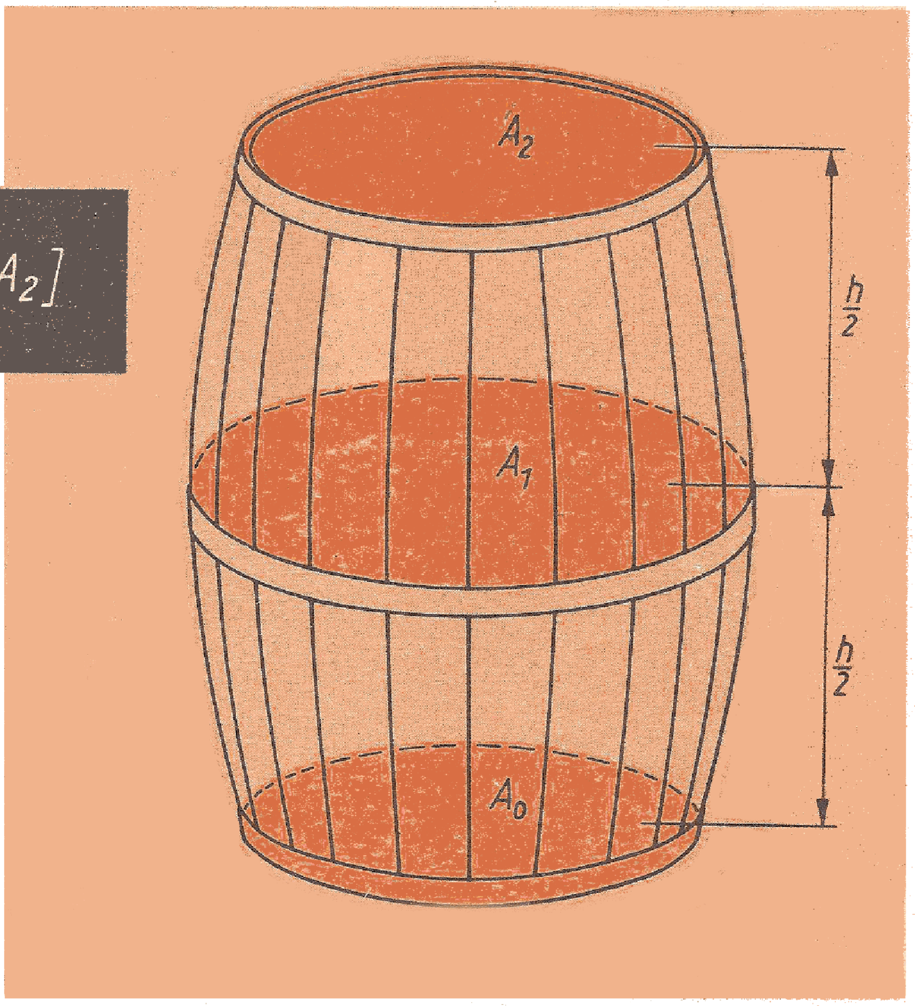
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha

$$V = \frac{h}{6}\left[A_0 + 4A_1 + A_2\right]$$



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
6. Jahrgang 1972
Preis 1,– M
Sonderpreis für DDR: 0,50 M
Index 31 059

6

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541 Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und -Import GmbH, DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Nedeljko Dragic, Zagreb (S. 129); F. Deubner — A. Ries (S. 136); Rentierzüchter am Schwarzen Meer: Aminodow Kanjewski, Moskau (S. 137); J. Lehmann, Leipzig (S. 144)
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 26. September 1972

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Mathematik im Reich der Töne

Bei der Betrachtung von Farbkombinationen z. B. an Kleidern und Stoffen findet man die eine Farbzusammenstellung schön und ansprechend, während sich bei anderen Kombinationen die Farben zu „beißen" scheinen. Für unser unterschiedliches Empfinden machen wir unseren persönlichen Geschmack, die Mode, unsere psychische Einstellung zu gewissen Farben und vielleicht auch die eigene Voreingenommenheit verantwortlich. Die wenigsten werden die Ursachen für ihre Freude oder ihr Unbehagen beim Anblick bestimmter Farbkombinationen in mathematisch-physikalischen Bereichen suchen. Es ist jedoch gewiß, daß zwischen dem vom Auge aufgenommenen äußeren physikalischen Reiz und dem dadurch ausgelösten psychischen Empfinden ein mathematisch faßbarer Zusammenhang besteht.

Bekanntlich ist mit jeder Lichtausstrahlung ein elektromagnetischer Schwingungsvorgang verknüpft. Diese Schwingungen breiten sich mit der Geschwindigkeit $c = 300\,000$ km $\cdot$ s^{-1} aus. Wegen der Größe dieser Geschwindigkeit kann man im allgemeinen für irdische Entfernungen die Zeit zwischen dem Aufleuchten eines Lichtblitzes und der Wahrnehmung durch das menschliche Auge gleich Null setzen.

Als weitere meßbare Größe hat man beim Licht die Wellenlänge λ. Experimentell läßt sich ein weißer Lichtstrahl mit Hilfe eines Glasprismas in Farben zerlegen. Man erhält ein Farbspektrum, das von rot über gelb, grün, blau nach violett geht. Jeder Farbe läßt sich eine bestimmte Wellenlänge und wegen der allen Farben gemeinsamen Ausbreitungsgeschwindigkeit c auch eine bestimmte Frequenz f nach der Formel $c = f \cdot \lambda$ zuordnen. Die Wellenlängen liegen zwischen 380 µm und 760 µm für violett bzw. rot. Entsprechend obiger Formel folgt für die zugehörigen Schwingungszahlen $0{,}8 \cdot 10^{15}$ bzw. $0{,}4 \cdot 10^{15}$ pro Sekunde. Die elektromagnetischen Wellen dieses Frequenzbereiches vermag das menschliche Auge sinnlich zu erfassen.

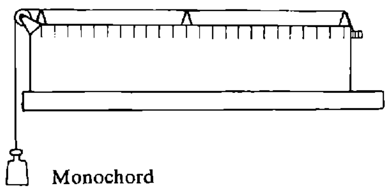
Eine völlig andere Welt von Schwingungen erschließt sich dem Menschen durch sein Gehör. Es sind die akustischen Schwingungen der Luft. Wie müssen wir uns ihre Erzeugung und Ausbreitung vorstellen? Denken wir einmal an Explosionen von Kraftstoff im Verbrennungsmotor eines Autos! Als Folge jeder Explosion tritt verdichtetes Gas durch die Auspufföffnung ins Freie. Dieser Verdichtungsstoß breitet sich mit Schallgeschwindigkeit (etwa 335 m $\cdot$ s^{-1}) kugelförmig nach allen Seiten aus. Nur durch materielle Hindernisse, wie Häuserwände oder den Straßenbelag, wird der Schall reflektiert und absorbiert. Von unserem Ohr wird der Verdichtungsstoß als Knall registriert.

Wechseln Luftverdichtung und Luftverdünnung mit einer ganz bestimmten Frequenz, z. B. 100mal pro Sekunde, so nimmt unser Gehörorgan dies als einen bestimmten Ton wahr. Physikalisch bezeichnet man diese Wellenart als Longitudinalwellen, weil die Luftteilchen als Träger der Wellen in der Fortpflanzungsrichtung hin und her schwingen. Der Blick von einer Anhöhe auf ein wogendes Kornfeld vermittelt eine anschauliche Vorstellung von der Energieübertragung durch Longitudinalwellen. Hingegen schwingen bei Transversalwellen, wie man sie z. B. an Wasseroberflächen beobachten kann, die Materieteilchen als Träger der Wellen senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung. Longitudinalwellen lassen sich graphisch in Transversalwellen umsetzen, indem man den Luftdruck als Funktion der Zeit aufzeichnet. Die so aufgenommenen akustischen Wellen lassen eine wissenschaftliche Klanganalyse zu.

Sind die Verdichtungsstöße unregelmäßig, d. h. läßt sich keine bestimmte Frequenz angeben, so empfinden wir ein Geräusch. Zum Beispiel erzeugen eine fahrende Straßenbahn oder eine aufheulende Fabriksirene charakteristische Geräusche. Hingegen wird beim Anschlagen einer Glocke, eines Weinglases oder der Saite eines Instrumentes ein bestimmter, dem schwingenden Körper eigentümlicher Ton erzeugt.

Durch das Zusammensetzen von Tönen und Tonfolgen unter Einhaltung gewisser Regeln gelangt man zur Musik: Im folgenden soll nicht von Musik, sondern von den Bausteinen der Musik, den Tönen und den sich daraus aufbauenden Tonleitern die Rede sein.

Wir wollen mit Hilfe einfacher Gedankenexperimente an den Aufbau von Tonfolgen aus Tönen herangehen. Dabei halten wir uns an den geschichtlichen Entwicklungsgang, weil dieser uns den verständlichsten Zugang zu diesem Problemkreis eröffnet. Außerdem lassen sich immer wieder aufschlußreiche Querverbindungen zur Geschichte der Mathematik, Physik, Philosophie und Instrumentenkunde herstellen. Die ältesten Beiträge zu diesem Gegenstand sind uns mit Sicherheit von dem Bund der Pythagoreer (um 550 v. u. Z.) überliefert. Als Hilfsmittel für ihre Untersuchungen benutzten sie das Monochord. Dieses einsaitige Instrument besteht aus einem quaderförmigen Kasten, über den zwischen zwei Stegen eine Saite gespannt ist. Diese Saite ist mit dem einen Ende am Kasten fest verankert. Das andere Ende wird über eine feste Rolle geführt und mit einem Gewicht angespannt. Nun kann die mittels des frei hängenden Gewichtes angespannte Saite durch Anzupfen in Schwingung versetzt werden. Der Kasten ist resonanzfähig gebaut, d. h. er wird durch die Saite zum Mitschwingen angeregt und wirkt dadurch klangverstärkend. Mit diesem einfachen Instrument lassen sich Tonintervalle durch Änderung der Saitenspannung oder Saitenlänge unabhängig voneinander erzeugen. So haben wohl schon die Pythagoreer das Intervall einer Oktave, das sich mit dem Gehör besonders leicht kontrollieren läßt, auf zwei Weisen erzeugt. Vervierfacht man nämlich das am freien Ende der Saite befindliche Gewicht, so erzeugt die hierdurch stärker gespannte Saite einen Ton, der um eine Oktave über dem ursprünglichen liegt. Die Schwingungszahlen der Töne waren den Pytagoreern noch nicht bekannt. Später wurde experimentell gezeigt, daß sich die Frequenzen zweier eine Oktave darstellende Töne wie 1:2 verhalten.



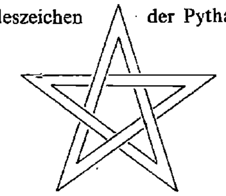
Monochord

Wird die Schwingungszahl eines beliebigen Tones verdoppelt, so liegt der erzeugte Ton eine Oktave über dem Ausgangston. Durch Änderung der Saitenspannung kann also die Höhe des erzeugten Tones variiert werden. Dieses Prinzip findet beim Stimmen von Streichinstrumenten eine jedem Laien vertraute Anwendung.

Eine andere Möglichkeit zur Erzeugung von Tonintervallen besteht darin, die Länge der schwingenden Saite durch Verschieben des beweglichen Steges zu verändern. Wird z. B. der Anteil der schwingenden Saite halbiert, so liegt der neue Ton eine Oktave über dem von der ganzen Saite erzeugten Ton. Mit dieser Entdeckung war Pythagoras und seinen Schülern Anreiz gegeben, Tonintervalle auf

Streckenverhältnisse und damit auf Zahlenverhältnisse zurückzuführen. Ihre vornehmste Aufgabe erblickten sie mit darin, die Konsonanz oder Dissonanz zweier Töne aus den Verhältnissen von Saitenlängen und damit von Zahlen zu ergründen. Die Grundlage der Philosophie des pythagoreischen Bundes bildete die Lehre von den Zahlen. Der Überlieferung nach gipfelte ihre Lehre in dem Satz, daß das Wesen der Welt mit Zahlen erfaßbar sei. Gemeint waren dabei die natürlichen Zahlen.

Bundeszeichen der Pythagoreer



Das Bundeszeichen der Pythagoreer bildete ein Fünfstern, auch Pentagramm genannt. Ausgerechnet an geometrischen Betrachtungen zu diesem Bundeszeichen entdeckte ein Anhänger des Pythagoras durch scharfsinnige Überlegungen, daß das Verhältnis von Seite zu Diagonale bei einem regelmäßigen Fünfeck nicht durch zwei auch noch so große natürliche Zahlen ausdrückbar ist. In unserer heutigen Sprechweise würden wir sagen: Man entdeckte, daß es neben den rationalen Zahlen auch irrationale Zahlen gibt. Diese dem Hippasos von Metapontion um 450 v. u. Z. zugeschriebene Entdeckung löste die erste historisch belegbare Grundlagenkrise in der Mathematik aus. Auch am Quadrat fand man bald heraus, daß das Verhältnis von Diagonalen- zu Seitenlänge nicht im Sinne des Meisters durch ganze Zahlen auszudrücken war. Unter dem Eindruck dieser Entdeckungen kam es zur Spaltung des Bundes in zwei Gruppen. Die Akusmatiker (Hörer) schworen weiter auf die Worte ihres Lehrers, während die Mathematiker sich keinerlei Fesseln in ihrem Erkenntnisdrang auferlegten und unter Überwindung der philosophischen Lehren des Pythagoras weiteren Forschungen vor allem in der Geometrie nachgingen*.

Bleiben wir zunächst noch in dem „Goldenen Zeitalter der Pythagoreer"! Auf der weiteren Suche danach, das harmonisch Zusammenklingende zahlenmäßig zu erfassen, bot sich das Verhältnis 2 : 3 für die Längen der schwingenden Saiten an. Das dabei entstehende Tonintervall bezeichnen wir als Quinte. Der gefällige Zusammenklang beider Töne hatte gemäß der Lehre des Pythagoras seine Ursache in dem mit kleinen Zahlen faßbaren Längenverhältnis.

Auch das Verhältnis 3:4 wurde auf seinen akustischen Effekt untersucht. Das zugehörige Tonintervall wird in der Musiktheorie als Quarte bezeichnet. Die Pythagoreer beschränkten sich auf diese beiden Zahlenverhältnisse zum Aufbau einer aus 8 Tönen bestehenden Tonleiter. Hierbei wandten sie die Erkenntnis mit an, daß zwei Tonintervalle gleichzusetzen sind, wenn die Längen der schwingenden Saitenabschnitte am Monochord im gleichen Verhältnis zueinander stehen.

Wir wollen uns den Aufbau einer Tonleiter in einer etwas moderneren Sprechweise klarmachen. Deshalb werden wir nicht die Saitenlängen l, sondern die Frequenzen f der Töne in Beziehung zueinander setzen. Als Grundlage für diese Überlegungen dient die allgemein geläufige Beziehung $l=\frac{k}{f}$, wobei k eine dieser zugeschnittenen Größengleichung angepaßte Konstante ist. Zwei Tonintervalle sind daher genau dann gleichsetzbar, wenn ihre Schwingungszahlen im gleichen Verhältnis zueinander stehen. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir für die zunächst nur wichtigen Verhältniszahlen die Bezeichnungen der C-Dur-Tonleiter übernehmen, also $c-d-e-f-g-a-h-c'$.

Bisher wurde mit unseren Gedankenexperimenten am Monochord über folgende Verhältniszahlen bezüglich des Grundtones c verfügt:

c	f	g	c'	Tonbezeichnung
1	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	2	Verhältniszahl
(Prime)	(Quarte)	(Quinte)	(Oktave)	Intervallbezeichnung

Es sind also noch vier Leerstellen auszufüllen. Die pythagoreische Tonleiter setzt sich aus fünf großen und zwei kleinen Tonschritten zusammen. Der große Tonschritt wird aus Quarte und Quinte wie folgt erklärt: Setzt man $q_1=\frac{3}{2}$ und $q_2=\frac{4}{3}$, so gilt für den großen Tonschritt $q=\frac{q_1}{q_2}=\frac{9}{8}$. Die diesem Verhältnis entsprechende Schrittweite liegt bereits von f nach g vor. Sie wird ferner beim Fortschreiten von c nach d, von d nach e sowie von g nach a und a nach h übernommen. Nun stehen noch die Quotienten offen, welche den Schritt von e nach f und h nach c' beschreiben. Für beide Intervalle ergibt sich zwangsläufig aus den bisherigen Festlegungen das Zahlenverhältnis $\frac{256}{243}$. Dieser Bruch kann nicht gekürzt werden. Er fällt wegen der Dreistelligkeit von Zähler und Nenner etwas aus dem Rahmen. Auch in akustischer Hinsicht liefern die Töne keinen guten Zusammenklang. Durch eine Zusammenstellung der Zahlenverhältnisse bezogen auf den Grundton und den darunter liegenden Nachbarton wollen wir uns eine Übersicht von dem Pythagoreischen Tonsystem verschaffen:

Tonbezeichnung	c	d	e	f	g	a	h	c'
Schwingungszahl bezogen auf c	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2
bezogen auf Nachbarton		$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$

Die gleiche Tonleiter kann man sich auch über den sogenannten „Quintenzirkel" erzeugt denken. Dabei geht man in folgender Weise vor: Man zeichnet einen Kreis und teilt diesen mit dem Winkelmesser in sieben gleiche Teile. In den Teilungspunkten trägt man im Uhrzeigersinn die Tonbezeichnungen in das Bild ein, wobei wir mit c vom obersten Teilungspunkt ausgehen wollen. Da sich dieser mit c' decken soll, werden wir ihn besonders stark markieren. Nun machen wir, von c ausgehend, im Uhrzeigersinn Quintensprünge. Durch Überspringen von je drei Teilungspunkten des Kreises gelangt man der Reihe nach auf g, d, a, e und h. Bei jedem Sprung multiplizieren wir die zuletzt erreichte Zahl mit $\frac{3}{2}$. Wird bei einem Quintensprung die zu c gehörige Markierung überquert, so lautet der Faktor $\frac{3}{4}$ statt $\frac{3}{2}$. Man sieht, daß auf diese Weise gleichfalls die Verhältniszahlen der pythagoreischen Tonleiter erzeugbar sind. Die noch fehlende Verhältniszahl für f ergibt sich durch eine Quintendrehung im Gegenzeigersinn. Wir müssen deshalb die zu c gehörige Verhältniszahl mit dem Kehrwert von $\frac{3}{2}$ multiplizieren und – da dieser Sprung als Überschreitung der Markierung zu werten ist – noch mit dem Faktor zwei versehen. Ferner ist zu bemerken, daß sich der Quintenzirkel nicht exakt schließt. Nach dem beschriebenen Verfahren lassen sich zwar die zu sieben Tönen der Tonleiter gehörigen relativen Schwingungszahlen exakt auffinden. Die zu c' gehörige Zahl 2 kann jedoch nach dem hier beschriebenen Verfahren nicht konstruiert werden.

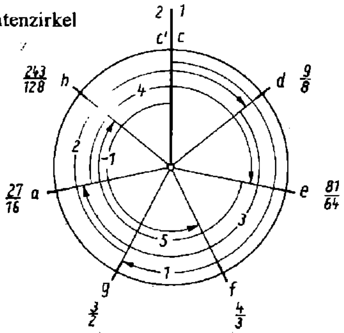
Teilt man nun die fünf großen Intervalle der pythagoreischen Tonleiter in je zwei Teilintervalle, so sind beim Durchlaufen

* Der Nachweis der Existenz irrationaler Zahlen durch elementare geometrische Überlegungen soll Gegenstand eines späteren Beitrages sein.

der Oktave von c nach c' insgesamt 12 Tonschritte auszuführen. An Tastinstrumenten erkennt man deutlich gemäß der Klaviatur die Einschaltung der fünf Zwischentöne. Führen wir nun entsprechend der hier vorgelegten Tonleiter zwölf Quintendrehungen im Uhrzeigersinn mit unserem Zirkel durch und beachten, daß beim Überqueren der c-Marke der Faktor $\frac{3}{4}$ und sonst $\frac{3}{2}$ zu setzen ist, so ergibt sich als Endwert

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7} = \frac{531\,441}{524\,288} = 1{,}0137.$$

Quintenzirkel



Hätte sich der Quintenzirkel nach 12 Sprüngen (7 Umläufen) exakt geschlossen, wären wir auf die Zahl eins gekommen. Das diese Abweichung charakterisierende Zahlenverhältnis (531 441 : 524 288) bezeichnet man in der Musiktheorie als „pythagoreisches Komma".

Durch diesen Quotienten wird also das Intervall zwischen der zwölften Quinte und der siebenten Oktave bezüglich eines gemeinsamen Grundtones zahlenmäßig erfaßt. Das hier erläuterte Stimmungsprinzip, nach welchem alle Töne aus einer Quintenreihe abgeleitet werden, bezeichnet man in der Musiktheorie als pythagoreisches Stimmungsprinzip. Es ist keineswegs nur von theoretischer oder musikgeschichtlicher Bedeutung. Vor allem bei solistischen Darbietungen an Streichinstrumenten neigen die Künstler zur Verwendung dieser pythagoreischen Tonstufen. Sie fördern vor allem den melodiösen Klang der Musik. Ferner vermitteln uns diese numerischen Betrachtungen eine Vorstellung von der Problematik, die beim Instrumentenbau hinsichtlich des Zusammenklanges vieler Instrumente in einem großen Klangkörper (Orchester) zu bewältigen sind.

Gegen das pythagoreische Quintensystem ist der Einwand der Klangarmut vor allem beim Anschlagen von Akkorden bezüglich der angeregten Obertöne erhoben worden. Wir kehren deshalb zu unserem Monochord zurück und vollziehen nun in Gedanken noch den Schritt, den Didymos (geb. 63 v. u. Z.) über die Pythagoreer hinausgehend getan hat. Wir setzen am Monochord den beweglichen Steg so ein, daß $\left(\frac{4}{5}\right)$ der ursprünglichen Saite zur Schwingung freigegeben sind. Bezüglich des Grundtones ergibt sich nach moderner Sprechweise die große Terz. Der Kehrwert $\frac{5}{4}$ entspricht dem Verhältnis der Schwingungszahlen. Unter Mitverwertung dieses Tonschrittes läßt sich eine weitere Tonleiter aufbauen, die für die Musiktheorie von fundamentaler Bedeutung ist. Man bezeichnet sie als diatonische Tonleiter.

Zunächst fassen wir von den bis jetzt bekannten Intervallen Oktave, Quinte, Quarte und große Terz die auf den Grundton bezogenen Verhältniszahlen zusammen:

c	·	e	f	g	·	·	c'
1		$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$			$\frac{2}{1}$

Zwischen f und g bleibt also bei der aufzubauenden Tonleiter der pythagoreische Ganztonschritt unverändert bestehen. Das Intervall von e nach f stellt einen halben Tonschritt dar, welcher durch den Bruch $\frac{16}{15}$ fixiert wird. Nun sind offenbar noch die Lücken zwischen c und e sowie zwischen g und c' durch einen bzw. zwei Töne in geeigneter Weise zu schließen. Geht man von c um einen pythagoreischen Ganztonschritt nach d, bleibt für den Übergang von d nach e noch der Faktor $\frac{10}{9}$ frei. Um Quotienten von möglichst kleinen ganzen Zahlen zur Beschreibung der Tonleiter zu sichern, ist eine Unterscheidung zwischen großen und kleinen ganzen Tonschritten zu treffen, je nachdem die Verhältniszahl beim Übergang zum nächst höheren Ton $\frac{9}{8}$ oder $\frac{10}{9}$ lautet.

Auf diese Weise lassen sich dreistellige Verhältniszahlen zwischen Nachbartönen, wie sie bei der pythagoreischen Stimmung auftreten, ausschalten.

