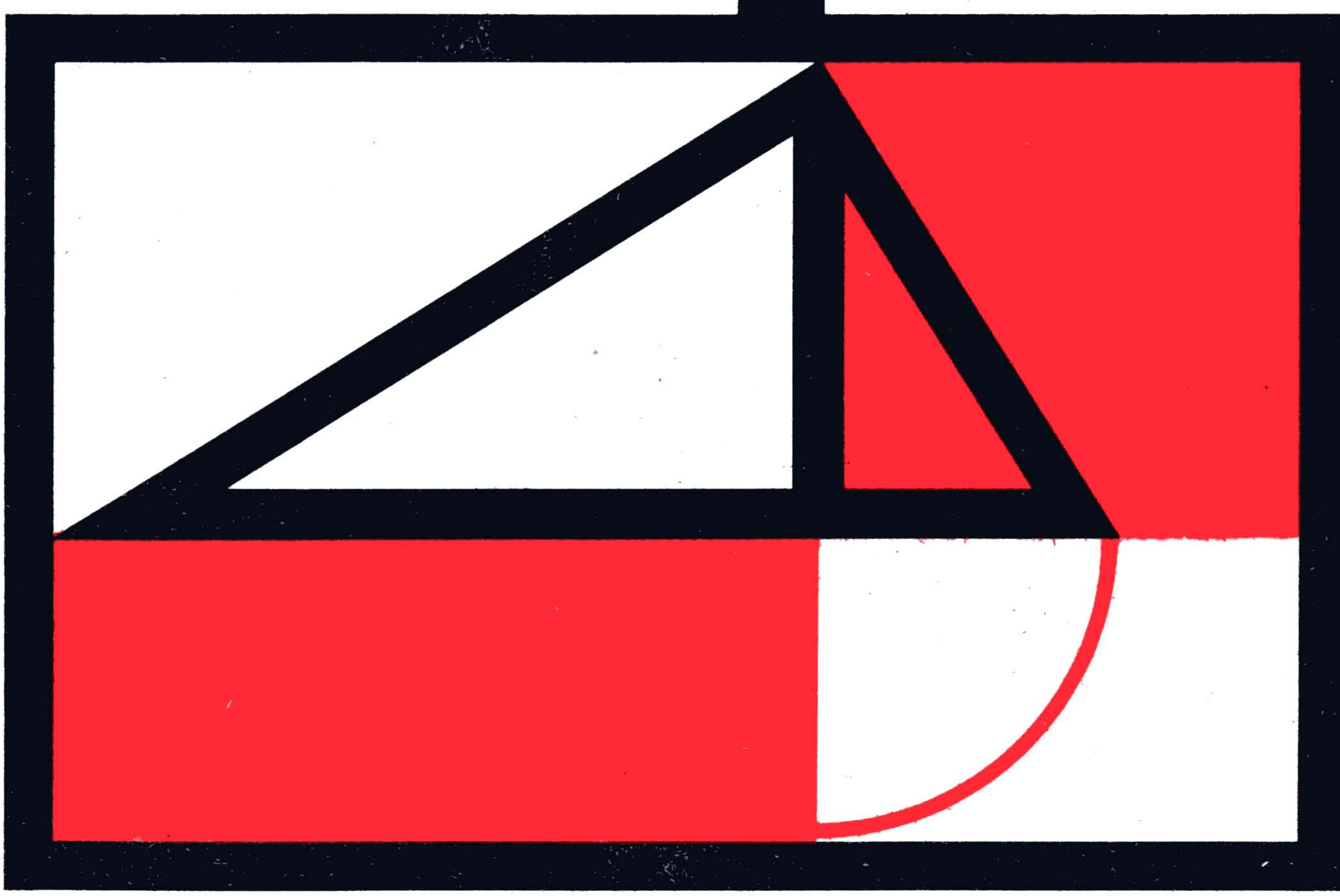
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



5

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin

3. Jahrgang 1969
Preis 0,50 M
Index 31059

Redaktion:
StR J. Lehmann, V. L. d. V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20 05 41 Postscheckkonto: Berlin 132 626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich (1 Heft) 0,50 M

Zu beziehen durch die Deutsche Post oder den Buchhandel, Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export und -Import GmbH, Leipzig, Leninstraße 16 Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden

Fotos:
W. Seifert, Karl-Marx-Stadt (S. 97; 98); E. Cojocaru, Bukarest (S. 101); Zentralbild (S. 108; 109); Foto Zimmert, Rostock (S. 113); Vignette Ch. Loff, Leipzig (S. 113); Vignette F. Fricke, Berlin (S. 118); Techn. Zeichnungen: G. Gruß, Leipzig
Typographie: H. Tracksdorf

Veröffentlicht unter der Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik, (Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 15. Juli 1969

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

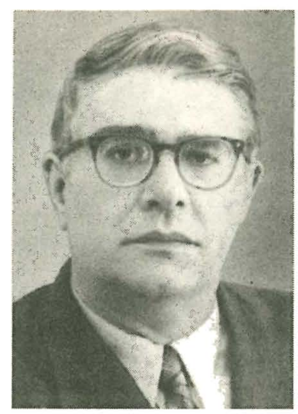
Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet.

An die Leser der Zeitschrift „alpha“

Liebe junge Freunde!

Ich glaube nicht, daß es notwendig ist, Sie davon zu überzeugen, sich mit Mathematik zu beschäftigen. Da Sie Leser dieser Zeitschrift sind, bedeutet das, daß Sie zur großen Familie der Mathematiker der ganzen Welt gehören. Und wer ihr mal angehört, der bleibt ihr auch treu.
Weshalb sollten aber wir Menschen, die der wunderschönen Dame Mathematik ergeben sind (die Mathematik ist übrigens nicht nur im Deutschen, sondern auch im Russischen weiblichen Geschlechtes), in dieser ausgezeichneten Zeitschrift nicht auch darüber sprechen, was wir schätzen und lieben? Das könnte wie ein Toast am Festtisch der Wissenschaft klingen.
Die Mathematik gehört nicht irgendeinem Volk, sondern ist wahrhaftig international. Es gibt kein Land, das mit ihr nicht Freundschaft hielte, das ihre Schätze nicht mehrte und rühmte.
Mit ihrer Hilfe dringen wir in die jahrhundertealten Rätsel der Zahlen ein, erforschen wir die verborgensten Geheimnisse des Raumes, bezwingen wir die Zufälligkeit und werden zu Herren der Unendlichkeit. Ohne sie könnten wir weder in die Tiefen des Weltraums noch in das Innere des Atoms eindringen.
Sie ist aber keineswegs eine Aristokratin mit weißen, gepflegten Händen. Sie scheut auch nicht die gewöhnliche Alltagsarbeit. Tag für Tag arbeitet sie aufopferungsvoll mit uns zusammen in den Konstruktions- und Kalkulationsbüros, in Betrieben und Ämtern.
Wie eine besorgte und liebende Mutter entwickelt die Mathematik in uns unsere geistigen Fähigkeiten, erzieht den Charakter, lehrt geduldig geregelte Arbeit, Selbstüberprüfung und Selbstkritik.
Manchmal kann man hören, die Beschäftigung mit der Mathematik wirke sich nur auf den Geist aus, während Gefühle und Herz unberührt bleiben. Die wahre Wissenschaft ist doch aber ein ewiges Suchen für die bessere Zukunft der Menschheit, ein Suchen, das eine riesige Beharrlichkeit, heroische Arbeit und Energie erfordert. Hinter den kargen Zeilen der wissenschaftlichen Gesetze, Formeln und Theoreme verbergen sich grenzenloser Mut, Liebe zu den Menschen und zur Heimat sowie Opferfreudigkeit aller jener, die sich der Wissenschaft widmen!
Ich begrüße Sie, die junge Generation des neuen Deutschlands, zum ruhmreichen Jubiläum ihrer Heimat, zum 20. Geburtstag der Deutschen Demokratischen Republik.

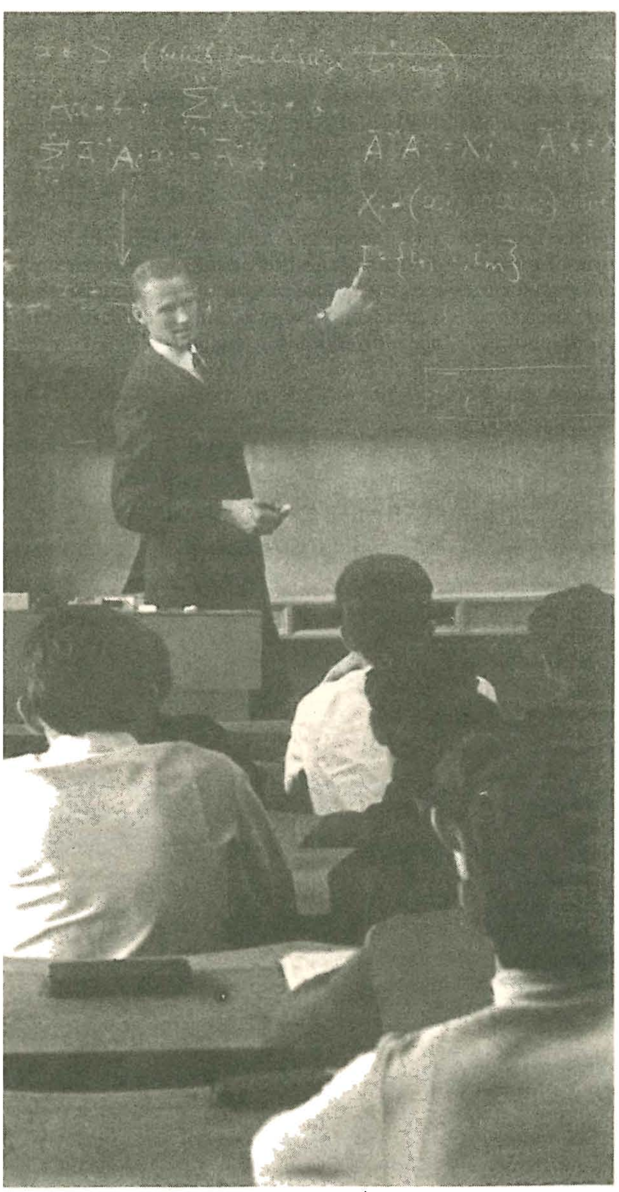


Alexej Markuschewitsch
Vizepräsident der Akademie der Pädagogischen Wissenschaften, Professor am Lehrstuhl für Theorie der Funktionen und Funktionalanalyse der Moskauer Universität

Wir stellen vor:

Prof. Dr. rer. nat. habil. Frieder Kuhnert

Wenn man im 20. Jahr der Deutschen Demokratischen Republik eine Liste der Namen von jungen und erfolgreichen Wissenschaftlern und Hochschullehrern unseres Staates zusammenstellt, dann darf in dieser Liste der Name *Frieder Kuhnert* nicht fehlen. Wer ist dieser Wissenschaftler, der bereits international einen Namen hat? Wie wurde er Mathematiker?



Auf welchem Gebiet arbeitet er? Was hat er den Lesern der Zeitschrift *alpha* zu sagen?
Prof. Dr. rer. nat. habil. Kuhnert ist heute Direktor der Sektion Mathematik und Dekan der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät des Wissenschaftlichen Rates der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt. Er ist ein führender Mann sowohl auf gesellschaftlichem als auch auf wissenschaftlichem Gebiet an der TH. Als Hochschullehrer hat er großen Anteil an der Durchsetzung der dritten Hochschulreform an der Hochschule. Die Angehörigen des Lehrkörpers und die Studenten der Sektion Mathematik schätzen ihn als Genossen, Leiter und Wissenschaftler.
1938 wurde er auf dem Lande geboren. Sein Vater ist im Krieg gefallen. Er war Landwirt, später Metallarbeiter. Seine Mutter war Büroangestellte. In der Schulzeit fühlte sich Frieder K. zur Physik, zur Chemie und zur Mathematik hingezogen. Er war trotz seiner Begabung nicht Musterschüler, sondern ein „Normalentwickler". Bereits in der Schulzeit allerdings bildete sich eine wichtige Fähigkeit heraus: den Blick für das wesentliche zu schärfen und sich auf die Lösung von Hauptaufgaben zu konzentrieren.

Nach Abschluß der Erweiterten Oberschule wurde er 1956 zum Studium ins Ausland delegiert. Seine wissenschaftliche Laufbahn begann mit einem fünfjährigen Mathematikstudium an der Mathematisch-Mechanischen Fakultät der Leningrader Universität. Bei Prof. Dr. Gawurin, einem bekannten Mathematiker, schloß er 1961 das Studium mit dem Diplom ab. In seiner Diplomarbeit beschäftigte er sich mit einem Problem der Numerischen Mathematik, nämlich mit Näherungsverfahren beim Matrizeneigenwertproblem.

Nach einjähriger Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent am Institut für Maschinelle Rechentechnik der TU Dresden kehrte er nach Leningrad zurück und wurde Aspirant bei Prof. Gawurin. Diesen Abschnitt seiner wissenschaftlichen Entwicklung schloß er 1965 ab. Er promovierte zum Dr. rer. nat. Das Thema seiner Dissertation lautete: „Über Fragen der Metrisierung in der Menge der Einheitszerlegungen".

Dr. rer. nat. Kuhnert kehrte anschließend in die DDR zurück und nahm die Tätigkeit als wissenschaftlicher Oberassistent und später als Dozent am Institut für Mathematik an der TH Karl-Marx-Stadt auf. Bereits ein Jahr später, im Jahre 1966, habilitierte er über das Thema „Zur Berechnung isolierter Eigenwerte abgeschlossener Operatoren durch Pseudostöriteration".
Im Sommer 1967 wurde Dr. rer. nat. habil. Kuhnert Direktor des Mathematischen Instituts der TH, im September 1967 wurde er zum Professor berufen.
Als Direktor der Sektion Mathematik hat Prof. Kuhnert eine wichtige und verantwortungsvolle Funktion. Bei der weiteren Durchführung der dritten Hochschulreform, insbesondere bei der Entwicklung der Forschung, der Zusammenarbeit mit Industriebetrieben, der weiteren Verbesserung der Erziehung und Ausbildung und der Entwicklung des wissenschaftlich-produktiven Studiums, hat die Sektion Mathematik große Aufgaben zu erfüllen.
Vielfältige gesellschaftliche Aufgaben und Pflichten sind zu erfüllen. Prof. Kuhnert ist Mitglied des Vorstandes der Mathematischen Gesellschaft der DDR, Mitglied des Forschungsrates der DDR und Vorsitzender des Rates der Sektion Mathematik an der TH, um nur einiges anzuführen.
Neben dieser gesellschaftlichen Tätigkeit und der Tätigkeit als Leiter einer Schwerpunktsektion beschäftigt sich Prof. Kuhnert weiter mit der Forschung. Die wissenschaftlichen Arbeitsgebiete von ihm gehören zur Numerischen Mathematik. In einer Reihe von wissenschaftlichen Veröffentlichungen und Vorträgen beschäftigte er sich bereits mit wichtigen Problemen der Numerischen Mathematik, so z. B. mit numerischen Verfahren mit hohem Konvergenzgrad zur Eigenwertbestimmung, mit der Störungstheorie der Spektralzerlegung und mit funktionalanalytischen Methoden in der Numerischen Mathematik. Seine jetzigen Vorhaben ordnen sich ein in den Forschungskomplex des Lehrbereichs Numerische Mathematik: Stabilität numerischer Verfahren.
Einen breiten Raum in der Arbeit Prof. Kuhnerts nimmt seine Tätigkeit als Hochschullehrer ein. Besonderes Augenmerk legt er auf die Erziehung der Studenten zu sozialistischen Persönlichkeiten und Fachleuten, auf die Entwicklung des wissenschaftlich-produktiven Studiums, auf die Förderung des Nachwuchses und auf die Entwicklung der gesellschaftlichen Arbeit in der Sektion. Er hält einen engen Kontakt zu den Studenten und, soweit es seine Zeit erlaubt, auch bereits Kontakt zu den angehenden Studenten.

J. Gronitz

Als junger Wissenschaftler wendet sich Prof. Dr. F. Kuhnert heute an die jungen Mathematiker, die die Zeitschrift *alpha* lesen:

„Die Einwohner unserer Republik bereiten Geschenke vor, die sie auf den Gabentisch zum 20. Geburtstag unseres Arbeiter-und-Bauern-Staates legen wollen. Euer Geschenk, liebe Mädel und Jungen, sollte neben anderen auch die intensive Beschäftigung mit Mathematik und den naturwissenschaftlichen Fächern sein. So werdet Ihr einen würdigen Beitrag zur Entwicklung der Wissenschaft in unserer Republik leisten.

Wie wär's noch mit einer Aufgabe?

▲ 451 Wir betrachten die Zahlenfolge
1,1,2,3,5,8,13,21,34,...
Ist u_n das n-te Glied dieser Folge, so gilt
$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \quad n = 3,4,\ldots,$$
d. h. jedes Folgenglied ergibt sich als Summe der beiden unmittelbaren Vorgänger. Diese Folge nennt man Fibonaccische Folge, ihre Glieder die Fibonaccischen Zahlen. Ihr sollt nun zeigen, daß die Formel
$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} \text{ gilt.}$$

Zur Anleitung und Hilfestellung möchte ich Euch das Buch von A. A. Kolosow ‚Kreuz und quer durch die Mathematik' vom Verlag Volk und Wissen (1963) empfehlen, in dem Ihr weitere Anregungen — auch zu anderen Fragen — erhaltet."

XI. Internationale Mathematikolympiade

Bukarest 1969

Aufgaben

1. Es ist zu beweisen, daß es unendlich viele natürliche Zahlen a mit folgender Eigenschaft gibt:
Die Zahl $z = n^4 + a$ ist für keine natürliche Zahl n eine Primzahl. (DDR, 5 Punkte)

2. Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reelle Konstanten, x eine reelle Variable und

$$f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{1}{2}\cos(a_2 + x) + \frac{1}{2^2}\cos(a_3 + x) + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n + x).$$

Man beweise: Aus $f(x_1) = f(x_2) = 0$ folgt $x_2 - x_1 = m\pi$, wobei m eine ganze Zahl ist. (Ungarische VR, 7 Punkte)

3. Für jedes $k = 1, 2, 3, 4, 5$ bestimme man die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, die eine positive reelle Zahl a erfüllen muß, damit ein Tetraeder existiert, bei dem k Kanten die Länge a und die übrigen $6 - k$ Kanten die Länge 1 haben. (VR Polen, 7 Punkte)

4. Eine Halbkreislinie γ ist über der Strecke AB als Durchmesser errichtet. C ist ein Punkt auf γ, der von A und B verschieden ist. D ist der Fußpunkt des Lotes von C auf AB. $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sind drei Kreise, die AB als gemeinsame Tangente haben. Von diesen Kreisen ist γ_1 der Inkreis des Dreiecks ABC, während γ_2 und γ_3 beide die Strecke CD und γ berühren. Man beweise, daß die Kreise γ_1, γ_2 und γ_3 eine zweite gemeinsame Tangente haben. (Niederlande, 6 Punkte)

5. In einer Ebene sind n Punkte gegeben, wobei $n > 4$ gilt und keine drei dieser Punkte auf einer Geraden liegen. Es ist zu beweisen, daß man wenigstens $\binom{n-3}{2}$ konvexe Vierecke finden kann, deren Eckpunkte unter den gegebenen Punkten vorkommen.
(Mongolische Volksrepublik, 7 Punkte)

6. Man beweise, daß für alle reellen Zahlen $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ mit $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_1y_1 - z_1^2 > 0$, $x_2y_2 - z_2^2 > 0$ die Ungleichung

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leq \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2}$$ erfüllt ist.

