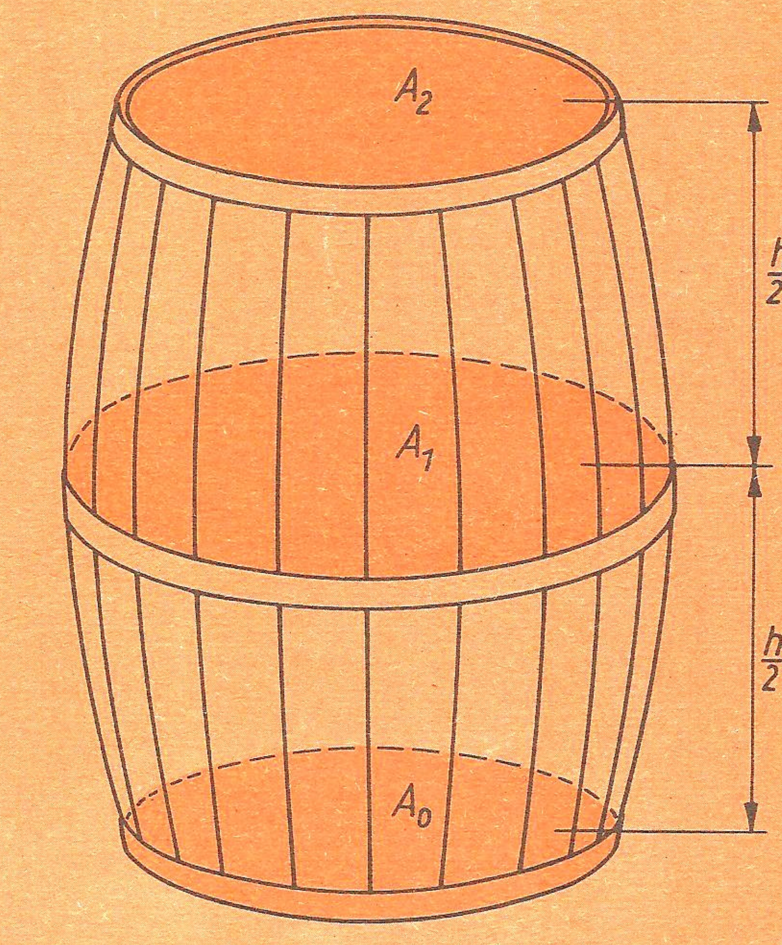
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha

$$V = \frac{h}{6}\left[A_0 + 4A_1 + A_2\right]$$



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
5. Jahrgang 1971
Preis 1,– M
Sonderpreis für DDR: 0,50 M
Index 31059

6

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541 Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und -Import GmbH, DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Archiv TU Dresden (S. 121); J. Lehmann, Leipzig (S. 125); R. Mittelstädt, Berlin (S. 126/27); TASS-Fotodienst (S. 130); Hochschulfilm- und Bildstelle der Humboldt-Universität Berlin (S. 135); Vignetten: W. Meder, Leipzig; Technische Zeichnungen: G. Gruß, Leipzig
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 30. September 1971

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgabe für Schüler ab der angegebenen Klasse geeignet

Johannes Kepler –
Astronom und Mathematiker

Die vierhundertjährige Wiederkehr des Geburtstages von Johannes Kepler ist nur ein äußerer Anlaß, eines Wissenschaftlers zu gedenken, der zu den entscheidendsten Bahnbrechern für die neuzeitliche Wissenschaft gehört.

In seinem Leben, durch seine forschende Tätigkeit vollzieht sich ein großer Teil des Übergangs von der mittelalterlichen, mit Mystik behafteten Astronomie zur neuzeitlichen, wissenschaftlichen und auf rationalen Grundgedanken fußenden Astronomie.

Tatsachen, die uns heute als selbstverständlich erscheinen, wie z. B. die Eigenschaft der Planetenbahnen, Ellipsen zu sein, waren bis zur Zeit Keplers nicht nur völlig unbekannt, sondern auch aus den benutzten Beobachtungstafeln und den vorherrschenden theoretischen Anschauungen in keiner Weise ableitbar. Diese heute selbstverständlichen Erkenntnisse standen vielmehr im Widerspruch zu den aus dem Altertum und dem Mittelalter überlieferten Auffassungen.

Da sich zur Zeit Keplers aber solche Widersprüche zwischen Tradition und realer Naturerkenntnis im Gebiet der Astronomie häufig bis zu theologischen Streitfragen auswuchsen und damals Eingriffe in das persönliche Leben des betreffenden Wissenschaftlers hervorrufen konnten (es sei daran erinnert, daß Galileo Galilei infolge seines Eintretens für das kopernikanische Weltsystem vor ein Inquisitionsgericht gebracht wurde und er sich nur durch Widerruf vor dem Märtyrertod gerettet hat), wird klar, daß nicht nur hervorragende wissenschaftliche Leistungen, sondern auch ungewöhnliche Charakterstärke von den Begründern der modernen Astronomie aufgebracht werden mußten.

So erscheint es mehr als gerechtfertigt, einen Blick auf das Leben und wissenschaftliche Wirken Keplers zu werfen und einige markante Züge dieses Wirkens herauszustellen, nicht zuletzt auch deshalb, weil, wie Kepler sagte, „die Geschichte von Entdeckungen oft genau so interessant ist, wie es diese Entdeckungen selbst sind".

Johannes Kepler wurde am 27. 12. 1571 in Weil, einer Stadt in Württemberg, geboren. Er besuchte als Stipendiat die Klosterschule in Maulbronn und erwarb mit 17 Jahren am protestantisch-theologischen Stift zu Tübingen die Magisterwürde. In Tübingen studierte Kepler protestantische (lutherische) Theologie und gleichzeitig Mathematik und Astronomie. Sein Lehrer Michael Maestlin führte ihn in die neue Lehre von Nikolaus Kopernikus (1473–1543), eines Domherren, Arztes und Astronomen, ein. Diese kopernikanische Lehre besagt, daß sich die Planeten (Merkur, Venus, Erde, Mars, ...) auf Kreisbahnen um die *Sonne* bewegen und steht damit in ganz entschiedenem Gegensatz zu der seit dem Altertum herrschenden Auffassung des Ptolemäus (90 n. u. Z.–160 n. u. Z.), nach welcher die *Erde* den Mittelpunkt der Welt darstellt. Kopernikus hat seine Lehre im Werk „De revolutionibus orbium coelestium" (Über die Bewegungen der Himmelskörper) niedergelegt.

Das kopernikanische Weltsystem ist also heliozentrisch, d. h., die Sonne (griechisch: helios) steht im Mittelpunkt der Welt, im Unterschied zum geozentrischen ptolemäischen Weltsystem (die Erde steht im Mittelpunkt der Welt). Zur Erklärung der Bahnen der Planeten wurden in beiden Systemen komplizierte Systeme von Kreisbewegungen durch gegenseitige Überlagerung (sog. Epizykelbewegungen) gebildet, die mehr oder weniger mit den damals noch recht ungenauen Beobachtungen übereinstimmten.

Kepler stellte sich bereits in seiner Tübinger Zeit ganz auf den Standpunkt des kopernikanischen Systems und nur durch sein weiteres konsequentes Festhalten am heliozentrischen System gelangte er zur Entdekkung der nach ihm benannten Planetengesetze.

Im Jahre 1594 wird Kepler aus seinen theologischen Studien, die er zur Vorbereitung auf ein von ihm gewünschtes Kirchenamt unternahm, herausgerissen und zum Antritt einer neuen Stelle nach Graz geschickt, wo die protestantischen Landstände von Steiermark eine höhere Schule unterhielten. Als „Lehrer der Mathematik und Moral" und als Mathematiker der „Landschaft", d. h. der protestantischen Landesregierung, oblag ihm die Amtsaufgabe, jährlich einen Kalender auszuarbeiten. Solche Kalender enthielten die Angaben der Feiertage, astronomische Angaben über die Sonne, den Mond, die Planeten und den Tierkreis sowie über die Jahreszeiten, den voraussichtlichen Witterungsverlauf sowie zu erwartende besondere Ereignisse. Die Aufstellung des Kalenders erforderte somit astronomische Kenntnisse, und so bestimmte diese Aufgabe die Hinwendung Keplers zur Mathematik und Astronomie.

Obwohl Kepler mit seinen Voraussagen, die er im Kalender für 1595 machte, Erfolg hatte, war er sich über Unwissenschaftlichkeit und Unhaltbarkeit der Astrologie, auf die sich solche Voraussagen gründeten, im klaren und betrachtete die astrologischen Methoden als ein zeitgegebenes Übel. Sein wahres Interesse richtete sich vielmehr darauf, den „Bauplan des Universums" zu enthüllen und speziell der Frage nach der Anzahl, der Größe und der Art der Bewegung der Planeten nachzugehen.

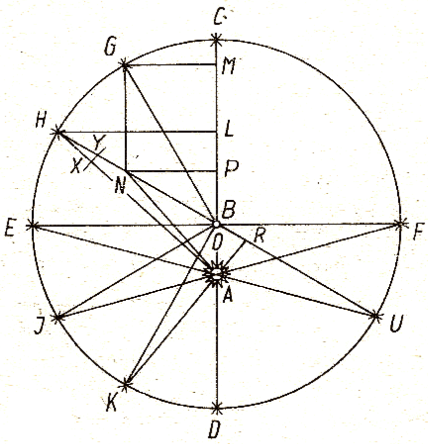
Dabei ist er zunächst noch ganz im mittelalterlichen, spekulativen Denken befangen, wie sich in seinem ersten Werk „Mysterium cosmographicum" (Geheimnis der Weltbeschreibung), das er 1595 entwarf, zeigt.

Von der mathematisch beweisbaren Tatsache ausgehend, daß es nur fünf reguläre Polyeder (Vielflächner), nämlich das Tetraeder, den Würfel, das Oktaeder, das Pentagondodekaeder und das Ikosaeder gibt (regulär ist ein Polyeder genau dann, wenn seine Seitenflächen aus lauter regelmäßigen untereinander kongruenten n-Ecken bestehen und alle Körperecken untereinander kongruent sind – man kann zeigen, daß n hierbei nur die Werte 3, 4 oder 5 annehmen kann –, kommt Kepler auf die Vermutung, daß sich in die fünf Zwischenräume der Bahnen der (damals nur bekannten) sechs Planeten die fünf regulären Polyeder so einschieben lassen, daß jeweils die Sphäre des einen Planeten (d. h. die Oberfläche einer gedachten Kugel, die die Bahnkurve des jeweiligen Planeten enthält) die umbeschriebene Kugel und die Sphäre des nächsten Planeten (in Richtung kleiner werdender Sonnenabstände gezählt) die einbeschriebene Kugel eines der regulären Polyeder ist. So gelangt Kepler zu der folgenden Anordnung von Planeten(-bahnen) und regulären Körpern: Merkur – Oktaeder – Venus – Ikosaeder – Erde – Pentagondodekaeder – Mars – Tetraeder – Jupiter – Würfel – Saturn.

Natürlich trifft dieser Sachverhalt, der nur das Ergebnis reiner Spekulation war, die u. a. auf der falschen Annahme fußte, daß es nur sechs Planeten gibt, nicht zu und natürlich stellte auch Kepler erhebliche Abweichungen zwischen den nach seiner „Theorie" geforderten und den wirklichen Abständen fest. Kepler konnte jedoch auf die großen Ungenauigkeiten des damals vorliegenden Beobachtungsmaterials ver-

weisen und war auch deshalb von der Richtigkeit seines Weltmodells überzeugt.
Die Reaktion der damaligen wissenschaftlichen Welt auf das Erscheinen des „Mysterium cosmographicum“ war teils anerkennend, teils ablehnend. Für die Zukunft wichtig wurde der Umstand, daß auch Tycho Brahe, ein dänischer Astronom, Keplers Erstlingswerk kritisierte, ihn aber zur Zusammenarbeit einlud, da er die theoretische Begabung von Kepler erkannte. Wer war Brahe?
Tycho Brahe wurde am 14. 12. 1546 in Knudstrup (Schonen/Dänemark) geboren. Er studierte an verschiedenen deutschen Universitäten zunächst Rechtswissenschaften, wandte sich aber dann immer mehr der Astronomie zu, beobachtete 1572 das Entstehen eines neuen Fixsterns (Supernova) und erhielt vom dänischen König Auftrag und Mittel zum Bau zweier Sternwarten auf der Insel Hveen: Uranienburg und Sternenburg. Dort beobachtete Brahe mehrere Jahrzehnte das gesamte Himmelsgeschehen mittels einfacher Instrumente, die aber sehr große Dimensionen hatten und erhielt so die genauesten Beobachtungen vor der Erfindung des Fernrohrs. Brahe wußte, daß nur ein genialer Theoretiker seine Beobachtungen voll auswerten konnte und daher ist verständlich, daß er die Verbindung zu Kepler suchte.
Er befand sich, als er Kepler einlud, in Wandsbek, wo er nach unfreiwilligem Scheiden aus seiner dänischen Heimat zunächst eine Zuflucht gefunden hatte. Kepler aber war durch seine Stellung in Graz verhindert, eine so weite Reise zu unternehmen. Während sich in Brahes Schicksal eine günstige Wendung vollzog, indem er, einem Rufe Kaiser Rudolph II. folgend, im Jahre 1599 nach Prag (Schloß Benatek bei Prag) übersiedeln und dort seine astronomischen Arbeiten fortsetzen konnte, wurde Keplers Stellung in Graz durch die gegenreformatorischen Maßnahmen des Erzherzogs Ferdinand von der Steiermark immer unsicherer, da Kepler protestantischen Glaubens war. Er folgte der Einladung Tychos und arbeitete eng mit ihm zusammen, obwohl diese Zusammenarbeit mit starken persönlichen Spannungen belastet war. Im Oktober 1600 siedelt Kepler mit seiner Familie nach Prag über, da er, wie alle Protestanten, die nicht zum Katholizismus übertraten, aus der Steiermark ausgewiesen wurde. Die Zusammenarbeit mit Tycho Brahe war jedoch nicht von langer Dauer, da dieser am 24. Oktober 1601 starb. Kepler wird sein Nachfolger als Hofastronom Kaiser Rudolph II.

Es war ein günstiger Umstand, daß Tycho Brahe sich zur Zeit, da Kepler in Prag ankam, gerade mit der Marsbahn beschäftigte, denn die Marsbahn ist eine Ellipse mit verhältnismäßig großer Exzentrizität. Wenn überhaupt, so konnte am ehesten an dieser Bahn festgestellt werden, daß es sich um eine Ellipse und nicht um einen Kreis handelte.
Kepler geht nun von der physikalisch richtigen Vorstellung aus, daß „in der Sonne der Sitz der die Planeten bewegenden Kraft sei“, und rechnet daher alle Abstände vom Sonnenmittelpunkt aus. Durch die Annahme, daß von der Sonne eine Kraft ausgeht, die „die Planeten herumreißt“, errät er genial den Flächensatz, das sog. zweite Keplersche Gesetz.
Dieser Flächensatz besagt folgendes: Die Planeten bewegen sich so, daß die Verbindungsgerade Sonne – Planet in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht. In Sonnennähe bewegen sich also die Planeten schneller als in Sonnenferne. Mit der Kenntnis dieses Flächensatzes tastete sich Kepler schrittweise an die wahre Form der Planetenbahnen (zunächst der Marsbahn) heran.

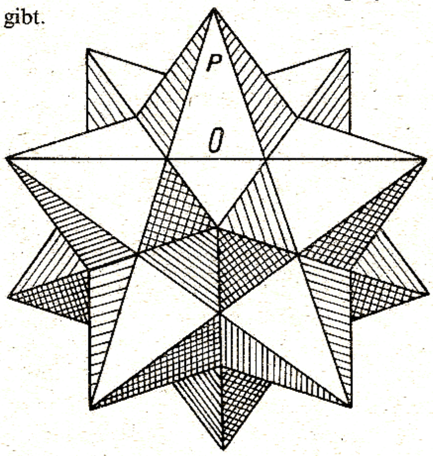


Schon vor Kepler stand fest, daß die Sonne nicht der Mittelpunkt der als kreisförmig vorgestellten Planetenbahn sein konnte, die Verhältnisse mußten also wie auf der Zeichnung (sie stammt von Kepler) sein. Jedoch zeigten die Beobachtungen starke Abweichungen von einer Kreisbahn und Kepler gelangte auf einem mühevollen, induktiven Weg (d. h. vom Speziellen auf das Allgemeine schließend, mit anschließender Prüfung durch Beobachtung und Experiment) zur Tatsache, daß die Marsbahn eine Ellipse ist, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht. (Daß dies für alle Planetenbahnen zutrifft, ist der Inhalt des sog. ersten Keplerschen Gesetzes.) Die Keplerschen Gesetze bedeuteten gegenüber den Jahrtausenden vorangegangener Sternenkunde einen ersten wirklichen Fortschritt zur Erklärung der Himmelserscheinungen. Ein weiterer großer Schritt wurde etwa einhundert Jahre später von Newton, dem großen englischen Physiker, vollzogen. Ihm gelang es, die Keplerschen Gesetze aus den von ihm formulierten Grundgesetzen (Axiomen) der Mechanik deduktiv zu gewinnen, also auf logischem Wege mittels mathematischer Methoden abzuleiten.
Im Jahr 1605 war Kepler im Besitz der ersten beiden Gesetze (das dritte, über das noch zu sprechen sein wird, fand er erst 1618), die er in seinem Hauptwerk, der „Astronomia Nova“, darstellte. Im Untertitel nennt er dieses Buch „Himmelsphysik“, und tatsächlich wird dieses Werk heute als die Grundlegung der modernen wissenschaftlichen Himmelsmechanik und Astronomie anerkannt.
Vor der Drucklegung im Jahre 1609 waren für Kepler noch erhebliche Schwierigkeiten zu überwinden, denn die „Astronomia Nova“ war mittels der Braheschen Beobachtungen entstanden, aus denen die Erben Brahes, insbesondere sein Schwiegersohn Tengnagel, der verschiedene höfische Stellungen innehatte, möglichst viele finanzielle Vorteile herauszuschlagen gedachten. Zunächst verzögerten die Braheschen Erben die Herausgabe der Beobachtungen Brahes an Kepler, und später machten sie Ansprüche bezüglich des Veröffentlichungsrechtes geltend.

Bevor wir Keplers weiteren Lebensweg und seine astronomischen Forschungen weiter verfolgen, wollen wir einen Blick auf seine mathematischen Leistungen werfen. Eine der bekanntesten ist seine Methode, die Rauminhalte von Rotationskörpern näherungsweise zu berechnen. In der Widmung des Buches „Nova stereometria doliorum“ (Neue Stereometrie der Fässer; Linz 1615) beschreibt er, durch welchen rein äußerlichen Anlaß sein Interesse für die Problematik geweckt wurde. Er hatte nämlich beobachtet, wie die Verkäufer von Weinfässern zur Feststellung des Rauminhaltes der in einem Faß enthaltenen Flüssigkeitsmenge einen Meßstab (Visierrute) benutzten, und zwar mit ein und derselben Skala für Fässer unterschiedlichster Bauart und Krümmung. Kepler stellte sich die Frage nach der Berechtigung dieses Verfahrens und arbeitete Methoden für den Vergleich von Rauminhalten aus.
Wesentlich ist, daß Kepler durch neuartige Vorgehensweisen die bis dahin bekannte Stereometrie erweiterte, so daß sie wieder zu einer interessanten Wissenschaft wurde, ferner, daß er durch Einführung und Verwendung von Näherungslösungen den Bedürfnissen der Praxis entgegenkam und durch die spezielle Betrachtungsweise von Flächen und Körpern als zusammengesetzte Gebilde, die aus kleinen Streifen bzw. Schichten bestehen, wurde Kepler zu einem Wegbereiter der Infinitesimalrechnung (Differential- und Integralrechnung). An diesen Verdiensten ändert die Tatsache nichts, daß nicht alle der von Kepler erhaltenen Ergebnisse stichhaltig sind und von unserem heutigen Standpunkt die mathematische Ausdrucksweise (keine Formeln!) sehr schwerfällig ist.
Die heute gelegentlich noch benutzte „Keplersche Faßregel“ zur Berechnung der Rauminhalte von Rotationskörpern (s. unser Titelblatt) geht in ihrer heutigen Form auf

J. H. Lambert (1756) zurück, der sie in Analogie zu Keplerschen Überlegungen aufgestellt hat.

Weiter gehört zu den vielseitigen mathematischen Aktivitäten Keplers die Entdekkung zweier sogenannter Sternpolyeder, von denen wir eines, den Dodekaeder-Igel, in der Zeichnung zeigen. Sie gerieten in Vergessenheit und wurden 1810 von dem französischen Mathematiker L. Poinsot neu entdeckt, zusammen mit zwei weiteren Sternpolyedern, und 1811 wies der französische Mathematiker A. L. Cauchy nach, daß es nur diese vier regelmäßigen Sternpolyeder gibt.



Schließlich beschäftigte sich Kepler u. a. auch damit, wie man den Raum mit Kugeln gleichen Radius ausfüllen kann, so daß der Zwischenraum kleinstmögliches Volumen einnimmt (wenn man sich auf einen beschränkten Raumteil bezieht). Man spricht dann von einer „dichtesten Kugelpackung". Bis heute ist nicht bekannt, ob die von Kepler angegebene Kugelpackung wirklich die dichteste ist. Kepler stellte sich dazu ein räumliches Würfelgitter aus Würfeln gleicher Länge vor und betrachtete eine Art dreidimensionales Schachbrett von abwechselnd „weißen" und „schwarzen" Würfeln. In jeden schwarzen Würfel wird nun eine Kugel einbeschrieben, die alle Kanten dieses Würfels berührt. Die Gesamtheit dieser Kugeln bildet die Keplersche Kugelpackung.

Ein weiteres Arbeitsgebiet Keplers, auf dem er bahnbrechend gewirkt hat, ist die Optik der Linsen und Linsensysteme, mit der er sich im Hinblick auf die Konstruktion von Fernrohren für astronomische Zwecke befaßte. Mit seinen Arbeiten „Astronomiae pars opticae" (der optische Teil der Astronomie) und „Dioptrice", die in den Jahren 1604 bzw. 1611 erschienen. legt er die Grundlagen der wissenschaftlichen Optik überhaupt. Vor dem Erscheinen dieser Werke war die Optik ein Gebiet, das nur durch die Weitergabe der Erfahrungen der Linsenschleifer und Brillenmacher bestimmt wurde.

In den „Dioptrice", die aus Anlaß des Aufkommens des aus den Niederlanden stammenden sog. Galileischen Fernrohrs geschrieben wurde, entwickelte er die Theorie eines für astronomische Beobachtungen wesentlich günstigeren Fernrohrtyps, den des sog. Keplerschen Fernrohrs.

Galilei hatte mit seinem Fernrohr aufsehenerregende Entdeckungen gemacht, z. B. die vier Jupitermonde festgestellt und damit eine heftige Diskussion unter den Astronomen und allen weiteren Liebhabern der Himmelskunde entfacht.

Auch Kepler mußte, aufgefordert von dem in Prag residierenden Kaiser Rudolph II., zu diesem Ereignis Stellung nehmen, und dies tat er unverzüglich in seiner berühmt gewordenen „Dissertatio cum nuncio sidereo" (Unterredung mit dem Sternenboten, 1609), in welcher er Galileis Beobachtungen und Erkenntnisse rückhaltlos anerkannte, u. a. deshalb, weil sie das Kopernikanische System stützten. In diesem Zusammenhang ist eine Bemerkung Keplers zur Astronomie des Jupiters interessant, in welcher Kepler künftige Weltraumflüge vorausahnt: „Gib Schiffe oder schaffe Segel für die himmlische Luft, und es werden Leute da sein, die sich nicht einmal vor jener Weite fürchten. Und als ob die wagemutigen Reisenden schon in den nächsten Tagen dastünden, wollen wird die Astronomie dafür schaffen, ich für den Mond, Du, Galilei, für den Jupiter."

Mit der „Dioptrice" schließt im wesentlichen die erste große Schaffensperiode Keplers ab, die sich etwa mit der Zeit seines Prager Aufenthaltes deckt. Durch den Tod Kaiser Rudolph II. (1612) wurde seine Stellung in Prag schwierig. Obwohl er vom Nachfolger Rudolphs, dem Kaiser Matthias, als „Hofmathematikus" bestätigt wird, geht Kepler 1612 als Lehrer an die Landschaftsschule in Linz. Tragische Familienereignisse, der Tod seines Sohnes Friedrich und seiner ersten Frau, bedrückten Kepler und lähmten seine Schaffenskraft.

Doch stellte er sich noch eine große Aufgabe: die Auswertung und Aufbereitung des von Tycho Brahe gesammelten Beobachtungsmaterials in der Form astronomischer Jahrbücher und Tafeln. Solche Tafeln haben für die Orts- und Zeitbestimmung (vor allem in der Schiffahrt) große praktische Bedeutung, von ihrer Genauigkeit hängt z. B. die Effektivität der Navigation sowie weiterer Operationen ab. In diese Tafeln, die nach dem Förderer Brahes, Kaiser Rudolph II., den Namen „Tabulae Rudolphinae" erhalten sollten, konnte Kepler seine Planetengesetze einarbeiten, und daher war der Benutzer gezwungen, sich mit den neuen Erkenntnissen der Astronomie vertraut zu machen.