Mit den vorgegebenen Intervallgrößen sind nun noch die beiden Leerstellen zwischen g und c' zu besetzen. Geht man von e um eine Quinte nach oben, ergibt sich h mit der Verhältniszahl $\frac{15}{8}$ bezüglich des Grundtones c.

Damit bleibt für das Intervall von h nach c' der halbe Tonschritt $\frac{16}{15}$. Das noch offene Intervall zwischen g und h stellt eine große Terz entsprechend dem Bruch $\frac{5}{4}$ dar. Wegen $\frac{5}{4} = \frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9}$ ist es naheliegend, a so einzupassen, daß das Intervall $g-a$ einem großen und $a-h$ einem kleinen Ganztonschritt entspricht. Damit ist die Konstruktion der acht Töne umfassenden diatonischen Tonleiter aus den Brüchen $\frac{9}{8}$, $\frac{10}{9}$ und $\frac{16}{15}$ abgeschlossen.

E. Schröder

(In Heft 1/73 folgt ein 2. Teil, d. Red.)

Knobellied

2. *d* Quadrat mal *pi* durch 4,
g mal *h* durch 2,
solche Rätsel lösen wir
ganz ohne Zauberei.
Knobeln heißt das...

3. Mathe schärft das Denken dir,
Mathe schafft Verstand,
darum, lieber Pionier,
nimm doch das Buch zur Hand.
Knobeln heißt das...

(Entnommen aus: „Geschichten aus Knirpsenstadt" – Autor: *Matthias Wenzlaff*)

Nicolaus Copernicus

Teil 2

V

Der Tod von *Lucas Watzenrode* und die nachfolgende Wahl des neuen Bischofs, dessen Bestätigung durch die polnische Krone schwierig zu erreichen war, schuf eine unsichere Lage im Inneren des Bistums. Bedrohlicher noch wurde die außenpolitische Lage. 1519 brach, wie lange befürchtet, ein neuer blutiger Krieg mit dem Deutschen Ritterorden aus, der erst 1525 mit dem Frieden zu Kraków beigelegt werden konnte und nun den Orden endgültig in seine Schranken wies. Unterdessen hatten religiöse Auseinandersetzungen mit der auch in Varmia zunehmenden Zahl von Anhängern der Reformation um sich gegriffen.

Copernicus spielte in allen diesen verwickelten Situationen eine hervorragende Rolle, als Domherr in Frombork, als Statthalter und später als eine Art Militärkommandant der Festung Olsztyn (Allenstein), als Generaladministrator des Bischofs, als Diplomat bei den Friedensverhandlungen.

Als schließlich umfassende Anstrengungen unternommen wurden, die durch die Folgen der lange dauernden kriegerischen Verwicklungen völlig zerrüttete preußische Währung in Ordnung zu bringen, wurde *Copernicus* zu Rate gezogen. In mehreren Denkschriften (1522, 1527 und danach) unterbreitete *Copernicus* Vorschläge, die ihn als weitblickender Kenner der frühkapitalistischen Währungsgesetze auswiesen.

VI

Auch in den dreißiger Jahren, als allmählich in Varmia wieder ruhigere Zeiten einkehren konnten, blieb *Copernicus*, nun schon im fortgeschrittenen Alter stehend, treuer Diener seines Bistums, u. a. bei der Regelung des Brotpreises, als Finanzrevisor, als Verwalter der der Kirche vermachten Stiftungen und als sehr geschätzter Arzt.

Doch nun konnte er mit voller Konzentration an die Ausarbeitung seines wissenschaftlichen Lebenswerkes gehen. Im Wechsel zwischen astronomischen Beobachtungen (wobei ihm das Fernrohr noch nicht zur Verfügung stand) und außerordentlich umfangreichen komplizierten Rechnungen (wobei er sich das mathematische Werkzeug, die Trigonometrie, teilweise erst selbst bereitstellen mußte), schuf *Copernicus* ein umfangreiches Werk. Es trug den Titel „De revolutionibus", was soviel wie „Über die Umläufe" (der Planeten) bedeutet.

Das endgültige Manuskript, das aus vielen Vorentwürfen hervorgegangen ist, wurde von *Copernicus* in seiner klaren Handschrift, teilweise mit farbiger Tinte, vermutlich zwischen 1529 und Mitte 1532 niedergeschrieben. Dieses wunderschöne Manuskript blieb über alle Stürme der Zeiten hinweg erhalten und befindet sich heute als eines der Glanzstücke in den Museen von Kraków.

VII

Bereits Mitte der zwanziger Jahre hatte sich der Ruf von *Copernicus* als eines bedeutenden Gelehrten und vorzüglichen Astronomen weithin verbreitet, sogar bis nach Rom. *Copernicus* wurde u. a. wegen der anstehenden Kalenderreform vom päpstlichen Stuhl zu Rate gezogen und schließlich 1536 aufgefordert, über seine neue Theorie zu berichten.

Doch *Copernicus* zögerte. Er sah die Auseinandersetzungen voraus, wenn er seine heliozentrische Auffassung der damals unbestrittenen geozentrischen Auffassung gegenüberstellen würde und suchte daher in weiteren Beobachtungen und Rechnungen unwiderlegliche Beweise für seine Erkenntnis zu erbringen. Andererseits drängten ihn seine Freunde, das Werk „De revolutionibus" durch Drucklegung der Öffentlichkeit zu übergeben; es gehöre der ganzen Menschheit. Insbesondere der engste Freund von *Copernicus, Tiedemann Giese,* Bischof von Chełmno, bestürmte *Copernicus* unaufhörlich.

Den letzten Anstoß zur Drucklegung lieferte ein Besucher von der Universität Wittenberg, dem Zentrum der Reformation. Obwohl sich Luther höchstpersönlich gegen die heliozentrische Lehre ausgesprochen hatte, war der noch sehr junge Professor der Mathematik und Astronomie an der Wittenberger Universität, *Georg Joachim Rheticus*, der Auffassung, man müsse sich an den Quellen über die Wahrheit informieren.

Im Mai 1539 traf *Rheticus* in Frombork ein und vermochte in jugendlicher Begeisterung, *Copernicus* völlig für sich einzunehmen. *Copernicus* unterwies *Rheticus,* man diskutierte zusammen und besuchte gemeinsam *Tiedemann Giese*.

Im Herbst 1539 schrieb *Rheticus* einen ausführlichen Brief an einen seiner früheren Lehrer nach Nürnberg und berichtete über *Copernicus,* sein Werk und seine Arbeitsweise. Der Brief trägt den Charakter einer wissenschaftlichen Abhandlung; unter dem Titel „Narratio prima" (Erster Bericht) wurde sie Winter 1539/40 in Gdańsk gedruckt, die erste gedruckte Bekanntgabe der revolutionären neuen Astronomie.

Bis zum Herbst 1541 blieb *Rheticus* in Frombork.

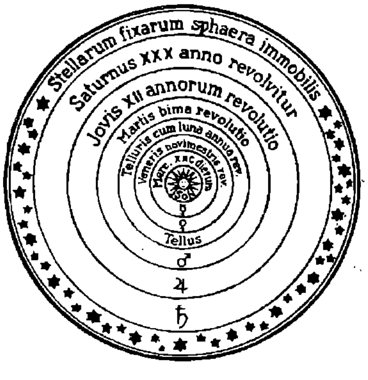
Er hatte, zusammen mit *Giese,* die prinzipielle Einwilligung zur Drucklegung der „De revolutionibus“ von *Copernicus* erwirkt. Doch behielt sich *Copernicus* noch Verbesserungen und Ergänzungen vor.

VIII

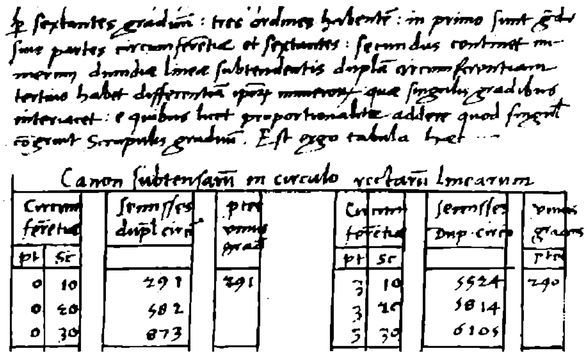
Inzwischen näherte sich *Copernicus* der Vollendung seines siebenten Lebensjahrzehntes, ein Alter, das die Menschen der damaligen Zeit höchst selten erreichten.

Im Winter 1541/42 scheint *Copernicus* erkannt zu haben, daß er nicht mehr die Kraft haben würde, sein Manuskript selbst druckreif zu machen. Verabredungsgemäß übergab er es daher seinem Freund *Giese,* der es an *Rheticus* weiterleitete. Dieser erhielt von dem damals weitberühmten Drucker *Petreius* in Nürnberg eine Zusage; im Mai 1542 begab sich *Rheticus* nach Nürnberg und leitete die Drucklegung von „De revolutionibus“ ein, eines der bedeutendsten naturwissenschaftlichen Werke, das je erschienen ist. Der Druck des umfangreichen Werkes, das mehr als 420 engbeschriebene großformatige Seiten umfaßt, zog sich hin. Im Sommer 1542 scheinen die körperlichen Kräfte von *Copernicus* schnell nachgelassen zu haben. Im Herbst war er schon recht schwach. Ende November oder Anfang Dezember erlitt er einen schweren Schlaganfall. Doch bei der guten Pflege, die *Copernicus* zweifellos zuteil wurde, überlebte *Copernicus* noch den Winter. Im Frühjahr 1543 verschlechterte sich der Zustand weiter; lange Perioden der Bewußtlosigkeit traten ein.

Am 24. Mai 1543, im Alter von 70 Jahren, drei Monaten und fünf Tagen starb *Nicolaus Copernicus,* einer der bedeutendsten Gelehrten der Menschheitsgeschichte. Er wurde im Dom zu Frombork beigesetzt. Gerade an seinem Todestage gelangte das erste ausgedruckte Exemplar von „De revolutionibus“ nach Frombork. Man brachte es eilends zu *Copernicus,* der es noch mit der Hand berührt, aber nicht mehr erkannt hat. Wenige Stunden darauf starb er.



Als Mensch und Wissenschaftler besaß *Copernicus* eine unzerstörbare Liebe zur Wahrheit. Große Gesten lagen ihm fern; in der Sache aber blieb er unbeugsam.


p sextantes gradum : tres ordines habentes : in primo sunt gdus sive partes circumferentiae et sextantes : secundus continet numerum dimidiae lineae subtendentis duplam circumferentiam tertius habet differentiam eorum numerorum quae singulis gradibus interveniunt : e quibus licet proportionaliter addere quod singulis scrupulis gradum. Est ergo tabula haec ...

Canon subtensarum in circulo rectarum linearum

Circumferentiae		Semisses dupl. circ.	pro uno grad.	Circumferentiae		Semisses Dup. circ.	pro uno gradu
pt	sc			pt	sc		pt
0	10	291	291	3	10	5524	290
0	20	582		3	20	5814	
0	30	873		3	30	6105	

Energie und Beharrlichkeit verbänden sich mit Kühnheit des Denkens und außerordentlicher Vielseitigkeit. Alle Nachrichten über den Charakter von *Copernicus* betonen Bescheidenheit und Toleranz, aber auch nüchterne und kühle Sachlichkeit. Bei aller Verschlossenheit und Zurückhaltung wird zugleich seine Hilfsbereitschaft im persönlichen und wissenschaftlichen Leben gerühmt.

IX

Copernicus Werk „De revolutionibus“ gehört zum unveräußerlichen Bestandteil der Weltkultur und des menschlichen Wissens. Die Nürnberger Erstausgabe besteht aus ungefähr 400 Druckseiten. Das ganze Werk ist in sechs Abschnitte (Bücher) eingeteilt, die je aus 20 bis 30 Kapiteln bestehen.

Leider wurden – ohne das Wissen des kranken *Copernicus* natürlich – bei der Drucklegung am Manuskript zwei Eingriffe vorgenommen, die schon den Charakter einer Fälschung besitzen, und zwar durch den protestantischen Theologen *Osiander,* dem *Rheticus* bei der Wiederaufnahme seiner Tätigkeit in Wittenberg die Überwachung der weiteren Drucklegung in Nürnberg anvertraut hatte.

Osiander erweiterte den ursprünglichen Titel „De revolutionibus“ zu „De revolutionibus orbium coelestium“ (schwer übersetzbar: Über die Umläufe der Himmelskreise oder Himmelssphären) und unterstellte damit *Copernicus* indirekt die Ansicht, als habe dieser an die Existenz der bei *Ptolomäus* postulierten Himmelssphären geglaubt.

Schwerwiegender aber noch war der folgende Umstand: *Osiander* fügte vor die von *Copernicus* gegebene Widmung an den damaligen Papst Paul III noch ein Vorwort an den Leser ein, unsigniert, ohne Unterschrift, so daß jeder mit der Sache nicht näher Vertraute denken mußte, daß *Copernicus* auch der Autor dieses Vorwortes sei. Und dort wird, gegen die klare, mehrfach explizit von *Copernicus* geäußerte Meinung, das heliozentrische Weltbild als bloße mathematische Hypothese hingestellt, nicht, wie von *Copernicus* selbst beabsichtigt, als Widerspiegelung und mathematische Beschreibung der Wirklichkeit.

H. Wußing

Aus der Graphentheorie

Teil

Dieser Artikel soll euch einen Einblick in eine mathematische Disziplin vermitteln, deren systematische Entwicklung mit einer Arbeit *Eulers* aus dem Jahre 1736 ihren Anfang nahm, die aber gerade in den letzten Jahrzehnten mehr und mehr an Bedeutung gewann – in die Graphentheorie.

Was ist eigentlich ein „Graph"?

Bevor wir die Definition des Begriffes angeben, wollen wir uns einige Beispiele ansehen.

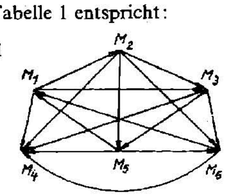
Beispiel 1: An einem Volleyballturnier aller 10. Klassen einer Stadt beteiligten sich sechs Mannschaften M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6. Das folgende Ergebnis wurde erzielt:

M_i	gesiegt gegen	verloren gegen
M_1	M_2, M_3, M_4	M_5, M_6
M_2	M_3, M_4, M_5, M_6	M_1
M_3	M_4, M_5, M_6	M_1, M_2
M_4	—	M_1, M_2, M_3, M_5, M_6
M_5	M_1, M_4, M_6	M_2, M_3
M_6	M_1, M_4	M_2, M_3, M_5

Tabelle 1

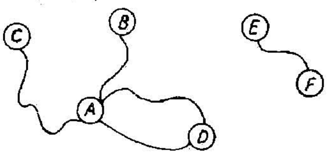
Der Mannschaft M_i $(i=1, \ldots, 6)$ ordnen wir einen – ebenfalls mit M_i bezeichneten – Punkt (kleinen Kreis) auf einem Zeichenblatt zu. Haben die Mannschaften M_i und M_j ein Spiel miteinander ausgetragen, so verbinden wir die Punkte M_i und M_j durch eine Linie, die wir mit einem nach M_j gerichteten Pfeil versehen, wenn M_i M_j besiegt hat. Wir erhalten das Schema des Bildes 1, das der Tabelle 1 entspricht:

Bild 1



Beispiel 2: Aus einem Autoatlas haben wir einen Teil des Autobahnnetzes entnommen:

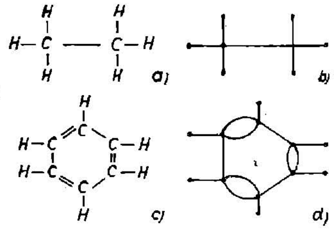
Bild 2



Durch die Buchstaben *A* bis *F* werden hierbei Großstädte bezeichnet.

Beispiel 3: Der Verbindung C_2H_6 (Äthan) entspricht die Strukturformel des Bildes 3a, der wir das Schema des Bildes 3b zuordnen können, wenn wir die Atome durch Punkte und die Bindungen durch Strecken darstellen.

Bild 3



Ebenso können wir beispielsweise der Strukturformel des Benzols (Bild 3c) ein Punkt-Linien-Schema zuordnen (Bild 3d).

Beispiel 4: Die Ecken-Kanten-Beziehungen der regelmäßigen Polyeder können wir auch durch ebene Punkt-Linien-Gebilde veranschaulichen, (Bild 4).

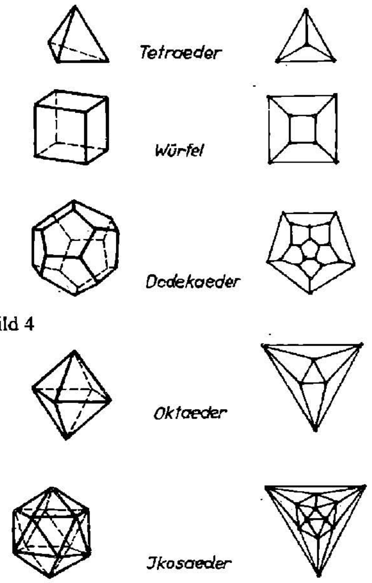


Bild 4

Die in den Beispielen 1 bis 4 angegebenen Punkt-Linien-Schemata stellen Graphen dar. Wir wollen nun den Begriff „Graph" inhaltlich fixieren.

Definition 1: Wir sagen, es liege ein Graph vor, wenn folgendes gegeben ist:

- Eine endliche Menge X; die Elemente von X werden auf dem Blatt durch Punkte (kleine Kreise) dargestellt. Sie können etwa Personen, irgendwelche Gegenstände, Zustände oder andere Dinge bezeichnen.
- Eine Menge U von ungeordneten oder geordneten Paaren (a, b) mit $a \in X$, $b \in X$; ein solches Paar wird auf dem Blatt durch eine die Punkte a und b verbindende Linie dargestellt (die mit einem Richtungspfeil versehen wird, falls es auf die Reihenfolge der Elemente ankommt).

Dabei soll es möglich sein, daß es für zwei Punkte a und b mehr als eine die beiden verbindende Linie gibt. Sind etwa $r (r > 1)$ solche Linien vorhanden, so wollen wir sie durch Indizes unterscheiden; wir bezeichnen sie beispielsweise mit $(a, b)_1$, $(a, b)_2$, $\ldots$, $(a, b)_r$.

Die Mengen X und U bestimmen den Graphen $G \underset{Def}{=} [X, U]$. G heißt *gerichteter Graph* (Bild 1), falls die Elemente von U geordnete Punktepaare sind. Sind die Elemente von U hingegen nicht geordnete Punktepaare (Bild 2 bis 4), so ist G ein *ungerichteter Graph.*

Die Elemente der Menge X bezeichnen wir als *Knotenpunkte*, die Elemente der Menge U als *Kanten* (bei gerichteten Graphen auch als *Bögen*) des Graphen G.

Wir können sie – wie wir es in Bild 1 bis 4 bereits getan haben – durch Punkte und Linien in der Zeichenebene oder auf anderen Flächen veranschaulichen.

Die Knotenpunkte a und b heißen „Endpunkte" der Kante (a, b) (bzw. Endpunkte einer jeden der Kanten $(a, b)_i$).

Es sei bemerkt, daß Graphenzeichnungen den gleichen Graphen veranschaulichen, wenn sich ihre Knotenpunktmengen so eindeutig aufeinander abbilden lassen, daß je zwei Bildpunkte durch ebenso viele Kanten (bzw. gleichgerichtete Bögen) verbunden sind wie ihre Originalpunkte. In Bild 5 sind einige Darstellungen ein und desselben Graphen gegeben.

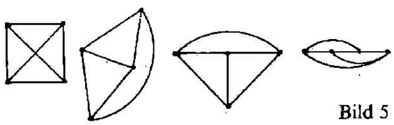


Bild 5

Wir wollen noch zwei wichtige Begriffe definieren und einige allgemeingültige Bemerkungen machen. Dann werden wir bereits in der Lage sein, einen einfachen – aber sehr wichtigen – Satz (Satz 1) zu formulieren und zu beweisen.

Definition 2: Zwei Knotenpunkte heißen *adjazent*, wenn sie durch eine Kante verbunden sind. Ein Knotenpunkt *inzidiert* mit einer Kante, wenn er Endpunkt dieser Kante ist.

Definition 3: Inzidiert ein Knotenpunkt in G mit genau r Kanten, so heißt r die *Valenz* des Knotenpunktes in G.

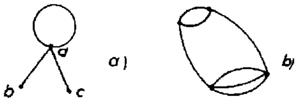
In Bild 2 beispielsweise hat Knotenpunkt A die Valenz 4, D hat die Valenz 2, während die übrigen Knotenpunkte die Valenz 1 haben.

Unter einem Graphen werden wir im folgenden einen ungerichteten Graphen verstehen; verwenden wir einen gerichteten Graphen, werden wir das ausdrücklich betonen. —

Die Paare $(a, a) \in U$ wollen wir ausschließen, d. h. *Schlingen* (Bild 6a) sind nicht zugelassen. –

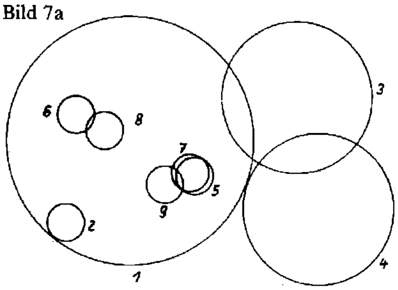
Zuweilen werden wir Graphen verwenden, in denen es Knotenpunkte gibt, die mit keiner Kante inzidieren. Solche Knotenpunkte heißen *isoliert.* Die von uns betrachteten Graphen sollen stets nur endlich viele Knotenpunkte und endlich viele Kanten haben, also *endliche Graphen* sein.

Definition 4: Enthält der Graph G keine Mehrfachkanten (Bild 6b), d. h. sind je zwei Knotenpunkte von G durch höchstens eine Kante verbunden, so heißt G *schlicht*.

Bild 6


Ehe wir uns dem Satz 1 zuwenden, wollen wir die Begriffe, die wir bisher eingeführt haben, noch etwas einüben, – und das kann man schließlich am besten tun, indem man einige Aufgaben löst.

▲1▲ In einer Ebene seien n Kreislinien gegeben, die mit den Zahlen 1, 2, 3, …, n numeriert seien. Wir wollen den Graphen $G=[X, U]$ wie folgt definieren:
Es ist $X=\{1, 2, \ldots, n\}$ und es ist $(i, j) \in U$ genau dann, wenn die mit den Zahlen i und j bezeichneten Kreislinien wenigstens einen Punkt gemeinsam haben. In Bild 7a sind neun numerierte Kreislinien veranschaulicht; man bilde den entsprechenden Graphen G.

Bild 7a


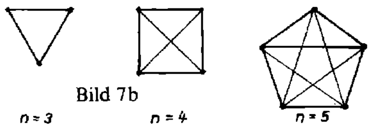
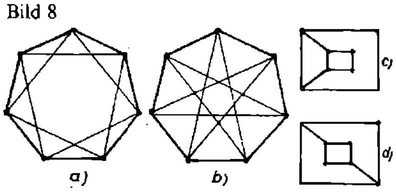


Bild 7b

▲2▲ In dieser Aufgabe – wie auch in zwei der später folgenden spielt der Graph G eine Rolle, der n Knotenpunkte besitzt von denen je zwei durch genau eine Kante verbunden sind. Dieser Graph G wird „vollständiger n-Graph" genannt. (Bild 7b zeigt den vollständigen n-Graphen für $n=3, 4, 5$.) Wie viele Kanten hat der vollständige n-Graph?

▲3▲ a) Stellen die Bilder 8a und 8b den gleichen Graphen dar?

