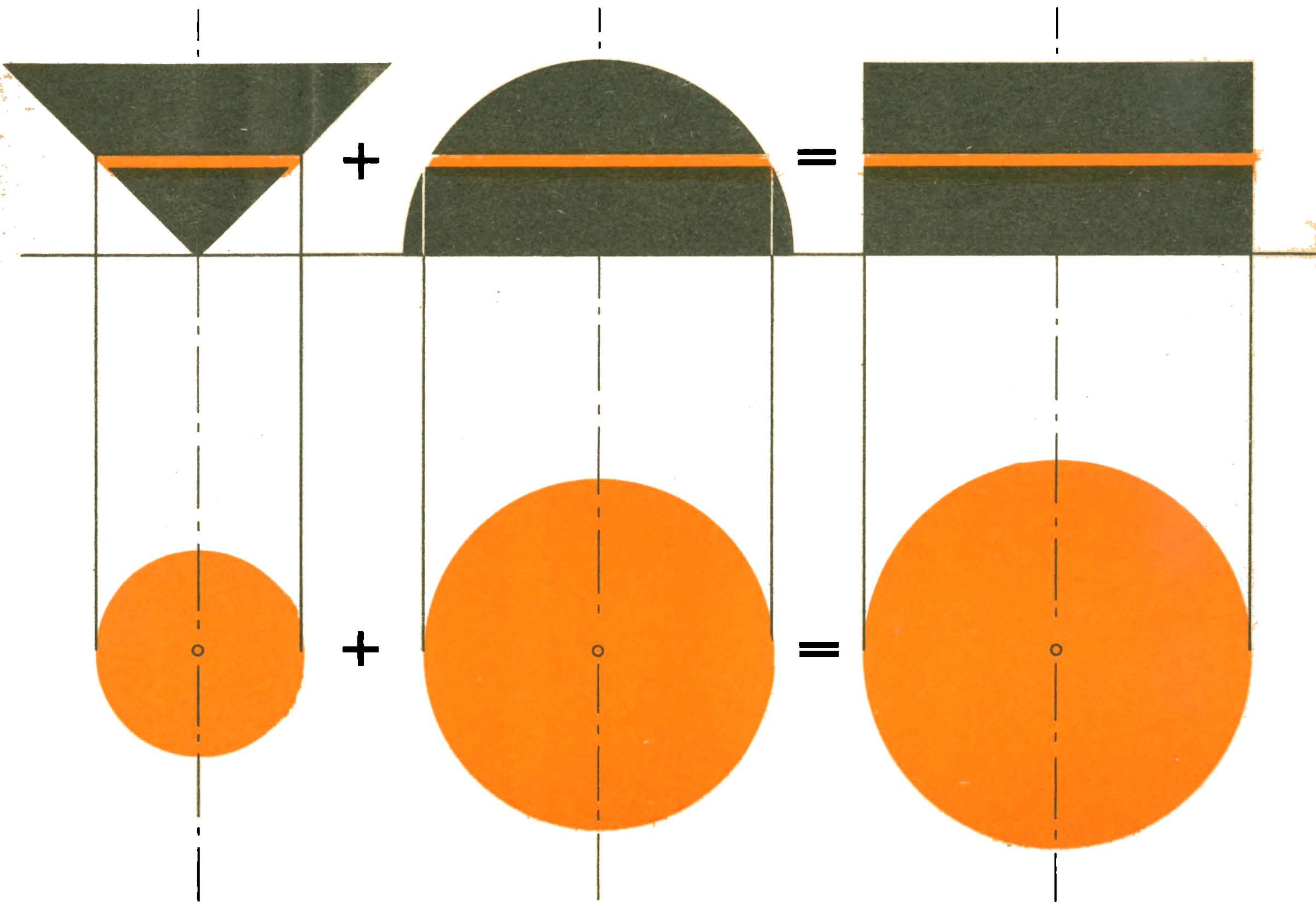
Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
4. Jahrgang 1970
Preis 0,50 M
Index 31059

4

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20 05 41
Postscheckkonto: Berlin 132 626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich (1 Heft) 0,50 M

Zu beziehen durch die Deutsche Post oder den Buchhandel, Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export und -Import GmbH, Leipzig, Leninstraße 16
Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden

Fotos: Aus: L. Kolbros: J. Steiner, Birkhäuser-Verlag, Zürich (S. 73/75); J. Lehmann (S. 75, 86, 87); N. N. Schuckow, Moskau 1966 (S. 76); Aus Fejes Tóth: Reguläre Figuren (S. 79); B. Bruhn, Berlin (S. 83); Briefmarkenentwürfe von einem Graphikerkollektiv Herzberg/Cottbus (S. 84); Technische Zeichnungen: E. Berger (S. 80/81), Döbeln; Technische Zeichnungen: G. Gruß, Leipzig
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Veröffentlicht unter der Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik, (Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 22. Mai 1970

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

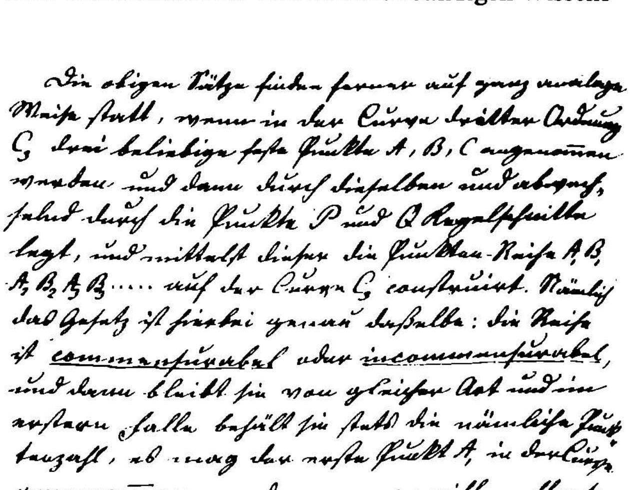
Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Auf den Spuren Jakob Steiners

Die gegenwärtig sehr intensiv betriebenen Leistungswettbewerbe Junger Mathematiker auf nationaler und internationaler Ebene lassen manchmal die Meinung aufkommen, daß eine solche Art des Testens von Jugendlichen auf ihr mathematisches Wissen und Können eine Erfindung aus jüngster Zeit sei. Wer jedoch Biographien über Mathematiker gelesen hat, wird feststellen können, daß die Erteilung von Aufgaben und Problemen schon früher als Prüfstein für angehende Talente diente. Von Interesse sind in diesem Zusammenhang z. B. der Lebensweg des Schweizer Geometers Jakob Steiner (1796—1863) und eine jener Aufgaben, mit deren spontaner Lösung er als Schüler die Aufmerksamkeit seiner Lehrer auf sich zog.

Jakob Steiner wurde am 18. März 1796 in Utzenstorf in der Schweiz als fünftes Kind einer Kleinbauernfamilie geboren. Auf dem bescheidenen Landgut seiner Eltern mußte er von Kind auf mitarbeiten. So blieb keine Zeit für einen geregelten Schulbesuch. Das Schreiben lernte er nicht vor seinem vierzehnten Lebensjahr. Später half er den Bauern beim Aufstellen ihrer Rechnungen. Als Jugendlicher verbrachte er ganze Nächte damit, den gestirnten Himmel zu betrachten. Die Astronomie erschien ihm als die schönste aller Wissenschaften. Von einem unbändigen Wissensdrang getrieben, verließ er im Mai 1814 als Achtzehnjähriger gegen den Willen seiner Eltern sein Heimatdorf und wandte sich an Pestalozzi in Iferten. Dieser nahm den jungen Steiner kostenlos in seine Bildungsstätte, und sehr schnell wurden die Mathematiklehrer Maurer und Leuzinger auf die außerordentlichen Fähigkeiten ihres neuen Zöglings aufmerksam. Als ihm dort z. B. die Aufgabe gestellt wurde, ein regelmäßiges Fünfeck durch eine Seitenparallele in zwei flächengleiche Teile zu zerlegen, gab er hierfür sofort die einfachste Konstruktion an. Waren die Aufgaben schwieriger, so ließ er mit seinen Bemühungen um die Lösung nicht früher ab, als bis er das Ergebnis gefunden hatte. Er führte darüber ein Tagebuch. So findet sich etwa zur Lösung einer Aufgabe die folgende Eintragung: „Gefunden Samstag, den 10. Christmonat 1814, nachts ein Uhr; 3+3+4 Stunden daran gesucht." Als Einleitung zu einem seiner Tagebücher ist der Satz zu lesen: „Arbeitet und suchet, damit ihr findet und nicht in Nachbetung verfallet!"

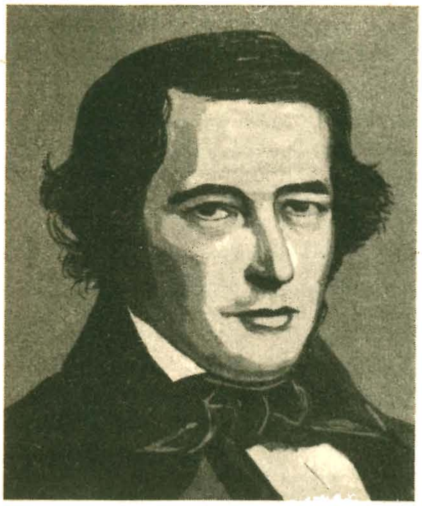

Die obigen Sätze finden ferner auf ganz andere Weise statt, wenn in der Curve dritter Ordnung C drei beliebige feste Punkte A, B, C angenommen werden und dann durch dieselben und abwechselnd durch die Punkte P und Q Kegelschnitte legt, und mittelst dieser die Punkten-Reihe A B A_1 B_1 A_2 B_2 ..... auf der Curve C construirt. Nämlich das Gesetz ist hierbei genau dasselbe: die Reihe ist commensurabel oder incommensurabel, und dann bleibt sie von gleicher Art und im andern Falle befällt sie statt die nämliche Stückzahl, es mag der erste Punkt A in beliebig angenommen werden, wo man will. — Ebenso

Aus einem Manuskript von J. Steiner

Nach eineinhalbjähriger Zeit des Lernens wurde Steiner als Mathematiklehrer an Pestalozzis Schule eingestellt. Drei Jahre später, im Herbst 1818, wandte er sich mit einem Zeugnis von Pestalozzi zum Studium an die Universität Heidelberg. Sein Lebensziel stand nun fest, sich für die Zukunft ganz der Mathematik zu verschreiben.

In seinen zahlreichen wissenschaftlichen Veröffentlichungen zu Gegenständen aus der Geometrie bediente er sich fast ausschließlich synthetischer Methoden. Von den Themen seiner ideenreichen mathematischen Beiträge sei hier nur eines aus dem Jahre 1833 genannt. Es lautet: „Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises." In diesem Aufsatz weist Steiner nach, daß sich alle geometrischen Probleme ersten und zweiten Grades in der Zeichenebene allein unter Verwendung des Lineals lösen lassen, wenn in der Ebene ein Kreis beliebiger Lage und Größe vorgegeben ist.

Seinen außerordentlichen Fähigkeiten weniger entsprechend war zunächst der berufliche Wirkungskreis als Lehrer an der Berliner Gewerbeschule. Auf Vorschlag der Mathematiker Bessel und Neumann wurde ihm Ende 1832 von der Königsberger Universität die Doktorwürde übertragen, und bald darauf erhielt er durch „Allerhöchste Cabinetsordre vom 20. April 1833" das Prädikat eines Professors verliehen. Wenig später öffneten sich auch die Hörsäle der Berliner Universität für seine Lehrtätigkeit. Es ist hier nicht der Ort, auf die wissenschaftlichen Leistungen Steiners einzugehen. Wir wollen deshalb zu der eingangs angeführten Aufgabenstellung zurückkehren, durch deren verblüffende Lösung die überragenden Fähigkeiten des jungen Steiner mit offenbar wurden.

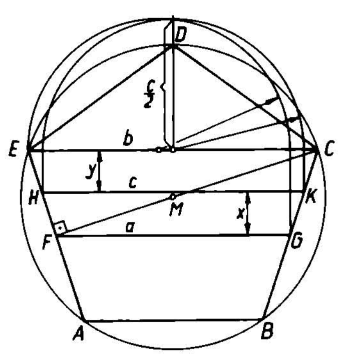


J. Steiner

Aufgabe: Ein regelmäßiges Fünfeck ist durch eine Seitenparallele dieses Polygons in zwei flächengleiche Teile zu zerlegen. Ferner ist nachzuweisen, daß der Mittelpunkt M des Fünfecks innerhalb des bei der Teilung entstehenden Trapezes liegt. (Dieser Nachweis wurde von Steiner nicht extra gefordert, aber man kann als sicher annehmen, daß er sich bei Lösung der Aufgabe klar über die Lage von M bezüglich der Teilungslinie war.)

Lösung: Das regelmäßige Fünfeck $(ABCDE)$ liege gezeichnet vor. (Bild 1) Wie die Aufgabenstellung schon besagt, scheidet eine Seitenparallele durch M als Teilungslinie aus. Ein erster Schritt zur Lösung besteht darin, zunächst einmal eine Symmetrale (CF) in das Fünfeck einzuzeichnen. Diese halbiert sicher die Fläche, erfüllt jedoch noch nicht die Bedingung, zu einer der Polygonseiten parallel zu sein. Eine Parallele zu (AB) durch

Bild 1



F schneidet (BC) in G. Wir betrachten jetzt das innerhalb des Fünfecks liegende Trapez $(CEFG)$ und bezeichnen darin die parallelen Seiten mit $\overline{FG}=a$ und $\overline{CE}=b$. Ferner zerlegt die Diagonale (CF) das Trapez in das Dreieck (CFG) mit dem Flächeninhalt I_1 und das Dreieck (CEF) mit dem Flächeninhalt I_2. Offensichtlich gilt die Proportion

$$I_1 : I_2 = a : b \qquad (1)$$

Die eingangs gestellte Aufgabe ist nun auf das Problem zurückgeführt, das Trapez $(CEFG)$ durch eine Parallele zu (AB) im Verhältnis der anliegenden Seiten, d. h. im Verhältnis $a : b$ zu teilen.

Wir bezeichnen die Endpunkte der gesuchten Teilungslinie mit H und K und setzen $\overline{HK}=c$. Außerdem sind die noch unbekannten Abstände der parallelen Strecken a, c mit x und c, b mit y einzuführen. (Vgl. Bild 1) Jetzt kommt es darauf an, die von der Teilungslinie (HK) zu erfüllenden Forderungen mit den hier eingeführten Größen analytisch zu fassen. Für die Inhalte I_1, I_2 der Teiltrapeze gilt:

$$2I_1=(a+c)x, \quad 2I_2=(b+c)y. \qquad (2)$$

Aus Gleichung (1) und (2) folgt weiter:

$$a : b=(a+c)x : (b+c)y$$

Diese Proportion läßt sich leicht in eine Gleichung folgender Gestalt überführen:

$$(a+c)bx-(b+c)ay=0 \qquad (3)$$

Gleichung (3) ist *linear* in den unbekannten Größen x und y. Zu einer weiteren linearen Gleichung gelangen wir durch Anwendung eines Strahlensatzes auf das Trapez. Danach gilt die Proportion

$$x : y=(c-a) : (b-c).$$

Für unsere weiteren Überlegungen bringen wir sie auf die Form

$$(b-c)x+(a-c)y=0. \qquad (4)$$

Auch diese Gleichung ist linear in x und y. Die Gleichungen (3) und (4) sollen uns zu einer konstruktiven Lösung für c verhelfen. Wir stellen sie deshalb nochmals zusammen:

$$\begin{aligned}(a+c)bx-(b+c)ay&=0\\(b-c)x\ +(a-c)y&=0\end{aligned} \qquad (5)$$

Unbekannt sind uns in diesem Gleichungssystem (5) die drei Größen c, x und y, während nur zwei Gleichungen zur Verfügung stehen. Dies ist jedoch kein Grund, den Bleistift entmutigt aus der Hand zu legen. Bei genauerer Betrachtung stellen wir nämlich fest, daß diese Gleichungen nur lineare Glieder in x und y, jedoch kein absolutes Glied enthalten. Man sagt: *das Gleichungssystem (5) ist homogen und linear in x und y.* Von diesem System erwarten wir, daß es für x und y von Null verschiedene Lösungen liefert, denn die Trapezseiten a, b und c haben sicher keine verschwindenden Abstände voneinander. Wir betrachten zweckmäßig zunächst zwei Zahlenbeispiele. Das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}3x+4y&=0\\6x+7y&=0\end{aligned} \qquad (6)$$

läßt lediglich $x=0$ und $y=0$ als Lösung zu. Wir ändern jetzt einen der Koeffizienten des Systems (6) und schreiben:

$$\begin{aligned}3x+4y&=0\\6x+8y&=0\end{aligned} \qquad (7)$$

Auch in diesem Fall ist $x=0$ und $y=0$ eine Lösung von (7). Dies ist jedoch nicht mehr das einzige Zahlenpaar; z. B. würden auch die Zahlen $x=4$ und $y=-3$ die Gleichungen (7) erfüllen. Man könnte beliebig viele weitere Zahlenpaare angeben, die beide Gleichungen (7) befriedigen. Von dieser zweiten Art muß also das vorliegende homogene lineare Gleichungssystem (5) sein. Eine wesentliche Eigenschaft von (7) besteht darin: Bringt man durch Linearkombination der beiden Gleichungen den Koeffizienten von x zum Verschwinden, dann verschwindet auch der Koeffizient von y und umgekehrt. Man sagt im mathematischen Sprachgebrauch: *Die beiden Gleichungen sind voneinander linear abhängig.* Lautet das Gleichungssystem allgemein

$$\begin{aligned}a_1x+b_1y&=0\\a_2x+b_2y&=0,\end{aligned}$$

so muß die Proportion

$$a_1 : a_2=b_1 : b_2 \qquad (8)$$

gelten, wenn für x und y von Null verschiedene Lösungen vorhanden sein sollen.

Diese Erkenntnis wenden wir jetzt auf das Gleichungssystem (5) an. Gemäß (8) hat das Gleichungssystem (5) genau dann von Null verschiedene Lösungen für x und y, wenn die Proportion

$$(a+c)b : (b-c)=(b+c)a : (c-a) \qquad (9)$$

besteht. In dieser Proportion ist lediglich die Größe c (Länge der gesuchten Teilstrecke) als Unbekannte enthalten. Aus (9) folgt ein Ausdruck für c, der uns den Schlüssel zu einer konstruktiven Lösung liefert. Durch Ausmultiplizieren von (9) findet man zunächst

$(b^2-c^2)a+(a^2-c^2)b=0$. Eine kurze Zwischenrechnung führt auf die Formel

$$c=\sqrt{ab}. \qquad (10)$$

Die Länge c der gesuchten Teilungslinie (HK) ist also gleich dem *geometrischen Mittel* der Trapezseiten a und b. Die Konstruktion dieses Mittelwertes wird zweckmäßig auf die halben Strecken der parallelen Trapezseiten bezogen, wie es Bild 1 zeigt. Nach dem Höhensatz wird aus $\frac{a}{2}$ und $\frac{b}{2}$ das geometrische Mittel $\frac{c}{2}$ gefunden.

Nun steht die zweite Frage der Aufgabenstellung noch offen. Aus der Zeichnung allein ist nicht eindeutig abzulesen, ob der Mittelpunkt M des Polygons innerhalb oder außerhalb des Trapezes $(ABKH)$ oder gar auf der Teilungslinie (HK) liegt. Wir wollen die Antwort durch einen Streckenvergleich finden. Hierzu werde das Trapez $(CEFG)$ gesondert herausgezeichnet und eine Seitenparallele m durch M gelegt. (Bild 2) Ebenso wie c läßt sich auch m durch a und b ausdrücken. Für $c>m$ liegt M innerhalb und für $c<m$ liegt M außerhalb des Trapezes $(ABKH)$. Gilt $m=c$, liegt M auf der Teilungslinie (HK). Um die Mittellinie m durch a und b auszudrücken, bezeichnen wir den Abstand zwischen a und m mit u, zwischen b und m mit v. Mit den Strahlensätzen folgen die Proportionen

$$\begin{aligned}u : v&=a : b \quad \text{und}\\u : v&=(m-a) : (b-m). \qquad (11)\end{aligned}$$

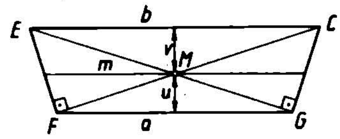
Durch Gleichsetzen der rechten Seiten von (11) erhält man weiter:

$$a : b=(m-a) : (b-m)$$

Über eine elementare Zwischenrechnung findet man für die Länge der Mittellinie m:

$$m=\frac{2ab}{a+b} \qquad (12)$$

Bild 2



Auch dieser Mittelwert von a und b hat in der Mathematik eine grundlegende Bedeutung. Der für m gefundene Wert ist das *harmonische Mittel* von a und b. Es ist in folgender Weise definiert:

Das harmonische Mittel m zweier Zahlen a, b nennt man den reziproken Wert des arithmetischen Mittels ihrer reziproken Werte, also gilt

$$\frac{1}{m}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right). \qquad (13)$$

Durch geeignete Umformung zeigt man die Übereinstimmung des hier definierten harmonischen Mittels mit dem in (12) gefundenen Wert von m. Da $m \neq c$ ist, kann zunächst gefolgert werden, daß M nicht auf der Teilungslinie (HK) liegt.

