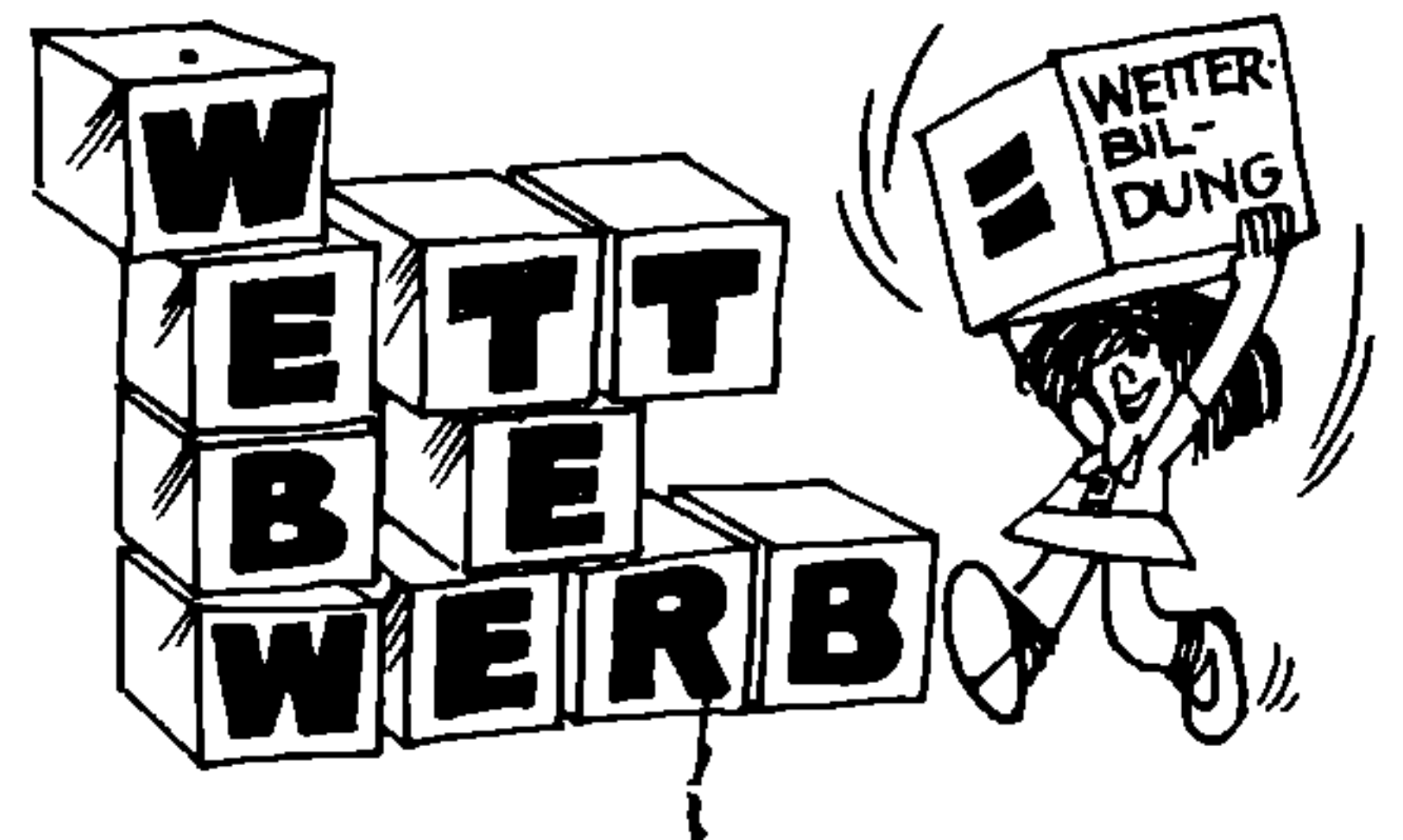
Löse die Gleichung:  $\frac{a-x}{1-ax} = \frac{1-bx}{b-x}$

Man rechnet:

