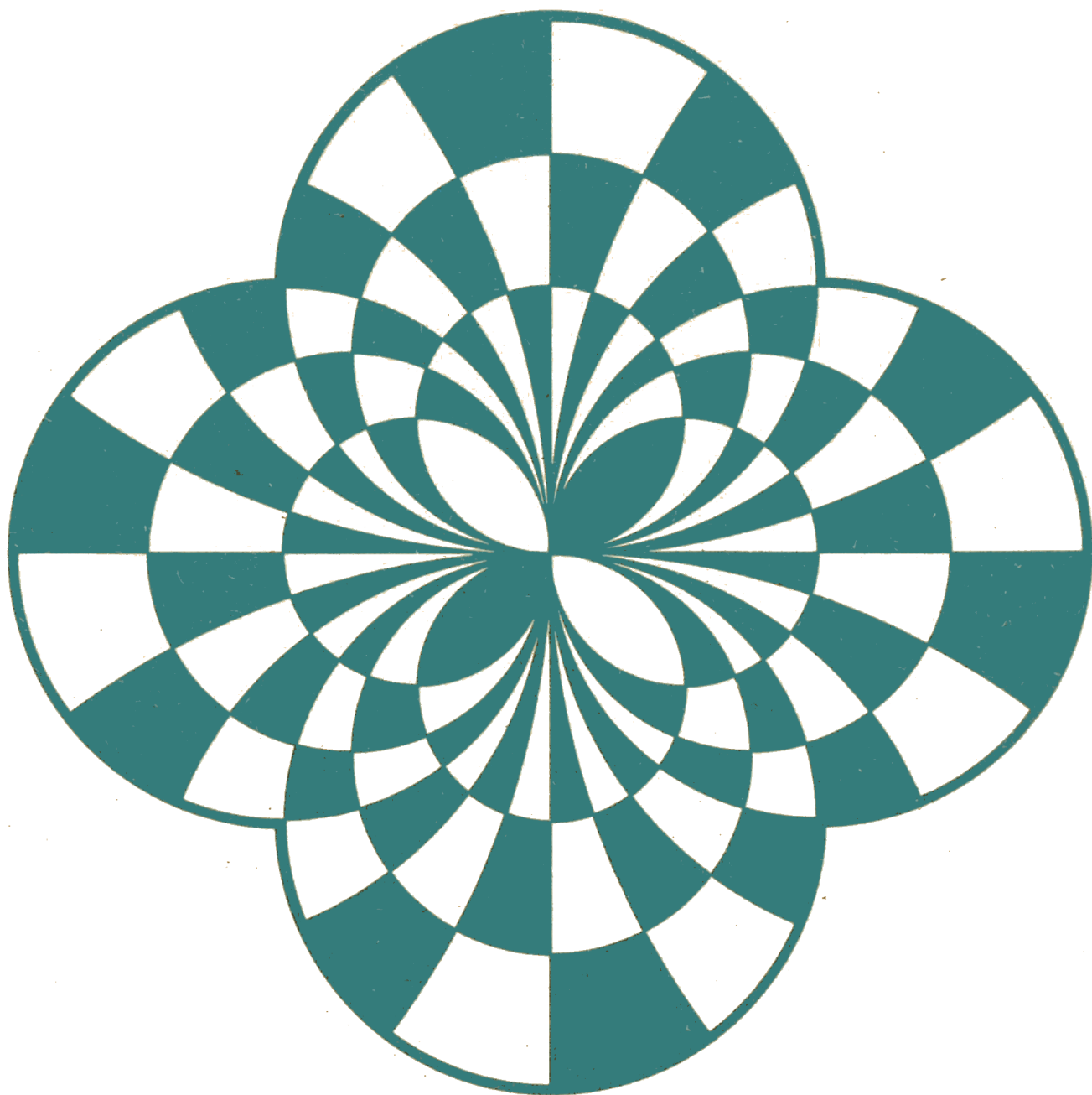


**Mathematische
Schülerzeitschrift**

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
6. Jahrgang 1972
Preis 1,- M
Sonderpreis für DDR: 0,50 M
Index 31 059

2

Redaktionskollegium:

Prof. Dr.-Ing. habil. G. Clemens (Leipzig);
Prof. Dr. habil. Lilli Görke (Berlin); Dozent
Dr. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dr. habil.
E. Hameister (Magdeburg); K. Hofmann
(Berlin); Dr. R. Hofmann (Leipzig); Prof.
Dr. H. Karl (Potsdam); Nationalpreisträger
H. Kästner (Leipzig); Oberlehrer K. Krüger,
Verdienter Lehrer des Volkes (Bad Doberan);
Studienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer
des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Dozent
Dr. H. Lohse (Leipzig); Nationalpreisträger
Oberstudienrat Dr. R. Lüders (Berlin); Ober-
lehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Prof. Dr.
habil. U. Pirl (Berlin); Dozent Dr. E. Schrö-
der (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze
(Herzberg/Elster); Oberlehrer H. Schulze
(Leipzig); W. Stoye (Berlin); W. Träger
(Döbeln); W. Unze (Leipzig); Prof. Dr. habil.
W. Walsch (Halle);

Redaktion:

StR J. Lehmann, V. L. d. V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541
Postcheckkonto: Berlin 132 626 Erschei-
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,- M,
Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonne-
ment zweimonatlich 1,- M, Sonderpreis für
die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buch-
handel und der Deutschen Post entgegen-
genommen.

Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik
und Westberlin erfolgt über den Buchhandel;
für das sozialistische Ausland über das
jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für
alle übrigen Länder über den Deutschen
Buch-Export und -Import GmbH, DDR
701 Leipzig, Leninstr. 16.

Foto: Augustin-Louis Cauchy (1789 bis
1857) — nach einer Lithographie von Boilly
1831 (S. 27); Briefmarken, zur Verfügung
gestellt von P. Nüchterlein, Burg bei Magde-
burg (S. 35); Vignetten: K.-H. Guckuk
(S. 28, S. 48); Foto: J. Lehmann, Leipzig
(S. 39); Technische Zeichnungen: G. Grub,
Leipzig

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung:

Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)

Redaktionsschluß: 26. Januar 1972

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 25 Die Arithmetik der Binomialkoeffizienten (9)*
Prof. D. B. Fuchs, Moskau (aus Quant 6/70)
- 26 Ein mathematisches Kreuzworträtsel (8)
Diplomlehrer Christine Riehl, Sektion Mathematik
der Karl-Marx-Universität Leipzig
- 26 Eine Aufgabe von Prof. Dr. rer. nat. habil. L. A. Kaloujnine (10)
Mathematisch-Physikalische Fakultät der Universität Kiew
- 27 Zwei Beweise einer Ungleichung von Cauchy (10)
Prof. Dr. W. Dziadek, Universität Kiew
- 27 Physik-Wettbewerb 1971 (6)
Preisträger
- 28 *alpha* international (7)
Berichte aus Kiew, Paris und Budapest
- 29 Graphiken zur Direktive des VIII. Parteitages der SED (5)
Parteihochschule „Karl Marx“ beim ZK der SED
- 30 Additive magische Zahlquadrate mit neun Feldern (7)
W. Träger, Schloßberg-Oberschule Döbeln
- 32 Welche — wie viele Möglichkeiten gibt es? (5)
Oberlehrer Dr. W. Türke, Institut für Lehrerbildung „Wilhelm Pieck“, Auerbach
- 34 Ramanujan — das mathematische Genie Indiens Teil 3 (9)
Prof. Dr. Dr.-Ing. V. Lewin
Lehrstuhlleiter am Lenin-Pädagogischen Institut Moskau
- 36 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb (5)
Aufgaben (Abschluß des Wettbewerbs 1971/72)
- 38 XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR (7)
Aufgaben der Bezirksolympiade (5./6. 2. 1972)
- 40 In freien Stunden, *alpha* heiter (5)
StR J. Lehmann, V. L. d. V., Leipzig · OL H. Pätzold, VH Waren/Müritz
- 42 aufgepaßt — nachgedacht — mitgemacht (5)
speziell für Klasse 5/6
Aufgaben — Arbeitsblatt Geometrie
- 43 Lösungen (5)
- 48 Interview mit Prof. Dr. L. A. Kaloujnine (5)
Über eine mathematisch-physikalische Schule in Kiew

III./IV. Umschlagseite:

Buchbesprechung zu *Unterhaltsame Logik und Keine Angst vor Mathematik* (5)

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgabe für Schüler ab der angegebenen Klasse geeignet

Die Arithmetik der Binomialkoeffizienten

§ 1 Definition und einfachste Eigenschaften der Binomialkoeffizienten

Wenn man das Binom $1+x$ in die Potenz n erhebt, so erhält man offensichtlich ein Polynom des Grades n , d. h. die größte Potenz, in der x in das Polynom eingeht, ist n . Zum Beispiel:

$$\begin{aligned}(1+x)^0 &= 1, \\ (1+x)^1 &= 1+x, \\ (1+x)^2 &= 1+2x+x^2, \\ (1+x)^3 &= 1+3x+3x^2+x^3, \\ (1+x)^4 &= 1+4x+6x^2+4x^3+x^4, \\ (1+x)^5 &= 1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5 \\ &\dots\end{aligned}$$

Die Koeffizienten dieser Polynome nennt man Binomialkoeffizienten. Es gibt für sie eine spezielle Bezeichnung: der Koeffizient bei x^m im Polynom $(1+x)^n$ wird mit C_n^m bezeichnet. So ist z. B. $C_2^1=2$, $C_4^2=6$, $C_5^3=10$. Man kann also schreiben

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n. \quad (1)$$

Für eine beliebige Zahl a erhält man hieraus leicht

$$(a+x)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} x + \dots + C_n^n x^n.$$

(Es genügt, Formel (1) auf $(1+xa)^n$ anzuwenden und die erhaltene Gleichung mit a^n zu multiplizieren).

Es ist offensichtlich, daß C_n^m ganze nicht negative Zahlen sind und daß $C_n^m=0$ für $m>n$ (das Polynom $(1+x)^n$ hat den Grad n , und x^m geht in ihn für $m>n$ nicht ein). Man kann sich ferner leicht davon überzeugen, daß $C_n^0=C_n^n=1$. Die anderen Binomialkoeffizienten C_n^m (für $0<m<n$) kann man finden, indem man $1+x$ in die verschiedensten

Potenzen erhebt. Ihre Werte für $n \leq 10$ sind in der folgenden Tabelle enthalten (s. unten).

Wir sehen, daß die Binomialkoeffizienten recht schnell wachsende Zahlen sind. Der aufmerksame Leser wird in der Anordnung dieser Zahlen eine Reihe von Gesetzmäßigkeiten feststellen. Solche Gesetzmäßigkeiten ergeben sich im allgemeinen leicht aus der Definition der Binomialkoeffizienten. Wir werden hier nur die wichtigsten von ihnen beweisen. Von ihnen hebt sich wegen seiner Bedeutung wiederum die sogenannte *Pascalsche Gleichung* hervor.

Satz 1 (Pascalsche Gleichung). Für beliebige natürliche Zahlen n, m gilt

$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}. \quad (2)$$

Beweis: Nach Definition ist C_n^m der Koeffizient bei x^m in $(1+x)^n$. Um diesen Koeffizienten zu finden, müssen wir n Polynome miteinander multiplizieren, die alle gleich $1+x$ sind. Zuerst $n-1$ dieser Polynome miteinander multiplizierend, erhalten wir

$1 + C_{n-1}^1 x + C_{n-1}^2 x^2 + \dots + C_{n-1}^{n-1} x^{n-1}$.

Jetzt führen wir die letzte Multiplikation durch und bekommen

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= (1+x)(1 + C_{n-1}^1 x + C_{n-1}^2 x^2 + \dots \\ &\quad + C_{n-1}^{n-1} x^{n-1}) = (1 + C_{n-1}^1 x + C_{n-1}^2 x^2 \\ &\quad + \dots + x^{n-1}) + (x + C_{n-1}^1 x^2 \\ &\quad + C_{n-1}^2 x^3 + \dots + x^n) \\ &= 1 + (C_{n-1}^1 + 1)x + (C_{n-1}^2 + C_{n-1}^1)x^2 \dots \\ &\quad + (C_{n-1}^{n-1} + C_{n-1}^{n-2})x^{n-1} + x^n.\end{aligned}$$

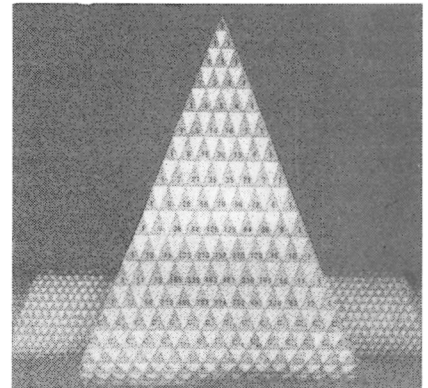
In diesem Ausdruck ist der Koeffizient bei x^m gleich $C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$, also $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$.

Die Pascalsche Gleichung ist gut zur Be-

rechnung der Binomialkoeffizienten geeignet. Wenn wir z. B. unsere Tabelle für $n=11$ durch eine elfte Zeile ergänzen wollen, so genügt es, benachbarte Zahlen der zehnten Zeile zu addieren:

$$\begin{aligned}C_{11}^0 &= 1 & C_{11}^6 &= C_{10}^6 + C_{10}^5 = 462 \\ C_{11}^1 &= C_{10}^1 + C_{10}^0 = 11 & C_{11}^7 &= C_{10}^7 + C_{10}^6 = 330 \\ C_{11}^2 &= C_{10}^2 + C_{10}^1 = 55 & C_{11}^8 &= C_{10}^8 + C_{10}^7 = 165 \\ C_{11}^3 &= C_{10}^3 + C_{10}^2 = 165 & C_{11}^9 &= C_{10}^9 + C_{10}^8 = 55 \\ C_{11}^4 &= C_{10}^4 + C_{10}^3 = 330 & C_{11}^{10} &= C_{10}^{10} + C_{10}^9 = 11 \\ C_{11}^5 &= C_{10}^5 + C_{10}^4 = 462 & C_{11}^{11} &= 1\end{aligned}$$

Hieraus ist ersichtlich, daß man die Binomialkoeffizienten am besten in einer dreieckigen Tabelle, dem sogenannten Pascalschen Dreieck anordnet.



Jede Zahl dieser Tabelle erhält man als Summe der beiden links und rechts über ihr stehenden Zahlen. Mit Hilfe der Pascalschen Gleichung kann man auch eine allgemeine Formel finden, die C_n^m durch n und m ausdrückt.

Satz 2 (Formel der Binomialkoeffizienten). Für beliebige natürliche Zahlen n, m gilt

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m}. \quad (3)$$

Beweis: Wir werden den Beweis mit Hilfe der vollständigen Induktion führen. Wenn $n=1$, so ist die Formel richtig:

$$C_1^1 = 1 = \frac{1}{1};$$

$$C_1^0 = 0 = \frac{1 \cdot 0 \cdot \dots \cdot (1-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m} \quad (m>1).$$

Wir nehmen jetzt an, daß

$$C_{n-1}^m = \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-m)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m} \text{ für ein gewisses } n.$$

Wenn dann $m>1$, so ist

$$C_n^m = C_{n-1}^m +$$

$$+ C_{n-1}^{m-1} = \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-m)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m} +$$

$$+ \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (m-1)} = \left(1 + \frac{n-m}{m}\right) \cdot$$

$$\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (m-1)}$$

$$= \frac{n}{m} \cdot \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (m-1)}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (m-1) \cdot m}.$$

Für $m=1$ haben wir $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$

$$= C_{n-1}^1 + C_{n-1}^0 = \frac{n-1}{1} + 1 = \frac{n}{1}.$$

$m \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Formel (3) ist also richtig für $n=1$ und aus ihrer Gültigkeit für $n-1$ folgt ihre Gültigkeit für n . Das bedeutet, daß Formel (3) für beliebiges n bewiesen ist.

Wir empfehlen dem Leser, der hier das erstmal mit Formel (3) bekannt wurde, aus ihr die uns schon bekannten Gleichungen $C_n^0 = C_n^n = 1$ und $C_n^m = 0$ für $m > n$ herzuleiten. Formel (3) ist allein schon deshalb interessant, daß der Quotient im rechten Teil eine ganze Zahl ist, d. h. alle Zahlen im Zähler lassen sich durch die Zahlen des Nenners teilen.

Den folgenden Satz brauchen wir in der weiteren Darbietung.

Satz 3. Wenn m, n teilerfremd sind (d. h. ihr größter gemeinsamer Teiler beträgt 1), so läßt sich C_n^m durch n teilen.

Beweis: Da

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \dots m} = \frac{n}{m} \cdot \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \dots (m-1)} = \frac{n}{m} C_{n-1}^{m-1},$$

so ist $mC_n^m = nC_{n-1}^{m-1}$. Folglich läßt sich mC_n^m durch n teilen. Da sich aber mC_n^m (und ganz allgemein jede ganze Zahl größer 1) eindeutig als Produkt von Primzahlen darstellen läßt und m und n teilerfremd sind, d. h. m läßt sich durch keine einzige Primzahl teilen, durch die sich n teilen läßt, so muß sich C_n^m durch n teilen lassen.

So lassen sich z. B. $C_9^4 = 126$ durch 9 und $C_{10}^3 = 120$ durch 10 teilen. Wir wollen hier noch auf folgende Eigenschaften der Binomialkoeffizienten hinweisen:

1. $C_n^m = C_n^{n-m}$;
2. $C_m^m + C_m^{m-1} + \dots + C_m^1 + C_m^0 = C_{m+1}^{m+1}$;
3. $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$;
4. $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots$

Das zu beweisen überlassen wir Euch.

D. B. Fuchs (aus Quant 6/70)

In Heft 3/72 folgt: § 2 Der Rest bei der Division der Binomialkoeffizienten durch Primzahlen; § 3 Einiges über die Reste bei der Division der Binomialkoeffizienten durch Potenzen von Primzahlen, d. Red.

Anekdote

Eine Anekdote zu unserem Beitrag S. 34/35: Einst fuhr Hardy in einem Taxi mit dem Kennzeichen 1729 zu dem kranken Ramanujan. Hardy hielt diese Zahl für „langweilig“: $1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19$, und er erzählte das Ramanujan, der ihm sofort entgegnete: „Nein, Hardy, nein, Hardy, das ist eine sehr interessante Zahl, sie ist die kleinste Zahl, die man auf zwei verschiedene Weisen als Summe zweier Kubikzahlen darstellen kann: $9^3 + 10^3 = 1^3 + 12^3 = 1729$ “. Littlewood bemerkte in diesem Zusammenhang, daß jede natürliche Zahl ein persönlicher Freund Ramanujans war.

Ein mathematisches „Kreuzworträtsel“

In die freien Felder des abgebildeten Schemas sind Ziffern, und zwar jeweils eine der Grundziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, so einzutragen, daß sich in waagerechter bzw. senkrechter Anordnung Zahlen ergeben, die den weiter unten angegebenen Bedingungen entsprechen. Dabei darf die Ziffer 0 nicht am Anfang einer dieser Zahlen stehen.

a	b	c	d	e	f
g		h		i	
k	l		m		
n	o	p		q	
r	s	t		u	
v		w	x		
y		z			

Es bedeuten:

Waagerecht

- a) Das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen 18 und 33.
- d) Eine natürliche Zahl, die Lösung der Gleichung $\frac{x-2}{3} + \frac{x+23}{2} = 200$ ist.
- g) Eine natürliche Zahl, die eine Potenz von 3 ist.
- i) Eine Primzahl.
- l) Eine natürliche Zahl, die durch 2, 3 und 7 teilbar ist.
- n) Eine natürliche Zahl, die gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl ist.
- p) Eine natürliche Zahl, die gleich einem Vielfachen der unter a (waagerecht) angegebenen Zahl ist.
- r) Eine Primzahl.
- t) Eine dreistellige natürliche Zahl mit gleichen Grundziffern.
- v) Eine natürliche Zahl, die durch 57 teilbar ist.
- x) Der größte gemeinsame Teiler der durch a), l) und p) waagerecht bestimmten Zahlen.
- y) Eine Primzahl.
- z) Eine natürliche Zahl, die durch 11 teilbar ist.

Eine Aufgabe von Prof. Dr. rer. nat. habil. L. A. Kaloujnine

Mathematisch-Physikalische Fakultät der Universität Kiew

10/12 ▲ 881 Wann ist der Binomialkoeffizient $\binom{m}{n}$ ungerade? Es sind alle geordneten Paare natürlicher Zahlen m und n mit $m > 0$ und $m \geq n$ anzugeben, für die der Binomialkoeffizient

$$\binom{m}{n} = \begin{cases} \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} & \text{für } n > 0 \\ 1 & \text{für } n = 0 \end{cases}$$

eine ungerade natürliche Zahl ist.

Senkrecht

- b) Eine Primzahl.
- c) Eine natürliche Zahl, die durch 8 teilbar ist.
- e) Eine Primzahl, die kleiner als 25 ist.
- h) Eine natürliche Zahl, deren Quersumme gleich 13 ist.
- h) Eine natürliche Zahl, die durch 5 teilbar ist.
- i) Eine natürliche Zahl, deren Quersumme gleich 4 ist.
- k) Eine natürliche Zahl, die durch 11 teilbar ist.
- m) Eine natürliche Zahl, die durch 9 teilbar ist.
- o) Das Geburtsjahr des großen deutschen Mathematikers Carl Friedrich Gauß.
- q) Eine natürliche Zahl, die durch 4 teilbar ist.
- s) Eine natürliche Zahl, die durch 7 teilbar ist.
- u) Eine natürliche Zahl, deren Quersumme gleich der Quersumme der durch t) (waagerecht) bestimmten Zahl ist.
- v) Das Dreifache der unter y (waagerecht) angegebenen Zahl.
- w) Dieselbe Zahl, wie unter r (waagerecht).

Bemerkung: Im Gegensatz zu den bisher in unserer Zeitschrift veröffentlichten mathematischen „Kreuzworträtseln“ sind hier die meisten Zahlen durch die einzelnen Angaben zunächst noch nicht eindeutig bestimmt. Die Eindeutigkeit ergibt sich erst, wenn man die „waagerechten“ und „senkrechten“ Angaben zueinander in Beziehung setzt.

Christine Riehl

Zwei Beweise einer Ungleichung von Cauchy

Die Cauchysche Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel nichtnegativer Zahlen ist eine der bedeutendsten Ungleichungen. In der bekannten Monographie von E. Beckenbach und R. Bellmann „Theorie der Ungleichungen“ werden zwölf Beweise für diese Ungleichung geführt. Hier bieten wir zwei Beweise, von denen wir glauben, daß sie neu sind, den ersten, weil er so einfach und elementar ist, den anderen, weil bei ihm eine Identität abgeleitet wird, die das arithmetische und das geometrische Mittel nichtnegativer Zahlen in Verbindung bringt und die man benutzen könnte, um die Differenz dieser beiden Mittel abzuschätzen.



Der französische Mathematiker Augustin Cauchy (*21. 8. 1789 †23. 5. 1857)

Der Satz von Cauchy: Das arithmetische Mittel eines beliebigen Systems $a_1, a_2, \dots, a_n$ nichtnegativer Zahlen ist immer größer oder gleich dem geometrischen Mittel dieser Zahlen, wobei das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn alle Zahlen a_i einander gleich sind, d. h.

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \quad (1)$$

wobei

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

dann und nur dann gilt, wenn $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ ist.

1. Beweis

Wir wollen uns der Methode der vollständigen Induktion bedienen: Für $n=1$ ist die Aussage richtig. Angenommen, sie sei richtig für n nichtnegative Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$,

so werden wir jetzt beweisen, daß sie dann auch richtig ist für die $n+1$ nichtnegativen Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$.

Wir können annehmen, daß keine der Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ gleich Null ist; denn sonst wäre die rechte Seite der Formel (1) gleich Null und der Satz augenscheinlich richtig.

