Mathematische Schülerzeitschrift

alpha

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
10. Jahrgang 1976
Preis 0,50 M
Index 31059

2

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430. Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.

Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Die Briefmarke zur Gestaltung des Titelblattes durch H. Fahr, Berlin, überreichte A. Halameisär, Moskau; R. Jäger aus *technikus* 9/75 (S. 29); Porträt aus *technikus* 5/75 (S. 33); Zentralbild/ADN (S. 33); *Vignetten:* K.-H. Guckuk, Leipzig (S. 38, S. 40/41); J. Lehmann, Leipzig (S. 39); G. Sprengel, Dessau (S. 40/41); Louis Rauwolf, Berlin (S. 40/41); ADN-ZB-Graphik (IV. Umschlagseite).
Typographie: Helmut Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
Redaktionsschluß: 23. Dezember 1975

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Einige Aufgaben mit rationalen Zahlen

In der 7. Klasse haben wir die rationalen Zahlen kennengelernt. Dadurch wurde es möglich, daß wir nun uneingeschränkt subtrahieren können. Wir haben also einen großen Schritt vorwärts gemacht. Erinnern wir uns: In den unteren Klassen kannten wir nur die natürlichen Zahlen. In diesem Bereich war neben der Subtraktion auch noch die Division nicht uneingeschränkt ausführbar. Den ersten Schritt zur Beseitigung dieser Mängel gingen wir in der 6. Klasse. Dort wurden die gebrochenen Zahlen eingeführt. Von nun an war also die Division (mit Ausnahme der Division durch Null) uneingeschränkt ausführbar. Wir hatten aber immer noch keinen Zahlenbereich, in dem wir uneingeschränkt subtrahieren konnten. Den schufen wir uns nun in der 7. Klasse mit dem *Bereich der rationalen Zahlen.* Wenn wir umfassend über die rationalen Zahlen Bescheid wissen wollen, so können wir uns nicht damit zufriedengeben, nur mit ihnen rechnen zu können. Wir müssen auch das in der Mathematik gebräuchliche Verfahren zur Erweiterung eines Zahlenbereichs beherrschen. Deshalb beschränken sich auch die folgenden Aufgaben nicht nur auf das Rechnen mit den neuen Zahlen.

Aufgabe 1

Vervollständige die folgende Tabelle!

	Differenzen aus der gleichen Klasse			rationale Zahl
a)	(8 − 12)	(−)	(188 − 192)	
b)	(−)	(80,6 − 25,5)	(−)	
c)	(−)	(−)	(−)	
d)	(−)	(−)	(−)	$-1\frac{3}{4}$

Wir haben die rationalen Zahlen als *Klassen von Differenzen* kennengelernt. Die Aufgaben a) und b) verlangen, zu vorgegebenen Differenzen noch andere zu suchen, die in derselben Klasse liegen, sowie den Namen der jeweiligen Klasse (die ihr zugeordnete rationale Zahl) anzugeben. Wie findet man nun weitere Differenzen? Das können wir uns gleich an Aufgabe a) klarmachen. Dazu erinnern wir uns an den im Unterricht behandelten Satz:

Für Differenzen $(a-b)$ und $(c-d)$ von gebrochenen Zahlen, die in einer Klasse liegen, gilt: $a+d=b+c$.

Wir geben uns also ein beliebiges c vor und bestimmen dann unser d. Welche rationale Zahl ordnen wir nun den jeweils gefundenen drei Differenzen aus einer Klasse zu? Wir kommen hier sicherlich zum Ziel, wenn wir in den Differenzen (die ja eigentlich geordnete Paare gebrochener Zahlen sind) eine gebrochene Zahl 0 werden lassen. In diesem Zusammenhang erinnern wir uns daran, wie die Bezeichnung einer rationalen Zahl festgelegt war. Dazu ist an sich jede Differenz aus der jeweiligen Klasse geeignet. Im Unterricht hatten wir dazu die folgenden Definitionen kennengelernt:

- *Die rationale Zahl, in der die Differenz $(a-0)$ vorkommt, wird mit $+a$ bezeichnet.*
- *Die rationale Zahl, in der die Differenz $(0-a)$ vorkommt, wird mit $-a$ bezeichnet.*
- *Die rationale Zahl, in der die Differenz $(0-0)$ vorkommt, wird mit 0 bezeichnet.*

Nun können wir die zur Bezeichnung dieser Klasse von gebrochenen Zahlen verwendete rationale Zahl angeben.

Die Aufgabe d) verlangt von uns den umgekehrten Weg. Welche Differenzen lassen sich z. B. der hier vorgegebenen rationalen Zahl zuordnen? Die Aufgabe c) gibt uns schließlich völlig freie Hand. Hier können wir selbst Differenzen vorgeben, die in derselben Klasse liegen, und ihnen die entsprechende rationale Zahl zuordnen (oder umgekehrt). Bei dieser Aufgabe müssen wir beachten, daß die Differenzen $(a-b)$ und $(b-a)$ voneinander verschieden sind.

Noch zwei kleine Zusatzfragen: Wieviel Differenzen gehören eigentlich zu einer Klasse? Welche Bedeutung besitzt das Zeichen − in der hier benutzten Schreibweise $(a-b)$?

Aufgabe 2

Ordne die folgenden rationalen Zahlen der Größe nach!

a) -100; 87; 0; -21; -5; 1

b) $-2{,}748$; $\frac{4}{7}$; $-2{,}8$; $\frac{5}{8}$; $0{,}9$; $-2{,}749$

Die Ordnung rationaler Zahlen haben wir an der Zahlengeraden erklärt. Dabei haben wir auch den Begriff des absoluten Betrages einer rationalen Zahl kennengelernt. Die Ordnung erklärten wir so:

Von zwei verschiedenen rationalen Zahlen ist diejenige kleiner, die auf der Zahlengeraden weiter links liegt.

Für die positiven rationalen Zahlen war das das alte Ordnungsprinzip der gebrochenen Zahlen. Für die negativen rationalen Zahlen konnten wir nach dieser Definition den folgenden Satz formulieren:

Von zwei verschiedenen negativen rationalen Zahlen ist diejenige kleiner, die den größeren absoluten Betrag hat.

Die Definition des absoluten Betrages lautete schließlich so:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{falls } a \text{ positiv oder gleich 0 ist,} \\ a, & \text{falls } a \text{ negativ ist.} \end{cases}$$

Zurück zu unserer Aufgabe! Die rationalen Zahlen sollen hier so geordnet werden, daß mit der kleinsten begonnen wird. In der Aufgabe a) finden wir nur ganze Zahlen, so daß uns das Ordnen leichtfallen sollte. Die Aufgabe b) erfordert einige Kenntnisse über gebrochene Zahlen. Was wissen wir noch aus der 6. Klasse über den Vergleich von Dezimalbrüchen bzw. von gemeinen Brüchen?

Wie kann man z. B. entscheiden, ob $\frac{4}{7}$ größer oder kleiner als $\frac{5}{8}$ ist? Wenn es sich um gleichnamige Brüche handeln würde, dann wäre die Sache einfacher. Wir brauchten dann nur die Zähler zu vergleichen.

Aufgabe 3

Nenne mindestens sieben rationale Zahlen, die zwischen -3 und $0{,}25$ liegen!

Was heißt in dieser Aufgabe „mindestens“? Gibt es auch noch mehr Zahlen, die zwischen den beiden angegebenen Zahlen liegen? Was wissen wir diesbezüglich von den rationalen Zahlen? Erinnern wir uns daran, was es bedeutet, wenn wir im Unterricht lernten, daß die rationalen Zahlen überall dicht liegen!

Eine weitere Frage:

Können in unserer Antwort nur ganze Zahlen enthalten sein?

Vielleicht versuchen wir einmal, nachdem wir sieben rationale Zahlen angegeben haben, die diese Bedingung erfüllen, davon zwei benachbarte auszuwählen und wieder Zahlen zu suchen, die zwischen diesen (nun noch näher beieinanderliegenden) rationalen Zahlen liegen. Wem gelingt das?

Aufgabe 4

Ermittle alle Zahlen, für die gilt:

a) $|a| = 8{,}5$
b) $|a| = -2$
c) $-|a| = 7$
d) $-|a| = -0{,}5$

Manche Schüler haben Angst vor dem absoluten Betrag. In Aufgabe 2 haben wir uns schon überlegt, wie er definiert war. In der Definition wurden zwei Fälle unterschieden. Weshalb eigentlich? Was ist der absolute Betrag einer rationalen Zahl stets für eine Zahl?
Wenn wir das wissen, dann können wir die Aufgaben a) und b) sofort lösen. Bei Aufgabe c) müssen wir uns darüber klar werden, was das Zeichen „−" vor dem Absolutstrich bedeutet. (Das ist wichtig, weil ja bei der Einführung dieser neuen Zahlen dieses Zeichen in verschiedenen Bedeutungen vorkommt. Eine davon – nämlich die als Trennzeichen – haben wir bereits bei der Schreibweise der Differenzen kennengelernt. Weitere sind z. B.: Vorzeichen, Operationszeichen, Zeichen für entgegengesetzte Zahl.) Das hat dann auch Auswirkungen auf die rechte Seite der Gleichung. In Aufgabe d) steht dieses Zeichen – sogar zweimal. Nun haben wir uns jede Aufgabe einzeln überlegt und gesehen, daß die Angst ganz unbegründet ist. Bevor wir die einzelnen Lösungen hinschreiben, sollten wir uns noch überlegen, ob wir in jeder Aufgabe überhaupt zwei Zahlen für a finden können.

Aufgabe 5

Berechne!

a) $|7{,}4| - |-12{,}9| + |2| =$
b) $-|2\frac{2}{3} + 19{,}\bar{3} - 4\frac{1}{3}| =$
c) $|-12| : |0{,}04| =$

Nachdem wir Aufgabe 4 gelöst haben, können wir uns mit unseren aufgefrischten Kenntnissen über den absoluten Betrag auch an Aufgabe 5 wagen. Hier werden wir ebenfalls wieder Kenntnisse aus der 6. Klasse benötigen (Rechnen mit gebrochenen Zahlen).
Bei den Aufgaben a) und b) sollten wir daran denken, daß wir hier mit absoluten Beträgen rechnen müssen. Wir werden sie also erst einmal bestimmen und dann erst das Ergebnis der Aufgaben ausrechnen. In Aufgabe b) steht zwischen den Absolutstrichen eine Aufgabe aus der 6. Klasse. Wir müssen hier mit gebrochenen Zahlen rechnen. In welcher Darstellungsweise der gebrochenen Zahlen wollen wir das tun? Wenn wir damit fertig sind, haben wir noch zwei Dinge zu beachten. Erst dann haben wir die Lösung dieser Aufgabe.

Aufgabe 6

Gib in den folgenden Ketten von Ungleichungen für die Variablen jeweils eine rationale Zahl so an, daß die Ungleichungen dadurch erfüllt werden!

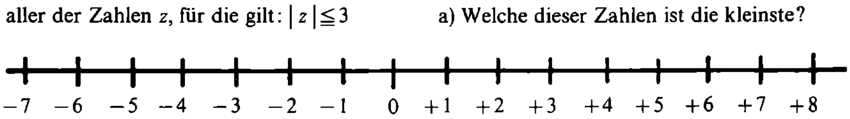
a) $-8 < x < -7{,}5 < y$
$x =$ $y =$

b) $\frac{7}{8} < r < -\frac{6}{8} < s < t < -\frac{1}{2}$
$r =$ $s =$ $t =$

In der Aufgabe 2 hatten wir es schon einmal mit solchen Ketten von Ungleichungen zu tun. Dort waren alle Zahlen gegeben, hier fehlen einige. Sie müssen also bestimmt werden. Wenn wir uns an die Lösungshinweise zu den Aufgaben 2 und 3 und daran erinnern, was wir uns dazu überlegt hatten, wird uns die Lösung hier sicherlich nicht schwerfallen. Bei Aufgabe b) sollen s und t zwischen den beiden angegebenen Zahlen liegen. Für s und t ist dann noch als weitere Bedingung zu beachten, daß $s < t$ sein soll.

Aufgabe 7

Skizziere auf der Zahlengeraden die Lage aller der Zahlen z, für die gilt: $|z| \leqq 3$



Auf dem Stück der Zahlengeraden, das hier gezeichnet wurde, sind nur die ganzen Zahlen markiert. Unsere Aufgabe lautet, alle Zahlen z mit der genannten Bedingung zu skizzieren. Dazu sollten wir uns diese Bedingung zunächst einmal genau ansehen.
Was bedeutet das Kleinergleichzeichen? Welche Zahlen lassen sich für z einsetzen, damit diese Bedingung erfüllt ist? Wo liegen diese Zahlen auf der Zahlengeraden?

Aufgabe 8

Welche der folgenden Aussagen werden beim Einsetzen von rationalen Zahlen für die jeweiligen Variablen wahr, welche falsch?

Gib für die wahren Aussagen zwei Beispiele an! Nenne bei den falschen Aussagen ein Gegenbeispiel!

a) Für alle a, b gilt:
Wenn $a < b$, dann ist $-a > -b$
b) Für alle c, d gilt:
Wenn $c < d$, dann ist $-c < -d$
c) Für alle e, f gilt:
Wenn $-e < f$, dann ist $-f > e$

Für a, b, c, d, e und f können wir uns hier jeweils rationale Zahlen eingesetzt denken. Es handelt sich also um Variable für rationale Zahlen. Was bedeuten nun die beiden Wörter für alle?
Wann ist eine Aussage wahr, wann falsch? Wie könnten wir das formulieren? Die geforderten Beispiele lassen sich sicherlich leicht finden. Wenn eine Aussage nun aber falsch ist, was heißt es dann, ein Gegenbeispiel anzugeben? Mit dem Angeben von zwei Beispielen bzw. einem Gegenbeispiel haben wir hier natürlich nichts bewiesen.

Aufgabe 9

Es seien folgende rationale Zahlen gegeben:
$12; 0; -85\frac{1}{13}; 8; -85\frac{1}{12}; 8{,}01; -28; 19\frac{2}{5}$

a) Welche dieser Zahlen ist die kleinste?
b) Welche dieser Zahlen ist die größte?
c) Welche dieser Zahlen hat den kleinsten Absolutbetrag?
d) Welche dieser Zahlen hat den größten Absolutbetrag?
e) Welche ist die größte ganze Zahl, die kleiner als alle gegebenen Zahlen ist?
f) Welche ist die kleinste ganze Zahl, die größer als alle gegebenen Zahlen ist?

Die sechs Fragen zu dieser Aufgabe sollten wir ganz genau lesen. Die Antworten auf die Fragen a) bis d) sind sicherlich einfach.
Wir haben inzwischen ja wieder mit dem Ordnen und mit den absoluten Beträgen rationaler Zahlen Erfahrungen gesammelt. Die gilt es hier anzuwenden. Bei den Fragen

Bereich	a	b	$a+b$	$a-b$	$a \cdot b$	$a:b$ ▶
R	32	-7				
R	-17	0				
N	60	160				
R^*	$4\frac{1}{2}$	$8\frac{3}{4}$				
R^*	6	$\frac{54}{9}$				
R	$-\frac{5}{8}$	0,375				

e) und f) sollten wir uns erst einmal ganz genau klarmachen, wonach gefragt ist. Die gesuchten Zahlen müssen hier zwei Bedingungen erfüllen. Welche sind das? Wenn wir das erkannt haben, dann haben wir die jeweilige Zahl auch bereits gefunden.

Aufgabe 10

Berechne $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$ und $a:b$, indem du anstelle von a und b die folgenden Zahlen aus den jeweils angegebenen Bereichen einsetzt! Wenn eine Aufgabe nicht lösbar sein sollte, so schreibe in das entsprechende Feld „n. l.“!
Endlich kommen wir zum Rechnen mit rationalen Zahlen! Aber Vorsicht: Hier soll ja auch in anderen Zahlenbereichen gerechnet werden. Wir sollten uns am Anfang noch einmal überlegen, was wir über die uneingeschränkte bzw. über die eingeschränkte Ausführbarkeit der Rechenoperationen in den einzelnen Zahlenbereichen wissen. Wenn wir uns dann die jeweils gegebenen Zahlen ansehen, dann können wir bestimmt schon in einige Felder schreiben, daß diese dort gestellte Aufgabe nicht lösbar ist.
Wieviel Aufgaben bleiben dann noch von den 24 Aufgaben übrig? Wir brauchen also erst gar nicht jede Aufgabe in Angriff zu nehmen, nachdem wir wissen, welche herausfallen müssen. In welcher Spalte werden wohl die meisten „n. l.“ stehen? Bei den Aufgaben, die im Bereich der rationalen Zahlen zu lösen sind, gibt es auch noch eine kleine Fußangel. Wer findet sie?

Aufgabe 11

Berechne!

a) $53-12{,}7-x+23=-85$ $\qquad x=$

b) $3\frac{2}{5}-20-\frac{4}{5}+x=0$ $\qquad x=$

c) $-3{,}7+41{,}9+x-79{,}1=100$ $\qquad x=$

d) $-7\cdot(-1)\cdot\left(-\frac{4}{8}\right)\cdot 3\frac{2}{3}=x$ $\qquad x=$

e) $\frac{-3{,}6\cdot(-20)\cdot 12{,}5}{17{,}5\cdot(-1)\cdot 0{,}72}=x$ $\qquad x=$

Hier müssen wir uns noch einmal alle Regeln für das Rechnen mit gebrochenen Zahlen und mit rationalen Zahlen ins Gedächtnis rufen. Wir werden sie brauchen. Bei den Aufgaben a) bis c) steht x mitten drin. Diese Aufgaben lassen sich auch ohne Kenntnisse aus der Gleichungslehre lösen, d. h. also auch von Schülern der 7. Klasse, die die rationalen Zahlen gerade behandeln.
Wir können hier doch einige Zahlen zusammenfassen. Auf welche Struktur lassen sich dann diese Aufgaben zurückführen? Wie ermittelt man in Aufgaben der Form $y+x=b$ die zu bestimmende Variable x?
In den Aufgaben d) und e) gibt es einige Rechenvorteile. Wer entdeckt sie? Sie schränken den Rechenaufwand etwas ein.

H. Seibt

Übung macht den Meister

Arbeit mit Gleichungen mit zwei Variablen

Aus Abschlußprüfungen der Oberschulen der DDR (Kl. 10)

1975

Gegeben sind die linearen Funktionen mit den Gleichungen

$$\begin{array}{l|r|l} \text{I} & y=3x-2 & \\ \text{II} & x+y=4 & \end{array} \quad (x \in P).$$

a) Stellen Sie die beiden Funktionen in ein und demselben rechtwinkligen Koordinatensystem graphisch dar, und geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes ihrer Graphen an!
b) Betrachten Sie die beiden gegebenen Gleichungen als Gleichungssysteme, und lösen Sie es rechnerisch!

1974

Durch die Gleichung $y=3x-1$ ist eine Funktion gegeben, ihr Graph ist eine Gerade g. Geben Sie die Gleichung einer anderen Funktion an, deren Graph parallel zu der Geraden g verläuft!

1973

a) Zeichnen Sie die Punkte A $(-4;\ 1)$ und B $(0;\ 3)$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem!
b) Zeichnen Sie durch diese beiden Punkte die Gerade g! Geben Sie die Gleichung der durch g dargestellten Funktion an!
c) Spiegeln Sie die Gerade g an der Abszissenachse, und bezeichnen Sie das Spiegelbild mit g'!
d) Berechnen Sie den spitzen Winkel, den die beiden Geraden g' und g einschließen!

1972

Gegeben sind zwei Funktionen f_1 und f_2 mit den Gleichungen

$$\begin{array}{l|l|l} \text{I} & f_1(x)=y=2x+1, & \\ \text{II} & f_2(x)=y=x^2+2x-3 & \text{mit } x \in P. \end{array}$$

a) Zeichnen Sie den Graph der Funktion f_1 in ein rechtwinkliges Koordinatensystem!
b) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f_1!
c) Der Graph der Funktion f_2 ist eine Parabel.
Berechnen Sie die Koordinaten des Scheitels, und zeichnen Sie die Parabel in das bei Teil a) verwendete Koordinatensystem!
d) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f_2!
e) Die Graphen der Funktionen f_1 und f_2 schneiden sich in den Punkten P_1 und P_2. Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte an!

1971

Gegeben ist eine Funktion mit der Gleichung $y=\frac{1}{2}x$; (x reell).
a) Berechnen Sie für diese Funktion die zu den angegebenen x-Werten gehörenden y-Werte!

x	-4	$+1$	$+3$
y			

(Übertragen Sie diese Tabelle auf Ihr Arbeitsblatt!)
b) Zeichnen Sie den Graph g_1 dieser Funktion in ein rechtwinkliges Koordinatensystem!
c) Zeichnen Sie die Gerade g_2, die parallel zu g_1 verläuft und durch den Punkt P_1 $(0;\ -3)$ geht! Geben Sie die Gleichung der durch g_2 dargestellten Funktion an!
d) Spiegeln Sie die Gerade g_2 an der y-Achse, und zeichnen Sie das Spiegelbild!

1970

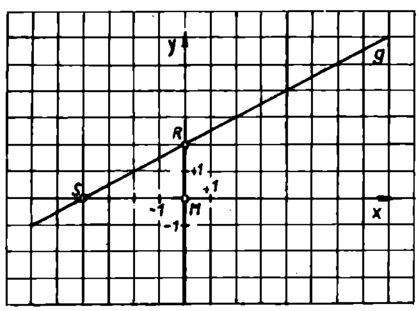
Gegeben sind zwei Funktionen mit den Gleichungen

$y=2x$
und $y=-x+6$ $\qquad$ (x reell).

a) Die Graphen dieser Funktionen sind Geraden. Zeichnen Sie die zwei Geraden in ein rechtwinkliges Koordinatensystem!
(Koordinateneinheit: 1 cm)
b) Die beiden Geraden schneiden die x-Achse in den Punkten P und Q. Geben Sie die Koordinaten der Punkte P und Q an!
c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der beiden Geraden!
d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks PQS (in Quadratzentimetern)!

1969

Übertragen Sie die Abbildung auf Millimeterpapier!



a) Geben Sie die Gleichung der linearen Funktion an, die in der Abbildung durch die Gerade g graphisch dargestellt ist!
b) Zeichnen Sie durch den Punkt P $(0;\ 5)$ die Parallele zur x-Achse! Diese Parallele schneidet die Gerade g im Punkt T.
c) Geben Sie die Koordinaten des Punktes T an!
d) Beweisen Sie, daß die Dreiecke MRS und RTP ähnlich sind!