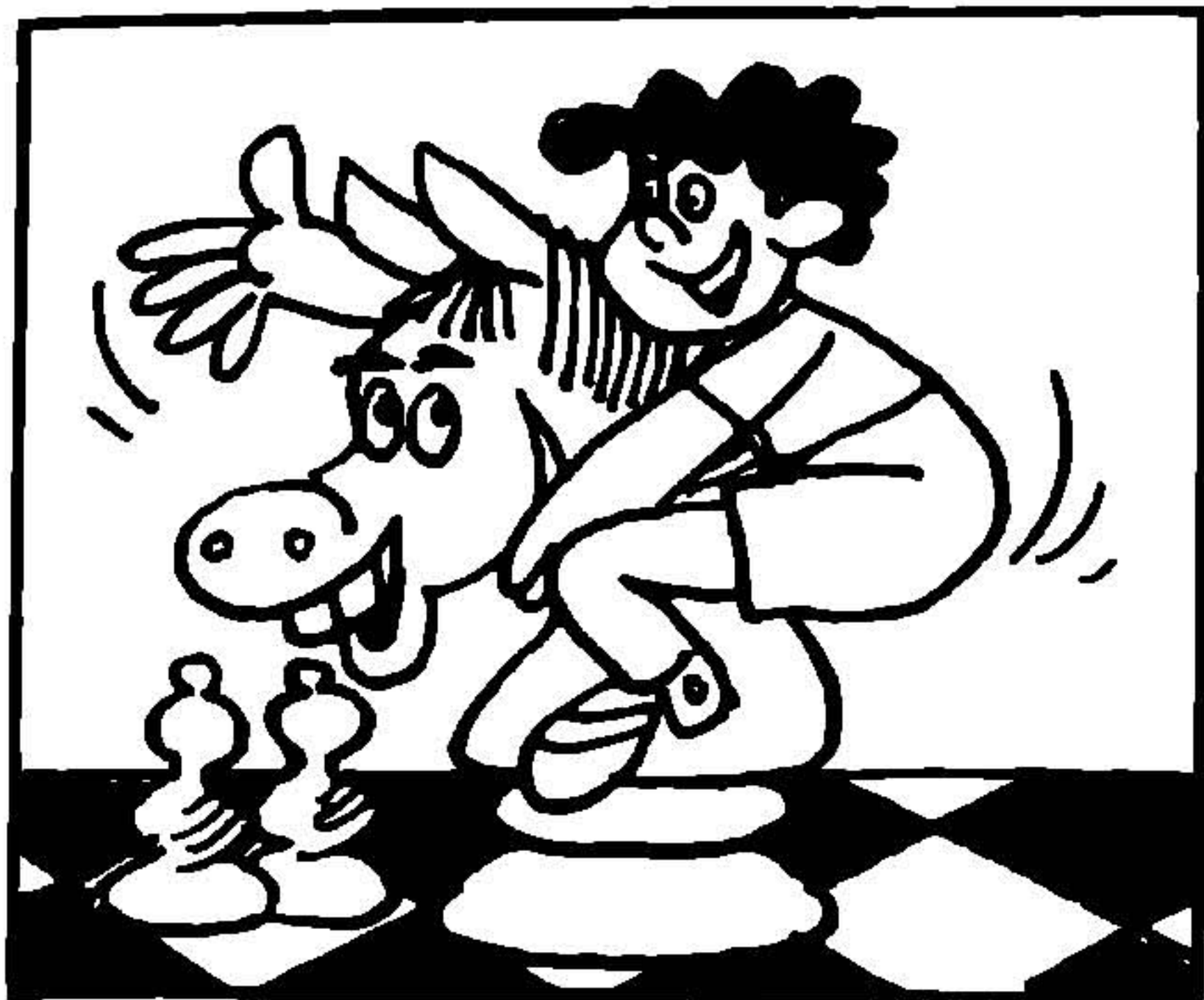
$$\begin{aligned}(a-x)(b-x) &= (1-ax)(1-bx) \\ab - ax - bx + x^2 &= 1 - bx - ax + abx^2 \\x^2 &= 1 + abx^2 - ab \\x^2 - 1 &= ab(x^2 - 1) \\also \quad ab &= 1\end{aligned}$$

Ist die Lösung richtig?

Aus: Lietzmann, Wo steckt der Fehler?  
Mitgeteilt und mit Lösungen versehen  
von Ing. A. Körner, Leipzig



derkirchner, beide Teterow; K.-Liebknecht-OS, Teuchern; Fr.-Mehring-OS, Tiefenort; E.-Schneller-OS, Töplitz; OS W. Pieck, Trusetal; A.-Bebel-OS, A.-Nitz-OS, Goetheschule, E.-Welk-OS, alle Ueckermünde; H.-Beimler-OS, Unterbreizbach; A.-Hennecke-OS, Untermaßfeld; E.-Schneller-OS, Urnshausen; OS J. G. Seume, Vacha; OS Vitte; alpha-Club Vitzsburg; A.-Bebel-OS, Vogelsang; R.-Luxemburg-OS, Waldau; Th.-Müntzer-OS, Walsleben; Goetheschule, Waren; OS L. Fünberg, Wegeleben; OS Wernshausen; OS Wesenberg; E.-Thälmann-OS, Weinböhla; OS Weißenborn-Lüderode; OS I, Weißenfels; Cl.-Zetkin-OS, Wiehe; H.-Rau-OS, Wildau; OS H. Matern, Wippendorf; Station Jg. Techn. u. Naturf. Kreisklub Math., OS IV, beide Wittstock; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Wohlmirstedt; OS H. Beimler, Wolfen; Zentralschule Wolkenburg; Mathematik-Lager, Lenin-OS, OS H. Werner, alle Worbis; OS Wülknitz; H.-Eisler-OS, Wusterhusen; OS Wustermark; OS H. Jacobi, Zella-Mehlis; Station Jg. Naturf. u. Techn. Zernsdorf; 9. OS Zittau; OS A. C. Sandino, Zöblitz; OS K. F. Wander, Zörbig; Goethe-OS, Zossen; OS Zschornowitz



# alpha- Schachwettbewerb 1984

Auch 1984 ruft *alpha* alle Schachfreunde zur Teilnahme an einem Lösungswettbewerb auf!

Wenn der eine oder der andere vielleicht auch nicht alle Schachaufgaben lösen kann, so ist dennoch seine Teilnahme, und seine Meinung über die Schwierigkeit der Aufgaben, sehr erwünscht. Es sind acht Schachaufgaben von unterschiedlicher Schwierigkeit zu lösen. Die jeweilige Punktzahl ist bei den Aufgaben mit angegeben. In allen acht Aufgaben beginnt Weiß und setzt trotz bester Gegenwehr von Schwarz in der geforderten Zügezahl matt. Alle Teilnehmer, die die volle Punktzahl erreichen, erhalten eine Urkunde. Unter ihnen werden auch Bücher verlost. Des weiteren werden die Namen von etwa 20 Einsendern veröffentlicht, die alle Aufgaben vorbildlich gelöst haben. Unter allen anderen Teilnehmern, die zumindest eine Aufgabe richtig gelöst haben, werden auch Bücher verlost.

