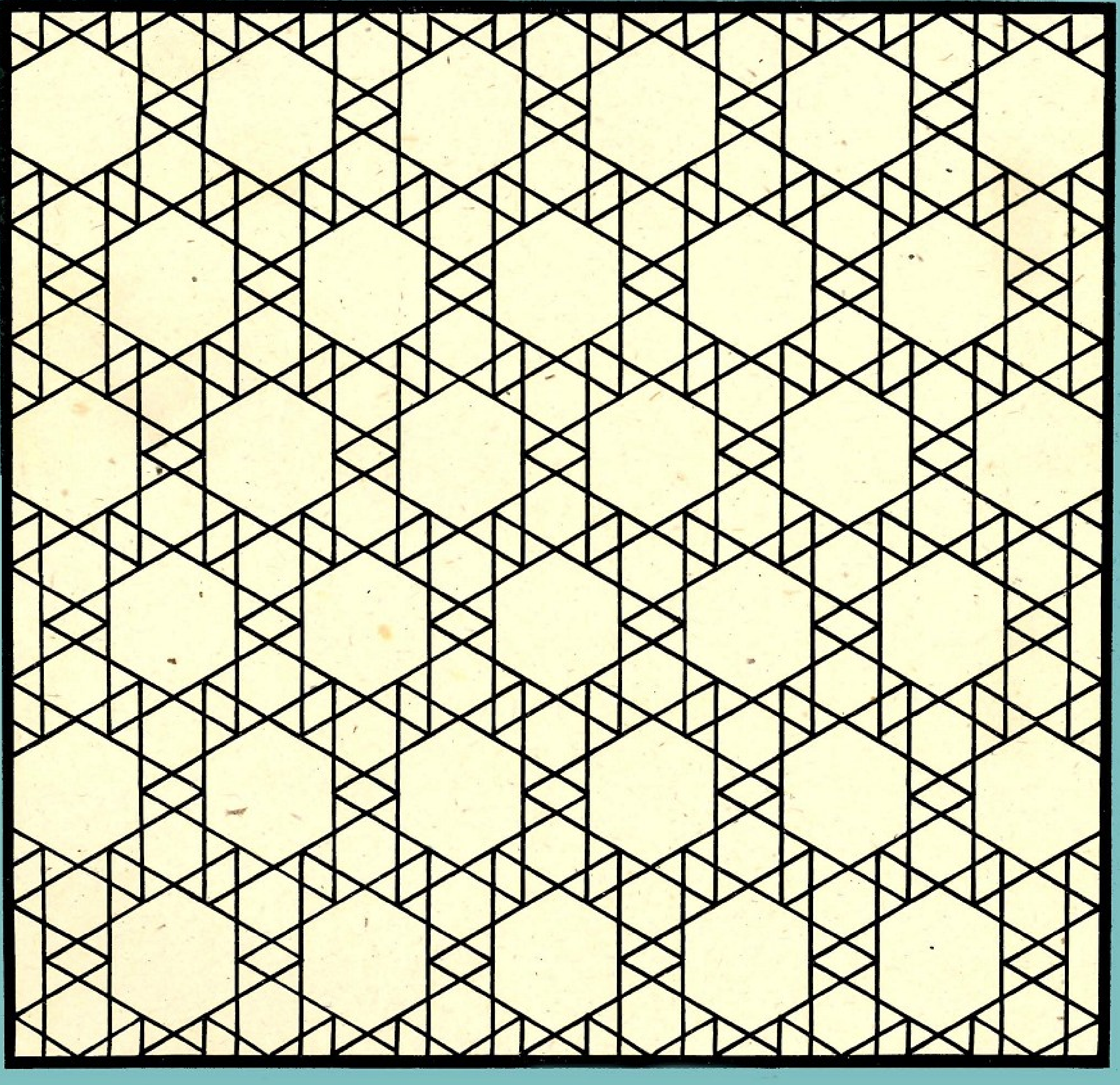
Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



2

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
23. Jahrgang 1989
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold
Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086
Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig 7027

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, Leninstr. 16, Leipzig 7010.

Fotos: W.-Ostwald-Gedenkstätte Großbothen (S. 25); R. Pätzold (S. 36); H. J. Ilgauds (S. 42)
Vignetten: L. Otto
Techn. Zeichnungen: G. Gruß, Leipzig
Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach einer Vorlage von W. Ostwald
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 14. Dezember 1988
Auslieferungstermin: 11. April 1989

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

Wilhelm Ostwald – ein Chemiker, von dem auch Mathematiker lernen können

Wilhelm Ostwald wurde am 2. September 1853 als Sohn eines Böttchermeisters in Riga geboren. Bereits sehr zeitig offenbaren sich seine vielseitigen Interessen, die das ganze Leben erhalten bleiben sollen. Er entdeckt früh das Buch als Schlüssel zum geheimnisvollen Reich des Wissens. Gefürchtet, aber geduldet waren seine aus Büchern nachvollzogenen Experimente zur Herstellung von Feuerwerkskörpern. Sein handwerkliches Geschick und die Fähigkeit, mit einfachen Mitteln große Wirkungen zu erzielen, zeigten sich in der Herstellung eines Fotoapparates aus Zigarrenkisten und dem Operglas der Mutter und der eigenhändigen Anfertigung der dazugehörigen Fotoplatten. Später entwarf und baute er eine Vielzahl Laborgeräte selbst. Einige tragen noch heute seinen Namen, z. B. Ostwald-Pygnometer, -Viskosimeter und -Thermostat. Erst Ostwalds Thermostat machte es möglich, Temperaturen konstant zu halten. Ein funktionstüchtiges Modell dieses ersten geschlossenen Regelsystems befindet sich in der Ostwald-Gedenkstätte in Großbothen.

Als Realschüler gab Ostwald die Schülerzeitschrift „Humor" heraus. Am Ende seines Lebens kann Ostwald auf ein wissenschaftliches Werk von 45 Hand- und Lehrbüchern, 20 Jahre Redaktion einer Zeitschrift, 120 Experimentalarbeiten zurückblicken. Dazu kommen 3 880 Referate, 920 Rezensionen und unzählbare Vorträge. Er stand mit 1 200 Partnern im Briefwechsel.

Ostwald befaßte sich sein ganzes Leben mit Farben. Auf Urlaubs- und Dienstreisen war das Malzeug steter Begleiter, Schränke voller Skizzen und Studien in Großbothen zeugen davon. Diese ihm Freude und Entspannung bereitende Tätigkeit führte ihn später zur wissenschaftlichen Auseinandersetzung mit Farben, gipfelt im Aufbau einer anschaulichen und praktisch anwendbaren Farbenlehre.

Als Schüler spielt Ostwald Geige, schreibt in seiner Studentenzeit alle 83 Haydn-Quartette ab und spielt sie auch, analysiert Beethovens Klaviersonaten hinsichtlich ihrer Harmonie und pflegt auch später mit seiner Familie die Musik als Erholungspause von anstrengender Kopfarbeit.

In seiner Jugend jedoch führen die zahlreichen Interessen zu einer nicht ganz freiwilligen Verlängerung seiner Schulzeit. Nach dem Abitur beginnt Ostwald 1882 an der Landesuniversität Dorpat (heute Tartu) das Chemiestudium. Bereits fünf Jahre später promoviert er zum Doktor der Chemie.

Im Jahr 1880 heiratet er Helene von Reyer. Sie ist ihm sein gesamtes Leben eine verständnisvolle Ehefrau. Überhaupt kann ihr gemeinsames Leben mit ihren fünf Kindern als Beispiel dafür dienen, daß wissenschaftliches Leben mit Familie vereinbar ist.

Nach fünf Jahren erfolgreichen Schaffens am Polytechnikum in Riga, in dieser Zeit erscheint sein vielbeachtetes „Lehrbuch der allgemeinen Chemie" in zwei Bänden und gründet er gemeinsam mit Henricus van't Hoff die „Zeitschrift für physikalische Chemie" zur Verbreitung der sich herausbildenden Physicochemie, wird Ostwald als Professor für Physikalische Chemie nach Leipzig berufen. Ostwalds hervorragende organisatorische und methodische Fähigkeiten lassen das Leipziger Institut zum weltberühmten Zentrum für physikalische Chemie werden. Dieser neue Wissenschaftszweig, der seine Entwicklung der gemeinsamen Arbeit Ostwalds, Arrhenius' und van't Hoffs verdankt, ist wichtigste Grundlage für die moderne technische Chemie. Für seine Forschungen über die Katalyse, die er erstmals klar definiert, erhält er 1909 den Nobelpreis. Zu dieser Zeit hat er sich bereits drei Jahre aus dem Leipziger Lehramt zurückgezogen und lebt mit seiner Familie in Großbothen (Kreis Grimma). Nun begann seine nicht weniger produktive und vielseitige Periode der Beschäftigung mit philosophischen, wissenschaftsorganisatorischen und gesellschaftspolitischen Problemen.

Während die Übertragung seiner in der Naturwissenschaft berechtigten „energetischen Betrachtungsweise" auf die Philosophie ein fundamentaler Irrtum war, haben seine vielfältigen Aktivitäten als Organisator der Wissenschaft auch heute noch fundamentale Bedeutung. In seinem Bemühen, die Arbeiten der Naturforscher der Vergangenheit einem breiteren Publikum zugänglich zu machen, gab er ab 1889 die Reihe „Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften" heraus. Seinen Nobelpreis stiftet Ostwald zu etwa zwei Dritteln zur Gründung der „Brücke", das „Internationale Institut zur Organisierung geistiger Arbeit". Ihre Aufgabe sollte in der Schaffung eines umfassenden Informationssystems bestehen, um den Forschern unschöpferische Vorarbeit abzunehmen. Wesentliche Voraussetzungen dafür waren für Ostwald die Schaffung einer Weltsprache und weitere Reformen. Seine von ihm vorgeschlagenen „Weltformate" zur Papiergrößennormung führten in den zwanziger Jahren zur Einführung der DIN-Formate. Da zur Lösung derartiger Aufgaben eine enge internationale Zusammenarbeit notwendig war, brach die „Brücke" kurz vor dem ersten Weltkrieg trotz bedeutender Teilerfolge zusammen.

Dieser Zusammenbruch traf Ostwald hart, zumal er in derartigen internationalen Bemühungen einen Friedensfaktor ersten Ranges sah. Ostwald zog sich nicht auf eine die Kämpfe seiner Zeit beschauende Position zurück, sondern griff durch Aktivitäten zur Schul- und Hochschulreform, seine Rede auf der Internationalen Stockholmer Friedenskonferenz 1910 und dem gemeinsamen Auftreten mit Karl Liebknecht gegen die Staatskirche als Machtmittel der Bourgeoisie 1913 und seine Mitarbeit im Monistenbund aktiv ein. Die Wurzeln des ersten Weltkrieges sah er jedoch nicht, sondern zog sich auf die Position des „inneren Burgfriedens" gegen den äußeren Feind zurück.

Neben diesen vielfältigen Aktivitäten findet Ostwald Zeit für seine Familie, die Musik, Malerei und Spaziergänge im Gelände seines Wohnsitzes „Die Energie" in Großbothen.

Mit Ostwalds Tod am 4. April 1932 endet sein aktives und erfülltes Leben, ein überwiegend glückliches, wie er es im Alter von 70 Jahren selbst einschätzte. Ein beredtes Zeugnis von der unerschöpflichen Energie Ostwalds ist die Wilhelm-Ostwald-Gedenkstätte in seinem Wohnhaus in Großbothen, die 1979 in die Zentrale Liste der Denkmale internationaler Bedeutung eingereiht wurde. Die im Zustand von Ostwalds Lebzeiten erhaltenen Räumlichkeiten betreut sehr engagiert und liebevoll eine Ostwald-Enkelin, Frau Margarete Brauer. Wir möchten uns bei Frau Brauer herzlich für die wertvolle Unterstützung bedanken. Der zweimalige Besuch der Ostwald-Gedenkstätte in Vorbereitung auf dieses Heft hat uns Ostwaldverehrer werden lassen. Wenn ihr die Gedenkstätte auch besuchen wollt, dann wendet euch zwecks Voranmeldung an folgende Adresse:

Wilhelm-Ostwald-Gedenkstätte der Akademie der Pädagog. Wissenschaften
Haus „Energie"
Großbothen
7243

G. Liebau

Rodnyi/ Solowjew
Wilhelm Ostwald
aus der Reihe Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig

Domschke/Lewandrowski
Wilhelm Ostwald
Urania-Verlag, Leipzig · Jena · Berlin

In der „Welt der Formen" von W. Ostwald

In seinen späteren Forschungen widmete sich W. Ostwald besonders der Farbenlehre. Er ließ sich dabei von dem Goetheschen Grundsatz leiten, daß Gesetzliches eine Vorbedingung für Schönheit ist. In gewisser Anlehnung an die Musik schuf er ein System wohlbestimmter Farben – eine messende Farblehre –, dem acht „Vollfarben" und acht verschiedene Grautöne zu Grunde liegen. (Seine große „Farborgel", die man in der Ostwald-Forschungsstätte der Akademie der Wissenschaften in Großbothen bei Leipzig besichtigen kann, gibt einen besonders anschaulichen und eindrucksvollen Einblick in das System.) Neben theoretischen Gesichtspunkten hatte Ostwald vor allem praktische Anwendungen zum Ziel. Das Ostwaldsche System wurde sogar in sächsischen Volksschulen gelehrt und in der Meißner Porzellanmanufaktur verwendet. Textilfabrikanten kennzeichneten damit ihre Muster.

Farbe und Form stehen in der Kunst in einem engen Zusammenhang. Dies veranlaßte W. Ostwald, eine „allgemeine Lehre von gesetzlichen Formen" zu entwickeln. Seine prinzipiellen Gedanken dazu legte er in dem Buch „Harmonie der Formen" (Leipzig 1922) dar. Konkrete Ausarbeitungen findet man dann in „Die Welt der Formen", die er in sechs Mappen (Leipzig 1922 bis 1925) vorlegte.

W. Ostwald geht von der „gesetzlichsten Raumteilung" der Ebene aus. Wie du, lieber Leser weißt, kann man die Ebene lückenlos und ohne Überlappungen durch kongruente regelmäßige Dreiecke oder kongruente Quadrate oder kongruente regelmäßige Sechsecke wie in den Bildern 1a bis c überdecken. Mit anderen kongruenten regelmäßigen n-Ecken der gleichen Eckenzahl gelingt das nicht!

Mit dem kleinkarierten Papier, das du fast täglich verwendest, hast du bereits eine derartige Überdeckung der Ebene zur Hand. Wir wollen deshalb die Vorgehensweise von W. Ostwald zur Herstellung von gesetzlichen Mustern auf der Grundlage einer Überdeckung der Ebene wie in Bild 1b erläutern, und auf kleinkariertem Papier kannst du dies leicht nachvollziehen.

Bild 1a

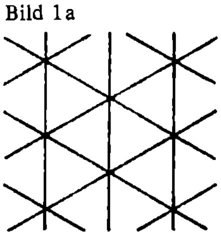


Bild 1b

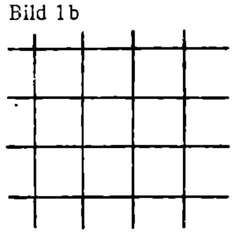


Bild 1c

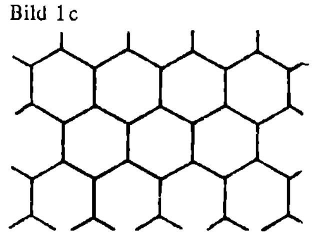


Bild 2a

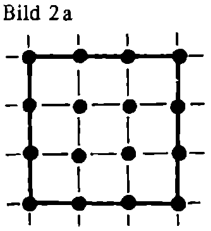


Bild 2b

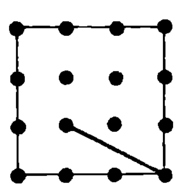


Bild 2c

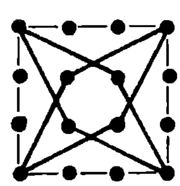


Bild 3

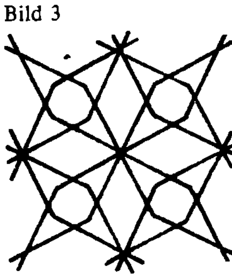


Bild 4

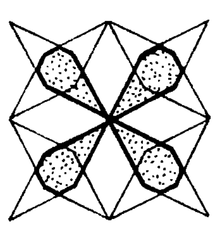
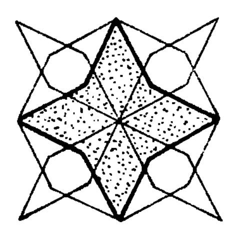


Bild 5



Die Ecken der Quadrate dieser Grundstruktur nennt Ostwald „Knoten". Unter einem „Quadrat Q n-ter Ordnung" wird ein Quadrat verstanden, das sich aus $n \cdot n = n^2$ Quadraten der Grundstruktur zusammensetzt. Seine Ecken sind also Knoten, und es enthält $(n+1)^2$ Knoten. Wähle dir ein Quadrat Q 3ter Ordnung und markiere die $(3+1)^2 = 16$ Knoten, die es enthält (Bild 2a).

Die Verbindungsstrecke zweier Knoten aus Q heißt (in Anlehnung an die Musik) ein „Thema" (T).

▲1▲ Wie viele Themen in Q können gebildet werden?

Lösung: Q enthält $k(n) = (n+1)^2$ Knoten. Ein ausgewählter Knoten bildet mit den restlichen genau $(k-1)$ Themen. Also gibt es

$$t(n) = \frac{k(k-1)}{2} = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{2}$$

Themen. In unserem Beispiel haben wir $t(3) = 120$ Themen.

Wir wählen im Quadrat Q ein Thema T (Bild 2b) und wenden auf T alle Deckabbildungen von Q an. Die Deckabbildungen sind diejenigen Bewegungen der Ebene, die Q auf sich abbilden, und dies sind die Spiegelungen an den vier Symmetrieachsen von Q (zwei Diagonalen und zwei Mittelsenkrechten der Seiten), die drei Drehungen um den Mittelpunkt M von Q mit 90°, 180°, 270° und schließlich die identische Abbildung, die wir als Drehung um M mit 0° verstehen können. Diese Bilder von T kannst du auf dem kleinkarierten Papier leicht einzeichnen; sie sind wieder Themen von Q.

Die geometrische Figur, die aus diesen Bildern von T besteht, heißt die „Form" von T. Für unser Beispiel zeigt sie das Bild 2c.

▲2▲ Bei welchen Themen T von Q sind nicht alle acht Bilder von T voneinander verschieden?

▲3▲ Begründe, daß man aus dem Bild T', das aus T bei einer Deckabbildung von Q entsteht, die gleiche Form wie aus T erhält, also $F(T') = F(T)$ ist!

Nun kann das Quadrat Q selbst wie in Bild 1b zu einer Überdeckung der Ebene verwendet werden. Dabei entsteht aus der Form $F(T)$ ein „Muster". Und um es in seiner „reinen Weise" zu haben, löschen wir alle bisherigen Hilfspunkte (Knoten) und Hilfslinien.

Wie Bild 3 zeigt, können auf diese einfache Weise recht ansprechende Muster entstehen. Bei ein wenig Phantasie kann man in diesem Muster Abbilder von gewissen Objekten erkennen. So nennt W. Ostwald selbst das vorliegende Muster „Die Nelke" (Bild 4), und begeistert über derartige Muster bemerkt er, daß er deren „schlichte und reine Schönheit … noch nicht müde geworden" ist „zu betrachten". (Dabei weiß er wohl, daß die Blüte der Nelke nicht vier- sondern fünfzählig ist.)

▲4▲ Deute das Muster in Bild 3 neu! Zum Beispiel kann man einen „Vierspitz" erkennen (Bild 5).

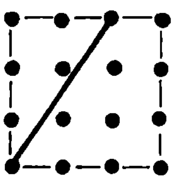


Bild 6a

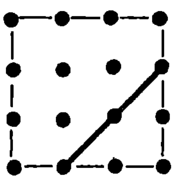


Bild 6b

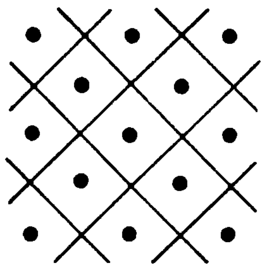


Bild 7

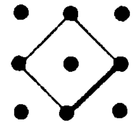


Bild 8a

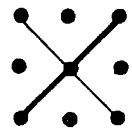


Bild 8b

▲5▲ Zeichne das Muster, das aus dem in Bild 6a bzw. 6b vorgegebenen Thema eines Quadrats 3ter Ordnung entsteht! (Lösung S. 29)

Im folgenden erörtern wir in der „Welt der Formen" auch eine Reihe von Fragen, denen Ostwald nicht weiter nachgegangen ist. Auf Symmetrieaspekte der Ostwaldschen Muster geht der Beitrag von Prof. Flachsmeyer näher ein.

▲6▲ Kann das in Bild 7 vorliegende Muster mit den zu Grunde liegenden Knoten durch solche Themen T_1 und T_2 in Quadraten 2ter Ordnung erzeugt werden, die nicht kongruente Formen besitzen?

Lösung: Derartige Themen gibt es tatsächlich, wie die Bilder 8a und 8b zeigen!

In Bild 8a setzt sich die Form $F(T)$ aus vier verschiedenen Bildern des Themas T zusammen, in Bild 8b sogar aus zwei verschiedenen.

W. Ostwald hat systematisch alle Muster aufgezeichnet, die auf der Grundlage der Quadrate 1ter bis 4ter Ordnung aus den Themen entstehen.

Eine Grundlage dafür ist die vollständige Erfassung aller nichtkongruenter Formen, die die Themen eines gewählten Quadrats n-ter Ordnung ergeben. Insbesondere wollen wir ihre Anzahl bestimmen. Die Bilder 8a und 8b machen deutlich, daß die Anzahl der nichtkongruenten Muster echt kleiner sein kann.

Zunächst ist klar, daß die Anzahl der nichtkongruenten Formen nicht größer als die Anzahl der Themen, also höchstens $\frac{n(n+1)^2(n+2)}{2}$ ist. Diese obere Schranke ist 6 für $n=1$, 36 für $n=2$ und 120 für $n=3$, und sie erweist sich als eine sehr grobe Abschätzung, wie du an Hand der folgenden Aufgabe erkennst.

▲7▲ Zeichne alle nichtkongruenten Formen eines Quadrats 1ter, 2ter und 3ter Ordnung! Wie viele nichtkongruente Formen gibt es jeweils?

Du siehst, daß es wesentlich weniger sind, nämlich 2, 5 bzw. 17. Und du erkennst durch dein Zeichnen auch die Gründe für eine derartige Reduzierung. Einer der Gründe ist schon durch die Eigenschaft gegeben, mit der du dich in der Aufgabe 3 beschäftigt hast. Da bei den acht Deckabbildungen des Quadrats jedes Thema acht Bilder hat, könnte man vorschnell annehmen, die Zahl der Themen einfach durch acht zu teilen, um die Anzahl der Formen zu erhalten. Das ist aber falsch, denn die Bilder ein und desselben Themas müssen wie wir bereits sahen nicht alle voneinander verschieden sein. Es gibt drei Möglichkeiten: Das Thema bersitzt 8, 4 oder 2 voneinander verschiedene Bilder.

▲8▲ Begründe, daß es nur diese Möglichkeiten gibt!

▲9▲ Wie muß das Thema T im Quadrat Q liegen, damit die Form $F(T)$ sich aus vier bzw. zwei verschiedenen Bildern von T zusammensetzt?

Lösungsbemerkungen: An Hand der Eigenschaften der vier Geradenspiegelungen und der vier Drehungen um den Mittelpunkt M des Quadrats Q, die die Deckabbildungen von Q sind, erkennt man leicht, daß ein Thema T durch eine nichtidentische Deckabbildung von Q genau dann auf sich abgebildet werden kann, wenn (*i*) die Mittelsenkrechte von T eine Symmetrieachse von Q oder (*ii*) die T enthaltende Gerade eine Symmetrieachse von Q oder (*iii*) der Mittelpunkt M von Q auch Mittelpunkt von T ist. Damit ist weiter ersichtlich, daß die Form $F(T)$ genau dann aus vier bzw. zwei verschiedenen Bildern von T sich zusammensetzt, wenn genau eine der drei Lagebedingungen (*i*)–(*iii*) bzw. alle drei bestehen.

Die Bedingungen (*i*) bis (*iii*) stehen in einer engen Beziehung zueinander.

▲10▲ Zeige, daß aus der Gültigkeit zweier dieser Bedingungen die der dritten folgt!

Die Anzahl der Themen, die der Bedingung (*i*), (*iii*) bzw. allen drei genügen, werden mit s_1, s_3 bzw. s_0 bezeichnet.

Mit der Beantwortung der Frage 9 sind nicht alle Gründe aufgeklärt, die zu der relativ geringen Zahl nichtkongruenter Formen führen. Bei der Lösung der Aufgabe 7 hast du sicherlich bemerkt, daß zwei Themen T_1 und T_2 selbst dann zur gleichen Form führen können, wenn T_2 nicht das Bild von T_1 bei einer Deckabbildung des Quadrats ist.

▲11▲ Gib dafür ein Beispiel an!

Wir erkennen folgenden Sachverhalt: Besitzt ein Thema T_1 ein Bild T', das von T_1 verschieden ist und das mit T_1 sowohl auf ein und derselben Geraden liegt als auch einen gemeinsamen Punkt besitzt, so ist die Vereinigung $T_1 \cup T'$ ein Thema T^*, das nichtkongruent zu T_1 ist, aber die gleiche Form wie T_1 besitzt. An Hand der einzelnen Deckabbildungen des Quadrats erkennen wir, daß ein Thema T_1 genau dann diese Voraussetzungen erfüllt, wenn (*iv*) seine Mittelsenkrechte echt parallel zu einer Symmetrieachse a des Quadrats ist und T_1 mit dieser einen gemeinsamen Punkt hat oder wenn (*v*) T_1 den Mittelpunkt des Quadrats enthält und M nicht der Mittelpunkt von T_1 ist.

Das Thema T^* ($= T_1 \cup T'$) hat stets die Eigenschaft (*i*) oder (*iii*). Das bedeutet, daß mit den Formen der Themen, die den Bedingungen (*i*) oder (*iii*) genügen, bereits auch die Formen der Themen erfaßt sind, die die Eigenschaft (*iv*) oder (*v*) besitzen.

Besonderheiten treten also nur auf, wenn das Thema T senkrecht zu einer der Symmetrieachsen des Quadrats liegen oder auf einer Geraden liegt, die durch den Mittelpunkt des Quadrats geht. Die Anzahl derartiger Themen sei s.

Jedes andere Thema besitzt eine Form, die sich nicht aus weniger als acht Strecken (Themen) zusammensetzen läßt. Eine Form dieser Art besitzen nach unseren Überlegungen nur noch die Themen T, die auf keiner Symmetrieachse liegen und die entweder senkrecht zu einer Symmetrieachse a sind und mit dieser keinen Punkt gemeinsam haben oder auf einer Geraden durch den Mittelpunkt M des Quadrats liegen und überdies M nicht enthalten. Ihre Anzahl bezeichnen wir mit a. Weiterhin bezeichnen wir mit s_2 die Anzahl der Themen, die auf einer Symmetrieachse liegen und den Mittelpunkt M des Quadrats nicht enthalten.

