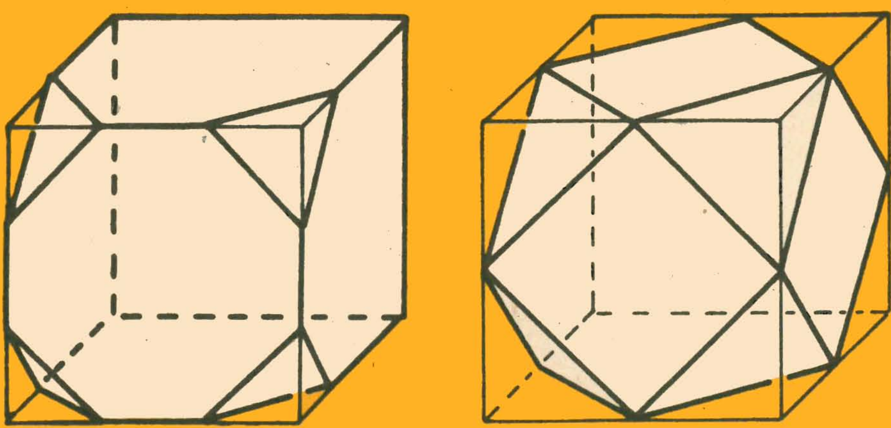
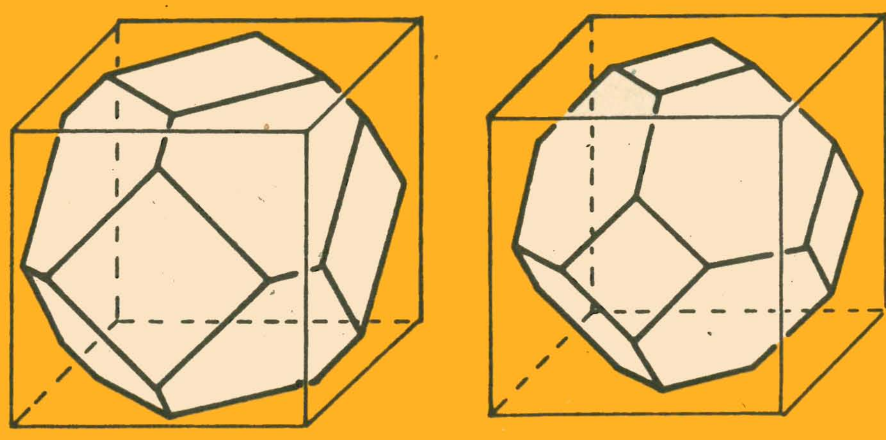
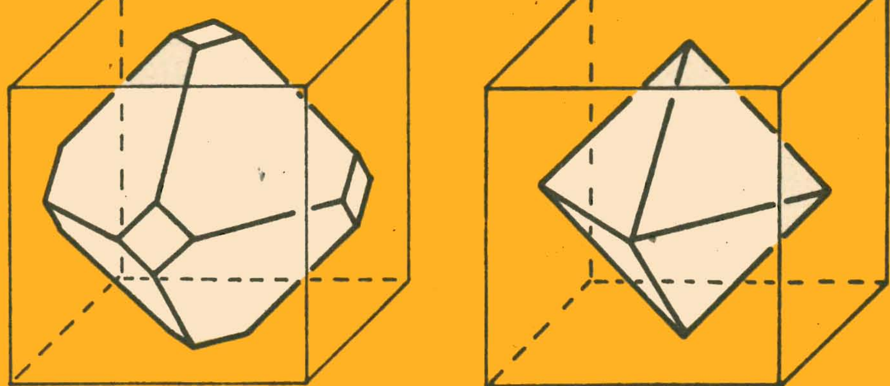
alpha

Mathematische Schülerzeitschrift



5





Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
19. Jahrgang 1985
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold

Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
1086 Berlin, Krausenstr. 50, PSF 1213
Anschrift der Redaktion:
7027 Leipzig, PSF 14
Redaktion:
OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: K. Kupiec, VR Polen (S. 99); Bildstelle Universität Vilnius/W. Schmidt, Greifswald (S. 100/101); Pythagoras, Niederlande (S. 106); Schüler Rukka Kosonen, aus Funktio, Finnland (S. 111)
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig
Titelbild: Bilder aus Elemente, Schweiz, gestaltet von W. Fahr, Berlin

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 25. Februar 1985
Auslieferungstermin: 15. Oktober 1985

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben geeignet ab der angegebenen Klassenstufe

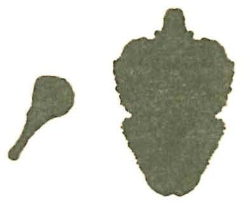
Zum Verhältnis von Kunst und Wissenschaft am Beispiel der Ornamente und der Mathematik

Teil 1

1. Wissenschaft und Kunst als Grundbedingung und Grundbedürfnis im menschlichen Leben
Die Symmetrie als ästhetisches Moment

Heutzutage ist das Leben in der zivilisierten Menschheit ohne Wissenschaft überhaupt nicht mehr denkbar. Auf Schritt und Tritt begegnet man dem Einfluß der Wissenschaft. Jeder von uns kann sich mühelos davon überzeugen. Schaltet man beispielsweise das Licht ein, schon hat man teil an wissenschaftlichen Erkenntnissen in Form ihrer technischen Umsetzungen. Ohne Rückgriff auf die Elektrizität könnte man nicht das Licht von Lampen leuchten lassen, keine elektrisch angetriebenen Züge fahren lassen, keine Kühlhallen betreiben usw. Begibt man sich an seine häusliche morgendliche Toilette, sogleich stehen einem wissenschaftlich gezeugte Heinzelmännchen zur Verfügung.
Die Seife, Zahnpasta, ... alles basiert auf wissenschaftlichem Tun von vielen Menschen. Unser ganzes Tagesgeschehen wird durch und durch von Früchten der Wissenschaft beherrscht. Das war nicht immer so und ist auch nicht überall auf der Erde so. Beispielsweise leben die Urwaldindianer in Brasilien oder die Ureinwohner Neuseelands bisweilen noch in ursprünglichen Naturzuständen, die nur ganz leichte Spuren der Wissenschaft tragen. Dort bestimmt das Elementargeschehen den Ablauf. Dort nimmt dann auch die Kunst einen viel größeren Raum im Leben ein als vergleichsweise bei uns. Natürlich ist insgesamt gesehen unser Kulturniveau viel höher, aber der direkte Anteil der Kunst ist relativ gesehen viel geringer. Bei den Naturvölkern spielt zunächst der Körperschmuck die herausragende Rolle. Beredtes Beispiel dafür gibt eine Begebenheit ab, welche *Charles Darwin* 1833 während seiner Weltumsegelung mit der *Beagle* widerfuhr, als er einem frierenden Feuerländer eine bunte Decke schenkte, damit der darin Schutz vor der Kälte finde, der Beschenkte aber diese Decke in Streifen zerriß und sich mit den Streifen aus lauter Schmuckinteresse behängte. Von Stufe zu Stufe kommt bei dem Menschen dann nach dem Körperschmuck der Geräte- einschließlich Waffenschmuck und der Schmuck an den Bauten dazu. So ist sicher eines der Grundbedürfnisse des Menschen, sich, seine Werkzeuge und seine Wohnstätten zu schmücken und zu verzieren. Die Hervorbringung von Verzierungen und Schmuckformen ist nach und nach immer mehr in das Fahrwasser der Wissenschaft geraten. Eine tragende mathematische Komponente stellt im Gebiet der Schmuckformen die Idee der *Symmetrie* dar.
Die Natur bedient sich oftmals eines symmetrischen Aufbaus, so daß der Mensch zwangsläufig auf die Idee der Symmetrie geführt wird und symmetrische Formen als ästhetisch wohltuend, als harmonisch empfindet. Jeder kann leicht bei sich selbst bestätigen, daß symmetrische Regelmäßigkeit viel stärker unser Interesse auf sich zieht als das Fehlen von Symmetrie. Dazu betrachte man etwa einen weitgehend unsymmetrischen Tintenklecks und den durch Falten des Papiers symmetrischen Klecks.

Bild 1



Welch ein Reiz geht von dem sogenannten Kaleidoskop als Kinderspielzeug aus? Durch Drehen und Schütteln kann man sich eine Vielzahl symmetrischer Bilder erschaffen. Eine Wunderwelt der Symmetrie tut sich dem Betrachter des Kaleidoskops auf.

2. Beispiele für Symmetrie in der unbelebten Natur

Wir verweisen zunächst auf einige natürlich vorkommende Symmetrien, die der Einfachheit halber als *Flächensymmetrien* gedeutet werden mögen.

Bild 2

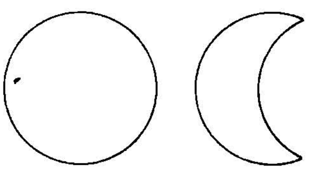
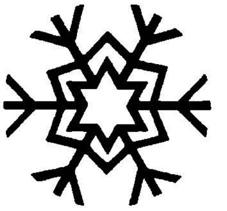


Bild 3



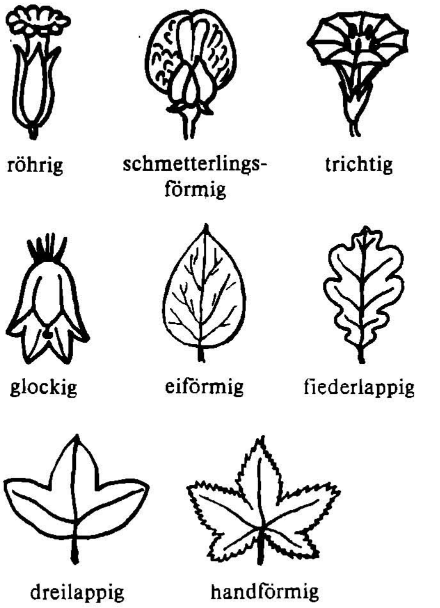
Aufgabe 1

Entdecke weitere symmetrische Formen in der unbelebten Natur!

3. Beispiele für Symmetrie im Bereich der Lebewesen
(gedeutet als Flächensymmetrie)

Im *Reich der Pflanzen* tauchen bei Blüten und Blättern oft Symmetrien auf.

Bild 4



Im Tierreich begegnet man mühelos Symmetrien.

Bild 5

Bild 6

Aufgabe 2

Entdecke weitere symmetrische Formen in der belebten Natur!

4. Beispiele für vom Menschen geschaffene Symmetrien

Viele Bauwerke und Statuen, Muster auf Textilien, Teppichen, Stickereien, Häkeleien, Tapeten usw. bezaubern uns gerade wegen ihrer vielseitigen Symmetrien. Manchmal ist als besonderer Reiz in die symmetrischen Grundformen eine *Symmetriebrechung* eingefügt. (Das kommt ja auch in den natürlichen Symmetrieformen vor. Wir werden den künstlerischen und wissenschaftlichen Wert der Symmetriebrechung hier nicht weiter verfolgen, weil wir uns erst einmal die ungestörte Symmetrie möglichst weit erschließen wollen.)
Bauten der Gotik weisen in hohem Maße Symmetrien auf, sowohl insgesamt als

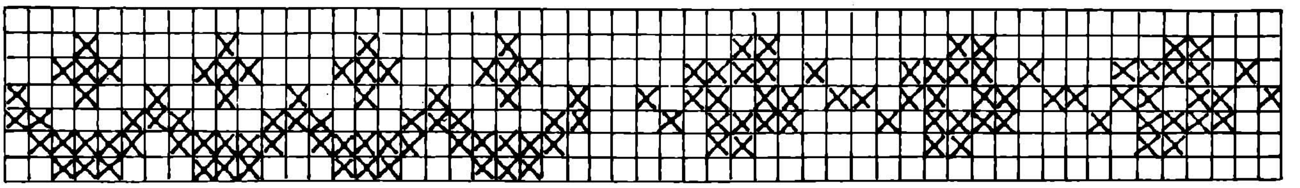


Bild 7

Bild 8a

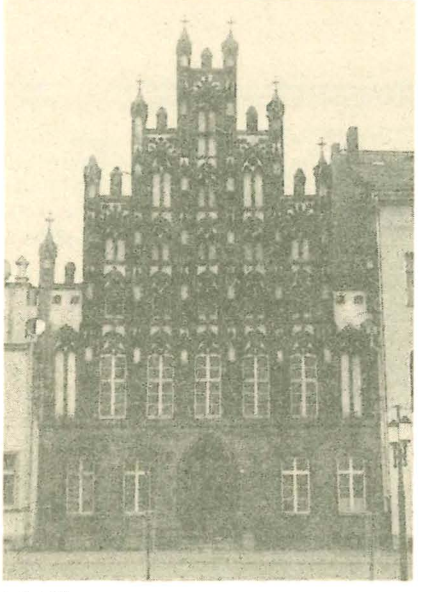


Bild 8b

auch in Einzelheiten, wie bei Fenstern, Türen, Gewölben usw. Oft wird die Möglichkeit der Symmetrien noch durch Benutzung verschiedener Farben, so besonders bei Textilien und auch Glasfenstern gesteigert. Die islamischen und maurischen Baumeister haben auch bei ihren Gebäuden geradezu in Farbgebung geschwelgt.

Aufgabe 3

Entdecke weitere vom Menschen hervorgebrachte Symmetrien. Welche Wirkfelder symmetrischen Schaffens findest du noch? (Vasen, Möbel, Fußböden, ...; konkrete Beispiele dafür?)

5. Zum Einfluß der Kunst bei der Erschließung ebener Symmetrien

Künstlerischer Einfallsreichtum und wissenschaftliche Denkkraft haben die Welt der Symmetrie immer mehr durchforstet, aber erst im 19. Jahrhundert sind die mathematisch strengen Beweise für eine vollständige mathematische Übersicht über die Symmetrietypen der ebenen Gebilde erbracht worden. In das mathematische Allgemeingut sind diese Erkenntnisse durch Wiederentdeckung gar erst 1924 eingegangen. Regelmäßige ebene Vier-, Acht- und Sechzehn-Ecke finden sich in der altägyptischen Kultur. Entsprechende Wanddekorationen haben ein Alter von mehr als 4000 Jahren. Das regelmäßige Fünfeck erscheint später bei den Babyloniern. Seine Konstruktion mit Zirkel und Lineal wurde erst von den Griechen geleistet. Bis zu Gauß' Zeiten war man der Ansicht, daß ein regelmäßiges n-Eck, n Primzahl >5, nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist. Der 18jährige Jüngling Gauß bewies die Möglichkeit der Konstruktion des 17ecks und ermittelte sogar, welche regelmäßigen n-Ecke konstruierbar sind. Entwicklungsgeschichtlich gesehen war die Kunst der Wissenschaft in der Behandlung der beschränkten symmetrischen Figuren also eindeutig voraus. Die systematische wissenschaftliche Bearbeitung erschloß hingegen den Künstlern vollständig den symmetrischen Formenreichtum der beschränkten Figuren. *Leonardo da Vinci* (1452 bis 1519) und *Albrecht Dürer* (1471 bis 1528) sind Künstler von hohem mathematischen Rang, die für die wissenschaftlich konstruktive Durchdringung der Malerei eintraten. Aus Dürers Lehrbuch *Underweysung der Messung mit dem Zirckel und richtscheyt in Linien, Ebenen und gantzen Corporen* zeigen wir einige Beispiele zur Konstruktion symmetrischer Schmuckformen.

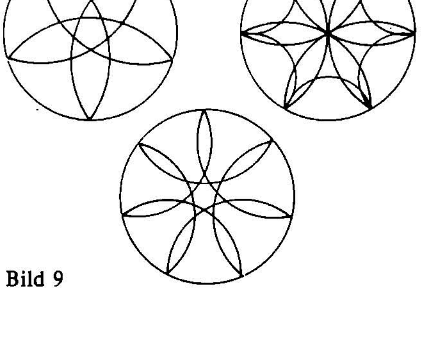
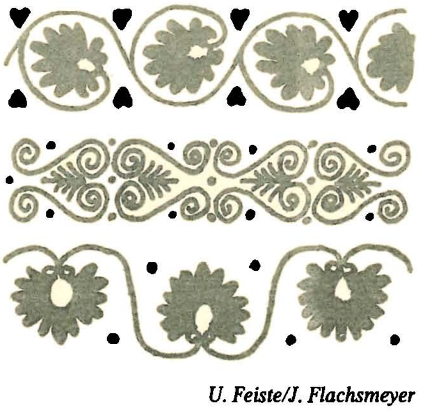


Bild 9

Was die sich ins Unendliche erstreckenden symmetrischen Figuren, die ganze Ebene ausfüllende Muster angeht, so klaffte ein noch weitaus größerer Unterschied zwischen frühzeitlicher künstlerischer Bearbeitung und späterer wissenschaftlich ordnender Durchdringung. Altägyptische und altchinesische künstlerische flächendekkende Dekorationen müssen über den ästhetischen Eindruck, den sie vermitteln, hinaus als hervorragende empirische mathematische Leistungen in der Aufdeckung der möglichen Symmetrietypen angesehen werden. Die arabische und islamische Ornamentik führt die ägyptische Kunst zur bestechenden Höhe. Den Gipfelpunkt auf diesem Feld bringt wohl die maurische Baukunst und Raumgestaltung. In der *Alhambra Moschee* bei Granada (erbaut um 1400) haben die Mauren von ihrer Schöpferkraft und Erfindungskunst bei der Konstruktion von flächendeckenden Mustern Glanzleistungen vollbracht.
Ihnen ist die größte Fülle der die ganze Ebene bedeckenden Symmetrietypen (= zweidimensionale Symmetrietypen) gelungen. Damit haben sie in impliziter Form ein Stück höherer Mathematik im künstlerischen Gewande auf beeindruckendem Niveau erarbeitet. Der davon ausgegangene Einfluß lebt bis in unsere Tage fort, was nicht zuletzt die Begriffe Arabeske und Maureske für gewisse ornamentale Schmuckformen belegen. Mathematisch weniger anspruchsvoll ist die Ermittlung aller eindimensionalen Symmetrietypen in der Ebene, d. h. der Symmetrietypen, die einen ebenen Streifen ausfüllen können. Diese Aufgabe haben griechische Künstler des Altertums in Gestalt von Bandornamenten auf Wandfriesen und Vasendekorationen bewältigt.



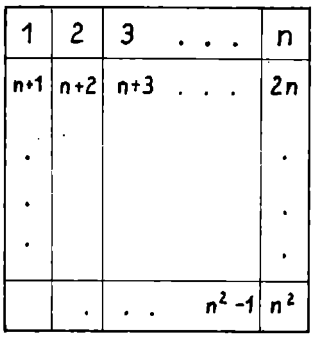
U. Feiste/J. Flachsmeyer

Fortsetzung in Heft 6/85.

Überraschendes über benachbarte Zahlen in einem Zahlenquadrat

In ein Quadrat, das aus $n \cdot n$ Feldern besteht, seien „der Reihe nach“ (d. h. im linken oberen Feld beginnend und im rechten unteren Feld endend – siehe Bild 1) die Zahlen 1, 2, 3, ..., $n^2 - 1$, n^2 geschrieben worden:

Bild 1
$n \geqq 2$



Unter zwei benachbarten Zahlen wollen wir nun zwei Zahlen verstehen, die in zwei Feldern stehen, die eine Kante gemeinsam haben:

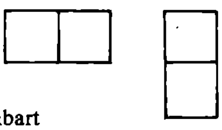


Bild 2
benachbart

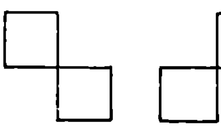


Bild 3
nicht benachbart

Die Differenz zwischen zwei horizontal benachbarten Zahlen beträgt in unserem Quadrat 1, die Differenz zwischen zwei vertikal benachbarten Zahlen ist n, d. h., die „mittlere Differenz“ zwischen zwei benachbarten Zahlen beträgt $\frac{n+1}{2}$, sie ist also erheblich kleiner als n. Deshalb läge eigentlich die Vermutung nahe, man könnte die n^2 Zahlen so umordnen, daß die maximale Differenz zwischen zwei benachbarten Zahlen kleiner als n wird. (Der experimentierfreudige Leser kann einmal versuchen, für $n = 2, 3, 4$ diese Vermutung zu beweisen oder zu widerlegen.) Wie man jedoch (mit einigem Erstaunen) feststellt, ist eine solche Umordnung nicht möglich! Es gilt vielmehr der folgende Satz:

Schreibt man in die Felder eines $n \cdot n$-Quadrates n^2 voneinander verschiedene ganze Zahlen, so gibt es stets zwei benachbarte Zahlen, deren Differenz nicht kleiner als n ist.

Beweis: Die ganzen Zahlen bezeichnen wir mit $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2}$, wobei $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n^2}$ ist. Da es sich um ganze Zahlen handelt, gilt $a_{k+1} \geqq a_k + 1$ bzw. $a_{k+l} \geqq a_k + l$.

Die Felder, in denen diese Zahlen stehen, werden entsprechend mit $A_1, A_2, \ldots, A_{n^2}$ bezeichnet.

Nun schraffieren wir die Felder $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m$ der Reihe nach, und zwar solange, bis in einer Spalte oder Zeile genau $(n - 1)$ schraffierte Felder sind (vgl. Bild 4):

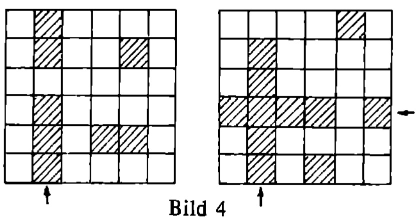


Bild 4

O. B. d. A. mögen sich diese $(n - 1)$ schraffierten Felder in der i-ten Zeile befinden. Ferner möge das j-te Feld dieser Zeile das einzige weißgebliebene sein.

Die Spalten $1, 2, \ldots, j - 1, j + 1, \ldots n$ enthalten jetzt mindestens ein schraffiertes Feld (nämlich das, das in der i-ten Zeile liegt), jedoch höchstens $n - 1$. Das heißt, diese Spalten enthalten mindestens ein schraffiertes und mindestens ein weißes Feld. Das wiederum bedeutet: Sie enthalten mindestens ein weißes Feld, das Nachbar eines schraffierten Feldes ist. Diese Aussage gilt jedoch auch für die j-te Spalte, denn das weiße Feld, das in der j-ten Spalte und der i-ten Zeile liegt, besitzt mindestens ein schraffiertes Nachbarfeld (in der i-ten Zeile).

Also gilt: In jeder Spalte existiert ein weißes Feld, das Nachbar eines schraffierten Feldes ist. D. h.: Es gibt mindestens n verschiedene weiße Felder, die zu einem schraffierten benachbart sind.

Wenn die Schraffur beim Feld A_m abbrach, so gilt für die Indizes x dieser n weißen Felder $A_x : x \geqq m + 1$. Das heißt: Es gibt ein schraffiertes Feld A_y $(y \leqq m)$ und mindestens ein dazu benachbartes weißes Feld A_x, für das $x \geqq m + n$ ist. Für die dort eingetragenen Zahlen a_x und a_y gilt:

$a_x - a_y \geqq a_{m+n} - a_m \geqq a_m + n - a_m = n$,

w. z. b. w.

Frage: Warum wäre es ungünstig gewesen, im obigen Beweis die Felder $A_1, A_2, \ldots, A_m$ solange zu schraffieren, bis in einer Spalte oder Zeile n schraffierte Felder sind?

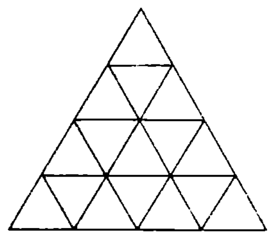
Mit Hilfe unseres Satzes können wir schnell eine entsprechende Aussage über Zahlen in Rechtecken gewinnen:

Schreibt man in die Felder eines $a \cdot b$-Rechtecks $(a \leqq b)$ ab verschiedene ganze Zahlen, so gibt es zwei benachbarte Zahlen, deren Differenz nicht kleiner als a ist.

Aufgabe: Beweist diese Aussage und zeigt, daß man in ihr a nicht durch eine größere Zahl ersetzen kann, d. h., daß sich die Aussage nicht verschärfen läßt!

Nun wäre es sicher interessant, analoge Aussagen für Zahlen in Würfeln oder in bestimmten Anordnungen gleichseitiger Dreiecke (siehe Bild 5) zu untersuchen, jedoch sind wir dabei bis jetzt noch nicht zu

Bild 5



brauchbaren Ergebnissen gekommen. Wir wünschen dem interessierten Leser viel Erfolg bei der Lösung dieser Probleme!

R. Lehmann/H.-J. Schmidt

Auf Fehlersuche

Matthias hat in diesem Brief zwölf Flüchtigkeitsfehler gemacht. Wenn ihr die fehlenden bzw. richtigen Buchstaben der Reihenfolge nach in das Lösungsschema eintragt, erhaltet ihr die Bezeichnung für ein Gerät, mit dem künftig Schüler von der 7. Klasse an im Unterricht arbeiten werden.

Lieber Andreas!