Bevor die Tafeln gedruckt vorlagen, waren jedoch noch viele Schwierigkeiten zu überwinden. Zum einen war sich Kepler selbst über viele Einzelheiten noch im unklaren, z. B. fehlte ihm noch das dritte Planetengesetz, das die Abstände der Planeten von der Sonne und ihre Umlaufzeiten verknüpft.

Fortsetzung auf Seite 135

Eine Aufgabe von Prof. Dr. habil. Thomas Riedrich

Sektion Mathematik an der Technischen Universität Dresden

▲808 Es ist interessant, den Weg zu verfolgen, auf dem Kepler zu der Erkenntnis gelangte, daß die Marsbahn eine Ellipse ist. Ein wesentliches Zwischenglied war eine geometrische Eigenschaft jeder Ellipse, die ihr beweisen sollt.

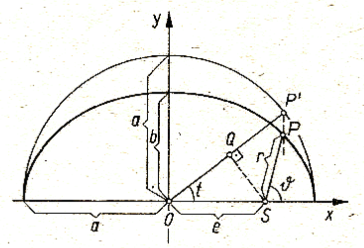
Gegeben ist eine Ellipse mit der großen Halbachse a, der kleinen Halbachse b $(0<b<a)$, und wir stellen uns vor, daß die Richtungen dieser Halbachsen mit den Achsen eines rechtwinkligen x,y-Koordinatensystems zusammenfallen. Dann liegt ein Punkt $P(x,y)$ dann und nur dann auf der Ellipse, wenn die Beziehung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

gilt, wie es euch ja aus der Analytischen Geometrie bekannt ist. Ein Kreis mit dem Ellipsenmittelpunkt als Mittelpunkt und Radius a werde beschrieben, und $P(x,y)$ sei ein Punkt der Ellipse, der gleichzeitig im Innern der ersten Quadranten liegt $(x>0,\ y>0)$. Die Parallele zur y-Achse durch den Punkt (x,y) schneidet im ersten Quadraten den genannten Kreis in einem eindeutig bestimmten Punkt $P'(x,y)$. Diesen Punkt P' verbinden wir mit dem Ellipsenmittelpunkt und fällen vom Brennpunkt $S=S(e,0)$ der Ellipse, wobei bekanntlich

$$e=\sqrt{a^2-b^2}\ (>0) \qquad (2)$$

gilt, das Lot auf die Verbindungsstrecke von P' zum Ellipsenmittelpunkt. Der zugehörige Lotpunkt heiße Q (s. Zeichnung).



Die Eigenschaft, die für Kepler wesentlich wurde, besteht nun darin, daß die Strecken SP *und* QP' gleich lang sind (für jeden Ellipsenpunkt P), also

$$|SP|=|QP'| \qquad (3)$$

gilt. Eure Aufgabe besteht nun darin, unter Benutzung der Beziehungen (1) und (2) die Gültigkeit der Eigenschaft (3) nachzuweisen (ohne Benutzung weiterer allgemeiner Aussagen über die Ellipse).

Geometrische Kombinatorik

In diesem Artikel möchten wir zeigen, daß die elementaren, schnell entwickelbaren Ideen der Kombinatorik auch in der Geometrie viele schöne Anwendungen besitzen. Wir können natürlich nur einige Beispiele zeigen, obzwar die Mathematiker nur über die erste Frage, nämlich über Färbungen von Landkarten, schon viele Bände geschrieben haben.

1. Wir beginnen mit einer einfachen *Aufgabe:* Es seien $e_1, \ldots, e_n$ einige Geraden in der Ebene; wir setzen voraus, daß sie sich in allgemeiner Lage befinden, d. h. keine drei von ihnen haben einen gemeinsamen Punkt, aber je zwei schneiden sich. Diese Geraden zerlegen die Ebene in mehrere Stücke. (Wieviel Stücke entstehen hier? Das ist schon eine interessante Frage der kombinatorischen Geometrie. Wir verraten die Antwort: $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$. Den Beweis überlassen wir dem Leser.) Diese Stücke nennen wir *Länder*. Die Aufgabe besteht darin, diese Länder so mit zwei Farben (sagen wir rot und blau) zu färben, daß benachbarte Länder stets verschiedene Farben bekommen (Bild 1).

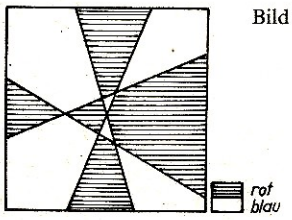
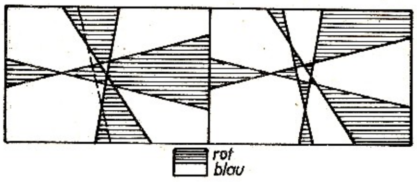


Bild 1

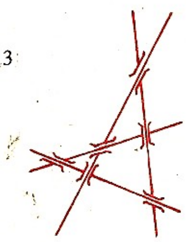
Kann man dies immer ausführen?
Die Antwort ist „Ja". Das werden wir jetzt (mittels vollständiger Induktion) beweisen. Bauen wir die Figur Schritt für Schritt auf. Nach dem Einziehen der ersten Geraden kann man die gewünschte Färbung trivialerweise angeben.
Nehmen wir an, daß die Länder, in welche die Geraden $e_1, \ldots, e_{n-1}$ die Ebene zerlegen, in der gewünschten Weise rot und blau gefärbt sind. Ziehen wir jetzt die Gerade e_n ein, so bleiben einige Länder unverändert, andere aber werden zerschnitten. Wir wollen die Färbung so abändern, daß die zwei Teile der zerschnittenen Länder verschiedene Farben erhalten. Das kann man leicht erreichen; auf der „linken" Seite der Geraden e_n lassen wir alles unverändert, auf der „rechten" aber vertauschen wir blau und rot (Bild 2). Es ist leicht zu sehen, daß diese abgeänderte Färbung die Eigenschaft hat, daß benachbarte Länder verschieden gefärbt sind.



Aufgabe: Nehmen wir statt der Geraden Kreise, dann gilt dieselbe Aussage. Dies ist zu beweisen!

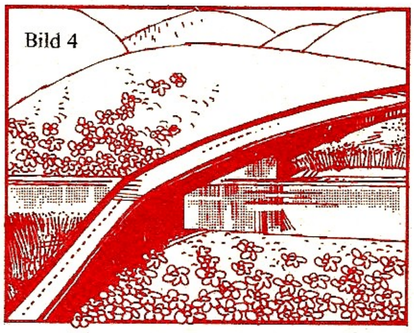
2. Wir haben das Wort Land gebraucht, weil die Abbildung mit den gefärbten Stücken der Ebene als Landkarte betrachtet werden kann. Wir sagen jetzt einige Worte über Färbungen von Landkarten. Eine Landkarte ist verständlich, wenn benachbarte Länder verschiedene Farben besitzen. Im allgemeinen genügen zwei Farben nicht, z. B. haben Belgien, Westdeutschland, Luxemburg und Frankreich paarweise eine gemeinsame Grenze, so daß diese vier Länder verschiedene Farben erhalten müssen, wenn man die Karte von Europa färben will. Es ist bewiesen, daß fünf Farben immer genügen, noch niemand konnte aber beweisen, daß auch vier Farben ausreichen. Das ist die berühmte *Vierfarbenvermutung*. Trotz der Anstrengungen vieler Mathematiker blieb diese Vermutung schon seit mehr als 100 Jahren unbewiesen. Es ist sehr interessant, daß die Hilfsmittel, die man zur Lösung des Vierfarbenproblems ausgearbeitet hat, in der reinen und angewandten Mathematik eine große Rolle spielen, obzwar sie bisher nicht zur Lösung des eigentlichen Problems führten. Nennen wir diejenigen Strecken der Grenzen, wo sich zwei Länder treffen, *Kanten*, und diejenigen Punkte, welche auf der Grenze von drei oder mehr Ländern liegen, *Ecken*. Betrachten wir eine Landkarte mit der Eigenschaft, daß sich in jeder Ecke eine gerade Anzahl von Kanten (oder, was dasselbe bedeutet, eine gerade Anzahl von Ländern) treffen. Der Leser soll beweisen, daß man diese Landkarte mit zwei Farben färben kann.

Bild 3



3. Es seien $e_1, \ldots, e_n$ gerade Landstraßen, welche ins Unendliche verlaufen. Dieses Landstraßensystem wurde modernisiert, und man wollte jede Kreuzung mit Unter- und Überführungen ausbauen. Das wollte man aber so ausführen, daß entlang jeder Straße die Unter- und Überführungen einander abwechseln. Kann man dies immer durchführen? (Bild 3).
Wenn wir unser erstes Ergebnis anwenden, können wir etwas feststellen, was nichts mit unserer Aufgabe zu tun zu haben scheint: Man kann die Landteile zwischen den Straßen so mit Getreide einsäen bzw. mit Blumen bepflanzen, daß auf einer Seite jeder Straße Getreide wächst und auf der anderen Seite Blumen stehen. Jetzt können wir leicht eine Vorschrift angeben, wie die Unter- und Überführungen zu bauen sind. Jede Kreuzung ist so auszubauen, daß man bei Annäherung auf der rechten Seite Blumen sieht, wenn man auf die Überführung kommt und Getreide, wenn man in die Unterführung einfährt (Bild 4)

Bild 4



Es ist leicht einzusehen, daß diese Vorschrift dasselbe bedeutet, wenn man der Kreuzung von einer anderen Richtung naht. Entlang einer Straße sieht man rechts abwechselnd Getreide und Blumen, d. h. man kommt abwechselnd zu Unter- und Überführungen.
Aufgabe: Man finde den Beweis dieser Aussage, ohne die unter 1. bewiesenen Aussagen zu verwenden!

4. Betrachten wir ein System von endlich vielen Punkten in der Ebene. Wir setzen nicht voraus, daß diese Punkte sich in allgemeiner Lage befinden, sondern nur, daß sie nicht alle auf ein und derselben Geraden liegen. Da können natürlich viele Geraden auftreten, welche durch drei oder mehr Punkte des Systems laufen, jedoch gibt es immer wenigstens eine Gerade, welche genau zwei Punkte des Systems enthält. Diese letzte Aussage – den *Satz von Gallai* – wollen wir jetzt beweisen.
Die Schwierigkeit des Problems liegt in der Wahl der gewünschten Geraden. Hat man schon eine Eigenschaft gefunden, mit der man diese Gerade bestimmen kann, so ist es leicht zu beweisen, daß sie tatsächlich nur zwei Punkte enthält. Betrachten wir die Abstände zwischen einem Punkt und der Verbindungslinie zweier anderer Punkte. Unter diesen endlich vielen Entfernungen gibt es eine kleinste positive (hier haben wir ausgenutzt, daß nicht alle diese Entfernungen gleich Null sind, d. h. nicht alle Punkte auf einer Geraden liegen), sei dies die Entfernung

zwischen dem Punkt P und der Verbindungslinie e der Punkte Q und R. Wir beweisen jetzt, daß e keinen weiteren Punkt des Systems enthält. Nehmen wir an, e enthalte auch den Punkt S. Es sei T die Projektion von P auf e (Bild 5).

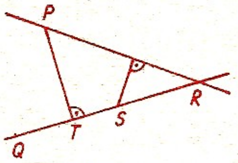


Bild 5

Man kann die Bezeichnungen so wählen, daß S zwischen T und R liegt. Die Entfernung zwischen S und der Verbindungslinie von P und R ist kleiner als die Entfernung zwischen P und e. Das ist aber ein Widerspruch, also enthält e wirklich nur Q und R. Damit haben wir den Satz von Gallai bewiesen.

Aufgabe: Sind endlich viele Geraden in der Ebene gegeben, so daß je zwei sich schneiden, aber nicht alle durch ein und denselben Punkt gehen, dann gibt es wenigstens einen Punkt, der in genau zwei Geraden enthalten ist.

5. In der kombinatorischen Geometrie kann man beliebig viele Fragen stellen, welche etwa lauten: Wie viele Schnittpunkte, Kanten, Geraden usw. gibt es höchstens oder wenigstens oder genau, wenn man diese oder jene Voraussetzung hat? Im 1. Punkt haben wir schon eine solche Aufgabe gestellt. Jetzt werden wir weitere nennen und einige lösen. Wir hoffen, daß die Leser selbständig solche Aufgaben formulieren und lösen können werden.

Es seien n Punkte in der Ebene gegeben. Wie viele Verbindungslinien bestimmen diese Punkte wenigstens? Die $\binom{n}{2}$ Verbindungslinien sind nicht alle notwendig verschieden, wenn z. B. alle Punkte auf ein und derselben Geraden liegen, dann gibt es nur eine Verbindungslinie. Diesen trivialen Fall wollen wir aber ausschließen und stellen die folgende Frage: Wie viele Verbindungslinien bestimmen n Punkte wenigstens, wenn sie nicht sämtlich auf einer Geraden liegen? Es ist zu erwarten, daß im schlimmsten Falle n-1 Punkte auf einer Geraden liegen und nur der n-te außerhalb dieser Geraden liegt. (Bild 6). In diesem Falle bestimmen die Punkte genau n Geraden, deshalb kann man vermuten: n Punkte, die nicht alle auf derselben Geraden liegen, bestimmen mindestens n verschiedene Verbindungslinien. Wir beweisen diese Aussage mit vollständiger Induktion. Für $n=1, 2$ ist die Behauptung nichtssagend, für $n=3$ ist sie trivial. Es sei $n \geq 4$, und für n-1 Punkte sei die Behauptung schon bewiesen. Nach dem Satz von Gallai gibt es immer zwei Punkte, P und Q, deren Verbindungslinie keinen weiteren von den gegebenen Punkten enthält. Lassen wir jetzt P weg. Für die übrigbleibenden n-1 Punkte sind zwei Fälle möglich:

a) Die restlichen n-1 Punkte liegen auf einer Geraden, die P nicht enthält. Die Konfiguration ist wie in Bild 6, die n Punkte bestimmen also genau n Geraden.

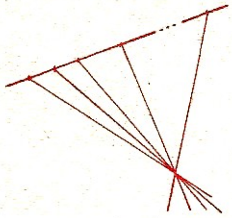


Bild 6

b) Die restlichen n-1 Punkte liegen nicht auf einer Geraden. Jetzt können wir die Induktionsannahme anwenden und feststellen, daß diese n-1 Punkte mindestens n-1 Geraden bestimmen. Die Gerade PQ ist aber nicht unter diesen, so daß die n Punkte zusammen mindestens n Geraden bestimmen.

Aufgabe: Beweise: Bestimmen n Punkte genau n Geraden, so liegen n-1 von ihnen auf einer Geraden.

6. Von fünf Punkten in allgemeiner Lage kann man immer die Ecken eines konvexen Vierecks auswählen. Das ist eine bekannte Aufgabe, der Leser wird es ohne Schwierigkeiten beweisen. Die Aufgabe kann aber verallgemeinert werden: Von wie vielen Punkten kann man immer die Ecken eines konvexen k-Ecks auswählen? Mit anderen Worten: Welches ist die Höchstzahl von Punkten, die nicht notwendig ein konvexes k-Eck bestimmen?

Es ist nicht ganz klar, daß es hier eine Antwort gibt, d. h. daß man nicht beliebig viele Punkte mit der genannten Eigenschaft angeben kann. Man kann beweisen, und zwar mit rein kombinatorischen Mitteln, daß es eine Zahl $f(k)$ derart gibt, daß die Behauptung gilt: Man kann höchstens $f(k)$ Punkte angeben, die kein konvexes k-Eck bestimmen. Das wollen wir aber hier nicht diskutieren.

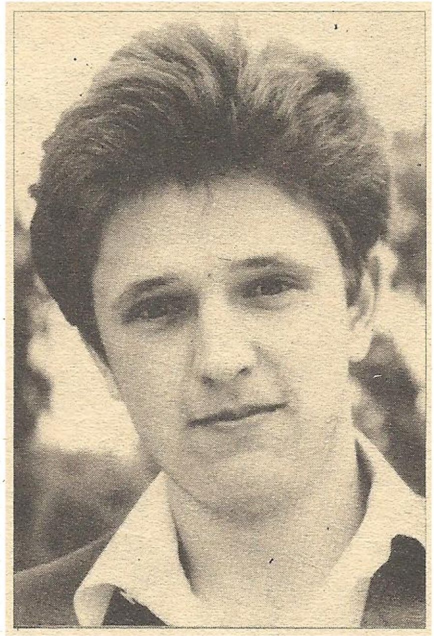
Es ist interessant, daß der Wert von $f(k)$ nicht bekannt ist. In kombinatorischen Fragen kommt es oft vor, daß man eine Zahl, die ähnlich wie $f(k)$ definiert ist, nicht explizit angeben kann. Hier gibt es eine schöne Vermutung: $f(k)=2^{k-2}$, d. h. man kann höchstens 2^{k-2} Punkte so angeben, daß sie nicht die Ecken eines konvexen k-Ecks enthalten. Man hat ein System von 2^{k-2} Punkten angegeben, die kein konvexes k-Eck bestimmen (das ist gar nicht einfach!), niemand kann aber bisher beweisen, daß man nicht auch $2^{k-2}+1$ Punkte mit dieser Eigenschaft angeben kann.

Aufgaben: 1. Die Vermutung ist wahr für $k=5$: Man kann acht Punkte angeben, die kein konvexes Fünfeck bestimmen, aber neun Punkte enthalten immer die Ecken eines konvexen Fünfecks.

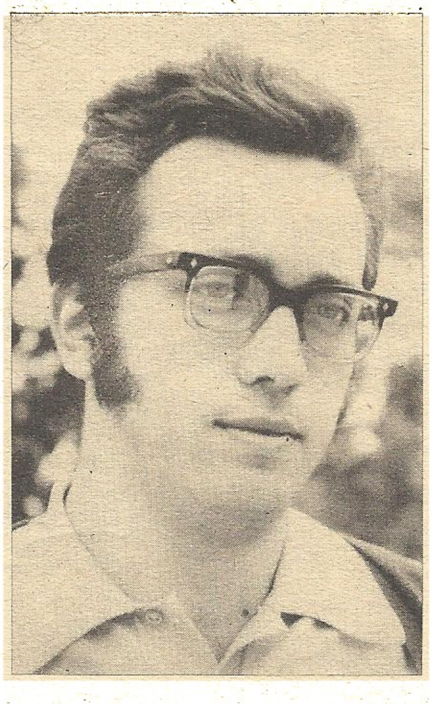
2. Es sind acht Punkte mit folgender Eigenschaft anzugeben: Die Symmetrieachse von je zwei von ihnen enthält mindestens zwei Punkte des Systems. (Es ist nicht bekannt, ob es andere Punktsysteme mit dieser Eigenschaft gibt.)

3. n Punkte seien in der Ebene gegeben. Wir bezeichnen mit d die maximale Entfernung zwischen zwei gegebenen Punkten. Dann gibt es höchstens n Punktepaare, bei denen der Abstand der Punkte gleich d ist.

László Lovász, József Pelikán



L. Lovász und J. Pelikán nahmen an der VII. Internationalen Mathematikolympiade (Berlin 1965) teil und erhielten 1. Preise. Zur XII. IMO (Budapest 1970) waren sie als Koordinatoren tätig. Beide sind als Diplommathematiker an der Universität Budapest tätig.

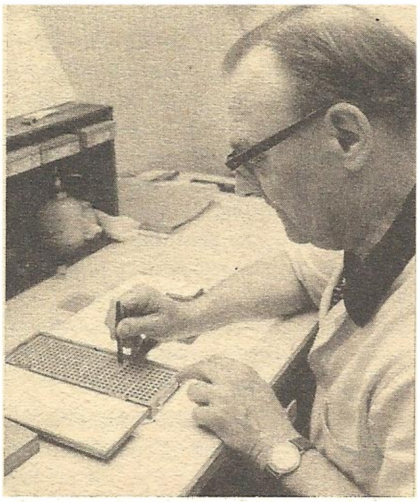


Wie entsteht die Zeitschrift **alpha**?

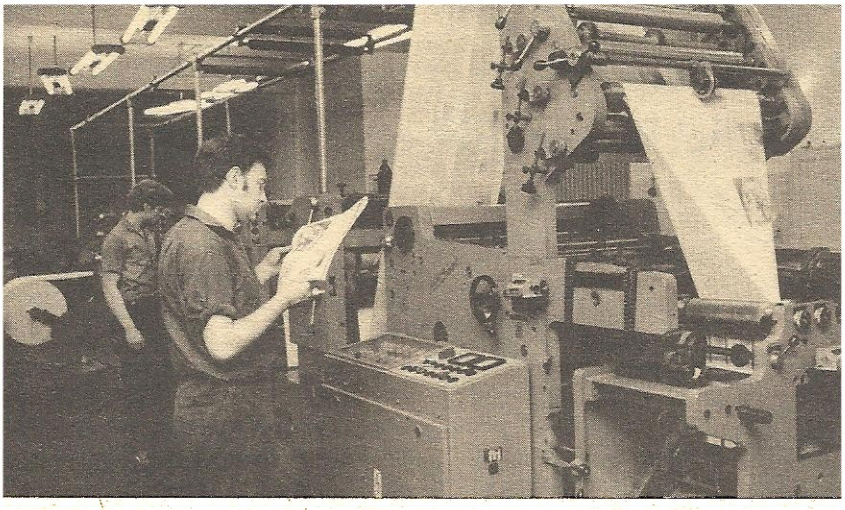
Die mathematische Schülerzeitschrift *alpha* besteht nunmehr fünf Jahre. Durch die Mithilfe eines großen Kreises von Autoren des In- und Auslandes konnten 30 Hefte für eine systematische, kontinuierliche und intensive außerunterrichtliche Arbeit zusammengestellt werden. Die Redaktion dankt den Wissenschaftlern, Lehrern, Werktätigen aus der gesellschaftlichen Praxis und den Schülern, welche aktiv an der inhaltlichen Gestaltung der Zeitschrift *alpha* mitwirkten.
Wir wollen aber auch denen Dank sagen, welche die technischen Voraussetzungen schufen, daß jedes Heft in einwandfreier Qualität in die Hände unserer Leser gelangte.
Wird ein Artikel an die Redaktion gesandt, so beginnt eine umfassende Vorarbeit, bis er der Druckerei übergeben werden kann. Zunächst gehen alle Beiträge an ein Gutachterkollektiv, welches entweder zustimmt, Hinweise zur inhaltlichen oder methodischen Verbesserung gibt oder sie aus solchen Gründen wie *für Schüler nicht geeignet, fachlich nicht einwandfrei, bereits gleiches bzw. ähnliches Material veröffentlicht* usf. ablehnt. Rund drei Monate vor Erscheinen eines Heftes wird es so zusammengestellt, daß möglichst alle Leser, d. h. die jüngeren wie die älteren Leser, gleichermaßen angesprochen werden. Die Redaktionsassistentin schreibt jeden Beitrag genau nach festgelegten Normen, technische Zeichnungen werden nach den eingereichten Originalen von einem Mathematikfachlehrer angefertigt und Vignetten zur Auflockerung des Heftes bereitgestellt. Ein Typograph erhält den gesamten Inhalt eines Heftes und gestaltet gemeinsam mit dem Chefredakteur Seite um Seite. Nach rund vierwöchiger Kleinarbeit können nunmehr die fertiggestellten Unterlagen der *Staatsdruckerei der DDR* übergeben werden.
Schauen wir uns einmal die *drucktechnische Herstellung* eines Heftes genau an: Zunächst überprüft die *Auftragsabteilung* das vorliegende Material. Es wird eine Auftragstasche ausgeschrieben, die sämtliche Angaben über die Fertigung des Auftrags von der Satzherstellung bis zum Versand enthält. Außerdem berechnet der Auftragsbearbeiter die benötigte Papiermenge und sichert die Bereitstellung eines entsprechenden Materialkontingents.
Nunmehr erhält der Leiter der *Abteilung Lichtsatz* die Auftragstasche und die Manuskripte. Die Bildvorlagen gehen an die Fotoabteilung zur Herstellung der Bilddiapositive.
Die Satzherstellung erfolgt mit einer modernen *Monophoto*-Lichtsatzanlage. Mit ihr ist es möglich, einfachen wie schwierigen Satz mit hoher Qualität des Schriftbildes herzustellen. Die Anlage besteht aus zwei voneinander getrennten Maschinen, dem *Taster* und dem *Projektor*. Mit dem Taster wird der Text des Manuskriptes auf einen Papierstreifen übertragen, wobei alle Buchstaben, Ziffern, Zeichen und Steuerkommandos nach einem bestimmten Code als Lochkombinationen eingestanzt werden. Nur die besten Fachkräfte kommen am Taster zum Einsatz, denn jeder Fehler beim Setzen ist erst nach dem Entwickeln des Filmes zu erkennen.
Die Steuerung des Projektors erfolgt durch den am Taster hergestellten *Lochstreifen*. Im Projektor befin-