Wir setzen

$$\sqrt[n+1]{a_1 a_2 \dots a_{n+1}} = A \quad (2)$$

und

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = a. \quad (3)$$

Dann gilt $a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} = A^{n+1}$,

$$a_1 a_2 \dots a_n = a^n, \quad a_{n+1} = \frac{A^{n+1}}{a^n}. \quad (4)$$

Beachten wir jetzt, daß nach Induktionsannahme der Satz für n Zahlen gilt, so haben wir infolge von (1), (2), (3) und (4):

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}}{n+1} &= \frac{\frac{n a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}}{n} + a_{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{\frac{n \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} + \frac{A^{n+1}}{a^n}}{n} + \frac{A^{n+1}}{a^n}}{n+1} \\ &\geq \frac{n \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} + \frac{A^{n+1}}{a^n}}{n+1} = A + \frac{A^{n+1}}{n+1} - A \\ &= A + \frac{na^{n+1} + A^{n+1} - (n+1)A^n}{(n+1)a^n} \\ &= A + \frac{na^{n+1} - na^n A - A(a^n - A^n)}{(n+1)a^n} \\ &= A + \frac{(a-A)(na^n - Aa^{n-1} - A^2 a^{n-2} - \dots - A^n)}{(n+1)a^n} \end{aligned} \quad (5)$$

Nun sind in dem Produkt

$$(a-A)(na^n - Aa^{n-1} - A^2 a^{n-2} - \dots - A^n)$$

für $a < A$ beide Faktoren negativ und für $a > A$ beide Faktoren positiv, so daß der zweite Summand auf der rechten Seite von (5) für alle $a \neq A$ größer Null ist. Also ist stets

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}}{n+1} \geq A \quad (6)$$

oder nach (2)

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}}{n+1} &\geq \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \dots a_{n+1}}, \\ &\text{wobei das Gleichheitszeichen dann und nur dann steht, wenn in den Beziehungen (5) und (6) das Gleichheitszeichen steht.} \end{aligned}$$

Das zuletzt Gesagte bedeutet aber $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ und $a = A$, oder aber (auf Grund von (3) und (4))

$a_1 = a_2 = \dots = a_n = a_{n+1} = a = A$; damit ist der Satz vollständig bewiesen.

2. Beweis

Wir setzen

$$\sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k} = G_k \quad \text{für } k=1, 2, \dots,$$

$$\text{so daß } a = \frac{G_k^k}{G_{k-1}^{k-1}} \quad \text{für } k=2, 3, \dots, \text{ gilt.} \quad (7)$$

Wie im ersten Beweis können wir annehmen, keine der Zahlen a_k (demnach auch G_k)

sei Null. Dann ergibt sich auf Grund von (7) und der Gleichheit

$$a_1 + a_2 = G_1 \left[1 + \left(\frac{G_2}{G_1} \right)^2 \right], \quad (8)$$

wenn man noch die Identität

$$x^k - kx + (k-1) \quad (9)$$

$$= (x-1)[x^{k-1} + x^{k-2} + \dots + x + (k-1)]$$

$$= (x-1)^2 [x^{k-2} + 2x^{k-3} + \dots + (k-2)x$$

$$+ (k-1)]$$

berücksichtigt,

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} &= G_n + \frac{1}{n} \left\{ (a_1 + a_2 - 2G_2) + (a_3 + 2G_2 - 3G_3) \right. \\ &\quad \left. + (a_4 + 3G_3 - 4G_4) + \dots \right. \\ &\quad \left. + [a_n + (n-1)G_{n-1} - nG_n] \right\} \\ &= G_n + \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n G_{k-1} \left[\left(\frac{G_k}{G_{k-1}} \right)^k - k \frac{G_k}{G_{k-1}} + (k-1) \right] \\ &= G_n + \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n G_{k-1} \left(\frac{G_k}{G_{k-1}} - 1 \right)^2 \cdot \left[\left(\frac{G_k}{G_{k-1}} \right)^{k-2} \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\frac{G_k}{G_{k-1}} \right)^{k-3} + \dots + (k-2) \frac{G_k}{G_{k-1}} + k-1 \right]. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich, daß immer

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

gilt, und daß diese Ungleichung dann und nur dann in eine Gleichung übergeht, wenn $G_1 = G_2 = \dots = G_n$ ist oder, was dasselbe ist, wenn $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ ist, was zu beweisen war.

W. Dziadek

Physik-Wettbewerb 1971

In Heft 4/71 boten wir in einem Wettbewerb mathematische Probleme aus der Physik. 156 *alpha*-Leser sandten ihre Lösungen an das Päd. Institut Güstrow. Unser Mitarbeiter U. Walta wertete die Lösungen aus und legte die Preisträger fest:

Klasse 6	34 Schüler	117 Lösungen
Klasse 7	29 Schüler	72 Lösungen
Klasse 8	17 Schüler	62 Lösungen
Klasse 9	21 Schüler	54 Lösungen
Klasse 10/12	55 Schüler	106 Lösungen

zusammen 156 Schüler 411 Lösungen

Preisträger: Norbert Heß, Dresden (Kl. 6); Berthold Möbius, Dresden (Kl. 6); Jens Haupt, Karl-Marx-Stadt (Kl. 7); Siegfried Sonnenschein, Wittenberge (Kl. 7); Andreas Schlosser, Zwickau (Kl. 8); Ralph Lehmann, Petershagen (Kl. 8); Herwig Gratias, Sömmerda (Kl. 9); Andreas Weißhaupt, Halle (Kl. 9); Viktor Wassiliew, Moskau (Kl. 9); Brigitte Prawitz, Berlin (Kl. 10/12); Kurt Oppitz, Kleinmachnow (Kl. 10/12); Hans-Jürgen Weinberger, Wolgast (Kl. 10/12); Nikolaus Zimmermann, Sibiu, SR Rumänien (Kl. 10/12).

Alle Teilnehmer erhielten eine Antwortkarte, die für den Wettbewerb 1971/72 mitgewertet wird.

In Heft 4/72 veröffentlichen wir den Physik-Wettbewerb für das Schuljahr 1972.



Kiew In der Welt der Mathematik

Schüleralmanach der Ukrainischen SSR

Zwischen ukrainischen Mathematikern sowie Mathematiklehrern und der Redaktion *alpha* besteht seit einigen Jahren ein enger Kontakt. Wir freuen uns, daß wir nunmehr einen weiteren Freund in unserer außerunterrichtlichen Arbeit erhalten haben. Einen ersten Band des *Almanachs* erhielten wir 1969 von unserem aktiven Mitarbeiter, dem Mathematikmethodiker Prof. N. Tschai-kowski († 1970) mit der humorvollen Widmung: „Der *alpha*-Redaktion vom neugeborenen ukrainischen Bruder.“



In zunächst unregelmäßigen Abständen erscheinen diese Almanache (Format A5, 270 Seiten) für mathematisch interessierte und talentierte Schüler im Alter von 15 bis 17 Jahren unter dem Motto: „Wenn die Hausaufgaben erledigt sind...“

Über den Inhalt wollen wir kurz berichten: In Band 1 gibt J. A. Mitropolski, Direktor des Instituts für Mathematik der Ukrainischen Akademie der Wissenschaften unter dem Titel „Das granitene Fundament“ das

Geleit. Er stellt dabei die ständig wachsende Bedeutung der Mathematik für die technische Revolution heraus.

Im ersten Abschnitt (*Horizonte der Mathematik*) werden dem Leser jeweils durch populärwissenschaftliche Darlegungen ernsthafte theoretische Probleme vorgelegt wie: Die Sprache der mathematischen Logik; Algebraische und transzendente Zahlen; Das Dirichletsche Schubfachprinzip und diophantische Approximationen; Lineare Optimierung Primzahlzerlegungen.

Der zweite Abschnitt (*Mathematische Nachrichten*) macht den Leser mit Problemen allgemeinen Interesses bekannt, bietet neue Beweise zu bekannten mathematischen Aussagen.

Der dritte Abschnitt ist der *Geschichte der Mathematik* gewidmet. Insbesondere werden bekannte Mathematiker vorgestellt, vor allem solche unserer Zeit (wie Leninpreisträger), es wird von Kongressen berichtet usw.

Mathematische Spiele, Aufgaben mit ausführlichen Lösungen, Buchbesprechungen gehören zur ständigen Ausstattung der reich illustrierten Ausgaben. Das große Interesse der Jugend ist daran zu messen, daß die je 35000 Exemplare von Band 1 und 2 wenige Tage nach ihrer Auslieferung vergriffen waren. In Aussicht ist gestellt, die Auflage wesentlich zu erhöhen und die Almanache in regelmäßigen Abständen herauszugeben. Ist es nicht ein echtes Zeichen der Freundschaft, wenn Prof. L. A. Kaloujnine bei seinem Besuch in Leipzig stellvertretend für viele interessante Beiträge den nachfolgenden dem Chefredakteur *alpha*, aus dem Ukrainischen ins Deutsche übersetzt, in die Feder diktierte? Wir danken recht herzlich dafür.

Paris · Concours general

Mathematikwettbewerb in Frankreich

Zum vierten Male nahm eine französische Mannschaft an der Internationalen Mathematikolympiade teil. In einem Gespräch mit dem Chefredakteur von *alpha* berichtete Pierre-Louis Curien, Teilnehmer der XII. IMO, daß es in seinem Lande keine Mathematikolympiaden gibt. Gleichzeitig aber stellte er fest, daß es einen Wettbewerb gäbe, den sogenannten *Concours general*, über den er den Lesern von *alpha* berichten möchte:

Der *Concours* wird seit 1747 durchgeführt. An ihm können sich alle interessierten Schüler der Klassen 11 bzw. 12 (d.h. der Abschlußlehrgänge der Gymnasien) beteiligen. Im März jeden Jahres fordern die Lehrer ihre Schüler auf, sich am *Concours generale* zu beteiligen. Die Schüler der Klassenstufe 11 können sich für Geschichte, Literatur und Sprachen (u.a. Englisch, Russisch, Deutsch) melden, Schüler der Klassenstufe 12 für Mathematik, Physik und Philosophie. Zu einem festgelegten Termin im Mai werden die interessierten Schüler vom Ministerium

für Volksbildung zu einer sechsstündigen Klausur in vier Zentren im Lande eingeladen. Für die einzelnen (oben genannten) Fächer finden die Klausuren an verschiedenen Tagen statt, denn jeder Schüler kann sich für mehrere Fächer melden.

Es wird jeweils nur ein Problem gestellt, untergliedert in einzelne Abschnitte, gestaffelt nach Schwierigkeit. Die Aufgaben werden von einem Wissenschaftlerkollegium im Auftrage des Ministeriums ausgearbeitet und die eingehenden Lösungen mehrfach und sehr streng korrigiert. Es kann einen 1., 2. und 3. Preis sowie 8 Anerkennungsurkunden (genannt: *accessit*) geben. Es kommt aber auch vor, daß keine Preise vergeben werden, wenn die Leistungen nicht den Anforderungen der Jury genügen. Im Jahre 1970 wurde an den IMO-Teilnehmern Hervé Pépin ein erster Preis und ein 3. Preis an den Autor dieses Berichts vergeben. (Letzterer nahm auch am Physik-Wettbewerb teil.) Beide Schüler kommen aus dem Lyceum Louis le Grand. Aus dieser Schule hatten sich 20 Schüler für das Fach Mathematik beworben. Die Aufgaben für alle Fächer sind aus Gebieten entnommen, die auf moderne Gebiete der Hochschulen hinweisen (in Mathematik u.a.: Boolesche Algebra, Gruppen, Zahlentheorie).

Im Fach Mathematik beteiligen sich jährlich 500 bis 1000 Schüler am *Concours generale*.

Pierre-Louis Curien, Paris
(S. 39)

Budapest Kürschák-Wettbewerb 1971

(30. Oktober 1971, Ungarische VR)

▲ 1 ▲ Die Gerade e schneidet die Seite $\overline{AB}$ des Dreiecks ABC in C_1 , die Seite $\overline{AC}$ in B_1 und die Verlängerung der Seite $\overline{BC}$ in A_1 . Es seien die Mittelpunkte der Seite $\overline{AB}$, bzw. $\overline{AC}$ C_0 , bzw. B_0 , und es seien C_2 das Spiegelbild von C_1 an C_0 und B_2 das Spiegelbild von B_1 an B_0 . Es ist zu beweisen, daß

$$\sin B_1 A_1 C : \sin C_2 A_2 B = \overline{B_2 C_2} : \overline{B_1 C_1}.$$

▲ 2 ▲ Es sind in der Ebene 22 Punkte gegeben, keine drei der gegebenen Punkte liegen an einer Geraden. Es ist zu beweisen, daß die Punkte so in Paare eingeteilt werden können, daß die Strecken, die die zu denselben Paaren gehörenden Punkte verbinden, wenigstens 5 verschiedene Schnittpunkte haben.

▲ 3 ▲ Wir haben 30 Gelddbüchsen und zu jeder Büchse einen Schlüssel, mit dem die anderen Büchsen nicht aufgesperrt werden aufs Geratewohl in die zugesperrten Büchsen hinein, in jede Büchse einen. Wir brechen zwei Büchsen auf. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß wir die übrigen Büchsen ohne Aufbrechen anderer Büchsen aufsperrn können?

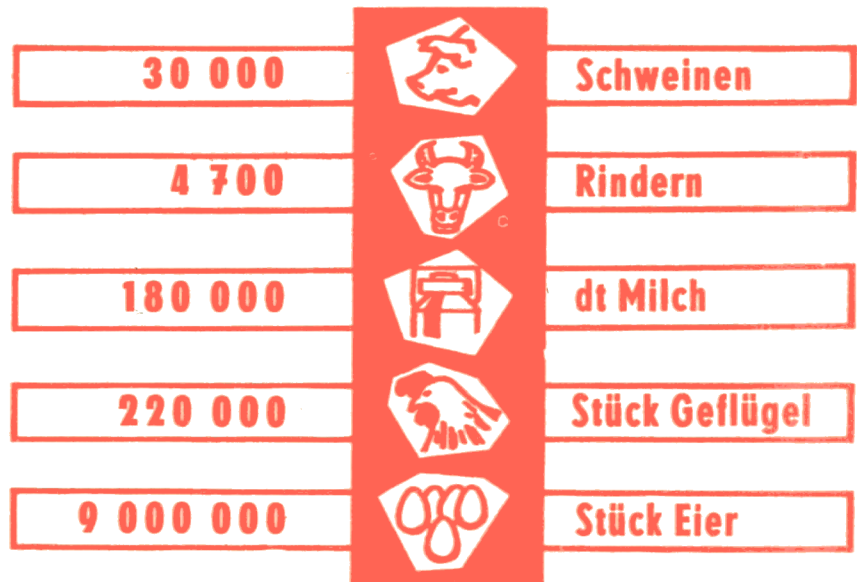
Eingesandt von unserem ungarischen
Auslandskorrespondenten Istvan Reiman,
Technische Universität Budapest

Die Landwirtschaft der DDR

Die planmäßige Versorgung unserer Bevölkerung erfordert die tägliche Bereitstellung von

Das vorliegende Material wurde entnommen aus: „Arbeitsmaterial zur Direktive des VIII. Parteitag der Sozialistischen Einheitspartei Deutschlands zum Fünfjahrplan für die Entwicklung der Volkswirtschaft der DDR 1971 bis 1975“, herausgegeben von der Parteihochschule „Karl Marx“ beim ZK der SED, erschienen im Verlag *Die Wirtschaft*, Berlin.

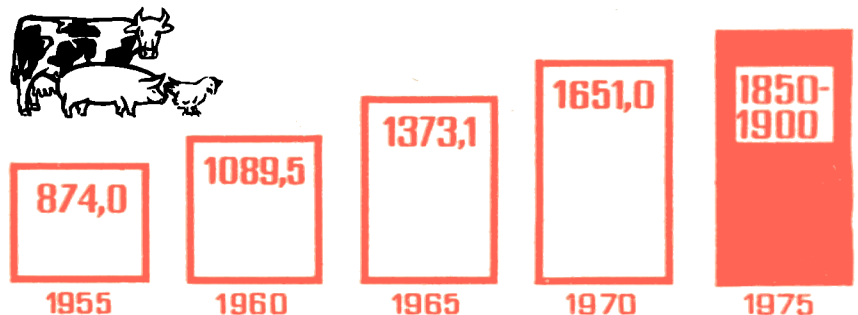
Preis der Mappe 6,20 M geblockt, einseitig bedruckt. Auf 62 Tafeln wird mit mehrfarbigen Schaubildern und graphischen Darstellungen die Direktive zum Fünfjahrplan erläutert. Hervorragend für Unterricht, außerunterrichtliche Arbeit, insbesondere für Wandzeitungen geeignet.



Schlachtvieh (einschließlich Geflügel) — kt —

Unter den Bedingungen der DDR ist die weitere Produktionssteigerung landwirtschaftlicher Erzeugnisse durch die sozialistische Intensivierung, das heißt vor allem

- durch die Chemisierung
- und komplexe Mechanisierung der Pflanzen- und Tierproduktion
- sowie durch Meliorationen, zu vollziehen.



Ein ständig Beschäftigter in der Landwirtschaft erzeugt Nahrungsmittel

1965 für 18 Menschen

1970 für 23 Menschen

1975 für 30 Menschen

Der Hauptanteil landwirtschaftlicher Rohstoffe geht in die Lebensmittelindustrie.

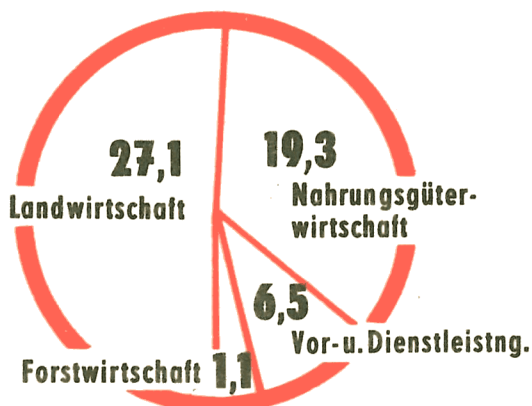
In 50 Zweigen der Industrie werden Rohstoffe der Landwirtschaft verarbeitet.

Versorgung der landwirtschaftlichen Betriebe mit mineralischen Düngemitteln — 1000 t —

	Stickstoff N	Phosphorsäure P, O,	Kali K, O
1970	549,0	410,0	613,9
1975	750-800	520-525	700-715

Bruttoprodukt der Landwirtschaft, Nahrungsgüterwirtschaft und Forstwirtschaft 1970 (in Mrd. M)

— zu effektiven Preisen —



Von der Landwirtschaft werden erzeugt:

67 Prozent des extraktiven Rohstoffaufkommens der Volkswirtschaft der DDR

76 Prozent des Nahrungsmittelfonds

30-40 Prozent des gesamten Warenfonds der Bevölkerung

Additive magische Zahlquadrate mit neun Feldern

Den meisten unserer Leser wird bekannt sein, daß sich die Zahlen 1, 2, 3, ... 8 und 9 anstelle der Variablen $a, b, c, \dots, h$ und i so in die Felder des Bildes 1 einsetzen lassen, daß die acht Summen der in jeder Zeile, jeder Spalte und Diagonale stehenden Zahlen sämtlich einander gleich sind. Jede der so entstandenen Konfigurationen wird ein *magisches Zahlquadrat* genannt (Bild 1).

Allgemein wollen wir festsetzen:

Definition: Sind im Bild 1 anstelle der Variablen $a, b, c, \dots, h$ und i derart ganze Zahlen eingesetzt, daß die acht Summen der Zahlen in den Feldern jeder Zeile, jeder Spalte und jeder Diagonale sämtlich einander gleich sind, so heißt diese Konfiguration ein *additives magisches Zahlquadrat mit neun Feldern*. Unter Bezug auf Bild 1 gelten für ein additives magisches Zahlquadrat mit neun Feldern die folgenden acht Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & a+b+c=s \\ \text{II} & d+e+f=s \\ \text{III} & g+h+i=s \\ \text{IV} & a+d+g=s \\ \text{V} & b+e+h=s \\ \text{VI} & c+f+i=s \\ \text{VII} & a+e+i=s \\ \text{IIX} & c+e+g=s \end{array}$$

Die in diesen acht Gleichungen auftretende Zahl s ist als Summe ganzer Zahlen selbst eine ganze Zahl.

Wir wollen nun alle additiven magischen Zahlenquadrate mit neun Feldern bestimmen. Zunächst machen wir eine Aussage über die im Mittelfeld eines solchen Zahlquadrates stehende Zahl: Durch Addieren der linken und rechten Seiten der Gleichungen V, VII und IIX ergibt sich

$$(a+b+c) + (g+h+i) + 3e = 3s.$$

Unter Beachtung von I und III folgt hieraus

$$s+s+3e=3s, \text{ und daraus durch Umformen:}$$

$$\text{IX} \quad e = \frac{s}{3}$$

Es gilt also:

Satz 1: In einem additiven magischen Zahlquadrat mit neun Feldern ist die im Mittelfeld stehende Zahl der dritte Teil der Summe der in den Feldern einer Zeile, Spalte oder Diagonale stehenden Zahlen.

Die Leser mögen die folgenden Aufgaben selbständig lösen:

▲1▲ Beweise: Das arithmetische Mittel aller Zahlen eines additiven magischen Zahlquadrates mit neun Feldern ist gleich der im Mittelfeld stehenden Zahl.

▲2▲ Beweise: Das arithmetische Mittel der beiden in den Endfeldern der Mittelzeile, der Mittelspalte oder einer der Diagonalen stehenden Zahlen ist bei einem additiven magischen Zahlquadrat gleich der Zahl im Mittelfeld. Das heißt, es gilt in bezug auf Bild 1:

$$e = \frac{d+f}{2} = \frac{b+h}{2} = \frac{a+i}{2} = \frac{c+g}{2}$$

▲3▲ Beweise: Das arithmetische Mittel der in zwei benachbarten Seitenmittelfeldern stehenden Zahlen ist bei einem additiven magischen Zahlquadrat gleich der im nicht-benachbarten Eckfeld stehenden Zahl. Das heißt, es gilt in bezug auf Bild 1:

$$\frac{h+f}{2} = a; \quad \frac{d+h}{2} = c; \quad \frac{b+f}{2} = g; \quad \frac{b+d}{2} = i.$$

▲4▲ Zeige: Es ist unmöglich, die vier folgenden Bilder zu additiven magischen Zahlquadraten zu ergänzen (Bild 2, 3, 4, 5)!

Als zweites wollen wir den folgenden Satz beweisen:

Satz 2: Wenn $a, b, c, \dots, h$ und i ganze Zahlen mit der Eigenschaft sind, daß die Konfiguration des Bildes 1 ein additives magisches Zahlquadrat ist und wenn k eine beliebige ganze Zahl ist, so ist auch die folgende Konfiguration ein additives magisches Zahlquadrat (Bild 6).

Da die Addition ganzer Zahlen kommutativ und assoziativ ist, ergibt sich: Bei der Konfiguration des Bildes 6 ist jede der laut Definition zu betrachtenden Summen um $3k$ größer als bei der Konfiguration des Bildes 1. Da laut Voraussetzung des Satzes 2 alle zu betrachtenden acht Summen der Konfiguration 1 gleich s sind, ergibt sich $s+3k$ für jede der acht zu betrachtenden Summen des Bildes 6. Mithin ist der Satz 2 bewiesen.

Als drittes sollen alle additiven magischen Zahlquadrate mit neun Feldern bestimmt werden. Zunächst können wir mittels des Satzes 2 jedem beliebigen additiven magischen Zahlquadrat mit neun Feldern ein normiertes magisches Zahlquadrat zuordnen, in dessen Mittelfeld die Zahl 0 steht: Stellt Bild 1 ein beliebiges additives Zahlquadrat dar, so addieren wir zu jeder Zahl dieses Zahlquadrates die zu e entgegengesetzte Zahl $-e$ (Bild 7).

Bei dem normierten additiven magischen Zahlquadrat des Bildes 7 läßt sich sehr einfach erkennen, daß durch die Zahlen $a-e=x$ und $c-e=y$ alle übrigen Zahlen eindeutig bestimmt sind (Bild 8).

Da gemäß Definition und Satz 1 für dieses additive magische Zahlquadrat die Summe der in den Feldern einer Diagonale stehenden Zahlen gleich 0 sein muß, stehen in den beiden anderen Eckfeldern die zu x und y entgegengesetzten Zahlen $-x$ und $-y$ (Bild 9).

Da auch die Summe der in den Feldern der ersten Zeile stehenden Zahlen gleich 0 sein muß, muß im mittleren Feld der ersten Zeile die ganze Zahl $-x-y$ stehen. In analoger Weise sind auch die in die noch leeren Felder einzusetzenden ganzen Zahlen eindeutig bestimmt (Bild 10).

Die in entsprechenden Feldern der Bilder 7 und 10 stehenden Zahlen müssen jeweils die gleichen sein. Aus Bild 10 wird die gesuchte neue Darstellung des beliebigen additiven

Bild 1

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Bild 2

5		
-1		
4		

Bild 3

7		
	-4	

Bild 4

		-5
6		
-4		

Bild 5

-4	5	
3	2	

Bild 6

a+k	b+k	c+k
d+k	e+k	f+k
g+k	h+k	i+k

Bild 7

a-e	b-e	c-e
d-e	0	f-e
g-e	h-e	i-e

Bild 8

x		y
	0	

Bild 9

x		y
	0	
-y		-x

Bild 10

x	-x-y	y
-x+y	0	x-y
-y	x+y	-x

Bild 11

a = x+z	b = -x-y+z	c = y+z
d = x+y+z	e = z	f = x-y+z
g = -y+z	h = x+y+z	i = -x+z

Bild 12

7		
	-1	
-9		

Bild 13

		4
		0
		-7

Bild 14

	-7	
		-3
-5		

Bild 15

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Bild 16

8	1	6
3	5	7
4	9	2

magischen Zahlquadrates des Bildes 1 durch Rückgängigmachen der vorgenommenen Normierung erhalten: Wir addieren zu jeder Zahl des Bildes 10 die Zahl $e=z$ und erhalten die Darstellung von Bild 11.