Heute war bei uns Leistungskontrolle. Zuerst erhielt ich den Auftrag, ein Quadratmeer in eine kleinere Einheit umzuwandeln. Dann sollte ich den Lehrsitz über die Winkelsumme im Dreieck beweinen und mit Hilfe des Kreisdurstmessers mehrere Rachenoperationen ausführen. Schließlich hatte ich die schwierige Aufgabe, die Durchschittsgröße meiner Klasse zu berechnen. Mit dem neuen Faselschreiber nahm ich zunächst alle Aufgaben in Geometrie- und Rechenhaft. Später sollte ich noch die Symmetrieasse auf Spielkarten finden. Plötzlich wurde die Kontrolle unterbrochen. Der Schulzahlarzt stand in der Tür. Das war eine „dringliche medizinische Hilfe“. Unsere Lehrerin konnte nur noch die Hausaufgabe erteilen: Division mit Rast. Morgen beschäftigen wir uns mit dem Drachenvieheck. Tiere mag ich gern, und Mathe macht Spaß. Nur mit der Rechtschreibung habe ich noch einige Probleme.

Viele Grüße
Dein Freund Matthias.

aus: NBI/NUK-Autor: Mathematikfachlehrer H. Bauer, Genthin

Mathematik in Vilnius

Es ist euch sicher nicht unbekannt, daß sowjetische Mathematiker in vielen mathematischen Disziplinen das Weltniveau mitbestimmen. Dazu tragen auch die Mathematiker der kleineren Sowjetrepubliken nicht unmaßgeblich bei. Eine der ältesten Hochschulen der UdSSR befindet sich in Vilnius, der Hauptstadt der Litauischen Sozialistischen Sowjetrepublik (LSSR). Aus Anlaß der 400-Jahr-Feier der Universität wurde 1979 von der sowjetischen Post eine Sonderbriefmarke zu 4 Kopeken herausgegeben, auf welcher alte Universitätsgebäude und Bauten des im Entstehen begriffenen neuen Universitätsviertels dargestellt sind. Die Briefmarkenfreunde unter euch dürfen nicht erstaunt sein, daß bereits 1970 eine Sondermarke zu 4 Kopeken (siehe Bild 1) zum 400jährigen Bestehen der Universitätsbibliothek erschienen ist: Bereits 1570 eröffnete man in Vilnius ein Kollegium, das 1579 durch eine Privilegakte des Königs zur Universität erhoben wurde.

Bild 1

1968 unterzeichneten die Universitäten Vilnius und Greifswald einen Freundschaftsvertrag. Seitdem arbeitet in jedem Sommer eine Gruppe Greifswalder Mathematikstudenten im Rechenzentrum der Universität Vilnius, und litauische Studenten beschäftigen sich in Greifswald mit mathematischen Problemen. In Vilnius studieren an der Mathematischen Fakultät ungefähr 600 Mathematikstudenten. Weiter gibt es ein leistungsstarkes Institut für Mathematik und Kybernetik der Akademie der LSSR. Seit 1961 erscheint vierteljährlich das Journal *Литовский математический сборник*, in dem mathematische Arbeiten (vorwiegend in russischer Sprache) gedruckt werden, eine englische Übersetzung dieser Zeitschrift wird in den USA verlegt. In jedem Jahr berichten die litauischen Mathematiker auf einem Unionskongreß über ihre Forschungsergebnisse.

Der 25. Kongreß fand am 14./15. Juni 1984 in der Stadt Šiauliai statt (hier befindet sich eine Pädagogische Hochschule). Dieser Jubiläumskongreß stand im Zeichen des 100. Geburtstages von Zigmas Žemaitis.

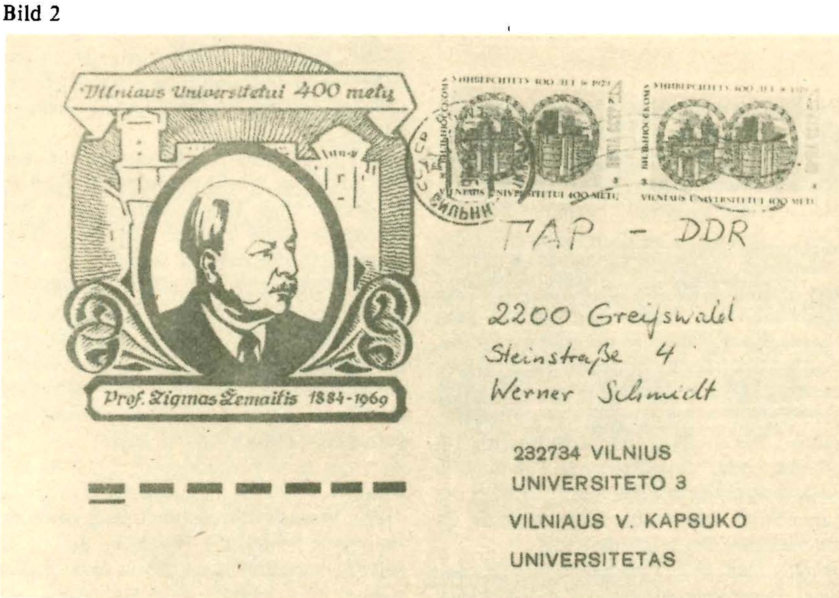
Zigmas Žemaitis wurde am 8. 11. 1884 im Dorf Daktarai geboren. Er studierte in Odessa Mathematik. 1919 wurde er Lehrer an der Universität Vilnius. Als polnische Truppen Vilnius besetzten, ging er nach Kaunas. Dort war er 1920 als Direktor der Handelsschule tätig. In der bürgerlichen Republik Litauen wurde 1921 die Universität Kaunas gegründet, und Žemaitis wirkte hier von Anfang an als Professor für Mathematik. Seit 1930 leitete er die Abteilung für Geometrie. Er veröffentlichte Arbeiten u.a. über Funktionentheorie und Potentialtheorie. 1939 kam Vilnius wieder zu Litauen, 1940 wurde in Litauen die Sowjetmacht errichtet, viele Institute der Universität verlegte man nach Vilnius. Žemaitis arbeitete nun hier als Prorektor. 1943 mußte die Universität auf Befehl der faschistischen Besatzungstruppen den Lehrbetrieb einstellen. Nach der Befreiung vom Faschismus berief die sowjetische Regierung den progressiven Wissenschaftler sofort auf den Lehrstuhl für Analysis. Unter seiner Leitung begannen sich Forschungsgruppen für Geometrie und für mathematische Analysis zu entwickeln. Von 1946 bis 1948 stand Prof. Žemaitis als Rektor der Universität Vilnius vor. Er war ein sehr fähiger Wissenschaftsorganisator, seine Verdienste um die Entwicklung mathematischer Schulen wurden hoch gewürdigt. In den letzten Lebensjahren, er starb 1964, wandte er sich der Geschichte der Mathematik zu. Die Universität Vilnius hat 1979 einen Sonderbriefumschlag mit dem Bildnis von Z. Žemaitis herausgegeben, siehe Bild 2.

Ein Wissenschaftler hat in den letzten 30 Jahren maßgeblich die Mathematik in der LSSR geprägt: Akademiemitglied Prof. Dr. Jonas Kubilius.

Folgende Legende berichtet, wie er zur Mathematik gefunden haben soll. In einer Zeitung war über das *Fermatsche Problem* (siehe *alpha* 3, 1984) berichtet worden. Wegen des Gleichklangs mit dem Namen seines Geburtsdorfes Fermos fühlte sich Jonas Kubilius von diesem Problem angezogen, und er glaubte sogar, eine Lösung gefunden zu haben. Aber leider stellte sich heraus, daß die Aufgabe in der Zeitung unkorrekt formuliert war. Die Mathematik und insbesondere die Zahlentheorie ließen ihn nun nicht mehr los. Er studierte diese Wissenschaft in Vilnius, arbeitete einige Jahre als Lehrer und wurde von 1948 bis 1951 zur Aspirantur nach Leningrad delegiert. Man kann Prof. Kubilius den Begründer eines neuen Zweiges der Mathematik nennen, in welchen Erkenntnisse aus Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie einfließen. Prof. Kubilius begründete eine leistungsstarke Mathematikerschule in der LSSR. Seit 1958 ist er Rektor der Staatlichen *V.-Kapsukas*-Universität Vilnius. Prof. Kubilius war es auch, der 1952 die Durchführung von Mathematikolympiaden in Sowjetlitauen durchsetzte. Damals gab es noch keine Olympiaden für die ganze UdSSR! Mathematikolympiaden werden in den Schulen, auf der zweiten Stufe in den Rayons durchgeführt.

Für die Klassenstufen 8, 9, 10 findet die Mathematikolympiade im Republikmaß-

Bild 2



stab statt (in Zukunft für Klassenstufe 9, 10, 11). Die besten Olympioniken vertreten die LSSR bei der Allunions-Olympiade. Viele erfolgreiche Teilnehmer von Mathematikolympiaden sind inzwischen anerkannte Wissenschaftler. Für die Olympiadebewegung in der LSSR fühlt sich gegenwärtig ein jüngerer Hochschullehrer verantwortlich:
Prof. Palauskas nahm 1960 bis 1962 selbst an der Mathematikolympiade mit Erfolg teil, er studierte Mathematik und ist heute ein erfolgreicher Experte auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitstheorie. Mit viel Freude und Aufmerksamkeit fördert er Talente. Der Autor dieses Beitrags ist Prof. Palauskas für wertvolle Informationen und für die nachfolgenden Aufgaben der Mathematikolympiade 1984 (Republikstufe) zu Dank verpflichtet.

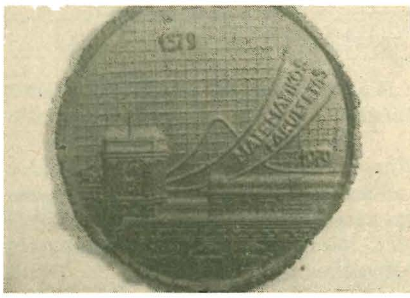


Bild 3
Keramikplakette der Mathematischen Fakultät der Universität Vilnius

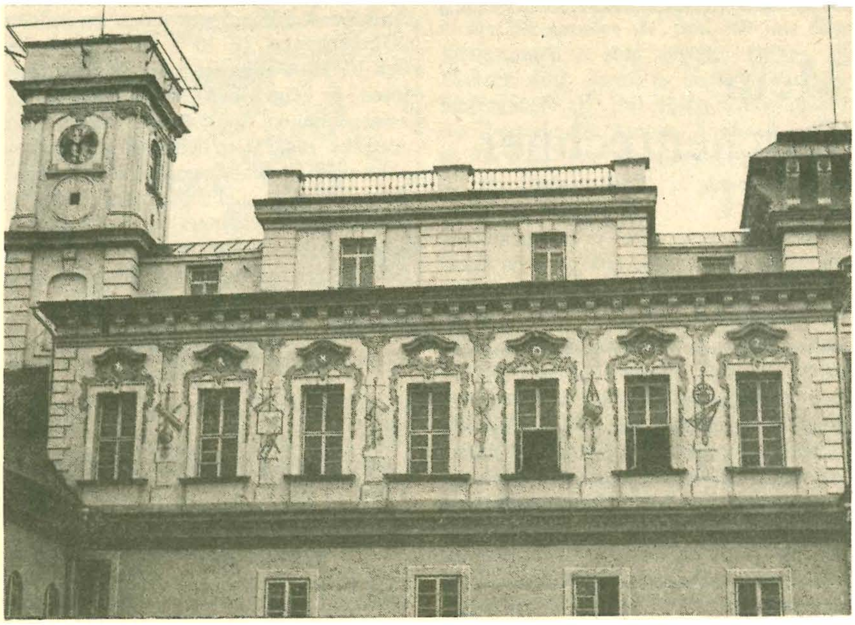


Bild 4
Darstellung astronomischer und mathematischer Instrumente an der Fassade des Hauptgebäudes der Universität Vilnius

Aufgaben

Klasse 8

▲1▲ Löse das Gleichungssystem!

$$\frac{x}{y}=\frac{y}{z}$$
$$\frac{y}{z}=\frac{z}{t},$$
$$\frac{x}{t}=8$$
$$x+y+z+t=15$$

▲2▲ Für welche natürlichen Zahlen n ist

$$2^{11n}-2^{6n}+2^{n}-2^{5}$$

ohne Rest durch 1984 teilbar?

▲3▲ Die Durchschnittszensur der Jungen der 8. Klasse sei besser als die der Jungen der 9. Klasse. Die Mädchen der 8. Klasse haben ebenfalls eine bessere Durchschnittszensur als die der 9. Klasse. Kann dann die Durchschnittszensur von allen Schülern der 8. Klasse schlechter sein als die der Schüler der 9. Klasse?

▲4▲ Stelle die Zahl 1000 als Summe natürlicher Zahlen dar, deren Produkt möglichst groß ist!

Klasse 9

▲1 Zeige, daß die 100stellige Zahl 11...1 (gebildet von 100 Ziffern 1) durch 41 teilbar ist!

▲2▲ Löse das Gleichungssystem!

$$xy+x+y=80$$
$$yz+y+z=80$$
$$zx+z+x=80$$

▲3▲ Gegeben sei eine Menge M von endlich vielen reellen Zahlen, die alle nicht größer als 100 sind. M besitze folgende Eigenschaft: Bei einer beliebigen Zerlegung von M in zwei Teilmengen sei die Summe der Zahlen wenigstens einer Teilmenge nicht größer als 100. Zeige, daß die Summe aller Zahlen der Menge M die Zahl 300 nicht übertrifft!

▲4▲ In den Eckpunkten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eines regelmäßigen n-Ecks seien natürliche Zahlen ($\geqq 2$) notiert. Steht in A_2 eine gerade Zahl, so subtrahiere von der in A_1 stehenden Zahl eine 1, steht dagegen in A_2 eine ungerade Zahl, so addiere 1 zu der in A_1 notierten Zahl. Danach verkleinern oder vergrößern wir die in A_2 stehende Zahl um 1 in Abhängigkeit davon, ob in A_3 eine gerade oder eine ungerade Zahl steht usw. Schließlich verkleinern oder vergrößern wir die in A_n stehende Zahl um 1, je nachdem ob in A_1 eine gerade oder eine ungerade Zahl steht. Danach beginnen wir wieder mit A_1 in der beschriebenen Weise. Beweise, daß alle auftretenden Zahlen stets positiv bleiben, wie oft wir diesen Zyklus auch durchlaufen!

Klasse 10

▲1▲ In einem rechtwinkligen Dreieck teile die Winkelhalbierende des rechten Winkels die Hypotenuse c im Verhältnis 1 : 3. In welchem Verhältnis teilt dann die Höhe auf c die Hypotenuse?

▲2▲ Man beweise: Wenn die Zahlen x, y, z die Gleichungen

$$\sin x+\sin y+\sin z=0$$
$$\cos x+\cos y+\cos z=0$$

erfüllen, so sind x, y, z auch eine Lösung der Gleichungen

$$\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z=0$$
$$\cos 2x+\cos 2y+\cos 2z=0.$$

▲3▲ Die Folge (a_n) werde nach der Regel
$a_1=1,\ a_2=5,\ a_{n+1}=a_n a_{n-1}+1$ für $n\geqq 2$
gebildet. Zeige, daß a_{1000} nicht durch 3 teilbar ist!

Aufgabe ▲4▲ für die Klasse 10 stimmt mit der Aufgabe ▲2▲ von Klasse 9 überein. Außerdem wurde allen Olympiadeteilnehmern die folgende Aufgabe gestellt:
Die Bodenfläche einer Schachtel sei ein Quadrat der Seitenlänge 3 cm. Auf dem Boden der Sachachtel liege ein Würfel mit der Kantenlänge 1 cm. Zeige, daß man auf den Boden der Schachtel noch
a) einen gleich großen Würfel,
b) zwei gleich große Würfel,
c) drei gleich große Würfel
stellen kann, ohne dabei den zuerst in der Schachtel liegenden Würfel zu verrücken!

W. Schmidt

Bild 5
Prof. Dr. Kubilius,
Rektor der Universität Vilnius (links) im Gespräch mit Prof. Dr. Griepentrog, Sektionsdirektor der Sektion Mathematik der Universität Greifswald

Mein Taschenrechner „SR 1“

Teil 2

Der Schulrechner SR 1 hat wie viele andere Taschenrechner eine *Sieben-Segment-Anzeige*, d. h., jede Ziffer wird als Kombination von 7 möglichen Leuchtbalken dargestellt. Dreht man den Taschenrechner um 180° und betrachtet nun die Anzeige, so können einige Ziffern, wie z. B. 5, 7, 3 als Buchstaben gelesen werden. Gibt man die Ziffern 3 – 8 – 3 – 1 – 7 in die Anzeige, so „entsteht“ das Wort LIEBE. Ihr könnt selbst schnell weitere Wörter eingeben, z. B. EIS, EI, ELLE usw.

Die Anzeige des SR 1 ermöglicht eine maximale Anzeige von acht Ziffern, einem Vorzeichen, einem Komma und einer Anzeige über die Belegung des Speichers (M).

Beispiel:

$\underline{\mathrm{M}}$8.   765 4321

Mit Hilfe der Taste $\boxed{\text{EEX}}$ besteht nun noch die Möglichkeit, Zahlen als Produkte mit Zehnerpotenzen einzugeben.

Beispiel:

$$\underbrace{123}_{\text{Mantisse}} \cdot \underbrace{10^4}_{\text{Potenz}} \quad \begin{array}{l} \swarrow \text{ Exponent} \\ \nwarrow \text{ Basis} \end{array}$$

Dabei kann der Exponent der Zehnerpotenz maximal zweistellig und auch negativ sein. Für die Mantisse stehen in der Anzeige 5 Stellen zur Verfügung.

Die Anzeige 54 321.   12

bedeutet $54\,321 \cdot 10^{12}$

Die Anzeige 54 321. – 12

bedeutet $54\,321 \cdot 10^{-12}$ bzw. $\frac{54\,321}{10^{12}}$.

▲ 9 ▲ Welches ist die größte Zahl, die man in den SR 1 eingeben kann?

Diese größte Zahl, die man in den SR 1 eingeben kann, wird von ihm nicht „verarbeitet“. Betätigt man nämlich nach Eingabe dieser Zahl irgendeine Operations-, Funktions- oder Speichertaste, so zeigt der SR 1 „Überlauf“ „E 0.“ an. Ein Weiterrechnen ist nun erst nach Betätigung der Taste $\boxed{\text{CE} - \text{C}}$ möglich. Die größte ganze Zahl, mit der der Schulrechner arbeitet, ist die Zahl $9 \cdot 10^{99}$.

▲ 10 ▲ Berechne mit dem SR 1 (falls möglich)!

a) $9 \cdot 10^{99} : 2$
b) $9 \cdot 10^{99} - 3$
c) $9 \cdot 10^{99} \cdot 2$
d) $2 : 4 \cdot 10^{99}$
e) $9 \cdot 10^{99} : 0$

Beim Lösen der Aufgabe 10 kommt man an Grenzen des SR 1. So gibt er für die Aufgabe $9 \cdot 10^{99} - 3$ nur einen gerundeten Näherungswert $(9 \cdot 10^{99})$ an. Die Aufgaben 10c) und 10d) kann der SR 1 gar nicht lösen. Er zeigt Überlauf an. Dieselbe Anzeige, nämlich „E 0“, erhält man bei der Aufgabe 10e). Hier bedeutet die Anzeige aber nicht Überlauf, sondern, daß die Aufgabe überhaupt nicht lösbar ist, da die Division durch 0 nicht erklärt ist.

Auch das Gesetz $(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b$ $(a, b, c \in Q)$ [1]) ist im Taschenrechner nicht immer gültig.

Beispiel:

$$(2 : 5 \cdot 10^{99}) \cdot 4 \cdot 10^{90}$$
$$= (2 \cdot 4 \cdot 10^{90}) : 5 \cdot 10^{99}$$

Diese Gleichheit kann man mit dem SR 1 nicht zeigen:

$\boxed{2}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\text{EEX}}$ $\boxed{99}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{4}$ $\boxed{\text{EEX}}$ $\boxed{90}$ $\boxed{=}$

↓

E 0.

$\boxed{2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{4}$ $\boxed{\text{EEX}}$ $\boxed{90}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\text{EEX}}$ $\boxed{99}$ $\boxed{=}$

↓

1.6 – 09

[1]) Q ist das Symbol für die Menge rationaler Zahlen.

▲ 11 ▲ Berechne mit dem SR 1!

a) 0,3 : 40 000
b) 0,03 : 40 000
c) 2 : 3
d) 2 : 123

Eine Besonderheit des SR 1 wird beim Lösen der Aufgabe 11) sichtbar. Unser Schulrechner gibt mitunter *Ergebnisse* von Rechnungen als Produkte mit Zehnerpotenzen an. Ein Vorteil dieser Anzeige liegt darin, daß oft linke Nullen einer rationalen Zahl a $(|a| < 1)$ die Anzeige nicht belasten. Damit erhöht sich u. U. die Genauigkeit der Anzeige. Während z. B. der SR 1 bei der Aufgabe 11b) 7.5 – 07 anzeigt, erscheint bei gleicher Aufgabe in der Anzeige des Taschenrechners MR 410 nur der Näherungswert 0. 0000 007.

Hier gleich noch ein Beispiel:

Es soll der Wert des Terms $\frac{0{,}07503}{61\,000} \cdot 72$ berechnet werden.

Wir wählen folgenden Rechenablaufplan:

$\boxed{0{,}07503}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{61\,000}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{72}$ $\boxed{=}$

Mit dem SR 1 erhalten wir das genaue Ergebnis $8{,}856 \cdot 10^{-5}$. Verwendet man den Taschenrechner MR 410, so erhält man lediglich den Näherungswert 0,0000864.

▲ 12 ▲ Berechne mit dem SR 1!

a) 20 : 99	e) 40 : 99
b) 21 : 99	f) 50 : 99
c) 30 : 99	g) 60 : 99
d) 34 : 99	h) 70 : 99

Überlege, unter welchen Bedingungen der SR 1 trotz Vorhandenseins einer linken Null keine Zehnerpotenzschreibweise verwendet!

Treten beim SR 1 Resultate von Rechnungen auf, die mehr als 8 Stellen haben, so gibt der Taschenrechner oft nur einen Näherungswert für das Ergebnis an!

▲ 13 ▲ Berechne mit dem SR 1!

Gib jeweils an, ob das mit dem Rechner ermittelte Ergebnis ein Näherungswert ist!

a) 27 371 · 97	c) 654 321 · 987
b) 543 210 · 0,03	d) 10 : 99

Auch bei der *Eingabe* von Zahlen muß man u. U. Näherungswerte verwenden, da der Rechner sonst überfordert ist. Das ist z. B. beim Lösen folgender Aufgabe mit Hilfe des SR 1 erforderlich. 9 876 543,29 : 13,7. An Stelle des 1. Operanden wird man die Zahl 9 876 543,3 in den Taschenrechner eingeben. Das Ergebnis ist natürlich unter diesen Bedingungen nur ein Näherungswert.

Linke Nullen können bei der Eingabe unter Nutzung der Taste $\boxed{\text{EEX}}$ „abgefangen“ werden.

So kann die Aufgabe 0,0000007654 : 0,165 mit dem SR 1 wie folgt gelöst werden:

$\boxed{7{,}654}$ $\boxed{\text{EEX}}$ $\boxed{7}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{0{,}165}$ $\boxed{=}$

▲ 14 ▲ Berechne mit dem SR 1 folgenden Term!

$$(4 : 7) \cdot 7 - 4$$

Würde man bei der Lösung dieser Aufgabe auf den Taschenrechner verzichten – und das wäre sinnvoll –, käme man zum Resultat 0. Mit dem SR 1 wählen wir folgenden Ablaufplan:

$\boxed{4}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{7}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{7}$ $\boxed{-}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$

↓

– 1.10 – 8

Der Taschenrechner liefert als Ergebnis nicht Null, sondern $-1 \cdot 10^{-8}$. Ein von Null verschiedenes Ergebnis war eigentlich zu erwarten, da der SR 1 als Resultat der Division 4 : 7 nur einen Näherungswert zur Verfügung hat. Erstaunlich ist aber die Tatsache, daß der SR 1 bei Abarbeitung nachstehenden Ablaufplanes 4. anzeigt.

$\boxed{4}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{7}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{7}$ $\boxed{=}$ [1])

↓

4.

Erst die Subtraktion 4. – 4 liefert den Wert $-1.\ 10^{-8}$. Die Ursache für diesen Effekt liegt darin, daß der SR 1 *mit einer Stelle mehr* arbeitet, als er anzeigt. Der Rechner rundet auf die 8. Stelle. Diese neunte Stelle kann man dem Rechner mit einem kleinen Trick entlocken. Lösen wir z. B. mit dem SR 1 die Aufgabe 40 : 7, so zeigt der Rechner das Ergebnis 5. 7 142 857. Subtrahiert man von dieser Anzeige 5 und multipliziert das Ergebnis mit 10, so erhält man erneut eine achtstellige Anzeige (7. 1 428 571). Die 9. Stelle bei der Division 40 : 7 ist also 1.

[1]) Andere Taschenrechner, z. B. der MR 410, liefern hier den Wert 3.9999995.