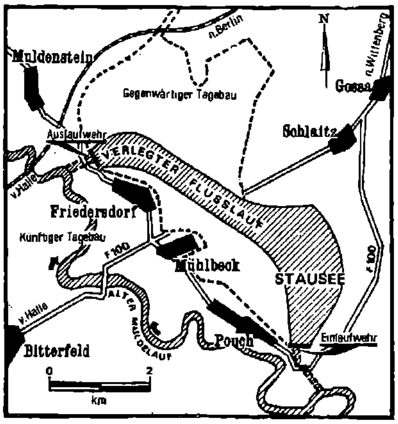
Bild 8


b) Stellen die Bilder 8c und 8d den gleichen Graphen dar?

▲4▲ Was könnt ihr über die Valenzen der Knotenpunkte eines jeden Graphen des Bildes 4 aussagen? *W. Voß*

Flußwanderung bei Muldenstein

Nordöstlich von Bitterfeld schlängelt sich die Mulde durch ein mächtiges Braunkohlefeld. Viele Überlegungen wurden angestellt, um an diese Lagerstätte mit 90 Millionen Tonnen Vorräten heranzukommen.
Eine Variante sah vor, den 50 Meter breiten Fluß in einer Riesenschleife um einen zum größten Teil ausgekohlten Tagebau herumzulegen. Riesige Erdmassen hätten bewegt werden müssen. Hunderte Hektar Ackerland wären zerstört worden und die Bauzeit wäre unverantwortlich lang gewesen.



Fachleute legten schließlich die sogenannte Restlochvariante vor, die alle herkömmlichen Methoden über den Haufen warf:
11 Kilometer Mulde erhalten ein neues Bett, das fast ausschließlich durch das weite Gelände des jetzigen Tagebaues Muldenstein führt. Das Restloch des Tagebaues wird künftig als Stausee dienen und voraussichtlich 1975 gefüllt. Mit vier Quadratkilometer Fläche und rund 100 Millionen Kubikmeter Wasserinhalt wird es dann größtes Gewässer im Raum Bitterfeld/Gräfenhainichen und z. B. der Rappbodetalsperre ebenbürtig sein.
Nach gründlicher Prüfung aller Faktoren entschlossen sich die Projektanten für den Einsatz sowjetischer Schreitbagger, bei denen z. B. ein Kubikmeter transportierte Erde 41 Pfennige kostet, mit herkömmlichen Geräten dagegen 1,40 Mark. Insgesamt sind bei der Muldenverlegung 16,5 Millionen Kubikmeter Erdreich zu bewegen.

(Aus ND vom 25. Juni 1971)

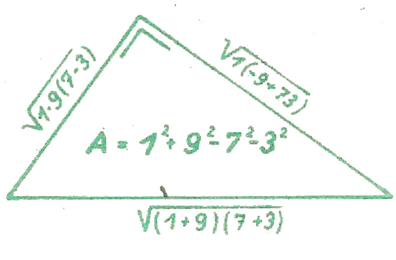
▲1001a▲ Berechne unter der Annahme, daß der im Restloch des Tagebaues Muldenstein entstehende Stausee überall gleich tief ist, seine Tiefe!

▲1001b▲ Berechne unter der Annahme, daß alle beim Projekt „Muldenverlegung" zu bewegende Erde mittels sowjetischer Schreitbagger transportiert wird, die Kosten für die gesamten Baggerarbeiten!

▲1001c▲ Um wieviel steigt durch diese Baggerarbeiten der Preis je Tonne Kohle? Dabei soll angenommen werden, daß die durch Schätzung ermittelten Vorräte restlos abgebaut werden können. *W. Träger*

Aus der „Entschließung des VIII. Parteitages der Sozialistischen Einheitspartei Deutschlands zum Bericht des Zentralkomitees": Die Hauptaufgabe der Industrie besteht darin, die materiell-technische Basis unserer Volkswirtschaft weiterzuentwickeln und zu vervollkommnen. Es ist unerläßlich, das technische Niveau der Produktion durch Nutzung neuer wissenschaftlich-technischer Erkenntnisse weiter zu erhöhen, die Kosten systematisch zu senken und die Qualität der Erzeugnisse zu verbessern.

Redaktion alpha wünscht allen Lesern ein gesundes, frohes und erfolgreiches



Darstellende Geometrie und Architekturausbildung

Teil 2

In unserem Beispiel war die Bildebene π senkrecht zur Standebene σ. Jedoch tritt auch der Fall oft auf, daß die Bildebene zur Standebene geneigt ist [$\sphericalangle (\pi, \sigma) \neq 90°$]. Dann haben auch die Bilder der Höhen des Quaders einen gemeinsamen Fluchtpunkt.

Zur Belebung perspektiver Bilder und zur Erhöhung ihrer Raumwirkung werden oft Schatten eingezeichnet. Sowohl Parallelbeleuchtung als auch Zentralbeleuchtung werden dabei verwendet. Daneben sind auch die Spiegelungen ein Mittel der Gestaltung. Bei nahen kleineren räumlichen Objekten oder auch bei vom Beobachter weit entfernten größeren Objekten bedient sich der Architekt anstelle der Zentralperspektive auch der Axonometrie. Der Aufwand zur Herstellung eines axonometrischen Bildes ist wesentlich geringer als beim zentralperspektiven Bild. Außerdem erscheint das axonometrische Bild bei unseren Voraussetzungen im Vergleich zum perspektiven nicht so stark verzerrt. Ein perspektives Bild ist vom Augpunkt O einäugig zu betrachten. Da die geringste deutliche Sehweite 25 cm beträgt, sollte die Augdistanz mindestens ebenso groß sein. Auch wenn der Betrachter sein Auge in einer größeren Umgebung des Augpunktes justiert (einstellt), erhält er noch einen günstigen Bildeindruck. Beim Betrachten axonometrischer Bilder ist das Auge jedoch möglichst weit vom Bild zu wählen, um das Auge der Parallelprojektion anzupassen, durch die das Bild erzeugt wird.

In der Axonometrie wird dem Objekt ein räumliches kartesisches Koordinatensystem zugeordnet, und mit diesem gemeinsam wird es durch Parallelprojektion auf eine Ebene abgebildet. Fallen die Projektionsstrahlen senkrecht bzw. schief auf die Bildebene ein, so spricht man von orthogonaler bzw. schiefer Axonometrie. Der *Satz von Pohlke*, der die Konstruktion in der schiefen Axonometrie sichert, besagt: „Drei beliebige von einem Punkt unter beliebigen Winkeln ausgehende Strecken können stets als das durch Parallelprojektion erzeugte Schattenbild von drei aufeinander senkrechten gleich langen Strecken im Raum aufgefaßt werden." (*Salkowski:* Darstellende Geometrie, Leipzig 1963, Verlagsgesellschaft *Geest & Portig*). Nach der Wahl eines ebenen Dreibeins kann man sich auf den 3 Achsenbildern je eine Längeneinheit vorgeben. Danach fügt man das Bild des Objektes ein, wie an einem Beispiel gezeigt werden soll (Entwurf nach *Gropius*) (Bild 4).

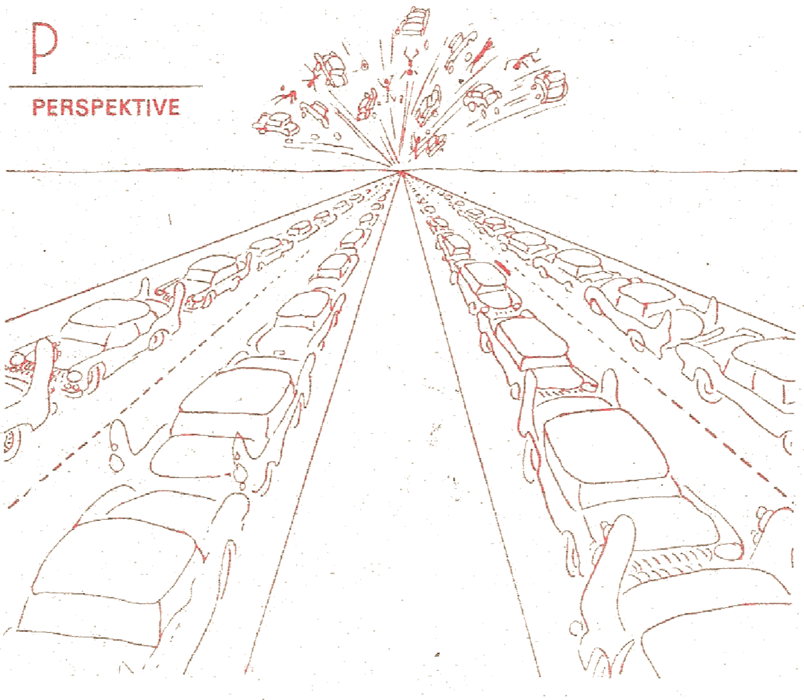
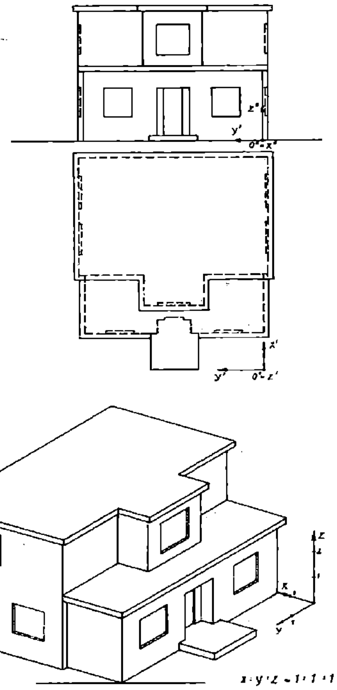
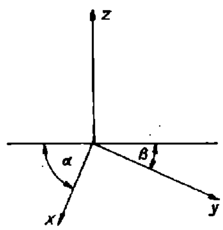


Bild 4



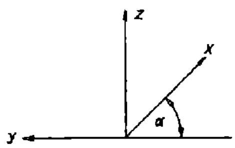
Das Verhältnis $x:y:z = 1:1:1$ bedeutet, auf allen drei Achsen sind gleiche Längeneinheiten gewählt worden. In der Praxis werden oft die beiden schiefen Axonometrien, Militärperspektive und Kavalierperspektive, verwendet. Für sie gilt:

Bild 5



Militärperspektive (Bild 5)	Kavalierperspektive (Bild 6)
$\alpha + \beta = 90°$	$\alpha = 45°$
$x : y : z = 1 : 1 : 1$	$x : y : z = \frac{1}{2} : 1 : 1$

Bild 6



Da der Betrachter meist eine Zeichnung senkrecht zur Blickrichtung hält, erscheinen orthogonalaxonometrische Bilder weniger verzerrt als schiefaxonometrische. Sehr gebräuchliche orthogonale Axonometrien, die Dimetrie und Isometrie, sind durch folgende Angaben bestimmt:

Bild 9

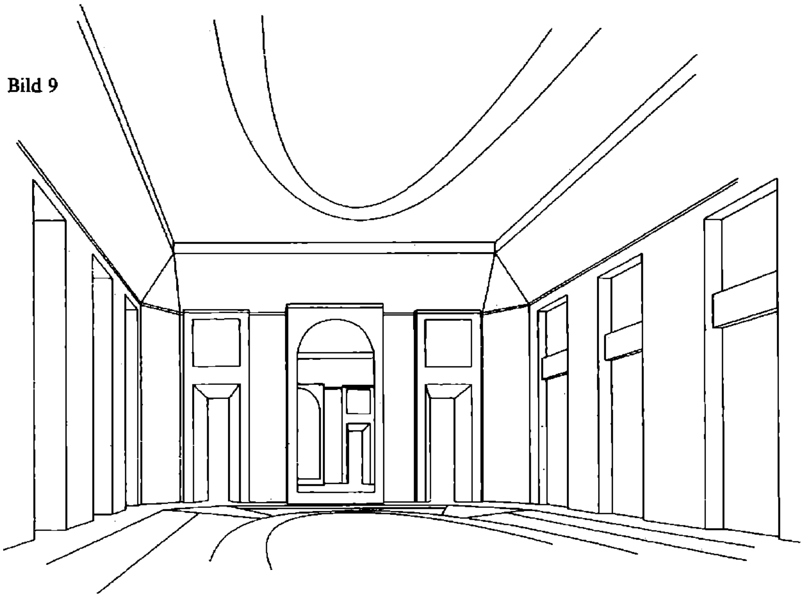
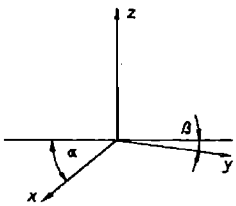
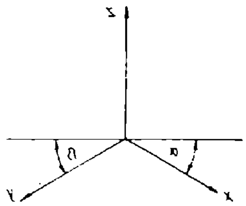


Bild 7



Dimetrie (Bild 7)	Isometrie (Bild 8)
$\alpha = 42°$, $\beta = 7°$	$\alpha = 30°$, $\beta = 30°$
$x : y : z = \frac{1}{2} : 1 : 1$	$x : y : z = 1 : 1 : 1$

Bild 8

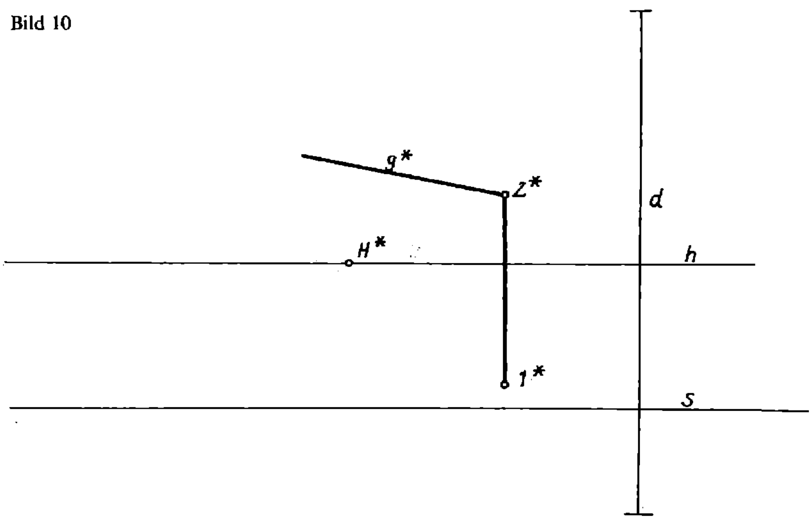


Schattenkonstruktionen werden auch in der Axonometrie ausgeführt. Neben den oben genannten Aufgaben sind die Grundaufgaben des Zweitafelverfahrens (Grund- und Aufrißverfahren) und der kotierten Projektion für den Architekten sehr wichtig. Sie erschließen ihm Probleme, wie z. B. das überschlägige Bestimmen von Baumassen beim Anlegen von Straßen, die Überdachung von Gebäuden, Durchdringung von Flächen 2. Ordnung (Schalen). Die darstellende Geometrie ist also für den Architekten ein unentbehrliches Hilfsmittel für vielfältige Anwendungen.
Als Beispiel liegt eine Innenraumperspektive eines Festsaales mit Spiegelung vor (Bild 9).

▲999▲ Zur weiteren Anregung und zur Vertiefung des oben Dargelegten soll folgende Aufgabe dienen:
Es seien Horizontlinie h, Hauptpunkt H^*, Augdistanz d und Standlinie s vorgegeben. Es ist das zentralperspektive Bild eines auf der Standebene σ liegenden Würfels zu konstruieren, wenn das Bild einer vertikalen Kante und die Richtung g einer horizontalen Kante gegeben sind (Bild 10).

E. Kühn

Bild 10



Literatur zum Fachgebiet Architektur

Nikolai Brunow
Entwicklungsetappen der Architektur
12 cm × 19 cm, ca. 360 Seiten mit 120 Abb., Broschur mit Kartonumschlag, 4,80 M
VEB Verlag die Kunst, Dresden

Georg Piltz
Streifzug durch die deutsche Baukunst
147 Seiten, Pappband mit Folie, 5,20 M
Der Kinderbuchverlag, Berlin

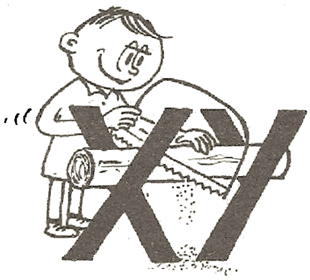
Danielowski/Pretzsch
Architekturperspektive
17 cm × 24,5 cm, 226 Seiten, zahlreiche Abb., Halbleinen, M
VEB Verlag Bauwesen, Berlin

Georg Piltz
Bauwerke — Baustile
Streifzüge durch die deutsche Architektur
295 Seiten, zahlreiche Fotos und Gaphiken, 13 cm × 20 cm, Halbleinen, 12,80 M
Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin

Herbert Kürth/Aribert Kutschmar
Baustilfibel
Bauwerke und Baustile von der Antike bis zur Gegenwart
17,0 cm × 23,5 cm, 240 Seiten, 360 Zeichnungen und 16 Kunstdrucktafeln, Halbleinen, 20,00 M
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

Karl Czok
Die Stadt
Ihre Stellung in der deutschen Geschichte
17,0 cm × 23,5 cm, 181 Seiten, zahlreiche Abb., 15,00 M
Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin

Wer löst mit?
alpha -Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 5. März 1973

5▲963 Birgit kauft ein und erhält von ihrer Mutter dafür 10 Mark. Das Gemüse kostet 2,36 M. Für Brot und Brötchen zusammen zahlt sie 52 Pf weniger als für das Gemüse. Fleisch und Wurstwaren hingegen waren doppelt so teuer wie Brot und Brötchen. Welchen Geldbetrag bringt Birgit nach dem Einkauf wieder mit zurück?

5▲964 Ein Park mit einer Fläche von sechs Hektar wird durch ein angrenzendes rechteckiges Grundstück von 350 m Länge und 150 m Breite erweitert. Wieviel Hektar beträgt nach dieser Erweiterung die Fläche des Parkes?

Karl-Heinz Gentzsch, 7404 Meuselwitz Mathematikfachlehrer

W 5■965 In Berlin ist der längste Tag eines Jahres ungefähr zehn Stunden länger als die kürzeste Nacht. Wieviel Stunden dauert dieser längste Tag an? *Sch.*

W 5■966 Ein Mathematiklehrer hatte während einer Urlaubsreise in die Sowjetunion Fotoaufnahmen in Minsk, Leningrad und Moskau gemacht und daraus 112 Dias hergestellt. Über die Stadt Minsk waren es 12 Dias weniger, über Leningrad 20 Dias weniger als über die Hauptstadt Moskau. Ermittle die Anzahl der Dias von Minsk, Leningrad und Moskau.

Karl-Heinz Gentzsch, 7404 Meuselwitz Mathematikfachlehrer

W 5 * 967 Ute besitzt doppelt soviel Buntstifte wie Regine, Sabine hingegen 13 weniger als Regine. Wieviel Buntstifte besitzt jedes der drei Mädchen, wenn die Anzahl der Buntstifte, die sie zusammen besitzen, gleich einer Primzahl ist, die kleiner als 50 ist und deren Quersumme 11 beträgt?

Anke Mentkowski, Eichwalde, Kl. 7

W 5 * 968 Ein Fußballspieler wurde nach dem Ausgang eines Fußballspieles gefragt. Scherzhaft antwortete er: „Meine Mannschaft hat gewonnen. Wenn man die neunfache Anzahl der von meiner Mannschaft geschossenen Tore durch die dreifache Anzahl der vom Gegner erzielten Tore dividiert, so erhält man 9 als Ergebnis. Insgesamt wurden weniger als sechs Tore geschossen.“ Wieviel Tore schoß jede der beiden Mannschaften, wenn wenigstens ein Tor gefallen war?

Roland Zabel, 4114 Wettin, Kl. 7

6▲969 Ein Dreieck ABC habe die Eigenschaft, daß sich die Mittelsenkrechten der Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ in einem inneren Punkt D der Seite $\overline{AB}$ schneiden. Es ist die Größe des Winkels $\sphericalangle ACB$ zu bestimmen.

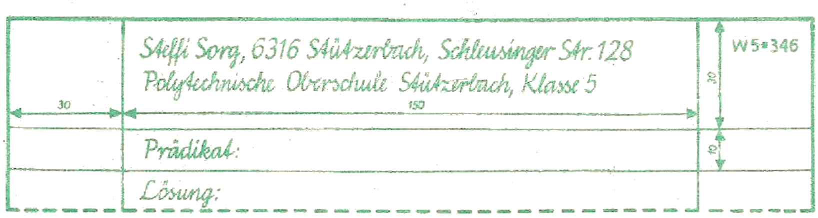
Petra Peters, Harzgerode, Kl. 12

6▲970 Gegeben sei ein Rhombus $ABCD$ mit der Seite $\overline{AB}=a$ und dem Innenwinkel $\sphericalangle DAB=\alpha=60°$. Untersuche und begründe, ob die Rhombusseite $\overline{AB}$ kleiner, gleich oder größer als die Diagonale $\overline{BD}$ ist. Beweise ferner, daß jede der beiden Diagonalen eines beliebigen Rhombus $ABCD$ stets kleiner ist als $2\cdot\overline{AB}=2a$.

Hans-Ulrich Auster, 1824 Niemegk, Kl. 7

W 6■971 In der gleichen Ebene seien zwei voneinander verschiedene Punkte P und Q sowie eine beliebige durch P gehende Gerade g gegeben. Es ist nachzuweisen, daß der Abstand d des Punktes Q von der Geraden g genau dann am größten ist, wenn die Gerade g senkrecht auf der Geraden PQ steht. *T.*

W 6■972 Es ist der größte gemeinsame Teiler der Zahlen 96 und 27 231 381 324 zu bestimmen. *T.*



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha,
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgaben fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für die 7. Klasse geeignet). Aufgaben mit W* versehen gelten auch als Wettbewerbsaufgaben. Sie haben einen hohen Schwierigkeitsgrad.

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit W■10/12 oder W * 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Experten korrigiert.

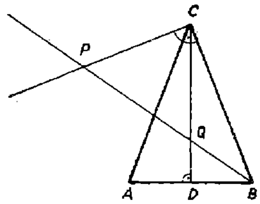
6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben.
Der Jahreswettbewerb 1972/73 läuft von Heft 5/72 bis Heft 2/73. Zwischen dem 1. und 10. September 1973 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/72 bis 2/73 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.
Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/73 veröffentlicht. Wer mindestens 7 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/72 bis 2/73) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1972/73 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunde zurück).
Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

W 6 * 973 In der fünfstelligen natürlichen Zahl 48*7* sind die Sternchen jeweils durch eine der Grundziffern 0, 1, 2, ..., 9 so zu ersetzen, daß eine durch 3 teilbare natürliche Zahl entsteht. Wie viele Möglichkeiten gibt es? *T.*

W 6 * 974 Die Figur stellt ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB}$ dar, dessen Winkel an der Spitze $\sphericalangle ACB$ kleiner als 90° ist. Von C aus wurde das Lot auf $\overline{AB}$ gefällt, sein Fußpunkt sei mit D bezeichnet. Durch C wurde ferner die Senkrechte zur Geraden BC gezogen. Die Halbierungslinie des Winkels $\sphericalangle ABC$ schneidet diese Senkrechte im Punkt P und die Gerade CD in Q. Beweise, daß das Dreieck PQC ebenfalls gleichschenklig ist! *Sch.*



7 ▲ 975 Gegeben seien ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M sowie ein äußerer Punkt P und ein innerer Punkt Q dieses Kreises. Es sei ferner A der Randpunkt des Kreises k, der auf der Geraden PM zwischen P und M liegt. Es ist zu beweisen, daß stets $\overline{PA} < \overline{PQ}$ gilt. *T.*

7 ▲ 976 Die 31 Schüler einer 5. Klasse erzielten in der letzten Mathematikarbeit einen Notendurchschnitt von 2,0. Kein Schüler erhielt die Note 5. Genau acht Schülern wurde die Note 3 erteilt. Mit der Note 2 waren doppelt so viele Arbeiten bewertet worden wie mit der Note 4. Wieviel Schüler erhielten die Note 1, 2, 3 oder 4?