Die Behauptung, daß der Mittelpunkt M des Fünfecks innerhalb des Trapezes $(ABKH)$ liegt, ist gleichwertig mit der Aussage

$$\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab} \qquad \text{(Behauptung)}$$

Diese Behauptung soll nun indirekt bewiesen werden. Hierzu gehen wir von der Annahme aus:

$$\frac{2ab}{a+b}>\sqrt{ab} \qquad \text{(Annahme)}$$

Wegen $a,\ b>0$ kann aus der Annahme weiter gefolgert werden:

$$2\sqrt{ab}>(a+b)$$

Beim Quadrieren der linken und rechten Seite ändert sich nach den geltenden Voraussetzungen nichts an der Orientierung des Ungleichheitszeichens, also

$$4ab>a^2+2ab+b^2$$

oder

$$0>a^2-2ab+b^2$$

$$0>(a-b)^2 \qquad \text{(Widerspruch)}$$

Das Quadrat einer reellen Zahl kann nicht negativ sein. Also war die getroffene Annahme falsch und die ursprüngliche Behauptung wahr.

Damit ist gezeigt, daß M innerhalb des Trapezes $(ABKH)$ liegt. Als wichtiges Nebenergebnis haben wir eine Relation zwischen dem harmonischen, geometrischen und arithmetischen Mittel zweier Zahlen gefunden.

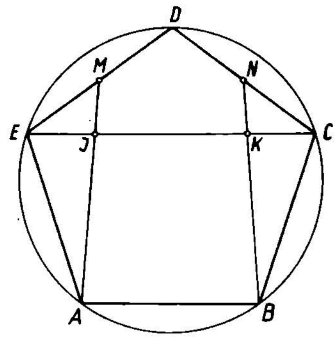
Es gilt: Aus $0<a<b$ folgt

$$a<\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<b. \qquad (14)$$

Die blitzartigen Gedankengänge, mit denen der junge und unverbildete Jakob Steiner zu seinen Lösungen gelangte, kann man nicht mehr rekonstruieren. Wir haben uns bemüht, mit handwerklicher Gründlichkeit und etwas Ausdauer einen möglichen Weg zur Lösung dieser Aufgabe zu beschreiten. Hierbei war die gelegentliche Anwendung analytischer Methoden nicht ganz im Sinne Steiners. Wer Gefallen an solchen Aufgaben gefunden hat, kann sich an einem weiteren Problem versuchen, das sich in einem Tagebuch Jakob Steiners aus der Schulzeit in Iferten fand:

Aufgabe: In einem regelmäßigen Fünfeck $(ABCDE)$ verbinde man den Punkt A mit dem Mittelpunkt M der Seite (DE), den Punkt B mit dem Mittelpunkt N der Seite (CD). Die zwei Verbindungsgeraden (AM) und (BN) schneiden auf der Diagonalen (CE) den Abschnitt (IK) aus. (Bild 3)

Bild 3



Es ist zu zeigen, daß die Strecke $\overline{IK}$ kleiner ist als die Strecke $\overline{AI}=\overline{BK}$.

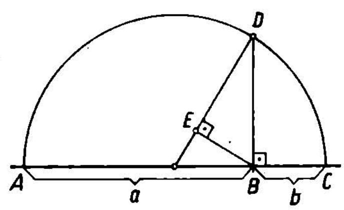
Viel Spaß bei dieser Aufgabe, an deren Lösung Jakob Steiner 10 Stunden geknobelt hat.

Aufgabe zur Bildung von Mittelwerten:

In Bild 4 ist $\overline{AB}=a$ und $\overline{BC}=b$. Man zeige, daß die Strecke $\overline{DE}$ gleich dem harmonischen Mittel von a und b ist.

E. Schröder

Bild 4



Wir stellen vor: Dr. E. Schröder

Herr Dr. E. Schröder ist Hochschuldozent für Mathematik an der Technischen Universität Dresden. Seit Gründung der Zeitschrift *alpha* arbeitet er als Redaktionsmitglied aktiv mit. In enger Zusammenarbeit mit dem Chefredakteur entstanden die neuen Titelblätter unserer Zeitschrift (Jahrgang 1970 ff.). In seinen zahlreichen Beiträgen zu Problemen der Geometrie bewies er pädagogische Meisterschaft und leistete damit einen wertvollen Beitrag zu unserem Schwerpunkt: Geometrie. Redaktion *alpha*

X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Olympiadeklasse 11/12

1. In einer Klassenelternversammlung waren genau 18 Väter und genau 24 Mütter anwesend, von jedem Schüler und jeder Schülerin dieser Klasse wenigstens ein Elternteil. Von genau 10 Jungen und genau 8 Mädchen waren jeweils beide Eltern da, von genau 4 Jungen und genau 3 Mädchen jeweils nur die Mutter, während von genau einem Jungen und genau einem Mädchen jeweils nur der Vater anwesend war.

Man ermittle die Anzahl aller derjenigen Kinder in dieser Klasse, die in derselben Klasse Geschwister haben! (Es gibt in dieser Klasse keine Kinder, die Stiefeltern oder Stiefgeschwister haben.)

2. In ein reguläres Tetraeder mit der Kantenlänge a seien 4 Kugeln von gleichem Radius so einbeschrieben, daß jede von ihnen die drei anderen von außen und drei der Tetraederflächen (von innen) berührt.

Ermitteln Sie den Radius r dieser Kugeln in Abhängigkeit von a! *Anmerkung*: Für jedes reguläre Tetraeder gilt: Die vier Höhen des Tetraeders schneiden sich in einem Punkt und teilen einander im Verhältnis 3 : 1, wobei der längere Abschnitt von der Ecke bis zum Schnittpunkt reicht.

3. Beweisen Sie: Für alle positiven reellen Zahlen a und b mit $a+b=1$ gilt:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geq\frac{25}{2}.$$

4. Es seien a, b, c reelle Zahlen; für jede reelle Zahl x sei ferner $f(x)=ax^2+bx+c$ gesetzt.

a) Man beweise, daß folgender Schluß richtig ist:

Voraussetzung: $f(0)$, $f(1)$ und $f(-1)$ sind ganze Zahlen.

Behauptung: Für jede ganze Zahl c ist $f(x)$ ebenfalls eine ganze Zahl.

b) Man untersuche, ob ein richtiger Schluß entsteht, wenn die Voraussetzung des in a) genannten Schlusses durch die Voraussetzung ersetzt wird, $f(0)$, $f(2)$ und $f(-1)$ seien ganze Zahlen.

c) Man gebe mindestens drei weitere Tripel (p, q, r) ganzer Zahlen mit der Eigenschaft an, daß ein richtiger Schluß entsteht, wenn die Voraussetzung des in a) genannten Schlusses durch die Voraussetzung ersetzt wird, $f(p)$, $f(q)$ und $f(r)$ seien ganze Zahlen.

Einige Ungleichungen für Fakultäten

Ungleichungen spielen in der Mathematik eine bedeutende Rolle. Sie werden in Beweisen verschiedener Sätze benutzt, oder für Abschätzungen komplizierter Ausdrücke verwendet. Es handelt sich dabei um sogenannte identische Ungleichungen, d. h. Ungleichungen, die in ganzen Zahlensystemen gelten z. B. für alle positiven reellen, oder gar für alle reellen Zahlen erfüllt sind.

Sehr viele Ungleichungen stammen von der „Ur-Ungleichung" $x^2 \geqq 0$ ab, die für alle reellen x gilt. Wenn wir, um ein einfaches Beispiel anzuführen, $x=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ setzen, wo a und b positive reelle Zahlen sind, so erhalten wir: $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqq 0$ oder $a+b \geqq 2\sqrt{ab}$; diese Ungleichung, in der Form $\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ geschrieben, ist die Ausgangsform der berühmten AG-Ungleichung — der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel. Den Verallgemeinerungen und verschiedenen Beweisen der AG-Ungleichung sind viele Arbeiten gewidmet, die größtenteils ganz elementar, aber trotzdem sehr ideenreich und mathematisch interessant sind. Wir müssen aber für unseren Zweck hier eine andere berühmte Ungleichung geben, die von *Jakob Bernoulli* (1689) stammt, und Folgendes behauptet: ist u eine reelle Zahl, die größer als -1 und nicht gleich 0 ist, so gilt für jede natürliche Zahl $n \geqq 2$ die Ungleichung

$$(1+u)^n > 1+nu. \qquad (1)$$

Den Beweis führen wir durch vollständige Induktion, mit $n=2$ anfangend. In der Tat, für $n=2$ ist die Behauptung richtig, da $(1+u)^2=1+2u+u^2>1+2u$ ist. Wenn aber die Ungleichung (1) für irgendein $n \geqq 2$ schon bewiesen ist, so folgt daraus, daß auch

$$(1+u)^{n+1}=(1+u)^n(1+u)>(1+nu)(1+u)$$
$$=1+(n+1)u+nu^2>1+(n+1)u$$

ist, d. h. die Behauptung (1) gilt auch für $n+1$. Damit ist die Bernoullische Ungleichung (1) für alle $n=2, 3, \ldots$ bewiesen.

[Wenn Ihr diese einfache Beweisführung aufmerksam verfolgt habt, so könnt Ihr leicht auf die folgende Frage antworten: wo haben wir die Voraussetzungen $u \neq 0$ und $u>-1$ benutzt?]

In den Elementen der mathematischen Analysis und auch beim Studium von elementaren Funktionen, insbesondere der exponentiellen und der logarithmischen Funktion, spielt die Zahlenfolge*

$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n=1, 2, \ldots$, eine außerordentlich wichtige Rolle. Diese Zahlenfolge strebt mit wachsendem n einem Grenzwert zu, der von *Leonhard Euler* (1736) mit e bezeichnet worden ist. Daß dieser Grenzwert

$$e=2.7182818284590\ldots$$

existiert und mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden kann, wird mit viel feineren Mitteln begründet als wir zur Verfügung haben. Wir brauchen aber nur eine viel einfachere Tatsache, nämlich daß die Folge a_n beschränkt ist, und zwar werden wir mit ganz elementaren Mitteln zeigen, daß $a_n \geqq 3$ ist.

Zu diesem Zweck beweisen wir.

1° Die Zahlenfolge $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ wächst mit n, d. h. $a_{n+1}>a_n$;

2° Die Zahlenfolge $b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n=1, 2, \ldots$, nimmt ab mit wachsendem n, d. h. $b_{n+1}<b_n$.

Der Beweis wird mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung (1) geführt. Zuerst betrachten wir das Verhältnis

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{(n+2)^{n+1}n^n}{(n+1)^{2n+1}}$$
$$=\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{(n^2+2n)^n}{(n+1)^{2n}}=\frac{n+2}{n+1}\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n$$
$$=\frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n$$

und wenden die Ungleichung (1) mit $u=-\frac{1}{n^2+2n+1}$ an. Wir bekommen somit die Abschätzung

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}>\frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{n}{n^2+2n+1}\right)$$
$$=\frac{(n+2)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2+2n+1)}=\frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1}>1,$$

aus der sofort $a_n+1>a_n$ folgt.

In genau derselben Weise formen wir $\frac{b_n}{b_{n+1}}$ um und wenden die Bernoullische Ungleichung an:

$$\frac{b_n}{b_{n+1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}=\frac{(n+1)^{2n+3}}{n^{n+1}(n+2)^{n+2}}$$
$$=\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{(n+1)^{2(n+1)}}{(n^2+2n)^{n+1}}=\frac{n+1}{n+2}\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1}$$
$$>\frac{n+1}{n+2}\left(1+\frac{n+1}{n^2+2n}\right)=\frac{(n+1)(n^2+3n+1)}{(n+2)(n^2+2n)}$$
$$=\frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n}>1$$

was auch zu beweisen war. [Streng genommen, haben wir die Behauptung 1° nur für $n \geqq 2$ bewiesen, aber für $n=1$ ist sie offenbar auch richtig: $a_1=2$ und $a_2=2.25$

Um nun den Beweis der Beschränktheit der a_n, $a_n \leqq 3$, zu Ende zu führen, bemerken wir, daß es genügt $a_n \leqq 3$ für $n \geqq 10$ zu beweisen (da die a_n wachsen). Wegen $1<1+\frac{1}{n}$ gilt $a_n<a_n\left(1+\frac{1}{n}\right)=b_n$, und da die b_n abnehmen, ist $b_n \leqq b_{10}$ für alle $n \geqq 10$, folglich

$$a_n<b_n \leqq b_{10}=1.1^{11}$$

für $n \geqq 10$.

Wenn wir nachrechnen, so erhalten wir:

$$1.1^{11}=1.1\cdot(1.1^5)^2<1.1\cdot(1.62)^2$$
$$<1.1\cdot 2.7<3.$$

Wir haben eigentlich eine etwas schärfere Abschätzung als $a_n \leqq 3$ bekommen, aber das ist für uns belanglos.

Jetzt können wir zu unserem eigentlichen Ziel — der *Abschätzung von Fakultäten* — übergehen. Bekanntlich ist

$$m!=1\cdot 2\ldots m,$$

so daß $1!=1$, $2!=2$, $3!=6$, $4!=24$, $5!=120$, $6!=720$ usw.

[Es wird noch definitionsgemäß $0!=1$ gesetzt.]

Die Fakultäten $m!$ lassen sich schwer abschätzen, wenn man von trivialen Abschätzungen

$$2^{m-1} \leqq m! \leqq m^{m-1}$$

absieht, die man erhält, wenn man die in $m!$ auftretenden (von 1 versch.) Faktoren einmal sämtlich durch 2, zum anderen sämtlich durch m ersetzt. Eine etwas feinere Abschätzung bekommt man, wenn man die AG-Ungleichung anwendet (allerdings für $m-1$ Zahlen):

$$(x_1\ldots x_{m-1})^{\frac{1}{m-1}} \leqq \frac{x_1+\ldots+x_{m-1}}{m-1},$$

wo $x_1, \ldots, x_{m-1}$ positive Zahlen sind. Setzt man hierin $x_k=k+1$, $k=1, \ldots, m-1$, ein, so bekommen wir die Abschätzung

$$(m!)^{\frac{1}{m-1}} \leqq \frac{2+3+\ldots+m}{m-1}=\frac{m+2}{2},$$

oder $\qquad m! \leqq \left(\frac{m+2}{2}\right)^{m-1}$,

die ungefähr um den Faktor $\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}$ besser ist als die obige Abschätzung m^{m-1}. Beachten wir aber, daß die AG-Ungleichung für eine beliebige Anzahl von Zahlen keine allzu

* Zum Begriff der Zahlenfolge siehe H. Lohse in *alpha* 3 bis 6/68

leicht beweisbare mathematische Tatsache ist!**

Wir haben jetzt alle Hilfsmittel bereit, um eine ziemlich gute untere Abschätzung für $m!$ abzuleiten (u. zw. eine viel bessere als 2^{m-1}). Zu diesem Zweck schreiben wir die bewiesene Ungleichung $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqq 3$ für $n=1, 2, \ldots, m$ auf und multiplizieren diese m Ungleichungen miteinander. Dann erhalten wir die Ungleichung

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\left(1+\frac{1}{3}\right)^3\ldots\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \leqq 3^m,$$

oder, da das Produkt auf der linken Seite gleich

$$\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^3\ldots\left(\frac{m+1}{m}\right)^m = \frac{(m+1)^m}{m!}$$

ist, die Ungleichung

$$\frac{(m+1)^m}{m!} \leqq 3^m,$$

woraus die untere Abschätzung von $m!$ folgt, die unser Hauptziel ist:

$$m! \geqq \left(\frac{m+1}{3}\right)^m,$$

eine, wie gesagt, viel schärfere Abschätzung als 2^{m-1}. Es lohnt sich noch, anstatt der oberen Abschätzung $m! \leqq \left(\frac{m+2}{2}\right)^{m-1}$, die wir durch die AG-Ungleichung abgeleitet und somit im Rahmen unserer Betrachtungen hier nicht bewiesen haben, eine etwas weniger scharfe obere Abschätzung abzuleiten, die nun fast umsonst erhalten werden kann. Aus dem Wachstum der Folge $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ schließen wir, daß $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqq a_1 = 2$ für $n \geqq 1$ ist. Stellen wir diese Ungleichungen für $n=1, 2, \ldots, m$ auf, und multiplizieren wir sie miteinander, so bekommen wir wie oben:

$$\frac{(m+1)^m}{m!} \geqq 2^m.$$

Es gilt also die Abschätzung

$$m! \leqq \left(\frac{m+1}{2}\right)^m$$

(die der Größenordnung nach etwas schwächer ist, als die eben erwähnte). Somit haben wir ziemlich symmetrische Schranken für die Fakultät:

$$\left(\frac{m+1}{3}\right)^m \leqq m! \leqq \left(\frac{m+1}{2}\right)^m.$$

Diese Schranken sind schon nicht so schlecht, denn in der Tat (was viel schwerer zu beweisen ist) kann für genügend große m im Nenner der linken Seite anstatt der 3 jede Zahl, die größer als e ist, gesetzt werden, und im Nenner der rechten Seite kann anstatt der 2 jede positive Zahl, die kleiner als e ist, gesetzt werden. In anderen Worten, und das ist eine tiefliegende analytische Aussage, gilt für beliebige λ und μ, die den Bedingungen $0<\lambda<e<\mu$ genügen:

$$\left(\frac{m+1}{\mu}\right)^m \leqq m! \leqq \left(\frac{m+1}{\lambda}\right)^m$$

für alle m, die größer sind als eine gewisse natürliche [von λ und μ abhängige] Zahl.

Wir können jetzt schließlich eine verhältnismäßig schwere Aufgabe lösen, die erst vor einigen Jahren vorgeschlagen wurde. Es handelt sich um den Beweis der Ungleichung

$$(M!)! \geqq [(M-1)!]^M,$$

$M=1, 2, \ldots$. Sie folgt sofort aus der Abschätzung $m! \geqq \left(\frac{m+1}{3}\right)^m > \left(\frac{m}{3}\right)^m$, die wir für $m=M!$ anwenden und somit die Ungleichung

$$(M!)! = \left(\frac{M!}{3}\right)^M \geqq [(M-1)!]^{M!}$$

bekommen, wenn wir beachten, daß für $M \geqq 3$

$$\frac{M!}{3} \geqq (M-1)!$$

ist. Was $M=1$ und $M=2$ betrifft, so kann für diese Werte die zu beweisende Ungleichung direkt verifiziert werden.

Zum Schluß einige Aufgaben für interessierte Leser.

■ 1 ■ Man zeige, daß

$$(M!)! \geqq M[(M-1)!]^M$$

für alle natürlichen M.

[Man gehe etwas sorgfältiger mit den Abschätzungen vor, und die schärfere Ungleichung ist da!]

■ 2 ■ Man zeige für $m=1, 2, \ldots$, daß die Ungleichung

$$(2m)! \geqq \frac{(2^m m!)^2}{m+1} \quad \text{gilt.}$$

[Vollständige Induktion, oder ein anderer Weg?]

■ 3 ■ Es ist zu beweisen, daß für $m=1, 2, \ldots$ die Ungleichung

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2m)}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-1)} > \sqrt{m} \quad \text{erfüllt ist.}$$

■ 4 ■ Für $m=2, 3, \ldots$ gilt die Ungleichung

$$2!4!6!\ldots(2m)! > [(m+1)!]^m.$$

V. I. Lewin

** siehe z. B. P. P. Korowkin, Ungleichungen Deutscher Verlag d. Wissenschaften (Band IV, 2.45 M)

Lenin als Gymnasiast

Mit 9 Jahren wurde *Lenin* Schüler des Simbirsker Gymnasiums. Er war ein fleißiger und disziplinierter Schüler. Seine Schulkameraden hatten ihn gern, weil er immer hilfsbereit war und viele lustige Einfälle hatte. Im Sommer ging er gern schwimmen, im Winter lief er Schlittschuh und spielte Schach. Am Schuljahresende wurde er stets mit Auszeichnung in die nächste Klasse versetzt. Unser Bild zeigt *W. I. Lenin* als Abiturient. Daneben sehen wir einen Auszug aus seinem Abschlußzeugnis in deutscher Sprache.

Abschluß-Zeugnis

Wladimir Uljanow, rechtgläubig, Sohn eines Beamten, geboren in Simbirsk am 10. April 1870, der acht Jahre in dem Simbirsker Gymnasium gelernt hat, ausgehändigt und bestätigt:

erstens, daß auf Grund der Beobachtungen während seiner Lehrzeit im Simbirsker Gymnasium sein Betragen im allgemeinen ausgezeichnet war, die Pünktlichkeit des Stundenbesuches und Ausführung der Schularbeiten, wie auch der schriftlichen Arbeiten waren ausgezeichnet, Fleiß — ausgezeichnet und die Wißbegier in allen Fächern war groß, besonders in allen Sprachen, und zweitens, daß bei ihm folgende Kenntnisse festgestellt wurden:

Russische Sprache und Sprachkunde	5
Lateinische Sprache	5
Griechische Sprache	5
Mathematik	5
Geschichte	5
Geographie	5
Physik und mathematische Geographie	5
Deutsche Sprache	5
Französische Sprache	5

Zur Würdigung des ausgezeichneten Betragens und Fleißes und der ausgezeichneten Erfolge in den Wissenschaften, besonders in den alten Sprachen, beschließt der Pädagogische Rat, ihn — *Uljanow* — mit der Goldenen Medaille auszuzeichnen.

(Die Note 5 in der Abschrift des Zeugnisses von *W. I. Lenin* entspricht unserer Note 1.)