Die Anzahl der Formen ist dann

$$f = \frac{t-s+a}{8} + \frac{s_1 - s_0}{4} + \frac{s_3 - s_0}{4} + \frac{s_2}{4} + \frac{s_0}{2}.$$

▲12▲ An Hand der gezeichneten Formen sind für $n = 1, 2, 3$ die Werte derjenigen Variablen und Summanden zu bestimmen, die in dieser Formel auftreten.

▲13▲ Beschreibe die Größen s_1, s_2, s_3 und s_0 in Abhängigkeit von n!

Lösung: Wir bestimmen zunächst die Anzahl s_1 der Themen, die der Bedingung (*i*) genügen. Ist d eine Diagonale, so liegen $\frac{(n+1)^2-(n+1)}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$ Knoten des

Lösung zu Aufgabe 12:

n	t	s	a	$\frac{t-s+a}{8}$	s_1	s_2	s_3	s_0	$\frac{s_1-s_0}{4}$	$\frac{s_2}{4}$	$\frac{s_3-s_0}{4}$	$\frac{s_0}{2}$	f
1	6	6	0	0	6	0	2	2	1	0	0	1	2
2	36	28	0	1	12	0	4	4	2	0	0	2	5
3	120	80	16	7	28	4	8	4	6	1	1	2	17

Quadrats auf ein und derselben Seite von d, und demzufolge gibt es gleichviel Themen, die d als Mittelsenkrechte besitzen. Gehen wir von einer Mittelsenkrechten m einer Quadratseite aus, so liegen $\frac{(n+1)n}{2}$ Knoten auf einer Seite von m, falls n gerade ist, andernfalls sind es $\frac{(n+1)^2}{2}$ Knoten. Diese Zahlen lassen sich einheitlich durch $(n+1)\left[\frac{n+1}{2}\right]$ angeben, wobei $[x]$ die größte ganze Zahl bedeutet, die kleiner oder gleich einer vorgegebenen Zahl x ist. Insgesamt erhalten wir

$$s_1 = 2\frac{(n+1)n}{2} + 2(n+1)\left[\frac{n+1}{2}\right] = (n+1)\left(2\left[\frac{n+1}{2}\right] + n\right).$$

Der Mittelpunkt M des Quadrats ist genau dann ein Knoten, wenn n gerade ist. Folglich gilt

$$s_3 = \frac{(n+1)^2-1}{2} = \frac{n(n+2)}{2},$$

falls n gerade und

$$s_3 = \frac{(n+1)(n+1)}{2},$$ falls n ungerade ist.

Eine einheitliche Angabe ist

$$s_3 = 2\left[\frac{(n+1)}{2}\right]\left[\frac{n+2}{2}\right].$$

Ist n gerade, so liegen auf jeder der beiden Diagonalen und auf jeder der beiden Mittelsenkrechten der Quadratseiten n vom Mittelpunkt M verschiedene Knoten, und damit ist

$$s_0 = 4\cdot\frac{n}{2} = 2n.$$

Für ungerades n liegen nur auf den Diagonalen Knoten, und zwar $n+1$, die alle von M verschieden sind. In diesem Fall ist also $s_0 = 2\frac{n+1}{2} = n+1$. Eine einheitliche Darstellung für diese Größen ist

$$s_0 = \frac{3n+1}{2} + (-1)^n\cdot\frac{n-1}{2}.$$

Einsichtig ist nun auch

$$s_2 = 8\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right) = n(n-2)$$

für gerades n und

$$s_2 = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}\left(\frac{n+1}{2}-1\right) = \frac{(n+1)(n-1)}{2}$$ für ungerades n.

Wir wenden uns nun den Ostwaldschen Mustern zu, die in analoger Weise auf der Grundlage einer Parkettierung der Ebene mit kongruenten gleichseitigen Dreiecken (Bild 1a) entstehen. Unser Kästchenpapier können wir nicht mehr unmittelbar verwenden. Aber diese neue Parkettierung ist durchaus leicht zu zeichnen; und dazu nehmen wir unliniertes Papier. Die Ecken der Dreiecke einer solchen Parkettierung heißen wieder „Knoten"; und ein „Dreieck n-ter Ordnung" ist in entsprechender Weise wie ein Quadrat n-ter Ordnung zu verstehen: Es ist ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seiten sich aus n Seiten der Grunddreiecke zusammensetzen (Bild 9).

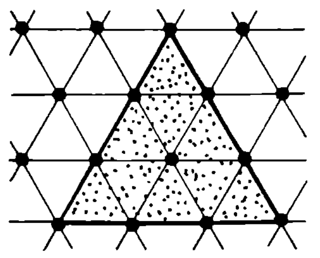
▲ 14 ▲ Wie viele Knoten und Grunddreiecke enthält ein Dreieck n-ter Ordnung?

Lösung: Ein „Thema" ist wieder die Verbindungsstrecke zweier Knoten.

$$k(n) = (n+1) + n + \ldots + 1 = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Knoten und n^2 Dreiecke.

Bild 9



▲ 15 ▲ Wie viele Themen besitzt ein Dreieck n-ter Ordnung?

Lösung: $$t(n) = \frac{k(k-1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{8}$$

Themen.

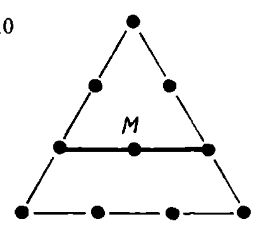
Die Deckabbildungen eines Dreiecks D (n-ter Ordnung) sind die Spiegelungen an den drei Mittelsenkrechten der Seiten von D sowie die Drehungen um den Mittelpunkt M von D mit 0°, 120° und 240°. Jedes Thema hat demnach bei den Deckabbildungen des Dreiecks sechs Bilder, die aber nicht alle voneinander verschieden sein müssen(!).

▲ 16 ▲ Bei welcher Lage des Themas im Dreieck treten weniger als sechs voneinander verschiedene Bilder auf? Zeige, daß es dann immer genau drei verschiedene Bilder sind, die sich bereits durch die drei Drehungen aus dem Thema ergeben.

Die durch das Thema bestimmte „Form" und das „Muster" sind völlig analog wie eingangs erklärt zu verstehen.

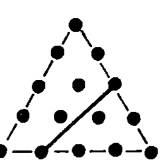
▲ 17 ▲ Zeichne die Form und dann damit das Muster, die aus dem in Bild 10 angegebenen Thema in einem Dreieck 3ter Ordnung entstehen. (Lösungen S. 29)

Bild 10



▲ 18 ▲ Zeichne das Muster, das sich aus dem in Bild 11 angegebenen Thema in einem Dreieck 4ter Ordnung ergibt. (Lösung S. 29)

Bild 11



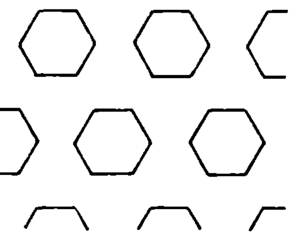
▲ 19 ▲ Zeichne alle Formen, die bei einem Dreieck 1ter, 2ter, 3ter bzw. 4ter Ordnung auftreten. Wie viele nichtkongruente Formen gibt es jeweils?

Lösung: Es gibt 1, 3, 8 bzw. 17 nichtkongruente Formen.

Wie bei einem Quadrat n-ter Ordnung lassen sich auch hier gewisse Anzahlen formenmäßig in Abhängigkeit von n angeben. (Versuch es einmal!)

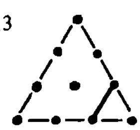
▲ 20 ▲ Das in Bild 12 vorgelegte Muster ist aus einem Thema in einem Dreieck 3ter Ordnung entstanden. Gib ein derartiges Thema an!

Bild 12



Lösung: Die Eckpunkte des Dreiecks 3ter Ordnung müssen bezüglich des Musters stets Drehsymmetriezentren 6ten Grades sein, d. h., durch eine Drehung um einen dieser Punkte mit $\frac{360°}{6} = 60°$ muß sich das Muster auf sich abbilden. Offenbar besitzen in dem vorliegenden Muster nur die Mittelpunkte der regelmäßigen Sechsecke diese Eigenschaft. Also ist bis auf Kongruenz das in Bild 13 angegebene Thema die Lösung.

Bild 13



▲ 21 ▲ Können in gewissen Fällen auch noch andere Punkte des Dreiecks zu Drehsymmetriezentren 6ten Grades hinsichtlich des Musters werden?

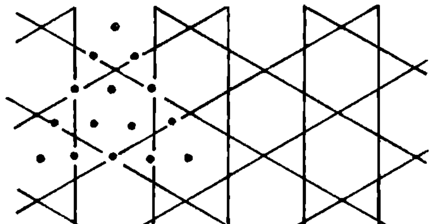
Antwort: Ja, in speziellen Fällen wie in Bild 14 der Mittelpunkt des Dreiecks. Für weitere Punkte ist das nicht möglich.

Damit erkennen wir, daß bei fest vorgegebenen n die Anzahl der Formen gleich der Anzahl der Muster ist. Bei Quadraten gilt dies nicht!

Die Ostwaldsche Methode zur Herstellung von „gesetzlich-schönen Gebilden" regt zu einer Fülle von Fragen und Aufgabenstellungen an. Wir konnten hier nur einigen wenigen nachgehen.

Das Verfahren drängt sich nahezu auf, es mit Hilfe eines Kleincomputers nachzuvollziehen. Und das ist in der Tat keine schwere, aber reizvolle Aufgabe, deren Lösung recht eindrucksvoll auf den Betrachter wirkt. Versuch es doch einmal, wenn du Gelegenheit dazu hast!

Bild 14

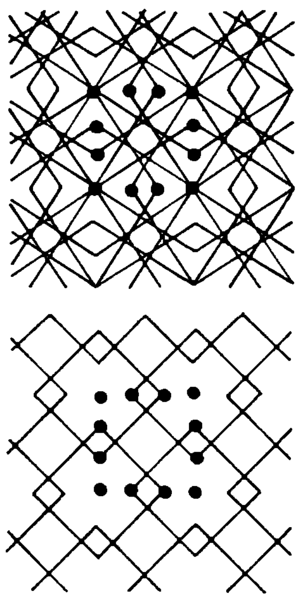


Wir überlassen dir gänzlich, die Musterherstellung auf der Grundlage von regelmäßigen Sechsecken zu betreiben.
Wenn wir als Thema nicht die Verbindungsstrecke zweier Knoten, sondern eine wohlbestimmte gekrümmte Linie (etwa ein Kreisbogenstück) verwenden, könnten möglicherweise ästhetisch ansprechendere Muster entstehen. Hast du ein schönes Beispiel?
Viel Spaß und Findigkeit wünschen

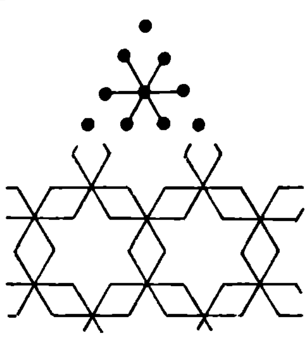
H. Freye und E. Quaisser

Die Autoren möchten Frau Prof. Dr. D. Goetz, Mitherausgeber der Reihe „Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften“ sowie Frau M. Brauer von der Ostwald-Gedenkstätte der AdW in Großbothen für freundliche Hinweise danken.

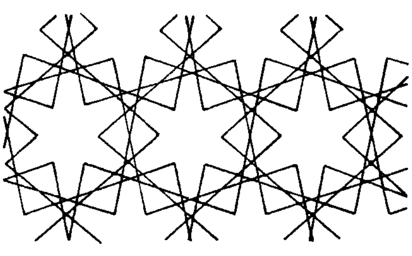
Lösung zu Aufgabe 5



Lösung zu Aufgabe 17



Lösung zu Aufgabe 18



Symmetrien Ostwaldscher Muster

Anmerkungen zu Ostwalds Bemühungen um eine Formenlehre

Wie im vorhergehenden Artikel ausgeführt wurde, bediente sich Wilhelm Ostwald zur Erzeugung seiner ebenen Muster eines wohlbestimmten Kompositionsverfahrens. Die benutzten Instrumente sind dafür das trigonale, quadratische oder hexagonale Gitter der Ebene. Als „Thema“ wird eine Verbindungslinie von Gitterpunkten gewählt. Die Kompositionsregeln bestehen in der Anwendung der sämtlichen Spiegelungen bzw. der sämtlichen Drehungen, die das Grundgitter in sich überführen. Die Spiegelungen variieren die Themalinie und die Spiegelvariationen der Themalinie usw. Es entsteht ein Ostwaldscher „Spiegeling“. Entsprechendes geschieht mit den Drehungen. Es entsteht ein Ostwaldscher „Drehling“. So kommen die von Ostwald publizierten 240 Muster seiner Formenlehre zustande. Er selbst hat mit Bienenfleiß die zeichnerischen Ausführungen der Muster angefertigt. Heutzutage wird man die ganze Palette der Ostwaldschen Muster natürlich durch einen Computer generieren lassen. Ein dazu erforderliches Programm muß die systematische Auswahl der Themalinie sichern und eine Abfolge der Variationen der Themalinie. Das kann durch fortlaufende Anwendung von jeweils drei speziellen Spiegelungen bzw. zwei speziellen Drehungen erreicht werden. (Sollte aus der Leserschaft genügend Verlangen danach bekundet werden, so würde ein entsprechender Artikel publiziert werden!)
In dem unveröffentlichten Nachlaß von Ostwald befinden sich noch weitere Muster, die sich dann auch gekrümmter Themalinien bedienen. Außerdem hat er seine Grundmuster miteinander kombiniert und sie auch mit harmonischen Ausmalungen versehen. In seinen 1926/27 veröffentlichten autobiographischen „Lebenslinien“ sowie auch in Manuskripten seines Nachlasses schreibt er, daß er schon als junger Assistent die in verschiedenen Sammelwerken veröffentlichten Ornamente der Ägypter, Inder, Chinesen, Araber und besonders der Mauren aufs höchste bewundert hat und dadurch zu der Frage angereizt wurde, die Ordnung und Gesetzlichkeit im Bau der Ornamente aufzufinden und damit systematische Verfahren zur Herstellung von Mustern zu erarbeiten. Er glaubte, mit seiner Komposition von Ornamenten den Weg zu den gesetzlich-schönen Formen der ebenen Muster freigelegt zu haben. 1922 erschienen von ihm verfaßte Werke „Die Harmonie der Formen“ und „Die Welt der Formen“. Er beklagt, daß durch die Geometrie zwar die Grundlagen zu einer wissenschaftlichen Formharmonik seit Jahrtausenden bereitstehen, aber eine Verbindung zur Kunstwissenschaft wenig entwickelt sei. Die klassische Geometrie hat in der Tat vorwiegend im Endlichen gelegene – also beschränkte – Figuren untersucht und die sich ins Unendliche erstrekkenden Figuren nicht systematisch erforscht. Ein erster kombinatorischer Ansatz zur Erörterung unendlich ausgedehnter Figuren der Ebene findet sich lediglich bei der von Pythagoras behandelten Frage, welche Möglichkeiten es zur regelmäßigen Aufteilung der Ebene gibt, wenn dabei nur kongruente regelmäßige n-Ecke eines Typs benutzt werden und die Figuren eckentreu zusammenstoßen sollen. Die Antwort wird durch die drei regulären Gitter, nämlich trigonales, quadratisches und hexagonales Gitter geliefert. Erst im Mittelalter finden Fragen über Parkettieren der Ebene eine Fortsetzung. Welche Möglichkeiten gibt es, wenn als Bausteine kongruente regelmäßige Vielecke verwendet werden, unterschiedliche Bausteintypen in einem Parkett zugelassen sind, aber die Bausteine immer nur in Ecken oder längs ganzer Kanten zusammenstoßen dürfen und außerdem das Parkett eckenkongruent ist. Die Antwort lautet diesmal:
Es sind genau acht Möglichkeiten vorhanden und sie werden durch die sogenannten halbregulären oder Archimedischen Parkette realisiert.
Schon der bedeutende deutsche Künstler Albrecht Dürer (1471 bis 1528) widmete sich in dem 1525 erschienenen epochalen Lehrwerk „Underweysung der Messung mit dem Zirckel und richtscheyt in Linien, Ebenen und gantzen Corporen“ mit hohem mathematischem Rang den Fragen zeichnerischer Darstellungen und Konstruktionen. Dabei behandelt er im zweiten Buch auch die Ornamentik und gibt schöne Flächenmuster an, darunter einige halbreguläre Parkette bzw. duale Parkette dazu. Er ist der erste, der einen Lehrgang der Geometrie in Gestalt einer künstlerisch nutzbaren Formenlehre publizierte. (Nachdruck München 1909)
Warum war dem nicht nur künstlerisch interessierten, sondern auch künstlerisch schaffenden W. Ostwald dieser Tatbestand verborgen geblieben? Ebenfalls muß angemerkt werden, daß W. Ostwald der Analogie zwischen dem regelmäßigen Bau der

Kristallsysteme im Raum und der regelmäßigen Struktur der von ihm erörterten ebenen Muster nicht nachging. Das ist für einen Physiko-Chemiker erstaunlich! Kristallographische Untersuchungen waren gerade zu Ostwalds Zeiten den faszinierenden regelmäßigen Bauplänen der Kristallnatur auf der Spur. Der russische Kristallograph und Geometer E. S. Fedorov hatte 1891 eine Arbeit „Symmetrie in der Ebene“ in den Mitteilungen der Russischen Mineralogischen Gesellschaft veröffentlicht. Er beweist, daß es genau 17 Typen von regelmäßigen Mustern der ganzen Ebene gibt, wenn man sie nach den jeweils darin vorkommenden Symmetrien einteilt. Mit diesen Einsichten waren die grundlegenden Dinge über Ordnung und Gesetzlichkeit im Bau der flächendeckenden Ornamente aufgefunden. Es war also die Aufgabe, die W. Ostwald in seiner Formenlehre stellte, schon 30 Jahre vorher prinzipiell gelöst. Diese Lösung ist sogar umfassender als das, was Ostwald dafür an allgemeinen Ergebnissen einer Typisierung der „raumschlüssigen“ Muster beisteuerte. Die Ostwaldschen Muster liefern nur vier der 17 möglichen Typen.

Die Kongruenzabbildungen der von Ostwald benutzten drei regulären Parkette

Wodurch wird die Symmetrie einer Figur F (der Ebene) beschrieben?
Das System aller Kongruenzabbildungen der Ebene, unter denen F als Ganzes unverändert bleibt, heißt die Symmetriegruppe – Sym(F) – von F. Das ist das symmetriebeschreibende Objekt. Beispielsweise gilt bei einem Dreieck F über die Symmetriegruppe Sym(F) folgendes:

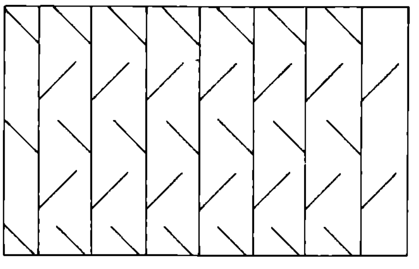
Das Dreieck F ist	Sym(F) besteht nur aus
nicht gleichschenklig	der identischen Abbildung *Id* der Ebene
gleichschenklig, aber nicht gleichseitig	*Id* und einer Geradenspiegelung *S*
gleichseitig	*Id*, drei Geradenspiegelungen, deren Achsen durch einen Punkt gehen und die den Vollwinkel in sechs gleiche Teile zerlegen, sowie zwei echten Drehungen um den gemeinsamen Schnittpunkt der Spiegelachsen mit einem Drehwinkel von 120° bzw. 240°.

Nun sei F eines der drei regulären Parkette der Ebene. Jetzt haben wir es mit einer sich ins Unendliche erstreckenden Figur zu tun. Als Kongruenzabbildungen der Ebene kommen nur Verschiebungen, Drehungen, Spiegelungen an Geraden und – wie es im Schulunterricht heißt – die aus diesen zusammengesetzten Kongruenzabbildungen in Frage. Solch eine Formulierung mutet an, als ob sich dahinter eine ganze Serie von nicht so einfach überschaubaren Typen verbirgt. Dem ist aber nicht so. Es gibt lediglich nur noch den Typ der Gleitspiegelung. Eine Gleitspiegelung wird durch eine Achse festgelegt und einen Gleitbetrag samt Richtung, in der das Gleiten erfolgen soll. Das folgende Friesornament hat nur Gleitspiegelungen und Translationen als Kongruenzabbildungen.

Bild 1

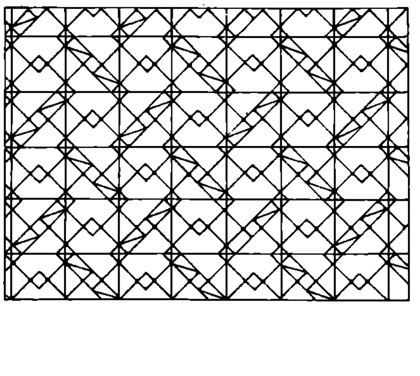
Der Symmetrietyp der Gleitspiegelung ist von unserer unmittelbaren Vorstellung wohl weiter entfernt als der einer Verschiebung, einer Spiegelung und einer Drehung. Das ist wahrscheinlich der Grund, warum etwa das Schulbuch dessen ausdrückliche Nennung unterläßt. Auch bei Ostwald tritt in seinen Symmetrieerörterungen nur immer die Hervorhebung der drei anderen Typen auf. Deshalb verwundert es nicht, wenn beispielsweise ein Wandmuster, das keine Drehungen und keine Spiegelungen, sondern nur Verschiebungen und Gleitspiegelungen aufweist, von dem Ostwaldschen Erzeugungsprozeß von Mustern nicht erfaßt wird.

Bild 2



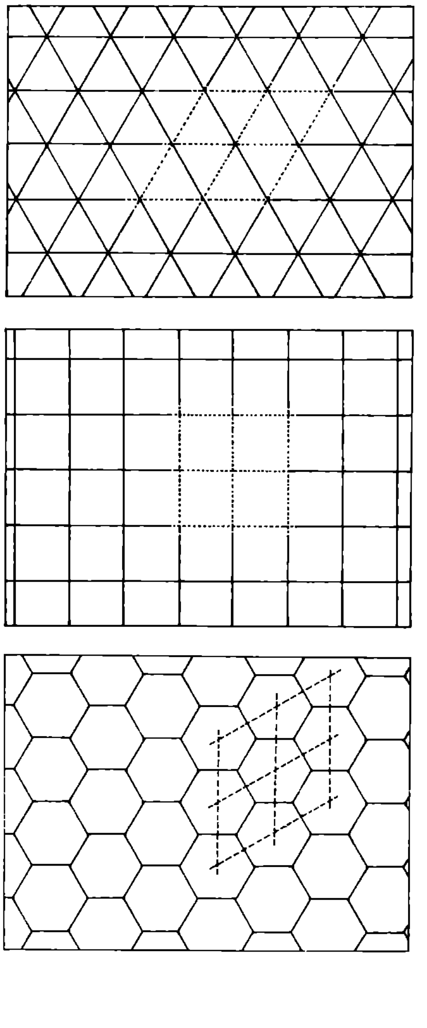
Aber auch das Wandmuster des nächsten Bildes liegt außerhalb des Ostwaldschen Erzeugungsprozesses. In ihm treten neben den Translationen und Gleitspiegelungen nur noch Halbdrehungen auf. Das Muster haben wir aus einem Ostwaldschen durch Überlagerung mit einer anderen regelmäßigen Figur gebildet.

Bild 3



Die sämtlichen Verschiebungen (= Translationen) in der Symmetriegruppe Sym(F) eines Wandmusters F bilden auch eine Gruppe, d. h. die Zusammensetzung von zwei Verschiebungen von F in sich ist wieder eine Verschiebung von F in sich und die Umkehrabbildung zu einer Verschiebung von F in sich ist auch wieder eine Verschiebung von F in sich.
Diese Gruppe heißt die Translationsgruppe Transl(F) der Figur F. Transl(F) wird bei einem Fries F aus einer einzigen Minimaltranslation erzeugt. Alle anderen Translationen aus Transl(F) entstehen aus t und t^{-1} (inverse Translation zu t) durch Iterationen.
Für ein Parkett F wird die Gruppe Transl(F) durch zwei Minimaltranslationen t_1, t_2 erzeugt. Diese verlaufen in zwei unabhängigen Richtungen. Die Zusammensetzungen von t_1, t_2 und den Inversen t_1^{-1}, t_2^{-2} ergeben alle Translationen von F in sich. Die Zusammensetzung von zwei Translationen geschieht bekanntlich nach dem Kräfteparallelogramm. Wenn man zwei Minimaltranslationen t_1, t_2 ermittelt hat, so kann man ein davon gebildetes Translationsgitter von F aufzeichnen, um einen Einblick in das Wirken von Transl(F) zu erhalten.

Bild 4
Zu den regulären Parketten gehörige Translationsgitter (gestrichelt)



Die möglichen Drehpunkte der drei regulären Gitter sind auch noch leicht überschaubar. Beim trigonalen Gitter treten nur 6er-Drehungen, 3er-Drehungen und 2er-Drehungen auf. Ebenso verhält es sich mit dem hexagonalen Gitter. Für das quadratische Gitter gibt es nur 4er- und 2er-Drehungen. Die nachfolgende Tabelle beschreibt die Lage der Drehpunkte.

Art des regulären Musters	Lage der Drehpunkte der möglichen Drehordnungen			
	2	3	4	6
trigonal	Mittelpunkte der Dreiecksseiten	Mittelpunkte der Dreiecksflächen	–	Eckpunkte der Dreiecke
quadratisch	Mittelpunkte der Quadratseiten	–	Mittelpunkte der Quadratflächen und Eckpunkte der Quadrate	–
hexagonal	Mittelpunkte der Sechseckseiten	Eckpunkte der Sechsecke	–	Mittelpunkte der Sechseckflächen

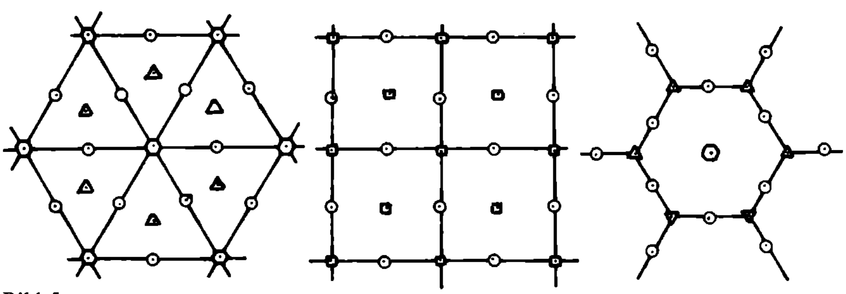


Bild 5
Zur Lage der Drehpunkte der regulären Muster

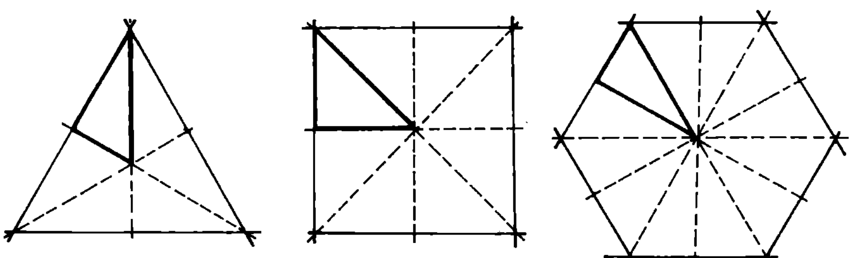


Bild 6
Zu den Spiegelachsen der regulären Muster. Bausteine des aus den Spiegelachsen erzeugten Parketts

Setzt man eine Drehung mit einer Translation zusammen, so ergibt sich eine Drehung um einen neuen Drehpunkt, während der Drehwinkel erhalten bleibt. Die Zusammensetzung von zwei Drehungen ist entweder eine Drehung um einen neuen Drehpunkt, sofern die beiden Ausgangsdrehungen unterschiedliche Drehpunkte hatten, oder die Zusammensetzung ist eine Translation, sofern nämlich die Drehwinkel sich zu 360° ergänzen. Das System Transl(F) der Translationen aus Sym(F) und das System Rot(F) aller Drehungen aus Sym(F) bilden zusammen auch eine Gruppe – die spezielle Symmetriegruppe der Figur F:

SpezSym(F) = Transl$(F) \cup$ Rot(F)

Die Spiegelachsen der regulären Muster sind auch leicht zu ermitteln. Es sind dies jeweils die Seiten der Grunddreiecke, Quadrate und Sechsecke und die Mittellinien sowie Diagonalen. Durch die Spiegelachsen entsteht ein neues Parkett der Ebene. Der Baustein ist beim Quadratmuster ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck und beim Dreieck- bzw. Sechseckmuster ein Halbierungsdreieck eines gleichseitigen Dreiecks, d. h. ein rechtwinkliges Dreieck dessen beide übrigen Winkel 30° und 60° betragen.