W 7 ▪ 977 Es sei H der Schnittpunkt der drei Höhen eines Dreiecks ABC. Es ist das Dreieck $\triangle ABC$ aus $\overline{AB} = c = 11$ cm, $\overline{AH} = 6$ cm und $\overline{BH} = 7$ cm zu konstruieren. Die Konstruktion ist zu begründen! *Sch.*

W 7 ▪ 978 Bernd stellte eine Kochsalzlösung von 100 g Masse her, die zu 99 % (der Masse) aus Wasser und zu 1 % (der Masse) aus Kochsalz besteht. Nach einigen Tagen stellte Bernd fest, daß die Kochsalzlösung, die er in einem offenen Gefäß aufbewahrte, nur noch zu 98 % (der Masse) aus Wasser bestand. Wieviel Gramm Masse besaß nunmehr die Kochsalzlösung? *Michael Reissig, 402 Halle, Kl. 8*

W 7 * 979 Für eine mathematische Arbeitsgemeinschaft wurden insgesamt 100 Arbeitsmittel zum Gesamtpreis von genau 100,— M angeschafft, und zwar Rechenstäbe zum Einzelpreis von 10,— M, Zirkel zum Einzelpreis von 3,— M und Zeichenhefte zum Einzelpreis von 0,50 M. Wieviel Rechenstäbe, Zirkel und Zeichenhefte wurden eingekauft?

Sylvia Persch, 1071 Berlin, Kl. 7

W 7 * 980 Es ist ein Dreieck ABC aus den Stücken $\sphericalangle CAB = \alpha = 70°$, $\overline{CE} = h_c = 4$ cm und $\overline{BC} + \overline{AB} - \overline{AC} = a + c - b = 5$ cm mit $b < c$ zu konstruieren. Die Konstruktion ist zu begründen.

Nach E. Hameister, Geometrische Konstruktionen und Beweise
Mitgeteilt von Christine Kohlmann, 8701 Lawalde, Kl. 12

8 ▲ 981 Es sind alle natürlichen Zahlen zu ermitteln, deren Fünffaches um 1 größer als das Quadrat ihres Nachfolgers ist.

Norbert Siedow, Neuruppin, Alexander-Puschkin-Schule, Kl. 9

8 ▲ 982 Es ist ein Dreieck ABC zu konstruieren, von dem die Winkel $\sphericalangle BCA = \gamma = 90°$, $\sphericalangle CAB = \alpha = 30°$ und der Radius des Umkreises $r = 3$ cm gegeben sind. Ferner ist der Flächeninhalt dieses Dreiecks zu berechnen.

Ulrike Weise, Karl-Marx-Stadt, EOS „Friedrich Engels", Kl. 12

W 8 ▪ 983 Bei einem Wettlauf starten Ellen, Gabriele und Sabine. Welches von diesen drei Mädchen läuft am schnellsten und welches am langsamsten, wenn die folgenden drei Aussagen wahr sind?

1. Sabine läuft schneller als Gabriele.
2. Wenn Ellen nicht schneller als Sabine läuft, so läuft Gabriele schneller als Ellen.
3. Wenn Sabine schneller als Ellen läuft, so läuft Gabriele schneller als Sabine.

Marlies Faupel, POS III Heiligenstadt, Kl. 8

W 8 ▪ 984 In einem Kreis der DDR waren bei der Getreideernte 1972 insgesamt 14000 ha abzuernten. Zur Verfügung standen 35 moderne Mähdrescher des Typs E 512 und 18 ältere Mähdrescher des Typs E 175. Die Tagesleistung eines Mädreschers E 512 beträgt 15 ha, die eines Mähdreschers E 175 beträgt 4 ha (jeweils Arbeit in zwei Schichten vorausgesetzt). Da die Erntekosten mit den modernen Mähdreschern E 512 erheblich geringer sind, sollen diese voll eingesetzt werden.

Wieviel Mähdrescher des Typs E 175 müssen zusätzlich eingesetzt werden, damit die gesamte Ernte

a) in 24 Einsatztagen,
b) in 25 Einsatztagen,
c) in 26 Einsatztagen

eingebracht werden kann?

Ferner soll die Anzahl y der einzusetzenden Mähdrescher E 175 als Funktion der Anzahl t der Einsatztage dargestellt werden. *L.*

W 8 * 985 Es sind alle natürlichen Zahlen n zu ermitteln, für die die Zahl

$$z = n! - 1$$

gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl ist. (Es gilt $0! = 1$, $1! = 1$ und $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ für $n \geq 2$.)

Olaf Böhme, stud. math., Dresden, Träger eines zweiten Preises bei der IMO 1972

W 8 * 986 Man beweise, daß in einem Dreieck, das nicht gleichschenklig ist, weder die (von einem Eckpunkt ausgehende) Höhe und die (von diesem Eckpunkt ausgehende) Seitenhalbierende noch die Höhe und die Winkelhalbierende noch die Seitenhalbierende und die Winkelhalbierende zusammenfallen können.

Hans-Gert Gräbe, EOS Erfurt, Kl. 11

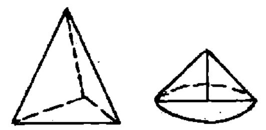
9 ▲ 987 Es sei n eine von Null verschiedene natürliche Zahl. Man beweise, daß dann die natürliche Zahl

$$z = n^6 + 8n^2 - 1$$

niemals eine Primzahl ist.

Erich Hoy, Wittenberg-Piesteritz, EOS „Lucas Cranach", Kl. 10

9 ▲ 988 Welcher geometrischer Körper hat das größere Volumen: ein reguläres Tetraeder mit der Kantenlänge $2a$ oder ein gerader Kreiskegel mit dem Grundkreisradius a und der Höhe a? (vgl. die Abb.)



Olaf Böhme, stud. math., Dresden, Träger eines zweiten Preises bei der IMO 1972

W 9 ▪ 989 Man ermittle die Lösungsmenge (im Bereich der reellen Zahlen) der Ungleichung

$$\frac{9}{x-2} \leq 3.$$

Dr. Gerhard Hesse, Dresden

W 9 ▪ 990 Bereits mit Hilfe der Automatischen Station Venus 7 konnten im Jahre 1970 die Temperaturen in der Atmosphäre der Venus gemessen werden. Man erhielt eine Temperatur von 25 °C in 62 km Höhe und von 475 °C in 0 km Höhe über der Venusoberfläche.

a) Es ist die Maßzahl y der Temperatur (in °C) als Funktion der Maßzahl x der Höhe (in km) über der Venusoberfläche darzustellen, wobei ein linearer Verlauf angenommen werden soll.

b) Es sind die mit Hilfe dieser Funktion ermittelten Werte der Temperatur für die Höhen $x_1 = 25$ km und $x_2 = 40$ km mit den von der Venussonde gemessenen Werten der Temperatur (320 °C und 200 °C) zu vergleichen, und es ist jeweils der prozentuale Fehler zu berechnen.

c) Es ist der Graph der Funktion zu zeichnen; in die Zeichnung sind auch die gemessenen Temperaturwerte einzutragen.

Anleitung: Man setze $y = mx + n$ und berechne m und n, indem man in diese Gleichung einerseits $x = 0$, $y = 475$, andererseits $x = 62$, $y = 25$ einsetzt. *L.*

W 9 * 991 Es seien a, b, c drei reelle Zahlen, für die

$$a+b+c=0 \quad (1)$$

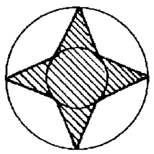
und $a^2+b^2+c^2=1$ gilt. (2)

Man berechne

$$z=a^4+b^4+c^4.$$

Frank Müller, Finsterwalde

W 9 * 992 Es sei $ABCDEFGH$ ein sternförmiges Achteck, bei dem die Eckpunkte A, C, E, G auf einem Kreis um den Punkt M mit dem Radius R und die Eckpunkte B, D, F, H auf einem Kreis um den Punkt M mit dem Radius r liegen, wobei $R \geqq r$ gilt (vgl. die Abb.). Ferner sei dieses Achteck symmetrisch mit den Symmetrieachsen AE, CG, BF und DH.



a) Es ist eine Formel für die Berechnung des Flächeninhalts dieses Stern-Achtecks aus den Radien R und r anzugeben.
b) Es ist eine Formel für die Berechnung der Seitenlänge dieses Stern-Achtecks aus den Radien R und r anzugeben.
c) Welche Formeln erhält man, wenn man in den Formeln zu a) und b) $R=r$ setzt?

10/12▲993 Es sind alle geordneten Paare (x, y) natürlicher Zahlen zu ermitteln, für die die Gleichung

$$2^x=y!+304$$

erfüllt ist.
Bemerkung: Es gilt $0!=1$, $1!=1$ und $y!=1\cdot 2\cdot \ldots \cdot y$ für $y \geqq 2$.

Hans-Dietrich Gronau, stud. math. Neustrelitz

10/12▲994 Es seien n und a mit $a \geqq 2$ positive ganze Zahlen. Man beweise, daß dann stets die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$\sqrt[n]{a+2}-\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{a-1}.$$

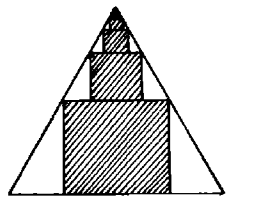
Olaf Böhme, stud. math., Dresden

W 10/12 ■ 995 Die Erdölvorkommen in dem arabischen Staat Kuweit am Persischen Golf betragen nach offiziellen Schätzungen etwa 10 Mrd. t. Im Jahre 1969 wurden in diesem Land 144,5 Mill. t Erdöl gefördert. Wieviel Jahre werden die Vorräte (von 1970 ab gerechnet) noch reichen, wenn künftig
a) die jährliche Förderung ebenso hoch wie im Jahre 1969 sein wird;
b) die Förderung sich jährlich jeweils um 7 % gegenüber dem Stand des Vorjahres erhöhen wird, wie das in den Jahren 1970 und 1971 bereits der Fall war?
Dabei soll die Anzahl der Jahre mit einer Dezimalstelle nach dem Komma angegeben werden.
Anleitung zur Lösung: Bezeichnet man im Falle b) die Erdölförderung des Jahres 1969 mit a, so beträgt sie 1 Jahr danach aq, 2 Jahre danach aq^2, allgemein n Jahre danach aq^n, wobei $q=1{,}07$ ist. Zur Lösung kann dann die Formel

$$aq+aq^2+\ldots+aq^n=aq\frac{q^n-1}{q-1}$$

benutzt werden. *L.*

W 10/12 ■ 996 Einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge a sei eine Folge von Rechtecken wie in der beigefügten Abbildung einbeschrieben. Dabei sei eine Seite des ersten Rechtecks halb so lang wie die Dreieckseite, auf der sie liegt, eine Seite des zweiten Rechtecks halb so lang wie die Seite des ersten Rechtecks, auf der sie liegt, eine Seite des dritten Rechtecks halb so lang wie die Seite des zweiten Rechtecks, auf der sie liegt, usw.



Wie groß ist die Summe der Flächeninhalte aller Rechtecke dieser Folge, also der Flächeninhalt der in der Abbildung schraffiert gezeichneten treppenförmigen Figur?

Wolfgang Enghardt, Lunzenau, ehem. EOS Rochlitz

W 10/12 * 997 Es sei n eine natürliche Zahl mit $n \geqq 2$, und es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ganze Zahlen, die gleich 1 oder -1 sind. Man beweise, daß dann das Gleichungssystem

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=a_1+a_2+\ldots+a_n, \quad (1)$$

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=a_1a_2\ldots a_n \quad (2)$$

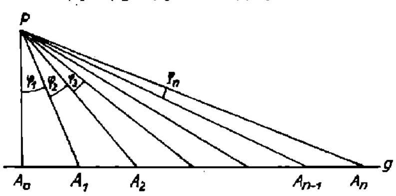
keine ganzzahlige Lösung $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ hat, wenn $a_1=a_2=\ldots=a_n$ gilt oder wenn n eine gerade natürliche Zahl ist.
Man beweise ferner, daß in allen anderen Fällen dieses Gleichungssystem mindestens eine ganzzahlige Lösung hat, und gebe eine solche Lösung an.

Ralph Lehmann, EOS Diesterweg, Kl. 10, Strausberg

W 10/12 * 998 Es sei g eine Gerade, auf der die Punkte $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geqq 2)$ mit $\overline{A_0A_1}=\overline{A_1A_2}=\overline{A_2A_3}=\ldots=\overline{A_{n-1}A_n}$ liegen (vgl. die Abb.). Ferner sei P ein Punkt, der auf der in A_0 auf g errichteten Senkrechten liegt und nicht mit A_0 zusammenfällt. Die Größen der Winkel, die die Strahlen PA_0, $PA_1, PA_2, \ldots, PA_n$ miteinander bilden, seien wie folgt bezeichnet:
$\varphi_1=\sphericalangle A_0PA_1, \varphi_2=\sphericalangle A_1PA_2, \varphi_3=\sphericalangle A_2PA_3, \ldots, \varphi_n=\sphericalangle A_{n-1}PA_n$. Man beweise, daß dann stets

$$\varphi_1>\varphi_2>\varphi_3>\ldots>\varphi_n \text{ gilt.}$$

Sch.



alpha-Wettbewerb

Abzeichen in Gold für fünfjährige Teilnahme

Ralph Lehmann, 1273 Petershagen; **Bernd Mathiszik,** 50 Erfurt; **Sabine Anders,** 75 Cottbus; **Kerstin Bachmann,** 402 Halle; **Annegret Kirsten,** 422 Leuna; **Wolfgang Richter,** 83 Pirna; **Ute Winkler,** 153 Teltow; **Jörg Hutschenreiter,** 8020 Dresden; **Wolfgang Riedel,** 90 Karl-Marx-Stadt; **Herwig Gratias,** 523 Sömmerda; **Bettina Zabel,** 57 Mühlhausen; **Jürgen Zabel,** 57 Mühlhausen; **Harald Herrmann,** 9301 Hammerunterwiesenthal; **Lutz Püffeld,** 1422 Hennigsdorf; **Johannes Blümlein,** 6112 Heldburg; **Christian Endter,** 6088 Steinbach-Hallenberg; **Uwe Lewandovski,** 705 Leipzig; **Eckhard Schadow,** 14 Oranienburg; Uta Zebisch, 6081 Fambach; Angela Rohrbeck, 2302 Franzburg; Ole-André Strzalla, 22 Greifswald; Frank Kretzschmar, 7043 Leipzig; Karin Weyh, 6081 Fambach; Christoph Scheurer, 9611 Glauchau-Gesau; Karin Fischer, 8036 Dresden; Roswitha Leyh, 59 Eisenach; Beate Recknagel, 608 Schmalkalden; Heike Jurack, 8502 Burkau; Henrik Frank, 22 Greifswald; Monika Seiler, 53 Weimar; Eberhard Manske, 608 Schmalkalden; Joh. Chr. Albrecht, 1281 Rüdnitz; Eberhard Eff, 6088 Steinbach-Hallenberg; Rainer Nothnagel, 6088 Steinbach-Hallenberg; Volker Boos, 4601 Dabrun; Bernd Heymann, 7027 Leipzig; Rainer Schwierz, 8502 Burkau; Dagmar Rißmann, 8021 Dresden; Carmen Schneider, 6081 Fambach; Renate Zimmermann, 8036 Dresden; Sabine Dittrich, 9402 Bernsbach; Matthias Albrecht, 1281 Rüdnitz; Gudrun Manske, 608 Schmalkalden; Rita Koch, 6089 Trusetal; Ute Heymel, 6081 Fambach; Andreas Gehb, 6081 Fambach; Claus-Detlef Bauermeister, 8019 Dresden; Andreas Eidner, 9271 Falken; Rainer Wilde, 1953 Fehrbellin; Hans-Jochen Rodner, 3014 Magdeburg; Karin Krüger, 453 Roßlau; Gernot Spievok, 22 Greifswald; Matthias Löffler, 5603 Dingelstädt. Rainer Zerck, 53 Wismar; Peter Linhardt, 7305 Waldheim; Ehrenfried Zschech, 86 Bautzen.

Abzeichen in Gold für vierjährige Teilnahme

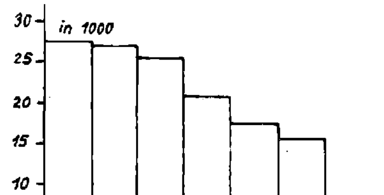
Kirsten Helbig, 1321 Schöneberg; **Andreas Schlosser,** 95 Zwickau; **Ute Wittat,** 9507 Ebersbrunn; **K.-H. Hering,** 50 Erfurt; **Ines Greiner,** 7039 Leipzig; **Ute Greiner,** 725 Wurzen; **Astrid Rösel,** 205 Teterow; **Detlef Poppe,** 57 Mühlhausen; **Guido Blosfeld,** 402 Halle; **Sabine Mamerow,** 202 Altentreptow; **Regina Hildenbrandt,** 6316 Stützerbach; **Hans-Peter Tams,** 259 Ribnitz-Damgarten; **Wolfgang Kögler,** 9529 Wiesenburg; **Sybille**

Rohrbeck, 2302 Franzburg; **Bärbel Anders,** 75 Cottbus; Gerlinde Koch, 6089 Trusetal; Harald Lehmann, 7961 Görlsdorf; Bärbel Rahnefeld, 901 Karl-Marx-Stadt; Beate Reiher, 99 Plauen; Marina Schulz, 89 Görlitz; Norbert Littig, 8501 Lichtenberg; Bernd Hanke, 8708 Großschweidnitz; Michael Schnelle, 754 Calau; Claus Scheffler, 88 Zittau; Irene Hanske, 8507 Putzkau; Thomas Rudolph, 92 Freiberg; Lothar Jennig, 2031 Gülzowshof; Harald Anders, 8502 Burkau; Christian Hofmann, 7404 Meuselwitz; Christoph Schmidt, 821 Freital; Barbara Recknagel, 6088 Steinbach-Hallenberg; Ulrich Bittner, 22 Greifswald; Hans-Ullrich Ihm, 8717 Oppach; Petra Zimmermann, 8036 Dresden; Regina Katzer, 8502 Burkau; Gabriele Gnauck, 8502 Burkau; Reiner Wagner, 8502 Burkau; Brigitte Hildenbrandt, 6316 Stützerbach; Barbara Wettengel, 992 Oelsnitz; Hanna Heinold, 15 Potsdam; Hedi Wegener, 1157 Berlin-Karlshorst; Reiner Lindemann, 75 Cottbus; Dietmar Ihle, 9335 Seiffen; Rüdiger Blach, 754 Calau; Petra Haebler, 1055 Berlin; Wolfgang Herrmann, 9306 Elterlein; Martin Emrich, 3703 Elbingerode.

Abzeichen in Gold für dreijährige Teilnahme

Jens Haupt, 90 Karl-Marx-Stadt; **Uwe Risch,** 327 Burg; **Hermann Tenor,** 45 Dessau; **Sven-Thorsten Freitag,** 95 Zwickau; **Olaf Richter,** 83 Pirna; **Dirk Sprengel,** 15 Potsdam; **Frank Richter,** 793 Herzberg; **Jens-Uwe Richter,** 9134 Kemtau; **Birgit Kühnstedt,** 5001 Erfurt; **Norbert Heß,** 8019 Dresden; **Horst Kohlschmidt,** 801 Dresden; **Ralf Weber,** 85 Bischofswerda; **Heike Anders,** 1636 Dahlewitz; **Harry Reimann,** 1136 Berlin; **Ulli Riedel,** 938 Flöha; **Wilfried Carl,** 402 Halle; **Andreas Näther,** 925 Mittweida; **Bernd Derlich,** 205 Teterow; **Bernd Redlich,** 6841 Wernburg; **Birgit Krötenheerdt,** 402 Halle; **Hellfried Schumacher,** 2111 Ahlbeck; **Ulrike Bandemer,** 92 Freiberg; **Thomas Hantschel,** 88 Zittau; **Steffen Gattert,** 7043 Leipzig; **Lars Luther,** 26 Güstrow; **Arndt Petzold,** 9034 Karl-Marx-Stadt; Holger Kuchling, 110 Berlin; Norman Bitterlich, 90 Karl-Marx-Stadt; Thomas Rehm, 128 Bernau; Gerd Köhler, 926 Hainichen; Rainer Gutsche, 793 Herzberg; Bernd Peters, 2402 Wismar; Heidrun Scheinhardt, 4203 Bad Dürrenberg; Astrid Kammel, 353 Havelberg; Angela Bagola, 759 Spremberg; Manfred Seidler, 75 Cottbus; Carola Kuhnt, 205 Teterow; Thorsten Langrock, 53 Weimar; Andreas Hochhaus, 57 Mühlhausen; Heiner Schulz, 126 Strausberg; Andreas Neubert, 943 Schwarzenberg; Kurt Frischmuth, 57 Mühlhausen; Uwe Haufe, 8291 Oberlichtenau; Caroline Oelsnitz, 205 Teterow; Werner Wehr, 5603 Dingelstädt; Bettina Zimmermann, 6088 Steinbach-Hallenberg; Sabine Kämpf, 6088 Steinbach-Hallenberg; Manfred Zmeck, 1281 Rüdnitz; Frank-G. Krause, 784 Senftenberg; Gisbert Löwe, 655 Schleiz; Gisela Gottlieb, 402 Halle; Ina Schmidt, 6541 Dorna; Elke Genath, 6088 Steinbach-Hallenberg; Fred Rempel, 75 Cottbus; Reiner Hofmann, 705 Leipzig; Monika Juppe, 8301 Bahratal; Horst Theel, 1034 Berlin; Jörg Päßler, 934 Marienberg; Birgit Weiß, 128 Bernau; Reinhold Albrecht, 4401 Rotta; Steffi Bittorf, 6085 Oberschönau; Falk Bahner, 6088 Steinbach-Hallenberg; Matthias Heine, 8601 Schwarznaußlitz; Hans-Peter Delius, 402 Halle; Konrad Schneider, 95 Zwickau; Ilona Drews, 2801 Wöbbelin; Andreas Schürer, 93 Annaberg-Buchholz; H.-Dirk Dunker, 7114 Zwenkau; Beate Brandtner, 7295 Schildau; Hiltrud Manske, Martina Wahl, Armin Endter, alle 6088 Steinbach-Hallenberg; Frank Günther, 7403 Lucka; Sabine Steinert, 8027 Dresden; Ute Neupert, 6085 Oberschönau; Bettina Ulrich, 6085 Oberschönau; Birgit Arnold, 6082 Breitungen; Michael Zeidler, 938 Flöha; Rainer König, Gabi Reumschüssel, Jens König, Angela Gotthelf, alle 6088 Steinbach-Hallenberg; Martina Weisheit, 6085 Oberschönau; Christina Seifert, 6082 Breitungen; Claudia Heuer, 1922 Meyenburg; Heidrun Weichler, 6081 Fambach; Bernd Reddemann, 36 Halberstadt; Torsten Waldeck, 90 Karl-Marx-Stadt; Christine Frenzel, 7222 Groitzsch; Jochen Kluge, 7403 Lucka; Helge Wilsky, 286 Lübz; Gisbert Schultz, 45 Dessau; Ingrid Hauenschild, 90 Karl-Marx-Stadt; Karin Heller, 6082 Breitungen; Gerhard Brunck, 6082 Breitungen; Birgit Recknagel, 6088 Steinbach-Hallenberg; Thomas Köhler, 4401 Reuden; Sabine Puppe, 8502 Burkau; Thomas Köhler, 4401 Rotta; Bärbel Manteuffel, 301 Magdeburg; Andreas Socher, 7817 Schwarzheide; Thomas Brückner, 9030 Karl-Marx-Stadt; Hannelore Weiß, 205 Teterow; Gina Jahnke, 801 Dresden; Marion Rüter, 3561 Valfitz; Martina Gröschke, 75 Cottbus; Gabriele Angelus, 402 Halle; Manfred Lehrmann, 3241 Wahlbeck; Claudia Schlosser, 901 Karl-Marx-Stadt; Kerstin Müller, 7253 Brandis; Birgit Siewert, 14 Oranienburg; Karola Kibelksties, 1292 Wandlitz; Doris Böttcher, 7551 Straupitz; Frank Rönick, 582 Bad Langensalza; Heike Rommel, 62 Bad Salzungen; Astrid Schulz, 4401 Rotta; Ute Schneider, 1281 Danewitz; Reiner Sturm, 8502 Burkau; Karin Küchler, 6088 Steinbach-Hallenberg; Manuela Jäger, 6085 Oberschönau; Bettina Hujer, 6082 Breitungen; Annelie Römhild, 6082 Breitungen; Udo Grünert, 8225 Wurgwitz; Gerd Reif, 6051 Silbach; Birgit Lorenz, 83 Pirna; Gerd Sieber, 9122 Adorf; Ingolf Lehnert, 2034 Tutow; Heidrun Köpke, 205 Teterow; Hartmut Liebkopf, 6051 Hinternah; Andreas Stolze, 7817 Schwarzheide; Peter Pichler, 75 Cottbus; Ursula Barth, 5101 Kleinfahner; Uwe Jurzok, 6575 Pausa; Annegret Prievenau, 3241 Neuenhofe; Birgit Wittwer, 7403 Lucka; Olaf Kylau, 8502 Burkau; Frank Menz, 6088 Steinbach-Hallenberg; Jutta Weck, 6082 Breitungen; Kornelia Nothnagel, 6085 Oberschönau; Ria Kirschke, 409 Halle-Neustadt; Ulrike Claußnitzer, 14 Oranienburg; Ulli Klaus, 50 Erfurt; Stephan Fleischmann, 606 Zella-Mehlis; Gunter Schölzel, 93 Annaberg-Buchholz; Sabine Beck, 1195 Berlin; Jürgen Bergau, 205 Teterow; Annette Steinert, 8027 Dresden; Ehrenfried Zschech, 86 Bautzen; Peter Herrlich, 8122 Radebeul; Katrin Götz, 1195 Berlin; alpha-Klub, 23 Stralsund; Annerose Geyer, 793 Herzberg; Martina Fiedler, 4271 Freist; Barbara Pahl, 3241 Neuenhofe; Gudrun Möller, 8019 Dresden; Bärbel Seiler, 53 Weimar; Jürgen Galle, 4401 Gniest; Ruth Pienkny, 1281 Rüdnitz; Karin Holland-Cunz, 6088 Steinbach-Hallenberg; Wolfgang Ernst, 6088 Steinbach-Hallenberg; Steffi Schleicher, 6082 Breitungen; Siegmar Rekkenbeil, 6081 Fambach; Frank Reglin, 116 Berlin; Jutta Becker, 2822 Lübtheen; Stefan Claußnitzer, 14 Oranienburg; Roland Wendenburg, 427 Hettstedt; Gert Kirschke, 409 Halle-Neustadt; Jörg Schubert, 9331 Pfaffroda; Matthias Gerth, 59 Eisenach; Bert Lubner, 77 Hoyerswerda; Frank Meister, 1401 Oranienburg; Wolfram Ulrici, 7027 Leipzig; Wolfgang Schweizer, 4735 Roßleben; Holger Harz, 53 Weimar; Siglinde Puller, 759 Spremberg; Henry Bergmann, 73 Döbeln; Dietmar Huhn, 4401 Radies; Ralf Wittig, 8512 Großröhrsdorf; Marlene Matthes, 6402 Mengersgereuth; Dietmar Kochrian, 7816 Schipkau; Gunther Rösch, 934 Marienberg; Evelin Lohse, 8601 Bautzen; Steffi Jurzok, 6575 Pausa; Andreas Gröschke, 75 Cottbus; Bernd Griefahn, 25 Rostock; Irene Lux, Karin Zwieck, 4253 Helbra; Hans Schmidt, 1017 Berlin; Ingrid Juppe, 8301 Bahratal; Birgit Sandig, 9201 Clausnitz; Wieland Guttzeit, 5321 Wiegendorf; Annelie Günther, 5602 Bernterode; Achim Bobeth, 806 Dresden; Joachim Päßler, 9303 Bärenstein; Elvira Neubauer, 9413 Schönheide; Jutta und Karin Schuster, 27 Schwerin; Heike und Harald Müller, 2901 Blüthen; Jens Walter, 4255 Benndorf; Evelin Heinrich, 9025 Karl-Marx-Stadt; Beate Esch, 4271 Thaldorf; Pia-Gabriele Preußer, 22 Greifswald; Petra Dietzel, 4271 Adendorf; Uwe Briese, 2002 Burg Stargard.