Ornamente

Teil 2

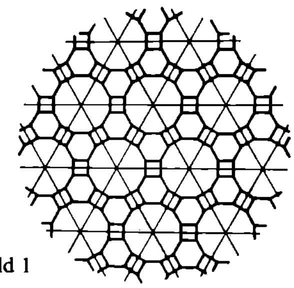


Bild 1

▲ A 6 Stelle in einer Tabelle alle Symmetrieoperationen für ein Quadrat zusammen! Überprüfe, ob die in unserem letzten Beitrag (*alpha*, Heft 3) genannten Eigenschaften I und II gelten!

Definition: Eine Menge von Bewegungen mit den folgenden Eigenschaften a) und b) nennen wir eine *Bewegungsgruppe*.

a) Die Nacheinanderausführung zweier Bewegungen aus der Menge ist wieder eine Bewegung aus derselben Menge.

b) Mit jeder Bewegung ist auch ihre Inverse aus der gegebenen Menge.

Satz: Die Symmetrieoperationen einer Figur bilden eine Bewegungsgruppe.

Die Bewegungsgruppe einer Figur wird auch ihre *Symmetriegruppe* genannt.

Beispiele:

1. Die Symmetriegruppe des Buchstaben A besteht aus zwei Elementen: aus der Identität und aus der Spiegelung an der Symmetrieachse des Buchstabens. Die Symmetriegruppe des Buchstabens *Q* enthält nur die Identität.
2. Die Symmetriegruppe eines gleichschenkligen Dreiecks *ABC* besteht aus 6 Elementen: aus der Identität, aus den Drehungen d_1, d_2, und aus den Spiegelungen s_1, s_2, s_3.
3. Die Symmetriegruppe eines Kreises besitzt unendlich viele Elemente.

Gewisse Symmetriegruppen der Ebene werden *Ornamentgruppen* genannt. Dabei unterscheidet man Rosettengruppen, Friesgruppen und Wandmustergruppen.

Mit ihnen wollen wir uns nun beschäftigen.

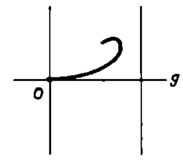
Beispiele für Rosettengruppen

▲ A 7 a) Zeichne eine Figur entsprechend Bild 2! Bestimme das Bild der Figur bei der Drehung um 0 mit einem Drehwinkel von 180°!

b) Wende auf die Figur im Bild 2 zweimal nacheinander die Drehung um 0 mit einem Drehwinkel von 120° an!

c) Wende auf die Figur im Bild 2 Drehungen um den Punkt 0 an, deren Drehwinkel $\alpha=\frac{360°}{n}$ ($n=4, 5, 6$) beträgt!

Bild 2



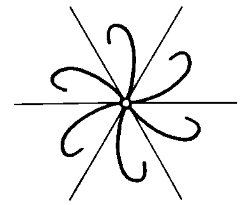


Bild 3

Die Bewegungsgruppen in den Aufgaben 7a) bis 7c) sind Beispiele für Rosettengruppen. Diese Gruppen bestehen aus Drehungen um einen gegebenen Punkt, deren Drehwinkel

$\alpha=k\cdot\frac{360°}{n}$ ($n=2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ $1\leqq k\leqq n$; k natürliche Zahl) betragen.

Weitere Rosettengruppen ergeben sich, wenn außer den Drehungen geeignete Geradenspiegelungen betrachtet werden. Die Spiegelachsen dieser Spiegelungen gehen dabei durch das Drehzentrum und halbieren jeweils den Drehwinkel.

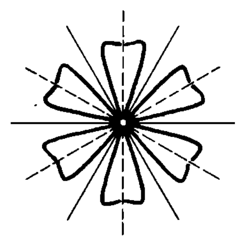


Bild 4

▲ A 8 a) Wiederhole die Aufgaben 7a) bis 7c) und bestimme außerdem bei jeder Aufgabe die Bilder bei den Spiegelungen an den geeigneten Winkelhalbierenden!

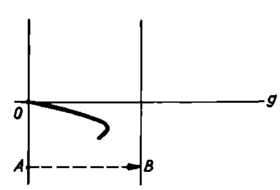
b) Entwirf weitere Rosetten!

Rosettengruppen sind Ornamentgruppen, die entweder nur aus Drehungen um einen festen Punkt mit Drehwinkel $\alpha=k\cdot\frac{360°}{n}$ oder aus Drehungen und gewissen Geradspiegelungen entstehen.

Beispiele für Friesgruppen

▲ A 9 a) Zeichne entsprechend Bild 5 einen Streifen mit einer beliebigen Figur und wende darauf mehrmals nacheinander die Verschiebungen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BA}$ an!

Bild 5



b) Wende auf die Figur in Bild 5 die Verschiebungen $2\cdot\overrightarrow{AB}$ und $2\cdot\overrightarrow{BA}$ an und außerdem noch Drehungen um den Punkt 0 mit $\alpha=180°$ als Drehwinkel!

c) Wende auf die Figur in Bild 5 die Verschiebungen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BA}$ an! Bestimme außerdem die Bilder der Figuren bei der Spiegelung an der Geraden g!
d) Untersuche die Figur in Bild 6 auf ihre Symmetrieoperationen! Denke dir dabei die Figur nach links und rechts in entsprechender Weise beliebig weit gezeichnet!

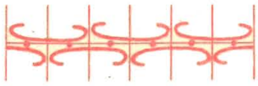


Bild 6

Ornamentgruppen, die nur aus gleich oder entgegengesetzt orientierten Verschiebungen, geeigneten Drehungen mit $\alpha = 180°$ als Drehwinkel bzw. geeigneten Geradenspiegelungen bestehen, werden Friesgruppen genannt.

▲ A 10 Bei den Rosetten- bzw. Friesgruppen werden bestimmte Teile der Ebene ständig wiederholt. Ein derartiges Teilgebiet der Ebene wird *Grundbereich* genannt. Überlege, welche Eigenschaft je zwei Grundbereiche eines Ornaments besitzen!

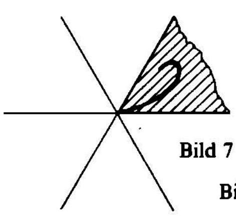


Bild 7

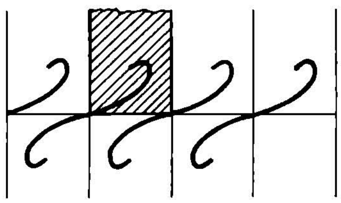


Bild 8

Beispiele für Wandmustergruppen

Die interessantesten Ornamentgruppen sind die sogenannten Wandmustergruppen. Die Grundbereiche, die ständig wiederholt werden, sind endlich. Wandmustergruppen sind dadurch gekennzeichnet, daß sie zwei Verschiebungen mit verschiedenen Verschiebungsrichtungen enthalten. Die einfachsten Wandmustergruppen sind diejenigen, die keine Drehung enthalten.

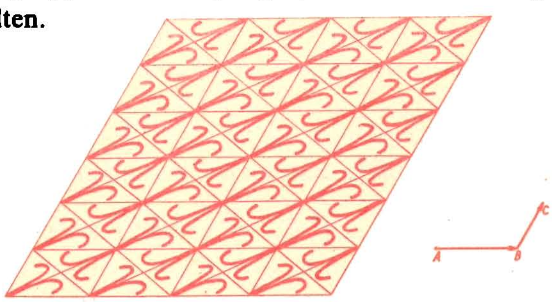


Bild 9

▲ A 11 Zeichne ein Parallelogramm *ABCD* und in seinem Innern eine geeignete Figur! Wende auf diesen Grundbereich geeignete Verschiebungen an!

Bild 10

Eine zweite Wandmustergruppe ergibt sich, wenn in Aufgabe 11 außer geeigneten Verschiebungen auch die Drehung um den Schnittpunkt der Diagonalen des Parallelogramms mit einem Winkel von 180° als Drehwinkel zugelassen wird.

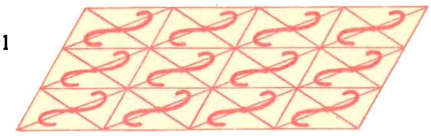


Bild 11

■ A 12 Wiederhole Aufgabe 11 und bestimme außerdem das Bild bei der Spiegelung an der Diagonalen *AC*!

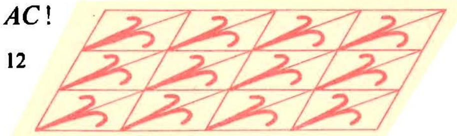


Bild 12

Durch die folgende Vorschrift ergibt sich ein Wandmuster, das eine Vielzahl von Symmetrieoperationen besitzt:

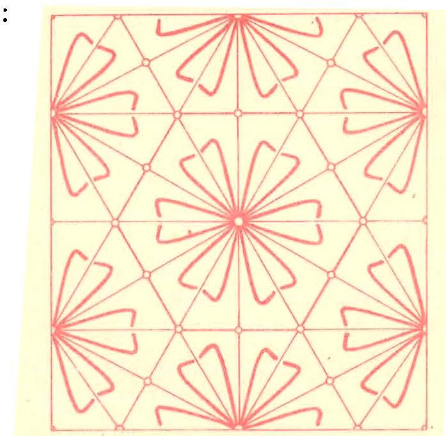


Bild 13

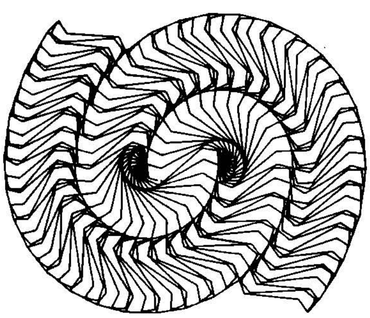
1. Konstruiere ein regelmäßiges Sechseck und zeichne sämtliche Symmetrieachsen!
2. Wähle entsprechend Bild 13 ein Dreieck und zeichne innerhalb des Dreiecks eine beliebige Figur!
3. Spiegle die Figur an den Seiten des Dreiecks!
4. Führe den Prozeß der Spiegelung entsprechend der Teilvorschrift 3. beliebig fort!

Wandmustergruppen waren bereits im Altertum bekannt. Die systematische Untersuchung der Wandmustergruppen mit mathematischen Methoden erfolgte am Ende des vergangenen Jahrhunderts.

R. Bittner

Literatur: Coxeter: Unvergängliche Geometrie,
Fejes-Tóth: Reguläre Figuren

Parkettierung von *Vonderberg* (1936, 1937): Die neuneckigen Parkettplatten sind so angeordnet, daß sie eine Spirale mit zwei Polen bilden.



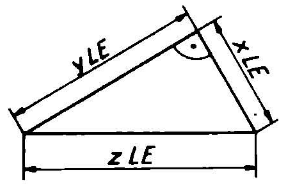
Nomogramme ersetzen oder kontrollieren unsere Berechnungen

Teil 2

Wir lernen das Anfertigen von Nomogrammen mit drei parallelen Funktionsleitern

Die jetzt zu betrachtenden Nomogramme gehören zu Formeln, die drei Variable enthalten. Wir wollen uns zunächst an einem Beispiel orientieren: In der Klasse 8 lernten beziehungsweise lernen wir noch den Lehrsatz des Pythagoras kennen: In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat. (Im rechtwinkligen Dreieck nennt man die dem rechten Winkel anliegenden Seiten Katheten, die ihm gegenüberliegende Seite Hypotenuse.):

$$x^2+y^2=z^2$$



Diese sogenannte *Pythagoreische Gleichung* wird im Unterricht oft benutzt, um in einem rechtwinkligen Dreieck mit zwei bekannten Seitenlängen die fehlende dritte Seite zu berechnen. Als Beispiel sei hierzu die folgende Aufgabe gelöst: Berechne die Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten 8,4 cm und 5,2 cm!

Rechnerische Lösung:

$z^2=8{,}4^2+5{,}2^2$	Errechnen der Quadrate bzw. Benutzen der Tafel der Quadratzahlen
$z^2=70{,}56+27{,}04$	Ausführen der Addition
$z^2=97{,}60$	Radizieren bzw. Benutzen der Tafel der Quadratwurzeln (Da z die Maßzahl einer Strecke ist, gilt $\lvert z\rvert=z$.)
$\lvert z\rvert=9{,}879$	

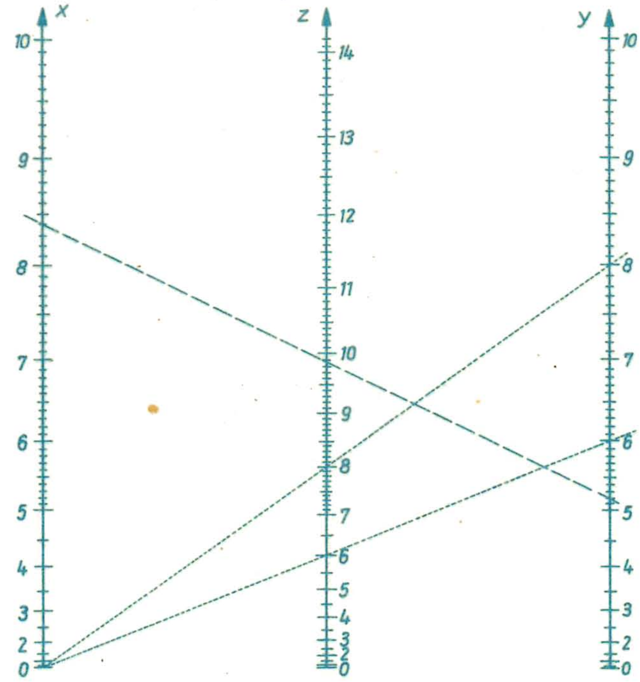
Die Hypotenuse dieses Dreiecks hat die Länge 9,9 cm.

b) Lösung mittels Nomogramm:

Ein Lineal wird so auf das abgedruckte Nomogramm gelegt, daß auf der Ablesekante des Lineals die Punkte mit den Koten 8, 4 der x-Leiter und 5, 2 der y-Leiter liegen. (Siehe gestrichelte Gerade der Zeichnung!) Die Ablesekante eines so angelegten Lineals schneidet die z-Leiter im Punkt mit der Kote 9, 9. Mithin ist 9,9 cm die gesuchte Länge der Hypotenuse.

Die x-Leiter und die y-Leiter dieses Nomogramms sind offenbar zueinander kongruent und zu der laut Aufgabe 1 gezeichneten Funktionsleiter ähnlich.

Diese Bemerkungen zeigen, daß es offenbar nicht schwer ist, ein derartiges Nomogramm zu zeichnen. Um genauer ablesen zu können, wollen wir das oben gezeichnete Nomogramm vergrößert selbständig nach der angegebenen Vorschrift zeichnen:



8. Aufgabe:

1.) Zeichne drei parallele, gleichorientierte Geraden, x-, y- und z-Leiter genannt, von denen zwei benachbarte den Abstand 7 cm haben. Benenne die Schnittpunkte dieser Geraden mit einer zu ihnen senkrechten Geraden mit A, B und C!

2.) Zeichne auf der x-Leiter mit Bezugspunkt A eine Funktionsleiter zu $\xi=x^2$ *) für $0\leqq x\leqq 10$ und $1\text{ LE}=\frac{1}{4}\text{ cm}$!

3.) Zeichne auf der y-Leiter mit Bezugspunkt B eine Funktionsleiter zu $\eta=y^2$ *) für $0\leqq y\leqq 10$ und $1\text{ LE}=\frac{1}{4}\text{ cm}$!

4.) Zeichne auf der z-Leiter mit Bezugspunkt C wenigstens teilweise**) eine Funktionsleiter zu $\zeta=\frac{z^2}{2}$ *) für $0\leqq z\leqq 14{,}2$ und $1\text{ LE}=\frac{1}{4}\text{ cm}$!

Das gemäß Aufgabe 8 gezeichnete Nomogramm legen wir mit einer kurzen Gebrauchsanweisung versehen

*) In allen drei Fällen handelt es sich um die Funktionen $y=x^2$ bzw. $y=\frac{x^2}{2}$. Es sind lediglich, um Verwechslungen auszuschließen, Umbenennungen vorgenommen worden. ξ (Ksi), η (Eta) und ζ (Zeta) sind griechische Buchstaben.

**) Durch die Bemerkung „wenigstens teilweise" soll darauf hingewiesen werden, daß für $0\leqq z\leqq 10$ diese Leiter ohne Berechnung später auf zeichnerischem Wege kotiert werden kann.

unserer Tafel bei, damit wir es bei Bedarf stets zur Verfügung haben. Doch vorher lösen wir mittels dieses Nomogramms noch die folgende Aufgabe:

9. Aufgabe:
In einem rechtwinkligen Dreieck hat die eine Kathete die Länge 6,30 cm und die Hypotenuse die Länge 11,2 cm. Ermittle die Länge der zweiten Kathete
a) mittels Nomogrammes,
b) durch Berechnung mittels Pythagoreischer Gleichung und
c) durch Konstruktion des Dreiecks und Messen seiner zweiten Kathete!

Natürlich muß der Nachweis, daß das laut Aufgabe 8 gezeichnete Nomogramm die Ergebnisse von Berechnungen nach der Pythagoreischen Gleichung durch direktes Ablesen zu finden gestattet, noch geführt werden. Aus diesem Grunde beweisen wir den folgenden Satz:

Bezeichnet man als Lösung des in Aufgabe 8 gezeichneten Nomogramms jedes Zahlentripel $(x;\ y;\ z)$, dessen zugeordnete Leiterpunkte P, Q und R in einer Geraden liegen, so gilt $x^2+y^2=z^2$.

Voraussetzung: Die den Zahlen x, y und z im Nomogramm der Aufgabe 8 zugeordneten Leiterpunkte P, Q und R liegen in einer Geraden.

Behauptung: $x^2+y^2=z^2$

Beweis: Wegen $AP \parallel CR \parallel BQ$ und $\overline{AC}=\overline{BC}$ ist CR Mittellinie im Trapez $ABQP$. Also gilt:
$$\overline{CR}=\frac{\overline{AP}+\overline{BQ}}{2}$$
Gemäß Aufgabe 8 und der Definition der Funktionsleiter sind die Maßzahlen der in 1 LE $=\frac{1}{4}$ cm gemessenen Strecken AP, BQ und CR gleich x^2, y^2 und $\frac{z^2}{2}$.

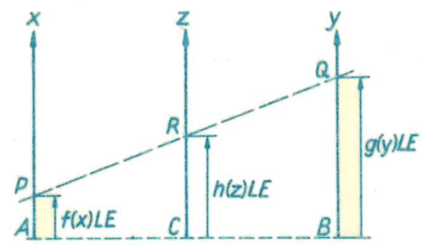
Also besteht zwischen diesen Maßzahlen die Beziehung
$$\frac{z^2}{2}=\frac{x^2+y^2}{2}.$$
Durch Multiplizieren beider Seiten dieser Gleichung mit 2 folgt $z^2=x^2+y^2$, *w.z.b.w.*

Wie in Fußnote ** angekündigt, können wir nunmehr die z-Leiter sehr einfach kotieren. Für $x=0$ folgt aus $x^2+y^2=z^2$ die Gleichung $y^2=z^2$. Wegen $y \geqq 0$ und $z \geqq 0$ folgt hieraus weiter $y=z$. Das bedeutet, daß alle Geraden durch den Punkt der x-Leiter mit der Kote 0 die y- und z-Leiter jeweils in Punkten mit gleichen Koten schneiden müssen (Siehe punktierte Geraden obiger Abb.!). Mittels dieser Eigenschaft läßt sich die z-Leiter teilweise kotieren.

Jetzt wollen wir natürlich lernen, wie weitere Nomogramme mit drei parallelen Leitern anzufertigen sind. Als wichtige Vorbereitung dazu beantworten wir die folgende Frage:

Welcher Gleichung genügen die Lösungstripel $(x;y;z)$ eines Nomogramms des folgenden Typs?

1.) Die drei Leitern des Nomogramms sind parallel und gleichorientiert und benachbarte Leitern haben den gleichen Abstand voneinander.
2.) Die Bezugspunkte aller drei Leitern liegen auf einer Senkrechten zu den drei Leitern.
3.) Für alle drei Funktionsleitern wird die gleiche Längeneinheit 1 LE gewählt.
4.) Die den drei Funktionsleitern zugeordneten Funktionen haben die Gleichungen:
x-Leiter: $\xi=f(x)$ y-Leiter: $\eta=g(y)$ z-Leiter: $\zeta=h(z)$.
5.) Ein Zahlentripel $(x;\ y;\ z)$ heißt Lösung dieses Nomogrammes, falls die den drei Koten x, y und z zugeordneten Leiterpunkte P, Q und R in einer Geraden liegen.



Wir erarbeiten uns die Antwort: $(x;\ y;\ z)$ sei ein Lösungstripel. Dann liegen die den Zahlen x, y und z zugeordneten Leiterpunkte P, Q und R auf einer Geraden. Unter der zusätzlichen Annahme
$f(x)>0$, $g(y)>0$ und $h(z)>0$ ist CR Mittellinie im Trapez $ABQP$.
Mithin gilt analog zu oben:
$$\overline{CR}=\frac{\overline{AP}+\overline{BQ}}{2}$$
Für die Maßzahlen der in LE gemessenen Strecken AP, BQ und CR gilt also:
$$h(z)=\frac{f(x)+g(y)}{2}$$
Die hieraus folgende „Schlüsselgleichung“ unseres Nomogrammtypes gilt, wie aus zusätzlichen Überlegungen folgt, nicht nur für $f(x)>0$, $g(y)>0$ und $h(z)>0$, sondern allgemein.