▲ 15 ▲ a) Untersuche, ob der SR 1 vielleicht sogar mit 10 Stellen arbeitet!

b) Ermittle die 8. Stelle von π nach dem Komma, die der SR 1 gespeichert hat!

▲ 16 ▲ Gib zwei Zahlen zwischen 0 und 1 an, die der SR 1 nicht anzeigen kann!

Der Taschenrechner arbeitet mit sogenann-

ten *Rechnerzahlen.* Zwischen zwei beliebigen Rechnerzahlen gibt es jeweils unendlich viele reelle Zahlen, die der Taschenrechner weder verarbeitet noch anzeigt. Der beschränkte, lückenhafte Zahlbereich von Taschenrechnern kann mitunter unangenehme Folgen haben, wie wir schon an einigen Beispielen gesehen haben.
Hier ein weiteres Beispiel:
Bei der Nutzung des Taschenrechners SR 1 gilt nicht stets

$$\underbrace{a + a + a \ldots + a}_{n \text{ Summanden}} = n \cdot a \qquad (a \in Q;\ n \in N,\ n > 1)$$

So erhält man für die Summe

$$\underbrace{\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \ldots + \frac{2}{3}}_{12 \text{ Summanden}}$$

bei Nutzung des SR 1 den Wert 7. 9999999.

$\boxed{2}\ \boxed{\div}\ \boxed{3}\ \boxed{+}\ \boxed{2}\ \boxed{\div}\ \boxed{3}\ \boxed{+} \ldots$
$\boxed{+}\ \boxed{2}\ \boxed{\div}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$

Ermittelt man mit dem SR 1 den Wert von $12 \cdot \frac{2}{3}$, so erhält man 8.
$\left(\boxed{12}\ \boxed{\times}\ \boxed{2}\ \boxed{\div}\ \boxed{3}\ \boxed{=}\right)$.
Auch die Gleichung $\left(\sqrt[b]{a}\right)^b = a\,(a > 0;\ b \in N)$ gilt beim Arbeiten mit dem SR 1 nicht immer:

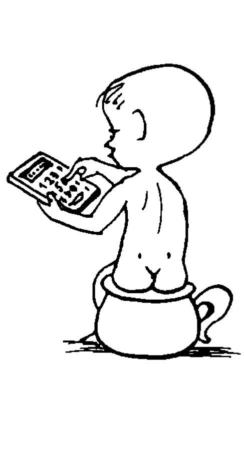
$\left(\sqrt[8]{3}\right)^8$

$\boxed{3}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{\sqrt{\ }} \longrightarrow \boxed{x^2}\ \boxed{x^2}\ \boxed{x^2}$

1.1472027 2.9999997

Besonders aufpassen muß man bei Benutzung von Zahlen, die sich in ihrer Größenordnung wesentlich voneinander unterscheiden (vgl. Aufg. 10b). Soll z. B. die Summe 98 763 210 + 0,012345 mit dem SR 1 ermittelt werden, so erhält man das Ergebnis 98 763 210. Im Kopf hätte man sehr schnell das genaue Resultat 98 763 210,012345 ermitteln können.
Wie wir an vielen Beispielen gesehen haben, ist der Taschenrechner ein sehr nützliches Hilfsmittel, allerdings sollte man sich bei seiner Nutzung stets auch seines eigenen mathematischen Sachverstandes bedienen. Eine kritische Haltung zum ermittelten Ergebnis und zum gewählten Rechenablaufplan sind wichtig, um erfolgreich mit einem Taschenrechner zu arbeiten.

L. Flade



Eine Tangentenkonstruktion ohne Zirkel aus dem Jahre 1640

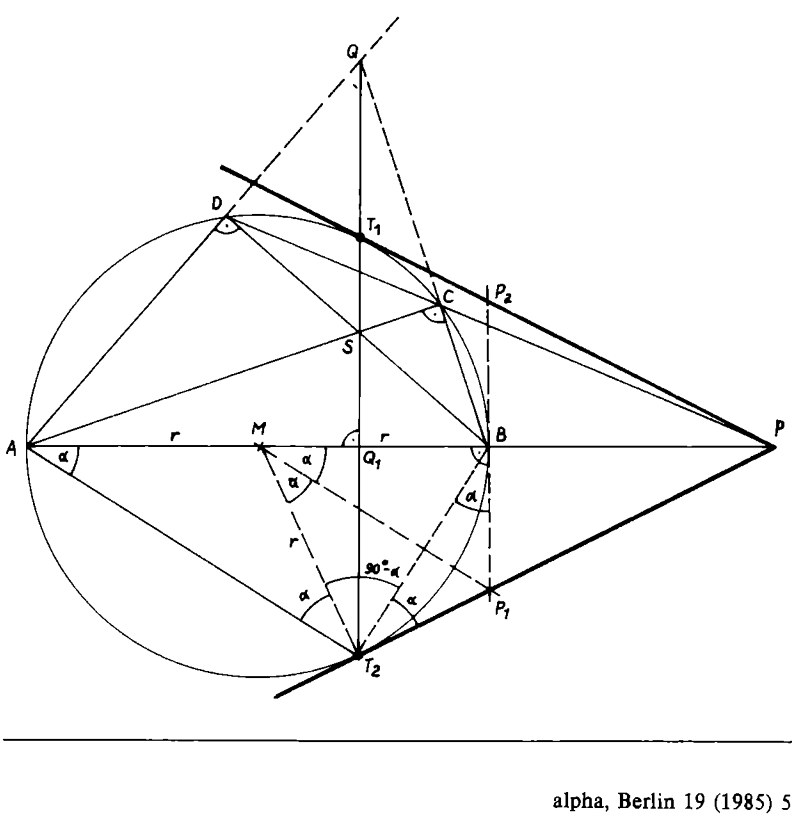
Die Aufgabe, von einem Punkt P außerhalb eines Kreises in M die beiden Tangenten zu konstruieren, soll *ohne Zirkel* gelöst werden.

Lösung: Man zeichne von P aus zwei Sekanten, deren eine durch den Mittelpunkt gehen muß. Die vier Schnittpunkte mit dem Kreis bilden ein Sehnenviereck $ABCD$ über dem Halbkreis mit S als Schnittpunkt der beiden Diagonalen. Nun muß man die beiden Viereckseiten AD und BC verlängern, die sich in Q schneiden. Q wird mit S verbunden und liefert bereits die Tangentenpunkte T_1 und T_2, ist also nach modernem Sprachgebrauch schon die Polare für P. Der Beweis, daß T_1 und T_2 die Berührungspunkte sind, läßt sich etwa folgendermaßen führen:

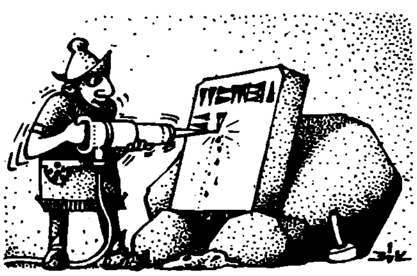
1. Die Diagonalen AC und BD mit dem Schnittpunkt S sind zugleich Höhen im Dreieck ABQ, damit ist auch die Verbindungsgerade QS eine Höhe senkrecht auf der Zentrale AP. Aus der Symmetrie folgt so $PT_1 = PT_2$ als 1. Tangenteneigenschaft
2. Das Dreieck BMT_2 ist gleichschenklig mit dem Winkel 2α bei M. Durch die Senkrechte in B und die Winkelhalbierende in M werden zwei neue Dreiecke geliefert, die kongruent sind (s, w, s). Also Dreieck MBP_1 und MP_1T_2 haben in B und in T_2 rechte Winkel. Damit ist die 2. Tangenteneigenschaft gezeigt, denn MT_2 muß ja wie auch MT_1 Berührungsradius sein.

Diese Polarenkonstruktion wird irrtümlich dem *Gregorius von St. Vincentius* zugeschrieben, der sie aber nicht für die Tangentenkonstruktion benutzte (1647). Sie ist aber schon bei *Woldeck Weland* (1614 bis 1641) in einer kleinen Schrift mit dem Titel *Strena mathematica sive elegantiorium problematum triga* 1640 zu finden, die lange vergessen ist. Diese seine erste und zugleich letzte Arbeit hat er auf Anregung seines Lehrers *Joachim Jungius* (1587 bis 1657) geschrieben, der als Mathematikprofessor auch Jahre an der Universität in Rostock lehrte und dort Bedeutendes geleistet hat. Der Titel dieser vor 345 Jahren gedruckten Schrift lautet etwa: *Ein mathematisches Geschenk oder besonders ausgewählten Probleme am Dreieck,* völlig zu recht, wenn man diese schöne Tangentenkonstruktion betrachtet. Sein früher Tod mit 27 Jahren mitten im 30jährigen Krieg ist ein weiteres Beispiel aus der Mathematikgeschichte, wie wir sie wiederholt finden, z. B. bei *Galois* und *Abel,* um nur zwei große Mathematiker zu nennen.

J. Buhrow



Wer löst mit?
alpha-Wettbewerb

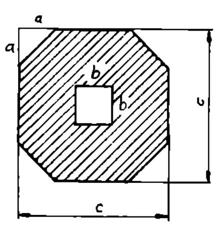


Letzter Einsendetermin: 11. Januar 1986

Mathematik

Ma 5 ■ 2580 Dieter sammelt Briefmarken aus Freundesland. Er sagt: „Ich habe bereits 320 Briefmarken aus Ungarn und Polen zusammengenommen; es sind 40 Marken mehr aus Polen als aus Ungarn. Aus der ČSSR habe ich doppelt soviel Marken wie aus Ungarn. Aus der UdSSR habe ich 10 Marken mehr als die doppelte Anzahl der Marken aus der ČSSR." Wie viele Briefmarken aus Freundesland besitzt Dieter? *K. Wagner, Plauen*

Ma 5 ■ 2581 Berechne den Flächeninhalt der schraffiert dargestellten Fläche der abgebildeten Figur! ($a = 6$ cm, $b = 5$ cm, $c = 15$ cm) *K. Wagner, Plauen*



Ma 5 ■ 2582 Vier Schüler, und zwar Peter, Rüdiger, Michael und Volkmar, bilden einen Timurtrupp. Jeder von ihnen hilft genau einer der Rentnerinnen, deren Familienname Anders, Beier, Dahlke bzw. Fuhrmann lautet. Es ist folgendes bekannt:
(1) Peter hilft weder Frau Anders noch Frau Beier.
(2) Volkmar hilft Frau Dahlke.
(3) Frau Beier wird nicht von Michael betreut.
Welcher Schüler betreut welche Rentnerin? *Schüler D. Lutterberg, Holungen*

Ma 5 ■ 2583 Eine Strecke $\overline{AD}$ von 168 cm Länge wurde in drei Teilstrecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ so zerlegt, daß die Strecke $\overline{BC}$ dreimal so lang und die Strecke $\overline{CD}$ viermal so lang ist wie die Strecke $\overline{AB}$. Wie lang sind die drei Teilstrecken? *Schüler M. Danzer, Dresden*

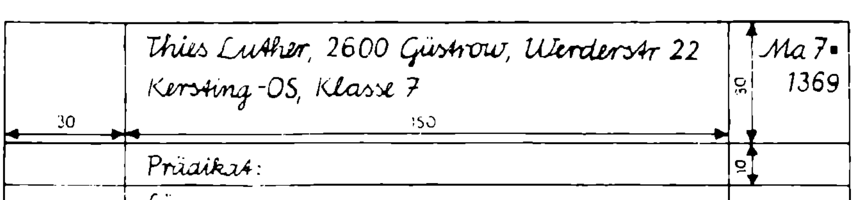
Ma 5 ■ 2584 Frau A kaufte beim Bäcker doppelt so viele, Frau B dreimal so viele Brötchen wie Frau C. Zusammen kauften diese drei Frauen 30 Brötchen. Wie viele Brötchen kaufte jede von ihnen? *Schülerin D. Schiller, Döbeln*

Ma 5 ■ 2585 Eine Mutter ist gegenwärtig so alt wie ihre drei Töchter zusammen, aber jünger als 40 Jahre. Vor acht Jahren war sie neunmal so alt wie die jüngste und viermal so alt wie die älteste Tochter. Wie alt ist jede der drei Töchter (in ganzen Zahlen) gegenwärtig? *Sch.*

Ma 6 ■ 2586 Frau L. schenkte sich eine Tasse Kaffee ein, trank den sechsten Teil davon aus und goß die gleiche Menge Milch nach. Von dieser Kaffee-Milch-Mischung trank sie den dritten Teil und goß wieder die gleiche Menge Milch nach. Nun trank sie die Hälfte der Mischung, goß die gleiche Menge Milch nach und trank die gefüllte Tasse völlig aus. Hat Frau L. mehr Kaffee als Milch oder weniger Kaffee als Milch getrunken?
Die Antwort ist zu begründen! *Schüler K. Pickert, Plauen*

Ma 6 ■ 2587 Robert, Elvira und Peter wollen ihrer Mutter zum Geburtstag ein Geschenk kaufen, das 51 M kostet. Elvira steuert fünfmal soviel Geld wie Robert, Peter aber nur halb soviel Geld wie Elvira dazu bei. Wieviel Mark gibt jedes der drei Geschwister für das Geschenk aus? *Schüler R. Menzel, Dresden*

Ma 6 ■ 2588 An eine Kaufhalle wurden insgesamt 290 kg Äpfel, Tomaten, Birnen und Pfirsiche geliefert, und zwar doppelt soviel Kilogramm Birnen wie Äpfel, 10 kg Tomaten mehr als Birnen, 20 kg Pfirsiche weniger als Äpfel. Wieviel Kilogramm jeder Sorte wurden an diese Kaufhalle geliefert? *Schülerin S. Schubert, Machern*



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha
7027 Leipzig,
Postfach 14

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1985/86 läuft von Heft 5/1985 bis Heft 2/1986. Zwischen dem 1. und 10. September 1986 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/85 bis 2/86 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden ab Heft 6/86 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/85 bis 2/86) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1985/86 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

Ma 6 ■ 2589 Es sind alle zweistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, für die folgendes gilt:
(1) Vertauscht man die Grundziffern der ersten Zahl, so erhält man eine weitere zweistellige Zahl.
(2) Subtrahiert man die kleinere der beiden Zahlen von der größeren, so ist die Differenz gleich der Quersumme jeder dieser Zahlen. *Schülerin V. Türke, Auerbach*

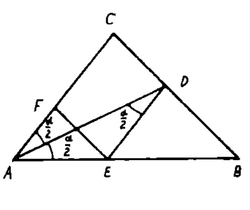
Ma 6 ■ 2590 Zwei Personen schälten zusammen 400 Kartoffeln. Eine dieser beiden Personen schälte 3 Stück, die andere 2 Stück je Minute. Die zweite Person arbeitete 25 Minuten länger als die erste. Wie viele Minuten arbeitete jeder dieser beiden Personen? *Schüler A. Burian, Neundorf*

Ma 7 ■ 2591 Anja wurde von Claudia gefragt, welche Zahlen sie im Tele-Lotto getippt habe; Anja antwortete: „Die dritte getippte Zahl ist gleich dem Dreifachen der ersten Zahl. Die zweite Zahl ist um 2 kleiner als die dritte; die vierte Zahl ist um 9 größer als die zweite. Die fünfte Zahl ist eine Primzahl zwischen 20 und 30. Die Summe aller fünf getippten Zahlen beträgt 84." Welche Zahlen hat Anja getippt?
Schülerin K. Asche, Leimbach

Ma 7 ■ 2592 Welche gebrochene Zahl mit dem Nenner 17 ist größer als $\frac{1}{4}$, aber kleiner als $\frac{1}{3}$? *Schülerin A. Strauß, Stendal*

Ma 7 ■ 2593 An einem Obststand wurden im Verlauf einer Woche insgesamt 850 kg Obst gekauft, und zwar doppelt soviel Kilogramm Pflaumen wie Kirschen, 180 kg Birnen und 240 kg Äpfel mehr als Pflaumen, aber 20 kg Bananen weniger als Pflaumen. Wieviel Kilogramm von jeder Obstsorte wurde gekauft?
Schüler R. Schmugler, Neuhaus

Ma 7 ■ 2594 In dem abgebildeten Dreieck ABC schneidet die Halbierungslinie des Winkels BAC die Gerade BC in D. Die Parallele zu AC durch D schneidet AB in E. Die Parallele zu BC durch E schneidet AC in F. Weise nach, daß $\overline{AE} = \overline{CF}$ gilt!



Ma 8 ■ 2595 Herr Weise wird von Frau Klug gefragt, welches Alter seine drei Kinder haben. Herr Weise antwortet: „Keines meiner Kinder ist älter als 13 Jahre. Multipliziert man die Zahlen miteinander, die jeweils das Lebensalter der Kinder in vollen Jahren angeben, so erhält man 112." Nach kurzer Überlegung sagt Frau Klug: „Wenn ich weiß, ob unter diesen Kindern Zwillinge sind, kann ich ihr Alter ermitteln."
Weshalb braucht Frau Klug zur Lösung des Problems einen Hinweis, ob unter den Kindern des Herrn Weise Zwillinge sind?
Dr. H.-G. Friedemann, IfL Auerbach

Ma 8 ■ 2596 Gegeben sei ein Trapez $ABCD$ mit $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ und $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. Ferner gilt: $\overline{AB}$ ist doppelt so lang wie $\overline{CD}$, und die Länge von $\overline{DC}$ beträgt $\frac{2}{3}$ der Höhe h des Trapezes. Es ist nun ein Halbkreis über dem Durchmesser $\overline{DC}$ so zu zeichnen, daß er im Innern des Trapezes liegt. Der prozentuale Anteil der Halbkreisfläche an der Trapezfläche ist zu berechnen.

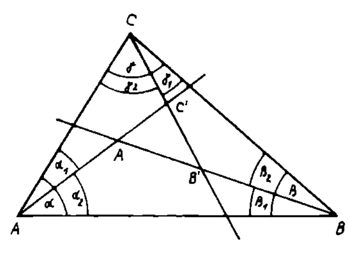
Ma 8 ■ 2597 Ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen $a = 10$ cm, $b = 12$ cm und $c = 13$ cm sei konstruiert. Es ist die Fläche dieses Dreiecks in 16 paarweise kongruente Dreiecksflächen zu zerlegen. Wie groß ist der Umfang eines der Teildreiecke? Die Zerlegung ist zu begründen!
OL O. Chromy, Coswig

Ma 8 ■ 2598 Auf einer horizontal verlaufenden Straße befindet sich ein 40 m hoher Beobachtungsstand. 600 m von diesem entfernt wird die Sicht durch ein 12 m hohes Haus versperrt. Wie lang ist der Teil der Straße, der vom Beobachtungsstand aus nicht eingesehen werden kann? Wir wollen davon ausgehen, daß im Straßenverlauf keine Kurve ist. *OL O. Chromy, Coswig*

Ma 9 ■ 2599 Es sind alle geordneten Paare $(x; y)$ natürlicher Zahlen anzugeben, die das folgende Ungleichungssystem erfüllen:
(1) $x^y + y^x < 31$
(2) $x^{\frac{1}{y}} + y^{\frac{1}{x}} < 3$.

Ma 9 ■ 2600 Zu einer Familie gehören sechs Personen (Vater, Mutter, zwei Söhne und zwei Töchter). Multipliziert man die Zahlen miteinander, die jeweils das Alter der weiblichen Familienmitglieder in vollen Jahren angeben, so erhält man 5291. Für die männlichen Familienmitglieder ist das entsprechende Produkt 3913. Unter den Kindern dieser Familie ist ein Zwillingspaar. Sind die Zwillinge von gleichem Geschlecht?
Dr. H.-G. Friedemann, IfL Auerbach

Ma 9 ■ 2601 Im abgebildeten Dreieck ABC ist jeder der Innenwinkel so geteilt worden, daß gilt $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1$.



Es ist zu beweisen, daß das dadurch entstandene Dreieck $A'B'C'$ zum Dreieck ABC ähnlich ist.
D. Küpper, Wirtzfeld; Belgien

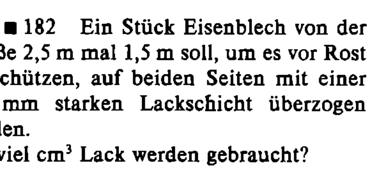
Ma 9 ■ 2602 Einem Quadrat mit der Seitenlänge a ist ein Kreis und diesem wiederum ein gleichseitiges Dreieck einbeschrieben. Der Flächeninhalt dieses gleichseitigen Dreiecks ist durch die Länge a auszudrücken.
Schüler P. Schmedemann, Templin

Ma 10/12 ■ 2603 Welches Relationszeichen ist zwischen die Terme T_1 und T_2 zu setzen, damit eine wahre Aussage entsteht?
$T_1 = (5^5 \cdot 4^4 \cdot 3^3 \cdot 2^2)^{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$;
$T_2 = 5^{4^{3^2}}$ *Schüler B. Schubert, Rostock*

Ma 10/12 ■ 2604 Zu einer Familie gehören Vater, Mutter, zwei Töchter und zwei Söhne. Addiert man die Zahlen, die jeweils das Alter der männlichen Familienmitglieder in vollen Jahren angeben, so erhält man 61. Diese Zahl erhält man auch, wenn man mit den Altersangaben der weiblichen Familienmitglieder entsprechend verfährt. Die Mutter ist jünger als 40 Jahre. Die Anzahl der Lebensjahre ist für jedes Familienmitglied eine Primzahl. Wie alt ist das älteste Kind der Familie, wenn bekannt ist, daß es in der Familie Drillinge gibt?
Dr. H.-G. Friedemann, IfL Auerbach

Ma 10/12 ■ 2605 Es sind alle reellen Zahlen $x\left(x \neq \frac{\pi}{2} \cdot k;\ k \in G\right)$ zu bestimmen, für die gilt
$\sin x \cdot \cos x = \tan x \cdot \cot x$!
Schüler I. Warnke, Oranienburg

Ma 10/12 ■ 2607 In einem Dreieck ABC seien die Punkte D und E so auf $\overline{AB}$ festgelegt, daß die Winkel $\sphericalangle ACD$, $\sphericalangle DCE$ und $\sphericalangle ECB$ paarweise kongruent sind und die Größe jedes dieser Winkel 45° beträgt. Die Längen der Strecken $\overline{AC}$, $\overline{DC}$, $\overline{EC}$ und $\overline{BC}$ seien mit a, d, e und b bezeichnet. Es ist zu beweisen, daß stets gilt:
$$\frac{b+d}{a} = \frac{b-d}{e}!$$

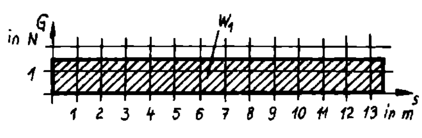


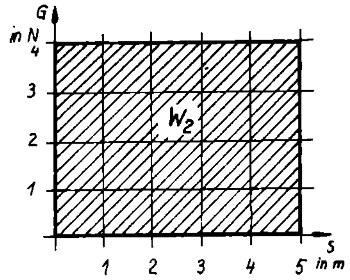
Skizze (nicht maßstäblich!)
Schüler J.-P. Redlich, Wittenberge

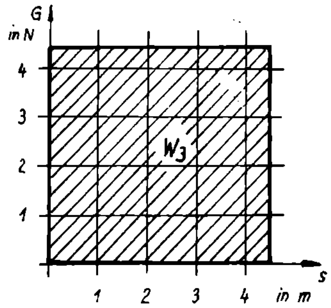
Physik

Ph 6 ■ 182 Ein Stück Eisenblech von der Größe 2,5 m mal 1,5 m soll, um es vor Rost zu schützen, auf beiden Seiten mit einer 0,09 mm starken Lackschicht überzogen werden.
Wieviel cm³ Lack werden gebraucht?

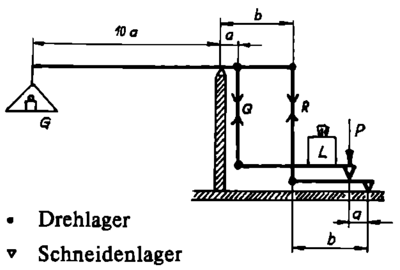
Ph 7 ■ 183 Bestimme die in den drei Arbeitsdiagrammen dargestellte Hubarbeit, und ordne sie der Größe nach!







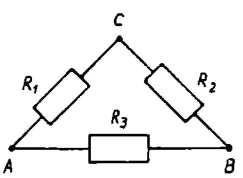
Ph 8 ■ 184 Relativ einfach ist es, eine Dezimalwaage (Gewicht : Last = 1 : 10) zu entwickeln, wenn die Last auf einen bestimmten Punkt wirken würde. Beim Abwägen darf dieser Auflagepunkt jedoch keinen Einfluß haben. Für die gegebene Anordnung ist der Beweis zu erbringen, daß bei unterschiedlicher Lastlage stets eine genaue Gewichtsbestimmung erfolgt.