Abu Raihan Biruni
(943 bis 1048)

Porträt eines Wissenschaftlers

Ich habe das getan, was jeder auf seinem Fachgebiet tun muß – mit Hochachtung die Bemühungen der Vorgänger in sich aufnehmen und ohne Befangenheit ihre Fehler korrigieren.
(*Biruni* – „*Mas'ud-Kanon*“)

Ein Plenum der sowjetischen Gesellschaft der Wissenschaftshistoriker war im Jahre 1973 zwei Jubiläen gewidmet: dem 500. Geburtstag *Nikolaus Kopernikus*' und dem fast gleichzeitigen 1000. Geburtstag von *Abu Raihan Biruni*.
In der Usbekischen und der Tadshikischen Sozialistischen Sowjetrepublik, im Iran und in Afghanistan, in Syrien und Indien – überall, wo *Biruni* lebte und arbeitete, zählt man ihn zu den hervorragenden Vertretern der Geschichte des Landes. Orientalisten nennen die erste Hälfte des 11. Jahrhunderts „Epoche des Biruni“.
Seine Lebenszeit im Übergang vom ersten zum zweiten Jahrtausend – Ende des 10. und Anfang des 11. Jahrhunderts – fällt in die Periode des Aufblühens der Völker Mittelasiens, in die sogenannte „Östliche Renaissance“. Die schnelle Entwicklung des Bauwesens und der Bautechnik verlangte Kenntnisse der Mathematik und vor allem der Geometrie. Die Hauptwand mit den Nischen in moslemischen Tempeln – den Moscheen – muß, so verlangt es der Islam, in Richtung Mekka stehen. Die Ausrichtung der Moscheen und die Entwicklung der Handelsbeziehungen, d. h. die Land- und Seereisen, verlangten Kenntnisse der Astronomie. Zu Recht gilt *Abu Raihan Biruni* als einer der bedeutenden Mathematiker und Astronomen der Östlichen Renaissance.
Biruni wurde am 4. September 973 in Kjat, der alten Hauptstadt von Choresm, geboren. (Die ehem. Stadt Kjat befindet sich auf dem Territorium der Usbekischen SSR. Sie heißt jetzt Biruni-Stadt.) Sein Lehrer und Erzieher war der in jener Zeit bekannte Mathematiker und Astronom *Abu Mansur ibn Irak*, ein Verwandter des *Schah von Choresm*. Schon mit 17 Jahren begann *Biruni* astronomische Beobachtungen durchzuführen und fünf Jahre später konstruierte er selbständig astronomische Geräte, bestimmte und präzisierte die Koordinaten von 600 geographischen Punkten, baute einen Globus mit einem Durchmesser von 5 m, auf welchem er alle in jener Zeit bekannten Städte, Meere und Berge markierte. In dieser Periode schrieb er eine wichtige Abhandlung über Kartographie, wo erstmals die Projektion der Halbkugel auf eine Ebene vorgeschlagen wurde. Diese Projektion wird auch heute von Kartographen für die Darstellung der Erdhalbkugel angewandt.
In den nachfolgenden Jahren lebte *Biruni* in einer kleinen Stadt, die heute zu Teheran gehört, in Gorgan (Iran), in der neuen Hauptstadt des Choresmreiches – Urgentsch, in Ghazna (Afghanistan); er reiste nach Indien, wo er Sanskrit lernte und für die indischen Gelehrten die Werke *Euklids*, *Ptolemäus*' aber auch einige seiner eigenen Arbeiten in Sanskrit übersetzte. Nach der Rückkehr aus Indien verfaßte *Biruni* das hervorragende Werk „Indien“, in dem er die Geographie des Landes, seine Gebräuche, Geschichte, Religionen und hauptsächlich seine Wissenschaften, vor allem die Erfolge indischer Wissenschaftler auf dem Gebiet der Mathematik und Astronomie beschreibt.
Im August des Jahres 1027 beendete *Biruni* eine größere Abhandlung *Zur Berechnung von Sehnen im Kreis*, welche viele Aufgaben und Sätze aus der Geometrie und der Trigonometrie enthält, aber auch wertvolle Fakten zur Geschichte der Mathematik und Astronomie im Orient. Einen interessanten Lehrsatz aus diesem Buch findet der Leser am Ende dieses Artikels.
Im Jahre 1037 wurde die wichtigste Arbeit von *Biruni*, der Mas'ud Kanon – eine echte Enzyklopädie der Astronomie, der Mathematik und aller mit ihnen verbundenen Wissenschaften – beendet. Im ersten Buch wird das Weltbild (das Ptolemäische System) dargelegt, im zweiten Buch – die Kalendersysteme und Fragen der Chronologie. Das dritte Buch ist der Trigonometrie und der Geometrie gewidmet. Hier findet man eine Anzahl verschiedener Formeln, darunter die für $\sin(\alpha \pm \beta)$ und $\cos(\alpha \pm \beta)$, für Funktionen mit doppeltem und halbem Winkel, es wird die Aufgabe zur Berechnung von $\sin 1°$ gelöst u. a. m. Indem *Biruni* den Umfang eines regelmäßigen 180-Ecks zur näherungsweisen Berechnung der Länge des Kreisumfangs verwendete, erhält er den ziemlich genauen Wert von 3,141 für die Zahl π. Im Buch werden einige Lösungen der Aufgabe zur Dreiteilung des Winkels mit Hilfe eines Zirkels und eines Lineals beschrieben, es werden kubische Gleichungen gegeben, auf das zwei markierte Punkte enthält, die die Lösung dieser antiken Aufgabe führt. (Allgemein ist diese Aufgabe nicht lösbar.)
Durch Anwendung von Näherungsmethoden berechnete *Biruni* die Länge der Seite eines einem Kreis einbeschriebenen regelmäßigen 9-Ecks, d. h., er bestimmte die Sehnenlänge für einen Winkel von 40°. Indem er die durchgeführten Schlüsse verallgemeinerte, konnte *Biruni* ein allgemeingültiges Näherungsverfahren zur Lösung solcher Aufgaben vorschlagen, welches seinem Wesen nach das heutige Iterationsverfahren (ein Verfahren aufeinanderfolgender Näherungen) vorwegnahm.
Wie alle Mathematiker des Mittelalters, benutzte *Biruni* das Sexagesimalsystem. Er stellte eine Tabelle der Sinuswerte (mit einer Schrittweite von 15′) und der Tangenswerte (mit einer Schrittweite von 1°) von jeweils vier Sexagesimalstellen auf und verwies auch auf die Regeln zur linearen und quadratischen Interpolation. In dem bereits genannten dritten Buch beweist *Biruni* solche für die Astronomie und Geodäsie wichtigen Sätze, wie den ebenen und den sphärischen Sinussatz, den sphärischen Tangenssatz und erweitert gleichzeitig den Zahlbegriff.
Bis zu *Biruni* wurden als Zahlen nur die natürlichen Zahlen bezeichnet, evtl. noch die Brüche, die man als Zahlteile dieser oder jener Einheit auffaßte; Verhältnisse wurden nur als Verhältnisse zweier natürlicher Zahlen betrachtet. Durch Einführung von Maßzahlen in der Geometrie erweiterte *Biruni* den Zahlbegriff, führte irrationale Verhältnisse ein und veränderte nach seinen eigenen Worten die Lehre von den Zahlen vom Speziellen zum Allgemeinen. Unter Verwendung der heutigen Terminologie könnte man sagen, daß *Biruni* bis zur Menge der positiven reellen Zahlen vorgestoßen ist.
Das vierte Buch des Mas'ud-Kanon ist der Astronomie der Sphären gewidmet, das fünfte Buch der Geodäsie und der Geographie. Das sechste, siebente und achte Buch beschreiben die Bewegung der Sonne, des Mondes und die Sonnen- bzw. Mondfinsternisse. Im neunten Buch wird ein Katalog von 1029 hellen Sternen gegeben, das zehnte Buch berichtet über die Planetenbewegungen. Das letzte, elfte Buch ist der Astrologie und den Kenntnissen gewidmet, die für das Wahrsagen notwendig sind.
An seinem Lebensende verfaßte *Biruni* noch zwei wichtige Arbeiten: Mineralogie – eine Sammlung von Fakten über das Erkennen von Edelsteinen – und Pharmakologie – ein Buch über Arzneimittel (welches *Biruni* nicht vollenden konnte).
Abu Raihan Biruni starb am 11. 12. 1048 in Ghazna. „Zum Leben genügte ihm das Aller-

notwendigste", schrieb einer seiner Zeitgenossen im Jahre 1055. „*Biruni* war materiellen Reichtümern gegenüber gleichgültig und achtete die alltäglichen Dinge gering, er gab sich vollkommen dem Wissenserwerb hin, war ständig über die Bücher gebeugt, die er zusammenstellte. Seine Hand legte nie die Feder weg, seine Augen beobachteten ständig, und sein Herz war auf das Nachdenken gerichtet..."

Schon in seiner Jugend zeigte *Biruni* Neigung zum Wissenserwerb. „Als in unsere Gegend ein Fremder kam", schrieb *Biruni* später, „brachte ich ihm Getreide, Pflanzen, Früchte und anderes, erfragte, wie dies in seiner Sprache heiße und schrieb es auf." (Damit ist hier ein Auswanderer aus Byzanz gemeint.)

Im Buch Indien schrieb *Biruni* über seine Beziehungen zu indischen Gelehrten: „Zuerst nahm ich unter den indischen Astronomen die Stellung des Schülers zum Lehrer ein, da ich noch nicht ausreichend mit ihren Ergebnissen und Methoden vertraut war. Als ich im Bekanntmachen mit ihnen ein wenig vorankam, ihnen ursächliche Beziehungen zu erklären begann, einige logische Beweise demonstrierte und richtige Methoden der mathematischen Wissenschaft zeigte, kamen sie in großer Zahl zu mir mit dem Bestreben, nützliche Kenntnisse zu erwerben."

Eines der wichtigsten Ergebnisse der Arbeit *Birunis* war die Bestimmung des Erdradius durch eine sehr einfache und scharfsinnige Methode. Wenn von einem Berggipfel G der am weitesten entfernte Punkt E unter dem Winkel α zur Horizontalen zu sehen ist, so kann man bei Kenntnis der Höhe $\overline{MG}$ des Berges das Dreieck EGO berechnen (Bild 1).

Nachdem *Biruni* vom Gipfel eines hohen Berges inmitten einer gleichförmigen Ebene in Indien entsprechende Messungen vorgenommen hatte, fand er, daß ein Längenkreis (Meridian) (gemessen im heutigen Maßsystem) 40392,8 km lang ist, was der Abweitung am Äquator von 112,2 km entspricht. Zum Vergleich wollen wir erwähnen, daß nach heutigen Angaben ein Meridian 40008,55 km lang ist und die Abweitung am Äquator mit 111,13 km angegeben wird. Wie man sieht, waren *Birunis* Berechnungen überaus genau (und das vor 1000 Jahren!).

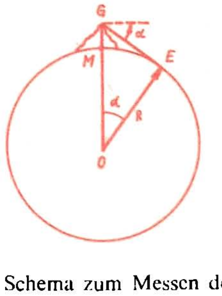


Bild 1: Schema zum Messen des Erdradius nach Biruni.

$$\frac{\overline{OE}}{\overline{OG}} = \frac{R}{R+H} = \cos\alpha$$

In der Abhandlung „Das spezifische Gewicht" beschreibt *Biruni* ein von ihm entwickeltes Gerät zur Bestimmung des spezifischen Gewichts. Erstmalig in der Geschichte der Physik berechnete *Biruni* hinreichend genau spezifische Gewichte vieler Metalle, Minerale und Flüssigkeiten. Hier einige der von *Biruni* erhaltenen Resultate und zum Vergleich die genaueren heutigen Werte:

Metalle	Spezifische Gewichte nach Biruni	heut. Werte
Gold	19,05	19,25
Quecksilber	13,58	13,55
Blei	11,33	11,34
Silber	10,43	10,50
Kupfer	8,70	8,93
Eisen	7,87	7,86
Zinn	7,31	7,28

Abu Raihan Biruni war einer der größten Astronomen und bedeutendsten Mathematiker des mittelalterlichen Ostens. Aber er war nicht nur Astronom und Mathematiker: seine Arbeiten auf dem Gebiet der Physik und Geographie, zur Geschichte und zur Chronologie, zur Mineralogie und Pharmakologie, seine philosophischen Auseinandersetzungen mit Abn Sina sind ein unschätzbarer Beitrag für alle diese Wissenschaften. *Biruni* kannte hervorragend die Logik des Aristoteles, er beherrschte mehrere Sprachen einschließlich Arabisch, Persisch und Sanskrit, er war ein Kenner der arabischen Poesie. Er wußte sehr viel und lernte sein ganzes Leben lang, strebte danach, mehr und mehr zu erfahren.

Die Besonderheit der wissenschaftlichen Methode *Birunis* besteht in der Verbindung sorgfältiger Beobachtungen mit einer tiefgründigen Analyse. *Biruni* war ein hervorragender Experimentator; ausgehend von Beobachtungen und von Fakten, die er aus Experimenten erhielt, war er bemüht, das Tatsachenmaterial kritisch zu durchdenken und zu vergleichen, einen logischen, ja wenn möglich, einen mathematischen Beweis seiner Behauptungen zu geben. Überall, wo er konnte, verglich *Biruni* die Besonderheiten und Errungenschaften der verschiedenen Völker; er wird zu Recht als einer der Begründer der historisch-vergleichenden Methode bezeichnet.

Jede Epoche bringt ihre Titanen hervor. Die vielseitigsten Gelehrten der antiken Welt waren *Demokrit* und *Aristoteles*, der Östlichen Renaissance – *Biruni* und *Ibn Sina*, der Europäischen Renaissance – *Leonardo da Vinci* und *René Descartes*.

...Es sind 1000 Jahre vergangen. In unseren Tagen ist die ganze Menschheit vom Leben und Wirken *Birunis* angetan. Seine Arbeiten wurden in russischer und usbekischer, in tadshikischer, in persischer, in arabischer und in vielen europäischen Sprachen herausgegeben. Das Jubiläum des 1000. Geburtstages von *Biruni* beging man in Mittelasien, wo er geboren wurde und aufwuchs, im Iran und Afghanistan, wo er wirkte, in arabischen Ländern, in deren Sprache *Biruni* seine Arbeiten veröffentlichte, in Indien, das er mit der Kultur der arabischen Länder bekannt gemacht hat. Das Jubiläum des Geburtstages von *Abu Raihan Biruni* war ein Festtag für die gesamte progressive Menschheit.

Versuche, den folgenden Lehrsatz aus *Birunis* Buch „Zur Berechnung von Sehnen im Kreis" zu beweisen:

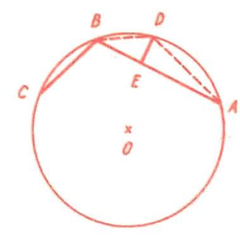


Bild 2: Eine Aufgabe von *Biruni*.
Es ist bekannt, daß $\overline{CD} = \overline{DA}$, $DE \perp AB$.
Es ist zu beweisen, daß $\overline{AE} = \overline{EB} + \overline{BC}$.

Wenn vom Punkt B eines Kreises (siehe Bild 2) zwei Sehnen BA und BC gezeichnet werden und vom Punkt D, dem Mittelpunkt des Kreisbogens AC, das Lot DE auf die größere Sehne AB gefällt wird, dann teilt der Punkt E den Polygonzug ABC in zwei gleiche Teile, d. h., $\overline{AE} = \overline{EB} + \overline{BC}$.

A. J. Halameisär
B. A. Rosenfeld

Wer löst mit?
alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 20. Juni 1976

Ma 5 ▪1497 In dem nachfolgenden Schema sind die Sternchen so durch Grundziffern zu ersetzen, daß man eine richtig gelöste Multiplikationsaufgabe erhält:

```
**4·*1
------
  2*4
  *3*
------
 ****
```

Andrea Städtke, Leninoberschule Wolgast

Ma 5 ▪1498 Franks Vater besitzt ein Kraftfahrzeug vom Typ *Trabant*, das eine vierstellige Autonummer hat. Die vierte Ziffer ist gleich dem Dreifachen der zweiten Ziffer. Die dritte Ziffer ist um 2 kleiner als die erste Ziffer. Die erste Ziffer ist um 3 kleiner als die vierte Ziffer. Die Quersumme der Autonummer beträgt 22.
Wie lautet diese Autonummer?

AG Junge Mathematiker, 5. OS Zittau

Ma 5 ▪1499 Ein Neuerer sagte nach der Realisierung eines Verbesserungsvorschlages zu seinem Arbeitskollegen: „Wenn ich zur Hälfte der Arbeitszeit, die ich bisher zur Herstellung dieses Werkstückes benötigte, noch 15 Minuten addiere, so ergibt das 3 Stunden und 45 Minuten." Welche Zeit benötigte dieser Neuerer bisher zur Anfertigung des Werkstückes? *Lehrer Dieter Knape, Jessen*

Ma 5 ▪1500 Frank und Uwe wollen in den Ferien mit dem Fahrrad an einen etwas entlegenen See zum Baden fahren. Sie haben zwei Möglichkeiten, an den See zu gelangen. Frank meint, daß sie auf der 15,8 km langen Talfahrt schneller ans Ziel kommen. Auf diesem Streckenabschnitt können sie eine mittlere Geschwindigkeit von $30\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ erreichen, wobei zu beachten ist, daß sie einen nicht befahrbaren Weg von 900 m Länge zu Fuß gehen müssen und dafür 10 min benötigen. Uwe meint, daß sie für die 15,5 km lange Fahrt durch das hügelige Gelände weniger Zeit benötigen. Dabei können sie eine mittlere Geschwindigkeit von $24\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fahren. Entscheide, wer von beiden recht hat!

Schüler Marko Hanke, Karl-Marx-Stadt

Ma 5 ▪1501 Die Schüler einer Oberschule hatten im letzten Vierteljahr insgesamt 240 kg Altmetall der Erfassungsstelle zugeführt. Der vierte Teil davon war Blei, der achte Teil Kupfer, der sechste Teil Zink und der Rest war Messing. Wieviel Kilogramm Blei, Kupfer, Zink und Messing wurden von diesen Schülern gesammelt?

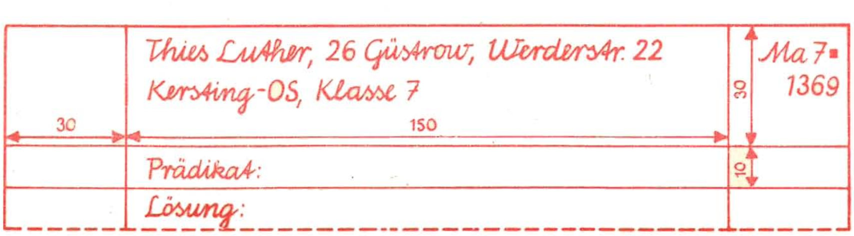
Schüler Frank Oswald, Radeberg, Erich-Weinert-OS

Ma 5 ▪1502 Von einer Altstoffsammelstelle wurden 60 Kisten mit je 42 Gläsern und 10 Kisten weniger mit je 49 Gläsern abgeholt. Auf dem Transport ging der siebzigste Teil der Gläser entzwei. Wie viele Gläser konnten der Glasindustrie nur als Bruchglas zugeführt werden?

Schülerin Carola Görtz, Wurbis

Ma 6 ▪1503 Erika hat sich eine dreistellige natürliche Zahl gedacht, die kleiner als 400 ist und folgende Eigenschaften besitzt:
a) Ihre zweite Ziffer ist um 1 größer als ihre erste Ziffer.
b) Die dritte Ziffer ist gleich dem Zweifachen der ersten Ziffer.
c) Die Hälfte der gedachten Zahl ist gleich einer Primzahl.
Welche Zahlen könnte Erika sich gedacht haben? *AG Junge Mathematiker, 5. OS Zittau*

Ma 6 ▪1504 In einem Korb befanden sich Äpfel und Birnen. Ralf entnahm diesem Korb sechs Früchte. Danach enthielt der Korb zehn Äpfel mehr als Birnen. Ralf meinte, im Korb hätten ursprünglich 29 Früchte gelegen.



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 197 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Mitarbeiter korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1975/76 läuft von Heft 5/75 bis Heft 2/76. Zwischen dem 1. und 10. September 1976 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/75 bis 2/76 erworbenen Karten *geschlossen* an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.
Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/76 veröffentlicht. Wer mindestens 8 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/75 bis 2/76) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1975/76 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück).
Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird. Redaktion *alpha*

Bärbel hingegen behauptete, das könne nicht stimmen. Wer von den beiden hat recht?

Kerstin Steinborn, Lübtheen

Ma 6 ▪1505 Ein Flugzeug fliegt vom Flughafen A zum 1 800 km entfernten Flughafen B. Das Flugzeug legt $\frac{3}{4}$ der Flugstrecke mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von $900\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ zurück. Mit welcher durchschnittlichen Geschwindigkeit setzte das Flugzeug den Flug fort, wenn es für die gesamte Flugstrecke eine Zeit von 2 Stunden und 6 Minuten benötigte?

Jörg Bruchertseifer, Dubna, UdSSR

Ma 6 ▪1506 Bei einem Sportfest errang Ursula mehr als 1450 Punkte, aber weniger als 1500 Punkte. Sabine errang $\frac{5}{6}$, Petra $\frac{6}{7}$ der Anzahl der von Ursula erreichten Punkte. Wieviel Punkte errang jede dieser Schülerinnen, wenn nur ganzzahlige Punktzahlen vergeben wurden?

Ines Schulze, Milmersdorf

Ma 6 ▪1507 Es ist sowohl die kleinste als auch die größte natürliche Zahl zu ermitteln, die durch 36 teilbar ist und in der Form 8*42** dargestellt werden kann. Für die Sternchen sind Grundziffern einzusetzen.

Andreas Fittke, Berlin

Ph 6 ▪1508 Gold besitzt die Eigenschaft, daß es sehr dünn ausgewalzt werden kann. *Blattgold* ist nur ungefähr $\frac{1}{9000}$ mm dick. Welche Masse an Gold braucht man für 1 m^2 Blattgold $\left(\varrho = 19{,}3\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$?

Ma 7 ▪1509 Läßt sich ein 25-Rubel-Schein so in 5-, 3- und 1-Rubel-Scheine wechseln, daß man insgesamt zehn Geldscheine, und zwar von jeder Sorte wenigstens einen erhält?

Schülerin Cordula Becker, Moskau (nach einer Aufgabe aus der Sowjetunion)

Ma 7 ▪1510 Zwei Kunden, die zufällig gleiche Geldbeträge in ihren Geldbörsen haben, treffen sich in einem Fachgeschäft für Weine. Der erste Kunde kauft Wein zum Preise von 5,60 M je Flasche; ihm verbleiben nach Bezahlung der Rechnung noch 4,00 M vom mitgeführten Geldbetrag. Der zweite Kunde kauft Wein zum Preise von 4,80 M je Flasche; ihm verbleiben nach dem Begleichen der Rechnung noch 2,40 M. Der erste dieser beiden Kunden hat zwei Flaschen Wein weniger erstanden als der zweite. Wieviel Flaschen Wein wurden von jedem dieser Kunden gekauft? Welchen Geldbetrag führten sie mit sich? *Lehrer Dieter Knape, Jessen*

Ma 7 ▪1511 Eine Brigade einer LPG sollte ein Feld in 14 Tagen bestellen. Sie übererfüllte diese Planvorgabe täglich um 2 ha und beendete die Aussaat bereits nach 10 Tagen. Wieviel Hektar wurden von dieser Brigade insgesamt bestellt? Wieviel Hektar sollten täglich nach Plan bestellt werden?

