Mathematische Schülerzeitschrift

alpha

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
23. Jahrgang 1989
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

5

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold

Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag

Anschrift des Verlags:
Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086

Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig 7027

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, Leninstr. 16, Leipzig 7010.

Fotos: G. Gruß (S. 97); Prof. Dr. J. Flachsmeyer (S. 104); R. Funck (S. 109, 110); M. Plumhoff (S. 115); Dr. B. Voigt (III. U.-Seite); R. Piechulek (IV. U.-Seite)
Vignetten: L. Otto, Leipzig (Titelvignetten, S. 101, S. 113, S. 118)
Technische Zeichnungen: OStR G. Gruß, Leipzig
Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach einer Vorlage von Dr. R. Meusinger, Leipzig
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 14. Juni 1989
Auslieferungstermin: 10. Oktober 1989

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

Alphons weist die Schüler der 5. bis 7. Klasse auf speziell für sie geeignete Beiträge hin.

Jung geblieben mit seinen Schülern – Gerhard Gruß

Zum 40. Jahrestag der DDR nahmen wir uns vor, einen mindestens 40 Jahre im Schuldienst tätigen Mathematiklehrer zu interviewen. Und suchen brauchten wir solch einen Kollegen nicht lange, denn unser technischer Zeichner OStR G. Gruß, stellvertretender Direktor einer Polytechnischen Oberschule in Leipzig kann auf eine noch längere Berufspraxis zurückblikken. Alphons

Frage: Warum wurden Sie 1946 (Mathematik)Lehrer?
Zur Beantwortung dieser Frage ist es notwendig, einige Jahre (vor 1946) zurückzublenden.
Ich habe 1940 bis 1942 im Flugzeugbau als technischer Zeichner gelernt. Über Abendsemester der techn. höheren Lehranstalt versuchte ich mein Ziel Ingenieur im Flugzeugbau zu erreichen. Der faschistische Krieg zerstörte diese berufliche Entwicklung und manche andere Illusion.
Als ich bereits im November 1945 aus Kriegsgefangenschaft zurückkehren konnte, zeichneten sich in der damaligen sowjetischen Besatzungszone die ersten Schritte zur Neugestaltung der Volksbildung ab. Fanatische Nazi-Lehrer, die mich zu formen versuchten, Hafttage im Arbeitshaus Leipzig (wegen Auseinandersetzungen mit der HJ), Erlebnisse als Soldat und meine fachlichen Vorkenntnisse waren Anlaß, mich als Neulehrer zu bewerben. Damals noch verschwommene Vorstellungen von einer anderen Erziehung junger Menschen motivierten meine Bewerbung. Nach achtmonatiger „Kurzausbildung" mit einigen Grundgedanken der Psychologie, Pädagogik und anderen fachlichen Aspekten begann ich dann, so „gut gerüstet" als Lehrer für Physik und Mathematik an der 35. Volksschule in Leipzig.

Frage: Wie sahen damals Studium und Schulpraxis aus?
Es gibt viele Veröffentlichungen über unsere demokratische Schulreform. Ich möchte nun keine grundsätzlichen Wiederholungen dazu bringen, sondern nur an einigen Beispielen zeigen, welche Probleme wir außer der Unterrichtsgestaltung auch zu lösen hatten. Aufgaben, die für unsere Absolventen jetzt kaum noch vorstellbar sind. Unsere Stundenzahl bewegte sich bei 30 Wochenstunden Unterricht, dazu kam obligatorisch zweimal wöchentlich nachmittags Weiterbildung in Psychologie/Pädagogik/Methodik. In einer Reihe von Erziehungs- und auch Bildungsfragen war es ein Arbeiten von „der Hand in den Mund" und die tägliche Praxis war unser konkretester Ausbilder.
Vieles ließe sich über den Schulalltag erzählen. Ich möchte hier nur einige unterrichtliche wie auch „außerunterrichtliche" Episoden anklingen lassen. Episoden, die auch zeigen, daß in schwerster Zeit unsere Partei im Rahmen des damals möglichen alles für die Jugend tat:
- jeden 2. Tag Ausgabe eines Roggenbrötchens an die Schüler
- in gewissen Abständen zusätzliche Ausgabe von 25 g Butter je Schüler (selbst ausgewogen aus einem 10-kg-Block)
- Ausgabe von Bezugsscheinen für Schuhe und andere Kinderbekleidung
- für Mathe-Lehrer selbstverständlich die Mitwirkung beim zweimal durchgeführten Umtausch der alten Banknoten (nie wieder hatte ich soviel Geld in den Händen)
- Mitwirkung bei den in gewissen Zeitabständen durchgeführten Preissenkungen freier Waren (Inventuren in den betreffenden Läden).

In besonderer Erinnerung ist mir noch der sehr strenge Winter 1946/47. Die Heizung der Schule war mehr als ein Problem, bzw. keines, es lief nichts. Progressive Eltern halfen damals im Rahmen ihrer Möglichkeiten, so unterrichtete ich zum Beispiel mit meiner 7. Klasse (36 Jungen) an folgenden Stellen:
- täglich 2 Std. mit je 12 Schülern im Kinderzimmer des Kunstmalers Vogler
- mit je 10 bis 12 Schülern in den entsprechenden freien Zeiten, im Wartezimmer von Dr. Geidel (Coppistr.)
- die anderen Schüler trafen sich täglich in der Schule zum Empfang der neuen Hausaufgaben und Abgabe der fälligen Aufgaben
- zweimal wöchentlich mit der gesamten Klasse 3 Std. im Hundebad des Stadtbades (Wandtafel war die mit schwarzem Papier beklebte Tür).

Trotz der genannten Episoden war es eine pädagogische „Lehrzeit", die mir viel gegeben hat. Gerade die Vielfalt der Probleme prägten bei vielen von uns Einsatzbereitschaft, parteilichen Standpunkt und methodische Variabilität. In diesen ersten Jahren schied sich aber auch bei uns damaligen Neulehrern die Spreu vom Weizen.
Meine persönliche Entwicklung ging über die 1. und 2. Lehrprüfung mit den Wahlfächern Mathematik und Physik, später dann, nach Einführung des polytechnischen Unterrichts über ein Fernstudium zum Fachlehrer für PA. Viele Details ließen sich noch zusammentragen. Alles war aber geprägt von dem Gedanken, eine junge Generation zu bilden, die unseren damals jungen Staat achten und lieben lernt und die alle ihre Möglichkeiten zur Sicherung des Friedens einsetzt.

Frage: Wie kam es zu Ihrer Mitarbeit bei „alpha"?
1953 kam ich als Fachlehrer für Ma (Phy) an die 29. POS (Wohnungsnähe). Der Mathe-Unterricht an dieser Schule wurde geprägt vom ersten Chefredakteur der „alpha", J. Lehmann. Aus der täglichen Zusammenarbeit ergab es sich zwangsläufig, daß mich Koll. Lehmann schon relativ kurze Zeit nach dem Erscheinen der „alpha" bat, bei der zeichnerischen Gestaltung mitzuarbeiten. Daraus entwickelte sich nun eine fast 25jährige Zusammenarbeit. Die Arbeit an der Gestaltung der Zeichnungen zu den einzelnen Mathe-Aufgaben gaben mir persönlich viele Anregungen zur eigenen Unterrichtsgestaltung und sind für mich eine Form der notwendigen ständigen Weiterbildung.
Es ist mir in den vielen Jahren auch zum Bedürfnis geworden, mich immer wieder an der Gestaltung selbst kompliziertester Details zu prüfen und diese zu lösen.

Frage: Wie stellen Sie sich „Meine Schüler" vor?
Von den mir vorgelegten Fragen die am schwierigsten zu beantwortende Frage. Unsere grundsätzlichen Positionen zur Erziehung der Jugendlichen hat der 8. Pädagogische Kongreß eindeutig klargelegt und wird bestimmt der 9. Päd. Kongreß unterstreichen und wenn notwendig in einigen Details präzisieren. Dazu möchte ich keine weiteren Ergänzungen bringen.
Ich selbst habe mich immer als Freund und Berater meiner Schüler betrachtet und von ihnen gegenseitige Achtung der Persönlichkeit, vor allem aber Vertrauen in jeder Situation erwartet. (Das kann unsere redaktionelle Mitarbeiterin Rosemarie Schubert als seine ehemalige Schülerin nur bestätigen! – Die Red.)
Mit dieser Grundhaltung habe ich immer in den bisher 43 Jahren meinen sozialistischen Lehrauftrag aus meiner Sicht ordentlich erfüllt, stets einen guten Kontakt zu allen „Meinen Schülern" wie auch deren Eltern gehabt.

In Vorbereitung auf diesen Beitrag verbrachten wir einen interessanten Vormittag im Schulmuseum des Hauses der Lehrer Leipzig (Sitz: 57. Oberschule „Georg Schwarz", G.-Schwarz-Str. 113, Leipzig 7033). Schulmuseen existieren noch in Berlin, Dresden und Karl-Marx-Stadt. Neben den Sammlungen in Jüterbog, Schwerin-Mueß, Großenhain und Delitzsch befinden sich an vielen Schulen hervorragend ausgestattete Traditionskabinette, die sich ebenfalls mit Schulgeschichte beschäftigen.

Kostengünstigstes Straßennetz

Die Kooperation von Wissenschaft und Produktion erweist sich als tragfähig und ist zu einer unverzichtbaren Grundlage für unser weiteres ökonomisches wie gesellschaftliches Voranschreiten geworden.

Erich Honecker (7. Tagung des ZK der SED)

(I) Drei (P_1, P_2, P_3) oder vier (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) in ebenem Gelände gelegene Orte sollen durch ein Straßennetz der in den Bildern 1a bzw. 1b angegebenen Struktur miteinander verbunden werden.

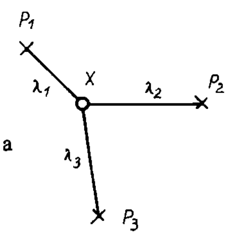


Bild 1a

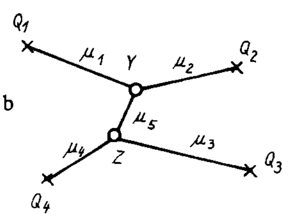


Bild 1b

Vor diesem Straßenbau wurden die Kosten $\lambda_i\,(i = 1, 2, 3)$ bzw. $\mu_j\,(j = 1, 2, 3, 4, 5)$ je Längeneinheit der Teilstraßen ermittelt. Diese Kosten je Längeneinheit sind bestimmt durch die Bau- und die in einem längeren Zeitraum anfallenden Reparaturkosten der Straßen sowie die zum gleichen Zeitraum gehörigen Verschleiß- und Kraftstoffkosten der die Teilstraßen voraussichtlich befahrenden Fahrzeuge. Diese Kosten je Längeneinheit sind im allgemeinen von Teilstraße zu Teilstraße voneinander verschieden, z. B. bedingt durch unterschiedliche Straßenbreite und Fahrzeugdichte. Statt um ein Straßennetz könnte es sich um ein Rohrleitungsnetz handeln, bei dem die Kosten je Längeneinheit von Rohrleitung zu Rohrleitung – z. B. bedingt durch unterschiedlichen Rohrquerschnitt – im allgemeinen voneinander verschieden sind. Die Problemstellung lautet: Wie müssen die Kreuzungspunkte X, Y und Z und wie muß die Streckenführung der Teilstraßen gewählt werden, damit bei gegebenen $\lambda_i\,(i = 1, 2, 3)$ bzw. $\mu_j\,(j = 1, 2, 3, 4, 5)$ die Gesamtkosten möglichst klein werden?

(II) Da die kürzeste Verbindung zweier Punkte die Strecke ist, und die Kosten für jede Teilstraße ihrer Länge proportional sind, kann die gesuchte Minimallösung nur unter den zulässigen Straßennetzen enthalten sein, bei denen die Teilstraßen geradlinig verlaufen (Bild 2).

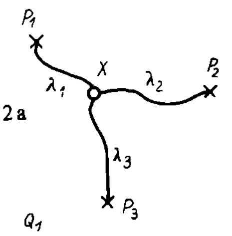


Bild 2a

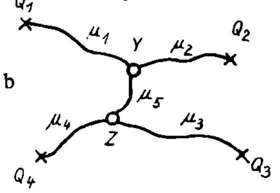


Bild 2b

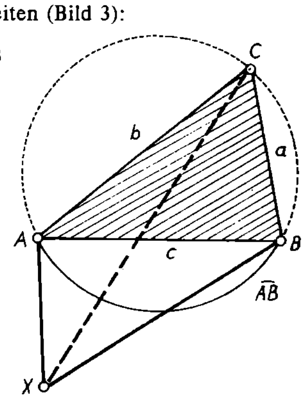
(III) Werden die Längen der Teilstraßen in Bild 2 mit $\overline{P_1X}$, $\overline{P_2X}$, $\overline{P_3X}$, $\overline{Q_1Y}$, $\overline{Q_2Y}$, $\overline{Q_3Z}$, $\overline{Q_4Z}$ und $\overline{YZ}$ bezeichnet, so betragen die Gesamtkosten

$k(X) = \lambda_1 \cdot \overline{P_1X} + \lambda_2\overline{P_2X} + \lambda_3 \cdot \overline{P_3X}$ bzw.

$K(Y, Z) = \mu_1 \cdot \overline{Q_1Y} + \mu_2\overline{Q_2Y} + \mu_3\overline{Q_3Z} + \mu_4 \cdot \overline{Q_4Z} + \mu_5 \cdot \overline{YZ}$.

(IV) Das entscheidende Hilfsmittel zum Finden der Minimallösung auf geometrischem Wege ist eine Extremaleigenschaft des Sehnenvierecks, die wir uns zunächst erarbeiten (Bild 3):

Bild 3

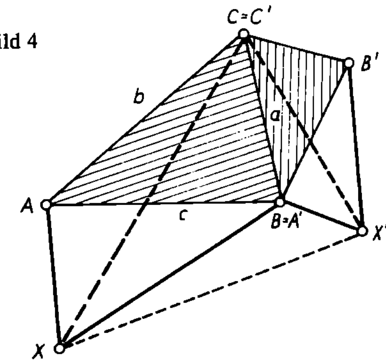


Ist X ein beliebiger Punkt in der Ebene des Dreiecks ABC, so gilt stets

$a \cdot \overline{AX} + b \cdot \overline{BX} \geqq c \cdot \overline{CX}$.

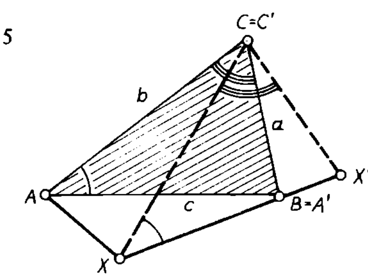
In dieser Ungleichung gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn X ein Punkt des die Punkte A und B verbindenden Teiles $\widehat{AB}$ des Umkreises von $\triangle ABC$ ist, auf dem nicht der Punkt C liegt. Viereck $AXBC$ ist also dann ein Sehnenviereck. Durch die Drehstreckung mit Zentrum C, orientiertem Drehwinkel $\sphericalangle ACB$ und Streckungsfaktor $k = \frac{a}{b}$ wird die Figur in Bild 3 auf eine zu ihr ähnliche abgebildet. Liegen X, X' und B nicht auf einer Geraden, so gilt nach der Dreiecksungleichung $\overline{BX'} + \overline{BX} > \overline{XX'}$ (Bild 4). Ist B ein äußerer Punkt der Strecke XX', so gilt ebenfalls $\overline{BX'} + \overline{BX} > \overline{XX'}$. Ist schließlich B ein innerer Punkt oder Randpunkt der Strecke XX', so gilt $\overline{BX'} + \overline{BX} = \overline{XX'}$.

Bild 4



Für alle Punkte X der Ebene des Dreiecks ABC gilt also $\overline{BX'} + \overline{BX} \geqq \overline{XX'}$. Dabei gilt das Gleichheitszeichen nur, wenn B ein Punkt der Strecke XX' ist. Wo muß X liegen, damit B ein Punkt der Strecke XX' ist (Bild 5)?

Bild 5



Fällt X mit A oder B zusammen, so ist B ein Randpunkt der Strecke XX' und umgekehrt. Jetzt sei B ein innerer Punkt der Strecke XX'.

Wegen $\sphericalangle ACA' = \sphericalangle XCX'$ und $\frac{\overline{A'C}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{X'C}}{\overline{XC}}$ – Eigenschaften der Drehstreckung – gilt $\triangle ABC \sim \triangle XCX'$ und damit $\sphericalangle BAC = \sphericalangle X'XC = \sphericalangle BXC$. Also muß nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes Viereck $\overline{AXBC}$ ein Sehnenviereck sein. Und auch umgekehrt gilt: Ist Viereck $\overline{AXBC}$ ein Sehnenviereck, so liegt B zwischen X und X'. Das Schließen dieser Beweislücke sei dem Leser überlassen. Nun sei X wieder ein beliebiger Punkt der Ebene des Dreiecks ABC.

Wegen $\triangle BX'C \sim \triangle AXC$ gilt

$\overline{BX'} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \cdot \overline{AX} = \frac{a}{b} \cdot \overline{AX}$ und wegen

$\triangle XX'C \sim \triangle ABC \quad \overline{XX'} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \overline{CX} = \frac{c}{b} \cdot \overline{CX}$

(siehe Bild 4!). Damit erweisen sich die Ungleichungen

$\overline{BX'} + \overline{BX} \geqq \overline{XX'}$,

$\frac{a}{b} \cdot \overline{AX} + \overline{BX} \geqq \frac{c}{b} \cdot \overline{CX}$ und

$a \cdot \overline{AX} + b \cdot \overline{BX} \geqq c \cdot \overline{CX}$ als äquivalent.

(V) Nun zurück zur Problemstellung: Welcher Punkt muß als Kreuzungspunkt X gewählt werden, damit für drei gegebene, nicht auf einer Geraden liegende Orte P_1,

P_2 und P_3 und gegebene Kosten λ_i ($i = 1,2,3$) je Längeneinheit der Teilstraßen die Gesamtkosten

$k(X) = \lambda_1 \cdot \overline{P_1X} + \lambda_2 \cdot \overline{P_2X} + \lambda_3 \cdot \overline{P_3X}$

am kleinsten sind?

Beide Seiten dieser Gleichung werden durch ein λ_i, etwa λ_3 dividiert:

$$\frac{k(X)}{\lambda_3} = \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \cdot \overline{P_1X} + \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \cdot \overline{P_2X} + \overline{P_3X}.$$

Da alle λ_i konstant sind, sind die Kosten $k(X)$ genau dann minimal, wenn auch $\frac{k(X)}{\lambda_3}$ den kleinstmöglichen Wert annimmt. Statt das Minimum von $k(X)$ zu bestimmen, werden wir das Minimum von $\frac{k(X)}{\lambda_3}$, das die Dimension einer Länge hat, ermitteln. Zunächst ordnen wir den λ_i ($i = 1,2,3$) Strecken l_i ($i = 1,2,3$) zu, die durch die folgenden Forderungen eindeutig bestimmt sind: $l_3 = \overline{P_1P_2}$,

$$l_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \cdot \overline{P_1P_2}, \; l_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \cdot \overline{P_1P_2}.$$

Gemäß der Ermittlung der λ_i kann angenommen werden, daß alle λ_i rationale Maßzahlen haben. Da außerdem alle λ_i gleiche Maßeinheit haben, sind $\frac{\lambda_1}{\lambda_3}$ und $\frac{\lambda_2}{\lambda_3}$ positive rationale Zahlen und damit sind l_1 und l_2 durch Konstruktion zu ermittelnde Strecken. Insbesondere gilt $l_1 : l_2 : l_3 = \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ und

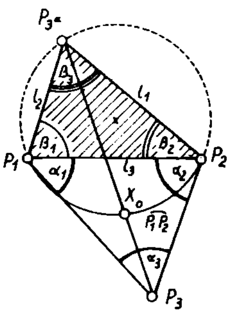
$$\frac{k(X)}{\lambda_3} = \frac{l_1}{l_3} \cdot \overline{P_1X} + \frac{l_2}{l_3} \cdot \overline{P_2X} + \overline{P_3X}.$$

Das Bestimmen des günstigsten Punktes X gelingt mittels einer durch die Problemstellung selbst bedingten Fallunterscheidung: Im ersten Fall mögen sich die Kreise um P_1 mit Radius l_2 und um P_2 mit Radius l_1 in einem Punkte P_{3^*} schneiden, der in bezug auf die Gerade P_1P_2 nicht in der gleichen Halbebene wie P_3 liegt und die Winkel β_1, β_2 und β_3 von $\Delta P_1P_2P_{3^*}$ mögen zusammen mit den Winkeln α_1, α_2 und α_3 von $\Delta P_1P_2P_3$ die Ungleichungen

$\alpha_1 + \beta_1 < 180°$, $\alpha_2 + \beta_2 < 180°$ und

$\alpha_3 + \beta_3 < 180°$ erfüllen (Bild 6).

Bild 6



Wegen $\alpha_1 + \beta_1 < 180°$ und $\alpha_2 + \beta_2 < 180°$ schneidet die Gerade $P_3P_{3^*}$ den die Punkte P_1 und P_2 verbindenden Bogen $\widehat{P_1P_2}$ des Umkreises von $\Delta P_1P_2P_{3^*}$, auf dem nicht der Punkt P_{3^*} liegt, in einem inneren Punkte X_0, und wegen $\alpha_3 + \beta_3 < 180°$ liegt P_3 außerhalb des Umkreises von $\Delta P_1P_2P_{3^*}$.

Wir behaupten, daß $\frac{k(X)}{\lambda_3}$ und damit auch die Gesamtkosten $k(X)$ minimal werden, wenn X mit X_0 zusammenfällt: Ist X ein beliebiger Punkt der Ebene von $\Delta P_1P_2P_{3^*}$, so gilt nach dem bereitgestellten Hilfssatz

$l_1 \cdot \overline{P_1X} + l_2 \cdot \overline{P_2X} \geqq l_3 \cdot \overline{P_3X}$

und damit auch

$\frac{l_1}{l_3} \cdot \overline{P_1X} + \frac{l_2}{l_3} \cdot \overline{P_2X} \geqq \overline{P_3X}$ sowie

$$\frac{k(X)}{\lambda_3} = \frac{l_1}{l_3} \overline{P_1X} + \frac{l_2}{l_3} \overline{P_2X} + \overline{P_3X} \geqq \overline{P_{3^*}X} + \overline{P_3X}.$$

Dabei gilt das Gleichheitszeichen nur, falls X ein Punkt des Bogens $\widehat{P_1P_2}$ ist. Nach der Dreiecksungleichung gilt

$\overline{P_{3^*}X} + \overline{P_3X} \geqq \overline{P_3P_{3^*}}$.

Hier gilt das Gleichheitszeichen nur, wenn X ein Punkt der Strecke $\overline{P_3P_{3^*}}$ ist. Aus beiden Ungleichungen folgt

$$\frac{k(X)}{\lambda_3} \geqq \overline{P_3P_{3^*}}.$$

Und das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn X sowohl ein Punkt des Bogens $\widehat{P_1P_2}$ als auch ein Punkt der Strecke $P_3P_{3^*}$ ist, also wenn X mit X_0 zusammenfällt (Bild 7a, b).

Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt für die Schnittwinkel der Teilstraßen des optimalen Straßennetzes

$\sphericalangle P_2X_0P_{3^*} = \beta_1$ und $\sphericalangle P_{3^*}X_0P_1 = \beta_2$.

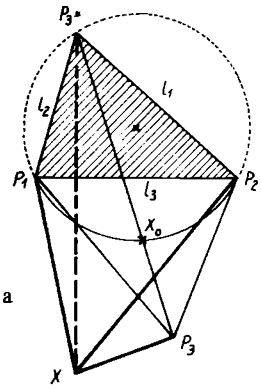


Bild 7a

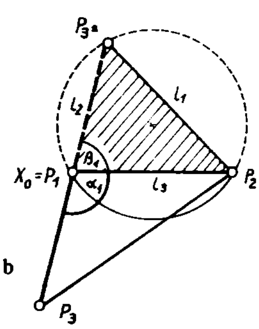


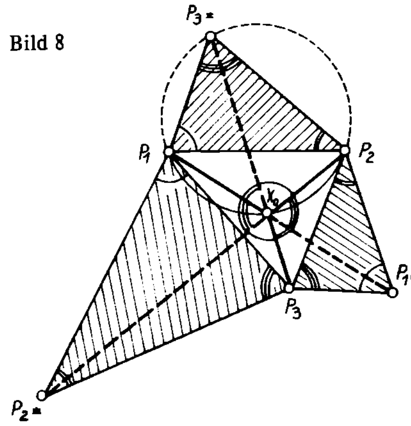
Bild 7b

Vor dem Betrachten der weiteren Fälle sind ergänzende Bemerkungen zum ersten Fall angebracht: Den eindeutig bestimmten günstigsten Kreuzungspunkt X_0 und die eindeutig bestimmten Minimalkosten $k(X_0) = \lambda_3 \cdot \overline{P_3P_{3^*}}$ hätte man auch erhalten, wenn statt des Minimums von $\frac{k(X)}{\lambda_3}$ das von $\frac{k(X)}{\lambda_2}$ bzw. $\frac{k(X)}{\lambda_1}$ ermittelt worden wäre. Die dann jeweils an $\Delta P_1P_2P_3$ angelagerten Dreiecke $P_1P_3P_{2^*}$ und $P_2P_3P_{1^*}$ sind zu dem von uns betrachteten Dreieck $P_1P_2P_{3^*}$ ähnlich, die Umkreise der drei angelagerten Dreiecke und die drei Strecken $\overline{P_1P_{1^*}}$, $\overline{P_2P_{2^*}}$ und $\overline{P_3P_{3^*}}$ verlaufen durch X_0, wobei als Schnittwinkel dieser drei Strecken paarweise β_1, β_2 und β_3 auftreten. Daß zusätzlich der Produktengleichheit

$\overline{P_1P_2} \cdot \overline{P_3P_{3^*}} = \overline{P_2P_{3^*}} \cdot \overline{P_1P_{1^*}}$

$= \overline{P_1P_{3^*}} \cdot \overline{P_2P_{2^*}}$ gilt, möge sich der interessierte Leser selbst überlegen (Bild 8).