Bei beliebiger Wahl der ganzen Zahlen x , y und z stellt die Konfiguration des Bildes 11 ein additives magisches Zahlquadrat mit neun Feldern dar. Durch geeignete Wahl der ganzen Zahlen x , y und z läßt sich jedes additive magische Zahlquadrat mit neun Feldern in dieser Weise darstellen.

Nunmehr mögen wiederum die Leser die folgenden Aufgaben selbständig lösen:

▲5▲ Setze in die leeren Felder der Bilder 12, 13 und 14 derart ganze Zahlen ein, daß additive magische Zahlquadrate entstehen! Wieviel Lösungen gibt es in jedem Falle?

▲6▲ Ersetze in den Bildern 2, 3, 4 und 5 jeweils eine ganze Zahl so durch eine andere, daß das so entstandene Bild sich jeweils zu additiven magischen Zahlquadraten ergänzen läßt!

Nachdem nunmehr alle magischen Zahlquadrate mit neun Feldern ermittelt worden sind, sollen anschließend noch Aussagen über Mengen M von ganzen Zahlen mit höchstens neun Elementen gemacht werden, deren Elemente die Zahlen eines additiven magischen Zahlquadrates mit neun Feldern sind. Eine derartige Menge ist z. B. $M=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, denn die folgende Konfiguration ist ein additives magisches Zahlquadrat (Bild 15). Durch Spiegelung an der markierten Diagonale entsteht aus diesem additiven magischen Zahlquadrat das Zahlquadrat des Bildes 16 mit ebenfalls neun Feldern (Bild 16).

Da bei der ausgeführten Spiegelung die Felder einer Zeile auf die Felder einer Spalte, die einer Spalte auf die einer Zeile und die Felder einer Diagonale auf die der gleichen Diagonale abgebildet werden, ist das Bildzahlquadrat ebenfalls ein additives magisches Zahlquadrat.

Spiegelungen an einer Diagonale, an der Mittelsenkrechten einer Quadratseite und Drehungen um den Drehwinkel 90° , 180° , 270° und 360° um den Mittelpunkt eines Quadrates bilden ein Quadrat auf sich ab. Diese acht Abbildungen werden als Selbstabbildungen eines Quadrates bezeichnet.

Durch eine Selbstabbildung entsteht aus einem additiven magischen Zahlquadrat wieder ein additives magisches Zahlquadrat. Mittels einer geeigneten Selbstabbildung können wir eine für das jetzige Vorhaben geeignete Normierung bei additiven magischen Zahlquadraten vornehmen: Sind $a, b, c, \dots, h$ und i ganze Zahlen mit der Eigenschaft, daß die Konfiguration des Bildes 1 ein additives magisches Zahlquadrat ist, so folgt aus den dann gültigen Gleichungen VII und IIX die Gleichung $a+i=c+g$. Die Summen der gegenüberliegenden Eckfeldern zugeordneten Zahlen sind einander gleich.

Unter den vier ganzen Zahlen, die den Eckfeldern eines additiven magischen Zahlquadrates zugeordnet sind, gibt es sicher eine, vorübergehend mit α bezeichnet, die nicht kleiner als jede der drei anderen ist. Die in dem Eckfeld, das dem Feld mit der Zahl α gegenüberliegt, stehende Zahl sei mit δ bezeichnet. Die in beiden restlichen Eckfeldern stehenden Zahlen sollen mit β und γ bezeichnet werden. Dabei kann die Wahl der Bezeichnung so getroffen werden, daß $\beta \geq \gamma$ gilt. Gemäß der getroffenen Auswahl genügt α den Ungleichungen $\alpha \geq \beta$, $\alpha \geq \gamma$ und $\alpha \geq \delta$. Wegen $\alpha + \delta = \beta + \gamma$ folgt aus diesen Ungleichungen $\beta \geq \delta$ und $\gamma \geq \delta$. Wegen $\beta \geq \gamma$ gilt damit insgesamt:

$$\alpha \geq \beta \geq \gamma \geq \delta.$$

Durch eine geeignete Drehung des jetzt betrachteten additiven magischen Zahlquadrates ist zu erreichen, daß das Feld mit der Zahl α auf das Feld zu liegen kommt, das im Bilde 11 die Zahl $x+z$ trägt. Das zum Eckfeld mit der Zahl α benachbarte Eckfeld mit der Zahl β fällt nach Ausführung obiger Drehung entweder bereits auf das Feld des Bildes 11 mit der Zahl $y+z$, oder dies ist durch eine nachträgliche Spiegelung des erhaltenen magischen Zahlquadrates an der Diagonale, auf der das Feld mit der Zahl α liegt, zu erreichen. Nach der so vorgenommenen Normierung gilt für das durch das Bild 11 dargestellte Zahlenquadrat:

$$x+z \geq y+z \geq -y+z \geq -x+z$$

Diese Ungleichungen sind äquivalent mit

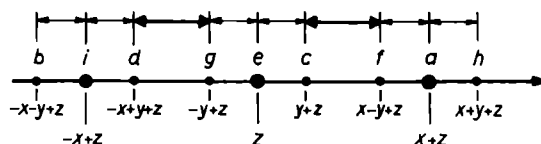
$$x \geq y \geq -y \geq -x$$

Da aus $x=y$ stets $-y=-x$ folgt und umgekehrt, sind gemäß der Normierungsvorschrift X die folgenden vier Fälle zu unterscheiden:

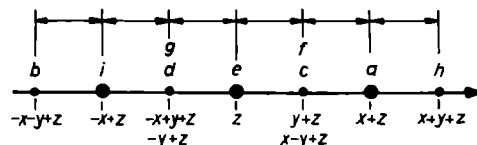
1. Fall: $x > y > -y > -x$
2. Fall: $x = y > -y = -x$
3. Fall: $x > y = -y > -x$
4. Fall: $x = y = -y = -x$

Im ersten Fall haben die Punkte, die den neun Zahlen der Bilder 11 auf der Zahlengeraden zugeordnet sind, die folgende Lage (Bild 17a, 17b, 17c):

a) Zeichnung für $0 < y < \frac{x}{2}$:



b) Zeichnung für $0 < y = \frac{x}{2}$:



c) Zeichnung für

$$0 < \frac{x}{2} < y < x:$$

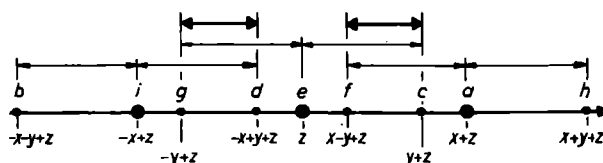


Bild 17

In diesen Zeichnungen sind Trägerpunkte mit notwendig gleichen Abständen zusätzlich durch gleichartige Maßpfeile markiert worden. Im Falle 1; a ist folgender Spezialfall enthalten: Alle neun Trägerpunkte sind äquidistante Punkte; insbesondere können dies die Trägerpunkte der uns bekannten Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 sein.

Mittels des folgenden aus dem Unterricht bekannten Satzes ist die Gültigkeit der in den Aufgaben 3 und 4 gemachten Aussagen an den Bildern 17a, 17b, 17c, 19, 20 und 21 leicht abzulesen:

Satz 3: Sind P und Q zwei Punkte der Zahlengeraden und sind diesen Punkten die Zahlen p und q zugeordnet, so ist dem Mittelpunkt M der Strecke PQ das arithmetische Mittel der Zahlen p und q , also die Zahl $m = \frac{p+q}{2}$ zugeordnet (Bild 18).

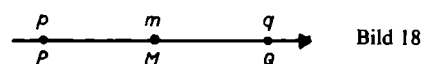


Bild 18

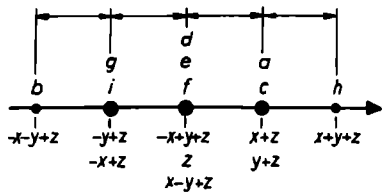
Zu ganzen Zahlen, deren Trägerpunkte auf der Zahlengeraden eine den Bildern 17a, 17b oder 17c entsprechende Lage haben, gehört jeweils genau ein normiertes (Siehe Ungleichungen X') additives magisches Zahlquadrat mit neun Feldern. Die durch Anwenden der acht Selbstabbildungen des Quadrates auf ein solches normiertes Zahlquadrat jeweils entstehenden acht additiven magischen Zahlquadrate sind jeweils sämtlich voneinander verschieden; denn in jedem solchen Zahlquadrat kommen mindestens sieben voneinander verschiedene Zahlen vor.

In den restlichen drei Fällen haben die den Zahlen des Bildes 11 auf der Zahlengeraden zugeordneten Punkte die folgende Lage (Bild 19)

In den letzten drei Fällen sind jeweils höchstens fünf der neun ganzen Zahlen des Bildes 11 voneinander verschieden. Zu dem jeweils gezeichneten Quadrat sind die Symmetrieachsen markiert.

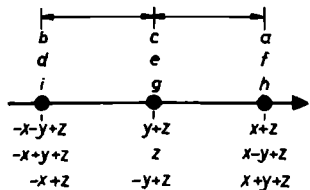
2. Fall

Bild 19



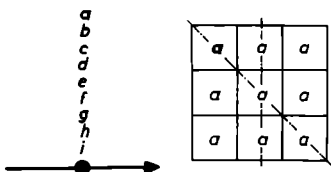
a	b	a
d	d	d
g	h	g

3. Fall
Bild 20



a	b	c
b	c	a
c	a	b

4. Fall
Bild 21



Neun ganze Zahlen, deren zugeordnete Punkte die den Bildern 19 und 20 (2. und 3. Fall) skizzierte Lage auf der Zahlengeraden, lassen sich auf jeweils genau vier Arten zur Bildung eines additiven magischen Zahlquadrates verwenden. Unter neunmaliger Verwendung der gleichen ganzen Zahl (4. Fall) läßt sich jeweils genau ein additives magisches Zahlquadrat bilden. W. Träger

Welche — wie viele Möglichkeiten gibt es?

Teil 2

In *alpha*, Heft 6/71, haben wir einige Aufgaben lösen gelernt, die in der Überschrift gestellten Fragen enthalten. Zur Wiederholung, Zusammenfassung und Ergänzung wollen wir folgende Aufgabe lösen:

▲ 6▲ Welche bzw. wie viele Tipmöglichkeiten gibt es beim VEB Fußballtoto?

Ihr wißt, daß man für jedes Spiel drei Entscheidungsmöglichkeiten hat: 1 ≡ Sieg der ersten Mannschaft, 2 ≡ Sieg der zweiten Mannschaft, 0 ≡ unentschieden. Wir wollen die Anzahl der Tipmöglichkeiten für 12 Spiele ermitteln.

Lösungsplan

1. Zwei Mengen: Menge der Spiele, Dreiermenge (der Entscheidungsmöglichkeiten pro Spiel).

2. Da für jedes Spiel genau eine Entscheidung zu treffen ist, ist die Menge der Spiele bei den Zeichnungen oben, die Dreiermenge unten zu notieren.

3. a) Striche dürfen einander schneiden. (Warum?)

b) Zu einem untenstehenden Element dürfen mehrere Striche führen. (Warum?)

Die Anzahl der betrachteten Spiele bezeichnen wir mit m und setzen hierfür der Reihe

nach 1, 2, 3, ... ein. Die Anzahl der Entscheidungsmöglichkeiten pro Spiel beträgt stets $n=3$.

$m=1$. Es gibt 3 Möglichkeiten. (Bild 1)

$m=2$. Es gibt 9 Möglichkeiten. (Bild 2)

$m=3$. (Bild 3)

Das sind 9 Möglichkeiten. Jetzt folgen weiter 9 Möglichkeiten, bei denen der erste Strich zum zweiten und noch einmal 9 Möglichkeiten, bei denen der erste Strich zum letzten untenstehenden Element führt. Es gibt 27 Möglichkeiten.

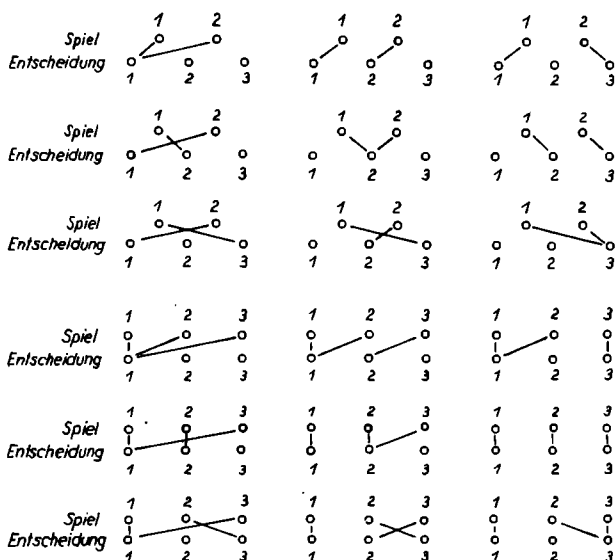
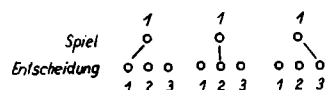
Sicherlich erkennt ihr schon, wie es weitergehen muß. Diese und die folgenden Ergebnisse tragen wir in eine Übersicht ein. (s. unten).

Das Ausfüllen der letzten Spalte ist am schwierigsten. Wir müssen versuchen, die jeweils in einer Zeile stehenden Zahlen der ersten beiden Spalten so miteinander in Beziehung zu bringen, daß wir als Ergebnis jeweils die in der dritten Spalte stehende Zahl dieser Zeile erhalten. Dabei beginnen wir nicht mit der ersten Zeile; diese können wir zuletzt vervollständigen. An Stelle von zwei Faktoren 3 schreiben wir 3^2 , an Stelle von drei Faktoren 3 schreiben wir 3^3 , an Stelle von vier Faktoren 3 schreiben wir 3^4 usw., an Stelle von m Faktoren n schreiben wir n^m . Wir können nun z. B. 3^{12} ausrechnen:

$$3^{12} = 3^6 \cdot 3^6 = 3^3 \cdot 3^3 \cdot 3^3 \cdot 3^3 = 27 \cdot 27 \cdot 27 \cdot 27 = 729 \cdot 729 = 531\,441$$

Bei 12 Spielen gibt es also 531 441 verschiedene Tipmöglichkeiten. Da wir für m jede beliebige (natürliche) Zahl einsetzen können, ist es nun möglich, für jede beliebige Anzahl von Spielen die Anzahl der Tipmöglichkeiten zu errechnen.

Man kann aber auch eine andere Überlegung anstellen: Wenn es pro Spiel nur zwei Tipmöglichkeiten gibt, etwa „gewonnen“ oder „nicht gewonnen“, so brauchten wir nur $n=2$ zu setzen und könnten im übrigen wie oben rechnen.



Spiele	Anzahl der Entscheidungsmöglichkeiten pro Spiel	Tipmöglichkeiten	Vermutete Gesetzmäßigkeit
1	3	3	$3=3$
2	3	9	$3 \cdot 3=3 \cdot 3$
3	3	27	$9 \cdot 3=3 \cdot 3 \cdot 3$
4	3	81	$27 \cdot 3=3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
5	3	243	$81 \cdot 3=3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
12	3	531 441	3^{12}
m	n		n^m

Eine Lücke können wir allerdings hier noch nicht schließen: In dem Augenblick, in dem wir an Stelle von Zahlen Variable einsetzen, in unserer Übersicht also in der letzten Zeile, behaupten wir etwas, was wir noch beweisen müssen. Das werdet ihr erst später lernen. Die Älteren von euch wissen, daß das mit Hilfe des *Beweisverfahrens der vollständigen Induktion* geschieht. Da wir bei der Lösung der hier zu besprechenden Aufgaben diesen Beweis nicht führen, formulieren wir in Übersichten immer in der ersten Zeile der letzten Spalte „vermutete Gesetzmäßigkeit“. Eine bei vielen Aufgaben dieser Art vorkommende Gesetzmäßigkeit wollen wir durch Aufgabe 7 kennenlernen, die 1965 in der ersten Stufe der Mathematik-Olympiade für Klasse 6 gestellt wurde.

▲7▲ Auf wie viele verschiedenen Weisen kann man in der unten stehenden Tabelle die Wörter „Junge Welt“ lesen, ohne dabei Zeilen oder Spalten zu überspringen?

J U N G E W
U N G E W E
N G E W E L
G E W E L T

Da man sich beim Auszählen der Möglichkeiten sicherlich verzählen wird, verfahren wir wie bei Aufgabe 6: Wir zerlegen diese Aufgabe in mehrere einfachere Aufgaben. In der folgenden Übersicht geben wir jeweils links die Buchstaben und rechts die Anzahl der Möglichkeiten an, diese Buchstaben entsprechend zu lesen.

J	1	J-U	1 1	J	1
					U 1
J-U	1 1	J-U-N	1 1 1		
U-N	1 2	U-N	1 2		
		N	1		

Um also „Jun“ zu lesen, gibt es, als Zeile bzw. Spalte geschrieben, jeweils eine Möglichkeit, in Quadratordnung zwei Möglichkeiten. Dieses Verfahren setzen wir fort:

J-U-N Um festzustellen, wie oft wir „Jung“ in nebenstehender Anordnung lesen können, brauchen wir nur entsprechend den eben gefundenen Ergebnissen 1 (JUN) und 2 (JU)

UN) zu addieren. Ihr werdet nun in der Lage sein, folgende Zahlenordnung zu entwickeln:

J-U-N-G-E-W	1 1 1 1 1 1
U-N-G-E-W-E	1 2 3 4 5 6
N-G-E-W-E-L	1 3 6 10 15 21
G-E-W-E-L-T	1 4 10 20 35 56

Wir können also „Junge Welt“ auf 56 Arten lesen.

Zwischen den hier angegebenen Zahlen bestehen mehrere interessante Beziehungen. Betrachtet diese Zahlenanordnung genau

und versucht selbst, solche Beziehungen zu finden!

Wir geben einige an:

1. Die Zahlen in entsprechenden Zeilen und Spalten stimmen überein.
2. In Zeile bzw. Spalte 1 stehen nur Einsen.
3. Jede in einer anderen Zeile bzw. Spalte befindliche Zahl ist die Summe aus denjenigen beiden Zahlen, die unmittelbar davor und darüberstehen.
4. Jede nicht in der ersten Zeile bzw. Spalte befindliche Zahl ist die Summe derjenigen Zahlen, die in der Zeile darüber bzw. in der Spalte davor bis zu eben dieser Zahl stehen.

Zum Beispiel gilt $1 + 3 + 6 + 10 = 20$.

Die Lösung von Aufgabe 7 kann man noch schneller durch Multiplikation und Division bestimmter Zahlen finden, wenn man die Regel hierfür kennt. Wir wollen sie uns erarbeiten:

Zur Erleichterung multiplizieren wir in unserer Zahlenanordnung jede Zahl der dritten Zeile mit 2, der vierten Zeile mit 6 und erhalten 2, 6, 12, 20, 30, 42 bzw. 6, 24, 60, 120, 210, 336.

Die jetzt in der ersten Zeile stehenden Zahlen sind die Produkte von jeweils zwei, die in der zweiten Zeile stehenden Zahlen die Produkte von jeweils drei aufeinanderfolgenden Faktoren. Es zeichnet sich wieder eine Gesetzmäßigkeit ab. Findet ihr sie selbst?

Wir geben sie zur Kontrolle an:

$1 \cdot 2$, $2 \cdot 3$, $3 \cdot 4$, $4 \cdot 5$, $5 \cdot 6$, $6 \cdot 7$ bzw.
 $1 \cdot 2 \cdot 3$, $2 \cdot 3 \cdot 4$, $3 \cdot 4 \cdot 5$, $4 \cdot 5 \cdot 6$, $5 \cdot 6 \cdot 7$,
 $6 \cdot 7 \cdot 8$.

Um nun die Zahlen unserer ursprünglichen Zahlenanordnung zu erhalten, müssen wir die Zahlen der ersten Zeile jeweils durch $2 = 1 \cdot 2$ und die der zweiten Zeile jeweils durch $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$ dividieren. Wir führen folgende Symbole ein:

$\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \binom{3}{3}$, gelesen 3 über 3,

$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \binom{4}{3}$, gelesen 4 über 3 usw.

$\frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} = \binom{2}{2}$, gelesen 2 über 2,

$\frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = \binom{3}{2}$, gelesen 3 über 2 usw.

Berechnet nun z. B. $\binom{7}{3}$, $\binom{8}{2}$, $\binom{9}{4}$!

Wir geben die Lösung der letzten Aufgabe an:

$$\binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126$$

Um die Rechnung zu vereinfachen, wird man stets *weitestmöglich* dividieren, bevor man multipliziert. Wir werden also den Bruch immer erst kürzen.

Wir setzen $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n = n!$, gelesen „n Fakultät“.

So ist z. B. $5! = 120$.

Um verschiedene Ausdrücke einfacher darstellen zu können, setzen wir noch folgendes fest:

$$1! = 0! = 1$$

$$\binom{1}{1} = 1, \binom{2}{1} = 2, \binom{3}{1} = 3, \dots, \binom{n}{1} = n;$$

$$\binom{0}{0} = \binom{1}{0} = \binom{2}{0} = \dots = \binom{n}{0} = 1.$$

In $\binom{n}{m}$, gelesen n über m, darf m höchstens

gleich n sein; es dürfen hierfür natürliche Zahlen eingesetzt werden. Es gilt also

$$\binom{n}{m} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot [n-(m-1)]}{m!}.$$

Man nennt $\binom{n}{m}$ einen Binomialkoeffizienten. Unsere im Ergebnis von Aufgabe 7 erhaltene Zahlenanordnung können wir nun wie folgt darstellen:

$\binom{0}{0}$	$\binom{1}{0}$	$\binom{2}{0}$	$\binom{3}{0}$	$\binom{4}{0}$	$\binom{5}{0}$	...
$\binom{1}{1}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{6}{1}$	...
$\binom{2}{2}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{7}{2}$	...
$\binom{3}{3}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{7}{3}$	$\binom{8}{3}$	...

Die Punkte sollen andeuten, daß man diese Zahlenanordnung nach rechts und nach unten beliebig fortsetzen kann. $\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

= 56 läßt sich sehr schnell ausrechnen.

Wie kann man also nun eine solche Aufgabe der mehrfachen Lesbarkeit von Wörtern möglichst rasch lösen?

1. Wir zählen, mit 0 beginnend, die Buchstaben und erhalten die obenstehende Zahl des Binomialkoeffizienten.

2. Wir zählen, wieder mit 0 beginnend, die Zeilen der Anordnung und erhalten die untenstehende Zahl des Binomialkoeffizienten.

Beispiel: M A T H E M

A T H E M A
T H E M A T
H E M A T I
E M A T I K $\binom{9}{4} = 126$

Es gibt also 126 Möglichkeiten, „Mathematik“ in dieser Anordnung zu lesen. Habt ihr schon folgende Beziehung bemerkt?

$$\binom{5}{3} = \binom{5}{2}, \binom{6}{4} = \binom{6}{2}, \binom{8}{5} = \binom{8}{3};$$

wir vermuten also die Gültigkeit von

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}.$$

Nun könnt ihr auch auf eine sehr einfache Art die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis zu einer beliebigen Zahl n angeben.

$$1 + 2 = \binom{3}{2} = 3 \quad 1 + 2 + 3 = \binom{4}{2} = 6$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = \binom{5}{2} = 10$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \binom{6}{2} = 15$$

W. Türke

In Heft 3/72 erscheint der letzte Teil dieses Beitrags — eine Aufgabensammlung, d. Red.

Ramanujan —

das mathematische Genie Indiens

Teil 3

Hardy schrieb zum Anfang der Laufbahn *Ramanujans* in Cambridge: „Seine Auffassung vom Wesen eines mathematischen Beweises war mehr als nebelhaft; er gelangte zu allen seinen Ergebnissen, sowohl den frühen als auch den späteren, sowohl den richtigen als auch den falschen, mit Hilfe einer seltsamen Mischung intuitiven Erratens, induktiver Überlegungen und logischer Erörterungen...“. „Es war unmöglich, einem solchen Menschen vorzuschlagen, sich systematisch die Grundlagen der Mathematik anzueignen. Gleichermaßen war es aber auch unmöglich, *Ramanujan* mit dem Glauben durchs Leben gehen zu lassen, daß alle Wurzeln der Zetafunktion reell sind.“ Schließlich erfolgte die Ausbildung *Ramanujans* durch Unterhaltungen und Seminare. In der Diskussion über ungelöste Probleme und durch die schöpferische Arbeit nahmen seine Kenntnisse rasch zu. Nach einiger Zeit kannte er sich in der Funktionentheorie und der analytischen Zahlentheorie recht gut aus. „Natürlich wurde aus ihm kein Mathematiker der neuen Schule“, schrieb *Hardy*. „und das war vielleicht gar nicht einmal schlecht, aber er lernte zu begreifen, wann ein Satz bewiesen ist und wann nicht, und der Strom seiner originellen mathematischen Ideen floß weiter ohne geringste Anzeichen von Erschöpfung.“

Der im Herbst 1914 beginnende Krieg behinderte die weitere Ausbildung *Ramanujans*. *Littlewood*, der neben *Hardy* ebenfalls mit *Ramanujan* arbeitete, wurde einberufen, und ein Lehrer, so sagte *Hardy*, reichte für einen solchen Schüler nicht aus. Das wissenschaftliche Leben in Cambridge und die internationalen Verbindungen erstarben. Nur in der Wohnung *Hardys* ging die tägliche Beschäftigung mit *Ramanujan* weiter.