Herstellung des Lochstreifens auf dem Taster

Absprache über die Herstellung der Zeitschrift *alpha* zwischen Chefredakteur (im Bild rechts), Auftragsbearbeiterin (Fernstudent: Ing.-Ökonom) und dem Abteilungsleiter Lichtsatz



Zusammenstellung des Matrizenrahmens für die Zeitschrift *alpha*



Druck auf der Rollenoffsetmaschine (drei Farben in einem Durchgang) mit gleichzeitiger Falzung des Papierbogens

det sich ein *Matrizenrahmen,* der alle auf dem Lochstreifen festgelegten Buchstaben, Ziffern und Zeichen als kleines Filmnegativ enthält. Wenn der Matrizenrahmen mit dem vom Lochstreifen gewählten Buchstaben in Stellung gebracht ist, erfolgt die Belichtung. Ein Lichtstrahl dringt durch das Buchstabennegativ und fällt, gelenkt durch Prismen und Spiegel, auf den unbelichteten Film, der sich in einer Kassette befindet. Das geschieht Buchstabe für Buchstabe in Sekundenbruchteilen, bis eine Filmspalte von etwa 50 cm Länge und maximal 26 cm Breite belichtet ist. Das Ergebnis nach dem Entwickeln ist ein *Schriftdiapositiv.* Auf einem *Lichtpausgerät* werden von den Filmspalten Rotpausen hergestellt zum Lesen der Korrektur durch einen Korrektor in der Druckerei sowie für den Chefredakteur und den Autor, an die sie gesandt werden. Der Typograph fertigt aus den Rotpausen einen *Klebespiegel* an, d. h. er klebt die Rotpausen der Textfilme und die Rotpausen der Fotos und Zeichnungen so auf, wie später das Heft aussehen soll. Korrekturen und Klebespiegel gehen dann wieder

Aufnahme der Bilder mit der Reproduktionskamera

in die Druckerei. Es werden nunmehr Korrekturzeilen getastet, und es wird ein Korrekturlochstreifen hergestellt. Dann übernimmt die *Montageabteilung* Textfilme, Korrekturfilme, Korrekturfahnen, Klebespiegel und Bilddiapositive. Nun werden unter Berücksichtigung der durch die Redaktion angezeichneten Korrekturen die Filme der Schrift und der Bilder nach dem Klebespiegel zusammengeklebt. Die Redaktion erhält nochmals für kurze Zeit Rotpausen von diesen Seiten, nimmt eine letzte Korrektur vor und erklärt das Material für druckreif. Wenn danach alle Fehler korrigiert sind, werden jeweils vier Seiten auf einer großen durchsichtigen Folie zu einer *Kopiervorlage* zusammengeklebt und in der *Kopie* davon Offsetdruckplatten hergestellt.
Diese Druckplatten sind dünne Kupferfolien, die auf einer Seite verchromt sind. An allen Stellen, die beim Druckvorgang Farbe annehmen und wieder abgeben sollen, wird durch Chemikalien die Chromschicht entfernt.
Gedruckt wird auf *Rollenoffsetmaschinen.* Die Druckplatten sind hierbei um einen Druckzylinder gespannt. Die eingefärbten Druckplatten geben die Farbe auf einen Gummizylinder ab und dieser bedruckt das Papier. Es läuft von einer Rolle durch die Druckwerke, wobei es auf beiden Seiten gleichzeitig bedruckt und die ankommenden Papierbahnen am Ende der Maschine geschnitten und auf A 4-Format gefalzt werden. Die von der Offsetmaschine auf A 4 gefalzten Bogen werden in der *Fertigmacherei* in einen Umschlag gesteckt, im Rücken mit zwei Klammern geheftet und auf Format geschnitten. In der Zeit vom 13. bis 16. jedes geraden Monats erhält die *Deutsche Post* (Zeitungsvertriebsamt) die gesamte Auflage und verteilt sie an die Leser.

Heidemarie Jüttner, Peter Dreßler, Johannes Lehmann

Welche, wie viele Möglichkeiten gibt es ?

Solchen Fragen, wie sie in der Überschrift stehen, seid ihr sicherlich schon begegnet. Ihr sollt nun Aufgaben lösen lernen, die diese oder ähnliche Fragen enthalten.
Wir beginnen mit drei Beispielen.

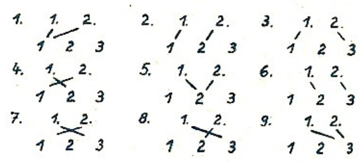
Aufgabe 1 Alfred, Bernd und Christian bewohnen in einem Ferienlager gemeinsam ein Zimmer. Leider hat nur einer von ihnen einen Spiegel mit. Um Streit zu vermeiden, beschließen sie, sich jeden Morgen in einer neuen Reihenfolge zu kämmen. Wie viele Tage können sie nach diesem Beschluß handeln? Das heißt: Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die drei Freunde anzuordnen?
Versucht, die Lösung durch Probieren selbst zu finden, bevor ihr weiterlest!
Lösung: Wir bezeichnen die drei Freunde mit den Anfangsbuchstaben ihrer Namen: *A, B, C.* Nun stellen wir fest, welche Anordnungsmöglichkeiten es gibt:
ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.
Die drei Freunde können also 6 Tage nach ihrem Beschluß handeln.

Aufgabe 2 Welche zweistelligen Ziffern lassen sich aus den Grundziffern 1, 2, 3 zusammenstellen, wenn in jeder Ziffer jede dieser Grundziffern mehrmals vorkommen darf? Wie viele solche zweistelligen Ziffern gibt es?
Ihr könnt die Lösung wieder selbst finden, bevor ihr weiterlest.
Lösung: 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33; also neun Ziffern.

Aufgabe 3 Zur Teilnahme an einem Pioniertreffen hat eine Gruppe Arnim, Brigitte, Christine, Dieter und Elke delegiert. Leider ist aber aus Platzgründen nur die Teilnahme zweier Pioniere dieser Gruppe möglich. Die Gruppenleitung steht nun vor der Aufgabe, aus den vorgeschlagenen Pionieren zwei auszuwählen. Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es hierfür?
Wir bezeichnen die Pioniere mit den Anfangsbuchstaben ihrer Namen: *A, B, C, D, E.* Versucht nun, die Lösung wieder selbst zu finden!
Lösung: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE; also zehn Möglichkeiten.
Solltet ihr bei der Lösung zum Beispiel *BA* anstelle von *AB* angegeben haben, so wäre das auch richtig; man darf in diesem Falle nur nicht *AB und BA* notieren, weil ja diese beiden Darstellungen die gleiche Delegation bedeuten.
Wenn man diese drei Aufgaben miteinander vergleicht, so fallen einige Gemeinsamkeiten, aber auch einige Unterschiede auf.
1. Wir haben es in jeder Aufgabe mit einzelnen, unterscheidbaren Dingen zu tun, die zusammengehören (Grundziffern, Kinder oder Buchstaben). Eine Zusammenfassung solcher Dinge nennen wir eine *Menge,* die einzelnen zu ihr gehörenden Dinge heißen *Elemente der Menge.*
2. Manchmal werden alle Elemente der jeweils gegebenen Menge für die einzelnen Zusammenstellungen benutzt (Aufg. 1), manchmal aber auch nicht (Aufg. 2, 3).
3. Manchmal ist bei den Zusammenstellungen die Anordnung bzw. die Reihenfolge der Elemente zu berücksichtigen (Aufg. 1, 2), manchmal aber auch nicht (Aufg. 3).
4. Manchmal dürfen sich hierbei Elemente wiederholen (Aufg. 2), manchmal aber auch nicht (Aufg. 1, 3).
Die Beantwortung der Fragen, ob bei einer Zusammenstellung die Anordnung der Elemente zu berücksichtigen ist oder nicht und ob sich in einer Zusammenstellung Elemente wiederholen dürfen oder nicht, ist sehr wichtig. Wir wollen das noch anhand des folgenden Beispiels erklären und uns hierfür zunächst nur geeignete Sachaufgaben überlegen.

Aufgabe 4 Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es, zwei Preise an drei Schüler zu verteilen?
(1) Bei den Preisen kann es sich z. B. um Bücher mit verschiedenen Titeln handeln. Die Preise sind also *unterscheidbar.*
(2) Bei den Preisen kann es sich z. B. auch um wertgleiche Geldprämien handeln. Die Preise sind dann *nicht unterscheidbar.*
(a) Ein Schüler kann *mehrere Preise* erwerben, wie etwa bei einem Sportwettkampf. Er kann z. B. im 60-m-Lauf und im Weitsprung Sieger sein.
(b) Ein Schüler kann *höchstens einen Preis* erwerben, wie etwa bei einer Prüfung für eine besondere Leistung.
Diese einzelnen Fälle lassen sich wie folgt verbinden: (1a), (1b), (2a), (2b). Aufgabe 4 sollte noch etwas Wichtiges verdeutlichen: Wir haben es bei solchen Aufgaben stets mit zwei Mengen zu tun, hier also mit der Menge der Preise und der Menge der Schüler. Beide Mengen müssen, den Aufgabenbedingungen entsprechend, einander zugeordnet werden, und zwar in unserem Beispiel so, daß jeder Preis verteilt wird, aber nicht jeder Schüler einen bekommen kann bzw. zu bekommen braucht.
Auch bei den Aufgaben 1 bis 3 können wir jeweils zwei Mengen unterscheiden, die einander geeignet zuzuordnen sind:
Aufgabe 1: Eine Menge ist die Menge der drei Freunde, die andere Menge besteht auch aus drei Elementen, die man etwa als die drei Platznummern 1., 2., 3. deuten kann.
Aufgabe 2: Eine Menge ist die Menge der insgesamt gegebenen Grundziffern, die andere Menge besteht aus zwei Elementen, die man etwa als eine Menge von zwei nebeneinanderliegenden Kästchen deuten kann, in die die Grundziffern einzeln geschrieben werden sollen. Diese Menge ist also die Menge der geforderten Stellen jeder Ziffer.
Die Zuordnung der beiden Mengen erfolgt in Aufgabe 2 so, daß jedes der beiden Kästchen mit einer Grundziffer zu besetzen ist, während in einer Zusammenstellung nicht jede Grundziffer vorzukommen braucht.
Aufgabe 3: Eine Menge ist die Menge der fünf Kinder, die andere Menge ist die Menge der vorhandenen zwei Delegiertenplätze. Die Zuordnung der beiden Mengen erfolgt so, daß jedem Element der Zweiermenge ein Element aus der Fünfermenge zugeordnet wird. Umgekehrt kann man nicht jedem Element der Fünfermenge ein Element der Zweiermenge zuordnen.
In allen vier Aufgaben ist also eine der beiden gegebenen Mengen dadurch gekennzeichnet, daß *jedes* ihrer Elemente den Elementen der anderen Menge zugeordnet werden kann. Diese Menge wollen wir mit *M* bezeichnen, die andere mit *N.*
Bei Aufgabe 1 ist es gleichgültig, welche der beiden Mengen wir mit *M* bzw. *N* bezeichnen.
Wir wollen uns diese Zuordnungen durch Zeichnungen veranschaulichen. Die Elemente der beiden Mengen werden wir hierbei zweckmäßig darstellen. Für die Zeichnungen wollen

Bild 1



wir vereinbaren, die Elemente der Menge *M* stets oben, die Elemente der Menge *N* unten zu notieren. Die möglichen Zuordnungen wollen wir durch Striche veranschaulichen.

Wir beginnen mit Aufgabe 2. Bild 1 ist wie folgt zu deuten: Bei der ersten Zusammenstellung heißt die erste Grundziffer 1, die zweite Grundziffer auch 1; bei der zweiten Zusammenstellung heißt die erste Grundziffer 1, die zweite 2 usw., wie in der Lösung bereits angegeben.
Erkennt ihr in Bild 1, daß die Striche in einer bestimmten Reihenfolge stehen? Wir zeichnen erst alle Fälle, in denen der Strich von 1. zu 1 verläuft. Dann beginnen wir eine neue Zeile, zeichnen den Strich von 1. stets zu 2 und beginnen mit dem Strich von 2. wieder von vorn. Das setzen wir so lange fort, bis beide Striche beim letzten Element angekommen sind, hier also bei 3. Auf diese Weise finden wir systematisch alle Möglichkeiten, ohne etwa in Gefahr zu geraten, eine Möglichkeit zu vergessen.
Bei der Lösung von Aufgabe 3 müssen wir im Gegensatz zu Aufgabe 2 zweierlei beachten:
1. Die Anordnung der Elemente ist beliebig. Das wird in Bild 2 dadurch berücksichtigt, daß wir nur solche Zuordnungen angeben, bei denen die Striche einander *nicht* schneiden.
2. Die Elemente dürfen sich nicht wiederholen. Wir dürfen also in Bild 2 nur solche Zuordnungen angeben, bei denen zu einem untenstehenden Element nicht mehrere Striche verlaufen. Um wieder systematisch alle Möglichkeiten zu finden, verfahren wir im übrigen wie bei Bild 1.

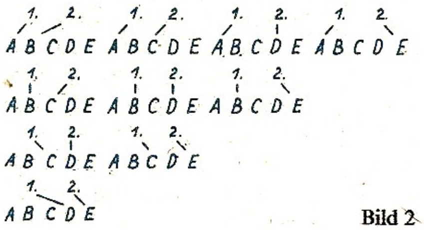


Bild 2

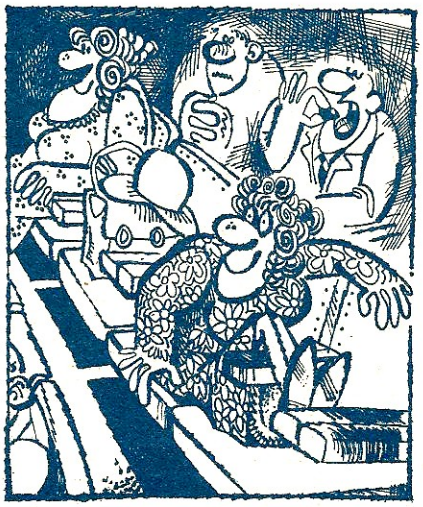
Werdet ihr nun Aufgabe 4 lösen können?
Wir wollen die beiden Preise mit 1. und 2., die drei Schüler mit 1, 2, 3 bezeichnen.
Löst nun den Fall (1a) allein!
Wenn ihr richtig gearbeitet habt, müßt ihr als Lösung Bild 1 erhalten haben, also 9 Möglichkeiten.
Löst jetzt Fall (1b)!
Welche Möglichkeiten des Falles (1a) fallen hier weg?
Nun, es fallen gerade diejenigen weg, bei denen zu einem untenstehenden Element zwei Striche führen, denn kein Schüler kann mehr als einen Preis bekommen. Es verbleiben also 6 Möglichkeiten.
Wie ist die Lösung des Falles (2a)?
Welche Möglichkeiten des Falles (1a) können wir jetzt wegfallen lassen? Zum Beispiel jene, bei denen Striche einander schneiden, denn die Anordnung der Preise ist ohne Bedeutung. Es verbleiben demnach 6 Möglichkeiten.

Löst nun den Fall (2b)!
Wenn ihr richtig gearbeitet habt, verbleiben in Bild 1 die Möglichkeiten 2., 3. und 6., also 3 Möglichkeiten.
Bei der zeichnerischen Lösung von Aufgabe 1 müssen wir beachten, daß zwar Striche einander schneiden dürfen, daß aber nicht zu einem untenstehenden Element mehrere Striche führen dürfen. Versucht, der Reihe nach alle Möglichkeiten durch Zeichnung zu finden, und vergleicht eure Lösung mit Bild 3!

Bild 3

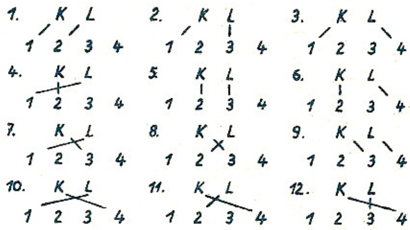
Fassen wir zusammen, wie wir Aufgaben der hier besprochenen Art lösen können:
1. Wir bestimmen die zwei Mengen.
2. Wir bestimmen die Stellung der beiden Mengen.
Welche Menge steht oben? Es muß von *jedem* Element ein einziger Strich ausgehen.
Welche Menge steht unten?
Es dürfen Elemente freibleiben.
3. Wir bestimmen alle möglichen Zuordnungen.
a) Ist bei der Lösung die Anordnung der Elemente zu berücksichtigen?
Wenn nicht, so lassen wir alle jene Fälle weg, in denen Zuordnungsstriche einander schneiden.
b) Dürfen sich bei der Lösung Elemente wiederholen?
Wenn ja, so dürfen zu einem untenstehenden Element mehrere Striche führen. Wenn nicht, so darf zu jedem Element der unteren Menge höchstens ein Strich hinführen.
Wir wollen nun eine Aufgabe nach diesem Lösungsplan bearbeiten.

Aufgabe 5 Die Ehepaare Köhler und Lorenz haben ein Theateranrecht. Sie sitzen immer auf denselben Plätzen mit den Nummern 1 bis 4. Einmal sind die Männer plötzlich verhindert. Die beiden Frauen haben nun vier Plätze zur Verfügung. Wie können sich die beiden Frauen auf diese Plätze setzen, falls jeder Frau ein einziger Platz und jedem Platz höchstens eine Frau zugeordnet wird? Wie viele Platzverteilungen sind möglich?
1. Zwei Mengen: Menge der Frauen, Mengen der Plätze.
2. Da jede Frau Platz bekommen soll, aber nicht jeder Platz besetzt werden kann bzw. besetzt zu werden braucht, steht die Menge der Frauen oben, die der Plätze unten.



3. a) Striche dürfen einander schneiden. (Warum?)
b) Zu einem untenstehenden Element dürfen nicht mehrere Striche führen. (Warum?)
Es gibt 12 Möglichkeiten.

Bild 4

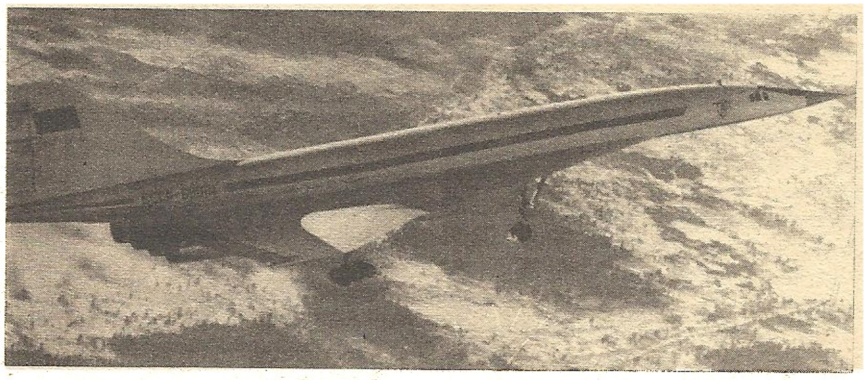


Die beiden Frauen haben aber nicht lange überlegt. Sie wählten sofort die Möglichkeit 5, weil das ihre Stammplätze waren.
Bis jetzt haben wir nur Aufgaben besprochen, in denen Mengen mit höchstens fünf Elementen vorkamen. Wie lösen wir nun schwierigere Aufgaben, etwa auch solche, in denen anstelle von Zahlen Variable für (natürliche) Zahlen stehen, wenn also die Aufgaben allgemein formuliert sind?
Beispiel (vgl. Aufgabe 5!): Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es, m Personen auf n Plätze zu verteilen usw.? Wir brauchen nur für m und n der Reihe nach möglichst kleine Zahlen einzusetzen und nach unserem Lösungsplan zu verfahren.

In *alpha*, Heft 2/72, wird dieser Artikel fortgesetzt. Wir werden dann sehen, daß man bei geschicktem Vorgehen Zahlenfolgen erkennen kann. Bestimmte Gesetzmäßigkeiten wollen wir aber zunächst vorsichtigerweise als Vermutungen formulieren. *W. Türke*

Wie schnell fliegt ein Überschallflugzeug?

Teil 1



An einem herrlichen, windstillen Sonntag geht Klaus mit seinem älteren Bruder Steffen wandern. Am Rande eines Sees machen sie Rast. Während Steffen mit einem Grashalm spielt, schaut Klaus hinauf in das Blau des wolkenlosen Himmels. Da entdecken seine Augen einen metallisch glänzenden, sich bewegenden Punkt, der einen Kondensstreifen hinter sich herzieht, am Himmel. „Ein Flugzeug!“ ruft er aus. Beide beobachten die offenbar einen geradlinigen Kurs steuernde Maschine, die in großer Höhe direkt über die beiden Jungen hinwegfliegt. Obwohl sich die Maschine bereits wieder von den Jungen entfernt, ist noch kein Motorengeräusch zu hören. Doch dann ist plötzlich ein lauter Knall zu vernehmen. Klaus bemerkt: „Dieser Knall läßt die Fensterscheiben klirren.“ Und Steffen erwidert: „Ich weiß, wie leicht diese Geräusche zu einer Belästigung werden. Doch auf den sicheren Schutz, den uns die NVA im Bunde mit der Roten Armee vor Überfällen bietet, können wir nicht verzichten. Dabei sind unsere Luftstreitkräfte ein wichtiger Bestandteil der Landesverteidigung, und deshalb müssen wir das Geknalle in der Luft ertragen.“

Erst kurze Zeit später, nachdem beide den Knall gehört haben, ist vom beobachteten Flugzeug das Motorengeräusch zu hören. „Wie kommt denn dieser Knall zustande?“ fragt Klaus. „Die Maschine dort oben fliegt mit Überschallgeschwindigkeit“, antwortet Steffen. Klaus, der die Antwort nicht voll erfassen kann, argumentiert: „Diese Behauptung erscheint mir zu kühn. An diesem Silberpunkt in der Luft kannst du ja gar nicht die Gestalt der Tragflügel erkennen, die einen solchen Schluß zuläßt.“ „Das ist nicht nötig! Meine Behauptung folgt allein aus unserer Behauptung. Ich will dir das erklären!“ antwortet Steffen. Und er fährt fort: „Als Vorbereitung sollst du hierzu zwei Aufgaben lösen. Die erste Aufgabe lautet: Warum richten sich beim 100-Meter-Lauf die Zeitnehmer, die am Ziel stehen, nicht nach dem Geräusch, das das Zusammenschlagen der Startklatsche erzeugt, sondern achten mit dem Auge auf das Zusammenschlagen der Startklatsche?“

Bereits nach kurzer Zeit antwortet Klaus: „In einer Sekunde legt der Schall rund 340 m[1] zurück. Um 100 m zurückzulegen, braucht der Schall rund 0,3 s. Würden sich die Zeitnehmer auf ihr Gehör verlassen, so würden sie die gelaufene Zeit um 0,3 s zu kurz stoppen.“ Auf den zweiten Teil der gestellten Frage will Klaus sehr präzise antworten. Deshalb holt er Notizblock und Bleistift aus der Jackentasche und führt die folgende Rechnung aus, bei der er sich auf das Gesetz der geradlinig-gleichförmigen Bewegung $s = vt$ (s – Weg; v – Geschwindigkeit; t – Zeit) stützt:

$$\boxed{\begin{aligned} t = \frac{s}{v} &= \frac{100\,\text{m}}{300\,000\,\frac{\text{km}}{\text{s}}} = \frac{100\,\text{ms}}{300\,000\,\text{km}} \\ &= \frac{1\,\text{s}}{300\,000 \cdot 10} \approx \underline{\underline{0{,}000\,000\,3\ \text{s}}} \end{aligned}}$$

Dann antwortet er: „Da das Licht sich mit der Geschwindigkeit $v = 300\,000\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ ausbreitet, braucht es zum Durchlaufen der Strecke $s = 100$ m annähernd die Zeit $t = 0{,}0000003$ s. Der durch das Beobachten mit dem Auge begangene Meßfehler ist also so klein, daß diese Methode zulässig ist.“ Steffen erwidert: „Die erste Aufgabe hast du richtig gelöst. Hoffentlich schaffst du auch die zweite Aufgabe:

Nehmen wir an, ich beginne jetzt einen Schrei von 0,2 s Dauer auszustoßen. An welchen Stellen der Umgebung ist dieser Schrei 3 s später zu hören?“

Klaus schaut sich die in weitem Umkreis ebene Landschaft an. In sein Notizheft skizziert er sich die folgende Zeichnung:

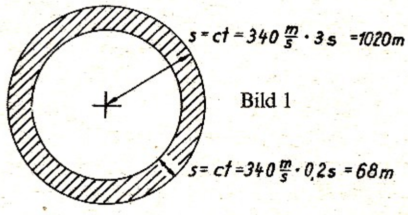
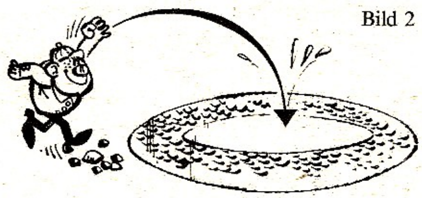


Bild 1

Anschließend antwortet er: „Der Beginn deines Schreies wäre in 1 020 m Entfernung von unserem Standort zu hören, das Abbrechen deines Schreies jedoch in 952 m Entfernung. Also sind 3 s nach Beginn deines Schreies die von dir erzeugten Schallwellen in der Kreisringfläche mit den Radien von 1 020 m und 952 m und unserem Standort als Zentrum zu hören.“ „Auch die zweite Frage hast du richtig beantwortet“, sagt Steffen. Bei diesen Worten ergreift Steffen einen Stein und wirft ihn ins Wasser. Nach kurzer Zeit ruft er: „Siehst du jetzt ein Modell, das man etwa mit deinem Ergebnis vergleichen kann?“

Bild 2



Klaus sieht, daß die Stelle, an der der Stein ins Wasser fiel und dazu ein Teil der sie umgebenden Wasseroberfläche sich wieder in Ruhe befindet. Genau ein kreisringförmiger Teil der Wasseroberfläche mit der Einwurfstelle als Zentrum befindet sich in Bewegung. Er erkennt, daß diese Kreisringfläche dem Bereich entspricht, in dem bei der vorigen Aufgabe der Schrei zu hören ist[2]. Steffen fährt fort: „Nach diesen Vorbereitungen will ich dir unter den Voraussetzungen von Windstille und gleicher Lufttemperatur in allen

[1] Die Schallgeschwindigkeit in Luft ist weitgehend vom Luftdruck unabhängig, sie ändert sich hingegen mit der Temperatur. Zu in unseren Breiten auftretenden Außentemperaturen $t = x\,°\text{C}$ ist die zugehörige Schallgeschwindigkeit durch die Formel

$c \approx (331{,}6 + 0{,}6\,x)\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ näherungsweise bestimmt. Für die Temperaturen $t = 0\,°\text{C}$ und $t = 20\,°\text{C}$ folgt hieraus $c \approx 331{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ bzw. $c \approx 343{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. – Jedoch breitet sich Schall mit abnorm großer Amplitude (Lautstärke), wie er z. B. bei der Detonation von Explosivstoffen, durch starke elektrische Funken und bei einem Überschallflugzeug entsteht, in Herdnähe mit größerer Geschwindigkeit (Es wurden Geschwindigkeiten bis $500\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ gemessen) aus.

