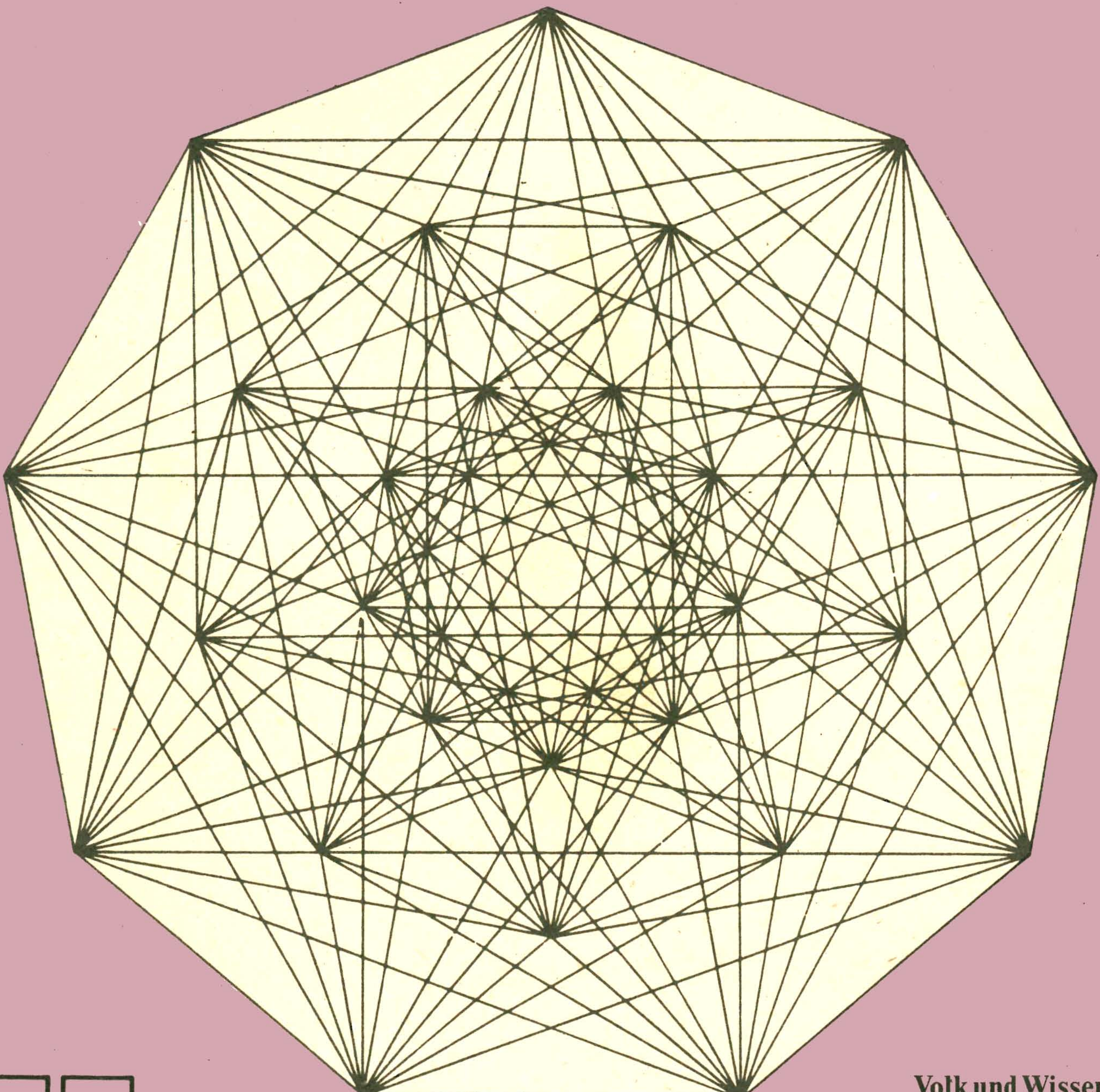
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



4

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
20. Jahrgang 1986
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold

Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
1086 Berlin, Krausenstr. 50, PSF 1213
Anschrift der Redaktion:
7027 Leipzig, PSF 14
Redaktion:
OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Münze von Regiomontanus, Archiv P. Schreiber, Greifswald (S. 89); U. Pullwitt, Leipzig (S. 76); ADN/Zentralbild, Berlin (S. 77), Reproduktion, Archiv H. Pieper, Berlin (S. 92); *IV. U.-Seite*, Graphik, gestaltet nach Vorlagen finnischer Schüler, H. Teske, Leipzig
Titelblatt: W. Fahr, Berlin, gestaltet nach einer Vorlage aus math. Schülerzeitschrift *Lapok*, Budapest
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 14. April 1986
Auslieferungstermin: 14. Juni 1986

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

[1] bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Clusteranalyse und Informationsverdichtung beim Damenproblem

Einführung

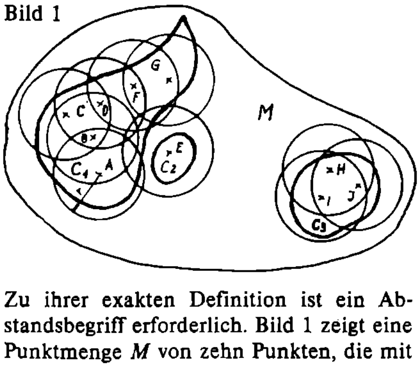
Eine wichtige Aufgabe der Informationsverarbeitung ist die Informationsverdichtung und damit eine Reduktion der Informationsmenge. Diese Problematik soll an der kombinatorischen Lösungsmannigfaltigkeit des bekannten Damenproblems behandelt werden, das sehr instruktiv in dem Beitrag von Posthoff: *Die Lösung kombinatorischer Probleme mit Hilfe von Computerprogrammen* in *alpha*, Heft 1/1985, dargestellt wurde.
Es wird hier die in jenem Artikel besprochene Methode, das Backtrack-Verfahren, zur Erzeugung aller kombinatorischen Lösungen als bekannt vorausgesetzt. Es soll die Frage behandelt werden, wie diese Informationsmenge verdichtet und damit reduziert werden kann, ohne *etwas zu verschenken*. Eine bekannte Methode zur Informationsverdichtung ist die Clusteranalyse.

Clusteranalyse

Heuristische Betrachtungen

Endliche Punktmengen haben die Eigenschaft, daß sie in charakteristische Untermengen zerlegt werden können, deren Elemente sich durch ihre Lage zueinander auszeichnen, die sich gruppieren oder an einigen Stellen zusammenballen oder Klumpen bilden. Solche Untermengen heißen Cluster (Bild 1).

Bild 1



Zu ihrer exakten Definition ist ein Abstandsbegriff erforderlich. Bild 1 zeigt eine Punktmenge M von zehn Punkten, die mit den ersten zehn Buchstaben des Alphabets bezeichnet wurden. Jeder Punkt wurde mit einer kreisförmigen r-Umgebung (r ist der Radius des Kreises) versehen, $r > 0$, beliebig, aber konstant. Bei dem angenommenen Wert für r zerfällt M in drei Untermengen C_1, C_2, C_3:

$M = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J\}$
$C_1 = \{A, B, C, D, F, G\}$
$C_2 = \{E\}$
$C_3 = \{H, I, J\}$
$M = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, $C_i \cap C_k = \{\emptyset\}$ für $i \neq k$.

Das Ermitteln dieser Untermengen heißt Clusteranalyse. Man beginnt die Clusteranalyse mit einem beliebigen Punkt aus M (Die Punkte einer Menge müssen alle gleichberechtigt sein!) und eröffnet mit ihm den ersten Cluster C_1, z. B. wenn man mit D beginnt: $\{D\} \subseteqq C_1$. Nun werden weiter alle neuen Punkte in den Cluster aufgenommen, die in der r-Umgebung des Punktes D liegen, das sind: B, C, F. C_1 wird also erweitert um diese Punkte:
$C_1 \supseteqq \{D, B, C, F\}$. (Hätten wir den Prozeß mit dem Punkt E begonnen, so wäre $C_1 = \{E\}$ geworden, denn E enthält keinen weiteren Punkt von M in seiner r-Umgebung. Ein isolierter Punkt kann also auch einen Cluster bilden.) Fahren wir jedoch mit $C_1 \supseteqq \{D, B, C, F\}$ fort: Von allen neuen Punkten werden wieder die Umgebungen untersucht, ob sie Punkte von M enthalten, die noch nicht in C_1 integriert wurden: für B ist es A, (C und D sind schon vorhanden) für C kein Punkt, für F ist es G, also werden A und G noch in C_1 gesteckt: $C_1 = \{D, B, C, F, A, G\}$. In den r-Umgebungen von A und G werden keine neuen Punkte gefunden, damit ist der Aufbau des Clusters C_1 abgeschlossen. Nun nimmt man einen beliebigen Punkt aus der Differenzmenge $M \setminus C_1$ und beginnt damit den Cluster C_2 nach dem gleichen Prinzip zu füllen, wie eben beschrieben. Ist auch der Aufbau von C_2 abgeschlossen, so ist mit irgendeinem Punkt aus
$M \setminus (C_1 \cup C_2)$ fortzufahren,
bis schließlich die Differenzmenge
$M \setminus (C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n)$ leer ist.
Dann war C_n der letzte Cluster. Die Numerierung der Cluster hängt offensichtlich von der Wahl der Startpunkte ab, die Cluster selbst dagegen nicht. Sie hängen aber vom Umgebungsbegriff und seiner Größe ab. Wählt man z. B. bei der r-Umgebung den Radius r klein genug, etwa kleiner als das Minimum der Abstände von je zwei Punkten der zu untersuchenden Menge, so bildet jeder Punkt der Menge für sich einen Cluster, ist er groß genug, so beseht die ganze Menge nur aus einem Cluster. Beide Extremfälle sind jedoch im allgemeinen für die Clusteranalyse uninteressant. Für die Wahl eines *vernünftigen* Abstandes sind häufig fachspezifische Kenntnisse aus dem jeweiligen Anwendungsgebiet erforderlich, ebenso für eine sachgerechte Interpretation von ermittelten Clustern. Zur automatischen Durchmusterung von endlichen Mengen in mehrdimensionalen Räumen wurden leistungsfähige Computerprogramme entwickelt.

Mathematisierung

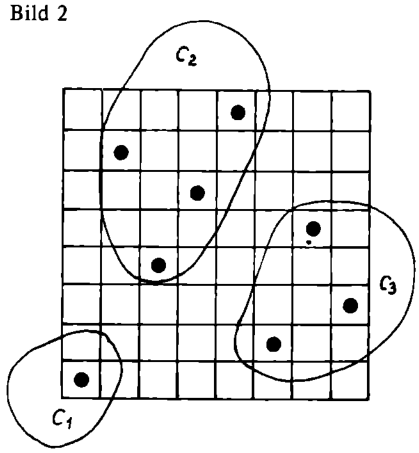
Es sei M eine nichtleere, endliche Punktmenge mit einem Abstandsbegriff $d(A, B)$ für je zwei Elemente $A, B \in M$.
Definition: Eine nichtleere Teilmenge C von M heißt r-Cluster von A, wenn $A \in C$ und für jedes Element $X \in M$ gilt: $X \in C$ genau dann, wenn es eine (endliche) Folge $X = X_0, X_1, \ldots, X_n = A$ von Elementen $X_i \in M$ gibt, von denen je zwei benachbarte einen Abstand $< r$ haben, also
$d(X_i, X_{i+1}) < r$ für $i = 0(1)n - 1$.
(Scheinbar ist das Clusterelement A bei der Definition des r-Clusters C ausgezeichnet. Weiter unten wird sich jedoch zeigen, daß das nicht der Fall ist.)
Behauptung: Für jedes feste $r > 0$ und je zwei beliebige Punkte A und $B \in M$ gilt: Die r-Cluster von A und B sind entweder identisch oder elementefremd.
Beweis: C sei r-Cluster von A und C' sei r-Cluster von B. Ist $C \cap C' = \{\emptyset\}$, so ist nichts weiter zu zeigen. Es sei $C \cap C' \neq \{\emptyset\}$. Dann gibt es ein Element, nennen wir es D, mit
$D \in C \cap C'$, d. h. $D \in C$ und $D \in C'$.
Aus $D \in C$ folgt nach der Clusterdefinition: es gibt notwendig eine Folge
$D = D_0, D_1, \ldots, D_{n-1}, D_n = A$ mit
$D_i \in M$, $d(D_i, D_{i+1}) < r$, $i = 0(1)n - 1$.
Analog existiert eine Folge
$D = D'_0, D'_1, \ldots, D'_k = B$ mit $D'_i \in M$,
$d(D'_i, D'_{i+1}) < r$, $i = 0(1)k - 1$.
(1) Es sei $X \in C$. Dann gibt es wieder nach der Clusterdefinition eine Folge
$X = X_0, X_1, \ldots, X_{l-1}, X_l = A$ mit
$X_i \in M$, $d(X_i, X_{i+1}) < r$, $i = 0(1)l - 1$.
Nun ist aber
$X = X_0, X_1, \ldots, X_{l-1}, A, D_{n-1}, \ldots, D_1, D, D'_1, \ldots, D'_{k-1}, D'_k = B$ eine Folge, in der zwei benachbarte Elemente einen Abstand $< r$ haben. Die Elemente gehören alle zu M. Die Folge führt von X nach B, ihre Existenz ist hinreichend für $X \in C'$. Damit hat man $C \subseteqq C'$, denn X war beliebig.
(2) Die Umkehrung beweist man ganz analog: Es sei $Y \in C'$, also gibt es eine Folge
$Y = Y_0, Y_1, \ldots, Y_{s-1}, Y_s = B$ mit
$Y_i \in M$, $d(Y_i, Y_{i+1}) < r$, $i = 0(1)s - 1$.
Die Folge
$Y = Y_0, Y_1, \ldots, Y_{s-1}, B, D'_{k-1}, \ldots, D'_1, D, D_1, \ldots, D_n = A$
liefert uns $Y \in C$ und damit $C' \subseteqq C$.
Beide Ergebnisse zusammen ergeben die Behauptung $C = C'$. Der eben bewiesene Satz zeigt insbesondere: Ist C r-Cluster von A und $B \in C$, so ist der r-Cluster von B gleich C. A ist also bei der Definition von C als Clusterelement nicht ausgezeichnet, wenn es neben A noch andere Elemente in C gibt.
Hat man paarweise verschiedene r-Cluster $C_1, C_2, \ldots, C_n$ von M mit der zusätzlichen

Eigenschaft $M = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n$, so liegt eine spezielle (d. h. für ein bestimmtes $r > 0$) Zerlegung von M vor, die Clusterzerlegung von M heißt. Die Clusterzerlegung ist für jedes feste r eindeutig.

Das Damenproblem

Auf einem quadratischen Schachbrett mit n^2 Feldern sind n Damen so zu plazieren, daß keine Dame eine andere schlagen kann. Der minimale Abstand zweier Damen ist offenbar ein Springerzug, oder, wenn wir die Damen auf die Kreuzungspunkte eines quadratischen Gitters mit der Maschenweite 1 postieren, $\sqrt{5}$. Alle kombinatorischen Lösungen des Damenproblems kann man, wie schon gesagt, nach dem Backtrack-Verfahren erhalten. Hat man eine Lösung, so kann man sie als Punktmenge auffassen und einer Clusteranalyse unterwerfen, z. B. mit einer Kreisscheibenumgebung vom Radius $r = 3$ (nach $\sqrt{5}$ ist der nächstgrößere mögliche Abstand zweier Damen $\sqrt{10}$, $\sqrt{5} < 3 < \sqrt{10}$), also liefert $r = 3$ Cluster, in denen die Damen durch Springerzüge gekoppelt sind, das scheint für dieses Problem der sachlich angemessene Abstand zu sein. Eine solche Clusteraufteilung ist unabhängig von der Seite, von der das Schachbrett angesehen wird, und auch das Spiegelbild läßt sich von allen vier Seiten betrachten. Spiegeln kann man eine Stellung z. B. an einer Mittelsenkrechten des Brettes, einer Diagonalen oder Kante. Hat die Stellung

Bild 2



keine Symmetrieeigenschaften, so wird sie bei der kombinatorischen Aufzählung achtmal vorkommen (Bild 2). Man kann also die Hoffnung haben, daß sich die Lösungsmenge erheblich reduzieren läßt, wenn man statt der kombinatorischen Lösung auf die innere Struktur oder Geometrie der Lösung achtet, die ihren Ausdruck findet in der Zahl der Cluster, ihrer Größe, ihrer Form und Lage auf dem Schachbrett. Sie sollen hier eigentliche Lösungen genannt werden. So erhält man bei $n = 8$ statt 92 kombinatorische Lösungen nur noch 12 eigentliche Lösungen, was den Überblick wesentlich erleichtert, aber verschenkt wurde auch keine.

Ergebnisse zum Damenproblem

Tabelle 1: Die eigentlichen Lösungen für $n = 8$

Lösungsnummer	Position A	B	C	D	E	F	G	H	Kombinat. Lösungen	Clusteranzahl	Clusterbelegung
L1	1	5	8	6	3	7	2	4	8	3	1+3+4
L2	1	6	8	3	7	4	2	5	8	3	1+3+4
L3	2	4	6	8	3	1	7	5	8	3	2+2+4
L4	2	5	7	1	3	8	6	4	8	4	1+2+2+3
L5	2	5	7	4	1	8	6	3	8	5	1+1+1+2+3
L6	2	6	1	7	4	8	3	5	8	3	2+3+3
L7	2	6	8	3	1	4	7	5	8	3	1+2+5
L8	2	7	3	6	8	5	1	4	8	3	1+2+5
L9	2	7	5	8	1	4	6	3	8	4	1+1+3+3
L10	3	5	2	8	1	7	4	6	4	2	4+4
L11	3	5	8	4	1	7	2	6	8	4	1+2+2+3
L12	3	6	2	5	8	1	7	4	8	5	1+1+2+2+2
									= 92		

Bild 3

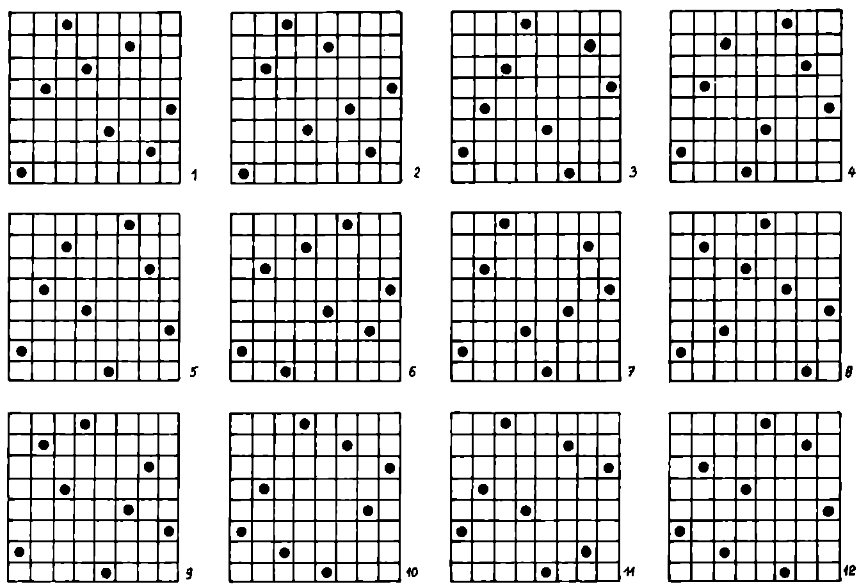


Tabelle 2: Anzahl der kombinatorischen und eigentlichen Lösungen für die ersten n-Werte

n	Anzahl der kombin. Lösungen	Anzahl der eigentl. Lösungen	Anzahl der Cluster	Clusterbelegung
1	1	1	1	1
2	0	0	–	–
3	0	0	–	–
4	2	1	1	4
5	10 { 8	2	1	5
	2		1	5
6	4	1	2	3+3
7	40 { 8	6	2	3+4
	8		3	1+3+3
	4		3	1+1+5
	8		3	1+2+4
	8		2	3+4
	4		3	2+2+3
8	92	12	siehe Tabelle 1	
9	352	?	?	?

W. Dörband

Eine Aufgabensammlung aus dem Jahre 1475

Zum 550. Geburtstag des Johannes Müller, genannt Regiomontanus

Am 6. Juni 1436 wurde in dem Städtchen Königsberg in Franken (oder vielleicht in dem nahe gelegenen Dorf Unfinden) Johannes Müller geboren, der sich später, der Sitte seiner Zeit folgend, den klangvollen Gelehrtennamen Regiomontanus (svw. der Mann aus Königsberg) zulegte. Regiomontanus gilt heute allgemein als der bedeutendste europäische Mathematiker des 15. Jh. Zugleich ist er in seinem Leben und Wirken ein so typisches Kind seiner Zeit, daß er geradezu als Symbolfigur der Renaissance gelten kann.

Regiomontanus begann sein Studium 1447 in Leipzig (also im Alter von 11 Jahren, das war damals üblich) und setzte es ab 1450 in Wien fort, wo er der Schüler des Georg Peurbach (1423 bis 1461) wurde, der ein umfangreiches Programm zur Erneuerung der rechnenden Astronomie und ihrer mathematischen Hilfsmittel aufgestellt hatte.

Regiomontanus erwarb mit 15 Jahren den akademischen Grad eines Baccalaureus, 1457 den Magistertitel. Zu dieser Zeit übte er bereits selbst eine Lehrtätigkeit an der Wiener Universität aus, auch dies war damals üblich. Nach dem Tode seines Lehrers 1461 reiste er in Begleitung des Kardinals Bessarion, eines Förderers von Astronomie und Mathematik, nach Rom und vollendete dort 1462 die Bearbeitung des astronomischen Standardwerkes Syntaxis (auch als „Almagest" bekannt) des spätantiken Astronomen Klaudios Ptolemäos (um 80 bis um 160), die Peurbach im Auftrag Bessarions begonnen hatte. Während seines etwa sechsjährigen Aufenthaltes in Italien vollendete Regiomontanus 1463 sein Hauptwerk „Fünf Bücher über Dreiecke aller Art", in dem er als erster Europäer die ebene und sphärische Trigonometrie als selbständige mathematische Disziplin aus ihrem Hauptanwendungsgebiet, der Astronomie, herauslöste und wesentlich vorantrieb, u. a. durch die explizite Formulierung von Sätzen nach Art des Cosinus- und Sinussatzes (freilich noch mit anderen Bezeichnungen und bezogen auf andere als die heute üblichen trigonometrischen Funktionen) und den Übergang zu dezimal (statt sexagesimal) geteilten Bruchteilen der Tabellenwerte für die Winkelfunktionen. Regiomontanus erwarb hervorragende Kenntnisse der klassischen Sprachen Griechisch und Latein und interessierte sich sehr für die Wiedererschließung des antiken wissenschaftlichen Erbes. Er entdeckte z. B. ein bis dahin unbekanntes Werk des spätantiken Zahlentheoretikers Diophant (um 250) und hielt 1463 an der Universität in Padua einen Vortrag, der später gedruckt wurde (Melanchthon nahm ihn in eine Sammlung berühmter Reden auf) und den man als die erste Vorlesung über Geschichte der Mathematik bezeichnen könnte.

Nach kurzer Lehrtätigkeit an der Universität Preßburg (Bratislava) übersiedelte Regiomontanus 1471 nach Nürnberg, dem Zentrum des aufstrebenden, nach praktikabler Wissenschaft, technischem und künstlerischem Fortschritt strebenden deutschen Bürgertums, und gründete eine Werkstatt zur Herstellung von Kunstuhren, astronomischen und mathematischen Geräten sowie eine Druckerei, in der er teils fremde, insbesondere antike Werke in eigenen Übersetzungen und Bearbeitungen, teils auch seine eigenen Werke herausgeben wollte. Wem solcher Broterwerb eines Wissenschaftlers befremdlich erscheint, der möge sich erinnern, daß z. B. der Maler Lucas Cranach d. Ä. (1472 bis 1553) in Wittenberg neben seiner Malerwerkstatt eine Apotheke betrieb. Kunst und Wissenschaft in engster Verbindung mit bürgerlichem Geschäft, das ist das Antlitz der Renaissance, der Zeit der frühbürgerlichen Revolution. Über das geplante Verlagsgeschäft Regiomontanus' informiert ein zweispaltiges Flugblatt, in dem in der linken Spalte die zu druckenden fremden, in der rechten die eigenen Schriften angekündigt werden. Unter den ersteren befinden sich die Hauptwerke von Ptolemäos (einschließlich seiner pseudowissenschaftlichen Fundierung Tetrabiblos der Astrologie), Euklid, Archimedes und Apollonios, unter den letzteren die bereits erwähnte Dreieckslehre, astronomische Tafeln, Kalender, Jahrbücher (sogenannte Almanache), Ephemeriden (Tafeln von Planetenörtern), Kommentare, Streitschriften u. a. Zur Ausführung kam nur ein sehr geringer Teil dieser Drucke. Schon 1475 wurde Regiomontanus erneut nach Rom gerufen, um als Experte an der von der katholischen Kirche geplanten Kalenderreform mitzuwirken. Im Sommer 1476 starb er in Rom, vermutlich an einer damals dort umgehenden Seuche. Es gibt aber auch Gerüchte, wonach er von Neidern und Konkurrenten vergiftet worden sein soll. So war selbst sein Tod typisch für die Renaissance.

Vom Entwurf zu einem unvollendeten Werk des Regiomontanus ist erst in unserem Jh. eine Abschrift entdeckt und 1956 in deutscher Übersetzung erstmals gedruckt worden. Das Manuskript trägt den Titel

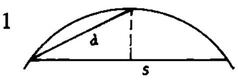
Geometrische Probleme aller Art;
ein Werk ergiebigen Vergnügens
(oder auch Commensurator)

und enthält 396 Sätze und Aufgaben (die Sätze ohne Beweise, die Aufgaben ohne Lösungen, vieles ist noch skizzenhaft). Es ist in 13 Kapitel gegliedert, die Überschriften tragen wie z. B. Über die Multiplikation, Division und das Ausziehen von Wurzeln – Über die Sehnen von Kreisbögen – Über die Maße geradliniger Flächen – Über die regelmäßigen Körper – Über das Maß unregelmäßiger Körper.