Damit lautet die Antwort auf die gestellte Frage: Die Lösungen $(x;\ y;\ z)$ eines Nomogramms des zu betrachtenden Typs genügen der Schlüsselgleichung $2h(z)=f(x)+g(y)$.

W. Träger

In Anerkennung hervorragender Verdienste bei der Entwicklung des Sozialismus und bei der Festigung und Stärkung der Deutschen Demokratischen Republik wurden anläßlich des VII. Pädagogischen Kongresses in Berlin mit dem

Orden Banner der Arbeit

ausgezeichnet:
Leitung des Klubs „Junger Mathematiker“ in Cottbus
Oberlehrer Manfred Mäthner, Oberstudienrat Gerhard Schulze (Mitglied des Redaktionskollegiums unserer Zeitschrift), Oberlehrer Erwin Wenzel, Verdienter Lehrer des Volkes.
Die Redaktion *alpha* gratuliert im Namen des Redaktionskollegiums und ihrer Leser aufs herzlichste und wünscht weitere Erfolge in der außerunterrichtlichen Arbeit im Fach Mathematik.

Einführung in die Elektronische Datenverarbeitung

EDV Teil 10

3. Programmierung und Flußdiagramme

3.0. Einleitung

Auf die Frage, was ein Mathematiker sei, hörte ich einmal die Antwort: „... jemand, der mit großen Zahlen schnell rechnen kann.“ Eine solche naive Vorstellung ist nicht nur unvollständig, sie ist sogar falsch. Man denke an einen Mathematikdozenten, der mühelos seitenlange Formelableitungen vorträgt, aber in Bedrängnis gerät, wenn er $14 \cdot 38$ im Kopf bewältigen soll. Das erscheint paradox und liefert Stoff für Anekdoten, ist aber, genauer betrachtet, durchaus verständlich. Der Mathematiker hat andere Aufgaben als das einfache Rechnen. Versuchen wir, die Tätigkeit eines praktisch arbeitenden Mathematikers allgemein zu nennen. Er muß

1. das in der Praxis auftretende Problem *mathematisch formulieren,*
2. einen geeigneten *Weg zur Lösung* des Problems suchen,
3. *allgemeine Aussagen* über ein Problem machen, z. B. über Lösbarkeitsbedingungen usw.

Diese Arbeit entspricht dem, was die meisten Schüler bei den sogenannten „Textaufgaben“ fürchten. Die in der Praxis zu lösenden Probleme sind nun einmal — meistens sehr komplizierte — Textaufgaben. Das mathematische Formulieren eines Problems und das Finden eines Lösungsweges sind *schöpferische,* mit *Denken* verbundene Tätigkeiten. Sie hören dort auf, wo die Fortsetzung des Lösungsweges nur noch ein *Algorithmus* ist, also ein mechanisch ablaufendes Verfahren, von einem (menschlichen) *Rechner,* der mit den nötigen mathematischen „Handgriffen“ vertraut ist, auch dann ausführbar, wenn ihm das tiefere Verständnis fehlt, er also in diesem Sinne kein „Mathematiker“ ist.

Beispiel: Das Problem enthielt eine unbekannte Größe x, und es ist gelungen, eine quadratische Gleichung

$$x^2+px+q=0 \quad (p \text{ und } q \text{ seien bekannt})$$

anzugeben, von der man weiß, daß sie eine positive und eine negative Lösung besitzt, wobei aus praktischen Gründen die negative Lösung ausscheidet.

Oder: Die Aufgabe enthielt drei unbekannte Größen, und man hat ein lineares System von drei Gleichungen mit diesen drei Unbekannten gefunden sowie mit Hilfe eines Kriteriums festgestellt, daß das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist.

Wir unterscheiden also bei der Lösung mathematischer Aufgaben die

1. Stufe, die intellektuelle, schöpferische Tätigkeit, das *Denken,* von der weniger anspruchsvollen
2. Stufe, bei der nur *Algorithmen* ablaufen. Zu dieser Stufe gehören auch die Grundrechenoperationen, füllen sie aber nicht aus, denn (siehe das letzte Beispiel!) auch *Entscheidungen* verschiedener Art gehören dazu. Häufig ist z. B. an einer bestimmten Stelle des Lösungsweges zu ermitteln, ob eine Zahl positiv oder negativ ist, oder ob sie größer bzw. kleiner als eine vorgegebene Zahl ist, oder welche von zwei Zahlen die größere ist usw. Vom Ausfall solcher Entscheidungen, d. h. von der Antwort auf *Fragen,* die im Algorithmus einbegriffen sind, hängt dann der weitere Verlauf der Rechnung ab. Die späteren Beispiele werden das noch genauer zeigen.

Welche Rolle spielt nun in diesem Zusammenhang der *Rechenautomat?* Für ihn trifft zum Teil die eingangs genannte naive Definition zu. Er kann nämlich mit „großen“ Zahlen (gemeint sind meistens Dezimalzahlen mit großer Stellenzahl) rasend schnell rechnen, ist also Experte für einen Unterbereich der 2. Stufe. Er leistet einerseits weniger als ein menschlicher Rechner, denn er kann ja, wie die vorigen Abschnitte hoffentlich hinreichend klar gezeigt haben, entsprechend den eingebauten Funktionsschaltungen nur verhältnismäßig einfache Vorgänge wie etwa die duale Addition physikalisch realisieren, diese aber um so schneller; damit leistet er andererseits wesentlich mehr als ein menschlicher Rechner.

Um also eine mathematische Aufgabe für einen Automaten zugänglich zu machen, muß ein Bindeglied geschaffen werden, das am Ende der 1. Stufe beginnt und dort endet, wo der Lösungsweg nur in solche Schritte aufgespalten ist, die der Automat bewältigen kann. Es geht also um das Zerlegen eines vorgegebenen Algorithmus in *automatengerechte Teiloperationen.* Diese von Menschen auszuführende Tätigkeit, mit der wir uns im Folgenden ein wenig beschäftigen wollen, nennt man *Programmieren*, und die Programmierungsvorschrift, d. h. die Folge von Anweisungen, welche Teiloperationen der Reihe nach auszuführen sind, heißt *Programm*. Dabei ist von vornherein zu beachten, daß ein bestehendes Programm nicht für jeden Automaten gleichermaßen geeignet ist. Für einen bestimmten Automatentyp kann ein individuelles Programm hergestellt werden. Das ist dann mit einem weiteren Auflösen von Operationen in automatengerechte Rechenschritte verbunden. Wir werden uns bei den folgenden Beispielen wieder von den durch die Anlage ROBOTRON 300 gegebenen Möglichkeiten leiten lassen. Folgende Fragen werden uns dabei besonders beschäftigen:

1. Wie löst man einen mathematischen Lösungsweg oder eine Formel überhaupt in Teilschritte auf? Wir werden sehen, daß hier schon bei ganz einfach scheinenden Aufgaben einiges zu bedenken ist.
2. Wie bringt man den gefundenen Weg möglichst kurz, übersichtlich und eindeutig verständlich zu Papier? Welche Symbole benutzt man?
3. Wie gibt man das fertige Programm in den Automaten ein? — und im Zusammenhang damit die letzte, dennoch nicht ganz unwichtige Frage: In welcher Form liefert uns der Automat die Rechenergebnisse?

3.1. Das Flußdiagramm

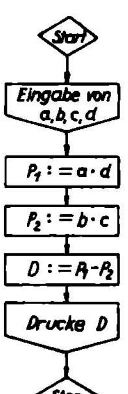
Wir behandeln die ersten beiden Fragen gleichzeitig, und zwar am besten an Hand einiger *Beispiele*.

Beispiel 1: Gegeben seien die Zahlen a, b, c, d, und es ist $ad-bc=D$ *

zu berechnen. Die drei in bestimmter Reihenfolge auszuführenden Teilschritte — in diesem Fall sind sie bereits automatengerecht — nämlich

1. die Multiplikation $a \cdot d$,
2. die Multiplikation $b \cdot c$,
3. die Subtraktion der beiden Produkte,

ergeben das Programm. Dessen Ablauf stellen wir in einem *Flußdiagramm* wie folgt dar:

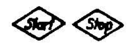


* $ad-bc$ läßt sich auch als zweireihige *Determinante* schreiben:

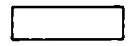
$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Der fortgeschrittene Leser weiß, daß Determinanten ein wichtiges mathematisches Hilfsmittel sind und u. a. bei der Lösung von Gleichungssystemen angewendet werden können.

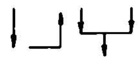
Der Begriff Flußdiagramm bedarf kaum einer Erklärung, (Fluß = Ablauf, zeitliches Nacheinander). Dieses und die folgenden Flußdiagramme sind Kästchendiagramme. Die Kästchenmethode ist eine Methode zur Darstellung von Flußdiagrammen. Die verwendeten Symbole sind durch TGL-Vorschriften standardisiert worden. Vorerst haben wir benutzt:



Organisationskästchen für Programmanfang und Programmende


Operationskästchen (sie enthalten Anweisungen, Befehle)


Kästchen für die Eingabe bzw. Ausgabe von Informationen

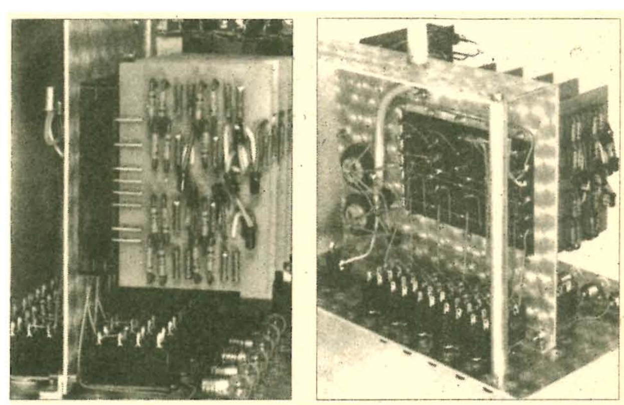

Folgelinien (sie müssen nicht immer, wie in unserem Beispiel, von oben nach unten verlaufen, sondern können z. B. auch Programmverzweigungen darstellen.)

$:=$ Ergibtzeichen

(Dieses Zeichen ist nicht mit dem bisher bekannten Gleichheitszeichen zu identifizieren. Schreibt man $P_1 = a \cdot d$, so sind beide Seiten gleichberechtigt, und man sagt nichts aus über das Zustandekommen der einen oder anderen Größe. Das Zeichen $:=$, gelesen „ergibt sich aus", soll einen Vorgang darstellen. $P := a \cdot b$ heißt: bilde durch Multiplikation aus den vorhandenen Werten der Größen a und b die neue Größe P_1!

Hinter a, d und P_1 stehen Speicherplätze im Automaten. Die unter den Bezeichnungen a und d gerade vorhandenen Werte werden zur Berechnung von P_1 verwendet.) *J. Frormann*

Wir stellen vor: Bernd Bruhn und sein Modell eines elektronischen Addierwerkes



Der Schüler *Bernd Bruhn*, bis August 1970 Schüler der EOS Klement-Gottwald, jetzt Mathematik-Student an der Humboldt-Universität zu Berlin, baute vergangenes Jahr ein Modell zur Erläuterung der Wirkungsweise eines elektronischen Addierwerkes. Das Addierwerk wurde bereits im Abschnitt 2.3 des Beitrages EDV (Heft 2/70) beschrieben. Nebenstehend zeigen wir zwei Abbildungen des Modells, mit dem zwei (höchstens fünfstellige) Dualzahlen addiert bzw. subtrahiert werden können. Es wurde die duale Direktverschlüsselung angewandt; die Eingabe der beiden Zahlen erfolgt mit je 5 Kippschaltern; das Ergebnis der Rechnung kann als Dualzahl an Glühlampen abgelesen werden (Lampe leuchtet: L, Lampe leuchtet nicht: O). *alpha* stellt interessierten Lesern weiteres Material über Wirkungsweise, Aufbau und die Bedienung zur Verfügung. Kennwort: EDV-Modell (dazu 2,00 M in Briefmarken).

X. Olympiade
Junger Mathematiker der DDR

1. Stufe (Schulolympiade)

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

Die Lösungen sowie die Punktbewertungstabellen werden am 21. Oktober veröffentlicht, (siehe Trommel, JW und DLZ).

Olympiadeklasse 5

1. Die Abbildung A 5;1 zeigt unter a bis e von fünf Würfeln je ein Schrägbild. Die Abbildung A 5;1a zeigt ein Netz, aus dem genau ein Würfel hergestellt werden kann, wenn die Seite mit den gefärbten Flächen nach außen kommen soll. Beantworte für jedes der fünf Schrägbilder die Frage, ob es den aus dem abgebildeten Netz hergestellten Würfel darstellen kann oder nicht! (In den Fällen, in denen die Antwort „Ja“ lautet, genügt die Angabe dieser Antwort. In den Fällen, in denen die Antwort „Nein“ lautet, ist sie zu begründen.)

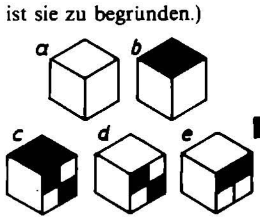


Abb. A 5; 1

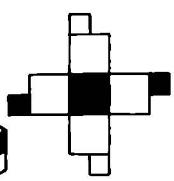


Abb. A 5; 1a

2. In einem alten Buch mit lustigen mathematischen Knobeleien fand Annerose folgenden Vers:

Eine Zahl hab' ich gewählt,
107 zugezählt,
dann durch 100 dividiert
und mit 11 multipliziert,
endlich 15 subtrahiert,
und zuletzt ist mir geblieben
als Resultat die Primzahl 7.

Gibt es wenigstens eine Zahl, die den gegebenen Bedingungen genügt? Wenn ja, ermittle alle diese Zahlen!

3. Gib eine Möglichkeit an, die Zahlen 1; 1; 2; 2; 3; 3; 4; 4; 5; 5; 6; 6; 7; 7; 8; 8 so in die Felder des abgebildeten quadratischen Netzes (Abb. A 5;3) einzutragen, daß als Summe der Zahlen jeder Zeile (waagerecht), jeder Spalte (senkrecht), jeder der beiden Diagonalen (von links oben nach rechts unten und von rechts oben nach links unten) und als Summe der Zahlen in den vier Eckfeldern die Zahl 18 erhalten wird! (Keine Begründung erforderlich)

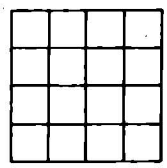


Abb. A 5; 3

4. Hans und Günter wollen Briefmarken tauschen. Auf die Frage nach der Anzahl seiner Tauschmarken antwortet Günter: „Ich habe heute polnische, sowjetische und bulgarische Briefmarken und sonst keine anderen zum Tausch anzubieten. Es sind insgesamt 30 Stück. Die Anzahl der sowjetischen Marken ist größer als die der polnischen, aber kleiner als die der bulgarischen. Die Anzahl der bulgarischen Marken dagegen ist größer als das Vierfache, aber kleiner als das Fünffache der Anzahl meiner sowjetischen Marken.“ Gib alle Möglichkeiten an, die folgende Tabelle so auszufüllen, daß diese Bedingungen erfüllt sind!

Anzahl der polnischen Marken	
Anzahl der sowjetischen Marken	
Ungleichung zwischen der Anzahl der sowjetischen und der Anzahl der polnischen Marken	
Ungleichung zwischen der Anzahl der sowjetischen und der Anzahl der bulgarischen Marken	
Ungleichung zwischen der Anzahl der bulgarischen Marken und dem Vierfachen der Anzahl der sowjetischen Marken	
Ungleichung zwischen der Anzahl der bulgarischen Marken und dem Fünffachen der Anzahl der sowjetischen Marken	

... größeren Flächeninhalt? Um wieviel Ar unterscheiden sich die beiden Flächen?

2. Untersuche, welche der in der Abbildung A 6;2 dargestellten Figuren A bis F sich auf wenigstens eine Weise durch einen einzigen geraden Schnitt so in zwei Teilflächen zerlegen läßt, daß sich diese beiden zur gleichen Figur gehörenden Teilflächen jeweils zu einer Quadratfläche zusammensetzen lassen!

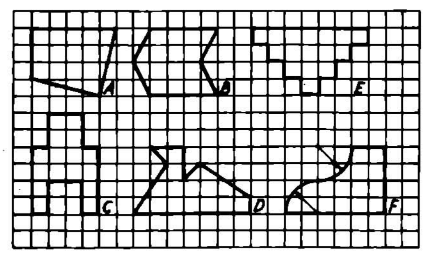


Abb. A 6; 2

Als Lösung genügt in den Fällen, in denen eine Zerlegung der genannten Art möglich ist, je eine entsprechende Zeichnung oder die jeweils zum Quadrat zusammengesetzten aufgeklebten Teilflächen. In den Fällen dagegen, in denen eine Zerlegung und Zusammensetzung der genannten Art nicht möglich ist, genügt als Lösung eine entsprechende Angabe (ohne Begründung).

Olympiadeklasse 6

1. Eine LPG hatte auf zwei Feldern Kartoffeln angebaut. Vom ersten Feld wurden insgesamt 810 t, vom zweiten insgesamt 640 t Kartoffeln geerntet. Auf dem ersten Feld wurde ein Durchschnittsertrag von 180 dt je ha, auf dem zweiten von 200 dt je ha erzielt. Welches von den beiden Feldern hat den

3. Es seien a, b, c, d, e, f, g, h sämtlich paarweise untereinander verschiedene einstellige natürliche Zahlen ungleich Null, und es gelte: $a+b=10$, $c+d+e=16$, $f+g+h=14$. Welche einstellige natürliche Zahl (ungleich Null) würde in diesen drei Aufgaben nicht verwendet? Gib für a, b, c, d, e, f, g, h eine mögliche Lösung an!

4. An 15 Teilnehmer am Wettbewerb der mathematischen Schülerzeitschrift „*alpha*" wurden insgesamt 25 Antwortkarten „sehr gut gelöst" von der Redaktion geschickt, und zwar erhielt jeder dieser Teilnehmer mindestens eine solche Antwortkarte. Außerdem ist über diese 15 Teilnehmer bekannt, daß mindestens ein Teilnehmer genau 2 Antwortkarten, mindestens ein Teilnehmer genau 3 Antwortkarten, mindestens ein Teilnehmer genau 4 Antwortkarten und mindestens ein Teilnehmer genau 5 Antwortkarten erhielten. An einige der 15 Teilnehmer wurde je genau eine Antwortkarte geschickt. Ermittle die Anzahl dieser Teilnehmer!

Olympiadeklasse 7

1. Bei einem Sportfest soll zwischen Jungen Pionieren und FDJlern ein Wettlauf nach folgenden Regeln ausgetragen werden:
Auf den Mittelpunkt einer der kürzeren Seiten eines rechteckigen Spielfeldes (50 m × 70 m) stellt sich ein FDJler, auf den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite ein Pionier. Beide sollen auf ein Kommando auf dem kürzesten Wege von ihren Startplätzen zu der gleichen, auf dem Spielfeld aufgestellten Fahne laufen. Zu diesem Zweck soll die Fahne, wenn die beiden Läufer auf ihren Startplätzen stehen, so aufgestellt werden, daß sie von dem FDJler 50 m, von dem Pionier 25 m entfernt ist. Gib die Anzahl aller Möglichkeiten an, die Fahne gemäß den Bedingungen auf dem Spielfeld aufzustellen!

2. Die Zahl 17 soll als Summe von Quadraten natürlicher, von 0 verschiedener Zahlen dargestellt werden. Gib alle voneinander verschiedenen Möglichkeiten an! (Zwei Darstellungen dieser Art gelten genau dann als verschieden voneinander, wenn wenigstens ein Summand in der einen Darstellung nicht ebenso oft auftritt wie in der anderen Darstellung.)

3. a) Beweise folgenden Satz: Wenn vier natürliche Zahlen eine ungerade Zahl als Summe haben, so haben sie als Produkt eine gerade Zahl.
b) Untersuche, ob für jede gerade Anzahl von natürlichen Zahlen der folgende Satz gilt:
Wenn diese natürlichen Zahlen eine ungerade Zahl als Summe haben, so haben sie als Produkt eine gerade Zahl.

4. $ABCD$ sei in der üblichen Bezeichnungsweise ein Rechteck, und es gelte $\overline{AB} \geqq \overline{BC}$. A_1 sei der Fußpunkt des Lotes von A auf die Diagonale DB. A_2 sei der Schnittpunkt der Halbierenden des Winkels $\sphericalangle DAB$ mit DB, C_2 sei der Schnittpunkt der Halbierenden des Winkels $\sphericalangle BCD$ mit DB und C_1 sei der Fußpunkt des Lotes von C auf DB. Man beweise, daß unter diesen Bedingungen $\sphericalangle A_1AA_2 \cong \sphericalangle A_2AC \cong \sphericalangle ACC_2 \cong \sphericalangle C_2CC_1$ gilt. Dabei sind folgende Fälle zu betrachten:
a) $\overline{AB} = \overline{BC}$
b) $\overline{AB} > \overline{BC}$.

Olympiadeklasse 8

1. Ermittle die Anzahl aller sechsstelligen natürlichen Zahlen, in denen die Ziffernfolge 1970 (d.h. die Grundziffern 1, 9, 7, 0 in dieser Reihenfolge und ohne dazwischenstehende andere Ziffern) auftritt!
Wie lautet die kleinste und wie die größte dieser sechsstelligen Zahlen?