Die Spiegelachsen des trigonalen sowie hexagonalen Gitters und entsprechend die Spiegelachsen des quadratischen Gitters liefern selbst wieder ansprechende Muster. Und diese Muster enthalten alle ihre Spiegelachsen. Die Schnittpunkte der Spiegelachsen sind die jeweiligen Drehpunkte der regulären Ausgangsmuster und die der von den Spiegelungsgeraden gebildeten Muster. Die Schnittordnung gibt die Drehordnung an.

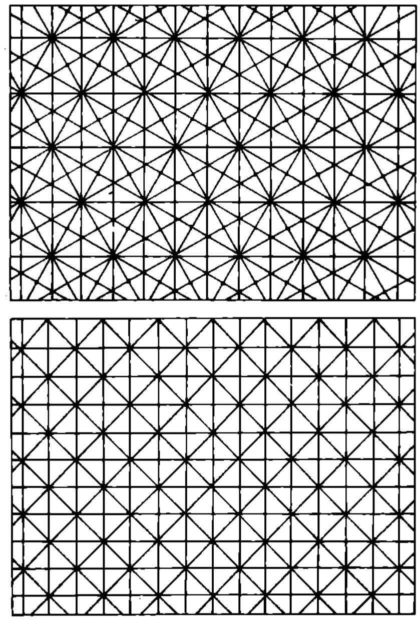


Bild 7
Die von den Spiegelungsgeraden gebildeten Muster der drei regulären Muster

Verbleibt noch die Diskussion der reinen Gleitspiegelachsen für die regulären Muster. Für das Quadratmuster liegen die Verhältnisse deutlich zutage. Als reine Gleitspiegelachse kommt eine Gerade parallel zu einer Quadratseite nicht in Frage, sondern höchstens schrägverlaufende Achsen. Die Schräge kann nur parallel zur Diagonalrichtung sein, weil sonst die Quadrate durch Spiegelung an solch einer Geraden aus der Musterrichtung kämen. Dann hat man die Antwort: Als reine Gleitspiegelachsen für das Quadratmuster treten nur die Parallelen zu den Quadratdiagonalen durch die Mittelpunkte der Quadratseiten auf. Die in Diagonalrichtung verlaufenden Spiegelachsen und reinen Gleitspiegelachsen sind äquidistant und wechseln sich ab.

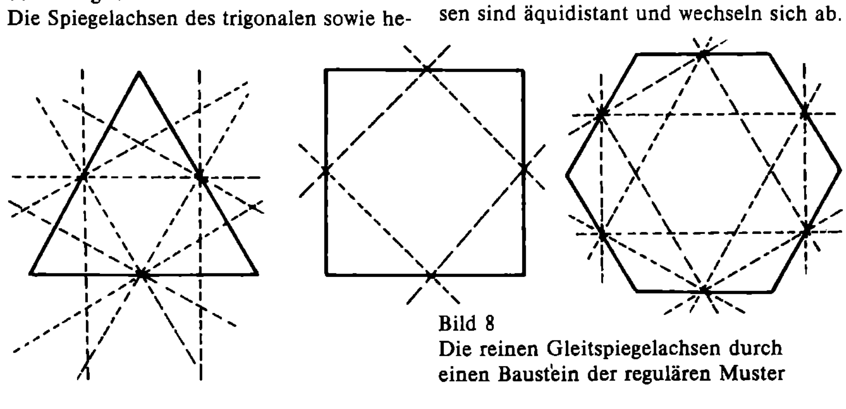


Bild 8
Die reinen Gleitspiegelachsen durch einen Baustein der regulären Muster

Beim Dreieck- und Sechseckmuster findet man entsprechend, daß die reinen Gleitspiegelachsen parallel zu den Spiegelachsen verlaufen und dabei durch die Mittelpunkte der Seiten gehen. Sie wechseln sich ebenfalls mit den Spiegelachsen ab.

Ein schönes Gesamtmuster der Ebene bilden die reinen Gleitspiegelachsen des trigonalen bzw. hexagonalen Grundmusters. Die Gleitspiegelachsenmuster beider Grundmuster stimmen überein.

Der Leser möge sich dies Muster aufzeichnen. Man wird erkennen, daß es sich durch Überlagerung der beiden nachstehenden Formen eines halbregulären Parketts ergibt.

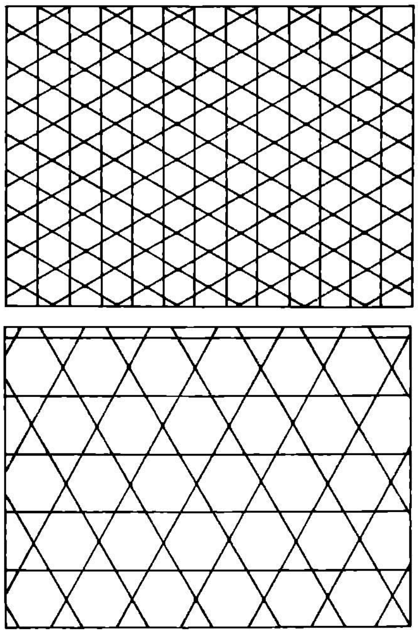


Bild 9
Zwei Formen eines halbregulären Parketts, das auch unter den Ostwaldschen Mustern als „Dreisechs" vorkommt

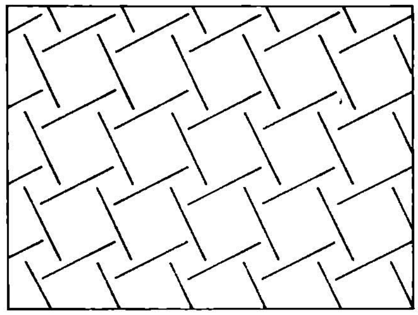


Bild 10
Das Ostwaldsche Grundmuster Nr. 269, von W. O. das große Rad, Mittelstellung, genannt. Es hat den Symmetrietyp W_4

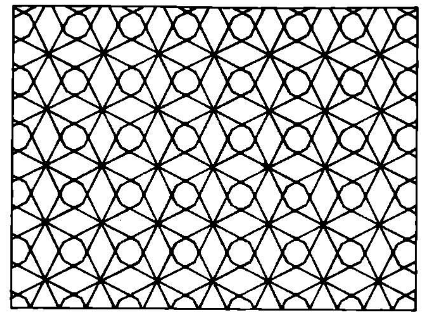


Bild 13
Das Ostwaldsche Grundmuster Nr. 83, die Nelke genannt.
Es hat die Symmetriegruppe W_4^1

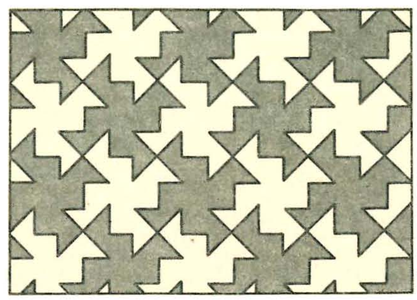


Bild 11
Ein kombiniertes Ostwald-Muster vom Symmetrietyp W_4. Es weist die angegebene Ostwaldsche Ausmalung auf

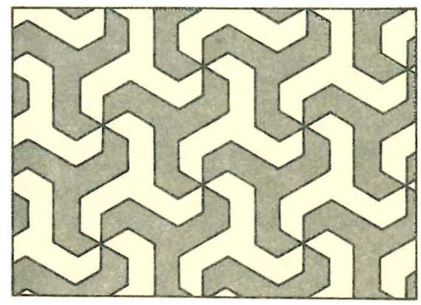


Bild 14
Ein Ostwaldsches kombiniertes Muster mit der Symmetriegruppe W_6

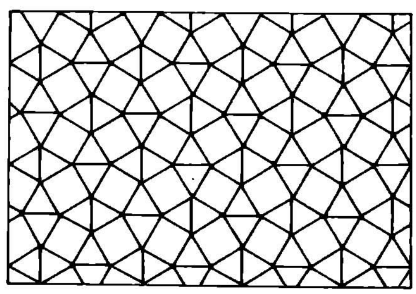


Bild 12
Ein halbreguläres Parkett mit der Symmetriegruppe W_4^2

Die Symmetriegruppen der Ostwaldschen Muster

Die im ersten Abschnitt erwähnte Symmetrie-Klassifikation der „raumschlüssigen" ebenen Muster nach Fedorov ergibt, daß die Gruppen Sym(Q) und Sym(D) (= Sym(S)) des quadratischen Parketts Q bzw. des Dreieckparketts D die umfangreichsten von den 17 möglichen sind. In der Bezeichnungsweise nach dem ungarischen Mathematiker L. Fejes Toth wird die Symmetriegruppe des quadratischen Parketts mit W_4^1 angegeben. Der untere Index weist auf die höchste Drehordnung hin. Der obere Index soll hier auf die Art der vorkommenden Spiegelungen aufmerksam machen. Durch jeden 4er-Drehpunkt verlaufen Spiegelachsen! Alle Ostwaldschen „Spiegelinge", die aus einem quadratischen Grundmuster der Knotenpunkte entstehen, haben als Symmetriegruppe die Gruppe W_4^1. Die Gruppe SpezSym(Q) des quadratischen Parketts kann als volle Symmetriegruppe von Ostwaldschen „Drehlingen" auftreten. In der Bezeichnungsweise nach L. Fejes Toth ist dies der Symmetrietyp W_4.

Noch ein Symmetrietyp von den 17 möglichen gestattet ebenfalls 4er-Drehungen und Spiegelungen, nur daß dabei durch keinen 4er-Drehpunkt Spiegelachsen hindurchgehen. Dies ist der Symmetrietyp W_4^2. Beispielsweise besitzt eines der halbregulären Parkette diese Symmetriegruppe. Kein Ostwaldsches Muster kann diesen Symmetrietyp haben.

Die Symmetriegruppe des trigonalen bzw. hexagonalen Parketts trägt die Bezeichnung W_6^1. Alle Ostwaldschen „Spiegelinge", die aus Knotenpunkten des Dreieck- oder Sechsecknetzes erzeugt wurden, haben diesen Symmetrietyp. Entsprechende „Drehlinge" können ebenfalls diesen Symmetrietyp aufweisen oder nur den Symmetrietyp W_6 besitzen. Im letzten Fall wirkt dann nur die Gruppe SpezSym(D) (= SpezSym(S)).

J. Flachsmeyer

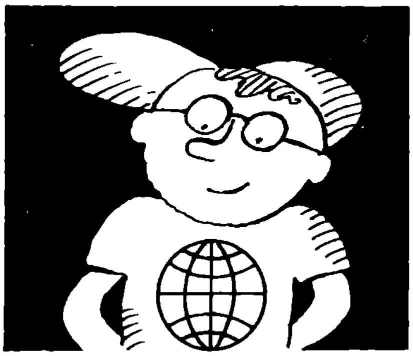
Für den Artikel wurden auch unveröffentlichte Materialien aus dem Ostwaldschen Nachlaß benutzt. Dafür sei den Mitarbeitern des Zentralarchivs der Akademie der Wissenschaften der DDR zu Berlin und der Betreuerin der Ostwald-Gedenkstätte „Haus Energie" in Großbothen, Frau Gretel Brauer, herzlich gedankt.

Zeitgenossen über Ostwald

Sein Schüler Georg Bredig in seinem Vorschlag an das Nobelkomitee:
„Ostwalds Bedeutung besteht weniger in einer wuchtigen Einzelentdeckung, sondern in dem ungeheuren allgemeinen Einfluß, den er auf die Entwicklung der modernen Chemie gehabt hat, ein Einfluß, der in vieler Hinsicht an den erinnert, den einst Berzelius auf die chemische Welt ausübte."

W. I. Lenin hielt Ostwald für
„... einen sehr großen Chemiker und sehr verworrenen Philosophen"

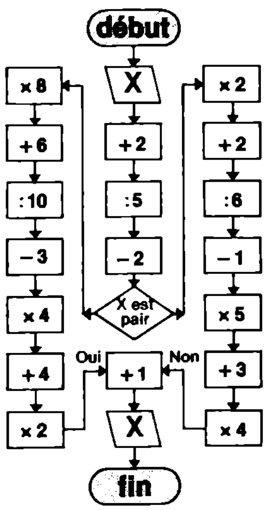
Sein erster Assistent, Ernst Beckmann, stöhnte:
„Wenn man mit Ostwald eine halbe Stunde spricht, hat man für ein halbes Jahr Arbeit."



Ein Rechenmeister vor Adam Ries

▲1▲ Organimath
En respectant l'organigramme, effectuez les opérations et retrouvez la valeur de X. Elle a été choisie parmi les nombres de 1 à 100 et est identique au départ et à l'arrivée.
Attention! Ce jeu n'accepte que des valeurs entières et supérieures à zéro comme résultat de chaque opération!

aus: Logigram, Paris



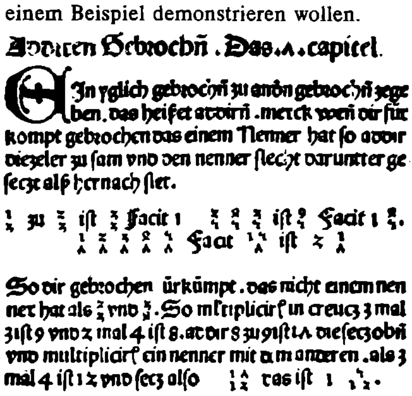
▲2▲ Notice
A visit of a day to Ostwald at Großbothen is worth a transatlantic trip. You cannot be in his presence for ten minutes, without realizing that you are facing a really great man. His breath of knowledge, his originality and many-sidedness, all taken together make him one of the most interesting personalities of the age.

Harry S. Jones
disciple of Ostwald's

▲3▲ Как-то раз я уронил термометр, которым обычно измеряю температуру фотореактивов (см. ризунок). Термометр не разбился, но столбик спирта „разорвался". Как починить термометр?

aus: Quant, Moskau

Im vorigen Jahr brachte der Akademie-Verlag Berlin als Dokument der Wissenschaftsgeschichte den Band „Das Bamberger Rechenbuch von 1483" heraus (Bestell-Nr. 754 531 5, Preis: 60,00 M).
Das hier zunächst reproduzierte Rechenbuch, in zwei vollständigen Exemplaren in die Gegenwart überliefert, stammt vom Rechenmeister Ulrich Wagner. Im 2. Teil des Buches wird die Originalschrift von Dr. Eberhard Schröder transkribiert (transkribieren: lautgetreu in eine andere Schrift übertragen).
In der vorliegenden Transkription wurden zum Beispiel Punkt, Komma, Semikolon und Fragezeichen entsprechend dem heutigen Gebrauch verwendet sowie von Ulrich Wagner gewählte Worte, die einen entscheidenden Bedeutungswandel erfahren haben, durch das im Neuhochdeutschen adäquate Wort ersetzt. So wird das Buch auch für uns leicht lesbar, was wir an einem Beispiel demonstrieren wollen.


Addiren Gebrochñ. Das. A. capitel.
In yglich gebrochñ zu andñ gebrochñ zegeben. das heisset addirñ. merck wen dir für kompt gebrochen das einem Nenner hat so addir die zeler zu sam vnd den nenner sleczt darunter gesecz als hernach stet.
So dir gebrochen fürkumpt. das nicht einen nenner hat als ⅔ vnd ¾. So multiplicir si in creucz 3 mal 3 ist 9 vnd 2 mal 4 ist 8. addir 8 zu 9 ist 17. die secz oben vnd multiplicir ein nenner mit dem anderen. als 3 mal 4 ist 12 vnd secz also 17/12 das ist 1 5/12.

(Bevor ihr weiterlest, versucht doch erstmal selbst hinter den Sinn zu kommen!)
Transkription: Eine jegliche Gebrochene zur anderen Gebrochenen zu geben, das heißt Addieren. Merke, wenn dir vorkommt Gebrochenes, das einen Nenner (gemeint ist ein gemeinsamer Nenner) hat, so addiere die Zähler zusammen und den Nenner einfach darunter gesetzt, wie hernach steht:

$\frac{1}{3}$ zu $\frac{2}{3}$ ist $\frac{3}{3}$, Fazit 1.

$\frac{2}{5}$ (zu) $\frac{4}{5}$ (zu) $\frac{3}{5}$ ist $\frac{9}{5}$, Fazit $1\frac{4}{5}$

$\frac{1}{7}$ (zu) $\frac{2}{7}$ (zu) $\frac{3}{7}$ (zu) $\frac{4}{7}$ (zu)

$\frac{5}{7}$ Fazit $\frac{15}{7}$ ist $2\frac{1}{7}$

So dir Gebrochenes vorkommt, das nicht einen Nenner (gemeint ist ein gemeinsamer Nenner) hat, wie $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$, so multiplizier über kreuz, 3 mal 3 ist 9 und 2 mal 4 ist 8. Addiere 8 zu 9 ist 17. Die setze oben, und multipliziere einen Nenner mit dem anderen, also 3 mal 4 ist 12 und setze also $\frac{17}{12}$, das ist $1\frac{5}{12}$.

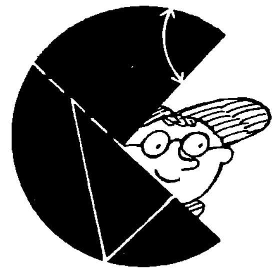
$\frac{5}{6}$ zu $\frac{7}{8}$ ist $\frac{82}{48}$, Fazit $1\frac{17}{24}$. $\frac{1}{2}$ (zu)

$\frac{3}{5}$ Fazit $\frac{11}{10}$, ist $1\frac{1}{10}$.

Das Nachwort von Dr. Schröder beschäftigt sich mit dem historischen Hintergrund und der Einordnung des Rechenbuches. Wir zitieren einige Passagen:
„In 100 zufällig aus dem 15. Jh. überlieferten Schuldokumenten ist das Rechnen als Lehrdisziplin nur zweimal erwähnt. Hingegen wird der gründlichen Ausbildung in Latein und Katechetik der Vorrang eingeräumt. Das dürftige Angebot der offiziellen Schuleinrichtungen stand im Widerspruch zu den Bedürfnissen der Kaufleute u. a. in Augsburg und Nürnberg."
„Die internationale Verflechtung des Handels forderte solides Wissen über die Vielfalt von Währungssystemen und deren Wechselkurse untereinander. Die herkömmlichen Rats- und Stadtschulen konnten dem nicht gerecht werden. So wurden Rechenmeister eingestellt, die zugleich das Amt des Schreibmeisters zu erfüllen hatten. Daher verwundert es nicht, daß Nürnberg bald durch seine Schreib- und Rechenschulen berühmt wurde. Ulrich Wagner ist ein Repräsentant dieser neuen Berufsgruppe und sein Lehrbuch ein Spiegelbild des in dieser Zeit florierenden Handels." „Zweifellos hat Ulrich Wagner eine entscheidende Pionierleistung dafür vollbracht, daß der Rechenunterricht im Bildungswesen der Zeit des Frühkapitalismus zu höherem Ansehen und größerer Volkstümlichkeit gelangte. Sie besteht zunächst in der konsequenten Anwendung der indisch-arabischen Ziffern, der Verwendung des dezimalen Stellenwertsystems und der damit verknüpften Überwindung des Rechnens mit Abakus und Zählsteinen. Er verhalf dem Rechnen mit der Feder nach dem neuen Algorismus zum Durchbruch. Weiter verstand er es, die zu seiner Zeit revolutionäre Erfindung der Buchdruckerkunst in den Dienst der Ausbildung und Erziehung junger Menschen zu stellen."

Alphons

In freien Stunden · alpha-heiter



Wilhelm Ostwald war schon als Professor für Chemie am Polytechnikum in Riga durch seine pädagogischen Fähigkeiten bekannt und berühmt. Davon zeugt ein Gespräch zwischen zwei polnischen Hörern, die damals in Riga ziemlich zahlreich vertreten waren. Sagt der eine: „Hast du schonn gehörrt neuen Professor?“ Fragt der andere: „Nein, was ist?“ – Antwortet der erste: „Du mußt hörren ihn, da geht sich Chemie in Kopf wie mit Schaufel.“

aus: Was nicht in den Analen steht von Josef Hausen, Verlag Chemie, Weinheim

Freitag der 13.

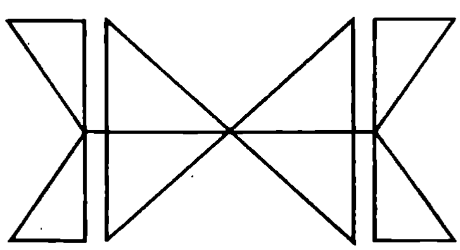
Fällt der 13. eines Monats auf einen Freitag, so bringt das Unglück. Welches ist das letzte Jahr ohne solche Unglückstage gewesen?

aus: Pythagoras, Amsterdam

In einem Zug

Die Figur ist in einem Zug nachzuzeichnen ohne eine Linie mehrfach zu zeichnen.

aus: Füles, Budapest



Großes Ostereierfärben

Im Schulhort wurden für drei Klassen Ostereier in den Farben Rot, Gelb, Blau und Violett gefärbt. Gelb gefärbt war ein Ei mehr als rot, blau zwei mehr als gelb und violett eins mehr als blau.

Die gefärbten Eier wurden geschickt auf drei Nester auf der Spielwiese verteilt. Die Schüler der drei Klassen stellten fest:

Von keiner Farbe lagen auch nur in zwei Nestern gleich viel Eier. Jedoch die kleinste, die größte und auch die beiden voneinander verschiedenen mittleren Zahlen gleichfarbiger Eier stimmten für alle drei Nester überein. Und die kleinste Zahl gleichfarbiger Eier eines Nestes war gerade halb so groß wie die größte Zahl gleichfarbiger Eier eines Nestes. Wieviel Eier waren rot gefärbt? *W. Träger, Döbeln*

Zum Scherzen aufgelegt

Aus den Silben

a – ach – ba – ben – de – den – en – en – er – fi – fol – ge – geb – gen – ger – halt – in – kel – kus – lö – nach – ne – ni – nis – o – on – on – pe – ra – ra – se – sen – sun – ti – ti – win sind 10 Wörter (mathematische Begriffe) zu bilden, deren Anfangsbuchstaben – von oben nach unten gelesen – den Namen für „schräge Strecken“ ergeben.

1. Sie legen etwas fest.
2. Er füllt eine Figur aus.
3. Sie hat jedes Auto.
4. Sie machen keine krummen Touren.
5. Sie werden auch vom Arzt ausgeführt.
6. Sie sind Nachbarn.
7. Er ist ein uraltes Rechengerät.
8. Sie werden gesucht, aber nicht immer gefunden.
9. Sie werden besonders hervorgehoben.
10. Er kommt immer hinterher.

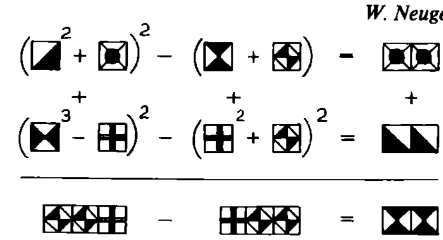
OL K. Koch, Schmalkalden

Wissen und Rechnen

Jedes Karo bedeutet eine positive ganze einstellige Ziffer; gleiche Karos bedeuten also immer gleiche positive ganze einstellige Ziffern.

Diesen Angaben entsprechend sind unter Anwendung der Rechenregeln die Ziffern zu finden, die das Gleichungssystem richtig lösen. (Es sind dabei die Vorzeichenregeln zu beachten!)

W. Neugebauer, Berlin



Dreiecksgeschichten

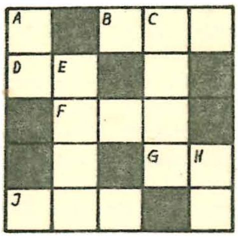
Konstruiere vier Dreiecke mit folgenden Seiten auf Pappe!

1. Dreieck: 3 cm, 7 cm, 8 cm
2. Dreieck: 5 cm, 7 cm, 8 cm
3. Dreieck: 7 cm, 8 cm, 13 cm
4. Dreieck: 7 cm, 13 cm, 15 cm

Schneide danach diese Dreiecke aus und lege sie zu einem Dreieck aneinander! *W. Träger, Döbeln*

„Auf alle Fälle“ ... !

Es sind mehrstellige natürliche Zahlen zu finden, für die gelten soll:



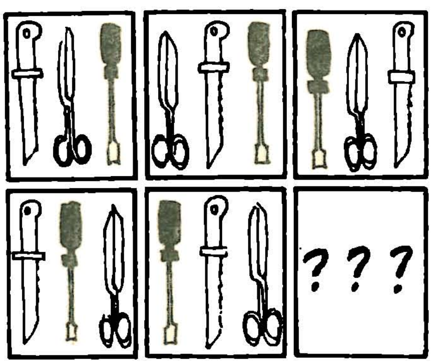
Waagerecht
B_w Vielfaches von 53
D_w Teiler von E_s
F_w Teiler von E_s
G_w 22 mehr als H_s
Senkrecht
A_s Eine Quadratzahl
C_s Das 53fache von A_s
E_s Aus gleichen Ziffern bestehende Zahl
H_s Eine Primzahl

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Geschickt kombiniert

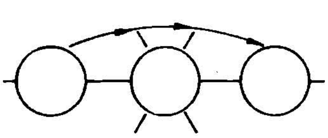
Wie muß das letzte Bild aussehen?

aus: Füles, Budapest

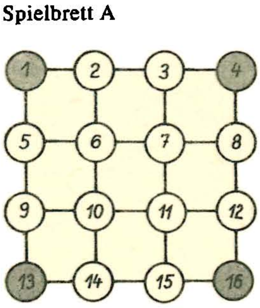


Springen und schlagen!