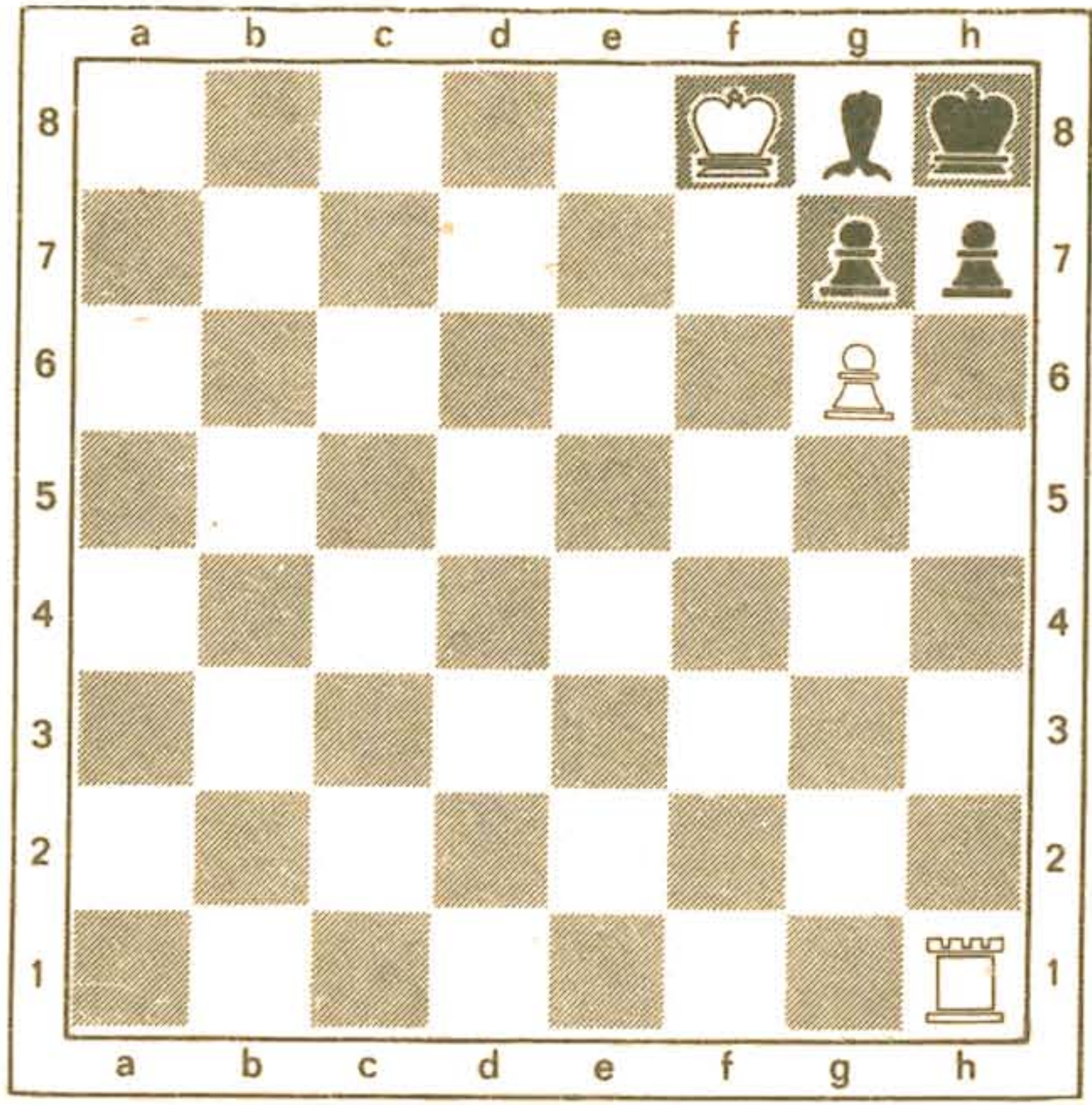
Teilnahmeberechtigt sind alle *alpha*-Leser. Als vollständig gilt die Lösung, wenn die wesentlichen Abspiele bis zum Matt angegeben sind.

Die Einsendungen der Lösungen (jeweilige Aufgaben-Nummer angeben) sind bitte bis zum 1. März 1985 unter Angabe von Name, Vorname und Alter zu richten an

