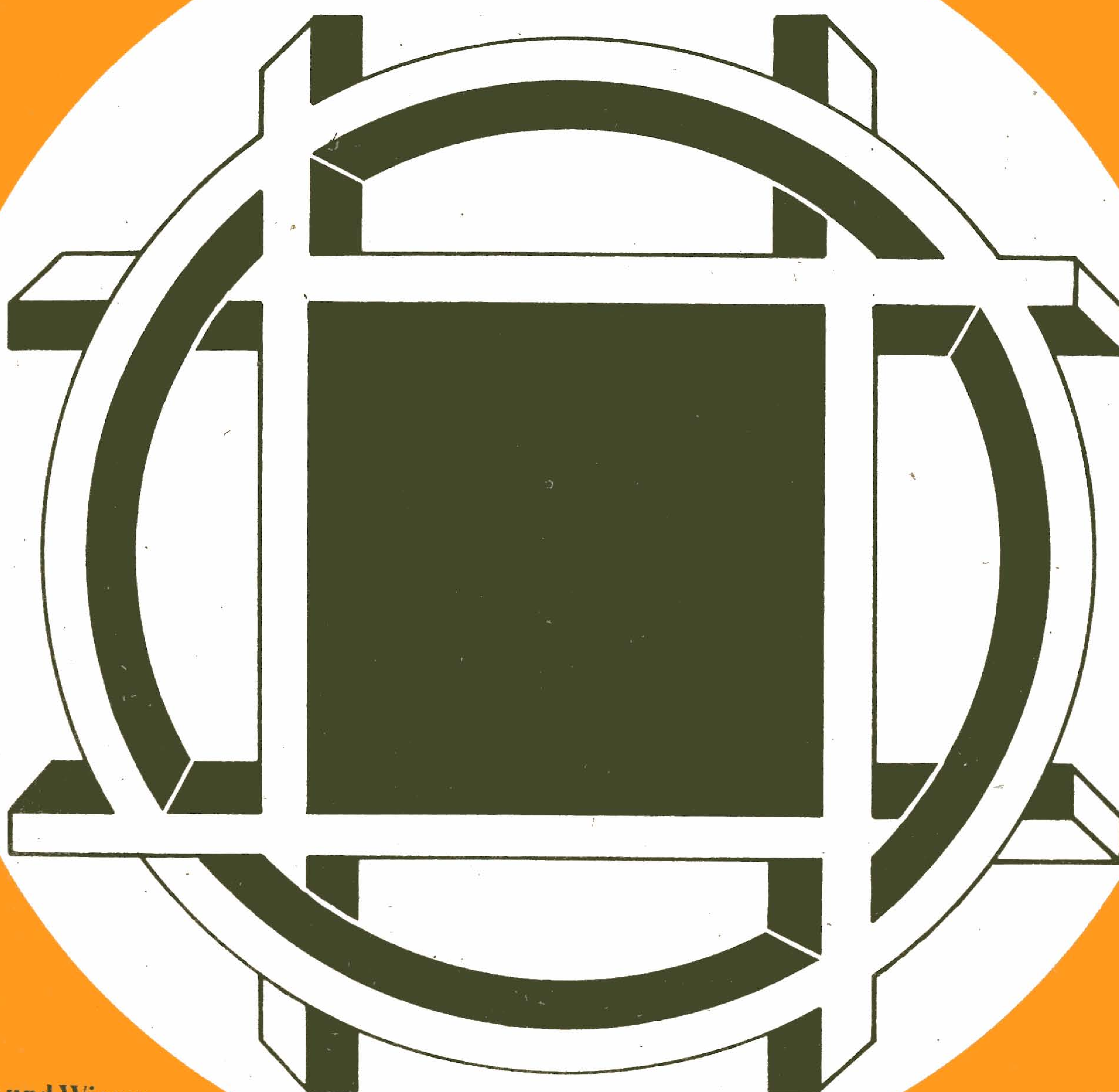
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
24. Jahrgang 1990
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

1

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold

Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086
Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig 7027

Redaktion:
Dr. paed. Gabriele Liebau (Chefredakteur); Rosemarie Schubert (redaktioneller Mitarbeiter)
Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Dr. sc. Lothar Flade (Halle); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dr. C. P. Helmholz (Leipzig); Dozent Dr. sc. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberstudienrat J. Lehmann, VLdV (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dr. rer. nat. W. Schmidt (Greifswald); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. rer. nat. W. Schulz (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch, VLdV (Halle)
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Prof. Dr. W. Walsch (S. 1); Prof. Dr. H. Heckendorf (S. 6); Prof. Dr. Flachsmeyer (S. 17)
Vignetten: L. Otto, Leipzig (Titelvignetten)
Techn. Zeichnungen: OStR G. Gruß, Leipzig
Titelblatt: W. Fahr, nach einer Vorlage von R. Ruprecht, Coswig
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

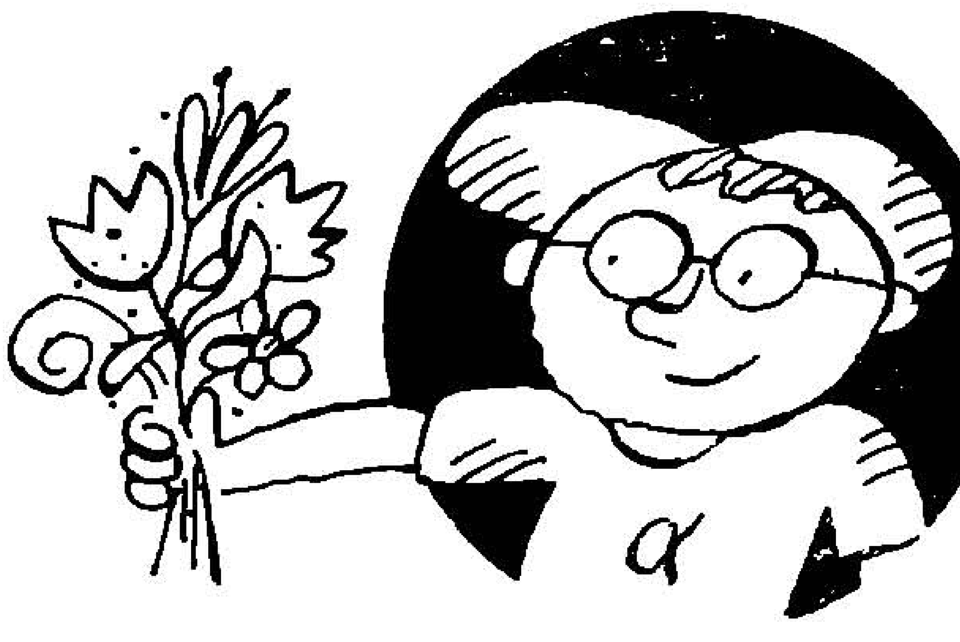
Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 11. Oktober 1989
Auslieferungstermin: 9. Februar 1990

Mathematische Schülerzeitschrift

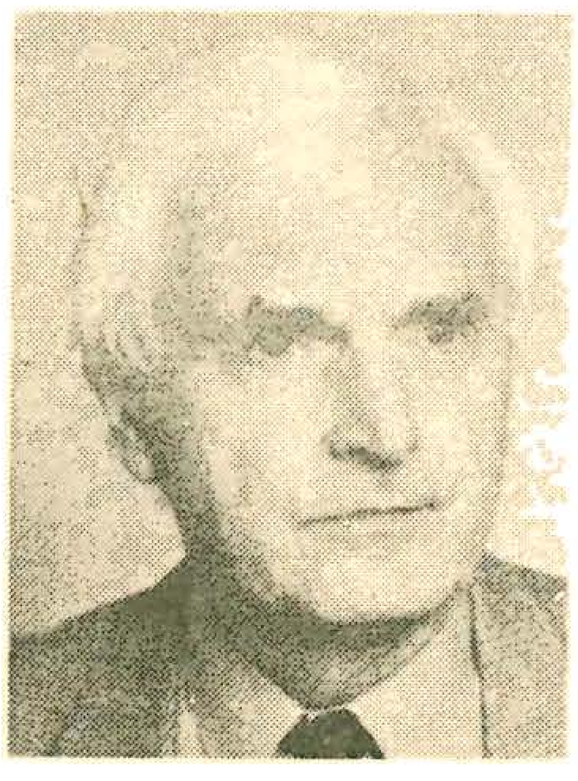
Inhalt

Alphons weist die Schüler der 5. bis 7. Klasse auf speziell für sie geeignete Beiträge hin.

alpha gratuliert –
Prof. Dr.
W. Walsch



Wir gratulieren zum 60. Geburtstag und danken Prof. Dr. Walsch herzlich für seine aktive Mitarbeit im Redaktionskollegium von Beginn an.
Wir freuen uns auf die weitere Zusammenarbeit.



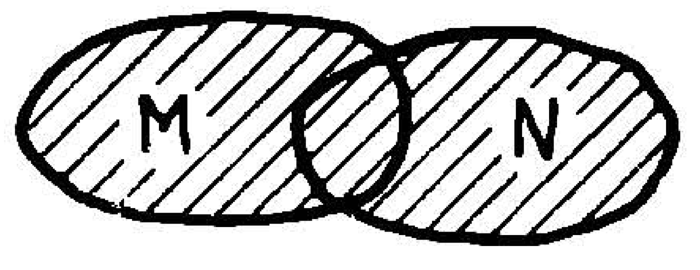
In den Heften 1 bis 4/67 des 1. Jahrganges der „alpha" bot Prof. Walsch den Lesern Interessantes zur Mengenlehre. In Vorbereitung auf den zweiteiligen Beitrag „Läßt sich der Zufall berechnen" (Heft 2 und 3/90) von W. Träger drucken wir einen Teil davon (Heft 2/67, S. 43/44) ab.

Vereinigung und Durchschnitt von Mengen

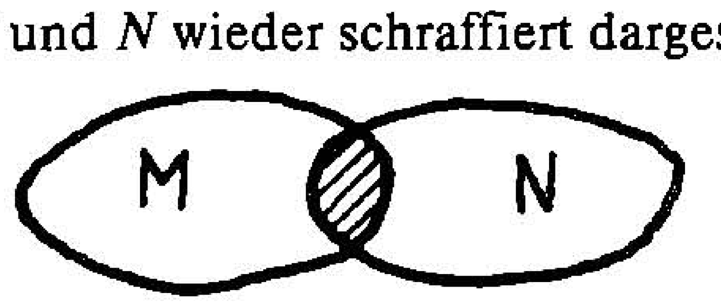
Für unsere folgenden Überlegungen denken wir uns als Grundbereich eine Schulklasse K gegeben. Die Elemente von K sind also Schüler, die wir durch den jeweiligen Anfangsbuchstaben ihres Familiennamens kennzeichnen wollen. (Der Einfachheit halber setzen wir voraus, daß jeder Buchstabe des Alphabets höchstens einmal als Anfang eines Familiennamens in der Klasse vorkommt.) Wir wollen annehmen, daß wir einige Teilmengen von K kennen:

(1) Den Schachklub der Klasse:
$S = \{a, b, c, d\}$.
(2) Die Menge der Schüler, die am Englischunterricht teilnehmen:
$E = \{e, f, g\}$.
(3) Die Volleyballmannschaft:
$V = \{c, d, h, i, k, l\}$.
(4) Die Menge der Schüler, die an einem Zirkel im Fach Mathematik teilnehmen: $Z = \{e, f, g, h, k, l, m\}$.

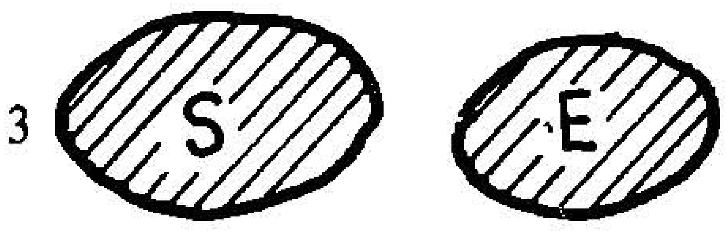
Eines Tages gibt der Klassenlehrer bekannt: „Alle Schüler, die zum Schachklub oder zur Volleyballmannschaft gehören, treffen sich nach dem Unterricht im FDJ-Zimmer!"
Welche Schüler sind damit gemeint? Sicher die Schüler a und b; denn sie gehören zum Schachklub, und ebenso die Schüler h, i, k und l; denn sie gehören zur Volleyballmannschaft. Wie steht es aber mit c und d? Diese Schüler müssen natürlich ebenfalls hingehen; denn sie gehören ja sogar zu beiden Mengen! Nach dem Unterricht versammelt sich also im FDJ-Zimmer eine Menge, die durch Vereinigung der beiden Mengen S und V entstanden ist. Man schreibt dafür $S \cup V$ (gelesen: „S vereinigt mit V" oder „Vereinigung von S und V"), und es ist in unserem Falle
$$S \cup V = \{a, b, c, d, h, i, k, l\}.$$
Wir merken uns allgemein: Ein Element x gehört zur Vereinigungsmenge der Mengen M und N genau dann, wenn x zu M oder zu N gehört. In kurzer Schreibweise:
$x \in M \cup N$ genau dann, wenn $x \in M$ oder $x \in N$ ist.
In Bild 1 ist die Vereinigung zweier Mengen veranschaulicht. Die Vereinigungsmenge ist schraffiert dargestellt.

Bild 1 

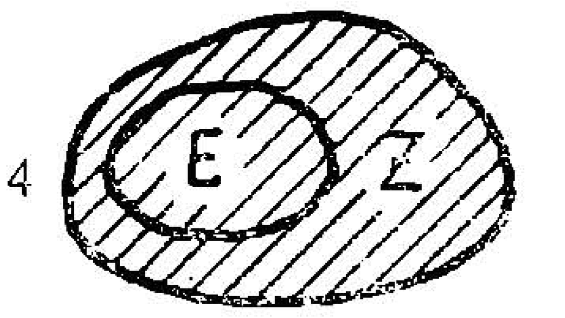
An einem anderen Tag heißt es in unserer Klasse: „Alle Schüler, die zur Volleyballmannschaft und auch zum Mathematikzirkel gehören, melden sich beim Klassenlehrer!" Wer ist gemeint? Nur die Schüler h, k und l; denn nur diese gehören sowohl zur Volleyballmannschaft als auch zum Mathematikzirkel. Die Schüler h, k und l bilden ebenfalls eine Menge, die man den Durchschnitt der Mengen V und Z nennt. Man schreibt dafür $V \cap Z$ (gelesen: „V geschnitten mit Z" oder „Durchschnitt von V und Z"), und es ist also:
$$V \cap Z = \{h, k, l\}.$$
Wir merken uns hier: Ein Element x gehört zum Durchschnitt der Mengen M und N genau dann, wenn x zu M und N gehört:
$x \in M \cap N$ genau dann, wenn $x \in M$ und $x \in N$ ist.
In Bild 2 ist der Durchschnitt der Mengen M und N wieder schraffiert dargestellt.

Bild 2 

Die Begriffe Durchschnitt und Vereinigung sind nicht sehr schwierig, das werden wir an den folgenden Beispielen, in denen wir mit unseren Mengen S, E, V und Z arbeiten wollen, gleich sehen.
Bilden wir einmal $S \cup E$ (d. h. die Menge der Schüler, die im Schachklub sind oder Englisch lernen). Wie jeder sicher leicht findet, ist $S \cup E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. (Dem entspricht die in Bild 3 dargestellte Situation. Die Vereinigungsmenge ist wieder schraffiert gezeichnet.)

Bild 3 

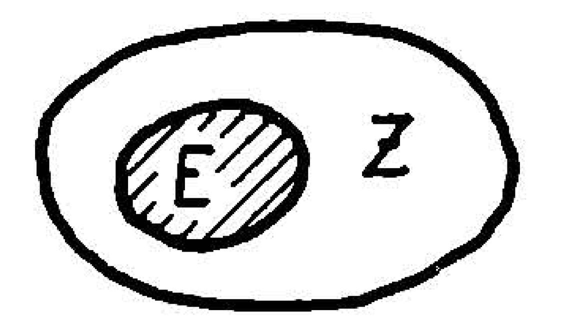
Was gibt $E \cup Z$? Ganz einfach:
$E \cup Z = \{e, f, g, h, k, l, m\}$,
d. h. $E \cup Z = Z$. Wie kommt das? Ihr habt es sicher schon gemerkt: E ist eine Teilmenge von Z, es kommt also beim Bilden der Vereinigungsmenge gar kein neues Element zu Z hinzu. (Siehe auch Bild 4!)

Bild 4 

Nun betrachten wir den Durchschnitt von S und E (d. h. die Menge der Schüler, die im Schachklub sind und außerdem auch noch Englisch lernen). Wie wir feststellen müssen, gibt es solche Schüler in unserer Klasse gar nicht, der Durchschnitt der Mengen S und E ist also leer: $S \cap E = \emptyset$. (Siehe auch Bild 5!)

Bild 5 

Wie steht es mit $E \cap Z$? Prüft selbst nach, daß $E \cap Z = E$ gilt! (In Bild 6 ist wieder eine entsprechende Situation dargestellt.)

Bild 6 

Wir wollen das Bilden von Durchschnitten bzw. Vereinigungsmengen mit drei einfachen Beispielen aus der Mathematik abschließen:
a) Die Ungleichung $x + 3 \leqq 8$ ist eine kurze Schreibweise für „$x + 3 < 8$ oder $x + 3 = 8$". Die Menge X aller natürlichen Zahlen, die die Ungleichung $x + 3 \leqq 8$ erfüllen, ergibt sich somit als Vereinigung der Mengen $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (das sind die natürlichen Zahlen, die die Ungleichung $x + 3 < 8$ erfüllen) und $B = \{5\}$ (die natürliche Zahl, die die Gleichung $x + 3 = 8$ erfüllt). Es gilt also
$X = A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
b) Sei G die Menge aller geraden natürlichen Zahlen, D die Menge aller durch 3 teilbaren natürlichen Zahlen. Dann ist $G \cap D$ die Menge aller durch 6 teilbaren natürlichen Zahlen – das sind nämlich diejenigen, die gerade und durch 3 teilbar sind.
c) Sei R_1 die Menge aller Rechtecke und R_2 die Menge aller Rhomben. Dann ist $R_1 \cap R_2$ gleich der Menge Q aller Quadrate: $R_1 \cap R_2 = Q$.
Wer bis zum nächstenmal etwas üben will, kann das an Hand der vorhin betrachteten Mengen S, E, V und Z tun. Zum Beispiel wäre noch zu untersuchen:
$$S \cup Z,\ E \cup V,\ S \cap Z,\ S \cap V,\ E \cap V.$$

Die Quadratur der Parabel

Zum 2 200. Jahrestag des Todes von Archimedes Teil 2

Den Satz über die Parabelquadratur, der bis dahin noch unbekannt war, hat Archimedes mit Hilfe der Mechanik gefunden. Dabei spielen der Schwerpunktbegriff und das Hebelgesetz eine große Rolle.
Archimedes hat zahlreiche weitere Flächeninhalte und Volumina unter Benutzung des Hebelgesetzes gefunden. Eine erst im Jahre 1906 in Konstantinopel wieder aufgefundene Schrift „Des Archimedes Methodenlehre von den mechanischen Lehrsätzen“ hat uns einen Blick in seine „Werkstatt“ tun lassen. Sie zeigt, wie sehr Archimedes sich beim Auffinden der Sätze des mechanischen Hilfsmittels bedient hat.

Vom Schwerpunkt

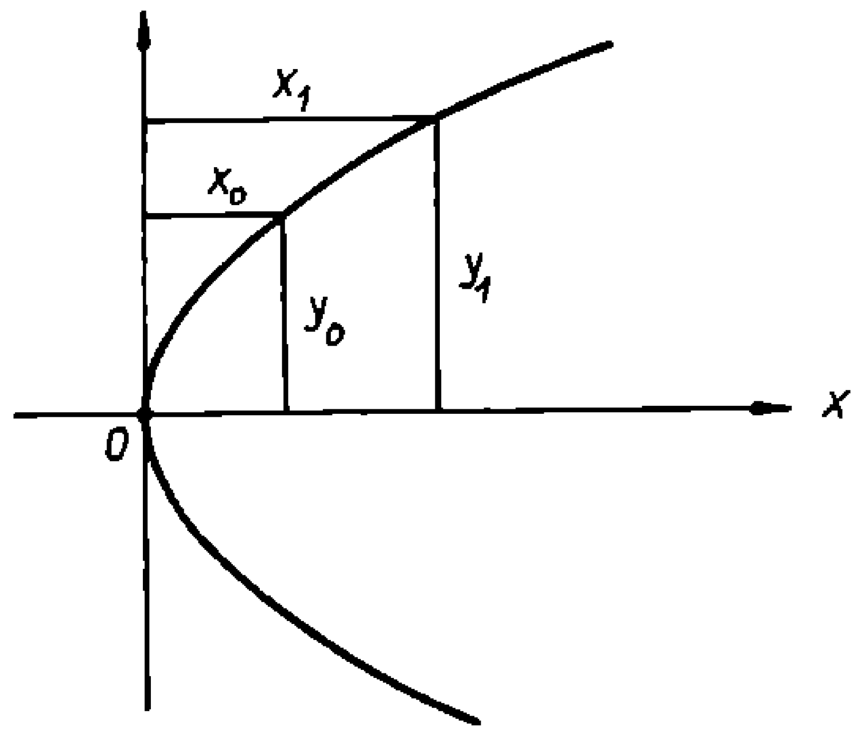
Archimedes nahm stillschweigend an, daß jede Größe einen wohlbestimmten Schwerpunkt hat. Macht man den Schwerpunkt einer Größe zu ihrem Unterstützungspunkt, so ist sie im Gleichgewicht. Hat man einen Hebel mit festem Drehpunkt (Unterstützungspunkt) um eine horizontale Achse, so können die Längen des einen und des anderen Hebelarmes (kurz „Abstände“ genannt) gleich oder ungleich sein. Gleiche Gewichte in gleichen Abständen sind im Gleichgewicht. Gleiche Gewichte in ungleichen Abständen sind nicht im Gleichgewicht, sondern es tritt ein Sichneigen nach der Seite des Gewichts im größeren Abstand hin ein. Größen stehen stets im Gleichgewicht, wenn ihre Abstände (vom Unterstützungspunkt) sich umgekehrt proportional zu ihren Gewichten verhalten (Hebelgesetz).
Archimedes bestimmte auch den Schwerpunkt ebener geometrischer Figuren. Der Schwerpunkt einer Geraden ist ihr Mittelpunkt. Archimedes bewies, daß in einem Parallelogramm nur der Mittelpunkt der Schwerpunkt sein kann. Indem er das Dreieck aus Parallelogrammen aufbaute, fand er den Schwerpunkt des Dreiecks und damit eines jeden Polygons. Der Schwerpunkt des Dreiecks liegt auf jeder Seitenhalbierenden, also auf ihrem Schnittpunkt. Der Schwerpunkt teilt jede Seitenhalbierende vom Eckpunkt aus im Verhältnis 2:1.

Eigenschaften der Parabel

Bevor die mechanischen Überlegungen des Archimedes zur Parabelquadratur dargestellt werden können, sind noch einige der dabei benutzten Eigenschaften der Parabel zu beschreiben.

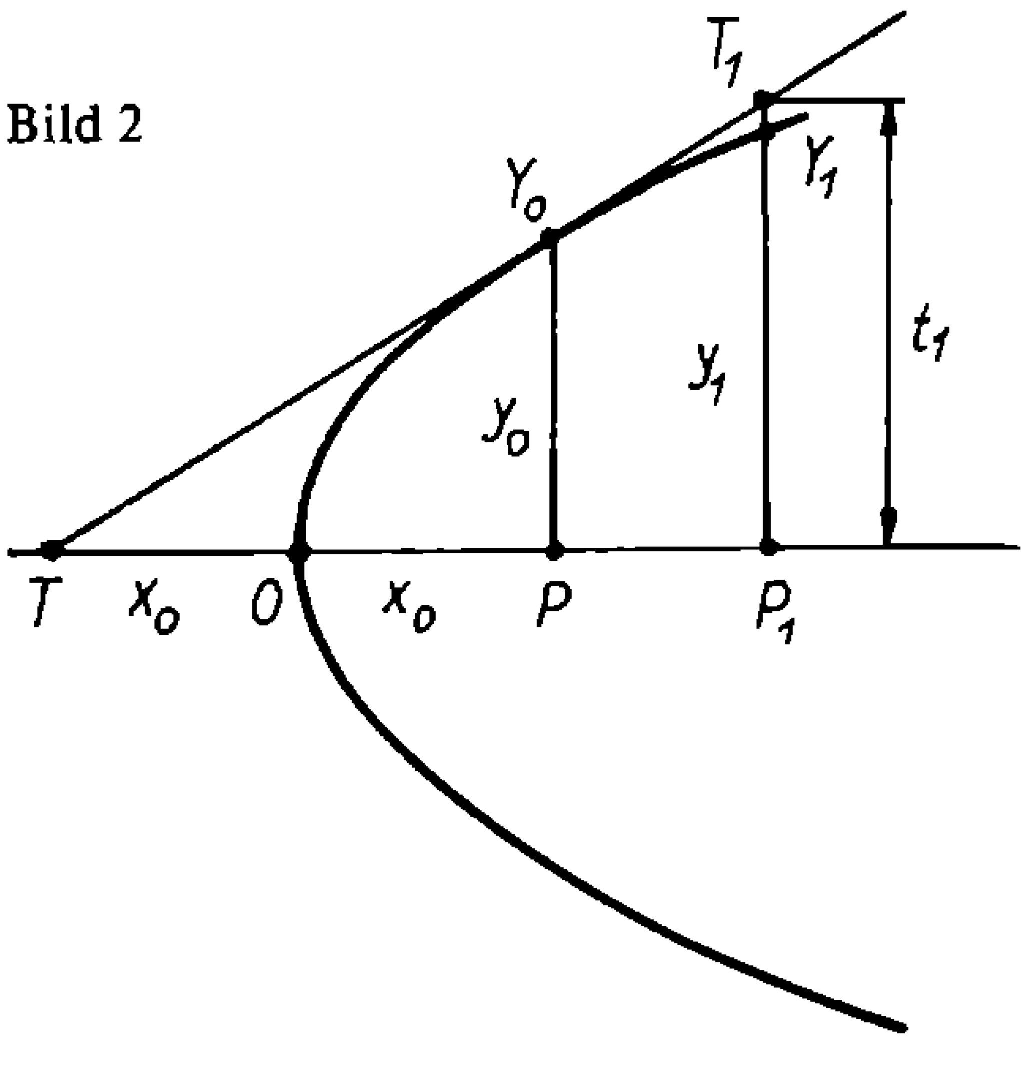
Die Parabel $y^2 = 2px$ liegt symmetrisch zur x-Achse (Bild 1).

Bild 1



Die x-Achse heißt auch Achse der Parabel. Jede Parallele zur Achse heißt ein Durchmesser der Parabel. Er halbiert gewisse parallele Sehnen. Für parallele Sehnen gibt es stets einen Durchmesser, der diese halbiert.
Eigenschaft E1:
Sind $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ und (x_1, y_1) zwei Punkte auf der Parabel, so gilt
$$\left(\frac{y_1}{y_0}\right)^2 = \frac{x_1}{x_0}.$$
Beweis: Aus $y_0^2 = 2px_0$, $y_1^2 = 2px_1$ folgt die Behauptung.
Die y-Achse ist Tangente im Scheitelpunkt O der Parabel. Über die Tangenten an von O verschiedenen Punkten gelten die folgenden zwei Aussagen:
Eigenschaft E2: T sei ein Punkt der verlängerten Achse außerhalb der Parabel so, daß $TO = OP$ ist. P sei der Fußpunkt der Ordinate Y_0P (Bild 2). Dann berührt Y_0T die Parabel in Y_0; Y_0T ist die Tangente an die Parabel in Y_0.

Bild 2



Beweis als *Aufgabe P2:* Man zeige, daß die Gerade TY_0 keinen Innenpunkt der Parabel enthält; die Annahme $t_1 < y_1$ (für $y_1 \neq y_0$, siehe Bild 2) führt zu einem Widerspruch.
Eigenschaft E3: Ist umgekehrt die Tangente an die Parabel im Punkt Y_0 gegeben, so sei T ihr Schnittpunkt mit der Verlängerung der Parabelachse. Dann gilt $TO = OP$ (P sei der Fußpunkt der Ordinate von Y_0 auf der Achse).
Aufgabe P3: Dies ist analytisch-geometrisch zu beweisen.
Eigenschaft E4: YY' sei senkrecht zur Achse. YY' sei die Grundlinie eines Parabelsegments und O der Scheitelpunkt des Segments. Trifft der Durchmesser durch irgendeinen anderen Parabelpunkt U die Gerade YY' in P' (Bild 3) und YO (wenn nötig, verlängert) in R, so gilt:
$P'R : UR = PY' : PP'$.

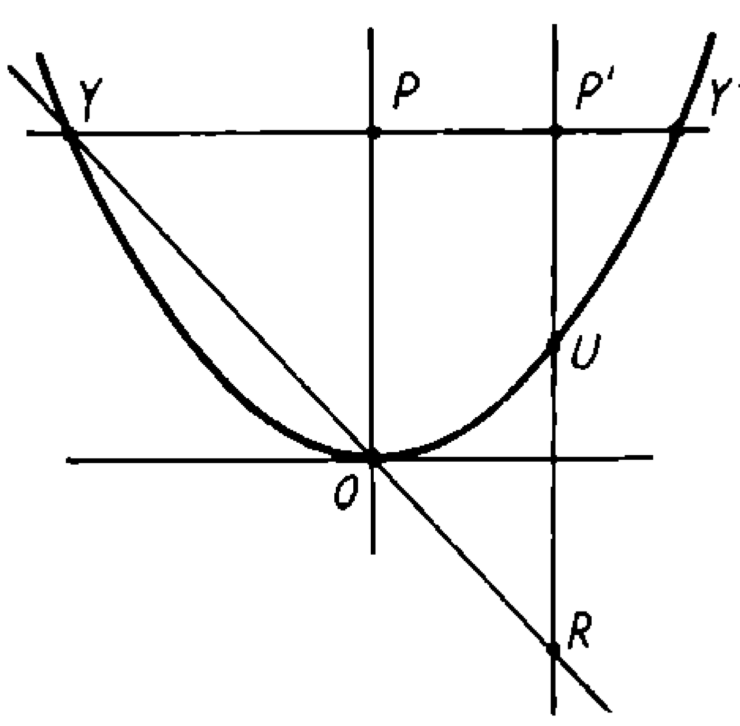
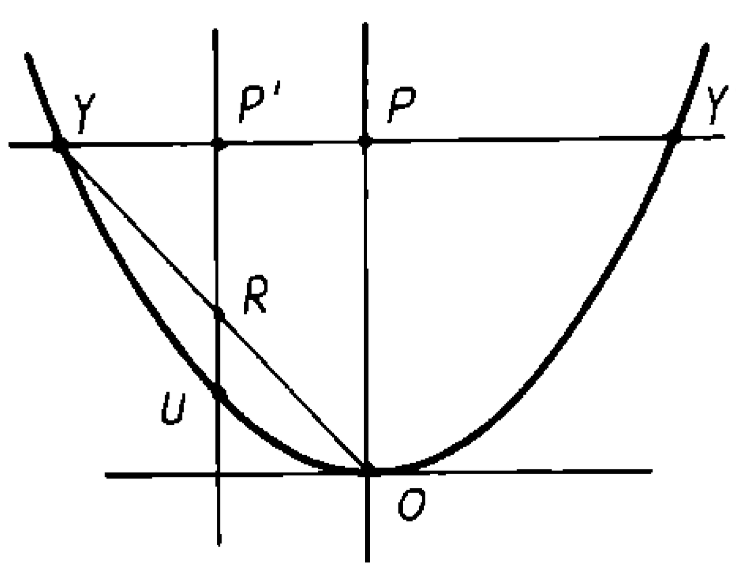


Bild 3



Aufgabe P4: Beweis!
Unter Benutzung von $E3$, $E4$ folgt (*Aufgabe P5:* Wie?) die *Eigenschaft E5:* Die Tangente in Y schneide die Verlängerung der Parabelachse OP in T. Man ziehe eine beliebige Parallele $P'R$ zu PT, die die Parabel in U schneidet. Dann gilt
$YP' : P'Y' = RU : UP'$ (vgl. Bild 4).

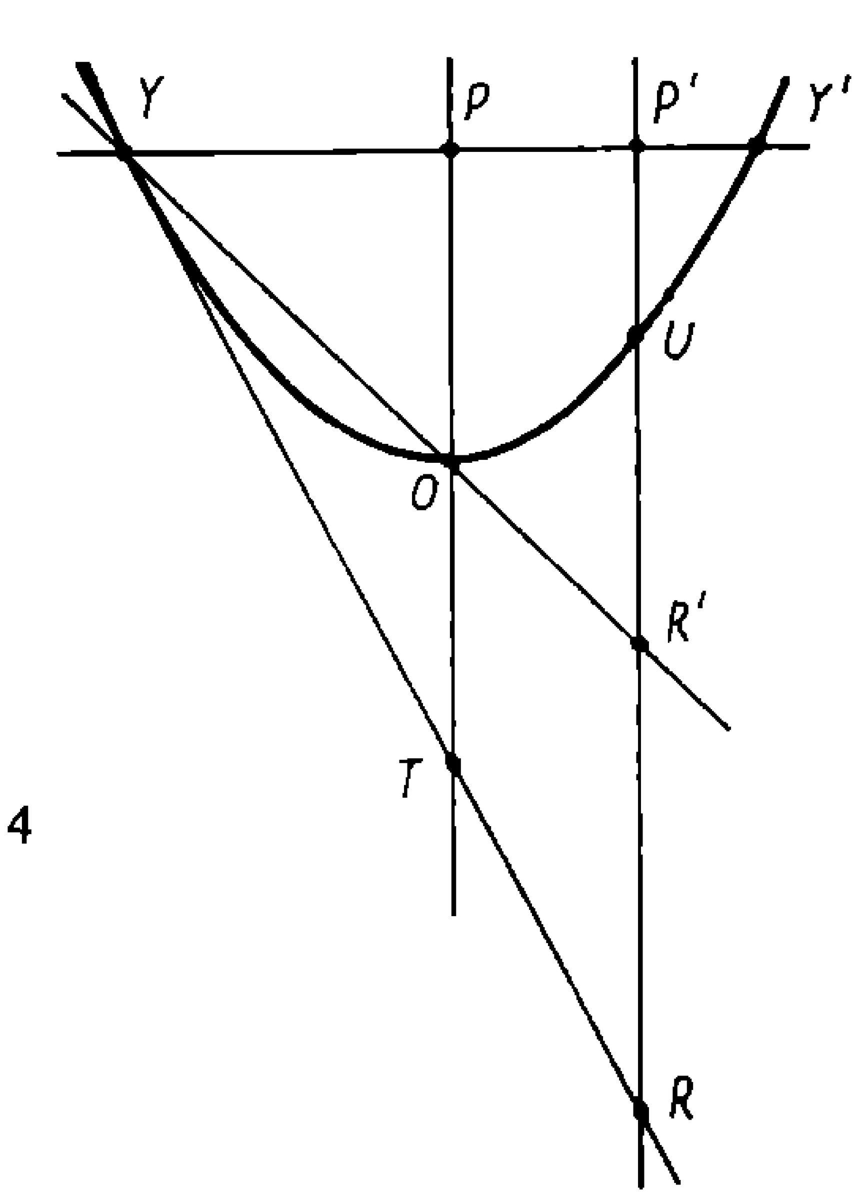


Bild 4

Hieraus folgt
$(YP' + P'Y') : P'Y' = (RU + UP') : UP'$,
d. h.
$YY' : P'Y' = RP' : UP'$.

Mechanische Überlegungen zur Parabelquadratur

Es sei $Y'OY$ das Parabelsegment, das vom Parabelbogen $Y'OY$ und der Sehne $Y'Y$ begrenzt wird. Man zeichne die Tangente im Punkt Y, verbinde die Punkte O und Y' sowie O und Y und zeichne durch Y' die Parallele zu OP (Bild 5). Diese Parallele schneide die verlängerte Gerade OY in K, die Tangente schneide die verlängerte Gerade OP in T und die Parallele in S. Der Punkt H werde auf der verlängerten Geraden YK so gewählt, daß

(1) $HK = KY$

ist. Archimedes: „Man denke sich YH als ein Waagebalken (Hebel) mit dem Mittelpunkt K."

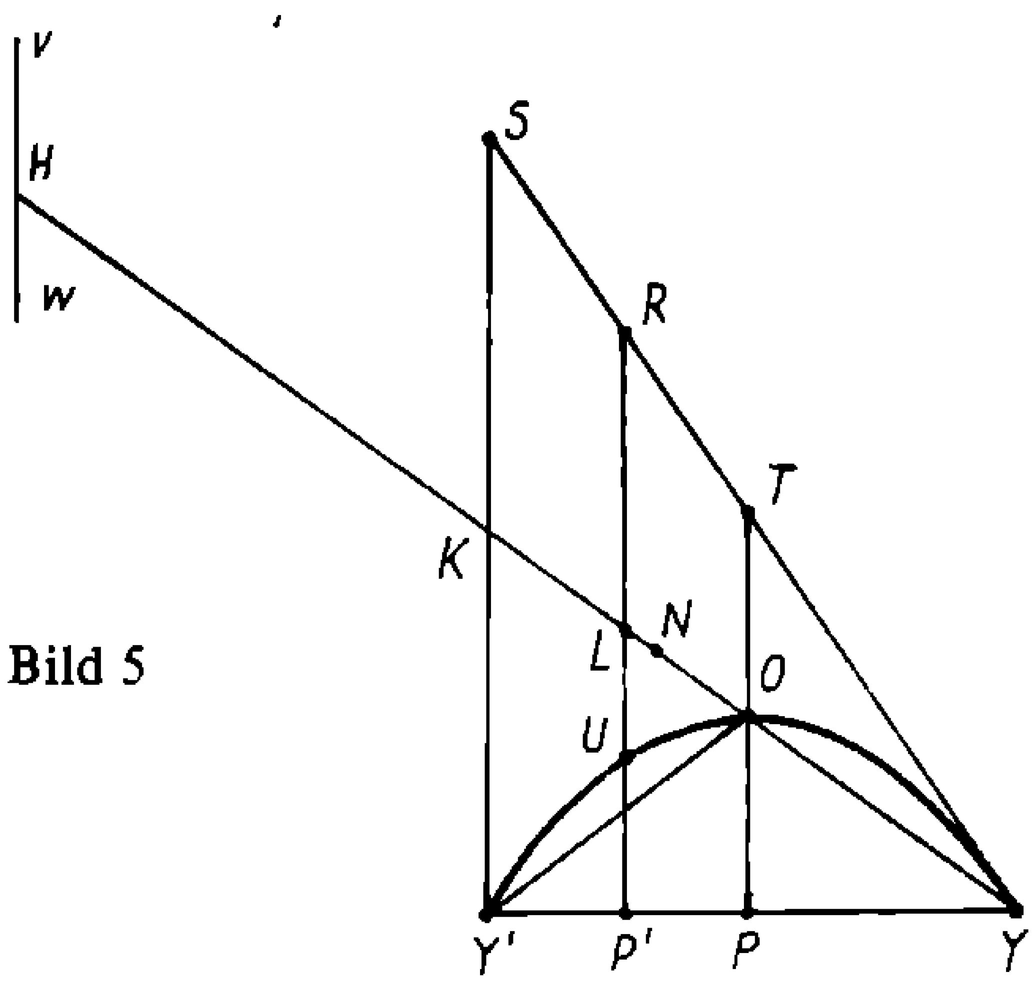


Bild 5

Es sei nun $P'U$ eine beliebige Parallele zur Achse PO der Parabel. (P' zwischen Y und Y' einschließlich gelegen.) Sie schneide die Gerade YH in L und die Tangente in R. Dann gilt wegen $TO = OP$ (Parabeleigenschaft $E3$) auch

(2) $RL = LP'$

und auch

(3) $SK = KY'$.