Man gebe ferner die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit des Gleichheitszeichens an.
(UdSSR, 8 Punkte)

Aus der nachfolgenden Übersicht ist der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben ersichtlich:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
	5 P.	7 P.	7 P.	6 P.	7 P.	8 P.
mögliche Gesamtpunktzahl*	560	784	784	672	784	896
erreichte Gesamtpunktzahl*	289	486	470	258	466	271
in Prozent	52	62	60	38	59	30
DDR-Mannschaft in Prozent	95	80	79	73	88	45

* bezogen auf 14 Mannschaften (112 Schüler)

Preisträger der XI. IMO

	1. Preis	2. Preis	3. Preis	Sonderpreis	Gesamtpunktz.
VR Ungarn	1	4	2	1	247
DDR		4	4	2	240
UdSSR	1	3	3	3	231
SR Rumänien		4	2	1	219
England	1	1	1	3	193
VR Bulgarien			3		189
SFR Jugoslawien		2	2		181
ČSSR			3	1	170
Mongolische VR			1		120
VR Polen		1		1	119
Frankreich		1			119
Schweden				1	104
Belgien					57
Niederlande					51
	3	20	21	13	2240**

**von 4480 möglichen Punkten

Preise wurden für folgende Punktzahlen vergeben:
1. Preis 40 Punkte
2. Preis 37 bis 30 Punkte
3. Preis 29 bis 24 Punkte
39 und 38 Punkte erreichte kein Teilnehmer. Sonderpreise wurden für die elegante Lösung einer Aufgabe vergeben.

DDR-Teilnehmer der XI. IMO

Jürgen Gärtner 2. Preis
Betriebsberufsschule des VEB Kombinat Robotron Radeberg, 3. Lehrjahr

Wolfgang Burmeister 2. Preis
Erweiterte Oberschule Dresden-Süd, Klasse 10

Andreas Felgenhauer 2. Preis
Spezialklasse für Mathematik an der Technischen Hochschule „Otto von Guericke", Magdeburg, Klasse 11

Stefan Heinrich 2. Preis
Spezialklasse für Mathematik an der Humboldt-Universität zu Berlin, Klasse 12

Hans-Dietrich Gronau 3. Preis
Erweiterte Oberschule „Friedrich Engels", Neubrandenburg, Klasse 12

Jürgen Schefter 3. Preis
Erweiterte Oberschule „Wladimir Komarow", Elsterwerda, Klasse 9

Joachim Voigt 3. Preis
Erweiterte Oberschule „Heinrich Hertz", Berlin, Klasse 10

Klaus Neumann 3. Preis
Erweiterte Oberschule „Ernst Schneller", Meißen, Klasse 12

Jürgen Schefter (DDR), jüngster Teilnehmer der XI. IMO, nimmt von Akademiemitglied Gh. C. Moisil seinen 3. Preis entgegen.

Glückwunsch Margot Honeckers

Der DDR-Volksbildungsminister, Margot Honecker, hat der DDR-Mannschaft und ihrem Delegationsleiter, Dr. Helmut Bausch, ein Glückwunschtelegramm übermittelt, in dem es heißt:

„Mit großer Freude habe ich von dem ausgezeichneten Ergebnis erfahren, das unsere Schülermannschaft bei der XI. Internationalen Mathematik-Olympiade in Bukarest erzielte. Ich beglückwünsche die Mannschaft und Sie zu diesem Erfolg. Unsere Olympia-Mannschaft hat damit zum 20. Jahrestag der DDR einen guten Beitrag geleistet. Ich wünsche allen weitere Erfolge."

● Wir stellen vor:
Vorsitzender der Jury: Akademiemitglied Gh. C. Moisil, Präsident der Mathem. Ges. der SR Rumänien
Delegationsleiter der Mannschaft der DDR: Dr. habil. H. Bausch, Institut für Angewandte Mathematik und Mechanik der Deutschen Akademie der Wissenschaften Berlin
Pädagogischer Betreuer: Oberstudienrat Dr. Rolf Lüders, Institut für Lehrerbildung, Berlin

● Auf einer Sondersitzung des Sekretariats des Zentralrats der FDJ wurde beschlossen, alle Teilnehmer der Mannschaft der DDR auszuzeichnen:
Ehrenurkunde des Zentralrats für S. Heinrich, J. Gärtner, H.-D. Gronau, W. Burmeister
Artur-Becker-Medaille in Silber für A. Felgenhauer
Artur-Becker-Medaille in Bronze für K. Neumann, J. Schefter, J. Voigt

● Alle Teilnehmer erhielten vom Ministerium für Volksbildung und von der Mathematischen Gesellschaft der DDR Ehrenurkunden, Buchprämien und Geschenkmappen.

● Die Auszeichnung nahmen vor: Minister K. Dietzel (Min. f. Volksbildung), W. Engst (Zentralrat der FDJ), Prof. Dr. K. Schröder (Mathematische Ges. der DDR), Prof. Dr. W. Engel (Zentrales Komitee der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR).

● Stefan Heinrich nahm das 4. Mal an einer IMO teil. Mit zwei 1. Preisen und zwei 2. Preisen ist er erfolgreichster Teilnehmer der DDR. Seit September studiert er in der Sowjetunion Mathematik.

● Die beiden Klausuren (Arbeitszeit je 4 Stunden) fanden am 10. und 11. Juli in einem Bukarester Lyzeum statt. Es standen 8 Räume mit je 14 Arbeitsplätzen zur Verfügung.

● Einen ersten Preis (für erreichte Höchstpunktzahl (40) erhielten: Simon Norton, Windsor, Eton College (England); Vladimir Drinfeld, Charkow, 27. Schule (UdSSR); Tibor Fiala, Budapest, II. Rákóczi Ferenc Gimnázium (Ungarische VR)

● An der XI. IMO nahmen 7 Mädchen (X. IMO — 1 Mädchen) teil: Belgien 3, Bulgarien 2, UdSSR 1, Polen 1; einen 3. Preis erhielten: Christowa Stoinewa, Russe (VR Bulgarien), und Lena Nekludowa, Moskau (UdSSR).

● Als Beobachter im Auftrage des Erziehungsministeriums Österreichs nahm Dr. W. Flick, Gymnasialprof. und Lehrbeauftragter an der Universität Graz, teil.

● Seit September studieren 4 Teilnehmer der sowjetischen Mannschaft in Moskau, 1 T. in Kasan, 1 T. in Leningrad. Zwei Teilnehmer gehen noch ein Jahr zur Schule.

● Alle englischen Teilnehmer studieren seit September an der Universität Cambridge, der „Hochburg der Mathematik in England", wie sie sagten.

● Prof. Endre Hodi, seit Beginn der Olympiaden Delegationsleiter der ungarischen Mannschaft, dankte im Namen aller Teilnehmer den rumänischen Freunden für die große Gastfreundlichkeit und lud zur XII. IMO nach Ungarn ein.

● Belgien und die Niederlande nahmen zum ersten Mal an der IMO teil.

● Die meisten Mannschaften trafen 3 Tage vor Beginn der Klausuren in Bukarest ein. Neben ausgiebiger Freizeit (zur Eingewöhnung und Entspannung) wurden eine 3stündige Stadtrundfahrt und eine Halbtagesfahrt zum Schloß von „Mogoşoaia" und dem herrlichen Erholungszentrum Snagov unternommen. Jenseits des 18 km langen Snagovsees tagte die Jury, um 6 Aufgaben aus über 70 vorgelegten Problemen auszuwählen, zu präzisieren, in die jeweilige Landessprache der 14 Teilnehmerländer zu übersetzen.

● Während Delegationsleiter, päd. Betreuer und Koordinatoren die Aufgaben korrigierten, Punkte und Preise festlegten, unternahmen die 112 Teilnehmer eine 7tägige Rundreise durch die Moldau und die Ostkarpaten. Reiseroute: Bukarest — Bacău — Bicaz — Agapia — Suceava — Bistriţa — G. Mures — Braşov — Sinaia — Ploieşti — Bukarest (rund 1400 km).
Unsere rumänischen Freunde zeigten uns ihre aufblühende Industrie, ihre hochentwickelte Landwirtschaft, ihre Kunstschätze (u. a. 4 Klöster, 2 Schlösser), die herrlichen Berge, waldreiche Täler, neue, moderne Wohnviertel in allen Städten, welche wir durchfuhren, malerische Gassen und Häuser, Burgen, die von alten, oft tragischen Traditionen Kunde geben. Überall trafen wir gastfreundliche, aufgeschlossene Menschen. Allen, die diese „Exkursion ins Land" für uns vorbereiteten und durchführten, sei unser herzlichster Dank gesagt.

J. Lehmann

Rechnen mit Resten
Teil 3

Vielleicht wird es nun gut sein, wenn wir vor einem Weiterschreiten in den nächsten Abschnitt wieder einige Übungsaufgaben selbständig lösen:

▲ A 6 Man stelle eine Übersicht über die Arithmetik im Bereich der Restklassen modulo 6 auf, d. h. man vervollständige folgende Tabellen:

$m = 6$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$				$\bar{5}$	
$\bar{2}$	$\bar{2}$		$\bar{4}$			
$\bar{3}$	$\bar{3}$			$\bar{0}$		
$\bar{4}$	$\bar{4}$					
$\bar{5}$	$\bar{5}$					

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$		$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$			$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$				
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$				

Außerdem sei zur Übung das Aufstellen weiterer Tabellen, vor allem für die Multiplikation, empfohlen, z. B. für $m = 10, 11, 12, 13, 19, 23, 24$.

▲ A 7 Angelika und Barbara spielen folgendes Spiel: Angelika beginnt und nennt eine natürliche Zahl s, und zwar mindestens 1 und höchstens 6. Danach addiert Barbara dazu eine von ihr genannte Zahl s mit $1 \leqq s \leqq 6$, dann wieder Angelika usw. Wer auf diese Weise zuerst zu 40 oder einer höheren Zahl gelangt, hat verloren.

Ein Spiel verläuft folgendermaßen:

A: 3	B: 8 (+5)
A: 12 (+4)	B: 16 (+4)
A: 19 (+3)	B: 21 (+2)
A: 27 (+6)	B: 29 (+2)
A: 32 (+3)	B: 33 (+1)
A: 39 (+6)	B: 40 (+1)

Barbara hat also verloren. Schon mit dem Erreichen der „Gewinnzahl" 39 hatte Angelika mit Sicherheit gewonnen, weil ja Barbara unbedingt mindestens 1 addieren muß und damit 40 erreicht oder überschreitet. Nun ist aber schon 32 eine solche Gewinnzahl, denn von ihr aus muß Angelika unbedingt die Zahl 39 erreichen, weil Barbara mindestens bis 33, höchstens aber bis 38 kommt. Auch das Erreichen der Gewinnzahl 32 kann man schon vorher gewährleisten, indem man eine niedrigere Gewinnzahl nennt usw. So gibt es eine ganze Folge von Gewinnzahlen, bis hinunter zu einer ersten. Alle diese Gewinnzahlen gehören einer Restklasse modulo m an.

a) Wie groß ist m, und welche Restklasse ist das?

b) Wie ändert sich der Sachverhalt, wenn derjenige, der zuerst 40 (oder mehr) sagen darf, gewinnt?

c) Man untersuche denselben Sachverhalt (d. h. die Gewinnzahlen) für verschiedene Abwandlungen des Spiels. Für s gelte beispielsweise $1 \leqq s \leqq 5$ ($1 \leqq s \leqq 10$ bzw. $1 \leqq s \leqq 12$), und die obere Grenze für den Verlierer bzw. Gewinner betrage $z = 50$ (75, 100).

d) Von den 18 Varianten unter c) müssen weitaus die meisten, nämlich 17, von demjenigen gewonnen werden, der beginnt (dem „Anziehenden"), sofern der den Sachverhalt durchschaut und fehlerfrei spielt. Eine einzige Variante räumt dem „Nachziehenden" denselben Vorteil ein. Welche ist das?

e) Wir nehmen einmal an, daß das Intervall, aus dem die natürliche Zahl s gewählt werden darf, die obere Grenze z und auch die Spielweise (Erreichen der oberen Grenze bedeutet Gewinn oder Verlust) durch Zufall, beispielsweise durch Losen, festgelegt werden. Sind dann die Chancen für den Anziehenden immer günstiger als für den Nachziehenden?

▲ A 8 Von dem in Aufgabe 7 beschriebenen Spiel sind auch gewisse „Einkleidungen" gebräuchlich:

a) Beide Spieler benutzen gemeinsam einen Würfel und setzen abwechselnd nach Belieben Augenzahlen, die dieser Würfel zeigt (setzen, nicht würfeln!). Diese Augenzahlen werden addiert. Wer zuerst 50 erreicht oder überschreitet, hat verloren. Welches sind hier die „Gewinnzahlen", und ist das Spiel für den Anziehenden oder den Nachziehenden vorteilhaft? Für den sicheren Weg zum Gewinn läßt sich hier eine ganz einfach zu befolgende Anweisung geben. Wie lautet sie?

b) Vor beiden Spielern liegt auf dem Tisch ein Häufchen von 15 Streichhölzern, Spielmarken o. dgl. Beide nehmen abwechselnd je mindestens ein Hölzchen, höchstens drei. Wer das letzte Hölzchen nehmen muß, hat verloren (gewonnen).

Für wen ist dieses Spiel günstig, und wie ist bei den beiden Versionen zu spielen, um mit Sicherheit zu gewinnen?

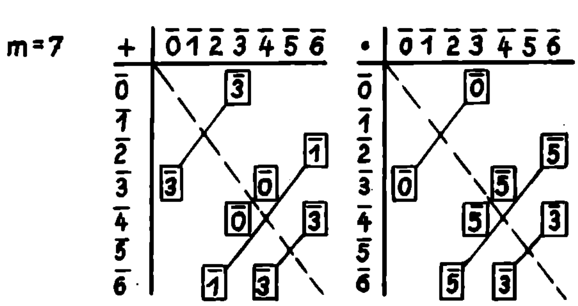
4. So etwas wie ein Modell

Im Abschnitt 3. haben wir eine sonderbare Arithmetik kennengelernt, ja eigentlich sogar mehrere. Bei einer war z. B. „vier mal zwei gleich eins" (Modul 7), bei einer anderen „vier mal zwei gleich drei" (Modul 5). Worin liegt nun eigentlich die Bedeutung solcher Betrachtungen?

Zunächst einmal darin, daß ein solcher Bereich mit seiner begrenzten Anzahl von Elementen (bei Modul 7 sind es 7, beim Modul m allgemein m Elemente) in gewisser Weise ein Modell ist für andere, „umfangreichere" Bereiche, beispielsweise für den Bereich der ganzen Zahlen und die in ihm geltende übliche Arithmetik. In diesen Restklassenbereichen gelten nämlich Gesetze der Addition und der Multiplikation, die den uns von der gewohnten Arithmetik her bekannten entsprechen.

So gelten z. B. auch für das Rechnen mit Restklassen Kommutativgesetze, d. h. eine Vertauschung von Summanden ändert nichts an der Summe, eine Vertauschung von Faktoren nichts am Produkt. So ist z. B. für 7 als Modul $\overline{3} + \overline{4} = \overline{4} + \overline{3} = \overline{0}$ und $\overline{3} \cdot \overline{4} = \overline{4} \cdot \overline{3} = \overline{5}$.

In den Additions- und Multiplikationstabellen äußert sich das darin, daß diese Tabellen „symmetrisch" zu der Diagonalen sind, die von links oben nach rechts unten verläuft, d. h. die Tabelle geht in sich über, wenn man alle Felder an dieser Diagonalen „spiegelt":



Für je drei Restklassen $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ nach demselben Modul m ist auch $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$ und $(\overline{a} \cdot \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot (\overline{b} \cdot \overline{c})$, d. h. es gelten also Assoziativgesetze. Schließlich ist auch die Multiplikation distributiv bezüglich der Addition, d. h. es gilt stets $\overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}$.

▲ B 7 Es gilt $\overline{2} \cdot (\overline{3} + \overline{5}) = \overline{2} \cdot \overline{3} + \overline{2} \cdot \overline{5}$, denn es ist (Modul 7) $\overline{2} \cdot (\overline{3} + \overline{5}) = \overline{2} \cdot \overline{1} = \overline{2}$ und $\overline{2} \cdot \overline{3} + \overline{2} \cdot \overline{5} = \overline{6} + \overline{3} = \overline{2}$.

Woran liegt das, daß das bei allen Bereichen von Restklassen so ist? Nun, die Operationen wurden ja an den Repräsentanten mit Hilfe der üblichen Additionen und Multiplikationen im Bereich der ganzen Zahlen erklärt. Dort gelten aber diese Gesetze, und ihre Gültigkeit überträgt sich nun auf die neu definierten Operationen mit Restklassen. Schauen wir uns das am Beispiel des Kommutativgesetzes der Addition etwas genauer an:

▲ B 8 $\overline{a} + \overline{b}$ bedeutet doch, die Restklasse zu bestimmen, in der die Summe $a + b$ liegt, wenn a und b Repräsentanten von $\overline{a}$ bzw. $\overline{b}$ sind. Entsprechend bedeutet $\overline{b} + \overline{a}$ das Aufsuchen derjenigen Restklasse, in der $b + a$ liegt. Für die ganzen Zahlen a und b gilt aber $a + b = b + a$, deshalb führen beide Additionen zur gleichen Restklasse.

Außer der Gültigkeit dieser Gesetze ist bemerkenswert, daß wir im Bereich der Restklassen modulo m stets subtrahieren können — sogar dann, wenn wir die zahlentheoretische Kongruenz nur auf natürliche Zahlen beschränken, obwohl doch die Subtraktion mit den natürlichen Zahlen selbst nicht uneingeschränkt ausführbar ist. ${}^7R_2 - {}^7R_5 = {}^7R_4$ gilt eben auch, wenn die Restklassen ${}^7R_r$ gar keine negativen Zahlen enthalten. Statt der Repräsentanten 2 für ${}^7R_2$ und 5 für ${}^7R_5$, die ja auf die im Bereich der natürlichen Zahlen nicht ausführbare Subtraktionsaufgaben 2 — 5 führen, nimmt man — falls man nicht von der Additionstabelle ausgehen will — einfach andere Repräsentanten, etwa 9 und 5.

Bereiche, in denen zwei Operationen (Addition und Multiplikation) erklärt sind, für die Kommutativgesetze, Assoziativgesetze und ein Distributivgesetz gelten, nennt man übrigens in der Algebra *Ring*, wenn noch die zusätzliche Voraussetzung erfüllt ist, daß die Addition unbeschränkt und eindeutig umkehrbar ist, man also stets subtrahieren kann. Unsere bekannten ganzen Zahlen mit der üblichen Addition und der üblichen Multiplikation bilden also einen Ring, und auch die Restklassenbereiche sind Ringe, allerdings — im Gegensatz zum Bereich der ganzen Zahlen — nur mit endlich vielen Elementen. Der Ring der Restklassen modulo 2 ist von allen der „kleinste", er enthält ja nur 2 Elemente. Es liegt auf der Hand, daß damit diese sogenannten Restklassenringe ein ausgezeichnetes Hilfsmittel sind, um Einsichten in Strukturen zu gewinnen, wie sie an verschiedenen Stellen in der Mathematik angetroffen werden.