Lehrer Dieter Knape, Jessen

Ma 7 ▪1512 Die Bewohner eines Mietshauses hatten laut Mietvertrag die Kosten für die Zentralheizung selber zu tragen.
Würde jede Person des Hauses 10,00 M bezahlen, so wären 88,00 M der Heizkosten nicht gedeckt. Würde hingegen jede Person 10,80 M zahlen, so würden 2,5% mehr Geld vereinnahmt werden, als erforderlich wäre. Wieviel Personen wohnen in diesem Haus? Wie hoch sind die gesamten Heizkosten?

Lehrer Dieter Knape, Jessen

Schneller, Jungs, sonst kommen wir nie hoch!

Ph 7 ▪1513 Eine Erdgasquelle drückt in einer Stunde 15000 m^3 Gas von 1,8 at in die Leitung. Wieviel m^3 verliert das Innere der Quelle, wenn diese unter einem Druck von 75 at steht?

Ch 7 ▪1514 0,3 g Magnesium werden in einem Tiegel verbrannt. Wie groß ist die Masse des entstandenen Magnesiumoxids?

Oberstudienrat Dr. paed. R. Osterwald, EOS A.-H. Francke, Halle

Ma 8 ▪1515 Es seien a, b, c drei rationale Zahlen, von denen eine positiv, eine negativ und eine gleich Null ist. Ferner sei

$$\frac{a(c-b)}{b} > 0.$$

Welche von diesen drei rationalen Zahlen ist positiv, welche negativ und welche gleich Null? *Studienrat H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 8 ▪1516 Es sei ΔABC ein stumpfwinkliges Dreieck mit $\sphericalangle CAB = \alpha > 90°$. Ferner seien $\overline{BE}$ und $\overline{CF}$ die von den Eckpunkten B bzw. C ausgehenden Höhen dieses Dreiecks. Die Geraden BE und CF (also die Verlängerungen der beiden Höhen) mögen sich im Punkt S schneiden. Es ist zu beweisen, daß dann der Winkel $\sphericalangle CSB$ zwischen diesen Geraden gleich der Summe der beiden spitzen Winkel des Dreiecks ist.

Studienrat H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 8 ▪1517 Es sind alle Primzahlen p und q zu ermitteln, die die folgende Eigenschaft haben:
Unter den vier Zahlen 18, p, $p+q$, pq gibt es zwei, deren Produkt gleich dem Produkt der anderen beiden Zahlen ist.

Frank Bergner, Großenhain, 10. Kl.

Ma 8 ▪1518 a) Auf einem Tisch liegen zwei 5-Mark-Stücke, die sich gegenseitig berühren und bei denen in beiden Fällen die Ziffer 5 aufrecht steht (siehe Bild 1). Wie wird die Ziffer des oberen Geldstückes stehen, wenn dieses, ohne zu gleiten, auf dem unteren Geldstück abrollt und nach einem vollen Umlauf um dieses Geldstück wieder genau über dem unteren Geldstück liegt?

Bild 1

Bild 2

b) Es soll die entsprechende Aufgabe gelöst werden, wenn ein 5-Pfennig-Stück über einem 5-Mark-Stück liegt, dieses 5-Pfennig-Stück auf dem unteren Geldstück abrollt und nach einem vollen Umlauf wieder genau über dem unteren Geldstück liegt (siehe Bild 2).
Bemerkung: Der Durchmesser eines 5-Mark-Stückes beträgt 29 mm, der Durchmesser eines 5-Pfennig-Stückes 19 mm. *L.*

Ph 8 ▪1519 Von einer Steckdose, an der eine Spannung von 220 Volt gemessen wird, führt eine 2 mm dicke und 25 m lange Aluminiumleitung zu einem Kochherd, der eine Stromstärke von 12 A aufnimmt. Welche Spannung liegt am Kochherd? *H. Begander, Leipzig*

„...möchte bloß mal wissen, wo der ganze Gips bleibt!“

Ch 8 ▪1520 Es sei bekannt, daß 60 cm^3 eines Stoffes eine Masse von 90 g besitzen. Welches Volumen nehmen dann 150 g desselben Stoffes ein?

Ma 9 ▪1521 Man beweise den folgenden Satz:
Ist die Summe zweier Quotienten von rationalen Zahlen, die von Null verschieden sind, gleich 1, so erhält man die Summe der reziproken Werte dieser Quotienten, indem man das Produkt der beiden Divisoren durch das Produkt der beiden Dividenden dividiert. Für alle von Null verschiedenen rationalen Zahlen a, b, c, d gilt also:

Wenn $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=1$, so $\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{bd}{ac}$.

Studienrat H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 9 ▪1522 Es sei $ABCD$ ein Rechteck mit den Seitenlängen $\overline{AB}=a$ und $\overline{BC}=b$, wobei $a \neq b$ ist. Ferner seien die Seiten AB über B hinaus bis zum Punkt E, BC über C hinaus bis zum Punkt F, CD über D hinaus bis zum Punkt G, DA über A hinaus bis zum Punkt H so verlängert, daß $\overline{AB}=\overline{BE}$, $\overline{BC}=\overline{CF}$, $\overline{CD}=\overline{DG}$, $\overline{DA}=\overline{AH}$ gilt.
1. Man entscheide, ob dann das Viereck $EFGH$
a) ein Parallelogramm,
b) ein Rhombus,
c) ein Quadrat ist.
2. Man berechne das Verhältnis aus dem Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ und dem Flächeninhalt des Vierecks $EFGH$.

Studienrat H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 9 ▪1523 Es sind alle natürlichen Zahlen x, y, z mit $x \leq y \leq z$ zu ermitteln, für die die Gleichungen

$$x+y+z=46 \quad (1)$$
und
$$xyz=3060 \quad (2)$$
erfüllt sind.

Thomas Bienek, OS Schwepnitz, Kl. 8

Ma 9 ▪1524 Welchen Rest läßt die Zahl
$$7^{1975}+7^{1976}$$
bei der Division durch 588?

Olaf Raeke, OS V. Neubrandenburg, Kl. 9

Ph 8 ▪1525 Eine Granate mit einer Masse von 5 kg verläßt den Lauf des Geschützrohres mit einer Geschwindigkeit von $1200\ m \cdot s^{-1}$.
Berechnen Sie die auf die Granate wirkende Kraft im Lauf des Geschützrohres, wenn dort die gleichförmige Beschleunigung 0,01 s dauerte! Welche Arbeit wurde dabei erforderlich?

H. Begander, Leipzig

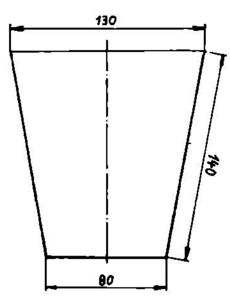
Ch 9 ▪1526 In einem Kaliwerk werden täglich 2300 kg Brom als Nebenprodukt gewonnen. Das Brom ist im Kalirohsalz zu 0,1% enthalten. Wieviel Tonnen Rohsalz müssen demnach täglich mindestens gefördert werden?

L. L.

Ma 10/12 ▪1527 Man beweise, daß für alle reellen Zahlen a
$0{,}35-(a-3{,}5)(4{,}5-a) > 0$ gilt.

Studienrat H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 10/12 ▪1528 Ein offener Blechbehälter, der die Form eines geraden Kreiskegelstumpfes und die in der Abbildung angegebenen Maße (in mm) hat, soll durch Tiefziehen aus einer kreisförmigen Blechscheibe (Platine) hergestellt werden.
a) Wie groß ist der Durchmesser der Blechscheibe (Platine)?
b) Wie groß ist das Volumen des Blechbehälters?
c) Es soll eine allgemeine Formel für die Berechnung des Platinendurchmessers aus d_1, d_2 und s angegeben werden, wobei
d_1 der Durchmesser der Grundfläche,
d_2 der Durchmesser der Deckfläche,
s die Mantellinie des Kegelstumpfes ist.



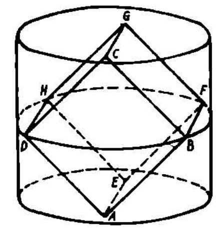
Hinweis zur Lösung: Man beachte, daß beim Tiefziehen der Flächeninhalt der Platine gleich dem Oberflächeninhalt des offenen Kegelstumpfes ist, und benutze die bekannten Formeln für die Grundfläche, den Mantel und das Volumen des Kegelstumpfes (Tabellen und Formeln, S. 34).

L.

Ma 10/12 ▪1529 Es seien a und b von Null verschiedene natürliche Zahlen. Man beweise, daß die Gleichung
$$a^{2x}+(ab)^x=b^{2x}$$
keine ganzzahlige Lösung x hat.

Hans-Reinhard Berger, stud. phys., Hohenstein-Ernstthal

Ma 10/12 ▪1530 Einem Würfel mit der Kantenlänge a sei ein gerader Kreiszylinder so umbeschrieben, daß genau eine Kante des Würfels in der Grundfläche, genau eine Kante in der Deckfläche des Zylinders liegt und daß alle anderen nicht auf diesen Kanten liegenden Eckpunkte des Würfels auf dem Mantel des Zylinders liegen (siehe Bild).



a) Man berechne den Radius, die Höhe und das Volumen des Zylinders aus der Kantenlänge a des Würfels.
b) Wie verhält sich das Volumen des umbeschriebenen Zylinders zu dem Volumen des Würfels?

Studienrat H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ph 10/12 ▪1531 An dem Seil eines Kranes hängt ein Bauteil und gerät in Schwingungen. Der Weg von links nach rechts ist 3 m, und er wird in 5 s zurückgelegt.
a) Berechnen Sie die Länge des Seils!
b) Berechnen Sie die Elongationen nach 2 s bzw. 5,1 min!

H. Begander, Leipzig

Ch 10/12 ▪1532 Wieviel m^3 SO_3 (Normzustand) können theoretisch durch Verarbeiten von 3 t Pyrit (Rösten, kat. Oxydation) hergestellt werden?

Oberlehrer Ing. H. Pelka, Leipzig

Achtung – alpha-Wettbewerb

Zur Erleichterung der Arbeit der Redaktion *alpha* bitten wir AGs, Zirkel, Klubs, Schulkollektive, *keine* Antwortkarten zwischen dem 1. und 10. September 1976 einzusenden. Wir erbitten *eine Liste* (mit Schulstempel) mit:
Name, Vorname, Wohnort, Anzahl der abgegebenen Antwortkarten (1975/76), Teilnahme am Wettbewerb (1 Jahr, 2 Jahre usw.) der einzelnen Teilnehmer des Kollektivs.
Geschwister senden ihre Antwortkarten *getrennt* ein.

Berufsbild Bauzeichner

Du gehst deine gewohnten Wege in der Stadt, siehst die vertrauten Bilder, ihre Alltäglichkeiten: auch die des Bauens. Die Stadt aus Stein, Glas, Stahl und Beton erzählt von ihren Erbauern und Bewohnern.
Die zwanzigjährige *Ute Krenz* ist beides. Als sie vor der Wahl stand, ob dieser oder jener Beruf, entschied sie sich fürs Bauzeichnen.
Auch du stehst vor Hunderten von Berufen. Welchen wählst du? Warum? Ute wollte Freude an ihrer Arbeit haben, sehen können, was aus ihren Mühen wird, mitmachen an den großen Veränderungen, unseres gesellschaftlichen Erbes und ein Kapitel Selbständigkeit bringen.
Was ist aus ihren Wünschen geworden? Als sie noch Schülerin war, lernte sie durch die Patenbrigade der Klasse eine Projektierungsabteilung des *VEB BMK Ingenieurhochbau Berlin* kennen. Sie durfte in den Ferien an einer Zeichenmaschine arbeiten, mit Feder und Tusche einen Zementsilo aufs Transparentpapier bringen. Das brachte sie gehörig ins Schwitzen.
Eine äußerst komplizierte Sache, damals. Sie hatte sogar ein bißchen Angst vor der Exaktheit dieser Tätigkeit bekommen.
Dann begann die Lehre: Statik, Bauphysik, Baukonstruktion, Projektionslehre, Fachkunde, BMSR, Datenverarbeitung, Elektronik... und mit der Zeit und der Übung kam das Können. Heute arbeitet sie selbständig an kleinen oder großen Bauzeichnungen und ist jedesmal stolz, wenn sie wieder eine Zeichnung tipp topp fertig hat. Während der Lehrzeit können die zukünftigen Bauzeichner entscheiden, in welche Richtung sie sich spezialisieren wollen: Wohnungsbau oder Industriebau? Ute zog den letzteren vor. Auch hier sind die vielfältigsten Möglichkeiten gegeben, angefangen von Rationalisierungsobjekten für die Industrie oder Bauvorhaben, Turn- und Schwimmhallen, Heizkraftwerke und ich weiß nicht, was noch alles. Künftig werden immer größere und interessantere Objekte projektiert und gebaut.
Dabei hilft Ute mit ihrer Arbeit als Bauzeichner. Ein wichtiger und notwendiger Beruf. Soll beispielsweise eine Turnhalle entstehen, übersetzt sie die in Form von Freihandskizzen festgehaltenen Gedanken der Ingenieure und Architekten in die technische Zeichnung. Damit schafft Ute das Verständigungsmittel zwischen dem Konstrukteur und der Baustelle. Genau und sauber arbeiten, darauf kommt es an, denn in der Bauausführung darf kein Fehler entstehen.
Eine Bauzeichnerin trägt dabei viel Verantwortung. Nach ihrer Zeichnung arbeiten die Bauleiter, Meister und Baufacharbeiter. Nach ihren Zeichnungen verändert sich das Gesicht der Stadt. Im zweiten Jahr der berufspraktischen Ausbildung lernte sie in der Projektierungsabteilung, in der sie heute arbeitet. Ute hatte bereits in der Lehre größere komplexe Zeichnungen wie Grundrisse, Schnitte, Fundamentalpläne usw. gefertigt. Durch diese Form der Ausbildung ist gesichert, daß die künftigen Bauzeichner innerhalb einer kurzen Einarbeitungszeit in der Projektierungsbrigade „zu Hause“ sind, ohne große Anfangsschwierigkeiten zu haben. Nach erfolgreichem Abschluß der Berufsausbildung bestehen für Bauzeichner unterschiedliche Einsatz- und Entwicklungsmöglichkeiten.
So kann man sich beispielsweise nach zweijähriger beruflicher Tätigkeit an der Betriebsakademie bewerben und Teilkonstrukteur werden oder an der Fachschule für Bauwesen ein Ingenieurstudium aufnehmen.
Wie du siehst, werden deine eventuellen Neigungen für ein spezielles Gebiet weitgehend berücksichtigt.
Ute weiß vom Wert ihrer Arbeit, die die Grundlage für neue Gebäude ist.
Geht sie durch die Stadt, sieht sie nicht nur die vertrauten Bilder.
Als die Weltfestspiele vor der Tür standen, zeichnete sie schon lange vorher die Festivalgaststätten. Lange bevor du ahnen konntest, daß es so etwas geben wird. „Es ist schön, der Zeit voraus zu sein“, meint Ute, „so erlebe ich archektonische Veränderungen unserer Stadt in meinen Vorstellungen und sehe sie Wirklichkeit werden.“

Silvia Stein, aus technikus 5/75

Bauzeichnerin *Ute Krenz*

Technische Zeichnerin *Karla Lippold*, VEB Stahlgießerei „Elstertal“, Silbitz

Der *Thälmann-Platz* in Halle mit der 350 m langen Hochstraße

Zwei verwandte geometrische Aufgaben

Die nachstehende leicht zu formulierende Kreisaufgabe erweist sich bei der Lösung als recht aufwendig, weil sie auf eine transzendente Gleichung führt. Es sei ein beliebiger Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r gegeben. Ein beliebiger Punkt P seiner Peripherie werde zum Mittelpunkt eines größeren Kreises gemacht, dessen Radius so zu bestimmen ist, daß der außerhalb des gegebenen Kreises gelegene Teil der Fläche dieses größeren Kreises ebenso groß ausfällt wie die gesamte Fläche des gegebenen. Man ermittle das hierzu notwendige Radienverhältnis $\lambda = \frac{\varrho}{r} (> 1)$.

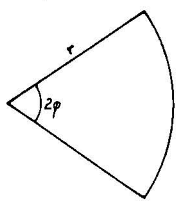


Bild 1 $A_{Sekt} = \phi r^2$

Unter Berücksichtigung der Inhaltsformel für Kreissektoren (Bild 1) $A_{Sekt} = \phi r^2$ (r = Kreisradius, 2ϕ = Öffnungswinkel des Sektors; ϕ bedeutet das Bogenmaß, außer wenn gelegentlich eine numerische Angabe im Gradmaß gemacht wird) ergibt sich aus der geforderten Flächengleichheit entsprechend Bild 2 der Ansatz

$$\pi r^2 = \pi\varrho^2 - \phi\varrho^2 - \phi r^2 + r^2 \sin\phi, \qquad (*)$$

wobei das Viereck $PAMB$, weil es Bestandteil beider Kreissektoren ist, doppelt abgezogen

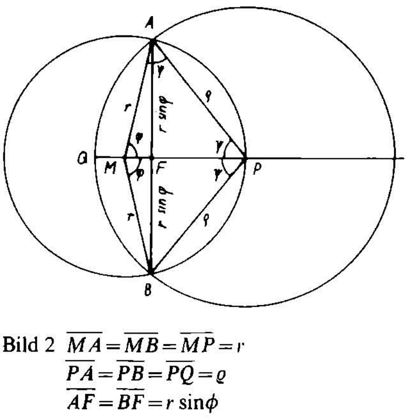


Bild 2 $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MP} = r$
$\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PQ} = \varrho$
$\overline{AF} = \overline{BF} = r \sin\phi$
$A_{Sekt(M,\,2\phi)} = \phi r^2$
$A_{Sekt(P,\,2\psi)} = \psi \varrho^2$
$A_{\square PAMB} = r \cdot r \sin\phi = r^2 \sin\phi$

wird, also einmal wieder hinzugefügt werden muß. Im gleichschenkligen Dreieck MPA gilt für die Basiswinkel $\sphericalangle APM = \sphericalangle PAM = \phi$, so daß aus dem Dreieck MPA folgt:

$2\psi + \phi = \pi$ oder $\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2}$. Wird dieser Wert in (*) eingesetzt, gleichzeitig (*) beiderseits durch r^2 dividiert und passend zusammengefaßt, so hat man zunächst

$\pi = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\phi}{2}\right)\lambda^2 - \phi + \sin\phi$. Nun gilt

$$\sin\frac{\phi}{2} = \frac{\varrho}{2} : r = \frac{\lambda}{2} \text{ oder } \lambda = 2\sin\frac{\phi}{2} \qquad (**).$$

Einsetzen in die vorige Gleichung liefert

$\pi = 2(\pi + \phi)\sin^2\frac{\phi}{2} - \phi + \sin\phi$ oder

$(\pi + \phi)\left(1 - 2\sin^2\frac{\phi}{2}\right) = \sin\phi.$

Berücksichtigt man noch $1 - 2\sin^2\frac{\phi}{2} = \cos\phi$ und dividiert nach dem Einsetzen beiderseits durch $\cos\phi$, so ergibt sich für die Variable ϕ die transzendente Gleichung

$$\tan\phi = \pi + \phi, \qquad (\square)$$

die ihren Namen deshalb trägt, weil in ihr die transzendente Funktion *Tangens* vorkommt. Ein geeignetes Verfahren zu ihrer Lösung, nämlich das der *schrittweisen Näherung*, wird durch die Betrachtung folgender Skizze

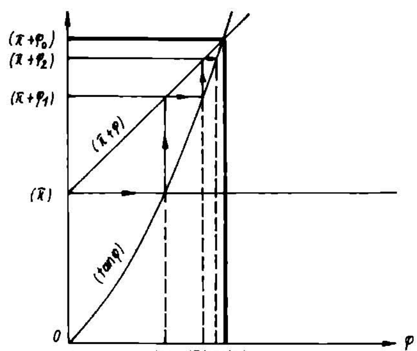


Bild 3

Da eine maßstabstreue Figur wenig anschaulich wirkt, wurde diese Prinzipskizze vorgezogen, die das Verfahren der *schrittweisen* Näherung gut verdeutlicht. Die Graphen stimmen im Prinzip mit den Beschriftungen überein. Wegen der numerischen Verschiedenheiten stehen letztere in Klammern.

(Bild 3) nahegelegt, in welcher die Graphen der beiden Funktionen $f(\phi) = \pi + \phi$ und $g(\phi) = \tan\phi$ angedeutet sind. Der gesuchte Lösungswert ϕ_0 wird offenbar durch die Abszisse des Schnittpunktes der Graphen von f und g geliefert. Dieser Wert kann schnell mit jeder verlangten Genauigkeit gewonnen werden, wenn man im Sinne der schrittweisen Näherung wie folgt vorgeht, wobei eine passende Tafel zu verwenden ist:

Zuerst wird ϕ_1 aus der Bedingung $\tan\phi_1 = \pi$ ermittelt, sodann ϕ_2 aus der Bedingung $\tan\phi_2 = \pi + \phi_1$, danach ϕ_3 aus $\tan\phi_3 = \pi + \phi_2$, usw. Wird in dieser Weise fortgefahren, bis die Werte von ϕ auf beiden Seiten im Rahmen der zugrundegelegten Stellenzahl übereinstimmen, so ist ϕ_0 so genau wie jeweils gewünscht angenähert.

Der eigentlich zu ermittelnde Wert von λ folgt dann aus (+) zu $\lambda_0 = 2\sin\frac{\phi_0}{2}$. In nachstehender Übersicht sind die Näherungsschritte zusammengestellt. Dabei wurde die Genauigkeit so gewählt, daß ein einwandfreier Vergleich mit dem Ergebnis der (anschließend dargelegten) zweiten Aufgabe möglich ist.

$\tan\phi_1 = \pi$; $\phi_1 = 72{,}343° \mathrel{\hat=} 1{,}26262$;
$\pi + \phi_1 = 4{,}40421$;
$\tan\phi_2 = 4{,}4042$; $\phi_2 = 77{,}208° \mathrel{\hat=} 1{,}34753$;
$\pi + \phi_2 = 4{,}48912$;
$\tan\phi_3 = 4{,}4891$; $\phi_3 = 77{,}442° \mathrel{\hat=} 1{,}35161$;
$\pi + \phi_3 = 4{,}49320$;
$\tan\phi_4 = 4{,}4932$; $\phi_4 = 77{,}453° \mathrel{\hat=} 1{,}35180$;
$\pi + \phi_4 = 4{,}49339$;
$\tan\phi_5 = 4{,}4934$; $\phi_5 \mathrel{\hat=} 77{,}453° = \phi_0$.
$\lambda_0 = 2\sin\frac{\phi_0}{2} = 2 \cdot 0{,}62561$ und
$\lambda_0 = 1{,}25122$.