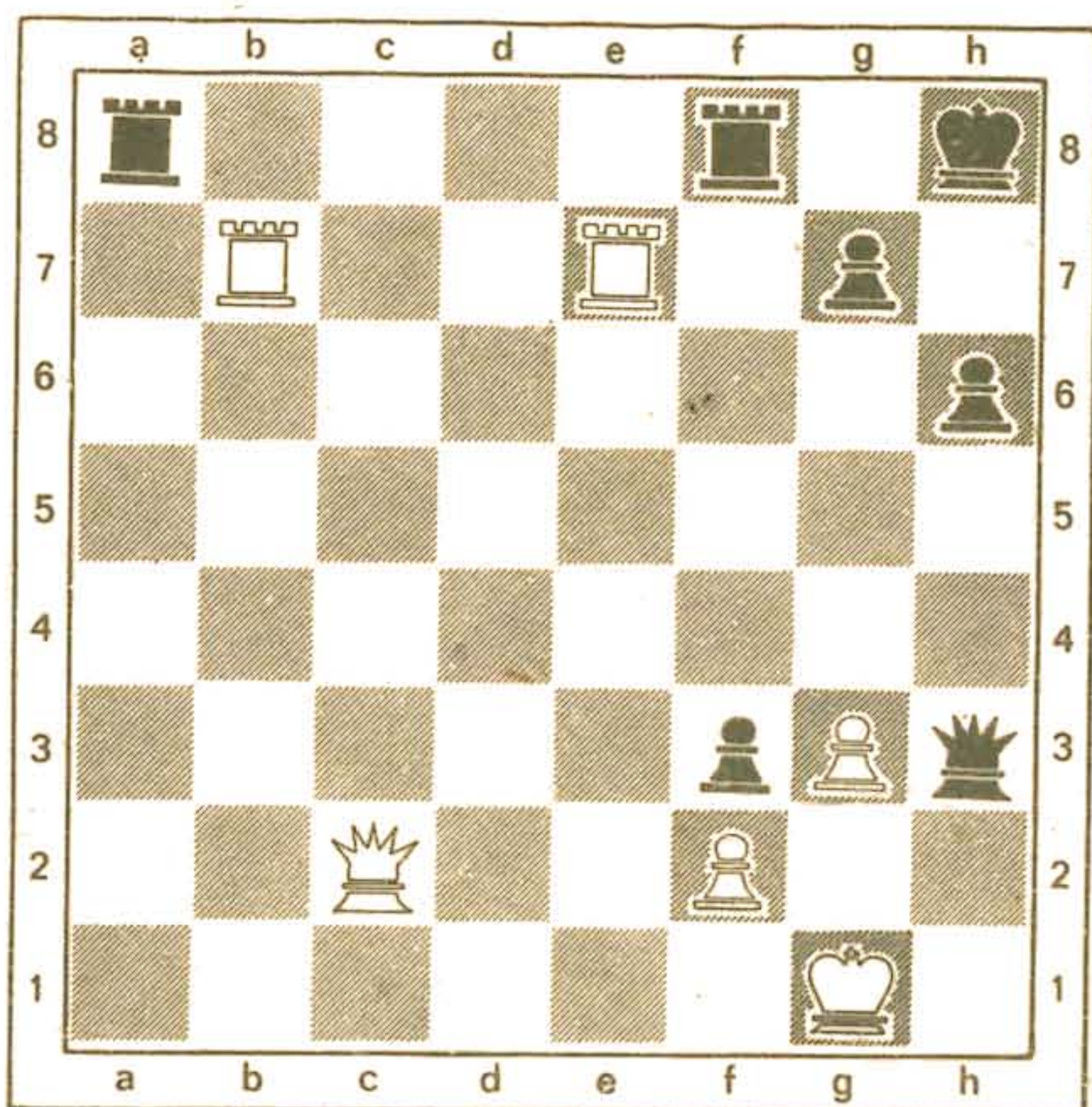
Redaktion alpha  
7027 Leipzig  
PSF 14.

Die Lösungen sowie die Gewinner werden in *alpha* 4/1985 veröffentlicht.  
J. Lehmann/H. Rüdiger

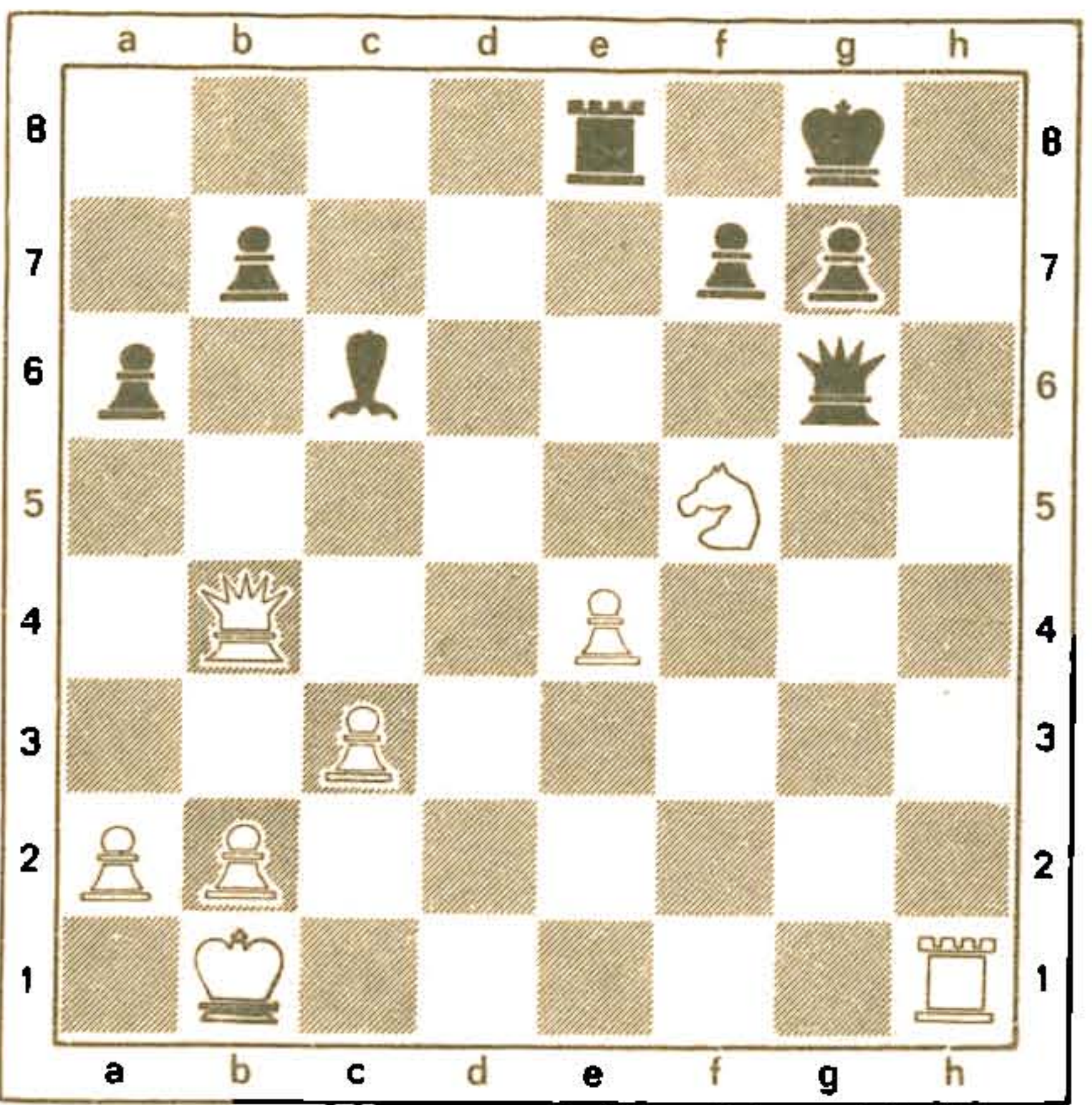
Wer einem Schachspieler schweigend zusehen kann, ist wahrhaftig ein überlegener Mann.  
Arabisches Sprichwort