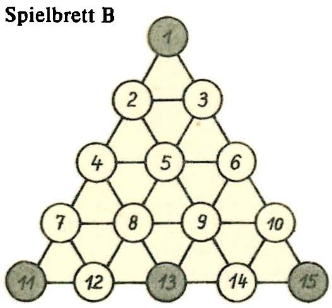
Zunächst setzt man auf jedes kreisförmige, nicht graue Feld des abgebildeten Spielbrettes A (Teil des Schachbretts) oder B (Teil des Halmabretts) einen Spielstein, z. B. ein Stück Pappe oder ein 1-Pfennig-Stück. Durch Springen sind danach alle Steine bis auf einen zu entfernen: Sprünge sind längs jeder eingezeichneten Geraden möglich. Ein Stein darf einen auf einem benachbarten Feld liegenden Stein überspringen, wenn das Feld hinter dem übersprungenen Stein leer ist. Der springende Stein wird auf das leere Feld gesetzt und der übersprungene Stein wird vom Spielbrett genommen.



Spielbrett A



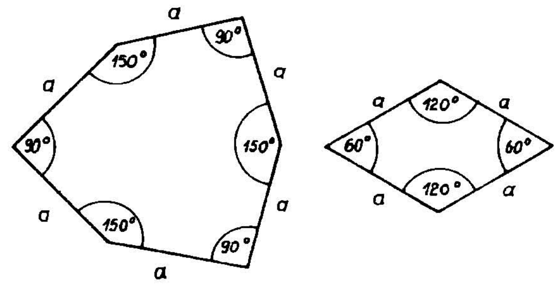
Spielbrett B



W. Träger, Döbeln

Geschickt gepflastert

Um Freiflächen attraktiv zu pflastern, hat der städtische Bauhof zwei Formen angefertigt und mit diesen Betonplatten mit gleichlangen Seiten gegossen:



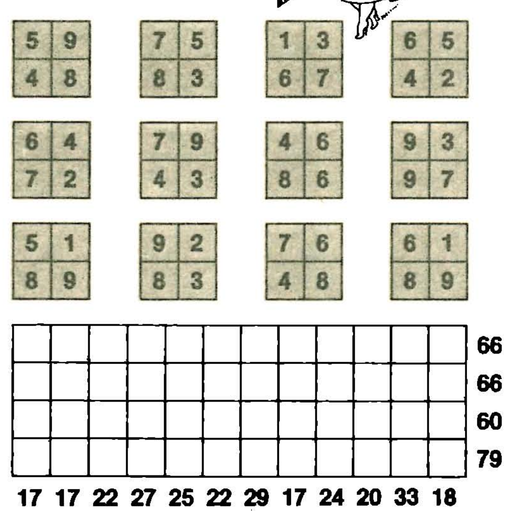
Alle viereckigen Platten sind schwarz gefärbt, die sechseckigen teils gelb und teils rot. Welche Muster sind für das Pflaster möglich, wenn gleichfarbige Platten nie eine gemeinsame Seite haben sollen?

W. Träger, Döbeln

Zahlenpuzzle

Setze die Teile des Puzzles in die unten stehenden Felder, und zwar so, daß man bei Addition der Zeilen bzw. Spalten die vorgegebenen Ergebnisse erhält!

aus: Maximath, Paris



Rotos – ein neues Logikspiel

Meinen Mathematiklehrern
G. Scheuermann und W. Seiferth
in Dankbarkeit gewidmet

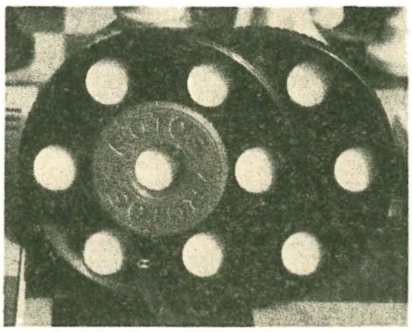
Seit dem Erscheinen des „magischen Würfels" werden in zunehmendem Maße international immer wieder neue Spiele erdacht und hergestellt, die unseren Geist herausfordern. Der ungarische Professor Rubik – geistiger Vater des „Zauberwürfels" – scheint durch seine geniale Erfindung eine wahre Flut an Geduld-, Puzzle- und Logikspielen ausgelöst zu haben, die nicht mehr abreißen will. Die hin und wieder zu vernehmende Meinung einiger Zeitgenossen, daß beispielsweise das Drehen am Würfel eine langweilige, stupide und sinnlose Beschäftigung sei, kann wohl am besten durch die Tatsache entkräftet werden, daß sich hervorragende Fachleute diesen Themen gewidmet haben. Mehr noch: Eine selbständige Richtung von Fachliteratur ist entstanden, Mathematiker haben Rechenanlagen gefüttert und deren dem Menschen überlegene Eigenschaft des „schnellen suchenden Probierens" genutzt.

An dieser Stelle darf ich Herrn Prof. Dr. H.-D. Gronau aus Greifswald für wertvolle Hinweise, speziell für seine Anregungen zur Simulation des Spiels auf einem Computer, recht herzlich danken.

Auf der Suche nach einem Ordnungsalgorithmus

Hat man Rotos erstmals in der Hand, wird zunächst der Spieltrieb triumphieren. Man dreht links und rechts, vorwärts und rückwärts – immer vom Instinkt geleitet – und plötzlich kann es passieren, dies zumindest beim Farbenspiel, daß man die gewünschte Ordnung hergestellt hat: die roten Scheibchen befinden sich in einer waagerechten Reihe, die gelben und grünen ebenfalls. Zwangsläufig stellt sich hier nun die Frage, wie dieser Erfolg wiederholt werden kann. Wir hätten gerne eine Vorschrift, ein Rezept, einen Algorithmus, wie die Mathematiker zu sagen pflegen, der uns das gewünschte Ziel erreichen läßt. Versuchen wir also, uns einen solchen Algorithmus zu erarbeiten. Zuerst schaffen wir uns eine Symbolik, damit wir alle Drehfolgen eindeutig beschreiben können. Hat man das Spiel vor sich, so kann man sowohl die linke Scheibe (L) als auch die rechte Scheibe (R) drehen, und zwar jeweils im Uhrzeigersinn (gekennzeichnet durch positive Exponenten) oder entgegengesetzt (negative Exponenten). Unter einer Elementardrehung wollen wir eine 60°-Drehung der linken oder rechten Scheibe in Uhrzeigerrichtung oder entgegengesetzt verstehen. Somit haben wir die vier Elementarzüge L^1, L^{-1}, R^1 und R^{-1}. Lassen wir bei der Hintereinanderausführung von Elementarzügen die immer vorhandenen und somit redundanten L-R- bzw. R-L-Wechsel weg und notieren uns nur den Beginn und die Potenzen der Drehfolge, so können wir beispielsweise für $R^{-2}L^1R^3$ kürzer $R(-2, 1, 3)$ schreiben. Die Dimension, d. h. die Anzahl der Elemente des Vektors, wollen wir Umfang der Drehfolge nennen und mit U bezeichnen. Ist nach endlich vielen Drehungen der Ausgangszustand wieder erreicht, so nennen wir diese Drehfolge Identität I.

Ein Beispiel hierfür wäre $L^6 = I$. Selbstverständlich gilt analog $(R^{-1})^6 = R^{-6} = I$ usw. Dies ist trivial und leuchtet jedem sofort ein. Wie verhält es sich nun aber mit beliebigen anderen Drehfolgen?



Abschließend führen wir noch eine Kurzschreibweise für die Vertauschung zweier Scheibchen ein. Es bietet sich an, diejenigen der oberen Reihe von links nach rechts mit o1, o2 und o3 zu bezeichnen; analog nennen wir die Elemente der unteren Reihe u1, u2, u3 und bekommen schließlich für die Mittelreihe m1, ..., m4.

Computersimulation und Mensch-Maschine-Vergleich

Um einen Überblick zu bekommen, wie man die Auswertung der Drehversuche einem Digitalrechner übertragen kann, wollen wir das abgebildete Flußdiagramm (auch Programmablaufplan genannt) betrachten. Es sei die Aufgabe gestellt, sämtliche Drehfolgen der Gestalt $Z = L^{I1}R^{I2}L^{I3}$ mit $I1, I2, I3 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ auf Identität und bestimmte Vertauschungen zu untersuchen. Daß wir an Stelle von -2 die 4 und für -1 die 5 als Potenz nehmen, hat rein programmiertechnische Ursachen. Während sich hinter dem Flußbild im wesentlichen das Hauptprogramm verbirgt, stehen die Kästchen „V" (Versuch) und „A" (Auswertung) symbolisch für zwei eigenständige Unterprogramme, die das eigentliche Herzstück der Simulation beinhalten. Im Unterprogramm (V) wird dem Rechner zunächst durch die Anweisung o1: = 0, o2: = 1, ..., u3: = 9 der geordnete Zustand mitgeteilt. Nun programmiert man eine Realisierung für L^1 und eine für R^1, bei höheren Potenzen wird der entsprechende Programmteil einfach mehrmals abgearbeitet. Bei L^1 wandert das Scheibchen oben links beispielsweise um eine Position nach rechts. Für den Computer heißt das: o2: = o1 (also ist jetzt o2 = 0) usw. Das Auswerteprogramm (A) vergleicht nun den (geordneten) Ausgangszustand mit der aktuellen Belegung der Variablen o1, o2, ..., u3.

Abschließend wollen wir noch einen interessanten Zeitvergleich zwischen Mensch und Maschine anstellen. Notiert man sich die Ausgangsstellung und den Endzustand für eine Drehfolge vom Umfang $U = 7$, so benötigt man dafür etwa 150 Sekunden. Wollte man sämtliche Folgen vom Umfang $U = 7$ auf diese Weise auswerten, so brauchte man dafür $2 \cdot 5^7 \cdot 150$ Sekunden bzw. 271 Tage. Ein moderner Computer schafft es in 20 Minuten! Um das Spiel gründlich zu untersuchen, müßte man aber alle Drehfolgen vom Umfang $U = 2$ bis etwa $U = 9$ betrachten. Das sind

$2(5^2 + 5^3 + \ldots + 5^9) = 4\,882\,800$ Varianten.

Nach unserer Kalkulation entspricht dies einem menschlichen Arbeitspensum von etwa 23 Jahren. Ein Rechner hingegen wäre bereits in der Nachtschicht des ersten Tages arbeitslos, da er diese Aufgabe in knapp 11 Stunden erledigt.

Die Ordnung von Drehfolgen

Wir legen uns nun die Aufgabe vor, eine feste Zugfolge, etwa $Z = L^{-1}R^1$, und ihre wiederholte Anwendung näher zu untersuchen. Es ergibt sich die Frage: Wie oft muß man die Folge Z hintereinander ausführen, um den Ausgangszustand zu erhalten? In mathematischer Formulierung heißt das: Bestimme die kleinste natürliche Zahl n, für die gilt $Z^n = I$. Wir führen dafür die Bezeichnung $O(Z) = n$ ein und nennen n Ordnung der Zugfolge Z. Für $Z = L$ ist die Lösung bereits bekannt, nämlich $O(L) = 6$. Tabelle 1 enthält die Ordnungen für einige weitere Zugfolgen.

Tabelle 1

Z	O(Z)
L^2R^2	3
$L^{-1}R^1$	5
L^3R^1	8
$L^{-2}R^1$	12
L^1R^1	21
L^2R^1	30

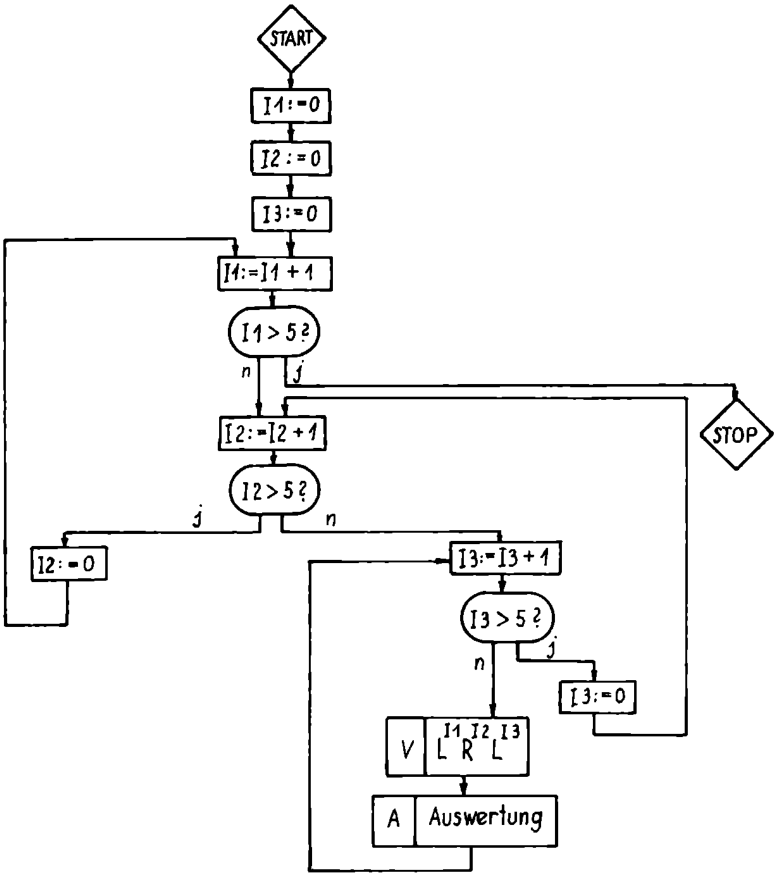
Automatisch ergibt sich an dieser Stelle die Frage nach der maximalen Ordnung von Drehfolgen bei unserem Spiel. Dieses Problem werden wir im folgenden Abschnitt wieder aufgreifen.

Permutationen

Wenn es um Fragen der Anordnung, Umordnung und Vertauschung von Elementen einer vorgegebenen endlichen Menge geht, kann man stets die für Permutationen übliche Schreibweise anwenden und die Erkenntnisse aus der Theorie der Permutationen nutzen. Notieren wir uns in einer Zeile den Zustand vor einer Drehfolge und darunter das Ergebnis des Drehversuchs, so erhalten wir beispielsweise für die Identität den Ausdruck

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Programmablaufplan zur Simulation einer Drehfolge vom Umfang $U = 3$



In jedem Falle ergibt sich so eine umkehrbar eindeutige Abbildung von der Menge der Scheibenpositionen (in der ersten Zeile immer in geordneter Reihenfolge dargestellt) auf die Menge der Scheibchen (in der zweiten Zeile als Permutation der Scheibennummern notiert). Eine zweifache Drehung der linken Scheibe in Uhrzeigerrichtung – ausgehend vom geordneten Zustand – hat man also in der Form

$$L^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 3 & 2 & 8 & 4 & 0 & 6 & 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

niederzuschreiben. Ebenso gilt

$$R^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 8 & 5 & 2 & 7 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

Für die multiplikative Verknüpfung dieser Permutationen ergibt sich

$$L^2R^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 3 & 1 & 9 & 8 & 0 & 2 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

In der kürzeren Zyklenschreibweise bekommt der letzte Ausdruck die Form

$$L^2R^1 = (0\ 7\ 5)\,(1\ 3\ 9\ 6\ 2)\,(4\ 8).$$

An dieser Stelle wollen wir nun noch einmal auf die Fragestellung des letzten Abschnitts – diesmal aus rein mathematischer Sicht – zu sprechen kommen: Für welche n gilt $(L^2R^1)^n = I$?

Wir verwenden zunächst die Gesetzmäßigkeit, daß jeder Zyklus aus n Elementen nach n-maliger Hintereinanderausführung in Einerzyklen zerfällt, d. h. die Identität liefert. Mit Hilfe der Beispiele

$$(4\ 8)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = (4)(8)$$

$$(0\ 7\ 5)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 7 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 7 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 7 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} = (0)(7)(5)$$

und einem kleinen induktiven Beweis kann man sich das schnell klarmachen. Damit können wir unsere Frage beantworten, denn aus $O(L^2R^1) = \mathrm{kgV}(2,3,5) = 30$ folgt unmittelbar $n = 30m$. Hier bezeichnet kgV das kleinste gemeinsame Vielfache und m ist eine beliebige natürliche Zahl. Gleichzeitig ist 30 auch die größte bei Rotos mögliche Ordnung.

Optimierung von Zügen

Dieser Abschnitt trägt eher theoretischen, man könnte fast sagen ästhetischen Charakter, denn für den Hausgebrauch dürfte es belanglos sein, zwischen 2 oder 4 Elementarzügen zu unterscheiden. Es ist unmittelbar klar, daß sich die Züge $Z_1 = L^4$ und $Z_2 = L^{-2}$ hinsichtlich ihrer Wirkung nicht unterscheiden; wohl aber benötigt Z_2 zwei Elementardrehungen weniger. Diesen Sachverhalt kann man sich für das Verkürzen von Drehfolgen zunutze machen, wie folgendes Beispiel zeigt.

Es sei jetzt

$$Z_1 = L^2R^5(L^3R^3)^3R^{-2}L^{-2}$$

und $\quad Z_2 = L^2R^{-1}L^3(R^3L^3)^2R^1L^{-2}.$

Da wir lediglich die Beziehungen $R^5 = R^{-1}$ und $R^3R^{-2} = R^1$ ausgenutzt haben, führt die um 8 Elementardrehungen kürzere Folge Z_2 zu dem gleichen Ergebnis wie Z_1.

Zusammenstellung einiger Zugfolgen

Aus der Menge aller möglichen Drehfolgen sind natürlich diejenigen am interessantesten, mit denen man gezielt Positionsvertauschungen vornehmen kann. Es liegt nun quasi am Wesen des Spiels, daß wir den Idealfall, bei dem 8 Scheibchen ihren Platz beibehalten und nur zwei ihre Positionen miteinander vertauschen, nicht erwarten dürfen. Hat man aber mit etwas Intuition und Systematik den „Schlüsselzug“ (Z11) gefunden, der die Vertauschungen m1 – m3 und m2 – m4 ausführt, so kann man davon viele andere Züge ableiten. Bezeichnen wir mit Z eine beliebige, im Hinblick auf die Überschaubarkeit aber nicht zu komplizierte Drehfolge, so erweist sich die Untersuchung von Zügen der Gestalt $Z^1(R^3L^3)^3Z^{-1}$ mit dem Hintergedanken als sinnvoll, daß man zunächst bestimmte Scheibchen in die Mittelreihe „hineindreht“, danach die Vertauschungen von Z11 nutzt und schließlich mit der inversen Operation Z^{-1} die Drehfolge beendet. Die in Tabelle 2 enthaltenen Züge sind hinsichtlich ihrer Wirkung optimal und vollständig. Für die Vertauschungen o1 – u2, m2 – m4 zum Beispiel gibt es als kürzeste nur die mit Z1 bezeichneten zwei Züge. Den mit Computer geführten Beweis für diesen Sachverhalt müssen wir dem Leser allerdings schuldig bleiben.

Zug	Drehfolge	Wirkung
Z1	L(2,3,3,3,3,3,1) L(−1,3,3,3,3,3,−2)	o1–u2, m2–m4
Z2	L(1,3,3,3,3,3,2) L(−2,3,3,3,3,3,−1)	o2–u1, m2–m4
Z3	R(2,3,3,3,3,3,1) R(−1,3,3,3,3,3,−2)	o2–u3, m1–m3
Z4	R(1,3,3,3,3,3,2) R(−2,3,3,3,3,3,−1)	o3–u2, m1–m3
Z5	R(−2,1,3,3,3,3,3,2,2) R(−2,−2,3,3,3,3,3,−1,2)	u1–m4, o3–u2
Z6	R(2,2,3,3,3,3,3,1,−2) R(2,−1,3,3,3,3,3,−2,−2)	o1–m4, o2–u3
Z7	L(2,2,3,3,3,3,3,1,−2) L(2,−1,3,3,3,3,3,−2,−2)	m1–u3, o1–u2
Z8	L(−2,−2,3,3,3,3,3,−1,2) L(−2,1,3,3,3,3,3,2,2)	m1–o3, o2–u1
Z9	L(3,−2,2,2,1) L(−1,−2,−2,2,3) L(1,2,2,−2,3) L(3,2,−2,−2,−1)	o1–u1, m3–m4
Z10	R(3,−2,2,2,1) R(−1,−2,−2,2,3) R(1,2,2,−2,3) R(3,2,−2,−2,−1)	o3–u3, m1–m2
Z11	R(3,3,3,3,3,3) L(3,3,3,3,3,3)	m1–m3, m2–m4

Tabelle 2

Ordnen des Farbenspiels

Wir wenden uns nun dem Ordnen des Farbenspiels zu. Dies geht relativ schnell und problemlos. Zunächst bringen wir die gelben Scheiben in die in Bild 1 gezeigte Ausgangsstellung. Wie man mit Hilfe einer Fallunterscheidung bezüglich der Positionierung der gelben Scheiben zeigen kann, ist das immer mit höchstens 16 Elementarzügen möglich. Nach R^3L^2 liegt die Mittelreihe geordnet vor. Nun betrachten wir o. B. d. A. nur die neun Fälle, bei denen sich in der oberen Reihe genau ein blaues Scheibchen befindet (ansonsten dreht man das Spiel um).

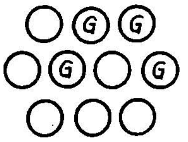


Bild 1

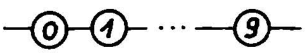


Bild 2

G = gelb, R = Rot, B = blau

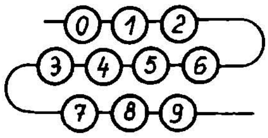


Bild 3

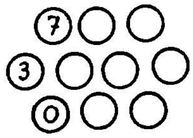


Bild 4

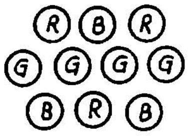


Bild 5

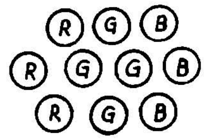


Bild 6

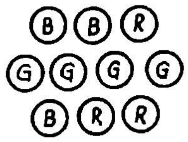


Bild 7

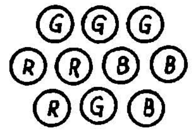


Bild 8

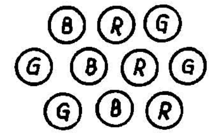


Bild 9

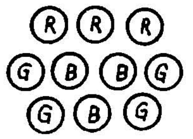


Bild 10

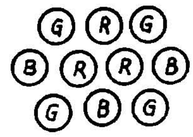


Bild 11

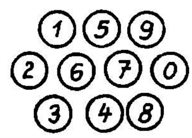


Bild 12

Bilden die blauen Scheibchen ein gleichseitiges Dreieck, so ist man nach Z9, Z10 fertig. In allen anderen Fällen genügen die Drehfolgen L^3, R^3, Z1, Z2, Z3 und Z4. Für das Ordnen des Farbenspiels benötigen wir also im ungünstigsten Falle $16 + 8 + 3 + 18 = 45$ Elementarzüge.

Ordnen des Zahlenspiels

Das Ordnen der Zahlen in wachsender oder fallender Reihenfolge gestaltet sich etwas aufwendiger, haben wir doch 3 628 000 mögliche Ausgangsstellungen. Wie kommt man auf diese gewaltige Zahl? Dazu stellen wir uns vor, wir hätten sämtliche Zahlenscheibchen hintereinander auf eine Schnur gefädelt (Bild 2).

Wir haben 10 unterschiedliche Scheibchen zur Verfügung und können diese nach den Gesetzen der Kombinatorik auf $10! = 3\,628\,000$ verschiedene Arten anordnen und erhalten also ebenso viele verschiedene „Zahlenschnüre". Legt man jede Schnur entsprechend Bild 3 zusammen, so erhält man sämtliche Konfigurationen unseres Spiels. Wir stellen hier einen Algorithmus vor, der lediglich den Zug Z9 benötigt und aus jeder Stellung nach maximal 85 Elementarzügen zum Ziel führt. Davon sind höchstens 17 Elementarzüge für den „linken Bogen" (o1, m1, u1) nötig, $5(3 + 10) = 65$ für das Ordnen des rechten Rings und drei für dessen richtige Positionierung. Betrachten wir bei dem in wachsender Folge geordneten Spiel die Zahlenfolge auf der rechten Scheibe, so können wir den Zyklus (1, 2, 6, 9, 8, 4) ablesen. Im ungünstigsten Falle steht kein Scheibchen auf dem richtigen Platz. Dann müssen wir in Einzelschritten 5 Scheibchen neu plazieren, indem wir jedes zunächst in den rechten Mittelpunkt (m3) überführen, danach mit R^1 die richtige Zyklusposition auf m4 bringen und schließlich wieder mit Z9 die Vertauschung m3–m4 durchführen. Da wir im allgemeinen eine ungerade Anzahl von Vertauschungen durchführen müssen, belegen wir zu Beginn die Felder o1, m1 und u1 entsprechend Bild 4.

Farbmuster, Symmetrien und Zahlenkonfigurationen

Beim Farbenspiel gibt es viele schöne Muster, die man unter Verwendung der Zugfolgen aus Tabelle 2 herstellen kann. Einige Beispiele sind in den Bildern 5 bis 11 dargestellt. An dieser Stelle wollen wir auch die Symmetrien zwischen L- und R-Drehfolgen erwähnen, die man bei Rotos sofort vermuten kann. Auch die Identität beinhaltet Symmetrien:

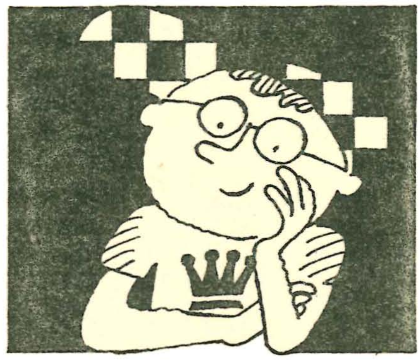
$L(-2,2,2,2,2,2,-2) = I$
$= R(1,2,2,2,2,2,1)$.

Daß man auch beim Zahlenspiel außer der geordneten Reihenfolge noch viele interessante Zahlenkonfigurationen angeben kann, belegt Bild 12. Dort ist die Summe der Zahlen in jeder Zeile gleich 15. Da es insgesamt 17 280 voneinander verschiedene Anordnungen mit dieser Zeilensumme gibt, wird der Leser leicht weitere finden.

Diejenigen Leser, die Rotos nun „durchforscht" haben, wünschen sich jetzt sicher ein neues Logikspiel. Gibt es wirklich keine offenen Fragen mehr? Dies kann nicht der Fall sein! – Gibt es Züge, die die Vertauschungen o1–o2, o2–o3, u1–u2 oder u2–u3 bewirken? Mit welcher kürzesten Zugfolge erreicht man die Identität?

Wenn der Leser sich das Spiel erneut vornimmt oder zum magischen Tetraeder, Fünfzehnerspiel usw. greift, hat dieser Beitrag seinen Zweck erfüllt.

R. Pätzold



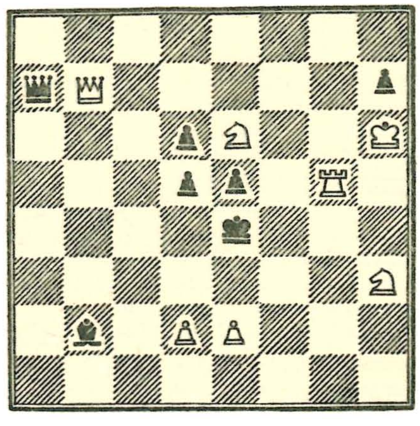
Das Schachproblem

Das Schachproblem ist eine von dem Verfasser konstruierte Schachstellung mit der Forderung, das Matt in einer bestimmten Zügezahl zu erzwingen. Es stellt also keine zufällig im Zweikampf entstandene Phase einer tatsächlich gespielten Partie, sondern eine bewußt geschaffene, komponierte Schachposition dar. Dadurch können oft eindrucksvolle und verborgene Ideen des Schachspiels in Schachproblemen dargestellt werden. Die Darstellung bestimmter Ideen wird unter sparsamster Verwendung der Mittel, des Figurenmaterials und der Zügezahl sowie unter optimaler Ausnutzung des Raumes auf dem Schachbrett angestrebt.