2. Ermittle alle rationalen Zahlen x mit $x \neq 2$, die die folgende Gleichung erfüllen:
$$\frac{3x}{x-2}+1+\frac{4}{x-2}=2+\frac{3(x+1)}{x-2}+\frac{1}{x-2}$$

3. Es sei ΔABC ein beliebiges Dreieck, und es sei D der Berührungspunkt des Inkreises des Dreiecks ΔABC mit der Seite AB.
Beweise: Die Länge der Strecke AD ist gleich der Differenz aus dem halben Umfang des Dreiecks und der Länge der Seite BC.

4. Ein Würfel werde von allen denjenigen Ebenen geschnitten, die durch die Mittelpunkte jeweils der drei von einem Eckpunkt ausgehenden Kanten verlaufen. Dabei entsteht ein Restkörper.
a) Stelle diesen Würfel mit der Kantenlänge $a = 6$ cm und den Restkörper in einem Schrägbild $\left(\alpha = 60°;\ q = \frac{1}{3}\right)$ dar!
b) Ermittle die Anzahl aller Eckpunkte und die Anzahl aller Kanten des Restkörpers!
c) Gib die Form und die Anzahl aller Teilflächen der Oberfläche des Restkörpers an!

Olympiadeklasse 9

1. Auf die Frage nach seinem Alter sagte Herr X: „Die Quersumme der Anzahl meiner Lebensjahre beträgt genau ein Drittel dieser Anzahl. Das Quadrat der Quersumme der Anzahl meiner Lebensjahre ist genau dreimal so groß wie die Anzahl meiner Lebensjahre."
Können die Angaben von Herrn X zutreffen? Wenn ja, wie alt ist Herr X? (Angabe in vollen Lebensjahren)

2. Es seien a, b, c positive reelle Zahlen. In einer Ebene ε liege ein Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$.
Ferner sei S ein Punkt der in A auf ε errichteten Senkrechten, wobei $\overline{AS} = c$ gelte.
Man beweise, daß es dann genau eine Kugel gibt, auf der die Punkte A, B, C, D, S liegen, und berechne aus den gegebenen Längen a, b, c die Länge des Durchmessers dieser Kugel!

3. Man denke sich alle natürlichen Zahlen von 1 bis 1 000 fortlaufend auf folgende Weise hintereinander geschrieben:
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 ... 998 999 1 000.
Es ist zu beweisen, daß die so entstandene Zahl nicht durch 1971 teilbar ist.

4. In einer alten Aufgabensammlung wird das „Urteil des Paris" folgendermaßen beschrieben:
Die Göttinnen *Hera*, *Aphrodite* und *Athene* fragen den klugen *Paris*, wer von ihnen die Schönste sei. Sie machen dabei folgende Aussagen:

Aphrodite: „Ich bin die Schönste" (1)
Athene: „Aphrodite ist nicht die Schönste" (2)
Hera: „Ich bin die Schönste" (3)
Aphrodite: „Hera ist nicht die Schönste" (4)
Athene: „Ich bin die Schönste" (5)

Paris, der am Wegrand ausruht, hält es nicht der Mühe wert, das Tuch, das seine Augen vor den Sonnenstrahlen schützt, zu entfernen. Er soll aber genau eine der drei Göttinnen als die Schönste feststellen. Dabei setzt er voraus, daß alle Aussagen dieser Schönsten wahr, alle Aussagen der beiden anderen Göttinnen jedoch falsch sind. Kann *Paris* unter dieser Voraussetzung die von ihm geforderte Feststellung erhalten? Wenn ja, wie lautet diese?

Olympiadeklasse 10

1. Zwei Schüler A und B spielen miteinander folgendes Spiel. Von einem Haufen mit genau 150 Streichhölzern müssen beide jeweils nacheinander Streichhölzer entnehmen, und zwar jeweils mindestens 1 Streichholz, aber höchstens 10 Streichhölzer, wobei A beginnt. Sieger ist derjenige, der das letzte Streichholz fortnehmen kann. Entscheiden Sie, wer von beiden seinen Sieg erzwingen kann, und geben Sie an, auf welche Weise er mit Sicherheit zum Ziel gelangt!

2. Ist n eine positive ganze Zahl, so bezeichne s_n die Summe aller positiven ganzen Zahlen von 1 bis n.
a) Für welche positive ganze Zahl n erhält man $s_n = 2415$?
b) Für welche positive ganze Zahl m ist s_m genau 69 mal so groß wie m?
Hinweis: Die positiven ganzen Zahlen bilden eine arithmetische Folge. Eine Formel für die Summe der ersten n Glieder einer solchen Folge findet sich im Tafelwerk auf Seite 58.

3. Die Abbildung A 10; 3 zeigt einen konvexen durch ebene Flächen begrenzten Körper im Grund-, Auf- und Kreuzriß. Die Umrisse des dargestellten Körpers sind in den drei Rissen Quadrate mit der Seitenlänge a.
a) Zeichnen Sie einen Schrägriß eines derartigen Körpers ($\alpha = 60°$, $q = 1 : 3$)!
b) Berechnen Sie sein Volumen!

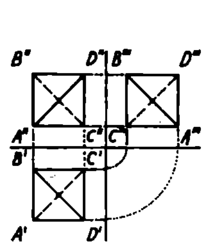


Abb. A 10; 3

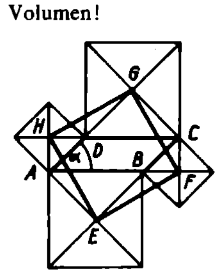


Abb. A 10; 4

4. Über jeder der vier Seiten eines Parallelogramms $ABCD$ sei nach außen je ein Quadrat errichtet. Die Mittelpunkte E, F, G, H dieser Quadrate bilden ein Viereck $EFGH$. Man beweise, daß $EFGH$ ein Quadrat ist.

Olympiadeklasse 11/12 Siehe Seite 75!

Früh übt sich ...

An der IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR (DDR-Ausscheid) nahmen 227 Schüler (davon 25 Mädchen) teil. *alpha* stellt die Teilnehmer vor, die auf Grund hervorragender Leistungen in den Olympiadeklassen 11 bzw. 10 starten konnten, obwohl sie diese Klassenstufen noch nicht besuchen.

In Klassenstufe 11 starteten:

Jürgen Schefter Kl. 10
Elsterwerda (2. Preis — IMO-Kandidat)

Olaf Böhme Kl. 10
Dresden (2. Preis)
IMO-Kandidat

Harald Englisch Kl. 10
Leipzig (2. Preis)

Pawel Kröger Kl. 5
Leipzig

Steffen Kossert Kl. 10
Berlin

In Klassenstufe 10 starteten:

Jürgen Roßmann Kl. 9
Neubrandenburg (2. Preis)

Harald Loose Kl. 9
Potsdam-Babelsberg (2. Preis)

Albrecht Heß Kl. 8
Dresden (2. Preis)

Axel Hintze Kl. 9
Magdeburg (Anerkennung)

Albrecht Böttcher Kl. 9
Annaberg-Buchholz I

Bernhard Worel Kl. 9
Neubrandenburg
(Anerkennung)

Brigitte Prawitz Kl. 9
Berlin (Anerkennung)

Helmut Roßmann Kl. 7
Neubrandenburg
(Anerkennung)

Bernd Zaddach Kl. 7
Cottbus (Anerkennung)

Volker Rössel Kl. 9
Karl-Marx-Stadt

Evelyn Fensch Kl. 9
Trebbin

Konrad Engel Kl. 8
Rostock

Kurt Oppitz Kl. 9
Kleinmachnow/Potsdam

Volkmar Rosenthal Kl. 9
Berlin

Norbert Ziechner Kl. 9
Frankfurt (Oder)

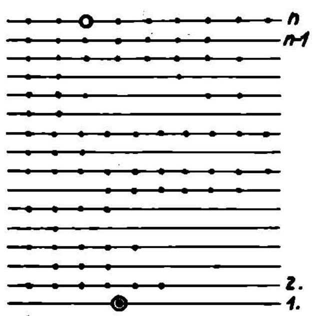
Antje Keller Kl. 9
Stralsund

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Hans Freudenthal

Mathematisches Institut, Universität Utrecht, Niederlande

▲ 560 Jürgen geht zu seinem Freund. Er hat sich ein neues Spiel ausgedacht. Auf einem Blatt Papier hat er eine Anzahl — n — paralleler Linien gezogen und sie — von unten beginnend — durchnumeriert von 1 bis n.

Auf jeder Linie sind kleine Kreisscheiben aufgezeichnet, r_i ist die Anzahl der auf der i. Linie gezeichneten Kreise ($i = 1, 2, \ldots, n$).



Diese sind schwarz bis auf zwei. Genau ein Kreis der obersten (n.) Linie ist grün, und auf der untersten Linie befindet sich nur ein Kreis, dieser ist rot ($r_1 = 1$).

Jürgen erläutert die Spielregeln: Die Spieler wechseln sich ab. Jeder Zug besteht im Streichen eines noch nicht gelöschten Kreises, der sich aber nicht auf einer Linie befinden darf, die niedriger ist als die Linie, auf der beim unmittelbar vorangehenden Zug ein Kreis gelöscht worden war. Wer auf den grünen Kreis auf der obersten Linie setzt, hat verloren.

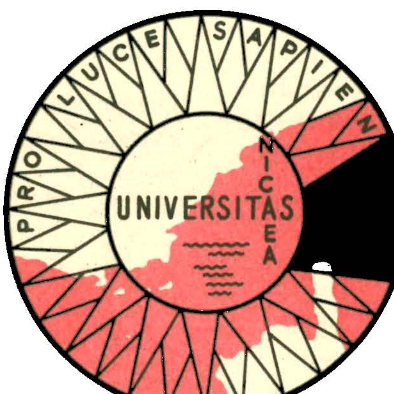
Jürgen sagt: „Ich beginne das Spiel und werde gewinnen, wie du auch spielst. Auch ist mein sicherer Sieg völlig unabhängig von der Anzahl n der Linien und der Anzahl r_i der auf der i. Linie gezeichneten Kreise ($i = 2, 3, \ldots, n$); auf der 1. Linie sei allerdings nur ein Kreis gezeichnet."

Ist das möglich? Wie muß Jürgen spielen, um zu siegen?

IMC

Das französische Komitee der Mathematiker hat die Ehre, den nächsten *Internationalen Mathematiker-Kongreß* anzukündigen, welcher vom 1. bis 10. September 1970 in Nizza stattfindet. (Nizza liegt am Mittelmeer, 25 km von der italienischen Grenze und 900 km von Paris entfernt.) Die täglichen Kongreßzusammenkünfte werden morgens im großen Ausstellungspalast, nachmittags in Hörsälen der Universität abgehalten. Am Morgen sind je zwei Konferenzen von einer Stunde für alle Kongreßteilnehmer bestimmt. Die Nachmittagstagungen sind für ungefähr 250 Fachkonferenzen von je 50 Minuten Dauer vorgesehen, gefolgt von Diskussionen.

Im Jahre 1893 fand anläßlich der Weltausstellung in Chikago ein Internationaler Mathematikerkongreß statt. Als ersten Internationalen Mathematikerkongreß pflegt man allerdings erst Zürich 1897 zu zählen. Es folgen Paris 1900 (D. Hilbert trug dort seine berühmten *Pariser Probleme* vor), Heidelberg 1904, Rom 1908, Cambridge (England) 1912, Straßburg 1920, Toronto 1924, Bologna 1928, Zürich 1932, Oslo 1936, Cambridge (Vorort v. Boston, USA) 1950, Amsterdam 1954, Edinburg 1958, Stockholm 1962, Moskau 1966.



In Chikago (1893) wurden 43 Teilnehmer, in Moskau (1966) hundertmal soviel gezählt.

IMU

Die IMU ist die *Internationale Mathematiker-Union*. Sie vereint interessierte Mathematiker aus allen Ländern der Welt.

IMUK

Die IMUK ist eine *Kommission der IMU*. Sie beschäftigt sich mit der internationalen Zusammenarbeit auf dem Unterrichtsgebiet in der Mathematik. Sie organisiert Kolloquien und Kongresse. Sie gibt Bulletins heraus, letzthin z. B. eins über die Entwicklung von Mathematikolympiaden in den Ländern der Welt, welche bisher solche austrugen.

Der Präsident der IMUK, Prof. Dr. Freudenthal, nahm an der XI. Internationalen Olympiade 1969 in der SR Rumänien teil. Nicht nur die ständig wachsende Zahl von Teilnehmern aus nichtsozialistischen Ländern, sondern auch die Wertschätzung der IMO durch die IMUK zeigen die weiter steigende Bedeutung dieses Leistungsvergleichs. Die Redaktion *alpha* dankt Herrn Prof. Dr. Freudenthal für die Übergabe von umfassendem Material, aus dem wir diese Seite gestalteten

1. IMUK-Kongreß

Unter der Schirmherrschaft des französischen Unterrichtsministers fand im Palais de Congrès in Lyon der erste internationale IMUK-Kongreß statt (24. bis 30. 8. 1969, Gesamtleitung Prof. Dr. Freudenthal).

Auch eine Delegation der DDR nahm an dem Kongreß teil.

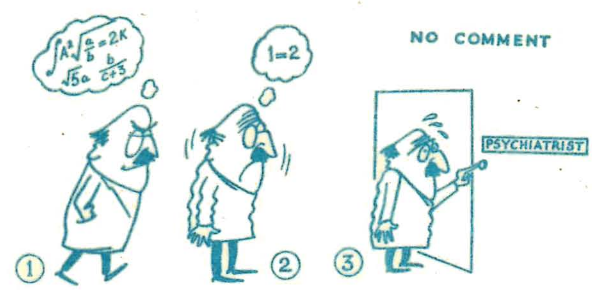
Schwerpunkte: Ausbildungsprogramme für Lehrer und Lehrerstudenten, Schülerpersönlichkeit und Mathematikunterricht, neue Programme und neue Formen des Unterrichts, das Lehrer-Schülerverhältnis, differenzierter Unterricht, programmierter Unterricht, Prüfungen, Aktivität und Passivität der Schüler, Methoden zur Anregung des Schülers zum Entdecken, Abstrahieren und Entwickeln von Theorien und Modellen.

Die Vertreter der UdSSR berichteten über das neue Schulprogramm, das nach fünfjähriger Arbeit erstellt worden und im Schuljahr 1969/70 in Kraft getreten ist.

In den ersten acht Schuljahren sind pro Woche je 6 Stunden Mathematik, im 9. und 10. Schuljahr je 5 Stunden angesetzt. Talentierte Schüler erhalten vom 4. Schuljahr an zusätzlichen Mathematikunterricht. Großer Wert wird auf das numerische Rechnen gelegt, die Schüler müssen imstande sein, algebraische und arithmetische Aufgaben fehlerlos zu lösen. Für sehr wichtig hält man die Anwendungen der Mathematik auf die Naturwissenschaften (wie Physik, Chemie, Biologie). Durch den Unterricht soll dem Schüler ein richtiges Verständnis für Wissenschaft und Praxis vermittelt werden.

Großes Interesse fand eine überaus reichhaltige Buchausstellung mit Titeln aus allen fünf Erdteilen. Eine Lehrmittelausstellung zeigte, wie man sich in einzelnen Ländern bemüht, den Übergang vom Konkreten zum Abstrakten zu erleichtern.

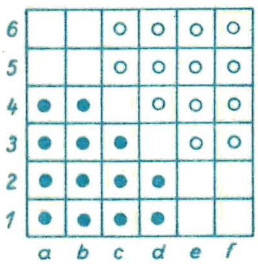
In freien Stunden alpha heiter

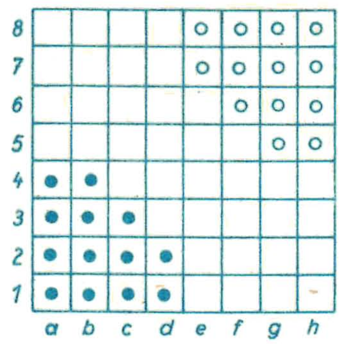


aus: mathematical pie 5/67

Halma-Solo

Halma, das meist zu zweit, dritt oder viert gespielt wird, bietet auch einem einzelnen Zerstreuung. Die Bewegungsart der Steine darf bei den Lesern als bekannt vorausgesetzt werden.



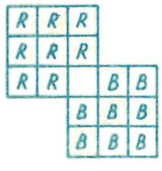


Das Ziel der ersten, leichteren Aufgabe (siehe Abb. links) ist, die auf den schwarzen Punktfeldern stehenden 13 Steine mit möglichst wenigen Zügen auf die weißen Punktfelder zu bringen. Wer das in weniger als 20 Zügen erreicht, kann mit dem Anfangserfolg zufrieden sein. Man suche die beste Lösung in 13 Zügen zu finden. Wenn die beiden „Höfe" in diagonaler Richtung um zwei Felder auseinandergerückt sind, wie die rechte Abb. zeigt, wird die Aufgabe etwas schwieriger. Zur besten Lösung braucht man 19 Züge.

aus: du bist dran; 42 Spiele am Tisch v. B. Rüger, (VEB F. Hofmeister, Leipzig 1962, 5,80 M

mathematics

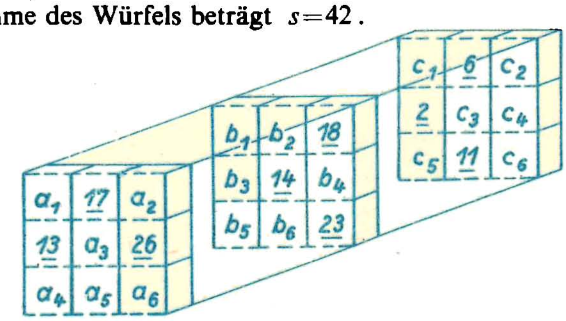
This is a puzzle for one person. — You need 8 red and 8 blue counters. — Place the red counters on the squares marked *R*, and the blue counters on the



squares marked *B*. *Objekt*: to exchange the positions of the red and blue counters. *Rules*: pieces can move to an adjacent empty square, or jump over one counter to an empty square. Diagonal moves are not allowed.

Magischer Würfel

Von einem magischen Würfel mit 27 Feldern ist nur die Stellung von neun Zahlen bekannt, die nachstehende Darstellung zeigt. Die fehlenden Elemente sind durch Buchstaben gekennzeichnet. Die Reihensumme des Würfels beträgt $s=42$.



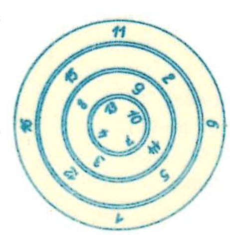
Vervollständige den Würfel durch Einsetzen der fehlenden Zahlen! (Von den Flächendiagonalen weisen nur die sechs in den drei aufeinander senkrecht stehenden mittleren Quadrate die Summe 42 auf!)

Dipl.-Hütteningenieur K. Oertel, Zschornewitz (Bez. Halle)

Zahlenscheibe

Die einzelnen Kreisringe sind so zu drehen, daß vier Zahlen übereinander zu stehen kommen, deren Summe 34 beträgt.

aus: „Füles", Budapest



Eine interessante Zahl

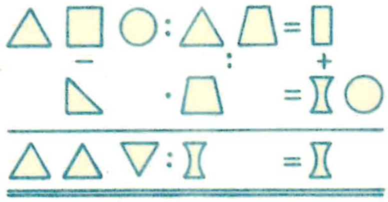
Übersetze folgende mathematischen Termini aus dem Russischen ins Deutsche:

1. Множество
2. Характер
3. Одночлен
4. Логарифм
5. Ось обсцисс
6. произвольный

Die Anfangsbuchstaben der ins Deutsche übersetzten Wörter von oben nach unten gelesen ergeben eine interessante Zahl.

Mathematikfachlehrer S. Gottesmann, Tschernowzy, UdSSR

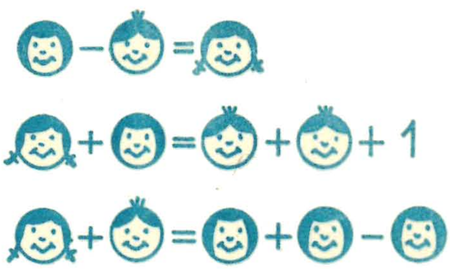
Figurenrätsel



Elke Raubach, Pestalozzi-OS, Karl-Marx-Stadt (Kl. 8)

Pfiffige Mädchen

Sieh dir die drei Mädchen an! Wenn du für die gleichen Mädchenköpfe stets die gleichen Ziffern einsetzt, erhältst du die Lösungen.



Für alpha aus „Die Trommel" ausgewählt von René Brunsch, Wüstenbrand, Bez. Karl-Marx-Stadt (Kl. 5)

Mathematische Begriffe

1. bekannter ital. Mathematiker (1175 bis 1250)
2. wichtiger Begriff der Differentialrechnung
3. einfachste Kurve
4. Beruf, der immer mehr an Bedeutung gewinnt
5. Darstellung einer Funktion
6. griechischer Mathematiker
7. eine „Berührende"
8. Anschauungsmittel
9. bekannter Satz von Viëta
10. berühmter deutscher Mathematiker (1777 bis 1855)
11. Ergebnis einer Aufgabe
12. Satz der Trigonometrie
13. Kongruenztransformation
14. Rechenoperation
15. Mathematischer Körper

Notiere die 15 gefundenen Begriffe! Die dritten Buchstaben ergeben, von oben nach unten gelesen, den Namen eines bekannten englischen Mathematikers und Philosophen, der in diesem Jahr starb.