Bild 8



Im 2. und 3. Fall soll weiterhin das $\Delta P_1P_2P_{3^*}$ mit $\overline{P_1P_2} = l_3$, $\overline{P_1P_{3^*}} = l_2$ und $\overline{P_2P_{3^*}} = l_1$ existieren, aber es sollen nicht alle drei Ungleichungen

$\alpha_1 + \beta_1 < 180°$, $\alpha_2 + \beta_2 < 180°$ und

$\alpha_3 + \beta_3 < 180°$ gelten.

Dann ist sicher nur eine dieser Ungleichungen nicht erfüllt. Denn z. B. aus

$\alpha_1 + \beta_1 \geqq 180°$ und $\alpha_2 + \beta_2 \geqq 180°$

würde $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 \geqq 360°$

folgen und hiernach müßte

$\alpha_1 + \alpha_2 \geqq 180°$ oder $\beta_1 + \beta_2 \geqq 180°$

gelten, was dem Innenwinkelsatz des Dreiecks widerspricht.

O. B. d. A.[1] gelte $\alpha_1 + \beta_1 \geqq 180°$

und damit $\alpha_2 + \beta_2 < 180°$ und

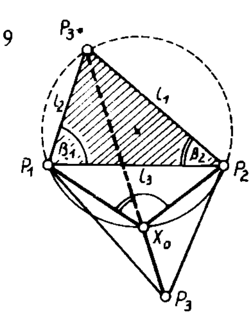
$\alpha_3 + \beta_3 < 180°$.

(Die Möglichkeiten

$\alpha_2 + \beta_2 \geqq 180°$ bzw. $\alpha_3 + \beta_3 \geqq 180°$

können durch Vertauschen der Zeiger in $\alpha_1 + \beta_1 \geqq 180°$ überführt werden.)

Bild 9



Im zweiten Fall gelte $\alpha_1 + \beta_1 = 180°$ (Bild 9). Mit geringfügigen Änderungen gelten die im ersten Fall angestellten Überlegungen auch jetzt: Die Kosten $k(X)$ sind minimal, wenn der „Kreuzungspunkt" X mit $X_0 = P_1$ zusammenfällt und es gilt

$$\frac{k(X_0)}{\lambda_3} = \overline{P_3P_{3^*}}.$$

Im dritten Fall gelte $\alpha_1 + \beta_1 > 180°$ (Bild 10). Dann existiert ein Hilfspunkt $P_{3^{**}}$, der bestimmt ist durch

$\sphericalangle P_2P_1P_{3^{**}} = \beta_{1^*} = 180° - \alpha_1 < \beta_1$

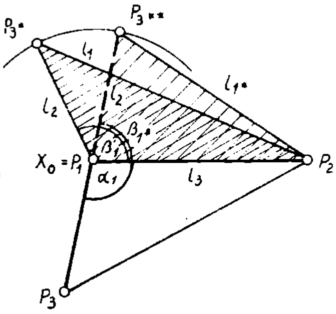
und $\overline{P_1P_{3^{**}}} = l_2$. Hieraus folgt

$P_2P_{3^{**}} = l_{1^*} < l_1$ und damit $l_1 - l_{1^*} > 0$.

Gemäß dem 2. Fall nimmt die Funktion

$\frac{l_{1^*}}{l_3}\cdot\overline{P_1X}+\frac{l_2}{l_3}\cdot\overline{P_2X}+\overline{P_3X}$ für $X=P_1$ den Minimalwert $\overline{P_3P_{3^{**}}}$ an.

Bild 10



Die Funktion $\frac{l_1-l_{1^*}}{l_3}\cdot\overline{P_1X}$ nimmt für $X=P_1$ den Minimalwert 0 an. Also nimmt die Funktion

$$\frac{k(X)}{\lambda_3}=\frac{l_{1^*}}{l_3}\cdot\overline{P_1X}+\frac{l_2}{l_3}\cdot\overline{P_2X}+\overline{P_3X}$$
$$+\frac{l_1-l_{1^*}}{l_3}\overline{P_1X}$$

als Summe der beiden betrachteten Funktionen für $X=X_0=P_1$ ihren kleinstmöglichen Wert $\overline{P_3P_{3^{**}}}+0=\overline{P_3P_{3^{**}}}$ an.

Im vierten und letzten Fall schließlich sollen l_1, l_2 und l_3 nicht die Seiten eines Dreiecks sein. Dann gilt entweder
$l_1 \geqq l_2+l_3$ oder $l_2 \geqq l_1+l_3$ oder
$l_3 \geqq l_1+l_2$. O. B. d. A. genügt es,
$l_1 \geqq l_2+l_3$ zu betrachten: Der Kreis um P_1 mit Radius l_2 schneidet die Verlängerung der Strecke P_3P_1 über P_1 hinaus in einem Punkte $P_{3^{**}}$. Nach der Dreiecksungleichung gilt für die Seiten von $\triangle P_1P_2P_{3^{**}}$
$l_2+l_3>l_{1^*}=\overline{P_2P_{3^{**}}}$. Aus dieser Ungleichung und aus $l_1 \geqq l_2+l_3$ folgt $l_1>l_{1^*}$ und damit $l_1-l_{1^*}>0$. Mit der aus dem 3. Fall bekannten Schlußweise wird erkannt, daß

$$\frac{k(X)}{\lambda_3}=\frac{l_{1^*}}{l_3}\cdot\overline{P_1X}+\frac{l_2}{l_3}\cdot\overline{P_2X}+\overline{P_3X}$$
$$+\frac{l_1-l_{1^*}}{l_3}\cdot\overline{P_1X} \text{ für } X=X_0=P_1$$

am kleinsten ist und der Minimalwert

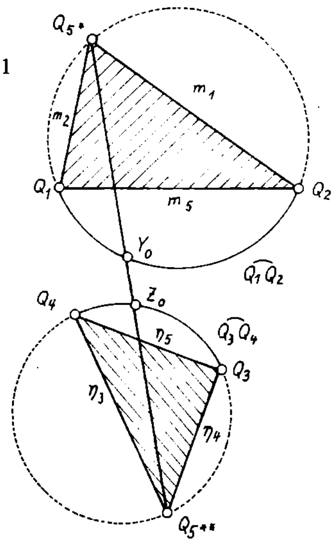
$$\frac{k(X_0)}{\lambda_3}=\overline{P_3P_{3^{**}}} \text{ ist.}$$

Nur im ersten Fall liegt der günstigste Kreuzungspunkt im Innern von $\triangle P_1P_2P_3$, in allen anderen Fällen fällt er mit einem Eckpunkt von $\triangle P_1P_2P_3$ zusammen.

(VI) Nunmehr möge der Leser durch Anwenden der kennengelernten Beweismethoden das vier Orte Q_1, Q_2, Q_3 und Q_4 verbindende Straßennetz der in Bild 2b angegebenen Struktur, für das die Kosten $K(Y,Z)$ am kleinsten sind, ermitteln. Dabei soll zusätzlich gelten (Bild 11):

1. Die Seiten des Dreiecks $Q_1Q_2Q_{5^*}$ sind
$\overline{Q_1Q_2}=m_5$, $\overline{Q_1Q_{5^*}}=m_2=\frac{\mu_2}{\mu_5}\cdot\overline{Q_1Q_2}$ und
$\overline{Q_2Q_{5^*}}=m_1=\frac{\mu_1}{\mu_5}\cdot\overline{Q_1Q_2}$.
2. Die Seiten des Dreiecks $Q_3Q_4Q_{5^{**}}$ sind
$\overline{Q_3Q_4}=n_5$, $\overline{Q_3Q_{5^{**}}}=n_4=\frac{\mu_4}{\mu_5}\cdot\overline{Q_3Q_4}$ und
$\overline{Q_4Q_{5^{**}}}=n_3=\frac{\mu_3}{\mu_5}\cdot\overline{Q_3Q_4}$.

Bild 11



3. Die Strecke $Q_{5^*}Q_{5^{**}}$ schneidet den Umkreis von $\triangle Q_1Q_2Q_{5^*}$ in einem Punkte Y_0 und den von $\triangle Q_3Q_4Q_{5^{**}}$ in einem Punkte Z_0. Dabei liegt Z_0 zwischen $Q_{5^{**}}$ und Y_0. Weiterhin liegt Y_0 auf dem Kreisbogen $\widehat{Q_1Q_2}$ des Umkreises von $\triangle Q_1Q_2Q_{5^*}$, auf dem nicht Q_{5^*} liegt, Z_0 liegt auf dem Kreisbogen $\widehat{Q_3Q_4}$ des Umkreises von $\triangle Q_3Q_4Q_{5^{**}}$, auf dem nicht $Q_{5^{**}}$ liegt.

Für weitere Fälle, die durch geeignetes Abändern der zusätzlichen Bedingungen 1 bis 3 entstehen, läßt sich ebenfalls mit den uns bekannten Mitteln das kostengünstigste Straßennetz bestimmen.

(VII) Für einige einfache Fälle konnten wir mit uns bekannten mathematischen Hilfsmitteln das kostengünstigste Straßennetz ermitteln. Wenn man beachtet, daß allein der Bau einer Straße von 1 km Länge von 525 000 M (3,5 m breite Straße mit Schwarzdecke) bis 4 650 000 M (Autobahn mit beidseitig 1,5 m breiter Standspur) kostet, ist ersichtlich, welche riesigen Einsparungen durch Ermitteln optimaler Lösungen zu erzielen sind. Und diese Aussage gilt für alle Bereiche der Volkswirtschaft! Deshalb sagen wir mit Fug und Recht, die Mathematik ist zur Produktivkraft geworden.

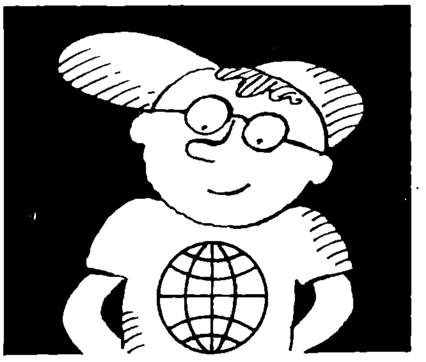
W. Träger

[1] ohne Beschränkung der Allgemeinheit

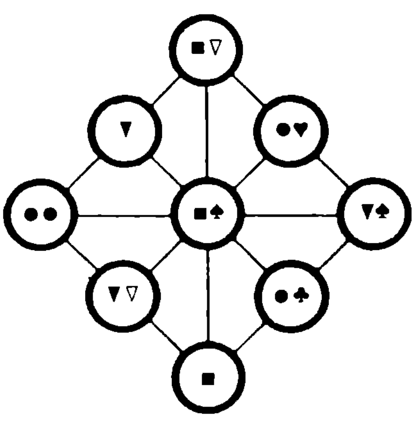
100mal 1989

Stellt die Zahlen von 1 bis 100 mit Hilfe der Ziffern 1, 9, 8 und 9 in dieser Reihenfolge dar. Dabei darf jede der Ziffern nur genau einmal vorkommen. Zur Verknüpfung können die vier Grundrechenarten, das Wurzelziehen und Potenzieren, die Fakultät und Klammern im Bereich der ganzen Zahlen verwendet werden.
Im Heft 6/89 geben wir euch je eine Lösung an!

Alphons

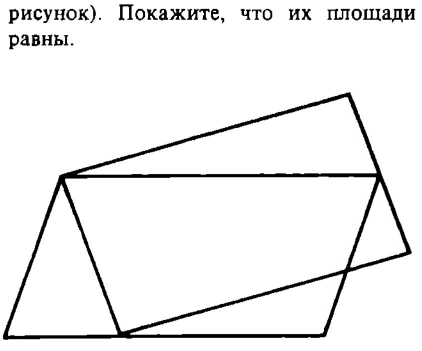


▲1▲ La valeur des symboles
Chaque symbole correspondant à un chiffre choisi entre 1 et 9, décodez cette grille de manière à toujours obtenir un total de 114 en additionnant trois nombres situés sur une même droite.



aus: Logigram, Paris

▲2▲ Два параллелограмма имеют общую вершину и еще по одной вершине каждый на стороне другого (см. рисунок). Покажите, что их площади равны.



aus: Quant, Moskau

▲3▲ The number 1989
It is immediately obvious that this number is *not* a prime–it is divisible by 9. (How can one see it immediately, without carrying out the division?)
The number obtained after dividing 1989 by 9 is a product of two consecutive primes. Find these primes.

aus: Fun with mathematics, Toronto

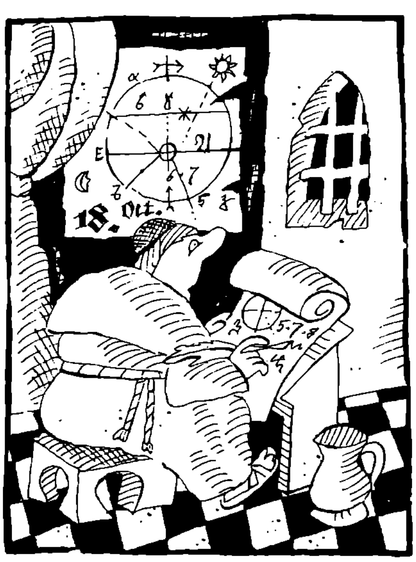
456 Jahre nach dem Weltuntergang von Lochau

Wege und Irrwege eines Mathematikers

Wer nach Wittenberg reist, der wird erwarten, Spuren Luthers und Melanchthons dort zu finden. Viele Touristen werden vermutlich die Tafel am Schloßeingang nicht weiter beachten, die verkündet, daß hier 1533 Michael Stifel eingesessen habe; wenn sie aber mathematisch interessiert sind, so fragen sie sich gewiß, was einen Rechenmeister mit dem Gesetz in Konflikt bringen konnte.

Stifel war ein herausragender Mathematiker des 16. Jahrhunderts, er verfaßte 1544 das beste Fachwerk der Arithmetik seiner Zeit, die „Arithmetica integra“ (Die gesamte Arithmetik). Wir verdanken Stifel z. B. die Einführung der runden Klammern oder den Begriff Exponent. Er machte sich auch um die Durchsetzung der Rechenzeichen + und − verdient. Stifel besaß klare Vorstellungen von irrationalen Zahlen, hatte das Prinzip des logarithmischen Rechnens erfaßt und einige seiner Äußerungen über die vierten Potenzen können durchaus als Vorahnungen der vierten Dimension gedeutet werden.

Diese kurze Würdigung der unvergänglichen mathematischen Verdienste ist unumgänglich, bevor von seinem Zahlenaberglauben die Rede sein kann. Stifel wurde 1486 oder 1487 in Schwaben geboren. Er kam in ein Augustinerkloster, in dem er sich mit Mathematik und Mystik beschäftigte. Durch seinen Glauben an den Erkenntnisfortschritt war es für ihn gewiß, daß mystische Dinge wie mathematische verstehbar seien, ja gerade durch Mathematik verstanden werden könnten. Mit für uns geradezu naivem Vertrauen betrieb Stifel eine damals gängige Wortrechnung, die zur Deutung von historischen Texten und Prophezeiungen benutzt wurde. Die außerordentlich fragwürdige Basis dieser Rechnung besteht in der Zuordnung oder Identifizierung von lateinischen Buchstaben des Textes zu römischen Zifferzeichen (z. B. X zu 10) und einem nachfolgendem eigensinnigen Abzählen, Abziehen, Multiplizieren und Interpolieren. Die Sache lag Stifel gewissermaßen im Blut, denn bereits sein Vater hatte eine große Kirchenverbesserung geweissagt. Der Sohn sah diese Prophezeiung mit Luther eingetroffen, und seine Anhängerschaft für den Ketzer, die sich z. B. in Versen wie „Johannes (gemeint ist die Offenbarung des J.) tut uns von einem Engel schreiben klar/Der Gottes Wort soll treiben – ganz luter (= Martin Luther) offenbar“ zeigte, zwangen ihn, aus dem Kloster zu fliehen. Stifel lernte später Luther kennen, der ihm 1528 eine begehrte Pfarrstelle in Lochau (etwa 35 km von Wittenberg) verschaffte, die Stifel zugleich mit der Witwe des Amtsvorgängers übernahm. Lochau gibt es auf der Landkarte nicht mehr, der Ort heißt jetzt nach dem Schloß Annaburg. In dem kleinen Ort dachte Stifel nicht nur über seine Predigten nach, sondern betrieb ausgedehnt die Wortrechnung. 1532 wurde gerade noch „rechtzeitig“ sein Werk der Wortrechnung „Rechenbüchlein Vom End Christ“ fertig, in dem er schwarz auf weiß den Untergang der Welt für den 18. Oktober 1533 um 8 Uhr morgens ermittelt hatte. Luther hielt nichts von diesen (aber auch den anderen) Rechenkünsten seines Predigers, wohl aber dessen Pfarrgemeinde. In der Weltuntergangsstimmung verpraßten viele Bauern ihr Hab und Gut, Stifel verschenkte seinen Hausrat, ohne zu bedenken, was die Empfänger damit anfangen sollten. Angesichts des Jüngsten Gerichts waren ihm derartige nichtige logische Ungereimtheiten entgangen.



So begab es sich, daß die Lochauer Gemeinde am 18. 10. 1533 in den frühen Morgenstunden betend in Erwartung des baldigen Weltuntergangs in der Kirche versammelt war. Die Zeit verging, das Weltende schien sich zu verzögern. Nach 9 Uhr kamen mit festem Schritt Boten, aber nicht die des Jüngsten Gerichtes, sondern die des Kurfürsten, die Stifel abführten, nicht vor das erwartete Jüngste Gericht, sondern nur vor das Wittenberger Gericht. Luther verhalf dem falschen Propheten nach seiner einmonatigen Haft zu einer Predigerstelle in Holzhausen bei Wittenberg (heute an der F 187 gelegen). Stifel suchte bis an sein Lebensende den Fehler in der Weltuntergangsberechnung. 1567 starb er in Jena.

R. Thiele

Ein Zuschnittproblem

Manche Betriebe erhalten von Zulieferbetrieben Zwischenprodukte, zum Beispiel Bleche, Stoffballen, Papierrollen usw. in einer bestimmten Größe. Für die weitere Verarbeitung dieser Zwischenprodukte werden aber meistens kleinere Stücke des Materials gebraucht. Die Aufgabe besteht dann darin, den Zuschnitt so auszuführen, daß möglichst wenig Abfall oder Verschnitt entsteht, daß also mit der geringsten Menge an Material eine möglichst große Anzahl an erforderlichen kleineren Stükken erzielt wird.

Uwe will einen Drachen mit rechtwinkligem Kopf bauen. Ihm stehen zwei rechteckige Bogen Papier zur Verfügung, die beide die Länge $a = 90$ cm und die Breite $b = 60$ cm haben. Er fertigt für jeden Bogen eine Zeichnung, ein Drachenviereck, an. Aus den Bildern 1 und 2 geht hervor, wie Uwe die Drachenvierecke gezeichnet hat. Uwe überlegt nun, bei welcher der beiden Bilder der geringste Verschnitt entsteht, d. h., bei welcher der beiden Bilder die Fläche des Drachenvierecks am größten ist. Wer kann Uwe helfen und ihm die Lösung sagen?

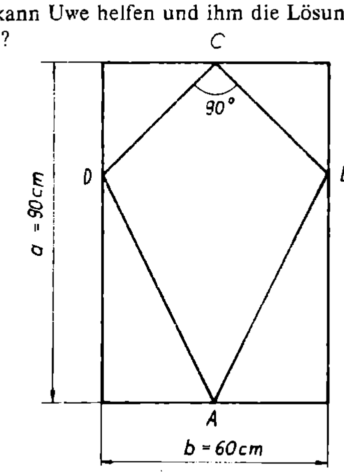


Bild 1

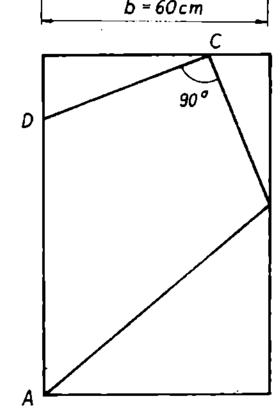


Bild 2

S. Tunn, bearbeitet von Th. Scholl

Ein Stück Experimentalgeometrie beim Papierfalten

1. Wie knifft man in ein rechteckiges Papierblatt eine Diagonale ein?

Wenn es sich um ein quadratisches Papierblatt handelt, so löst sich die Aufgabe einfach. Man bringt zwei Gegenecken des Quadrates *ABCD*, etwa *A* und *C*, übereinander und streicht dann das gewölbte Papierblatt glatt. Zur Kontrolle beachtet man dabei, daß die Kante *AD* auf die Kante *DC* fällt. Zwangsläufig fällt dann die Kante *AB* auf die Kante *BC*. Die beim Glattstreichen entstehende Knifflinie verläuft entlang der Diagonale *BD*. Wenn man jetzt noch von dem gefalteten Dreieck *BDA*(*C*) den Eckpunkt *B* mit dem Eckpunkt *D* zusammenlegt und wieder glattstreicht (wobei man zur Kontrolle die Doppelkante *BA* (*C*) entlang der Doppelkante *DA*(*C*) führt), so entsteht die Knifflinie *A*(*C*)*E*. Beim Entfalten erscheinen jetzt im ursprünglichen Quadrat die Diagonalen *BD* und *AC* eingeknifft (Bild 1).

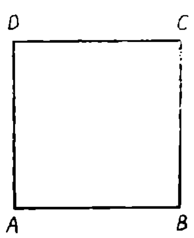
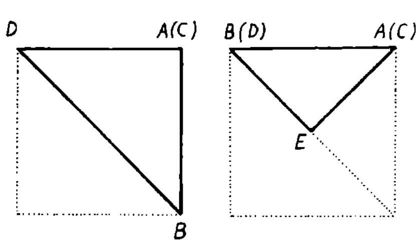
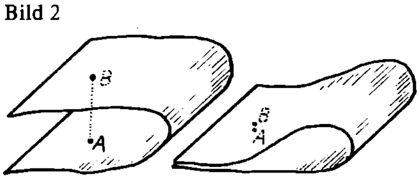


Bild 1



Für ein nicht quadratisches, aber rechteckiges Papierblatt verläuft das Verfahren nicht mehr so einfach. Man muß einen Umweg gehen! Dazu ist es vorteilhaft zu entscheiden, wie die Knifflinie in einem Papierblatt zu kennzeichnen ist, wenn man zwei Punkte *A*, *B* eines Blattes durch Einwölben übereinander bringt und dann glattstreicht (Bild 2).

Bild 2



Das Glattstreichen bringt als Knifflinie den geometrischen Ort aller der Punkte hervor, die von *A* und *B* den gleichen Abstand haben: $|AP| = |PB|$. Das ist die Mittelsenkrechte zwischen den Punkten *A*, *B*. Sie hat damit für zwei Punkte des Papierblattes eine ganz reale Bedeutung beim Papierfalten. Danach entsteht also für ein Rechteck *ABCD* durch Übereinanderfalten des Blattes, so daß die Punkte *A* und *C* zusammenfallen, die Mittelsenkrechte zur Diagonale *AC*. Wir erhalten damit die Knifflinie *EF* (Bild 3).

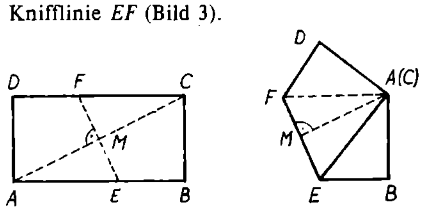
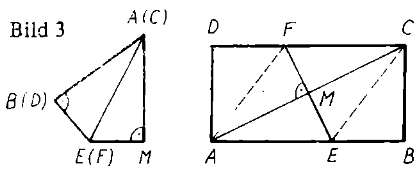


Bild 3



Als Faltfigur ergibt sich ein Fünfeck *BEFDA*(*C*). Dieses Fünfeck ist gleichschenklig und in zwei Winkelpaaren gleichwinklig:

$|FD| = |EB|$, $|DA| = |BA|$,

$\sphericalangle DFE = \sphericalangle BEF$, $\sphericalangle ADF = \sphericalangle ABE$.

Das begründet man etwa wie folgt.

Die Kongruenz der Strecken *AD* und *BC* sowie der Winkel $\sphericalangle ADE$ und $\sphericalangle CBE$ ist klar. Außerdem sind die Dreiecke *CFM* und *AEM* nach dem Kongruenzsatz *WSW* kongruent, deshalb sind auch die Strecken *CF* und *AE* kongruent. Das Dreieck *A*(*C*)*FE* in dem Fünfeck ist also gleichschenklig. Darauf sind die beiden kongruenten Dreiecke *A*(*C*)*DF* und *A*(*C*)*BE* aufgesetzt. Wenn man nun den Punkt *B* des Fünfecks mit dem Punkt *D* und den Punkt *E* mit *F* übereinander bringt und knifft, so entsteht die Mittelsenkrechte *A*(*C*)*M* im Dreieck *EFA*(*C*). Als Faltfigur liegt das Viereck *ME*(*F*)*B*(*D*)*A*(*C*) vor. Beim Entfalten erscheinen in dem Ausgangsrechteck *ABCD* die Diagonale *AC* und deren Mittelsenkrechte *EF* eingeknifft. Nachdem man die Knifflinie *EF* erhalten hat, könnte man natürlich in dem wieder entfalteten Rechteck die Knifflinie *AC* durch Übereinanderbringen der Punkte *E* und *F* und durch Glattstreichen erlangen.