Ramanujan arbeitete mit großem Eifer. Alles, was nicht Analysis oder Zahlentheorie war, ließ ihn völlig ungerührt. Für andere exakte Wissenschaften, für die Politik, Philosophie, Literatur und den Sport zeigte er im Gegensatz zu *Hardy* nicht das geringste Interesse. In den seltenen Fällen aber, in denen es *Hardy* gelang, mit *Ramanujan* ein Gespräch über nicht-mathematische Themen zu führen, fand er in *Ramanujan* einen recht interessanten Gesprächspartner.

Hardy beschrieb ihn als einen Menschen, der wie alle hervorragenden Persönlichkeiten seine Besonderheiten hatte, der aber kein „östliches Wunder“ war, sondern eben ein kluger Mensch und außerdem noch ein großer Mathematiker.

Im Frühjahr 1917 erkrankte *Ramanujan* und mußte ins Krankenhaus. Dort wurde er regelmäßig von *Hardy* und anderen Cambridger Mathematikern besucht. Den größten Teil seines weiteren Aufenthaltes in England mußte er in Londoner Krankenhäusern verbringen, wohin er sehr bald überführt wurde. Zunächst schien seine Krankheit nicht besonders gefährlich zu sein, aber das feuchte englische Klima, die Kriegs- und Nachkriegsverhältnisse, das Mißtrauen *Ramanujans* gegenüber englischen Ärzten sowie das ständige Beharren auf einer für ihn ungeeigneten Diät kost führten schließlich dazu, daß sich seine Krankheit immer mehr verschlimmerte und in eine offene Tuberkulose überging.

Nach einem langen Kuraufenthalt im Herbst 1918 in einem Sanatorium an der Südwestküste Englands schien sich sein Gesundheitszustand etwas zu verbessern. Mit neuer Energie ging er an die Arbeit. Am 26. November wurde er zum Mitglied der Englischen Königlichen Gesellschaft (Englische Akademie der Wissenschaften) gewählt, gleichzeitig ernannte man ihn zum Professor der Universität Cambridge. Er war der erste Inder, dem diese Ehren zuteil wurden.

Anfang 1919 hatte sich der Gesundheitszustand *Ramanujans* so weit gebessert, daß die besten Mediziner Englands glaubten, er sei außer Gefahr. Er beschloß, wenigstens für eine gewisse Zeit nach Madras zurückzukehren. Die Universität Madras hatte ihm ebenfalls eine Professur angeboten. Offensichtlich war sein Entschluß ein schicksalsschwerer Fehler, denn in Europa hätte seine Krankheit möglicherweise vollständig geheilt werden können. Der Wunsch aber, nach der langen



links: Prof. Dr. Dababhoy Naoroji
Erster indischer Professor für Mathematik und Naturphilosophie —
1874 Erster Minister des ehemaligen Fürstenstaates Baroda — Vertreter im Nationalkongreß — 1886, 1893 und 1906 sein Präsident



rechts: 100 Jahre Volkszählung in Indien — Die Volkszählung vom 10. 3. bis 1. 4. 1971 ergab: 546955945 Einwohner, das sind durchschnittlich 182 Menschen pro km².

Trennung die Verwandten und die Heimat wiederzusehen, war zu stark. Nachdem er sich von seinen Freunden, insbesondere von *Hardy*, verabschiedet hatte, begab er sich im Januar 1919 voller Erwartung nach Indien.

Nach der Abreise *Ramanujans* wartete *Hardy* ungeduldig auf Nachricht. *Ramanujan* hüllte sich aber fast ein ganzes Jahr in Schweigen. Anfang 1920 kam dann der erste und zugleich letzte Brief *Ramanujans* in Cambridge an.

In diesem Brief verlor *Ramanujan* kein Wort über seinen Gesundheitszustand, und *Hardy* nahm an, daß er zumindest zufriedenstellend sei. In Wirklichkeit kam *Ramanujan* am 2. April 1919 sehr geschwächt in Madras an. Die ermüdende Reise hatte seine Gesundheit offenbar endgültig zerrüttet. Seine Kräfte ließen rasch nach, aber er wollte sich nicht in ärztliche Behandlung begeben und arbeitete fieberhaft an seinem letzten Steckenpferd — simulierenden Tetafunktionen. Im Januar 1920 begab er sich unter dem Druck seiner Freunde und der Ärzte in Madras in Behandlung. Es wurde alles für ihn getan, was möglich war, aber vergeblich. Am 26. April 1920 verstarb *Ramanujan* in einem Vorort von Madras.

Seine Arbeit an der Universität Madras hatte er faktisch nicht antreten können.

Die Nachricht vom Tode *Ramanujans* kam für die Cambridger Mathematiker völlig unerwartet. Unter der Leitung von *Hardy* wurde sehr bald intensiv begonnen, den wissenschaftlichen Nachlaß *Ramanujans* zu erforschen, angefangen von den ersten Eintragungen in seinen Notizbüchern bis zu den simulierenden Tetafunktionen. Seine Notizbücher wurden von Freunden in Indien handschriftlich abgeschrieben und nach Cambridge an Prof. *G. N. Watson* geschickt, der es übernahm, sie gründlich zu analysieren. Er war damit einige Jahre beschäftigt.

Obwohl *Hardy* fünf Jahre lang mit *Ramanujan* verkehrt hatte, blieben für ihn noch viele Fragen offen: die ersten Ergebnisse *Ramanujans*; die Wege, über die er zu ihnen gelangte; die Quelle seiner Kenntnisse in bezug auf einige Fragen, die nicht in dem Buch von *Carr* behandelt wurden usw. Später bedauerte das *Hardy* natürlich sehr, aber er konnte sich keine Schuld geben, weil es, wie er sagte, so viele neue und interessante Fragen gab, die unbedingt sofort mit *Ramanujan* erörtert werden mußten, daß die Rückkehr zu den alten Aufgaben immer weiter und weiter aufgeschoben wurde. Außerdem hoffte *Hardy* ja, wieder mit *Ramanujan* zusammenzukommen, denn niemand konnte dessen so baldigen Tod voraussehen. Vieles in den Arbeiten *Ramanujans* bleibt also ein historisches Rätsel.

Ein Jahr nach dem Tode *Ramanujans* schrieb *Hardy*: „Man kann sich darüber streiten, welche Bedeutung

die Arbeiten *Ramanujans* haben, nach welchen Kriterien man ihn als Mathematiker einzuschätzen hat und welchen Einfluß er auf die Entwicklung der Mathematik haben wird. Seine Arbeiten sind nicht so einfach und folgerichtig wie die der größten Mathematiker; seine Ergebnisse wären bedeutsamer, wenn sie nicht so ungewöhnlich wären. Sie heben sich jedoch durch eine unbestrittene Eigenschaft hervor — die tiefgehende und unanfechtbare Originalität. Er wäre wahrscheinlich ein größerer Mathematiker geworden, wenn man ihn in der Jugend ausgebildet hätte. Er hätte wahrscheinlich mehr und auch Bedeutsameres entdeckt. Andererseits wäre er dann weniger *Ramanujan*, sondern eher ein europäischer Professor gewesen, und es ist schwer zu sagen, ob das ein Gewinn oder ein Verlust gewesen wäre...“. Die letzten Zeilen sind ganz offensichtlich in der frischen Erinnerung an den Tod des Freundes geschrieben worden, dessen leuchtende Persönlichkeit noch vor seinen Augen stand. 16 Jahre später befaßte sich *Hardy* noch einmal mit der Einschätzung *Ramanujans* und schrieb zu dem eben Zitierten: „Alles, was ich damals gesagt habe, bin ich auch jetzt zu wiederholen bereit, lediglich mit Ausnahme des letzten Satzes, der nach lächerlicher Sentimentalität klingt. Die Wissenschaft hat überhaupt nichts davon gewonnen, daß das Kumbakonamer College den einzigen großen Gelehrten, den es hatte, abwies, und der Verlust war unermeßlich. Das Schicksal *Ramanujans* ist das schlimmste mir bekannte Beispiel für den Schaden, der durch ein wenig effektives und zu starres Bildungssystem verursacht werden kann. Man hätte nicht viel gebraucht, nur jährlich 60 Pfund Sterling für einen Zeitraum von fünf Jahren, Verständnis für Menschen mit wirklichen Kenntnissen und etwas Vorstellungskraft, und die Welt wäre um einen ihrer größten Mathematiker reicher geworden...“.

Zu dem von *Hardy* Gesagten braucht man nur hinzuzufügen, daß nicht nur das starre und ineffektive Bildungssystem schuld war. Dieses System war ja nur Folge der allgemeinen Lage Indiens als einer Kolonie, in der jedwede Entwicklung einer Nationalkultur, darunter auch die Entwicklung von nationalen wissenschaftlichen Kadern, unterdrückt wurde.

Ramanujan war der erste indische Mathematiker, der weltweite Anerkennung erhielt. Jetzt verfügt die Republik Indien über bedeutende mathematische Kader, die Wissenschaft in Indien erfährt einen großen Aufschwung. Es ist überflüssig zu sagen, daß das Andenken an *Ramanujan* in den Herzen der indischen Wissenschaftler lebt. Sein Name gilt als Symbol der erwachten Schöpferkraft des indischen Volkes.

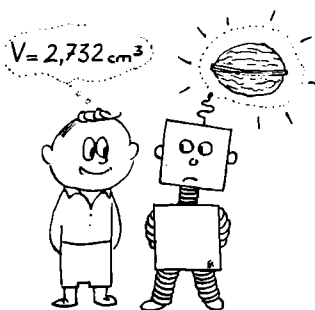
V. Lewin

Anekdote über *Ramanujan* siehe Seite 26, d. Red.

Wer löst mit?

alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 1. Juni 1972



5 ▲ 882 Wieviel Kilogramm Zinn und wieviel Kilogramm Blei sind einzuschmelzen, um daraus 15 kg Lötzinn herzustellen, wenn auf zwei Gewichtsteile Zinn drei Gewichtsteile Blei kommen?

Uwe Szyszka, 2001 Brohm, Kl. 5

W 5 ■ 883 Von der Zeitschrift „Mosaik“ sind bisher die Hefte mit den laufenden Nummern von 1 bis 157 erschienen. Jemand ist im Besitz fast aller Hefte, ihm fehlt genau ein Heft. Dividiert man die Anzahl der im Besitz des Lesers befindlichen Zeitschriften durch 13, so ist dieser Quotient genau dreimal so groß wie der Quotient, den man erhält, wenn man die durch die laufende Nummer der fehlenden Zeitschrift dargestellte Zahl durch 13 dividiert. Welche Nummer der Zeitschrift fehlt dem Leser?

Annegret Kirsten,

August-Bebel-OS Leuna, Kl. 7c

W 5 ■ 884 Doris ist Schülerin einer dritten Klasse; sie wurde im Alter von sechs Jahren eingeschult und regelmäßig versetzt. Doris hat zwei jüngere Schwestern, von denen die eine vier Jahre jünger als die andere ist. Addiert man die Zahlen, die das Lebensalter ihrer Schwestern (in ganzen Zahlen) angeben, so erhält man die Zahl des Lebensalters von Doris. Wie alt sind die drei Schwestern?

Waltraud Rohleder, 29 Wittenberge,
Friedrich-Ludwig-Jahn-OS I, Kl. 8a

fünf natürlichen Zahlen a, b, c, d und e gelten die folgenden Ungleichungen:

1. $a > e$, 3. $c > e$, 5. $a > b$, 7. $c > a$,
2. $b < c$, 4. $d < e$, 6. $b < d$, 8. $a > d$.

Ordne diese Zahlen nach ihrer Größe; beginne mit der kleinsten! Welche der Ungleichungen werden zur Lösung der Aufgabe nicht benötigt?

* 5 * 886 Alle 36 Schüler einer 5. Klasse beteiligten sich an der ersten Stufe der dies-

jährigen Mathematikolympiade. Jeder hatte genau vier Aufgaben zu lösen. Die Korrektur durch den Mathematiklehrer dieser Klasse brachte folgendes Ergebnis:

Die Anzahl der Schüler, die keine Aufgabe lösten, war gleich der Anzahl derjenigen, die alle vier Aufgaben lösten. Die Anzahl der Schüler, die nur eine Aufgabe lösten, war gleich der Anzahl derjenigen, die drei Aufgaben gelöst hatten, aber doppelt so groß wie die Anzahl der Schüler mit vier gelösten Aufgaben. Die Anzahl aller von den Schülern insgesamt gelösten Aufgaben war dreimal so groß wie die Anzahl der Schüler mit genau zwei gelösten Aufgaben und doppelt so groß wie die Anzahl aller Teilnehmer. Wieviel Schüler haben keine der vier Aufgaben gelöst? Wieviel Schüler lösten genau eine, genau zwei, genau drei, alle Aufgaben?

6 ▲ 887 Es ist zu beweisen, daß für jeden Rhombus das Produkt aus den Maßzahlen der Längen der Diagonalen gleich dem zweifachen Produkt aus den Maßzahlen der Längen einer Rhombuseite und ihrer zugehörigen Höhe ist, wenn alle Längen in der gleichen Maßeinheit gemessen werden.

Herwig Gratias, EOS Sömmerda, Kl. 10

W 6 ■ 888 Durch drei LKW, die jeder 2,7 t Kies je Fuhre laden, sind insgesamt 54 t Kies zu drei verschiedenen Baustellen zu fahren. Jeder dieser LKW fährt für genau eine Baustelle. Für eine Fuhre benötigt der erste LKW 12 min, der zweite 20 min und der dritte 30 min. Wieviel Tonnen Kies erhält jede Baustelle, wenn die Gesamttransportzeiten für jeden LKW gleich groß sind?

Schüler Ulrich Schwarz,
9401 Hundshübel, Kl. 9

W 6 ■ 889 Auf die Frage, wieviel Mädchen und wieviel Jungen der 6. Klassen einer Oberschule sich regelmäßig am alpha-Wettbewerb beteiligten, antwortete der Mathematiklehrer

dieser Klassen scherzhaft: „Dividiere ich die Anzahl der genau 61 Wettbewerbsteilnehmer durch die Anzahl der teilnehmenden Mädchen, so erhalte ich 10 als Rest. Dabei ist die Anzahl der am Wettbewerb regelmäßig teilnehmenden Jungen mehr als doppelt so groß, aber weniger als dreimal so groß wie die der Mädchen.“ Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl der am Wettbewerb teilnehmenden Jungen und die der Mädchen!

Karin Vetter, 8256 Weinböhla, Kl. 8

* 6 * 890 Es ist zu beweisen, daß jede Primzahl p , die größer als 3 ist, bei Division durch 6 entweder des Rest 1 oder den Rest 5 läßt.

Herwig Gratias, EOS Sömmerda, Kl. 10

* 6 * 891 Zeichne ein Dreieck ABC , konstruiere den Mittelpunkt M der Seite AB , verbinde C mit M und verbinde einen inneren Punkt P der Strecke CM mit den Punkten A und B . Es ist zu beweisen, daß die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle PCA$ und $\triangle PBC$ gleich sind!

Sch.

7 ▲ 892 Ermittle alle sechsstelligen natürlichen Zahlen von der Form $xy37yx$, die durch 36 teilbar sind!

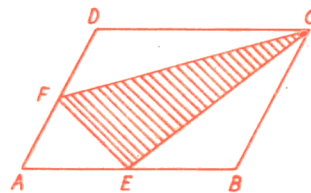
Elke Mietzsch, Pasewalk, Kl. 9

W 7 ■ 893 Es sind alle zweistelligen natürlichen Zahlen anzugeben, deren Quadrat eine dreistellige Zahl ist, die auf dieselbe Ziffer endet, mit der die zweistellige Zahl beginnt.

Jürgen Funke, OS Neubrandenburg, Kl. 8

W 7 ■ 894 Die Abbildung stellt ein Parallelogramm $ABCD$ dar. Der Mittelpunkt E der Seite AB wurde mit dem Mittelpunkt F der Seite AD und mit dem Eckpunkt C , ferner C mit F verbunden. Der Flächeninhalt des Dreiecks ECF ist durch den Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$ auszudrücken!

Sch.



* 7 * 895 Für welche natürlichen Zahlen $a > b > 0$ ist die Ungleichung $\frac{a+b}{a-b} > a \cdot b$ erfüllt?

Doris Kopitzke, Neustrelitz, Kl. 8

* 7 * 896 Der Satz „Ergänzen sich die einander gegenüberliegenden Winkel eines konvexen Vierecks zu 180° , so ist das Viereck ein Sehnenviereck“ ist indirekt zu beweisen! (Gehe dabei von der Annahme aus, daß sich die einander gegenüberliegenden Winkel zu 180° ergänzen und das Viereck kein Sehnenviereck sei, und leite daraus einen Widerspruch her!)

T.

8 ▲ 897 Zum Bau von Werkhallen, Lageräumen, Garagen u. a. werden bei Anwen-

Steffi Song, 6316 Stützerbach, Schleusinger Str. 128		W5=346
Polytechnische Oberschule Stützerbach, Klasse 5		
Prädikat:		
Lösung:		

derung der Leichtbauweise häufig Pur-Al-Platten benutzt, das sind aluminiumbeschichtete Platten aus Polyurethan-Hartschaum. Eine solche Platte von 50 mm Stärke hat eine Masse von 6,3 kg je 1 m².

a) Wie groß ist die mittlere Dichte (in g·cm⁻³) einer solchen Platte?

b) Wie groß ist die Masse einer Platte von 15,40 m Länge, 1 m Breite und 80 mm Stärke, wenn die mittlere Dichte ebenso groß wie im Falle a) ist? L.

W 8 ■ 898 Am 16. Februar 1972, seinem Geburtstag, stellte ein Mathematiker fest, daß das an diesem Tage von ihm erreichte Alter (in Jahren) mit der Quersumme der Jahreszahl seines Geburtsjahres übereinstimmt. Wie alt ist dieser Mathematiker am 16. Februar 1972 geworden, und in welchem Jahre ist er geboren?

Herwig Gratias, EOS Sömmerda, 10. Klasse

W 8 ■ 899 Es sei $ABCD$ ein Drachenviereck mit der Symmetrieachse BD , mit der Seite $AD=5$ cm und der Diagonale $AC=8$ cm. Ferner sei $\angle DAB=90^\circ$.

Es soll die Länge der Diagonale BD berechnet werden.

Herwig Gratias, EOS Sömmerda, 10. Klasse

* 8 * 900 Ein Schiff benötigt für die Fahrt auf einer bestimmten Strecke eines Flusses stromaufwärts 4 Std., dagegen bei gleicher Maschinenleistung und gleicher Strömungsgeschwindigkeit stromabwärts nur 3 Std.

a) In welcher Zeit würde dieses Schiff bei gleicher Maschinenleistung eine gleichlange Strecke in einem ruhenden Gewässer zurücklegen?

b) In welcher Zeit würde ein Floß, das stromabwärts treibt, eine gleichlange Strecke zurücklegen?

Ullrich Müller, EOS „Geschwister Scholl“, Freiberg, 11. Klasse

* 8 * 901 Es ist zu beweisen, daß für jedes gleichschenklige Trapez gilt:

1. Wenn die Diagonalen eines gleichschenkligen Trapezes aufeinander senkrecht stehen, so ist seine Mittellinie ebenso lang wie seine Höhe.

2. Wenn die Mittellinie eines gleichschenkligen Trapezes ebenso lang wie seine Höhe ist, so stehen die Diagonalen dieses Trapezes aufeinander senkrecht.

*StR Lerche, Dresden;
OL Polster, Dresden*

9 ■ 902 Es ist zu beweisen, daß sich das Quadrat einer jeden natürlichen Zahl, die größer als 2 ist, als Differenz der Quadrate zweier von Null verschiedener natürlicher Zahlen darstellen läßt, daß also für jede natürliche Zahl n mit $n > 2$ gilt:

$$n^2 = x^2 - y^2,$$

wobei x und y von Null verschiedene natürliche Zahlen sind.

V. Wassiljew, Schüler der Klasse 9 A der Otto-Grotewohl-Schule in Moskau, UdSSR

W 9 ■ 903 Es seien f_1 und f_2 zwei für alle reellen Zahlen x definierte Funktionen mit

$$f_1(x) = 4x^2 - 1,3 \text{ und}$$

$$f_2(x) = 5x + 2. \text{ Es sind alle}$$

reellen Zahlen x zu ermitteln, für die

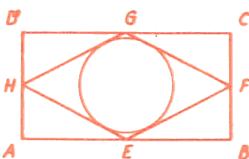
$$f_1[f_2(x)] = f_2[f_1(x)] \text{ gilt.}$$

*Rainer Zerck, Wismar,
EOS „Geschwister Scholl“, Kl. 10*

W 9 ■ 904 Es sei $ABCD$ ein Rechteck mit den Seitenlängen $\overline{BC}=a$ und $\overline{AB}=2a$. Ferner seien E, F, G, H die Mittelpunkte der Seiten dieses Rechtecks. Dem Rhombus $EFGH$ sei ein Kreis eingeschrieben (vgl. die Abb.).

Es sind der Radius und der Flächeninhalt dieses Kreises zu berechnen.

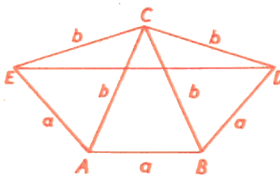
Ingolf Kunath, EOS Meißen, Kl. 11



* 9 * 905 Es sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Winkel an der Spitze kleiner als 60° ist, dessen Basis die Länge a und dessen Schenkel die Länge b haben. Ferner seien EAC und BDC zwei gleichschenklige Dreiecke, deren Basen $\overline{EA}$ und $\overline{BD}$ ebenfalls die Länge a haben und von denen jeweils ein Schenkel mit den Schenkeln des gleichschenkligen Dreiecks ABC zusammenfällt (vgl. die Abb.).

Es ist die Länge der Strecke $\overline{ED}$ aus den gegebenen Längen a und b zu berechnen.

*Rüdiger Nützmann, stud. math.
Universität Rostock*



* 9 * 906 Es ist zu beweisen, daß für den Flächeninhalt A eines Sehnenvierecks, dessen Umkreis den Radius r hat, stets

$$A \leq 2r^2 \text{ gilt.} \quad \text{Sch.}$$

10 ■ 907 Jemand schließt wie folgt:

„Da für jede reelle Zahl q mit $0 < q < 1$ und für jede von Null verschiedene Zahl n

$$(1) \quad q^n > q^{n+1} \text{ gilt, folgt} \quad (1)$$

$$\lg q^n > \lg q^{n+1}, \text{ also} \quad (2)$$

$$n \lg q > (n+1) \lg q. \quad (3)$$

Ich dividiere jetzt auf beiden Seiten durch $\lg q \neq 0$ und erhalte

$$n > n+1. \quad (4)$$

Damit habe ich bewiesen, daß jede natürliche Zahl größer als ihr Nachfolger ist.“

Offenbar ist das falsch. Wo steckt der Fehler bei dieser Schlußweise?

*Technische Universität Dresden
Sektion Mathematik*

W 10 ■ 908 Es sei z eine (im dekadischen Positionssystem) 1972stellige Zahl, deren er-

ste und letzte Grundziffer gleich 1 ist und deren übrige Grundziffern sämtlich gleich 0 sind:

$$z = \underbrace{1000 \dots 001}_{1970 \text{ Ziffern}}$$

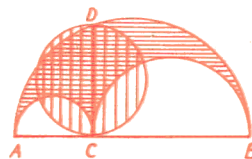
Man beweise, daß die Zahl z keine Primzahl ist.

