

Mathematische
Schülerzeitschrift

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
22. Jahrgang 1988
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395



1



Alphons

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold

Herausgeber und Verlag:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag

Anschrift des Verlags:

Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086

Anschrift der Redaktion:

PSF 14, Leipzig 7027

Redaktion:

Gabriele Liebau (Chefredakteur); Rosemarie Schubert (redaktioneller Mitarbeiter)

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn.

G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr.

W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat.

J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dr. C. P.

Helmholz (Leipzig); Dozent Dr. sc. nat.

R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger

H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Ker-

ber (Neustrelitz); Oberstudienrat J. Leh-

mann, VLdV (Leipzig); Oberlehrer Prof.

Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer

H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat.

E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat.

P. Schreiber (Greifswald); Dr. rer. nat.

W. Schmidt (Greifswald); Oberstudienrat

G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. rer. nat.

W. Schulz (Berlin); W. Träger (Döbeln);

Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch, VLdV (Halle)

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: W. Schmidt (S. 1, 2, 3); J. Warnke (S. 10, 11); Sportverlag Berlin (S. 15)

Titelblatt: W. Fahr, Berlin, Vignette von Lothar Otto, Leipzig

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig



Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 1 **Kalendergeschichten, Teil 1**
Dr. W. Schmidt, Sektion Mathematik der *E.-M.-Arndt*-Universität Greifswald
- 4 **Wieviel Lösungen hat die Aufgabe?**
Mathematikfachlehrer A. Halameisär, Moskau/Dr. C. P. Helmholz, Sektion Mathematik der *Karl-Marx*-Universität Leipzig
- 5 **Sprachecke**
M. Frank/P. Hofmann/G. Liebau (alle Leipzig)
- 6 **Die Koordinatenmethode im Wandel der Zeiten, Teil 2**
Dr. P. Schreiber, Sektion Mathematik der *E.-M.-Arndt*-Universität Greifswald
- 8 **Eine Aufgabe über Körper aus Dreiecksstücken**
Mathematikfachlehrer R. Münzberg, EOS „Ernst Abbe“, Eisenach
- 9 **Eine Aufgabe von Prof. Dr. J. A. Grunert**
- 10 **IMO 87 in Kuba – ein unvergeßliches Erlebnis**
stud. math. Ingo Warnke, *W.-Pieck*-Universität Rostock
- 12 **In freien Stunden · *alpha*-heiter**
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig
- 14 **Rund um den SR 1: Die y^x -Taste**
Dr. L. Flade, Sektion Mathematik der *M.-Luther*-Universität Halle
- 15 **Schachecke**
H. Rüdiger, Werk für Fernsehelektronik Berlin
- 16 **Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb**
Aufgaben zu Mathematik, Naturwissenschaft und Technik
Zusammenstellung: Dr. W. Fregin/Dr. W. Riehl, beide Leipzig, OStR Th. Scholl, Berlin
- 18 ***alpha*-Wettbewerb 1986/87**
Preisträger und vorbildliche Leistungen
- 19 **Körper mit bestimmten Eigenschaften gesucht**
H.-P. Störr, Spezialschule für math.-naturwiss.-techn. Richtung, Karl-Marx-Stadt
- 20 **Kreise, Ellipsen und Planeten**
Dr. J. Buhrow, Sektion Mathematik der *E.-M.-Arndt*-Universität Greifswald
- 21 **Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt**
Der Kreisklub Mathematik Halle-Süd stellt sich vor
A. Beige/A. Großmann, Kreisklub Mathematik Halle-Süd
- 21 **Lösungen**
- III. U.-Seite: Wissenswertes über pythagoreische Zahlen
OStR Th. Scholl, Berlin
- IV. U.-Seite: Das Kämmen eines Igels
A. Kalinin, aus: Quant, Moskau



Alphons, vom Leipziger Graphiker Lothar Otto, wird insbesondere die Schüler der 5. bis 7. Klassen auf speziell für sie geeignete Beiträge hinweisen.



Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97

Artikelnummer (EDV) 128

ISSN 0002-6395

Redaktionsschluß: 5. Oktober 1987

Auslieferungstermin: 9. Februar 1988

Kalendergeschichten

Teil 1

Die Uhr und der Kalender waren Großvaters Navigationsgeräte durch das Leben.

E. Strittmatter, Schulzendorfer Kramkalender



Bild 1

1 DC	8 B	15 G	22 E
2 B	9 AG	16 F	23 D
3 A	10 F	17 ED	24 C
4 G	11 E	18 C	25 BA
5 FE	12 D	19 B	26 G
6 D	13 CB	20 A	27 F
7 C	14 A	21 GF	28 E

Dies läßt sich jetzt fortsetzen.

Von 1800 bis 1899 galt (Tabelle 4)

1 ED	8 C	15 A	22 F
2 C	9 BA	16 G	23 E
3 B	10 G	17 FE	24 D
4 A	11 F	18 D	25 CB
5 GF	12 E	19 C	26 A
6 E	13 CD	20 B	27 G
7 D	14 B	21 AG	28 F

und von 1900 bis 2099 die Sonntagsbuchstabentafel (Tabelle 5)

1 FE	8 D	15 B	22 G
2 D	9 CB	16 A	23 F
3 C	10 A	17 GF	24 E
4 B	11 G	18 E	25 DC
5 AG	12 F	19 D	26 B
6 F	13 ED	20 C	27 A
7 E	14 C	21 BA	28 G

Nach einer Festlegung des Abtes Dionysius erhielt das erste Jahr unserer Zeitrechnung den Sonntagsbuchstaben B. Dies führte zu der Regel:

Wenn man 9 zur Jahreszahl addiert und die Summe durch 28 dividiert, so zeigt der Quotient, wie viele Sonnenszirkel seit dem Jahr 9 v. u. Z. verflossen sind, und der Rest gibt an, wieviel Jahre im laufenden Sonnenszirkel bis zum gegenwärtigen Jahr vergangen sind. Eben neben dieser zuletzt erwähnten Zahl steht der Sonntagsbuchstabe in der Sonntagsbuchstabentafel.

Beispiele:

a) Welcher Tag war der 15.6.1985?

Es ist $(1985 + 9) : 28 = 71$ Rest 6. Aus der Tabelle 5 ersehen wir, daß F der Sonntagsbuchstabe ist. Nach der Tabelle 1 entspricht der 1., 8. und 15. Juni dem Buchstaben E. Weil E der unmittelbare Vorgänger des Sonntagsbuchstabens F ist, war der 15.6.1985 ein Sonnabend.

b) Auf welchen Wochentag fiel der 17.5.1782?

Wegen $(1782 + 9) : 28 = 63$ Rest 27 ist F der Sonntagsbuchstabe (Tabelle 3). Der 1., 8. und 15. Mai hat B, daher gehört der Buchstabe D zum 17. 5. Wenn F dem Sonntag entspricht, so ist E ein Sonnabend und D ein Freitag. Also fiel der 17.5.1782 auf einen Freitag.

c) Welcher Tag wird der 1.1.2000 sein?

Aus der Tabelle 5 entnehmen wir nach der Lösung einer Divisionsaufgabe den Sonntagsbuchstaben BA, weil 2000 ein Schaltjahr ist und der 1.1. vor dem 23.2. liegt, ist der Sonntagsbuchstabe B und der gesuchte Wochentag ist Sonnabend.

d) Der 25.2.1984 soll untersucht werden. Dem Rest 5 entspricht AG, weil der 25.2. auf den 23.2. folgt, ist G zu benutzen. Für den 25.2. folgt aus Tabelle 1 der Buchstabe

1. An welchem Wochentag wurdest du geboren? Wieviel Tage bist du alt? Weißt du, auf was für einen Wochentag der 1.1.2000 fallen wird? – Die zweite Frage läßt sich beantworten, indem du alle seit deiner Geburt bis zum aktuellen Datum verflossenen Tage addierst, dabei sind insbesondere die Schaltjahre zu berücksichtigen. Ein einfaches, aber mühevolleres Vorgehen! Wenn man den gewünschten Wochentag nicht in einem Kalender ablesen kann, so läßt er sich aus dem in Tagen gemessenen Alter leicht berechnen.

Es ist objektiv recht schwierig, gute Kalender zusammenzustellen, weil ein (mittleres) Jahr aus 365,242... Tagen besteht. Der 45 v. u. Z. von Julius Caesar eingeführte Julianische Kalender sieht Jahre von 365 Tagen vor. In dem vierten Jahr wurde nach dem 23. Februar ein Schalttag eingefügt. Papst Gregor XIII. ordnete 1582 die Benutzung eines neuen Kalenders an, dieser wird als Gregorianischer Kalender bezeichnet, er wurde von Christoffel Clavius (1537 bis 1612) aufgestellt. An den 400. Jahrestag dieser Kalendereinführung erinnerte 1982 eine 60-Pf-Briefmarke der Deutschen Bundespost. Das Julianische Jahr ist mit 365,25 Tagen etwas länger als ein mittleres Sonnenjahr. Dies berücksichtigte der Gregorianische Kalender durch eine Korrektur von 3 Tagen in 400 Jahren. Und zwar ist das erste Jahr eines neuen Jahrhunderts (z. B. 1700, 1800, 1900) kein Schaltjahr, falls die ersten beiden Ziffern keine durch 4 teilbare Zahl darstellen (d. h. 2000 wird ein Schaltjahr sein!). Übrigens setzte sich dieser neue Kalender nur zögernd durch, er wurde erst 1777 Reichskalender in Deutschland. Die Sowjetunion führte ihn 1923 ein, wie ihr aus der Datumsangabe für viele historische Ereignisse (z. B. Oktoberrevolution am 7.11.) wißt.

Bei der Aufstellung von Kalendern ist u. a. auch die Lage der Feiertage zu berechnen. Es darf uns daher nicht verwundern, daß noch vor 200 Jahren in Mathematiklehrbüchern das Kapitel Chronologie (Einteilung der Zeit) einen breiten Raum einnahm. (Die Berliner Akademie besaß eine nicht unergiebigste Finanzierungsquelle durch die Herausgabe von Kalendern; Meinungsverschiedenheiten über zu erwartende Einnahmen aus dem Kalenderverkauf waren auch der Anlaß für L. Eulers erstes Abschiedsgesuch, siehe: R. Thiele, Leonhard Euler, Leipzig 1982.)

Der Mathematiker W. J. G. Karsten (1732

bis 1787, siehe alpha 1/1986) verfährt bei der Bestimmung des Wochentages so: Kämen in einem Kalender keine Schaltjahre vor, so würde alle 7 Jahre der Neujahrstag auf den gleichen Wochentag fallen. Wegen des Auftretens von Schaltjahren ist dies erst nach einem Zyklus von 28 Jahren der Fall. Jedem Tag ordne man nun einen Buchstaben aus der Menge A, B, C, D, E, F, G zu, und zwar dem 1. Januar A, dem 2. Januar B, ..., dem 1. Februar D usw. Im Schaltjahr erhält der 24. 2. als Schalttag ebenso wie der 23. 2. den Buchstaben E. Dadurch wird erreicht, daß in allen Monaten jeder Monatstag seinen eigenen Buchstaben behält. Für den 1. eines jeden Monats sind dies (Tabelle 1):

A Januar	G Juli
D Februar	C August
D März	F September
G April	A Oktober
B Mai	D November
E Juni	F Dezember

Im darauffolgenden Jahr fällt der Monats erste auf den nächstfolgenden Wochentag. Entsprechend z. B. der Sonntag im n-ten Jahr A, so wird im (n + 1)-ten Jahr dem Montag A und dem Sonntag G zugeordnet usw. Im Schaltjahr behält jeder Wochentag seinen Buchstaben nur bis zum 23. 2., der 24. 2. und alle folgenden Tage des Schaltjahres erhalten jeweils im Alphabet (Zyklus A, ..., G) vorangehende Buchstaben, z. B. E anstelle von F oder G anstelle von A. Somit treten im Schaltjahr zwei Sonntagsbuchstaben auf, einer bis zum 23. 2. und einer (im Alphabet vorangehend) ab 24. 2. Da G der Sonntagsbuchstabe des Jahres 1582 war, erhält man folgende Sonntagsbuchstabentafel für 1582 bis 1699 (Tabelle 2):

1 CB	8 A	15 F	22 D
2 A	9 GF	16 E	23 C
3 G	10 E	17 DC	24 B
4 F	11 D	18 B	25 AG
5 ED	12 C	19 A	26 F
6 C	13 BA	20 G	27 E
7 B	14 G	21 FE	28 D

Im Gregorianischen Kalender sind 1700, 1800 und 1900 keine Schaltjahre. Daher besaß 1700 nur einen Sonntagsbuchstaben, nämlich C. Folglich ist die Sonntagsbuchstabentafel von 1700 bis 1799 (Tabelle 3):

F, also ist der 26.2.1984 ein Sonntag und der gesuchte Tag ein Sonnabend.

▲ 1 ▲ Bestätige, daß der 1.1.1900 ein Montag war! Ermittle, an welchem Wochentag du geboren bist!

Von C.F.Gauß (1777 bis 1855) stammt ein einfacheres, formelmäßiges Vorgehen zur Berechnung des Wochentages, das wir sehr gut mit dem Schulrechner SR1 nachvollziehen können. Dazu wird das vorgegebene Datum in der Form

$$t.m.h \cdot 10^2 + j$$

mit $t \in \{1, \dots, 31\}$, $m \in \{1, \dots, 12\}$,

$$h, j \in \{0, \dots, 99\}$$

beschrieben. Hierbei bedeuten t die Tages- und m die Monatszahl, h steht für die ersten beiden Ziffern und j für die letzten beiden Ziffern der Jahreszahl (d. h. Jahrhundert und Jahr im Jahrhundert). Abweichend von der uns geläufigen Monatsnummerierung ist hier die Zuordnung (Tabelle 6):

Monat	Jan.	Feb.	März	April	Mai	Juni
m	11	12	1	2	3	4

Monat	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
m	5	6	7	8	9	10

vorzunehmen, und Januar bzw. Februar sind als letzte Monate des (vorangehenden) Jahres aufzufassen, z. B. ist der Februar 1986 der 12. Monat des Jahres 1985!

Wir erinnern noch an den Begriff des *ganzzahligen Anteils* $[x]$ einer reellen Zahl x , der durch $[x] \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq x - [x] < 1$ charakterisiert ist.

Nach Gauß ermittle nun die Zahl

$$G = [2,6m - 0,2] + t + j + \left[\frac{j}{4}\right] + \left[\frac{h}{4}\right] - 2h.$$

Stelle anschließend G dar als $G = 7 \cdot k + r$ mit r, k ganz und $0 \leq r < 7$, d. h. $r \equiv G \pmod{7}$. Überlege, wie dabei der Schulrechner benutzt werden kann!

Entsprechend Tabelle 7 wird der Zahl r ein Wochentag zugeordnet, dieser ist der gesuchte Wochentag.

r	0	1	2	3	4	5	6
Tag	So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa

Wir überprüfen unsere Beispiele:

a) 15.6.1985

$$t = 15, m = 4, h = 19, j = 85$$

$$G = 10 + 15 + 85 + 21 + 4 - 38, \text{ also}$$

$$G = 97 = 13 \cdot 7 + 6 \Rightarrow \text{Sonnabend.}$$

b) 17.5.1782

$$t = 17, m = 3, h = 17, j = 82$$

$$G = 96 = 13 \cdot 7 + 5 \Rightarrow \text{Freitag.}$$

c) 1.1.2000

$$t = 1, m = 11, h = 19, j = 99$$

$$G = 118 = 16 \cdot 7 + 6 \Rightarrow \text{Sonnabend.}$$

d) 25.2.1984

$$t = 25, m = 12, h = 19, j = 83$$

$$G = 125 = 17 \cdot 7 + 6 \Rightarrow \text{Sonnabend.}$$

e) 1.1.1900

$$t = 1, m = 11, h = 18, j = 99$$

$$G = 120 = 17 \cdot 7 + 1 \Rightarrow \text{Montag.}$$

Bei der Angabe des Alters in Tagen beschränken wir uns auf Daten im 20. Jahrhundert. Zuerst wollen wir studieren, wieviel Tage vom 1.1.1900 bis zu einem vorgegebenen Datum (unseres Jahrhunderts) vergangen sind. Durch zweimaliges Anwenden dieses Verfahrens kann dann die ursprüngliche Frage beantwortet werden.

Das aktuelle Datum schreiben wir wieder als $t.m.1900 + j$, wobei die Monate jetzt in üblicher Weise numeriert sind, also Januar = 1, Februar = 2 usw. Berücksichtigt man Schaltjahre nicht und rechnet zuerst mit einer einheitlichen Monatslänge von 31 Tagen, so ergibt sich für die gesuchte Anzahl L der Überschlagswert

$$\tilde{L} = t + 31(m - 1) + 365j.$$

Die für die Schaltjahre zu addierende Korrektur hängt davon ab, ob das aktuelle Datum in ein Schaltjahr fällt oder nicht, und wenn ja, so ist zu unterscheiden, ob das Datum vor dem Schalttag (29.2.) oder danach liegt. Beachtet man dies, erhält man für $j \geq 1$ die Regel:

Wenn $m \leq 2$ ist, so addiere $\left[\frac{j-1}{4}\right]$ und

wenn $m \geq 3$, so addiere $\left[\frac{j}{4}\right]$ zu $\tilde{L}$. Nun haben nicht alle Monate 31 Tage, daher haben wir zuviel Tage gezählt und $\tilde{L}$ ist zu groß. In Abhängigkeit von dem Monat m wurde in einem Nicht-Schaltjahr zuviel addiert (Tabelle 8):

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Tage $T(m)$	0	0	3	3	4	4	5	5	5	6	6	7

Man kann nun fragen: Ist es möglich, eine Funktion $y = y(m)$ anzugeben mit der Eigenschaft

$$y(m) = T(m) \text{ für } m = 1, 2, \dots, 12?$$

Wie ihr unmittelbar nachprüft, besitzt die Funktion $y(m) = [0,4m + 2,3]$ diese Eigenschaft für $m = 3, 4, \dots, 12$.

Folglich können wir die gesuchte Zahl L so berechnen:

1. Falls $m \leq 2$ ist, so ergibt sich

$$L = t + 31(m - 1) + 365j + \left[\frac{j-1}{4}\right].$$

2. Falls $m > 2$ ist, so bilde

$$L = t + 31(m - 1) + 365j + \left[\frac{j}{4}\right]$$

$$- [0,4m + 2,3].$$

Der Fall $j = 0$ führt zu der Vorschrift:

1. Falls $m \leq 2$, so ist $L = t + 31(m - 1)$.

2. Falls $m > 2$, so ist $L = t + 31(m - 1) - [0,4m + 2,3]$.

(Nach diesem Algorithmus wird die Anzahl der Tage vom 1.1.1900 einschließlich bis zu einem vorgegebenen Datum gezählt. Ermittelt man nun durch zweimalige Anwendung dieses Verfahrens und Differenzbildung die vom Geburtstag bis zu einem vorgegebenen Datum vergangenen Tage, so wird der zuletzt notierte Tag nicht erfaßt. Wie allgemein üblich bedeutet dies z. B., daß vom 1.1.1900 bis 1.1.1901 die Tageszahl 366 gezählt wird, ein am 1.1.1900 geborener Mensch aber am 1.1.1901 genau 1 Jahr $\hat{=}$ 365 Tage alt ist.)

Beispiele:

a) Für den 20.3.1973 ist $t = 20$, $m = 3$, $j = 73$. Daher ergibt sich

$$L_1 = 20 + 31 \cdot 2 + 365 \cdot 73 + 18 - 3,$$

$$\text{also } L_1 = 26742.$$

Analog ist für den 20.3.1974

$$L_2 = 20 + 31 \cdot 2 + 365 \cdot 74 + 18 = -3 = 27107$$

$$\text{und erwartungsgemäß } L_2 - L_1 = 365.$$

b) Du wurdest am 20.1.1973 geboren.

Wie alt bist du am 1.6.1987?

Wir finden

$$\tilde{L}_1 = 20 + 31 \cdot 0 + 365 \cdot 73 + 18$$

$$= 26683 \text{ und}$$

$$L_2 = 1 + 31 \cdot 5 + 365 \cdot 87 + 21 - 4$$

$$= 31928.$$

Das gesuchte Alter ergibt sich als $L_2 - L_1$ zu 5245 Tagen.

Ist die Zahl der Tage vom 1.1.1900 bis zu einem vorgegebenen Datum bekannt, so ergibt sich eine weitere Möglichkeit, um den Wochentag dieses Datums zu bestimmen. Dazu beachten wir, daß der 1.1.1900 ein Montag war. Weil die Wochentage einen 7er Zyklus bilden, ist die Tageanzahl L darzustellen in der Form $L = 7k + r$ mit ganzen, nichtnegativen Zahlen r, k und $0 \leq r < 7$. Der Rest r bestimmt den gesuchten Wochentag gemäß Tabelle 7.

Wir bestätigen die vorn angeführten Beispiele mit diesem Verfahren:

$$15.6.1985 \Rightarrow L = 31212$$

$$= 4458 \cdot 7 + 6 \Rightarrow \text{Sonnabend}$$

$$31.12.1999 \Rightarrow L = 36524$$

$$= 5217 \cdot 7 + 5 \Rightarrow \text{Freitag.}$$

Damit ist der 1.1.2000 ein Sonnabend.

$$25.2.1984 \Rightarrow L = 30736$$

$$= 4390 \cdot 7 + 6 \Rightarrow \text{Sonnabend.}$$

Das Alter in Tagen und der Wochentag lassen sich nach den zuletzt angegebenen Formeln günstig mit einem Kleincomputer bzw. mit einem programmierbaren Rechner bestimmen. Für den Kleincomputer KC 85/2 vom VEB Mikroelektronik Mühlhausen könnten (bei Kalendern von 1901 bis 1999) BASIC-Programme etwa so aussehen:

```
LIST
10 INPUT "GEBURTSTAG:TAG,MONAT,JAHR":T,M,J
20 INPUT "GEGEBENES DATUM":U,H,K
30 L=T+J*365+31*(M-1)
40 IF M<3 THEN 60
50 L=L-INT(.4*M*2.3)
60 J=J+1
70 L=L+INT((J-1)/4)
80 G=U+K*365+31*(H-1)
90 IF H<3 THEN 120
100 G=G-INT(.4*H*2.3)
110 K=K+1
120 G=G+INT((K-1)/4)
130 G=G+1
140 PRINT "ALTER IN TAGEN:";G
150 OK
>RUN
GEBURTSTAG:TAG,MONAT,JAHR 20,3,73
GEGEBENES DATUM 1,6,87
ALTER IN TAGEN: 5245
>
```

Bild 2

a) Bestimmung des Wochentages

```
10 INPUT "DATUM, TAG, MONAT,
JAHR":T,M,J
20 LET L=T+365*J+31*(M-1)
30 IF M<3 THEN 60
40 LET L=L-INT(.4*M*2.3)
50 J=J+1
60 LET L=L+INT((J-1)/4)
70 LET L=L-7*INT(L/7)
80 PRINT "DAS DATUM FAELLT
AUF EINEN"
90 IF L=0 THEN PRINT "SONNTAG"
100 IF L=1 THEN PRINT "MONTAG"
```

```

110 IF L=2 THEN PRINT „DIENSTAG“
120 IF L=3 THEN PRINT „MITT-
WOCH“
130 IF L=4 THEN PRINT „DONNERS-
TAG“
140 IF L=5 THEN PRINT „FREITAG“
150 IF L=6 THEN PRINT „SONN-
ABEND“

```

b) Altersangabe in Tagen

(In der Ergibtanweisung kann auf LET verzichtet werden, das wird im folgenden Programm getan.)

```

10 INPUT „GEBURTSTAG, TAG, MO-
NAT, JAHR“; T, M, J
20 INPUT „GEGEBENES DATUM“; U,
N, K
30 L=T+J*365+31*(M-1)
40 IF M<=2 THEN 70
50 L=L-INT(0.4*M+2.3)
60 J=J+1
70 L=L+INT((J-1)/4)
80 G=U+K*365+31*(N-1)
90 IF N<=2 THEN 120
100 G=G-INT(0.4*N+2.3)
110 K=K+1
120 G=G+INT((K-1)/4)
130 G=G-L
140 PRINT „ALTER IN TAGEN“; G

```

c) Bei dem Programm b) ist für das Geburtsdatum und für das gegebene Datum der gleiche Rechenweg zu durchlaufen. Daher kann hier ein *Unterprogramm* vorgesehen werden. Der Unterprogrammaufruf GOSUB veranlaßt im folgenden Programm den Sprung zur angegebenen Zeile 70, RETURN bewirkt den Rücksprung zu der auf GOSUB folgenden Anweisung, das sind im Programmbeispiel die Zeilen 40 bzw. 60. In dem Beispiel wird auch davon Gebrauch gemacht, mehrere Anweisungen in eine Programmzeile zu schreiben, wobei diese Anweisungen durch das Doppelpunktzeichen zu trennen sind.

```

10 INPUT „GEBURTSTAG, TAG, MO-
NAT, JAHR“; T, M, J
20 INPUT „GEGEBENES DATUM“; U,
N, K
30 GOSUB 70
40 A=L:T=U:M=N:J=K
50 GOSUB 70
60 GOTO 130
70 L=T+365*J+31*(M-1)
80 IF M<3 THEN 110
90 L=L-INT(0.4*M+2.3)
100 J=J+1
110 L=L+INT((J-1)/4)
120 RETURN
130 L=L-A
140 PRINT „ZAHL DER TAGE VON
GEBURT“
150 PRINT „BIS GEGEBENES DA-
TUM“; L

```

d) Bei einer weiteren Programm-Version sollen *Felder* benutzt werden. Deren Größe ist im Programm zu vereinbaren. Man beachte, daß in einem Nicht-Schaltjahr vom Neujahrstag bis einschließlich zum t -ten Februar ($31+t$) Tage vergangen sind, bis zum t -ten März sind es ($59+t$) Tage usw. Die Summe der Tage der Vormonate ist in folgender Tabelle zusammengestellt (Tabelle 9)

Monat	1	2	3	4	5	6
Summe	0	31	59	90	120	151

Monat	7	8	9	10	11	12
Summe	181	212	243	273	304	334

Die einzelnen Summenwerte sollen in einem Feld (Vektor) mit den Komponenten $S(1), \dots, S(12)$ abgespeichert werden, d. h. es werde

$S(1) = 0, S(2) = 31, S(3) = 59, \dots$

gesetzt. Zu einem vorgegebenen Datum $T.M.1900+J$, bei dem $1 \leq J \leq 99$ ist und J nicht durch 4 teilbar ist (also kein Schaltjahr), ergibt sich dann die Anzahl der Tage X vom 1.1.1900

bis zum $T.M.1900+J$ zu

$X = 365 * J + INT(J/4) + S(M) + T$.