Da $YY' : Y'P' = RP' : P'U$ (Parabeleigenschaft $E5$) und offenbar auch

$YY' : Y'P' = YK : KL = HK : KL$

(letzteres wegen (1)), so folgt

(4) $HK : KL = RP' : P'U$.

Nun „hänge" man am Ende H des Hebels die Strecke VW von gleicher Länge wie $P'U$ und parallel zu $P'U$ in ihrem Schwerpunkt auf (so daß $VH = HW$). Die Gerade $P'R$ „hängt" ebenfalls in ihrem Schwerpunkt L (wegen (2)) am Hebel. Wegen $VW = P'U$ und (4) gilt

(5) $HK : KL = RP' : VW$.

Diese Proportion besagt, daß die „Gewichte" der beiden Strecken VW und RP' umgekehrt proportional sind zu ihren Abständen HK und KL vom Unterstützungspunkt K. Die Gerade VW mit H als Schwerpunkt ist somit (nach dem Hebelgesetz) im Gleichgewicht mit der Geraden RP', wenn man diese an der Stelle läßt, wo sie ist. (K ist der Schwerpunkt des aus beiden zusammengesetzten Gewichts und gleichzeitig Unterstützungspunkt.)

Archimedes: „Ebenso werden alle Geraden, die im Dreieck $SY'Y$ parallel zu TP gezogen werden, an der Stelle, wo sie sind, im Gleichgewicht sein mit ihren durch die Parabel abgeschnittenen Teilen, wenn diese nach H versetzt werden, so daß K der Schwerpunkt des aus beiden zusammengesetzten Gewichts ist."

Nun denkt sich Archimedes das Dreieck $Y'SY$ aus lauter (unendlich vielen) Strecken, die parallel zu TP gezogen werden, zusammengesetzt, und ebenso das Parabelsegment aus den entsprechenden durch die Parabel abgeschnittenen Teilstrecken.

Diese „Indivisibelnvorstellung", d. h. die Vorstellung, daß ebene Figuren aus Geraden zusammengesetzt sind, stammt wohl aus der altgriechischen Atomistik.

Archimedes: „Und weil aus den Geraden im Dreieck $Y'SY$ das Dreieck $Y'SY$ besteht und aus den im Parabelsegment der Geraden $P'U$ entsprechend genommenen das Parabelsegment $Y'OY$, so wird das Dreieck $SY'Y$ an der Stelle, wo es ist, im Punkte K im Gleichgewicht sein mit dem Parabelsegment, wenn dies nach H als Schwerpunkt versetzt wird, so daß K der Schwerpunkt ist des aus beiden zusammengesetzten Gewichts."

Ist N der Schwerpunkt des Dreiecks, so gilt somit nach dem Hebelgesetz:

(6) Das „Gewicht" des Dreiecks $Y'SY$ (an der Stelle, wo es ist; mit N als Schwerpunkt) verhält sich zum „Gewicht" des Parabelsegments $Y'OY$, das in H als Schwerpunkt „aufgehängt" ist, wie $HK : KN$.

Da N als Schwerpunkt des Dreiecks die Seitenhalbierende KY von $Y'S$ im Verhältnis $2:1$ teilt, ist $KY = 3 \cdot KN$.

Da $HK = KY$ ist, gilt somit auch

$HK = 3 \cdot KN$, d. h. $HK : KN = 3$.

Nach (6) muß daher das „Gewicht" (der Flächeninhalt) des Dreiecks $Y'SY$ dreimal so groß sein wie das „Gewicht" (der Flächeninhalt) des Parabelsegments $Y'OY$.

Weil nach (3) $SK = KY'$ ist, ist der Flächeninhalt vom Dreieck SKY (kurz: ΔSKY) gleich dem von $KY'Y$ (Grundlinie $SK = KY'$, Höhe YY'), also $\Delta Y'SY = 2 \cdot \Delta KY'Y$. Der Flächeninhalt vom Dreieck $KY'Y$ ist wiederum doppelt so groß wie der Flächeninhalt von $Y'OY$ (weil $YP = PY$ ist).

Somit $\Delta Y'SY = 4 \cdot \Delta Y'OY$.

Da andererseits

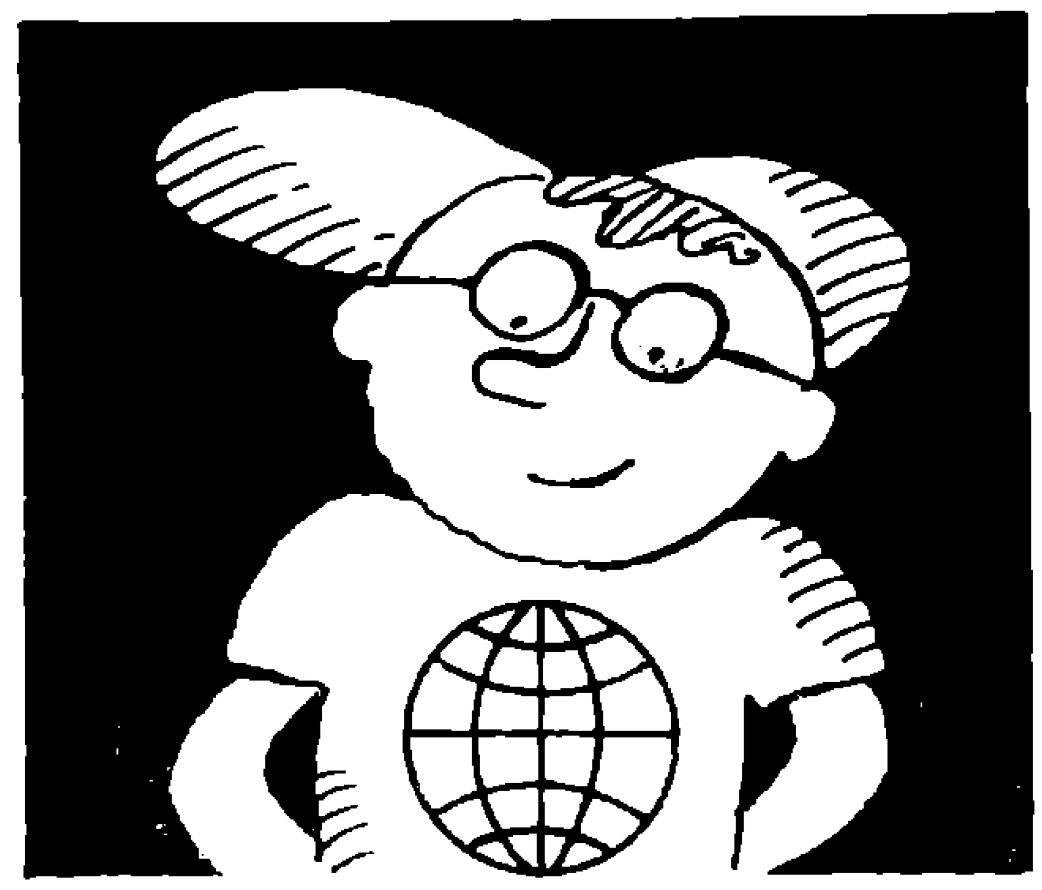
$\Delta Y'SY = 3 \cdot \text{Segm. } Y'OY$ ist, so folgt

(7) $\text{Segm. } Y'OY = \frac{4}{3} \Delta Y'OY$.

Archimedes: „Dies ist zwar nicht bewiesen durch das hier Gesagte, es deutet aber darauf hin, daß das Ergebnis richtig ist. Da wir nun sahen, daß es nicht bewiesen ist, aber vermuteten, daß das Ergebnis richtig ist, so haben wir selbst einen geometrischen Beweis ersonnen, den wir schon früher veröffentlicht haben", nämlich vor der Publikation der „Methodenlehre" in der Schrift „Die Quadratur der Parabel".

Wer diesen Beweis kennenlernen will, lese Archimedes' Schrift „Die Quadratur der Parabel". Sie ist in der Reihe „Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften" erschienen (Reprint: Leipzig 1987).

H. Pieper

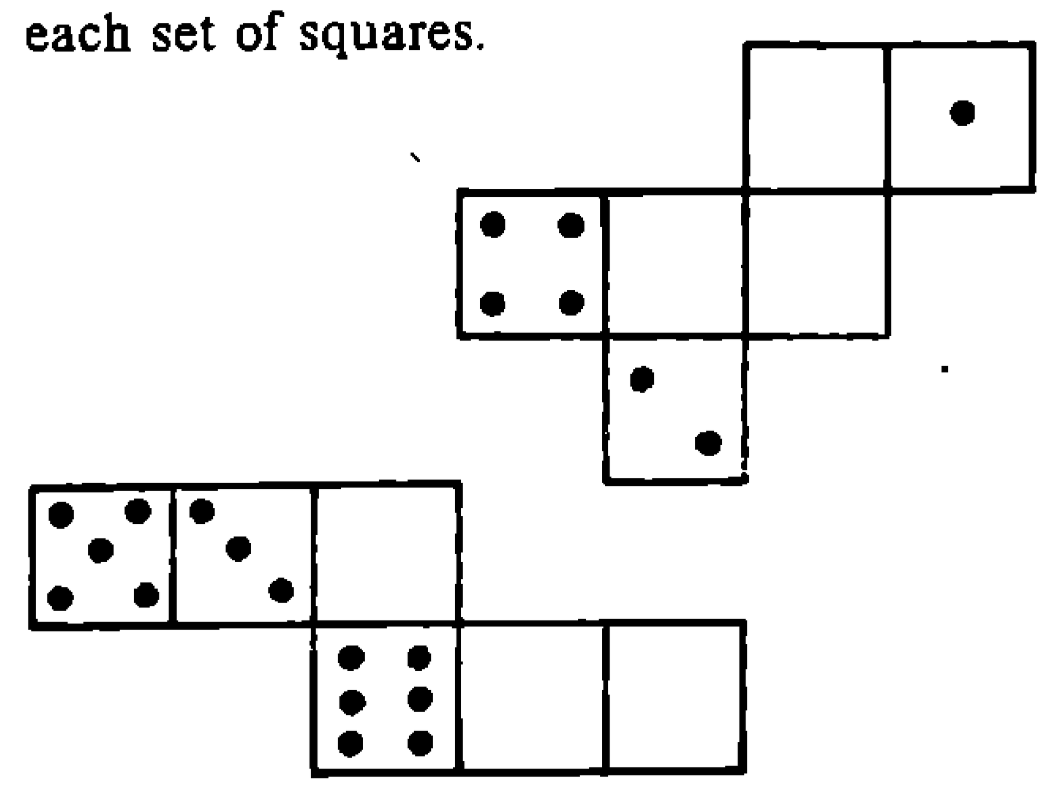


▲1▲ Cubic squares

The drawings show two sets of squares, each of which can be folded to produce a cube.

The faces of a cube are usually numbered in such a way that the numbers one opposite faces add up to 7.

Mark the missing numbers on the faces of each set of squares.



aus: Fun with mathematics, Toronto

▲2▲ **A vol d'oiseau**

En partant d'un point A, vous faites:

1. 1 kilomètre vers le nord
2. 2 kilomètres vers l'ouest
3. 3 kilomètres vers le sud
4. 6 kilomètres vers l'est

Après ces 4 déplacements, quelle est la distance qui vous sépare, à vol d'oiseau, de A, votre point de départ?

a) 3,4 kilomètres
b) 4,5 kilomètres
c) 6,6 kilomètres

aus: Logigram, Paris

▲3▲ В газете „Советский спорт" (3. 5. 1987) была опубликована промежуточная таблица одного футбольного турнира:

	Игры	Побед	Ничьих	Пораж.	Разн. мяч.	Очки
Венгрия	2	2	0	0	4–1	4
Швеция	2	1	1	0	1–1	3
Испания	2	0	2	0	3–3	2
Ирландия	3	0	1	2	3–5	1
Франция	1	0	0	1	0–2	0

Докажите, что в таблице имеется ошибка, и, зная, что ошибка одна, исправьте ее и укажите результаты сыгранных матчей.

aus: Quant, Moskau

Der Schulrechner SR 1 – das Allheilmittel?

Mit dem Schulrechner SR 1 können wir schneller und genauer rechnen, als das früher mit dem Rechenstab möglich war. Dennoch, so finde ich, ergeben sich auch einige Nachteile und Gefahren im Schulalltag. Und genau darum soll es gehen. Ich konnte beobachten, daß sich viele Schüler oft bedingungslos dem Rechner anvertrauen. Sie vergessen häufig sich förmlich aufdrängende Vereinfachungen (oft ist Kürzen zeitsparend und vermeidet Fehler beim Eintippen), sie kontrollieren die Rechenresultate nicht durch eine Überschlagsrechnung und glauben manchmal die unsinnigsten Ergebnisse.
Der Schulrechner ist uns ein willkommenes und nützliches Hilfsmittel, um die Rechenarbeit zu vereinfachen. Er kann uns aber das Denken nicht abnehmen, denn er führt nur die Rechenschritte aus, die wir ihm vorschreiben. Da heißt es dann also trotzdem kontrollieren, da der Rechner keine Tippfehler erkennt. Auch sonst hat er seine Grenzen und rechnet nicht immer ganz genau.

Dazu einige Beispiele:

1. Was ergibt $\frac{7}{3}+\frac{12}{9}$? Der SR 1 zeigt 3,6666667 an, aber ihr erkennt auch sofort, daß die Summe $\frac{11}{3}$ bzw. $3\frac{2}{3}$ beträgt!

2. Wir geben die Tastenfolge $\boxed{3}$ $\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{x^2}$ in den SR 1 ein und erhalten 8,9999998 angezeigt, was aber genaugenommen falsch ist, denn es ist $\left((\sqrt{3})^2\right)^2=9$.

3. Für welche reelle Zahl x gilt $\frac{1+\cos x}{2}=0{,}5$? Durch Umformen erhält man $\cos x=0$ bzw. $x=\arccos 0$. Mit der Tastenfolge $\boxed{0}$ $\boxed{F}$ $\boxed{\cos}$ liefert der SR 1 den Wert 1,5707963. Wer kann erkennen, daß dies ein Näherungswert für $x=\frac{\pi}{2}$ ist? Der Verlauf der cos-Funktion hätte uns sofort sämtliche Lösungen, nämlich $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in N$, geliefert.

4. $(-1)^9$ könnte formal über $\boxed{1}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{9}$ $\boxed{=}$ mit dem SR 1 berechnet werden? Nein, er liefert die Fehlermeldung E (ERROR). Im SR 1 wird vermutlich $e^{9\ln(-1)}$ gebildet, und das führt zur Fehlermeldung, weil die Logarithmusfunktion $y=\ln x$ nur für $x\geqq 0$ definiert ist.

5. Mit dem Schulrechner erhalten wir für $\sqrt[72]{2^{144}}$ den Wert 4.
Hätten wir diese Aufgabe nicht auch schneller im Kopf lösen können?

Ich glaube, diese wenigen Beispiele zeigen bereits, daß man seinen Kopf öfter bemühen sollte, manche scheinbar schwere Aufgabe wird dann auf einfache Weise lösbar. Hinzu kommt, daß jeder Taschenrechner nur endlich viele Dezimalzahlen (inter: Dualzahlen) verarbeiten kann. So entstehen Rundungsfehler. Es kann z. B. vorkommen, daß $x+y=x$ gilt, obwohl $y\neq 0$ war. Das könnt ihr etwa mit $\boxed{1}$ $\boxed{0}$ $\boxed{+}$ $\boxed{EEX}$ $\boxed{7}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{=}$ bestätigen! Manche Schüler erwarten vom SR 1 mehr, als er zu leisten vermag.
Eine weitere Fehlerquelle bildet die Verwendung der Funktionstasten ($\boxed{\sin}$, $\boxed{\cos}$, $\boxed{\tan}$, $\boxed{y^x}$ usw.). Die Funktionswerte werden hierbei über Näherungsformeln bzw. Näherungsverfahren berechnet, sie sind meist für Anwendungszwecke genau genug, aber eben nicht immer ganz exakt. Aufpassen muß man insbesondere beim Aufruf von $\boxed{y^x}$. Wenn wir beispielsweise $\sqrt{251}$ mit Hilfe der $\boxed{y^x}$-Taste berechnen, also $\boxed{2}$ $\boxed{5}$ $\boxed{1}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{2}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{=}$ eingeben, so liefert der SR 1 15,843. Mit der $\boxed{\sqrt{}}$-Taste erhält man 15,842 98 oder eigentlich 15,842 979 5 (dies „entlokken" wir dem SR 1, indem wir von 15,842 98 die Zahl 15 subtrahieren).

Während unserer Lehrausbildung waren oft Logarithmen zu berechnen.
Zur Erinnerung: *Wir nennen z den Logarithmus einer Zahl a zur Basis b, falls $b^z=a$ ist, und wir schreiben $z=\log_b a$.*
Eine besondere Rolle spielen die *dekadischen Logarithmen* (Basis $b=10$), die *natürlichen Logarithmen* (Basis $b=\mathrm{e}$, e ist die *Eulersche Zahl* $\mathrm{e}\approx 2{,}718\ldots$) und die *binären Logarithmen* (Basis $b=2$). Noch vor wenigen Jahren mußten die Schüler Logarithmen aus Zahlentafeln entnehmen. Heute besitzen wir unseren Schulrechner, der uns die Arbeit erleichtert. Der SR 1 kann natürliche Logarithmen ($y=\ln x$) und dekadische Logarithmen ($y=\lg x$) sowie die Werte der Umkehrfunktionen ($y=\mathrm{e}^x$ bzw. $y=10^x$) näherungsweise berechnen. Binäre Logarithmen lassen sich direkt nicht bestimmen. Für Logarithmen sind folgende Gesetze bekannt:

i) $b^{\log_b a}=a$
ii) $\log_b a^r=r\log_b a$
iii) $\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$
iv) $\log_b a=\frac{\log_c a}{\log_c b}$

wobei a, b, c, r positive reelle Zahlen sind.
Einen Näherungswert für die irrationale Zahl e könnt ihr mit $\boxed{1}$ $\boxed{F}$ $\boxed{\ln}$ als e^1 berechnen: $\mathrm{e}\approx 2{,}718\,281\,8$. Weil die Exponentialfunktionen nur positive Funktionswerte besitzen, sind deren Umkehrfunktionen, also die Logarithmenfunktionen, nur für positive Argumente definiert!
Wir wollen nun Logarithmen zu Basen berechnen, die von e und 10 verschieden sind. Dazu nutzen wir das Gesetz iv) aus.
Für welche Zahlen x und z gilt $2^x=8$ und $2^z=9$? Offenbar ist
$x=\mathrm{lb}\,8=\log_2 8=\frac{\lg 8}{\lg 2}$ und $z=\frac{\lg 9}{\lg 2}$.
Das berechnen wir mit dem SR 1:
$\boxed{8}$ $\boxed{\lg}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\lg}$ $\boxed{=}$ und
$\boxed{9}$ $\boxed{\lg}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\lg}$ $\boxed{=}$
Es ergibt sich $x=3$ und $z=3{,}169\,924\,9$. Eine Probe bestätigt unsere Ergebnisse: $2^x=8$ und $2^z=9$. Gesetz iv) gibt an, daß auch die Taste $\boxed{\ln}$ verwendet werden darf:
$\boxed{8}$ $\boxed{\ln}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\ln}$ $\boxed{=}$ und
$\boxed{9}$ $\boxed{\ln}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\ln}$ $\boxed{=}$.
Nun liefert der SR 1 die Werte $x=2{,}999\,999\,94$ (mit Subtraktionstrick für die Anzeige der letzten Stelle) bzw. $z=3{,}169\,925\,04$. Meine Erfahrungen besagen, daß die $\boxed{\ln}$-Funktionstaste meistens etwas ungenauere Werte liefert.
Wie groß ist $y=\ln 2+\ln 0{,}5$?
Exakt ist es
$y=\ln 2+\ln\frac{1}{2}=\ln 2+\ln 1-\ln 2$
$=\ln 1=0$. Der Schulrechner bestimmt gemäß $\boxed{2}$ $\boxed{\ln}$ $\boxed{+}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{\ln}$ $\boxed{=}$ den Wert $-1\cdot 10^{-8}$, der zwar näherungsweise mit 0 übereinstimmt, aber eben nicht genau ist. Überprüft auch, ob $\ln \mathrm{e}=\lg 10=1$ ist! (Der SR 1 zeigt $\ln\mathrm{e}=9{,}9999\cdot 10^{-1}$ an!) Verlaßt euch also nicht blindlings auf den „Gehilfen" SR 1!

Jetzt sollen n-te Wurzeln mit $n\geqq 2$ berechnet werden. $y=\sqrt[7]{698}$ läßt sich wegen $y=698^{\frac{1}{7}}$ mit dem Schulrechner so bestimmen:
$\boxed{6}$ $\boxed{9}$ $\boxed{8}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{7}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{=}$.
Der SR 1 zeigt $y=2{,}548\,39$ an.
Eine andere Möglichkeit bietet die Darstellung $y=\mathrm{e}^{1/7\ln 698}$ mit dem SR 1-Ablaufplan $\boxed{6}$ $\boxed{9}$ $\boxed{8}$ $\boxed{\ln}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{7}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{=}$ $\boxed{F}$ $\boxed{\ln}$
und der Anzeige 2,548 385 1. Es werden mehr Stellen angezeigt, dieser zweite Weg muß aber nicht genauer sein, wie die Berechnung von $\sqrt[5]{243}$ (mit dem exakten Resultat 3) zeigt. Allgemein kann $\sqrt[n]{a^m}$ als $a^{\frac{m}{n}}$ bzw. $\mathrm{e}^{m/n\ln a}$ geschrieben und dann direkt mit dem SR 1 oder einem Computer ausge-

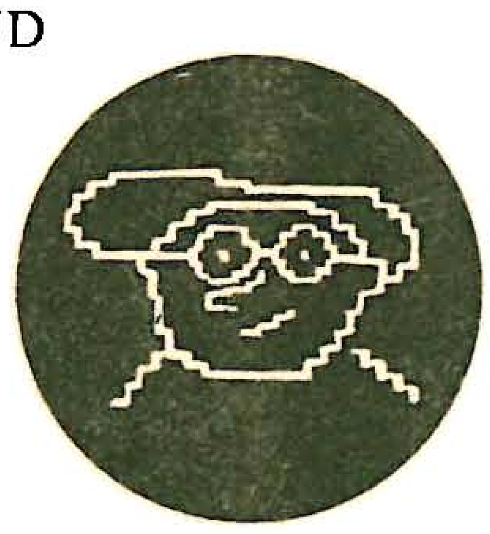
wertet werden. Für BASIC-Experten habe ich diese beiden Möglichkeiten programmiert:

```
10 REM WURZELN UEBER EXPONENTEN
20 CLS: INPUT"RADIKAND"; RA
30 INPUT"EXPONENT";E
40 ?SPC(80):REM 2LEERZEILEN
50 IF E=2 THEN R=SQR(RA):ELSE
   R=RA^(1/E)
60 ?R:?
70 END
```

```
10 REM WURZELN MIT LOGARITHMEN
20 CLS:INPUT"RADIKAND";RA
30 INPUT"EXPONENT";E
40 ?SPC(80)
50 IF E=2 THEN R=SQR(RA):ELSE
   R=EXP(1/E*LN(RA))
60 ?R:?
70 END
```

Sollen mit einem Computer Wurzeln und Logarithmen berechnet werden, so muß man sich zuerst informieren, welche Funktionen als Standardfunktionen fest programmiert vorhanden sind. Das sind meistens die Funktionen Quadratwurzel SQR(X), die Exponentialfunktion EXP(X) und der natürliche Logarithmus LN(X). Andere Funktionen und speziell Logarithmen zu anderen Basen lassen sich in der oben beschriebenen Art mit diesen Standardfunktionen ausdrücken. Hier ist ein Programm zur Berechnung von Logarithmen mit der Basis B:

```
10 REM LOG MIT BELIEBIGER BASIS
   >0 UND <>1
20 CLS:INPUT"ARGUMENT";A
30 INPUT"BASIS";B
40 R=LN(A)/LN(B)
50 ?SPC(80):?R?
60 END
```



Nun möchte ich euch noch vier Probleme stellen:

6. Zu berechnen sind die Nullstellen von $f(x) = 1 + \sin x - \cos 2x$ im Bereich $0° \leqq x < 360°$. Wegen $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ ist $f(x) = \sin x \cdot (1 + 2\sin x)$. Folglich gilt $f(x) = 0$ genau dann, wenn $\sin x = 0$ oder $\sin x = -\frac{1}{2}$ ist. Auch ohne Schulrechner erhält man die vier Nullstellen 0°, 180°, 210° und 330°. Natürlich könnt ihr $\sin x = 0$ bzw. $\sin x = -\frac{1}{2}$ auch mit dem SR 1 als $x = \arcsin 0$ bzw. $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ bei Schalterstellung DEG lösen, es werden dann aber nur die Nullstellen 0° und −30° angezeigt!

7. Beweist, daß $4\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3} = 3$ ist!

Ihr könnt drauflostippen und die linke Seite der Gleichung mit dem SR 1 auswerten und auf das Resultat 3 kommen. Ein exakter Beweis ist das aber nicht! Wenn ihr euch aber daran erinnert, daß

$\cos\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ist, so wird die Identität ganz selbstverständlich!

8. Man berechne $\sin\frac{2}{3}x$ für $x = 270°$.

Das geht auch ohne SR 1, denn es ist

$\sin\frac{2}{3}270° = \sin 180° = 0$, das weiß doch hoffentlich jeder!

Sicher habt ihr den Speicher des Schulrechners zu schätzen gelernt. Oft geht es aber auch ohne ihn. Das ist auch wichtig, falls zwei Zahlen gespeichert werden müßten, aber eben nur ein Speicher vorhanden ist. Wir versuchen als Beispiel

$$\frac{e^3}{(\ln \lg 5)\frac{\pi}{e}}$$

ohne Benutzung des Speichers zu berechnen. Das geht folgendermaßen:

$\boxed{\pi}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{1}$ $\boxed{F}$ $\boxed{\ln}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\lg}$ $\boxed{\ln}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{3}$ $\boxed{F}$ $\boxed{\ln}$ $\boxed{=}$ $\boxed{1/x}$,

wobei wir als Ergebnis −48,525 erhalten.

Ihr werdet mir jetzt sicher zustimmen: *„Der Mensch ist nicht der Sklave der Technik. Auch wenn sie versagt, bleibt ihm immer noch das Wertvollste, sein Einfallsreichtum, seine Schöpferkraft..."*

(technikus, Berlin) *Th. Bahls*

Gerhard Herma

Runden von Exponenten

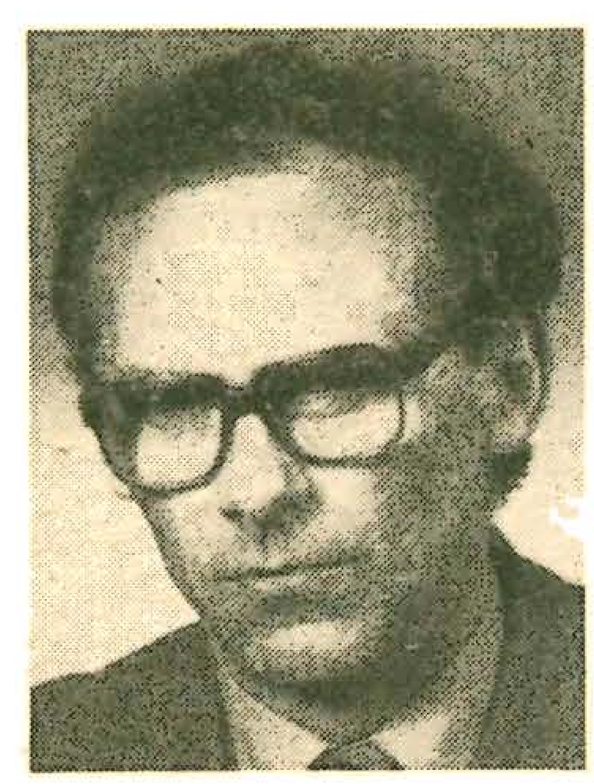
Schüler (und Erwachsene ...) mögen gelegentlich meinen, die Zahlen 10^{28} und $10^{28,3}$ seien zwar furchtbar groß, aber der kleine Unterschied in den Exponenten spiele keine nennenswerte Rolle, es mache das Abrunden auf 28 nicht allzuviel aus. Irrtum! Jeder materielle Körper ist aus Nukleonen (nämlich Protonen und Neutronen, ihre Massen stimmen fast überein, sie betragen $1{,}6 \cdot 10^{-27}$ kg) aufgebaut. Ein Koffer von 16 kg Masse enthält somit rund 10^{28} Kernbausteine. Enthielte er $10^{27,3}$ Nukleonen, d. s. $2 \cdot 10^{28}$ dieser Partikel, wäre er doppelt so schwer. Ob man 16 kg oder 32 kg in den 5. Stock über Stiegen zu tragen hat, ist kein „kleiner" Unterschied! Daher: Vorsicht beim Runden von Exponenten!

Eine Aufgabe von Prof. Dr. H. Heckendorf

Direktor der Sektion Mathematik der TU Karl-Marx-Stadt

Kurzbiographie

Jahrgang 1937 – Abitur 1955 – Von 1955 bis 1959 Mathematikstudium an der Martin-Luther-Universität Halle – Einjährige Tätigkeit als Oberstufenlehrer für Mathematik an der Oberschule Thale/Harz und am Pädagogischen Institut Karl-Marx-Stadt – Von 1961 bis 1964 Aspirantur an der Schewtschenko-Universität Kiew – Promotion zum Dr. rer. nat. mit einer Arbeit zur Anwendung von Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Statistischen Physik – Seit 1965 an der Sektion Mathematik der TU Karl-Marx-Stadt – 1981 Promotion B – Seit 1. 9. 1984 ordentlicher Professor für das Fachgebiet Stochastik, ab 1. 5. 1989 Direktor der Sektion Mathematik der TU Karl-Marx-Stadt.



Eine Aufgabe aus der Versuchsplanung

In nahezu allen angewandten Wissenschaften ist es eine wichtige Aufgabe, mit Hilfe von Experimenten Zusammenhänge zwischen Größen aufzuklären. Angenommen, in einem Experiment soll der Einfluß von m Größen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ (auch Faktoren genannt) auf eine Größe Y (Zielgröße) untersucht werden. So können die m Faktoren gewisse Druck-, Temperatur- und andere Einstellgrößen an einer Maschine (z. B. einer Spritzgießmaschine für Plasteteile) und entsprechende Materialkennziffern sein, während die Zielgröße ein Qualitätsparameter des erzeugten Produktes ist, z. B. die Bruchfestigkeit des hergestellten Plasteteils.

Das Experiment besteht darin, daß zur i-ten Einstellung der Faktoren $x_1, x_2, \ldots, x_m$ auf feste Werte $x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{mi}$ der zugehörige Wert Y_i gemessen wird, $i = 1, 2, \ldots, n$. Im Falle $m = 1$ haben wir es nur mit einem Faktor x_1 zu tun, das Experiment liefert dann n Wertepaare (x_{1i}, Y_i), also n Punkte in der Ebene. Die Auswertung des Experiments besteht in der Ermittlung der Gleichung $Y=f(x_1)$ der Kurve, die durch die gemessenen Punkte geht, bei m Faktoren in der Form $Y=f(x_1,\dots,x_m)$. Als Wertebereich jedes Faktors soll das Intervall $[-1,+1]$ angenommen werden (andernfalls läßt sich dies durch eine Transformation erreichen). Die Punkte, in denen gemessen wird, werden als Versuchsplan bezeichnet.

Ist bereits vorher bekannt, daß der Zusammenhang zwischen $x_1, x_2, \dots, x_m$ und Y linear in der Form

$$Y=a_0+a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_mx_m$$

ist, so genügt es, im Falle $m=1$ nur in zwei Punkten zu messen, denn durch zwei Punkte ist eine Gerade bereits bestimmt. Als Versuchsplan werden dann die Punkte $x_{11}=-1$ und $x_{12}=+1$ gewählt. Im Falle $m=2$ sind mindestens $n=3$ Messungen erforderlich, um die Koeffizienten der Gleichung $Y=a_0+a_1x_1+a_2x_2$ zu bestimmen. Werden für die Faktoren x_1 und x_2 jeweils nur Werte -1 und $+1$ genommen, so ergäben alle Kombinationen dieser Werte den sogenannten vollständigen zweistufigen Faktorplan in der folgenden Form:

Nummer des Versuchs	Faktor x_1	Faktor x_2
1	-1	-1
2	-1	$+1$
3	$+1$	-1
4	$+1$	$+1$

Der vollständige Faktorplan enthält also $n=4$ Versuchspunkte, wobei zu bemerken ist, daß die Summe der Faktorwerte jeweils Null ergibt (längs der Spalten summiert), obendrein ist das Skalarprodukt der Spalten gleich Null

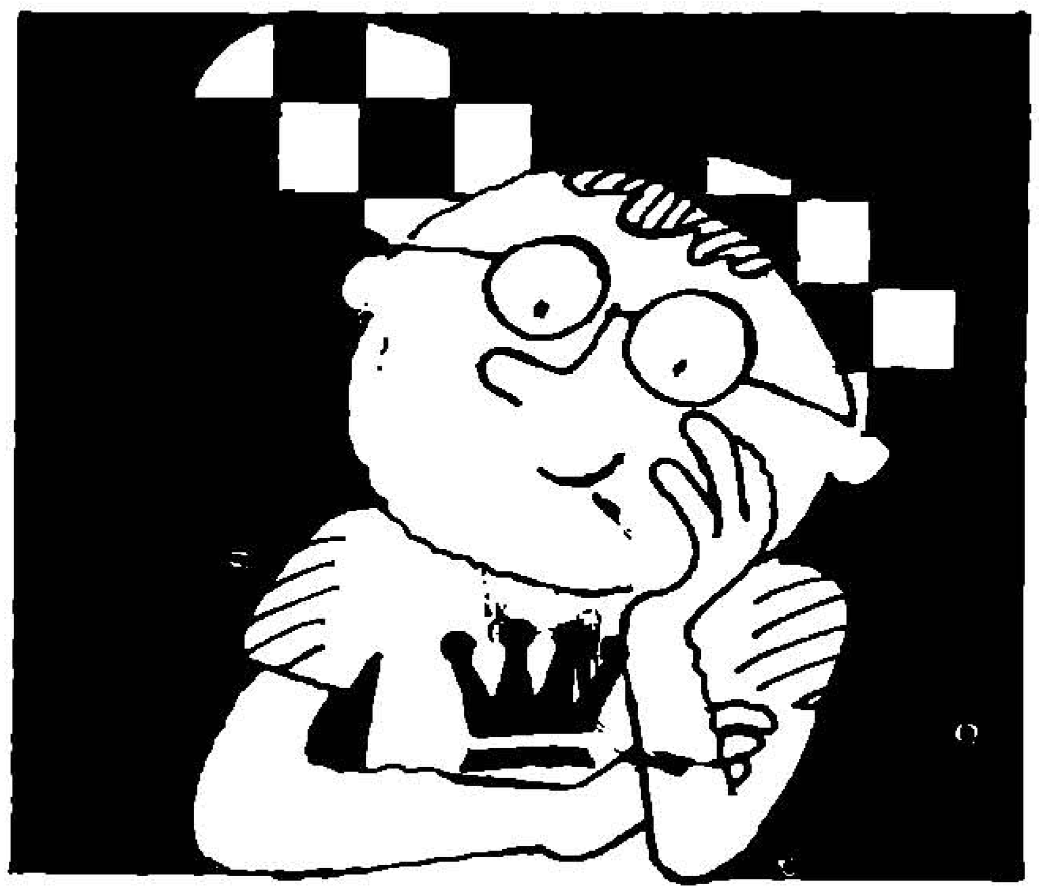
$((-1)(-1)+(-1)(+1)+(+1)(-1)$
$+(+1)(+1)=0)$.

(Diese Eigenschaften sind für die Versuchsauswertung von Vorteil.)

Allgemein würden bei m Faktoren $n=m+1$ Messungen als minimal erforderliche Anzahl ausreichen, um eine lineare Gleichung zwischen $x_1, x_2, \dots, x_m$ und Y aufzustellen.

Frage 1: Aus wie vielen Punkten besteht ein vollständiger zweistufiger Faktorplan für m Faktoren? Stellen Sie diesen Plan für $m=3$ auf.

Frage 2: Da der vollständige Faktorplan (lt. Antwort auf Frage 1) schon bei $m=3$, aber besonders bei größeren Werten von m, wesentlich mehr Punkte enthält als z. B. zur Bestimmung einer linearen Gleichung erforderlich sind, ist man bestrebt, Versuchspläne aufzustellen, die nur einen Teil des vollständigen Plans verwenden, mindestens $m+1$ Punkte enthalten, aber die Nebenbedingungen Spaltensumme gleich Null und alle Skalarprodukte von je zwei Spalten gleich Null weiterhin erfüllen. Ist dies für beliebiges n möglich? Stellen Sie für $m=3$ wenigstens zwei solche unvollständigen Faktorpläne auf.



Schach als Stimulator geistiger Entwicklung

Im Ergebnis moderner psychologischer Untersuchungen konnte nachgewiesen werden, daß schachspielende Schüler durch ihre Aufmerksamkeit im Unterricht, durch vorbildliche Disziplin und besonnene Lernhaltung beeindrucken. Sie erkennen Probleme gewöhnlich schneller als ihre Altersgefährten und suchen gezielt nach effektiven Lösungsvarianten. Im Gegensatz zu ihren nichtschachspielenden Mitschülern handeln sie seltener spontan und unbedacht aufs Geratewohl. Mit zunehmender Spielstärke beweisen schachspielende Schüler überwiegend Umsicht, Rücksicht, Verantwortungsfreude und Beharrlichkeit in der konsequenten Erfüllung einmal übernommener Pflichten.

Auch leistungsschwächeren, unruhigen Kindern hilft das methodisch durchgeführte Schachspielen, sich besser auf den Unterricht zu konzentrieren. In nachweisbaren Einzelfall-Langzeitstudien konnten schachspielende Schüler ihren Zensurendurchschnitt im Laufe von ein bis zwei Jahren bis zu 1,5 Noten verbessern. Für versetzungsgefährdete Schüler ist dieser Leistungszuwachs entscheidend, damit sie das Klassenziel doch noch erreichen.

Spielerisch gestellte Aufgaben (z. B. Schachaufgaben) fördern das sachliche freiwillige emotionale Engagement und die individuellen Denkpotenzen bei Schülern rationeller als manche zur Pflicht auferlegte Problemstellung (z. B. Textaufgaben). In Form spielerischer Problemstellungen kann das Schach in elementaren didaktischen Stufungen bereits in der Vorschulerziehung eingesetzt werden. Berichte aus jenen Kindergärten, in denen Schach bisher ins Erziehungsprogramm aufgenommen wurde, lassen hoffen, daß Vorschulkinder auf diese Weise von Anfang an auf effektiverem Niveau zu lernen beginnen und als Schulanfänger weniger Schwierigkeiten als ihre Altersgefährten – z. B. beim relativ abstrakten Operieren mit Mengenbegriffen – haben werden.