Da eine allgemeine Begründung des Verfahrens der schrittweisen Näherung hier zu weitläufig wäre, soll stattdessen auf andere Art die Existenz einer Lösung im angegebenen Bereich von ϕ nachgewiesen werden:

Man findet für die stetige und monoton wachsende Funktion $h(\phi) = \tan\phi - (\pi + \phi)$ mit Hilfe von Tafelwerten $h(77{,}4°) = -0{,}01873$ und $h(77{,}5°) = 0{,}01659$ und entnimmt daraus, daß nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle ϕ_0 existieren und die Ungleichung $77{,}4° < \phi_0 < 77{,}5°$ befriedigen muß. Nach der bekannten regula falsi ergibt sich daher

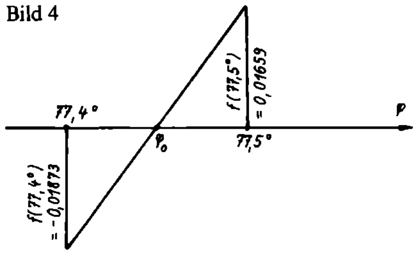
$$\frac{\phi_0 - 77{,}4°}{77{,}5° - 77{,}4°} = \frac{0{,}01873}{0{,}01873 + 0{,}01659} = 0{,}53029,$$

also

$\phi_0 = 77{,}4° + 0{,}53029 \cdot 0{,}1° = 77{,}453°$.

Damit ist nicht nur die Existenz einer Nullstelle von $h(\phi)$ im angegebenen Bereich bewiesen, sondern zugleich der vorher erhaltene numerische Wert von ϕ_0 bestätigt worden (Bild 4). Die soeben gelöste Aufgabe steht in gewisser Beziehung zu einer anderen, deren Lösungsansatz nicht mehr so elementar wie in der ersten aufgestellt werden kann, obwohl die Fragestellung besonders einfach und anschaulich geschildert werden kann:

Bild 4



Auf einer Wiese steht ein kreisrunder Turm vom Radius r. Im Randpunkt P des Turmes ist mit einem Strick der Länge $\overline{PQ}$ eine Ziege angepflockt. Wie lang ist $\overline{PQ}$ zu wählen, damit der der Ziege zum Abweiden zugängliche Teil der Wiese ebenso groß ausfällt wie der Querschnitt des Turmes?

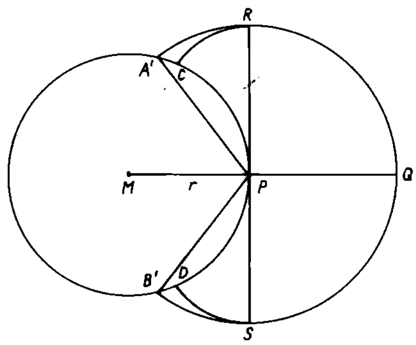


Bild 5 $\overline{PA'}=\overline{PB'}=\overline{PR}=\overline{PS}=\overline{PQ}$
$\overline{PC}=\overline{PD}=\overline{PQ}$

Ein Vergleich mit der vorigen Fragestellung zeigt (Bild 5), daß der in der Figur rechts von der Tangente in P gelegene Halbkreis vom Radius $\overline{PQ}$ gegenüber dem entsprechenden Halbkreis der vorigen Aufgabe keinen Unterschied aufweist, daß aber der auf der anderen Seite der Tangente gelegene Teil der *Weidefigur* nicht mehr Teilstück eines Kreises vom Radius $\overline{PQ}$ ist, weil sich der Strick dort an den Grundkreis des Turmes anlegt, so daß nicht die Punkte A' und B', sondern nur die näher bei P gelegenen Punkte C und D erreichbar sind.

Für die exakte Berechnung der abgeweideten Fläche sind die Hilfsmittel der Integralrechnung erforderlich, so daß sie hier nicht gezeigt werden kann. Man erkennt aber anschaulich, daß $\overline{PQ}$ ein wenig größer als der Wert von ϱ in der ersten Aufgabe sein muß. Wäre nämlich $\overline{PQ}=\varrho$, so würde das Fehlen der Flächen der beiden gebogenen spitzen Figuren $A'RC$ und $B'SD$ die vorher bestehende Flächengleichheit aufheben. Gerade um diese (offenbar kleinen) Flächen auszugleichen, muß $\overline{PQ}>\varrho$ genommen werden.

Allerdings wird man auf Grund der Anschauung vermuten dürfen, daß der Unterschied vergleichsweise nur klein zu sein braucht, um die Flächengleichheit wieder herzustellen. Trotzdem ist es auf den ersten Blick erstaunlich, wie gering in Wahrheit der Unterschied ist. Setzt man nämlich analog zur ersten Aufgabe für das Vergrößerungsverhältnis $\mu=\frac{\overline{PQ}}{r}$ an, so folgt aus der hier unterdrückten Rechnung, daß μ einer kubischen Gleichung genügen muß, die man zweckmäßig in der Form schreibt

$$\frac{1}{3\pi}\mu^3+\frac{1}{2}\mu^2-1=0.$$

Als hier allein interessierende Lösung findet man $\mu_0=1{,}25657$, also einen gegenüber λ_0 nur um 0,00535 vergrößerten Wert, so daß der Unterschied sich sogar in einer relativ groß angelegten Figur nicht gut verdeutlichen läßt. Deshalb wurde hier auf diesen (zeichnerischen) Vergleich verzichtet. Die beiden anderen Lösungen sind negativ.

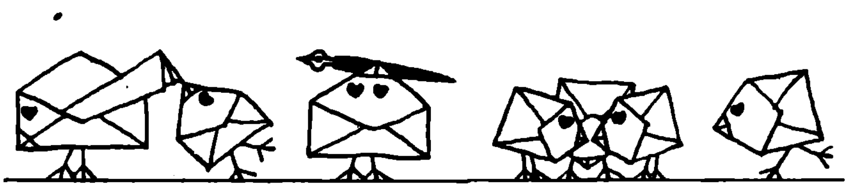
Etwas besser dagegen tritt der Lageunterschied zwischen den Punkten A' und C (bzw. B' und D) hervor, der durch den Unterschied zwischen den Sehnen PA' (bzw. PB') und den Bogen $\overset{\frown}{PC}$ (bzw. $\overset{\frown}{PD}$) entsteht.

Insgesamt läßt sich sagen: Man kann den aus einer transzendenten Gleichung berechneten Wert λ_0 als einen recht brauchbaren Näherungswert für den aus einer kubischen Gleichung (allerdings mit transzendenten Koeffizienten) gewonnenen Wert μ_0 ansehen. Wesentlich ist dabei der Umstand, daß durch den Näherungswert die Anwendung der Integralrechnung erspart wird.

Dieses instruktive Wechselverhältnis zwischen zwei prinzipiell verschiedenen, aber praktisch verwandten Aufgaben mit numerisch annähernd übereinstimmenden Lösungen dürfte ein gewisses Interesse beanspruchen können.

H. Karl

Wenige Tage nach der Übergabe dieses Beitrags erhielten wir die schmerzliche Nachricht, daß unser Redaktionsmitglied *Prof. Dr. H. Karl* verstorben ist. Er war uns allen seit Gründung der Zeitschrift ein aktiver Freund und Helfer. Wir werden ihm ein ehrendes Gedenken bewahren.
Das Redaktionskollegium alpha



Leser schreiben an alpha

▪ ... Als Zirkelleiter der Mathe-AG (Kl. 6/8) unserer Schule regte ich die Teilnehmer an, sich mit den Aufgaben zu beschäftigen. Nahm bisher nur ein Schüler am *alpha*-Wettbewerb teil, sind es jetzt bereits 10 AG-Mitglieder. Die Wettbewerbsaufgaben, aber auch einige Beiträge der *alpha* trugen zur besseren Gestaltung der Zirkel und unserer monatlichen Mathematikwandzeitung bei. Vielleicht können wir bald einmal selbst erdachte Aufgaben an *alpha* einsenden... *Renate Kutschank, AG-Leiter an der OS Deutschenbora*

▪ ... Mich interessieren besonders Beiträge, die die Verbindung zwischen Mathematik und gesellschaftlicher Praxis aufzeigen. Deshalb habe ich mich auch gefreut, daß neben Mathematik- jetzt auch Physik- und Chemieaufgaben in den Wettbewerb aufgenommen wurden... *Rolf Wendler, Sömmerda (Kl. 12)*

▪ ... Mit großer Spannung erwarten unsere Schüler jedesmal Dein Erscheinen, liebe *alpha*. Insbesondere erwartet Dich der Wandzeitungsredakteur unserer AG Mathe. Die Mitglieder der AG haben sich unter anderem die Aufgabe gestellt, allen Schülern unserer Schule die Aufgaben des Wettbewerbs zugänglich zu machen. Abos und Teilnahme am Wettbewerb sind gestiegen. Liebe *alpha*! Du bist mir bei einer interessanten Gestaltung der AG ein guter Freund und Helfer! Dafür danke ich Dir ganz herlich... *Ilse Wille, Fachl. f. Mathe H.-Eisler-OS Wusterhusen*

▪ ... Schon als Schülerin der 5. Klasse nahm ich am Wettbewerb teil. Es freut mich immer, solche schöne und spannende Aufgaben zu lösen. Noch größer ist die Spannung, wenn die Antwortkarten eintreffen. In diesem Schuljahr nehme ich selbstverständlich wieder am Wettbewerb teil. *Silke Gabriel, Wismar (Kl. 6)*

▪ ... *alpha* ist einfach Klasse. Besonders interessant war das „Kleine Mathematik-Sprachlexikon“. Auch mein Vati löst gern in der *alpha*... Weiter so viele Aufgaben!... *B. Domaschke, Seifhennersdorf (Kl. 7)*

▪ ... Ich komme aus der Demokratischen Republik Vietnam und lerne z. Z. am Herder-Institut in Leipzig Deutsch. Heute kaufte ich erstmals die *alpha*. Sie ist für mich sehr interessant. Darf ich am Wettbewerb teilnehmen? *Lê tuyên Ibnân*

Lieber Freund! Wir freuen uns auf Deine Teilnahme am Wettbewerb. Im vergangenen Schuljahr gingen 402 Lösungen aus dem Ausland ein. Red. *alpha*

aufgepaßt – nachgedacht – mitgemacht

Aufgaben speziell für Klassen 4 bis 6

alpha-Wandzeitung

Klasse 4

▲1▲ Die letzten zwei Ziffern einer dreistelligen Zahl sind Nullen.
Nenne Teiler dieser Zahl!

▲2▲ Man weiß, daß sowohl x als auch y durch $z (z \neq 0)$ teilbar sind.
Was kann man über die Teilbarkeit der Summe $(x+y)$, der Differenz $(x-y)$ bzw. des Produktes $(x \cdot y)$ aussagen?

▲3▲ Es sind zwei Geraden gegeben, die einander schneiden. Kann man eine dritte Gerade so zeichnen, daß insgesamt
a) drei Schnittpunkte vorhanden sind,
b) zwei Schnittpunkte vorhanden sind,
c) ein Schnittpunkt vorhanden ist,
d) mehr als 3 Schnittpunkte vorhanden sind?

▲4▲ Gegeben ist das Dreieck ABC.
Um was für Dreiecke handelt es sich?
$\overline{AB} = \overline{BC} + \overline{CA}$; $\quad \overline{AB} > \overline{BC} = \overline{CA}$
$\overline{AB} < \overline{BC} = \overline{CA}$; $\quad \overline{AB} < \overline{BC} < \overline{CA}$
$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$.

▲5▲ Fülle die Tabelle vollständig aus!

x	y	$z = x-y$	$875-z$
105	23		
	97	129	
	11		832

▲6▲ Welche Vielfachen von 1000 erfüllen die Ungleichung
$2000 + k < 5000$?

▲7▲ Untersuche, nach welcher Vorschrift die angefangenen Folgen gebildet sein könnten:
7, 9, 11, 13, ..., ..., ..., ...,
27, 30, 33, 36,
27, 53, 79, 105,
198, 180, 162, 144,
100, 90, 81, 73,
100, 81, 64, 49!

▲8▲
```
4042 : 8* = 4*        48* · 7 = **16
344
 602
 602
  ./.
```

▲9▲ Eine Fußballmannschaft gewann dreimal so viele Spiele als sie verlor. Vier Spiele verliefen unentschieden. Sie trug insgesamt 28 Spiele aus.
Wieviel Spiele gewann diese Mannschaft?

▲10▲ Bestimme z!
$10^3 + z = 10^4$
$z - 7 \cdot 10^1 = 10^3$
$z \cdot 10^4 = 2 \cdot 10^5$
$10^6 : z = 5 \cdot 10^5$

▲11▲ A und B haben zusammen 10 Mark, A und C zusammen 19 Mark, B und C zusammen 23 Mark in ihren Geldbörsen.
Wieviel Mark hat jeder bei sich?

▲12▲ Löse diese Ungleichungen!
$622589 + c < 622593$ $\quad 83 < 28 \cdot x < 141$
$100003 - d > 99998$ $\quad 74 > 650 : x > 64$

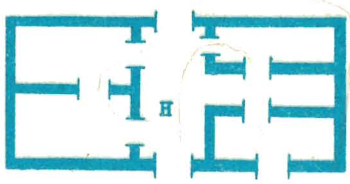
Klasse 5

▲1▲ Nach einem Mathematikwettbewerb wurde ein Pionier gefragt, wieviel Punkte er bekommen habe. Scherzhaft antwortete er: „Wenn man zu der Zahl meiner Punkte 10 hinzufügt und die Summe verdoppelt, so fehlen mir noch 10 Punkte an 100."

▲2▲ Wie viele Möglichkeiten hat RITA, die Buchstaben ihres Namens in allen möglichen Reihenfolgen zu schreiben? Schreibe sie auf!

▲3▲
```
154*5* : **7 = 2**        ABA · BB
***4                      --------
----                           BCB
2675                           BCB
****                      --------
----                          BDDB
 ****
 ****
 ----
    0
```

▲4▲ Du siehst den Grundriß eines Fabrikgebäudes. Vom Hofe H aus soll der Nachtwächter durch alle Tore genau einmal gehen und hinter sich abschließen.
Ist das möglich? Wenn ja, wo endet der Rundgang?



▲5▲ Setze für o jeweils ein Rechenzeichen so ein, daß wahre Aussagen entstehen! Gibt es mehrere Möglichkeiten?
a) $35 o 10 o 7 = 52$ $\quad$ d) $10 o 0 o 1 = 0$
b) $25 o 25 o 0 = 50$ $\quad$ e) $42 o 42 = 1$
c) $(19 o 1) o (0 \cdot 19) = 0$

▲6▲ Welche natürliche Zahlen x erfüllen nachfolgende Ungleichungen?
a) $6x < 19$ $\quad$ c) $30 < x + 7 \leq 54$
b) $x + 18 > 29$ $\quad$ d) $50 \leq 7x - 2 \leq 54$
e) $40 > 14x + 1 > 30$

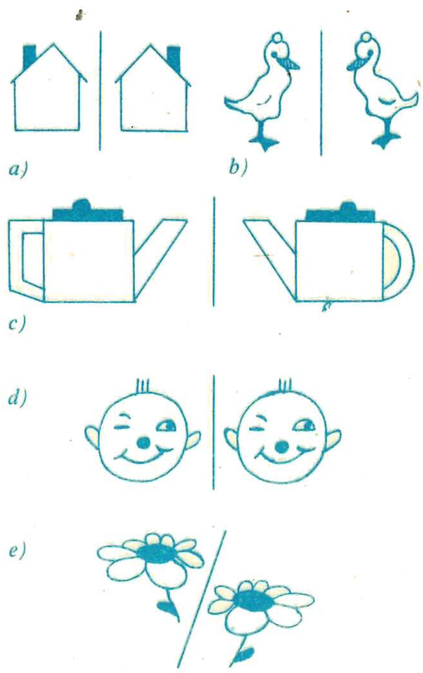
▲7▲ Für alle natürlichen Zahlen x gilt:
$x * 0 = 0$ $\quad x ** = 1$
$0 * x = x$ $\quad x * x > x$
$x * 1 = 1$

▲8▲ a) Kann man ein Rechteck zeichnen, dessen Umfang 42 cm und dessen Flächeninhalt $20\ \text{cm}^2$ beträgt?
b) Geht dasselbe mit $u = 41$ cm und $A = 20\ \text{cm}^2$?
c) Oder mit $u = 40$ cm und $A = 100\ \text{cm}^2$?
d) Oder mit $u = 10$ cm und $A = 25\ \text{cm}^2$?
e) Oder mit $u = 9$ cm und $A = 9\ \text{cm}^2$?

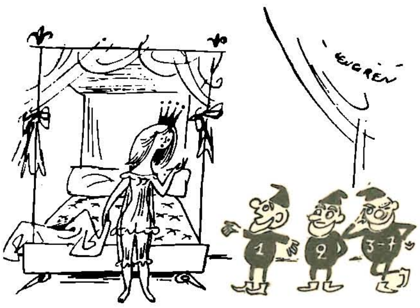
▲9▲ Vervollständige folgende Tabelle!

Bruch	erweiterter Bruch	Erweiterungszahl
$\frac{7}{13}$		7
$\frac{17}{20}$	$\frac{51}{60}$	
	$\frac{50}{90}$	10
$\frac{4}{7}$		13
$\frac{5}{12}$	$\frac{40}{96}$	

▲10▲ In welchen Beispielen ist die eine Figur nicht das Spiegelbild der anderen?



▲11▲ Uwe sagt: Mein Vater ist 42 Jahre alt. Mein Vater ist zwei Jahre älter als meine Mutter. Meine Mutter ist doppelt so alt wie mein Bruder und ich. Ich bin zwei Jahre jünger als mein Bruder.
Wie alt sind Uwe, sein Bruder und seine Mutter?



„Nichts zu machen, Eure Hoheit –
keine Leute, keine Leute!“

Klasse 6

▲1▲ Welche Aussagen sind wahr, welche sind falsch?

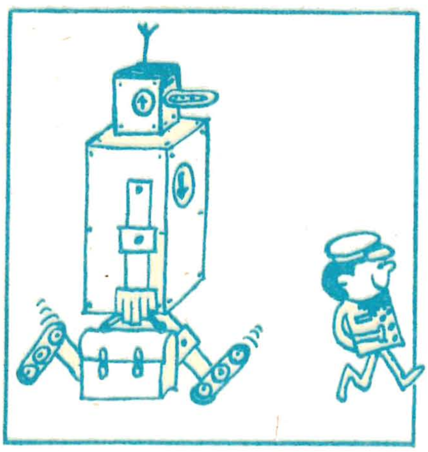
a) Die Summe zweier Nebenwinkel beträgt 180°.
b) Scheitelwinkel sind kongruent.
c) Nebenwinkel sind nicht kongruent.
d) Es gibt kongruente Nebenwinkel.
e) Wenn zwei Winkel kongruent sind, dann sind es Nebenwinkel.
f) Wenn zwei Winkel kongruent sind, dann sind es Scheitelwinkel.
g) Wenn zwei Winkel nicht gleich groß sind, sind es keine Scheitelwinkel!
h) Wenn zwei Winkel nicht gleich groß sind, sind es Nebenwinkel.

▲2▲ Versuche 20 so in zwei Summanden zu zerlegen, daß

- jeder durch 5 teilbar ist,
- genau einer durch 5 teilbar ist;
- keiner durch 5 teilbar ist!

▲3▲ Welche der folgenden Ausdrücke sind Aussagen? Gib von jeder Aussage an, ob sie wahr oder falsch ist!

a) Nicht alle natürlichen Zahlen haben einen Vorgänger.
b) Alle Dreiecke sind rechtwinklig.
c) $(3+7):5$
d) $(3+7):5=30$
e) x ist durch 3 teilbar.
f) 9 ist durch 3 teilbar.

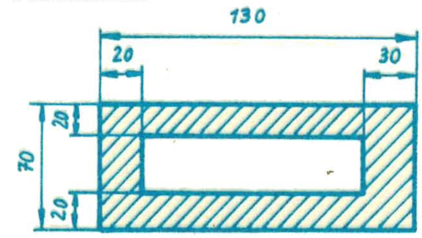


▲4▲ Bilde durch Einfügen von Operationszeichen aus den folgenden Zeichenreihen Terme, die der Reihe nach die Zahlen 35, 20, 0, 4, 20 bezeichnen!

a) (18 8) · 3 5;
b) (36 4 + 1) · 2;
c) (26 4) 10 − 3;
d) (8 6) 2;
e) (25 15) 2.

▲5▲ In einer Möbelfabrik wurde im Laufe eines Jahres die Produktion von Tischen monatlich um 10 Tische gesteigert.
Die Jahresproduktion betrug 1920 Tische. Wieviel Tische wurden im Dezember hergestellt?

▲6▲ Berechne den Inhalt des schraffierten Flächenstücks!



▲7▲ Ermittle alle durch 36 teilbaren dreistelligen natürlichen Zahlen, deren Zehnerstellen jeweils eine Primzahl darstellt!

▲8▲ Im Pionierhaus „Juri Gagarin“ besuchen Beate, Ronald, Steffi und Uwe vier verschiedene Arbeitsgemeinschaften. Zu einem Pionierfest treffen sie sich mit anderen Freunden und berichten folgendes:

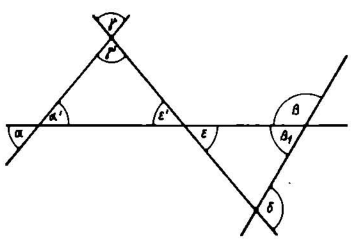
(1) Sie besuchen die AG Flugmodellsport, Mathematik, Plastbearbeitung und Verkehrserziehung.
(2) An jedem der Tage Montag, Dienstag, Mittwoch und Freitag findet genau eine AG statt.
(3) Uwe weiß nicht, wann die AG Flugmodellsport, Mathematik und Plastbearbeitung stattfinden.
(4) Ronalds AG Mathematik findet nicht freitags statt.
(5) Steffi kommt dienstags immer etwas später zur AG, weil sie lange Unterricht hat.
(6) Ronalds Vater leitet mittwochs die AG Plastbearbeitung.

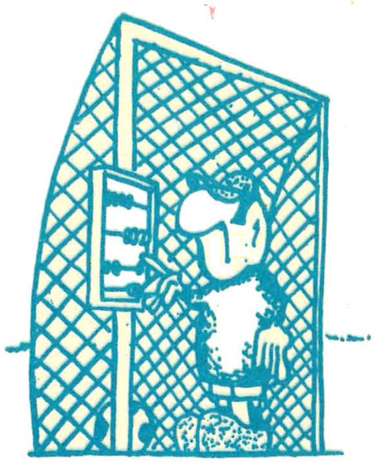
Ordne jedem Pionier seine AG und den betreffenden Wochentag zu!

▲9▲ In der Figur sind folgende Stücke gegeben:

$\alpha = 50°$, $\beta = 120°$, $\gamma = 80°$.

Gesucht ist die Größe des Winkels δ.





▲10▲ Konstruiere folgende Dreiecke:

a) $c = 6$ cm, $\alpha = 40°$, $h_c = 6$ cm
b) $a + b = 11$ cm, $\alpha = 40°$, $h_c = 4{,}3$ cm
c) $b = 7$ cm, $\alpha = 40°$, $s_c = 5$ cm!

▲11▲ In einem Dreieck ABC gelte $\alpha = 58°$, und die Seite a sei größer als die Seite c. Ordne die drei Dreieckseiten nach ihrer Größe, ohne das Dreieck zu konstruieren! Gib eine Begründung für dein Ergebnis an!

