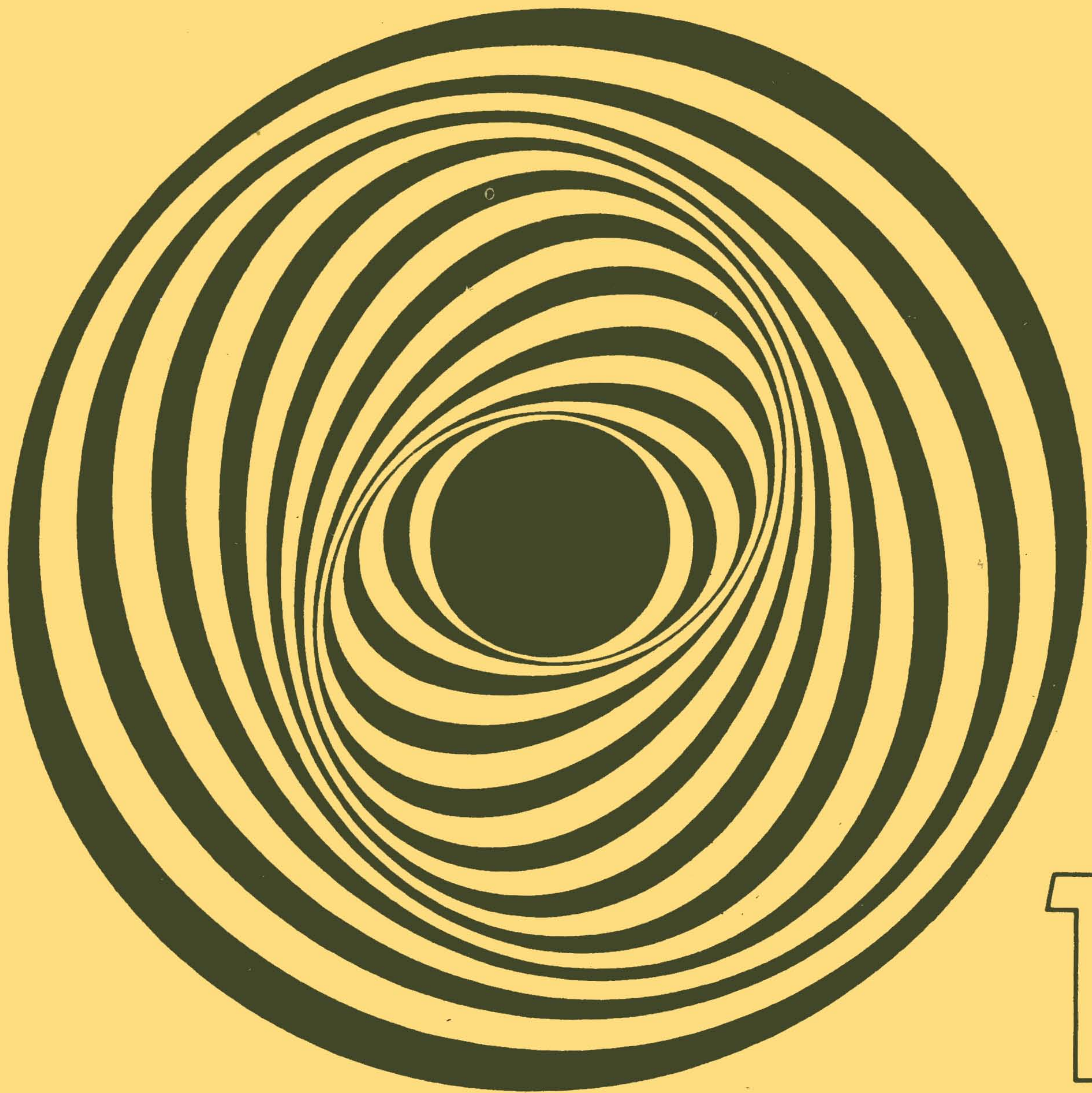
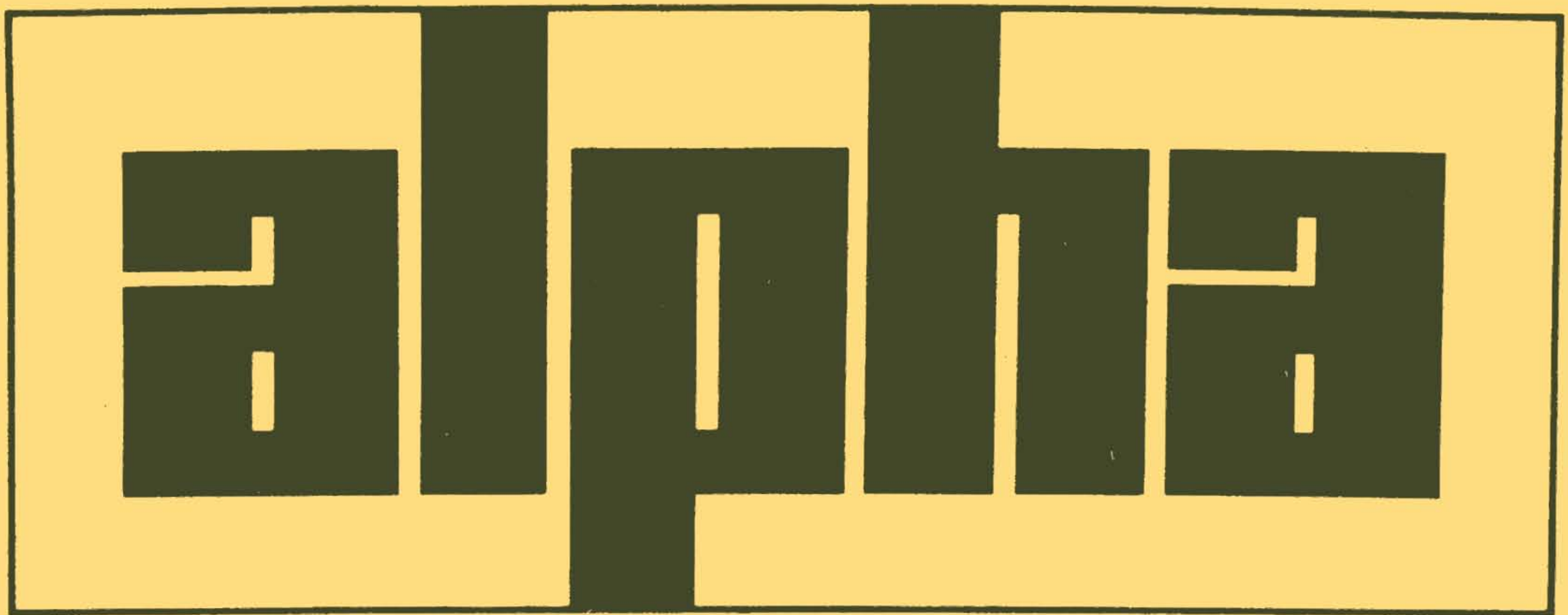


**Mathematische
Schülerzeitschrift**

**Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
18. Jahrgang 1984
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395**



1

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstudienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (Ltg. Dr. C.-P. Helmholz)

Redaktion:

OSTR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1086 Berlin, Krausenstraße 50, PSF Nr. 1213
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des
Presseamtes beim Vorsitzenden des Minister-
rates der Deutschen Demokratischen Repu-
blik.

Postscheckkonto: Berlin 132626. Erschei-
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft
1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M,
im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Son-
derpreis für die DDR 0,50 M.

**Bestellungen werden in der DDR vom Buch-
handel und der Deutschen Post entgegen-
genommen.**

**Der Bezug für die Bundesrepublik Deutsch-
land und Berlin(West) erfolgt über den Buch-
handel; für das sozialistische Ausland über
das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und
für alle übrigen Länder über: Buchexport
Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR
7010 Leipzig, Leninstr. 16.**

Fotos: Bildstelle der TH Merseburg (S. 2);
aus der Bildmappe: Adam Ries, VEB Bild
und Heimat, Reichenbach i. V. (S. 3, 4);
Lothar Otto, Leipzig (S. 6); Dikobraz, Prag
(S. 8); Eigenfoto AG Querfurt (S. 13); Hoch-
schulbildstelle der Universität Leipzig (III.
U.-Seite)

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig



Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig, Betrieb der
ausgezeichneten Qualitätsarbeit, III/18/97
AN (EDV) 128-ISSN 00—2-6395
Redaktionsschluß: 27. Oktober 1983
Auslieferungstermin: 20. Februar 1984



Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 1 **Wir rechnen mit Intervallen [8]***
Prof. Dr. D. Oelschlegel, Sektion Mathematik der TH *Carl Schorlemmer* Halle-Merseburg
- 2 **Eine Aufgabe von Prof. Dr. D. Oelschlägel und Forschungsstudent W. Wiebigke [9]**
Sektion Mathematik der TH *Carl Schorlemmer* Leuna-Merseburg
- 3 **Adam Ries (1492 bis 1559) [6]**
Zum 425. Todestag des Rechenmeisters
Leseprobe aus: *Biographien bedeutender Mathematiker*
- 6 **Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]**
Aufgaben zu Mathematik · Physik · Chemie
- 9 ***alpha*-Wettbewerb 1982/83 [4]**
Preisträger · Vorbildliche Leistungen · Abzeichen in Gold
- 10 **Zwei Aufgaben und sieben Lösungen – Wer mehr weiß und Phantasie hat, kommt rascher zum Ziel Teil 1 [7]**
Prof. Dr. W. Jungk, Sektion Mathematik der Päd. Hochschule *Wolfgang Ratke*, Köthen
- 11 **XXIV. Internationale Mathematikolympiade [11]**
Aufgaben · Punktespiegel
- 12 **Teilbarkeitsregeln Teil 1 [6]**
Mathematikfachlehrer StR J. Portner (†), Pritzwalk
- 13 **Begeisterte Schachfreunde [8]**
Mitgeteilt von H. Rüdiger, Schichtleiter im Werk für Fernsehelektronik Berlin
- 14 **In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]**
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig
- 16 **Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt**
Klaus-Peter berichtet aus seinem Mathematikzirkel:
Fräulein Steinmann macht uns neugierig Teil 1 [5]
Dr. P. Göthner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig
- 17 **Der $2 \times 2 \times 2$ -Würfel [5]**
Dr. W. Hintze, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin
- 19 **Lösungen [5]**
- III. **U.-Seite: Auf den Spuren von Mathematikern [7]**
J. Lehmann, Leipzig/Dr. H. Pieper, Berlin
- IV. **U. Seite: Mathematik-Mosaik [5]**
Ausschnitt aus einer Kiewer Wandzeitung

Titelblatt: W. Fahr, Berlin nach einer Vorlage aus der math. Schülerzeitschrift „Pythagoras“, Niederlande

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Wir rechnen mit Intervallen

Bekanntlich wird der Bereich der reellen Zahlen von den rationalen und den irrationalen Zahlen gebildet. Bei der Darstellung durch Dezimalbrüche erhält man bei den rationalen Zahlen endliche oder unendliche periodische Dezimalbrüche, bei den irrationalen Zahlen unendliche nichtperiodische Dezimalbrüche. Da wir nur mit Zahlen mit endlicher Stellenzahl rechnen können, muß beim praktischen Rechnen fast immer gerundet werden.

Das gilt auch beim Rechnen auf einem Rechenautomaten, auch wenn dort andere Zahlensysteme benutzt werden. Verwenden wir eine gerundete reelle Zahl, die uns als Ergebnis einer Rechnung mitgeteilt wurde oder die wir einer Zahlentafel entnehmen, so kennen wir deren exakten Wert nicht. Haben wir z. B. die durch Rundung aus einer Zahl z entstandenen Zahl $x = 0,2834$, so können wir aus der Kenntnis der Rundungsregeln schließen, daß z vor der Rundung zwischen $0,28335$ und $0,28345$ lag. Wir wissen also nur, daß der exakte Wert von x in einem bestimmten Intervall liegt und schreiben dafür $x \in [0,28335; 0,28345]$.

Bei der Anwendung der Mathematik auf praktische Aufgabenstellungen, z. B. aus der Technik oder den Naturwissenschaften, gehen Größen (Eingangsdaten, Parameter) in die Rechnung ein, die gemessen wurden. Da kaum ein Meßgerät völlig exakte Werte liefert, sind diese Größen mit Meßfehlern behaftet. Von ihren exakten Werten weiß man wiederum nur, daß sie in bestimmten Intervallen liegen. Lesen wir als Ergebnis einer Temperaturmessung $T = 58,0 \pm 0,5^\circ\text{C}$, so heißt das, daß für den exakten (in $^\circ\text{C}$ gemessenen) Wert T die Beziehung $T \in [57,5; 58,5]$ gilt.

Fehlerbetrachtungen zu praktischen mathematischen Berechnungen sind in unserer Volkswirtschaft außerordentlich wichtig; wir wollen schließlich alle, daß z. B. eine berechnete Brücke auch wirklich ihren Belastungen standhält. Da wir in der Praxis mit gerundeten Zahlen und gemessenen Größen arbeiten müssen, von denen wir nur Genauigkeitsintervalle kennen, kamen vor etwa 20 Jahren Mathematiker auf die Idee, anstatt mit Näherungswerten gleich mit diesen Intervallen zu rechnen. Es entstand die Intervallarithmetik, die sich heute zu einer immer größer werdenden Disziplin, der Inter-

vallmathematik, ausgeweitet hat. Die Intervallmathematik liefert bei vielen Problemen Fehlerschranken für die Lösung auf effektivere Weise als traditionelle Methoden. Es gibt aber auch Problemstellungen, bei denen der Einsatz der Intervallmathematik zu aufwendig und damit nicht effektiv ist.

In der Intervallmathematik werden nur abgeschlossene und beschränkte (endliche) Intervalle

$$X = [x_1, x_2]: \\ = \{x \in R \mid x_1, x_2 \in R, x_1 \leq x \leq x_2\}$$

betrachtet; hierbei sei R die Menge der reellen Zahlen, x_1 heißt untere und x_2 obere Intervallgrenze. Die beiden Intervallgrenzen werden im allgemeinen durch ein Komma getrennt. Sind es Dezimalbrüche, trennt man sie zur Vermeidung von Mißverständnissen durch ein Semikolon. (Im folgenden sprechen wir nur noch kurz von Intervallen.) Die vier Grundoperationen (Rechenoperationen, Verknüpfungen) Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division werden für zwei Ausgangsintervalle

$$A = [a_1, a_2] \text{ und } B = [b_1, b_2] \text{ durch} \\ A * B = \{a * b \mid a \in A, b \in B\}$$

definiert. Dabei bezeichnet das Symbol $*$, $*$ $\in \{+, -, \cdot, : \}$, eine der vier Grundoperationen. Im Falle der Division muß $0 \notin B$ vorausgesetzt werden. Die obige Definition bedeutet, daß die durch eine Grundoperation entstehende Verknüpfungsmenge die und nur die Zahlen enthält, die durch Verknüpfung von zwei Zahlen aus den Ausgangsintervallen entstehen können. Es läßt sich nun beweisen, daß bei jeder Grundoperation die Verknüpfungsmenge wieder ein Intervall ist, die Grundoperationen führen also aus der Menge $I(R)$ der abgeschlossenen und beschränkten Intervalle nicht heraus. Durch diese interessante Eigenschaft ist erst der Aufbau einer Intervallarithmetik möglich. Auf der Grundlage dieser Eigenschaft lassen sich dann unter Benutzung der Intervallgrenzen die Grundoperationen wie folgt angeben:

$$1. \text{ Addition: } A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$$

$$\text{Beispiel: } [-2,5] + [1,3] = [-1,8]$$

$$2. \text{ Subtraktion: } A - B = [a_1 - b_2, a_2 - b_1]$$

$$\text{Beispiele: } [-2,5] - [1,3] = [-5,4]$$

$$[2,3] - [2,3] = [-1,1]$$

3. Multiplikation:

$$A \cdot B = [\min(a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2), \\ \max(a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2)],$$

$\min(a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2)$ ist die kleinste, $\max(a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2)$ entsprechend die größte der in der Klammer stehenden Zahlen.

Beispiele:

$$[-2,5] \cdot [1,3] = [\min(-2, -6, 5, 15), \\ \max(-2, -6, 5, 15)] \\ = [-6,15]$$

$$4. \text{ Division: } A : B = A \cdot \left[\frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_1} \right],$$

$0 \notin B$ (das Intervall B darf nicht die Null enthalten)

$$\text{Beispiel: } [-2,5] : [1,3] \\ = [-2,5] \cdot \left[\frac{1}{3}, 1 \right] = [-2,5].$$

Diese Darstellungen der Grundoperationen lassen sich durch Monotoniebetrachtungen leicht beweisen. Zum Beispiel folgt im Falle der Addition aus

$$a \in A, \text{ d. h. } a_1 \leq a \leq a_2, \text{ und}$$

$$b \in B, \text{ d. h. } b_1 \leq b \leq b_2,$$

$$\text{sofort } a_1 + b_1 \leq a + b \leq a_2 + b_2$$

und damit

$$A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2].$$

Intervalle, bei denen obere und untere Grenze zusammenfallen, nennt man Punktintervalle. Diese identifiziert man in der Intervallmathematik mit der durch die Grenzen gegebenen reellen Zahl:

$$[x, x] = x,$$

umgekehrt werden in arithmetischen Termen, die Zahlen und Intervalle enthalten, die reellen Zahlen x durch die entsprechenden Punktintervalle $[x, x]$ ersetzt. Danach werden die intervallarithmetischen Grundoperationen in der eben angegebenen Weise ausgeführt. Muß man beim Rechnen mit Intervallen runden, so wird die untere Grenze stets abgerundet und die obere Grenze stets aufgerundet. Auf diese Weise ist gesichert, daß man alle durch Rundung entstehenden Fehler in dem resultierenden Intervall erfaßt.

Wir wollen uns noch einige Eigenschaften der Grundoperationen ansehen. Die Addition und die Multiplikation sind kommutativ und assoziativ, d. h., es gilt

$$\left. \begin{aligned} A + B &= B + A \\ A \cdot B &= B \cdot A \end{aligned} \right\} \text{ Kommutativität,}$$

$$\left. \begin{aligned} A + (B + C) &= (A + B) + C \\ A \cdot (B \cdot C) &= (A \cdot B) \cdot C \end{aligned} \right\} \text{ Assoziativität.}$$

Wir zeigen als Beispiel die Kommutativität der Addition:

$$A = [a_1, a_2], B = [b_1, b_2],$$

$$A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$$

$$= [b_1 + a_1, b_2 + a_2] = B + A.$$

Weiterhin gilt:

$$A + [0, 0] = [a_1, a_2] + [0, 0]$$

$$= [a_1, a_2] = A$$

$$A \cdot [1, 1] = [a_1, a_2] \cdot [1, 1]$$

$$= [\min(a_1, a_2), \max(a_1, a_2)]$$

$$= [a_1, a_2] = A,$$

man sagt deshalb, daß Addition bzw. Multiplikation die „neutralen Elemente“ $[0,0]$ bzw. $[1,1]$ besitzen. Es gibt im allgemeinen kein Intervall $B=[b_1, b_2]$ mit der Eigenschaft $A-B=[0,0]$, das sieht man leicht so:
 $A-B=[a_1-b_2, a_2-b_1]=[0,0]$,
 hieraus folgt $a_1-b_2=0$, $a_2-b_1=0$ oder $b_1=a_2$, $b_2=a_1$.

Nach Ersetzen von b_1 und b_2 erhält man $B=[a_2, a_1]$, dies ist aber wegen $a_1 \leq a_2$ nur im Falle $a_1=a_2$, d.h. nur im Falle eines Punktingtervals A , ein Intervall, denn die untere Grenze darf ja nicht größer als die obere sein. Man sagt hierzu: Mit Ausnahme der Punktingtervals besitzen die Intervalle bezüglich der Addition keine Inversen. Mit Ausnahme der Punktingtervals besitzen die Intervalle auch bezüglich der Multiplikation keine Inversen. Es gibt nämlich im allgemeinen kein Intervall B mit der Eigenschaft $A:B=[1,1]$. Prüfen wir nun noch, ob das distributive Gesetz der Addition

$$a(b+c)=ab+ac$$

bei Intervallen gilt. Wir nehmen z. B. $A=[-1, 2]$, $B=[2, 4]$ und $C=[-2, -1]$ und berechnen

$$\begin{aligned} A(B+C) &= [-1, 2] ([2, 4] + [-2, -1]) \\ &= [-1, 2] \cdot [0, 3] = [-3, 6] \\ AB+AC &= [-1, 2] \cdot [2, 4] + [-1, 2] \cdot [-2, -1] \\ &= [-4, 8] + [-4, 2] = [-8, 10]. \end{aligned}$$

Wir stellen für dieses Beispiel fest, daß die Beziehungen

$$A(B+C) \neq AB+AC$$

$$\text{und } A(B+C) \subset AB+AC$$

(das linke Intervall ist Teilmenge des rechten) gelten. Das distributive Gesetz der Addition ist also nicht gültig, man kann aber beweisen, daß allgemein

$$A(B+C) \subseteq AB+AC$$

gilt. Diese Beziehung heißt Subdistributivgesetz. Weiterhin gilt für die Grundoperationen eine für die Intervallmathematik wichtige Eigenschaft, die sogenannte Teilmengeneigenschaft:

Aus $A \subseteq C$, $B \subseteq D$ folgt für $* \in \{+, -, \cdot, : \}$
 $A*B \subseteq C*D$.

Auf ihren Beweis müssen wir verzichten.

Nun wollen wir eine angewandte Aufgabe aus der Physik lösen.

Zwischen dem Krümmungsradius r , dem Durchmesser s und der maximalen Dicke d einer plankonvexen, sphärischen Linse besteht die Beziehung

$$r = \frac{s^2}{8d} + \frac{1}{2}d.$$

(Der Krümmungsradius r ist der Radius der Kugel, von der die Linse durch einen ebenen Schnitt abgetrennt wurde.) Es wurden $s=126 \pm 1$ mm und $d=3,9 \pm 0,1$ mm gemessen, d.h., es ist $s \in S=[125, 127]$ und $d \in D=[3,8; 4,0]$. Es soll bestimmt werden, wie sich die Fehler von s und d auf r auswirken, dazu bestimmen wir das Intervall

$$R = \frac{S^2}{8D} + \frac{1}{2}D.$$

Auf Grund der Teilmengeneigenschaft gilt

$$\left\{ \frac{s^2}{8d} + \frac{1}{2}d \mid s \in S, d \in D \right\} \subseteq \frac{S^2}{8D} + \frac{1}{2}D = R.$$

Das Intervall R ist also Obermenge der Menge aller Krümmungsradien für $s \in S$ und $d \in D$. Es gilt

$$\begin{aligned} S^2 &= S \cdot S = [125, 127] \cdot [125, 127] \\ &= [15625, 16129], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8D &= [8,8] \cdot D = [8,8] \cdot [3,8; 4,0] \\ &= [30,4; 32,0], \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}D = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \cdot D = [1,9; 2,0],$$

$$\begin{aligned} S^2 : 8D &= [15625, 16129] \cdot \left[\frac{1}{32,0}, \frac{1}{30,4} \right] \\ &= [488,2; 530,6], \end{aligned}$$

also ist

$$\begin{aligned} R &= [488,2; 530,6] + [1,9; 2,0] \\ &= [490,1; 532,6]. \end{aligned}$$

Wenn die Größen s und d mit den oben angegebenen Fehlern gemessen werden, weiß man vom Krümmungsradius r , daß er zwischen 490,1 mm und 532,6 mm liegt.

An der Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Carl Schorlemmer Leuna-Merseburg arbeitet unter meiner Leitung eine Forschungsgruppe, die sich mit Intervallmathematik und ihren praktischen Anwendungen beschäftigt. Dabei beziehen wir unsere Mathematikstudenten bereits in den unteren Studienjahren entsprechend ihren Möglichkeiten in die Forschungsarbeit mit ein. Von unseren Studenten wurden schon wertvolle Ergebnisse erzielt. Auf der III. Zentralen Studentenkonzferenz im September 1981 in Leipzig stellten die Studenten J. Schulze und V. Wiebigke die Ergebnisse ihrer Jahresarbeit über Rechnerprogramme zur intervallmathematischen Behandlung von Gleichungssystemen in einem interessanten Vortrag vor, der prämiert wurde. Herr Wiebigke führt heute als Forschungsstudent seine Untersuchungen zur Intervallmathematik an unserer Sektion weiter.

D. Oelschlägel



Eine Aufgabe von Prof. Dr. D. Oelschlägel

und Forschungsstudent V. Wiebigke

Sektion Mathematik der Technischen
Hochschule Leuna-Merseburg

▲ 2406 ▲ a) Beweisen Sie, daß die Addition bei Intervallen assoziativ ist.

b) Wie genau können wir die Tiefe des Wasserspiegels eines Brunnens bestimmen, wenn ein fallengelassener Stein nach unserer Messung nach $5 \pm 0,1$ s auf den Wasserspiegel aufschlägt und von der Erdbeschleunigung $g(\text{m/s}^2)$ die Beziehung $g \in [9,80; 9,81]$ bekannt ist?

c) Unter dem Durchmesser $d(A)$ eines Intervalles $A=[a_1, a_2]$ versteht man die nicht-negative reelle Zahl

$$d(A) := a_2 - a_1.$$

Zeigen Sie, daß die Gleichungen

$$d(A+B) = d(A) + d(B)$$

und $d(A-B) = d(A) + d(B)$ gelten.

Interessierte Leser können die Lösungen einschicken an

Prof. Dr. Oelschlägel

TH „Carl Schorlemmer“ Leuna-Merseburg

Sektion Mathematik

4200 Merseburg

Otto-Nuschke-Straße

Kurzbiographie

Am 18.11.1935 wurde ich in Dresden geboren. Nach Besuch der Grundschule und der Erweiterten Oberschule legte ich 1953 das Abitur ab und begann im selben Jahr an der Martin-Luther-Universität Halle mit dem Studium der Mathematik. In der Diplomarbeit behandelte ich ein spezielles Thema aus der Darstellungstheorie von Gruppen und legte 1959 das Diplom ab. Von 1959 bis 1961 war ich in einer Schiffbauinstitution als Mathematiker tätig. Seit 1961 arbeite ich an der Technischen Hochschule Carl Schorlemmer Leuna-Merseburg. 1966 promovierte ich mit einer Arbeit zur konvexen Optimierung zum Dr. rer. nat., 1969 wurde ich zum Hochschuldozenten berufen, 1970 habilitierte ich mich mit einer Arbeit zur parameterabhängigen konvexen Optimierung, 1971 wurde ich zum ordentlichen Professor für Numerische Mathematik berufen. 1971/72 absolvierte ich ein Zusatzstudium an der Leningrader Staatlichen Universität. Gegenwärtig bin ich Leiter des Wissenschaftsbereiches Numerische Mathematik, Mathematische Kybernetik und Rechentchnik und Leiter der Forschungsgruppe Numerische Behandlung dynamischer Systeme der Sektion Mathematik. D. Oelschlägel

Adam Ries (1492 bis 1559)

Zum 425. Todestag des Rechenmeisters

Adam Ries

Im Jahr der Entdeckung Amerikas durch C. Columbus wurde Adam Ries in Staffelstein am Main in eine Zeit hineingeboren, die von bedeutenden ökonomischen und politischen Ereignissen gezeichnet war.

Noch vor Ende des 15. Jahrhunderts entdeckte Vasco da Gama den Seeweg nach Indien. Die Reformation reifte heran und fand 1517 mit dem Anschlag der 95 Thesen an die Tür der Schloßkirche zu Wittenberg durch Martin Luther ihre endgültige Auslösung. Territoriale Bauernaufstände trotzten dem Feudaladel wenigstens geringe Verbesserungen ab und führten schließlich zum Bauernkrieg von 1524/25, den F. Engels neben der Reformation als ersten Akt der bürgerlichen Revolution in Europa bezeichnete. Diese bewegte Zeit brachte für eine Reihe von Städten eine rasche Entwicklung mit sich, so auch für Erfurt und Annaberg, die beide im Leben von A. Ries die bedeutendste Rolle spielten. Der vorübergehende Aufschwung Erfurts fußte vor allem auf den sich festigenden neuen erweiterten Handelsbeziehungen. Annaberg hatte 1496 das Stadtrecht als Zentrum des sächsischen Silberbergbaus erhalten und gehörte kurze Zeit später schon zu den bedeutendsten Städten Deutschlands. So ist es kein Wunder, daß diese Städte vor allem auf junge Menschen anziehend wirkten, die hier Betätigungs- und Entwicklungsmöglichkeiten suchten.

Der Vater von Adam Ries besaß eine Mühle, einen Weinberg und einige Hausgrundstücke, so daß die zehnköpfige Familie in bescheidenem Wohlstand leben konnte. Er war das zweite Mal verheiratet, seine erste Frau war um 1545 gestorben. Adam und weitere vier Kinder stammten aus zweiter Ehe.

Bereits als 17jähriger verließ Adam Ries sein Elternhaus, das erste Mal für längere Zeit. Sein Vater war zu diesem Zeitpunkt bereits seit etwa drei Jahren verstorben. Am Ende dieser Wanderjahre, während der Adam Ries 1515 auch die Stadt Annaberg kennengelernt hatte, wurde er im Jahre 1518 in Erfurt sesshaft. Dort bezeichnete er sich 1522 im Zusammenhang mit der Veröffentlichung des Rechenbuches „Rechnung auff der linihen und federn“ erstmalig als Rechenmeister. Ob vorher ein Aufenthalt in Frankfurt (Main) erfolgte, wo Adam Ries auf dem Römer für

die Messebesucher mathematische Aufgaben gelöst haben soll, ist ungewiß. In Erfurt gründete Ries eine Rechenschule und veröffentlichte bereits 1518 sein erstes Buch „Rechnung auff der linihen“ und 1522 die bereits erwähnte „Rechnung auff der linihen und federn“; beide erfuhren eine Reihe von Nachauflagen. Durch G. Stortz, den späteren Rektor der 1392 eröffneten Universität Erfurt, kam Ries mit Humanisten und mit den Lehren Martin Luthers in Berührung. In der großen Bücherei in Stortzens „Engelsburg“ standen Ries viele mathematische Schriften zur Verfügung, zu deren Studium ihm seine ausgezeichneten Kenntnisse der lateinischen Sprache sehr zugute kamen.

Stortz war es vor allem, der Ries zum Schreiben von Rechenbüchern angeregt hat. Beide Männer blieben auch weiterhin freundschaftlich verbunden, als Ries 1523 nach Annaberg umsiedelte, dort 1525 heiratete und den Bürgereid leistete. Gerade in diesem Jahr nach der Niederschlagung des Bauernkrieges verschärfte sich überall, so auch in Annaberg, die Verfolgung der „Lutheraner“ immer mehr, ohne jedoch das Vordringen der neuen Lehre aufhalten zu können, mit der Ries sympathisierte, ohne sich öffentlich für sie zu

Adam-Ries-Haus in Annaberg-Buchholz



bekennen. Über Repressalien, denen er dadurch ausgesetzt war, ist jedoch nichts bekannt. Vielleicht wäre der Verlust für die Bergwerksherren zu groß gewesen, wenn man Ries, wie viele andere, eingekerkert oder der Stadt verwiesen hätte. In Annaberg versah Ries ab 1525 das Amt des Rezeßschreibers. Dieser Bergwerksberuf wäre aus heutiger Sicht vielleicht vergleichbar mit dem eines Buchhalters im Bergbau. Der Rezeßschreiber prüfte die Bergrechnungen und hatte die geförderte Erzmenge und deren Ausbeute zu erfassen und in das „Rezeßbuch“ einzutragen. Außerdem erwartete der Eigentümer vierteljährlich eine Aufstellung – den Rezeß – über Soll und Ist seines Bergwerksbesitzes, den der Rezeßschreiber liefern mußte.

Aus dieser Zeit stammen Zehnt- und Münzrechnungen sowie Rezeßschreiben aus Riesens Feder. Auch für die Stadtverwaltung von Annaberg war Ries tätig, indem er Berechnungen von Nachlässen und Steuern durchführte. Für die Stadt Zwickau erarbeitete er einige Brot- bzw. Beckenordnungen. Bereits in Erfurt hatte Ries die Arbeiten an der „Coß“ begonnen, die er 1524 in Annaberg vollendete. Gedruckt wurde dieses Buch nicht.

In Riesens „Coß“ sind neben vielen praktischen Aufgaben auch eine große Anzahl mit formalem Charakter enthalten. Dabei übernahm er Beispiele aus den Büchern anderer Cossisten, nicht ohne sie einer kritischen Überarbeitung zu unterziehen und sie vor allem in einfacher Sprache wiederzugeben. Wie in allen seinen Büchern bezeichnete auch hier Ries die Proben als zur vollständigen Lösung eines Problems gehörig. Der Inhalt der „Coß“, also die Aufstellung mathematischer Probleme aus der Praxis und die Lösung algebraischer Gleichungen mittels Algorithmus, das heißt, durch systematische Anwendung der vier Grundrechenoperationen, wurde von Ries teils in unterrichtender, weiterführender Form, teils in Form von Wiederholungen und Übungen, immer aber so verständlich dargeboten, „... damit der arme gemeyne Mann nicht übersetzt (betrogen) werde“.

Bis in Riesens Zeit wurde hauptsächlich mit oder besser auf dem Brett gerechnet. Dazu benötigte man Rechensteine oder Rechenpfennige, die je nach dem Geldbeutel des Besitzers oft recht kunstvoll ausgeführt waren. Die Umschrift auf einem dieser Pfennige „Zwiespalt großes Gut verzehrt – Einigkeit das Wenige mehrt“ soll von Adam Ries stammen. Wirkliche Bretter oder in den Tisch geritzte oder darauf gezeichnete Schemata oder ein entsprechend bemaltes Tischtuch dienten dabei als „Rechenbretter“. Ein solches „Brett“ ist zu verstehen als ein Schema für gebündelte Zahlen in Form von Linien. Die Einer, Zehner, Hunderter usw. wurden mit Rechensteinen auf ihnen dargestellt, die Fünfer, Fünzfziger, Fünfhunderter

usw. zwischen den Linien (in den sogenannten Spatien).

Während das Addieren und Subtrahieren auf dem Rechenbrett noch relativ übersichtlich auszuführen ist, gehören zur Ausführung von Multiplikation und Division gewisse Fertigkeiten, die unter anderem darin bestehen, daß eine mehrstellige Zahl dekadisch aufgespalten wird und die dadurch erhaltenen Teilsummanden einzeln „umgewandelt“ werden. Die so erhaltenen „Ergebnisse“ wurden dann wieder in „deutsche Zahlen“ (gemeint sind die römischen Zahlzeichen) übertragen.

Seit dem 12. Jahrhundert waren allmählich auch die indischen Ziffern über Arabien nach Europa vorgedrungen und begannen sich im 14./15. Jahrhundert durchzusetzen. Ries widmete sich in seinem 1522 erschienenen zweiten Buch „Rechenung auff der linihen und federn auff allerley handtierung“ sowohl dem Rechnen mit dem Rechenbrett als auch dem schriftlichen Rechnen. Dieses Buch erlebte bis gegen 1650, also noch fast 100 Jahre nach Riesens Tod, über 60 Auflagen. Der Grund ist unter anderem darin zu suchen, daß dieses Buch in deutscher Sprache geschrieben und somit breitesten Kreisen zugänglich und vorzüglich didaktisch aufgebaut war. Mit seiner Hilfe konnte der Leser wirklich Rechenfertigkeiten erwerben, indem er die ausführlichen Anleitungen gründlich studierte und die enthaltenen Exempel nachvollzog beziehungsweise Aufgaben löste. Und gerade in bezug auf die praktische Anwendung der Mathematik bestand ein großes Bedürfnis, dem das in den Hochschulen gelehrt *Quadrivium* in keiner Weise entsprach.

Erwähnenswert ist noch das 1533 erschienene „Gerechent Büchlein auff den Schöffel, Eimer und Pfundgewicht“ als erstes bekanntes Tabellenbuch für die Praxis, das nicht nur mehrere Auflagen, sondern auch viele Nachfolger durch andere Autoren erfuhr. Dabei

darf nicht vergessen werden, daß Ries nicht nur Bücher schrieb, sondern auch eine Rechenschule betrieb und vor allem aber für Bergbau und Verwaltung als Rechenmeister tätig war.

Riesens guter Ruf drang bereits zu Lebzeiten weit über Annaberg hinaus. Abgesehen davon, daß er auch für Marienberg in den Jahren von 1529 bis 1537 den Rezeß führte und in Freiberg mehrmals der Rechnungslegung der Bergwerke beiwohnen durfte, wurde er 1539 zum „Churfürstlich Sächsischen Hofarithmeticus“ ernannt. Ries konnte sich mit seiner zehnköpfigen Familie ein Leben frei von materiellen Sorgen leisten. Außerdem erwarb er zwei Häuser und gehörte somit zu den wohlhabenden Bürgern Annabergs. Etwa um 1545 starb seine erste Frau. Einige Jahre danach heiratete er ein zweites Mal. Diese Ehe währte fast noch zehn Jahre. Am 30. März 1559 starb A. Ries im Alter von 67 Jahren. Die unmittelbare Nachfolge übernahm sein Sohn Abraham.

Der Verlauf des Lebens von Adam Ries zeigt uns, daß er weder das schriftliche Rechnen noch das Einmaleins „erfunden“ hat, wie häufig angenommen wird. Sein großes einmaliges Verdienst besteht darin, die damals hochgeschätzte, aber als noch sehr schwierig empfundene Rechenkunst so „aufbereitet“ zu haben, daß sie von jedermann verstanden und angewendet werden konnte. Dabei verzichtete er nicht auf wissenschaftliche Strenge. Er erkannte die Bedürfnisse seiner Zeit, die für ihn darin bestanden, den breiten Massen Bildung zu vermitteln, um ihre Urteilsfähigkeit zu heben, und befriedigte diese in mathematischer Hinsicht optimal. Die Redewendung „macht nach Adam Ries...“, nunmehr schon über 400 Jahre gebräuchlich, ehrt den ersten Mathematiklehrer des Volkes zu Recht, auch wenn die Ergebnisse von Rechenoperationen nach ihm die gleichen blie-

ben wie vor seinem Wirken und Ries selbst keine eigenen Beiträge zur Fortentwicklung der mathematischen Wissenschaften geleistet hat.

W. Arnold

Vorliegenden Beitrag übernahmen wir – gekürzt – aus dem für Schüler (ab Klasse 7/8) geeigneten Buch:

Autorenkollektiv

Biographien bedeutender Mathematiker

535 Seiten, zahlreiche Abb.,

Preis DDR 22,- M

Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Berlin 1983



Neunerprobe nach Adam Ries

7869

8796

16665

„Mach ein creutz zum ersten, also $\times$ “

Nimm die prob von der oberenn Zal,
als von 7869

setz die in ein veld des creutz, also $3 \times$

Nun nimm die proba von der andern Zal,
das ist von 8796 ist auch 3;

setz vff das ander veldt neben vber,

also 3×3 .

Addir nun zusammen $3 + 3$ wirt 6,

setz obenn wie hi $3 \times 6 \times 3$.

So du nun die prob von beyden Zalnn oben
gesetzt genumen und zusammen addirt hast, so
Nime alsdann prob auch von dem, das so
auß dem addirn komen ist, das ost von der
vnterstenn Zal vnder der linihen akss 16665.
Nim hinweg 9, so oft du magst, pleibn 6
übrig, die setz vnden in das ledige feltt. Ist

gleich souil sam oben stett, also $3 \times 6 \times 3$. So

weniger oder mer komen wer, so hattest du
im nicht recht gethan.“

Annaberg im 16. Jh. zur Zeit des Wirkens von A. Ries



Alt-Annaberg
im 16. Jahrhundert

Aufgaben aus einem Lehrbuch von Adam Ries (um 1524)

Item 3 gesellen haben gewonnen ein anzahl geldes, der erste nimet 1/7, der ander 1/4 und der dritte nimet das vbrig das ist 17 fl. Nun frage, wiewil des geldes ist das sie gewonnen habn.

Item eyner spricht zu dem andern gib mir 1 pfennig, so hab ich souil sam Dir pleibet, spricht der ander zum erstenn gib mir 1 pfennig, so hab ich zwey mal souil sam dir pleibet. Nun wolt ich gern wissen, wiuil eyenn etzlicher gehabt hab.

Item drey kauffen 1 pferdt vmb 12 fl. keyner vermugens allein Zubezaln. A spricht zu B und C, leye mir itzlicher 1/2 seynes geldes, so wil ich das pferdt bezalen. Spricht b zu c vnd a gebt mir 1/3 so wil ich das pferdt vergnugen. Nachdem spricht x zum b vns a gebt mir beyde 1/4, so wil ich das pferdt kauffenn. Nun frage ich, wiuil itzlicher in sunderheit gehabt hab.