Dr. sc. Marion Kauke konnte durch die Anwendung psychologischer Testverfahren bei Jungen im Alter von 13 bis 14 Jahren, die seit mehr als fünf Jahren eine Schach-Arbeitsgemeinschaft besucht hatten, bedeutsame Leistungsvorteile im „sprach- und zahlengebundenen Denken“, in der räumlichen Vorstellungsfähigkeit und im Konzentrationvermögen gegenüber nichtschachspielende Altersgefährten nachweisen. Beispielsweise in der psychologisch gut untersuchten Problemlösungsanforderung „Turm von Hanoi“ setzten die schachspielenden Kinder effektivere Strategien ein.

Freilich hinterlassen solche Untersuchungen über den positiven Einfluß des Schachs auf die geistige Leistungsfähigkeit zwangsläufig offene Fragen. Unklar bleibt vorerst noch die Stabilität der gemessenen Leistungssteigerungen und deren Abhängigkeit von der Art, Intensität und Dauer schachlicher Ausbildung.

Auch die Frage, inwiefern das Schach zur Stabilisierung und Beibehaltung der intellektuellen Leistungsfähigkeit auf lange Dauer bis ins hohe Lebensalter und zur Verzögerung von Abbauprozessen beitragen kann, ist natürlich von großem Interesse.

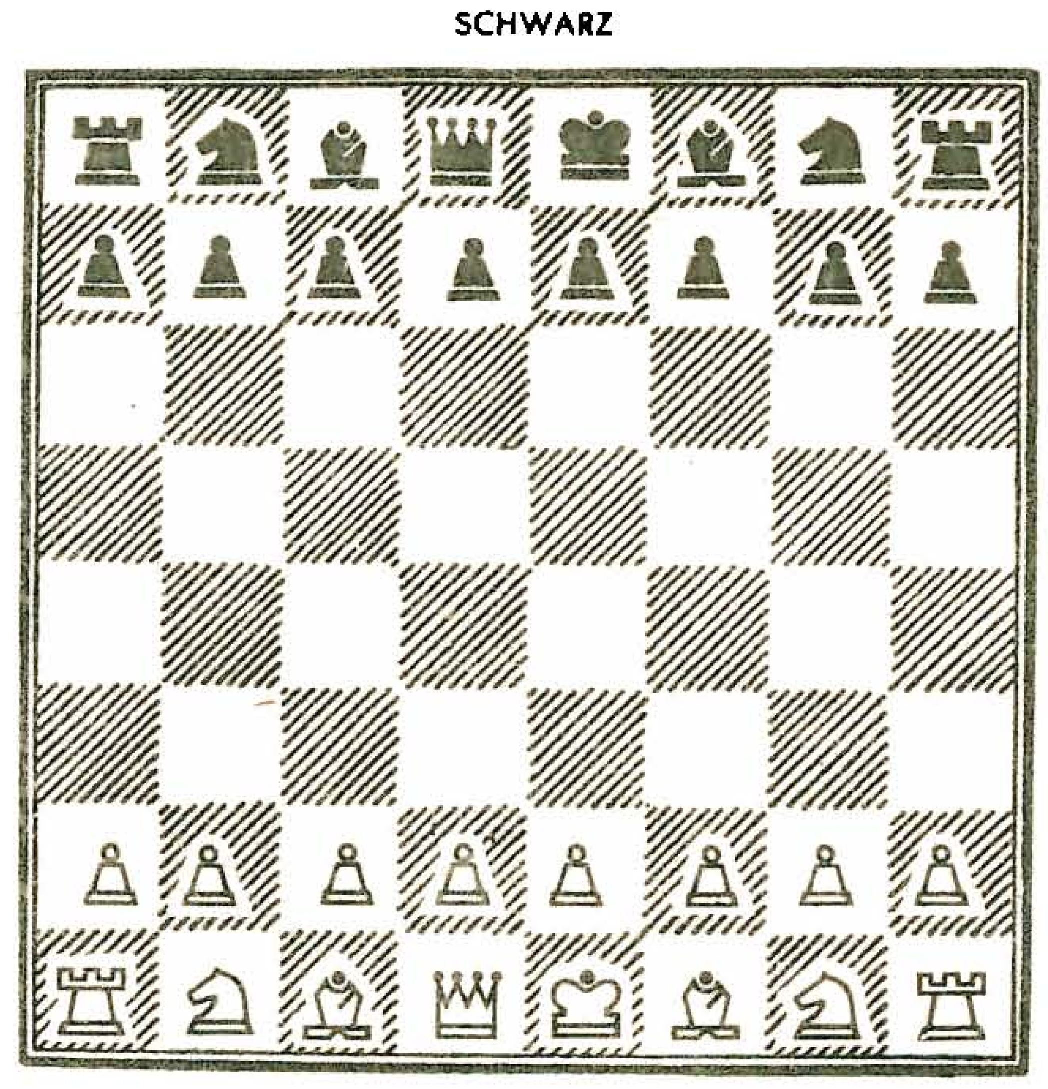
In unserer Zeit, in der die Dynamik moderner Produktivkraftentwicklung die Verfügbarkeit qualifizierten Arbeitsvermögens herausfordert, sind Umstellungsfähigkeit, lebenslanges Lernen und hohe eigene Ansprüche an geistige Arbeit schließlich zu gesellschaftlichen Bedürfnissen geworden. In dieser Hinsicht reift auch im Rahmen höherer Anstrengungen zur Erschließung und Nutzung geistiger Ressourcen eine neue gesellschaftliche Bedeutung des Schachs heran.

(Diesem Artikel lagen Beiträge von Dr. sc. Marion Kauke und Dr. Roderich Strobel in der Zeitschrift „Schach“ zugrunde.)

H. Rüdiger

Nun noch eine kleine Aufgabe aus dem reichhaltigen Knobelnachlaß von Sam Loyd. Wie kann Weiß aus der Partieanfangsstellung Schwarz im 4. Zug matt setzen, wenn Schwarz gezwungen ist, analoge Gegenzüge zu den weißen Zügen auszuführen?

SCHWARZ



WEISS

Es gibt zwei Lösungsmöglichkeiten! Beispiele für analoge Zugfolgen:
1. Sf3 Sf6 2. Sg5 Sg4 3. d4 d5 oder
1. e4 e5 2. Dh5 Dh4 3. Lc4 Lc5.

Neue Studienrichtung:

Diplomlehrer für Mathematik/ Informatik

Seit dem 1. 9. 1989 werden an der Technischen Universität Karl-Marx-Stadt und an der Pädagogischen Hochschule Güstrow Diplomlehrer in der Fachkombination Mathematik/Informatik ausgebildet.

Warum eine solche neue Fachkombination in der Lehrerausbildung?

In den letzten Jahren hat die Bedeutung der Informatik ständig zugenommen. Computer und damit die Informatik dringen in alle Bereiche des Lebens ein. In der Wissenschaft, in der Industrie, in der Planung und Leitung sind heute Computer unentbehrliche Hilfsmittel. Jeder sieht das täglich selbst.

Das alles hat natürlich Auswirkungen auf das gesamte Bildungssystem, insbesondere auch auf die Arbeit in den Schulen.

Aspekte der Informatik haben Einzug gehalten in den obligatorischen und wahlobligatorischen Unterricht. Im fakultativen Unterricht und in der außerunterrichtlichen Arbeit spielt die Informatik eine zunehmend größere Rolle. Viele Schüler können mit Computern umgehen; demnächst werden an den Schulen Bildungscomputer vorhanden sein.

Für die Volksbildung werden deshalb Lehrer benötigt, die den wachsenden Anforderungen gerecht werden können, die in der Lage sind, Unterricht im Fach Informatik zu gestalten, außerunterrichtliche Arbeit auf diesem Gebiet durchzuführen und den anderen Lehrern bei der Nutzung von Computern in ihren Fächern zu helfen.

Schon jetzt werden den Mathematik- und Polytechniklehrern Grundkenntnisse in Informatik vermittelt. Aber entsprechend der zukünftigen Bedeutung der Informatik erweist es sich als unbedingt notwendig, auch Lehrer speziell für dieses Fachgebiet auszubilden.

Eine Kombination der Fächer Mathematik und Informatik in der neuen Ausbildungsrichtung der Lehrer ist besonders sinnvoll, weil diese Fächer enge Beziehungen zueinander haben und weil das tiefere Verständnis der Informatik solide mathematische Kenntnisse erfordert.

Wer kann sich in dieser Fachrichtung zum Studium bewerben?

Abiturienten, die sich für Mathematik und Informatik interessieren und die gerne Lehrer werden wollen. Vorteilhaft ist, wenn sich die Bewerber auch außerhalb des Unterrichts mit mathematischen Problemen beschäftigt haben (die Schülerzeitschrift „alpha" lesen, am Aufgabenwettbewerb, an Mathematikolympiaden, an mathematischen Schülerzirkeln teilnehmen), wenn sie sich für Computer interessieren und mit diesen umgehen können (an entsprechenden Arbeitsgemeinschaften und am fakultativen Unterricht teilnehmen) und wenn sie mit Kindern gerne arbeiten wollen.

Womit beschäftigt sich der Lehrerstudent in der Ausbildung?

In den ersten beiden Studienjahren erhält der Student eine solide fachliche Grundausbildung in Mathematik und Informatik. Die Studenten werden mit typischen Denk- und Arbeitsweisen sowie Aufgabenstellungen der Wissenschaften Mathematik und Informatik vertraut gemacht.

Die Fachausbildung wird in den höheren Studienjahren fortgesetzt. In der Mathematik und im Fach Informatik erhalten die Studenten die Voraussetzungen für die Erteilung eines wissenschaftlich fundierten obligatorischen und fakultativen Unterrichts sowie für die Gestaltung fachspezifischer außerunterrichtlicher Tätigkeit. Die Bedeutung der beiden Wissenschaften für die Praxis, insbesondere die Rolle für den wissenschaftlich-technischen Fortschritt, werden in der Ausbildung bewußt gemacht. Die enge Verbindung zwischen Mathematik und Informatik, die Wechselbeziehungen zwischen beiden Wissenschaften und deren Bedeutung für andere Unterrichtsfächer werden besonders beachtet.

Die Mathematikausbildung umfaßt die Gebiete Grundlagen der Mathematik, Diskrete Mathematik, Analysis, Algebra und Geometrie, Numerische Mathematik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik, sowie Geschichte der Mathematik.

Die Informatikausbildung besteht aus einem Grundkurs, der sich mit Programmierungstechnik und Softwaretechnologie, mit Rechner- und Betriebssystemen, mit theoretischen Problemen und Computergeometrie (hier werden u. a. auch die Beziehungen zur Geometrieausbildung und zur Darstellenden Geometrie hergestellt) befaßt, der Angewandten Informatik mit dem Inhalt Informationssysteme, Modellierung und Simulation, Datenbanken, Software-Werkzeuge, Datenschutz und Datensicherheit sowie dem Lehrgebiet Physikalische Grundlagen der Informatik.

Die fachliche Ausbildung wird vervollkommnet durch entsprechende Praktika, so u. a. durch ein Praktikum zur Numerischen Mathematik, durch Arbeit der Studenten mit Computern und durch ein Praktikum zu den Physikalischen Grundlagen der Informatik. Die Studenten erwerben auch Fertigkeiten im Umgang mit Software und werden befähigt zur Wartung und Pflege der Schul- und Unterrichts-Software.

Die pädagogisch-psychologische Ausbildung erstreckt sich wie in anderen Lehrerfachrichtungen über die ersten drei Studienjahre und erfolgt in den Gebieten Erziehungstheorie, Didaktik, Pädagogik und Psychologie. Im dritten und vierten Studienjahr werden in den Disziplinen Methodik des Mathematik- und Informatikunterrichts Aufgaben, Methoden und Organisationsformen des Fachunterrichts behandelt. Weiterhin erwerben die Studenten entsprechend ihren wissenschaftlichen Interessen vertiefte Kenntnisse auf einem speziellen Wissensgebiet der Mathematik, Informatik, Pädagogik, Psychologie oder Methodik, auf dem sie dann ihre Diplomarbeiten schreiben.

Den besonderen Anforderungen des Lehrerberufes dienen mehrere Praktika (Ferienlagerpraktikum, schulpraktische Übungen in Pädagogik, Psychologie und in den Methodiken des Mathematik- und Informatikunterrichts sowie im fünften Studienjahr ein mehrmonatiges Praktikum an einer polytechnischen Oberschule). Außerdem können Studenten als Leiter von Arbeitsgemeinschaften tätig sein.

Die Studenten haben während ihrer Ausbildung viele Möglichkeiten für selbständige wissenschaftliche Arbeit; so können sie im Rahmen von Jugendobjekten an Forschungsaufgaben mitarbeiten bzw. leiten Arbeitsgemeinschaften Mathematik und Informatik für Schüler.

Wo erfolgt der Einsatz der Lehrer?

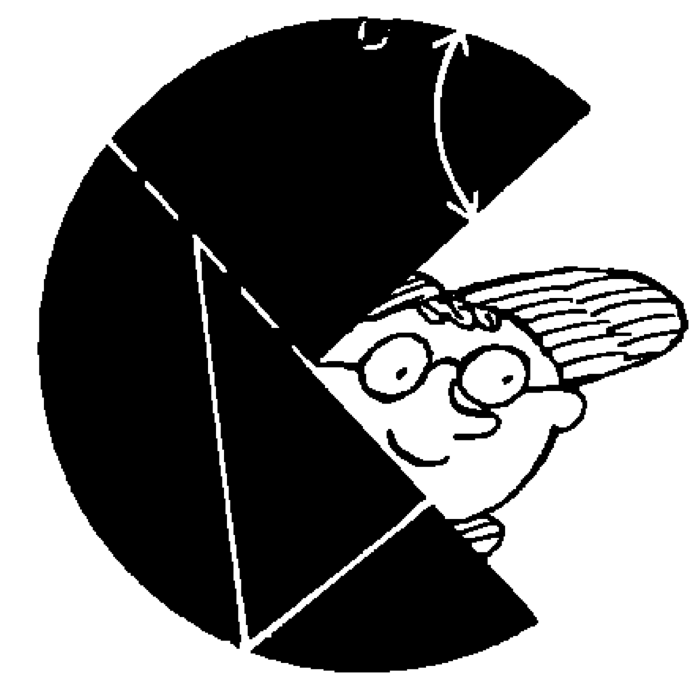
Der Einsatz erfolgt als Fachlehrer Mathematik/Informatik in den Klassen 5 bis 10 im obligatorischen, wahlobligatorischen und fakultativen Unterricht der POS sowie an erweiterten Oberschulen. Es wird davon ausgegangen, daß der Informatiklehrer auch anderen Lehrern Unterstützung bei Einsatz der Computertechnik gibt, in der Lage ist, Computerkabinette und Softwarebibliotheken zu betreuen sowie bei der Einführung, Pflege und Wartung schulorganisatorischer Software helfen kann.

Wohin kann man sich wenden, wenn man Anfragen hat?

Wer Anfragen zu dieser neuen Fachkombination des Lehrerstudiums hat, sollte sich an die Sektion Mathematik der
Technischen Universität Karl-Marx-Stadt
PSF 964, Reichenhainer Straße 39/42
Karl-Marx-Stadt, 9010
oder an die
Pädagogische Hochschule
„Liselotte Herrmann" Güstrow
Goldberger Straße 12, Güstrow, 2600
wenden. *J. Gronitz*

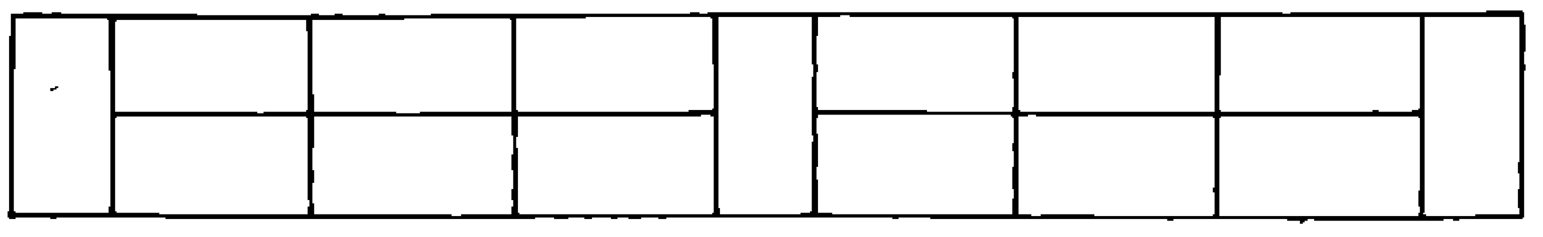
Übrigens – auch die zukünftigen Lehrer für Mathematik und Physik können sich im Kurs „Numerische Mathematik" mit Kleinrechnern und zukünftig dem Bildungscomputer bekannt machen. In welchem Umfang, ist natürlich vom Interesse abhängig. So erhalten leistungsfähige Studenten an der Karl-Marx-Universität Leipzig außerdem die Möglichkeit, Teile des Postgradualstudiums für ausgebildete Mathematiklehrer zur Qualifizierung auf dem Gebiet der Informatik zu absolvieren und damit die Bestätigung, das Fach Informatik lehren zu können. *Alphons*

In freien Stunden · alpha-heiter



Legespiel mit Dominosteinen

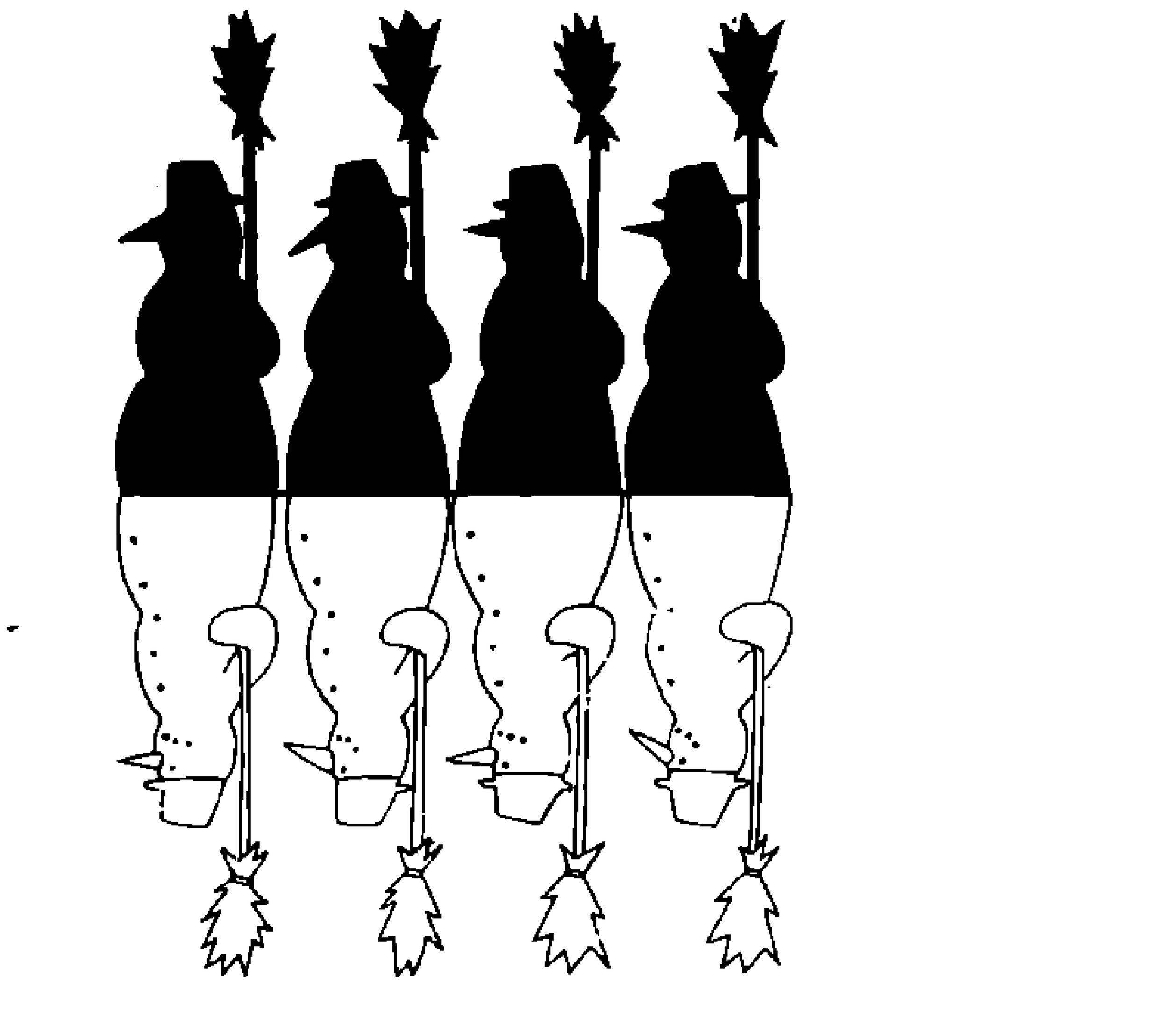
Der abgebildete Streifen ist in 15 Rechtecke zerlegt, deren jedes die Größe eines Dominosteines hat. Aus einem Dominospiel mit 28 Steinen ist auf jedes dieser Rechtecke so ein Dominostein zu legen, daß gilt: Zwei zu verschiedenen Steinen gehörende Hälften, die längs einer Kante aneinanderstoßen, haben zusammen stets 8 Punkte.



W. Träger, Döbeln

Eisiges

Die Schatten sind vertauscht. Ordne sie zu!



Mathematischer Rösselsprung

In die Figuren wurden ein mathematischer Begriff (linke Figur) sowie der Name eines mathematischen Schüler-Wettbewerbs (rechte Figur) eingetragen. Wie lauten diese Begriffe?

Schüler Jens Mildner, Leipzig

	T	S	A	
	K	■	B	
	U	R	T	
		E		
H	E	I	S	N
	N	■	I	
	C	Z	O	

	I	E	M	
	Y	■	A	
	D	P	L	
		A		
T	M	O	T	M
	I	■	E	
	H	A	K	

5 Zeichen – 5 Buchstaben

Für die fünf verschiedenen Zeichen sind fünf verschiedene Buchstaben so zu setzen, daß sich in den sechs Zeilen sechs verschiedene Worte ergeben. In der ersten Spalte ergibt sich dann ein weiteres Wort. Zur Erleichterung sind bereits die Buchstaben W und S eingetragen.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

W	○	□	□	○
△	<	S	○	□
<	○	□	>	○
>	□	○	△	<
○	<	>	○	□
□	○	△	<	○

Mitternachtsknobeleien

Herr Lehmann hat seinem Töchterchen zum Geburtstag ein nettes Spiel gekauft. Sein Freund Herbert fragt neugierig, was er dafür bezahlt hat und erhält zur Antwort:
„Nimm die Zahl der Stunden, die seit Mitternacht verflossen sind, doppelt. Was herauskommt, vervielfache mit 2, und das Ergebnis teile durch die Zahl der verflossenen Stunden. Dann erhältst du die Zahl, die im Augenblick die Uhr dort als Stunde anzeigt. Füge 1,65 M hinzu, und du weißt den Preis."
Gib Preis und Uhrzeit an!

H.-J. Böhland, Wallroda

Raten und Rechnen

Jeder Buchstabe bedeutet eine Ziffer, gleiche Buchstaben also immer gleiche Ziffern. Diesen Angaben entsprechend sind die Ziffern zu finden, die für die Buchstaben eingesetzt, die waagerechten und senkrechten Rechenaufgaben richtig lösen.

$$\begin{array}{ccccc} CCB & - & GFB & = & ICF \\ : & & + & & - \\ BE & \cdot & GG & = & HAE \\ \hline GJ & + & GGH & = & GBG \end{array}$$

H. Raduschewski, Berlin

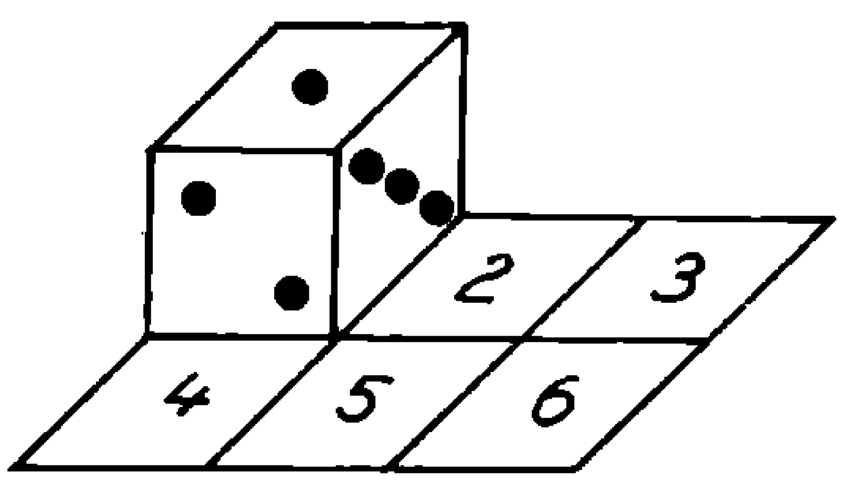
Wer findet die kürzeste Zugfolge?

Das Spielfeld besteht aus 6 quadratischen Feldern, deren jedes so groß ist wie die Seitenfläche eines Spielwürfels. Der Würfel wird so auf das Feld 1 gesetzt, daß seine Deckfläche einen Punkt und seine Vorderfläche 2 Punkte trägt (siehe Bild). Bei einem Zug wird dieser Würfel um eine seiner jeweiligen Grundkanten um 90° auf ein anderes Feld gekippt. Mit möglichst wenig Zügen ist zu erreichen, daß der Würfel

a) auf Feld 2 liegt, seine Deckfläche 4 und seine Vorderfläche 5 Punkte zeigt und

b) auf Feld 3 liegt, seine Deckfläche einen Punkt und seine Vorderfläche 2 Punkte zeigt.

W. Träger, Döbeln



Mathe-ABC

$\boxed{ABCDC \cdot C = CDCBA}$

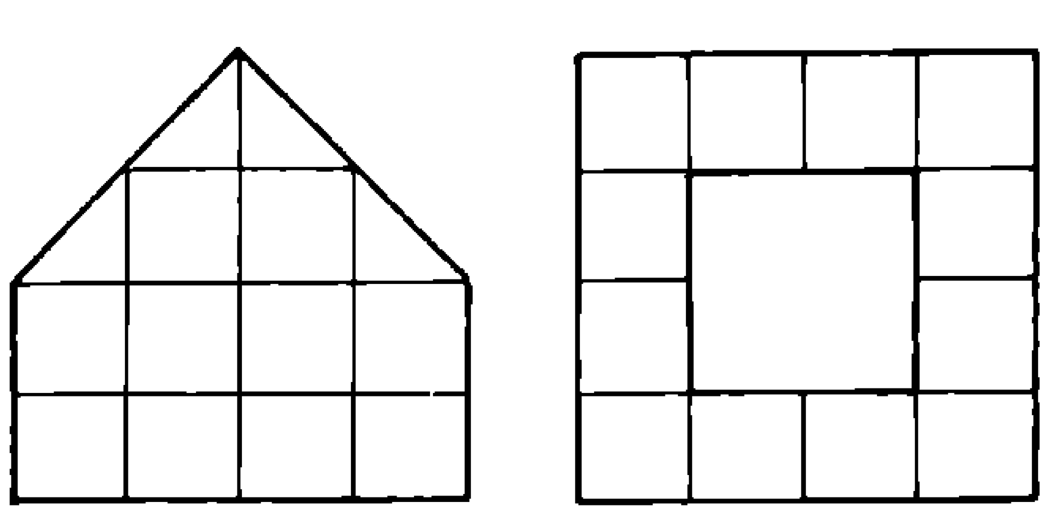
Man ersetze die Buchstaben so durch dezimale Grundziffern, daß eine wahre Gleichung entsteht! Gleiche Buchstaben stehen für die gleiche Ziffer, und unterschiedliche Buchstaben für verschiedene Ziffern.

stud. phys. Toralf Mildner, Leipzig

Geschickt geteilt

Zerlege die Figur A so mit 3 Schnitten, daß aus den entstehenden Teilen die Figur B zusammengesetzt werden kann.

W. Görgens, Schönebeck
H. Engelhaupt, Gundelsheim (BRD)

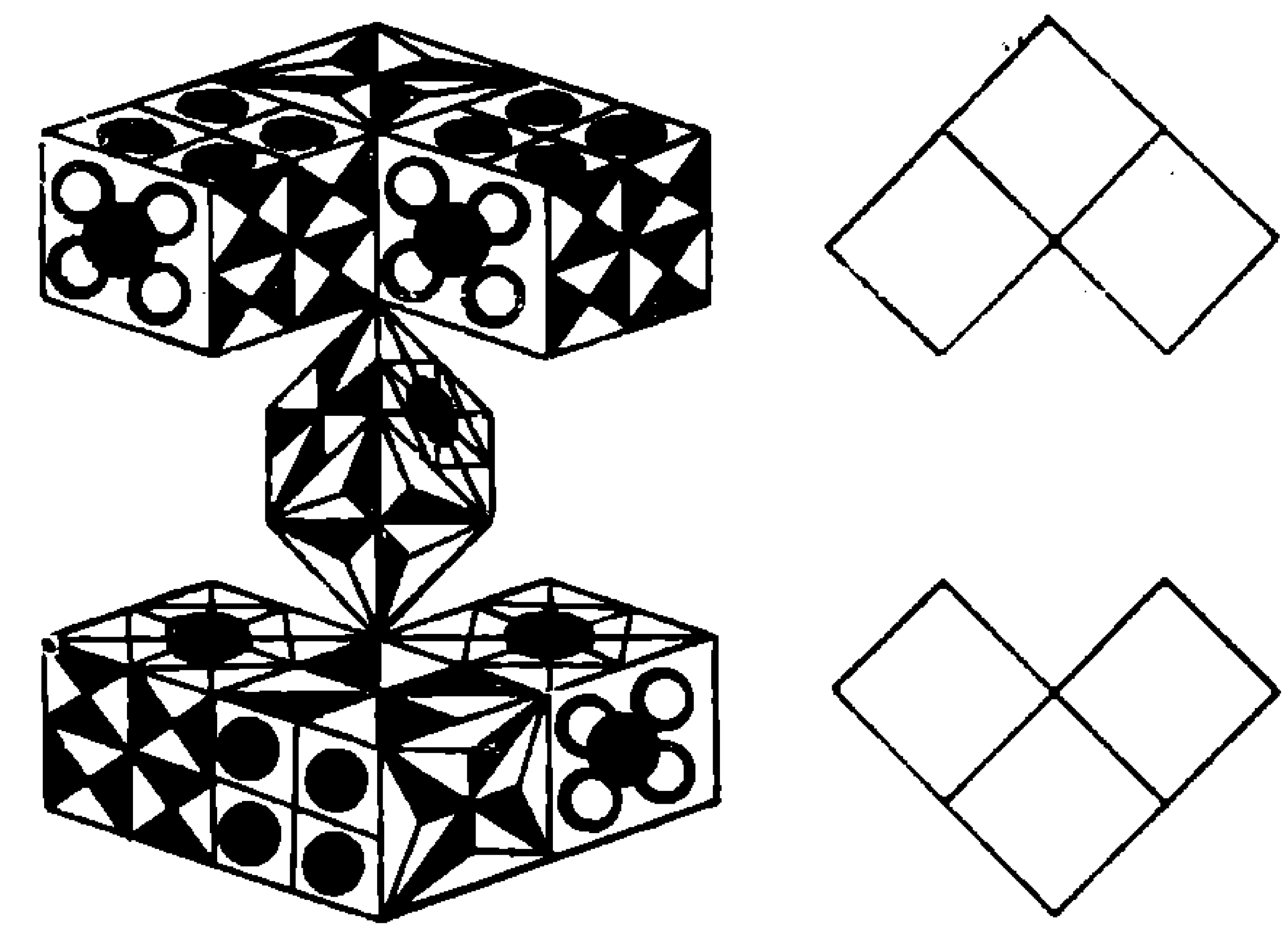


James Franck, Nobelpreisträger für Physik, war trotz seiner herausragenden wissenschaftlichen Fähigkeiten bei seinen Mitarbeitern als schlechter Rechner bekannt. Bei mathematischen Problemen, aber auch bei einfacheren Aufgaben stellte er sich so ungeschickt an, daß eines Tages Kollegen seinen Rechenstab mit dem Stempelaufdruck aus der Buchhaltung versahen: „Nur zur Verrechnung“.

aus: Lingmann/Schmiedel: Anekdoten, Episoden, Lebensweisheiten, VEB Fachbuchverlag Leipzig

Kombinieren gefragt

Die geometrische Figur aus sieben gleichen Würfeln ist so aufgebaut, daß man maximal immer nur



die Abhängigkeit von jeweils drei Seiten erkennt. Wie sehen die Unterseiten der oberen und unteren 3 Würfel aus?

W. Neugebauer, Berlin

Zum Jahreswechsel

$$\begin{array}{r}
1+\ 9+\ 8+9\\
1+\ 9+\ 8+9\\
1+\ 9+\ 8+9\\
1+\ 9+\ 8+9\\
\hline
=19+89=98+9+1
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
1+9\cdot\ 9+0\\
+\ 1\cdot 9+\ 9+0\\
\hline
=\ 1+9+90=1+99+0
\end{array}$$

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Denkt nach – schlagt nach – fragt nach!

Kulle, Kalle und Kelle waren in den großen Ferien auf dem Dorf bei Opa Helle. Dieser erzählte aus seiner Tätigkeit vor 40 Jahren:

„Ich hatte eine Siedlung und bewirtschaftete 12 Morgen mit Getreide. Die Getreideernte war für heutige Verhältnisse besonders umständlich und mühevoll (Mähen – Binden in Garben/zum Teil mit der Hand – Aufstellen der Garben zum Trocknen in Stiegen (Hocken oder Mandeln) – Einfahren und in Mieten lagern und später Dreschen).

Nach dem Dreschen wurde die Masse der Körner in Doppelzentner angegeben.

Für ein 3-Pfund-Roggenbrot bezahlte ich vor 40 Jahren – genau wie heute – etwa 5 Groschen.

Täglich holte ich aus dem Hühnerstall etwa 1 Schock Eier.“

Nun wollen Kulle, Kalle und Kelle die heute nicht mehr gebräuchlichen Begriffe in genormte Einheiten übertragen.

Helft den Dreien!