Höhen sowie der in Wirklichkeit nicht durchweg zutreffenden Annahme konstanter Schallgeschwindigkeit (Beachte den letzten Teil der Fußnote 1!) die Schallausbreitung von einem Flugzeug mit Überschallgeschwindigkeit erklären: Der Schall breitet sich vom Flugzeug aus nach allen Seiten aus. Um uns beim Anfertigen einer Zeichnung auf ein ebenes Problem beschränken zu können, betrachten wir die Schallausbreitung zunächst nur in einer Ebene, in der allerdings die geradlinige Flugroute des mit der konstanten Geschwindigkeit v fliegenden Flugzeuges liegt. Das Flugzeug möge sich zu einem bestimmten Zeitpunkt im Punkt P seines Flugweges befinden. Wir wollen feststellen, in welchen Punkten unserer Ebene zu diesem bestimmten Zeitpunkt der Knall der Kopfwelle unseres Flugzeuges zu hören ist. Zentren der Schallausbreitung sind alle Punkte der Flugroute, die das Flugzeug schon passiert hat. Betrachten wir zunächst ein solches Zentrum Q. Bezeichnen wir die Zeit, die unser Flugzeug zum Zurücklegen der Strecke $\overline{QP}$ benötigte, mit t, so gilt nach dem Gesetz der geradlinig-gleichförmigen Bewegung

$\overline{QP}=vt$. (Bild 3)

Vom Zentrum Q aus hat sich der Schall inzwischen um die Strecke ct, wobei c die Schallgeschwindigkeit ist, nach allen Seiten ausgebreitet (Bild 4).

Analog gilt das für alle Punkte der Flugroute, die das Flugzeug zu dem gewählten Zeitpunkt schon passiert hat. Wir wollen zunächst zwei weitere solche Zentren betrachten, die wir mit R und S bezeichnen wollen. Für die Abstände $\overline{RP}$ und $\overline{SP}$ soll gelten:

$3\,\overline{SP}=2\,\overline{RP}=\overline{QP}$."

Hier stellt Steffen die erste Zwischenfrage an seinen aufmerksam zuhörenden Bruder: „Vergleiche die Zeiten, die unser Flugzeug zum Durchfliegen der Strecken $\overline{QP}$, $\overline{RP}$ und $\overline{SP}$ benötigt!" Prompt kommt die Antwort: „Diese Zeiten verhalten sich wie $1:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$." – „Im gleichen Verhältnis stehen also auch die Radien der Schallausbreitung von den Punkten Q, R und S zum angenommenen Zeitpunkt." Den letzten Satz fügt Klaus erst seiner Antwort hinzu, nachdem Steffen die Skizze in der folgenden Weise ergänzt hat (Bild 5).

Klaus schaut sich noch eine Zeitlang diese Zeichnung an. Dann steht er auf und sucht sich am Ufer des Sees mit geringer Wassertiefe einen flachen, runden Stein. Er wirft diesen Stein flach über die Wasseroberfläche.

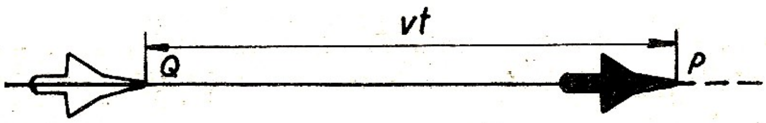


Bild 3

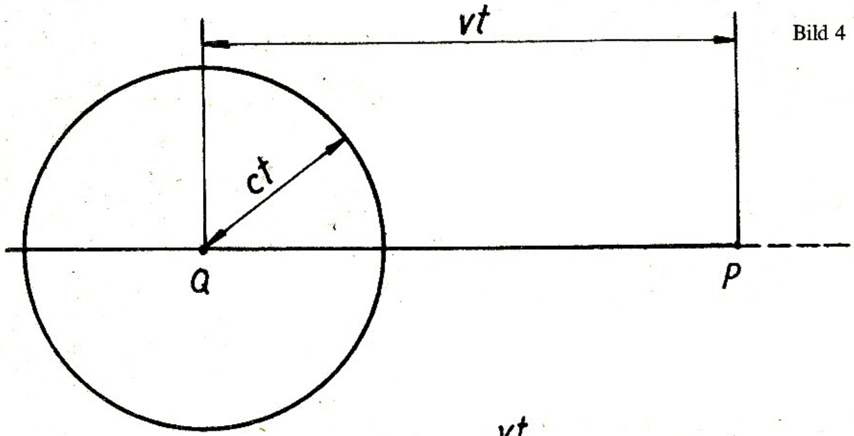


Bild 4

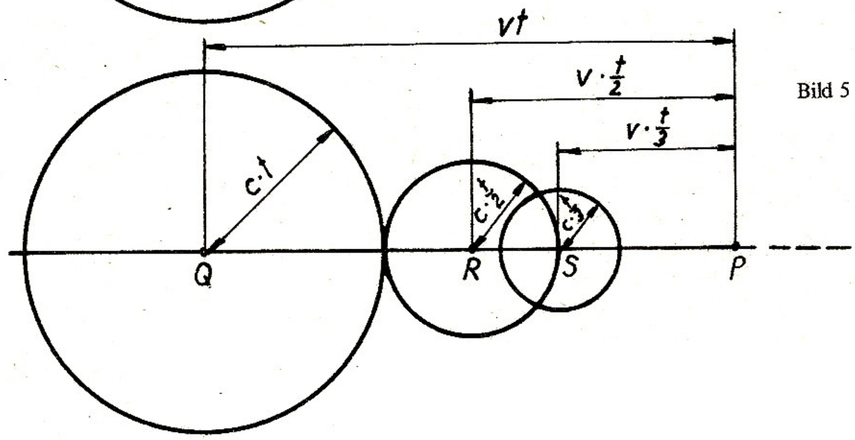


Bild 5

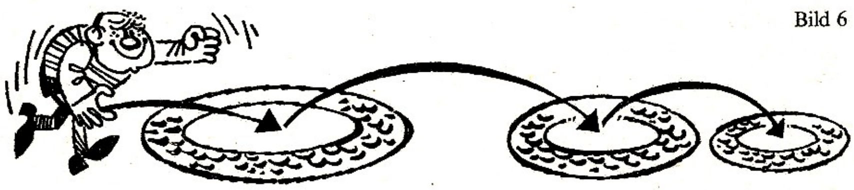


Bild 6

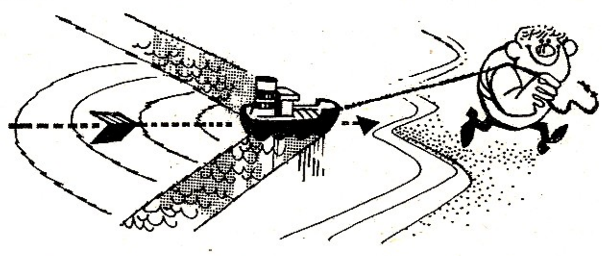


Bild 7

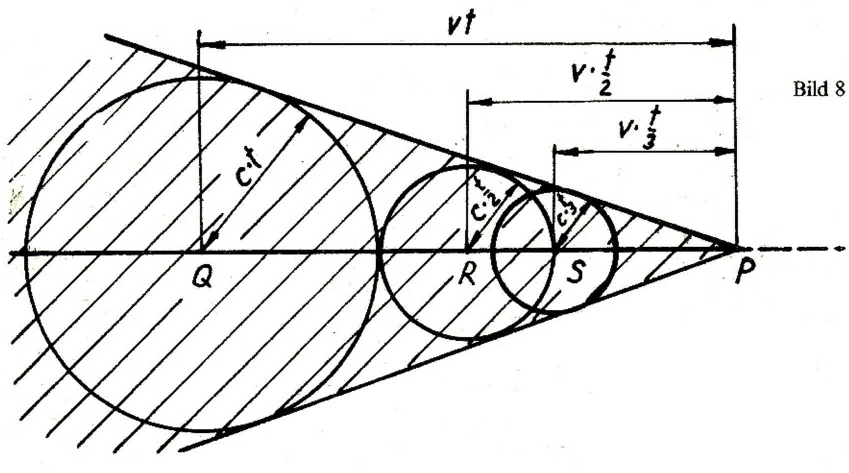


Bild 8

[2] Probiert aus, wie sich das beobachtete Bild ändert, wenn der Stein statt in ruhendes Wasser in strömendes Wasser geworfen wird. Daran erkennt ihr, daß die von uns angestellten Betrachtungen über die Schallausbreitung nur unter der Bedingung der Windstille gelten.

Der Stein setzt ein erstes Mal mit seiner kreisförmigen Breitfläche auf der Wasseroberfläche auf und wird wieder in die Höhe gestoßen. Nach mehrmaligem Aufsetzen versinkt der Stein schließlich im Wasser. Beide Brüder beobachten das Bild, das die Wasseroberfläche kurz danach bietet (Bild 6).

„Hast du damit bereits ein Modell der Schallausbreitung von einer schnell bewegten Schallquelle geschaffen?“ fragt Steffen. „Nein, denn der Stein hat nur drei Stellen der Wasseroberfläche zu Zentren von Wasserwellen gemacht. … Dann müßte der Stein direkt an der Grenze zwischen Wasser und Luft, also an der Wasseroberfläche entlang fliegen. …“ Klaus ist nachdenklich geworden. Nach kurzer Zeit sieht man Klaus ein Stück Holz an einem Faden mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig durch das Wasser ziehen. Die Brüder beobachten zwei vom „Schiff“ auslaufende, mit der Fahrtroute gleiche Winkel bildende geradlinige Wellenzüge (Bild 7).

Klaus kommentiert das Experiment: „Die Geschwindigkeit unseres Schiffes muß größer sein als die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wasserwellen, damit das beobachtete Wellenbild zustande kommt. Je schneller wir unser Boot fahren lassen, um so spitzer ist der Winkel, den die beiden geradlinigen Wellenzüge mit der Fahrtroute bilden. Damit haben wir ein Modell der Schallausbreitung von einem Überschallflugzeug gefunden.“

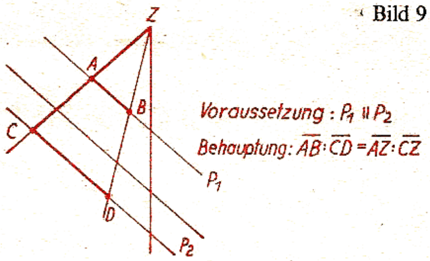
In die Skizze mit den drei Kreisen (Bild 5) zeichnet Steffen die gemeinsamen Kreistangenten ein. Dabei spricht er: „Bis zu diesen beiden Strahlen hat sich zu dem von uns gewählten Zeitpunkt der Schall ausgebreitet.“ Bei diesen Worten schraffiert Steffen die von diesen Strahlen begrenzte, sich nach dem Unendlichen erstreckende Fläche. „Wir betrachteten die Schallausbreitung von dem Flugzeug aus zunächst nur in einer Ebene, der Schall breitet sich natürlich im ganzen Raum aus und nicht nur in einer Ebene wie die Wasserwellen (Bild 8).

Die von uns angestellte Überlegung gilt jedoch für jede Ebene, die die Gerade der Flugroute enthält. Deshalb kann gesagt werden: *Unter den Voraussetzungen der Windstille und gleicher Lufttemperatur in allen Höhen sowie der Annahme konstanter Schallgeschwindigkeit befindet sich die von einem Überschallflugzeug erzeugte Kopfwelle zu jedem Zeitpunkt auf der Mantelfläche eines Kegels*[3]. *An dessen Spitze möge sich jeweils das Flugzeug befinden. Die Achse fällt mit dem Flugweg des Flugzeugs zusammen. Der Öffnungswinkel des Kegels ist durch die Geschwindigkeit des Flugzeugs bestimmt.*

Zur Begründung dieser Aussage werden wir uns auf den zweiten Teil des Strahlensatzes stützen.“

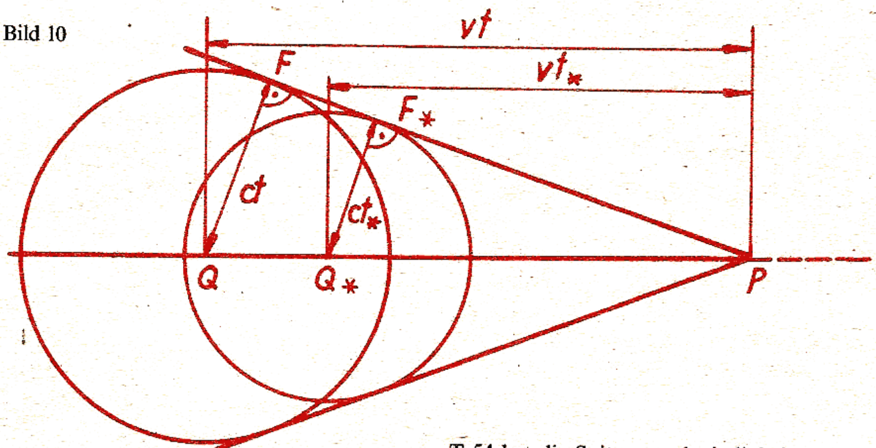
Hierauf antwortet Klaus sicher und fertigt dabei folgende Skizze an: „Werden die Strahlen eines Büschels von einer Parallelenschar geschnitten, so verhalten sich je zwei Parallelenabschnitte, die zwischen gleichen Strahlen liegen, zueinander wie die zugehörigen Strahlenabschnitte ein und desselben Strahls.“ Steffen radiert in der Skizze (Bild 8)

Bild 9



die Kreise um R und S weg. Danach argumentiert er: „Unsere Behauptung wird dadurch bestätigt, daß neben dem Punkt Q ein weiterer vom Flugzeug bereits passierter, ansonsten beliebiger Punkt Q_* der Flugroute betrachtet wird. Die Zeit t_*, die das Flugzeug zum Durchfliegen der Strecke $\overline{Q_*P}$ benötigte, ist bestimmt durch das Gesetz der geradlinig-gleichförmigen Bewegung $\overline{Q_*P} = vt_*$. Wir betrachten den Kreis um Q_*, der die gezeichneten Strahlen berührt.“ Während Steffen diese Worte spricht, zeichnet er die folgende Skizze:

Bild 10



Klaus bemerkt dazu: „Die von dir gezeichneten Strahlen sind also jetzt als die vom Punkte P an den Kreis um Q gezogenen Tangenten aufzufassen.“ Nun schlußfolgert Steffen: „Laut 2. Teil des Strahlensatzes gilt

$$\overline{F_*Q_*} : \overline{FQ} = \overline{Q_*P} : \overline{QP}.$$

Mittels der in der Skizze angegebenen Beziehungen folgt:

$$\overline{F_*Q_*} : ct = vt_* : vt.“$$

Durch Umstellen dieser Proportion nach $\overline{F_*Q_*}$ und durch Kürzen erhält Steffen die Beziehung $\overline{F_*Q} = ct_*$. „Also ist der eben um Q betrachtete Kreis gerade der, bis zu dem die von Q_* sich ausbreitende Druckstörung vorgedrungen ist“, schlußfolgert Steffen.

Schließlich ergänzt er noch: „Daß tatsächlich in jedem inneren Punkt des betrachteten Kegels die Motorengeräusche zu hören sind – vorausgesetzt, daß ihre Stärke nicht wegen zu großer Entfernung des Flugzeuges unter der Hörbarkeitsschwelle liegt oder daß sie wegen der Dämpfung (Reibungserscheinung der Luft) gar nicht bis zum Beobachter gelangen – kannst du dir nunmehr selbst überlegen.“ Man sieht es dem Gesicht von Klaus an, daß er noch immer etwas grübelt. Und dann rückt er damit heraus: „Es müßte doch möglich sein, aus dem Öffnungswinkel des ‚Schallkegels‘ eines Überschallflugzeuges auf dessen Geschwindigkeit zu schließen.“ Steffen antwortet: „Du hast recht. Doch da du dir bei dieser Erklärung ein Nomogramm[4] anfertigen sollst, mit dem du künftig die Geschwindigkeit eines über dich hinweg fliegenden, einen geradlinigen Kurs steuernden Überschallflugzeuges bestimmen kannst, will ich mit dieser Erklärung erst zu Hause beginnen. Dort stehen uns alle Zeichengeräte wie Winkelmesser, Lineal und Zirkel zur Verfügung.“ Nach einer kurzen Pause ergänzt Steffen: „Bis zu dieser Aussprache sollst du die folgenden Aufgaben lösen:

▲ *Aufgabe:* Rechne die Schallgeschwindigkeit $v = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ um in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$!

▲ *Aufgabe:* Das sowjetische Jagdflugzeug Suchoi III hat die Spitzengeschwindigkeit $v = 2\,300 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ und der sowjetische Panzer T 54 hat die Spitzengeschwindigkeit $v = 56 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

a) Rechne diese Geschwindigkeiten um in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$!

b) Berechne für diese Spitzengeschwindigkeiten v jeweils den Quotienten $\frac{v}{c}$, wobei $c = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ die Schallgeschwindigkeit ist!

W. Träger

[3] Diesen „Schallkegel“ bezeichnet man nach dem Physiker *Ernst Mach* (1838 bis 1916) als *Machschen Kegel*.

[4] Siehe Beitrag „Nomogramme ersetzen oder kontrollieren unsere Berechnungen“ in „alpha“ 2/70 bis 6/70.

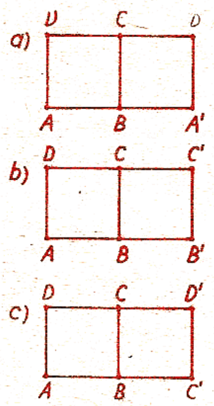
Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 1. März 1972

5▲810 Junge Pioniere haben im Schulgarten insgesamt 936 Erdbeerpflanzen gesetzt. Auf jedem der vier angelegten Beete stehen gleichviel Pflanzen. Auf einem dieser Beete geht durch unsachgemäße Pflege der neunte Teil der Pflanzen ein. Wieviel Erdbeeren gehen verloren, wenn pro Pflanze mit einem Ertrag von 15 Erdbeeren gerechnet werden kann? *Mathematikfachlehrer H. Winkler OS Hartmannsdorf*

5▲811 Bestimme die Summe aus allen zweistelligen natürlichen Zahlen, die sämtlich Primzahlen sind und deren Quersummen ebenfalls Primzahlen sind! *Sch.*

W 5■812 Jedes der unter den Zeichnungen a), b) und c) abgebildeten Quadrate *ABCD* wurde einer besonderen Bewegung unterworfen. Gib an, um welche Art von Bewegung es sich jeweils handelt, und ermittle die Bewegungsgrößen! *Volker Zillmann, 801 Dresden*



W 5■813 Eine der größten Binnenschleusen Europas liegt an der Elbe bei Magdeburg. Die Schleusenkammer hat eine Länge von 325 m und ist 25 m breit und 4,3 m hoch. Welches Volumen hat die eingelassene Wassermenge, wenn der Wasserspiegel seinen höchsten Stand 0,5 m unter der Oberkante der Schleusenkammer hat? Runde das Ergebnis (in Kubikmetern) auf Vielfache von Hundert! *Aus „Physik in der Schule"*

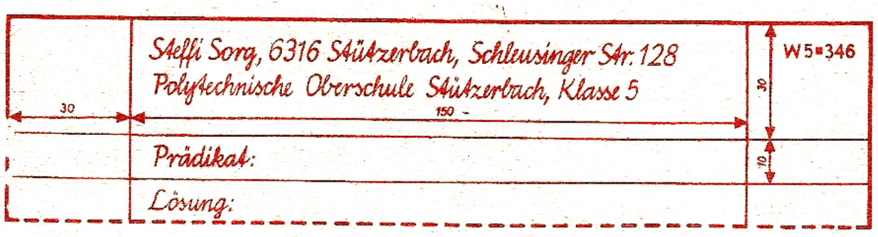
* 5 * 814 Auf der Straßenbahnlinie 4 der Dresdner Verkehrsbetriebe (Radebeul—Pillnitz) verlassen werktags die ersten Wagenzüge Radebeul um 4.50 Uhr und Pillnitz um 4.38 Uhr. Tagsüber verkehren die Wagenzüge in beiden Richtungen in einem zeitlichen Abstand von jeweils 15 Minuten. Die Fahrzeit in beiden Richtungen beträgt 89 Minuten. Wie vielen Wagenzügen des Gegenverkehrs begegnet ein Wagenzug auf der Gesamtstrecke, der um 8.35 Uhr in Radebeul abfährt? *Dr. G. Hesse, 8122 Radebeul*

* 5 * 815 Aus je einem Blatt Schreibmaschinenpapier (Format A 4) von 0,1 mm Stärke werden acht kleinere Notizzettel gleichen Formats durch Zerschneiden hergestellt. Diese Notizzettel sollen in einem Kästchen, das eine innere Höhe von 4,8 cm besitzt, aufbewahrt werden. Wie viele Bogen A 4 müssen zerschnitten werden, um das anfangs leere Kästchen zu füllen? *Sch.*

6▲816 Beweise, daß für die Höhe h zur Hypotenuse $\overline{AB}$ eines rechtwinkligen Dreiecks ABC stets $h = \frac{a \cdot b}{c}$ gilt! *Frank Kolwe, 128 Bernau, 7. Klasse*

6▲817 Man schüttet 50 Stahlkugeln gleichen Durchmessers in einen Meßzylinder, der mit 75 ml Wasser gefüllt ist. Der Wasserstand steigt danach auf 87 ml. Welches Volumen hat eine Kugel? *Aus „Physik in der Schule"*

W 6■818 Bei einer Geschwindigkeitskontrolle durch die Volkspolizei durchfuhr ein Pkw innerhalb einer geschlossenen Ortschaft (keine Schnellstraße) die Meßstrecke s von 200 m in einer Zeit t von 10 s. Verhielt sich der Kraftfahrer entsprechend der Straßenverkehrsordnung? *Aus „Physik in der Schule"*



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha,
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgaben fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer, z. B. 7 vorgesetzt (d. h., für die 7. Klasse geeignet). Aufgaben mit * versehen gelten auch als Wettbewerbsaufgaben. Sie haben einen hohen Schwierigkeitsgrad.

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben *seiner oder einer höheren Klassenstufe* einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit W■ 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Experten korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Endergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgeben.

Der Jahreswettbewerb 1971/72 läuft von Heft 5/71 bis Heft 2/72. Zwischen dem 1. und 10. September 1972 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/71 bis 2/72 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 5/72 veröffentlicht. Wer mindestens 7 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/71 bis 2/72) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, welche bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1971/72 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück).

Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen *richtig frankiert* sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

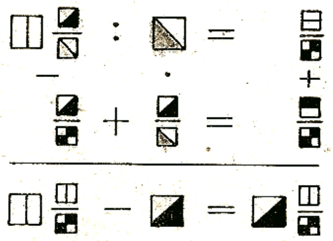
Redaktion *alpha*

W 6 ■ 819 Welche Kantenlänge besitzt ein Würfel, bei dem die Maßzahl seiner Oberfläche (in cm^2) gleich der Maßzahl seines Volumens (in cm^3) ist?

Volker Zillmann, 801 Dresden

* 6 * 820 Ist es möglich, daß in einem gleichschenkligen Trapez die Mittellinie genauso lang ist wie eine Diagonale? Die Antwort ist zu begründen! *Sch.*

* 6 * 821 In dem folgenden Zahlenrätsel, das entgegen den üblichen Zahlenrätseln auch gebrochene Zahlen enthält, bedeuten verschiedene Symbole verschiedene Grundziffern und gleiche Symbole jeweils gleiche Grundziffern. Alle Grundziffern sind von Null verschieden. Alle im Zahlenrätsel enthaltenen Brüche sind echte Brüche; bei jedem Bruch sind Zähler und Nenner teilerfremd. Entschlüssele dieses Zahlenrätsel! *T.*



7 ▲ 822 Die Schüler dreier Oberschulen eines Stadtbezirks sammelten insgesamt 4 t 300 kg Altpapier. Die Schüler der Schule A sammelten 840 kg mehr, die Schüler der Schule B hingegen 650 kg weniger als die Schüler der Schule C. Die Schüler beschlossen, den Erlös der Altstoffsammlung dem Solidaritätskonto für Vietnam zu überweisen. Wieviel Mark konnten die Schüler jeder der drei Schulen dem Solidaritätskonto zuführen, wenn der Altstoffhandel für 1 kg Altpapier 15 Pf zahlt?

Mathematikfachlehrer Karl-Heinz Gentzsch, Meuselwitz

7 ▲ 823 Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$ mit den Seiten $\overline{AB}=a$ und $\overline{BC}=b$, und es gelte $a > b$. Die Seite $\overline{AB}$ ist in drei kongruente Teilstrecken zu teilen. Der Teilpunkt, der dem Punkt B am nächsten liegt, sei E. Verbindet man C mit E, so entsteht ein Trapez $AECD$. Es ist der Flächeninhalt dieses Trapezes allein durch die Seiten a und b des gegebenen Rechtecks auszudrücken.

Mathematikfachlehrer Karl-Heinz Gentzsch, Meuselwitz

W 7 ■ 824 Eine Klasse schrieb eine Leistungskontrolle. Genau ein Drittel der beteiligten Schüler hatte eine Aufgabe falsch, genau ein Viertel hatte zwei Aufgaben und genau ein Sechstel drei Aufgaben falsch; genau ein Achtel hatte alle vier Aufgaben falsch. Wie viele Schüler hatten alle Aufgaben richtig gelöst, wenn dieser Klasse nicht mehr als 30 Schüler angehören?

Mathematikfachlehrer Karl-Heinz Gentzsch, Meuselwitz

W 7 ■ 825 Klaus hat im Verlaufe des Schuljahres mehrere schriftliche Klassenarbeiten im Fach Mathematik geschrieben; er erhielt dabei nur die Noten 1 oder 2. Der Zensurendurchschnitt aus diesen Arbeiten beträgt genau 1,4. Wieviel Klassenarbeiten hat Klaus mindestens mitgeschrieben?

H. Werner, Ing. f. Rechenelektronik, 111 Berlin

* 7 * 826 Axel, Bruno, Dieter und Ernst sind die vier Teilnehmer der Endrunde eines Schachturniers. Es hat jeder gegen jeden zweimal zu spielen, also Spiel und Rückspiel. Für eine gewonnene Partie wird 1 Punkt, für eine unentschiedene $\frac{1}{2}$ Punkt, für eine verlorene kein Punkt vergeben. Bruno und Dieter erzielten zusammen einen Punkt mehr als Axel und Ernst zusammen erreichten. Dieter und Ernst erkämpften zusammen 7 Punkte. Axel und Dieter konnten zusammen nur 5 Punkte weniger erreichen, als Bruno und Ernst zusammen hatten. Wie viele Punkte errang jeder der vier Teilnehmer?

Ingolf Kunath, EOS Meißen, 10. Kl.

* 7 * 827 Gegeben seien sechs aufeinanderfolgende einstellige natürliche Zahlen. Setze aus den ersten drei dieser Zahlen die größtmögliche dreistellige Zahl z_1 und aus den letzten drei dieser Zahlen die kleinstmögliche dreistellige Zahl z_2 zusammen. Beweise, daß die Differenz z_2-z_1 stets 135 beträgt und daß die Summe z_1+z_2 stets durch 111 teilbar ist!

Sabine Bartelt, Neubrandenburg

8 ▲ 828 Man beweise, daß für jede Primzahl, die größer als 5 ist, das Produkt

$$P=(p-2)(p-1)(p+1)(p+2)$$

durch 360 teilbar ist.

Dr. Gerhard Hesse, Radebeul

8 ▲ 829 Es sei z eine natürliche Zahl, deren erste 300 Grundziffern (im dekadischen System) sämtlich gleich 1 und deren weitere Grundziffern sämtlich gleich 0 sind:

$$z=\underbrace{111\ldots11}_{\text{300 Ziffern}}\underbrace{000\ldots00}_{\text{beliebig viele Ziffern}}$$

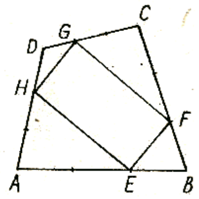
Man untersuche, ob die Zahl z gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl sein kann.

Gerd Weißenborn, Berlin, EOS „Heinrich Hertz", Kl. 10

W 8 ■ 830 Bei den Europa-Leichtathletikmeisterschaften in Helsinki im August 1971 wurden insgesamt 38 Goldmedaillen, 39 Silbermedaillen und 37 Bronzemedaillen vergeben. Die Mannschaft der DDR, die in der Länderwertung den ersten Platz einnahm, erkämpfte insgesamt 32 Medaillen. Sie erhielt genau ein Drittel aller Silbermedaillen und mehr als ein Sechstel, jedoch weniger als ein Fünftel aller vergebenen Bronzemedaillen.

Wieviel Gold-, Silber- bzw. Bronzemedaillen erhielt die Mannschaft der DDR? *L.*

W 8 ■ 831 Die hier abgebildete Figur stellt ein konvexes Viereck $ABCD$ dar, dessen Seiten sämtlich gedrittelt wurden. Es ist zu beweisen, daß die Teilungspunkte E, F, G und H die Eckpunkte eines Parallelogramms sind. *Sch.*



* 8 * 832 Es sind alle Primzahlen p anzugeben, für die die natürliche Zahl

$$z=p^2+1$$

wieder eine Primzahl ist. *T.*

* 8 * 833 Auf wieviel verschiedene Weisen kann man den Betrag von 1 M wechseln, falls eine ausreichende Anzahl von 1-Pf-, 5-Pf-, 10-Pf-, 20-Pf- und 50-Pf-Stücken zur Verfügung steht? *L.*

9 ▲ 834 Es sei a eine ungerade natürliche Zahl, die größer als 1 ist. Dann ist auch die Zahl

$$b=\frac{(a-1)(a+1)}{2}$$

eine natürliche Zahl, weil $a-1$ und $a+1$ gerade natürliche Zahlen sind.

Es ist zu beweisen, daß unter diesen Voraussetzungen die Summe der Quadrate der Zahlen a und b gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl ist, daß also

$$a^2+b^2=c^2$$

gilt, wobei c eine natürliche Zahl ist.

Ferner ist die Zahl c in den Fällen $a=3, 5, 7$ und 9 zu berechnen.

Flieger Falk Schellenberg, NVA

W 9 ■ 835 a) Der Betrag der Differenz der dritten Potenzen zweier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen sei gleich 2611. Wie lauten diese Zahlen?

b) Der Betrag der Differenz der vierten Potenzen zweier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen sei gleich 39775.

Wie lauten diese Zahlen?

Hinweis zur Lösung: Wir verweisen auf die Lösung der Aufgabe 554 (Heft 3, 1970, S. 63; Lösung in Heft 6, 1970, S. 141).

Reinhard Schulz, Rotta, Fachlehrer für Mathematik

W 9 ■ 836 Zeichne ein spitzwinkliges Dreieck ABC! Lege auf der über C hinaus verlängerten Seite $\overline{BC}$ einen äußeren Punkt F fest, und verbinde F mit dem Mittelpunkt D der Seite $\overline{AB}$! Der Schnittpunkt der Geraden AC und DF sei E. Ziehe durch C eine Parallele zur Geraden DF! Ihr Schnittpunkt mit der Geraden AB sei der Punkt G.

Es ist zu beweisen, daß die Strecke $\overline{CG}$ das harmonische Mittel zu den Strecken $\overline{ED}$ und $\overline{DF}$ ist, d. h., daß $\overline{CG}=\frac{2\cdot\overline{ED}\cdot\overline{DF}}{\overline{ED}+\overline{DF}}$ gilt.

Sch.

* 9 * 837 Im neunten Fünfjahrplan (1971 bis 1975) der UdSSR wird sich das jährliche Nationaleinkommen von 266,3 Mrd. Rubel auf 373 Mrd. Rubel erhöhen, wobei sich der Konsumtionsfonds um 41% und der Akkumulationsfonds um 37,5% erhöht.
Es sollen der Konsumtionsfonds und der Akkumulationsfonds (in Mrd. Rubel) am Ende des neunten Fünfjahrplans bestimmt werden.
Bemerkung: Unter dem Konsumtionsfonds versteht man den Teil des Nationaleinkommens, der für den individuellen oder den gesellschaftlichen Verbrauch bestimmt ist, unter dem Akkumulationsfonds den Teil, der für die Erweiterung der Industrieanlagen, für Neubauten usw. bestimmt ist.

Dozent L. M. Lopowok, Woroschilowgrad, UdSSR

* 9 * 838 Es sei $ABCD$ ein Rechteck, dessen Umfang 14 cm beträgt und dessen Diagonale $\overline{AC}$ um 2 cm länger als die Seite $\overline{BC}$ ist. Es sind die Längen der Seiten und der Diagonale zu berechnen.

Wolfgang Huschmann Oberschule V, Oelsnitz, Kl. 8

10/12 ▲ 839 a) Es ist zu beweisen, daß

$$\sqrt{10}-\sqrt{9}<\sqrt{9}-\sqrt{8} \text{ gilt.} \qquad (1)$$

b) Es ist zu beweisen, daß für alle von Null verschiedenen natürlichen Zahlen n

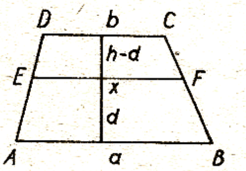
$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\sqrt{n}-\sqrt{n-1} \text{ gilt.} \qquad (2)$$

Burkhard Neumann, OS Rangsdorf, Kl. 9

W 10/12 ■ 840 Es sind alle reellen Lösungen der Gleichung
$x^4-2x^2-400x=9999$ zu ermitteln.
Bemerkung: Diese Aufgabe wurde bereits von dem indischen Mathematiker *Bhâskara* (1114 bis 1185) gestellt und gelöst (vgl. A. P. Juschkewitsch; Geschichte der Mathematik im Mittelalter, Leipzig: B. G. Teubner 1964, S. 140).

Wolfgang Riedel, Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt, Spezialklasse 12

W 10/12 ■ 841 In einem Trapez $ABCD$, von dem die Grundseiten $\overline{AB}=a=9$ cm, $\overline{CD}=b=4$ cm und die Höhe $h=5$ cm gegeben sind, ist zu der Grundseite AB im Abstand d die Parallele gezogen, die die Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ des Trapezes in den Punkten E und F schneidet (vgl. die Abb.).



1. Die Länge x der Strecke $\overline{EF}$ ist als Funktion des Abstandes d und umgekehrt der Abstand d als Funktion der Länge x darzustellen.
2. Der Abstand d ist allgemein und numerisch zu berechnen, wenn die Länge x gleich dem
a) arithmetischen, c) harmonischen,
b) geometrischen, d) quadratischen
Mittel der Längen der beiden Grundseiten ist.
(Dabei versteht man unter dem quadratischen Mittel der Zahlen a und b die Zahl $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.)
3. In jedem dieser vier Fälle ist das Verhältnis der Flächeninhalte A_1 und A_2 der durch die Parallele EF erzeugten beiden Teiltrapeze $EFCD$ und $ABFE$ allgemein und numerisch zu bestimmen.
4. In welchem Falle geht die Parallele EF durch den Schnittpunkt S der Diagonalen des Trapezes $ABCD$?
5. In welchem Falle sind die beiden Teiltrapeze $EFCD$ und $ABFE$ einander ähnlich? (Die Antwort ist jeweils zu begründen.)

Rudolf Schalle, Halle, Dozent an der ABF i. R., Verdienter Lehrer des Volkes

* 10/12 * 842 Man beweise den folgenden Satz:
Es sei $P_1P_2\ldots P_{2n}$ ein Sehnenvieleck mit gerader Eckenzahl ($2n\geq 4$), d. h., die Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$ liegen sämtlich auf einem Kreis. Ferner mögen die Innenwinkel dieses Vielecks die Größen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}$ haben. Dann gilt stets
$\alpha_1+\alpha_3+\ldots+\alpha_{2n-1}=\alpha_2+\alpha_4+\ldots+\alpha_{2n}$.

Albrecht Böttcher, EOS „Johannes R. Becher", Annaberg-Buchholz, Kl. 11

* 10/12 * 843 Es seien

$$s_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$$

die Summe von n positiven reellen Zahlen ($n\geq 2$) und

$$\bar{s}_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}$$

die Summe der reziproken Werte dieser Zahlen. Man beweise, daß dann stets

$$s_n\cdot \bar{s}_n\geq n^2 \text{ gilt.}$$

Wolfgang Riedel, TH Karl-Marx-Stadt, Spezialklasse 12

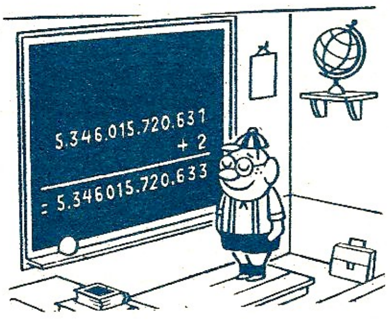
Johannes Kepler –
Astronom und Mathematiker
Fortsetzung von Seite 123

Trotz des Drängens der österreichischen Ständeregierung, die Tafeln fertigzustellen, wandte sich Kepler, unterbrochen durch Reisen von Linz nach Württemberg, wo er seine in einem Hexenprozeß angeklagte Mutter erfolgreich verteidigte, seinem eigentlichen Lieblingsgebiet, der Aufdeckung von „Harmonien", d. h. von mathematischen Gesetzmäßigkeiten in Natur und Kunst zu.
Auf diesem Wege wieder zu astronomischen Betrachtungen veranlaßt, fand er am 15. Mai 1618 das dritte Planetengesetz. Es sagt aus, daß sich die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen ihrer Bahnellipsen verhalten. Zusammen mit vielen anderen Erkenntnissen, u. a. auch über Fragen der Musik, veröffentlichte Kepler das dritte Planetengesetz im Werk „Harmonices mundi" (Weltharmonie), das den Gipfelpunkt seines wissenschaftlichen Lebenswerkes darstellt. Wenige Tage vor dem Abschluß der Arbeit an den „Harmonices mundi" brach (durch die Ereignisse in Prag am 23. Mai 1618 ausgelöst) der Dreißigjährige Krieg aus.
Schließlich kam noch ein allerdings glückliches Unglück („felix calamitas"), wie Kepler selbst es nannte, hinzu, das die Fertigstellung der Tafeln verzögerte. Gerade um 1620 nämlich wurde der Gebrauch von Logarithmen in größerem Umfang üblich und bekannt (durch die Arbeiten von Neper, Bürgi, Briggs). Logarithmisches Rechnen ist natürlich zur Berechnung, aber auch zur Benutzung von astronomischen Tafeln von größter Bedeutung. Kepler konnte also unmöglich auf die Benutzung von Logarithmen verzichten und schrieb zu diesem Zweck ein eigenes Logarithmenwerk „Chilias logarithmorum" (1624), das den Gebrauch der Rudolphinischen Tafeln erleichtern soll.
Kepler fand schließlich in Ulm einen geeigneten Drucker für die Tafeln und überwachte alle Phasen der Produktion selbst, bis sie 1627 in Frankfurt am Main zur Messe käuflich vorlagen. Welche Leistung die Rudolphinischen Tafeln letztlich darstellten, läßt sich näherungsweise daran abschätzen, daß sie für die folgenden 100 Jahre die Grundlage aller astronomischen Rechnungen bildeten und durch keine bessere Tafel ersetzt wurden. Kontrollrechnungen, die erst in jüngster Zeit mittels elektronischer Rechenmaschinen durchgeführt wurden, zeigten, daß die Tafeln fast fehlerfrei sind, Kepler also mit einer bewundernswerten Genauigkeit gerechnet hat.
Seine Zeit hat ihm für diese Leistungen nicht gedankt. Sein ganzes Leben hatte er mit finanziellen und materiellen Schwierigkeiten zu kämpfen, die völlig hätten vermieden werden können, wenn er die ihm vertraglich zugesicherten Gelder aus seiner Anstellung als Astronom der Kaiser Rudolph II. und Matthias erhalten hätte.
So übersiedelte er 1628 nach Sagan in Schlesien, wo er von Wallenstein Unterstützung zu finden hoffte. Wallenstein bietet ihm eine Professur in Rostock an. Vor Antritt dieser Stellung (1630) will Kepler seine finanziellen Forderungen auf dem Reichstag geltend machen, der in Regensburg tagt. Durch die Strapazen der in Kriegszeiten durchgeführten Reise nach Regensburg erkrankt er und stirbt dort am 15. 11. 1630.
Wir ehren in Kepler einen bahnbrechenden Wissenschaftler, der heute mit seinen bedeutenden Leistungen der ganzen Menschheit gehört und der, wie der große Physiker unseres Jahrhunderts, Albert Einstein, sagte, „einfach unfähig war, etwas anderes zu tun, als auf jedem Gebiet für seine Überzeugung einzustehen".

Th. Riedrich

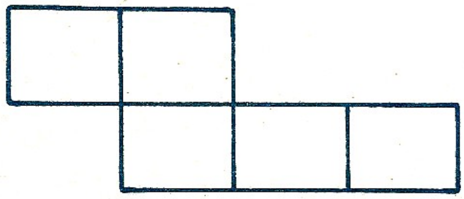
In freien Stunden alpha heiter

Ohne Worte (aus DLZ)



Schwierige Lage!

16 Hölzchen sind so angeordnet, wie es die Figur zeigt. Es sollen 2 Hölzchen, die aber mit im Spiel bleiben, derart umgelegt werden, daß aus den 5 kongruenten Quadraten 4 kongruente Quadrate entstehen.



Bitte ankreuzen!

Die Zahlen am Rande bedeuten, wieviel Karos in der entsprechenden Zeile bzw. Spalte angekreuzt werden sollen. (Es gibt mehrere Lösungen)

Oberlehrer H. Pätzold, VH Waren/Müritz

3	2	1	3	2	
					2
					1
×					4
×					3
					1

Ein wichtiger Beruf

DIETER v. BUNNAT
GERA

In welchem Zweig unserer Volkswirtschaft ist Herr Bunnat tätig?

Spieglein, Spieglein an der Wand

Jemand möchte sich in einem ebenen, senkrecht stehenden Spiegel von Kopf bis Fuß sehen. Wie groß muß der Spiegel dann mindestens sein?

Oberlehrer H. Pätzold, VH Waren/Müritz

Magisches Quadrat

Waagrecht und senkrecht werden die gleichen gefundenen Zahlen eingetragen:

a) eine Potenz 2^n mit fünfstelliger Lösung

b) $l=5+\sum_{a=0}^{0}(55\,550+a)$

p) Produkt zweier Primzahlen
$a \cdot b=p$
$a+p=(a-1)^{a-3}=(a-3)^{a-1}$
$b-a=6$

h) fünfstellige Zahl mit Ziffern $k;\ l;\ m;\ n;\ o$
$k+l^p-m^o=p$
$p=n-2$
$(l+m):2-2=k$
$\frac{l \cdot m}{5}=5$

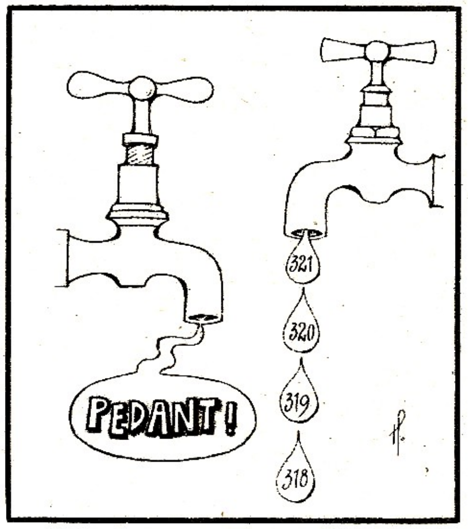
Ilse Clauder, 4241 Spielberg

a	l	p	h	a
l				
p		◆	p	
h		p		
a				

Rund um die 81

$9^2=81=(8+1)^2$
$729^2=(72+9)^3=81^3=[(8+1)(8+1)(8+1)]^2$
$9^{18}=81^9=81^{8+1}=(1+8)^{18}$

Ingenieur H. Decker, Köln



aus: Neues Leben 5/71 (H.-J. Starke)

Abschlußprüfung, Klasse 10

Die Aufgabe, in dem Ausdruck $x=\frac{\lg 5}{\lg 3-\lg 2}$ x ohne Benutzung des Tafelwerkes annähernd zu bestimmen, löste ein Schüler so:

$x=\frac{a^5}{a^3-a^2}=\frac{a^5}{a}=a^4$, also $x\approx 4$.

Kann man das richtige Ergebnis anerkennen? Wie hätte man umformen können?

Oberlehrer H. Pätzold, VH Waren/Müritz

Silbenrätsel

Aus den Silben
a-by-chint-e-eu-gam-ge-ge-gel-gen-ka-ler-li-ly-ma-me-na-ni-nu-nungs-o-on-ord-pe-re-ra-run-rus-scheff-schin-sis-te-the-ti-tsche
sind 11 Wörter zu bilden, deren erste und dritte Buchstaben, von oben nach unten gelesen, den Namen eines bekannten Mathematikers und dessen Lebenswerk ergeben.

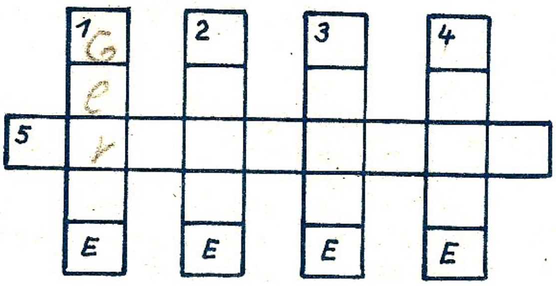
1. griechischer Buchstabe 2. Mathematiker (1707 bis 1783), fundamentale Arbeiten zur Variationslehre, zur Integral- und Differentialrechnung 3. Verbindungsgerade von Grund- und Aufriß eines Punktes 4. Mathematiker, Arbeiten zur numerischen Anwendung math. Methoden 5. Begriff aus der Trigonometrie 6. Mathematiker (1894 bis 1959), Untersuchungen auf dem Gebiet der Funktionstheorie, Zahlentheorie und modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung 7. Begriff aus der höheren Mathematik 8. Begriff zur Logarithmenfunktion 9. Mathematiker (1821 bis 1894), Begründer der Petersburger math. Schule 10. Verknüpfung mathematischer Größen 11. Vorschrift, Richtschnur

Mathematikfachlehrer H. Winkler, OS Hartmannsdorf

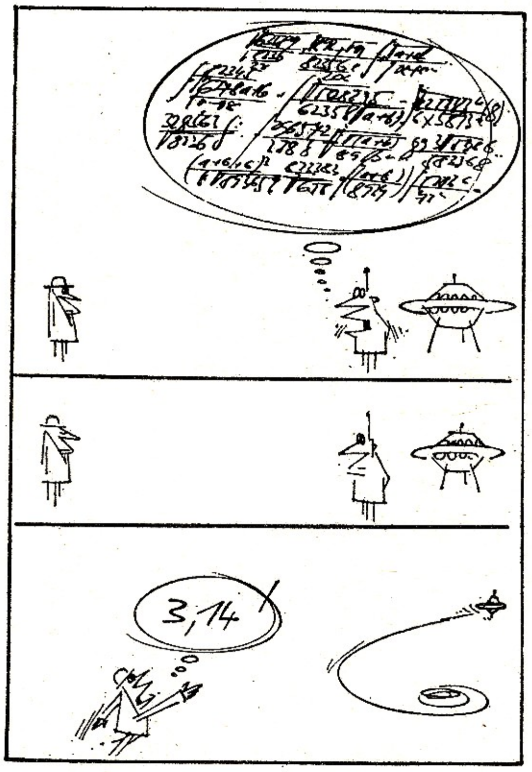
Mathematische Begriffe

1. Begriff, der bei den natürlichen Zahlen bereits ab Klasse 1 verwendet wird 2. Begriff aus der Geometrie, der ebenfalls bereits in der 1. Klasse auftaucht 3. Begriff aus der Kreislehre 4. Zentraler Begriff im gesamten Lehrgang der Mathematik 5. Begriff, der ab Klasse 1 verwendet wird.