Beteiligung am alpha-Wettbewerb 1967/72 — aufgeschlüsselt nach Schuljahren



Kleine Worte – Große Wirkung Teil 2

Das kleine Wörtchen „und"

Das Wörtchen **und** ist uns schon einmal begegnet, und zwar bei dem Satz über die Division von natürlichen Zahlen (siehe Klassenarbeit von Klaus).

Mit dem Wörtchen **und** ist man in der Lage, zwei oder mehrere Teilaussagen zu einer neuen Aussage zusammenzufügen. Eine solche Aussagenverbindung, die mit Hilfe von **und** entstanden ist, nennt man *Konjunktion*.

Hier gleich ein Beispiel:

Die Zahl 3 erfüllt die Ungleichung $x<7$ **und** die Zahl 3 erfüllt auch die Ungleichung $x>2$.

In unserem Fall liegen zwei Teilaussagen vor.

a) Die Zahl 3 erfüllt die Ungleichung $x<7$. (Wahre Aussage)

b) Die Zahl 3 erfüllt die Ungleichung $x>2$. (Wahre Aussage)

Eine Konjunktion ist wahr, wenn alle Teilaussagen, aus denen sie entstanden ist, auch wahr sind. (siehe unser obiges Beispiel) Ist nur eine Teilaussage oder etwa gar keine Teilaussage wahr, so ist die mit „und" aus diesen Teilaussagen gebildete Aussagenverbindung falsch.

Zum Beispiel: „300 ist der Nachfolger von 200 und 1 000 ist der Vorgänger von 2 000" ist falsch, denn beide Teilaussagen sind falsch;

„0 ist die kleinste natürliche Zahl und 100 000 000 000 ist die größte natürliche Zahl" ist falsch, denn eine der beiden Teilaussagen ist falsch.

Kommen wir nochmals zu dem Satz über die Division von natürlichen Zahlen zurück:

Da die Division $a:b$ nur dann ausführbar ist, wenn **sowohl** a ein Vielfaches von b **als auch** $b \neq 0$ ist, so ist die Verwendung des Bindewortes **oder** unzulässig und muß durch **und** ersetzt werden.

Der Mathematiklehrer hat also mit Recht die Antwort von Klaus beanstandet. („Die Division ist im Bereich der natürlichen Zahlen ausführbar, wenn der Dividend a ein Vielfaches des Devisors b ist **oder** wenn b nicht 0 ist". Ein Beispiel dazu: $a=15$, $b=4$. Hier ist $b \neq 0$, die Bedingung „a ist ein Vielfaches von b **oder** $b \neq 0$" wird also erfüllt, aber $a:b$ ist nicht ausführbar.) Untersucht nun selbst einmal, ob die folgenden Aussagen wahr sind!

a) $461 \cdot 7^2 = 3\,217$ **und** $414:6=54$

b) In jedem Dreieck gibt es höchstens einen rechten Winkel, **aber auch** mindestens einen spitzen Winkel.

c) Die Zahl 19 erfüllt **sowohl die** Ungleichung $17<x<27$ **als auch** die Ungleichung $19<x<29$.

d) Die Zahl 714 ist gerade und **außerdem** durch 7 teilbar.

Wie wir aus den obigen Aussagen sehen, gibt es noch andere Bindewörter (z. B. „aber auch", „sowohl als auch", „und außerdem"), die dieselbe Wirkung haben wie unser „und". Man kann sie alle durch „und" ersetzen, ohne den Wahrheitswert der Aussage zu verändern.

Entweder „oder" oder „entweder — oder"

Auch das Wörtchen „oder" und die Wendung „entweder — oder" sind in der Lage, Aussagen zu neuen Aussagen zu verbinden. Jedoch ist es dabei sehr wichtig, welches Bindewort Verwendung findet. Wenn die Mutti an der Kaffeetafel zu Tante Lilly sagt: „Möchtest du Zucker **oder** Milch?", so ist niemand verwundert, wenn die Tante sowohl Zucker als auch Milch oder nur eins von beiden in ihren Kaffee nimmt. Dagegen wird unsere Mutti mit Recht böse auf uns sein, wenn sie zu uns sagt: „Entweder du gehst heute nachmittag ins Schwimmbad oder ins Kino", und wir waren im Schwimmbad und anschließend im Kino.

Wie ihr seht, ist es nicht egal, ob man das Bindewort „oder" oder die Wendung „entweder – oder" verwendet.

Eine mit **oder** gebildete Aussagenverbindung (auch Alternative genannt) ist wahr, wenn **mindestens** eine Teilaussage wahr ist. Sind alle Teilaussagen falsch, so ist die Aussagenverbindung falsch.

Die mit **entweder — oder** gebildete Aussagenverbindung (auch Disjunktion genannt) ist nur wahr, wenn genau eine Teilaussage wahr ist, ansonsten ist sie falsch.

So ist die Aussage

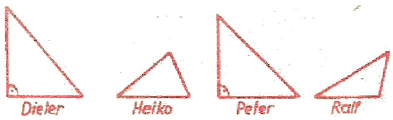
„2 772 ist durch 3 oder durch 9 teilbar" wahr, denn beide Teilaussagen sind wahr.

Dagegen ist die Aussage

„2 772 ist entweder durch 3 oder durch 9 teilbar" falsch. Schauen wir uns dazu ein anderes Beispiel an:

Der Lehrer einer 5. Klasse stellte die Aufgabe: „Zeichnet ein Dreieck, das rechtwinklig oder gleichschenklig ist!"

Die folgenden Abbildungen zeigen, was die Schüler Dieter, Heiko, Peter und Ralf gezeichnet haben:



Wer von ihnen hat die Aufgabe richtig gelöst?

Dieter ja, denn sein Dreieck ist rechtwinklig, Heiko auch, denn sein Dreieck ist gleichschenklig, aber auch Peter hat die Aufgabe richtig gelöst, denn sein Dreieck ist rechtwinklig. Es ist außerdem auch noch gleichschenklig, aber das war ja nicht verboten. Nur Ralfs Zeichnung ist nicht in Ordnung: Das Dreieck ist nicht rechtwinklig und auch nicht gleichschenklig.

Hätte der Lehrer aber gesagt: „Zeichnet ein Dreieck, das entweder rechtwinklig oder gleichschenklig ist!", dann wären nur Dieters und Heikos Zeichnungen richtig gewesen.

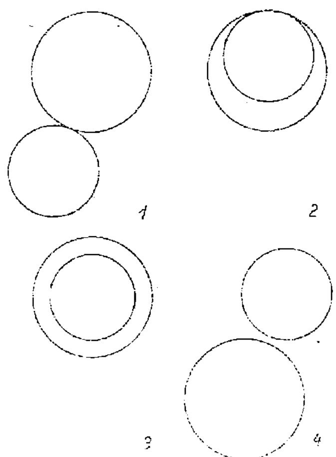
Untersucht einmal selbst, welche Figuren der folgenden Abbildung richtig gezeichnet sind, wenn die Aufgabe lautet:

a) Zeichnet zwei Kreise, die sich gegenseitig berühren **oder** bei denen einer ganz im Inneren des anderen liegt!

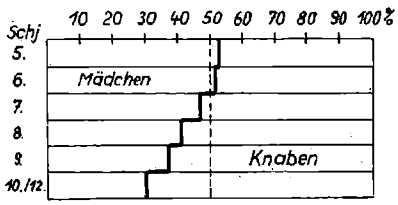
b) Zeichnet zwei Kreise, die sich **entweder** gegenseitig berühren **oder** bei denen einer ganz im Inneren des anderen liegt!

c) Zeichnet zwei Kreise, die sich gegenseitig berühren **und** bei denen einer ganz im Inneren des anderen liegt!

L. Flade



Beteiligung am alpha-Wettbewerb 1967/72 aufgeschlüsselt nach Jungen und Mädchen



VEB Verlag Technik, Berlin 1971; 168 S., 101 Abb., 10 Tafeln; 9,50 M

Wer es bei naturwissenschaftlichen oder technischen Untersuchungen genau nimmt mit den physikalischen Größen und ihren Maßeinheiten, der kennt bereits den „Padelt/Laporte", ein nützliches Nachschlagewerk der Meßtechnik, in der 1. Auflage 1964 im Fachbuchverlag Leipzig erschienen.
Nun hat Frau *Dr. E. Padelt*, ehemals Mitglied der *Deutschen Gesellschaft für Meßtechnik und Automatisierung*, ein Buch für ein breiteres Publikum geschrieben. Im Geleitwort wird betont, daß es ein besonderes Anliegen der Sektion Technik beim Präsidium der URANIA gewesen sei, populärwissenschaftliches Material zur Zeit- und Längenmessung zu veröffentlichen. Frau *Dr. Padelt* nahm sich in gekonnter Weise dieser Aufgabe an, ist sie doch durch ihr Studium der Physik und Mathematik und ihrer langjährigen Tätigkeit auf dem Gebiet der Wäge- und Volumenmeßtechnik dazu prädestiniert.
Da die Sekunde als Grundeinheit der Zeit und das Meter als Grundeinheit der Länge ursprünglich astronomisch definierte Maßeinheiten darstellen und die im Laufe der Wissenschaftsgeschichte benutzten Techniken der Zeit- und Längenmessung aufs engste mit astronomischen Beobachtungsmethoden verknüpft sind, ist dieses Buch auch für den Astronomen interessant.
„Sich darum kümmern, wie und wo die heutigen Früchte der Meßtechnik gewachsen sind", das sollte nicht nur Anliegen des Ingenieurs oder Physikers sein, sondern gehört geradezu zum Lehrstoff des Astronomieunterrichts.
Einige Kapitelüberschriften unterstreichen diese enge Beziehung zum Fach Astronomie: „Gnomon und Sonnenuhr" (S. 22), „Die Definition der Sekunde" (S. 44), „Der Kalender" (S. 51), „Gründung der internationalen Meterkonvention" (S. 81), „Messung sehr großer Längen" (S. 100), „Winkelmessung" (S. 140), „Geschwindigkeitsmessung" (S. 148).
Zahlreiche Photos und Zeichnungen illustrieren das preiswerte Buch und vermitteln an sich schon einen Eindruck von der gewaltigen Entwicklung der Meßtechnik während eines Zeitraumes von Jahrtausenden. Schließlich ist dieser Entwicklungsprozeß in einer umfassenden Zeittafel am Ende des Buches noch einmal zusammengefaßt.
Wegen der übersichtlichen Gliederung läßt sich „Menschen messen Zeit und Raum" als Nachschlagewerk benutzen, obwohl es als solches nicht geschrieben ist. Die sich in das jeweilige Zeitbild harmonisch eingliedernden technischen Beschreibungen nehmen dem Buch den trockenen, strengen Charakter, den sonst Literatur mit ähnlicher Thematik hat. „Eine Geschichte der Meßtechnik von den Anfängen bis zur Gegenwart", könnte der Untertitel lauten. Der Inhalt ist ein Beweis dafür, wie mit der Entwicklung der Produktivkräfte der menschlichen Gesellschaft die Anforderungen an Genauigkeit und Schnelligkeit der Meßverfahren gestiegen sind.

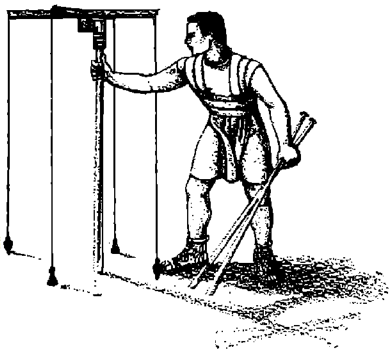
W. K.

Aus Wissenschaft und Fortschritt
Heft 6/72

alpha stellt vor Dr. phil. Eva Padelt

E. Padelt ist über die Grenzen der DDR hinaus bekannt geworden durch ihr Eintreten für die Vereinheitlichung auf dem Gebiet der physikalisch-technischen Einheiten.
Nach dem Studium der Physik und Mathematik arbeitete sie vor allem auf dem Gebiet der Wägetechnik und Vakuummeßtechnik in der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt, danach im *Deutschen Amt für Meßwesen und Warenprüfung der DDR*. Auch nach der Erreichung des Rentenalters ist sie noch wissenschaftlich tätig.

Bei den Ausgrabungen von Pompeji stieß man auf ein *Groma*, eines der ältesten Visiergeräte. Man visierte über die Fäden der Lote in der Diagonalen, um den rechten Winkel zu bestimmen.

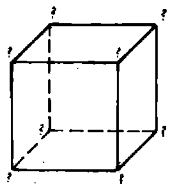


Um zu einer „gerechten Rute" zu kommen, hatte *Jacob Kölbel* 1584 vorgeschlagen, den Wert von 16 hintereinandergestellten Füßen zu wählen.

In freien Stunden alpha heiter

Magischer Würfel

Man ordne den acht Ecken eines Würfels die acht Zahlen 1 bis 8 so zu, daß in jeder der sechs Seitenflächen die vier Zahlen in den Quadratecken die gleiche Summe ergeben. Aufteilungen der Zahlen auf die Würfelecken sind nur dann als voneinander verschieden anzusehen, wenn die vier Eckzahlen wenigstens eines Quadrats des einen Würfels nicht als Eckzahlen eines Quadrats des anderen Würfels auftreten – unabhängig von der Reihenfolge. *Dr. G. Hesse, Dresden*



Aus der Zeit des Adam Ries

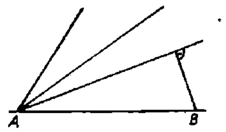
Die mittelalterlichen Rechenmeister fühlten sich oft unentbehrlich, da sie von Herren und Städten zu wichtigen Geschäften herangezogen wurden. Sie zeigten deshalb vielfach übersteigertes Standesbewußtsein und unerträglichen Dünkel.

Nicht so der bekannte Annaberger Rechenmeister *Adam Ries* (1492 bis 1559), der mehr leistete als mancher andere, dabei aber trotzdem bescheiden blieb.

Von ihm wird folgendes erzählt: *A. Ries* traf einmal mit einem solchen hochnäsigen Feldmesser zusammen, der an seinem Hut einen silbernen Zirkel trug, um sich damit als *Meister der geometrischen Kunst* zu erkennen zu geben. *A. Ries* – der trotz seines geometrischen Könnens den Zirkel nicht trug – ärgerte sich über das Auftreten dieses Mannes und schlug ihm deshalb einen kleinen Wettbewerb vor: Wer über einer vorgegebenen Strecke $\overline{AB}$ in einer bestimmten Zeit die meisten rechten Winkel konstruieren konnte, sollte Sieger sein.

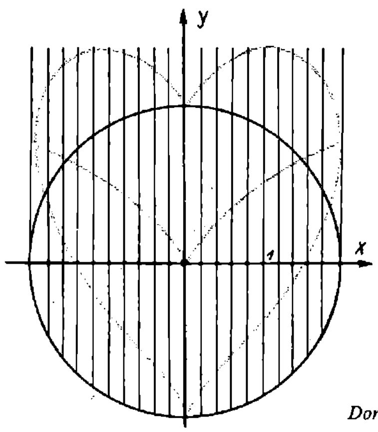
Der Feldmesser nahm die Herausforderung an und begann sogleich von A ausgehende, in spitzem Winkel zu $\overline{AB}$ geneigte Strahlen zu zeichnen. Dann wollte er von B auf diese Strahlen das Lot fällen und so rechte Winkel über $\overline{AB}$ gewinnen.

Unter Anwendung eines alten Lehrsatzes kam *A. Ries* sehr schnell zum Ziel. Kennst du, lieber Leser, diesen Satz? *Dipl.-Math. Ch. Pollmer, Dresden*



Mathematik mit

Der Graph der Relation
$y=f(x)=\sqrt[3]{x^2}\pm\sqrt{4-x^2}$
sieht für $E=2$ cm folgendermaßen aus:



R. Schwantes, Dornstetten (BRD)

Turmsprung

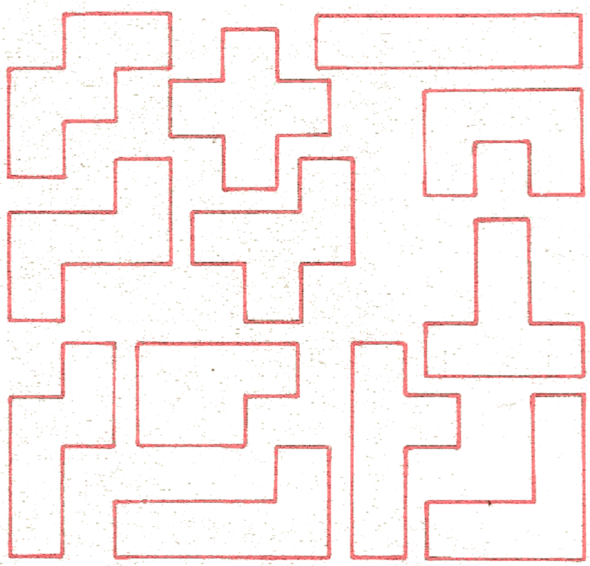
Für eine geeignete Folge von Turmzügen gilt: Die Felder der obigen Figur, auf denen der Turm nacheinander steht, tragen Silben, die in dieser Reihenfolge einen aus dem Mathematikunterricht der Klasse 6 bekannten Satz darstellen. Dabei darf der Turm niemals auf einem schraffierten Feld stehen und über ein solches hinwegspringen.

recht	der	senk				hen	eck	ste
	an	go	in	a	dem	di	je	
len	ein	na	auf		dra	die	vier	chen

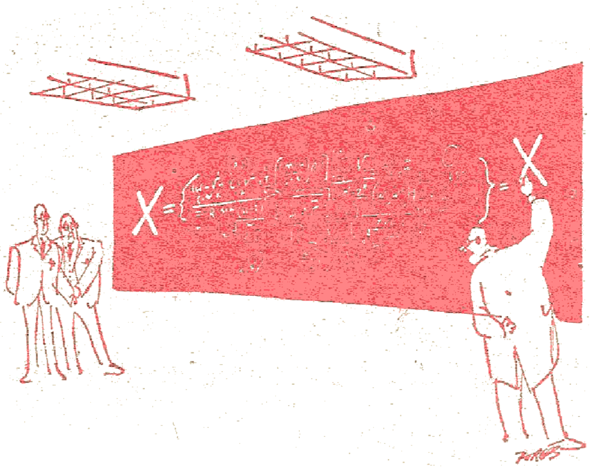
Lehrerin Irmgard Träger,
Dr.-Richard-Sorge-OS, Ebersbach

Legespiel

Zahlreiche Teilnehmer der XIV. Internationalen Mathematikolympiade kauften sich in Toruń ein Legespiel.
Die 12 Teile sind so zusammenzusetzen, daß ein Rechteck entsteht. Wer schafft's, einfach ist es nicht!



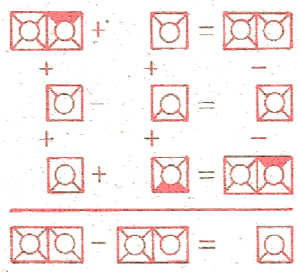
Studienrat J. Lehmann, V.L.d.V., Leipzig



„... und das bringt uns genau dorthin, von wo wir ausgegangen waren ..."