In einem Schaltjahr muß unterschieden werden, ob das Datum vor oder nach dem Schalttag (29.2.) liegt, gegebenenfalls ist dann eine Korrektur um einen Tag anzubringen.

Die umständlichen Ausgabebefehle von Beispiel a) können abgekürzt werden, wenn als Variable auch Zeichenketten zugelassen sind. Hinter die Variablenbezeichnung ist dabei jeweils das Dollarzeichen zu setzen. Als Zeichenketten werden hier die Namen der Wochentage vorgesehen. Anstelle von PRINT wird das (gleichwertige) Fragezeichen benutzt:

```

10 INPUT „DATUM“; T, M, J
20 DIM S(12), W$(7)
30 FOR I=1 TO 12
40 READ S(I)
50 NEXT
60 FOR I=1 TO 7
70 READ W$(I)
80 NEXT
90 X=365*J+INT(J/4)+S(M)+T
100 IF INT(J/4)>J/4 THEN 130
110 IF M<=3 THEN 130
120 X=X-1
130 I=X-7*INT(X/7)
140 ? „ANZAHL DER TAGE IM JAHR-
HUNDERT BIS DATUM“; X
150 ? „DATUM FAELLT AUF EINEN“;
W$(I)
160 DATA 0, 31, 59, 90, 120, 151,
181, 212, 243, 273, 304, 334
170 DATA MONTAG, DIENSTAG,
MITTWOCH, DONNERSTAG,
FREITAG, SONNABEND,
SONNTAG

```

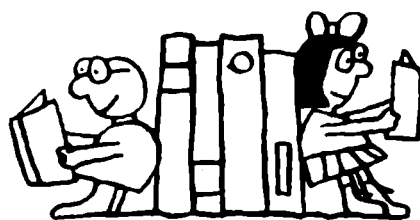
▲ 2 ▲ Schreibe ein BASIC-Programm zur Bestimmung des Wochentages (Kalender), welches die in 3. angegebene Formel von Gauß benutzt. Dabei sollen Tag, Monat und Jahr in der uns üblichen Zahldarstellung eingegeben werden (also z. B. 20. Februar 1987 als 20, 2, 19, 87). Eine Umnummerierung der Monats- und eventuell der Jahreszahl ist im Programm vorzusehen!

Im Zeitalter der Mikroelektronik ist für viele von euch eine Digitaluhr etwas Selbstverständliches, kompliziertere Rechnungen führt ihr mit dem Schulrechner

SR 1 aus. Der Taschenrechner MR 411 ist mit einer Digitaluhr und einer Weckvorrichtung ausgestattet. Wie wir gesehen haben, kann ein Computer auch die Aufgaben eines Kalenders übernehmen.

Die Mikroelektronik liefert uns die modernen Navigationsgeräte durch das Leben!

W. Schmidt



Buchtip

Gutzer, H./Pauer, H.-D.

Wenn Kepler einen Computer gehabt hätte

192 S., 46 Bilder, 4 Tabellen,

11 BASIC-Programme

Bestell-Nr. 547 229 8

Preis: etwa 9,80 M

VEB Fachbuchverlag Leipzig

Bei der Lektüre des Büchleins kommen an Computern als auch an Historie Interessierte auf ihre Kosten. In unterhaltsamer Weise werden historische Aufgaben, die seinerzeit von Archimedes, Kepler bzw. Darwin gelöst wurden, mit modernen BASIC-Programmen vorgerechnet.

Knobeleyen als Auftakt für 1988

$$1988 = 12^3 + 45 \cdot 6 + 7 - 8 - 9$$

$$9 + 8 + 7 - 6 + 5! + 43^2 + 1 = 1988$$

$$19 + 88 \equiv 19 \pmod{88}$$

$$19^{88} \equiv 1^9 + 8 \pmod{9} \equiv 1^{98} \pmod{8}$$

$$1^9 - 8 : 8 = (1 - 9 + 8) \cdot 8 = 19 \cdot (8 - 8) = (1 - 9 + 8)^8 = 0$$

$$1 \cdot (9 - 8)^8 = (1 \cdot 9 - 8)^8 = 1^{988} = 19^{(8-8)} = 1^9 \cdot 8 : 8 = (-1 + 9! : 8!) : 8 = 1$$

$$1^9 + 8 : 8 = (-1 + 9 + 8) : 8 = 1^{+ \sqrt[9]{8+8}} = 1 + 9^{(8-8)} = 2$$

$$19 - (8 + 8) = 1 + \sqrt[9! : 8!]{8} = 3$$

$$1^9 \cdot \sqrt{8+8} = 4$$

$$1^9 + \sqrt{8+8} = 1 + \sqrt[9]{8 \cdot 8} = 5$$

$$-1 - 9 + 8 + 8 = 6$$

$$-1 + 9 - 8 : 8 = -1 + (9 - 8) \cdot 8 = 7$$

$$(-1 + 9) \cdot 8 : 8 = -1^{+ \sqrt[9]{8}} = (-1^{+ \sqrt[9]{8}})^8 = 8$$

$$1 \cdot 9 \cdot 8 : 8 = 1 + 9 - 8 : 8 = 9$$

$$1 + 9 + 8 - 8 = 1 + 9^{(8-8)} = 1 \cdot \sqrt[9]{8+8} = 10$$

Dipl.-Lehrer H.-H. Epstude,
Kirchheiligen

Wieviel Lösungen hat die Aufgabe?



A. Aufgaben für Klasse 5 bis 8

▲ 1 ▲ Was kosten 4 Kugelschreiber zu je 1,20 M und 6 Hefte zu je 10 Pf zusammen?

Die Lösung erhält man durch eine einfache Rechnung:

$$4 \cdot 1,20 \text{ M} + 6 \cdot 0,10 \text{ M} = 5,40 \text{ M}.$$

Wenn ein Schüler der Unterstufe diese Aufgabe löst, denkt er nicht an die Möglichkeit einer anderen Antwort als „Der Gesamtpreis beträgt 5,40 M“. Solch eine Aufgabe kann nur eine einzige Lösung haben. •

▲ 2 ▲ Eine Lehrerin fragt: Wieviel ist zwei plus fünf mal drei?

„Siebzehn“, antwortet Luise unsicher. „Habe ich richtig gerechnet, Frau Lehmann?“ „Mein Ergebnis ist einundzwanzig!“ ruft Hans. „Ist das richtig?“

Beide Schüler haben auf ihre Art richtig gerechnet.

Luise meinte $2 + 5 \cdot 3 = 17$,

während Hans rechnete $(2 + 5) \cdot 3 = 21$.

Die Lehrerin hatte leider nicht gesagt, ob Klammern zu setzen sind – sie hatte sich nicht eindeutig ausgedrückt. Die Art der Aufgabenstellung war unkorrekt.

▲ 3 ▲ In einer Deutschstunde ist der folgende Satz zu analysieren: Klaus hat Sabine auf der Wiese mit Blumen getroffen. Man kann diesen Satz auf mindestens dreierlei verschiedene Art verstehen:

1. Klaus hat die Blumen mitgebracht. (Er wollte sie dem Mädchen schenken.)

2. Sabine hatte die Blumen. (Sie hatte sie gerade gepflückt und wollte einen Kranz daraus flechten.)

3. Die Blumen wuchsen auf der Wiese, wo Klaus seine Freundin traf.

In einer gedruckten Erzählung zeugt solch ein Satz von einem schlechten Stil des Verfassers (oder auch von der Unaufmerksamkeit des Redakteurs). Zu welchen „tragischen“ Folgen das führen kann, zeigt das folgende (nicht ganz ernst zu nehmende) Beispiel: Köpfen nicht begnadigen!

Dieser Befehl muß unbedingt durch das Einfügen eines Kommas präzisiert werden: Entweder Köpfen, nicht begnadigen!

und damit hinrichten,

oder Köpfen nicht, begnadigen!

und damit freilassen.

▲ 4 ▲ Es ist eine zweistellige Quadratzahl zu ermitteln, die auf 6 endet.

Die Lösung „36“ ist richtig, aber unvollständig; den Bedingungen der Aufgabe entspricht auch die Zahl 16. Geht man die

Folge aller zweistelligen Quadratzahlen durch (16, 25, 36, 49, 64, 81), so findet man keine weiteren Lösungen. Genau die Zahlen 16 und 36 erfüllen die Bedingungen der Aufgabe. Die Menge aller Lösungen ist $L = \{16; 36\}$.

B. Aufgaben ab Klasse 9

▲ 5 ▲ Die Summe der Quadrate von vier aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen betrage 630.

Berechne die betreffenden Zahlen!

Wieviel Möglichkeiten gibt es?

(Lehrbuch Mathematik 9, Seite 150/

Aufgabe 1)

Die kleinste der vier Zahlen sei x ($x \in \mathbb{N}$).

Dann haben wir die Gleichung

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 = 630$$

zu lösen.

Wir tun dies in den folgenden Schritten

$$4x^2 + 12x + 14 = 630$$

$$4x^2 + 12x - 616 = 0$$

$$x^2 + 3x - 154 = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{616}{4}}$$

$$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{25}{2}$$

und erhalten $x_1 = 11$ und $x_2 = -14$.

Ausgehend von $x_1 = 11$ erhalten wir (11; 12; 13; 14) als ein Quadrupel von Zahlen, die den Bedingungen der Aufgabe entsprechen

$$(11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2$$

$$= 121 + 144 + 169 + 196 = 630).$$

Gehen wir dagegen von $x_2 = -14$ aus, so finden wir (-14; -13; -12; -11). Diese vier aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen erfüllen ebenfalls unsere Bedingungen

$$((-14)^2 + (-13)^2 + (-12)^2 + (-11)^2 = 630)$$

Die gestellte Aufgabe hat also genau zwei voneinander verschiedene Lösungen. Die Menge aller Lösungen ist

$$L = \{(11; 12; 13; 14); (-14; -13; -12; -11)\}.$$

Anmerkung: Wären vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, deren Summe 630 beträgt, gesucht, so hätte die Aufgabe nur eine Lösung.

▲ 6 ▲ In einem Kreis mit dem Radius 25 cm haben zwei zueinander parallele Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ die Längen 14 cm bzw. 40 cm.

Es ist der Abstand dieser beiden Sehnen voneinander zu berechnen.

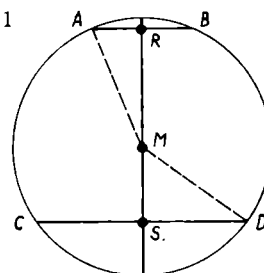
Der zu $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ senkrechte Durchmesser des Kreises schneide $\overline{AB}$ in R und $\overline{CD}$

in S (siehe Bild 1). Es ist dann $\overline{AR} = \overline{RB}$ und $\overline{CS} = \overline{SD}$. Wir zeichnen die Radien $\overline{MA}$ und $\overline{MD}$ ein und berechnen jeweils nach dem Satz des Pythagoras

$$\begin{aligned} \overline{RM} &= \sqrt{\overline{MA}^2 - \overline{AR}^2} \\ &= \sqrt{(25 \text{ cm})^2 - (7 \text{ cm})^2} \\ &= 24 \text{ cm} \end{aligned} \quad (\triangle AMR)$$

$$\begin{aligned} \overline{MS} &= \sqrt{\overline{MD}^2 - \overline{DS}^2} \\ &= \sqrt{(25 \text{ cm})^2 - (20 \text{ cm})^2} \\ &= 15 \text{ cm} \end{aligned} \quad (\triangle DMS).$$

Bild 1

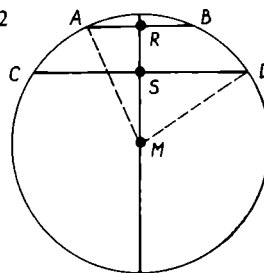


Der gesuchte Abstand der beiden Parallelen ist gleich der Länge der Strecke $\overline{RS}$; wegen $\overline{RS} = \overline{RM} + \overline{MS}$ ergibt sich ein Abstand von 39 cm.

Ist die Aufgabe damit schon gelöst? Eine Lösung haben wir gefunden, aber gibt es evtl. noch weitere?

Wir sind gemäß Bild 1 davon ausgegangen, daß der Kreismittelpunkt M zwischen den beiden Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ liegt. Es ist aber auch möglich, daß sich M außerhalb der Fläche $CDBA$ (begrenzt durch die Sehnen $\overline{CD}$ und $\overline{AB}$ und die Kreisbögen $\overline{AC}$ und $\overline{DB}$ befindet) (Bild 2).

Bild 2



Wie oben erhalten wir $\overline{RM} = 24 \text{ cm}$ und $\overline{MS} = 15 \text{ cm}$. Der gesuchte Abstand ist aber jetzt nicht als Summe, sondern als Differenz dieser beiden Strecken zu berechnen; wir erhalten hier als Lösung 9 cm.

Alle weiteren noch möglichen Lagen der beiden parallelen Sehnen im Kreis lassen sich jeweils durch eine Drehung um M auf einen der beiden behandelten Fälle zurückführen. Mit unseren beiden Lösungen 39 cm bzw. 9 cm sind alle Möglichkeiten erschöpft. Die Menge aller Lösungen ist $L = \{39 \text{ cm}; 9 \text{ cm}\}$.

▲ 7 ▲ Die Zahlenwerte der Längen der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks seien natürliche Zahlen, die eine arithmetische Zahlenfolge bilden. Ermittle diese Maßzahlen!

(Eine endliche Zahlenfolge $a_1, a_2, \dots, a_n$ heißt arithmetisch, wenn es eine Zahl $d \neq 0$ gibt, so daß für alle i mit $1 < i \leq n$ gilt: $a_i - a_{i-1} = d$.)

Der Zahlenwert der Länge der kleineren Kathete sei x , dann ist der Zahlenwert der Länge der größeren Kathete $x + d$ und der der Länge der Hypotenuse $x + 2d$ ($x \in N$, $d \in N$).

Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$x^2 + (x + d)^2 = (x + 2d)^2, \\ x^2 + x^2 + 2xd + d^2 = x^2 + 4xd + 4d^2, \\ x^2 - 2xd - 3d^2 = 0.$$

Division beider Seiten der letzten Gleichung durch d^2 ($d \neq 0$) liefert

$$\left(\frac{x}{d}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{d}\right) - 3 = 0.$$

Lösen wir diese Gleichung nach dem Quotienten $\frac{x}{d}$ auf, so erhalten wir mit Hilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen

$$\left(\frac{x}{d}\right)_1 = -1 \quad \text{und} \quad \left(\frac{x}{d}\right)_2 = 3.$$

$\frac{x}{d} = -1$ ist mit unserem Sachverhalt unvereinbar.

$\frac{x}{d} = 3$ besagt, daß der Zahlenwert der Länge der kleineren Kathete das Dreifache der Differenz d beträgt. Da die Zahlenwerte der Längen aller Dreiecksseiten natürliche Zahlen sind, sind für x und d genau die Paare $(3; 1)$, $(6; 2)$, $(9; 3)$, ... (allgemein: $(3n; n)$ mit $n \in N$, $n \neq 0$) möglich.

Die Zahlenwerte der Längen der Seiten des fraglichen Dreiecks lauten $(3; 4; 5)$ oder $(6; 8; 10)$ oder $(9; 12; 15)$...

(allgemein: $3n; 4n; 5n$) mit $n \in N$ und $n \neq 0$).

Unsere Aufgabe hat also unendlich viele Lösungen, die Menge aller ihrer Lösungen ist

$$L = \{(3n; 4n; 5n); n \in N \text{ und } n \neq 0\}.$$

Anmerkung: Die Bedingungen der Aufgabe werden durch sogenannte *ägyptische* Dreiecke erfüllt. Im alten Ägypten mußten nach den jährlichen Überschwemmungen des Nils die Feldraine jeweils neu markiert werden. Dabei waren häufig rechte Winkel zu konstruieren. Zu diesem Zweck benutzte man ein Seil, in dem jeweils im gleichen Abstand 12 Knoten angebracht waren. Man zog das Seil auseinander, so daß ein Dreieck entstand mit Seiten, die aus 3, 4 bzw. 5 gleichlangen Teilstrecken bestanden. Damit erhielten die ägyptischen Landmesser den nötigen rechten Winkel. Deshalb heißt ein Dreieck mit Seitenlängen, die im Verhältnis 3 : 4 : 5 stehen, *ägyptisches Dreieck*.

▲ 8 ▲ Es ist eine dreistellige natürliche Zahl z zu ermitteln, die auf die Ziffer 4 endet und durch 11 und durch 13 teilbar ist.

Da 11 und 13 teilerfremd sind, muß sich die gesuchte Zahl z in der Form

$$z = 11 \cdot 13 \cdot n = 143 \cdot n \\ = 140 \cdot n + 3 \cdot n \quad (n \in N)$$

schreiben lassen. Damit z auf die Ziffer 4 endet, ist es demnach notwendig, daß auch $3 \cdot n$ auf 4 endet.

Damit kommen für n höchstens die Zahlen 8, 18, 28, ... in Frage.

Aber bereits $143 \cdot 8 = 1044$ ist vierstellig. Die gesuchte Zahl z existiert nicht, die Aufgabe ist also *nicht lösbar*. Trotzdem können wir sagen, daß wir sie *vollständig* gelöst haben: Die Menge aller ihrer Lösungen ist die leere Menge $- L = \emptyset$.

Zusammenfassung:

Eine Aufgabe lösen heißt also, alle Objekte (Zahlen, Punkte, geometrische Figuren usw.) zu finden, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen – auch dann, wenn die Aufgabe in der Form „Ermittle eine Zahl, die ...“ gestellt ist. Deshalb ist neben der Begründung, daß die gefundenen Objekte wirklich Lösungen der Aufgabe sind, auch noch der Nachweis zu führen, daß weitere Lösungen nicht existieren. Oft ergibt sich dieser Nachweis schon aus einer vollständigen Darstellung des Lösungsweges. Dabei ist es – wie auch unsere Beispiele zeigen – notwendig, daß man die Aufgabenstellung nicht zu eng sieht, daß man sich nicht an zu spezielle Überlegungsskizzen bindet, daß man den gesamten Grundbereich auftretender Variabler überblickt.

A. Halameisär/C. P. Helmholz

Angaben ausreichend für Eindeutigkeit?

Bei einer ausreichenden Anzahl von Bedingungen (Voraussetzungen) wird eine Aufgabenstellung eindeutig lösbar. Bei den folgenden drei Aufgaben scheint dies im ersten Betrachten nicht so zu sein, da die zur Lösungsfindung nötigen Angaben *überst* dürftig vorliegen. Dennoch sei versichert, daß sie eindeutig lösbar sind. Wie so oft, gilt auch hier: Voreiliges Schließen bringt nichts ein!

Viel Freude beim Finden der Lösungen. Spezielle Vorkenntnisse zu den zwei Aufgaben werden nicht benötigt.

▲ 1 ▲ Jens schreibt drei aufeinanderfolgende zweistellige natürliche Zahlen in steigender Reihenfolge nebeneinander, so daß eine sechsstellige Zahl entsteht.

Er staunte über die *interessante* natürliche Zahl, die er erhielt, als er die Hälfte der sechsstelligen Zahl durch das Doppelte der anfänglich ersten zweistelligen Zahl dividierte.

Wie lautete seine sechsstellige Zahl? (Was könnte er bei seinem Rechenergebnis *interessant* gefunden haben?)

▲ 2 ▲ Gerlind hat sich fünf natürliche Zahlen aufgeschrieben. Dabei ist jede folgende Zahl doppelt so groß wie die Summe aller vorherigen. Von ihren fünf Zahlen war die erste Zahl zweistellig und von allen fünf Zahlen hatte nur eine der nachfolgenden vier Zahlen lauter gleiche Ziffern. Wie lauten Gerlinds aufgeschriebene Zahlen?

H.-J. Kerber



▲ 1 ▲ Докажите, что для n положительных чисел

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n$$

выполнены неравенства:

$$a) a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 \geq (a_1 - a_2 + a_3)^2,$$

$$б) a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 \geq (a_1 - a_2 + a_3 - a_4)^2,$$

$$в) a_1^2 - a_2^2 + \dots - (-1)^n a_n^2 \geq (a_1 - a_2 + \dots - (-1)^n a_n)^2.$$

aus: Quant, Moskau

▲ 2 ▲ The following advertisement appeared on XYZ University's notice board: Here we are, three perfect guys, namely Peter, Richard and Tony.

Each of us is neither tall, rich and handsome nor jolly, musical and smart.

But, each of us does possess just four of the above qualities. In fact, each quality is found in two of us.

Peter is handsome, and Richard, who is musical, is either handsome or smart but not both.

The two of us who are jolly are not both handsome and two of us who are smart are not both tall.

Tony thinks he has the best four qualities of us all. Can you describe Tony?

aus: The Australian Mathematics Teacher

▲ 3 ▲ Dans un stade, une piste de course à pied comporte deux lignes droites réunies par deux demi-cercles. La longueur de chaque ligne droite est 75 m. Quelle doit être la distance de ces lignes droites pour que le bord intérieur de la piste ait une longueur de 400 m?

La piste est formée de 6 couloirs larges de 2 m. Quelle est la longueur du bord intérieur du deuxième couloir?

Au départ d'une course de 400 m, quelle avance doit-on donner au coureur du deuxième couloir pour qu'il ait parcouru exactement 400 m lorsqu'il atteint la ligne d'arrivée?

H.

▲ 4 ▲ Put together six digits 1 so that the final value will be 12. Use only the symbol + and the fractimal line segment. You may use each of these symbols more than once.

aus: Fun with mathematics, Kanada

▲ 5 ▲ Un satellite décrit en 96 minutes un cercle autour de la Terre à la vitesse moyenne de 28 000 km/h. Calculer le rayon de sa trajectoire. A quelle distance de la Terre tourne-t-il?

H.

Die Koordinatenmethode im Wandel der Zeiten

Zum 350. Jahrestag des Erscheinens
von R. Descartes' «La Géométrie»

Teil 2

Die Koordinatenmethode vereinigt in sich zwei gegensätzliche Aspekte, die aber zugleich so eng miteinander verbunden sind, daß ihre klare Unterscheidung bis heute noch nicht jedem Mathematiker voll bewußt ist. Um so schwerer fällt es, die Beiträge bedeutender Mathematiker der Vergangenheit zur Entwicklung der Koordinatenmethode danach einzuordnen, welcher der beiden Aspekte dabei jeweils im Vordergrund stand. Welches sind diese beiden Aspekte?

Der erste besteht darin, daß die Einführung von Koordinaten es ermöglicht, jede Beziehung zwischen geometrischen Objekten in eine gleichbedeutende Beziehung zwischen den Koordinaten dieser Objekte zu übersetzen. Insbesondere entspricht dann jeder Operation, die geometrischen Objekten $G_1, \dots, G_k$ ein neues geometrisches Objekt G_0 zuordnet, eine arithmetisch-algebraische Operation, die den Koordinaten der Objekte $G_1, \dots, G_k$ die Koordinaten des Objekts G_0 zuordnet. (Geometrische Objekte G_i können z. B. Punkte, Strecken, Geraden, Kreise, Parabeln, Ellipsen, Dreiecke, Winkel, aber auch geometrische Abbildungen bestimmter Arten wie Spiegelungen, Drehungen, Schiebungen sein.) Hier ordnen sich solche Fragen und Aufgaben der analytischen Geometrie ein wie z. B.

– Wie kann man aus den Koordinaten (x_1, y_1) , (x_2, y_2) zweier Punkte die Gleichung der Verbindungsgeraden oder den Abstand dieser Punkte berechnen?

– Wie kann man aus den gegebenen Gleichungen zweier Geraden rechnerisch entscheiden, ob diese Geraden sich schneiden, parallel oder gleich sind? Wie kann man im Fall des Schneidens die Koordinaten des Schnittpunktes berechnen?

– Durch welche Beziehungen (z. B. Gleichungen oder Ungleichungen) zwischen den Koordinaten dreier bzw. vier Punkte drückt sich aus, daß einer der drei Punkte auf der von den beiden anderen begrenzten Strecke (also zwischen ihnen) liegt bzw. daß die von den ersten beiden Punkten begrenzte Strecke kongruent der von den zweiten beiden Punkten begrenzten Strecke ist?

Sind (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , (x_4, y_4) die Koordinaten der vier Punkte P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , so liegt P_2 zwischen P_1 und P_3 genau dann, wenn es eine reelle Zahl t zwischen 0 und 1 gibt, so daß

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + t(x_3 - x_1) \quad \text{und} \\y_2 &= y_1 + t(y_3 - y_1) \quad \text{gilt,} \\P_1 P_2 &\cong P_3 P_4 \quad \text{gilt genau dann, wenn} \\(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 &= (x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 \quad (1) \\&\text{gilt, da der Abstand zweier Punkte } P_i, P_j \\&\text{durch}\end{aligned}$$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (2)$$

ausgedrückt wird.

Die konsequente Anwendung dieses Standpunktes erfordert es freilich, nicht nur den Punkten, sondern allen im jeweiligen Zusammenhang betrachteten Objekten Koordinaten zuzuordnen. Das ist im konkreten Fall oft gar nicht schwer: Als Koordinaten einer Strecke $P_1 P_2$ können die Koordinaten (x_1, y_1) , (x_2, y_2) ihrer Endpunkte dienen (wobei es natürlich, wie schon bei den Koordinaten einzelner Punkte, wesentlich auf die Reihenfolge der Zahlen ankommt), als Koordinaten eines Dreiecks die insgesamt sechs Koordinaten seiner Eckpunkte, als Koordinaten eines Kreises die Koordinaten seines Mittelpunktes und sein Radius, als Koordinaten einer durch eine algebraische Gleichung einer bestimmten Art beschriebenen Kurve die Koeffizienten der entsprechenden Gleichung. Historisch ist von diesem Gesichtspunkt, Fragen an geometrische Objekte in Fragen an ihre Koordinaten zu übersetzen, zuerst (nämlich schon bei Fermat und Descartes) die Frage nach den Koordinaten der Schnittpunkte zweier durch ihre Gleichungen gegebenen Kurven vorhanden gewesen, ohne daß die Koeffizienten der gegebenen Gleichungen damals in irgendeiner Weise als Koordinaten der entsprechenden Kurven aufgefaßt worden wären. Die zu untersuchenden Objekte blieben lange Zeit auf solche Kurven und Flächen beschränkt, die sich durch algebraische Gleichungen bzw. Gleichungssysteme (seit Leonhard Eulers berühmtem Lehrbuch *Introductio in analysin infinitorum* von 1748 auch durch sogenannte Parameterdarstellungen) beschreiben ließen. Die Verwandlung elementarer geometrischer Beziehungen wie z. B. die Frage nach dem kürzesten Abstand zweier Geraden im Raum, ausgedrückt durch ihre Koordinaten, blieb erst Gaspard Monge (1746 bis 1818) und seinen Schülern vorbehalten. Die Beschreibung geometrischer Abbildungen durch Koordinaten und die Ersetzung von Manipulationen mit Abbildungen wie Hintereinanderausführung oder Umkehrung durch Rechnen mit den Koordinaten

der Abbildungen setzte im wesentlichen erst im 19. Jh. ein. Die Erkenntnis, daß als Resultat der Übersetzung geometrischer Prozesse in die Koordinatensprache im allgemeinen nicht Gleichungs- und Ungleichungssysteme oder andere *geschlossene Formeln* sondern Rechenprogramme mit Verzweigungen und zyklischen Unterprogrammen zu erwarten sind, ist erst ein Kind unserer, von der Datenverarbeitung geprägten Zeit.