Das Schachproblem zeigt sich stets auch als ein Rätsel, wobei der Rätselcharakter je nach dem Grad der Schwierigkeit der Lösung und ihres Überraschungseffekts mehr oder weniger ausgeprägt ist. An ihm kann der Löser sein logisches Denken und seine schnelle Auffassungsgabe üben und trainieren. Aber nicht nur dem Löser wird ästhetischer Genuß zuteil, sondern auch dem Verfasser von Schachproblemen. Dieser bemüht sich stets nach weiterer Ideenbereicherung und künstlerischer Vervollkommnung in seinen Schachproblemen. Es gibt viele schöne und interessante Schachprobleme, die man noch nach Jahren immer wieder mit Freude und Genuß betrachtet, obwohl man die Lösung längst kennt. Ließe sich das etwa von einem noch so geistreichen Kreuzworträtsel denken? Das Schachproblem ist eben nicht nur Rätsel, sondern entschieden mehr.

Eine preisgekrönte, 78 Jahre alte Aufgabe von G. Heathcote: Matt in 2 Zügen

SCHWARZ



Eine Aufgabe von Prof. Dr. B. Goldschmidt

Biotechnikum
der Martin-Luther-Universität Halle

In vielen Zweigen der Naturwissenschaften muß man Meßpunkte durch geeignete Funktionen f möglichst gut beschreiben. Dazu berechnet man den Fehler bzw. die Abweichung aus den Differenzen zwischen dem i-ten Meßwert y_i und dem Funktionswert $f(x_i)$ am Meßpunkt x_i. In den meisten Fällen stellt man diesen Fehler F als Summe der Quadrate dieser Differenzen dar:

$$F = (y_1 - f(x_1))^2 + \ldots + (y_n - f(x_n))^2.$$

Die Funktion f kann von bestimmten Parametern $p, q, r, \ldots$ abhängen, die so gewählt werden sollen, daß F möglichst klein wird.

▲3011▲ Sei $f(x) = px + q$. An den Punkten x_1, x_2, x_3 werden die Werte y_1, y_2, y_3 gemessen. Wie müssen p und q gewählt werden, damit F möglichst klein wird?

Wie groß sind p und q, wenn

$$x_1 = 1,\quad y_1 = 1,\quad x_2 = 2,\quad y_2 = 3,$$
$$x_3 = 3,\quad y_3 = 2$$

sind?

Kurzbiographie

Jahrgang 1950 – Abitur 1968 – Mathematikstudium an der Martin-Luther-Universität Halle 1968 bis 1972 – Forschungsstudium 1972 bis 1975 – 1975 Promotion A (Cousin-Probleme bei partiellen Differentialgleichungen) – seit 1975 Assistent bzw. Oberassistent an der Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität – NVA 1976 bis 1978 – 1980 Dissertation B (Verallgemeinerte analytische Vektoren im R^n) – 1981/82 Praxisaufenthalt im VEB Chemiekombinat Bitterfeld (Anwendung mathematischer Methoden in der Biotechnologie) – 1984 Berufung zum Dozenten für Analysis an die Sektion Mathematik der MLU – 1987 Lehrstuhl für Biomathematik am Biotechnikum der MLU – verheiratet – 3 Kinder.

Die Arbeit eines Mathematikers am Biotechnikum

Das Biotechnikum an der Martin-Luther-Universität Halle wurde gegründet, um biologische Wirkprinzipien zu erforschen und diese bei der Produktion qualitativ hochwertiger Lebensmittel, neuer und spezifischer Arzneimittel oder dem Abbau von Schadstoffen und Abprodukten anzuwenden. Um biotechnologische Verfahren in der Volkswirtschaft zu nutzen, müssen immense finanzielle und technische Mittel für den Bau und das Betreiben von Anlagen bereitgestellt werden. Deshalb ist es notwendig, diese Verfahren ökonomisch zu optimieren und die stabilen Arbeitsbereiche zu bestimmen. Um diese Aufgabe zu lösen, versucht man, solche Anlagen auf modernen Rechnern nachzubilden und deren Verhalten unter unterschiedlichsten Bedingungen zu studieren. Dies geschieht in mehreren Stufen:

1. Formulierung der Zielstellung, der Voraussetzungen und der Zusammenhänge

In dieser Phase, die vom Naturwissenschaftler, Konstrukteur oder Betreiber einer Anlage initiiert wird, kommt es darauf an, möglichst genau die Problemklasse anzugeben, die untersucht werden soll (z. B. welche Einflüsse untersucht werden sollen, welche man vernachlässigen kann, wie genau die Ergebnisse sein müssen, auf welche Meßergebnisse und theoretische Untersuchungen man sich stützen kann usw.).

2. Modellierung

Unter mathematischer Modellierung versteht man das Aufstellen von Gleichungen und Relationen, um bestimmte Sachverhalte der Realität nachzubilden (wie das Aufstellen der Gleichungen bei der Lösung von Sachaufgaben im Unterricht). Hier werden Naturgesetze (z. B. Gesetz über die Erhaltung der Masse und Energie $\rightarrow$ Bilanzgleichungen), physikalisch-chemische Gesetzmäßigkeiten (Wärmeleitung, Reaktionsgeschwindigkeit), empirisch-statistische Zusammenhänge (z. B. der Zusammenhang zwischen Rührerdrehzahl und Durchmischung) sowie Materialeigenschaften (z. B. Abhängigkeit der Viskosität von der Temperatur) berücksichtigt. In dieser Phase arbeiten Mathematiker, Naturwissenschaftler und Techniker eng zusammen.

3. Lösung der Modellgleichungen

Hier wird untersucht, ob die Gleichungen überhaupt Lösungen besitzen (Existenz) und ob es eindeutig bestimmte oder mehrere gibt (Eindeutigkeit). Weiterhin werden Eigenschaften der Lösungen untersucht (Extremwerte, Nullstellen, Verhalten an den Rändern, Monotonie usw.). Bei allgemeinen Modellen ist die Berechnung der Lösung sehr kompliziert und im allgemeinen nur mit Hilfe von Computern näherungsweise möglich. Dann ist es unsere Aufgabe, Methoden zur Lösung dieser Gleichungen zu entwickeln und die dazugehörigen Computerprogramme zu schreiben. Wir arbeiten i. a. auf Personalcomputern in der Programmiersprache PASCAL.

4. Anpassung der Modellgleichungen an Meßwerte

Modellgleichungen enthalten im allgemeinen Parameter, deren Wert nicht genau bekannt ist bzw. deren Wert eine Vielzahl von Eigenschaften beschreibt. Je nach Wahl dieser Werte wird die gesuchte Lösung den untersuchten Sachverhalt gut oder schlecht beschreiben. Man könnte nun einfach verschiedene Werte für die Parameter ausprobieren, um eine gute Anpassung der Lösung zu finden. Dabei wird man für die Güte der Anpassung ein Kriterium (Fehler) definieren müssen. Mit Hilfe schneller und robuster Optimierungsverfahren ist man auch in der Lage, diese Modellparameter automatisch zu bestimmen. Auch dafür wurden von uns geeignete Algorithmen entwickelt (siehe Aufgabe).

5. Auswertung der Lösungen

Die so gefundenen Lösungen müssen jetzt klar und übersichtlich dargestellt werden (Tabellen, Graphiken) und mit den Ausgangswerten verglichen werden. Ist die Übereinstimmung des Modells mit den bekannten Werten gut, so kann man das Modell für weitgehende Aufgaben verwenden. Andernfalls müssen die Fehler genau analysiert werden (z. B. ob man unzulässige Vereinfachungen getroffen hat) und erneut eine Modellierung vorgenommen werden.

6. Simulation und Optimierung

Mit derartigen mathematischen Modellen kann man eine Reihe von Überlegungen anstellen, z. B.

– Testen von Hypothesen über Zusammenhänge und Abhängigkeiten, um die Ursachen von naturwissenschaftlichen Phänomenen zu erkennen und nutzbar zu machen.
– Durchführung von Simulationen auf Computern, d. h. z. B. Durchspielen von Wachstums- und Produktionsprozessen bei unterschiedlichen Ausgangssituationen (Rohstoff, Anlagenkonfiguration) oder unterschiedlichen Qualitäts- und Quantitätsparametern (Konzentration, Energie usw.).
– Optimierung von Anlagen und Verfahren.

Auf dieser Grundlage wurde von uns in den letzten Jahren ein Programmpaket „Modellbank Biotechnologie“ entwickelt, mit dem man derartige Probleme schnell und sicher bearbeiten kann.

Um derartig komplizierte Aufgaben lösen zu können, muß ein Mathematiker neben der sicheren Beherrschung der Methoden und Verfahren in der Lage sein, naturwissenschaftliche Zusammenhänge zu verstehen und fachgebietsspezifische Anwendungen zu überblicken. Er muß die Fähigkeit besitzen, sich mit Biologen und Ingenieuren in deren Terminologie zu verständigen und neuere Entwicklungen in der Literatur verfolgen. *B. Goldschmidt*

Olympiasieger in mathematischer Disziplin – Andreas Siebert

Ein Erlebnisbericht von der XXIX. IMO in Canberra

Andreas Siebert wurde am 15. 2. 1971 in Berlin geboren. Im Kreisklub „Junge Mathematiker" in Köpenick begann ab der 3. Klasse die ernsthafte Beschäftigung mit der Mathematik. Dann ging es folgerichtig über die Kreisolympiade, Mathematische Schülergesellschaft, DDR-Ausscheide und die Spezialschule „Heinrich Hertz" Berlin weiter. Bei den DDR-Olympiaden 1986, 1987 und 1988 erang Andreas 1. Preise. Der 1. Preis in Canberra dürfte der bisher höchste Lohn für seine harte, disziplinierte Arbeit sein. Was nicht heißt, daß da nicht auch viel Spaß am Hobby Mathematik dabei ist. Und wenn sich Andreas entspannen will, tut er das bei Musik von Pankow oder Herbert Grönemeyer sowie einem täglichen Eis.

Wir wünschen Andreas weiterhin viel Erfolg auch bei seinem geplanten Mathematikstudium an der Humboldt-Universität. Alphons

Nach harten Wochen Trainingslehrgang und einigen Klausuren stand fest, daß wir, Frank Göring, Dirk Liebscher, Martin Welk, Gerard Zenker und ich, für gut eine Woche nach Australien fahren, um dort an der IMO teilzunehmen.

Also trafen wir uns am Sonntag, dem 10. 7. 1988 in Berlin mit unserem Betreuer Dr. Quasthoff, verbrachten noch einen schönen Tag, ließen uns mit Informationen über Australien vollstopfen und setzten uns schließlich ins Flugzeug, um über Dubai, Singapur und Melbourne nach Sydney zu fliegen.

Die erste Überraschung traf uns in Dubai, wo wir gegen Morgen landeten und uns 35 °C im Schatten erwarteten. Zu unserem Glück war hier alles klimatisiert. Nach knapp 25 Stunden Flug erreichten wir mehr oder minder unbeschadet am Mittwochmorgen den Flughafen von Sydney und begaben uns zu unserer Unterkunft.

Natürlich nutzten wir unseren kurzen Aufenthalt, um uns die Stadt anzusehen. So sahen wir die weltberühmte Oper von Sydney, das chinesische Viertel und die Wolkenkratzer von Sydney. Obwohl wir ja nur einige Stunden in Sydney waren, glaubte ich fest daran, daß wir fast alle Wolkenkratzer dieser Stadt gesehen haben. Denn einige Minuten vom Stadtzentrum entfernt und ein Dreigeschosser ist ein großes Haus. Man hatte zeitweise das Gefühl, nicht in einer Zweimillionenstadt, sondern in einem riesigen Dorf zu sein.

Vorhin schrieb ich über die tropische Hitze von Dubai, nun muß ich auch das Klima von Sydney erwähnen, denn wir sind ja in den australischen Winter geflogen. Also „Winter" war das nicht, denn wir konnten uns die Stadt im T-Shirt ansehen. Dementsprechend war auch die Flora und Fauna. Es waren Palmen und anderes tropisches Gewächs zu sehen.

Als wir meinten, die Stadt besichtigt zu haben und es langsam dunkel wurde, sind wir zu unserer Unterkunft gefahren, nahmen noch die Informationsmaterialien entgegen und schliefen uns ordentlich aus, denn der Flug nimmt einen ziemlich mit und auch die Zeitdifferenz von acht Stunden ist zu verkraften. So ging unser erster Tag auf der Südhalbkugel ziemlich schnell vorbei.

Am nächsten Tag machten wir uns auf die Reise nach Canberra, an und für sich schon eine Reise allein. Die Fahrt dauerte „nur" vier Stunden, denn die Dimensionen sind auf dem 5. Kontinent doch anders als bei uns in Mitteleuropa. Auf der ganzen Fahrt sind wir durch eine (!) Siedlung gekommen. Übrigens – für alle Autofans – sind dort die Straßen fast autoleer.

An unserem 2. Tag wurden wir vom Veranstalter willkommen geheißen. Da die Zeremonie abends stattfand, nutzten wir gleich die Möglichkeit unser astronomisches Wissen aufzufüllen – wir suchten und fanden das Kreuz des Südens.

Am Freitag und Sonnabend schrieben wir die beiden Klausuren, die erwartet hart waren. Am Sonnabend besuchten wir noch ein Museum, in dem physikalische und technische Kuriosa und Experimente zu sehen und auszuprobieren waren. Den Abend beschloß ein temperamentvoller Buschtanz.

Am Sonntag zeigte uns ein ehemaliger Bumerangweltmeister, selbstverständlich aus Australien, wie man den Bumerang werfen muß, daß er auch zurückkommt. Am Abend gab es einen Mathemannschaftswettbewerb (die Regeln habe ich nachfolgend beschrieben). Er bereitete uns und unserer türkischen Partnermannschaft viel Spaß, so daß unsere mittelmäßige Plazierung schnell vergessen war.

Damit wir auch wirklich glauben, daß es in Australien die Känguruhs wie bei uns Kaninchen (oder noch mehr) gibt, machten wir einen Tagesausflug zu ihnen und tatsächlich – sie hoppelten rum. Für Leute („die sie mögen") ist es möglich sie zu streicheln, doch wir waren dazu zu ungeschickt. Da in Australien Winter war, aber kein Schnee lag, zogen wir zu einer Bobbahn mit Schlitten auf Rollen, wo man richtig auf Tempo kam, was den Spaß noch steigerte. Selbstverständlich schauten wir uns auch Canberra an, fuhren auf den Fernsehturm und waren auch hier von den Dimensionen beeindruckt. Beinah hätte ich es vergessen – Australien feierte seinen 200. Geburtstag seiner Besiedlung, und das war an jeder Ecke zu sehen. Dieser Tagesausflug war eine gute Ablenkung, denn am Abend sollte feststehen, wieviel Punkte jeder in der Endabrechnung haben würde. Die große Rechnerei ging los und jeder hoffte natürlich...! (Unsere Plazierungen konntet ihr ja in „alpha" Heft 6/88 erfahren.) Wir genossen also diesen Tag und waren einmal freudig überrascht, denn der Feldstecher der Wildhüterin kam aus der DDR, von Carl Zeiss – und das im fernen Australien.

Am vorletzten Tag in Australien statteten wir einem australischen College und einer australischen Familie einen Besuch ab. Hier lernten wir noch einmal das sympathische Temperament der Australier kennen. Den Abend schloß ein Essen in der Pizzeria Hut ab, die es angeblich in jeder Siedlung geben soll. Von der Qualität des Essens waren wir wie vom Service angenehm überrascht. Der letzte Tag war wieder dem mehr offiziellen Programm gewidmet – der mit dem Besuch unserer Botschaft begann. Wir und auch die „Botschaftler" waren doch erfreut, endlich mal Landsmänner hier am anderen Ende der Welt zu treffen.

Die Überreichung der Medaillen fand im Nationaltheater von Canberra statt. Der australische Premierminister Bob Hawke überreichte mir, wie den anderen 16 Goldmedaillengewinnern, die Goldene Plakette. Das war natürlich der „Punkt aufs i". Wir waren überhaupt von dem öffentlichen Interesse angenehm überrascht. Leider ging diese Woche auf der Südhalbkugel zu schnell vorbei – aber wir sollten noch einen Tag Singapur genießen dürfen. Also flogen wir am 21. nach Singapur – am Abend zuvor testeten wir noch das australische Bier und hielten es für trinkbar – mit Singapur Airlines in einer Boeing 747 (ein Riesending), wo wir vom Service einschließlich Radioprogramm und Film sowie den Mahlzeiten angenehm überrascht wurden.

Also in Singapur, wir übernachteten noch, besuchten wir am nächsten Tag die Singapurer Innenstadt bei tropischer Hitze. Wir schauten uns das chinesische Viertel an und wenn man etwas kaufen wollte, waren im allgemeinen erst mal Verhandlungen – wie in ganz Singapur – notwendig, wenn man nicht zu viel bezahlen wollte. Von Singapur wurden wir noch vom freundlichen Interflugvertreter verabschiedet. Dann flogen wir über Bombay, wo wir uns mit den letzten Souvenirs bewaffneten, nach Moskau. Von hier war es dann „nur" noch ein „Katzensprung" bis nach Berlin – wo wir auch schon von Vertretern des Ministeriums, der FDJ, der Medien und nicht zuletzt den „privaten Fans", Familie und Klassenkameraden begrüßt wurden.

Diese IMO war für uns ein schöner Höhepunkt bzw. Abschluß unserer langen Olympiadelaufbahn.
Nun will ich euch die Regeln für den Mathewettbewerb nennen, den ihr sicherlich in Schule oder Kreisklub durchführen könnt:

1. Die Mannschaften bestehen aus je zwei Gruppen A und B.
2. Zuerst bekommt Gruppe A eine Aufgabe.
3. Löst sie diese, ist Gruppe B an der Reihe, dann wieder Gruppe A usw.
4. Löst sie sie nicht richtig, darf sie es noch einmal versuchen und noch einmal usw. bis sie die Aufgabe hat oder bis sie aufgibt.
5. Für jede gelöste Aufgabe gibt es einen Punkt.
6. Die Mannschaft mit den meisten Punkten (Summe aus beiden Gruppen) in einer vorgegebenen Zeit ist Sieger.
7. Den Transport von Aufgaben und Lösungen kann man, wenn man will, durch Sporteinlagen ausschmücken.

Abschließend stellt euch Andreas die 6. Aufgabe der IMO 1988 vor, die keiner aus unserer Mannschaft gelöst hatte.

Aufgabe: Es seien a und b positive ganze Zahlen, so daß $ab+1$ ein Teiler von a^2+b^2 ist.
Man zeige, daß $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ das Quadrat einer ganzen Zahl ist.

Lösung: Angenommen, es existieren positive ganze Zahlen a, b mit $ab+1 | a^2+b^2$ und $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ ist keine Quadratzahl. Sei, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, $a \leqq b$ und unter allen diesen Paaren (a, b) die der Bedingung nicht genügen, wähle ich ein solches mit minimalem b aus.

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1} = c \Rightarrow a^2+b^2 = c(ab+1)$$
$$\Rightarrow b^2 - c \cdot ab + (a^2-c) = 0$$
$$\Rightarrow b_{1,2} = \frac{ac}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2c^2}{4} - a^2 + c}.$$

Offensichtlich gilt: Wenn das Paar (a, b) nicht den Bedingungen der Aufgabe genügt, so auch nicht $\left(\frac{a^2-c}{b}, a\right)$. Wenn $a < b$, so $\frac{a^2-c}{b} < b$ und $a < b \Rightarrow$ das gewählte (a, b) war nicht minimal. Das ist ein Widerspruch zur Annahme. Also war die Annahme falsch und die Behauptung gilt.
Bleibt der Fall $a = b$ und der Fall $\frac{a^2-c}{b} \leqq 0$ zu diskutieren.
Sei $a = b$: Dann gilt $a^2+1 | 2a^2$.
Da $a^2+1 | 2a^2+2 \Rightarrow a^2+1 | 2 \Rightarrow a = 1$.
Für $a = b = 1$ gilt $ab+1$ und
$a^2+b^2 = 2 \Rightarrow a+b^2 | ab+1 \Rightarrow$
Behauptung gilt.

Sei $\frac{a^2-c}{b} \leqq 0 \leftrightarrow a^2 - c \leqq 0 \leftrightarrow a^2 \leqq c$
$\Rightarrow b^2(ab+1) \leqq c(ab+1)$
$\Rightarrow a^3b + a^2 \leqq a^2+b^2 \Rightarrow a^3b \leqq b^2 \Rightarrow a^3 \leqq b.$
Wie man sich leicht überzeugt, ist für $b > a^3$ nie $ab+1 | a^2+b^2$. Bleibt also
$b^3 = a \Rightarrow a^2+b^2 = a^2+a^6$ und
$ab+1 = 1+a^4 \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{ab+1} = a^2$ q. e. d.

alpha-Wettbewerb 1987/88

Preisträger

Susanne Dräbenstedt, Aderstedt; René Erler, Altenburg; Veneta Türke, Auerbach; Silvio Strech, Bad Salzungen; Thoralf Czichy, Bergfelde; Gundula Hofer, Stefan Skonietzki, beide Berlin; Norbert Schröder, Bernau; Stephan Schrameier, Blankenfelde; André Schmatloch, Blankenhain; Torsten Schmidt, Sandra Nothnagel, Denise Schellenberg, Cornelia Pleß, Kati Reum, alle Breitungen; Anett Gschwender, Brohm; Torsten Peter, Brotterode; Christian Griepenhog, Brusendorf; Silvio Löffler, Hagen Lessing, beide Cottbus; Stefan Hübner, Christian Vögle, Andreas Kirchberg, alle Dingelstädt; Daniel Arndt, Marcus Heinrich, Steffen Petzold, Torsten Schmack, alle Dresden; André Kratzert, Dürrröhrsdorf; Dimitri Stübner, Peter Stübner, beide Erfurt; Yvonne Witthauer, Nicole Schöbel, Conny Richter, Martin Schulz, alle Ernstthal; Jana Reinhardt, Mandy Jäger, beide Fambach; Ulrich Müller, Fischheim; Mirko Niemann, Frankfurt/O.; Katrin Schünemann, Freital; Tobias Gerlach, Nicole Schüler, beide Friedeburg; Nadine Koch, Gehofen; Stefan Kottwitz, Gera; Alexander Tenner, Michael Gronau, Cathrin Kunze, alle Greifswald; Frank Schneegaß, Großbodungen; Silke Rudolph, Großröhrsdorf; Thomas Müller, Greußen; Jan Wettstein, Thilo Kallenbach, beide Gumpelstadt; Alois Belter, Hagenow; Schulklub der EOS W. Pieck, Heiligenstädt; Angela Wiesjahn, Holzendorf; Manuela Winkler, Hoyerswerda; Nico Schmidt, Jüdenberg; André Lange, Karl-Marx-Stadt; Mirko Jelinek, Katrin Anton, AG Math. Kl. 5/6 der Pestalozzi-OS, Kirsten Schröter, alle Leegebruch; Patrik Fladerer, Leinefelde; Torsten Schreiber, André Gärtner, beide Leipzig; Andreas Willnow, Lindenthal; Veit Kannegießer, Lübben; Daniel Wettstein, Lübz; Matthias Loesdau, Neustrelitz; Andreas Birkner, Katja Schürer, beide Oranienburg; Steffen Siebert, Pionierrepublik W. Pieck; Kanni Kelder, Pölva (Estnische SSR); Andrea Thiele, Rackwitz; Gerrit Tuschling, Ribnitz; Claudia Jurgat, Rostock; Kathrin Rotter, Saßnitz; Elko Jacobs, Saurasen; Katja Manski, Schildow; Matthias Kittner, Schmalkalden; Dagmar Schröder, Schönberg; Nicole Kirchner, Schwallungen; AG Jg. Math. des Kreispionierhauses „M. Böhme", Sebnitz; Thomas Lotze, Suhl; Steffen Vollbarth, Sondershausen; Iris Demmer, Themar; Sylvia Kaiser, Nicole Schiller, beide Tiefenort; Daniel Schuster, Trusetal; Karsten Hoof, Wiesenburg; Ronald Peters, Christian Kühn, beide Wismar; Christian Förster, Wittenberg; Stefan Bretfeld, Zepernick

Vorbildliche Leistung

Tino Wirsing, Bad Salzungen; Corinna Scherf, Olaf Leubner, beide Berlin; Katrin Kickbusch, Boizenburg; Beate Pohler, Brand-Erbisdorf; Petra Schmidt, Brusendorf; Susan Dreyer, Thomas Reißner, beide Cottbus; Andreas Witkowsky, Dingelstädt; Anja Werner, Silke Wicklein, Jan Skribanowitz, Matthias Overmann, Alexander Fischer, Christiane Hofmann, alle Dresden; Beate Kragl, Dirk Borsch, beide Erfurt; Lars Lämmerhirt, Ettenhausen; Steffen Röder, Fambach; Ulrike Müller, Fischheim; Thomas Nopp, Frankfurt/O.; Götz Lothal, Friedeburg; Matthias Ebert, Friedrichsthal; Nicol Gericke, Stephan Brendicke, beide Gallin; Beatrice Gronau, Greifswald; Kristin Winkler, Großschönau; Jens Köster, Halberstadt; Thomas Pitzschke, Halle-Neustadt; Katja Sonntag, Hennigsdorf; Olaf Schmidt, Hohenebra; Björn Borchardt, Ilmenau; Andreas Anders, Jüterbog; Katja Wurziger, Marco Münch, beide Karl-Marx-Stadt; Martin Schulz, Katzhütte; Heike Schmidtke, Königs Wusterhausen; Martin Schreiter, Leinefelde; Jens Gärtner, Clemens Crucius, beide Leipzig; Wibke Engel, Jacqueline Koschnitzki, beide Mittenwalde; Andreas Schröder, Ralph Michaelis, Frank Müller, alle Neubrandenburg; Beate Mägdefrau, Nordhausen; Cornelia Fahr, Mirko Kitzig, Roland Becker, alle Oranienburg; Susanne Kraenz, Picher; Dörte Schappler, Parchim; Katrin Hielscher, Ragow; Christoph Weidling, Riethnordhausen; Torsten Gerhardt, Alexander Koop, beide Rostock; Frank Schönheit, Rudolstadt; Marco Klemm, Röhrsdorf; Undine Wahl, Sandra Schünemann, beide Saßnitz; Erik und Björn Zimmermann, Schildow; Stefan Schrickel, Schmalkalden; Dörte Radke, Schwerin; Dirk Weber, Steinbach-Hallenberg; Jens Krubert, Templin; Silvia Kaiser, Tiefenort; Marcus Matzker, Torno; Thomas Förster, Velten; Sven Peyer, Weimar; Heiko Barthel, Wilschdorf; Enrico Maasch, Wittenberg; Martin Löffler, Worbis; Nico Eberhardt, Wiesenthal; Thomas Buttgereit, Zehlendorf; Jörg Siede, Zepernick; Anja Jakubahs

Abzeichen in Gold

Aus Platzgründen veröffentlichen wir ab diesem Wettbewerb nur noch die Namen der Teilnehmer, die 4, 5, 6, 10, 15, 20, 21, ... Jahre teilnehmen.