StR Hans Mörke, Neubrandenburg

XXX. Internationale Mathematik-Olympiade in Braunschweig

Vom 13. bis zum 24. Juli 1989 fand in Braunschweig (BRD) die XXX. Internationale Mathematik-Olympiade statt. Unter den 50 Teilnehmermannschaften war auch eine 6-Schüler-Mannschaft aus der DDR. Für diese Mannschaft hatten sich Rüdiger Belch, Andreas Siebert, Gérard Zenker, André Pönitz, Jan Fricke und Frank Göring qualifiziert. Prof. Burosch (W.-Pieck-Universität Rostock) war Delegationsleiter, Prof. Gronau (E.-M.-Arndt-Universität Greifswald) war sein Stellvertreter.
Wir trafen uns am Freitag, dem 14. Juli im Pionierpalast in Berlin (Wuhlheide), denn das Programm für die Mannschaften begann erst am 16. Juli. Nur Prof. Burosch steckte schon voll im Streß, denn am 14. Juli begann die Jury mit der Auswahl der Klausuraufgaben, während wir noch vom Ministerium verabschiedet wurden. Dies geschah gemeinsam mit der DDR-IPhO-Mannschaft; die IPhO fand etwa zur gleichen Zeit in Polen statt. Eine kleine Dampferfahrt rundete die Verabschiedungszeremonie am Sonnabend ab. Während wir uns also im Forsthaus auf die Abreise zur IMO bzw. IPhO vorbereiteten, waren die letzten IChO-Teilnehmer, die kuweitische Mannschaft, noch nicht abgereist (die IChO fand in der DDR statt). So konnten wir gleich noch unsere Fremdsprachenkenntnisse testen, wir verständigten uns auf Englisch.
Am Sonntag fuhren wir dann (endlich) ab. Wir passierten die Grenze in Berlin Friedrichstraße und fuhren von dort aus mit dem Zug nach Braunschweig.
Als nächstes wurden wir per Kleinbus in unsere Unterkunft – das Jugendgästehaus in Braunschweig – gefahren. Prof. Gronau und Prof. Burosch waren von uns getrennt im Hotel Mercure Atrium untergebracht. Wir schauten uns mit unserer Betreuerin noch ein bißchen in Braunschweig um, nachdem wir uns in unserem Quartier eingerichtet hatten. Wir waren dort mit der sowjetischen und der chinesischen Mannschaft auf einem Gang. Auf dem Gebiet des Jugendgästehauses waren unter anderem noch die Australier, die Mannschaft der USA, die der BRD, die österreichische Mannschaft und die Mannschaft aus Neuseeland untergebracht. Gleich am ersten Tage gab es dann auch ein für die IMO typisches babylonisches Sprachgewirr, als wir gemeinsam mit den Mannschaften aus Australien und aus der SU versuchten, uns von den Chinesen ein Kartenspiel erklären zu lassen. Am Ende meinte wenigstens der Gérard, die Spielregeln einigermaßen verstanden zu haben.
Am Montag war dann die Eröffnungsveranstaltung. Da dies eine der wenigen Gelegenheiten vor dem Feststehen der Ergebnisse ist, wo die Mannschaften ihre Mannschaftsleitung zu Gesicht bekommen, wurden hier lange Hälse gemacht, und jede Mannschaft versuchte, die eigene Delegationsleitung auf sich aufmerksam zu machen, noch einen letzten Blick zu erhaschen, aus dem man vielleicht entnehmen könnte, ob denn die bevorstehenden 6 Klausuraufgaben leicht sein würden oder schwer. Auf jeden Fall lächelten Prof. Burosch und Prof. Gronau. Ob das nun war, weil die Aufgaben relativ leicht, und von uns zu bewältigen sein würden, oder weil die Aufgaben schwer sein würden, dadurch das Spitzenfeld etwas weiter auseinandergezogen und wir als gut vorbereitete Mannschaft so bessere Chancen haben würden, war daraus jedoch absolut nicht zu erkennen.
Beeindruckend war aber an der Eröffnungsveranstaltung im Audimax der TU Braunschweig schon allein die Vielzahl der Fahnen von Teilnehmerländern, die Zeitdauer, bis alle Schilder hereingetragen waren, die die Namen der Teilnehmerländer als Aufschrift trugen. Diese XXX. IMO war immerhin die IMO mit der bisher höchsten Teilnehmerzahl.
Nachdem nun die Eröffnungsreden vorbei und die kulturelle Umrahmung verklungen waren, sollte es eigentlich Mittag geben. Das Mittagessen sollte in der Mensa der TU stattfinden. Wir hatten uns mit unserer Betreuerin dann so abgesprochen, daß wir versuchen würden, möglichst schnell den Saal zu verlassen, um dort nicht lange anstehen zu müssen. Doch Saal verlassen war nicht. Es ging nicht vorwärts. Der Grund: Die Jury kannte ja nun die Aufgaben. Somit mußte sie erst per Bus vom Vorplatz abgeholt werden, bevor die Teilnehmer das Audimax verlassen konnten. Und ebendieser Bus kam nicht. Also hieß es erst mal warten. Als der Bus dann endlich da war, hatten wir noch einen Fototermin. Doch dann ging unsere Rechnung auf. Während die anderen Mannschaften noch unschlüssig rumstanden, setzten wir uns schon Richtung Mensa in Bewegung. So kamen wir ohne längeres Anstellen zu unserem Mittag. Die letzten Mannschaften standen wohl 2 Stunden.
Langsam merkte man, daß es auf den Ernst des Lebens, oder besser der IMO, zuging, auf die Klausuren. Schon nach dem Mittagessen war erstes Probesitzen angesagt. Jeder aus unserer Mannschaft hatte ja seinen eigenen Klausurraum. Ungünstig erwischte es Jan, er mußte in der Turnhalle schreiben.
Nachdem sich also jeder so auf die folgenden Klausuren eingestellt hatte, war eine Stadtrundfahrt vorgesehen. Allerdings kam, was kommen mußte – das Interesse an restaurierten Fachwerkhäusern erschöpfte sich schnell, zumal wir ja schon mit unserer Betreuerin ein bißchen von Braunschweig gesehen hatten. Viel interessanter waren da schon die Unterhaltungen mit den Australiern. Besonders einer in deren Mannschaft konnte Geschichten erzählen, daß sich die Balken bogen.
Nach einem bombastischen Büffet am Abend machten wir dann mit unserer Betreuerin und ein paar anderen Mannschaften noch einen kleinen Ausflug in die Innenstadt von Braunschweig, wonach wir dann müde zurückkehrten, um im Jugendgästehaus die letzte Nacht vor der ersten Klausur mit Schlafen zu verbringen.
Am nächsten Morgen war es dann soweit. Die Aufregung trat erst unbewußt, dann immer deutlicher zutage. Was würde drankommen? Zahlentheorie, Geometrie, Kombinatorik, vielleicht was mit 1989? Jeder stellte da so seine eigenen Vermutungen an. Nach Frühstück und Busfahrt zu den Klausurräumen nahmen dann alle ihre Plätze ein. Auf dem Tisch lagen schon die Mappen, die die Aufgaben enthalten mußten.
Die Spannung näherte sich ihrem Höhepunkt, die Uhr ging auf neun zu, endlich der Startmoment, die Mappe aufgeklappt, da lag schon das Blatt mit den 3 Aufgaben, erstes Durchlesen, die Spannung war dahin, Arbeitsatmosphäre kam auf. In der ersten halben Stunde hat man ja noch Zeit, Anfragen zu stellen, da heißt es, erst einmal an jeder Aufgabe basteln, um sie zu verstehen, um Unklarheiten auszuschließen. Später dann geht es darum, Lösungsgedanken zu finden, sich durchzubeißen, wenn alles nichts nutzt, heißt es in den letzten zehn bis zwanzig Minuten noch alles hinschreiben, was man trotzdem rausgekriegt hat. Im Letztgenannten mußten sich aber erfreulicherweise nur drei von uns üben; Gérard, Andreas und Frank hatten an beiden Tagen die richtigen Ansätze parat.
Nach der Klausur dann wieder das IMO-typische babylonische Sprachgewirr. Schließlich wollte jeder wissen, wie so die anderen Mannschaften abgeschnitten haben. Erste Hochrechnungen wurden angestellt, wie die eigene Mannschaft so liegen könnte. Und schnell verbreitete sich auch das Gerücht, daß der stellvertretende Delegationsleiter der USA seiner Mannschaft untersagt hatte, zu verraten, welche Aufgaben wer wie herausgekriegt hatte. Die Mitglieder der USA-Mannschaft sahen darüber jedenfalls nicht sehr glücklich aus, erfuhren sie doch so auch weniger von uns anderen

Mannschaften. Auf jeden Fall war dadurch die Gerüchteküche nur noch mehr angeheizt worden. Und keiner wußte genau, wo die USA sich einordnen würde.
Nach der ersten Klausur machten wir nun einen Stadtrundgang in Wolfenbüttel, doch das Interesse an restaurierten Fachwerkhäusern und geschlossenen Standesämtern war geringer denn je; zu sehr steckte die letzte Klausur noch in den Knochen, zu groß war die Aufregung vor der nächsten. Und die nächste Klausur kam. Und irgendwie erschien sie uns diesmal etwas leichter als die vorige. Während Gérard mittels autogenem Training den nötigen Abstand gewann, um seine Lösungen unvoreingenommen nochmals durchzusehen, nahm sich Frank die Zeit, seine Lösungen ein Stündchen zu überschlafen. Bei der Diskussion hinterher vor den Klausurräumen stellte sich dann heraus, das auch in anderen Mannschaften der zweite Tag etwas besser ausgefallen war als der erste. Das Gerücht von „kubanischen Verhältnissen" machte die Runde. Damals vor zwei Jahren bei der IMO in Kuba waren die Aufgaben so „leicht", daß etwa ein Zwölftel der Teilnehmer volle Punktzahl erhielt, es also nur bei voller Punktzahl einen ersten Preis gab. Diese Einschätzung bestätigte sich jedoch nicht; die Aufgaben waren wohl besonders am ersten Tag um einiges schwerer als damals.
Im Gegensatz zum Vortage war allerdings am zweiten Klausurtag das Nachmittagsprogramm wirklich auf Entspannung ausgelegt und fand entsprechend regen Zuspruch. Wir wurden nach dem Mittagessen per Bus zum Bürgerpark gefahren. Dort konnte man je nach Belieben Fußball spielen, die verschiedensten Geschicklichkeitstests ausprobieren, einer Trampolinvorführung zuschauen oder sich selbst am Trampolin betätigen, konnte sich im Bogenschießen testen, einer Laientanzgruppe zuschauen und vieles andere mehr. Man kam zwanglos ins Gespräch mit Teilnehmern anderer Mannschaften, es wurde über Hobby geredet und auch über Politik und natürlich wurden Hochrechnungen oder besser „Hochschätzungen" über die Länderwertung ausgetauscht, die zwar eigentlich inoffiziell ist, aber dafür von allen als besonders von Interesse erachtet wird. Hier zeichnete sich schon ab, daß die DDR recht gut abschneiden würde.
Am nächsten Tag, Donnerstag, war ein Ganztagesausflug nach Clausthal-Zellerfeld angesagt. Hier erfuhren wir einiges über den Kupferbergbau im Oberharz. Besonders eindrucksvoll war die Besichtigung eines Schaubergwerkes. Nachmittags gingen wir in einem Wellenbad schwimmen, was die nötige Abkühlung für die klausurerhitzten Köpfe brachte. Am Abend sollte dann ein Volleyballturnier stattfinden, an dem sich unsere Mannschaft auch beteiligte, obwohl kaum einer von uns Ahnung von Volleyball hatte. Zum Spiel kamen wir gerade noch rechtzeitig, unser Bus hatte sich verfahren und brauchte daher für den Rückweg aus dem Harz mehr Zeit als eingeplant.
Wir gewannen dann auch nur das allererste Spiel gegen Irland und landeten auf Platz 18 von 24 teilnehmenden Mannschaften. An diesem Abend wurden die Gerüchte immer lauter, daß die Lösungen im Prinzip vollständig korrigiert seien. Und die Mannschaft der USA ließ versehentlich den streng geheimen Zettel mit ihren Punkteinschätzungen rumliegen, wodurch sie sich nun doch zu einer berechenbaren Größe entwickelten. In der Nacht stieg dann bei der Rückfahrt Andreas am Mercure Atrium aus, wo die bisher durchkoordinierten Punktelisten aushängen sollten. Wir anderen fuhren zum Jugendgästehaus, um zu sehen, ob dort schon etwas aushinge oder über Bildschirmtext etwas in Erfahrung zu bringen sei. Und spät in der Nacht klärte sich dann das Bild bis auf wenige Aufgaben. Unsere Mannschaft lag ziemlich sicher auf Platz vier, konnte höchstens noch die SU-Mannschaft einholen. Ein Spitzenergebnis zeichnete sich also ab. Und insbesondere lagen wir klar vor der BRD-Mannschaft, ein Ziel, was wir uns insgeheim vorgenommen hatten.
Am Freitag dann war der Flughafen Hannover unser Ausflugsziel für den Vormittag, nachmittags machten wir eine Stadtbesichtigung in Celle. Und am Abend stand dann alles fest. Beim Grillabend im Internationalen Windmühlenmuseum Gifhorn, was an sich schon sehr interessant war, erfuhren wir von unserer Delegationsleitung unsere Ergebnisse. Welche Freude, als endlich klar war, wie wir abgeschnitten hatten. Als einzige Mannschaft dreimal volle Punktzahl, nur einen Punkt hinter der SU-Mannschaft, USA und BRD klar hinter uns! Was noch unklar war, war die Preisverteilung. Die Jury-Sitzung dazu sollte erst noch stattfinden.
Drei erste Preise, das war klar, aber würde für André noch eine Silbermedaille herausspringen? Da stand's auf der Kippe. Also noch eine Zitterpartie für André.
Sonnabend war dann nochmals Hannover geplant. Diesmal Stadtbesichtigung. Wir waren uns alle einig: Stadtbesichtigungen hatten wir mehr als genug gemacht. Zum Glück war dies die letzte.
Am Abend fand ein Empfang bei der Niedersächsischen Landesregierung im Schloß Herrenhausen statt. Mit Stehbankett. Und mit allen, die an der IMO mitgewirkt hatten. Und was besonders André interessierte – mit den offiziellen Punktgrenzen für die Medaillen. Jetzt war alles klar. Unsere Mannschaft würde mit dreimal Gold, zweimal Silber und einmal Bronze heimkehren. Ein Bombenergebnis! Es durfte gefeiert werden. Und es wurde gefeiert. Als Abschluß nahmen wir am Kleinen Fest im Großen Garten teil, welches eine Festveranstaltung mit viel Kultur und einem abschließenden Feuerwerk war. Über die Kultur will ich mich hier nicht weiter äußern, da gab es Gutes und nicht ganz so Gutes; das Feuerwerk dagegen war top-spitzenmäßig.
Der nächste Tag war ja nun schon der letzte, denn am Montag dann war ja schon wieder die Abreise heimwärts. Wie das nun mal an solchen letzten Tagen ist, gab es auch eine Abschlußfeier mit Siegerehrung und haufenweise Presseleuten. Da wurden die Medaillen verteilt und da wurden Reden gehalten.
Nachdem die Auszeichnungsfeier mit einem Stehempfang mit kleinem Imbiß einen würdigen Ausklang genommen hatte, machten wir schnell noch ein paar Mannschaftsfotos am Braunschweiger Gaußdenkmal und wollten dann eins der Schwimmbäder in Braunschweig aufsuchen, um uns dort noch ein wenig zu entspannen. Doch aufgrund der außerordentlichen Seltenheit, mit der am Sonntag die öffentlichen Verkehrsmittel verkehrten, entspannten wir uns dann doch lieber im eigenen Bett im Jugendgästehaus. Abends war schließlich noch ein gemeinsames Essen aller IMO-Teilnehmer in der Stadthalle angesagt. Unsere Delegationsleitung reservierte uns in weiser Voraussicht einen vorzüglichen Startplatz für die Essensschlacht am Büffett. So konnten wir nun wohlversorgt unseren Erfolg nochmals genießen. Als dieses gemeinsame Essen beendet war, war der Abend noch lang und wir noch munter, zumal wir ja schon am Nachmittag ausgiebig geschlafen hatten. Also beschlossen wir gemeinsam mit einigen anderen Mannschaften noch einen kleinen Besuch in einer der Braunschweiger Discos zu unternehmen. Auf Vorschlag unserer Betreuerin, die ja wohnhaft in Braunschweig war, sich also als Studentin auch ein bißchen auskennen mußte, wählten wir das Jolly aus. Dies war ein topausgebauter Disco-Schuppen (mit mehreren Ebenen), der eben nicht nur Raum für's Tanzen ließ, sondern auch viele abgelegenen Ecken aufwies, kleinere Bars und Sitzgelegenheiten, wo man sich auch prima unterhalten konnte. Leider hatten wir dort nicht allzuviel Zeit, denn der letzte Bus fuhr schon um 0.20 Uhr.
Aber letztlich hatte das auch sein Gutes, denn am nächsten Tag mußten wir früh raus, Betten abziehen, saubermachen, ... – wir wollten ja unseren Zug noch schaffen. Wir schafften ihn auch, am Bahnsteig noch eine kleine Verabschiedung, dann rein in den Zug und weg waren wir. Am frühen Mittag kamen wir in Berlin Friedrichstraße an, wurden, nachdem wir die Begrüßungsgesellschaft gefunden hatten, auch herzlich begrüßt, dann von der Presse in die Mangel genommen, mit einem recht guten Mittagessen versorgt, und nachdem wir sämtliche Begrüßungs-, Dankes- und Lobesworte entgegengenommen hatten, nach Hause verabschiedet. Als unsere Begrüßungszeremonie beendet war, kam gerade die DDR-IPhO-Mannschaft an, mit der zusammen wir verabschiedet wurden, und die ja auch nicht ganz erfolglos war. Diese IMO war ein interessanter und erfolgreicher Abschluß meiner Olympiadelaufbahn.

Frank Göring

ALPHA unmöglich

Es ist bekannt, daß Oscar Reutersvärd 1934 als erster das Dreieck mit 3 rechten Winkeln konstruierte (s. alpha Heft 4/82), und daß zwei Engländer, die Brüder P. S. und R. Penrose 24 Jahre später, also 1958 diese Figur wiederentdeckten und veröffentlichten. Bemerkenswert wäre dabei, daß der eine wohl ein Mathematiker, und der andere ein Psychologe war, speziell der Psychologie des Sehens zugetan.
Es ist nicht schlechthin die Tatsache interessant, daß es ein Dreieck mit 3 rechten Winkeln gibt, sondern die sich daraus ergebenden Aspekte in bezug auf die Erforschung des menschlichen Auges, also des Sehens und in diesem Zusammenhang die Erforschung der Vorgänge des Übertragungsmechanismus Auge (ebene Netzhautabbildung) und räumliches Vorstellungsvermögen unseres Gehirns. Auf diesem Gebiet wird gerade jetzt mit der Weiterentwicklung der Computertechnik intensiv geforscht. Durch optische Sensoren z. B. werden Computer zur Steuerung mechanisch-technischer Abläufe an Maschinen programmiert (Robotervision).
Zu unmöglichen Figuren wurde bereits in den Heften 1/85 (Grundproblem) bzw. 2/88 (Konstruktionsprinzipien) berichtet.
Einen Teil der Konstruktionsprinzipien stellen die sogenannten Ein- und Mehrbalken-Konstruktionen dar. Die bekannteste 3-Balkenkonstruktion ist das Dreieck mit 3 rechten Winkeln (Heft 2/88). Eine 4-Balkenkonstruktion von mir wurde bereits im Heft 1/85 abgebildet, wobei die „Balken" sich aus einzelnen „Quadern" zusammensetzten. Hier in diesem Beitrag als unmögliches Fenster dargestellt in Bild 1. Setzt man die „Balken" aus „Würfeln" zusammen, so erhält man einen zusätzlichen Vorstellungsaspekt der Räumlichkeit. Dies zeigte Oscar Reutersvärd bei der Konstruktion seines Dreiecks mit 3 rechten Winkeln (s. Heft 4/82).
Man kann auch Buchstaben als Balkenkonstruktion ausführen.

Bild 1

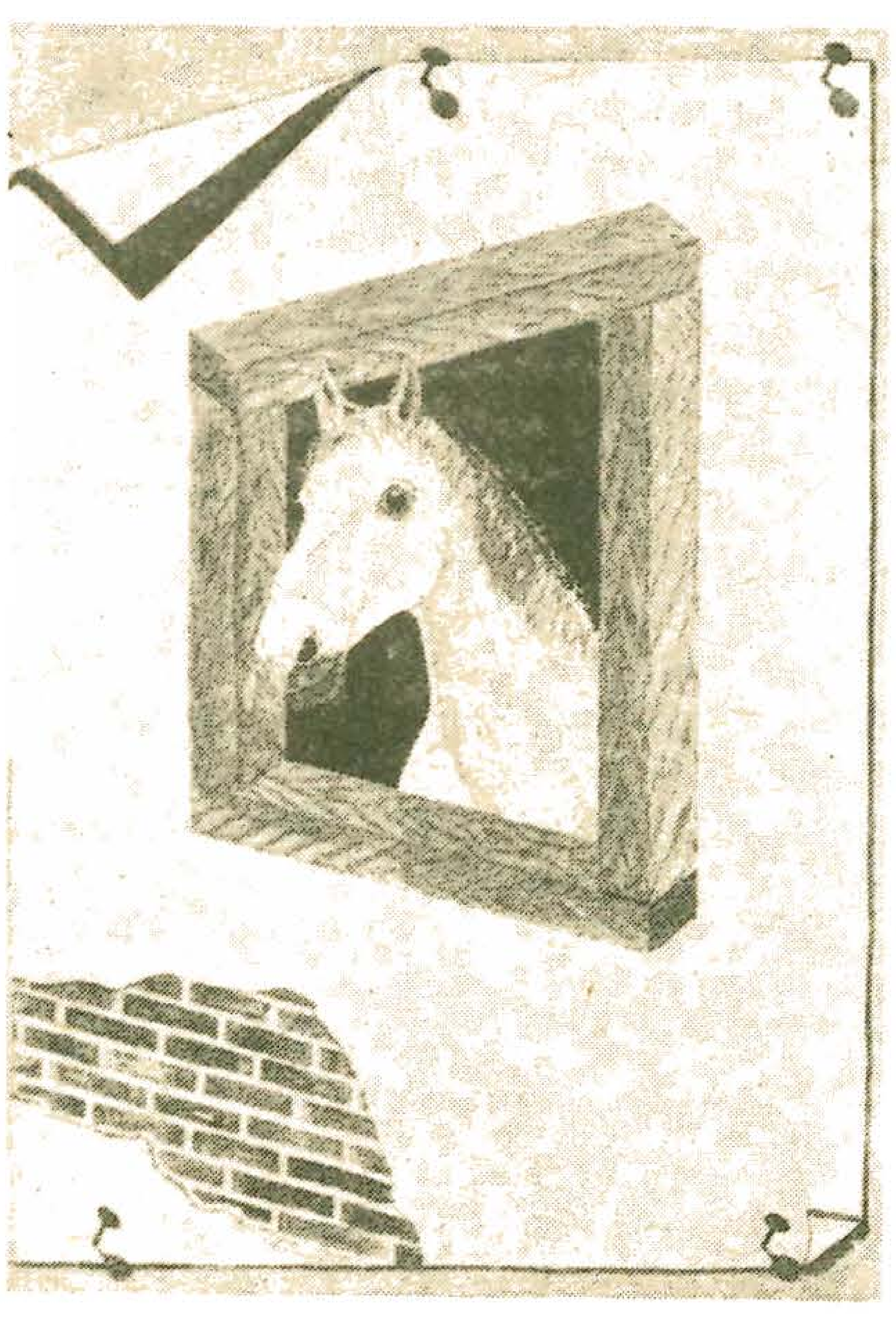


Bild 2

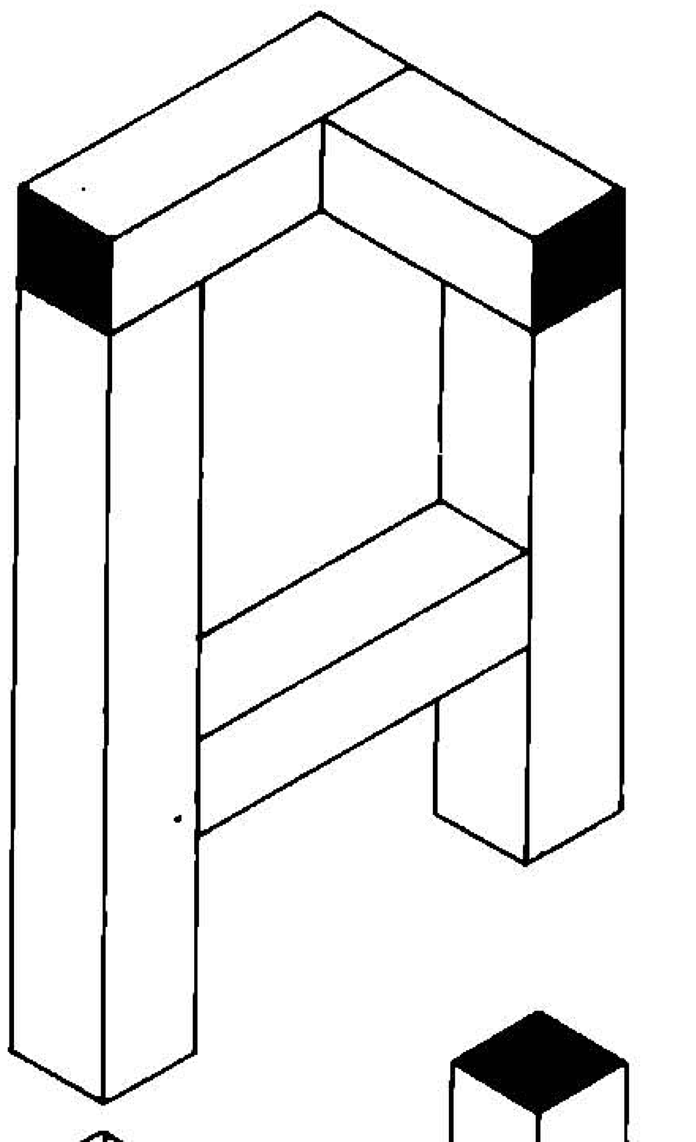
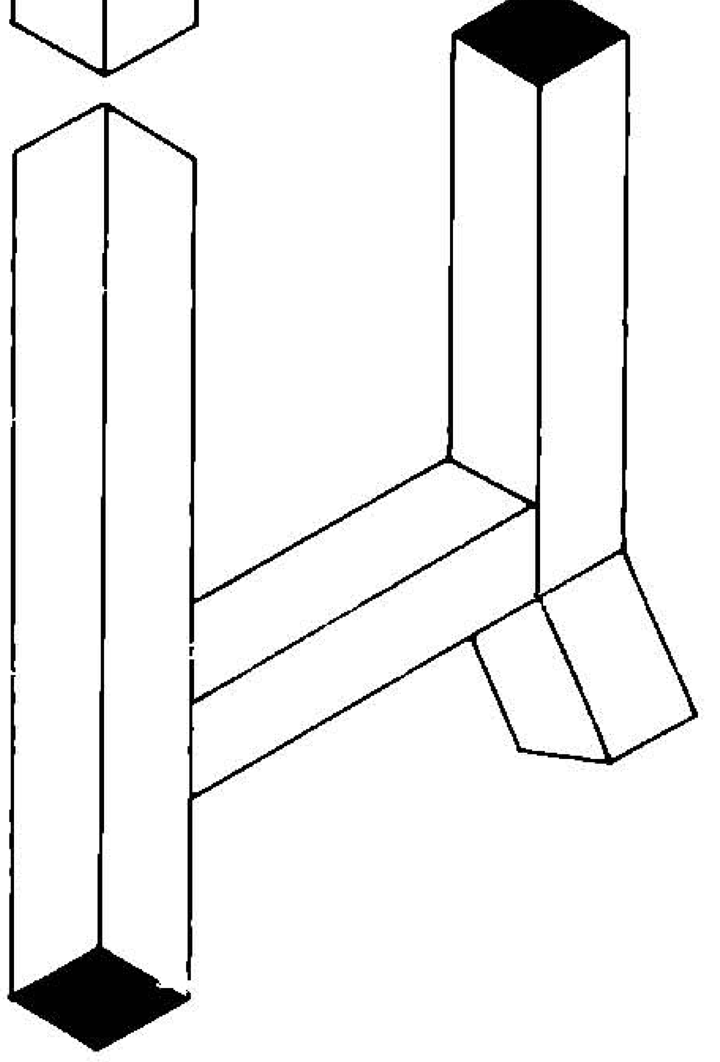


Bild 3



Wenn man hierbei dann noch die eben genannten Würfel verwendet, so erhält man ALPHA unmöglich (Bilder 4 und 5).

Bild 4

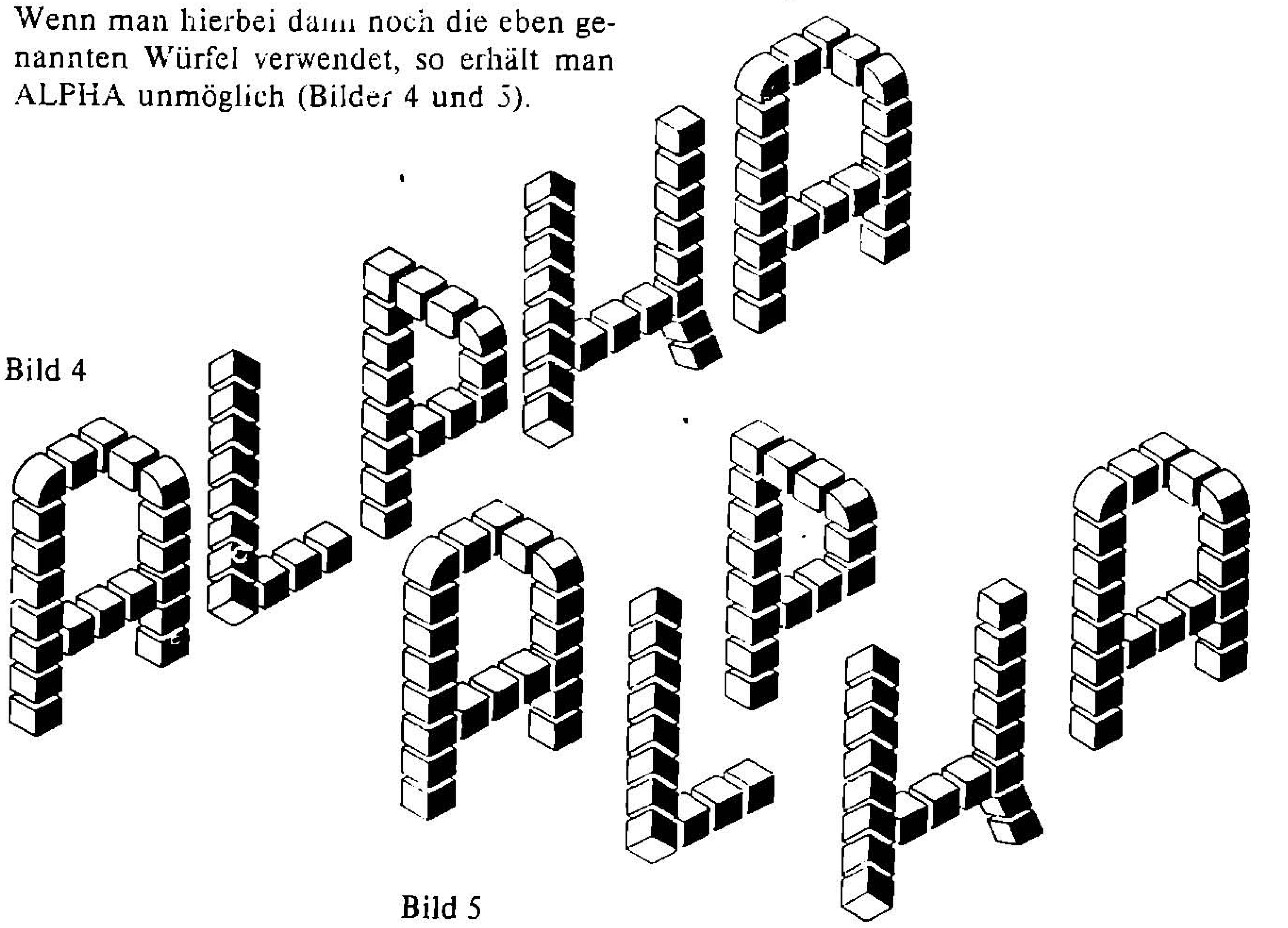


Bild 5

Weitere Motive ergeben sich durch die Verwendung von Rundungen. Ist ein einfacher Bogen nach Bild 6 unmöglich herstellbar, so erkennt man die Unmöglichkeit bei zwei Bögen, die versetzt auf einer Kreuzplatte stehen (Bild 7 und 8).

Bild 6

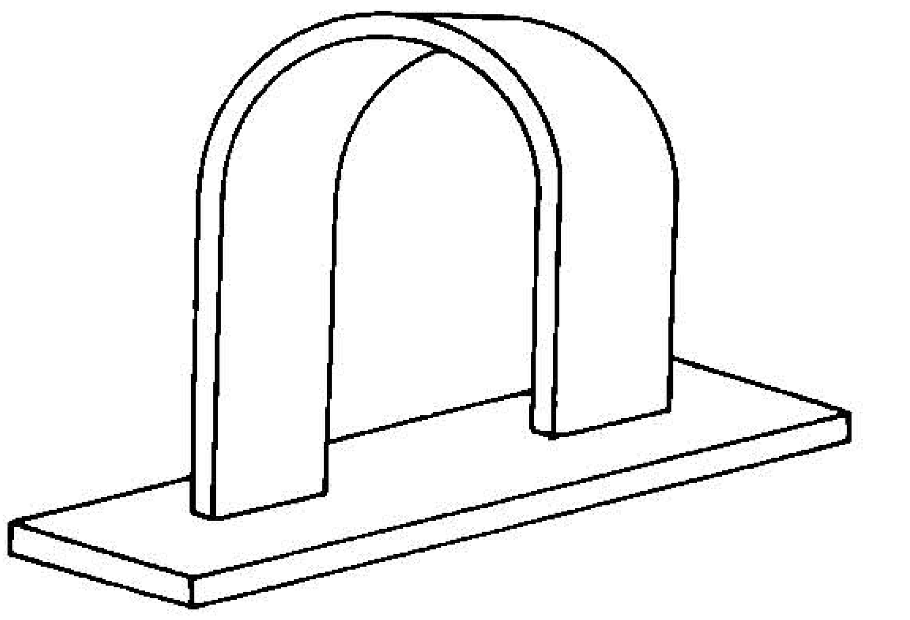


Bild 7

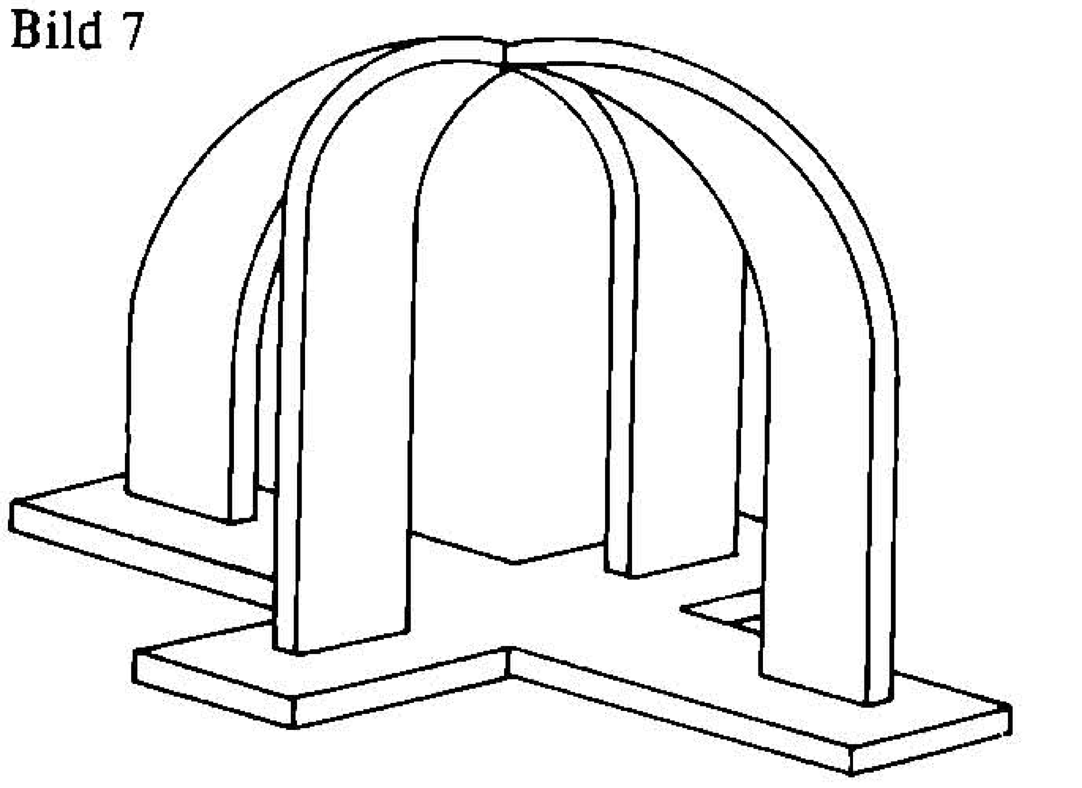
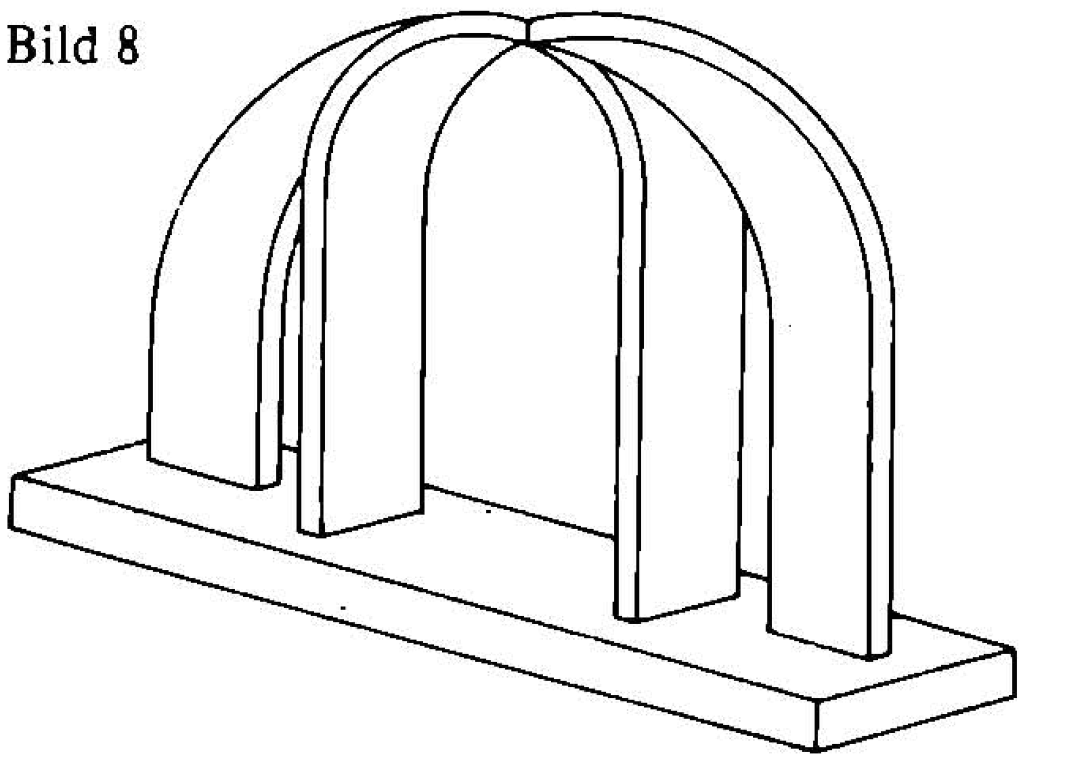


Bild 8



Bei Bild 9 kommt der verdrehte Bogen rechts im Bild in der gleichen „Ebene" an und verläuft dann nach „hinten". Ein Bolzen verbindet unmöglich diese Schleife. Wie Bild 10 zeigt, lassen sich durch Verdeckungen weitere Varianten dieser Form herstellen.

Bild 9

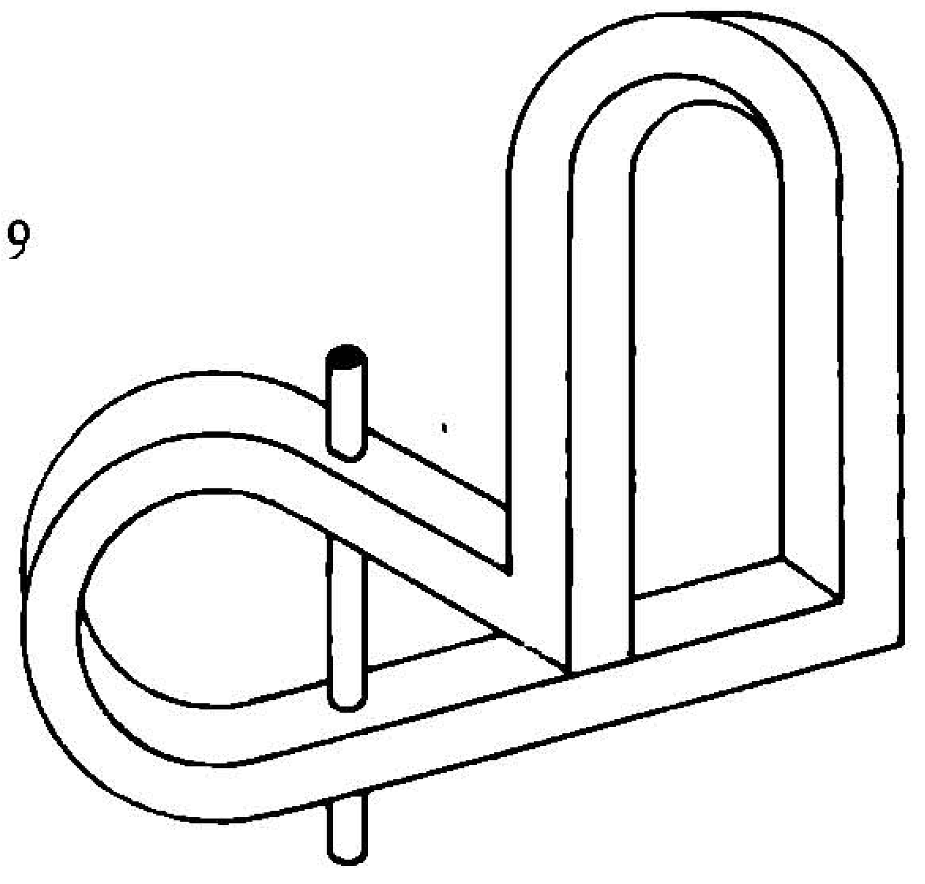
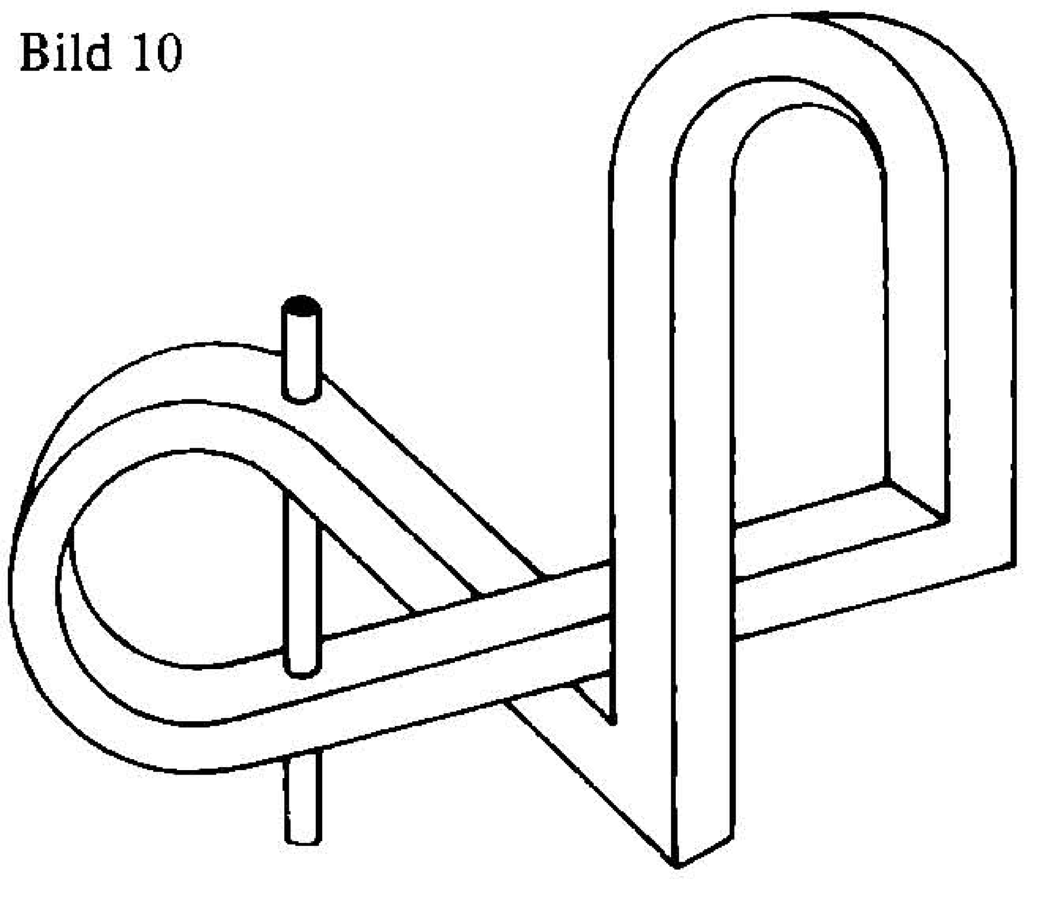


Bild 10



Im Bild 11 findet man neben dem unmöglichen Gewölbe zwei weitere Unmöglichkeiten (betrachte den Leuchter und die Stufe). Der Text, vor über 2 000 Jahren von Plato ausgesprochen, hat auch heute noch seine Gültigkeit.