Eingesandt von Ing. H. Decker, Köln

Kryptarithmetik

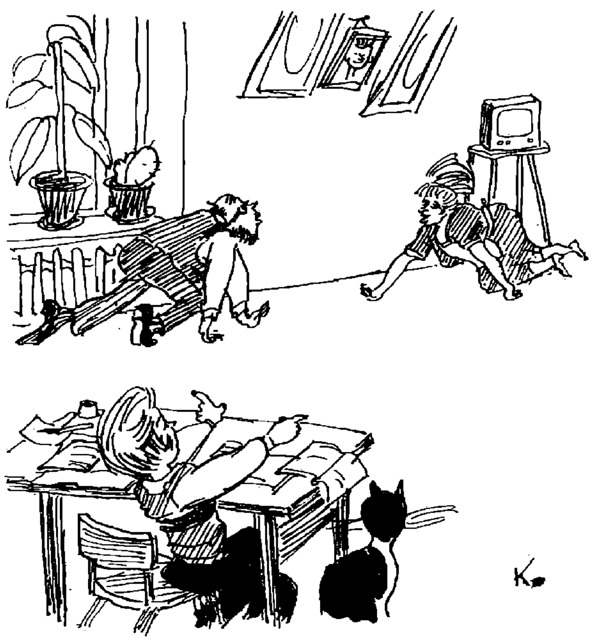


Udo Wilke, Wandlitzsee bei Berlin, Kl. 7

Romantiker

Auf Integralsuche ziehen wir aus
am Morgen.
Unsere Wohnungen sind
Quadratwurzeln. Den Durst
löschen wir aus den breiten Strömen
der Sinuskurven.
Abends,
nach bestandenen Differenzen mit
Drachenvierecken,
ist Tanz im schnellen Logarithmus.
Unser Ziel liegt dort,
wo die Parallelen verschmelzen;
bis dahin müssen sie
in Bewegung bleiben.

Iris Schilke, Oberschülerin (17 Jahre)
(2. Zentrales Poetenseminar der FDJ, Schwerin)



„Ich wiederhole die Aufgabe: Aus den Städten A und B fuhren sich zwei Züge entgegen ..."

Aminodow Kanjewski, Moskau

Aufgabe 1000

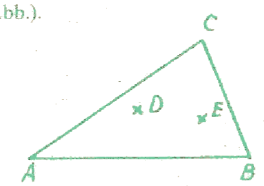
Eine Aufgabe der DDR-Mannschaft XIV. Internationale Mathematikolympiade

Letzter Einsendetermin: 5. März 1973

Wer entsprechend den Wettbewerbsbedingungen (siehe Seite 130) die nachfolgenden Aufgaben löst, erhält **zwei** Antwortkarten. Die elegantesten Einsendungen werden außerdem prämiert. Bei der nun folgenden Aufgabe, gegliedert nach Klassenstufe 5 bis 10/12, wünschen wir viel Erfolg!

W 5 ■ 1000
Ein spitzwinkliges Dreieck ABC soll in 3 Parallelogramme und 4 Dreiecke zerlegt werden.
(Die Konstruktion soll mit Hilfe eines Lineals und eines Zeichendreiecks ausgeführt werden.)

W 6 ■ 1000
Es seien ABC ein Dreieck und D und E zwei Punkte, die im Inneren dieses Dreiecks liegen und deren Verbindungsgerade nicht durch einen Eckpunkt dieses Dreiecks geht (vgl. die Abb.).



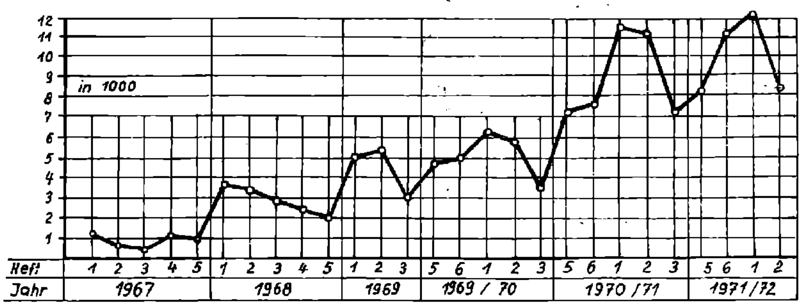
Es soll bewiesen werden, daß man dann stets zwei Eckpunkte des Dreiecks ABC so auswählen kann, daß diese zusammen mit den beiden inneren Punkten D und E ein konvexes Viereck bilden, d. h. ein Viereck, bei dem alle Innenwinkel kleiner als 180° sind. (Das konvexe Viereck ist zu zeichnen und durch Schraffur kenntlich zu machen.)

W 7 ■ 1000
Es sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $\overline{AB}$. Dieses Dreieck soll in 7 Rhomben und 8 gleichschenklige Dreiecke zerlegt werden.
(Die Zerlegung ist durch eine Zeichnung zu erläutern und zu begründen.)

W 8 ■ 1000
Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm, dessen Innenwinkel sämtlich von 90° verschieden sind, das also kein Rechteck ist.
Dieses Parallelogramm soll in 1972 gleichschenklige Dreiecke und 1971 gleichschenklige Trapeze zerlegt werden.
(Da es mühsam ist, 1972 gleichschenklige Dreiecke und 1971 gleichschenklige Trapeze zu zeichnen, ist die Konstruktion nicht auszuführen. Es ist nur das Verfahren der Konstruktion anzugeben und zu begründen, sowie durch eine (nicht maßstäbliche) Zeichnung zu erläutern.)

W 9 ■ 1000
Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Dieses Dreieck soll in 6 gleichschenklige Dreiecke zerlegt werden.
(Die Konstruktion ist auszuführen und zu begründen.)

W 10/12 ■ 1000
Man zeige, daß für $n \geq 4$ der folgende Satz gilt:
Jedes Viereck, für das ein Umkreis existiert, läßt sich in n Vierecke zerlegen, von denen jedes wieder einen Umkreis hat.
(Diese Aufgabe wurde bei der XIV. Internationalen Mathematikolympiade 1972 in Toruń, VR Polen, gestellt. Es empfiehlt sich, den Satz zunächst für $n=4$ zu beweisen, indem man das Sehnenviereck in zwei gleichschenklige Trapeze und zwei weitere Sehnenvierecke zerlegt, und dann den Beweis für $n>4$ zu führen.)



Wir stellen noch einmal die Mitglieder der DDR-Mannschaft, Teilnehmer der XIV. IMO vor — gezeichnet von *Prof. Dr. Leon Jeśmanowicz*, Sektion Mathematik der Copernicus-Universität Toruń — Stellv. Vorsitzender der Jury der XIV. IMO:
Pawel Kröger — Harald Englisch (Initiator der vorliegenden Aufgaben) — *Albrecht Heß — Olaf Böhme — Hans-Jürgen Fischer — Gerd Weißenborn — Rainer Siegmund-Schultze — Matthias Günther*

Bilanz 1972

Eingegangene Lösungen: 41 000
Verliehene Urkunden und Abzeichen: 2 300
(davon 300 in Gold) Übersandte Preise: 200
Auf weiterhin gute Zusammenarbeit!
Eure Redaktion *alpha*

Seit Gründung der Zeitschrift gingen über 150 000 Lösungen ein. Ebenso viele Antwortkarten erhielten ihre Einsender. Über die Hälfte aller Aufgaben stammten aus der Feder unserer Leser. In unermüdlicher Kleinarbeit wurden alle Aufgaben von Nationalpreisträger Oberstudienrat *Dr. R. Lüders* und Studienrat *Th. Scholl* (beide Berlin) bearbeitet und exakte Lösungen dazu formuliert. Dafür sagen wir all unseren Mitarbeitern herzlichen Dank und sprechen Anerkennung aus für die hervorragenden Leistungen. Unser Dank gilt aber auch den Korrektoren und dem Verlag Volk und Wissen, der die umfangreichen Geldmittel für den *alpha*-Wettbewerb bereitstellte.

Lösungen

W 10/12 ■ 878 Wir berechnen die Differenz der beiden Werte und erhalten

$V'-V$

$=\frac{\pi}{2}h(r_1^2+r_2^2)-\frac{\pi}{3}h(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)$

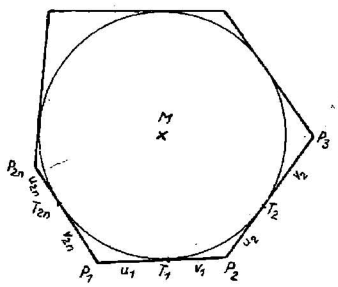
$=\frac{\pi}{6}h(3r_1^2+3r_2^2-2r_1^2-2r_1r_2-2r_2^2)$

$=\frac{\pi}{6}h(r_1^2-2r_1r_2+r_2^2)$

$=\frac{\pi}{6}h(r_1-r_2)^2.$

Nun ist nach Voraussetzung $r_1-r_2\neq 0$, also $(r_1-r_2)^2>0$. Daraus folgt $V'-V>0$, d. h., $V'>V$. Der Näherungswert V' ist also größer als der genaue Wert V.

* 10/12 * 880 Wir bezeichnen die Längen der Strecken, in die jede der Seiten des Vielecks durch die Berührungspunkte zerlegt wird, der Reihe nach mit u_1, v_1; u_2, v_2; ...; u_{2n}, v_{2n} (vgl. die Abb.).



Dann gilt

$$\begin{aligned} s_1 &= u_1+v_1,\\ s_2 &= u_2+v_2,\\ &\ldots\ldots\ldots,\\ s_{2n} &= u_{2n}+v_{2n}. \end{aligned} \qquad (1)$$

Ferner gilt, da die Abstände des Schnittpunktes zweier Tangenten eines Kreises von den Berührungspunkten gleich sind,

$$\begin{aligned} v_1 &= u_2,\\ v_2 &= u_3,\\ &\ldots\ldots,\\ v_{2n-1} &= u_{2n},\\ v_{2n} &= u_1. \end{aligned} \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$\begin{aligned} &s_1+s_3+s_5+\ldots+s_{2n-1}=(u_1+v_1)+(u_3+v_3)\\ &+(u_5+v_5)+\ldots+(u_{2n-1}+v_{2n-1})\\ &=v_{2n}+u_2+v_2+u_4+v_4+u_6+\ldots+v_{2n-2}+u_{2n}\\ &=(u_2+v_2)+(u_4+v_4)+\ldots+(u_{2n}+v_{2n})\\ &=s_2+s_4+\ldots+s_{2n}, \text{ w.z.b.w.} \end{aligned} \qquad (3)$$

Bemerkung:

Im speziellen Fall $2n=4$ erhalten wir ein Tangentenviereck, und es gilt $s_1+s_3=s_2+s_4$. Damit haben wir gleichzeitig den bekannten Satz bewiesen, wonach in jedem Tangentenviereck die Summen der Längen je zweier gegenüberliegender Seiten gleich sind.

5 ▲ 882 Zwei Gewichtsteile Zinn und drei Gewichtsteile Blei ergeben fünf Gewichtsteile Lötzinn. Aus $15:5=3$ folgt, daß $3\cdot 2\,\text{kg}=6\,\text{kg}$ Zinn und $3\cdot 3\,\text{kg}=9\,\text{kg}$ Blei zur Herstellung von 15 kg Lötzinn benötigt werden.

W 5 ■ 883 Wir rechnen $157-1=156$, $156:13=12$, $12:3=4$. Aus $x:13=4$ folgt dann $x=52$. Dem Leser fehlt die laufende Nummer 52 dieser Zeitschrift.

W 5 ■ 884 Da Doris Schülerin einer dritten Klasse ist, im Alter von sechs Jahren eingeschult und regelmäßig versetzt wurde, muß sie entweder 8 oder 9 Jahre alt sein.

Aus $8=1+7=2+6=3+5=4+4$ und $7-1=6\neq 4$, $6-2=4$, $5-3=2\neq 4$, $4-4=0\neq 4$ folgt, daß die Schwestern 2, 6 und 8 Jahre alt sind.

Aus $9=1+8=2+7=3+6=4+5$ und $8-1=7\neq 4$, $7-2=5\neq 4$, $6-3=3\neq 4$, $5-4=1\neq 4$ folgt, daß die obige Lösung die einzige ist.

* 5 * 885 Wir stellen einige der Ungleichungen so um, daß alle Ungleichungen das gleiche Relationszeichen enthalten.

1. $e<a$, 3. $e<c$, 5. $b<a$, 7. $a<c$,
2. $b<c$, 4. $d<e$, 6. $b<d$, 8. $d<a$.

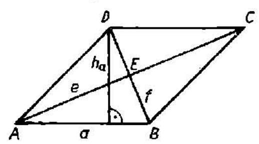
Aus der Verknüpfung der Ungleichungen unter 6., 4., 1. und 7. erhalten wir die fortlaufende Ungleichung $b<d<e<a<c$. Die Ungleichungen unter 2., 3., 5. und 8. werden zur Lösung nicht benötigt.

* 5 * 886 Es sei z_0 die Anzahl der Schüler, die keine Aufgabe lösten, und es seien z_1, z_2, z_3, z_4 die Anzahlen derjenigen, die genau eine, genau zwei, genau drei bzw. genau vier Aufgaben lösten. Dann beträgt die Anzahl der insgesamt gelösten Aufgaben $2\cdot 36=72$. Ferner gilt $z_2=72:3=24$. Aus $36-24=12$ folgt nun $z_0+z_1+z_3+z_4=12$. Wegen $z_0=z_4$ und $z_1=z_3=2\cdot z_4$ folgt daraus durch Einsetzen $z_4+2\cdot z_4+2\cdot z_4+z_4=12$ und damit $6\cdot z_4=12$, also $z_4=2$. Damit erhalten wir weiter $z_0=2$, $z_1=4$ und $z_3=4$.

Zwei Schüler lösten keine der vier Aufgaben, vier Schüler lösten genau eine, 24 Schüler genau zwei, vier genau drei und zwei genau vier Aufgaben.

6 ▲ 887 Für den Flächeninhalt eines Rhombus $ABCD$ gilt einmal $A=a\cdot h_a$, zum anderen

$A=\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{EB}+\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{ED}$



$=\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot(\overline{EB}+\overline{ED})=\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BD}=\frac{1}{2}\cdot e\cdot f.$

Daraus folgt $2a\cdot h_a=e\cdot f$.

W 6 ■ 888 Aus $54:2{,}7=20$ folgt, daß insgesamt 20 Fuhren verladen wurden. Angenommen, der zweite LKW habe während der Arbeitszeit x Fuhren verladen, dann kommen in der gleichen Zeit auf den ersten LKW $\frac{5}{3}$ x Fuhren und auf den dritten LKW $\frac{2}{3}$ x Fuhren. Aus $\frac{5}{3}x+x+\frac{2}{3}x=20$ folgt $\frac{10}{3}x=20$, also $x=6$.

Der erste LKW beförderte 10, der zweite 6 und der dritte 4 Fuhren. Die Baustellen erhielten somit 27 t, 16,2 t und 10,8 t Kies.

W 6 ■ 889 Es sei m die Anzahl der am Wettbewerb teilnehmenden Mädchen und j die der Jungen. Wegen $61-10=51$ gilt dann $k\cdot m=51$, wobei k eine natürliche Zahl ist. Aus $51=1\cdot 51=3\cdot 17=17\cdot 3=51\cdot 1$ folgt, daß m gleich 51, 17, 3 oder 1 sein kann. Wegen $j+m=61$ ist dann j gleich 10, 44, 58 oder 60. Nur im Falle $m=17$, $j=44$ gilt aber $j>2m$ und $j<3m$.

Am alpha-Wettbewerb beteiligten sich demnach regelmäßig 17 Mädchen und 44 Jungen aus diesen beiden Klassen.

* 6 * 890 Bei Division einer natürlichen Zahl durch 6 können die Reste 0, 1, 2, 3, 4 oder 5 auftreten.

Angenommen, p lasse bei Division durch 6 den Rest 2. Dann ist $p-2$ durch 6 teilbar, also eine gerade Zahl. Dann muß p selbst gerade sein, was nicht möglich ist.

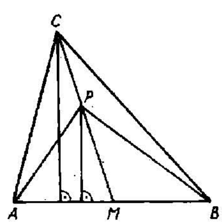
Angenommen, p lasse bei der Division durch 6 den Rest 3. Dann ist $p-3$ durch 6 und damit auch durch 3 teilbar. Dann muß p selbst durch 3 teilbar sein, was nicht möglich ist.

Angenommen, p lasse bei Division durch 6 den Rest 4. Dann ist $p-4$ durch 6 und damit auch durch 2 teilbar, also eine gerade Zahl. Dann muß p selbst gerade sein, was nicht möglich ist. Daraus folgt, daß jede Primzahl $p>3$ bei Division durch 6 entweder den Rest 1 oder den Rest 5 läßt.

Zum Beispiel läßt bei Division durch 6 die Primzahl 7 den Rest 1 und die Primzahl 11 den Rest 5.

* 6 * 891 Da die Dreiecke AMC und MBC und auch die Dreiecke AMP und MBP jeweils eine gleich lange Grundlinie und Höhe haben (vergl. d. Bild), gilt für ihre Flächeninhalte:

$A_{AMC}=A_{MBC}$ und $A_{AMP}=A_{MBP}$.

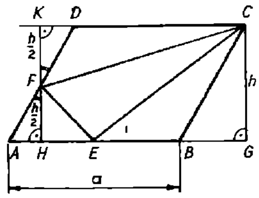


Daraus folgt
$A_{PCA}=A_{AMC}-A_{AMP}=A_{MBC}-A_{MBP}=A_{PBC}$, w.z.b.w.

7▲892 Wenn eine Zahl durch 36 teilbar ist, so ist sie auch durch 9 und durch 4 teilbar. Wegen $3+7=10$ und wegen der Teilbarkeit durch 9 gilt für die Quersumme der übrigen vier Ziffern entweder $2\cdot(x+y)=8$, also $x+y=4$, oder $2\cdot(x+y)=26$, also $x+y=13$. Wegen $x\neq 0$ erhalten wir für die aus den letzten beiden Ziffern gebildete Zahl, die durch 4 teilbar sein soll, folgende Möglichkeiten:
04, 13, 22, 31, 49, 58, 67, 76, 85, 94. Von diesen Zahlen sind nur 4 und 76 durch 4 teilbar. Es gibt genau zwei Zahlen, die die Bedingungen erfüllen, sie lauten 403 704 und 673 776.

W 7 ■ 893 Die zweistellige Zahl sei $z=10a+b$ mit $1\leqq a\leqq 9$ und $0\leqq b\leqq 9$. Wegen $40^2=1600>999$ gilt $a<4$. Quadratzahlen enden nur auf die Ziffern 0, 1, 4, 5, 6 oder 9. Daraus folgt wegen $a\neq 0$ somit auch $a\neq 2$ und $a\neq 3$, also $a=1$. Deshalb gilt $b=1$ oder $b=9$.
Es gibt also genau zwei Zahlen, die die gestellte Bedingung erfüllt, sie lauten 11 und 19, und es gilt $11^2=121$ und $19^2=361$.

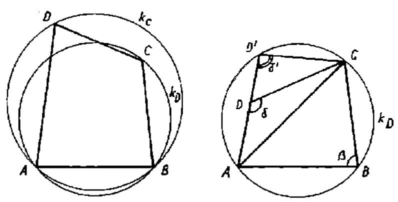
W 7 ■ 894 Wir fällen von C das Lot $\overline{CG}=h$ auf die Gerade AB und ziehen durch F die Parallele zur Geraden CG; sie schneide AB in H und CD in K. Für die Dreiecke $\triangle AHF$ und $\triangle DKF$ gilt $\overline{AF}=\overline{DF}$, $\sphericalangle AHF=\sphericalangle DKF=90°$ und $\sphericalangle AFH=\sphericalangle DFK$ (Scheitelwinkel); deshalb gilt
$\triangle AHF\cong\triangle DKF$
und somit auch $\overline{FH}=\overline{FK}=\frac{h}{2}$.
Für die Flächeninhalte gilt demnach
$A_{ABCD}=a\cdot h$, $A_{AEF}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{h}{2}=\frac{ah}{8}$,
$A_{EBC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot h=\frac{2ah}{8}$, $A_{CDF}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{h}{2}=\frac{2ah}{8}$.



Daraus folgt $A_{ECF}=A_{ABCD}-A_{AEF}-A_{EBC}-A_{CDF}$, also $A_{ECF}=\frac{8ah}{8}-\frac{ah}{8}-\frac{2ah}{8}-\frac{2ah}{8}$
$=\frac{3}{8}\cdot a\cdot h=\frac{3}{8}A_{ABCD}$.

*7*895 Da a und b natürliche Zahlen sind und $a>b$ ist, gilt $a-b\geqq 1$. Multiplizieren wir beide Seiten der Ungleichung mit $a-b$, so erhalten wir $a+b>ab(a-b)$. Wegen $a-b\geqq 1$ gilt dann auch $a+b>ab$ und wegen $a>b$ gilt $2a>ab$, also $b<2$, das heißt $b=1$. Für $b=1$ erhalten wir nach Belegung $\frac{a+1}{a-1}>a$. Durch entsprechende Umformungen ergibt sich daraus wegen $a-1\geqq 1$ somit $a+1>a^2-a$ bzw. $a^2-2a-1<0$. Addieren wir zu jeder Seite 2, so erhalten wir $a^2-2a+1<2$, also $(a-1)^2<2$. Nur die natürliche Zahl $a=2$ erfüllt diese Ungleichung. Es gibt genau eine Lösung, das geordnete Paar $(a, b)=(2, 1)$ erfüllt die gegebene Ungleichung unter den gestellten Voraussetzungen.

*7*896 Angenommen, es gäbe ein Viereck $ABCD$ mit $\alpha+\gamma=\beta+\delta=180°$, das kein Sehnenviereck ist. Aus den Winkelbeziehungen folgt zunächst $\alpha, \beta, \gamma, \delta<180°$. Die Diagonale $\overline{AC}$ zerlegt das Viereck $ABCD$ in zwei Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ACD$, die keine inneren Punkte gemeinsam haben. Da Viereck $ABCD$ kein Sehnenviereck ist, liegt D nicht auf dem durch die Punkte A, B und C gehenden Kreis k_D. Der Punkt D ist dann entweder innerer oder äußerer Punkt des Kreises k_D.
1. Fall: D sei innerer Punkt von k_D. Die Verlängerung von $\overline{AD}$ über D hinaus schneidet k_D dann in einem Punkt D'. Da Viereck $ABCD'$ ein Sehnenviereck ist, gilt $\beta+\delta'=180°$. Da laut Ausnahme auch $\beta+\delta=180°$ gilt, muß $\delta=\delta'$ sein. In diesem Falle stimmen die Dreiecke $\triangle ACD$ und $\triangle ACD'$ in zwei Winkeln und einer Seite überein, sind also kongruent. Damit müßte D' mit D zusammenfallen. Dies widerspricht der Annahme, daß D innerer Punkt von k_D ist. Also kann dieser Fall nicht eintreten.

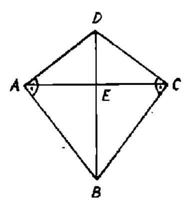


2. Fall: D sei äußerer Punkt von k_D. Dann liegt C im Innern des Kreises k_C, der durch die Punkte A, B und D geht. Bezeichnen wir nun D mit A, A mit B, B mit C, C mit D und k_D mit k_C, so läßt sich dieser Fall auf den ersten zurückführen. Also kann auch der zweite Fall nicht eintreten.
Da beide möglichen Fälle zum Widerspruch führen, ist der Satz wahr und bewiesen.

8▲897a) Das Volumen einer Platte von 1 m² Fläche und 50 mm Stärke beträgt
$V=1\cdot 0{,}05\ \mathrm{m}^3=0{,}05\ \mathrm{m}^3$,
die Masse beträgt
$m=6{,}3\ \mathrm{kg}=0{,}0063\ \mathrm{t}$.
Daher beträgt die Dichte
$\varrho=\frac{0{,}0063}{0{,}05}\ \mathrm{t}\cdot\mathrm{m}^3=0{,}126\ \mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}^{-3}$.
b) Wir erhalten die Masse der Platte von 15,40 m Länge
$m_1=15{,}40\cdot 1\cdot 0{,}08\cdot 0{,}126\ \mathrm{t}\approx 0{,}155\ \mathrm{t}$
$m_1\approx 155$ kp.