Die Verfolgung des hier an erster Stelle genannten Aspektes der Koordinatenmethode führte über viele historische Zwischenstufen schließlich dazu, arithmetisch-algebraische Modelle der Geometrie zu betrachten, d. h. die Zahlenlisten nicht mehr als Koordinaten wirklicher geometrischer Objekte aufzufassen, sondern sie selbst als geometrische Objekte zu begreifen. David Hilbert (1862 bis 1943) erklärte 1899 in seinem berühmten und folgenreichen Buch *Grundlagen der Geometrie* sinngemäß: Wenn wir *definieren*: Ein Punkt ist ein Paar (x, y) reeller Zahlen, eine Gerade ist eine solche Menge von Zahlenpaaren, die sich als Lösungsmenge einer linearen Gleichung $ax + by = c$ ($a^2 + b^2 \neq 0$) beschreiben läßt, die Strecke mit den Endpunkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) ist kongruent der Strecke mit den Endpunkten (x_3, y_3) und (x_4, y_4) , wenn die Formel (1) gilt, so erhalten wir jedenfalls ein System von Objekten, für das alle Aussagen der euklidischen Geometrie *unzweifelhaft* gelten (während sowohl die Definition solcher Begriffe wie Punkt, Gerade in der materiellen Welt als auch die Gültigkeit der Aussagen der euklidischen Geometrie für diese Objekte mit vielen Unklarheiten und Problemen belastet sind).

Dieser Hilbertsche Standpunkt steht in enger Beziehung zu einer geradezu dämonischen Eigenschaft der Koordinatenmethode: Hinreichende Vertrautheit mit der geometrischen Bedeutung von rein arithmetischen Beziehungen zwischen den Koordinaten geometrischer Objekte (wie z. B. den Formeln (1) und (2)) führt uns leicht zu Verallgemeinerungen, die über das Dreidimensionale und anschaulich Vorstellbare weit hinausführen. Niemand kann uns daran hindern, Listen $(x_1, \dots, x_n)$ von n geordneten reellen Zahlen als *Punkte* eines *n -dimensionalen Raumes* zu bezeichnen, den *Abstand* zweier solcher *Punkte* durch eine zu (2) analoge Formel zu definieren, andere Objekte dieses *n -dimensionalen Raumes* z. B. als Lösungsmengen gewisser algebraischer Gleichungen mit n (statt zwei) Variablen zu definieren, insbesondere z. B. $(n-1)$ -dimensionale *geradlinige Unterräume* in Analogie zu den Geraden in der Ebene als Lösungsmengen von linearen Gleichungen der Form

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = c \\ (\text{nicht alle } a_i \text{ gleich } 0).$$

Da n -gliedrige Listen von reellen Zahlen in der realen Welt eine wichtige Rolle in den verschiedensten Zusammenhängen spielen, z. B. als Beschreibungen eines mechanischen Systems mit n Freiheitsgraden oder als Produktionszustand eines Betrie-

bes, der n verschiedene Erzeugnisse herstellt, ist die Verbindung *quasigeometrischer* Vorstellungen mit an sich rein arithmetischen Objekten und Beziehungen zwischen ihnen, die durch die Analogie zur Hilbertschen arithmetischen Interpretation der geometrischen Begriffe nahegelegt wird, oft sehr hilfreich für ein tieferes Verstehen solcher an sich rein arithmetischen Beziehungen. Freilich hat der Begriff *Geometrie* durch diese in der gesamten Mathematik fruchtbare Denk- und Vorgehensweise eine bedenkliche Aufweichung erfahren. *Geometrisch* ist in der heutigen Mathematik alles, was sich in gewisser, häufig nur noch sehr schwacher Analogie zu Begriffen und Verhältnissen des gewöhnlichen zwei- bzw. dreidimensionalen euklidischen Falles vorstellen läßt.

Ohne es zu bemerken, haben wir die Grenze zum zweiten der beiden eingangs angekündigten Aspekte der Koordinatenmethode überschritten. Das Koordinatensystem diente schon bei Fermat und Descartes nicht nur dazu, schon bekannte Kurven durch Gleichungen zu beschreiben, sondern auch dazu, sich ein *Bild* von einer vielleicht vorher nie gesehenen Kurve zu machen, die zunächst nur durch ihre Gleichung gegeben ist, mehr noch, am geometrischen Bild zweier Kurven zu entscheiden, ob und wo diese Kurven gemeinsame Punkte haben, mithin, wie die gemeinsamen Lösungen eines aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten bestehenden Gleichungssystems aussehen. Demnach liefert die Koordinatenmethode nicht nur arithmetische Modelle geometrischer Sachverhalte (das war der erste Aspekt) sondern auch geometrische Modelle rein arithmetisch-algebraischer Sachverhalte (zweiter Aspekt). Dieser zweite Aspekt der Koordinatenmethode tritt uns u. a. überall dort entgegen, wo funktionale Zusammenhänge zwischen physikalischen, ökonomischen oder sonstigen, durch reelle Zahlen meßbare Größen graphisch dargestellt werden, und insbesondere dann, wenn anhand solcher graphischer Darstellungen Aussagen und Erkenntnisse über Objekte, Sachverhalte und Prozesse gewonnen werden, die an sich mit Geometrie überhaupt nichts zu tun haben. Dieses gewaltige Werkzeug für Mathematik, Naturwissenschaft, Technik, ..., Ergebnisse und Aussagen auf dem Weg über die graphische Darstellung mittels *kartesischer Koordinatensysteme* zu erhalten, demonstrierte Descartes, ohne sich dessen selbst recht bewußt zu sein, an Beispielen wie dem folgenden. (Wir benutzen, um den Gedankengang durchsichtiger zu gestalten, eine moderne Ausdrucksweise.)

Gegeben sind die beliebigen reellen Zahlen p, q ($q \neq 0$, sonst ist die Aufgabe nur quadratisch, also *trivial*). Man soll entscheiden, ob und wie viele reelle Lösungen die kubische Gleichung

$$x^3 + px + q = 0$$

besitzt und soll diese Lösungen durch geometrische Konstruktion (mit Zirkel und Lineal) finden.

Lösung: Man zeichne in ein kartesisches Koordinatensystem die Normalparabel $y = x^2$ und den Kreis mit dem Mittelpunkt $\left(-\frac{q}{2}, \frac{1-p}{2}\right)$, der durch den Koordinatenursprung $(0,0)$ geht. (Sind die gegebenen Größen p, q auf der x -Achse des Koordinatensystems als Strecken markiert, so kann man den Punkt mit den Koordinaten $\left(-\frac{q}{2}, \frac{1-p}{2}\right)$ mit Zirkel und Lineal leicht konstruieren.) Die Gleichung dieses Kreises ist

$$\left(x + \frac{q}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{p-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2,$$

d. h. $x^2 + qx + y^2 + (p-1)y = 0$.

Die gemeinsamen Punkte von Kreis und Parabel sind also diejenigen, deren Koordinaten x, y dem Gleichungssystem

$$y = x^2, x^2 + qx + y^2 + (p-1)y = 0$$

genügen. Setzt man in die zweite Gleichung x^2 für y ein, so erhält man für die x -Koordinaten dieser Punkte die Gleichung

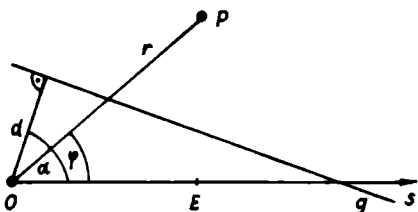
$$x(x^3 + px + q) = 0. \quad (3)$$

Daß der Punkt $(0,0)$ nach Konstruktion ein gemeinsamer Punkt beider Kurven ist, spiegelt sich darin wider, daß $x=0$ eine Lösung der Gleichung (3) ist. Die restlichen Lösungen sind gerade diejenigen der gegebenen kubischen Gleichung. (Descartes anerkannte nur positive reelle Zahlen und konnte daher auch seine Koordinatensysteme auf den *ersten Quadranten* beschränken. Erst Isaac Newton (1643 bis 1727) betrieb analytische Geometrie mit beliebigen reellen Koordinaten, d. h. in allen vier Quadranten.)

Aufgaben

▲ 1 ▲ Wie kann man aus den Koordinaten (x_1, y_1, r_1) , (x_2, y_2, r_2) zweier Kreise berechnen, ob diese Kreise sich schneiden, ob einer von ihnen innerhalb des anderen oder ob sie voneinander getrennt liegen?

▲ 2 ▲ Ein ebenes Polarkoordinatensystem wird durch seinen Ursprungspunkt O , einen von O ausgehenden Strahl s , der die Maßeinheit OE trägt, und eine (meist mathematisch positiv gewählte) Zählrichtung der an s anzutragenden Winkel gegeben (Bild).



Die Polarkoordinaten eines beliebigen von O verschiedenen Punktes P sind (r, φ) , wobei r die Länge der Strecke OP und φ der (vorzeichenbehaftete) Winkel $\angle EOP$ ist. Für den Ausnahmefall $P = O$ ist $r = 0$ und φ beliebig. Als Koordinaten einer Geraden g nehmen wir ihren senkrechten Abstand d

(≥ 0) von O und den (vorzeichenbehafteten) Winkel α zwischen s und dem von O auf g gefällten Lot. Durch welche Gleichung zwischen r, φ, d, α wird nun ausgedrückt, daß der Punkt mit den Koordinaten (r, φ) auf der Geraden mit den Koordinaten (d, α) liegt? Man stelle eine Berechnungsvorschrift auf, aus den Koordinaten zweier Punkte die Koordinaten der Verbindungsgeraden zu bestimmen. Wie kann man umgekehrt aus den Koordinaten zweier Geraden bestimmen, ob diese Geraden gleich oder parallel sind oder sich schneiden? Wie kann man im Fall des Schneidens aus den Koordinaten der Geraden die Koordinaten des Schnittpunktes berechnen?

▲ 3 ▲ Als Polarkoordinaten eines Kreises kann man wie im Fall kartesischer Koordinaten die Koordinaten seines Mittelpunktes und seinen Radius nehmen. Durch welche Gleichung zwischen den Koordinaten eines Kreises und den Koordinaten eines Punktes wird nun ausgedrückt, daß der Punkt auf dem Kreis liegt?

▲ 4 ▲ Decke auf, wie Descartes auf seine geometrische Methode gekommen ist, kubische Gleichungen der Form $x^3 + px + q = 0$ zu lösen! Setzt man in die allgemeine Kreisgleichung

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$$

x^2 für y ein, so erhält man eine Gleichung 4. Grades für x .

Wie muß man x_1, y_1, r wählen, damit diese Gleichung die Form

$$x(x^3 + px + q) = 0$$

annimmt? P. Schreiber

Wissen und Rechnen

Jedes Zeichen bedeutet eine Zahl und gleiche Zeichen bedeuten gleiche Zahlen. Unter Beachtung der Rechenregeln sind die Zahlen zu finden, die die Aufgabe richtig lösen.

W. Neugebauer, Berlin



Eine harte Nuß

Man ermittle alle reellen Zahlen x , die der Ungleichung

$$\frac{3x^2}{(\sqrt{1+3x}-1)^2} \leq x+1$$

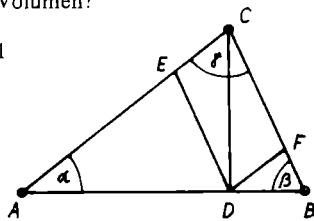
genügen!

R. Mildner, Leipzig

Eine Aufgabe über Körper aus Dreiecksstücken

Im Dreieck $\triangle ABC$ über der gegebenen Grundseite $\overline{AB}$ sei D der Fußpunkt der Höhe $\overline{CD}$. Die Parallelen durch D zu den Geraden AC und BC schneiden die jeweils andere Gerade in den Punkten E und F (Bild 1). Die Strecken $\overline{DE}$, $\overline{DF}$ und $\overline{AB}$ bauen als Seitenkanten einen Quader, die Strecke $\overline{CD}$ baut als Seitenkante einen Würfel auf. Welche Voraussetzungen muß das Dreieck $\triangle ABC$ erfüllen, damit Quader und Würfel volumengleich sind? Auf welchem geometrischen Ort liegen die Eckpunkte C aller dieser Dreiecke bei gegebenem Volumen?

Bild 1



Gesucht werden also die Eigenschaften aller Dreiecke $\triangle ABC$ über der gegebenen Grundseite $\overline{AB}$, die die Gleichung $\overline{AB} \cdot \overline{DE} \cdot \overline{DF} = \overline{CD}^3$ (1)

erfüllen.

In den ähnlichen Dreiecken $\triangle ADE$ und $\triangle ABC$ bzw. $\triangle DBF$ und $\triangle ABC$ gilt

$$\overline{DE} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}{\overline{AB}}, \quad \overline{DF} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{DB}}{\overline{AB}}.$$

Damit geht Gleichung (1) über in

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{DB}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = 1. \quad (2)$$

Durch Anwendung des Sinussatzes auf die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ADC$ erhält man

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}, \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Im Dreieck $\triangle ADC$ ist ferner

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \cot \alpha.$$

Man verliert aber Lösungen, wenn man außer acht läßt, daß α auch stumpf sein kann. Dann ist nach Bild 2

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha.$$

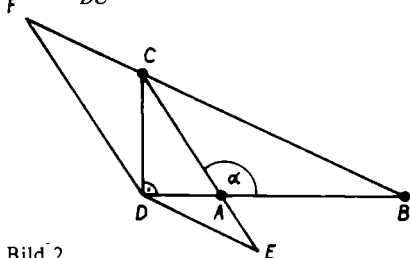


Bild 2

Beide Ergebnisse zusammengefaßt ergeben

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = |\cot \alpha|.$$

Aus dem gleichen Grund ist

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = |\cot \beta|.$$

Damit geht Gleichung (2) über in

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \cdot |\cot \alpha| \cdot |\cot \beta| \cdot \frac{1}{\sin \alpha} = 1,$$

$$\frac{|\cot \alpha| \cdot |\cot \beta|}{\sin \gamma} = 1,$$

und durch Übergang zum Reziproken:

$$|\tan \alpha| \cdot |\tan \beta| \cdot \sin \gamma = 1.$$

Über die Innenwinkelbeziehung $\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$ bekommt man die Gleichung

$$|\tan \alpha| \cdot |\tan(\alpha + \gamma)| \cdot \sin \gamma = 1. \quad (3)$$

Alle Dreiecke, deren Winkel α und γ die Gleichung (3) befriedigen, erfüllen auch die Aufgabenstellung (1).

Fall I: $\gamma = 90^\circ$

Für alle $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ und $\gamma = 90^\circ$ ist

$$\begin{aligned} |\tan \alpha| \cdot |\tan(\alpha + \gamma)| \cdot \sin \gamma &= |\tan \alpha| \cdot |\tan(\alpha + 90^\circ)| \cdot \sin 90^\circ \\ &= |\tan \alpha| \cdot |-\cot \alpha| = |\tan \alpha| |\cot \alpha| \\ &= |\tan \alpha \cdot \cot \alpha| = 1. \end{aligned}$$

Damit wird die Aufgabenstellung (1) von allen rechtwinkligen Dreiecken $\triangle ABC$ über der gegebenen Seite $\overline{AB}$ erfüllt.

Fall II: $0^\circ < \gamma < 90^\circ$

Der Winkel γ sei zunächst beliebig wählbar, soll dann aber festgehalten werden.

Bild 3

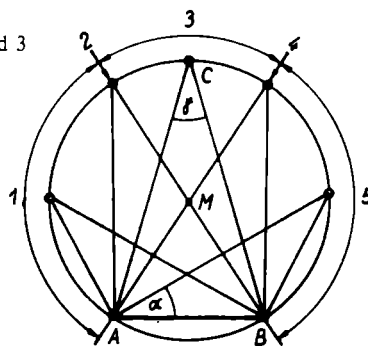


Tabelle 1

Fall	α	$\alpha + \gamma$	$ \tan \alpha $	$ \tan(\alpha + \gamma) $	Gleichung (2) geht über in
1	$180^\circ - \gamma > \alpha > 90^\circ$	$180^\circ > \alpha + \gamma > 90^\circ$	$-\tan \alpha$	$-\tan(\alpha + \gamma)$	$\tan \alpha \cdot \tan(\alpha + \gamma) \cdot \sin \gamma = 1$
2	$90^\circ = \alpha$	$180^\circ > \alpha + \gamma > 90^\circ$	n. d.	$-\tan(\alpha + \gamma)$	nicht definiert
3	$90^\circ > \alpha > 90^\circ - \gamma$	$180^\circ > \alpha + \gamma > 90^\circ$	$\tan \alpha$	$-\tan(\alpha + \gamma)$	$-\tan \alpha \cdot \tan(\alpha + \gamma) \cdot \sin \gamma = 1$
4	$90^\circ - \gamma = \alpha$	$\alpha + \gamma = 90^\circ$	$\tan \alpha$	n. d.	nicht definiert
5	$90^\circ - \gamma > \alpha > 0^\circ$	$90^\circ > \alpha + \gamma > \gamma$	$\tan \alpha$	$\tan(\alpha + \gamma)$	$\tan \alpha \cdot \tan(\alpha + \gamma) \cdot \sin \gamma = 1$

Dann sind hinsichtlich der Terme

$|\tan \alpha|$ bzw. $|\tan(\alpha + \gamma)|$

in Gleichung (3) folgende Fälle zu untersuchen (siehe Bild 3, Tabelle 1).

In den Fällen 2 und 4 verliert die Gleichung (3) ihre Bedeutung.

Fall 3: Aus

$$-\tan \alpha \cdot \tan(\alpha + \gamma) \cdot \sin \gamma = 1$$

folgt mit dem Additionstheorem für $\tan(\alpha + \gamma)$

$$-\frac{\tan^2 \alpha + \tan \alpha \cdot \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \gamma} = \frac{1}{\sin \gamma},$$

oder die quadratische Gleichung

$$\tan^2 \alpha + \frac{\sin \gamma - 1}{\cos \gamma} \tan \alpha + \frac{1}{\sin \gamma} = 0$$

mit der Lösung $(\tan \alpha)_{1/2} = \frac{1}{2}$

$$\times \left(\frac{1 - \sin \gamma}{\cos \gamma} \pm \sqrt{\left(\frac{1 - \sin \gamma}{\cos \gamma} \right)^2 - \frac{4}{\sin \gamma}} \right).$$

Die Diskriminante

$$D = \left(\frac{1 - \sin \gamma}{\cos \gamma} \right)^2 - \frac{4}{\sin \gamma}$$

$$= \frac{(1 - \sin \gamma)^2}{\cos^2 \gamma} - \frac{4}{\sin \gamma}$$

$$= \frac{1 - \sin^2 \gamma}{\sin^2 \gamma} - \frac{4}{\sin \gamma}$$

$$= \frac{1 - \sin \gamma}{1 + \sin \gamma} - \frac{4}{\sin \gamma}$$

$$= \frac{-\sin^2 \gamma - 3 \sin \gamma - 4}{\sin \gamma \cdot (1 + \sin \gamma)}$$

ist für alle betrachteten Winkel γ stets negativ, die Gleichung (3) besitzt also keine reelle Lösung.

Fall 1 und 5 können zusammengefaßt untersucht werden. Aus der Gleichung $\tan \gamma \cdot \tan(\alpha + \gamma) \cdot \sin \gamma = 1$

folgt die quadratische Gleichung

$$\tan^2 \alpha + \frac{1 + \sin \gamma}{\cos \gamma} \tan \alpha - \frac{1}{\sin \gamma} = 0.$$

Da $D > 0$ für alle betrachteten γ , ergeben sich die zwei Lösungen

$$\tan \alpha_1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1 + \sin \gamma}{\cos \gamma} - \sqrt{\left(\frac{1 + \sin \gamma}{\cos \gamma} \right)^2 + \frac{4}{\sin \gamma}} \right)$$

$$\tan \alpha_2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1 + \sin \gamma}{\cos \gamma} + \sqrt{\left(\frac{1 + \sin \gamma}{\cos \gamma} \right)^2 + \frac{4}{\sin \gamma}} \right). \quad (4)$$

Damit gibt es zu jedem spitzen Winkel γ einen spitzen Winkel α_1 (Fall 5) und einen stumpfen Winkel α_2 (Fall 1), die beide die Gleichung (3) erfüllen. Es läßt sich zeigen, daß die beiden Dreiecke mit den Winkeln γ und α_1 bzw. γ und α_2 wegen

$$\alpha_2 = 180^\circ - (\gamma + \alpha_1)$$

$$\alpha_2 = 180^\circ - (\gamma + \alpha_1) \text{ kongruent sind.}$$

Fall III: $90^\circ < \gamma < 180^\circ$

Für ein Dreieck mit beliebigem stumpfen, aber dann fest gehaltenen Winkel γ geht Gleichung (3) über in

$$-\tan \alpha \cdot \tan(\alpha + \gamma) \cdot \sin \gamma = 1.$$

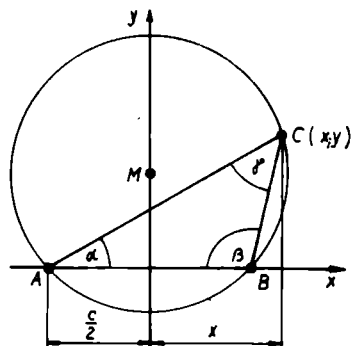
Die Nichtlösbarkeit dieser Gleichung wurde oben in Fall 3 nachgewiesen.

Zusammenfassung:

Über der gegebenen Grundseite $\overline{AB}$ erfüllt jedes rechtwinklige Dreieck $\triangle ABC$ ($\gamma = 90^\circ$) die Aufgabenstellung (1). Das ist auch bei jedem spitzen Winkel γ für zwei spezielle kongruente Dreiecke der Fall, deren Winkel α sich über die Beziehungen (4) errechnen lassen.

Um den geometrischen Ort der Eckpunkte C über der gegebenen Grundseite $\overline{AB}$ ermitteln zu können, legt man das Dreieck $\triangle ABC$ wie in Bild 4 in ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem.

Bild 4



Man erhält über die Beziehungen

$$\cos \alpha = \frac{\frac{c}{2} + x}{AC}, \quad \sin \alpha = \frac{y}{AC},$$

$$AC = c \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}, \quad \beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$$

für die Koordinaten des Punktes C

$$x = c \left(\frac{\sin(\alpha + \gamma) \cdot \cos \alpha}{\sin \gamma} - \frac{1}{2} \right)$$

$$y = c \frac{\sin \alpha \cdot \sin(\alpha + \gamma)}{\sin \gamma}, \quad (5)$$

wobei die Abhängigkeit des Winkels α zu jedem Winkel γ mit $0^\circ < \gamma < 90^\circ$ durch die Gleichungen (4) gegeben ist.

Bild 5

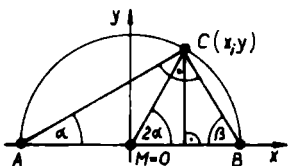
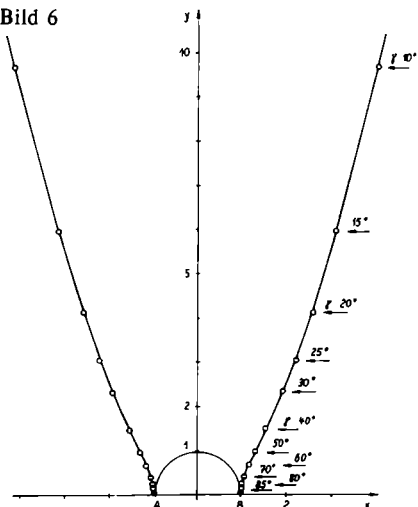


Bild 6



Eine Aufgabe von Prof. Dr. J. A. Grunert

Universität Greifswald
geb. 7. 2. 1797, gest. 7. 6. 1872

▲ 2873 ▲ „Einen Kreis beschreiben, welcher einen gegebenen Kreis von außen berührt und durch zwei außerhalb desselben gegebenen Punkte geht!

Analysis: C sey Mittelpunkt des gegebenen Kreises, A und B die gegebenen Punkte. Die Aufgabe sey aufgelöst. O der gesuchte Mittelpunkt, D sey der Berührungspunkt beider Kreise mit gemeinsamer Tangente. Die Tangente schneidet die Verlängerung von AB in E , so ist $DE^2 = AE \cdot BE$ nach dem Sehnentangentensatz.

Von E aus sey EGF eine beliebige Sekante, so gilt auch

$DE^2 = FE \cdot GE$ und folglich $AE \cdot BE = FE \cdot GE$ oder $AE : FE = GE : BE$, daher liegen die 4 Punkte A, B, G, F auf einem Kreis (Sekantensatz).

Synthesis: Man beschreibe einen durch A und B gehenden Kreis, welcher den gege-

Für $\gamma = 90^\circ$ (Bild 5) gehen die Gleichungen (5) über in

$$x = c \left(\cos^2 \alpha - \frac{1}{2} \right) = \frac{c}{2} \cdot \cos 2\alpha,$$

$$y = \frac{c}{2} \cdot \sin 2\alpha,$$

die Gleichung des Kreises in Parameterdarstellung.

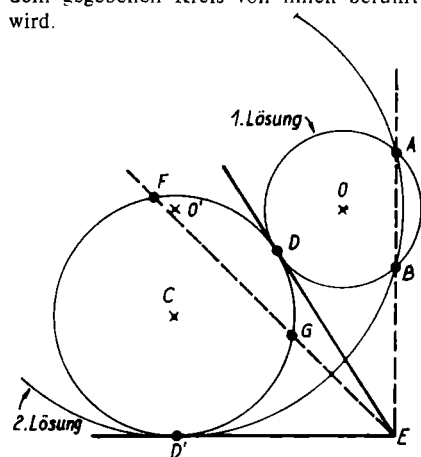
Folgende Tabelle gibt für $c = 2LE$ und für spezielle spitze Winkel γ Näherungswerte für die Winkel α_1 und α_2 mit den dazugehörigen Koordinaten der Punkte $C(x, y)$ an.