Bild 11

Die Bilder 12 und 13 zeigen zwei weitere Motive aus meiner Serie mit dem „Nichts" (s. Heft 1/85, Abb. „Ein Loch im Nichts"). Zum Schluß sei auf eine Vielzahl unmöglicher Figuren verwiesen, die aus sog. Rahmenkuboiden, Treppen usw. entstehen. Als Beispiel für die Rahmenkuboide nenne ich hier meine im Heft 1/85 abgebildete Figur: Unmöglicher Korb.

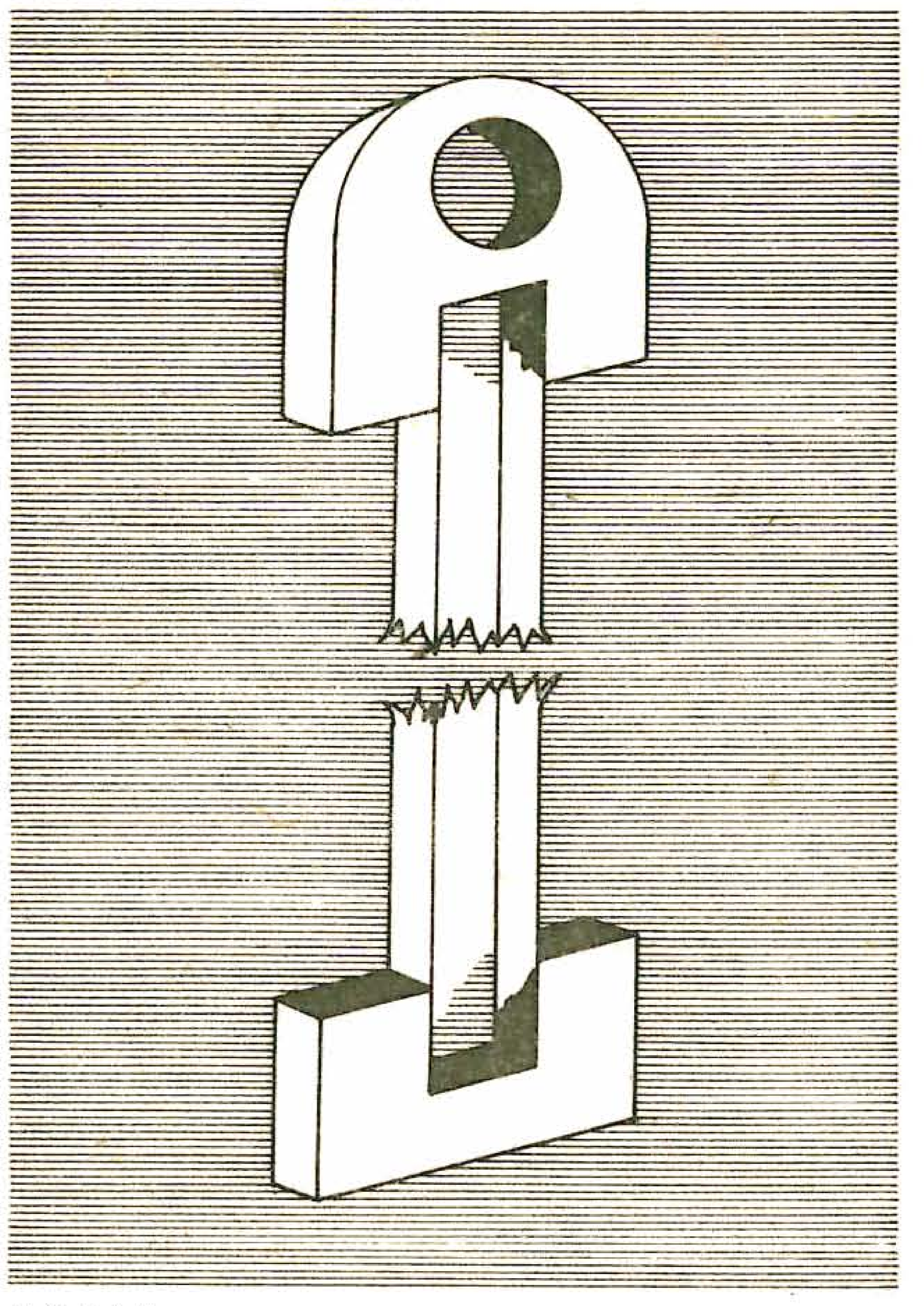


Bild 12

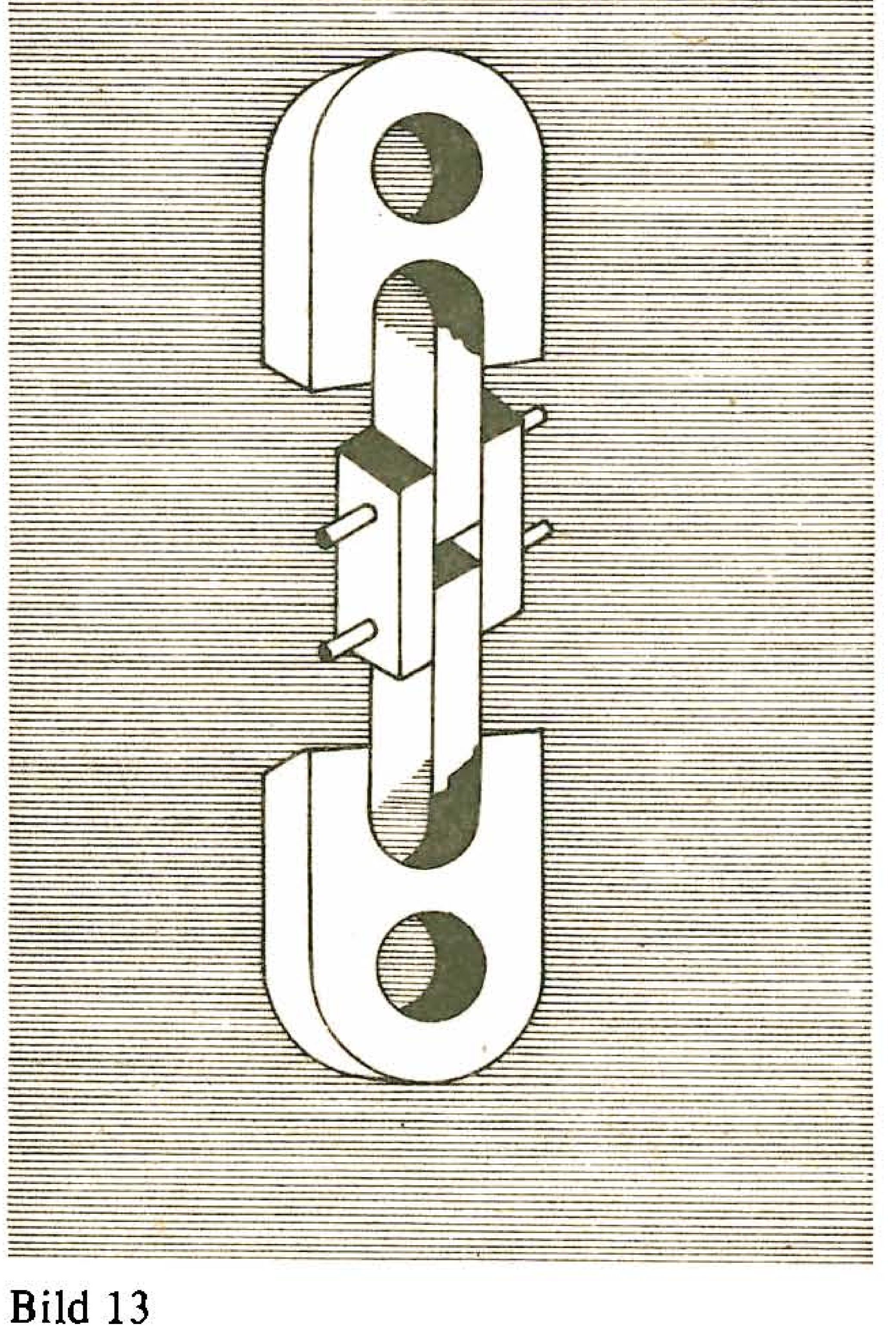
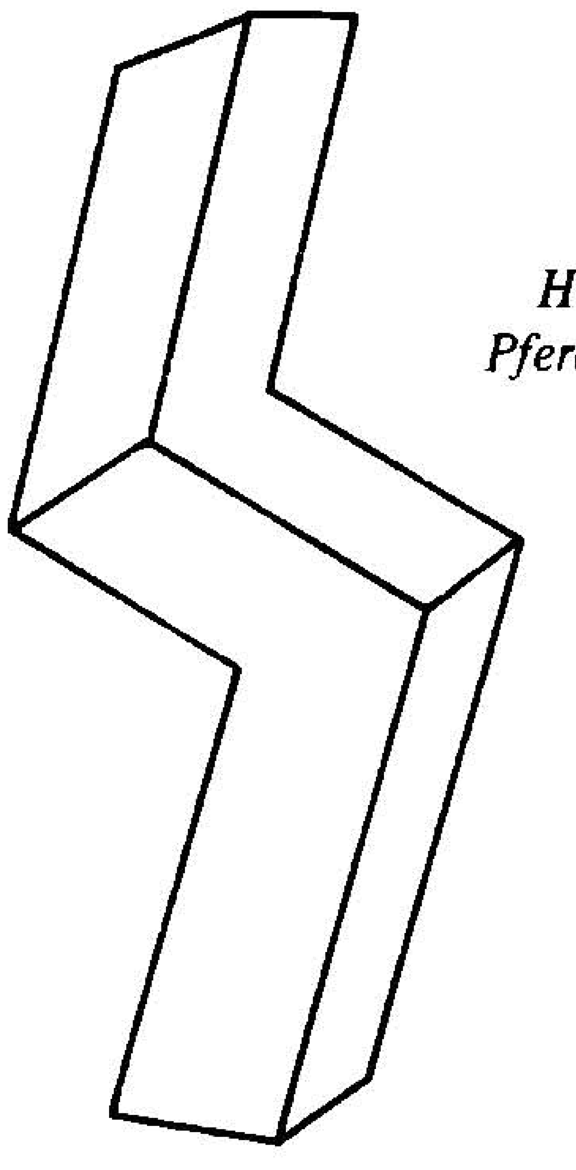


Bild 13

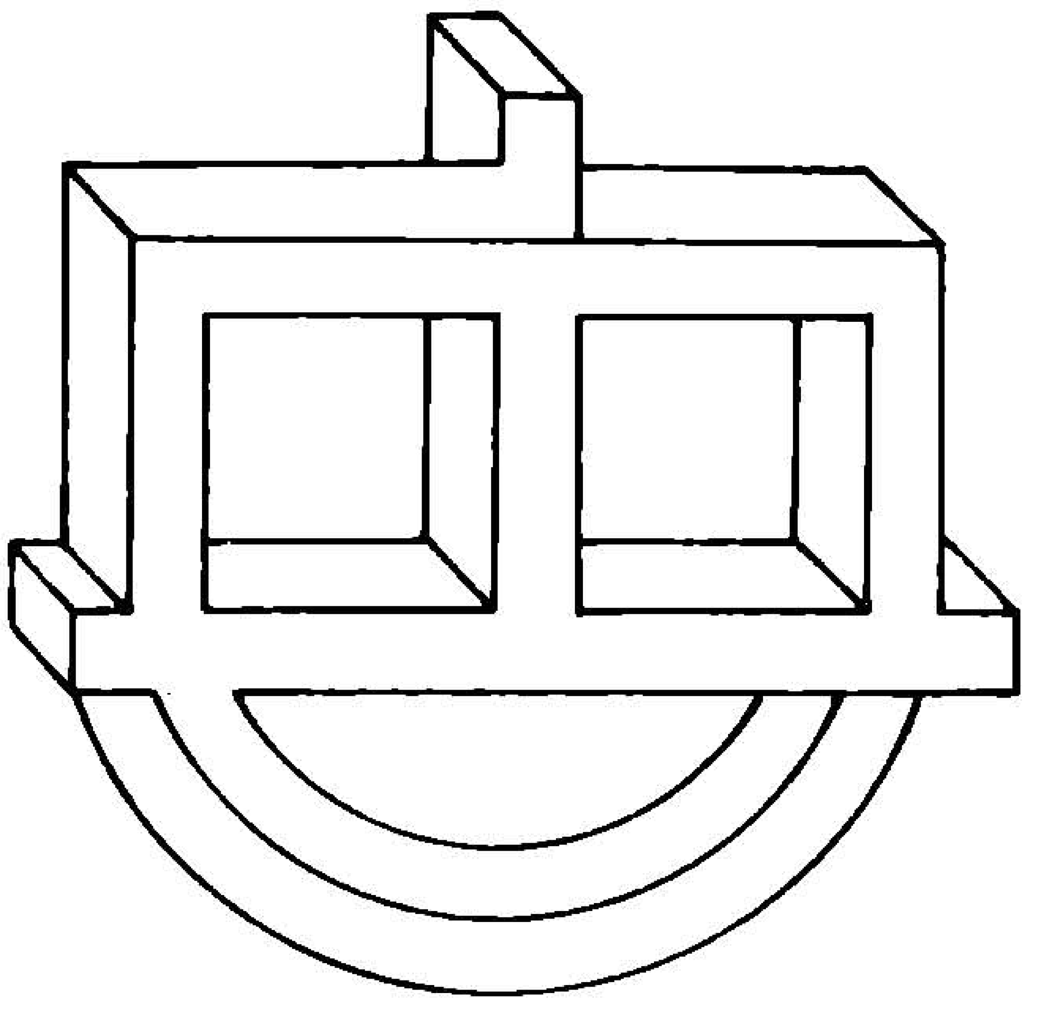
Eine Treppendarstellung zeigt Bild 14 im Zusammenhang mit einer unmöglichen Tempelruine.

Ich hoffe mit dieser Auswahl meiner unmöglichen Figuren weitere Konstruktionsprinzipien und Darstellungsmöglichkeiten gezeigt zu haben. Bei Verwendung von farbig dargestellten Flächen wirken solche Figuren besonders plastisch.

R. Breitenfeld



Heike Lückert
Pferdsdorf/Rhön



Rosita Ruprecht
Coswig

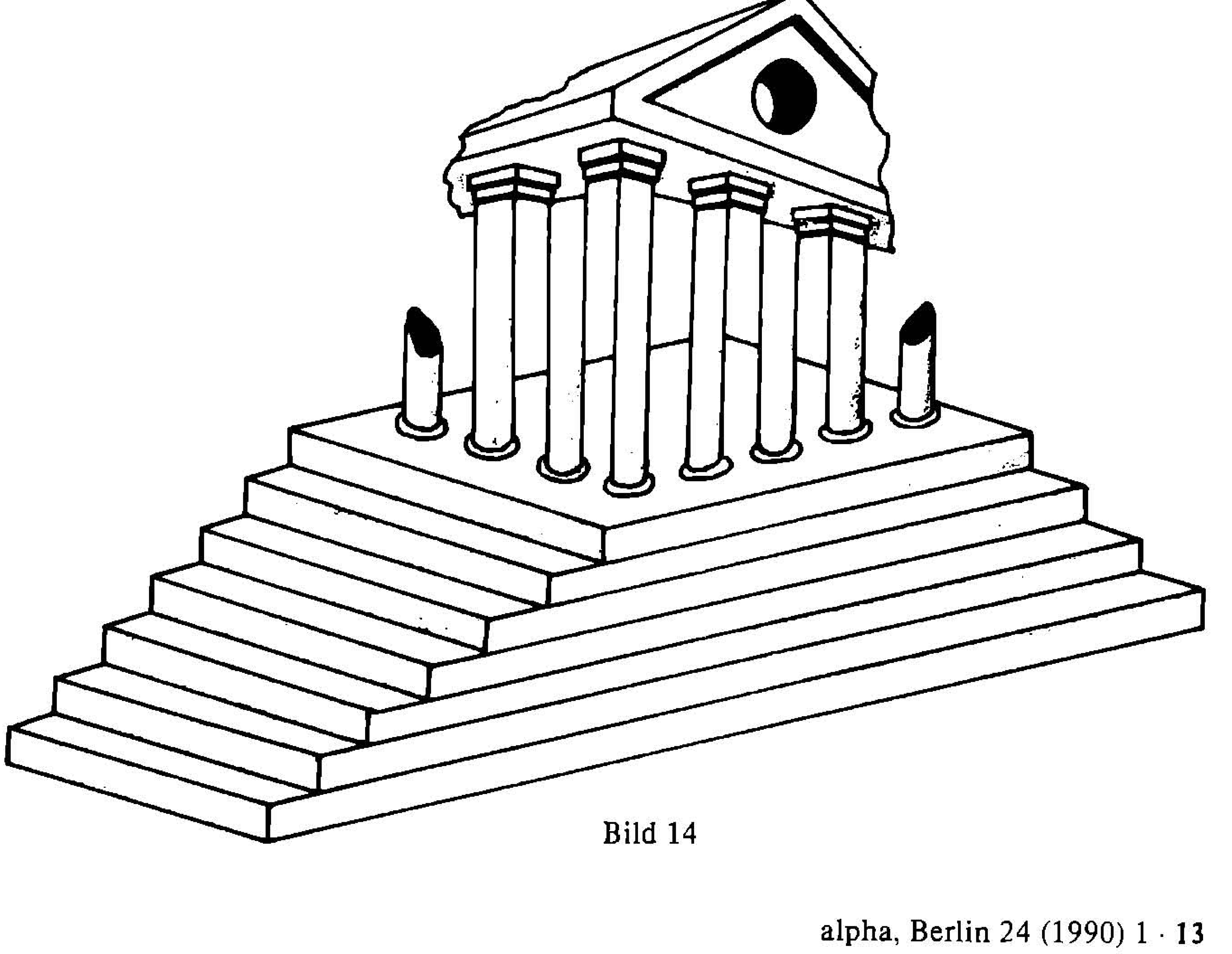


Bild 14

XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen der DDR-Olympiade

Die Aufgaben wurden in Heft 5/89 veröffentlicht.

Olympiadeklasse 10

281041 I. Wenn für eine natürliche Zahl n die genannte Zahl das Quadrat einer natürlichen Zahl k ist, so folgt

$2^8 + 2^{11} + 2^n = k^2$,

$2^n = k^2 - (1+8)\cdot 2^8 = k^2 - (3\cdot 2^4)^2$

$= (k-48)(k+48)$. (1)

Wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorenzerlegung muß

$k - 48 = 2^i,\ k + 48 = 2^j$ (2)

mit natürlichen Zahlen i, j sein.

Daraus folgt $i < j$ sowie

$2^j - 2^i = 96,\ 2^i\cdot(2^{j-i} - 1) = 2^5\cdot 3$.

Nochmals wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorenzerlegung und da $2^{j-i} - 1$ wegen $i < j$ ungerade ist, folgt $i = 5$, nach (2) also $k = 80$. Hieraus und aus (2) ergibt sich $j = 7$, woraus nach (1),

$2^n = 2^5\cdot 2^7$, $n = 12$ folgt.

II. In der Tat ist

$2^8 + 2^{11} + 2^{12} = (1 + 8 + 16)\cdot 2^8$

$= (5\cdot 2^4)^2$ eine Quadratzahl.

Mit I. und II. ist gezeigt, daß die genannte Zahl für genau eine natürliche Zahl n, nämlich genau für $n = 12$ eine Quadratzahl ist.

Bemerkungen: Der Aufgabentyp ist recht bekannt und bereitete den Teilnehmern kaum Schwierigkeiten. Wenn es überhaupt eine Schwierigkeit gab, so war es der des Nachweises von $n = 12$ als einziger Lösung, denn aus der binomischen Formel

$(2^4) + 2\cdot 2^4\cdot 2^6 + 2^n = k^2$ ist

$n = 2\cdot 6 = 12$ als Lösung sofort abzulesen.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	1	3	20	9	4	9	17	28

Dr. W. Harnau, Sektion Mathematik der PH „K. F. W. Wander" Dresden

281042 Für den geforderten Nachweis genügt es, ein Beispiel eines Paares von Funktionen f, g anzugeben und (1), (2), (3) für dieses Beispiel als erfüllt nachzuweisen. Ein solches Beispiel ist etwa:

Für alle reellen x sei $f(x) = 7\cdot 2^x$,

$g(x) = 1$. In der Tat erfüllen diese Funktionen (1) und (2) sowie wegen $f(x) \neq 0$ für alle x und

$$\frac{g(x)\cdot f(x+1)}{f(x)} = \frac{1\cdot 7\cdot 2^{x+1}}{7\cdot 2^x} = 2$$

$= g(2x) + 1$ auch (3).

Heuristisches Hilfsmittel zum Auffinden derartiger Beispiele kann es sein, einen Ansatz $g(x) = \text{const}$, z. B. $g(x) = 1$, zur Vereinfachung von (3) zu wählen und so zur Forderung $f(x+1) = 2\cdot f(x)$ zu gelangen (oder auch umgekehrt mit diesem Ansatz zur Forderung $2\cdot g(x) = g(2x) + 1$). So kann man eine Vielzahl weiterer Funktionenpaare f, g erhalten, z. B. für alle reellen x sei

$f(x) = 7\cdot 8^x$, $g(x) = x^3 + \frac{1}{7}$ oder mit

unstetigem f: $f(x) = 7\cdot 2^k$ in jedem Intervall $k \leqq x < k + 1$ (k ganzzahlig), $g(x) = x + 1$ für alle reellen x.

Bemerkungen: Zwei Drittel der Schüler konnten diese Aufgabe im wesentlichen lösen. Ein Drittel fand kein geeignetes Beispiel. 33 Teilnehmern mußte ein Punkt abgezogen werden, da sie für ihr Beispiel nicht vermerkten: $f(x) \neq 0$ für alle reellen x, so daß in (3) die Existenz des Ausdruckes $\frac{g(x)\cdot f(x+1)}{f(x)}$ nicht gesichert war. Weitere Ungenauigkeiten waren die Angabe von Funktionen ohne explizites Nennen des Definitionsbereiches und das Führen der Probe für (3) von der Behauptung zur wahren Aussage. Das ausführliche Schildern des Auffindens der Funktionenpaare führte bei einigen Schülern zu langen und unübersichtlichen Lösungsvorschlägen.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6
Anzahl	25	1	0	4	4	33	25

Dr. J. Prestin, Sektion Mathematik der W.-Pieck-Universität Rostock

281043A Um die Zahlen in der genannten Diagonale zu erreichen, hat man von der Zahl 41 aus, immer abwechselnd nach rechts oben und links unten Wege der Schrittlängen 1, 2, 3, 4, ... zu gehen. Mit der Formel

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ folgt damit, daß jede in der Diagonale stehende Zahl z ausgedrückt werden kann durch

$z = x^2 - x + 41$ $(x = 1, 2, 3, \ldots)$.

Nun konnte man sich auf die Aufgabe 281011 berufen, in der das Ergebnis von Euler zu überprüfen war, daß z für alle Zahlen $x = 1, 2, 3, \ldots, 40$ prim ist!

Bemerkungen: Das allerdings machte nicht ein Schüler der 36, die diese Aufgabe gewählt hatten. Unterschätzen unsere Schüler die Bedeutung der 1. Stufe der OJM?

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	1	0	4	5	5	9	8	4

Dr. H.-J. Sprengel, Sektion Mathematik/Physik der PH „K. Liebknecht" Potsdam

281043B Wir lösen folgende Verallgemeinerung der Aufgabenstellung: Es sei n, $n \geqq 1$, eine gegebene natürliche Zahl.

Über $2n + 1$ sonst beliebige Punkte in der Ebene werde vorausgesetzt, daß sich unter je drei dieser $2n + 1$ Punkte stets zwei befinden, deren Abstand voneinander kleiner als 1 cm ist.

a) Man beweise, daß aus dieser Voraussetzung stets folgt: Es gibt einen Kreis von Radius 1 cm, dessen Inneres $n + 1$ der $2n + 1$ Punkte enthält.

b) Man untersuche, ob aus dieser Voraussetzung stets folgt: Es gibt einen Kreis vom Radius 1 cm, dessen Inneres $n + 2$ der $2n + 1$ Punkte enthält.

Lösung dieser Verallgemeinerung:

a) Es sei k der Kreis um einen (beliebig gewählten) der $2n + 1$ Punkte mit dem Radius 1 cm. Für die Lage der anderen $2n$ Punkte gibt es nun folgende Möglichkeiten:

1. Fall: Der Kreis k enthält in seinem Inneren noch n weitere der $2n + 1$ Punkte. Dann ist er ein Kreis der behaupteten Art.

2. Fall: Der Kreis k enthält in seinem Inneren höchstens $n - 1$ weitere der $2n + 1$ Punkte. Dann gibt es auf dem Rand oder außerhalb von k noch $n + 1$ der $2n + 1$ Punkte. Einer von ihnen sei P. Für P und jeder der n anderen dieser $n + 1$ Punkte gilt: Sie haben beide vom Mittelpunkt des Kreises k Abstände nicht kleiner als 1 cm; nach Voraussetzung haben sie also voneinander einen Abstand kleiner als 1 cm. Folglich enthält das Innere des Kreises c um P mit dem Radius 1 cm auch jeden dieser n anderen Punkte, d. h., c ist ein Kreis der behaupteten Art.

b) Aus der Voraussetzung folgt nicht stets die Existenz eines Kreises der in b) genannten Art. Um dies zu beweisen, genügt es, ein Beispiel für $2n + 1$ Punkte in einer Ebene so anzugeben, daß sie zwar die Voraussetzungen erfüllen, daß aber kein Kreis vom Radius 1 cm existiert, dessen Inneres $n + 2$ der $2n + 1$ Punkte enthält. Ein solches Beispiel kann man folgendermaßen bilden:

Man wähle zwei Kreise k_1 und k_2 mit dem Radius $\frac{1}{2}$ cm, deren Mittelpunkte M_1, M_2 voneinander den Abstand l, $l > 3$ cm, haben. Im Inneren von k_1 wähle man $n + 1$ Punkte, im Inneren von k_2 n Punkte. Unter je drei dieser $2n + 1$ Punkte befinden sich dann stets zwei, die im Inneren desselben der beiden Kreise k_1, k_2 liegen und daher einen Abstand kleiner als 1 cm voneinander haben. Jeder Kreis c aber, dessen Inneres $n + 2$ der $2n + 1$ Punkte enthält, muß unter diesen $n + 2$ Punkten sowohl einen inneren Punkt P_1 von k_1 als auch einen inneren Punkt P_2 von k_2 enthalten. Nach der Dreiecksungleichung folgt, daß

$l\,\text{cm} = \overline{M_1M_2} \leqq \overline{M_1P_1} + \overline{P_1P_2} + \overline{P_2M_2} < \frac{1}{2}\text{cm}$

$+ \overline{P_1P_2} + \frac{1}{2}\text{cm}$, also $\overline{P_1P_2} > l - 1\,\text{cm}$

$> 2\,\text{cm}$ gelten muß und daher c einen Durchmesser größer als 2 cm haben muß. Somit kann es keinen Kreis mit dem Radius 1 cm geben, dessen Inneres $n + 2$ der

$2n+1$ Punkte enthält. Für $n=6$ erhält man aus dieser Verallgemeinerung die Lösung der Aufgabe 281043B.

Bemerkungen: Die Aufgabe wurde als angemessen eingeschätzt. Keinem Schüler gelang die (naheliegende) Verallgemeinerung. Von einigen Schülern wurde mit verschwommenen Begriffen und Vorstellungen vom „Abstand von Punktmengen" operiert. Ein Gegenbeispiel wurde teilweise mit recht allgemeinen Bemerkungen (auch in Verbindung mit Teil a)) angegeben. Die Angabe einer konkreten Punkteverteilung fehlte dann. Rund 60% der Schüler wählten diese Wahlaufgabe.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	4	3	3	2	6	9	6	23

Dr. W. Moldenhauer, Sektion Mathematik der PH „Dr. Th. Neubauer" Erfurt/Mühlhausen

281044 I. Wie man durch Ausmultiplizieren leicht bestätigen kann, gilt

$x^4-6x^3+14x^2-24x+40$
$=(x^2+4)(x^2-6x+10)$
$=(x^2+4)((x-3)^2+1)$.

Für alle reellen x gilt
$x^2+4>0$ und $(x-3)^2+1>0$.
Folglich gibt es kein reelles x, für das das Produkt 0 wäre.

II. $x^4-6x^3+14x^2-24x+40$

$$=x^2(x^2-6x+9)+5\left(x^2-\frac{24}{5}x+\frac{144}{25}\right)-\frac{144}{5}+40$$
$$=x^2(x-3)^2+5\left(x-\frac{12}{5}\right)^2+\frac{56}{5}\geqq\frac{56}{5}>0$$

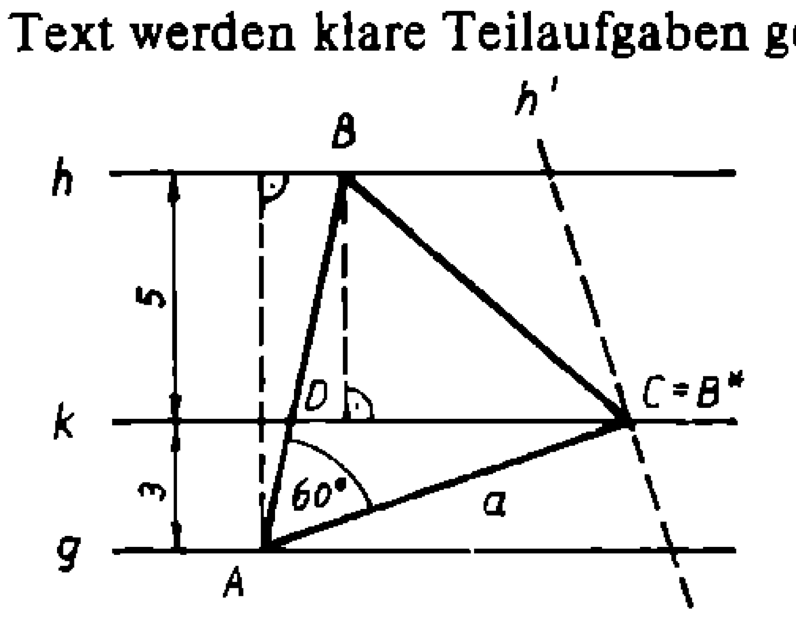
für alle reellen x.

Bemerkungen: Eine für die DDR-Olympiade Klasse 10 relativ leichte Aufgabe. Im Aufgabentext („... für *keine* reelle Zahl x ...") ist die Zielrichtung der Lösung schon mit vorgegeben.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6
Anzahl	7	2	4	8	8	8	55

Dr. N. Grünwald, Sektion G der IH für Seefahrt Warnemünde/Wustrow

281045 Die Problemstellung bietet eigentlich ein bekanntes Paradebeispiel für den vorteilhaften Einsatz von Bewegungen. Im Text werden klare Teilaufgaben gestellt.



Um so mehr überrascht, daß eine Reihe von Schülern recht aufwendige und hinsichtlich der verschiedenen Teilfragen undifferenzierte Darlegungen vorlegte. Nur ein geringer Teil der Schüler setzte die Drehung mit dem Drehwinkel von 60° um einen auf g beliebig gewählten Punkt A ein. Das Bild h' der Geraden h bei dieser Drehung schneidet die Gerade k in einem Punkt C. Die Punkte A, B und das Urbild, B von C auf der Geraden h bilden ein gleichseitiges Dreieck. Damit ist konstruktiv sowohl die Existenz eines geeigneten Dreiecks als auch seine Seitenlänge ausgewiesen.

Nur die rechnerische Bestimmung der Seitenlänge (etwa über geeignete rechtwinklige Teildreiecke) unter der Voraussetzung eines Dreiecks bereitete den Teilnehmern i. a. keine Schwierigkeiten; man erhält $a=\frac{14}{3}\sqrt{3}$.

Mehrere Schüler nutzten die Einsicht, daß k die Seite $\overline{AB}$ eines derartigen Dreiecks im Verhältnis 3 : 5 teilen muß. Sie gingen deshalb von einem beliebigen gleichseitigen Dreieck $A'B'C'$ oder einem solchen mit der Seitenlänge $a=\frac{14}{3}\sqrt{3}$ aus, bestimmten den Punkt D', der $\overline{A'B'}$ im Verhältnis 3 : 5 teilt, zogen die Verbindungsgerade $C'D'$ und dazu die Parallelen durch A' und B'. Um auf die gegebenen Maße zu kommen, wurde erforderlichenfalls noch eine Streckung durchgeführt. Einige von ihnen übersahen bei einer derartigen Vorgehensweise aber, daß die Geraden g, h und k vorgegeben sind und nicht im nachhinein einem Dreieck der Seitenlänge $a=\frac{14}{3}\sqrt{3}$ angepaßt werden dürfen.

Der Punktespiegel zeigt dennoch, daß die Aufgabe im Grunde genommen zu leicht war. Bei der Arbeit mit Schülern sollte auch in der Klassenstufe 10 Wert auf Kenntnis und Verwendung einfacher und der Aufgabenstellung angemessener Mittel und auf klare Darlegungen gelegt werden.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	3	2	4	4	11	12	14	42

Dr. E. Quaisser, Sektion Mathematik/Physik der PH „K. Liebknecht" Potsdam

281046 Diese Aufgabe war eindeutig die schwierigste in der Olympiadeklasse 10. Nur 22 Schüler der 92 konnten sie lösen! Die kürzesten Lösungen erbrachten die 9 Schüler, die eine Lösung angaben und durch Einsetzen diese Eigenschaft, Lösung zu sein, nachwiesen.

Eine Lösung ist $x=2\sqrt{\frac{(b^2+bc+c^2)}{3}}$,

$y=2\sqrt{\frac{(c^2+ca+a^2)}{3}}$,

$z=2\sqrt{\frac{(a^2+ab+b^2)}{3}}$.

13 Schüler erkannten, daß der Term $\frac{d}{2}\sqrt{3}$ auf die Höhe im gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge d hinwies. Nach einem bekannten Satz ist dann a, b als auch c als Abstand eines Punktes P im Inneren des Dreiecks von den Seiten zu interpretieren. Nun muß man umgekehrt zeigen, daß zu vorgegebenen Zahlen a, b, c und d ein zugehöriger Punkt P existiert. Aus dem Satz des Pythagoras ergibt sich dann, daß x, y, z existieren, nämlich als Abstände des Punktes P von den Eckpunkten des gleichseitigen Dreiecks.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	60	10	-	-	5	-	7	10

Dr. H. Sprengel, Sektion Mathematik/Physik der PH „K. Liebknecht" Potsdam

Olympiadeklasse 11/12

281241 Von den Schülern wurden drei recht unterschiedliche Lösungswege beschritten, die hier kurz skizziert werden sollen.

1. Lösung: Angenommen es existiert eine Lösung (x,y,z) des Gleichungssystems (I, II), dann gilt

(II') $\quad x=\sqrt{14}-2y-3z$ bzw.

(II'') $\quad x=14+4y^2+9z^2-4\sqrt{14}y-6\sqrt{14}z+12yz$.

Einsetzen in (I) führt zu

(I') $\quad y^2-\left(\frac{4}{5}\sqrt{14}-\frac{12}{5}z\right)y+2z^2-\frac{6}{5}\sqrt{14}z+\frac{13}{5}=0$.

Als quadratische Gleichung für y aufgefaßt, folgt

$$y_{1,2}=\frac{1}{5}(2\sqrt{14}-6z)\pm\frac{1}{5}\sqrt{56-24\sqrt{14}z+36z^2-50z^2+30\sqrt{14}z-65}.$$

Der Radikant $R=-\left(\sqrt{14}z-3\right)^2\leqq 0$; also ergibt sich als notwendige Bedingung für die Lösung, daß $z=\frac{3}{\sqrt{14}}$ ist, woraus $y=\frac{2}{\sqrt{14}}$ und $x=\frac{1}{\sqrt{14}}$ folgt. Davon, daß $\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$ tatsächlich Lösungstripel ist, überzeugt man sich durch die Probe.

2. Lösung: Werden x, y, z als karthesische Koordinaten im Raum aufgefaßt, so liegt jeder Punkt $P(x,y,z)$, der (I) genügt, auf der Einheitskugel mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung.

Die Transformation der Ebenengleichung (II) in die Hessesche Normalform ergibt: (x,y,z) ist Lösung von

(II) $\quad x+2y+3z=\sqrt{14}$

genau dann, wenn (x,y,z) Lösung von

(IIa) $$\frac{x}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}+\frac{2y}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}+\frac{3z}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}-\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\frac{1}{\sqrt{14}}x+\frac{2}{\sqrt{14}}y+\frac{3}{\sqrt{14}}z-1=0$$

ist. Also ist der Abstand der durch (II) beschriebenen Ebene vom Koordinatenursprung gleich 1. Dieser Abstand wird in genau einem Punkt der Ebene angenommen, woraus folgt, daß (I, II) genau eine Lösung besitzt. Aus der Transformation in die Hessesche Normalform ist bereits bekannt, daß $1^2+2^2+3^2=14$ ist.

Hieraus erkennt man sofort

$(x,y,z)=\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$

als Lösung.

3. Lösung: Nach der bekannten Ungleichung zwischen arithmetischem und quadratischem Mittel gilt für beliebige reelle Zahlen x,y,z:

(*) $$\frac{1}{14}\left(x+4\frac{y}{2}+9\frac{z}{3}\right)\leqq\sqrt{\frac{1}{14}\left(x^2+4\left(\frac{y}{2}\right)^2+9\left(\frac{z}{3}\right)^2\right)}$$

bzw.

(**) $x + 2y + 3z = \sqrt{14}\,(x^2 + y^2 + z^2)$.
Angenommen (x, y, z) ist Lösung von (I, II), dann gilt in (**) das Gleichheitszeichen. Dies trifft jedoch genau dann zu, wenn alle Summanden gleich sind, d. h. wenn $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ ist, woraus unmittelbar folgt, daß (x, y, z)
$= \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$ die Lösung ist.

Punkte	0	1	2	3	4	5
Anzahl	6	2	9	3	3	52

Dr. M. Noack, Ministerium für Hoch- und Fachschulwesen Berlin

281242 Für eine feste natürliche Zahl $n \geqq 1$ machen wir den Ansatz $f(x) = ax$ mit einer Konstanten a. Nach (3) ist dann $f_k(x) = a^k x$ für $k = 1, 2, \ldots, n+1$ und es soll gelten $ax + a^2x + \ldots a^n x = a^{n+1}x$.
Wegen (2) ist $a \neq 0$ und es folgt

(4) $\frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{a} = 1$.