Oberlehrer H. Pätzold, Waren/Müritz

1970

Unter Benutzung von Rechen- und Vorzeichen sollen die angegebenen Ziffern in dieser Reihenfolge zu Termen verbunden werden, welche die ganzen Zahlen von 0 bis 20 darstellen. Zwischen je zwei Ziffern soll mindestens ein mathematisches Zeichen stehen. Erlaubt sind Addition, Subtraktion, Multiplikation und das Quadratwurzelziehen. Außerdem darf das Klammersymbol [ ] verwendet werden. Dabei bedeute $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist; z. B. ist $[1{,}5]=1$, $[-1{,}5]=-2$, $[\pi]=3$.

Zusatzfrage: Für welche Zahlen ist die Verwendung der oben genannten Klammer notwendig?

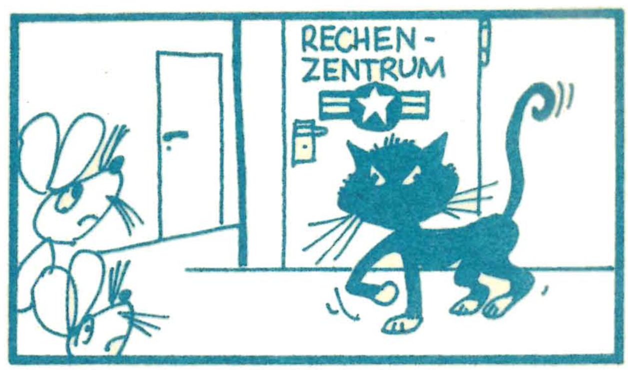
Welche ist die größte derart darstellbare Zahl?

(Beispiel: $4=1+\sqrt{9}+7\cdot 0$; $2=1\cdot 9-7-0$)

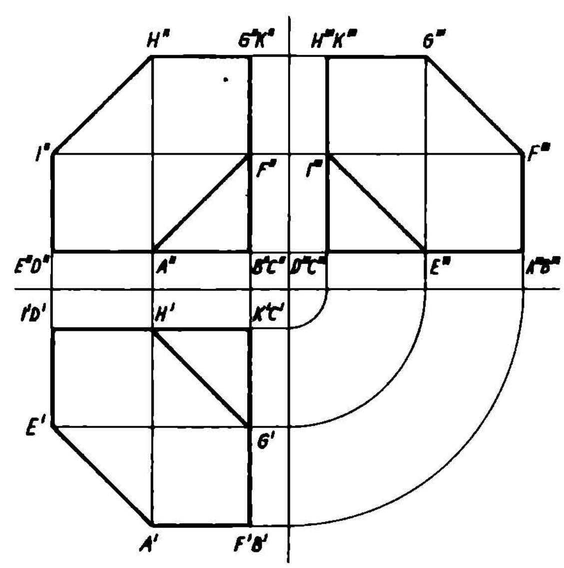
Ottmar Langer, EOS Lessing, Döbeln (Kl. 10)

Ein Kater

schützt im Auftrage des amerikanischen Raketenkonzerns *Lockhead Propulsion Corp.* die elektronischen Kontrollgeräte vor Mäusen, die vorher durch das Zerbeißen von Drähten Schaden von mehreren tausend Dollar verursacht haben.



Restkörper gesucht

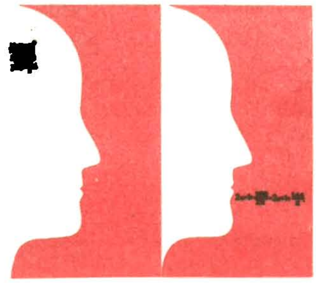


Die Abbildung zeigt einen konvexen Körper, der durch ebene Flächen begrenzt ist, im Grund-, Auf- und Kreuzriß.

Baue einen solchen Körper! Viel Erfolg wünscht

Mathematikfachlehrer Adolf Marquardt, Kühlungsborn

Mathematische Wettbewerbe in Schweden



Mathematik-Wettbewerbe für Schulen werden seit 1961 jährlich von der *Schwedischen Mathematischen Gesellschaft* und der Zeitung *Svenska Dagbladet* für Schüler der oberen Klassen der Gymnasien (entspricht unseren EOS) ausgetragen.
Der Wettbewerb findet jedes Jahr in zwei Runden statt, einer Qualifikationsrunde, an der Tausende von Schülern teilnehmen, und einer Endrunde für die 12 bis 15 besten Schüler. (Die Qualifikationsrunde ist gleichzeitig ein Mannschaftswettbewerb für Dreiermannschaften.)
Der Zweck des Wettbewerbs ist nicht in erster Linie eine Wissensprüfung, sondern es soll versucht werden, die Schüler für die Mathematik zu interessieren — nicht nur für die Schulmathematik — indem man ihnen Aufgaben stellt, die ihre mathematische Phantasie und ihr Vermögen zum logischen Denken anregen. Die Aufgaben unterscheiden sich daher wesentlich von den Aufgaben, die bei den Klassenarbeiten und in den Lehrbüchern der Oberschulen vorkommen. Diese müssen ja aus ganz natürlichen Gründen normbetont sein. Die Aufgaben wurden auch so gewählt, daß der Oberschüler, der vielleicht im Universitätslehrbuch gelesen hat, nicht allzu viel Hilfe durch die Kenntnis haben soll, die er sich dabei erworben hat. Aber er hat natürlich einen Nutzen durch die Erfahrungen und die Übung bei mathematischen Gedankengängen, die er sich verschafft hat. Bei bestimmten Aufgaben wird der Lösende in eine Situation versetzt, die für einen großen Teil der mathematischen Forschung typisch ist, dadurch, daß er sich in gewissem Maße die Aufgaben selbst stellen kann. In einigen Fällen kann die Problemstellung verallgemeinert oder Voraussetzungen können variiert werden, so daß neue Probleme entstehen. Auch das ist typisch für mathematische Forschung.

Wie werden Probleme gelöst? Hierüber ist viel geschrieben worden, besonders von dem ungarisch-amerikanischen Mathematiker *G. Polya*. Zuerst muß man einmal das Problem verstehen. Das klingt selbstverständlich, muß aber doch immer wieder betont werden. Man muß tatsächlich in das Problem eindringen, nachdenken, was gegeben ist, was man sieht, was es an Voraussetzungen gibt, die die Schlußfolgerung glaubhaft machen.
Der nächste Schritt müßte sein, daß man das Problem mit früherem Erfahrungsmaterial vergleicht. Man kennt einen Satz, der mit dem Problem zu tun hat, oder man hat vielleicht früher schon ein Problem gelöst, das an das vorliegende erinnert. Es ist oftmals ratsam, mit dem Studieren von einfachen Fällen zu beginnen. Wenn ein Problem in drei oder mehr Dimensionen angegeben ist, kann es sich vielleicht lohnen, es in ein oder zwei Dimensionen zu studieren. Wenn ein Problem Dreiecke betrifft, kann man damit beginnen, zu sehen, was bei gleich-dreiseitigen oder gleichschenkligen Dreiecken geschieht. Vielleicht kommt man so zu einer Lösung, die auch im allgemeinen Fall Gültigkeit hat, oder zumindest zu weiterer Arbeit anregt.
Es verdient, daß man darauf hinweist, daß mathematische Problemlösungen (und Forschungen) oftmals eine ganz experimentelle Beschäftigung sind. Man „prüft sich vorwärts", untersucht verschiedene Spezialfälle, studiert Analogien, und auf diese Art schafft man sich mehr oder weniger plausible Grundlagen, um auf einen bestimmten Schlußsatz zu bauen. Der logisch unantastbare Gedankengang kommt in einem späteren Stadium und der fertige Beweis kann sich ganz wesentlich von dem Gedankengang unterscheiden, der zuvor zur Lösung führte.
Wenn man auf eine Methode kommt, um ein Problem zu lösen, sollte man sie in allen Einzelheiten ordentlich durchführen, und nachträglich noch einmal jede Stufe durchgehen, um zu kontrollieren, daß sie richtig ist. Zur weiteren Kontrolle kann man eventuelle andere Konsequenzen des Gedankenganges untersuchen und sehen, ob diese wahrscheinlich sind.
Zum Schluß sollte man seine Lösung durchdenken, versuchen, sie in ihrer Gesamtheit zu verstehen, sehen, ob man das Ziel nicht auf eine kürzere und einfachere Art erreichen kann. Man sollte sich auch fragen: kann die Methode auch angewandt werden, um etwas anderes zu beweisen? Kann ich das Ergebnis verallgemeinern? Was geschieht, wenn ich die Voraussetzung auswechsle?
Es ist natürlich sehr anregend zu versuchen, das Problem mit anderen Kameraden zu lösen. Zahlreiche Aufgaben dürften auch Material für Diskussionen in mathematischen Zirkeln der Schulen geben können.

Lars Inge Hedberg
Stark gekürztes Vorwort zu dem Buch (Aufgabensammlung): Travelingsproblem i matematik Bokförlaget Prima Stockholm 1969

Seit drei Jahren nimmt eine schwedische Mannschaft an den Internationalen Mathematikolympiaden teil. Wir haben mit diesem Beitrag unseren Lesern einen Einblick in einen Teil außerunterrichtlicher Arbeit im Fach Mathematik geboten. Wir danken Herrn Prof. Dr. *Ake H. Samuelsson*, Chalmers University of Technology and University of Göteborg für die Übersendung dieses Informationsmaterials. Die Aufgaben der 1. Stufe des Wettbewerbs 1969 lauteten:

Qualifikationsrunde (1. Stufe — 16. 10. 1969)

■ 1 ■ In einer normalen schwedischen Schulklasse waren 21.7% der Schüler rothaarig, wobei nach den Rundungsvorschriften korrekt auf volle Zehntel Prozent gerundet worden ist.
Kann man daraus mit Sicherheit schließen, wieviel Schüler in der Klasse waren?
(Unter einer „normalen schwedischen Schulklasse" sei eine Klasse zu verstehen, die nicht mehr als 40 Schüler hat.)

■ 2 ■ Wieviel n-dimensionale Vektoren $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit x_i gleich 0 oder 1 gibt es, so daß die Zahl

$$x_1+b_2x_2+b_3x_3+\ldots+b_nx_n$$

eine ungerade ganze Zahl ist?
Dabei sind die Zahlen b_i $(i=2, 3, \ldots, n)$ gegebene ganze Zahlen.

■ 3 ■ Es seien a, b und c drei reelle Zahlen mit $a^2+b^2+c^2=1$.
Man beweise, daß dann stets

$$-\frac{1}{2}\leqq ab+bc+ac\leqq 1 \text{ gilt.}$$

Man beweise ferner, daß es sowohl solche Zahlen a, b, c gibt, so daß

$$ab+bc+ac = -\frac{1}{2},$$

als auch solche, so daß

$ab+bc+ac = 1$ gilt, wobei in beiden Fällen wieder die Bedingung

$a^2+b^2+c^2 = 1$ erfüllt sein soll.

■ 4 ■ Gegeben sei die Menge aller ganzzahligen Punkte der Ebene, d. h. die Menge aller Punkte (p,q), deren Koordinaten im rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem ganze Zahlen sind.
Eine Partikel kann sich zwischen diesen Punkten bewegen, jedoch nur so, daß sie von einem beliebigen Punkt (p,q) zu dem Punkt $(p+1, q+1)$ oder zu dem Punkt $(p+1, q-1)$ gelangen kann.

Fortsetzung siehe Seite 95!

Lösungen

▲ 509 Jeder kleine Würfel habe die Kantenlänge a; dann besitzt der große Würfel die Kantenlänge $4a$.
Rauminhalt des großen Würfels: $V_1=64a^3$
Rauminhalt eines kleinen Würfels: $V_2=a^3$
Aus dem großen Würfel erhält man 64 kleinere Würfel
Oberfläche des großen Würfels: $O_1=96a^2$
Oberfläche eines kleineren Würfels: $O_2=6a^2$
Gesamtoberfläche aller kleinen Würfel:
$O_3=384a^2$
Wegen $384:96=4$ ist die Gesamtoberfläche aller kleineren Würfel viermal so groß, wie die des großen Würfels.

▲ 510 Aus $100-41=59$ und $96-59=37$ und $41-37=4$ folgt: der Großvater ist 59, der Vater 37 und der Sohn 4 Jahre alt.

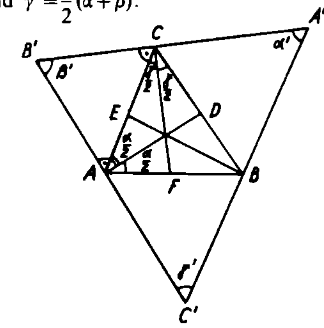
▲ 511 Die Zahl 255 läßt sich durch 1, 3, 5, 15, 17, 51, 85 und 255 teilen. Nur die Teiler 5, 15 und 17 sind größer als 4 und kleiner als 20, $255:5=51$; $255:15=17$; $255:17=15$
Die Aufgabe besitzt genau drei Lösungen: Es könnten 51 Hefte zu 5 Pf oder 17 Hefte zu 15 Pf oder 15 Hefte zu 17 Pf das Stück gewesen sein.

▲ 512 Aus $140-38=102$ und $102:2=51$ folgt, daß sich unter den Anwesenden 51 Kinder und wegen $140-51=89$ demnach 89 Erwachsene befanden. Aus $89-7=82$ und $82:2=41$ folgt, daß sich die Erwachsenen aus 41 Frauen und wegen $89-41=48$ aus 48 Männern zusammensetzen.

▲ 513 $z=\frac{n+17}{n-3}=\frac{n-3+20}{n-3}=1+\frac{20}{n-3}$;
da z eine natürliche Zahl sein soll, muß 20 Vielfaches von $n-3$ sein, und $\frac{20}{n-3}$ muß gleich oder größer als -1 sein. Nun ist $\frac{20}{n-3}=-1$ für $n=-17$.
Diese Zahl entspricht aber, weil sie negativ ist, nicht den Bedingungen der Aufgabe. Daher erfüllen nur die in der folgenden Tabelle angegebenen natürlichen Zahlen n die Bedingungen der Aufgabe. (Beginne mit $n=4$!)

n	4	5	7	8	13	23
z	21	11	6	5	3	2

▲ 514 $\sphericalangle ACB'$ und $\frac{\gamma}{2}$ sind Komplementwinkel, also gilt $\sphericalangle ACB'=90°-\frac{\gamma}{2}$. Analog ergibt sich $\sphericalangle CAB'=90°-\frac{\alpha}{2}$. Unter Anwendung des Satzes über die Winkelsumme des Dreiecks folgt hieraus für das Dreieck ACB' $\beta'=\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$. Anlog erhält man $\alpha'=\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$ und $\gamma'=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$.



▲ 515 Vor dem Lösen der Aufgabe fertigen wir uns die abgebildete Tabelle an, in deren Rahmen wir untereinander die Nachnamen der Herren und nebeneinander die Vornamen der Damen eintragen. In die verbleibenden Leerfelder tragen wir danach „nein" ein, wenn wir mit Sicherheit wissen, daß der betreffende Herr mit der betreffenden Dame nicht verheiratet ist. Aus dem vierten Satz der Aufgabe folgt:
Herr Anders ist weder mit Inge noch mit Luise verheiratet, Herr Frey ist weder mit Maria noch mit Luise verheiratet. Herr Göbel ist weder mit Inge noch mit Nora verheiratet, Herr Conrad ist nicht mit Inge verheiratet. Herr Dahlke nicht mit Luise und Herr Ebert nicht mit Nora.
Aus dem 6. Satz der Aufgabe folgt:
Herr Conrad ist weder mit Nora noch mit Olga verheiratet. Herr Anders ist weder mit Nora noch mit Olga verheiratet.
Aus dem 7. Satz der Aufgabe folgt:
Herr Dahlke ist weder mit Nora noch mit Olga verheiratet, Herr Frey ist weder mit Nora noch mit Olga verheiratet.
Aus dem 8. Satz der Aufgabe folgt:
Herr Dahlke ist weder mit Hilde noch mit Inge verheiratet, Herr Frey ist weder mit Hilde noch mit Inge verheiratet.
In der Spalte „Nora" sind nun sechs Felder mit „nein" ausgefüllt; in das noch leere zweite Feld von oben dieser Spalte tragen wir „ja" ein. Alle leeren Felder der Zeile „Bauer" müssen dann durch „nein" gekennzeichnet werden. In der Zeile „Frey" ist nur noch das dritte Feld von links leer; wir tragen „ja" ein. In alle leeren Felder der Spalte „Karin" ist danach „nein" einzutragen. In das einzige freie fünfte Feld von oben der Spalte „Inge" tragen wir „ja" ein. In die noch leeren Felder der Zeile „Ebert" ist wieder „nein" einzutragen. Dieses Verfahren setzen wir fort, bis alle Felder ausgefüllt sind; die ausgefüllte Tabelle sieht dann wie folgt aus:

	Hilde	Inge	Karin	Luise	Maria	Nora	Olga
Anders	ja	nein	nein	nein	nein	nein	nein
Bauer	nein	nein	nein	nein	nein	ja	nein
Conrad	nein	nein	nein	ja	nein	nein	nein
Dahlke	nein	nein	nein	nein	ja	nein	nein
Ebert	nein	ja	nein	nein	nein	nein	nein
Frey	nein	nein	ja	nein	nein	nein	nein
Göbel	nein	nein	nein	nein	nein	nein	ja

Der ausgefüllten Tabelle ist zu entnehmen, daß Herr Anders mit Hilde, Herr Bauer mit Nora, Herr Conrad mit Luise, Herr Dahlke mit Maria, Herr Ebert mit Inge, Herr Frey mit Karin und Herr Göbel mit Olga verheiratet ist.

▲ 516 Die 100 Murmeln seien an x Schüler aufgeteilt worden; der erste Schüler habe y Murmeln erhalten. Dann hat
der zweite Schüler $(y+1)$ Murmeln,
der dritte Schüler $(y+2)$ Murmeln,
der vierte Schüler $(y+3)$ Murmeln erhalten und so fort.
In der folgenden Tabelle ist jeder Schülerzahl die Anzahl der Murmeln zugeordnet:

Schülerzahl	Anzahl der Murmeln
1	y
2	$2y+1$
3	$3y+3$
4	$4y+6$
5	$5y+10$
6	$6y+15$
7	$7y+21$
8	$8y+28$
9	$9y+36$
10	$10y+45$
11	$11y+55$
12	$12y+66$
13	$13y+78$

Nur die Gleichung $5y+10=100$ und $8y+28=100$ haben eine Lösung. Für die erste Gleichung erhalten wir $y=18$, für die zweite $y=9$. Aus $18+19+20+21+22=100$ und $9+10+11+12+13+14+15+16=100$ folgt, daß die Murmeln entweder unter fünf oder unter acht Schülern aufgeteilt wurden.

▲ 517 Die Summe der Flächeninhalte der n Kreisscheiben mit dem Radius $r=1$ cm ist kleiner als der Flächeninhalt des Kreises mit dem Radius $R=1$ km. Also gilt:
$n\pi r^2<\pi R^2$, $nr^2<R^2$, $n\cdot(1\text{ cm})^2<(1\text{ km})^2$,
$n\text{ cm}^2<(100\,000\text{ cm})^2$, $n<100\,000^2$,
$n<10\,000\,000\,000$.
Als obere Schranke für n kann daher die Zahl $N=10^{10}$ gewählt werden.

▲ 518 $70\frac{\text{km}}{\text{h}}=\frac{70\,000\text{ m}}{3\,600\text{ s}}\approx 20\frac{\text{m}}{\text{s}}$; da ein Strauß bei großer Gefahr in einer Sekunde rund 20 m zurücklegt, macht er wegen $20:4=5$ in der Sekunde 5 Schritte von 4 m Länge.

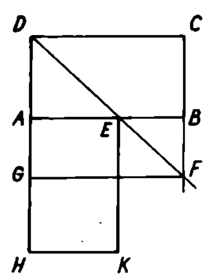
▲ 519 Aus $(a, b)=4$ folgt $a=n\cdot 4$ für $n=1, 2, 3, \ldots$; aus $(a, c)=6$ folgt $a=k\cdot 6$ für $k=1, 2, 3, \ldots$.
Nun sind $n=3$ und $k=2$ die kleinsten Zahlen, die diese Gleichungen erfüllen, also $a=12$.
Aus $(a, b)=4$ folgt $b=p\cdot 4$ und aus $(b, c)=10$ folgt $b=q\cdot 10$. Wegen $p=5$ und $q=2$ gilt $b=20$.
Aus $(a, c)=6$ folgt $c=r\cdot 6$ und aus $(b, c)=10$ folgt $c=s\cdot 10$. Wegen $r=5$ und $s=3$ gilt $c=30$.
Die kleinsten von Null verschiedenen natürlichen Zahlen, die die gestellten Bedingungen erfüllen, sind 12, 20 und 30.