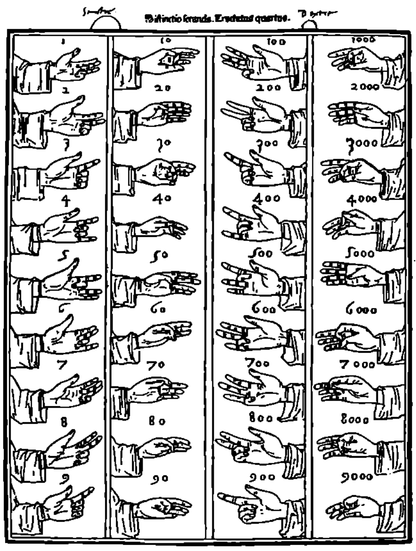
Vorliegende Aufgaben wurden entnommen aus: Aufgaben zum Mathematikunterricht der Klassen 4 bis 6, Bezirkskabinett für Weiterbildung der Lehrer und Erzieher, Haus des Lehrers Halle; Programme für Schularbeitsgemeinschaften *Junge Mathematiker* der Klassen 5 bis 7, Haus der Jungen Pioniere Juri Gagarin, Karl-Marx-Stadt; 2 × 2 plus Spaß dabei, 333 Aufgaben der Klassen 1 bis 4, Leipziger Volkszeitung, Leipzig

Vorsicht zerbrechlich!

Herr Müller stößt in seinem Keller an das Regal, und die Flaschen fallen dabei um. Untersucht, welche ihm zerbrochen sind!

Unser natürlicher Digitalrechner

Der Mensch nimmt seine Finger nicht nur bei handwerklichen Tätigkeiten, sondern auch beim Zählen und Rechnen zu Hilfe.
Unserem dekadischen Zahlensystem liegt vermutlich die Anzahl der Finger beider Hände zugrunde. Im Altertum benutzte man zur Verständigung über Preise sogar im internationalen Handel sogenannte *Fingerzahlen*, indem man bestimmten Stellungen der Finger einzelne Zahlen zugeordnet hat. Die Finger der linken Hand dienten dabei zur Bezeichnung kleinerer Zahlen (von 1 bis 100). Daumen und Zeigefinger der linken Hand bezeichneten die Zehner und die übrigen Finger derselben Hand die Einer. Entsprechend wurden Zahlenzeichen mit den Fingern der rechten Hand für 100 bis 10000 gebildet. So konnten sich Menschen verschiedener Sprachen, die nicht einmal schriftkundig waren, über Zahlen verständigen. Fingerzahlen werden heute noch gelegentlich auf den Märkten südlicher und orientalischer Länder benutzt.



linke Hand rechte Hand

Mit den zehn Fingern lassen sich alle natürlichen Zahlen bis 1000 im Dualsystem darstellen. Ordnet man nämlich den einzelnen Fingern die Potenzen der Zwei von 2^0 bis 2^9 – so wie in dem Bild 1 angegeben ist – zu, und markiert man gestreckte Finger mit „1" und gekrümmte mit „0", so entsprechen verschiedene Stellungen der Finger beider Hände im Dualsystem dargestellten Zahlen. Im Bild 2 ist als Beispiel die Zahl 227 mit den Fingern beider Hände im Dualsystem als 11100011 (2) dargestellt. Mit den Fingern beider Hände können leicht Multiplikationen von $6 \cdot 6$ bis $10 \cdot 10$ bzw. von $11 \cdot 11$ bis $15 \cdot 15$ durchgeführt werden. Im ersten Falle werden den einzelnen Fingern beider Hände die Zahlen 6 (den Daumen), 7 (den Zeigefingern), 8 (den Mittelfingern), 9 (den Ringfingern) und 10 (den kleinen Fingern) zugeordnet.

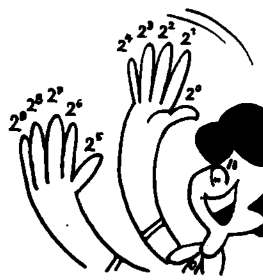


Bild 1

Bild 2

Will man beispielsweise $7 \cdot 9$ mit den Fingern ausrechnen, so entspricht diesem Term folgende Stellung der Finger (Bild 3).

Bild 3

Die Summe der gekrümmten Finger ergibt die Anzahl der Zehner und das Produkt aus den Anzahlen der gestreckten Finger die Einer.

$2+4=6 \qquad 3 \cdot 1=3$
$\rightarrow 63 \leftarrow$

Bezeichnen wir nämlich die beiden Faktoren mit x bzw. y, so ist die Anzahl der gekrümmten Finger $x-5$ bzw. $y-5$ und die Anzahl der gestreckten Finger $10-x$ bzw. $10-y$. Es ist dann

$$\begin{aligned} x \cdot y &= 10[(x-5)+(y-5)]+(10-x)\cdot(10-y) \\ &= 10x+10y-100+100-10x-10y+xy \\ &= xy \end{aligned}$$

Bei der Multiplikation von $11 \cdot 11$ bis $15 \cdot 15$ ordnet man den Fingern beider Hände die Zahlen 11 (den Daumen), 12 (den Zeigefingern), 13 (den Mittelfingern), 14 (den Ringfingern) und 15 (den kleinen Fingern) zu. Will man z. B. $12 \cdot 13$ mit den Fingern ausrechnen, so entspricht diesem Term folgende Fingerstellung (Bild 4).

Bild 4

Die Summe der gekrümmten Finger ergibt die Anzahl der Zehner und das Produkt aus den Anzahlen der gekrümmten Finger die Einer. Schließlich wird noch zur derart gebildeten Zahl 100 addiert.

$100 \qquad 2+3=5 \qquad 2 \cdot 3=6$
$\rightarrow 156 \leftarrow$

Es gilt jetzt

$$\begin{aligned} x \cdot y &= 100+10[(x-10)+(y-10)] \\ &\quad +(x-10)\cdot(y-10) \\ &= xy \end{aligned}$$

Produkte von $16 \cdot 16$ bis $20 \cdot 20$ errechnet man mit den Fingern folgendermaßen:

$$\begin{aligned} x \cdot y &= 200+20[(x-15)+(y-15)] \\ &\quad +(20-x)\cdot(20-y) \\ &= 200+20x+20y-600+400 \\ &\quad -20x-20y+xy \\ &= xy \end{aligned}$$

Beispiel $18 \cdot 19$ (Bild 5)

Bild 5

Die doppelte Summe der gekrümmten Finger ergibt die Anzahl der Zehner und das aus den Anzahlen der gestreckten Finger gebildete Produkt die Einer. Es werden dazu schließlich noch 200 addiert.

$200 \qquad 2(3+4)=14 \qquad 2 \cdot 1=2$
$\rightarrow 342 \leftarrow$

Das Fingerrechnen gehört heute in fast allen Ländern der Geschichte an. Mit der Einführung der allgemeinen Schulpflicht wurde es von den schriftlichen Rechenmethoden verdrängt, zumal diese nicht nur in einem äußerst engen Zahlenraum anwendbar sind. Dennoch ist der mathematische Grundgedanke jenes primitiven Verfahrens wissenswert.

M. Walter

Über die wichtigste Eigenschaft der reellen Zahlen

Teil 3

Die Mengen M_1, M_2 haben die Eigenschaften (*a*) bis (*c*), denn offenbar sind beide Mengen nicht leer. Weiter gilt für jede natürliche Zahl $n (n > 1)$

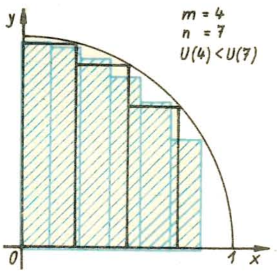
$$U(n) < O(n), \qquad (1)$$

denn im zweiten Fall sind die Rechtecke von gleicher Breite, aber größerer Länge als im ersten Fall, und außerdem kommt bei $O(n)$ noch der Inhalt einer weiteren Rechteckfläche als Summand hinzu.

Für beliebige natürliche Zahlen m, n mit $n > m > 1$ gilt

$$U(m) < U(n) \text{ und } O(n) < O(m). \qquad (2)$$

(Diesen Sachverhalt mache man sich anhand der Figur 8 klar.)



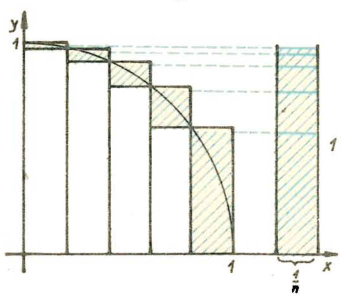
Aus (1) und (2) folgt für beliebige natürliche Zahlen m, n sofort

$$U(m) < O(n),$$

m. a. W. jedes Element aus M_1 ist kleiner als jedes Element aus M_2.

Schließlich ist auch die Eigenschaft (*c*) erfüllt. Denn wie man aus Figur 9 sofort ablesen kann, ist für jede natürliche Zahl n $(n > 1)$ offenbar

$$O(n) - U(n) = \frac{1}{n} \cdot 1 = \frac{1}{n}. \qquad (3)$$



Sei nun eine beliebige natürliche Zahl k vorgegeben.

Wählt man $n = 10^k + 1$, so ist

$$O(n) - U(n) = \frac{1}{n} = \frac{1}{10^k + 1} < \frac{1}{10^k}.$$

Dabei ist $U(n) \in M_1$, $O(n) \in M_2$, und die Differenz dieser beiden Zahlen ist kleiner als $\frac{1}{10^k}$.

Nach Satz 1 gibt es genau eine Zahl s, die zwischen den Mengen M_1 und M_2 liegt. Diese Zahl s heißt der Flächeninhalt der Punktmenge K.

Mit Hilfe der Elemente von M_1 und M_2 können wir die Zahl s annähern. Dazu wählen wir $n = 10$. Dann gilt

$$U(10) = \frac{1}{10} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^2} + \frac{1}{10} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2}{10}\right)^2} + \ldots + \frac{1}{10} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \left(\sqrt{\frac{99}{100}} + \sqrt{\frac{96}{100}} + \sqrt{\frac{91}{100}} + \sqrt{\frac{84}{100}} + \sqrt{\frac{75}{100}} + \sqrt{\frac{64}{100}} + \sqrt{\frac{51}{100}} + \sqrt{\frac{36}{100}} + \sqrt{\frac{19}{100}} \right)$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot (\sqrt{99} + \sqrt{96} + \sqrt{91} + \sqrt{84} + \sqrt{75} + \sqrt{64} + \sqrt{51} + \sqrt{36} + \sqrt{19}).$$

Die hier vorkommenden Quadratwurzeln können wir bis auf zwei Ausnahmen ebenfalls nur näherungsweise bestimmen. Mit Hilfe der Zahlentafel (Seite 8/9) finden wir die folgenden Ungleichungen bzw. Gleichungen:

$9{,}94 < \sqrt{99} < 9{,}95$ $\quad$ $8{,}00 = \sqrt{64} = 8{,}00$
$9{,}79 < \sqrt{96} < 9{,}80$ $\quad$ $7{,}14 < \sqrt{51} < 7{,}15$
$9{,}53 < \sqrt{91} < 9{,}54$ $\quad$ $6{,}00 = \sqrt{36} = 6{,}00$
$9{,}16 < \sqrt{84} < 9{,}17$ $\quad$ $4{,}35 < \sqrt{19} < 4{,}36$
$8{,}66 < \sqrt{75} < 8{,}67$

Durch Summation erhalten wir
$72{,}57 < \sqrt{99} + \sqrt{96} + \sqrt{91} + \sqrt{84} + \sqrt{75} + \sqrt{64} + \sqrt{51} + \sqrt{36} + \sqrt{19} < 72{,}64$ und nach Multiplikation mit $\frac{1}{100}$ schließlich

$$0{,}7257 < U(10) < 0{,}7264.$$

Aus (3) folgt

$$O(n) = U(n) + \frac{1}{n}, \text{ also}$$

$$O(10) = U(10) + \frac{1}{10}. \text{ Damit gilt}$$

$$0{,}8257 < O(10) < 0{,}8264.$$

Für den Flächeninhalt s der Punktmenge K, d. h. der Viertelkreisfläche, erhalten wir die Ungleichung

$$0{,}7257 < U(10) < s < O(10) < 0{,}8264.$$

Der Flächeninhalt der Viertelkreisfläche liegt also zwischen 0,7257 und 0,8264.

Da der Flächeninhalt A der Kreisfläche das Vierfache von s beträgt, erhalten wir für ihn die Näherung

$$2{,}9028 < A < 3{,}3056.$$

Berücksichtigt man nur zwei Stellen nach dem Komma, so folgt

$$2{,}90 < A < 3{,}31.$$

Aus dem Unterricht der Klasse 7 ist bekannt, daß $A = \pi r^2$ gilt.

Da der Radius unseres Kreises 1 beträgt, ist $A = \pi$.

Unsere Abschätzung für den Flächeninhalt des Kreises liefert zugleich eine Näherung für die Zahl π:

$$2{,}90 < \pi < 3{,}31. \qquad (4)$$

Wählt man bei den eben durchgeführten Berechnungen die Zahl n größer als 10, so kann man die Näherung (4) für die Zahl π verbessern.

Aufgabe 10

Bestimme eine Näherung für die Zahl π, indem du für n die Zahl 20 wählst!

H. Lemke/W. Stoye

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Georg Gläser

Institut für mathematischen Unterricht an der Universität Strasbourg, Frankreich

▲1533▲ Es ist die Menge M aller reellen Zahlen z anzugeben, für die

$$z = (1 - x^n)^m \text{ gilt,}$$

wobei x eine beliebige reelle Zahl mit $0 < x < 1$ und n, m beliebige von Null verschiedene natürliche Zahlen sind.

In freien Stunden alpha heiter

Aus „TausendundeinTag“

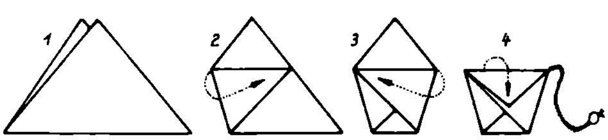
In der alten persischen Erzählung „Die Geschichte Moradbaks“, die in der Sammlung „Tausendundein-Tag“ enthalten ist, stellt ein Weiser einem jungen Mädchen die folgende Aufgabe und erwähnt dabei, daß solche Aufgaben von den indischen Philosophen gestellt werden: „Eine Frau geht in einen Garten, um Äpfel zu ernten. Der Garten hat vier Tore; jedes wird von einem Manne bewacht. Die Frau gibt dem Hüter des ersten Tores die Hälfte der gepflückten Äpfel; als sie beim zweiten anlangt, gibt sie dem zweiten Wächter die Hälfte der übriggebliebenen Äpfel; ebenso verfährt sie beim dritten; endlich teilt sie noch mit dem vierten, so daß ihr schließlich nur zehn Äpfel bleiben. Nun fragt man, wieviel Äpfel geerntet wurden.“

Zur Schulentlassung

Bei einer Schulentlassung tauschen alle Schüler untereinander ihre Fotografien aus. Wieviel Schüler wurden entlassen, wenn 870 Fotografien getauscht wurden?

Mehrzweckbecher

Ein Mehrzweckbecher ist sehr schnell hergestellt und vielfach verwendbar: beim Wandertag als Trinkgefäß, beim Pioniernachmittag als Würfel- oder Geschicklichkeitsbecher. Und so wird er gebastelt: Einen quadratischen Bogen (21 cm mal 21 cm) zu einem Dreieck falten (Bild 1), zuerst die linke Spitze des Dreiecks bis an die rechte Papierkante (Bild 2 und 3), dann die linke Spitze bis an die rechte Papierkante falzen. Zum Schluß biegt die beiden oberen Spitzen nach außen, und fertig ist der Würfelbecher (Bild 4). Verwendet Ihr Pergament- oder Butterbrotpapier, erhaltet ihr einen Trinkbecher. Der Geschicklichkeitsbecher entsteht, wenn ihr an der rechten oberen Kante einen 20 cm langen Faden befestigt, an dessen Ende eine Perle angebracht wurde. Der Pionier, der die Perle als erster im Becher landet, ist Sieger.



Aus NBI 45/74

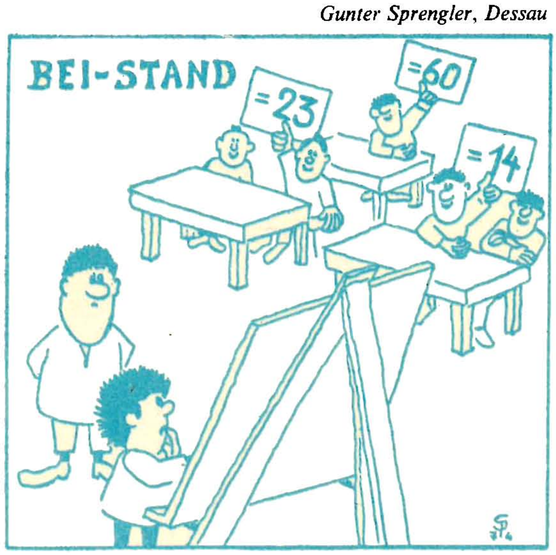
3× ALPHA

1. Gerade, Maschinenteil; 2. deutscher Mathematiker (1849 bis 1925); 3. Sternbild des südlichen Himmels; 4. Zahlwort; 5. Vorsilbe (griech.), bedeutet soviel wie *fünf*; 6. Name einer beliebten Schülerzeitschrift der DDR; 7. Vorsilbe (griech.), bedeutet so viel wie *über*; 8. Sonnenfernster Planet; 9. Positive Elektrode.

OL Ing. K. Koch, Schmalkalden

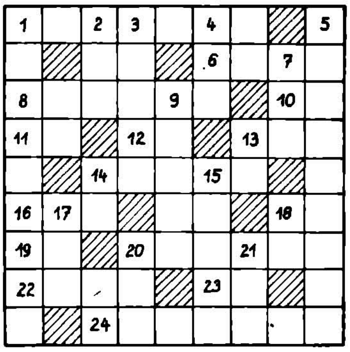
1.	A				
2.		L			
3.	L		P		
4.				H	
5.	P				A
6.				H	
7.	H		P		
8.		L			
9.	A				

Gunter Sprengler, Dessau



Kreuzworträtsel

Waagerecht: 1. Winkelfunktion; 6. Mathematiker, u. a. auf dem Gebiet der mathematischen Logik tätig; 8. Futterbehälter (Mz.); 10. Himmelsrichtung (Abk.); 11. Flächenmaß; 12. chemisches Symbol für ein Metall; 13. europäische Hauptstadt; 14. Belastung, unangenehme Erscheinung; 16. Brennstoff; 18. Maßeinheit im Schiffsbau (Abk.); 19. persönliches Fürwort; 20. antiker Bewohner Italiens; 22. Zahlwort; 23. Kreiszahl; 24. Teil des rechtwinkligen Dreiecks.



Senkrecht: 1. Winkelfunktion; 2. russisches Zahlwort; 3. Begriff aus der Algebra; 4. weiblicher Vorname; 5. Teilgebiet der Mathematik; 7. Weltorganisation (Abk.); 9. Eigenschaft einer Funktion; 13. Skatausdruck; 14. physikalische Maßeinheit; 15. Linienzug, zeichnerische Darstellung eines Sachverhaltes, einer Funktion; 17. schweizerisches Flächenmaß; 20. weiblicher Vorname; 21. norwegischer Mathematiker.

Dipl.-Math. Ch. Pollmer, Dresden

Was bedeutet das?

OL H. Pätzold, Waren/Müritz

5 × 4 = 20

Setze aus jeweils vier Teilen ein Rechteck zusammen mit den Seitenlängen 4 Einheiten mal 5 Einheiten. Wieviel Möglichkeiten gibt es? (Jedes der Einzelteile besteht aus 5 Quadraten.)

aus: Euklid 10/74, Athen

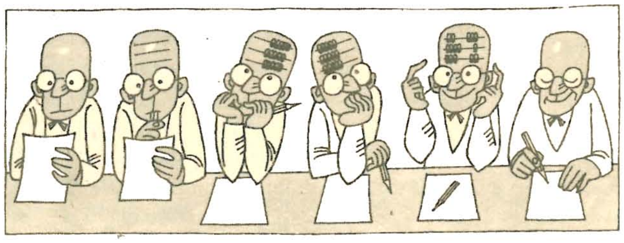
Unmögliches wird möglich!

$$\begin{array}{r} \text{PLUS} \\ +\ \text{PLUS} \\ +\ \text{PLUS} \\ \hline \text{MINUS} \end{array}$$

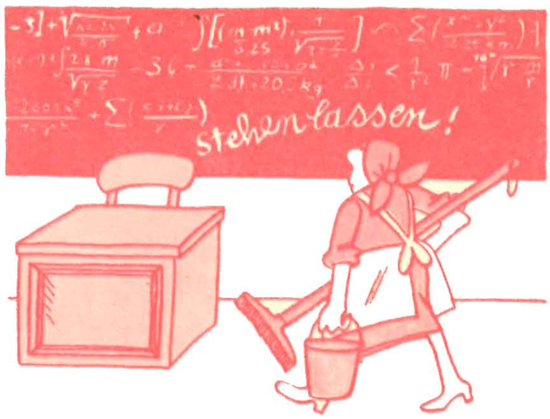
Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern, ungleiche Buchstaben ungleiche Ziffern. Wieviel Lösungen sind möglich?

Matthias Gärting, OS Gröbers (Saalkreis, Kl. 8)

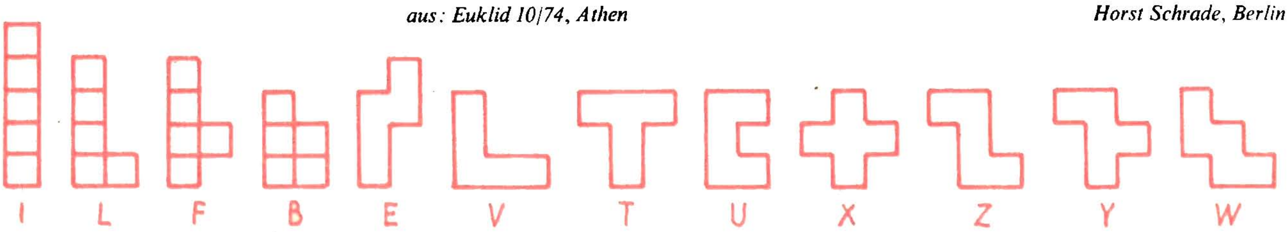
Kopfrechnen



Louis Rauwolf



Horst Schrade, Berlin



XV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Bezirksolympiade

(7./8. Februar 1976)

Klassenstufe 7

1. Die Fußballmannschaften der Klassen 7a, 7b, 8a und 8b belegten beim Schulsportfest die ersten vier Plätze.

Auf die Frage, welchen Platz jede der vier Mannschaften belegte, gaben die Pioniere Antje, Benno und Chris jeder zwei Antworten, von denen jeweils eine wahr und eine falsch ist.

Antje: (1) Die Mannschaft der Klasse 8a belegte den zweiten Platz. (2) Die Mannschaft der Klasse 8b belegte den dritten Platz.

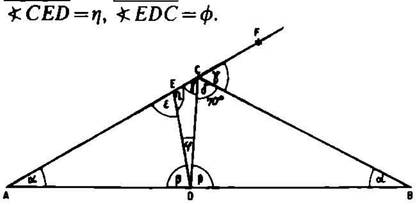
Benno: (3) Die Mannschaft der Klasse 8a belegte den ersten Platz. (4) Die Mannschaft der Klasse 7b belegte den zweiten Platz.