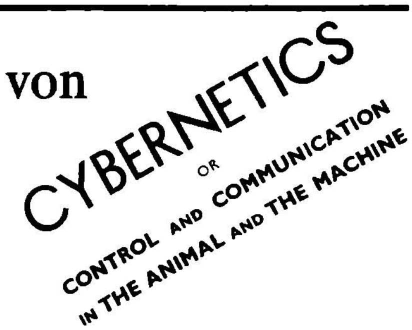
Für einundzwanzigjährige Teilnahme
Lutz Püffeld, Halberstadt

Für zwanzigjährige Teilnahme
Guido Blosfeld, Halle

Für fünfzehnjährige Teilnahme
Ina Büttner, Berlin; Annett Körner, Dresden; Bernd Dübe, Forst; Matthias Weser, Großenhain; Rüdiger Düsing, Halle; Ruth Jacobs, Halle-Neustadt; Rolf Kamieth, Kakerbeck; Alois Weninger, Knittelfeld (Österreich); Udo Kretzschmann, Markneukirchen; Jana Renner, Röbel; Ina und Uwe Ebert, Ruppendorf; Siegfried Kretschmann, Schlagsdorf; Bernd Hartwig, Thaldorf

Für zehnjährige Teilnahme
Florian Schreiber, Aue; Bert Minske, Norbert Dorn, Jens Prochno, Beate und Stefan Müller, alle Berlin; Christian Sitz, Calau; Andreas Prinz, Manfred Roßius, beide Cottbus; Uwe Martin, Crossen; Bert Kühne, Dahme; Rolf Dach, Michael Nitsche, Carsten und Helmut Schreiber, Ingolf Thurm, alle Dresden; Cornelia Wolf, Barbara Voigt, beide Erfurt; Heike Morgner, Falkenstein; Henry Mäder, Frohburg; Jutta und Uta Schumann, Havelberg; Carsten Leibnitz, Hohenstein-E.; Claudia Docter, Ilsenburg; Andreas Israel, Sebastian Horbach, beide Karl-Marx-Stadt; Friedhelm Reichert, Heiko Witte, beide Königs Wusterhausen; Bernd Fucke, Leipzig; Jens Fuchs, Luckau; Sven Saar, Mühlhausen; Irma Goßmann, Oranienburg; Helmut Schenk, Pirna; Katja Uhlemann, Prausitz; Ronald Kaiser, Schleid; Winfried Ullrich, Schmalkalden; Delia Wolfert, Söllichau; Mike Selig, Stauditz; Silvia Reinwarth, Teltow; Evelin Schott, Thalheim; Horst Rißmann, Wesenberg
Fortsetzung siehe Heft 3/88

Zum 25. Todestag von Norbert Wiener am 18. März 1989



In unserer Zeit einer neuen wissenschaftlich-technischen Revolution wird man kaum ein Exemplar, von naturwissenschaftlichen oder mathematischen Fachzeitschriften ganz zu schweigen, einer Tageszeitung finden, in dem nicht von Automatisierung, Computern, Informatik, Kybernetik, Hochtechnologien usw. die Rede ist. Einer der Väter dieses neuen technologischen Zeitalters ist der amerikanische Mathematiker Norbert Wiener gewesen.

Norbert Wiener wurde am 26. November 1894 in Columbia (USA-Staat Missouri) als Sohn des bedeutenden jüdischen Slawisten Leo Wiener (1862 bis 1939) geboren. Der Vater, Professor an der berühmten Harvard-Universität, stammte aus dem vom zaristischen Rußland besetzten Teil Polens, die Mutter Wieners aus dem Rheinland. Der außerordentlich begabte Norbert wurde zeitweise im elterlichen Haus vom Vater unterrichtet, danach nur kurzzeitig an Elementarschulen und dann sofort an höheren Schulen (Colleges). Bereits 1909 begann Wiener ein Studium der Biologie, danach ein Studium der Philosophie, das er 1912, also achtzehnjährig, mit einer Doktorarbeit über ein Thema der mathematischen Logik abschloß. Dieser äußerlich so glatte Weg zu einer großen Laufbahn hat jedoch auch seine Stolperstellen gehabt. In seiner Autobiographie hat Wiener beschrieben, daß er mechanische Tätigkeiten in der Mathematik, wie das sichere

Beherrschen der Grundrechenarten nur schwer lernte, noch „mit den Fingern" rechnete, „als das längst nicht mehr als statthaft galt". Dagegen fiel ihm das Verstehen schwieriger Vorgänge außerordentlich leicht. Das auch später bei Wiener bemerkbare Auseinanderfallen von unbedingt beherrschbaren Grundfertigkeiten und höherer Mathematik könnte eine Folge des ungewöhnlichen Bildungsweges gewesen sein, aber es scheint auch eine charakteristische Eigenart seines Denkens auszudrücken. Natürlich „verstand" Wiener die Infinitesimalrechnung, die analytische Geometrie usw., aber er konnte sie nicht erklären. Bedeutende Mathematiker haben beschrieben, daß Wiener ein „großartig schlechter Dozent" (H. Freudenthal) gewesen ist und er ist bezüglich des Stils seiner Arbeiten und seiner Arbeitsweise sogar mit einem Läufer verglichen worden, der möglichst schnell ans Ziel kommen will, sich dabei um das Zusammenspiel von Muskeln und Nerven, im Gegensatz zu seinem Trainer, nicht kümmernd (P. R. Halmos). Trotzdem hat Wiener einige direkte Schüler gehabt. Konnten sie den komplizierten, verschlungenen und ungewöhnlichen Gedankengängen Wieners, hauptsächlich in dessen Spezialseminaren folgen, so wie der Begründer der mathematischen Informationstheorie, Claude Elwood Shannon, dann hat Wiener sie auch tatkräftig gefördert.

Nach der Promotion setzte Wiener seine Studien in Europa, in Cambridge und in Göttingen, fort. In Göttingen lenkte ihn die Bewunderung für den großen Mathematiker David Hilbert (1862 bis 1943) schon auf seinen eigentlichen Forschungsbereich, die Anwendung der Mathematik auf physikalische und technische Fragen in weitestem Sinne. Nach seiner Rückkehr in die USA wirkte Wiener, wissenschaftlich wenig erfolgreich, kurzzeitig in New York, Cambridge/Mass., Orono, Lynn und Albany. Nach einem kurzen Militärdienst arbeitete er als Reporter, wurde arbeitslos. Die finanzielle Situation seiner Familie ermöglichte ihm aber weiterhin eine sorgenfreie Forschungsarbeit auf dem Gebiet der mathematischen Logik. Im Jahre 1919 erschien Wieners erste, sehr bedeutende Arbeit über die Theorie des Messens. 1920 wurde Wiener am berühmten Massachusetts Institute of Technology in Cambridge (Massachusetts) fest angestellt. 1932 wurde er dort ordentlicher Professor. Studienaufenthalte, Gastprofessuren und Vortragsreisen führten Wiener in den folgenden Jahrzehnten in viele Länder. Während einer dieser Reisen ist er am 18. März 1964 in Stockholm gestorben.

Nach den frühen Arbeiten zur mathematischen Logik wandte sich Wiener in seiner Forschungsarbeit vorwiegend Gebieten zu, die an der „vordersten Front" der damaligen Forschung lagen. Diese Gebiete, auch heute noch höchst aktuell, seien nur erwähnt. Es waren die harmonische Analyse und ihre Verbindung zur Theorie der Zufallsprozesse, und, angeregt durch Fragen der Elektrotechnik, die Operatorenrechnung (1925) und die Potentialtheorie (1923/24). Mit seinem Namen sind noch jetzt eine Anzahl von Sätzen aus diesen Gebieten ebenso wie der Begriff „Fourier-Wiener-Reihen" verbunden. Die Arbeiten Wieners über harmonische Analyse eröffneten auch die Möglichkeit, die Grundlagen dieser Theorie neu zu fassen. Auch noch in den zwanziger Jahren entstanden Arbeiten über Tauber-Theoreme, zur Quantenmechanik, entwickelte Wiener das Konzept des normierten Raumes und der komplexen Fouriertransformation. Es folgten die berühmten Untersuchungen zur Brownschen Bewegung (1920 bis 1934). Die Brownsche Bewegung ist benannt nach dem schottischen Botaniker Robert Brown (1773 bis 1858). Er entdeckte sie 1827, als er das Verhalten von Pollenkörnern im Wasser betrachtete. Die Körner wurden durch die ständigen Stöße der sich ständig bewegenden Wassermoleküle in die unregelmäßigste Bewegung versetzt. Die Deutung der Ursache dieser Bewegung war erstmals Albert Einstein (1879 bis 1955) gelungen. Brownsche Bewegungen treten, wie wir heute wissen, auch beim Transport elektrischer Ladungen, bei chemischen Reaktionen, im Kernreaktor und an vielen anderen Stellen in Wissenschaft und Technik auf.

Die Arbeiten Wieners über Brownsche Bewegung ermöglichten es unter Mitarbeit anderer Mathematiker schließlich, solche Bewegungen und ähnliche Erscheinungen mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu beschreiben.

„Wiener-Prozesse", samt „Wienerschem Integral" und „Wienerschem Maß" spielen heute in der Theorie der Zufallsprozesse und bei ihren technischen Anwendungen geradezu eine entscheidende Rolle. Nebenbei entstanden in den dreißiger Jahren Arbeiten zur Ergodentheorie und über Integralgleichungen.

Zur Zeit des zweiten Weltkrieges entwickelte Wiener die Theorie der optimalen Filter und der optimalen Vorhersage. Die Filtertheorie gab die Möglichkeit, Methoden zu entwickeln, die störenden Nebengeräusche bei einer Nachrichtenübermittlung, z. B. durch Radar, zu vermindern. Diese Wienersche Theorie ist noch jetzt von grundsätzlicher Bedeutung für die Nachrichtentechnik. Die Vorhersagetheorie ermöglichte es, aus einer gewissen Menge von Daten über die Vergangenheit eines Ereignisses statistisch auf die nächste

Zukunft des Vorganges zu schließen. Ein solcher Vorgang tritt zum Beispiel bei der Flugzeugabwehr auf. Um das Flugzeug abzuschießen, muß das Geschütz auf eine Stelle des Himmels gerichtet werden, die das Flugzeug dann erreicht, wenn das abgesandte Geschoß auch diese Stelle erreicht. Um das Geschütz richtig zu richten, muß man die wahrscheinliche Position des Flugzeugs für eine Zeit „vorhersagen" können. Filtertheorie und Vorhersagetheorie sind aus der Not entstanden, England gegen die verheerenden faschistischen Luftangriffe schützen zu müssen.

Etwa auf das Jahr 1942 gingen die Anstrengungen Wieners und anderer zurück, die „Kybernetik" zu begründen. In einer Reihe von Konferenzen wurden von Fachleuten sehr unterschiedlicher Fachgebiete Grundfragen der neuen Wissenschaft diskutiert. Als Dokument der Diskussionen erschien nach einer Vorstudie (1943) Wieners berühmtestes Buch „CYBERNETICS ...". Das Buch war ein Meilenstein auf dem Wege, einheitliche Prinzipien (z. B. „Rückkopplung") aufzufinden, die für Lebewesen, technische Geräte, Gesellschaftsstrukturen gleichermaßen Gültigkeit haben. Der Welterfolg des Buches ermunterte Wiener in weiteren Schriften sich vorwiegend mit der Anwendung der Kybernetik und der gesellschaftlichen Bedeutung dieser Wissenschaft auseinanderzusetzen.

In diesen Schriften verurteilte er jede Art imperialistischer Ideologie und legte die (kybernetischen) Mechanismen diktatorischen Herrschaftsstrebens und kapitalistischer Geschäftspraktiken bloß. Auch seit etwa 1942 hatte Wiener begonnen, für sich Konsequenzen aus der entstandenen politischen Situation zu ziehen. Seiner Einbeziehung in das Projekt zur Schaffung der Atombombe standen möglicherweise schon sicherheitspolitische Bedenken reaktionärer Militärkeise entgegen. Wenig später weigerte sich Wiener jedoch selbst an halbmilitärischen Projekten über Rechengeräte mitzuwirken und erklärte schließlich 1947 im Zusammenhang mit dem Bau der Wasserstoffbombe, daß er nicht die Absicht habe, sich weiterhin mit Untersuchungen zu befassen, die für die Kriegsführung von Bedeutung wären. Seine Aufgabe und die Aufgabe der ehrlichen Naturwissenschaftler und Mathematiker sei es vielmehr auch, die Allgemeinheit mit den Grundfragen der Naturwissenschaften und mit den politischen Hintergründen der Anwendung von Mathematik und Naturwissenschaften vertraut zu machen.

H. J. Ilgauds

Wir verweisen auch auf den Titel aus der Reihe „Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner":

H. J. Ilgauds

Norbert Wiener

86 S., zahlr. Abb.
Bestell-Nr. 665 983 9 Preis: 4,80 M
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft
Leipzig, 1984

Ein elementarer Konvergenzbeweis

Dirk Porezag, der Autor dieses Beitrages, wurde am 15. 12. 1968 in Frauenstein (Osterzgebirge) geboren. Bis zum Abschluß der 10. Klasse besuchte er dort die POS „Julius Fučík". Von 1985 bis 1987 war er Schüler der Spezialklasse für Mathematik der Technischen Universität Karl-Marx-Stadt. Vom 5. Schuljahr an nahm er regelmäßig und erfolgreich an Mathematik- und Physikolympiaden teil, war Mitglied im Bezirkskorrespondenzzirkel und in der Bezirksarbeitsgemeinschaft für Mathematik. Dirk nahm 1987 an der Technischen Universität Karl-Marx-Stadt ein Physikstudium nach Sonderstudienplan auf. Zur Zeit leistet er noch seinen Ehrendienst bei der NVA und wird im Mai dieses Jahres sein Studium fortsetzen. Wir wünschen ihm dabei viel Erfolg!

Alphons

Bei Anwendung des Tangentenverfahrens von Newton zur Bestimmung der reellen positiven Nullstelle der Funktion $f(x) = x^m - a$, wobei $a \in R$ und $m \in N$ mit $a > 0$ und $m > 1$ gegeben sind, wird man auf folgendes Iterationsverfahren geführt:

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (1)$$

mit einem beliebigen Startwert $x_0 > 0$.
Dabei ist
$g(x) = (1/m)\,[(m-1)\,x + a/x^{m-1}]$,
$(x > 0)$.

Die Idee ist die, beginnend mit einem beliebigen positiven Startwert x_0 über die Beziehung (1) nacheinander sogenannte Näherungswerte $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ für die gesuchte Lösung der Gleichung $x^m - a = 0$, nämlich $\sqrt[m]{a}$ zu erhalten. Im allgemeinen ist aber nicht sicher, daß dieses Vorgehen Näherungswerte mit beliebiger Genauigkeit liefert. Man muß also nachweisen, daß die durch (1) erzeugte Folge von Näherungswerten gegen $\sqrt[m]{a}$ konvergiert.

In der Literatur wird die Konvergenz dieser Folge, wegen der Entstehung des Verfahrens, mit Hilfe der Differentialrechnung nachgewiesen. Hier soll ein elementarer Konvergenzbeweis vorgestellt werden. Er benutzt nur den Satz über die Konvergenz monotoner und beschränkter Folgen sowie einige einfache Umformungen, also Kenntnisse, die bereits etwa im ersten Drittel der 11. Klasse zur Verfügung stehen müßten.

Wir formulieren zunächst das zu beweisende Resultat:

Satz: Das Iterationsverfahren (1) liefert bei beliebigem positivem Startwert x_0 eine gegen $\sqrt[m]{a}$ konvergierende Folge (x_n), die ab $n > 0$ monoton fällt und durch $\sqrt[m]{a}$ nach unten beschränkt ist. Außerdem gilt folgende Fehlerabschätzung

$0 \leqq x_n - \sqrt[m]{a} \leqq x_n - a/x_n^{m-1}$
$(n = 1, 2, \ldots)$.

Wir bereiten den Beweis des Satzes mit einem Lemma und zwei Folgerungen vor.

Lemma: Für $u > 0$ und $m > 1$ ist
$u^m + m - 1 \geqq mu$.

Beweis: Offenbar folgt aus $0 < u \leqq 1$ (bzw. $u > 1$) sofort

$$\sum_{i=0}^{m-1} u^i \leqq m \quad \left(\text{bzw. } \sum_{i=0}^{m-1} u^i > m\right),$$

woraus nach Multiplizieren mit $u - 1$ in beiden Fällen unter Verwendung der Summenformel für die geometrische Folge die Ungleichung $u^m - 1 \geqq m(u-1)$ (die Gleichheit gilt nur für $u = 1$) folgt. Hieraus ergibt sich die Behauptung des Lemmas. q. e. d.

Folgerung (1): Für $x > 0$, $m > 1$ und $a > 0$ ist $g(x) \geqq \sqrt[m]{a}$.

Beweis: Für $u = \sqrt[m]{a}/x > 0$ erhält man aus dem Lemma die Ungleichung $a/x^m + (m-1) \geqq m\sqrt[m]{a}/x$. Diese mit x/m multipliziert liefert die Beschränktheit der Funktion g nach unten durch $\sqrt[m]{a}$.

Folgerung (2): Für $x \geqq \sqrt[m]{a}$ ist $g(x) \leqq x$.

Beweis: Dieses Resultat ergibt sich unmittelbar aus der Darstellung
$g(x) = x - (x^m - a)/mx^{m-1}$.

Kommen wir nun zum Beweis des Satzes: Wegen Folgerung (1) ist $x_n \geqq \sqrt[m]{a}$ für $n = 1, 2, \ldots$, woraus mit der Folgerung (2) sich sofort $x_{n+1} = g(x_n) \leqq x_n$ für $n = 1, 2, \ldots$ ergibt. Bekanntlich konvergiert eine solche nach unten beschränkte und monoton fallende Folge. Sei $G = \lim_{n \to \infty} x_n$. Offensichtlich ist $G \geqq \sqrt[m]{a} > 0$, so daß wir unter Berücksichtigung einfacher Grenzwertsätze ohne Schwierigkeiten in (1) mit n gegen Unendlich gehen können. Man erhält: $G = (1/m)\,[(m-1)\,G + a/G^{m-1}]$, woraus $G = \sqrt[m]{a}$ folgt. Zur Fehlerabschätzung: Setzen wir $y_n = a/x_n^{m-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, so erkennt man leicht, daß die Folge (y_n) monoton wachsend gegen $\sqrt[m]{a}$ konvergiert. Mithin gilt immer:
$y_n < \sqrt[m]{a} < x_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$.

Hieraus folgt die erwähnte Fehlerabschätzung. q. e. d.

D. Porezag

XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

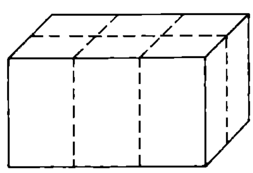
Aufgaben der Kreisolympiade

(16. 11. 88)

Olympiadeklasse 5

280521 In einer Gaststätte, die aus einem Speisesaal und einem Grillrestaurant besteht, sind im Speisesaal genau 135 Plätze für die Gäste vorhanden. Die Anzahl der Plätze im Grillrestaurant beträgt ein Drittel von der Anzahl der Plätze im Speisesaal.
a) Wieviel Plätze stehen in der Gaststätte insgesamt zur Verfügung?
b) Im Sommer kommen noch Plätze im Freien hinzu. Ihre Anzahl ist doppelt so groß wie die Anzahl der Plätze im Grillrestaurant.
Wie groß ist im Sommer das Platzangebot der Gaststätte?

280522 Das im Bild abgebildete Paket ist von links nach rechts 45 cm lang, von vorn nach hinten 30 cm breit, und es ist 25 cm hoch. Es soll in der dargestellten Weise (gestrichelte Linie) mit Klebeband verklebt werden. Für das Überlappen von End- und Anfangsstücken sind zusätzlich insgesamt 10 cm Klebeband vorgesehen.
Wieviel Zentimeter Klebeband werden demnach insgesamt gebraucht?
Wieviel Meter sind das?



280523 a) Zeichne eine Gerade g und ein Dreieck ABC, dessen Eckpunkt C auf g liegt, während A und B nicht auf g liegen, sondern sich auf verschiedenen Seiten der Geraden g befinden!
b) Von einer Verschiebung wird verlangt, daß bei ihr die Gerade g sich selbst als Bild hat und daß die Verschiebungsweite 6 cm beträgt.
Wie viele solcher Verschiebungen gibt es insgesamt?
Zeichne zu jeder dieser Verschiebungen einen Verschiebungspfeil!
c) Konstruiere das Bild des Dreiecks ABC bei jeder der in b) genannten Verschiebungen!

280524 a) In einer Kiste sind 3 grüne und 4 gelbe Kugeln und keine weiteren. Kerstin und Steffen überlegen, wieviel Kugeln sie mindestens aus der Kiste herausholen müssen, um zu sichern, daß von jeder Farbe (mindestens) eine dabei ist. Beim Herausholen der Kugeln soll nicht in die Kiste geschaut werden. Kerstin meint, man müsse mindestens 5 Kugeln herausholen; dies würde aber auch ausreichen, um das Gewünschte zu sichern. Steffen ist dagegen der Ansicht, daß dafür schon 4 Kugeln reichen.
Wer von beiden hat recht? Begründe deine Entscheidung.
b) Jetzt seien in der Kiste 23 rote, 33 blaue, 21 schwarze, 21 weiße, 2 grüne Kugeln und keine weiteren. Gib an und begründe, wieviel Kugeln man mindestens herausnehmen muß, um zu sichern, daß 6 dieser Kugeln einander gleiche Farbe haben!
Zeige, daß die von dir angegebene Zahl dafür auch ausreicht!

Olympiadeklasse 6

280621 An der Bahnstrecke von Pfiffigstadt nach Knobelshausen liegen zwischen diesen beiden Orten noch drei Bahnstationen: Adorf, Bedorf, Cedorf.
In jedem dieser fünf Bahnhöfe kann man Fahrkarten nach jedem anderen dieser Bahnhöfe kaufen.
André besitzt zu jeder dieser möglichen Verbindungen genau eine Fahrkarte. Weitere Fahrkarten hat er noch nicht in seiner Sammlung.
Wieviel Fahrkarten hat André insgesamt?
(Hinweis: Hin- und Rückfahrt gelten als verschiedene Verbindungen, kombinierte „Hin- und Rückfahrkarten" gibt es jedoch nicht.)

280622 Frau Müller und ihre Tochter Michaela, Frau Beyer und ihre Söhne Jan und Gerd sowie Frau Schulz mit ihren Kindern Steffi und Jens besuchen gemeinsam eine Veranstaltung. Frau Müller kauft die Eintrittskarten für alle und bezahlt 22 Mark.
Wieviel Geld müssen Frau Beyer und Frau Schulz der Frau Müller geben, um die Eintrittskarten für sich und ihre Kinder zu bezahlen, wenn für Michaela, Jan, Gerd, Steffi und Jens jeweils nur der halbe Eintrittspreis wie für einen Erwachsenen entrichtet werden mußte?

280623 Rolf zeichnet ein Rechteck. Er verkleinert dann dessen größere Seitenlänge um 2 cm und stellt fest: Dabei entsteht ein zweites Rechteck, dessen Flächeninhalt um 8 cm^2 kleiner ist als der Flächeninhalt des ersten Rechtecks. Ferner vergrößert er beide Seitenlängen des ersten Rechtecks um je 1 cm und stellt fest: Dabei entsteht ein drittes Rechteck, dessen Flächeninhalt um 13 cm^2 größer ist als der Flächeninhalt des ersten Rechtecks.
Weise nach, daß sich allein aus Rolfs Feststellungen die beiden Seitenlängen des ersten Rechtecks ermitteln lassen! Gib diese Seitenlängen an!

280624 Heidi, Manuela, Peggy und Simone starteten beim Schulsportfest, jedes dieser Mädchen in genau einer der Sportarten „Handball", „Mehrkampf", „Pop-Gymnastik", „Schwimmen".
Ferner ist bekannt:
(1) Jedes der vier Mädchen errang genau eine Medaille; zwei Mädchen Gold, die beiden anderen Silber.
(2) Für Mädchen mit gleicher Medaille gilt stets: Bei jedem dieser Mädchen beginnt der Name mit demselben Buchstaben wie die Sportart des anderen Mädchens.
(3) Heidi erhielt eine Medaille geringeren Wertes als Manuela.
(4) Simone erkämpfte nicht die gleiche Medaille wie die Handballerin.
Zeige, daß aus diesen Angaben eindeutig gefunden werden kann,
a) in welcher Sportart jedes der Mädchen gestartet ist,
b) welche Medaille jedes der Mädchen errungen hat!
Überprüfe auch, ob mit den so gefundenen Sportarten und Medaillen alle Angaben (1) bis (4) erfüllt werden!

Olympiadeklasse 7

280721 Im Mathematikunterricht einer Klasse wurden über eine natürliche Zahl, die zwischen 100 und 200 liegt, durch Schüler folgende Aussagen getroffen:
(1) André: „Die Zahl ist durch 11 teilbar."
(2) Birgit: „Die Zahl ist eine Primzahl".
(3) Christian: „Die Zahl ist eine zusammengesetzte Zahl."
(4) Doris: „Die Zahl ist eine Quadratzahl."
Der Mathematiklehrer stellt fest, daß genau eine dieser vier Aussagen falsch ist.
Untersuche, ob die Zahl durch diese Feststellungen eindeutig bestimmt ist! Ist dies der Fall, dann gib die Zahl an!

280722 Es sei ABC ein Dreieck; darin sei CD die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ACB$. Die Parallele durch B zu CD schneide die Verlängerung von AC über C hinaus in einem Punkt E.
Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets das Dreieck BEC gleichschenklig ist!

280723 Es sei $ABCD$ ein Trapez mit $AB \parallel CD$, das folgende Bedingungen erfüllt:
(1) Die Längen der Seiten AB und CD verhalten sich wie $5:4$.
(2) Die Mittellinie des Trapezes hat eine Länge von 5,4 cm.
(3) Die Höhe des Trapezes ist halb so groß wie die Länge der Seite AB.
Untersuche, ob durch diese Angaben der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ eindeutig bestimmt ist. Ist dies der Fall, dann gib den Flächeninhalt des Trapezes in Quadratzentimetern an!

280724 a) Ermittle die Summe der Quersummen aller zweistelligen, durch 5 teilbaren Zahlen!

b) Ermittle die Summe der Quersummen aller natürlichen Zahlen von 0 bis 1000!

Olympiadeklasse 8

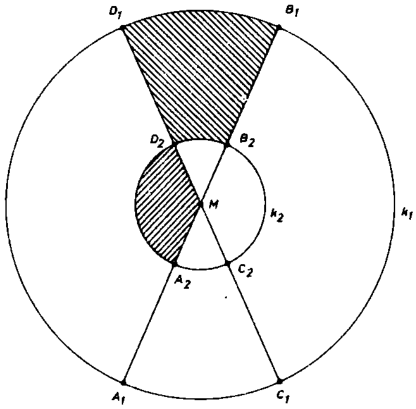
280821 Ein Frachtschiff benötigt für eine Schiffsroute vom Hafen A zum Hafen B genau 12 Tage. Ein Tanker fährt diese Route in entgegengesetzter Richtung und braucht dafür 15 Tage.
Der Frachter fährt 6 Tage später vom Hafen A ab als der Tanker vom Hafen B.
a) Wieviel Tage nach Abfahrt des Frachters treffen sich die beiden Schiffe, wenn sie mit gleichbleibender Geschwindigkeit fahren?
b) Welchen Teil der Route hat dann jedes Schiff zurückgelegt?