Zum Nachweis, daß es eine Zahl $a \neq 0$ gibt, die die Gleichung (4) erfüllt, betrachten wir die für $t > 0$ stetige Funktion

$g(t) = \frac{1}{t^n} + \frac{1}{t^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{t}$.

Wegen $\lim\limits_{t \to 0} g(t) = \infty$ und

$g(1) = \frac{1}{n}$ folgt unter Beachtung der Stetigkeit von $g(t)$ die Existenz einer Zahl a mit $0 < a \leqq 1$ und $g(a) = 1$. Die Funktion $f(x) = ax$ mit dieser Zahl a erfüllt alle drei Bedingungen (1), (2), (3).

Punkte	0	1	2	3	4	5	6
Anzahl	13	14	3	2	3	3	37

Dr. M. Krüppel, Sektion Mathematik/Physik der PH „L. Herrmann" Güstrow

281243 X sei innerer Punkt des konvexen n-Ecks $P_1P_2 \ldots P_n$. Dann gilt für den Flächeninhalt F_i des Teildreiecks P_iXP_{i+1} $(i = 1, 2, \ldots, n;\ P_{n+1} = P_1)$

$2F_i = \overline{P_iX} \cdot \overline{P_{i+1}X} \cdot \sin \sphericalangle P_iXP_{i+1} \leqq \overline{P_iX} \cdot \overline{P_{i+1}X}$. (1)

Für beliebige reelle Zahlen a, b gilt wegen $(a - b)^2 \geqq 0$

$ab \leqq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$. Damit folgt aus (1)

$2F_i \leqq \overline{P_iX} \cdot \overline{P_{i+1}X} \leqq \frac{1}{2}(\overline{P_iX}^2 + \overline{P_{i+1}X}^2)$. (2)

Das Gleichheitszeichen in (1) gilt genau dann, wenn $\sin \sphericalangle P_iXP_{i+1} = 1$ ist, wegen der Lage von X also genau dann, wenn $\sphericalangle P_iXP_{i+1} = 90°$ gilt. Das Gleichheitszeichen in (2) gilt genau dann, wenn $\overline{P_iX} = \overline{P_{i+1}X}$ gilt. Aus (1) und (2) folgt für den Flächeninhalt F von $P_1P_2 \ldots P_n$

$2F = \sum\limits_{i=1}^{n} 2F_i \leqq \overline{P_1X}^2 + \overline{P_2X}^2 + \ldots + \overline{P_nX}^2$. (3)

Das Gleichheitszeichen in (3) gilt genau dann, wenn für jedes i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ das Gleichheitszeichen in (1) und in (2) gilt, d. h. genau dann, wenn jedes Teildreieck P_iXP_{i+1} rechtwinklig und gleichschenklig ist. Gibt es in $P_1P_2 \ldots P_n$ einen inneren Punkt X, für den in (3) das Gleichheitszeichen steht, so folgt wegen

$\sum\limits_{i=1}^{n} \sphericalangle P_iXP_{i+1} = 360°$ und $\sphericalangle P_iXP_{i+1} = 90°$

für $i = 1, 2, \ldots, n$ notwendig $n = 4$. Es sind alle Teildreiecke P_iXP_{i+1} kongruent (sws), und es folgt
$\overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = \overline{P_3P_4} = \overline{P_4P_1}$ und die Gleichheit der Innenwinkel im Viereck $P_1P_2P_3P_4$. Das Viereck muß aber ein Quadrat sein. Jedes Quadrat erfüllt auch die gestellten Bedingungen, denn für den Mittelpunkt X eines Quadrates mit der Kantenlänge a gilt $\overline{P_iX} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ und folglich

$\overline{P_1X}^2 + \overline{P_2X}^2 + \overline{P_3X}^2 + \overline{P_4X}^2 = 4 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot 2 = 2a^2 = 2F$.

Bemerkungen: Fast alle Schüler fanden zu dieser relativ leichten Aufgabe einen Zugang. Auf die Abschätzung (1) wurde durch die Aufgabenstellung orientiert. Die Abschätzung $a^2 + b^2 \geqq 2ab$ für reelle Zahlen a, b gehört zum Handwerkszeug fast jedes Schülers, der die 4. Stufe der Mathematikolympiade erreicht.
Für die Ableitung der Ungleichung (3) gab es verschiedene Lösungsvorschläge. Neben individuellen, untypischen Fehlern mußte in einigen Fällen das Fehlen des Nachweises bestraft werden, daß jedes Quadrat den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	7	15	2	1	4	2	8	36

Dipl.-Math. B. Noack, Amt für Erfindungen und Patentwesen Berlin

281244 Für eine Kombination $k = (k_1, k_2, k_3)$ werde genau dann gesagt, sie „überdecke" (a_1, a_2, a_3), wenn sie mindestens zwei der drei Bedingungen $k_i = a_i$ erfüllt. Die acht möglichen Werte der a_i seien o. B. d. A. die Zahlen $0, 1, \ldots, 7$.
I. Es seien S, T, U die Mengen
$S = \{(0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (1,1,1)\}$,
$T = \{(0,0,2), (0,2,0), (2,0,0), (2,2,2)\}$,
$U = \{(0,0,0), (4,4,4)\}$.
Die 32 Kombinationen $k = s + t + u$ $(s \in S,\ t \in T,\ u \in U)$ bilden ein Beispiel für Kombinationen, mit denen alle 8^3 Kombinationen (a_1, a_2, a_3) überdeckt werden. Um dies zu beweisen, sei eine beliebige dieser Kombinationen (a_1, a_2, a_3) betrachtet. Man setze zunächst

$$u = (u_1, u_2, u_3) = \begin{cases} (0,0,0), & \text{falls mindestens zwei } a_m, a_n \leqq 3 \text{ sind } (m \neq n) \\ (4,4,4) & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1)$$

Hiernach gibt es stets zwei Indizes $m < n$ so, daß für $i = m$ und für $i = n$ gilt: Die Zahl $b_i = a_i - u_i$ (2)
erfüllt $0 \leqq b_i \leqq 3$; also existieren
$s_i \in \{0; 1\}$, $t_i \in \{0; 2\}$ (3)
mit $b_i = s_i + t_i$. (4)
Für jede Möglichkeit des Indexpaares $(m; n) = (1;2), (1;3), (2;3)$ und für jede gemäß (3) bestehende Möglichkeit der s_i, t_i findet man nach Definition von S und T ein $s = (s_1, s_2, s_3) \in S$ und ein $t = (t_1, t_2, t_3) \in T$, in denen s_m, s_n bzw. t_m, t_n gerade die Zahlen aus (3) und (4) sind. Die hiermit sowie mit u aus (1) gebildete Kombination $k = (k_1, k_2, k_3) = s + t + u$ erfüllt nach (4) und (2) die beiden Bedingungen $k_i = s_i + t_i + u_i = b_i + u_i = a_i$ $(i = m, n)$,
w. z. b. w. Fortsetzung in Heft 2/90.

Ein Bericht

7. Zentrale Wissenschaftliche Studentenkonferenz Mathematik

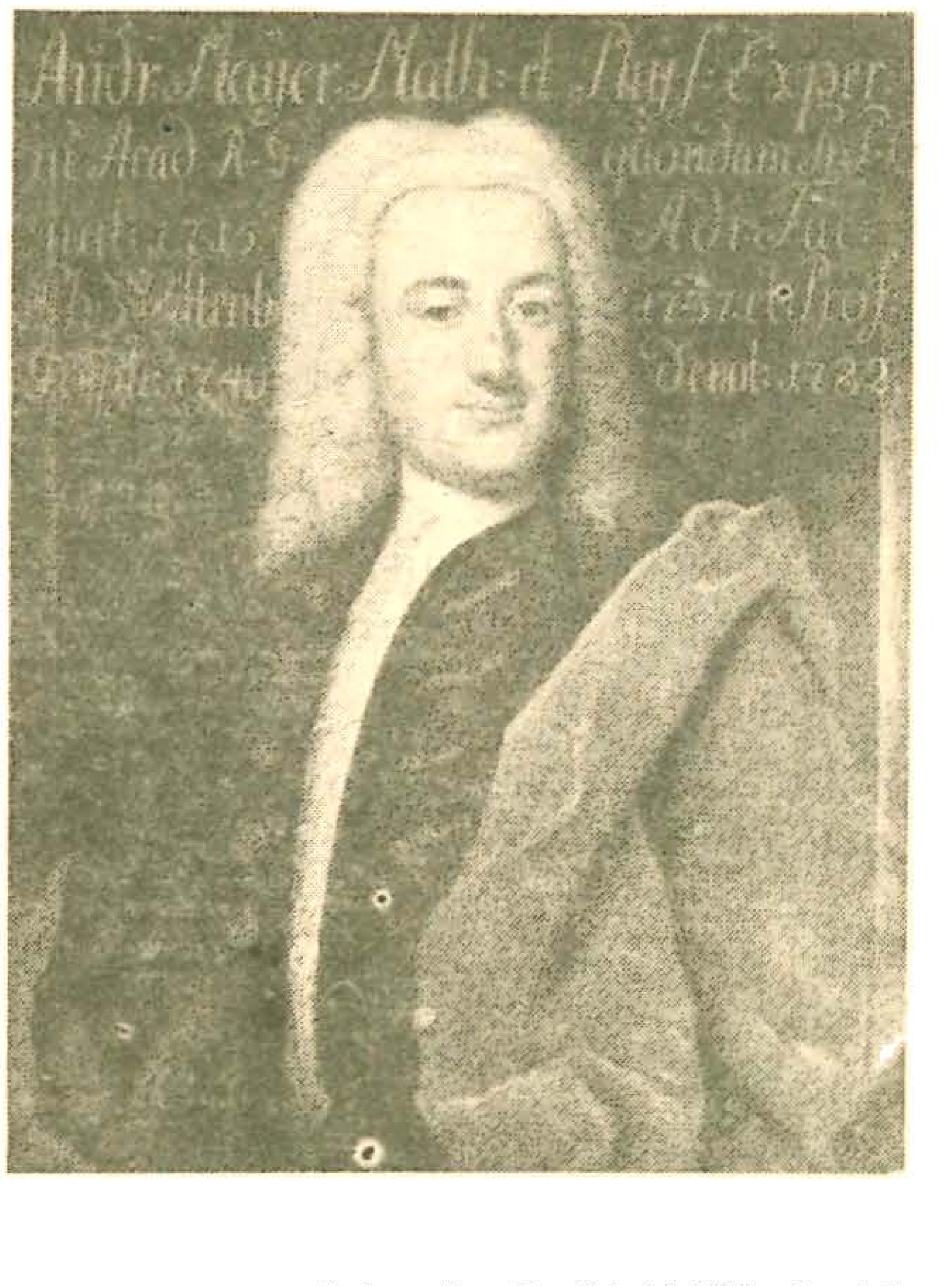
Die Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald war am 29. und 30. September 1989 Gastgeber der vom Wissenschaftlichen Beirat für Mathematik beim Ministerium für Hoch- und Fachschulwesen, der Zentralen Fachkommission Mathematik beim Ministerium für Volksbildung und beim Ministerium für Hoch- und Fachschulwesen, der Mathematischen Gesellschaft der DDR sowie dem Zentralrat der FDJ veranstalteten Konferenz. Zu diesem turnusmäßig alle 2 Jahre stattfindenden Treffen hatte eine Ausschreibung die Studenten und jungen Wissenschaftler von Mathematiksektionen der Universitäten, Technischen Hochschulen und Pädagogischen Hochschulen aufgerufen.
Mit ihren Beiträgen sollten sie schon in ihrem Studium bzw. Forschungsstudium bekunden, was sie zur Lösung von Aufgaben ihrer Wissenschaftsdisziplin oder bei der Anwendung der Mathematik in anderen Wissenschaften sowie in der gesellschaftlichen Praxis zu leisten vermögen. Dazu konnten Betriebspraktikums- oder Jahresarbeiten, Ergebnisse von Jugendobjekten oder besonderen Förderungsmaßnahmen, Veröffentlichungen vor der Diplomarbeit, Diplomarbeiten und termingerecht fertiggestellte Dissertationen eingereicht werden (eine Dissertation ist eine wissenschaftliche Arbeit zur Erlangung des Doktorgrades). Der Grundlagen- und Praxisforschung zugehörige Resultate waren gemäß der in der DDR betriebenen sieben mathematischen Hauptforschungsrichtungen gefragt: Algebra und Geometrie; Analysis; Optimierung; Numerische Mathematik, Stochastik (Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik); Mathematische Grundlagen der Informationsverarbeitung; Diskrete Mathematik; Algebra und Logik.
Es wurden 128 Arbeiten eingereicht, davon wählte die Jury 65 auf Grund ihrer Qualität zum Vortrag bei der ZWSK aus. Über die üblichen sieben Konferenzsektionen hinaus wurde erstmalig noch eine 8. Sektion eingerichtet. Diese hatte die Computerunterstützte Mathematik von Diplomlehrerstudenten zum Inhalt.
Zur feierlichen Eröffnung der Konferenz, die der Rektor der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald OPhR Prof. Dr. P. Richter vornahm, versammelten sich die Teilnehmer und Gäste in der ehrwürdigen Aula. Ein Festvortrag von Akademiemitglied Prof. Dr. W. Ebeling, Humboldt-Universität zu Berlin, widmete sich den mathe-

matischen Modellen von Prozessen der Selbstorganisation und Evolution. Danach begann das Programm in den Konferenzsektionen. Es überstrich einen großen Teil der aktuellen mathematischen Forschung in der DDR.
Die drei Plenarvorträge wurden von den jungen Wissenschaftlern Dr. Gabriele Steidl (Wilhelm-Pieck-Universität Rostock) und Dr. Jacob Spies (Humboldt-Universität Berlin) sowie dem Studenten Jörg Stahnke (Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald) bestritten. Dr. Steidl, die inzwischen auf eine Reihe wissenschaftlicher Veröffentlichungen verweisen kann, legte in ihrem Vortrag „Grundlagen schneller Algorithmen für verallgemeinerte diskrete Fouriertransformationen" eigene Beiträge zur Begründung einer möglichst schnellen Lösung spezieller Probleme auf dem Computer dar. Dr. Spies und J. Stahnke stellten größere Forschungsergebnisse aus ihren Arbeitsgebieten vor. Dies betraf Zusammenhänge zwischen Kurven und Differentialgleichungen bzw. die mathematische Modellierung physikalischer Prozesse auf Fraktalen – das sind grob gesprochen stark zerklüftete Medien mit einer gewissen regelmäßigen Struktur. Erste Preise, teilweise in Form einer Freundschaftsreise, wurden vergeben für zwei Dissertationen, zwei Diplomarbeiten und zwei herausragende Beiträge für Vorstufen von Dissertationen. Diese sechs erstrangigen Arbeiten enthalten auch aus internationaler Sicht bedeutende Resultate.
J. Tschinkel, Moskau, erhielt für seine bemerkenswerten Forschungsresultate als 1. Preis den Ehrenpreis des Ministers für das Hoch- und Fachschulwesen. Des weiteren erfolgten noch Auszeichnungen mit zehn zweiten und 18 dritten Preisen. Insgesamt wurden schöne Leistungen geboten.
Noch ein Wort zum Trend! Neben die klassischen Untersuchungsmethoden der „Studierstuben", wo man mit der reinen Kraft des Nachdenkens und Analysierens den Problemen zu Leibe rückt, tritt mehr und mehr die Benutzung des Computers. Die Computer haben bekanntlich eine umwälzende Entwicklung großen Stils gebracht, die alle Kulturstaaten der Erde erfaßt und noch manche Überraschungen bescheren wird. Die Computer sind mehr als ein Bindeglied von der Theoretischen Mathematik zur Praxis. Mit dem Computer erwächst auch dem theoretisch forschenden Mathematiker ein wirksames Hilfsmittel. Diesen Trend spiegelte die Konferenz schon deutlich wider. Für die Sektion Numerische Mathematik war und ist das ein gewohntes Bild. Für die anderen klassischen Sektionen schält sich diese Seite jetzt nachdrücklicher heraus. Die Konferenzsektion Computerunterstützte Mathematik von Lehrerstudenten zeigt, daß in der Lehrerausbildung die Computeraspekte einen größeren Spielraum erhalten. Solche Erscheinungen werden sich nach und nach natürlich auch in unseren Schulen stärker bemerkbar machen.
Im folgenden wollen wir auf ein ausgewähltes Thema der 7. ZWSK näher eingehen. Die Auswahl ist von uns einzig und allein danach vorgenommen worden, daß wir uns dem Leser schnell verständlich machen können. Die Simulation (Nachahmung) realer Prozesse mit zufälligem Ausgang mittels Computer gewinnt in der Gegenwart immer stärkere Bedeutung. Das Ziel dieses Verfahrens besteht darin, mit Hilfe geeigneter mathematischer Modelle Aussagen über technische und naturwissenschaftliche Vorträge zu erhalten, insbesondere z. B. dann, wenn diese für vernünftige Beobachtungen etwa zu schnell (wie beim Teilchenzerfall) bzw. zu langsam (wie bei Vererbungsprozessen) ablaufen oder für den Beobachter zu gefährlich sind (wie bei der Radioaktivität). In seiner im Rahmen der gegenwärtigen Diskussion der Einbeziehung wahrscheinlichkeitstheoretischer Inhalte in die Schulbildung sehr interessanten Diplomarbeit „Grundlagen für Simulation von Vorgängen mit zufälligem Ergebnis auf Beispiele für Anwendungen in der Schule" zeigt Thomas Machmer (Humboldt-Universität Berlin), daß mit relativ geringen Kenntnissen und ohne großen Aufwand für die Schule nutzbare Computerprogramme erstellt werden können.
Als Beispiele wählt der Autor u. a. den Neutronendurchgang durch eine Platte und das Wirken der Mendelschen Gesetze in der Vererbung. Die Idee der Simulation wollen wir an einem Beispiel erläutern.
Nehmen wir einmal an, wir würden ein physikalisches Experiment sehr oft unter gleichen Bedingungen durchführen und dabei jeweils eine physikalische Größe messen. Setzen wir weiter voraus, daß die Meßergebnisse im Intervall von 0 bis 1 gleichverteilt sind. Dann können wir dieses Experiment durch ein in einem Computer ablaufendes Programm simulieren.
Ließe man dieses Programm sehr oft wiederholt ablaufen, müßte jede im Ausgabebereich des Computers zwischen 0 und 1 liegende Zahl etwa gleich oft erscheinen. Ein solches Programm ist auf den meisten Kleinrechnern durch die RND-Funktion realisiert.
T. Machmer gibt in seiner Arbeit einen kleinen Katalog von Schüleraufgaben an. Eine davon möchten wir dem Leser mit Programmiererfahrung in etwas abgewandelter Form zur Lösung mittels Computer empfehlen. Die Aufgabe soll lauten: Wie kann man durch die RND-Funktion unter Ausnutzung des Verhältnisses des Flächeninhaltes eines Quadrates und seines Innenkreises die Zahl π durch eine näherungsweise relative Häufigkeit bestimmen? Welches Trefferexperiment hat man dafür zu simulieren?

J. Flachsmeyer, K. Keller

Hauptgebäude der Universität Greifswald, erbaut in den Jahren 1747 bis 1750 unter der Leitung des Mathematikprofessors Andreas Mayer

Prof. Andreas Mayer (1715 bis 1782)
Ölgemälde im Besitz der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald



Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 1. Mai 1990

Ma 5 ■ 3077 Martin geht einkaufen; dafür erhält er von seiner Mutter 5 M. Außerdem bringt er noch leere Flaschen zu 30 Pf bzw. 20 Pf Pfandgeld mit in die Kaufhalle. Als er die leeren Flaschen zählt, stellt er fest, daß es insgesamt 22 Flaschen sind, aber 4 Flaschen zu 30 Pf Pfandgeld mehr als Flaschen zu 20 Pf Pfandgeld. Nach der Flaschenabgabe kauft Martin zwei Stück Butter zu je 2,40 M, zwei Flaschen Milch zu je 0,56 M einschließlich Pfandgeld, ein Brot zu 0,62 M und ein Glas Marmelade zu 1,09 M. Wieviel Geld behält Martin übrig, wenn er das Pfandgeld für die zurückgegebenen leeren Flaschen zu den von der Mutter erhaltenen 5 M hinzuzählt?

Schülerin A. Braun, Torgau

Ma 5 ■ 3078 Beate verbrachte 59 Tage hintereinander bei ihren Großeltern. Sie schickte jeden Sonntag einen Brief zu ihren Eltern. Wie viele Briefe schrieb Beate mindestens und wie viele höchstens?

Schülerin I. Biziak, Dreitzsch

Ma 5 ■ 3079 Von drei Freunden mit den Rufnamen Maik, Sven, Udo und den Nachnamen Meier, Schulz, Schmitt ist folgendes bekannt:

(1) Maik und Schulz sind jeder ein Jahr älter als Sven.
(2) Sven und Schmitt wohnen im gleichen Haus.
(3) Alle drei Freunde sind zusammen 35 Jahre alt.

Wie heißen die drei Freunde mit Vor- und Nachnamen und wie alt ist jeder von ihnen? *Schülerin H. Engel, Brotterode*

Ma 5 ■ 3080 Ein Gartengrundstück in Form eines Quadrates und mit einem Flächeninhalt von 625 m^2 ist von einem 1 m hohen Bretterzaun umgeben, der mit Farbe angestrichen werden soll. Für einen Quadratmeter Zaunfläche benötigt man eine halbe Dose Farbe.
Wie viele Dosen Farbe werden zum Anstreichen des Zaunes benötigt?

Schüler Ch. Schreiter, Fürstenwalde

Ma 5 ■ 3081 Eine Familie besteht aus zwei Kindern, ihrem Vater, ihrer Mutter und ihrer Großmutter. Von diesen fünf Personen ist folgendes bekannt:

(1) Der Vater ist drei Jahre älter als seine Frau, aber 34 Jahre jünger als seine Mutter, die Großmutter der zwei Kinder.
(2) Annett ist 7 Jahre jünger als ihr Bruder Frank.
(3) Vor 5 Jahren war Frank doppelt so alt wie Annett.
(4) Annett, Frank und ihre Großmutter sind zusammen 110 Jahre alt.

Ermittle das Lebensalter jeder dieser fünf Personen! *Schülerin U. Kehr, Naumburg*

Ma 5 ■ 3082 Ein Speiseeis mit Früchten kostet 0,80 M; die Früchte kosten 20 Pf mehr als das Speiseeis. Wie teuer ist das Speiseeis ohne Früchte?

Schülerin I. Biziak, Dreitzsch

Ma 5 ■ 3083 Jirka sagt: „Als mein Vater 28 Jahre alt war, war ich 6 Jahre alt. Jetzt ist mein Vater dreimal so alt wie ich." Wie alt ist Jirka jetzt?

Schülerin I. Biziak, Dreitzsch

Ma 6 ■ 3084 Hans fragt Bruno, wieviel eineinhalb Drittel von 218 sind. Bruno überlegt kurz und nannte dann die richtige Antwort. Wie lautet sie? *Sch.*

Ma 6 ■ 3085 Gegeben sei ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB}$. Die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle BAC = \alpha$ schneide $\overline{BC}$ in einem inneren Punkt D so, daß $\overline{AB} = \overline{AD}$ gilt.
Berechne die Größen der Innenwinkel dieses gleichschenkligen Dreiecks.

Mathematiklehrer J. Kreusch, Löbau

Ma 6 ■ 3086 Welche durch 7 (ohne Rest) teilbare, kleinste natürliche Zahl läßt bei Division durch 2, 3, 4, 5 oder 6 stets den Rest 1? *Sch.*

30	Ellen Stelzner Otto-Grotewohl-Straße 28 Jena - Lobeda 6902 150	Dr.-Theodor-Neubauer-OS Klasse 7	40	Ma 7 ■ 2991
	Prädikat:		10	
	Lösung:			

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
Postfach 14
Leipzig
7027

3. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. (Die Klassenstufennummer steht vor der Aufgabennummer.) Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12 oder Na/Te 10/12 gekennzeichnet sind.
4. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (siehe Muster), da die eingehenden Lösungen aufgabenweise sortiert und korrigiert werden. Noch eine Bitte an die Schulen: Sendet bitte die Lösungen bereits nach Aufgaben sortiert ein.
5. Teilnehmer, die eine richtige Lösung (nicht nur Antwortsatz) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Anderenfalls erhalten sie eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst". Nach dem Einsendetermin eingehende Lösungen werden nicht mehr bearbeitet!
6. Jeder Teilnehmer sollte einen Durchschlag seiner Lösungen anfertigen, um sie mit den jeweils zwei Hefte später erscheinenden Lösungen vergleichen zu können.

Der Jahreswettbewerb 1989/90 läuft von Heft 5/1989 bis Heft 1/1990. Zwischen dem 1. und 10. September 1990 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/89 bis 1/90 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden ab Heft 6/90 veröffentlicht.
Wer mindestens 10 Antwortkarten (von den Wettbewerben der Hefte 5/89 bis 1/90) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein *alpha*-Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1989/90 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunde zurück). Schüler, die schon mehrere Jahre teilnehmen, senden bitte die zuletzt erhaltene Urkunde mit ein. Allein anhand dieser werden die Teilnehmerlisten aufgestellt. Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

Ma 6 ■ 3087 In einem Dreieck ist eine Seite 3 cm, eine andere 1 cm lang. Die Maßzahl des Umfangs dieses Dreiecks (gemessen in cm) ist eine natürliche Zahl. Wie lang ist der Umfang dieses Dreiecks?

Schülerin I. Biziak, Dreitzsch

Ma 6 ■ 3088 Einer Schulklasse gehören mehr als 20, aber weniger als 40 Schüler an. Kein Schüler dieser Klasse erhielt als Jahresendzensur im Fach Mathematik die Note 5, jeder neunte Schüler die Note 1, jeder dritte Schüler die Note 2, jeder sechste Schüler die Note 4. Wie viele Schüler dieser Klasse erhielten als Jahresendzensur im Fach Mathematik die Note 3?

Schüler J. Bergmann, Unterbreizbach

Ma 6 ■ 3089

$$\begin{array}{r} \text{M A T H E} \\ +\text{M A T H E} \\ \hline \text{A L P H A} \end{array}$$

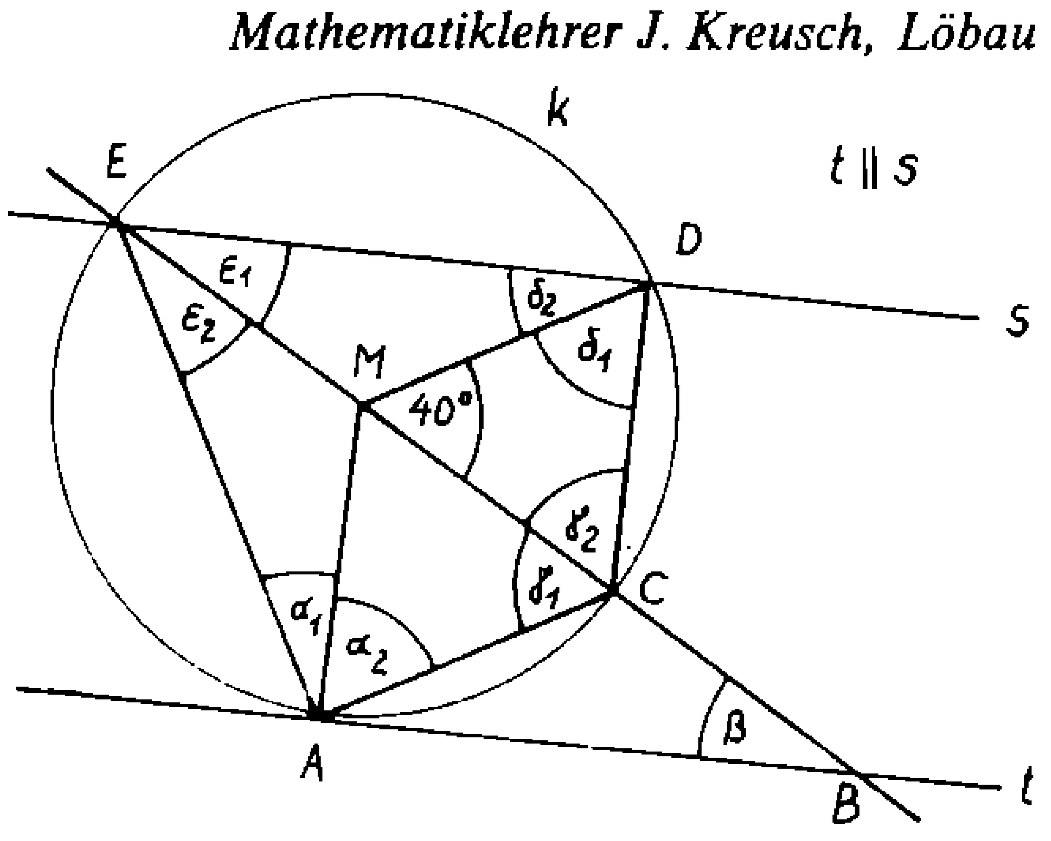
Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. Finde mindestens eine Lösung. *Mathematiklehrer J. Kreusch, Löbau*

Na/Te 6 ■ 469 Ein kleines Gefäß ist mit Wasser gefüllt und hängt an einem Federkraftmesser. Die Feder wird um 1 cm gedehnt. An Stelle des Wassers wird Quecksilber in das Gefäß gefüllt. Wie groß ist nun die Längenänderung? Die Gewichtskraft des Gefäßes wird vernachlässigt. *R.*

Ma 7 ■ 3090 Von den Schülern einer Klassenstufe nehmen regelmäßig drei Viertel an der AG „Malen und Zeichnen", ein Neuntel an der AG „Schach" und die übrigen 10 Schüler an der AG „Bergsteigen" teil. Wie viele Schüler nehmen regelmäßig an den einzelnen Arbeitsgemeinschaften teil? *Schüler S. Exner, Borgsdorf*

Ma 7 ■ 3091 Im Bild ist die Gerade t Tangente an dem Kreis k im Punkt A, die Gerade s Sekante, und es gilt $s \parallel t$. Die Gerade BE geht durch den Mittelpunkt M des Kreises k und schneidet ihn im Punkt C. Gib die Größe aller im Bild benannten Winkel an und begründe deine Aussagen!

Mathematiklehrer J. Kreusch, Löbau



Ma 7 ■ 3092 Wie lautet die kleinste natürliche Zahl, die bei Division durch 2 den Rest 1, durch 3 den Rest 2, durch 4 den Rest 3, durch 5 den Rest 4, durch 6 den Rest 5, durch 7 den Rest 6, durch 8 den Rest 7, durch 9 den Rest 8 und durch 10 den Rest 9 läßt? *Sch.*

Ma 7 ■ 3093 Gegeben sei ein Dreieck ABC und sein Umkreis k. Der Innenwinkel $\sphericalangle ABC$ habe die Größe 75°. Die Halbierungslinie des Winkels $\sphericalangle ABC$, der die Größe β hat, schneide den Umkreis k im Punkte D so, daß $\overline{BC} = \overline{CD}$ gilt. Es sind die Größen der beiden anderen Innenwinkel dieses Dreiecks zu berechnen!

Mathematiklehrer J. Kreusch, Löbau

Ma 7 ■ 3094 Addiert Axel zur Zahl seines Geburtsjahres ihre Quersumme, so erhält er als Ergebnis die Jahreszahl 1989. In welchem Jahre des 20. Jahrhunderts wurde Axel geboren? *Sch.*

Na/Te 7 ■ 470 Bei einem Federkraftmesser bewirkt eine Kraft von 1 N eine Längenänderung von 5 mm. An diesen Federkraftmesser wird ein Stahlwürfel mit einer Kantenlänge von 5 cm angehängt. Wie groß ist die Längenänderung der Feder in cm? *R.*

Na/Te 7 ■ 471 Eine Pumpe zum Betanken eines Tankwagens mit einer Ladefähigkeit von 10 t fördert 50 l Öl in einer Sekunde. Wie lange dauert es, bis der Wagen mit Schmieröl gefüllt ist? $\left(\varrho = 0{,}9\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$ *R.*

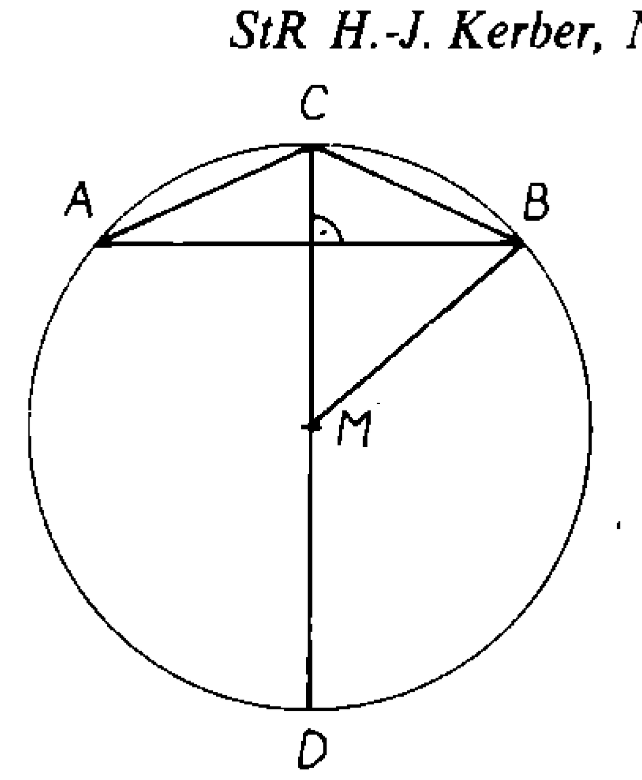
Ma 8 ■ 3095 Es sind alle diejenigen dreistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, deren Querprodukt fünfmal so groß ist wie deren Quersumme. *Sch.*

Ma 8 ■ 3096 Es ist zu beweisen, daß für alle natürlichen Zahlen n der Term $8^n + 2^n$ oder der Term $8^n - 2^n$ durch 10 teilbar ist!

Frank Zöllner, Sondershausen

Ma 8 ■ 3097 Die abgebildete Figur stellt einen Kreis mit dem Mittelpunkt M und einer Sehne $\overline{AB}$ dar, die senkrecht zu dem Durchmesser $\overline{CD}$ ist. Die Größe des Winkels $\sphericalangle ACB$ sei mit α und die des Winkels $\sphericalangle CMB$ mit β bezeichnet. Es ist zu beweisen, daß stets gilt: $\alpha + \beta = 180°$!

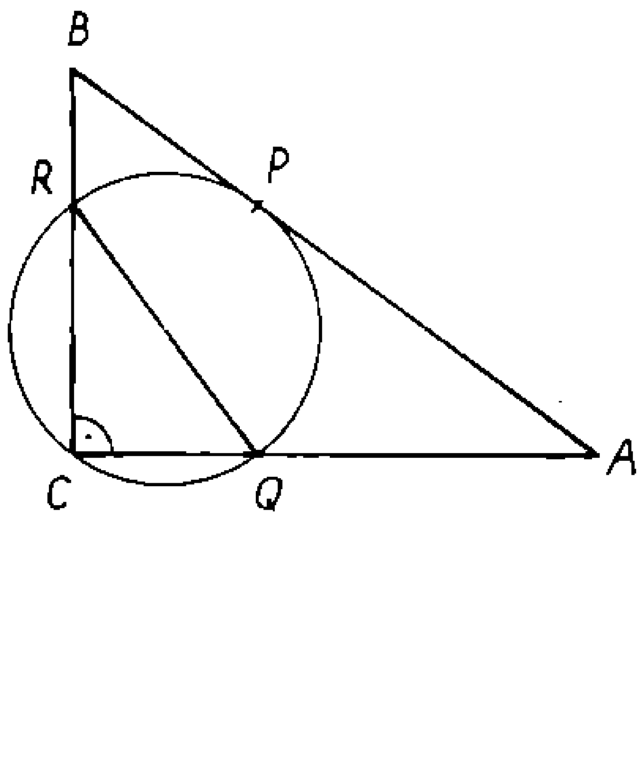
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz



Ma 8 ■ 3098 Der Träger einer Brücke wird durch einen Kreisbogen AMB begrenzt, dessen Höhe h eine Länge von 3 m hat. Der Radius des Kreises durch A, M und B beträgt 8,5 m. Es ist die Spannweite $\overline{AB}$ der Brücke zu berechnen!

A. Kellner, Halberstadt

Ma 8 ■ 3099 Das Bild stellt ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Kathetenlängen $\overline{BC} = 6$ cm und $\overline{AC} = 8$ cm dar. Ein



Kreis k, der $\overline{BC}$ in R und $\overline{AC}$ in Q schneidet, geht durch den Punkt C und berührt $\overline{AB}$ im Punkte P. Es ist die Länge der Sehne $\overline{QR}$ für denjenigen Kreis k zu berechnen, dessen Durchmesser am kürzesten ist. *Sch.*

Na/Te 8 ■ 472 Der Boden eines Kajaks hat eine Fläche von 1,6 m². Die mittlere Eintauchtiefe beträgt 20 cm. Welche Druckkraft und welcher Druck wirken auf den Boden des Bootes? *R.*

Na/Te 8 ■ 473 Überlege, wie die Seilführung an einem Flaschenzug vorgenommen werden muß, für den folgende Gleichung gilt: $F_1 = \frac{F_2}{3}$!

aus: Aufgabensammlung Physik, Teil 1, Volk und Wissen, Berlin

Ma 9 ■ 3100 Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2 + x + n;\ n \in P$.
Es ist zu zeigen, daß für alle reellen Zahlen k gilt:

$$k = \frac{f(k) - f(k-1)}{2}!$$

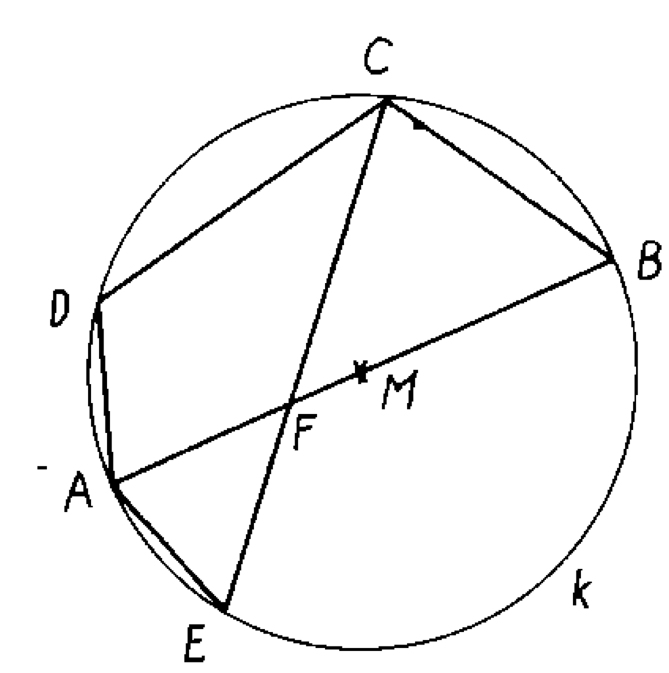
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 9 ■ 3101 Es ist nachzuweisen, daß für den Inkreisradius ϱ und die drei Höhen h_a, h_b, h_c eines Dreiecks die Beziehung

$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$ gilt! *Sch.*

Ma 9 ■ 3102 Das Bild stellt einen Kreis k mit einem Durchmesser $\overline{AB}$ dar, der eine Seite des Sehnenvierecks $ABCD$ ist. $\overline{AB}$ wird von der Sehne $\overline{CE}$ in F geschnitten, E wird mit A verbunden.
Folgende Längen sind bekannt: $\overline{AF} = 6$ cm, $\overline{AE} = 3$ cm, $\overline{FC} = 10$ cm.
Es ist die Länge von $\overline{CB}$ zu berechnen!