Nachfolgend geben wir einige Kostproben aus dem Commensurator zum ergiebigen Vergnügen der *alpha*-Leser. (Die zum Teil nur flüchtig und nicht eindeutig formulierten Aufgaben wurden nicht wörtlich übersetzt, sondern sinngemäß wiedergegeben.)

II.9. Es ist eine Formel für die Abhängigkeit der Sehne d des halben Bogens von der Sehne s eines beliebigen Kreisbogens (Radius 1) aufzustellen (Bild 1).

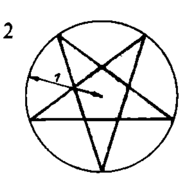
Bild 1



II.14. Sei d_n die Seite des dem Einheitskreis einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks. Dann gilt $d_{10}^2 + 1 = d_5^2$. (Man wende II.9 an!)

V.104. Man bestimme den Flächeninhalt des dem Einheitskreis einbeschriebenen Sternfünfecks (damals als Pentagramm oder als Salomonisches Pentagon bezeichnet, Bild 2).

Bild 2



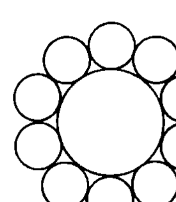
V.131. Durch einen gegebenen Punkt P außerhalb eines gegebenen Dreiecks ABC ist (mit Zirkel und Lineal) eine Gerade zu konstruieren, die das Dreieck in zwei flächengleiche Teile zerschneidet.

V.140. Ein rechtwinkliges Dreieck ist (mit Zirkel und Lineal) aus der gegebenen Länge der Hypotenuse und der Differenz der beiden Kathetenlängen zu konstruieren.

VI.42. Einen gegebenen Kreis berühren 10 untereinander gleiche Kreise von außen wie in Bild 3 gezeigt. Wie kann man die äußeren Kreise bei gegebenem inneren Kreis mit Zirkel und Lineal konstruieren? Nach welcher Formel läßt sich der Radius der äußeren Kreise in Abhängigkeit vom Radius des inneren Kreises berechnen?

VII.29. Warum gibt es nicht zu jeder natürlichen Zahl $n \geqq 4$ und gegebener Kugel K n untereinander gleiche Kugeln, die K von außen und sich untereinander zu je dreien so berühren, daß sie eine geschlossene Hülle um K bilden (räumliche Analogie zu Bild 3)?

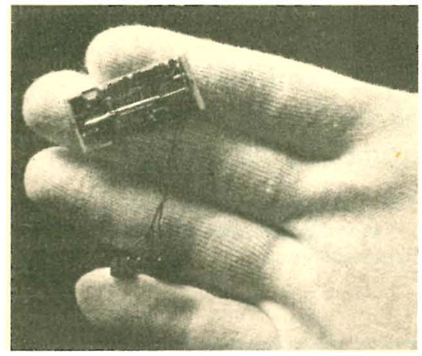
Bild 3



Für welche Anzahlen n ist eine solche Konfiguration möglich?

P. Schreiber

Mathematik und wissenschaftlich-technischer Fortschritt



Die Mathematisierung eines beliebigen Gebietes der Wissenschaften oder Technik geht immer einher mit einer theoretischen Vertiefung auf diesem Feld. Eine derartige mathematisch-theoretische Durchdringung entfernt es aber keineswegs von der Praxis, sondern macht eine umfassendere praktische Nutzung in einer neuen Qualität überhaupt erst möglich. Insbesondere moderne Technologien erfordern ein hohes Maß an Grundlagenwissen, was am Beispiel der Mikroelektronik oder Robotertechnik sofort deutlich wird. So hat die Mathematik wesentlichen Anteil am wissenschaftlich-technischen Fortschritt, der Voraussetzung für die weitere Entwicklung unserer Gesellschaft ist.

„Alles was meßbar ist, messen und alles, was nicht meßbar ist, meßbar machen“, so lautete der Grundsatz, mit dem Galileo Galilei (1564 bis 1642) das Zeitalter der modernen Naturwissenschaften einleitete. Heute, 300 Jahre später, ist dieser Grundsatz aus der Naturwissenschaft aktueller denn je. Neben den nicht zu unterschätzenden Bereichen, wo der Techniker, Brigadier, Arbeiter, Verkäufer usw. unmittelbar mit dem Bleistift in der Hand oder dem Taschenrechner etwas berechnet, erreicht die Mathematik ihre Wirksamkeit bei der Gestaltung des wissenschaftlich-technischen Fortschritts auch mittelbar durch die Natur- und Gesellschaftswissenschaften. Dabei sind die Technikwissenschaften zu einem entscheidenden Bindeglied zwischen Natur- und Gesellschaftswissenschaften einerseits und der Produktion andererseits geworden. Diese Entwicklung war und ist bis heute verbunden mit der natur- und gesellschaftswissenschaftlichen Durchdringung der technischen Wissenschaften und der Herausbildung spezieller technischer Wissenschaftsdisziplinen. Eine dieser neuen Wissenschaftsdisziplinen ist die Informatorik.

Wie kein anderer Industriezweig bestimmt die Mikroelektronik die Möglichkeiten zur Nutzung theoretischer Erkenntnisse in der Technik. Die Produktion leistungsfähiger Computer, die Konstruktion von Robotern und die Automatisierung ganzer Produktionsprozesse verlangen integrierte mikroelektronische Schaltkreise, die wiederum Entwicklungs- und Herstellungsverfahren mit hochentwickelter Rechentechnik zur Voraussetzung haben.

Eine weitere Grundlage dafür, wie überhaupt für die moderne Technik und für die wissenschaftliche Arbeit, ist die Präzisionsmeßtechnik und die damit verbundene Definition der Normale für die Basiseinheiten des Maßsystems. Es zeigt sich, daß ein enger Zusammenhang zwischen dem Stand der theoretischen Erkenntnisse und den erzieherischen Meßgenauigkeiten bestehen. Die Präzisionsmeßtechnik ist ein weiteres Beispiel für den engen Zusammenhang zwischen mathematisierter Wissenschaft und technischem Fortschritt.

Wir wollen im weiteren erläutern, wie die Präzisionsmeßtechnik, die eine Voraussetzung für moderne Technologie bildet, nur auf der Grundlage der Quantentheorie möglich ist, die eine fundamentale naturwissenschaftliche Errungenschaft unseres Jahrhunderts darstellt. Dabei werden wir veranschaulichen, welche prinzipielle Bedeutung die Mathematik hat, indem sie nicht nur eine Berechnung, sondern die Formulierung der Naturzusammenhänge überhaupt erst ermöglicht.

Wir nehmen zum Ausgangspunkt die fundamentalen Naturkonstanten c (Lichtgeschwindigkeit), h (Plancksches Wirkungsquantum) und e (Elementarladung).

Seit der Jahrhundertwende wissen wir, daß die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum eine Naturkonstante ist. Die Versuche (1881) von A. Michelson (1852 bis 1931) wiesen zwar schon auf die Tatsache hin, doch konnten erst die mathematisch-theoretischen Ergebnisse (1905) von A. Einstein (1879 bis 1955) diese Tatsache in den Rang einer naturwissenschaftlichen Gesetzmäßigkeit erheben. Die von ihm entwickelte spezielle Relativitätstheorie, in der die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ein zentrales Element ist, gehört zu den größten Geistesleistungen in der gesamten Menschheitsgeschichte.

Die eigentliche Naturkonstante der Quantentheorie ist das Plancksche Wirkungsquantum h. M. Planck (1858 bis 1947) wurde durch mathematische Überlegungen zu der Tatsache geführt, daß bei Schwingungsprozessen von der Frequenz v die Energie nur in Form kleinster Portionen, in Form von Quanten der Energie ε, abgegeben wird, wobei $\varepsilon = hv$ gilt. $h = 6{,}62 \ldots 10^{-34}$ Js ist das Plancksche Wirkungsquantum.

Es ist im Hinblick auf die Rolle der Mathematik bei der Entwicklung der Naturwissenschaften bemerkenswert, daß Planck selbst sich mehr als ein Jahrzehnt dagegen sträubte, diesen von ihm auf mathematischem Weg gefundenen Zusammenhang als ein wirkliches Naturgesetz anzuerkennen. Wieder war es A. Einstein, der im gleichen Jahr der Schaffung der Relativitätstheorie (1905) auch die Quantennatur des Lichts als ein Naturgesetz formulierte. Das Licht besteht aus Quanten, den Photonen, wobei die Energie eines Photons der Frequenz v durch die Formel $\varepsilon = hv$ gegeben wird. Einstein hat für diese Entwicklung den Nobelpreis erhalten.

Die dritte fundamentale Naturkonstante der Quantentheorie ist die Elementarladung. Woher weiß man, daß die Elementarladung eine Naturkonstante ist? Das Problem liegt hier wieder ähnlich wie bei der Lichtgeschwindigkeit. Natürlich kann man durch experimentelle Untersuchungen untermauern, daß alle Elektronen die gleiche Ladung haben sollten, aber man kann auf diesem Wege keine absolute theoretische Sicherheit darüber erlangen. Die Lösung dieses Problems ergibt sich wiederum aus der Quantentheorie.

Als wesentliche Schlußfolgerung aus dem Gesagten soll hervorgehoben werden, daß wir nur deshalb von Naturkonstanten c, h, e sprechen können, weil die Konstanten die Basis einer mathematisierten Theorie bilden, deren Gültigkeit experimentell beweisbar ist. Ohne die moderne Mathematik, die in diese Theorie eingeht, wäre eine genaue Bestimmung dieser Naturkonstanten gar nicht möglich.

Was hat das nun alles mit der für die Mikroelektronik notwendigen Präzisionsmeßtechnik zu tun? Der Zusammenhang entsteht dadurch, daß die technologische Praxis niemals eine höhere Genauigkeit haben kann als die fortgeschrittenste Wissenschaft. Auf der Grundlage der Quantentheorie lassen sich mit den gegenwärtigen Methoden die Naturkonstanten bis zu einer Genauigkeit bestimmen, die gerade an der Grenze der für die Mikrolelektronik notwendigen Genauigkeit liegt. Für die drei genannten Naturkonstanten konnten durch internationale Abstimmungen einer Vielzahl von Experimenten folgende Werte ermittelt werden:

$c = 2{,}997\,924\,58\,(1{,}2) \cdot 10^{8}$ m/s
$h = 6{,}626\,176 \quad (36) \cdot 10^{-34}$ Js
$e = 1{,}602\,189\,2 \quad (46) \cdot 10^{19}$ C

Die Zahlen in der Klammer schätzen die möglichen Korrekturen in den letzten beiden Ziffern ab. Es liegt also insgesamt eine

Genauigkeit von 10^8 vor, wie wir sie mindestens für die Mikroelektronik benötigen.
Das System der Naturkonstanten ist, soweit diese nicht dimensionslos sind, auf eine bestimmte Festlegung von Maßeinheiten angewiesen. Im SI-System gibt es drei mechanische Einheitennormale: für die Masse, für die Länge und für die Zeit. Wir wollen als Beispiel nur das Normal für die Zeit herausgreifen. Das Zeitnormal spielt auch deshalb eine fundamentale Rolle, weil es mit der höchsten bisher überhaupt erzielbaren Genauigkeit reproduzierbar ist und über einen fixierten Wert für die Vakuumsgeschwindigkeit auch zur Definition des Längennormals benutzt werden kann.
Historisch bildete der Sonnentag oder das Sonnenjahr mit den daraus abgeleiteten Teilen Stunde, Minute und Sekunde die Grundlage für das Zeitnormal. Die Gezeitenwechselwirkung, verursacht durch den Mond und die Sonne und die Störeinflüsse der anderen Planeten auf die Bewegung der Erde, führen zu Veränderungen in der Tages- und Jahreslänge und zu einer stetigen Verlangsamung der Erdrotation. Neben diesen theoretisch und damit auch rechnerisch zugänglichen Einflüssen gibt es auch andere, plötzlich auftretende Veränderungen in der Tageslänge. Solange das Zeitnormal durch eine astronomische Pendeluhr mit einer Genauigkeit von $\frac{1}{1000}$ Sekunde pro Tag repräsentiert wurde, waren die Gangänderungen der „Erduhr" nicht unmittelbar zu erfassen. Erst die Einführung der Quarzuhr in die Zeitmeßtechnik brachte einen bedeutenden Fortschritt in der Genauigkeit.
Da auch der Schwingquarz als immer noch „mechanischer Schwinger" Alterungsprozessen unterliegt, die zu Gangänderungen führen können, ist man zu atomaren Schwingungsnormalen übergegangen. Das heutige Zeitnormal ist die Internationale Atomzeit (IAT), repräsentiert durch ein weltweit verbundenes System von Atomuhren. Die DDR ist mit einer Atomuhr im Zentralinstitut für Physik der Erde der Akademie der Wissenschaften an diesem System beteiligt.
Auf welchen Gesetzmäßigkeiten beruht die Arbeitsweise einer Atomuhr? Um dies zu erklären, benötigt man die Quantentheorie, und damit kommen wir auf die oben erläuterten Probleme zurück. Das Entscheidende ist die Quantennatur der Energie im atomaren Bereich. Es stellt sich heraus, daß die Elektronen im Atom nur diskrete Energiewerte E_n ($n = 1, 2, \ldots$) annehmen können. Wenn ein Übergang zwischen den Energieniveaus E_n und E_m erfolgt, so wird Licht abgestrahlt. Die Frequenz des Lichtes, d.h. die der einzelnen Photonen, ist dabei

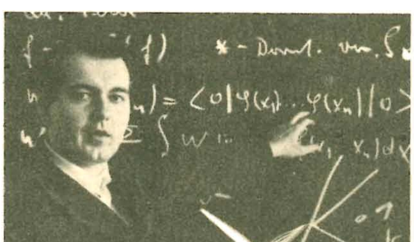
$$v_{nm} = \frac{1}{h} | E_n - E_m |.$$

Die Energieniveaus und damit die Frequenzen sind ganz scharf definiert und deshalb als Frequenz- oder Zeitnormale hervorragend geeignet.
Wenn auch die klassische Vorstellung von dem das Photon umkreisenden Elektron mit den wahren Verhältnissen des Mikrokosmos nicht verträglich ist, so hat doch dieses Bild die historische Herangehensweise bestimmt und letztlich zu dem heutigen abstrakten Bild geführt.
Der Übergang von der Mathematik der klassischen Physik zu der Quantenphysik ist ganz und gar unanschaulich. Er besteht darin, daß die klassischen Größen durch Operatoren ersetzt werden. Die Quantentheorie erfordert zur mathematischen Beschreibung der Energieniveaus den Apparat der Funktionalanalysis, eines Teilgebietes der Mathematik, dessen stürmische Entwicklung noch nicht abgeschlossen ist.
Der Einsatz mathematischer Methoden höchsten Abstraktionsgrades liefert beispielsweise bei der Feinstruktur der Linien des Wasserstoffs bereits eine Übereinstimmung mit der Realität auf fünf geltende Stellen.
Dieser Prozeß der immer feineren Strukturierung der Spektrallinien setzt sich fort und wird bei immer höherem Auflösungsvermögen sichtbar. Seine mathematische Beschreibung erfordert den Einsatz immer komplizierterer Methoden. Die Quantenelektrodynamik erlaubt die Berechnung von sog. Strahlungskorrekturen zu den Atomniveaus. Die magnetische Wechselwirkung zwischen dem Elektron und dem Proton im Wasserstoffatom verursacht eine Hyperfeinstruktur der Energieniveaus. Befindet sich das Elektron auf dem niedrigsten Energieniveau E_1, dann entspricht der Übergang zwischen den beiden Niveaus der Hyperfeinstruktur des Grundzustandes der Abstrahlung einer elektromagnetischen Welle mit 21 cm Wellenlänge. Diese Wasserstofflinie liegt im Radiofrequenzbereich bei 1420 MHz, und sie spielt in der Radioastronomie eine hervorragende Rolle beim Nachweis neutralen Wasserstoffs im kosmischen Raum.
Die Frequenz dieses Übergangs gehört zu den im Labor am genauesten bestimmbaren Werten $v = 1\,420\,405\,751{,}766\,2\,(3)$ Hz. Mit dieser Frequenz arbeitet der Wasserstoffmaser, ein Frequenznormal analog der Caesium-Atomuhr, bei der ebenfalls der Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes des äußersten Elektrons im Caesiumatom als Frequenznormal benutzt wird.
In unseren Darlegungen kam es darauf an, deutlich zu machen, daß man die Quantentheorie und ihre abstrakte Mathematik allein schon dafür benötigt, um die für die Produktion von mikroelektronischen Bauelemente notwendige Präzisionstechnik zu ermöglichen. Unverkennbar ist der Zusammenhang zwischen notwendiger Genauigkeit in der fortgeschrittensten Technik und den quantitativen Aussagen der Theorie. Beim heutigen Stand der Technik liegen beide im gleichen Bereich. Der Zwang zur engen Verknüpfung von Theorie und Praxis ist eines der Wesensmerkmale der wissenschaftlich-technischen Revolution und bestimmend für den technischen Fortschritt.

Prof. Dr. sc. nat. Gerd Laßner, Karl-Marx-Universität Leipzig, nach einer Vorlesung für den Druck bearbeitet von Dipl.-Phys. Lothar Ehrenberg

Praxisbezogene Lehrlingsausbildung im VEB Mikroelektronik Mühlhausen

Komplexlabor an der IH für Elektronik/ Keramik Hermsdorf



Gleichungen und komplexe Zahlen

Eine Anregung zur Beschäftigung mit komplexen Zahlen

Teil 2

Weder von del Ferro noch von Tartaglia sind Beweise für die Lösungsverfahren erhalten. Cardano kannte sie wahrscheinlich auch nicht. Die in seinem Buch „Ars magna“ gegebenen Beweise hat er wohl selbst gefunden.
Die Vorschrift zur Auflösung der kubischen Gleichung $x^3 + px = q$ (p, q positiv) beschrieb Cardano im 11. Kapitel der „Ars magna“ so:
„Erhebe den dritten Teil der Anzahl der $x[p]$ in den Kubus; zu diesem addiere das Quadrat der Hälfte des konstanten Gliedes $[q]$ und ziehe aus der Summe die Quadratwurzel. Diese merke dir und addiere einmal die Hälfte der konstanten Zahl, die du eben quadriert hattest, ein anderes Mal subtrahiere diese Hälfte. Dadurch erhältst du ein Binomium $\left[\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}+\frac{q}{2}\right]$ und die zugehörige Apotome $\left[\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}-\frac{q}{2}\right]$. Zieht man nun die Kubikwurzel der Apotome von der Kubikwurzel des Binomiums ab, so ist der Rest, der hierbei übrig bleibt, der Wert der Unbekannten.“
Unter der Voraussetzung $p > 0$, $q > 0$ $\left(\text{wir brauchen zumindest} \left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2 > 0\right)$ ist also

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}+\frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}-\frac{q}{2}} \qquad \text{(A)}$$

eine (positive) Lösung der Gleichung $x^3 + px = q$. (Bei den dritten Wurzeln handelt es sich um die eindeutig bestimmten positiven reellen Kubikwurzeln aus den positiven reellen Radikanden.)
Cardano erläuterte die Auflösungsregel am Beispiel $x^3 + 6x = 20$. Cardano schrieb: „Cubus p̄. 6. rebus aequalis 20“ und gab die Lösung:
„R_x v. cu. R_x 108 p̄. 10 | m̄.
R_x v. cu. R_x 108 m̄. 10“
(radix universalis cubica radicis ex 108 plus 10, minus radice universalis cubica radicis ex 108 minus 10), also:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{108}+10} - \sqrt[3]{\sqrt{108}-10}\,.$$

Im 12. Kapitel der „Ars magna“ wird die Gleichung $x^3 = px + q$ (p, q positive Zahlen) durch die positive Zahl

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \qquad \text{(B)}$$

gelöst. Dabei wird vorausgesetzt, daß $\left(\frac{q}{2}\right)^2 \geqq \left(\frac{p}{3}\right)^3$ ist (damit unter der Quadratwurzel nicht negative Zahlen stehen).
Die Lösung der übrigen 11 wesentlichen Typen kubischer Gleichungen wurde von Cardano auf die Lösung der eben beschriebenen 2 Typen zurückgeführt.
Die Auflösungsformel (B) sei an zwei Beispielen (aus Eulers Buch „Vollständige Anleitung zur Algebra“) erläutert:
1) $x^3 = 6x + 9$. Hier ist $p = 6$, $q = 9$, $q^2 = 81$, $p^3 = 216$

$$\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} = \frac{1}{4}\left(q^2 - \frac{4}{27}p^3\right) = \frac{1}{4}\left(81 - \frac{4}{27}216\right) = \frac{1}{4}(81-32) = \frac{49}{4}.$$

Daher ist eine Wurzel der gegebenen Gleichung

$$x = \sqrt[3]{\frac{9+\sqrt{49}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9-\sqrt{49}}{2}} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} + \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 2 + 1 = 3.$$

2) $x^3 = 6x + 40$. Hier ist $p = 6$, $q = 40$, $q^2 = 1600$, $p^3 = 216$, also $q^2 - \frac{4}{27}p^3 = 1600 - 32 = 1568$,

$$\sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(q^2 - \frac{4}{27}p^3\right)} = \frac{\sqrt{1568}}{2} = \frac{\sqrt{4\cdot 4\cdot 49\cdot 2}}{2} = \frac{28\sqrt{2}}{2} = 14\sqrt{2}.$$

Eine Lösung der gegebenen Gleichung ist $x = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.
Da aber $(2+\sqrt{2})^3 = 20 + 14\sqrt{2}$, so ist $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2}$ und ebenso $\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$.
Somit ist $x = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$.
Der Fall $x^3 = px + q$ ($p > 0$, $q > 0$) mit $\left(\frac{q}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{3}\right)^3$ bereitete sowohl Tartaglia als auch Cardano unüberwindliche Schwierigkeiten. In diesem Fall würden sich, wenn man die Formel (B) benutzt, Quadratwurzeln aus negativen Zahlen ergeben.
Beispiel. Für die Gleichung $x^3 = 15x + 4$ mit $p = 15$, $q = 4$, also $q^2 = 16$, $p^3 = 3375$, $q^2 - \frac{4}{27}p^3 = 16 - 500 = -484 = 4(-121)$ würde

$$\sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} = \frac{1}{2}\sqrt{q^2 - \frac{4}{27}p^3} = \frac{1}{2}\sqrt{-484} = \sqrt{-121} \text{ und somit}$$

$$\text{„}x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}\text{“} \qquad \text{(C)}$$

werden. Die Gleichung besitzt aber die drei reellen Lösungen $x_1 = 4$ (die positive Lösung), $x_2 = -2 - \sqrt{3}$, $x_3 = -2 + \sqrt{3}$, wie man leicht bestätigt. (Beachte $x^3 - 15x - 4 = (x-4)(x^2+4x+1)$.)
Es sei nochmals angemerkt, daß die Formel (B) zunächst nur für $\left(\frac{q}{2}\right)^2 \geqq \left(\frac{p}{3}\right)^3$ gültig ist, also etwa auf die Gleichung $x^3 = 15x + 4$ gar nicht angewendet werden darf. (Die Zeichen $\sqrt{m}$, $\sqrt[3]{n}$ sind nur für nicht-negative m, n erklärt!)
Natürlich darf man mit Zahlenbeispielen Versuche anstellen. Gesucht ist eine positive Lösung der kubischen Gleichung $x^3 = px + q$, egal ob nun $\left(\frac{q}{2}\right)^2 \geqq \left(\frac{p}{3}\right)^3$ ist oder nicht. Heutzutage kann man, sofern man komplexe Zahlen kennt und benutzt, die Formel (B) auch auf den Fall der Gleichung $x^3 = px + q$ mit $\left(\frac{q}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{3}\right)^3$ übertragen. Die Kubikwurzeln müssen aber erst im Bereich der komplexen Zahlen geeignet definiert werden.
(Darauf soll hier nicht näher eingegangen werden. Darum steht die Formel (C) in Anführungszeichen.)
Es gibt nämlich drei komplexe Zahlen u_1, u_2, u_3 mit $u^3 = 2 + \sqrt{-121}$.
Die Zahlen

$$u_1 = 2 + \sqrt{-1},\quad u_2 = \frac{1}{2}\left(-2 - \sqrt{3} + (2\sqrt{3} - 1)\sqrt{-1}\right),$$

$$u_3 = \frac{1}{2}\left(-2 + \sqrt{3} - (2\sqrt{3} + 1)\sqrt{-1}\right)$$

leisten das Verlangte.
Ebenso gibt es drei komplexe Zahlen v_1, v_2, v_3 mit $v^3 = 2 - \sqrt{-121}$, nämlich

$$v_1 = \frac{1}{2}\left(-2 + \sqrt{3} + (2\sqrt{3} + 1)\sqrt{-1}\right),$$

$$v_2 = 2 - \sqrt{-1},$$

$$v_3 = \frac{1}{2}\left(-2 - \sqrt{3} - (2\sqrt{3} - 1)\sqrt{-1}\right).$$

Die drei Lösungen der Gleichung $x^3 = 15x + 4$ ergeben sich wie folgt:
$x_1 = u_1 + v_2 = 4$, $x_2 = u_2 + v_3 = -2 - \sqrt{3}$, $x_3 = u_3 + v_1 = -2 + \sqrt{3}$.
Weiteres Beispiel. Für die Gleichung $x^3 = 6x + 4$ mit $p = 6$, $q = 4$ ergibt die Formel (B) mit

$$\text{„}x = \sqrt[3]{2+2\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2-2\sqrt{-1}}\text{“} \qquad \text{(D)}$$

eine Lösung der gegebenen Gleichung.
Es sei erwähnt, daß Leonhard Euler in seiner „Vollständigen Anleitung zur Algebra“ (1770) im zwölften Kapitel (§ 188) des ersten Abschnittes des zweiten Teiles auch (D) findet und an (D) anmerkt: „was sich nicht anders ausdrücken läßt“. Hier irrte Euler sich, die (geeignet zu definierenden) Kubikwurzeln in (D) lassen sich ausrechnen.
Es gibt drei komplexe Zahlen u_1, u_2, u_3 mit $u^3 = 2 + 2\sqrt{-1}$:

$$u_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{3} + (\sqrt{3} - 1)\sqrt{-1}\right),$$
$$u_2 = -1 + \sqrt{-1}\,,$$
$$u_3 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{3} - (\sqrt{3} + 1)\sqrt{-1}\right).$$

Ebenso gibt es drei komplexe Zahlen v_1, v_2, v_3 mit $v^3 = 2 - 2\sqrt{-1}$:

$$v_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{3} + (\sqrt{3} + 1)\sqrt{-1}\right),$$
$$v_2 = -1 - \sqrt{-1}\,,$$
$$v_3 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{3} - (\sqrt{3} - 1)\sqrt{-1}\right).$$

Die drei Lösungen der Gleichung $x^3 = 6x + 4$ sind

$x_1 = u_1 + v_3 = 1 + \sqrt{3}$ (die positive Lösung),

$x_2 = u_1 + v_2 = -2$, $x_3 = u_3 + v_1 = 1 - \sqrt{3}$.