*Gerd Weißenborn, Berlin,
EOS „Heinrich Hertz“, Klasse 10*

W 10 ■ 909 Einem Halbkreis mit dem Begrenzungsdurchmesser $\overline{AB}$ seien zwei Halbkreise eingeschrieben, deren Begrenzungsdurchmesser $\overline{AC}$ und $\overline{CB}$ auf $\overline{AB}$ liegen und die sich in dem Punkt C berühren (vgl. die Abb.). Ferner sei im Punkt C auf $\overline{AB}$ die Senkrechte errichtet, die den Halbkreis über $\overline{AB}$ in dem Punkt D schneidet. Es ist zu entscheiden, ob der Flächeninhalt des in der Abbildung senkrecht schraffierten Kreises mit $\overline{CD}$ als Durchmesser größer, kleiner oder gleich dem Flächeninhalt der in der Abbildung quer schraffierten Figur ist, die durch die drei Halbkreisbögen über $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ und $\overline{CB}$ begrenzt wird.

Erst schätzen, dann rechnen und begründen!

„Quant“, 1971, Heft 5



* 10 * 910 Es sind alle von Null verschiedenen natürlichen Zahlen anzugeben, deren Quadrate gleich einem Vielfachen von 864 und die kleiner als 864 sind. L.

* 10 * 911 Es ist zu beweisen, daß für alle Winkel mit $0 < \alpha < 45^\circ$ die Gleichung

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \quad (1)$$

$$\text{und } \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \text{ erfüllt sind.} \quad (2)$$

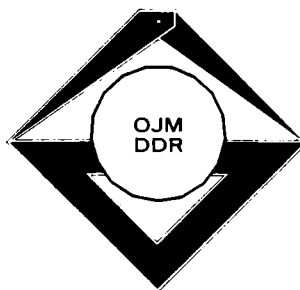
*Marlies Eberlein, Niederfrauendorf,
EOS „Glück auf“, Altenberg, Kl. 12*

Achtung — alpha-Wettbewerb

Mit Heft 2/72 endet der *alpha*-Wettbewerb des Schuljahres 1971/72. Die Antwortkarten zum Heft 2/72 werden Anfang der Sommerferien an die Teilnehmer versandt.

Zwischen dem 1. und 10. September 1972 sind alle (richtigen) Antwortkarten geschlossen an die Redaktion, 7027 Leipzig, Postfach 14 einzusenden. Wer zwei Urkunden (oder mehr) einsendet, dazu die Karten des Jahres 1971/72, erhält das *Abzeichen in Gold* und sein Name wird in *alpha* veröffentlicht. Bitte alle Einsendungen (und evtl. Rückantwortbriefe) richtig frankieren! Geschwister senden ihre Unterlagen *getrennt* ein. Red. alpha

XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR



Aufgaben der Bezirksolympiade (5./6. 2. 1972)

Olympiadeklasse 7

1. Ermittle alle Primzahlen p , die gleichzeitig den folgenden Bedingungen genügen:

- (1) $p < 100$.
- (2) p läßt sowohl bei Division durch 3 als auch bei Division durch 5 jeweils den Rest 2.
- (3) p läßt bei Division durch 4 den Rest 1.

2. In einer Klasse mit 28 Schülern beteiligen sich alle Schüler am außerunterrichtlichen Sport, und zwar jeder an mindestens einer der folgenden vier Sportarten: Fußball, Leichtathletik, Schwimmen und Turnen, in jeder dieser Sportarten mindestens 1 Schüler. Kein Schüler beteiligt sich an einer Sportart, die hier nicht aufgezählt ist.

Bekannt ist von den Schülern dieser Klasse:
(1) Jeder Schüler betreibt höchstens zwei Sportarten.

(2) Genau 18 Schüler beteiligen sich an genau einer Sportart.

(3) Von den Schülern, die Leichtathletik betreiben, nimmt genau die Hälfte auch noch am Turnen teil.

(4) Jeder Schwimmer betreibt zwei Sportarten, wobei alle anderen Sportarten in gleicher Anzahl vertreten sind.

(5) Die Anzahl der Schüler, die nur turnen, ist gleich der Anzahl der Schüler, die nur Fußball spielen.

(6) Die Menge der Schüler, die sowohl turnen als auch Fußball spielen, ist leer.

(7) Die Anzahl der Schüler, die sowohl Turnen als auch Leichtathletik betreiben, ist gleich der Anzahl derjenigen unter den restlichen Schülern, die sich ebenfalls an zwei Sportarten beteiligen.

Ermittle die Anzahlen aller Schüler dieser Klasse, die sich an

- | | | |
|--|---|------------|
| <ol style="list-style-type: none"> a) Fußball b) Leichtathletik c) Schwimmen d) Turnen | } | beteiligen |
|--|---|------------|

3. Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a . Auf BC liege ein Punkt P_1 derart, daß

$\overline{BP_1} = \overline{P_1C}$ gilt, auf CD liege ein Punkt P_2 mit $\overline{P_2D} = 3\overline{CP_2}$ und auf DA ein Punkt P_3 mit $\overline{P_3A} = 3\overline{DP_3}$.

Ein Punkt P wandere auf Seiten des Quadrates von P_1 über B und A nach P_3 .

Es sei nun A_Q der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ und A_P der des Vielecks $PP_1P_2P_3$. Ermittle sämtliche Lagen von P , für die das Verhältnis $A_P:A_Q$

- a) am größten
- b) am kleinsten ist!

Berechne das Verhältnis für jeden der beiden Fälle!

Dabei sei auch zugelassen, daß P mit P_1 bzw. P_3 zusammenfällt, falls hierbei eines der gesuchten Verhältnisse auftritt.

4. Fritz erzählt: In unserer Klasse gibt es genau doppelt soviel Mädchen wie Jungen. Wären es je 5 Jungen und Mädchen weniger, dann hätten wir genau dreimal soviel Mädchen wie Jungen.

Ermittle die Anzahl aller Mädchen und die aller Jungen dieser Klasse!

5. Beweise den folgenden Satz: Ist P ein Punkt, der im Innern oder auf dem Rande eines Quadrates $ABCD$ liegt, so ist die Summe der Längen der Verbindungsstrecken von P mit den vier Eckpunkten A, B, C, D größer als die doppelte Länge einer Quadratseite.

6. Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $c = 5$ cm, $h_a = 4,5$ cm, $s_a = 5,5$ cm! Dabei sei c die Länge der Seite AB , h_a die Länge der Höhe des Dreiecks, die auf der Geraden durch B und C senkrecht steht, und s_a die Länge der Seitenhalbierenden der Seite BC . Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck eindeutig bestimmt ist!

Olympiadeklasse 8

1. In ein leeres Gefäß (ohne Abfluß) mit einem Fassungsvermögen von 1000 Liter flossen mit gleichmäßiger Strömungsgeschwindigkeit zunächst in jeder Sekunde genau 30 Liter Wasser und von einem späteren Zeitpunkt t ab in jeder Sekunde genau 15 Liter Wasser. Nach genau 40 s, gemessen vom Anfang an, war das Gefäß gefüllt. Ermittle, welcher Bruchteil des Gefäßinhalts zum Zeitpunkt t gefüllt war!

2. Von sieben Schülern soll jeder auf sein Zeichenblatt vier voneinander verschiedene Geraden zeichnen. Dabei soll der erste

Schüler die Geraden so zeichnen, daß kein Schnittpunkt, der zweite so, daß genau 1 Schnittpunkt auftritt, der dritte so, daß genau 2 Schnittpunkte, der vierte so, daß genau 3 Schnittpunkte, der fünfte so, daß genau 4 Schnittpunkte, der sechste so, daß genau 5 Schnittpunkte, und der siebente Schüler so, daß genau 6 Schnittpunkte auftreten. Auch Schnittpunkte, die außerhalb des Zeichenblattes liegen, werden hierbei mitgezählt.

Nach einer gewissen Zeit behaupten der zweite, der dritte und der sechste Schüler, daß ihre Aufgabe nicht lösbar sei.

Stelle fest, wer von den drei Schülern recht und wer nicht recht hat, und beweise deine Feststellung!

3. Ermittle alle reellen Zahlen x , für die ein gleichschenkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seitenlängen

$a = -5x + 12$ $b = 3x + 20$ $c = 4x + 16$ existiert! (Überlege, welche Bedingungen a , b und c dabei erfüllen müssen!)

4. Beweise, daß für je zwei rationale Zahlen $a > 2$, $b > 2$ das Produkt ab größer als die Summe $a + b$ ist!

5. Gisela stellt auf einem Pionernachmittag folgende Aufgabe: „Wenn ich aus diesem Gefäß mit Nüssen an fünf von euch dem ersten die Hälfte und eine halbe Nuß und dann dem zweiten, dem dritten usw. nacheinander jeweils die Hälfte der noch vorhandenen Nüsse und eine halbe dazu gebe, dann habe ich alle verbraucht.“

Wie groß ist die Anzahl der Nüsse, die das Gefäß enthielt?

Wie groß ist für jeden der fünf Pioniere die Anzahl der Nüsse, die er erhalten würde?“

6. Einem Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = a$ und $\overline{BC} = b$, $a > b$, sei ein Parallelogramm $EFGH$ so einbeschrieben, daß die Seiten DA und BC des Rechtecks von Eckpunkten des Parallelogramms im Verhältnis 2:3 oder 3:2, die Seiten AB und CD im Verhältnis 3:4 oder 4:3 geteilt werden und E auf AB , F auf BC , G auf CD , H auf DA liegen.

Stelle fest, ob dies auf eine oder mehrere Weisen möglich ist! Ermittle in jedem der möglichen Fälle das Verhältnis der Flächeninhalte von Rechteck und Parallelogramm zueinander!

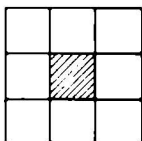
Olympiadeklasse 9

1. Günter erzählt: „Die sechsstellige Telefonnummer unserer Schule merke ich mir folgendermaßen: Ich schreibe unsere zweistellige Hausnummer hin. Dahinter schreibe ich die Quersumme der Hausnummer und füge nun jeweils die Summe aus den letzten beiden hingeschriebenen Zahlen an, bis sechs Ziffern dastehen.“

Übrigens kommt in der Telefonnummer

unserer Schule keine Eins vor, und unsere Hausnummer ist eine durch 3 teilbare Zahl.“ Wie lautet Günters Hausnummer und wie die Telefonnummer seiner Schule?

2. In die nebenstehende Figur (Bild A 9; 2) sollen neun aufeinanderfolgende natürliche Zahlen so eingetragen werden, daß in jedem Feld genau eine steht und die drei „Zeilen-summen“, die drei „Spaltensummen“ und die zwei „Diagonalsummen“ sämtlich einander gleich sind (magisches Quadrat).



Beweisen Sie, daß eine derartige Belegung genau dann möglich ist, wenn in dem schraffierten Feld die fünfte der der Größe nach geordneten Zahlen steht!

3. Beweisen Sie den folgenden Satz: Verhalten sich die Seitenlängen eines Dreiecks $\triangle ABC$ wie $\sqrt{3}:\sqrt{2}:1$, dann stehen zwei Seitenhalbierende dieses Dreiecks senkrecht aufeinander.

4. In einem Rechteck $ABCD$ mit $\overline{AB}=\overline{CD}=a$ und $\overline{BC}=\overline{DA}=b$ ($a>b$) schneide die Halbierende des Winkels $\sphericalangle BAD$ die Seite CD in S_1 . Weiter sei S_2 der Mittelpunkt von AB .

Ermitteln Sie das Verhältnis $a:b$ der Seitenlängen eines solchen Rechtecks, bei dem die Halbierende des Winkels $\sphericalangle AS_2C$ die Seite CD in S_1 schneidet!

5. Es seien a, b, c positive reelle Zahlen. Beweisen Sie, daß dann

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) \text{ gilt!}$$

Geben Sie alle Fälle an, in denen Gleichheit eintritt!

6. Ermitteln Sie alle geordneten Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen x, y , die Lösungen der folgenden Gleichung sind:
 $2x^2 - 2xy - 5x - y + 19 = 0$.

Olympiadeklasse 10

1. Ermitteln Sie alle geordneten Paare $(a; b)$ reeller Zahlen a, b mit $a \neq 0, b \neq 0$, für die folgendes gilt:

- (1) Die Summe der beiden Zahlen ist 6.
- (2) Die Summe der Reziproken beider Zahlen ist ebenfalls 6.

2. Ermitteln Sie alle geordneten Paare $(x; y)$ jeweils zweistelliger natürlicher Zahlen x und y mit $x > y$, für die folgendes gilt:

- (1) Schreibt man die Ziffern der Zahl x in umgekehrter Reihenfolge, so erhält man die Zahl y .
- (2) Schreibt man die Ziffern der Zahl x^2 in umgekehrter Reihenfolge, so erhält man die Zahl y^2 .

3. Gegeben sei die Kathetenlänge $\overline{BC}=a$ eines rechtwinkligen Dreiecks $\triangle ABC$ mit dem rechten Winkel bei C , für das $\overline{AC}:\overline{BC}=2:1$ gilt.

Die Halbierende des rechten Winkels $\sphericalangle ACB$ schneide den Umkreis des Dreiecks außer in C noch in D .

Man berechne die Länge der Sehne CD als Funktion von a .

Hinweis: Nach einem bekannten Satz der ebenen Geometrie teilt im Dreieck die Winkelhalbierende die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

4. Ein gerader Kreiskegelkörper mit dem Radius $R=6$ und der Höhenlänge h sei so zylindrisch durchbohrt, daß die Achse des Kegels mit der des Bohrloches zusammenfällt. Wie groß muß der Radius r (R, h, r in Zentimeter gemessen) des Bohrloches gewählt werden, wenn das Volumen des Restkörpers halb so groß sein soll wie das des Kegelkörpers?

5. Eine Funktion $f(x)$, die für alle reellen Zahlen x definiert sei, sei periodisch mit der Periode p , d. h. für alle reellen x gelte $f(x+p)=f(x)$, wobei p die kleinste positive Zahl sei, für die das gilt. Welche kleinste positive Periode hat dann die Funktion

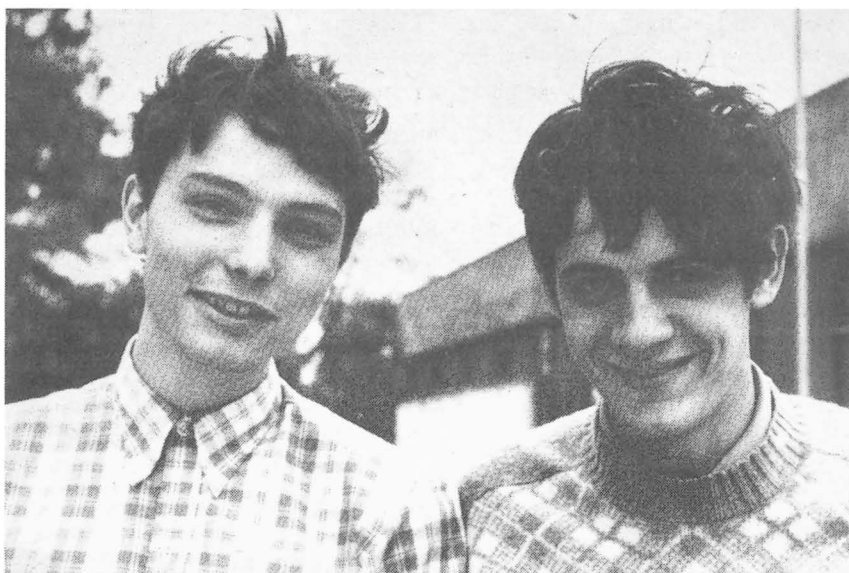
$$\text{a) } F(x) = \frac{1}{2}f(x), \quad \text{b) } G(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)?$$

6. Konstruieren Sie ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $a-b=3$ cm, $\alpha=70^\circ$ und $\beta=50^\circ$!

Dabei seien a die Länge der Seite BC , b die der Seite AC , α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$ und β die des Winkels $\sphericalangle ABC$.

Beschreiben, begründen und diskutieren Sie Ihre Konstruktion!

Pierre-Louis Curien (links), Autor unseres Beitrags auf Seite 28 mit seinem Mannschaftskameraden Hervé Pépin.



Olympiadeklasse 11/12

1. Gegeben seien in einer Ebene zwei sich schneidende Geraden g und h . Die Größe des einen ihrer vier Schnittwinkel sei $\alpha \leq 90^\circ$.

a) Es ist zu beweisen: Zwei nacheinander ausgeführte Spiegelungen der Ebene, erst an g , dann an h , lassen sich stets durch eine Drehung der Ebene ersetzen (d. h. sie sind einer Drehung der Ebene äquivalent); deren Drehpunkt und Drehwinkel sind zu ermitteln.

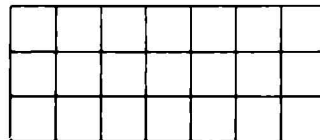
b) Es ist festzustellen, ob sich dieselbe Drehung wie in a) ergibt, wenn man erst an h und dann an g spiegelt.

2. Man beweise, daß die Gleichung

$$(1) \quad 4^x + 6^x = 9^x$$

keine rationalen Lösungen besitzt.

3. 21 leere Felder, die in Form eines Rechtecks von 3 Zeilen und 7 Spalten wie in Bild 11/12; 3 angeordnet sind, sollen so mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 belegt werden, daß jedes Feld mit genau einer der angegebenen Zahlen belegt wird und dabei insgesamt jede dieser Zahlen dreimal vorkommt. Dabei sollen die drei Zahlen jeder Spalte paarweise voneinander verschieden sein, und von den sechs Zahlen in je zwei Spalten dürfen höchstens zwei übereinstimmen.



Man gebe eine Belegung der geforderten Art an und begründe, wie sich eine derartige Belegung finden läßt.

4. a) Es seien $a_0 = -4$ und $a_1 = 2$ die ersten beiden Glieder einer unendlichen Folge $\{a_n\}$. Ferner sei a_n für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ das arithmetische Mittel der beiden vorhergehenden Glieder.

(Fortsetzung siehe S. 47)



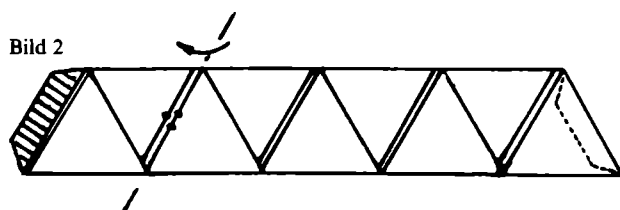
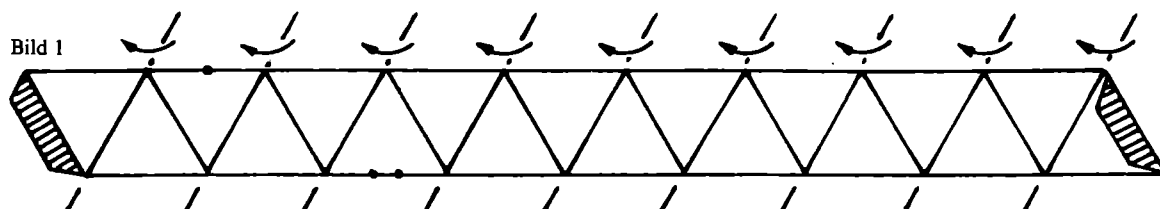
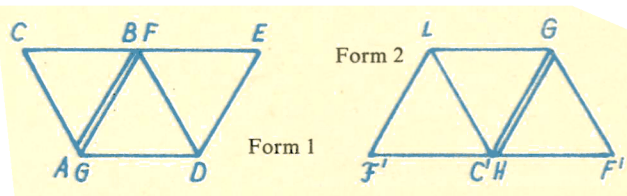
Hexa — Hexa — Flexagon

Macht mit! Wir konstruieren ein sehr merkwürdiges Gebilde, das Euch viel Freude bereiten wird.

Einen Streifen aus 18 gleichseitigen Dreiecken (Bild 1) falten wir um die eingezeichneten Achsen immer in gleicher Richtung. Damit erhalten wir einen Streifen, bei dem jeweils zwei Dreiecke übereinanderliegen. Wir falten weiter entsprechend den folgenden Abbildungen (Bild 2 bis 5). Zum Abschluß kleben wir den Falz auf die vorher markierte Fläche und erhalten unser „Hexa — Hexa — Flexagon“.

Setzt man dieses Verfahren fort, erhält man 6 verschiedene Flächen, 9 verschiedene Kombinationen zwischen Vorder- und Rückseite und dann noch verschiedene Anordnungen der Dreiecke bei jeder Fläche.

Mathematikfachlehrer U. Sonnemann,
OS Blievenstorf, Krs. Ludwigslust



Welche merkwürdigen Eigenschaften hat dieses Gebilde? Kennzeichnet alle sichtbaren Flächen und versucht, das Hexa — Hexa — Flexagon so zu falten, daß ungekennzeichnete Flächen zum Vorschein kommen! Wie ändert sich dabei die Anordnung der einzelnen Dreiecke?

Hinweis: „Ungekennzeichnete“ Flächen des Hexa — Hexa — Flexagons erhält man folgendermaßen: Wir falten das Flexagon einmal. Das Dreieck ABC halten wir fest, heben die Ecke F des Rhombus $GDEF$ an und bringen das Gebilde in die Form 2. Dieses Gebilde klappen wir um die Seite CF auf die Rückseite und erhalten Form 3. Das Dreieck $F'GH$ halten wir wieder fest, heben die Ecke I des Rhombus $ICLH$ an und bringen das Gebilde in die Form 4. Nun falten wir das Gebilde wieder auf in seine sechseckige Form und erhalten eine „ungekennzeichnete — neue“ Fläche.

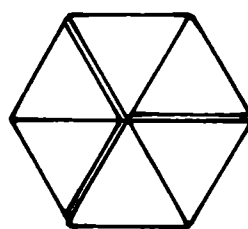
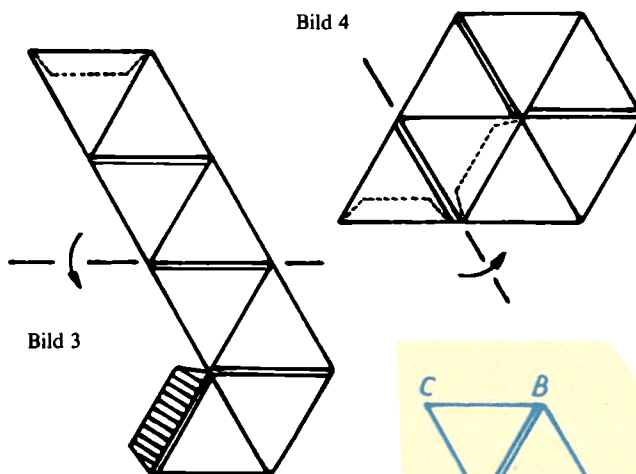
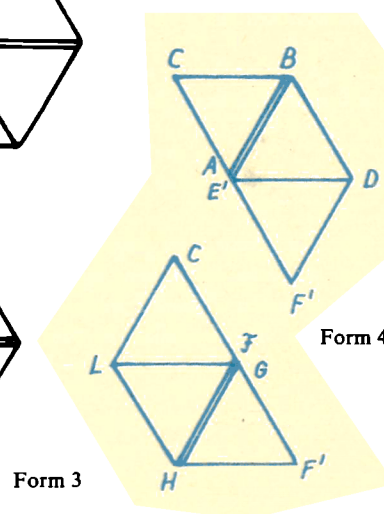


Bild 5

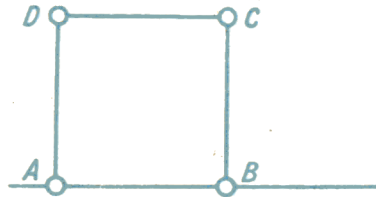
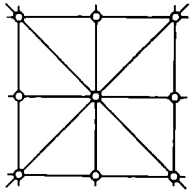


Form 3

Form 4

9 Punkte, 8 Geraden

Die Figur zeigt 9 Punkte und 8 Geraden, von denen jede durch 3 dieser Punkte geht. Finde durch Verlegung von zwei Punkten eine Anordnung von 9 Punkten, so daß 10 Geraden gezeichnet werden können, von denen jede durch drei dieser Punkte geht!



Postkartengeometrie

Wie kann man ohne Zirkel, ohne Lineal — ja sogar ohne Bleistift — mit Hilfe einer Postkarte in der Figur die Seiten eines dem Quadrat $ABCD$ flächengleichen Rechtecks finden?