▲ 520 Aus $abc=5(a+b+c)$ und $b-a=c-b$ folgt durch Substitution $ab(2b-a)=15b$. Diese Gleichung ist erfüllt für $b=0$. Dann ist aber auch $a=0$ und $c=0$, weil $a+b+c=0$ ist. Eine Lösung bildet daher das Zahlentripel (0, 0, 0); es gilt $0\cdot 0\cdot 0=5(0+0+0)$.
Ist $b\neq 0$, so erhalten wir aus $ab(2b-a)=15b$ nach Division durch b die Gleichung $a(2b-a)=15$. Man erhält also, weil a ein Teiler von 15 sein muß,

$a=1,\ 2b-a=15,\ b=8,\ c=15;$
$a=3,\ 2b-a=5,\ b=4,\ c=5;$
$a=5,\ 2b-a=3,\ b=4$
$a=15,\ 2b-a=1,\ b=8.$

Die beiden letzten Lösungen entfallen, da $a\leqq b$ sein muß. Wir erhalten daher nur noch die weiteren beiden Lösungen
(1, 8, 15), und es gilt $1\cdot 8\cdot 15=5(1+8+15)$;
(3, 4, 5), und es gilt $3\cdot 4\cdot 5=5(3+4+5)$.

▲ 521 Wir zeichnen die Verbindungsgerade der Punkte D und E, verlängern die Strecke $\overline{CB}$ über B hinaus und erhalten den Schnittpunkt F (vgl. die Abb.).



Dann ist $\overline{CF}$ gleich der anderen Seite des gesuchten Rechtecks, das dem ursprünglichen Rechteck $ABCD$ flächengleich ist.
Zeichnen wir nämlich durch F zu $\overline{AB}$ die Parallele, die die Verlängerung von $\overline{DA}$ in G schneidet, so gilt nach dem Strahlensatz $\overline{AE}:\overline{GF}=\overline{DA}:\overline{DG}$,
also wegen $\overline{GF}=\overline{AB}$, $\overline{DA}=\overline{BC}$, $\overline{DG}=\overline{CF}$
$\overline{AE}:\overline{AB}=\overline{BC}:\overline{CF}$,
d. h. $\overline{AE}\cdot\overline{CF}=\overline{AB}\cdot\overline{BC}$.
Das ursprüngliche Rechteck $ABCD$ ist also dem Rechteck mit den Seitenlängen $\overline{AE}$ und $\overline{CF}$ flächengleich. Dieses Rechteck $AHKE$ ist zur Veranschaulichung in der beigefügten Abb. noch einmal gezeichnet worden.
Wir bemerken noch, daß die Konstruktion der Seite $\overline{CF}$ allein mit dem Lineal (ohne Benutzung des Zirkels) möglich war. Hätten wir zur Konstruktion wie üblich den Höhensatz benutzt, so wäre zur Konstruktion auch die Benutzung des Zirkels notwendig gewesen.

▲ 522 Da sowohl $m+n$ als auch $m-n$ durch die Primzahl p teilbar ist, ist auch die Summe $(m+n)+(m-n)=2m$ sowie die Differenz $(m+n)-(m-n)=2n$ durch p teilbar.
Ist nun $p=2$, so ist diese Bedingung erfüllt.
Wäre aber $p\neq 2$, so wären $2m$ und $2n$ —, also auch m und n, durch p teilbar; die Zahlen m und n hätten also den gemeinsamen Teiler p, was der Voraussetzung widerspricht, wonach die Zahlen m und n teilerfremd sind.
Damit ist bewiesen, daß $p=2$ gilt.
Zur Veranschaulichung geben wir noch ein Beispiel:
Es sei $m=35$, $n=9$. Dann sind diese Zahlen teilerfremd, und ihre Summe 44 sowie ihre Differenz 26 sind durch die Primzahl 2 teilbar. Jedoch sind die Zahlen 44 und 26 durch keine andere Primzahl gleichzeitig teilbar.

▲ 523 Einer der Brüder erhalte x_1 volle, y_1 halbvolle und z_1 leere ...
Ein anderer der Brüder erhalte x_2 volle, y_2 halbvolle und z_2 leere ...
Der dritte Bruder erhalte x_3 volle, y_3 halbvolle und z_3 leere ...
Fässer.
An jeden Bruder sind nach den Bedingungen der Aufgabe
$\frac{5+11+8}{3}=\frac{24}{3}=8$ Fässer und
$\frac{1}{3}\left(5+\frac{11}{2}\right)=\frac{21}{2\cdot 3}=\frac{7}{2}$ Faß Wein zu verteilen.
Man erhält daher die folgenden Gleichungen:

$$x_1+y_1+z_1=8, \quad (1)$$
$$x_2+y_2+z_2=8, \quad (2)$$
$$x_3+y_3+z_3=8, \quad (3)$$
$$x_1+x_2+x_3=5, \quad (4)$$
$$y_1+y_2+y_3=11, \quad (5)$$
$$z_1+z_2+z_3=8. \quad (6)$$

Ferner folgt aus $x_1+\frac{y_1}{2}=\frac{7}{2}$, $x_2+\frac{y_2}{2}=\frac{7}{2}$, $x_3+\frac{y_3}{2}=\frac{7}{2}$

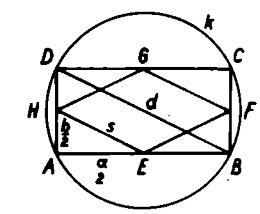
$$y_1=7-2x_1, \quad (7)$$
$$y_2=7-2x_2, \quad (8)$$
$$y_3=7-3x_3. \quad (9)$$

Dabei sind x_i, y_i, z_i natürliche Zahlen.
Aus (7) und (1) folgt $x_1+7-2x_1+z_1=8$,
also $z_1-x_1=1$ (10)
und analog aus (8) und (2) bzw. (9) und (3)

$$z_2-x_2=1 \quad (11)$$
$$z_3-x_3=1. \quad (12)$$

Wegen (7) gilt, da $y_i\geqq 0$, $0\leqq x_1\leqq 3$
und analog $0\leqq x_2\leqq 3$
$0\leqq x_3\leqq 3$.
O.B.d.A. können wir nun $x_1\leqq x_2\leqq x_3$ annehmen. Wir erhalten dann wegen (4) die folgenden drei Möglichkeiten:
1) $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=3$;
2) $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=3$;
3) $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=2$.
Aus (7), (8), (9) erhalten wir dann die Werte für z_1, z_2, z_3 und aus (10), (11), (12) die Werte für x_1, x_2, x_3, die die Tabelle zeigt (s. unten).
Durch Einsetzen in die Gleichungen (1) bis (9) überzeugen wir uns davon, daß in diesen drei Fällen alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind.
Es gilt daher *genau drei verschiedene Möglichkeiten* der Verteilung der Fässer:

▲ 524 Wir führen zur Abkürzung die folgenden Bezeichnungen für die Streckenlängen ein:
$\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{BD}=d$, $\overline{EH}=s$ (vgl. die Abb.).



Da der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten auf $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ gleichzeitig der Mittelpunkt des Kreises k und der Schnittpunkt der Diagonalen des Rechtecks $ABCD$ ist, ist d gleich dem Durchmesser des Kreises k, und es gilt nach dem Satz des Pythagoras $d^2=a^2+b^2$. Ferner sind die rechtwinkligen Dreiecke AEH, BFE, CGF, DHG kongruent, da sie jeweils in den Längen der Katheten übereinstimmen.
Daraus folgt $\overline{EH}=\overline{FE}=\overline{GF}=\overline{HG}=s$.

	x_1	x_2	x_3	$x_1+x_2+x_3$	y_1	y_2	y_3	$y_1+y_2+y_3$	z_1	z_2	z_3	$z_1+z_2+z_3$
1)	0	2	3	5	7	3	1	11	1	3	4	8
2)	1	1	3	5	5	5	1	11	2	2	4	8
3)	1	2	2	5	5	3	3	11	2	3	3	8

	Fall 1)			Fall 2)			Fall 3)		
	volle F.	halbv. F.	leere F.	volle F.	halbv. F.	leere F.	volle F.	halbv. F.	leere F.
Einer der Brüder erhält	0	7	1	1	5	2	1	5	2
Ein anderer Bruder erhält	2	3	3	1	5	2	2	3	3
Der dritte Bruder erhält	3	1	4	3	1	4	2	3	3
Summe	5	11	8	5	11	8	5	11	8

Der Umfang des Vierecks $EFGH$ ist also gleich $4s$. Nun gilt nach dem Satz des Pythagoras in dem Dreieck AEH

$s^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4}$ und wegen

$d^2=a^2+b^2$

$s^2=\frac{d^2}{4}$, also $s=\frac{d}{2}$, $4s=2d$.

Der Umfang des Vierecks $EFGH$ ist also stets gleich dem doppelten Durchmesser des Kreises k, er ist daher für alle dem Kreis k einbeschriebenen Rechtecke gleich groß, w.z.b.w.

▲ 525 Wir formen zunächst um und erhalten

$$\begin{aligned} z&=p^6+3p^2-3p^4-1\\ &=p^6-p^4-2p^4+2p^2+p^2-1\\ &=p^4(p^2-1)-2p^2(p^2-1)+(p^2-1)\\ &=(p^2-1)(p^4-2p^2+1)\\ &=(p+1)(p-1)(p^2-1)^2,\\ z&=(p-1)^3(p+1)^3. \end{aligned}$$

Ferner erhalten wir die folgende Zerlegung in Primfaktoren

$13\,824=8\cdot 8\cdot 8\cdot 27=8^3\cdot 3^3=2^9\cdot 3^3$.

Ist nun $p=2$, so ist $p-1=1$, $p+1=3$, also $z=3^3$. In diesem Falle ist also z nicht durch 13 824 teilbar. *Ist* $p=3$, so ist $p-1=2$, $p+1=4$, also $z=2^3\cdot 4^3$. Auch in diesem Falle ist also z nicht durch 13 824 teilbar.

Ist aber $p>3$, so ist p als Primzahl nicht durch 3 teilbar. Daher ist entweder die vorhergehende Zahl $p-1$ oder die folgende Zahl $p-1$ durch 3 teilbar, also entweder $(p-1)^3$ oder $(p+1)^3$ durch 3^3 teilbar.

Da p eine Primzahl ist, läßt p bei Division durch 4 entweder den Rest 1 oder den Rest 3, also ist entweder

$p-1$ durch 4 und $p+1$ durch 2 teilbar oder $p-1$ durch 2 und $p+1$ durch 4 teilbar.

In jedem Falle ist also $(p-1)(p+1)$ durch 8 teilbar, also $z=(p-1)^3(p+1)^3$ ist durch $8^3=2^9$ teilbar.

Daraus folgt aber, daß im Falle $p>3$ die Zahl z stets durch $3^3\cdot 2^9=13\,824$ teilbar ist.

Die Zahl $z=p^6+3p^2-3p^4-1$ ist also nur für $p=2$ und $p=3$ nicht durch 13 824 teilbar.

▲ 526 Es seien x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 die Anzahl der Goldmedaillen, die die DDR, die UdSSR, Großbritannien, Frankreich bzw. Polen erhielten. Dann gelten auf Grund der Bedingungen der Aufgabe die folgenden Gleichungen:

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=31, \qquad (1)$$
$$x_1=x_3+x_4+x_5, \qquad (2)$$
$$x_2=x_3+x_4, \qquad (3)$$
$$x_3=2x_4. \qquad (4)$$

Ferner gilt $x_1>x_2>x_3>x_4>x_5$ (5)

Aus (1) und (2) folgt

$x_1+x_2+x_1=31$, also $2x_1+x_2=31$. (6)

Hieraus folgt wegen $x_2<x_1$

$31=2x_1+x_2<3x_1$, also $x_1>10$

und $2x_1<31$, also $x_1\leqq 15$.

Wir erhalten also die folgenden Fälle:

1. $x_1=11$, $x_2=31-2x_1=9$;
2. $x_1=12$, $x_2=31-2x_1=7$;
3. $x_1=13$, $x_2=31-2x_1=5$;
4. $x_1=14$, $x_2=31-2x_1=3$;
5. $x_1=15$, $x_2=31-2x_1=1$.

Nun folgt aus (3) und (4) $x_2=2x_4+x_4=3x_4$, d. h., x_2 ist durch 3 teilbar.

Daher scheiden die *Fälle 2, 3 und 5* aus.

Im *Falle 4* wäre $x_1=14$, $x_2=3x_4=3$, also $x_4=1$ und $x_3=2x_4=2$. Daraus würde wegen (1) folgen

$$x_5=31-x_1-x_2-x_3-x_4=11,$$

was wegen $x_5<x_4$ zu einem Widerspruch führt.

Daher kann nun der Fall 1 eintreten; wir erhalten $x_1=11$, $x_2=9$, $x_4=3$, $x_3=6$, $x_5=31-29=2$.

Für diese Zahlen sind die Gleichungen (1), (2), (3), (4) und die fortlaufende Ungleichung (5), also die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Daher erhielten die DDR 11, die UdSSR 9, Großbritannien 6, Frankreich 3 und Polen 2 Goldmedaillen.

Lösungen zu alpha-heiter

Halma-Solo

1) 1. c3–d4, 2. a1–c3–e5, 3. b1–d3–d5–f5, 4. a4–c4–e4–e6, 5. c1–e3, 6. d1–d3–d5, 7. a3–c5, 8. a2–c4–c6, 9. b4–d6–f6, 10. b2–b4–d6, 11. b3–d1–d3–f3, 12. c2–e2–e4, 13. d2–f4.

2) 1. c3–d4, 2. a1–c3–e5, 3. a4–c4–e4–e6, 4. d1–d3–d5–f7, 5. a3–c5, 6. b4–d6–f6–f8, 7. e6–g8–e8–g6, 8. a2–c4–e4–e6–g8–e8, 9. b1–d3–d5–f5–h7, 10. b2–b4–d6, 11. c5–e7–g7–g5, 12. c1–e3, 13. b3–d1–d3–d5–f5–h5, 14. c2–e2–e4–e6–g8, 15. d2–f4–h6–h8, 16. e3–c5–e7–g7, 17. d6–e7 usw.

Magischer Würfel

Die Elemente $b_3=42-(13+2)=27$, $a_3=3$, $c_3=25$, $b_4=1$, $b_1=5$, $b_5=10$, $b_2=19$, $b_6=9$ und $a_5=22$ sind nacheinander mit Hilfe der Reihensumme als Elemente einer waagerechten, senkrechten oder diagonalen Reihe leicht zu finden.

Damit sind die Felder besetzt bis auf die vier Eckfelder der beiden äußeren Quadrate.

Die fehlenden acht Zahlen bilden vier Paare mit der Summe 28, nämlich 4, 24; 7, 21; 8, 20; 12, 16.

Für die Körperdiagonalen gilt auch die Reihensumme 42. Mithin

$a_1+14+s_6=a_2+14+c_5\;3a_4+14+c_2$
$=a_6+14+c_1=42$

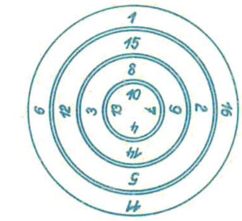
$a_1+c_6=a_2+c_5=a_4+c_2=a_6+c_1=28$

Da $a_1+a_2=42-17=25$ (waager. Reihe im linken Quadrat) sein muß, kann nur $a_1=21$ und $a_2=4$ sein. Damit folgt $c_6=28-a_1=7$ und $c_a=28-a_2=24$; ferner $a_4=42-(13+a_1)=8$, $a_6=42-(26+a_2)=12$, $c_2=28-a_4=20$ und $c_1=28-a_6=16$.

Die nachfolgende Abbildung zeigt den vervollständigten magischen Würfel, in dem alle waagerechten, senkrechten, körperdiagonalen, sowie die flächendiagonalen Reihen der drei aufeinander senkrecht stehenden mittleren Flächen gleich 42 sind.

21	17	4		5	19	18		16	6	20
13	3	26		27	14	1		2	25	15
8	22	12		10	9	23		24	11	7

Zahlenscheibe



Eine interessante Zahl

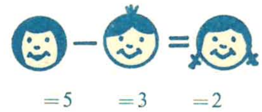
1. Menge
2. Charakter (moderner Begriff aus der Mengenlehre)
3. Monom
4. Logarithmus
5. x-Achse
6. x-beliebig

MCMLXX → 1970

Figurenrätsel

120	:	15	=	8
—		:		+
6		5		30
114	:	3	=	38

Pfiffige Mädchen



$5-3=2$
$2+5=3+3+1$
$2+3=5+5-5$

Mathematische Begriffe

Fibonacci — Grenzwert — Gerade — Mathematiker — Kurve — Thales — Tangente — Modell — Wurzelsatz — Gauß — Lösung — Kosinussatz — Drehung — Multiplikation — Zylinder = BERTRAND RUSSELL

1970

Lösungsbeispiele

$0=1\cdot 9\cdot 7\cdot 0$	$15=-1+9+7+0$
$1=1+9\cdot 7\cdot 0$	$16=1\cdot 9+7+0$
$2=1\cdot 9-7-0$	$17=1+9+7+0$
$3=1+9-7-0$	$18=1\cdot 9\cdot[\sqrt{7}]+0$
$4=1+\sqrt{9}+7\cdot 0$	$19=1+9\cdot[\sqrt{7}]+0$
$5=1+\sqrt{9+7}+0$	$20=-1+\sqrt{9}\cdot 7+0$
$6=-1+9-[\sqrt{7}]+0$	
$7=1\cdot 9-[\sqrt{7}]+0$	
$8=-1+9+7\cdot 0$	
$9=1\cdot 9+7\cdot 0$	
$10=1+9+7\cdot 0$	
$11=1+\sqrt{9}+7+0$	
$12=1+9+[\sqrt{7}]+0$	
$13=1+9-[-\sqrt{7}]+0$	
$14=[\sqrt{-1+9}]\cdot 7+0$	

Zur Darstellung der Zahlen 5; 7; 12; 13; 14; 18; 19 benötigt man unbedingt die Klammer

Größte Zahl: $64=1+9\cdot 7+0$

Abschlußprüfung im Fach Mathematik der Primary School in Tanzania

speziell für Klasse 5 und 6

Etwa zwei Fünftel aller Kinder in Tanzania haben die Möglichkeit, eine Schule zu besuchen. Entsprechend dem Plan der Regierung steigt die Zahl der Schüler in jedem Jahr. Jedoch fehlen eine große Zahl von Lehrern und Schulgebäuden. Das kann nur ganz systematisch und schrittweise verändert werden. Z. Z. sieht es noch so aus, daß die Eltern für die ersten sieben Schuljahre — die *Primary School* — zu zahlen haben. Es gibt wenige Schulen im Lande, an denen der Besuch kostenlos ist. — Der größte Teil dieser *Primary Schools* sind Tagesschulen, d. h. die Schüler kommen morgens gegen 8.00 Uhr in die Schule und verlassen sie gegen 17.00 Uhr. Manchmal haben Schüler 10 km und mehr Schulweg zurückzulegen. — Unterrichtsfächer sind Swahili, Englisch, Mathematik, Erdkunde, Geschichte und ein Fach, in welchem Grundkenntnisse der Fächer Biologie, Physik und Chemie vermittelt werden. Großer Wert wird auf Feld- bzw. Gartenarbeit gelegt. Dazu kommen Sportspiele.
Am Ende von sieben Schuljahren haben die Schüler eine schriftliche Prüfung in allen Fächern abzulegen, die vom Erziehungsministerium zentral gestellt wird. Die besten Schüler werden dann für die *Secondary School* ausgewählt. Manchmal sind das nur 2 bis 3 von 30 bis 40 Schülern einer siebenten Klasse.
Die Unterrichtssprache in der *Primary School* ist Swahili. Die Prüfungsaufgaben werden ebenfalls in der Landessprache gestellt. Später, in der *Secondary School*, wird in englischer Sprache unterrichtet.
Der Aufgabenzettel 1968 war in drei Spalten unterteilt — nämlich: Aufgabe, Platz zum Rechnen und ein Kästchen für das Ergebnis. Die folgenden 50 Fragen mußten in 75 Minuten beantwortet werden. *S. Wengel*

50 Aufgaben

■ 1 ■ $(1\,089+143):7=x$

■ 2 ■ $348\cdot 25=x$

■ 3 ■ Wie oft ist der dritte Teil eines Dutzend in 144 Stück enthalten?

■ 4 ■ $1\frac{3}{8}-\frac{2}{3}=x$

■ 5 ■ $3\frac{1}{3}+1\frac{4}{7}\cdot 1\frac{2}{5}=x$

■ 6 ■ $4\frac{4}{9}:1\frac{1}{3}=x$

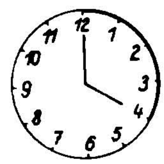
■ 7 ■ $\frac{1}{4}\cdot 0.5^2=x$ (Gib die Lösung für x als Dezimalbruch an!)

■ 8 ■ $17{,}6+9{,}6+23{,}4+4{,}02=x$

■ 9 ■ $17.34-8.009=x$

■ 10 ■ $48{,}75:0{,}05=x$

■ 11 ■ Die Fläche des kreisförmigen Ziffernblattes einer Uhr beträgt 154 cm^2. Wieviel cm^2 beträgt die hervorgehobene Fläche des verkleinert abgebildeten Ziffernblattes?



■ 12 ■ Die Abbildung stellt einen unvollständigen Zahlenstrahl dar. Welche Zahl muß am Anfang dieses unvollständigen Zahlenstrahles stehen?

■ 13 ■ Schreibe $\frac{2}{8}$ als Prozentsatz!

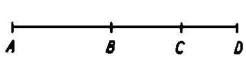
■ 14 ■ Wieviel Stunden und Minuten sind von 5.55 Uhr bis 8.40 Uhr vergangen?