Cardano vermied in der „Ars magna" Aufgaben dieser Art. Erst in späteren Schriften beschäftigte er sich damit, wahrscheinlich erst, nachdem er die „Algebra" von Bombelli (schon in Manuskriptform während seines Aufenthaltes zwischen 1562 und 1570 in Bologna oder erst in gedruckter Form nach 1572) gelesen hatte.

Die ideenreiche „Algebra" von Rafael Bombelli (Bild 2) erschien 1572. Der Verfasser ist 1526 in Bologna geboren worden und starb dort kurz nach Erscheinen seiner „Algebra". Über Bombellis Leben wissen wir fast nichts. Er soll als Ingenieur bei einem römischen Adligen gearbeitet haben. Zwischen 1551 und 1560 war er zeitweise bei der Urbarmachung der Sümpfe im Val di Chiani, 1561 bei dem Versuch, in Rom eine der Tiberbrücken zu reparieren, beteiligt. Er hatte sein mathematisches Wissen wahrscheinlich autodidaktisch erworben. Ob es persönliche Beziehungen zu Cardano gegeben hat, ist nicht bekannt.

Die von Bombelli in seinem Buch gegebene systematische Behandlung der Gleichungen von Grad 4 (die vom Cardano-Schüler Ferrari gefundenen Auflösungsverfahren hatte Cardano schon in der „Ars magna" publiziert) war für die Nachfolger richtungsweisend. Die kubischen Gleichungen werden im wesentlichen wie bei Cardano behandelt. Doch kann Bombelli darüber hinaus den Fall $x^3 = px + q$ (p, q positiv) mit $\left(\frac{q}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{3}\right)^3$ lösen, soweit die dabei nach (B) auftretenden Kubikwurzeln $\sqrt[3]{a + \sqrt{-b}}$ (a, b positiv, vgl. (C), (D)) von der Art sind, daß sie durch ein von ihm angegebenes Verfahren gefunden werden können. Mit diesem Verfahren zur Bestimmung solcher Kubikwurzeln, das zwar nicht immer, aber in vielen praktischen Fällen anwendbar ist, fand er beispielsweise

$\sqrt[3]{52 + \sqrt{-2209}} = 4 + \sqrt{-1}$, oder

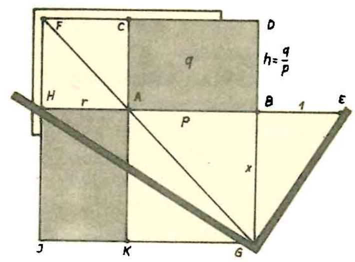
$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$; überdies konnte er z. B. für $x^3 = 15x + 4$ *die Lösung* $x = 4$ nach (C) berechnen (um die anderen Wurzeln kümmerte er sich nicht).

Durch seine Untersuchungen wurde es klar, daß die Kubikwurzeln der Auflösungsformel (B) kubischer Gleichungen der Form $x^3 = px + q$ mit $\left(\frac{q}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{3}\right)^3$ ausgerechnet werden können und daß sich damit die Quadratwurzeln aus negativen Zahlen weghoben. Bombelli schrieb: „Ein ausschweifender Gedanke nach der Meinung vieler. Ich selbst war eine Zeitlang der gleichen Ansicht. Die Sache schien mir auf Sophismen mehr als auf Wahrheit zu beruhen, aber ich suchte so lange, bis ich den Beweis fand."

Doch was geschieht, wenn es mit dem praktischen, jedoch nicht allgemeinen Verfahren Bombellis zur Bestimmung von Kubikwurzeln nicht möglich ist, die geforderten Kubikwurzeln auszurechnen?

Durch die folgende geometrische Konstruktion (Bild 3) unter Benutzung von Zirkel, Lineal und Rechtwinkelhaken konnte Bombelli (am Beispiel $x^3 = 6x + 4$) nachweisen, daß eine kubische Gleichung $x^3 = px + q$ (für positive p und q) stets $\left(\text{also auch im Fall} \left(\frac{q}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{3}\right)^3\right)$ eine positive Lösung hat. (Im Beispiel $x^3 = 6x + 4$ ist die positive Lösung $1 + \sqrt{3}$.)

(Bild)



Gegeben sei eine Strecke AB der Länge p; diese sei eine Seite eines Rechtecks $ABCD$ mit dem Flächeninhalt q $\left(\text{Höhe } h = \frac{q}{p}\right)$.

Man verlängere die Strecke AB über B hinaus bis zum Punkt E, so daß BE die Länge 1 hat, und wähle G auf der über B hinaus verlängerten Strecke DB passend als Scheitel eines Rechtwinkelhakens durch E. Dieser treffe die über A hinaus verlängerte Strecke BA in H. Wird der Abstand $\overline{BG}$ mit x bezeichnet, dann ist (nach dem Höhensatz, Dreieck HEG, Höhe BG) $\overline{BH} = x^2$. Nun werde zum Rechteck $GBHI$ ergänzt. (H und I hängen also von der Wahl von G ab!) Dieses Rechteck hat den Flächeninhalt x^3. Das Teilrechteck $GBAK$ (K ist der Schnittpunkt der über A hinaus verlängerten CA mit GI) hat den Flächeninhalt px.

Wählt man nun den Punkt G so, daß die verlängerte GA durch den Scheitel F eines zweiten Rechtwinkelhakens geht, dessen Schenkel an FD und FI anliegen, so ist der Flächeninhalt von $AHIK$ gleich dem Flächeninhalt des gegebenen Rechtecks $ABCD$, also gleich q. (Benutze den Satz von Ergänzungsparallelogrammen, oder Ähnlichkeitssätze: Die ähnlichen Dreiecke FGD und FAC ergeben $\frac{h + x}{p + r} = \frac{h}{r}$ (mit $r = \overline{FC} = \overline{HA}$). Die ähnlichen Dreiecke FIG und AKG ergeben $\frac{h + x}{p + r} = \frac{x}{p}$.

Somit ist $\frac{h}{r} = \frac{x}{p}$, d. h. $xr = hp = q$.)

Das Rechteck $GBHI$ hat also einerseits den Flächeninhalt x^3, andererseits den Flächeninhalt $px + q$, somit gilt $x^3 = px + q$. Die Strecke BG hat somit die Länge x mit $x^3 = px + q$.

Einerseits führt die Suche nach positiven Lösungen der Gleichung $x^3 = px + q$ (mit positiven p, q) auf die Formel (B), die in bestimmten Fällen jedoch „Zahlen" der Form $a + \sqrt{-b}$ enthält. Andererseits hat eine solche Gleichung stets eine positive Lösung, die sich überdies in bestimmten Fällen nach der Formel (B) auch dann ausrechnen läßt, wenn „Zahlen" der Form $a + \sqrt{-b}$ auftreten.

Dieses könnte für Bombelli das Argument für eine eingehendere Beschäftigung mit solchen Ausdrücken, in denen Quadratwurzeln aus negativen Zahlen auftreten, gewesen sein. Bombelli nannte sie „sophistische Größen". Cardano gestand 1576 ein, daß er nicht wisse, was diese Größen wirklich wären, die so viele Wunder tun. Schon in seiner „Ars magna" löste er die Aufgabe, die Zahl 10 in zwei Summanden zu zerlegen, deren Produkt 40 ist. Er erkannte $5 + \sqrt{-15}$, $5 - \sqrt{-15}$ als Lösungen (nannte sie jedoch „wahrhaft sophistische Lösungen"):

$$5 + \sqrt{-15} + 5 - \sqrt{-15} = 10$$
$$(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 5^2 - (\sqrt{-15})^2$$
$$= 25 - (-15) = 40\,.$$

Diejenigen Fälle, in welchen die „Lösungsformeln" für kubische Gleichungen unter der Kubikwurzel Quadratwurzel aus negativen Zahlen enthalten, beschäftigten die Mathematiker nach Cardano und Bombelli noch für lange Zeit. Das Verfahren Bombellis zur Berechnung von $\sqrt[3]{a + \sqrt{-b}}$ wurde wenig beachtet und sicher bald vergessen, da bereits 1591 Francois Viète (auch Vieta genannt) ein neues Verfahren, die kubischen Gleichungen $x^3 = px + q$ im Fall $\left(\frac{q}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{q}\right)^3$ aufzulösen, entdeckte.

Wie Bombelli gab auch René Descartes eine geometrische Konstruktion für die positive Lösung der Gleichung $x^3 = px + q$. Er bezeichnete „Zahlen" der Form $a + \sqrt{-b}$ als „imaginäre Größen".

Bombelli gab in seiner „Algebra" die erste Einführung in das Rechnen mit, wie wir sagen, komplexen Zahlen. Er bezeichnet $\sqrt{-1}$ als „piu di meno", $-\sqrt{-1}$ als „meno di meno" (abgekürzt: p. di m., m. di m.) und sieht die komplexen Zahlen als „Linearkombinationen" (mit positiven Zahlenkoeffizienten) der vier Grundgrößen 1 („piu"), -1 („meno"), $\sqrt{-1}$ (p. di m.) und $-\sqrt{-1}$ (m. di m.) an, wobei sich „piu" und „piu di meno" nicht addieren lassen. Bombelli behandelte die Multiplikation, die Division, das Kubikwurzelziehen, die Addition, die Subtraktion komplexer Zahlen. Bei der Behandlung quadratischer Gleichungen findet sich das Beispiel $x^2 + 20 = 8x$ mit den „sophistischen" Lösungen $4 + \sqrt{-2}$, $4 - \sqrt{-2}$.

H. Pieper

XXVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Schulolympiade

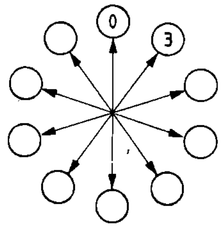
Abgabe beim Mathematiklehrer: Ende September 1986

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen. Die Lösungen werden im Oktober 1986 veröffentlicht.
Hinweis: Unter den Aufgaben der 1. Stufe befinden sich auch solche (in der Regel ist es die 4. Aufgabe), die aus mehreren Teilaufgaben von steigendem Schwierigkeitsgrad bestehen. Dabei ist Teil a) meist recht einfach zu lösen und gibt in der Regel Hilfe für die Lösung der anderen Teilaufgaben. Die Lösung der letzten Teilaufgabe stellt bewußt hohe Anforderungen. Diese Teilaufgabe ist vorwiegend für die leistungsstärkeren Schüler gedacht. Es wird empfohlen, über diese anspruchsvollen Aufgaben in Klassen und Arbeitsgemeinschaften zu diskutieren.
Anmerkung: $\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet im folgenden die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$. Ferner bezeichnet AB die Strecke mit den Endpunkten A und B, während $\overline{AB}$ die Länge der Strecke AB bedeutet.

Olympiadeklasse 5

260511 Die Mädchen Grit, Regina und Beate tragen jede eine einfarbige Bluse. Von diesen drei Blusen ist eine gelb, eine rot und eine blau.
Grit stellt fest, daß keines der Mädchen eine Bluse von der Farbe trägt, die den gleichen Anfangsbuchstaben wie der Vorname des Mädchens hat. Das Mädchen mit der roten Bluse antwortet darauf: „Das hatte ich noch gar nicht bemerkt, aber du hast recht, Grit!"
Welche Bluse trägt jedes der Mädchen?

260512 a) Die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sollen so in die kleinen Kreise des Bildes eingetragen werden, daß jedes Paar benachbarter Kreise dieselbe Summe wie das Paar an den beiden entgegengesetzten Pfeilspitzen ergibt.
Jede der zehn Zahlen soll genau einmal vorkommen. Die Zahlen 0 und 3 sollen wie angegeben eingetragen werden.
Gib eine Eintragung an, die alle diese Forderungen erfüllt!



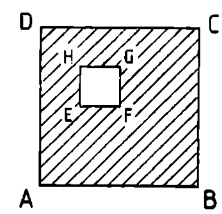
b) Für die Zahlen 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 läßt sich eine entsprechende Aufgabe stellen. Wie kann man für sie auf einfache Weise eine Lösung aus der Lösung von a) gewinnen?
c) Löse die entsprechende Aufgabe für die natürlichen Zahlen
$n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5, n+6, n+7, n+8, n+9$!
d) Begründe deine Lösung von c)!

260513 Jörg bewundert Holgers Kaninchen und Tauben. Er möchte gern wissen, wieviel Kaninchen und Tauben Holger besitzt, und fragt ihn deshalb danach. Dieser antwortet: „Ich habe insgesamt 24 Tiere, die zusammen 62 Beine haben. Andere Tiere als Kaninchen und Tauben habe ich nicht."
Wieviel Kaninchen und wieviel Tauben besitzt Holger?
Begründe deine Antworten!

260514 Der Pionier Klaus Knobler tritt als Zauberkünstler vor seiner Pioniergruppe auf. Nachdem ihm die Augen verbunden wurden, bittet er einen Zuschauer, aus einer Streichholzschachtel eine beliebige ungerade Anzahl von Hölzern, jedoch mindestens 13, zu entnehmen. Diese Hölzer sollen in zwei parallelen Reihen auf den Tisch gelegt werden, wobei die obere Reihe genau ein Streichholz mehr enthalten soll als die untere.
Nachdem dies geschehen ist, läßt Klaus Knobler
(1) irgendeine von ihm selbst genannte Anzahl a (mindestens 1, jedoch weniger als 7) Streichhölzer aus der oberen Reihe fortnehmen, dann
(2) aus der unteren Reihe so viele Streichhölzer wegnehmen, wie oben noch liegen, und dann
(3) aus der oberen Reihe alle übrigen Streichhölzer entfernen. Danach nennt Klaus Knobler den staunenden Zuschauern die Anzahl der auf dem Tisch verbliebenen Hölzer. Wie groß ist sie?
Durch welche Überlegung kann Klaus Knobler sie finden, ohne die Anzahl der zu Beginn auf dem Tisch liegenden Hölzer zu kennen?

Olympiadeklasse 6

260611 In ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 8 cm ist ein Quadrat $EFGH$ mit der Seitenlänge 2 cm so eingezeichnet, wie es das Bild zeigt. HG und DC sind zueinander parallele Strecken mit dem Abstand 2 cm voneinander. EH und AD sind zueinander parallele Strecken mit dem Abstand 2 cm voneinander.
a) Berechne den Flächeninhalt der im Bild schraffierten Fläche!
b) Die schraffierte Fläche soll in fünf Teile zerlegt werden. Diese Teile sollen so gestaltet sein, daß man je zwei von ihnen durch Drehen oder Verschieben miteinander zur Deckung bringen kann. Zeichne eine solche Aufteilung der schraffierten Fläche!



260612 Zur Durchführung eines Geländespiels war es nötig, daß jeder Teilnehmer ein Schreibgerät bei sich hatte. Es waren nur folgende Sorten Schreibgeräte von Teilnehmern mitgebracht worden: Kugelschreiber, Rotstifte und Grünstifte; keine dieser drei Sorten kam doppelt bei einem der Teilnehmer vor.
Im einzelnen wurde festgestellt:
(1) Es waren insgesamt 100 Teilnehmer bei diesem Geländespiel.
(2) Genau 20 der Teilnehmer hatten einen Kugelschreiber, aber keinen Rotstift.
(3) Genau 15 der Teilnehmer hatten einen Kugelschreiber, aber keinen Grünstift.
(4) Genau 5 der Teilnehmer hatten einen Kugelschreiber, aber weder einen Rotstift noch einen Grünstift.
(5) Genau 65 der Teilnehmer hatten keinen Kugelschreiber.
(6) Genau 55 der Teilnehmer hatten keinen Rotstift.
(7) Genau 40 der Teilnehmer hatten keinen Grünstift.
(8) Genau 15 der Teilnehmer hatten weder einen Rotstift noch einen Grünstift.
a) Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl derjenigen Teilnehmer, die wenigstens ein Schreibgerät mitgebracht hatten!
b) Reichten die mitgebrachten Schreibgeräte aus, um bei geeigneter Verteilung jeden der 100 Teilnehmer mit einem Schreibgerät zu versorgen?

260613 Die Verbindungsstraßen dreier Orte A, B, C bilden ein Dreieck. In der Mitte der Verbindungsstraße von B nach C liegt ein weiterer Ort D. Von A über B nach C beträgt die Entfernung 25 km, von B über C nach A dagegen 27 km und von C

über A nach B schließlich 28 km. Eine Pioniergruppe wandert auf den genannten Straßen auf kürzestem Wege vom Ort A zum Ort D.
a) Über welchen der beiden Orte B oder C läuft die Pioniergruppe? Begründe deine Entscheidung!
b) Wieviel Zeit spart sie gegenüber dem längeren der beiden möglichen Wege von A nach D ein, wenn sie stündlich 4 km zurücklegt?
c) Wie lang ist der von ihr insgesamt zurückgelegte Weg?

260614 Auf einem Kreis werden wie beim Zifferblatt einer Uhr zwölf Punkte eingetragen. Auf jeden der Punkte wird genau ein Spielstein gelegt. Zwei Spieler A und B sollen abwechselnd jeweils entweder genau einen Stein oder genau zwei Steine, die auf benachbarten Punkten liegen, wegnehmen. Spieler A beginnt. Gewonnen hat der Spieler, der den letzten Spielstein wegnimmt.
Wie kann Spieler B vorgehen, um in jedem Fall zu gewinnen?

Olympiadeklasse 7

260711 Ermittle für jede der nachfolgenden Teilaufgaben a) bis e) jeweils alle diejenigen natürlichen Zahlen n, die die angegebene Forderung erfüllen!
Forderung a): Die Summe $\left(\frac{7}{32}+\frac{n}{12}\right)$ ist ein echter Bruch.
Forderung b): Die Summe $\left(\frac{7}{32}+\frac{n}{12}\right)$ ist ein echter Bruch, der sich nicht mehr durch Kürzen vereinfachen läßt.
Forderung c): Die Aufgabe, die Differenz $\left(\frac{7}{12}-\frac{n}{12}\right)$ zu berechnen, ist im Bereich der gebrochenen Zahlen nicht lösbar.
Forderung d): Die Differenz $\left(\frac{7}{12}-\frac{n}{12}\right)$ ist ein echter Bruch.
Forderung e): Die Summe $\left(\frac{7}{12}+\frac{n}{12}\right)$ ist eine natürliche Zahl.

260712 In der Materialausgabe eines Betriebes sind durch ein Mißgeschick die Schlüssel von zwölf Vorhängeschlössern durcheinandergekommen. Da zu jedem Vorhängeschloß von den insgesamt zwölf Schlüsseln nur einer paßt und zu jedem Schlüssel nur eines der Vorhängeschlösser, die sich äußerlich nicht voneinander unterscheiden, muß herausgefunden werden, welcher Schlüssel zu welchem Schloß gehört. Lehrling Bernd, der mit dieser Aufgabe betraut wurde, dachte: „Jetzt muß ich zwölf Schlüssel an zwölf Schlössern ausprobieren, muß also, wenn ich Pech habe, $12 \cdot 12 = 144$ Proben ausführen." Sein Freund Uwe meinte jedoch, daß man mit viel weniger Proben auskommt.
Ermittle die kleinste Anzahl von Proben, mit der man mit Sicherheit (d. h. auch noch im ungünstigsten Fall) zu jedem Vorhängeschloß den passenden Schlüssel findet!

260713 Für die Klassen 2, 3 und 4 einer Schule steht ein Schulgarten mit einem Flächeninhalt von genau 800 Quadratmetern zur Verfügung. Ein Viertel dieser Fläche wird für einen Spielplatz und für das Anlegen von Wegen vorgesehen, die übrige Fläche soll zur Bearbeitung auf die drei Klassen aufgeteilt werden. Da den einzelnen Klassen unterschiedlich viele Schüler angehören, nämlich der 2. Klasse 25 Schüler, der 3. Klasse 20 Schüler und der 4. Klasse 30 Schüler, wird vereinbart, daß jedem Schüler der genannten Klassen eine gleich große Fläche zur Bearbeitung zugewiesen wird.
Wieviel Quadratmeter Gartenland hat demnach jede der drei Klassen zu bearbeiten?

260714 Ein *Junger Mathematiker* zeichnet ein Rechteck und halbiert die Seiten. Er vermutet, daß die vier Seitenmittelpunkte Eckpunkte eines Rhombus sind.
Untersuche, ob diese Vermutung für jedes Rechteck wahr ist!

Olympiadeklasse 8

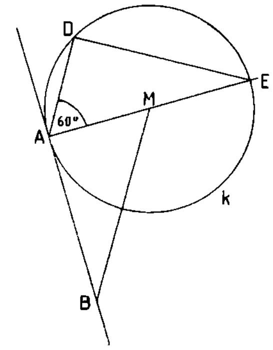
260811 In das nachstehende Kryptogramm sind für die Buchstaben die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so einzutragen, daß für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern stehen und daß alle angegebenen Rechenaufgaben richtig gelöst sind.

$$\begin{array}{ccccc} ABC & - & DB & = & ECC \\ : & & - & & - \\ FG & \cdot & CH & = & DIH \\ \hline KC & + & CK & = & DD \end{array}$$

a) Gib eine Eintragung an und zeige, daß sie den oben angegebenen Bedingungen genügt!
b) Untersuche, ob es außer der von dir gefundenen Eintragung weitere Möglichkeiten gibt. Ist dies der Fall, dann ermittle alle Eintragungen, die den Bedingungen genügen!

260812 Uwe möchte mit einem Taschenrechner feststellen, ob 37 ein Teiler von 45 679 091 ist. Wenn er dabei den Rechner SR 1 verwendet, könnte er folgendermaßen vorgehen: Er dividiert 45 679 091 durch 37. Der Rechner SR 1 zeigt 1 234 570 an, also ein ganzzahliges Ergebnis. Zur Kontrolle multipliziert Uwe dieses Ergebnis, ohne es neu einzutippen, wieder mit 37. Der Rechner zeigt als Ergebnis wieder 45 679 091 an. (Du kannst dies mit einem SR 1 selbst ausprobieren.)
Kann Uwe nun schließen, daß 37 ein Teiler von 45 679 091 ist?

260813 Es sei k ein Kreis, sein Mittelpunkt sei M. Vier Punkte A, C, E und D seien in dieser Reihenfolge auf k so gelegen, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind (siehe Bild):
(1) A, M und E liegen auf ein und derselben Geraden.
(2) Es gilt $\sphericalangle MAD = 60°$.
(3) Die Gerade durch M und C schneide die in A an k gelegte Tangente in einem Punkt B derart, daß $\overline{MC} = \overline{BC}$ gilt.

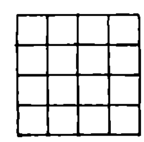


Untersuche, ob unter diesen Voraussetzungen die Strecken AB und DE die gleiche Länge haben!

260814 Es sei $ABCDEF$ ein gerades dreiseitiges Prisma. Alle drei Seitenflächen $ABED$, $BCFE$, $CADF$ sowie die Grund- und die Deckfläche ABC bzw. DEF seien sämtlich einander umfangsgleich. Gegeben sei die Länge h der Strecke AD.
Ermittle in Abhängigkeit von h die Längen der Strecken BC, CA und AB!

Olympiadeklasse 9

260911 In dem abgebildeten Quadrat mit 4×4 Teilquadraten sollen 8 von diesen 16 Teilquadraten so gekennzeichnet werden, daß in jeder Zeile, in jeder Spalte und in den beiden Diagonalen genau zwei Teilquadrate gekennzeichnet sind.



Geben Sie fünf voneinander verschiedene Lösungen der Aufgaben an, d.h. Lösungen, von denen sich keine zwei durch Spiegelung oder Drehung ineinander überführen lassen! Eine Begründung wird nicht verlangt.

260912 Es seien a, b, s drei gegebene Streckenlängen. Peter soll eine Strecke der Länge s im Verhältnis $a^2 : b^2$ teilen. Er gibt folgende Konstruktion an:
(1) Man konstruiert ein rechtwinkliges Dreieck aus $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ und $\sphericalangle ACB = 90°$.
(2) Von C fällt man das Lot auf AB, sein Fußpunkt sei p.
(3) In B trägt man an BA einen Winkel an, dessen Größe zwischen 0° und 180° liegt. Auf dem freien Schenkel dieses Winkels wird von B aus die Strecke der Länge s abgetragen, ihr anderer Endpunkt sei E.
(4) Die Parallele zu EA durch D schneide BE in einem Punkt, der F genannt sei.
a) Führen Sie die beschriebene Konstruktion durch!
b) Beweisen Sie: Wenn eine Strecke BE und ein Punkt F nach Peters Beschreibung konstruiert werden, dann teilt F die Strecke BE im Verhältnis
$\overline{BF} : \overline{FE} = a^2 : b^2$.