Aus: *Schüleralmanach der Mathematik*
(G. M. Skobelev, W. P. Berman, Kiew)

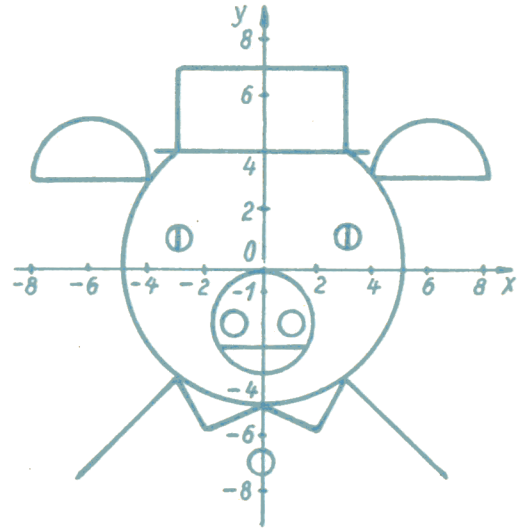
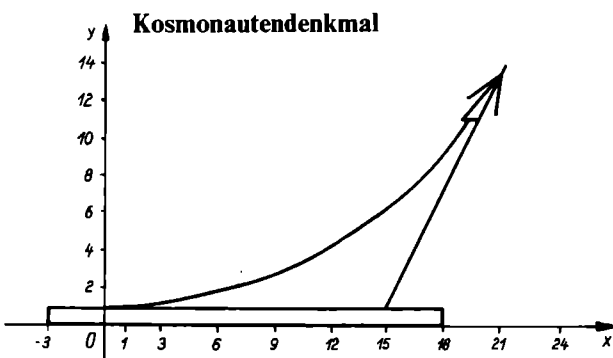
Mathematik hilft zeichnen

Zeichne die folgenden Funktionen

Der Traktor

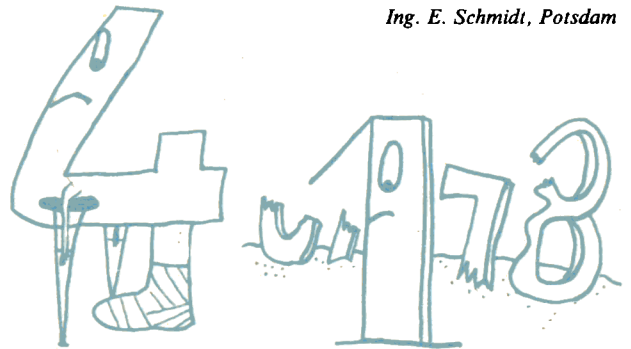
Funktionsgleichung	Definitionsbereich
$x = -4$	$5 \leq y \leq 8\frac{1}{2}$
$x = -6$	$1 \leq y \leq 5$
$y = 5$	$-6 \leq x \leq 1$
$y = 8$	$1 \leq x \leq 5$
$y = 1$	$-6 \leq x \leq 5$
$y = -1$	$-5 \leq x \leq 5$
$ y - 3 = 1$	$-5 \leq x \leq 0$
$ y - 6 = 1$	$2 \leq x \leq 4$
$ x - 3 = 2$	$1 \leq y \leq 8$
$ x - 3 = 1$	$5 \leq y \leq 7$
$ x + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$	$2 \leq y \leq 4$
$ y = - x + 6$	$-1 \leq y \leq 1$

Bei den folgenden Zeichnungen suche der Leser die Funktionsgleichungen und Definitionsbereiche selbst.



Welche Zahl ist das?

Ing. E. Schmidt, Potsdam



Aus: *Für Dich 30/71* (Reiner Schwalme)





▲1▲ Addierst du zum Zehnfachen von x die Zahl 830, so erhältst du 1 000. Wie heißt die Zahl x ?

▲2▲ $(a+b):c=x$; $a=5432$; $b=589$; $c=3$. Wie groß ist x ?

▲3▲ Für welche gerade Zahl x gilt, daß $64 - 8 \cdot x > 32$?

▲4▲ Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Zahlen. Rechne!

$$5720 - p = 4500$$

$$p + r = 3900$$

$$r:20 = Z$$

$$1000 - r - p - 5966 = Z$$

▲5▲ Berechne!

a	b	c	d	
	$a \cdot 10$	$b + 3800$		$c + d$
73				50000
112				50000
270				50000

▲6▲ Monika sagt: „Mein Vater ist 42 Jahre alt. Mein Vater ist zwei Jahre älter als meine Mutter. Meine Mutter ist doppelt so alt wie mein Bruder und ich. Ich bin zwei Jahre jünger als mein Bruder. Wie alt sind Uwe, sein Bruder und seine Mutter?

▲7▲ German Titow war ungefähr 25 Stunden und 30 Minuten im Weltall. Eine Erdumkreisung dauerte bei ihm 90 Minuten. Wievielmals umkreiste Titow die Erde?

▲8▲ Jeder von vier Brüdern einer Familie sagt: „Ich habe 2 Schwestern.“ Wieviel Kinder gehören zur Familie?

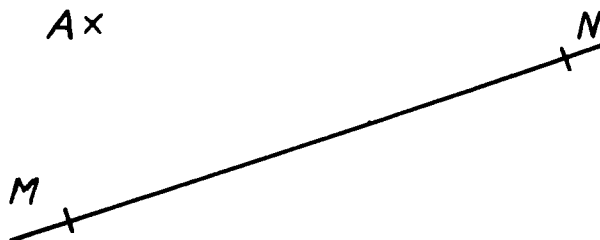
▲9▲ Bestimme die Zahlen, die du für die Variablen einsetzen kannst, so daß

- a) $9y < 50$ und $9y > 25$,
b) $9z + 25 < 60$ und z gerade!

Arbeitsblatt Geometrie (Klasse 6)

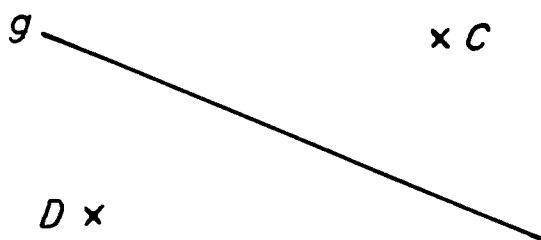
▲1▲ Konstruiere den Punkt P, der die beiden Bedingungen erfüllt:

- Er liegt auf $\overline{MN}$.
- Sein Abstand von A ist 3,5 cm

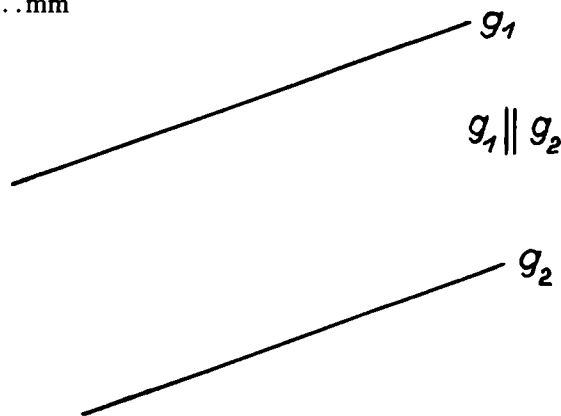


▲2▲ Zeichne die Parallelen zu g durch C und durch D! Miß die Abstände zwischen

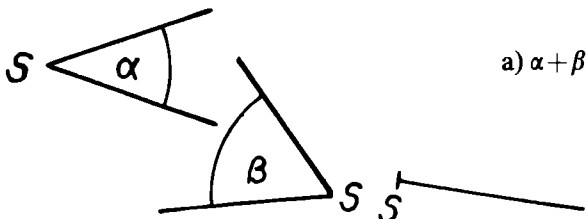
- a) C und D b) C und g c) den beiden konstruierten Parallelen!
a) ... mm b) ... mm c) ... mm



▲3▲ Konstruiere eine Strecke, die den Abstand zwischen g_1 und g_2 darstellt und miß deren Länge a !
 $a = \dots$ mm

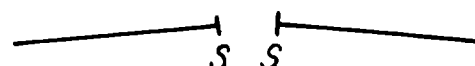


▲4▲ Konstruiere



b) $\beta - \alpha$

c) $3\alpha - \beta$



▲5▲ Bilde die Umkehrung des Satzes und untersuche den Wahrheitsgehalt des Satzes sowie den seiner Umkehrung!
Streiche Nichtzutreffendes!

Satz: „Wenn zwei Winkel gleich groß sind, so sind sie Scheitelwinkel.“ $w \quad f$

Umkehrung: „Wenn“

$w \quad f$

Lösungen



Lösung zu: Zwei Kryptogramme (Heft 1/72, Seite 20), Aufgabe b

b) In der Multiplikationsaufgabe

$$\begin{array}{r} **4 \cdot *8* \\ ***8 \\ 5**2 \\ ***8 \\ \hline *8*4** \end{array}$$

bezeichnen wir wieder den ersten Faktor mit x , den zweiten Faktor mit y und das Produkt mit z .

Dann gilt wie im Falle a)

$$634 \leq x \leq 744 \quad (1)$$

und $y = 282, 287, 782$ oder 787 .

In dieser Aufgabe kann aber die zweite Ziffer in der 2. Zeile nur gleich 1, 2 oder 3 sein. Wir untersuchen wieder die einzelnen Fälle:

1. $y = 282$

Wegen (1) gilt $1268 \leq 2x \leq 1488$, (2) also steht in der letzten Zeile an der 1. Stelle eine 1.

Wir erhalten daher

$$180408 \leq z \leq 189498,$$

also wegen $x = \frac{z}{y}$

$$\frac{180408}{282} \leq x \leq \frac{189498}{282},$$

$$639 \frac{210}{282} \leq x \leq 671 \frac{276}{282}.$$

Daher kann x nur gleich 644, 654 oder 664 sein. Wir erhalten für z

181 608, 184 428 oder 187 248.

Nur für $z = 184 428$ und $x = 654$ ist die Bedingung erfüllt, daß an der 4. Stelle von z die Ziffer 4 steht.

Wir erhalten daher die **Lösung**:

$$\begin{array}{r} 654 \cdot 282 \cdot \\ 1308 \\ 5232 \\ 1308 \\ \hline 184428 \end{array}$$

2. $y = 287$

Wir erhalten wie im Fall 1 für x eine der Zahlen 644, 654 oder 664, also für z

184 828, 187 698 oder 190 568.

Hier steht an der 4. Stelle von z niemals die Ziffer 4, so daß dieser Fall ausscheidet.

3. $y = 782$

Wegen (1) gilt $4438 \leq 7x \leq 5208$.

Da an der 2. Stelle von $7x$ nur die Ziffern 1, 2 oder 3 stehen können, gilt

$$5108 \leq 7x \leq 5208,$$

$$729 \frac{5}{7} \leq x \leq 744.$$

x kann also nur eine der Zahlen 734 oder 744 sein. Wir erhalten für z

573 988 oder 581 808.

Da hier in keinem Falle an der 4. Stelle von z die Ziffer 4 steht, erhalten wir keine weitere Lösung.

4. $y = 787$

Auch hier kann wie im Fall 3 x nur gleich 734 oder 744 sein. Wir erhalten für z

577 658 oder 585 528.

Da auch hier in keinem Falle an der 4. Stelle von z die Ziffer 4 steht, erhalten wir keine weitere Lösung.

Die gestellte Aufgabe hat also nur die unter Ziffer 1 angegebene Lösung.

Lösungen zu: aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht (S. 42)

▲ 1 ▲ $x = 17$; ▲ 2 ▲ $x = 2007$; ▲ 3 ▲ $x = 2$;
▲ 4 ▲ $p = 1220$; $r = 2680$; $z = 134$; ▲ 5 ▲ 73;
730; 4530; 45470; 50000/112; 1120; 4920;
45000; 50000/270; 2700; 6500; 43500; 50000
▲ 6 ▲ Monika ist 8 Jahre alt. ▲ 7 ▲ $25 \cdot 60 = 1500$;
 $1500 + 30 = 1530$; $1530 : 90 = 17$;
G. Titow umkreiste die Erde 17 mal. ▲ 8 ▲
Zur Familie gehören 6 Kinder. ▲ 9 ▲ $\{3, 4, 5\}$;
 $\{0, 5\}$.

Lösung des mathematischen Kreuzwortsels (S. 26):

1	9	8		2	2	7
	7	2	9		3	1
8		4	6	2		5
8	1		5	9	4	
	7	3		7	7	7
5	7	5	7		6	6
1	7		3	3		8

Im folgenden vereinfachen wir die Schreibweise und schreiben z. B. a_w statt „a waagerecht“, b_s statt „b senkrecht“ usw. Durch die jeweiligen Definitionen sind die folgenden Zahlen bereits eindeutig bestimmt:

a_w) Wegen $18 = 2 \cdot 3^2$ und $33 = 3 \cdot 11$ ist das k.g.V. der Zahlen 18 und 33 gleich $2 \cdot 3^2 \cdot 11 = 198$.

d_w) Wir erhalten $2(x-2) + 3(x+23) = 1200$,
 $2x - 4 + 3x + 69 = 1200$,
 $5x = 1135$,
 $x = 227$.

o_s) Das Geburtsjahr von Gauß ist 1777.

Nun können wir, von diesen Lösungen ausgehend, weitere Zahlen bestimmen. Wir beginnen mit

b_s) Die einzige Primzahl p mit $91 \leq p \leq 99$ ist $p = 97$.

g_w) Die einzige natürliche Zahl 3^n , die eine Potenz der Zahl 3 ist, mit $701 \leq 3^n \leq 799$ ist die Zahl $3^6 = 729$.

c_s) Von allen natürlichen Zahlen x mit $821 \leq x \leq 829$ ist nur die Zahl $x = 824$ durch 8 teilbar.

l_w) Es gibt genau eine natürliche Zahl x mit $401 \leq x \leq 499$, die durch 2, 3 und 7, also durch 42, teilbar ist und nicht auf 0 endet, nämlich $x = 462$.

h_s) Da diese natürliche Zahl durch 5 teilbar ist, muß sie auf 0 oder 5 enden. Nun darf die erste Ziffer unter p_w nicht 0 sein. Daher erhalten wir die Zahl 965.

p_w) Wegen $2 \cdot 198 = 396 < 501$ und $4 \cdot 198 = 792 > 599$ erhalten wir die Zahl $3 \cdot 198 = 594$.

m_s) Da die gesuchte Zahl x mit $291 \leq x \leq 299$ durch 9 teilbar ist, muß ihre letzte Ziffer wegen $2 + 9 + 7 = 18$ eine 7 sein, daher gilt $x = 297$.

t_w) Wir erhalten daher hier die Zahl 777.

x_w) Der g.g.T. der Zahlen $198 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11$, $462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$ und $594 = 2 \cdot 3^3 \cdot 11$ ist $2 \cdot 3 \cdot 11 = 66$.

q_s) Damit entspricht auch die Zahl 476 der gestellten Bedingung.

u_s) Die Quersumme der Zahl unter t_w ist gleich $7 + 7 + 7 = 21$. Aus $7 + 6 + x = 21$ folgt nun $x = 8$. Daher ist die hier gesuchte Zahl gleich 768.

e_s) Für die hier gesuchte Primzahl p gilt $p > 20$ und $p < 25$. Daraus folgt $p = 23$.

i_w) Aus $30 \leq x \leq 39$ folgt, da die Quersumme von x gleich 4 ist, $x = 31$.

f_s) Aus $710 \leq x \leq 719$ folgt, da die Quersumme von x gleich 13 ist, $x = 715$.

n_w) Die einzige zweistellige Quadratzahl, die auf die Ziffer 1 endet, ist 81.

k_s) Die einzige zweistellige natürliche Zahl, die ein Vielfaches von 11 ist und auf die Ziffer 8 endet, ist 88.

v_s) Die Quersumme von q_s ist gleich $4 + 7 + 6 = 17$. Daher ist die hier gesuchte Zahl gleich $3 \cdot 17 = 51$.

v_w) Die einzige natürliche Zahl x mit $5701 \leq x \leq 5799$, die durch 57 teilbar ist, ist $x = 5757$.

s_s) Die einzige zweistellige natürliche Zahl, die auf 5 endet und durch 7 teilbar ist, ist die Zahl 35.

r_w) Damit entspricht auch die Zahl 73 der gestellten Bedingung.

w_s) Wir erhalten die Zahl 73.

z_w) Die einzige zweistellige natürliche Zahl x , die durch 11 teilbar ist und für die $30 \leq x \leq 39$ gilt, ist $x = 33$.

Damit haben wir sämtliche Zahlen ermittelt und die folgende Lösung des mathematischen „Kreuzwortsels“ erhalten:

Lösungen zu: Arbeitsblatt Geometrie (siehe Seite 42)

▲ 1 ▲ Konstruiere den Punkt P , der die beiden Bedingungen erfüllt:

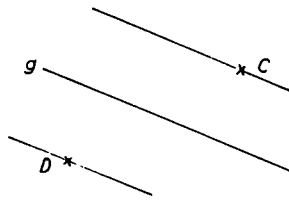
$A \times$



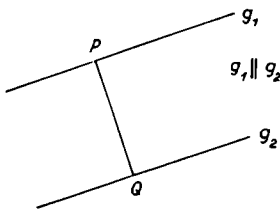
1. Er liegt auf $\overline{MN}$.

2. Sein Abstand von A ist 3,5 cm.

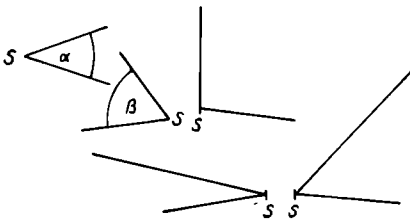
- ▲ 2 ▲ Zeichne die Parallelen zu g durch C und durch D !
 Miß die Abstände zwischen a) C und D ;
 b) C und g ; c) den beiden konstruierten Parallelen!
 a) 53 mm b) 19 mm c) 39 mm



- ▲ 3 ▲ $a = 32 \text{ mm}$; oder parallel zu PQ und P auf g , Q auf g_2



- ▲ 4 ▲ Konstruiere! a) $\alpha + \beta$ b) $\beta - \alpha$ c) $3\alpha - \beta$

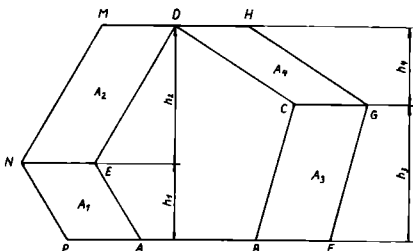


- ▲ 5 ▲ Bilde die Umkehrung des Satzes und untersuche den Wahrheitsgehalt des Satzes sowie den seiner Umkehrung! Streiche Nichtzutreffendes!

Satz: „Wenn zwei Winkel gleich groß sind, so sind sie Scheitelwinkel!“ w f f

Umkehrung: „Wenn zwei Winkel Scheitelwinkel sind, so sind sie gleich groß.“ w f w

* 6 * 784 Da nach Voraussetzung die über den vier Seiten des Fünfecks gezeichneten Vierecke sämtlich Parallelogramme sind, gilt $PA = BF = NE = CG = a$. Wie aus der Zeichnung ersichtlich wird, gilt ferner $h_1 + h_2 = h_3 + h_4$. Aus $A_1 = a \cdot h_1$, $A_2 = a \cdot h_2$, $A_3 = a \cdot h_3$, $A_4 = a \cdot h_4$ folgt $A_1 + A_2 = a \cdot h_1 + a \cdot h_2 = a(h_1 + h_2)$ und $A_3 + A_4 = a \cdot h_3 + a \cdot h_4 = a(h_3 + h_4)$ und hieraus wegen $h_1 + h_2 = h_3 + h_4$ schließlich $A_1 + A_2 = A_3 + A_4$.

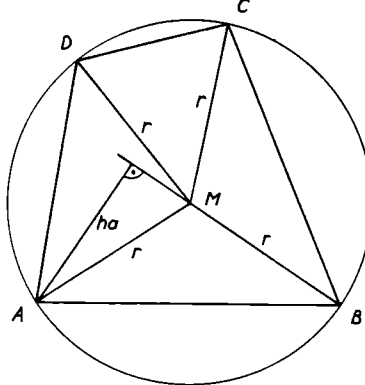


- 7 ▲ 785 ▲ Wie aus der Abbildung ersichtlich ist, gilt für den Flächeninhalt des Drachenvierecks

$$A = 2 \cdot \frac{\overline{AC} \cdot \overline{DS}}{2} = \overline{AC} \cdot \overline{DS} = e \cdot \overline{DS},$$

wegen $\overline{DS} = \frac{1}{2} \overline{BD}$ und $\overline{BD} = \frac{1}{2} \overline{AC} = \frac{1}{2} e$ gilt somit $\overline{DS} = \frac{1}{4} e$. Wir erhalten also für den

Flächeninhalt des Drachenvierecks $A = \frac{1}{4} e^2$.



W 7 ■ 786 a) n kann höchstens gleich 99 sein. Dann würden $(n+1)^3 = 100^3$, also 1 000 000 Würfel entstehen, von denen jeder die Kantenlänge $\frac{100-n}{n+1} \text{ mm} = 0,01 \text{ mm}$

besitzt.

b) Die so erhaltenen Würfel haben zusammen das Gesamtvolumen $V = (100-n)^3 \text{ mm}^3$. Da nicht mehr als 50 % des Volumens des Ausgangswürfels zerspannt werden sollen, muß $(100-n)^3 \geq 500\,000$ sein. Wegen $79^3 = 493\,039$ und $80^3 = 512\,000$ gilt $100-n \geq 80$ und damit $n \leq 20$.

W 7 ■ 787 Aus b) folgt unmittelbar:

Bernd kennt Axel, Dieter und Eberhard. (1)

Aus e) folgt unmittelbar:

Gerda kennt Helga und Ilona. (2)

Aus b), f) und (2) folgt:

Helga kennt Axel, Dieter, Eberhard und Gerda. (3)

Aus a) und (1) folgt, daß Axel Bernd kennt.

Aus e) folgt, daß sich Gerda und Axel nicht kennen. Wegen a) gilt dann:

Axel kennt Bernd, Helga und Ilona. (4)

Aus b) folgt, daß sich Ilona und Bernd nicht kennen. Da sich nach (3) Dieter und Helga kennen, kann wegen c) Ilona mit Dieter nicht bekannt sein. Unter Beachtung von (2) gilt deshalb:

Ilona kennt Axel, Eberhard und Gerda. (5)

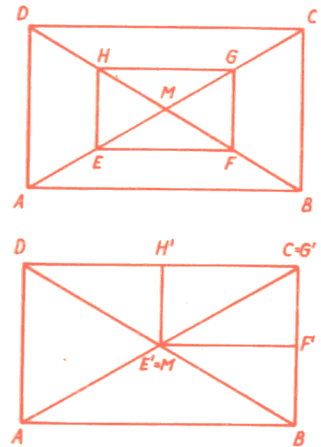
Nach (1) und (3) kennt Dieter sowohl Bernd wie auch Helga; nach (4) kennen sich Dieter und Axel nicht. Deshalb gilt wegen c):

Dieter kennt Bernd, Eberhard und Helga. (6)

Aus (1), (6), (3), (5) folgt unter Beachtung von d): Eberhard kennt Bernd, Dieter, Helga und Ilona.

* 7 * 788 Es gilt der Satz: Die Verbindungsstrecke zweier Seitenmitten eines Dreiecks ist parallel der dritten Seite und halb so lang wie diese. Verschieben wir das Rechteck $EFGH$ in Richtung der Geraden AC um die Verschiebungsweite EM , so fällt der Bild-

punkt E' des Punktes E mit M und der Bildpunkt G' des Punktes G mit C zusammen. Der Bildpunkt F' des Punktes F ist Mittelpunkt der Seite BC , der Bildpunkt H' des Punktes H ist Mittelpunkt der Seite CD . Für den Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ gilt $A_1 = \overline{AB} \cdot \overline{BC}$, für den des Rechtecks $EFGH$ gilt $A_2 = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{4} A_1$. Die Flächeninhalte verhalten sich wie 4:1.



* 7 * 789 1. Fall: Beide fahren in entgegengesetzte Richtungen. Es seien v_A die Geschwindigkeit, s_A der in 15 s zurückgelegte Weg des Fahrers A und v_B , s_B die entsprechenden Angaben für Fahrer B . Dann gilt wegen des physikalischen Gesetzes $s = v \cdot t$

$$s_A = 15v_A,$$

$$300 - s_A = 15v_B,$$

Durch Addition dieser Gleichungen erhalten wir $300 = 15v_A + 15v_B$, also $v_A + v_B = 20$.

2. Fall: Beide fahren in die gleiche Richtung. Es sei s_C der vom Fahrer B zurückgelegte Weg, bis er vom Fahrer A überholt wurde. Dann gilt

$$s_C = 150v_B$$

$$300 + s_C = 150v_A.$$

Subtrahieren wir die erste von der zweiten Gleichung, so erhalten wir $300 = 150v_A - 150v_B$, also $v_A - v_B = 2$.

Aus $v_A + v_B = 20$ und $v_A - v_B = 2$ erhalten wir durch Addition $2v_A = 22$ und damit $v_A = 11$. Somit gilt $v_B = 9$. Fahrer A fährt mit einer Geschwindigkeit von

$$11 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 39,6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1};$$

Fahrer B hingegen mit der von

$$9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 32,4 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

8 ▲ 790 Vorüberlegung: Es sei ABC das zu konstruierende Dreieck (vgl. die Abb.). Dieses Dreieck können wir nicht unmittelbar konstruieren, da von ihm zwar zwei Winkel, jedoch nicht eine Seite gegeben sind. Wir können aber ein Dreieck konstruieren, dessen eine Seite die Länge $a+b+c$ hat und von dem zwei Winkel gegeben sind.