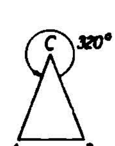
■ 15 ■ Bestimme den Nenner x der Gleichung $\frac{7}{x}\cdot\frac{4}{5}=\frac{7}{10}$!

■ 16 ■ Bestimme das arithmetische Mittel von 48, 80, 75, 63, 29!

■ 17 ■ Dividiere 864 durch 16 und multipliziere den erhaltenen Quotienten mit $\frac{1}{4}$. Wie lautet das Ergebnis?

■ 18 ■ Es sei $\overline{AB}=7$ cm, $\overline{CD}=4$ cm, $\overline{AD}=16$ cm (siehe Abbildung). Bestimme die Länge von $\overline{BC}$!

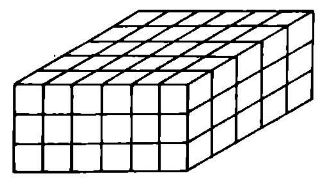




■ 19 ■ Die Abbildung stellt ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB}$ dar. Bestimme die Größe eines Basiswinkels dieses Dreiecks!

■ 20 ■ Schreibe 33,3% als gemeinen Bruch!

■ 21 ■ Wieviel Ziegelsteine enthält der abgebildete geschichtete Stapel?

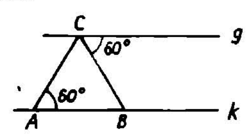


■ 22 ■ Welcher Geldbetrag ist größer: 10% von 71 Schillingen oder 7.50 Schillinge?

■ 23 ■ $\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}}=x$

■ 24 ■ In einem Dreieck ABC sei $\sphericalangle CAB=\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle ABC=\sphericalangle ACB$. Welche Beziehung besteht zwischen den Winkeln $\sphericalangle CAB$ und $\sphericalangle ACB$?

■ 25 ■ In dem abgebildeten Dreieck ABC sei $\overline{AC}=30$ cm und $g \parallel k$. Wie lang ist die Seite $\overline{AB}$?

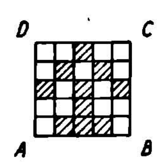


■ 26 ■ $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}=x$

■ 27 ■ Ein Auto legte eine Fahrstrecke von 120 km in $2\frac{1}{2}$ h zurück. Wieviel km Fahrstrecke legte dieses Auto in einer halben Stunde zurück, wenn die Geschwindigkeit als konstant angenommen wird?

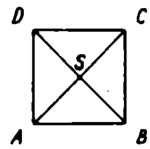
■ 28 ■ Bestimme alle natürlichen Zahlen x, für die gilt: $160<x<180$ und 17 ist Teiler von x.

■ 29 ■ Wieviel Prozent der Fläche des abgebildeten Quadrates $ABCD$ beträgt der Flächeninhalt aller schraffierten Quadrate?



■ 30 ■ Der Preis für 1 m Stoff beträgt 45 Schillinge. Wieviel Schillinge kosten $\frac{2}{5}$ m dieses Stoffes?

■ 31 ■ Die Abbildung stellt ein Quadrat dar. Ermittle die Größe des Winkels $\sphericalangle CSB$!



■ 32 ■ *Athuman* erhielt die Auskunft, daß der Zug eine halbe Stunde nach 18 Uhr in Dodoma ankommen werde. Wie läßt sich die Ankunftszeit des Zuges noch anders ausdrücken?

■ 33 ■ Ein Garten, der die Gestalt eines Rechtecks hat, ist dreimal so lang wie breit. Der Garten wurde ringsherum eingezäunt; dabei wurden 304 laufende Meter Maschendraht verbraucht. Berechne Länge und Breite des Gartens!

■ 34 ■ Wieviel Tage entfielen im Jahre 1968 auf die Zeit vor dem 15. April?

■ 35 ■ Der erste März eines bestimmten Jahres fiel auf einen Freitag. Auf welchen Wochentag fiel im gleichen Jahr der 27. März?

■ 36 ■ Ein bestimmtes Radiogerät kostet 700 Schillinge. Wieviel Schillinge beträgt der Kaufpreis für dieses Rundfunkgerät bei Barzahlung, wenn in diesem Falle 20% Rabatt gewährt werden?

■ 37 ■ *Hamis* sollte 240 Apfelsinen verkaufen. Am ersten Tag verkaufte er den dritten Teil aller Apfelsinen; am zweiten Tag verkaufte er fünf Achtel der ursprünglich zum Verkauf vorgesehenen Apfelsinen; am dritten Tag verkaufte er die verbliebenen restlichen Apfelsinen. Wieviel Apfelsinen hat er an jedem der drei Tage verkauft?

■ 38 ■ $\frac{4}{100}+\frac{7}{10000}=x$

(Gib die Lösung als Dezimalbruch an!)

■ 39 ■ $\sqrt{2.25}=x$

■ 40 ■ Den Zahlen 1, 2, 3, 4 sind – wie durch Pfeile gekennzeichnet – nach einer bestimmten Vorschrift jeweils genau eine Zahl zugeordnet.

$1 \longrightarrow 4$
$2 \longrightarrow 7$
$3 \longrightarrow 10$
$4 \longrightarrow x$

Wie lautet die Zahl x, die der Zahl 4 zugeordnet ist?

■ 41 ■ Ein quaderförmiges, oben offenes Gefäß, das 40 cm lang, 30 cm breit und 50 cm hoch ist, soll bis zum Rande mit Milch gefüllt werden. Wieviel Liter Milch faßt dieses Gefäß?

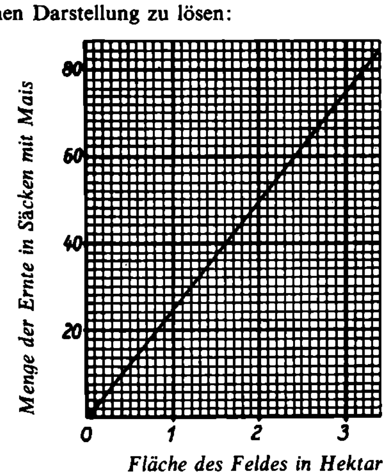
■ 42 ■ *Hubert* bringt 200 Schillinge zur Sparkasse. Wieviel Geld wird er einschließlich der Zinsen nach drei Jahren zur Verfügung haben, wenn die Sparkasse einen Zinssatz von $2\frac{1}{2}\%$ gewährt?

■ 43 ■ Eine bestimmte Arbeit wurde von 15 Arbeitern in 8 Tagen erledigt. Welche Zeit hätten 5 Arbeiter für die gleiche Arbeit benötigt, wenn eine gleiche Arbeitsintensität angenommen wird?

■ 44 ■ Nimm an, du hättest den Buchstaben C mit Tinte geschrieben und sofort danach mit einem Löschblatt abgedeckt. Wie wird der Buchstabe C auf der Seite des Löschblattes aussehen, mit der die Tinte getrocknet wurde?

■ 45 ■ Vier Jungen legten ihr Taschengeld zusammen und errechneten das arithmetische Mittel daraus; es betrug 3.50 Schillinge. Ein fünfter Junge besaß 6 Schillinge Taschengeld. Welches arithmetische Mittel würde man erhalten, wenn alle fünf Jungen das Taschengeld zusammenlegen?

Die folgenden Aufgaben 46, 47 und 48 sind unter Benutzung der abgebildeten graphischen Darstellung zu lösen:

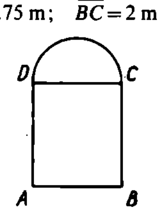


■ 46 ■ Wieviel Sack Mais wird ein Farmer voraussichtlich ernten, wenn er 2 ha Mais anbaut?

■ 47 ■ Wieviel ha Land müssen mit Mais bebaut werden, um 60 Sack Mais zu ernten?

■ 48 ■ Auf wieviel ha Land müssen zusätzlich Mais angebaut werden, wenn die ursprünglich vorgesehene Ernte von 30 Sack Mais auf 45 Sack Mais erhöht werden soll?

■ 49 ■ Die abgebildete Figur setzt sich aus einem Rechteck und einem Halbkreis zusammen. Berechne den Flächeninhalt der Figur, wenn folgende Maße zugrunde liegen: $\overline{AB}=1.75$ m; $\overline{BC}=2$ m



(Hinweis: $0.875^2=0.765625$; $\pi\approx\frac{22}{7}$)

■ 50 ■ An vier Arbeiter soll der Lohn ausgezahlt werden. Dabei sollen so wenig wie möglich Geldscheine oder Münzen verwendet werden. Die Löhne der vier Arbeiter betragen 153.20 Schillinge, 162.50 Schillinge, 202.10 Schillinge, 235 Schillinge.
Wieviel Zehn-Schilling-Scheine werden benötigt, wenn es außerdem noch Zwanzig-Schilling-Scheine und Fünfzig-Schilling-Scheine gibt?

Fortsetzung von S. 90
(Mathematische Wettbewerbe in Schweden)

a) Es sind Lagen der Punkte $A(p, q)$ und $B(r, s)$ anzugeben, bei denen sich eine Partikel von A nach B bewegen kann.
b) Es ist zu zeigen, daß, wenn $qs>0$, die Anzahl der Wege, die eine Partikel wählen kann, um von $A'(0, -q)$ nach $B(r, s)$ zu gelangen, gleich der Anzahl der Wege ist, die eine Partikel wählen kann, um von $A(0, q)$ nach B zu gelangen, wobei ein Punkt der x-Achse zu passieren ist.

■ 5 ■ Es sei f eine im Intervall $(-\infty, +\infty)$ zweimal stetig-differenzierbare Funktion, und es sei $f(x)\leqq 1$ im Intervall $[0, 1]$ sowie $f(0)=f(1)=1$.
Ferner gebe es eine ebenfalls in $(-\infty, +\infty)$ definierte Funktion a mit $a(x)>0$, so daß

$$a(x)f''(x)+f(x)=0$$

für alle x gilt.
Es ist zu beweisen, daß es dann eine reelle Zahl y mit $0<y<1$ gibt, so daß $f(y)<0$ gilt.
Ferner ist zu beweisen, daß die Bedingung $f(x)\leqq 1$ durch die folgende Bedingung ersetzt werden kann: Es gibt eine reelle Zahl z mit $0<z<1$, so daß $f(z)\leqq 1$ gilt.

■ 6 ■ Es wird die folgende Behauptung aufgestellt:
Wenn A ein Punkt am Strande eines Sees ist, so gibt es zwei andere Punkte B und C am Strand, so daß das Dreieck ABC gleichseitig ist.
a) Es ist zu zeigen, daß diese Behauptung nicht immer richtig ist.
b) Es ist zu zeigen, daß diese Behauptung immer richtig ist, wenn man annimmt, daß der See genau konvex ist (d. h., daß jede Gerade den Strand in höchstens zwei Punkten schneidet) und daß der Strand in jedem Punkt eine eindeutig bestimmte Tangente hat.
c) Es ist zu beweisen, daß die Behauptung mit anderen, schwächeren Bedingungen als den unter b) angegebenen richtig ist. Diese Bedingungen sollen Eigenschaften des Sees, des Strandes oder der Lage des Punktes A betreffen.

Finale (2. Stufe, 23. 11. 1969)

Aus Platzgründen müssen wir auf eine Veröffentlichung der 9 gestellten Aufgaben verzichten. d. Red.

Mathematik-Kalender

September 1970

Di 1 Beginn des Schuljahres 1970/71

Mi 2 * 1865 Sir William Rowan Hamilton. Wirkte in Dublin. Bedeutende Beiträge zur Algebra (Hamiltonsches Sechseck, Hamiltonsche Gruppe) und zur Vektorrechnung. († 3. 8. 1905)

Do 3

Fr 4

Sa 5 † 1906 Ludwig Boltzmann. Wirkte in Wien. B. ist einer der Begründer der statistischen Mechanik (* 20. 2. 1844)

So 6

Mo 7

Di 8

Mi 9

Do 10 Beginn der Schulolympiade (X. MO), siehe in diesem Heft S. 84

Fr 11

Sa 12

So 13 * 1873 Constantin Carathéodory. Wirkte in Göttingen, Berlin, Smyrna, Athen und München. Fundamentale Arbeiten zur Variationsrechnung, zu den Differentialgleichungen. († 2. 2. 1950)

Mo 14

Di 15

Mi 16

Do 17 * 1826 Bernhard Riemann († 20. 7. 1866)

Fr 18 † 1783 Leonhard Euler. Studiert in Basel Philosophie und Theologie, geht 1727 nach Petersburg, wird Prof. für Physik und Mathematik. Fundamentale Arbeiten zu Variationsrechnung, Integral- und Differentialrechnung (* 15. 4. 1707)

Sa 19

So 20 * 1874 Michael Bauer. Wirkte in Budapest. Bed. Arbeiten zur Theorie der Zahlkörper. († Februar 1945)

Mo 21

Di 22

Mi 23

Do 24 * 1801 Michail Wassiljewitsch Ostrogradski. Wirkte in Petersburg, Arbeitsgebiete Integralrechnung, Variationsrechnung. († 1. 1. 1862)

Fr 25 † 1777 Heinrich Johann Lambert. Macht sich als Autodidakt mit der zeitgenössischen Mathematik bekannt. Sein Ziel: bei möglichst sparsamem Gebrauch der Rechen- und Denkmittel ein Höchstmaß von Genauigkeit erreichen. (* 26. 8. 1728 in Mühlhausen)

Sa 26 † 1868 August Ferdinand Möbius. Wirkte in Leipzig. Grundlegende Arbeiten zur Geometrie und zur theor. Mechanik (* 17. 11. 1790)

So 27

Mo 28

Di 29

Mi 30

Oktober 1970

Do 1

Fr 2

Sa 3

So 4

Mo 5 * 1781 Bernhard Bolzano. Wirkte in Praha. Fundamentale Arbeiten über Grundlagen der Analysis. († 18. 12. 1848)

Di 6 * 1831 Richard Dedekind. Fundamentale Arbeiten zur Zahlentheorie († 12. 2. 1916)

Mi 7

Do 8

Fr 9

Sa 10 Beginn der Herbstferien

So 11

Mo 12

Di 13

Mi 14

Do 15

Fr 16

Sa 17

So 18 † 1871 Charles Babbage. Wirkte in Cambridge. Erfinder der ersten Rechenmaschine, die mit ganzen Zahlenspalten zu rechnen vermag. (* 26. 12. 1762)
Ende der Herbstferien

Mo 19

Di 20 Abgabe der Lösungen zur Schulolympiade

Mi 21

Do 22

Fr 23

Sa 24

So 25 * 1811 Evariste Galois († 31. 5. 1832)

Mo 26

Di 27

Mi 28 † 1703 John Wallis. Wirkte in Oxford. Verdienste um Algebra und Arithmetik. (* 23. 11. 1616)

Do 29

Fr 30 † 1626 Willebrord van Royen, Snell. Wirkte in Leiden. Entdecker des Berechnungsgesetzes des Lichtes und Begründer der geometrischen Optik (* 1580)

Sa 31 * 1815 Karl Weierstraß († 19. 2. 1892)

Dabeisein ...
beim Fortschritt der Technik
als Verkehrsteilnehmer
als Leser

HANS KADNER

Ich fahre ein Kleinkraftrad

Fahrzeugvorstellung, Fahrhinweise, Pflege-, Kontroll- und Reparaturtips
Etwa 120 Seiten, 16 Abbildungen, 5 Tabellen, Broschur cellophaniert etwa 4,60 Mark

Aus dem Inhalt:
Fahrzeugvorstellung und Einschätzung / Welches Rad für wen? / Fahrerlaubnis — oder nicht? / Bestimmend ist das Drehmoment / Stets überlegt schalten / Fahrbahn und Haftreibung / Bremsen und Bremsweg / Fahren in der Praxis / Pflege-, Kontroll- und Reparaturtips / Kupplung / Getriebe / Lenkung / Räder / Bereifung / Bremsen / Störungssuche an der elektrischen Anlage / Periodische Kontroll- und Pflegearbeiten / Mögliche Umbauten / Sicherung gegen unbefugtes Benutzen / Hinweise für die systematische Beseitigung von Störungen: Motor springt nicht an oder bleibt stehen, Motor zieht nicht, Motor knallt oder patscht, Motor wird zu heiß / Verhalten bei Verkehrsunfällen

Wir stellen vor: KR 51 — „Schwalbe“

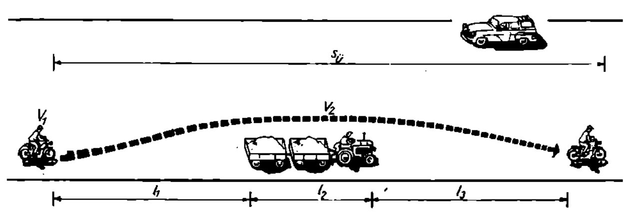
Leistung: 2,5 kW (3,4 PS) bei 6 500 U $\cdot$ min^{-1}
max. Drehmoment: 0,38 kpm bei 6 000 U $\cdot$ min^{-1}
Hubraum: 49,6 cm^3
Höchstgeschwindigkeit: 60,0 km $\cdot$ h^{-1}
Inhalt des Kraftstofftanks: 6,8 l
Kraftstoffverbrauch: 2,7 l pro 100 km
Anzahl der Gänge: 3
Bereifung: 20 $\times$ 2.75
Leermasse: 80,0 kg
Nutzlast: 150,0 kg
Gesamtmasse: 230,0 kg
Sitzplätze: 2
Anhängelast: 60,0 kg

Der Überholvorgang

Ein Kleinkraftrad-Fahrer möchte einen Traktor mit zwei Anhängern überholen. Das Kleinkraftrad fährt 50 km $\cdot$ h^{-1}, der Traktor 30 km $\cdot$ h^{-1}. Beide Fahrzeuge fahren während des Überholvorgangs mit gleicher Geschwindigkeit weiter. Der Überholweg berechnet sich dann nach folgender Formel

$$s_{ü} = \frac{L \cdot v_1}{v_1 - v_2}$$

Die verwendeten Zeichen bedeuten:
$s_{ü}$ = Gesamtüberholweg für das überholende Fahrzeug in Metern
v_1 = Geschwindigkeit des Kleinkraftrades in km $\cdot$ h^{-1}
v_2 = Geschwindigkeit des Traktors in km $\cdot$ h^{-1}
L = $l_1 + l_2 + l_3$ in Metern; dabei ist
l_1 = Sicherheitsabstand vor dem Überholen zum vorausfahrenden Fahrzeug in Metern
l_2 = Länge des zu überholenden Fahrzeugs in Metern
l_3 = Sicherheitsabstand, den das überholende Fahrzeug vor dem Wiedereinordnen zum überholten Fahrzeug herausfahren muß, in Metern



Nehmen wir an, daß der Sicherheitsabstand des Kleinkraftrades zum vorausfahrenden Traktor der Hälfte der gefahrenen Geschwindigkeit in Metern entspricht, so sind das 25 m. Das Kleinkraftrad weist eine Länge von 2 m und der Traktorzug eine Gesamtlänge von 20 m auf. Zum Überholen des Traktorzuges werden 180 m benötigt, denn

$$s_{ü} = \frac{72 \cdot 50}{50 - 30} = \frac{3\,600}{20} = 180\,.$$

Zahlreiche Tabellen, Graphiken und umfassendes Faktenmaterial sind geeignet für praktische Arbeit in Mathematik-Arbeitsgemeinschaften. Wir wünschen viel Erfolg!

transpress
VEB Verlag für Verkehrswesen
108 Berlin

18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6
19	54	53	52	51	50	49	48	47	46	45	44	5
20	55	82	81	80	79	78	77	76	75	74	43	4
21	56	83	102	101	100	99	98	97	96	73	42	3
22	57	84	103	ZIEL				110	95	72	41	2
23	58	85	104	105	106	107	108	109	94	71	40	1
24	59	86	87	88	89	90	91	92	93	70	39	START
25	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	38	
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	

Zahlenspirale

Es wird mit 2 Würfeln reihum gewürfelt. Die Anzahl der Mitspieler ist beliebig.

Nach jedem Wurf darf man mit beliebigen Spielsteinen so viele Schritte nach vorn gehen, wie das Produkt der Augenzahlen der beiden Würfel angibt.

bisher erreichtes Feld:	z. B. 33
gewürfelt: 3 und 4	$3 \cdot 4 = 12$
zu rechnen: $33 + 12 = 45$	Stein auf 45 setzen!

Gewonnen hat, wer zuerst das Ziel erreicht.

Wer beim ersten Würfeln das Feld 1 erreicht, darf sofort auf Feld 10 setzen! Wer beim ersten Würfeln das Feld 2 erreicht, geht zum Start zurück! Wer eine Zahl auf einem Quadratzahlfeld erreicht, darf die Differenz der erreichten und vorhergehenden Quadratzahl an Schritten nach vorn gehen!

bisher erreichtes Feld:	z. B. 25
Berechnung der Differenz:	$25 - 16 = 9$
zu rechnen: $25 + 9 = 34$,	Stein auf 34 setzen!

Wer eine Zahl auf einem Primzahlfeld erreicht, muß auf das vorhergehende Primzahlfeld zurück!

bisher erreichtes Feld:	z. B. 29
vorhergehendes Primzahlfeld:	23 Stein auf 23 setzen!

Wer ein schon besetztes Feld erreicht, schickt den bisherigen Benutzer an den Start zurück!

Viel Freude am Spiel wünscht

Mathematikfachlehrer W. Weber,
EOS Schkeuditz (Bez. Leipzig)