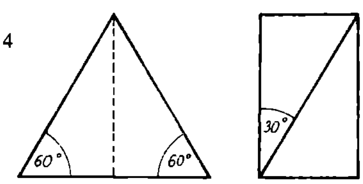
Das Viereck *AECF* ist übrigens ein Rhombus. Ist das Viereck *ME*(*F*)*B*(*D*)*A*(*C*), welches vielleicht den Eindruck von Spiegelsymmetrie hervorruft, wirklich spiegelsymmetrisch? Mit anderen Worten; wann sind die Dreiecke *BEC* und *MEC* des Ausgangsrechteckes kongruent? Dann muß $|MC| = |CB|$ und $|ME| = |EB|$ sein.

Wegen des rechten Winkels bei *M* bzw. *B* folgt aus dem Kongruenzsatz *WSS*, daß die Kongruenz der beiden Dreiecke genau dann eintritt, wenn $|MC| = |CB|$. Das bedeutet ein Rechteck *ABCD*, in dem die Diagonalen doppelt so lang sind wie die kürzere Rechteckseite *b*. Sei die längere Rechteckseite *a*. Dann bekommt man nach dem Pythagoras

$$a^2 + b^2 = 4b^2, \text{ d. h. } \frac{a}{b} = \sqrt{3}\,.$$

Eine andere Schlußweise zur Kongruenzbedingung der beiden Dreiecke *BEC* und *MEC* kann so ablaufen: Die drei beim Eckpunkt *C* auftretenden Winkel der aneinanderstoßenden Dreiecke sind dann kongruent. Es muß sich also in dem Rechteck *ABCD* bei dem Winkel $\sphericalangle ACD$ um einen von 30° handeln. Das Dreieck *ACD* ist also ein Halbierungsdreieck eines gleichseitigen Dreiecks (Bild 4).

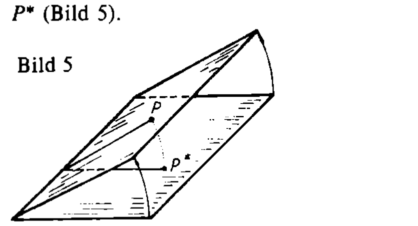
Bild 4

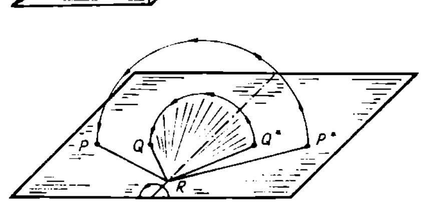


2. Eine Faltkante als Dreh- und Spiegelachse

Wenn man ein einmal gefaltetes Papierblatt entfalten will, so kann man den einen Blatteil etwa auf einer Ebene festhalten und den anderen Teil um die Faltkante ebenfalls in diese Ebene zurückdrehen. Ein Punkt *P* des aufgefalteten Teiles, der nicht auf der Faltkante liegt, beschreibt dann beim Zurückdrehen einen Halbkreisbogen im Raum. Der unter dem Punkt *P* liegende Punkt des unteren Blatteiles sei P^* (Bild 5).

Bild 5





Eine Strecke von *P* zu einem Punkt *R* der Faltkante durchläuft im Raum beim Zurückdrehen die Mantellinien eines halben Kreiskegels. *P* liegt in der entfalteten Ebene spiegelsymmetrisch bezüglich der Faltkante zum Punkt P^*. Die Faltkante ist ja gerade die Mittelsenkrechte zu den Punkten P, P^*. Ein von einem Punkt R der Faltkante ausgehender Strahl wird durch das Falten in einen ebenfalls von R ausgehenden Strahl der anderen Halbebene überführt. Für diese beiden Strahlen, die in den beiden Halbebenen verlaufen, stellt die Faltkante die Winkelhalbierende dar. Winkelhalbierende von dreieckigen, viereckigen, ..., n-eckigen Papierblättern können daher durch Übereinanderbringen der aneinanderstoßenden Seiten eingeknifft werden.

Durch Experimente mit Dreiecken gewinnt man beim Falten Vertrautheit mit der Tatsache, daß die Winkelhalbierenden eines Dreiecks sich in einem Punkte schneiden. Außerdem zeigt sich einem auch das Vorkommen von Vierecken, die nicht eben sind (Bild 6).

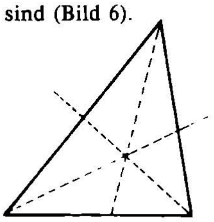
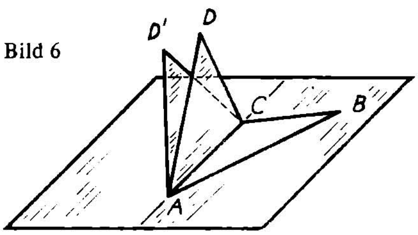


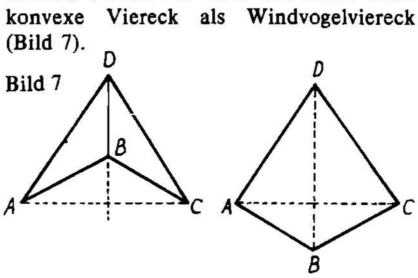
Bild 6



Jetzt betrachten wir wieder ebene Vierecke und fragen nach der Beschaffenheit von denjenigen Vierecken, wo eine der Diagonalen, das sind die Verbindungsstrecken von zwei Gegenecken, das Viereck in zwei kongruente Dreiecke zerlegt. Wir denken uns dazu das Viereck längs einer solchen Diagonale zusammengefaltet.

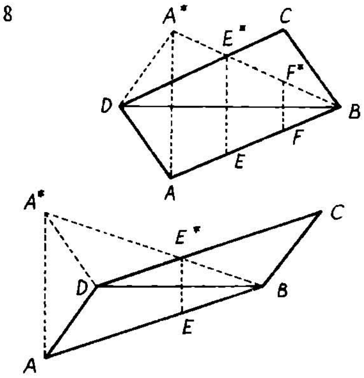
Dann sind zwei Fälle möglich. Das eine Teildreieck kommt mit dem anderen zur Deckung, oder das tritt nicht ein. Im ersten Falle ist also die Diagonale eine Symmetrielinie für das Viereck. Die andere Diagonale verläuft senkrecht zur ersten Diagonale und wird von ihr halbiert. Diese zweite Diagonale wird Grundseite von zwei gleichschenkligen Dreiecken. Wenn diese beiden Dreiecke auf verschiedenen Seiten der gemeinsamen Basislinie liegen, handelt es sich um ein Drachenviereck, anderenfalls bezeichnet man das dann nicht konvexe Viereck als Windvogelviereck (Bild 7).

Bild 7



Gelangen die beiden kongruenten Teildreiecke bei Drehung um die Faltachse nicht zur Deckung, dann erscheint die im Bild 8 illustrierte Situation.

Bild 8

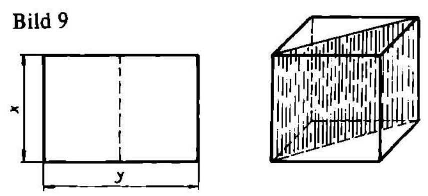


Das durch Drehung des Dreiecks ABD um die Faltachse entstandene Dreieck sei BA^*D. Dieses Dreieck ist zu dem Dreieck BCD kongruent. Folglich stimmt der Winkel $\sphericalangle A^*DB$ mit dem Winkel $\sphericalangle DBC$ überein. Damit sind die Winkel $\sphericalangle ADB$ und $\sphericalangle DBC$ gleich, also ist AD parallel zu CB. Entsprechendes gilt für AB und CD. Das Ausgangsviereck wird in diesem Falle ein Parallelogramm. Die Linie EE^*, die als Senkrechte zu BD durch den Schnittpunkt E^* von CD und BA^* bestimmt war, wird die Mittelsenkrechte zur Diagonale BD. Das Dreieck BE^*D ist nämlich gleichschenklig und EE^* halbiert den Winkel bei E^*. Das Viereck DE^*BE ist ein dem Parallelogramm einbeschriebener Rhombus. Durch Spiegelung an der Symmetrielinie EE^* geht das Dreieck BA^*D in das Dreieck BCD über. Der im ersten Abschnitt festgestellte Sachverhalt gilt also für beliebige Parallelogramme: Die Mittelsenkrechte zu einer Parallelogrammdiagonale bestimmt durch die Schnittpunkte mit zwei Gegenseiten und die Endpunkte der Diagonale einen dem Parallelogramm einbeschriebenen Rhombus.

3. Faltlinien am Ostwaldschen Rechteck

Ein im DIN-Format vorliegendes Rechteck wollen wir ein Ostwaldsches Rechteck nennen. Wilhelm Ostwald, der bekannte Chemiker, Wissenschaftstheoretiker und Wissenschaftsorganisator, war Anfang unseres Jahrhunderts dafür eingetreten, die Papierformate international zu normen. Um keinen Abfall zu erzeugen, bedient man sich des Verdoppelns und des Halbierens als Prozedur. Wenn dabei das Seitenverhältnis invariant bleiben soll, kommt man auf die Forderung eines Seitenverhältnisses von $1:\sqrt{2}$ beim Rechteck (Bild 9).

Bild 9



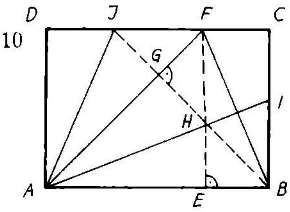
Es muß dann nämlich $x:y=\frac{y}{2}:x$ gelten.

Das bedeutet

$\left(\frac{x}{y}\right)^2=\frac{1}{2}$, d. h. $x:y=1:\sqrt{2}$.

Solche Ostwaldschen Rechtecke treten als Diagonalschnitte durch Würfel auf. Nun nehmen wir folgende Faltungen an einem Ostwaldschen Rechteck vor. Zuerst werde die kürzere Rechteckseite auf die längere aufgelegt. Es entsteht die vom Eckpunkt A ausgehende Einkniffung längs der Quadratdiagonale des im Rechteck befindlichen Quadrats $AEFD$. Als Faltfigur erhält man das Trapez $ABCF$ (Bild 10).

Bild 10

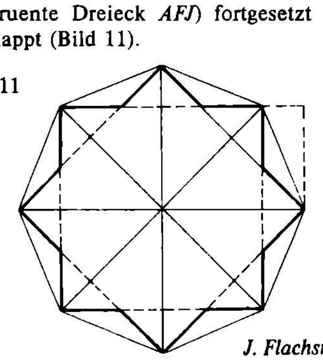


Die Kante DF fällt auf die Linie EF. Das Dreieck ABF ist gleichschenklig, weil $|AB|=\sqrt{2}\,|AD|$ im Ostwaldschen Rechteck und $|AF|=\sqrt{2}\,|AD|$ als Quadratdiagonale. Jetzt möge man das Kantenstück CF auf die Diagonale FA auffalten. Es entsteht als Faltfigur das Dreieck ABF mit den Dreieckshöhen BG und EF. Wenn man nun noch die Dreiecksseiten AB auf die Dreiecksseite AF auffaltet, so ergibt sich als Faltlinie die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle BAF$.

Entfaltet man das Gebilde wieder zum Rechteck, dann findet man die im Rechteck eingezeichneten Knifflinien. Die Linien EF, BG und AJ verlaufen durch einen Punkt H. Das liegt daran, daß AJ im gleichschenkligen Dreieck ABF zugleich eine Höhe ist. In einem Dreieck gehen aber alle drei Höhen durch das sogenannte Orthozentrum. In dem Rechteck $BCFE$ ist die Linie HJ die Mittelsenkrechte der Diagonale BF. Die Knifflinien AJ, AF und AJ teilen den rechten Winkel bei A in vier gleiche Teile. Wenn man das Dreieck DAJ um die Achse AJ in die Blattebene hineindreht, so kommt es mit dem Dreieck AGJ zur Deckung.

Ein weiteres Herumklappen führt zu dem Dreieck AGH und dann zu dem Dreieck AHE. Mit anderen Worten: Die Vierecke $ADJG$ und $AGHE$ sind kongruente Drachenvierecke. Sie machen zusammen ein Viertel eines regelmäßigen Achtecks mit dem Umkreisradius $|AJ|$ und dem Inkreisradius $|AD|$ aus. Die Dreiecke AJF und AFH ergeben ebenfalls ein Drachenviereck. Durch das fortgesetzte Umklappen dieses Dreiecks erhält man ein regelmäßiges Sternachteck. Schließlich ergibt sich wieder ein konvexes regelmäßiges Achteck, wenn man das Dreieck AJB (bzw. das dazu kongruente Dreieck AFJ) fortgesetzt herumklappt (Bild 11).

Bild 11



J. Flachsmeyer

Eine Aufgabe von Prof. Dr. J. Flachsmeyer

Sektion Mathematik
der Ernst-Moritz-Arndt-Universität
Greifswald

▲3044▲ Bei einem Ostwaldschen Rechteck, das etwa als ein Papierblatt im DIN-A-Format vorliegt, soll man lediglich durch die Prozedur des Papierfaltens jede der Rechteckseiten nach dem Ostwaldschen Verhältnis $1:\sqrt{2}$ teilen.

Kurzbiographie

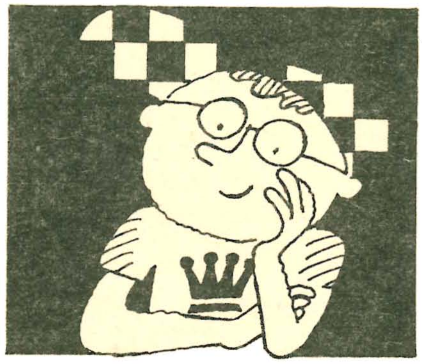
Jahrgang 1935 – Abitur 1954 – Mathematikstudium an der E.-M.-Arndt-Universität Greifswald 1954 bis 1959 – Promotion 1960 (Zerlegungsspektren topologischer Räume) – 1962 bis 1963 Forschungsaufenthalt an der AdW der UdSSR (Gast beim Stammvater der sowjetischen Topologenschule P. S. Alexandrov) – Habilitation 1965 (Topologie und Boole-Algebren) – 1960 bis 1969 Assistent und Arbeitsgruppenleiter am Institut für Reine Mathematik der AdW zu Berlin – 1969 Ordentlicher Professor an der Universität Greifswald, Lehrstuhl für Geometrie und Topologie.

Veröffentlichungen in *alpha*:
Kombinatorische Betrachtungen bei Schiebespielen Heft 4/78;
Verteilungen Heft 6/79;
Kombinierte Figuren aus Quadraten und Dreiecken Heft 3/80;
Zum Verhältnis von Kunst und Wissenschaft am Beispiel der Ornamente und der Mathematik Heft 5/89 (Teil 1), Heft 6/89 (Teil 2);
Symmetrien Ostwaldscher Ornamente Heft 2/89.

Achtung!

Schaut euch unser Titelblatt genau an! „Eingeübten Auges" könnt ihr ein wichtiges Ereignis ablesen!

Viel Spaß wünscht euch *Alphons*



Alpha-Schachwettbewerb 1989

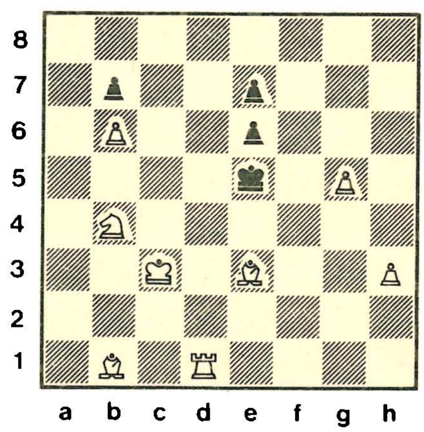
Alle Schachfreunde sind wiederum aufgefordert, an dem mittlerweile 7. alpha-Schachwettbewerb teilzunehmen!
Unser Wettbewerb soll Schachfreunden als Anregung dienen und neue Interessenten ermuntern, sich etwas intensiver mit dem königlichen Spiel zu beschäftigen.
Vier Schachaufgaben gilt es zu lösen. Anläßlich eines Treffens von Schachproblemkomponisten im Mai dieses Jahres in Flessenow stellten Schachfreunde die Aufgaben als kleinen Beitrag zum 40. Jahrestag der Gründung unserer Republik für *alpha* zur Verfügung. Alle vier Aufgaben sind Urdrucke und werden somit zum ersten Mal veröffentlicht.
In allen vier Aufgaben beginnt Weiß und setzt Schwarz trotz bester Gegenwehr mit dem zweiten bzw. dritten Zug matt.
Als vollständig gilt die Lösung, wenn alle Abspiele bis zum Matt angeführt sind.
Unter den Teilnehmern, die die Aufgaben Nr. 1 bis Nr. 4 korrekt gelöst haben, werden Buchpreise verlost und Urkunden verteilt. In einer weiteren Verlosung haben auch alle anderen Teilnehmer, die zumindest eine Aufgabe richtig gelöst haben, die Chance, einen Buchpreis zu gewinnen.
Teilnahmeberechtigt sind alle alpha-Leser.
Die Einsendung der Lösungen (jeweilige Aufgaben-Nummer angeben) ist bitte bis zum 31. 12. 1989
unter Angabe von Name, Vorname, Alter und Adresse zu richten an

Redaktion alpha
PSF 14
Leipzig
7027.

Die Lösungen sowie die Gewinner werden in alpha 3/1990 veröffentlicht.

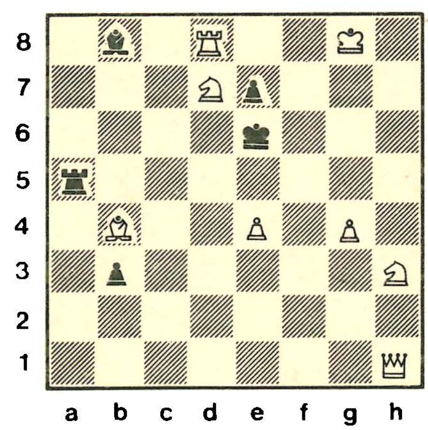
„alpha" dankt den vier Schachkomponisten herzlich für die vier Urdruckprobleme!

Wolfgang Berg (Rampe)



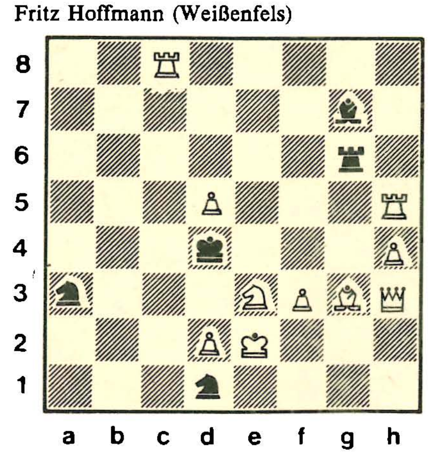
Nr. 1 Matt in 2 Zügen

Dr. Rainer Staudte (Karl-Marx-Stadt)



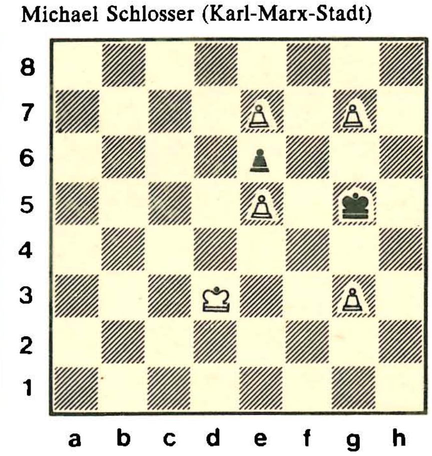
Nr. 2 Matt in 2 Zügen

Fritz Hoffmann (Weißenfels)



Nr. 3 Matt in 2 Zügen

Michael Schlosser (Karl-Marx-Stadt)



Nr. 4 Matt in 3 Zügen

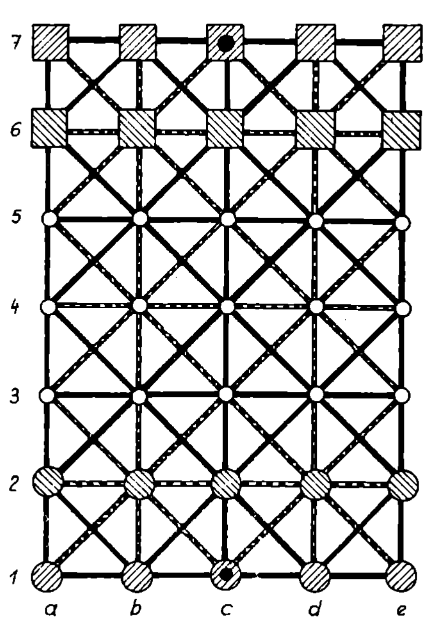
Boncoup – ein neues Brettspiel

Heute wird immer mehr Menschen klar, daß die Geschichte kein Spiel mit einer Nullsumme darstellt, bei dem der eine in dem Maß gewinnt, wie der andere verliert.
Michail Gorbatschow

Der Name Boncoup (etwa wie „bongku" gesprochen) wurde aus den französischen Wörtern bon (gut, geschickt) und coup (Zug, Schlag, Hieb) gebildet. Das Bild zeigt das $5 \cdot 7 = 35$ Felder umfassende Spielfeld mit eingezeichneten roten (▬▬▬) und grünen (▭▪▭▪▭) Linien und den zu Partiebeginn aufgestellten Spielsteinen: Auf den Feldern der Reihen 2 und 6 stehen dann grüne (\\\\\\\) und auf denen der Reihen 1 und 7 rote (//////) Spielsteine. Die roten Spielsteine auf den Mittelfeldern der Reihen 1 und 7 sind die Hauptsteine, gekennzeichnet durch einen schwarzen Punkt. Die 10 Spielsteine des Spielers A sind kreisförmige, die des Spielers B quadratische Scheiben.

Die Spielregeln

Beide Spieler ziehen abwechselnd. Bei einem Zug darf und muß entweder ein grüner Stein längs einer grünen oder ein roter Stein längs einer roten Linie geradlinig auf ein anderes Feld gezogen werden, falls alle Felder zwischen dem Ausgangsfeld und dem gewählten Endfeld frei sind und das Endfeld ebenfalls unbesetzt oder mit



einem feindlichen Stein besetzt ist. Im letzten Fall wird der feindliche Stein geschlagen, d. h. vom Feld genommen. Das Spiel ist beendet, wenn von einer Partei der Hauptstein geschlagen ist. Diese Partei hat die Partie verloren. Wird ein kreisförmiger (quadratischer) Stein, der kein Hauptstein ist, von einem Feld der 7. (1.) Reihe von dieser Reihe weggezogen, so darf der Spieler A mit den kreisförmigen (B mit den quadratischen) Steinen auf das frei gewordene Feld der 7. (1.) Reihe einen seiner geschlagenen Steine wieder einsetzen mit folgender Bedingung:
Wurde der von der 7. (1.) Reihe weggezogene Stein auf ein Feld gezogen, von dem mehr grüne als rote Linien ausgehen, so muß der wieder eingesetzte Stein ein grüner, andernfalls ein roter sein. Die Partie endet unentschieden, wenn bei 20 aufeinanderfolgenden Zügen kein Stein geschlagen oder neu eingesetzt wird. Spielen zwei Spieler mehrere Partien gegeneinander, so führt im Wechsel jeder von beiden zu Partiebeginn den Eröffnungszug aus.
Nachdem ein Spielfeld auf ein Blatt Papier gezeichnet ist und die Spielsteine aus Pappe angefertigt sind, sollten zum Gewöhnen an die Spielregeln und zum Sammeln erster strategischer Erfahrungen die angegebenen Endspiele nachvollzogen werden.

I. Endspiel

Ausgangssituation:
Kreisförmige Steine
Rote Steine: Hc1 (Hauptstein), e1, a2
Grüne Steine: d2, c3
Quadratische Steine
Rote Steine: Hc7, a7, b7
Grüne Steine: a6, c6, d6
Spieler A mit den kreisförmigen Steinen ist am Zuge und gewinnt mit dem 3. Zug.
Züge des Spielers ...

1. A — B
c3–a5 — a6–b6 (Fall F_1) oder Hc7–d7 (Fall F_2)!

Steht hinter einem oder mehreren angegebenen Zügen von B ein Ausrufezeichen, so sind die angegebenen Züge die einzigen für B, nach denen A nicht bereits mit einem geeigneten Folgezug die Partie vorzeitig gewinnt. Steht vor einem Ausrufezeichen mehr als ein Zug, so ist eine Fallunterscheidung erforderlich.

Fall F_1:
1. c3–a5 a6–b6
2. d2×d6 ? ? ?

A zieht seinen Stein vom Feld d2 nach Feld d6 und schlägt damit den gegnerischen Stein auf Feld d6. Drei Fragezeichen bedeuten, daß unabhängig davon, wie B zieht, A mit seinem Folgezug stets die Partie gewinnt.

Fall F_2:
1. c3–a5 Hc7–d7
2. e1–e6 ? ? ?

II. Endspiel

Ausgangssituation:
Kreisförmige Steine
Rote Steine: Hc1
Grüne Steine: b2
Quadratische Steine
Rote Steine: Ha7
Grüne Steine: –
Spieler A ist am Zuge und gewinnt.
Züge des Spielers ..
A B
1. Hc1–c6 ● ● ●!

Drei fette Punkte bedeuten, daß B mit diesem Zuge seinen Hauptstein nicht auf eine Angriffslinie eines gegnerischen Steines setzt (andernfalls würde A die Partie bereits mit einem geeigneten nächsten Zug gewinnen) und daß das Weiterspielen von A nicht von dem von B gewählten Zuge abhängt, also keine Fallunterscheidung nötig ist.

2. b2–b7 ● ● ●!

Da der Stein auf b7 durch den kreisförmigen Hauptstein gesichert ist, würde ein Schlagen des Steines auf b7 den Partieverlust für B mit dem nächsten Zug von A bedingen.

3. b7–b2 (b7 grün) ● ● ●!