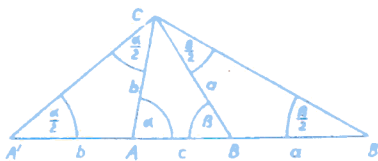
Verlängern wir nämlich die Seite AB des Dreiecks ABC über A hinaus bis A' , so daß $\overline{AA'} = b$ ist, und über B hinaus bis B' , so daß $\overline{BB'} = a$ ist, so erhalten wir ein Dreieck $CA'B'$, dessen Seite $A'B' = a+b+c$ ist. Da die Drei-

ecke $A'AC$ und $BB'C$ gleichschenkelig sind, gilt nach dem Satz über die Außenwinkel des Dreiecks

$$\angle CA'A = \angle ACA' = \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{und } \angle BB'C = \angle B'CB = \frac{\beta}{2}.$$

Daher läßt sich das Dreieck $A'B'C$ aus der Seite $A'B' = a + b + c$ und den beiden anliegenden Winkeln $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\beta}{2}$ konstruieren.



Konstruktion: Wir konstruieren zunächst dieses Dreieck $A'B'C$. Dann errichten wir auf $A'C$ die Mittelsenkrechte, die, weil das Dreieck ACA' gleichschenkelig ist, die Seite $A'B'$ in A schneidet. Ferner errichten wir auf $B'C$ die Mittelsenkrechte, die die Seite $A'B'$ in B schneidet. Verbinden wir C mit A und B , so haben wir das verlangte Dreieck ABC konstruiert. Dieses Dreieck ist durch die gegebenen Stücke bis auf kongruente Dreiecke eindeutig bestimmt, weil das Dreieck $A'B'C$ eindeutig bestimmt ist und die konstruierten Mittelsenkrechten jeweils genau einen Schnittpunkt mit der Seite $A'B'$ haben.

Bemerkung: Statt der Konstruktion der Mittelsenkrechten können wir auch an CA' in C den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ und an CB' in C den Winkel $\frac{\beta}{2}$ antragen.

8▲791 Da die Anzahl der Diagonalen eines konvexen n -Ecks gleich $\frac{n(n-3)}{2}$ ist, gilt

$$k \cdot \frac{n(n-3)}{2} = n, \quad (1)$$

wobei k eine positive ganze Zahl ist.

Wegen $n \neq 0$ gilt diese Gleichung genau dann, wenn

$$k(n-3) = 2, \text{ also } kn - 3k = 2, \text{ d. h.,} \\ n = \frac{3k+2}{k} = 3 + \frac{2}{k}. \quad (2)$$

Da $n \geq 3$ eine natürliche Zahl ist, ist die Gleichung (2) und damit auch die Gleichung (1) nur für $k = 1$, also $n = 5$, und $k = 2$, also $n = 4$, erfüllt.

Daher sind die Bedingungen der Aufgabe nur für das Viereck, bei dem die Anzahl der Diagonalen 2 beträgt, und für das Fünfeck, bei dem die Anzahl der Diagonalen 5 beträgt, erfüllt.

W8■792 Da die Aussage (2) falsch ist, reist Christine nicht in den Thüringer Wald und Steffi nicht in die Sächsische Schweiz. Da die Aussage (1) wahr ist, reist Steffi an die Ostsee. Für Christine verbleibt also nur das Reiseziel Sächsische Schweiz und für Marion das Reiseziel Thüringer Wald. In diesem Falle sind also die Reiseziele

eindeutig bestimmt: Steffi reist an die Ostsee; Marion reist in den Thüringer Wald; Christine reist in die Sächsische Schweiz.

b) Da die Aussage (1) falsch ist, reist Steffi nicht an die Ostsee. Würde nun Steffi in den Thüringer Wald reisen, so wäre die Aussage (2) falsch; denn dann könnte weder Christine in den Thüringer Wald noch Steffi in die Sächsische Schweiz reisen. Nun ist aber die Aussage (2) wahr; Steffi kann daher nur in die Sächsische Schweiz reisen. Für Christine verbleibt nun das Reiseziel Ostsee oder Thüringer Wald und entsprechend für Marion Thüringer Wald bzw. Ostsee; in beiden Fällen ist nämlich dann die Aussage (1) falsch und die Aussage (2) wahr, also sind die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Wir erhalten also im Falle b) zwei Möglichkeiten für die Reiseziele:

1. Steffi reist in die Sächsische Schweiz; Marion reist in den Thüringer Wald; Christine reist an die Ostsee.
2. Steffi reist in die Sächsische Schweiz; Marion reist an die Ostsee. Christine reist in den Thüringer Wald.

W8■793 a) Es seien x und y die beiden gedachten natürlichen Zahlen. Ferner seien a die Differenz dieser Zahlen und b die Differenz der Quadrate dieser Zahlen. Dann gilt

$$x - y = a, \quad (1)$$

$$x^2 - y^2 = b. \quad (2)$$

Aus (2) folgt $(x+y)(x-y) = b$, also wegen $x-y = a$ $(x+y)a = b$,

$$\text{also } x+y = \frac{b}{a}. \text{ Durch} \quad (3)$$

Addition erhalten wir aus (1) und (3)

$$2x = a + \frac{b}{a}, \text{ also } x = \frac{1}{2} \left(a + \frac{b}{a} \right).$$

Ferner erhalten wir aus (1) $y = x - a$.

Klaus konnte also mit nur vier Rechenoperationen die gedachten Zahlen x und y ermitteln: Er hat zunächst b durch a dividiert, dann zu dem Ergebnis a addiert, dann die Summe durch 2 dividiert und damit die erste der gedachten Zahlen, nämlich x , erhalten. Durch die Subtraktion der Zahl a hat er dann die zweite der gedachten Zahlen, nämlich y , erhalten.

b) Ist $a = 5$ und $b = 105$, so erhalten wir

$$x = \frac{1}{2} \left(a + \frac{b}{a} \right) = \frac{1}{2} (5 + 21) = \frac{1}{2} \cdot 26 = 13 \text{ und}$$

$$y = x - a = 13 - 5 = 8.$$

*8■794 Es seien z die gesuchte sechsstellige natürliche Zahl, x die aus den ersten drei Grundziffern und y die aus den letzten drei Grundziffern gebildete Zahl. Dann gilt

$$z = 1000x + y. \quad (1)$$

Ferner gilt wegen der Bedingung 1 der Aufgabe $x + y = 999$ (2)

und wegen der Bedingung 2

$$6z = 1000y + x. \quad (3)$$

Durch Addition erhalten wir aus (1) und (3)

$$7z = 1000(x+y) + (x+y) \text{ und hieraus wegen}$$

$$(2) \quad 7z = 999999, \text{ also } z = 999999:7 = 142857.$$

Wir überzeugen uns durch die Probe davon, daß für diese Zahl z die beiden Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind; wir erhalten nämlich $142 + 857 = 999$ und $6 \cdot 142857 = 857142$. Es gibt also genau eine sechsstellige Zahl, für die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind, nämlich die Zahl 142857.

Bemerkung: Die obige Lösung beruht auf dem Kunstgriff, daß man durch die Addition der Gleichungen (1) und (3) eine Gleichung erhält, aus der wegen $x + y = 999$ die Zahl z unmittelbar bestimmt werden kann. Wir hätten auch den Wert für z aus (1) und dann den Wert für y aus (2), nämlich $y = 999 - x$, in die Gleichung (3) einsetzen können und dadurch eine Gleichung für x erhalten, deren Lösung aber etwas umständlicher ist.

*8■795 Aus $b = a + 1$ und $c = ab = a(a+1)$ folgt

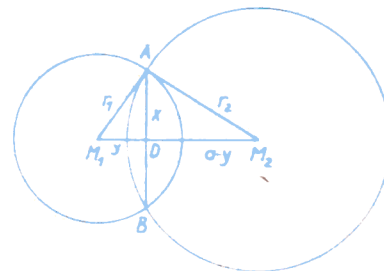
$$x = a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + (a+1)^2 + a^2(a+1)^2 \\ = a^2(a+1)^2 + 2a^2 + 2a + 1 \\ = a^2(a+1)^2 + 2a(a+1) + 1 \\ = [a(a+1) + 1]^2.$$

Die Zahl $x = a^2 + b^2 + c^2$ ist also gleich dem Quadrat der natürlichen Zahl $a(a+1) + 1$, und diese Zahl ist ungerade, weil die Zahl $a(a+1)$ als Produkt zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen eine gerade Zahl ist.

Beispiel: Es seien $a = 7$, $b = 8$, $c = 7 \cdot 8 = 56$.

Dann ist $x = 49 + 64 + 3136 = 3249 = 57^2$.

9▲796 Es seien M_1 und M_2 die Mittelpunkte, r_1 und r_2 die Radien der gegebenen Kreise, die sich in den Punkten A und B schneiden mögen. Ferner sei D der Schnittpunkt der Geraden M_1M_2 mit der gemeinsamen Sehne AB dieser Kreise (vgl. die Abb.).



Wir setzen $\overline{M_1M_2} = a$, $\overline{AD} = x$, $\overline{M_1D} = y$, also $\overline{M_2D} = a - y$. Dann gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$x^2 = r_1^2 - y^2, \quad (1)$$

$$x^2 = r_2^2 - (a - y)^2, \text{ also} \quad (2)$$

$$r_2^2 - a^2 + 2ay - y^2 = r_1^2 - y^2,$$

$$2ay = r_1^2 - r_2^2 + a^2,$$

$$y = \frac{a^2 + r_1^2 - r_2^2}{2a}. \quad (3)$$

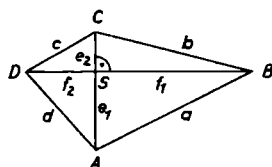
Da die Stücke $a = 7$ cm, $r_1 = 4$ cm, $r_2 = 6$ cm gegeben sind, können wir aus der Gleichung (3) y und dann aus der Gleichung (1) x berechnen. Wir erhalten

$$y = \frac{49 + 16 - 36}{2 \cdot 7} \text{ cm} = \frac{29}{14} \text{ cm},$$

$$x^2 = \left(16 - \frac{841}{196} \right) \text{ cm}^2 = \frac{2295}{196} \text{ cm}^2 \approx 11,71 \text{ cm}^2.$$

Daraus folgt $x \approx 3,42$ cm, also $\overline{AB} \approx 6,84$ cm. Der gesuchte Abstand der Schnittpunkte der beiden Kreise beträgt also rd. 6,84 cm.

9 ▲ 797 Es sei S der Schnittpunkt der Diagonalen. Wir bezeichnen die Längen der Abschnitte der Diagonalen wie folgt:
 $\overline{AS} = e_1$, $\overline{SC} = e_2$, $\overline{BS} = f_1$, $\overline{SD} = f_2$



Dann gilt nach dem Satz des Pythagoras
 $a^2 = e_1^2 + f_2^2$, $b^2 = f_1^2 + e_2^2$, $c^2 = e_2^2 + f_2^2$,
 $d^2 = f_1^2 + e_1^2$.

Hieraus folgt durch Addition

$$a^2 + c^2 = e_1^2 + f_1^2 + e_2^2 + f_2^2,$$

$$b^2 + d^2 = f_1^2 + e_2^2 + f_2^2 + e_1^2,$$

also, da die Summen auf den rechten Seiten der beiden Gleichungen übereinstimmen,
 $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$, w. z. b. w.

Bemerkung: Diese Gleichung gilt auch dann noch, wenn das Viereck $ABCD$ nicht konvex ist; jedoch darf es sich nicht um ein „überschlagenes Viereck“ handeln.

W 9 ■ 798 Da der angegebene „Wenn-So-Satz“ (Implikation) falsch ist, muß die im „Wenn-Satz“ (Prämisse) gemachte Aussage wahr sein und gleichzeitig die im „So-Satz“ (Konklusion) gemachte Aussage falsch sein. Henry hat also den Nachnamen Bergmann, und Uwe hat nicht den Nachnamen Strauch. Uwe muß demnach den Nachnamen Sabel haben. Und der dritte Schüler heißt Peter Strauch.

W 9 ■ 799 Bezeichnet man die Maßzahlen der Flächeninhalte (in cm^2) der Dreiecke EBF , DEF , DFC und ADC mit A_1 , A_2 , A_3 , A_4 sowie die Maßzahlen der Längen der Strecken AD , DE , CF mit x , y , z , so gilt

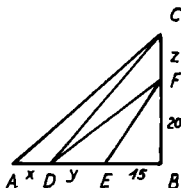
$$2A_1 = 15 \cdot 20, \quad (1)$$

$$2A_2 = y \cdot 20, \quad (2)$$

$$2A_3 = z \cdot (15 + y), \quad (3)$$

$$2A_4 = x \cdot (20 + z). \quad (4)$$

Aus (1) und (2) folgt wegen $A_1 = A_2$
 $y \cdot 20 = 15 \cdot 20$, also $y = 15$. Daher folgt wegen $A_3 = A_1$ aus (3) und (1) $z \cdot (15 + 15) = 15 \cdot 20$, also $z \cdot 30 = 15 \cdot 20$, d. h., $z = 10$. Endlich folgt aus (4) $x \cdot (20 + 10) = 15 \cdot 20$, also $x = 10$. Die Strecke $\overline{AD}$ hat also die Länge 10 cm.



* 9 * 800 Wir ermitteln zunächst die Zensurenverteilung in diesem Jahr. Zu diesem Zweck zerlegen wir das Produkt 192 in Primfaktoren und erhalten $192 = 2^6 \cdot 3$. (1) Die folgende Tabelle zeigt die sich dann ergebenden Möglichkeiten für die Zensuren-

verteilung, wobei die Anzahl der Einsen sich daraus ergibt, daß die Summe der Zensuren 22 beträgt.

Zensur	1. Möglichkeit		2. Möglichkeit	
	Anzahl der Fächer	Summe	Anzahl der Fächer	Summe
1	7	7	7	7
2	6	12	4	8
3	1	3	1	3
4	—	—	1	4
	14	22	13	22

Zensur	3. Möglichkeit		4. Möglichkeit	
	Anzahl der Fächer	Summe	Anzahl der Fächer	Summe
1	7	7	7	7
2	2	4	—	—
3	1	3	1	3
4	2	8	3	12
	12	22	11	22

Bei der 1. Möglichkeit beträgt der Zensuren-durchschnitt $\frac{22}{14} = 1,57 \dots < 1,6$. Die 2., 3. und

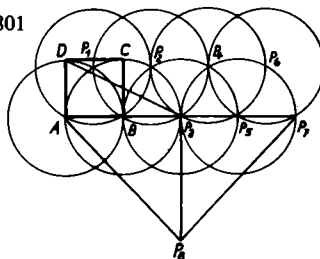
4. Möglichkeit scheiden aus, weil hier der Zensuredurchschnitt größer als 1,6 ist; denn $\frac{22}{11} > \frac{22}{12} > \frac{22}{13} > 1,6$.

Damit ist die Zensurenverteilung in diesem Jahr (1. Möglichkeit) eindeutig festgelegt: Klaus erhielt 7 Einsen, 6 Zweien und 1 Drei. Die Zensurenverteilung im Vorjahr ergibt sich analog. Wir zerlegen das Produkt 3456 in Primfaktoren und erhalten $3456 = 2^7 \cdot 3^3$. Daraus ergibt sich zunächst, daß Klaus im Vorjahr 3 Dreien gehabt hat. Die Anzahl der Zweien könnte gleich 7, 5, 3 oder 1 sein und entsprechend die Anzahl der Vieren 0, 1, 2 oder 3. Dann wäre die Anzahl der Einsen 4, 5, 6 oder 7, weil die Anzahl der Fächer 14 betrug.

Nur im ersten Fall erhalten wir die Zensuren-summe $4 + 7 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 27$; in allen anderen Fällen ist die Zensurensumme größer. Daher ist auch die Zensurenverteilung im Vorjahr eindeutig bestimmt; Klaus erhielt 4 Einsen, 7 Zweien, 3 Dreien und keine Vier.

Bei der obigen Überlegung wurde die Angabe, wonach Klaus im Vorjahr 4 Einsen hatte, nicht benötigt; denn die Anzahl der Einsen ergab sich bereits aus den übrigen Daten.

* 9 * 801



Es sei $\overline{AB} = a$ die Länge der Strecke $\overline{AB}$. Wir zeichnen zunächst um die Punkte A und B Kreise mit dem Radius a , die sich in dem Punkt P_1 schneiden (vgl. die Abb.). Dann zeichnen wir stets mit dem gleichen

Radius a einen Kreis um P_1 , der den Kreis um B in P_2 schneidet, einen Kreis um P_2 , der den Kreis um B in P_3 schneidet, einen Kreis um P_3 , der den Kreis um P_2 in P_4 schneidet, einen Kreis um P_4 , der den Kreis um P_3 in P_5 schneidet, einen Kreis um P_5 , der den Kreis um P_4 in P_6 schneidet, einen Kreis um P_6 , der den Kreis um P_5 in P_7 schneidet.

Dabei sollen die Punkte P_1, P_2, P_4, P_6 auf derselben Seite der Geraden AB liegen und die Punkte P_3, P_5, P_7 von den Punkten P_1, P_2, P_4 verschieden sein.

Dann liegen die Punkte P_3, P_5, P_7 auf der Geraden AB , weil die Dreiecke ABP_1, P_1BP_2, BP_2P_3 usw. gleichseitig sind.

Nun zeichnen wir um A und P_7 Kreise mit dem Radius $AP_5 = P_7B = 3a$, die sich in dem Punkt P_8 schneiden. Dann ist das Dreieck AP_7P_8 gleichschenkelig, und es gilt $P_3P_8 = \sqrt{(3a)^2 - (2a)^2} = \sqrt{5}a^2 = a\sqrt{5}$.

Jetzt zeichnen wir um P_3 mit dem Radius $P_3P_8 = a\sqrt{5}$ einen Kreis, der den Kreis um A in einem Punkt D schneidet.

Dann ist das Dreieck AP_3D rechtwinklig mit der Hypotenuse P_3D ; denn es gilt wegen $AD = a$, $AP_3 = 2a$, $P_3D = a\sqrt{5}$
 $\overline{AD}^2 + \overline{AP_3}^2 = a^2 + (2a)^2 = 5a^2 = \overline{P_3D}^2$.

Daher ist D ein Eckpunkt des gesuchten Quadrats. Wir erhalten weiter den Eckpunkt C dieses Quadrats, indem wir um B und D Kreise mit dem Radius a zeichnen, die sich in dem von A verschiedenen Punkt C schneiden. Damit haben wir die Eckpunkte des Quadrats $ABCD$ nur mit dem Zirkel konstruiert.

W 10/12 ■ 802 Das Geburtsjahr des Mathematikers sei $1000 + 100x + 10y + z$, wobei x, y, z natürliche Zahlen mit $8 \leq x \leq 9$, $1 \leq y \leq 9$, $1 \leq z \leq 9$ sind; denn der Mathematiker muß nach 1800 und vor 1963 geboren sein, und die den Grundziffern seines Geburtsjahres entsprechenden natürlichen Zahlen sind von Null verschieden, weil ihr Produkt von Null verschieden ist.

Dann gilt

$$1 \cdot x \cdot y \cdot z = 1963 - (1000 + 100x + 10y + z). \quad (1)$$

1. Nun sei $x = 9$, also

$$9yz = 63 - (10y + z), \text{ d. h.,} \quad (2)$$

$$yz = 7 - \frac{10y + z}{9}.$$

Also ist $10y + z$ durch 9 teilbar, und es sind wegen $yz > 0$ nur die folgenden Fälle möglich:

$10y + z$	$7 - \frac{10y + z}{9}$	yz
18	5	8
27	4	14
36	3	18
45	2	20
54	1	20
63	0	18

In keinem Falle stimmen die Zahlen in der 2. und 3. Spalte überein, ist also die Gleichung (2) erfüllt. Also ist $x \neq 9$.

2. Daher kann nur $x=8$ sein, also

$8yz = 163 - (10y + z)$, d. h.

$$yz = 20 - \frac{10y + z - 3}{8} \quad (3)$$

Also ist $10y + z - 3$ durch 8 teilbar, und es sind nur die folgenden Fälle möglich:

$10y + z$	$20 - \frac{10y + z - 3}{8}$	yz
11	19	1
19	18	9
27	17	14
35	16	15
43	15	12
51	14	5
59	13	45
67	12	42
75	11	35
83	10	24
91	9	9
99	8	81

Nur in der vorletzten Zeile stimmen die Werte der 2. und 3. Spalte überein, ist also die Gleichung (3) erfüllt. Daher ist $y=9$ und $z=1$.

Der Mathematiker ist also im Jahre 1891 geboren. Wegen $1 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 1 = 72$ hatte er im Jahre 1963 ein Alter von 72 Jahren erreicht. Wegen $1891 + 72 = 1963$ ist das tatsächlich eine Lösung der Aufgabe, und zwar, wie oben gezeigt wurde, die einzige Lösung.

W 10/12 ■ 803 Der quaderförmige Schrank habe die rechteckige Grundfläche $A_0B_0C_0D_0$ und die Deckfläche $ABCD$. Dabei gilt

$$\overline{A_0B_0} = \overline{AB} = \overline{C_0D_0} = \overline{CD} = a,$$

$$\overline{B_0C_0} = \overline{BC} = \overline{D_0A_0} = \overline{DA} = b,$$

$$\overline{A_0A} = \overline{B_0B} = \overline{C_0C} = \overline{D_0D} = h \text{ (vgl. die Abb.)}$$

Wir berechnen zunächst die Längen der Flächendiagonalen des Quaders und erhalten $d_1 = \overline{A_0D} = \overline{D_0A} = \overline{B_0C} = \overline{C_0B} = \sqrt{b^2 + h^2}$

$$= \sqrt{1,8^2 + 2,1^2} \text{ m} = \sqrt{7,65} \text{ m, also}$$

$$2,7 \text{ m} < d_1 < 2,8 \text{ m;}$$

$$d_2 = \overline{A_0B} = \overline{B_0A} = \overline{C_0D} = \overline{D_0C} = \sqrt{a^2 + h^2}$$

$$= \sqrt{0,6^2 + 2,1^2} \text{ m} = \sqrt{4,77} \text{ m, also}$$

$$2,1 \text{ m} < d_2 < 2,2 \text{ m;}$$

$$d_3 = \overline{A_0C_0} = \overline{B_0D_0} = \overline{AC} = \overline{BD} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$= \sqrt{0,6^2 + 1,8^2} \text{ m} = \sqrt{3,60} \text{ m, also}$$

$$1,8 \text{ m} < d_3 < 1,9 \text{ m.}$$

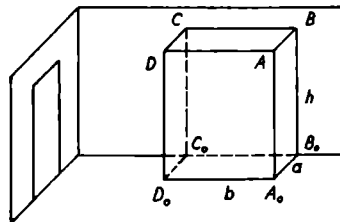
Ferner stellen wir fest, daß die Grundfläche ($0,6 \text{ m} \cdot 1,8 \text{ m}$) des Schrankes mit Spielraum in die Türöffnung ($0,8 \text{ m} \cdot 1,9 \text{ m}$) paßt.

a) Es scheint zunächst am einfachsten, den Schrank um die Kante $\overline{A_0B_0}$ zu kippen. Das ist aber nicht möglich, da dabei die Kante $\overline{CD}$ wegen $d_1 > 2,7 \text{ m} > 2,3 \text{ m} = H$ vor Vollendung der Kippung an der Decke anstoßen würde.

b) Wir drehen daher den Schrank um die Kante $\overline{C_0C}$ um 90° . Diese Drehung ist ausführbar, weil $d_3 < 1,9 \text{ m} < 2,5 \text{ m} = B$. Dann legen wir den Schrank um die Kante $\overline{B_0C_0}$ um; das ist ausführbar, weil $d_2 < 2,2 \text{ m} < 2,3 \text{ m} = H$. Dann kippen wir den Schrank auf, und zwar um die Kante $\overline{B_0C_0}$; das ist ausführbar, weil $d_3 < 1,9 \text{ m} < 2,3 \text{ m} = H$ und $a + b < B$. Jetzt kann der Schrank durch Parallelver-

schiebungen durch die Tür transportiert werden.

c) Der Leser prüfe selbst die dritte Variante: Umlegen um $\overline{A_0D_0}$, Aufkippen um $\overline{A_0A}$ und Drehung um 90° um $\overline{A_0D_0}$.



Fortsetzung von Seite 39

Man zeige, daß die so definierte Folge $\{a_n\}$ eine geometrische Folge ist, und berechne für sie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

b) Es seien a_0 und a_1 die ersten beiden Glieder einer Folge $\{a_n\}$. Ferner sei a_n für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ arithmetisches Mittel der beiden vorhergehenden Glieder. Geben Sie in Form von Relationen zwischen a_0 und a_1 eine notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, daß a_n eine geometrische Folge ist!