Aufgabe mit Lösung (Facit); Kalmus ist eine Heilpflanze

Kalmus. Item ein Sack mit Kalmus wiegt 48 lb. 24 loth/Tara 2 lb. vnd 16 loth/loft ein lb. 13 lb. ein halben. Facit 31 f. 4 lb. 4 hlr vnd ein halben. Das Tara nimt herab/mach for vnd hinden loth/brichs mittlen vnd gehe herfür/stehe: 64 27 1480

Adam Risen. Bihetauff.



Item einer hat 100 fl. dafür wil er 100. haupt Bihetauffen / nemlich / Ochsen/ Schwein/ Kälber/ vnd Geyßen/ kost ein Ochse 4 fl. ein Schwein anderthalben fl. ein Kalb einen halben fl. vnd ein Geyß ein ort von einem fl. wie viel sol er jeglicher haben für die 100. fl. 2 Nachs nach den vorigen/mach eines jeglichen kosten zu örtern/bedigleichen die 100. fl. vnd setz als dann also:

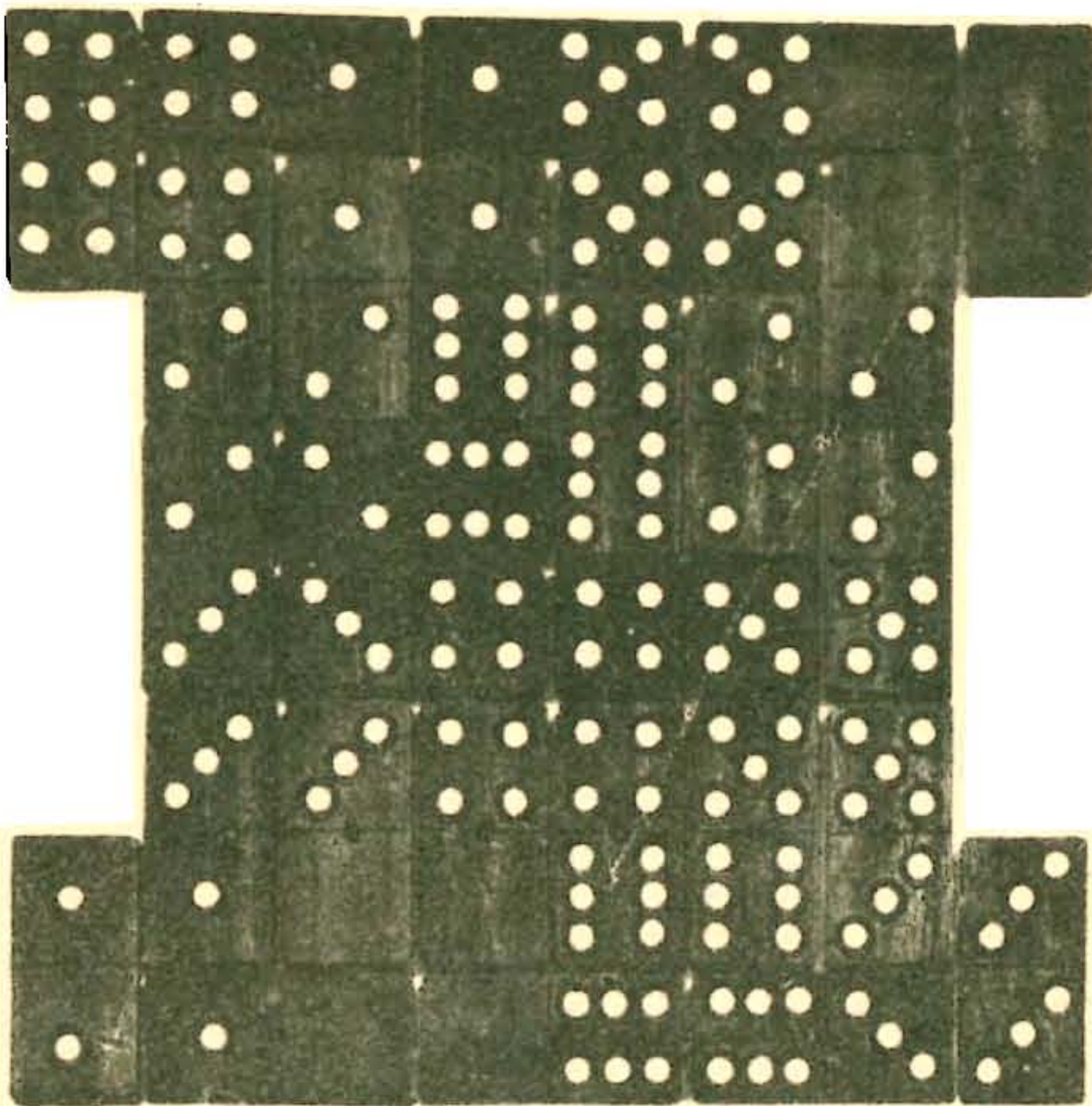
16	15
6	5
100	400
2	1
1	

Australischer Mathemattikkalender 1984

herausgegeben von der Mathematischen Vereinigung der Mathematiklehrer Australiens - Autoren: R. Robin, S. Murray - Wir zeigen die Monatsblätter Januar und Juli.

Sun.	Mon.	Tues.	Wed.	Thurs.	Fri.	Sat.
1 1^{984}	2 $-1-9+8+4$	3 $(1+9+8)\div 4$	4 $(1\times 9-8)\times 4$	5 $(-1+9)\div 8+4$	6 $1+9-8+4$	7 $1\times 9-8\div 4$
8 $1+9-8\div 4$	9 $\sqrt{1\times 9}+8-\sqrt{4}$	10 $1+9+8-\sqrt{4}$	11 $1\times 9+8\div 4$	12 $1\times 9\times 8\div \sqrt{4}$	13 $-1+9+8\times 4$	14 $1+9+8-4$
15 $19-8+4$	16 $1^9\times 8\times \sqrt{4}$	17 $19-8\div 4$	18 $1\times 9\times 8\div 4$	19 $1\times 9+8+\sqrt{4}$	20 $-1+9+8+4$	21 $1\times 9+8+4$
22 $1\times \sqrt{9}\times 8-\sqrt{4}$	23 $19+8-4$	24 $(1\times 9-8)\times 4!$	25 $1\times (9-8)+4!$	26 $-(1\times 9)!+8\times 4$	27 $1-(9)!+8\times 4$	28 $-1-\sqrt{9}+8\times 4$
29 $-1\times \sqrt{9}+8\times 4$	30 $1-\sqrt{9}+8\times 4$	31 $19+8+4$				

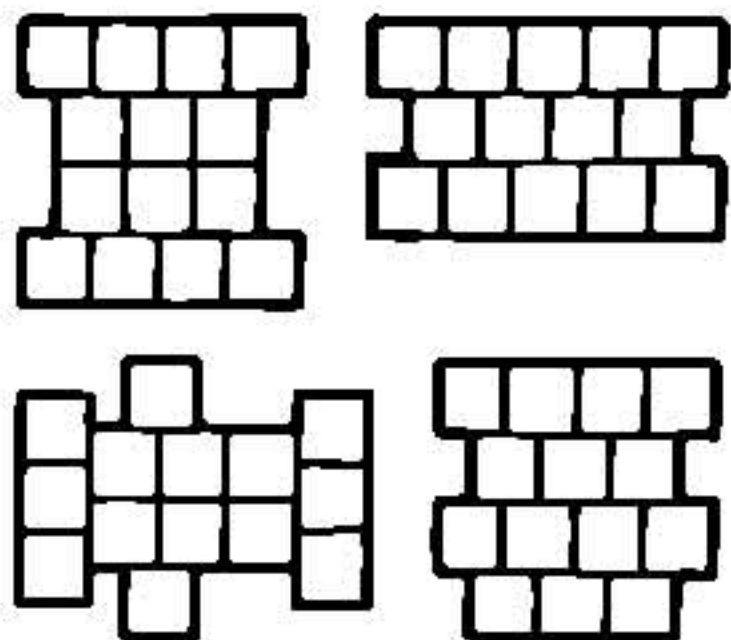
QUADRILLES



A doubly symmetric quadrille.

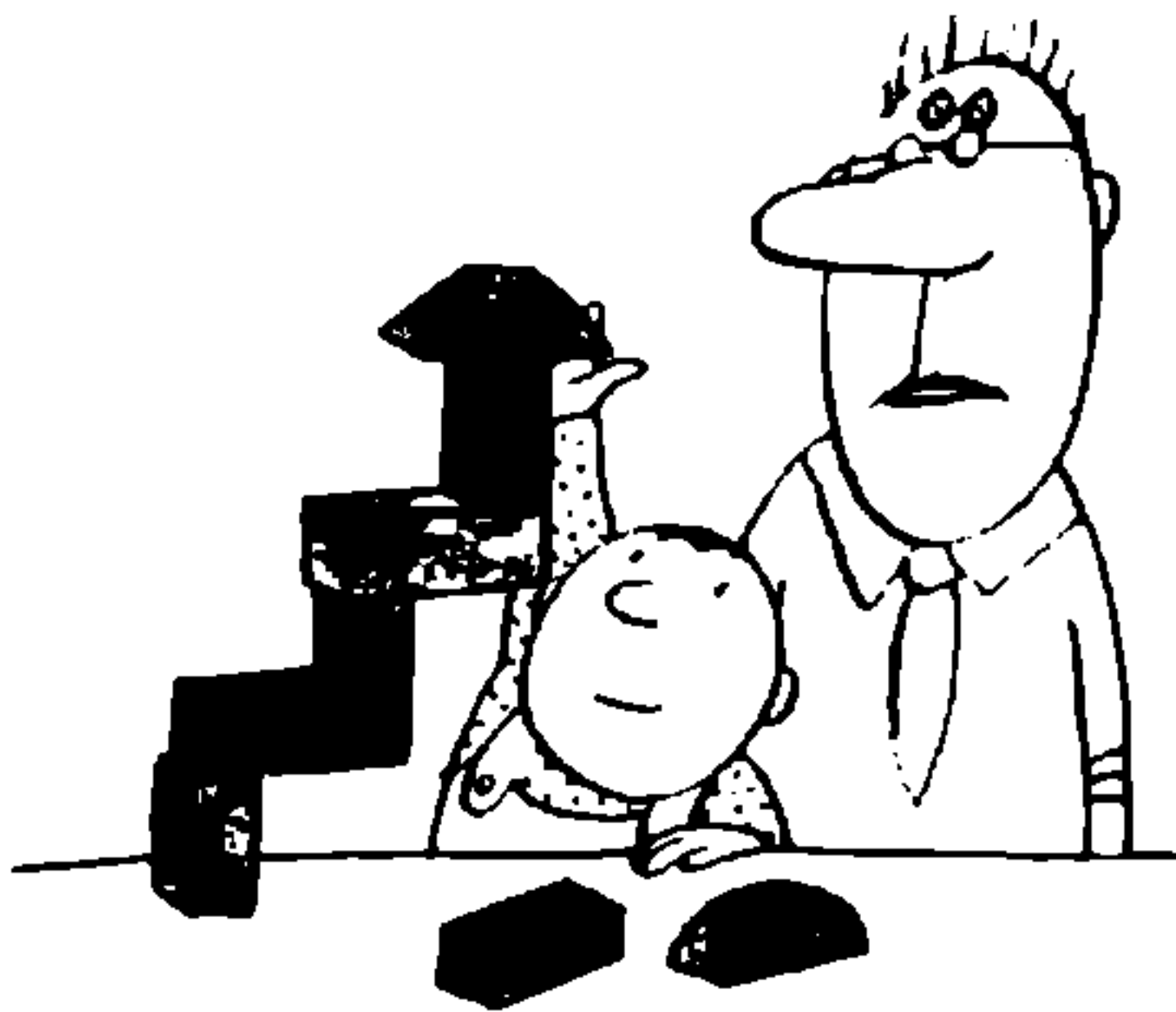
During the nineteenth century a French mathematician, Edouard Lucas, gave the name Quadrille to a domino figure consisting of blocks of four half-tiles each carrying the same number of pips. e.g. In the quadrille here the upper left block of four half-tiles all have four (4) pips on them, while the bottom left block have all ones (1) on them.

Using all the dominoes in a double-6 set try to make the following patterns. Remember, each square on these patterns represents a block of four half tiles each with the same number of pips.



Sun.	Mon.	Tues.	Wed.	Thurs.	Fri.	Sat.
1 $-e^{-i\pi}$	2 Turning point is (2,2)	3 $87 \equiv x \pmod{7}$ $x = ?$	4 Gradient? $\frac{4}{3}$	5 $\sqrt{1445} = 17\sqrt{m}$ $m = ?$	6 $3\int_0^2 x dx$	7 $x = ?$
8 $t = ?$	9 $\frac{1}{3^{-2}}$	10 $(3-7i)(3+7i)$	11 $\frac{(x^3)^p}{x^{-2}} = x^p$ $p = ?$	12 A cube has ? edges	13 H.C.F. of 78 and 91	14 $\frac{63 \times 36}{162}$
15 $a = ?$	16 10000_{two}	17 If $x = -7$, $3-2x = ?$	18 $4(3x+2)-2(6x-5)$	19 $\frac{19!}{18!}$	20 6C_3	21 x intercept of $2x-45y-42=0$
22 Mean of 12, 17, 26, 33.	23 $x = ?$	24 Volume?	25 cm in $\frac{1}{4}$ m	26 $\theta = ?$	27 $x = ?$	28 $n = ?$
29 $\frac{a}{b} = \frac{1,4,5}{3,2,4}$ $g.b = ?$	30 $L = ?$	31 H.C.F. of 217 and 372.				

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 1. Mai 1984

Mathematik

Ma 5 ■ 2407 Für drei Sportler, die sich an einem 30-km-Skilanglauf beteiligten, wurden folgende Zeiten gestoppt: Sportler A benötigte 1 h 27 min 34 s; Sportler B benötigte 5284 s; Sportler C hingegen 87 min 3 s. Ordne die Laufzeiten dieser drei Sportler! Beginne mit der besten Laufzeit!

Schülerin Gabriele Schweimnitz,
Zella-Mehlis

Ma 5 ■ 2408 Petra kauft auf dem Postamt für 3,25 M Briefmarken zu 20 Pf und 35 Pf das Stück, und zwar mehr 20-Pf-Marken als 35-Pf-Marken. Wie viele Briefmarken jeder Sorte hat Petra gekauft?

Schülerin Claudia Popien, Magdeburg

Ma 5 ■ 2409 Die Quersumme einer zweistelligen natürlichen Zahl beträgt 5. Multipliziert man diese Zahl mit 3, subtrahiert man vom Produkt 1, so erhält man eine zweistellige natürliche Zahl mit den gleichen, aber vertauschten Grundziffern.

Schülerin Sandra Fabian, Liederstädt

Ma 5 ■ 2410 Wolfgang und Stefan haben zusammen 9 Bleistifte, 21 Faserstifte und 10 Buntstifte. Stefan hat doppelt so viele Bleistifte wie Wolfgang und drei Faserstifte mehr als Wolfgang. Wolfgang hat viermal so viel Buntstifte wie Stefan. Wie viele Blei-, Faser- bzw. Buntstifte hat jeder der beiden Jungen?

Schülerin Sabine Schüler, Schöna

Ma 5 ■ 2411 Klaus kauft in einem Fachgeschäft für Anglerbedarf Posen zu 75 Pf, zu 1,00 M, zu 60 Pf und zu 32 Pf das Stück, und zwar von jeder Sorte mindestens eine Pose. Insgesamt gibt er dafür 3,91 M aus. Wie viele Posen jeder Sorte kauft Klaus ein?

Schüler Thomas Rademacher, Lübben

Ma 5 ■ 2412 Ein Güterzug wurde aus 67 Waggons mit insgesamt 236 Achsen zusammengestellt, und zwar aus sieben sechsachsigen Waggons und noch aus zwei- und vierachsigen Waggons. Wie viele zwei- und vierachsige Waggons gehören zu diesem Güterzug?

Schüler Frank Berger, Saalfeld

Ma 6 ■ 2413 Wenn man hinter die Ziffer für eine einstellige natürliche Zahl noch die Grundziffer 6 schreibt, so ist die dargestellte Zahl um 9 kleiner als diejenige Zahl, die man erhält, wenn man die Grundziffer 6 vor diese Zahl setzt. Um welche Zahl handelt es sich?

Schüler Thomas Rademacher, Lübben

Ma 6 ■ 2414 Von drei Herren, die in den Städten Berlin, Cottbus und Leipzig wohnen, die die Familiennamen Meyer, Müller und Kaiser haben, und die die Berufe Lehrer, Ingenieur und Schriftsteller ausüben, ist folgendes bekannt:

- (1) Der Ingenieur und Herr Meyer kennen sich bereits aus ihrer gemeinsamen Schulzeit.
- (2) Herr Kaiser besuchte kürzlich Herrn Müller in Berlin.
- (3) Der Lehrer wohnt in Leipzig.
- (4) Herr Kaiser und der Lehrer haben sich im letzten Urlaub kennengelernt.
- (5) Der Ingenieur ist mit Herrn Kaiser befreundet.
- (6) Der Schriftsteller fährt aus beruflichen Gründen öfter nach Leipzig.

Ordne den Familiennamen dieser drei Herren den jeweiligen Beruf und den Wohnort zu! Welche der sechs Angaben ist nicht erforderlich?

Schülerin Andrea Gipp, Bad Muskau

Ma 6 ■ 2415 Ein Schüler schreibt versehentlich 5,30 h statt 5 h 30 min. Wieviel Minuten Differenz entstehen durch diesen Schreibfehler?

Schülerin Janett Stynka, Rostock

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion *alpha*

7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11, 12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm x 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1983/84 läuft von Heft 5/1983 bis Heft 2/1984. Zwischen dem 1. und 10. September 1984 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/83 bis 2/84 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/84 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/83 bis 2/84) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1983/84 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

32	Thies LuAher, 2600 Güstrow, Wendersstr 22 Kersting-OS, Klasse 7	150	Ma 7 ■ 1369
	Prädikat:		
	Lösung:		

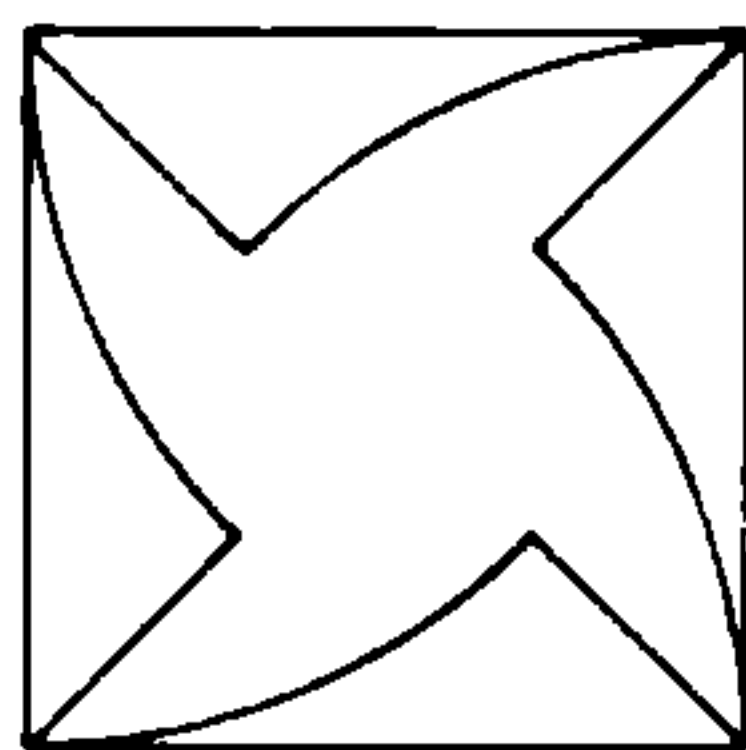
Ma 6 ■ 2416 Welche gebrochene Zahl mit dem Nenner 17 ist größer als $\frac{1}{4}$, aber kleiner als $\frac{1}{3}$?
Schüler Thomas Häusler, Hoyerswerda

Ma 6 ■ 2417 Heinz, Peter, Manfred und Klaus verbrachten einen Teil ihrer Ferien in der Pionierrepublik „Wilhelm Pieck“ am Werbellinsee. Alle vier Schüler kommen aus verschiedenen Städten, und zwar aus Dresden, Magdeburg, Leipzig und Rostock. Aus den folgenden Angaben ist zu ermitteln, in welcher Stadt jeder der vier Jungen wohnt!

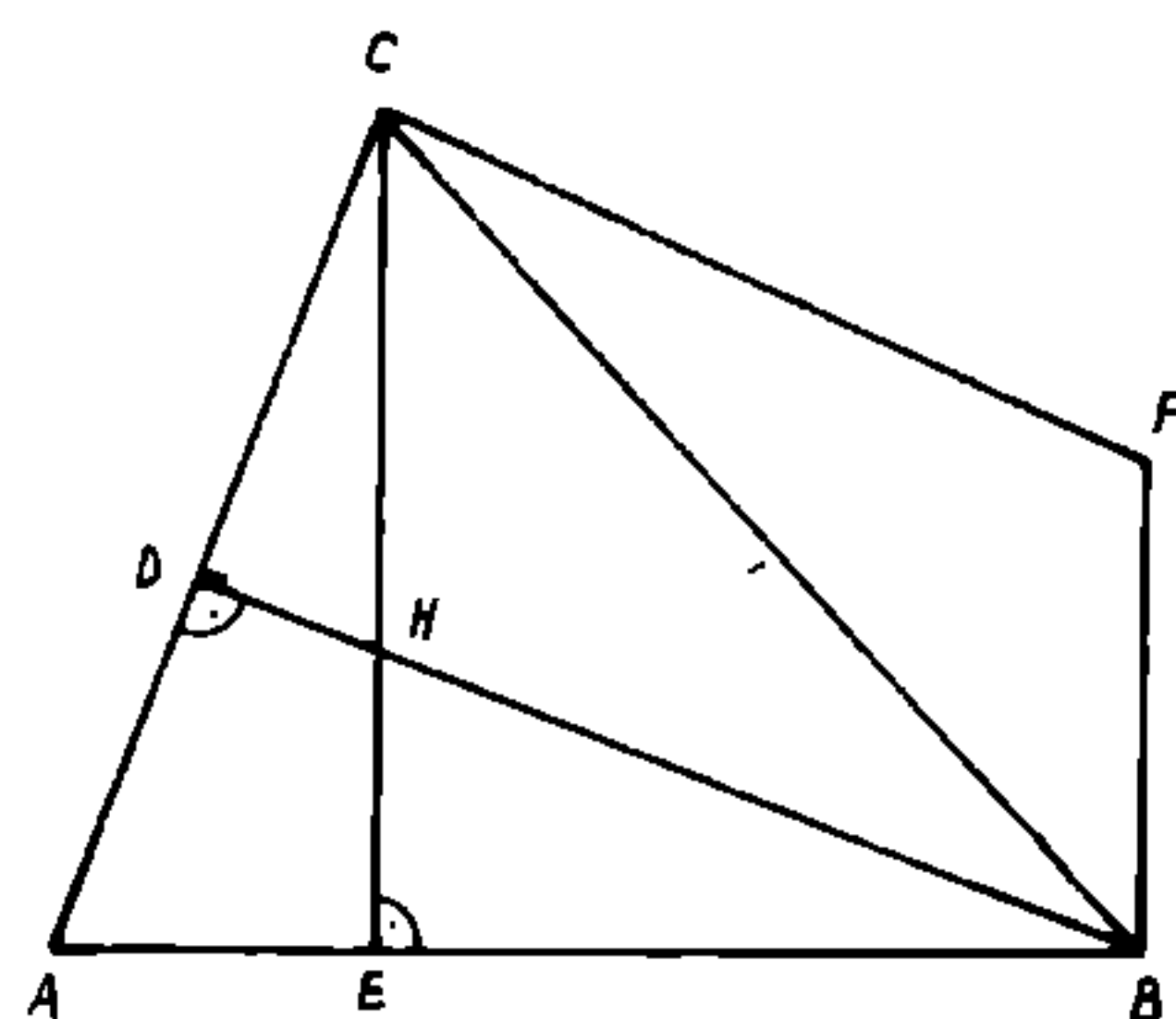
- Peter ist jünger als der Junge aus Magdeburg, aber älter als Heinz.
- Heinz und der Junge aus Rostock spielen gern Fußball.
- Klaus und die Jungen aus Dresden und Magdeburg legten vor kurzem die Prüfung der Schwimmstufe III ab.
- Der Junge aus Rostock und Klaus beteiligen sich regelmäßig am α -Wettbewerb.

Schüler Björn Pietsch, Radeburg

Ma 7 ■ 2418 Um jeden der vier Eckpunkte eines Quadrates wurde, wie aus dem Bild ersichtlich, jeweils ein Kreisbogen gezeichnet, der in einem Eckpunkt beginnt und auf der Diagonalen endet, die den Kreisbogen im Innern des Quadrates schneidet. Wieviel Prozent vom Flächeninhalt des Quadrates beträgt der Flächeninhalt der dem Quadrat auf diese Weise einbeschriebenen Figur?
Schüler Lutz Küch, Erlau

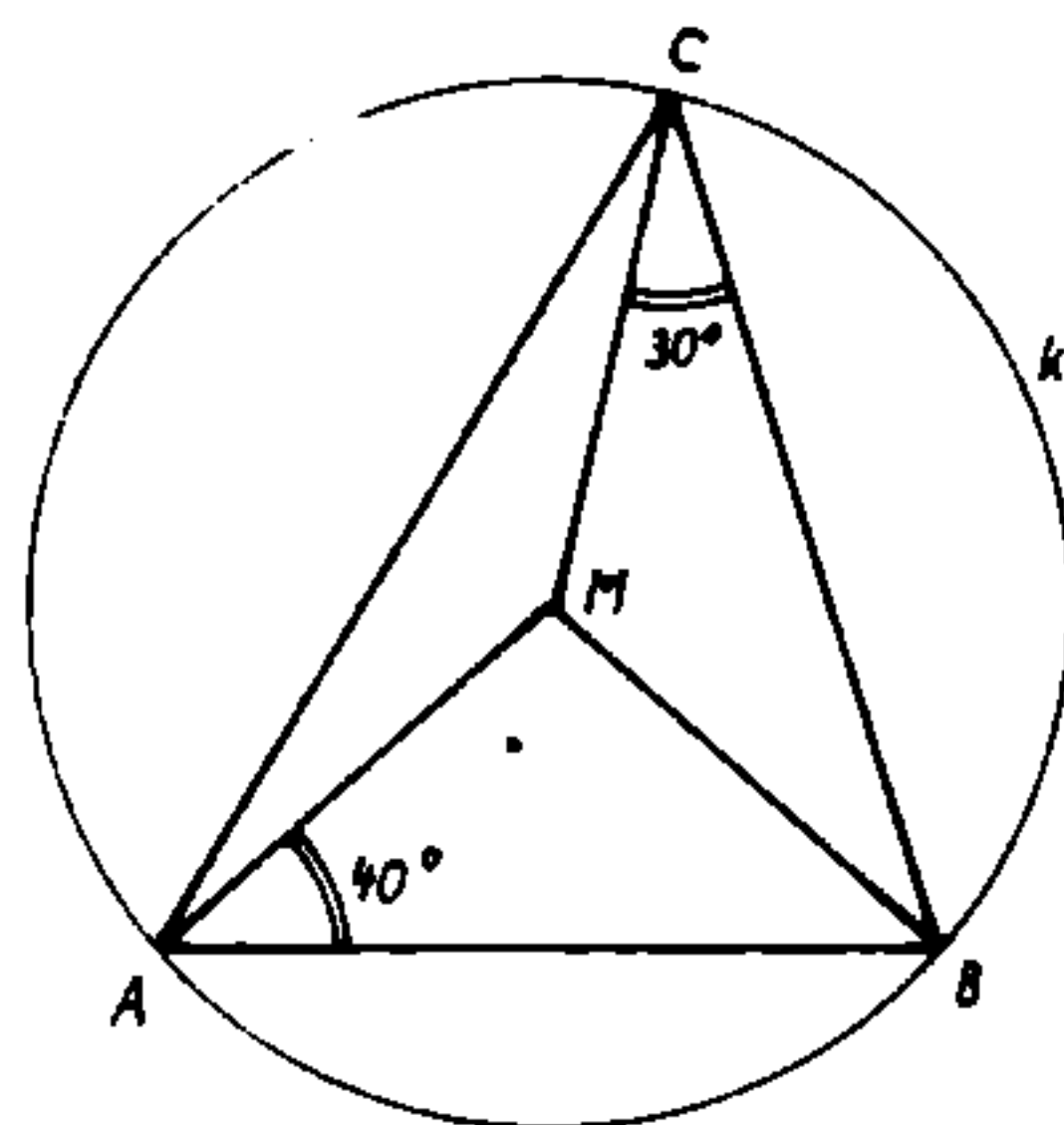


Ma 7 ■ 2419 Das Bild stellt ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit den Höhen $\overline{BD}$ und $\overline{CE}$ dar, die sich im Punkte H schneiden. Die Parallele zu $\overline{CH}$ durch B schneidet die Parallele zu $\overline{BH}$ durch C im Punkte F . Es ist zu beweisen, daß der Punkt F auf dem Umkreis k des Dreiecks ABC liegt. Sch.



Ma 7 ■ 2420 Der Mittelpunkt M des Umkreises k des abgebildeten Dreiecks ABC wurde mit den Eckpunkten A , B und C verbunden. Der Winkel $\sphericalangle BAM$ hat die Größe 40° , der Winkel $\sphericalangle BCM$ die Größe 30° . Es

sind die Größen α , β und γ der Innenwinkel des Dreiecks ABC zu bestimmen. Sch.



Ma 7 ■ 2421 Gegeben seien drei Gefäße, die genau 3 Liter, 8 Liter bzw. 18 Liter fassen können. Weiterhin ist die Möglichkeit gegeben, die Gefäße hinreichend oft mit Wasser zu füllen, zu leeren oder ineinander umzufüllen. Es ist nachzuweisen, daß es möglich ist, alle ganzzahligen Litermengen von 1 bis 10 unter ausschließlicher Verwendung dieser drei Gefäße abzumessen.

Ma 8 ■ 2422 Multipliziert man eine zweistellige Zahl mit 11, so erhält man stets eine dreistellige Zahl. Multipliziert man z. B. 24 mit 11, so kann man die 2 als erste Ziffer und die 4 als letzte Ziffer des Produktes sofort aufschreiben ($24 \cdot 11 = 264$). Die Quersumme von 24, also $2 + 4 = 6$ ist als mittlere Ziffer aufzuschreiben, also $24 \cdot 11 = 264$. Kann man dieses Verfahren immer anwenden?

Schüler Jens Pönisch, Karl-Marx-Stadt

Ma 8 ■ 2423 Wie kann man 1000 Markstücke auf 10 Beutel so verteilen, daß man jeden beliebigen ganzzahligen Geldbetrag von 1 Mark bis 1000 Mark durch entsprechende Beutel auszahlen kann?

Schüler Klaus Liesenberg, Ilsenburg

Ma 8 ■ 2424 In einem Trapez $ABCD$ ist $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ und $\overline{AB}$ viermal so lang wie $\overline{CD}$. Der Flächeninhalt des Trapezes beträgt 120 cm^2 ; die Diagonale $\overline{AC}$ ist 10 cm lang. Wie verhalten sich die Flächeninhalte der Dreiecke ABC und ACD ? Es ist der Flächeninhalt dieser beiden Dreiecke zu berechnen. Welchen Abstand haben die Punkte B und D von der Diagonalen $\overline{AC}$?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 8 ■ 2425 Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC . Es ist ein Rechteck $DEFG$ unter ausschließlicher Verwendung von Zirkel und Lineal zu konstruieren, das die folgenden Eigenschaften hat:

- Eine Rechteckseite ist so lang wie die Seite $\overline{AB}$ des Dreiecks ABC .
- Der Umfang des Rechtecks ist gleich dem Umfang des Dreiecks. Die Konstruktion ist zu beschreiben und zu begründen.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 9 ■ 2426 Schreiben Sie Ihren Geburtsmonat als Zahl auf, z. B. für Januar 1, Februar 2 usw.! Verdoppeln Sie diese Zahl!

Addieren Sie 40! Multiplizieren Sie die entstandene Summe mit 50! Subtrahieren Sie 16! Subtrahieren Sie die Jahreszahl Ihres Geburtsjahres! Wenn Sie richtig gerechnet haben, dann geben die letzten beiden Ziffern in der vorgegebenen Reihenfolge eine zweistellige Zahl an, die Ihrem Alter an Ihrem Geburtstag im Jahre 1984 entspricht. Wenn Sie diese Ziffern streichen, dann bleibt eine ein- oder zweistellige Zahl stehen. Sie gibt Ihren Geburtsmonat an. Es ist zu beweisen, daß dieses Ergebnis stets zutrifft (falls das Alter unter 100 Jahren liegt).

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 9 ■ 2427 Die Terme e , ab , cee usw. in den drei Gleichungen stehen für ein-, zwei- bzw. dreistellige natürliche Zahlen in dekadischer Schreibweise. Für die Buchstaben sind Grundziffern einzusetzen, so daß alle drei Gleichungen zugleich erfüllt werden, d. h. wahre Aussagen ergeben.

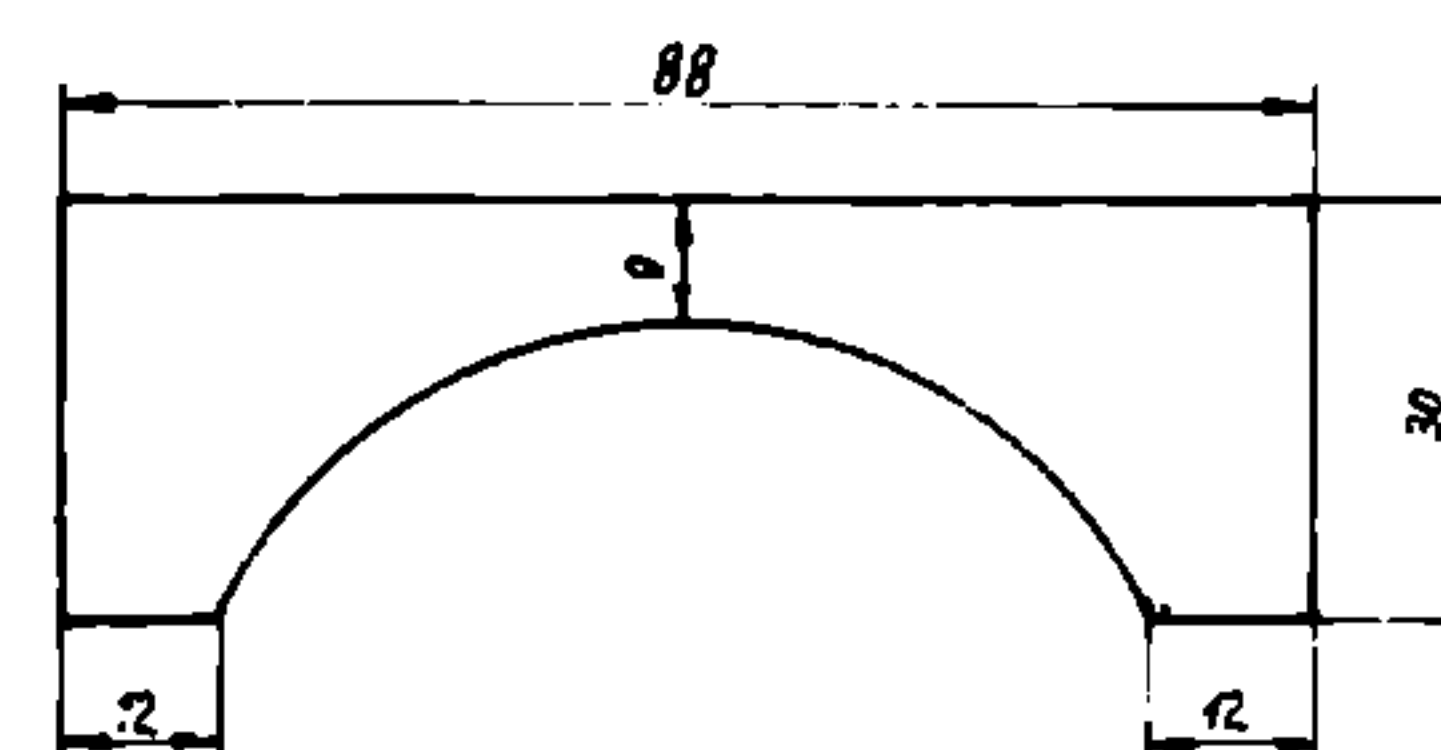
Für gleiche Buchstaben sind gleiche Grundziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Grundziffern einzusetzen. Die erste Ziffer (von links) jeder mehrstelligen Zahl, aber auch jede einstellige Zahl muß verschieden von Null sein.

- $ab \cdot cd = efa$
- $cg \cdot ae = efa$
- $\sqrt[3]{e \cdot efa} = \sqrt{cee}$

Schüler Frank Pampel, Schneeberg

Ma 9 ■ 2428 Holger möchte für seinen kleinen Bruder Steffen Bauklötzchen aus Holz nach einem Vorbild aussägen. Das Brückenteil bereitet ihm Schwierigkeiten. Es ist der Radius des Bogens zu berechnen.

Schüler Stefan Franze, Dresden



Ma 9 ■ 2429 Die Maßzahlen der Seitenlängen eines Dreiecks (gemessen in cm), dessen Flächeninhalt 84 cm^2 beträgt, sind drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Welche Seitenlängen besitzt dieses Dreieck?

Sch.

Ma 10/12 ■ 2430 Eine dreistellige Zahl, deren Grundziffern in der vorgegebenen Reihenfolge aufeinanderfolgende kleiner werdende natürliche Zahlen sind, ist um 21 kleiner als das Dreifache des Quadrates ihrer Quersumme. Es ist die dreistellige Zahl zu bestimmen.