- Drehlager
- ▿ Schneidenlager
- Ɪ Stangenkraft

Dipl.-Ing. H. Miethig, Dresden

Ph 9 ■ 185 Drei Ohmsche Widerstände, die sich im Größenverhältnis $R_1 : R_2 : R_3 = 1 : 2 : 5$ befinden, werden zu einem Dreieck mit den Eckpunkten A, B und C zusammengeschaltet. Wird an die Punkte A und B (siehe Bild) eine Spannung von



210 V angeschlossen, so beträgt die von der Schaltung aufgenommene Leistung 294 W. Man bestimme die Größen der Widerstände R_1, R_2 und R_3.

H. Schreiber, Dresden

Ph 10/12 ■ 186 Der Montgolfier-Ballon hatte ein Volumen von 2200 m³, eine Masse von 785 kg und konnte zwei Personen von insgesamt 150 kg befördern.

a) Auf welche Dichte mußte die erwärmte Luft gebracht werden, damit der Ballon zum Schweben kam?

b) Wie groß wäre die Tragkraft des Ballons gewesen, wenn man ihn mit Wasserstoff gefüllt hätte? Wieviel Personen zu 75 kg könnten getragen werden?

(Dichte der Luft $\varrho_L = 1{,}3\ \mathrm{kg/m^3}$, Dichte des Wasserstoffs $\varrho_W = 0{,}09\ \mathrm{kg/m^3}$)

Chemie

Ch 7 ■ 145 12 g Kochsalz werden in Wasser gelöst und die Lösung auf 350 ml aufgefüllt. 40 ml dieser Lösung werden entnommen und zur Analyse verwendet. Wieviel Gramm Kochsalz sind in den entnommenen 40 ml Lösung enthalten?

Ch 8 ■ 146 Mit Hilfe genormter Siebe werden 150 g Asche nach der Korngröße getrennt. Die Siebanalyse brachte folgende Werte:

Sieb-Nr. (Maschenweite des Siebes in mm)						
1,0	0,75	0,5	0,25	0,1	0,075	Sieb
Auswaage in Gramm						feines
2,6	16,8	18,1	45,7	51,2	5,6	10,0

Wieviel Prozent der einzelnen Korngrößen enthält die Asche?

Ch 9 ■ 147 Welche Konzentration muß die Schwefelsäure besitzen, damit bei der Reaktion mit Magnetsium eine 32,2%ige Magnesiumsulfat-Lösung entsteht?

Ch 10/12 ■ 148 Zur Titration von 0,02 dm³ Natronlauge verbraucht man 15,3 ml Salzsäure. Die Normalität der Säure beträgt 1,0; der Normalitätsfaktor 1,005.

a) Wieviel Gramm Natriumhydroxid sind in den 0,02 dm³ Natronlauge enthalten?

b) Wieviel Mol Natriumhydroxid enthält die Natronlauge im Liter?

c) Wieviel Prozent Natriumhydroxid enthält die Natronlauge, wenn zur Titration 20,6 g Natronlauge statt 0,02 dm³ eingesetzt wurden und die gleiche Menge Salzsäure verbraucht wurde?

ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

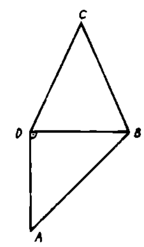
Eine Aufgabe – verschiedene Varianten mit steigendem Schwierigkeitsgrad

Wir stellen unseren Lesern Aufgaben ähnlichen Inhalts für Schüler der Klassen 5 bis 10 vor. Diese Aufgaben wurden von Klassenstufe zu Klassenstufe variiert und im Schwierigkeitsgrad erhöht. Wir empfehlen allen interessierten Lesern, mit der Lösung der Aufgabe für Klasse 5 zu beginnen und bei Erfolg von Klassenstufe zu Klassenstufe voranzuschreiten, soweit es zu schaffen ist.

Startposition

Von einem konvexen Viereck $ABCD$ sei folgendes bekannt:

(1) Die Seite $\overline{AB}$ ist 8 cm lang;
(2) es gilt $\overline{AD} = \overline{BD}$;
(3) es gilt $\overline{BC} = \overline{CD}$;
(4) der Winkel ADB hat die Größe 90°.



Aufgaben

Klasse 5 · Welche Länge hat der Umfang des Dreiecks BCD, wenn der Umfang des Vierecks $ABCD$ 18 cm beträgt?

Klasse 6 · Welchen Flächeninhalt besitzt das Viereck $ABCD$, wenn der Winkel BCD die Größe 90° hat?

Klasse 7 · Welche Größe haben die Innenwinkel des Vierecks $ABCD$, wenn es ein Sehnenviereck ist?

Klasse 8 · Welche Längen haben die Seiten des Vierecks $ABCD$, wenn der Winkel BCD die Größe 90° besitzt?

Klasse 9 · Es sei h die Höhe zur Seite BD des gleichschenkligen Dreiecks BCD. Drücken Sie den Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$ als Funktion von h aus!

Klasse 10 · Wie lang sind die Seiten des Vierecks $ABCD$, wenn der Winkel ABC die Größe 72° hat?

V. Pöschel/Th. Scholl

Eine Aufgabe von Prof. Dr. B. K. Mlodzievsky

Prof. Mlodzievsky veröffentlichte im Jahre 1910 in einer math.-methodischen Zeitschrift die folgende Aufgabe:

▲2579▲ Man beweise drei Behauptungen:

1. Der Flächeninhalt eines Dreiecks mit zwei gegebenen Seiten wird maximal, wenn der Winkel zwischen diesen beiden Seiten 90° beträgt.
2. Der Flächeninhalt eines Vieleckes, in dem alle Seiten außer einer gegeben sind, wird maximal, wenn kein Innenwinkel größer als 180° ist und wenn sich ein Kreis umschreiben läßt, dessen Durchmesser die letzte Seite ist.
3. Von allen Vierecken mit gegebenen Seiten hat jenes den größten Flächeninhalt, dessen Eckpunkte auf einem Kreis liegen.

(Abschließend weist der Autor darauf hin, daß man die letzte Behauptung auf alle Vielecke mit einer beliebigen Seitenzahl erweitern kann.)

Aus dem Leben Mlodzievskys

B. K. Mlodzievsky wurde 1858 in Moskau als Sohn eines Professors der Medizin und seiner Frau, der Tochter eines tschechischen Musikers geboren. Bereits nach einem Lebensjahrzehnt verlor er seinen Vater. Die Witwe mit ihren beiden Kindern wurde von deren Bruder, einem bekannten Maler und Mitglied der Moskauer Kunstakademie, unterstützt. Boleslaw besuchte ein Moskauer Gymnasium. Dort begeisterten ihn besonders Mathematik und Literatur. Mit Leichtigkeit erlernte er Griechisch und Latein sowie zwei „lebende" Sprachen: Deutsch und Französisch. Mit 18 Jahren schloß er das Gymnasium mit der Goldmedaille ab.

Im Polytechnischen Museum Moskaus hörte er zufällig einen Vortrag des talentierten Pädagogen, des Mathematikprofessors W. J. Zinger (1836 bis 1907). Sowohl der Vortragsgegenstand, die Geometrie, als auch die elegante Darlegungsweise begeisterten M. so, daß er beschloß, sich der Mathematik, insbesondere der Geometrie, für sein ganzes Leben zu verschreiben. 1876 trat er in die Abteilung Mathematik der Moskauer Universität ein. Vier Jahre später wurde die von ihm eingereichte Arbeit über „Klassifikation der ebenen Kurven 3. Ordnung" mit *sehr gut* bewertet. Zinger schlug vor, den begabten jungen Mathematiker „auf den Professorentitel" vorzubereiten. Während dieser Zeit unterrichtete er, sehr zu seinem Vorteil, an mittleren Bildungseinrichtungen. Im Jahre 1882 heiratete er seine ehemalige Schülerin Elena Laptewa. Seine Magister-Dissertation, seine Doktorarbeit, schaffte er so gut, daß er von der Universität nach Paris und Göttingen zur Weiterbildung delegiert wurde. Nach seiner Rückkehr (1892) wurde er zum Professor ernannt.

Im letzten Jahrzehnt arbeitete er mit Prof. Dr. Jegorow und Prof. K. A. Andrejew eng zusammen. Alle drei Experten auf dem Gebiet der Geometrie schufen eine Reihe fundamentaler Arbeiten, entwickelten eine neue Lehrmethode in der Mathematikausbildung. Zu Beginn des 20. Jh. wurde von M. als erstem in Moskau und in ganz Rußland an der Universität ein Lehrgang zur Mengenlehre und der Theorie der Funktionen eingerichtet.

M. war immer fröhlich, beweglich, besonders gutherzig und verständnisvoll, war ein ausgezeichneter Lektor. Besonders rechnerische Fähigkeiten, Feinheit der Methodenverwendung, Klarheit und Einfachheit der Darlegungen, sparsame treffliche Gesten – all das führte dazu, daß seine Vorlesungen stets überfüllt waren. Für befähigte und arme Studenten bemühte er sich um Stipendien oder versuchte Nachhilfeunterricht zu organisieren.

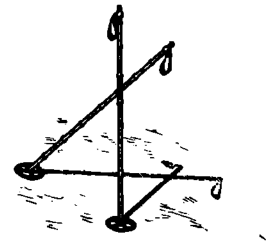
Wie die meisten intellektuellen Familien, hielten auch die Mlodzievskys zu Beginn des 20. Jh. ihren *Empfangstag* am Mittwoch. Das gastfreundliche Ehepaar wurde gern von den führenden Professoren der Moskauer Universität besucht, darunter die Mechaniker Shukowsky und Tschaplygin, die Physiker Umow, Lebedjew und Zinger (der Sohn des Lehrers des Hausherrn), der Biologe Timirjazjew, Historiker Kljutschewsky und viele andere. Hier im gemütlichen Gästezimmer führte man viele Gespräche über das Tagesgeschehen, über die wachsende Neugier der Studenten, man tadelte die Strenge, die durch die Behörden eingeführt worden war. Oft wiederholte der Hausherr, daß es einen Titel gibt, der über dem Gelehrten steht, und das ist *der Mensch*. Manchmal bereitete er auch den Gästen Vergnügen durch sein virtuoses Spiel auf dem Klavier.

Die Existenz der Moskauer Universität zu Beginn des 20. Jh. war gekennzeichnet durch einen ständigen Kampf: Die Universität strebte die Verwirklichung des ihr einst gegebenen Rechts auf Autonomie an, aber die Behörden bekämpften sie als Hort der Freiheitsgedanken. Dieser Kampf verstärkte sich besonders im Frühjahr des Jahres 1911, als in nur 40 Tagen Tausende von Studenten von der Universität gewiesen wurden. Als Zeichen des Protestes verweigerten zahlreiche Wissenschaftler ihren Dienst. Auch Prof. Mlodzievsky verließ die Universität und kehrte 1917 zurück.

M. schrieb zahlreiche Beiträge, war besonders bemüht um die Aus- und Weiterbildung der Mathematiklehrer, war tätig als Sekretär, Vizepräsident und im letzten Jahr sogar als Präsident der Mathematischen Gesellschaft Rußlands. Er starb im Jahre 1920.

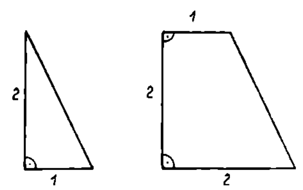
A. Halameisär, Moskau

▲1▲ При помощи теней определите, соприкасаются ли эти лыжные палки.



▲2▲ Geometrical Puzzles for Beginners: Figure 1 shows a right-angled triangle, whose base is one unit, and its height two units, and a right-angled trapezium with two perpendicular sides, each of 2 units, and a short side of 1 unit. Cut out shapes like these from a piece of cardboard, and show that they can be fitted together to form

(a) a square
(b) a triangle
(c) a parallelogram
(d) a quadrilateral with two right-angled corners.



By turning over the triangle, you can make
(e) an isosceles trapezium.

▲3▲ Trois lignes d'autobus ont pour point de départ la gare Montparnasse à Paris. Les autobus de la première ligne sont de retour au bout de 1 h 36 min et restent 4 min à l'arrêt.

Les autobus de la deuxième ligne sont de retour au bout de 1 h 48 min et restent 12 min à l'arrêt; ceux de la troisième ligne sont de retour au bout de 2 h 10 min et restent 20 min à l'arrêt.

Trois autobus, un pour chaque ligne, partent ensemble de la gare Montparnasse à 8 h.

a) A quelle heure ces trois autobus repartiront-ils ensemble pour la première fois de la gare Montparnasse?
b) Combien de trajets chaque autobus aura-t-il alors accomplis?

Ein Besuch in der Knobelwerkstatt

Teil 4: Mathematische Wortspielereien

Nachdem wir uns in den Teilen 2 und 3 dieser Beitragsserie mit der Ideenfindung aus der Umwelt sowie der Mathematik beschäftigt haben, wollen wir nun andere Fachdisziplinen in punkto Eigenbau von Knobelaufgaben zu Rate ziehen. Natürlich würden uns da zuerst Physik, Chemie oder eine andere Naturwissenschaft einfallen, da diese Wissenszweige bereits einen hohen Mathematisierungsgrad besitzen. Auch unsere *alpha* trägt dem Rechnung, denn im *alpha-Wettbewerb* gehören Aufgaben aus Physik und Chemie zum ständigen Repertoire.

Wir wollen aber keine der Naturwissenschaften, sondern einmal die Fachdisziplin *Germanistik*, insbesondere unsere *deutsche Muttersprache, als Ideenlieferant* nutzen und Knobelaufgaben mit Buchstaben, Worten bzw. Sätzen gestalten. Einige Beispiele dazu:

Beispiel 1: Palindrome

Palindrome sind Worte oder Wortreihen, die vor- und rückwärts gelesen dasselbe oder ein anderes sinnvolles Ganzes ergeben. Palindrome der erst- bzw. zweitgenannten Art wollen wir durch die Zusätze *symmetrisch* und *asymmetrisch* unterscheiden. Beispiele für symmetrische Palindrome sind UHU, ELLE, MONOM, TANNAT, TRABART oder der bekannte Satz: EIN NEGER MIT GAZELLE ZAGT IM REGEN NIE. Ihr könnt euch selbst leicht einige Gesetzmäßigkeiten des Aufbaus symmetrischer Palindrome überlegen, etwa über die Lage des Symmetriezentrums bei Palindromen mit gerader bzw. ungerader Buchstaben-Anzahl. Beispiele für asymmetrische Palindrome sind RHO (OHR), LAGE (EGAL), REGAL (LAGER), NENNER (RENNEN) oder der Satz: REGALE LAGERT IM EISNEBEL (LEBEN SIE MIT REGALELAGER). Symmetrische Palindrome in Satzform lassen sich zum großen Teil aus asymmetrischen Palindromen aufbauen, wie z.B. in unserem folgenden, nicht unbedingt sehr sinnvollen Satz: SIE LEBEN MIT RABENHOSEN, HOLEN HONIG, GIN, OHNE LOHNES, OHNE BART IM NEBELEIS. Es wird euch sicher Spaß bereiten, solche palindromische Sätze oder auch Rätsel mit Palindromen zusammenzubauen. Ein Beispiel liefert *Aufgabe 1* unserer Knobel-Wandzeitung (vgl. auch *alpha*, 3/83, S. 67 und 5/83, S. 113).

Beispiel 2: Kombinatorische Worträtsel

Die Kombinatorik behandelt Probleme, die bei der Anordnung (Permutationen) und Auswahl (Variationen und Kombinationen) von Elementen einer endlichen Menge von Zahlen, Buchstaben, Gegenständen o. ä. entstehen. Sicher sind euch diese Begriffe wie auch die entsprechenden Anzahlformeln bekannt (z. B. ist die Anzahl P_n der Permutationen von n verschiedenen Elementen $P_n = n!$). Legt man hierbei Buchstaben-Mengen (also Worte oder Sätze) zugrunde, so kann man vielerlei unterhaltsame Worträtsel gestalten. Einige Beispiele:

2.1. Permutationsrätsel
(oder **Schüttelrätsel**):

Durch Permutation der Buchstaben eines (möglichst schon sinnvollen) Wortes soll ein bestimmter Begriff (Vorname, Tier, Stadt, Land, o. ä.) erzeugt werden (*siehe Aufgabe 2* – vgl. auch *alpha* 1/84, S. 14). Hierbei ist also aus den möglichen Permutationen der Wortbuchstaben die geeignete auszuwählen. Beim Bau solcher Aufgaben geht man natürlich in der umgekehrten Reihenfolge vor und *schüttelt* den Zielbegriff durch.

2.2. Leserätsel:

Es soll die Anzahl der Lesemöglichkeiten eines bestimmten Wortes innerhalb einer vorgegebenen Buchstaben-Matrix ermittelt werden. Dies führt bei einem systematischen Aufbau der Matrix (gleiche Buchstaben sind nebendiagonal eingetragen) auf die Ermittlung der Anzahl von Permutationen mit Wiederholung (siehe Aufgabe 3 – vgl. auch alpha 1/85, Knobel-Wandzeitung, Aufgabe 5).

2.3. Metamorphoserätsel:

Ein vorgegebener Begriff soll durch Streichung bzw. Hinzufügung eines (oder mehrerer) Buchstaben über eine Folge von Zwischenbegriffen in einen zweiten vorgegebenen Begriff *verwandelt* werden. Dabei kann man Permutation der Buchstaben zulassen (vgl. *alpha* 1/83, S. 17) oder auch nicht (*siehe Aufgabe 4*). Bei der Erzeugung des Nachfolgebegriffs durch Streichung z. B. eines Buchstabens handelt es sich also um die Bildung einer geeigneten Variation bzw. Kombination von n Elementen zur Klasse $(n - 1)$, je nachdem, ob Permutation erlaubt ist oder nicht. Metamorphoserätsel sind auch solche, bei denen man von einem zum anderen Begriff durch Ersatz eines (oder mehrerer) Buchstaben bei konstanter Buchstabenanzahl gelangt (*siehe Aufgabe 5*).

Beispiel 3:
Buchstaben- und Wortgeometrie

Hübsche Knobelaufgaben kann man auch gestalten, indem man Buchstaben bzw. Worte mit geometrischen Problemen in Verbindung bringt. Zu nennen wären hier geometrische Lexika (*siehe Aufgabe 6*), Teilungsprobleme (*siehe Aufgabe 7*) und Flächenbestimmungen (vgl. *alpha* 4/84, S. 84) von buchstabenförmigen Vielecken, Legespiele mit Buchstaben (vgl. *alpha* 4/85, Knobelwandzeitung, *Aufgabe 11*), Aufgaben mit Hölzchen-Buchstaben (*siehe Aufgabe 8*) oder verbundene Buchstaben (*siehe Aufgabe 9*).

Beispiel 4: Kryptographie-Rätsel

Der Begriff *Kryptographie* kommt aus dem Griechischen und bedeutet soviel wie *Geheimschrift* oder *verschlüsselter Text*. In den meisten Fällen beruht der Kode eines solchen auf einer eineindeutigen Abbildung aus einer Objektmenge in eine andere (Zahlen – Zahlen, Buchstaben – Zahlen, Buchstaben – Buchstaben, Buchstaben – Punkte und Striche, Zahlen – Maschinenwörter o. ä.), und die Dekodierung besteht im Auffinden dieser Abbildung. Letztlich beruht die moderne elektronische Datenverarbeitung auf diesem Prinzip, denn eine Datenverarbeitungsanlage versteht nur eine in ganz bestimmter Weise verschlüsselte *Sprache*. Beispiele für Knobelaufgaben aus diesem Bereich sind:

4.1. Arithmetische Kryptogramme:

Das sind Rechenaufgaben mit Symbolen (Buchstaben, Sternchen o. ä.), für die Grundziffern so zu ermitteln sind, daß die enthaltenen Rechenoperationen richtig ausgeführt werden (*siehe Aufgabe 10*).

4.2. Nichtarithmetische Kryptogramme:

Das sind Kryptogramme ohne Rechenoperationen. Buchstaben oder andere Symbole sind also so durch Grundziffern zu ersetzen, daß bestimmte einschränkende Bedingungen erfüllt werden (*siehe Aufgabe 11*).

4.3. Verstecke-Rätsel:

In einem vorgegebenen Text oder in einer Buchstaben-Matrix sind nach einem bestimmten Prinzip Begriffe (Vornamen, Tiernamen, Städtenamen o. ä.) *versteckt*, die es aufzufinden gilt (*siehe Aufgabe 12*).

Einige weitere Beispiele für mathematische Wortknobeleien seien noch genannt, etwa Wortkarusselle (*siehe Aufgabe 13*), Schablonenaufgaben, magische Wortquadrate (*siehe Aufgabe 14*), magische Figuren in Buchstabenform Gleichungssysteme mit bestimmten Buchstaben als Variable (*siehe Aufgabe 15*) und viele andere.

Zusatzaufgabe:

Die folgende Wortreihe stellt die verschlüsselte Form eines Wunschsatzes dar. Der Kode besteht in einer eineindeutigen Abbildung des Alphabets auf sich. Findet diesen Kode, und entschlüsselt den Satz: XIS XUEPTDJEP EUDJ WIEM ESGOMH IP FES TDJUME UPF WIEM TQATT CEIN LPOCEMP!

R. Mildner

Knobel-Wandzeitung

Bumerang

▲1▲ Tragt in die Zeilen der Figur (unterschiedliche) symmetrische Palindrome ein!

1 E			E	6 K				K	11 R					R
2	B	B		7	A		A		12	A			A	
3 E			E	8		N			13		T	T		
4	N	N		9	O		O		14	E			E	
5 E			E	10 N				N	15 N					N

Schüttel-Tiere

▲2▲ Durch Permutation der Buchstaben folgender Begriffe sollt ihr Tiernamen finden: LECH, SAUM, GRETI, MAKEL, PIRAT, RADEL, REGIE, ROTTE, SELMA, SCHROT, TELEFAN, SCHLAGEN, WEBSCHAL, LEBESCHATZ, LICHTGALAN.

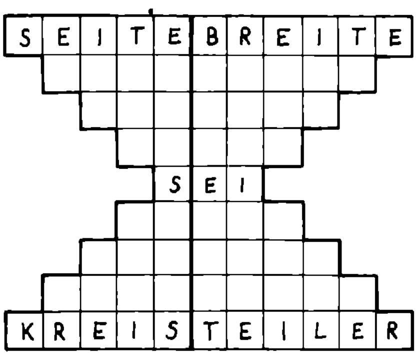
Lesevielfalt

▲3▲ Wieviel Lesemöglichkeiten – von links nach rechts oder von oben nach unten von Buchstabe zu Buchstabe fortschreitend – gibt es in dem Bild für jeden der Begriffe ALPHA, EUKLID, HOCHZAHL und MATRIZEN?

M	A	T	R	I	Z	E	N	M	A	T
H	O	C	H	A	L	P	H	A	T	R
O	C	H	Z	L	P	H	A	T	R	I
C	H	Z	A	E	U	K	L	R	I	Z
H	Z	A	H	U	K	L	I	I	Z	E
Z	A	H	L	K	L	I	D	Z	E	N

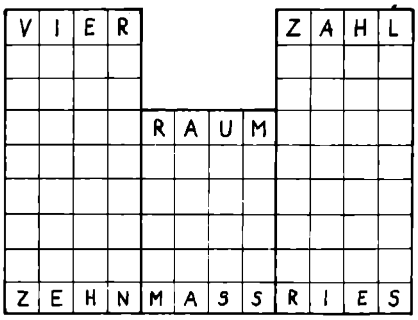
Mehr oder weniger

▲4▲ Durch Streichung bzw. Hinzufügung je eines Buchstabens (und ohne die Buchstaben zu permutieren) sollt ihr über geeignete Zwischenbegriffe die SEITE in einen KREIS und die BREITE in einen TEILER verwandeln!



Aus VIER mach ZEHN!

▲5▲ Über eine Folge von Zwischenbegriffen, wobei sich benachbarte Begriffe durch genau einen Buchstaben unterscheiden sollen, sollt ihr VIER in ZEHN, RAUM in MASS und ZAHL in RIES verwandeln!



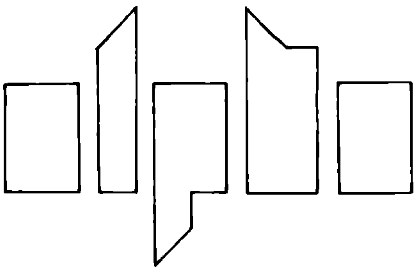
Mathematiker-Lexikon

▲6▲ Das abgebildete Rechteck ist so in acht kongruente Teile zu zerlegen, daß sich aus den sich in jedem solchen Teil befindlichen Buchstaben der Name eines bedeutenden Mathematikers bilden läßt! Wie heißen die acht Mathematiker?

M	E	T	R	A	D	G	L	I	O	S	T
F	E	U	K	L	I	A	C	N	A	R	O
O	M	B	I	S	Ö	C	P	S	A	L	C
N	P	L	A	T	U	A	C	Y	H	U	A

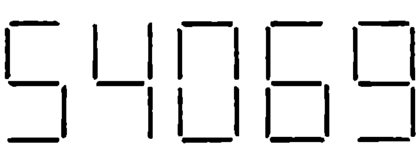
alpha-Spaß

▲7▲ Zerlegt die *alpha* in insgesamt 21 deckungsgleiche Vielecke!