γ in °	α_1 in °	α_2 in °	x	y
85	2,51	92,50	$\pm 1,00$	0,09
80	5,04	94,96	$\pm 1,01$	0,18
70	10,31	99,70	$\pm 1,06$	0,38
60	17,03	104,45	$\pm 1,17$	0,65
50	22,44	107,56	$\pm 1,30$	0,95
40	29,79	110,21	$\pm 1,53$	1,45
30	38,39	111,61	$\pm 1,91$	2,31
25	43,29	111,71	$\pm 2,20$	3,01
20	48,72	111,28	$\pm 2,60$	4,09
15	54,83	110,17	$\pm 3,18$	5,93
10	61,95	108,05	$\pm 4,15$	9,66

In Bild 6 wird der gesuchte geometrische Ort aller Dreieckspunkte C für $\overline{AB} = c = 2LE$ dargestellt, die der Aufgabenstellung genügen.

R. Münzberg

benen Kreis in 2 beliebigen Punkten F, G schneidet. Hierauf ziehe man die Linien AB und FG , die sich in E schneiden. Von E aus ziehe man nach bekannter Elementaraufgabe eine Tangente an den gegebenen Kreis, Berührungspunkt ist dann D . Ebenfalls nach einer Elementaraufgabe beschreibe man einen Kreis durch die drei Punkte A, B, D , welcher der gesuchte seyn muß. Bekanntlich kann man von E aus noch eine zweite Tangente ED' an den Kreis ziehen. Beschreibt man nun durch A, B, D' einen Kreis, so wird dies ein Kreis seyn, welcher durch A und B geht, und von dem gegebenen Kreis von innen berührt wird.



gegeben: 2 Punkte A, B , Kreis in e
gesucht: Berührungskreise an Kreis C durch A und B

D Berührungspunkt, 1. Lösung (von außen)

D' Berührungspunkt, 2. Lösung (von innen)

Anmerkung: Ganz wie vorhin kann man auch einen Kreis beschreiben, welcher von einem gegebenen Kreis berührt wird und durch zwei innerhalb desselben liegende Punkte geht.“

Diese Aufgabe, von Dr. J. Buhrow, E.-M.-Arndt-Universität Greifswald ausgewählt, stammt aus dem Buch:

J. A. Grunert, Gymnasialprofessor in Neubrandenburg, 1834

Lehrbuch der Mathematik für die mittleren Classen höherer Lehranstalten, gedruckt bei J. J. Wieseke, Brandenburg.

Kurzbiographie

Johann August Grunert, geb. 7. 2. 1797 in Halle als Sohn eines Buchdruckers, ab 1815 Studium in Halle bei Pfaff, dem Doktorvater von Gauß, und dann bei Gauß in Göttingen, 1820 Dr. Phil., 1821 Gymnasiallehrer in Torgau, ab 1828 in Brandenburg, ab 1833 fast 39 Jahre Professor in Greifswald. Große Klarheit als Lehrer (kein Wunder nach der Praxis in der Schule!). Gab für Lehrer ab 1841 *Archiv für Mathematik und Physik* in Leipzig heraus. Etwa 500 gedruckte kleinere Arbeiten, wohl keine sehr großen Entdeckungen, Mitglied der Akademie in Wien, München, Erfurt, Stockholm und Upsala. Tod 7. 6. 1872.

IMO 87 in Kuba – ein unvergeßliches Erlebnis

Die Internationale Mathematikolympiade (IMO) fand vom 5. bis 16. Juli 1987 in Havanna statt. An ihr nahm auch eine 6-Schüler-Mannschaft aus der DDR teil. Es hatten sich für die Mannschaft Uta Hövel, Gerd Kunert, Frank Göhring, Jörg Jähnel, Gunter Döge und Ingo Warnke qualifiziert. Leiter der DDR-Delegation war Prof. Burosch (W.-Pieck-Universität Rostock) und sein Stellvertreter Prof. Gronau (E.-M.-Arndt-Universität Greifswald). Am 4. Juli trafen wir uns auf dem Flughafen Berlin-Schönefeld. Dort wurden wir von unseren Eltern verabschiedet. Nach einer Zwischenlandung in Kanada landeten wir pünktlich um 19.30 Uhr Ortszeit in Havanna. Beim Ausstieg aus dem Flugzeug schlug uns sofort die heiße Luft der Subtropen ins Gesicht. Nach der Paß- und Zollkontrolle begrüßte uns der Kulturattaché der DDR-Botschaft in Kuba. Danach wurden wir Teilnehmer in die etwas außerhalb von Havanna gelegene Leninschule gebracht, während Prof. Burosch und Prof. Gronau im Riviera-Hotel unterge-

Die DDR-Mannschaft im Aquarium im Leninpark:

Uta Hövel, EOS *Heinrich Hertz* Berlin, Gerd Kunert, Spezialklasse der TH Karl-Marx-Stadt; Frank Göhring, Spezialklasse der TH Ilmenau; Ingo Warnke, EOS *Georg Thiele* Kleinmachnow; Gunter Döge, EOS *Friedrich Engels* Riesa; Jörg Jähnel, EOS *Carl Zeiss Jena* Jena (v. r. n. l.)



bracht waren. Die Leninschule ist eine Schule mit Spezialisierung auf naturwissenschaftliche Fächer. Die Schüler wohnen direkt an der Schule in Zimmern, in denen während der IMO die Mannschaften untergebracht waren. Nach dem Abendessen brach dann für uns die erste Nacht an, die jedoch durch die ungewohnte Hitze und die vielen Moskitos bei mir in unangenehmer Erinnerung geblieben ist. Am nächsten Morgen fand ein kleiner Appell mit allen am gestrigen Tage angekommenen Mannschaften statt, in dessen Verlauf durch einen Teilnehmer jedes Landes, bei uns war das Jörg, die Landesflagge gehißt wurde. Damit waren wir dann in den Kreis der Olympiadeteilnehmer aufgenommen. Vom Veranstalter bekamen wir einen IMO-Beutel, in dem das Programm, Stadtpläne und der IMO-Anstecker waren. Außerdem erhielten wir eine Identitätskarte, die uns als IMO-Teilnehmer der DDR auswies. Am Nachmittag fuhren wir in ein Touristenzentrum. Da alle bisher angereisten Mannschaften mitgekommen waren, wurden dort bereits vereinzelt Kontakte zwischen den Mannschaften geknüpft bzw. Bekannte aus vorigem Jahr begrüßt. Am Montagvormittag war für die gesamte DDR-Mannschaft ausgiebiges Baden, Sonnen und Doppelkopfspielen angesagt. Da die Schule ein eigenes Schwimmbecken hatte, nutzten wir oft unsere Freizeit zum Baden und Sonnen. Das Ergebnis war eine krebserotete Haut bei uns allen schon nach einem Tag! Am Nachmittag fuhren wir dann nach Havanna zum Riviera-Hotel, wo wir uns mit Prof. Gronau trafen. Als wir von der Fahrt in die Schule zurückkehrten, fanden wir zu unserer Freude an den Betten Moskitonetze vor. Wir alle, besonders jedoch Uta, waren von Moskitostichen bereits stark gezeichnet.

Am nächsten Morgen besuchten wir ein Aquarium in Havanna. Neben einigen exotischen Fischen war dort eine lustige Delphinshow die Hauptattraktion. Nach dem Mittagessen gingen wir wieder einmal baden, da es anders wegen der fast senkrecht über uns stehenden Sonne schwer auszuhalten war. Auch der tägliche 15minütige Regen brachte keine Abkühlung. Abends spielte eine kubanische Gruppe lateinamerikanische Rhythmen. Dort konnten wir unsere kubanischen Betreuer das erste Mal in ihrem südlichen Temperament erleben. Wir versuchten natürlich auch bei ihren Tänzen mitzumachen, aber ob das wohl

gut aussah? Solche Veranstaltungen gehören auch zu einer Olympiade, wo man die Gastgeber kennenlernt und auch zwischen den Mannschaften Gespräche entstehen. Am Mittwoch besuchten wir den ganz in der Nähe der Schule gelegenen Leninpark. Auf einem kleinen See bestand die Möglichkeit zu rudern, die wir natürlich nutzten. Während wir auf dem See waren, unterhielt ich mich mit dem Stellvertreter der mexikanischen Delegation. Jeder erzählte etwas über die Vorbereitung auf die IMO in seinem Land und die Wünsche, die er für die IMO hat. Auch im Leninpark gibt es ein Aquarium, das wir besucht haben. Dort waren für mich die Krokodile am interessantesten. Piranhas gab es dort leider nur als Modell. Am Nachmittag dieses Tages machten wir dann den Ausflug, auf den sich die ganze Mannschaft bereits seit Tagen gefreut hat; es ging an den Strand zum Atlantik! Der Strand war herrlich weiß, das Wasser klar grün. Durch den hohen Salzgehalt brauchte man nur die Luft anzuhalten, um zu schwimmen. Daß die Sonne schien, ist in Kuba selbstverständlich. Diese Idylle ist eine der schönsten Erinnerungen an Kuba, die ich habe. Am Abend machten wir dann noch eine Fahrt ins Zentrum von Havanna. Wir gingen am Meer entlang, wo sich, nachdem es dunkel geworden war, die jungen Leute von Havanna treffen. Wir sahen die Vorbereitungen für den Karneval, der leider erst nach unserer Abreise stattfand. Nach einem Spaziergang durch das nächtliche Havanna besuchten wir den Eispalast, wo sich auch um 22.00 Uhr noch sehr viele Kinder aufhielten. Auch um diese Zeit ist es in Kuba noch relativ warm, so daß wir noch ein Eis aßen; es gab ja im Eispalast genügend Auswahl. Der nächste Tag, Donnerstag der 9. Juli, war der Tag vor der 1. Klausur. Am Vormittag kam Prof. Gronau zu uns und brachte als letzte Übung Aufgaben mit, die er von anderen Delegationen bekommen hatte. Am Nachmittag machten wir dann einen Bummel durch Alt-Havanna. Am Abend gab es dann mit einigen Mannschaften noch einen Aufgabenaustausch der nationalen Olympiaden. Am Freitag wurde die XXVIII. Internationale Mathematikolympiade dann eröffnet. Die Zeremonie war kurz, da die 1. Klausur gleich anschließend folgen sollte. Nach Beendigung dieser Klausur herrschte in der Mannschaft eine hervorragende Stimmung, da jeder alle Aufgaben gelöst hatte. An diesem Tag haben wir nur noch gebadet, da wir auf Grund der Spannung auf den nächsten Tag wenig Lust hatten anderes zu tun. Bei dieser Gelegenheit nutzten wir die Möglichkeit, viele Mannschaften über ihr Abschneiden zu befragen. Da die Aufgaben erst nach dem 2. Tag korrigiert werden, war das die einzige Möglichkeit, Informationen über die Platzierung unserer Mannschaft zu erhalten. Am Sonnabend, dem 2. Klausurtag, waren die Aufgaben dann auch wesentlich schwerer. Nur zwei hatten auch an diesem Tage alle Aufgaben gelöst, während wir anderen mit der 4. bzw. 6. Aufgabe Probleme hatten. In der Schule war

eine riesige Tafel angebracht worden, auf der die erzielten Punktzahlen für jede Aufgabe für jeden Teilnehmer eingetragen wurde. Seit dem Zeitpunkt, wo die ersten koordinierten Punktzahlen eingetragen wurden, war diese Tafel dicht umringt. Ständig wurde gerechnet und geschätzt, man versuchte die eigene und die Mannschaftsposition abzuschätzen. Nach dem Abendbrot begann der sportliche *Höhepunkt* der Olympiade – ein Fußballspiel. Die DDR-Mannschaft war mit Jörg im Tor sowie Gerd und Ingo stark vertreten. Während Jörg nur ein Mal hinter sich greifen mußte, konnten wir sieben Mal den gegnerischen Torwart überwinden. Am Abend stand eine kubanische Gala auf dem Programm, auf der sich lateinamerikanische Musik, Tanz und Pantomime abwechselten.

Am Sonntag fuhren die Teilnehmer an einen Strand in der Nähe von Havanna, während die Korrektoren unsere Lösungen zu korrigieren hatten. Gegen Ende unseres Strandbesuches stellte sich dann heraus, daß unsere kubanische Betreuerin Tanja gar nicht schwimmen kann! Unsere Versuche, es ihr beizubringen, scheiterten jedoch an den wenigen Möglichkeiten, die uns bis zur Abreise noch blieben. Am Montag besuchten wir das Pionierlager José Martí. Dort gibt es ein Museum des historischen Revolutionärs Che Guevara. Außerdem drehten wir im Vergnügungspark des Pionierlagers noch ein paar Runden. Ab 20.00 Uhr gab es an diesem Abend einen Empfang beim Minister für Volksbildung. Wir nutzten die Gelegenheit, um mit unserer Delegationsleitung über die Ergebnisse der korrigierten bzw. noch zu korrigierenden Lösungen zu sprechen. Langsam zeichnete sich auch ab, daß wir einen der vorderen Plätze in der Mannschaftswertung

belegen würden. Am nächsten Tag war ein Ausflug zur Schweinebucht ans Karibische Meer angekündigt worden. Die historische Bedeutung der Schweinebucht war uns schon vorher bekannt. Hier gelang der erste große Sieg gegen den Imperialismus in Lateinamerika. Da die Fahrt über drei Stunden dauern sollte, fuhren wir in klimatisierten Bussen, die für uns Nord- und Mitteleuropäer natürlich eine willkommene Abkühlung brachten. Während einer Rast an einer Krokodilfarm nahmen wir einen, wie immer reichlichen Imbiß ein. Am Strand angekommen begann wieder die Suche nach einem günstigen Platz, wo wir uns niederlassen könnten. Nach allen Erfahrungen und Sonnenbränden wählten wir diesmal einen Platz, der nicht direkt unter der vollen Sonnenbestrahlung lag. Hier am Playa Gison, so heißt der Strand, gab es auch einen Souvenirladen, in dem sich jeder von uns einen riesengroßen Sombrero kaufte. Während des wieder ausgiebigen Badens informierten wir unsere Delegationsleitung vom Ausgang des Fußballspiels. Darüber war Prof. Burosch als ehemaliger aktiver Spieler natürlich sehr erfreut! Nachdem wir wieder in der Schule angekommen waren, standen uns noch einige aufregende Stunden vor der Ergebnistafel bevor. Bis auf die 6. Aufgabe der ungarischen Mannschaft war die Tafel bereits seit langem vollständig. Bis jetzt lagen wir auf dem 4. Platz, wären jedoch bei einer bestimmten Punktzahl auf die 6. Aufgabe der Ungarn um einen Platz zurückgefallen. Die lange Koordinationszeit ließ darauf schließen, daß um jeden Punkt regelrecht gekämpft wurde. Als die ersten Ergebnisse angeschrieben wurden, war es dann klar: wir waren 4. in der Mannschaftswertung. Groß war unsere Überraschung, als plötzlich die Amerikaner laut jubelten! Die Un-

garn hatten nämlich in Wirklichkeit darum gekämpft, noch an den USA vorbeizuziehen. Dafür fehlten ihnen am Ende jedoch zwei Punkte. Am Mittwoch fand dann die Abschlusveranstaltung der IMO statt. Der Minister für Volksbildung ließ es sich nicht nehmen, auch die Siegerehrung vorzunehmen. Es wurden die Urkunden, Medaillen bzw. Geschenke für die Preisträger übergeben. Frank und Gerd waren unsere erfolgreichsten Teilnehmer, da beide einen 1. Preis erkämpften. Uta, Jörg und Gunter erhielten einen 2. Preis sowie Ingo einen 3. Preis. Nach der Preisverteilung lud der australische Delegationsleiter alle teilnehmenden Staaten zur nächsten Internationalen Mathematikolympiade 1988 nach Australien ein. Am Nachmittag kauften wir mit Hilfe eines in Kuba arbeitenden DDR-Wissenschaftlers, der bei der IMO Koordinator war, in Havanna ein. Wir kauften Ananas, Mangos, Rum usw. Einen Teil aßen wir dann schon abends bei den Abschiedsfeiern. Der eigentliche Abschiedstag, der 16. 7. 87, wurde für uns durch die DDR-Botschaft organisiert. Zuerst wurden wir mit einem Barkas abgeholt und noch einmal an den Strand gefahren, wo wir dann ein letztes Mal im Atlantik gebadet haben. Später empfing uns noch beim Mittagessen in der Botschaft der Botschafter zu einem Gespräch. Auch er beglückwünschte uns zum so erfolgreichen Abschiedsessen, erkundigte sich über den Verlauf der IMO und unsere Eindrücke in Kuba und gab uns einen kleinen Einblick in die Arbeit einer Botschaft. Für den Nachmittag lud er uns in seine Residenz ein. Den Swimmingpool haben wir wegen der starken Hitze sofort besetzt. Zusammen mit Prof. Burosch und Prof. Gronau gab es dann ein kleines *Wasserfußballspiel*. Einen Imbiß, bestehend aus Kuchen und eisgekühlter Kola, haben wir natürlich auch nicht abgelehnt. Gegen 17.00 Uhr war der für uns alle sehr vergnügliche Aufenthalt in der Residenz leider zu Ende. Wieder in der Schule angekommen, bekamen wir dann zu unserer großen Freude noch jeder ein IMO-T-Shirt. Auch an diesem Abend mußte auf Grund der Transportkapazität noch ein Teil der gekauften Früchte gegessen werden.

Am nächsten Tag kam dann für uns der endgültige Abschied von Kuba. Wegen einer 50minütigen Verspätung hatten wir schon befürchtet, das Flugzeug zu verpassen. Trotz beträchtlichen Übergepäckes wurden wir noch zum check in angenommen. Auf der gleichen Route wie beim Hinflug ging es dann um 11.58 Uhr von Kuba los. Um 6.00 Uhr des nächsten Tages (DDR-Zeit) wurden wir von unseren Familien, Vertretern des Ministeriums für Volksbildung und des Zentralrates der FDJ und der Aktuellen Kamera in Berlin-Schönefeld empfangen. Im Flughafenhotel erfolgte dann noch eine kleine Auswertungsveranstaltung, auf der unsere Leistungen gewürdigt wurden. Diese IMO war ein schöner und unvergeßlicher Abschluß meiner langen Olympiade-Laufbahn.

Ingo Warnke

Eingang der Lenin-Schule



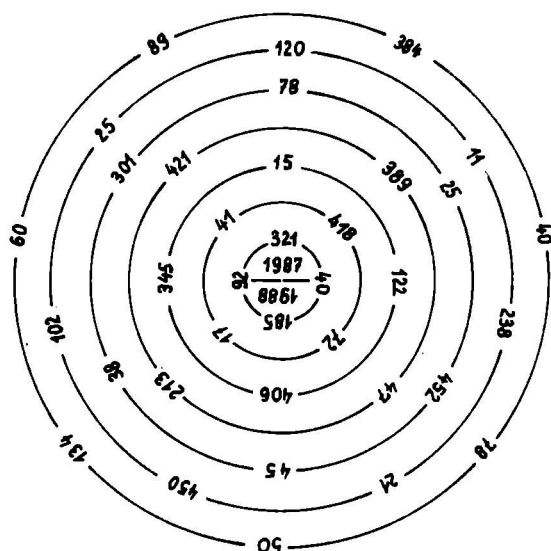
In freien Stunden · alpha-heiter

Wer nichts weiß und weiß,
daß er nichts weiß,
weiß viel mehr als der,
der nichts weiß und nicht weiß,
daß er nichts weiß.

Zahlenlabyrinth

Das abgebildete Zahlenlabyrinth ist von außen nach innen so zu durchlaufen, daß die Summe der dabei berührten Zahlen entweder die Jahreszahl 1987 oder die Jahreszahl 1988 ergibt. In jedem der Ringe darf immer nur eine einzige Zahl berührt werden. Wer findet die meisten Lösungen?

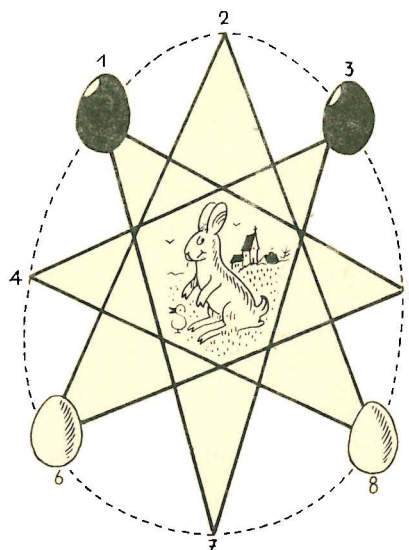
Ing. A. Körner, Leipzig



Ein kniffliges Eierspiel

Die beiden schwarzen und die beiden weißen Eier sollen durch Hin- und Herschieben über die fetten Linien ihre Plätze wechseln. Glaubt nicht, daß das so einfach ist! Aber darum ist das Spiel auch so kurzweilig. Stellt die vier Eier aus Zeichenkarton her und versucht euer Glück!

aus: WE, Köln



Kein Problem?!

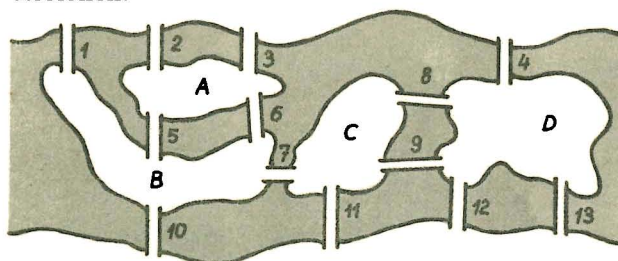
Die Chefsekretärin ist in Schwierigkeiten geraten. Bedauerlicherweise befindet sich die Schreibmaschine mit kyrillischen Buchstaben in Reparatur und gerade jetzt muß sie einige Worte in Großbuchstaben in eine Übersetzung ins Russische übertragen. Da hat sie eine Idee. Sie nimmt die Schreibmaschine mit lateinischen Buchstaben. Welche von den folgenden Worten kann sie nun schreiben?

- | | |
|------------|---------------|
| 1. ВЕС | 11. СХЕМА |
| 2. НЕТО | 12. ОТКАЗ |
| 3. МУСКАТ | 13. МАКЕТ |
| 4. РОСТ | 14. РУКА |
| 5. НИНА | 15. ПРИКАЗ |
| 6. РУДИН | 16. ХАРАКТЕР |
| 7. УХО | 17. ОСТАНОВКА |
| 8. ПАНИКА | 18. ХАТА |
| 9. РЕМОНТ | 19. РЕЗЕРВ |
| 10. ПАКЕТА | 20. УТКА |

E. Schmidt, Potsdam

Ein Brückenproblem

Die nachstehende Zeichnung zeigt einen Fluß, in dem sich vier Inseln (A, B, C und D) befinden. Diese Inseln sind von beiden Seiten des Flusses aus und untereinander über insgesamt 13 Brücken zu erreichen.



Ist es möglich, von einem beliebigen Ufer aus alle vier Inseln zu betreten und wieder zum Ufer (oder auch zum anderen Ufer) zu gelangen und dabei alle Brücken, aber jede nur ein einziges Mal, zu passieren?

1, 2, 3, ... - α ist immer dabei

Die Buchstaben in nachstehendem Gleichungssystem sind so durch Grundziffern zu ersetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

- (1) $\alpha \cdot \alpha\alpha = P \alpha E$
- (2) $P \cdot \alpha\alpha = R \alpha T$
- (3) $R \cdot \alpha\alpha = O \alpha K$
- (4) $O \cdot \alpha\alpha = D \alpha U$
- (5) $D \cdot \alpha\alpha = U \alpha D$
- (6) $U \cdot \alpha\alpha = K \alpha O$
- (7) $K \cdot \alpha\alpha = T \alpha R$
- (8) $T \cdot \alpha\alpha = E \alpha P$

Oberlehrer Ing. K. Koch,
Schmalkalden

In Altenburg

A	L	T	E	N	B	U	R	G

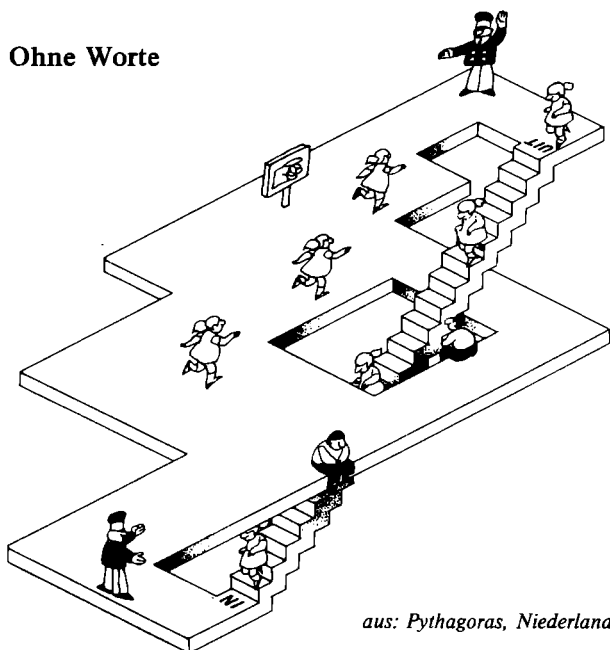
Welche Zahl wird jedem Buchstaben von ALTENBURG zugeordnet, wenn das folgende Gleichungssystem gilt:

$$\begin{array}{rcl}
 A + L + T + E & = & 43 \\
 A + L + T & = & 40 \\
 A + L & = & 38 \\
 A + B & = & 25 \\
 A - B & = & 11
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{rcl}
 A + N & = & 22 \\
 B + U & = & 37 \\
 B + U + R & = & 70 \\
 B + U + R + G & = & 106
 \end{array}$$

Dr. R. Mildner,

Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig

Ohne Worte

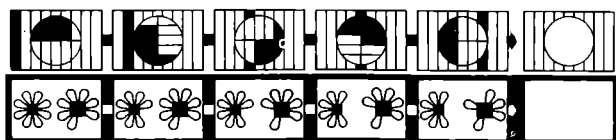


aus: Pythagoras, Niederlande

Logelei

Welche Figur gehört logischerweise in die Leerfelder?

aus: Füles, Budapest



Von A nach B gewandert

Die Figur ist von A nach B zu durchwandern. Dabei soll der Weg so durch alle Felder führen, daß sich ein Satz für das Rechnen im Bereich der natürlichen Zahlen ergibt.