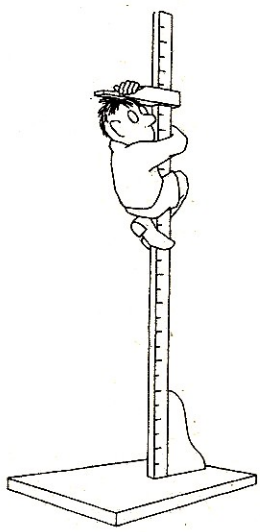
Oberstudienrat G. Schulze, EOS Herzberg



Vladimir Renčin, Praha



Boris, Paris



Miroslaw Bartak, Bratislava

▲1▲ Udo gibt von dem Geldbetrag, den er bei sich hat, zunächst die Hälfte aus, von dem verbleibenden Restbetrag wieder die Hälfte, von dem restlichen Gelde nochmals die Hälfte. Er behält weniger als 5 Pfennig übrig. Welchen Geldbetrag könnte Udo bei sich gehabt haben?

▲2▲ Klaus erhält jeden Sonntag Taschengeld, stets den gleichen Geldbetrag. Er ist sehr sparsam und gibt ständig nur die Hälfte des erhaltenen Taschengeldes aus, um die andere Hälfte zu sparen. Nach acht Wochen hat Klaus schon mehr als 11 M, aber weniger als 17 M gespart. Wie hoch ist das wöchentliche Taschengeld von Klaus, wenn es sich um einen vollen Markbetrag handelt?

▲3▲ Uwe ist größer als Klaus. Bernd ist kleiner als Uwe. Klaus ist nicht so groß wie Bernd. Ordne diese drei Jungen nach ihrer Größe! Welche der drei Aussagen wird für die Lösung der Aufgabe nicht benötigt?

▲4▲ Ermittle alle natürlichen Zahlen n, die der Ungleichung $11 > 4 \cdot n - 2 > 6$ genügen!

▲5▲ Welche natürlichen Zahlen erfüllen zugleich die beiden Ungleichungen $3 \cdot x > 11$ und $7 \cdot x < 40$?

▲6▲ Peter sagt: „Ich habe ebenso viele Brüder wie Schwestern." Seine Schwester Marion meint: „Ich habe doppelt so viele Brüder wie Schwestern." Wieviel Jungen und wieviel Mädchen gehören zur Familie?

▲7▲ Eine Schachtel enthält genau zehn Buntstifte, am meisten blaue, am wenigsten grüne, gleichviel rote wie gelbe und keine weiteren andersfarbigen. Wie viele Buntstifte jeder Farbe sind es?
Löse die Aufgabe für den Fall, daß die Schachtel 14 Buntstifte enthält!

▲8▲ Die Seitenlängen zweier Quadrate unterscheiden sich genau um 1 cm, ihre Flächeninhalte um $9\,\mathrm{cm}^2$. Wie lang ist die Seite des kleineren, wie lang ist die des größeren Quadrates?

D. Michels/Th. Scholl

Mathematische Kurzweil aus der VR Bulgarien

Klassentreffen

Zwanzig Jahre nach ihrer Schulentlassung trafen sich die ehemaligen Schüler einer Klasse, um Erinnerungen auszutauschen und über ihre beruflichen Erfolge zu berichten. Jeder der Anwesenden überreichte jedem früheren Klassenkameraden ein Erinnerungsfoto von sich. Es wurden insgesamt 552 Fotos ausgetauscht. Wieviel Personen hatten sich zum Klassentreffen eingefunden?

Tischrunde

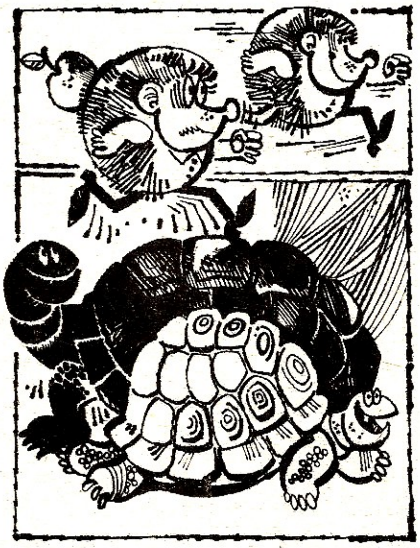
In einem Restaurant saßen die beiden Brüder Neumann und deren Freunde Stein und Ismer; sie tranken entweder Kaffee oder Tee oder Bier oder Wein. Keine zwei dieser Personen tranken das gleiche Getränk. Zwei dieser Personen haben den Vornamen Walter, die anderen Vornamen lauten Bernd und Peter. Keiner der beiden Brüder heißt Peter mit Vornamen. Peter trank Bier, Ismer hingegen Wein und Bernd Kaffee. Ordne den vier Vornamen die zugehörigen Familiennamen und die bestellten Getränke zu!

Auf einer Bank

Auf einer Bank saßen zwei Jungen mit den Vornamen Ingo und Peter und zwei Mädchen mit den Vornamen Wilma und Lena. Die Familiennamen der Mädchen lauten Weiß und Starke, die der Jungen Sander und Hauff. Wilma und Ingo saßen nicht am Rande der Bank. Die Kinder mit den Familiennamen Sander und Weiß saßen nicht nebeneinander. Rechts von Ingo saß das Kind mit dem Familiennamen Starke. Die Mädchen saßen nicht nebeneinander. Ordne jedem Vornamen den zugehörigen Familiennamen zu! In welcher Reihenfolge saßen die vier Kinder auf der Bank?

Wettlauf der Igel 26.3

Zwei Igel liefen um die Wette. Sie starteten zum gleichen Zeitpunkt, liefen auf zwei verschiedenen, aber gleichlangen Wegen und erreichten zugleich das gemeinsame Ziel. Der erste Igel stieß während seines Laufes auf keinerlei Hindernisse. Der zweite Igel hingegen stieß auf zwei Schildkröten, die er nicht umgehen konnte, so daß er seinen Lauf auf deren Panzer fortsetzte. Die Hindernisse behinderten diesen Igel nicht in seinem Lauf, das heißt, er erlitt weder einen Tempo- noch einen Zeitverlust. Die eine Schildkröte war 1 m lang und kroch dem Igel mit einer Geschwindigkeit von $6\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$ entgegen. Die andere Schildkröte war 50 cm lang und kroch mit einer Geschwindigkeit von $18\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$ in die gleiche Richtung wie der zweite Igel lief. Welcher war der Schnellere der beiden Igel?



Kollektive Beteiligung am alpha-Wettbewerb

Alle Schulen des Kreises Schmalkalden (608); OS Clingen (5401); OS Westgreußen (5401); OS Mahlis (7261); EOS Worbis (562); OS Teterow I (205); F.-Schiller-OS Eilenburg (728); Station Jg. Techniker Meiningen (61); Prießnitz (731); OS Marienberg (934); OS Sayda (9201); OS Gottleuba (8302); 16. OS Rostock (25); OS Radis (4401); OS Rüdnitz (1281); OS II Blankenfelde (1636); OS Rotta (4401); OS Burkau (8502); K.-Kollwitz-OS Sondershausen (54); Spezialistenlager Mathematik des Kreises Worbis (562); Teiloberschule Neuenhofe (3241); OS Kavelstorf (2555); K.-Kollwitz-OS Bützow (262); OS Kuhfelde (3561); OS Schernberg (5401); OS Zepernick (1297); K.-Liebknecht-OS Berlin (116); OS Matgendorf (2051); OS Oberröblingen (4701); OS Haynrode (5601); R.-Arndt-OS Geisa (6222); OS Löderburg (3258); OS Stahnsdorf (1533); Lessing-OS Großpostwitz (8603); E.-Schneller-OS Burgstädt (9112); alpha-Club Jan-Hus-OS Naumburg (48); K.-Kollwitz-OS Wittenberg (46); E.-Hartsch-OS Gersdorf (2561); J.-Brinckmann-OS Goldberg (2862); OS Pfaffroda (9331); OS Jördenstorf (2051); Klub Jg. Mathematiker Cottbus (75); Diesterweg-OS Halle (402); AG Mathematik E.-Thälmann-OS Karl-Marx-Stadt (90); OS Bahratal (8302); OS II Blankenfelde (1636)

Beste Schulen im alpha-Wettbewerb

Schulen des Kreises Schmalkalden (1900 Karten); POS Steinbach-Hallenberg (1700 Karten); POS Teterow (800 Karten); POS Burkau (450 Karten); POS Oberschönau (400 Karten); POS Clingen (350 Karten).

Lösungen

5▲716 Wegen $10=1\cdot 10=2\cdot 5=5\cdot 2=10\cdot 1$ könnte der Faktor $n-2$ gleich 1, 2, 5 oder 10 sein.

$n-2$	n	$n+1$	$(n-2)\cdot(n+1)$
1	3	4	4
2	4	5	10
5	7	8	40
10	12	13	130

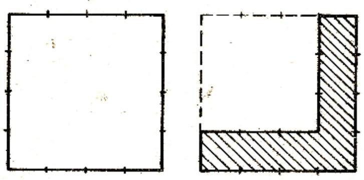
Nur $n=4$ erfüllt die Gleichung, und es gilt $(4-2)\cdot(4+1)=2\cdot 5=10$.

5▲717 Die Summe aus drei dreistelligen Zahlen ist stets kleiner als 3000. Deshalb kann y entweder 1 oder 2 sein.
Es sei $y=1$; dann ist $x=8$, da die Summe der Einerstellen auf Null endet.
Es sei $y=2$; dann ist $x=6$, da die Summe der Einerstellen auf Null endet.
Die Aufgabe besitzt genau eine Lösung, und zwar

$$\begin{array}{r} 811 \\ +\ 181 \\ +\ 118 \\ \hline 1110 \end{array}$$

Für $y=2$ und damit $x=6$ erhalten wir $622+262+226 \neq 2220$.

W 5 ■ 718 a) Die beiden Abbildungen stellen das aus 16 Stäbchen gelegte Quadrat und eine durch Umlegen von Stäbchen entstehende Figur mit einem Flächeninhalt von 7 cm² dar.



b) Es sind $2\cdot 99=198$ Stäbchen umzulegen, damit der Flächeninhalt der entstehenden Figur möglichst klein wird. Aus $99\cdot 99=9801$ folgt, daß der Flächeninhalt sich – verglichen mit dem des Quadrates – um 9801 cm² verkleinert.

W 5 ■ 719 Wir bezeichnen das Lebensalter (in ganzen Zahlen) von Doris mit D, von Carmen mit C, von Barbara mit B, von Evelin mit E und von Angelika mit A. Dann gilt wegen b) und c) $D<B<C=14$, also wegen d) $D<B<C=14<E$, also wegen a) und e) $A<D<B<C=14<E=A+5$.

Daraus folgt $B\leqq 13$, $D\leqq 12$, $A\leqq 11$ und wegen $A>10$ hieraus $A=11$, $D=12$, $B=13$, $C=14$, $E=A+5=16$.
Angelika ist daher 11 Jahre, Doris 12 Jahre, Barbara 13 Jahre, Carmen 14 Jahre und Evelin 16 Jahre alt.

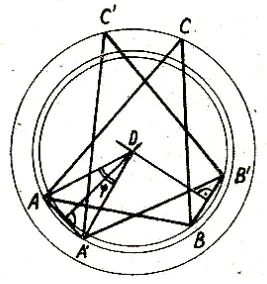
* 5 * 720 Wegen $6=1\cdot 6=2\cdot 3=3\cdot 2=6\cdot 1$ könnten die Faktoren
a) $m+1=1$ und $2n-1=6$,
b) $m+1=2$ und $2n-1=3$,
c) $m+1=3$ und $2n-1=2$,
d) $m+1=6$ und $2n-1=1$ sein.
Aus a) folgt $m=0$; es gibt keine natürliche Zahl n, die die Gleichung $2n-1=6$ erfüllt.
Aus b) folgt $m=1$ und $n=2$ und damit $(1+1)\cdot(2\cdot 2-1)=2\cdot 3=6$.
Aus c) folgt $m=2$; aber es gibt keine natürliche Zahl n, die die Gleichung $2n-1=2$ erfüllt.
Aus d) folgt $m=5$ und $n=1$ und damit $(5+1)\cdot(2\cdot 1-1)=6\cdot 1=6$.
Die Gleichung besitzt also genau zwei Lösungen; es sind dies die Zahlenpaare (1, 2) und (5, 1).

* 5 * 721 $h=22222+32354=54576$; $g=h:13644=54576:13644=4$; $f=g\cdot 4=4\cdot 4=16$; $e=f:8=16:8=2$; $d=e\cdot 5=2\cdot 5=10$; $c=d-1=10-1=9$; $b=c-8=9-8=1$; $a=b+2=1+2=3$; $x=a-3=3-3=0$.

* 5 * 722 Es sei x die Länge, um die jede Seite des Rechtecks zu verlängern ist; dann gilt $(6+x)\cdot(9+x)=304$.
Aus $304=2\cdot 152=4\cdot 76=8\cdot 38=16\cdot 19$ folgt, daß $x=10$ ist. Es gilt nämlich $(6+10)\cdot(9+10)=16\cdot 19=304$. Jede Seite des Rechtecks muß um 10 cm verlängert werden.

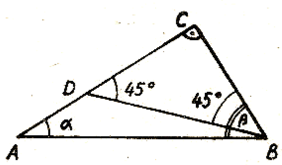
6▲723 Alle Zahlen, deren Quersumme durch 3 teilbar ist, sind durch 3 teilbar. Die beiden jeweils dreimal vorkommenden Grundziffern seien x und y. Da die Teilbarkeit durch 3 nur von der Quersumme der Zahlen abhängt, ist es gleichgültig, an welcher Stelle die Grundziffern stehen. Die Quersumme dieser Zahlen ist in jedem Falle gleich $3x+3y=3(x+y)$, also durch 3 teilbar. Damit sind die Zahlen selbst auch durch 3 teilbar.

6▲724 Bei der Drehung einer Figur liegen zwei einander entsprechende Punkte (Original- und Bildpunkt) auf einem Kreis um das Drehzentrum D. Die Kreise aller Paare einander entsprechender Punkte sind konzentrische Kreise, das heißt, sie haben den gleichen Mittelpunkt D. Die Mittelsenkrechte einer Kreissehne geht durch den Mittelpunkt des zugehörigen Kreises. Man erhält demnach das Drehzentrum D, indem man zu den Sehnen $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ die Mittelsenkrechten konstruiert, deren Schnittpunkt mit D zusammenfällt. Der Winkel $\sphericalangle ADA'=\varphi$ ist dann der Drehwinkel.
Bemerkung: Falls im speziellen Fall die Mittelsenkrechten zu den Sehnen $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ zusammenfallen, so kann man mit Hilfe dieser Mittelsenkrechten das Drehzentrum D nicht bestimmen. Man wählt dann als zweite Sehne die Sehne $\overline{CC'}$ und erhält den Punkt D als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten zu den Sehnen $\overline{AA'}$ und $\overline{CC'}$.

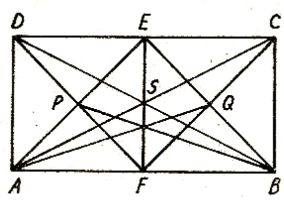


W 6 ■ 725 Die kleinste der zu ermittelnden Zahlen ist von Null verschieden (weil 0 durch 2 teilbar ist) und gleich dem k.g.V. der Zahlen 3, 5, 7, 11; sie lautet $3\cdot 5\cdot 7\cdot 11=1155$. Die der Größe nach geordneten nun folgenden Zahlen sind gleich den Produkten $1155\cdot k$ mit $k=3, 5, 7$; sie lauten $1155\cdot 3=3465$, $1155\cdot 5=5775$ und $1155\cdot 7=8085$. Die Zahl $1155\cdot 9=10395$ ist bereits größer als 10000, erfüllt also nicht mehr die gestellten Bedingungen.

W 6 ■ 726 In dem Dreieck sei Winkel $\sphericalangle ACB=90°$, $\sphericalangle CAB=\alpha$, $\sphericalangle ABC=\beta$, und es gelte $\beta>\alpha$, wodurch die Allgemeingültigkeit des Beweises nicht eingeschränkt wird. Aus $\alpha+\beta=90°$ und $\beta>\alpha$ folgt $\beta>45°$. Aus diesem Grunde schneidet der freie Schenkel des in B an $\overline{BC}$ angetragenen Winkels von 45° die Strecke $\overline{AC}$ in einem inneren Punkt. (Siehe Abbildung) Es gilt ferner Winkel $\sphericalangle BDC=45°$ und damit $\overline{CB}=\overline{CD}$. Aus $\overline{CD}<\overline{CA}$ und $\overline{CB}=\overline{CD}$ folgt $\overline{CB}<\overline{CA}$.



* 6 * 727 Wir zeichnen zunächst die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ des Rechtecks $ABCD$; ihr Schnittpunkt sei S. Die Verbindungsgerade der Punkte E und S ist Symmetrieachse des Rechtecks und schneidet AB in F; die Strecke $\overline{EF}$ ist somit wegen $\overline{AF}=\overline{BF}$ Seitenhalbierende



des Dreiecks ABE. Nun zeichnen wir die Diagonale $\overline{DF}$ des Rechtecks $AFED$; ihr Schnittpunkt mit AE sei P. Da P die Strecke $\overline{AE}$ halbiert, ist die Strecke $\overline{BP}$ ebenfalls Seitenhalbierende des Dreiecks ABE. Der Schnittpunkt der noch zu zeichnenden Diagonale $\overline{CF}$ des Rechtecks $FBCE$ mit BE sei Q. Die Strecke $\overline{AQ}$ ist dann die dritte Seitenhalbierende des Dreiecks ABE.

* 6 * 728

1. Summand: n
2. Summand: $2n+7$
3. Summand: $2(2n+7)+7=4n+21$
4. Summand: $2(4n+21)+7=8n+49$
5. Summand: $2(8n+49)+7=16n+105$
6. Summand: $2(16n+105)+7=32n+217$

Summe: $63n+399=21(3n+19)$

Die Summe ist also durch 21 teilbar.

* 6 * 729 Es sei n die Anzahl aller teilnehmenden Sportler; dann gilt $180<n<220$. Aus Polen beteiligten sich $\left(\frac{n}{2}-8\right)$ Sportler, aus der UdSSR $\left(\frac{n}{4}+3\right)$ Sportler, aus der DDR $\left(\frac{n}{8}+5\right)$ Sportler. Aus diesen drei Ländern beteiligten sich somit $\frac{7}{8}n$ Sportler. Aus der ČSSR und Ungarn beteiligten sich insgesamt $\frac{1}{8}n$ Sportler.

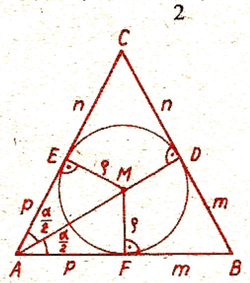
Es sei x die Anzahl der ungarischen Sportler; dann beteiligten sich $3x$ Sportler aus der ČSSR. Aus diesen beiden Ländern beteiligten sich demnach $4x$ Sportler.

Daher gilt $4x=\frac{1}{8}n$; $x=\frac{n}{32}$ ist also ganzzahlig. Hieraus folgt wegen $\frac{180}{32}<\frac{n}{32}<\frac{220}{32}$ und damit $5\frac{20}{32}<x<6\frac{28}{32}$ schließlich $x=6$ und $n=32\cdot 6=192$.

Wir erhalten also die folgende Tabelle:

Land	Anzahl der Sportler
Polen	88
UdSSR	51
DDR	29
ČSSR	18
Ungarn	6
insgesamt	192

7 ▲ 730 Es seien D, E und F die Berührungspunkte des Inkreises des Dreiecks ABC mit dem Mittelpunkt M und dem Radius ϱ (siehe Abbildung). Die Berührungsradien $\overline{ME}$ und $\overline{MF}$ stehen senkrecht auf den Geraden AC und AB, und die Gerade AM ist die Halbierungslinie des Winkels $\sphericalangle BAC$. Somit gilt $\sphericalangle CAM=\sphericalangle BAM=\frac{\alpha}{2}$.



Die Dreiecke AFM und AME sind deshalb kongruent, und es gilt $\overline{AE}=\overline{AF}$. In gleicher Weise läßt sich nachweisen, daß auch $\overline{CD}=\overline{CE}$ und $\overline{BD}=\overline{BF}$ gilt. Deshalb gilt auch $a=m+n$, $b=n+p$, $c=m+p$ (siehe Abbildung). Wir erhalten somit $b+c-a=(n+p)+(m+p)-(m+n)=2p$.

Da für alle möglichen Dreiecke der Winkel $\sphericalangle BAC=\alpha$ sowie der Inkreisradius ϱ konstant sind, ist auch $\overline{AF}=p$ und somit ebenfalls $2p$ konstant.

7 ▲ 731 In beiden Klassen werden an diesen beiden Tagen genau acht verschiedene Fächer von genau vier Lehrern unterrichtet. Unter Beachtung von a) und b) und auf Grund des Stundenplanausschnittes sind folgende Fachkombinationen für diese Lehrer nicht möglich:

Russisch/Sport, Russisch/Mathematik, Russisch/Deutsch.

Nach f) sind auch die Kombinationen Russisch/Geographie und Russisch/Geschichte nicht möglich.

Es verbleiben die Kombinationen Russisch/Biologie und Russisch/Zeichnen. Da nach a) und b) auch die Kombination Deutsch/Mathematik nicht möglich ist, muß nach c) Frl. Fischer Russisch unterrichten. Ferner entfällt wegen c) auch die Kombination Russisch/Biologie, das heißt, Frl. Fischer unterrichtet die Fächer Russisch und Zeichnen.

Aus d) folgt, daß Herr Reichelt folgende Fächer nicht unterrichtet: Russisch, Deutsch, Mathematik, Sport, Biologie. Da Frl. Fischer Zeichnen unterrichtet, entfällt dieses Fach ebenfalls für Herrn Reichelt. Deshalb unterrichtet Herr Reichelt die Fächer Geographie und Geschichte.

Auf Grund des Stundenplanausschnittes sind auch die Kombinationen Deutsch/Geographie, Deutsch/Biologie nicht möglich.

Aus e) und den bisherigen Überlegungen folgt, daß Frau Helmert die Fächer Mathematik und Biologie unterrichtet. Für Herrn Walter verbleiben somit die Fächer Deutsch und Sport.

W 7 ■ 732 Es sei $\overline{abcd}$ die vierstellige Autonummer in dekadischer Schreibweise.

Dann gilt $ab=9cd$,

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{a+b}{c+d}.$$

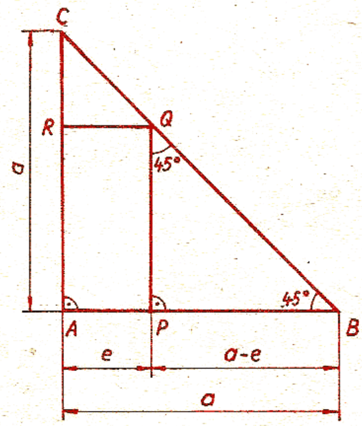
Aus der zweiten Gleichung folgt $b=c$.

Wäre nämlich $c<b$, so wäre $a+c<a+b$ und $b+d>c+d$, also $\frac{a+c}{b+d}<\frac{a+b}{c+d}$, was der obigen Gleichung widerspricht. Wäre $c>b$, so wäre $\frac{a+c}{b+d}>\frac{a+b}{c+d}$, was wieder der obigen Gleichung widerspricht. Daher gilt $b=c$.

Für die erste Gleichung gilt deshalb $ab=9bd$ und damit $a=9d$. Da keine Ziffer gleich Null ist, muß $d=1$ und $a=9$ sein. Nur $b=c=3$ erfüllt die Bedingungen.

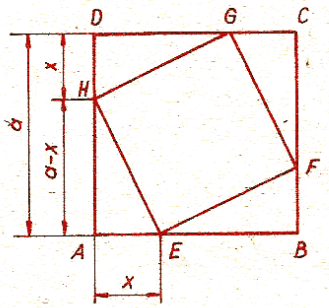
Die Autonummer lautet somit 9331.

W 7 ■ 733 Wegen $\overline{AP}=\overline{RQ}=e$ und $\overline{PB}=\overline{PQ}=a-e$ gilt für den Umfang des dem Dreieck ABC in der vorgeschriebenen Weise eingezeichneten Rechtecks $APQR$ unabhängig von der Lage des Punktes Q stets $u=2\cdot\overline{AP}+2\cdot\overline{PQ}=2(\overline{AP}+\overline{PQ})=2(e+a-e)=2a$.