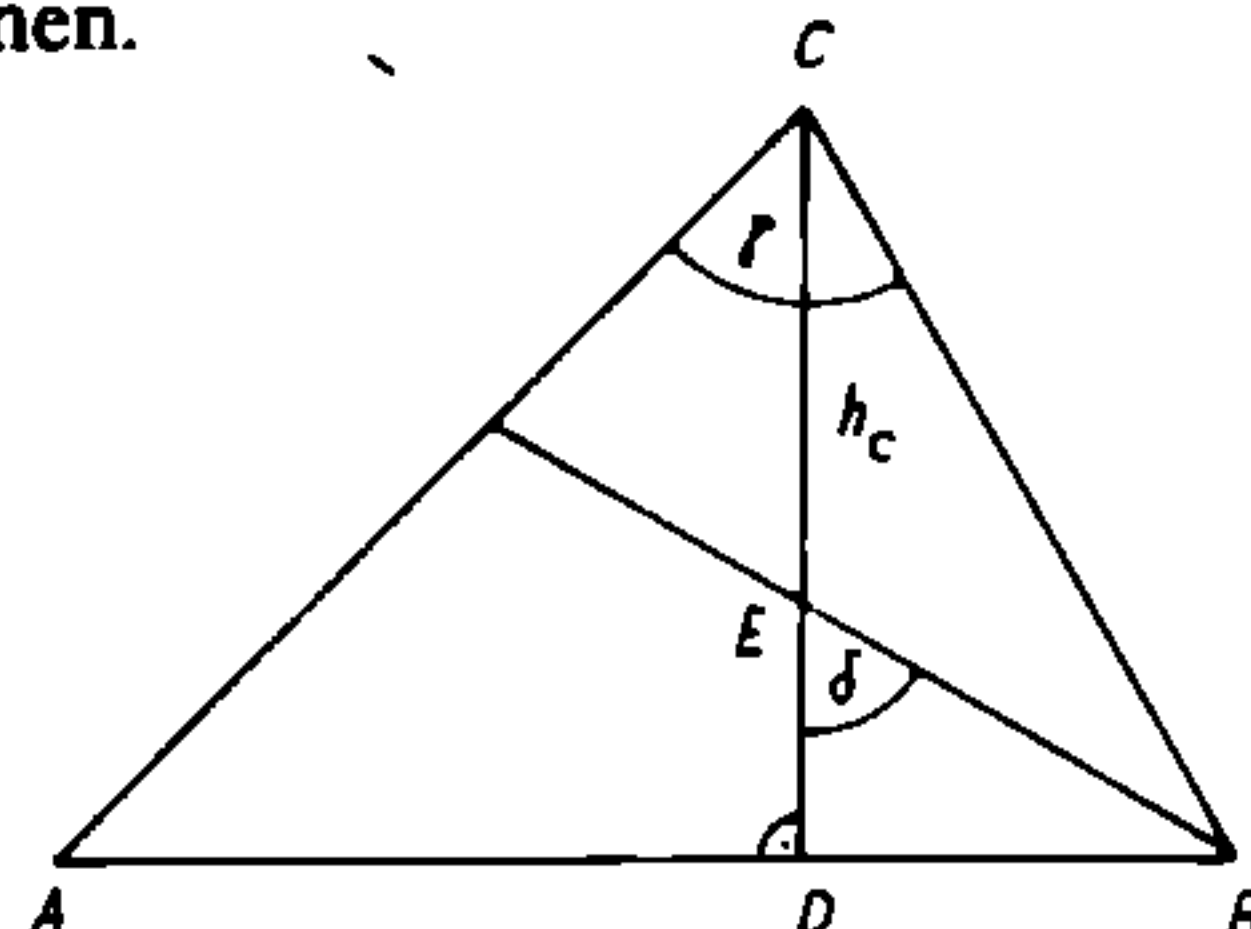
Dipl.-Landwirt H. Boettcher, Weimar

Ma 10/12 ■ 2431 Für einen inneren Punkt P eines Quadrates $ABCD$ mit der Seitenlänge $a = 10 \text{ cm}$ gelte $\overline{PA} : \overline{PB} : \overline{PC} = 1 : 2 : 3$. Es sind

die Längen der Strecken $\overline{PA}$ und $\overline{PB}$ zu berechnen. *Sch.*

Ma 10/12 ■ 2432 In dem abgebildeten Dreieck ABC seien bekannt:

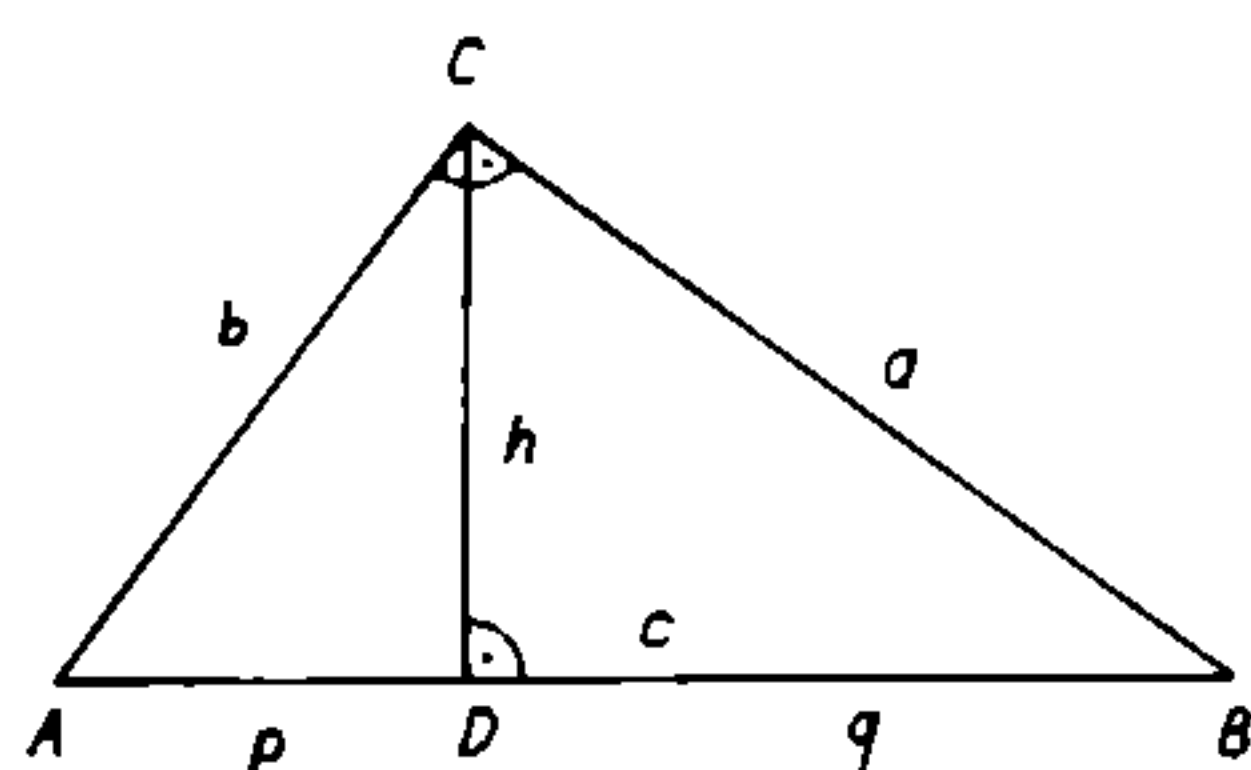
$\gamma = 60^\circ$, der Winkel $\angle DEB$ (er wird von der Winkelhalbierenden des Winkels β und der Höhe h_c gebildet), seine Größe ist $\delta = 60^\circ$ und die Länge des Inkreisradius $r_i = 2$ cm. Es ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC zu berechnen.



Skizze (nicht maßstäblich)

Offiziersschüler Rene Pratsch, Dresden

Ma 10/12 ■ 2433 In dem abgebildeten rechtwinkligen Dreieck ABC hat die Kathete $\overline{AC}$ die gleiche Länge wie der Hypotenusenabschnitt $\overline{DB}$. Es sind die Größen der Innenwinkel $\angle CAB$ und $\angle ABC$ zu berechnen.

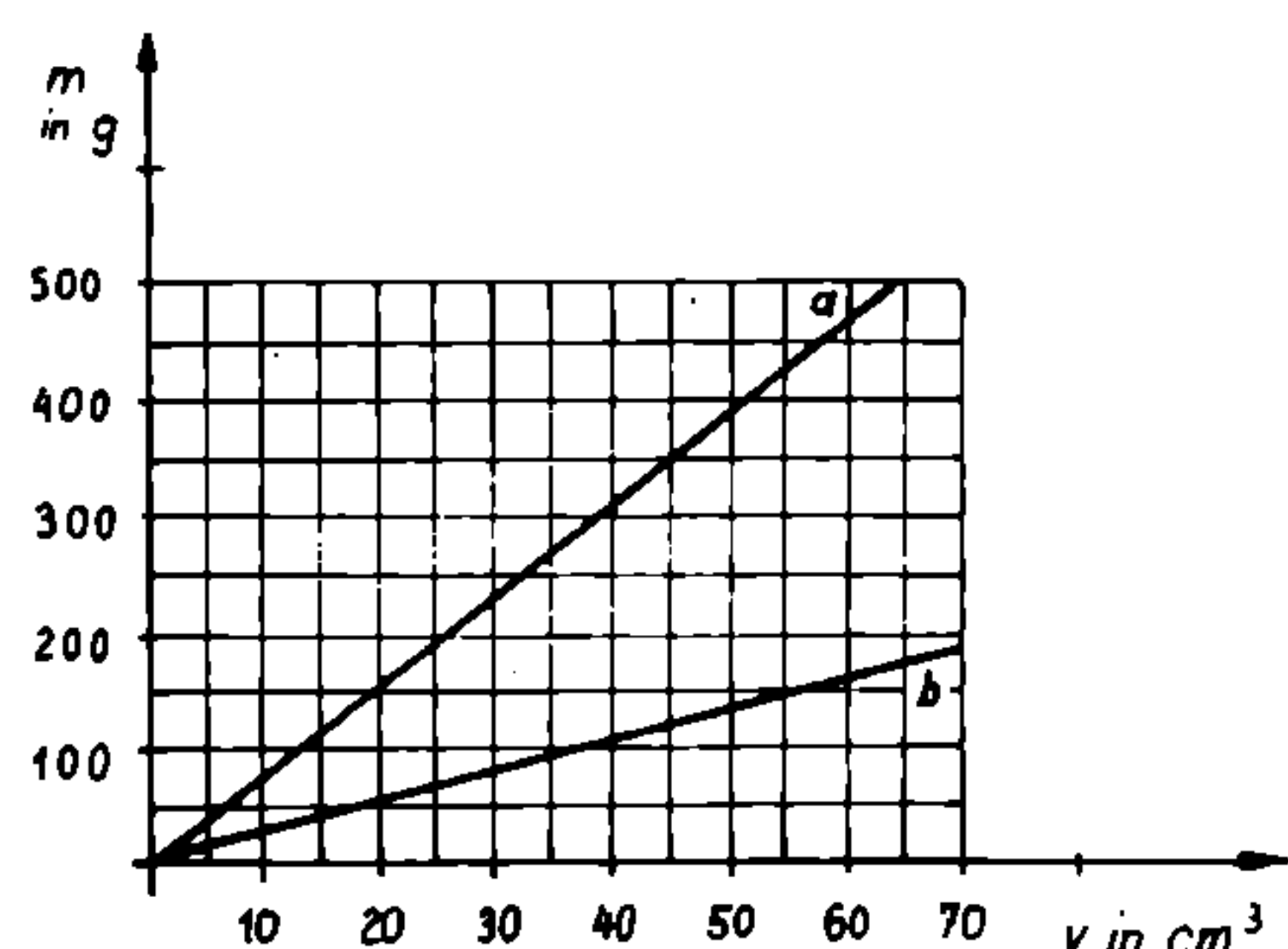


Skizze (nicht maßstäblich)

Schüler Frank Pampel, Schneeberg

Physik

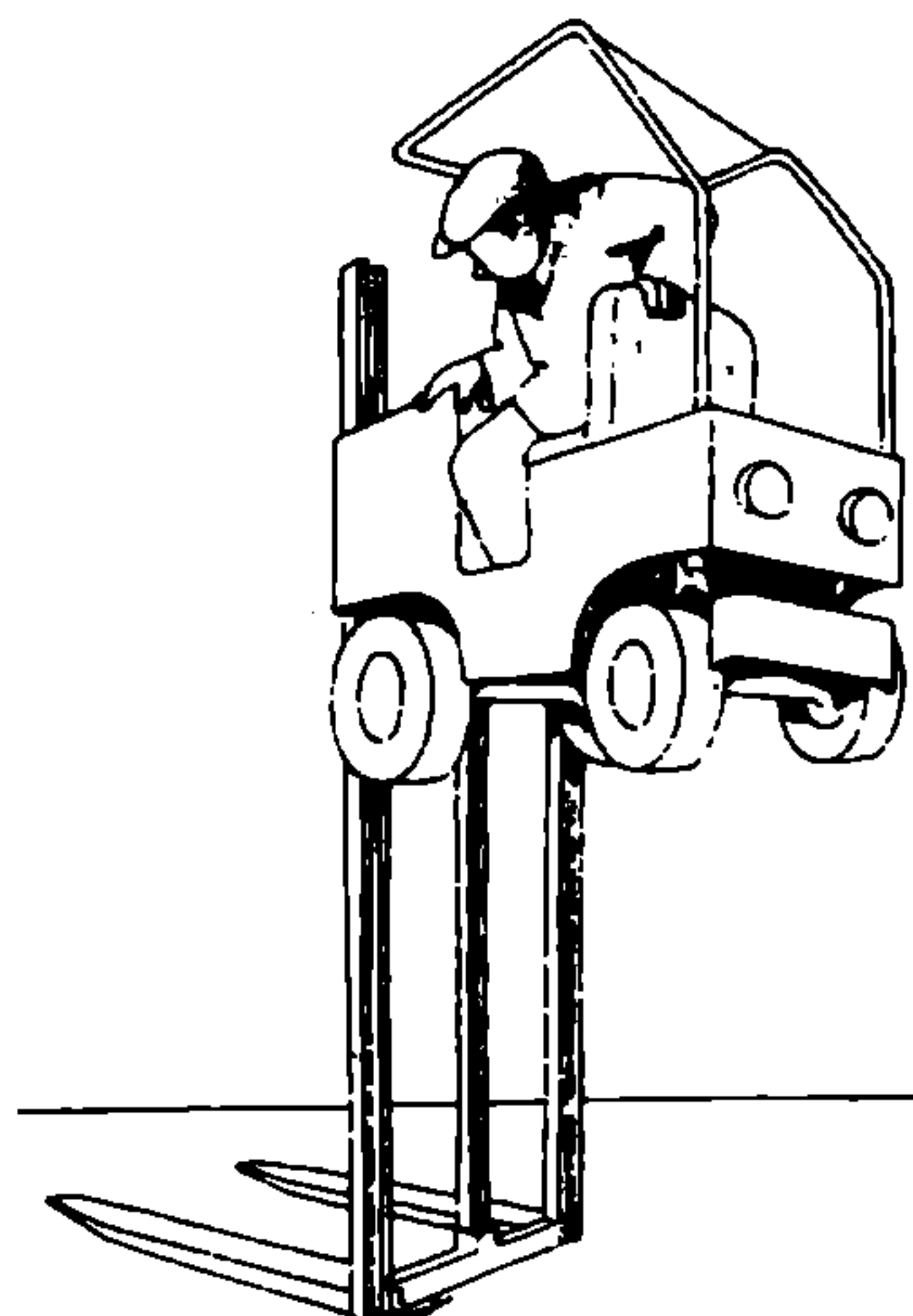
Ph 6 ■ 151 In der grafischen Darstellung ist die Dichte zweier Stoffe a und b eingezeichnet. Berechne jeweils die Dichte! Um welche Stoffe handelt es sich?



Ph 7 ■ 152 In einem Wohnblock befördert der Aufzug die Kabine in 8 Sekunden auf eine Höhe von 15 m. Die gesamte Gewichtskraft der Kabine beträgt 650 kp. Berechne die Leistung des Elektromotors in kW, wenn der Wirkungsgrad 85% beträgt!

Ph 8 ■ 153 Nach welcher Zeit vollbringen gleichzeitig 4 Vierzig-Watt-Glühlampen, 3 Sechzig-Watt-Glühlampen und 2 Einhundert-Watt-Glühlampen eine Arbeit von 1 Kilowattstunde?

Schüler Olaf Parchmann, Blankenheim



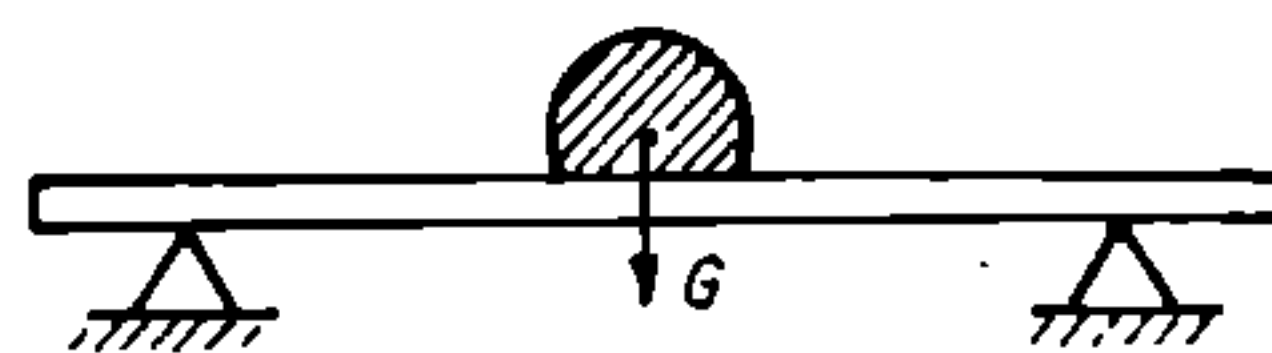
Ph 9 ■ 154 Bekanntlich wird ein senkrecht nach unten auslaufender Wasserstrahl zunehmend dünner. Ein Wasserstrahl trete aus dem Ausfluß nach unten senkrecht aus, wobei am Ausfluß die Geschwindigkeit von 0,5 m/s vorliegt. Der Anfangsdurchmesser betrage 1 cm. Welche Dicke hat der Strahl, nachdem er 5 cm zurückgelegt hat?

Schüler Sven Saar, Mühlhausen

Ph 10/12 ■ 155 Eine Maschine hat eine Masse von 1500 kg. Ihr Gewicht bewirkt eine Durchbiegung des Fundaments um 15 mm. (Im Bild ist dieser Sachverhalt sehr vereinfacht dargestellt.)

Berechnen Sie die Frequenz, mit der Maschine und Fundament schwingen, wenn die Masse des Fundaments vernachlässigt wird! *Anmerkung:* Die Frequenz eines Feder-Masse-Schwingers ist $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ mit der Feder-

konstanten $k = \frac{F}{s}$.



Chemie

Ch 7 ■ 121 Ein Kupfer(II)-oxid, welches 4% Verunreinigungen enthält, soll mit Kohlenstoff zu Kupfer reduziert werden. Bei der Reaktion entsteht außerdem noch Kohlenmonoxid.

a) Wieviel Kilogramm Kupfer kann man aus 2,1 t Kupfer(II)-oxid gewinnen?

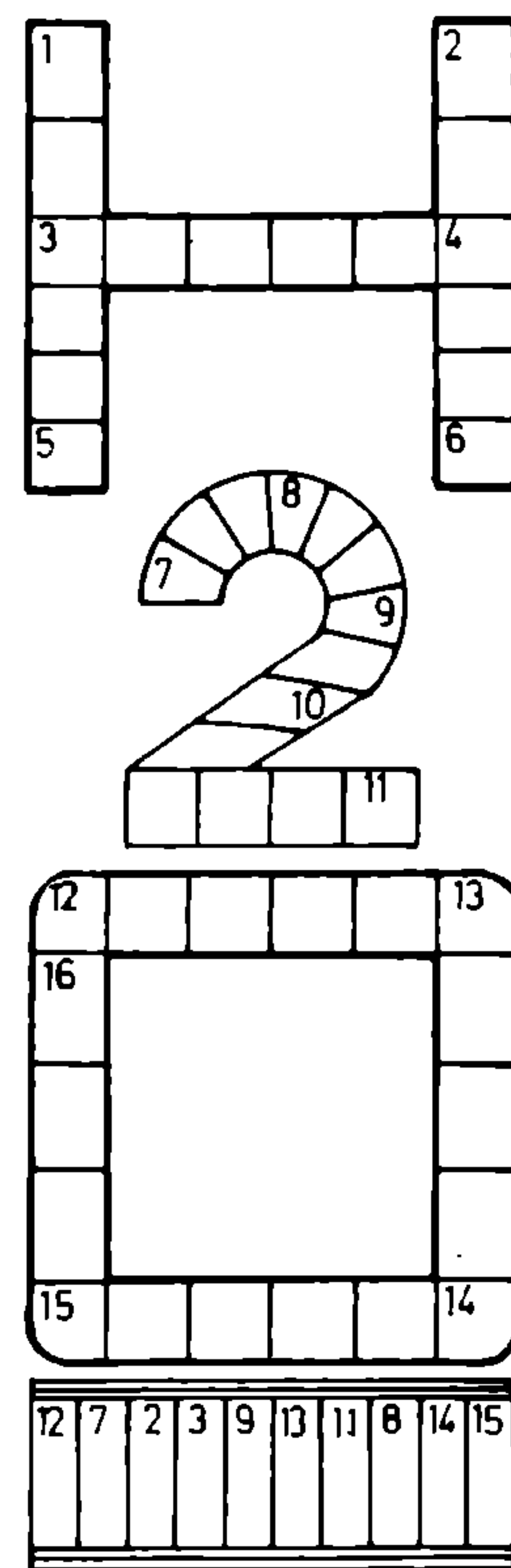
b) Wieviel Kilogramm Kohlenmonoxid entstehen, wenn bei der Reaktion ein Gasverlust von 1,2% auftritt?

Ch 8 ■ 122 35 g Kupfer(II)-sulfat werden getrocknet. Dabei verliert es 12,6 g seiner Masse. Wieviel Wassermoleküle sind an der Kristallisation beteiligt?

Ch 9 ■ 123 22,8 g Salzsäure werden mit 310 ml Wasser verdünnt. 14 ml dieser Lösung werden mit Silbernitrat-Lösung versetzt. Die Analyse ergibt 0,41 g Silberchlorid. Wievielp Prozentig ist die Salzsäure-Lösung?

Ch 10/12 ■ 124 Aus 2,3 g Blei(II)-nitrat soll alles Blei als Blei(II)-sulfid gefällt werden. Der dazu benötigte Schwefelwasserstoff wird aus Eisen(II)-sulfid und 15%iger Salzsäure hergestellt. Es soll gerade soviel Schwefelwasserstoff hergestellt werden, daß er ausreicht, um alles Blei als Blei(II)-sulfid zu fällen. Wieviel Gramm Eisen(II)-sulfid und Salzsäure müssen zur Reaktion gebracht werden?

H₂O-Rätsel



a a a b c c c d d e e e e e e e e e e g g
h h h h i i i l m n n n p q r r s s t u u u
w x

1-5 Teil des Bades, 2-6 Wasserkurort,
3-4 winterliche Naturerscheinung, 7-8 lateinisch: Wasser, 8-9 Wasserpflanze,
9-10 Aggregatzustand des Wassers,
10-11 Regenschutz, 12-13 kleiner Teich,
13-14 Naturerscheinung, 14-15 Meeresgott,
15-16 Seejungfrau

Das Hauptlösungswort – eine Gestalt aus der Oper „Rusalka“ von Antonin Dvořák – ergibt sich, wenn man die entsprechenden Buchstaben in die untere Leiste überträgt.

(aus NBI)

alpha-Wettbewerb 1982/83

Preisträger

Beatrice und Matthias List, Altenburg; Veneta Türke, Auerbach; Ute Partsch, Bad Salzungen; Silvia Holzmüller, Jana Freude, beide Bergwitz; Steffen Padelt, Bernd Trappe, R.-Birk Schulze, Wilko Wohlauf, Matthias Röder, alle Berlin; Jens Baumann, Angela Herrmann, beide Bernsbach; Alice Kraneis, Bernburg; Karsten Kühne, Blankenfelde; Christina Werner, Bötzwitz; Thomas Gerlach, Buhla; Ingrid Voigt, Böhlen; Birgit Reißner, Cottbus; Steffen Eisenblätter, Delitzsch; Wolfgang Jäckel, Demitz-Thumitz; Holger Fröbe, Wolfgang Tenor, beide Dessau; Thomas Kaufhold, Dingelstädt; Mario Schubert, Sylvia Penz, beide Dresden; Stefan Nitzsche, Elsterwerda; Jörg Simon, Engelsdorf; Sabine Scholz, Susanne Reinhardt, Antje Röder, alle Fambach; Thomas Scheibe, Ferdinands-hof; Holger Heinisch, Forst; Dorothee und Anne-marie Heidrich, Freiberg; Astrid Gebauer, Friede-burg; Josef Petersdorfer, Gföhl (Österreich); An-sgar Heise, Görlitz; Michael Hanke, Gräfenhain-chen; Ulf Gebhardt, Ursula Märker, beide Greifswald; Sven Rudolph, Großröhrsdorf; Holger Mer- kel, Andreas Tille, beide Halle; Matthias Schädlich, Heike Reichelt, beide Hammerbrücke; Ingo Müller, Ulf Graubner, beide Hermannsdorf; Birgit Bremer, Heiligenstadt; Maik Otto, Holzthaleben; Hagen Reimann, Horka; Claudia Schwartz, Ilmenau; Günter Doppler, Imbach (Österreich); Frank Marth, Kaltennordheim; Peter Wendt, Ulf Nie- länder, beide Karl-Marx-Stadt; Jacqueline Eich- horn-Sens, Manuela Braun, Torsten Pamminger, Thomas Schindhelm, Jana Zitzmann, Conny We- schenfelder, alle Lauscha; Ralf Laue, Leipzig; Marco Köchel, Lössau; Giselher Schütze, Frank Görisch, beide Magdeburg; Andreas Hübler, Mit- telbach; Christian Eisele, Mölkau; Steffen Schar- nowski, Möser; Jens Sbresny, Oberschöna; Mat- thias Dalitz, Obhausen; Michael Herrmann, Ober- lichtenau; Sirko Brix, Torsten Lüth, beide Parchim; Felix Kraenz, Picher; Michael Taeschner, Parchim; Jana Schumann, Ribnitz; René Bretschneider, Riesa; Grit Maciejewski, Barbara Menzel, Karen Meyer, Annett Kistner, Daniela Wulff, alle Ro- stock; Remo Karius, Katja Klotsch, Jeannette Schmücker, Beatrice Rückert, alle Rotta; Sabine Schwelgien, Schönhausen; Ronald Bojarski, Saß- nitz; Jörn Brückner, Schwarzenberg; Lars Hantsch- mann, Seifhenndorf; Reiner Möwald, Sömmer- da; Rosa Flint, Stapel; Thomas Heublein, Steinach; Frank Holland, Steinbach-Hallenberg; Jens Bur- mann, Sumte; Sven Janssen, Tornau; Jana Rön- nicke, Uthausen; Frederik Schiller, Voigtsgrün; Hartmut Boettcher, Weimar; Andreas Döring, Wiederitzsch; Andrea Maas, Wilhelmsburg; Peter Eggert, Wismar; Frank Schrapel, Kirsti Linke, bei- de Worbis; Markus Lehmann, Zittau; Sabine Mök- kel, Zwickau.

Vorbildliche Leistungen

Marion Zinke, Aschersleben; Andreas Schneider, Badingen; Michael Henning, Mario Winter, beide Bad Salzungen; Robert Krüger, Berlin; Annerose Schmidt, Bleicherode; Martin Leith, Cottbus; Annett Runze, Dölitz; Anke Mehner, Ramona Kaiser, beide Dörfel; Thomas Hübner, Bernd Miethig, beide Dresden; Thomas Mautsch, Duben; Matthias Schreiber, Elsterwerda; Diana Wingeß, Mathias Römhild, beide Fambach; Daniela Rein- stein, Fockendorf; Andreas Beneder, Gföhl (Öster- reich); Christoph Kothe, Birgit Sommer, beide Görlitz; Michaela Große, Gohrau; Falk Hunger, Großrückerswalde; Ralf Kühnel, Kristin Stöbe, beide Guben; Birgit Seifert, Hagenow; Heike

Reichelt, Hammerbrücke; Mathias Hascher, Hein- richsort; Stefan Peters, Hessen; Dirk Luttenberg, Holungen; Henry Wiesjahn, Holzendorf; Claudia Docter, Ilsenburg; Jana Hodam, Henrik Hodam, Kaltennordheim; Carla Umlauf, Falk Martin, beide Karl-Marx-Stadt; Manuela Braun, Thomas Schind- helm, Conny Kroder, alle Lauscha; Liane Radow, Leipzig; Steffen Mensel, Leubsdorf; Sylvia Hof- mann, Langenleuba-N.; Imke Stelter, Liessow; Ina Büttner, Udo Wagner, Jörg Pretzsch, alle Lössau; Sven Pfeffer, Magdeburg; Jens Brettfeld, Mühl- hausen; Dirk Plischke, Susanne Kander, beide Neuhaus; Arnd Kritznier, Neustadt; Antje Flechsig, Obercrinitz; Uwe Anke, Pappendorf; Mathias Struch, Parchim; Steffen Scheithauer, Parey; Ines Schmidt, Reuth; Kerstin Krämer, Ribnitz; Martin Wolff, Doris Bräcker, Ute Möller, Anne Ruser, Karin Stüpmann, alle Rostock; Irena Thiele, Jens Krüger, beide Rotta; Knut Marzisch, Rudolstadt; Astrid Rogowski, Veit Sturm, beide Schwerin; Gabriele Götze, Seega; Axel Bichler, Ilka Fiebrig, Jörg Büchner, alle Sondershausen; Heike Kowalek, Yvonne Rennecke, beide Stendal; Sabina Kaiser, Tornau; Daniela Scholich, Ueckermünde; Lutz Grothe, Wiederitzsch; Heinrich-Rau-Oberschule, Wildau; Julia Armbrrecht, Christiane Lehmert, bei- de Worbis; Diana Michler, Zschortau; Carsten Hinz, Greifswald; Jan Biebrach, Garz; Stefan Barth, Mieste.

Abzeichen in Gold

Für sechzehnjährige Teilnahme

Lutz Püffeld, Hennigsdorf

Für fünfzehnjährige Teilnahme

Bernd Hanke, Großschweidnitz;
Guido Blossfeld, Halle

Für vierzehnjährige Teilnahme

Ullrich Riedel, Flöha

Für dreizehnjährige Teilnahme

Arno Feuerherdt, Brandenburg; Thomas Jakob, Gera; Rainer Seifert, Hagenow; Norbert Littig, Kleinröhrsdorf; Uwe Bormann, Magdeburg; Frank Aßmus, Oranienburg; Bernhard Tschada, Weimar; Ursula Märker, Greifswald

Für zwölfjährige Teilnahme

Ralf Henze, Arnstadt; Andreas Fitke, Berlin; Wolfgang Seeber, Gehren; Bengt Nölting, Greifswald; Rolf Kuhn, Leipzig; Lothar Gruber, Linz (Österreich); Gerald Werner, Meiningen; Volker Schulz, Nauen; Katrin Richter, Wittenberg; Kurt Oertel, Zschornowitz

Für elfjährige Teilnahme

Andrea Nießen, Andreas Gude, beide Berlin; Frank Regensburger, Dresden; Andrea Ziegenbein, Eichicht; Eberhard Georgy, Erfurt; Wolfhart Um- lauft, Freital; Steffen Langbein, Lichte; Rainer Bauer, Mittweida; Wilfried Röhnert, Radebeul; Thomas Apel, Reichenbach; Torsten Löwe, Schleiz; Hans-Dietrich Schwabe, Sondershausen; Sylvia Kunze, Weißenfels; Ralf Becker, Wolmirstedt

Für zehnjährige Teilnahme

Udo Clemens, Altenburg; Henri und Dieter Koch, Arnstadt; Hans-Jürgen Knopf, Bad Franken- hausen; Lutz Heinrich, Bad Langensalza; Jens Purand, Cottbus; Angela Jircik, Annett Körner, beide Dresden; Dana Semper, Eisleben; Bernd Dübe, Forst; Sylvio Klose, Gera; Matthias Weser, Gro- ßenhain; Hubert Steinmetz, Grüningen; Ruth Jacobs, Halle-Neustadt; Doris Planer, Hohendorf; Rolf Kamieth, Kakerbeck; Marko Hanke, Karl- Marx-Stadt; Jörg Pöhlend, Klingenthal; Alois We- ninger, Knittelfeld (Österreich); Bärbel Wintzler, Lobenstein; Martina Wolf, Magdeburg; Udo Kretzschmann, Markneukirchen; Rüdiger Düsing, Osterburg; Sigrid Planke, Premnitz; Ronald Bra- choldt, Riesa; Jana Walter, Röbel; Siegrid Kretsch- mann, Schlagsdorf; Torsten Jeschke, Schwarzheide; Bernd Hartwig, Thaldorf; Dietmar Ulbricht, Vel-

ten; Frank Erdmann, Zeitz; Ina und Uwe Ebert, Ruppendorf

Für neunjährige Teilnahme

Guntram Türke, Auerbach; Maik Weide, Callen- berg; Andreas Winkler, Cossebaude; Claudia Ziehm, Berlin; Harry Höfer, Dorndorf; Ingolf Körner, Carolin Engel, Karl-Heinz Jünger, Thomas Schindhelm, Jörn Wittig, alle Dresden; Dirk-Thomas Orban, Volker Georgy, Thomas Mittel- bach, alle Erfurt; Jörg Butter, Freiberg; Ralf Baum- hekel, Freital; Gerd Hackbarth, Gallentin; Angela Illing, Gersdorf; Gunnar Boll, Stefan Göckeritz, beide Greifswald; Michael Katzer, Greußen; Heike Klitz, Grimmen; Gisbert Thiere, Halle; Volker Reck, Heiligenstadt; Eike Harmel, Hohenferchesar; René Schüppel, Mathias Grundmann, beide Hoyerswerda; Jens Pönisch, Thomas Mader, An- dreas Hengst, Conchita Röske, alle Karl-Marx- Stadt; Steffen Rieth, Klostermansfeld; Per Witte, Königs Wusterhausen; Heiko Rudolf, Leipzig; Thomas Eller, Meiningen; Gudrun Hebestreit, Mühlhausen; Sigrun Massanek, Neusornzig; Kar- sten Woike, Neustadt; Birgit Uhlmann, Oberlung- witz; Anett Schulzensohn, Oberseifersdorf; Karsten Schlutter, Potsdam; Claudia Trochold, Reichen- bach; Klaus-Detlef Gehrke, Rostock; Roland Gol- denbogen, Stralsund; Peter Pfannschmidt, Suhle; Hans und Margit Creutzburg, Thal; Heidrun Tiedt, Teterow; Stefan Syring, Warin; Gudrun Boettcher, Weimar; Olaf Seidel, Weißwasser; Birgit Schmidt, Worbis; Birgit Schultheiß, Wüstenbrand; Knut Hantschel, Neuenkirchen; Eva-Maria Heubner, Wolfen

Für achtjährige Teilnahme

Frank Baumgart, Aschersleben; Kirsten Rechner, Baruth; Marc Schewe, Berlin; Tilman Völzke, Böhlen; Stefanie Begau, Breitenworbis; Uta Boldt, Burg Stargard; Royald Lenk, Christine Pompe, beide Cottbus; Petra Sarodnick, Dallgow; Guido Mehne, Döhlen; Manuela Schwenke, Dohna; Ralph Gruber, Ulf Riechen, Stefan Edelmann, Jörg Hempelt, alle Dresden; Siegfried Obst, Rein- hard Weißnicht, beide Eberswalde; Thomas Pi- gorsch, Eisleben; Susanne und Matthias Schreiber, Elsterwerda; Heike Heber, Erfurt; Karsten Meiß- ner, Forst; Matthias Bauer, Genthin; Wilfried Schleinitz, Greifswald; Veit-Thomas Meyen, Grim- men; Dieter Seifert, Hagenow; Günter Schielinsky, Halle; Roger Fischl, Halle-Neustadt; Kerstin und Heinz Wickner, Hermannsdorf; Axel Schüler, Kleinmachnow; Antje Schlosser, Klingenthal; Ralf Häntsch, Köthen; Rainer Nolte, Leinefelde; Lutz Hübschmann, Lößnitz; Carola Hönn, Matthias Neundorf, beide Meiningen; Uwe Würker, Mülsen; Hans-Dieter Büchler, Neustadt; Sigurd Assing, Karsten Milek, beide Potsdam; Tim Planke, Prem- nitz; Uwe Mattutat, Manfred und Ina Hille, alle Riesa; Gunnar Jeschke, Schwarzheide; Thomas Merten, Stralsund; Klaus Pfeiffer, Taubach; Ralf Heubner, Wolfen; Steffen Klimpel, Wolgast; Birgit Schmidt, Weißwasser; Karl Oertel, Zeitz; Kerstin Hoffmann, Zittau; Birgit Schenke, Zschornowitz; Uta Escher, Zwickau; Thorsten Eidner, Zeulen- roda; Kerstin Schneider, Großwitz; Ingrid Soblik, Zittau

Für siebenjährige Teilnahme

Michael Elte, Ahlum; Jens Fache, Altenburg; Silke Schröder, Bad Kleinen; Silke Rechner, Baruth; Sabine Mantel, Berlin; Andreas Jock, Blanken- felde; Marlis Schröder, Brandenburg; Uwe Schütze, Camin; Roland Damm, Christian Kunze, beide Cottbus; Andreas Mann, Cunersdorf; Frank Sarod- nick, Dallgow; Ulrich Schuster, Demitz-Thumitz; Georg Kirchner, Dermbach; Mario Jäpel, Dohna; Rainer Schültke, Titus Ziegler, Stefan Franze, Catherin Engel, Lutz Lauter, Heike Lauter, alle Dresden; Uwe Wollert, Edderitz; Antje Hollstein, Frankfurt (Oder); Thomas Heidrich, Freiberg; Sylvia Döring, Gotha; Ahmed und Britta Schulz, Greifswald; Jörn Wintsche, Grimma

(Fortsetzung in Heft 2/84)

Zwei Aufgaben und sieben Lösungen –

Wer mehr weiß und Phantasie hat,
kommt rascher zum Ziel

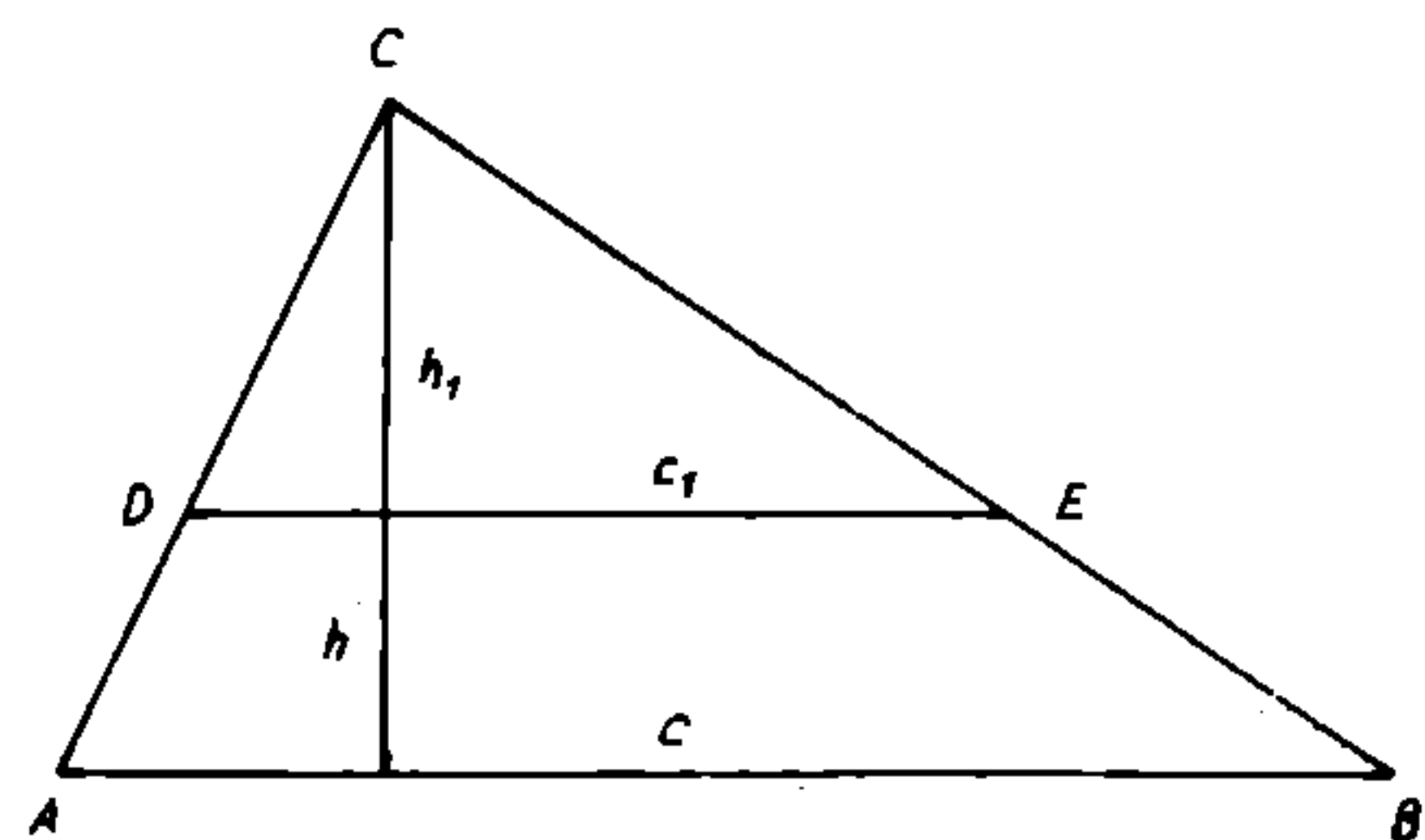
Teil 1

Rainer, Torsten und Uwe lösen gerne knifflige Mathematikaufgaben. Ihre Temperamente sind aber sehr unterschiedlich, und das zeigt sich auch beim Aufgabenlösen. Rainer rechnet gerne, und er überlegt nicht lange, ehe er damit beginnt. Daher kommt er oft erst nach manchem Umweg zum Ziel. Uwe dagegen denkt lange nach, ehe er mit seiner Arbeit beginnt. Er versucht, sich an alles zu erinnern, was mit der Aufgabe in Verbindung stehen könnte. Und auch Torsten versucht zuerst, die Aufgabe gut zu durchdenken, ehe er einen Lösungsversuch macht.

Wir wollen sehen, wie sich die drei Freunde bei der Lösung folgender beider Aufgaben verhalten.

▲ 1 ▲ Ein Dreieck soll durch eine Parallele zu einer seiner Seiten in zwei Figuren mit gleichem Inhalt zerlegt werden.

Zunächst entwerfen sie gemeinsam eine Skizze (Bild 1) und führen Bezeichnungen für Eckpunkte, Seiten und Höhen ein. Sie erkennen, daß das gegebene Dreieck ABC durch die Parallele DE in ein Trapez $ABED$ und ein Dreieck DEC zerlegt wird. Die Länge der Grundseite bzw. die der Höhe im Dreieck ABC seien c bzw. h , die Länge der Grundseite bzw. die der Höhe im Dreieck DEC c_1 bzw. h_1 .



Sie vereinbaren, daß die Aufgabe dann als gelöst gilt, wenn h_1 bestimmt wurde, d. h. ausgedrückt wurde durch h und evtl. durch c . Dann kann die Höhe des Trapezes als Differenz $h - h_1$ ermittelt werden, man könnte dann auch angeben, in welchem Verhältnis die Höhe h von DE geteilt wird –, kurz, man könnte dann die geforderte Parallele zeichnen.