Jeder Ring enthält übrigens ein sogenanntes „Nullelement" oder „neutrales Element der Addition" — so genannt, weil es bei Addition zu einem beliebigen Element des Ringes als anderem Summand eben diesen anderen Summand als Summe liefert. Bei Multiplikation dieses Nullelements mit einem beliebigen Element des Ringes ergibt sich dann stets das Nullelement selbst als Produkt. Im Restklassenring modulo m spielt $\overline{0}$ die Rolle des Nullelements, denn für jede beliebige Restklasse $\overline{a}$ ist ja $\overline{a} + \overline{0} = \overline{0} + \overline{a} = \overline{a}$ und $\overline{0} \cdot \overline{a} = \overline{a} \cdot \overline{0} = \overline{0}$.

Jetzt wird uns auch verständlich, warum wir im Abschnitt 1. vergeblich versuchten, durch $G = \overline{0}$ zu dividieren. So wie wir auch im Ring der ganzen Zahlen nicht durch 0 dividieren können, so ist in den Restklassenringen keine Division durch $\overline{0}$ möglich. Wie steht es aber sonst mit der Ausführbarkeit der Division?

Damit wollen wir uns im nächsten Heft beschäftigen.

G. Lorenz

Einführung in die Elektronische Datenverarbeitung

EDV Teil 5

1.5. Die tetradische Direktverschlüsselung

Das im vorigen Abschnitt behandelte Dualsystem — besser gesagt: das *reine* Dualsystem — ist dadurch gekennzeichnet, daß sowohl bei der Darstellung der Zahlen als auch beim Rechnen mit ihnen konsequent mit Zweierpotenzen gearbeitet, also keine andere Basis als die Zahl 2 verwendet wird. Es gibt aber noch andere Kodierungen von Zahlen bzw. andere Rechensysteme, die ebenfalls nur zwei Grundzeichen erfordern. Häufig wird die schon im vorigen Abschnitt erwähnte *tetradische Direktverschlüsselung* angewendet. Es ist eine Kombination von Dual- und Dezimalsystem. Die Zahlen werden zwar dezimal aufgegliedert dargestellt, die einzelnen Dezimalziffern aber dual kodiert.
Beispiel:
73905 = OLLL OOLL LOOL OOOO OLOL.
Jede Ziffer der im Dezimalsystem dargestellten Zahl erscheint somit als vierstelliges Maschinenwort, als eine *Tetrade,* und jede Tetrade besteht aus vier binären Stellen, auch *Bits* genannt. In jedem Bit — man denke an die Vorsilbe bi = zwei — können zwei verschiedene Zustände gespeichert werden, die wir wie bisher mit O und L symbolisieren.
Da die tetradische Direktverschlüsselung beliebiger Dezimalzahlen und auch beliebiger (endlicher) Dezimalbrüche kaum Schwierigkeiten machen wird, wenden wir uns gleich dem *Rechnen* in diesem System zu. Wir beginnen mit der *Addition.* Es liegt nahe, tetradisch verschlüsselte Dezimalzahlen wie gewohnt ziffernweise zu addieren. Das ist unproblematisch, wenn die dabei auftretenden Summen kleiner als 9 bleiben. Dann können die Tetraden wie reine Dualzahlen behandelt werden, und die Ziffer des Ergebnisses ist wieder eine solche Tetrade.
Beispiel:

45 + 31 = 73	Augend	OLOO	OLOL
	Addend	OOLL	OOOL
	Summe	OLLL	OLLO

Treten aber Summen auf, die größer als 9 sind, so gibt es zwei Möglichkeiten:

Fall a) Die Summe liegt zwischen 9 und 16, liefert also eine Tetrade, die es — weil sie keine der Ziffern 0 bis 9 darstellt — in diesem System gar nicht gibt, eine sogenannte *Pseudotetrade.* Als solche können auftreten: LOLO, LOLL, LLOO, LLOL, LLLO und LLLL. Was hat der Automat in solchem Fall zu tun? Da es sechs Pseudotetraden gibt, liefert die Addition einer (dualen) 6 stets eine Zahl, die einerseits größer als 16, andrerseits kleiner als 16 + 9 ist, also eine Dualzahl, die in der Fünferstelle ein L hat, deren übrige Stellen aber eine gewöhnliche Tetrade liefern. Die zu addierende duale 6 heißt *Korrekturtetrade.*
Beispiel:

9 + 5 = 14	Augend	LOOL	
	Addend	OLOL	
	Unkorrigierte Summe	LLLO	(Pseudotetrade)
	Korrekturtetrade	OLLO	
	Korrigierte Summe	LOLOO	

Zählt man im Ergebnis das L der fünften Dualstelle zur nächsten Tetrade, in diesem Fall der Zehnerstelle, so erhält man das richtige Ergebnis
14 = OOOL OLOO.
Es muß auch stimmen, denn eigentlich hat das L in der fünften Dualstelle den Wert 16, in der nächsten Tetrade aber nur den Wert 10. Um die Differenz auszugleichen, wurde die Korrekturtetrade OLLO = 6 addiert.

Fall b) Die Summe der beiden Tetraden ist größer als 15, so daß sich schon bei der Addition der Tetraden ein Überlauf in die fünfte Dualstelle ergibt. Auch in diesem Fall ist die Korrekturtetrade OLLO zu addieren und das überlaufende L in die nächsthöhere Tetrade zu übernehmen.
Beispiel:

9 + 8 = 17	Augend	LOOL
	Addend	LOOO
Unkorrigierte Summe mit Überlauf		L OOOL
	Korrekturtetrade	OLLO
	Korrigierte Summe	OOOL OLLL

Für beide Fälle, die der Automat selbsttätig erkennen und in der dargestellten Weise abarbeiten muß, gilt also die Regel: *Ist bei der Addition zweier Tetraden die Summe größer als* 9, *so ist* OLLO *zu addieren und in der nächsthöheren Tetrade* L *hinzuzufügen.*

Zur Vertiefung dieser Erkenntnisse dient das folgende *Beispiel*, bei dem jeder Schritt ausführlich erläutert wird und alle Überläufe gesondert aufgeführt werden. Wir wollen dabei zwischen Überläufen 1. Art und Überläufen 2. Art unterscheiden. Die einen sind solche, die bei der gewöhnlichen dualen Addition innerhalb der gleichen Dezimalstelle entstehen, während die anderen in Verbindung mit den Korrekturtetraden in die *nächsthöhere* Zehnerstelle führen.

697 + 285 = 982

Augend	OLLO	LOOL	OLLL
Addend	OOLO	LOOO	OLOL
Addition der Dualziffern	OLOO	OOOL	OOLO
Überläufe 1. Art	L		L L
Addition der Überläufe	OOOO	OOOL	LOOO
Überläufe 1. Art	L		L
Addition der Überläufe	LOOO	OOOL	LLOO
Korrekturtetraden		OLLO	OLLO
Addition der Korrekturtetraden	LOOO	OLLL	LOLO
Überläufe 1. Art			L
Addition des Überlaufs	LOOO	OLLL	OOLO
Überläufe 2. Art	L	L	
Addition der Überläufe	LOOL	OLLO	OOLO
Überlauf 1. Art		L	
Addition des Überlaufs	LOOL	OLOO	OOLO
Überlauf 1. Art		L	
Addition des Überlaufs	LOOL	OOOO	OOLO
Überlauf 1. Art		L	
Summe	LOOL	LOOO	OOLO

Dieses einfache Beispiel läßt den hohen technischen Aufwand erkennen, den eine solche Additionsschaltung, etwa für zehnstellige Dezimalzahlen, erfordert. Für einen menschlichen Rechner, der die Überläufe im Kopf addiert und nur die Korrekturtetraden gesondert hinschreibt, sieht es einfacher aus:

Augend	OLLO	LOOL	OLLL
Addend	OOLO	LOOO	OLOL
Unkorrigierte Summe	LOOO	OOOL	LLOO
Korrekturtetraden		OLLO	OLLO
Korrigierte Summe	LOOL	LOOO	OOLO

▲ *Aufgabe:* Rechne tetradisch 3762 + 8901!

Hinweis: Zur Übung empfielt es sich, die Rechnung, wie beim vorigen Beispiel, sowohl in der ausführlichen als auch in der zusammengefaßten Form hinzuschreiben.

Die *Subtraktion* zweier tetradisch verschlüsselter Dezimalzahlen soll, da es im Prinzip nur der umgekehrte Vorgang ist, kürzer behandelt werden. Man verfahre bei der Subtraktion der einzelnen Tetraden wie im reinen Dualsystem und merke sich: *Ist bei der Subtraktion zweier Tetraden die Differenz kleiner als* O, *so ist die Korrekturtetrade* OLLO *zu subtrahieren und in der nächsthöheren Tetrade* L *abzuziehen.*

Der Beweis dieser Regel wird dem Leser nicht schwerfallen.

Beispiel:

5763 — 948 = 4815

Minuend	OLOL	OLLL	OLLO	OOLL
Subtrahend	OOOO	LOOL	OLOO	LOOO
Unkorrig. Differenz	OLOL	LLLO	OOLO	LOLL
Korrekturtetraden		OLLO		OLLO
Korrigierte Differenz	OLOO	LOOO	OOOL	OLOL

▲ *Aufgabe:* 8761 — 5379!

Auf die *Multiplikation* und *Division* in diesem System wollen wir nicht gesondert eingehen. In 1.4. wurde gezeigt, daß duale Multiplikationen und Divisionen vollständig auf Additionen und Subtraktionen zurückgeführt werden können. Somit treten keine neuen Gesichtspunkte auf. Dem interessierten Leser ist es überlassen, sich selbst ein Schema für die Multiplikation und Division tetradisch verschlüsselter Dezimalzahlen zu überlegen.

J. Frormann

Arbeitsgemeinschaft SER 2d

Ende 1967 erhielt die Heinrich-Hertz-Oberschule (EOS), Berlin, einen Kleincomputer. Ein Mathematikfachlehrer hatte sich in den Monaten zuvor in einem Kurzlehrgang mit seiner Bedienung vertraut gemacht. Im Januar 1968 begannen 20 Schüler der Klasse 9_3 mit dem theoretischen Unterricht, versuchten Bedienung und Programmierung zu begreifen. Anfangs dauerte die Aufstellung eines Programms ziemlich lange. Der schwierigste Abschnitt dabei war die Aufstellung des Programmablaufs. Nach den ersten Schritten begannen wir damit, die Arbeit am SER 2d mit dem Fach „Praktische Mathematik" zu koordinieren. Im vergangenen Schuljahr haben wir vorwiegend Programme zu rein mathematischen Problemen aufgestellt. Jetzt beherrschen wir den Rechner und werden im Laufe des 10. Schuljahres versuchen, auch praktische Probleme zu analysieren (z. B. Leistungsentwicklung von Schülern, einfache Aufgaben aus Betrieben u. a.). In Klasse 11 lernen wir auf größere Computer wie Robotron 300 um. Das wird für uns „relativ" leicht werden, da die Grundstruktur der elektronischen Datenverarbeitungsanlagen bei den verschiedenen Rechnern die gleiche ist.

Aus einem Bericht der Schüler W. Solewski und M. Voß, Spezialklasse für Mathematik, Klassenstufe 9.

Wer löst mit? alpha -Wettbewerb

Letzter Einsendetermin 20. 12. 1969

Für die Beteiligung am *alpha*-Wettbewerb gelten folgende Bedingungen:

1. Am Wettbewerb können sich alle Schüler der 3. bis 12. Klasse beteiligen, auch dann, wenn diese Schüler eine Berufs- oder Volkshochschule besuchen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr zu richten an:
Redaktion *alpha*, 7027 Leipzig, Postfach 14
3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgaben fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer, z. B. 7 vorgesetzt (d. h., für 7. Klasse geeignet).
4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe oder die entsprechenden in Heft 1/70, 2/70, 3/70 veröffentlichten Aufgaben der Kreis-, Bezirks- bzw. DDR-Olympiade einzusenden. Nur dann erfolgt eine Bewertung. Schüler der 11./12. Klassen lösen die Aufgaben, welche mit W 10/12 gekennzeichnet sind oder veröffentlichte Olympiadeaufgaben 11/12.
5. Zur Erleichterung der Korrektur und aus technischen Gründen werden nur nach dem auf dieser Seite angegebenen Muster eingesandte Lösungen bearbeitet und bewertet. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 297 mm), denn jede Aufgabe wird von einem anderen Experten korrigiert.
6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder das Endergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".
7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben.
8. Der 4. Jahreswettbewerb 1969/70 läuft von Heft 5/69 bis Heft 3/70.
9. Zwischen dem 20. und 30. September 1970 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/69 bis 3/70 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eine Jury wertet diese Karten aus, übergibt die Namen der Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender der Redaktion zur Veröffentlichung. Wer mindestens 7 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/69 bis 3/70) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Wer seine Karten zurückerhalten möchte, der lege einen vorschriftsmäßig frankierten Umschlag mit Adresse bei.

Aussicht auf Anerkennungsurkunde, *alpha*-Abzeichen, Preise und namentliche Veröffentlichung haben also Teilnehmer, die im Laufe der Monate September 69 bis Juni 70 regelmäßig, gewissenhaft und fleißig mitgearbeitet haben.

30	150		
	Steffi Sorg, 6316 Stützerbach, Schleusinger Str. 128 Polytechnische Oberschule Stützerbach, Klasse 5	30	W 5 ■ 346
	Prädikat:	10	
	Lösung:		

5 ▲ 421 In einem Korb befinden sich 20 rote, 20 grüne und 10 blaue Kugeln. Wieviel Kugeln muß jemand mit verbundenen Augen dem Korb wenigstens entnehmen, um mit Sicherheit 10 Kugeln der gleichen Farbe zu erhalten?

Schülerin Monika Kluger, Wimmelsburg

▲ 422 Die Quersumme einer zweistelligen Zahl beträgt 11. Vertauscht man die beiden Ziffern dieser Zahl, so erhält man eine Zahl, die um 20 kleiner als das Zweifache der ursprünglichen Zahl ist. Um welche Zahl handelt es sich? Löse die Aufgabe mit Hilfe einer Tabelle!

OL K. Krüger, V. L. d. V., Bad Doberan

▲ 423 Ich denke mir eine Zahl, verdoppele diese, addiere danach 13, subtrahiere schließlich 4 und erhalte als Ergebnis 19. Wie heißt die von mir gedachte Zahl?

Cordula Saueressig, Mellensee (Kl. 5)

W 5 ■ 424 *Birgit* ist gegenwärtig zehn Jahre jünger als ihr Bruder *Wolfram*. In einem Jahr wird *Wolfram* dreimal so alt wie *Birgit* sein. Wie alt ist *Birgit* gegenwärtig? In wieviel Jahren wird *Wolfram* zweimal so alt wie *Birgit* sein? (Das Alter der beiden Geschwister ist in vollen Jahren zu rechnen.) Löse diese Aufgabe mit Hilfe einer Tabelle!

Schüler Wolfram Meyer, 7022 Leipzig

W 5 ■ 425 Wenn die Summe zweier natürlicher Zahlen kleiner als 20 ist, kann ihr Produkt nicht dreistellig sein. Dieser Satz ist mit Hilfe einer Tabelle zu beweisen!

OL Th. Scholl, Berlin

6 ▲ 426 *Axel* sagt zu *Bernd*: „Denke dir eine natürliche Zahl, die größer als 1, aber kleiner als 10 ist. Multipliziere die gedachte Zahl mit 27 und das erhaltene Produkt mit 37. Nenne mir die letzte Ziffer deines Ergebnisses". *Bernd* nannte 7 als letzte Ziffer. Daraus konnte *Axel* sofort angeben, welche Zahl sich *Bernd* gedacht hatte. Gib eine Begründung dafür!

OL Th. Scholl, Berlin

▲ 427 Es ist die kleinste sechsstellige Zahl zu ermitteln, die durch 9 teilbar ist und deren Ziffern alle verschieden voneinander sind.

OL Th. Scholl, Berlin

▲ 428 Eine Molkerei verarbeitet täglich die gleiche Menge Milch. Bisher wurden dabei Milchkannen mit einem Fassungsvermögen von je 20 Litern verwendet. Nachdem der Betrieb auf die Arbeit mit 25-Liter-Kannen umgestellt wurde, benötigte man 120 Milchkannen weniger. Wieviel Liter Milch werden täglich von der Molkerei verarbeitet?

OL H. Pätzold, Waren/Müritz

W 6 ■ 429 Die Maßzahlen der Längen der Seiten a, b und c eines Dreiecks ABC seien natürliche Zahlen, und es gelte $a \leq b \leq c$. Es ist die Anzahl der verschiedenen Dreiecke zu ermitteln für den Fall, daß $c = 5$ cm beträgt.

OL Th. Scholl, Berlin

W 6 ▪ 430 Zeichne einen Kreis k_1 mit dem Mittelpunkt M_1 und dem Radius $r_1 = 2$ cm. Lege einen Punkt P fest, der von M_1 genau 4 cm entfernt ist. Konstruiere nun einen Kreis k_2 mit dem Mittelpunkt M_2 und dem Radius $r_2 = 3$ cm, der durch P geht und den Kreis k_1 von außen berührt. Wie viele Lösungen gibt es?

Schüler Helmut Maiwald, Erfurt (Kl. 7)

7 ▲ 431 Gegeben seien ein Parallelogramm $ABCD$ und ein innerer Punkt P dieses Parallelogramms, der nicht auf einer Diagonalen liegt. Der Punkt P ist mit den Eckpunkten A, B, C und D des Parallelogramms zu verbinden. Ferner sind die Parallelen durch B zu PD und durch D zu PB zu konstruieren; ihr Schnittpunkt sei S. Es ist zu beweisen, daß das Viereck $ASCP$ ein Parallelogramm ist.

OL Th. Scholl, Berlin

▲ 432 Zeichne einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M und eine Gerade g, die mit diesem Kreis keinen Punkt gemeinsam hat. Lege auf der Geraden g einen Punkt P fest! Konstruiere schließlich den Kreis k', der die Gerade g in P und den gegebenen Kreis k von außen berührt. Beschreibe die Konstruktion!

Mathematikfachlehrer W. Unze, Leipzig

▲ 433 Es sind alle geordneten Paare (x, y) von positiven ganzen Zahlen zu bestimmen, die die Gleichung $13x + 5y = 82$ erfüllen.

Ing. H. Decker, Köln

W 7 ▪ 434 Die beiden Brüder *Axel* und *Bernd* haben fleißig gespart. In ihren Sparbüchsen befinden sich volle Markbeträge. Addiert man zur Summe ihrer Ersparnisse die Differenz ihrer Ersparnisse, so erhält man 50 M. Addiert man zur Differenz ihrer Ersparnisse noch die Ersparnisse von *Axel* und subtrahiert man danach die Ersparnisse von *Bernd*, so erhält man 10 M. Wer der beiden Brüder hat mehr gespart, und wieviel Mark hat jeder gespart?

OL Th. Scholl, Berlin

W 7 ▪ 435 Es seien a und b von Null verschiedene natürliche Zahlen und es gelte $a < b$. Entscheide, welcher der beiden Brüche $\frac{2a + b}{a}$ und $\frac{a + 2b}{b}$ der größere ist. Begründe deine Entscheidung!

OL H. Pätzold, Waren/Müritz

8 ▲ 436 Von drei Personen A, B und C, die verschieden alt sind, wissen wir:

1) Gegenwärtig sind A und B zusammen dreimal so alt wie C.

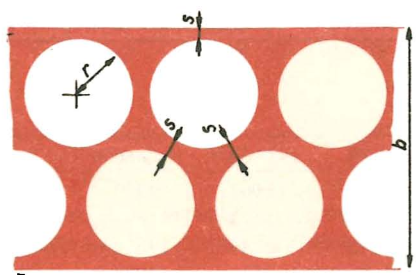
2) Wenn A um die Hälfte seines jetzigen Lebensalters älter geworden ist, dann werden A und C zusammen dreimal so alt sein, wie B gegenwärtig alt ist.