Chris: (5) Die Mannschaft der Klasse 7a belegte den zweiten Platz. (6) Die Mannschaft der Klasse 8b belegte den vierten Platz.

Untersuche, welche Verteilung der vier Mannschaften 7a, 7b, 8a und 8b auf die vier Plätze den wahren Antworten der Pioniere entsprechen!

2. In der abgebildeten Figur gelte:

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ADE = \sphericalangle BDC = \beta$, $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCF = \gamma$, $\sphericalangle BCD = \delta$, $\sphericalangle AED = \varepsilon$, $\sphericalangle CED = \eta$, $\sphericalangle EDC = \phi$.



Es sei $\delta = 70°$

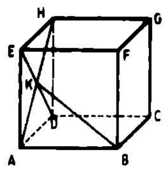
Ermittle α, β, γ, ε, η und ϕ!

3. Untersuche, ob sich in der Ebene fünf (paarweise) verschiedene Geraden so zeichnen lassen, daß sie genau drei Schnittpunkte miteinander haben, d. h., ob es in einer Ebene 5 (paarweise) verschiedene Geraden p, q, r, s, t und 3 (paarweise) verschiedene Punkte A, B, C so gibt, daß jeder der Punkte A, B, C der Schnittpunkt (mindestens) zweier der Geraden p, q, r, s, t ist und daß jeder Schnittpunkt (mindestens) zweier dieser Geraden einer der Punkte A, B, C ist!

4. Ein Zug fährt genau 15 Minuten später von einem Bahnhof B ab, als es der Fahrplan vorsieht. Deshalb fährt er mit 120% der auf dieser Strecke üblichen Durchschnittsgeschwindigkeit so lange, bis der Rückstand aufgeholt ist. Nach wieviel Minuten (gerechnet von der tatsächlichen Abfahrtszeit des Zuges an) ist das der Fall?

5. Gegeben sei ein Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G und H (siehe Bild). K sei der Schnittpunkt der Flächendiagonalen $\overline{AH}$ und $\overline{DE}$.

Beweise: Es gilt $\overline{DE} \perp \overline{BK}$.



6. Ist z eine natürliche Zahl, so sei a die Quersumme von z, b die Quersumme von a und c die Quersumme von b.

Ermittle c für jede 1000000000stellige durch 9 teilbare Zahl z!

Klassenstufe 8

1. Vor vielen Jahren war ein Wanderer auf dem Wege von Altdorf nach Neudorf. Als er unterwegs nach dem Weg fragte, erklärte ihm ein Ortskundiger: „Ihr seid auf dem richtigen Weg und werdet bald an einer Weggabelung einen Wegweiser mit drei Richtungsschildern sehen.

Diese weisen auf die Wege nach Altdorf, Neudorf und Mittendorf. Ich mache Euch aber darauf aufmerksam, daß genau zwei dieser Richtungsschilder falsch beschriftet wurden.“ Der Wanderer bedankte sich, gelangte zum Wegweiser und las ihn. Untersuche, ob der Wanderer mit den erhaltenen Informationen den Weg nach Neudorf ermitteln konnte!

2. Beweise, daß alle Primzahlen $p > 3$ sich in der Form $6n + 1$ bzw. $6n - 1$ schreiben lassen, wobei n eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist!

3. Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC. Konstruiere in seinem Innern einen Punkt P, so daß die Dreiecke ABP, BCP, ACP alle einander flächengleich sind! Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

Stelle fest, ob stets genau ein solcher Punkt P existiert!

4. Eine Pioniergruppe wanderte von der Touristenstation A zum Bahnhof B. Sie legte in der ersten Stunde 3 km zurück. Danach rechnete sie sich aus, daß sie bei gleichbleibender Geschwindigkeit 40 Minuten zu spät zum Zug kommen würde. Deshalb erhöhte sie ihre durchschnittliche Marschgeschwindigkeit auf 4 km in der Stunde und kam damit 45 Minuten vor Abfahrt des Zuges in B an.

Berechne die Länge des Weges von A nach B!

5. Es ist zu beweisen: Wenn in einem konvexen Viereck $ABCD$ auf der Seite $\overline{AB}$ Punkte E und F so zwischen A und B liegen, daß $\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FB}$ gilt, und auf der Seite $\overline{BC}$ Punkte G und H so zwischen B und C liegen, daß $\overline{BG} = \overline{GH} = \overline{HC}$ gilt, und auf der Seite $\overline{CD}$ Punkte I und K so zwischen C und D liegen, daß $\overline{CI} = \overline{IK} = \overline{KD}$ gilt, und auf der Seite $\overline{DA}$ Punkte L und M so zwischen D und A liegen, daß $\overline{DL} = \overline{LM} = \overline{MA}$ gilt, so sind die Geraden durch M, E und I, H sowie die durch F, G und K, L jeweils parallel zueinander.

6. Für ein Viereck $ABCD$ sei gefordert, daß die Summe der Länge der beiden Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ 11 cm beträgt, daß die Seite $\overline{AB}$ die Längen $a = 6$ cm und die Seite $\overline{AD}$ die Länge $d = 1$ cm haben soll.

Ermittle eine Länge x und eine Länge y so, daß für den Umfang u jedes Vierecks, das den angegebenen Forderungen genügt, die Ungleichung $x \leqq u \leqq y$ gilt, wobei das Gleichheitszeichen jeweils genau dann gilt, wenn das Viereck $ABCD$ zu einer Strecke entartet, d. h., wenn die Punkte A, B, C, D auf ein und derselben Geraden liegen!

Hinweis: $ABCD$ kann auch nicht-konvex sein. Ferner können beim Entartungsfall auch Punkte zusammenfallen.

Klassenstufe 9

1. Es sind drei aufeinanderfolgende ungerade natürliche Zahlen zu ermitteln, bei denen die Summe ihrer Quadrate eine vierstellige Zahl ist, die aus vier gleichen Ziffern besteht.

2. Von einem Dreieck ABC seien die Seitenlänge $\overline{BC} = a$ und die Höhenlänge $\overline{AD} = h_a$ bekannt. Eine Gerade g verläuft so, daß $\overline{BC}$ auf g liegt.

Berechnen Sie das Volumen V des Körpers, der durch Rotation der Dreiecksfläche um die Gerade g beschrieben wird!

3. Über eine Zahl x werden die folgenden vier Paare (A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2), (D_1, D_2) von Aussagen gemacht, von denen jeweils genau eine wahr und genau eine falsch ist.

Untersuchen Sie, ob es eine Zahl x gibt, die dieser Forderung genügt! Ermitteln Sie, wenn das der Fall ist, jede solche Zahl x!

A_1) Es gibt außer x keine Zahl, die der Forderung dieser Aufgabe genügt.

A_2) x ist eine natürliche Zahl, in deren (dekadischer) Darstellung eine Ziffer zweimal auftritt.

B_1) $x-5$ ist eine ganze, durch 6 teilbare Zahl.
B_2) $x+1$ ist eine ganze, durch 12 teilbare Zahl.
C_1) x ist eine natürliche Zahl, deren (dekadische) Darstellung mit der Ziffer 3 beginnt.
C_2) x ist die Zahl 389.
D_1) x ist eine dreistellige Primzahl mit $300 < x < 399$, also eine der Zahlen 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379. 383, 389, 397.
D_2) x ist eine natürliche Zahl, die aus drei gleichen Ziffern besteht.

4. Man ermittle alle Möglichkeiten, die Zahl 60 als Summe von mindestens zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darzustellen.

5. Beweisen Sie den folgenden Satz:
In jedem Dreieck teilt die Halbierende jedes Innenwinkels die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der beiden anliegenden Seiten.

6. Beweisen Sie, daß für alle Tripel (a, b, c) positiver reeller Zahlen mit $abc=1$ die Ungleichung $(1+a)(1+b)(1+c) \geqq 8$ gilt!
Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Klassenstufe 10

1. Gegeben sei ein Dreieck ABC mit der Seitenlänge $\overline{BC}=a$ und der Höhenlänge $\overline{AD}=h_a$. Die Gerade g sei die Parallele zu $\overline{BC}$ durch A.
Berechnen Sie das Volumen V des Körpers, der durch Rotation der Dreiecksfläche ABC um g entsteht, in Abhängigkeit von a und h_a!

2. Gegeben sei eine Strecke $\overline{AB}$ mit $\overline{AB}=5$ cm. Man konstruiere die Menge aller Punkte P, die die Eigenschaft haben, Inkreismittelpunkt je eines rechtwinkligen Dreiecks ABC mit der Hypotenuse $\overline{AB}$ zu sein.

3. Beim Druck einer Mathematikaufgabe wurde statt

$$(1+a^2x^2):x^2=b$$

(mit gegebenen Zahlen a, b) versehentlich die Gleichung

$$(1+a^2x^2)\cdot x^2=b$$

(mit denselben Zahlen a, b) gedruckt. Trotzdem hatte die so entstandene Gleichung dieselbe nichtleere Lösungsmenge wie die ursprünglich vorgesehene Gleichung.
Man ermittle diese Lösungsmenge.

4. Beweisen Sie folgende Aussage:
Wenn für ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit den Höhen $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, und $\overline{CC'}$ und dem Höhenschnittpunkt H die Gleichungen

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{HA'}}=\frac{\overline{BH}}{\overline{HB'}}=\frac{\overline{CH}}{\overline{HC'}} \text{ gelten,}$$

so ist das Dreieck ABC gleichseitig.

5. Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen $n \geqq 2$ und alle diejenigen natürlichen Zahlen $x>0$, für die folgendes gilt: Im Ziffernsystem mit der Basis n ist x eine zweistellige Zahl, und durch Vertauschen ihrer Ziffern erhält man das Doppelte von x. (Dabei sollen wie üblich für positive Zahlen nur solche Zifferndarstellungen zugelassen sein, die nicht mit 0 beginnen.)

6. Vorbemerkungen: Ist x eine reelle Zahl, so wird mit $[x]$ die größte ganze Zahl bezeichnet, die nicht größer als x ist:

$$[x] \leqq x < [x]+1.$$

Beispielsweise ist

$$[\pi]=3,\ [-4,2]=-5,\ [5]=5.$$

Eine Funktion f, die für alle reellen x erklärt ist, heißt periodisch, wenn es eine Zahl $p>0$ gibt, so daß für alle x gilt: $f(x+p)=f(x)$.
Eine solche Zahl p heißt eine positive Periode von f. Gibt es eine kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft, so heißt sie die kleinste positive Periode von f. Beispielsweise ist $f(x)=1$ eine periodische Funktion f, die keine kleinste positive Periode besitzt, während z. B. $f(x)=\sin x$ die kleinste positive Periode 2π besitzt.
a) Beweisen Sie, daß durch $y=(-1)^{[x]}$ eine für alle reellen Zahlen c erklärte Funktion f definiert ist!
b) Beweisen Sie, daß die unter a) erklärte Funktion f periodisch ist!
c) Weisen Sie nach, daß diese Funktion f eine kleinste positive Periode besitzt, und ermitteln Sie diese!
d) Stellen Sie f graphisch dar!

Klassenstufe 11/12

1. Jemand löste eine Divisionsaufgabe A; bei dieser war eine natürliche Zahl, die (in dekadischer Darstellung) mit fünf gleichen Ziffern geschrieben wird, durch eine vierstellige natürliche Zahl, die (in dekadischer Darstellung) mit vier gleichen Ziffern geschrieben wird, zu dividieren. Bei dieser Division ergab sich die Zahl 16 und ein gewisser Rest. Anschließend bildete jemand aus dieser Aufgabe A eine neue Divisionsaufgabe A', indem er sowohl im Dividenden als auch im Divisor je eine Ziffer wegfallen ließ. Bei der Division der so erhaltenen Zahlen ergab sich wieder die Zahl 16 sowie ein um 2000 kleinerer Rest als bei der Aufgabe A.
Man nenne (durch Angabe von Dividend und Divisor) alle Divisionsaufgaben A, die diese Eigenschaft aufweisen.

2. Ist M eine Menge von reellen Zahlen, so soll eine reelle Zahl $e \neq 0$ aus dieser Menge als eine *Einheit von M* bezeichnet werden, wenn für jedes Element x aus M die Beziehung

$$\frac{x}{e} \in M \text{ gilt.}$$

(So besitzt z. B. die Menge aller ganzen Zahlen nur die Einheiten $+1$ und -1, während z. B. in der Menge aller rationalen Zahlen jedes von 0 verschiedene Element eine Einheit ist.)
Es sei nun M die Menge aller Zahlen $a+b\sqrt{2}$, wobei a und b beliebige ganze Zahlen sind. In dieser Menge sind z. B. $+1$ und -1 Einheiten.
a) Man gebe noch 5 weitere Einheiten von M an.
b) Man beweise, daß M unendlich viele verschiedene Einheiten enthält.

3. Es seien A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 drei voneinander verschiedene parallele Sehnen eines Kreises k. Ferner seien X bzw. Y bzw. Z die zu A_2 bzw. B_2 bzw. C_2 bezüglich der Mittelpunkte der Sehnen B_1C_1 bzw. C_1A_1 bzw. A_1B_1 symmetrisch liegenden Punkte.
Man beweise, daß X, Y und Z auf ein und derselben Gerade liegen.

4. Definition: Eine gebrochene rationale Funktion f heißt echt gebrochen, wenn sie sich in ihrem Definitionsbereich in der Form

$$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)} \text{ mit}$$

$$u(x)=a_mx^m+\ldots+a_1x+a_0;\ a_m \neq 0$$
$$v(x)=b_nx^n+\ldots+b_1x+b_0;\ b_n \neq 0$$

und $m<n$ darstellen läßt.
Es ist zu untersuchen, ob die Summe zweier echt gebrochener rationaler Funktionen wieder eine echt gebrochene rationale Funktion ist, wenn die Summe von der Funktion 0 $\left(=\frac{u(x)}{v(x)}\right.$ mit $u(x)=a_mx^m+\ldots+a_0$, alle $\left.a_m=\ldots=a_0=0\right)$ verschieden ist.

5. In der Ebene mögen n Punkte $(n \geqq 4)$ so gelegen sein, daß je vier von ihnen Eckpunkte eines nichtentarteten konvexen Vierecks sind. Man beweise, daß dann alle n Punkte Eckpunkte eines konvexen n-Ecks sind.

Von den folgenden Aufgaben 6A und 6B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

6A. Gegeben seien n Punkte einer Ebene $(n>0)$, von denen keine drei auf derselben Gerade liegen. Die n Punkte sollen durch Strecken so miteinander verbunden werden, daß es keine drei Punkte gibt, von denen jeder mit jedem der anderen beiden verbunden ist.
Man zeige, daß unter diesen Bedingungen für die Anzahl Z_v der Verbindungsstrecken

$$Z_v \leqq \left[\frac{n^2}{4}\right] \text{ gilt.}$$

Man zeige ferner, daß sich unter Beachtung der Bedingungen $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ Verbindungsstrecken finden lassen.
Anmerkung: Mit $[x]$ sei die größte ganze Zahl bezeichnet, die nicht größer als x ist.

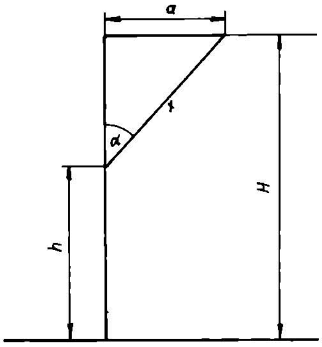
6B. Es seien $P(x)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und p, q, r, s reelle Zahlen, für die $p \neq q$ gelte. Bei der Division dieses Polynoms durch $(x-p)$ ergebe sich als Rest die Zahl r, bei der Division des gleichen Polynoms durch $(x-q)$ als Rest die Zahl s.
Welcher Rest ergibt sich unter diesen Voraussetzungen bei der Division des Polynoms $P(x)$ durch $(x-p)(x-q)$?

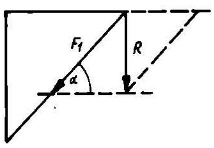
Lösungen

Ph 10/12 ▪1421 Nach dem Lehrsatz des Pythagoras erhält man

$$x^2 = (H-h)^2 + a^2$$
$$x^2 = 100 + 557$$
$$x = \sqrt{657}$$
$$x = 25{,}6$$

Der Ausleger ist 25,6 m lang.





Die Belastung des Auslegers errechnet man nach:

$$\tan\alpha = \frac{H-h}{a} \qquad F_1 = \frac{R}{\sin\alpha}$$
$$\tan\alpha = \frac{23{,}6}{10} \qquad F_1 = \frac{4000}{0{,}9205}$$
$$\alpha = 67^\circ \qquad F_1 = 4340$$

Die Belastung des Auslegers beträgt 4340 kp.

Ch 10/12 ▪1422 50 ml 0,1*n* Schwefelsäure entsprechen 50 ml 0,1*n* NaOH. 1000 ml 0,1*n* NaOH enthalten 3,9997 g NaOH
(1000 ml 1*n* NaOH enthalten 39,997 g)
50 ml 0,1*n* NaOH enthalten *x* g NaOH

$$x = \frac{3{,}997 \cdot 50}{1000} = 0{,}19998\ \text{g} \approx 0{,}2\ \text{g}$$

Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 6/75:

Ma 5 ▪1424 Ein Würfel besitzt 12 Kanten. Jede Kante des herzustellenden Kantenmodells eines Würfels besitzt somit die Länge von 120 cm : 12 = 10 cm. Sein Volumen beträgt $V_W = 10^3\ \text{cm}^3 = 1000\ \text{cm}^3$. Für die 12 Kanten des Quaders gilt $4(a+b+c) = 120$ cm. Wegen $a = 15$ cm und $b = 10$ cm erhalten wir daraus $4\cdot(15\ \text{cm} + 10\ \text{cm} + c) = 120$ cm, also $c = 5$ cm. Das Volumen des Quaders beträgt somit $V_Q = a\cdot b\cdot c = 15\cdot 10\cdot 5\ \text{cm}^3 = 750\ \text{cm}^3$. Demnach hat der Würfel einen um 250 cm³ größeren Rauminhalt als der Quader.

Ma 5 ▪1425 Aus $a\cdot b = a'\cdot b'$ bzw. $25\cdot 16 = 40\cdot b'$ folgt $b' = 10$ cm. Für die Umfänge der beiden Rechtecke gilt somit
$u = 2(a+b) = 2(25+16)\text{cm} = 82$ cm,
$u' = 2(a'+b') = 2(40+10)\text{cm} = 100$ cm,
$u' - u = 100\ \text{cm} - 82\ \text{cm} = 18$ cm.
Der Umfang u' des Rechtecks $A'B'C'D'$ ist um 18 cm größer als der Umfang u des Rechtecks $ABCD$.

Ma 5 ▪1426 Aus $f+d=f$ folgt $d=0$.
Aus $d+a=6$ folgt $a=6$.
Aus $a+j=9$ folgt $j=3$.
Aus $a=6$, $j=3$, $a+j+e=16$ folgt $e=7$.
Aus $a=6$, $e=7$, $a+c=e$ folgt $c=1$.
Aus $e=7$ und $j=3$ und $e-j=k$ folgt $k=4$.
Aus $c=1$, $e=7$, $b=e+c$ folgt $b=8$.
Aus $j=3$ und $j=g:j$ folgt $g=9$.
Aus $b=8$, $k=4$, $b:h=k$ folgt $h=2$.
Aus $c=1$, $g=9$, $h=2$, $f=(c+g):h$ folgt $f=5$.
Die natürlichen Zahlen $a=6$, $b=8$, $c=1$, $d=0$, $e=7$, $f=5$, $g=9$, $h=2$, $j=3$, $k=4$ erfüllen sämtliche Gleichungen.

Ma 5 ▪1427 Wegen $V+V+1=A$ kann $A=9$ und $V=4$ gelten. Wegen $A \neq I$ kann I nicht 9 sein, also $I=8$, $C=7$. Für $E=6$ erhalten wir wegen $R+R+1=T$ somit $H=3$. Damit gilt auch $R=5$ und $T=0$. Die gesuchte Aufgabe lautet $4865+4865=9730$.

Ma 5 ▪1428 Aus
$a+b=2=0+2=1+1=2+0$ folgt wegen $a>0$ und $a \neq b$ somit $a=2$ und $b=0$.
Aus $a=2$ und $c=2a$ folgt $c=4$.
Aus $a=2$, $b=0$, $c=4$ und $3a+b+c+d=16$ folgt $3\cdot 2+0+4+d=16$, also $d=6$.
Die gesuchte Zahl lautet 202 246.

Ma 5 ▪1429 Angenommen, x Schüler erhielten die Note 1; dann gilt

$$x + 2x + x + 2 = 26,$$
$$4x = 24,$$
$$x = 6.$$

Sechs Schüler erhielten die Note 1, zwölf Schüler die Note 2.

Ma 6 ▪1430 Angenommen, es waren x Schüler an der Klassenarbeit beteiligt, dann gilt

$$\frac{1}{3}x + \left(\frac{1}{3}x + 5\right) + \frac{1}{6}x = x,$$
$$\frac{5}{6}x + 5 = x,$$
$$\frac{1}{6}x = 5,$$
$$x = 30.$$

An der Klassenarbeit waren 30 Schüler beteiligt. 10 Schüler erhielten die Note 1 oder 5. 15 Schüler erhielten die Note 3 oder 4. 5 Schüler erhielten die Note 2. Angenommen, y Schüler die Note 3, dann erhielten $\frac{1}{4}y$ Schüler die Note 4, und es gilt

$$y + \frac{1}{4}y = 15,\ \frac{5}{4}y = 15,\ y = 12.$$

Somit erhielten 12 Schüler die Note 3 und 3 Schüler die Note 4. Angenommen, z Schüler erhielten die Note 1, dann erhalten $(10-z)$ Schüler die Note 5.
Nun gilt aber

$$z\cdot 1 + 5\cdot 2 + 12\cdot 3 + 3\cdot 4 + (10-z)\cdot 5 = 2{,}4\cdot 30,$$
$$z + 10 + 36 + 12 + 50 - 5z = 72,$$
$$4z = 36,\ z = 9.$$

Demnach erhielten 9 Schüler die Note 1 und 1 Schüler die Note 5.

Ma 6 ▪1431 Aus $2(ab+ac+bc)=286$ folgt $ab+ac+bc=143$. Aus $ab=63$ und $bc=35$ folgt durch Einsetzen
$63+ac+35=143$, also $ac=45$.
Nun gilt $\frac{ab\cdot ac}{bc} = \frac{63\cdot 45}{35}$, also nach dem Kürzen $a^2=81$ bzw. $a=9$.
Aus $ab=63$ und $a=9$ folgt $b=7$.
Aus $bc=35$ und $b=7$ folgt $c=5$.
Das Volumen des Quaders beträgt somit $V=abc=9\cdot 7\cdot 5\ \text{cm}^3 = 315\ \text{cm}^3$.