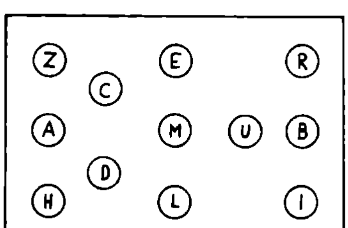
Name gesucht

▲8▲ Durch Umlegen von 3 Hölzchen soll aus der Zahl 54069 der Name eines bedeutenden deutschen Mathematikers entstehen! Findet diesen Namen!



Der Reihe nach

▲9▲ Verbindet die abgebildeten Buchstaben in der Reihenfolge des Wortes DEZIMALBRUCH durch einen Linienzug miteinander, aber so, daß sich keine Linien schneiden!



Dreierlei

▲10▲ Ersetzt die Buchstaben so durch Grundziffern, daß die Additionsaufgaben richtig gelöst werden! Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, unterschiedliche Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen (in jeder der drei Aufgaben unabhängig voneinander).

DREI	DREI	DREI
+ DREI	+ DREI	+ DREI
IMMER	VIEL	SECHS

Im 20. Jahrhundert

▲11▲ Durch das punktierte Wort SEEMEILE sei ein Datum (Tag, Monat, Jahr) dargestellt, wobei gleiche Buchstaben für die gleiche Grundziffer und unterschiedliche Buchstaben für verschiedene Grundziffern stehen. Welche und wie viele Daten des 20. Jahrhunderts können dann auf die obige Weise dargestellt werden?

SE.EM.EILE

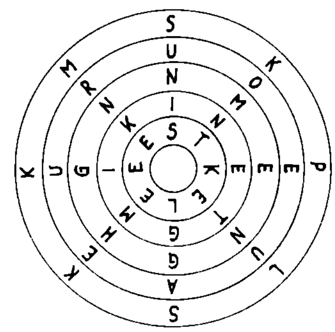
Mathematische Lyrik

▲12▲ In Parchim Edes Schwester wohnt.
Sie liebt den kleinen Klaus.
Doch Anke Label hatt' ihn satt
und zog aus seinem Haus.

In diesem Verslein sind die Nachnamen von sechs bedeutenden Mathematikern versteckt. Wer findet sie?

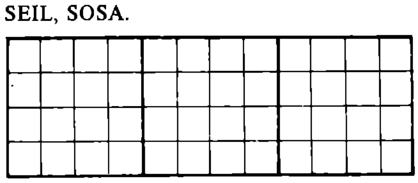
Wort-Karussell

▲13▲ Durch Drehung der konzentrischen Kreisringe sollen sich acht radial angeordnete mathematische Begriffe ergeben. Wie lauten diese Begriffe?



Magische Wortquadrate

▲14▲ Ordnet die folgenden 12 Begriffe so in die drei Quadrate ein, daß jeder Begriff in einem solchen Quadrat sowohl waagerecht als auch senkrecht eingetragen ist: ARME, EBER, ERLE, ESEL, ESER, GERA, OBER, RALF, REIM, ROSE, SEIL, SOSA.



ELFer-Probe

▲15▲ Ermittelt alle Lösungstripel (E, L, F) des vorgelegten Gleichungssystems!

$$2E = E(E+1)$$
$$2(E+L) = L(L+1)$$
$$2(E+L+F) = F(F+1)$$

Rund um den Quader

▲1▲ Welche Körper des Bildes 1 sind Quader?

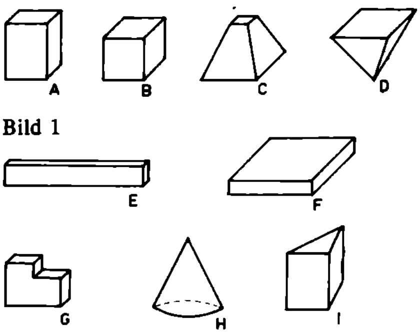


Bild 1

▲2▲ Mit welcher bzw. welchen der folgenden Formeln kann man das Volumen der einzelnen Körper aus Bild 1 ermitteln?

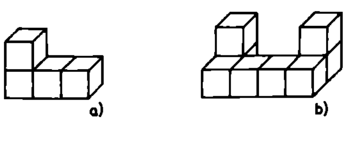
a) $V = a^3$ b) $V = a \cdot b \cdot c$

c) $V = A_G \cdot h$ d) $V = \frac{1}{3} A_G \cdot h$

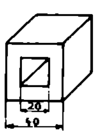
e) $V = a^2 \cdot h$

▲3▲ a) Haben Würfel mit gleichem Volumen stets einen gleichen Oberflächeninhalt?
b) Haben Quader mit gleichem Volumen stets einen gleichen Oberflächeninhalt?

▲4▲ Wieviel *Würfelbausteine* müßte man jeweils hinzufügen (Bild 2), um einen Würfel mit kleinstem Volumen zu erhalten? (Die vorgegebene Anordnung der Würfelbausteine darf nicht verändert werden!)

Bild 2


▲5▲ Ein Werkstück habe die Form eines Würfels mit Quadratdurchbruch (Bild 3). Berechne Volumen und Oberflächeninhalt des Werkstücks!

Bild 3


▲6▲ Wieviel Flächenstücke hat jeder der abgebildeten Körper (Bild 4)?

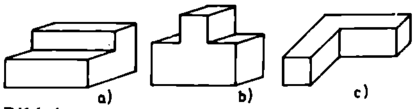
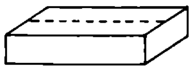


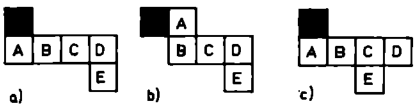
Bild 4

▲7▲ a) In dem dargestellten Quader (Bild 5) ist eine Mittellinie eingezeichnet. Zeichne alle fehlenden Mittellinien ein!

Bild 5


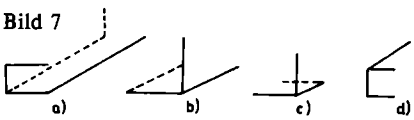
b) In wieviel Körper kann man einen Quader zerlegen, wenn man ihn längs seiner Mittellinien zerschneidet?

▲8▲ Das Bild 6 zeigt Netze von Würfeln. Wenn die schwarze Fläche die Grundfläche sein soll, welche der Flächen A, B, C, D, E ist dann jeweils die Deckfläche?

Bild 6


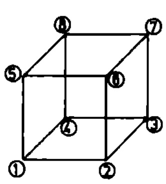
▲9▲ Ein Quader ist 4 cm lang und 2 cm breit. Die Kanten sind zusammen 48 cm lang. Wie hoch ist der Quader?

▲10▲ Die Bilder von Quadern in schräger Parallelprojektion sind unvollständig gezeichnet. Vervollständige die Zeichnungen (Bild 7)!

Bild 7


▲11▲ Ein Würfel habe ein Volumen von 8 mm³. Welches Volumen hat ein Würfel mit doppelter Kantenlänge?

▲12▲ Bild 8 zeigt ein Kantenmodell eines Würfels. An der Ecke (1) sitzt eine Raupe, die sich im Verlaufe eines Tages zur Ecke (7) bewegt. Welche Wege sind möglich, wenn keine Strecke, aber auch keine Ecke zweimal *durchkrochen* wird?

Bild 8


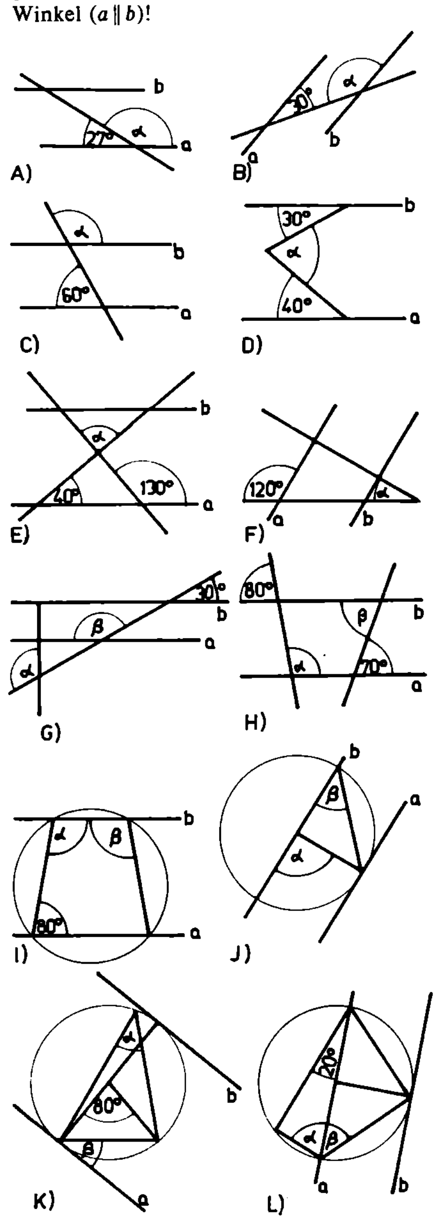
▲13▲ Ein Quader mit der Höhe 3 cm habe ein Volumen von 30 cm³.
Wie verändert sich sein Volumen, wenn man seine Höhe verdoppelt?

▲14▲ Aus 13 Bleiwürfeln mit der Kantenlänge 1 cm, drei Bleiwürfeln mit der Kantenlänge 2 cm und einem Würfel mit der Kantenlänge 3 cm soll ein einziger Bleiwürfel hergestellt werden. Wie lang ist die Kante dieses Würfels? (Schmelzverluste sind zu vernachlässigen!)

L. Flade/H. Knopf

Übung macht den Meister

▲1▲ Ermittle jeweils die Größen der mit griechischen Buchstaben bezeichneten Winkel ($a \parallel b$)!



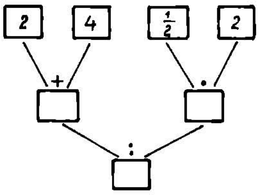
▲2▲ Zu jeder der Aufgaben sind mehrere Ergebnisse angegeben. Jedoch ist nur ein Ergebnis die richtige Lösung. Unterstreiche jeweils das richtige Resultat!

a) 1,368 : 0,72 (1,9; 19; 0,19)
b) 638,304 : 8,72 (7,32; 73,2; 732)
c) 0,02268 : 1,2 (0,0189; 1,89; 0,00189)
d) $0,\bar{3} : 0,6$ $\left(0,5; \frac{5}{9}; 5,5\right)$

▲3▲ Vervollständige!

Maßstab	Entfernung auf der Karte	Entfernung in der Natur
a) 1 : 50 000	3 cm	
b) 1 : 25 000		3 km
c)	2 cm	10 km

▲4▲ Vervollständige!
Gib den zu berechnenden Term an!



▲5▲ Welche Aufgaben sind falsch gelöst?

a) $0:77=0$ c) $0:0=1$
b) $0:\ 0=0$ d) $5:0=0$

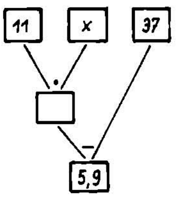
▲6▲ Ermittle x!

a) $2^x=8$, b) $10^x=1000$, c) $x^3=343$,
d) $x^{1000}=1$

▲7▲ Setze um zwei Glieder fort!

a) 0; 1; 3; 6; 10; 15; ...
b) 5; 3,5; 2,75; 2,375; ...
c) 0,5; 3; 8; 18; 38; ...

▲8▲ Schreibe als Gleichung auf und löse diese!

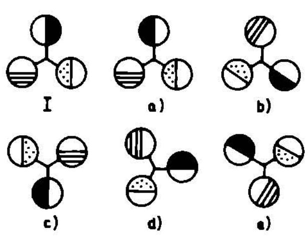


▲9▲ Drücke die Zahlen 1 bis 10 ausschließlich mit der Ziffer 2 und den vier Grundrechenoperationen aus!
Die Ziffer 2 soll jeweils genau fünfmal verwendet werden!

▲10▲ Setze für jeweils gleiche Buchstaben gleiche und für verschiedene Buchstaben unterschiedliche Zahlen ein!

```
   R O S E
+T U L P E
----------
 B L U M E
```

▲11▲ Welche der mit a bis e bezeichneten Darstellungen können durch Drehung aus der Figur *I* entstanden sein?
(Die Drehachse liegt dabei im Mittelpunkt der Figur!) *L. Flade/H. Knopf*



Matemáticus

▲1▲ Vervollständige die magischen Quadrate!

a)

13,55	1,30	10,05
4,80	8,30	11,80

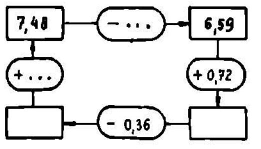
b)

264,35		249,53
227,30	242,12	256,94
	271,76	

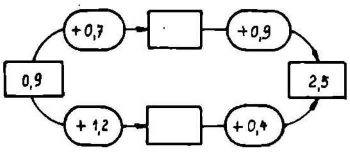
▲2▲ Vervollständige diese Multiplikationen!

```
a) 312·3□        b) 12□4·□3
   ------           --------
    □12              □67□
   □□□               □□68
   ----             -----
   □□□2             □□□□□
```

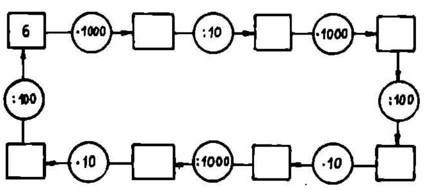
▲3▲ a) Ergänze die in den Rechtecken und Kreisen fehlenden Ziffern!



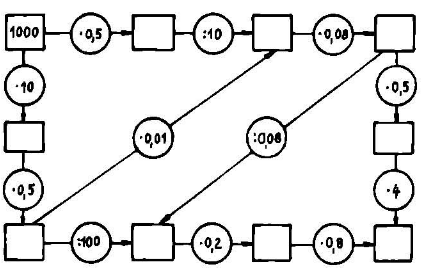
b) Ergänze die in den Rechtecken fehlenden Ziffern!



▲4▲ Vervollständige!



▲5▲ Ergänze die in den Quadraten fehlenden Ziffern!



▲6▲ Vervollständige die Summen durch gleiche Summanden!

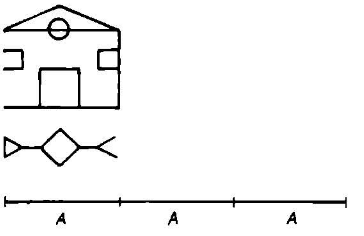
a)... + ... = 12,76
b)... + ... = 6,944

▲7▲ Kreuze die Menge an, die dir am richtigsten erscheint!

Gewicht eines 10jährigen Kindes	Höhe eines Hauses	Fassungsvermögen eines Kruges
100 kg 30 kg 8 kg 300 g	3 dm 12 m 3 km 60 cm	3 hl 4 dl 1,5 l 6 ml

▲8▲ Für drei Kaffee und vier Bonbons wurden 123 Peseten bezahlt. Die drei Kaffee kosteten 75 Peseten. Wieviel kostet ein Kaffee und wieviel ein Bonbon?

▲9▲ Konstruiere einen Fries, indem du die Fläche *A* dreimal aneinandersetzt!

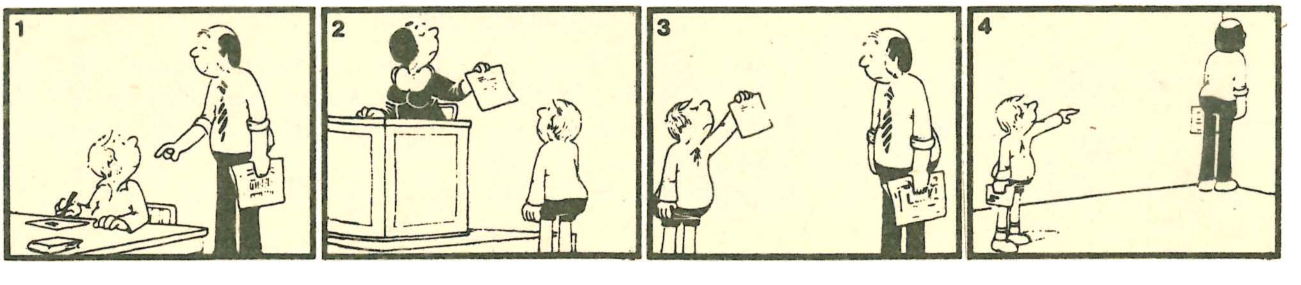


Auswahl unterhaltsamer Aufgaben aus dem spanischen Mathematiklehrbuch *Matemáticus* 4, ausgestellt auf der Internationalen Buchausstellung (IBA), Leipzig, 1984

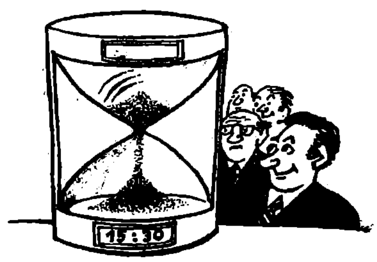
Knobeln und raten

▲ An einem Fluß möchte eine Familie mit einem Ruderboot übersetzen. Der Vater wiegt 80 kg, die Mutter 65 kg, der Sohn 55 kg und die Tochter 40 kg. Das Boot kann aber maximal nur 100 kg Last befördern. Was muß die Familie tun, um trotzdem mit diesem Boot über den Fluß zu kommen?

▲ Herr Anders, Herr Braun und Herr Chor haben ihren Kleingarten in derselben Gartenanlage. Einer von ihnen ist von Beruf Tischler, einer Klempner und einer Architekt. Herr Braun wohnt in derselben Straße wie der Tischler, Herr Chor half dem Klempner beim Bau der Laube. Herr Braun und der Klempner sind nicht miteinander verwandt.
Wer hat nun welchen Beruf?



In freien Stunden · alpha-heiter



Tesfayes Kinder

Fassil: Tenastillin, Tesfaye, wie geht es den Kindern?
Tesfaye: Oh, es geht ihnen gut. Wie du weißt, habe ich jetzt drei.
Fassil: Wie alt sind sie?
Tesfaye: Das Produkt ihrer Lebensjahre ist jetzt 36. Und die Summe ihrer Lebensjahre gleicht dem Alter deines Sohnes, Tamene.
Fassil: (nach einer Pause) Diese Information ist nicht ausreichend.
Tesfaye: O nein, sie ist es nicht. Gut, das älteste ist ein Mädchen.
Fassil: Jetzt weiß ich es!
Wie alt sind Tesfayes Kinder?

aus: Hissab, äthiopische math. Schülerzeitschrift

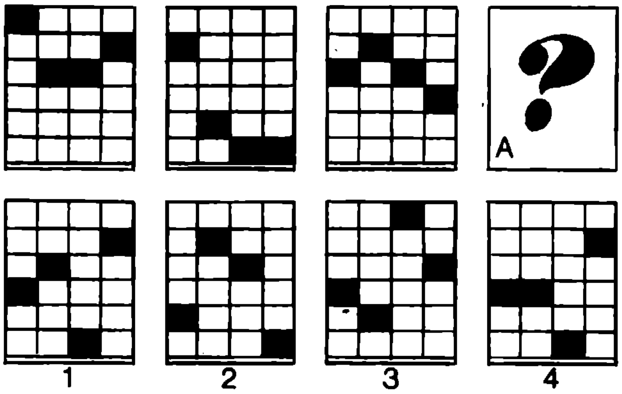
Hallo, Taxi!

John hat sich für £ 3 ein Taxi gemietet, um zum Bahnhof zu fahren. Sein Freund Harold, der genau auf der Hälfte des Weges von Johns Haus zum Bahnhof wohnt, wird von John mitgenommen. Welchen Betrag soll Harold an John zahlen?

aus: Math. Pie, London

Mitgemacht, nachgedacht!

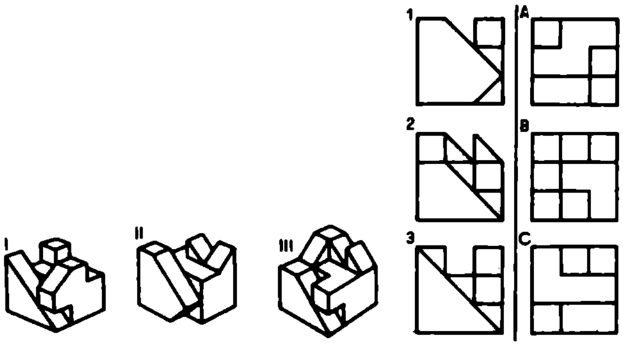
Welche der Figuren 1 bis 4 gehört logischerweise an Stelle des Fragezeichens?



aus: Füles, Budapest

Grund-, Auf- und Kreuzriß

Je drei der dargestellten Risse gehören zusammen. Welche?



Auf Jagd nach der Beute

Im Nationalpark von Tansania filmte ein Kamerateam die Beutejagd eines Gepards. Mit Zeitlupe stellten die Filmemacher fest, daß die flüchtende Antilope der Raubkatze 60 Sprünge voraus war, bevor jene der Beute nachzusetzen begann. Der Gepard machte dann zwei Sätze auf jedesmal drei der Antilope. Der Gepard legte mit drei Sätzen eine ebenso große Strecke zurück wie die Antilope mit sieben.

Wie viele Sätze machten Gepard und Antilope, bis die Raubkatze ihre Beute schlug?

aus: ND v. 22./23. 2. 85, Berlin

Kryptarithmetik

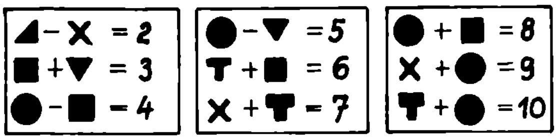
Setze in der folgenden Additionsaufgabe für die verschiedenen Buchstaben verschiedene Ziffern ein, so daß eine richtig gelöste Aufgabe entsteht!

$$\begin{array}{r} a\,b\,c \\ +\,d\,e\,f \\ \hline g\,h\,i \end{array}$$

aus: elementa, norwegische math. Schülerzeitschrift

Welche Zahlen müssen eingesetzt werden?

a)



b)

●	+	○	+	▲	−	□	=	6
▽	−	▲	+	□	−	○	=	5
□	+	○	−	●	+	▲	−	4
○	+	△	+	□	−	▽	−	3

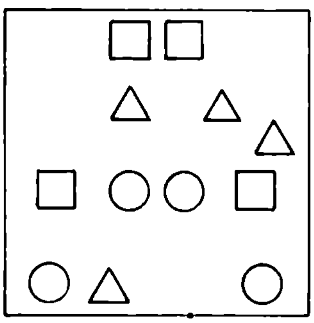
aus: Mathe-LVZ, Leipzig

Spiel und Spaß

Laßt einen Freund mit zwei Würfeln trudeln und sagt ihm, daß ihr die geworfene Augenzahl beider Würfel ohne hinzusehen erraten werdet! Ihr fordert ihn auf: „Multipliziere die kleinere Augenzahl mit 2, addiere dann 5, multipliziere das Ergebnis mit 5, und zähle nun die größere geworfene Augenzahl dazu!" Das Resultat laßt ihr euch nennen. Nehmen wir an, es sei 71. Ihr subtrahiert davon 25 und erhaltet 46: 4 Zehner und 6 Einer. Euer Freund hat also eine 4 und eine 6 gewürfelt. Gerechnet wurde wie folgt:
$4 \cdot 2 = 8$; $8 + 5 = 13$; $13 \cdot 5 = 65$; $65 + 6 = 71$; $71 - 25 = 46$.
So könnt ihr jeden Wurf erraten, auch, wenn beide Würfel die gleiche Augenzahl zeigen.

Gleichmäßige Verteilung

In wieviel kongruente Teile muß man das vorliegende Quadrat einteilen, damit in jedem der Teile je ein kleines Quadrat, ein kleines Dreieck und ein kleiner Kreis enthalten sind?



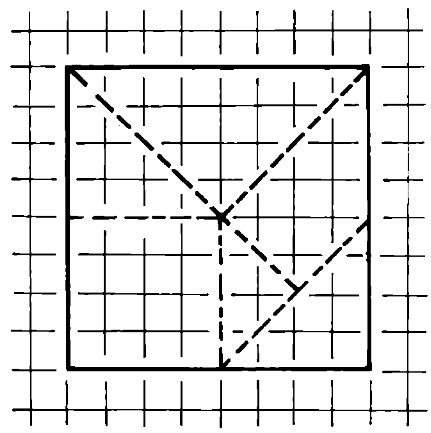
VK Extra oder Normal?

Herr Schulze möchte für seinen Wagen statt wie bisher Vergaserkraftstoff Normal den um 10 % teureren VK Extra verwenden. Dafür beschließt er, in Zukunft 10 % weniger an Kilometern zu fahren. Wie wirkt sich dieser Entschluß auf seinen Geldbeutel aus?

aus: Pythagoras, Niederlande

Legespiel

Das große Quadrat ist entlang der gestrichelten Linien in 6 Teile zu zerschneiden. Setze die Teile zu einem
Parallelogramm,
Trapez,
Sechseck,
rechtwinkligen Dreieck,
schmalen Rechteck und
dicken Rechteck zusammen!