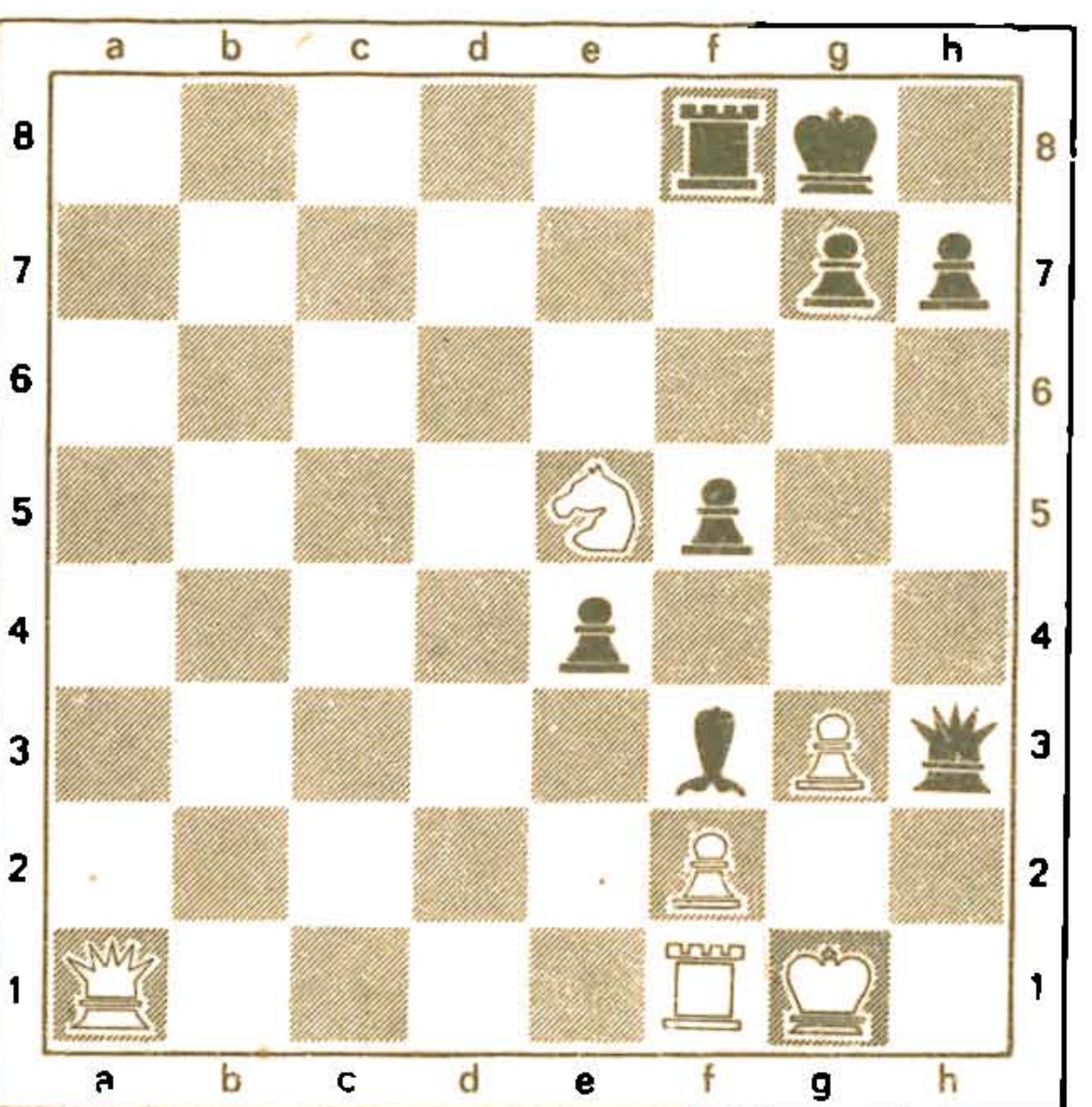
Nr. 1 Matt in zwei Zügen 2 Punkte



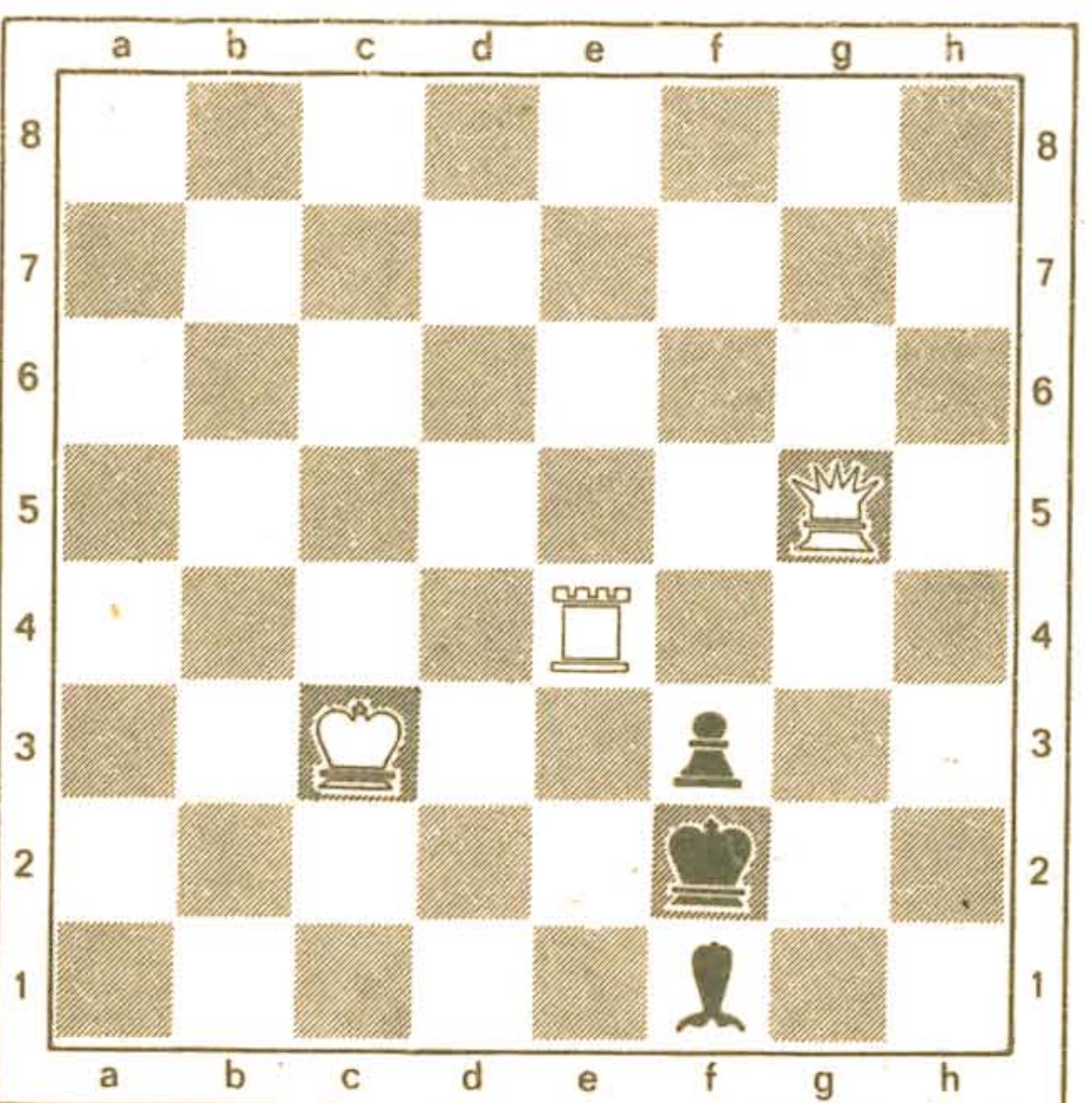