W 8 ■ 898 Da die Quersumme der Jahreszahl seines Geburtsjahres nicht größer als $1+8+9+9=27$ ist, ist der Mathematiker höchstens 27 Jahre alt und daher in diesem Jahrhundert geboren. Es sei nun $1900+10x+y$ das Geburtsjahr des Mathematikers, wobei x und y natürliche Zahlen mit $0\leqq x\leqq 9$ und $0\leqq y\leqq 9$ sind. Dann hat der Mathematiker das Alter $1+9+x+y$.
Wir erhalten daher die Gleichung
$(1900+10x+y)+(1+9+x+y)=1972$ (1)
Daraus folgt $1910+11x+2y=1972$,
$11x+2y=62$, (2)
$11x=62-2y$. (3)
Wegen $0\leqq y\leqq 9$ gilt $0\leqq 2y\leqq 18$,
also $44\leqq 11x\leqq 62$, d. h. $4\leqq x\leqq\frac{62}{11}$.
Da x eine natürliche Zahl ist, gilt also $x=4$ oder $x=5$.
Für $x=4$ erhalten wir aus (2)
$2y=62-11x=62-44=18$, also $y=9$.
Für $x=5$ erhalten wir $2y=62-55=7$, was nicht möglich ist, da y eine natürliche Zahl ist.
Daher hat die Gleichung (3) und damit auch die Gleichung (1) genau eine Lösung, die den gegebenen Bedingungen entspricht, nämlich $x=4$, $y=9$.
Das Geburtsjahr des Mathematikers ist daher 1949, sein Alter ist $1+9+4+9=23$ Jahre. Wir erhalten ferner $1949+23=1972$.

W 8 ■ 899 Da BD die Symmetrieachse des Drachenvierecks $ABCD$ ist, gilt $\overline{AE}=\overline{EC}=4$ cm, $\overline{AD}=\overline{CD}=5$ cm und $\sphericalangle DAB=\sphericalangle DCB=90°$. Ferner stehen die Diagonalen $\overline{BD}$ und $\overline{AC}$ aufeinander senkrecht. Wir können daher die Länge der Strecke $\overline{DE}$ nach dem Satz des Pythagoras aus dem rechtwinkligen Dreieck AED berechnen:
$\overline{DE}^2=\overline{AD}^2-\overline{AE}^2=25\ \mathrm{cm}^2-16\ \mathrm{cm}^2=9\ \mathrm{cm}^2$,
$\overline{DE}=3$ cm.
Nunmehr können wir nach dem Kathetensatz die Länge der Seite $\overline{BD}$ aus dem rechtwinkligen Dreieck ABD berechnen und erhalten
$\overline{AD}^2=\overline{DE}\cdot\overline{BD}$,
also $\overline{BD}=\frac{\overline{AD}^2}{\overline{DE}}=\frac{25}{3}\ \mathrm{cm}=8\frac{1}{3}$ cm.



Die gesuchte Länge der Diagonale $\overline{BD}$ beträgt also $8\frac{1}{3}$ cm.

*8*900 Es sei a die Maßzahl der Länge (in km) der von dem Schiff zurückgelegten Strecke. Ferner sei x die Maßzahl der Zeit (in Stunden), die das Schiff benötigt, um eine Strecke von a km Länge in einem ruhenden Gewässer zurückzulegen, und y die Maßzahl der Zeit, in der die Strömung des Flusses – also auch ein Floß auf diesem Fluß – eine Strecke von a km zurücklegt.

Dann ist die Geschwindigkeit des Schiffes in einem ruhenden Gewässer gleich $\frac{a}{x}\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ und die Geschwindigkeit der Strömung gleich $\frac{a}{y}\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. Für die Fahrt stromabwärts benötigt das Schiff $3h$, seine Geschwindigkeit beträgt also $\frac{a}{3}\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. Diese Geschwindigkeit erhalten wir aber auch, wenn wir die Geschwindigkeit des Schiffes in einem ruhenden Gewässer und die Geschwindigkeit der Strömung addieren.

Es gilt also $\frac{a}{x}+\frac{a}{y}=\frac{a}{3}$. (1)

Nun erhalten wir die Geschwindigkeit des Schiffes bei der Fahrt stromaufwärts durch Subtraktion von $\frac{a}{x}$ und $\frac{a}{y}$: $\frac{a}{x}-\frac{a}{y}=\frac{a}{4}$. (2)

Hieraus erhalten wir weiter durch Addition

$$\frac{2a}{x}=\frac{a}{3}+\frac{a}{4},\quad \frac{2a}{x}=\frac{7a}{12}$$

und hieraus wegen $a\neq 0$

$$\frac{2}{x}=\frac{7}{12},\quad x=\frac{24}{7}.$$

Ferner erhalten wir durch Subtraktion aus (1) und (2)

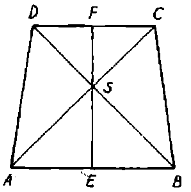
$$\frac{2a}{y}=\frac{a}{3}-\frac{a}{4},\ \text{also}\ \frac{2}{y}=\frac{1}{12},\ y=24.$$

Das Schiff benötigt also für eine gleichlange Strecke in einem ruhenden Gewässer

$$\frac{24}{7}\,\mathrm{h}=3\frac{3}{7}\,\mathrm{h}\approx 3\,\mathrm{h}\ 26\,\mathrm{min}.$$

Ein Floß, das stromabwärts treibt, würde eine gleichlange Strecke in 24 h zurücklegen.

*8*901 1. Es sei $ABCD$ ein gleichschenkliges Trapez mit $\overline{AD}=\overline{BC}$, in dem die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ aufeinander senkrecht stehen. Ferner seien S der Schnittpunkt der Diagonalen und E bzw. F die Projektionen von S auf $\overline{AB}$ bzw. $\overline{CD}$ (vgl. die Abb.).



Dann gilt $\sphericalangle AES=90°$ und, da EF die Symmetrieachse des Trapezes ist, $\sphericalangle ESA=45°$, also auch $\sphericalangle SAE=45°$. Daraus folgt $\overline{AE}=\overline{ES}$. Analog beweist man, daß auch $\overline{DF}=\overline{FS}$ gilt. Daher gilt

$$\overline{EF}=\overline{ES}+\overline{FS}=\overline{AE}+\overline{DE}=\frac{\overline{AB}}{2}+\frac{\overline{CD}}{2}=\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}.$$

Damit haben wir bewiesen, daß die Höhe $\overline{EF}$ ebenso lang wie die Mittellinie ist.

2. Es sei $ABCD$ ein gleichschenkliges Trapez mit $\overline{AD}=\overline{BC}$, in dem die Höhe ebenso lang wie die Mittellinie ist, in dem also

$$\overline{EF}=\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}=\overline{AE}+\overline{DF}\ \text{gilt.} \qquad (1)$$

Da EF die Symmetrieachse des gleichschenkligen Trapezes ist, gilt

$$\sphericalangle AES=\sphericalangle SFD=90°,$$
$$\sphericalangle ESA=\sphericalangle FSC=\sphericalangle DSF,$$

also $\triangle AES\sim\triangle FDS$. Daraus folgt

$$\overline{ES}:\overline{FS}=\overline{AE}:\overline{DF},$$
$$\overline{ES}=\frac{\overline{AE}\cdot\overline{FS}}{\overline{DF}}. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) erhalten wir daher

$$\overline{ES}+\overline{FS}=\overline{EF}=\overline{AE}+\overline{DF},$$
$$\frac{\overline{AE}\cdot\overline{FS}}{\overline{DF}}+\overline{FS}=\overline{AE}+\overline{DF},$$
$$\frac{\overline{FS}(\overline{AE}+\overline{DF})}{\overline{DF}}=\overline{AE}+\overline{DF},$$
$$\overline{FS}=\overline{DF}.$$

Also ist das rechtwinklige Dreieck SFD gleichschenklig, und es gilt

$$\sphericalangle FDS=\sphericalangle DSF=45°$$

Ferner ist aus Symmetriegründen auch $\sphericalangle FSC=45°$, also $\sphericalangle DSC=90°$, d. h., die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ stehen aufeinander senkrecht, w. z. b. w.

Bemerkung: Wir können die unter 1 und 2 bewiesenen Aussagen auch wie folgt zusammenfassen:

In jedem gleichschenkligen Trapez stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht genau dann, wenn die Höhe des Trapezes ebenso lang wie seine Mittellinie ist.

9▲902 Es ist zweckmäßig, zur Lösung dieser Aufgabe zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: n ist eine ungerade natürliche Zahl, also $n=2a+1$, wobei a eine natürliche Zahl mit $a\geqq 1$ ist. Dann ist auch

$$n^2=(2a+1)^2=4a^2+4a+1=2(2a^2+2a)+1$$
$$=2k+1$$

eine ungerade natürliche Zahl.

Nun gilt für jede natürliche Zahl k

$$(k+1)^2-k^2=k^2+2k+1-k^2=2k+1.$$

Wir erhalten daher

$$n^2=2k+1=2(2a^2+2a)+1$$
$$=(2a^2+2a+1)^2-(2a^2+2a)^2,$$

d. h., wir können das Quadrat einer jeden ungeraden natürlichen Zahl $n=2a+1$ mit $a\geqq 1$ als die Differenz der Quadrate der von Null verschiedenen Zahlen $2a^2+2a+1$ und $2a^2+2a$ darstellen. Zum Beispiel erhalten wir für

$a=1$: $3^2=5^2-4^2$,
$a=2$: $5^2=13^2-12^2$,
$a=3$: $7^2=25^2-24^2$.

2. Fall: n ist eine gerade natürliche Zahl, also $n=2a$, wobei a eine natürliche Zahl mit $a>1$ ist. Nun gilt für alle natürlichen Zahlen a

$$(a^2+1)^2-(a^2-1)^2=a^4+2a^2+1-a^4+2a^2+1=4a^2,$$

also $(2a)^2=(a^2+1)^2-(a^2-1)^2$,

d. h., das Quadrat einer jeden geraden natürlichen Zahl $2a$ mit $a>1$ läßt sich als Differenz der Quadrate der von Null verschiedenen natürlichen Zahlen a^2+1 und a^2-1 darstellen, w. z. b. w., z. B. erhalten wir für

$a=2$: $4^2=5^2-3^2$,
$a=3$: $6^2=10^2-8^2$,
$a=4$: $8^2=17^2-15^2$.

W 9 ■ 903 Es sei x eine reelle Zahl, für die die gestellten Bedingungen erfüllt sind. Nun gilt

$$f_1[f_2(x)]=f_1[5x+2]=4(5x+2)^2-1{,}3$$
$$=4(25x^2+20x+4)-1{,}3$$
$$=100x^2+80x+14{,}7. \qquad (1)$$

Ferner gilt

$$f_2[f_1(x)]=f_2[4x^2-1{,}3]=5(4x^2-1{,}3)+2$$
$$=20x^2-4{,}5. \qquad (2)$$

Wegen $f_1[f_2(x)]=f_2[f_1(x)]$ folgt aus (1) und (2) $100x^2+80x+14{,}7=20x^2-4{,}5$, (3)

$$80x^2+80x+19{,}2=0,$$
$$x^2+x+0{,}24\ =0. \qquad (4)$$

Diese quadratische Gleichung hat genau zwei reelle Lösungen, nämlich

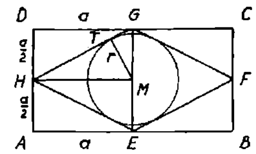
$$x_1=-0{,}5+\sqrt{0{,}25-0{,}24}=-0{,}5+\sqrt{0{,}01}$$
$$=-0{,}5+0{,}1=-0{,}4,$$
$$x_2=-0{,}5-0{,}1=-0{,}6.$$

Daher sind für die reellen Zahlen $x_1=-0{,}4$ und $x_2=-0{,}6$ und nur für diese die Gleichung (4), also auch die Gleichung (3) und damit die gestellten Bedingungen erfüllt.

Es gibt also genau zwei reelle Zahlen, nämlich $x=-0{,}4$ und $x=-0{,}6$, für die $f_1[f_2(x)]=f_2[f_1(x)]$ gilt.

W 9 ■ 904 Es sei M der Mittelpunkt des Rechtecks $ABCD$, und es sei $\overline{MT}$ das von M auf die Seite $\overline{GH}$ des Rhombus $EFGH$ gefällte Lot (vgl. die Abb.). Dann ist $\overline{MT}=r$ der Radius des dem Rhombus eingeschriebenen Kreises. Man kann diesen Radius leicht berechnen; denn der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks HMG ist einerseits gleich

$$A_1=\frac{1}{2}a\cdot\frac{a}{2}=\frac{a^2}{4},$$



andererseits, wenn wir die Seite $\overline{GH}$ als Grundseite wählen, gleich

$$A_1=\frac{1}{2}\overline{GH}\cdot\overline{MT}=\frac{1}{2}\overline{GH}\cdot r.$$

Nun gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$\overline{GH}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{4}a^2}=\frac{a}{2}\sqrt{5}.$$

Wir erhalten daher

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{5}\cdot r=\frac{a^2}{4},\quad \sqrt{5}\cdot r=a,$$
$$r=\frac{a}{\sqrt{5}}=\frac{a}{5}\sqrt{5}.$$

Der Radius des eingeschriebenen Kreises ist daher gleich $r=\frac{a}{5}\sqrt{5}$; der Flächeninhalt dieses Kreises beträgt

$$A_2=\pi r^2=\pi\left(\frac{a}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{\pi}{5}a^2.$$

*9*905 Es seien F und G die Schnittpunkte der Geraden ED mit den Geraden AC bzw. BC. Ferner sei $\sphericalangle BCA=\alpha$. Dann ist, weil die Dreiecke ABC, EAC und CBD nach Voraussetzung kongruent sind, auch $\sphericalangle ACE$

$=\sphericalangle DCB=\sphericalangle BCA=\alpha$, also $\sphericalangle DCE=3\alpha$. Wegen $\alpha<60°$ ist $3\alpha<180°$. Daher ist das Fünfeck $CEABD$ konvex, und die Punkte F und G sind innere Punkte dieses Fünfecks. Ferner gilt

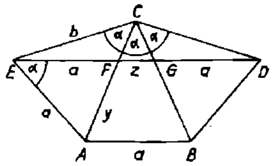
$$\sphericalangle CEA=\sphericalangle EAC=90°-\frac{\alpha}{2} \text{ und}$$

$$\sphericalangle CED=90°-\frac{3}{2}\alpha,$$

also $\sphericalangle FEA=\left(90°-\frac{\alpha}{2}\right)-\left(90°-\frac{3}{2}\alpha\right)=\alpha.$

Nun ist $\sphericalangle AFE$ Außenwinkel des Dreiecks CEF; es gilt also

$$\sphericalangle AFE=\alpha+90°-\frac{3}{2}\alpha=90°-\frac{\alpha}{2}=\sphericalangle EAF.$$



Daher ist auch das Dreieck EAF gleichschenklig, und wir erhalten $\overline{EF}=\overline{EA}=a$. Andererseits gilt $\triangle EAF\sim\triangle CEA$.

Wir erhalten also, wenn wir $\overline{AF}=y$ setzen,

$$y:a=a:b,$$

$$y=\frac{a^2}{b}.$$

Setzen wir ferner $\overline{FG}=z$, so erhalten wir wegen $FG\parallel AB$ nach dem Strahlensatz

$$z:a=(b-y):b,$$

$$z=\frac{a(b-y)}{b}=\frac{a\left(b-\frac{a^2}{b}\right)}{b}=\frac{a(b^2-a^2)}{b^2}.$$

Nun gilt $\overline{EF}=\overline{GD}=a$, also

$$\overline{ED}=\overline{EF}+\overline{FG}+\overline{GD}=2a+z$$

$$=2a+\frac{a(b^2-a^2)}{b^2}=\frac{2ab^2+ab^2-a^3}{b^2}$$

$$=\frac{3ab^2-a^3}{b^2}, \text{ also } \overline{ED}=\frac{a(3b^2-a^2)}{b^2}.$$

Bemerkung: Wir haben diese Aufgabe auf elementargeometrischem Wege gelöst. Wir können die Aufgabe aber auch mit Hilfe der Trigonometrie lösen. Für eine solche Lösung, die etwas komplizierter ist, benötigen wir die Formel für $\cos 3\alpha$ und den Kosinussatz der ebenen Trigonometrie. Wir erhalten nämlich, wenn wir dieselben Bezeichnungen wie oben wählen,

$$\overline{ED}^2=b^2+b^2-2b^2\cos 3\alpha=2b^2(1-\cos 3\alpha).$$

Nun gilt

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{a}{2b},\quad \cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\frac{a^2}{2b^2}, \text{ also}$$

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$=4\left(1-\frac{a^2}{2b^2}\right)^3-3\left(1-\frac{a^2}{2b^2}\right)$$

$$=4\left(1-\frac{3a^2}{2b^2}+\frac{3a^4}{4b^4}-\frac{a^6}{8b^6}\right)-3+\frac{3a^2}{2b^2}$$

$$=1-\frac{9a^2}{2b^2}+\frac{3a^4}{b^4}-\frac{a^6}{2b^6}. \text{ Daraus folgt}$$

$$\overline{ED}^2=2b^2(1-\cos 3\alpha)$$

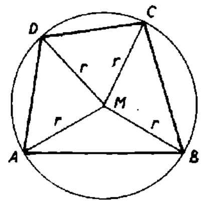
$$=2b^2\left(\frac{9a^2}{2b^2}-\frac{3a^4}{b^4}+\frac{a^6}{2b^6}\right)$$

$$=a^2\left(9-\frac{6a^2}{b^2}+\frac{a^4}{b^4}\right)=a^2\left(3-\frac{a^2}{b^2}\right)^2$$

und hieraus wegen $3b^2>a^2$

$$\overline{ED}=a\left(3-\frac{a^2}{b^2}\right)=\frac{a(3b^2-a^2)}{b^2} \text{ wie oben.}$$

* 9 * 906 Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck, dessen Umkreis den Mittelpunkt M und den Radius r hat (vgl. die Abb.).



Dann gilt für den Flächeninhalt dieses Sehnenvierecks

$$A=A_1+A_2+A_3+A_4,$$

wobei A_1, A_2, A_3, A_4 die Flächeninhalte der Dreiecke MAB, MBC, MCD, MDA sind. Ist h_a die Länge der von A ausgehenden Höhe in dem Dreieck BMA, so gilt

$$A_1=\frac{1}{2}r\,h_a;$$

denn wenn wir die Seite $\overline{MB}$ als Grundseite wählen, ist der Flächeninhalt dieses Dreiecks gleich dem halben Produkt aus der Länge r der Grundseite und der Länge h_a der zugehörigen Höhe. Nun ist aber $h_a\leqq r$; denn in jedem Dreieck ist eine Höhe kleiner als jede der ihr anliegenden Seiten. Wir erhalten daher

$$A_1\leqq\frac{1}{2}r^2.$$

Analog erhalten wir die Ungleichungen

$A_2\leqq\frac{1}{2}r^2$, $A_3\leqq\frac{1}{2}r^2$, $A_4\leqq\frac{1}{2}r^2$. Daher gilt

$$A=A_1+A_2+A_3+A_4$$

$$\leqq\frac{1}{2}(r^2+r^2+r^2+r^2)=2r^2, \text{ w.z.b.w.}$$

Bemerkung: Wir können den Beweis auch trigonometrisch führen. Wir erhalten nämlich

$$A_1=\frac{1}{2}r^2\sin\varphi_1\leqq\frac{1}{2}r^2, \text{ wobei}$$

$$\varphi=\sphericalangle BMA \text{ und } \sin\varphi_1\leqq 1 \text{ gilt.}$$

Wie oben erhalten wir dann weiter die Ungleichungen

$$A_2\leqq\frac{1}{2}r^2,\ A_3\leqq\frac{1}{2}r^2,\ A_4\leqq\frac{1}{2}r^2$$

und hieraus

$$A=A_1+A_2+A_3+A_4\leqq 2r^2.$$

10 ▲ 907 Die Ungleichung (3) ist noch richtig: $n\lg q>(n+1)\lg q$.

Dabei ist aber $\lg q$ negativ, weil $0<q<1$ gilt. Nach dem Monotoniegesetz der Multiplikation für Ungleichungen ist aber, wenn man auf den beiden Seiten einer Ungleichung mit der gleichen negativen Zahl $\left(\text{hier } \frac{1}{\lg q}\right)$ multipliziert, das Zeichen $>$ durch das Zeichen $<$ zu ersetzen, was bei der falschen Schlußweise oben nicht beachtet worden ist. Daher ergab sich die falsche Ungleichung $n>n+1$. Richtig folgt aus der Ungleichung (3)

$$n<n+1.$$

W 10 ■ 908 Es gilt

$$z=10^{1971}+1=10^{657\cdot 3}+1$$

$$=(10^{657})^3+1^3.$$

Nun gilt für alle reellen Zahlen a und b (vgl. Tafelwerk, 7.–12. Klasse, S. 57)

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2).$$

Wir setzen $a=10^{657}$, $b=1$ und erhalten hieraus

$$z=(10^{657}+1)(10^{657\cdot 2}-10^{657}+1).$$

In dieser Zerlegung sind beide Faktoren ganzzahlig und größer als 1; daher ist z keine Primzahl, w.z.b.w.

W 10 ■ 909 Es sei $\overline{AC}=x$, $\overline{CB}=y$, $\overline{CD}=z$. Dann ist der Flächeninhalt des Kreises mit $\overline{CD}$ als Durchmesser (vgl. die Abb.) gleich

$$A_1=\frac{\pi}{4}z^2. \tag{1}$$

Ferner sind die Flächeninhalte der Halbkreise über $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BC}$ gleich

$$A_2=\frac{\pi}{8}(x+y)^2,\quad A_3=\frac{\pi}{8}x^2,\quad A_4=\frac{\pi}{8}y^2. \tag{2}$$

Daher ist der Flächeninhalt der in der Abbildung waagrecht schraffierten, durch die drei Halbkreisbogen begrenzten Figur gleich

$$A_5=A_2-A_3-A_4=\frac{\pi}{8}(x+y)^2-\frac{\pi}{8}x^2-\frac{\pi}{8}y^2$$

$$=\frac{\pi}{8}(x^2+2xy+y^2-x^2-y^2)$$

$$=\frac{\pi}{8}\cdot 2xy=\frac{\pi}{4}xy. \tag{3}$$

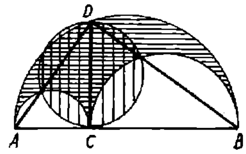
Nun ist nach dem Thalessatz das Dreieck ABD rechtwinklig; daher gilt nach dem Höhensatz

$$z^2=xy.$$

Wir erhalten daher wegen (1) und (3)

$$A_1=\frac{\pi}{4}z^2=\frac{\pi}{4}xy=A_5. \tag{4}$$

Der Flächeninhalt des senkrecht schraffierten Kreises mit $\overline{CD}$ als Durchmesser ist also gleich dem Flächeninhalt der in der Abbildung waagrecht schraffierten Figur, die durch die drei Halbkreisbogen begrenzt ist.



* 10 * 910 Es sei x eine natürliche Zahl von der geforderten Eigenschaft; dann gilt

$$x^2=864n=2^5\cdot 3^3\cdot n,$$

wobei n eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist. x^2 ist also teilbar durch 2^5 und 3^3; daher ist x teilbar durch 2^3 und 3^2, also, da 2 und 3 teilerfremd sind, durch $2^3\cdot 3^2=72$. x ist also ein Vielfaches von 72; es gilt daher $x=72\,m$, wobei m wegen $x\neq 0$ eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist. Andererseits gilt für jede natürliche Zahl $x=72m$

$$x^2=(72m)^2=72^2m^2=72\cdot 12\cdot 6m^2$$

$$=864\cdot 6m^2, \text{ d. h.}$$

x^2 ist ein Vielfaches von 864.