Schüler Th. Pitzschke, Halle



Ma 9 ■ 3103 Es ist zu beweisen, daß es keine reellen Zahlen a, b, c mit $a = b + c$ gibt, für die gilt

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \geqq \frac{1}{c} - \frac{1}{a}!$$

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 9 ■ 3104 Es ist der Wert der Summe

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$$

zu berechnen! *Sch.*

Na/Te 9 ■ 474 Ein PKW „Trabant" wird aus dem Stand annähernd gleichmäßig beschleunigt und erreicht nach einer Zeit von 20,7 s eine Geschwindigkeit von $80\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Welcher Weg wird dabei zurückgelegt? *R.*

Na/Te 9 ■ 475 Welche Beschleunigung

erfährt ein Elektron in Feldlinienrichtung, wenn es sich in einem elektrischen Feld mit einer Feldstärke von $2\,000{,}0\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ befindet?

aus: Aufgabensammlung, Physik, Teil 2, Volk und Wissen, Berlin

Ma 10/12 ■ 3105 Es ist zu beweisen, daß in jedem rechtwinkligen Dreieck ABC mit c als Länge der Hypotenuse gilt

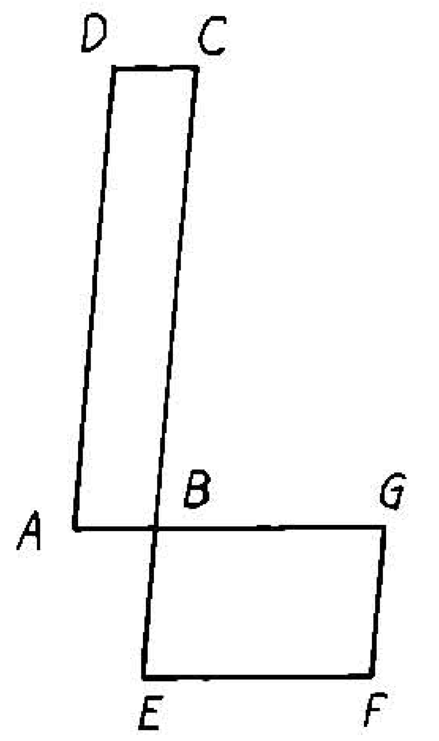
$$\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} = \frac{c\sqrt{2}}{w_\gamma}!$$

Th. Kuessner, Greifswald

Ma 10/12 ■ 3106 Es ist die folgende Aussage zu beweisen:
Wenn $100a + b$ durch 7 teilbar ist, dann ist auch $a + 4b$ durch 7 teilbar. (a und b seien ganze Zahlen)

R. Schulz, Ribnitz

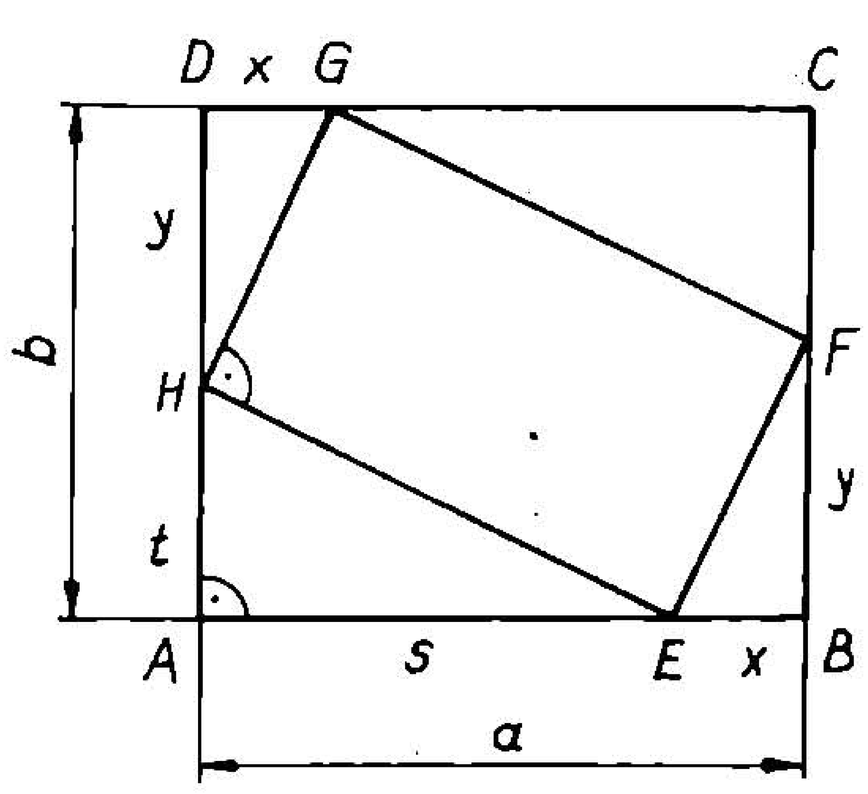
Ma 10/12 ■ 3107 Das Bild stellt zwei flächengleiche Parallelogramme $ABCD$ und $BEFG$ dar. Dabei liegen die Punkte A, B und C bzw. C, B und E jeweils auf einer Geraden. Es ist zu beweisen, daß die Verbindungsgeraden AE und CG parallel zueinander verlaufen! *Sch.*



Ma 10/12 ■ 3108 Weisen Sie nach, daß ein Dreieck ABC existiert, bei dem die Maßzahlen der Seitenlängen drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sind und ein Innenwinkel doppelt so groß wie einer der beiden anderen Innenwinkel ist! *Sch.*

Ma 10/12 ■ 3109 In ein Rechteck ist ein weiteres Rechteck so eingezeichnet, wie das Bild zeigt. Gesucht ist ein Zusammenhang zwischen a, b, x und y!

Lehrling S. Kieselberger, Schwarzenhof

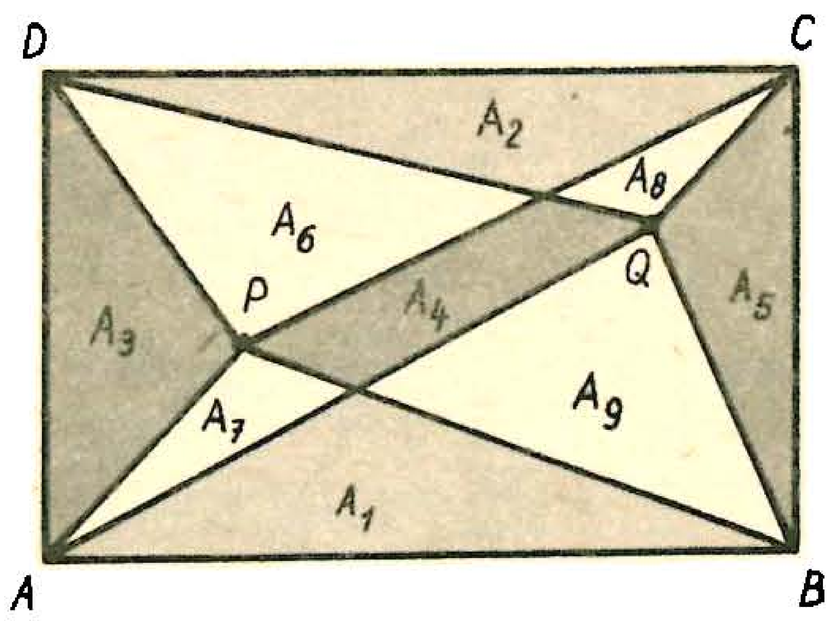


Na/Te 10/12 ■ 476 Im Emissionsspektrum des Wasserstoffs kann eine grüne Linie mit der Wellenlänge 486,1 nm beobachtet werden. Welche Wellenlänge und welche Frequenz hätte dieses Licht im Wasser? *R.*

Na/Te 10/12 ■ 477 Zwei Körper, die anfangs 100 m Abstand haben, bewegen sich geradlinig aufeinander zu:
der erste mit einer konstanten Geschwindigkeit $v_1 = 3\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, der zweite gleichförmig beschleunigt mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 7\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ und der Beschleunigung $a = 4\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Bestimmen Sie die Zeit, nach welcher sich beide Körper treffen! *R.*

Gut studiert?

Wer in „alpha" 6/1989 die Seite 138 gut studiert hat, wird die folgenden, doch recht interessanten Behauptungen ohne allzu große Schwierigkeiten beweisen können. (Dies gilt bereits für Leser ab Klasse 6!)
Zeichne in das Innere eines Rechtecks $ABCD$ zwei beliebige Punkte P und Q ein und verbinde jeden dieser Punkte mit den vier Eckpunkten des Rechtecks! Dabei soll es in neun Teile (acht Dreiecke, ein Viereck) zerlegt werden. Ihre Flächeninhalte sind mit A_1 bis A_9 zu bezeichnen (siehe Bild).



Es soll bewiesen werden, daß folgender Flächenvergleich gilt:
a) $A_1 + A_2 = A_3 + A_4 + A_5$
b) $A_6 + A_7 = A_8 + A_9$.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Die Lösungen erscheinen im nächsten Heft!

Ein Dankeschön

Im Heft 3/89 hatten wir unsere Leser gebeten, „ausgelesene"-Exemplare der „alpha" an uns zu senden, damit wir bei Nachfragen besser helfen können. Wir möchten uns heute bei folgenden Lesern herzlich für die Zusendung von „alphas" bedanken: Bruno Halecker, Erfurt; G. Schreckenbach, Potsdam; Ulrike Obst, Radebeul; Silke Rudolph, Großröhrsdorf; Anemone Wasner, Freital; H. Schubert, Moritzburg; A. Vetter, Pirna; Lutz Hübschmann, Schwarzenberg; Käthe Bäckmann, Karl-Marx-Stadt; Sabine Schwarz, Halle-Neustadt; Joachim Bußler, Berlin; H. Schenk, Pirna; Wolfgang Mörtl, Potsdam; H. Schütze, Camin; Huch, Plauen.
Gleichzeitig erneuern wir unseren Aufruf!

Alphons

Lösungen zu: alpha-Wettbewerb
Heft 5/89

Ma 5 ■ 3011 $231 + 453 + 675 + 897 = 2256$

Ma 5 ■ 3012 Wegen $M + M = A$ und $E + E = A$ gilt $E \geqq 6$. Wegen $1 + H + H = H$ gilt $H = 9$, also $E = 6$ oder $E = 7$ oder $E = 8$.
Durch weiteres systematisches Probieren findet man folgende vier möglichen Lösungen: $12\,396 + 12\,396 = 24\,792$;
$12\,896 + 12\,896 = 25\,792$;
$24\,097 + 24\,097 = 48\,194$;
$24\,197 + 24\,197 = 48\,394$

Ma 5 ■ 3013 Für eine Erdumkreisung brauchte das Raumschiff 90 Minuten, also $1\frac{1}{2}$ h. In 3 h erfolgten somit 2 Erdumkreisungen, in 24 h bzw. in einem Tag erfolgten $8 \cdot 2 = 16$ Erdumkreisungen. Wegen $325 \cdot 16 = 5200$ hat Juri Romanenko mit dem Raumschiff 5200mal die Erde umkreist.

Ma 5 ■ 3014 Aus der Aufgabenstellung ergibt sich, daß beide Summanden dreistellig sind. Aus $**6 + 23* = 1234$ folgt $996 + 238 = 1234$. Die richtige Aufgabe lautet somit $991 + 998 = 1989$.

Ma 5 ■ 3015 $132 : 44 = 3$ und $112 : 4 = 28$. Von den Befragten betreiben jeder dritte Junge und 28 Mädchen regelmäßig Sport.

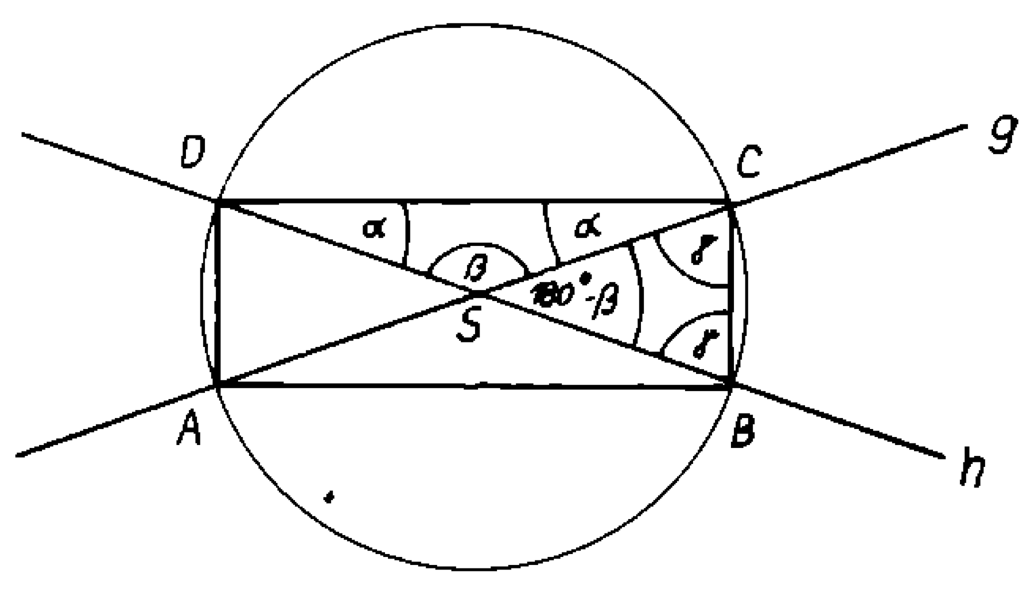
Ma 5 ■ 3016 Es seien n und $n + 1$ zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen; ihre Summe lautet $2n + 1$. Nun gilt $(2n + 1 - 7) \cdot 4{,}5 = 81$, $2n - 6 = 18$, $2n = 24$, $n = 12$. Die beiden Zahlen lauten 12 und 13.

Ma 5 ■ 3017 Aus (1) folgt: Andreas hat entweder den Familiennamen Müller oder Schmidt. Aus (2) und (5) folgt: Bernd hat entweder den Familiennamen Müller oder Reich. Aus (3) und (4) folgt: Bernd hat nicht den Familiennamen Reich, also hat Bernd den Familiennamen Müller. Wegen (1) hat deshalb Andreas den Familiennamen Schmidt. Also hat Claus den Familiennamen Reich.

Ma 6 ■ 3018 $1\,\mathrm{dm} = 10\,\mathrm{cm}$, $2\,\mathrm{mm} = \frac{1}{5}\,\mathrm{cm}$, $1\,\mathrm{dm^3} = 1000\,\mathrm{cm^3}$; wegen $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot 5 \cdot x = 1000$, also $x = 5000$, werden 5000 Streichhölzer und somit $5000 : 50 = 100$ Schachteln benötigt.

Ma 6 ■ 3019 $\frac{8}{8}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$; $(12+12)$ Schüler, also 24 Schüler sind gleich $\frac{3}{4}$ der Anzahl aller am Wettbewerb teilnehmenden Schüler. Am Wettbewerb nahmen deshalb $\frac{4}{3}\cdot 24=32$ Schüler teil. $\frac{1}{8}\cdot 32=4$ Schüler hatten alle vier Namen falsch zugeordnet.

Ma 6 ■ 3020 $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ sind Diagonalen des Vierecks $ABCD$. Es gilt: $\overline{AS}\cong\overline{SC}$ und $\overline{BS}\cong\overline{SD}$. Daraus folgt, daß $ABCD$ ein Parallelogramm ist, denn es gilt: „Wenn in einem Viereck $ABCD$ die Diagonalen einander halbieren, so ist dieses Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm."

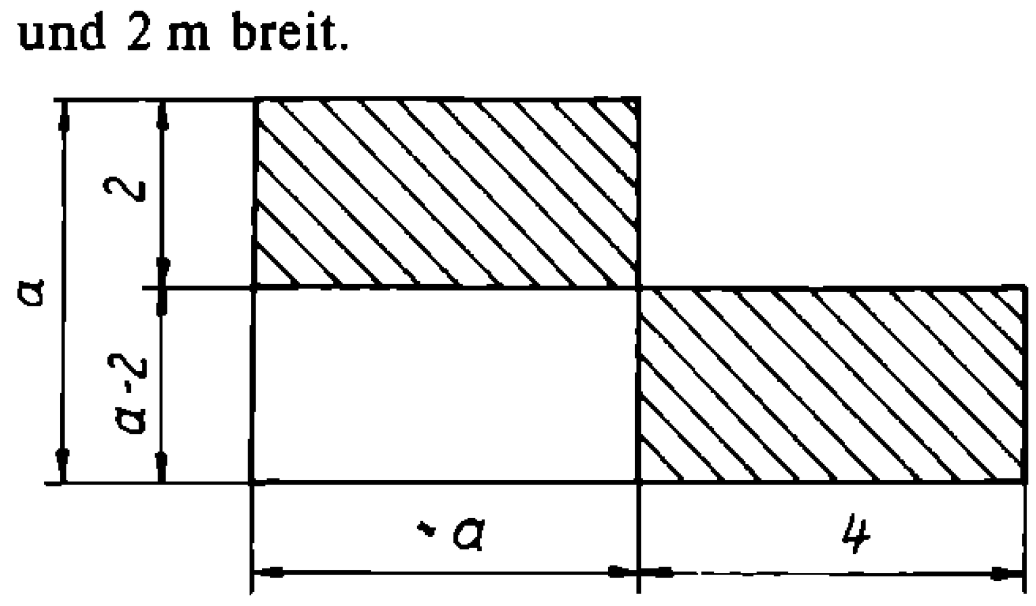


Es ist nun noch zu zeigen, daß $ABCD$ einen rechten Winkel besitzt.
Wir behaupten (bezogen auf das Bild), daß gilt: $\alpha+\gamma=90°$.
Auf Grund des Außenwinkelsatzes für Dreiecke und weil alle Teildreiecke gleichschenklig sind, gilt: $180°-\beta=2\alpha$ und $\beta=2\gamma$. Addiert man beide Gleichungen, so erhält man
$180°=2(\alpha+\gamma)$ bzw. $90°=\alpha+\gamma$.
Das entspricht unserer Behauptung.
Daraus folgt: $ABCD$ ist ein Rechteck.

Ma 6 ■ 3021 Angenommen, Dana ist x Jahre alt; dann ist Susanne $(x-2)$ Jahre, Doreen $(x+2)$ Jahre, Jeanette $2\cdot x$ Jahre, Angelika $(2x-3)$ Jahre alt. Zusammen sind sie $(7x-3)$ Jahre alt, und es gilt
$7x-3=25$, $7x=28$, $x=4$.
Susanne ist 2 Jahre, Dana 4 Jahre, Angelika 5 Jahre, Doreen 6 Jahre, Jeanette 8 Jahre alt.

Ma 6 ■ 3022 Aus (1) folgt: Andrea und Beate haben nicht den Familiennamen Hofmann. Aus (2) folgt: Christine hat nicht den Familiennamen Hofmann. Also heißt Doris Hofmann. Wegen (3) hat Beate den Familiennamen Ilgen. Aus (4) und (5) folgt: Andrea hat den Familiennamen Fischer, Christine heißt Grohmann.

Ma 6 ■ 3023 Dem Bild ist folgendes zu entnehmen: $2\cdot a=4\cdot(a-2)$,
$2a=4a-8$, $2a=8$, $a=4$.
Die rechteckige Rasenfläche ist 8 m lang und 2 m breit.

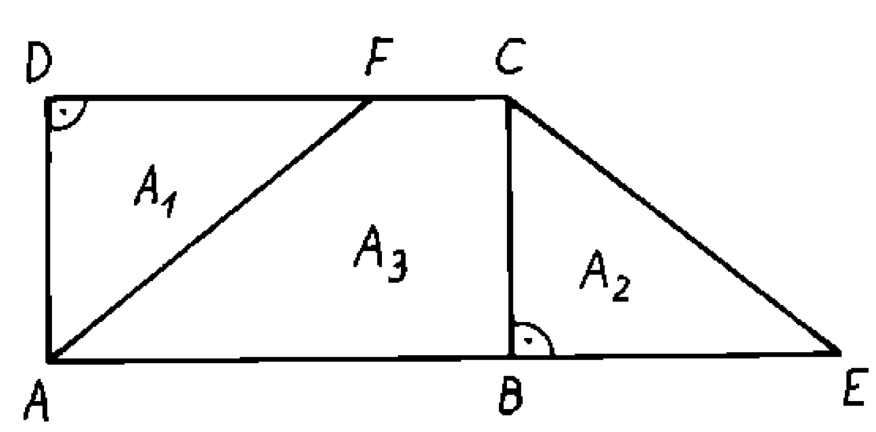


Na/Te 6 ■ 452 Von der Höhe 4,30 m sind 0,50 m zu subtrahieren. Das Volumen des Wassers ergibt sich als Produkt aus der Länge, der Breite und der verminderten Höhe der Schleusenkammer.
$V=325\text{ m}\cdot 25\text{ m}\cdot 3{,}80\text{ m}=30\,875\text{ m}^3$.
Das gerundete Ergebnis lautet:
$V=30\,900\text{ m}^3$.

Ma 7 ■ 3024 Die Zahl des Geburtsjahres von Axel sei (in dekadischer Schreibweise) $\overline{19xy}$; dann gilt
$1900+10x+y+(1+9+x+y)=1989$
und $0\leqq x\leqq 9$ und $0\leqq y\leqq 9$.
Daraus folgt $11x+2y=79$; nur für $x=7$ und $y=1$ wird diese Gleichung unter den einschränkenden Bedingungen erfüllt. Axel wurde im Jahre 1971 geboren; im Jahre 1989 wird er 18 Jahre alt.

Ma 7 ■ 3025 a) Wegen $\frac{z}{1989}=0{,}4$, also $z=795{,}6$ lautet der Zähler 796 und der Bruch $\frac{796}{1989}$.
b) Wegen $x=\frac{10}{21}=0{,}\overline{476190}$ und $1989=6\cdot 331+3$ lautet die 1989. Stelle hinter dem Komma 6.

Ma 7 ■ 3026 Wegen $\overline{AF}\cong\overline{EC}$, $\overline{AD}\cong\overline{BC}$ und $\sphericalangle ADF\cong\sphericalangle EBC$ (90°) sind die Dreiecke AFD und BEC kongruent, also erst recht flächengleich.
Wegen $A_1=A_2$ gilt $A_1+A_3=A_2+A_3$, also Flächengleichheit von Rechteck und gleichschenkligem Trapez.



Ma 7 ■ 3027 Wegen der umgekehrten Proportionalität gilt $x:63=72:84$,
$x:63=6:7$, also $x=54$.
Somit wurden $(63-54)$ Pferde, also 9 Pferde verkauft.

Ma 7 ■ 3028 Aus (1) folgt: Herr Kempcke wohnt nicht in Anklam. Aus (2) folgt: Herr Kempcke wohnt nicht in Neustrelitz. Aus (3) folgt: Herr Kempcke wohnt nicht in Neubrandenburg. Folglich wohnt Herr Kempcke, der einen Skoda hat, in Röbel. Aus (1) folgt: Herr Birken wohnt nicht in Anklam. Aus (2) folgt:
Herr Birken wohnt nicht in Neustrelitz. Folglich wohnt Herr Birken in Neubrandenburg; er fährt einen Trabant. Aus (3) folgt: Herr Mett aus Anklam fährt einen Lada. Also fährt Herr Rebrek aus Neustrelitz einen Dacia.

Na/Te 7 ■ 453 Durch eine Gewichtskraft von 10 N wird die Feder um 10 cm gedehnt. Bei einer Dehnung um 25 cm beträgt die Gewichtskraft des Körpers 25 N.

Na/Te 7 ■ 454 Man zeichnet aus der Wertetabelle ein Diagramm. Aus dem Graphen liest man ab, daß ein Körper mit der Masse 1 kg in 1000 km Höhe eine Gewichtskraft von 7,3 N hat. Ein Körper mit der 4fachen Masse hat demnach eine Gewichtskraft von rund 30 N. (Der Rechenwert beträgt 29,4.)

Ma 8 ■ 3029 Aus (1) und (4) folgt, daß Becker keinen blauen Schlips trägt. Aus (6) folgt, da Schneider einen grünen Schlips trägt, daß Fischer einen blauen Schlips, also Becker überhaupt keinen Schlips trägt. Aus (3) folgt weiter, daß Becker den Vornamen Kurt hat. Aus (2) und (5) folgt, daß Fischer nicht Jörn heißt. Deshalb hat Fischer den Vornamen Hans und Schneider den Vornamen Jörn.

Ma 8 ■ 3030 Schreibt man für die rechte Seite der Gleichung
$2x^2+11x+\square$, so muß das erste Kästchen der linken Seite der Gleichung x lauten. Wegen $2x^2+3x+(2x+3)\cdot\square$ ergibt sich für dieses Kästchen 4. Wegen $2x\cdot 4=8$ und $3x+8x=11x$ und $3\cdot 4=12$ ergibt sich für das Kästchen auf der rechten Seite der Gleichung 12. Die Gleichung lautet somit
$(2x+3)(x+4)=x\cdot(2x+11)+12$.
Durch Ausmultiplizieren kann man die Allgemeingültigkeit feststellen.

Ma 8 ■ 3031 Nach Aufgabenstellung gilt
$1111+z^2=(z+1)^2$.
Wir formen äquivalent um und erhalten
$1111=(z+1)^2-z^2$, $1111=z^2+2z+1-z^2$, $1110=2z$, $555=z$.
Probe: $1111+555^2=556^2$;
$1111+308\,025=309\,136$.

Ma 8 ■ 3032 Der Fußpunkt des Lotes von C auf $\overline{AB}$ sei D und der des Lotes von A auf $\overline{CB}$ sei E. Wenn nun $\overline{CD}\cong\overline{AE}$, dann sind die Dreiecke CDB und ABE kongruent, denn sie stimmen in der Länge einer Seite ($\overline{CD}\cong\overline{AE}$) und der Größe zweier Winkel ($\sphericalangle AEB\cong\sphericalangle CDB$; $\sphericalangle CBA$ kommt in beiden Dreiecken vor) überein. Es folgt, daß auch die Hypotenusen $\overline{CB}$ und $\overline{AB}$ gleiche Länge haben, d. h., das Dreieck ABC ist gleichschenklig, w. z. b. w.

Ma 8 ■ 3033 Die Gerade durch P und Q schneide die Gerade g im Punkte S. Der zu konstruierende Kreis k möge die Gerade g im Punkt R berühren. Nach dem Sekanten-Tangenten-Satz gilt dann $\overline{SP}\cdot\overline{SQ}=\overline{SR}^2$. Wir konstruieren über $\overline{SQ}$ als Durchmesser den Halbkreis k'. Die Senkrechte zu $\overline{SQ}$ durch P schneide k' im Punkte N. Nach dem Kathetensatz gilt dann
$\overline{NS}^2=\overline{SP}\cdot\overline{SQ}$, also $\overline{NS}=\overline{SR}$.
Der Kreis um S mit dem Radius $\overline{NS}$ schneide die Gerade g im Punkte R. Die Mittelsenkrechten von $\overline{PQ}$ und $\overline{PR}$ schneiden einander im Punkte M, dem Mittelpunkt des zu konstruierenden Kreises k.

Na/Te 8 ■ 455 Der Skiläufer hat eine Gewichtskraft von 700 N; er wird um 300 m gehoben (Höhenunterschied $0{,}5\cdot$ Länge). Die Hubarbeit beträgt
$700\text{ N}\cdot 300\text{ m}=210\,000\text{ J}=210\text{ kJ}$.
Diese Arbeit wird am Skiläufer verrichtet.

Na/Te 8 ■ 456 Die Hangabtriebskraft dieses Körpers wird mit F'_G bezeichnet. Dann gilt: $F'_G=\mu\cdot F_G$; $F'_G=25\text{ N}$.

Ein Körper mit der Masse von 2,5 kg bewirkt, daß der Körper auf der Waagerechten gerade zum Gleiten gebracht wird.

Ma 9 ■ 3034 Zunächst formen wir um und erhalten
$\sqrt{9n^4 + 18n^3 + 9n^2} = \sqrt{9n^2(n+1)^2}$
$= 3n \cdot (n+1)$. Der Term ist für alle natürlichen Zahlen n durch 3 teilbar, weil er den Faktor 3 enthält. n und $n+1$ sind zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, von denen also eine gerade und eine ungerade ist. Ihr Produkt ist gerade und damit durch 2 teilbar. Somit ist der Term durch 6 teilbar, w. z. b. w.

Ma 9 ■ 3035 Es ist zu zeigen, daß gilt

$$M^2 = \frac{Q^2 + G^2}{2}, \text{ also } M^2 = \frac{\frac{a^2+b^2}{2} + a \cdot b}{2},$$

$$\text{d. h. } M^2 = \frac{\frac{a^2+b^2+2ab}{2}}{2} \text{ bzw.}$$

$$M^2 = \frac{(a+b)^2}{4};\ M^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

$$\text{d. h. } M = \frac{a+b}{2}.$$

Ma 9 ■ 3036 Eine dreistellige Zahl werde mit $\overline{abc}$ bezeichnet. Laut Teilbarkeitsregel gilt $3/\overline{abc}$ genau dann, wenn $3/a+b+c$. Eine arithmetische Folge hat die Eigenschaft, daß je zwei benachbarte Glieder eine konstante Differenz d haben. In $\overline{abc}$ sei $b = a + d$ und $c = b + d$ bzw. $c = a + 2d$ $(d \in N)$. Das setzen wir in die Behauptung $3/a + b + c$ ein und erhalten
$3/a + a + d + a + 2d$, d. h. $3/3a + 3d$ bzw. $3/3(a+d)$. Das ist allgemeingültig; daraus folgt die Behauptung, w. z. b. w.

Ma 9 ■ 3037 Der Flächeninhalt eines konvexen Vierecks, in dem die Diagonalen zueinander senkrecht sind, ist gleich dem halben Produkt aus den Längen seiner Diagonalen. Somit gilt $A_{ABDE} = \frac{1}{2} \cdot s_a \cdot s_b$.
Wegen $A_{ABC} : A_{EDC} = 2^2 : 1^2 = 4 : 1$ gilt
$A_{ABC} : A_{ABDE} = 4 : 3$ und somit
$A_{ABC} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot s_a \cdot s_b = \frac{2}{3} \cdot s_a \cdot s_b$.

Ma 9 ■ 3038 Ja, es ist möglich! Man nimmt eine Kugel aus der Schachtel mit der Aufschrift „schwarz und weiß" heraus. Ist sie weiß, muß auch die zweite weiß sein. Dann muß in der Schachtel mit der Aufschrift „zwei schwarze" eine schwarze und eine weiße Kugel sein, und in der Schachtel mit der Aufschrift „zwei weiße" liegen zwei schwarze Kugeln. Wenn dagegen die herausgenommene Kugel eine schwarze ist, muß auch die zweite eine schwarze sein.
Dann kann in der Schachtel mit der Aufschrift „zwei weiße" nur eine schwarze und eine weiße Kugel liegen, und in der letzten Schachtel befinden sich dann zwei weiße Kugeln.

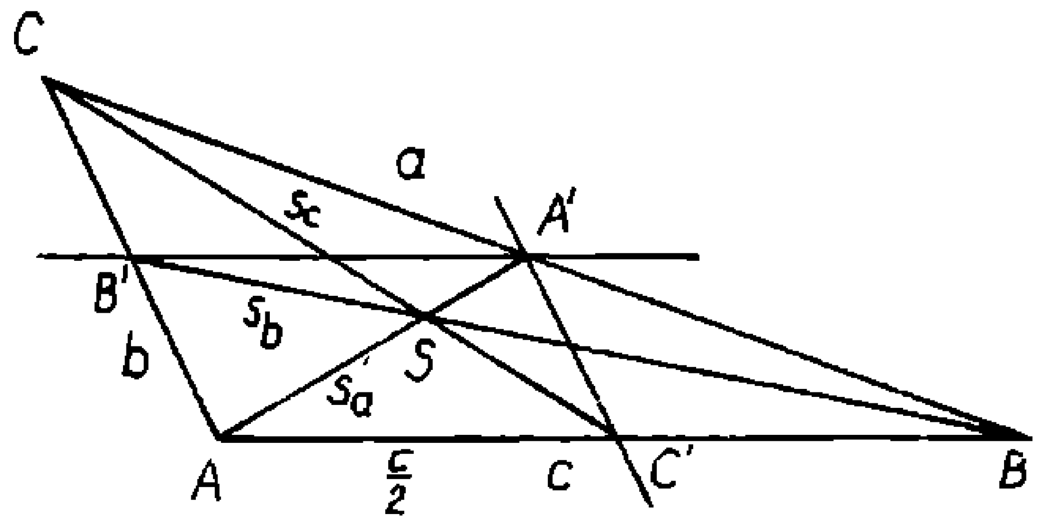
Na/Te 9 ■ 457 Aus dem Tafelwerk können der lineare Ausdehnungskoeffizient für Kupfer und der für Wasser entnommen werden:
$\alpha_{Cu} = 16 \cdot 10^{-6}\,K^{-1}$ und
$\alpha_{H_2O} = 180 \cdot 10^{-6}\,K^{-1}$. Das Volumen des Wassers und des Würfels vergrößern sich beim Erhitzen unterschiedlich. Da sich das Wasser stärker ausdehnt als das Kupfer, läuft das Wasser über:
$V' = V \cdot T \cdot (\alpha_{H_2O} - 3 \cdot \alpha_{Cu})$.
Mit $V = 1\,cm^3$ und $T = 60\,K$ ergibt sich $V' = 0{,}007\,92\,cm^3$. Es laufen etwa 8 mm³ Wasser über.

Na/Te 9 ■ 458 Aus dem Tafelwerk entnehmen wir eine Beziehung zwischen dem Druck und der Temperatur eines Gases bei konstantem Volumen. Der Anfangsdruck p_1 beträgt p_0, der Enddruck p_2 beträgt $6 \cdot p_0$. Die Anfangstemperatur T_1 beträgt 293 K, die Endtemperatur T_2 kann aus $T_2 = T_1 \cdot \frac{p_2}{p_1}$ berechnet werden. Man erhält 1485 °C.

Ma 10/12 ■ 3039 Aus der gegebenen Ungleichung folgt schrittweise durch Umformen
$\frac{1}{9 - 4\sqrt{5}} \cdot \frac{9 + 4\sqrt{5}}{9 + 4\sqrt{5}} < 18$,
$\frac{9 + 4\sqrt{5}}{81 - 16 \cdot 5} < 18$, $9 + 4\sqrt{5} < 18$,
$4\sqrt{5} < 9$, $80 < 81$. Die gegebene Ungleichung stellt eine wahre Aussage dar.

Ma 10/12 ■ 3040 Sicher ist $a \neq 0$. Wenn $a \geqq 2$, so $(100a + 11b)\,(10a + c) \geqq 4000$. Es ist aber $1000a + 110b + c < 3000$. Somit ist also $a = 1$. Dann gilt
$(100 + 11b)(10 + c) = 1000 + 110b + c$,
also $1000 + 110b + 100c + 11bc$
$= 1000 + 110b + c$, $99c + 11bc = 0$,
d. h. $c = 0$. Nun kann b außer 0 und 1 jede einstellige natürliche Zahl annehmen, d. h. wir erhalten die folgenden Tripel (a, b, c) als Lösungen:
$(1,2,0)$; $(1,3,0)$; $(1,4,0)$; $(1,5,0)$; $(1,6,0)$; $(1,7,0)$; $(1,8,0)$; $(1,9,0)$.

Ma 10/12 ■ 3041 Im abgebildeten Dreieck ABC haben wir durch A' und B' die Parallele zu $\overline{AB}$ gezeichnet! Nach einem bekannten Satz ist die Gerade durch die Mittelpunkte zweier Dreiecksseiten parallel zur dritten Seite, und die Strecke $\overline{A'B'}$ ist halb so lang wie diese. Es seien die Längen der Seiten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ mit c, b und a bezeichnet. Dann hat $\overline{A'B'}$ die Länge $\frac{c}{2}$ und $\overline{A'C'}$ die Länge $\frac{b}{2}$. Nun gelten nach Dreiecksungleichung im Dreieck $AA'B'$:
(1) $s_a < \frac{c}{2} + \frac{b}{2}$, im Dreieck $B'BA'$:
(2) $s_b < \frac{c}{2} + \frac{a}{2}$ und im Dreieck $CC'A'$:
(3) $s_c < \frac{b}{2} + \frac{a}{2}$. Addiert man diese drei



Ungleichungen, so erhält man
$s_a + s_b + s_c < a + b + c$, w. z. b. w.

Ma 10/12 ■ 3042 Jedes der entstandenen Dreiecke ergänzt das Dreieck ABC zu einem Parallelogramm, in dem $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ bzw. $\overline{AC}$ jeweils Diagonale ist. Damit ist deren Kongruenz zu ABC erwiesen. Dreht man räumlich diese drei Dreiecke jeweils um die Seite $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ bzw. $\overline{CA}$, so sind die Spuren der Punkte D_1, D_2 und D_3 die Lote auf die jeweiligen Dreiecksseiten. Der Schnittpunkt der drei Spuren ist D'. D' ist eindeutig bestimmt, da wegen der zu ABC parallelen Seiten die drei Lote die Höhen im Dreieck $D_1D_2D_3$ sind, die einander in genau einem Punkt schneiden. Verbindet man D' mit A, B und C, so erhält man den Grundriß der Pyramide.

Ma 10/12 ■ 3043 Es sei γ die Größe des Winkels, der der Seite mit der Länge c gegenüberliegt. Dann gilt für den Flächeninhalt dieses Dreiecks
$2A = h \cdot c$, $2A = a \cdot b \cdot \sin\gamma$.
Nun gilt $\sin\gamma \leqq 1$,
d. h. $a \cdot b \cdot \sin\gamma \leqq a \cdot b$ und somit
$h \cdot c \leqq a \cdot b$, w. z. b. w. Das Gleichheitszeichen gilt, falls $\sin\gamma = 1$, d. h. $\gamma = 90°$ ist.

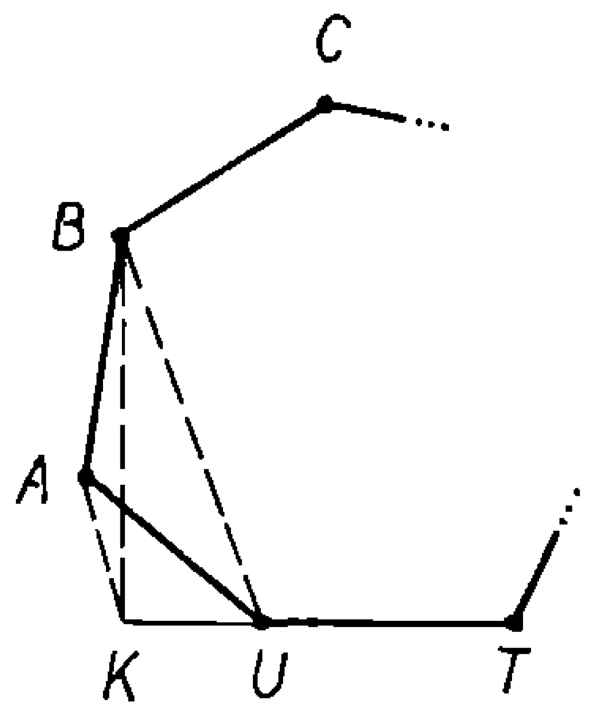
Na/Te 10/12 ■ 459 Nach dem Gesetz von Archimedes ist die Auftriebskraft so groß wie die Gesichtskraft des verdrängten Stoffes. Der Ballon verdrängt kalte Luft mit der Gewichtskraft $g \cdot \varrho_1 \cdot V$. Die Auftriebskraft muß tragen die Gewichtskraft des Ballons $(g \cdot m)$ und die Gewichtskraft der eingeschlossenen heißen Luft $(g \cdot \varrho_2 \cdot V)$. Aus der Kräftebilanz erhält man:
$V(\varrho_1 - \varrho_2) = m$. Zur Berechnung der Dichte ϱ_2 bei der Temperatur t_2: Bei Temperaturänderung ändert sich das Volumen bei konstantem Druck und konstanter Masse. Aus dem Tafelwerk kann man den Zusammenhang zwischen Volumen und Temperatur bei konstantem Druck entnehmen. Unter Berücksichtigung der Definitionsgleichung für die Dichte ergibt sich $\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{T_2}{T_1}$. Daraus erhält man die Dichte der heißen Luft $\varrho_2 = 0{,}944\,kg \cdot m^{-3}$. Setzt man die Werte ein, so ergibt sich $m = 100\,kg$. Das ist die gesuchte Gesamtmasse.