3) Nach weiteren zwölf Jahren werden B und C zusammen dreimal so alt sein, wie A gegenwärtig alt ist.

Wie alt war jede der drei Personen in dem Jahr, in welchem alle drei zusammen so alt waren, wie der älteste von ihnen gegenwärtig alt ist? (Das Alter wird jeweils in vollen Jahren angegeben.)

Ing. H. Decker, Köln

▪ 437 Aus einem Blechstreifen der Breite b werden in der aus der Zeichnung ersichtlichen Weise kongruente Kreisscheiben mit dem Radius r gestanzt. Die „Stegbreite" ist s. Es ist eine Formel anzugeben, nach der bei bekannten r und s die Breite b des Blechstreifens berechnet werden kann.

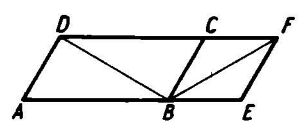


Mathematikfachlehrer W. Träger, Döbeln

W 8 ▪ 438 Es sind alle positiven ganzen Zahlen anzugeben, bei denen die Differenz ihrer Quadrate gleich 455 ist.

Dipl.-Math. Bernd und Monika Noak, Berlin (ehem. Teiln. an IMO)

W 8 ▪ 439 Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm, dessen Seite $\overline{AB}$ doppelt so lang ist wie die Seite $\overline{AD}$ und dessen spitzer Winkel 60° beträgt. Ferner sei $BEFC$ ein Rhombus, wobei der Punkt E auf der Verlängerung der Strecke $\overline{AB}$ über B hinaus liegt. Welche Strecke ist länger, die Strecke $\overline{BD}$ oder die Strecke $\overline{BF}$? Erst schätzen, dann messen, dann begründen!



OStR Dr. R. Lüders, Berlin

9 ▲ 440 Ein konvexes Viereck wird durch seine beiden Diagonalen in vier Dreiecke zerlegt. Wir wollen zwei dieser Dreiecke „sich gegenüberliegend" nennen, wenn sie einen gemeinsamen Eckpunkt, aber keine gemeinsame Seite haben. Es sind die folgenden Behauptungen zu beweisen:

a) Jedes konvexe Viereck ist genau dann ein Trapez, wenn zwei sich gegenüberliegende Dreiecke flächengleich sind.

b) Jedes konvexe Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn alle vier Dreiecke flächengleich sind.

OL Th. Scholl, Berlin

▲ 441 Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Flächeninhalt von 294 cm². Die größere Kathete ist um soviel Zentimeter länger als die kleinere Kathete wie sie kürzer ist als die Hypotenuse. Es sind die Längen der Dreieckseiten zu ermitteln.

Ing. H. Decker, Köln

W 9 ▪ 442 In einem Aufenthaltsraum stehen mehrere gleichlange Bänke. Setzen sich auf je eine Bank 6 Personen, so bleibt eine Bank übrig, auf der nur drei Personen sitzen. Setzen sich aber auf jede Bank fünf Personen, so müssen vier Personen stehen. Wieviel Personen und wieviel Bänke sind in dem Raum?

OStR G. Schulze, Herzberg/Elster

W 9 ▪ 443 Es sind diejenigen vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen zu ermitteln, deren Produkt gleich 57120 ist.

OL Th. Scholl, Berlin

10/12 ▲ 444 Es seien a, b, c, d positive reelle Zahlen mit $abcd = 1$. Man beweise, daß dann stets

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 10 \text{ gilt.}$$

Dipl.-Math. Bernd und Monika Noak, Berlin

▲ 445 Auf der photographischen Aufnahme eines Fußballfeldes ist die Mittellinie nicht erkennbar.

Wie kann man sich das Bild der Mittellinie des Spielfeldes mit Bleistift und Lineal verschaffen?

Dr. E. Schröder, Dresden

W 10/12 ▪ 446 Es sind alle reellen Lösungen der folgenden Gleichungen zu ermitteln:

a) $$\sqrt{(2x+3)\sqrt{(2x+3)\sqrt{(2x+3)\sqrt{2x+3}}}} = \sqrt{(6-x)\sqrt{(6-x)\sqrt{(6-x)\sqrt{6-x}}}}; \quad (1)$$

b) $$\sqrt{(2x+3)\sqrt{(2x+3)\sqrt{(2x+3)\sqrt{2x+3}}}} = \sqrt{(2x+1)\sqrt{(2x+1)\sqrt{(2x+1)\sqrt{2x+1}}}}; \quad (2)$$

c) $$\sqrt{(2x+3)\sqrt{(2x+3)\sqrt{(2x+3)\sqrt{2x+3}}}} = \sqrt{\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\sqrt{\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\sqrt{\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\sqrt{x+\tfrac{1}{2}}}}}; \quad (3)$$

d) $$\sqrt{(2x+3)\sqrt{(2x+3)\sqrt{(2x+3)\sqrt{2x+3}}}} = \frac{2}{\sqrt[16]{2}}\sqrt{\left(x+\tfrac{3}{2}\right)\sqrt{\left(x+\tfrac{3}{2}\right)\sqrt{\left(x+\tfrac{3}{2}\right)\sqrt{x+\tfrac{3}{2}}}}}. \quad (4)$$

Mathematikfachlehrer S. Gottesmann, Tschernowzy, UdSSR

W 10/12 ▪ 447 In eine Kugel sei ein Kegel einbeschrieben, dessen Volumen gleich einem Viertel des Volumens der Kugel ist. Die Länge der Höhe des Kegels sei h.

Das Volumen der Kugel ist zu berechnen. Wie viele Lösungen hat diese Aufgabe?

OStR G. Schulze, Herzberg/Elster

20 Jahre Entwicklung des Volksbildungswesens in der DDR

Allgemeinbildende Schulen

	1948/49	1955/56	1959/60	1967
Schulen	10 839	11 007	9 750	8 328
Lehrer	60 413	75 572	101 693	127 664
Klassen	72 112	70 244	79 482	94 208
Schüler je hauptamtl. Lehrkraft		24,9	23,8	19,7
Schüler	2 660 926	1 883 400	2 158 891	2 511 482

Oberschulen bzw. Erweiterte Oberschulen

	1948/49	1955	1962	1965	1967
Schulen	402	420	317	303	305
Klassen	3 106	4 265	2 995	3 266	3 787
Schüler	73 262	107 400	76 195	85 279	100 738

	1945	1949	1960
Einklassige Landschulen	4 114	668	keine

	1953	1960	1967
Absolventen von Universitäten und Hochschulen	1 213	3 937	6 707

	1953	1960	1967
Lehrerstudenten an Universitäten und Hochschulen	6 676	22 280	29 177

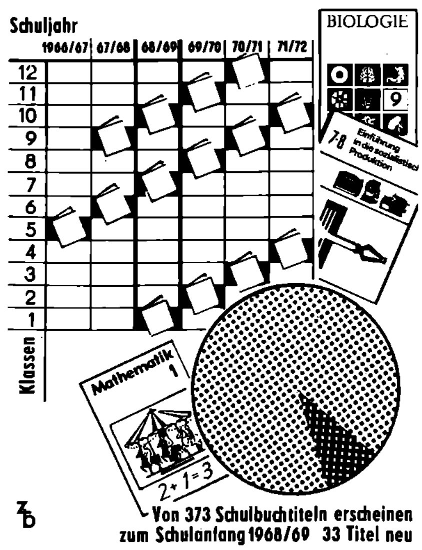
Ausgaben des Staatshaushaltes (in 1000 M)

	1951	1955	1960	1966
für allgemeinb. Schulen	616 439	851 621	1 691 120	2 271 755
für Vorschulerziehung	69 588	143 669	239 005	321 893
für Jugendhilfe/Heimerz.	146 440	150 738	127 309	145 662
für Volksbildung, Wissenschaft u. Kultur insges.	1 655 318	3 014 163	—	—
für Volksbildung, Berufsausbildung u. Sport	—	—	3 182 145	3 940 903
Schulspeisung	46 020 (1952)	—	145 608	240 879

Das Gesetz über das einheitliche sozialistische Bildungssystem gibt die Grundorientierung für die Entwicklung des Bildungswesens auf lange Sicht. Es entstand auf der Grundlage der Prognose der gesellschaftlichen Entwicklung der DDR in breiter sozialistischer Gemeinschaftsarbeit. Unsere Bildungseinrichtungen leisten heute einen wesentlichen Beitrag, um hochqualifizierte Fachleute und bewußte sozialistische Staatsbürger heranzubilden und sie zu befähigen, aktiv für den Sieg des Sozialismus und den Frieden zu kämpfen.

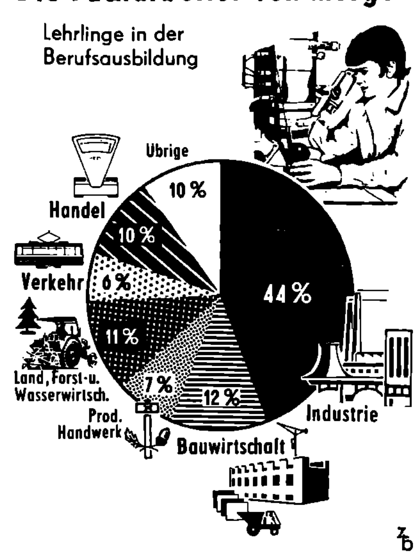
Aus der Rede Walter Ulbrichts auf dem VII. Parteitag der SED

Systematische Einführung neuer Lehrpläne, Lehrbücher und Unterrichtshilfen



25 Millionen Schulbücher lieferte der Verlag Volk und Wissen für das Schuljahr 1968/69 aus.

Die Facharbeiter von morgen



In 718 Betriebsberufsschulen und 427 kommunalen Berufsschulen werden von 37880 Lehrern, Lehrmeistern und Lehrausbildern 448700 Lehrlinge ausgebildet.

Pionierorganisation „Ernst Thälmann"

	1949	1962	1966	1968
Mitglieder	805 264	1 729 485	1 743 547	1,8 Mill.

Pioniereinrichtungen und Arbeitsgemeinschaften

	1953	1954	1955	1962	1967
Häuser d. J. Pioniere	79	—	90	106	116
Stationen d. Jg. Naturforscher, Techniker u. Touristen	250	—	279	250	250
Arbeitsgemeinschaften	—	8 658	9 340	31 681	83 418
mit Teilnehmern	—	—	145 849	557 794	1 025 736

Schulbuchproduktion

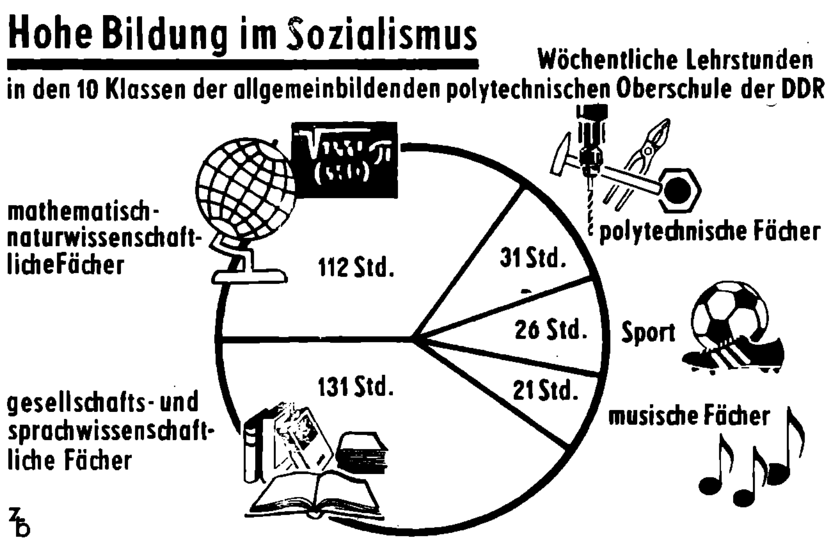
	1949	1955	1962	1965	1968
Bücher u. Broschüren	14 606 000	16 014 000	22 603 000	29 710 000	30 746 000
Zeitschriften	11 734 000	11 235 000	14 223 000	15 218 000	16 000 000

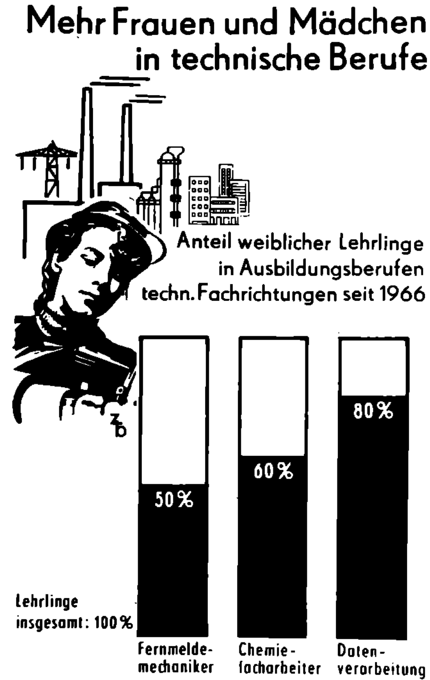
Horterziehung (Tageserziehung) an allgemeinbildenden polytechnischen Oberschulen

	1954	1968
Horte	2 511	6 555
Plätze	81 489	504 301
Erzieher	5 779	22 165
betreute Kinder	101 844	502 623

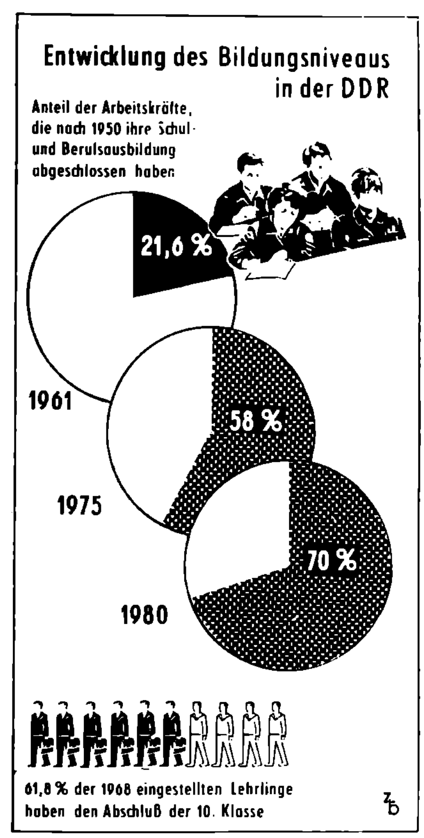
Vorschulerziehung

	1948/49	1955	1962	1965	1968
Kindergärten	3 779	8 148	9 423	9 889	10 606
Kindergärtnerinnen bzw. Erzieherinnen	8 633	19 308	27 675	32 540	35 603
betreute Kinder	199 252	340 934	447 349	511 045	580 111





Jede 4. Schule der DDR wird von einer Frau geleitet. — Rund 165 000 Frauen sind als Lehrer und Erzieher im Bereich der Volksbildung tätig. Drei Viertel von ihnen sind noch nicht 35 Jahre alt.



Übe sinnvoll – überall!

Heute soll es um die Formel

$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

für den Flächeninhalt des Dreiecks gehen. Vielleicht denkst du:
„Was kann es daran schon zu üben geben! Einsetzen und Ausmultiplizieren — das machen wir schon in der Schule oft genug; und es wird auch dadurch nicht viel interessanter, daß in den Benennungen für Grundlinie und zugehörige Höhe gewechselt wird.“
Doch ist das nicht alles, was uns die Formel zu sagen hat. Sie ist noch zu mehr nutze, und auch das will geübt sein.

1. Da wäre zunächst die Aufgabe:
Bestimme den Flächeninhalt A des Dreiecks PQR aus Fig. 1!
Worin besteht der Unterschied zur vorigen Aufgabenart? Jetzt muß man sich erst überlegen, welche Stücke das Berechnen ermöglichen, um dann deren Abmessungen zu bestimmen. Ermittle A!

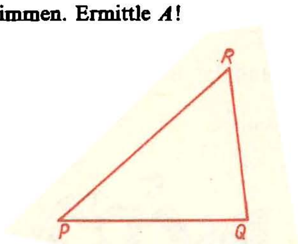


Fig. 1

Diese Aufgabe setzt zwar zwei Schritte vor den üblichen Schulaufgaben ein, die nur das Einsetzen von gegebenen Werten für g und h verlangen — sie setzt aber immer noch zwei Schritte später ein, als es praktische Probleme der Flächenberechnung wirklich tun. Dabei nämlich stehen vorerst noch zwei andere Fragen vor dir:
Was für eine Figur ist das eigentlich, deren Fläche ich bestimmen soll?
Kenne ich für sie eine Formel, die eine leichte Berechnung ermöglicht? Oder muß ich eine schrittweise Berechnung durchführen, indem ich die Figur zunächst zerlege?
Deshalb solltest du, wenn du im Berechnen von Flächen Sicherheit erreichen willst, auch solche Flächen einbeziehen, die dir in der Schule, im Betrieb, auf der Straße, in der Wohnung (Fig. 2) begegnen. In manchen Fällen wird es dir nicht gelingen; dann begnüge dich mit einem Schätzen. In vielen Fällen aber reicht das, was du in Klasse 6 gelernt hast.
Übrigens: Schätzen solltest du auch in den Fällen, in denen du berechnen kannst, und zwar vorher! Du wirst staunen, wie sehr man sich bei Flächen verschätzen kann, einfach aus mangelhafter Übung.

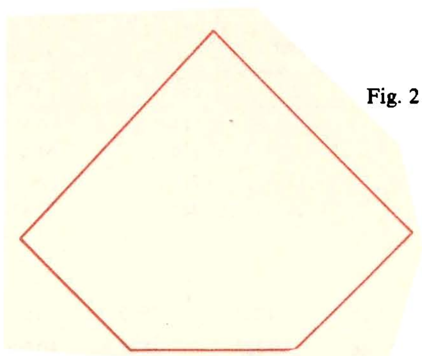


Fig. 2

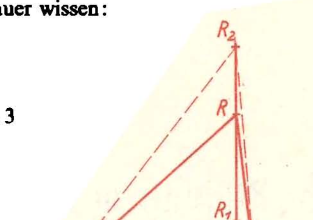
Deckplatte eines Eckschrankes im Maßstab 1 : 20.
Gib den Flächeninhalt in m² an! Schätze zuvor die Figur der Abbildung in cm²!

2. Zwei Werte für g und h bestimmen zwar den Flächeninhalt, sie bestimmen aber nicht das Dreieck selbst. Mit anderen Worten: Es gibt sehr viele Dreiecke, die in g und zugehörigem h und damit auch in A übereinstimmen, die aber nicht einander kongruent sind. Zeichne, gleich in Fig. 1 hinein, zwei von den vielen Dreiecken, die mit dem Dreieck PQR in der Seite PQ und der zugehörigen Höhe übereinstimmen, sich aber sonst von ihm unterscheiden. Nun aber überlege weiter: Gibt es unter all diesen Dreiecken eins (oder mehrere), in dem
a) der Winkel bei P 70° beträgt;
b) der Winkel bei P 70° und der Winkel bei Q 80° betragen;
c) der Winkel bei P 70° und der Winkel bei R 120° betragen;
d) eine andere Seite 5 cm lang ist;
f) die beiden anderen Seiten 5 cm und 7 cm lang sind;
g) der Winkel bei P 50° und seine Gegenseite 6 cm betragen?
Wenn deine Antwort „ja“ lautet, so konstruiere ein solches Dreieck. Ein „Nein“ aber durchdenke gut!