Oberlehrer O. Chromy, Coswig

A →	A	D	D	M	U	L
	I	T	I	D	I	T
	O	N	U	N	P	L
	O	I	T	A	K	I
	N	S	S	C	H	R
	N	I	E	G	N	A
	D	U	N	E	I	N
	F	S	U	A	T	K
	Ü	H	R	B	A	R

Kryptarithmetik

Setze an Stelle der Buchstaben bzw. Sternchen Ziffern so, daß richtig gelöste Aufgaben entstehen!

a) $\overline{abcd} \cdot 9 = \overline{dcba}$

b) $\overline{9ABCDE} = 4 \cdot \overline{ABCDE9}$

c)
$$\begin{array}{r}
 BDCA \\
 + BDAC \\
 \hline
 AECBE
 \end{array}$$

e) $\sqrt{\begin{array}{c} ***** \\ * \\ *** \\ ** \\ 4*** \\ **** \end{array}} = ****$

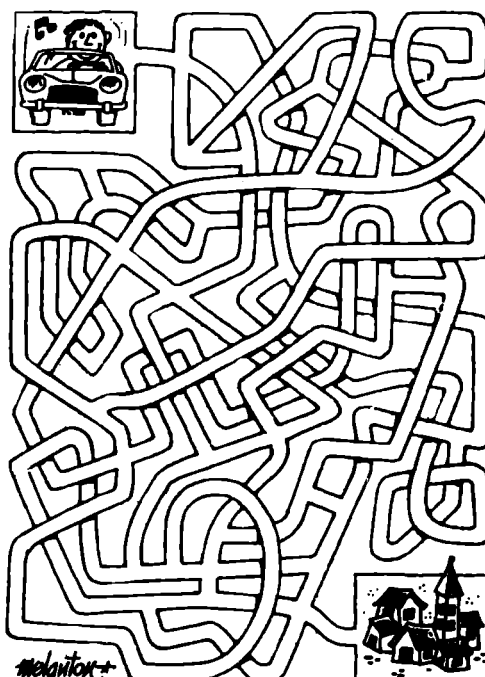
d)
$$\begin{array}{r}
 **5 \cdot 4* \\
 1 \\
 6 \\
 \hline
 *7***
 \end{array}$$

aus: Matematica List, Beograd

Vorsicht Kurve!

Wie kommt der Autofahrer auf dem günstigsten Weg in die Ortschaft?

aus: Troll, Berlin



Rund um den SR 1

Die y^x -Taste

Will man Potenzen mit ganzzahligen positiven oder negativen Exponenten unter Verwendung eines Taschenrechners ermitteln, so genügen dazu die auf allen Taschenrechnern vorhandenen Tasten x , $\div$ und falls es sich um eine negative Basis handelt, noch die Vorzeichenwechsel-taste $+/-$.

▲ 1 ▲ Berechne mit dem SR 1, ohne die y^x zu verwenden, folgende Terme!

Gib jeweils einen Rechenablaufplan an!

- a) $3,1^3$ b) $0,7^{-3}$ c) 0^3 d) 3^{14}
e) $2,81^5$ f) $(-2)^{21}$

Das Lösen der Aufgaben 1d) bzw. 1f) ist trotz der Konstantenautomatik des SR 1 recht *tastenaufwendig*. So muß man 13mal bzw. 20mal die Taste $=$ betätigen. Um uns bei der Berechnung von Potenzen das wiederholte Betätigen gleicher Tasten zu ersparen, verfügt unser Schulrechner SR 1 wie manch anderer wissenschaftliche Taschenrechner über die Taste y^x . Mit Hilfe dieser Taste kann man die Aufgaben 1a), 1b), 1d), 1e) und auch 1f) mit relativ wenig *Tastenbetätigung* lösen.

Beispiel: $3,1^3$

Rechenablaufplan: $3,1 \ y^x \ 3 \ =$
29,791

Die Taste y^x gehört zu den Operationstasten. Zur Ermittlung des Resultats wird die Taste $=$ benötigt.

▲ 2 ▲ Berechne mit Hilfe der Taste y^x die Ergebnisse der Aufgaben 1b), 1d), 1e)! Vergleiche jeweils die ermittelten Resultate der Aufgabe 1 mit denen der Aufgabe 2!

Was stellst du fest?

Da der Potenzwert y^x bei Nutzung der Taste y^x mit Hilfe einer fest verdrahteten Schaltung über die Beziehung $y^x = e^{x \cdot \ln y}$ gewonnen wird, ist die Genauigkeit des Resultats u. U. geringer als bei der Nutzung der Multiplikationstaste bzw. Divisionstaste. Der SR 1 gibt bei Verwendung der Taste y^x die Ergebnisse auch nur mit sechs zuverlässigen Ziffern an (linke Nullen werden bei Dezimalbrüchen nicht als zuverlässige Ziffer gezählt), wobei die letzte zuverlässige Ziffer durch Runden entstanden ist, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel: 2^{20}

$2 \ x \ = \ = \dots \ =$ 1048576
(genauer Wert)
 $2 \ y^x \ 20 \ =$ 1048580
zuverlässige Ziffern

Da $\ln y$ nur für positive reelle Zahlen y erklärt ist, können Potenzen mit negativer Basis und Potenzen mit Null als Basis *nicht* unter Verwendung der Taste y^x berechnet werden.

▲ 3 ▲ Erkunde, welcher Term der SR 1 mit den angegebenen Rechenablaufplänen berechnet!

- a) $3 \ y^x \ 2 \ =$
b) $2 \ y^x \ 3 \ +/- \ =$
c) $16 \ y^x \ 0,5 \ =$
d) $25 \ y^x \ 2 \ 1/x \ =$
e) $256 \ y^x \ 0,125 \ =$
f) $6561 \ y^x \ 8 \ 1/x \ =$
g) $27 \ y^x \ 3 \ 1/x \ =$
h) $16 \ y^x \ 2 \ 1/x \ +/- \ =$
i) $0 \ y^x \ 2 \ =$
j) $3 \ +/- \ y^x \ 2 \ =$

Wie man bei der Lösung der Aufgabe 3 sah, lassen sich mit Hilfe der Taste y^x auch Wurzeln berechnen, wenn man beachtet, daß z. B.

$$\sqrt[2]{25} = 25^{\frac{1}{2}} \quad \left(\text{bzw. } \sqrt[2]{16} = 16^{-\frac{1}{2}} \right) \text{ gilt.}$$

Kommt es bei der Berechnung von Termen der Form $\sqrt[n]{a}$ ($a > 0; n > 0; n \in \mathbb{N}$) bzw. a^{2n} ($a > 0; n > 0; n \in \mathbb{N}$) auf möglichst hohe Genauigkeit an, so ist zu empfehlen, die Taste $\sqrt{}$ (bzw. x^2) zu verwenden.

Beispiele:

	Rechenablaufplan	Anzeige
$\sqrt{3}$	$3 \ \sqrt{}$	1.7320508
	$3 \ y^x \ 0,5 \ =$	1.73205
$\sqrt[4]{7}$	$7 \ \sqrt{} \ \sqrt{}$	1.6265766
	$7 \ y^x \ 0,25 \ =$	1.62658
$5,24^4$	$5,24 \ x^2 \ x^2$	753,9198
	$5,24 \ y^x \ 4 \ =$	753,92
$9,81^8$	$9,81 \ x^2 \ x^2 \ x^2$	85773288
	$9,81 \ y^x \ 8 \ =$	85773300

▲ 4 ▲ Betätige die Taste des SR 1 in angegebener Reihenfolge und fülle die Leerstellen aus!

Schritt	Tastenfolge	Anzeige
1	2	2.
2	y^x	2.
3	3	3.
4	$=$	8.

Schritt	Tastenfolge	Anzeige
5	4	4.
6	$=$	64.
7	5	
8	$=$	
9	7	
10	$=$	-

Wie man sieht, wird von den Eingaben 4; 5 bzw. 7 jeweils die dritte Potenz ermittelt. Der einmal im Schritt 3 eingegebene *Exponent* bleibt *konstant*.

▲ 5 ▲ Fülle die Leerstellen aus!

$2 \ y^x \ 2 \ = \ = \ =$
4. ...

▲ 6 ▲ Welchen Term kann man mit nachstehenden Rechenablaufplänen berechnen?

- a) $3 \ y^x \ 2 \ = \ =$
b) $3 \ x \ 4 \ y^x \ 3 \ =$
c) $2 \ + \ 3 \ = \ y^x \ 3 \ =$
d) $4 \ + \ 3 \ x \ 2 \ y^x \ 4 \ =$
e) $27 \ y^x \ 4 \ y^x \ 3 \ 1/x \ =$
f) $27 \ y^x \ 3 \ 1/x \ y^x \ 4 \ =$

Bei Verwendung der Taste y^x berücksichtigt der SR 1 die Vorrangregeln. Potenzieren wird also vor Multiplizieren (bzw. Dividieren) und dieses vor Addieren (bzw. Subtrahieren) ausgeführt. Der Term $3,4^3 + 5,2 \cdot \sqrt[3]{4}$ kann von links nach rechts in den SR 1 *eingegeben* werden:

$3,4 \ y^x \ 3 \ + \ 5,2 \ x \ 4$
 $y^x \ 5 \ 1/x \ =$

▲ 7 ▲ Stelle zur Berechnung folgender Terme einen Rechenablaufplan auf!

- a) $\sqrt[3]{a^3}$ b) $\frac{a \cdot b}{\sqrt[5]{c}}$
c) $a^2 + b \cdot a \cdot \sqrt[3]{c}$ d) $\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$

Die Taste y^x kann auch genutzt werden, um Gleichungen der Form $a^x = b$ durch systematisches Probieren zu lösen.

▲ 8 ▲ Die Gleichung $3,1^x = 15,2821$ hat genau eine Lösung. Ermittle die Lösung mit Hilfe des SR 1!

▲ 9 ▲ Anja, Eva, Hannes und Frank erhalten die Aufgabe, den Term

$\sqrt[3]{6,05} \cdot 6,05^{\frac{3}{2}}$ mit dem SR 1 zu berechnen. Wer von ihnen hat eine falsche Tastenfolge gewählt?

Anja:
 $6,05 \ \sqrt{} \ x \ 6,05 \ \sqrt{} \ y^x \ 3$
 $=$
Hannes:
 $6,05 \ y^x \ 1,5 \ + \ 0,5 \ =$
Eva:
 $6,05 \ \sqrt{} \ x \ 6,05 \ y^x \ 3 \ \div \ 2$

=

Frank: $6,05 \cdot x^2$

▲ 10 ▲ Jan und Uwe berechnen mit dem SR 1 den Term $2,1^{-3}$. Sie geben folgende Rechenablaufpläne an:

Jan: $2,1 \cdot y^x \cdot 3 \cdot +/ - =$

Uwe: $2,1 \cdot y^x \cdot 3 = 1/x$

Sind die Rechenablaufpläne korrekt?

L. Flade

Lösungen

▲ 1 ▲

a) $3,1 \cdot x = = 29,791$

b) $1 \div 0,7 = = = 2,9154519$

c) 0

d) $3 \cdot x = = \dots = 4782969$

13mal

e) $2,81 \cdot x = = = =$

175,19899

f) $2 \cdot +/ - \cdot x = = \dots =$

20mal

-2097152

▲ 2 ▲

b) $0,7 \cdot y^x \cdot 3 \cdot +/ - = 2,91545$

d) $3 \cdot y^x \cdot 14 = 4782970$

e) $2,81 \cdot y^x \cdot 5 = 175,199$

Die mit der Taste y^x ermittelten Werte weichen geringfügig von den entsprechenden Resultaten ab, die mit den Rechenablaufplänen der Aufgabe 1 ermittelt worden sind.

▲ 3 ▲ a) 3^2 b) 2^{-3} c) $\sqrt{16}$ d) $\sqrt{25}$

e) $\sqrt[8]{256}$ f) $\sqrt[8]{6561}$ g) $\sqrt[3]{27}$ h) $\frac{1}{\sqrt{16}}$

i, j) SR 1-Anzeige ϵ_0 .

▲ 4 ▲ Schritt Tastenfolge Anzeige

7 5 5.

8 $=$ 125.

9 7 7.

10 $=$ 343.

▲ 5 ▲ $2 \cdot y^x \cdot 2 = = =$

4. 16. 256.

▲ 6 ▲ a) $(3^2)^2$ b) $3 \cdot 4^3$ c) $(2+3)^3$

d) $4+3 \cdot 2^4$ e, f) $27^{\frac{4}{3}}$

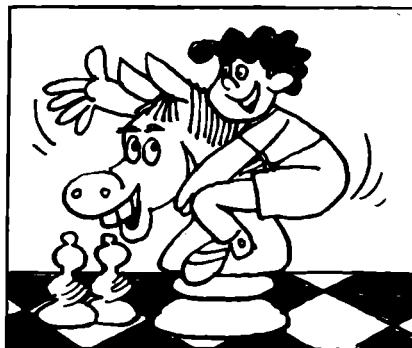
▲ 7 ▲

a) z. B.: $a \cdot y^x \cdot 3 \cdot y^x \cdot 7 \cdot 1/x =$

b) z. B.: $a \cdot x \cdot b \cdot \div \cdot c \cdot y^x \cdot 5 \cdot 1/x =$

c) z. B.: $a \cdot x^2 \cdot + \cdot b \cdot x \cdot a \cdot x \cdot c \cdot y^x \cdot 3 \cdot 1/x =$

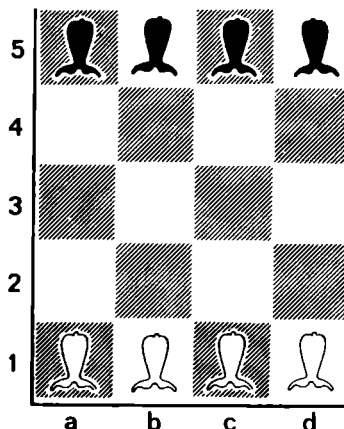
d) z. B.: $3 \cdot x \cdot \vee \cdot \div \cdot 4 \cdot \div \cdot \pi \cdot = y^x \cdot 3 \cdot 1/x =$



Platztausch der Läufer

Henry Ernest Dudeney (1847 bis 1930) war Englands bedeutendster Rätselerfinder seiner Zeit. Die Aufgaben von ihm sind von großer mathematischer Brillanz und seine sechs Rätselbücher stellen einen hervorragenden Beitrag auf dem Gebiet der Unterhaltungsmathematik dar. Er befaßte sich auch viel mit Denkspielen und Rätselaufgaben rund um das Schachspiel. Zahlreiche knifflige Aufgaben zeugen davon.

In der folgenden Aufgabe reduzierte Dudeney das Schachbrett auf ein 4×5 -Rechteck, auf dem 4 weiße und 4 schwarze Läufer postiert sind. Die weißen und die schwarzen Läufer sollen in möglichst wenigen Zügen (weniger als 20!) ihre Plätze tauschen, also die 4 weißen Läufer auf die 5. Reihe und die 4 schwarzen Läufer auf die 1. Reihe gelangen. Die Bewegung eines weißen und eines schwarzen Läufers gilt als ein Zug. Es wird abwechselnd gezogen, wobei beachtet werden muß, daß Läufer verschiedener Farbe sich einander nicht bedrohen. (In der abgebildeten Position wären somit Züge wie 1. Ld2 oder 1. La2 nicht erlaubt.) Weiß beginnt mit 1. Lc1-b2!



▲ 8 ▲ $x = 2,41$

▲ 9 ▲ Eva und Hannes

▲ 10 ▲ Mit beiden Rechenablaufplänen ist der Wert des Terms $2,1^{-3}$ zu berechnen. Jan erhält als Resultat 0,10798 (5 zuverlässige Ziffern), Uwe erhält als Resultat 0,1079797 (7 zuverlässige Ziffern).

Buchtips für Schachfreunde und solche, die es werden wollen

Awerbach, Juri

Erfolg im Endspiel

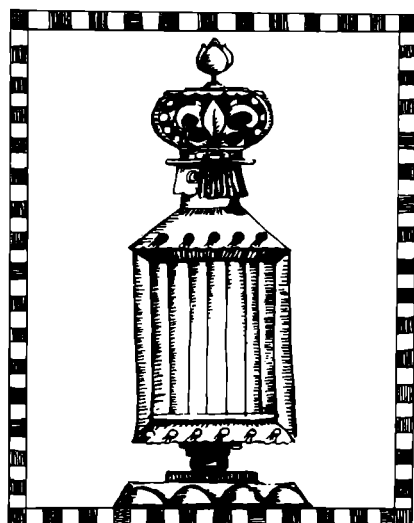
208 S., 141 Diagramme

Bestell-Nr. 671 666 1

Preis: 13,50 M

Der Autor wendet sich an Schachfreunde mit geringen Kenntnissen. Auch Schachfreunde mit permanenter Zeitnot für ein umfangreiches Studium der Schachliteratur werden gern zu diesem Band greifen. Der Autor vermittelt das erforderliche Wissen über Grundbegriffe und elementare Endspiele und behandelt im Anschluß daran systematisch und leichtverständlich die verschiedenen Endspieltypen. Übungsaufgaben und ein Lexikon der verwendeten Fachausdrücke beschließen den Band.

J. Awerbach



ERFOLG IM ENDSPIEL

Suetin, Aleksei

Erfolgreich eröffnen

256 S., 141 Diagramme

Bestell-Nr. 671 669 6

Preis: 14,00 M

Der sowjetische Großmeister möchte Lernenden – vom Anfänger bis zum Spieler mittlerer Qualifikation – zeigen, wie man sich die Grundlagen der Schacheröffnungen erfolgreich aneignet.

Zu Beginn stellt Suetin die allgemeinen Gesetzmäßigkeiten des Eröffnungsspiels dar. Danach werden in systematischer Abfolge kurz die wichtigsten Varianten und Systeme aus allen Eröffnungen erläutert. Der Leser wird so befähigt, den inneren Zusammenhang zwischen allgemeinen Prinzipien und konkreten Varianten zu erfassen.

Beide Titel: Sportverlag Berlin

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 1. Mai 1988



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alpha-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

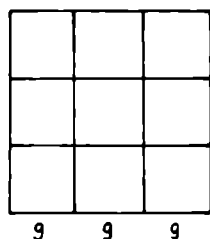
Redaktion alpha
Postfach 14
Leipzig
7027

Ma 5 ■ 2874 Ermittle alle natürlichen Zahlen x und y mit $0 < x < y$, welche die Ungleichung $5 \cdot x \cdot y < 65$ erfüllen! Lehrer K. G. Lautsch, Menteroda

Ma 5 ■ 2875 Heinz fuhr mit einem Sonderzug ins Ferienlager. Nachdem der Zug genau ein Drittel seiner Reisestrecke zurückgelegt hatte, schlief Heinz ein. Er erwachte erst, als der Zug bis zum Reiseziel noch 28 km zurückzulegen hatte. Die Länge der Strecke, während der Heinz schlief, ist gleich dem Siebenfachen dieser letzten 28 km. Berechne die Gesamtlänge der Reisestrecke von Heinz!

Lehrer K. G. Lautsch, Menteroda

Ma 5 ■ 2876 Trage die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 so in die abgebildete Figur ein, daß die Summe der drei dreistelligen Zahlen 999 beträgt! (Zeichne die Figur vorher ab!) OL W. Melka, Neubrandenburg



Ma 5 ■ 2877 Maik ist gegenwärtig sechsmal so alt wie seine Schwester Isolde. In 8 Jahren wird Maik nur noch doppelt so alt sein wie Isolde. Wie alt sind Maik und seine Schwester Isolde gegenwärtig?

Schülerin E. Aschenbach, Brotterode

Ma 5 ■ 2878 Genau 1209600 Sekunden wird es dauern, bis wir uns wieder treffen, sagt Walter, der gern mit großen Zahlen rechnet, zu Rolf, als sie sich am 10. Mai um 12 Uhr verabschieden. An welchem Tag treffen sie sich erneut?

Schüler A. Keller, Halberstadt

Ma 5 ■ 2879 In dem Schema

P L U S
+ P L U S
+ P L U S
S U M M E

sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. Sch.

Ma 5 ■ 2880 Genau vier Ziffern 3 sind durch Rechenzeichen für die Grundrechenoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division so zu verknüpfen, daß man als Ergebnis 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 bzw. 10 erhält. Dabei dürfen auch Klammern gesetzt werden. Beispiel: $(3 \cdot 3 + 3) : 3 = 4$. Sch.

Ma 6 ■ 2881 Vier Ehepaare sitzen in fröhlicher Runde an einem kreisrunden Tisch, die Männer haben die Vornamen Sebastian, Gerd, Thomas und Alfred, die Frauen haben die Vornamen Ute, Simone, Monika und Elke. Ferner ist bekannt:

- (1) Gerd sitzt seiner Frau gegenüber; alle anderen Ehepartner sitzen sich nicht gegenüber.
- (2) Thomas sitzt rechts von Gerd und Elke gegenüber, die nicht die Frau von Sebastian ist.
- (3) Sebastian sitzt zwischen Thomas und dessen Frau, die nicht Monika heißt.
- (4) Rechts von Alfred sitzt Simone.

Wer ist mit wem verheiratet?

Schüler Th. Lux, Bad Langensalza

Ma 6 ■ 2882 In einem Ferienlager erholen sich mehr als 300, aber weniger als 400 Schüler. Der Lagerleiter will sie zum Morgenappell so aufstellen, daß sie eine rechteckige Formation bilden. Er versucht es mit Zweier-, Dreier-, Vierer-, Fünfer- und Sechser-Reihen, aber stets bleibt ein Schüler übrig. Erst bei der Bildung von Siebener-Reihen klappt es. Wie viele Schüler befinden sich in diesem Ferienlager?

Schüler M. Schmauch, Heuckewalde

3. Der jeweiligen Aufgabennummer ist ein Ma (Mathematik), Na/Te (Naturwissenschaft und Technik) und eine Ziffer, z. B. 7 vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12 oder Na/Te 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm $\times$ 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug korrigiert.

Noch eine Bitte an die Schulen: Sendet bitte die Lösungen bereits nach Aufgaben sortiert ein.

6. Teilnehmer, die eine richtige Lösung (nicht nur Antwortsatz) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Anderenfalls erhalten sie eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“. Nach dem Einsendetermin eingehende Lösungen werden nicht mehr bearbeitet!

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1987/88 läuft von Heft 5/1987 bis Heft 1/1988. Zwischen dem 1. und 10. September 1988 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/87 bis 1/88 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden ab Heft 6/88 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (von den Wettbewerben der Hefte 5/87 bis 1/88) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein alpha-Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1987/88 einsenden, erhalten das alpha-Abzeichen in Gold (und die Urkunde zurück). Schüler, die schon mehrere Jahre teilnehmen, senden bitte die zuletzt erhaltene Urkunde mit ein. Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

30	Markus Mäder Schweizer Weg 17 Schmalkalden 6080	J. Gagarin - OS Klasse 7	Ma 7 2647
150			150
Prädikat:			
Lösung:			

Ma 6 ■ 2883 Ein Fuchs kommt an einem Teich vorbei und sagt: „Guten Tag, ihr 100 Gänse!“ Eine der angesprochenen Gänse antwortet: „Ehe wir 100 sind, müssen wir noch einmal so viele, noch einhalbmal so viele, noch einviertelmal so viele wie wir sind, außerdem noch dich hinzu bekommen.“ Wie viele Gänse schwammen auf dem Teich?

Schüler A. Keller, Halberstadt

Ma 6 ■ 2884 Auf die Frage, wie alt ihre Eltern, ihre Schwester und sie selbst seien, antwortet Grit: „Mein Lebensalter ist gleich einer Primzahl zwischen 10 und 20. Das Alter meiner Mutter, die ein Jahr jünger ist als mein Vater, ist durch 5 teilbar. Mein Vater ist viermal so alt wie meine Schwester Katja. Meine Mutter ist 22 Jahre älter als ich.“ Wie alt sind Grit, ihre Schwester und ihre Eltern?

Schülerin G. Berthold, Dresden

Ma 6 ■ 2885 Frank hat eine vierstellige symmetrische Telefonnummer, bei der die erste und vierte, aber auch die zweite und dritte Ziffer übereinstimmen. Ihre Quersumme ist so groß wie die aus den ersten zwei Ziffern gebildete Zahl.

Welche Telefonnummer hat Frank?

Schülerin J. Unger, Gröbitz

Ma 6 ■ 2886 Ein kleines Bassin mit quadratischer Grundfläche soll gekachelt werden. Die Kacheln sind quadratisch und haben eine Kantenlänge von 10 cm. Die Höhe des Bassins beträgt zwei Kachelbreiten. Wie groß ist das Fassungsvermögen dieses Bassins in Litern, wenn für die Grundfläche genau so viele Kacheln gebraucht werden wie für die Seitenflächen zusammen? (Fugen bleiben unberücksichtigt.)

Schülerin B. Breuer, Heiligenstadt

Na/Te 6 ■ 416 Eine Bleifigur erscheint einem Schüler zu leicht. Um sich zu überzeugen, ob der Innenraum hohl ist, wägt er sie und stellt eine Masse von 278,5 g fest. Darauf füllt er einen Meßzylinder bis zum Teilstrich 40 ml mit Wasser und legt die Figur hinein, wobei der Wasserspiegel bis zum Teilstrich 67 ml steigt. Besitzt die Figur einen Hohlraum und wie groß ist dieser? (Hinweis: Du benötigst noch eine Konstante, die du aus dem Lehrbuch Physik Kl. 6 entnehmen kannst.)

aus: Aufgabensammlung Physik, Teil 1
Volk und Wissen Berlin

Ma 7 ■ 2887 In einer Einheit von 100 Soldaten spielen 80 Fußball, 60 Volleyball und 40 Basketball. Bekannt ist, daß 40 Soldaten sowohl Fußball als auch Volleyball, 30 Soldaten Fußball und Basketball, 20 Soldaten Volleyball und Basketball spielen. Wie viele Soldaten betreiben alle drei Mannschaftsspiele, wenn jeder Soldat mindestens eine der drei Ballspielarten ausübt?

Sch.

Ma 7 ■ 2888 Es sei D ein Punkt im Innern eines Dreiecks ABC . Verbindet man D mit den Eckpunkten A , B und C des Dreiecks, so gilt stets: $\angle DAC + \angle CBD + \angle ACB = \angle ADB$. Diese Behauptung ist zu beweisen!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 7 ■ 2889 Ein D-Zug benötigt beim Durchqueren des Tauerntunnels eine Zeit von 7 min 30 s, ein Güterzug eine Zeit von 9 min 30 s. Die Geschwindigkeit des D-Zuges ist um $4 \frac{m}{s}$ größer als die des Güterzuges. Berechne die Länge des Tauerntunnels!

Schülerin A. Boßner, Unterpörlitz

Ma 7 ■ 2890 Ein Schüler zeichnet ein Viereck an die Wandtafel. Frank behauptet, es sei ein Quadrat. Bianka meint, es sei ein Trapez. Anja hält das Viereck für einen Rhombus. Eva nennt das Viereck ein Parallelogramm. Der Mathematiklehrer stellt fest, daß genau drei der vier Behauptungen richtig sind, genau eine aber falsch ist. Was für ein spezielles Viereck hat der Schüler an die Wandtafel gezeichnet?

Schüler J. Unger, Gröbitz

Ma 7 ■ 2891 Welche gebrochene Zahl mit dem Nenner 17 ist größer als $\frac{1}{4}$, aber kleiner als $\frac{1}{3}$?