* 7 * 734 Es ist leicht nachzuweisen, daß $\overline{AE}=\overline{DH}=x$ gilt. Auf diesen Beweis sei hier verzichtet. Dann gilt $\overline{AH}=a-x$, und zwischen den Flächeninhalten beider Quadrate besteht folgende Beziehung:

$$A_{EFGH}=A_{ABCD}-4\cdot\frac{x(a-x)}{2}=a^2-2x(a-x).$$



Nun gilt $A_{EFGH}=a^2-2x(a-x)=$

$$=2x^2-2ax+a^2=2\left(x^2-ax+\frac{a^2}{4}\right)+\frac{a^2}{2}=$$

$$=2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{2}\geq\frac{a^2}{2}.$$

Für $x=\frac{a}{2}$ wird also der Flächeninhalt des Quadrates $EFGH$ am kleinsten. Daher fallen die Eckpunkte dieses Quadrates mit den Seitenmitten des Quadrates $ABCD$ zusammen, w. z. b. w.

* 7 * 735 Es seien x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 die den fünf Buchstaben des Namens in dieser Reihenfolge zugeordneten Zahlen. Dann gilt

$x_1+x_2=26$, also $x_2=26-x_1$;
$x_1+x_3=17$, also $x_3=17-x_1$;
$x_1+x_4=10$, also $x_4=10-x_1$;
$x_1+x_5=23$, also $x_5=23-x_1$;
$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=61$.

Durch Einsetzen gewinnen wir die Gleichung $x_1+26-x_1+17-x_1+10-x_1+23-x_1=61$, also $3x_1=15$ und damit $x_1=5$.

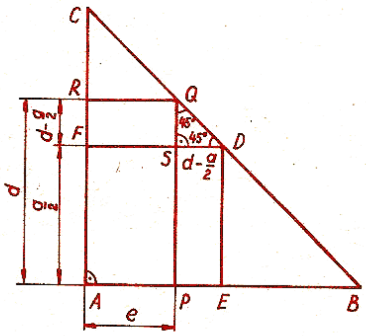
Daraus folgt: $x_2=21$, $x_3=12$, $x_4=5$, $x_5=18$.

Der Zahl $x_1=5$ entspricht der Buchstabe E, der Zahl $x_2=21$ entspricht der Buchstabe U, der Zahl $x_3=12$ entspricht der Buchstabe L, der Zahl $x_4=5$ entspricht der Buchstabe E, der Zahl $x_5=18$ entspricht der Buchstabe R. Der bedeutende Mathematiker heißt Euler. *Leonhard Euler* (1707 bis 1783), geboren in Basel, bedeutender Mathematiker, Physiker und Astronom. Euler wirkte von 1727 bis 1741 in Petersburg, dem heutigen Leningrad, von 1741 bis 1766 in Berlin und von 1766 bis zu seinem Tode wieder in Petersburg. Er hat bedeutende Arbeiten zur Algebra, Differential- und Integralrechnung sowie zur Variationsrechnung verfaßt, mehr als 950 Abhandlungen wurden von ihm veröffentlicht. Unter seinem Einfluß entstand in Rußland eine mathematische Schule, deren Vertreter große Leistungen auf dem Gebiete der Mathematik erzielt haben.

* 7 * 736 Die dem Dreieck ABC in der vorgeschriebenen Weise eingezeichneten Figuren seien ein Rechteck $APQR$ und ein Quadrat $AEDF$. Aus Gründen der Symmetrie ist dann jede Quadratseite gleich $\frac{a}{2}$. Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:

1. Fall: Es sei $\overline{AP}=e$, $\overline{AR}=d$ und $\overline{AP}<\overline{AE}$, also $e<\frac{a}{2}$. Für den Flächeninhalt des Rechtecks gilt dann

$$A_1=A_{APSF}+A_{FSQR}=\frac{ae}{2}+e\left(d-\frac{a}{2}\right);$$



für den Flächeninhalt des Quadrates gilt

$$A_2=A_{APSF}+A_{PEDS}=\frac{ae}{2}+\frac{a}{2}\left(d-\frac{a}{2}\right), \text{ weil}$$

$\overline{SQ}=\overline{SD}=d-\frac{a}{2}$ gilt.

Da nach Voraussetzung $e<\frac{a}{2}$ ist, muß $A_1<A_2$ sein.

2. Fall: Es sei $\overline{AP}>\overline{AE}$, also $e>\frac{a}{2}$.

Durch Spiegelung des Rechtecks $APQR$ an der Geraden AD läßt sich dieser Fall auf den ersten zurückführen.

8 ▲ 737 Ist $[z]=3$, so gilt $3\leq z<4$.
In dem vorliegenden Fall gilt also

$$2x-5\geqq 3 \qquad (1)$$

und

$$2x-5<4. \qquad (2)$$

Die Ungleichung (1) gilt genau dann, wenn $2x\geqq 8$, d. h., $x\geqq 4$. Die Ungleichung (2) gilt genau dann, wenn $2x<9$, d. h. $x<4{,}5$. Die Ungleichungen (1) und (2) und damit auch die gegebene Gleichung sind also für alle rationalen Zahlen x erfüllt, für die $4\leqq x<4{,}5$ gilt.

W 8 ■ 738 Es seien a und b die gesuchten zweistelligen Zahlen, in deren Produkt $z=ab$ nur die Grundziffern 5 vorkommen. Dann gilt $10\leqq a<100$, $10\leqq b<100$ und $100\leqq z<10\,000$.

z kann also nur gleich einer der Zahlen 555 oder 5555 sein.

Wäre nun $z=5555=5\cdot 11\cdot 101$, wobei die Faktoren 5, 11 und 101 Primzahlen sind, so wäre in dem Produkt $z=ab$ einer der Faktoren eine dreistellige Zahl, was der Voraussetzung widerspricht, wonach a und b zweistellige Zahlen sind. Daher gilt $z=555=3\cdot 5\cdot 37$, wobei die Faktoren 3, 5 und 37 Primzahlen sind. Die Zahl $z=555$ läßt sich also nur in der folgenden Weise als Produkt zweier zweistelliger Zahlen darstellen:

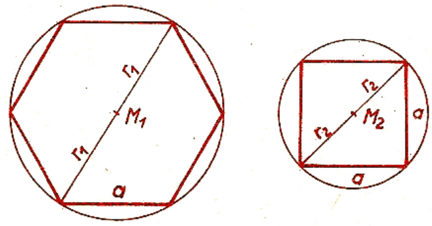
$$z=15\cdot 37.$$

Daher sind 15 und 37 die gesuchten zweistelligen Zahlen.

W 8 ■ 739 Für den Radius des dem regelmäßigen Sechseck umbeschriebenen Kreises gilt $r_1=a$. Für den Radius r_2 des dem Quadrat mit der Seitenlänge a umbeschriebenen Kreises gilt nach dem Satz des Pythagoras (vgl. die Abb.)

$$(2r_2)^2=a^2+a^2, \text{ also } 4r_2^2=2a^2,$$

$$\text{d. h., } r_2^2=\frac{a^2}{2}.$$



Daher verhalten sich die Flächeninhalte A_1 und A_2 dieser beiden Kreise wie

$$A_1:A_2=\pi r_1^2:\pi r_2^2=r_1^2:r_2^2=a^2:\frac{a^2}{2}=2:1.$$

* 8 * 740 Es seien m und n zwei natürliche Zahlen, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Dann gilt

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n} \text{ mit } m>2,\ n>2, \qquad (1)$$

also

$$mn=2n+2m,$$
$$mn-2m-2n+4=4,$$
$$m(n-2)-2(n-2)=4,$$
$$(m-2)(n-2)=4. \qquad (2)$$

Da die Zahl 4 sich nur wie folgt in Faktoren zerlegen läßt

$4=1\cdot 4$, $4=2\cdot 2$, $4=4\cdot 1$, sind nur die folgenden drei Fälle möglich:

1. $m-2=1$, $n-2=4$, also $m=3$, $n=6$;
2. $m-2=2$, $n-2=2$, also $m=4$, $n=4$;
3. $m-2=4$, $n-2=1$, also $m=6$, $n=3$.

Für diese Zahlen m, n ist aber auch die Gleichung (1) erfüllt. Daher ist die gegebene Gleichung genau für die folgenden geordneten Paare $(m; n)$ natürlicher Zahlen mit $m>2$, $n>2$ erfüllt:

(3; 6), (4; 4), (6; 3).

Bemerkung: Diese Aufgabe führt zu einem interessanten geometrischen Problem: Es ist zu untersuchen, in welcher Weise man die Ebene durch kongruente regelmäßige Vielecke vollständig überdecken kann, wobei jeweils zwei Vielecke eine Seite gemeinsam haben und an jeder Ecke eines n-Ecks jeweils m n-Ecke zusammenstoßen.

Angenommen, diese Überdeckung sei möglich. Dann gilt, da der Innenwinkel eines jeden regelmäßigen n-Ecks

$$\alpha=2\left(90°-\frac{360°}{2n}\right)=180°\left(1-\frac{2}{n}\right)$$

beträgt und da an jeder Ecke m n-Ecke zusammenstoßen,

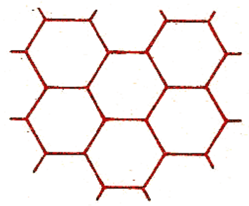
$$m\cdot 180°\left(1-\frac{2}{n}\right)=360°, \text{ also}$$

$$m\left(1-\frac{2}{n}\right)=2,\quad 1-\frac{2}{n}=\frac{2}{m},$$

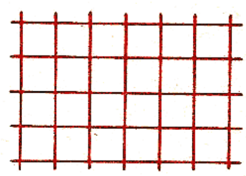
$$\frac{2}{m}+\frac{2}{m}=1,\quad \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}.$$

Wir erhalten also die Gleichung (1), die für $m>2$, $n>2$ nur die folgenden Lösungen hat:

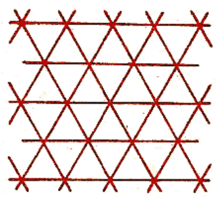
1. $m=3$, $n=6$; d. h., die Ebene wird durch regelmäßige Sechsecke überdeckt, wobei jeweils 3 Sechsecke an einer Seite zusammenstoßen (vgl. Abb. 1).



2. $m=4$, $n=4$; d. h., die Ebene wird durch regelmäßige Vierecke, also Quadrate, überdeckt, wobei jeweils 4 Quadrate an einer Ecke zusammenstoßen (Abb. 2).



3. $m=6$, $n=3$; d. h., die Ebene wird durch regelmäßige Dreiecke, also gleichseitige Dreiecke, überdeckt, wobei jeweils 6 gleichseitige Dreiecke an einer Ecke zusammenstoßen (Abb. 3).



Weitere Überdeckungen sind unter den gegebenen Bedingungen nicht möglich, weil die Gleichung (1) nur diese drei Lösungen hat.

* 8 * 741 Da der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ ab cm² und sein Umfang $2(a+b)$ cm beträgt, erhalten wir die Gleichung

$$2(a+b)=ab.$$

Wegen $a \neq 0$, $b \neq 0$ können wir auf beiden Seiten dieser Gleichung durch $2ab$ dividieren un erhalten

$$\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{2}, \text{ also } \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}.$$

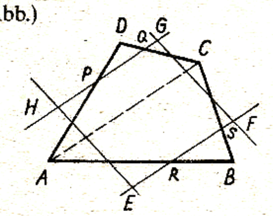
Diese Gleichung hat aber, wie in Aufg. * 8 * 740 nachgewiesen wurde, nur die folgenden Lösungen in natürlichen Zahlen a und b:
1. $a=3$, $b=6$;
2. $a=4$, $b=4$;
3. $a=6$, $b=3$.

Denn für $a=1$ und $a=2$ bzw. $b=1$ und $b=2$ wird

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>\frac{1}{2},$$

was der obigen Gleichung widerspricht.
Daher gibt es nur die Rechtecke $ABCD$ mit den folgenden Seitenlängen, die den Bedingungen der Aufgabe entsprechen:
1. $\overline{AB}=3$ cm, $\overline{BC}=6$ cm,
Flächeninhalt 18 cm^2, Umfang 18 cm.
2. $\overline{AB}=4$ cm, $\overline{BC}=4$ cm,
Flächeninhalt 16 cm^2, Umfang 16 cm.
3. $\overline{AB}=6$ cm, $\overline{BC}=3$ cm,
Flächeninhalt 18 cm^2, Umfang 18 cm.

* 8 * 742 Nach dem Strahlensatz gilt (vgl. die Abb.)

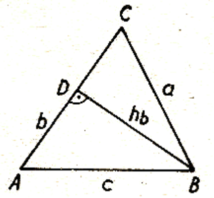


$\overline{DP}:\overline{DA}=\overline{DQ}:\overline{DC}=1:3$ und folglich $PQ \parallel AC$ bzw. $HG \parallel AC$; $\overline{BR}:\overline{BA}=\overline{BS}:\overline{BC}=1:3$ und folglich $RS \parallel AC$ bzw. $EF \parallel AC$.
Daraus folgt $HG \parallel EF$. Aus analogen Betrachtungen folgt auch $GF \parallel HE$. Das Viereck $EFGH$ ist somit ein Parallelogramm.

* 8 * 743 Angenommen, die Zahl $13a+1$ sei gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl; dann gilt
$13a+1=x^2$, wobei x eine natürliche Zahl ist. (1)
Die Gleichung (1) ist genau dann erfüllt, wenn
$13a=x^2-1$, also $a=\frac{(x+1)(x-1)}{13}$. (2)
Weil a eine natürliche Zahl und 13 eine Primzahl ist, ist also entweder $x+1$ oder $x-1$ durch 13 teilbar.
1 Fall: $x+1$ sei durch 13 teilbar. Dann gilt $x+1=13k$, also $x=13k-1$, wobei k eine natürliche Zahl ist. In diesem Fall folgt also aus (2)
$a=k(13k-2)$, und wir erhalten
$13a+1=13k(13k-2)+1=(13k-1)^2$,
d. h., die Zahl $13a+1$ ist gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl.
2. Fall: $x-1$ sei durch 13 teilbar. Dann gilt $x-1=13k$, also $x=13k+1$, wobei k eine natürliche Zahl ist. In diesem Fall folgt also aus (2)
$a=k(13k+2)$, und wir erhalten
$13a+1=13k(13k+2)+1=(13k+1)^2$,
d. h., die Zahl $13a+1$ ist gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl.
Daher sind alle natürlichen Zahlen $13a+1$ mit $a=k(13k-2)$ und $a=k(13k+2)$ ($k=0$, 1, 2, 3, ...) und nur diese Zahlen gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl.
Wir erhalten also die Zahlen $a=0$, $a=11$, $a=15$, $a=48$ $a=56$ usw.

9 ▲ 744 1. Wir nehmen zunächst an, daß $a \leq b$ gilt. Dann ist der Fußpunkt der von B ausgehenden Höhe $\overline{BD}=h_b$ ein innerer Punkt der Seite $\overline{AC}$ (vgl. die Abb.). Nach dem Satz des Pythagoras, angewandt auf das rechtwinklige Dreieck ABD, gilt

$$c^2=h_b^2+\overline{AD}^2.$$



Wegen $h_b<a$, also $h_b^2<a^2$, und $\overline{AD}<b$, also $\overline{AD}^2<b^2$, folgt hieraus

$$c^2=h_b^2+\overline{AD}^2<a^2+b^2.$$

2. Gilt nun $a>b$, so benutzen wir die von A ausgehende Höhe $\overline{AE}=h_a$ und erhalten analog wie oben

$$c^2=h_a^2+\overline{BE}^2<b^2+a^2.$$

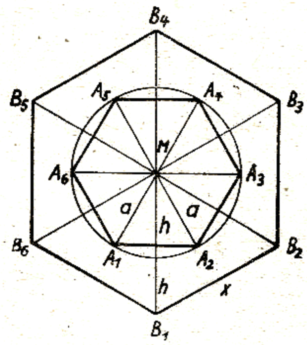
In jedem Falle gilt also $c^2<a^2+b^2$, womit die Behauptung bewiesen ist.
Bemerkung: Die obige Behauptung läßt sich auch mit Hilfe des Kosinussatzes der ebenen Trigonometrie beweisen. Es gilt nämlich für alle Dreiecke ABC

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma.$$

Ist nun γ ein spitzer Winkel, so gilt $\cos\gamma>0$, also $c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma<a^2+b^2$.

W 9 ■ 745 Da in (2) kein Platz richtig angegeben war, belegte A nicht den 1. Platz. Da in (1) genau drei Plätze, jedoch niemals zwei aufeinanderfolgende, richtig angegeben sind, belegte B den 2. Platz, D den 4. Platz und F den 6. Platz.
Daher belegte E nicht den 2. Platz, F nicht den 3. Platz, A nicht den 4. Platz, D nicht den 5. Platz und B nicht den 6. Platz. Es sind also alle in (3) angegebenen Plätze mit Ausnahme der Angabe für C falsch; mithin belegte C den 1. Platz, da genau ein Platz richtig angegeben ist.
Da in (2) kein Platz richtig angegeben ist, belegte E nicht den 5. Platz, also verbleibt für E nur noch der 3. Platz. Für A ergibt sich daher der 5. Platz.
Wir erhalten daher die folgende richtige Reihenfolge der Plätze:
C, B, E, D, A, F.
Ferner stellen wir fest, daß bei dieser Verteilung in (1) genau drei Plätze richtig angegeben sind (jedoch niemals zwei aufeinanderfolgende), in (2) kein Platz richtig und in (3) genau ein Platz richtig. Bei der angegebenen Reihenfolge und nur bei dieser sind also alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

W 9 ■ 746 Das gegebene regelmäßige Sechseck setzt sich aus sechs kongruenten gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenlänge a und der Länge der Höhe $h=\frac{a}{2}\sqrt{3}$ zusammen (vgl. die Abb.); sein Flächeninhalt beträgt also $A_1=6\cdot\frac{a^2}{4}\sqrt{3}=\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$. (1)

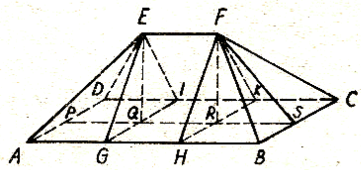


Es sei nun x die Seitenlänge des zu konstruierenden regelmäßigen Sechsecks $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$; dann ist der Flächeninhalt dieses Sechsecks gleich $A_2=\frac{3}{2}x^2\sqrt{3}$. (2)
Nach Voraussetzung ist der Flächeninhalt dieses Sechsecks dreimal so groß wie der Flächeninhalt des gegebenen Sechsecks; daher gilt
$A_2=3A_1$. (3)
Aus (1), (2) und (3) folgt daher

$$A_2=\frac{3}{2}x^2\sqrt{3}=\frac{9}{2}a^2\sqrt{3}. \text{ Also gilt}$$

$3x^2=9a^2$, $x^2=3a^2$, $x=a\sqrt{3}=2h$.
Die Seite des zu konstruierenden Sechsecks $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ ist also doppelt so lang wie die Höhe jedes der gleichseitigen Dreiecke, in die das gegebene Sechseck zerlegt worden ist.
Daraus ergibt sich die Konstruktion. Wir spiegeln den Mittelpunkt M des Umkreises des gegebenen regelmäßigen Sechsecks $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ an jeder Seite dieses Sechsecks. Dabei haben der Original- und der Bildpunkt jeweils den Abstand $x=2h$. Verbinden wir die Bildpunkte B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 miteinander, so erhalten wir das zu konstruierende Sechseck, dessen Seitenlänge $x=a\sqrt{3}$ ist.

* 9 * 747 1. Es seien $ABCD$ die rechteckige Grundfläche des Daches mit den Seitenlängen $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{EF}$ der Dachfirst, $\overline{QR}$ die Projektion des Dachfirstes auf die Grundfläche, $\overline{GH}$ bzw. $\overline{IK}$ die Projektion des Dachfirstes auf die Kanten $\overline{AB}$ bzw. $\overline{CD}$ sowie S die Projektion des Punktes F auf die Kante $\overline{BC}$ (vgl. die Abb.).



Da nach Voraussetzung die Seitenflächen des Daches gleichgroße Winkel mit der Grundfläche bilden, sind die rechtwinkligen

Dreiecke $\triangle RFH$ und $\triangle RFS$ kongruent; denn sie stimmen in den Winkeln $\sphericalangle FHR$ und $\sphericalangle RSF$ sowie in der Seite $\overline{FR}$ überein. Es gilt also $\overline{RS}=\overline{RH}=\frac{b}{2}=3{,}50$ m. Daraus folgt $\overline{EF}=\overline{QR}=a-2\cdot\frac{b}{2}=a-b=3$ m.

Die Länge des Dachfirstes beträgt also 3 m.

2. Ferner erhalten wir in dem rechtwinkligen Dreieck $\triangle RFH$

$$\overline{FH}^2=h^2+\frac{b^2}{4}$$

und in dem rechtwinkligen Dreieck $\triangle HBF$

$$\overline{FB}^2=\overline{FH}^2+\frac{b^2}{4}=h^2+\frac{b^2}{4}+\frac{b^2}{4}=$$
$$=h^2+\frac{b^2}{2}.$$

Die Seitenkanten $\overline{FB}$, $\overline{FC}$, $\overline{EA}$, $\overline{ED}$ haben also die Länge

$$\overline{FB}=\sqrt{h^2+\frac{b^2}{2}}=\sqrt{3{,}8^2+\frac{7^2}{2}}\text{ m}$$
$$=\sqrt{38{,}94}\text{ m}\approx 6{,}24\text{ m}.$$

3. Der von dem Dach und seiner Grundfläche begrenzte Körper besteht aus einem dreiseitigen Prisma mit der Grundfläche FHK und der Höhe $QR=a-b$ sowie aus zwei kongruenten Pyramiden mit den rechteckigen Grundflächen $HBCK$ bzw. $AGID$ sowie den Spitzen F bzw. E. Das gesuchte Volumen beträgt daher

$$V=\frac{bh}{2}(a-b)+2\cdot\frac{b^2}{2}\cdot\frac{h}{3}=bh\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}+\frac{b}{3}\right)$$
$$=\frac{bh}{6}(3a-b)\approx 102\text{ m}^3.$$

*9*748 Da p eine Primzahl ist mit $p>3$, ist nur einer der folgenden beiden Fälle möglich:

1. $p\equiv 1 \pmod 3$;
2. $p\equiv 2 \pmod 3$.

Fall 1: Da die Primzahlen p_1, p_2, p_3 ebenfalls größer als 3 sind, sind sie entweder kongruent 1 oder kongruent 2 modulo 3. Ihre Summe ist daher nur dann kongruent 1 modulo 3, wenn genau zwei von ihnen, die wir mit q und r bezeichnen wollen, kongruent 1 und eine von ihnen kongruent 2 modulo 3 ist.

Wir wählen die Primzahlen q und r aus und erhalten

$$p-q\equiv 0 \pmod 3,$$
$$p-r\equiv 0 \pmod 3,$$
$$q-r\equiv 0 \pmod 3.$$

Andererseits sind diese Differenzen aber auch durch 2 teilbar, weil alle Primzahlen, die größer als 2 sind, ungerade Zahlen sind. Daraus folgt, daß die Differenzen $p-q$, $p-r$, $q-r$ sämtlich durch 6 teilbar sind, womit unsere Behauptung im Fall 1 bewiesen ist.

Fall 2: In diesem Fall ist die Summe der drei Primzahlen p_1, p_2, p_3 nur dann kongruent 2 modulo 3, wenn genau zwei von ihnen, die wir wieder mit q und r bezeichnen, kongruent 2 modulo 3 sind. Wir erhalten $p-q\equiv p-r\equiv q-r\equiv 0 \pmod 6$,
da diese Differenzen durch 3 und durch 2 teilbar sind, womit unsere Behauptung auch im Fall 2 bewiesen ist.

Bemerkung: Wir wollen noch zeigen, daß es tatsächlich drei Primzahlen gibt, die größer als 3 sind und deren Summe wieder eine Primzahl ist. Die drei Primzahlen 5, 7, 11 haben nämlich diese Eigenschaft, weil $5+7+11=23$ eine Primzahl ist. Wir wählen die Primzahlen 5 und 11 aus und erhalten die Differenzen
$23-5=18$, $23-11=12$, $11-5=6$,
die sämtlich durch 6 teilbar sind.

*9*749 Wir formen zunächst den Term auf der rechten Seite der Gleichung

$$z=n^{12}-n^8-n^4+1$$

so um, daß wir ein Produkt erhalten, dessen Teilbarkeit durch 9 wir leicht untersuchen können. Wir erhalten

$$z=n^8(n^4-1)-(n^4-1)=(n^4-1)(n^8-1)$$
$$=(n^2+1)(n^2-1)(n^4+1)(n^4-1)$$
$$=(n^2+1)(n+1)(n-1)(n^4+1)(n^2+1)$$
$$(n+1)(n-1)$$
$$=(n^4+1)(n^2+1)^2(n+1)^2(n-1)^2.$$

Da n nach Voraussetzung nicht durch 3 teilbar ist, haben wir genau zwei Fälle zu untersuchen:

1. Fall: n läßt bei Division durch 3 den Rest 1, d. h., $n=3k+1$, wobei k eine natürliche Zahl ist. Dann ist $n-1=3k$ durch 3 teilbar, also ist $(n-1)^2$ und damit auch z durch 9 teilbar.