260913 Ermitteln Sie die Anzahl aller verschiedenen Tripel ganzer Zahlen (x, y, z), für die

$$x \leqq y \leqq z \qquad (1)$$

und $xyz = 1986$ gilt! (2)

Hinweis: Zwei Tripel (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) heißen genau dann voneinander verschieden, wenn mindestens eine der Ungleichungen

$x_1 \neq x_2 \cdot y_1 \neq y_2 \cdot z_1 \neq z_2$ gilt.

260914 Untersuchen Sie, ob es natürliche Zahlen n derart gibt, daß die Lösung x der Gleichung

$$17x + n = 6x + 185$$

ebenfalls eine natürliche Zahl ist!
Wenn das der Fall ist, so ermitteln Sie die kleinste derartige Zahl n und die zugehörige Lösung x der gegebenen Gleichung!

Olympiadeklasse 10

261011 Auf welche Ziffer endet die Zahl

$$z = 4444^{444^{44^{4}}} \quad ?$$

261012 Martin erzählt seinem Freund Jörg, er habe ein Parallelogramm $ABCD$ gezeichnet, bei dem das von B auf die Gerade durch A und D gefällte Lot BE durch den Schnittpunkt S verläuft, den die Mittelsenkrechte s von AB mit der Winkelhalbierenden w des Winkels $\sphericalangle BAD$ hat. Jörg behauptet, daß sich allein aus diesen Angaben die Größe des Winkels $\sphericalangle CBA$ ermitteln läßt.
Untersuchen Sie, ob Jörgs Behauptung wahr ist! Ist das der Fall, so ermitteln Sie die Größe des Winkels $\sphericalangle CBA$!

261013 Man denke sich durch den Mittelpunkt einer Kugel drei (nicht notwendig voneinander verschiedene) Ebenen gelegt.
In wie viele Teilflächen kann die Kugeloberfläche durch solche Ebenen zerlegt werden?
Nehmen Sie eine Fallunterscheidung vor, um alle Möglichkeiten für die gesuchte Anzahl von Teilflächen zu erhalten!

261014 Jürgen behauptet, daß es ein Positionssystem mit der Basis m gibt, in dem die folgende Rechnung richtig ist:

$$\begin{array}{l} \underline{701 \cdot 34} \\ 2503 \\ \underline{\;\;3404} \\ 30434 \end{array}$$

Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen m, für die das zutrifft!
Hinweis: In einem Positionssystem mit der Basis m gibt es genau die Ziffern $0, 1, \ldots, m-2, m-1$.
Jede natürliche Zahl wird als Summe von Produkten aus jeweils einer Potenz von m mit einer der Ziffern dargestellt; dabei werden die Potenzen nach fallenden Exponenten geordnet. Geschrieben wird dann die Folge der Ziffern, so wie es für $m = 10$ bei der dekadischen Schreibweise natürlicher Zahlen bekannt ist.
Fortsetzung Kl. 11/12 siehe S. 96!

ARBEITS-GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Liebe Redaktion *alpha*!

Wie ich aus den schon zahlreichen *alphas* entnehmen konnte, nehmt Ihr auch eingesandte Aufgaben von Schülern bzw. Lesern entgegen. Mit einem kleinen Beitrag möchte auch ich mich daran beteiligen. Diese Aufgaben entnahm ich der Lagerolympiade des Spezialistenlagers des Bezirkes Dresden – Nossen 1984 der Klassenstufen 7/8. Ebenfalls entstammen Aufgaben aus meinem kleinen Buch über Aufgaben, welches ich mir vor einigen Jahren anlegte.

Schüler Maik Mühle
Spezialschule Mathematik, Riesa

Aufgaben

▲1▲ Gegeben sei ein Kreis k mit einem Radius der Länge r und dem Mittelpunkt M. Es sei eine Sehne $\overline{AB}$ eingezeichnet, die nicht Durchmesser von k ist. Die Sehne $\overline{AB}$ werde über B hinaus verlängert bis C, und es gelte: Länge von $\overline{BC}$ ist gleich r. Der Strahl CM schneide den Kreis k in D.
Es ist zu beweisen, daß der Winkel $\sphericalangle AMD$ dreimal so groß wie der Winkel $\sphericalangle ACM$ ist!

▲2▲ Es ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse $\overline{AB}$ aus folgenden Stücken zu konstruieren:
$r = 2{,}5$ cm
(r sei die Länge des Inkreisradius),
$\alpha = 50°$
(α sei die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$).
Die Konstruktion ist zu beschreiben!

▲3▲ Durch einen Punkt P im Inneren eines Quadrates $ABCD$ seien zwei senkrecht aufeinander stehende Geraden so gezeichnet, daß die Seiten $\overline{AD}$ in E, $\overline{AB}$ in F, $\overline{BC}$ in G und $\overline{CD}$ in H geschnitten werden. Die Schnittpunkte seien sämtlich von den Eckpunkten des Quadrates verschieden.
Es ist zu beweisen, daß die Strecken $\overline{EG}$ und $\overline{HF}$ kongruent sind!

▲4▲ Die unterschiedlichen Telefonnummern zweier Mathematiker weisen folgende Gemeinsamkeiten auf:
(1) Beide Nummern sind dreistellige Primzahlen.
(2) Jede einzelne Grundziffer in beiden Nummern stellt eine Primzahl dar.
(3) Die mittlere Ziffer stimmt in beiden Nummern überein.
(4) Die Ziffer an der ersten Stelle der einen Nummer ist gleich der Ziffer an der letzten Stelle der anderen Nummer und umgekehrt.
Es sind beide Telefonnummern zu ermitteln, und es ist nachzuweisen, daß diese Telefonnummern die einzigen sind, die den geforderten Bedingungen entsprechen!

Liebe Redaktion *alpha*!

Wir sind eine kleine Schule und möchten heute einmal etwas über unser Mathematikleben berichten. Die *alpha* gibt es in unserem Mathematik-Kabinett vom Jahrgang 1967 an. Seit dieser Zeit ist unsere Mathematiklehrerin, Frau Preuß, in Domersleben, denn wir waren ja damals noch gar nicht geboren.
Seit dieser Zeit gibt es auch eine AG Mathematik unter ihrer Leitung. In unserem Mathe-Schrank haben wir von der *alpha* aus den Jahren 1970 und 1972 Briefe gefunden. Viel Spaß macht es uns, mit der *alpha* zu knobeln, besonders mit *alpha*-heiter. Regelmäßig haben wir jeden Montag AG. Dort gestalten wir auch eine Wandzeitung für unser Mathe-Kabinett. Letzthin machten wir eine über „40 Jahre Bodenreform" mit Aufgaben aus der Landwirtschaft aus alten und neuen Lehrbüchern. Dazu verwendeten wir die *alpha* 4/85 und blätterten ebenfalls in alten *alpha*-Jahrgängen. Jedes Jahr führen wir auch eine Schulolympiade Mathematik durch. Sie findet immer in unserer Schulgedenkwoche zu Ehren von Katja Niederkirchner (27. Sept. bis 7. Okt.) statt. Die besten Schüler werden dann zur Kreisolympiade delegiert. Guido und Karsten haben bereits zweimal die 1. Plätze belegt. Karsten besucht auch den Försterclub an der Technischen Hochschule in Magdeburg. Wir stellen auch Knobelaufgaben für den Hort oder für Wissensstraßen zusammen. Aus der *practic* basteln wir Spiele oder denken uns mathematische Rätsel aus. Die Rätsel- und Knobelaufgaben im ND lösen wir auch.
Zwei Aufgaben haben wir für Euch, liebe *alpha*-Leser, ausgedacht.

Es grüßt Euch im Namen aller AG-Teilnehmer Guido

Aufgaben

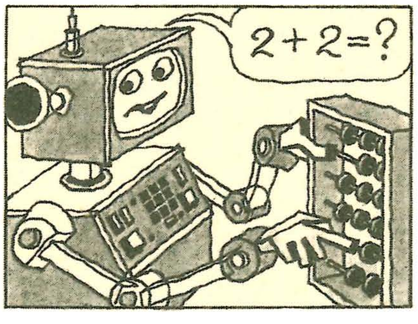
▲1▲ Gegeben ist ein regelmäßiges Sechseck mit der Diagonale FC und der Strecke AE. Es soll bewiesen werden, daß die Strecke FS stets halb so groß ist wie die Seitenlänge EF des Sechsecks.

▲2▲ In einer 7. Klasse besteht der 3. Teil der Schüler aus Mädchen. Der 4. Teil hat die 1. Schwimmstufe. Die 2. Stufe wurde vom 6. Teil der Schüler abgelegt. Die Gesamtschülerzahl liegt zwischen 20 und 30. Wieviel Schüler gehören zur 7. Klasse?

Computer – Algorithmus – Algorithmische Sprache, Teil 2

Ein Algorithmus muß so formuliert sein, daß derjenige, der ihn abarbeiten soll, die einzelnen Anweisungen versteht und in der Lage ist, sie auszuführen. Ist der Ausführende ein Mensch (evtl. mit einem Taschenrechner), so kann – wie im Teil 1 unseres Beitrags – weitgehend die Umgangssprache in Verbindung mit der in der Mathematik üblichen Terminologie und Symbolik benutzt werden. Will man den Algorithmus jedoch von einem Computer ausführen lassen, so muß man genau beachten, welche Tätigkeiten dieser Computer beherrscht, und den Algorithmus in einer dem Computer verständlichen Sprache aufschreiben. Wir wenden uns deshalb der Frage zu

Was muß ein Computer mindestens können?



1. *Rechnen*

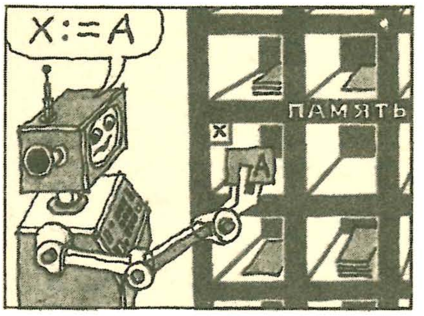
Dabei geht es nicht nur um das schnelle und fehlerfreie Ausführen der vier Grundrechenoperationen, sondern auch um das Erkennen der Reihenfolge der auszuführenden Operationen, um das Berücksichtigen von Klammern und das Einsetzen von Zahlenwerten für Variable. So teilt ein Computer fast sofort mit, daß für $x = 0{,}17$ und $y = 1{,}32$ der Term

$$\frac{(x^2 + 3x)(y^3 + 5xy)}{\sqrt{x^2 + xy}} \text{ den Wert } 3{,}664\,095\,5$$

annimmt. Für ihn sind weder große Zahlen noch umfangreiche Rechnungen ein Problem.

2. *Speichern*

Der Computer kann ihm mitgeteilte Daten (Zahlen oder auch Zeichenfolgen, z. B. Wörter der deutschen Sprache) in seinem Gedächtnis – dem *Speicher* – aufbewahren. Insbesondere kann er auch *Kommandos* bzw. Kommandofolgen speichern. Bei Bedarf kann er diese Daten löschen, ersetzen oder sie verändern.



In diesem Zusammenhang werden *Variable* in einem etwas anderen Sinne gebraucht, als ihr das aus dem Mathematikunterricht gewohnt seid. Eine Variable bezeichnet hier einen *Speicherplatz*, auf dem eine Zahl oder eine Zeichenfolge abgelegt werden kann. Die Schreibweise X: = 5 bedeutet: Lege die Zahl 5 auf dem Speicherplatz X ab! X: = A bedeutet: Nimm den Inhalt vom Speicherplatz A, und bringe ihn auf den Speicherplatz X! (Siehe Bild 2.) In beiden Fällen geht der vorherige Inhalt des Speicherplatzes X verloren, er wird *überschrieben*. Dagegen bleibt der Inhalt von Platz A erhalten. Man kann sich dies am SR 1 veranschaulichen:

X ist das Anzeigefeld.

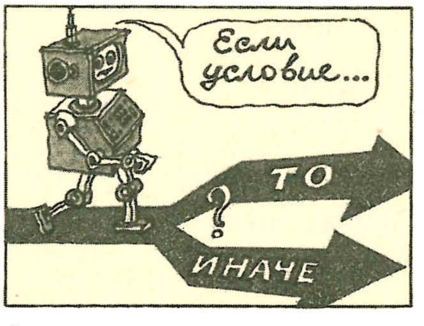
M ist der gewohnte Speicher des Taschenrechners (der nur aus einem einzigen Speicherplatz besteht).

M: = X entspricht dem Betätigen der Taste $\boxed{\text{X}\rightarrow\text{M}}$.

Die etwas ungewohnte Schreibweise X: = X + 1 bedeutet: Nimm den Inhalt vom Speicherplatz X, addiere zu ihm die Zahl 1, und lege das Ergebnis zurück auf den Platz X.

Auch das tritt am SR 1 auf:

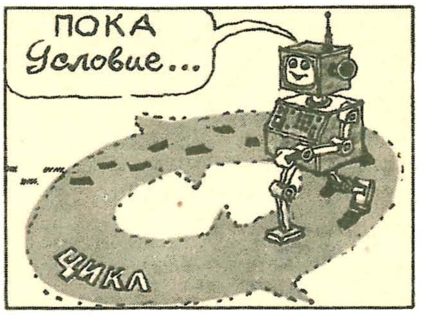
Mit den bereits benutzten Bezeichnungen entspricht das Betätigen der Taste $\boxed{\text{M+}}$ der Anweisung M: = M + X.



3. *Entscheidungen treffen*

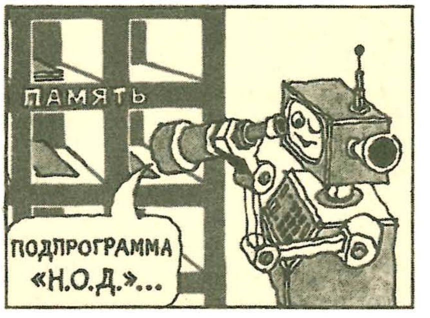
Der Computer muß in bestimmten Situationen Entscheidungen für sein weiteres Vorgehen treffen. Dabei überprüft er, ob eine im Algorithmus angegebene *Bedingung* erfüllt ist.

Wenn sie erfüllt ist, *dann* führt er eine vom Algorithmus vorgeschriebene Folge von Kommandos aus, *sonst* eine andere (ebenfalls vom Algorithmus vorgeschriebene) Folge. Solch eine Stelle im Algorithmus nennen die Programmierer eine *bedingte Verzweigung*. Natürlich muß der Computer die angegebene Bedingung verstehen und sie überprüfen können.



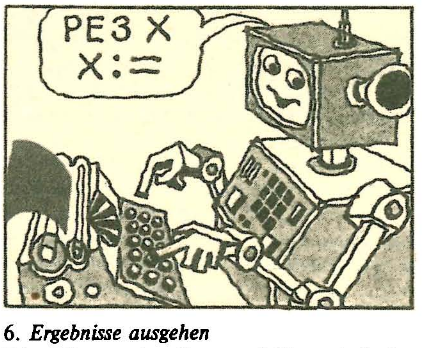
4. *Schritte wiederholen*

Der Computer wiederholt (schnell und gegebenenfalls sehr oft) ein und dieselbe Folge von Kommandos (man sagt: er durchläuft einen *Zyklus*), *solange* eine bestimmte Bedingung (die Zyklenbedingung) erfüllt ist. Diese Bedingung muß er vor jedem Durchlaufen des Zyklus überprüfen. Stellt er fest, daß sie nicht (mehr) erfüllt ist, so geht er zum unmittelbar auf den Zyklus folgenden Kommando über.



5. *Sich an Hilfsalgorithmen erinnern*

Der Computer muß seinem Speicher bei Bedarf die dort abgelegten Daten (Zahlen, Zeichenfolgen) entnehmen können. Insbesondere kann im Speicher ein *Hilfsalgorithmus* abgelegt sein. Bei Erwähnung des *Namens* eines Hilfsalgorithmus erinnert sich der Computer an ihn und führt ihn aus, ohne daß ihm noch einmal alle Kommandos des Hilfsalgorithmus mitgeteilt werden müssen. So etwas nennen die Programmierer *Unterprogrammaufruf*.



6. *Ergebnisse ausgehen*

Die Lösung der ihm gestellten Aufgabe schreibt der Computer auf einen Bildschirm oder (z. B. mit einer elektrischen Schreibmaschine) auf einen Bogen Papier. Darüber hinaus dienen im *Dialogbetrieb* der Bildschirm und die Schreibmaschinentastatur der Verständigung zwischen Benutzer und Computer während der Abarbeitung des Algorithmus.

A. P. Jerschow/C.-P. Helmholz

Spaß mit „Sternchen“

In den zurückliegenden Jahren waren unter den Aufgaben der Mathematikolympiaden und unter den Wettbewerbsaufgaben der Schülerzeitschrift *alpha* sogenannte *Sternchenaufgaben* zu finden.
Wir stellen eine solche Aufgabe vor:
In der Multiplikationsaufgabe

6* · ***
**
 **
  **
***6

ist jedes Sternchen (*) so durch eine der Grundziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Aufgabe entsteht. Dabei muß jede Zeile mit einer von 0 verschiedenen Grundziffer beginnen.
Die Lösung dieser recht einfachen Aufgabe lautet:

66 · 111
66
 66
  66
7326

Diese Lösung kann wie folgt begründet werden:
Wegen $60 \cdot 2 = 120$ und $120 > 99$ muß jede Grundziffer des zweiten Faktors eine 1 sein. Da an der letzten Stelle des Ergebnisses die Grundziffer 6 steht, muß die zweite Grundziffer des ersten Faktors eine 6 sein.
Solche Sternchenaufgaben werden, wie uns bekannt ist, gern von Schülern gelöst. Deshalb wurden Aufgaben dieser Art auch in die neuen Mathematiklehrbücher für Schüler der Klassen 4 und 5 aufgenommen. Um alle Schüler zu befähigen, solche Aufgaben möglichst schnell und sicher zu lösen und den Lösungsweg zu begründen, stellen wir zunächst einmal die Sternchenaufgaben des *Mathematiklehrbuches für Klasse 4* vor und erläutern die Lösungswege. In einem der folgenden Hefte wenden wir uns solchen Aufgaben aus dem Mathematiklehrbuch für Klasse 5 zu.
Und nun heißt es:

Mitarbeiten – Mitdenken – Begründen!

▲1▲ Bei folgenden Zahlen sind Grundziffern unleserlich geworden und durch Sternchen ersetzt. Versuche, diese Zahlen trotzdem miteinander zu vergleichen!
a) 5*** und 4***
b) 9** und 1***
c) **** und *99
d) 63*** und 67***
e) ****0 und 87**
f) 1**1 und *99*

▲2▲ Bei einigen der folgenden Zahlen sind Grundziffern unleserlich geworden und durch * ersetzt. Versuche, diese Zahlen dennoch der Größe nach zu ordnen!
a) 2**37**, 3**7**, 1*91***, 9*****;
b) 2*76*, 2*75*, *2*76*, 2*7**;
c) 1*3, 3**1, **94*.

▲3▲ Ersetze das Zeichen * jeweils durch die richtige Grundziffer!

a)
**4*4
− 913*
6*51

b)
206
− 18**5
2*347

c)
8*6*3
− 17581
*5*6*

d)
*93*2
− 25*6*
2*515

▲4▲ Ersetze in den folgenden Aufgaben die Zeichen * durch passende Grundziffern!

a) 8318 · * = 16***
b) 8** · 9 = *389
c) 76*8 · 4 = **47*
d) **06 · * = 64442
e) 48*3 · 8 = **82*
f) **27 · * = 66*5
g) 2*74 · * = *24*4
h) 562* · * = 16**7

▲5▲ Ersetze die Zeichen * so durch Grundziffern, daß die Rechnungen stimmen!

a)
57 · 6*
34*
 **4
****

b)
95 · *3
1*0
 ***
****

c)
4* · 36
1**
 **6
****

d)
263 · *7
**6
 **6
****

e)
728 · 4*
****
 2***
****4

Wir arbeiten mit Resten Teil 1

Ein Arbeitsmaterial für Schülerzirkel ab Klasse 6

Im Unterricht habt ihr eine Regel für die Teilbarkeit natürlicher Zahlen durch 9 kennengelernt (↗ LB 6, S. 20):
Jede Zahl, deren Quersumme durch 9 teilbar ist, ist durch 9 teilbar. Alle anderen Zahlen sind nicht durch 9 teilbar.

▲1▲ Erläutere die Sprechweise *a ist durch 9 teilbar!*
Benutze dazu die Definition des Begriffs *Teiler* (↗ LB 6, S. 7)!
Gib andere Sprechweisen für denselben Sachverhalt an! Nenne Beispiele und Gegenbeispiele!

Die genannte Teilbarkeitsregel wurde im Unterricht nicht bewiesen. Sie folgt unmittelbar aus dem *Satz*:
Läßt die Quersumme einer natürlichen Zahl bei Division durch 9 den Rest r, so läßt auch die Zahl selbst bei Division durch 9 den Rest r.
Beim Beweis dieses Satzes (der schon einmal in einer Aufgabe der Olympiade *Junger Mathematiker* gefordert wurde) sind *Reste* bei Division natürlicher Zahlen durch eine bestimmte natürliche Zahl zu untersuchen. Schreibweisen wie $13 : 5 = 2$ Rest 3 sind dabei meist umständlich oder sogar ungeeignet, da man sie nicht wie Gleichungen behandeln kann.
Ihr wißt schon, daß man jede ungerade Zahl n in der Form $n = 2k + 1$ $(k \in N)$ schreiben kann. Dies kann man auch wie folgt lesen: „Die natürliche Zahl n läßt bei Division durch 2 den Rest 1.“ Wir übertragen diese Schreibweise auf beliebige Divisoren:

13 läßt bei Division durch 5 den Rest 3.
$13 = 2 \cdot 5 + 3$

27 läßt bei Division durch 7 den Rest 6.
$27 = 3 \cdot 7 + 6$

34 läßt bei Division durch 17 den Rest 0.
$34 = 2 \cdot 17 + 0$
(34 ist durch 17 teilbar.)

n läßt bei Division durch 4 den Rest 1.
Es gibt eine natürliche Zahl k, so daß gilt $n = k \cdot 4 + 1$.

a läßt bei Division durch b den Rest 2.
Es gibt eine natürliche Zahl k, so daß gilt $a = k \cdot b + 2$.

*a läßt bei Division durch b den Rest r.
Es gibt eine natürliche Zahl k, so daß gilt $a = k \cdot b + r$ $(r < b)$.*

▲2▲ a) Beweise: Lassen zwei natürliche Zahlen a und b bei Division durch 9 denselben Rest, und ist $a \leqq b$, so ist die Differenz $b - a$ durch 9 teilbar!
b) Formuliere einen entsprechenden Satz für *beliebige* Divisoren, und beweise ihn!
c) Bilde die Umkehrung des Satzes in a) bzw. b), und untersuche, ob sie wahr ist!

Wir beweisen nun den eingangs genannten Satz über den Rest bei Division durch 9:
Voraussetzung: $n \in N$, $Q_n = k \cdot 9 + r$, $0 \leqq r < 9$
(Q_n bezeichne die Quersumme von n.)
Behauptung: Es gibt eine natürliche Zahl l, so daß $n = l \cdot 9 + r$.
Beweis: Im dekadischen Positionssystem (↗ LB 4, S. 35) hat n die Darstellung
$n = 10^m \cdot a_m + \ldots + 100 \cdot a_2 + 10 \cdot a_1 + a_0$.
Die Quersumme von n ist dann
$Q_n = a_m + \ldots + a_2 + a_1 + a_0$.
Wir bilden $n - Q_n = (10^m - 1) \cdot a_m + \ldots + 99 \cdot a_2 + 9 \cdot a_1$.
In der erhaltenen Summe ist jeder Summand durch 9 teilbar, also auch die Summe selbst. (Welcher Satz aus LB 6 wird hier angewendet?)
Nach Aufgabe ▲2▲ gilt: Da $n - Q_n$ durch 9 teilbar ist, lassen n und Q_n bei Division durch 9 denselben Rest. Nach Voraussetzung läßt Q_n bei Division durch 9 den Rest r; folglich gibt es auch eine natürliche Zahl l, so daß gilt $n = l \cdot 9 + r$, w. z. b. w.

Der Nachfolger einer Quadratzahl ist niemals durch 3 teilbar.

Diesen Satz kann man bekanntlich nicht beweisen, indem man die Gültigkeit der Behauptung nacheinander für alle Quadratzahlen einzeln überprüft. Da aber eine Aussage über die Teilbarkeit durch 3 gemacht wird, liegt es nahe, sich auf die Reste bei Division durch 3 zu konzentrieren. Es sind dann nur drei Fälle zu unterscheiden.

Voraussetzung: $a \in N$

Behauptung: $3 \nmid a^2 + 1$

Beweis: Jede natürliche Zahl a läßt sich in der Form $a = k \cdot 3 + r$ darstellen, wobei $k \in N$ und r eine der Zahlen 0, 1, 2 ist.

Es ist dann

$a^2 = a \cdot a = a \cdot (k \cdot 3 + r)$ (Einsetzen)

$= a \cdot k \cdot 3 + a \cdot r$ (Distributivgesetz)

$= (k \cdot 3 + r) \cdot k \cdot 3 + (k \cdot 3 + r) \cdot r$ (Einsetzen)

$= k^2 \cdot 3 \cdot 3 + r \cdot k \cdot 3 + k \cdot 3 \cdot r + r^2$ (Distributivgesetz)

$= (k^2 \cdot 3 + r \cdot k + k \cdot r) \cdot 3 + r^2$ (Distributivgesetz)

und

$a^2 + 1 = (k^2 \cdot 3 + 2 \cdot k \cdot r) \cdot 3 + r^2 + 1$.

Die folgende Tabelle enthält alle Möglichkeiten für r:

r	0	1	2
$r^2 + 1$	1	2	5

Es gilt also stets $3 \nmid r^2 + 1$.

Andererseits ist

$(k^2 \cdot 3 + 2 \cdot k \cdot r) \cdot 3$ stets durch 3 teilbar. Folglich gilt immer

$3 \nmid a^2 + 1$ (LB 6, S. 18, Satz 5), w. z. b. w.