Schülerin A. Strauß, Stendal

Na/Te 7 ■ 417 Beim Hochziehen eines Körpers mit der Masse von 200 kg auf einen Wagen über ein 5 m langes Brett wird eine Arbeit von 2500 Nm verrichtet. Wie hoch wird der Körper dabei gehoben und mit welcher Kraft muß er hochgezogen werden?

aus: Aufgabensammlung Physik, Teil 1
Volk und Wissen, Berlin

Na/Te 7 ■ 418 Ein Unterseeboot verdrängt beim Schwimmen 2500 t Wasser und beim völligen Untertauchen 3000 t. Welches Volumen hat a) der über Wasser, b) der unter Wasser gelegene Teil des Schiffes beim Schwimmen?

aus: Aufgabensammlung Physik, Teil 1
Volk und Wissen Berlin

Ma 8 ■ 2892 Eine Mutter und ihre drei Kinder sind zusammen 63 Jahre alt. Die Mutter ist siebenmal so alt wie der jüngere Sohn Roland. Ulrich ist doppelt so alt wie Roland. Vor drei Jahren war Ingrid fünfmal so alt wie Roland. Wie alt ist jedes Familienmitglied?

Schülerin I. Voigt, Böhlen b. Leipzig

Ma 8 ■ 2893 Gesucht sind alle geordneten Paare $[a; b]$ natürlicher Zahlen a und b , für die die Differenz aus ihren Quadraten 91 beträgt.

Sch.

Ma 8 ■ 2894 An einer Kreisolympiade der Jungen Mathematiker nahmen in den Klassenstufen 11/12 insgesamt 6 Schüler teil. Sie erreichten zusammen 147 Punkte. Es sind die Punktzahlen, die jeder einzelne Schüler erreicht hatte, zu berechnen, wenn folgendes gilt:

- (1) Zwei Schüler belegten punktgleich den 4. Platz.
- (2) Die letzten beiden Plätze unterschieden sich um 2 Punkte.
- (3) Der Schüler auf dem 2. Platz hatte genau einen Punkt mehr erreicht als das Doppelte der Punktzahl, die für den 5. Platz vergeben wurde.

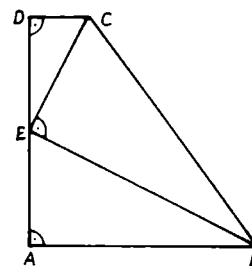
(4) Für den 1. Platz gab es 8 Punkte mehr als für den 2. Platz.

(5) Für den 3. Platz gab es 3 Punkte weniger als für den 2. Platz.

B. Bremer, Heiligenstadt

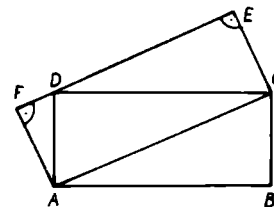
Ma 8 ■ 2895 Das Bild stellt ein rechtwinkliges Trapez $ABCD$ mit dem rechten Innenwinkel $\angle BAD$ und den parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ dar. E ist der Mittelpunkt der Seite $\overline{AD}$. Ferner gilt $\overline{AB} = \overline{AD}$ und $CE \perp BE$. Es ist nachzuweisen, daß der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ gleich dem zehnfachen Flächeninhalt des Quadrates über der Trapezseite $\overline{CD}$ ist!

Sch.



Ma 8 ■ 2896 Die Zeichnung stellt ein Rechteck $ABCD$ dar. Die Parallele zu $\overline{AC}$ durch D schneidet das in A auf $\overline{AC}$ errichtete Lot in F und das in C auf $\overline{AC}$ errichtete Lot in E . Es ist nachzuweisen, daß die Rechtecke $ABCD$ und $ACEF$ den gleichen Flächeninhalt haben!

Schüler Ch. Bey, Neustadt/Dosse



Na/Te 8 ■ 419 Ein Arbeitsraum wird mit 45 Glühlampen beleuchtet, die insgesamt eine Leistung von 2500 W umsetzen. Einige von ihnen sind 40 Watt-Glühlampen, andere sind 75 Watt-Glühlampen. Wie viele Glühlampen von jeder Sorte beleuchten den Arbeitsraum?

Schüler A. Kellner, Halberstadt

Na/Te 8 ■ 420 Wie lang muß ein Chromnickeldraht mit $0,1 \text{ mm}^2$ Querschnitt gewählt werden, damit man einen Heizkörper anfertigen kann, der es ermöglicht, bei einem Wirkungsgrad von 90% unter 220 V Spannung in 3 min 200 cm^3 Wasser von 10°C auf 100°C zu erwärmen?

R.

Ma 9 ■ 2897 Ist die Zahl $z = (11^3 + 7^5) - 1$ durch 17 teilbar?

A. Brunner, Kremen

Ma 9 ■ 2898 Auf einem Parkplatz stehen insgesamt 89 Personenkraftwagen der Typen Trabant, Wartburg und Lada. Vom Typ Trabant sind dort 14 Pkw mehr als vom Typ Lada abgestellt, am wenigsten vom Typ Wartburg. Die Anzahlen der Pkw jedes Typs sind Primzahlen. Wie viele Personenkraftwagen von jedem Typ befinden sich auf dem Parkplatz?

Sch.

Ma 9 ■ 2899 Es ist zu beweisen, daß in jedem Rhombus die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den beiden Diagonalen viermal so groß ist wie der Flächeninhalt des Quadrates über einer Seite des Rhombus. *Th. Kuessner, Greifswald*

Ma 9 ■ 2900 Auf welche Grundziffern enden 4^{701} und 8^{1003} in dekadischer Schreibweise? *A. Brunner, Kremen*

Ma 9 ■ 2901 Läßt sich ein 104 cm langer Metallstab in einer Kiste unterbringen, die, 1 m lang ist und bei der sich Länge, Breite und Höhe wie $1 : \frac{1}{5} : \frac{3}{20}$ verhalten? *K. Trommer, Krostitz*

Na/Te 9 ■ 421 Ein Bus mit 42 Sitzplätzen hat eine Eigenmasse von 7 t. Seine Bremskraft beträgt 62 000 N. Wieviel Stehplätze können maximal zugelassen werden, wenn gewährleistet werden soll, daß der vollbesetzte Bus bei einer Geschwindigkeit von $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ einen maximalen Anhalteweg von 40 m haben darf? Die durchschnittliche Gewichtskraft eines Fahrgastes beträgt 750 N. *Ing. K.-H. Milde, Dresden*

Na/Te 9 ■ 422 Bei Eberswalde befindet sich das Schiffshebewerk Niederfinow. Mit seiner Hilfe können Schiffe, die den Oder-Havel-Kanal befahren, um 36 m gehoben oder gesenkt werden. Das 1934 fertiggestellte Bauwerk besteht im wesentlichen aus einem Hebezeug und einem Trog (Abmessung: 85 m lang und 12 m breit; Masse 1750 t). Durch Öffnen des Haltungs- und Trogtors wird der Trog bis zu einer Höhe von 2,5 m mit Wasser gefüllt. Bei geöffneten Toren können Schiffe bis zu einer Tragfähigkeit (= Eigenmasse) von 1000 t eingeschleppt werden.

Die Tore werden dann geschlossen, und der Trog wird entweder gehoben oder gesenkt (um 36 m). Bei geöffneten Toren kann dann das gehobene oder abgesenkte Schiff das Hebewerk verlassen.

Welche Hubkraft ist erforderlich, um

- den nur mit Wasser gefüllten und
- den mit Wasser und einem Schiff mit einer Tragfähigkeit von 1000 t gefüllten Trog zu heben?

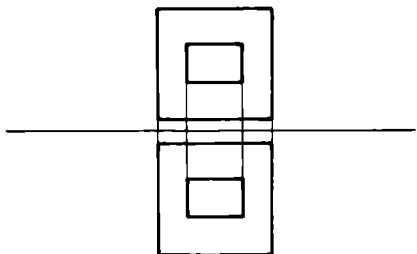
R.

Ma 10/12 ■ 2902 Welche der beiden Zahlen 5^{444} und 2^{999} ist die kleinere? Die Antwort ist zu begründen! *Sch.*

Ma 10/12 ■ 2903 Auf welche Grundziffer endet das Produkt $6^3 \cdot 27^{12} \cdot 107^{18} \cdot 3^{11}$?

Schülerin C. Bär, Greifendorf

Ma 10/12 ■ 2904 Das Bild zeigt das Grund- und Aufrißbild eines Körpers in



senkrechter Parallelprojektion. Was für ein Körper ist das? Dieser Körper ist in einer Schrägbild-darstellung zu zeichnen!

B. Bremer, Heiligenstadt

Ma 10/12 ■ 2905

a) Wie groß ist ein Innenwinkel eines regelmäßigen 100-Ecks?

b) Es ist eine Formel zu finden, die es ermöglicht, die Größe eines Innenwinkels eines regelmäßigen n -Ecks zu berechnen, wenn nur die Eckenzahl bekannt ist!

c) Um wieviel Prozent kleiner ist der Flächeninhalt eines regelmäßigen 100-Ecks als der Flächeninhalt seines Umkreises?

J. Gläser, Schönfels

Ma 10/12 ■ 2906 Das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen beträgt 93 024. Es sind diese vier Zahlen zu ermitteln. Es ist eine allgemeine Abhängigkeit $x = f(a)$ zu finden, wenn x die kleinste von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen und a das Produkt dieser vier Zahlen ist.

Na/Te 10/12 ■ 423 Ein Wechselstrommotor für 220 V/50 Hz hat folgende Daten: $P_{\text{mech}} = 20 \text{ kW}$; $\cos \varphi = 0,75$; $\mu = 0,85$.

Zur Kompensation des Blindstromes wird ein Kondensator parallel geschaltet. Wie groß muß seine Kapazität in μF gewählt werden, damit der dem Netz entnommene Strom mit der Spannung in Phase ist (Phasenverschiebung 0°)?

Lehrling J. Naundorf, Neukieritzsch

Na/Te 10/12 ■ 424 Ein Kraftfahrer beschleunigt sein Fahrzeug gleichmäßig mit einer Beschleunigung von $3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ von einer

Geschwindigkeit von $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ auf eine Geschwindigkeit von $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Welchen Weg

legt er dabei zurück? *R.*

Alpha-Wettbewerb 1986/87

Preisträger

Martina Hebenstreit, Matthias List, Hans-Joachim Rudolph, Janine Mau, alle Altenburg; Venneta Türke, Auerbach; Evelyn Peter, Bad Liebenstein; Alexander Sittig, Marcus Markardt, Ute Partsch, alle Bad Salzungen; Stefan Skonietzki, Frank Wagner, beide Berlin; Norbert Schröder, Bernau; Alice Kraneis, Bernburg; Stephan Schrammeier, Blankenfelde; André Schmatloch, Blankenhain; Ingrid Voigt, Ulrich Vogt, beide Böhlen; Kati Reum, Breitung; Torsten Peter, Brotterode; Thomas Reißner, Silvio Löffler, beide Cottbus; Andreas Kirchberg, Tobias Rinke, beide Dingelstädt; Martina Hentschle, Matthias Overmann, Katrin Schwarzer, alle Dresden; André Katzert, Dürrröhrsdorf; Dimitri Stüberer, Beate Kragl, Peter Stübner, alle Erfurt; Tobias Gerlach, Friedeburg; Nadine Koch, Gehafen; Hardy Becker, Glienicke; Janett Weise, Gräfenhainichen; Cathrin Kunze, Michael Gronau, beide Greifswald; Frank Schneegeß, Großbodungen; Jan

Wettstein, Thilo Kallenbach, beide Gumpelstadt; Alois Belter, Hagenow; Lutz Püffeld, Halberstadt; Antje Stehfest, Havelberg; Schulklub der EOS W. Pieck, Heiligenstadt; Regina Plessow, Stephan Lexow, Tom Werner, alle Hennigsdorf; Andreas Henning, Höngeda; Christoph Wenig, Hohen Neuendorf; Markus Glück, Jößnitz; Nico Schmidt, Jüdenberg; Thomas Grund, Karl-Marx-Stadt; Astrid Mirl, Kleindehsa; Horst Huber, Krems (Österreich); Kirsten Schröter, Katrin Anton, beide Leegebruch; Martin Schreiter, Patrick Fladerer, beide Leinefelde; Torsten Schreiber, André Gärtner, Wolfgang Hildebrandt, Henrik Holke, alle Leipzig; Daniel Wettstein, Lütz; Anke Harnisch, Lützen; Christian Weber, Neu Boltenhagen; Frank Hoba, Neuhaus; Torsten Möller, Ohrdruf; Jana Wetzel, Cornelia Fahr, beide Oranienburg; Dörte Schappeler, Parchim; Andrea Thiele, Rackwitz; Christin Schütze, Radis; Christoph Weidling, Riethnordhausen; Claudia Jurgat, Rostock; Elko Jacobs, Saurasen; Annett Kittner, Christiane Gans, beide Schmalzkalden; Andreas Körner, Schwedt; Axel Bichler, Sondershausen; Ulrich Müller, Steudten; Thomas Lotze, Suhl; Andrej Sokoll, Templin; Anja Tippe, Teterow; Kerstin Schuster, Taubenheim; Nicole Simon, Andre Leinhos, Daniel Schuster, alle Trusestal; Mario Pofahl, Ueckermünde; Jörn Weichert, Waltersdorf; Hartmut Boettcher, Weimar; Nico Eberhardt, Wiesensthal; Ronald Peters, Wismar; Stefan Bretfeld, Zepernick; Mandy Jäger, Kati Hildebrandt, Jana Reinhardt, alle Fambach; Silke Rudolph, Großbröhrsdorf

Vorbildliche Leistungen

Katharina Kutik, René Erler, beide Altenburg; Steffi Heller, Bad Liebenstein; Andrea Weigl, Bad Salzungen; Monika Züllsdorf, Olaf Leubner, beide Berlin; Jana Reuter, Bermbach; Daniela Morgenstern, Bernsbach; Enrico Senger, Bischoferode; Sandra Friedel, Blankenburg; Alexander Boll, Bleicherode; Denise Schellenberg, Cornelia Pleß, Heidi Pfannstiel, Torsten Schmidt, Thomas Römhild, alle Breitung; Anett Gschwender, Brohm; Ralf Fuchs, Torsten Peter, Heike Engel, alle Brotterode; Stefan Hübner, Dingelstädt; Marcus Heinrich, Stefan Seifert, beide Dresden; Constanze Rost, Erlabrunn; Liane Döhrer, Michaela Engfer, beide Fambach; Nicole Schüler, Janet Goßrau, beide Friedeburg; Matthias Elert, Friedrichsthal; Beatrice Gronau, Greifswald; Thomas Pitzschke, Halle-Neustadt; Nico Reichelt, Hammerbrücke; Olaf Schmidt, Hohenebra; Jan Krüger, Hohendodeleben; Marco Dreyer, Hohen Neuendorf; Angela Wiesjahn, Holzendorf; Torsten Borchardt, Ilmenau; Michael Oehme, Jena; Gunar Herin, Katja Wurziger, André Lange, alle Karl-Marx-Stadt; Jürgen Frey, Kipsdorf; Nicki Große, Kirchworbis; Lars Hartmann, Klein-Quenstedt; Janet Brandt, Kletzin; Monika Plumer, Krems (Österreich); Mirko Jelinek, Leegebruch; Jens Gärtner, Leipzig; Katja Roeseler, Lubmin; Stefanie Albrecht, Lüththeen; Stephan Brendicke, Mittenwalde; Katrin Zutz, Neubrandenburg; Dajana Predöhl, Anja Wilkending, beide Neuhaus; Karin Gustavs, Neuruppin; Beate Magdefrau, Nordhausen; POS W. Pieck, Osterwieck; Matthias Huscher, Radebeul; Sylke Ahrend, Rakow; Manuela Radtke, Rodewitz; Karsten Peters, Rostock; Doreen Jacob, Röbel; Ralf Fröhlich, Rudolstadt; Gunnar Beck, Rüdersdorf; Maida Tennemann, Kathrin Rother, beide Saßnitz; Sören Hader, Schlotheim; Yvonne Gerbig, Peggy Machelett, Matthias Kittner, alle Schmalzkalden; Katja Manski, Schildow; Susen Klement, Schwerin; Una Brock, Stralsund; Jens Krubert, Templin; Iris Demmer, Thamar; Silvia Kaiser, Nicole Schiller, beide Tiefenort; Maik Freitag, Verchen; Christian Brüheim, Weimar; Martin Richter, Weinböhla; Otmar Jannasch, Wiednitz;

Christian Kühn, Wismar; Enrico Rommel, Schwallungen; Jörg Siede, Zepernick; Olaf Britzke, Zühlsdorf; Steffen Siebert, Pionierrepublik W. Pieck; Stefan Kottwitz, Gera; René Tümmler, Guben; Thomas Buttgeriet, Zehlen-dorf

Abzeichen in Gold

Für zwanzigjährige Teilnahme
Lutz Püffeld, Halberstadt

Für neunzehnjährige Teilnahme
Guido Blossfeld, Halle; Claudia Docter, Ilsenburg

Für achtzehnjährige Teilnahme
Ullrich Riedel, Flöha

Für siebzehnjährige Teilnahme
Ursula Märker, Greifswald; Rainer Seifert, Gütz-kow; Uwe Bormann, Magdeburg; Frank Aßmus, Oranienburg

Für sechzehnjährige Teilnahme
Andreas Fittke, Berlin; Arno Feuerherdt, Bran-denburg; Kurt Oertel, Gräfenhainichen; Bengt Nölting, Greifswald; Gerald Werner, Meiningen; Volker Schulz, Nauen; Hans-Dietrich Schwabe, Sondershausen; Lothar Gruber, Wien (Öster-reich); Katrin Richter, Wittenberg

Für fünfzehnjährige Teilnahme
Andreas Gude, Berlin; Frank Regensburger, Dresden; Eberhard Georgy, Erfurt; Rainer Bauer, Mittweida; Wilfried Röhner, Radebeul; Torsten Löwe, Schleiz; Heinz-Olaf Müller, Schmalkalden

Für vierzehnjährige Teilnahme
Dieter Koch, Arnstadt; Sylvia Glomb, Berlin; An-nett Körner, Dresden; Matthias Weser, Großen-hain; Bernd Dübe, Forst; Rüdiger Düsing, Halle; Ruth Jacobs, Halle-Neustadt; Rolf Kamieth, Ka-kerbeck; Alois Weninger, Knittelfeld (Öster-reich); Udo Kretschmann, Markneukirchen; Jana Renner, Röbel; Ina und Uwe Ebert, Rup-pendorf; Siegfried Kretschmann, Schlagsdorf; Bernd Hartwig, Thaldorf

Für dreizehnjährige Teilnahme
Uwe Maaz, Arnstadt; Guntram Türke, Auerbach; Maik Weide, Callenberg; Harry Höfer, Dorndorf; Karl-Heinz Jünger, Ingolf Körner, Carolin Engel, Jörn Wittig, alle Dresden; Thomas Mittelbach, Dirk-Thomas Orban, beide Erfurt; Jörg Butter, Freiberg; Volker Reck, Heiligenstadt; René Schüppel, Hoyerswerda; Horst Fliegner, Jarmen; Jens Pönisch, Marko Hanke, Andreas Hengst, Thomas Mader, alle Karl-Marx-Stadt; Per Witte, Königs Wusterhausen; Knut Hantschel, Neuen-kirchen; Karsten Schlutier, Potsdam; Sigrid Planke, Premnitz; Claudia Trochold, Reichen-bach; Heidrun Tiedt, Teterow; Hans Creutzburg, Thal; Gudrun Thäter, Weimar; Olaf Seidel, Weißwasser; Eva-Maria Wabbel, Wolfen; Birgit Schultheiß, Wüstenbrand

Für zwölfjährige Teilnahme
Marc Schewe, Berlin; Werner König, Berlinge-rode; Tilman Völzke, Böhlen; Petra Sarodnick, Dallgow; Stefan Edelmann, Dresden; Reinhard Weißnicht, Siegfried Obst, beide Eberswalde; Su-sanne und Matthias Schreiber, Elsterwerda; Vol-ker Georgy, Erfurt; Wilfried Schleinitz, Greifswald; Dieter Seifert, Hagenow; Günter Schielin-sky, Halle-Neustadt; Karsten Milek, Hohen Neundorf; Uwe Würker, Mülsen; Manfred Hille, Ina Köhler, beide Riesa; Lutz Hübschmann, Schwarzenberg; Rolf Heubner, Wolfen; Steffen Klimpel, Wolgast; Thorsten Eidner, Zeulenroda

Körper mit bestimmten Eigenschaften gesucht!

Bei der 26. DDR-OJM war folgende Auf-gabe zu lösen:

Beweisen Sie, daß es einen Körper mit fol-genden Eigenschaften (1) bis (4) gibt!

(1) Die Oberfläche des Körpers besteht aus genau sechs ebenen Vierecken.

(2) Unter diesen Vierecken gibt es zwei, die-keine Seitenkante miteinander gemein-sam haben.

(3) Außer den Seitenkanten dieser beiden Vierecke hat der Körper noch genau vier weitere Seitenkanten.

(4) Die Mittelpunkte dieser vier Seitenkan-ten liegen nicht in einer gemeinsamen Ebene. (Aufgabe 261046)

Diese Aufgabe bereitete vielen Teilneh-mern große Schwierigkeiten. Für den gefor-derten Existenzbeweis genügt die Angabe eines Beispiels, und ich habe dies wie folgt konstruiert:

Ich gehe aus von einem geraden Prisma $ABPDCQ$, dessen Grundfläche ABP und Deckfläche DCQ gleichseitige Dreiecke mit der Kantenlänge von 5 cm sind, und lege Punkte

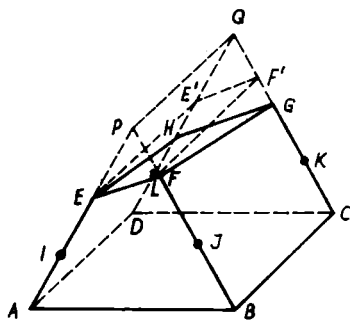
$E \in \overline{AP}$ mit $\overline{EP} = 2$ cm,

$F \in \overline{BP}$ mit $\overline{FP} = \frac{4}{3}$ cm,

$G \in \overline{QC}$ mit $\overline{QG} = 2$ cm und

$H \in \overline{QD}$ mit $\overline{QH} = 3$ cm fest.

(Das Bild zeigt einen Schrägriß.)



Ich zeige nun, daß $ABCDEFGH$ ein Körper mit den gewünschten Eigenschaften ist.

Die Ebene durch E und F und senkrecht zu der Fläche ABP schneidet die Strecke $\overline{DQ}$ in E' und die Strecke $\overline{CQ}$ in F' . Es ist $EF \parallel E'F'$, da die Ebenen ABP und DCQ zueinander parallel sind, und es gilt $\overline{EP} = \overline{E'Q}$ und $\overline{FP} = \overline{F'Q}$.

$$\text{Da } \frac{QE}{QH} = \frac{2}{3} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{QF'}{QG} \text{ ist,}$$

sind nach der Umkehrung des Strahlensatzes $E'F'$ und HG zueinander parallel. Folglich ist auch $EF \parallel HG$ (Transitivität der Paralleli-tätsrelation); also ist das Viereck $EFGH$ ein ebenes Viereck. Da die anderen Vierecke $ABFE$, $DCGH$, $ADHE$, $BCGF$ und $ABCD$ nach Voraussetzung eben sind, ist (1) erfüllt. Es gilt (2), da die Vierecke $ABCD$ und $EFGH$ keinen Punkt gemein-sam haben. Die Bedingung (3) ist offen-sichtlich erfüllt, nämlich durch die Kanten $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ und $\overline{DH}$. Nun seien I , J , K und L die Mittelpunkte dieser Kanten. Dann ist

$$\overline{PI} = 2 \text{ cm} + \frac{1}{2}(3 \text{ cm}) = 3,5 \text{ cm},$$

und entsprechend ergibt sich

$$\overline{PJ} = \frac{19}{6} \text{ cm}, \quad \overline{QK} = 3,5 \text{ cm} \quad \text{und} \quad \overline{QL} = 4 \text{ cm}.$$

Analog zu E' und F' führe ich I' und J' ein. Wenn $IJ \parallel KL$ wäre, so wären auch $I'J'$ und KL zueinander parallel. Nach dem Strahlensatz steht dies aber im Widerspruch zu der Feststellung, daß

$$\frac{QI'}{QJ'} = \frac{PI}{PJ} = \frac{3,5}{19/6} \neq \frac{4}{3,5} = \frac{QL}{QK} \text{ ist.}$$

Also gilt $IJ \nparallel KL$.

Wenn nun die Punkte I , J , K , L in einer gemeinsamen Ebene lägen, dann wäre $IJ \parallel KL$, denn die Ebene durch I , J , K , L müßte die zueinander parallelen Ebenen ABP und DCQ in parallelen Geraden schneiden. Wegen $IJ \nparallel KL$ liegen also I , J , K , L nicht in einer gemeinsamen Ebene, und damit gilt auch die Bedingung (4).

Hans-Peter Störr

Anmerkungen der Redaktion:

Diese Aufgabe hat den Teilnehmern wohl deshalb große Schwierigkeiten bereitet, weil sie Ansprüche an räumliches Vorstel-lungsvermögen und an grundlegende Kennt-nisse über räumliche Sachverhalte stellt. Einige Schüler waren sogar davon überzeugt, daß es einen Körper mit den Ei-genschaften (1) bis (4) gar nicht gibt und führten einen Scheinbeweis für die Nicht-existenz. Häufig war folgender Sachverhalt nicht klar:

(*) Sind $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ und $\overline{GH}$ vier zuein-ander parallele Strecken und liegen sowohl A , C , E und G als auch B , D , F und H in je-weils einer gemeinsamen Ebene, so liegen auch die Mittelpunkte dieser Strecken in einer gemeinsamen Ebene. Versuche, mit derartigen Strecken einen geeigneten Kör-per zu konstruieren, mußten deshalb fehlschlagen.

Hans-Peter Störr, wohnhaft in Zwickau, ist Schüler der Spezialschule für mathem.-na-turwiss.-techn. Richtung in Karl-Marx-Stadt. Für seine Lösungsidee zu dieser Aufgabe und ihre sehr durchsichtige Darle-gung erhielt er ein Diplom. Hans-Peter Störr hat außerdem als Frühstarter (!) die höchste Punktzahl aller Starter in der Klas-senstufe 10 erzielt und wurde mit einem 1. Preis ausgezeichnet.

Kreise, Ellipsen und Planeten

Als Kepler 1609 seine Bewegungsgesetze für die Planeten, die ihre Bahnen in Ellipsen um die Sonne ziehen, drucken ließ, hatte noch kein Astronom ein Fernrohr auf den Himmel gerichtet. Um so bewunderungswürdiger ist die schon damals erreichte Genauigkeit der Himmelsbeobachtungen. Galilei war es dann 1610, der als erster Astronom Sonne, Mond und die damals bekannten Planeten, den Jupiter sogar mit seinen vier größten Monden, im Fernrohr sah, wir können noch heute seine ersten überschwinglichen Berichte darüber nachlesen.

Aber Copernicus benutzte für die Planetenbahnen, auch für die von ihm als Planet erkannte Erde, noch die ideale Kreisbahn wie die Griechen tausend Jahre vor ihm, allerdings mit Zusatzkreisen; den Epizyklen, um besser mit den Beobachtungen übereinzustimmen.

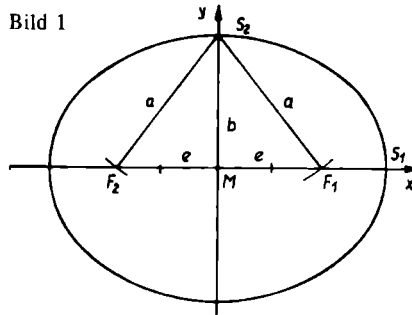
Nun hat wohl mancher von uns die Vorstellung von ausgesprochen langgestreckten Ellipsen, wenn von den Keplerschen Gesetzen die Rede ist. Kreis und Ellipse sind ja ähnliche Figuren der Geometrie, man muß nur jede Ordinate des Kreises in einem festen Verhältnis p stauchen, um eine Ellipse zu erhalten und zeichnen zu können. Anstelle des Radius r des Kreises entstehen dann die große und die kleine Halbachse a und b , die man verdoppelt Haupt- und Nebenachse nennt.

In den Gesetzen von Kepler steht die Sonne nun nicht mehr im Mittelpunkt, sondern in einem Brennpunkt der Ellipse, die aus Symmetriegründen immer zwei hat. Brennpunkte kennt jeder Leser von der Sammellinse im Fernrohr oder Brennglas oder vom Parabolspiegel im Scheinwerfer des Kraftwagens. Nun hat jede Ellipse die besondere Eigenschaft, daß von jedem ihrer Punkte die Summe der Abstände von beiden Brennpunkten immer konstant ist mit dem Wert der Hauptachse $2a$. Damit kann man die beiden Brennpunkte F_1 und F_2 leicht finden, indem man einen Kreisbogen mit dem Radius a um den Nebenscheitel S_2 schlägt. Die Schnittpunkte dieses Kreises mit der Hauptachse sind F_1 und F_2 . Ihr Abstand vom Mittelpunkt der Ellipse, man nennt ihn die Exzentrizität e , läßt sich leicht mit dem Satz von Pythagoras berechnen:

Es gilt nach Bild 1 $a^2 = b^2 + e^2$, oder umgestellt $e^2 = a^2 - b^2$ und daraus die Wurzel. Der Astronom nimmt als Maß für die Gestalt einer Ellipse lieber die nu-

merische Exzentrizität, das ist das Verhältnis von e zur großen Halbachse, also $\frac{e}{a}$, im Zahlenwert stets kleiner als eins.

Bild 1



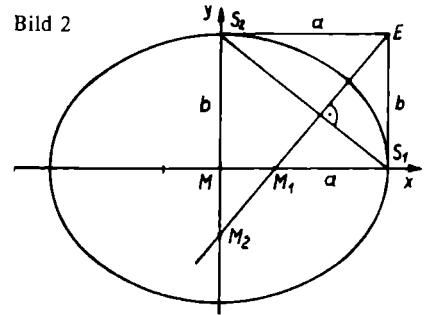
Ein einfaches Zahlenbeispiel soll die Verhältnisse verdeutlichen: große Halbachse $a = 5$ cm, kleine Halbachse $b = 4$ cm, also Achsenverhältnis $p = \frac{b}{a} = 0,8$. Dann berechnet man nach dem Satz von Pythagoras $e = 3$ cm und daraus die numerische Exzentrizität $\frac{e}{a} = 0,6$. Selbst solche noch wenig gestauchte Ellipsen mit dem Achsenverhältnis 4:5 durchläuft keiner der bekannten Planeten! Ihre Bahnen sind alle viel mehr kreisähnlich. Die Tabelle gibt uns über ihre genaue Gestalt nach neueren Messungen die Antwort:

Planet	$\frac{e}{a}$	$\frac{b}{a}$	AE
Merkur	0,206	0,978	0,39
Venus	0,007	0,999	0,72
Erde	0,017	0,999	1,00
Mars	0,093	0,995	1,52
Jupiter	0,048	0,999	5,20
Saturn	0,056	0,998	9,54
Uranus	0,047	0,999	19,18
Neptun	0,009	0,999	30,06
Pluto	0,253	0,967	39,7

Nur Merkur und Pluto weichen merklich von der Kreisgestalt ab, letzteren kannte man zu Keplers Zeiten noch nicht. Die Bahn der Venus, der uns allen gut bekannte helle Morgen- oder Abendstern, kommt der idealen Kreisform am nächsten ($\frac{e}{a} = 0$ für den Kreis). An dritter Stelle in der Abweichung vom Kreis steht der Mars, den wir als roten Wandelstern im Fernrohr sehen können. Für ihn hatte Kepler von seinem Vorgänger als kaiserlicher Astronom in Prag, von Tycho de Brahe, sehr genaue, sehr umfangreiche Bahnvermessungen über viele Jahre als Erbschaft bekommen. Aber auch hier betragen die Abweichungen von der Kreisbahn nur wenige Bogenminuten am Himmelszelt. Keplers unsterbliche Leistung, aus diesen Beobachtungen die wahren Ellipsenbahnen zu berechnen, wird aus der Tabelle wieder recht deutlich. In der letzten Spalte sind zusätzlich die mittleren Sonnenabstände aller Planeten in *Astronomischen Einheiten* AE angegeben, d.h. für die Erde ist AE = 1 mit dem Wert AE = $149,6 \cdot 10^6$ km.

Abschließend sei für den *alpha*-Leser noch eine schöne und einfache Ellipsenkonstruktion für Zirkel und Lineal angegeben: (vgl. Bild 2).

Bild 2



Der Mittelpunkt M und die beiden Scheitel S_1 und S_2 der Haupt- und Nebenachse bestimmen ein achsenparalleles Rechteck mit dem 4. Eckpunkt E außerhalb der Ellipse, für die a und b gegeben sein müssen. Man falle nun das Lot von E auf die Sehne S_1S_2 . Die Verlängerung des Lotes schneidet die Achsen der Ellipse in M_1 und in M_2 , dies sind dann die Mittelpunkte der beiden Scheitelkreise für die gesuchte Ellipse mit den Radien $r_1 = M_1S_1$ und $r_2 = M_2S_2$. Beide Scheitelkreise müssen dann noch auf der anderen Seite der Ellipse symmetrisch zu M gezeichnet werden, den Rest besorgt ein Kurvenlineal, das die stetige Verbindung der Kreise schafft.

In unserem Sonnensystem gibt es nun auch Beispiele für größere Exzentrizitäten, gewissermaßen für *bessere Ellipsen*, es sind die Kometen und die Planetoiden, d.h. die kleinen Planeten zwischen Mars und Jupiter. Ein Beispiel ist uns noch allen gut bekannt: der Komet von Halley, den wir im vergangenen Jahr beobachten konnten, er kommt nur alle 76 Jahre in die Nähe der Erde. Seine große Halbachse ist $a = 18$ AE,

seine numerische Exzentrizität $\frac{e}{a} = 0,87$, also durchläuft er eine sehr langgestreckte Ellipse!

Aufgaben

- ▲ 1 ▲ Man konstruiere die Bahnellipse des Halleyschen Kometen im Maßstab 1 AE = 1 cm!
- ▲ 2 ▲ Dazu berechne man das Verhältnis $\frac{b}{a}$! Und daraus b !
- ▲ 3 ▲ Wie groß ist seine kürzeste Entfernung von der Sonne? Der Astronom nennt diesen Abstand das Perihel. J. Buhrow

Buchtip

Hoppe, Johannes

Johannes Kepler

Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner, Bd. 17

92 S. mit 10 Abb.

Bestell-Nr. 665 586 2

Preis: 4,70 M

BSB B.G.Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig



in das Fünfeimerfaß, aus dem Achteimerfaß wieder das Dreieimerfaß voll und diese drei Eimer wieder in das Fünfeimerfaß zu dem einen Eimer. Also sind im Acht- und Fünfeimerfaß in jedem vier Eimer, und das Dreieimerfaß bleibt leer.

Ma 5 ■ 2813 Man kann die zu ermittelnde(n) Zahl(en) dadurch erhalten, daß man, ausgehend von Resultat 7, mit den angegebenen Zahlen jeweils die entgegengesetzte Rechenoperation durchführt: $7 + 15 = 22$; $22 : 11 = 2$; $2 \cdot 100 = 200$; $200 - 107 = 93$.

Da die vorgenommenen Rechenoperationen durchweg eindeutige Resultate liefern, ist 93 zugleich die einzige Zahl, die den Bedingungen der Aufgabe entspricht.

Ma 6 ■ 2814 Die Ziffer im Zehner ist gleich 5, weil 10 die verdoppelte Ziffer der Zehner ist. Die dreistellige Zahl $59*$ ist Vielfaches von 11. Indem man $59*$ durch 11 dividiert, erhält man als ersten Rest 4. Daraus folgt, daß für das Sternchen nur 4 stehen kann. Die Zahl lautet also 594.

Ma 6 ■ 2815 Der Gesamtpreis von 7,50 M stellt die Summe dreier Produkte aus ganzen Zahlen dar. In jedem Produkt ist ein Faktor durch 4 teilbar (16, 28 und 8). Folglich ist auch die Summe ein Vielfaches von 4. Aber 750 Pf sind nicht durch 4 teilbar, d. h., die Berechnung stimmt nicht.

Ma 6 ■ 2816 Wenn x eine Zahl ist, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, dann gilt $\frac{17-x}{19+x} = \frac{7}{11}$. Da der Bruch $\frac{7}{11}$ durch keine natürliche Zahl gekürzt werden kann, muß der Bruch $\frac{17-x}{19+x}$ durch Erweitern aus dem Bruch $\frac{7}{11}$ hervorgehen. Also

muß die Zahl $19+x$ ein ganzzahliges Vielfaches der Zahl 11 sein. Das kleinste derartige Vielfache von 11, das größer als 19 (oder gleich 19) ist, ist 22. Also muß x mindestens 3 betragen. Die Zahl $x=3$ erfüllt die Bedingungen der Aufgabe. Für $x > 3$ wäre der Bruch $\frac{17-x}{19+x}$ kleiner als $\frac{7}{11}$.

Ma 6 ■ 2817 Aus c) folgt: Bernd ist entweder 16 oder 17 Jahre alt. Aus b) folgt: Bernd ist nicht 17 Jahre alt; folglich ist Bernd 16 Jahre alt; wegen a) hat Bernd die „Junge Welt“ abonniert. Aus c) folgt weiter, daß Fred 17 Jahre alt ist; wegen b) hat Fred das „Neue Leben“ abonniert. Aus a) und b) folgt: Der 19jährige Axel hat „Neues Leben“ abonniert. Deshalb ist Ernst 20 Jahre alt und Abonnent der „Jungen Welt“.

Ma 6 ■ 2818 Die Zahl selbst muß durch 7, 8 und 9 teilbar sein. Da 7, 8 und 9 keine gemeinsamen Teiler haben (außer 1), ergibt sich $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$ als eine solche Zahl. Auch alle Vielfachen von 504 erfüllen die Bedingung der Teilbarkeit durch 7, 8 und 9, jedoch ist keines dieser Vielfachen dreistellig. Die Zahl heißt demnach 504.

Ma 6 ■ 2819

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{5}{48} + \frac{1}{6} + \frac{3}{16} + \frac{3}{24} = \frac{6+12+5+8+9+6}{48} = \frac{46}{48} = \frac{23}{24}$$

Es wurden 23 von den eingeteilten Stücken Torte verzehrt. Somit blieb ein Stück der Torte übrig.

Na/Te 6 ■ 398 $V = l \cdot b \cdot h$;

$$V = 325 \text{ m} \cdot 25 \text{ m} \cdot 3,80 \text{ m}; V = 30\,900 \text{ m}^3$$

Ma 7 ■ 2820 Wenn man den Radius mit r cm bezeichnet, gilt nach Voraussetzung der Aufgabe $\pi r^2 = 2\pi r$, woraus $r = 2$ folgt. Die Quadratfläche beträgt dann

$$4 \cdot \frac{1}{2} \cdot r^2 = 2 \cdot 2^2 \text{ cm}^2 = 8 \text{ cm}^2.$$

Ma 7 ■ 2821 a) Mit 4 Schritten legt der Vater genau 320 cm zurück, denn $4 \cdot 80 \text{ cm} = 320 \text{ cm}$. Da der Sohn für die gleiche Strecke 5 Schritte braucht, beträgt wegen $320 : 5 = 64$ seine durchschnittliche Schrittlänge 64 cm.

b) Genau dann, wenn der Vater ein Vielfaches von 4 als Schrittzahl beendet hat, hat der Sohn gleichzeitig mit dem Vater eine ganzzahlige Schrittlänge beendet, treten also Vater und Sohn gleichzeitig auf. Dies geschieht genau dann bei beiden mit dem linken Fuß, wenn sie eine gerade Anzahl von Schritten beendet haben. Bei dem Vater ist dies für jedes ganzzahlige Vielfache von 4 der Fall, bei dem Sohn genau für alle geradzahlgigen Vielfachen von 5. Das kleinste geradzahlgige Vielfache von 5 ist aber das Zweifache. Daher treten Vater und Sohn erstmalig nach dem 8. Schritt des Vaters und damit nach dem 10. Schritt des Sohnes gleichzeitig mit dem linken Fuß auf.

Ma 7 ■ 2822 Angenommen, es wurden x Flaschen Limonade, also $(300-x)$ Flaschen Tafelwasser gekauft; dann gilt $0,30 \cdot x + 0,20 \cdot (300-x) = 70$, also $x = 100$. Es wurden 100 Flaschen Limonade und 200 Flaschen Tafelwasser gekauft.

Ma 7 ■ 2823 Wegen $444 = 4 \cdot 3 \cdot 37$ sitzen 3 Personen im Auto; der Fahrer ist 37 Jahre alt.

Ma 7 ■ 2824 Wenn die Länge c der Basis und die Länge a eines Schenkels eines gleichschenkligen Dreiecks die Bedingungen der Aufgabe erfüllen, so ist entweder

$$c = \frac{5}{2}a \text{ oder } a = \frac{5}{2}c.$$

$$\text{Wäre } c = \frac{5}{2}a, \text{ so wäre } a + a < \frac{5}{2}a = c,$$

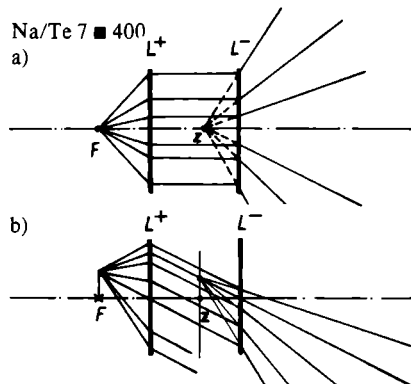
im Widerspruch zur Dreiecksungleichung.

$$\text{Also ist } c = \frac{5}{2}a. \text{ Aus } a = \frac{5}{2}c \text{ folgt}$$

$$\frac{5}{2}c + \frac{5}{2}c + c = 24 \text{ cm},$$

$$\text{also } c = 4 \text{ cm und } a = 10 \text{ cm}.$$

Na/Te 7 ■ 399 $F_1 = F_2 = 50 \text{ N}$



Ma 8 ■ 2825 Wenn die Maßzahlen der Seitenlängen des Rechtecks mit x und y bezeichnet werden ($x, y \in G$), so gilt nach Voraussetzung der Aufgabe die Gleichung $x + y = x \cdot y$.

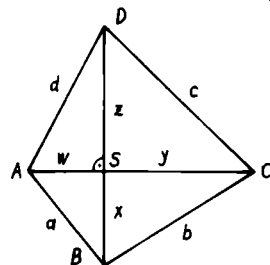
Die einzige ganzzahlige Lösung dieser Gleichung ist $x = 2, y = 2$. Für $x = 0, y = 0$ hat diese Aufgabe keinen Sinn. Das heißt, daß das Rechteck ein Quadrat ist und ihm folglich ein Kreis einbeschrieben werden kann.

Ma 8 ■ 2826 Die letzte Ziffer des Teilproduktes $a \cdot c$ ist gleich a ; die letzte Ziffer des Teilproduktes $b \cdot c$ ist gleich b . Daraus folgt, daß c entweder 1 oder 6 ist, da die anderen Ziffern eine ähnliche Eigenschaft nicht besitzen. Wenn c gleich 1 wäre, dann könnte das erste Teilprodukt nicht vierstellig sein, sondern nur dreistellig. Folglich gilt $c = 6$. Hieraus schließen wir, daß a und b nur entweder 2, 4, oder 8 sein können. Da das zweite Teilprodukt dreistellig ist, kann nur $a = 2$ gelten. Für b bleiben zwei Möglichkeiten: $b = 4, b = 8$. Für $a = 2$ und $b = 4$ wäre das letzte Teilprodukt dreistellig. Folglich gilt $b = 8$.

Ma 8 ■ 2827 Teilbarkeit durch 360 bedeutet Teilbarkeit durch 5, 8 und 9. Von den fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen $p-2, p-1, p, p+1, p+2$, ist genau eine durch 5 teilbar. Da $p \neq 2$ ist, ist p ungerade; deshalb sind $p-1$ und $p+1$ gerade Zahlen; eine davon ist sogar durch 4 teilbar.

Also ist das Produkt $(p-1)(p+1)$ durch 8 teilbar. Da $p \neq 3$ ist, ist p nicht durch 3 teilbar. Deshalb sind entweder $p-2$ und $p+1$ oder $p-1$ und $p+2$ durch 3 teilbar. Ihr Produkt ist deshalb durch 9 teilbar.

Ma 8 ■ 2828 Es sei S der Schnittpunkt der Diagonalen. Dann gilt für die rechtwinkligen Dreiecke $\triangle ABS, \triangle BCS, \triangle CDS, \triangle DAS$ nach dem Satz des Pythagoras $a^2 = x^2 + w^2, b^2 = x^2 + y^2, c^2 = z^2 + y^2, d^2 = w^2 + z^2$, also $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = x^2 + w^2 + z^2 + y^2$.



Ma 8 ■ 2829 Es gilt

$$\frac{m^2}{2} + \frac{m}{3} + \frac{m^3}{6} = \frac{3m^2 + 2m + m^3}{6}$$

$$= \frac{m(3m + 2 + m^2)}{6} = \frac{m(m+1)(m+2)}{6}$$

Von den drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen m , $m+1$, $m+2$ ist mindestens eine durch 2 und genau eine durch 3 teilbar, ihr Produkt also durch 6 teilbar.

Na/Te 8 ■ 401 Der Druck in 20 m Tiefe beträgt 2 kPa. Aus $F = p \cdot A$ ergeben sich dann 3,2 kN.

Na/Te 8 ■ 402 Bei einem Hub wird der Arbeitskolben um die Strecke $s_1 = 0,0065$ cm gehoben, bei 480 Hebelbewegungen um $s_2 = 3,12$ cm. Die notwendige Kraft am Hebel beträgt $F_1 = 29,6$ N.

Ma 9 ■ 2830 Es sei n die Anzahl der herzustellenden Werkstücke ($n > 0$, $n \in \mathbb{N}$). Ohne Vorrichtung wird dafür die Zeit $t_1 = n \cdot \frac{1}{2}$ benötigt (Angabe in Stunden).

Mit Vorrichtung wird dafür die Zeit

$t_2 = n \cdot \frac{1}{3} + 4$ benötigt. Es soll $t_2 < t_1$ sein,

also $\frac{n}{3} + 4 < \frac{n}{2}$ gelten. Diese Ungleichung

wird für alle $n > 24$ zu einer wahren, für alle $n \leq 24$ zu einer falschen Aussage. Es müßten mindestens 25 Werkstücke hergestellt werden, damit durch den Bau der Vorrichtung Zeit eingespart wird.

Ma 9 ■ 2831 Angenommen, es können x kg Bananen und y kg Tomaten gekauft werden; dann gilt

$$5x + 1,3y = 83, 50x + 13y = 830,$$

$$13y = 832 - 2 - 52x + 2x,$$

$$13y = 832 - 52x + 2 \cdot (x-1),$$

$$\text{also } y = 64 - 4x + \frac{2 \cdot (x-1)}{13}.$$

Nur für $x = 1$, $y = 60$ oder für $x = 14$, $y = 10$ erhalten wir positive, ganzzahlige Lösungen. Es können entweder 1 kg Bananen und 60 kg Tomaten oder 14 kg Bananen und 10 kg Tomaten gekauft werden.

Ma 9 ■ 2832 Wegen $s_1 = v_1 \cdot t$ und $s_2 = v_2 \cdot t$ und $s_1 + s_2 = 144$ gilt $t \cdot (v_1 + v_2) = t \cdot 120 = 144$,

$$\text{also } t = \frac{144}{120} = 1,2. \text{ Die Fahrzeuge treffen}$$

sich nach 1,2 h bzw. 72 min.

Ma 9 ■ 2833 Die Differenz zwischen den Brüchen ist gleich

$$\frac{100^{100} + 1}{100^{90} + 1} - \frac{100^{99} + 1}{100^{89} + 1}$$

$$= \frac{(100^{100} + 1)(100^{89} + 1)}{1}$$

$$\times \frac{-(100^{99} + 1)(100^{90} + 1)}{(100^{90} + 1)(100^{89} + 1)}.$$

Wenn der Zähler dieses letzten Bruches positiv ist, wird der erste der gegebenen Brüche größer sein. Wir bezeichnen diesen Zähler mit x ; dann gilt

$$x = 100^{189} + 100^{100} + 100^{89} + 1$$

$$- (100^{189} + 100^{99} + 100^{90} + 1)$$

$$= 100^{100} + 100^{89} - 100^{99} - 100^{90}$$

$$= 100^{100} \cdot \left(1 + \frac{1}{100^{11}} - \frac{1}{100} - \frac{1}{100^{10}} \right)$$

Die Zahl in der Klammer ist positiv, so daß x eine positive Zahl ist. Der erste der gegebenen Brüche ist größer als der zweite.

Ma 9 ■ 2834 Angenommen, es seien x Autobusse mit 19 und y mit 17 Plätzen benutzt worden; dann gilt $19x + 17y = 286$, $19x = 286 + 1 - 17y$, $x = 15 - \frac{17y-1}{19}$.

Nur für $x = 7$, $y = 9$ existiert eine positive ganzzahlige Lösung. Für die Reise wurden 7 Busse mit 19 Sitzen und 9 Busse mit 17 Sitzen gebraucht.

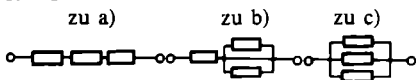
Na/Te 9 ■ 403 $a \approx 0,47 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $s \approx 0,93$ m

Na/Te 9 ■ 404

a) $I = 0,01$ A, $P = 0,05$ W je Widerstand, $R = 150 \Omega$

b) $I = 0,02$ A, $P = 0,02$ W bzw. $0,005$ W je parallelgeschaltetem Widerstand, $R = 75 \Omega$

c) $I = 0,09$ A, $P = 0,045$ W je Widerstand, $R = 17 \Omega$



Ma 10/12 ■ 2835 Es soll gelten $n(n+1)(n+2)(n+3) = p = 110355024$.

Nun gilt $n^4 < p = 110355024$,

also $n < 104$; es gilt aber auch

$$(n+3)^4 > 100000000, n+3 > 100, n > 97,$$

also $97 < n < 104$. p ist nicht durch 5 teilbar, folglich ist keine der gesuchten Zahlen durch 5 teilbar. Also ist $n = 101$. Die gesuchten Zahlen lauten 101, 102, 103, 104.

Ma 10/12 ■ 2836 Die vierstellige Zahl sei z , die aus der ersten und zweiten Ziffer gebildete Zahl sei a (a ganz; $0 < a < 100$). Dann gilt $z = 100a + a = 101a$. Das heißt, es gilt $101 | z$. Nur für $a = 1$ ist z Primzahl. Das ergibt das Zeichen 0101. Da 101 Primzahl ist, so folgte, falls z eine Quadratzahl wäre, aus $101 | z$ auch $101^2 | z$. Das ist aber nicht möglich, da sonst wegen $101^2 > 10000$ die Zahl z mindestens fünfstellig sein müßte.

Ma 10/12 ■ 2837 Am Ende befinden sich im Glas bzw. in der Tasse die gleiche Flüssigkeitsmenge wie zu Beginn. Daher fehlt der Student am Ende gegenüber dem Anfangszustand in ihrer Tasse genau soviel Kaffee, wie sie Milch in der Tasse hat, und genau diese Menge Kaffee muß der Student im Glas haben. Sie hat also genau soviel Milch in der Tasse wie er Kaffee im Glas.

Ma 10/12 ■ 2838 Es gilt $S = 1$, also $F = 9$ und somit $I = 0$.

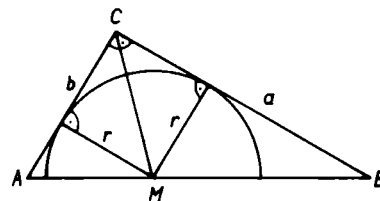
Wegen $F + I = N$, also $9 + 0 = N$ müßte $N = 9$ sein, was den Bedingungen der Aufgabenstellung widerspricht, da $N \neq F$ nur zugelassen ist. Diese Aufgabe hat keine Lösung.

Ma 10/12 ■ 2839 Für den Flächeninhalt des abgebildeten rechtwinkligen Dreiecks

$$ABC \text{ gilt } \frac{a \cdot b}{2} = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2},$$

$$a \cdot b = r \cdot (a + b), r = \frac{a \cdot b}{a + b},$$

$$\frac{1}{r} = \frac{a + b}{a \cdot b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$



Na/Te 10/12 ■ 405 $F = m \cdot \frac{g - v^2}{r}$,

$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; nach oben gewölbt:

$F \approx 3530$ N, nach unten gewölbt:

$F \approx 4310$ N

Na/Te 10/12 ■ 406 Es müssen ≈ 3900 kJ $\approx 1,1$ kWh zugeführt werden. Das Aufheizen kostet $\approx 0,09$ M und dauert ≈ 33 min.

Lösungen zu:

In freien Stunden · alpha-heiter

Zahlenlabyrinth 1987 · 1988

Um alle die hier aufgeführten 21 Lösungen der Aufgabe zu ermitteln, benötigte der Taschen-Computer insgesamt drei Stunden! Die Anzahl der mit den im Labyrinth gegebenen Zahlen insgesamt möglichen Summen beträgt

$$S = 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 75264.$$

Damit hat der Computer in jeweils einer Sekunde rund 7 Summen gebildet und diese noch verglichen, ob sie den Wert 1987 oder 1988 ergeben. Wenn diese Bedingungen zuträfen, erfolgte die Ausgabe der Summanden.

Summe 1987:

$$50 + 102 + 301 + 389 + 406 + 418 + 321 =$$

$$50 + 238 + 301 + 389 + 406 + 418 + 185 =$$

$$78 + 120 + 452 + 389 + 345 + 418 + 185 =$$

$$78 + 120 + 452 + 421 + 406 + 418 + 92 =$$

$$78 + 450 + 452 + 389 + 15 + 418 + 185 =$$

$$134 + 450 + 45 + 213 + 406 + 418 + 321 =$$

$$134 + 450 + 452 + 213 + 345 + 72 + 321 =$$

$$384 + 450 + 25 + 421 + 345 + 41 + 321 =$$

$$384 + 450 + 301 + 389 + 406 + 17 + 40 = 1987$$

Summe 1988:

$$40 + 450 + 25 + 389 + 345 + 418 + 321 =$$

$$78 + 238 + 452 + 421 + 406 + 72 + 321 =$$

$$78 + 450 + 301 + 421 + 345 + 72 + 321 =$$

$$89 + 450 + 452 + 389 + 406 + 17 + 185 =$$

$$134 + 120 + 452 + 421 + 122 + 418 + 321 =$$

$$384 + 21 + 78 + 421 + 345 + 418 + 321 =$$

$$384 + 21 + 301 + 421 + 122 + 418 + 321 =$$

$$384 + 21 + 452 + 47 + 345 + 418 + 321 =$$

$$384 + 25 + 45 + 389 + 406 + 418 + 321 =$$

$$384 + 25 + 452 + 389 + 345 + 72 + 321 =$$

$$384 + 238 + 452 + 389 + 15 + 418 + 92 =$$

$$384 + 450 + 25 + 213 + 406 + 418 + 92 = 1988$$

Kein Problem!

Es können nur folgende Worte von den angeführten nicht geschrieben werden: 5, 6, 8, 15.

Ein kniffliges Eierspiel

1-5; 3-7; 7-1; 8-4; 4-3; 3-7; 6-2; 2-8; 8-4; 4-3; 5-6; 6-2; 2-8; 1-5; 5-6; 7-1.

Ein Brückenproblem

Die Aufgabe ist nicht lösbar. Um irgendeinen Raum, der über beliebig viele Ein- und Ausgänge verfügt, zu betreten und wieder zu verlassen, ohne einen Ein- bzw. Ausgang mehr als einmal zu nutzen, sind genausoviel Aus- wie Eingänge erforderlich.

1, 2, 3, ... - α ist immer dabei

Gleichung (1) $\alpha \cdot \alpha = P\alpha E$ schränkt die Möglichkeiten für die Belegung von α mit Grundziffern ein. Da das Produkt $P\alpha E$ dreistellig ist und mit $E(E \neq \alpha)$ endet, entfallen zunächst für α die Ziffern 1, 2, 3, 5 und 6. Weil die Ziffer an der Zehnerstelle von $P\alpha E$ mit den Ziffern in $\alpha \cdot \alpha$ übereinstimmt, entfallen wegen

$$4 \cdot 44 = 176, 7 \cdot 77 = 539, 8 \cdot 88 = 704$$

auch die Ziffern 4, 7 und 8. Gleichung (1) kann nur von $\alpha = 9$ erfüllt werden.

Wegen $9 \cdot 99 = 891$ ist $P = 8$ und $E = 1$.

$P = 8$ in (2) eingesetzt, ergibt $R = 7$ und $T = 2$;

$R = 7$ in (3) eingesetzt, ergibt $O = 6$ und $K = 3$;

$O = 6$ in (4) eingesetzt, ergibt $D = 5$ und $U = 4$.

Die Proben bestätigen die Richtigkeit der Lösung:

$$(1) 9 \cdot 99 = 891; (2) 8 \cdot 99 = 792; \dots,$$

$$(8) 2 \cdot 99 = 198.$$

In Altenburg

Durch Subtraktion einiger benachbarter Gleichungen erhält man: $E = 3$, $T = 2$, $R = 33$ und $G = 36$.

Durch Addition der vierten und fünften Gleichung ergibt sich $A = 18$, und damit folgen

$$B = 7, L = 20, N = 4 \text{ und } U = 30.$$

Das Ergebnis in der Übersicht zeigt unverkennbar Hinweise auf Altenburg als Skatstadt:

A	L	T	E	N	B	U	R	G
18	20	2	3	4	7	30	33	36

Logeele



Von A nach B gewandert

Addition und Multiplikation sind uneingeschränkt ausführbar.

Kryptarithmetik

- $1089 \cdot 9 = 9801$
- $923076 = 4 \cdot 230769$
- $5240 + 5210 = 10450$
- $415 \cdot 41; 915 \cdot 41$
- $\sqrt{100489} = 317$

Lösungen zur Sprachecke

▲ 1 ▲ Beweist, daß für n positive Zahlen $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n$

die Ungleichungen

$$a) a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 = (a_1 - a_2 + a_3)^2,$$

$$b) a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 = a_4^2$$

$$= (a_1 - a_2 + a_3 - a_4)^2,$$

$$c) a_1^2 - a_2^2 + \dots - (-1)^n a_n^2$$

$$= (a_1 - a_2 + \dots - (-1)^n a_n)^2$$

erfüllt sind.

Lösung: a) Wir betrachten die Differenz des linken und rechten Teiles der Ungleichung und tauschen die Konstante a_3 gegen die Variable x aus. Wir erhalten eine lineare Funktion in x :

$$f_3(x) = a_1^2 - a_2^2 + x^2 - (a_1 - a_2 + x)^2,$$

$$x \in [0, a_2]; (x^2 \text{ kürzt sich!}).$$

Um zu beweisen, daß bei beliebiger Wahl von

$$a_1 \geq a_2 \geq 0 \text{ und } x \in [0, a_2] f_3(x) \geq 0$$

gilt, genügt es, die Werte $f_3(0)$ und $f_3(a_2)$ zu betrachten.

$$f_3(0) = a_1^2 - a_2^2 - (a_1 - a_2)^2$$

$$= 2(a_1 - a_2) a_1 \geq 0$$

$$f_3(a_2) = a_1^2 - a_2^2 = 0.$$

b) Genauso beweisen wir die zweite Aufgabe. Wir betrachten die Funktion in x

$$f_4(x) = a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - x^2$$

$$- (a_1 - a_2 + a_3 - x)^2, x \in [0, a_3].$$

Das ist eine quadratische Funktion in x , deren Vorzeichen beim quadratischen Glied x^2 negativ ist. Um die Ungleichung $f_4(x) \geq 0$ für $x \in [0, a_3]$ und beliebige

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq 0 \text{ zu beweisen,}$$

genügt es, die Werte $f_4(0)$ und $f_4(a_3)$ zu betrachten. Wir erhalten

$$f_4(0) = f_3(a_3) \geq 0, \text{ (wie in a) bewiesen),}$$

$$f_4(a_3) = f_3(0) \geq 0.$$

c) Die dritte Ungleichung beweisen wir nach dem Prinzip der vollständigen Induktion. Es wird derselbe Ansatz wie unter a) und b) verwendet. Wir betrachten die Funktion in x

$$f_n(x) = a_1^2 - a_2^2 + \dots + (-1)^n a_{n-1}^2$$

$$- (-1)^n x^2 - (a_1 - a_2 + \dots$$

$$+ (-1)^n a_{n-1} - (-1)^n x)^2,$$

$$x \in [0, a_{n-1}],$$

für eine natürliche Zahl $n \geq 3$. Die Funktion $f_n(x)$ ist linear genau dann, wenn n ungerade ist; und $f_n(x)$ ist quadratisch mit negativen Vorzeichen vor dem quadratischen Glied genau dann, wenn n gerade ist. Um zu beweisen, daß

$$f_n(x) \geq 0 \text{ für } x \in [0, a_{n-1}] \text{ und}$$

$$\text{beliebige } a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{n-1} \geq 0 \text{ ist,}$$

genügt es wiederum,

$$f_n(0) \geq 0 \text{ und } f_n(a_{n-1}) \geq 0 \text{ zu zeigen.}$$

Es gilt:

$$f_n(0) = f_{n-1}(a_{n-1}), f_n(a_{n-1})$$

$$= f_{n-2}(a_{n-2}) = f_{n-1}(0).$$

Damit kann beim Induktionsschritt die Induktionsvoraussetzung genutzt werden.

▲ 2 ▲ Das folgende Inserat erschien an der Wandzeitung irgendeiner Universität: Hier sind wir, drei perfekte Burschen, Peter, Richard und Tony. Jeder von uns ist weder groß, reich und hübsch noch lustig, musikalisch und smart.

Aber jeder von uns besitzt vier der obigen Eigenschaften. Tatsächlich ist jede Eigenschaft bei zweien von uns vorhanden. Peter ist hübsch und Richard, der musikalisch ist, ist entweder hübsch oder smart aber nicht beides.

Die zwei von uns, die lustig sind, sind beide nicht hübsch und die beiden von uns, die smart sind, sind beide nicht groß. Tony glaubt, daß er die besten vier Eigenschaften von uns besitzt. Können Sie Tony beschreiben?

Lösung: Tony ist groß, reich, lustig und smart. Die sechs Eigenschaften sind G, R, H, L, M und S. Keiner ist GRH oder LMS. Jeder von ihnen ist GR oder RH oder GH und ebenso LM oder MS oder LS.

	G	R	H	L	M	S
Peter		x	x		x	x
Richard	x			x	x	
Tony	x	x		x		x

▲ 3 ▲ In einem Stadion besteht eine Laufbahn aus jeweils zwei Geraden, die durch zwei Halbkreise verbunden sind. Die Länge jeder Geraden beträgt 75 m. Welchen Abstand müssen die beiden Geraden an der Innenseite der innersten Laufbahn haben, damit die Länge genau 400 m beträgt?

Die Rennstrecke besitzt sechs Laufbahnen von jeweils 2 m Breite. Welche Länge hat die Innenseite der zweiten Laufbahn? Welchen Vorsprung muß man einem Läufer beim Start auf der zweiten Bahn bei einem 400 m-Lauf geben, wenn auch er genau 400 m zum Erreichen der Ziellinie laufen soll?

Lösung: Der Läufer der Innenbahn, wie auch alle anderen, läuft auf den beiden Geradenabschnitten insgesamt 150 m. Damit verbleiben für die beiden Halbkreise 250 m, d.h. für einen Halbkreis 125 m.

$$u_1 = \pi \frac{d_1}{2} = 125 \text{ m, d.h. } d_1 = 79,58 \text{ m.}$$

Der Abstand der beiden Geraden beträgt also 79,58 m. Der Durchmesser d_2 des Halbkreises der zweiten Bahn beträgt, wieder bezogen auf die Innenseite, $d_2 = d_1 + 4 \text{ m}$. Auf beiden Halbkreisbahnen legt dieser Läufer somit 412,57 m zurück und muß auf seiner Bahn eine Vorgabe von 12,57 m erhalten.

▲ 4 ▲ Stelle sechs Ziffern 1 so zusammen, daß das Ergebnis 12 beträgt. Verwende nur das Zeichen + und den Bruchstrich. Du darfst diese Zahlen mehr als einmal verwenden.

$$\text{Lösung: } \frac{11}{11} + 11 = 12.$$

▲ 5 ▲ Ein Satellit beschreibt in 96 Minuten eine Kreisbahn mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $28000 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ um die Erde. Berechne den Radius seiner Kreisbahn! In welchem Abstand von der Erde bewegt er sich?

$$\text{Lösung: } s = v \cdot t;$$

$$s = 28000 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1,6 \text{ h} = 44800 \text{ km};$$

$$u = 2\pi r; u = s; r = \frac{u}{2\pi}$$

$$\text{d.h. } r = 7130 \text{ km. Der Radius der Kreisbahn beträgt } 7130 \text{ km.}$$

$$a = 7130 \text{ km} - 6370 \text{ km} = 760 \text{ km.}$$

Der Satellit kreist 760 km über der Erdoberfläche.

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. Luis J. Davidson, Heft 6/87

$$\text{Es sei } x_0 \geq 1987. \text{ Dann ist } p(x_0) = x_0^2 + ax_0 + b \geq 1987x_0 + ax_0 + b = (1986 + a)x_0 + x_0 + b > x_0 + b,$$

da $1986 + a > 0$ nach Voraussetzung, $> x_0 - 1987$, da $b > -1987$ vorausgesetzt war, $\geq 1987 - 1987 = 0$. Also ist für $x_0 \geq 1987$ $p(x_0) > 0$ und daher existiert keine derartige Lösung.

Wissenswertes über pytha- goreische Zahlen

Hans ist Schüler einer 8. Klasse. Im Mathematikunterricht wurde gerade der Satz des Pythagoras behandelt, und Hans hat gelernt, was man unter *pythagoreischen Zahlen* zu verstehen hat. Am Abend fragt er seinen Vater, ob dieser ihm pythagoreische Zahlen nennen könne.

Prompt kam die Antwort: „ $3^2 + 4^2 = 5^2$ “. Bereits die alten Ägypter kannten viele Jahrhunderte vor unserer Zeitrechnung dieses Tripel (3, 4, 5) natürlicher Zahlen, das die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ in der angegebenen Reihenfolge erfüllt. Sie steckten im Gelände rechte Winkel mit einem Seil ab, auf dem die Längen $a = 3$ m, $b = 4$ m und $c = 5$ m durch Knoten markiert waren, indem sie diese Seiten in Form eines Dreiecks spannten.

Wir wollen uns nun mit der Frage beschäftigen, ob es nur endlich viele oder gar beliebig viele solcher Zahlentripel wie (3, 4, 5) oder (5, 12, 13) gibt, die die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ erfüllen, und wir wollen herausfinden, wie sich solche Zahlentripel finden lassen. Dazu verabreden wir zunächst folgendes:

„Erfüllen natürliche Zahlen a, b, c die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$, so nennen wir ein solches Zahlentripel (a, b, c) ein *pythagoreisches Zahlentripel*.“

Es sei (x, y, z) ein pythagoreisches Zahlentripel; durch Multiplikation der Zahlen x, y, z mit einer natürlichen Zahl $k \geq 2$ erhält man die Zahlen kx, ky, kz . Auch diese Zahlen erfüllen die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$. Es gilt nämlich $(kx)^2 + (ky)^2 = (kz)^2$, $k^2x^2 + k^2y^2 = k^2z^2$, also nach Division durch k^2 auch $x^2 + y^2 = z^2$.

Wir geben hierzu ein Beispiel an:

$$\begin{aligned} 3^2 + 4^2 &= 5^2, \\ (3 \cdot 5)^2 + (4 \cdot 5)^2 &= (5 \cdot 5)^2, \\ 15^2 + 20^2 &= 25^2. \end{aligned}$$

Bereits auf diese Weise kann man beliebig viele pythagoreische Zahlentripel gewinnen. Aber dieses Vorgehen befriedigt uns nicht so recht, weil das Zahlentripel (15, 20, 25) auf das Zahlentripel (3, 4, 5) zurückzuführen ist.

In der Gleichung $15^2 + 20^2 = 25^2$ haben die Zahlen 15, 20 und 25 den gemeinsamen Teiler 5. Aber nur teilerfremde Zahlen x, y, z stellen wirklich *neue* pythagoreische Zahlentripel dar, wie z. B. das Zahlentripel (5, 12, 13). Es erhebt sich nun die Frage, wie wir mit Sicherheit teilerfremde Tripel (x, y, z) erhalten?

Aus $a^2 + b^2 = c^2$ folgt $a^2 = c^2 - b^2$, also $a^2 = (c - b)(c + b)$. Wir nehmen mit Hilfe

	c	b	$c + b$	$c - b$	a^2	a
(1)	gerade	gerade	gerade	gerade	gerade	gerade
(2)	gerade	ungerade	ungerade	ungerade	ungerade	ungerade
(3)	ungerade	gerade	ungerade	ungerade	ungerade	ungerade
(4)	ungerade	ungerade	gerade	gerade	gerade	gerade

einer Tabelle eine Fallunterscheidung bezüglich der Geradzahligkeit oder Ungeradzahligkeit der Zahlen c und b vor und schließen daraus auf die Beschaffenheit der Zahl a .

Im Fall (1) sind a, b, c sämtlich gerade Zahlen, also wenigstens durch 2 teilbar. Diese Zahlen lassen sich auf ein bereits bekanntes pythagoreisches Zahlentripel zurückführen. Sie interessieren also nicht weiter.

Im Fall (2) ist zu beachten, daß die Zahlen a und b beide ungerade sind. Die Summe zweier ungeradzahlgiger Quadratzahlen ist zwar stets durch 2, nicht aber durch 4 teilbar. Die geradzahlgige Zahl c^2 ist aber stets durch 4 teilbar. Wegen dieses Widerspruchs entfällt auch dieser Fall.

Wir gewinnen folgende Erkenntnis: Von den Zahlen a und b muß eine gerade, die andere ungerade sein. Damit sind wir schon ein gutes Stück vorangekommen. Bei unseren weiteren Überlegungen sei die Zahl a ungeradzahlg, die Zahl b geradzahlg. Setzen wir $a = m - n$ mit $m > n$ und $c = m + n$, so folgt aus $a^2 + b^2 = c^2$ schließlich $b^2 = c^2 - a^2 = (m + n)^2 - (m - n)^2 = 4mn$, also $b = 2 \cdot \sqrt{mn}$.

Die Zahl b wird genau dann geradzahlg, wenn das Produkt $m \cdot n$ eine Quadratzahl ist. Damit sind wir dem Ziel schon etwas näher gerückt. Wir kommen zu folgender Erkenntnis: Wählt man eine natürliche Zahl m und eine kleinere von Null verschiedene natürliche Zahl n so, daß das Produkt $m \cdot n$ eine Quadratzahl ist, so bilden die Zahlen $a = m - n$, $b = 2 \cdot \sqrt{mn}$ und $c = m + n$ ein pythagoreisches Zahlentripel.

Wir untersuchen nun folgende fünf Beispiele näher:

Beispiel (1):

$$m = 16, n = 9, a = 7, b = 24, c = 25, \text{ also } 7^2 + 24^2 = 25^2;$$

Beispiel (2):

$$m = 18, n = 2, a = 16, b = 12, c = 20, \text{ also } 16^2 + 12^2 = 20^2;$$

Beispiel (3):

$$m = 25, n = 1, a = 24, b = 10, c = 26, \text{ also } 24^2 + 10^2 = 26^2;$$

Beispiel (4):

$$m = 63, n = 28, a = 35, b = 84, c = 91, \text{ also } 35^2 + 84^2 = 91^2;$$

Beispiel (5):

$$m = 441, n = 256, a = 185, b = 672, c = 697, \text{ also } 185^2 + 672^2 = 697^2.$$

Als Ergebnis dieser Untersuchung halten wir folgendes fest:

Das Beispiel (1) liefert uns ein *neues* pythagoreisches Zahlentripel.

Im Beispiel (2) haben die Zahlen 16, 12 und 20 den gemeinsamen Teiler 4. Woran

liegt das? Da m und n beide geradzahlg sind, ist auch die Differenz $a = m - n$ geradzahlg. Das führt zu einem Widerspruch; denn wir haben a als ungeradzahlg vorausgesetzt.

Im Beispiel (3) haben die Zahlen 24, 10 und 26 den gemeinsamen Teiler 2. Woran liegt das? Da m und n beide ungeradzahlg sind, ist die Differenz $a = m - n$ geradzahlg; das führt zum gleichen Widerspruch.

Im Beispiel (4) haben die Zahlen 35, 84 und 91 den gemeinsamen Teiler 7. Dieses Zahlentripel geht also aus dem Tripel (5, 12, 13) hervor. Wir gewinnen hieraus folgende Erkenntnis: Haben m und n einen gemeinsamen Teiler (in unserem Fall 7), so sind die Differenz $a = m - n$, die Summe $c = m + n$, aber auch $b = 2 \cdot \sqrt{mn}$ durch diese Zahl teilbar.

Daraus folgern wir:

m und n müssen teilerfremd sein. Jede der Zahlen m und n muß selbst Quadratzahl sein. In allen anderen Fällen ist $b = 2 \cdot \sqrt{mn}$ nicht geradzahlg.

Nun sind wir am Ziel angelangt. Man wähle eine gerade und eine ungerade natürliche Zahl. Beide Zahlen dürfen keinen gemeinsamen Teiler $t \geq 2$ besitzen. Man quadriere diese beiden Zahlen, bilde die positive Differenz und die Summe ihrer Quadrate. Danach multipliziere man die zwei gewählten Zahlen und verdopple ihr Produkt. Die drei so erhaltenen Zahlen bilden ein pythagoreisches Zahlentripel ohne gemeinsamen Teiler.

In Kurzform:

$$m = a^2, n = b^2 \text{ mit } a > b, x = a^2 - b^2, y = 2\sqrt{a^2b^2} = 2ab, z = a^2 + b^2$$

Beispiel:

$$a = 7, b = 4, a^2 = 49, b^2 = 16, x = 33, y = 56, z = 65, 33^2 + 56^2 = 65^2.$$

Dem Leser, der bis hierher durchgehalten hat, sei noch eine Überraschung bereitet.

Wir gehen von der binomischen Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ aus. Danach gilt $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$ bzw. $n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$. Wählen wir eine ungerade Quadratzahl $(2n + 1)$, dann gilt z. B. $2n + 1 = 81$, $2n = 80$, $n = 40$. Daraus folgt $40^2 + 9^2 = 41^2$.

Da beliebig viele ungeradzahlgige Quadratzahlen existieren, kann man auf diese überraschend leichte Weise pythagoreische Zahlentripel gewinnen. Mit diesem Rezept werden zwar nicht alle pythagoreischen Tripel erfaßt, aber seine Nutzung kann bei Freunden, die das Rezept nicht kennen, Verblüffung auslösen.

Th. Scholl

Das Kämmen eines Igels

Ein Polyeder mit phantastisch abstehenden stachel-förmigen Begrenzungen ist dieser *Igel*, den wir *kämmen* sollen (Bild 1).

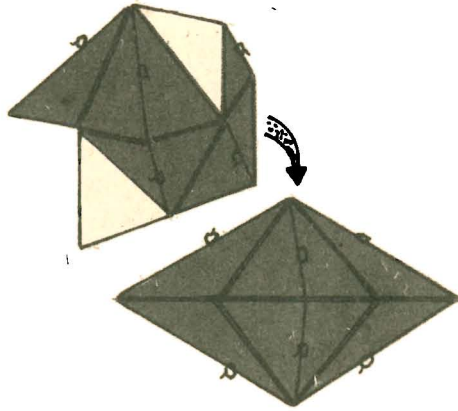


Bild 1

Aber bevor wir den Igel kämmen, müssen wir ihn basteln.

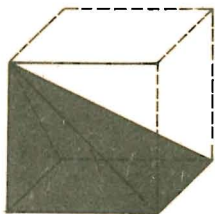
Wir basteln einen Igel

Am einfachsten stellen wir unser Spiel aus Holzwürfeln (z.B. aus einem Baukasten für kleinere Kinder) her. Wir brauchen 8 gleichgroße Würfel. (Wer sich in der Geometrie gut auskennt, dem genügen drei.) Außerdem benötigen wir noch dünnes Gummi und 8 kleine Ringe (z.B. von einem Plaströhrchen abgeschnitten). Anstelle der Ringe kann man auch kleine Knöpfe verwenden.

Wir gehen in folgender Reihenfolge vor:

1. Aus den Würfeln werden 8 Pentaeder (Bild 2) herausgesägt.

Bild 2



2. Die Kanten, an denen zueinander senkrechte Flächen aneinanderstoßen, werden mit Messer und Feile abgerundet, damit sie sich beim Drehen nicht gegenseitig behindern.

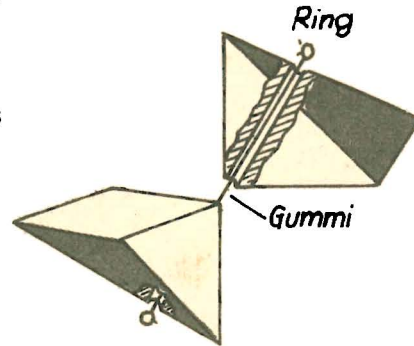
3. Durch jedes Pentaeder wird ein Loch gebohrt – von der Ecke, in der drei Kanten paarweise senkrecht aufeinanderstoßen zu einem Punkt auf der gegenüberliegenden Kante (Bild 3).

4. Durch die Löcher je zweier Pentaeder wird ein Gummi gefädelt und mit Ringen oder Knöpfen wie im Bild 3 befestigt. Der Gummi muß dabei eine gewisse Spannung bekommen, damit die Pentaeder aneinandergedrückt werden.

5. Die Ringe sind groß lackiert.

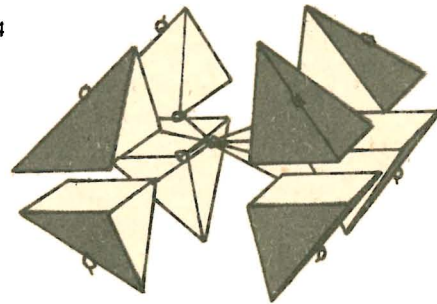
6. Der Igel wird zusammengebaut: Die mit einem Gummi verbundenen Pentaederpaare werden so aneinandergeknüpft, daß ein gekämmter Igel entsteht.

Bild 3



Jetzt könnt ihr spielen: Dreht ein paarmal jeweils eine Hälfte des Igels gegenüber der anderen. Tut dies in verschiedenen Ebenen! Nach den Verdrehungen beginnen die Begrenzungsflächen nach verschiedenen Seiten *abzustehen* (siehe Bild 4).

Bild 4



Versucht jetzt, den Igel in den Ausgangszustand zurückzudrehen! Ihr werdet erstaunt sein, daß dies eine schwierige Aufgabe ist. Schwierig, aber interessant. Beachtet beim Spielen, daß unser *Gummischarnier* rund 100 Umdrehungen verträgt; danach muß man einige Minuten zur Entspannung des Gummis verstreichen lassen, und der Igel ist erneut spielbereit.

Woher kommt der Igel?

In Naturwissenschaft und Technik gibt eine Entdeckung meist den Anstoß für das schnelle Entstehen einer Vielzahl neuer interessanter Ideen und Erfindungen. Dies geschah auch mit dem berühmten *Zauberwürfel*, als dessen Verwandten man unseren Igel ansehen kann. Im Zauberwürfel werden 26 kleine Würfel in Gruppen zu je 9 in sechs Ebenen gedreht. Dabei erhält man eine sehr schwierige Knobelei, weil die Anzahl der möglichen Verteilungen der kleineren Würfel größer ist als $43 \cdot 10^{18}$ (deshalb nehmen Anleitungen zum Ordnen des Würfels auch mehrere Zeitschriftenseiten ein). A. Kalinin