Ma 6 ▪1432 Es sei x die Anzahl aller eingesandten Aufgaben. Von diesen Aufgaben wurden $\frac{3}{8}x$ gut gelöst, $\frac{3}{8}x:3=\frac{1}{8}x$ gelöst, $\frac{1}{8}x:2=\frac{1}{16}x$ nicht gelöst. Angenommen, es wurden y Aufgaben sehr gut gelöst. Dann gilt $y+\frac{3}{8}x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{16}x=x$, also $y=\frac{7}{16}x$.
Wegen $20<x<45$ und $y=\frac{7}{16}x$ wird y nur für $x=32$ ganzzahlig. Der Schüler hat somit 14 Aufgaben sehr gut gelöst, 12 Aufgaben gut gelöst, 4 Aufgaben gelöst und 2 Aufgaben nicht gelöst.

Ma 6 ▪1433 Die gesamte Trainingsstrecke sei x Kilometer lang;
dann gilt $\frac{4}{15}x + \frac{2}{5}x + 100 = x$,

$$\frac{2}{3}x + 100 = x,$$
$$\frac{1}{3}x = 100,\ x = 300.$$

Der Radrennfahrer legte am ersten Tag $\frac{4\cdot 300}{15}$ km = 80 km und am zweiten Tag $\frac{2\cdot 300}{5}$ km = 120 km zurück.

Ma 6 ▪1434 Der Preis des Buches betrage x Mark, dann gilt

$$1{,}5 + \frac{3}{8}x = x,$$
$$\frac{5}{8}x = \frac{15}{10},$$
$$x = \frac{15\cdot 8}{10\cdot 5},\ x = 2{,}4$$

Das Buch kostete 2,40 M, und es gilt
$1{,}50 + \frac{3}{8}\cdot 2{,}40 = 1{,}50 + 0{,}90 = 2{,}40.$

Ph 6 ▪1435 Wegen
$40 = 1+3+9+27 = 3+3^1+3^2+3^3$

kann man jede natürliche Zahl durch Potenzen von 3 so darstellen, daß jede Potenz höchstens einmal auftritt, wenn man neben der Addition auch die Subtraktion zuläßt.
Beispiel:
$16 = 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3,$
$16 = 1 \cdot 3^2 + (3 \cdot 3^1 - 1 \cdot 3^1) + 1 \cdot 3,$
$16 = 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^2 - 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3,$
$16 = 2 \cdot 3^2 - 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3,$
$16 = (3 \cdot 3^2 - 1 \cdot 3^2) - 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3,$
$16 = 1 \cdot 3^3 - 1 \cdot 3^2 - 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3,$
$16 = 27 - 9 - 3 + 1.$
Will man nun die Masse von 16 kg ermitteln, so sind auf die linke Waagschale x kg, 9 kg und 3 kg, auf die rechte Waagschale 27 kg und 1 kg zu legen, denn es gilt

$$x + 9 + 3 = 27 + 1,$$
$$x = 28 - 12,$$
$$x = 16.$$

Ma 7 ■1436 Angenommen, es befanden sich x Äpfel im Korb. Die nachstehende Tabelle gibt Auskunft über die Verteilung der Äpfel.

Anzahl d. Äpfel	Axel	Bernd
	$\frac{1}{4}x$	$\frac{1}{3}x - 2$
	Ernst	Franz
	$\frac{1}{2}x - 6$	$\frac{1}{8}x + 3$

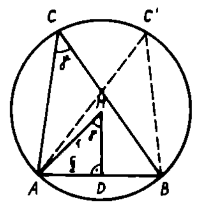
Nun gilt

$$\frac{1}{4}x + \left(\frac{1}{3}x - 2\right) + \left(\frac{1}{2}x - 6\right) + \left(\frac{1}{8}x + 3\right) = x,$$
$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x - x = 5,$$
$$6x + 8x + 12x + 3x - 24x = 120,$$
$$5x = 120,$$
$$x = 24.$$

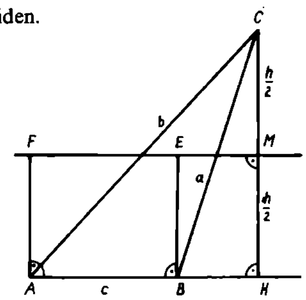
Im Korb befanden sich somit 24 Äpfel. Axel erhielt $\frac{1}{4} \cdot 24 = 6$, Bernd $\frac{1}{3} \cdot 24 - 2 = 6$, Ernst $\frac{1}{2} \cdot 24 - 6 = 6$ und Franz $\frac{1}{8} \cdot 24 + 3 = 6$ Äpfel.
Alle vier Jungen Pioniere erhielten also gleichviel Äpfel.

Ma 7 ■1437 Die Potenz
$1975^n = (10 \cdot 197 + 5)^n$ endet für jede natürliche Zahl $n \geqq 1$ mit der Ziffer 5. Die Potenz
$1974^n = (10 \cdot 197 + 4)^n$ endet für jede natürliche Zahl $n \geqq 1$ entweder mit der Ziffer 6 oder mit der Ziffer 4, d. h., diese Potenz ist für jedes $n \geqq 1$ eine gerade natürliche Zahl. Das Produkt aus einer geraden natürlichen Zahl und einer mit der Ziffer 5 endenden natürlichen Zahl endet stets mit der Ziffer 0. Somit endet das gegebene Produkt ebenfalls mit der Ziffer 0.

Ma 7 ■1438 Jeder Zentriwinkel ist doppelt so groß wie ein Peripheriewinkel über demselben Bogen.
Es sei M der Mittelpunkt des Umkreises des zu konstruierenden Dreiecks ABC und D der Fußpunkt des von M auf AB gefällten Lotes. Dann gilt
$\sphericalangle ADM = 90°$, $\sphericalangle AMD = \sphericalangle ACB = \gamma = 40°$
und $\overline{AD} = \frac{c}{2} = 3$ cm; somit läßt sich das Dreieck ADM aus diesen Stücken konstruieren.
Der Kreis um A mit dem Radius $c = 6$ cm schneidet die Gerade AD über D hinaus in B. Wir konstruieren den Kreis um M mit dem Radius $r = \overline{AM}$, den Umkreis des zu konstruierenden Dreiecks ABC. Der Kreis um D mit dem Radius $s_c = 8$ cm schneidet den Umkreis des Dreiecks im Punkte C bzw. C'.



Ma 7 ■1439 Es seien $\overline{AB} = c$ und $\overline{BE} = d$ die Seitenlängen des dem Dreieck ABC flächengleichen Rechtecks $ABEF$, und es sei $\overline{CH} = h$ die Höhe des Dreiecks ABC zur Seite $\overline{AB} = c$. Wegen $c \cdot d = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$ gilt $h = 2 \cdot d$. Daraus ergibt sich die folgende Konstruktion:
Wir fällen von C das Lot auf AB, sein Fußpunkt sei H. Wir halbieren $\overline{CH}$, der Mittelpunkt von $\overline{CH}$ sei M. Wir ziehen durch M zu AB die Parallele. Durch A und B konstruieren wir je eine Senkrechte zu AB. Diese Senkrechten mögen die bereits gezeichnete Parallele in den Punkten E und F schneiden.



Ph 7 ■1440
Gegeben: $s = 42600$ km Gesucht: v
$t = \frac{3}{2} h$
Es genügt die Berechnung der gleichförmigen Bewegung.

$$v = \frac{s}{t}$$
$$v = \frac{42600 \text{ km} \cdot 2}{3h}$$
$$v = 28\,400 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Die Geschwindigkeit des Raumschiffes beträgt $28400 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Ch 7 ■1441 $1022 \cdot 120 = 122640$
Im Jahr werden 122640 m³ Wasser benötigt, um 1022 t Weißzucker herzustellen.
$122640 : 3 = 40880$
Es waren 40880 Tankwagen nötig, um diese Wassermenge zu transportieren.

Ma 8 ■1442 Es sei $z = 10a + b$, wobei a und b natürliche Zahlen mit $1 \leqq a \leqq 9$ und $1 \leqq b \leqq 9$ sind, eine natürliche Zahl, die die verlangte Eigenschaft hat. Dann lautet diejenige Zahl, die durch Vertauschung der Ziffern von z entsteht, $10b + a$, und es gilt

$$10a + b = \frac{2}{9}(10b + a),$$
$$90a + 9b = 20b + 2a,$$
$$88a = 11b,$$
$$8a = b.$$

Da a und b von Null verschieden sind und b eine einstellige natürliche Zahl ist, kann nur $a = 1$ und daher $b = 8$ sein. Tatsächlich hat die Zahl $z = 18$ und nur diese Zahl die verlangte Eigenschaft; denn es gilt

$$18 = \frac{2}{9} \cdot 81.$$

Ma 8 ■1443 a) Es seien x und y die Maßzahlen der Seitenlängen des Rechtecks. Dann ist die Maßzahl des Flächeninhalts gleich $A = xy$ und die Maßzahl des Umfangs gleich $2x + 2y = 2(x + y)$. Es gilt also

$$2(x + y) = 560,$$
$$x + y = 280,$$
$$y = 280 - x.$$

Daraus folgt

$$A = xy = x(280 - x) = 280x - x^2,$$
$$A = -(x^2 - 280x + 19600) + 19600,$$
$$A = 19600 - (x - 140)^2.$$

Wegen $(x - 140)^2 \geqq 0$ gilt $A \leqq 19600$ und $A = 19600$ genau dann, wenn $x = 140$.
Der Flächeninhalt der maximalen Rechtecksfläche, die eingezäunt werden kann, beträgt also $19600 \text{ m}^2 = 1{,}96$ ha.
b) Ist der Flächeninhalt maximal, so gilt
$x = 140$, also $y = 280 - x = 140$.
Das Rechteck ist also ein Quadrat mit der Seitenlänge 140 m.

Ma 8 ■1444 a) Von Moskau ($\phi = 56°$N) bis zum Nordpol ($\phi = 90°$N) beträgt die Anzahl der Breitengrade $90° - 56° = 34°$, vom Nordpol bis Seattle ($\phi = 48°$N) $90° - 48° = 42°$, das sind zusammen $34° + 42° = 76°$. Für die Länge x der Luftlinie Moskau–Nordpol–Seattle gilt also

$$x : 10000 \text{ km} = 76° : 90°,$$
$$x = \frac{76 \cdot 10000}{90} \text{ km} = 8444 \text{ km}.$$

Die tatsächlich zurückgelegte Entfernung ist um 12,27% größer, sie beträgt also
$8444 \cdot 1{,}1227 \text{ km} = 9480$ km.
b) Die ANT-25 legte diese Entfernung von 9480 km in 63 h 25 min $= \frac{3805}{60}$ h zurück. Ihre mittlere Geschwindigkeit betrug daher

$$v_1 = \frac{9480 \cdot 60}{3805} \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \approx 150 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

Die IL-62-M legte diese Entfernung in 10 h 54 min $= \frac{654}{60}$ h zurück. Ihre mittlere Geschwindigkeit betrug daher

$$v_2 = \frac{9480 \cdot 60}{654} \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \approx 870 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

Ma 8 ▪1445 Es seien

$2r_1$ die Maßzahl (in m) des inneren Durchmessers,

s die Maßzahl (in m) der Wandstärke,

x die Maßzahl (in m) der Gesamtlänge der zylindrischen Stahlrohre.

Dann ist die Maßzahl (in m^2) des Querschnitts gleich

$$Q=\pi(r_1+s)^2-\pi r_1{}^2=\pi r_1{}^2+2\pi r_1 s+\pi s^2 -\pi r_1{}^2,$$

$$Q=\pi s(2r_1+s).$$

Da die Maßzahl der Länge gleich x, die Dichte gleich $7{,}85\,g \cdot cm^{-3}$ und die Masse gleich 3000 t ist, gilt also

$$\pi s(2r_1+s)x \cdot 7{,}85=3000,$$

$$x=\frac{3000}{7{,}85\pi s(2r_1+s)}.$$

a) In diesem Falle ist der innere Durchmesser 270 mm = 0,27 m, also gilt $2r_1=0{,}27$. Die Wandstärke beträgt 6 mm = 0,006 m, also gilt $s=0{,}006$. Wir erhalten daher

$$x=\frac{3000}{7{,}85\pi 0{,}006(0{,}27+0{,}006)}=\frac{500000}{7{,}85\cdot 0{,}276\pi},$$

$$x\approx 73500.$$

Es können also Stahlrohre mit einer Gesamtlänge von 73500 m, d. s. 73,5 km, hergestellt werden.

b) In diesem Falle gilt $2r_1=0{,}27$, $s=0{,}0018$, also

$$x=\frac{3000}{7{,}85\pi 0{,}0018(0{,}27+0{,}0018)}=\frac{10000000}{7{,}85\cdot 6\cdot 0{,}2718\pi},$$

$$x\approx 249000.$$

Es können also Stahlrohre mit einer Gesamtlänge von 249000 m, d. s. 249 km, hergestellt werden.

Ph 8 ▪1446

Gegeben: $G=60\cdot 3{,}5\,kp=210\,kp$

$h=20\,m$ Gesucht: W

Es ist die Hubarbeit zu berechnen.

$W=G\cdot h$

$W=210\,kp\cdot 20\,m$

$W=4200\,kpm$

Die erforderliche Arbeit beträgt 4200 kpm.

Ch 8 ▪1447 Mischungsformel $m=\frac{n(p-b)}{a-p}$

$n=1000 \quad p=12{,}5 \quad a=25 \quad b=10$

$$m=\frac{1000(12{,}5-10)}{25-12{,}5}=200$$

1000 g 10%ige Salzsäure sind demnach mit 200 g 25%iger Salzsäure zu mischen.

Ma 9 ▪1448 Wir bezeichnen die Maßzahlen der Umlaufzeiten (in Jahren) der fünf Planeten mit

$T_1=2{,}4;\ T_2=2{,}9;\ T_3=3{,}8;\ T_4=11;\ T_5=26$

und die Maßzahlen ihrer Abstände von dem Zentralgestirn (in AE) mit

$r_1=0{,}95,\ r_2,\ r_3,\ r_4,\ r_5.$

Dann gilt nach dem 3. Keplerschen Gesetz

$$r_2^3 : r_1^3 = T_2^2 : T_1^2,$$

$$\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3=\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2,$$

$$r_2=r_1\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\lg r_2=\lg r_1+\frac{2}{3}(\lg T_2-\lg T_1).$$

Für $r_1=0{,}95$, $T_2=2{,}9$, $T_1=2{,}4$ erhalten wir hieraus

$r_2\approx 1{,}08$ AE ≈ 162 Mill. km.

Ferner erhalten wir

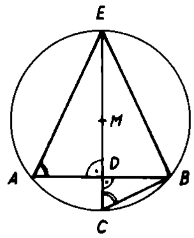
$r_3\approx 1{,}29$ AE ≈ 194 Mill. km,

$r_4\approx 2{,}62$ AE ≈ 393 Mill. km,

$r_5\approx 4{,}65$ AE ≈ 698 Mill. km.

Der fünfte (äußerste) Planet hat also von dem Zentralgestirn einen Abstand, der nur etwas kleiner als der Abstand des Jupiter von der Sonne (5,2 AE) ist.

Ma 9 ▪1449 Verlängert man die Strecke $\overline{CD}$ über D hinaus bis zu Schnittpunkt E mit dem Kreis, so liegt der Mittelpunkt M des Kreises auf $\overline{ED}$, und es gilt $d=\overline{ED}+\overline{CD}$ (siehe Bild).



Aus $\sphericalangle ADE=\sphericalangle BDC=90°$

und $\sphericalangle EAD=\sphericalangle DCB$ (nach dem Peripheriewinkelsatz) folgt $\Delta ADE \,=\!\sim\, \Delta BDC$.

Wegen $\overline{AD}=\overline{DB}=\frac{b}{2}$, $\overline{CD}=a$ folgt

hieraus weiter

$$\overline{ED} : \frac{b}{2}=\frac{b}{2} : a,$$

$$\overline{ED}=\frac{b^2}{4a},$$

also $$d=\frac{b^2}{4a}+a.$$

Wegen $b=1{,}2$ m, $a=0{,}2$ m erhält man hieraus

$$d=\left(\frac{1{,}2^2}{4\cdot 0{,}2}+0{,}2\right)\text{m}=(1{,}8+0{,}2)\,\text{m}$$

$$=2\,\text{m}=2000\,\text{mm}.$$

Der innere Durchmesser des Rohres ist also gleich 2000 mm, d. s. 2 m.

Ma 9 ▪1450 Es sei (x, y) eine reelle Lösung des Gleichungssystems

$$\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}=\frac{13}{5}, \qquad (1)$$

$$x^2+y^2=13. \qquad (2)$$

Dann gilt

$x+y\neq 0$, $x-y\neq 0$, also wegen (1)

$$\frac{x(x-y)+y(x+y)}{x^2-y^2}=\frac{13}{5},$$

$$x^2-xy+xy+y^2=\frac{13}{5}(x^2-y^2),$$

$$x^2+y^2=\frac{13}{5}(x^2-y^2).$$

Wegen (2) ist $x^2+y^2=13$, also

$$13=\frac{13}{5}(x^2-y^2),$$

$$x^2-y^2=5. \qquad (3)$$

Durch Addition von (2) und (3) erhält man

$$2x^2=18, \text{ d. h., } x^2=9 \qquad (4)$$

und hieraus wegen (2)

$$y^2=13-x^2=13-9=4. \qquad (5)$$

Nun ist die Gleichung (4) für $x=3$ und $x=-3$ erfüllt und die Gleichung (5) für $y=2$ und $y=-2$.

Wenn also das Gleichungssystem (1), (2) überhaupt reelle Lösungen hat, so können es nur die Paare

(3, 2), (3, −2), (−3, 2), (−3, −2) sein.

Die Probe zeigt, daß das tatsächlich Lösungen des gegebenen Gleichungssystems sind; denn man erhält z. B. für $x=3$, $y=2$

$$\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}=\frac{3}{3+2}+\frac{2}{3-2}=\frac{3}{5}+2=\frac{13}{5},$$

$$x^2+y^2=3^2+2^2=13 \text{ usw.}$$

Ma 9 ▪1451 a) Es seien a_1 die Kantenlänge und A_1 der Flächeninhalt des nicht durch den zweiten Würfel verdeckten Teils der Oberfläche des ersten Würfels. Ferner seien a_2 und A_2, a_3 und A_3, a_4 und A_4 die entsprechenden Größen für den zweiten, dritten und vierten Würfel. Dann gilt

$A_1=5a_1^2,$

$A_2=5a_2^2-a_1^2,$

$A_3=5a_3^2-a_2^2,$

$A_4=6a_4^2-a_3^2.$

Also ist der gesamte Oberflächeninhalt des Körpers gleich

$$A=A_1+A_2+A_3+A_4$$
$$=4a_1^2+4a_2^2+4a_3^2+6a_4^2,$$
$$A=4(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)+2a_4^2.$$

Nun gilt $a_1=1$ cm, $a_2=2$ cm, $a_3=3$ cm, $a_4=4$ cm, also

$$A=[4(1^2+2^2+3^2+4^2)+2\cdot 4^2]\,\text{cm}^2$$
$$=[4\cdot 30+32\,\text{cm}^2]=152\,\text{cm}^2.$$

Der Oberflächeninhalt des aus den vier Würfeln zusammengesetzten Körpers ist also gleich 152 cm².

b) Für den Fall von n Würfeln erhält man analog wie oben

$A_1=5a_1^2,$

$A_2=5a_2^2-a_1^2,$

$A_3=5a_3^2-a_2^2,$

. . .

$A_{n-1}=5a_{n-1}^2-a_{n-2}^2,$

$A_n \;=6a_n^2-a_{n-1}^2$, also

$$A=A_1+A_2+A_3+\ldots+A_{n-1}+A_n$$
$$=4a_1^2+4a_2^2+4a_3^2+\ldots+4a_{n-1}^2+6a_n^2$$
$$=4(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_{n-1}^2+a_n^2)+2a_n^2.$$

Für $a_1=1$ cm, $a_2=2$ cm, $a_3=3$ cm, ..., $a_n=n$ cm erhält man also

$$A=[4(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+2n^2]\,\text{cm}^2.$$

Nun gilt (vgl. Tabellen und Formeln, S. 43, Z. 2 v. u.)

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ also}$$

$$A=\left[\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}+2n^2\right]\text{cm}^2,$$

$$A=\left[\frac{2}{3}n\,(2n^2+3n+1+3n)\right]\text{cm}^2,$$

$$A=\left[\frac{2}{3}n\,(2n^2+6n+1)\right]\text{cm}^2.$$

Für $n=4$ erhält man hieraus wie oben

$$A=\frac{2}{3}\cdot 4(2\cdot 4^2+6\cdot 4+1)\,\mathrm{cm}^2$$
$$=\frac{2\cdot 4\cdot 57}{3}\,\mathrm{cm}^2=152\,\mathrm{cm}^2.$$

Für $n=100$ erhält man

$$A=\frac{2}{3}\cdot 100(20000+600+1)\,\mathrm{cm}^2$$
$$=1\,373\,400\,\mathrm{cm}^2.$$

Ph9 ▪1452

Gegeben: $H=10000\,\frac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{kg}}$ Gesucht: m in 8 h

$\eta=0{,}6$ P_{zu}

$P_{ab}=80000\,\frac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{h}}$

Der Verbrauch des Heizöls ergibt sich aus seiner Masse und seinem Heizwert. Vorher ist die benötigte Wärmemenge Q zu berechnen.

$$\eta=\frac{P_{ab}}{P_{zu}}$$
$$P_{zu}=\frac{P_{ab}}{\eta}$$
$$P_{zu}=\frac{80000\,\mathrm{kcal}}{0{,}6\,\mathrm{h}}=133\,333\,\mathrm{kcal}\cdot\mathrm{h}^{-1}.$$

In 8 h ist die Wärmemenge

$$Q=133\,333\,\mathrm{kcal}\cdot\mathrm{h}^{-1}\cdot 8\,\mathrm{h}$$
$$=1\,066\,640\,\mathrm{kcal}$$
$$Q=m\cdot H$$
$$m=\frac{Q}{H}$$
$$m=\frac{1\,066\,640\,\mathrm{kcal}\cdot\mathrm{kg}}{10000\,\mathrm{kcal}}=106{,}664\,\mathrm{kg}.$$

Der Verbrauch von Heizöl beträgt 106,664 kg.

Ch9 ▪1453 $P_2O_5+3H_2O\rightarrow 2H_3PO_4$

100 g 60%ige o-Phosphorsäure enthalten 60 g H_3PO_4. 20 g 60%ige o-Phosphorsäure enthalten x g H_3PO_4.

$$x=\frac{60\cdot 20}{100}=12$$
$$2M_{H_3PO_4}:M_{P_2O_5}=12:x$$
$$2\cdot 97{,}995:141{,}945=12:x$$
$$x=8{,}69$$

In 20 g 60%iger o-Phosphorsäure sind rund 8,7 g Phosphoroentoxid enthalten.

Ma 10/12 ▪1454 Es gilt

$$s=1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)+n$$

und $s=n+(n-1)+(n-2)+\ldots+3+2+1,$

also $2s=(n+1)+(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)+(n+1)+(n+1),$

$$2s=n(n+1),$$
$$s=\frac{n(n+1)}{2}$$

(vgl. Tabellen und Formeln, S. 43, Z. 5 v. u.). Daraus folgt

$$\frac{s}{n}=\frac{n+1}{2}.$$

s ist also genau dann durch n teilbar, wenn $\frac{n+1}{2}$ ganzzahlig ist. Ist nun n ungerade, so ist $n+1$ gerade, also $\frac{n+1}{2}$ ganzzahlig. Ist aber n gerade, so ist $n+1$ ungerade, also $\frac{n+1}{2}$ nicht ganzzahlig. Daher ist die Summe s genau dann durch n teilbar, wenn n eine ungerade natürliche Zahl ist, w. z. b. w.