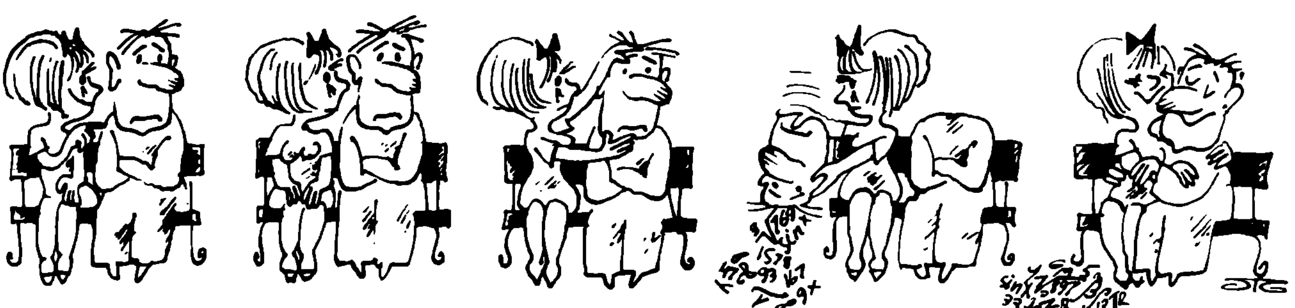


aus: Mathematics in school, englische math. Schülerzeitschrift

Vierziffrige Zahl mit gleichen Grundziffern gesucht!

Findet drei aufeinanderfolgende ungerade natürliche Zahlen, deren Summe der Quadrate eine vierziffrige Zahl mit gleichen Grundziffern ergibt!

Von einem mongolischen IMO-Teilnehmer, 1984, an alpha überreicht



aus: Freie Welt, Tesler, Moskau

XXIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Erfurt, 3. bis 6. Juni 1985

Olympiadeklasse 10

241041 Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare $(x;y)$ ganzer Zahlen, für die $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1985}$ gilt!

241042 Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Auf den Seiten BC, CA, AB seien D, E bzw. F diejenigen Punkte, für die $\overline{BD}=2\cdot\overline{CD}$, $\overline{CE}=2\cdot\overline{AE}$, $\overline{AF}=2\cdot\overline{BF}$ gilt. Weiter sei jeweils U bzw. V bzw. W der Schnittpunkt von AD mit BE bzw. von BE mit CF bzw. von CF mit AD.
Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen der Flächeninhalt des Dreiecks UVW stets gleich einem Siebentel des Flächeninhalts des Dreiecks ABC ist!

Von den nachstehenden Aufgaben 241043A und 241043B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

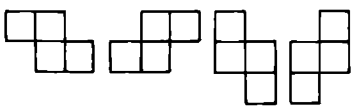
241043A a) Man beweise, daß für jede reelle Zahl p mit $1 \leqq p \leqq 2$ eine Funktion f mit den folgenden Eigenschaften (1), (2), (3) existiert:
(1) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen definiert.
(2) Für alle reellen Zahlen x mit $2 \leqq x < 4$ gilt $f(x)=p$.
(3) Für alle reellen Zahlen x gilt
$$f(x+2)=\frac{f(x)}{5\cdot f(x)-1}.$$
b) Man ermittle für jede reelle Zahl p mit $1 \leqq p \leqq 2$ und jede Funktion f, die die Eigenschaften (1), (2), (3) hat, den Funktionswert $f(1985)$ in Abhängigkeit von p.

241043B Es sei P die Oberfläche einer beliebigen Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Man beweise: Wenn der Durchschnitt von P mit einer Ebene E ein (nicht entartetes) Parallelogramm ist, dann ist er ein Quadrat.
(Hinweis: Ein Parallelogramm heißt genau dann „nicht entartet", wenn keine drei seiner Eckpunkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen.)

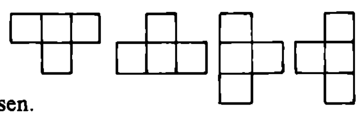
241044 Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(a;b)$ natürlicher Zahlen, für die $a!+b!=(a+b)!$ gilt!
(Hinweis: Für jede natürliche Zahl $n \geqq 1$ ist $n!$ definiert als das Produkt aus allen denjenigen natürlichen Zahlen k, für die $1 \leqq k \leqq n$ gilt; ferner ist $0!=1$ definiert.)

241045 Es sei
$$T=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{999\,998}}+\frac{1}{\sqrt{999\,999}}+\frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}.$$
Weisen Sie nach, daß dann $1998 < T < 1999$ gilt!

241046 a) Es ist zu entscheiden, ob es möglich ist, die Felder des 8×8-Schachbrettes derart mit den Zahlen 1, 2, ..., 64 zu numerieren, daß für jede Teilfigur des Schachbrettes, die von der folgenden Form ist,



die Summe der vier Zahlen in den Teilfiguren durch vier teilbar ist.
b) Dieselbe Aufgabe ist für

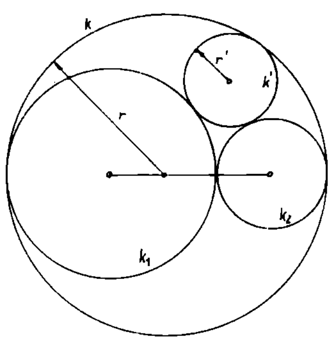


zu lösen.

Olympiadeklassen 11/12

241241 a) Man beweise, daß durch
$$f(x)=\frac{(x^2-x)(x^2-x+5)+6}{(x^2-x)(x^2-x+6)+9}$$
eine Funktion f für alle reellen Zahlen x definiert wird.
b) Man ermittle den Wertebereich dieser Funktion.

241242 Über vier Kreise k, k_1, k_2, k' wird folgendes vorausgesetzt (s. Bild): Die Kreise k_1 und k_2 berühren einander von außen; die Mittelpunkte von k_1, k_2 und k liegen auf einer gemeinsamen Geraden; die Kreise k_1 und k_2 berühren den Kreis k von innen; der Kreis k' berührt die Kreise k_1 und k_2 von außen und den Kreis k von innen.



Man beweise: Unter diesen Voraussetzungen gilt für die Radien r, r' von k bzw. k' stets $r' \leqq \frac{r}{3}$.

241243 Man ermittle alle diejenigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen x mit $x \neq 0$ definiert sind und den folgenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:
(1) Für alle reellen Zahlen x mit $x \neq 0$ gilt
$f\left(\frac{1}{x}\right)=x\cdot f(x)$.
(2) Für alle reellen Zahlen x und y mit $x \neq 0$, $y \neq 0$ und $x+y \neq 0$ gilt
$f\left(\frac{1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{y}\right)=1+f\left(\frac{1}{x+y}\right)$.
(3) Es gilt $f(1)=2$.

241244 Es seien a, b und c positive reelle Zahlen mit
$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}.$$
Man beweise, daß das Gleichungssystem
$$\sqrt{y-a}+\sqrt{z-a}=1 \quad (1)$$
$$\sqrt{z-b}+\sqrt{x-b}=1 \quad (2)$$
$$\sqrt{x-c}+\sqrt{y-c}=1 \quad (3)$$
genau eine Lösung (x,y,z) hat, wobei x, y, z reelle Zahlen sind.

241245 Es ist zu beweisen:
Wenn die Längen der Kanten eines Tetraeders $ABCD$ nicht kleiner als $\sqrt{3}$ und nicht größer als 2 sind, dann sind die Innenwinkel zwischen je zwei Seitenflächen des Tetraeders $ABCD$ nicht größer als 90°.

Von den nachstehenden Aufgaben 241246A und 241246B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

241246A Man untersuche, ob es 40 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gibt, die sämtlich kleiner als 10^9 und nicht Primzahlen sind.

241246B Man ermittle alle diejenigen positiven reellen Zahlen k, für welche die durch
$$x_1=1,$$
$$x_{n+1}=\sqrt{k(x_n^2+x_n)} \quad (n=1,2,3,\ldots)$$
definierte Zahlenfolge (x_n) konvergent ist. Zu jeder solchen Zahl k ermittle man den Grenzwert der Zahlenfolge (x_n).

Die XXIV. OJM der DDR fand in der Pädagogischen Hochschule (3. Juni bis 6. Juni) statt.
Einen ersten Preis in Klasse 10:
Alexander Kley, EOS *Heinrich Hertz*, Berlin (Kl. 10); Ronald Schurath, IV. OS Forst, Bez. Cottbus (Kl. 9); Holger Maaß, W.-Seelenbinder-OS, Bad Lausick, Bez. Leipzig (Kl. 10); Gunter Döge, Spezialschule *Friedrich Engels*, Riesa, Bez. Dresden; Frank Göring, OS *Erich Weinert*, Bad Berka, Bez. Erfurt (Kl. 8).
Einen ersten Preis in Klasse 11/12:
Stefan Günther, EOS *Heinrich Hertz*, Berlin (Kl. 10); Jörg Jahnel, Spezialschule *Carl Zeiss*, Jena, Bez. Gera (Kl. 10); Ralf Stiebe, TH *Otto von Guericke*, Magdeburg (Kl. 11); Uwe Müller, EOS J. W. v. Goethe, Brandenburg, Bez. Potsdam (Kl. 12); Georg Hein, EOS *Heinrich Hertz*, Berlin.
Einen 2. Preis erhielten 19 Schüler, einen 3. Preis 33 Schüler und eine Anerkennungsurkunde 24 Schüler. An der OJM nahmen 277 Schüler, davon 29 Mädchen, teil.

Lösungen

Lösungen zu:
Mein Taschenrechner „SR 1"

9) $99\,999 \cdot 10^{99}$
10a) $4{,}5 \cdot 10^{99}$
b) $9 \cdot 10^{99}$
c) Rechner zeigt Überfüllung an!
d) Rechner zeigt Überfüllung an!
e) Rechner zeigt Überfüllung an!
11a) 0,0000075
b) $7{,}5 \cdot 10^{-7} = 0{,}00000075$
c) $6{,}6666 \cdot 10^{-1} = 0{,}66666$
d) $1{,}6260 \cdot 10^{-2} = 0{,}016260$

12a)	Anzeige des SR 1	0.2020202
b)		2.1212 – 01
c)		0.3030303
d)		3.4343 – 01
e)		0.4040404
f)		5.0505 – 01
g)		6.0606 – 01
h)		7.0707 – 01

Der SR 1 verwendet trotz Vorhandenseins einer linken Null keine Zehnerpotenzschreibweise, wenn an der 8. Stelle nach dem Komma eine Null und an der 9. Stelle nach dem Komma eine 0, 1, 2, 3 oder 4 auftritt.

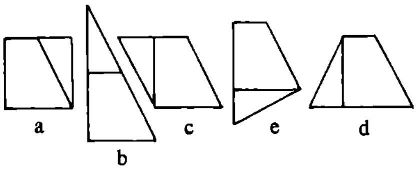
13a)	2 654 987	(genauer Wert)
b)	16 296,3	(genauer Wert)
c)	$6{,}4581 \cdot 10^{8}$	(Näherungswert)
d)	0,1010101	(Näherungswert)

15a) Der SR 1 arbeitet nur mit 9 Stellen.
b) Der SR 1 arbeitet mit dem Näherungswert $3{,}1415926\underline{5}$ für π.
16) Zum Beispiel 0.12345678912
0.9876543212

Lösungen zur: Sprachecke

▲1▲ Stelle anhand des Schattens fest, ob sich die Skistöcke berühren!
Lösung: Sie berühren sich nicht. Die Gerade durch den Schnittpunkt der beiden Schatten, die parallel zu den Verbindungsgeraden zwischen den oberen Enden der Skistöcke und deren Schatten verläuft, geht nicht durch den Punkt, wo ein Stock den anderen verdeckt.

▲2▲ Geometrische Puzzles für Anfänger: Figur 1 zeigt ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Grundseite 1 Einheit und dessen Höhe 2 Einheiten lang sind, und ein rechtwinkliges Trapez mit zwei zueinander senkrecht stehenden Seiten, die je 2 Einheiten lang sind und einer kurzen Seite, die 1 Einheit lang ist. Schneide diese beiden Figuren aus einem Stück Karton aus, und zeige, daß diese zu folgenden Flächen zusammengelegt werden können:
a) ein Quadrat, b) ein Dreieck, c) ein Parallelogramm, d) ein Viereck mit zwei rechten Winkeln!
Durch Drehung des Dreiecks kann e) ein gleichschenkliges Trapez zusammengesetzt werden.
Lösung:

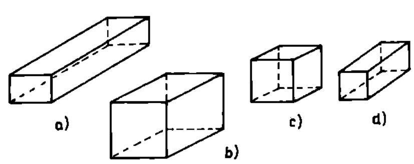


▲3▲ Drei Autobuslinien haben als Abfahrtsplatz den Bahnhof Montparnasse in Paris. Die Autobusse der ersten Linie sind nach 1 h 36 min zurück und haben 4 min Pause.
Die Autobusse der zweiten Linie sind nach 1 h 48 min zurück und haben 12 min Pause; die der dritten Linie sind nach 2 h 10 min zurück und haben 20 min Pause.
Drei Autobusse, einer auf jeder Linie, fahren gemeinsam um 8 h am Bahnhof Montparnasse ab.
a) Wann fahren die drei Autobusse das erste Mal wieder gemeinsam vom Bahnhof Montparnasse ab?
b) Wieviel Fahrten hat dann jeder Autobus durchgeführt?
Lösung: a) Der erste Bus braucht bis zur nächsten Abfahrt vom Bahnhof Montparnasse $96 + 4 = 100$ min, der zweite $108 + 12 = 120$ min und der dritte $130 + 20 = 150$ min. Die nächste gemeinsame Abfahrt ergibt sich dann als kleinstes gemeinsames Vielfaches von 100, 120 und 150, also nach 600 min. Die Autobusse fahren um 18 Uhr wieder gemeinsam vom Bahnhof ab.
b) Dann hat der erste Bus $600 : 100 = 6$ Fahrten, der zweite Bus $600 : 120 = 5$ Fahrten und der dritte Bus $600 : 150 = 4$ Fahrten durchgeführt.

Lösungen zu: Rund um den Quader

▲1▲ *A, B, E, F*
▲2▲ $V = a^3$; *B*; $V = a \cdot b \cdot c$; *A, B, E, F*; $V = A_G \cdot h$; *A, B, E, F, G, I*; $V = \frac{1}{3} A_G \cdot h$; *D, H*; $V = a^2 \cdot h$; *B, F*.
▲3▲ a) ja; b) nein.
▲4▲ a) 23; b) 56.
▲5▲ $V = 48\,000\ \text{mm}^3$;
$A_0 = 12\,000\ \text{mm}^2$
▲6▲ a) 8; b) 10; c) 8.
▲7▲ a) siehe Bild; b) 8.

▲8▲ a) *E*; b) *C*; c) *E*.
▲9▲ 6 cm.
▲10▲ Siehe Bild.



▲11▲ $64\ \text{mm}^3$.
▲12▲ 1 – 2 – 3 – 7
1 – 2 – 3 – 4 – 8 – 7
1 – 2 – 3 – 4 – 8 – 5 – 6 – 7
1 – 2 – 6 – 7
1 – 2 – 6 – 5 – 8 – 7
1 – 2 – 6 – 5 – 8 – 4 – 3 – 7
1 – 4 – 3 – 7
1 – 4 – 3 – 2 – 6 – 7
1 – 4 – 3 – 2 – 6 – 5 – 8 – 7
1 – 4 – 8 – 7
1 – 4 – 8 – 5 – 6 – 7
1 – 4 – 8 – 5 – 6 – 2 – 3 – 7
1 – 5 – 6 – 7
1 – 5 – 6 – 2 – 3 – 7
1 – 5 – 6 – 2 – 3 – 4 – 8 – 7
1 – 5 – 8 – 7
1 – 5 – 8 – 4 – 3 – 7
1 – 5 – 8 – 4 – 3 – 2 – 6 – 7
▲13▲ Es verdoppelt sich!
▲14▲ 4 cm.

Lösungen zu:
Übung macht den Meister

▲1▲
a) $\alpha = 153°$ g) $\alpha = 120°$; $\beta = 150°$
b) $\alpha = 150°$ h) $\alpha = 100°$; $\beta = 70°$
c) $\alpha = 120°$ i) $\alpha = 100°$; $\beta = 100°$
d) $\alpha = 70°$ j) $\alpha = 90°$; $\beta = 45°$
e) $\alpha = 90°$ k) $\alpha = 40°$; $\beta = 40°$
f) $\alpha = 30°$ l) $\alpha = 70°$; $\beta = 45°$
▲2▲. a) 1,9; b) 73,2; c) 0,0189; d) $\frac{5}{9}$
▲3▲ a) 1,5 km; b) 12 cm; c) 1 : 50 000
▲4▲ $(2 + 4) : \left(\frac{1}{2} \cdot 2\right)$
▲5▲ b, c, d.
▲6▲ a) $x = 3$; b) $x = 3$; c) $x = 7$;
d) $x = 1$.
▲7▲ a) 21; 28; b) 2,1875; 2,09375;
c) 78; 158.
▲8▲ $11 \cdot x - 37 = 5{,}9$; $x = 3{,}9$.
▲9▲ Beispiel:
$1 = 2 - 2 : 2 + 2 - 2$
$2 = 2 + 2 + 2 - 2 - 2$
$3 = 2 + 2 : 2 + 2 - 2$
$4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 - 2$
$5 = 2 + 2 + 2 - 2 : 2$
$6 = 2 + 2 + 2 + 2 - 2$
$7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 : 2$
$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 - 2$
$9 = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 : 2$
$10 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2$
▲10▲
$$\begin{array}{r} 8\,240 \\ +\ 63\,150 \\ \hline 71\,390 \end{array}$$
▲11 b; e.

Lösungen zu: Matemáticus

▲1▲ a) 6,55; 15,3; 3,05
b) $264{,}35 + 212{,}48 + 249{,}53 = 726{,}36$
$234{,}71 + 271{,}76 + 219{,}89 = 726{,}36$
▲2▲ a)
$$\begin{array}{r} 312 \cdot 31 \\ \hline 312 \\ 936 \\ \hline 9672 \end{array}$$
b)
$$\begin{array}{r} 1224 \cdot 73 \\ \hline 3672 \\ 8568 \\ \hline 89352 \end{array}$$
▲3▲ a)
$$\begin{array}{rrr} 7{,}48 & -0{,}89 & 6{,}59 \\ +\,0{,}53 & & +\,0{,}72 \\ 6{,}95 & -0{,}3\dot{6} & 7{,}31 \end{array}$$
b) 1,6 bzw. 2,1.
▲4▲ 8.
▲5▲ 6 – 6000 – 600 – 600 000 – 6000 – 60 000 – 60 – 600 – 6

▲6▲ a) $6{,}38 + 6{,}38 = 12{,}76$
b) $3{,}472 + 3{,}472 = 6{,}944$

▲7▲ 30 kg; 12 m; 1,5 l.

▲8▲ 3 Kaffee kosten 75 Peseten, dann kostet 1 Kaffee $75 : 3 = 25$ Peseten. Die vier Bonbons kosten $123 - 75 = 48$ Peseten. Ein Bonbon kostet dann $48 : 4 = 12$ Peseten.

▲9▲ Die Lösung sei dem Leser selbst überlassen.

Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

Tesfayes Kinder

Es gibt 8 Möglichkeiten für das Produkt von 36.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	
1	1	1	1	1	2	2	3	
1	2	3	4	6	2	3	3	
36	18	12	9	6	9	6	4	
38	21	16	14	13	13	11	10	Summen

Da Fassil das Alter seines Sohnes kennt und noch überlegt, kann nur die zweimal erscheinende Summe 13 in Frage kommen. Da aber von einem ältesten Kind die Rede ist, gibt es nur die Lösung, daß Tesfayes Kinder 2mal 2 Jahre und einmal 9 Jahre alt sind.

Hallo Taxi!

Wenn Harold eine Strecke der Länge s mitfährt, dann fährt John eine Strecke der Länge $2s$. Für $3s$ werden £ 3 bezahlt, also muß Harold £ 1 zahlen.

Mitgemacht, nachgedacht!

An Stelle des Fragezeichens gehört logischerweise Figur 4.

Grund-, Auf- und Kreuzriß

Es gehören zusammen: I, 3, A; II, 1, C; III, 2, B.

Auf Jagd nach Beute

Wir bezeichnen mit t ein Zeitintervall, in dem die Antilope drei und der Gepard zwei Sätze machen. Daraus ergibt sich für die Zahl der Sprünge (gerechnet von dem Punkt, an dem der Gepard die Verfolgung begann) $60 + 3t$ bzw. $2t$. Um zu den zurückgelegten Strecken zu gelangen, dividieren wir die Zahl der Antilopensprünge durch 7, die des Geparden durch 3. Beim Zusammentreffen gilt $(60 + 3t) : 7 = 2t : 3$. Wir erhalten $t = 36$. In 36 Zeitintervallen machte die Antilope 108 und der Gepard 72 Sprünge.

Kryptarithmetik

Lösungsbeispiele:

a) ohne Verwendung der Null:

$$\begin{array}{r}618\\+\underline{354}\\972\end{array}\qquad\begin{array}{r}439\\+\underline{128}\\567\end{array}\qquad\begin{array}{r}293\\+\underline{571}\\864\end{array}$$

b) unter Verwendung der Null:

$$\begin{array}{r}563\\+\underline{408}\\971\end{array}\qquad\begin{array}{r}753\\+\underline{109}\\862\end{array}\qquad\begin{array}{r}618\\+\underline{307}\\925\end{array}$$

c) aus 513 folgt auch 567 oder 417

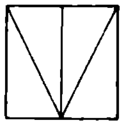
$$\begin{array}{r}+\underline{467}\\980\end{array}\qquad+\qquad\begin{array}{r}\underline{413}\\980\end{array}\qquad\begin{array}{r}+\underline{563}\\980\end{array}$$

Welche Zahlen müssen eingesetzt werden?

a) $5 - 3 = 2;\ 2 + 1 = 3;\ 6 - 2 = 4$
$6 - 1 = 5;\ 4 + 2 = 6;\ 3 + 4 = 7$
$6 + 2 = 8;\ 3 + 6 = 9;\ 4 + 6 = 10$

b) $5 + 3 + 2 - 4 = 6$
$6 - 2 + 4 - 3 = 5$
$4 + 3 - 5 + 2 = 4$
$3 + 2 + 4 - 6 = 3$

Gleichmäßige Verteilung



VK Extra oder Normal?

Die Fahrkosten betragen
vorher $y\,\text{km} \cdot x\,\text{M/km} = xy\,\text{M}$ und nachher
$\frac{90}{100} \cdot y\,\text{km} \cdot \frac{110}{100} \cdot x\,\text{M/km} = 0{,}99xy\,\text{M}$.
$xy - 0{,}99xy = 0{,}01xy$
Herr Schulze spart 1 % an Ausgaben ein.

Legespiel

Die Lösung sei dem Leser überlassen.

Vierziffrige Zahl mit gleichen Grundziffern gesucht!

$41^2 + 43^2 + 45^2 = 5555$.

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. J. W. Schmidt
Heft 4/85

▲2578▲ Das Ungleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn
(*) $a_1 = a_2 = a_3 = a_4,\ 3(a_3 - a_2) \leqq 2(a_4 - a_1)$
gilt.

Beweis:

Notwendigkeit: Es sei eine Lösung vorhanden. Dann folgt
$x_{i-1} \leqq a_i,\quad x_i \geqq a_i\ (i = 1, 2, 3, 4)$,
und somit
$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq a_4$.
Weiterhin erhält man
$x_2 \leqq 3a_2 - 2x_1 \leqq 3a_2 - 2a_1$
und
$$a_4 \geqq x_3 \geqq \frac{1}{2}(3a_3 - x_2)$$
$$\geqq \frac{1}{2}(3a_3 - 3a_2 + 2a_1).$$

Hinlänglichkeit: Es gelte (*). Dann lassen sich Lösungen des Ungleichungssystems konkret angeben, wenn man zwei Fälle unterscheidet.

Fall 1: Es gelte $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq a_4$ und $a_3 - 3a_2 \leqq -2a_1$ (Verschärfung von (*)). Dann ist, wie man geradlinig bestätigt,
$$x_0 = \frac{3}{2}a_1 - \frac{3}{4}a_2 + \frac{1}{4}a_3$$
$$x_1 = \frac{3}{2}a_2 - \frac{1}{2}a_3$$
$$x_2 = a_3$$
$$x_3 = a_3$$
$$x_4 = -2a_3 + 3a_4$$
eine Lösung.

Fall 2: Es gelte $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq a_4$ und $-a_3 + 3a_2 \leqq 2a_1,\ 3(a_3 - a_2) \leqq 2(a_4 - a_1)$. In diesem Fall überprüft man schrittweise, daß
$$x_0 = a_1 \qquad x_1 = a_1$$
$$x_2 = -2a_1 + 3a_2$$
$$x_3 = a_1 - \frac{3}{2}a_2 + \frac{3}{2}a_3$$
$$x_4 = -\frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{4}a_2 - \frac{3}{4}a_3 + \frac{3}{2}a_4$$
eine Lösung ist.