▲3▲ Beweise: Wenn p eine Primzahl größer als 3 ist, dann ist genau eine der Zahlen $p - 1$ und $p + 1$ durch 6 teilbar!

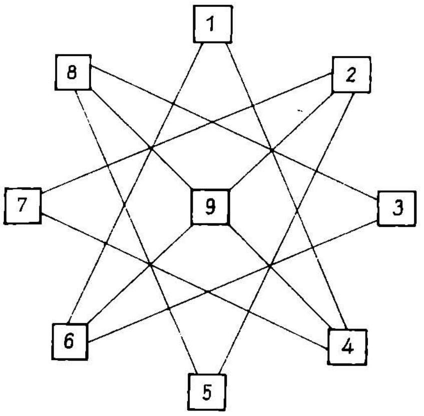
▲4▲ Beweise: wenn p eine Primzahl größer als 3 ist, dann ist das Produkt $(p - 1)(p + 1)$ stets durch 24 teilbar!

C.-P. Helmholz

- Die Erfahrung ist eine bessere Lehrmeisterin als der Kalkül.
- Nichts ist der Natur gemäßer: man muß rechnen wissen oder das Lehrgeld bezahlen.

W. L. Wekholius (1739 bis 1792)

Abb. zu ▲2691c▲ →



Eine Aufgabe von Prof. Dr. L. A. Kaloujnine und Prof. Dr. V. I. Suščanskij

Universität Kiew

Aus dem neu erschienenen Buch:

Transformationen und Permutationen

L. A. Kaloujnine · V. I. Suščanskij

VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

▲2691▲ a) Auf wieviel Arten kann man acht Damen derselben Farbe auf einem Schachbrett so anordnen, daß keine zwei von ihnen einander schlagen können?

b) Zwölf Kinder werfen verschiedenfarbige Bälle hin und her, jedes Kind wirft seinen Ball immer ein und demselben Partner zu, alle Bälle werden gleichzeitig geworfen, und niemals werfen zwei Kinder den Ball zu ein und demselben Spieler. Nach welcher kleinsten Anzahl von Würfen befinden sich alle Bälle in den Händen derselben Kinder wie am Anfang?

c) Wieviel verschiedene Armbänder kann man aus zwei blauen, zwei weißen und zwei roten Perlen zusammenstellen?

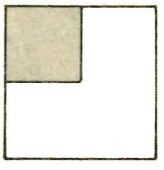
d) Das Spiel *Kastanie* wird auf einer Tafel mit neun Feldern gespielt, die durch geradlinige Strecken verbunden sind. Auf jedem der acht Spielsteine befindet sich einer der Buchstaben k, a, s, t, a, n, i, e. Die Steine werden beliebig auf die Felder verteilt, die in den Ecken des Vielecks angeordnet sind. Das Mittelfeld bleibt zunächst leer. Das Ziel des Spiels besteht darin, sie in die richtige Reihenfolge zu bringen, so daß sich beim Lesen im Uhrzeigersinn, wenn man beim ersten Feld beginnend, das Wort Kastanie ergibt. Dabei sollen die Steine auf den Verbindungsgeraden verschoben werden. Man beweise, daß man von jeder Anfangsverteilung zur richtigen Anordnung der Steine gelangen kann.

▲1▲ Prove that among all quadrilaterals of given sides the one of maximum area is inscribable in a circle.

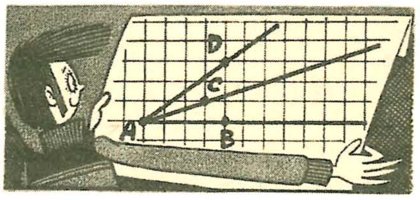
▲2▲ Determine all of the roots of the quartic equation $x^4 - 4x = 1$.

▲3▲ Le testament du vieux Léon est formel: «Je lègue mon champ carré à mes cinq fils. L'aîné aura le quart, de forme carrée, dans un angle. Les quatre autres devront se partager le reste en quatre parties identiques, de même forme et de même grandeur.»

Les quatre cadets ont réussi à se partager le reste, selon les désirs du père. Comment ont-ils fait?



▲4▲ На клетчатой плоскости из точки A проведены три луча AB, AC и AD (см. рисунок). Докажите, что угол BACравен углу CAD, используя свойства квадратной сетки.



▲5▲ Недавно я нашел прошлогоднюю таблицу хоккейного турнира между 6-ми классами нашей школы. На ней сохранилась лишь небольшая часть записей. Попробуйте восстановить таблицу.

In freien Stunden · alpha-heiter

Zusammenstellung von Knobeleien aus dem ND (1985)

Wie heißen die drei Schüler?

Am ersten Schultag des neuen Schuljahres stellte ein Klassenlehrer seiner Klasse drei neue Schüler vor. „Eure neuen Mitschüler heißen Peter, Wolfgang und Michael“, erklärte er, „und ihre Familiennamen sind Hase, Koch und Schlosser. Zwei von ihnen, nämlich Wolfgang und euer neuer Mitschüler Schlosser, kommen aus Erfurt. Der Schüler Koch ist jünger als Wolfgang. Peter, der aus Eisenach kommt, heißt übrigens nicht Schlosser.“
Wie heißen die drei Schüler?

Stimmt die Tabelle?

Vier Mannschaften bestritten eine Aufstiegsrunde. Es spielte jeder gegen jeden ein Hin- und ein Rückspiel. Alle Spiele endeten entweder mit Sieg, Niederlage oder Unentschieden.
Die folgende Abschlußtabelle wurde in der Kreiszeitung veröffentlicht. Durch ein Versehen in der Setzerei enthält sie einige Fehler.

1. A-Stadt	6	5	0	1	5:6	10: 2
2. B-Dorf	6	3	2	1	9:1	8: 4
3. C-Burg	6	2	2	2	2:2	6: 6
4. D-Berg	6	0	1	5	0:6	1:11

Wie viele nachweisbare Fehler enthält diese Tabelle? Welche sind es?

Drei Achten

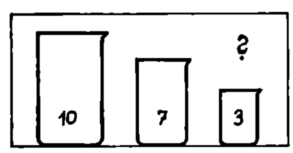
Stelle die natürlichen Zahlen von Null bis Zwölf unter Verwendung von jeweils drei Achten und beliebigen Rechenzeichen dar. Dabei ist für eine Zahl nur eine Näherungslösung möglich.
Für welche?

Wer rasiert den Barbier?

Denke ganz genau nach, wenn du die Titelvignette (rechts oben) betrachtest! Diese Aufgabe stammt übrigens von *Bertrand Russell*, dem berühmten englischen Physiker. Was hat er sich dabei gedacht? Wer rasiert den Barbier?

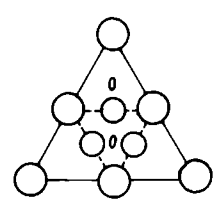
Richtiges Maß

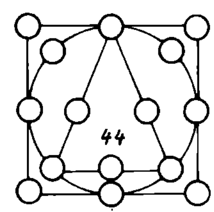
Sie besitzen drei Meßgefäße, eins umfaßt drei Liter, eins sieben Liter und eins 10 Liter. Das Dreiliter- und das Siebenlitermaß sind mit Milch bis zum Rand gefüllt. Wie kann man nun ohne Zuhilfenahme weiterer Gefäße durch bloßes Hin- und Herschütten der Milch von einem Gefäß in das andere jede gewünschte Literzahl von ein bis zehn Liter ausschenken?



Magische Figuren

a) In die leeren Felder sind die ganzen Zahlen von -4 bis $+4$ so einzutragen, daß die Summe der auf dem großen und dem kleinen Dreieck liegenden Zahlen jeweils 0 beträgt.

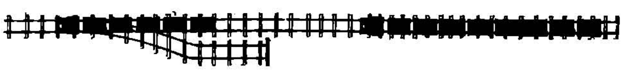




b) In die leeren Felder sind die Zahlen von 0 bis 14 so einzusetzen, daß die Summe der auf dem Quadrat, dem Kreis und dem Dreieck liegenden Zahlen jeweils 44 beträgt.

Kann der Personenzug vorbeifahren?

Ein Bauzug will am Abzweigpunkt Material entladen. Dazu braucht er eine gewisse Standzeit. Der Zug besteht aus der Lokomotive und fünf Wagen. (Die Lok ist so lang wie ein Wagen.)
Jetzt nähert sich dem Abzweigpunkt ein Personenzug mit acht Wagen (jeder Wagen und die Lok dieses Zuges ist so lang wie ein Wagen des Bauzuges). Der Personenzug soll vorbeigelassen werden.
Auf dem kurzen Abzweiggleis haben aber nur drei Wagen und eine Lok Platz. Ist eine Vorbeifahrt des Personenzuges am Bauzug möglich?



Kurzkrimi: Geheimnisvolle Runde

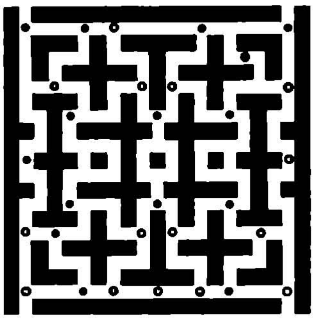
Im verschlossenen Hinterzimmer der Pitti-Grilli-Bar herrscht betroffenes Schweigen. Es ist kurz nach Mitternacht. Auf dem grünbezogenen Tisch liegen die Karten. Unbeachtet. Sechs Männer sitzen um einen runden Tisch herum. Der alte Frisky, John Dalmas, George Hawkins, Allan Cunneway, Fred Buster und Tom Snider. Genauer gesagt: Fünf sitzen und einer, von dem sie alle wußten, daß er ihnen mit Falschspiel das Geld aus der Tasche gezogen hatte, ist leblos vornüber auf die Tischplatte gekippt. In der Hand hält er noch ein leeres Whiskyglas. Keiner von ihnen hatte den ganzen Abend den Raum verlassen. Einer mußte also dem Leblosen das Betäubungsmittel in den Becher gegeben haben.
Folgendes steht fest:
(1) George sitzt links vom Onkel des Mannes, der George direkt gegenübersitzt.
(2) Der Täter hatte keine Verwandten am Tisch.
(3) Der alte Frisky bittet Allan neben ihm um eine Zigarette.
(4) Der Täter sitzt nicht neben Onkel und Neffe, der Leblose befindet sich zwischen beiden.
(5) Der Mann an Freds rechter Seite, er heißt nicht George, sitzt links vom Täter.
(6) Frisky sitzt Tom gegenüber, der nervös in die Runde blickt und an seiner Zigarette zieht.
Wer ist der Täter und wer der leblose Falschspieler?

Fotozirkel

Die Mitglieder eines Fotozirkels trafen sich im Tropenhaus des Zoos, um die Schildkröten zu fotografieren. Außer vier von ihnen waren alle mit einem Stativ gekommen. Einer sagte, daß die Zahl der Schildkröten genau mit der der Fotofreunde übereinstimmte. Daraufhin meinte ein zweiter, sie selbst und ihre Stative hätten ja auch genau so viele Beine wie alle Schildkröten zusammen.
Wie viele Fotofreunde waren gekommen?

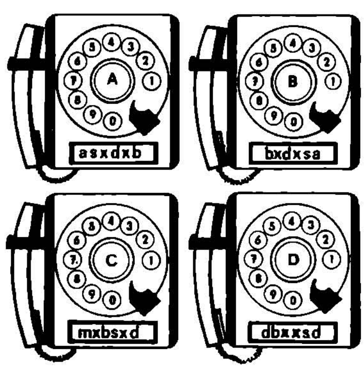
Labyrinth

Suche einen Weg durch das Labyrinth, auf dem du abwechselnd immer einen vollen und einen hohlen Punkt passierst. Jeder Punkt darf höchstens einmal berührt werden, und die Gesamtzahl der durchlaufenen Punkte muß gerade sein.



Frisch gewählt ist halb verbunden

Die auf den Apparaten dargestellten Buchstabengruppen entsprechen sechsstelligen Telefonnummern; jeder Buchstabe ersetzt eine bestimmte Ziffer. – Bei der Telefonnummer A beträgt die Quersumme 42. – Die Telefonnummer B ist durch 5 teilbar. – Die Telefonnummer C ist halb so groß wie die Telefonnummer A. – Bei der Telefonnummer D ist die Quersumme durch 11 teilbar. Wie lauten die vier Nummern?



Wer nahm am Sportfest teil?

Beim Blättern in der Betriebschronik fand Susanne einen Bericht über ein Betriebssportfest. Der Verfasser muß ein Freund der Statistik gewesen sein, denn er hatte die Durchschnittsalter aller verschiedenen Teilnehmergruppen errechnet:
Männer: 42 Jahre, Frauen: 33 Jahre,
Erwachsene: 38 Jahre; Jungen: 14 Jahre,
Mädchen: $11\frac{3}{4}$ Jahre; Gesamtdurchschnittsalter: 33 Jahre.
Außerdem war vermerkt, daß insgesamt 900 Personen teilgenommen haben und daß die Anzahl der jugendlichen Teilnehmer 25 Prozent von der Anzahl der erwachsenen Teilnehmer betrug.
Vergeblich aber suchte Susanne nach den Teilnehmerzahlen der vier Teilnehmergruppen. Wer nahm am Sportfest teil?

XXV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen der Kreisolympiade

Klassenstufe 8 bis 10

Olympiadeklasse 8

250821 Es sei x die kleinste der zwölf Zahlen. Dann gilt laut Aufgabenstellung

$$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4 + x + 5 + x + 6 + x + 7 + x + 8 + x + 9 = x + 10 + x + 11,$$

$$10x + 45 = 2x + 21,$$

$$x = -3.$$

Tatsächlich ist die Summe der zehn aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen von -3 bis 6 gleich der Summe der beiden darauffolgenden Zahlen 7 und 8.

$-3 - 2 - 1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 15$ und $7 + 8 = 15$.

Die Bedingungen der Aufgabe werden also genau von den Zahlen

$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ und 8 erfüllt.

250822 Jede nicht durch 3 teilbare natürliche Zahl ist von einer der Formen $3k + 1$, $3k + 2$ mit $k \in N$. Hat eine solche Zahl die Eigenschaft, daß auch ihr Nachfolger nicht durch 3 teilbar ist, so muß sie von der Form $3k + 1$ sein, da $3k + 2$ die durch 3 teilbare Zahl $3k + 3$ als Nachfolger hat. Der Nachfolger einer Zahl $3k + 1$ ist $3k + 2$, und das Produkt beider Zahlen ist

$$(3k + 1) \cdot (3k + 2) = 9k^2 + 3k + 6k + 2 = 9k^2 + 9k + 2 = 9 \cdot (k^2 + k) + 2.$$

Da k eine natürliche Zahl ist, ist auch $k^2 + k$ eine natürliche Zahl und $9 \cdot (k^2 + k)$ das Neunfache einer natürlichen Zahl, also durch 9 teilbar. $9 \cdot (k^2 + k) + 2$ läßt mithin bei der Division durch 9 den Rest 2, w. z. b. w.

250823 a) Man beginne mit denjenigen Zahlenkombinationen, bei denen die Ziffern 1, 4, 6 in dieser Reihenfolge auftreten. Außer ihnen tritt noch jeweils eine nicht bekannte Ziffer x auf. Da x nicht mit den Ziffern 1, 4, 6 identisch ist, gibt es für x insgesamt sechs Möglichkeiten. Weil x sowohl an der 1., 2., 3. bzw. 4. Stelle der Einstellungsfolge stehen kann, gibt es für die Reihenfolge 1, 4, 6 somit insgesamt $4 \cdot 6 = 24$ Möglichkeiten.

Analog verfährt man bei den weiteren fünf möglichen Reihenfolgen 1, 6, 4; 4, 1, 6; 4, 6, 1; 6, 1, 4; 6, 4, 1. Im ungünstigsten Falle sind also $6 \cdot 24 = 144$ Einstellungen auszuführen.

b) Man beginne mit denjenigen Zahlenkombinationen, bei denen die Ziffern 1, 6 in dieser Reihenfolge auftreten. Außer ihnen und der Ziffer 4 tritt noch jeweils eine nicht bekannte Ziffer x auf. Wieder gibt es für x insgesamt sechs Möglichkeiten. Weil für x genau diejenigen drei Plätze in der Einstellungsfolge frei sind, an denen die Ziffer 4 nicht steht, gibt es für die Reihenfolge 1, 6 somit insgesamt $3 \cdot 6 = 18$ Möglichkeiten.

Analog verfährt man bei der anderen Reihenfolge 6, 1. Somit wären unter den Bedingungen der Aufgabe b) höchstens $2 \cdot 18 = 36$ Einstellungen nötig.

250824 a) Da BC Durchmesser des Halbkreises ist, ist der Mittelpunkt E von BC auch der Mittelpunkt des Halbkreises. Die Punkte B und D liegen auf dem Halbkreis; also gilt $\overline{EB} = \overline{ED}$.

Daraus folgt $\overline{\sphericalangle DBE} = \overline{\sphericalangle BDE}$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck BDE). Andererseits ist $\overline{\sphericalangle DBE} = \overline{\sphericalangle ABC} = 45°$ (Basiswinkel im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck ABC). Nach dem Innenwinkelsatz folgt somit

$$\overline{\sphericalangle BED} = 180° - (\overline{\sphericalangle DBE} + \overline{\sphericalangle BDE}) = 90°,$$

d. h. die Behauptung $DE \perp BC$.

b) Wegen $\overline{\sphericalangle BED} = \overline{\sphericalangle BCA} = 90°$ gilt nach der Umkehrung des Satzes über Stufenwinkel an geschnittenen Geraden $ED \parallel CA$, das Viereck $ACED$ ist daher ein Trapez. Seine Höhenlänge ist zugleich der Radius $r = \overline{EC}$ des Halbkreises; die parallelen Seiten des Trapezes haben die Längen $\overline{ED} = r$ und $\overline{CA} = \overline{BC} = 2r$. Der Inhalt J der vom Halbkreis nicht bedeckten Fläche des Dreiecks ABC läßt sich als Differenz der Flächeninhalte des Trapezes $ACED$ und eines Viertelkreises mit dem Radius r darstellen:

$$J = \frac{r + 2r}{2} \cdot r - \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{3}{2}r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{r^2}{4}(6 - \pi).$$

Das Dreieck ABC hat den Flächeninhalt

$$F = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot 2r = 2r^2.$$

Der gesuchte Prozentsatz beträgt daher

$$p = \frac{100\,J}{F} = \frac{25r^2(6 - \pi)}{2r^2} = 12{,}5 \cdot (6 - \pi).$$

Aus $\pi \approx 3{,}142$ ergibt sich $6 - \pi \approx 2{,}858$ und damit auf eine Dezimalstelle genau $p \approx 35{,}7$.

Also sind 35,7 % der Fläche des Dreiecks ABC nicht von dem Halbkreis bedeckt.

Olympiadeklasse 9

250921 Die Primfaktorzerlegung von $19 \cdot 85 = 1615$ lautet

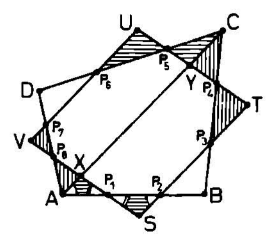
$$1615 = 5 \cdot 17 \cdot 19.$$

Für die zu ermittelnden Tripel gibt es daher genau die folgenden Möglichkeiten:

1. Genau die beiden Zahlen a und b sind gleich 1. Das führt genau auf das Tripel (1, 1, 1615).
2. Genau die eine Zahl a ist gleich 1. Dann enthält b mindestens einen der Primfaktoren 5, 17, 19. Enthielte b mehr als einen dieser Faktoren, so wäre $b \geqq 5 \cdot 17 = 85$. Andererseits enthielte c dann nur noch höchstens einen dieser Faktoren, also wäre $c \leqq 19$. Das widerspricht der Bedingung $b \leqq c$.
Also enthält b genau einen der Primfaktoren 5, 17, 19, und c enthält die beiden anderen. Das führt (wegen $17 \cdot 19 = 323$ und $5 \cdot 19 = 135$) genau auf die Tripel
(1, 5, 323), (1, 17, 135), (1, 19, 85).
3. Keine der drei Zahlen a, b, c ist gleich 1. Das führt genau auf das Tripel (5, 17, 19).

Somit sind genau die fünf in 1., 2., 3. angegebenen Tripel die gesuchten.

250922 Die in der Aufgabe genannten Teilpunkte $P_1, P_2, \ldots, P_8$ und Schnittpunkte S, T, U, V sowie die Schnittpunkte X, Y von AC mit VS bzw. TU seien wie im Bild bezeichnet.



Nach Voraussetzung gilt

$\overline{BP_2} : \overline{BA} = \overline{BP_3} : \overline{BC} = 1 : 3$.

Nach Umkehrung des Strahlensatzes folgt hieraus $P_2P_3 \parallel AC$ und folglich $AX \parallel P_2S$.

Nach dem Satz über Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen folgt hieraus $\overline{\sphericalangle P_1AX} = \overline{\sphericalangle P_1P_2S}$.

Da ferner $\overline{\sphericalangle AP_1X} = \overline{\sphericalangle P_2P_1S}$ (Scheitelwinkel) und $\overline{AP_1} = \overline{P_1P_2}$ (nach Voraussetzung) ist, so folgt nach dem Kongruenzsatz (wsw) die Kongruenz der Dreiecke AP_1X und P_1P_2S und damit auch deren Flächengleichheit.

Analog folgt die Flächengleichheit der Dreiecke AP_8X und P_7P_8V, der Dreiecke CP_4Y und P_3P_4T sowie der Dreiecke CP_5Y und P_6P_5U. Die Vierecksflächen $ABCD$ und $STUV$ haben die Achtecksfläche $P_1P_2 \ldots P_8$ gemeinsam. Vergleicht man die außerhalb dieser Achtecksfläche liegenden Teilflächen, so zeigt sich, daß der Inhalt des Vierecks $ABCD$ um die Summe der Inhalte der Dreiecke P_2BP_3 und P_6DP_7 größer ist als der Inhalt des Vierecks $STUV$.

250923 Aus $\frac{a}{b} < \frac{x}{y}$ folgt durch Multiplikation mit der positiven Zahl by

$$ay < bx. \qquad (1)$$

Addiert man $a \cdot b$, so folgt

$$ay + ab < ab + bx,$$

$$a(b + y) < b(a + x).$$

Dividiert man dies durch die positive Zahl $b(b + y)$, so folgt

$$\frac{a}{b} < \frac{a + x}{b + y}. \qquad (2)$$

Addiert man zu (1) aber xy, so folgt

$ay + xy < bx + xy$,

$(a+x)y < x(b+y)$.

Dividiert man dies durch die positive Zahl $(b+y)y$, so folgt

$$\frac{a+x}{b+y} < \frac{x}{y}. \qquad (3)$$

Mit (2) und (3) ist, wie gefordert, die Beziehung

$$\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+y} < \frac{x}{y}$$

hergeleitet.

250924 Angenommen, es gäbe derartige Zahlen a und b. Aus dieser Annahme folgte dann

$3 = a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2b^2$,

$2ab\sqrt{2} = 3 - a^2 - 2b^2$.

(1) Im Fall $a \neq 0$, $b \neq 0$ folgte weiter

$$\sqrt{2} = \frac{3 - a^2 - 2b^2}{2ab},$$

also der Widerspruch, daß $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl wäre. Daher scheidet dieser Fall aus.

(2) Im Fall $b = 0$ folgte aus $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$ der Widerspruch, daß $\sqrt{3} = a$ eine rationale Zahl wäre. Also ist auch dieser Fall nicht möglich.

(Die Irrationalität von $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ kann entweder als bekannter Sachverhalt zitiert oder (z. B. in entsprechender Weise wie oben in (3) durch Widerlegung von $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ bzw. $\sqrt{3} = \frac{m}{n}$) bewiesen werden.)

(3) Im Fall $a = 0$ folgte $3 = 2b^2$ mit einer rationalen Zahl b, also mit $b = \frac{m}{n}$, wobei m und n natürliche Zahlen wären. Das führte auf

$$3 = 2 \cdot \frac{m^2}{n^2},$$

$$3n^2 = 2m^2.$$

Da in der Primfaktorzerlegung der Quadratzahlen n^2 und m^2 jeder Primfaktor in gerader Anzahl vorkommt, ergäbe sich der Widerspruch, daß der Primfaktor 3 auf der linken Seite in ungerader Anzahl vorkommen müßte, auf der rechten Seite aber in gerader Anzahl.

Die Annahme hat somit in jedem Falle auf einen Widerspruch geführt; damit ist bewiesen, daß es keine rationalen Zahlen a, b mit $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$ gibt.

Olympiadeklasse 10

251021 Die Primfaktorzerlegung von 1985 lautet

$5 \cdot 397 = 1985$.

Nimmt man noch den Faktor 1 hinzu, so gibt es für natürliche Zahlen a, b, c genau die folgenden Darstellungen:

(1) $1 \cdot 5 \cdot 397 = 1985$

(2) $1 \cdot 1 \cdot 1985 = 1985$.

Da die Tripel aller ganzen Zahlen gesucht sind, sind noch die Fälle zu beachten, in denen genau zwei der Faktoren negatives Vorzeichen haben:

Aus (1) entstehen so genau die Darstellungen $(-1)(-5) \cdot 397$, d. h. $a = -5$, $b = -1$, $c = 397$,

$(-1) \cdot 5 \cdot (-397)$, d. h. $a = -397$, $b = -1$, $c = 5$,

$1 \cdot (-5)(-397)$, d. h. $a = -397$, $b = -5$, $c = 1$.

Aus (2)6entstehen genau die Darstellungen

$(-1) \cdot (-1) \cdot 1985$, d. h. $a = b = -1$, $c = 1985$,

$1 \cdot (-1) \cdot (-1985)$, d. h. $a = -1985$, $b = -1$, $c = 1$.

Insgesamt gibt es mithin genau folgende sieben Tripel, die die Aufgabenstellung erfüllen:

(1, 5, 397); (1, 1, 1985); (−5, −1, 397); (−397, −1, 5); (−397, −5, 1); (−1, −1, 1985); (−1985, −1, 1).