Nr. 5 Matt in vier Zügen 4 Punkte



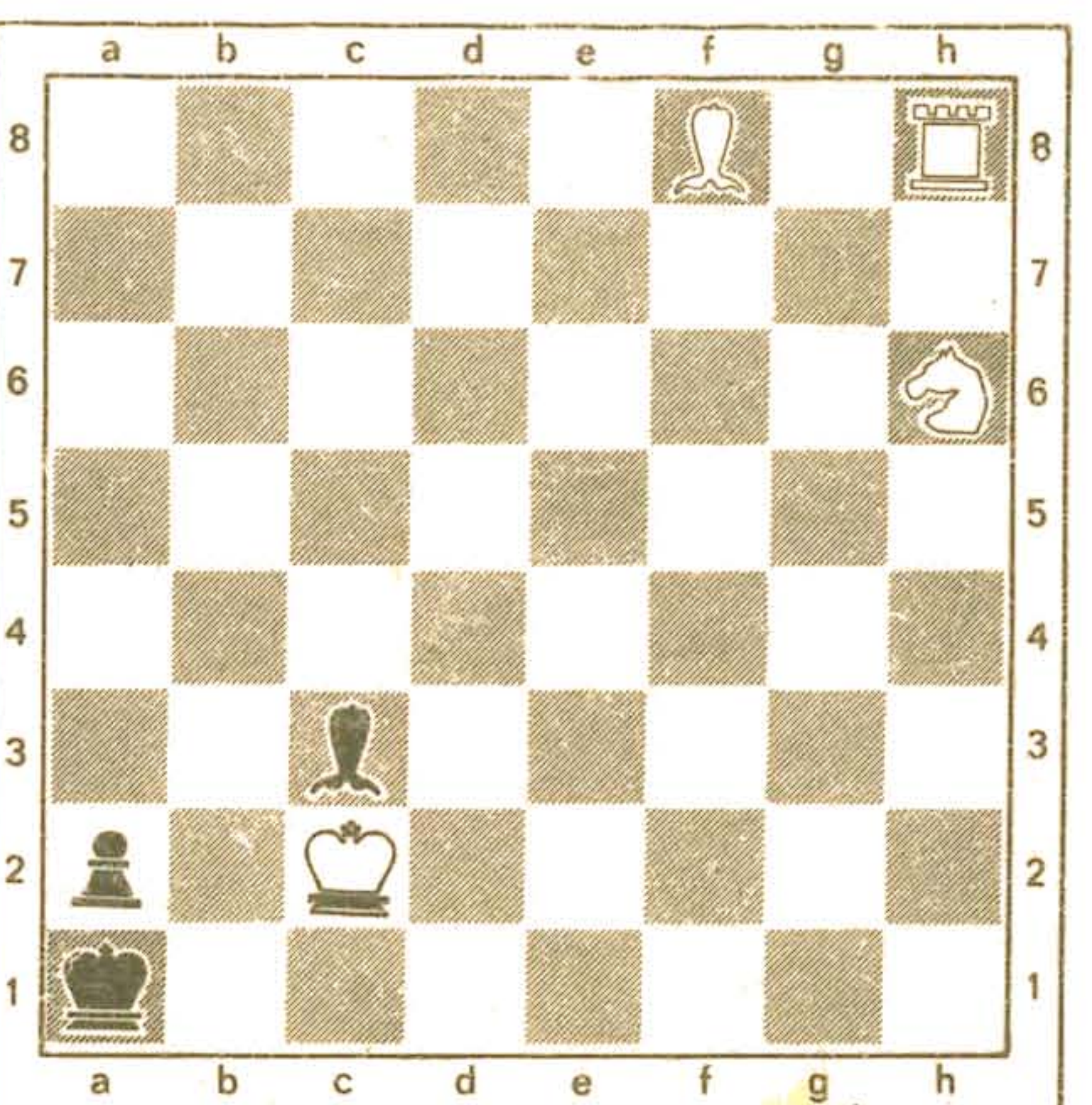
Nr. 2 Matt in zwei Zügen 2 Punkte



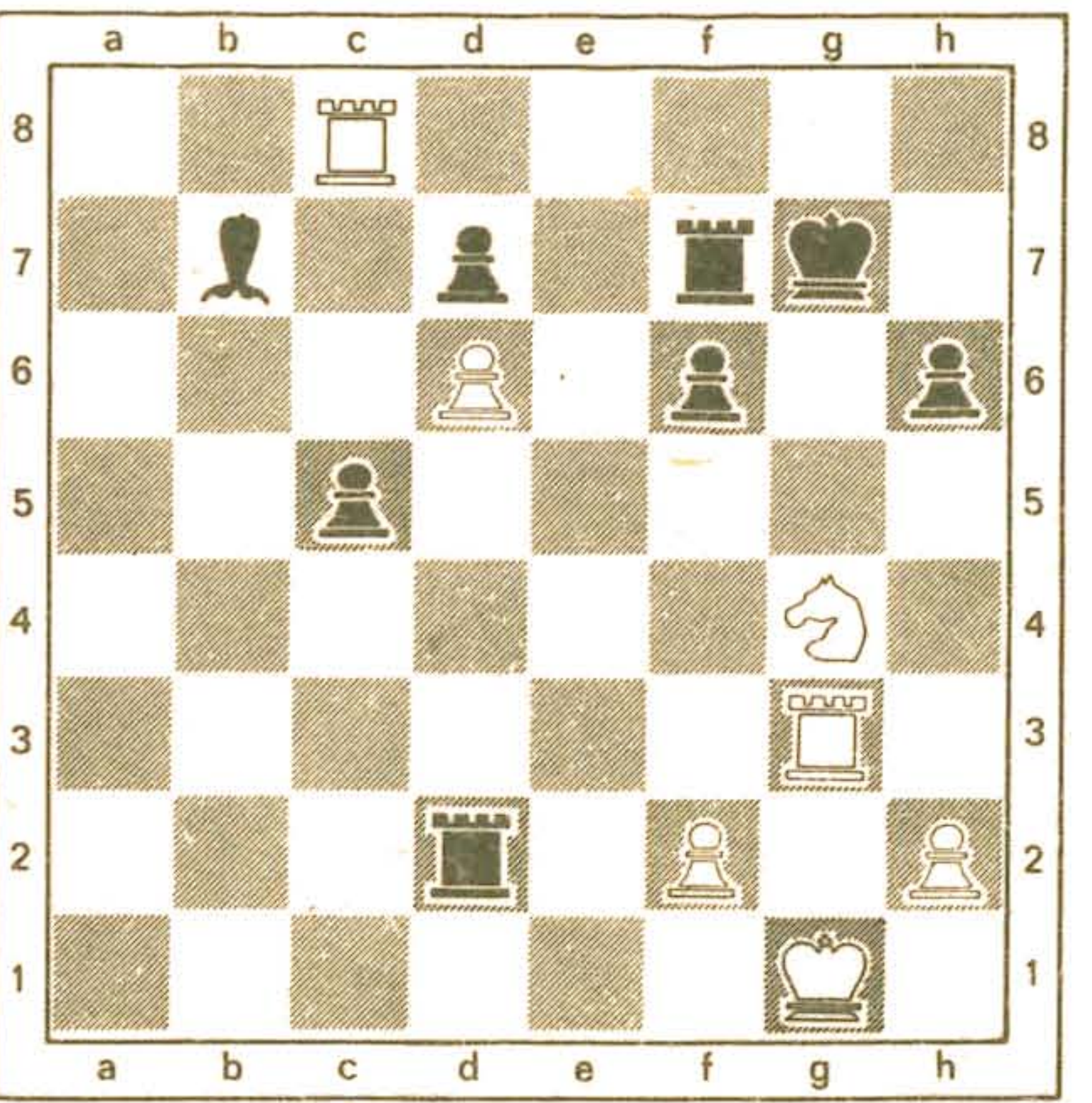