Lösungen zu: Knobel-Wandzeitung
Heft 4/85

Charakteristische Wege:

1. Weg, der „gerade Zahlen" verbindet:
A–12–8–16–6–14–4–8–2–B,
2. Weg, der „ungerade Zahlen" verbindet:
A–11–9–13–15–9–5–13–11–B,
3. Weg, der „Primzahlen" verbindet:
A–11–7–2–5–13–3–19–3–17–2–B,
4. Weg, der „durch 3 teilbare Zahlen" verbindet:
A–18–3–6–12–B.

Erstaunliches:

Durch das dreimalige Hintereinanderschreiben der gedachten zweistelligen Zahl entsteht eine sechsstellige Zahl, die gleich dem Produkt der gedachten Zahl mit der Zahl $10101 = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$ ist. (Denkt man sich z. B. die Zahl 51, so entsteht
$515151 = 51 \cdot 10^4 + 51 \cdot 10^2 + 51$
$= 51(10^4 + 10^2 + 1) = 51 \cdot 10101$
$= 51 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$.) Dividiert man dieses Produkt nun nacheinander durch 3, 7, 13 und 37, so erhält man als Ergebnis die gedachte zweistellige Zahl zurück.

In der Bäckerei

Sind beim 1. Kunden noch $a_1 = x$ Brötchen vorhanden, so sind beim 2. Kunden, da der 1. Kunde $x/3$ Brötchen hätte nehmen müssen, noch $a_2 = \frac{2}{3}x$, beim 3. Kunden noch $a_3 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 x$, beim 4. Kunden noch $a_4 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 x$ und am Schluß noch $a_5 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 x = 16$ Brötchen vorhanden. Daraus folgt $x = 3^4 = 81$. Der Bäcker hatte also anfangs noch 81 Brötchen. Der 1. Kunde hätte folglich $b_1 = \frac{1}{3} \cdot 81 = 27$ Brötchen, der 2. Kunde $b_2 = \frac{1}{3}(81 - 27) = 18$ Brötchen, der 3. Kunde $b_3 = \frac{1}{3}(81 - 27 - 18)$ $= 12$ Brötchen und der 4. Kunde b_4 $= \frac{1}{3}(81 - 27 - 18 - 12) = 8$ Brötchen nehmen müssen. (Es gilt auch: $b_1 = 27$, $b_2 = \frac{2}{3} \cdot 27 = 18$, $b_3 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 27 = 12$, $b_4 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 27 = 8$, d. h., es handelt sich bei den a_n und b_n um geometrische Folgen mit dem Quotienten $q = \frac{2}{3}$ und den Anfangsgliedern $a_1 = 81$ bzw. $b_1 = 27$.)

Seemannsgarn?

Wenn auch manches an der Geschichte stimmen mag, so hat der alte Seemann jedoch mit der Menge der von den 21 Mädchen dargereichten Apfelsinen unrealistisch stark übertrieben. Die 21 Mädchen hätten nämlich die folgenden Anzahlen von Apfelsinen (diese bilden eine geometrische Folge mit dem Anfangsglied $a_1 = 1$ und dem Quotienten $q = 2$) auf ihrem Teller haben müssen: 1, 2, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$, $2^7 = 128$, $2^8 = 256$, $2^9 = 512$, $2^{10} = 1024$, $2^{11} = 2048$, $2^{12} = 4096$, $2^{13} = 8192$, $2^{14} = 16\,384$, $2^{15} = 32\,768$, $2^{16} = 65\,536$, $2^{17} = 131\,072$, $2^{18} = 262\,144$, $2^{19} = 524\,288$, und das 21. Mädchen: $2^{20} = 1\,048\,576$. Abgesehen davon, daß so viele Apfelsinen nicht auf einen Teller passen, so hätte z. B. das 21. Mädchen, wenn man pro Apfelsine nur 100 g rechnet, eine Masse von $1\,048\,576 \cdot 100$ g, also rund 105 Tonnen bewältigen müssen. Außerdem wäre die Gesamtanzahl der von den 21 Mädchen überreichten Apfelsinen

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{20} = 1 \cdot \frac{2^{21} - 1}{2 - 1} = 2^{21} - 1 = 2\,097\,151,$$

und eine solche Menge ist wohl kaum von den Seeleuten eines Schiffes auf einmal zu verspeisen. Also doch Seemannsgarn!

Badefreuden

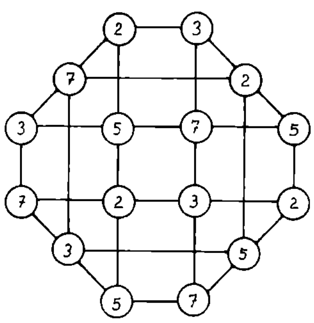
Es ist $1000 = 2^3 \cdot 5^3$.

Es ergibt sich eindeutig der Weg:

Peter–1–2–1–2–5–2–1–5–5–Bad.

Primzahl-Magie

Es ist $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ die Primfaktorzerlegung von 210. Folglich sind nur die 4 Primzahlen 2, 3, 5 und 7 zur Eintragung zu verwenden. Die Abbildung zeigt eine mögliche Eintragung:



Gerechte Teilung

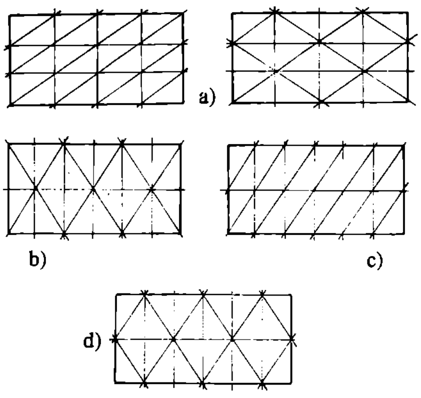
Es ist $525 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7$. Da die Figur nur die Zahlen 3, 5 und 7 enthält, so müssen sich in jedem Teil die Zahlen 3, 5, 5 und 7 befinden. Es entstehen folglich $24 : 4 = 6$ kongruente Vielecke (konkave Sechsecke):

5	3	5	5	7	3
7	3	5	7	5	5
7	3	5	7	5	5
5	3	5	5	7	3

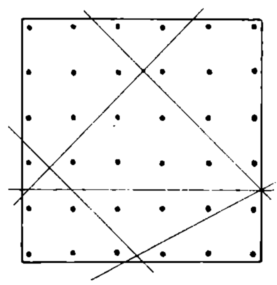
Frage an Aquarianer

Die Maßzahl des Volumens des Schöpfgefäßes muß sowohl Teiler von 6 als auch von 20 und außerdem größtmöglich sein, d. h., sie muß der größte gemeinsame Teiler von 6 und 20 sein. Es ist $6 = 2 \cdot 3$, $20 = 2^2 \cdot 5$ und g.g.T$(6, 20) = 2$. Das Schöpfgefäß darf höchstens 2 Liter fassen.

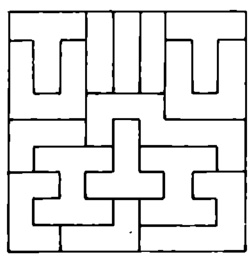
Rechteckzerlegung



Von jedem etwas



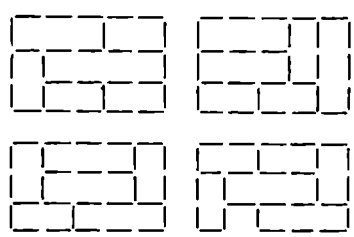
Nur Geduld



Verschwundene Quadrate

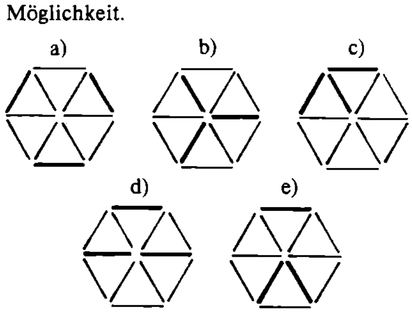
a) Die Figur enthält 26 Quadrate (15 Quadrate aus je 4, 8 Quadrate aus je 8 und 3 Quadrate aus je 12 Hölzchen).

b) Die Abbildung zeigt 4 Möglichkeiten:



Sechseckspielereien

In den Fällen a) und b) gibt es je 2 und in den Fällen c), d) und e) je 6 Abänderungsmöglichkeiten. Die Abbildung zeigt je eine Möglichkeit.



Am Trapez

Trapez 9 hat den größten Flächeninhalt (= 9 Kästchenflächen). Alle anderen Trapeze haben den gleichen Flächeninhalt von 8 Kästchenflächen, da bei ihnen $m \cdot h = 8$ (m: Mittellinie, h: Höhe) gilt.

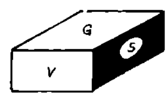
Mit Streichholzschachteln

Mit den Bezeichnungen der Abbildung gilt offenbar

$$G > S > V. \qquad (1).$$

Seien nun A, B, C, D, E bzw. F die Oberflächen der Körper a), b), c), d), e) bzw. f), dann gilt: $A = 6G + 2S + 6V$, $B = 2G + 6S + 6V$, $C = 6G + 6S + 2V$, $D = 4G + 4S + 6V$, $E = 6G + 4S + 4V$ bzw. $F = 4G + 4S + 6V$. Mit Hilfe von (1) kann man die Oberflächen gegeneinander abschätzen, und man erhält:

$C > E > A > D = F > B$.



Lösungen zum alpha-Wettbewerb

Heft 1/85, Fortsetzung

Ma 6 ■ 2532 $\overline{AB}$ hat die Länge 6 cm + 2 cm = 8 cm; $\overline{BC}$ hat die Länge 2 cm + 3 cm = 5 cm. Wegen $\overline{AB} = \overline{CD}$ und $\overline{BC} = \overline{AD}$ haben $\overline{DG}$ und $\overline{DH}$ die Länge 2 cm. Für den Flächeninhalt A_V des Vierecks $EFGH$ gilt deshalb

$$A_V = \left(8 \cdot 5 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6\right) \text{cm}^2 = 18 \text{ cm}^2.$$

Ma 7 ■ 2533 Wegen $t = \frac{s}{v}$ und $t_1 = t_2$ und $s_2 = 50 - s_1$ gilt $\frac{s_1}{14} = \frac{50 - s_1}{11}$, $11 s_1 = 700 - 14 s_1$, $25 s_1 = 700$, $s_1 = 28$ und somit $t_1 = \frac{28}{14} = 2$.

Nach 2 Stunden, also um 10 Uhr, treffen beide aufeinander. Der Treffpunkt ist 28 km von Erfurt entfernt.

Ma 7 ■ 2534 Aus $\frac{378 \cdot 436 - 56}{378 + 436 \cdot 377} = \frac{378 \cdot 436 - 56}{377 \cdot 436 + 378} = \frac{377 \cdot 436 + 436 - 56}{377 \cdot 436 + 378} = \frac{377 \cdot 436 + 380}{377 \cdot 436 + 378}$ folgt, daß der Zähler des Quotienten um 2 größer ist als der Nenner. Folglich ist der Quotient größer als 1.

Ma 7 ■ 2535 Nach Voraussetzung gilt $(n - 1)(n + 1) = 483 = 1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 23$, $(n - 1)(n + 1) = 21 \cdot 23$, also $n = 22$.

Ma 7 ■ 2536 Angenommen in der ersten Box befinden sich n Kaninchen und in der zweiten Box befinden sich d Kaninchen mehr als in der ersten; dann gilt

$$\begin{aligned} n + (n + d) + (n + 2d) \\ + (n + 3d) &= 30, \\ 4n + 6d &= 30, \\ 2n + 3d &= 15, \\ 3d &= 15 - 2n, \\ d &= 5 - \frac{2n}{3}. \end{aligned}$$

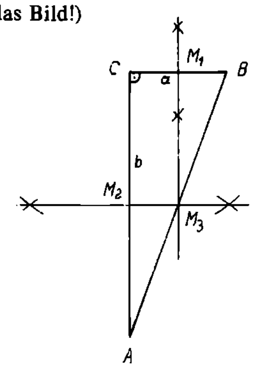
Für $n = 3$ gilt $d = 3$, und wir erhalten

$3 + 6 + 9 + 12 = 30$; diese Lösung entfällt, da sich in der vierten Box 12 Kaninchen, also mehr als 10 Kaninchen, befinden würden.
Für $n = 6$ gilt $d = 1$, und wir erhalten $6 + 7 + 8 + 9 = 30$. Es befinden sich in der ersten Box 6, in der zweiten 7, in der dritten 8, in der vierten 9 Kaninchen.
Für $n = 9$ gilt $d = -1$; diese Möglichkeit entfällt, da d negativ ist.

Ma 8 ■ 2537 Die in der Aufgabe aufgestellte Behauptung läßt sich durch die folgende Gleichung ausdrücken:
$$10a + b - (a + b) = 9a.$$
Die mehrfache äquivalente Umformung ergibt
$$10a + b - a - b = 9a,$$
$$9a = 9a,$$
$$a = a.$$
Da die letzte Aussageform allgemeingültig ist und nur äquivalent umgeformt wurde, folgt die Wahrheit der Behauptung, w.z.b.w.

Ma 8 ■ 2538 Nach der Aufgabenstellung gelten die folgenden Gleichungen:
(1) $A + B + C = 30$,
(2) $C + 1 = A$ und
(3) $2C + 1 = B$.
(Wir wollen die Variablen A, B, C für die jeweilige Anzahl von Fischen setzen, die die entsprechenden Angler gefangen haben!) Durch Einsetzen von (2) und (3) in (1) erhalten wir
(4) $C + 1 + 2C + 1 + C = 30$
bzw. $C = 7$.
Nun ergeben sich $A = 8$ und $B = 15$.
Der Angler A angelte 8 Fische, B angelte 15 Fische und C angelte 7 Fische.

Ma 8 ■ 2539 Man errichtet auf den Katheten die Mittelsenkrechten. Diese schneiden sich im Mittelpunkt der Hypotenuse. Da die Mittelsenkrechten der Katheten zur jeweils anderen Kathete parallel sind, gehen sie nach einem bekannten Satz beide durch die Mitte der Hypotenuse.
Das Rechteck $M_1CM_2M_3$ erfüllt alle geforderten Bedingungen.
$A_{ABC} = \frac{ab}{2}$; $A_{M_1CM_2M_3} = \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} = \frac{ab}{4}$.
(vgl. das Bild!)



(Verbindet man M_1 mit M_2, so wird ABC in vier paarweise kongruente Dreiecke zerlegt. Der Leser führe den Beweis selbständig!)

Ma 8 ■ 2540 Wir verbinden M und N mit P und Q. Es gilt der Satz: *Die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte zweier Dreiecksseiten verläuft parallel zur dritten Dreiecksseite und ist halb so lang wie diese.*
Daraus folgt: $\overline{MQ} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC}$,
$\overline{NP} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC}$, $\overline{NQ} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC}$
$= \frac{1}{2} \cdot \overline{AD}$, $\overline{MP} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD}$,
also $\overline{MP} = \overline{NP} = \overline{MQ} = \overline{NQ}$.
Das Viereck $PNQM$ ist somit ein Rhombus. Im Rhombus stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht. Folglich gilt $\overline{PQ} \perp \overline{MN}$.

Ma 9 ■ 2541 Angenommen, die kleinste der drei Zahlen sei x.
Dann gilt die folgende Beziehung:
$$x^2 + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 = (x+2)^2.$$
Die äquivalente Umformung ergibt
$$x^2 + \frac{x^2 + 2x + 1}{4} = x^2 + 4x + 4,$$
$$\frac{x^2}{4} - \frac{7}{2}x - \frac{15}{4} = 0,$$
$$x^2 - 14x - 15 = 0,$$
$$(x+1)(x-15) = 0.$$
Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $x_1 = -1$ und $x_2 = 15$. Im Sinne der Aufgabenstellung gilt nur $x = 15$. Die drei gesuchten Zahlen heißen 15, 16 und 17, und es gilt $15^2 + 8^2 = 17^2$.

Ma 9 ■ 2542 Aus (2) folgt $a \neq 0$ und $b \neq 0$, da sonst $\frac{ab}{c} = 0$ wäre. Wir addieren die Gleichungen (1) und (3) und erhalten
(4) $a^2 + a = 12$
mit den Lösungen $a_1 = 3$ und $a_2 = -4$.
Nun setzen wir zunächst $a_1 = 3$ in (1) ein und erhalten
(1′) $b_1 + c_1 = 3$.
Dann setzen wir $a_1 = 3$ in (2) ein und erhalten
(2′) $\frac{3b_1}{c_1} = 6$.
Aus (2′) folgt $b_1 = 2c_1$. Das setzen wir in (1′) ein und erhalten $3c_1 = 3$ bzw. $c_1 = 1$. Das setzen wir in (2′) ein und erhalten $b_1 = 2$. Aus $a_2 = -4$ folgt analog $b_2 = 30$ und $c_2 = -20$.
Es gibt genau zwei Lösungstripel, nämlich $(3; 2; 1)$ und $(-4; 30; -20)$.

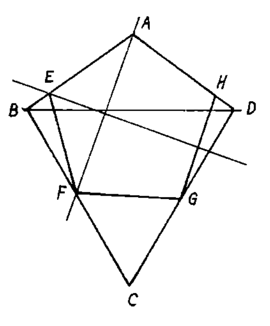
Ma 9 ■ 2543 Wegen $300^3 = 27\,000\,000 > 99\,999$ gilt $a < 3$. Wegen $199^1 < 200 < 10\,000$ gilt $a \neq 1$, also $a = 2$. Wir erhalten zunächst $(\overline{2bc})^2 = \overline{bc1bc}$. Setzen wir $\overline{bc} = x$ erhalten wir $(200 + x)^2 = 1001x + 100$,
$x^2 - 601x + 39\,900 = 0$,
$x_1 = 525 > 99$ (entfällt),
$x_2 = 76$.
Daraus folgt $b = 7$ und $c = 6$.
Probe: $276^2 = 76\,176$.

Ma 9 ■ 2544 Es sei A_1 der Flächeninhalt des Kreissektors P_1P_2M, A_2 der des gleichseitigen Dreiecks MP_1P_2 und A_3 der des Kreissegments mit $\overline{P_1P_2}$ als Sehne. Dann gilt $A_3 = A_1 - A_2$. Wegen $\alpha = 60°$ gilt
$$A_3 = \frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{1}{4} r^2 \sqrt{3}$$
$$= \left(\frac{1}{6}\pi \cdot 9 - \frac{9}{4}\sqrt{3}\right) \text{cm}^2 \approx 0{,}82 \text{ cm}^2.$$
Für den Flächeninhalt der Rosette gilt deshalb $A_R = 12 \cdot A_3 = 9{,}78 \text{ cm}^2$. Daraus folgt $A_R : A_K = \frac{9{,}78}{9 \cdot \pi} \approx 35\,\%$. Der Flächeninhalt der Rosette beträgt rund 35 % des Flächeninhalts des Kreises.

Ma 10/12 ■ 2545 Wir formen um und erhalten
$$(13^x - 5^x)(13^x + 5^x) = 13^{2x} - 5^{2x}$$
$$= (13^2 - 5^2)^x$$
$$= 144^x$$
$$= (5^2 - 13)^{2x}.$$
Es ist $(5^2 - 13)^2 = 144$, und wie gezeigt wurde, ist im Term $(13^x - 5^x)(13^x + 5^x)$ der Faktor 144 erhalten, w.z.b.w.

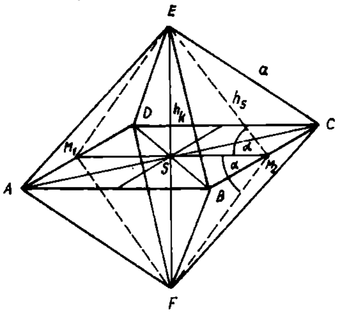
Ma 10/12 ■ 2546 Aus $(a + b + c)^2$ folgt durch äquivalentes Umformen schrittweise
$[(a + b) + c]^2 = (a + b)^2 + 2c(a + b) + c^2$,
$(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$ und wegen $a^2 + b^2 = c^2$
$(a + b + c)^2 = 2ab + 2ac + 2bc + 2c^2$,
$(a + b + c)^2 = 2a(b + c) + 2c(b + c)$
$= 2(a + c)(b + c)$.
Wegen $a < c$ und $b < c$ gilt
$2a < a + c$ und $2b < b + c$, also
$4ab < (a + c)(b + c)$ bzw.
$8ab < 2(a + c)(b + c)$. Daraus folgt
$(a + b + c)^2 = 2(a + c)(b + c) > 8ab$.

Ma 10/12 ■ 2547 Jeder Innenwinkel eines regelmäßigen Fünfecks beträgt 108°. Im gleichschenkligen Dreieck BDA hat demzufolge der Winkel $\sphericalangle ABD$ die Größe 36°. Derselbe Winkel tritt im regelmäßigen Fünfeck zwischen einer Seite und einer Diagonalen auf. Wir tragen nun an die Seite $\overline{AB}$ des Drachenvierecks in A einen Winkel von 36° im positiven Drehsinn an. Der Schnittpunkt F des freien Schenkels dieses Winkels mit der Seite $\overline{BC}$ ist ein Eckpunkt des Fünfecks. Die Mittelsenkrechte auf $\overline{AF}$ schneidet die Seite $\overline{AB}$ in E, einem weiteren Eckpunkt des Fünfecks. $\overline{AE}$ ist Fünfeckseite. Nun lassen sich die fehlenden Punkte leicht finden. $AEFGH$ ist das gesuchte Fünfeck.



Ma 10/12 ■ 2548
Ein regelmäßiges Oktaeder besteht aus 8 paarweise kongruenten gleichseitigen Dreiecken. Die abgebildete Schnittfigur ist ein Rhombus. Der Schnitt geht durch zwei gegenüberliegende Ecken und durch die Mittelpunkte zweier paralleler Kanten. Der Winkel, unter dem sich die Seitenflächen BCE und CBF schneiden, habe die Größe 2α. Im rechtwinkligen Dreieck CM_2E gilt

Skizze (nicht maßstäblich!)
(Kantenmodell)



a: Länge einer Kante
h_s: Länge der Höhe einer Seitenfläche
h_k: Länge der Höhe der Pyramide $ABCDE$
α: Größe des Winkels $\sphericalangle SM_2E$

$h_s^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$ bzw. $h_s = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.
Im rechtwinkligen Dreieck SM_2E gilt
$h_k^2 = h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$ bzw. $h_k = \frac{a}{2}\sqrt{2}$.
Weiter gilt im rechtwinkligen Dreieck SM_2E:

$$\tan\alpha = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{2}}{\frac{a}{2}}; \; 1\emptyset tan\,\alpha = \sqrt{2}.$$

Daraus folgt $\alpha = 54{,}74°$, also $2\alpha = 109{,}47°$. Zwei Seitenflächen eines regelmäßigen Oktaeders schneiden sich unter einem Winkel von etwa 109,5°.

Ph 6 ■ 171
Geg.: Dichte von Blei $\varrho = 11{,}3\ \mathrm{g/cm^3}$
Masse des Bleis $m = 282{,}5\ \mathrm{g}$
Ges.: Volumen des ausfließenden Wassers

Das Volumen der ausfließenden Wassermenge ist gleich dem Volumen des Bleirohres, und man rechnet mit der Gleichung $m = \varrho \cdot V$.
Es ist also $m = \varrho \cdot V$
und $V = \frac{m}{\varrho}$,
$V = \frac{282{,}5\ \mathrm{g \cdot cm^3}}{11{,}3\ \mathrm{g}}$,
$V = 25\ \mathrm{cm^3}$.
Es fließen 25 cm³ Wasser aus.

Ph 7 ■ 172
Geg.: $F_1 = 144\ N$ Ges.: F
$F_2 = 169\ N$
Sind die Längen der Hebelarme l_1 und l_2, dann gilt
$l_1 \cdot F = F_1 \cdot l_2$
und $l_2 \cdot F = F_2 \cdot l_1$.
Multipliziert man die Seiten der beiden Gleichungen miteinander, erhält man

$$l_1F \cdot l_2F = F_1 \cdot l_2 \cdot F_2 \cdot l_1,$$
$$F^2 = F_1 \cdot F_2,$$
$$F = \sqrt{F_1 \cdot F_2},$$
$$F = \sqrt{144 \cdot 169}\ N,$$
$$F = 156\ N.$$

Das wahre Gewicht des Gegenstandes beträgt 156 N.