251022 Es gilt $a^2 + 3ab < a^2 + 3ab + 2b^2$, weil b positiv ist. Da die Wurzelfunktion streng monoton steigt und beide Terme positiv sind, gilt

$\sqrt{a^2 + 3ab} < \sqrt{a^2 + 3ab + 2b^2}$.

Nach Multiplikation mit 2, Anwendung von $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$ $(x, y > 0)$ und Addition von $2a + 3b$ erhält man

$a + (a + 3b) + 2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a + 3b}$

$< (a + b) + (a + 2b) + 2\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{a + 2b}$.

Unter Benutzung der binomischen Formel $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ ergibt sich daraus

$(\sqrt{a} + \sqrt{a + 3b})^2 < (\sqrt{a+b} + \sqrt{a+2b})^2$.

Weil aus $u^2 < v^2$ stets $|u| < |v|$ folgt, gilt weiter

$|\sqrt{a} + \sqrt{a+3b}| < |\sqrt{a+b} + \sqrt{a+2b}|$.

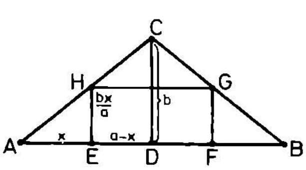
Da die Terme in den Beträgen positiv sind, gilt schließlich

$\sqrt{a} + \sqrt{a+3b} < \sqrt{a+b} + \sqrt{a+2b}$,

w. z. b. w.

251023 Da die Höhe CD im gleichseitigen Dreieck ABC zugleich Seitenhalbierende ist, ist ihr Fußpunkt D der Mittelpunkt von AB; es gilt also $\overline{AD} = \overline{BD} = 10$ cm. Es sei $\overline{AD} = a$ und $\overline{DC} = b$ gesetzt (siehe Bild). Für jedes Rechteck $EFGH$, das dem Dreieck ABC (mit E und F auf AB, G auf BC und H auf AC) einbeschrieben ist, sei $\overline{AE} = x$ gesetzt. Wegen $EH \perp AB$ und $DC \perp AB$, also $EH \parallel DC$, folgt aus dem Strahlensatz

$\overline{EH} : \overline{DC} = \overline{AE} : \overline{AD}$, also $\overline{EH} = \frac{bx}{a}$.



Da $EFGH$ ein Rechteck ist, gilt somit $\overline{FG} = \overline{EH} = \frac{bx}{a}$. Da auch $FG \parallel DC$ gilt, folgt aus dem Strahlensatz

$\overline{BF} : \overline{BD} = \overline{FG} : \overline{DC}$ und damit $\overline{BF} = x$.

Hiernach ergibt sich

$\overline{EF} = \overline{ED} + \overline{FD} = 2(a - x)$.

Der Flächeninhalt J des Rechtecks $EFGH$ ist folglich

$$J = 2(a - x)\frac{bx}{a}$$

$$= \frac{2b}{a}(ax - x^2),$$

$$= \frac{2b}{a}\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + ax - x^2\right),$$

$$= \frac{ab}{2} - \frac{2b}{a}\left(x - \frac{a}{2}\right)^2.$$

Daraus folgt:

Für $x \neq \frac{a}{2}$ ist $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 > 0$,

also $J < \frac{ab}{2}$; für $x = \frac{a}{2}$ ist $J = \frac{ab}{2}$.

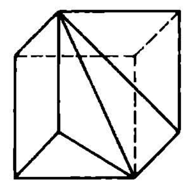
Somit wird genau für dasjenige Rechteck $EFGH$, das sich mit $x = \frac{a}{2} = 5$ cm ergibt, der Flächeninhalt J am größten. Die Seitenlängen dieses Rechtecks sind

$\overline{EF} = 2(a - x) = 10$ cm, $\overline{EH} = \frac{bx}{a} = 4$ cm,

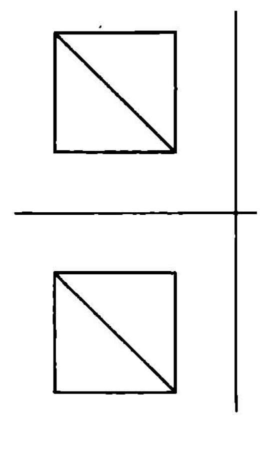
sein Flächeninhalt beträgt $J = 40$ cm².

251024

a)



b)



Die abgebildete Kupfermedaille (Durchmesser 20 mm) wurde 1976 anläßlich des 500. Todestages Regiomontanus' von seiner Heimatstadt herausgegeben.

(Siehe Seite 75!)

XXV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Bezirksolympiade

8./9. Februar 1986

Olympiadeklasse 7

250731 Ermittle zu jeder natürlichen Zahl $n > 0$ die Anzahl aller derjenigen natürlichen Zahlen, die Teiler der Zahl 2^n sind!

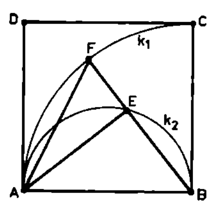
250732 Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit C als Scheitel des rechten Winkels und mit $\overline{CA} = 4$ cm, $\overline{CB} = 20$ cm. Von einer natürlichen Zahl x wird gefordert, daß sie die folgenden Bedingungen (1) und (2) erfüllt:
(1) Die Strecke CB kann um x cm verkürzt werden; d. h., zwischen C und B liegt ein Punkt B' mit $\overline{CB'} = \overline{CB} - x$ cm.
(2) Wenn zugleich die Strecke CA über A hinaus um x cm bis zu einem Punkt A' verlängert wird, dann beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks $A'B'C'$ genau 55 % des Flächeninhalts des Dreiecks ABC.
Untersuche, ob es genau eine natürliche Zahl x gibt, die die Bedingungen (1) und (2) erfüllt! Wenn das der Fall ist, so ermittle diese Zahl!

250733 Für ein Viereck $ABCD$ werden die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) gefordert:
(1) $ABCD$ ist ein Parallelogramm.
(2) Die Winkelhalbierenden von $\sphericalangle BAD$ und $\sphericalangle ABC$ schneiden sich in einem Punkt E, der auf der Geraden durch C und D liegt.
(3) Es gilt $\overline{AE} = 6{,}0$ cm und $\overline{BE} = 4{,}0$ cm.
a) Beweise, daß jedes Viereck $ABCD$, das diese Bedingungen erfüllt, aus den gegebenen Längen 6,0 cm und 4,0 cm konstruiert werden kann!
b) Schreibe eine solche Konstruktion!
c) Beweise, daß jedes Viereck $ABCD$, das nach deiner Beschreibung konstruiert wird, die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt!

250734 Ein Jagdflugzeug flog in einer halben Stunde 200 km weiter als ein Sportflugzeug in einer Stunde.
Wie groß war die Geschwindigkeit jedes dieser beiden Flugzeuge, wenn die des Jagdflugzeugs dreimal so groß war wie die des Sportflugzeugs?

250735 In einer Arbeitsgemeinschaft stellt Rainer seinen Klassenkameraden folgendermaßen eine Aufgabe:
Er nimmt drei Karten, auf denen zweiziffrige Zahlen stehen, so in die Hand, daß niemand anders als er die Zahlen sehen kann und daß sich die dreimal zwei Ziffern nebeneinandergehalten als eine sechsstellige Zahl lesen lassen. Dies macht er (mit denselben Karten) mehrere Male, bis er jede mögliche Reihenfolge der drei Karten genau einmal berücksichtigt hat. Die abgelesene sechsstellige Zahl notiert er jedes- mal (ebenfalls so, daß nur er seine Notizen sehen kann). Anschließend bildet er die Summe aller notierten Zahlen.
Nun teilt er den Klassenkameraden mit: „Auf einer Karte steht die Zahl 15, auf einer die Zahl 23. Auf der dritten Karte steht eine zweistellige Zahl, die ich nicht verrate. Die Summe aller notierten Zahlen beträgt 1 373 736."
Untersuche, ob es genau eine zweistellige Zahl gibt, die unter den genannten Bedingungen nach Rainers Aussagen auf der dritten Karte stehen kann! Wenn das der Fall ist, so ermittle diese zweistellige Zahl!

250736 Es sei $ABCD$ ein Quadrat. Der im Innern von $ABCD$ gelegene Viertelkreisbogen um B mit dem Radius $\overline{AB}$ sei k_1, der im Innern von $ABCD$ gelegene Halbkreis mit AB als Durchmesser sei k_2. Ein von B ausgehender Strahl schneide k_2 in einem Punkt E und k_1 in einem Punkt F.



Beweise, daß aus diesen Voraussetzungen stets $\overline{\sphericalangle DAF} = \overline{\sphericalangle EAF}$ folgt!

Olympiadeklasse 8

250831 Beweise folgenden Satz:
Es gibt keine Quadratzahl, die bei Division durch 3 den Rest 2 läßt!

250832 Brigade Schulz spielt im „Tele-Lotto (5 aus 35)" nach einem sogenannten „vollmathematischen System mit n Zahlen". Darunter versteht man, wenn n eine natürliche Zahl mit $5 < n \leqq 35$ ist, folgendes System:
Es werden von der Brigade genau n Zahlen 1, 2, ..., 35 ausgewählt, und dann werden in der Menge dieser n Zahlen alle verschiedenen Teilmengen aus je fünf Elementen ermittelt. Jede dieser Teilmengen wird als Tip abgegeben.
a) Die Brigade spielt nach einem „vollmathematischen System mit 6 Zahlen". Bei der nachfolgenden Ziehung im Tele-Lotto stellt sich heraus, daß genau vier der fünf Gewinnzahlen unter den sechs von der Brigade in ihrem System verwendeten Zahlen vorkommen.
Ferner werden nach dieser Ziehung folgende Gewinnquoten bekanntgegeben: Für jeden Tip mit genau drei richtig getippten Zahlen gibt es 20 M, für jeden Tip mit genau vier richtig getippten Zahlen gibt es 400 M, für jeden Tip mit fünf richtig getippten Zahlen 3000 M.
Ermittle den hiermit zustandekommenden Gewinn der Brigade!
b) Die Brigade spielt nach einem „vollmathematischen System mit 7 Zahlen". Bei einer Ziehung wird festgestellt: Genau vier der fünf Gewinnzahlen kommen unter den sieben von der Brigade verwendeten Zahlen vor. Die Gewinnquoten sind dieselben wie in a).
Ermittle ebenfalls den Gewinn der Brigade!
Hinweis: Die Kosten, d. h. der Spieleinsatz, sollen in beiden Aufgaben nicht berücksichtigt werden.

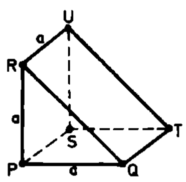
250833 Es sei g eine gegebene Größe. Ferner seien zwei Punkte A, B gegeben, die beide nicht auf g liegen, deren Verbindungsstrecke AB aber g schneidet und nicht auf g senkrecht steht.
Für einen Streckenzug $APQB$ seien folgende Bedingungen (1), (2), (3) gefordert:
(1) Die Punkte P und Q liegen auf g.
(2) Die Gerade durch A und P ist parallel zur Geraden durch B und Q.
(3) Die Strecke PQ hat die Länge $t = 6$ cm.
a) Beweise, daß jeder Streckenzug $APQB$, der die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, durch eine Konstruktion (aus gegebenen g, A, B und der gegebenen Länge $t = 6$ cm) erhalten werden kann!
b) Beschreibe eine solche Konstruktion!
c) Beweise, daß jeder Streckenzug $APQB$, der nach dieser Beschreibung konstruiert werden kann, die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt!
d) Wähle selbst eine Gerade g und Punkte A, B, wie oben beschrieben, und konstruiere dazu *alle* diejenigen Streckenzüge $APQB$, die die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen! (Ein Beweis, daß *alle* verlangten Streckenzüge konstruiert wurden, wird nicht gefordert.)

250834 Es sei k ein Kreis, sein Mittelpunkt sei M. Eine Sehne von k, die nicht Durchmesser ist, sei AB. Ferner sei t die in A an k gelegte Tangente, und C sei der Fußpunkt des von B auf t gefällten Lotes.
Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen die Gerade durch A und B stets den Winkel $\sphericalangle CBM$ halbiert!

250835 Von Lew Nikolajewitsch Tolstoi (1828 bis 1910), einem bedeutenden russischen Schriftsteller, stammt folgende Aufgabe:
Schnitter sollen zwei Wiesen mähen. Am Morgen begannen alle, die größere Wiese zu mähen. Vom Mittag dieses Tages an teilten sie jedoch die Arbeit anders ein: Die Hälfte der Schnitter verblieb beim Mähen der ersten Wiese, die sie bis zum

Abend fertig mähten. Die anderen Schnitter gingen zum Mähen der zweiten Wiese über, deren Flächeninhalt gleich dem der Hälfte der ersten war, und arbeiteten bis zum Abend. Nun blieb auf der zweiten Wiese ein Rest, für den ein Schnitter allein einen ganzen Tag benötigte. Wieviel Schnitter waren am ersten Tag bei der Arbeit?
Anmerkung: Es sei vorausgesetzt, daß jeder Schnitter an jedem Vormittag eine gleichgroße Fläche wie an jedem Nachmittag mäht und daß diese Arbeitsleistung aller Schnitter die gleiche ist.

250836 Es sei $PQRSTU$ ein gerades dreiseitiges Prisma, dessen Grundfläche ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck PQR ist. Die Höhenlänge des Prismas sei gleich der Kathetenlänge a des Dreiecks PQR (siehe Bild).



Gesucht ist eine Ebene E, die parallel zu einer der quadratischen Seitenflächen F des Prismas verläuft und die das Prisma in zwei Teilkörper zerlegt, deren Volumina sich in irgendeiner Reihenfolge wie $9:16$ verhalten.
Ermittle zu gegebenem a alle diejenigen Werte, die der Abstand zwischen der Seitenfläche F und einer solchen Ebene E betragen kann!

Olympiadeklasse 9

250931 a) Beweisen Sie, daß es eine natürliche Zahl N gibt, für die die folgende Aussage (1) gilt!
(1) Für jede natürliche Zahl n, für die $n \geqq N$ ist, kann eine Quadratfläche F in genau n Teilquadrate $T_1, \ldots, T_n$ zerlegt werden. (Dabei sollen die Flächen $T_1, \ldots, T_n$ die Fläche F vollständig ausfüllen; sie brauchen nicht untereinander kongruent zu sein.)
b) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl N, für die die Aussage (1) gilt!

250932 Ermitteln Sie alle diejenigen Paare (a, b) von zweistelligen Zahlen a und b, für die folgendes gilt:
Bildet man durch Hintereinanderschreiben von a und b in dieser Reihenfolge eine vierstellige Zahl z, so ist

$$z = (a + b)^2.$$

250933 Das Volumen eines regelmäßigen Tetraeders sei V_T, das Volumen seiner Umkugel sei V_K.
Berechnen Sie das Verhältnis $V_K : V_T$ und runden Sie es ganzzahlig (d. h., ermitteln Sie die zu $V_K : V_T$ nächstgelegene ganze Zahl)! Dabei können die (auf eine bzw. zwei Dezimalen nach dem Komma genauen) Näherungswerte $\sqrt{3} \approx 1{,}7$ und $\pi \approx 3{,}14$ verwendet werden.

250934 Die acht Zahlen 1, 2, ..., 8 sollen so auf die Eckpunkte eines Würfels verteilt werden, daß dabei folgende Bedingungen erfüllt sind:
(1) Jedem Eckpunkt des Würfels wird genau eine der acht Zahlen zugeteilt, jede dieser Zahlen soll in der Verteilung vorkommen.
(2) Addiert man auf jeder Seitenfläche des Würfels die vier Zahlen an den Eckpunkten dieser Seitenfläche, so ergibt sich auf allen sechs Seitenflächen dieselbe Summe.
Es sollen möglichst viele Verteilungen der acht Zahlen auf die Eckpunkte so zusammengestellt werden, daß jede dieser Verteilungen die Bedingungen (1), (2) erfüllt und daß keine zwei dieser Verteilungen zueinander kongruent sind, d. h. durch Drehung oder Spiegelung ineinander übergeführt werden können.
Ermitteln Sie die Anzahl der Verteilungen, die in einer solchen Zusammenstellung auftreten!

250935 In einem beliebigen spitzwinkligen Dreieck ABC sei A' der Fußpunkt der durch A gehenden Höhe, B' der Fußpunkt der durch B gehenden Höhe und S der Schnittpunkt dieser beiden Höhen.
Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen stets
$\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{AS} : \overline{SB'}$ gilt!

250936 a) Ist durch den Term
$z = \sqrt{192 + 96 \cdot \sqrt{3}} + \sqrt{192 - 96 \cdot \sqrt{3}}$
eine Zahl definiert?
b) Wenn dies der Fall ist, ist z rational?

Olympiadeklasse 10

251031 Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare $(a; b)$ von ganzen Zahlen a und b, die die Gleichung $a + b = (a - b)^2$ erfüllen!

251032 a) Es sei a eine beliebige positive reelle Zahl, und es sei f die im Intervall

$$0 \leqq x \leqq a \qquad (1)$$

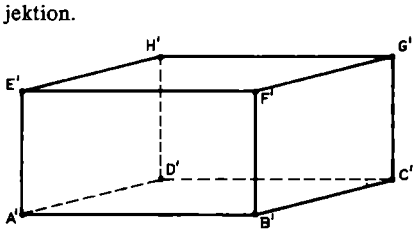
durch $f(x) = \sqrt{a + x} + \sqrt{a - x}$ (2)
definierte Funktion.
Beweisen Sie, daß f im Intervall (1) streng monoton fallend ist!
b) Ermitteln Sie den größtmöglichen Definitionsbereich D, in dem durch (2) eine Funktion f definiert wird! Untersuchen Sie, ob f im gesamten Bereich D streng monoton fallend ist!
Hinweis: Eine Funktion f heißt genau dann in einem Bereich B streng monoton fallend, wenn für alle reellen Zahlen x_1, x_2 in B gilt:
Aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) > f(x_2)$.

251033 Aus 27 Würfeln mit der Kantenlänge a wird ein Würfel mit der Kantenlänge $3a$ zusammengesetzt. Jeder der 27 kleinen Würfel ist entweder völlig weiß oder völlig schwarz angestrichen. Beim Zusammensetzen soll auf jeder der sechs quadratischen Seitenflächen des großen Würfels ein Muster entstehen, das in jeder Zeile und jeder Spalte genau ein schwarzes und genau zwei weiße Quadrate enthält.
Ermitteln Sie
a) die kleinste,
b) die größte
Anzahl schwarzer Würfel, mit der diese Forderungen erfüllbar sind!

251034 Von einer natürlichen Zahl x wird gefordert, daß sie die folgenden Bedingungen (1) bis (5) erfüllt:
(1) Die Zahl x hat, im Zweiersystem (System mit der Basis 2) geschrieben, genau zehn Stellen.
(2) Schreibt man x im Dreiersystem, so steht an der zweiten Stelle die Ziffer 1.
(3) Schreibt man x im Vierersystem, so steht an der zweiten Stelle die Ziffer 0.
(4) Die Zahl x hat, im Fünfersystem geschrieben, genau vier Stellen.
(5) Schreibt man x im Zehnersystem, so steht an der letzten Stelle die Ziffer 2.
Beweisen Sie, daß es genau eine natürliche Zahl x gibt, die diese Bedingungen erfüllt, und ermitteln Sie diese Zahl!

251035 Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Darin sei F ein von B und C verschiedener Punkt der Strecke BC, und E sei ein von A und C verschiedener Punkt der Strecke AC.
Ferner sei P der Schnittpunkt der Strecken AF und BE.
Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen die Umkreise der drei Dreiecke AFC, EBC und PFB stets genau einen Punkt gemeinsam haben!

251036 Das Arbeitsblatt zeigt das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$ eines Quaders $ABCDEFGH$ bei einer schrägen Parallelprojektion.



a) Konstruieren Sie das Bild S' des Schnittpunktes S der Strecke EC mit der Ebene, die durch A, F und H geht! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion und beweisen Sie, daß der nach Ihrer Beschreibung konstruierte Punkt S' das Bild des genannten Punktes S ist!
b) Ermitteln Sie alle diejenigen Quader $ABCDEFGH$, für die S mit dem Höhenschnittpunkt des Dreiecks AFH zusammenfällt!

Olympiadeklassen 11/12

251231 Man ermittle alle diejenigen Paare (m, n) natürlicher Zahlen m und n, für die die folgenden Bedingungen (1) und (2) gelten:
(1) $m + n$ und $m \cdot n$ sind zweistellige Zahlen.
(2) Vertauscht man die Ziffern der Zahl $m + n$ miteinander, so erhält man die (Ziffemdarstellung der) Zahl $m \cdot n$.
251232 Für eine beliebige natürliche Zahl $n \geqq 3$ seien n Kreise $K_1, \ldots, K_n$ so in einer Ebene gelegen, daß sie folgende Be-

dingungen erfüllen (wobei der Kreis K_j auch mit K_{n+1} bezeichnet sei):
Es gibt einen Punkt 0, der auf allen Kreisen $K_1, \ldots, K_n$ liegt.
Für $i = 1, \ldots, n$ gilt: K_i und K_{i+1} haben noch genau einen von 0 verschiedenen Punkt A_i gemeinsam.
Die Punkte $A_1, \ldots, A_n$ sind paarweise verschieden; die Strahlen von 0 aus durch $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ sind in dieser Reihenfolge um 0 herum angeordnet.
Ferner seien $P_1, \ldots, P_{n+1}$ Punkte, die folgende Bedingungen erfüllen:
Für $i = 1, \ldots, n$ gilt: P_i liegt auf K_i und ist von 0 und A_i verschieden: P_{i+1} ist der von A_i verschiedene Schnittpunkt des Kreises K_{i+1} mit der Geraden durch P_i und A_i.
Die Strahlen von 0 aus durch $A_n, P_1, A_1, P_2, A_2, \ldots, P_n, A_n$ sind in dieser Reihenfolge um 0 herum angeordnet.
a) Beweisen Sie, daß für $n = 3$ aus diesen Voraussetzungen stets $P_4 = P_1$ folgt!
b) Untersuchen Sie, ob für jede natürliche Zahl $n \geqq 3$ aus den genannten Voraussetzungen stets $P_{n+1} = P_1$ folgt!

Von den nachstehenden Aufgaben 251233A und 251233B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

251233A Man untersuche, ob es keine, endlich viele oder unendlich viele 5-Tupel $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ von positiven ganzen Zahlen gibt, für die die folgende Gleichung (1) erfüllt ist:

$$x_1^3 + x_2^5 + x_3^7 + x_4^{11} = x_5^{13}. \qquad (1)$$

251233B Beweisen Sie, daß es unter allen Zerlegungen

$$100 \geqq z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n$$

der Zahl 100 in reelle Faktoren

$$z_i = 2 \ (i = 1, \ldots, n;$$
$$n \text{ positiv ganzzahlig})$$

eine Zerlegung gibt, für die die Summe

$$s = z_i + z_2 + \ldots + z_n$$

einen kleinstmöglichen Wert hat!
Ermitteln Sie eine solche Zerlegung!

251234 Acht Gegenstände, die mit $A_1, A_2, \ldots, A_8$ bezeichnet seien, sind in zwei Schränken S_1 und S_2 verschlossen worden. Zur Ermittlung der Verteilung der Gegenstände werden folgende Aussagen gemacht:
In dem Schrank S_1 befindet sich
(1) A_1 genau dann, wenn sich A_3 und A_5 beide in S_1 befinden;
(2) A_2 genau dann, wenn sich A_3 und A_6 beide in S_1 befinden;
(3) A_3 genau dann, wenn sich A_4 und A_8 beide in S_2 befinden;
(4) A_4 genau dann, wenn sich A_1 und A_8 beide in S_2 befinden;
(5) A_5 genau dann, wenn sich A_6 in einem anderen Schrank befindet als A_7;
(6) A_6 genau dann, wenn sich A_4 in einem ansderen Schrank befindet als A_5;
(7) A_7 genau dann, wenn sich A_1 in demselben Schrank befindet wie A_2;
(8) A_8 genau dann, wenn sich A_5 in demselben Schrank befindet wie A_7.
Ermitteln Sie alle diejenigen für eine Verteilung der acht Gegenstände auf die beiden Schränke bestehenden Möglichkeiten, bei denen alle Aussagen (1) bis (8) wahr sind!

251235 Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, für die die folgende Gleichung (1) gilt:

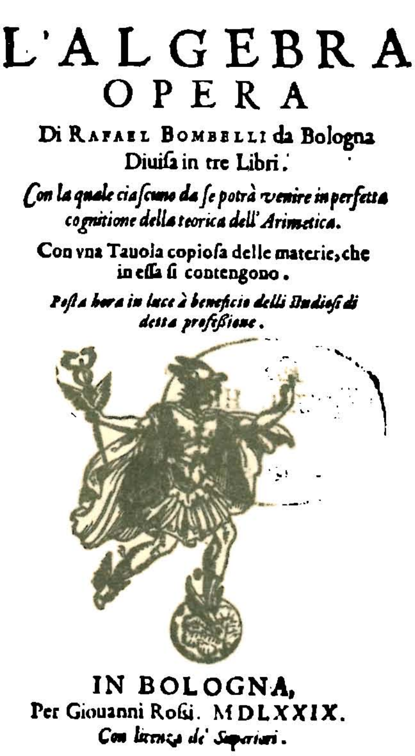
$$\frac{x^2 + 12x + 4}{x + 2} = 6\sqrt{x}. \qquad (1)$$

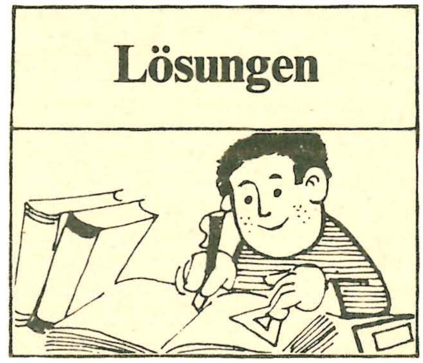
251236 Für eine beliebige natürliche Zahl $n \geqq 2$ seien $2n$ Punkte $P_1, \ldots, P_{2n}$ im Raum so gelegen, daß es keine Ebene gibt, auf der vier dieser Punkte liegen. Mit T sei die Menge aller derjenigen Tetraeder bezeichnet, deren vier Eckpunkte der Menge

$$M = \{P_1, \ldots, P_{2n}\}$$

angehören. Für jede Ebene ε, die keinen Punkt von M enthält, sei t_ε die Anzahl aller derjenigen Tetraeder aus T, die mit ε ein Viereck als Schnittfläche gemeinsam haben.
Ermitteln Sie zu jeder natürlichen Zahl $n \geqq 2$ den größtmöglichen Wert, den t_ε annehmen kann!