Der Stein auf b2 kann durch den roten Hauptstein von B nicht geschlagen werden, weil keine rote Linie zum Felde b2 führt. Da ein vom Hauptstein verschiedener kreisförmiger Stein von der 7. Linie weggezogen wurde, setzt der Spieler A auf das Feld b7 einen grünen kreisförmigen Stein ein, weil vom Felde b2 nur grüne, also mehr grüne als rote Linien ausgehen.

4. b7–b6 ● ● ●!
5. b6–d4 H..–a5 (Fall F_1) oder
H..–a6 (Fall F_2) oder
H..–e1 (Fall F_3) oder
H..–e6 (Fall F_4) oder
H..–e7 (Fall F_5)!

Sofern der Spieler B einen vorzeitigen Partieverlust vermieden hat, steht sein Hauptstein nunmehr auf einem der Felder a5, a6, c1, e6 und e7.

Fall F_1:
5. b6–d4 H..–a5
6. Hc6–b7 ? ? ?

Fall F_2:
5. b6–d4 H..–a6
6. Hc6–c7 Ha6–a5!
7. Hc7–b7 ? ? ?

Fall F_3:
5. b6–d4 H..–e1
6. Hc6–d7 ? ? ?

Fall F_4:
5. b6–d4 H..–e6
6. Hc6–c7 He6–e1!
7. Hc7–d7 ? ? ?

Fall F_5:
5. b6–d4 H..–e7
6. Hc6–c1 He7–e6!
7. Hc1–d1 He6–e7!
8. b2–b6 ? ? ?

III. Endspiel

Ausgangssituation:
Kreisförmige Steine
Rote Steine: Hc1, c4
Grüne Steine: c5
Quadratische Steine
Rote Steine: Hc7, d7, a6, e6
Grüne Steine: d6, d4
Spieler A ist am Zuge und gewinnt mit dem 2. Zuge.
Welchen ersten Zug muß A wählen?
Züge des Spielers ...
A B
1. c5–b6 ? ? ?

W. Träger

Kann man mit Näherungswerten genau rechnen?

Teil 2

Jörg und Martin streiten sich über die Größe des Flächeninhalts ihres Sportplatzes. Sie beschließen, ihn ganz genau zu ermitteln. Dazu messen sie Länge und Breite des markierten rechteckigen Fußballfeldes mit einem Bandmaß: $a = 105{,}3\ m$ und $b = 58{,}6\ m$. Mit einem Taschenrechner berechnet nun Martin:

$$A = 105{,}3\ \mathrm{m} \cdot 58{,}6\ \mathrm{m} = 6\,170{,}58\ \mathrm{m}^2.$$

Beide sind sehr stolz über das genaue Ergebnis, das den Flächeninhalt auf Quadratdezimeter genau angibt.

▲1▲ Was meinst du dazu?

Trotz aller Sorgfalt sind die Ergebnisse von Messungen – also auch die von Jörg und Martin – stets mit einer gewissen Unsicherheit (Fehler) behaftet; es sind keine genauen, sondern Näherungswerte.

Wir wollen nun überlegen, wie man mit Näherungswerten rechnet, denn das haben Jörg und Martin nicht beachtet. Dazu betrachten wir wieder unser obiges Beispiel. Zunächst muß man die Genauigkeit der Meßwerte beschreiben:

Dazu gibt man an, wie stark der genaue Wert vom Meßwert abweichen kann. In unserem Beispiel ist eine Abweichung von $10\ \mathrm{cm} = 0{,}1\ \mathrm{m}$ beim Messen mit einem 20-m-Bandmaß über diese Entfernung durchaus möglich. Nun können wir die Meßwerte präziser angeben:

$a = (105{,}3 \pm 0{,}1)\ \mathrm{m}$ und

$b = (58{,}6 \pm 0{,}1)\ \mathrm{m}$ oder jeweils als Doppelungleichung geschrieben:

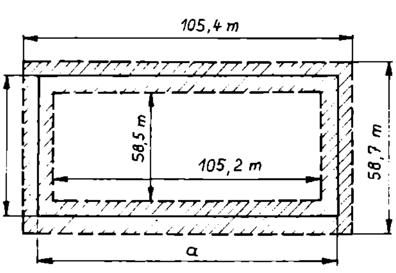
$105{,}2\ \mathrm{m} \leqq a \leqq 105{,}4\ \mathrm{m}$ und

$58{,}5\ \mathrm{m} \leqq b \leqq 58{,}7\ \mathrm{m}$.

Damit kann man auch die Genauigkeit des Flächeninhalts zahlenmäßig durch eine Doppelungleichung beschreiben, indem man den kleinstmöglichen Flächeninhalt (eine untere Wertschranke) und den größtmöglichen Flächeninhalt (eine obere Wertschranke) berechnet.

$A_u = a_u \cdot b_u = 105{,}2\ \mathrm{m} \cdot 58{,}5\ \mathrm{m}$
$= 6\,154{,}2\ \mathrm{m}^2$

$A_o = a_o \cdot b_o = 105{,}4\ \mathrm{m} \cdot 58{,}7\ \mathrm{m}$
$= 6\,186{,}98\ \mathrm{m}^2$.



Wir können also für den Flächeninhalt des Fußballfeldes lediglich ein Intervall angeben, in dem der wahre Wert liegt. Diesen Sachverhalt veranschaulicht auch das Bild. Der Flächeninhalt des Fußballfeldes kann auf Grund der Meßungenauigkeit bei den Seitenlängen zwischen rund $6\,154\ \mathrm{m}^2$ und $6\,187\ \mathrm{m}^2$ schwanken. (Beim Runden von Wertschranken rundet man untere Wertschranken stets ab, und obere Wertschranken immer auf.)

Eine mathematisch exakte Angabe des Flächeninhalts für diese Aufgabe ist:

$6\,154\ \mathrm{m}^2 \leqq A \leqq 6\,187\ \mathrm{m}^2$

oder $A = (6\,170{,}5 \pm 16{,}5)\ \mathrm{m}^2$.

Damit wird sichtbar, daß in diesem Beispiel eine auf Quadratdezimeter genaue Angabe eine zu große Genauigkeit vortäuscht und daher abzulehnen ist.

▲2▲ Berechne das Volumen einer Streichholzschachtel mit

$a = (5{,}3 \pm 0{,}05)\ \mathrm{cm}$,
$b = (3{,}7 \pm 0{,}05)\ \mathrm{cm}$,
$c = (1{,}5 \pm 0{,}05)\ \mathrm{cm}$.

Diese Methode, nach der man mit Näherungswerten mathematisch exakt rechnen kann, heißt Wertschrankenmethode. Ihr Wesen besteht darin, eine untere und eine obere Wertschranke des Ergebnisses unter Berücksichtigung der Wertschranken der gegebenen Näherungswerte zu berechnen. Wie man die unteren bzw. oberen Wertschranken des Ergebnisses berechnet, hängt vom zu berechnenden Term ab.

Beispiel:

Ines fährt mit einem D-Zug und schaut aus dem Fenster. Dabei fällt ihr auf, daß „Kilometersteine“ in Abständen von 200 m entlang der Eisenbahnstrecke stehen. Sie kommt auf die Idee, die Geschwindigkeit des Zuges zu berechnen und mißt die Zeit für die Fahrt von Kilometerstein zu Kilometerstein (8 s).

Weg und Zeit sind offenbar Näherungswerte, und Ines gibt sie folgendermaßen an:

$s = (200 \pm 1)\ \mathrm{m}$ und $t = (8 \pm 1)\ \mathrm{s}$.

Bei der Wertschrankenberechnung für die Geschwindigkeit muß man beachten, wann ein Quotient am kleinsten bzw. am größten ist.

$$v_u = \frac{s_u}{t_o} = \frac{199\ \mathrm{m}}{9\ \mathrm{s}} = 22{,}1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 79{,}6\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

▲3▲ Berechne die obere Wertschranke v_o und gib die Geschwindigkeit des D-Zuges mit Hilfe einer Ungleichung an!

▲4▲ Zur Berechnung der Dicke eines Kreisringes werden die Radien des äußeren und des inneren Kreises gemessen.

$r_2 = (15{,}0 \pm 0{,}05)\ \mathrm{cm}$ und

$r_1 = (10{,}3 \pm 0{,}05)\ \mathrm{cm}$.

Welche Dicke hat der Kreisring?

Wir haben bis hierher festgestellt:

- Wenn Näherungswerte in eine Rechnung eingehen, so muß man das bei der Rechnung und bei der Ergebnisangabe berücksichtigen.
- Eine Möglichkeit, die Genauigkeit von Ergebnissen beim Rechnen mit Näherungswerten zu ermitteln, bietet die Wertschrankenmethode.

In der Praxis wird nicht immer bei jedem Näherungswert die Abweichung mit angegeben, sondern in vielen Fällen gilt die Vereinbarung: Werden zu einem Näherungswert keine Wertschranken mitgeteilt, so nimmt man alle gegebenen Ziffern des Näherungswertes als zuverlässig an, d. h. die Abweichung beträgt höchstens eine halbe Einheit des Stellenwertes der letzten mitgeteilten Ziffer.

Beispiel:

$s_1 = 17\ \mathrm{m}$, $s_2 = 17{,}0\ \mathrm{m}$

(s_1, s_2 Näherungswerte)

Stellenwert der letzten angegebenen Ziffer von s_1 ist Einer, also

$$s_1 = \left(17 \pm \frac{1}{2} \cdot 1\right)\mathrm{m},$$

d. h. $16{,}5\ \mathrm{m} \leqq s_1 \leqq 17{,}5\ \mathrm{m}$

Stellenwert der letzten angegebenen Ziffer von s_2 ist Zehntel, also

$$s_2 = \left(17{,}0 \pm \frac{1}{2} \cdot 0{,}1\right)\mathrm{m},$$

d. h. $16{,}95\ \mathrm{m} \leqq s_2 \leqq 17{,}05\ \mathrm{m}$.

▲5▲ Gegeben sind die Zahlen $a = 88{,}7$ und $b = 32$.

(1) Berechne Summe, Differenz, Produkt und Quotient von a und b unter der Voraussetzung, daß diese Werte genau sind!

(2) Berechne die Wertschranken dafür, wenn a und b Näherungswerte mit zuverlässigen Ziffern sind!

Die Wertschrankenmethode ist für die alltägliche Praxis des Rechnens mit Näherungswerten im allgemeinen zu aufwendig, denn jede Rechnung muß zweimal ausgeführt werden. Daher hat man „Faustregeln“ für das Rechnen mit Näherungswerten entwickelt.

Beispiel:

Frank fährt in den Ferien mit dem Fahrrad von Halle zu seiner Cousine Anja nach Karl-Marx-Stadt. Bis zum Ortsausgangsschild von Halle legt er 5,7 km zurück. Diese Entfernung wurde mit Hilfe des Kilometerzählers am Fahrrad ermittelt. Am Ortsausgangsschild von Halle findet er die Angabe: Leipzig 32 km. Die Entfernung von Leipzig nach Karl-Marx-Stadt ermittelt Frank mit Hilfe einer Karte (80 km). Addiert man einfach die Kilometerangaben, so erhält man 117,7 km.

Aus unseren bisherigen Überlegungen wissen wir allerdings, daß dieses Resultat mit Sicherheit eine zu große Genauigkeit vortäuscht.

Um keine untere und keine obere Wertschranke berechnen zu müssen, gehen wir einen anderen Weg. Wir schreiben die Summanden untereinander und kennzeichnen „alle“ Stellen, die uns nicht ganz sicher erscheinen. Zum Beispiel versehen wir auch die Einerstelle von 80 km (Entfernung, die mit Hilfe der Karte ermittelt wurde) mit einem Fragezeichen. Also gilt:

5,7 km
32,? km
8?,? km
117,7 km
? ?

Ausgehend von diesen Überlegungen ist ein Runden des Resultats 117,7 km auf Zehner sinnvoll.
Auf diese Weise haben wir uns die Regel zur Addition bzw. Subtraktion von Näherungswerten, die im Mathematiklehrbuch für die Klasse 6 formuliert ist, plausibel gemacht.

Regel 1:
Bei Addition und Subtraktion von Näherungswerten
- denjenigen Näherungswert heraussuchen, bei dem die letzte zuverlässige Ziffer am weitesten links steht!
- Ergebnis auf diese Stelle runden!

Eine entsprechende Regel gibt es auch für die „Punktrechnung“.

Regel 2:
Bei Multiplikation und Division
- Näherungswert mit der geringsten Anzahl zuverlässiger Ziffern heraussuchen!
- Ergebnis auf diese Zahl von Ziffern runden!

▲6▲ Berechne Summe, Differenz, Produkt und Quotient für die Näherungswerte $a = 88{,}7$ und $b = 32$ und wende dabei die Regel 1 bzw. Regel 2 an! Vergleiche mit den Ergebnissen von Aufgabe 5!

Diese Faustregeln erleichtern uns das Rechnen mit Näherungswerten, da wir nun nicht jedes Mal zwei Rechnungen durchführen müssen. Sie sichern aber nicht, daß das so erhaltene Resultat nur zuverlässige Ziffern enthält. Es wird lediglich erreicht, daß keine völlig unsinnige Genauigkeit beim Rechnen mit Näherungswerten vorgetäuscht wird.
Jörg und Martin hätten also ihr erstes Ergebnis entsprechend Regel 2 auf 3 Ziffern runden können. Das Resultat 6170 m² ist ein Näherungswert, der bezogen auf die Aufgabenstellung und die gegebenen Näherungswerte eine sinnvolle Genauigkeit besitzt.

L. Flade/M. Pruzina

Scharf nachgedacht!

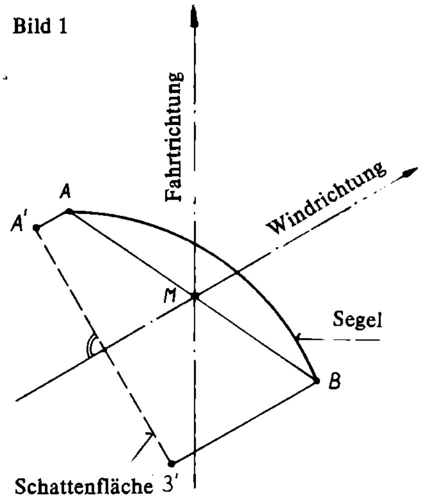
Es gingen zwei Väter und zwei Söhne übers Feld und fanden drei Äpfel und teilten sie so, daß jeder einen ganzen erhielt. Wie war das möglich?

aus: O. Spittel „Kleines Rätselbuch für Kinder“, Der Kinderbuchverlag Berlin

Eissegeln

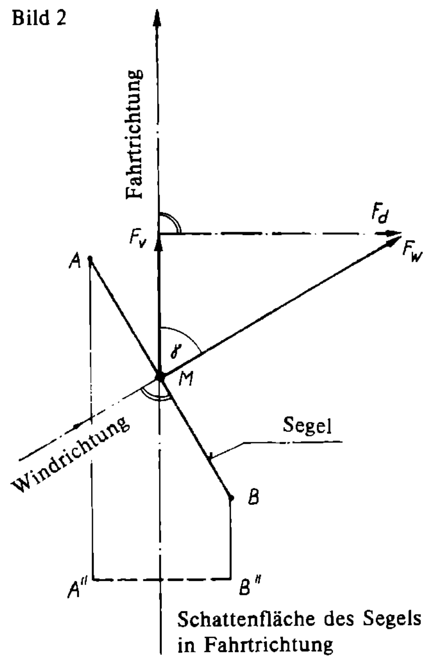
Es wird immer wieder berichtet, daß die Freunde des Eissegelns mit ihren schnellen Untersätzen Geschwindigkeiten bis zu $120\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ erreichen.
Wie ist es zu erklären, daß solche Geschwindigkeiten erreicht werden, wo doch die in solchen Fällen vorhandene Windgeschwindigkeit mit Sicherheit wesentlich geringer sein müßte?
(Beachte, daß $120\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 33{,}33\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ist; und das ist die Geschwindigkeit eines Orkanes. Es ist aber absolut nicht anzunehmen, daß bei derartigen Windgeschwindigkeiten noch gesegelt werden kann.) Die Erklärung ist verhältnismäßig einfach zu finden, wenn man die Kräfte, welche der Wind an dem Segel hervorruft, untersucht.
Die Bilder 1 und 2 sollen das für den allgemeinen Fall veranschaulichen. In Bild 1 ist ein gewölbtes Segel in einer beliebigen Stellung zur Wind- und zur Fahrtrichtung dargestellt. Das Segel soll als starr (z. B. aus Aluminium – wie bei einem japanischen Versuchssegelschiff) und um den Mastpunkt M beliebig drehbar angenommen werden. Für den die Vortriebskraft (zunächst in Windrichtung) erzeugenden „Staudruck“ ist aber nicht die reale Segelfläche sondern die „Schattenfläche“ des Segels maßgebend. Diese ergibt sich aus der senkrechten Projektion der realen Segelfläche auf die senkrecht zur Windrichtung stehende Projektionsebene. (In Bild 1 gestrichelt dargestellt.)
Die Wölbung des Segels spielt aber ebenfalls eine wichtige Rolle, weil die Form

Bild 1



eines in einer Strömung (ganz gleich ob Luft- oder Wasserströmung) befindlichen Körpers einen wesentlichen Einfluß auf den Widerstand, den der Körper der Strömung entgegensetzt, hat. Die Einflüsse dieses „Formwiderstandes“ sollen aber in den folgenden Betrachtungen unberücksichtigt bleiben.
Aus Bild 1 ist leicht zu ersehen, daß die Schattenfläche dann am größten ist, wenn das reale Segel rechtwinklig zur Windrichtung steht und damit die Entfernung $A'B' = AB$ ist.
Die nachstehenden Betrachtungen beziehen sich also ausschließlich auf die Schattenfläche des Segels. Diese soll aber mit „Segel“ bezeichnet werden.

Bild 2



In Bild 2 bezeichnen:
F_w = Kraft aus dem Staudruck des Windes
F_v = Vortriebskraft in Fahrtrichtung
F_d = Komponente aus F_w rechtwinklig zur Fahrtrichtung, die von den Kufen des Eisseglers als Seitenkraft aufgenommen werden muß, um ein Driften des Seglers zu verhindern. (Man stelle sich den Segler in Schienen geführt vor. Dann müssen die Schienen diese Komponente aufnehmen.)

Die Vortriebskraft F_v erzeugt also eine Beschleunigung des Seglers in Fahrtrichtung, und es ist leicht einzusehen, daß diese Beschleunigung im gleichen Maße abnehmen wird, wie die Geschwindigkeit des Seglers steigt, weil durch die zunehmende Geschwindigkeit ein zunehmender Gegenwind entsteht, der seinerseits wieder eine aus dem zugehörigen Staudruck resultierende „Gegenwindkraft“ erzeugt.
Die Geschwindigkeit des Seglers wird also solange zunehmen, solange eine Beschleunigung in Fahrtrichtung vorhanden ist. Und das ist solange der Fall, wie die Vortriebskraft F_v größer ist als die aus dem Gegenwind entstehende Gegenkraft F_g. Die

Größe der Kraft F_g ist eine unmittelbare Funktion aus der Geschwindigkeit in Fahrtrichtung und der gleichgerichteten Komponente der Windgeschwindigkeit. Gemäß Bild 2 gilt:

$$F_v = F_w \cdot \cos\gamma, \qquad (1)$$

weiterhin

$$F_v = a_v \cdot m$$

(wobei m = Masse des Seglers einschließlich der Reibungskraft zwischen Kufen und Fahrfläche).

Also: Vortriebsgeschwindigkeit in Fahrtrichtung

$$V_v = a_v \cdot t = \frac{F_v}{m} \cdot t.$$

Die in Fahrtrichtung wirkende Komponente V'_w der Windgeschwindigkeit ist

$$V'_w = V_w \cdot \cos\gamma.$$

Damit hat der auf das bewegte Segel bezogene „Gegenwind" die Größe

$$V_g = V_v - V'_w = V_v - V_w \cdot \cos\gamma.$$

Und damit ist die Gegenkraft

$$F_g = f_g \cdot A',$$

hierin f_g = Staudruck $\left(\frac{N}{m^2}\right)$

A' = Schattenfläche des Segels in Fahrtrichtung (m^2)

mit $A' = A \cdot \cos\gamma$

A = Schattenfläche des Segels in Windrichtung (m^2).

Der Staudruck ergibt sich aus

$$f_g = \frac{\varrho}{2} \cdot V_g^2$$

wobei ϱ = Dichte der Luft $\left(\frac{kg}{m^3}\right)$.

Insgesamt also

$$F_g = A \cdot \cos\gamma \cdot \frac{\varrho}{2} \cdot V_g^2. \qquad (2)$$

Die Vortriebsbeschleunigung wird dann gleich Null, wenn $F_g = F_v$ also (mit (1) und (2))

$$A \cdot \frac{\varrho}{2} \cdot (V_v - V_w \cdot \cos\gamma)^2$$

$\cdot \cos\gamma = F_w \cdot \cos\gamma$ und mit

$F_w = A \cdot \frac{\varrho}{2} \cdot V_w^2$ bleibt schließlich

$$V_v - V_w \cdot \cos\gamma = V_w.$$

Umgestellt ergibt sich

$$V_v = V_w (1 + \cos\gamma).$$

Weil $\cos\gamma$ maximal den Wert 1 haben kann, kann die maximale Vortriebsgeschwindigkeit

$$V_{v_{max}} = 2 \cdot V_w$$

sein.

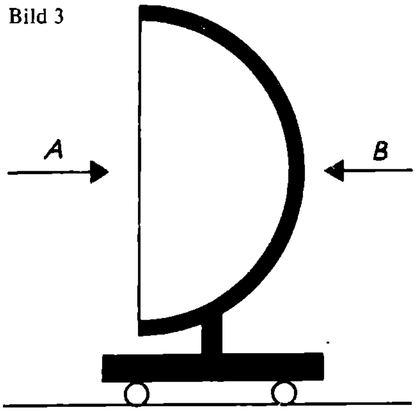
Das ist natürlich ein theoretischer Wert, der eine hundertprozentige Umsetzung der Windenergie in Beschleunigungsenergie und damit einen energetischen Gesamtwirkungsgrad von $1 \mathrel{\hat{=}} 100\,\%$ voraussetzt.

Dennoch zeigt sich, daß bei Windgeschwindigkeiten, die etwas größer als $50 \frac{km}{h}$ sind, unter idealen Bedingungen und bei Fahrtrichtung genau in Windrichtung Geschwindigkeiten um $100 \frac{km}{h}$ durchaus möglich sind. (Der Reibungskoeffizient von Stahl auf Eis kann mit 0,014 angenommen werden.)

Einige Betrachtungen zum Eissegeln aus der Grundlagenphysik

Wir stellen uns eine Versuchsanordnung vor, wie sie im Bild 3 dargestellt ist.

Bild 3



Auf einem Wagen sei eine halbe Hohlkugel angebracht. Der Wagen läßt sich (wie eine Modelleisenbahn-Lokomotive) mit einem Elektromotor antreiben. Die Motorleistung kann von außen geregelt werden. Der Versuchswagen befinde sich in einem Windkanal. Die Hohlkugel soll zum einen aus Richtung A und zum anderen aus Richtung B angeblasen werden.

Beim Anblasen in der Richtung A fängt die Hohlkugel den Luftstrom auf, und der Wagen will sich in Bewegung setzen. Wenn wir jetzt den E-Motor so anlaufen lassen, daß sich der Wagen mit diesem Antrieb dem Luftstrom entgegen bewegt, ist es vorstellbar, einen Zustand zu erreichen, bei dem der Wagen in Ruhe verharrt, sich also die Antriebskraft vom E-Motor mit der vom Luftstrom erzeugten Kraft im Gleichgewicht befindet.

Die Kraft, die notwendig ist, um die Hohlkugel in dem Luftstrom unbeweglich verharren zu lassen, wollen wir als Widerstandskraft F_r bezeichnen.

Wiederholen wir das Experiment mit einer Luftströmung in Richtung B, wird sich der Wagen ebenfalls in Bewegung setzen wollen. Wenn wir nun den Antrieb des Wagens wieder so einregeln, daß der Wagen in Ruhe bleibt und die elektrische Leistungsaufnahme mit der des vorhergehenden Versuches vergleichen, werden wir feststellen, daß bei gleicher Strömungsgeschwindigkeit der Luft im ersten Versuch wesentlich mehr Leistung aufgenommen wurde als im zweiten.

Ihr werdet sagen: „Das ist ja ganz klar, denn bei der Richtung A staut sich die Luftströmung in der Hohlkugel, während sie bei Richtung B verhältnismäßig leicht um die Kugelform herum strömen kann." Das ist richtig.

Und wenn wir jetzt den Wagen mit der Hohlkugel in ruhender Luft fahren lassen, einmal in Richtung B und zum anderen in Richtung A, werden wir aus den gleichen Gründen wieder unterschiedliche Widerstandskräfte ermitteln.

Wir werden dabei auch feststellen, daß es gleichgültig ist ob die stillstehende Hohlkugel angeblasen oder ob sie in ruhender Luft bewegt wird. Also ist einzig und allein die Relativbewegung maßgebend. Die Größe der Widerstandskraft wird aber offensichtlich von der Form des von der Luft umströmten Körpers bestimmt. Deshalb bezeichnet man diese Widerstandskraft auch als „Formwiderstand".

Der Formwiderstand wird berechnet mit

$$F_r = c \cdot A \cdot \frac{\varrho}{2} \cdot v^2. \qquad (N)$$

Hierin bedeuten:

c = formabhängige Widerstandszahl (sie ist der Literatur zu entnehmen)

A = Schattenfläche des angeströmten Körpers (m^2)

ϱ = Dichte der Luft $\left(\frac{kg}{m^3}\right)$

v = Anblasegeschwindigkeit $\left(\frac{m}{s}\right)$.