280822 Beweise die folgende Aussage!
Unter je fünf unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen gibt es mindestens eine, höchstens aber zwei, die durch 3 teilbar sind.

280823 In einer Arbeitsgemeinschaft wird über folgende Figur diskutiert: Es sei $ABCD$ ein Quadrat; die Mittelpunkte der Seiten AD bzw. CD seien M bzw. N, der Schnittpunkt der Strecken CM und BN sei P.
a) Simone mißt den Winkel $\sphericalangle BPM$ und stellt fest, daß die Strecken CM und BN aufeinander senkrecht stehen!
b) Frank mißt von den Dreiecken ABM und BPM Seiten- und Höhenlängen und stellt fest, daß diese beiden Dreiecke nicht einander flächeninhaltsgleich sind.
Untersuche, ohne an einer Figur Messungen durchzuführen, für jede der beiden Feststellungen, ob sie für jedes Quadrat wahr ist!

280824 Es seien k_1 und k_2 zwei konzentrische Kreise mit dem Mittelpunkt M, deren Radien sich wie $3:1$ verhalten. Zwei Durchmesser A_1B_1 und C_1D_1 von k_1 schneiden k_2 in Punkten A_2, B_2 bzw. C_2, D_2, die so angeordnet sind, wie das Bild zeigt.

a) Ermittle das Verhältnis der Flächeninhalte des Kreisausschnittes A_2MD_2 und des Kreisringausschnittes $D_2B_2B_1D_1$, wenn vorausgesetzt wird, daß $\sphericalangle A_1MD_1$ ein rechter Winkel ist!
b) Wie hat man die Größe des Winkels $\sphericalangle A_1MD_1$ zu wählen, damit der Flächeninhalt des Kreisaussschnittes A_2MD_2 gleich dem Flächeninhalt des Kreisringausschnittes $D_2B_2B_1D_1$ ist?



Olympiadeklasse 9

280921 Ermitteln Sie die kleinsten vier Zahlen, die das Quadrat einer natürlichen Zahl und zugleich auch die dritte Potenz einer anderen natürlichen Zahl sind!

280922 In ein Quadrat mit 4×4 Feldern seien die Zahlen von 1 bis 16 so eingetragen, daß jede der Zahlen genau einmal auftritt und daß sich bei der Addition der Zahlen in jeder der vier Zeilen, der vier Spalten und der beiden Diagonalen jeweils dieselbe Summe s ergibt („Magisches Quadrat").
a) Beweisen Sie, daß in allen magischen Quadraten (mit den Zahlen von 1 bis 16 in 4×4 Feldern) derselbe Wert für s auftreten muß!
b) Beweisen Sie, daß in jedem magischen Quadrat von 4×4 Feldern die Summe der Zahlen in den vier Eckfeldern ebenfalls s sein muß!

280923 In einem Dreieck ABC seien die Seitenlängen und Winkelgrößen wie üblich mit a, b, c und α, β, γ bezeichnet. Die Winkelhalbierende von $\sphericalangle BAC$ schneide die Seite BC in einem Punkt D. Dabei sei $\overline{AD} = b$. Ferner sei vorausgesetzt, daß eine der drei Winkelgrößen α, b, γ das arithmetische Mittel der beiden anderen ist.
Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen alle Möglichkeiten für die Winkelgrößen α, β, γ!

280924 a) Ermitteln Sie alle diejenigen Primzahlen, die sich als Summe zweier aufeinanderfolgender von Null verschiedener natürlicher Zahlen darstellen lassen!
b) Beweisen Sie, daß es keine Primzahl gibt, die sich als Summe von drei oder mehr aufeinanderfolgenden von Null verschiedenen natürlichen Zahlen darstellen läßt!

Olympiadeklasse 10

281021 Gesucht ist die kleinste positive natürliche Zahl, deren Zifferndarstellung (im Dezimalsystem) nur aus den Ziffern 0 und 1 besteht und die durch 450 teilbar ist.

281022 Weisen Sie nach, daß es genau eine quadratische Funktion f gibt, die die Bedingung

$$\frac{f(x)+f(x+2)}{6} = x^2 - 3 \qquad (*)$$

für alle reellen Zahlen x erfüllt, und daß diese Funktion zwei ganzzahlige Nullstellen hat!

281023 Über einen Kreis k_1 mit dem Mittelpunkt M_1 und einen Kreis k_2 mit dem Mittelpunkt M_2 werde vorausgesetzt, daß k_2 durch M_1 geht, aber nicht ganz in der Fläche des Kreises k_1 liegt.
Derjenige Schnittpunkt von k_1 mit der Geraden g durch M_1, M_2, der dann im Innern von k_2 liegt, sei S. Ferner sei P_2 einer der Schnittpunkte, die k_2 mit der in S auf g errichteten Senkrechten hat.
Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen stets folgende Aussage gilt: Diejenige von P_2 an k_1 gelegte Tangente t, die k_1 in einem von S verschiedenen Punkt P_1 berührt, ist auch Tangente an k_2.

281024 Gegeben sei ein Halbkreis. Gesucht sind Vierecke, die die folgenden Bedingungen (1) bis (3) erfüllen:
(1) Zwei Eckpunkte des Vierecks liegen auf dem Durchmesser des Halbkreises, die beiden anderen Eckpunkte liegen auf dem Halbkreisbogen.
(2) Das Viereck ist ein Rechteck.
(3) Seine Seitenlängen verhalten sich wie $\sqrt{3}:2$.

a) Beschreiben Sie eine Konstruktion, durch die man zwei verschiedene Vierecke $P_1Q_1R_1S_1$ und $P_2Q_2R_2S_2$ erhält!
b) Führen Sie die beschriebene Konstruktion aus!
c) Beweisen Sie, daß die nach Ihrer Beschreibung konstruierten Vierecke die Bedingungen (1) bis (3) erfüllen!

Olympiadeklassen 11/12

281221 Man ermittle alle diejenigen Tripel (x, y, z) von Null verschiedener reeller Zahlen x, y und z, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=z \quad (1),$$
$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-x \quad (2),$$
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=y \quad (3).$$

281222 Für jede natürliche Zahl $n > 0$ sei f_n die durch

$$f_1(x) = (x-1)^2,$$
$$f_2(x) = (x-1)^2 + (2x-1)^2,$$

allgemein

$$f_n(x) = (x-1)^2 + (2x-1)^2 + \ldots + (nx-1)^2$$

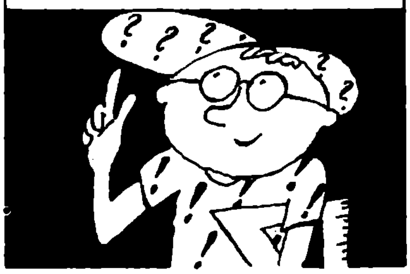
für alle reellen x definierte Funktion. Der Graph dieser Funktion, jeweils eine Parabel, habe den Scheitel S_n.
a) Man berechne die Koordinaten von S_1, S_2 und S_3.
b) Hat jeweils S_n die Koordinaten (x_n, y_n), so beweise man, daß die Folge (x_n) streng monoton fällt und die Folge (y_n) streng monoton steigt.

281223 Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M, gegeben sei ferner ein von M verschiedener Punkt N im Innern von k. Man untersuche, ob es unter allen durch N gehenden Sehnen AB des Kreises k
a) eine gibt, für die $\overline{NA}^2 + \overline{NB}^2$ möglichst klein ist,
b) eine gibt, für die $\overline{NA}^2 + \overline{NB}^2$ möglichst groß ist.
Gibt es jeweils eine solche Sehne, so gebe man deren Lage (in bezug auf die gegebenen k, M, N) an.

281224 Die ganzen Zahlen x_n und y_n seien durch $x_1 = y_1 = 1988$ und die Vorschriften
(1) $x_{n+1} = 2x_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$
(2) $y_{n+1} = 2y_n - 2^{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$
festgelegt. Man untersuche, ob
a) alle Zahlen x_n,
b) alle Zahlen y_n
positiv sind.

Solltet ihr Probleme bei der Lösung dieser Aufgaben haben, wendet euch bitte über euren Mathematiklehrer an den Fachberater des entsprechenden Kreises.

Lösungen



Lösungen zum alpha-Wettbewerb
Heft 6/88

Ma 5 ■ 2945 In der linken Abbildung haben die beiden Dreiecke Seitenlängen von 5 cm und $(5 + 7)$ cm = 12 cm. Zusammengefügt ergeben sie ein Rechteck von 5 cm · 12 cm = 60 cm² Flächeninhalt. Bei der rechten Abbildung erhält man entsprechend zwei Rechtecke von jeweils 4 cm · 8 cm = 32 cm², also insgesamt von 64 cm² Flächeninhalt. Da wegen $5 + 7 = 4 + 8 = 12$ beide Quadrate die gleiche Seitenlänge von 12 cm besitzen, also auch den gleichen Flächeninhalt haben, wird vom rechten Quadrat mehr Fläche abgeschnitten als vom linken. Also ist die linke schraffierte Fläche die größere.

Ma 5 ■ 2946 Wir stellen eine Tabelle auf. Die Zahlen stellen das Lebensalter der vier Familienmitglieder dar.

Peter	Hanni	Mutter	Vater	zusammen
1	11	33	35	80
2	12	36	38	88
3	13	39	41	96
4	14	42	44	104
5	15	45	47	112
6	16	48	50	120

Peter ist 6 Jahre, Hanni 16 Jahre, die Mutter 48 Jahre, der Vater 50 Jahre alt.

Ma 5 ■ 2947 a) Die Produkte sind gleich und verschieden von Null; daher ist $a : b = 1$.
b) Die Produkte sind gleich und heben sich bei der Addition auf; daher ist $v + w = 10\,000\,000$.
c) Da y um $1 \cdot 1987$ kleiner ist als x, gilt $x - y = 1987$.

Ma 5 ■ 2948 Man findet solche ungeraden Zahlen unter aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen dann am häufigsten, wenn bereits die erste Zahl dafür zutrifft. Dann ist wieder die 6. Zahl durch 5 teilbar, die aber eine gerade Zahl ist.
Die 11. Zahl ist dann wieder ungerade und die 21. Zahl ebenfalls. Unter 20 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen gibt es also nur zwei verschiedene ungerade Zahlen, die sich durch 5 ohne Rest teilen lassen. Es gibt also keine drei Zahlen mit der angegebenen Eigenschaft.

Ma 5 ■ 2949 Da dem Hans 34 Pf am Kaufpreis fehlen, muß das Knobelheft mehr als 34 Pf kosten. Kostet das Heft 35 Pf, so besitzt Hans 1 Pf und Franz 33 Pf, was möglich ist. Kostet das Heft aber 36 Pf oder mehr, so hat Hans 2 Pf oder mehr und Franz 34 Pf oder mehr. In jedem Falle könnte dann aber das Heft gekauft werden. Deshalb hat Hans 1 Pf und Franz 33 Pf. Das Heft kostet 35 Pf.

Ma 5 ■ 2950 In einer Sekunde legen beide zusammen 3 m + 5 m = 8 m zurück. Wegen $8 \cdot x = 400$, also $x = 50$, treffen sich beide nach 50 Sekunden. Wegen $y = 50 \cdot 3$, also $y = 150$, hat Fritz dann 150 m zurückgelegt.

Ma 5 ■ 2951 Aus (1) folgt: Bärbel wohnt nicht in Halle. Aus (2) folgt: Bärbel wohnt weder in Berlin noch in Leipzig. Folglich wohnt Bärbel in Cottbus. Aus (2) folgt: Anke wohnt weder in Berlin noch in Leipzig. Da sie auch nicht in Cottbus wohnt, ist ihr Wohnort Halle. Aus (3) folgt: Yvonne wohnt nicht in Berlin. Deshalb wohnt sie in Leipzig. Doreen wohnt somit in Berlin.

Ma 6 ■ 2952 Angenommen, der jüngste Sohn ist x Jahre, der Vater also $6x$ Jahre, der älteste Sohn $2x$ Jahre und die Mutter $(6x - 12)$ Jahre alt. Zusammen sind die vier Personen $(15x - 12)$ Jahre alt. Nun gilt $15x - 12 = 123$, $15x = 135$, $x = 9$. Der jüngste Sohn ist 9 Jahre, die Mutter 42 Jahre alt und somit 33 Jahre älter als der jüngste Sohn.

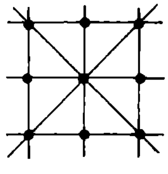
Ma 6 ■ 2953 Die Parallele durch P zu BC schneide AB in E und CD in F. Dann ist $EP = h_1$ Höhe im Dreieck ABP und $FP = h_2$ Höhe im Dreieck CDP. Nun gilt
$A_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_1$ und $A_3 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_2$, also
$A_1 + A_3 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_1 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_2$,
$A_1 + A_3 = \frac{1}{2} a \cdot (h_1 + h_2)$ und wegen
$h_1 + h_2 = a$ somit $A_1 + A_3 = \frac{1}{2} \cdot a^2$.
Wegen $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = a^2$ gilt deshalb auch
$A_2 + A_4 = \frac{1}{2} \cdot a^2$, also gilt
$A_1 + A_3 = A_2 + A_4$.

Ma 6 ■ 2954 Der Vorgänger von 1985 ist 1984. Das Produkt lautet $1984 : 2 = 992$. Nun gilt $n^2 < n \cdot (n + 1)$, also $n^2 < 992$. Wegen $30^2 = 900$ und $900 < 992$ sind folgende Produkte zu prüfen:
$30 \cdot 31 = 930$; $31 \cdot 32 = 992$. Es handelt sich um die Zahlen 31 und 32.

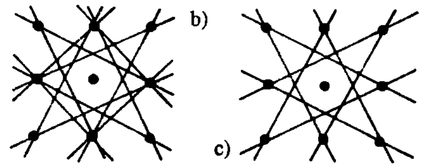
Ma 6 ■ 2955 Für die Zahl 504 gibt es genau fünf Faktorenzerlegungen, nämlich
$504 = 1 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 9 = 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 7$
$= 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 8$.
Deshalb ist 9871 die größte vierstellige natürliche Zahl, deren Querprodukt 504 beträgt.

Ma 6 ■ 2956 zu a) 8 Geraden,

a)



zu b) 12 Geraden, zu c) 8 Geraden.



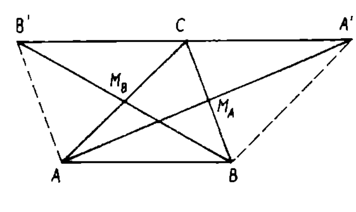
Ma 6 ■ 2957 Wir beginnen mit der kleinsten sechsstelligen Zahl, die aus lauter verschiedenen Grundziffern besteht; sie lautet 102 345. Eine Zahl ist durch 18 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 9 teilbar ist. Die ungerade Zahl 102 345 hat die Quersumme 15, ist also nicht durch 9 teilbar. Die zu ermittelnde Zahl lautet demnach 102 348.

Na/Te 6 ■ 434 Der Zug hat erst dann den Tunnel passiert, wenn der letzte Wagen den Tunnel verlassen hat. Zur Länge des Tunnels muß also die Zuglänge addiert werden. Da die Geschwindigkeit $15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ beträgt, legt der Zug in 1 s 15 m zurück. Für 1800 m benötigt er
1800 : 15 s = 120 s = 2 min.

Ma 7 ■ 2958 Wegen $100 : 7 = 14 \cdot 7 + 2$ wäre eine Zerlegung der 100 Pilze auf 7 Personen z. B. wie folgt möglich:
14, 14, 14, 14, 14, 15, 15 Pilze. Da keine zwei der Pilzsammler dieselbe Anzahl im Korb hatten, müßte die Zerlegung aber z. B. 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18 Pilze lauten. Nun gilt aber $14 + 15 + 17 + 18 = 54 > 51$. Werden diese Summanden kleiner gewählt, wachsen die nicht verwendeten drei Zahlen 11, 12, 13. Folglich kann man nicht in jedem Fall beliebig vier Pilzsammler so auswählen, daß die Gesamtzahl ihrer Pilze kleiner als 51 ist.

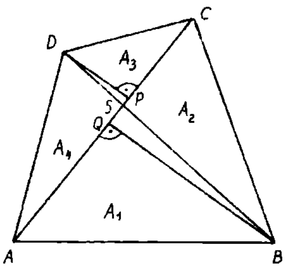
Ma 7 ■ 2959 Es seien a, b, c, d die vier Summanden; dann gilt $a + b + c + d = 45$ und $a + 2 = b - 2 = c \cdot 2 = d : 2$. Daraus folgt $d = 2a + 4$, $c = \frac{a}{2} + 1$, $b = a + 4$ und somit
$a + (a + 4) + \left(\frac{a}{2} + 1\right) + (2a + 4) = 45$,
$\frac{9}{2} a = 36$, also $a = 8$, $b = 12$, $c = 5$,
$d = 20$. Die vier Summanden lauten 8, 12, 5 und 20.

Ma 7 ■ 2960 Nach Voraussetzung bzw. Konstruktion gilt
$\overline{AM_B} = \overline{CM_B}$, $\overline{BM_A} = \overline{CM_A}$, $\overline{AM_A} = \overline{A'M_A}$, $\overline{BM_B} = \overline{B'M_B}$. Da $\overline{AC}$ und $\overline{BB'}$ bzw. $\overline{BC}$ und $\overline{AA'}$ Diagonalen des Vierecks $ABCB'$ bzw. des Vierecks $ABA'C$ sind und diese Diagonalen einander halbieren, sind diese beiden Vierecke Parallelogramme, und es gilt $\overline{AB} \parallel \overline{A'C}$ und $\overline{AB} \parallel \overline{B'C}$. Deshalb liegen die Punkte A', B' und C auf einer Geraden.



Ma 7 ■ 2961 Es seien $n-1$, n, $n+1$ drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen mit $n \geqq 1$; dann soll gelten
$(n-1)+n+(n+1)=(n-1)\cdot n\cdot(n+1)$,
$3n = n\cdot(n-1)\cdot(n+1)$,
und wegen $n \neq 0$ $3=(n-1)\cdot(n+1)$,
$1\cdot 3=(n-1)\cdot(n+1)$. Daraus folgt
$n-1=1$ und $n+1=3$, also $n=2$.
a) Die Zahlen 1, 2, 3 erfüllen die Bedingungen, und es gilt $1+2+3=1\cdot 2\cdot 3$.
b) Da 3 Primzahl ist, existiert außer $1\cdot 3=3$ kein weiteres Produkt natürlicher Zahlen mit dem Wert 3. Somit existiert genau ein solches Zahlentripel.

Ma 7 ■ 2962 Wir fällen die Lote $\overline{BQ}$ und $\overline{DP}$ von B und D auf $\overline{AC}$; dann gilt
$A_1=\frac{1}{2}\cdot\overline{AS}\cdot\overline{BQ}$, $A_2=\frac{1}{2}\cdot\overline{CS}\cdot\overline{BQ}$,
$A_3=\frac{1}{2}\cdot\overline{CS}\cdot\overline{DP}$, $A_4=\frac{1}{2}\cdot\overline{AS}\cdot\overline{DP}$ und
somit $A_1 : A_2 = A_4 : A_3 = \overline{AS} : \overline{CS}$,
also $A_1\cdot A_3 = A_2\cdot A_4$.

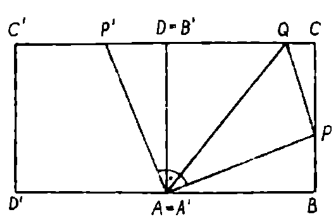


Na/Te 7 ■ 435 Der Hebel befindet sich im Gleichgewicht, da sich auf der rechten Seite ein Körper mit $\frac{1}{5}$ der Gewichtskraft des Körpers auf der linken Seite in der 5fachen Entfernung vom Drehpunkt befindet. Das Lager wird mit einer Kraft von 1,2 N belastet.

Na/Te 7 ■ 436 Ja; da der Hubweg 6mal so groß ist wie der Zugweg, ist zum Heben einer Last von 4800 N eine Kraft von 800 N notwendig. Es stehen aber 1000 N zur Verfügung.

Ma 8 ■ 2963 a) Neun aufeinanderfolgende natürliche Zahlen haben bei Division durch 9 die Reste 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 0 (nicht notwendig in dieser Reihenfolge!), also ist genau eine dieser Zahlen durch 9 teilbar.
b) Von 10 beliebigen natürlichen Zahlen sind mindestens zwei Zahlen, die bei Division durch 9 denselben Rest lassen; ihre Differenz läßt dann bei Division durch 9 den Rest 0, d. h., sie ist durch 9 teilbar.

Ma 8 ■ 2964 Wir drehen das Dreieck APQ um A als Drehzentrum entgegen dem Uhrzeigersinn um einen Winkel der Größe 90° und verbinden das Bild P' von P mit Q.



Von A fällen wir das Lot auf die Gerade $P'Q$; sein Fußpunkt ist dann $B'=D$. $\overline{AD}$ ist die gesuchte Quadratseite. Wir konstruieren das Quadrat $ABCD$ mit $\overline{AD}$ als einer der vier Quadratseiten.

Ma 8 ■ 2965 Eine der drei aufeinanderfolgenden Zahlen 2^n-1, 2^n, 2^n+1 ist durch 3 teilbar. Da von allen Primzahlen nur die 3 durch 3 teilbar ist und 2^n für kein n durch 3 teilbar ist, kann nur gelten: entweder $2^n-1=3$ oder $2^n+1=3$.
Da 1 nicht Primzahl ist, ist das einzige derartige Paar (3; 5).

Ma 8 ■ 2966 Die Seiten des Rechtecks seien mit a und mit $a+10$ bezeichnet. Dann gilt für den Umfang des Rechtecks
$u_R = a+a+a+10+a+10=4a+20$.
Nun ist auch der Umfang des Quadrates
$u_Q=4a+20$. Die Seite des Quadrates beträgt somit $(4a+20):4=a+5$.
Damit ist der Flächeninhalt
des Rechtecks $A_R=a(a+10)=a^2+10a$
und der Flächeninhalt des Quadrates
$A_Q=(a+5)^2=a^2+10a+25$.
Beide Flächeninhalte unterscheiden sich demnach um 25 cm².

Ma 8 ■ 2967 Beweis für zweistellige natürliche Zahlen mit der Einerstelle 5:
Es sei $n=10x+5$ mit $x\in N$ und
$1\leqq x\leqq 9$. Dann ist
$n^2=(10x+5)^2=100x^2+100x+25$.
Streicht man die Ziffer 5, so bleibt die Zahl x übrig; multipliziert man mit dem Nachfolger, so entsteht das Produkt $x(x+1)$. Hängt man die 25 an, so verhundertfacht sich $x(x+1)$. Es entsteht die Summe $x(x+1)\cdot 100+25$, vereinfacht ist das
$100x^2+100x+25$, q. e. d.
Beweis für dreistellige natürliche Zahlen mit der Einerstelle 5 (verkürzt):
$n=100x+10y+5$ mit $x\in N$ und
$1\leqq x\leqq 9$ und $y\in N$ und $0\leqq y\leqq 9$.
Dann ist $(100x+10y+5)^2=10\,000x^2+2000xy+1000x+100y^2+100y+25$,
und es ist
$(10x+y)(10x+y+1)\cdot 100+25$
$=10\,000x^2+2000xy+1000x+100y^2+100y+25$. Wir sehen, daß das beschriebene Verfahren zum gleichen Ergebnis führt, w. z. b. w. Weitere Beweise kann der Leser führen.

Na/Te 8 ■ 437 Unter Benutzung des Tafelwerkes findet man das Volumen-Temperatur-Gesetz: $\frac{V_1}{V_2}=\frac{T_1}{T_2}$.
Gesucht: V_2 (in cm³);
Gegeben: $V_1=1000\text{ cm}^3$,
$T_1=(273+24)\text{ K}$,
$T_2=273\text{ K}$.
Das gesuchte Volumen beträgt 920 cm³.

Na/Te 8 ■ 438 Gesucht: Temperatur des Schmelzwassers ϑ (in °C),
Gegeben: Wärmeleistung des Tauchsieders
$P_{th}=1\text{ kW}=1\frac{\text{kJ}}{\text{s}}$;
Masse des Eises: $m=1$ kg;
Heizzeit $t=10\cdot 60$ s
Aus Tafelwerk: Schmelzwärme des Eises
$Q_s=334\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$; spezifische Wärmekapazität des Wassers $c=4{,}186\frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$.
Der Tauchsieder erzeugt eine Wärme $Q=P_{th}\cdot t$. Diese Wärme wird zum Schmelzen des Eises und zum Erwärmen des Schmelzwassers benutzt:
$Q=m\cdot Q_s+m\cdot c\cdot\Delta T$.
Eingesetzt: $\Delta T=\frac{P_{th}\cdot t-m\cdot Q_s}{m\cdot c}$; im vorliegenden Fall ist $\vartheta=\Delta T$; $\vartheta=63{,}5$ °C.
Da der Tauchsieder mit erwärmt und Wärme an die Umgebung abgegeben wird, wird die errechnete Temperatur nicht erreicht.

Ma 9 ■ 2968 Rainer wird im Jahre 1989 9 Jahre alt, $45^2=2025$, d. h. Rainer wird im Jahre 2025 genau 45 Jahre alt. Es gilt $44^2=1936<45^2=2025<46^2=2116$.
Die angegebene Lösung ist die einzig mögliche.

Ma 9 ■ 2969 Die Lösungsmenge des Systems ist tatsächlich $L=\{(0;4)\}$. Peter hat unzulässigerweise durch die Variable x dividiert, ohne zu bedenken, daß das nur für $x\neq 0$ möglich ist.
Der Übergang von $4-\frac{x}{4}=4+\frac{4x}{5}$ zu $-\frac{1}{4}=\frac{4}{5}$ ist falsch, und dieser Fehler wird noch zweimal wiederholt.

Ma 9 ■ 2970 Hat das Buch weniger als 400 Seiten, so wird höchstens $4\cdot 9+3\cdot 2=42$mal die Ziffer Null verwendet (jeweils neun volle Zehner in allen Hunderter-Abständen und drei Hunderter). Hat das Buch 400 Seiten oder mehr, so wird mindestens $42+2=44$mal die Ziffer Null verwendet. Damit ist es unmöglich, daß genau 43mal die Ziffer Null verwendet wurde.

Ma 9 ■ 2971 Es sind folgende Fälle zu unterscheiden:
(1) Von den fünf beliebigen natürlichen Zahlen lassen mindestens drei Zahlen bei Division durch 3 denselben Rest,
(2) es lassen mindestens zwei der fünf Zahlen den Rest 1 und eine den Rest 2,
(3) es lassen mindestens zwei der fünf Zahlen den Rest 2 und eine den Rest 1.
Andere Möglichkeiten kann es nicht geben.
Im 1. Fall können sich die Reste 1, 1, 1, bzw. 2, 2, 2 oder 0, 0, 0 ergeben. In jedem Falle ist die Summe dieser drei Zahlen durch 3 teilbar, weil
$1+1+1=3$, $2+2+2=6$ und auch $0+0+0=0$ durch 3 teilbar sind.
Im 2. Fall und auch im 3. Fall ergeben die Zahlen mit den Resten 1, 2, 0 als Summe eine durch 3 teilbare Zahl.

Ma 9 ■ 2972 In allgemeiner Darstellung sieht die Rechnung wie folgt aus:

$$\begin{array}{l}
1000a+\ 100b+\ \ 10c+\ \ \ \ d\\
+\ \ \ \ \ \ 1000b+\ 100c+\ \ 10d+\ \ \ \ a\\
+\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 1000c+\ 100d+\ 10a+\ \ b\\
+\ 1000d+100a+10b+c\\
\hline
1111a+1111b+1111c+1111d\\
=1111(a+b+c+d).
\end{array}$$

Dividiert man diese Zahl durch $(a + b + c + d)$, so erhält man stets 1111, w.z.b.w.

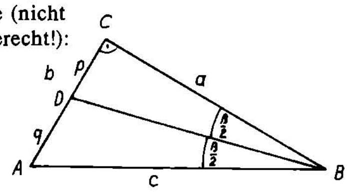
Na/Te 9 ■ 439
Gesucht: l (in m) und ΔT (in K)
Gegeben: zugeführte elektrische Energie $A_{El} = 0{,}03$ kWh
Durchmesser d des Drahtes = 1 mm;
spezifischer elektrischer Widerstand
$\varrho = 0{,}42\,\Omega\,\frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$;
Stromstärke $I = 3{,}2$ A;
Dauer $t = 5 \cdot 60$ s; Masse des Wassers $m = 1000$ g,
spezifische Wärmekapazität des Wassers
$c = 4{,}19\,\frac{\text{J}}{\text{g} \cdot \text{K}}$ (aus Tafelwerk).
Berechnung von l: Aus der Gleichung für die elektrische Arbeit und der Gleichung $U = I \cdot R$ ergibt sich:
$A_{El} = I^2 \cdot R \cdot t$. R läßt sich aus dem Widerstandsgesetz berechnen: $R = \frac{\varrho \cdot l}{\left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi}$
In A_{El} eingesetzt: $A_{El} = \frac{I^2 \cdot l \cdot \varrho \cdot t}{\left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi}$
Nach l aufgelöst: $l = \frac{A_{El} \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2}{I^2 \cdot t \cdot \varrho}$.
Es ergibt sich $l = 65{,}74$ m,
d.h. $l \approx 66$ m. Berechnung von ΔT:
Aus $A_{El} = m \cdot c \cdot \Delta T$ folgt
$\Delta t = \frac{A_{El}}{m \cdot c}$; $\Delta T = 25{,}7$ K.
Es wird eine Temperaturerhöhung von etwa 26 K beobachtet. Der Draht war rund 66 m lang.

Na/Te 9 ■ 440 Gesucht: c_A $\left(\text{in } \frac{\text{J}}{\text{g} \cdot \text{K}}\right)$
Gegeben: Kantenlängen des Blocks:
$a = 2$ cm, $b = 2$ cm, $c = 2{,}5$ cm
Temperatur des heißen Wassers
$\vartheta_W = 100\,°\text{C}$; Temperatur des kalten Wassers $\vartheta_K = 27\,°\text{C}$; Mischtemperatur $\vartheta_M = 29{,}1\,°\text{C}$; Masse des Wassers $m = 200$ g; spezifische Wärmekapazität des Wassers $c_W = 4{,}19\,\frac{\text{J}}{\text{g} \cdot \text{K}}$; Dichte des Aluminiums $\varrho_A = 2{,}7\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.
Die Masse des Aluminiumblocks läßt sich aus den Abmessungen und der Dichte des Aluminiums berechnen:
$m_A = a \cdot b \cdot c \cdot \varrho_A$.
Vom heißen Aluminiumblock wird an das Wasser die Wärme Q_A abgegeben. Wenn man die Gleichung zur Berechnung der Wärme benutzt:
$Q_A = m_A \cdot c_A \cdot (\vartheta_W - \vartheta_M)$. Vom kalten Wasser wird die Wärme Q_W aufgenommen:
$Q_W = m \cdot c_W \cdot (\vartheta_M - \vartheta_K)$.
Aus $Q_A = Q_W$ erhält man für c_A:
$c_A = \frac{m \cdot c_W \cdot (\vartheta_M - \vartheta_K)}{a \cdot b \cdot c \cdot \varrho_A(\vartheta_W - \vartheta_M)}$.
Die spezifische Wärmekapazität des Aluminiums beträgt $0{,}92\,\frac{\text{J}}{\text{g} \cdot \text{K}}$.

Ma 10/12 ■ 2973 Aus $16 - 8\sqrt{3} = 12 - 8\sqrt{3} + 4$ folgt schrittweise:
$8(2 - \sqrt{3}) = (2\sqrt{3} - 2)^2$,
$2\sqrt{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - 2$,
$2 + 2\sqrt{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}} + 2 - \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$,
$\left(\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^2 = 2 + \sqrt{3}$,
$\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$,
Die beiden Zahlen z_1 und z_2 sind gleich.

Ma 10/12 ■ 2974 Angenommen, es gibt Zahlen x, für die z Primzahl ist. Dann läßt sich die Gleichung wie folgt vereinfachen:
$z = 5x - 30 - x + 5 + x^2 - 4x$,
$z = x^2 - 25$, $z = (x - 5)(x + 5)$.
Wenn $x = 6$, so ist
$z = (6 - 5) \cdot (6 + 5) = 1 \cdot 11 = 11$,
und 11 ist Primzahl. Wenn $x = -6$, so ist
$z = (-6 - 5) \cdot (-6 + 5) = (-11) \cdot (-1) = 11$,
und 11 ist Primzahl. Weitere Möglichkeiten gibt es nicht, falls es überhaupt Lösungen gibt.
Wir prüfen das durch Einsetzen:
(1) $x = 6$: $5 \cdot 0 - 1 + 6 \cdot 2 = 11$;
(2) $x = -6$: $5 \cdot (-12) - (-11) + (-6) \cdot (-10) = -60 + 11 + 60 = 11$.
Die einzigen Lösungen sind 6 und -6.

Ma 10/12 ■ 2975 Im abgebildeten Dreieck ABC sei $p = 4$ cm und $q = 5$ cm, also $p + q = b = 9$ cm.
Skizze (nicht maßgerecht!):



Aus $\frac{a}{c} = \frac{p}{q} = \frac{4}{5}$ folgt $a = \frac{4c}{5}$.
Nach dem Satz des Pythagoras gilt
$c^2 = a^2 + b^2$, also $c^2 = \frac{16c^2}{25} + 81$
bzw. $9c^2 = 81 \cdot 25$, $c^2 = 9 \cdot 25$, $c = 15$.
Durch Einsetzen folgt $a = \frac{4 \cdot 15}{5}$, $a = 12$.
Die Seiten des Dreiecks ABC haben folgende Längen: $a = 12$ cm, $b = 9$ cm, $c = 15$ cm.

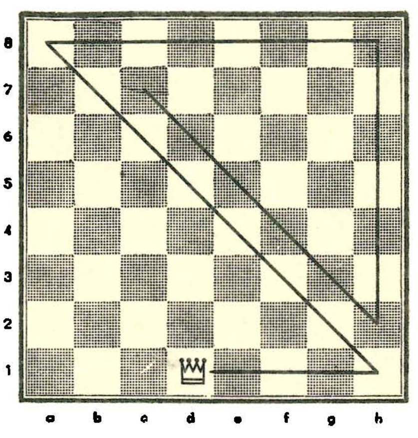
Ma 10/12 ■ 2976 Auf Grund der gegebenen Bedingungen gibt es natürliche Zahlen u, v, w, t, so daß gilt $a = uv$; $b = wt$; $c = uw$; $d = vt$. Dann folgt:
$a^{1988} + b^{1988} + c^{1988} + d^{1988} \doteq (uv)^{1988} + (wt)^{1988} + (uw)^{1988} + (vt)^{1988}$.
Wir formen nun die rechte Seite dieser Gleichung weiter um:
$u^{1988} \cdot (v^{1988} + w^{1988}) + t^{1988} \cdot (v^{1988} + w^{1988}) = (u^{1988} + t^{1988}) \cdot (v^{1988} + w^{1988}) = s$.

Ma 10/12 ■ 2977 1. Fall: Es sei $x = 0$; dann lautet die Ungleichung $y \geqq 0$; Lösungen sind alle geordneten Paare $(0; n)$ mit $n \in N$.
2. Fall: Es sei $x = 1$; dann lautet die Ungleichung $2 + y \geqq y$; Lösungen sind alle geordneten Paare $(1; n)$ mit $n \in N$.
3. Fall: Es sei $x \geqq 2$. Die Ungleichung wird schrittweise äquivalent umgeformt:
$2x + y \geqq xy \mid -y$; $2x \geqq y(x - 1) \mid : (x - 1)$
$\frac{2x}{x - 1} \geqq y$. Wegen
$y \leqq \frac{2x}{x - 1} = \frac{2(x - 1) + 2}{x - 1} = 2 + \frac{2}{x - 1}$
gilt $y \leqq 4$ für $x = 2$; $y \leqq 3$ für $x = 3$; $y < 3$ für $x \geqq 4$.
Weitere Lösungen sind:
(2; 0), (2; 1), (2; 2), (2; 3), (2; 4), (3; 0), (3; 1), (3; 2), (3; 3) und alle geordneten Paare $(n; 0)$, $(n; 1)$, $(n; 2)$ mit $n \in N$ und $n \geqq 4$.

Na/Te 10/12 ■ 441 Bei der Aufwärtsbewegung beträgt die Beschleunigung $11\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, bei der Abwärtsbewegung $9\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$. Unter Verwendung des Newtonschen Grundgesetzes beträgt die Gewichtskraft bei der Aufwärtsbewegung 1100 N, bei der Abwärtsbewegung 900 N.

Na/Te 10/12 ■ 442
Ges.: a (in $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$) und t (in s)
Gegeben: $s = 1{,}2$ m; $v = 720\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Es handelt sich um eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung.
Aus $v^2 = 2 \cdot a \cdot s$ folgt $a = \frac{v^2}{2 \cdot s}$ und
aus $v = a \cdot t$ folgt $t = \frac{v}{a} = \frac{2 \cdot s}{v}$,
$a = 216 \cdot 10^3\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ und $t = \frac{1}{300}$ s.

Lösung zur Schachecke
Heft 1/89
$4 + 7 \cdot \sqrt{2} + 7 + 6 + 5 \cdot \sqrt{2} \approx 33{,}968$.



Lösung zur Schachecke
1. Sd4 (2. Tg4 matt) K:d4/e:d4/L:d4/D:d4
2. Db4/D:d5/Db1/D:h7 matt.

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ Programmablaufplan
Folge dem vorgegebenen Programmablaufplan und ermittle den Wert X! X ist eine Zahl von 1 bis 100 und ist am Anfang und Ende des Programms gleich.
Hinweis: In den Rechenoperationen treten immer nur ganze von Null verschiedene Zahlen auf.
Lösung: $X = 33$.

▲2▲ Ein Tagesausflug zu Ostwald nach Großbothen lohnt die Atlantiküberquerung. Du kannst nicht zehn Minuten in seiner Gegenwart sein, ohne zu verstehen, daß du einem wirklich großen Mann gegenüberstehst. Sein Wissen, seine Originalität und Vielseitigkeit, all das zusammen macht ihn zu einer der interessantesten Persönlichkeiten seiner Zeit.
Ostwald-Schüler Harry S. Jones

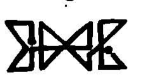
▲3▲ Irgendwie verlor ich das Thermometer, mit dem ich gewöhnlich die Temperatur der Fotochemikalien messe. Das Thermometer zerbrach nicht, aber der Spiritusfaden „riß“.
Wie wird das Thermometer repariert?
Lösung: Legt man das Thermometer in das Tiefkühlfach und erwärmt es anschließend, ist der Spiritusfaden wieder in Ordnung.

Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

Freitag der 13.

In jedem Jahr fällt ein 13. auf den Freitag! In einem Jahreskalender beginnen die Monate (in einem normalen Jahr): Januar, Februar, April, Mai, Juni, August und September jeweils an einem anderen Wochentag. Und folglich ist auch der 13. Tag der Monate auf die sieben Wochentage verteilt. Für Schaltjahre gilt eine ähnliche Gedankenführung. Eine weitere Untersuchung zeigt, daß in jedem Jahr (einschließlich Schaltjahr) der 13. vom Monat Mai bis einschließlich November auf sieben verschiedene Wochentage fällt.

In einem Zug



Großes Ostereierfärben
Eine mögliche Verteilung der Eier ist:
Nest 1 4 rote, 5 gelbe, 7 blaue, 8 viol.
Nest 2 5 rote, 8 gelbe, 4 blaue, 7 viol.
Nest 3 7 rote, 4 gelbe, 8 blaue, 5 viol.

Zum Scherzen aufgelegt
1. Definitionen; 2. Inhalt; 3. Achsen;
4. Geraden; 5. Operationen;
6. Nebenwinkel; 7. Abakus; 8. Lösungen;
9. Ergebnisse; 10. Nachfolger

Wissen und Rechnen

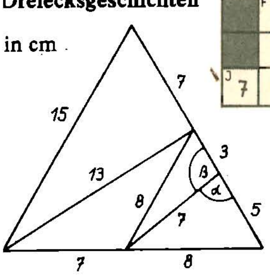
$$\begin{array}{ccccc} (2^2+1)^2 & - & (9+5) & = & 11 \\ + & & + & & + \\ (3^3-4)^2 & - & (4^2+5)^2 & = & 88 \\ \hline 554 & - & 455 & = & 99 \end{array}$$

„Auf alle Fälle“ ...!

A 4		B 4	C 2	4
D 9	E 9		5	
	F 9	0	9	
	9		G 7	H 5
J 7	9	5		3

Dreiecksgeschichten

in cm



(Mit $E_s = 9999$ als einzige der neun Möglichkeiten. Denn wegen D_w, F_w und A_s muß die Zehnerstelle von C_s mit der E_s-Ziffer übereinstimmen. Auch B_w und I_w werden dadurch eindeutig. Schließlich sind G_w und H_s eindeutig voneinander abhängig.)

Geschickt kombiniert
1. Schere; 2. Schraubendreher; 3. Messer.

Springen und schlagen
Mögliche Zugfolgen sind:
A: 9 → 1; 2 → 4; 10 → 2; 1 → 3; 4 → 2; 8 → 6; 2 → 10; 14 → 6; 12 → 10; 6 → 14; 15 → 13
B: 4 → 1; 6 → 4; 7 → 2; 9 → 7; 1 → 4; 4 → 11; 11 → 13; 13 → 15; 15 → 6; 6 → 1

Zahlenpuzzle

6	5	5	1	7	9	9	2	6	4	9	3
4	2	8	9	4	3	8	3	7	2	9	7
1	3	5	9	6	1	4	6	7	6	7	5
6	7	4	8	8	9	8	6	4	8	8	3

Lösungen zu:
Rund um das Dreieck

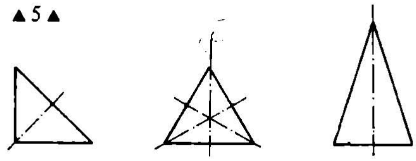
▲1▲ Alle gezeichneten Dreiecke haben den gleichen Flächeninhalt.

▲2▲ (1) Aus diesen Seitenlängen ist kein Dreieck konstruierbar.

▲3▲ a) 50°, b) 40°, c) 40°, d) 35°, e) 120°, f) 60°

▲4▲ $A \cong I$ $B \cong F$ $C \cong H$ $E \cong G$

▲5▲



▲6▲ a) Der Flächeninhalt des Dreiecks *ABC* verdoppelt sich.
b) Der Flächeninhalt des Dreiecks *ABC* vervierfacht sich.
c) Der Flächeninhalt des Dreiecks *ABC* verändert sich nicht.

▲7▲

	Flächeninhalt A in cm²	Grundseite c in cm	Höhe h in cm
a)	270	10	54
b)	36	36	2
c)	10	5	4

▲8▲ a) 12, b) 28, c) 44

▲9▲ b), c), d), e)

▲10▲ 4

▲11▲ $h = 2a$

▲12▲ Die Flächeninhalte der Dreiecke *ABC*, *GHI* und *KLM* sind gleich groß. Die Flächeninhalte der Dreiecke *NOP*, *RST* und *UVW* sind gleich groß.

▲13▲ a) 76 cm², b) 94 cm²

▲14▲

a)

spitzwinklige Dreiecke	rechtwinklige Dreiecke	stumpfwinklige Dreiecke

b)

gleichschenklige Dreiecke (gleichseitige Dreiecke)	unregelmäßige Dreiecke

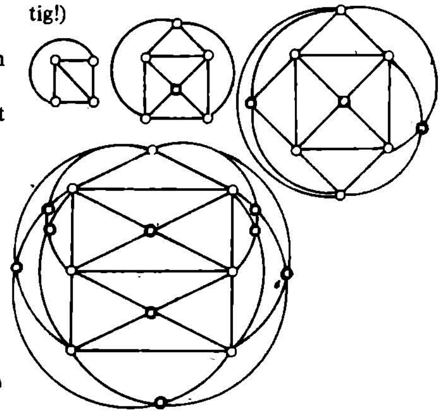
▲15▲ Zum Beispiel: 3-8-4-2-9-5-1-7-6 (von oben in Uhrzeigerrichtung)

▲16▲ $\alpha = 15°$, $\beta = 75°$, $\gamma = 30°$, $\delta = 150°$

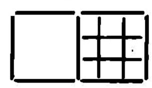
▲17▲ 217 cm²

Lösungen zu: v. Erdmannsdorff Heft 1/89

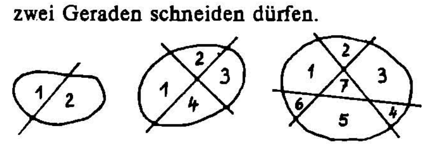
▲1▲ Sei $W(n)$ die Anzahl der Wege bei n Objekten. Bei 1; 2; 3 Objekten werden 0; 1; 3 Wege benötigt. Zu jedem neu dazu kommendem Objekt werden zu allen vorhandenen Objekten neue Wege benötigt. Das ergibt die Rekursionsformel $W(n+1) = W(n) + n$.
Daraus leitet man $W(n) = \frac{n(n-1)}{2}$ ab und beweist sie mittels vollständiger Induktion: $N(n) + n$
$= \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{(n+1)n}{2} = N(n+1)$.
b) Es sind 0; 1; 3; 9 Kreuzungen. (Bei 8 Bauwerken jedoch sind nicht 27, sondern 19 und bei 9 Objekten 36 Kreuzungen nötig!)



▲2▲



▲3▲ Man muß sich darum bemühen, daß jede Gerade alle übrigen schneidet, wobei sich in einem Punkt nicht mehr als zwei Geraden schneiden dürfen.



Dann trifft die $(n+1)$-te Gerade auf n vorhandene Geraden und zerlegt dabei $n+1$ Flächen, so daß $n+1$ zusätzliche Flächen entstehen. Es gilt also für die Anzahl der Flächen:
$F(n+1) = F(n) + (n+1)$.
So gilt $F(n) = \frac{n^2 + n + 2}{2}$.
Beweise dies durch vollständige Induktion!

Lösungen zu: Rund um die Zahl 1989
Heft 1/89

▲1▲ Die Höhe ist 936 mm.

▲2▲ $1836^2 + 765^2 = 1989^2$. Der neue Weg ist 612 m kürzer.

▲3▲ $1988 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 71$, also lauten die entsprechenden drei Quader: 4/7/71 cm, 2/14/71 cm, 2/7/142 cm.

▲4▲ 1989 ist a) 994 + 995, b) 662 + 663 + 664, c) 329 + 330 + 331 + 332 + 333 + 334, d) 217 + 218 + 219 + 220 + 221 + 222 + 223 + 224 + 225.

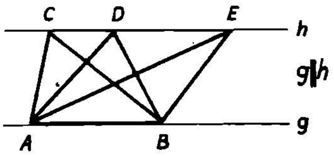
▲5▲ Alter der Kinder 3, 3, 13 und 17 Jahre. Die Mutter ist 36.

▲6▲ 1899 8199 9189 9819 9918
1989 8919 9198 9891 9918
1998 8991 Also 12 Ziffern!

Rund um das Dreieck

▲ 1 ▲ Welches der gezeichneten Dreiecke ABC, ABD, ABE hat den größten Flächeninhalt?

Bild 1

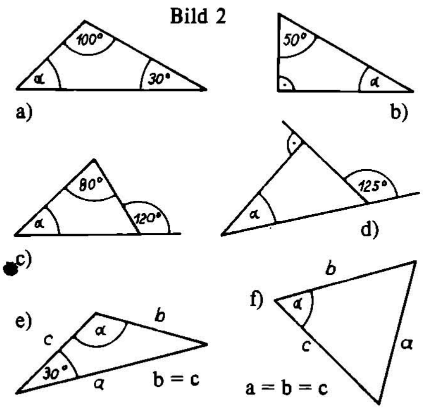


▲ 2 ▲ Untersuche, ob aus den vorgegebenen Seitenlängen a, b, c ein Dreieck konstruierbar ist!

	a	b	c
(1)	6,0 cm	4,0 cm	10,0 cm
(2)	4,1 cm	1,7 cm	5,3 cm
(3)	5,0 cm	5,0 cm	5,0 cm
(4)	15,3 cm	5,7 cm	11,3 cm

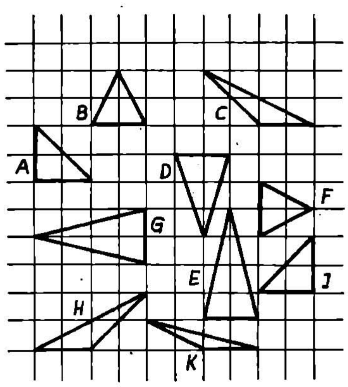
▲ 3 ▲ Gib jeweils die Größe des Winkels α an!

Bild 2



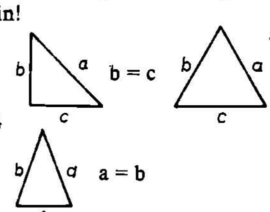
▲ 4 ▲ Welche der gezeichneten Dreiecke sind kongruent zueinander?

Bild 3



▲ 5 ▲ Zeichne jeweils alle Symmetrieachsen ein!

Bild 4



▲ 6 ▲ Wie verändert sich der Flächeninhalt eines Dreiecks ABC, wenn man

a) die Grundseite verdoppelt;
b) die Grundseite und die zugehörige Höhe verdoppelt;
c) die Grundseite verdoppelt und die Höhe halbiert?

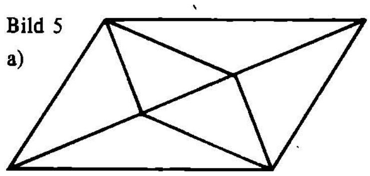
▲ 7 ▲ Vervollständige folgende Tabelle für Dreiecke!

	Flächeninhalt A in cm^2	Grundseite c in cm	Höhe h in cm
a)	270	10	
b)	36		2
c)		5	4

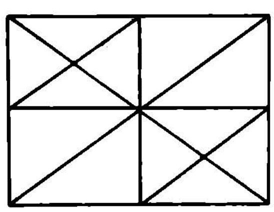
▲ 8 ▲ Wieviel Dreiecke enthält jede der in Bild 5 angegebenen Figur?

Bild 5

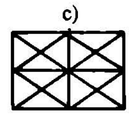
a)



b)



c)



▲ 9 ▲ Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

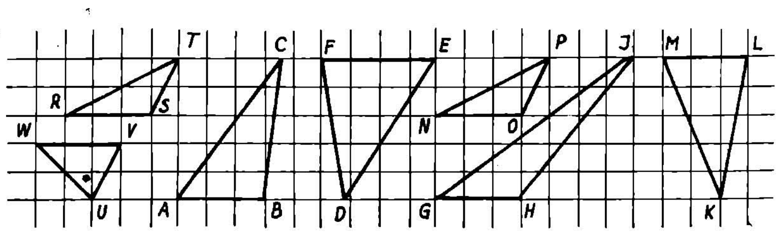
a) Jedes rechtwinklige Dreieck ist unregelmäßig.
b) Jedes gleichseitige Dreieck ist spitzwinklig.
c) Es gibt stumpfwinklige Dreiecke, die gleichschenklig sind.
d) Es gibt kein rechtwinkliges Dreieck, das gleichseitig ist.
e) Jedes gleichseitige Dreieck ist gleichschenklig.

▲ 10 ▲ Wieviel zueinander gleichseitige Dreiecke benötigt man mindestens, um daraus wieder ein gleichschenkliges Dreieck zu legen?

▲ 11 ▲ Ein Quadrat und ein Dreieck stimmen in der Grundseite a und dem Flächeninhalt A überein. Ermittle die Höhe des Dreiecks in Abhängigkeit von a!

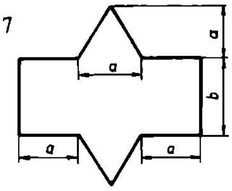
▲ 12 ▲ Welche der gezeichneten Dreiecke haben den gleichen Flächeninhalt?

Bild 6

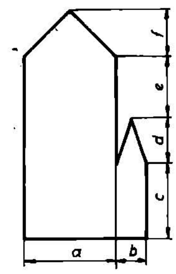


▲ 13 ▲ Berechne jeweils den Flächeninhalt der Figuren!

Bild 7



$a = 4$ cm
$b = 5$ cm



$a = 6$ cm
$b = 2$ cm
$c = 5$ cm
$d = f = 3$ cm
$e = 4$ cm

▲ 14 ▲ a) Stelle in einem Mengenbild die Menge der spitzwinkligen Dreiecke, die Menge der stumpfwinkligen und die Menge der rechtwinkligen Dreiecke dar!
b) Stelle in einem Mengenbild die Menge der gleichseitigen Dreiecke, die Menge der gleichschenkligen Dreiecke und die Menge der unregelmäßigen Dreiecke dar!

▲ 15 ▲ Schreibe an die Ecken eines Dreiecks je eine und an die Seiten des Dreiecks je zwei der Zahlen 1 bis 9, so daß an jeder Seite die Summe 17 herauskommt!

Bild 8

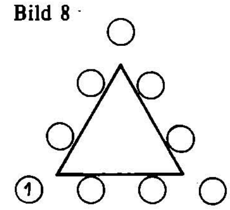
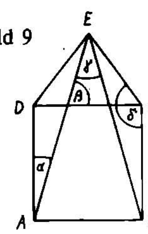


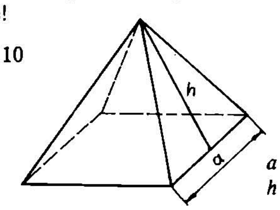
Bild 9



▲ 16 ▲ Wie groß sind die Winkel α, β, γ und δ in der nachstehenden Figur (siehe Bild 9)? (Die Figur besteht aus einem Quadrat $ABCD$ und einem gleichseitigen Dreieck DCE.)

▲ 17 ▲ Berechne die Oberfläche der im Bild 10 dargestellten quadratischen Pyramide!

Bild 10



$a = 7$ cm
$h = 12$ cm

L. Flade/H. Knopf

ISSN 0002-6395 · alpha · Berlin · 23 (1989) 2 · Seiten 25 bis 48