Na/Te 10/12 ■ 459 a) Auf den Aufzug mit dem Körper wirkt eine Gewichtskraft $(m_1 + m_2) \cdot g$; als beschleunigende Kraft steht demnach zur Verfügung $F - (m_1 + m_2) \cdot g$. Aus dem Newtonschen Kraftgesetz ergibt sich $a = \frac{(F - (m_1 + m_2) \cdot g)}{(m_1 + m_2)}$.
Nach Einsetzen der Werte erhält man als Beschleunigung $a = 2{,}08\,m \cdot s^{-2}$.
b) Auf den Faden wirkt die Gewichtskraft des Körpers und die Kraft zum Beschleunigen des Körpers: $F_s = m_2 \cdot g + m_2 \cdot a$. Man erhält $F_s = 59{,}5\,N$.
c) Nach dem Zerreißen des Fadens wirkt die resultierende beschleunigende Kraft nur noch auf den Aufzug (Masse m_1). Dieser Wird nunmehr mit der Beschleunigung $a = 2{,}1\,m \cdot s^{-2}$ bewegt.
Der Körper fällt frei mit der Fallbeschleunigung $g = 9 \cdot 91\,m \cdot s^{-2}$.

Lösungen zu:
Die Quadratur der Parabel

P1: Im Bild 1 sei ein Teil $ABC\ldots TUA$ des Vielecks dargestellt. Man schneide das Dreieck ABU ab, ziehe durch A die Parallele zu BU, die die verlängerte Gerade TU in K schneide. Nun verbinde man B und K. Das Vieleck $KBC\ldots TK$ hat eine Seite weniger, doch den gleichen Flächeninhalt wie das gegebene Vieleck. In der Tat ist das Dreieck KBU flächengleich mit dem Dreieck ABU (beide haben die gleiche Basis BU und die gleiche Höhe, da sie zwischen den Parallelen BU und AK liegen).

Bild 1

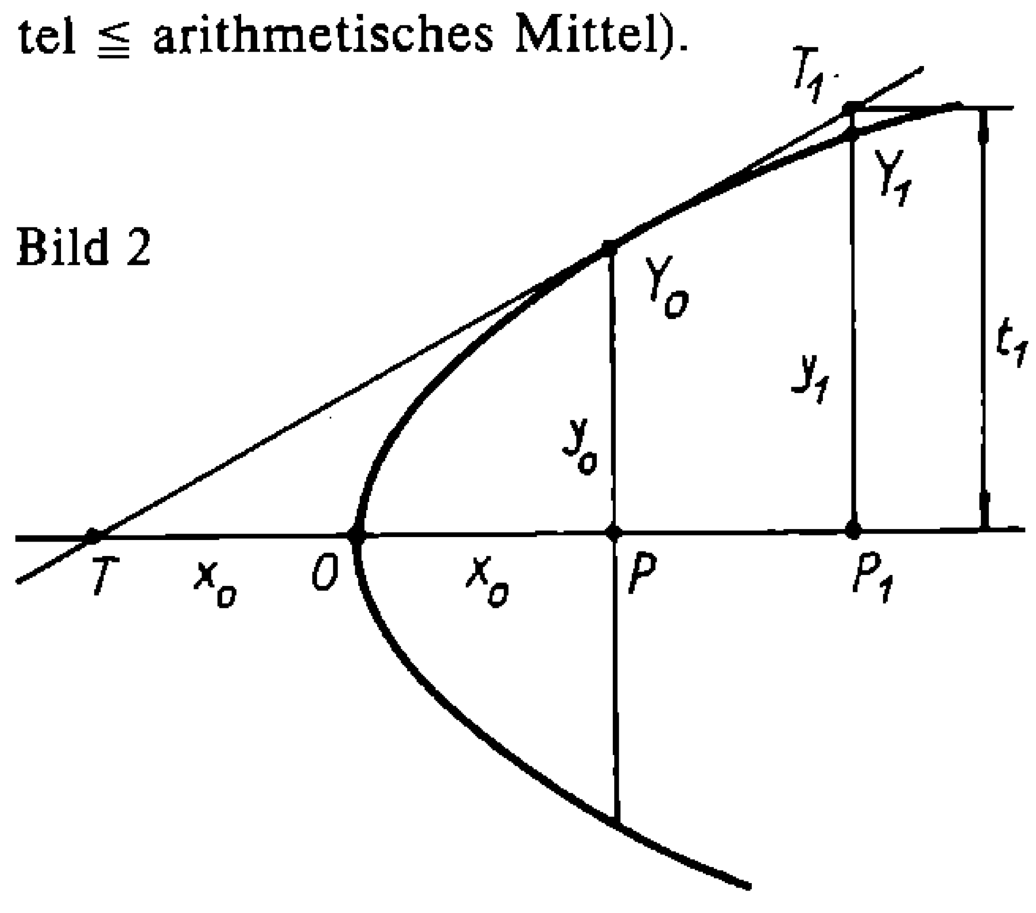


P2: Wir setzen (Bild 2) $TO = OP = x_0$, $PY_0 = y_0$. T_1 sei ein von Y_0 verschiedener Punkt der Parabel, P_1 der Fußpunkt der Ordinate $P_1T_1 = t_1$. P_1T_1 schneide die Parabel in Y_1; $P_1Y_1 = y_1$, $OP_1 = x_1$. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke Y_0PT und T_1P_1T folgt $\frac{x_0 + x_1}{2x_0} = \frac{t_1}{y_0}$. Wäre $t_1 < y_1$, so

$$\left(\frac{x_0 + x_1}{2x_0}\right)^2 = \left(\frac{t_1}{y}\right)^2 < \left(\frac{y_1}{y_0}\right)^2 = \frac{x_1}{x_0}$$

(letzteres wegen $E1$). Daraus folgt $\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right)^2 < x_0x_1$, was falsch ist, da stets $\sqrt{x_0x_1} \leqq \frac{x_0 + x_1}{2}$ ist (geometrisches Mittel $\leqq$ arithmetisches Mittel).

Bild 2



P3: Die Verbindungsgerade der Punkte $Y_0 = (x_0, y_0)$, $Y_1 = (x_1, y_1)$ ist

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Da die Punkte auf der Parabel $y^2 = 2px$ liegen, gilt $y_0^2 = 2px_0$,
$y_1^2 = 2px_1$, $y_1^2 - y_0^2 = 2p(x_1 - x_0)$,
$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{2p}{x_1 + y_0}$. Die Gleichung der Verbindungsgeraden (Parabelsekante) ist also

$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{2p}{y_1 + y_0}$. Ist $Y_1 = Y_0$ (die Sekante wird zur Tangente), so wird $\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{2p}{2y_0}$, woraus $yy_0 - y_0^2 = yy_0 - 2px_0 = px - px_0$ folgt.
Die Gleichung der Tangente in Y_0 ist also $yy_0 = p(x + x_0)$.
Ihr Schnittpunkt T mit der Achse $y = 0$ ist $p(x + x_0) = 0$, d. h. $x = -x_0$.
Es ist in der Tat $TO = OP = x_0$.

P4: Es werde durch U parallel zu YY' eine Gerade gezogen (Bild 3), K sei der Schnittpunkt mit OP, I sei der Schnittpunkt mit YO. Dann gilt (Eigenschaft $E1$)
$\left(\frac{PY'}{KU}\right)^2 = \frac{OP}{OK}$, d. h. $\frac{OP}{OK} = \frac{PY'^2}{KU^2}$. Nun ist $\frac{OP}{OK} = \frac{OY}{OI}$ (ähnliche Dreiecke YPO, IKO)
und $\frac{PY'}{KU} = \frac{PY}{PP'} = \frac{OY}{OR}$ ($KU = PP'$, $PY' = PY$, ähnliche Dreiecke OPY, $RP'Y$).
Somit gilt
$\frac{OY}{OI} = \frac{OY^2}{OR^2}$ (d. h. $OY : OR = OR : OI$, d. h. OR ist die mittlere Proportionale zwischen OY und OI). Aus
$\frac{OI}{OR} = \frac{OR}{OY}$ folgt $\frac{OY}{OR} = \frac{OY + OR}{OR + OI} = \frac{YR}{IR}$.
Nun gilt $\frac{OY}{OR} = \frac{PY}{PP'}$ (Dreiecke OPY, $RP'Y$) $= \frac{PY'}{PP'}$ ($PY = PY'$) und $\frac{YR}{IR} = \frac{RP'}{RU}$ (Dreiecke $RP'Y$, RUI). Also: $\frac{RP'}{RU} = \frac{PY'}{PP'}$. Qed.

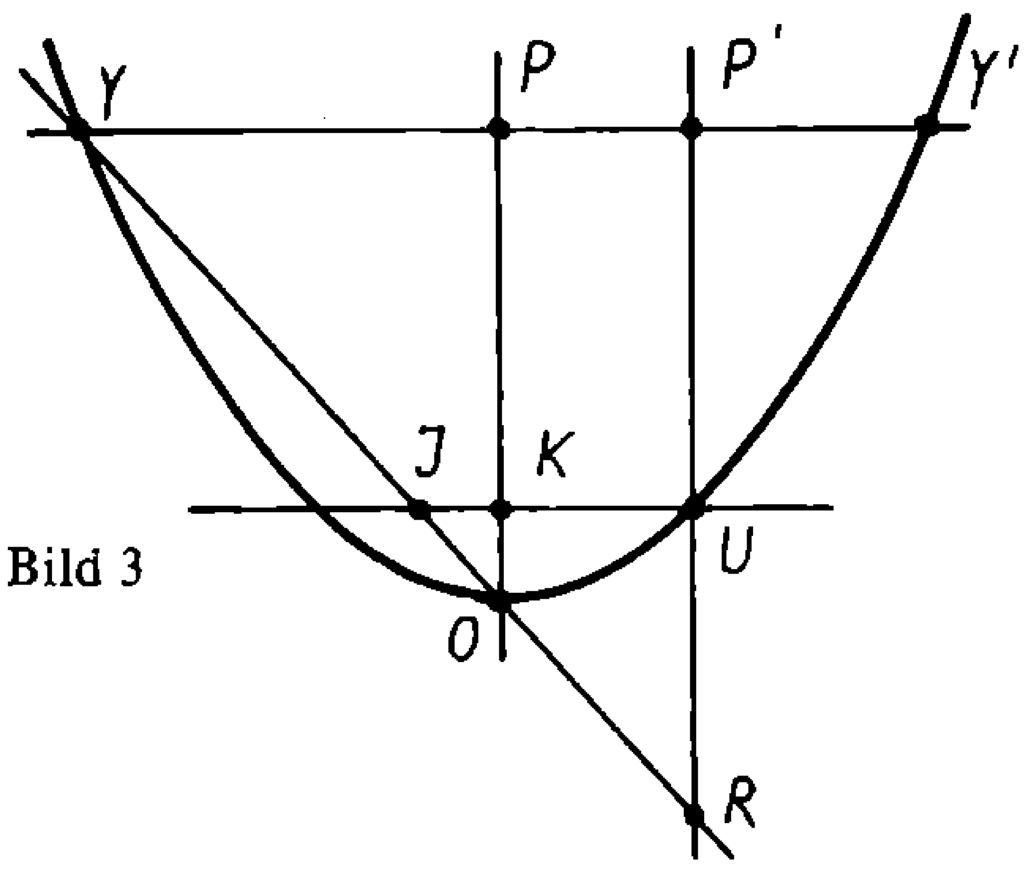


Bild 3

P5: Wir verbinden Y und O; diese Gerade schneide $P'R$ in R' (Bild 4, S. 2). Nach Eigenschaft $E4$ gilt
$P'R' : UR' = PY' : PP'$,
also (beachte $PY' = PY$)
$PY : PP' = P'R' : R'U$ oder $YP : (PY' - PP')$
$= P'R' : (P'R' - R'U)$, d. h.

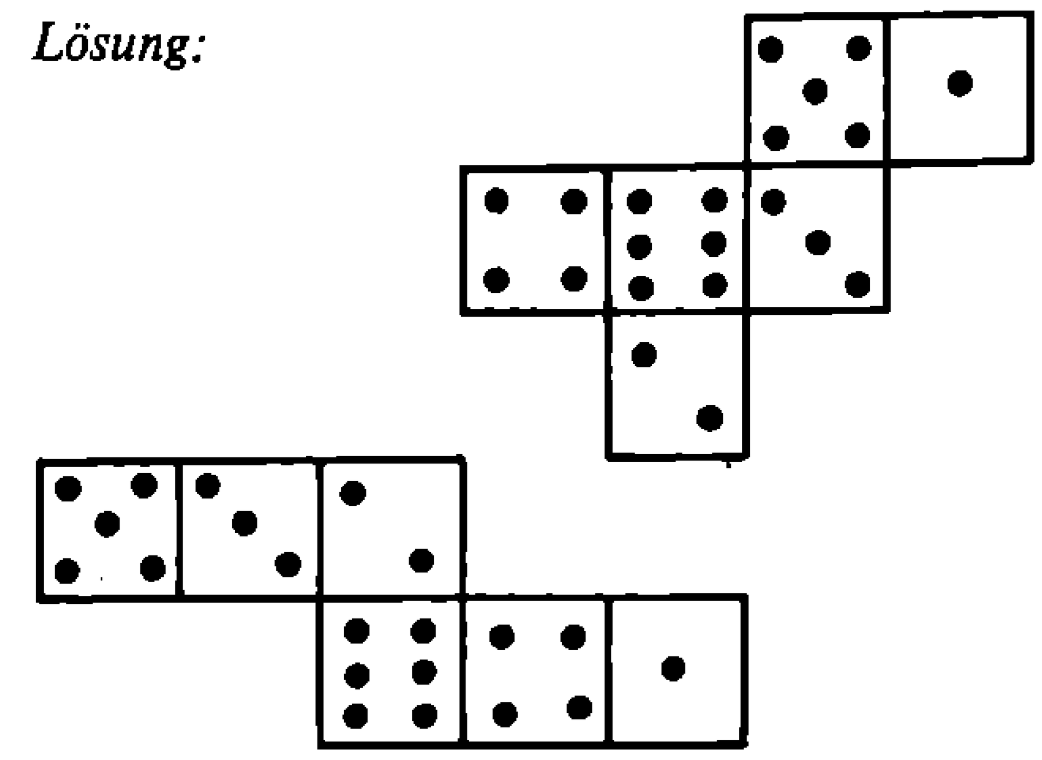
$$YP : Y'P' = P'R' : P'U \qquad (*).$$

Nun ist $OT = OP$, woraus $RR' = P'R'$ folgt.
Verdoppeln wir die Vorderglieder in (*), so ergibt sich
$\frac{YY'}{Y'P'} = \frac{P'R}{P'U}$,
woraus $\frac{YY' - Y'P'}{Y'P'} = \frac{RP' - P'U}{P'U}$,
also $\frac{YP'}{P'Y'} = \frac{RU}{UP'}$ folgt.

Lösungen zur Sprachecke

▲ 1 ▲ Würfelnetze
Die Zeichnungen zeigen zwei Würfelnetze, die zu Würfeln gefaltet werden können. Die Seiten eines Würfels werden meistens so numeriert, daß die Summe gegenüberliegender Seiten 7 ergibt.
Setze in jedes Würfelnetz die fehlenden Ziffern ein.

Lösung:



▲ 2 ▲ Im Vogelflug
Von einem Ausgangspunkt A werden folgende Verschiebungen durchgeführt:
1. 1 km nach Norden
2. 2 km nach Westen
3. 3 km nach Süden
4. 6 km nach Osten.

Wie groß ist nach diesen vier Verschiebungen der Abstand des Endpunktes vom Ausgangspunkt A?
a) 3,4 km, b) 4,5 km, c) 6,6 km.
Lösung: Der Abstand beträgt etwa 4,5 km.

▲ 3 ▲ In der Zeitung „Sovietskij Sport" (3. 5. 1987) wurde die Zwischentabelle eines Fußballturniers veröffentlicht. Beweise, daß in der Tabelle ein Fehler existiert. Korrigiere ihn unter der Voraussetzung, daß nur genau ein Fehler vorhanden ist.
Weise die Ergebnisse der Spiele aus.
Lösung: Der Fehler befindet sich in der Spalte „Torunterschied" bei der Mannschaft Schwedens. Bei einem Sieg und einem Unentschieden kann der Torunterschied nicht 1–1 betragen. Aus der Tabelle errechnet man einmal 11 als Gesamtzahl der durch die am Turnier beteiligten Mannschaften erzielten Tore, das andere Mal 12 als Gesamtzahl der Gegentore. Deshalb enthält die Tabelle einen sich auf ein Spiel beziehenden Fehler, d. h. der Torunterschied Schwedens ist gleich 2–1 oder 1–0. Als Ergebnis der Fallunterscheidung findet man die folgende Tabelle

	Ungarn	Schweden	Spanien	Irland	Frankreich	Torunterschied	Punkte
Ungarn	*	–	–	2:1	2:0	4–1	4
Schweden	–	*	1:1	1:0	–	2–1	3
Spanien	–	1:1	*	2:2	–	3–3	2
Irland	1:2	0:1	2:2	*	–	3–5	1
Frankreich	0:2	–	–	–	*	0–2	0

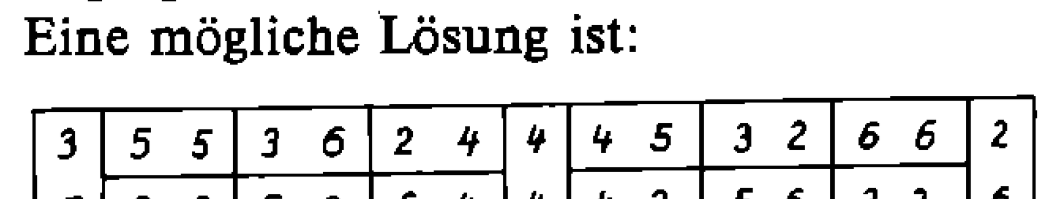
Lösung zur Schachecke

I) 1. d4 d5 2. Dd3 Dd6 3. Dh3 Dh6 4. D:c8 matt.

II) 1. c4 c5 2. Da4 Da5 3. Dc6 Dc3 4. D:c8 matt.

Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

Legespiel mit Dominosteinen
Eine mögliche Lösung ist:



Mathematischer Rösselsprung
Links: Subtraktionszeichen;
Rechts: Mathematikolympiade

5 Zahlen – 5 Ziffern
Welle, Insel, Nelke, Klein, Enkel, Leine; 1. Spalte: Winkel

Mitternachtsknobeleien
Als Zahl der „seit Mitternacht verflossenen Stunden" kann man jede beliebige einsetzen. Das Ergebnis der Rechnung ist immer 4, die „Zahl, die im Augenblick die Uhr anzeigt". Folglich war es 4 Uhr, und das Spiel kostete 5,65 M.

Raten und Rechnen

$$\begin{array}{ccccc} 663 & - & 103 & = & 560 \\ : & & + & & - \\ 39 & \cdot & 11 & = & 429 \\ \hline 17 & + & 114 & = & 131 \end{array}$$

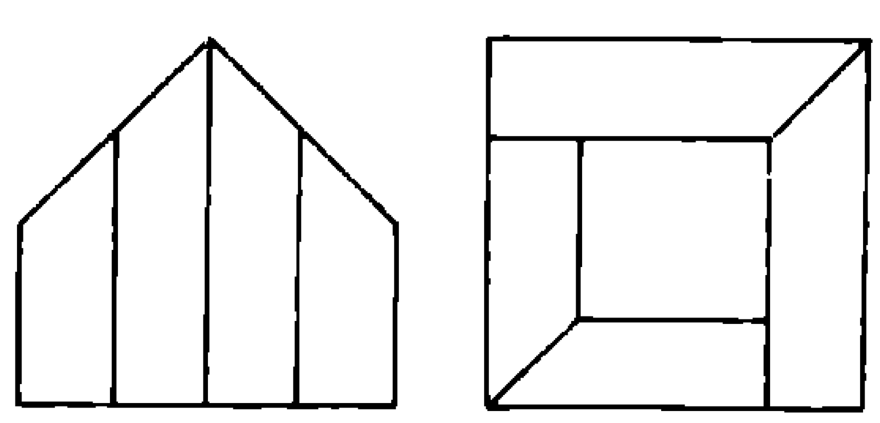
Wer findet die kürzeste Zugfolge?
Ein Zug wird beschrieben durch die durch einen Pfeil verbundenen Nummern von Feld und Folgefeld.

a) 1→4→5→6→3→2

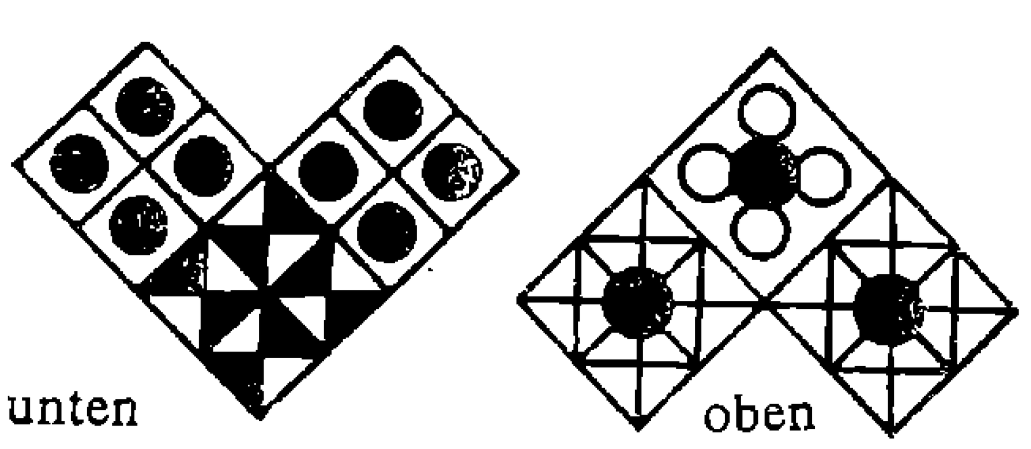
b) 1→2→5 ↗4→1→2→3→6↘ 5→2→3
  ↘6→3→2→1→4↗

Mathe-ABC
Es kann nur $C = 9$ sein, woraus sich $A = 1$ ergibt. Es muß $B = 0$ sein (sonst wäre das Ergebnis 6stellig), woraus $D = 8$ folgt. Es ergibt sich die eindeutige Lösung des Kryptogramms:
$10\,989 \cdot 9 = 98\,901$. (Übrigens ist 10 989 die einzige fünfstellige natürliche Zahl, bei der sich bei Multiplikation mit einer bestimmten einstelligen natürlichen Zahl die Grundziffern in ihrer Reihenfolge umkehren.)

Geschickt geteilt



Kombinieren gefragt



Denkt nach – schlagt nach – fragt nach!
1 Morgen = 0,25 ha = 2500 m²
1 Schock = 60 Stück
1 Mandel = 15 Stück
1 Stiege = 20 Stück
1 Hocke = 6, 8 oder 9 Stück
1 Doppelzentner = 100 kg
1 Pfund = 0,5 kg = 500 g
1 Groschen = 10 Pfennige

Denk dir eine Zahl!

Das *Institut für Arabische Manuskripte* in Kuwait veröffentlichte im Jahre 1985 Aufgaben des arabischen Mathematikers Abu Mansur al-Baghdadi (um 1035). In dem Werk „Al-Takmila fi'l hisab" befindet sich das Kapitel: *Über die Ermittlung der verborgenen Sachen und der ausgedachten Zahlen.* Frau Dr. Sonja Brentjes vom Karl-Sudhoff-Institut der Karl-Marx-Universität Leipzig stellte daraus eine Aufgabe – von uns stark bearbeitet – als Einführung zu diesem Beitrag zur Verfügung. Wir wünschen bei der Beschäftigung mit diesen Denksportaufgaben viel Freude und Erfolg.

J. Lehmann/Th. Scholl

Aus: „Al-Takmila fi'l hisab" von Abu Mansur (um 1035)

▲1▲ *A* fordert *B* auf, sich eine natürliche Zahl n zu denken, für die $1 \leqq n \leqq 105$ gilt, die gedachte Zahl durch 5 zu dividieren und den verbleibenden Rest r_1 (0, 1, 2, 3 oder 4) zu nennen, die gedachte Zahl dann durch 7 zu dividieren und den verbleibenden Rest r_2 (0, 1, 2, 3, 4, 5 oder 6) zu nennen, die gedachte Zahl nun durch 3 zu dividieren und den verbleibenden Rest r_3 (0, 1 oder 2) zu nennen. Wie kann *A* aus den drei genannten Resten r_1, r_2, r_3 die von *B* gedachte Zahl ermitteln?

Aus: „Enthüllte Zaubereyen und Geheimnisse der Arithmetik" von Joh. Ph. Gruson, Berlin 1800

▲2▲ Laß von der Zahl, die man sich denkt, 1 subtrahieren und den Rest doppelt nehmen; laß von diesem Doppelten wieder 1 wegnehmen und die gedachte Zahl dafür addieren. Wie läßt sich die gedachte Zahl ermitteln?

Aus: „Die Wunder der Rechenkunst" von Joh. Christ. Schäfer, Weimar 1831 (Originaltext)

▲3▲ *Die von einer Person in Sinn genommene Zahl zu nennen*
Wenn eine Person sich eine Zahl gedacht hat, und dieselbe hierauf mit 2 multipliciren, dann noch 5 dazu addiren, diese Summe wieder mit 5 multipliciren, zu dem Produkt 3 addiren, das dadurch erhaltene wieder mit 10 multipliciren, dann noch 3 dazu addiren und von dieser Summe 150 abziehen läßt; wie kann man aus dem jetzt bleibenden Rest, den man sich angeben läßt, die von der Person gedachte Zahl wissen?

▲4▲ Marie-Luise fordert Monika auf: „Denke dir eine natürliche Zahl und addiere 2; multipliziere die Summe mit 3, subtrahiere danach 4! Multipliziere diese Differenz mit 3, addiere nun die gedachte Zahl und addiere abschließend noch 4! Nenne mir das Ergebnis!" Wie kann Marie-Luise aus diesem Ergebnis die von Monika gedachte Zahl ermitteln?

▲5▲ Jemand denkt sich eine natürliche Zahl, verdoppelt diese und addiert danach 4. Er halbiert diese Summe und addiert 7, multipliziert nun mit 8, subtrahiert 12, dividiert durch 4 und subtrahiert zum Schluß 11. Wie läßt sich aus dem Ergebnis die gedachte Zahl ermitteln?

▲6▲ *Erraten des Geburtstages:* Man fordere jemanden auf, das Tagesdatum seines Geburtstages mit 6 zu multiplizieren, danach 12 zu addieren, diese Summe mit 5 zu multiplizieren, nun das Zehnfache der Zahl des Tagesdatums zu subtrahieren, die Zahl des Geburtsmonats zu addieren und abschließend 60 zu subtrahieren. Wie läßt sich aus dem Ergebnis das Tagesdatum und der Geburtsmonat ermitteln?

▲7▲ Bitte deinen Freund, die Zahl seines Lebensalters (in ganzen Zahlen) aufzuschreiben und dann schrittweise folgende Rechenoperationen auszuführen:
a) Multipliziere die notierte Zahl mit 5,
b) addiere zum Produkt 25,
c) multipliziere diese Summe mit 2,
d) addiere nun die Zahl des Wochentages, an dem du geboren wurdest (Montag ist der 1. Tag),
e) subtrahiere abschließend 50!
Wenn dir dein Freund das Ergebnis nennt, kannst du sofort sagen, wie alt er ist, und an welchem Wochentag er geboren wurde. Wie ist das möglich?

▲8▲ Fordere einen Mitschüler auf: „Multipliziere die Zahl deines Geburtstages mit 12 und die Nummer des Monats, in dem du geboren bist, mit 31; addieren danach beide Produkte und nenne mir das so erhaltene Resultat." Aus diesem Resultat läßt sich der Geburtstag (Tag und Monat) erraten. Wie ist das möglich?

▲9▲ *Geburtstagsraten:* Das Tagesdatum des jeweiligen Geburtstages ist mit 20 zu multiplizieren. Nach der Addition von 3 und der Multiplikation der entstehenden Summe mit 5 ist die Zahl zu addieren, die dem jeweiligen Geburtsmonat entspricht (also 1 für Januar, 2 für Februar usw.). Die entstandene Summe ist wiederum mit 20 zu multiplizieren, und es ist 3 zu addieren. Nach der Multiplikation dieser Summe mit 5 wird zum Schluß der Rechnung die aus den letzten beiden Grundziffern des Geburtsjahres gebildete Zahl addiert (also vom Geburtsjahr 1970 beispielsweise nur die Zahl 70). Aus der nun entstandenen fünf- oder sechsstelligen natürlichen Zahl kann man bei richtiger Rechnung sofort die vollständige Angabe des Geburtstages ermitteln. Wie ist das möglich?

Die Lösungen erscheinen im nächsten Heft!

Spezialistenlager Mathematik im Blick

Mit unserem kleinen Beitrag wollen wir uns bei den Mitarbeitern der *alpha* bedanken, da diese Zeitschrift bereits seit 20 Jahren ein treuer Begleiter unseres Spezialistenlagers Mathematik ist. Wir, das sind in diesem Jahr 30 Schüler vorwiegend aus der 5. und 6. Klasse sowie Lehrer aus dem Kreis Plauen/Land. Gastgeber für uns ist in bewährter Weise die Touristenstation Johanngeorgenstadt.
Morgens beschäftigten wir uns mit mathematischen Problemen und arbeiten gruppenweise am Computer. Der Nachmittag gehört dem Wintersport, zu dem haben wir hier ausreichend Gelegenheit.
Anschließend sitzen wir gemeinsam beim Lösen von *alpha*-Aufgaben und knobeln.
Kathrin, Heike und Thomas sind Schüler der Klasse 10 und bereits zum 5. Mal dabei. Da Heike und Thomas Lehrer werden wollen, leiten sie zum Teil die Jüngsten beim Gruppenunterricht an.
Für alle Leser nun einige bei uns entstandene Knobelaufgaben:

▲1▲ Die Familie Schmidt besteht aus dem Vater, der Mutter und deren Kindern Andreas und Stefanie. Diese vier Personen sind zusammen 66 Jahre alt. Der Vater ist vier Jahre älter als die Mutter und dreimal so alt wie die beiden Kinder zusammen alt sind. Das Lebensalter von Andreas ist ohne Rest durch drei teilbar.
Wie alt ist jedes der vier Familienmitglieder, wenn Stefanie älter ist als Andreas?

Schüler Thomas Kriegelstein, Syrau

▲2▲ Zur Familie Hinz gehören die Mutter, der Vater, die Tochter Angelika und der Sohn Steffen. Alle vier zusammen sind dreimal so alt wie die Mutter. Der Vater ist zwei Jahre älter als die Mutter. Angelika ist acht Jahre jünger als Steffen, dieser 22 Jahre jünger als die Mutter.
Wie alt ist jedes Familienmitglied?

Schüler Sven Zimmermann, Leubnitz

▲3▲ Die Mitglieder einer fünfköpfigen Familie sind zusammen 195 Jahre alt. Der Vater ist viermal so alt wie seine Tochter Susi. Der Sohn Ralf ist 30 Jahre jünger als seine Mutter. Susi ist drei Jahre jünger als ihr Bruder Ralf. Die Großmutter der beiden Geschwister ist 30 Jahre älter als deren Mutter.
Gib das Alter der fünf Familienmitglieder an!

Schülerin Ramona Holzmüller, Syrau

▲4▲ In dem folgenden Schema ist jeder Buchstabe so durch eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Für gleiche Buchstaben sind gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben sind verschiedene Ziffern einzusetzen. Dabei muß jede Zeile mit einer von Null verschiedenen Ziffer beginnen. Es ist eine vollständige Lösung anzugeben.

$$\begin{array}{r} \mathrm{W\,O\,L\,F} \\ +\ \mathrm{W\,O\,L\,F} \\ \hline \mathrm{R\,U\,D\,E\,L} \end{array}$$

Schüler Bernhard Großer

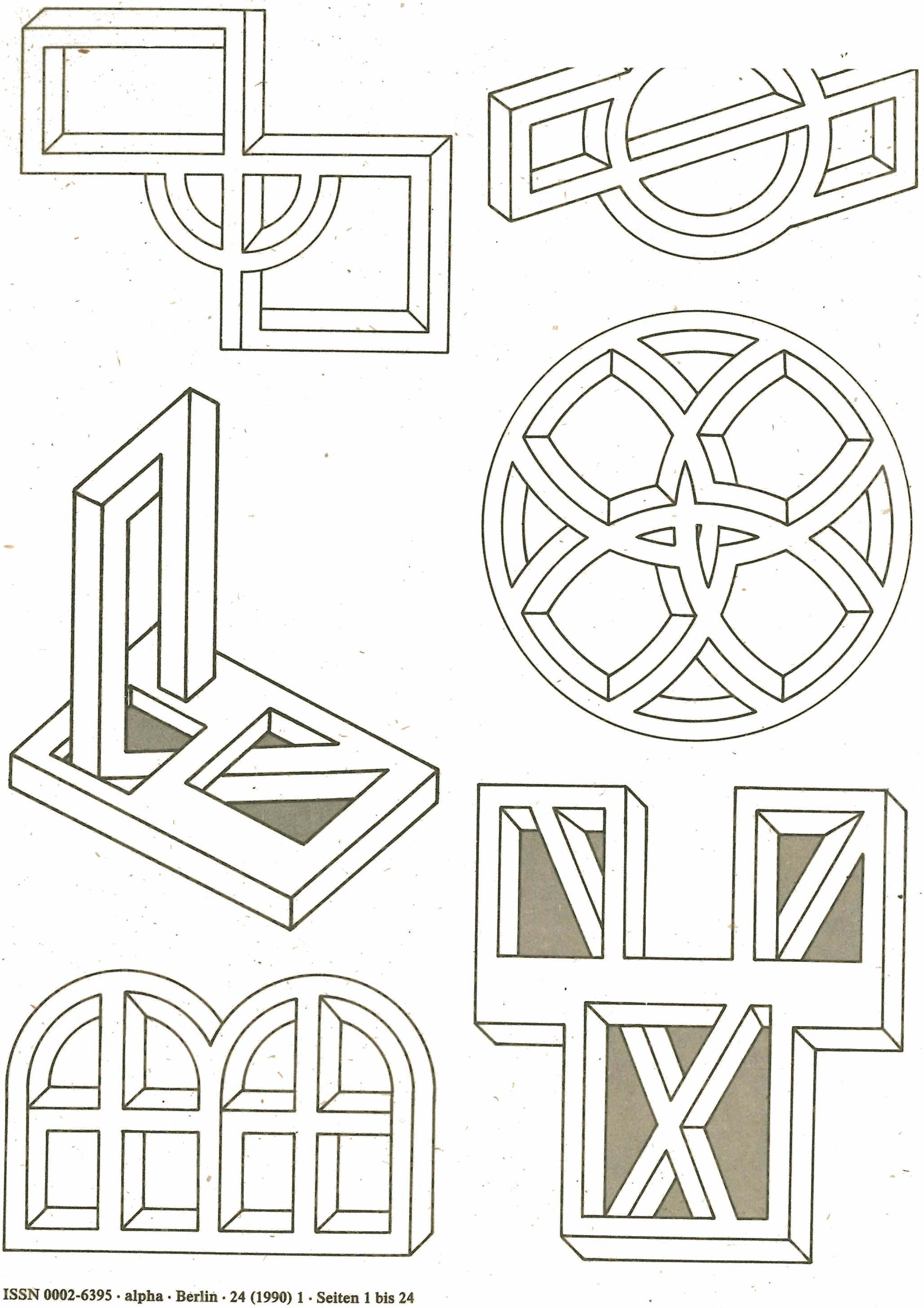
Viel Spaß beim Knobeln!

Dauerkalender für die Jahre 1801 bis 2100

Jahre 1801–1900				Jahre 1901–2000				Jahre 2001–2100					Monate J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
01	29	57	85		25	53	81		09	37	65	93	4	0	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2
02	30	58	86		26	54	82		10	38	66	94	5	1	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
03	31	59	87		27	55	83		11	39	67	95	6	2	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4
04	32	60	88		28	56	84		12	40	68	96	0	3	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
05	33	61	89	01	29	57	85		13	41	69	97	2	5	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
06	34	62	90	02	30	58	86		14	42	70	98	3	6	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1
07	35	63	91	03	31	59	87		15	43	71	99	4	0	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2
08	36	64	92	04	32	60	88		16	44	72		5	1	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4
09	37	65	93	05	33	61	89		17	45	73		0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
10	38	66	94	06	34	62	90		18	46	74		1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
11	39	67	95	07	35	63	91		19	47	75		2	5	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
12	40	68	96	08	36	64	92		20	48	76		3	6	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2
13	41	69	97	09	37	65	93		21	49	77	00	5	1	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
14	42	70	98	10	38	66	94		22	50	78		6	2	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4
15	43	71	99	11	39	67	95		23	51	79		0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
16	44	72		12	40	68	96		24	52	80		1	4	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
17	45	73		13	41	69	97		25	53	81		3	6	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1
18	46	74		14	42	70	98		26	54	82		4	0	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2
19	47	75		15	43	71	99		27	55	83		5	1	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
20	48	76		16	44	72	00		28	56	84		6	2	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
21	49	77	00	17	45	73		01	29	57	85		1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
22	50	78		18	46	74		02	30	58	86		2	5	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
23	51	79		19	47	75		03	31	59	87		3	6	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1
24	52	80		20	48	76		04	32	60	88		4	0	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
25	53	81		21	49	77		05	33	61	89		6	2	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4
26	54	82		22	50	78		06	34	62	90		0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
27	55	83		23	51	79		07	35	63	91		1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
28	56	84		24	52	80		08	36	64	92		2	5	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1

S	1	8	15	22	29	36
M	2	9	16	23	30	37
D	3	10	17	24	31	
M	4	11	18	25	32	
D	5	12	19	26	33	
F	6	13	20	27	34	
S	7	14	21	28	35	

Beispiel: Auf welchen Wochentag fiel der 15. 2. 1930?
Lösung: Suche für 1930 (Jahrestafel) in der Monatstafel unter Februar die zugehörige Monatskennzahl (6); zuzüglich der Zahl des gesuchten Wochentages (15), ergibt sich die Schlüsselzahl (6 + 15 = 21), für die man in der Wochentagstafel den Sonnabend findet.



ISSN 0002-6395 · alpha · Berlin · 24 (1990) 1 · Seiten 1 bis 24