Für die Hohlkugel unserer Versuche gelten folgende Widerstandszahlen:

- bei Anströmung in der Richtung A
  $c_a = 1{,}33$
- bei Anströmung in der Richtung B
  $c_b = 0{,}34$.

Wir führen jetzt ein drittes Experiment durch. Dabei setzen wir generell reibungsfreie Verhältnisse voraus.

Wir lassen jetzt die Hohlkugel wieder in Richtung A anblasen und beobachten, was mit unserem Wagen geschieht.

Die Kraft, die wir beim ersten Versuch brauchten, um den Wagen im Ruhezustand zu halten, wird jetzt den Wagen in der Strömungsrichtung beschleunigen. Diese Beschleunigung wird offenbar solange anhalten, wie die beschleunigende Kraft größer ist als die sich aus dem zunehmenden Gegenwind ergebende Gegenkraft. Die Beschleunigung wird also dann zum Stillstand kommen (oder Null werden), wenn $F_{ra} = F_{rb}$

oder $c_a \cdot A_a \cdot \frac{\varrho}{2} \cdot v_a^2 = c_b \cdot A_b \cdot \frac{\varrho}{2} \cdot v_b^2$.

Wegen $A_a = A_b$

vereinfacht sich die Gleichung zu

$c_a \cdot v_a^2 = c_b \cdot v_b^2$ und hieraus

$$v_b = \sqrt{\frac{c_a}{c_b}} \cdot v_a.$$

Mit den Zahlenwerten ergibt sich für unser spezielles Beispiel

$$v_b = \sqrt{\frac{1{,}33}{0{,}34}} \cdot v_a = 1{,}978 \cdot v_a.$$

Weil die Luftströmung mit v_a in Richtung A erfolgt, ist v_b gleich der Eigengeschwindigkeit unseres Wagens, bezogen auf seine Fahrebene. *A. Körner*

Schon gewußt?

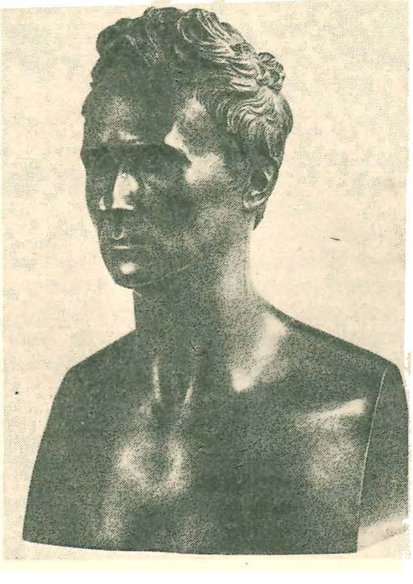
In der DDR werden täglich über 9 Millionen Exemplare von Tageszeitungen gedruckt. Hinzu kommen unter anderem 15 Zeitungen und Zeitschriften für Kinder und Jugendliche mit einer Gesamtauflage von über 7 Millionen Exemplaren. Die DDR steht nach dem statistischen Jahrbuch der UNESCO von 1987 mit 550 Tageszeitungen für je 1 000 Einwohner international an 2. Stelle hinter Japan.

nach: „Volkswacht", Gera

Auf den Spuren von Mathematikern
Lindenau, Bailly, Lalande

Viele von euch denken sicher zuerst an Skat, wenn es um die Kreisstadt Altenburg im Bezirk Leipzig geht. Bei einer Exkursion nach Altenburg wird daher oft auch das Spielkartenmuseum im Schloß besucht. In dieser Stadt gibt es jedoch ein weiteres Museum, dessen Besuch Kunstinteressierte auf keinen Fall versäumen sollten: das Staatliche Lindenau-Museum. Es besitzt die umfangreichste Sammlung frühitalienischer Tafelbilder außerhalb Italiens, bekannt sind weiterhin die (Gips-) Abgußsammlung von Plastiken des Altertums und der Antike sowie die Sammlung (originaler) griechischer und italienischer Keramik. Hier findet man auch drei etwa 60 cm hohe Büsten von Persönlichkeiten, die für Mathematiker von Interesse sind: Mit einer Bronzebüste des Künstlers David d'Angers wird des Gründers und Stifters dieses Museums, Bernhard von Lindenau, gedacht. Aus Lindenaus Besitz stammen auch zwei Terrakotta-Büsten, welche die französischen Astronomen J. S. Bailly und J. J. L. Lalande darstellen. Diese Büsten wurden von Jean Antoine Houdon geschaffen. Einige Fakten aus dem Leben der drei bemerkenswerten Männer sollen hier angeführt werden.

Der „große Sohn eines kleinen Landes" [1] Bernhard von Lindenau wurde am 11. 6. 1779 in Altenburg, das damals zum Herzogtum Sachsen-Gotha-Altenburg gehörte, geboren. Schon mit 15 Jahren begann er ein Studium an der Universität



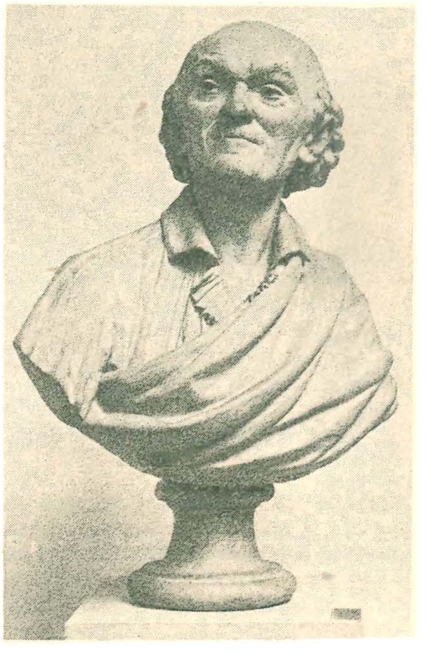
Leipzig. Seine Neigung galt der Astronomie und der Mathematik, aus dieser Zeit ist eine Arbeit von ihm über die „Dimension des Erdsphäroids" bekannt.

Lindenau wurde an die Sternwarte in Gotha berufen, deren Leiter er von 1808 bis 1817 war. Er verfaßte oder bearbeitete redaktionell Arbeiten zur Astronomie, er leitete die „Astronomische Correspondenz" und gab eine „Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften" heraus. Für seine Arbeiten und Tafelwerke erhielt er 1811 den Lalandeschen Preis (s. u.) der französischen Akademie (diese war von 1793 bis 1816 zum „Institute de France" zusammengefaßt). Von Lindenau stammen auch Beiträge zur Geschichte der Astronomie.

Reisen führten ihn 1812 nach Holland, Frankreich, Spanien und Italien. 1814 nahm er als Oberstleutnant am Freiheitskrieg teil. Ein ehrenvolles Angebot des Zaren Alexander, als für Vermessungsaufgaben verantwortlicher General nach Petersburg zu kommen, lehnte er ab. 1817 trat Bernhard von Lindenau wieder in den Staatsdienst. Zeitweilig war er Gesandter beim Bundestag in Frankfurt, dann ging er nach Dresden und wurde 1830 Kabinettsminister. Unter seiner Leitung wurde z. B. auch ein Schulgesetz verabschiedet! In Dresden übertrug man ihm die Oberaufsicht über die königlichen Museen und wissenschaftlichen Sammlungen, die er in ernsthafter Arbeit ordnete.

Unstimmigkeiten mit König Friedrich August II. führten 1843 zum Rücktritt Lindenaus. Nur im Frankfurter Parlament war er nach der bürgerlichen Revolution noch einmal kurz als Politiker tätig. Schließlich war B. v. Lindenau etwa 25 Jahre lang Kunstsammler. Er hat sehr bescheiden gelebt und sein Vermögen für den Ankauf von originalen Kunstwerken, Kopien und Büchern sowie für gemeinnützige Zwecke verwandt. Seine Sammlung vermachte er dem Herzogtum Sachsen-Altenburg, „um dem gemeinsamen Besten zu dienen" [1]. B. v. Lindenau starb am 21. 5. 1854 in Altenburg. Ein größeres (das jetzige) Museumsgebäude wurde erst 1876 fertiggestellt. Die beachtenswerte Kunstsammlung ist in unserer Republik ein Staatliches Museum, das den Namen seines Gründers trägt.

Astronom und Politiker war auch Jean Sylvain Bailly, der am 15. 9. 1736 in Paris geboren und dort am 11. 11. 1793 hingerichtet wurde. Durch seine Arbeiten zur Geschichte der Astronomie wurde er als Wissenschaftler bekannt und geschätzt. Von 1763 an war er Mitglied der Academie de sciences (Naturwissenschaften), 1783 nahm man ihn auch als Mitglied der Academie français (Geisteswissenschaften) auf. Bailly zählte am Anfang der Französischen Revolution zu den fortschrittlichen und sehr populären Politikern. Er wurde 1789 zum Präsidenten der Nationalversammlung gewählt. Im Lehrbuch Geschichte für Klasse 7 ist auf Seite 148 ein Ausschnitt des Gemäldes „Ballhausschwur" von J. L. David (um 1793 entstanden) abgebildet. Die zentrale, dunkel gekleidete Person, die auf einem Tisch steht und die rechte Hand zum Schwur erhebt, stellt mit großer Wahrscheinlichkeit J. S. Bailly dar.



Von 1789 bis 1791 war Bailly Bürgermeister von Paris. Politisch gehörte er zu den Anhängern einer konstitutionellen Monarchie. Als der König im Juli 1791 aus Paris zu fliehen versuchte und Demonstranten auf dem Pariser Marsfeld die Absetzung und Verurteilung des Königs forderten, rief Bailly das Kriegsrecht aus und ließ auf die Demonstranten schießen. Im November 1791 trat Bailly als Politiker zurück. Von der Jakobinerdiktatur wurde er 1793 wegen der Ereignisse auf dem Marsfeld unter dem Fallbeil hingerichtet.

Die dritte im Lindenau-Museum aufgestellte Büste zeigt Joseph Jerome Lefrancois de Lalande, geboren 1732 in Bourgen-Bresse, gestorben 1807 in Paris. Er war Jesuitenschüler und lernte bei dem Astronomen Delisle am College de France, dessen Lehrstuhl für Astronomie er 1762 erhielt. Von 1768 bis zu seinem Tode war er Direktor des Pariser Observatoriums. In älteren mathematikhistorischen Werken werden seine Untersuchungen über Mars und Mond sowie die von ihm dazu erstellten Tafeln gerühmt. Die Halleyschen Tafeln

verlegte er neu, und er verfaßte eine „Geschichte des berühmten Planeten Halley". Erwähnen muß man auch eigene Beiträge zur Geschichte der Astronomie, mit denen er uns eine „Chronik der Wissenschaften seiner Zeit" hinterlassen hat, und seine Verdienste um die Verbreitung von Resultaten anderer Wissenschaftler, z. B. oblag ihm seit 1760 die Redaktion der „Conaissance des temps", und er redigierte die „Geschichte der Mathematik" von Montucla.
J. J. L. de Lalande war Mitglied der Akademie in Berlin.

Ich würde mich freuen, wenn euch der kleine Aufsatz zu einem Besuch des Lindenau-Museums anregen sollte. Das Museum ist täglich – außer montags – von 9.00 bis 12.30 Uhr und von 13.00 bis 17.00 Uhr geöffnet.
Die Redaktion der „alpha" wartet auf eure Entdeckungen zu „Spuren von Mathematikern" und möchte euch zum Schreiben ermutigen!

W. Schmidt

Literatur:
[1] Gabelentz/Scherf.
Das Staatliche Lindenau-Museum.
Geschichte und seine Sammlungen.
Altenburg 1967

Wir widmen diesen Beitrag dem 200. Jahrestag der Französischen Revolution, deren weltgeschichtliche Bedeutung in der Beseitigung der feudalen Produktionsverhältnisse und Einleitung der Periode des Aufstiegs und Sieges des Kapitalismus auf dem europäischen Kontinent bestand.

Automatische Einteilung von Achsen

Ich weiß aus Erfahrung, daß Schüler an voll graphikfähigen Computern (z. B. KC85/2, 3, 4) gern Funktionen grafisch darstellen. Die Programme dazu sind gar nicht so kompliziert, der Rechner kann auch umfangreiche Terme schnell berechnen und man hat nach kurzer Zeit eine Vorstellung vom Verlauf der Funktion. Problematisch ist oft die Einteilung der Achsen. Ich möchte mich dabei zunächst auf die x-Achse beschränken.
Wenn jemand für alle Funktionen den Definitionsbereich $[0, 10]$ betrachtet, dann kann er z. B. die Achse von 0 bis 10 gleichmäßig in Einerschritten teilen und sogar problemlos die Zahlen 0 bis 10 an die Achse schreiben (Bild 1).
Aber bei besseren Programmen kann man den gewünschten Ausschnitt aus dem Definitionsbereich frei wählen. Und dann sind wir mitten drin im Problem der Einteilung der Achse. Man kann natürlich völlig auf Zwischenwerte verzichten und nur Anfangswert und Endwert angeben (Bilder 2a, 3a). Das erschwert das Aufsuchen von Zwischenwerten. Manche teilen dann z. B. immer in 10 gleiche Teile (Bilder 2b, 3b). Das sieht zwar schön aus und erleichtert das Aufsuchen von Zwischenwerten, es entbindet einen trotzdem nicht von viel Rechnerei. Die Zwischenwerte liegen nämlich bei:
Bild 2b: 3,77; 4,14; 4,51; 4,88; ...,
Bild 3b: $-1{,}7$; $-1{,}4$; $-1{,}1$; $-0{,}8$; ....
Ich glaube, niemand käme auf die Idee, solch eine Einteilung zu verwenden, wenn er per Hand auf Millimeterpapier Graphen mit diesem Definitionsbereich zeichnen müßte.
Was wäre denn da sinnvoll? Für Bild 3 würde man 6 oder 12 gleichgroße Abschnitte wählen, die Abstände wären dann 0,5 oder 0,25 (Bilder 3c, d). Und bei Bild 2 würde man wahrscheinlich die Achse von 3 bis 8 in Einerschritten teilen. Denkbar wäre auch: von 3,25 bis 7,25 in Schritten von 0,25 oder von 3 bis 7,5 in Schritten von 0,5 (Bilder 2c, d, e). Auf keinen Fall ist hier sinnvoll, von 3,4 bis 7,1 eine gleichmäßige Teilung in gleichgroße Teile vorzunehmen. Wer aber so auf dem Computerschirm aufteilt, verschenkt Platz. Ich finde es am besten, wenn man von 3,4 bis 7,1 einteilt, aber an denselben Stellen wie bei den letzten Bildern (das heißt also, bei sinnvollen Werten!) (Bilder 2f, g, h).
Wie macht man so etwas mit einem Programm? Das Problem liegt darin, eine genaue Handlungsanweisung zu entwickeln, denn nur die kann in ein Computerprogramm umgesetzt werden. Die erste Frage wäre, was sinnvolle Achseneinteilungen sind. Sicherlich solche Schrittweiten wie 1, 10, 0,1, ..., 2, 20, 0,2, ..., 2,5, 25, 0,25, ..., 5, 50, 0,5, ... Also legen wir fest: als Schritte für die Achseneinteilung kommen nur $1 \cdot 10^m$, $2 \cdot 10^m$, $2{,}5 \cdot 10^m$ und $5 \cdot 10^m$ mit ganzzahligem m in Frage. Die nächste Frage wäre, welche dieser Zahlen bei gegebenen Intervallenden a und b $(a < b)$ zu wählen zweckmäßig ist. Es dürfen ja weder zuviel noch zuwenig Zwischenwerte sein. Man kann auch nicht festlegen, daß man genau sieben Teilintervalle nimmt. Das würde nämlich bei vielen Paaren (a, b) nicht möglich sein, wenn wir nur die oben festgelegten Schritte zulassen. Es geht aber so:
Wir legen z. B. fest, daß die maximale Schrittlänge höchstens ein Viertel der Intervallänge ist (und wählen diesen oder den nächsten kleineren Wert von den zugelassenen als Schrittweite). Damit wären wir mit der Handlungsanweisung fertig, aber das Problem besteht nun darin, dem Computer diesen letzten Schritt beizubringen. Wie kommt man denn von 1001 zu 1000, von 0,38 zu 0,25, von 73 zu 50 oder von 0,00248 zu 0,002? Wir bemerken, daß wir die Ziffern der Zahlen betrachten müssen und dort etwas verändern, die Größenordnung der Zahlen aber beibehalten. Dazu nehmen wir am besten die Exponentialdarstellung der Zahlen!
$1{,}001 \cdot 10^3$ wird zu $1 \cdot 10^3$,
$3{,}8 \cdot 10^{-1}$ wird zu $2{,}5 \cdot 10^{-1}$,
$7{,}3 \cdot 10^1$ wird zu $5 \cdot 10^1$ und
$2{,}48 \cdot 10^{-3}$ wird zu $2 \cdot 10^{-3}$.
Betrachten wir an dieser Stelle unseren Weg! Wir haben ein „großes" Anfangsproblem gehabt. Wir haben es gelöst, indem wir es zerlegt haben und immer ein anderes „kleineres" Problem übrig blieb. Dieser Prozeß setzt sich fort, bis wir einmal das Restproblem vollständig lösen!
Aber zurück! Wenn wir erst einmal eine Zahl in Exponentialdarstellung haben, bei der der Faktor f vor der Zehnerpotenz die Bedingung $1 \leq f < 10$ erfüllt, brauchen wir f nur beizubehalten oder bis zur nächstkleineren Zahl 1, 2, 2,5 oder 5 zu verkleinern. Wie bekommen wir aber diese Zerlegung in f und eine Zehnerpotenz?
Der Logarithmus zur Basis 10 leistet das Gewünschte! Es ist nämlich:
$\lg 1001 = 3{,}00043 = 3 + 0{,}00043$,
$\lg 0{,}38 = -0{,}42022 = -1 + 0{,}57978$,
$\lg 73 = 1{,}86332 = 1 + 0{,}86332$ und
$\lg 0{,}00248 = -2{,}6055 = -3 + 0{,}39445$.
Nach Zerlegung in den ganzzahligen und gebrochenen Anteil (dieser ist nichtnegativ und kleiner als 1) ist letzterer für die Ziffernfolge verantwortlich, über die Potenz zur Basis 10 kann er in den gewünschten Faktor f umgerechnet werden.
Nun sind wir also fertig! Aber halt! Man findet zwar für die Abtrennung des ganzzahligen Anteils eine nützliche Funktion im Computer (INT), aber es gibt meistens keine für den dekadischen Logarithmus. Dafür gibt es bei den zu Anfang genannten

1. Bild 1
2. Bild 2a
3. Bild 2b
4. Bild 2c
5. Bild 2d
6. Bild 2e
7. Bild 2f
8. Bild 2g
9. Bild 2h
10. Bild 3a
11. Bild 3b
12. Bild 3c
13. Bild 3d

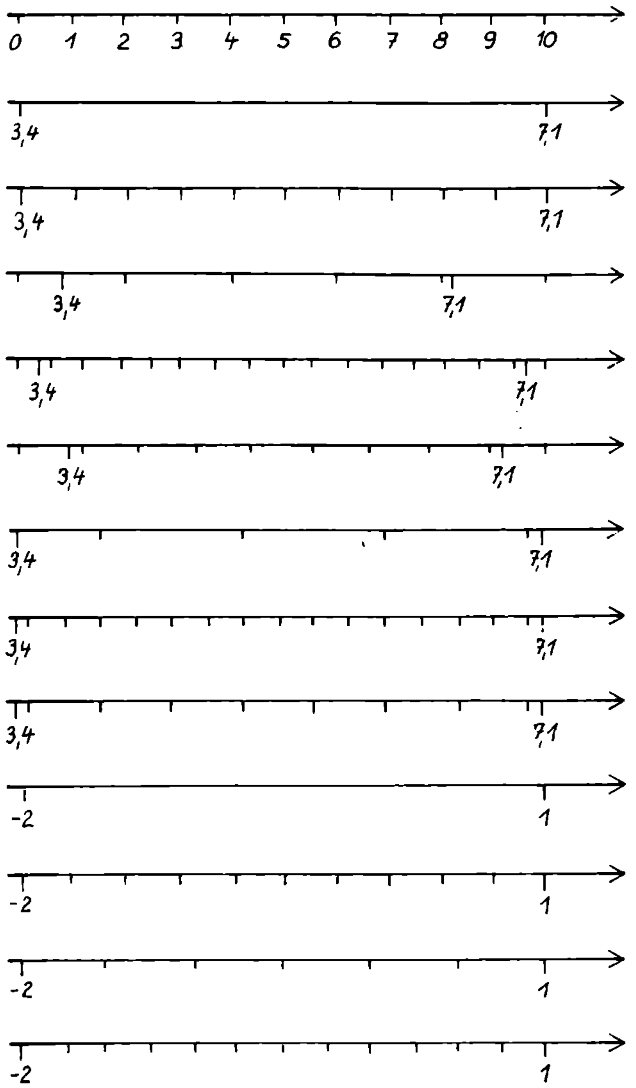
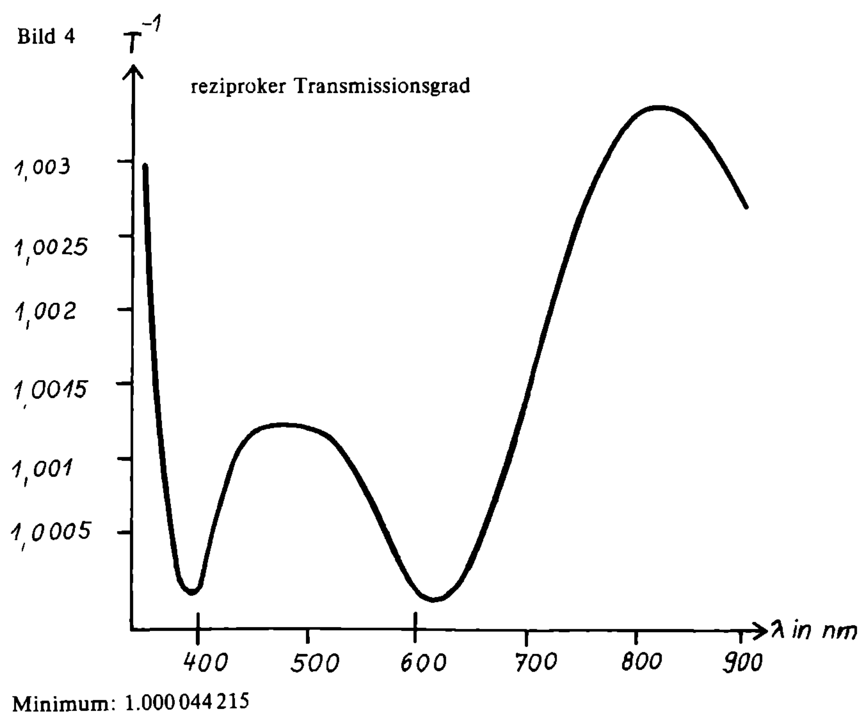


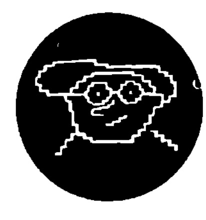
Bild 4



Minimum: 1.000 044 215
Maximum: 1.003 417 056 5
Graph von 350 bis 900 nm

Rechnertypen den natürlichen Logarithmus (LN) (zur Basis e, die uns aber nicht konkret interessiert). Man findet aber auch noch irgendwo die Formel $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$, mit deren Hilfe man dann $\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10}$ bekommt. Nun sind wir also wirklich am Ziel.

Das folgende kleine BASIC-Programm ermittelt nach Eingabe von A, B und N (Intervallgrenzen und die Zahl, durch die die Intervallänge geteilt wird, um die maximale Größe der Schrittlänge zu erhalten) alle Werte, bei denen die Achse einen Teilungsstrich bekommt. Das Umsetzen dieser Werte in Graphik, das eventuelle Beschriften der Achse und ein Teilen der y-Achse (von wo bis wo eigentlich??) sei dem Hobbyprogrammierer überlassen. Es treten auch noch numerische Störeffekte auf, die zum Teil behoben werden können (dazu dient z. B. FAK). Aber probiert alles weitere selbst aus. Die Grundidee habe ich euch gegeben. Bild 4 zeigt eine Graphik, die mit meiner Arbeit zusammenhängt. Dafür habe ich auch diesen Algorithmus entwickelt.



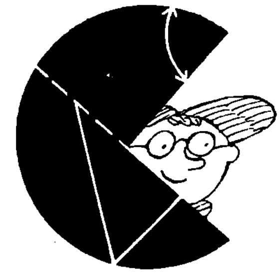
```
100 INPUT"A=";A
110 INPUT"B=";B
120 INPUT"N=";N
130 FAK=1.000001
140 D=(B-A)/N
150 L=LN(D)/LN(10)
160 E=INT(L)
170 M=10∧(L-E)
180 IF M<2 THEN M=1:GOTO 220
190 IF M<2.5 THEN M=2:GOTO 220
200 IF M<5 THEN M=2.5:GOTO 220
210 M=5
220 D=M*10∧E
230 W=(INT(A/D)-1)*D
240 W=W+D:IF W*FAK<A THEN
    240
250 IF W>FAK*B THEN 270
260 PRINT W:W=W+D:GOTO 250
270 END
```

Es bedeuten:

D: maximale Schrittlänge (Zeile 140), wirkliche Schrittlänge (Zeile 220),
L: dekadischer Logarithmus von D,
E: ganzzahliger Anteil von L,
M: der im Text mit f bezeichnete Faktor vor (Zeile 170) und nach (Zeile 220) der Änderung,
W: nimmt nacheinander Werte an, für die eventuell die Achse geteilt wird.

J. Helbig

In freien Stunden · alpha-heiter



Sechs Magische Quadrate auf einmal!