Zitiert
(Siehe Beitrag S. 78/79)
Bis zur Anerkennung der „imaginären Größen“ als Zahlen und der Erkenntnis des Wesens der komplexen Zahlen mußten noch über drei Jahrhunderte vergehen.
Noch 1770 schrieb Leonhard Euler:
„So ist klar, daß die Quadratwurzeln von Negativzahlen nicht ... zu den möglichen [d. h. reellen] Zahlen gerechnet werden können. Folglich müssen wir sagen, daß dies unmögliche Zahlen sind. Und dieser Umstand leitet uns auf den Begriff von solchen Zahlen, welche ihrer Natur nach unmöglich sind, und gewöhnlich imaginäre oder eingebildete Zahlen genannt werden, weil sie bloß in der Einbildung vorhanden sind. Daher bedeuten alle diese Ausdrücke $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$ etc. solche unmögliche oder imaginäre Zahlen, weil dadurch Quadratwurzeln von Negativzahlen angegeben werden.“


L'ALGEBRA
OPERA
Di Rafael Bombelli da Bologna
Diuiſa in tre Libri.
Con la quale ciaſcuno da ſe potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell' Arimetica.
Con vna Tauola copioſa delle materie, che in eſſa ſi contengono.
Poſta hora in luce à beneficio delli Studioſi di detta profeßione.
IN BOLOGNA,
Per Giouanni Roſſi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori.



Lösungen zu:
Wir arbeiten mit Resten
(Teil 1)

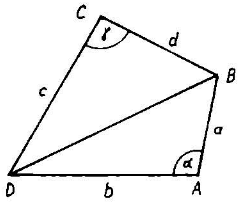
▲2▲ a) *Voraussetzung*:
$a \leqq b$, $a = k \cdot 9 + r$, $b = l \cdot 9 + s$,
$0 \leqq r$, $s < 9$, $r = s$.
Behauptung: $9 \mid b - a$.
Beweis: $b - a = (l \cdot 9 + s) - (k \cdot 9 + r)$
$= (l - k) \cdot 9 + (s - r)$
Wegen $a \leqq b$ ist $l - k \in N$.
Wegen $r = s$ ist $s - r = 0$.
Mit $m = l - k$ ist $b - a = m \cdot 9$,
$m \in N$, w. z. b. w.
b) Wie a), 9 durch z. B. c ($c \in N$) ersetzen.
c) *Voraussetzung*: $a \leqq b$, $a = k \cdot 9 + r$,
$b = l \cdot 9 + s$, $0 \leqq r$, $s < 9$, $9 \mid b - a$.
Behauptung: $r = s$.
Beweis: $b - a = (l - k) \cdot 9 + (s - r)$
(vgl. a)).
Aus $9 \mid b - a$ folgt $9 \mid s - r$.
Wegen $0 \leqq s - r < 9$ gilt $9 \mid r - s$ nur dann, wenn $s - r = 0$, d. h. $r = s$,
w. z. b. w.

▲3▲ *Voraussetzung*: p Primzahl, $p > 3$.
Behauptung: Entweder $6 \mid p - 1$ oder $6 \mid p + 1$.
Beweis: Wegen $p > 3$ ist p ungerade, folglich ist $p - 1$ gerade und $p + 1$ gerade. Wegen $p > 3$ ist die Primzahl nicht durch 3 teilbar. p hat demnach die Form $p = 3m + 1$ oder $p = 3m + 2$ ($m \in N$).
Fall 1: $p = 3m + 1$.
Wegen $p - 1 = 3m$ ist $3 \mid p - 1$, und wegen $p + 1 = 3m + 2$ ist $3 \nmid p + 1$.
Fall 2: $p = 3m + 2$.
Wegen $p - 1 = 3m + 1$ ist $3 \nmid p - 1$, und wegen $p + 1 = 3m + 3 = 3(m + 1)$ ist $3 \mid p + 1$.
Da 2 und 3 teilerfremd sind, ist entweder $2 \cdot 3 \mid p - 1$ oder $2 \cdot 3 \mid p + 1$, w. z. b. w.

▲4▲ *Voraussetzung*: p Primzahl, $p > 3$.
Behauptung: $24 \mid (p - 1)(p + 1)$.
Beweis: Nach ▲3▲ ist entweder
$3 \mid p - 1$ oder $3 \mid p + 1$.
Wegen $p > 3$ ist p ungerade, es gibt also ein $k \in N$, so daß $p = k \cdot 2 + 1$.
Dann ist
$(p - 1)(p + 1) = k \cdot 2 \cdot (k \cdot 2 + 2)$
$= k \cdot 2 \cdot 2(k + 1) = 4 \cdot k \cdot (k + 1)$.
Von den beiden aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen k und $k + 1$ ist eine durch 2 teilbar. Also ist $(p - 1)(p + 1)$ durch 8 teilbar. Außerdem ist $(p - 1)(p + 1)$ durch 3 teilbar, insgesamt also durch $3 \cdot 8 = 24$ (3 und 8 sind teilerfremd), w. z. b. w.

Lösungen zu: Sprachecke

▲1▲ Beweise, daß von allen Vierecken mit gegebenen Seiten dasjenige mit der größten Fläche in einen Kreis einbeschrieben werden kann!
Lösung: Beachte, daß in dem abgebildeten Viereck die Gleichung $\alpha + \gamma = \pi$ gilt!



Bezeichnen wir die Fläche des Vierecks mit F, so erhalten wir

$$F = \left(\frac{1}{2}\right) ab \sin\alpha + \left(\frac{1}{2}\right) cd \sin\gamma.$$

Weiterhin berechnen wir die Diagonale DB auf zwei verschiedene Arten und stellen fest, daß $a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2 + d^2 - 2cd\cos\gamma$. Aus diesen zwei Gleichungen erhalten wir nach einigen Umformungen

$$F^2 = \frac{1}{4}(a^2b^2 \sin\alpha + c^2d^2 \sin^2\gamma + 2abcd \sin\alpha \sin\gamma),$$

$$4F^2 = a^2b^2(1 - \cos^2\alpha) + c^2d^2(1 - \cos^2\gamma) + abcd[\cos(\alpha - \gamma) - \cos(\alpha + \gamma)],$$

$$4F^2 = a^2b^2 - a^2b^2\cos^2\alpha + c^2d^2 - c^2d^2\cos^2\gamma + abcd\cos(\alpha - \gamma) - abcd\cos(\alpha + \gamma), \qquad (1)$$

$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4(a^2b^2\cos^2\alpha + c^2d^2\cos^2\gamma - 2abcd\cos\alpha\cos\gamma$$

$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4(a^2b^2\cos^2\alpha + c^2d^2\cos^2\gamma - abcd[\cos(\alpha - \gamma) + \cos(\alpha + \gamma)],$$

$$\frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = a^2b^2\cos^2\alpha + c^2d^2\cos\gamma - abcd\cos(\alpha - \gamma) - abcd\cos(\alpha + \gamma),$$

$$abcd\cos(\alpha - \gamma) = -\frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + a^2b^2\cos^2\alpha + c^2d^2\cos^2\gamma - abcd\cos(\alpha + \gamma).$$

In (1) eingesetzt ergibt

$$4F^2 = (a^2b^2 + c^2d^2) - 2abcd \cdot \cos(\alpha + \gamma) - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2,$$

$$16F^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4(a^2b^2 + c^2d^2) - 8abcd\cos(\alpha + \gamma).$$

Folglich wird F maximal, wenn $\cos(\alpha + \gamma) = \cos\pi = -1$, w. z. b. w.

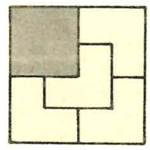
▲2▲ Bestimme alle Lösungen der Gleichung vierten Grades $x^4 - 4x = 1$.
Lösung: Beachte, daß

$$\begin{aligned} x^4 - 4x - 1 &= x4 - 4x - 1 + 2x^2 - 2x^2, \\ &= x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 - 4x - 2, \\ &= (x^2 + 1)^2 - 2(x + 1)^2! \end{aligned}$$

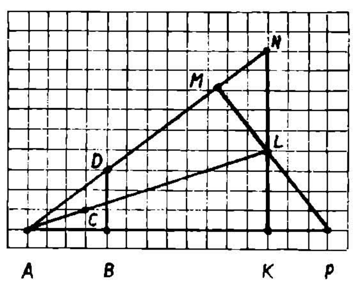
Da $(x^2 + 1)^2 - 2(x + 1)^2 = 0$,
ist $(x^2+1)^2 = 2(x + 1)^2$,
$x^2 + 1 = \pm\sqrt{2}\,(x + 1)$.

Die Lösungen dieser zwei quadratischen Gleichungen ergeben die gewünschten vier Lösungen.

▲3▲ Das Testament des alten Léon lautet:
„Ich vermache mein quadratisches Feld meinen fünf Söhnen. Der ältere erhält ein Viertel in quadratischer Form in einer Ecke (siehe Bild). Die vier anderen müssen sich den Rest in vier identische Teile von gleicher Form und gleicher Größe teilen.“ Den vier jüngeren ist es gelungen, sich den Rest nach den Wünschen des Vaters zu teilen. Wie haben sie dies gemacht?
Lösung: Der Rest ist so zu teilen, wie es das Bild zeigt.



▲4▲ Auf einem karierten Blatt Papier wurden vom Punkt A aus drei Strahlen AB, AC und AD gezeichnet. Zeigt, daß $\sphericalangle BAC$ kongruent $\sphericalangle CAD$ ist! Benutzt dazu Eigenschaften des Quadratnetzes!
Lösung: Jedes der Dreiecke MNL und LKP im Bild ist kongruent zum Dreieck ABD. Folglich ist der Strahl AL Winkelhalbierende von $\sphericalangle BAD$.

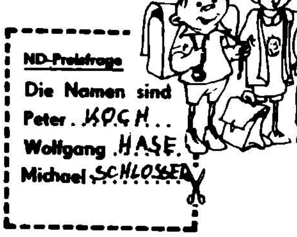


▲5▲ Kürzlich fand ich die vorjährige Tabelle des Hockeyturniers der 6. Klassen unserer Schule. In ihr ist nur ein kleiner Teil der Eintragungen erhalten. Versucht, die Tabelle zu rekonstruieren!
Lösung:

	6ª	6б	6в	6г	Очки	Счет	Место
6ª		1:1	0:1	5:1	3	6:3	2
6б	1:1		0:1	1:2	1	2:4	4
6в	1:0	1:0		1:1	5	3:1	1
6г	1:5	2:1	1:1		3	4:7	3

Lösungen zu: alpha-heiter

Wie heißen die drei Schüler?



Stimmt die Tabelle?
Fehler in der Tabelle:
1. 10 gewonnenen Spielen stehen nur 9 verlorene gegenüber. Ihre Zahl muß jedoch gleich sein.
2. Die Gesamtzahl der unentschiedenen Spiele muß durch zwei teilbar sein.
3. Gesamt-Plus-Tore müssen mit Minus-Toren übereinstimmen.
4. Gesamt-Plus-Punkte müssen den Minus-Punkten gleich sein.

Die korrekte Tabelle könnte so aussehen, daß die Zeile bei D-Berg geändert wird in:
6 0 0 6 0:7 0:12.

Drei Achten

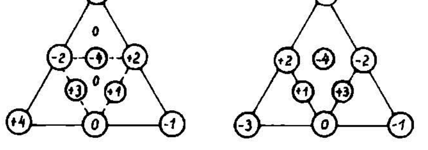
$0 = 8(8 - 8)$
$1 = \sqrt{8 \cdot 8} : 8$
$2 = (8 + 8) : 8$
$3 = \sqrt{8 + 8 : 8}$
$4 = 8 - \sqrt{8 + 8}$
$5 \approx \sqrt{8 + 8} + \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{8}}}}$
$5 = \mathrm{INT}\sqrt{\sqrt{8}} + \sqrt{8 + 8}$
$5 = 8 : (0{,}8 + 0{,}8)$
$5 = \mathrm{ld}8 - (\mathrm{ld}8)! + 8$
$\mathrm{ld}8 = \lg_2 8 = 3.$
$6 = \sqrt{8 + 8 : 8}\,!$
$7 = 8 - 8 : 8$
$8 = 8 + 8 - 8$
$9 = 8 + 8 : 8$
$10 = 8 + \sqrt{\sqrt{8 + 8}}$
$11 = 88 : 8$
$12 = 8 + \sqrt{8 + 8}$

Bei der Fünf lassen sich durch weiteres Wurzelziehen am letzten Summanden Näherungswerte von beliebiger Genauigkeit erzielen.

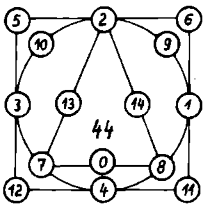
Wer rasiert den Barbier?
Den Barbier rasiert niemand, denn: gehört er zu der Menge von Männern, die sich selbst rasieren, kann er sich nicht rasieren, weil er nur die Männer behandelt, die sich nicht selbst rasieren, und nur diese. Gehört er aber zu der Menge, die sich nicht selbst rasieren, kann er sich ebenfalls nicht den Bart scheren lassen.

Richtiges Maß
Ein Liter: 3 in 10, 7 in 3, 3 in 10, 7 in 3. Bleibt 1 Liter in 7 zurück.
Zwei Liter: 3 in 10, 7 in 3, 3 in 10, 7 in 3, 3 in 10, 7 in 3, 10 in 7. Bleiben 2 Liter in 10.
Vier Liter: 3 in 10, 7 in 3. Bleiben vier in 7.
Fünf Liter: 3 in 10, 7 in 3, 3 in 10, 7 in 3, 3 in 10, 7 in 3, 10 in 7, 7 in 3. Bleiben 5 in 7.
Sechs Liter: 3 in 10, 7 in 3, 3 in 10. Sind 6 in 10.
Acht Liter: 3 in 10, 7 in 3, 3 in 10, 7 in 3, 3 in 10, 7 in 5, 10 in 7, 7 in 3, 3 in 10, 7 in 3, 3 in 10. Sind 8 in 10.
Neun Liter: 3 in 10, 7 in 3, 3 in 10, 7 in 3, 3 in 10. Sind 9 in 10.

Magische Figuren
a) Mögliche Lösungen:

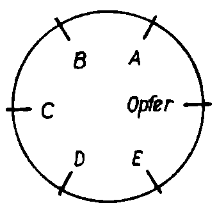


b) Lösung:



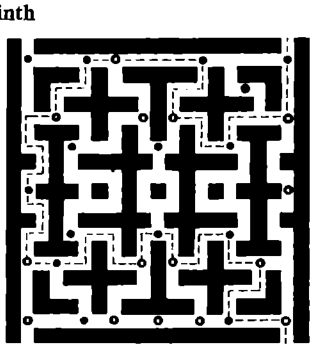
Kann der Personenzug vorbeifahren?
Zunächst werden die drei letzten Wagen des Bauzuges auf das Abzweiggleis geschoben. Sie werden vom Bauzug abgekoppelt und dieser fährt ein Stück vor. Der Personenzug rückt nun hinter den verbliebenen vorderen Teil des Bauzuges, stößt rückwärts und koppelt an sein Ende die drei abgestellten Wagen. Jetzt fährt er auf seinen alten Platz zurück und läßt dort die drei Bauwagen stehen. Der Rest des Bauzuges fährt nun auf das Abzweiggleis. Der Personenzug fährt vorbei.

Kurzkrimi
Aus (4) folgt, daß A und E Onkel bzw. Neffe sind. Aus (1) ergibt sich D = George. Aus (4) folgt, daß C der Täter ist. A = Fred ergibt sich aus (5). (6) wird nur durch E und B erfüllt. B = Frisky und E = Tom ergibt sich aus (3), außerdem muß C = Allan sein. Somit ist John Dalmas das Opfer und Allan Cunneway der Täter.



Fotozirkel
Anzahl der Fotofreunde
= Anzahl der Schildkröten; F = S.
Anzahl der Beine: $2F + 3(F - 4) = 4S$;
F = 12. Es sind 12 Fotofreunde.

Labyrinth



Frisch gewählt ist halb verbunden
1) Wenn B durch 5 teilbar ist, dann ist $a = 0$ oder 5. Da a in A als erste Ziffer steht und Telefonnummern nicht mit 0 beginnen, ist $a = 5$. 2) Wenn $a = 5$, dann ist $m = 2$. 3) Da $a = 5$ und die Quersumme von A = 42 ist, ergibt sich $b + d + s + 2x = 37$. Diese Summe taucht auch in D auf; daraus ergibt sich $d = 7$, da die Quersumme von D durch 11 teilbar ist. 4) Wenn $d = 7$, dann ist $b = 4$, da $A = 2C$, $2x + S = 26$. Daraus ergibt als einzig mögliche Lösung $x = 9$ und $s = 8$. Die Telefonnummern lauten: A = 58 97 94; B = 49 79 86; C = 29 48 97; D = 74 99 87.

Wer nahm am Sportfest teil?
Es nahmen teil: 400 Männer, 320 Frauen, 100 Jungen, 80 Mädchen.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb
Heft 6/85

Ph 7 ■ 188
Geg.: $W = 90\,\text{Nm}$ Ges.: Endkraft F_2
$F_1 = 500\,\text{N}$
$s = 0{,}12\,\text{m}$
Nach der Gleichung für die Federspannarbeit gilt
$$W = \frac{(F_1 + F_2)\cdot s}{2}.$$
Dann ist
$$F_2 = \frac{2W}{s} - F_1,$$
$$F_2 = \frac{2\cdot 90\,\text{Nm}}{0{,}12\,\text{m}} - 500\,\text{N},$$
$$F_2 = 1000\,\text{N}.$$
Die Endkraft beträgt 1000 N.

Ph 8 ■ 189 a) Drehzahl $n = \frac{v}{D\cdot\pi}$ $\left[\frac{1}{s}\right]$
Hierin sind v = Fahrgeschwindigkeit in m/s und D = Treibraddurchmesser in m. Ferner ist $c_m = 2\cdot s\cdot n$ in m/s mit n = Drehzahl der Treibräder. Demzufolge gilt
$$c_m = 2s\frac{v}{D\cdot\pi}.$$
Schließlich ist
$$v = \frac{\pi\cdot D\cdot c_m}{2\cdot s} \qquad (2)$$
mit den Grenzen $8\,\text{m/s} \leqq c_m \leqq 9\,\text{m/s}$.
1. Für $D = 2{,}00\,\text{m}$ und $s = 0{,}66\,\text{m}$ folgt
$$\frac{\pi\cdot 2\cdot 8\,\text{m}}{2\cdot 0{,}66\,\text{s}} \leqq v \leqq \frac{\pi\cdot 2\cdot 9\,\text{m}}{2\cdot 0{,}66\,\text{s}},$$
$$38{,}08\,\text{m/s} \leqq v \leqq 42{,}84\,\text{m/s}$$
bzw. $137{,}1\,\text{km/h} \leqq v \leqq 154{,}2\,\text{km/h}$.
2. Für $D = 2{,}300\,\text{m}$ und $s = 0{,}66\,\text{m}$ folgt
$$\frac{\pi\cdot 2{,}3\cdot 8\,\text{m}}{2\cdot 0{,}66\,\text{s}} \leqq v \leqq \frac{\pi\cdot 2{,}3\cdot 9\,\text{m}}{2\cdot 0{,}66\,\text{s}}$$
$$43{,}79\,\text{m/s} \leqq v \leqq 49{,}27\,\text{m/s}$$
bzw. $157{,}6\,\text{km/h} \leqq v \leqq 177{,}4\,\text{km/h}$.
Die zulässigen Höchstgeschwindigkeiten liegen bei Baureihe 01 zwischen 137,1 km/h und 154,2 km/h (tatsächlicher Wert 130 km/h),
Lok 18 201 zwischen 157,6 km/h und 177,4 km/h (tatsächlicher Wert 175 km/h).
b) Aus Gleichung (2) erhält man mit $v = 200{,}4\,\text{km/h} = 55{,}67\,\text{m/s}$,
$D = 2{,}300\,\text{m}$ und $s = 0{,}66\,\text{m}$
$$c_m = \frac{2\cdot s\cdot v}{\pi\cdot D}$$
$$c_m = \frac{2\cdot 0{,}66\,\text{m}\cdot 55{,}67\,\text{m}}{3{,}14\cdot 2{,}3\,\text{m}\cdot\text{s}}$$
$$c_m = 10{,}17\,\text{m/s}.$$
Die Kolbengeschwindigkeit beträgt 10,17 m/s.

Ph 9 ■ 190 Geg.: $s = 9{,}6\,\text{m}$ Ges.: m
$t = 4\,\text{s}$
$F = 1320\,\text{N}$
$g = 9{,}81\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$
a) 15 % von 1320 N sind 198 N. Es wirkt also eine Zugkraft von 1122 N. Die Beschleunigung des Troges erhält man aus der Gleichung $s = \frac{1}{2}at^2$.
$$a = \frac{2s}{t^2} = \frac{19{,}2\,\text{m}}{16\,\text{s}^2} = 1{,}2\,\text{m/s}^2$$
Die Zugkraft am Haken setzt sich aus der Gewichtskraft und der Beschleunigungskraft zusammen.
$$F_{Zug} = F_{Gew} + F_{Besch}$$
$$1122\,\text{N} = mg + ma$$
$$m = \frac{1122\,\text{N}}{g + a} = \frac{1122\,\text{N}}{9{,}81\,\text{m/s}^2 + 1{,}2\,\text{m/s}^2}$$
$$= 101{,}9\,\text{kg} \quad 102\,\text{kg}$$
Der Trog hat eine Masse von etwa 102 kg.
b) $F = mg + 2ma = m(g + 2a)$
$= 101{,}9\,\text{kg}\,(9{,}81\,\text{m/s}^2 + 2{,}4\,\text{m/s}^2)$
$F = 1244{,}2\,\text{N} \quad 1244\,\text{N}$
Bei doppelter Beschleunigung wirkt eine Zugkraft von etwa
1244 N. $100 : p = G : P$
$$p = \frac{P\cdot 100}{G} = \frac{1244{,}2\,\text{N}\cdot 100}{1320\,\text{N}} = 94{,}2\ldots\,\%$$
Das sind 94,2 % der ausgeschriebenen Zugkraft. Es ist also nicht vertretbar, die Beschleunigung zu verdoppeln.

Ph 10/12 ■ 191
Geg.: $r_1 = 1{,}0821\cdot 10^8\,\text{km}$ Ges.: T_1 in d
$r_2 = 5{,}91\cdot 10^9\,\text{km}$
$T_2 = 248{,}4\,a$
Nach dem Keplerschen Gesetz gilt
$$T_1^2 : T_2^2 = r_1^3 : r_2^3,$$
$$T_1^2 = \frac{T_2^2\cdot r_1^3}{r_2^3}$$
$$T_1 = \sqrt{\frac{248{,}4^2\cdot(1{,}0821\cdot 10^8)^3}{(5{,}91\cdot 10^9)^3}\,a^2},$$
$$T_1 \approx 0{,}6154\,a.$$
$0{,}615\cdot 365 \approx 225$. Die Umlaufzeit der Venus beträgt etwa 225 Tage.

Aus Platzgründen müssen wir auf die Lösungen zu den Chemieaufgaben verzichten.

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. P. Bachmann
Heft 2/86

▲2690▲ Wir betrachten zunächst ein Codewort
$c = b_1b_2\ldots b_{n-1}b_n$, in dem alle Buchstaben b_i voneinander verschieden sind und in dem der Buchstabe A nicht auftritt. Man erkennt leicht, daß c insgesamt die Permutation p mit
$p(\text{A}) = b_1$, $p(b_i) = b_{i+1}$ für
$1 \leqq 1 < n$ und $p(b_n) = \text{A}$ beschreibt.
Ein solches Codewort nennen wir *A-Zyklus*, da der Buchstabe A mit in die Permutation eingeht. Wollen wir A aus der Permutation ausschließen, so hängen wir an c den ersten Buchstaben b_1 hinten nochmals an. Dann beschreibt $cb_1 = b_1\ldots b_nb_1$ die Permutation $p(b_i) = b_{i+1}$ für $1 \leqq i < n$ und $p(b_n) = b_1$. A wird deswegen nicht verändert, weil am Anfang A nach b_1 und am Ende b_1 nach A überführt wird, insgesamt also $p(\text{A}) = \text{A}$. Wir nennen cb_1 einen *Zyklus*. Schließlich betrachten wir den Fall, daß ein $b_i = \text{A}$ ist. A beschreibt die Vertauschung A mit A, ist also ohne Wirkung und kann aus dem Codewort gestrichen werden.