Daher haben alle natürlichen Zahlen, die von Null verschieden, Vielfache von 72 und kleiner als 864 sind, und nur diese Zahlen, die geforderte Eigenschaft, also genau die Zahlen 72, 144, 216, 288, 360, 432, 504, 576, 648, 720, 792.

Lösungen zu
Mit Zirkel und Zeichendreieck (5/72)

Figur 1: Quadratfläche Rosette
Verhältnis $1:(\pi-2)$
Figur 2: Quadratfläche vier Möndchen
Verhältnis 1:1
Figur 3: Quadratfläche zwei Möndchen
Verhältnis 2:1
Figur 4: Schraffierte Fläche $A=r^2\,(4-\pi)$
Figur 5: Die schraffierte Fläche beträgt die Hälfte des großen Quadrats
Figur 6: Die schraffierte Fläche beträgt $2r^2$ bzw. die Hälfte der Quadratfläche

Lösungen zu alpha-heiter (Heft 6/72)

Magischer Würfel

Die Summe der vier Zahlen in den Ecken eines jeden Seitenquadrates des Würfels sei s. Zwei einander gegenüberliegende Quadrate enthalten alle acht Zahlen, also ist $2s$ gleich der Summe der Zahlen von 1 bis 8:
$2s=36$ $s=18$.
Wir ordnen ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit der Würfelecke rechts oben vorn die Zahl 1 zu. Von diesem Punkt gehen drei Kanten aus nach drei Punkten mit den Zahlen a, b, c (Bild 1).
Werden die Quadrate, von außen gesehen, rechtsherum umlaufen, so erhalten wir geordnete Zahlenfolgen, wobei jeweils die dritte Zahl durch einen Punkt angedeutet wird.
Oberes Quadrat $1a\cdot b$
Vorderes Quadrat $1b\cdot c$
Seitliches Quadrat $1c\cdot a$
Wir erkennen, daß die drei Folgen paarweise gekoppelt sind durch die Zahlen a, b, c. Nunmehr stellen wir mit vier Zahlen alle Kombinationen auf, die die Zahl 1 enthalten und die Summe $s=18$ haben.
I. 1278 II. 1368 III. 1458 IV. 1467
Mit je drei von ihnen bilden wir geordnete Zahlenfolgen nach dem obigen Schema.
II 1638 I 1728 I 1728
III 1854 III 1854 II 1836
IV 1476 IV 1467 IV 1647
Die Zahlenkombinationen I, II, II lassen sich nicht koppeln; sie enthalten schon alle acht Zahlen.
Es gibt somit drei verschiedene Zuordnungen der Zahlen 1 bis 8 auf die Ecken eines Würfels derart, daß die Summe der vier Zahlen in den Ecken eines jeden Seitenquadrats 18 ist. (Bild 2, 3, 4)

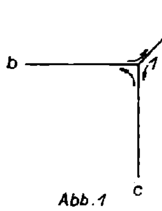


Abb. 1

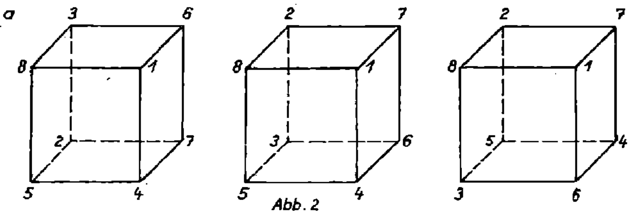
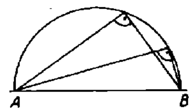


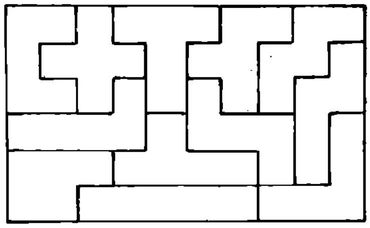
Abb. 2

Aus der Zeit des Adam Ries

A. Ries hatte in der Zwischenzeit längst den Thaleskreis über $\overline{AB}$ geschlagen und konnte so mit großer Geschwindigkeit einen rechten Winkel nach dem anderen zeichnen.
A. Ries hatte also – statt des Zirkels am Hut – die Konstruktionen im Kopf.



Legespiel



Turmsprung

In jedem Drachenviereck stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht.

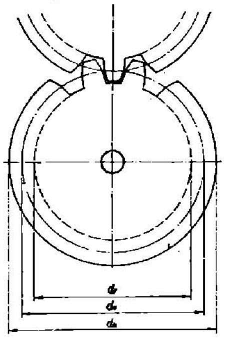
Kryptarithmetik

10	+	5	=	15
÷		+		−
5	−	4	=	1
÷		+		−
4	+	6	=	10
19	−	15	=	4

Vero Construc

für die Schöpfer der Welt von morgen

Skizze zur Ausbildung eines Zahnrades



Teilnehmer des alpha-Clubs der 29. OS Leipzig beim Bau von Modellen nach eigener Fantasie.

Wir Erwachsenen haben als 10- und 12jährige mit dem Metall-Konstruktionsbaukasten gespielt, mit Lochstäben, Schrauben, Muttern, Schraubenziehern, Mutternschlüsseln. Heute jonglieren die 10- bis 12jährigen schon mit ganz anderen Begriffen herum: Schaltung, Relais, Transistor; und schon die Dreikäsehochs, die noch nicht zur Schule gehen, wollen nicht mehr nur Bauklötzchen auf Bauklötzchen legen, sie wollen schon an Vatis Werkzeugschrank, wollen konstruieren und erfinden.

Für diese Jungen Techniker wurde in den 60er Jahren in einer Seiffener Spielzeugentwicklungsstelle das „bau-mit"-System entwickelt, eine Vorstufe des Vero-Construc. In den guten alten Bauklotzwürfel wurden Gewindelöcher gebohrt, er wurde zum Knotenstück. Dazu kamen Leisten mit Löchern, große Schrauben und Muttern, den aus z. T. farbig gebeiztem Buchenholz. Bald merkten die Spielzeuggestalter, daß sich aus dem System viel mehr machen ließ, daß es sich schnell nach allen Regeln der Technik ausbauen ließ.

Beim Würfel fing es wieder an. Aus seiner Kantenlänge ergab sich der Grundraster, sie war bisher 30 mm. 30 war aber keine Vorzugszahl, beim Raster 30 würden viele Rechenexempel nicht aufgehen, z. B. wenn einmal Zahnräder entwickelt werden. Es müßte ein 32er Würfel sein, das ging aber aus produktionstechnischen Gründen nicht. Schweren Herzens blieb man beim Raster 30. Kantenlänge des Würfels und Lochabstand bei den Lochleisten waren die Bezugspunkte.

VC 100 und VC 200 erschienen in den Spielzeuggeschäften – Baukästen mit Gewindewürfeln, – Quadern und Lochleisten aus gebleichtem Buchenholz, Schrauben, Muttern, Gewindestäben, Felgen, Bereifung aus farbenfreudigen Plasten. Dann kamen also die Zahnräder.

Wenn Kinder elementare, mechanische Funktionen kennenlernen sollten, kam man um Zahnräder nicht herum. Übersetzung und Untersetzung sollten veranschaulicht werden, die Zahnradgrößen mußten so abgestuft sein, daß sich die Veränderung der Drehbewegung entsprechend der Größe des Zahnrades klar erkennen läßt. Drei Zahnräder sollten es deshalb sein, die große Toleranzen zulassen, denn für diesen Baukasten mit seinen vielen Holzteilen waren große Passungen notwendig.

Es kam nur ein großer Modul (Zahnteilung) in Frage, große Zähne, die ihren Zweck erfüllten, auch wenn die Toleranz der Achsabstände ± 1 mm betrug. Verschiedene Forderungen mußten also in Einklang gebracht werden. Auf dem 30er Raster wurden 3 verschieden große sich berührende Kreise gefunden, die Teilkreise (d_0 [d Null]) der Zahnräder, die sich durch den geforderten Modul 6 (m 6) teilen lassen. $m\,6 = 6 \cdot \pi = 18{,}84$ mm von Zahnmitte zu Zahnmitte auf den Teilkreis bezogen.

Die Teilkreise sind: ⌀36, ⌀78, ⌀96 mm

Die Zähnezahl (Z) wird errechnet: $Z = \frac{d_0}{m}$

Beispiel: Rad 2 = 78 : 6 = 13 Zähne

Den Modul 6 auf ⌀36 (Rad 1) anzuwenden, unterschreitet die Grenze des technisch Möglichen. Es wird ein sogenanntes korrigiertes Zahnrad verwendet, bei dessen Berechnung noch andere Grundsätze beachtet werden müssen. Es kann deshalb für unser Rechenexempel nur als theoretisches Beispiel dienen. Ergebnisse: Rad 1 = 6; Rad 2 = 13; Rad 3 = 16 Zähne

Nach diesen Ergebnissen wurden die Kopfkreise (d_k) und die Fußkreise (d_f) ermittelt, die die Begrenzung der Zähne nach oben und unten angeben:

$$d_k = (Z + 2) \cdot m$$
$$d_f = (Z - 2{,}5) \cdot m$$

Beispiel:

$d_k\,1 = (6 + 2) \cdot 6 = 8 \cdot 6 = 48$ mm

$d_f\,1 = (6 - 2{,}5) \cdot 6 = 3{,}5 \cdot 6 = 21$ mm

Die Durchmesser des 1. Zahnrades müßten also sein:

$d_0 = 36$ mm; $d_k = 48$ mm; $d_f = 21$ mm

Mit Rücksicht auf die großen Toleranzen des Systems mußten die Ergebnisse jedoch etwas abgewandelt werden.

VC 300 heißt der Kasten mit den bunten Zahnrädern.

Mit dem Motor VC 400 und dem dazugehörigen Batteriekasten werden alle Construc-Modelle zum Leben erweckt. Die vorgegebene Form des Motorgehäuses, abgeleitet aus dem Raster, war $30 \times 30 \times 120$ mm. Aus dem Innenquerschnitt 27 mm ergab sich die maximale Größe des Motors, in Frage kam ein Motor – für 4,5 V Batterie – mit dem Durchmesser 27 mm, der Leistung von 14 cm p bei 2400 U/min. Die Aufgabe bestand nun darin, in dem noch verbliebenen Gehäuseraum von 39 mm × 27 mm × 27 mm (Motorritzel – Mitte bis Ausgang – Mitte) ein Getriebe unterzubringen, das 2400 U/min auf ca. 100 U/min reduziert. Das wurde so erreicht:

1. Das Motorritzel mit der Zähnezahl Z 10 überträgt 2400 U/min auf ein Tellerrad mit Z 36.

$$36 : 10 = 3{,}6$$
$$2400 : 3{,}6 = 667 \text{ U/min}$$

2. Das Tellerrad hat 667 U/min. Am Tellerrad ist ein Ritzel Z 10 befestigt, das also ebenfalls 667 U/min hat. Das Ritzel überträgt die Bewegung auf das 1. Stirnrad Z 38.

$$38 : 10 = 3{,}8$$
$$667 : 3{,}8 = 175 \approx 180 \text{ U/min}$$

3. Am 1. Stirnrad ist das 2. Stirnrad Z 16 befestigt, das die Bewegung (180 U/min) auf das 3. Stirnrad Z 30 überträgt.

$$30 : 16 = 1{,}8$$
$$180 : 1{,}8 = 100 \text{ U/min}$$

Die Kraftübertragung mußte so gewählt werden, daß bei Anschluß der Plastezahnräder VC 300 an den fertigen Motor keine Gefahren durch Einklemmen entstehen. Wenn also ein Finger oder Hemdzipfel zwischen die bunten, rotierenden Zahnräder gerät, hält der Motor sofort an. Trotzdem ist er stark genug, die verschiedensten Maschinen aus Construc-Teilen anzutreiben.

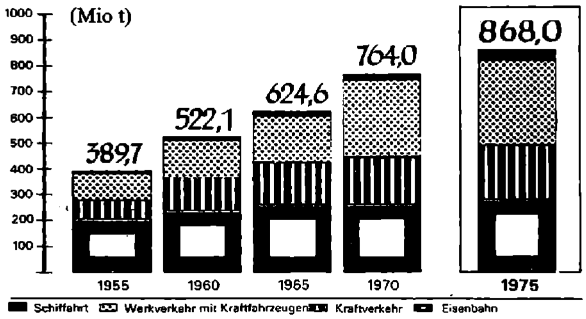
Was lag nun näher, als mit dem Motor Fahrzeuge zu bauen?

VC 210 bringt dafür spanlos verformte Holzteile, mit denen sich Fahrzeuge bauen lassen. Im VC 500 sind die verschiedensten Beleuchtungselemente, mit denen sich Scheinwerfer, Blinkleuchten, beleuchtete Verkehrsschilder usw. montieren lassen.

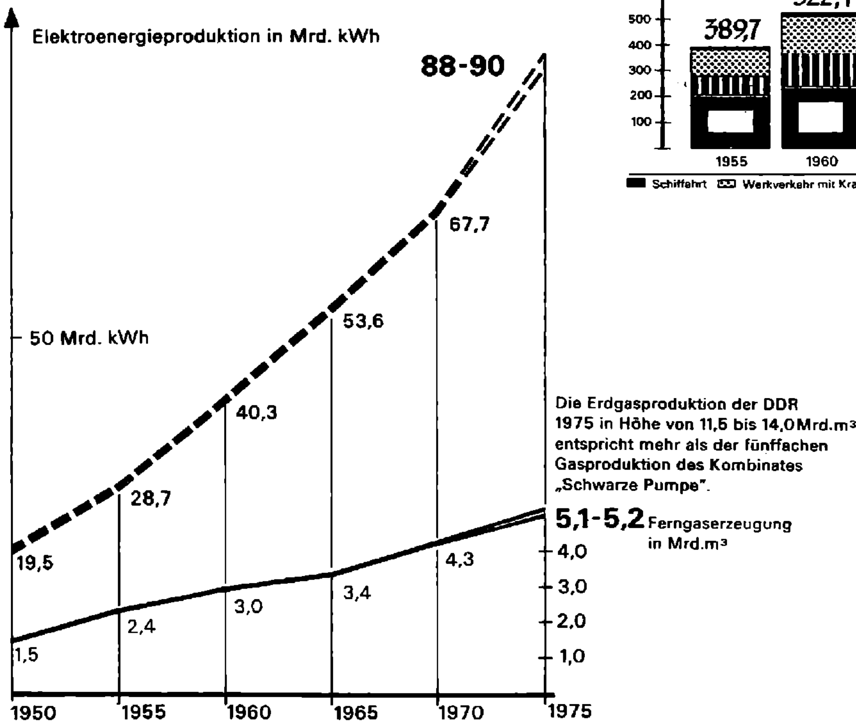
Die neueste Entwicklung, der VC 220, enthält Glieder für Raupenfahrzeugketten und Baggerschaufeln, die, mit den Ketten kombiniert, Schaufelbänder für Bagger ergeben. Die Kettenglieder, nach dem Raster 30×15 mm groß, lassen sich nach einem einfachen Prinzip zusammenstecken und mit den bereiften Rädern in das System einfügen. Das Vero-Construc-System ist also genau das Richtige für die kleinen Konstrukteure, es gibt den 5jährigen und auch den 12jährigen Gelegenheit zu vielen kniffligen Knobelaufgaben.

B. Scheithauer

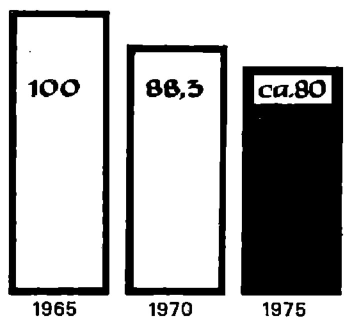
Entwicklung des Verkehrswesens



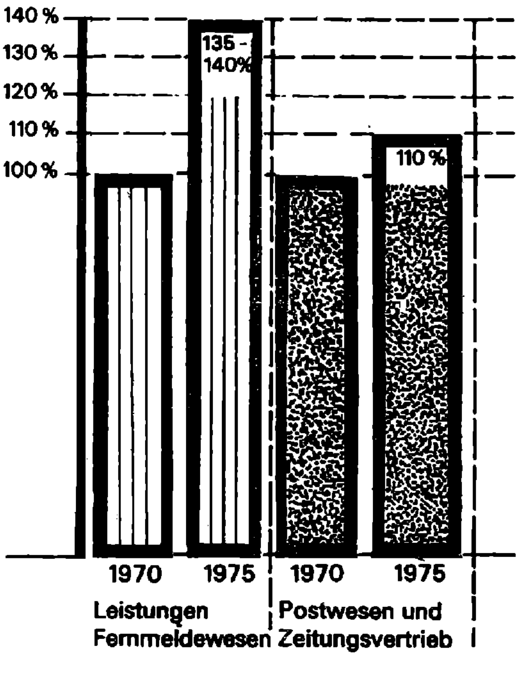
Entwicklung der Energiewirtschaft



Der spezifische Verbrauch an Elektroenergie, bezogen auf die Warenproduktion in der Industrie, ist jährlich um 2 Prozent zu senken.

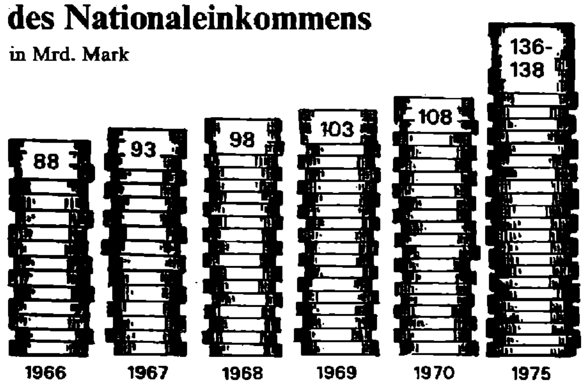


Entwicklung im Post- und Fernmeldewesen



Entwicklung des Nationaleinkommens

in Mrd. Mark



Das vorliegende Material wurde entnommen aus: „Arbeitsmaterial zur Direktive des VIII. Parteitages der Sozialistischen Einheitspartei Deutschlands zum Fünfjahrplan für die Entwicklung der Volkswirtschaft der DDR 1971 bis 1975", herausgegeben von der Parteihochschule „Karl Marx" beim ZK der SED, erschienen im Verlag *Die Wirtschaft*, Berlin.

Preis der Mappe 6,20 M geblockt einseitig bedruckt. Auf 62 Tafeln wird mit mehrfarbigen Schaubildern und graphischen Darstellungen die Direktive zum Fünfjahrplan erläutert. Hervorragend für Unterricht, außerunterrichtliche Arbeit, insbesondere für Wandzeitungen geeignet.

Das Buch — unser Freund und Helfer

Autorenkollektiv

Rund um die Mathematik

160 Seiten, zahlreiche Abb., cellophaniert, 20 cm × 29 cm Pappeinband, 9,80 M
Der Kinderbuchverlag Berlin

A. Ewert

Modernes Stabrechnen

197 Seiten, 218 Bilder, 163 durchgerechnete Beispiele und 9 Tabellen. 14,7 cm × 21,5 cm Halbgewebeeinband, 8,50 M
VEB Fachbuchverlag Leipzig

v. Mangoldt

Einführung in die höhere Mathematik, Bd. I

564 Seiten, 116 Abb., 15,5 cm × 23 cm Leinen, 22,00 M
S. Hirzel Verlag Leipzig

W. Göhler

Höhere Mathematik Formeln — Hinweise — Kleiner Wissensspeicher

105 Seiten, 16,5 cm × 23 cm kartoniert, 6,80 M
VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig

E. Salkowski

Darstellende Geometrie

210 Seiten, 371 Abb., 16,5 cm × 23 cm, gebunden, 9,50 M
Verlag Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G.

A. I. Markuschewitsch

Mathematische Aufgabensammlung: Geometrie

246 Seiten, zahlreiche Abb., Halbleinen, 16,5 cm × 23 cm, 7,80 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin
Aus dem Inhalt: Einführung in die Geometrie – Ähnlichkeitslehre, Flächenberechnung – Trigonometrie – Stereometrie – Darstellende Geometrie – Analytische Geometrie – Vektorrechnung

J. Flachsmeyer

Kombinatorik

Einführung in die mengentheoretische Denkweise
230 Seiten, 45 Abb., 14,5 cm × 20,5 cm, Pappeinband, 15,00 M
EB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin

B. Klotzek

Geometrie

318 Seiten, 322 Abb., 16,5 cm × 23 cm, cellophaniert, Pappeinband, 19,80 M
VEB Verlag der Wissenschaften Berlin

Grabowski/Fucke/Schroedter

Praktische Mathematik

(Hilfsmittel und Verfahren)
438 Seiten, 47 Bilder, 5 Tafeln, 203 Beispiele, 16,5 cm × 23 cm Ganzgewebeeinband, 23,80 M
VEB Fachbuchverlag Leipzig

Z. Pawlowski

Einführung in die mathematische Statistik

441 Seiten, zahlreiche Abb., 14,5 cm × 20,0 cm, Halbleinen 39,00 M
Verlag die Wirtschaft Berlin

Körth/Förster

Mathematik für Wirtschaftskaufleute

360 Seiten, zahlreiche graphische Darstellungen und Aufgaben, 15,0 cm × 20,0 cm Pappeinband, 10,25 M
Verlag Die Wirtschaft Berlin

Autorenkollektiv

Arbeitsblätter für die Berufsausbildung

Grundlagen der Datenverarbeitung, 2,50 M
Verlag Die Wirtschaft Berlin

E. Hofmann

Wörterbuch: Datenverarbeitung

englisch – deutsch; deutsch – englisch
13 000 Stichworte, Halbleinen 12,60 M
Verlag Die Wirtschaft Berlin

J. A. Belik

Die Wirtschaft der UdSSR im neunten Planjahrfünft

80 Seiten, Broschur, 2,50 M
Verlag Die Wirtschaft Berlin

K. Reich

Das goldene 1 × 1

24 Seiten, Halbleinen, 5,80 M
Ein Buch, das Vorschulkinder in das Reich der Zahlen 1 bis 10 führt. (Als Geschenk größerer Geschwister für ihre kleinen Geschwister.)
Der Kinderbuchverlag Berlin

R. Gullasch

Denkpsychologische Analysen mathematischer Fähigkeiten

224 Seiten, 27 Abb., 6,60 M
VEB Volkseigener Verlag Volk und Wissen

B. N. Iwanow

Die neue Physik

Die grundlegenden Prinzipien der modernen Physik
135 Seiten, kartoniert, 5,60 M
VEB Volkseigener Verlag Volk und Wissen Berlin

L. D. Landau/Ju. B. Rumer

Was ist die Relativitätstheorie?

58 Seiten, 17 Abb., 12 cm × 19 cm, kartoniert 3,60 M
Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig

G. Pippig

Zur Entwicklung mathematischer Fähigkeiten

272 Seiten, 22 Abb. (graphische Darstellungen), 7,00 M
VEB Volkseigener Verlag Volk und Wissen Berlin

Gilde/Starke

Ideen muß man haben

158 Seiten, 24 Zeichnungen, Pappband, 3.80 M
Für eine immer größere Fülle von Aufgaben, zur Bewältigung unzähliger Probleme werden neue Lösungswege gesucht: Ideen darüber, was erfunden, was verändert, was in Zukunft und auch schon heute für die Zukunft getan werden muß.
Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin

Dr. J. Riechert und K. Schwarz

Erfolgreich studieren — sich qualifizieren

Eine Anleitung
200 Seiten, 25 Bilder, 19,7 cm × 21,5 cm, kartoniert, 7,80 M
VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie Berlin