3. Unsere Formel $A_D = \frac{1}{2} gh$ enthält drei Variable. Bisher waren uns g und h gegeben, daraus bestimmten wir A. Geht es auch umgekehrt? Mit anderen Worten: Wie lang müßten Seite und zugehörige Höhe eines Dreiecks sein, wenn sein Flächeninhalt 24 cm² betragen soll? Sicher hast du schnell herausgefunden, daß es dafür sehr viele Möglichkeiten gibt. Zeichne einige dieser Dreiecke! Wie sieht es aber nun aus, wenn wir dem gegebenen A noch einen Wert beigeben, entweder für g oder für h? Im Beispiel: Wie lang kann oder muß die Höhe eines Dreiecks sein, dessen Flächeninhalt 24 cm² beträgt und dessen eine Seite $\overline{PQ}$ ist (Fig. 1)? Es ist leicht einzusehen, daß es für die Länge der Höhe nur noch eine Möglichkeit gibt. Zeichne ein solches Dreieck! Und ganz entsprechend wäre es bei gegebenem A und h.
Wie lang sind übrigens die Höhen auf $\overline{PR}$ und $\overline{QR}$ in Fig. 1? Du kannst sie bestimmen, ohne sie zu messen!

4. Unsere Formel $A_D = \frac{1}{2} gh$ drückt den Zusammenhang von drei Größen aus: Flächeninhalt, Seite und zugehörige Höhe eines Dreiecks. Wir sahen, daß zwei von ihnen die dritte genau festlegen, daß aber eine von ihnen für die beiden anderen das nicht tut, vielmehr noch einen recht großen Spielraum läßt. Das führt uns zu der Frage: In welcher Weise ändern sich eigentlich diese beiden anderen, da gibt es doch sicher einen Zusammenhang?
Wenn wir in dem Dreieck PQR die Seite $\overline{PQ}$ fest lassen, den dritten Eckpunkt aber auf RS wandern lassen (Fig. 3), so ist z. B. den Dreiecken PQR_1 und PQR_2 sofort zu entnehmen: Je größer die Höhe, desto größer der Flächeninhalt. Man möchte es aber gern genauer wissen:

Fig. 3



Was geschieht mit dem Flächeninhalt, wenn die Höhe verdoppelt, verfünffacht, verhundertfacht, halbiert, gedrittelt wird? Wer schon die Proportionen (jetzt in Kl. 6) kennt, müßte das richtige Wort einsetzen können:
Bei gleicher Seite sind zugehörige Höhe und Flächeninhalt einander ....
Die gleichen Überlegungen stelle nun für den Fall an, daß die Höhe $\overline{RS}$ fest bleibt, die beiden anderen Eckpunkte auf der Geraden PQ wandern.
Was kannst du über A_D sagen, wenn
a) P nach links wandert?
b) Q nach links wandert?

c) P und Q nach rechts wandern?
d) P nach links und Q nach rechts wandert?
Vorhin sollte ein Wort eingesetzt werden. Es heißt „direkt proportional“. Der gleiche Zusammenhang gilt auch für Seite und Flächeninhalt (bei gleicher Höhe). Wie aber heißt der Proportionalitätsfaktor?
Bleibt nun noch der dritte Fall zu untersuchen: Der Flächeninhalt wird festgehalten — in welcher Weise erfolgt die Änderung von Seite und zugehöriger Höhe? Ganz gewiß bedingt eine Vergrößerung der einen eine Verkleinerung der anderen; denn wie sollte sonst ihr halbes Produkt den gleichen Wert behalten? Die genauere Aussage aber sollst du selbst finden und auch, wie es hier mit der Proportionalität steht!
Und nun noch einige Aufgaben hierzu:
(1) M sei Mittelpunkt von $\overline{PQ} = r$, N sei Mittelpunkt der Höhe h_r auf $\overline{PQ}$. Gib die Flächeninhalte der Dreiecke

PMR; PQN; MQN; PNR;
RPQ; MQR; NQR; PMN;

als Teile vom Flächeninhalt des Dreiecks PQR an!
(2) Zeichne ein Dreieck $P'Q'R'$ (sein Flächeninhalt sei A'), für das gilt:
a) $A' = 2A$ (A ist Flächeninhalt des Dreiecks PQR);
b) $A' = 2A$ und $\overline{P'Q'} = \overline{PQ}$;
c) $A' = 3A$ und $h_{r'} = h_r$;
d) $A' = \frac{1}{2}A$ und $h_{r'} = h_r$ und $\overline{P'Q'} = \overline{PQ}$;
e) $A' = A$ $\quad h_r \neq h_{r'}$ und $\overline{P'Q'} \neq \overline{PQ}$!
(3) Um wieviel ändert sich der Flächeninhalt des Dreiecks PQR, wenn
a) $\overline{PQ}$ um 1 cm wächst;
b) $\overline{PQ}$ um 1 cm abnimmt;
c) h_r um 1 cm wächst;
d) $\overline{PQ}$ und h_r um je 1 cm wachsen;
e) $\overline{PQ}$ um 1 cm wächst, h_r um 1 cm abnimmt?

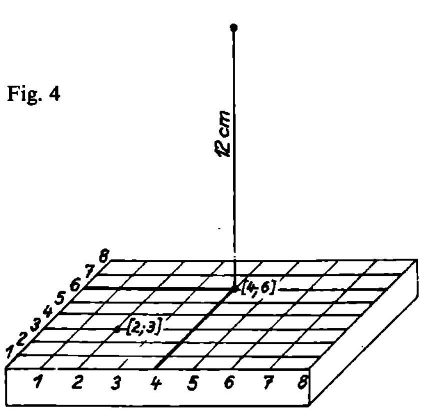
5. Man kann den Zusammenhang, den die Formel $A_D = \frac{1}{2}gh$ zum Ausdruck bringt, auch veranschaulichen. Eine in der Ausführung ganz einfache Möglichkeit ist folgende (vgl. Fig. 4): In einen flachen Deckel eines Pappkartons wird angefeuchteter Sand gefüllt. Von einer Ecke aus werden auf den beiden Rändern des Kartons gleichlange Abstände markiert und numeriert, etwa von 1 bis 8. Dadurch läßt sich die Sand-Oberfläche mit einem quadratischen Gitternetz überziehen, wie ein Schachbrett; und zu jedem Gitterpunkt gehört genau ein Zahlenpaar. (s. Fig. 4) Wählen wir die erste dieser beiden Zahlen als Maßzahl für g, die zweite als Maßzahl für h, so gehört zu jedem Gitterpunkt auch eine Zahl $\frac{1}{2}gh = A$. Daher stecken wir in jeden Gitterpunkt ein Stäbchen (Wurstspeiler) entsprechender Länge: In den Gitterpunkt (4; 6) also ein Stäbchen, das dann über dem Sand 12 cm lang ist. Zur besseren Sichtbarkeit können wir oben auf die Stäbchen noch Knetekugeln aufstecken. Wenn alle Stäbchen stecken, hat man den Eindruck einer zusammenhängenden Fläche. Wer in der Schule schon die Funktionen kennengelernt hat, der hat sicher längst gemerkt: Hier geht es um die „grafische Darstellung“ einer Funktion, nur hat diese Funktion 2 unabhängige Variable — die sonstigen in der Schule haben immer nur eine.

6. Und zum Schluß nun noch einige Probleme, über die du ganz allein nachdenken sollst:
a) Wenn wir uns einen bestimmten Flächeninhalt, sagen wir 36 cm², vorgeben, so gibt es zu ihm sehr viele Dreiecke. Gibt es unter all diesen eins mit
(1) kleinster Grundseite und größter zugehöriger Höhe?
(2) größter Grundseite und kleinster zugehöriger Höhe?
(3) kleinster Summe $g + h$?
(4) größter Summe $g + h$?
(5) kleinstem Umfang?
(6) größtem Umfang?
b) Wenn wir uns eine bestimmte Summe für g und h, sagen wir $g + h = 20$ cm, vorgeben, so gibt es zu ihr auch sehr, sehr viele Dreiecke. Gibt es unter all diesen eins mit
(1) größtem Flächeninhalt?
(2) kleinstem Flächeninhalt?
(3) größtem Umfang?
(4) kleinstem Umfang?
c) Wenn wir uns einen bestimmten Umfang, sagen wir 30 cm, vorgeben, so gibt es zu ihm sehr, sehr viele Dreiecke. Gibt es unter all diesen eins mit
(1) größtem Flächeninhalt?
(2) kleinstem Flächeninhalt?
(3) größter Summe $g + h$?
(4) kleinster Summe $g + h$?

Es ist erstaunlich, was alles zutage kommt, wenn man eine Formel von allen Seiten betrachtet, eben richtig übt. Versuche nun, dir die gleichen Gedanken auch über andere Flächenformeln (dann auch für Volumenformeln) zu machen; vielleicht nimmst du zuerst das Rechteck und dann das Trapez.

G. Pietzsch

Fig. 4

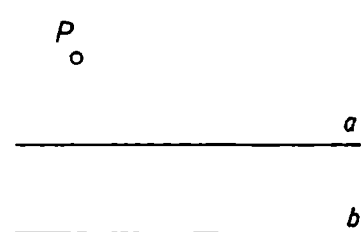


Schneiden und Verbinden

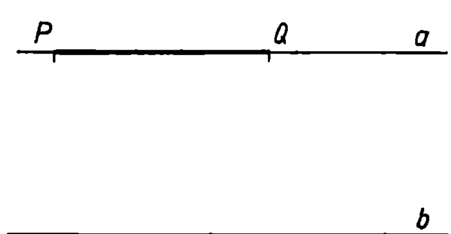
3. Gegeben sind zwei zueinander parallele Geraden a und b und ein nicht auf diesen Geraden liegender Punkt P. Man konstruiere allein mit Bleistift und Lineal eine zu a parallele Gerade durch P.
4. Gegeben sind zwei zueinander parallele Geraden a und b. Auf a sei die Strecke $\overline{PQ} = p$ vorgegeben. Die Strecke p ist allein unter Verwendung von Bleistift und Lineal in drei gleiche Teile zu teilen.

Dr. E. Schröder, Dresden

zu 3.



zu 4.

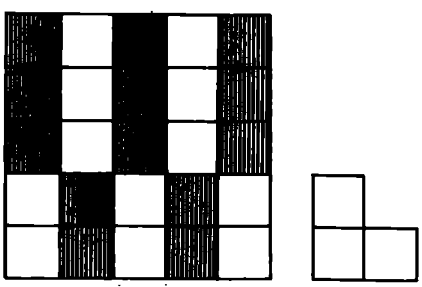


Fernolympiade Mathematik

UdSSR 1968

1. (7—9) **В шахматном турнире участвовало в три раза больше мастеров, чем гроссмейстеров, и они набрали в 1,2 раза больше очков, чем гроссмейстеры. Все участники турнира — мастера или гроссмейстеры. Сколько тех и других?**

2. (7—10) (а) На клетчатой бумаге нарисован квадрат 5×5 клеток. Какое наибольшее число его клеток можно покрасить черной краской так, чтобы ни один уголок из трех клеток не был закрашен целиком?



(б) тот же вопрос для квадратов 10×10 клеток, $n \times n$ клеток.

3. (8—10) Два парохода идут по морю по фиксированным прямым с постоянными скоростями. В 8 часов расстояние между ними было 7,5 мили, в 8 часов 55 мин. — 3,5 мили, в 9 часов 05 мин. — 2,9 мили. В какой момент пароходы будут находиться на кратчайшем расстоянии и каково это расстояние?

4. (8—10) Вписанная окружность касается сторон AB и BC треугольмика ABC в точках E и F. Биссектриса угла A треугольника пересекает прямую EF в точке K. Доказать, что угол СКА — прямой.

5. (7—10) а) доказать, что после запятой в записи числа $\frac{n}{73}$ в виде бесконечной десятичной дроби не встретится двух одинаковых цифр подряд (n — любое целое число, $0 < n < 73$).
б) укажите все простые числа P, для которых все дроби $\frac{n}{P}$, где $0 < n < P$, обладают тем же свойством.

6. (9—10) Одна треугольная пирамида целиком помещается внутри другой. Может ли сумма длин ребер у первой пирамиды быть больше, чем у второй?

7. (8—10) Две хорды BE и CF окружности пересекаются в точке A. K — середина отрезка BC. Доказать, что прямая KA пересекает отрезок EF в такой точке M, что $EM : MF = AC^2 : AB^2$.

8. (7—10) Решить уравнение.

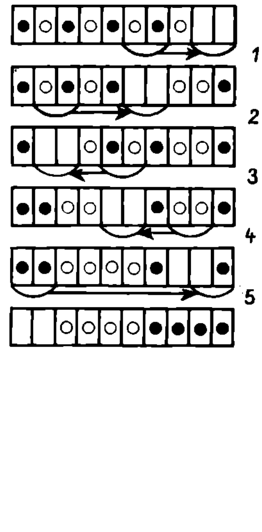
$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-1} = \sqrt{x^3}$$

9. (7—10) Последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ строится по такому закону

$$a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^2}$$

для всех $n \geq 1$.
а) верно ли, что эта последовательность ограничена (то есть существует такое число C, что все члены последовательности не превосходят C)?
б) доказать, что $a_{9000} < 30$.

10. (7—10) Четыре черные и четыре белые фишки лежат в ряд так, что цвета чередуются; рядом оставлено место еще для двух фишек. За один ход разрешается любые две соседние фишки не меняя их порядка, переставить на свободные два места. Требуется расположить фишки так, чтобы четыре белые стояли подряд и четыре черные — тоже, причем между фишками не должно быть промежутка. За какое наименьшее число ходов это можно сделать? (На рисунке показано, как можно сделать это за пять ходов).
Решите ту же задачу для n пар фишек, где $n = 5, 6, 7 \ldots$



Ein Satz von Diophant von Alexandrien

▲ 448 Bereits auf *Diophant von Alexandrien* (um 250 u. Z.) geht der folgende Satz zurück: „Wenn man zu dem Flächeninhalt des Quadrates der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks viermal den Flächeninhalt dieses Dreiecks addiert, so ergibt sich wiederum der Flächeninhalt eines Quadrates. Wenn man von dem Flächeninhalt dieses Hypotenusenquadrates viermal den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks subtrahiert, so ergibt sich ebenfalls der Flächeninhalt eines Quadrates."
a) Man beweise diesen Satz und gebe eine anschauliche Interpretation seines Inhaltes.
b) Wie lang sind die Seiten der beiden so entstehenden Quadrate?
c) Was bedeutet die Aussage des obigen Satzes für den Fall, daß die Maßzahlen a, b und c der Seitenlängen des rechtwinkligen Dreiecks natürliche Zahlen sind? Man gebe einige Beispiele an.

Mitgeteilt von Prof. Dr. rer. nat. habil. K. Manteuffel, Magdeburg

$$\begin{array}{r} \text{KLEIN} \\ +\text{VIETA} \\ \hline \text{NEWTON} \end{array}$$

▲ 449 Unser Leser *Harald Englisch*, Schüler der Klasse 10 der EOS Leibniz, Leipzig (siehe auch Heft 3/69, S. 51), hat aus den Namen von drei bedeutenden Mathematikern eine schöne Aufgabe gebildet, die gelöst werden soll.
Dabei ist jeder Buchstabe durch eine Grundziffer zu ersetzen, so daß eine (im dekadischen System) richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Die Zuordnung zwischen den Buchstaben und Ziffern soll eineindeutig sein; d. h., gleiche Buchstaben entsprechen gleichen Ziffern, verschiedene Buchstaben entsprechen verschiedenen Ziffern. Die Ziffer 0 darf nicht am Anfang einer Zahl stehen.
a) Es ist eine Lösung anzugeben.
b) Wieviel verschiedene Lösungen hat diese Aufgabe?

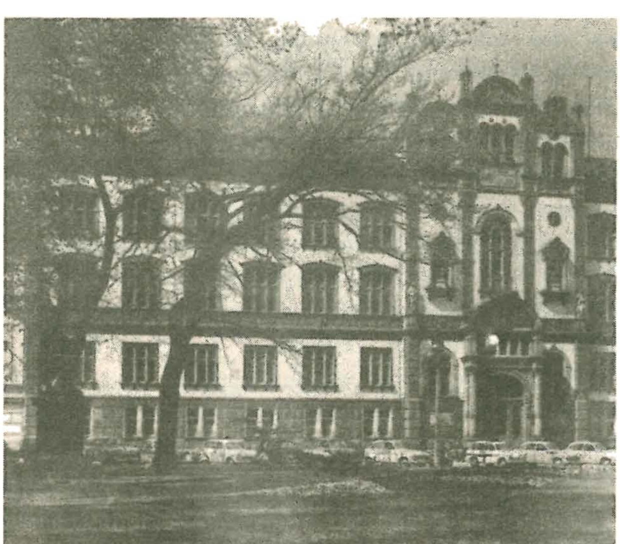
Eine Aufgabe von

Prof. Dr. rer. nat. habil. Wolfgang Engel

Universität Rostock
Vorsitzender des Zentralen Komitees der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR

▲ 450 In der Ebene seien drei voneinander verschiedene Punkte gegeben. Die größte der Entfernungen zwischen irgend zweien dieser Punkte sei mit d bezeichnet. Es ist der Radius r (in Abhängigkeit von d) des kleinsten Kreises zu bestimmen, der bei beliebiger Lage der drei Punkte alle drei Punkte im Innern oder auf dem Rande enthält.

Die Universität Rostock, die in diesem Jahr das 550. Jahr ihrer Gründung feiert, ist die älteste Universität im Ostseeraum. Im 15. Jahrhundert entwickelte sie sich zur führenden Universität Nordosteuropas, zur „Leuchte des Nordens", und behauptete diese Stellung auch, als sich ihr weitere Universitäten zugesellten. Neben Studenten aus den Hansestädten und dem norddeutschen Raum finden wir Skandinavier, Niederländer und Balten in den Matrikeln. Im 16. Jahrhundert nahmen auch die Naturwissenschaften einen großen Aufschwung, und als bedeutende Gelehrte wirkten an der Universität Rostock u. a. Ulrich von Hutten, Tycho de Brahe, David Chyträus und Joachim Jungius.
Im 17. und 18. Jahrhundert kam es infolge des 30jährigen Krieges, der Auflösung der Hanse und der Refeudalisierung Mecklenburgs zum Niedergang der Universität. So wurde die Universität Rostock eine kleine, wissenschaftlich bedeutungslose Landesuniversität. Streitigkeiten zwischen der Stadt und dem Landesherren führten sogar zu einer zeitweisen Spaltung der Universität, die von 1760 bis 1789 in Bützow residierte. Die Studentenzahlen gingen dabei auf ein Minimum zurück, und die Gelehrten folgten gern einem Ruf an andere Universitäten. 1848 gab es nur 80 Studenten.



In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts erlebte die Stadt Rostock einen steilen Aufstieg, der an der Universität nicht vorüberging. In dieser Zeit, 1879, erfolgte die Gründung des mathematisch-physikalischen Seminars. Die wissenschaftliche Entwicklung und der Ausbau der materiellen Basis der Universität wurden nach der Machtergreifung des Faschismus unterbrochen. Die Zahl der Studenten sank von über 2000 der Jahre 1931/32 auf weniger als 900 im Jahre 1938/39.
1946 begann eine neue Entwicklung. Die Schul- und erste Hochschulreform öffnete die Universität auch den Kindern der Arbeiter und Bauern. Die Studentenzahlen stiegen an und werden in den nächsten Jahren weiter steigen. Zur Zeit studieren etwa 5000 Studenten. Zu den traditionellen Einrichtungen kamen neue hinzu, z. B. 1951 die „Technische Fakultät für Schiffbau".
Im Verlaufe der 3. Hochschulreform verändert die Universität ihr Profil und ihre Struktur. Für die Universität Rostock ergibt sich eine enge Verflechtung mit den Bereichen der Seewirtschaft, der Land- und Nahrungsgüterwirtschaft, der Volksbildung und dem staatlichen Gesundheitswesen.