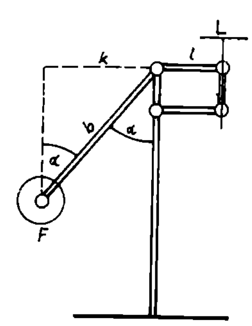
Ph 8 ■ 173
a) Wie aus der Aufgabe ersichtlich, gilt
$212\ °\mathrm{F} - 32\ °\mathrm{F} \mathrel{\hat{=}} 180\ °\mathrm{F}$
und $180\ °\mathrm{F} \mathrel{\hat{=}} 100\ °\mathrm{C}$,
also $1\ °\mathrm{F} = \frac{100}{180}\ °\mathrm{C} = \frac{5}{9}\ °\mathrm{C}$.
Dann gilt
$+41\ °\mathrm{F} = \frac{5}{9}(41 - 32)\ °\mathrm{C} = 5\ °\mathrm{C}$
bzw. $-49\ °\mathrm{F} = \frac{5}{9}[(-49) - 32]\ °\mathrm{C}$
$= -45\ °\mathrm{C}$
oder mit Variablen
$n\ °\mathrm{F} = \frac{5}{9}(n - 32)\ °\mathrm{C}$.
b) Jetzt sind
$100\ °\mathrm{C} \mathrel{\hat{=}} 180\ °\mathrm{F}$
bzw. $1\ °\mathrm{C} \mathrel{\hat{=}} \frac{180}{100}\ °\mathrm{F} = \frac{9}{5}\ °\mathrm{F}$.
Dann gilt
$+20\ °\mathrm{C} = \left(\frac{9}{5} \cdot 20 + 32\right)\ °\mathrm{F} = 68\ °\mathrm{F}$
bzw. $-15\ °\mathrm{C} = \left[\frac{9}{5}(-15) + 32\right]\ °\mathrm{F} = 5\ °\mathrm{F}$
oder mit Variablen
$m\ °\mathrm{C} = \left(\frac{9}{5} \cdot m + 32\right)\ °\mathrm{F}$.
c) Es sei n die Maßzahl, dann gilt

$$\frac{9}{5}n + 32 = \frac{5}{9}(n - 32),$$
$$81n + 1440 = 25n - 800,$$
$$n = -40.$$

Bei -40 gilt also $-40\ °\mathrm{C} = -40\ °\mathrm{F}$.

Ph 9 ■ 174
Geg.: $m = 1285\ \mathrm{kg}$ Ges.: t
$P = 38\ \mathrm{kW} = 38\,000\ \mathrm{W}$
$v = 80\ \mathrm{km/h} = \frac{80}{3{,}6}\ \mathrm{m/s}$
Die Zeit ergibt sich aus der Gleichung für die Leistung $P = F \cdot v$ mit $F = ma$ und $a = v/t$; denn die Kraft bleibt konstant, während die Geschwindigkeit ständig zunimmt.
Dann ist $P = Fv$,
$P = \frac{m \cdot v^2}{t}$.
Also ist $A = \frac{m \cdot v^2}{P}$,
$A = \frac{1285\ \mathrm{kg} \cdot 80^2 \cdot \mathrm{m^2 \cdot s^3}}{38\,000\ \mathrm{kg} \cdot 3{,}6^2 \cdot \mathrm{s^2 \cdot m^2}}$,
$A = 16{,}7\ \mathrm{s} \approx 17\ \mathrm{s}$.
Der Pkw erreicht nach rd. 17 Sekunden eine Geschwindigkeit von 80 km/h.

Ph 10/12 ■ 175
Geg.: Lastarm $l = 2{,}5$ cm Ges.: Last L
Kraftarm $b = 10$ cm
Kraft $F = 500$ mN
Auslenkung $\alpha = 20°$
Für den zweiseitigen Hebel gilt
$L \cdot l = F \cdot k$
bzw. $L = \frac{F \cdot k}{l}$.



Mit $\sin\alpha = k/b$ bzw. $k = b \cdot \sin\alpha$ ist schließlich
$L = \frac{F \cdot b \cdot \sin\alpha}{l}$,
$L = \frac{500\ mN \cdot 10\ \mathrm{cm} \cdot \sin 20°}{2{,}5\ \mathrm{cm}}$,
$L = 684\ mN$.
Der Brief hat ein Gewicht von 684 mN.

Ch 7 ■ 137
1. 506 g Superphosphat $\mathrel{\hat{=}}$ 142 g P_2O_5
100 g Superphosphat $\mathrel{\hat{=}} m$
$m = \frac{100\ \mathrm{g} \cdot 142\ \mathrm{g}}{506\ \mathrm{g}} = 28{,}1\ \mathrm{g}$
2. 620 g Thomasmehl $\mathrel{\hat{=}}$ 284 g P_2O_5
100 g Thomasmehl $\mathrel{\hat{=}} m$
$m = \frac{100\ \mathrm{g} \cdot 284\ \mathrm{g}}{620\ \mathrm{g}} = 45{,}8\ \mathrm{g}$
3. 262 g Magnesiumphosphat $\mathrel{\hat{=}}$ 142 g P_2O_5
100 g Magnesiumphosphat $\mathrel{\hat{=}} m$
$m = \frac{100\ \mathrm{g} \cdot 142\ \mathrm{g}}{262\ \mathrm{g}} = 54{,}2\ \mathrm{g}$
54,2 g $\mathrel{\hat{=}}$ 100%
$m \mathrel{\hat{=}}$ 80%
$m = 43{,}4$ g
4. 545,8 g Nitrophoska $\mathrel{\hat{=}}$ 142 g P_2O_5
100 g Nitrophoska $\mathrel{\hat{=}} m$
$m = \frac{100\ \mathrm{g} \cdot 142\ \mathrm{g}}{545{,}8\ \mathrm{g}} = 26{,}0\ \mathrm{g}$

Düngemittel	%-Gehalt an P_2O_5
1. Superphosphat	28,1
2. Thomasmehl	45,8
3. 80%iges Magnesiumphosphat	43,4
4. Nitrophoska	26,0

Ch 8 ■ 138
a) 1187,5 g m_l m_2

$$\underset{54\ \mathrm{g}}{2\,AL} + \underset{222\ \mathrm{g}}{3Ca(OH)_2} + \underset{108\ \mathrm{g}}{6H_2O} \rightarrow 3CaO \cdot Al_2O_3 \times 6H_2O + \underset{67{,}2\ \mathrm{l}}{3H_2}$$

$V = \frac{1187{,}5\ \mathrm{g} \cdot 67{,}2\ \mathrm{l}}{54\ \mathrm{g}} = 1{,}5\ \mathrm{m^3}$
1,5 m³ Wasserstoff werden bei dieser Reaktion ausgetrieben.
b) $m_1 = \frac{1187{,}5\ \mathrm{g} \cdot 222\ \mathrm{g}}{54\ \mathrm{g}} = 4{,}9\ \mathrm{kg}$
$m_2 = \frac{1187{,}5\ \mathrm{g} \cdot 108\ \mathrm{g}}{54\ \mathrm{g}} = 2{,}4\ \mathrm{kg}$
Für die Reaktion werden 4,9 kg Kalziumhydroxid und 2,4 kg Wasser benötigt.

Ch 9 ■ 139 Volumen-Stahlrohr
$V = \frac{\pi}{4}h\,(d_1^2 - d_2^2)$
$V = \frac{\pi}{4} \cdot 600\ \mathrm{m}\,[(0{,}038\ \mathrm{m})^2 - (0{,}030\ \mathrm{m})^2]$
$V = \frac{\pi}{4} \cdot 600\ \mathrm{m} \cdot 0{,}0005\ \mathrm{m^2} = 0{,}236\ \mathrm{m^3}$
Volumen PVC-Rohr
$V = \frac{m}{\varrho}$
$V = \frac{1\ \mathrm{t\,cm^3}}{1{,}38\ \mathrm{g}} = 0{,}725\ \mathrm{m^3}$
0,236 m³ Stahlrohr $\mathrel{\hat{=}}$ 600 m
0,725 m³ PVC-Rohr $\mathrel{\hat{=}} x$
$x = \frac{0{,}725\ \mathrm{m^3} \cdot 600\ \mathrm{m}}{0{,}236\ \mathrm{m^3}} = 1{,}8\ \mathrm{km}$
1,8 km PVC-Rohr lassen sich aus einer Tonne PVC-hart herstellen.

Ch 10/12 ■ 140

$$\begin{array}{lll} x & y & z \\ 2Al + 3H_2SO_4 & \rightarrow Al_2(SO_4)_3 & + 3H_2\uparrow \\ 54\,g & 294\,g & 342\,g \end{array}$$

$$z = 23{,}2\,\% = \frac{342x}{54} \qquad \text{(I)}$$

$$w = 76{,}8\,\% = \frac{76{,}8 \cdot z}{23{,}2} \qquad \text{(II)}$$

Einsetzen von (I) in (II)

$$w = \frac{342x \cdot 76{,}8}{54 \cdot 23{,}2}$$

$$w + y = 100\,\%$$

$$y = c\,\%$$

$$c = \frac{100\,\% \cdot y}{w + y} \qquad \text{(III)}$$

$$y = \frac{294x}{54} \qquad \text{(IV)}$$

Einsetzen von (IV) in (III)

$$c = \frac{294x \cdot 100\,\%}{54\,(w + y)}$$

$$c = \frac{294x \cdot 100\,\%}{\dfrac{76{,}8 \cdot 342x}{23{,}2} + 294x} = 20{,}6\,\%$$

Die Schwefelsäure muß 20,6%ig sein, damit eine Aluminiumsulfat-Lösung der angegebenen Konzentration entsteht.

Lösungen zu:
Eine Aufgabe – verschiedene Varianten mit steigendem Schwierigkeitsgrad
Heft 5/85

Klasse 5

Der Streckenzug $\overline{BCDA}$ hat die Länge 18 cm − 8 cm = 10 cm. Wegen $\overline{AD} = \overline{BD}$ hat das Dreieck BCD einen Umfang von 10 cm Länge.

Klasse 6

Verbinden wir den Mittelpunkt E der Seite $\overline{AB}$ mit D, dann entstehen drei kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke, deren Katheten 4 cm lang sind. Das Viereck $ABCD$ hat deshalb einen Flächeninhalt von $3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\,\text{cm}^2 = 24\,\text{cm}^2$.

Klasse 7

Da das Viereck $ABCD$ ein Sehnenviereck ist, hat der Winkel BCD die Größe $180° - 45° = 135°$. Wegen $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CDB$ hat jeder dieser beiden Winkel die Größe $\frac{1}{2} \cdot (180° - 135°) = 22{,}5°$.

Deshalb hat Winkel ABC die Größe $45° + 22{,}5° = 67{,}5°$ und Winkel ADC die Größe $90° + 22{,}5° = 112{,}5°$.

Klasse 8

Es sei x die Länge von $\overline{AD}$; wegen $\overline{AD} = \overline{BD}$ hat $\overline{BD}$ auch die Länge x. Nach dem Satz des Pythagoras gilt $x^2 + x^2 = 2x^2$, $2x^2 = 64$, $x^2 = 32$, also $x = 4 \cdot \sqrt{2} \approx 5{,}66$. Die Seite $\overline{AD}$ ist rund 5,66 cm lang. Es sei y die Länge von $\overline{BC}$ bzw. $\overline{CD}$; dann gilt $y^2 + y^2 = x^2$, $y^2 + y^2 = 32$, $2y^2 = 32$, $y^2 = 16$, also $y = 4$.
Die Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ sind 4 cm lang.

Klasse 9

Die Seite $\overline{AD}$ hat die Länge $4 \cdot \sqrt{2}$ cm (vergleiche Lösung für Klasse 8). Wegen $\overline{BD} = \overline{AD}$ hat auch $\overline{BD}$ die Länge $4 \cdot \sqrt{2}$ cm.
Für den Flächeninhalt A_V des Vierecks $ABCD$ gilt somit

$$A = f(h) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{2} \cdot h + \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot \sqrt{2})^2,$$

also

$$A = f(h) = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot h + 16 = 2 \cdot (\sqrt{2} + 4) \cdot h.$$

Klasse 10

Der Winkel ABC hat die Größe 72°, der Winkel ABD die Größe 45°; folglich hat der Winkel DBC die Größe 27°, der Winkel BCD die Größe $180° - 2 \cdot 27° = 126°$. Nun hat $\overline{AD}$ die Länge $4 \cdot \sqrt{2}$ cm (vergleiche Lösung für Klasse 8); deshalb gilt

$$\overline{BC} : (4 \cdot \sqrt{2}) = \sin 27° : \sin 126°, \text{ also}$$

$$\overline{BC} = \frac{4 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 27°}{\sin 126°} = \frac{4 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 27°}{\sin 54°}$$

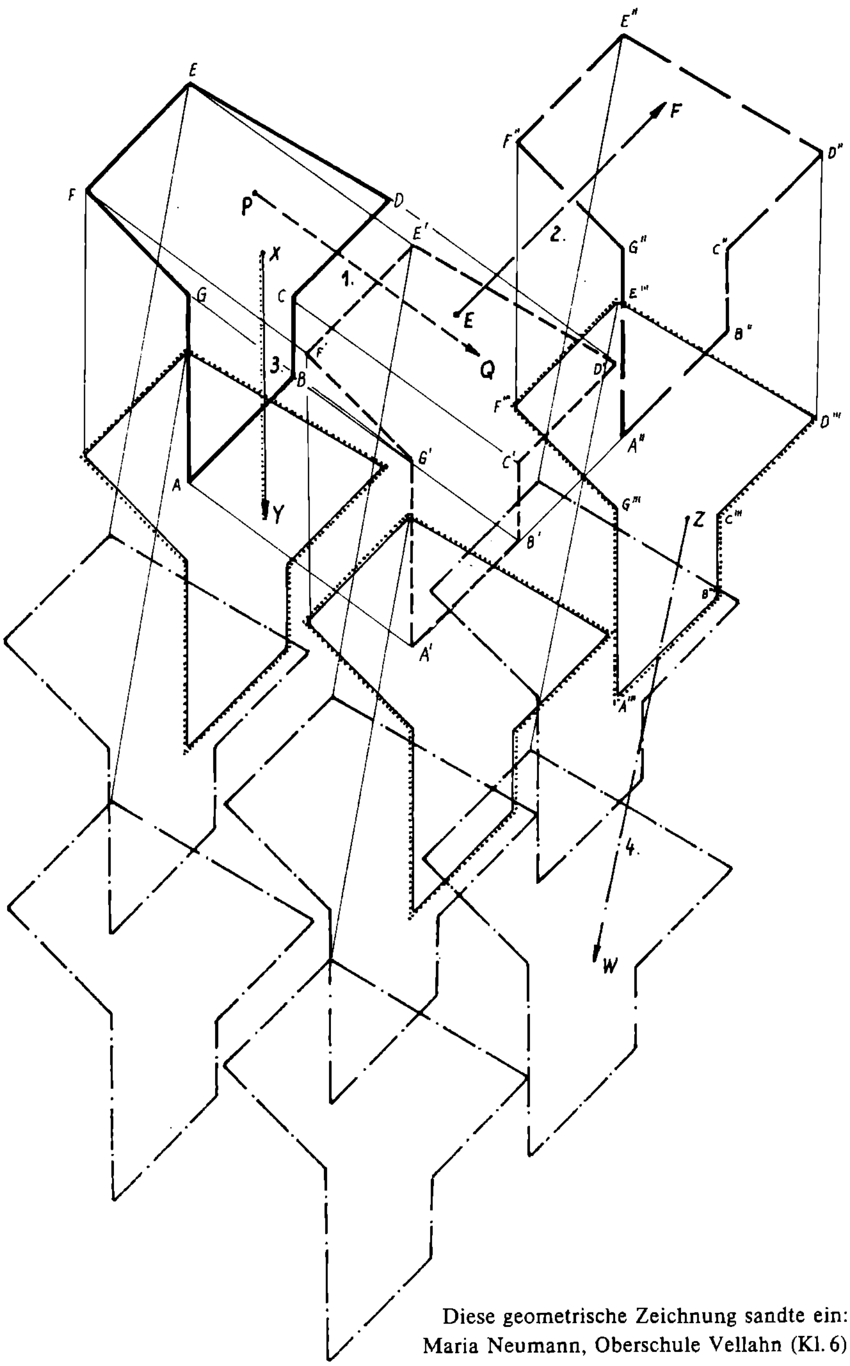
$$= \frac{4 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 27°}{2 \cdot \sin 27° \cdot \cos 27°},$$

$$\overline{BC} = \overline{CD} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\cos 27°} \approx 3{,}17.$$

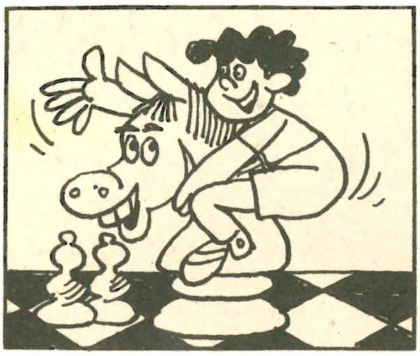
Die Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ sind rund 3,17 cm lang.

Lösung zu: Auf Fehlersuche

Quadratmeer (t), Lehrsitz (a), beweinen (s), Kreisdurstmesser (ch), Rachenoperationen (e), Durchschittsgröße (n), Faselschreiber (r), Rechenhaft (e), Symmetrieasse (ch), Schulzahlarzt (n), Rast (e), Drachenviereck (r) – Taschenrechner.



Diese geometrische Zeichnung sandte ein:
Maria Neumann, Oberschule Vellahn (Kl. 6)



Schachwettbewerb Begeisterte Zustimmung

„Euren Schachwettbewerb finde ich ganz prima“ (A. Hackenberger, Zedlitz). – „Sehr schön fand ich wieder den Schachwettbewerb 1984. Als AG-Leiter in unserer POS war das auch das richtige Mittel für meine Schüler“ (K.-D. Stegmann, Erfurt). – „Durch den Schachwettbewerb fand ich seit langer Zeit das erste Mal wieder zum Schachbrett. Für diese Anregung möchte ich *alpha* danken.“ (G. Glockmann, Jena) – „Die Lösung der acht Schachaufgaben hat mir viel Spaß gemacht. Der *alpha*-Schachwettbewerb ist eine gute Idee.“ (St. Karsch, Dresden)

So und ähnlich äußerten viele Teilnehmer ihre begeisterte Zustimmung zu dem Schachwettbewerb in *alpha*. Auch die Meinungen und Einschätzungen der Leser zu den Aufgaben wurden mit Interesse gelesen und ausgewertet. Wir danken allen 898 Einsendern herzlich für ihre Teilnahme.

Neben den jüngsten Teilnehmern, die acht Jahre alt waren, konnten wir als älteste Teilnehmer Elisabeth Möller (Bad Kösen/79 Jahre), Fritz Rauhe (Wendgräben/80 Jahre) und Erwin Huth (Schulpforte/81 Jahre) begrüßen. Lobend erwähnen möchten wir auch jene Einsender, die den Mut hatten, auch die Lösung für nur einige Aufgaben einzusenden.

Lösungen

▲1▲

1. Th6	g:h6	2. g7 matt	(1 P.).
1. ...	L beliebig	2: T:h7 matt	(1 P.).

▲2▲

1. Df8+	T:f8	2. Se7 matt	(1 P.).
1. ...	K:f8	2. Th8 matt	(1 P.).

▲3▲

1. Te1	K:e1	2. Dd2 matt	(1 P.).
1. ...	Lg2	2. Dh4 matt	(1 P.).
1. ...	L beliebig	2. Dg1 matt	(1 P.).

Diese Aufgabe war von *Sam Loyd*, „Musical World“ 1859. Viele Löser gaben hier als Lösung 1. Dh4+ Kg2 2. Tg4 matt an, wenn jedoch Schwarz 1. ... Kg1 spielt, ist durch 2. Tg4 kein Matt möglich, weil 2. ... Lg2 erfolgt!

▲4▲

1. Tg8+	K:g8	2. S:f6++	Kh8 (f8)
3. Tg8 matt	(2 P.).		
1. ...	Kh7	2. S:f6+	T:f6
3. T3g7 matt	(2 P.).		

▲5▲

1. Dh7+	K:h7	2. T:g7+	Kh8
3. TH7+	Kg8	4. Tbg7 matt	(4 P.).

▲6▲

1. Da2+	Kh8	2. Sf7+	Kg8
3. Sh6++	Kh8	4. Dg8+	T:g8
5. Sf7 matt	(5 P.).		

▲7▲

1. Sf5	L:h8	2. Sg7	L:g7
3. L:g7 matt	(3 P.).		
1. ...	L beliebig		
2. Lg7(+)	L:g7/L beliebig		
3. Th1/L:L matt	(3 P.).		

Diese Aufgabe von *André Chéron* aus dem Jahre 1930 wurde vielfach als die schönste Aufgabe von den Teilnehmern angesehen. Der Versuch mittels 1. Tg8 ein Matt in 3 Zügen zu erreichen, scheitert an 1. ... Ld4.

▲8▲

1. Ka7	droht	2. Tb8 matt.
1. ...	L:b4	2. c4 matt (2 P.).
1. ...	T:b4	2. Sc3 matt (2 P.).
1. ...	a:b4	2. Tc5 matt (2 P.).

Bei dieser preisgekrönten Aufgabe des Niederländers *Cor Goldschmeding* gab es die meisten Fehllösungen. Die Versuche 1. Le1? a:b4!, 1. c3? T:b4!, 1. Tc4? L:b4! können jeweils durch Schwarz pariert werden.

286 Teilnehmer erreichten die volle Punktzahl. Auch Günter Oeser aus Zwickau. Er verfaßte die Lösung der Aufgaben zusätzlich in Versen:

Bei Nummer 1 da war's noch leicht,
da hat der Turm nach h6 gereicht.
Bei Nummer 2 wurde es so gemacht,
ein Damenopfer klärte alles auf f acht.
Bei Nummer 3 war es mir klar,
daß der Läufer völlig sinnlos war.
Der Turm wurde auf e1 gesetzt,
die Dame stellte matt zuletzt.
Bei Nummer 4 hatte ein Springer sehr viel Macht,
der erste Zug war Turm auf g acht.
Besonders wichtig war's, die Dame richtig zu führen,
daß bekam man bei Nummer 5 zu spüren.
Der König staunte gar nicht schlecht,
das Schach auf h7 war ihm nicht recht.
Das Problem Nummer 6 war nicht leicht zu erkennen,
als erster Zug war Dame a2 zu nennen.
Doch den Gnadenstoß gab, es ist nicht übertrieben,
der Springer, mit dem letzten Zug auf f sieben.
Bei Nummer 7 kam ich in's Schwitzen,
ich wollte den Turm immer wieder beschützen.
Doch dann kam die Erleuchtung, es wurde mir klar,
daß hier ein Zugzwang im Spiele war.
Mit Springer f5 ging dann alles glatt,
der Läufer stellte auf g7 matt.
Bei Nummer 8 wurde der König auf a7 postiert,
davon haben Springer, Turm und Bauer profitiert.
Ich saß manche Stunde, bei Tag und bei Nacht,
es hat mir sehr viel Freude gemacht.
Die Schachprobleme zu lösen, das wollte ich packen,
es waren ganz schöne Nüsse zu knacken.
Macht weiter so, liebe alpha-Redaktion,
ich warte auf Wettbewerb „85“ schon!

Unter den Teilnehmern, die alle Aufgaben richtig gelöst hatten, wurden folgende Gewinner ermittelt:
Torsten Kratz (Bad Berka),
Heike Hellmich (Gera-Lusan),
Katja Mikolajek (Dohmen)
und Mirko Kühne (Ortrand).

Des weiteren wurden unter allen Einsendern, die zumindest eine Aufgabe richtig gelöst hatten, Bücher verlost:
Sabine Strohschneider (Stendal), Arnd Bärsch (Radebeul), Steffen Scharnowski (Möser), Ulrike Quaas (Kahla), Kristina Böttger (Görlitz) und Elke Schulz (Potsdam).
Allen Gewinnern unseren herzlichen Glückwunsch!

„Auch wenn nicht alles stimmen sollte, hat mir das Lösen der Aufgaben viel Spaß gemacht“ (K. Fritsch, Johanngeorgenstadt). Eine lobenswerte Einstellung zu einem Wettbewerb, der eine „Anregung zur Beschäftigung mit diesem schönen und interessanten Spiel liefert“ (R. Wojatschke, Berlin). Für T. Kitschke (Halle) war es „ein Stündchen Abwechslung während des Studiums“ oder wie es A. Hunstock (Quedlinburg) ausdrückte: „So habe ich einen Fernsehabend eingespart und nützlich verbracht.“

„Insgesamt – das ist mein persönlicher Eindruck – ein feines Schacherlebnis für jedermann (sofern tieferes Interesse am königlichen Spiel vorhanden) und ein Stück Werbung dafür, daß man sich weiterhin auf das Abenteuer der 64 Felder einläßt.“ (F. Hoffmann, Weißenfels)

„Ich würde mich freuen, wenn Sie auch im Jahre 1985 wieder einen Schachwettbewerb starten, und ich würde dann wieder sehr gern daran teilnehmen.“ (K. Pohlheim, Leipzig) „Ich hoffe, daß dieser Schachwettbewerb auch in diesem Jahr wieder ausgetragen wird.“ (J. Wagner, Raschau)

Angesichts der zahlreichen Wünsche nach der Fortsetzung des *alpha*-Wettbewerbs wird eine neue Schachknobelei vorbereitet. Sie erscheint in Heft 6/1985, und wir laden alle *alpha*-Leser schon jetzt recht herzlich zur Teilnahme ein!

J. Lehmann/H. Rüdiger

Uwe Pitz, Crivitz (32 J.)

Nachgedacht und mitgemacht

Schneide die Figuren in jeweils zwei kongruente Teile!

aus: Pythagoras, Groningen (Niederlande)