2. Fall: n läßt bei Division durch 3 den Rest 2, d. h., $n=3k+2$, wobei k eine natürliche Zahl ist. Dann ist $n+1=3k+3=3(k+1)$ durch 3 teilbar, also ist $(n+1)^2$ und damit auch z durch 9 teilbar.

In beiden Fällen ist also die Zahl z durch 9 teilbar, w. z. b. w.

Bemerkung: Mit Hilfe von Zahlenkongruenzen läßt sich dieser Beweis kürzer schreiben. Wir erhalten nämlich
im ersten Fall $n\equiv 1 \pmod 3$, also $n-1\equiv 0 \pmod 3$, daher gilt $(n-1)^2\equiv 0 \pmod 9$ und $z\equiv 0 \pmod 9$;
im zweiten Fall $n\equiv 2 \pmod 3$, also $n+1\equiv 0 \pmod 3$, daher gilt $(n+1)^2\equiv 0 \pmod 9$ und $z\equiv 0 \pmod 9$.

*9*750 Es seien n aufeinanderfolgende natürliche Zahlen

$$a, a+1, a+2, \ldots, a+n-1$$

gegeben, wobei $a\geqq 1$ und $n\geqq 3$ gilt. Dann beträgt ihre Summe

$$s=a+(a+1)+(a+2)+\ldots$$
$$+(a+n-3)+(a+n-2)+(a+n-1).$$

Wir schreiben nun die gleiche Summe noch einmal in umgekehrter Reihenfolge der Summanden auf und erhalten

$$s=(a+n-1)+(a+n-2)+(a+n-3)+\ldots$$
$$+(a+2)+(a+1)+a.$$

Durch Addition erhalten wir

$$2s=(2a+n-1)+(2a+n-1)+(2a+n-1)+$$
$$+\ldots+(2a+n-1)+(2a+n-1)+$$
$$+(2a+n-1)=n(2a+n-1),\text{ also}$$
$$s=\frac{n(2a+n-1)}{2}.$$

Ist nun n *ungerade*, so ist $2a+n-1$ gerade, also $\frac{2a+n-1}{2}$ eine natürliche Zahl. Ferner gilt $n\geqq 3$ und wegen $a\geqq 1$, $\frac{2a+n-1}{2}\geqq 2$, d. h. in der Faktorenzerlegung $s=n\cdot\frac{2a+n-1}{2}$ sind beide Faktoren größer als 1, also ist s keine Primzahl.

Ist aber n gerade, so ist $n\geqq 4$, also $\frac{n}{2}\geqq 2$ eine natürliche Zahl. Ferner gilt $2a+n-1\geqq 2+3=5$, d. h., in der Faktorenzerlegung $s=\frac{n}{2}\cdot(2a+n-1)$ sind beide Faktoren größer als 1, also ist s keine Primzahl.

Damit haben wir bewiesen, daß in keinem Falle die Summe s eine Primzahl ist.

10/12▲751 a) Ist r der äußere Radius und s die Wandstärke einer Hohlkugel, so ist ihr Volumen gleich

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3-\frac{4}{3}\pi(r-s)^3=\frac{4}{3}\pi\,[r^3-(r-s)^3].$$

Da der gegebene Kugelspeicher einen Radius $r=8$ m und eine Wandstärke $s=0{,}042$ m hat, erhalten wir $r-s=7{,}958$ m. Da ferner die Dichte des Stahls $7{,}86\text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}=7{,}86\text{ t}\cdot\text{m}^{-3}$ beträgt, ist die Masse des Kugelspeichers gleich

$$M=\frac{4}{3}\pi\,(8^3-7{,}958^3)\cdot 7{,}86\text{ t}$$
$$\approx\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 8{,}0\cdot 7{,}86\text{ t}\approx 263{,}4\text{ t},$$

wobei mit einer vierstelligen Logarithmentafel gerechnet wurde.

b) Auf Grund der angegebenen Näherungsformel erhalten wir für die Masse des Kugelspeichers den Wert
$M'=4\pi\cdot 8^2\cdot 0{,}042\cdot 7{,}86\text{ t}\approx 265{,}5\text{ t}$,
der sich nur wenig von dem unter a) berechneten Wert unterscheidet. Der absolute Fehler bei Anwendung dieser Näherungsformel beträgt $M'-M=2{,}1$ t und der relative Fehler

$$\frac{M'-M}{M}=\frac{2{,}1}{263{,}4}\approx 0{,}008.\text{ d. s. } 0{,}8\,\%.$$

Der relative Fehler ist also wegen der verhältnismäßig geringen Wandstärke recht klein, so daß man in der Praxis in solchen Fällen die angegebene Näherungsformel ohne Bedenken anwenden kann.

Lösungen zu alpha-heiter, Heft 6/71

Schwierige Lage!

Bitte ankreuzen!

Eine „Zwangslösung“ ergibt sich, wenn man die Diagonalen freiläßt!
Eine andere Lösung:

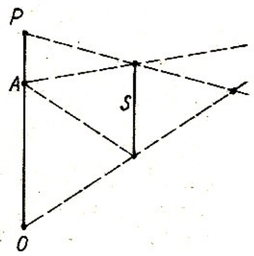
	×		×	
				×
×	×		×	×
×		×	×	
×				

Ein wichtiger Beruf

Herr Bunnat ist in der *Datenverarbeitung* tätig.

Spieglein, Spieglein an der Wand

Es genügt, wenn der Spiegel halb so groß ist wie die Person. Siehe Skizze. (PO – Person; A – Auge; S – Spiegel) Da die Dreieckseiten halbiert werden und der Spiegel parallel zur Person steht, ist der Spiegel halb so groß wie die Person.



Magisches Quadrat

$^{a}6$	$^{l}5$	$^{p}5$	$^{h}3$	$^{a}6$
$^{l}5$	5	5	5	5
$^{p}5$	5		$^{p}5$	5
$^{h}3$	5	$^{p}5$	5	3
$^{a}6$	5	5	3	6

Abschlußprüfung, Klasse 10

$$x=\frac{\lg 5}{\lg\frac{3}{2}} \qquad x\cdot\lg\frac{3}{2}=\lg 5$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x=5$$

$$x\approx 4,\ \text{da}\ \frac{81}{16}\approx 5$$

Silbenrätsel

1. Gamma 2. Euler 3. Ordnungslinie 4. Runge 5. Gegenkathete 6. Chintschin 7. Analysis 8. Numerus 9. Tschebyscheff 10. Operation 11. Regel
Georg Cantor Mengenlehre

Mathematische Begriffe

1. Folge 2. Seite 3. Sehne 4. Menge 5. Gleichung

Wir stellen vor:

Dr. Ludwig Boll

Am 10. Dezember 1971 begeht Dr. rer. nat. h. c. *Ludwig Boll* seinen 60. Geburtstag.

Vor allem den älteren *alpha*-Lesern ist der Cheflektor für Mathematik und Naturwissenschaften im VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, sicher bekannt. Hat er doch beispielsweise an der Entwicklung der „Mathematischen Schülerbücherei“ und überhaupt von Titeln populärwissenschaftlicher Verbreitung mathematischer Kenntnisse erheblichen Anteil.

Bevor sich *Ludwig Boll* diesen verantwortungsvollen Aufgaben widmen konnte, mußten viele harte Lebensprüfungen von ihm bestanden werden. Die Schule in Bingen und Mainz bis zum Abitur 1930 bereitete ihm ebensowenig Schwierigkeiten wie das Studium in Göttingen bei Courant, Landau und Hilbert. Doch bereits 1933 warfen ihn die eben an die Macht gelangten Nazis das erstemal ins Gefängnis, da er seit 1931 Mitglied roter Studentengruppen und seit 1932 Mitglied der KPD war.

Am 20. 4. 1933 wurde *Ludwig Boll* in das von Anna Seghers im Siebten Kreuz beschriebene Konzentrationslager Osthofen (bei ihr heißt es Westhofen) überführt, aber kurze Zeit danach wieder freigelassen. Es folgten Jahre der Emigration im Saargebiet und später in Holland.

Ab Mai 1942 trug er die Nummer 1492 als Gefangener im Polizeidurchgangslager Westerborg in Holland. An der ersten Deportation in ein Massenvernichtungslager am 15. 7. 1942 kam *Ludwig Boll* gerade noch vorbei, und im Oktober 1943 gelang ihm die Flucht nach Amsterdam. Dort lebte er in der Illegalität bis zur Kapitulation des faschistischen Deutschlands. Von seinen Eltern, welche inzwischen ebenfalls verhaftet worden waren, hörte er das einzige und letzte Mal 1942 aus Piaski bei Lublin in Polen. Nach 1945 widmete *Ludwig Boll* seine ganze Kraft dem demokratischen Neuaufbau, u. a. als kommunistischer Stadtverordneter der Stadt Bingen, ohne sein wissenschaftliches Lieblingsgebiet – die Mathematik – zu vernachlässigen. So studierte er an der Universität Mainz bei Köthe und Rohrbach und arbeitete als nebenamtlicher Lehrer am Gymnasium in Bingen. Seine politische Tätigkeit brachte ihn in den Jahren 1947 bis 1950 in immer engeren Kontakt mit politischen Freunden von früher, welche inzwischen in der DDR arbeiteten. Seine Aufgeschlossenheit, aber auch sein kritisches Urteilsvermögen, vor allem aber wohl seine große Einsatzbereitschaft und ständige Aktivität ließen ihn neue Freunde gewinnen. So verließ er 1951 Westdeutschland, um seine Studien an der Humboldt-Universität zu Berlin abzuschließen, wozu ihm die Stadt Berlin ein Goethe-Stipendium in Höhe von 300,– M monatlich gewährte.

Hier traf er auch seine ehemalige Studienkollegin Käthe aus Göttingen wieder, welche nach Jahren der Emigration in England seit 1946 in der DDR arbeitete. Kurzerhand wurde geheiratet. Und während seine Frau als Professor bei der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin das Institut für Strukturforschung (das ist ein Gebiet, welches sowohl für die Physik als auch für die Chemie und Biologie grundsätzliche Bedeutung hat) auf- und ausbaute und für ihre wissenschaftlichen Leistungen im Dienste der DDR neben anderen hohen staatlichen Auszeichnungen 1960 den Nationalpreis erhielt, widmete sich *Ludwig Boll* der systematischen Entwicklung von mathematischer Ausbildungsliteratur, deren Palette von Titeln der MSB bis zu Monographien und Forschungsberichten reicht. Dabei wurde von ihm die Übersetzung sowjetischer Werke ebenso gefördert wie die Veröffentlichung von Arbeiten junger DDR-Wissenschaftler. Und sicher wird mancher unter den *alpha*-Lesern sein, von dem später einmal ein Buch im Deutschen Verlag der Wissenschaften erscheint.

Für dieses jahrelange erfolgreiche Wirken erhielt *Ludwig Boll* neben der Verdienstmedaille der DDR (1959), dem Vaterländischen Verdienstorden in Silber (1969) und anderen Auszeichnungen am 21. Juli 1970 die Ehrendoktorwürde der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät des Wissenschaftlichen Rates der Humboldt-Universität zu Berlin.

Wir gratulieren Dr. *Ludwig Boll* herzlich zu seinem Geburtstag und hoffen, daß er unserer *alpha* noch viele Jahre bei bester Schaffenskraft so verbunden bleibt wie bisher.

W. Arnold

Preisträger

des alpha-Wettbewerbes

Vorbildliche Leistungen

Klassenstufe 5

Sven Thorsten Freitag, 95 Zwickau; **Hermann Tenor,** 45 Dessau; **Olaf Richter,** 83 Pirna; **Angelika Müller,** 22 Greifswald (aus Klasse 4); **Jörg Schubert,** 9331 Pfaffroda; **Uwe Schäfer,** 75 Cottbus; **Jens-Uwe Richter,** 9134 Kemtau; **Thomas Maiwald,** 8809 Olbersdorf; **Holger Jurack,** 8502 Burkau; **Eva Gerstner,** 806 Dresden; Berthold Wettengel, 992 Oelsnitz; Ulf Hutschenreiter, 8020 Dresden; Dietmar Gröger, 3257 Hecklingen; Ulli Riedel, 938 Flöha; Uwe Heiber, 63 Ilmenau; Uwe Szyszka, 2001 Brohm; Cornelia Linz, 75 Cottbus; Angela Bagola, 795 Spremberg; Dirk Sprengel, 15 Potsdam; Gerd Köhler, 926 Hainichen; Jörg Brüstel, 7401 Ziegelheim; Jan Müller, 1034 Berlin; Kerstin Utke, 23 Stralsund; Andreas Michalowski, 6088 Steinbach-Hallenberg; Frank Müller, 75 Cottbus; Ulrich Wolf, 30 Magdeburg; Bert Schultz, 112 Berlin; Andreas Möller, 6088 Steinbach-Hallenberg; Pia-Gabriela Preußer, 22 Greifswald; Andreas Fischer, 8122 Radebeul; Klaus Brinkmann, 26 Güstrow; Manuela Lehmert, 562 Worbis; Astrid Richter, 1291 Zerpenschleuse; Stefan Clausnitzer, 14 Oranienburg; Gerald Nahrstedt, 3241 Neuenhofe; Uta Stopp, 8019 Dresden; Hartmut Herrmann, 1282 Schönow; Blanka Rothämel, 6088 Steinbach-Hallenberg; Steffen Gattert, 7043 Leipzig; Astrid Pflaum, 1199 Berlin; Monika Juppe, 8301 Bahratal; Bianca Herrmann, 4608 Zahna; Kathrin Benedix, 73 Döbeln; Frank Weber, 425 Eisleben; Marion Haupt, 1055 Berlin; Martina Klug, 25 Rostock; Lars Luther, 26 Güstrow; Kersten Strert, 754 Calau; Petra Scharf, 73 Döbeln; Sylvia Steinert, 112 Berlin; Anita Heß, 8027 Dresden; Jens Schmidt, 6088 Steinbach-Hallenberg; Uwe Rinka, 128 Bernau; Lutz Thorwarth, 608 Schmalkalden.

Klassenstufe 6

Bernd Derlich, 205 Teterow (67 Karten); **Birgit Kühmstedt,** 5001 Erfurt; **Frank Richter,** 793 Herzberg; **Barbara Wolf,** 437 Köthen; **Carola Kühnl,** 205 Teterow; **Ulrike Bandemer,** 92 Freiberg; **Hellfried Schumacher,** 2111 Ahlbeck; **Norbert Heß,** 8019 Dresden; **Ole-André Strzalla,** 22 Greifswald; **Ursula Barth,** 5101 Kleinfahner; **Marlies Englisch,** 7022 Leipzig; **Elvira Naubauer,** 9413 Schönheide; **Gerlinde Koch,** 6089 Trusetal; Thomas Lübke, 112 Berlin; Lothar Eimecke, 7901 Fermerswalde; Beate Brandtner, 7295 Schildau; Peter Piehler, 75 Cottbus; Rainer Lang, 9402 Bernsbach; Heike Anders 1636 Dahlewitz; Michael Huhn, 205 Teterow; Birgit Siewert, 14 Oranienburg; Klaus Dieter Eickhoff, 112 Berlin; Caroline Oelsnitz, 205 Teterow; Andreas Börner, 7241 Schkortitz; Gabriele Boitz, 75 Cottbus; Torsten Waldeck, 90 Karl-Marx-Stadt; Holger Kuchling, 110 Berlin; Anke Jahn, 728 Eilenburg; Ria Kirschke, 409 Halle-Neustadt; Bärbel Meißner, 5401 Clingen; Heidrun Köpke, 205 Teterow; Birgit Krötenheerdt, 402 Halle; Elke Genath, 6088 Steinbach-Hallenberg; Uwe Briese, 2002 Burg Stargard; Andreas Näther, 925 Mittweida; Falk Bahner, 6088 Steinbach-Hallenberg; Angelika Spychalski, 2051 Pampow; Heiko Schnurbusch, 90 Karl-Marx-Stadt; Andreas Hochhaus, 57 Mühlhausen; Mathias Hegner, 1136 Berlin; Stefan Hauber, 9402 Bernsbach; Ingrid Juppe, 8301 Bahratal; Angela Richter, 2723 Warin; Heidrun Scheinhardt, 4203 Bad Dürrenberg; Sigrun Geyer, Dar-es-Salaam (Tanzania); Ute Minow, 2723 Warin; Achim Bobeth, 806 Dresden; Andreas Lochner, 825 Meißen; Matthies Gerth, 59 Eisenach; Thomas Hentschel, 88 Zittau; Hannelore Schiefer, 90 Karl-Marx-Stadt; Barbara Günther, 728 Eilenburg; Michael Zeidler, 938 Flöha; Traudel Dunkelmann, 2723 Warin; Christine Mücke, 5401 Westgreußen; H.-D. Dunker, 7114 Zwenkau.

Klassenstufe 7

Uwe Risch, 327 Burg (105 Lösungen); **Uwe Löbus,** 801 Dresden; **Peter-Michael Anders,** 128 Bernau; **Wolfgang Huschmann,** 9156 Oelsnitz; **Jürgen Sommerschuh,** 85 Bischofswerda; **Jens Haupt,** 90 Karl-Marx-Stadt; **Martina Römer,** 128 Bernau, **Arndt Petzold,** 9034 Karl-Marx-Stadt; **Volkmar Vogel,** 8261 Ziegenhain; **Elke Seidel,** 806 Dresden; Jürgen Reimann, 104 Berlin; Gerald Gerlach, 801 Dresden; Karin Schubert, 9331 Pfaffroda; Heinz-Ulrich Petsch, 45 Dessau; Wolfram Werner, 8040 Dresden; Wilfried Carl, 402 Halle; Peter Heumann, 90 Karl-Marx-Stadt; Frank Burghardt, 12 Frankfurt/O.; Sabine Mamerow, 202 Altentreptow; Matthias Neumann, 1136 Berlin; Mariana Klöpper, 7122 Borsdorf; Gert Trinks, 801 Dresden; Ralf Weber, 85 Bischofswerda; Gudrun Müller, 9402 Bernsbach; Jörg Päßler, 934 Marienberg; Christine Wodtke, 9402 Bernsbach; Elke Hübner, 9402 Bernsbach; Petra Dietzel, 4271 Adendorf; Werder Wehr, 5603 Dingelstädt; Astrid Kamel, 353 Havelberg; Norbert Siedow, 195 Neuruppin; Gudrun Rosenbaum, 9402 Bernsbach; Birgit Schönherr, 1162 Berlin;

Klassenstufe 8

Horst Kohlschmidt, 801 Dresden; **Hans-Ulrich Frömmer,** 208 Neustrelitz; **Siegfried Weiß,** 8713 Neusalza-Spremberg; **Roswitha Schlotte,** 90 Karl-Marx-Stadt; **Harry Reimann,** 104 Berlin; **Jörg Hutschenreiter,** 8020 Dresden; **Regina Rau,** 9412 Schneeberg; **Norman Bitterlich,** 9011 Karl-Marx-Stadt; **Bernd Peters,** 2402 Wismar; **Harald Lehmann,** 7961 Görlsdorf; **Kerstin Müller,** 7253 Brandis; Eckhard Wildgrube, 4601 Berkau; Horst Theel, 1034 Berlin; Gerd Falk, 1532 Kleinmachnow; Christian Endter, 6088 Steinbach-Hallenberg; Rainer Arnold, 934 Hinterer Grund; Frank Rönick, 582 Bad Langensalza; Frank-G. Krause, 784 Senftenberg; Adriane Ulrich, 3223 Seehausen; Norbert Strecker, 7812 Lauchhammer; Bodo Geyer, 9505 Cainsdorf; Norbert Kunath, 825 Meißen; Mathias Thiele, 9303 Bärenstein; Dagmar Reißmann, 8021 Dresden; Barbara Kilias, 90 Karl-Marx-Stadt; Horst Werner, 111 Berlin; Michael Richter, 9361 Gehringswalde; Claudia Neumann, 9402 Bernsbach; Ute Rosenbaum, 9402 Bernsbach; Rolf Bartl, 58 Gotha; Gisbert Löwe, 655 Schleiz; Ulrike Brückner, 8122 Radebeul; Roland Bößenroth, 117 Berlin;

Klassenstufe 9

Ute Winkler, 153 Teltow (57 Karten); **Rainer Zerck,** 24 Wismar (57 Karten); **Frank Hartmann,** 7702 Bernsdorf; **Manfred Pokrandt,** 75 Cottbus; **Egbert Lindner,** 801 Dresden; **Johannes Borngräber,** 1211 Wüste-Kunersdorf; **Michael Otto,** 6081 Bernbach; **André Hoffmann,** 89 Görlitz; **Rolf-Dietmar Regel,** 75 Cottbus; **Dagmar Marby,** 43 Quedlinburg; André Otto, 119 Berlin; Christine Hense, 15 Potsdam; Karl-Heinz Vogt, 1211 Kietz; Bernd Zimdars, 209 Templin; Ralf Hötling, 102 Berlin; Silvia Giese, 729 Torgau; Bernd Klipps, 2051 Boddin; Matthias Günther, 701 Leipzig; Steffi Frömmer, 208 Neustrelitz; Bernd Reddemann, 36 Halberstadt; Andreas Schürer, 93 Annaberg-Buchholz; Gerlind Hanke, 7101 Frankenheim; Volker Heumann, 45 Dessau; Roland Nehrig, 55 Nordhausen; René Gottschlig, 75 Cottbus; Andreas Weller, 8242 Altenberg; Andreas Fleischer, 8027 Dresden; Ralf Theuer, 1321 Crussow; Jutta Schuster, 27 Schwerin; Siglinde Puller, 759 Spremberg; Jürgen Krebs, 3302 Barby; Roland Borch, 75 Cottbus; Klaus Irmscher, 57 Mühlhausen; Eberhard Maunke, 6088 Steinbach-Hallenberg

Klassenstufe 10/12

Dietmar Wegner, 3601 Dardesheim (29 Karten); **Ulrich Klaus,** 58 Erfurt (29 Karten); **Manfred Riemer,** 83 Pirna; **Volkmar Färber,** 1551 Berge; **Dieter Garling,** 286 Lübz; **Kurt Oppitz,** 15 Potsdam; **Hartmut Bull,** 2331 Lonvitz; **Brigitte Prawitz,** 119 Berlin; Michael Böhm, 1136 Berlin; Sabine Steinert, 8027 Dresden; Gina Jahnke, 801 Dresden; Bärbel Kurz, 724 Grimma; Matthias Heine, 8601 Schwarznaußlitz; Konrad Schneider, 95 Zwickau; Klaus-Peter Schemmel, 1055 Berlin; Edgar Petersdorf, 7251 Röcknitz; Lew Dimenstein, Leningrad; Walter Janous, Innsbruck (Österreich); Bert de Brock, Groningen (Holland); István Mátrai, Szombathely (Ungarische VR)

Die im Druck hervorgehobenen Schüler erhielten Buchprämien.

1972

Zum Jahreswechsel beste Wünsche für persönliches Wohlergehen, erfolgreiches Schaffen und gute Zusammenarbeit.

С Новом Году желаем Вам здоровья, счастья и успехов в работе. Надеемся и в дальнейшем на хорошее заимное сотрудничество.

With the compliments of the season we wish you the best of health, of prosperous 1972 and continuing good cooperation.

$$\begin{aligned}
\mathbf{1972} &= (123 - 4 \cdot 5 + 6 + 7)(8 + 9) \\
&= 12^3 - \sqrt{4} + 5 \cdot 67 - 89 \\
&= (1 + 2 \cdot 3)^4 - 5(6 + 78) - 9 \\
&= (9 + 8)(7 + 65 + 43 + 2 - 1) \\
&= 9 + 8 + 7 - 6 - 5 + 43^2 + 10 \\
&= 12^{1+2} + 12^2 + (12 - 2)^2 \\
&= 3 + 33 + 44 \cdot 44 \\
&= 33 + 44 \cdot 44 + 3 \\
&= (1111 - 111 - 11 - 1 - 1 - 1)(1 + 1) \\
&= (22 + 22)^2 + (2 + 2 + 2)^2 \\
&= (3 \cdot 3 + 3)^3 + (3 + 3)^3 + 3^3 + (3:3)^3 \\
&= (77 + 77 + 77 + 7 \cdot 7) \cdot 7 + (77 + 7):7 \\
&= 999 + 99 \cdot 9 + 9 \cdot 9 + 9:9 \\
&= 3^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 + 3^3 \cdot 2^3 + 3^3 + 1^3 \\
&= 12^3 + 123 + 123 - 1 + 2 - 3 \\
&= (3 \cdot 2 + 11)(11 \cdot 11 - 2 - 3)
\end{aligned}$$

Ing. H. Decker, Köln