Die Fakultäten mit ihren Instituten wurden aufgelöst und 17 Sektionen (darunter die Sektion Mathematik) sowie der Hochschulbereich Medizin gebildet. In der Sektion Mathematik erfolgt die Ausbildung von Diplomlehrern für Mathematik/Physik sowie von Diplommathematikern der Fachstudienrichtungen Analysis und Numerische Mathematik. Für die Diplommathematiker sind als Nebenfächer Schiffstechnik, Technische Elektronik und Sozialistische Betriebswirtschaft vorgesehen.

Berufsbild
Hochbauzeichner – ein Beruf für Mädchen

Nur der Mensch kann eine Arbeit gedanklich vorbereiten, bevor er sie durchführt. Die Tätigkeit eines Hochbauzeichners gehört zu dieser gedanklichen Vorbereitung. Bauwerke können nur dann Gestalt annehmen, wenn dafür Projektierungsunterlagen vorhanden sind. Während Architekten und Ingenieure die Planung, Entwurfsbearbeitung sowie die statische Berechnung durchführen, fertigt der Hochbauzeichner die genauen zeichnerischen Unterlagen an. Er arbeitet nach Angaben und Skizzen der Architekten selbständig anschauliche technisch eindeutige Zeichnungen aus, z. B. Grundrisse, Schnitte und konstruktive Einzelheiten, nach denen auf der Baustelle oder im Betonwerk gearbeitet wird.

Erforderliche Voraussetzungen

Besonders für Mädchen ist der Beruf des Hochbauzeichners interessant und vielseitig. Die Voraussetzung zum Erlernen des Berufes ist der Abschluß der 10. Klasse der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule. Die Tätigkeit eines Hochbauzeichners erfordert ein hohes Maß an Wissen und Können, stellt große Anforderungen an manuelle Fertigkeiten, fordert gutes Allgemeinwissen und besonders gute Leistungen in den mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächern. Der Hochbauzeichner muß in der Lage sein, die Gedanken des Ingenieurs, die dieser schriftlich, mündlich oder in einer Skizze zum Ausdruck bringt, zeichnerisch darzustellen. Dazu sind räumliches Vorstellungsvermögen und logisches Denken eine wichtige Voraussetzung. Die Ausübung des Berufes erfordert Ausdauer, Konzentrationsfähigkeit, Selbständigkeit und Verantwortungsbewußtsein. Die Dauer der Ausbildungszeit beträgt für 10-Klassen-Schüler zwei Jahre. Bei vorzeitigem Erreichen des Ausbildungszieles besteht die Möglichkeit der Lehrzeitverkürzung.

Wie erfolgt die Ausbildung?

Im ersten Lehrjahr erfolgt die Grundausbildung, die zentral von einem VE Wohnungs- und Gesellschaftsbaukombinat durchgeführt wird. Alle Lehrlinge werden in Kollektiven zu je 15 Jugendlichen zusammengefaßt und von einem Lehrmeister betreut. In der Grundausbildung werden in Abstimmung mit der theoretischen Ausbildung in der Berufsschule die zeichnerischen Fertigkeiten entwickelt sowie die grundlegenden Konstruktionen des Bauens gelehrt.
Das zweite Lehrjahr umfaßt die spezielle Ausbildung. Die Lehrlinge werden in den einzelnen Projektierungsabteilungen der Betriebe eingesetzt und arbeiten an produktiven Aufgaben mit. Anleitung und Unterweisung erfolgen durch einen Architekten oder Ingenieur.
Nach Beendigung der Lehre mit dem Facharbeiterabschluß als Hochbauzeichner hat jeder die Möglichkeit, sich weiter zu qualifizieren.
Über ein dreijähriges Direktstudium an einer Ingenieurschule für Bauwesen kann die Qualifikation zum Ingenieur, Ökonomen oder Ingenieur-Pädagogen erfolgen, im Abendstudium zum Teilkonstrukteur.

Aus: Berufsberatungszeitung, Bez. Leipzig, 2/69

Mathematik und Bauwesen

Der *alpha*-Club der 29. Oberschule Leipzig (5 Arbeitsgemeinschaften Mathematik) stellte sich zu Ehren des 20. Jahrestages der DDR die Aufgabe, Fotomaterial zum oben genannten Thema zusammenzustellen. Es entstand eine Lichtbildreihe mit 200 Color-Dias, Vignetten, techn. Zeichnungen. Sie wird in der außerunterrichtlichen und unterrichtlichen Arbeit der Klassenstufen 5 bis 10 eingesetzt. Die Dias zeigen die enge Verbindung von Mathematik und dem sich rasch entwickelnden Bauwesen im Bezirk Leipzig.
Baupläne, Berufsbilder, Graphiken, eine große Zahl von Aufgaben geben Erläuterungen zu den gezeigten Bildern. Die besten Teilnehmer am Foto-Wettbewerb des *alpha*-Clubs wurden ausgezeichnet. Rund 50 Wissenschaftler, Werktätige aus dem Bauwesen, der Industrie, der Landwirtschaft, Statistiker und Eltern halfen bei dem Bemühen, die Leistungen auf diesem Schwerpunkt des Bezirks Leipzig zu zeigen und zu erläutern.

Lösungen

▲ 418 Die Längen der Katheten des rechtwinkligen Dreiecks betragen
$(10 - 2) \cdot 10$ km $= 80$ km bzw.
$(7 - 3) \cdot 10$ km $= 40$ km.
Nach dem Pythagoräischen Lehrsatz gilt:
$$l = \sqrt{80^2 + 40^2} = \sqrt{8000},$$
d. h., die Luftlinie zwischen den Orten A und B hat die Länge von rund 89 km.

▲ 419 a) $V = V_1 + V_2 + V_3$
$$= \pi r^2 h + \frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) + \pi r^2 h$$
$$= \pi \cdot 6^2 \cdot 8 + \frac{\pi \cdot 15}{3}(6^2 + 6\,20 + 20^2)$$
$$+ \pi \cdot 20^\circ \cdot 34$$
$$= \pi (288 + 2780 + 13\,600)$$
b) $m = V \cdot \varrho$
$\approx 52\,360$, d. s. $\approx 52{,}36$ Liter Inhalt pro Kanne.
$= 392{,}7$; d. s. 392,7 kg.

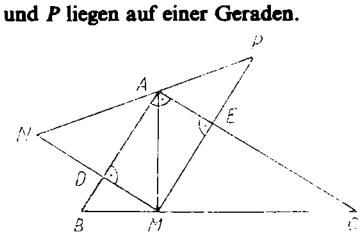
▲ 420 1. Wir geben zunächst eine *rein geometrische Lösung* wieder, wie sie von *Galois* gefordert wurde. (Abb. siehe S. 117).
Es sei $ABCD$ das gegebene Sehnenviereck mit den Seitenlängen $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, $c = \overline{CD}$, $d = \overline{DA}$. Wir bezeichnen die Längen der Diagonalen mit $x = \overline{AC}$ und $y = \overline{BD}$. Wir nehmen zunächst an, daß der Winkel $\sphericalangle\ ABC = \beta$ ein *spitzer Winkel* ist.
Dann liegt der Fußpunkt E des von C auf AB gefällten Lotes im Innern der Strecke $\overline{AB}$. Wir setzen zur Abkürzung $\overline{CE} = h$ und $\overline{EB} = u$, also $\overline{AE} = a - u$.
Nach dem Satz des Pythagoras gilt wegen
$h^2 = b^2 - u^2$
$$x^2 = (a-u)^2 + h^2 = a^2 - 2au + u^2$$
$$+ b^2 - u^2 = a^2 + b^2 - 2au. \quad (1)$$
Der Fußpunkt F des von A auf CD gefällten Lotes liegt, da nach einem Satz über das Sehnenviereck der Winkel $\sphericalangle\ CDA = 180° - \beta$ stumpf ist, außerhalb der Strecke $\overline{CD}$.
Setzt man $\overline{AF} = k$ und $\overline{DF} = v$, so gilt wegen $k^2 = d^2 - v^2$
$$x^2 = (c+v)^2 + k^2 = c^2 + 2cv + v^2$$
$$+ d^2 - v^2 = c^2 + d^2 + 2cv. \quad (2)$$
Wegen $\sphericalangle\ FDA = \beta$ sind die rechtwinkligen Dreiecke EBC und FDA ähnlich; daher gilt
$$u : b = v : d, \quad \text{d.h. } v = \frac{du}{b}.$$
Man erhält daher aus (2)
$$x^2 = c^2 + d^2 + \frac{2cdu}{b}. \quad (3)$$
Aus (3) und (1) folgt also
$$c^2 + d^2 + \frac{2cdu}{b} = a^2 + b^2 - 2au,$$
$$2u\left(a + \frac{cd}{b}\right) = a^2 + b^2 - c^2 - d^2,$$
$$2u = \frac{b(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)}{ab + cd}.$$
Daraus folgt wegen (1)
$$x^2 = a^2 + b^2 - \frac{ab(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)}{ab + cd},$$
$$x^2 = \frac{cd(a^2 + b^2) + ab(c^2 + d^2)}{ab + cd}. \quad (4)$$
Ist nun der Winkel $\sphericalangle\ ABC = \beta$ ein *stumpfer* oder ein *rechter Winkel*, so erhält man auf Grund einer analogen Rechnung wieder die Gleichung (4), im Falle $\beta = 90°$ wird speziell $x^2 = a^2 + b^2$. Vertauscht man b mit d, so erhält man für die Länge y der anderen Diagonale $\overline{BD}$:
$$y^2 = \frac{bc(a^2 + d^2) + ad(b^2 + c^2)}{ad + bc}. \quad (5)$$
Aus den Gleichungen (4) und (5) können nun die Längen x bzw. y der Diagonalen berechnet werden, wenn die Längen der Seiten a, b, c, d gegeben sind.

2. Wesentlich einfacher wird die Lösung, wenn man den *Kosinussatz der ebenen Trigonometrie* anwendet:
Da $\sphericalangle\ CDA = 180° - \beta$ und $\cos(180° - \beta) = -\cos\beta$ ist, folgt aus
$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta \quad (6)$$
und
$$x^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos(180° - \beta)$$
$$= c^2 + d^2 + 2cd\cos\beta \quad (7)$$
$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta = c^2 + d^2$$
$$+ 2cd\cos\beta,$$
also $2\cos\beta\,(ab + cd) = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$,
$$2\cos\beta = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{ab + cd}$$
und hieraus wegen (6)
$$x^2 = a^2 + b^2 - \frac{ab(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)}{ab + cd};$$
diese Gleichung stimmt mit der Gleichung (4) überein.
Analog erhält man die Gleichung (5).
Diese einfachere Lösungsmethode konnte *Galois* aber nicht anwenden, da in dem Mathematik-Kurs nur die Sätze der Elementargeometrie benutzt werden durften.

Lösungen zur Schulolympiade
der SR Rumänien 1968

Klassenstufe 6

1a) Bei gleicher Arbeitsintensität würden 1596 m Stoff in 24 Tagen von $\frac{15 \cdot 16 \cdot 1596}{24 \cdot 2280}$ Weberinnen, also von 7 Weberinnen gewebt werden.
b) Eine Weberin würde an einem Tage $\frac{2280}{15 \cdot 16}$ m, also $9\frac{1}{2}$ m Stoff weben.
c) Es seien für die Anfertigung einer Schürze a Meter, eines Hemdes b Meter, eines Bettlakens c Meter Stoff erforderlich; dann gilt
$$a : b : c = \frac{1}{2} : \frac{7}{8} : 1 = 4 : 7 : 8.$$
Aus $4 + 7 + 8 = 19$ und $9\frac{1}{2} : 19 = \frac{1}{2}$ folgt, daß für die Anfertigung einer Schürze $4 \cdot \frac{1}{2}\,m = 2$ m, eines Hemdes $7 \cdot \frac{1}{2}$ m $= 3\frac{1}{2}$ m und eines Bettlakens $8 \cdot \frac{1}{2}$ m $= 4$ m Stoff benötigt werden.
2a) Auf Grund der Symmetrieeigenschaften gilt $\overline{AM} = \overline{AN}$ und $\overline{AM} = \overline{AP}$; die Dreiecke NMA und MPA sind somit gleichschenklig.
b) Auf Grund der Symmetrieeigenschaften gilt $\sphericalangle\ NAD = \sphericalangle\ DAM$ und $\sphericalangle\ MAE = \sphericalangle\ EAP$; ferner gilt $\sphericalangle\ DAM + \sphericalangle\ MAE = 90°$.
Daraus folgt $\sphericalangle\ NAP = 180°$, d. h. die Punkte N, A und P liegen auf einer Geraden.

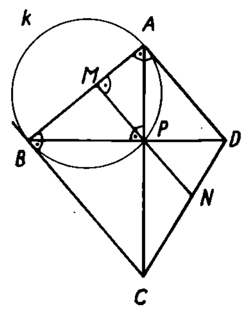


c) Aus a) folgt $\overline{AN} = \overline{AP}$; auf Grund der Symmetrieeigenschaften gilt ferner $\overline{ME} = \overline{EP}$ und $\overline{ND} = \overline{DM}$. Das Viereck $DMEA$ ist ein Rechteck. Daraus folgt $\overline{DA} = \overline{ME} = \overline{EP}$ und $\overline{ND} = \overline{DM} = \overline{AE}$.
Die Dreiecke NDA und AEP sind somit kongruent, da sie in den drei Seiten übereinstimmen.

Klassenstufe 7

1a) $T = (x+y) \cdot \frac{x-y}{xy}$
$$+ \frac{y^2 + x^2 + 2xy}{x^2y^2} \cdot xy$$
$$= \frac{(x+y)(x-y) + (x+y)^2}{xy}$$
$$= \frac{2x(x+y)}{xy} = \frac{2(x+y)}{y}$$
b) $\frac{2 \cdot (-2+2)}{2} = \frac{2 \cdot 0}{2} = 0$
c) Der Term ist für $x = 0$ oder für $y = 0$ nicht definiert.
d) $\frac{2 \cdot (x+6)}{6} = -\frac{1}{2}$
$$x + 6 = -\frac{3}{2}$$
$$x = -7\frac{1}{2}$$
2a) Aus $\overline{AD} : \overline{AB} = 3 : 4$ und $\overline{AD} = 15$ m folgt $\overline{AB} = 20$ m.
Nach dem Satz des Pythagoras gilt $\overline{BD} = \sqrt{15^2 + 20^2}$ m $= 25$ m. Da $\sphericalangle\ APB$ Peripheriewinkel über dem Durchmesser $\overline{AB}$ ist, gilt $\sphericalangle\ APB = 90°$, d. h. die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ des Trapezes $ABCD$ stehen senkrecht aufeinander. Nach dem Satz des Euklid gilt somit $\overline{PD} = \frac{15^2}{25}$ m $= 9$ m und $\overline{BP} = 16$ m.

Nach dem Strahlensatz gilt $\overline{BC} = \frac{15 \cdot 16}{9}$ m $= \frac{80}{3}$ m. Nach dem Satz des Pythagoras gilt ferner $\overline{AC} = \sqrt{20^2 + \left(\frac{80}{3}\right)^2}$ m $= 33\frac{1}{3}$ m.



Die Längen der Diagonalen des Trapezes $ABCD$ betragen demnach $33\frac{1}{3}$ m und 25 m.

b) Nach dem Strahlensatz gilt $\overline{MP} : \overline{AD} = \overline{BP} : \overline{BD}$, $\overline{BP} : \overline{BD} = \overline{CP} : \overline{CA}$ und $\overline{CP} : \overline{CA} = \overline{PN} : \overline{AD}$. Daraus folgt $\overline{MP} = \overline{PN}$.

Klassenstufe 8

1. Wir multiplizieren die erste Gleichung mit a, die zweite mit b und erhalten

$$a^2x + aby = a^3 + ab^2$$
$$b^2x - aby = -a^2b - b^3.$$

Durch Addition erhalten wir

$$(a^2 + b^2) \cdot x = a^3 - a^2b + ab^2 - b^3,$$

bzw. durch Umformung

$$(a^2 + b^2) \cdot x = (a^2 + b^2)(a - b)$$
$$x = a - b, \text{ wenn } a^2 + b^2 \neq 0.$$

Durch Substitution erhalten wir dann aus der ersten Gleichung des gegebenen Systems

$$a(a - b) + by = a^2 + b^2$$
$$by = b(a + b)$$
$$y = a + b, \text{ wenn } b \neq 0.$$

Man erhält also die Lösung $x = a - b$ und $y = a + b$, falls $b \neq 0$ ist.

Ist $a \neq 0$ und $b = 0$, so erhält man $x = a$ und $y = a$.

Ist $a = 0$ und $b = 0$, so ist das Gleichungssystem für alle reellen Zahlen x und y erfüllt.

2a) Es gilt $u^2 = (x^2 + 2x - 15)^2 = x^4 + 4x^3 - 26x^2 - 60x + 225$; ferner gilt

$$v \cdot w = (x^2 - 6x + 9)(x^2 + 10x + 25),$$
$$v \cdot w = x^4 + 4x^3 - 26x^2 - 60x + 225.$$

Daraus folgt, daß $u^2 = v \cdot w$ gilt.

b) $\frac{u + v}{u - v} = \frac{2x^2 - 4x - 6}{8x - 24}$

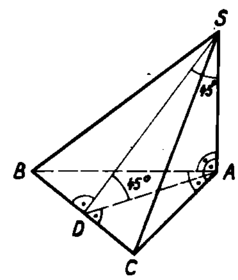
$= \frac{(x + 1)(x - 3)}{4(x - 3)} = \frac{x + 1}{4}$ für $x \neq 3$.

c) Aus $\frac{x + 1}{4} = \frac{x + 5}{4}$ folgt $x + 1 = x + 5$, d.h. es gibt keine reelle Zahl x, die die Gleichung erfüllt.

3a) Aus den Bedingungen der Aufgabe folgt, daß die Höhe $\overline{SA}$ der Pyramide $SABC$ gleich der Höhe $\overline{AD}$ des rechtwinkligen Dreiecks ABC ist. Nach dem Satz des Pythagoras gilt $\overline{BC} = \sqrt{16^2 + 12^2}$ cm $= 20$ cm. Nach dem Satz des Euklid gilt $\overline{DO} = \frac{12^2}{20}$ cm $= 7{,}2$ cm.