Nr. 6 Matt in fünf Zügen 5 Punkte



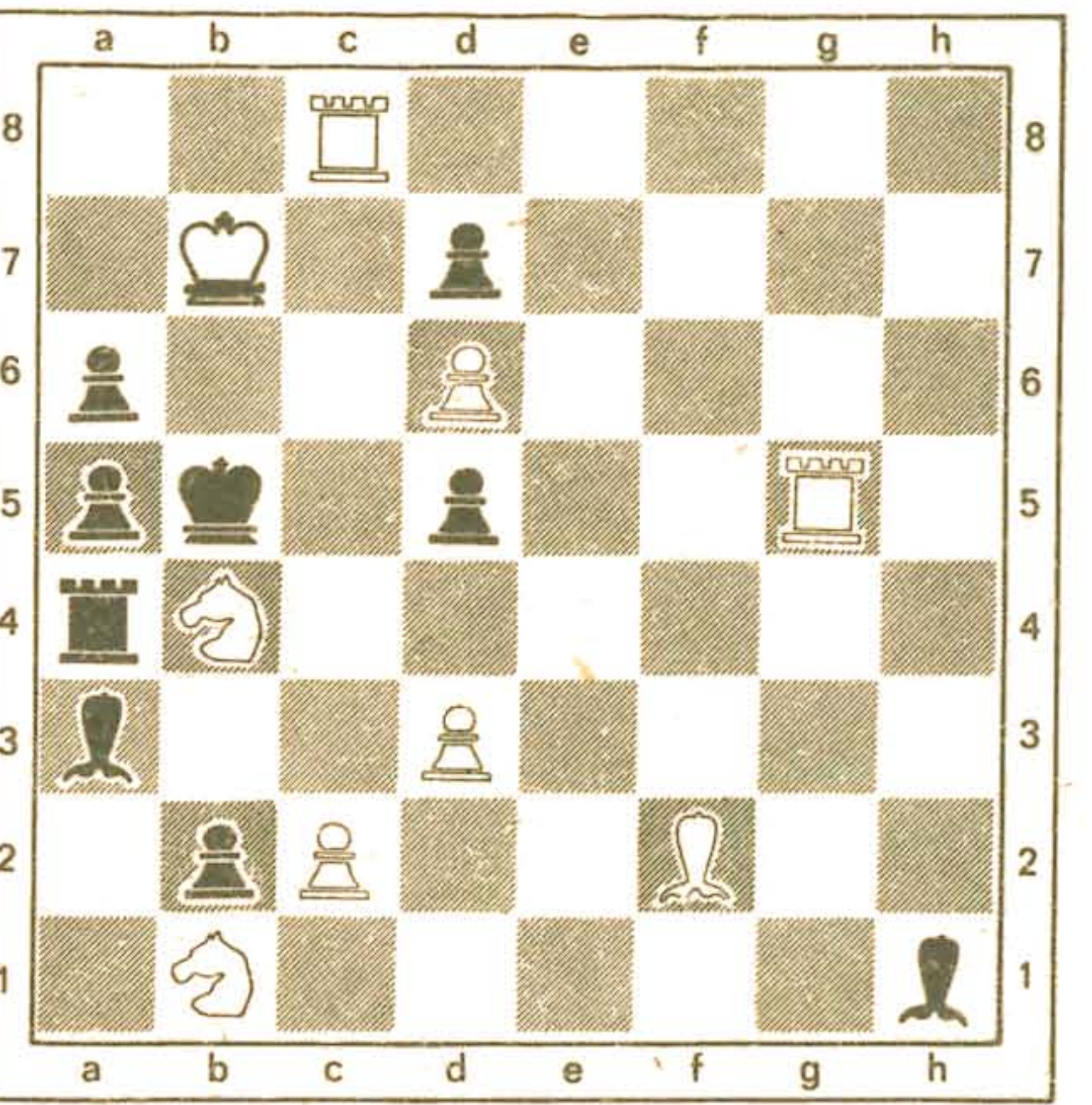
Nr. 3 Matt in zwei Zügen 3 Punkte



Nr. 7 Matt in drei Zügen 6 Punkte



Nr. 4 Matt in drei Zügen 4 Punkte



Nr. 8 Matt in zwei Zügen 6 Punkte

# Mit Schere und Papier