5. Es ist zu beweisen, daß

$$\frac{1}{1 - \sin 2x} + \frac{1}{1 - \sin 2y} \geq \frac{2}{1 - \sin(x + y)} \quad (1)$$

für alle reellen Zahlenpaare (x, y) mit

$$0 < x < \frac{\pi}{4} \text{ und } 0 < y < \frac{\pi}{4} \quad (2)$$

erfüllt ist.

Ferner ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür anzugeben, daß in (1) unter der Nebenbedingung (2) Gleichheit eintritt.

Von den folgenden beiden Aufgaben 6.1 und 6.2 ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

6.1. Eine Menge $\mathfrak{M}$ von Elementen $u, v, w, \dots$ heißt eine Gruppe bezüglich einer Operation A , wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(I) Jedem geordneten Paar (u, v) von Elementen aus $\mathfrak{M}$ ist vermöge der Operation A ein Element w aus $\mathfrak{M}$ zugeordnet (man schreibt $u \circ v = w$).

(II) Die Operation A ist assoziativ, d. h., für alle Elemente u, v, w aus $\mathfrak{M}$ gilt:

$$(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w).$$

(III) Zu je zwei Elementen u und v aus $\mathfrak{M}$ existiert mindestens ein Element x aus $\mathfrak{M}$, so daß $u \circ x = v$ gilt, und mindestens ein Element y aus $\mathfrak{M}$, so daß $y \circ u = v$ gilt.

Es sei nun $\mathfrak{R}$ die Menge aller geordneten Paare (a, b) reeller Zahlen a und b , für die $a^2 + b^2 = 1$ gilt. Ferner sei in $\mathfrak{R}$ eine Operation A wie folgt definiert:

$$(a, b) \circ (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Man beweise, daß

$\mathfrak{R}$ eine Gruppe bezüglich A ist.

6.2 50 weiße und 50 schwarze Kugeln sind so in zwei äußerlich nicht unterscheid-

bare Urnen zu verteilen, daß keine Urne leer bleibt und alle Kugeln verwendet werden. Wie ist die Aufteilung der Kugeln auf die beiden Urnen vorzunehmen, wenn die Wahrscheinlichkeit, beim (blindlings erfolgenden) einmaligen Wählen einer der beiden Urnen und Ziehen einer Kugel aus ihr eine weiße Kugel zu ergreifen, so groß wie möglich ausfallen soll?

Hinweise zur Lösung:

a) In der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung wird die Wahrscheinlichkeit p eines Ereignisses als Quotient aus der Anzahl g der für dieses Ereignis „günstigen“ Fälle und der Gesamtzahl m aller möglichen

Fälle definiert, also $p = \frac{g}{m}$ gesetzt.

b) Somit ist die Wahrscheinlichkeit dafür, aus einer Urne, die insgesamt u Kugeln und darunter w weiße enthält, (blindlings) eine weiße Kugel zu ziehen, als $p = \frac{w}{u}$ anzusetzen.

c) Sind zwei Urnen vorhanden, bei denen die Wahrscheinlichkeiten für das Ziehen einer weißen Kugel p_1 bzw. p_2 betragen, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für das zusammengesetzte Ereignis:

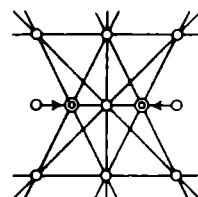
„Auswahl einer der beiden Urnen und ziehen einer weißen Kugel aus der gewählten Urne“

$$\text{zu: } p = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2.$$

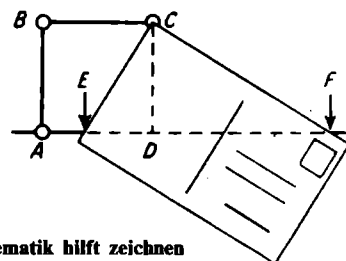
Lösungen zu alpha-heiter (2/72)

9 Punkte, 8 Geraden

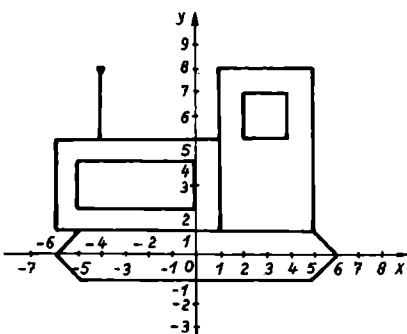
Zwei Geraden gehen verloren, vier neue Geraden werden gewonnen.



Postkartengeometrie



Mathematik hilft zeichnen





Interview mit Prof. Dr. L. A. Kaloujnine

Über eine mathematisch-physikalische Schule in Kiew

Im Januar 1971 weilte Prof. Dr. L. A. Kaloujnine besuchsweise in Leipzig. Der Wissenschaftler der Universität Kiew beschäftigt sich besonders mit moderner abstrakter Algebra und mathematischer Logik und ist in der DDR seit Jahrzehnten gut bekannt. Wir wußten, daß er stets auch ein großes Interesse für die Fragen der Modernisierung des Mathematikunterrichts und die stete Aktivierung der außerunterrichtlichen Arbeit zeigt. Sein Buch „Primzahlzerlegung“ ist vor kurzem in deutscher Sprache erschienen. Er überbrachte *alpha* die Grüße des Direktors der mathematisch-physikalischen Fakultät Kiew und des Chefredakteurs des ukrainischen *Mathematik-Almanachs*. Einen Schwerpunkt des Gesprächs zwischen Prof. Dr. Kaloujnine und dem Chefredakteur *alpha* möchten wir herausgreifen, weil wir glauben, daß er unsere Leser besonders interessieren wird:

Chefredakteur: In Kiew gibt es eine mathematisch-physikalische Schule. Wie kam es zu ihrer Gründung?

Prof. Dr. Kaloujnine: Anfang der 60er Jahre wurde beschlossen, neben normalen allgemeinbildenden Schulen Spezialschulen für Mathematik zu schaffen, so wie es diese bereits auf den Gebieten der bildenden Kunst und der Musik gab. Es entstanden Internatsschulen in Moskau, Leningrad, Nowosibirsk, Charkow und bei uns in Kiew.

In den kleineren Städten und auf dem Lande gibt es zahlreiche interessierte und talentierte Schüler. Durch Zusammenfassung in solchen Internatsschulen sollen sie die Möglichkeit erhalten, ihre Fähigkeiten zu erweitern und zu vertiefen.

Ch.: Wie wird man Schüler einer solchen Schule?

Prof. K.: Durch Hinweise unserer Mathematiklehrer, im Rahmen der Mathematikolympiaden, durch die Tätigkeit in Arbeitsgemeinschaften *Junger Mathematiker* werden uns die talentierten Schüler bekannt. Nach der 7. Klasse werden sie zunächst in einem Sommerlager in Kiew zusammengefaßt, das von Wissenschaftlern und erfahrenen Mathematiklehrern betreut wird; dort werden die besten ausgewählt.

Ch.: Wie sieht der Unterricht an der Internatsschule aus?

Prof. K.: Ein großer Teil der unterrichtenden Lehrer sind jüngere Kräfte unserer Hochschule (Assistenten, Dozenten). Jede der obengenannten Schulen hat ein großes Programm, das von dem der normalen Schulen abweicht. Es wird von den „Eltern“ der Schule, der Universität und dem Ministerium erarbeitet. Der Rektor der Kiewer Universität ist für die Aufstellung der Pläne verantwortlich.

Der Schüler kann sich beim Eintritt in die Schule für die Spezialrichtung Mathematik, Physik (und in naher Zukunft auch für Chemie) entscheiden.

Ch.: Uns interessiert natürlich besonders die Spezialrichtung Mathematik. Würden Sie uns aus dem dreijährigen Programm über das erste Jahr, die Klasse 8, näheres mitteilen?

Prof. K.: In diesem Jahr entstehen Lehrbücher für diese Spezialschule. Sie wurden auf Grund langjähriger Erfahrungen zusammengestellt. In dem Lehrbuch „Algebra für die 8. Klasse“ ist enthalten: Über die Sprache der Mengenlehre und Mathematische Logik (als originelle Wiederholung des Schulstoffes der 5. bis 7. Klasse); Arithmetik und Polynome, Einführung der reellen Zahlen, usw. Abschnitte dieses Buches wurden bereits im Fernsehen vorgeführt. Nach Fertigstellung der Bücher werden diese auch eine Hilfe für Spezialarbeitsgemeinschaften und für den fakultativen Unterricht sein können.

Ch.: Kommt bei dieser Spezialisierung nicht die Allgemeinbildung zu kurz?

Prof. K.: Unsere Schüler bewähren sich nicht nur neben dem Mathematikunterricht durch Jahresarbeiten, durch weitere Fachkurse und Olympiaden außerunterrichtlich im Fach Mathematik, sondern sie treiben rege Sport, sind musikalisch interessiert und haben auch hervorragende Erfolge in anderen Fächern. Das ist verständlich, wenn ich darauf hinweise, daß wir nur Schüler aufnehmen, welche in den meisten Fächern gute bis sehr gute Leistungen aufweisen.

Ch.: Wir danken Ihnen, Herr Professor, für dieses Interview. Wir freuen uns über die Bereitschaft, uns die genannten Lehrbücher zu übersenden. Wir werden in *alpha* für unsere Leser geeignete Ausschnitte daraus veröffentlichen.

Sie haben eine Aufgabe gestellt (siehe Seite 26), wir stellen das von Ihnen veröffentlichte Buch vor:



L. A. Kaloujnine

Primzahlzerlegung

Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik, Band XXIII

Mathematische Schülerbücherei, Band 59
Übersetzung aus dem Russischen

1971, 40 Seiten, Broschur, 2,40 Mark,
Bestellnummer: 5698780

Der Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie, daß jede ganze rationale Zahl bis auf die Vorzeichen und die Reihenfolge der Faktoren in eindeutiger Weise in ein Produkt von Primzahlen zerlegbar ist, wird bewiesen und mit Beispielen belegt. Auf Zahlbereiche, in denen es anders ist, wird eingegangen.

Das Problem der Primzahlzerlegung ist schon Schülern der unteren Klassen geläufig; deshalb eignet sich die Broschüre gut zur außerunterrichtlichen mathematischen Betätigung auch schon für diese Schüler.



VEB Deutscher Verlag
der Wissenschaften

O. ZICH
A. KOLMAN

Unterhaltsame Logik

Der Leser wird sicherlich auch der Meinung sein, daß jedermann — der Physiker wie der Dichter, der Traktorist wie der Chemiker — in der Lage sein muß, folgerichtig zu denken, beweiskräftig zu urteilen und falsche Schlußfolgerungen zu widerlegen. Das ist besonders in unserer Zeit notwendig, die ständig eine Vielzahl von ungewöhnlichen und erstaunlichen Entdeckungen und Erfindungen in den verschiedenen Bereichen hervorbringt.

Wer sich wirklich in all dieser Vielfalt auskennen, eine eigene Meinung haben und diese auch verteidigen will, wer aktiv am Leben teilhaben, forschen, Forschungsvorschläge entwickeln will, mit anderen Worten, wer tatkräftig am Aufbau des Sozialismus helfen will, der muß logisch denken können. Diese Fähigkeit erfordert zu ihrer Weiterentwicklung Übung, ähnlich wie zur Vervollkommnung von Fertigkeiten im Skilaufen die Teilnahme an Skiwettkämpfen unumgänglich ist...

Derjenige, welcher ein wenig die *moderne Logik* kennt, wird in der Regel weitaus schneller mit einer gestellten Aufgabe fertig sein, als ein Anfänger.

Die moderne *formale Logik*, die auch *mathematische Logik* genannt wird, übt einen ständig steigenden Einfluß auf die Methoden des Denkens in unserer Zeit aus.

Leseprobe

Einiges aus der Aussagenlogik

1.1. Aussagen

Sachverhalte der Realität werden in Form von Aussagen erfaßt. Das können sowohl Aussagen aus der Mathematik, der Philosophie oder anderen Wissenschaften als auch aus der Praxis des täglichen Lebens sein. Um die hier benötigten Hilfsmittel aus der Logik anwenden zu können, betrachten wir nur

solche Aussagen, für die es nur zwei eindeutig bestimmte Möglichkeiten des Wahrheitsgehaltes gibt, nämlich *wahr* oder *falsch* zu sein. Das ist keineswegs bei allen sprachlichen Äußerungen der Fall, wie folgende Beispiele zeigen.

1. Jede durch 4 teilbare Zahl ist auch durch 2 teilbar.
2. Die Lösung einer bestimmten mathematischen Aufgabe ist ein schwieriges Problem.
3. Verhütet Waldbrände!
4. Ein Kaninchen, falls indessen.

Nur im Fall 1. kann man in eindeutiger Weise von Wahrheit oder Falschheit sprechen. Hier handelt es sich um eine wahre Aussage. Dagegen ist der Wahrheitsgehalt der Aussage im Fall 2. nicht eindeutig bestimmt. Er ist nämlich von den Kenntnissen und Fähigkeiten desjenigen abhängig, der an die Lösung der betreffenden Aufgabe herangeht. Im Fall 3. ist es sinnlos, überhaupt von Wahrheitsgehalt zu sprechen, denn hier wird kein bestimmter Sachverhalt beschrieben, es liegt also gar keine Aussage vor. Im Fall 4. schließlich handelt es sich um eine sinnlose Aneinanderreihung von Wörtern.

Wir haben uns also hier auf solche Aussagen beschränkt, für die es außer „wahr“ und „falsch“ keine weiteren Möglichkeiten des Wahrheitsgehalts gibt. Weiterhin kann eine solche Aussage auch nur einen dieser beiden *Wahrheitswerte* annehmen, da wir natürlich den Widerspruch, daß eine Aussage gleichzeitig wahr und falsch ist, ausschließen müssen.

Die Feststellung, daß einer jeden Aussage genau einer der beiden Wahrheitswerte „wahr“ bzw. „falsch“ zukommt, bedeutet jedoch nicht, daß man von einer beliebig vorgegebenen Aussage unmittelbar sagen kann, *welchen* von beiden Wahrheitswerten sie besitzt. Diese Frage läßt sich im allgemeinen erst nach einer Beweisführung beantworten. Es gibt Aussagen, für die das bis heute noch nicht gelungen ist, so z. B. die folgende als Goldbachsche Vermutung bekannte mathematische Aussage:

Jede gerade Zahl, die größer als 2 ist, läßt sich als Summe zweier Primzahlen darstellen.

Beispiel: $4 = 2 + 2$

$$6 = 3 + 3$$

$$8 = 5 + 3$$

$$30 = 11 + 19$$

$$100 = 87 + 13$$

Es scheint so, als ob diese Art der Zerlegung immer möglich wäre. Man darf sich jedoch durch diesen Anschein nicht zu der Überzeugung verleiten lassen, daß dies wirklich für *alle* geraden Zahlen gilt. Das läßt sich hier wegen der unendlich vielen Fälle durch Probieren nicht beweisen; dazu müssen andere Beweisverfahren gefunden werden, was bis heute nicht gelungen ist. Trotzdem kann man mit Sicherheit sagen, daß die Goldbachsche Vermutung genau einen der beiden Wahrheitswerte besitzt.

1.2. Zusammengesetzte Aussagen

Durch Bindewörter wie „und“, „oder“, „wenn, so“, bzw. durch die Verneinung „nicht“ lassen sich aus einfachen Aussagen wie „Die Spree ist ein Fluß“ oder „2 ist eine gerade Zahl“ zusammengesetzte Aussagen bilden. So ist z. B. die Aussage „Die Sonne scheint, und der Wind weht“ zusammengesetzt aus den beiden Einzelaussagen a) „Die Sonne scheint“ und b) „Der Wind weht“. Die Verbindung der beiden Einzelaussagen wird durch das Wort „und“ hergestellt. Wir wollen hier konkrete Aussagen abkürzend durch lateinische Buchstaben bezeichnen.

A: Die Sonne scheint.

B: Der Wind weht.

A und B: Die Sonne scheint, und der Wind weht.

Derartige Zusammensetzungen von Einzelaussagen sind wegen ihrer sprachlichen Formulierung nicht immer deutlich zu erkennen. So zeigt sich der Aufbau der Aussage „Die Zahl 2 ist eine gerade Primzahl“ aus zwei anderen Aussagen erst deutlich, wenn man sie in die Form „Die Zahl 2 ist gerade, und die Zahl 2 ist eine Primzahl“ bringt.

Mit Hilfe von Bindewörtern wie den oben genannten lassen sich aus vorgegebenen Aussagen neue Aussagen zusammensetzen, die abgesehen von unwesentlichen Unterschieden in der sprachlichen Formulierung, in eindeutiger Weise den Teilaussagen zugeordnet sind.

Wegen dieser Zuordnungen nennt man die durch die jeweiligen Bindewörter gegebenen Zusammensetzungen auch *Aussagenfunktionen*. Diese Aussagenfunktionen werden nun so festgelegt, daß der Wahrheitswert der zugeordneten Aussage nur von den Wahrheitswerten der in der Zusammensetzung auftretenden Einzelaussagen abhängt und nicht von ihrem Inhalt, d. h. nicht von dem von ihnen beschriebenen Sachverhalt. Wie man den Wahrheitswert der zugeordneten Aussage aus den Wahrheitswerten der in die Zusammensetzung eingehenden Aussagen bei der jeweiligen Aussagenfunktion bestimmt, wird durch die Werttabellen in folgendem Abschnitt festgelegt.

In diesen Tabellen benutzen wir die Buchstaben „X“, „Y“ und „Z“ als Variable für Einzelaussagen. Die Wahrheitswerte werden mit „1“ (wahr) und „0“ (falsch) bezeichnet.

1.3. Die klassischen Aussagenfunktionen

Die Negation. Durch Vorsetzen des Wortes „nicht“ vor eine beliebige Aussage X erhalten wir die neue Aussage „nicht X“. Wir nennen sie die *Negation* von X und schreiben kürzer „ $\bar{X}$ “. Folgende Tabelle gibt an, wie der Wahrheitswert von $\bar{X}$ vom Wahrheitswert von X abhängt.

Die Negation ist eine *einstellige* Aussagenfunktion, d. h. sie ordnet *einer* Aussage eine andere Aussage zu. Die folgenden Funktionen sind dagegen *zweistellige* Aussagenfunktionen, d. h. sie ordnen immer einem *Paar* von Aussagen eine Aussage zu.

X	$\bar{X}$
1	0
0	1

Die Konjunktion. Verbindet man zwei Aussagen X, Y durch das Wort „und“, so erhält man eine neue Aussage „X und Y“, die als *Konjunktion* der Aussagen X, Y bezeichnet wird. Statt „X und Y“ schreibt man kürzer „ $X \wedge Y$ “. Wie der Wahrheitswert einer Konjunktion von den Wahrheitswerten der verknüpften Einzelaussagen abhängt, gibt die folgende Tabelle an, in der alle möglichen Kombinationen der beiden Wahrheitswerte von X bzw. Y enthalten sind:

X	Y	$X \wedge Y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Diese Festlegung der Wahrheitswerte entspricht gerade dem üblichen Gebrauch des Bindewortes „und“; denn eine mit Hilfe dieses Wortes zusammengesetzte Aussage ist wahr, wenn beide Komponenten wahr sind, und in allen anderen Fällen falsch.

Die Disjunktion. Als Disjunktion bezeichnet man die Verbindung zweier Aussagen X, Y mit Hilfe des Bindewortes „oder“. Statt „X oder Y“ schreibt man kürzer „ $X \vee Y$ “. Wie die Wahrheitswerte einer Disjunktion von den Wahrheitswerten ihrer Komponenten abhängen, zeigt folgende Tabelle:

X	Y	$X \vee Y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Beispiel:

Aussage A: Es regnet.
Aussage B: Es ist windig.

Aussage $A \vee B$: Es regnet, oder es ist windig.

Nach den Festlegungen in der Tabelle ist hier Aussage „ $A \vee B$ “ nur dann falsch, wenn sowohl A als auch B falsch sind. Bei der durch diese Tabelle festgelegten Aussagenfunktion handelt es sich um das sogenannte *nicht ausschließende* „oder“, d. h., die zusammengesetzte Aussage ist auch dann wahr, wenn beide Teilaussagen wahr sind. Im alltäglichen Sprachgebrauch wird dagegen das Bindewort „oder“ im allgemeinen im Sinne von „entweder — oder“ benutzt; dabei ist dann die zusammengesetzte Aussage nur dann wahr, wenn eine der Teilaussagen wahr

und die andere falsch ist. Im Falle der Wahrheit der Gesamtaussage schließt also die Wahrheit der einen Teilaussage die Wahrheit der anderen Teilaussage aus.

Die Bezeichnung dieser beiden Aussagenfunktionen ist nicht einheitlich. Die hier als Disjunktion bezeichnete Aussagenfunktion wird oft auch *Alternative* genannt. Da die letztere Bezeichnung im täglichen Sprachgebrauch gerade für das ausschließende „entweder-oder“ verwendet wird, haben wir hier für das nicht ausschließende „oder“ die Bezeichnung *Disjunktion* gewählt.

Die Implikation. Werden Aussagen Y und X zu der Aussage „wenn X, so Y“ verbunden, so wird diese als *Implikation* bezeichnet, man schreibt kürzer „ $X \rightarrow Y$ “. Die Wahrheitswerte einer Implikation kann man aus folgender Tabelle ablesen:

X	Y	$X \rightarrow Y$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

In einer Implikation „ $X \rightarrow Y$ “ heißt X *Voraussetzung* und Y *Behauptung*. Man sagt auch: „Aus X folgt Y“. Die in der Tabelle getroffene Festlegung der Wahrheitswerte besagt dann, daß aus einer wahren Voraussetzung nur etwas Wahres folgen kann (Zeilen 1 und 2) und daß aus einer falschen Voraussetzung sowohl etwas Wahres als auch etwas Falsches folgen kann.

Die Äquivalenz. Häufig tritt die Verbindung „X genau dann, wenn Y“ der beiden Aussagen X und Y auf. Man schreibt kürzer „ $X \leftrightarrow Y$ “. Die folgende Tabelle gibt wieder die Wahrheitsverteilung dieser Aussagenfunktion an:

X	Y	$X \leftrightarrow Y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Wie man in der Tabelle erkennt, ist diese Aussagenverbindung wahr, wenn beide Teilaussagen den gleichen Wahrheitswert haben. Sie ist falsch, wenn die Teilaussagen verschiedene Wahrheitswerte haben. Aus diesem Grunde bezeichnet man diese Aussagenfunktion als *Äquivalenz*.

BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft empfiehlt weiter folgende Titel:

Übungen für Junge Mathematiker

Teil 1. Zahlentheorie.

Von Dr. Eberhard Lehmann

2. Aufl. 159 S. mit 22 Abb. 14,2 cm × 20,0 cm 1970 (Nr. 36). Kartonierte 6,50 M

Inhalt: Einleitung · Zahlenbereiche, Dirichletsches Schubfachprinzip · Primzahlzer-

legungen, Euklidischer Algorithmus · Das Rechnen mit Kongruenzen · Logarithmen modulo p · Anhang · Literaturhinweise

Teil 2. Elementargeometrie.

Von Dr. Günter Grosche

93 S. mit 74 Abb. L 7 N. 105 g. 1969. (Nr. 37). Kartonierte 4,50 M

Inhalt: Einleitung · Dreieckskonstruktionen · Kreiskonstruktionen · Verschiedene geometrische Konstruktionsaufgaben in der Ebene · Einige Konstruktionsaufgaben im Raum · Lösungen der Übungsaufgaben · Literaturhinweise

Teil 3. Ungleichungen.

Von Gerhard Kleinfeld

134 S. mit 20 Abb. 14,2 cm × 20,0 cm 1969. (Nr. 38). Kartonierte 5,50 M

Inhalt: Einleitung · Beweis von Ungleichungen · Bestimmung der Lösungsmenge von Ungleichungen · Das Rechnen mit absoluten Beträgen · Ungleichungen mit Parametern · Goniometrische Ungleichungen · Lösungen und Lösungshinweise · Literaturhinweise



Übersetzung aus dem Tschechischen

5. Auflage 167 Seiten mit 71 Bildern

12 cm × 19 cm.

Halbgebundene 4,80 M

Die Mathematik erleichtert uns bei den verschiedensten Tätigkeiten die Arbeit und dringt immer mehr auch in solche Berufe ein, in denen sie früher nicht zu finden war. Sie wird so zu einem untrennbaren Bestandteil der Allgemeinbildung. Mathematische Unterhaltungsbücher finden deshalb ständig wachsendes Interesse in den verschiedensten Berufen. Der Autor dieses international erfolgreichen Buches geht vom mathematischen Spiel aus und führt den Leser in kurzweiliger Weise zur Anwendung der Mathematik im Verkehrswesen, in der Technik, in Naturwissenschaften und im täglichen Leben. Zu beziehen durch den Buchhandel

VEB Fachbuchverlag Leipzig