Ferner gilt nach dem Satz des Pythagoras $\overline{AD} = \sqrt{12^2 - 7{,}2^2}$ cm $= 9{,}6$ cm. Somit erhalten wir

$$V = \frac{16 \cdot 12 \cdot 9{,}6}{3 \cdot 2} \text{ cm}^3 = 307{,}2 \text{ cm}^3.$$



b) Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$\overline{SB} = \sqrt{16^2 + 9{,}6^2} \text{ cm} = 18{,}7 \text{ cm},$$
$$\overline{SC} = \sqrt{12^2 + 9{,}6^2} \text{ cm} = 15{,}4 \text{ cm}.$$

Die Summe der Längen der Kanten der Pyramide beträgt demnach $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} + \overline{SA} + \overline{SB} + \overline{SC} = 16 \text{ cm} + 20 \text{ cm} + 12 \text{ cm} + 9{,}6 \text{ cm} + 18{,}7 \text{ cm} + 15{,}4 \text{ cm} = 91{,}7$ cm.

c) Nach dem Satz des Pythagoras gilt $\overline{DS} = \sqrt{9{,}6^2 + 9{,}6^2}$ cm $= 13{,}5$ cm; daher gilt für die Oberfläche der Pyramide

$$A_0 = \frac{1}{2} \cdot (12 \cdot 16 + 12 \cdot 9{,}6 + 16 \cdot 9{,}6 + 20 \cdot 13{,}5) \text{ cm}^2 = 365{,}4 \text{ cm}^2.$$

d) Es gilt $r = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} = 10$ cm; wir erhalten für das Volumen des der Pyramide umschriebenen Zylinders demnach

$$V = \pi \cdot 10^2 \cdot 9{,}6 \text{ cm}^3 \approx 3014 \text{ cm}^3$$

Klassenstufe 9

1a) Wir multiplizieren die zweite Gleichung mit $4(m - 2)$ und erhalten durch Addition

$$3(m-1)x + 4(m-2)y = 24$$
$$8(m-2)x - 4(m-2)y = \frac{(5m-13)(m-2) \cdot 4}{(m-1)(m-2)}$$
$$(11m-19) \cdot x = 24 + \frac{4(5m-13)}{m-1}$$

für $m \neq 1$ und $m \neq 2$,

$$(11m-19) \cdot x = \frac{4(11m-19)}{m-1},$$
$$x = \frac{4}{m-1} \text{ für } m \neq \frac{19}{11}.$$

Durch Substitution erhalten wir mit Hilfe der zweiten gegebenen Gleichungen

$$\frac{8}{m-1} - y = \frac{5m-13}{(m-1)(m-2)},$$
$$y = \frac{3(m-1)}{(m-1)(m-2)},$$
$$y = \frac{3}{m-2}.$$

b) Das Gleichungssystem besitzt nur Lösungen, wenn $m \neq 1$ und $m \neq 2$ ist, und zwar im Falle $m \neq \frac{19}{11}$ genau eine Lösung $x = \frac{4}{m-1}$, $y = \frac{3}{m-2}$ und im Falle $m = \frac{19}{11}$ unendlich viele Lösungen (x beliebig, $y = 2x - 22$), wie durch Rechnung nachgewiesen werden kann.

c) Für $m = 3$ erhalten wir das Zahlenpaar [2, 3],
für $m = 5$ das Zahlenpaar [1, 1].

Diese beiden Zahlenpaare sind die einzigen, die die gestellten Bedingungen erfüllen.

2) Aus b) folgt $4 \in A, 6 \in A, 9 \in A,$
$4 \in B, 6 \in B, 9 \in B.$

Aus c) folgt $1 \in A, 6 \in A, 8 \in A, 9 \in A.$

Aus d) folgt $5 \in B, 6 \in B, 7 \in B, 9 \in B.$

Aus c) und a) folgt $2 \notin A, 7 \notin A,$
also $2 \in B, 7 \in B.$

Aus d) und a) folgt $1 \notin B, 3 \notin B,$
also $1 \in A, 3 \in A.$

Folglich gilt

$A = \{1,3,4,6,8,9\}$; $B = \{2,4,5,6,7,9\}$.

Durch die Probe überzeugen wir uns davon, daß für die angegebenen Mengen A und B die Bedingungen a) bis d) erfüllt sind.

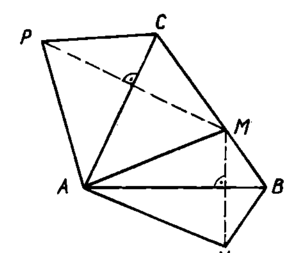
3a) Der nachstehenden Zeichnung entnehmen wir:

$$u = \overline{AN} + \overline{NB} + \overline{BC} + \overline{CP} + \overline{PA};$$

aus Symmetriegründen gilt $\overline{PA} = \overline{AM}$, $\overline{AN} = \overline{AM}$, $\overline{CP} = \overline{CM}$, $\overline{NB} = \overline{BM}$. Da $\overline{BC} = \overline{BM} + \overline{CM}$ ist, gilt damit

$$u = \overline{AM} + \overline{BM} + \overline{BC} + \overline{CM} + \overline{AM}$$
$$= 2 \cdot \overline{AM} + 2 \cdot \overline{BC} = 2 \cdot (\overline{AM} + \overline{BC}).$$

Die Strecke $\overline{BC}$ ist konstant; der Umfang $u = 2 \cdot (\overline{AM} + \overline{BC})$ des Fünfecks $ANBCP$ hängt somit allein von der Länge der Strecke $\overline{AM}$, also von der Lage des Punktes M ab. Die Strecke $\overline{AM}$ und damit der Umfang des Fünfecks wird am kürzesten, wenn $\overline{AM}$ Höhe zur Seite $\overline{BC}$ ist.

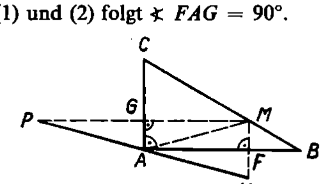


b) Wenn N, A und P auf einer Geraden liegen, so gilt $\sphericalangle NAP = 180°$. (1)

Aus der Symmetrieeigenschaft folgt

$\sphericalangle NAF = \sphericalangle FAM$ und $\sphericalangle MAG = \sphericalangle GAP$. (2)

Aus (1) und (2) folgt $\sphericalangle FAG = 90°$.



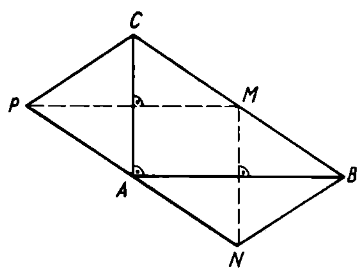
Es gilt umgekehrt:

Aus $\sphericalangle FAG = 90°$ und $\sphericalangle NAF = \sphericalangle FAM$ und $\sphericalangle MAG = \sphericalangle GAP$ folgt $\sphericalangle NAP = 180°$, d.h. die Punkte N, A und P liegen auf einer Geraden.

c) 1. Teil der Aufgabe

Nach Voraussetzung ist das Viereck $NBCP$ ein Parallelogramm; es gilt also

$\therefore\ \sphericalangle PCB + \sphericalangle CBN = 180°$. (1)
Aus Symmetriegründen gilt ferner
$\sphericalangle PCA = \sphericalangle ACM$ und $\sphericalangle MBA = \sphericalangle ABN$. (2)
Aus (1) und (2) folgt $\sphericalangle ACM + \sphericalangle MBA = 90°$, und deshalb ist auch $\sphericalangle CAB = 90°$; das Dreieck ABC ist also in A rechtwinklig.
Aus Symmetriegründen gilt weiterhin
$\overline{CP} = \overline{CM}$ und $\overline{BM} = \overline{BN}$. (3)
Im Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Seiten gleich lang; es gilt also
$\overline{BN} = \overline{CP}$. (4)
Aus (3) und (4) folgt $\overline{CM} = \overline{BM}$, d. h. der Punkt M halbiert die Seite $\overline{BC}$.



2. Weg (rund gerechnet):

$$a : b = \frac{a}{b}$$

3. Weg (nur mit Brüchen):

$$\frac{1}{b} : \frac{1}{a} = \frac{1}{b} \qquad a = \frac{a}{b}$$

Stelle Aufgaben dieser Art deinen Mitschülern!

In einem Zuge

1. E, F, A, B, I, O, N, F, G, C, D, H, M, L, G, H, I, K
2. B, C, D, E, F, G, H, A, B, I, H, M, F, L, D, K, L, M, I, K, B
3. A, B, E, C, B, F, C, D, E, F, A, D

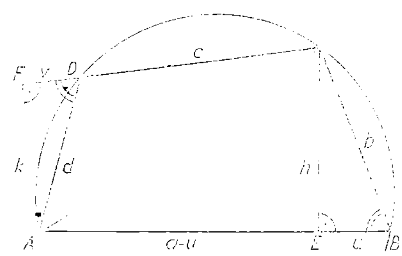
Beim letzten Ton des Z. . .

Die Uhr schlug 2mal — die Zeiger zeigten 20.16 Uhr an.

Mathematical Log

Ans: 30. Put one color on and turn that face down. On top any of five colors can be used. Four colors remain and they will form a circular permutation on the remaining four sides. The number of circular permutations of four things all at a time is $3! = 6$. Hence the number is $5 \cdot 6 = 30$.

Abbildung zu Lösung 420 (S. 115):



Lösungen zu alpha-heiter

Summe stets 40

Kreisfigur: $3 + 14 + 15 + 8 = 40$
Symmetrieachse: $7 + 5 + 13 + 12 + 1 + 2 = 40$
Symmetrieachse: $4 + 10 + 11 + 9 + 0 + 6 = 40$

Auf der iga

Jeder benötigte 112 m Zaun.

$28 \cdot 28 = 784$	$25 \cdot 31 = 775$
$2 \cdot 56 = 112$	$2 \cdot 56 = 112$
$22 \cdot 34 = 748$	$19 \cdot 37 = 703$
$2 \cdot 56 = 112$	$2 \cdot 56 = 112$

Labyrinth

Mathematischer Begriff: FUNKTION

Kryptarithmetik

1 $99 + 1 = 100$
2 $3 \cdot 7 \cdot 37 = 777$
3 $11^2 = 121$
4 $\sqrt{25} = 5$; $\sqrt{36} = 6$
5 $0{,}01 \cdot 0{,}01 = 0{,}0001$

Ein Bruch! Einbruch?

Die allgemeine Form (Bildungsgesetz) für Aufgaben dieser Art lautet:

$$\left(a + \frac{1}{b}\right) : \left(b + \frac{1}{a}\right) = \frac{a}{b}$$

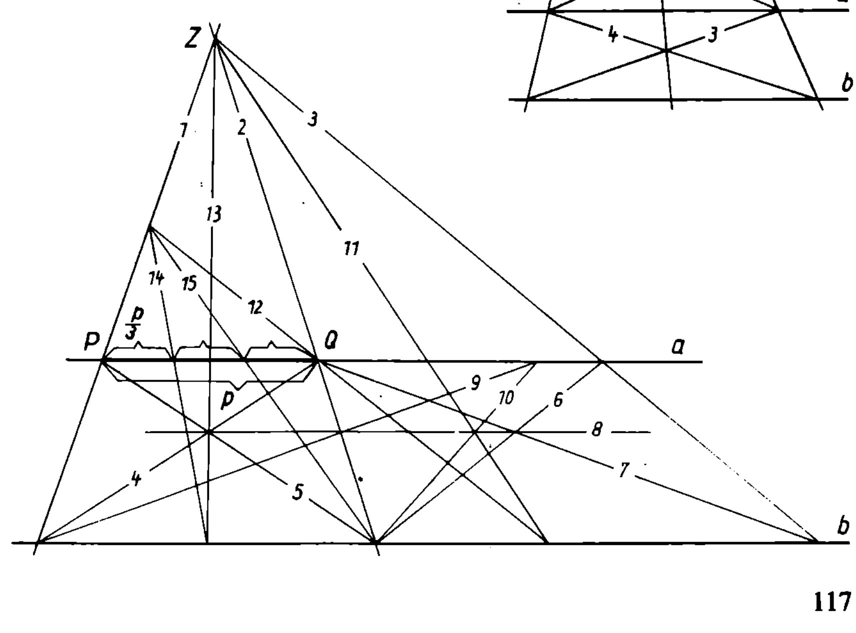
1. Weg (nach A. Ries):

$$\left(a + \frac{1}{b}\right) : \left(b + \frac{1}{a}\right) = \frac{ab+1}{b} : \frac{ab+1}{a} = \frac{ab+1}{b} \cdot \frac{a}{ab+1} = \frac{a}{b}$$

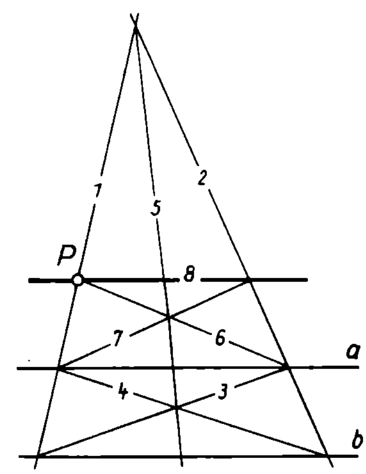
Lösung zu „Schneiden und Verbinden"

3. Durch P lege man eine Gerade (1), die a und b im Endlichen schneidet. Ferner zeichne man eine nicht durch P gehende Gerade (2), die a, b und (1) im Endlichen schneidet. Mit diesen Annahmen ist die weitere Konstruktion der Parallelen zu a durch P mit Hilfe der Geraden (3)...(7) in der vorgegebenen Reihenfolge eindeutig bestimmt.

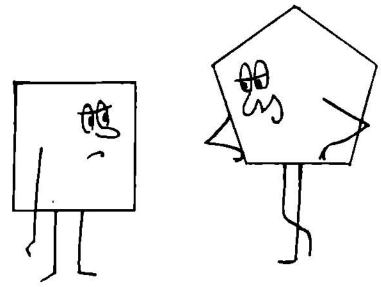
4. Annahme von Z nicht auf a und b liegend, sonst beliebig. Verbinde Z mit P und Q und lege eine weitere Gerade (3) durch Z, die a und b im Endlichen schneidet. Die folgende Konstruktion zur Dreiteilung der Strecke $\overline{PQ}$ ist durch Zeichnen der Geraden (4), (5)...(15) in der vorgegebenen Reihenfolge eindeutig bestimmt.



Bemerkung: Aus der Konstruktion ist leicht zu folgern, daß sich jede zu p in einem rationalen Verhältnis stehende Strecke mit den hier zugelassenen Mitteln in endlich vielen Schritten konstruieren läßt.



In freien Stunden alpha heiter



„Sie sollten sich auch qualifizieren!“
Aus: Zeit im Bild 42/68

Leicht verständlich

„Vati, ist heute dasselbe wie gestern?“
„Nein, wie kommst du darauf?“
„Du sagtest doch gestern, daß heute morgen sein wird!“
„Ja, freilich! Heute war gestern morgen und heute ist heute, so wie gestern heute war und morgen ist heute gestern und morgen wird auch heute sein! Verstanden?“

OL H. Pätzold, Waren/Müritz

Eine interessante Zahl

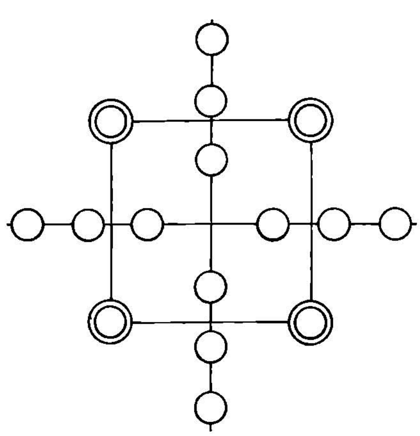
$2592 = 2^5 \cdot 9^2$
Wer findet ähnliche, interessante Beziehungen? Sendet sie an die Redaktion *alpha*!

OL H. Pätzold, Waren/Müritz

Summe stets 40

Die Zahlen 0 bis 15 sind so in die Kreisfiguren einzutragen, daß die Summe der Zahlen in den vier Doppelkreisen und die Summe der Zahlen in den Kreisen auf jeder der beiden Symmetrieachsen gleich 40 ist.

StR J. Lehmann, V. L. d. V., Leipzig



Auf der iga

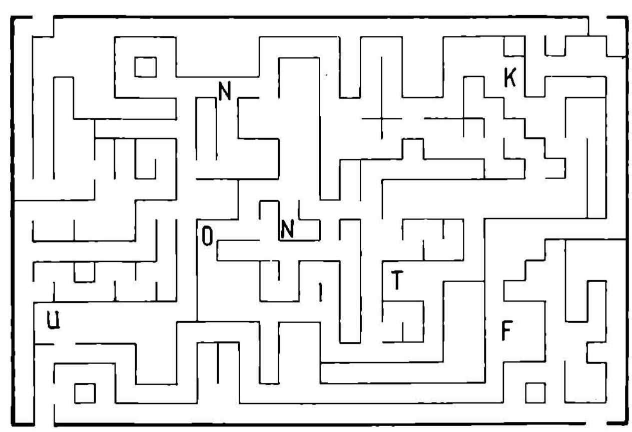
Auf der iga trafen sich 4 Gartenbesitzer. A hat einen Garten von 784 m^2, B hat 775 m^2, C 748 m^2 und D 703 m^2. Alle Gärten sind rechteckig. Es stellte sich beim Gespräch heraus, daß alle 4 die gleiche Meterzahl für den Zaun benötigten, um ihre Gärten zu umzäunen. Wieviel m Zaun brauchte jeder? Gibt es noch andere Lösungen?

OL H. Pätzold, Waren/Müritz

Labyrinth

Von einem der vier Eingänge führt ein Weg über alle angeführten Buchstaben zu einem anderen Ausgang. Bei richtiger Lösung erhaltet ihr einen wichtigen mathematischen Begriff!

Annerose Lehmann, Leipzig (8. Kl.)

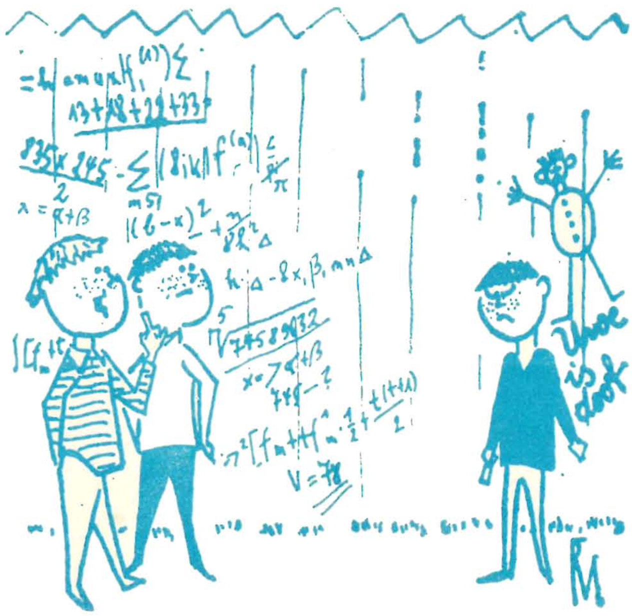


Kryptarithmetik

In den folgenden Aufgaben ist jede geometrische Figur durch eine Ziffer zu ersetzen, so daß richtig gelöste Aufgaben entstehen. (Gleiche geometrische Figuren in den einzelnen Aufgaben müssen nicht gleichen Ziffern entsprechen.)

StR J. Lehmann, V. L. d. V., Leipzig

1) $\overline{\triangle\triangle}+\square=\overline{\square\bigcirc\bigcirc}$	2) $\triangle\cdot\bigcirc\cdot\overline{\triangle\bigcirc}=\overline{\bigcirc\bigcirc\bigcirc}$	3) $(\overline{\square\square})^{\triangle}=\overline{\square\triangle\square}$	4) $\sqrt{\overline{\triangle\square}}=\square$	5) $\overline{\square,\square\bigcirc}\cdot\overline{\square,\square\square}=\overline{\square,\square\square\square\bigcirc}$



Was soll bloß aus dem mal werden? Aus: DLZ 38/68

Ein Bruch! Einbruch?

$3\frac{1}{8} : 8\frac{1}{3}$

Um zu sprechen im Gedicht:
Drei Schüler saßen vor Gericht.
Und das Ergebnis? Es war dies:
Der erste hielt's mit Adam Ries.
Der zweite wollte rund es machen
und teilte nur die ganzen Sachen.
Der dritte so zum Ziele kam,
indem er nur die Brüche nahm.
Das Resultat — ja das ist wichtig —
bei allen dreien war es richtig.
Das gilt nicht immer, nicht für alle.
Denk selber nach, in welchem Falle!