In ein Magisches Quadrat, in dessen Innern sich weitere fünf Magische Quadrate befinden – nämlich ein Quadrat aus 8×8 Feldern und vier Quadrate aus 4×4 Feldern – sind die Zahlen 1 bis 100 eingetragen gewesen.
Für jedes dieser Quadrate gilt: In jeder Zeile (Waagerechten), jeder Spalte (Senkrechten) und jeder der beiden Diagonalen ergibt sich die gleiche Summe (magische Konstante).
In der Mitte der untersten Zeile ist die Jahreszahl 1989 und darüber die Zahl 49 zu erkennen.

80	92	90	a	82	12	b	16	13	91
26	1	99	8	94	27	73	34	68	75
25	96	c	d	3	70	e	f	29	76
24	98	g	h	5	72	i	j	31	77
18	7	93	2	100	33	67	28	74	83
84	35	65	42	k	l	m	50	52	17
81	62	40	n	o	p	q	55	45	20
78	64	38	r	s	t	u	53	47	23
79	41	59	v	w	49	x	44	58	22
10	9	11	y	19	89	z	85	88	21

Es sind nun die fehlenden Zahlen *a* bis *z* einzutragen! Da das Vorhandensein dieser sechs Magischen Quadrate vorausgesetzt ist, ist die Lösung nicht allzuschwer zu finden.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz
(gestaltet nach einer Zusendung von T. Bakos, Budapest, 1984)

Kochprobe

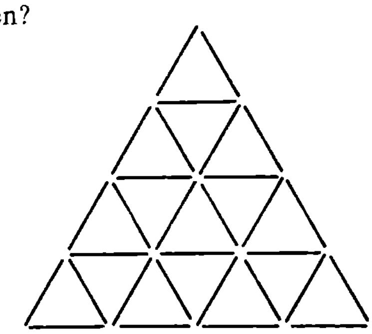
Isaac Newton (geb. 1643) war oft sehr zerstreut. Eines Tages wurde seine Haushälterin in dem Augenblick abberufen, als sie ihrem Herrn ein Ei kochen sollte. Sie stellte den Gelehrten also selbst an den Herd, gab ihm in die Rechte das Ei, in die Linke eine Sanduhr und schärfte ihm ein, sobald das Wasser koche, das Ei in den Topf zu legen und eine bestimmte Zeit darin zu kochen. Dann könne er es herausnehmen.
Nach einer halben Stunde kehrte sie in die Küche zurück und fand den Gelehrten tief in Gedanken versunken am Herd stehend, die aufsteigenden Dämpfe des kochenden Wassers beobachtend. Das Ei hielt er nach wie vor in der Rechten, aber die Uhr lag im brodelnden Wasser.

aus: Lingmann/Schmiedel: Anekdoten, Episoden, Lebensweisheiten, VEB Fachbuchverlag, Leipzig

Hölzchenspiel

Mit 30 Hölzchen lassen sich 16 kongruente gleichseitige Dreiecke legen. Wie kann man 16 kongruente gleichseitige Dreiecke bereits mit 29 Hölzchen legen?

W. Träger, Döbeln



Kryptarithmetik

In den nachstehenden Kryptogrammen sind die Sternchen so durch Ziffern zu ersetzen, daß man richtig gelöste Multiplikationsaufgaben erhält.

a)
```
5 1 6 2 · * * *
1 5 4 8 6
    * * * 2
    * * * 2 *
* * * * * * 4
```

b)
```
4 * 0 * · * * *
8 6 * 6
1 7 * * *
  * * * * 7
* * * * * * *
```

Kerstin Liebschner, Karl-Marx-Stadt

Der Satz des Thales

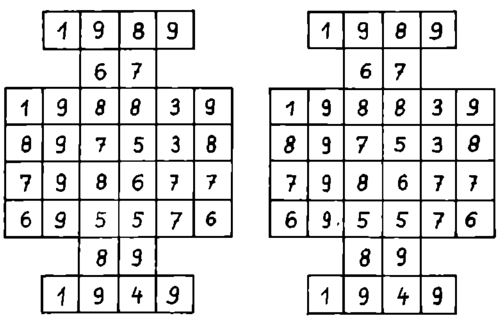
Ein Kreisdurchmesserendpunkt meint,
daß seine Lage nutzlos scheint.
Dies ihn verdrießt. Drum er sich rafft
zum Ausbruch auf auf Wanderschaft.
Er geht in froher Art und Weise
entlang des Umfangs von dem Kreise.

Und weil es sich beim Wandern schickt,
daß man in die Umgebung blickt,
bemerkt er, seine Heimatstatt,
sieht stets er unter 90 Grad!
„Guck an“, sagt er ganz unbekümmert
und sich des Thalessatz’ erinnert...

K. Näther, Leipzig

Mathe – aktuell

a) Zerlegt die beiden abgebildeten gleichen Figuren auf verschiedene Weise so in 6 kongruente Teile, daß die Summe der sich in jedem solchen Teil befindlichen Zahlen 40 beträgt!
b) Addiert man den zweiten, vierten und achten Teil einer bestimmten Zahl, so ist das Ergebnis um 5 kleiner als die Zahl selbst. Wie lautet diese Zahl?

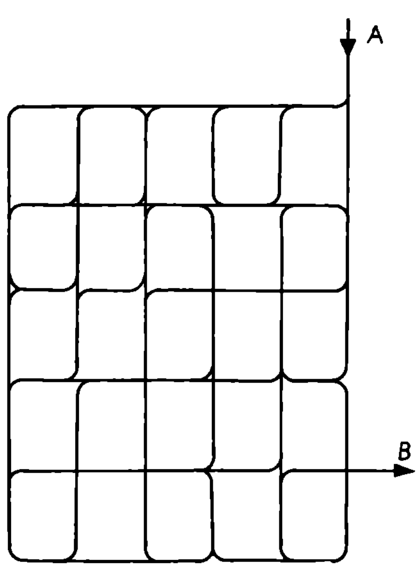


R. Mildner, Leipzig

Traumhafter Gleisplan

Jens ist Mitglied einer AG „Modelleisenbahn“ und knobelt mit seinen Freunden am Gleisplan der vorgesehenen neuen Gemeinschaftsanlage. Eines Nachts träumt er von einem „ganz verrückten“ Gleisplan und hat dabei die Aufgabe, einen Zug von A nach B zu bringen, ohne dabei einen Streckenabschnitt mehrmals zu befahren. Welchen Weg muß er nehmen?

A. Körner, Leipzig



Bildungsgesetz gesucht

1	1
2	3
5	8
13	21
34	55
89	144
...	...

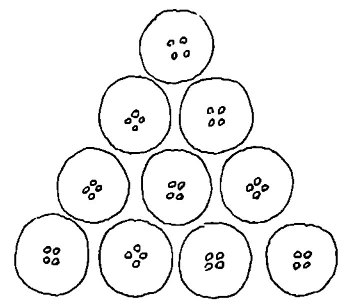
Alle Zahlen dieser beiden Spalten außer den zwei Zahlen der ersten Zeile sind nach fester Vorschrift gebildet. Wie lautet diese? Wie heißen die beiden Zahlen der 7. Zeile?

W. Träger, Döbeln

Auf den Kopf gestellt

Lege drei der zehn Knöpfe so um, daß die Spitze der Pyramide nach unten zeigt.

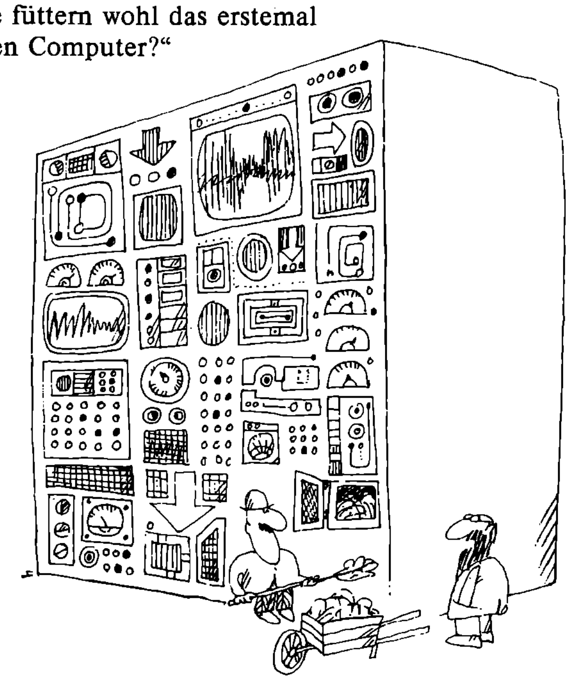
eingesandt von
Yvonne Stopfel, Geisa



Dirichlet, der Nachfolger von Gauß in Göttingen war und dessen Hauptleistungen auf dem Gebiet der Zahlentheorie und Analysis lagen, galt als hochgradig schreibfaul.
Als glücklicher Vater seines neugeborenen Kindes telegrafierte er seinem Schwiegervater kurz und bündig: „1 + 1 = 3.“

nach Lingmann/Schmiedel: „Anekdoten, Episoden, Lebensweisheiten“, VEB Fachbuchverlag Leipzig

„Sie füttern wohl das erstemal einen Computer?“



XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Erfurt, 8. bis 12. Mai 1989

Olympiadeklasse 10

281041 Zeigen Sie, daß es genau eine natürliche Zahl n gibt, mit der

$$2^8 + 2^{11} + 2^n$$

eine Quadratzahl ist!

281042 Zeigen Sie, daß es ein Paar von Funktionen f, g gibt, für das folgende Aussagen gelten:

(1) Die Funktionen f und g sind für alle reellen Zahlen x definiert.

(2) Es ist $f(0) = 7$.

(3) Für jedes reelle x gilt

$$\frac{g(x) \cdot f(x+1)}{f(x)} = g(2x) + 1.$$

Von den nachstehenden Aufgaben 281043 A und 281043 B ist genau eine auszuwählen und zu lösen.

281043 A Man denke sich die natürlichen Zahlen, beginnend mit 41, so spiralförmig angeordnet, wie aus dem Bild als Anfang einer solchen Anordnung zu erkennen ist: Beweisen Sie, daß (bei dieser Anordnung) in der Diagonale, von der im Bild die Zahlen 61, 47, 41, 43, 53 auftreten, mindestens 30 Primzahlen stehen!

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & 50 & \rightarrow & 51 & \rightarrow & 52 & \rightarrow & 53 & & \\
 & & \uparrow & & & & & & \downarrow & & \\
 & & 49 & & 42 & \rightarrow & 43 & & 54 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\vdots & & 48 & & 41 & & 44 & & 55 & & \\
\uparrow & & \uparrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
62 & & 47 & \leftarrow & 46 & \leftarrow & 45 & & 56 & & \\
\uparrow & & & & & & & & \downarrow & & \\
61 & \leftarrow & 60 & \leftarrow & 59 & \leftarrow & 58 & \leftarrow & 57 & &
\end{array}$$

281043 B Über 13 sonst beliebige Punkte in einer Ebene werde vorausgesetzt, daß sich unter je drei dieser 13 Punkte stets zwei befinden, deren Abstand voneinander kleiner als 1 cm ist.

a) Man beweise, daß aus dieser Voraussetzung stets folgt: Es gibt einen Kreis vom Radius 1 cm, dessen Inneres sieben der 13 Punkte enthält.

b) Man untersuche, ob aus dieser Voraussetzung stets folgt: Es gibt einen Kreis vom Radius 1 cm, dessen Inneres acht der 13 Punkte enthält.

281044 Beweisen Sie, daß für keine reelle Zahl x die Gleichung

$$x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 24x + 40 = 0$$

gilt!

281045 In einer Ebene seien drei zueinander parallele Geraden g, h, k so gegeben, daß g und h voneinander den Abstand 8 cm haben und daß k im Abstand 5 cm von g in dem Streifen zwischen g und h verläuft. Man untersuche, ob ein gleichseitiges Dreieck ABC existiert, für das A auf g, B auf h und C auf k liegt.

Falls kein solches Dreieck existiert, so beweise man diese Aussage. Falls ein solches Dreieck existiert, so gebe man an, wie die Seitenlänge eines solchen Dreiecks rechnerisch oder konstruktiv erhalten werden kann, und beweise, daß ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der nach dieser Angabe erhaltenen Seitenlänge die geforderten Bedingungen (A auf g, B auf h, C auf k) erfüllt.

281046 Beweisen Sie, daß zu jedem Quadrupel (a, b, c, d) positiver reeller Zahlen, für das

$$a + b + c = \frac{d}{2}\sqrt{3}$$

gilt, ein Tripel (x, y, z) reeller Zahlen existiert, das die drei Gleichungen

$$\sqrt{y^2 - a^2} + \sqrt{z^2 - a^2} = d,$$
$$\sqrt{z^2 - b^2} + \sqrt{x^2 - b^2} = d,$$
$$\sqrt{x^2 - c^2} + \sqrt{y^2 - c^2} = d \text{ erfüllt!}$$

Olympiadeklassen 11/12

281241 Man ermittle alle reellen Lösungen (x, y, z) des Gleichungssystems

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$
$$x + 2y + 3z = \sqrt{14}.$$

281242 Man untersuche, ob es zu jeder natürlichen Zahl $n \geqq 1$ jeweils eine Funktion f gibt, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

(1) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen x definiert.

(2) Es gibt eine reelle Zahl x mit $f(x) \neq 0$.

(3) Wenn man Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}$ durch die Festsetzungen definiert, für alle reellen x gelte
$f_1(x) = f(x)$ sowie
$f_{k+1}(x) = f(f_k(x))$
für $k = 1, \ldots, n$, dann gilt für alle reellen x die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_{n+1}(x).$$

281243 Man ermittle alle diejenigen konvexen Vielecke $P_1P_2 \ldots P_n$, in deren Inneren ein Punkt X existiert, für den

$$\overline{P_1X}^2 + \overline{P_2X}^2 + \ldots + \overline{P_nX}^2$$

gleich dem doppelten Flächeninhalt von $P_1P_2 \ldots P_n$ ist.

281244 Um einen Tresor zu öffnen, ist eine unbekannte dreistellige Zahlenkombination (a_1, a_2, a_3) einzustellen, wobei die drei Zahlen unabhängig voneinander eingestellt werden können und für jede der drei Zahlen genau 8 Werte möglich sind. Infolge eines Defektes öffnet sich aber der Tresor bereits immer genau dann, wenn eine eingestellte Kombination (k_1, k_2, k_3) mindestens zwei der drei Bedingungen $k_i = a_i$ $(i = 1, 2, 3)$ erfüllt.

Man ermittle die kleinste Zahl N, für die es N Kombinationen gibt, bei deren Durchprobieren der Tresor in jedem Fall (d. h. für jede unbekannte Kombination (a_1, a_2, a_3)) sich öffnen muß.

281245 Für ein Tetraeder $ABCD$ werde vorausgesetzt, daß der Mittelpunkt M der Umkugel des Tetraeders im Innern des Tetraeders liegt. Die Verbindungsgerade von M mit jeweils einer Tetraederecke A, B, C bzw. D schneide die Seitenfläche des Tetraeders, die der betreffenden Ecke gegenüberliegt, in A', B', C' bzw. D'. Der Radius der Umkugel sei r.

Beweisen Sie, daß aus diesen Voraussetzungen stets

$$\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} + \overline{DD'} \geqq \frac{16}{3} r$$

folgt!

Von den nachstehenden Aufgaben 281246 A und 281246 B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

281246 A Man beweise: Für jede natürliche Zahl $n > 1$ und für je $n + 2$ reelle Zahlen p, q, a_1, …, a_n, die

$$0 < p \leqq a_i \leqq q \quad (i = 1, \ldots, n) \qquad (1)$$

erfüllen, gelten die beiden Ungleichungen

$$n^2 \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \qquad (2)$$
$$\leqq n^2 + \left[\frac{n^2}{4}\right] \cdot \left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2.$$

(Hinweis: Zu reellem x bezeichnet wie üblich $[x]$ die ganze Zahl $[x] = g$ mit $g \leqq x < g + 1$).

Man ermittle ferner zu gegebenen n, p, q mit $0 < p \leqq q$ alle diejenigen a_i mit (1), für die in (2)

a) zwischen der ersten und zweiten Zahl,

b) zwischen der zweiten und dritten Zahl

das Gleichheitszeichen gilt.

281246 B Man ermittle die größtmögliche Anzahl von Quadraten der Seitenlänge 1, die sich in ein gegebenes Quadrat der Seitenlänge 1,99 legen lassen, ohne über dessen Rand hinauszuragen und ohne sich gegenseitig zu überlappen.

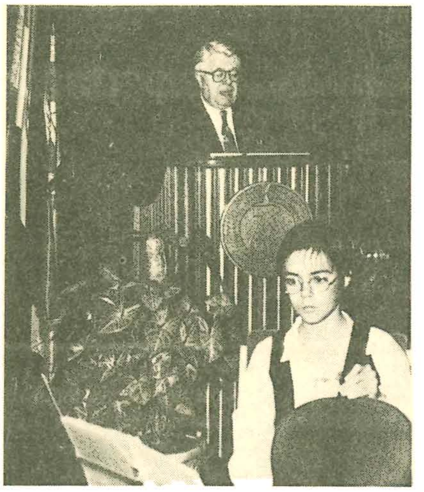
Die Lösungen dieser Aufgaben werden wir im Heft 1/90 veröffentlichen.

Die Internationale Mathematikolympiade fand im Juli dieses Jahres in Braunschweig/BRD statt.

Unserer Mannschaft gehörten neben dem Vorjahressieger Andreas Siebert noch Rüdiger Belch, Frank Göring, Gerard Zenker, Jan Fricke und Andre Pönitz an.

Alle Teilnehmer errangen Preise! Damit erreichte unsere Mannschaft das mit Abstand beste Ergebnis der letzten 20 Jahre. Mehr zur Jubiläums-IMO im Heft 6/89.

Die XXVIII. OJM fand nun schon traditionell in der Pädagogischen Hochschule „Dr. Theodor Neubauer“ in Erfurt statt. Der Festsaal des Erfurter Rathauses bot den feierlichen Rahmen für die Abschlußveranstaltung. Prof. Dr. W. Engel trug in seiner Festrede Historisches zu mathematischen Wettbewerben vor.



Einen ersten Preis in Klasse 10 erhielten: Max Wardetzky, Spezialschule „C. F. Gauß“ Frankfurt/O.; Michael Dreher, S.-M.-Kirow-OS Halle; Nicole Giard, Erweiterte Spezialoberschule „Georg Thiele“ Kleinmachnow; Andreas Englisch (Kl. 9), Spezialschule Leipzig; Tobias Kunstmann (Kl. 9), Spezialschule „H. Hertz“ Berlin

Einen ersten Preis in Klasse 11/12 erhielten:
Gerard Zenker, Rüdiger Belch, beide Spezialschule Karl-Marx-Stadt; Frank Göring, Spezialklasse an der EOS „J. W. Goethe“ Ilmenau

Einen zweiten Preis erhielten 19 Schüler, einen dritten Preis 30 Schüler und eine Anerkennung 23 Schüler.
An der OJM nahmen 167 Schüler, davon 15 Mädchen, teil.

Geschwister

1. Armin hat drei Brüder und jeder von ihnen hat eine Schwester.
Wieviel Geschwister sind das zusammen?

2. Luise fragt Monika nach der Zahl ihrer Geschwister. Monika antwortet verschmitzt: „Ich habe ebensoviel Brüder wie Schwestern. Meine Brüder aber haben doppelt soviel Schwestern wie Brüder.“

3. Franziska hat viele Geschwister. Ihre Eltern haben vier Töchter, Franziska mitgezählt. Jedes Mädchen hat zwei Brüder.
Wieviel Geschwister hat Franziska?

4. Wieviel Geschwister sind in der Familie, wenn Lutz doppelt soviel Brüder wie Schwestern, Rosi aber drei Brüder mehr als Schwestern hat?

5. Ulrich ist a Jahre alt. Er ist um x Jahre älter als sein b Jahre alter Bruder Berthold. Setze für a, b und x solche Zahlen ein, daß eine richtige Aussage entsteht!

6. Bernd ist b Jahre alt. Er ist um y Jahre älter als seine c Jahre alte Schwester Christa.
Gib die Gleichung zur Berechnung von b an, wenn die Werte y und c gegeben sind. (Zum Beispiel: $y = 5$ und $c = 13$.)

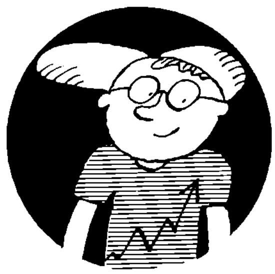
7. Jeder Junge einer Familie hat 3mal soviel Schwestern wie Brüder, während jedes Mädchen gleichviel Brüder wie Schwestern hat.
Wieviel Geschwister sind das insgesamt, und wieviel sind davon Jungen bzw. Mädchen?

8. Johannes stellt fest: „Meine Schwester ist zwei Jahre jünger als ich; ich selbst bin drei Jahre jünger als mein Bruder. Zusammen sind wir 40 Jahre alt.“
Wie alt ist jedes der Geschwister?

9. Max ist doppelt so alt, wie Otto sein wird, wenn Paul so alt ist wie Max heute.
Wer von den dreien ist der Älteste und wer der Jüngste?

A. Körner/J. Lehmann

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 11. Januar 1990

Ma 5 ■ 3011 Berechne die Summe aus allen dreistelligen ungeraden natürlichen Zahlen, bei denen jeweils der Zehner um 2 größer als der Einer und der Hunderter um 1 kleiner als der Zehner ist!

Mathematiklehrer J. Kreusch, Löbau

Ma 5 ■ 3012 In dem Schema

```
  MATHE
+ MATHE
  ALPHA
```

sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

Mathematiklehrer J. Kreusch, Löbau

Ma 5 ■ 3013 Kosmonaut Juri Romanenko erreichte im Jahre 1987 den bisher längsten Raumflug. Mit dem Raumschiff „Sojus TM 4" war er 326 Tage im Weltall. Rechnen wir den ersten und letzten Flugtag (Start und Rückflug zur Erde) als einen Tag, so umkreiste er rund 325 Tage die Erde. Für eine Erdumkreisung brauchte sein Raumschiff 90 Minuten. Wie viele Erdumkreisungen hat Juri Romanenko insgesamt gemacht?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 3014 Rolf löst eine Additionsaufgabe. Sie ist aber so schlecht geschrieben, daß er beim ersten Summanden den Einer als 6 anstatt 1 liest. Beim zweiten Summanden liest er den Hunderter als 2 anstatt 9 und den Zehner als 3 anstatt 9. Nun rechnet er ohne Fehler und erhält 1234. Wie lautet die Rechenaufgabe und die richtige Lösung?

Ma 5 ■ 3015 Ein Reporter befragt 132 Jungen und 112 Mädchen, ob sie regelmäßig Sport betreiben. Die Umfrage ergibt, daß von den Jungen 44 und von den Mädchen jedes vierte regelmäßig Sport betreiben. Jeder wievielte Junge und wieviel Mädchen dieser Befragten treibt regelmäßig Sport? *Schülerin K. Leuenberg, Iden*

Ma 5 ■ 3016 Es sind zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen zu ermitteln, die folgende Bedingung erfüllen: Subtrahiert man von der Summe dieser beiden Zahlen 7, multipliziert man die erhaltene Differenz mit 4,5, so erhält man als Ergebnis 81. Um welche Zahlen handelt es sich?

Schüler L. Freitag, Schwarzheide

Ma 5 ■ 3017 Die drei Schüler Andreas, Bernd und Claus haben (in anderer Reihenfolge) die Familiennamen Müller, Schmidt und Reich.
Von ihnen ist folgendes bekannt:
(1) Andreas hat nicht den Familiennamen Reich.
(2) Die Mutter von Bernd ist Hausfrau.
(3) Bernd ist Schüler einer 8. Klasse.
(4) Der Schüler mit dem Familiennamen Reich geht in die 7. Klasse.
(5) Die Mutter des Schülers mit dem Familiennamen Schmidt ist Verkäuferin.

Ordne jedem Schüler seinen Familiennamen zu! *Schüler S. Reinald, Zerbst*

Ma 6 ■ 3018 Streichhölzer (Länge 5 cm, Dicke jeweils 2 mm) sollen so zusammengelegt und zusammengeklebt werden, daß ein Würfel mit einem Volumen von 1 dm^3 entsteht. Wie viele Streichholzschachteln sind dazu nötig, wenn in jeder Schachtel genau 50 Streichhölzer sind? (Klebstoffschicht und Zündköpfe sollen dabei unberücksichtigt bleiben) *StR H.-J. Kerber*

Ma 6 ■ 3019 In einem Klassenraum hängen die gerahmten Porträts von vier berühmten Mathematikern. Bei einem Wettstreit, der in diesem Klassenraum durchgeführt wird, erhalten die teilnehmenden Schüler jeweils vier Kärtchen, auf denen die Namen dieser Mathematiker stehen. Diese Namenskärtchen sind den Porträts richtig zuzuordnen. Von einem Achtel aller Wettbewerbsteilnehmer wurden alle vier Namen falsch zugeordnet; bei genau so vielen war nur ein einziger Name richtig

30	Ellen Stelzner Otto-Grotewohl-Straße 28 Jena - Lobeda 6902 150	Dr.-Theodor-Neubauer-OS Klasse 7	40	Ma 7 ■ 2991
	Prädikat:		10	
	Lösung:			

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
Postfach 14
Leipzig
7027

3. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. (Die Klassenstufennummer steht vor der Aufgabennummer.) Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12 oder Na/Te 10/12 gekennzeichnet sind.
4. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (siehe Muster), da die eingehenden Lösungen aufgabenweise sortiert und korrigiert werden. Noch eine Bitte an die Schulen: Sendet bitte die Lösungen bereits nach Aufgaben sortiert ein.
5. Teilnehmer, die eine richtige Lösung (nicht nur Antwortsatz) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Anderenfalls erhalten sie eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst". Nach dem Einsendetermin eingehende Lösungen werden nicht mehr bearbeitet!
6. Jeder Teilnehmer sollte einen Durchschlag seiner Lösungen anfertigen, um sie mit den jeweils zwei Hefte später erscheinenden Lösungen vergleichen zu können.