Wird ein Zyklus bzw. ein A-Zyklus $c = b_1 b_2 \ldots b_{n-1} b_n$ in umgekehrter Reihenfolge $c^{-1} = b_n b_{n-1} \ldots b_2 b_1$ hingeschrieben, so wird die inverse Permutation p^{-1} mit $p^{-1}(b_{i+1}) = b_i$ beschrieben. Das Wort c^{-1} beschreibt also die Decodierung.
Jedes Codewort kann geeignet in Zyklen zerlegt werden, z. B. das Codewort BUCHSTABENRECHNUNG in (BUCHSTAB) (ENRE) (CH) (NUN) (G). Diese Zerlegung ist im allgemeinen nicht eindeutig, z. B. ist (BUCH) (STABEN) (RECHNU) (NG) eine andere Zerlegung, in der zudem alle Zyklen A-Zyklen sind. Beide Zerlegungen beschreiben die gleiche Codierung. Das Wort zur Decodierung erhält man durch die inverse Reihenfolge der inversen Zyklen, also GNUNHCERNEBATSHCUB. Die decodierte Nachricht lautet damit DUBISTSCHOEN!
Aus dem oben Gesagten folgt sofort, daß ein symmetrisches Codewort cc^{-1} wirkungslos ist, da nach der Codierung mittels c sofort die Decodierung mittels c^{-1} erfolgt. OTTO und RETTER sind solche symmetrischen Codeworte und auch MAMA, da nach dem Streichen von A nur MM übrig bleibt.
Man sieht auch leicht ein, daß in einem Codewort die Reihenfolge von zwei Zyklen dann vertauscht werden kann, wenn es keinen Buchstaben gibt, der in beiden Zyklen verändert wird. Somit kann in ROTOR in der Zyklendarstellung (R) (OTO) (R) der A-Zyklus (R) auch nach dem Zyklus (OTO) angeordnet werden. Man erhält zu ROTOR das die gleiche Permutation beschreibende Codewort OTORR, das zu OTO verkürzbar ist. OTO beschreibt die Vertauschung O nach T und T nach O, die auch durch TOT beschrieben wird.
Schließlich wollen wir überlegen, welche Codeworte für beliebige Permutationen benötigt werden. Wir betrachten eine Permutation p, bei der alle 26 Buchstaben des Alphabets verändert werden. Es wird ein Buchstabe b in den Buchstaben $p(b)$ überführt. Nun beginnen wir mit der Konstruktion eines Codewortes $b_1 b_2 \ldots b_n$, indem wir setzen:
$b_1 = p(\mathrm{A})$, $b_{i+1} = p(b_i)$ für $1 \leq i < n$
und n sei der kleinste Index mit $p(b_n) = \mathrm{A}$. Somit haben wir einen A-Zyklus konstruiert. Wenn in diesen Zyklus alle Buchstaben eingehen, sind wir fertig und $n = 25$, da 26 Buchstaben existieren und alle b_i ungleich A sind. Wenn jedoch $m = 26 - (n+1)$ Buchstaben übrig bleiben, so konstruieren wir einen weiteren Zyklus $b_1 b_2 \ldots b_r b_1$, wobei b_1 ein beliebiger übrig gebliebener Buchstabe ist und wieder gilt:
$b_{i+1} = p(b_i)$ für $1 \leq i < r$,
sowie $p(b_r) = b_1$.
A kann in diesen Zyklus nicht eingehen, deshalb brauchen wir für die einbezogenen r Buchstaben ein Codewort der Länge $r+1$. Sind jetzt keine weiteren Buchstaben übrig, so beschreiben beide Zyklen ein Codewort der Länge
$n + (26 - (n+1)) + 1 = 26$.
Anderenfalls setzen wir die Konstruktion fort. Die meisten Zyklen und damit das längste Codewort sind zu konstruieren, wenn in alle Zyklen nur zwei Buchstaben eingehen. Dann werden 13 Zyklen benötigt, dabei hat der A-Zyklus die Länge 1, die restlichen 12 Zyklen die Länge 3, insgesamt entsteht ein Codewort der Länge $1 + 12 \cdot 3 = 37$. Also kann jede Permutation mit einem Codewort der maximalen Länge 37 beschrieben werden.
Das nach dem hier beschriebenen Verfahren konstruierte Codewort der zu BUCHSTABENRECHNUNG gehörenden Permutation ist CGBNREUHSTB.

Lösungen zu: Flächen und nochmals Flächen
Heft 3/86, Seite 57

▲1▲ A, B, D, F, G, H

▲2▲ a) -1 b) $-1; 2$ c) $-1; 2; 3; 5$ d) $-1; 2; 3$ e) -4

▲3▲ $a = b = 4$ m

▲4▲ a) 8 cm² b) 6 cm² c) 20 cm² d) 2 cm²

▲5▲ Der Flächeninhalt aller drei Dreiecke ist gleich.

▲6▲ a)

a (in cm)	1	2	4
b (in cm)	36	18	9

b) $a = b = 6$ cm $U = 24$ cm

▲7▲ Die Flächen B, E und I, ebenso die Flächen C, G und K, aber auch die Flächen D und H haben den gleichen Flächeninhalt.

▲8▲ $x = 4$

▲9▲ a) Nein b) Ja c) Ja

▲10▲ a) Ja b) Ja c) Nein d) Ja

▲11▲ Alter Flächeninhalt: A;
alter Umfang: U
a) Neuer Flächeninhalt: $\frac{A}{4}$;
neuer Umfang: $\frac{U}{2}$
b) Neuer Flächeninhalt: $9A$;
neuer Umfang: $3U$

▲12▲ $7\,\mathrm{cm} \cdot 14\,\mathrm{cm} = 98\,\mathrm{cm}^2$

▲13▲ Schmidts und Pauls Angaben täuschen eine Genauigkeit vor, die auf Grund der durchgeführten Messungen nicht gerechtfertigt ist. Die Eingangswerte haben je drei zuverlässige Ziffern. Das Ergebnis hat nicht mehr als drei zuverlässige Ziffern.

▲14▲ a) 38 cm² b) 1505 cm²
(Die Angaben in der Zeichnung wurden als genaue Werte angenommen.)

▲15▲ a) 316 cm² b) 144 cm²
(Die Angaben in der Zeichnung wurden als genaue Werte angenommen.)

Lösungen zu: Zum Berechnen algebraischer Produkte ...
Heft 3/86, Seite 59

Bei den ersten vier Aufgaben wurde die mit dem SR 1 ermittelte Zahl anschließend gerundet.

▲1▲ $5025{,}7749 \approx 5 \cdot 10^3$

▲2▲ $0{,}019359 \approx 0{,}0194 = 1{,}94 \cdot 10^{-2}$

▲3▲ $0{,}0044739 \approx 0{,}004474 = 4{,}474 \cdot 10^{-3}$

▲4▲ $26{,}246525 \approx 26{,}2 = 2{,}62 \cdot 10^1$

▲5▲

a) $\boxed{a}\ \boxed{\div}\ \boxed{b}\ \boxed{\div}\ \boxed{c}\ \boxed{\div}\ \boxed{d}\ \boxed{\div}\ \boxed{e}\ \boxed{\times}\ \boxed{f}\ \boxed{=}$

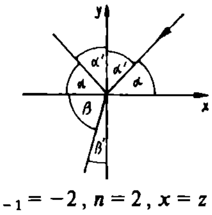
b) $\boxed{a}\ \boxed{\div}\ \boxed{b}\ \boxed{\div}\ \boxed{c}\ \boxed{\times}\ \boxed{d}\ \boxed{\times}\ \boxed{e}\ \boxed{\div}\ \boxed{f}\ \boxed{=}$

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. H.-J. Voß
Heft 3/86

Im Fall a) kann der Wolf W stets den Hasen H durch eine der folgenden drei (minimalen) Zugfolgen
1 – 2 – 5 – 8 – 9, 1 – 2 – 5 – 8 – 11
oder 1 – 2 – 5 – 8 – 7 fangen
(die möglichen Züge des Hasen sind nicht angegeben).
Auf jedem der beiden angegebenen Graphen wechselt bei jedem Zug die zu ziehende Figur von einem ungeraden Feld auf ein gerades und umgekehrt. Damit kann es im Fall b) keine Lösung geben, da immer dann, wenn W am Zuge ist, W und H beide auf einem ungeraden oder beide auf einem geraden Feld stehen. Ja, der Hase kann sich nicht einmal fangen lassen, selbst wenn er es wollte.
Im Spiel auf dem Graphen aus Bild 2 von M. Nitsche kann der Hase sich zwar fangen lassen, kann aber auch in jedem Zuge den Abstand zum Wolf auf mindestens 3 vergrößern. Das ist möglich, da immer dann, wenn H am Zuge ist, W und H beide auf einem ungeraden oder beide auf einem geraden Feld stehen.

Lösungen zu: Ehrenfried Walter von Tschirnhaus – Ein sächsischer Mathematiker
Heft 3/86

▲1▲ a) Einsetzen der Transformationsgleichung liefert:
$$y = a_n(a^n z^n + n a^{n-1} z^{n-1} b + \ldots) + a_{n-1}(a^{n-1} z^{n-1} + \ldots) + \ldots = a_n a^n z^n + (a_{n-1} + nb)\, a^{n-1} z^{n-1} + \ldots$$
Also muß $a_{n-1} + nb = 0$ sein,
daraus ergibt sich: $b = \frac{a_{n-1}}{n}$.
Wegen der Einfachheit wähle $a = 1$!
Trf.-Gleichung:
$x = z - \frac{a_{n-1}}{n}$.



b) $a_{n-1} = -2$, $n = 2$, $x = z + 1$.
Daraus ergibt sich $y = z^2 - 9$.
Aus $z_1 = +3$ und $z_2 = -3$ ergeben sich die Lösungen $x_1 = 4$, $x_2 = -2$.

▲2▲ a) $y = mx = \tan\alpha \cdot x$.
Für den reflektierten Strahl gilt:
$y_r = \tan(180 - \alpha) \cdot x = -\tan\alpha \cdot x = -mx \ (m > 0,\ x \leq 0)$

b) für den gebrochenen Strahl gilt:
$y_b = \tan(180 + \beta) \cdot x = \tan\beta \cdot x$
$(x \leqq 0)$.

Wenn in $\frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'} = n$ die Winkel umgerechnet werden ihre Ergänzungswinkel α und β, erhält man: $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = n$.

Daraus ist b berechenbar und es ergibt sich:

$$y_b = \tan\left(\arccos\left(\frac{\cos\alpha}{n}\right)\right)x.$$

Lösungen zum alpha-Wettbewerb
Heft 1/86

Ma 5 ■ 2636 Angenommen, Egon kauft x Bücher zu 3,– M und y Bücher zu 4,– M; dann gilt $3x + 4y = 50$. Um möglichst viele Bücher zu erwerben, muß der Anteil an Büchern zu 3,– M so groß wie nur möglich sein.
Nun gilt $48 + 2 = 50$, $45 + 5 = 50$,
$42 + 8 = 50 = 14 \cdot 3 + 2 \cdot 4$.
Egon erwirbt 16 Bücher, und zwar 14 zu 3,– M und 2 zu 4,– M.

Ma 5 ■ 2637 Wir stellen eine Tabelle auf:

	Lebensalter des Sohnes	Vaters	
Gegenwärtig	23	55	$3 \cdot 23 > 55$
Vor 1 Jahr	22	54	$3 \cdot 22 > 54$
Vor 2 Jahren	21	53	$3 \cdot 21 > 53$
...			
Vor 6 Jahren	17	49	$3 \cdot 17 > 49$
Vor 7 Jahren	16	48	$3 \cdot 16 = 48$
Vor 8 Jahren	15	47	$3 \cdot 15 < 47$

Vor 7 Jahren war der Vater dreimal so alt wie sein Sohn, denn 16 Jahre · 3 = 48 Jahre.

Ma 5 ■ 2638 Entnimmt man der Kiste 36 Äpfel, so könnte man im ungünstigsten Falle von jeder der vier Sorten je 9 Äpfel erhalten. Entnimmt man der Kiste 37 Äpfel, so hat man mit Sicherheit von einer Sorte 10 Äpfel.

Ma 5 ■ 2639 Anzahl der Münzen im Wert von

10 Pf	20 Pf	50 Pf
10	–	–
8	1	–
6	2	–
5	–	1
4	3	–
3	1	1
2	4	–
1	2	1
–	5	–
–	–	2

Ein 1-Mark-Stück läßt sich auf zehnfache Art in 10-Pf-, 20-Pf- bzw. 50-Pf-Stücke wechseln.

Ma 5 ■ 2640
109, 118, 127, 136, 145, 154, 163, 172, 181, 190;
208, 217, 235, 244, 253, 262, 271, 280;
307, 316, 325, 334, 343, 352, 361, 370;
406, 415, 424, 433, 442, 451, 460;
505, 514, 523, 532, 541, 550;
604, 613, 622, 631, 640;
703, 712, 721, 730;
802, 811, 820;
901, 910; es gibt
$2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 54$
dreistellige natürliche Zahlen mit der Quersumme 10.

Ma 5 ■ 2641 Wegen $23 \cdot 4 = 92$
und $92 < 120$ und $23 \cdot 6 = 138$
und $138 > 129$ gilt $c = 5$.
Wegen $2 \cdot b = 6$ und $2 \cdot b = 16$
könnte $b = 3$ oder $b = 8$ gelten.
Für $b = 3$ erhalten wir
$233 \cdot 52 = 12116 \neq 12a7$;
also entfällt $b = 3$. Für $b = 8$
gilt $238 \cdot 52 = 12376$, also $a = 3$.
Die Divisionsaufgabe lautet somit
$12376 : 238 = 52$.

Ma 6 ■ 2641
a) $4 \cdot 5 = 20$
b) $1 + 2 \cdot 3 \cdot 4 - 5 = 20$
c) $(1 + 2 + 3 + 4) : 5 - 6 + 7 + 8 + 9 = 20$
d) $(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) : 6 = 20$
e) $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$
f) $(2 + 3) \cdot 4 = 20$
g) $5 \cdot 6 + 7 - 8 - 9 = 20$
h) $10 + 11 + 12 - 13 = 20$
i) $21 + 22 - 23 = 20$

Es gibt noch viele weitere Beispiele.

Ma 6 ■ 2643
(1) $9 \cdot (b + b + 1) = b \cdot (9 + b + 1)$,
$9 \cdot (2b + 1) = b \cdot (10 + b)$; nur die natürliche Zahl $b = 9$ erfüllt diese Gleichung. Daraus folgt $c = 10$.
(2) $9 \cdot (c + 1 + c) = (c + 1) \cdot (9 + c)$,
$9 \cdot (2c + 1) = (c + 1) \cdot (c + 9)$.
Die natürliche Zahl $c_1 = 8$ erfüllt diese Gleichung; daraus folgt $b_1 = 9$. Aber auch $c_2 = 0$, also $b_2 = 1$ erfüllen die Gleichung.

Ma 6 ■ 2644 Am 3. Tag wurden 22 kg Gurken, am 2. Tag ebenfalls 22 kg Gurken verkauft. Am 1. Tag wurden $(2 \cdot 22 - 8)$ kg = 36 kg verkauft. Somit waren anfangs $(22 + 22 + 36)$ kg = 80 kg Gurken im Faß.

Speed (Geschwindigkeitsberechnung mit dem SR 1)

Marita Koch wurde auch 1985 als *Sportlerin des Jahres* von den Lesern der *„Jungen Welt"* gewählt. Am 1.1.1986 hielt sie auf fünf Distanzen die Hallenweltbestzeit. Sie lief die 50 m in 6,11 s und benötigte für 60 m die Rekordzeit von 7,04 s. Die 100 y schaffte Marita Koch in 10,25 s und die 100-m-Strecke legte sie in 11,15 s zurück. Schließlich hält sie mit 22,39 s den Hallenrekord über 200 m. Es werde einmal idealisiert angenommen, daß eine Läuferin mit konstanter Geschwindigkeit das Rennen vom Start bis zum Ziel durchläuft. Welche Geschwindigkeit in Stundenkilometern erzielte Marita Koch auf den fünf genannten Strecken? Benutze den SR 1!
Hinweis: 1 Yard ist ein englisches und nordamerikanisches Längenmaß, als Abkürzung benutzt man den Buchstaben y. Es gilt 1 y = 91,4 cm. *W. Sch.*
(Lösung siehe Heft 5/86!)

XXVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Schulolympiade

Fortsetzung von Seite 82

Olympiadeklassen 11/12

261211 Man ermittle alle Tripel $(x; y; z)$ von Zahlen mit den folgenden Eigenschaften (1), (2):
(1) Die Zahlen x, y, z sind in dieser Reihenfolge aufeinanderfolgende ganze Zahlen.
(2) Es gilt: $x \cdot (x + y + z) = x \cdot y \cdot z$.

261212 Man beweise:
a) Für jedes Tripel (a, b, c) positiver reeller Zahlen, für das $c^4 = a^4 + b^4$ gilt, gibt es ein Dreieck mit a, b und c als Zahlenwerte seiner Seitenlängen.
b) Wenn für die Zahlenwerte a, b und c der Seitenlängen eines Dreiecks $a^4 + b^4 = c^4$ gilt, so ist das Dreieck spitzwinklig.

261213 An einer internationalen Tagung nahmen jeweils genau zwei Vertreter der Ungarischen Volksrepublik, der ČSSR, der VR Polen und der DDR teil.
Über diese acht Teilnehmer ist bekannt:
(1) Jeder dieser Teilnehmer spricht neben seiner Muttersprache wenigstens eine Sprache aus den anderen drei genannten Teilnehmerländern. (Die Sprachen aus den vier Ländern waren ungarisch, tschechisch, polnisch, deutsch; andere Sprachen aus diesen Ländern wie etwa slowakisch oder sorbisch kamen nicht vor.)
(2) Jede der vier Sprachen wird von Teilnehmern aus genau drei der genannten Länder gesprochen.
(3) Jeder der Teilnehmer, der polnisch spricht, spricht auch ungarisch, jedoch nicht deutsch.
(4) Die Sprachkenntnisse der beiden polnischen Teilnehmer unterscheiden sich in bezug auf die vier genannten Sprachen voneinander.
a) Man ermittle, wie viele der genannten Teilnehmer insgesamt deutsch sprechen und aus welchen Ländern diese Teilnehmer kamen.
b) Man ermittle, welche Sprachen die beiden Teilnehmer aus der UVR sprachen.

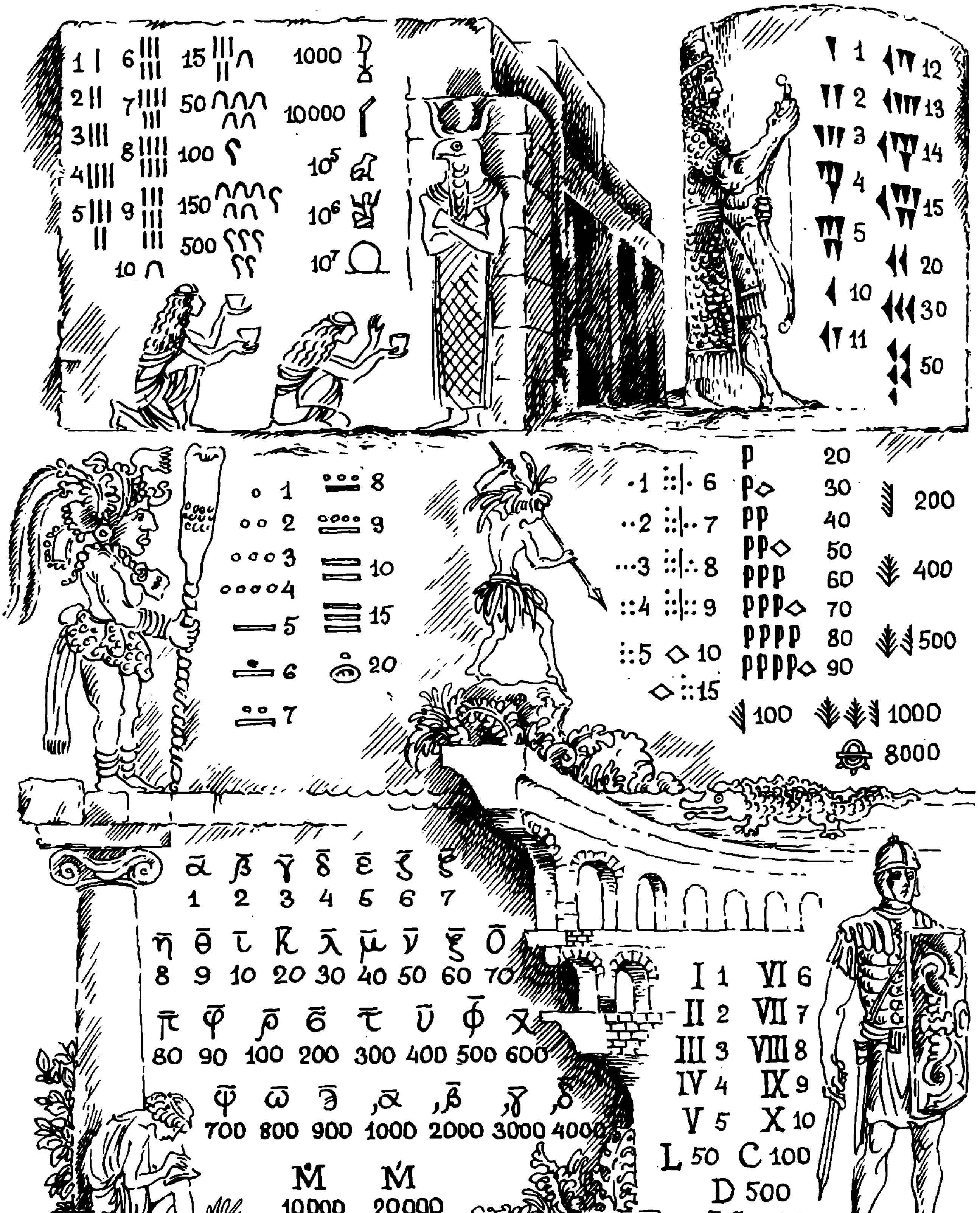
261214 Für jede reelle Zahl b sei (a_n) diejenige Zahlenfolge, die durch

$$a_n = \frac{3n + b}{2n - 1} \quad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (1)$$

definiert ist.
Man ermittle alle diejenigen ganzen Zahlen b, für die die durch (1) definierte Zahlenfolge genau drei Glieder besitzt, die die Ungleichungen

$$1{,}45 < a_n < 1{,}47 \qquad (2)$$

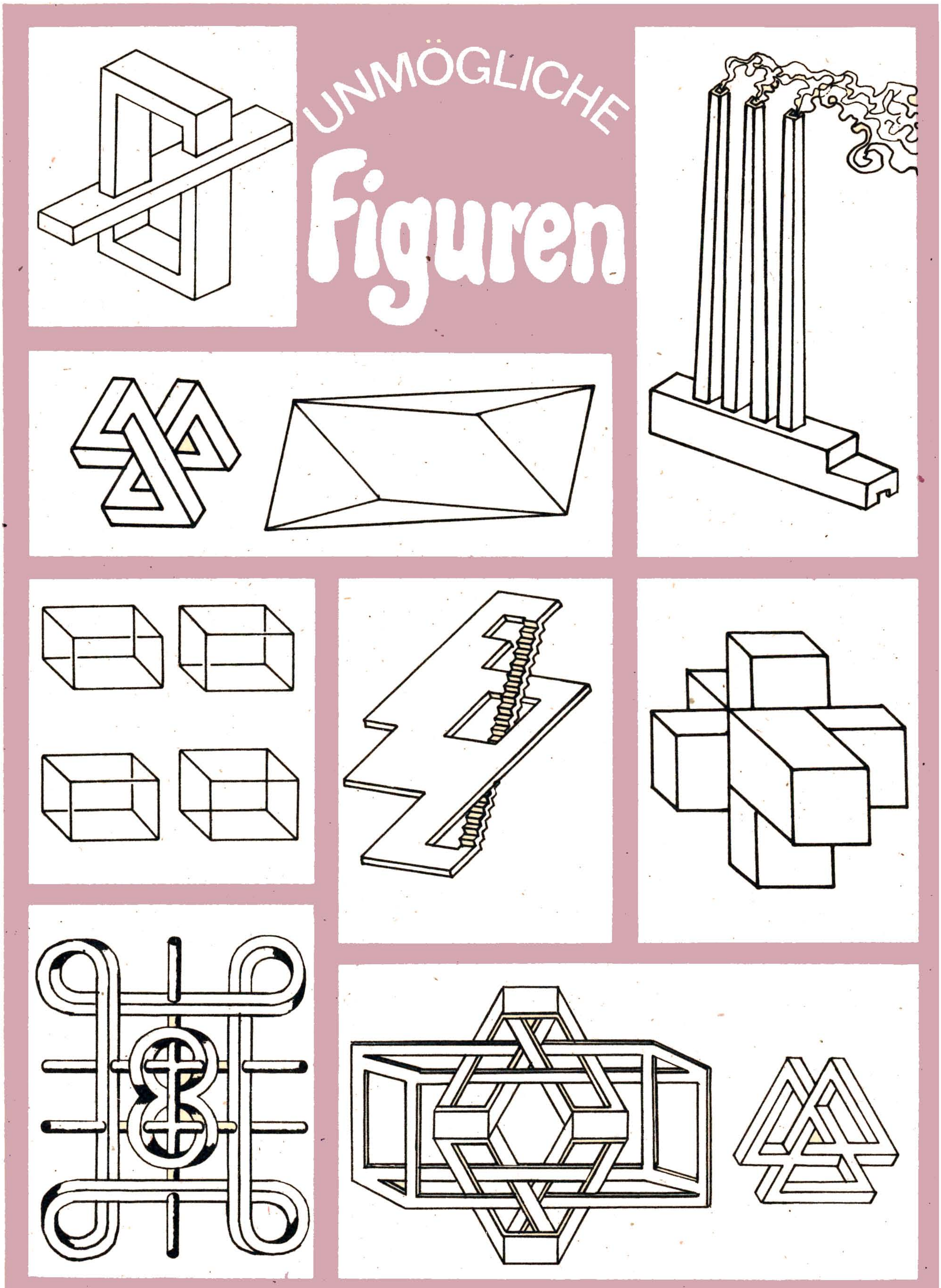
erfüllen. Zu jeder so ermittelten Zahl b (falls es eine solche gibt) gebe man die drei Glieder a_n an, die (2) erfüllen.



Schreibt die Zahl 1986 auf jede der sechs Arten auf!

Ägypter, Babylonier, Majas, ein afrikanischer Stamm, Griechen, Römer

Diese Vignette entnahmen wir der mathematischen Schülerzeitschrift *Quant*, Moskau



ISSN 002-6395 · alpha · Berlin · 20 (1986) 4 · Seiten 73 bis 96