Es soll das Bildungsgesetz für Aufgaben dieser Art mit Variablen ausgedrückt, die drei oben eingeschlagenen Wege in allgemeiner Form dargestellt werden.

Dr.-Ing. W. Bennewitz, Radebeul

In einem Zuge

Ohne abzusetzen soll jede der drei Figuren durchfahren werden. Dabei darf aber jeder Punkt höchstens zweimal passiert werden.

OL H. Pätzold, Waren/Müritz

Beim letzten Ton des Zeitzeichens war es genau...

Herr *Tüftler* besitzt eine alte Wanduhr, die sehr genau geht. Leider zeigt sie eine andere Zeit an als die Radiozeit, und sie schlägt auch verkehrt. Wenn sie zum Beispiel 11.16 Uhr anzeigt, dann schlägt sie 5mal. Es ist dann genau Mitternacht nach dem Radio.
Als es kürzlich laut Radio 9.00 Uhr war, schlug sie gerade. Wie oft schlug die Uhr und welche Zeit zeigten ihre Zeiger?

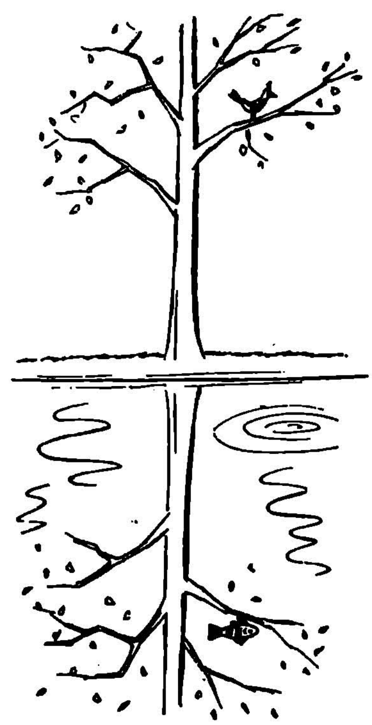
OL H. Pätzold, Waren/Müritz

Mathematical Log

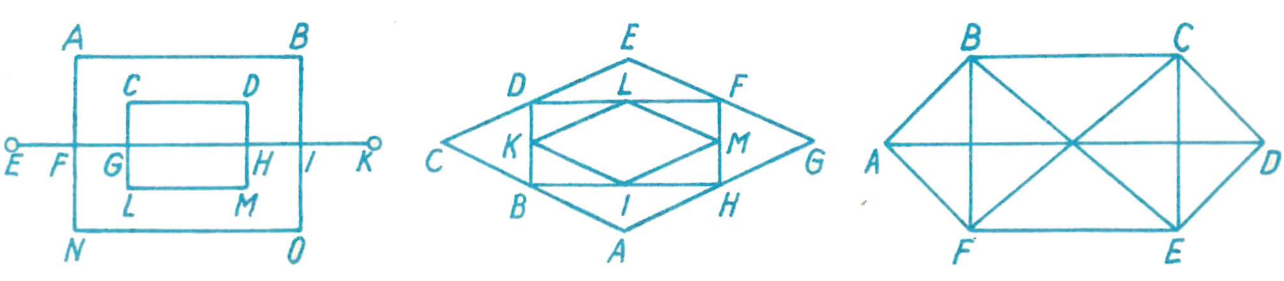
Cubes are painted with six colors. Each face is painted a solid color and no two faces of a given cube are the same color. How many such cubes can be prepared where each is unique in color orientations?

C. O. Oakley, Haverford, Pennsylvania (Math. Log XIII/3)

Symmetrie?



Vignette v. Chaval, Paris
Aus dem Diogenesfaß (Eulenspiegelverlag)



Leser schreiben an alpha

...Meiner Meinung ist die *alpha* für einen Schüler, der sich für Mathematik interessiert, die Zeitschrift! Ich persönlich möchte die *alpha* nicht mehr missen. Mir gefallen besonders die Beiträge über geometrische Probleme, z. B. „Fußball — reguläre Polyeder", „Nichts Einfacheres als ein Quadrat" oder die neu begonnene Artikelserie „Elektronische Datenverarbeitung."

Peter Schluttig, Frankenberg

Der Schwierigkeitsgrad der *alpha*-Wettbewerbsaufgaben war in Heft 1/69 sehr unterschiedlich!

OS Mittelstille (Kr. Schmalkalden)

Das vergrößerte Format von *alpha* findet meinen Beifall. Die einzelnen Beiträge werden jetzt übersichtlich auf die Seiten verteilt.

Mit Glückauf

Dr. K. Köhler, Karl-Marx-Stadt

Mein Sohn, der seit Beginn der Schulzeit ein reges Interesse für die Mathematik zeigt, hält seit einem Jahr die Zeitschrift *alpha*. Gern möchte er am Wettbewerb teilnehmen; er ist jedoch erst Schüler der 4. Klasse. Er bittet mich zu fragen, ob er dennoch am Wettbewerb teilnehmen darf.

W. G. Schmidt, Dessow, Kr. Kyritz

Er darf teilnehmen. *d. Red.*

In *alpha* 1/69 sah ich, daß Leser Aufgaben an die *alpha*-Freunde stellten. Da ich an meine Klassenkameraden, die sich an unserem selbständig zusammengestellten und weitergeführten Mathematikzirkel beteiligen, auch oft ähnliche Aufgaben stelle, nahm ich mir vor, auch für die *alpha*-Freunde eine Aufgabe auszuarbeiten... In meiner Klasse (ich besuche die 7. Kl.) habe ich wieder erfolgreich für *alpha* geworben. Nun sind schon 7 regelmäßige *alpha*-Leser.

Hanna Heinhold, Potsdam

...Da es in unserer Schule keinen Mathematikzirkel gibt, hat mir die Zeitung sehr geholfen, auch außerhalb der Schule Mathematik zu betreiben. Ich finde *alpha* sehr interessant und abwechslungsreich... Ich möchte Ihnen hiermit meinen Dank und mein Lob aussprechen...

Heino Lübbe, Negast, Kr. Stralsund

...Täglich muß ich 3 Stunden mit der Eisenbahn zur Schule und wieder nach Hause fahren. Diese Zeit widme ich überwiegend Ihrer Zeitschrift. Da die *alpha* nur alle zwei Monate erscheint, hat man genügend Zeit, sich mit bestimmten Aufgaben zu befassen... Gerade aus den gegebenen Lösungswegen kann man sehr viel lernen... Ich glaube, daß demnächst einmal einige Artikel über „Das Lösen von Aufgaben" veröffentlicht werden sollten... Die Arbeit mit Ihrer Zeitschrift ist wohl auch beteiligt am Gewinn meines 1. Platzes bei der diesjährigen Kreisolympiade... Die Aufgaben großer Mathematiker unserer Republik geben uns oft einen Einblick in spezielle Gebiete der Mathematik...

Dietmar Wegner, Halberstadt, Kl. 9

Ich habe mich über die Urkunde und die beiden Bücher sehr gefreut... Später möchte ich gern die Spezialklasse für Mathematik und Physik besuchen und dann Mathematik studieren. Die *alpha* wird mir mit den gestellten Aufgaben und den Artikeln helfen, dieses Ziel zu erreichen.

Angela Rohrbeck, Franzburg, Kl. 7

Am *alpha*-Wettbewerb beteiligt sich per Luftpost

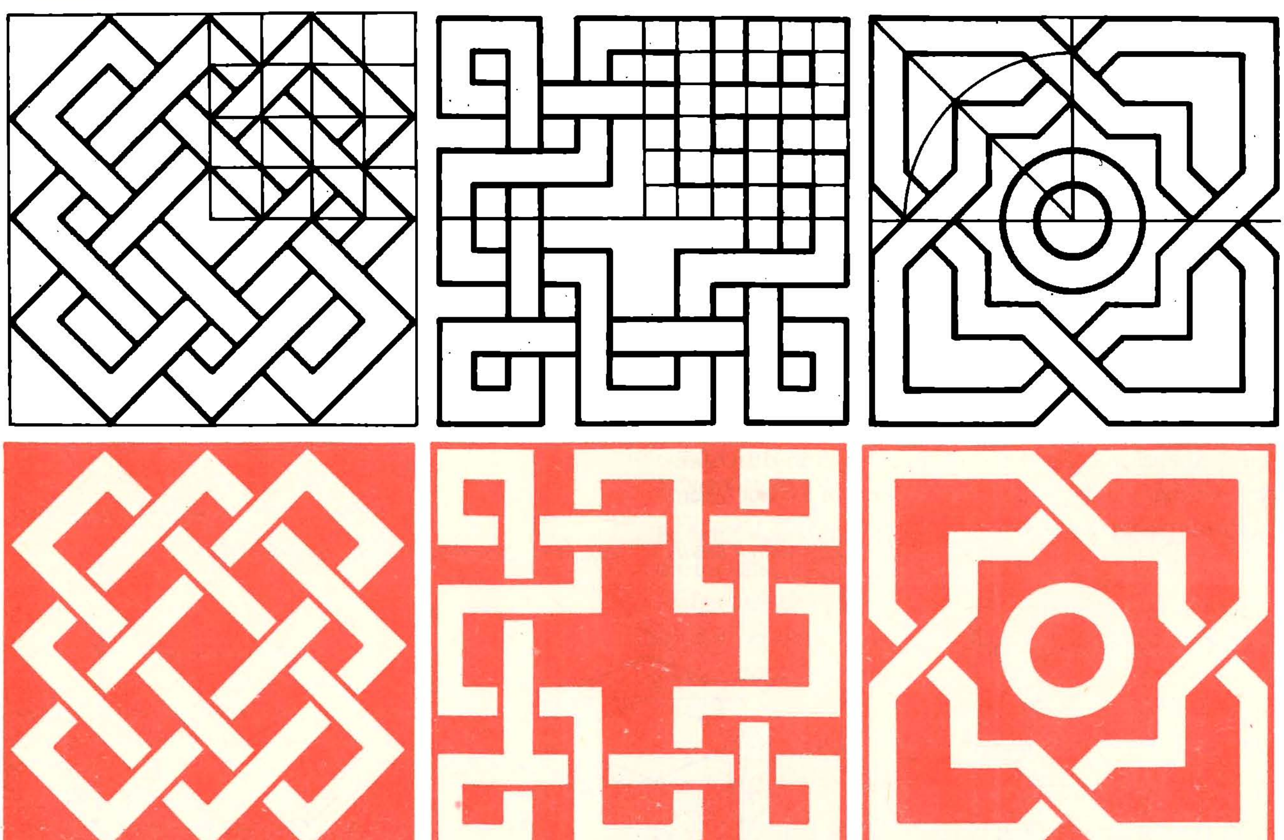
Sigrun Geyer, Sansibar, Tansania (Kl. 4)

...Ich bin 19 Jahre alt, aber kein Schüler mehr. Mein Beruf ist Maschinenbauer. Absolviert habe ich die 10-Klassen-Schule ... Ich betreibe Mathematik jetzt als Hobby. Unter diesen Umständen werde ich doch wohl am Wettbewerb teilnehmen können, denn nur hier kann ich Bestätigung meiner autodidaktischen Leistungen finden.

Arno Humpack, Klingmühl

Wir freuen uns über Ihre Beteiligung am *alpha*-Wettbewerb und wünschen gute Zusammenarbeit und viel Erfolg. *d. Red.*

Mit Zirkel und Zeichendreieck



Aufgaben aus Lehrbüchern des Volkseigenen Verlags Volk und Wissen Berlin

1949

▲ 5 Im Haushalt eines Bauern brennt täglich in der Küche eine 60-Watt-Lampe 3 Stunden lang, im Kuhstall beim Füttern und Melken eine 75-Watt-Lampe eine Stunde lang und in der Scheune beim Futterschneiden eine 40-Watt-Lampe zwei Stunden lang. Wie hoch ist der tägliche Verbrauch an elektrischer Energie.
Wie hoch sind die Kosten im Monat? (Eine kWh kostet 8 Pf.)

▲ 5 Zu einer Klasse gehören 44 Schülerinnen. Die Hälfte (ein Viertel) ist nicht anwesend. Wieviel Schülerinnen sind das?

▲ 5 Ein Bauer hat für 250 Naßpreßsteine 20,00 DM bezahlt. Was kostet ein Stück?

▲ 5 Eine volkseigene Federnfabrik stellt mit einer Maschine an einem Tag 26000 Schreibfedern her, die automatisch in Kästchen zu je 1 Grs. verpackt werden. Wieviel Kästchen können gefüllt werden und wieviel Dtzd. und Stck. bleiben übrig?

▲ 6 Beim Getreidemähen beträgt der Arbeitsaufwand mit der Sense bis zum Aufstellen der Stiegen (Garben) etwa 70 Std. je ha, mit einem Mähbinder der MAS nur etwa 4 Std. je ha. Wieviel Arbeitsstunden spart ein Neubauer bei der Roggenernte auf einem Feld von 1,5 ha dadurch, daß die MAS einen Mähbinder zur Verfügung stellt?

▲ 6 Beim Bau einer Mauer schichtet ein Maurer in 1 Std. 3 Reihen Ziegelsteine und baut dadurch die Mauer im Durchschnitt 23,1 cm höher. Um wieviel cm baut er sie in 2, 3, 4,... Stunden höher? Trage die Ergebnisse in eine Wertetafel ein!

▲ 7 Beim Aufbau der Volkswerft Stralsund erfüllte der Nationalpreisträger *Paul Sack* die Tagesnorm von 600 vermauerten Ziegelsteinen mit 417%. Wieviel Ziegelsteine vermauerte er täglich?

▲ 7 Ein Arbeiter in einem mecklenburgischen Torfstich sticht 1000 Soden (Sode heißt Torfstück) in 3 Stunden. Er steigert seine Leistung durch geschickte Vorbereitung und schafft die Arbeit künftig in 2 Stunden 18 Minuten. Wieviel % beträgt die Zeiteinsparung?

▲ 7 Die Landarbeiterin eines volkseigenen Gutes hatte beim Binden von Getreidegarben eine tägliche Norm von 0,45 ha zu erfüllen. Tatsächlich erreichte sie eine Leistung von 0,65 ha. Wieviel % der Norm betrug ihre Leistung?

▲ 7 Der Hauer *Franik* von der Grube „Brückenberg" in Zwickau förderte in einer Schicht 26,6 m^3 Kohle und übererfüllte damit seine Arbeitsnorm um 430%. Wie groß war diese?

▲ 8 Für den Bau eines Neubauerngehöftes hatten sich 5 Bauern für die Anfuhr der Ziegelsteine bereit erklärt. Jeder sollte die gleiche Anzahl von Fuhren durchführen. Da das Gespann des ersten Bauern anderweitig benötigt wurde, mußte jeder der vier anderen 3 Fuhren mehr durchführen, als sonst nötig gewesen wären. Wieviel Fuhren waren insgesamt notwendig?

▲ 8 Ein Bauarbeiter hat ein monatliches Reineinkommen von 190,— DM. Er verteilt seine Ausgaben wie folgt: für Wohnung 15,3%, für Ernährung 53%, für Kleidung 8%, für Heizung und Licht 7,8%, für Erholung und Unterhaltung 9%.
a) Berechne die einzelnen Ausgaben in DM!
b) Wieviel DM bleiben für unvorhergesehene Ausgaben oder für Ersparnisse übrig?

▲ 8 Jede Arbeiterin einer Strumpffabrik stellte in einem Vierteljahr durchschnittlich 522 Paar Strümpfe her. Durch technische Verbesserungen und durch Einführung des Leistungslohnes stieg die Leistung auf 912 Paar. Wie groß ist gegenwärtig der Wert der Produktion einer Mitarbeiterin, wenn er vor der Leistungssteigerung 901,— DM betrug?

1969

▲ 5 Schreibe alle Angaben heraus, die du zur Beantwortung der folgenden Frage benötigst! — „Wieviel Tage war die sowjetische Raumstation ‚Venus 4' unterwegs?" Die sowjetische Raumstation „Venus 4" landete am 18. 10. 1967 weich auf der Venus. Sie legte einen Weg von rund 350 Millionen Kilometern zurück. Die Raumstation wurde am 12. 6. 1967 gestartet.

▲ 5 Anstieg der Produktion von Butter in der DDR

1950	71200 t	1960	174600 t
1955	143800 t	1965	197400 t

Bilde aus den Angaben Aufgaben!

▲ 5 Auf einer Fläche von 1 dm^2 können 4 Weizenpflanzen wachsen. Jede Pflanze hat eine Ähre, in der durchschnittlich 30 Körner sind. 1000 Körner geben durchschnittlich 30 g.
a) Rechne nach, ob unter diesen Bedingungen 36 dt Weizen auf 1 ha geerntet werden können!
b) Wieviel Tonnen Weizen könnte man bei diesem Ertrag auf einer Fläche von 13 ha ernten?

▲ 6 Die Arbeitsbreite einer Mähmaschine mit Traktor beträgt 2,1 m. Welche Fläche ernten drei Mähmaschinen in 6 Stunden Arbeit ab, wenn die Durchschnittsgeschwindigkeit des Traktors 4,5 km in der Stunde beträgt? (Runde das Ergebnis auf eine Genauigkeit von 1 ha!)

▲ 6 In der DDR veränderte sich der Pro-Kopf-Verbrauch von 1955 bis 1964 folgendermaßen:
a) Bei Fleisch stieg er von 45,0 kg auf das 1,29fache.
b) Bei Geflügel stieg er von 2,4 kg auf das 1,54fache.
c) Bei Kartoffeln sank er von 174,6 kg auf das 0,9fache.
d) Bei Eiern stieg er von 116 St. auf das 1,76fache.
e) Bei Mehl und Nährmitteln fiel er von 121,6 kg auf das 0,81fache.
f) Bei Zucker stieg er von 27,4 kg auf das 1,12fache. Wie hoch ist der Verbrauch jeweils im Jahre 1964?

▲ 7 Die Länge eines Eisenträgers wurde fünfmal gemessen. Dabei ergaben sich die folgenden Werte: 8015 mm, 8009 mm, 8012 mm, 8013 mm, 8011 mm. Ermittle den Durchschnitt und gib Abweichungen der Meßwerte vom Durchschnitt mit rationalen Zahlen an!

▲ 7 Ein Verkehrsflugzeug mit Kolbenmotoren legt 500 km in 90 Minuten zurück. Das sowjetische Düsenverkehrsflugzeug TU 104 benötigt für die gleiche Strecke 40 Minuten. Ermittle für beide Typen die Flugzeit für 300 km! Welche Strecken legen beide in 2 Stunden zurück?

▲ 8 Mit einem 10,50 m langen Höhenförderer wird eine Strohmiete errichtet. Welche Höhe hat die Miete erreicht, wenn noch ein 1,50 m langer Teil des Gerätes über die obere Kante der Miete hinausragt und der Abstand zwischen Gerät und Miete 3,25 m beträgt?
a) Löse die Aufgabe durch eine maßstäbliche Zeichnung!
b) Kontrolliere dein Ergebnis durch Rechnung!

alpha knüpfte in den drei Jahren ihres Bestehens freundschaftliche Verbindung zu mathematisch interessierten Wissenschaftlern, Lehrern und Schülern:

1 Ägypten
2 Argentinien
3 VR Bulgarien
4 ČSSR
5 England
6 Finnland
7 Frankreich
8 Guinea
9 Indien
10 Irak
11 Island
12 Italien
13 Japan
14 SFR Jugoslawien
15 Mongolische VR
16 Niederlande
17 Österreich
18 VR Polen
19 SR Rumänien
20 Schweiz
21 Syrien
22 Tansania
23 UdSSR
24 VR Ungarn
25 USA
26 Westdeutschland