Der Jahreswettbewerb 1988/89 läuft von Heft 5/1988 bis Heft 1/1989. Zwischen dem 1. und 10. September 1989 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/88 bis 1/89 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden.

Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden ab Heft 6/88 veröffentlicht.

Wer mindestens 10 Antwortkarten (von den Wettbewerben der Hefte 5/88 bis 1/89) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein *alpha*-Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1988/89 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunde zurück). Schüler, die schon mehrere Jahre teilnehmen, senden bitte die zuletzt erhaltene Urkunde mit ein. Allein anhand dieser werden die Teilnehmerlisten aufgestellt. Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

zugeordnet. Genau 12 Schüler hatten zwei richtige Namen gesetzt; bei genau so vielen waren alle vier Namen richtig angeordnet. Wie viele Schüler hatten alle vier Namen falsch zugeordnet?

StR H.-J. Kerber

Ma 6 ■ 3020 Gegeben seien zwei beliebige einander in S schneidende Geraden g und h. Ein beliebiger Kreis um S schneide g bzw. h in A, B, C bzw. D. Es ist nachzuweisen, daß $ABCD$ ein Rechteck ist. *Fr.*

Ma 6 ■ 3021 Fünf Freundinnen sind zusammen 25 Jahre alt. Susanne ist 2 Jahre jünger, Doreen 2 Jahre älter als Dana. Jeanette ist doppelt so alt wie Dana, Angelika drei Jahre jünger als Jeanette.
Wie alt ist jedes dieser fünf Mädchen?

Schülerin S. Rudloff, Freist

Ma 6 ■ 3022 Die vier Freundinnen Andrea, Beate, Christine und Doris haben (in anderer Reihenfolge) die Familiennamen Fischer, Grohmann, Hofmann und Ilgen. Von ihnen ist folgendes bekannt:

(1) Andrea und Beate und das Mädchen mit dem Familiennamen Hofmann betreiben gemeinsam Leichtathletik.

(2) Christine und das Mädchen mit dem Familiennamen Hofmann trafen sich kürzlich im Schwimmbad.

(3) Andrea, Christine und das Mädchen mit dem Familiennamen Ilgen sind Leseratten.

(4) Andrea und das Mädchen mit dem Familiennamen Grohmann nehmen an einer Arbeitsgemeinschaft Basteln teil.

Ordne jedem Vornamen den Familiennamen zu!

Schülerin U. Kretschmer, Dresden

Ma 6 ■ 3023 Eine quadratische Rasenfläche soll in eine rechteckige mit gleichem Flächeninhalt umgearbeitet werden. Dadurch wird die Länge der rechteckigen Rasenfläche um 4 m größer, die Breite um 2 m kleiner als die der quadratischen Rasenfläche. Ermittle Länge und Breite der rechteckigen Rasenfläche!

Diplomlehrer M. Freitag, Schwarzheide

Na/Te 6 ■ 452 Eine Schleusenkammer hat eine Länge von 325 m, ist 25 m breit und 4,30 m hoch. Welches Volumen hat die eingelassene Wassermenge, wenn der Wasserspiegel seinen höchsten Stand 0,50 m unter der Oberkante der Schleusenkammer hat? Gib das Ergebnis in Kubikmetern an! Runde dabei auf Vielfache von Hundert!

R.

Ma 7 ■ 3024 Addiert Axel zur Zahl seines Geburtsjahres deren Quersumme, so erhält er als Ergebnis 1989. Welches Lebensalter erreicht Axel im Jahre 1989? *Sch.*

Ma 7 ■ 3025

a) Welcher Bruch mit dem Nenner 1989 liegt am nächsten bei 0,4?

b) Welche Ziffer steht an der 1989. Stelle hinter dem Komma, wenn x mit $x = \frac{1}{3} + \frac{1}{7}$ als Dezimalbruch geschrieben würde?

StR H.-J. Kerber

Ma 7 ■ 3026 Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$. Zeichne ein beliebiges gleichschenkliges Trapez $AECF$ so hinzu, daß $\overline{AE} \parallel \overline{CF}$ gilt, F innerer Punkt von $\overline{CD}$ ist und E auf der über B hinaus verlängerten Strecke $\overline{AB}$ liegt. Beweise, daß Rechteck und Trapez flächengleich sind!

StR H.-J. Kerber

Ma 7 ■ 3027 Ein Gestüt mit 63 Pferden würde mit dem vorhandenen Futtervorrat 72 Tage reichen. Es werden aber Pferde verkauft, so daß dieser Futtervorrat jetzt 12 Tage länger reicht. Wie viele Pferde wurden verkauft?

StR H.-J. Kerber

Ma 7 ■ 3027 Die Mathematiklehrer Mett, Birken, Rebrek und Kempcke wohnen (in anderer Reihenfolge) in den Städten Röbel, Anklam, Neubrandenburg und Neustrelitz. Jeder von ihnen hat ein Auto; die Automarken sind Skoda, Dacia, Lada und Trabant. Von ihnen ist folgendes bekannt:

(1) Herr Kempcke besuchte mit seinem Skoda Herrn Mett in Anklam.

(2) Der Neustrelitzer besuchte mit seinem Dacia Herrn Birken.

(3) Der Neubrandenburger hat einen Trabant.

Ordne jedem Mathematiklehrer Wohnort und Automarke zu!

StR H.-J. Kerber

Na/Te 7 ■ 453 Ein Körper mit einer Masse von 1 kg dehnt eine Schraubenfeder um 10 cm. Wie groß ist die Gewichtskraft eines Körpers, der diese Feder auf 25 cm dehnt? *R.*

Na/Te 7 ■ 454 Die Gewichtskraft eines Körpers wird um so kleiner, je weiter er von der Erde entfernt ist. Nachfolgende Tabelle gibt die Abhängigkeit der Gewichtskraft eines Körpers mit der Masse 1 kg von der Höhe an:

Entfernung von der Erdoberfläche in km	Gewichtskraft in N
0	10
290	9
690	8
1200	7
1800	6

Wie groß ist die Gewichtskraft eines Körpers in 1000 km Höhe, dessen Masse 4 kg beträgt? (Graphische Lösung) *R.*

Ma 8 ■ 3029 Becker, Fischer und Schneider haben die Vornamen Hans, Jörn und Kurt und spielen gemeinsam Skat. Nun sind die folgenden Aussagen wahr:

(1) Der Sieger im Spiel trug einen blauen Schlips.

(2) Fischer ist zum ersten Mal bei Becker zu Gast.

(3) Kurt trägt keinen Schlips.

(4) Becker wäre fast bester Spieler geworden.

(5) Jörn hat immer beim Skat das Sofa als Stammplatz.

(6) Schneider trägt einen grünen Schlips.

Welchen Vor- und Nachnamen hat jeder?

StR H.-J. Kerber

Ma 8 ■ 3030 In der nachstehenden Gleichung sind die Kästchen durch Terme so zu ersetzen, daß die Gleichung allgemeingültig ist (für alle reellen Zahlen x stets eine wahre Aussage wird)!

$(2x + 3) \cdot (\square + \square)$
$= x \cdot (2x + 11) + \square$ *StR H.-J. Kerber*

Ma 8 ■ 3031 Addiert man zu 1111 das Quadrat einer natürlichen Zahl z, so erhält man das Quadrat des Nachfolgers von z. Es ist z zu bestimmen! *StR H.-J. Kerber*

Ma 8 ■ 3032 Im Dreieck ABC sei der Punkt C genau so weit von $\overline{AB}$ entfernt wie der Punkt A von $\overline{BC}$. Es ist zu beweisen, daß das Dreieck ABC gleichschenklig ist!

StR H.-J. Kerber

Ma 8 ■ 3033 Gegeben sei eine Gerade g und zwei verschiedene Punkte P und Q, die auf ein und derselben Seite von g liegen (in ein und derselben Halbebene bezüglich g). Es ist ein Kreis k zu konstruieren, der durch P und Q geht und g berührt. Dabei sollen die Lote von P und Q auf g nicht zusammenfallen und auch unterschiedlich lang sein. *Sch.*

Na/Te 8 ■ 455 Ein Skiläufer (Masse $m = 70$ kg) wird mit einem Lift einen Hang von 600 m Länge, der 30° gegen die Waagerechte geneigt ist, hochgezogen. Welche Arbeit verrichtet der Elektromotor des Lifts am Skiläufer?

Anmerkung: Bei der genannten Neigung beträgt das Verhältnis Höhenunterschied/Länge = 0,5.

Na/Te 8 ■ 456 Der Haftreibungskoeffizient μ gibt das Verhältnis zwischen der Kraft, die notwendig ist, um einen auf einer Unterlage ruhenden Körper gerade zum Gleiten zu bringen, und der Kraft, mit der dieser Körper auf seine Unterlage drückt, an.

Auf einer waagerechten Unterlage ruht ein Körper mit einer Gewichtskraft $F_G = 50$ N. Er ist über ein Seil und eine feste Umlenkrolle mit einem Körper verbunden, der sich in vertikaler Richtung unter dem Einfluß der Gravitation bewegen kann. Wie groß muß die Masse dieses Körpers sein, damit bei $\mu = 0{,}5$ der auf der Waagerechten ruhende Körper gerade zu gleiten beginnt?

Ma 9 ■ 3034 Es ist zu beweisen, daß der Term $\sqrt{9n^4 + 18n^3 + 9n^2}$ für alle natürlichen Zahlen n durch 6 teilbar ist.

F. Zöllner, Sondershausen

Ma 9 ■ 3035 Für je zwei positive reelle Zahlen a und b ist das arithmetische Mittel $M = \frac{a+b}{2}$, das geometrische Mittel mit $G = \sqrt{a \cdot b}$ und das quadratische Mittel mit $Q = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ definiert.

Es ist zu zeigen, daß die folgende Aussage wahr ist:

Das arithmetische Mittel aus dem Quadrat des quadratischen und dem Quadrat des geometrischen Mittels ist gleich dem Quadrat des arithmetischen Mittels von a und b! *StR H.-J. Kerber*

Ma 9 ■ 3036 Es ist zu beweisen, daß eine dreistellige Zahl, deren Grundziffern als einstellige Zahlen aufgefaßt, eine arithmetische Folge bilden, stets durch 3 teilbar ist. *Schüler U. Fahrenberg, Berlin*

Ma 9 ■ 3037 In einem Dreieck ABC sei D der Mittelpunkt von $\overline{BC}$ und E der Mittelpunkt von $\overline{AC}$. Die Seitenhalbierenden $\overline{AD}$ und $\overline{BE}$ mit den Längen s_a und s_b sind senkrecht zueinander. Der Flächeninhalt A des Dreiecks ABC ist allein durch die Längen s_a und s_b der beiden Seitenhalbierenden $\overline{AD}$ und $\overline{BE}$ auszudrücken! *Sch.*

Ma 9 ■ 3038 In drei gleichaussehenden Schachteln befinden sich je zwei Kugeln. In der ersten Schachtel liegen zwei schwarze, in der zweiten zwei weiße und in der dritten eine schwarze und eine weiße Kugel. Auf den Schachteln steht geschrieben: „zwei weiße", „zwei schwarze" und „schwarz und weiß". Die Inhalte der Schachteln wurden so vertauscht, daß keine der Aufschriften mehr stimmt. Kann man, indem man aus irgendeiner Schachtel eine Kugel herausnimmt (ohne hineinzuschauen), bestimmen, wo welche Kugeln liegen? *Schüler R. Holke, Leipzig*

Na/Te 9 ■ 457 Für den kubischen Ausdehnungskoeffizienten γ gilt annähernd: $\gamma = 3 \cdot \alpha$. Für die Volumenausdehnung von Körpern (festen und flüssigen) gilt: $\Delta V = \gamma \cdot V \cdot \Delta T$. Ein hohler Würfel von $l = 1$ cm Kantenlänge, der aus dünnem Kupferblech zusammengefügt ist, ist oben offen. Er wird bei 20 °C vollständig mit Wasser gefüllt und auf 80 °C erhitzt. Wieviel Wasser fließt aus? *R.*

Na/Te 9 ■ 458 Ein Glaskölbchen enthält eine Wasserstoffüllung (Normaldruck p_0 bei 20 °C). Im Inneren befindet sich eine kleine Wolframspirale. Fließt durch sie ein elektrischer Strom, so kann das Gas erhitzt werden. Dadurch steigt der Druck im Gas. Bei einem Überdruck von $5 \cdot p_0$ platzt der Kolben.
Welche Temperatur wurde erreicht? *R.*

Ma 10/12 ■ 3039
Untersuche, ob die Ungleichung

$$18 > 1 : (9 - 4\sqrt{5})$$

eine wahre oder eine falsche Aussage darstellt! *Sch.*

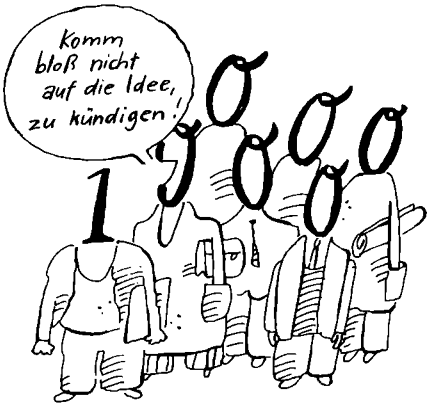
Ma 10/12 ■ 3040
Gegeben sei das Kryptogramm

$$abb \cdot ac = abbc.$$

Man ermittle alle Lösungen dieses Kryptogramms, wobei gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten.
Dipl.-Math. A. Fittge, Berlin

Ma 10/12 ■ 3041 Es ist zu beweisen, daß in einem beliebigen Dreieck ABC die Summe der Längen der drei Seitenhalbierenden kleiner als der Umfang des Dreiecks ABC ist.
Schüler T. Vogt, Ilmenau

Ma 10/12 ■ 3042 Zeichnen Sie durch die drei Eckpunkte eines spitzwinkligen Dreiecks ABC die Parallelen zu den drei Seiten und bezeichnen Sie die Schnittpunkte dieser Parallelen mit D_1, D_2, D_3.
a) Beweisen Sie, daß die so gebildeten Dreiecke paarweise zueinander kongruent sind!
b) Beweisen Sie, daß das so entstandene Bild als Körpernetz einer Pyramide $ABCD$ (nichtreguläres Tetraeder) aufgefaßt werden kann!
Bestimmen Sie D' und zeichnen Sie den Grundriß dieses Körpers!
StR H.-J. Kerber



Ma 10/12 ■ 3043 Es seien a, b, c die Seitenlängen eines Dreiecks und h die Länge der Höhe auf c. Es ist zu beweisen, daß gilt

$$a \cdot b - h \cdot c \geqq 0.$$

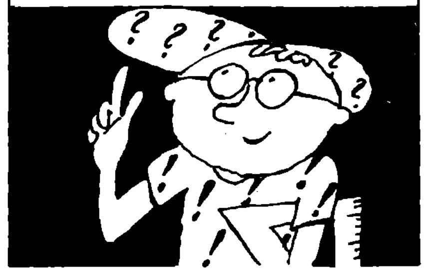
In welchem Falle gilt das Gleichheitszeichen? *Dipl.-Math. A. Fittge, Berlin*

Na/Te 10/12 ■ 459 Welche Gesamtmasse kann ein Heißluftballon mit einem Volumen $V = 290\,\text{m}^3$, der mit Luft der Temperatur $t_2 = 100\,°\text{C}$ gefüllt ist, bei einer Außentemperatur der Luft $t_1 = 0\,°\text{C}$ gerade anheben? Die Dichte der Luft bei 0 °C und dem gerade herrschenden Luftdruck ist $\varrho_1 = 1{,}29\,\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$. *R.*

Na/Te 10/12 ■ 460 Ein Aufzug habe die Masse $m_1 = 500$ kg. An der Decke des Aufzuges hängt an einem Faden, der als masselos zu betrachten ist, ein Körper mit der Masse $m_2 = 5$ kg. Durch eine Kraft $F = 6000$ N werden der Aufzug und der Körper mit einer Beschleunigung nach oben bewegt. ($g = 9{,}81\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$)
a) Wie groß ist die Beschleunigung des Aufzuges (einschließlich des Körpers)?
b) Wie groß ist die Spannkraft im Faden, an dem der Körper mit der Masse m_2 aufgehängt ist?
c) Der Faden soll plötzlich zerreißen. Wie groß ist dann die Beschleunigung des Aufzuges und die des Körpers? *R.*

Unsere Buttons sind da! Statt der Anstecknadel gibt es ab diesem Wettbewerb für unsere erfolgreichen Teilnehmer Buttons in dieser Größe, natürlich in Gold und Silber.

Lösungen



Lösung zu: Eine harte Nuß
Heft 4/89

Sei (x, y, z); x, y, z ganz; $1 \leqq x, y, z \leqq 9$, Lösung des Gleichungssystems

$$x + y + z = 19 \quad (1)$$
$$3x + 5y + 6z = 85. \quad (2)$$

Multipliziert man Gleichung (1) mit dem Faktor (-3) und addiert diese zu (2), so erhält man $2y + 3z = 28$ bzw.

$$y = 14 - \frac{3}{2}z. \quad (3)$$

Damit y ganzzahlig wird, so muß z geradzahlig sein: $z = 2n$; $n = 1, 2, 3, 4$. Setzt man $z = 2n$ in die Gleichungen (3) und (1) ein, so ergeben sich

$$z = 2n,\ y = 14 - 3n;$$
$$x = 5 + n\ (n = 1, 2, 3, 4).$$

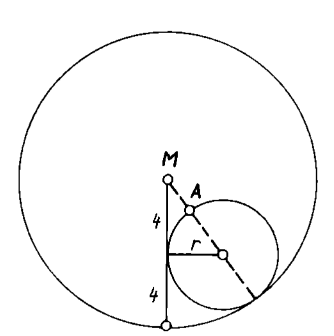
Es ergibt sich folgende Tabelle:

n	x	y	z
1	6	11	2
2	7	8	4
3	8	5	6
4	9	2	8

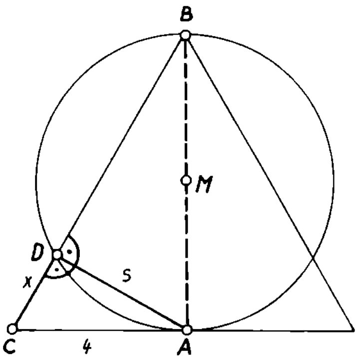
Da $y = 11$ zweistellig ist, so entfällt das erste Tripel, und man erhält drei geforderte Lösungstripel $(7, 8, 4)$, $(8, 5, 6)$ und $(9, 2, 8)$. Jedes dieser Tripel erfüllt in der Tat die Gleichungen (1) und (2), wovon man sich durch Einsetzen leicht überzeugt.

Lösungen zu:
Gut gedacht ist halb gelöst, Heft 4/89

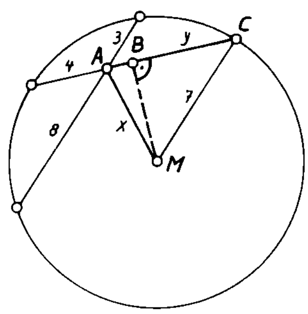
1. $\overline{MA} = 8 - 2 \cdot r$; $4^2 = (8 - 2r) \cdot 8$
(Sekantentangentensatz)
$r = 3$



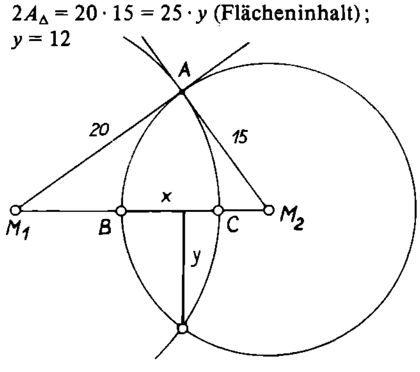
2. $4^2 = 8 \cdot x$ (Sekantentangentensatz)
$x = 2$
$\overline{AB}$ Durchmesser $\curvearrowright$ $\sphericalangle ADB = 90°$
(Satz des Thales)
$s^2 + x^2 = 4^2$ (Satz des Pythagoras);
$s^2 = 16 - 4$; $s = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46$



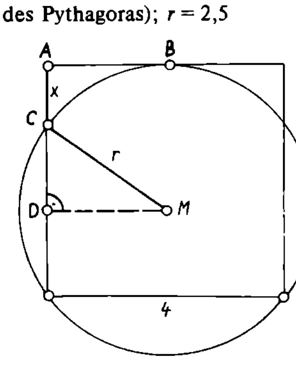
3. $4 \cdot y = 3 \cdot 8$ (Sehnensatz) $y = 6$
$\overline{BC} = \frac{4+y}{2} = 5 \curvearrowright \overline{AB} = \overline{BC} - 4 = 1$
$\overline{MB}^2 = 7^2 - 5^2 = x^2 - 1^2$
(Satz des Pythagoras); $x = 5$



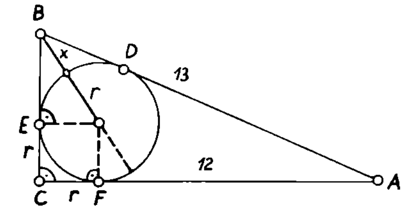
4. $\sphericalangle M_1AM_2 = 90°$ (paarweise Tangente und Berührungsradius)
$\overline{M_1M_2}^2 = 20^2 + 15^2$ (Satz des Pythagoras);
$\overline{M_1M_2} = 25$
$\curvearrowright \overline{M_1B} = 25 - 15 = 10$;
$\overline{M_2C} = 25 - 20 = 5$; $x = 10$
y gleich der Höhe in ΔM_1M_2A
$2A_\Delta = 20 \cdot 15 = 25 \cdot y$ (Flächeninhalt);
$y = 12$



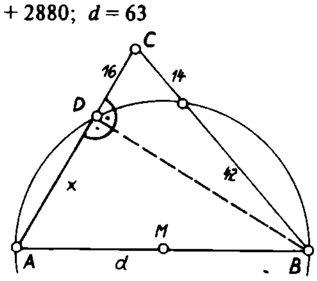
5. $\overline{AB} = 2 \curvearrowright 2^2 = 4 \cdot x$
(Sekantentangentensatz); $x = 1$
$\overline{CD} = 1{,}5 \curvearrowright r^2 = 2^2 + 1{,}5^2$
(Satz des Pythagoras); $r = 2{,}5$



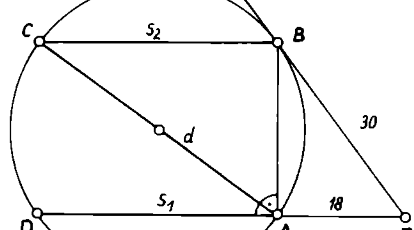
6. $\overline{BC}^2 = 13^2 - 12^2$
(Satz des Pythagoras); $\overline{BC} = 5$
$\overline{BD} = \overline{BE}$, $\overline{AD} = \overline{AF}$ (Tangenten);
$\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{BD} = 13$
$u = 2r + 2 \cdot 13 = 30$
(Umfang des Dreiecks); $r = 2$
$x(x + 2r) = \overline{BE}^2$ (Sekantentangentensatz)
$x^2 + 4x - 9 = 0$; $(x+2)^2 - 13 = 0$;
$x + 2 = +\sqrt{13}$; $x = \sqrt{13} - 2 \approx 1{,}61$



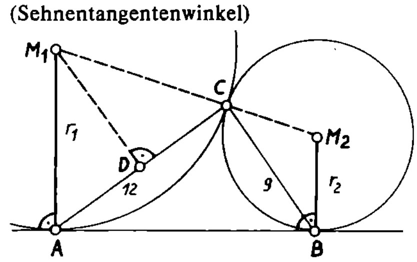
7. $16(x + 16) = 14(42 + 14)$
(Sekantensatz); $x = 33$
$ADB = 90°$ (Satz des Thales)
$\overline{BD}^2 = 56^2 - 16^2 = 2880$
(Satz des Pythagoras); $\overline{BD} = 24\sqrt{5}$
$d^2 = x^2 + \overline{BD}^2$ (Satz des Pythagoras)
$= 33^2 + 2880$; $d = 63$



8. $18 \cdot (18 + s_1) = 30^2$
(Sekantentangentensatz); $s_1 = 32$
$\sphericalangle ABC = 90°$ (Satz des Thales)
$\curvearrowright \overline{BD}$ Durchmesser (Satz des Thales)
$\rightarrow \Delta ABC \cong \Delta ADB \curvearrowright s_2 = 32$
$\sphericalangle ABF = \sphericalangle ACB$ (Sehnentangentenwinkel)
$\curvearrowright \Delta AFB \sim \Delta BAC$
$\overline{AB} = \sqrt{30^2 - 18^2} = 24$
(Satz des Pythagoras)
$\frac{30}{18} = \frac{d}{\overline{AB}}$; $d = 40$

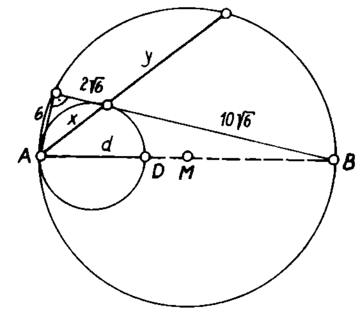


9. C liegt auf $\overline{M_1M_2}$
(Radien der Berührungstangente).
$\sphericalangle CAB = \frac{1}{2} \sphericalangle AM_1C$ und
$\sphericalangle ABC = \frac{1}{2} \sphericalangle BM_2C$
(Sehnentangentenwinkel)

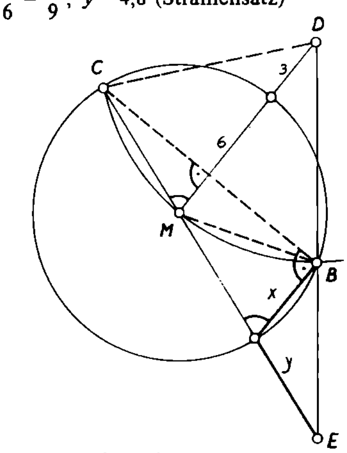


$\sphericalangle CAB + \sphericalangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 180°$ (Wechselwinkel) $\curvearrowright \Delta ABC$ ist rechtwinklig.
$\overline{AB}^2 = 12^2 + 9^2$ (Satz des Pythagoras);
$\overline{AB} = 15$
$\Delta ADM_1 \sim \Delta ABC$; $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{r_1}{\overline{AD}}$; $\frac{15}{9} = \frac{r_1}{6}$;
$r_1 = 10$ und analog $r_2 = 5{,}625$

10. $\overline{AB}$ ist Durchmesser (Satz des Thales). D liegt auf $\overline{AB}$ (gemeinsame Berührungsradien einer gedachten Tangente in A)
$\overline{AB}^2 = 6^2 + (12 \cdot \sqrt{6})^2 = 30^2$
$(10 \cdot \sqrt{6})^2 = \overline{BD} \cdot \overline{BA}$ (Sekantentangentensatz); $\overline{BD} = 20 \curvearrowright d = 10$
$x^2 = 6^2 + (2 \cdot \sqrt{6})^2$ (Satz des Pythagoras); $x = 2 \cdot \sqrt{15} \approx 7{,}75$
$x \cdot y = 2 \cdot \sqrt{6} \cdot 10 \cdot \sqrt{6}$ (Sehnensatz);
$y = \frac{120}{2 \cdot \sqrt{15}}$; $y = 4 \cdot \sqrt{15} \approx 15{,}49$



11. $\Delta DCM \cong \Delta DBM$ (nach *sss*); $\overline{MD} \perp \overline{BC}$
$\sphericalangle ABC = 90°$ (Satz des Thales);
$\overline{AB} \perp \overline{BC} \curvearrowright AB \parallel MD \curvearrowright \sphericalangle CAB = \sphericalangle CMD$
$\Delta CMD \sim \Delta ABM$ (gleichschenklige Dreiecke mit gleichen Basiswinkeln)
$\curvearrowright \frac{\overline{DM}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{AB}}$; $\frac{9}{6} = \frac{6}{x}$; $x = 4$;
$\frac{\overline{EM}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{DM}}{\overline{AB}}$;
$\frac{y}{y+6} = \frac{4}{9}$; $y = 4{,}8$ (Strahlensatz)

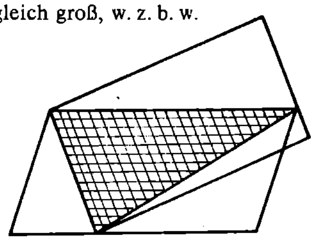


Lösungen zur Sprachecke

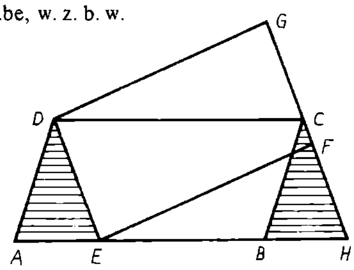
▲ 1 ▲ Der Wert der Symbole
Jedes Symbol in der vorliegenden Figur entspricht einer Ziffer zwischen 1 und 9. Entschlüßle diese Figur, indem du die entsprechenden Ziffern einsetzt! Dabei muß die Summe von drei Zahlen, die auf einer Geraden liegen, stets 114 ergeben.

Lösung: ♥ = 1, ▼ = 2, ♠ = 3, ● = 4, ∇ = 6, ♣ = 7, ■ = 8.

▲2▲ Zwei Parallelogramme besitzen gemeinsam eine Ecke und dann noch jeweils eine Ecke auf einer Seite des anderen (siehe Zeichnung). Zeige, daß ihre Flächeninhalte gleich groß sind!
Lösung 1: Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist halb so groß wie der Flächeninhalt eines Parallelogramms, das mit ihm in einer Seite und der dazugehörigen Höhe übereinstimmt. Das schraffierte Dreieck hat deshalb einen halb so großen Flächeninhalt wie jedes der beiden Parallelogramme. Deshalb sind deren Flächeninhalte gleich groß, w. z. b. w.



Lösung 2: Die beiden schraffierten Dreiecke sind zueinander kongruent (wsw). Darum sind die Parallelogramme $ABCD$ und $EHCD$ zueinander flächengleich (vgl. Bild). Parallelogramme, die in einer Seite und der zugehörigen Höhe übereinstimmen, sind flächengleich. Somit sind auch die Flächeninhalte der Parallelogramme $EHCD$ und $EFGD$ gleich groß. Damit (Drittengleichheit!) folgt die Behauptung der Aufgabe, w. z. b. w.



▲3▲ Die Zahl 1989
Es ist sofort klar, daß diese Zahl nicht prim ist, sie ist teilbar durch 9. (Wie kann man es ohne Ausführung der Division sofort sehen?) Die Zahl, die man nach Division von 1989 durch 9 erhält ist das Produkt zweier aufeinanderfolgender Primzahlen. Finde diese.
Lösung: Die Quersumme von 1989 beträgt 27, diese ist durch 9 teilbar, damit auch 1989. $13 \cdot 17 = 221$.

Lösung zu: Ein Zuschnittproblem

Figur 1: Die Diagonalen des Drachenvierecks zerlegen dieses in vier rechtwinklige Dreiecke; der Verschnitt besteht ebenfalls aus vier rechtwinkligen Dreiecken. Von diesen acht rechtwinkligen Dreiecken sind jeweils zwei kongruent, also auch flächengleich. Für den Verschnitt gilt deshalb

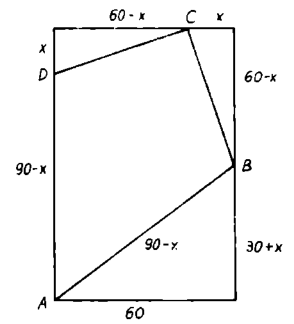
$V_1 = a \cdot b - \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$, also

$V_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot 90 \cdot 60\,\text{cm}^2$
$= 2700\,\text{cm}^2$.

Figur 2: Nach dem Satz des Pythagoras gilt, wie aus dem Bild ersichtlich, folgendes:
$60^2 + (30 + x)^2 = (90 - x)^2$,
$3600 + 900 + 60x + x^2 = 8100 - 180x + x^2$, $240x = 3600$, $x = 15$. Daraus folgt für den Verschnitt

$V_2 = \left(15 \cdot 45 + \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 45\right) \text{cm}^2$,
$V_2 = 2025\,\text{cm}^2$.

Für Figur 2 ist der Verschnitt also um $675\,\text{cm}^2$ kleiner.



Lösungen zu: Kann man mit Näherungswerten genau rechnen?

▲2▲ $V = (29{,}4 \pm 1{,}7)\,\text{cm}^3$

▲3▲ $v_0 = 103{,}371\,43\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$,

$79\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \leq v \leq 104\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

▲4▲ $d = r_2 - r_1 = (4{,}7 \pm 0{,}1)\,\text{cm}$

▲5▲

	$a + b$	$a - b$
Ergebnis von (1)	120,7	56,7
untere Wertschranke	120,15	56,15
obere Wertschranke	121,25	57,25

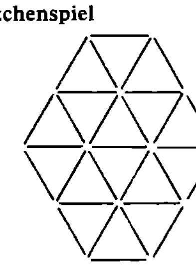
	$a \cdot b$	$a : b$
Ergebnis von (1)	2838,4	2,771 875
untere Wertschranke	2792,475	2,727 692 3
obere Wertschranke	2884,375	2,817 460 3

▲6▲ $a + b = 121$; $a - b = 57$;
$a \cdot b = 2800$; $a : b = 2{,}8$

Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

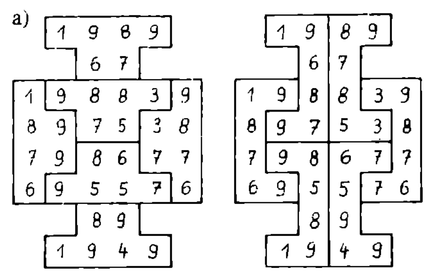
Sechs Magische Quadrate auf einmal!
Die magischen Konstanten lauten für das 10×10-Quadrat 505, für das 8×8-Quadrat 404 und für die 4×4-Quadrate 202.
Dann ist sofort $k = 202 - 142 = 60$
und $n = 202 - 139 = 63$ (Diagonale),
sowie $o = 202 - 165 = 37$.
Ferner ist $x = 202 - 151 = 51$ und
$u = 202 - 156 = 46$ (Diagonale),
sowie $t = 202 - 146 = 56$.
Die Zahlen in den jetzt vorliegenden vier 2×2-Quadraten ergeben sich nach gleichen Überlegungen. So ist
$c + d = 202 - 99 = 103$,
$c + g = 202 - 192 = 10$,
$d + g = 202 - 101 = 101$.
Aus $(c + d) + (c + g) - (d + g)$
$= 103 + 10 - 101$ folgt $2c = 12$,
$c = 6$ und $d = 97$, $g = 4$, $h = 95$.
Entsprechend findet man in den drei anderen Quadraten
$e = 32$, $f = 71$, $i = 30$, $j = 69$; $r = 61$,
$s = 39$, $v = 36$, $w = 66$; $l = 43$, $m = 57$,
$p = 54$, $q = 48$.
In der ersten Zeile des 10×10-Quadrates gilt $a + b = 505 - 476 = 29$. Man findet die noch möglichen Zahlen 15 und 14.
(Die Idee, eine Jahreszahl in ein Magisches Quadrat (mit 4×4 Feldern) einzuarbeiten, hatte als erster Albrecht Dürer. Er verwandte die Jahreszahl 1514.) Schließlich ist $y = 505 - 404 - 15 = 86$ und $z = 87$ (oder die letzten beiden Zahlenpaare vertauscht).

Hölzchenspiel



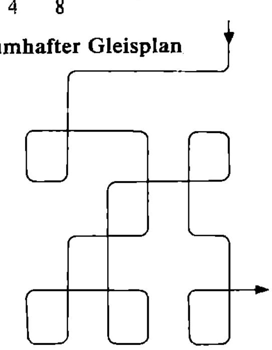
Kryptarithmetik
a) $5162 \cdot 312 = 1\,610\,544$
b) $4303 \cdot 249 = 1\,071\,447$

Mathe-aktuell
a)



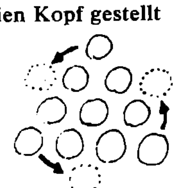
b) Für die gesuchte Zahl x muß gelten:
$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} = x - 5$. Man erhält $x = 40$.

Traumhafter Gleisplan



Bildungsgesetz gesucht!
Jede Zahl der linken Spalte ist die Summe aus der über ihr stehenden Zahl und deren rechten Nachbar. Jede Zahl der rechten Spalte ist die Summe aus dem Doppelten der über ihr stehenden Zahl und deren linken Nachbar. Die beiden Zahlen der 7. Zeile sind
$89 + 144 = 233$ und $2 \cdot 144 + 89 = 377$.

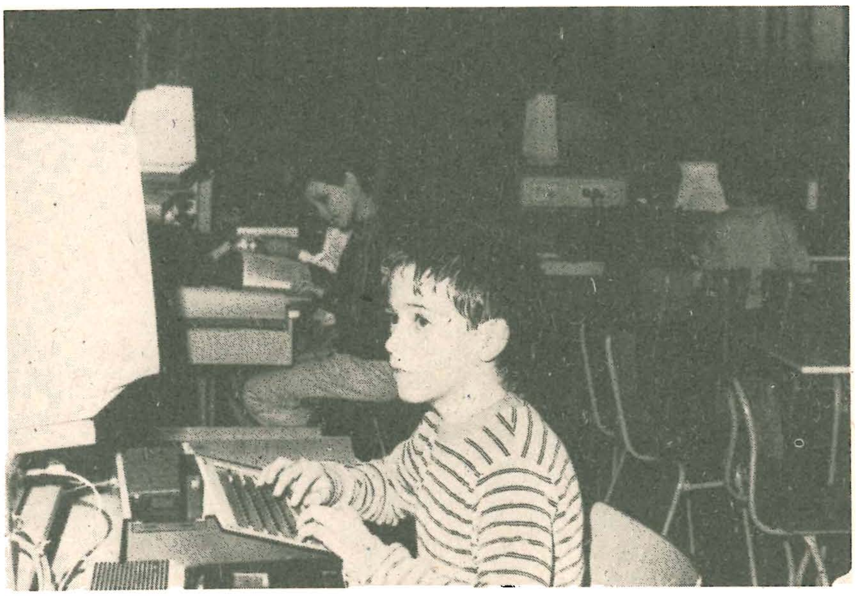
Auf den Kopf gestellt



Unsere Erlebnisse im Spezialistenkurs Mathematik/BASIC 1989

Innerhalb der letzten 15 Jahre wurden in vielen Kreisen unserer Republik Schülerakademien gebildet. Diese bieten interessierten Schülern eine Reihe von Veranstaltungen aus Gesellschaftswissenschaften, Naturwissenschaften, Kultur und Technik an. Vorträge mit Diskussionsmöglichkeiten, Experimentalvorlesungen, Koch-Back- und DRK-Kurse, Stenographiezirkel, Exkursionen und Besichtigungen, Teilnahme an AHA-Studioproduktionen, individuelle Beratungen zu Partnerschaftsproblemen, wissenschaftliche Arbeitszirkel für EOS-Schüler mit ausgewählten Studienwünschen seien als Beispiele genannt. Der Schüler kann nach eigenem Ermessen Veranstaltungen auswählen. Informationen darüber, ob in eurem Kreis eine Schülerakademie existiert oder die Möglichkeit der Teilnahme im Nachbarkreis besteht, erhaltet ihr bei eurem Schuldirektor.

Alphons



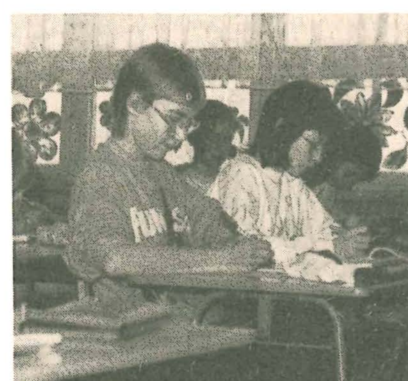
Wie jedes Jahr veranstaltete die Schülerakademie Erfurt in der 1. Woche der Winterferien einen Spezialistenkurs für 60 mathematisch besonders interessierte Schüler der Klassen 6 bis 8. Erstmals wurde die Verbindung Mathematik/BASIC erprobt. Diese Verbindung hat sich sehr gut bewährt. Täglich absolvierten wir zwei Doppelstunden Mathematik und eine Doppelstunde BASIC.

Im Mathematikteil behandelten wir die Darstellende Geometrie, Funktionen, Mischungsaufgaben, Kombinatorik und Zahlenfolgen. Zur Auflockerung gab es zwischendurch auch ein paar Knobelaufgaben. Insgesamt fanden wir den Mathematikteil sehr interessant, obwohl die Themen manchmal etwas schwierig waren und wir die Gleichungen sowie Stereometrie ein wenig vermißten.

BASIC war den meisten von uns noch recht unbekannt. Doch wir lernten schnell dazu. Nach anfänglichen kleinen Übungen konnten wir bald unser erstes Programm schreiben. Wir ließen Flächen- und Oberflächeninhalte, Volumen und andere Größen ausrechnen.

Ein Programm zur Berechnung von Quadrat- und Kubikzahlen wollen wir hier vorstellen:

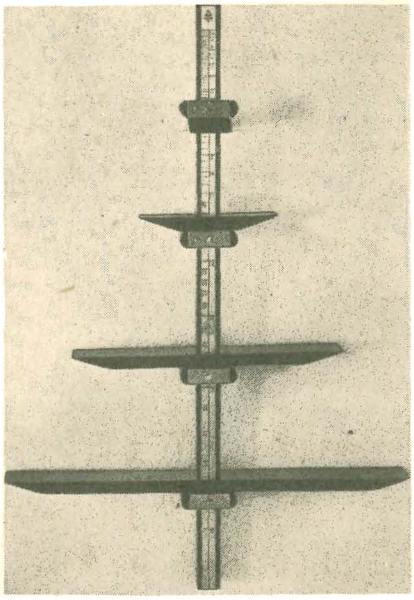
```
 1Ø CLS
 2Ø PRINT "BERECHNUNG VON
    QUADRAT- UND KUBIKZAHLEN"
 3Ø PRINT "---------------
    ----------": PRINT
 4Ø INPUT "ANFANGSZAHL:".A :
    PRINT
 5Ø INPUT "ENDZAHL:";B : PRINT
 6Ø PRINT "ZAHL", "QUADRAT-
    ZAHL", "KUBIKZAHL" : PRINT
 7Ø PRINT "ZAHL", "QUADRAT-
    ZAHL", "KUBIKZAHL": PRINT
 8Ø FOR A = A TO B STEP C
 9Ø PRINT A, A*A, A*A*A
1ØØ NEXT A
11Ø END
```



Viele von uns wollen nach diesen Anfängen gerne mit BASIC weitermachen.

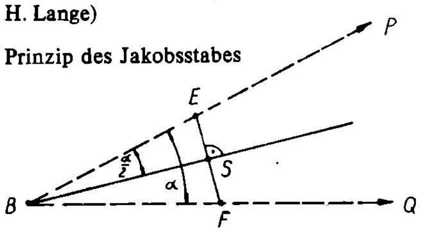
Zum Abschluß wurden die aktivsten Schüler von uns ausgezeichnet und wir sahen uns einen Film an. Allen hat dieser Kurs sehr gut gefallen, unsere Erwartungen wurden erfüllt und wir sind alle der Meinung, daß der Kurs nächstes Jahr unbedingt wieder mit BASIC verbunden werden sollte.

B. Kraft, C. Sommer, C. Adamczyk



Jakobsstab aus dem Schiffahrtsmuseum Rostock (Nachbildung, angefertigt von H. Lange)

Prinzip des Jakobsstabes



Der Jakobsstab

Im Verkehrsmuseum Dresden, im Staatlichen Mathematisch-Physikalischen Salon im Dresdner Zwinger und im Schiffahrtsmuseum Rostock findet man (meist in Nachbildungen) ein Winkelmeßgerät, das trotz oder vielleicht gerade wegen seiner theoretischen und praktischen Anspruchslosigkeit jahrhundertelang zu den wichtigsten nautischen Geräten gehörte und auch in der Astronomie und im Vermessungswesen eine bedeutende Rolle gespielt hat. Dieses Gerät ist heute hauptsächlich unter dem Namen Jakobsstab bekannt. Die deutschen Seeleute nannten es auch Gradstock oder Kreuzstab, die Engländer cross-staff, die Franzosen arbalète, die Portugiesen balestilha...

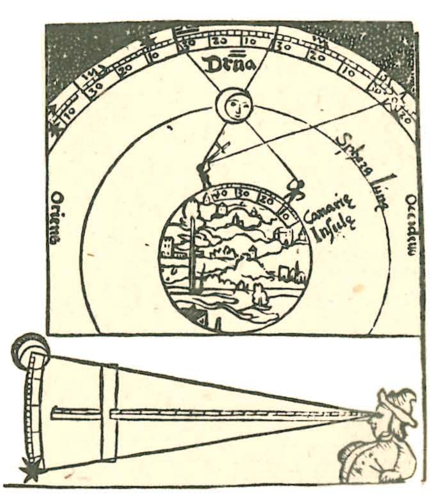
Das mathematische Prinzip des Jakobsstabes ist einfach: Der auf dem Längsstab verschiebbare Querstab (auch „Hammer" genannt) wird in eine solche Lage geschoben, daß vom Beobachterauge B am Ende des Längsstabes die auf die Endpunkte E, F des Querstabes gerichteten Sehstrahlen gleichzeitig zwei anzupeilende Punkte P, Q (z. B. Sterne oder Kirchturmspitzen) treffen. Dann ist (Bild 2) $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{ES}{SB}$ und daher für den zu messenden Sehwinkel $\alpha = 2\arctan\frac{ES}{SB}$. Anfangs war der Längsstab mit gleichabständigen Marken (Kerben) versehen, und man mußte eine Tabelle oder Rechenvorschrift benutzen, um aus dem auf dem Längsstab abgelesenen Zahlenwert den Winkel α zu bestimmen. Vermutlich ist der Nürnberger Mathematiker Johannes Werner (1468 bis 1528) als erster auf die Idee gekommen, die Teilung des Längsstabes so zu gestalten, daß man den Winkel α dort unmittelbar ablesen konnte. Dabei sind die meßbaren Winkel nach unten durch die begrenzte Länge des Längsstabes beschränkt, und darüber hinaus ist eine für das jeweilige praktische Bedürfnis befriedigende Ablesegenauigkeit bei einem Querstab immer nur in einem gewissen Bereich von Winkeln möglich. In einer Spätphase, etwa ab Mitte des 17. bis Anfang des 19. Jh., trug der Längsstab daher mehrere Querstäbe für verschiedene Winkelbereiche, zu denen jeweils auf dem Längsstab eine entsprechende Winkelskala gehörte (vgl. Bild 1). Die so mit dem Jakobsstab insbesondere unter den schwierigen Bedingungen auf schwankendem Schiff und bei schlechtem Wetter erzielbare Meß- und Ablesegenauigkeit bewirkte zusammen mit der bei Seeleuten ausgeprägten Anhänglichkeit an Hergebrachtes und der einfachen Handhabung, daß die ab 1731 (durch John Hadley u. a.) erfundenen, prinzipiell leistungsfähigeren Spiegel-Winkelmesser Oktant bzw. Sextant sich nur sehr langsam allgemein durchsetzen konnten. Zum Beispiel empfahl der Greifswalder Mathematikprofessor Lambert Heinrich Röhl noch 1778 in seinem vielbenutzten Buch „Anweisung zur Steuermannskunst" ausdrücklich den Jakobsstab.

Über die Geschichte des Jakobsstabes gibt es eine erstaunlich umfangreiche Speziallliteratur. (Interessenten seien auf das von W. Köberer herausgegebene Buch „Das rechte Fundament der Seefahrt", Berlin: transpress-Verlag 1982, verwiesen, das neben dem Wiederabdruck klassischer Arbeiten zur Navigationsgeschichte einen guten Zugang zu weiterführender Literatur gibt.)

Die beiden Hauptfragen, die in dieser Literatur lange Zeit immer wieder diskutiert wurden, sind die nach dem Erfinder bzw. nach Ort und Zeit der Erfindung des Jakobsstabes und nach der Herkunft und Bedeutung des Namens. Hinsichtlich der ersten Frage ist man sich heute ziemlich einig, daß der vielseitige jüdische Gelehrte Levi ben Gerson (1288 bis 1344) als erster Europäer den Jakobsstab und seine Verwendung beschrieben hat und daß diese Schrift in lat. Übersetzung dem Regiomontanus (1436 bis 1476, vgl. den Artikel „Eine Aufgabensammlung aus dem Jahre 1475" in alpha 1986, Heft 4) bekannt gewesen sein muß, der lange Zeit als „Vater" des Jakobsstabes galt. Der aus Spanien stammende und in Südfrankreich wirkende ben Gerson bezeichnete sich zwar selbst als Erfinder des Gerätes, das in der latein. Übersetzung auch schon als „baculus (d. h. Stab) Iacob" bezeichnet wird, es ist aber wahrscheinlich, daß ähnliche Vorrichtungen zuvor schon im Gebrauch waren. Man führt die Idee bis auf Archimedes zurück, der sie in seiner Schrift „Die Sandrechnung" zur Bestimmung des Sehwinkels, unter dem die Sonne uns erscheint, benutzt. Über den Namen Jakobsstab gibt es noch immer verschiedene Hypothesen. Eine führt ihn auf den Erzvater Jakob des Alten Testaments und die dort im 1. Buch Mose (30.37) berichtete Geschichte zurück, wie Jakob einige in Abständen stückweise entrindete Aststäbe zur Züchtung gefleckter Schafe verwendet haben soll. Wem dies allzu weit hergeholt und unwahrscheinlich vorkommt, der bedenke, welch bestimmende Rolle religiöses Denken und innige Vertrautheit mit den Gestalten und Begebenheiten der Bibel jahrhundertelang im Leben der Menschen gespielt haben. Eine andere Hypothese stützt sich jedoch darauf, daß der Apostel Jakob (spanisch: Sanct Jago), nicht zu verwechseln mit dem Erzvater Jakob, mit dem Jünger Jesu „Jakob dem Jüngeren" oder mit „Jakob dem Gerechten", dem Führer der urchristlichen Gemeinde von Jerusalem, der Nationalheilige der Spanier ist.

Der Name Jakobsstab tritt in der deutschsprachigen Literatur erstmals als „baculus Iacob" in dem Einblattdruck von 1502 auf, danach in der erstmals 1531 in Frankfurt a. M. gedruckten Schrift „Jakobs Stab künstlich und gerecht zu machen und zu gebrauchen" des Oppenheimer Stadtschreibers Jakob Köbel. Die Mehrheit der zahlreichen Gelehrten, die im 16. und 17. Jh. die Anwendung des Jakobsstabes für verschiedenste Zwecke beschrieben, bevorzugte lateinische Bezeichnungen wie baculus astronomicus, baculus geometricus, radius visorius (J. Werner). Daß der Jakobsstab auch heute, obgleich längst außer Dienst, noch nicht ganz vergessen ist, bezeugt u. a. eine niederländische Briefmarke aus dem Jahre 1986.

P. Schreiber



Bestimmung der geographischen Länge durch Messung von Mondabständen mittels Jakobsstab

ISSN 0002-6395 · alpha · Berlin · 23 (1989) 5 · Seiten 97 bis 120