Und nun setzt jeder für sich die weitere Lösung fort.

Rainer überlegt nicht lange und schreibt zunächst einmal Flächeninhaltsformeln auf:

$$A_{\Delta} = \frac{g \cdot h}{2}$$

$$A_{\square} = \frac{a+c}{2} h$$

In der Aufgabe war verlangt, daß die beiden Teilfiguren inhaltsgleich sein sollen. Er erhält so die Gleichung

$$A_{1\Delta} = A_{\square}$$

Nun verwendet er die vereinbarten Variablen:

$$\frac{c_1 \cdot h_1}{2} = \frac{c+c_1}{2} (h-h_1)$$

und erhält

$$h_1 = \frac{c+c_1}{c+2c_1} h. \quad (1)$$

Hiermit kann nun Rainer nicht viel anfangen, denn auch c_1 ist nicht bekannt.

Er überlegt, ob es nicht eine zweite Gleichung gibt, in der h_1 und c_1 vorkommen. Diese findet er, indem er berücksichtigt, daß beide Teilfiguren zusammen den gleichen Flächeninhalt haben wie das große Dreieck.

Also $A_{1\Delta} + A_{\square} = A_{\Delta}$
oder

$$\frac{c_1 h_1}{2} + \frac{c+c_1}{2} (h-h_1) = \frac{c \cdot h}{2}.$$

Und hieraus

$$c_1 = \frac{c \cdot h_1}{h}. \quad (2)$$

Rainer rechnet nun unbeirrt weiter und setzt die Gleichung (2) in die Gleichung (1) ein.

$$h_1 = \frac{c + \frac{c \cdot h_1}{h}}{c + 2 \cdot \frac{c \cdot h_1}{h}} h.$$

Um h_1 zu erhalten, muß er wiederum auflösen, und er erhält schließlich

$$h_1 = \frac{h}{2} \sqrt{2}.$$

Rainer wundert sich, daß Torsten und Uwe längst das gleiche Ergebnis gefunden haben. Bei seinen umfangreichen Rechnungen hatte er sich zudem auch noch verrechnet.

Torsten führt die Lösung mit folgender Überlegung weiter: Jede der beiden Figuren, Trapez und Dreieck, sollen gleichen Inhalt haben. Dann beträgt der Inhalt jeder von ihnen die Hälfte des Inhaltes vom großen Dreieck.

$$A_{1\Delta} = \frac{1}{2} A_{\Delta} \text{ d. h. } \frac{c_1 \cdot h_1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c \cdot h}{2} \quad (1)$$

$$A_{\square} = \frac{1}{2} A_{\Delta} \text{ d. h. } \frac{c+c_1}{2} (h-h_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{c \cdot h}{2} \quad (2)$$

Er entschließt sich nun, mit dem kleinen Dreieck weiterzuarbeiten, weil in seiner Flächeninhaltsformel weniger Variable auftreten und weil die beiden Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle DEC$ sich besser miteinander vergleichen lassen als etwa Dreieck und Trapez. Dieser Vergleich der beiden Dreiecke führt Torsten zu der Erkenntnis, daß nach Konstruktion diese beiden Dreiecke ähnlich sind, und in ähnlichen Dreiecken haben entsprechende Strecken das gleiche Verhältnis. Daran erinnert sich Torsten aus dem Geometrieunterricht der 8. Klasse.

Es gilt insbesondere

$$\frac{c_1}{c} = \frac{h_1}{h}. \quad (3)$$

Aus der Gleichung (1) ermittelt er damit schließlich

$$\frac{c \cdot h_1^2}{h} = \frac{c \cdot h}{2}$$

$$h_1^2 = \frac{1}{2} h^2$$

$$h_1 = \frac{h}{2} \sqrt{2}.$$

Uwe aber überlegt vor der Rechnung lange. Er erkennt dabei:

Es soll eine Parallele zu einer Dreiecksseite gezeichnet werden; dann ist das entstehende Dreieck dem gegebenen Dreieck ähnlich. Die Aufgabe enthält eine Aussage zum Flächeninhalt. Von Flächeninhalten ähnlicher Figuren weiß er aus dem Geometrieunterricht der 8. Klasse, daß sie sich wie die Quadrate entsprechender Strecken in den Figuren verhalten. D. h.

$$\frac{A_{1\Delta}}{A_{\Delta}} = \frac{h_1^2}{h^2}.$$

Die beiden Teilfiguren sollen gleichen Flächeninhalt haben, also ist der Inhalt des kleinen Dreiecks halb so groß wie der Inhalt des gegebenen Dreiecks. Das Verhältnis der Flächeninhalte ist 1:2. Er erhält somit sehr rasch

$$\frac{h_1^2}{h^2} = \frac{1}{2}$$

$$h_1 = \frac{h}{2} \sqrt{2}.$$

Im nächsten Heft (Teil 2) wollen wir sehen, wie sich unsere drei Freunde beim Lösen einer weiteren Aufgabe verhalten.

W. Jungk

XXIV. Internationale Mathematikolympiade

6. bis 12. Juli 1983, Paris



Aufgaben

1. Tag

1. Man bestimme alle Funktionen f , die die Menge der positiven reellen Zahlen in sich abbilden und die folgenden Bedingungen erfüllen:

- (1) $f(xf(y)) = yf(x)$ für alle positiven reellen Zahlen x, y und
- (2) $f(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow +\infty$.

Großbritannien (7 Punkte)

2. In der Ebene seien zwei nicht kongruente Kreise k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten O_1 bzw. O_2 gegeben, und A sei einer der beiden verschiedenen Schnittpunkte von k_1 und k_2 . Eine der beiden gemeinsamen Tangenten an k_1 und k_2 berührt k_1 in P_1 und k_2 in P_2 , und die andere Tangente berührt k_1 in Q_1 und k_2 in Q_2 . Es seien M_1 und M_2 die Mittelpunkte von P_1Q_1 bzw. P_2Q_2 .

Beweise: $\sphericalangle O_1AO_2 = \sphericalangle M_1AM_2$!
UdSSR (7 P.)

3. Es seien a, b, c paarweise teilerfremde positive ganze Zahlen. Zeige, daß
 $2abc - ab - bc - ca$
die größte ganze Zahl ist, die nicht in der Form $xbc + yca + zab$ mit nicht negativen ganzen Zahlen x, y, z darstellbar ist!
BRD (7 P.)

2. Tag

4. Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck. Die Menge E bestehe aus allen Punkten der Strecken AB, BC und CA (A, B und C eingeschlossen). Gibt es zu jeder Zerlegung von E in zwei disjunkte Teilmengen ein rechtwinkliges Dreieck, dessen drei Eckpunkte in derselben Teilmenge liegen? Begründe die Antwort!
Belgien (7 P.)

5. Gibt es 1983 verschiedene positive ganze Zahlen kleiner oder gleich 10^5 , unter denen keine drei die aufeinanderfolgenden Glieder einer arithmetischen Folge sind? Begründe die Antwort!
VR Polen (7 P.)

6. Es seien a, b und c die Seitenlängen eines Dreiecks.
Zeige:
 $a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0$!
Wann gilt Gleichheit?
USA (7 P.)

Die DDR wurde durch folgende Mannschaft vertreten:

Lattermann, Jochen (Kl. 12), EOS *Pestalozzi* Dresden, 3. Preis; Mohnke, Klaus (Kl. 12), EOS *Georg Schumann* Calau, Bez. Cottbus, 3. Preis; Schmutzler, Bernd (Kl. 12), Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt, Sektion Mathematik, Spezialklasse, Spezialpreis, 3. Preis; Schüler, Axel (Kl. 12), EOS *Georg Thiele* Kleinmachnow, Bez. Potsdam, 3. Preis; Wenzel, Jörg (Kl. 11), EOS *Fritz Heckert* Zeulenroda, Bez. Gera, ohne Preis; Witt, Ingo (Kl. 11), EOS *Heinrich Hertz* Berlin, 3. Preis.

Aus dem Rahmenprogramm: Stadtrundfahrt durch Paris, Besuch des Eiffelturms, Besuch der Oper, Exkursion nach Versailles, Konzert

Inoffizielle Länderwertung

1. BRD	212
2. USA	171
3. Ungarn	170
4. Sowjetunion	169
5. Rumänien	161
6. Vietnam	148
7. Niederlande	143
8. ČSSR	142
9. Bulgarien	137
10. Frankreich	123
11. Großbritannien	121
12. DDR	117
13. Finnland	103
14. Kanada	102
15. Polen	101
16. Israel	97
17. Griechenland	96
18. Jugoslawien	89
19. Australien	86
20. Brasilien	77
21. Schweden	47
22. Österreich	45
23. Spanien	37
24. Kuba	36
25. Marokko	32
26. Belgien	31
27. Tunesien	26
28. Kolumbien	21
29. Luxemburg	13
30. Algerien	6
31. Kuwait	4
32. Italien	2

in der Kirche Saint Severin, Siegerehrung im großen Amphitheater der Sorbonne.
B. Schmutzler erhielt für die besonders elegante Lösung dieser Aufgabe von der Jury in Paris als einziger IMO-Teilnehmer eine Anerkennung.

Da a, b und c Seitenlängen eines Dreiecks sind, gelten die Dreiecksungleichungen $a+b-c > 0, b+c-a > 0, a+c-b > 0$.
Wegen $(a-c)^2 \geq 0$ gilt damit

$$(a+b-c)(a-b+c)(a-c)^2 \geq 0$$

$$(1) \quad a^4 - c^4 + 2a^2bc + 2ab^2c - 4abc^2 + 2ac^3 + 2bc^3 - 2a^3c - 2b^2c^2 - a^2b^2 \geq 0.$$

Analog erhält man durch zyklisches Vertauschen der Variablen a, b und c aus

$$(b+c-a)(b-c+a)(b-a)^2 \geq 0$$

und $(c+a-b)(c-a+b)(c-b)^2 \geq 0$
die Ungleichungen

$$(2) \quad b^4 - a^4 + 2b^2ca + 2bc^2a - 4bca^2 + 2ba^3 + 2ca^3 - 2b^3a - c^2a^2 - b^2c^2 \geq 0$$

$$(3) \quad c^4 - b^4 + 2c^2ab + 2ca^2b - 4cab^2 + 2cb^3 + 2ab^3 - 2c^3b - a^2b^2 - c^2a^2 \geq 0.$$

Durch Aufsummieren von (1), (2) und (3) ergibt sich

$$2a^3b + 2b^3c + 2ac^3 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2a^2c^2 \geq 0$$

$$2a^2b(a-b) + 2b^2c(b-c) + 2ac^2(c-a) \geq 0 \quad / :2$$

$$(4) \quad a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + a^2c(c-a) \geq 0$$

w. z. b. w.

Da Ungleichheit in einer von (1), (2) und (3) schon die Ungleichheit in (4) bewirkt, muß bei Gleichheit in (4) auch in (1), (2) und (3) Gleichheit gelten, d. h., es muß jeweils einer der drei Faktoren Null betragen. Wegen der strengen Ungleichheit in den Dreiecksungleichungen muß also gelten

$$(a-c)^2 = (b-a)^2 = (c-b)^2 = 0 \text{ und damit } a = b = c (> 0).$$

Umgekehrt gilt offensichtlich für alle a, b und c mit $a=b=c$ in (4) Gleichheit.

Die beiden Klausuren à 4,5 Stunden (6. 7. und 7. 7.) fanden in dem weltberühmten *Lyceé Louis le Grand* statt. (Es wurde 1563 gegründet, feiert also in diesem Jahr sein 400jähriges Bestehen. Bedeutende Schüler dieser Schule: Molière, Voltaire, Robespierre, La Fayette, Delacroix, Hugo, Malesherbes, René Clair, Chirac, Becquerel, Evariste Galois, Binet.)



Teilbarkeitsregeln

Teil 1

Allgemein bekannt sind die Regeln für die Teilbarkeit einer natürlichen Zahl durch 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 und 10. Schon weniger verbreitet ist eine Regel für die Teilbarkeit durch 11 (Prüfen der alternierenden Quersumme, der sogenannten Querdifferenz). Auffällig ist, daß im Unterricht keine Regel für die Teilbarkeit durch 7 gelehrt wird. Daraus wird zuweilen der falsche Schluß gezogen, für die 7 gäbe es keine Teilbarkeitsregel. Es läßt sich jedoch für jede beliebige natürliche Zahl eine Teilbarkeitsregel herleiten. Dabei kann man sich auf Teiler beschränken, die auf die Ziffern 1, 3, 7 und 9 enden, da alle anderen Teiler zumindest durch 2 oder 5 teilbar sind; nach Division durch die entsprechenden Potenzen von 2 und 5 können sie auf Teiler zurückgeführt werden, die auf 1, 3, 7 oder 9 enden. Denn die Untersuchung einer natürlichen Zahl z auf ihre Teilbarkeit durch $t \in \mathbb{N}$ ist gleichbedeutend mit der Prüfung der Teilbarkeit von z durch alle Primzahlpotenzen, die in der Primzahlzerlegung von t auftreten.

Will man also prüfen, ob eine Zahl $z \in \mathbb{N}$ beispielsweise durch $t = 65 = 5 \cdot 13$ teilbar ist, so prüft man zunächst ihre Teilbarkeit durch 5 nach der bekannten Regel; danach muß dann die Teilbarkeit durch 13 untersucht werden. Wir betrachten, daß dieser Schluß nur für zueinander teilerfremde Faktoren gilt; an der Teilbarkeit von z durch 4 und 6 folgt nicht die Teilbarkeit von t durch $4 \cdot 6 = 24$.

Im folgenden wollen wir Teilbarkeitsregeln für auf 1, 3, 7 und 9 endende Teiler $t \in \mathbb{N}$ herleiten und erläutern, wie die Teilbarkeit geprüft werden kann. Es handelt sich um ein Verfahren mit sogenannten Hilfszahlen. Allerdings sind diese Regeln für größere Teiler unhandlich, so daß es oft einfacher ist, die Teilbarkeit direkt durch Division zu prüfen. Dennoch bringt dieses Verfahren Vorteile. Wir wollen das zunächst an der Teilbarkeitsregel für die 7 erläutern. Sie lautet: Eine Zahl $z = 10A + E$ mit $A \in \mathbb{N}$ und $E \in \mathbb{N}$ und $0 \leq E \leq 9$ ist genau dann durch 7 teilbar, wenn es auch die Differenz $D = A - 2E$ ist. -2 ist in diesem Fall die sogenannte Hilfszahl F . Mit der Differenz D läßt sich die gleiche Untersuchung wiederholen und so fort.

Beispiel: Wir prüfen, ob 2471 durch 7 teilbar ist. Es ist $A = 247$ und $E = 1$, die Hilfszahl ist $F = -2$. (Wie sie hergeleitet wird, zeigen wir

weiter unten.) Zu prüfen ist also $D_1 = 247 - 2 \cdot 1 = 245$. Für $D_1 = 245$ wird $A' = 24$ und $E' = 5$; zu prüfen wäre nun $D_2 = 24 - 2 \cdot 5 = 14$. Da 14 offensichtlich durch 7 teilbar ist, ist es auch 2471.

Für das Prüfverfahren mit Hilfszahlen empfiehlt sich folgendes Schema:

$$\begin{array}{r|l} 2 & 4 & 7 & | & 1 & F \cdot E \\ & -2 & & & (-2) \cdot 1 = -2 \\ \hline 2 & 4 & | & 5 \\ & -1 & 0 & & (-2) \cdot 5 = -10 \\ \hline 1 & 4 & & & \end{array}$$

ist durch 7 teilbar, also auch 2471.

In der Tat ist $2471 : 7 = 353$.

Gegenbeispiel: Ist $z = 558$ durch $t = 7$ teilbar?

$$\begin{array}{r|l} 5 & 5 & | & 8 \\ & -1 & 6 & & (-2) \cdot 8 = -16 \\ \hline 3 & 9 & & & \end{array}$$

ist nicht durch 7 teilbar, demnach auch nicht 558,

was leicht nachzuprüfen ist.

Ein weiteres Beispiel:

Ist $z = 235683$ durch 7 teilbar?

$$\begin{array}{r|l} 2 & 3 & 5 & 6 & 8 & | & 3 & F \cdot E \\ & & & & -6 & & (-2) \cdot 3 = -6 \\ \hline 2 & 3 & 5 & 6 & | & 2 \\ & & & -4 & & & (-2) \cdot 2 = -4 \\ \hline 2 & 3 & 5 & | & 2 \\ & & -4 & & & & (-2) \cdot 2 = -4 \\ \hline 2 & 3 & | & 1 \\ & -2 & & & & & (-2) \cdot 1 = -2 \\ \hline 2 & 1 & & & & & \end{array}$$

ist durch 7 teilbar, also auch $z = 235683$.

Wir verallgemeinern das im Beispiel Gezeigte und formulieren den

Satz 1: Eine natürliche Zahl $z = 10A + E$ mit $A \in \mathbb{N}$; $E \in \mathbb{N}$; $0 \leq E \leq 9$ ist genau dann durch $t \in \mathbb{N}$ mit $t = 10a + e$ ($a \in \mathbb{N}$); ($e \in \mathbb{N}$) ($0 \leq e \leq 9$) teilbar, wenn t auch $D = A + F \cdot E$ teilt, wobei $F \in G$ die sogenannte Hilfszahl ist.

Für den Beweis dieses Satzes wollen wir Satz 2 benutzen, den wir zuvor beweisen.

Satz 2: Zu vorgegebenem Teiler $t = 10a + e$ ($a \in \mathbb{N}$) mit der Endziffer $e = 1$ bzw. 3 bzw. 7 bzw. 9 läßt sich stets mindestens eine ganze Zahl F so angeben, daß $10F - 1$ durch t teilbar ist, d. h. daß gilt $(10F - 1) = (10a + e)s$ mit $s \in G$. (1)

Beweis: Wir müssen also die Bestimmbarkeit von $F \in G$ aus (1) für alle t zeigen, die auf 1, 3, 7 oder 9 enden.

a) Fall 1: Ist $e = 1$, also $t = 10a + 1$. Wählt man nun $s = -1$ und setzt in (1) ein, so kann F in Abhängigkeit von a bestimmt werden. Wir erhalten

$$\begin{aligned} 10F - 1 &= (10a + 1)(-1) \\ 10F - 1 &= -10a - 1 \\ F &= -a. \end{aligned}$$

Wir wollen dieses F - bezogen auf die Endziffer 1 des Teilers $F(1) = -a$ nennen.

b) Fall 2: Ist $e = 3$, also $t = 10a + 3$, so kommt man z. B. für $s = 3$ zum Ziel, denn wir erhalten aus (1)

$$\begin{aligned} 10F - 1 &= (10a + 3) \cdot 3 \\ 10F - 1 &= 30a + 9 \end{aligned}$$

und schließlich nach F aufgelöst

$$F = 3a + 1; \text{ also } F(3) = 3a + 1.$$

c) Fall 3: Ist $e = 7$, also $t = 10a + 7$, so setzen wir $s = -3$ und erhalten aus (1)

$$10F - 1 = (10a + 7)(-3),$$

es folgt

$$F(7) = -3a - 2 = -(3a + 2).$$

d) Fall 4: Ist schließlich $e = 9$, also $t = 10a + 9$, so wählt man $s = 1$ und erhält aus (1)

$$10F - 1 = (10a + 9) \cdot 1,$$

es folgt

$$F(9) = a + 1.$$

Damit ist gezeigt, daß es für jedes t , das auf die genannten Zahlen (1, 3, 7, 9) endet, ein solches $F \in G$ gibt. Hätten wir für $t = 10a + 1$ in (1) für $s = 9$ gesetzt, hätten wir $F = 9a + 1$ erhalten; also wohl ein anderes F , aber immerhin ein $F \in G$. Daraus können wir später den Schluß ziehen, daß es für jeden Teiler t unendlich viele (meist jedoch unhandliche) Teilbarkeitsregeln gibt.

Wir beweisen jetzt den Satz 1. Wir haben zu zeigen:

Wenn $t = 10a + e$ die natürliche Zahl $z = 10A + E$ teilt, so teilt t auch $D = A + F \cdot E$; und umgekehrt, wenn t die Zahl D teilt, so teilt t auch z .

a) Es gelte zunächst: t teilt z , also $10A + E = tr$ mit $r \in G$. Nach Multiplikation mit $F \in G$ erhält man

$$\begin{array}{l|l} 10AF + EF = trF & + A - 10AF \\ A + E'F = trF - 10AF + A & \\ A + EF = trF - A(10F - 1) & \end{array}$$

Nach Satz 1 kann nun für jedes $t = 10a + e$ mit $a \in \mathbb{N}$ und $e \in \{1, 3, 7, 9\}$ ein $F \in G$ so bestimmt werden, daß $10F - 1$ durch t teilbar ist, daß also gilt $10F - 1 = ts$ mit $s \in G$.

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} A + EF &= trF - Ats \\ A + EF &= t(rF - As). \end{aligned}$$

Da die rechte Seite der Gleichung durch t teilbar ist, muß auch $A + EF = D$ durch t teilbar sein; also t teilt $D = A + E \cdot F$.

b) Umgekehrt gelte t teilt D , also $A + EF = tq$ mit $q \in G$.

Nach Multiplikation mit 10 erhält man

$$\begin{array}{l|l} 10A + 10EF = 10tq & + E - 10EF \\ 10A + E = 10tq - 10EF + E & \\ 10A + E = 10tq - E(10F - 1) & \end{array}$$

wieder gilt $10F - 1 = ts$ ($s \in G$),

und wir erhalten

$$10A + E = 10tq - Ets = t(10q - Es);$$

also ist $10A + E = z$ durch t teilbar, w. z. b. w.

Damit ist gezeigt, daß es für die Teiler $t = 10a + e$ ($a \in \mathbb{N}$) $e \in \{1, 3, 7, 9\}$ genügt, statt der Teilbarkeit von $z = 10A + E$ die Teilbarkeit von $D = A + FE$ zu untersuchen.

Satz 1 entnehmen wir, daß es für jedes t , das auf 1, 3, 7 oder 9 endet, stets mindestens eine Hilfszahl $F \in G$ gibt. Wir wählen jeweils die betragsmäßig kleinste. Beim Beweis des Satzes 2 haben wir diese F für jede Endziffer e

bereits ermittelt. Wir wollen die Hilfszahlen mit $F(e)$ bezeichnen und entnehmen

$$F(1) = -a$$

$$F(3) = 3a + 1$$

$$F(7) = -3a - 2 = -(3a + 2)$$

$$F(9) = a + 1,$$

wobei a die natürliche Zahl aus $t = 10a + e$ ist.

Zusammenfassung: Um zu prüfen, ob eine Zahl $z = 10A + E$ durch $t = 10a + e$ teilbar ist, genügt es, das jeweilige $D(e) = A + E \cdot F(e)$ auf Teilbarkeit durch t zu untersuchen.

Für die verschiedenen Endziffern von t erhalten wir:

$$D(1) = A - Ea$$

$$D(3) = A + E(3a + 1)$$

$$D(7) = A - E(3a + 2)$$

$$D(9) = A + E(a + 1). \quad J. Portner (\dagger)$$

(Der Beitrag wird in Heft 2/84 fortgesetzt.)

Eine Aufgabe aus J. P. Grusons enthüllte Zaubereyen und Geheimnisse der Arithmetik, Berlin 1800:

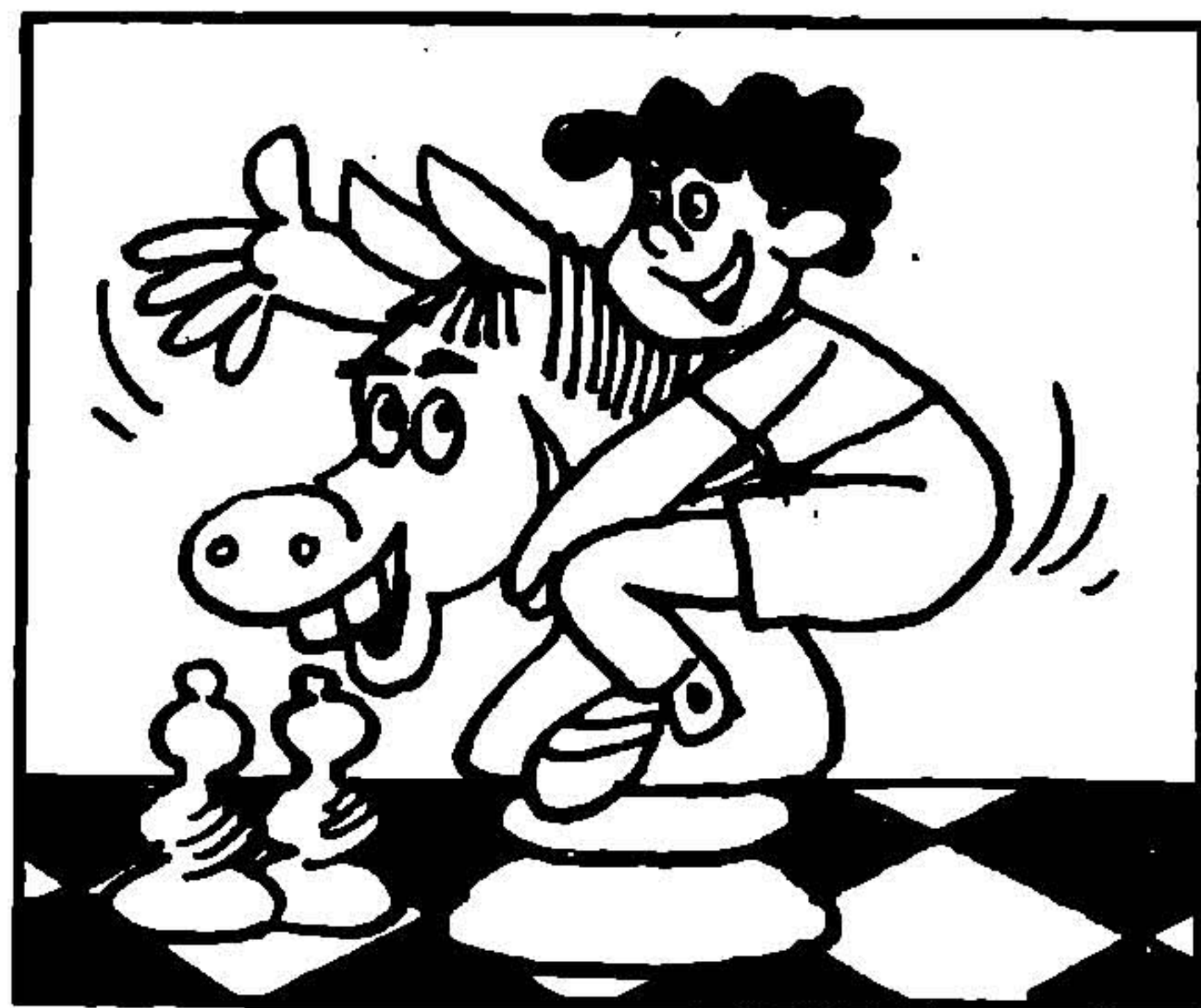
„Es hat jemand seine Börse verloren, er weiß nicht genau wie viel Geld eigentlich darin gewesen, nur das weiß er, daß wenn er zwei und zwei oder drei und drei, oder fünf und fünf und Stück zusammenzählte, daß ihm immer eine übrig blieb, zählte er aber sieben und sieben, so blieb ihm nichts.“



▲1▲ На доске написано несколько ненулевых чисел, каждое из которых равно полусумме остальных. Сколько чисел написано?

▲2▲ There are seven girls and each day some of them go for a walk. The same group of girls may not go for a walk on more than one day. For how many days can the girls go for a walk?

▲3▲ Le réservoir d'essence de la voiture de papa a une capacité de 32 l. Cette voiture consomme 8 litres d'essence aux 100 kilomètres. Papa a fait le plein de son réservoir avant de partir et nous avons fait un voyage de 400 km. Combien reste-t-il d'essence dans le réservoir, sachant que papa en a ajouté 14 l en cours de route?



Begeisterte Schachfreunde

Das Schachspiel ist seiner Bedeutung nach eine äußerst interessante Erscheinung im kulturellen Leben der Menschheit. Einige Äußerungen kompetenter Persönlichkeiten sollen dies unterstreichen. So nannte *Jean-Jacques Rousseau* das Schach eine feine Kunst, einen wundervollen Kampf. ... – „Das Schachspiel ist ein Probierstein des Gehirns“, sagte *Johann Wolfgang von Goethe*. – *Wladimir Iljitsch Lenin* bezeichnete Schach als Gymnastik des Geistes. – Der sowjetische Ex-Schachweltmeister Boris Spasski bekannte einmal: „Mich begeistert am Schach das Unbekannte, der unerschöpfliche Reichtum an Möglichkeiten, der schöpferische Prozeß, der die Schachkunst begleitet. Es ist schwierig, im Schach irgend etwas Bestimmtes hervorzuheben, weil Schach gleichzeitig Vielfalt bedeutet.“

In unserem heutigen Problem ist auch von einem begeisterten Schachfreund die Rede.

Aufgabe

Ein Moskauer Friseur und leidenschaftlicher Schachfreund befestigte an seinem Geschäft folgendes Schild:

„Ermäßigte Preise für Schachspieler! Rasieren für Spieler der Leistungsklasse 2 kostet 38 Kopeken, für Spieler der Leistungsklasse 1 34 Kopeken, für Meisteranwärter 26 Kopeken! Für Schachmeister unentgeltlich!“

Am ersten Tag kamen 20 Kunden, die Schachspieler waren, bei einer Einnahme von nur 146 Kopeken.

Wie viele Schachspieler jeder Spielstärke wurden rasiert?

Mitgeteilt von H. Rüdiger, Grünheide

Eine harte Nuß

Ermittle alle Paare (x, y) ganzer Zahlen x und y , welche der Gleichung

$$2\sqrt{x} + \sqrt{2y} = \sqrt{32}$$

genügen!

Hinweis: Sicher werdet ihr die Paare $(0, 16)$ und $(8, 0)$ schnell als Lösungen erkennen. Entscheidend aber ist, daß ihr alle Lösungspaare findet und die Vollständigkeit der Lösungsmenge auch nachweist.

Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig

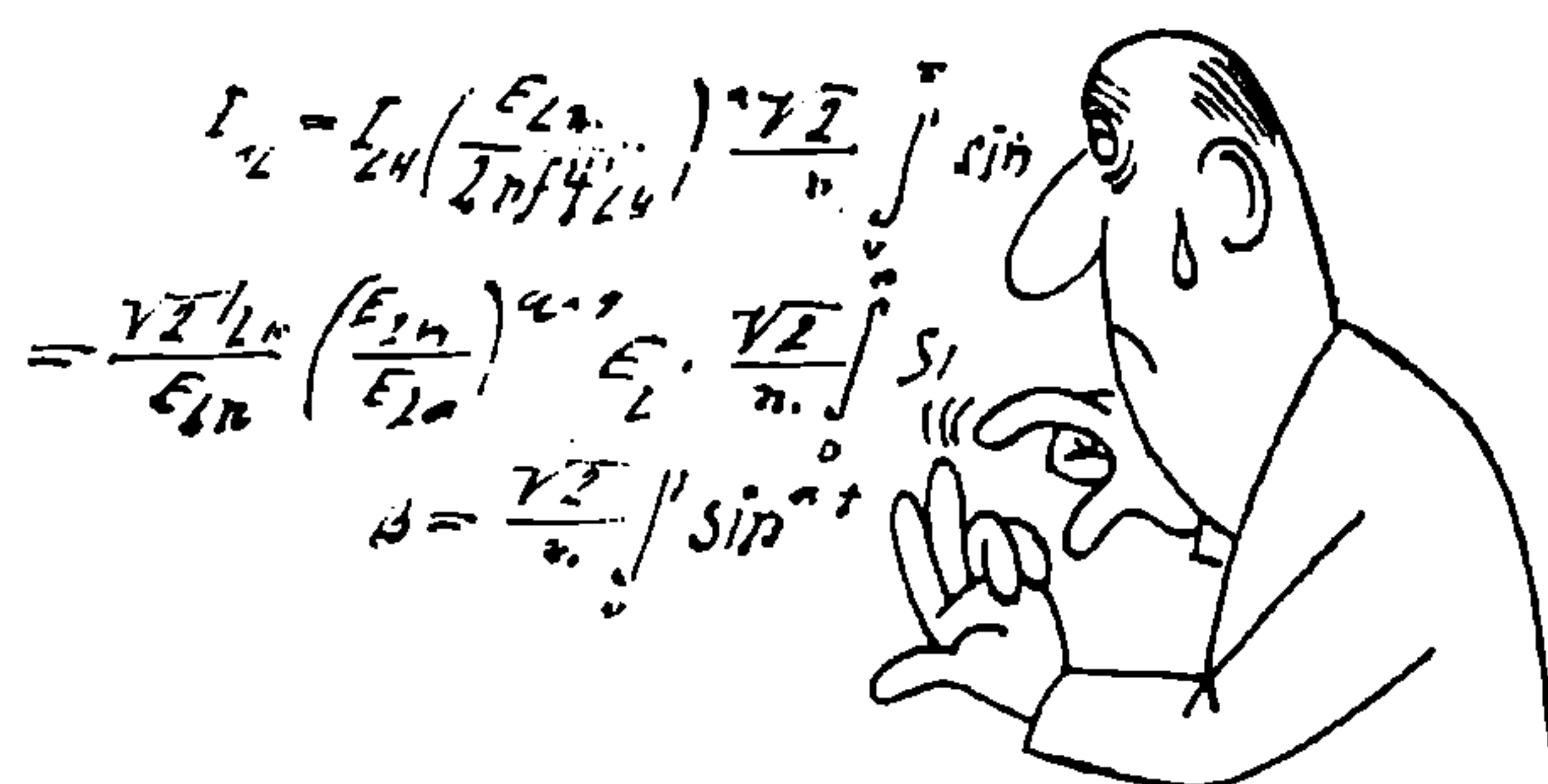
Wo die Mathematik auch in der Freizeit viel Freude macht:

Bei der Gründung des *alpha*-Clubs der OS Vitzsburg vor drei Jahren waren es nur wenige Jungen und Mädchen. Heute besuchen den *alpha*-Club etwa 30 Schüler, die aus allen sechs Ortsteilen des Einzugsbe-

reichs der Schule kommen. Sie gehen in die 5. bis 8. Klasse, treffen sich in ihren Altersstufen wöchentlich. Der Club nimmt eifrig am *alpha*-Wettbewerb teil (223 Lösungen wurden 1982/83 eingesandt). Drei Schüler erwarben in diesem Jahr das *alpha*-Abzeichen in Gold. Initiator und Leiter des Clubs: Mathematikfachlehrer K. Bauer.



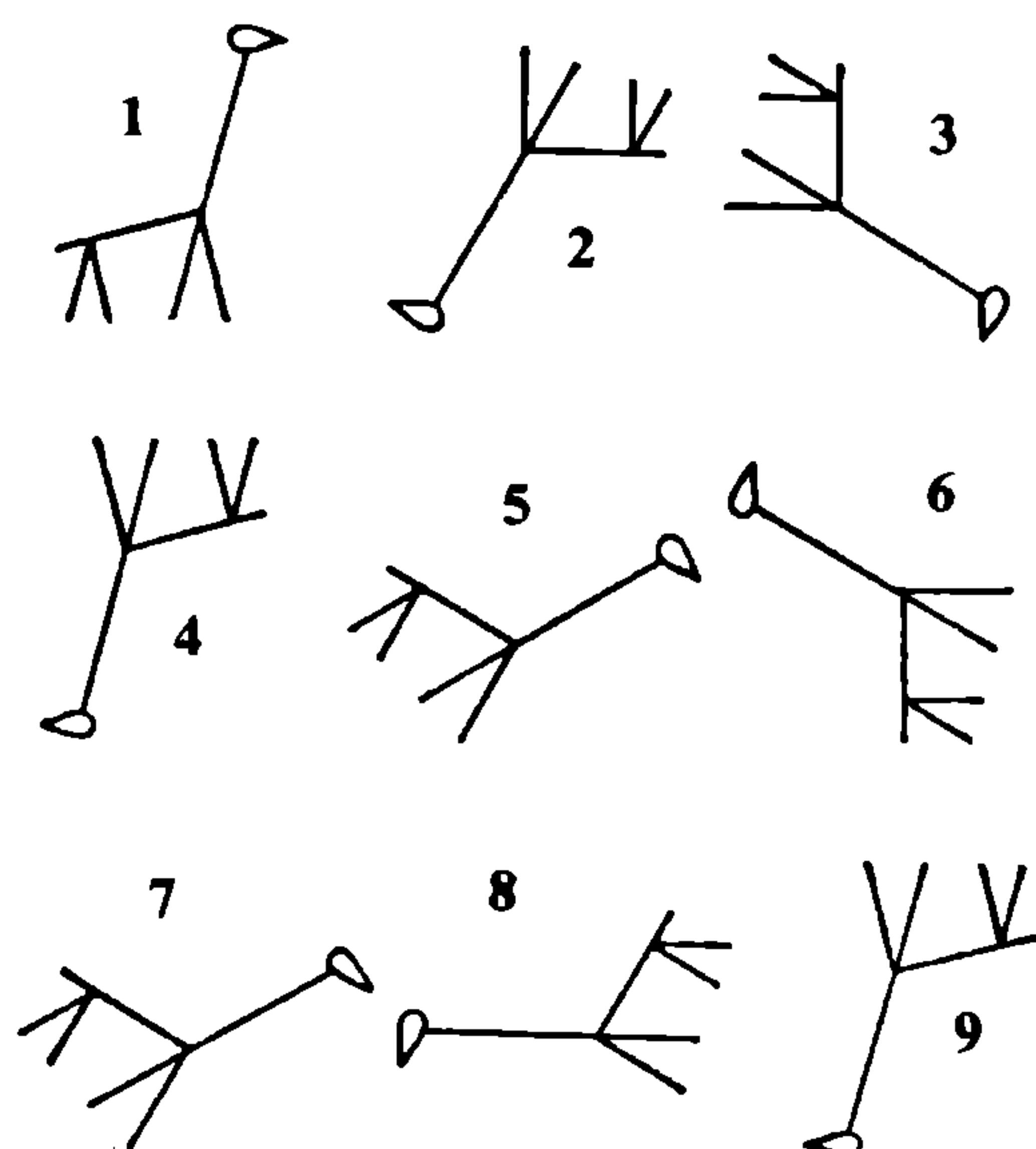
In freien Stunden • alpha-heiter



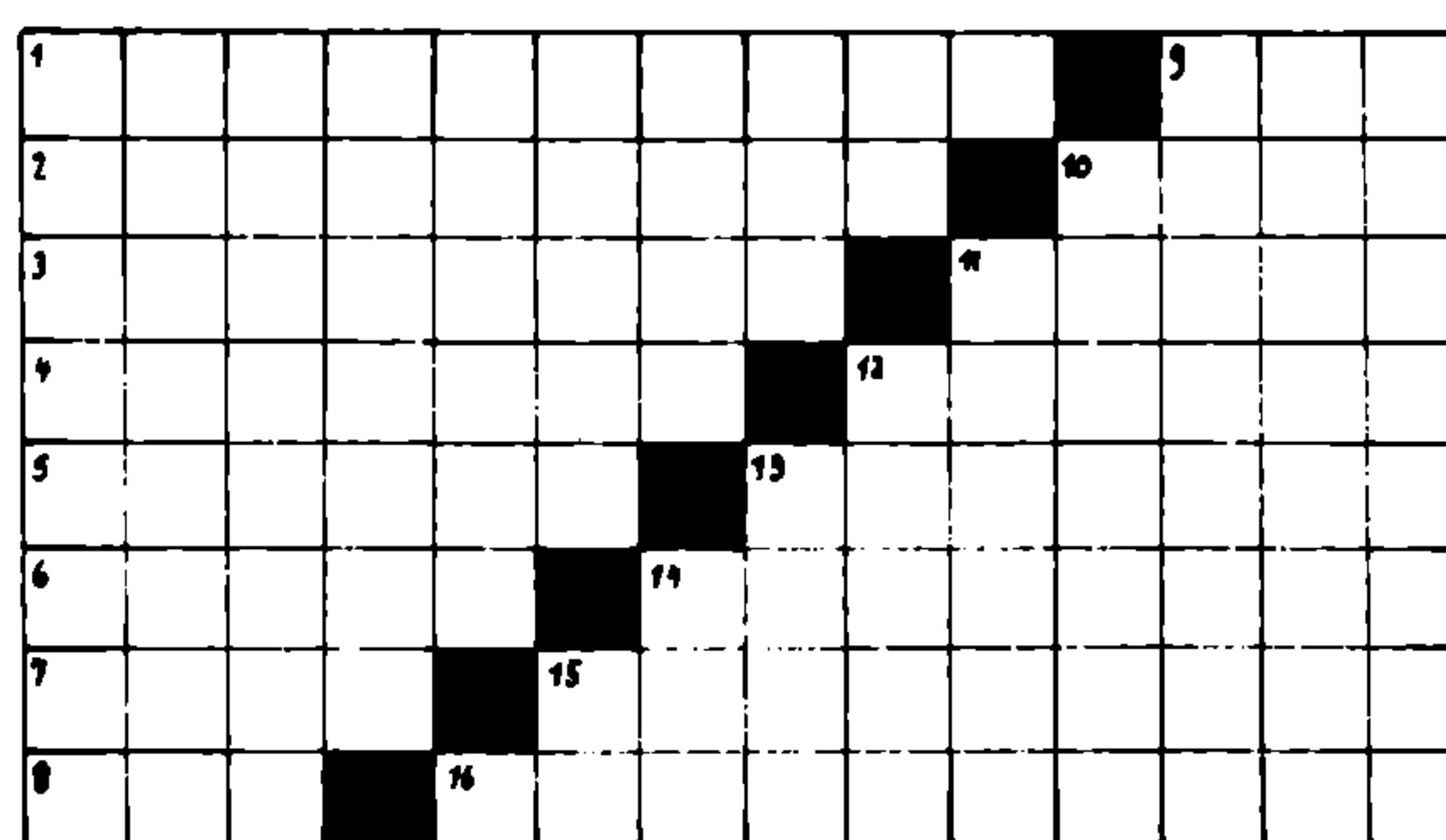
Augentraining

Unter den von 1 bis 9 bezeichneten Figuren gibt es eine, die nach den Regeln der Logik nicht hineingeht. Welche ist das?

Aus: Füles, Budapest



Begriffsumschreibungen: 1. konvexer Körper, 2. mit Mehrfarbenproblemen zusammenhängender Begriff, 3. Grundbegriff der Analysis, 4. bei Dreiecken auftretender Kreis, 5. zahlentheoretischer Begriff, 6. Bestandteil eines Polynoms, 7. norwegischer Mathematiker (1802 bis 1829), 8. mathematisches Grenzwertsymbol, 9. Kurzzeichen für „modulo“, 10. deutscher Rechenmeister (um 1492 bis 1559), 11. Polyeder-
teil, 12. Teil eines Bruches, 13. Zerlegung geometrischer Objekte, 14. schwedischer Mathematiker (1866 bis 1927), 15. Mitbegründer der algorithmischen Sprachen, 16. Teil der Kreisperipherie.



Dr. R. Mildner, KMU Leipzig

Kryptarithmetik

Setze für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern ein!

LEONHARD
— 1 2 3 2 5 5 5 1
EULER

Schüler Andreas Suchanow,
Neubrandenburg

RIND
PFERD
+ ZIEGE
TIERE

Schülerin Claudia Möller,
Rudolstadt

Permutationsrätsel

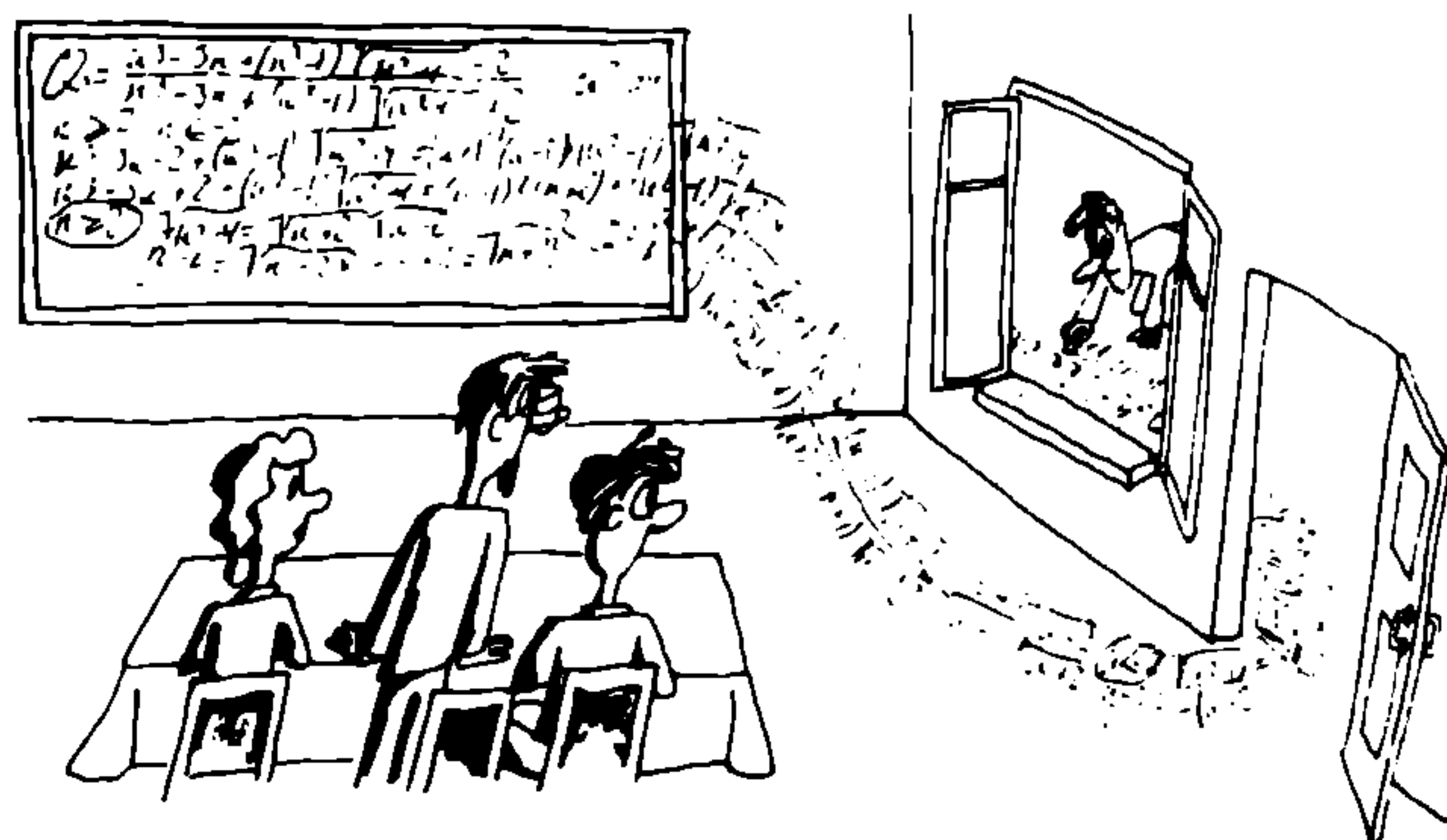
Gesucht sind 16 mathematische Begriffe, die waagrecht in die Rätsel-
figur einzutragen sind. Ihr findet sie, indem ihr die folgenden Begriffe permutiert (ihr könnt ja zunächst einmal versuchen, ohne Zuhilfenahme der unten angegebenen Begriffsumschreibungen sinnvolle mathematische Begriffe durch Permutation zu finden!):

1. Keksriegel, 2. Tanklader, 3. Leitgarn, 4. Eiskran, 5. Leiter, 6. Ledig, 7. Elba, 8. Ilm, 9. Dom, 10. Reis, 11. Katen, 12. Rennen, 13. Leitung, 14. Helmdorf, 15. Steingold, 16. Korbsiegen.

Testament aus Island

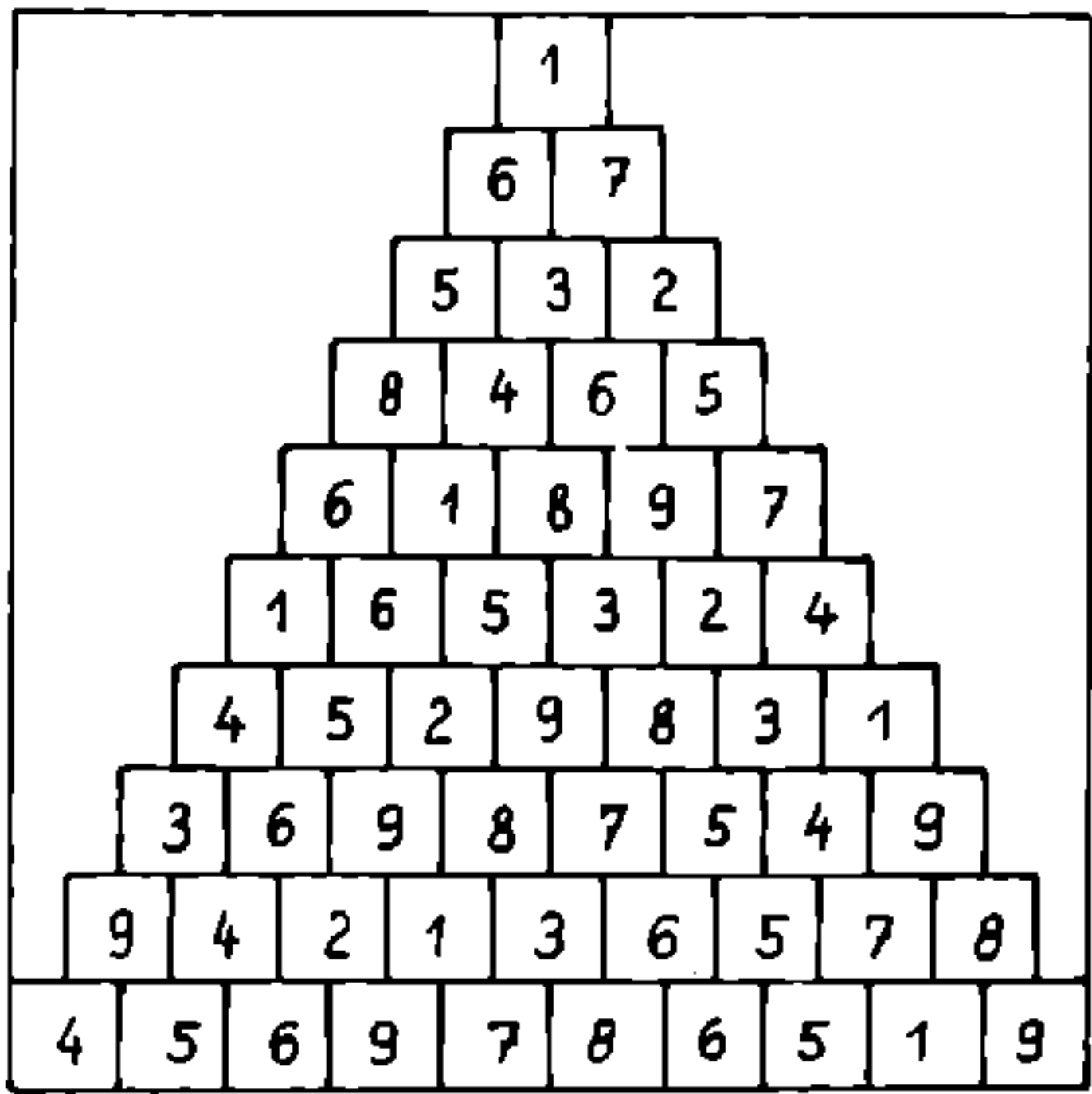
Ein Mann hatte in seinem Testament bestimmt, daß seine Frau die Hälfte, seine Kinder $\frac{1}{3}$ und sein Bruder $\frac{1}{12}$ seines Vermögens erben sollten. Den Rest von 1200 Kronen stiftete er einem Altenheim. Wieviel Geld hatte er besessen?

Aus einem isländischen Lehrbuch (Kl. 6)



Zahlenpyramide

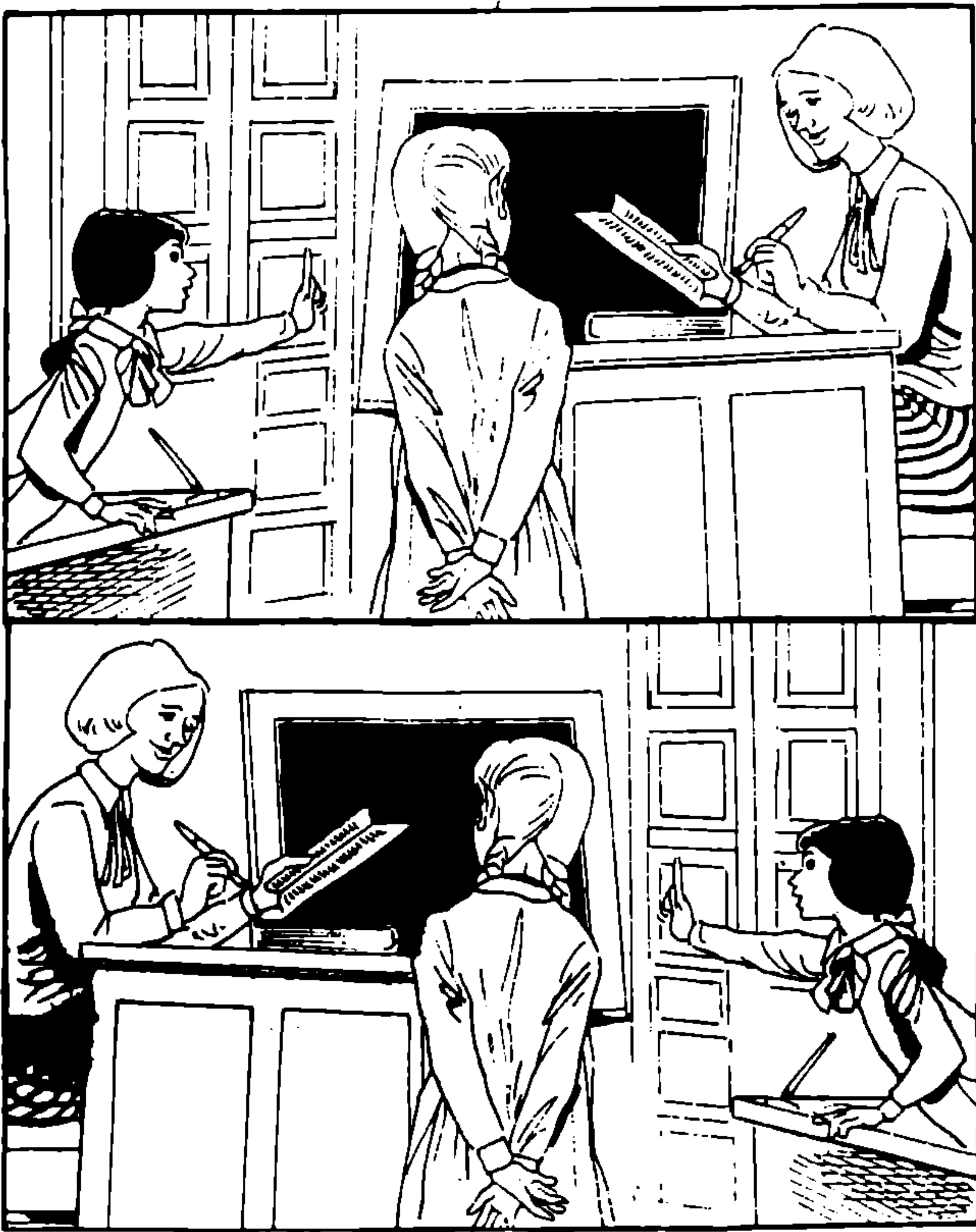
Man schreite von der Zahl 1 (an der Spitze der Pyramide) so abwärts, daß man immer eines der beiden Quadrate in der darunterliegenden Reihe betritt, welches das Quadrat berührt, in dem man verweilt.
Die Summe der Zahlen der dabei betretenen Quadrate soll möglichst groß werden.



Aus: *Urania*,
Berlin/Leipzig

Aufmerksame Schülerin

Beide Bilder – Original und Spiegelbild – weichen in einem wesentlichen Detail voneinander ab. Wo?



Mit Schere und Köpfchen

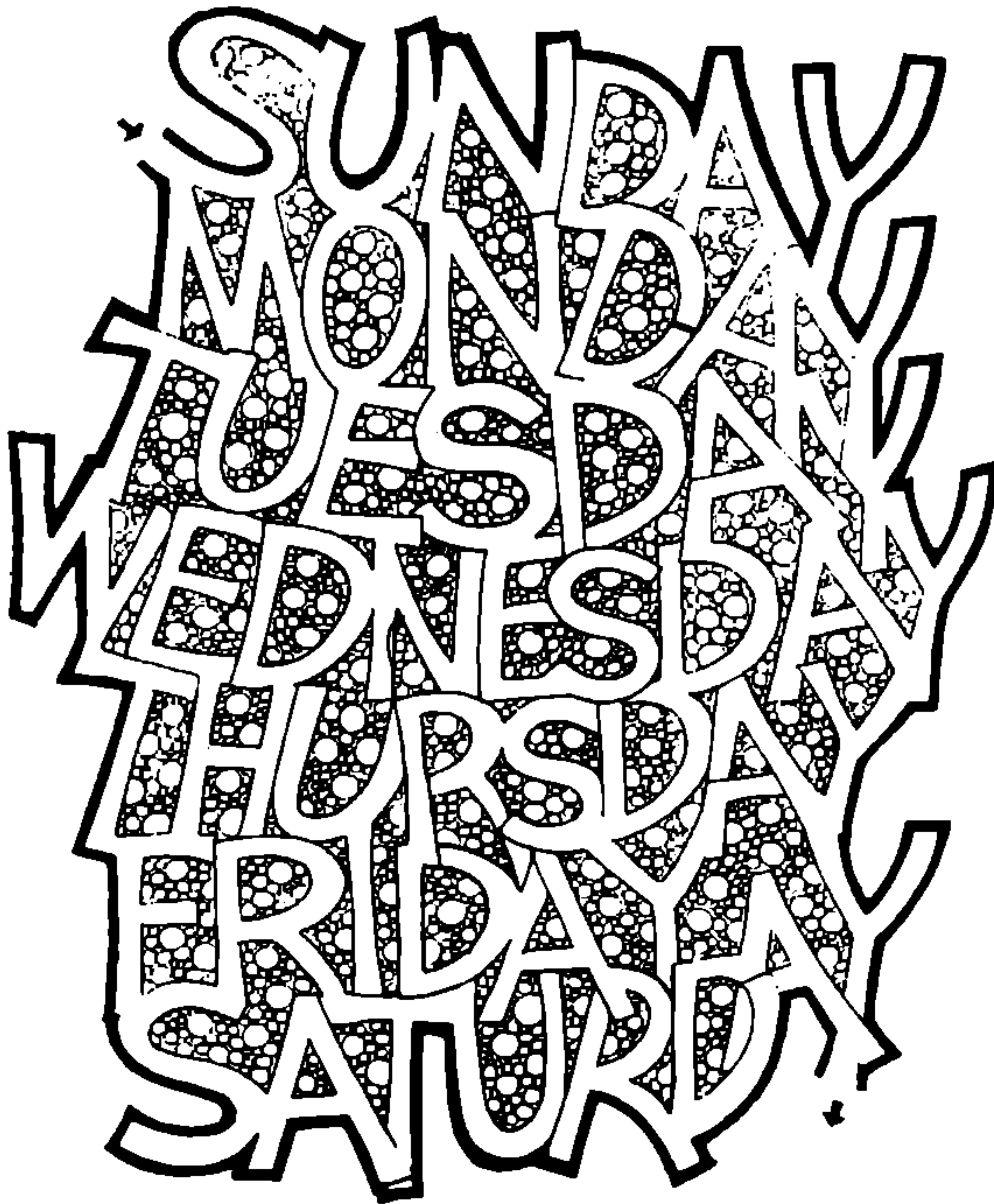
Schneide ein 2-mal-5-Rechteck so in 3 Teile, daß diese zu einem Quadrat wieder zusammengesetzt werden können!
Aus „*The Mathematics Calendar*“, 83
Carleton University, Ottawa/Kanada

Eine hungrige Ziege

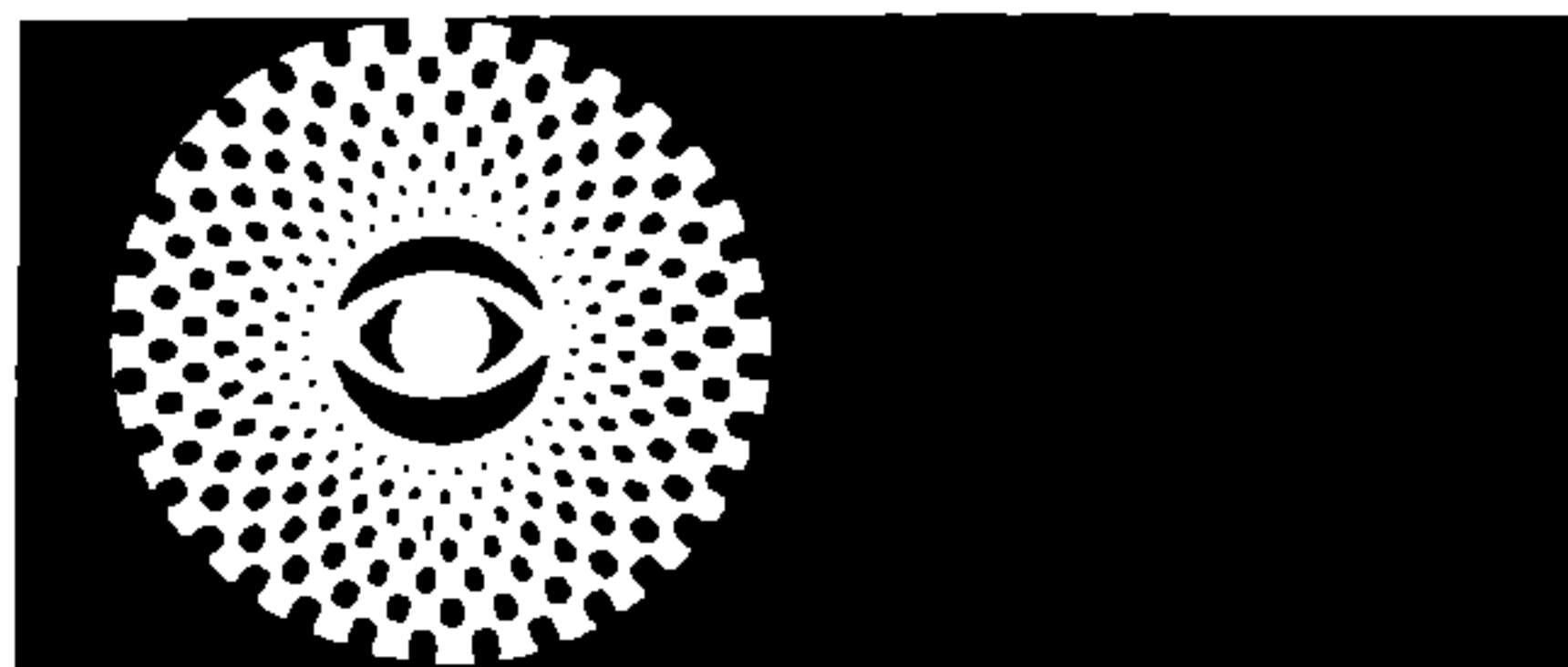
Ein schwieriges Problem: Am Rand einer kreisförmigen Wiese ist an einem Pflock eine Ziege angebunden. Wie lang muß der Strick sein, damit sie die Hälfte der Wiesenfläche abfressen kann? (Die Länge zwischen Halsband und Maul der Ziege bleibt unberücksichtigt.) (Lösung siehe Heft 2/84.)
Aus einer australischen Zeitschrift

Irrgarten

Suche den Weg durch die in englischer Sprache gezeichneten Wochentage von links oben nach rechts unten!
Aus: *Füles*, Budapest



„Der Trick mit dem Spickzettel auf dem Pullover ist Klasse!“
Aus: *Wochenpost*, Berlin, Theo Immisch



ARBEITS- GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Klaus-Peter berichtet aus seinem Mathematikzirkel

Teil 1: Fräulein Steinmann
macht uns neugierig

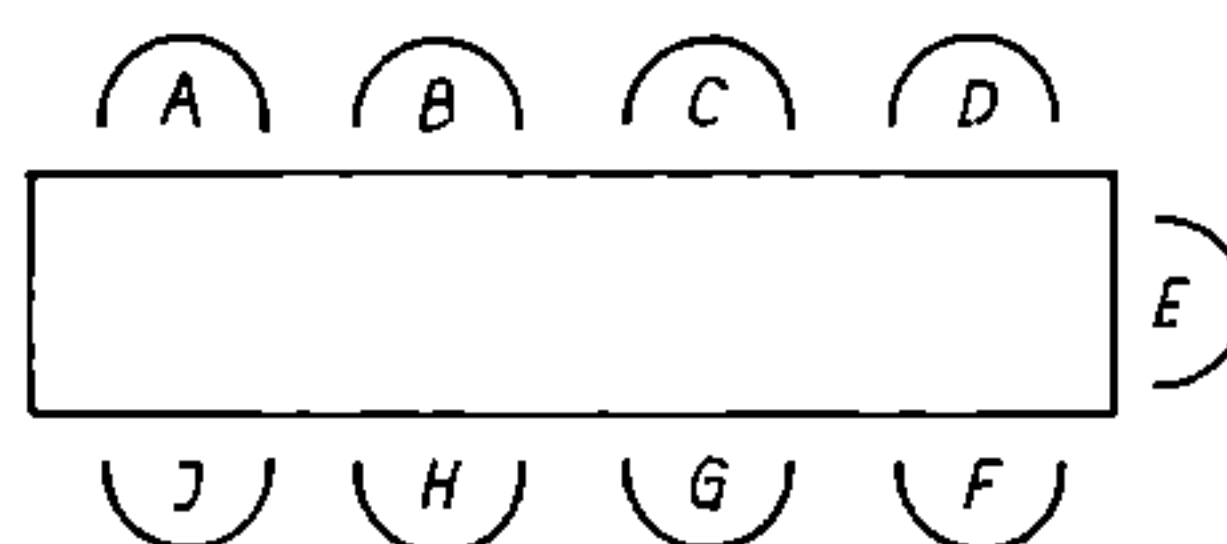
Sie ist schon Klasse, unser Fräulein Steinmann, die Leiterin unseres Mathematikzirkels. Sie knackt nicht nur spielend die härtesten Olympiadenüsse, sondern sie denkt sich auch selbst viele lustige Knobelaufgaben für uns aus. In der vergangenen Woche hat sie uns bewiesen, daß es keine *allergrößte* Primzahl gibt; d. h., es muß unendlich viele solcher Zahlen geben, obwohl Primzahlen immer dünner gesät sind, je weiter wir die Folge der natürlichen Zahlen ablaufen. Und wir neun Zirkelteilnehmer haben alles verstanden, obwohl Fräulein Steinmann noch gar keine richtige Lehrerin ist, sondern eine Studentin im fünften Semester (jedes „Studentenschuljahr“ besteht aus zwei Semestern, da kann man sich ausrechnen, daß Fräulein Steinmann noch allerhand lernen muß – dabei kann sie schon fast alles).

An unserem letzten Zirkelnachmittag stellte uns Fräulein Steinmann eine ganze Menge Fragen, weil sie uns – wie so oft – neugierig machen wollte. Sie fragte uns, ob wir gern im *Lotto* gewinnen würden. Wenn man alle Möglichkeiten, einen Tipschein auszufüllen, nutzen würde, so wäre doch sicher ein *Fünfer* dabei, dazu kämen noch *Vierer* und *Dreier*. Ob sich das Geschäft lohnt?

Wir wollten natürlich gern Bescheid wissen, doch Fräulein Steinmann stellte bereits die nächste Frage: „Wieso kommt man eigentlich beim Morsealphabet mit zwei Zeichen aus, obwohl es doch so viele Wörter – noch dazu in verschiedenartigen Sprachen – gibt?“ Das hätten wir auch gern gewußt, doch Fräulein Steinmann warf bereits das nächste Problem auf, sie meinte: „Wenn ich euch neun nicht so gut kennen würde, hätte ich große Schwierigkeiten, denn ihr setzt euch an jedem Zirkelnachmittag in einer anderen Anordnung an unseren großen Tisch. Wir haben 20 Zirkelnachmittage im Jahr. Ob ihr wohl alle Sitzordnungen durchprobiert hättet, bis ihr in der 10. Klasse seid?“

Diese schien uns eine leichte Frage zu sein, und wir wollten schon mit dem Vertauschen unserer Plätze beginnen, doch Fräulein Steinmann meinte, die Unruhe würde zu groß, und wenn wir nicht systematisch vorgehen, würden wir das Problem nie lösen.

Also blieben wir sitzen und gingen systematisch vor:



Angenommen, wir wären nur zwei Zirkelteilnehmer, nämlich A und B, dann gäbe es nur die beiden Anordnungen AB und BA.

„Jetzt seid ihr drei“, meinte Fräulein Steinmann. Es dauerte etwas länger, doch dann hatten wir die sechs Möglichkeiten gefunden. Dabei ist es gleichgültig, ob die drei Kinder an einem Tisch oder auf einer langen Bank sitzen. Die Anordnungen lauten:

ABC ACB BAC BCA CAB CBA

Bei vier Zirkelteilnehmern wurde es schon schwieriger. Es gab ein reiches Angebot an Lösungen. Kerstin hatte 18 Möglichkeiten gefunden, Corinna 17, Gunter 20 und Oliver sogar 23.

„Ihr müßt systematisch vorgehen“, wiederholte Fräulein Steinmann. In diesem Moment hatte Gunter eine Idee:

„Von den vier Schülern A, B, C und D kann jeder so oft auf Platz 1 sitzen, wie die anderen drei ihre Plätze vertauschen können. Wir wissen aber schon, daß es für drei Personen 6 Möglichkeiten der Anordnung gibt. Also gibt es für vier Schüler $4 \cdot 6 = 24$ Anordnungsmöglichkeiten.“

Und Oliver ergänzte: „Und dabei tritt keine Anordnung mehr als einmal auf und keine wird vergessen.“

Fräulein Steinmann lächelte: „Ihr habt das Problem so gut wie gelöst.“

So ganz sicher waren wir uns noch nicht, doch daß es bei 5 Schülern genau $5 \cdot 24 = 120$ Sitzanordnungen geben muß, leuchtete uns schnell ein, denn jeder der fünf Schüler blieb so oft auf dem ersten Platz sitzen, wie die anderen vier ihre Plätze tauschen konnten, und das waren ja 24 Möglichkeiten. Und bei neun Schülern? Das war eine kühne Frage!

Uta überlegte: „Jeder der neun Schüler kann so oft an erster Stelle stehen, wie die anderen ihre Plätze vertauschen können, also neun mal ...“ Jetzt merkten wir, daß uns ein Zwischenergebnis fehlte.

„Schrittweise vorgehen“, machte uns Fräulein Steinmann Mut.

Wir begannen von vorn. Dabei half uns Fräulein Steinmann, indem sie sagte: „Richtig Mathematik treiben kann man erst dann, wenn man eine zweckmäßige Symbolik gefunden hat. Nennt einmal die Anzahl der Anordnungen von zwei Elementen P_2 , die von drei Elementen P_3 und so fort, und schreibt auf, was ihr schon wißt!“

Wir schrieben: $P_2 = 2$, $P_3 = 3 \cdot P_2 = 6$,

$P_4 = 4 \cdot P_3 = 24$, $P_5 = 5 \cdot P_4 = 120$.

Nun konnte es weitergehen: $P_6 = 6 \cdot P_5 = 620$, $P_7 = 7 \cdot P_6 = 4340$, $P_8 = 8 \cdot P_7 = 34720$, $P_9 = 9 \cdot P_8 = 312480$.

„Geschafft“, jubelten wir.

Und da wir uns schnell überlegen konnten, daß wir unser Fräulein Steinmann höchstens noch 100mal sehen würden, konnte sie sicher nicht alle unsere Sitzordnungen bewundern.

Unsere Zirkelleiterin freute sich über unseren Eifer, sagte jedoch, daß nun „die Mathematik erst richtig losginge“. Sie ging an die Tafel und schrieb: $P_n =$

Wir wußten sofort, daß nun die Anzahl der möglichen Sitzordnungen von n Schülern, also einer *beliebigen* Anzahl von Schülern, gesucht war.

Frank ergänzte: $P_n = n \cdot P_{n-1}$

Doch bei der Begründung mußten wir ihm helfen: Von den n Personen kann *jede* so oft an erster Stelle sitzen, wie die anderen ihre Anordnung verändern können, und das ist gerade P_{n-1} mal der Fall.

Wir waren stolz, eine Formel gefunden zu haben, doch Fräulein Steinmann schmunzelte: „Und wieviel voneinander verschiedene Anordnungen kann man in einer Schulklasse mit 25 Schülern finden?“

Wir schrieben es auf: $P_{25} = 25 \cdot P_{24}$.

Doch damit waren wir am Ende unseres Lateins.

Natürlich können wir uns schrittweise „Zwischenergebnisse“ verschaffen, doch dieses ständige Zurückgreifen scheint uns eine sehr umständliche Methode zu sein.

Oliver fiel beim Betrachten des Tafelbildes auf, daß man die Anordnungszahlen ja auch noch anders schreiben könne:

$P_3 = 3 \cdot P_2 = 3 \cdot 2$

$P_4 = 4 \cdot P_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2$

$P_5 = 5 \cdot P_4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$

$P_6 = 6 \cdot P_5 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$

Fräulein Steinmann lobte den pfliffigen Oliver, und da wußten wir, daß er eine gute Idee gehabt hatte.

Eigentlich war uns allen klar, daß es so weitergehen müsse, und Fräulein Steinmann bestätigte unsere Vermutung.

$P_7 = 7 \cdot P_6 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$

$P_8 = 8 \cdot P_7 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$

Dann wurde es schwierig: $P_n = n \cdot P_{n-1} = ?$

$P_9 = 9 \cdot P_8 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$.

Das erste Problem bestand darin, die entdeckte Gesetzmäßigkeit zu *formulieren*. Fräulein Steinmann erklärte uns, daß man durch die Schreibweise $P_n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2$ unmißverständlich ausdrücken würde, daß das Produkt aller natürlichen Zahlen von 2 bis n gebildet werden soll.

Das zweite Problem war ernsterer Natur. Woher wußten wir eigentlich, daß unsere für die (ersten acht) natürlichen Zahlen von 2 bis 9 gefundene Gesetzmäßigkeit für jede beliebige natürliche Zahl gilt, also z. B. auch für

eine Million? Kerstin und Utta meinten, dies sei doch ganz klar, das Bilden der Gleichungen für $P_{10}, P_{11}, P_{12}, P_{13}, \dots$ ließe sich ja auf die gleiche Weise fortsetzen. Es gäbe auch keinen Grund, daß dies einmal nicht möglich wäre. Ganz wohl war uns bei der Sache aber doch nicht. Wieder griff Fräulein Steinmann helfend ein:

Man darf niemals aus der Untersuchung von nur *einigen Beispielen* auf eine *allgemeine Gesetzmäßigkeit* schließen. In unserem Falle allerdings ist

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2$$

tatsächlich für alle natürlichen Zahlen eine wahre Aussage. Nur bewiesen hätten wir dies eben noch nicht.

Nun baten wir Fräulein Steinmann, uns doch den Beweis zu verraten, doch sie lächelte nur und vertröstete uns auf später. Doch ich bin mir ganz sicher, sie würde den Beweis schon schaffen, nur wir sind wahrscheinlich noch ein bißchen zu klein. „Wenn in all unseren Gleichungen noch der Faktor 1 stünde, würden sie noch schöner aussehen“, meinte Frank. Wir bestätigten dies. Unser Fräulein Steinmann hatte uns schon oft gezeigt, daß Mathematik und Schönheit durchaus miteinander vereinbar sind.

„Für den Ausdruck $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ schreibt man kurz $n!$ und sagt dazu „ n Fakultät“, also können wir auch $P_n = n!$ angeben“, erklärte uns Fräulein Steinmann und forderte uns auf, solche Fakultäten zu berechnen:

$$4! = 24, \quad 9! = 312480,$$

$$15! = 1307674368000$$

Nun durften wir noch etwas aufschreiben, was man lernen kann, aber nicht zu verstehen braucht, z. B., daß jede solche Anordnung „Permutation“ heißt.

Also gibt es $n!$ Permutationen von n Elementen.

Fräulein Steinmann meinte, das Lotto-Problem und das Morse-Problem würden wir erst in den nächsten Zirkelnachmittagen lösen können, doch sie wolle uns noch eine Aufgabe zum Knobeln geben:

Bei der Friedensfahrt haben sich sieben Fahrer vom Feld abgesetzt und sind nicht mehr einzuholen. Unter ihnen befinden sich zwei Fahrer aus der DDR. Wieviel voneinander verschiedene Möglichkeiten des Einlaufs auf den ersten sieben Plätzen gibt es? Bei wieviel dieser Einläufe steht mindestens ein, höchstens ein bzw. genau ein Fahrer aus der DDR auf dem Siegereck für die ersten drei? Auf dem Heimweg diskutierten wir noch lange über Permutationen und Fakultäten, und alle freuten sich schon ein bißchen auf den nächsten Zirkel, die einen auf die Lösung des Lotto-Problems, die anderen auf die Lösung des Morse-Problems und die meisten auf Fräulein Steinmann.

P. Göthner

Der $2 \times 2 \times 2$ -Würfel

„Der gewöhnliche Zauberwürfel mit seinen drei Segmenten längs jeder Kante ist die natürlichste Form dieser Sorte von Puzzles, da jedem Bestandteil des Würfels, d. h. den Ecken, Kanten und Flächen, jeweils ein Segment entspricht.“ So *Ernö Rubik* bei seinem Besuch in Berlin im Juni 1983. Dieser „Natürlichkeit“ ist gewiß auch ein Anteil am weltweiten Erfolg des Zauberwürfels zuzuschreiben. Dennoch: es war der – mechanisch allerdings schwieriger zu realisierende – kleinere Bruder des Zauberwürfels, der $2 \times 2 \times 2$ -Würfel (kurz: der 2^3 ; vgl. Bild 1), an dem Rubik die Idee seines Puzzles zuerst durchdacht hatte. Diesem wollen wir im vorliegenden Beitrag unsere Aufmerksamkeit zuwenden. Der 2^3 ist offensichtlich ein Spezialfall des 3^3 ; er besitzt nur 8 Eckensegmente (kurz: Ecken); Kanten und Mitten fehlen. Beklebt bei euerm Zauberwürfel alle Teilflächen der Kanten und Mitten mit Leukoplastquadraten, und ihr habt einen 2^3 ! Wer den Zauberwürfel ordnen kann (und das werden die meisten Leser sein), müßte also auch sofort mit dem 2^3 zu recht kommen.

Warum also ein ganzer Artikel über einen Spezialfall von bereits allseits Bekanntem?

Erstens brauchen wir – gerade weil der 2^3 so einfach zu lösen ist – nicht viel Zeit zur Darstellung eines Algorithmus, sondern können einige mehr theoretische Probleme ansprechen, so z. B. den sogenannten *Orientierungssatz* beweisen. Zweitens wollen wir zeigen, daß alle drei in der DDR hergestellten Puzzles, das Tetraeder (vgl. *alpha* 3/83), das Oktaeder und der Stern, Spezialfälle des 2^3 sind.

Ein Algorithmus

Zunächst brauchen wir einige Bezeichnungen. Wir denken uns den Würfel ab jetzt stets so gehalten, daß seine Flächen vorn, hinten, oben, unten, rechts und links liegen. Diese Lagebezeichnung ersetzt die Farben. Die Züge notieren wir (dem internationalen Gebrauch folgend) folgendermaßen: für eine Drehung der rechten Fläche um 90° im Uhrzeigersinn (bei Blickrichtung auf die Fläche) schreiben wir R. R' bedeutet Drehung um 90° entgegen dem Uhrzeigersinn, R^2 eine 180° -

Drehung. Analoges gilt für die Drehung der anderen Flächen, wobei jeweils der große Anfangsbuchstabe der Lage der Fläche verwendet wird (Bild 1).

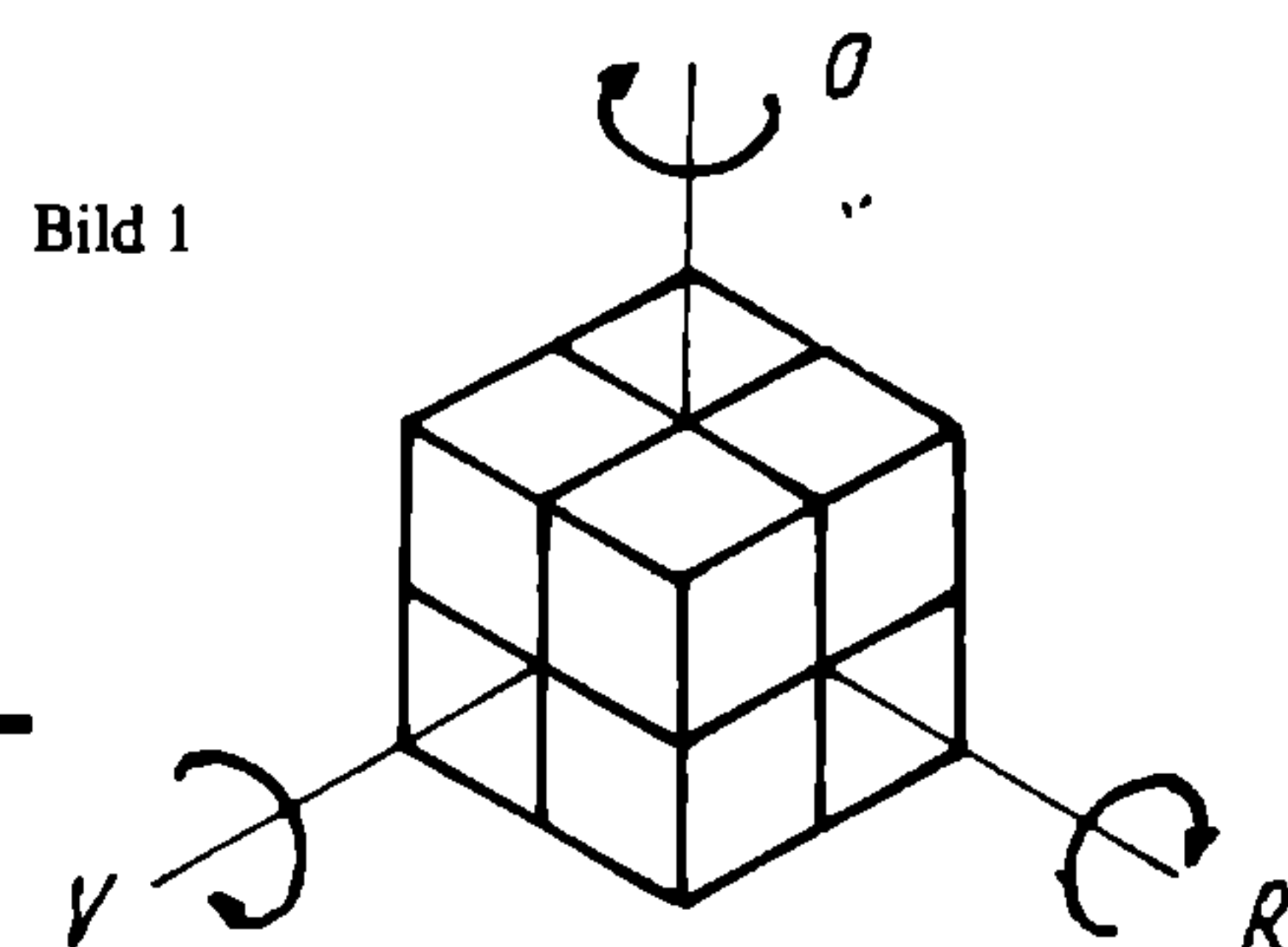


Bild 1

Eine Folge von Zügen, auch Prozeß genannt, wird von links nach rechts abgearbeitet. RO' bedeutet also, erst R, dann O' ausführen. Die Umkehrung einer Zugfolge ergibt sich durch Ausführen der entgegengesetzten Drehungen in umgekehrter Reihenfolge.

Also z. B. $(RO')' = OR'$.

Da es beim 2^3 keine Mittensegmente zur Festlegung der Farbe einer Fläche gibt, können wir eine beliebige Ecke, etwa die hinten links unten liegende, als bereits geordnet ansehen. Sie bestimmt dann zusammen mit den anderen Eckensegmenten eindeutig die herzustellende Färbung.

Bequem ist etagenweises Sortieren:

1. Die untere Etage

Die restlichen drei Ecken (eine ist ja bereits per definitionem geordnet) werden mit den in Bild 2 angegebenen Varianten des Prozesses $Z = ORO'R'$ einsortiert. Die Potenzschreibweise Z^3 bei Bild 2c bedeutet dreifache Anwendung von Z.

Bild 2a

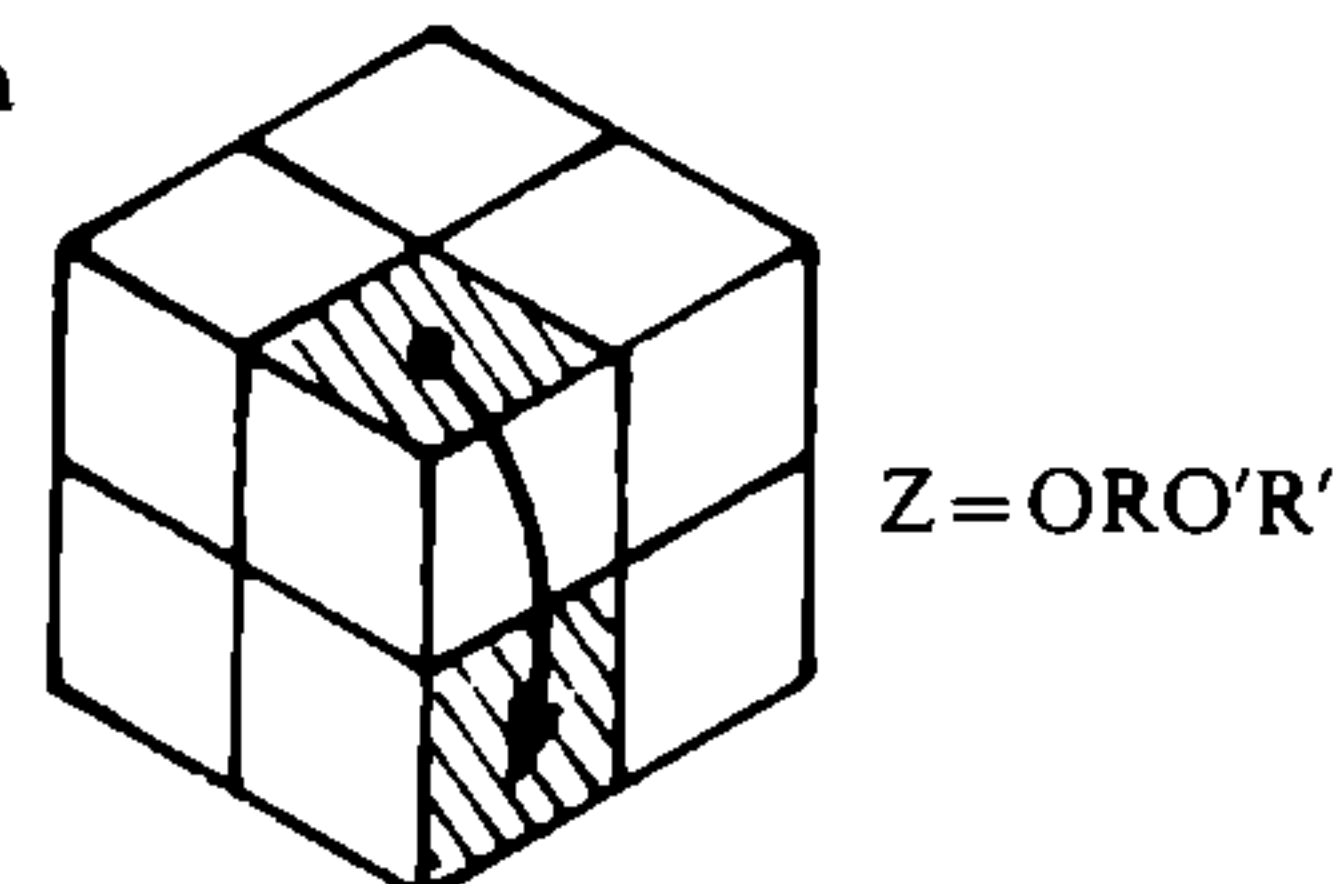


Bild 2b

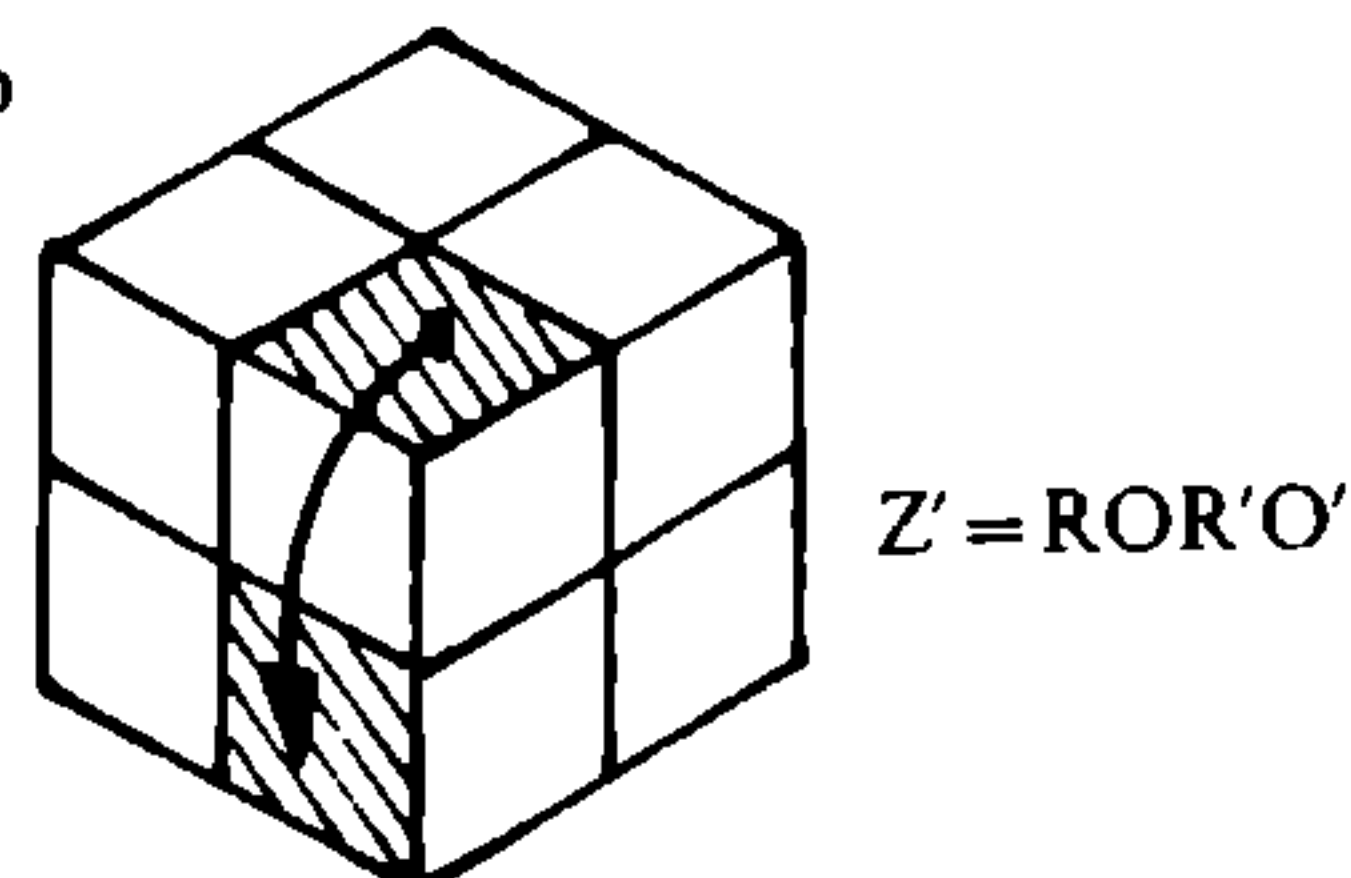
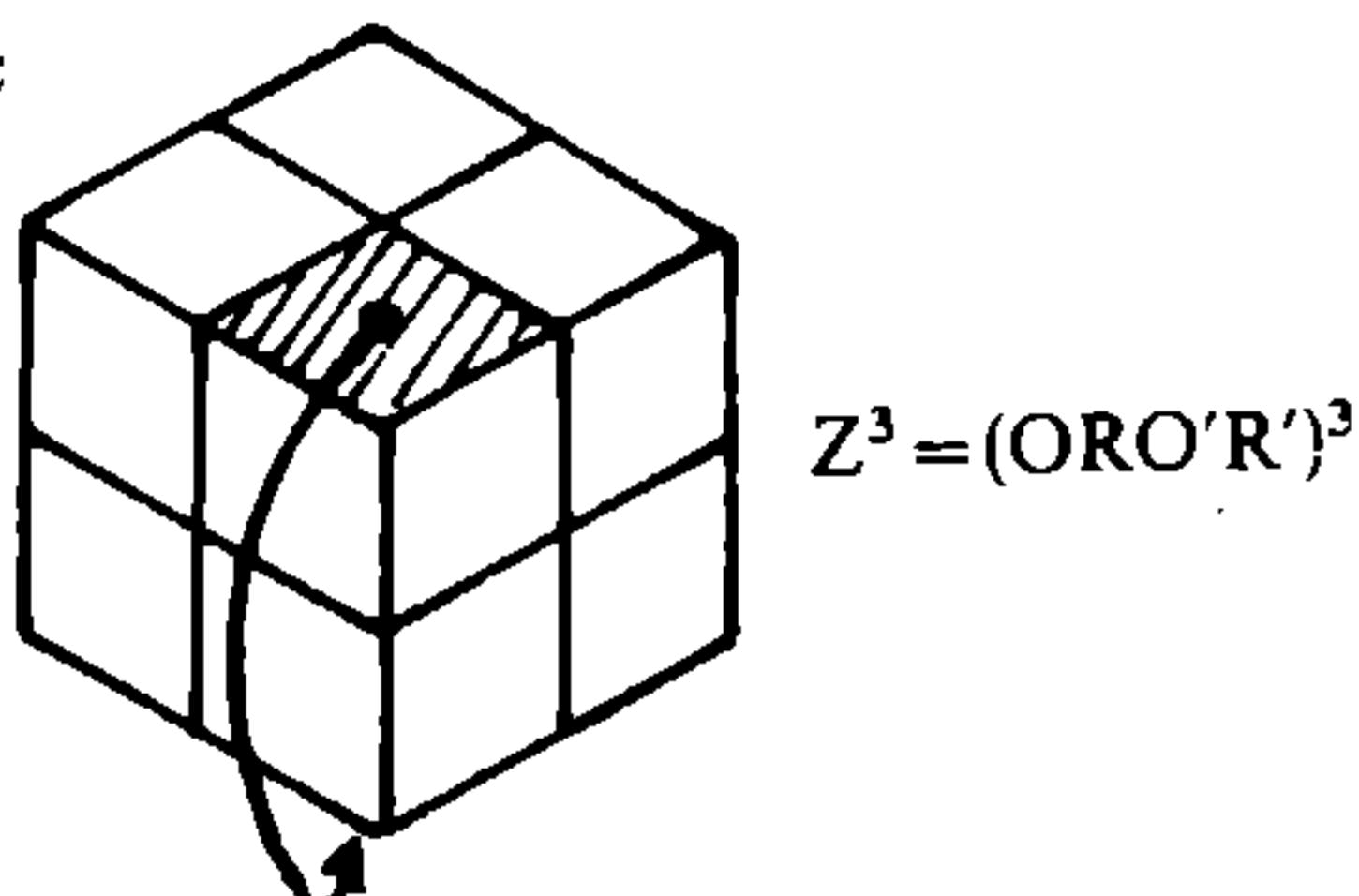


Bild 2c



2. Die obere Etage

a) Positionierung: Zunächst bringen wir alle vier Ecken an ihre Plätze. Der Platz einer Ecke ist eindeutig durch ihre beiden nicht in die obere Fläche gehörigen Farbaufkleber bestimmt. Es kommt hierbei noch nicht auf die sogenannte Orientierung der Ecken an, d. h. darauf, daß die Lage der Teilflächen bereits richtig ist.

Bild 3a

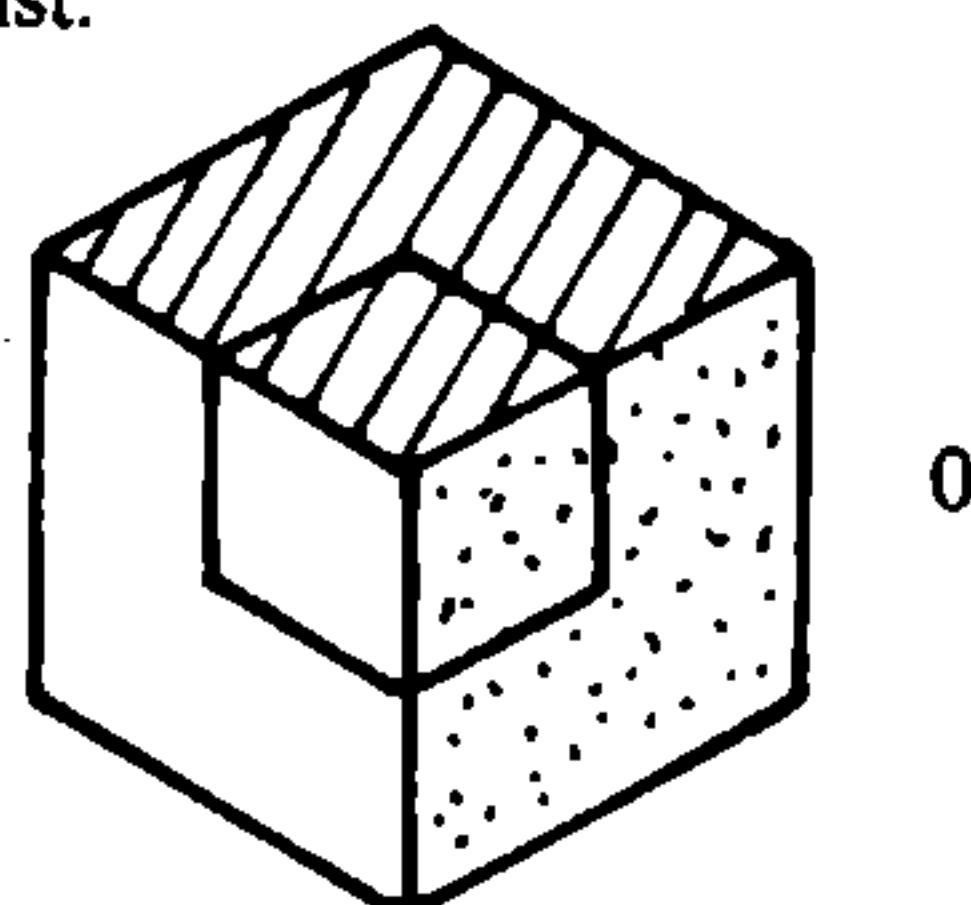


Bild 3b

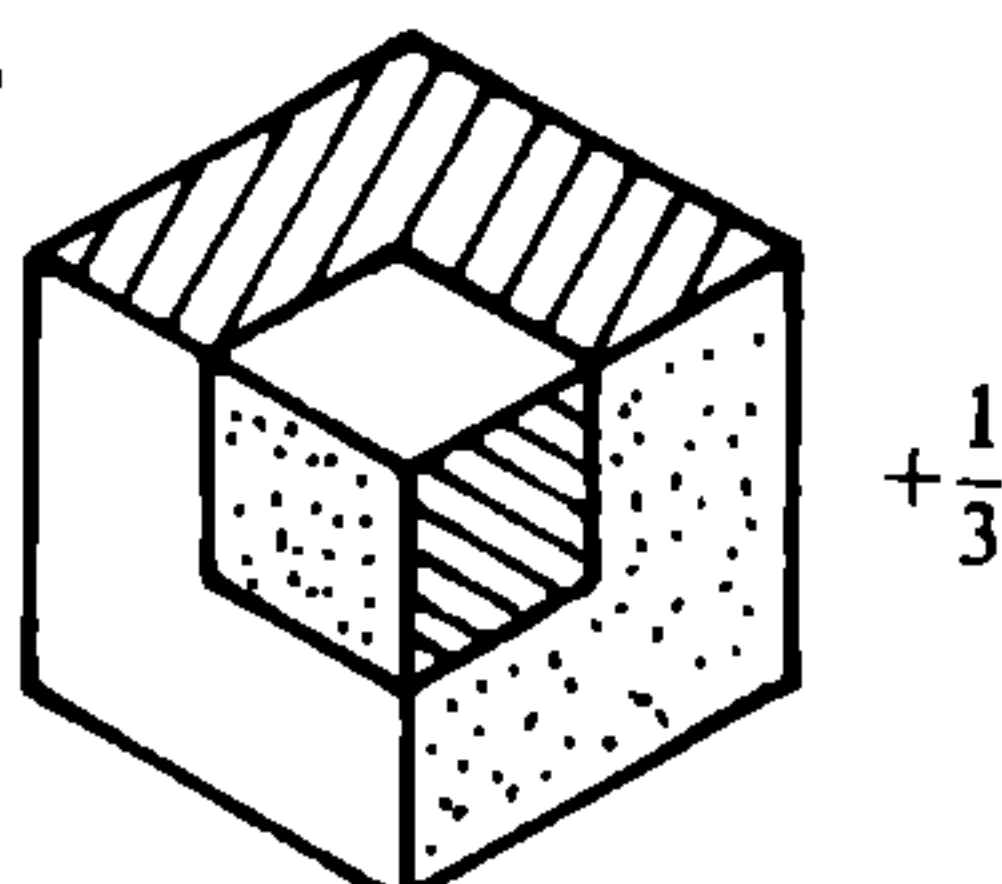


Bild 3c

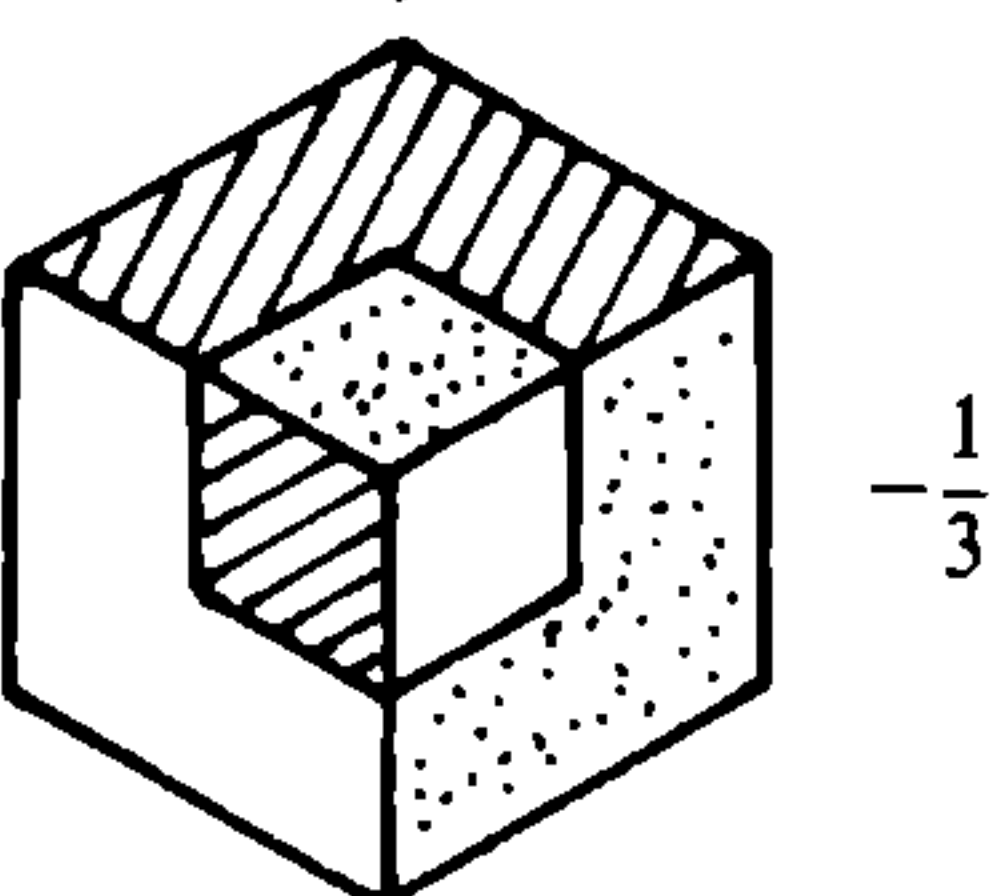
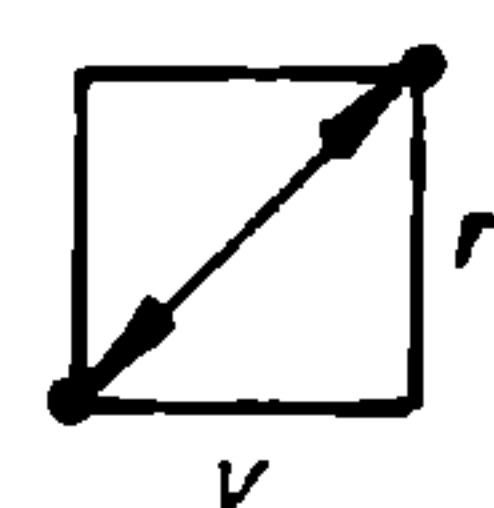
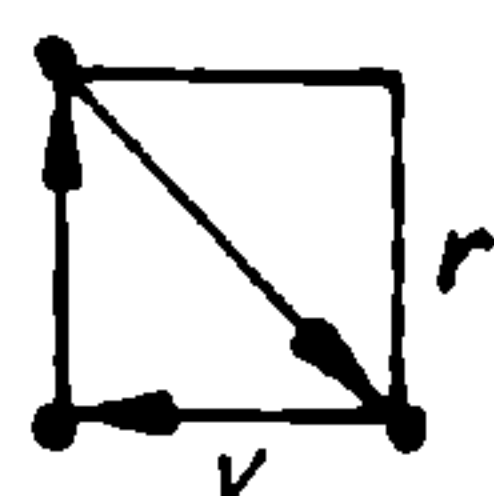


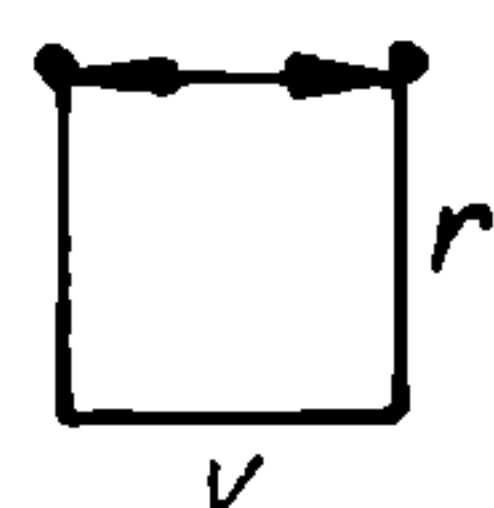
Bild 3 zeigt die drei möglichen Orientierungen einer sich am richtigen Platz (vorn oben rechts) befindlichen Ecke. Nützliche Prozesse zur Positionierung sind folgende (die Piktogramme zeigen schematisch die obere Etage in Draufsicht; hinter den Prozessen in Klammern die Zahl der Züge). (Bild 4)



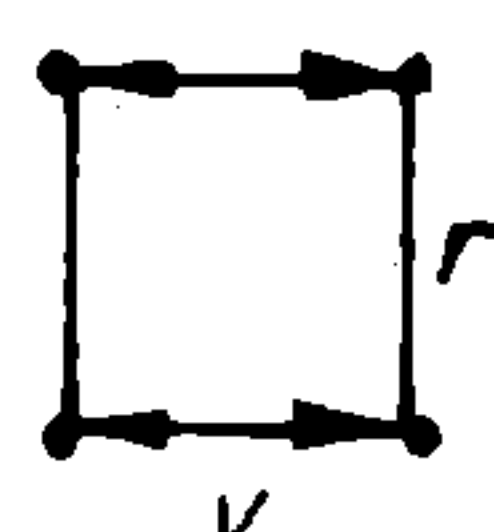
$$= OVROR'O'V' (7)$$



$$= V'OVR'VR'V'O' (8)$$



$$= O^2VR'V'RV'O'V (8)$$



$$= R'O'R'VRORVRO'R'V'$$

b) Orientierung: Die nun am richtigen Platz befindlichen Ecken werden mit Hilfe der folgenden Prozesse orientiert ($\pm$ in den Piktogrammen bedeuten Drehung um $\pm \frac{1}{3}$ entsprechend Bild 3).

Dieser Algorithmus ist noch weitgehend verbesserungsfähig. Rechnungen auf modernen Großcomputern (darunter der z. Z. schnellste Rechner CRAY-1) haben ergeben, daß sich jede Stellung des 2^3 mit maximal 11 Zügen ordnen läßt (1 Zug = Drehung einer Fläche um $\pm 90^\circ$ oder 180°). Definieren wir als Abstand zweier Stellungen voneinander die Minimalzahl von Zügen, die von einer Stellung zur anderen führt. Die Tabelle zeigt die mit Computern bestimmte Anzahl der Stellungen N mit einem gegebenen Abstand n vom Grundzustand und den Prozentsatz an der Gesamtzahl N_0 von Stellungen.

Tabelle

Zahl der Stellungen mit gegebenem Abstand vom Grundzustand

n	N	$N/N_0 (\%)$
0	1	—
1	9	—
2	54	—
3	321	0,01
4	1847	0,05
5	9992	0,27
6	50136	1,36
7	227536	6,19
8	870072	23,68
9	1887748	51,38
10	623800	16,98
11	2644	0,07

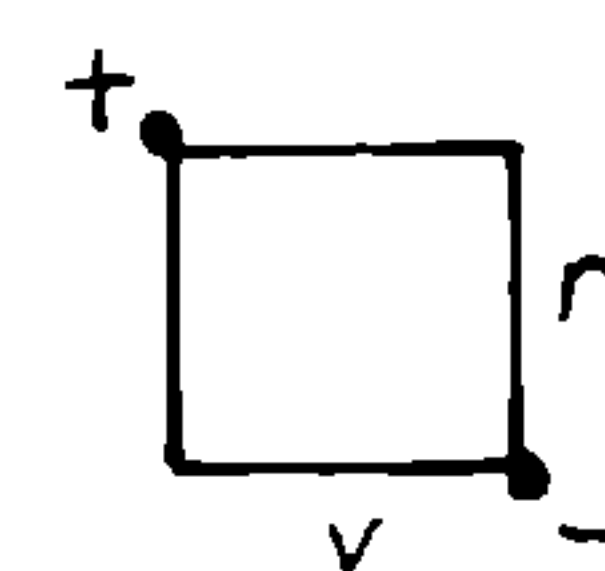
$$N_0 = 3674160$$

Ein Beispiel für eine der 2644 Stellungen mit Abstand 11 ist $VOVOVR^2VR'VR^2O^2$.

Der Orientierungssatz

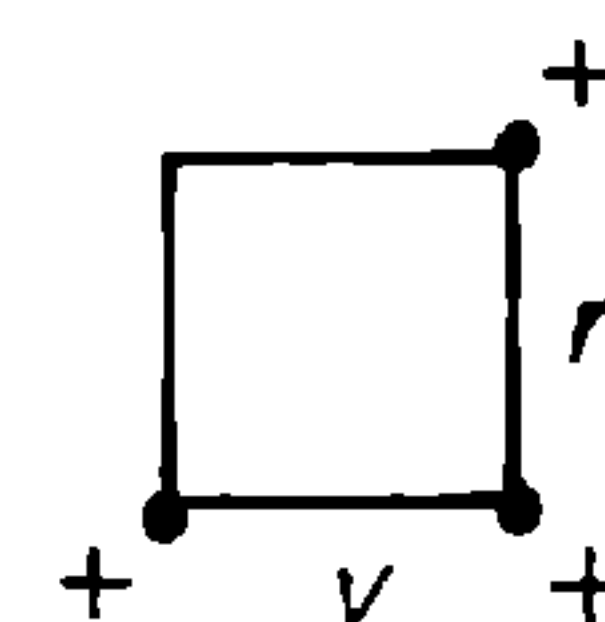
Sicher habt ihr bereits bemerkt, daß nicht jeder beliebige denkbare Orientierungszustand durch reguläre Züge erreichbar ist. Beispielsweise ist es unmöglich, nur genau eine Ecke um $\frac{1}{3}$ zu verdrehen. Definieren wir als Gesamtdrehung die Summe der Drehungen aller 8 Ecken $\left(0, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, so klärt der folgende Satz die Lage: ein Orientierungszustand ist genau dann aus dem Grundzustand erreichbar, wenn seine Gesamtdrehung ganzzahlig ist. Zuerst zeigen wir, daß jede aus dem Grundzustand erreichbare Stellung eine ganzzahlige Gesamtdrehung hat. Dazu verallgemeinern wir den Begriff der Orientierung einer Ecke auf den Fall, daß diese sich nicht an ihrem Heimatplatz befindet, in folgender Weise: Wir denken uns die obere und die untere Fläche des Würfels schwarz, die anderen Flächen weiß eingefärbt. Die gleiche Färbung denken wir uns fest im Raum angeordnet. Für jede Ecke läßt sich nun an ihrem jeweiligen Platz eine Orientierung zuordnen, indem die Lage ihrer schwarzen Teilfläche mit der im Raum festen schwarzen

Fläche des Würfels verglichen wird. D. h., für die in der oberen Etage befindlichen Ecken ist die obere Fläche des Würfels Vergleichsfläche, für die Ecken der unteren Etage die untere Würfelfläche. Für die vorn oben rechts befindliche Ecke ist dieser Vergleich in Bild 3 gezeigt. (Vergleichsfläche gestrichelt)

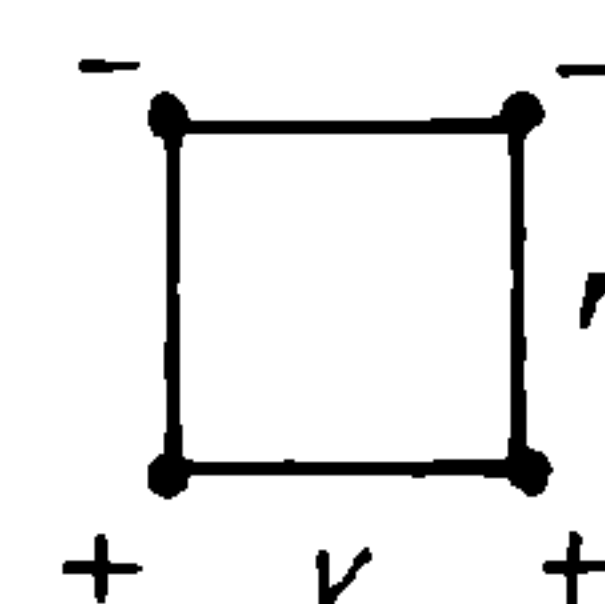


(Bild 5)

$$= (VL'U^2LV'O^2)^2 (12)$$



$$= O^2R'O^2ROR'OR (8)$$



$$= V(ROR'O')^2V' (10)$$

Was passiert nun mit der Gesamtdrehung, wenn wir die einzelnen Züge auf den Grundzustand anwenden? O und U ändern offensichtlich keine Orientierung, da alle schwarzen Teilflächen der Ecken oben oder unten bleiben. Das gleiche gilt für die 180° -Drehungen R^2 , L^2 , V^2 und H^2 . Stellvertretend für eine der vier verbleibenden 90° -Drehungen stellen wir die Wirkung des Zuges R fest (Bild 6).

Bild 6a

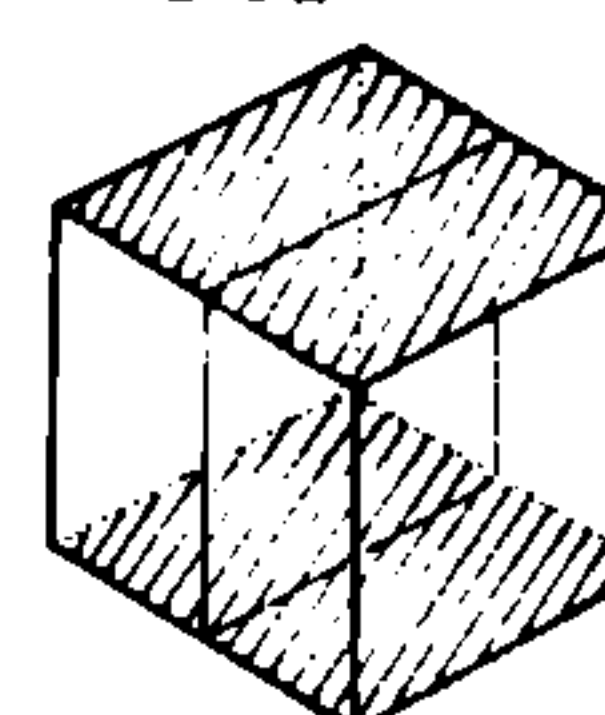
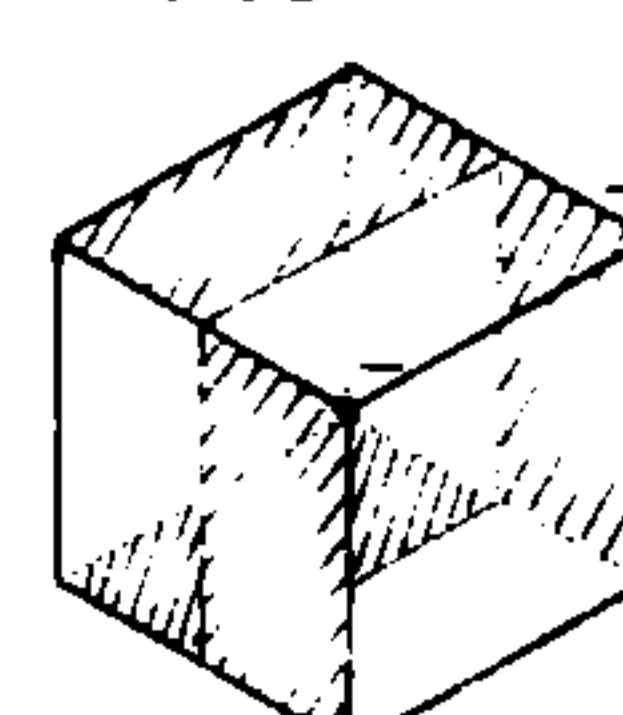


Bild 6b



Betrachten wir z. B. die in Bild 6b (also nach Ausführen von R) vorn oben rechts liegende Ecke. Ihre schwarze Teilfläche liegt vorn. Sie ist laut Definition links herum, also um $-\frac{1}{3}$, gedreht. Eine analoge Betrachtung liefert für die anderen Ecken der rechten Fläche die in Bild 6b durch $\pm$ angegebenen Drehungen: zwei Ecken sind links herum gedreht, zwei andere rechts herum. Wir halten fest, daß sich die Gesamtdrehung nicht geändert hat. Das gleiche gilt auch für die Züge L, V und H. Jede aus dem Grundzustand mit einem Zug erreichbare Stellung hat also die gleiche Gesamtdrehung wie dieser, nämlich Null. Durch Induktionsschluß nach der Zahl der Züge folgt das gleiche für jede erreichbare Stellung. Bedenken wir noch, daß die Gesamtdrehung nur bis auf ganzzahlige Summanden eindeutig definiert ist, da wir uns ja eine beliebige Anzahl unsichtbarer vollständiger Drehungen einzelner Ecken $\left(\text{um } \frac{3}{3}\right)$ zur Gesamt-

drehung hinzuaddiert denken können, so haben wir den ersten Teil des Satzes bewiesen. Der Beweis der Umkehrung, daß also jeder Zustand mit ganzzahliger Gesamtdrehung erreichbar ist, läßt sich mit Hilfe der angegebenen Prozesse leicht führen und sei euch als Übungsaufgabe gelassen.

Der Orientierungssatz läßt sich noch etwas anders formulieren:

Es lassen sich 7 Ecken stets willkürlich orientieren, die Orientierung der 8. Ecke ist dann eindeutig bestimmt.

Zahl der Stellungen

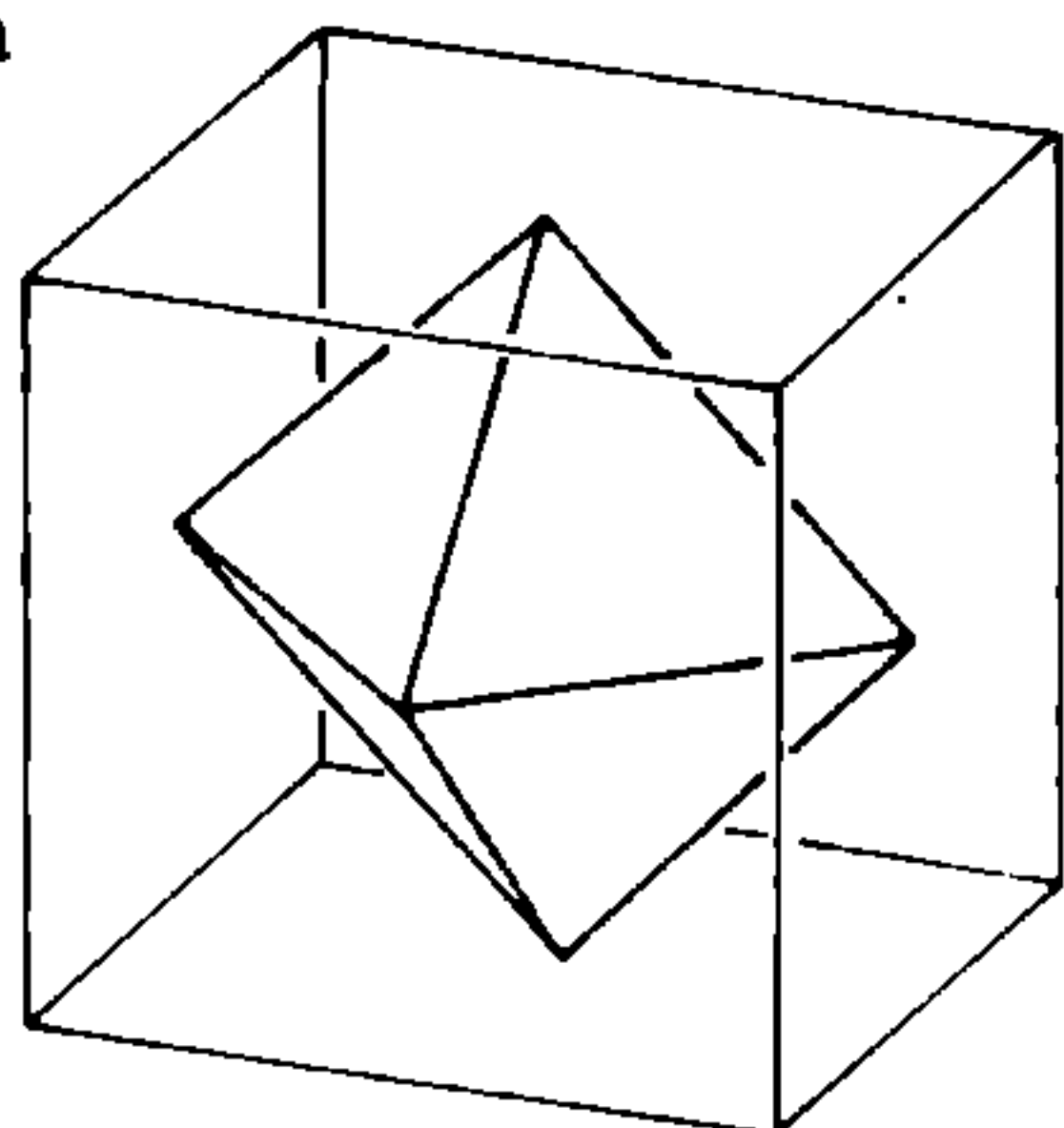
Denken wir uns eine Ecke als bereits geordnet (dies können wir stets durch Drehen des Würfels als Ganzes erreichen), so können wir die verbleibenden 7 Ecken noch auf $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 7!$ Arten miteinander vertauschen. Für jede dieser Positionierungen lassen sich noch die Orientierungen von 6 Ecken frei verändern (Orientierungssatz!), was einen Faktor 3^6 liefert. Insgesamt gibt es also $N_0 = 7! \cdot 3^6 = 3674160$ Stellungen.

Verwandte des 2^3

Nun wollen wir uns den interessanten Verwandtschaftsbeziehungen zwischen dem 2^3 -Würfel und den 3 neuen DDR-Puzzles zuwenden. Wir gehen vom 2^3 aus und „deduzieren“ die anderen Puzzles.

Bild 7a zeigt eine unter dem Namen Dualität bekannte Verwandtschaft zwischen Würfel und Oktaeder. Jedem Flächenmittelpunkt des Würfels entspricht hierbei eine Ecke des Oktaeders und umgekehrt. Die Kanten beider Körper entsprechen einander. Nun kommt der Trick: Wir übertragen die Schnittebenen des 2^3 -Zauberwürfels auf das Oktaeder, welches damit auch *magische* Eigenschaften erhält. Wie sollen wir das neue Puzzle färben? Jede der 8 Flächen mit einer Farbe zu belegen, ist uninteressant. Im Herstellerbetrieb, in Pfaffschwende, hat man sich entschlossen, die Färbung des 2^3 -Würfels direkt auf das Oktaeder zu übertragen und in die Ecken jeder Fläche einen kleinen runden Farbtupfer zu kleben. Das – strukturell mit dem 2^3 -Würfel vollkommen identische – Puzzle wurde als Schlüsselanhänger ausgebildet (Preis: 12,50 M) und hat leider für Handhabung unbequem kleine Abmessungen (Kantenlänge 3,3 cm).

Bild 7a



Das nächste Puzzle entsteht aus dem Oktaeder, wenn wir, wie in Bild 7b gezeigt, auf vier der acht Flächen kleine tetraederförmige Hütchen aufsetzen: es ist das bereits in *alpha* 3/83 vorgestellte Tetraeder, wenn jede der vier Flächen mit einer Farbe belegt wird. Übrigens ist das Tetraeder-Puzzle so wie in Bild 7b gezeigt in einer würfelförmigen Schachtel verpackt.

Bild 7b

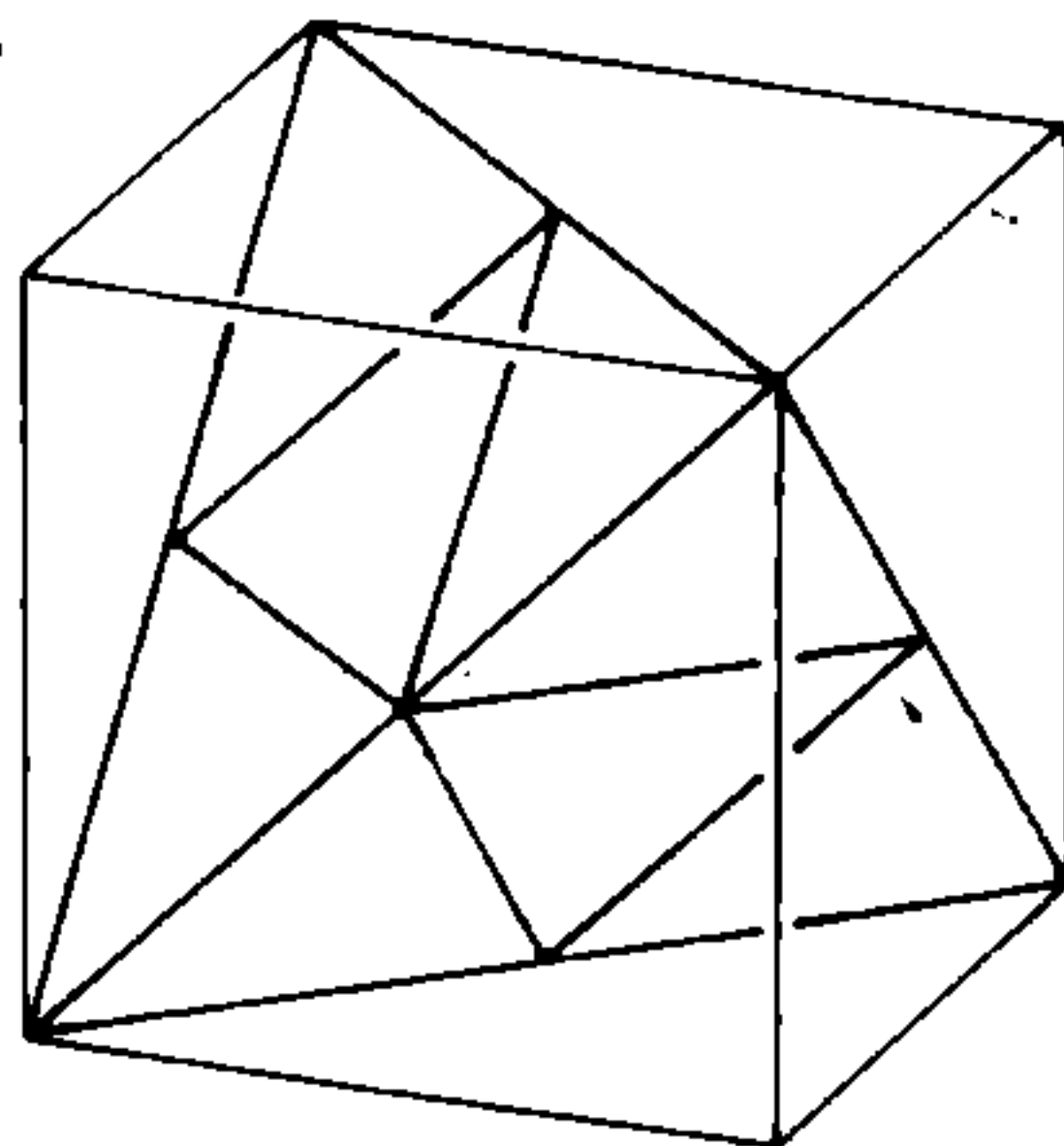
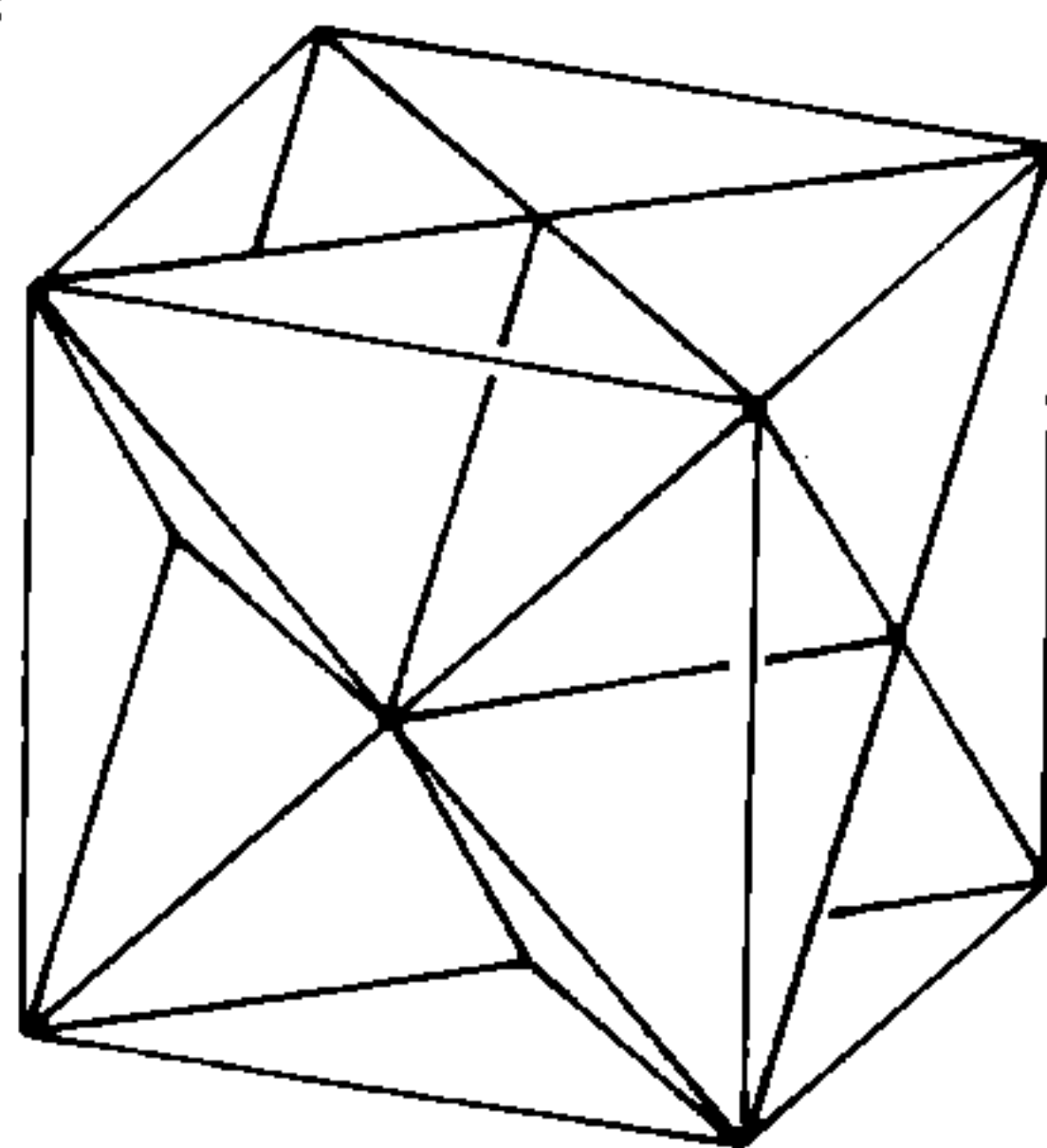


Bild 7c



Nichts ist naheliegender, als auch noch die restlichen vier Flächen mit Hütchen zu versehen. Dann entsteht der in Bild 7c gezeigte Stern (Preis: 15,- M). Er ist mit vier Farben in folgender Weise belegt. Jede der vier Spitzen des Tetraeders (d. h. die im vorigen Schritt aufgesetzten vier Hütchen) trägt eine Farbe. Jeweils die gleiche Farbe erhalten auch die drei direkt benachbarten Teilflächen. Die Färbungsvorschrift läßt sich noch etwas anders formulieren: gegeben sei ein wie üblich mit vier Farben belegtes Tetraeder. Wir *zaubern* daraus gedanklich einen Stern, indem wir die vier Flächenstücke (Dreiecke) zu Hütchen *herausziehen*, wobei ihre Färbung beibehalten wird.

Hieraus wird auch sofort klar, daß Stern und Tetraeder strukturell identisch sind. Beide haben 136080 Stellungen. Das Tetraeder ist sicher das interessantere Puzzle, da es erstens – im Gegensatz zum Stern – seine Form ändert und zweitens seine Drehebene sehr geschickt *verbirgt*.

Faszinierend finde ich, daß trotz der Einsicht der prinzipiellen Identität zum reinen Eckenproblem des saltsam bekannten Zauberwürfels sowohl der 2^3 als auch die drei DDR-Puzzles bei der praktischen Lösung ihre eigenen Schwierigkeiten und Reize entwickeln.

W. Hintze

Lösungen



Lösungen zu: Adam Ries

▲ 1 ▲ Gesamtmenge = m also:

$$\frac{1}{7}m + \frac{1}{4}m + 17 = m = \frac{11}{28}m + 17$$

$$\frac{17}{28}m = 17$$

also $m = 28$ fl.

▲ 2 ▲ Die Beträge seien a und b !

also:

$$a + 1 = b - 1 \quad \text{folgt } a = b - 2 \quad (1)$$

$$b + 1 = 2(a - 1) \quad \text{folgt } b = 2a - 3 \quad (2)$$

mit (2) in (1):

$$a = 2a - 3 - 2 = 2a - 5; \text{ folgt } a = 5 \text{ Pf, } b = 7 \text{ Pf.}$$

▲ 3 ▲ Die einzelnen Geldbeträge seien: a, b, c also:

$$a + \frac{1}{2}(b + c) = 12 \text{ fl.}; 2a + b + c = 24$$

$$b + \frac{1}{3}(a + c) = 12 \text{ fl.}; 3b + a + c = 36$$

$$c + \frac{1}{4}(a + b) = 12 \text{ fl.}; 4c + a + b = 48$$

$$\begin{array}{rcl} a + b + 4c = 48 & & a + 3b + c = 36 \\ a + 3b + c = 36 \text{ (subtrah.)} & & 2a + b + c = 24 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} -2b + 3c = 12 & & \text{folgt:} \\ 10b + 2c = 96 & & 2a + 6b + 2c = 72 \\ -10b + 15c = 60 & & 2a + b + c = 24 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} -17c = 156 & & 5b + c = 48 \\ c = \frac{156}{17} \text{ fl. entspr.:} & & a = \frac{60}{17} \text{ fl.} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} & & b = \frac{132}{17} \text{ fl.} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} & & b = \frac{132}{17} \text{ fl.} \end{array}$$

Lösung zu:

Begeisterte Schachfreunde

15 Schachmeister, 3 Meisteranwärter und 2 Schachspieler der Leistungsklasse 1 ließen sich rasieren. (Verständlich, daß der schachbegeisterte Friseur das Schild anderntags wieder entfernte. 15 Schachmeister – das konnte natürlich nur einem Moskauer Friseur passieren!)

Lösungen zu: Mathematik-Mosaik

▲ 1 ▲ a) Die Summe ist stets 10, also gehört an Stelle des Fragezeichens eine 1, denn $7 + 2 + 1 = 10$.

$$b) (2 + 8) : 5 = 2 \quad c) 2 \cdot 9 \cdot 10 : 10 = 18$$

▲ 2 ▲ a) Außer Nr. 4 haben alle Figuren eine Symmetrieachse.

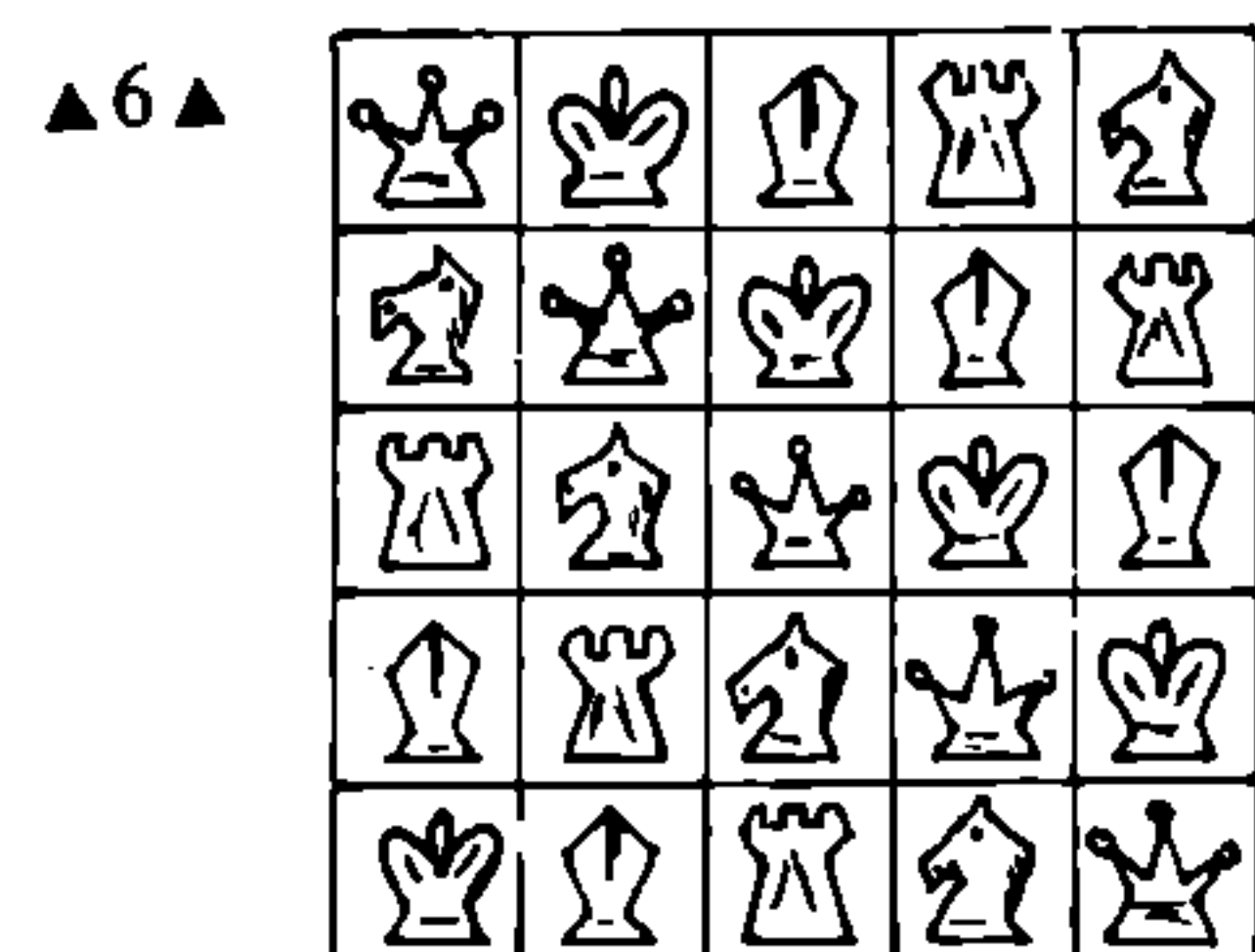
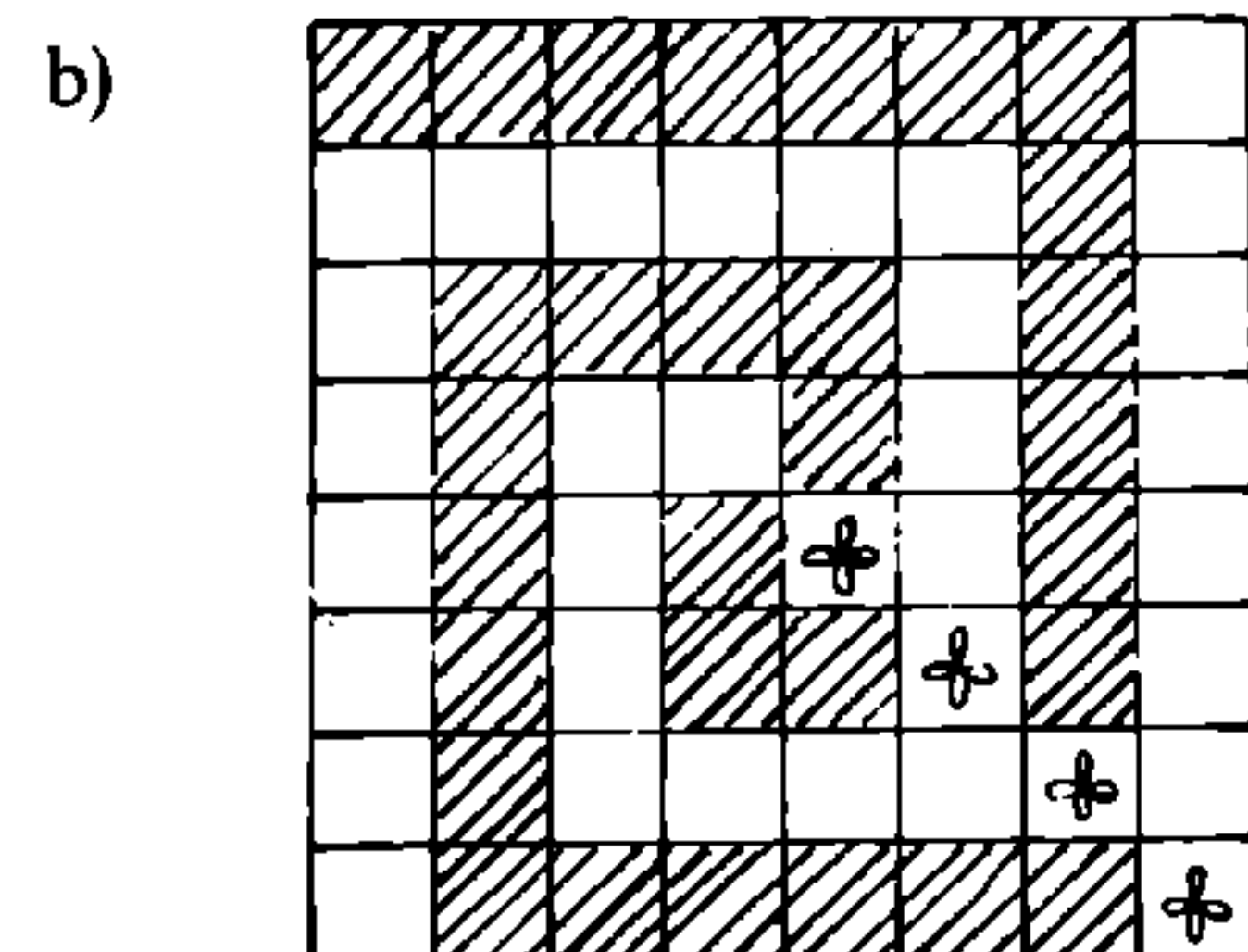
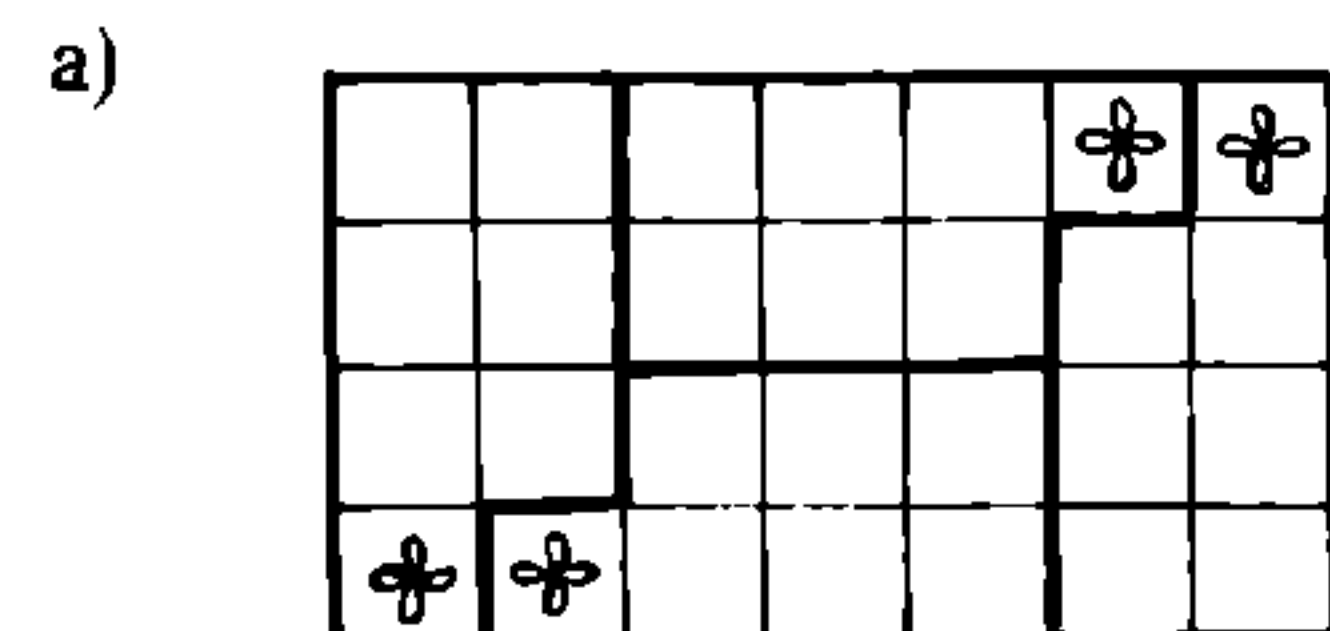
b) Nr. 4 gehört nicht hinein.

c) Nr. 4 gehört nicht hinein.

▲3▲ Zwei Radien geben wir, die anderen ergeben sich dann entsprechend;
 $6+2+7+6=21$; $7+6+6+2=21$ usw.

▲4▲ $2+6-3+4-5+8=12$;
 $9+8+1-3-5+2=12$;
 $8-6-1+7+9-5=12$;
 $3-2-1+4+5+3=12$;
 $7+9+8-4-3-5=12$.

▲5▲



▲7▲ Figur 3 muß an Stelle des Fragezeichens stehen.

▲8▲ 6 Katzen bilden das Gleichgewicht mit dem Knaben.

Lösungen zu: Sprachecke

▲1▲ An der Tafel stehen einige von Null verschiedene Zahlen, wobei jede von ihnen gleich der halben Summe der übrigen ist. Wieviel Zahlen wurden angeschrieben?

Lösung: Die Zahlen an der Tafel seien $a_1, a_2, \dots, a_n$ mit $n \geq 3$:

Es gilt dann

$$2a_1 = a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$2a_2 = a_1 + a_3 + \dots + a_n$$

$$\dots \dots \dots 2a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \quad \text{und somit}$$

$$2(a_1 + \dots + a_n) = (n-1)(a_1 + \dots + a_n) \quad \text{bzw.}$$

$$(n-3)(a_1 + \dots + a_n) = 0.$$

Daraus folgt $n=3$ oder $a_1 + \dots + a_n = 0$.

Für $n > 3$ erhalten wir aus der Bedingung $a_1 + \dots + a_n = 0$ und dem System (*) $a_1 = \dots = a_n = 0$, was der Aufgabenstellung widerspricht. Für $n=3$ hat das System (*) eine Lösung, in der die 0 nicht auftritt (z. B. $a_1 = a_2 = a_3 = 1$).

▲2▲ Es sind sieben Mädchen, und jeden Tag gehen einige von ihnen spazieren. Die gleiche Gruppe Mädchen darf nicht an mehr als an einem Tage spazierengehen. An wieviel Tagen können die Mädchen spazierengehen?

Lösung: $(1) + (2) + (3) + \dots + (7) = 127 = 2^7 - 1$
 Die Mädchen können an 127 Tagen spazierengehen.

▲3▲ Der Benzintank in Vaters Wagen hat ein Fassungsvermögen von 32,5 l. Dieser Wagen verbraucht 8 l Benzin auf 100 km. Vater hat seinen Tank vor der Abfahrt voll gefüllt, und wir haben eine Fahrt von 400 km unternommen. Wieviel Benzin verbleibt im Tank, wenn man weiß, daß Vater während der Reise 14 l nachgefüllt hat?

Lösung: Auf der Fahrt wurden $\frac{400 \text{ km} \cdot 8 \text{ l}}{100 \text{ km}} = 32 \text{ l}$ Benzin verbraucht. Im Benzintank sind dann noch $32,5 \text{ l} - 32 \text{ l} + 14 \text{ l} = 14,5 \text{ l}$.

Lösungen zu:

In freien Stunden · alpha-heiter

Augentraining

Figur 8 ist Spiegelbild der anderen.

Kryptarithmetik

$$12345678 - 12315551 = 20127.$$

$$8395 + 21685 + 43606 = 73686.$$

Permutationsrätsel

1. Kreiskegel, 2. Landkarte, 3. Integral, 4. Ankreis, 5. Teiler, 6. Glied, 7. Abel, 8. lim, 9. mod, 10. Ries, 11. Kante, 12. Nenner, 13. Teilung, 14. Fredholm, 15. Goldstine, 16. Kreisbogen.
 Rätselfigur (versteckte Begriffe)

Testament

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = 1 - \frac{6}{12} - \frac{4}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$

= 1200 Kronen.

Sein Vermögen betrug also $12 \cdot 1200$ Kronen = 14400 Kronen.

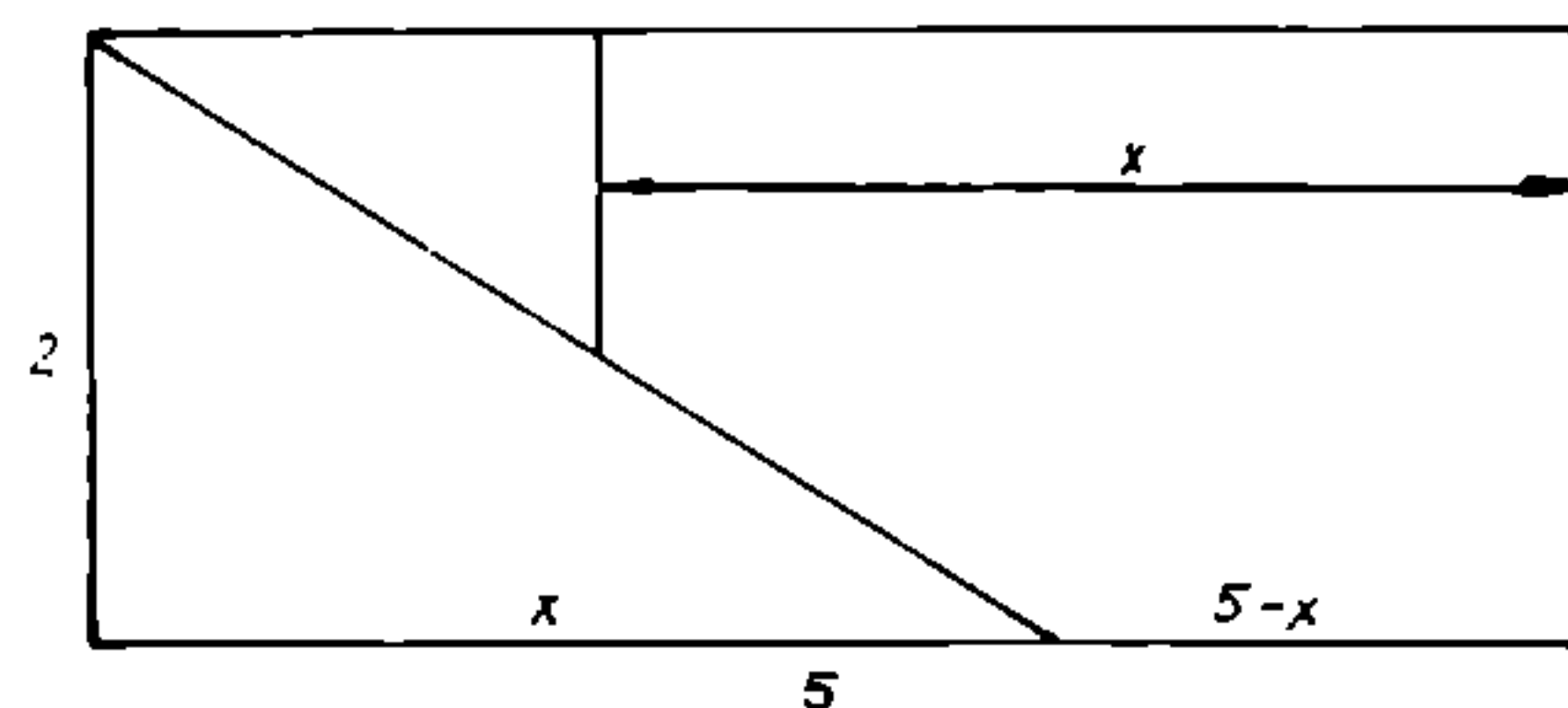
Zahlenpyramide

$$1 + 7 + 3 + 6 + 8 + 5 + 9 + 7 + 6 + 8 = 60.$$

Aufmerksame Schülerin

Der Rock der Lehrerin ist auf dem oberen Bild gestreift, unten kariert.

Mit Schere und Köpfchen



Hungrige Ziege Lösung siehe Heft 2/84.

Irrgarten



Lösung zu:

Die historische Mathematikaufgabe – In einem Wirtshause

▲1▲ Bezeichnet m die Anzahl der Männer, f die Anzahl der Frauen, so gilt $m+f=21$ und $5m+3f=81$. Multipliziert man die erste Gleichung mit 3 und subtrahiert danach beide Gleichungen voneinander, so folgt $2m=18$. Somit ist $m=9$, woraus sich $f=12$ ergibt.

▲2▲ (Lösung aus Eulers *Vollständiger Anleitung zur Algebra*)

Es sei die Zahl der Männer $=p$, der Frauen $=q$, und der Kinder $=r$, so erhält man die zwei folgenden Gleichungen:

$$\text{I.} \quad p + q + r = 30,$$

$$\text{II.} \quad 3p + 2q + r = 50,$$

aus welchen die drei Buchstaben p , q und r in ganzen und positiven Zahlen bestimmt werden sollen. Aus der ersten wird nun $r = 30 - p - q$, und deswegen muß $p+q$ kleiner sein als 30. Dieser Wert in der zweiten für r geschrieben, gibt $2p+q+30=50$, also $q=20-2p$ und $p+q=20-p$, welches offenbar kleiner ist als 30. Nun kann man für p alle Zahlen annehmen, die nicht größer sind als 10, woraus folgende Auflösungen entstehen:

Zahl der Männer

$$p = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10;$$

Zahl der Frauen

$$q = 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0.$$

Zahl der Kinder

$$r = 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.$$

Läßt man die ersten und letzten weg, so bleiben noch 9 Auflösungen übrig.

Lösungen zu: Labyrinth-Probleme Heft 5/83

▲1▲ Bild 7: Tarry- und Trémaux-Weg für das Labyrinth im Garten von Hampton Court (Abbruch bei Erreichen des Ausgangs)

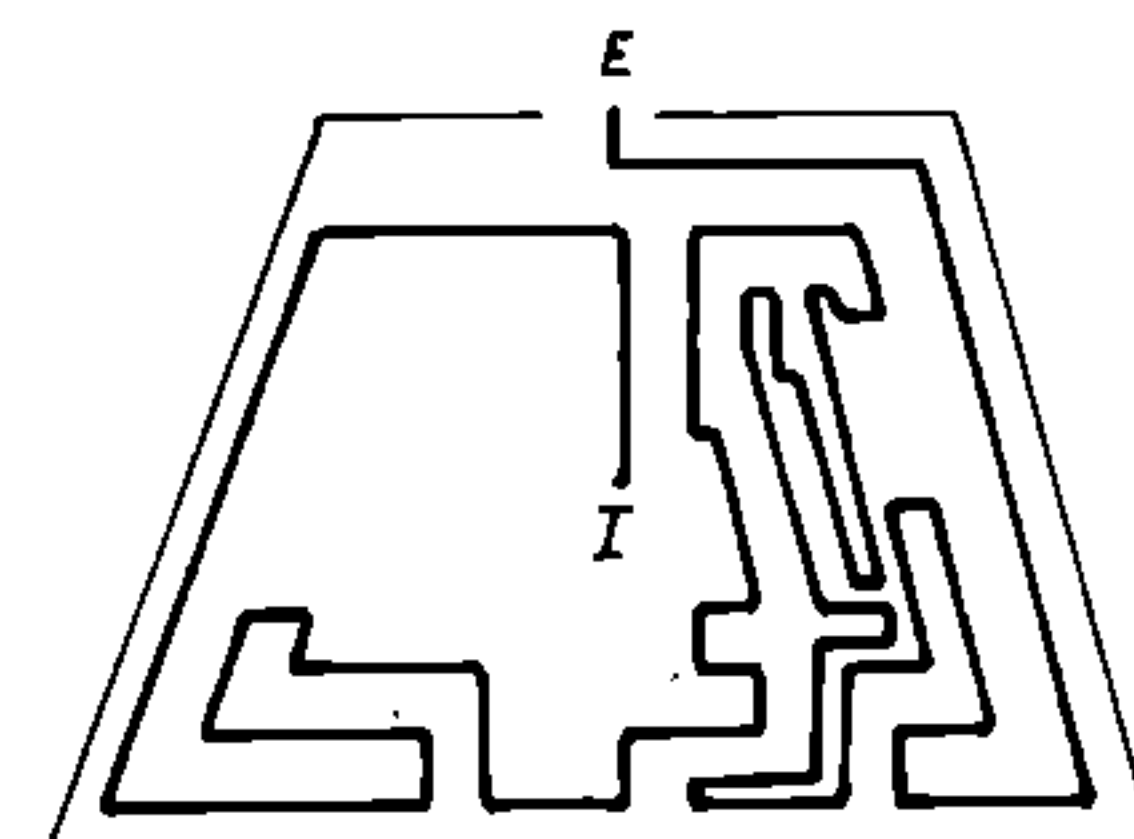
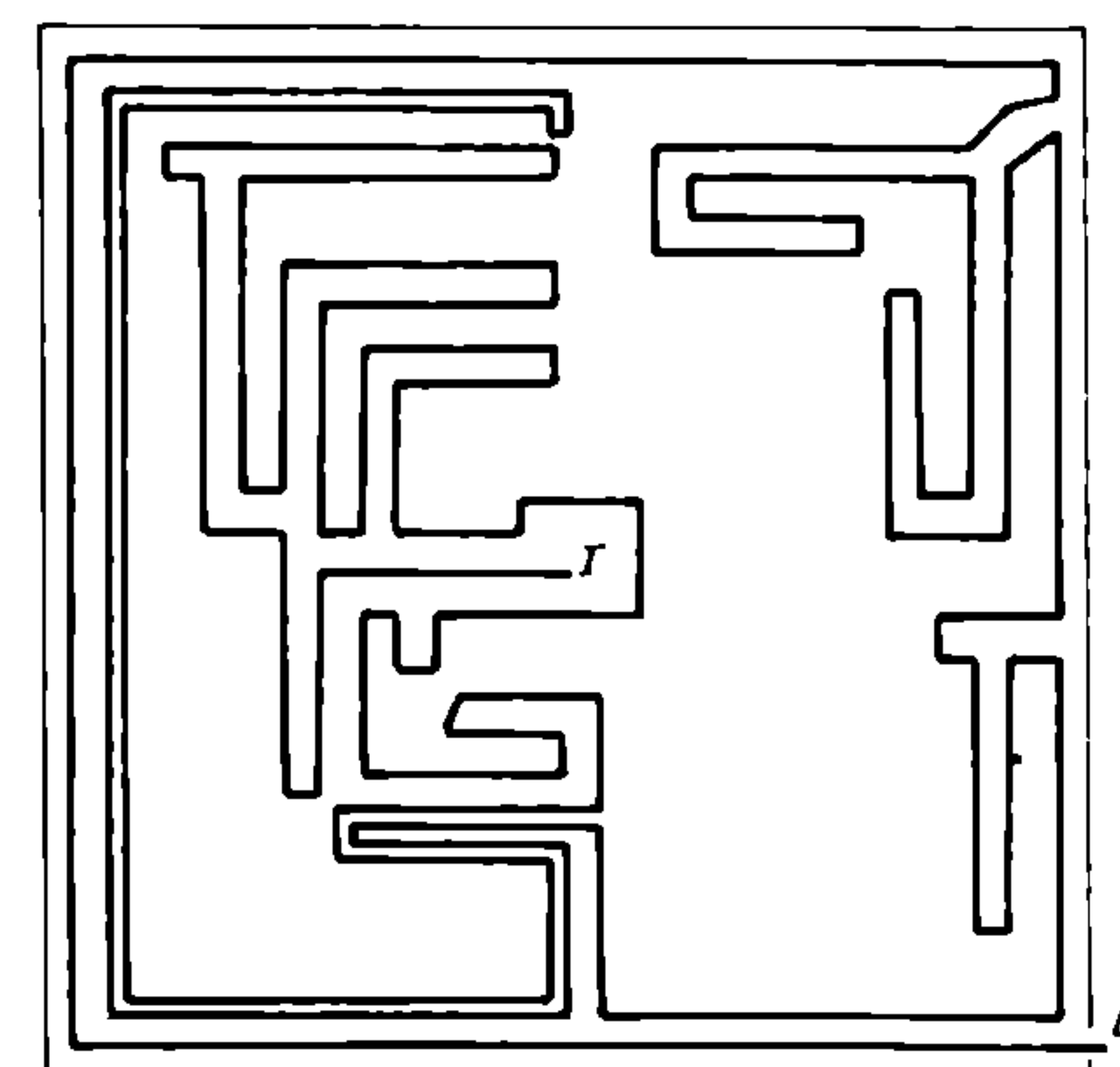
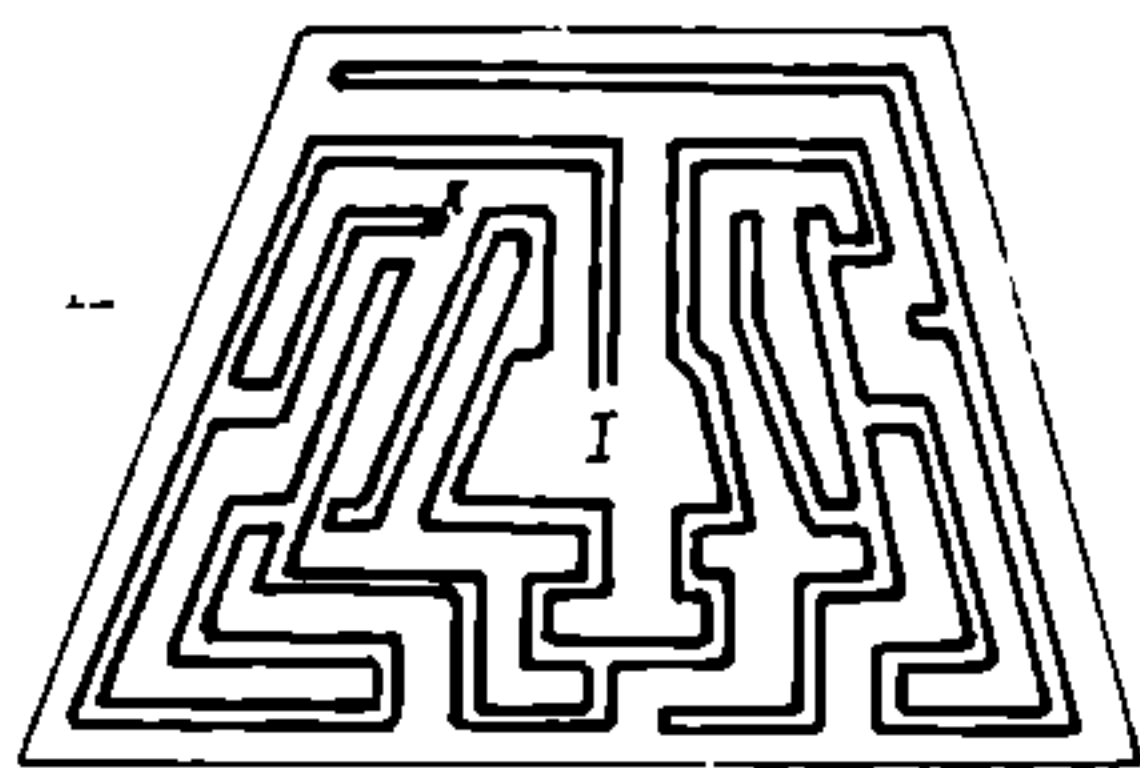


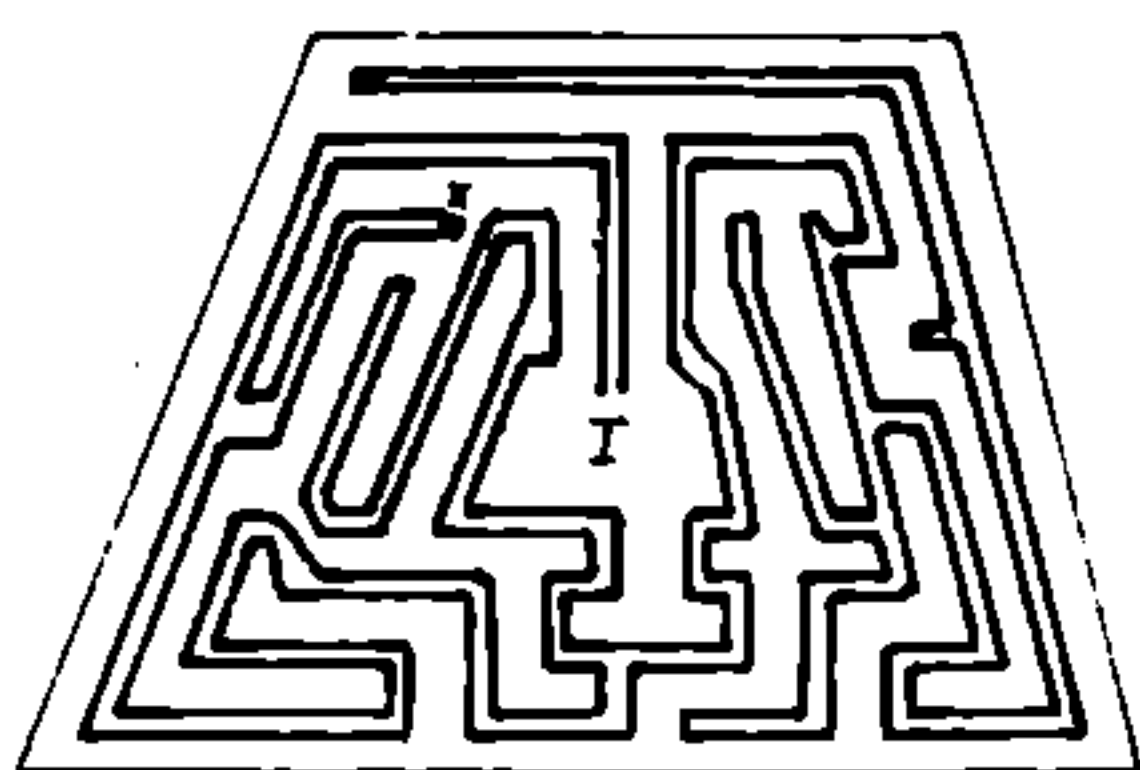
Bild 8: Tarry- und Trémaux-Weg im Irrgarten von Altjeßnitz (Abbruch bei Erreichen des Ausgangs)



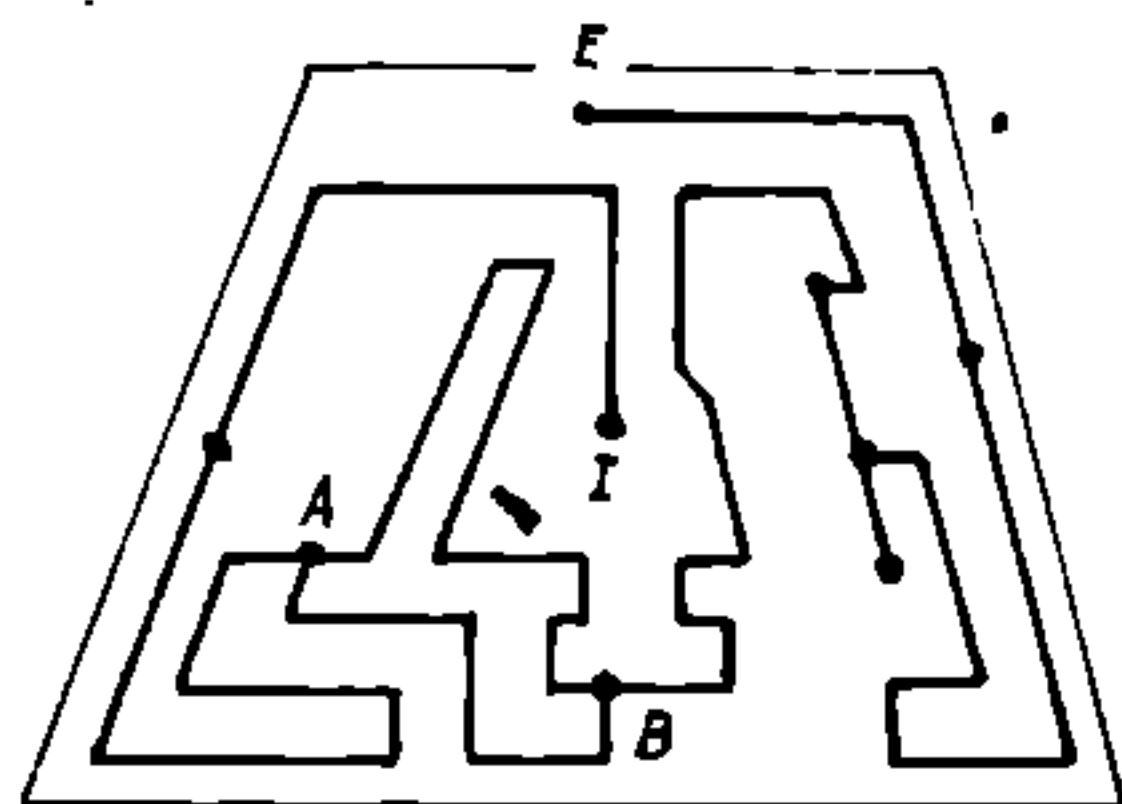
▲ 2 ▲ Bild 7: a) Tarry-Weg im Labyrinth des Gartens von Hampton Court bei geschlossenem Ausgang. Der Punkt x wird zuletzt erreicht; hier ist also der Speck abzulegen.



b) Trémaux-Weg im selben Labyrinth; er unterscheidet sich vom Tarry-Weg, der Speck ist aber an der gleichen Stelle abzulegen.
c) Bei offener Außentür würde die Maus das Labyrinth verlassen, ohne den Speck gefunden zu haben.



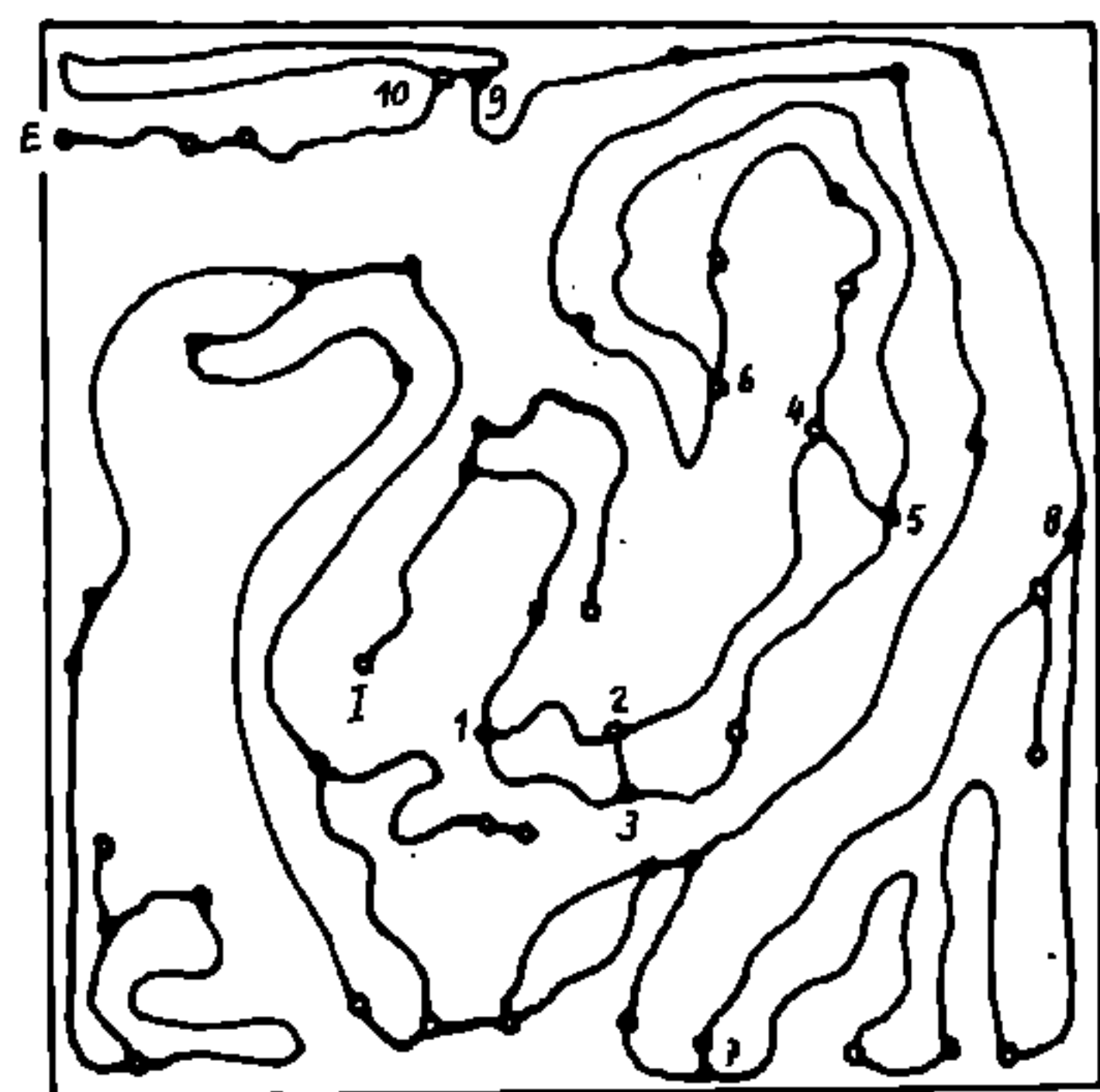
▲ 3 ▲ a) Labyrinth im Garten von Hampton Court – Darstellung des Zusammenhangs zwischen I und E.



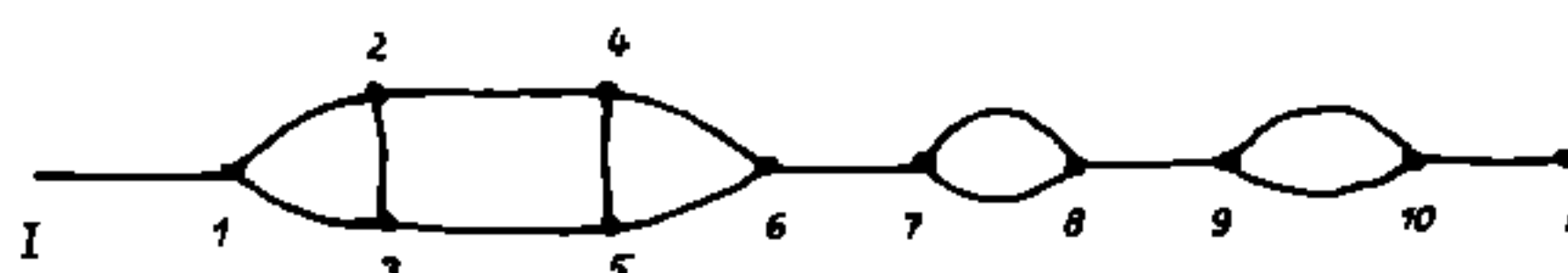
Vereinfacht – Es gibt genau 2 Wanderrouen von I nach E der verlangten Art.



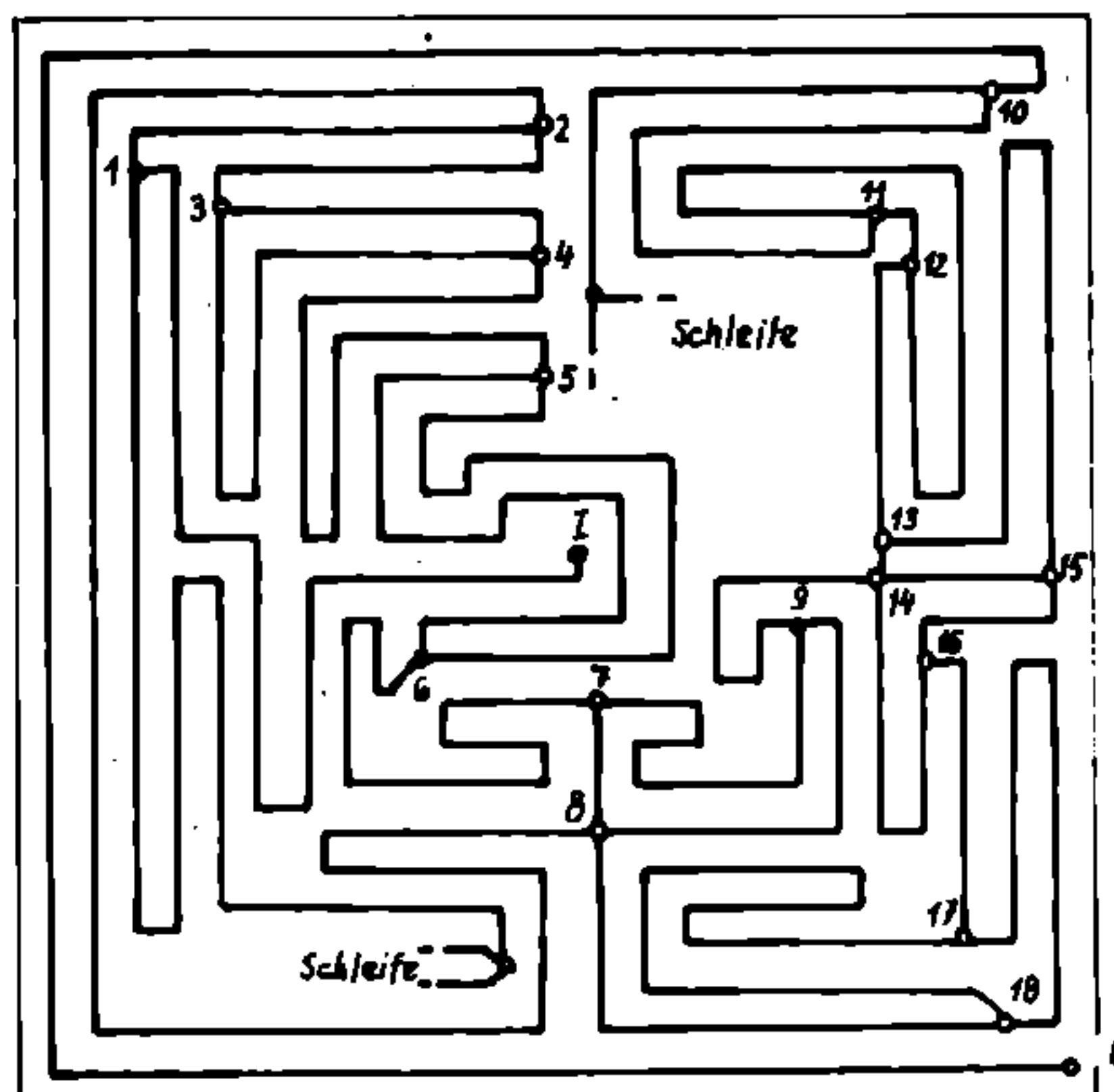
b) Labyrinth von Bild 3 – Darstellung des Zusammenhangs zwischen I und E.



Vereinfacht – Es gibt genau $8 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ Wanderrouen der verlangten Art von I nach E.



c) Irrgarten von Altjeßnitz – Darstellung des Zusammenhangs zwischen I und E.



Vereinfacht – Anzahl der Wanderrouen der verlangten Art:

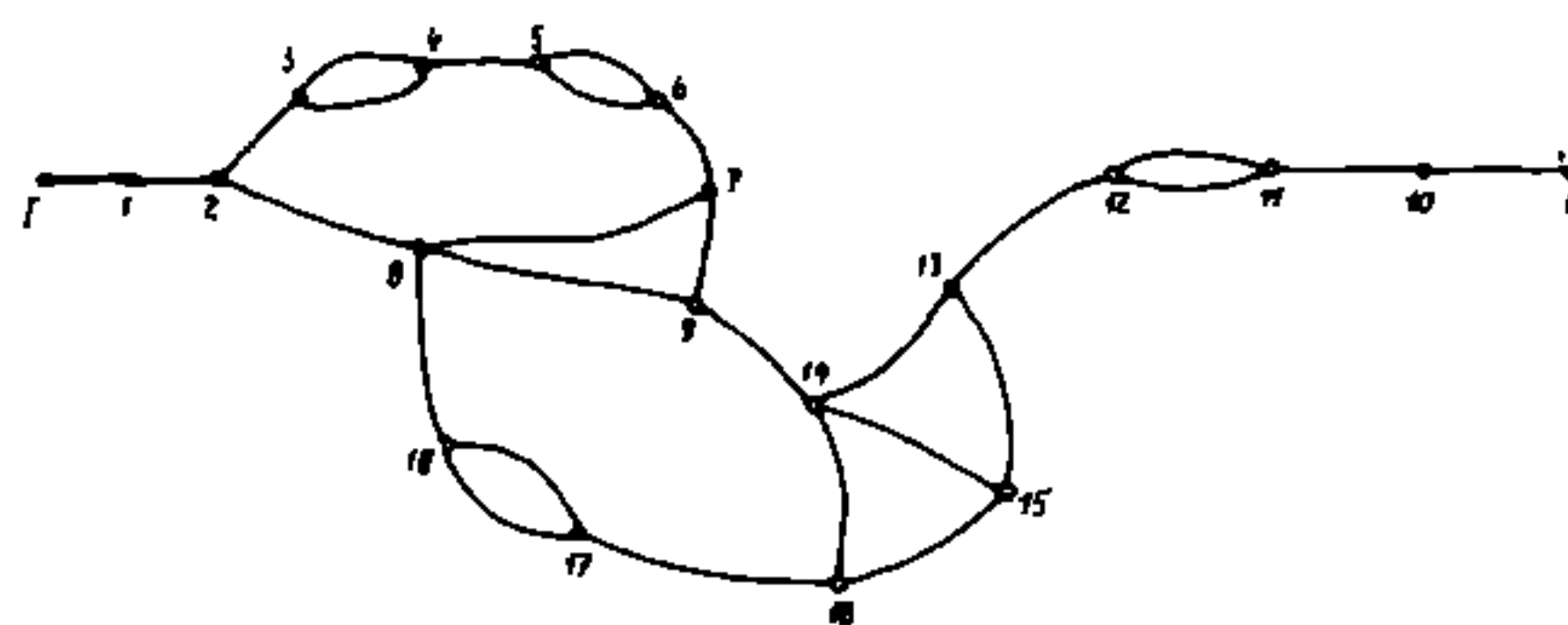
– von I bis zur Kante 9–14: $2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 = 10$. Anzahl der möglichen Fortsetzungen bis E: $3 \cdot 2 = 6$.

– Von I bis zur Kante 17–16: $(2 \cdot 2 \cdot 2 + 1) = 18$

Anzahl der möglichen Fortsetzungen bis E: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Gesamtzahl der Wanderrouen der verlangten Art von I nach E:

$$10 \cdot 6 + 18 \cdot 8 = 60 + 144 = 204.$$



Offener Schritt im Beweis von Seite 73/75, Heft 4/83:

Es sei K_0 eine Kante, die nicht zweimal durchlaufen wurde. Da der vorgegebene Graph zusammenhängend ist, kann man von einem Knotenpunkt aus, in den diese Kante mündet, den Startpunkt erreichen, indem man eine endliche Folge $K_1, K_2, \dots, K_n$ von Kanten durchläuft.

In der Kantenfolge $K_0, K_1, K_2, \dots, K_n$ betrachten wir nun die letzte Kante K_i , die von unserem Tarry-Weg nicht zweimal durchlaufen wurde. Da K_n in den Startpunkt mündet, ist $i < n$. Die Kante K_{i+1} wurde von dem Tarry-Weg zweimal durchlaufen, die in den gleichen Knotenpunkt mündende Kante K_i aber nicht.

Lösungen zu:

Aus der Geschichte der Längenmaße Heft 6/83

- ▲ 1 ▲ a) Baden: 3 Zoll = 9,0 cm
b) Preußen: 3 Zoll = 7,8 cm
c) Sachsen: 3 Zoll = 7,2 cm

▲ 2 ▲

- a) Bayern: 25 Ellen = 2075 cm = 20,75 m
b) Preußen: 30 Ellen = 2010 cm = 20,10 m
c) Sachsen: 35 Ellen = 1995 cm = 19,95 m

▲ 3 ▲

- a) Baden: 12 Fuß = 360 cm = 3,60 m
b) Bayern: 12 Fuß = 348 cm = 3,48 m
c) Preußen: 12 Fuß = 372 cm = 3,72 m
d) Sachsen: 12 Fuß = 336 cm = 3,36 m

- ▲ 4 ▲ a) Baden: 49,80 m = 83 Ellen
b) Bayern: 49,80 m = 60 Ellen

▲ 5 ▲

- a) 20 Ellen mindestens 1200 cm = 12,00 m
b) 20 Ellen höchstens 1660 cm = 16,60 m

- ▲ 6 ▲ a) Baden: $A = 9000 \text{ m}^2$
b) Sachsen: $A = 18490 \text{ m}^2$

- ▲ 7 ▲ Preußen: 30 Meilen = 225 km
Sachsen: 25 Meilen = 226,5 km

▲ 10 ▲

- a) 40000 km; b) 10000 km;
c) 111 km; d) 1070 km; e) 1,85 km.

Lösungen zu: Aufgaben aus einem alten chinesischen Lehrbuch Heft 6/83

$$\Delta 1 \Delta \frac{(7 \cdot 18 + 5) \cdot (11 \cdot 23 + 6)}{7 \cdot 11} = 440 \frac{7}{11}$$

$$440 \frac{7}{11} \text{ Pu} = 1 \text{ Mou } 200 \frac{7}{11} \text{ Pu}$$

Heute berechnet man die Fläche mit Hilfe der Gleichung $A = ab$.

$$\Delta 2 \Delta \frac{78 \frac{1}{2} \cdot 13 \frac{7}{9} + 13 \frac{7}{9} \cdot 13 \frac{7}{9}}{2} = 635 \frac{56}{81}$$

$$635 \frac{56}{81} \text{ Pu} = 2 \text{ Mou } 155 \frac{56}{81} \text{ Pu}$$

Hier ist die Fläche des Kreissegments durch die eines Trapezes nur angenähert bestimmt. Eigentlich gilt die angegebene Näherungsgleichung $A = \frac{sp + p^2}{2}$ nur für den Halbkreis.

Die exakte Berechnung erfolgt heute mit Hilfe der Gleichung

$$A = \frac{b \cdot r}{2} - \frac{s(r-h)}{2} \text{ mit } r = \frac{h^2 + \frac{s^2}{4}}{2h}$$

oder

$$A = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{\pi \phi}{180^\circ} - \sin \phi \right).$$

$$\Delta 3 \Delta \frac{78 \cdot 63}{50} = \frac{4914}{50} = 98 \frac{7}{25}$$

$$98 \frac{7}{25} \text{ Shêng} = 9 \text{ Tou } 8 \frac{7}{25} \text{ Shêng}$$

Heute löst man diese Aufgabe mit Hilfe einer Proportion, also z. B. $50 : 63 = 7,8 : x$.

$$\Delta 4 \Delta \frac{10 \cdot 720}{61} = 118 \frac{2}{61}$$

Heute löst man diese Aufgabe mit Hilfe einer Proportion, also z. B. $61 : 10 = 720 : x$.

$$\Delta 5 \Delta 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$$

$$\frac{5 \cdot 5}{15} = 1 \frac{2}{3}; \frac{4 \cdot 5}{15} = 1 \frac{1}{3}; \frac{3 \cdot 5}{15} = 1; \frac{2 \cdot 5}{15} = \frac{2}{3}; \frac{1 \cdot 5}{15} = \frac{1}{3}$$

Heute löst man diese Aufgabe mit Hilfe der fortlaufenden Proportion, z. B.

$$5 : 4 : 3 : 2 : 1 = a : b : c : d : e, \\ 15 : 5 = 5 : a, \\ 15 : 5 = 4 : b \text{ usw.}$$

$$\Delta 6 \Delta \frac{1}{50} + \frac{1}{30} + \frac{1}{75} = \frac{1}{15}$$

$$9 \cdot \frac{1}{50} = \frac{9}{50}; 9 \cdot \frac{1}{30} = \frac{9}{30}; 9 \cdot \frac{1}{75} = \frac{9}{75}$$

$$\frac{9}{50} \cdot \frac{1}{15} = 2 \frac{7}{10}; \frac{9}{30} \cdot \frac{1}{15} = 4 \frac{5}{10}; \frac{9}{75} \cdot \frac{1}{15} = 1 \frac{8}{10}$$

Heute löst man diese Aufgabe mit Hilfe der fortlaufenden Proportion, z. B.

$$\frac{1}{50} : \frac{1}{30} : \frac{1}{75} = a : b : c,$$

$$\frac{1}{15} : 9 = \frac{1}{50} : a,$$

$$\frac{1}{15} : 9 = \frac{1}{30} : b \text{ usw.}$$

$$\blacktriangle 7 \blacktriangle \frac{1}{1} \frac{1}{2} \frac{1}{3}$$

$$6 + 3 + 2 = 11$$

$$\frac{240 \cdot 6}{11} = 130 \frac{10}{11}$$

Heute berechnet man die Breite des rechteckigen Feldes aus der Gleichung $A = ab$.

$$\blacktriangle 8 \blacktriangle \sqrt{1518 \frac{3}{4} \cdot 12} = 135$$

Die numerische Lösung beim Ziehen der Quadratwurzel, wie sie damals durchgeführt wurde, ist sehr umfangreich. Wir haben darauf verzichtet, weil sie den Umfang dieses Artikels wesentlich überschreiten würde. Sie ähnelt unserem heutigen numerischen Lösungsverfahren.

Heute berechnet man den Kreisumfang genauer aus der Gleichung $A = \frac{u^2}{4\pi}$.

$$\blacktriangle 9 \blacktriangle \frac{8+20}{2} \cdot 4 \cdot 127 = 7112$$

$$7112 : 444 = 16 \frac{2}{111}$$

Heute berechnet man das Volumen des Dammes ähnlich nach der Gleichung für ein trapezförmiges Prisma,

$$\text{also } V = \frac{a+b}{2} \cdot h \cdot l.$$

$$\blacktriangle 10 \blacktriangle \frac{12^2 \cdot 2}{36} = 8000;$$

$$8000 : 2 \frac{7}{10} = 2962 \frac{26}{27}$$

Heute berechnet man das Volumen nach der Gleichung

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \text{ mit } r = \frac{u}{2\pi}, \text{ also } V = \frac{u^2 \cdot h}{12\pi}.$$

$$\blacktriangle 11 \blacktriangle A: \frac{10000}{8} = 1250 \text{ bzw. } 125$$

$$B: \frac{9500}{10} = 950 \text{ bzw. } 95$$

$$C: \frac{12350}{13} = 950 \text{ bzw. } 95$$

$$D: \frac{12200}{20} = 610 \text{ bzw. } 61;$$

$$1250 + 950 + 950 + 610 = 3760 \text{ bzw. } 376$$

Führen:

$$A: \frac{10000 \cdot 125}{376} \approx 3324$$

$$B: \frac{10000 \cdot 95}{376} \approx 2527$$

$$C: \frac{10000 \cdot 95}{376} \approx 2527$$

$$D: \frac{10000 \cdot 61}{376} \approx 1622$$

Menge (Masse) des Getreides

$$A: 3324 \cdot 25 = 83100; B: 2527 \cdot 25 = 63175;$$

$$C: 2527 \cdot 25 = 63175; D: 1622 \cdot 25 = 40550.$$

Heute berechnet man die Zahl der Führen mit der fortlaufenden Proportion, z. B.

$$1250 : 950 : 950 : 610 = a : b : c : d,$$

$$3760 : 10000 = 1250 : a,$$

$$3760 : 10000 = 950 : b \text{ usw.}$$

$$\blacktriangle 12 \blacktriangle 3 + 1 + \frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{74}{15}$$

$$1 : \frac{74}{15} = \frac{15}{74}$$

Heute löst man diese Aufgabe mit Hilfe der Gleichung

$$\frac{x}{\frac{1}{3}} + \frac{x}{\frac{1}{1}} + \frac{x}{\frac{1}{5}} + \frac{x}{\frac{1}{3}} + \frac{x}{\frac{1}{5}} = 1,$$

wenn x die Zahl der Tage ist, in denen alle Kanäle gleichzeitig den Teich füllen würden.

$$\blacktriangle 13 \blacktriangle \frac{190}{7} \times \frac{270}{9}$$

$$\frac{190}{7} \cdot 30 + \frac{270}{9} \cdot 330$$

$$\frac{51300 + 623700}{330 + 30} = \frac{675000}{63} = \frac{675000}{360} = \frac{63}{360}$$

$$\frac{270}{9} - \frac{190}{7} = \frac{180}{63}$$

$$\frac{675000}{63} : \frac{180}{63} = 3750 \text{ (Preis)}$$

$$360 : \frac{180}{63} = 126 \text{ (Familien)}$$

Heute könnte man folgendermaßen rechnen:

Wenn jede Familie den Beitrag a_1 beisteuert, ergibt sich ein Überschuß von f_1 (absolut).

Wenn jede Familie den Beitrag a_2 beisteuert, ergibt sich ein Fehlbetrag von f_2 (absolut).

Der richtige Beitrag a ist nun

$$af_1 + af_2 = f_1 a_2 + f_2 a_1,$$

$$\text{also } a = \frac{f_1 a_2 + f_2 a_1}{f_1 + f_2}.$$

Ist x die Zahl der Familien, dann ist

$$a_1 \cdot x - f_1 = a_2 x + f_2,$$

$$\text{also } x = \frac{f_1 + f_2}{a_1 - a_2}.$$

Der Preis y ist dann $y = a \cdot x$,

$$\text{also } y = \frac{f_1 a_2 + f_2 a_1}{a_1 - a_2}.$$

$$\blacktriangle 14 \blacktriangle \frac{2}{1\frac{1}{2}} \times \frac{3}{1\frac{3}{4}}$$

$$\left(2 \cdot 1\frac{3}{4} + 3 \cdot 1\frac{1}{2}\right) : \left(1\frac{1}{2} + 1\frac{3}{4}\right) = 2\frac{6}{13} \approx 2,4615.$$

Die Binse wächst am 1. Tag 30 Zoll, am

2. Tag 15 Zoll und am 3. Tag $7\frac{1}{2}$ Zoll, also

$$\frac{7\frac{1}{2} \cdot 6}{13} = 3\frac{6}{13}.$$

Die gesamte Länge beträgt dann

$$30 + 15 + 3\frac{6}{13} = 48\frac{6}{13}.$$

Der Ansatz gilt aber nur für lineare Probleme. Hier liegt also eine Näherungslösung vor, da für den letzten Tag linear interpoliert wurde.

Heute löst man diese Aufgabe mit Hilfe geometrischer Reihen.

$$a_1 = a_1 \frac{q_1^n - 1}{q_1 - 1}; s_2 = a_2 \frac{q_2^n - 1}{q_2 - 1}$$

$$\text{mit } a_1 = 3, a_2 = 1, q_1 = \frac{1}{2}, q_2 = 2.$$

Da $s_1 = s_2$ gilt, ergibt sich für

$$n = \frac{\log 6}{\log 2} \approx 2,59.$$

$\blacktriangle 15 \blacktriangle$ Das Gleichungssystem

$$\begin{cases} 5x + 6y = 16 \\ 4x + y = 5y + x \end{cases}$$

wird zu

$$\begin{cases} 5x + 6y = 16 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\text{und daraus die Matrix } \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 6 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\text{sie wird zu } \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -38 & 6 \\ -48 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\text{So ist } y = \frac{48}{38} = 1\frac{5}{19}, \quad x + 5 \cdot 1\frac{5}{19} = 8$$

$$x = 1\frac{13}{19}$$

Heute löst man dieses Gleichungssystem durch Elimination.

Lösung zu:

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Araki

Heft 6/83

$$\text{Antwort: } \frac{2(2n-3)!}{n!(n-2)!}$$

Beweis: Es sei $f(n)$ die gesamte Anzahl von verschiedenen Möglichkeiten, um das Produkt von n Zahlen zu bilden. Zuerst leiten wir eine rekursive Relation für $f(n)$ her. Man setze $f(1) = 1$ und betrachte $f(n)$ für $n \geq 2$. Es sei $g(n, m)$ die gesamte Anzahl von verschiedenen Arten, um das Produkt von n Zahlen zu bilden, wobei die letzte Produktrechnung zwischen einem Produkt der ersten m Zahlen und einem Produkt der letzten $n-m$ Zahlen gebildet wird. Dann ist

$$f(n) = \sum_{m=1}^{n-1} g(n, m),$$

$$g(n, m) = f(m) f(n-m).$$

Diese rekursive Gleichung hat nur eine Lösung für $n \geq 2$ unter der oben erwähnten Bedingung $f(1) = 1$, weil $f(n)$, $n \geq 2$, durch $f(s)$, $1 \leq s \leq n-1$ bestimmt ist.

Wir stellen jetzt eine Lösung dieser Gleichung vor, die die gewünschte Antwort wegen der Eindeutigkeit der Lösung gibt.

$$\text{Es sei } F(x) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4x}).$$

Diese Funktion hat die Entwicklung der Potenzreihe $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n$ für $|x| < \frac{1}{4}$.

Da $F(x)$ der Gleichung

$$F(x) = F(x)^2 + x$$

genügt, erfüllen die Koeffizienten F_n für $n \geq 2$

$$F_n = \sum_{m=1}^{n-1} F_m F_{n-m}$$

Weiterhin ist $F_1 = 1$. Daher ist $f(n) = F_n$ eine Lösung der rekursiven Aufgabe.

Der Koeffizient F_n für $n \geq 2$ kann durch die Binomialreihe erhalten werden:

$$\begin{aligned} F_n &= -\frac{1}{2}(-1)^n 4^n \left| \frac{1}{2} \right| \\ &= (-1)^{n+1} 2^{2n-1} \left(\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) \dots - \frac{2n-3}{2} \\ &= 2^{n-1} (2n-3) (2n-5) \dots \frac{1}{n!} \\ &= \frac{2 \cdot (2n-3)!}{n! (n-2)!} \end{aligned}$$

Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 5/83

Ma 5 ■ 2350 Angenommen, der Obstgarten sei x Meter breit, also $2 \cdot x$ Meter lang. Für den halben Umfang gilt dann $x + 2 \cdot x = 210 : 2$, $3 \cdot x = 105$, $x = 35$. Der Flächeninhalt des Obstgartens beträgt somit $A = x \cdot 2 \cdot x = 35 \text{ m} \cdot 70 \text{ m} = 2450 \text{ m}^2$.

Ma 5 ■ 2351 Da Anja 19 Buntstifte besitzt, hat Bernd $19 - 2 = 17$ Buntstifte, Christine $17 + 5 = 22$, Dieter $17 - 1 = 16$, Frank $16 - 11 = 5$, Ernst $22 + 2 = 24$ Buntstifte. Diese 6 Schüler besitzen zusammen $19 + 17 + 22 + 16 + 5 + 24 = 103$ Buntstifte. Die übrigen 30 Schüler besitzen dann zusammen $703 - 103 = 600$ Buntstifte. Jeder von ihnen hat $600 : 30 = 20$ Buntstifte.

Ma 5 ■ 2352 Angenommen, an der Seenrundfahrt nahmen x Männer, also $7 \cdot x$ Frauen und Kinder teil; dann gilt $x + 7x = 120$, $8x = 120$, $x = 15$. An der Seenrundfahrt nahmen 15 Männer, also 105 Frauen und Kinder teil. Angenommen, es waren y Frauen, also $4 \cdot y$ Kinder; dann gilt $y + 4y = 105$, $5y = 105$, $y = 21$. Es nahmen an der Seenrundfahrt noch 21 Frauen und 84 Kinder teil.

Ma 5 ■ 2353 Aus $*1 \cdot 3 = *2 \cdot 5$ folgt für den ersten Faktor $*15$; aus $*15 \cdot 2 = *3 \cdot *$ folgt für das Produkt $*30$; somit lautet das zweite Teilprodukt $3 \cdot 20$.

Aus $*15 \cdot * = 3 \cdot 20$ folgt $*15 \cdot 8 = 3 \cdot 20$, da nur $8 \cdot 15 = 120$ auf 20 endet. