

alpha

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

$1^3 = 1$	1	$1^2 = 1$
$2^3 = 8$	3 5	$3^2 = 9$
$3^3 = 27$	7 9 11	$6^2 = 36$
$4^3 = 64$	13 15 17 19	$10^2 = 100$
$5^3 = 125$	21 23 25 27 29	$15^2 = 225$
$6^3 = 216$	31 33 35 37 39 41	$21^2 = 441$
$7^3 = 343$	43 45 47 49 51 53 55	$28^2 = 784$
$8^3 = 512$	57 59 61 63 65 67 69 71	$36^2 = 1296$
$9^3 = 729$	73 75 77 79 81 83 85 87 89	$45^2 = 2025$
$10^3 = 1000$	91 93 95 97 99 101 103 105 107 109	$55^2 = 3025$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
16. Jahrgang 1982
Preis 0,50 M
Index 31059

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstudienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (Ltg. Dr. C.-P. Helmholz)

Redaktion:

OSTr J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1086 Berlin, Krausenstraße 50, PSF Nr. 1213
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des
Presseamtes beim Vorsitzenden des Minister-
rates der Deutschen Demokratischen Repu-
blik.

Postscheckkonto: Berlin 132626. Erschei-
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft
1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M,
im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Son-
derpreis für die DDR 0,50 M.

**Bestellungen werden in der DDR vom Buch-
handel und der Deutschen Post entgegen-
genommen.**

**Der Bezug für die Bundesrepublik Deutsch-
land und Berlin(West) erfolgt über den Buch-
handel; für das sozialistische Ausland über
das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und
für alle übrigen Länder über: Buchexport
Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR
7010 Leipzig, Leninstr. 16.**

Fotos: Gerhard Hammer, Dresden (S. 52);
J. Jordan, Leipzig (S. 53, S. I.); ADN, Zen-
tralbild (S. 54, S. 55, S. 57); P. Schreiber (S.
59); Nitsche, Schwerin (S. 60); Bildarchiv
EOS C. F. Gauß (S. 61); H. Raphaelis, Leipzig
(III. U.-Seite) J. Sliva, Prag (S. 67)

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Titelblatt: Mathematikfachlehrer W. Scholz/
OS I, Königswusterhausen/W. Fahr, Berlin
(graph. Gestaltung)



Gesamtherstellung: INTERDRUCK

Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97

Redaktionsschluß: 26. Februar 1982

Erscheinungstermin: 22. Juni 1982



Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 49 Was jeder wissen sollte:
Probleme, die beim numerischen Rechnen auftreten können [9]*
Dr. J. Gronitz, Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt
- 51 Eine Aufgabe und vier Lösungen [8]
Prof. Dr. W. Jungk, Direktor der Sektion Mathematik der Pädagogischen Hoch-
schule *Wolfgang Ratke* Köthen
- 52 „Schönste Mathematikbücher“ 1981
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig
- 53 Eine „abenteuerliche“ Aufgabe [7]
Dr. W. Schmidt, Sektion Mathematik der E.-M.-Arndt-Universität Greifswald
- 54 Eine Aufgabe von Prof. Dr. Jacob A. Smorodinsky [8]
Redaktion *Quant*/Kurtschatow-Institut für Atomenergie, Moskau
- 55 Zahlen und Fakten [5] Sach- und Anwendungsaufgaben
S. Rosin, IfL Quedlinburg, aus *Mathematik in der Schule*
- 56 Unser Haushalt und die Elektronik [6]
Christa Baran, aus *Guter Rat* 4/81
- 58 Die Mathematikerin *Emmy Noether* (1882 bis 1935) [7]
Die Frau als Mathematikerin
Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig
- 60 Sommerlager des Bezirksklubs Schwerin
Dr. H. Thamm, Sektion Mathematik der Pädagogischen Hochschule *Liselotte
Herrmann* Güstrow
- 61 Spezialechule physikalisch-technischer Richtung EOS C. F. Gauß
Frankfurt/Oder [8]
Autorenkollektiv der EOS C. F. Gauß
- 62 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht
Speziell für Klasse 4 bis 6
Autorenkollektiv unter Leitung von Studienrat H.-J. Kerber, Bezirkskabinett für
außerunterrichtliche Tätigkeit Neubrandenburg
- 64 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: OSTr J. Lehmann, Leipzig/OL H. Pätzold, Waren/Müritz
- 66 Für den Briefmarkenfreund:
Der Admiral der Schiffbauwissenschaft [7]
A. Halameisär, Literat, Moskau
- 67 Für den Schachfreund: Matt durch die Dame [5]
H. Rüdiger, Grünheide
- 67 Zahlenspiel mit mathematischem Hintergrund [5]
Dr. K. Reichold, Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt
- 68 und Seiten VII, VIII Lösungen [5]
- III. U.-Seite: mehr lesen – mehr wissen [5]
- IV. U.-Seite: Ornamente aus der Mongolischen Volksrepublik [5]
Seite I, II, VII. XXI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR [7]
3. Stufe (Bezirksolympiade, 6./7. Februar 1982)
- Seite III, IV, V, VI: *alpha*-Ferienknobelheft

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Was jeder wissen sollte:

Probleme, die beim numerischen Rechnen auftreten

1. Einleitung

Bei praktischen Aufgabenstellungen muß man ausgehend von einem Sachverhalt versuchen, ein mathematisches Modell aufzustellen. (Ein Modell ist dabei eine geeignete mathematische Beschreibung der in der Aufgabenstellung enthaltenen wesentlichsten naturwissenschaftlichen, technischen oder ökonomischen Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten.) Es ist also die vorliegende Aufgabe „in Formeln oder in Gleichungen zu fassen“. Dieses Modell wird dann mit Hilfe eines entsprechenden Verfahrens gelöst. Dabei geht es im allgemeinen um eine zahlenmäßige (numerische) Lösung.

Vielfach verwendet man auch Rechenhilfsmittel (z. B. Tabellen, Rechner). Beim zahlenmäßigen Lösen treten eine Reihe von Problemen auf. Sie sind einerseits bedingt durch die Tatsache, daß die Werte (Daten), die in die Rechnung eingehen, meist Näherungswerte sind (Meßdaten, Werte aus Tabellen usw.), andererseits dadurch, daß man z. B. mit Digitalrechnern arbeitet, bei denen die reellen Zahlen durch eine endliche Ziffernfolge dargestellt werden und in denen nur elementare Operationen (Grundrechenoperationen, Vergleichsoperationen) möglich sind. Häufig muß man auch die Ausgangsaufgabe durch eine „Ersatzaufgabe“ annähern und zur Lösung ein Näherungsverfahren verwenden. Das führt dazu, daß sich Fehler „einschleichen“ und fortpflanzen. So muß man z. B. auch im Laufe der Rechnung ständig runden. Diese Rundungsfehler können sich *aufschaukeln*.

Einige Probleme, die beim numerischen Rechnen auftreten, sollen hier zusammengestellt und an Beispielen veranschaulicht werden.

2. Beispiel

Die genannte Problematik soll zunächst an einem einfachen Beispiel erläutert werden.

Aufgabe: Es ist bei gegebenem Flächeninhalt A die Seitenlänge x eines Quadrates auszurechnen.

Modell: Es gilt $x = \sqrt{A}$, damit erhält man als Gleichung $f(x) = x^2 - A = 0$. Das mathematische Modell ist also hier eine Gleichung mit einer Unbekannten.

Lösung: Die erhaltene Gleichung kann man z. B. so lösen, daß man $\sqrt{A}$ mit Hilfe einer Näherungsformel berechnet. (Das Rahmenprogramm für Arbeitsgemeinschaften der Klassen 9 und 10 – *Praktische Mathematik* – sieht eine Behandlung der Näherungsberechnung von Potenzen und Wurzeln vor.)

Mit Hilfe der *Binomischen Reihe* erhält man

$$\sqrt{A} = \sqrt{k^2 + b} \approx k + \frac{b}{2k} = \frac{1}{2} \left(k + \frac{A}{k} \right).$$

Falls $A = 24$ ist, ergibt sich z. B.

$$\sqrt{24} = \sqrt{16 + 8} \approx \frac{1}{2} \left(4 + \frac{24}{4} \right) = 5 \text{ (Tafelwert: 4,899).}$$

Mit Hilfe einer bereits von Newton angegebenen Vorschrift

$$x_{i+1} = \frac{1}{2} \left(x_i + \frac{A}{x_i} \right); \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

und als Startwert x_0 , könnte man schrittweise eine Folge von Näherungen für die Lösung der Gleichung berechnen. (Man erhält ein sogenanntes *Iterationsverfahren*. Unter gewissen Voraussetzungen konvergiert die Folge der Näherungslösungen gegen die exakte Lösung.)

Man erhält mit $x_0 = 5$:

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(5 + \frac{24}{5} \right) = 4,9 \text{ und}$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left(4,9 + \frac{24}{4,9} \right) = 4,899.$$

Bei der Lösung der Gleichung treten die für das numerische Rechnen typischen Probleme auf: Auswahl eines Verfahrens (meist ein Näherungsverfahren); Rundung; Fortpflanzung von Eingangs- und Rundungsfehlern usw.

Allgemein könnte die Aufgabenstellung unter der Überschrift *Numerische Verfahren zur Lösung von Gleichungen mit einer Unbekannten* betrachtet werden.

3. Quellen und Klassifizierung von Fehlern

In einer beliebigen mathematischen Aufgabenstellung treten meist verschiedene Variable und Parameter auf. Um eine konkrete Lösung zu erhalten, müssen für die Variablen und Parameter Werte – Zahlen – eingesetzt werden.

Beispiel: $A_\Delta = \frac{g \cdot h}{2}$; $g = 5 \text{ cm}$,

$h = 10 \text{ cm}$; damit $A_\Delta = 25 \text{ cm}^2$.)

Die Gesamtheit aller Werte, die gegeben sein müssen, um die geforderte Lösung einer Aufgabe zu erhalten, heißen *Anfangsdaten oder Anfangsinformationen*.

Die allgemeine Lösung einer Aufgabe ist somit eine Funktion der Anfangsdaten (z. B.: $A_\Delta = f(g, h)$). Bei den meisten Aufgaben sind diese Anfangsdaten Näherungswerte. Sie sind mit Fehlern behaftet, da sie z. B. Meßergebnisse aus Experimenten, Werte aus Tabellen, durch Runden entstandene Zahlen oder Lösungen anderer Aufgaben sind. Man erhält also bei der Lösung einer Aufgabe Resultate, deren Genauigkeit von den Anfangsdaten abhängt. Die Abweichung der exakten Lösung x von der Näherungslösung $\bar{x}$ heißt *Fehler* ($\bar{x} - x$). Fehler, die beim Lösen von Aufgaben durch ungenaue Anfangsdaten entstehen, heißen *Eingangsfehler*.

Die Eingangsfehler hängen nicht von der mathematischen Theorie ab. Sie pflanzen sich fort, und man muß deren Auswirkungen auf das Resultat untersuchen.

Wenn man eine Aufgabe löst, so muß man diese meistens durch eine andere Aufgabe ersetzen, die praktisch lösbar ist. Sehr oft ist eine analytische Lösung nicht möglich. Außerdem will man auch Rechenhilfsmittel einsetzen. Soll z. B. die Quadratwurzel aus einer Zahl bestimmt werden, verwendet man Näherungsformeln ($\sqrt{A} = \sqrt{k^2 + b} \approx \frac{1}{2} \left(k + \frac{A}{k} \right)$),

oder man bestimmt die Wurzel iterativ.

Die Lösung der *Ersatzaufgabe* muß der der Ausgangsaufgabe *benachbart* sein. Es dürfen keine zu großen Abweichungen auftreten. Wenn man genaue Anfangsdaten hat und anstelle der Lösung der Aufgabe die Lösung der Ersatzaufgabe vornimmt, erhält man natürlich nur eine Näherung der exakten Lösung.

Fehler, die dadurch entstehen, daß die Aufgabe durch eine *Ersatzaufgabe* angenähert wird, heißen *Verfahrensfehler*.

Bei der zahlenmäßigen Lösung einer Aufgabe erhält man außerdem Fehler durch Ungenauigkeiten im Rechengang selbst. So werden z. B. irrationale Zahlen ($\sqrt{2}$, π , e), die im Rechenprozeß benötigt werden, durch Näherungswerte ersetzt. Außerdem entstehen, da ein Rechner mit Zahlen, die aus endlich vielen Ziffern bestehen, rechnet, weitere Ungenauigkeiten durch das Runden.

Fehler, die durch Ungenauigkeiten im Rechengang entstehen, heißen *numerische Fehler*.

Der *vollständige Fehler* einer Lösung ($\bar{x} - x$) setzt sich aus Eingangs-, Verfahrens- und numerischen Fehlern zusammen:

vollständiger Fehler

$\underbrace{\text{Eingangsfehler (Anfangsdaten)} + \text{Verfahrensfehler (Ersatzaufgabe)} + \text{numerischer Fehler}}_{\text{(Ungenauigkeiten im Rechengang)}} \rightarrow \text{Lösung}$

Neben den bisher genannten Erscheinungen können noch weitere Probleme beim numerischen Rechnen auftreten. So können z. B. kleine relative Fehler in den Anfangsdaten zu großen relativen Fehlern im Ergebnis führen. Man spricht dann von einem *schlecht-konditionierten Problem*.

Nach diesem Überblick über einige Effekte, die beim numerischen Rechnen auftreten können, sollen diese an Beispielen erläutert werden.

4. Eingangsfehler und deren Fortpflanzung

$\varepsilon = \tilde{x} - x$, wobei $\tilde{x}$ der Näherungswert und x der exakte Wert ist, heißt *absoluter Fehler*; der Absolutbetrag der maximalen Abweichung vom exakten Wert heißt *absolute Fehler-schranke* Δx .

Es gilt $|\varepsilon| = |\tilde{x} - x| = |x - \tilde{x}| \leq \Delta x$ und $\tilde{x} - \Delta x \leq x \leq \tilde{x} + \Delta x$.

Will man die Fortpflanzung von Fehlern untersuchen, dann muß man davon ausgehen, daß der Wert maximal mit dem Fehler $\pm \Delta x$ behaftet sein kann. Man muß also mit $x = \tilde{x} \pm \Delta x$ rechnen.

Beispiel: Die Länge eines Eisensträgers sei $x = (134,44 \pm 0,01)$ m. Die absolute Fehler-schranke ist dann $\Delta x = 0,01$ m. Man kann das Meßergebnis nur bis auf eine Genauigkeit von $\pm 0,01$ m angeben, x liegt zwischen 134,43 m und 134,45 m.

Die Fortpflanzung von eingangsbedingten Fehlern läßt sich allgemein untersuchen. Hier sollen nur Fehler von Summe, Differenz und Produkt betrachtet werden.

Es seien $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$ die Näherungswerte, Δx und Δy die absoluten Fehler-schranken. $\varepsilon_x = \tilde{x} - x$ und $\varepsilon_y = \tilde{y} - y$ die absoluten Fehler.

Es gilt dann:

$\varepsilon_{x+y} = (\tilde{x} + \tilde{y}) - (x + y) = \varepsilon_x + \varepsilon_y$, damit

$|\varepsilon_{x+y}| \leq |\varepsilon_x| + |\varepsilon_y| \leq \Delta x + \Delta y$ und

$\Delta(x + y) \leq \Delta x + \Delta y$

$\varepsilon_{x-y} = (\tilde{x} - \tilde{y}) - (x - y) = \varepsilon_x - \varepsilon_y$, damit

$|\varepsilon_{x-y}| \leq |\varepsilon_x| + |\varepsilon_y| \leq \Delta x + \Delta y$ und

$\Delta(x - y) \leq \Delta x + \Delta y$

$(\tilde{x} - \varepsilon_x)(\tilde{y} - \varepsilon_y) = \tilde{x}\tilde{y} - (\varepsilon_x\tilde{y} + \varepsilon_y\tilde{x} - \varepsilon_x\varepsilon_y)$, damit

$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_x\tilde{y} + \varepsilon_y\tilde{x} - \varepsilon_x\varepsilon_y$,

$|\varepsilon_{xy}| \leq |\tilde{x}||\varepsilon_y| + |\tilde{y}||\varepsilon_x| + |\varepsilon_x||\varepsilon_y| \leq |\tilde{x}|\Delta y + |\tilde{y}|\Delta x + \Delta x \cdot \Delta y$

und $\Delta(x \cdot y) \leq |\tilde{x}|\Delta y + |\tilde{y}|\Delta x$.

Beispiel: Die Seiten eines Quadrates haben die Länge $(113,5 \pm 0,1)$ m. Für den Umfang erhält man $(454,0 \pm 0,4)$ m, für die Fläche als Fehler-schranke $\Delta A = 22,7$ m².

Man kann sich vorstellen, daß bei vielen Rechenoperationen sich die Eingangsfehler sehr stark *aufschaukeln* können und damit das Ergebnis *verfälschen*.

Beim Potenzieren erhält man als Fehler-schranke

$\Delta(x^n) = n \cdot |\tilde{x}|\Delta x$.

Wenn man ein lineares Gleichungssystem von n Gleichungen mit n Unbekannten mit Hilfe des *Gaußschen Algorithmus* löst (vgl.: Schülerzeitschrift *alpha*, 1977 3/4, *Wir lösen*

lineare Gleichungssysteme mit dem Gaußschen Algorithmus), muß man eine Vielzahl von Operationen (Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und Divisionen) ausführen. Man kann sich also vorstellen, daß sich bei einem solchen direkten Verfahren, wie es der Gaußsche Algorithmus ist, die Fehler sehr stark fortpflanzen.

5. Verfahrensfehler

Bei der Lösung einer Aufgabe können verschiedene Verfahren gleichwertig sein. Sie würden bei exakter Rechnung dasselbe Ergebnis liefern, können aber beim Rechnen mit endlicher Stellenzahl (so wie man in der Praxis tagtäglich rechnet, auch auf Rechnern) völlig verschiedene Ergebnisse bringen.

Die Auswirkungen solcher Verfahrensfehler soll an zwei Beispielen demonstriert werden.

Beispiel: Es ist

$$S = 1,5 \cdot 1,3 + 2,5 \cdot 0,7 + 3,5 \cdot 0,5 + 3,7 \cdot 1,5 + 4,5 \cdot 0,3 + (-1,7) \cdot 1,3$$

zu berechnen.

Als exakten Wert erhält man $S = 10,14$.

Wenn man ohne Rundung multipliziert, aufsummiert und anschließend auf eine Komma-stelle rundet, erhält man $\tilde{S}_1 = 10,1$. Der Fehler beträgt $\tilde{S}_1 - S = -0,04$.

Wenn man multipliziert, nach jeder Teil-multiplikation das Produkt rundet und dann summiert, erhält man $\tilde{S}_2 = 10,4$. Der Fehler beträgt $\tilde{S}_2 - S = 0,26$.

Wenn man auf Einer rundet, anschließend multipliziert und addiert, erhält man $\tilde{S}_3 = 15$ mit dem Fehler $\tilde{S}_3 - S = 4,86$.

Beispiel: Für den Ausdruck z gilt

$$\begin{aligned} z &= \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right)^2 \\ &= \frac{(\sqrt{2}-1)^2 (\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)^2 (\sqrt{2}-1)^2} = (\sqrt{2}-1)^4 \\ &= [(\sqrt{2}-1)^2]^2 = (3-2\sqrt{2})^2 \\ &= 9 - 12\sqrt{2} + 4 \cdot 2 = 17 - 12\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Berechnet man den Ausdruck mit Hilfe der vier verschiedenen *Verfahren* (Formeln), so erhält man mit $\sqrt{2} \approx 1,41$

$$z_1 = 0,0289,$$

$$z_2 = 0,0283,$$

$$z_3 = 0,0324 \text{ und}$$

$$z_4 = 0,0800,$$

also unterschiedliche Ergebnisse.

Wenn man mit $\sqrt{2} \approx 1,4$ rechnet, erhält man

$$z_1 = 0,0278,$$

$$z_2 = 0,0256,$$

$$z_3 = 0,0400 \text{ und}$$

$$z_4 = 0,2000.$$

6. Kondition eines Problems

Beim numerischen Rechnen spielt auch die *Kondition* des Problems eine Rolle. Da die Anfangsdaten im Normalfall mit einem Fehler behaftet sind, weist auch bei exakter

Rechnung das Ergebnis einen gewissen Fehler auf.

Es kann vorkommen, daß kleine Änderungen in den Ausgangsdaten zu großen Änderungen im Ergebnis führen. Wenn das der Fall ist, spricht man von einem *schlechtkonditionierten Problem*, sonst von einem *gutkonditionierten*.

Es handelt sich hierbei um eine Eigenschaft des Problems, nicht aber des verwendeten Algorithmus. Maßzahlen, die die Begriffe gut- und schlechtkonditioniert quantitativ erfassen, heißen *Konditionszahlen*.

Zur Erläuterung dieses Effektes betrachten wir die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit zwei Unbekannten.

Beispiel:

$$2x + 6y = 8$$

$$2x + 6,0001y = 8,0001.$$

Man erhält

$$0,0001y = 0,0001; \text{ damit } y = 1 \text{ und } x = 1.$$

Es werden nun kleine Änderungen in den Koeffizienten des Gleichungssystems (in den *Ausgangsdaten*) vorgenommen und die Auswirkungen auf das Ergebnis betrachtet:

$$2x + 6y = 8$$

$$2x + 5,9999y = 8,0002.$$

Man erhält $y = -2$ und $x = 10$.

$$2x + 6y = 8$$

$$2x + 5,9998y = 8,0001.$$

Man erhält $y = -0,5$ und $x = 5,5$.

Bei $2x + 6y = 8$

$$2x + 5,9999y = 8,0004,$$

erhält man $y = -4$ und $x = 16$.

Es ist deutlich zu erkennen, daß bei diesem Problem kleine Änderungen der Koeffizienten zu wesentlichen Änderungen im Ergebnis führen. Das Gleichungssystem ist *schlecht-konditioniert*.

7. Zusammenfassung

An Beispielen wurden einige Effekte demonstriert, die beim numerischen Rechnen auftreten können. Von solchen Effekten muß man wissen, wenn man zahlenmäßig ein Problem löst. Man muß auch versuchen, solche Effekte quantitativ zu erfassen, damit man Aussagen über die Güte seiner Ergebnisse machen kann. Das ist für die Praxis von großer Bedeutung. Es sind also u. a. Fehlerbetrachtungen und Untersuchungen zur Kondition eines Problems notwendig.

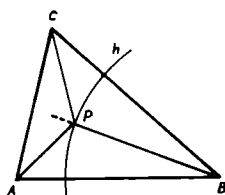
Die *Numerische Mathematik*, eine wichtige Disziplin der Mathematik, die Verfahren zur zahlenmäßigen Lösung von mathematischen Problemen entwickelt und diskutiert unter Beachtung der Verwendung von Rechanlagen, hat u. a. auch die Aufgabe, die hier zusammengestellten numerischen Effekte (Eigenheiten des numerischen Rechnens) zu untersuchen und quantitativ zu erfassen.

J. Gronitz

Eine Aufgabe und vier Lösungen

Drei Orte A , B und C sollen eine gemeinsame Trafostation erhalten. Aus ökonomischen Gründen soll sie so gelegen sein, daß die Summe der Entfernungen zu den drei Orten ein Minimum ist (Bild 1). Dieses Problem, innerhalb eines Dreiecks ABC einen Punkt P so zu konstruieren, daß $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} = s$ minimal wird, geht auf Jakob Steiner zurück (1796 bis 1863) und läßt sich mit unterschiedlichen mathematischen Mitteln lösen.

Bild 1



Wie die Analyse einer Lösung Hinweise auf weitere Möglichkeiten zur Lösung bietet, soll in diesem Beitrag gezeigt werden. Wir beschränken unsere Betrachtungen zunächst auf Dreiecke, in denen alle Innenwinkel kleiner als 120° sind.

(1) Die Idee zu einer ersten Lösung besteht darin, die Strecken $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$ zu einem Streckenzug zusammenzufügen. Die Länge dieses Streckenzuges soll dann ein Minimum werden.

Im Dreieck ABC wird zunächst ein beliebiger Punkt Q gewählt. Dann bilden wir das Dreieck AQB durch eine Drehung um A mit dem Drehwinkel 60° auf das Dreieck $AB'Q_1$ ab. Für die betrachtete Summe der Entfernung gilt $\overline{QA} + \overline{QB} + \overline{QC} = \overline{QC} + \overline{Q_1B'} + \overline{QQ_1}$ (wegen des Drehwinkels von 60° ist das Dreieck AQQ_1 gleichseitig).

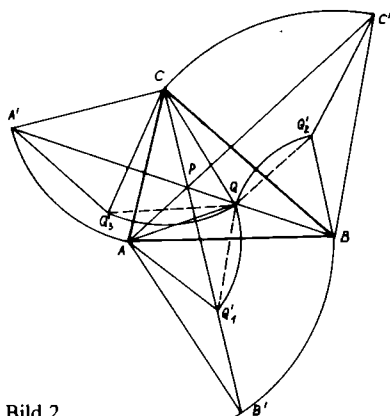


Bild 2

Ebenso wird das Dreieck BCQ durch eine Drehung um B mit dem Drehwinkel 60° auf das Dreieck $BC'Q_2$ abgebildet (Bild 2). Der entsprechende Streckenzug ist jetzt AQQ_2C' . Wegen der willkürlichen Wahl von Q werden weder CQQ_1B' noch AQQ_2C' in einer Geraden liegen. Wäre das jedoch der Fall, dann wäre der Streckenzug am kürzesten, und zwar gleich $\overline{CB'}$ bzw. $\overline{AC'}$. Daraus ergibt sich: Der gesuchte Punkt P ist der Schnittpunkt von AC' und CB' . Zur Kontrolle wurde im Bild 2 auch BA' konstruiert.

(2) Die Analyse von Bild 2 führt auf eine recht einfache Konstruktion des Punktes P . Über den Seiten des Dreiecks ABC werden gleichseitige Dreiecke konstruiert. Die dabei sich ergebenden Punkte A' , B' und C' werden mit den gegenüberliegenden Eckpunkten verbunden. Es gilt dann: Die Transversalen AC' , BA' und CB' schneiden einander in einem Punkt P , und die Strecken $\overline{AC'}$, $\overline{BA'}$ und $\overline{CB'}$ sind gleich lang (Bild 3).

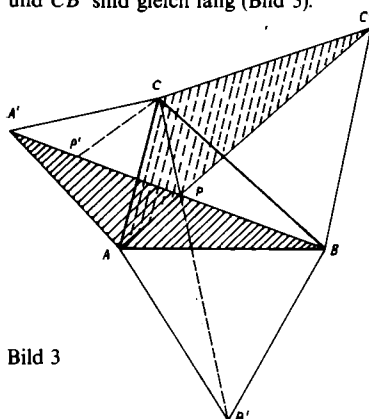


Bild 3

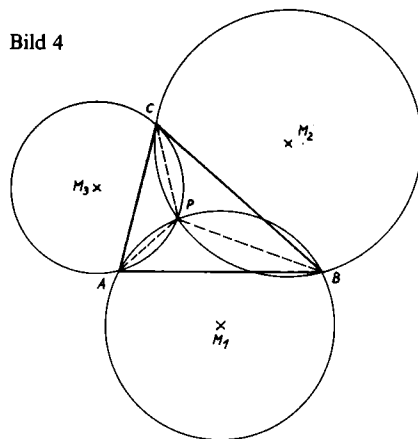
Dieser Sachverhalt soll bewiesen werden. AC' und BA' mögen den Punkt P gemeinsam haben. Wir beweisen, daß CB' durch P geht. Nach dem Kongruenzsatz sws sind die Dreiecke $AC'C$ und $A'BC$ kongruent. Durch die Drehung um C mit dem Drehwinkel 60° kann $\triangle AC'C$ auf $\triangle A'BC$ abgebildet werden. Bei dieser Abbildung wird $P \in AC'$ auf $P' \in A'B$ und die Strecke $\overline{AC'}$ auf die Strecke $\overline{A'B}$ abgebildet. Die beiden Strecken sind also gleich lang, und sie bilden Winkel von 60° bzw. 120° .

$\triangle PPC$ ist gleichseitig, also ist $A'PB$ Winkelhalbierende von $\angle APC$; denn $\angle APA' = 60^\circ$. Dann ist $\angle ACP = 60^\circ - \angle PAC = 60^\circ - \angle PA'C$. Weiterhin gilt aber auch $\triangle ABA' \cong \triangle ABC$ nach sws. Dann ist $\angle ACB' = \angle AA'B = 60^\circ - \angle PA'C$. Die Winkel $\angle ACP$ und $\angle ACB'$ sind also gleich, d. h., P liegt auf CB' . Außerdem folgt aus der Kongruenz der beiden letztgenannten Dreiecke, daß die Transversalen gleich lang sind.

(3) Aus der näheren Betrachtung des Bildes 3 wird deutlich, daß P derjenige Punkt im Inneren des Dreiecks ist, von dem aus jede der Dreiecksseiten unter einem Winkel von 120° gesehen werden kann. Diese Eigenschaft von P legt eine weitere Möglichkeit seiner

Konstruktion nahe: Es ist der Schnittpunkt der Kreise zu ermitteln, in denen die Dreiecksseiten Sehnen sind und die zugehörigen Peripheriewinkel 120° betragen. Im Bild 4 wurde die Konstruktion ausgeführt. Der dritte Kreis dient der Zeichenkontrolle.

Bild 4



(4) Zu der Erkenntnis, daß P derjenige Punkt sein muß, von dem aus man die Dreiecksseiten jeweils unter einem Winkel von 120° sieht, kommt man auch durch die folgende Überlegung:

Angenommen, im Dreieck ABC sei P der Punkt, für den $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ ein Minimum ist. Es sei weiter der Kreis k um B durch P gezeichnet. Dann muß P offensichtlich der Punkt dieses Kreises sein, für den $\overline{PA} + \overline{PC}$ ein Minimum ist (Bild 5). Dazu muß P so gelegen sein, daß PA und PC mit dem Kreis, d. h. mit der Tangente in P , gleiche Winkel bilden. Die gleiche Überlegung läßt sich für die Kreise um A bzw. um C anstellen. Von P aus müssen alle Dreiecksseiten unter dem gleichen Winkel gesehen werden, d. h., dieser Winkel beträgt 120° . Im Bild 6 ist an einem einfacheren Beispiel erläutert, daß $\overline{PA} + \overline{PC}$ nur dann am kleinsten wird, wenn PA und PC mit g gleiche Winkel bilden. Jeder andere Punkt P_1 führt zu einem längeren Streckenzug (Dreiecksungleichung).

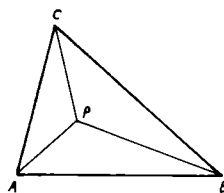


Bild 5

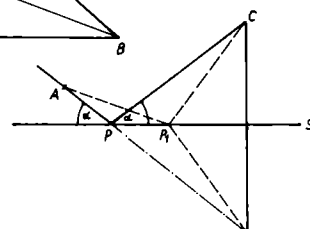
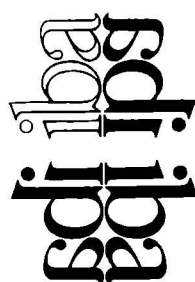
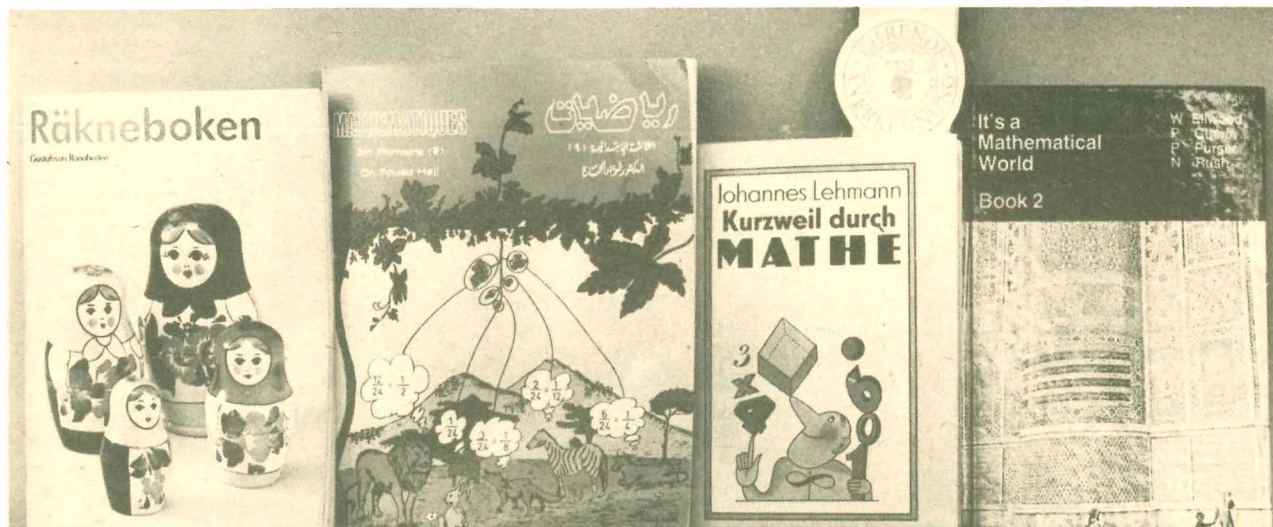


Bild 6

(5) Es war vorausgesetzt worden, daß im Dreieck ABC alle Winkel kleiner als 120° sein sollten. Sollte ein Innenwinkel gleich oder größer als 120° sein, dann ist der gesuchte Punkt P der Scheitel dieses Winkels. Versucht dafür eine Begründung zu finden!

W. Jungk



Internationale Buchkunst- Ausstellung, Leipzig

**Ausgezeichnet mit dem Prädikat
Ehrende Anerkennung
wurden 30 Bücher**

Folgende vier mathematischen Titel erhielten
die Auszeichnung:

Autorenkollektiv

Mathematika

Finnische Mathematiklehrbücher
(Kl. 1 bis 5)

Verlag: Esselte Herzogs, Naucka 1980

Foud Haji

Mathématiques

libanesische Mathematiklehrbücher für die
Klassen 1 bis 6 in arabisch, französisch und
englisch

Editions Librairie St. Paul,
Beyrouth 1980

Autorenkollektiv

It's a Mathematical World

Mathematiklehrbuch für obere Klassen
und Erwachsene

Verlag: Longman Paul Limited,
New Zealand 1980

Johannes Lehmann

Kurzweil durch Mathe

Mathematikunterhaltungsbuch für
obere Klassen und Erwachsene
Urania-Verlag
Leipzig · Jena · Berlin, 1980

„Schönste Bücher aus aller Welt“ wurden im
Herbst 1963 erstmals in Leipzig ausgestellt.
Veranstalter: Rat der Stadt und Börsenver-
ein. Im Herbst 1981 wurden 650 Titel einge-
reicht, 30 davon erhielten einen Preis, 30 eine
„Ehrende Anerkennung“.
Gleichzeitig fanden die Besucher eine Sonder-
schau „Das mathematisch-naturwissenschaft-
liche Schulbuch“ vor. Vier Bücher dieser
Sonderschau erhielten eine „Ehrende An-
erkennung“. Aus der Vielfalt der ausgestellten
Mathematikbücher wurden für den *alpha*-
Leser zehn meist unterhaltsame Probleme
ausgewählt. Viel Spaß beim Knobeln!

J. Lehmann

Aufgaben

Aus der Fülle des vorliegenden Materials
wählten wir für unsere Leser folgende – meist
unterhaltsame – Probleme aus:

▲1▲ Vier Personen geben folgende Aus-
kunft:

1. Person: „Ich wiege 5 kg weniger als die
dritte Person.“

2. Person: „Ich wiege die Hälfte von dem, was
die 1. Person und die 4. Person zusammen
wiegen.“

3. Person: „Ich wiege 29 kg mehr als die 4. Per-
son.“

4. Person: „Ich bringe ein Viertel von dem auf
die Waage, was die 1., 2. und 3. Person insge-
samt wiegen.“

Dürfen die 4 Personen in einem Aufzug fah-
ren, der 350 kg Masse befördern kann?

(Finnland)

Ein zerbrochenes Fenster

▲2▲ Wer war es?

„Ich nicht“, sagte Pete.

„Es war einer der Jungen“, sagte Jenny.

„Nein, Jessica tat es“, sagte Tim.

„Ich tat es nicht“, rief Jessica.

Nur eines der Kinder lügt!

Wer ist schuldig?

(Neuseeland)

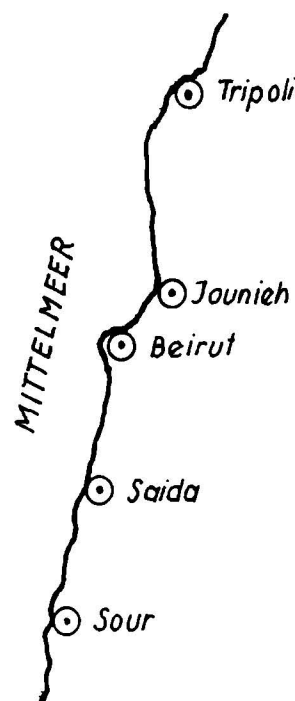
▲3▲ Auf der Karte des Libanon beträgt
die Entfernung zwischen Saida und Beirut
2 cm. Die wirkliche Entfernung auf der Erde
ist 40 km.

I. Welche Entfernung muß auf der Karte
zwischen Beirut und Jounieh angegeben wer-
den, wenn sie auf der Erde 18 km beträgt?

II. Wieviel Kilometern entspricht ein Zenti-
meter auf der Karte?

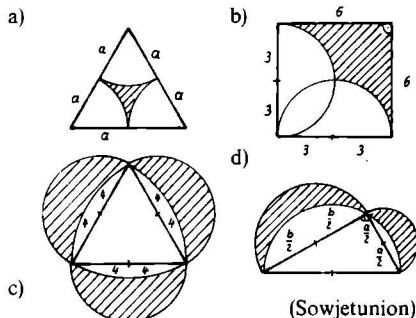
III. Wie groß ist die wirkliche Entfernung
zwischen Beirut und Sour?

IV. Wie groß ist die wirkliche Entfernung
zwischen Saida und Tripoli? (Libanon)

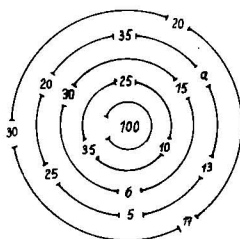


▲4▲ Eine Streichholzschachtel hat die
Kanten mit den Längen $a = 17 \text{ mm}$, $b = 37 \text{ mm}$,
 $c = 52 \text{ mm}$. Es ist eine Zehnschachtelpackung
zu entwerfen, für die möglichst wenig Ein-
schlagpapier verbraucht wird. (DDR)

▲5▲ Berechne in jeder Figur die schraff-
ierte Restfläche!

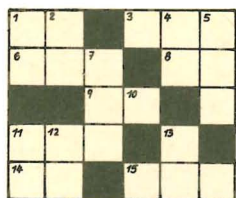


▲ 6 ▲ Wie ist es möglich, so durch die vier äußeren Kreise zu laufen, daß die Summe der vier Zahlen 100 ergibt? (Bulgarien)



Kreuzzahlrätsel

▲ 7 ▲ Trage die Lösungen der folgenden Aufgaben, durch Sternchen gekennzeichnet, in das Kreuzzahlrätsel ein! (Indien)



Waagerecht

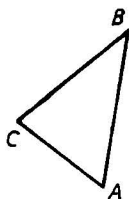
1. $x^5 \cdot x^{10} = x^*$
3. $2^7 = *$
6. $(8^2 \cdot 10) + 1 = *$
8. $a^4 \cdot a^4 \cdot a^4 = a^*$
9. $7 \cdot 3^2 = *$
11. $c^{94} \cdot c^{25} = c^*$
14. $3^4 = *$
15. $(6 \cdot 2)^2 + 5 = *$

Senkrecht

1. $4^2 = *$
2. $x^9 \cdot x^9 \cdot x^9 = *$
4. $(y^3)^7 = y^*$
5. $\frac{p^{1000}}{p^{177}} = p^*$
7. $13^2 = *$
10. $a \cdot a \cdot a \cdot a = a^*$
11. $(a^6)^3 = a^*$
12. $\frac{a^6 \cdot a^{15}}{a^{10}} = a^*$
13. $2^2 \cdot 6 = *$

▲ 8 ▲ Drehe das Dreieck ABC um den Punkt S in Uhrzeigerrichtung erst um 60° und dann noch einmal um 120° !

Wie kann man beide Drehungen vereinigen? (Jugoslawien)



▲ 9 ▲ Ein LKW muß bei der Zufahrt zu einer Baustelle über eine Brücke fahren, die für eine Belastung von 3 t und mehr gesperrt ist. Der LKW wiegt leer 1,5 t.

Wieviel Sack Zement zu je 50 kg kann er bei einer Fahrt höchstens laden? (BRD)

▲ 10 ▲ Die Winkelsumme eines konvexen Vielecks ist 2340° .

Wieviel Seiten hat das Vieleck? (Rumänien)

Eine „abenteuerliche“ Aufgabe

Fünf Räuber erbeuteten eine Kassette mit Talern und beschlossen, den Schatz am anderen Morgen gerecht zu teilen. Nachts befürchtete jedoch einer, von den anderen betrogen zu werden. Er versuchte deshalb heimlich, die Beute in fünf gleiche Teile zu zerlegen. Dabei blieb allerdings ein Goldstück übrig. Er nahm sich einen der Teilhaufen sowie den restlichen Taler und legte sich wieder schlafen. Nach einer Weile erging es dem zweiten Räuber ebenso. Er stand heimlich auf, bildete aus den in der Kassette liegenden Talern fünf Teilhaufen mit gleicher Taleranzahl, und es blieb ebenfalls ein Taler übrig. Auch er nahm das einzelne Goldstück und einen Teilhaufen an sich.



Nach ihm holten sich der dritte, vierte und fünfte Räuber den ihnen vermeintlich zustehenden Teil Goldstücke. Den bei jeder gleichmäßiger Aufteilung übriggebliebenen Taler steckten sie sich jeweils ein. Als die fünf Räuber am anderen Morgen sorgenfrei erwachten, teilten sie die in der Kassette verbliebenen Goldstücke gleichmäßig untereinander auf (dies war nun möglich).

Aufgabe 1

Wieviel Taler können anfangs in der Kassette gewesen sein?

Aufgabe 2

Wieviel Taler erhielten die einzelnen Räuber, falls die Kassette höchstens 10000 Goldstücke faßt?

Aufgabe 3

Verallgemeinere die Aufgabe auf den Fall einer Bande von n Räubern ($n \geq 2$). Dabei versuche wieder jeder Räuber, den Kassetteninhalt in n gleiche Teile zu zerlegen und sich heimlich seinen vermeintlichen Anteil zu nehmen. Bei den Aufteilungen bleibe jeweils ein Taler übrig, den sich auch dieser Räuber nimmt. Am anderen Tag teilen die n Räuber den verbliebenen Kassetteninhalt untereinander gleichmäßig auf.

Aus wieviel Talern kann der Schatz bestanden haben? Gib für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ die kleinstmögliche Zahl der Goldstücke des Schatzes an!

W. Schmidt

Görlitz gibt die Uhrzeit an

Görlitz ist die einzige Großstadt der Erde, durch die der 15. Meridian verläuft.

Unmittelbar vor der Brücke der Freundschaft, dem Übergang über die Neiße zur VR Polen, steht links im Garten der Stadthalle, genau auf dem 15. Längengrad, ein Steinglobus mit einem Durchmesser von 105 cm, der, wie seine Inschrift verrät, im Jahre 1961, dem Jahr des ersten Raumfluges des Menschen, errichtet worden ist. Weiter erfährt der Betrachter: „Nach der mittleren Ortszeit des 15. Längengrades richtet sich die gesamte mitteleuropäische Zeitzone.“



Die mitteleuropäische Zeit – MEZ – gilt in Skandinavien, den Staaten Mitteleuropas, Ungarn, Jugoslawien, Italien, Tunesien, Kamerun.“

Eine Aufgabe von Prof. Dr.

Jacob A. Smorodinsky

Prof. Dr. Smorodinsky wirft in seinem Beitrag einige Probleme auf, die im Zusammenhang mit unserem *Kalender* stehen.

In den ersten beiden Abschnitten macht er uns auf Schwierigkeiten aufmerksam, die entstehen, wenn wir von einem bestimmten Tag – z. B. einem Gedenktag, dessen Datum nach dem früher üblichen *Julianischen Kalender* angegeben ist, sein Datum im heutigen *Gregorianischen Kalender* bestimmen wollen.

Nach kurzen Bemerkungen zu den Bezeichnungen der *Wochentage* (Abschnitt III) lenkt er schließlich im vierten Abschnitt unser Interesse auf Effekte, die beim Überqueren der im Stillen Ozean verlaufenden *Datumsgrenze* auftreten.

Kalendergeschichten

I. Das Problem entstand ganz unerwartet. Man mußte im Kalender einen Gedenktag – den 200. Todestag *Leonhard Eulers* – vermerken. Euler starb in Sankt Petersburg (heute Leningrad) am 7. September 1783. Der 200. Jahrestag dieses Ereignisses fällt auf den 7. September 1983. Aber das ist gar nicht so!

Im 18. Jahrhundert galt in Rußland der Julianische Kalender (*alte Zeitrechnung*), nach dem die orthodoxe Kirche auch heute noch ihre Feiertage begeht. Nach der Oktoberrevolution wurde der Julianische durch den Gregorianischen Kalender abgelöst (*neue Zeitrechnung*), der bereits damals in den meisten Ländern der Welt gültig war.

Bekanntlich geht der Julianische gegenüber dem Gregorianischen Kalender nach: Im 18. Jahrhundert betrug dieses Nachgehen 11 Tage. Deshalb war der Todestag Eulers nach der neuen Zeitrechnung der 18. September 1783 (wie er auch in Büchern vermerkt ist), und als Jahrestag mußte der 18. September 1983 (nach neuer Zeitrechnung) vermerkt werden.

Aber man kann auch noch anders denken. Der Jahrestag war nach alter Rechnung der 7. September. Im 20. Jahrhundert mußte man beim Übergang zur neuen Zeitrechnung 13 Tage einfügen (die Jahre 1800 und 1900 waren nach dem Julianischen Kalender Schaltjahre, nach dem Gregorianischen aber

nicht). Deshalb fällt nach der neuen Zeitrechnung der Jahrestag auf den $(7 + 13) = 20$. September 1983.

▲2235a▲ Wann muß man denn nun den 200. Todestag Eulers wirklich in den Kalender eintragen – am 18. oder 20. September?

II. Es scheint so, als sei der Übergang von Daten der alten Zeitrechnung zu Daten der neuen eine einfache Sache: Im 18. Jahrhundert muß man 11 Tage einfügen, im 19. Jahrhundert 12 und im 20. Jahrhundert 13 Tage.

▲2235b▲ Aber wie ist es, wenn wir auf eine Jahrhundertwende geraten? Wir wollen beispielsweise ermitteln, welches neue Datum dem 25. Dezember 1900 (alter Zeitrechnung) entspricht.

Es ist dies der 6. Januar 1901 (es wurden – wie für das 19. Jh. nötig – 12 Tage eingefügt). Oder ist es der 7. Januar 1901 (wenn man entsprechend dem 20. Jahrhundert 13 Tage addiert)? Der 25. Dezember 1900 liegt nach alter Rechnung im 19. Jahrhundert, aber im 20. Jahrhundert nach der neuen Zeitrechnung.

III. Früher nahm man an, daß die Tage der Woche unter dem Schutz von Himmelskörpern stünden. Montag ist der Tag des Mondes, Dienstag der Tag des Mars, Mittwoch – Merkur, Donnerstag – Jupiter, Freitag – Venus, Sonnabend – Saturn und schließlich Sonntag – Sonne. Diese Verbindung spiegelt sich auch in den lateinischen Bezeichnungen der Wochentage wider: dies Lunae, dies Martis, dies Mercurii, dies Jovis, dies Veneris, dies Saturni, dies Solis.

Teilweise blieb dieser Zusammenhang in den europäischen Sprachen und auch in der Hindusprache erhalten.

Ein Blick in eines der zahlreichen Labors des *Vereinigten Instituts für Kernforschung Dubna*



▲2235c▲ Kann man irgendeine Ordnung in dieser Reihenfolge der Bezeichnungen erkennen?

IV. Im Stillen Ozean verläuft die (natürlich unsichtbare) Datumsgrenze. Schiffe, die diese Linie von West nach Ost überfahren, verlieren einen Tag: Die Uhren auf Alaska gehen gegenüber denen auf der Tschuktschen-Halbinsel um 24 Stunden nach. Wir stellen uns vor, daß wir die Erde in Richtung von West nach Ost sehr schnell – d. h. in wenigen Stunden – umrunden, z. B. auf einem Breitenkreis in der Nähe des Nordpols oder auch in einem Überschallflugzeug über zivilisierten Gegenden.

Während unserer Reise schneiden wir die Datumsgrenze und verlieren einen Tag. Wenn wir die Reise einige Male wiederholten, so würden wir in die Vergangenheit gelangen. Natürlich ist das nicht so. Man *verliert* den Tag nur deshalb, weil man beim Überschreiten der Zeitzonen (aller 24) die Uhr jedesmal um eine Stunde vorstellen muß. Das Ändern des Datums an der Datumsgrenze um einen Tag kompensiert dieses Verstellen der Uhrzeiger.

Während eines Fluges braucht man seine Uhr überhaupt nicht zu stören, und auch die Datumsgrenze braucht man nicht zu beachten. Im Flugzeug lebt man nach einer eigenen Zeit, oder genauer nach der Zeit des Start- bzw. des Landeflugplatzes.

Erinnern wir uns jetzt an eine andere Begebenheit. Als das Schiff *Viktoria* als einziges die von Magalhaes begonnene Weltumseglung beendete, holte es auf der Insel Santiago an der Westküste Afrikas Proviant. Hierbei zeigte sich, daß die auf der Insel lebenden Portugiesen Donnerstag, den 10. Juli 1522 schrieben. Demgegenüber war der Expeditionsteilnehmer *Antonio Pigafetti*, der akkurat

Tagebuch geführt hatte, der Meinung, daß erst Mittwoch, der 9. Juli sei. Erst später verstand er, daß das Schiff bei seiner Bewegung von Ost nach West (von Spanien in Richtung Atlantik) die Erdachse einmal weniger als die Erde selbst umkreist hatte und deshalb einen Tag verlor. Andererseits wußten die Reisenden weder etwas von Zeitzonen noch von einer Datumsgrenze – sie lebten nach Schiffszeit.

▲2235d ▲ Warum zeigten ihre Uhren (und ihre Kalender) nicht dasselbe an wie die Uhren an der Küste? Warum gingen die Uhren auf dem Schiff langsamer als die auf dem Festland?

Kurze Antworten

▲2235a ▲ Der Widerspruch entstand daraus, daß nicht festgelegt worden war, ob Jahrestage nach julianischen oder nach gregorianischen Jahren bestimmt werden sollten. Das julianische Jahr ist länger als das gregorianische. Am 18. September sind 200 gregorianische Jahre vergangen, aber am 20. erst sind 200 julianische Jahre vorbei.

▲2235b ▲ Der zusätzliche Tag ist der 29. Februar 1900. Diesen Tag gibt es im Gregorianischen Kalender nicht (kein Schaltjahr!). Der 25. Dezember liegt später, und man muß zu ihm schon 13 Tage – wie im 20. Jahrhundert – hinzufügen.

▲2235c ▲ Die Reihenfolge der Wochentage entspricht der Reihenfolge der Himmelskörper im System des Ptolemäus: Mond, Merkur, Venus, Mars, Jupiter, Saturn, Sonne.

▲2235d ▲ In Wirklichkeit gab es auf den Schiffen keine Uhren. Die Vollendung eines Tages wurde nach der Sonne bestimmt. Damit wurden auf dem Schiff die Zeitzonen beachtet, nicht aber die Datumsgrenze. Der Tag, der beim Überschreiten der Datumsgrenze von Ost nach West nicht eingefügt wurde, war der *verlorene*.

Unser Bild zeigt einen alten arabischen Tierkreis



Zahlen und Fakten

Sach- und Anwendungsaufgaben

In unserer Republik entstand in den letzten Jahren ein großes materielles und geistiges Potential. Dies gilt es, noch besser zu nutzen. Während im Jahre 1960 im produzierenden Bereich der Volkswirtschaft jeder Beschäftigte mit Grundmitteln im Werte von 24944 M ausgestattet war, erhöhte sich der Ausstattungsgrad bis zum Ende des Jahres 1979 auf 70597 M.

▲1 ▲ Um wieviel Mark erhöhte sich der Ausstattungsgrad mit Grundmitteln, bezogen auf jeden einzelnen Werktätigen, vom Jahre 1960 bis zum Jahre 1979?

▲2 ▲ Prüfe, ob dem Gesamtzuwachs je Beschäftigten vom Jahre 1960 bis zum Jahre 1979 eine durchschnittliche Zuwachsrate von rund 2403 M entspricht! Von welcher Annahme gehen wir dabei aus?

▲3 ▲ Vom Jahre 1960 bis zum Jahre 1979 stieg der Grundmittelbestand im produzierenden Bereich der Volkswirtschaft von 161,9 Mrd. M auf 456,3 Mrd. M. Wieviel Beschäftigte gab es etwa im produzierenden Bereich der Volkswirtschaft im Jahre 1979?

Für die Vergrößerung des gesellschaftlichen Reichtums ist entscheidend, daß mit dem gewaltigen Potential an Maschinen und Ausrüstungen ein wesentlich größeres Ergebnis erwirtschaftet wird als bisher. In den 70er Jahren wurden in dieser Hinsicht die ersten Schritte getan. Im Jahre 1970 wurden hochproduktive Maschinen und Anlagen in der Industrie im Durchschnitt täglich 12,5 h produktiv genutzt, im Jahre 1979 waren 14,9 h erreicht.

▲4 ▲ Wieviel Stunden und Minuten wurden die Maschinen im Jahre 1979 im Durchschnitt täglich mehr genutzt als im Jahre 1970?

▲5 ▲ Nimm an, daß im Jahre 1971 die Maschinen in dem gleichen Maße wie im Jahre 1970 genutzt wurden! Schätze und prüfe durch Rechnen mit dem Stab, wieviel Tage des Jahres 1971 noch zusätzlich zu denen des Jahres 1970 nötig gewesen wären, um die gleiche Gesamtzahl der Einsatzstunden der Maschinen und Anlagen wie im Jahre 1979 zu erreichen!

Erkläre, durch welche, innerbetrieblichen Maßnahmen eine Erhöhung der Einsatzstunden der Maschinen möglich wird; denn ein Jahr hat ja nur 365 Tage!

Braunkohle ist unser wichtigster Roh- und Brennstoff. Von Jahr zu Jahr steigen jedoch durch den Aufschluß neuer Tagebaue, durch wachsenden Abraum und geringe Mächtigkeit der Flöze die Aufwendungen je Tonne Kohle. Im Jahre 1971 betrugen die Selbstkosten zur Förderung 1 t Rohbraunkohle 6,70 M, davon mußten 4,26 M für den Abraum aufgewendet werden.

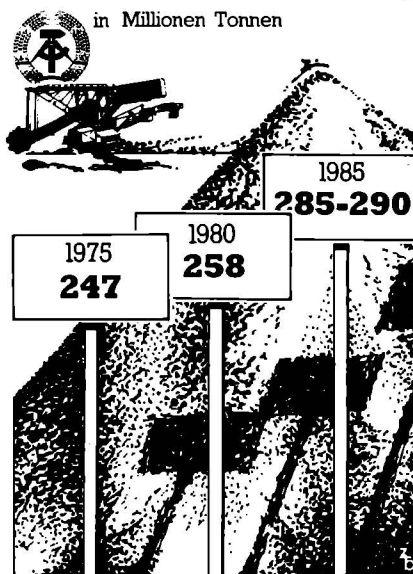
Im Jahre 1979 stiegen die Selbstkosten im Vergleich zum Jahre 1971 um 4,32 M, und allein die Kosten für die Abraumbeseitigung je Tonne Kohle waren im Jahre 1979 um 24 Pfennig höher als die Gesamtselbstkosten je Tonne Kohle im Jahre 1971.

▲6 ▲ Welche Höhe haben die Selbstkosten für 1 t Rohbraunkohle im Jahre 1979 erreicht?

Welche Kosten je Tonne Rohbraunkohle werden durch die Abraumbeseitigung verursacht?

H. Rosin

Rohbraunkohlenförderung



Zuwendungen des Staates aus gesellschaftlichen Fonds

monatlich berechnet auf eine vierköpfige Familie



Unser Haushalt und die Elektronik

Ob es eines Tages so sein wird, daß sich auf Befehl des Hausroboters der Tisch mit fertig gegarten Speisen deckt? Ob die einzige Mühe unsererseits dann nur noch darin besteht, mit Messer, Gabel und Löffel bewaffnet, tüchtig zuzulangen? Wohl kaum! Das kann auch künftig nur den Märchen- und Fabelwesen gelingen. Doch sicher ist, daß der wissenschaftlich-technische Fortschritt mehr und mehr im Haushalt Fuß faßt, daß Haushaltgeräte zunehmend durch „Knopfdruck“ die vielfältigsten Hausarbeiten übernehmen, für uns „denken“ und handeln. Zwar bleibt der universelle Hauscomputer eine Vision, aber sein „Schrittmacher“, die *Mikroelektronik*, hält bereits Einzug.

Je kleiner, desto leistungsstärker

Transistoren, Dioden, Widerstände, Kondensatoren – Teile, die sich mit dem Begriff Elektronik verbinden – sind schon seit langem bekannt. Das Herzstück der Mikroelektronik, der sogenannte *Chip* jedoch, der auf einem einkristallinen Siliziumplättchen von wenigen Quadratmillimetern einen ganzen Schaltkreis beherbergt, bleibt bis heute dem menschlichen Auge normalerweise verborgen. Mit seinen feinen Strukturen, nur Bruchteile eines Millimeters groß, versteckt sich dieses „Wunder“ der Technik vor dem menschlichen Betrachter. Dieser Chip aber, zum Synonym der Mikroelektronik geworden, beschleunigt den wissenschaftlich-technischen Fortschritt so enorm, daß die Automatisierung ganzer Produktionsprozesse möglich ist und Roboter zunehmend schwere körperliche Arbeit übernehmen.

Je kleiner die Bauelemente wurden, desto größer ihr Siegeszug. Die in den 20er Jahren zur „Königin“ der Elektronik gekrönte Elektronenröhre war groß und brauchte viel Platz.

Die ersten mit diesen Röhren bestückten Rechner benötigten noch viele Tausende von Röhren, waren riesengroß, wogen etliche Tonnen und fraßen Unmengen an Strom. Schon der in den 40er Jahren erfundene Transistor verringerte Maße und Gewichte wesentlich. Ein Rechner gleicher Leistung mit Transistoren bestückt, hätte bereits in einen normalen Kleiderschrank gepaßt und sich mit Strom aus einer normalen Steckdose be-

gnügt. Im Laufe der Zeit hat sich die Halbleiterphysik rasant weiterentwickelt, und angeregt durch die Erfolge des Transistors wurde die Miniaturisierung der Bauelemente soweit vorangetrieben, daß heute mikroelektronisch betriebene Rechner im Taschenformat weitaus größere Leistungen vollbringen als der röhrengepeiste „Goliath“ der 20er Jahre.

Erst die Menge macht es möglich

Allerdings – die Kosten für die Entwicklung und die Produktion mikroelektronischer Bauelemente sind enorm. Sie rentieren sich nur, wenn die Produktion höchster Stückzahlen möglich ist, was wiederum die massenhafte Anwendung der Mikroelektronik voraussetzt. Doch nun, da klein genug, läßt sich diese Forderung realisieren, denn die Mikroelektronik kann sich jetzt jene Sphären erobern, die ihr bislang versagt bleiben mußten: die gesamte Industrie, das Büro, sogar den Haushalt.

Wenn die durchgängige Anwendung der Mikroelektronik in Konsumgütern bis auf wenige Ausnahmen noch in den Kinderschuhen steckt, so beginnt sie doch bereits in einige Hauptgebiete einzudringen. In der DDR finden wir sie schon vielfach praktiziert, beispielsweise in der Unterhaltungselektronik, vor allem der Fernsehtechnik, in Taschenradios und Taschenrechnern, einigen Fotoapparaten, Schreibmaschinen und einzelnen Haushaltgeräten. Nun ist, wie der X. Parteitag feststellte, die Zeit herangereift, die Weichen weiterzustellen.

Gesellschaftliche und persönliche Interessen zählen

Die Entwicklungsarbeiten für die Anwendung der Elektronik in Haushaltgeräten konzentrieren sich hierbei auf vier Schwerpunkte: die Nahrungsmittelzubereitung, die Nahrungsmittellagerung, die Wäschereinigung und die Entstaubung. Gründe hierfür sind vor allem volkswirtschaftliche Anforderungen an eine höhere Material- und Energieökonomie, denn durch elektronische Schalt- und Steuerkreise im Kleinstformat lassen sich Maße und Gewichte unserer Haushaltgeräte beträchtlich verringern und damit materialsparender bauen. Waschgeräte in Niedrig- und Schmalbauweise zum Beispiel, Heißluftgar- und Mikrowellengeräte, Staubsauger kleinerer Abmessungen bei gleichzeitiger Erhöhung des Leistungs-Masse-Verhältnisses. Mit der gezielten Anwendung der Mikroelektronik zur Leistungsregelung, zur Steuerung von zeitlichen Abläufen, zur Meßwertgewinnung, -verarbeitung und -anzeige bis hin zur automatischen Steuerung komplexer Prozesse (wie bei Waschautomaten, Elektroherden, Elektrogrills) läßt sich ferner der Energieverbrauch dieser heute noch relativ energieintensiven Haushaltgeräte um ein Beträchtliches verringern, was in der heute und künftig



Produktion regelbarer Widerstände für Fernseh-, Rundfunk- und Tonbandgeräte im VEB Bauelemente Dorfain



Damit die Hausarbeit leichter wird: Rosemarie Zinke, VEB „acosta“, Thal, bei der Montage von Reglerbügeleisen



weltweit angespannten Energiesituation ein Erfordernis der Zeit ist. Dabei treffen sich – wenn sinnvoll angewendet – die volkswirtschaftlichen mit den persönlichen Interessen: Die Geräte werden kleiner, leichter, handlicher, haben höheren Gebrauchswert bei geringerer Bedienungszeit durch höheren Bedienkomfort und garantieren mehr Zuverlässigkeit und längere Lebensdauer.

Kochen

Während die gegenwärtig noch allgemein üblichen traditionellen Elektroherde per Hand geschaltet werden und es allein dem Ermessen des Benutzers obliegt, durch Betätigung der Schalter die Temperatur einzustellen, steuert die Elektronik den Garprozeß genau dem Charakter und der Menge der Speisen entsprechend. Die Backröhre eines elektronisch gesteuerten Elektroherdes könnte man z. B. so programmieren, daß sie den Braten kurz und schnell erhitzt, bei kleiner Temperatur weiter dünstet und ihm durch abschließendes kurzes Aufheizen knusprige Bräune gibt. Der Benutzer brauchte also nur den zubereiteten Braten einzuschieben, das Programm einzuspeichern und darauf zu warten, bis der Computer signalisiert, daß alles fertig ist. Zwischendurch ließe sich unter Umständen noch abfragen und das Programm während des Ablaufs ändern. Ähnlich würde auch der Elektrogrill künftig funktionieren.

Der momentan zeitlich hohe Aufwand von wöchentlich 15,5 Stunden für die Speisenzubereitung könnte über dieses automatische energiesparende Garen hinaus außerdem verkürzt werden durch die Anwendung des Druckgarens, den Einsatz von Heißluftgeräten, Mikrowellenherden, Induktionskochfeldern bei Elektroherden und Kombination von Garverfahren.

Lagern

Ähnlich sähe auch künftig die Wirkungsweise der Elektronik bei der Nahrungsmittellagerung, in den Kühlmöbeln also, aus, die z. Z. noch etwa 20% der gesamten Energie eines Haushaltes verbrauchen. Hier allerdings befindet sich der Einsatz elektronischer Steuerungs-, Regelungs- und Schutzeinrichtungen international noch in den Anfängen. Die elektronischen Bauteile würden bei Kühlmöbeln Regel- und Schutzfunktionen übernehmen, indem sie für energiesparende, den Lebensmitteln entsprechende richtige Lagertemperaturen sorgen, im richtigen Moment vollautomatisch abtauen und unter Umständen sogar die maximal mögliche Lagerdauer von Gefriergut signalisieren.

Waschen

Am weitesten hat sich die Elektronik wohl das Gebiet der Wäschereinigung erobert. Waschmaschinen mit Steuergerät und elek-

tronischer Schaltverstärkung machen heute bereits eine Vielzahl von automatisch ablaufenden Waschprogrammen möglich. Durch den Einsatz mikroelektronischer Steuerungs- und Regelungssysteme, unter Verwendung von Mikroprozessoren, kann der Waschprozeß hinsichtlich Wäscheart, Wäschemenge, Verschmutzungsgrad und dem gewünschten Waschergebnis, verbunden mit dem optimalen Einsatz von Energie, Wasser und Waschmittel rationell gestaltet werden. Während der Benutzer gegenwärtig noch selbst entscheiden muß, ob mit Vorwäsche oder ohne gewaschen, ob geschleudert werden soll oder nicht und oftmals bei der Programmwahl Fehlentscheidungen entstehen, fragt dann künftig der computergesteuerte Waschvollautomat schrittweise die einprogrammierten Daten ab: Wäscheart, Grad der Verschmutzung sowie Wäschemenge und steuert danach den Waschvorgang. Dabei entscheidet er über den notwendigen Wasserstand, den Rhythmus der Trommelbewegung und die Waschtemperatur zugunsten des rationellsten Verbrauchs.

Säubern

Gewiß wäre wünschenswert, wenn sich zur Wohnungsreinigung der Staubsauger allein durch Knopfdruck dem jeweiligen Saugvorgang entsprechend automatisch zusammen-

setzen lassen würde: unter Möbeln langes Rohr und Normaldüse, auf Polstermöbeln kurzes Rohr und Polsterdüse z. B. Doch soweit wird die Elektronik die Staubbeseitigung vorerst nicht revolutionieren – wenn überhaupt je. Die Grundrichtung des Einsatzes der Elektronik bleibt hier vornehmlich dem rationellen Energieverbrauch vorbehalten. Obwohl bereits 400 Watt für die Staubbeseitigung ausreichen, nur Bodenstaubsauger etwa 600 Watt haben und Gerätetypen von 800 und mehr Watt immer mehr an Bedeutung verlieren, läßt sich durch die Elektronik mit der elektrischen Leistung der Geräte noch sinnvoller umgehen. Gardinen, Stoffe und leichtere Raumtextilien säubern sich schon bei einer Leistungsaufnahme von etwa 200 Watt, werden andernfalls sogar viel zu sehr strapaziert. Bei einigen Gerätetypen hat man bereits heute dieser Tatsache Rechnung getragen und sie mit einer elektronischen Leistungsregulierung versehen, die es möglich macht, bei geringerem Leistungsbedarf durch Knopfdruck bzw. Schalter die Wattzahlen und damit den Stromverbrauch entsprechend zu verringern. Und hier zeichnet sich ein weites Feld ab, das leichtere und geräuschärmer laufende Geräte erwarten läßt, die alle Raumtextilien energiesparend, materialgerecht und schonend säubern.

Ch. Baran

Mehr Motoren für Konsumgüter – für Hand- und Bodenstaubsauger – aus dem Werk Schleusingen des Elektrogerätewerkes Suhl



Die Mathematikerin

Emmy Noether (1882 bis 1935)

Am 23. März 1882 jährte sich zum 100. Male der Geburtstag der deutschen Mathematikerin *Emmy Noether*. Sie zählt zu den hervorragendsten Schöpfern der abstrakten axiomatischen Algebra und trug wesentlich dazu bei, daß die strukturtheoretische Denkweise zu einem beherrschenden Zug der modernen Mathematik geworden ist. Mathematische Begriffe, wie *Noetherscher Ring*, *Noetherscher Fünf-Axiome-Ring* und *E. Noetherscher Satz*, sind bleibender Ausdruck ihres äußerst fruchtbaren mathematischen Schaffens, das sie einreicht unter die bedeutendsten Mathematiker des 20. Jahrhunderts.

Emmy Noether wurde am 23. März 1882 als erstes Kind jüdischer Eltern in Erlangen geboren. Sie hatte noch drei Brüder. Ihr Vater, Max Noether (1844 bis 1921), war ein bekannter Mathematiker, der seit 1875 als Professor der Mathematik an der Universität Erlangen wirkte und durch bedeutsame wissenschaftliche Arbeiten vor allem zur Theorie der algebraischen Funktionen, der binären Formen sowie zur Eliminationstheorie hervortrat.

Emmy Noether war ein kluges und freundliches Kind, das nicht etwa durch eine besondere mathematische Begabung auffiel. Sie absolvierte von 1889 bis 1897 eine vorwiegend

sprachlich und hauswirtschaftlich orientierte Ausbildung an der Städtischen Höheren Töchterschule in Erlangen. Danach beschäftigte sie sich intensiver mit Fremdsprachen und legte im Jahre 1900 die bayrischen Staatsprüfungen für Lehrerinnen der französischen und englischen Sprache mit der Gesamtnote *sehr gut* ab, wodurch sie berechtigt war, an weiblichen Erziehungs- und Unterrichtsanstalten zu unterrichten.

Doch erwachte in dieser Zeit ihr Interesse an einem Universitätsstudium – in der damaligen Zeit ein ganz ausgefallener Wunsch für ein Mädchen. Nach den geltenden gesetzlichen Bestimmungen nämlich konnten damals weibliche Interessenten noch nicht als ordentliche Studierende immatrikuliert, sondern nur als Hörerinnen ohne Rechte auf Prüfungen (Hospitantinnen) zugelassen werden, wenn der jeweilige Professor es erlaubte. So hospitierte sie – ihren Wunsch durchsetzend – in den Jahren 1900 bis 1902 an der Universität Erlangen und bereitete sich in dieser Zeit auf ihr Abitur vor, das sie 1903 am Königlichen Realgymnasium in Nürnberg ablegte. Im Wintersemester 1903/1904 hospitierte sie an der Universität Göttingen, dem damaligen führenden mathematischen Zentrum in Deutschland, wo sie Vorlesungen bei dem Astronomen Karl Schwarzschild (1873 bis 1916) und den namhaften Mathematikern Hermann Minkowski (1864 bis 1909), Otto Blumenthal (1876 bis 1944), Felix Klein (1849 bis 1925) und David Hilbert (1862 bis 1943) hörte.

Inzwischen war das Frauenstudium gesetzlich erlaubt, und Emmy Noether setzte ab 1904 als *ordentliche* Studentin ihr Studium in Erlangen fort. Sie war im Bereich der Sektion II der Philosophischen Fakultät (dem der Naturwissenschaften) neben 46 männlichen die einzige weibliche Studierende. Sie hörte auch Vorlesungen bei ihrem Vater und bei Paul Gordan (1857 bis 1912), unter dessen Einfluß sie ihre Dissertation *Über die Bildung des Formensystems der ternären biquadratischen Form* schrieb.

Im Dezember 1907 legte sie dann die mündliche Prüfung zur Erlangung der Würde eines *doctor philosophiae* mit dem Prädikat *summa cum laude* ab..

In den folgenden Jahren war Emmy Noether – und zwar ohne Anstellung oder Auftrag – am Mathematischen Institut in Erlangen tätig. Sie unterstützte ihren Vater und widmete sich eigenen mathematischen Untersuchungen über algebraische Invarianten. Ihr eigentlicher wissenschaftlicher Berater und Förderer in Erlangen war der Mathematiker Ernst Fischer (1875 bis 1954), unter dessen Einfluß sie die Gordansche Richtung des rein Rechnerischen und ausgeprägt Algorithmischen verließ und sich der ganz abstrakten Seite der Algebra zuwandte, die vor allem durch einige grundlegende Arbeiten von David Hilbert, in denen er das Fundament für die Theorie der abstrakten Körper, Ringe und Moduln legte, initiiert wurde.

Inzwischen als Spezialistin für die Theorie der algebraischen Invarianten anerkannt, übersiedelte Emmy Noether im Jahre 1915 nach Göttingen. Und Klein und Hilbert mußten kämpfen, um sie – als Frau – überhaupt an die Universität zu bringen. Auch konnte ihre Habilitation – trotz bedeutender Arbeiten über Differentialinvarianten – erst 1919 erfolgen, da bis dahin nach der Privatdozentenverordnung nur männliche Bewerber habilitieren durften. Im Jahre 1922 erhielt sie die Berechtigung zur Führung der Dienstbezeichnung *außerordentlicher Professor*, jedoch ausdrücklich ohne Besoldung und Änderung ihrer Stellung als Privatdozent. Erst 1923 erhielt sie einen Lehrauftrag für Algebra und die zugehörigen Übungen und somit wenigstens ein kleines festes Einkommen. Sie lebte genügsam und bescheiden von ererbtem Vermögen.

Ihre Göttinger Jahre waren die eigentlich wissenschaftlich fruchtbaren: Emmy Noether veröffentlichte grundlegende Arbeiten zur Eliminationstheorie, zur Ideal- und Darstellungstheorie, zur Klassenkörpertheorie sowie zur Theorie der Invarianten und Differentialinvarianten und zur arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen. Dabei lagen ihre besondere Stärke und ihr Schöpferium in ihrer neuen Arbeits- und Auffassungsmethode:

In der Abkehr vom Rechnerischen und Formelhaften, in der Bevorzugung des gedanklichen Schließen mittels abstrakter Definitionen und in der Herausarbeitung und begrifflichen Durchdringung der abstrakt-algebraischen Strukturen, wie Gruppe, Ring, Körper, Modul, Ideal und hyperkomplexes System. Über ihre Forschungsergebnisse hielt Emmy Noether im In- und Ausland zahlreiche wissenschaftliche Vorträge, u. a. auf den internationalen Mathematikerkongressen in Bologna (1928) und Zürich (1932). Im Jahre 1932 erhielt sie zusammen mit Emil Artin (1898 bis 1962) den *Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis* – eine Anerkennung ihrer bedeutsamen wissenschaftlichen Leistungen. Emmy Noether regte in Göttingen eine Reihe von Dissertationen an und förderte ihre



Schüler, die von anderen oft scherzhaft als *Noether-Knaben* bezeichnet wurden, uneigennützig und voller Hingabe. Einer ihrer Lieblingsschüler, der überragende holländische Mathematiker B. L. van der Waerden (geb. 1903), charakterisiert ihre Vorlesungen wie folgt: „Die kleine, treue Hörerschaft, meistens bestehend aus einigen fortgeschrittenen Studenten und häufig ebensovielen Dozenten und auswärtigen Gästen, mußte sich ungeheuer anstrengen, um mitzukommen. War das aber gelungen, so hatte man weit mehr gelernt als aus dem tadellosesten Kolleg. Es wurden fast nie fertige Theorien vorgetragen, sondern meistens solche, die erst im Werden begriffen waren. Jede ihrer Vorlesungen war ein Programm. Und keiner freute sich mehr als sie selbst, wenn ein solches Programm von ihren Schülern ausgeführt wurde. Völlig unegoistisch und frei von Eitelkeit, beanspruchte sie niemals etwas für sich selbst, sondern förderte in erster Linie die Arbeiten ihrer Schüler“.

Und besonders durch ihre Schüler wurden die moderne Mathematikauffassung von Emmy Noether und die von ihr praktizierte strukturelle mathematische Denkweise an fast alle deutschen Universitäten und die ausländischen Zentren der mathematischen Forschung getragen.

Die Göttinger Zeit, die für Emmy Noether ausgefüllt war mit Vorlesungen, intensiver Forschungsarbeit und vor allem mit fruchtbaren Diskussionen über Mathematik im Kreise ihrer Schüler, wurde nur durch zwei kurze Gastprofessuren in Moskau (1928/29) und Frankfurt/Main (1930) unterbrochen. Doch dann kam das Jahr 1933 und mit ihm der Machtantritt der deutschen Faschisten. Vor allem ihrer jüdischen Herkunft wegen wurde Emmy Noether noch im gleichen Jahr die Lehrbefugnis entzogen, ein Los, das auch viele andere deutsche Wissenschaftler traf. So ging sie im Oktober 1933 als Gastprofessorin an die Frauenhochschule in Bryn Mawr (USA). Hier wandte sie sich neben ihren Ausbildungsaufgaben in der wissenschaftlichen Arbeit vor allem der nichtkommutativen Algebra zu und hielt auch im nahegelegenen Princeton, wo u. a. auch Albert Einstein (1879 bis 1955) als deutscher Emigrant Zuflucht gefunden hatte, Vorlesungen. Nach einem kurzen Zwischenaufenthalt in ihrer Heimat übersiedelte sie 1934 endgültig in die USA.

Am 14. April 1935 ist Emmy Noether in Bryn Mawr – für alle ihre Freunde völlig unerwartet und leider allzu früh – an den Folgen einer Operation verstorben. Doch ihr Name lebt in der Mathematik fort und bleibt unvergessen.

R. Mildner

Die Frau als Mathematikerin

Vorurteile – Einsichten – Tatsachen

Vorurteile

Sonja Kowalewsky¹ in einem Brief an ihren Freund, Prof. G. Mittag-Leffler (1888): „Als Weihnachtsgeschenk erhielt ich ... einen Artikel von Strindberg (einem bedeutenden schwedischen Schriftsteller), in dem er so klar beweist, wie zwei mal zwei vier ist, daß eine solche Ungeheuerlichkeit wie ein weiblicher Professor der Mathematik schädlich, unnützlich und unangenehm sei. Ich finde, daß er im Grunde ganz recht hat, nur gegen eines protestiere ich, daß nämlich in Schweden eine große Anzahl Mathematiker leben sollen, die mir weit überlegen seien, und daß man mich nur aus Galanterie berufen habe.“

Aus „Ueber die Anlage zur Mathematik“ von P. I. Möbius (1900):

„Will man sich auf statistische Vermutungen einlassen, so kann man annehmen, daß im günstigsten Falle auf 1 Million weiblicher Personen 1 mit mathematischem Talent komme. Es ergibt also diese Betrachtung dasselbe, was die tägliche Erfahrung lehrt, daß die Weiber in der Regel ohne Anlage für Mathematik sind. Gewöhnlich sind die Weiber nicht nur unfähig, mathematische Beziehungen aufzufassen, sondern sie empfinden auch eine Art von Abscheu gegen alles Zahlenmäßige. Damit hängt wohl auch die weitverbreitete weibliche Unpünktlichkeit zusammen. In gewissem Sinne kann man sagen, das Mathematische ist der Gegensatz des Weiblichen. ... Sieht man von den wenigen weiblichen Wesen ab, die „aus der Art geschlagen“ sind, so gibt es kaum einen schrofferen Gegensatz als den Mathematikerkopf und den Weiberkopf einerseits, den Mathematikergeist und den Weibergeist andererseits.“

¹Sofia Wasiljewna Kowalewskaja (1850 bis 1891), die sich selbst „Sonja“ nannte, war eine bedeutende russische Mathematikerin, die im Jahre 1888 an der Universität Stockholm (Schweden) eine Professur für Mathematik erhielt (erstmalig eine Frau als Universitätsprofessor). Sie veröffentlichte vor allem mathematische Arbeiten über partielle Differentialgleichungen und zur Kreiseltheorie.

Einsichten

Karl Marx in einem Brief an Ludwig Kugelmann (1868): „Jeder, der etwas von der Geschichte weiß, weiß auch, daß große gesellschaftliche Umwälzungen ohne das weibliche Ferment unmöglich sind. Der gesellschaftliche Fortschritt läßt sich exakt messen an der gesellschaftlichen Stellung des schönen Geschlechts (die Häßlichen eingeschlossen).“

Friedrich Engels in einem Brief an Gertrud Guillaume Schack (1885): „Eine wirkliche Gleichberechtigung von Frau und Mann kann nach meiner Überzeugung erst eine Wahrheit werden, wenn die Ausbeutung beider durch das Kapital beseitigt und die private Hausarbeit in eine öffentliche Industrie verwandelt ist.“

Tatsachen

– Die Anzahl der Mathematikerinnen an der Universität Leipzig betrug im Zeitraum von 1409 bis 1945 gleich Null.

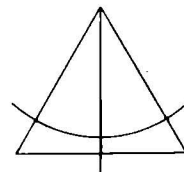
– Der Anteil der Frauen und Mädchen an der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig betrug im Jahre 1981

- bei Lehrerstudenten (Math./Phys.): 54 Prozent,
- bei Mathematikstudenten: 28 Prozent,
- bei den Wissenschaftlern: 15 Prozent.

Eine Plastik: Schulkinder



Die Plastik „Schulkinder“ von Hans Klakow fand 1967 ihren Platz auf dem Gelände der IGA in Erfurt. Offenbar handelt es sich um *Junge Mathematiker*, von denen einer den beiden anderen einen geometrischen Sachverhalt erklärt. Aber welchen wohl? Auf den Boden ist die abgebildete Figur geritzt: wir erwarten eure Deutungsvorschläge.



Jedenfalls freuen sich alle Mathematiker sehr über dieses kleine Kunstwerk, denn Darstellungen der Mathematik und des Mathematik treibenden Menschen in der bildenden Kunst sind doch recht selten, erst recht solche, die sich der mathematischen Aktivität unseres Nachwuchses zuwenden. In dieser Hinsicht ist die *Erfurter Gruppe* vielleicht einzigartig in der Welt.

P. Schreiber

Sommerlager des Bezirksklubs Schwerin

Vom 17. bis 21. August 1981 führte der Bezirksklub *Junge Mathematiker* Schwerin sein traditionelles Sommerlager in der Touristenstation Mueß der Bezirkshauptstadt durch. Neben den Ferienlehrgängen in Güstrow findet dieses Treffen jährlich an wechselnden Orten statt. Es kommen hier über 40 der besten Mathematik-Schüler des Bezirkes aus den Klassen 7 bis 11 zusammen, um ihr Wissen und Können in der Mathematik zu erweitern, aber auch, um sich zu erholen und bei Sport und Spiel einander noch besser kennenzulernen. Die materiellen Bedingungen werden vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit Schwerin geschaffen, die inhaltliche Betreuung erfolgt durch Lehrkräfte der Sektion Mathematik/Physik der Pädagogischen Hochschule *Liselotte Herrmann* Güstrow.

Vormittags wurde intensiv gruppenweise Mathematik betrieben. Die Nachmittage und Abende waren ausgefüllt durch einen Besuch im Klub-Kino, eine touristische Wanderung, eine mehrstündige Dampferfahrt mit Abendbrottafel auf dem Schweriner See und eine Vielzahl von Wettbewerben. Unter starker Mitwirkung des FDJ-Aktivs wurden ein Schach-, ein Tischtennis- und ein Skatturnier sowie ein Schießwettkampf organisiert. An einem Tag wurde eine Mathematik-Lagerolympiade durchgeführt.

Trotz des Regens brauchte dank der über-

dachten Baude der beliebte Grillabend nicht auszufallen, an dem auch die Ehrung der Sieger aus den einzelnen Wettbewerben vorgenommen wurde. Ein besonderer Höhepunkt war der Besuch von Oberstudienrat J. Lehmann, der Interessantes aus seiner Arbeit mit der *alpha*, unterstützt durch zahlreiche Colordias, berichtete und durch seinen lebendigen Vortrag die Begeisterung der Schüler für die Mathematik verstärkte.

H. Thamm

Aufgaben der Lagerolympiade

(Die angegebene Klassenstufe bezieht sich auf das neue Schuljahr.)

Klasse 8

▲1▲ In einem spitzwinkligen Dreieck ABC seien CD die Höhe auf AB und CE die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ACB$.

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets

$$\sphericalangle DCE = \frac{1}{2} (\sphericalangle ABC - \sphericalangle CAB) \text{ gilt!}$$

▲2▲ In einem Dreieck ABC sei u die Länge des Umfangs, und r sei die Länge des Umkreisradius.

Beweise, daß dann die Ungleichung $r > \frac{u}{6}$ gilt!

▲3▲ Gegeben sei ein Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H . K sei der Schnittpunkt der Flächendiagonalen AH und DE .

Beweise: Es gilt $DE \perp BK$!

▲4▲ Beweise folgenden Satz:

Ist k Ankreis eines Dreiecks ABC an die Seite BC und ist M_a der Mittelpunkt von k , so hängt die Größe des Winkels $\sphericalangle BM_aC$ nur von der Größe α des Winkels $\sphericalangle CAB$ ab.

Zum Beweis ermittle eine Formel für die Größe des Winkels $\sphericalangle BM_aC$ in Abhängigkeit von α !

Klasse 9

▲1▲ Wieviel verschiedene siebenstellige natürliche Zahlen kann man mit Hilfe von

sieben verschiedenen Grundziffern bilden, a) wenn alle Grundziffern von Null verschieden sind,

b) wenn eine der Grundziffern die Null ist?

▲2▲ Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus $\alpha = 50^\circ$, $h_b = 3 \text{ cm}$ und $h_a = 2,5 \text{ cm}$!

Stellen Sie einen Konstruktionsplan auf, begründen Sie die Konstruktion, und prüfen Sie ob die Konstruktion eindeutig ausführbar ist!

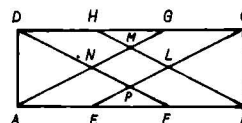
▲3▲ Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei C . Die Seite $\overline{AB}$ habe die Länge $c = 20 \text{ cm}$. D sei der Höhenfußpunkt der Höhe h_c .

Wie lang sind die Strecken $\overline{AD} = q$ und $\overline{DB} = p$, wenn h_c folgende Längen annimmt:

a) $h_c = 6 \text{ cm}$, b) $h_c = 10 \text{ cm}$, c) $h_c = 11 \text{ cm}$?

▲4▲ Es sei $ABCD$ ein Rechteck mit den Seiten $\overline{AB} = a$ und $\overline{BC} = b$. Jede der beiden Rechteckseiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sei in drei gleiche Teile geteilt, so daß gilt $\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FB}$ und $\overline{DH} = \overline{HG} = \overline{GC}$.

Wie verhält sich der Flächeninhalt A_1 des Vierecks $PLMN$ zum Flächeninhalt A_2 des Rechtecks $ABCD$ (siehe Bild)?



Klasse 10

▲1▲ Welche reellen Zahlen x erfüllen die Gleichungen

a)
$$\frac{\log_2(\sqrt{x+1} + 1)}{\log_2 \sqrt{x-40}} = 3,$$

b)
$$2^{18x-1} + 2^{18x+2} = 3^{18x-1} + 3^{18x},$$

c)
$$x^{\log_a x} = a^2 x, a \in P^+, a \neq 1?$$

▲2▲ Gegeben sei ein Dreieck ABC mit der Seitenlänge $\overline{BC} = a$ und der Höhenlänge $\overline{AD} = h_a$. Die Gerade g sei die Parallele zu BC durch A .

Berechnen Sie das Volumen V des Körpers, der durch Rotation der Dreiecksflächen ABC um g entsteht, in Abhängigkeit von a und h_a !

Historisches Museum Schwerin: Blick auf das Wohnhaus mit Brunnen



XXI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)



Aufgaben

Olympiadeklasse 7

1. In einer Mathematikstunde zeichnet der Lehrer genau zehn Vierecke an die Wandtafel und fordert die Schüler auf, Aussagen über diese zu treffen. Er erhält folgende Antworten:

Axel: „An der Tafel befinden sich mindestens zwei Quadrate.“

Beate: „An der Tafel sind genau doppelt so viele Rechtecke wie Quadrate.“

Christa: „An der Tafel ist genau ein Parallelogramm.“

Detlev: „An der Tafel sind genau doppelt so viele Trapeze wie Rechtecke.“

Der Lehrer teilt danach der Klasse mit, daß genau eine dieser vier Aussagen falsch war.

- Von wem kam die falsche Aussage?
- Ermittle für die einzelnen Arten von Vierecken jeweils die Anzahl der Vierecke dieser Art an der Tafel, soweit diese Anzahl aus den vorliegenden Angaben hervorgeht!
- Skizziere, wie nach diesen Angaben das Tafelbild ausgesehen haben könnte!

2. Ermittle alle Paare $(x; y)$ rationaler Zahlen mit der Eigenschaft, daß die Summe $x + y$ dieselbe Zahl wie das Produkt $x \cdot y$ und auch dieselbe Zahl wie der Quotient $x : y$ ist!

3. Konstruiere ein Drachenviereck $ABCD$ aus $a = 3,1$ cm, $\alpha = 100^\circ$ und $\beta = 120^\circ$! Dabei bezeichne a die Länge $\overline{AB} = \overline{BC}$; ferner bezeichne α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAD$ und β die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebenen Stücke ein Drachenviereck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

4. Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M . Auf k liegen die Punkte A und B derart, daß der Winkel $\sphericalangle BMA$ ein rechter ist. Weiterhin sei ein Punkt C durch folgende Bedingungen festgelegt:

- C liegt auf k .
- Es gilt $\overline{MB} = \overline{BC}$.
- Die Gerade durch A und C schneidet die Strecke MB in einem Punkt D .

Ermittle aus diesen Angaben die Größe des Winkels $\sphericalangle CDB$!

5. Es sei $ABCD$ ein beliebiges Parallelogramm, und es sei P ein beliebiger Punkt im Innern dieses Parallelogramms, der nicht auf einer seiner Diagonalen liegt. Ferner sei S der Schnittpunkt der Parallelen durch B zu PD und durch D zu PB .

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen das Viereck $ASCP$ stets ein Parallelogramm ist!

6. Eine Flüssigkeit wird in kleinen, mittleren und großen Flaschen verkauft. In jede kleine Flasche passen genau 200 g, in jede mittlere genau 500 g und in jede große genau 1000 g der Flüssigkeit. Jede gefüllte 200-g-Flasche kostet 1,20 M, jede gefüllte 500-g-Flasche kostet 2,80 M. Der Preis der leeren 500-g-Flasche ist um 50% höher als der der leeren 200-g-Flasche. Die leere 1000-g-Flasche wiederum ist um 50% teurer als die leere 500-g-Flasche.

Welcher Betrag wird eingespart, wenn anstelle von fünf gefüllten 200-g-Flaschen eine gefüllte 1000-g-Flasche gekauft wird?

Olympiadeklasse 8

1. In dem Schema

$$\begin{array}{r} A B B C - D C E = F B E G \\ : \quad + \quad - \\ C D \cdot H E = J D A F \\ \hline J F K + D D A = J J F C \end{array}$$

sollen die Buchstaben so durch Ziffern (0, 1, 2, ..., 9) ersetzt werden, daß alle waagerechten und senkrechten Aufgaben richtig gerechnet sind. Insbesondere soll die Ziffer 0 nicht als Anfangsziffer einer mehrstelligen Zahl auftreten. Gleiche Buchstaben sollen durch gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern ersetzt werden.

Ermittle alle Ersetzungen, die diese Forderungen erfüllen!

2. Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit C als Scheitel des rechten Winkels. Der Mittelpunkt der Seite AC sei M . Der Kreis k um M durch A schneide die Seite AB außer in A auch in E . Die Tangente an k in E schneide die Seite BC in D .

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen das Dreieck BDE gleichschenkelig ist!

3. Gegeben sei ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen $\overline{BC} = 4$ cm, $\overline{AC} = 5$ cm und $\overline{AB} = 6$ cm. Auf der Seite CB sei M_1 derjenige Punkt, für den $\overline{BM_1} = 3$ cm ist. Um M_1 sei der Kreis k_1 mit dem Radius 5,5 cm gezeichnet.

Zu diesen gegebenen Stücken soll ein dem Dreieck ABC ähnliches Dreieck $A'B'C'$ konstruiert werden, dessen Eckpunkte sämtlich auf dem Kreis k_1 liegen.

Beschreibe eine Konstruktion eines solchen Dreiecks $A'B'C'$, und beweise, daß es die geforderten Eigenschaften hat, wenn es nach dieser Konstruktionsbeschreibung konstruiert wird!

Hinweis: Eine „Analyse“ (Schlußfolgerung aus der Annahme, ein Dreieck $A'B'C'$ habe die verlangten Eigenschaften, zur Herleitung der Konstruktionsbeschreibung) und eine „Determination“ (Diskussion auf Existenz und Eindeutigkeit der Konstruktion) werden nicht verlangt.

4. Von einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$, dessen Diagonalschnittpunkt S genannt sei, wird vorausgesetzt, daß $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{CD}$ gilt. Untersuche, ob bereits durch diese Voraussetzung das Verhältnis des Flächeninhaltes des Dreiecks ABS zu dem des Trapezes $ABCD$ eindeutig bestimmt ist! Wenn das der Fall ist, so ermittle dieses Verhältnis!

5. Jemand hebt von seinem Sparkonto einen bestimmten Geldbetrag ab. Er erhält diesen in insgesamt 29 Banknoten ausgezahlt, und zwar ausschließlich in Zehnmarkscheinen, Zwanzigmarkscheinen und Fünfzigmarkscheinen. Dabei ist die Anzahl der 10-M-Scheine um 1 kleiner als die Anzahl der 20-M-Scheine. Die Anzahl der 50-M-Scheine ist größer als das Zweifache, aber kleiner als das Dreifache der Anzahl der 20-M-Scheine. Ermittle die Höhe des abgehobenen Geldbetrages!

6. Ermittle alle sechsstelligen natürlichen Zahlen z mit folgender Eigenschaft!

Setzt man die erste Ziffer von z an die letzte Stelle, während die Ziffernfolge der übrigen fünf Ziffern unverändert bleibt, so ist die entsprechende Zahl z' dreimal so groß wie die ursprüngliche Zahl z .

Olympiadeklasse 9

1. Über eine natürliche Zahl x werden vier Paare von Aussagen gemacht:

Paar A:

- x ist eine zweistellige Zahl.
- x ist kleiner als 1000.

Paar B:

- Die zweite Ziffer der Zahl x ist eine 0.
- Die Quersumme der Zahl x ist 11.

Paar C:

- x wird mit genau drei Ziffern geschrieben, und zwar mit drei gleichen Ziffern.
- x ist durch 37 teilbar.

Paar D:

- (1) Die Quersumme der Zahl x ist 27.
- (2) Das Produkt der Zahlen, die durch die einzelnen Ziffern von x dargestellt werden, beträgt 0.

Untersuchen Sie, ob es natürliche Zahlen x mit $x \neq 0$ gibt, für die in jedem der vier Paare A, B, C, D eine Aussage wahr und eine Aussage falsch ist! Gibt es solche Zahlen x , so ermitteln Sie alle diese Zahlen!

2. Ist $ABCD$ ein Rechteck, für dessen Seitenlängen $b = \overline{AD} = 6$ cm und $a = \overline{AB} > b$ gilt, so seien E, G diejenigen Punkte auf CD und F, H diejenigen Punkte auf AB , für die $AFED$ und $HBCG$ Quadrate sind.

Beweisen Sie bei diesen Bezeichnungen, daß es genau eine Seitenlänge a gibt, für die $EH \perp AC$ gilt, und ermitteln Sie diese Seitenlänge!

3. Beweisen Sie, daß die Ungleichung $1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \cdot \dots \cdot 998^{998} \cdot 999^{999} \cdot 1000^{1000} < 1000^{500000}$ gilt!

4. Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus $\alpha = 50^\circ$, $r = 4$ cm und $h_a = 6$ cm! Dabei bezeichne α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$, r den Umkreisradius und h_a die Länge der auf BC senkrechten Höhe des Dreiecks ABC . Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion! Untersuchen Sie, ob ein Dreieck ABC durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist! Dabei sollen Dreiecke $ABC, A'B'C'$ auch dann als kongruent bezeichnet werden, wenn sie miteinander mit beliebiger Reihenfolge der Eckpunkte zur Deckung gebracht werden können.

5. Beweisen Sie den folgenden Satz!

Die Summe zweier Quadratzahlen ist genau dann durch 11 teilbar, wenn jede dieser beiden Quadratzahlen durch 11 teilbar ist.

6. Bei einem Tetraeder $ABCD$ seien die Kantenlängen $\overline{AB} = 10$ cm; $\overline{BC} = 6$ cm, $\overline{AC} = 8$ cm, $\overline{AD} = 13$ cm, $\overline{BD} = 13$ cm gegeben, das Lot von D auf die Fläche des Dreiecks ABC sei 12 cm lang.

Beweisen Sie, daß durch diese Angaben die Länge der Kante $\overline{CD}$ eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie diese Kantenlänge!

Olympiadeklasse 10

1. Ermitteln Sie alle Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen mit folgenden Eigenschaften!

(1) Es gilt $0 < a \leq b \leq c$.

(2) In einem Quader mit der Länge a cm, der Breite b cm und der Höhe c cm beträgt die Summe aller Kantenlängen ebenso viele Zentimeter, wie das Volumen Kubikzentimeter beträgt.

2. Beweisen Sie den folgenden Satz (den sogenannten Satz von Menelaos)! Wenn eine Gerade g die Seite BC eines Dreiecks ABC in einem Punkt E zwischen B und C schneidet und wenn g außerdem die Seite CA in einem

Punkt F zwischen C und A schneidet und wenn g außerdem eine Verlängerung der Seite AB in einem Punkt G schneidet, dann gilt $\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} \cdot \frac{\overline{AG}}{\overline{BG}} = 1$.

3. Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare $(a; b)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem erfüllen!

$$[a] + 2b = 6,6,$$

$$[2a] + 3b = 11,9.$$

Hinweis: Ist r eine reelle Zahl, so wird mit $[r]$ diejenige ganze Zahl g bezeichnet, für die $g \leq r < g + 1$ gilt. So ist z. B.

$$[4,01] = 4, \text{ da } 4 \leq 4,01 < 5 \text{ gilt,}$$

$$[7] = 7, \text{ da } 7 \leq 7 < 8 \text{ gilt,}$$

$$[-\pi] = -4, \text{ da } -4 \leq -\pi < -3 \text{ gilt.}$$

4. Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x , die die Ungleichung

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 3x^2}}{x} < 1 \quad \text{erfüllen!}$$

5. In der 1. Stufe der Mathematikolympiade gab es im Jahre 1976 in der Olympiadeklasse 9 folgende Aufgabe:

„Jemand behauptet, daß es möglich sei, aus 7 Papierstücken auf folgende Weise genau 1976 Stücke herzustellen:

Man teile einige der 7 Papierstücke jeweils in genau 7 Teile, dann wieder einige der nunmehr vorhandenen Papierstücke in jeweils genau 7 Teile usw.

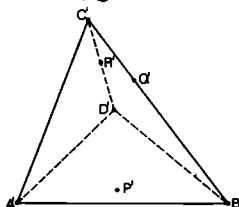
Ist es möglich, daß man auf diese Weise, indem man also das beschriebene Verfahren genügend lange fortsetzt, genau 1976 Papierstücke erhält?

Als Lösung mußte bewiesen werden, daß es nicht möglich ist, genau 1976 Papierstücke zu erhalten.

Wir wollen jetzt für irgendeine Zahl $n \geq 1$ von n Papierstücken ausgehen und diese in der beschriebenen Weise jeweils in genau n Teile teilen.

Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen n mit $1 \leq n < 1976$, für die es auf diese Weise gelingen kann, genau 1976 Papierstücke zu erhalten!

6. Die Eckpunkte A, B, C, D eines Tetraeders $ABCD$ und ein Punkt P auf der Fläche des Dreiecks ABC seien so im Raum gelegen, daß sie bei einer Parallelprojektion die auf dem Arbeitsblatt angegebenen Bildpunkte A', B', C', D' bzw. P' haben. Ein Punkt Q liege auf der Strecke BC ; ein Punkt R liege auf der Strecke CD ; ihre Bildpunkte seien bei der Parallelprojektion die auf dem Arbeitsblatt angegebenen Punkte Q' bzw. R' . Die Ebene durch P, Q und R schneidet die vier



Seitenflächen des Tetraeders in einer Schnittfigur.

Konstruieren Sie auf dem Arbeitsblatt die Projektion dieser Schnittfigur! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion, und beweisen Sie, daß eine Figur die gesuchte Projektion der Schnittfigur ist, wenn sie nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird!

Olympiadeklassen 11/12

1. Es sei $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ein Polynom mit rationalen Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3 .

Man beweise: Wenn $P(x)$ eine Nullstelle der Form $x_0 = b + \sqrt{c}$ mit rationalen Zahlen b, c besitzt, für die $\sqrt{c}$ irrational ist, so ist auch $x_1 = b - \sqrt{c}$ eine Nullstelle von $P(x)$.

2. a) Beweisen Sie, daß kein Polyeder existiert, das genau sieben Kanten besitzt!

b) Beweisen Sie, daß für jede natürliche Zahl n mit $n > 7$ ein Polyeder existiert, das genau n Kanten besitzt!

Hinweis: Ein Polyeder ist ein ebenflächig begrenzter Körper. Im Sinne der Aufgabenstellung wird positives Volumen vorausgesetzt; weitere Anforderungen wie Konvexität werden nicht gestellt.

3. Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (a, b, c) reeller Zahlen, für die folgendes gilt!

Die für alle reellen $x \neq -c$

durch $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ definierte Funktion f

genügt den folgenden Bedingungen:

(1) Es gibt reelle Zahlen x , für die $f(x)$, $f(f(x))$ und $f(f(f(x)))$ definiert ist.

(2) Für jede solche Zahl x mit $x \neq -1$

$$\text{gilt} \quad f(f(f(x))) = \frac{x-1}{x+1}.$$

4. Man ermittle alle diejenigen von 0 verschiedenen reellen Zahlen q , die die folgende Eigenschaft haben:

Es gibt eine von 0 verschiedene Zahl a_1 und eine natürliche Zahl $k \geq 3$ so, daß in der durch

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

definierten Zahlenfolge (a_n) das Glied a_k gleich dem arithmetischen Mittel der beiden vorhergehenden Glieder a_{k-1} und a_{k-2} ist.

5. 37 Karten, von denen jede auf der einen Seite rot und auf der anderen Seite blau gefärbt ist, seien so auf einen Tisch gelegt, daß genau 9 von ihnen oben ihre blaue Seite zeigen. Es sollen nun in „Arbeitsgängen“ Karten umgedreht werden, und zwar in jedem einzelnen „Arbeitsgang“ genau 20 beliebige der 37 Karten.

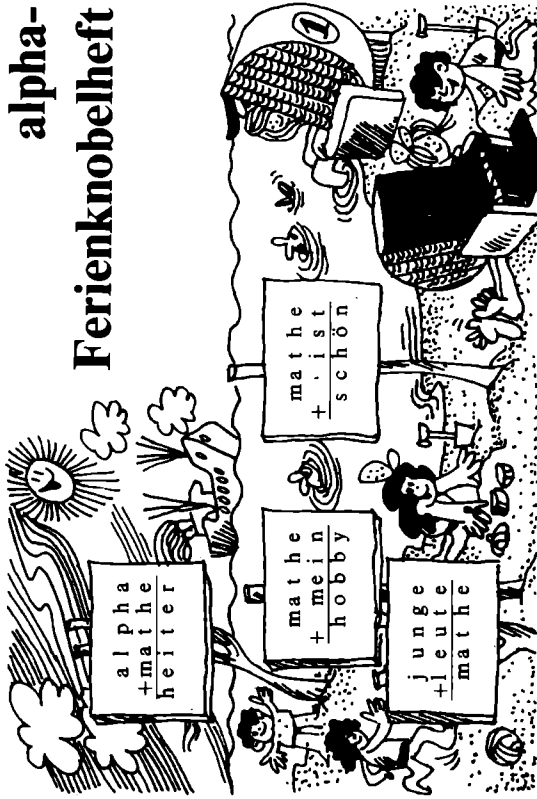
Untersuchen Sie, ob man mit endlich vielen „Arbeitsgängen“ erreichen kann, daß alle 37 Karten

a) oben ihre rote Seite,

b) oben ihre blaue Seite

zeigen! Falls das möglich ist, ermitteln Sie jeweils die kleinste Anzahl der dafür hinreichenden „Arbeitsgänge“!

alpha- Ferienknobelheft


$$\begin{array}{r} 16-4 \cdot 2=8 \\ 16-4-2=10 \\ 16-4+2=14 \\ 16-4:2=14 \end{array} \quad \begin{array}{r} 16 \cdot 4:2=32 \\ 16 \cdot 4-2=62 \\ 16 \cdot 4+2=66 \\ 16 \cdot 4:2=128 \end{array}$$

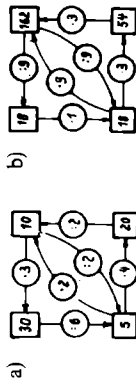
Seite 12
Die Linde ist 52 Ellen hoch.

Seite 13
Jeder suche die Details selbst!

Seite 14	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Umfang:	40	36	26	28	36
Fläche	27	20	36	21	18

Umfang:	28	56	28
Fläche:	24	27	30

Seite 8



Seite 9

Der Begriff lautet: Funktion

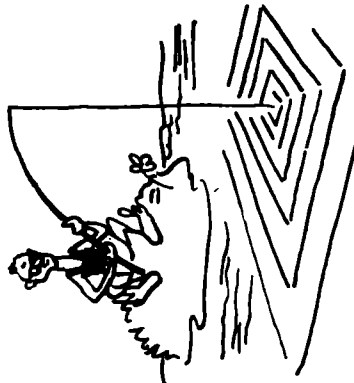
Seite 10

1	•	3	•	2	•	6
+		×		+		×
1	+	2	+	3	+	6
+		×		×		×
2	+	3	+	1	+	6
+		×		×		×
4	•	4	•	4	•	4

Seite 11

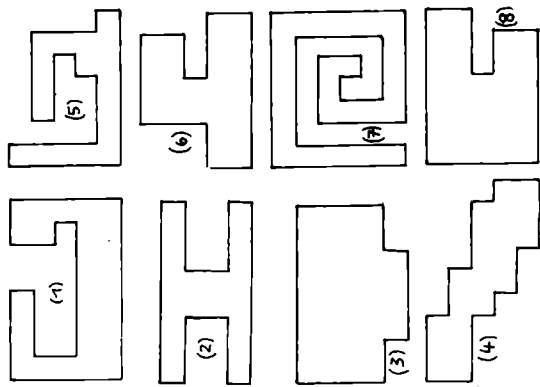
$$\begin{array}{r} 16:4-2=2 \\ 16:4:2=2 \\ 16:4+2=6 \\ 16:4\cdot2=8 \\ 16+4-2=18 \\ 16+4:2=18 \\ 16+4+2=22 \\ 16+4\cdot2=24 \end{array}$$

16

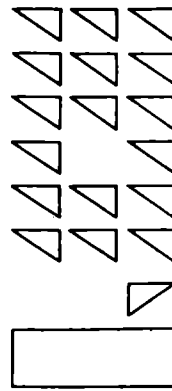


„Er denkt geradlinig“.

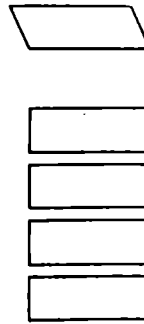
Welche Figur hat den größten Umfang und welche die größte Fläche?
Erst schätzen, dann rechnen! ►



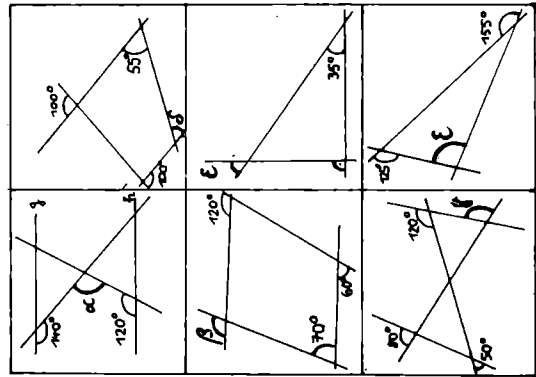
14



So, so – wieder mal ohne Hausaufgaben.

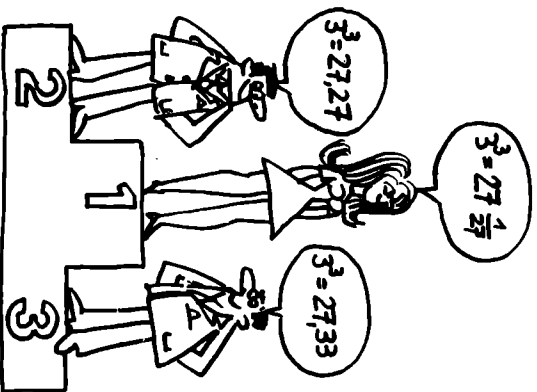


Er hatte schon immer einen Hang zum Besonderen!

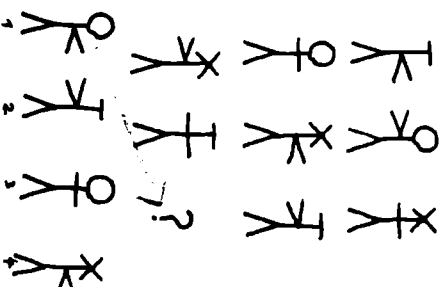


Winkelgrößen gesucht!

3



Welche der Figuren 1 bis 4 gehört logischerweise an Stelle des Fragezeichens?



2

Lösungen

Tafelreihe:

$$\begin{array}{r} 58015 \\ + 65412 \\ \hline 123427 \text{ usw.} \end{array} \quad \begin{array}{r} 16850 \\ + 20640 \\ \hline 37490 \text{ usw.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 82193 \\ + 8364 \\ \hline 90557 \text{ usw.} \end{array} \quad \begin{array}{r} 19845 \\ + 628 \\ \hline 20473 \text{ usw.} \end{array}$$

Seite 2

Nr. 1 gehört an Stelle des Fragezeichens.

Seite 3

$100^\circ; 110^\circ; 110^\circ; 55^\circ; 55^\circ; 100^\circ$.

Seite 4

1. $L = \{0, 1, 2, 3\}$
2. $L = \{12, 13, 14, \dots\}$
3. $L = \{-1, -2, -3, \dots\}$
4. $L = \emptyset$
5. $L = \{5\}$
15. 6. $L = \{8\}$

7. $L = \{3, 4, 5, 6\}$
8. $L = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
9. $L = \{4, 5, 6\}$
10. $L = \{54, 57, 60\}$
11. $L = \emptyset$

Seite 5

Aus Gleichung (3) entsteht wegen $280 : 7 = 40$ $u = 40$.

Aus (2) findet man $z = 4 \cdot 40 = 160$.

Aus (4) ergibt sich $v = 120$.

dann aus (5) $y = 160 + 120 = 280$.

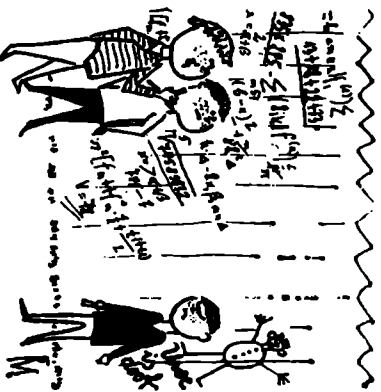
Schließlich findet man aus (1) $x = 280 : 40 = 7$.

Seite 6

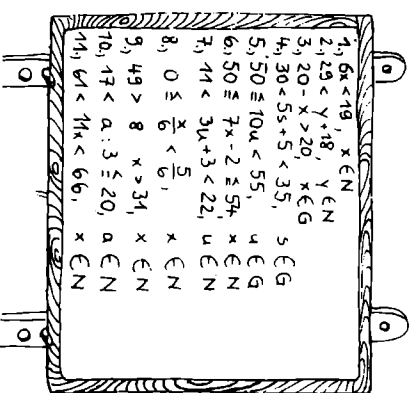
- II + II = IV
- VI + IV = X
- VI - III = III
- VII - II = V
- VI - IV = X

Seite 7

Er kann 114 km pro Stunde fahren.

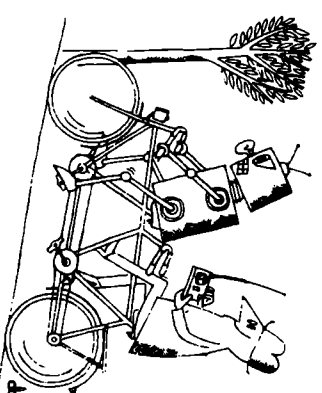


„Was soll bloß mal aus dem werden?“

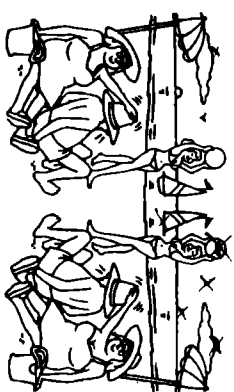


Auf einen Blick:
 $L_1 = \{\dots\}; L_2 = \{\dots\}; \dots$

4



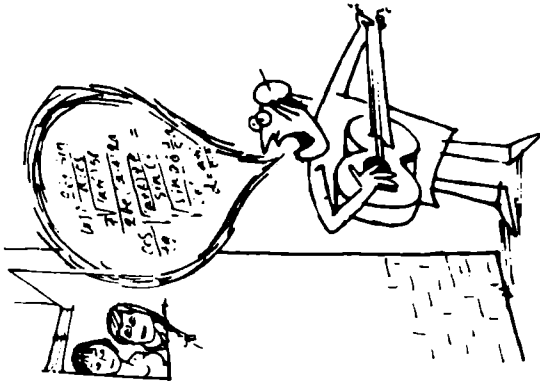
13



Die rechte Hälfte des Bildes ist Spiegelbild der linken Hälfte bis auf fünf kleine Details, die sich einen anderen Platz gesucht haben.
Wo sind sie zu finden?

Unten an einer schönen Linde
 war gar ein kleiner Wurm zu finden.
 Der kroch hinauf mit aller Macht,
 acht Ellen richtig bei der Nacht,
 und alle Tage kroch er wieder
 vier Ellen dran hernieder.
 Zwölf Nächte trieb er dieses Spiel,
 bis daß er von der Spitze fiel,
 am Morgen in die Pfütze,
 und kühlt sich ab von seiner Hitze.
 Mein Schüler, sage ohne Scheu,
 wie hoch dieselbe Linde sei!

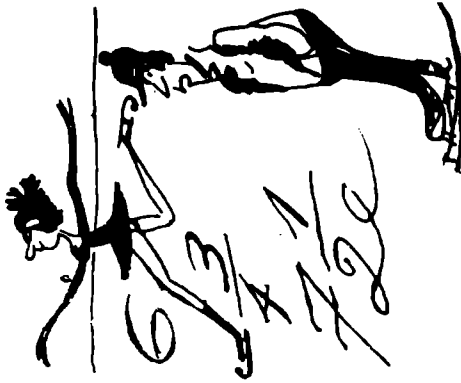
Adam Ries (1550)



12

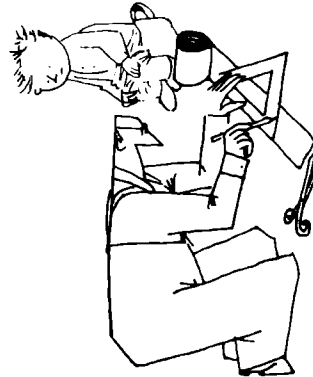
1. $x = y : 40$
2. $z = 4 \cdot u$
3. $u = 280 : 7$
4. $160 = v + 40$
5. $y = z + v$

Bei den fünf Gleichungen sind für die Buchstaben x, y, z, u, v natürliche Zahlen so einzusetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Zahlen.

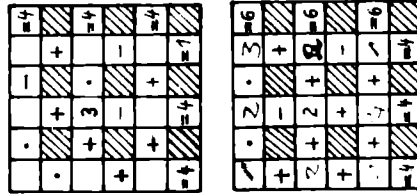


„Und jetzt bitte die Acht üben ...“

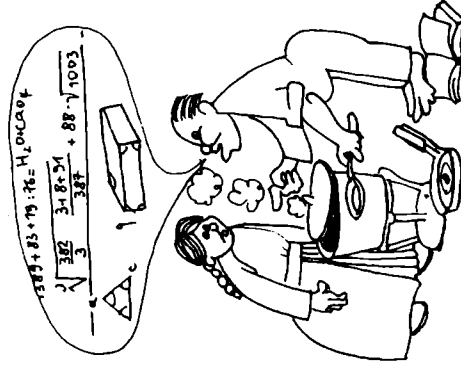
5



Setze einstellige Zahlen so ein,
daß sowohl waagrecht als auch
senkrecht richtig gelöste Aufgaben
entstehen!

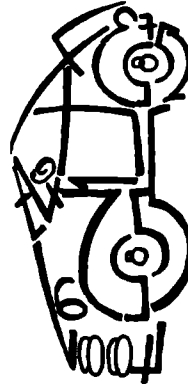


10

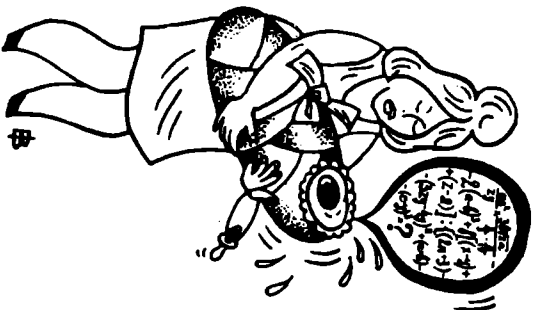


Das Rezept für die Zubereitung ist
7 ganz einfach.

7



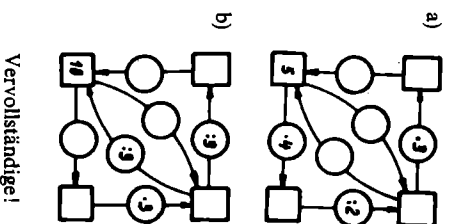
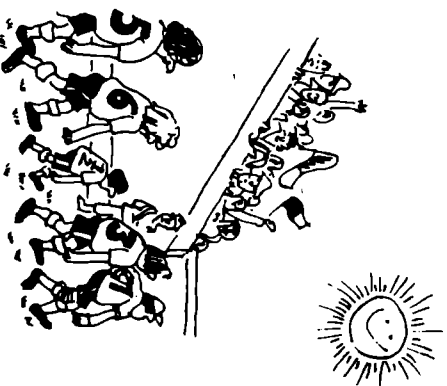
Addiere die einstelligen Zahlen des PKW, und du weißt, wieviel Kilometer je Stunde er fährt. Entspricht das der Straßenverkehrsordnung?



~~III~~ - III = IV
 VI - IV ≠ X
 VI + III = III
 VII + I = V
 VI - IV ≡ IX

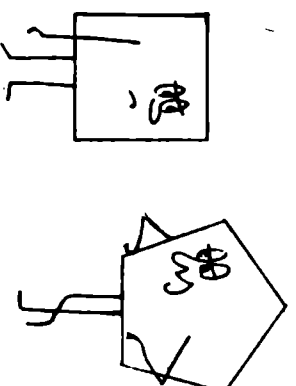
In jeder der fünf Reihen ist ein Hölzchen so umzulegen, daß eine richtig gelöste Aufgabe entsteht!

6



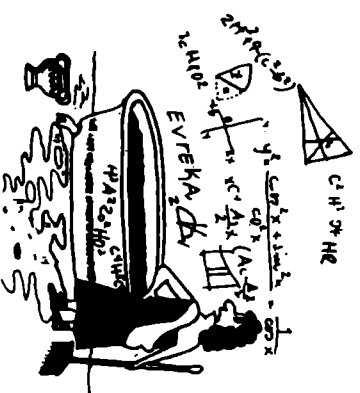
Vervollständige!

8



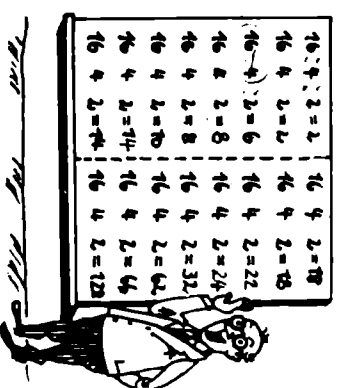
Sie sollten sich auch qualifizieren!

11

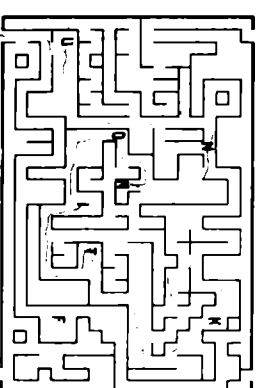


„Archimedes, eine Minute!
Was soll diese Schweinelei?“

9

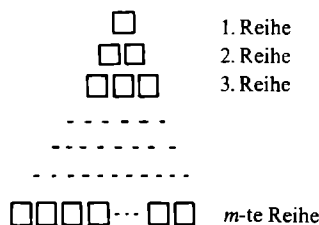


Setze die richtigen Rechenzeichen!



Von einem der vier Eingänge führt ein Weg über alle angeführten Buchstaben zu einem anderen Ausgang. Bei richtiger Lösung findet ihr einen wichtigen mathematischen Begriff!

6.A Unter einem „Stapel“ von Gegenständen (wie z.B. Konservenbüchsen) sei eine Anordnung wie im Bild verstanden, bei der jeweils für $k=1, \dots, m$ in der k -ten Reihe genau k Gegenstände stehen. Dabei ist m eine natürliche Zahl, die als „Höhe“ des Stapels bezeichnet werde. (Die Frage der praktischen Herstellbarkeit von Stapeln mit großer Höhe sei in dieser Aufgabe nicht berücksichtigt.) Untersuchen Sie, ob eine Zahl z mit $1000 \leq z \leq 10000$ so existiert, daß es einen Stapel aus z Gegenständen gibt, der sich in zwei Stapel von untereinander gleicher Höhe umordnen läßt!



6.B Man beweise für jede ganze Zahl n mit $n \geq 3$: Ist A_n die Anzahl aller verschiedenen Darstellungen von n als Summe dreier positiver ganzzahliger Summanden, so gilt

$$\left| A_n - \frac{n^2}{12} \right| < \frac{1}{2}.$$

Dabei werden zwei Darstellungen genau dann als verschieden bezeichnet, wenn sich nicht die eine durch Änderung der Reihenfolge der Summanden aus der anderen erhalten läßt.

Aus Platzgründen verzichten wir auf die Veröffentlichung der Lösungen. Interessierte Leser erhalten sie (zur Einsichtnahme) bei ihrem Kreisfachberater Mathematik oder bei den Bezirkskabinetten für außerunterrichtliche Tätigkeit.

Lösungen

Lösung der Aufgabe von Prof. Dr. V. Friedrich
(aus *alpha* 1/82, S. 3):

Um die unterschiedlichen Näherungswerte für $(9 - \sqrt{80})^3$ zu erklären,

verwenden wir wieder die Beziehung $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ (1) mit $a=9$, $b=\sqrt{80}$. Der Fehler $\delta = b' - b$ der für $b=\sqrt{80}$ verwendeten Näherung $b' = 8.9443$ ist wegen $\sqrt{80} \approx 8.9442719$ sehr klein: $\delta \approx 0,00003$.

Vaters Näherung $(a-b')^3$ kann wegen $(a-b')^3 = (a-(b+\delta))^3 = ((a-b)-\delta)^3$ unter Verwendung von $c=a-b$ und (1) in $(a-b')^3 = c^3 - 3c^2\delta + 3c\delta^2 - \delta^3$ umgeformt werden, so daß ihr Fehler $(a-b')^3 - (a-b)^3 = -3c^2\delta + 3c\delta^2 - \delta^3 \approx -3 \cdot (0,056)^2 \cdot 0,00003 \approx -0,0000003$ (2) beträgt (die Summanden $3c\delta^2 \approx 10^{-10}$, $\delta^3 \approx 10^{-13}$ sind ohne Einfluß auf die Größenordnung des in (2) angegebenen Fehlers).

Peters Näherung $a^3 + 3ab^2 - (3a^2 + b^2)b'$ weist dagegen den Fehler $a^3 + 3ab^2 - (3a^2 + b^2)b' - (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) = -(3a^2 + b^2)(b' - b) = -(3a^2 + b^2)\delta \approx -323 \cdot 0,00003 \approx -0,01$ auf. (3)

Bei der Verwendung von Näherungswerten kann das Ergebnis wesentlich vom verwendeten Rechenweg abhängen, so daß man mit Überschlagsrechnungen sich vergewissern muß, daß beim gewählten Rechenweg die Näherungswerte das Ergebnis nur wenig verfälschen können. (Näheres dazu in einem Artikel in der folgenden Nummer.)

Lösungen zu: Internationale Buchkunstausstellung (IBA), S. 52

▲ 1 ▲ Bezeichnet man die vier Personen der Reihe nach mit a, b, c und d , dann ergeben sich auf Grund der Aussagen die folgenden vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} a &= c - 5, \\ b &= \frac{1}{2}(a + d), \\ c &= d + 29, \\ d &= \frac{1}{4}(a + b + c). \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösung:

$$a = 89, b = 77, c = 94, d = 65.$$

Da dann $a + b + c + d = 325$ ist, also $325 < 350$, dürfen die vier Personen in dem Aufzug fahren.

▲ 2 ▲ (1) Wenn Pete lügt, so wäre er es. Dann sagt aber auch Tim die Unwahrheit. Es ergibt sich ein Widerspruch.

(2) Wenn Jenny lügt, so kann es nur Jenny oder Jessica sein. Dann sagt aber Jessica oder Tim die Unwahrheit. Es ergibt sich ebenfalls ein Widerspruch.

(3) Wenn Tim lügt, sagen die drei übrigen die Wahrheit, also ist Tim schuldig.

(4) Wenn Jessica lügt, ergibt sich ebenfalls ein Widerspruch.

▲ 3 ▲ I. 2 : $40 = x : 18$
 $x = 0,9$

Die Entfernung auf der Karte beträgt 0,9 cm.

II. 2 cm : 40 km = 1 cm : 20 km

Ein Zentimeter auf der Karte entspricht 20 km auf der Erde.

III. Zwischen Beirut und Sour sind es auf der Karte 3,8 cm.

$$1 : 20 = 3,8 : x$$

$$x = 76$$

Die Entfernung beträgt 76 km.

IV. Zwischen Saida und Tripoli sind es 5,4 cm.

$$1 : 20 = 5,4 : x$$

$$x = 108$$

Die Entfernung beträgt 108 km.

▲ 4 ▲ Die Kanten der Packungen seien l, m und n . Dabei gilt $l = a \cdot x$, $m = b \cdot y$ und $n = c \cdot z$. (x, y, z sind die Anzahl der Längen einer Streichholzschaftelkante.) Das Volumen der Packung ist $lmn = abcxyz$. Das Produkt xyz gibt die Anzahl der Schachteln an, und es gilt $xyz = 10$.

Da $x, y, z \in \mathbb{N}$, gibt es neun Möglichkeiten:

x	1	1	10	1	1	2	2	5	5
y	1	10	1	2	5	1	5	1	2
z	10	1	1	5	2	5	1	2	1

Da Papierverbrauch und Oberflächengröße der Packung gleich sind, ist

$$2ln + 2ln + 2mn = 2(abxy + acxz + bcyz).$$

Da die Oberfläche möglichst klein sein soll, muß auch der Faktor $(abxy + acxz + bcyz)$ möglichst klein sein. Man berechnet diesen in allen 9 Fällen und erhält den kleinsten Wert 14558 für $x=5, y=2$ und $z=1$. Das ist die ökonomischste Packung, wie man sich beim Kauf leicht überzeugen kann.

▲ 5 ▲ a) Die Restfläche A ist gleich der Differenz A_D und der Halbkreisfläche A_K (siehe Bild 1), also

$$A = A_D - A_K = \frac{4a^2}{4} \sqrt{3} - \frac{\pi a^2}{2} = \frac{a^2}{2} (2\sqrt{3} - \pi) \approx 0,16a^2.$$

b) Die Restfläche A ist gleich der Differenz von Quadratfläche A_Q , Halbkreisfläche A_K und kleiner Quadratfläche A_q (siehe Bild 2), also

$$A = A_Q - A_K - A_q,$$

$$A = 6^2 - \frac{\pi}{2} 3^2 - 3^2 = 36 - 4,5 \cdot 3,14 - 9 = 12,87.$$

c) Ein Drittel der Restfläche A (siehe Bild 3) ist gleich der Differenz von Halbkreisfläche A_k und der Fläche des Kreissegmentes A_S . Das letztere ist wieder die Differenz von der Kreissektorfläche A_K und der Fläche des gleichseitigen Dreiecks A_D , also

$$\frac{A}{3} = A_k - A_S = A_k - (A_K - A_D),$$

$$\frac{A}{3} = \frac{\pi \cdot 4^2}{2} - \frac{\pi \cdot 8^2}{6} + \frac{8^2 \sqrt{3}}{4},$$

$$\frac{A}{3} \approx 19,3, A \approx 58.$$

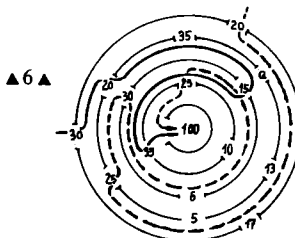
d) Es sind die sogenannten Mönchen des Hippokrates. Die Summe A der Flächeninhalte der beiden Mönchen ist gleich dem Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks A_D , also

$$A = A_D = \frac{ab}{2}.$$

A_k ist die Fläche des Halbkreises über $\overline{CB}$.

A_S ist die Fläche des Kreissegmentes über $\overline{CB}$ mit $\alpha = 60^\circ$ und Radius $\overline{AC}$.

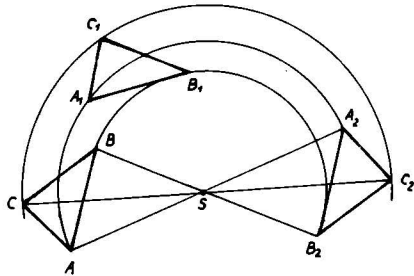
A_K ist die Kreissektorfläche mit dem Zentrwinkel $\alpha = 60^\circ$ und dem Radius $\overline{AC}$.



▲ 7 ▲

1	5		1	2	8
6	4	1		1	2
		6	3		3
1	1	9		2	
8	1		1	4	9

▲ 8 ▲ Man verlängert $\overline{AS}$, $\overline{BS}$ und $\overline{CS}$ um sich selbst über S hinaus und erhält A_2 , B_2 und C_2 , da $60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$.



▲ 9 ▲ Wir schreiben die Variable x für die Zahl der Säcke auf dem LKW.
Bedingung: $1500 + 50x < 3000$.
Dann gilt $50x < 1500$
 $x < 30$

Der LKW darf höchstens 29 Sack Zement laden.

▲ 10 ▲ Die Winkelsumme eines beliebigen konvexen Vielecks berechnet man nach der Gleichung

$w_s = 180(n - 2)$, wobei n die Anzahl der Seiten ist.

Dann ist $n = \frac{w_s}{180} + 2$,

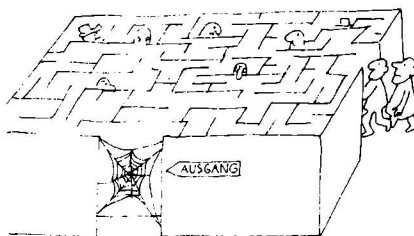
$$n = \frac{2340^\circ}{180^\circ} + 2,$$

$n = 15$. Das Vieleck hat 15 Seiten.

Lösungen zu Zahlen und Fakten, S. 55

- ▲ 1 ▲ um 45653 M;
- ▲ 2 ▲ ja, Annahme gleicher absoluter Zuwachsraten;
- ▲ 3 ▲ etwa 6,5 Mill. Beschäftigte;
- ▲ 4 ▲ 2 h 24 min;
- ▲ 5 ▲ nach 36,5 Tagen;
- ▲ 6 ▲ Selbstkosten je Tonne Rohbraunkohle: 11,02 M;

Kosten, die je Tonne Rohbraunkohle durch den Abraumabbau entstehen: 6,94 M.



In freien Stunden · alpha-heiter, S. 64

Erraten des Geburtstages

Wenn du die Geburtskalendertage mit x , den Geburtsmonat mit y und das Geburtsjahr mit z bezeichnest, ergibt sich folgender Ansatz:

$$(200)y + 2x + 7) \cdot 50 + 1632 = z$$

$$10000y + 100x + 350 + 1632 = z$$

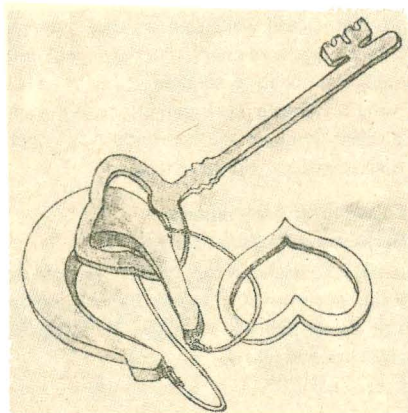
$$10000y + 100x + 1982 = z$$

Die Differenz $1982 - z$ gibt die Lebensjahre an.

Durch die Multiplikation der Geburtstagsangaben mit 10000 bzw. 100 erhalten die Angaben einen bestimmten Stellenwert. So können – von rechts nach links – in der 1. und

2. Stelle das Alter, in der 3. und 4. Stelle der Geburtskalendertag und in der 5. und 6. Stelle der Geburtsmonat abgelesen werden. Bei Verwendung der Aufgabe im Jahre 1983 muß anstatt der Zahl 1632 die Zahl 1633 in der Berechnung verwendet werden.

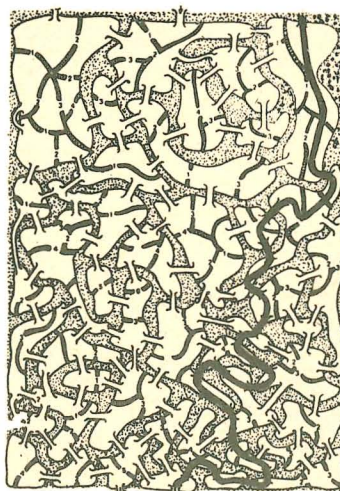
Rätsel mit einem Schlüssel



Die verflixte 7

1	2	1
7	3	4
5	5	6
2	2	1
7	3	4
6	6	5
1	1	2
4	2	5
7	4	4

Zollschranken



Fröhliche Mathematik

Judith hat sich die Zahlen 880 und 88 gedacht. – Beide haben $9 \cdot 20 \text{ min} = 180 \text{ min}$ gespielt. – Nein. Auf jedem Telefon müßten sieben Anschlüsse sein, insgesamt also $7 \cdot 31$. Da die Verbindung von Telefon A zu Telefon B zugleich Verbindung von B zu A ist, müßte die Gesamtzahl der Anschlüsse, also $7 \cdot 31$, durch 2 teilbar sein. – Für die Hälfte des Schulwegs braucht Uwe 10 Minuten und Karin 15 Minuten. Da Karin 5 Minuten Vorsprung hatte, holte Uwe sie in 10 Minuten ein.

Begriffe gesucht

Zahl; Aussage; Höhe; Lineal; eben; Netz; Teiler; Hundert; Einheit; Olympiade; Radius; Intervall; Elf – Zahlentheorie

Lösungen zu: Matt durch die Dame, S. 66

Acht Möglichkeiten gibt es!

- a) 1. Db5 Ka8/Kc8 2. De8 matt;
- b) 1. Dc1 Ka8 2. Dc8 matt;
- c) 1. Dc2 Ka8 2. Dc8 matt;
- d) 1. De1 Ka8/Kc8 2. De8 matt;
- e) 1. De4 Kc8 2. De8 matt;
- f) 1. Df5 Ka8 2. Dc8(f8) matt;
- g) 1. Dg6 Kc8 2. De8 matt;
- h) 1. Dh7 Ka8/Kc8 2. Da7(b7, g8, h8)/Dc7 matt.

Andere Versuche scheitern, weil der schwarze König dann über c8 nach d7 aus dem Mattnetz fliehen könnte.

Lösung der Aufgabe von Prof. Dr. V. Friedrich: (aus alpha 1/82, S. 3)

	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e
1				X	7				X	
2	X				8					X
3			X		9		X			
4		X			10			X		
5			X		11				X	
6	X				12		X			

Lösungen zu: Zahlenspiel mit mathematischem Hintergrund, S. 67:

▲ 1 ▲ Für $a = 3$ gilt: $z - a = 100 - 3 = 97$. Da 97 eine Primzahl ist, gibt es keine echten Teiler und folglich keine Lösung für $n \leq 15$.

▲ 2 ▲ Mit $a = 4$ und $a \leq n \leq 10$ lassen sich bei $z = 100$ als Lösungen finden: $n = 5$ und $n = 7$.

▲ 3 ▲ $a = 2, z = 200, n = 5$

$$n = 8$$

$$n = 10$$

$$a = 4, z = 200, n = 13$$

$$a = 5, z = 200, n = 12.$$

▲ 4 ▲ Für $a = 1, a = 3, a = 6, a = 7$ und $a = 9$ lassen sich keine Lösungen finden.

Vorbildliche Hilfe

Unser Dank gilt den Verlagen, die Bücher im Wert von 2400 M für die fleißigsten Wettbewerbsteilnehmer zur Verfügung stellten: BSB B. G. Teubner, Leipzig; Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig, Leipzig; VEB Fachbuchverlag, Leipzig; Der Kinderbuchverlag, Berlin; Militärverlag der DDR, Berlin; Verlag Die Wirtschaft, Berlin; Der Sportverlag, Berlin; VEB Verlag Die Technik, Berlin; Volkseigener Verlag Volk und Wissen, Berlin; Urania-Verlag, Leipzig; Leipziger Volkszeitung; Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Leipzig

Spezialschule physikalisch- technische Richtung EOS „C. F. Gauß“ Frankfurt (Oder)

Die Spezialschule (phys.-techn. Richtung) Frankfurt/Oder ist 1964 gegründet worden. Gleich von Anfang an gab es eine enge Verbindung zum VEB Halbleiterwerk Frankfurt/Oder, dem heutigen Leitbetrieb im Kombinat Mikroelektronik, unserem Trägerbetrieb.

Trotzdem sind wir zunächst eine allgemeinbildende Schule, die von Kl. 9 bis zur Hochschulreife führt. Talente und Begabungen, vor allem auf mathematischem und physikalisch-technischem Gebiet, werden bei uns weiter gefördert mit dem Ziel, daß sie als junge sozialistische Persönlichkeiten Spitzenleistungen für unsere Republik vollbringen, während der Schulzeit, in der Olympiade- und MMM-Bewegung, aber auch später im Studium und im Beruf. Dementsprechend sind unsere Aufnahmebedingungen. Der Bedeutung, die die Mikroelektronik im Rahmen des wissenschaftlich-technischen Fortschritts hat, entsprechen Arbeitsgemeinschaften für Elektronik für alle interessierten Schüler der Klassen 9 und 10, ein spezieller Lehrgang Elektronik in Klasse 11, die wissenschaftlich-praktische Arbeit in der Abiturstufe für alle Schüler im VEB Halbleiterwerk sowie die engen Verbindungen zwischen Klassen unserer Schule und Kollektiven des Werkes.

Hervorragende Ergebnisse in der MMM-Bewegung waren in der Vergangenheit ein Ergebnis dieser Zusammenarbeit.

Besonderheiten, die in gleicher Weise auch für die vier anderen Spezialschulen physikalisch-technischer Richtung in Jena, Dresden, Riesa und Kleinmachnow gelten, sind erst einmal höhere Wochenstundenzahlen in Mathematik und Physik.

So werden in Mathematik, Klasse 9, allen Schülern nach einem Zusatzlehrplan z.B. Kenntnisse über Determinanten und Kegelschnitte vermittelt.

In Klasse 10 ist u. a. ein Lehrgang über komplexe Zahlen, Grundlage für jedes Studium in Richtung Elektronik/Elektrotechnik, Schwerpunkt. Die Klasse 11 enthält u. a. einen besonderen Abschnitt zur Fehlerrechnung, während in Klasse 12 vor allem Anwendungen zur Vektorrechnung sowie Differential- und Integralrechnung zusätzlich vermittelt werden.

In Physik ist die selbständige experimentelle

Arbeit der Schüler hervorzuheben, die in die Ausbildung von Fähigkeiten im schöpferischen Anwenden des Wissens und Könnens münden soll.

Im Jahre 1977, anlässlich des 200. Geburtstages von Carl Friedrich Gauß, erhielt unsere Schule den ehrenvollen Namen *C. F. Gauß*. Die Verleihung war für uns Ansporn zu weiterer fleißiger Arbeit. Wir ehren Gauß, einen Revolutionär der Wissenschaft, seither in einer Gauß-Festwoche, in der u. a. die Schul-MMM sowie ein Mathematik-Mannschaftswettbewerb (1982 zum 14. Mal) stattfinden.

Ein Wettbewerb in Physik, der gleichfalls die kollektive Arbeit fördert, wird 1982 zum 5. Mal stattfinden.

Seit 1977 werden an Schüler unserer Schule, die sich bereits bei Olympiaden auszeichnen konnten, Leistungsaufträge – ähnlich wie im Sport – vergeben, die eine weitgehende (z. T. individuelle) Förderung garantieren.

Für Abiturienten, die sich bei tadelloser Haltung durch besondere schöpferische Leistungen auszeichnen konnten (z. B. Preisträger der DDR-Olympiade in Mathematik), haben der VEB Halbleiterwerk und die Schule einen *Gaußpreis* gestiftet, die höchste schulspezifische Auszeichnung.

1979 feierten wir den 15. Geburtstag unserer Schule. Viele Absolventen berichteten über ihre weitere Entwicklung nach dem Abitur, darunter ein Hauptmann unserer Nationalen Volksarmee, eine Lehrerin für Mathematik und Physik und ein Diplomingenieur aus dem Halbleiterwerk. Es war eine gute Bilanz zum 30. Jahrestag der Gründung unserer Republik, die uns mit Stolz erfüllte und uns Kraft für die weitere Arbeit vermittelte.

Wenn Schüler aus 8. Klassen des Bezirkes Frankfurt/Oder Interesse haben, an unserer Schule zu lernen, wenden sie sich an ihre Klassenleiter bzw. ihren Direktor, die die genauen Aufnahmebedingungen kennen.

Oberlehrer Dieter Jacob,
Direktor

Mathematik

Aufgaben der Klassenstufe 9/10

▲1▲ Gegeben sei ein Würfel mit der Kantenlänge a . Dem Würfel werde ein gerader Kreiszylinder so umbeschrieben, daß die Zylinderachse mit einer Raumdiagonale zusammenfällt und alle Würfeckpunkte auf der Zylinderoberfläche liegen.

Stellen Sie das Volumen des Zylinders als Funktion von a dar!

$$\left(\text{Ergebnis: } V = \frac{2}{3} \pi \sqrt{3} a^3 \right)$$

▲2▲ In dem nebenstehenden Bild 1 ist die Anzahl der Wege längs der Linien von A nach Z ohne Umwege zu bestimmen!

(Ergebnis: 140 Wege)

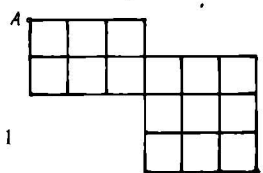


Bild 1

▲3▲ Ein PKW, der ein Kraftstoff-Öl-Gemisch von $33\frac{1}{3}:1$ benötigt, wurde versehentlich mit 5 Liter reinem Kraftstoff betankt.

Wieviel Liter Gemisch 25:1 sind nachzufüllen, um das richtige Mischungsverhältnis wieder herzustellen?

(Ergebnis: 15 Liter)

▲4▲ Von 50 befragten Schülern betreiben 8 Schwimmen und Radfahren und Handball, 19 Schwimmen und Radfahren, 17 Schwimmen und Handball, 20 Radfahren und Handball, 28 Schwimmen, 34 Radfahren und 31 Handball.

Wieviel Schüler betreiben genau eine Sportart, wieviel Schüler betreiben keine dieser Sportarten?

(Ergebnis: 5 Schüler genau eine, 5 Schüler keine dieser Sportarten)

Armin Bochmann,
Fachzirkelleiter Mathematik

Fortsetzung auf Seite 72





Ein Knobelheft

Herausgegeben vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Neubrandenburg.

Im Schuljahr 1981/82 ist nun das 3. Knobelheft an diejenigen Schüler des Bezirks Neubrandenburg gegangen, die sich für mathematische Knebelien besonders interessieren. Unsere Pionierhäuser oder die Stationen Junger Naturforscher und Techniker versenden diese Heftchen an die Schulen. Bis zu einem bestimmten Tag müssen dann die angekreuzten Kästchen (siehe Bild 1) zurückgeschickt werden. Auf den Mathetreffen in den Kreisen werden dann die Lösungen besprochen und die erfolgreichsten Knobler ausgezeichnet.

Bild 1

	a	b	c	d	e		a	b	c	d	e
1						7					
2						8					
3						9					
4						10					
5						11					
6						12					

Wir wissen, daß viele Pioniere nach Bekanntschaft mit diesen Heftchen sich auch weiterhin mit schwierigeren Aufgaben befaßten. Wir hoffen, daß recht viele dieser Jungen und Mädchen einmal zu den erfolgreichen *Jungen Mathematikern* gehören werden. Dies zu erreichen, war der Grund für die Herausgabe der Heftchen. An dieser Stelle sei Herrn Heinz Schob vom Potsdamer Pionierhaus herzlich gedankt, der bereits seit 10 Jahren solche Heftchen für die Klassenstufe 3 zusammenstellt und der damit Anregung für unsere Heftchen gab. *H.-J. Kerber*

Nun könnt auch ihr euer Können überprüfen. Bei jeder der folgenden Aufgaben könnt ihr eure Lösungen entweder bei a, b, c, d oder e anstreichen, nachdem ihr gut überlegt und alles noch einmal überprüft habt. Zum Schluß kreuzt eure Ergebnisse in den Kästchen an! (Bild 1) Laßt euch ein wenig Zeit! An nur einem Nachmittag ist so etwas natürlich nicht zu schaffen.

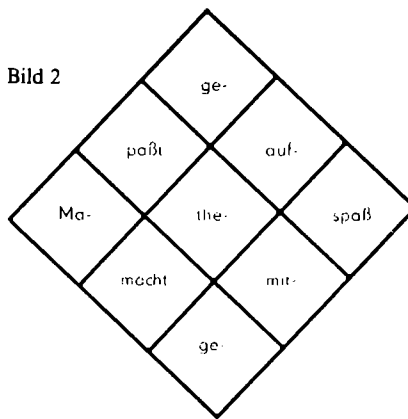
Nach Fertigstellung könnt ihr dann im Lösungsteil dieser Ausgabe eure Lösungen kontrollieren. ... Übrigens! 10 Richtige: „Gut gelöst“, 11 Richtige: „Sehr gut gelöst“, 12 Richtige: „Ausgezeichnet gelöst“! Und nun

Aufgabe 1

„Aufgepaßt! Mathespaß! Mitgemacht!“ Zähle alle Silben dieser Zeile!

Richtig! Es sind neun. – Nun nummeriere sie der Reihe nach mit den Zahlen 1 bis 9! Beginne mit: Auf (1), ge (2) und so weiter! Jetzt trage die neun Zahlen in die Felder des Quadrates genau so ein, wie ihre Silben im Titelbild auf der Umschlagseite stehen (siehe Bild 2)! Am besten ist es, wenn du dir die Figur noch einmal auf Karopapier zeichnest und dann nur die Zahlen einträgst.

Bild 2



Wenn du die Summe von je drei Zahlen bildest, die in gleicher Richtung stehen, so erhältst du stets 15 als Ergebnis. Und das nicht nur in einem Falle, sondern mehr als viermal! (Solltest du beim besten Willen jedoch höchstens viermal die Summe 15 finden, so beachte: Es gibt zweimal die Silbe „ge“! Also „Auf-ge-paßt...“)

Wieviele Möglichkeiten gibt es, die Summe 15 zu bilden?

Die Anzahl der Möglichkeiten ist

a	b	c	d	e
5	6	7	8	9

Aufgabe 2

Wir betrachten noch einmal die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Wähle nun drei Zahlen so aus, daß du als Summe die Zahl 15 erhältst!

Die Frage ist nun aber: Wieviele verschiedene Möglichkeiten gibt es, um diese Summe zu bilden? Dabei sollen zum Beispiel $1 + 5 + 9$ und $1 + 9 + 5$

zwei verschiedene Möglichkeiten sein. (Wer die Aufgabe 1 richtig gelöst hat, kommt schneller zum Ziel!)

Du kommst sicherer zum richtigen Ergebnis, wenn du ganz „systematisch“ vorgehst. Ja, und was „systematisch“ bedeutet, das mußt du dir in aller Ruhe überlegen!

Die Anzahl der Möglichkeiten beträgt

a	b	c	d	e
48	40	36	32	24

Aufgabe 3

Wir kommen noch einmal auf unser Quadrat zurück, das aus 9 kleinen Quadraten besteht. (Bild 2)

Zuerst einmal etwas Gedankenarbeit. – Wir denken uns die große Quadratfläche ausgeschnitten. Dann schneiden wir noch 4 kleine Quadratflächen ab, so daß nur noch die Quadrate mit den Silben „paßt – auf – the – macht – mit“ übrig bleiben. Nun faltet die 4 Flächen „paßt – auf – macht – mit“ so nach oben, daß ein würfelförmiges Gebilde entsteht, das oben offen ist!

Susanne hat aus Versehen die Felder mit den Silben „auf – ge – ge“; abgeschnitten. Sie möchte aber auch solch einen Behälter falten. Nun sollst du helfen und ihr sagen, welches 4. Feld sie jetzt noch abschneiden muß! Die Frage ist: Wieviele verschiedene Möglichkeiten gibt es, um Susanne zu helfen, damit sie sich noch solch einen Behälter falten kann?

Die Anzahl der Möglichkeiten ist!

a	b	c	d	e
1	2	3	4	5

Aufgabe 4

Jedem Buchstaben des Pioniergrußes

S E I D B E R E I T !

1 2 3 4 5 2 6 2 3 7

ist eine Zahl zugeordnet ($S = 1$, $E = 2$, usw.). Rate und rechne! Nur mit diesen 7 verschiedenen Buchstaben sollst du jetzt ein Wort schreiben:

Es ist eine Pflanze. Sie wird von den meisten Gartenbesitzern angepflanzt. Ihre Frucht ist rot und befindet sich nicht weit vom Boden entfernt.

Addierst du bei diesem Wort die Zahlen, die seinen Buchstaben zugeordnet sind, so erhältst du 29. Kontrolliere das!

Nun sollst du die drei Buchstaben, die du für diese Frucht noch nicht benutzt hast, aufschreiben!

Die 3 zugeordneten Zahlen sollst du miteinander multiplizieren!

Das Produkt lautet:

a	b	c	d	e
12	21	60	84	168

Aufgabe 5

Sicher ist die Gleichung $1982 = 1982$ wahr.

Setze zwischen die Ziffern genau drei Pluszeichen (+) so, daß auf jeder Seite dieser Gleichung Summen entstehen. Die neu gebildete Gleichung soll auch wieder eine wahre Aussage sein. Die Summe auf jeder Seite der Gleichung beträgt

a	b	c	d	e
29	92	101	200	983

Aufgabe 6

Wie müßte in der Zahlenfolge die nächste Zahl lauten?

Die ersten Aufgaben sind zum Üben. Sie werden immer etwas schwieriger. Schließlich kommt es dann auf die Lösung der letzten Zahlenfolge an. Schau dir dabei immer noch die bisher gelösten Aufgaben an!

- a) 0, 6, 12, 18, 24, ...
- b) 4, 7, 10, 13, 16,
- c) 1, 2, 4, 8, 16,
- d) 1, 4, 8, 13, 19,
- e) 1, 4, 9, 16, 25,
- f) 27, 18, 11, 6, 3,
- g) 1, 3, 9, 27, 81,
- h) 2, 6, 12, 20, 30,
- i) 5, 10, 20, 40, 80, ...

Nun aber zur eigentlichen Aufgabe:

3, 5; 9, 17, 33, ...

Welche Zahl findest du bei dieser letzten Zahlenfolge?

Es ist die Zahl

a	b	c	d	e
65	51	50	49	41

Aufgabe 7

Zehn Telefonsprechstellen sollen so miteinander verbunden werden, daß von jeder Stelle aus mit jeder anderen eine Verbindung besteht. Wieviel Verbindungen müssen gebaut werden? Solche praktische Aufgaben kannst du lösen, wenn du weitermachst:

Zeichne dir einen Kreis! Auf diesem Kreis liegen 3 verschiedene Punkte. Nun soll jeder Punkt mit jedem anderen verbunden werden.

Wieviel Strecken mußt du zeichnen?

Richtig gezeichnet, denn es war leicht: Es sind drei Strecken. Nun sind auf dem Kreis 4 Punkte! Wenn du richtig gezeichnet hast, so sind es 6 Strecken. Bei 5 und bei 6 Punkten wirst du das richtige Ergebnis sicher noch finden. (Schreibe dir alle Ergebnisse schön untereinander!)

Die Aufgabe lautet: Wieviel Strecken sind bei 10 verschiedenen Punkten zu zeichnen? (Vielleicht könnte man dabei noch einmal an die Übungen zur Aufgabe 6 denken!)

Bei 10 Punkten ist die Anzahl der Strecken

a	b	c	d	e
36	38	40	45	90

Aufgabe 8

Welche Zahlen kann man für a und b setzen, damit $a + b = 4$ eine wahre Aussage wird? Suche alle Möglichkeiten! Hast du alle gefunden? Es gibt genau 5 Möglichkeiten!

Nun zur eigentlichen Aufgabe: Die Summe von 3 natürlichen Zahlen x , y und z soll 12 ergeben. Wir schreiben also:

$$x + y + z = 12.$$

Nun könnte man für x , y , und z eine ganze Anzahl von Möglichkeiten finden, für die diese Gleichung stimmt. Wir wollen aber

wissen: Welches ist der größte Wert, den ich erreichen kann, wenn ich das Produkt $x \cdot y \cdot z$ mit diesen drei Zahlen bilde?

Solche Aufgaben löst man leichter mit einer Tabelle. Wir beginnen mit

x	y	z	Summe	Produkt
10	1	1	12	10
9	...	...	12	

und so weiter.

(Mit $x = 11$ oder $x = 12$ brauchen wir nicht zu rechnen, denn dann müßte mindestens eine weitere Zahl Null sein. Und ein Produkt mit mindestens einer Null ergibt ja stets Null – wie jeder weiß!)

Der größte Wert des Produktes $x \cdot y \cdot z$, den man erreichen kann, ist

a	b	c	d	e
48	50	54	60	64

Aufgabe 9

Wir haben einen Würfel von 3 cm Kantenlänge aus 27 kleinen Würfeln zusammengeklebt. Überlegen, welche Kantenlänge jeder der 27 kleinen Würfel hat! Nun wissen wir: Jeder Würfel hat 6 gleich große Quadratflächen. Überlege, wieviel kleine Quadratflächen auf jeder großen Quadratfläche zu sehen sind!

Und jetzt zur Aufgabe: Von jeder Ecke des großen Würfels wird genau ein kleiner Würfel weggenommen. Wieviel kleine Quadratflächen sind nun auf dem gesamten Restkörper zu sehen?

Die Anzahl der kleinen Quadrate auf diesem Restkörper beträgt

a	b	c	d	e
62	54	46	38	30

Aufgabe 10

Wir schreiben die Zahlen 1 bis 30 der Reihe nach hintereinander.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 ... usw.
... 28 29 30.

(Schreibe dir die 30 Zahlen erst einmal ordentlich hin!) Überlege, wie viele Ziffern es sein müßten!

a) Streiche 45 Ziffern so, daß die verbliebenen Ziffern eine möglichst kleine sechsstellige Zahl darstellen! Die Reihenfolge der Ziffern darf dabei nicht verändert werden!

Für die nächste Aufgabe schreibe dir noch einmal die 30 Zahlen auf!

b) Streiche jetzt 45 Ziffern so, daß eine möglichst große sechsstellige Zahl übrigbleibt! Auch hier darf dabei die Reihenfolge der Ziffern nicht verändert werden!

Meinst du die beiden Lösungen gefunden zu haben, so addiere die beiden Ergebnisse!

Dann ergibt sich die Summe

a	b	c	d
1028209	1098757	1099050	1100910
e			
1111120			

Aufgabe 11

Stefan erzählt: In meiner Klasse 4a sind 29 Schüler. Wenn alle Schüler der Klassen 4a, 4b und 4c da sind und sich ordentlich zum Schulbeginn auf dem Schulhof aufstellen, dann ist das so:

Stehen alle in Dreierreihe, dann bleibt einer übrig, stehen alle in Viererreihe, dann bleibt auch einer übrig, stellen wir uns aber in Fünferreihe auf, so bleibt keiner übrig.

Nun untersuche, wie viele Schüler außer uns, also aus den anderen beiden 4. Klassen, noch auf dem Schulhof standen!

Die Schülerzahl aus 4b und 4c betrug

a	b	c	d	e
66	61	60	56	51

Aufgabe 12

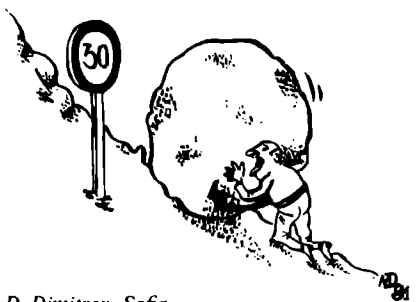
Schreibe dir eine ganz beliebige dreistellige Zahl auf, bei der die erste Ziffer mindestens um 2 kleiner ist als die dritte Ziffer! (Weil man später etwas subtrahieren soll, und das ginge sonst nicht.)

Nun setze darüber die dreistellige Zahl in genau umgekehrter Reihenfolge der Ziffern! (Also die aufgeschriebene Zahl „rückwärts“ gelesen!) – Hast du? – Nun subtrahiere!

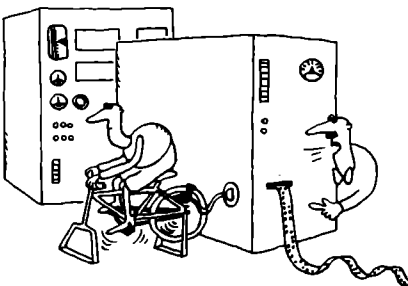
Als Ergebnis erhältst du wieder eine dreistellige Zahl. Diese Zahl schreibe in genau umgekehrter Reihenfolge der Ziffern jetzt darunter! – Addiere jetzt diese beiden Zahlen!

Das Ergebnis lautet:

a	b	c	d	e
999	1089	1150	1159	1299

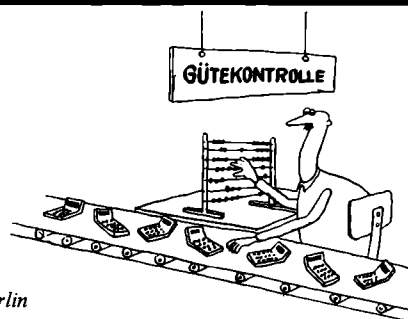


D. Dimitrov, Sofia



„Wenn Sie nicht gleichmäßig treten, bekomme ich laufend ein anderes Ergebnis.“

In freien Stunden • alpha-heiter



Lothar Schneider, Berlin

Erraten des Geburtstages

Karin behauptet gegenüber Dirk, den Geburtstag seines Vaters erraten zu können. Sie sagt:

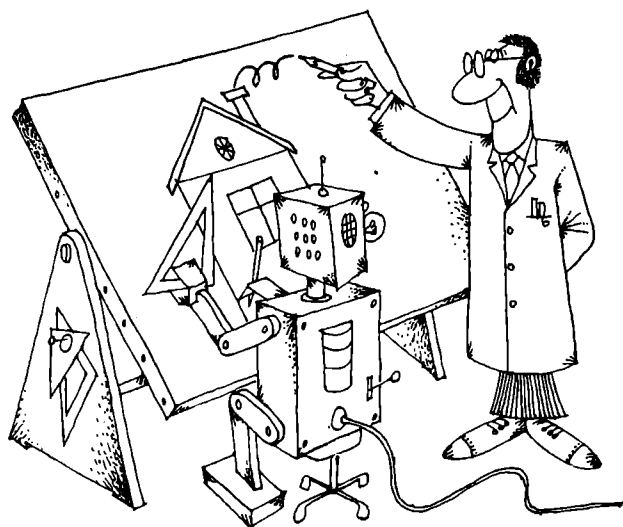
„Multipliziere den Geburtsmonat deines Vaters mit 200! – Addiere hierzu das Doppelte des Geburtskalendertages und die Zahl 7! – Multipliziere die erhaltene Summe mit der Zahl 50! – Addiere hierzu die Zahl 1632! Subtrahiere nunmehr das Geburtsjahr deines Vaters, und nenne mir die erhaltene Zahl!“

Karin zerlegt die erhaltene Zahl von rechts nach links in Zweiergruppen. Die erste Zweiergruppe – von links nach rechts gelesen – (kann auch eine „Einergruppe“ sein) gibt den Geburtsmonat an, die zweite Zweiergruppe den Geburtskalendertag und die dritte das Lebensjahr, woraus unschwer auf das Geburtsjahr geschlossen werden kann.

Beweise, daß die Lösung für jedes beliebige Alter (außer bei Personen von 100 und mehr Lebensjahren) stimmt!

Wie ist die Berechnung zu verändern, wenn sie auch im Jahre 1983 gelten soll?

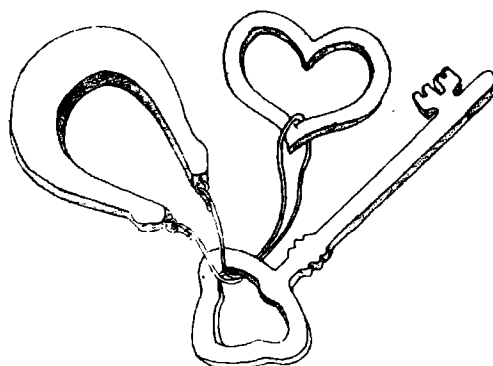
Dr. G. Lorenz, Leipzig



Rätsel mit Schlüssel

Unser Bild zeigt ein unterhaltsames Rätsel. Die Rätselgegenstände könnt ihr aus verschiedenen Werkstoffen anfertigen. Die Aufgabe besteht darin, den Schlüssel von Hufeisen und Herz freizubekommen.

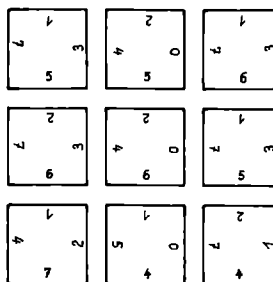
Josef Svoboda, aus *rozhledy*, der mathematischen Schülerzeitschrift (9-81/82), Prag



Die verflixte 7

Fertige dir neun quadratische Kästchen mit folgender Bedingung an!

Die neun Karten sind nun zu einem Quadrat zusammenzusetzen, und zwar so, daß die zwei Zahlen, die jeweils an den Kanten zusammenstoßen, immer die Summe 7 ergeben. Schüler Michael Nitsche, Dresden (Kl. 8)



Zahlenspiele

$n \quad n^{19-(8 \cdot 2)}$

1	1^3
2	2^3
3	3^3
4	4^3

$$1^3 = \sqrt{1 \cdot 9} - \sqrt{8 : 2}$$

$$2^3 = 1 + \sqrt{98 : 2}$$

$$3^3 = 1 + \sqrt{9 \cdot 8} + 2$$

$$4^3 = (1 - 9 - 8)^2$$

Ing. H. Decker, Köln

Zollschranken

Die auf dem Bild zu sehenden Inseln sind durch Brücken verbunden, aber leider sind sie voller Zollschranken. Wer durch diese hindurchgeht, hat soviel Forint Zoll zu zahlen, wie auf unserem Bild durch Zahlen angegeben ist. Die Aufgabe ist folgende:

Finde einen Weg über die Inseln und Brücken von einem der drei oberen Eingänge zu einem der beiden Ausgänge unten, auf dem man insgesamt 6 Forint Zoll zu zahlen hat!

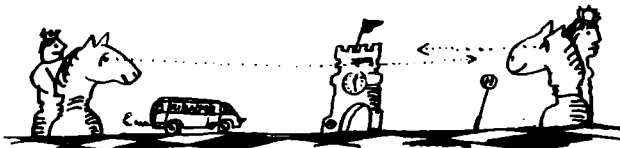
aus: Füles, Budapest



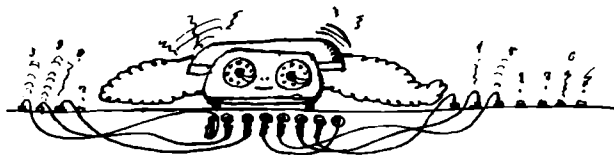
Fröhliche Mathematik

● Judith denkt sich 2 natürliche Zahlen. Die eine Zahl endet mit Null. Streicht man diese Null, so erhält man die andere Zahl. Die Summe beider Zahlen ist 968. Wer weiß, welche Zahlen sich Judith gedacht hat?

● Jana hat mit Jirka Schach gespielt: „Wie lange haben wir gespielt?“ fragt Jirka. Jana antwortet: „Ich weiß es nicht, aber ich habe aus dem Fenster gesehen und gezählt, wie oft in dieser Zeit der Bus in Stadt-richtung an unserem Haus vorbeifuhr. Der erste kam, als wir zu spielen begannen, der zehnte kam, als wir gerade fertig waren.“ Wie lange haben die beiden gespielt, wenn alle 20 Minuten ein Bus fuhr?



● Lassen sich 31 Telefone so miteinander verbinden, daß jedes mit genau 7 anderen verbunden ist?



● Uwe und seine jüngere Schwester Karin haben den gleichen Schulweg. Karin braucht von zu Hause bis zum Schultor 30 Minuten. Uwe 20 Minuten. An einem Tage ging Karin 5 Minuten vor Uwe aus dem Haus. Nach wieviel Minuten holte Uwe seine Schwester ein?

Dr. M. Rehm (aus: Pionierkalender 1982)

Begriffe gesucht

Zu finden ist jeweils ein Begriff aus dem Mathematikunterricht, der für den ersten Bestandteil als Schluß und für den zweiten als Anfang eingesetzt wird, so daß sinnvolle Wörter entstehen. Die Anfangsbuchstaben dieser Brückenwörter ergeben aneinandergereiht ein Teilgebiet der Mathematik.

(Jeder Punkt entspricht einem Buchstaben.)

Dreh	Wort
Gleichheits	Form
Dreiecks	nsatz
Holz	Kante
Dan	flächig
Würfel	Hemd
Raum	fremd
Jahr	Schaft
Maß	skreis
Mathematik	Sieger
Erd	Länge
Ton	Schachtelung
National . . .	Meter

OStR K.-H. Lehmann,
VLdV, Berlin

– Neorealismus!!!

Milan Vavro, Belgrad





Der Admiral der Schiffbauwissenschaft



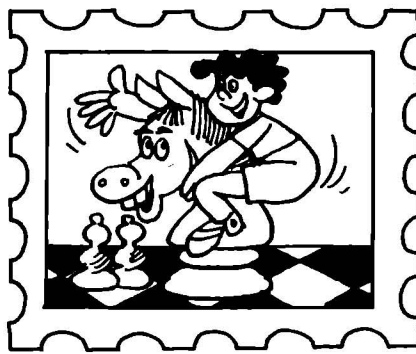
Die enge Verbindung der Mathematik mit ihren Anwendungen in Naturwissenschaften und Technik besitzt in der Sowjetunion eine besondere, bis ins 18. Jh. zurückreichende Tradition. Zu den bedeutendsten Repräsentanten dieser Tradition gehört *Alexej Nikolajewitsch Krylow*, den man mit gutem Recht zu den Begründern des theoretisch exakt fundierten Umgangs mit fehlerbehafteten mathematischen Objekten (Zahlen, Funktionen usw.) zählen kann.

Hängt das Ergebnis einer Rechnung von gegebenen Zahlen $x_1, \dots, x_n$ ab, so sind bei Aufgaben der Praxis für diese Größen meist nur Näherungswerte und Aussagen über deren maximale Abweichungen Δx_i von den genauen Werten bekannt. Die Fehlertheorie gewinnt hieraus Abschätzungen für die maximal mögliche Abweichung Δy des mit den Näherungswerten berechneten Resultats y von dessen richtigem Wert. Ist z. B. $\Delta x_i = 0,1$, so ist es sinnlos, zur Rechnung einen Näherungswert für x_i mit vielen Dezimalstellen zu verwenden. Der Rechenaufwand wird unnötig groß, und die vielen erhaltenen Dezimalstellen des Ergebnisses täuschen eine in Wirklichkeit nicht vorhandene Genauigkeit des Resultats vor. So notwendig und verdienstvoll es ist, solchen Überlegungen aus mathematischer Sicht nachzugehen, so ist doch ihre breite Anwendung und Durchsetzung in der Praxis gegen zähleibige alte Gewohnheiten ein noch größeres Verdienst. Werfen wir also einen Blick auf das Leben eines Mannes, der sich nicht nur einer solchen wissenschaftlichen Lebensaufgabe verschrieben hatte, sondern schlechthin der Aufgabe,

seinem Heimatland und der Gesellschaft mit den Mitteln des Wissenschaftlers zu dienen.

N. A. Krylow wurde am 3. August 1863 in einem Dorf in der Nähe von Simbirk (das heute ihm zu Ehren den Namen Krylowo trägt) als Sohn eines Gutsbesizers und ehemaligen Artillerieoffiziers geboren. Bereits als Kind begleitete er seinen Vater auf weiten Auslandsreisen, wo er neben vielen anderen Kenntnissen und Erfahrungen eine perfekte Beherrschung der wichtigsten Fremdsprachen Englisch, Französisch, Deutsch erwarb. Schon 1878 begann seine Ausbildung an der Marineoffiziersschule in Petersburg, wo ein hohes Niveau der Ausbildung in Mathematik, Mechanik, Astronomie, Ballistik und anderen mathematisch orientierten technischen Fächern herrschte. Nach Beendigung dieser Schule wurde der frischgebackene Unterleutnant *Krylow* zunächst in die Kompaßabteilung der Hydrographischen Verwaltung versetzt, wo er unter der Leitung eines berühmten Fachmannes auf diesem Gebiet an dem Problem der Deviation des Kompasses arbeitete. Darunter versteht man die durch die Eisenmasse des Schiffes hervorgerufene Ablenkung der magnetischen Kompaßnadel. Später absolvierte *Krylow* die berühmte *Petersburger Marineakademie*, an der er anschließend als Professor Mathematik und Schiffbautechnik lehrte. 1906 hielt er dort zum ersten Mal seine legendäre Vorlesung über Approximationstheorie, die 1911 in Buchform publiziert wurde und bis heute eine wichtige Rolle in der mathematischen Ausbildung sowjetischer Ingenieure spielt. Ohne seine pädagogische und wissenschaftliche Tätigkeit an der Marineakademie zu unterbrechen, wurde *Krylow* Hauptinspektor für den Schiffbau in Rußland und Vorsitzender des Marinetechnischen Komitees. Der von ihm bekleidete Posten war so bedeutend, daß er das Recht hatte, persönlich dem Zaren Vortrag zu halten. Er wirkte auch direkt an der Projektierung von Kriegsschiffen mit.

Ungeachtet seiner adligen Herkunft, seines Generalsranges und seiner führenden Stellung in der zaristischen Marineführung gehörte *Krylow* zu den ersten russischen Intellektuellen, die sich vorbehaltlos auf die Seite der Revolution stellten. Er setzte seine ganze Kraft für den Neuaufbau und die Modernisierung der nun dem Volke gehörenden Flotte ein und wurde 1919 zum Leiter der Marineakademie ernannt, aber bald darauf im Auftrage der sowjetischen Regierung als Leiter einer Gruppe von Gelehrten ins Ausland gesandt, um wissenschaftliche Verbindungen wiederherzustellen, Ausrüstungen und wissenschaftliche Literatur einzukaufen. Nahezu zehn Jahre verbrachte *Krylow* mit solchen wichtigen Aufgaben, fern der Heimat und fern von seiner wissenschaftlichen Arbeit. 1927 übernahm er die Leitung des Mathematischen Instituts der Sowjetischen Akademie der Wissenschaften, und ab 1929 konnte



Matt durch die Dame

Um Varianten einer Schachpartie und auch einzelne Züge beschreiben zu können, sind alle Felder des Schachbretts unterschiedlich gekennzeichnet: Von Weiß aus gesehen, versteht man die senkrechten Linien am Rand mit den Buchstaben a bis h und die waagerechten Reihen am Rand mit den Zahlen 1 bis 8. Wenn nun bei dieser matrix-ähnlichen Systematik z. B. in der abgebildeten Diagrammstellung die weiße Dame von b1 nach h1 zieht, so heißt das in der Schachsprache Db1-h1 oder abgekürzt nur Dh1, indem dann nur das Feld angegeben wird, auf das die entsprechende Figur gezogen hat. Bei Figurenzügen wird – im Unterschied zu den Bauern – stets der Anfangsbuchstabe (K für König, D – Dame, T – Turm, L – Läufer und S – Springer) vor die berührten Felder geschrieben.

Ein Zug im Schachspiel (mit Ausnahme der Rochade) ist die Bewegung eines Steines von einem Feld auf ein anderes, das entweder frei oder von einem gegnerischen Stein besetzt ist. Zieht ein Stein auf ein vom Gegner besetztes Feld, so schlägt er mit dem gleichen Zug den dort befindlichen Stein und entfernt diesen vom Brett.

Der König bewegt sich von seinem Feld auf ein angrenzendes Feld, das nicht von einem feindlichen Stein bedroht ist. So kann in der Diagrammstellung der schwarze König b8

er sich wieder voll seiner wissenschaftlichen und pädagogischen Tätigkeit widmen. Insgesamt veröffentlichte *Krylow* über 300 Lehrbücher und wissenschaftliche Arbeiten, hauptsächlich über mathematische und technische Fragen, die mehr oder weniger eng mit dem Schiffbau und der Seefahrt zusammenhängen, aber auch zu Fragen der Geschichte der Mathematik, insbesondere der Erschließung des Erbes von Newton, Euler und Gauß für die Angewandte Mathematik. *Krylow* starb am 26. Oktober 1945. Sein Andenken ehrte die Sowjetunion u. a. durch die Ausgabe zweier Briefmarken (1956 anlässlich des 10. Todestages, 1963 zum 100. Geburtstag).

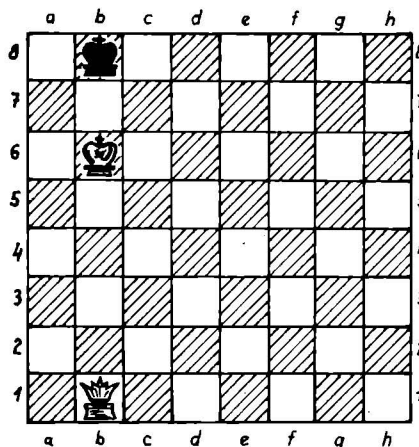
A. Halameisär

nicht nach a7, b7 und c7 ziehen, ebenso der weiße König.

Die Dame bewegt sich auf den senkrechten Linien, waagerechten Reihen oder schrägen Diagonalen.

Im Schach steht der König, wenn das von ihm besetzte Feld von einem feindlichen Stein bedroht wird (z. B. wenn die weiße Dame auf h2 stehen würde). Diesem Schachgebot ist im darauffolgenden Zug zu begegnen (der König verläßt das angegriffene Feld, eine andere Figur stellt sich vor den bedrohten König oder eine andere Figur schlägt die schachbietende Figur), andernfalls – matt (z. B. wäre der schwarze König matt, wenn in der angeführten Stellung die weiße Dame auf h8 stehen würde).

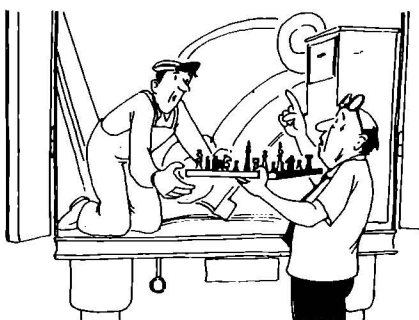
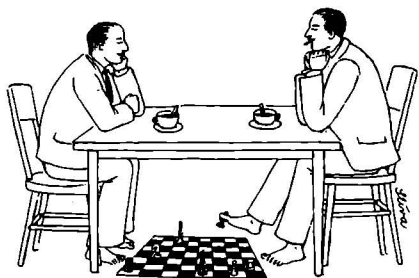
Aufgabe



Setze den schwarzen König in zwei Zügen matt!

Wieviel Möglichkeiten gibt es?

H. Rüdiger



„Und schon vorsichtig fahren, damit nichts verrückt!“

Zahlenspiel mit mathematischem Hintergrund

Wir gehen von einem Spiel aus, das ihr vielleicht schon kennt und das man ohne Schwierigkeiten überall spielen kann:

Von zwei Partnern wird einer ausgelost oder bestimmt, der das Spiel eröffnet. Das geschieht durch Nennen einer natürlichen Zahl zwischen 1 und 9 (1 und 9 eingeschlossen). Nun kommt abwechselnd einer der Partner an die Reihe und hat zu der vom Vorgänger genannten Zahl eine der Zahlen zwischen 1 und 9 zu addieren. Sieger des Spieles ist, wer zuerst die Zahl 100 erreicht.

Beispiel:

	1. Spieler	2. Spieler
1. Zug	6	
2. Zug		13
3. Zug	21	
4. Zug		24
5. Zug	30	
6. Zug		39
7. Zug	44	
8. Zug		53
9. Zug	62	
10. Zug		70
11. Zug	75	
12. Zug		82
13. Zug	90	
14. Zug		91
15. Zug	100	

Für dieses Spiel kann man sehr leicht herausbekommen, wie man spielen muß, um zu gewinnen (man kann also eine *Erfolgsstrategie* entwickeln). Unser Ausgangspunkt ist nicht der Beginn, sondern das Ende des Spieles. Wir bedienen uns also zum Finden der Erfolgsstrategie der sogenannten Methode des Rückwärtsarbeitens:

Was ist unser Ziel? (Was ist gesucht?)

Wir wollen zuerst die Zahl 100 erreichen und verhindern, daß der Gegenspieler zuerst die 100 schafft.

Von welchem naheliegenden Zwischenspiel kann man das gestellte Ziel erreichen? (Von welcher Bedingung aus kann man das Ziel erreichen?)

Hätte man im vorhergehenden Zug als Spieler die Zahl 90 erreicht, dann kann der Gegenspieler im nächsten Zug eine der Zahlen zwischen 91 und 99 erreichen, und der Spieler kann das Spiel im nächsten Zug für sich entscheiden.

Welche weiteren Zwischenziele muß man anstreben?

80 ... 70 ... 60 ... 10

Man muß also offenbar im Laufe des Spieles eine der Zahlen 10, 20, ..., 70, 80, 90 erreichen. Dann kann man das Spiel für sich entscheiden. Das bedeutet insbesondere, daß immer zu gewinnen ist, wenn man nicht selbst beginnt, weil man im 2. Zug die Zahl 10 erreichen kann und dann mit Sicherheit die anderen notwendigen Zwischenziele erreicht.

Ändert man die Bedingungen des Spieles, so kann man auch gewinnen, wenn man das Spiel beginnen muß. Darf man z. B. stets Zahlen addieren, die zwischen 1 und 10 liegen (1 und 10 eingeschlossen), dann kann man gewinnen, wenn man mit 1 beginnt und über die Zwischenziele 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89 das Spiel für sich entscheidet.

Wir wollen jetzt dieses Spiel verallgemeinern, indem wir andere Bedingungen für Anfangszahl a , Zielzahl z und die höchste der zu addierenden Zahlen n zulassen (wobei a nicht größer als n sein soll). Die Frage, die wir stellen wollen, ist die, unter welchen Bedingungen jeweils der mit dem Spiel Beginnende das Spiel für sich entscheiden kann.

Wie wir an den Beispielen gesehen haben, erhält man die *erfolgsversprechenden* Zwischenzahlen, wenn man von der Zielzahl z jeweils Vielfache der Zahlen $n+1$ subtrahiert (also im Falle $n=9$ hatte man von der Zielzahl $z=100$ jeweils Vielfache von 10 – also $9+1$ – zu subtrahieren).

Es gilt also die Gleichung:

$$(1) \quad a + k \cdot (n+1) = z.$$

Aus dieser Gleichung kann man für vorgegebenes z und zu einer vorgegebenen Anfangszahl a die höchste jeweils zu addierende Zahl n so bestimmen, daß man als 1. Spieler mit Sicherheit gewinnen kann. Wir formen dazu (1) um und erhalten:

$$(2) \quad k \cdot (n+1) = z - a.$$

Die Teiler von $z - a$ sind dann mögliche Lösungen für $n+1$. Betrachten wir die Aufgabe für $z=100$ und $a=1$, so erhalten wir als mögliche Werte für $n+1$ die Teiler von $z - a = 99$. Das sind 1, 3, 9, 11, 33 und 99.

Für $n+1=1$ ist $n=0$ und damit keine Lösung im gewünschten Sinne.

Für $n+1=99$ ist $n=98$, und das Spiel ist in 3 Zügen entschieden. Man wird deshalb für n

größere Werte ausschließen und beispielsweise $n \leq 15$ fordern. Es kämen also für unsere Betrachtungen nur in Frage:

$$\begin{aligned} n+1 &= 3, & \text{also } n &= 2, \\ n+1 &= 9, & \text{also } n &= 8, \\ n+1 &= 11, & \text{also } n &= 10. \end{aligned}$$

In diesen drei Fällen kann man mit der Anfangszahl 1 das Spiel für sich entscheiden.

Zur Weiterführung sollte man folgende Aufgaben überdenken:

▲1▲ Zeige, daß man für $z=100$ und $n \leq 15$ ein Spiel nicht mit Sicherheit für sich entscheiden kann, wenn man als Anfangszahl 3 wählt!

▲2▲ Bestimme für $z=100$ alle n mit $1 \leq n \leq 10$, mit dem sich Spiele mit der Anfangszahl $a=4$ gewinnen lassen, wenn man selbst beginnen muß und der Gegner optimal spielt!

▲3▲ Bestimme für $z=200$ und für $n \leq 15$ alle n , mit denen sich bei den Anfangszahlen $a=2, 4, 5$ Spiele mit Sicherheit gewinnen lassen, wenn man beginnt!

▲4▲ Bei welchen Anfangszahlen a mit $1 \leq a \leq 10$ läßt sich für $z=200$ keine Zahl n mit $n \leq 15$ so finden, daß man als erster Spieler das Spiel mit Sicherheit für sich entscheiden kann?

Viel Spaß beim Nachdenken!

K. Reichold

Lösungen



Lösungen zu: Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt, Heft 2/82

▲1▲ Im ungünstigsten Fall entnimmt man der Kiste 15 rote, 17 gelbe, 16 weiße und 19 schwarze Kugeln, ohne eine blaue Kugel erwischen zu haben. Das sind zunächst $15+17+16+19$ Kugeln, also 67 Kugeln. In der Kiste verbleiben in diesem ungünstigsten Falle nur noch blaue Kugeln. Also muß man der Kiste noch zwei weitere (blaue) Kugeln, insgesamt also 69 Kugeln entnehmen, um mit Gewißheit zwei Kugeln jeder Farbe zu erhalten.

▲2▲ Angenommen, in der ersten Bankreihe sitzen x Schüler; dann sitzen in der zweiten Bankreihe $2x$ Schüler, in der dritten und vierten Bankreihe je $(2x-2)$ Schüler. In allen vier Bankreihen sitzen also $[x+2x+(2x-2)+(2x-2)]$ Schüler, also $(7x-4)$ Schüler. Nun gilt $7x-4=31$, $7x=35$, $x=5$. In der ersten Bankreihe sitzen 5 Schüler, in der zweiten 10 Schüler, in der dritten und vierten je 8 Schüler.

▲3▲ a) Brigitte hat einen Schulweg von $4 \cdot 400 \text{ m} = 1600 \text{ m} = 1,6 \text{ km}$. Der Weg für Anett bis zum Kindergarten beträgt $1600 \text{ m} - 400 \text{ m} = 1200 \text{ m} = 1,2 \text{ km}$. Nachdem Anett $1,2 \text{ km} : 3 = 0,4 \text{ km}$ zurückgelegt hatte, wurde sie von Brigitte eingeholt, und zwar wegen $t = \frac{s}{v}$ nach $\frac{0,4}{6} \text{ h} = \frac{4}{60} \text{ h} = 4 \text{ min}$.

b) Für Anett verbleiben danach noch $\frac{2}{3}$ des

Weges bis zum Kindergarten, wofür sie 10 min benötigte. Aus $10 \text{ min} : \frac{2}{3} = 15 \text{ min}$ folgt, daß Anett für den Weg zum Kindergarten 15 min benötigt.

▲4▲ Es sei n die Anzahl der Schüler dieser Klasse; dann gilt $22 \leq n \leq 28$. Da zwei Schüler nicht an der Klassenarbeit teilgenommen hatten, gilt für die Anzahl t der teilnehmenden Schüler $22 \leq t \leq 26$. Angenommen, es haben x Schüler die Note 3 erhalten; dann gilt $22 \leq 4 \cdot x \leq 26$, also $x=6$. Es haben 24 Schüler die Klassenarbeit mitgeschrieben. Die Note 3 erhielten 6 Schüler, die Note 4 erhielten 3 Schüler. Die Noten 1 und 2 erhielten somit $24-9=15$ Schüler. Angenommen, es erhielten y Schüler die Note 2, also $(y-5)$ Schüler

Ferien im Schuljahr 1982/83

1. Zehnklassige allgemeinbildende polytechnische Oberschulen einschließlich Spezialklassen 9 und 10 an Einrichtungen der Volksbildung, Sonderschulen und Berufshilfsschulen

Herbstferien

Erster Ferientag	Sonnabend, 16. 10. 1982
Erster Unterrichtstag	Montag, 25. 10. 1982

Ferien zum Jahreswechsel

Erster Ferientag	Mittwoch, 22. 12. 1982
Erster Unterrichtstag	Dienstag, 4. 1. 1983

Winterferien

Erster Ferientag	Sonnabend, 5. 2. 1983
Erster Unterrichtstag	Montag, 28. 2. 1983
Unterrichtsfreier Tag	Sonnabend, 2. 4. 1983

Frühjahrsferien

Erster Ferientag	Sonnabend, 7. 5. 1983
Erster Unterrichtstag	Montag, 16. 5. 1983
Unterrichtsfreier Tag	Sonnabend, 21. 5. 1983

Sommerferien

Erster Ferientag	Sonnabend, 2. 7. 1983
Erster Unterrichtstag	Donnerstag, 1. 9. 1983

2. Klassen 11 und 12 der erweiterten Oberschulen und der Spezialschulen der Volksbildung

Ferien zum Jahreswechsel

Erster Ferientag	Mittwoch, 22. 12. 1982
Erster Unterrichtstag	Dienstag, 4. 1. 1983

Winterferien

Klassen 11	
Erster Ferientag	Sonnabend, 5. 2. 1983
Erster Unterrichtstag	Montag, 21. 2. 1983

Klassen 12

Erster Ferientag	Sonnabend, 12. 2. 1983
Erster Unterrichtstag	Montag, 28. 2. 1983
Unterrichtsfreie Tage	Sonnabend, 2. 4. 1983 Sonnabend, 21. 5. 1983

Sommerferien

Erster Ferientag	Sonnabend, 2. 7. 1983
Erster Unterrichtstag	Donnerstag, 1. 9. 1983

die Note 1; dann gilt $y + (y - 5) = 15$, $2y = 20$, $y = 10$. Es erhielten 10 Schüler die Note 2 und 5 Schüler die Note 1.

▲ 5 ▲ Angenommen, Dirk kauft x Ansichtskarten zu 20 Pf, also $(13 - x)$ Ansichtskarten zu 40 Pf das Stück; dann gilt

$$\begin{aligned} 20 \cdot x + 40 \cdot (13 - x) &= 280, \\ 20x + 520 - 40x &= 280, \\ 20x &= 240, \text{ also } x = 12. \end{aligned}$$

Dirk kaufte 12 Ansichtskarten zu 20 Pf und eine zu 40 Pf das Stück.

▲ 6 ▲ Es sei a der erste, also $3a$ der zweite, $9a$ der dritte und $27a$ der vierte Summand; ihre Summe beträgt $40a$. Die Summe aus den Quadraten der natürlichen Zahlen von 3 bis 9 lautet $3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 = 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 = 280$. Nun gilt $40a = 280$, also $a = 7$. Es gilt somit für die vier Summanden $7 + 21 + 63 + 189 = 280$.

▲ 7 ▲ Die Teilstrecke $\overline{CD}$ habe die Länge a ; dann hat die Teilstrecke $\overline{AB}$ die Länge $2a$, die Teilstrecke $\overline{DE}$ die Länge $12a$, die Teilstrecke $\overline{BC}$ die Länge $6a$. Die Summe aller Teilstrecken beträgt somit $21a$. Nun gilt $21 \cdot a = 42$ cm, also $a = 2$ cm.

Somit hat $\overline{AB}$ die Länge 4 cm, $\overline{BC}$ die Länge 12 cm, $\overline{CD}$ die Länge 2 cm, $\overline{DE}$ die Länge 24 cm.

▲ 8 ▲ Es soll gelten $a^2 \cdot b = 1980$ mit $1 \leq a \leq 9$ und $10 \leq b \leq 99$. Wegen $1980 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$ existiert genau eine Lösung, nämlich $6^2 \cdot 55 = 1980$. Daraus folgt $a = 6$ und $b = 55$.

▲ 9 ▲ Angenommen, Andreas fand x Pilze; dann fand Heiner $2x$ Pilze, Peter $4x$ Pilze, Anja $(2x - 3)$ Pilze, Birgit $(3x + 3)$ Pilze, Otto 7 Pilze. Das sind zusammen $(12x + 7)$ Pilze. Nun gilt

$$12x + 7 = 10 \cdot 6 - 5,$$

$$12x + 7 = 55, 12x = 48, \text{ also } x = 4.$$

Peter fand 16, Heiner 8, Anja 5, Birgit 15, Andreas 4, Otto 7 Pilze.

▲ 10 ▲ Vom erhaltenen Geldbetrag gab Christine aus beim Fleischer $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$, im

Milchladen $\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$, im Blumengeschäft

$\frac{4}{12} : 2 = \frac{2}{12}$, beim Bäcker $\frac{2}{12} : 2 = \frac{1}{12}$, im Ge-

müseladen $\frac{1}{12} + \frac{2}{12} = \frac{3}{12}$. Das sind zusammen $\frac{12}{12} = 1$. Christine hat das erhaltene Geld voll-

ständig ausgegeben; sie bringt kein Geld wieder mit nach Hause.

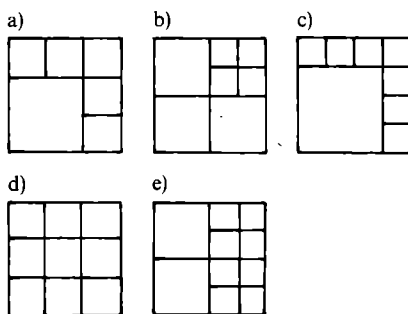
Lösung zum alpha-Wettbewerb, Heft 6/81

Ma5 ■ 2151 Der Betrag von 5 Pf, der im Gesamtbetrag von 42,15 M enthalten ist, kann nur aus den Kosten für Güterwagen stammen. Ferner kauft Peter eine ungerade Anzahl von Güterwagen. Da er aber wenigstens je einen Personen- und Doppelstockwagen anschafft, gibt er dafür wenigstens 5,50 M + 19,70 M = 25,20 M aus. Für den Kauf von

Güterwagen verbleiben ihm somit höchstens 42,15 M - 25,20 M = 16,95 M. Drei Güterwagen kosten $3 \cdot 5,95$ M = 17,85 M, also mehr als 16,95 M. Deshalb kauft Peter genau einen Güterwagen. Für den Kauf von Personen- und Doppelstockwagen verbleiben also 42,15 M - 5,95 M = 36,20 M. Zwei Doppelstockwagen kosten $2 \cdot 19,70$ M = 39,40 M, also mehr als 36,20 M. Deshalb kauft Peter genau einen Doppelstockwagen. Es verbleiben somit 36,20 M - 19,70 M = 16,50 M für den Kauf von Personenwagen. Aus $16,50 \text{ M} : 3 = 5,50 \text{ M}$ folgt, daß Peter genau drei Personenwagen anschafft.

Ma5 ■ 2152 Aus $100 \text{ cm} - 4 \text{ cm} = 96 \text{ cm}$ und $96 \text{ cm} : 12 = 8 \text{ cm}$ folgt, daß das gefertigte Drahtmodell eines Würfels eine Kantenlänge von 8 cm besitzt.

Ma5 ■ 2153 Die fünf abgebildeten Quadrate stellen eine mögliche Lösung dar.



Ma5 ■ 2154 Wir rechnen nacheinander $7 \cdot 8,60 \text{ M} = 60,20 \text{ M}$, $7 + 1 = 8$, $8 \cdot 8,60 \text{ M} = 68,80 \text{ M}$, $68,80 \text{ M} - 0,36 \text{ M} = 68,44 \text{ M}$, $8 \cdot 8,24 \text{ M} = 65,92 \text{ M}$, $180,12 \text{ M} - 60,20 \text{ M} - 65,92 \text{ M} = 54,00 \text{ M}$, $54,00 \text{ M} : 5 = 10,80 \text{ M}$.

Die Tapete, die für das dritte Zimmer verwendet wurde, kostet je Rolle 10,80 M.

Ma5 ■ 2155 Aus $(1 + 3 + 5 + \dots + 37 + 39) - (1 + 3 + 5 + \dots + 17 + 19) = 300$ folgt $21 + 23 + 25 + \dots + 37 + 39 = (21 + 39) + (23 + 37) + \dots + (29 + 31) = 60 \cdot 5 = 300$. Nun gilt $10 \cdot n = 300$, also $n = 30$. Dieser Klasse gehören 30 Schüler an.

Ma5 ■ 2156 $x = (1 + 2 - 3) + (5 + 6 - 4 - 7) + (9 + 10 - 8 - 11) + (13 + 14 - 12 - 15) + \dots + (301 + 302 - 300)$,
 $x = 0 + 0 + \dots + 303$,
 $x = 303$.

Ma6 ■ 2157 Nach der Aufgabenstellung muß die Zahl $n - 1$ ohne Rest durch 2, 3, 5 bzw. 7 teilbar sein. Die Zahl $n - 1$ ist deshalb ein Vielfaches von $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$. Wegen $n - 1 < 399$ kommt nur die Zahl 210 selbst in Frage. Es gilt also $n - 1 = 210$, also $n = 211$. Es gilt $211 = 105 \cdot 2 + 1$,
 $211 = 70 \cdot 3 + 1$,
 $211 = 42 \cdot 5 + 1$,
 $211 = 30 \cdot 7 + 1$.

Ma6 ■ 2158 Eine zweistellige natürliche Zahl läßt sich darstellen durch $z = 10a + b$ mit $0 < a \leq 9$ und $0 \leq b \leq 9$. Da wir durch Ver-

tauschen der Ziffern a und b eine gerade natürliche Zahl erhalten, muß a gerade sein. Wegen $q = a + b = 7$ muß $a < 8$ gelten. Für $a = 2$ gilt $b = 5$; die Zahl 25 ist aber keine Primzahl.

Für $a = 4$ gilt $b = 3$, also $z = 43$. Für $a = 6$ gilt $b = 1$, also $z = 61$. Die gesuchten Primzahlen lauten 43 und 61.

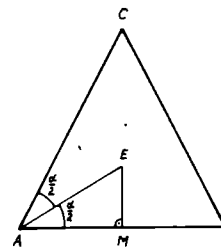
Ma6 ■ 2159 Angenommen, Thomas hat x Freundinnen, also $2x$ Freunde; dann gilt

$$\begin{aligned} 2x - 2 &= 4 \cdot (x - 2), \\ 2x - 2 &= 4x - 8, \\ 2x &= 6, \text{ also } x = 3. \end{aligned}$$

Thomas hat drei Freundinnen und sechs Freunde.

Ma6 ■ 2160 Als Peter das erste Mal auf seine Armbanduhr schaute, war es genau 6.30 Uhr. Eine Stunde hat 60 Minuten. Jede Minute entspricht einer Drehbewegung des großen Zeigers um $360^\circ : 60 = 6^\circ$. Wegen $\frac{5}{12} \cdot 360^\circ = 150^\circ$ und $25 \cdot 6^\circ = 150^\circ$ zeigt der große Zeiger genau auf die Ziffer 5, als Peter erneut auf seine Armbanduhr schaute. Es war also 9.25 Uhr. Zwischen 9.25 Uhr und 6.30 Uhr besteht ein Zeitunterschied von 2 Stunden und 55 Minuten.

Ma6 ■ 2161 Da M Mittelpunkt von $\overline{AB}$ ist, hat $\overline{AM}$ die Länge 3 cm. Wir konstruieren zunächst das rechtwinklige Teildreieck $\triangle AME$ aus $\overline{AM}$, $\overline{EM}$ und dem rechten Winkel $\sphericalangle AME$. Der Kreis um M mit $\overline{AM}$ als Radius schneidet die Gerade $\overline{AB}$ im Punkt B . Wir tragen in A an $\overline{AE}$ den Winkel $\sphericalangle EAM$ nochmals an. Der Kreis um B mit $\overline{BC}$ als Radius schneidet den freien Schenkel des angetragenen Winkels im Punkte C . Wir verbinden B mit C .



Ma7 ■ 2162 Auf dem Parkplatz seien x Personenkraftwagen, also $(30 - x)$ Motorräder abgestellt; dann gilt

$$\begin{aligned} 4x + 2(30 - x) &= 100, \\ 4x + 60 - 2x &= 100, \\ 2x &= 40, \text{ also } x = 20. \end{aligned}$$

Auf diesem Parkplatz sind 20 Personenkraftwagen und 10 Motorräder abgestellt.

Ma7 ■ 2163 Angenommen, die Tochter ist n Jahre, die Mutter also $(n + 32)$ Jahre alt; dann gilt

$$\begin{aligned} (n + 32) : n &= 7 : 3, \\ 7n &= 3(n + 32), \\ 7n &= 3n + 96, \\ 4n &= 96, \text{ also } n = 24. \end{aligned}$$

Die Tochter ist 24 Jahre, die Mutter 56 Jahre alt.

70

Die Hypotenuse ist 10 cm, die längere Kathete 8 cm und die kürzere Kathete 6 cm lang.
Für die entsprechenden Innenwinkel gilt
 $\tan \alpha = \frac{6}{8}$; $\alpha = 36,87^\circ$ und $\tan \beta = \frac{8}{6}$; $\beta = 53,13^\circ$.

Ph6 ■ 106 a) Der Körper bewegt sich gleichförmig. Die Geschwindigkeit beträgt
 $\frac{20 \text{ m}}{5 \text{ s}} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 14,4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

b) Der Körper befindet sich in Ruhe. Er steht in einer Entfernung von 150 m.

c) Der Körper bewegt sich zuerst gleichförmig und anschließend gleichförmig mit der gleichen Geschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung.

d) Der Körper bewegt sich zunächst gleichförmig, ist dann in Ruhe und bewegt sich anschließend gleichförmig mit der gleichen Geschwindigkeit weiter.

e) Der Körper bewegt sich zuerst gleichförmig, bleibt dann in Ruhe und bewegt sich anschließend in entgegengesetzter Richtung mit kleinerer Geschwindigkeit.

Ph7 ■ 107

Geg.: $P = 1690 \text{ kW} = 172380 \text{ kp} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$
 $h = 1 \text{ m}$
 $l = 100 \text{ m}$
 $G = 1223 \text{ Mp}$

Ges.: v

Die Geschwindigkeit der Lokomotive erhält man aus der Gleichung

$$P = F \cdot v,$$

$$\text{also } v = \frac{P}{F}.$$

Die Größe F ist hier gleich der Hangabtriebskraft F_H , die man aus der Gleichung für die geneigte Ebene erhält, also

$$F_H \cdot l = G \cdot h,$$

$$F_H = \frac{G \cdot h}{l}.$$

Dann ist

$$v = \frac{P}{F_H},$$

$$v = \frac{P \cdot l}{G \cdot h},$$

$$v = \frac{172380 \text{ kp} \cdot \text{m} \cdot 100 \text{ m}}{1223000 \text{ kp} \cdot \text{s} \cdot 1 \text{ m}},$$

$$v \approx 14,09 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 50,7 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Die Diesellokomotive kann eine Geschwindigkeit von $50,7 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ erreichen.

Ph8 ■ 108

Geg.: $c_E = 0,5 \frac{\text{kcal}}{(\text{kg} \cdot \text{grd})}$ Ges.: Wirkungsgrad η

$$c_T = 0,11 \frac{\text{kcal}}{(\text{kg} \cdot \text{grd})}$$

$$c_W = 1 \frac{\text{kcal}}{(\text{kg} \cdot \text{grd})}$$

$$q = 79,7 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$$

$$\theta_1 = -10^\circ \text{C}$$

$$\theta_2 = +90^\circ \text{C}$$

$$\theta_0 = 0^\circ \text{C}$$

$$H = 3800 \frac{\text{kcal}}{\text{m}^3}$$

$$m_T = 2,77 \text{ kg}$$

$$m_E = 3 \text{ kg}$$

$$x = 30 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$$

$$t = 45 \text{ min}$$

1. Erforderliche Wärmemengen

1.1. Erwärmung des Topfes von -10°C auf $+90^\circ \text{C}$

$$Q_1 = m_T \cdot c_T \cdot (\theta_2 - \theta_1)$$

$$Q_1 = 2,77 \text{ kg} \cdot 0,11 \frac{\text{kcal}}{\text{kg} \cdot \text{grd}} \cdot [90 - (-10)]^\circ \text{C}$$

$$Q_1 = 30,47 \text{ kcal}$$

1.2. Erwärmung des Eises von -10°C auf 0°C

$$Q_2 = m_E \cdot c_E \cdot (\theta - \theta_1)$$

$$Q_2 = 3 \text{ kg} \cdot 0,5 \frac{\text{kcal}}{\text{kg} \cdot \text{grd}} \cdot [0 - (-10)]^\circ \text{C}$$

$$Q_2 = 15 \text{ kcal}$$

1.3. Schmelzwärme des Eises

$$Q_3 = m_E \cdot q$$

$$Q_3 = 3 \text{ kg} \cdot 79,7 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$$

$$Q_3 = 239,1 \text{ kcal}$$

1.4. Erwärmung des Wassers von 0°C auf $+90^\circ \text{C}$

$$Q_4 = m_W \cdot c_W \cdot (\theta_2 - \theta_0)$$

$$Q_4 = 3 \text{ kg} \cdot 1 \frac{\text{kcal}}{\text{kg} \cdot \text{grd}} \cdot (90 - 0)^\circ \text{C}$$

$$Q_4 = 270 \text{ kcal}$$

1.5. Gesamtwärmemenge

$$Q_g = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$$

$$Q_g = (30,47 + 15,0 + 239,1 + 270) \text{ kcal}$$

$$= 554,57 \text{ kcal}$$

2. Zugeführte Wärmemenge Q_z

Gasverbrauch in 45 Minuten ist V_1 .

$$Q_z = H \cdot V_1 \text{ mit } V_1 = x \cdot t$$

$$Q_z = H \cdot x \cdot t$$

$$Q_z = \frac{3800 \text{ kcal} \cdot 0,30 \text{ m}^3 \cdot 45 \text{ min}}{\text{m}^3 \cdot 60 \text{ min}} = 855 \text{ kcal}$$

Für die Erwärmung einschließlich des Topfes gilt

$$\eta = \frac{Q_g}{Q_z},$$

$$\eta = \frac{554,57 \text{ kcal}}{855 \text{ kcal}} \approx 0,649 = 64,9\%.$$

Der Wirkungsgrad beträgt 64,9%, d.h., es wurden 64,9% der in Form von Gas zugeführten Wärmemenge ausgenutzt.

Ph9 ■ 109 1. Skizze und Bezeichnungen

Bild 1

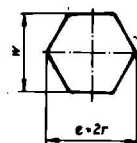
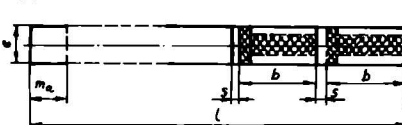


Bild 2



Aus Bild 1 und Bild 2 entnimmt man:

e = Eckmaß = Durchmesser des Umkreises des Sechsecks

w = Schlüsselweite

k = Kopfhöhe

l = Stangenlänge

m_a = Spannrest (Abfall)

s = Abstechbreite

d = Bolzendurchmesser

a = Bolzenlänge

Geg.: $d = 10 \text{ mm}$

$a = 60 \text{ mm}$

$k = 7 \text{ mm}$

$s = 2 \text{ mm}$

$w = 17 \text{ mm}$

$l = 5 \text{ m}$

$b = a + k = 67 \text{ mm}$

$m_g = 74 \text{ t}$

$$q = 7,85 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

2. Berechnung

2.1. Masse der Schraube

2.1.1. Flächeninhalt A_G des Sechsecks

$$A_G = \frac{3r^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Da } \frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{w}{2} \text{ ist, gilt } r = \frac{w}{\sqrt{3}} \text{ und}$$

$$A_G = \frac{3w^2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{w^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

2.1.2. Volumen V der Schraube (nach Bild 1)

$$V = A_G k + \frac{d^2 \pi}{4} \cdot a$$

$$V = A_G k + \frac{d^2 \pi a}{4} = \frac{kw^2 \sqrt{3}}{2} + \frac{ad^2 \cdot \pi}{4}$$

$$= \frac{1}{2} \left(kw^2 \sqrt{3} + \frac{ad^2 \cdot \pi}{2} \right)$$

2.1.3. Masse m der Schraube

$$m = V \cdot q = \frac{q}{2} \left(kw^2 \sqrt{3} + \frac{ad^2 \cdot \pi}{2} \right)$$

2.2. Anzahl n der Schrauben aus einer Stange Sechskantstahl. Laut Bild 2 folgt

$$l = n(b + s) + m_a$$

$$n = \frac{l - m_a}{b + s} = \frac{l - m_a}{a + k + s} = \frac{(5000 - m_a) \text{ mm}}{(60 + 7 + 2) \text{ mm}}$$

$$= \frac{5000 - m_a}{69} \text{ mit } m_a < 69.$$

$$\text{Dann ist } n = \frac{5000}{69} - \frac{m_a}{69} = 72,46 - 0,46 = 72, \text{ da}$$

$n \in \mathbb{N}$. (72 Schrauben je Stange)

2.3. Masse m_s einer Stange Sechskantstahl

$$m_s = A_G \cdot l \cdot q \quad (A_G \text{ aus 2.1.1.})$$

$$m_s = \frac{w^2 \sqrt{3} \cdot l \cdot q}{2}$$

2.4. Anzahl n_g der Stangen bei der Gesamtmasse

$$n_g = \frac{m_g}{m_s} = \frac{m_g \cdot 2}{w^2 \cdot l \cdot q \cdot \sqrt{3}}$$

$$= \frac{74000 \text{ kg} \cdot \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \text{cm}^2 \cdot 1000}{1,7^2 \text{ cm}^2 \cdot 3 \cdot 500 \text{ cm} \cdot 7,85 \text{ kg}}$$

$$n_g = 7533$$

2.5. Anzahl q der Schrauben aus allen Stangen

$$q = n_g \cdot n = 7533 \cdot 72 = 542376$$

Aus 74 Tonnen Sechskant-Stabstahl lassen sich 542376 Schrauben herstellen.

2.6. Materialverlust V_m

$$V_m = m_g - m_q \text{ mit } m_q = m \cdot q$$

$$V_m = m_g - q \cdot m = m_g - q \cdot \frac{q}{2} \left(kw^2 \sqrt{3} + \frac{ad^2 \cdot \pi}{2} \right)$$

$$V_m = 7400 \text{ kg} - \frac{542376 \cdot 7,85}{2 \cdot 1000} \cdot \left(0,7 \cdot 1,7^2 \cdot \sqrt{3} + \frac{6 \cdot 1^2 \cdot 3,14}{2} \right) \text{ kg}$$

$$V_m = 46487 \text{ kg}$$

Gesucht:

Anzahl der

Schrauben q

Materialverlust

V_m (absolut)

p (in Prozent)

Der Materialverlust beträgt absolut 46487 kg.

$$p = \frac{46487 \text{ kg}}{74000 \text{ kg}} \cdot 100 \approx 62,8\%$$

Der Materialverlust beträgt 62,8%.

Ph10/12 ■ 110

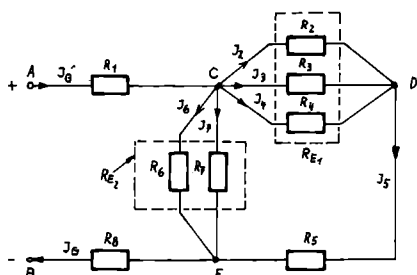
Geg.: $R_1 = 10\Omega$ $R_6 = 10\Omega$

$R_2 = 60\Omega$ $R_7 = 10\Omega$

$R_3 = 30\Omega$ $R_8 = 6\Omega$

$R_4 = 30\Omega$ $U = 60 \text{ V}$

$R_5 = 8\Omega$ Ges.: R_G, I_G, U_2, I_3

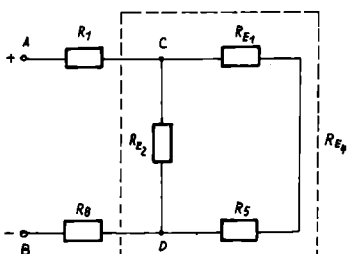


Spannung zwischen AC ist U_1 ,

CD ist $U_2 = U_3 = U_4$,

DE ist U_5 , EC ist $U_6 = U_7$,

EB ist U_8 , AB ist U



$$\frac{1}{R_{E1}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$$

$$R_{E2} = \frac{R_2 R_3 R_4}{R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_3 R_4} = \frac{60 \cdot 30 \cdot 30}{60 \cdot 30 + 60 \cdot 30 + 30 \cdot 30} \Omega = 12\Omega$$

$$R_{E2} = \frac{R_6 \cdot R_7}{R_6 + R_7} = \frac{10\Omega \cdot 10\Omega}{10\Omega + 10\Omega} = 5\Omega$$

$$R_{E3} = R_{E1} + R_5 = 12\Omega + 8\Omega = 20\Omega$$

$$R_{E4} = \frac{R_{E2} \cdot R_{E3}}{R_{E2} + R_{E3}} = \frac{5\Omega \cdot 20\Omega}{5\Omega + 20\Omega} = 4\Omega$$

$$R_G = R_1 + R_{E4} + R_8 = 10\Omega + 4\Omega + 6\Omega = 20\Omega$$

$$I_G = \frac{U}{R_G} = \frac{60 \text{ V}}{20\Omega} = 3 \text{ A}$$

$$U_1 = I_G \cdot R_1 = 3 \text{ A} \cdot 10\Omega = 30 \text{ V}$$

$$U_8 = I_G \cdot R_8 = 3 \text{ A} \cdot 6\Omega = 18 \text{ V}$$

$$U_6 = U - U_1 - U_8 = 60 \text{ V} - 30 \text{ V} - 18 \text{ V} = 12 \text{ V}$$

$$U_7 = U_6$$

$$I_6 = \frac{U_6}{R_6} = \frac{12 \text{ V}}{10\Omega} = 1,2 \text{ A}$$

$$I_7 = I_6$$

$$I_G = I_5 + I_6 + I_7$$

$$I_5 = I_G - I_6 - I_7 = 3 \text{ A} - 1,2 \text{ A} - 1,2 \text{ A} = 0,6 \text{ A}$$

$$U_5 = I_5 \cdot R_5 = 0,6 \text{ A} \cdot 8\Omega = 4,8 \text{ V}$$

$$U_2 = U_6 - U_5 = 12 \text{ V} - 4,8 \text{ V} = 7,2 \text{ V}$$

$$U_3 = U_4 = U_2$$

$$I_3 = \frac{U_3}{R_3} = \frac{7,2 \text{ V}}{30\Omega} = 0,24 \text{ A}$$

$$I_4 = I_3$$

Der Gesamtwiderstand des vermaschten Stromkreises beträgt 20Ω , die Gesamtstrom-

stärke 3 A , die Spannung U_2 $7,2 \text{ V}$ und die Stromstärke I_3 $0,24 \text{ A}$.

Ch7 ■ 85 380 kg m

Fe_2O_3 2Fe

160 g 112 g

$$m = \frac{380 \text{ kg} \cdot 112 \text{ g}}{160 \text{ g}}$$

$$m = 266 \text{ kg}$$

$$266 \text{ kg} \triangleq 100\%$$

$$m \triangleq 98\%$$

$$m = \frac{266 \text{ kg} \cdot 98\%}{100\%}$$

$$m = 260,7 \text{ kg}$$

$260,7 \text{ kg}$ Roheisen lassen sich aus 1 t Erz gewinnen.

Ch8 ■ 86 1260 kg m

a) $2\text{Al}_2\text{O}_3 \rightarrow 4\text{Al} + 3\text{O}_2$

204 g 108 g

$$m = \frac{1260 \text{ kg} \cdot 108 \text{ g}}{204 \text{ g}}$$

$$m = 667 \text{ kg}$$

Aus 2 t Bauxit mit 63% Aluminiumoxid-gehalt gewinnt man 667 kg Aluminium.

b) $1260 \text{ kg} \cdot 0,70 \text{ m}$

$2\text{Al}_2\text{O}_3 \rightarrow 4\text{Al} + 3\text{O}_2$

$$\frac{1260 \text{ kg} \cdot 0,70}{204 \text{ g}} = \frac{m}{108 \text{ g}}$$

$$m = \frac{1260 \text{ kg} \cdot 0,70 \cdot 108 \text{ g}}{204 \text{ g}}$$

$$m = 467 \text{ kg}$$

Nach erfolgter Reinigung des Bauxits können nur 467 kg Aluminium gewonnen werden.

Ch9 ■ 87 $0,2 \cdot 6 \text{ g}$ $0,03 \cdot x$

$\text{HCl} + \text{AgNO}_3 \rightarrow \text{AgCl} + \text{HNO}_3$

$36,5 \text{ g}$ 170 g

$$0,03 \cdot x = \frac{0,2 \cdot 6 \text{ g} \cdot 170 \text{ g}}{36,5 \text{ g}}$$

$$x = \frac{0,2 \cdot 6 \text{ g} \cdot 170 \text{ g}}{36,5 \text{ g} \cdot 0,03}$$

$$x = 186 \text{ g}$$

186 g 3% ige Silbernitratlösung müssen eingesetzt werden, damit die Chloridionen restlos ausgefällt werden.

Ch10/12 ■ 88

$\text{KBr} + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{HBr} + \text{KHSO}_4$

$2\text{HBr} + \text{H}_2\text{SO}_4 + \text{MnO}_2 \rightarrow$

$\text{MnSO}_4 + 2\text{H}_2\text{O} + \text{Br}_2$

Addition beider Gleichungen

$2\text{KBr} + 2\text{H}_2\text{SO}_4 + \text{MnO}_2 \rightarrow$

$\text{KHSO}_4 + \text{MnSO}_4 + 2\text{H}_2\text{O} + \text{Br}_2$

a) m_1 $m_2 \cdot 0,95$ 110 g

$2\text{KBr} + 2\text{H}_2\text{SO}_4 + \text{MnO}_2 \rightarrow$

$\text{KHSO}_4 + \text{MnSO}_4 + 2\text{H}_2\text{O} + \text{Br}_2$

238 g 87 g 160 g

$$m_1 = \frac{238 \text{ g} \cdot 110 \text{ g}}{160 \text{ g}}$$

$$m_1 = 164 \text{ g}$$

$$m_2 = \frac{87 \text{ g} \cdot 110 \text{ g}}{160 \text{ g} \cdot 0,95}$$

$$m_2 = 63 \text{ g}$$

b) $V \cdot 1,32 \text{ g} \cdot \text{ml}^{-1} \cdot 0,42$ 110 g

$2\text{KBr} + 2\text{H}_2\text{SO}_4 + \text{MnO}_2 \rightarrow$

$\text{KHSO}_4 + \text{MnSO}_4 + 2\text{H}_2\text{O} + \text{Br}_2$

169 g 160 g

$$V = \frac{196 \text{ g} \cdot 110 \text{ g}}{160 \text{ g} \cdot 1,32 \text{ g} \cdot \text{ml}^{-1} \cdot 0,42}$$

$$V = 243 \text{ ml}$$

164 g reines Kaliumbromid, 63 g Braunstein (95% ige) und 243 ml 42% ige Schwefelsäure müssen zur Reaktion gebracht werden, um 110 g Brom darzustellen.

Fortsetzung von Seite 61

Physik

Aufgaben der Klassenstufe 9/10

▲ 1 ▲ (Mechanik) Zwei Fahrzeuge bewegen sich von einer Kreuzung aus senkrecht zueinander gleichmäßig beschleunigt. Nach einer Fahrzeit von 10 Sekunden haben sie einen Abstand von 150 m voneinander. Fahrzeug 1 ist zu diesem Zeitpunkt doppelt so weit von der Kreuzung entfernt wie Fahrzeug 2.

a) Welche Geschwindigkeit haben die Fahrzeuge zu diesem Zeitpunkt?

b) In welchem Verhältnis stehen die beschleunigenden Kräfte, wenn sich die Massen der Fahrzeuge wie $3 : 4$ verhalten?

(Ergebnis: a) $V_1 = 13,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $V_2 = 26,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$;

b) $\frac{F_1}{F_2} = \frac{3}{8}$)

▲ 2 ▲ (Elektrizitätslehre) Aus einem Draht der Länge l mit dem Widerstand R wird ein Quadrat mit einer Diagonalen gelötet (Bild 2)!

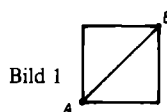


Bild 1

Wie groß ist der Widerstand zwischen den Punkten A und B des Quadrates?

(Ergebnis: $R_{AB} = \frac{\sqrt{2}}{6 + \sqrt{2} \cdot 5} R$)

▲ 3 ▲ (Auftrieb) Eine Holzplatte ($\rho_H = 0,75 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, $l = b = 1 \text{ m}$, $h = 10 \text{ cm}$) schwimmt auf Wasser!

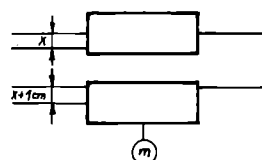


Bild 2

a) Wie tief taucht die Holzplatte in das Wasser ein?

b) Welche Masse muß eine Eisenkugel haben, die an die Holzplatte angehängt wird und diese einen Zentimeter tiefer unter die Wasseroberfläche ziehen soll? ($\rho_E = 7,8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$) (Ergebnis: a) $x = 7,5 \text{ cm}$; b) $m = 11,5 \text{ kg}$)

Dr. W. Weiss-Motz,
Fachzirkelleiter Physik

**mehr lesen –
mehr wissen**



A. Hilbert

Gleichungen und Ungleichungen

Reihe: Wir wiederholen

111 Seiten mit 49 Bildern, 62 Beispielen
und 43 Aufgaben mit Lösungen

Bestell-Nr. 5466584 Preis: 4,80 M

Vektorrechnung

112 Seiten mit 94 Bildern, 51 Beispielen
und 31 Aufgaben mit Lösungen

Bestell-Nr. 5466605 Preis: 4,80 M

Gleichungssysteme

100 Seiten mit 32 Bildern, 44 Beispielen
und 21 Aufgaben mit Lösungen

Bestell-Nr. 5466592 Preis: 4,80 M
VEB Fachbuchverlag Leipzig

B. Klotzek

Einführung in die Differentialgeometrie I

144 Seiten, 75 Abb., zahlr. Beispiele

Bestell-Nr. 5709785 Preis: 8,00 M

VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften
Berlin

E. Naumann

Entscheiden – aber wie?

240 Seiten, 49 Bilder, 43 Tabellen

Bestell-Nr. 5465442 Preis: 5,50 M

VEB Fachbuchverlag Leipzig

L. Tarassow/A. Tarassow

Physik im Gespräch

Etwa 360 Seiten, 200 Bilder

Bestell-Nr. 5466410 Preis: 12,50 M

VEB Fachbuchverlag Leipzig

Autorenkollektiv

100 Jahre Mathematisches Seminar der Karl-Marx-Universität Leipzig

340 Seiten, 56 Abb., 2 Tabellen

Dieser Jubiläumsband ist zum Preise
von 65,- M erhältlich an der Sektion
Mathematik der Karl-Marx-Universität
Leipzig (Bibliothek)

Friedrich Kaden

Rund um die Astronomie

144 Seiten, 270 Abb. (mehrfarbig)

Bestell-Nr. 6305459 Preis: 17,80 M

Der Kinderbuchverlag, Berlin

Friedrich Kaden

Wieviel Sterne hat der Große Bär?

Wir beobachten den Sternenhimmel

200 Seiten, zahlr. Abb.

Bestell-Nr. 6292969 Preis: 4,80 M

Der Kinderbuchverlag Berlin

S. I. Seleschnikow

Wieviel Monde hat ein Jahr?

Kleine Kalenderstunde

245 Seiten, 34 Abb., 30 Tabellen

Bestell-Nr. 6536652 Preis: 9,80 M

Verlag MIR Moskau/Urania-Verlag Leipzig

W. Gilde

Noch mehr Spaß mit dem Taschenrechner

Etwa 216 Seiten, 48 Bilder

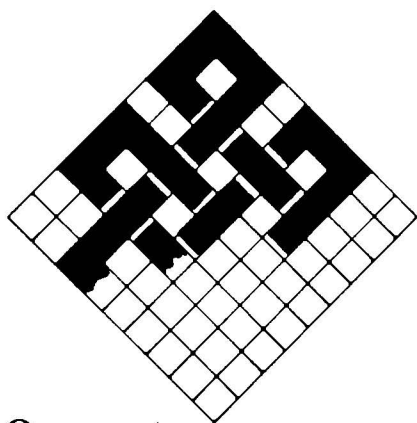
Bestell-Nr. 5466058 Preis: etwa 5,50 M

VEB Fachbuchverlag Leipzig

Alljährlich findet eine umfassende Solidaritätsaktion der Journalisten der DDR,
Bezirksgruppe Süd, auf dem Leipziger Markt statt.

Unser Foto: Der Chefredakteur der *alpha*, stets eng umringt, verkauft Bücher der *Mathematischen Schülerbücherei (MSB)*. Reinerlös fürs Solidaritätskonto: 310 Mark.





Ornamente
aus der Mongolischen
Volksrepublik