Ma 10/12 ▪1455 Es sei $h=2nr$ die Höhe des Zylinders und des Kegels. Dann ist das Volumen des Zylinders gleich $V_1=\pi r^2\cdot 2nr$ und das Gesamtvolumen der n Kugeln gleich $V_2=n\cdot\frac{4}{3}\pi r^3$, also beträgt das Volumen der Wassermenge

$$V=V_1-V_2=2\pi nr^3-\frac{4}{3}\pi nr^3=2\pi nr^3\left(1-\frac{2}{3}\right)$$
$$=\frac{2}{3}\pi nr^3.$$

Andererseits ist das Volumen des Kegels gleich

$$V'=\frac{\pi}{3}r^2\cdot 2nr=\frac{2}{3}\pi nr^3.$$

Daraus folgt $V=V'$, d. h., das Volumen der Wassermenge ist ebenso groß wie das Volumen des Kegels.

Ma 10/12 ▪1456 Es sei x eine reelle Lösung der Gleichung

$$x(x+2)(x+3)(x+5)=720. \quad (1)$$

Da der Mittelwert der Zahlen x, $x+2$, $x+3$, $x+5$ gleich $x+2{,}5$ ist, setzt man $x+2{,}5=t$, also $x=t-2{,}5$, und erhält aus (1) die Gleichung

$$(t-2{,}5)(t-0{,}5)(t+0{,}5)(t+2{,}5)=720, \quad (2)$$
$$\left(t^2-\frac{25}{4}\right)\left(t^2-\frac{1}{4}\right)=720,$$
$$t^4-\frac{13}{2}t^2+\frac{25}{16}-720=0.$$

Diese in t^2 quadratische Gleichung hat die Lösungen

$$t^2=\frac{13}{4}+\sqrt{\frac{169}{16}-\frac{25}{16}+720}$$
$$=\frac{13}{4}+\sqrt{729}=\frac{13}{4}+27=\frac{121}{4} \quad (3)$$

und $t^2=\frac{13}{4}-27=-\frac{95}{4}.$ (4)

Da t^2 nicht negativ sein soll, scheidet die zweite Lösung aus. Wir erhalten aus $t^2=\frac{121}{4}$ die beiden Werte für t:

$t_1=\frac{11}{2}$, also $x_1=\frac{11}{2}-\frac{5}{2}=3;$

$t_2=-\frac{11}{2}$, also $x_2=-\frac{11}{2}-\frac{5}{2}=-8.$

Für $x_1=3$ und $x_2=-8$ ist aber auch die Gleichung (1) erfüllt; denn es gilt

$$3(3+2)(3+3)(3+5)$$
$$=3\cdot 5\cdot 6\cdot 8=720$$

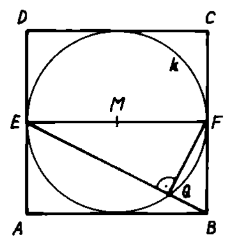
und $(-8)(-8+2)(-8+3)(-8+5)$

$$=8\cdot 6\cdot 5\cdot 3=720.$$

Die Gleichung (1) hat also genau zwei reelle Lösungen, nämlich $x_1=3$ und $x_2=-8$.

Ma 10/12 ▪1457 Wir legen einen Schnitt $ABCD$ durch den Würfel und die einbeschriebene Kugel, der durch den Mittelpunkt M der Kugel geht und im Punkt B senkrecht auf der Würfelkante steht, die in der Ebene ε liegt. Dann ist $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge a und dem einbeschriebenen Kreis k, der den Mittelpunkt M hat und Schnittkreis der Kugel ist (siehe Bild).

O. B. d. A. können wir annehmen, daß die Ebene ε auch durch den Punkt E, den Mittelpunkt der Quadratseite $\overline{DA}$, geht. Dann liegt $\overline{BE}$ in der Ebene ε. Bezeichnen wir mit F den Mittelpunkt der Quadratseite $\overline{BC}$, so liegt M auf $\overline{EF}$. Ist Q der Schnittpunkt von $\overline{BE}$ mit dem Kreis k, so ist nach dem Satz des Thales $\sphericalangle FQE=90°$, also ist $\overline{FQ}$ Höhe in dem rechtwinkligen Dreieck FEB.



Da die Punkte E und Q in der Ebene ε und auf der Kugel liegen und M Mittelpunkt dieser Kugel ist, ist $\overline{EQ}=2x$ Durchmesser und x Radius des Kreises, in dem die Ebene ε die Kugel schneidet. Wir berechnen jetzt $\overline{EQ}=2x$ mit Hilfe des Kathetensatzes in dem rechtwinkligen Dreieck FEB und erhalten

$$\overline{EQ}\cdot\overline{EB}=\overline{EF}^2,\ \overline{EQ}=\frac{\overline{EF}^2}{\overline{EB}}.$$

Wegen $\overline{EF}=a$, $\overline{FB}=\frac{a}{2}$ gilt

$$\overline{EB}=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=\sqrt{\frac{5a^2}{4}}=\frac{a}{2}\sqrt{5},$$

also $\overline{EQ}=2x=\frac{a^2}{\frac{a}{2}\sqrt{5}}=\frac{2a}{\sqrt{5}},\ x=\frac{a}{\sqrt{5}}.$

Der Flächeninhalt des Kreises, in dem sich die Ebene ε und die Kugel schneiden, ist also gleich

$$A=\pi x^2=\frac{\pi}{5}a^2.$$

Ph 10/12 ▪1458

Gegeben: $h=4000$ m Gesucht: x_0

$v=500\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$

$g=9{,}81\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$

Der Körper vollführt eine Bewegung von der Art des horizontalen Wurfs.

$$x=v\cdot t;\quad y=\frac{1}{2}gt^2$$
$$x_0=v\cdot t_0;\quad h=\frac{1}{2}g{t_0}^2$$
$$x_0=v\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}\quad t_0=\sqrt{\frac{2h}{g}}$$
$$x_0=\frac{500000\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}}\cdot\sqrt{\frac{8000\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\mathrm{ms}^{-2}}}$$
$$x_0=3958\,\mathrm{m}$$

Der Körper muß in der Entfernung von 3958 m abgeworfen werden.

Ch 10/12 ▪1459

$$x_1=\frac{10\cdot M_{Na_2CO_3}}{2\cdot 5}$$
$$=\frac{10\cdot 105{,}989}{2\cdot 5}=105{,}989$$

Für die Herstellung von 10 l 0,2*n* Na_2CO_3 sind 105,989 g reines Natriumkarbonat notwendig.

$$x_2 = \frac{105{,}989 \cdot 100}{95} = 111{,}6$$

Zur Herstellung von 10 l 0,2 normaler Lösung sind rund 117 g 95%iges Natriumkarbonat erforderlich.

Lösungen der Aufgaben der Qualifizierungsrunde der schwedischen Mathematikolympiade 1974

▲1▲ Es seien s die Länge des Drahtes, x der Durchmesser des Kreises, y die Seitenlänge des Quadrats.
Dann ist die Summe der Flächeninhalte des Kreises und des Quadrats gleich

$$A = \frac{\pi}{4}x^2 + y^2. \qquad (1)$$

Für die Drahtlänge, also für die Summe der Umfänge des Kreises und des Quadrats, gilt

$s = \pi x + 4y$. Aus (2) folgt (2)

$y = \frac{s - \pi x}{4}$. Daher gilt (3)

$$A = \frac{\pi}{4}x^2 + \left(\frac{s-\pi x}{4}\right)^2,$$

$$A = \frac{1}{16}[\pi(\pi+4)x^2 - 2\pi s x + s^2],$$

$$A = \frac{\pi(\pi+4)}{16}\left[\left(x^2 - \frac{2s}{\pi+4}\right)x + \left(\frac{s}{\pi+4}\right)^2 - \left(\frac{s^2}{\pi+4}\right)^2 + \frac{s^2}{\pi(\pi+4)}\right],$$

$$A = \frac{\pi(\pi+4)}{16}\left[\left(x - \frac{s}{\pi+4}\right)^2 + \frac{4s^2}{\pi(\pi+4)^2}\right]. \qquad (4)$$

Folglich wird A ein Minimum, wenn $x = \frac{s}{\pi+4}$.
Wegen (3) gilt dann

$$y = \frac{1}{4}\left(s - \frac{\pi s}{\pi+4}\right) = \frac{s}{\pi+4},$$

also $x : y = \frac{s}{\pi+4} : \frac{\pi+4}{s} = 1 : 1.$

Der Durchmesser des Kreises verhält sich also zu der Seitenlänge des Quadrats wie 1 : 1.

▲2▲ Wir unterscheiden zunächst drei Fälle, je nachdem, ob in das Fach A
1. genau 1 Gegenstand,
2. genau 2 Gegenstände,
3. genau 3 Gegenstände gelegt werden.

1. Fall: Dann gibt es fünf Möglichkeiten für die Belegung des Faches A (je nachdem, ob man den Gegenstand 1, 2, 3, 4 oder 5 hineinlegt).
Liegt jetzt im Fach B auch genau 1 Gegenstand, so gibt es hierfür jeweils vier Möglichkeiten. Liegen jedoch im Fach B genau 2 Gegenstände, so gibt es hierfür jeweils sechs Möglichkeiten, z. B.

(2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5).

Liegen jedoch im Fach B genau 3 Gegenstände, so gibt es hierfür jeweils vier Möglichkeiten, z. B.

(2, 3, 4), (2, 4, 5), (2, 3, 5), (3, 4, 5).

Insgesamt gibt es also im 1. Fall
$5 \cdot (4+6+4) = 5 \cdot 14 = 70$ Möglichkeiten.

Lösungen zu alpha-heiter, 2/76

Aus „TausendundeinTag"
Die Frau besaß 160 Äpfel, denn
$80 + 40 + 20 + 10 + 10 = 160$.

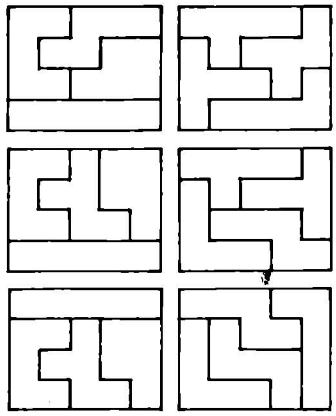
Zur Schulentlassung
$x \cdot (x-1) = 870$
$x_1 = 30$; $x_2 = -29$
30 Schüler wurden entlassen.

3 × ALPHA
1. Achse, 2. Klein, 3. Lupus, 4. Sechs, 5. Penta, 6. Alpha, 7. Hyper, 8. Pluto, 9. Anode

Kreuzworträtsel
Waagerecht: 1. Kosinus; 6. Thue; 8. Troege; 10. NO; 11. Ar; 12. AL; 13. Rom; 14. Plage; 16. Gas; 18. RT; 19. er; 20. Italer; 22. neun; 23. Pi; 24. Kathete
Senkrecht: 1. Kotangens; 2. sto; 3. Ideal; 4. Ute; 5. Geometrie; 7. UNO; 9. glatt; 13. Re; 14. PS; 15. Graph; 17. Are; 20. Ina; 21. Lie.

Was bedeutet das?
6 aus 49

5 × 4 = 20



Unmögliches wird möglich!
Es gibt 7 Lösungen:

9150	6250	9450	6450
9150	6250	9450	6450
9150	6250	9450	6450
27450	18750	28350	19350

4650	7950	8950
4650	7950	8950
4650	7950	8950
13950	23850	26850

Durch gute Patenschaftsbeziehungen zum *VEB Zahnradwerk Pritzwalk* ist die Erweiterte Oberschule Pritzwalk seit Dezember 1974 im Besitz einer EDV-Anlage vom Typ R 100. Werktätige dieses Werkes stellten die Anlage auf. Sie wurde uns vom *Chemiefaserwerk Premnitz* (als amortisierte Anlage) zu praktischer Arbeit zur Verfügung gestellt.
Der Rechner dient in erster Linie zur Ausbildung der Schüler im Bedienen und Programmieren der Anlage. Außerdem arbeiten an dieser Anlage die Schüler, die in der wissenschaftlich-praktischen Arbeit auf dem Gebiet der EDV tätig sind.
Die Ergebnisse unseres vorjährigen Sportfestes und des Wettkampfes um die *Urkunde des Staatsratsvorsitzenden* wurden auf dieser Anlage in kurzer Zeit umfassend ermittelt. Im Verlauf der Arbeit entstanden Programme, mit denen Aufgaben aus unseren Lehrbüchern schnell gelöst werden können: z. B. Lösen von Gleichungssystemen; Bestimmen der Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte von ganzrationalen Funktionen bis zum 6. Grad; Bestimmen folgender Funktionswerte: Logarithmus, Exponentialfunktion, trigonometrische Funktionen; Aufgaben zur Körperberechnung; Ermittlung von Potenzen, Wurzeln des GgT und kgV, von Binominalkoeffizienten. Unseren Stundenplan erarbeiteten wir auch mit dieser Anlage. Seit mehreren Jahren arbeiten der Betreuer der Anlage und ein Mathematiklehrer unserer Schule an der Lösung dieses Problems. Seit zwei Jahren stellen wir brauchbare Pläne für unsere Schule auf. Die Nacharbeit beträgt etwa 2%, die durch ein Sonderprogramm zufriedenstellend gelöst wird. Wir würden uns freuen, wenn uns Arbeitsgemeinschaften EDV aus ihrer außerunterrichtlichen Tätigkeit berichten würden.

Arbeitsgemeinschaft EDV der EOS Pritzwalk

BÜCHER MIT MATHE

aus dem VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

A. S. Solodownikow

Lineare Ungleichungssysteme

98 Seiten, Preis: 5,00 M
Math. Schülerbücherei Nr. 74

Die gegenwärtige intensive Entwicklung der Theorie der linearen Ungleichungssysteme begann erst in den vierziger bis fünfziger Jahren dieses Jahrhunderts, als das stürmische Wachstum der angewandten Disziplinen (lineare, konvexe und andere Gebiete der mathematischen Optimierung, die sog. Spieltheorie usw.) ein vertieftes und systematisches Studium der linearen Ungleichungen nötig machten. Diese Broschüre möchte den Leser mit verschiedenen Aspekten der Theorie der linearen Ungleichungssysteme vertraut machen; mit geometrischen Aspekten und, eng damit zusammenhängend, mit Lösungsmethoden, mit einigen rein algebraischen Eigenschaften und mit prinzipiellen Fragen der linearen Optimierung. Für die Lektüre werden keinerlei Kenntnisse vorausgesetzt, welche die Ergebnisse des Mathematikunterrichts der Schule überschreiten.

H. Pieper

Zahlen aus Primzahlen

167 Seiten, Preis: 6,70 M

Aus dem Inhalt: Primzahlen; die p-adische Entwicklung der rationalen Zahlen; die p-adischen Zahlen.
Dieses Büchlein stellt eine kurze Einführung in ein Teilgebiet der Mathematik, nämlich in die Arithmetik, in die Theorie der Zahlen dar. *Hensel* nannte es das „reinste und mathematischste Gebiet" der Mathematik. *Gauß* sagte einmal, die Mathematik sei die Königin der Wissenschaften, die Zahlentheorie aber die Königin der Mathematik. Dieses Buch wurde sehr ausführlich geschrieben; es soll mit wenigen Vorkenntnissen verständlich sein. Doch oberflächlich lesen läßt es sich nicht. Man muß mit ihm arbeiten, die Abstraktionen und Schlüsse nachvollziehen, sich Schritt für Schritt die Kenntnisse aneignen, in den Stoff eindringen.

K.-D. Drews

Lineare Gleichungssysteme und lineare Optimierungsaufgaben

154 Seiten, Preis: 7,50 M
Math. Schülerbücherei Nr. 89

Themen dieses Buches sind die Bestimmung der Lösungen von linearen Gleichungssystemen, die Matrizenrechnung sowie die Bestimmung der Lösungen von linearen Optimierungsaufgaben. Dabei stehen sowohl die Herleitung der wesentlichen theoretischen Aussagen als auch die Bereitstellung von algorithmisch aufbereiteten Rechenverfahren im Vordergrund, und zwar erfolgt die Entwicklung der Theorie unmittelbar in Verbindung mit den Lösungsalgorithmen. Diese wurden unter den in der Praxis üblichen Verfahren ausgewählt und erhalten Formulierungen, die dem Leser das übersichtliche Durchrechnen von Beispielen ermöglichen, aber auch eine Verwendbarkeit in modernen programmgesteuerten Rechenautomaten erkennen lassen. Der Stoff ist so abgefaßt, daß er für Schüler der Abiturstufe verständlich wird.

N. N. Worobjow

Teilbarkeitskriterien

85 Seiten, Preis: 4,20 M
Math. Schülerbücherei Nr. 52

Aus dem Inhalt: Die Teilbarkeit von Zahlen; die Teilbarkeit von Summen und Produkten; Restgleichheits- und Teilbarkeitskriterien; die Teilbarkeit von Potenzen; Beweise der Sätze, Lösungen der Aufgaben. Die vorliegende Broschüre kann als Beschreibung einer der möglichen *Spaziergänge* am Rande der modernen Mathematik angesehen werden. Die Darlegung grundlegender Dinge, die sich auf Teilbarkeitskriterien beziehen, erlaubt es, einige ziemlich abstrakte Fragen der diskreten Mathematik zu berühren. Dazu gehören vor allem die Aussagen der elementaren Zahlentheorie, die sich um den Hauptsatz der Arithmetik und die kanonische Zerlegung einer natürlichen Zahl in Primfaktoren gruppieren.
Das Büchlein ist für mathematikinteressierte Schüler der oberen Klassen bestimmt und setzt, von einigen Anwendungen des binomischen Satzes abgesehen, keinerlei Vorkenntnisse voraus.

I. I. Golowina/I. M. Jaglow

Vollständige Induktion in der Geometrie

144 Seiten, Preis: 5,80 M
Math. Schülerbücherei Nr. 75

Aus dem Inhalt: Berechnungen mittels vollständiger Induktion; Beweise mittels vollständiger Induktion (Aufgaben über Karten, Färbungsprobleme); Vollständige Induktion bei Konstruktionen; Bestimmung von Figuren mittels vollständiger Induktion; Definition mittels vollständiger Induktion; Vollständige Induktion nach der Dimensionszahl; ...; Lösung der Aufgaben. Das Buch wendet sich an Schüler der höheren Klassen der Erweiterten Oberschulen. Es kann vorteilhaft im Unterricht und zur Arbeit im Mathematikzirkel verwendet werden.

A. O. Gelfond

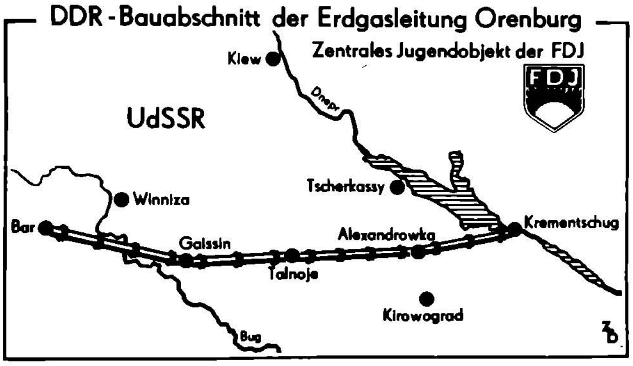
Die Auflösung von Gleichungen in ganzen Zahlen

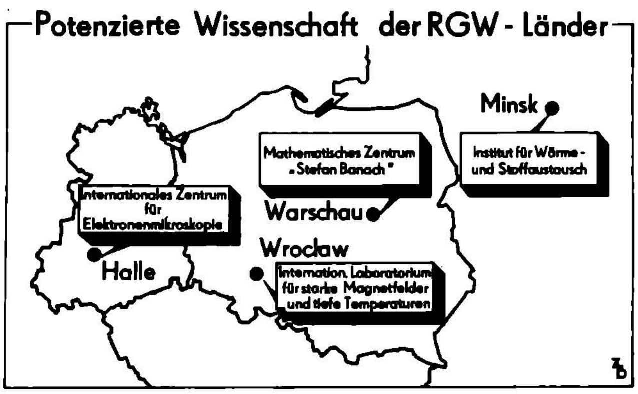
(Diophantische Gleichungen)

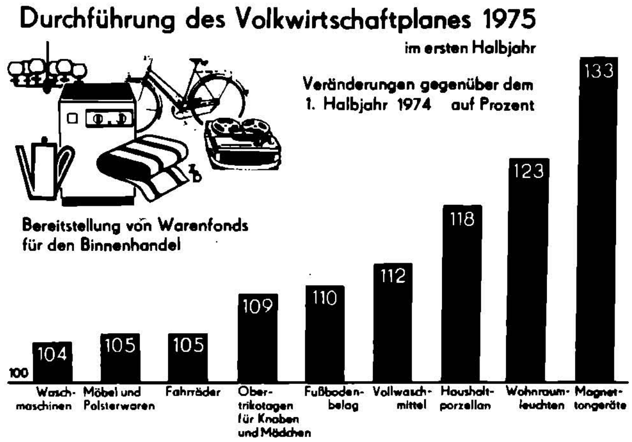
59 Seiten, Preis: 3,80 M
Math. Schülerbücherei Nr. 22

Aus dem Inhalt: Gleichungen mit einer Unbekannten; Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten; Beispiele für Gleichungen zweiten Grades mit drei Unbekannten; Gleichungen der Form $x^2-Ay^2=1$. Die Ermittlung aller Lösungen dieser Gleichung; die allgemeine Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten; Gleichungen höheren als zweiten Grades mit zwei Unbekannten; algebraische Gleichungen höheren Grades als zweiten Grades mit drei Unbekannten und einige Exponentialgleichungen.
Das vorliegende Büchlein behandelt eines der interessantesten Gebiete der Zahlentheorie, nämlich die Auflösung von sogenannten diophantischen Gleichungen.

Fakten und Zahlen







Was sagt eigentlich die Statistik heute zur Gleichberechtigung der Frau?
Daß 49 Prozent aller Berufstätigen in unserer Republik Frauen und damit 85 Prozent aller arbeitsfähigen Frauen berufstätig sind; daß jeder 3. Abgeordnete, 5. Bürgermeister, 3. Richter, 2. Schöffe, jeder 5. Schuldirektor, 10. Leiter in der Industrie, jeder 2. Hoch- oder Fachschulabsolvent eine Frau ist.

Wir haben mit der Gründung der DDR sehr darauf geachtet, die führenden Positionen unseres Staates mit bewährten Vertretern der Arbeiterklasse zu besetzen – gilt das heute noch?
Zahlen mögen antworten: Der Arbeiterklasse entstammen 57 Prozent aller Volkskammerabgeordneten, 60 Prozent aller Abgeordneten der örtlichen Volksvertretungen, 75 Prozent der Leiter in der sozialistischen Volkswirtschaft, 74 Prozent der Richter, 80 Prozent der Offiziere der NVA.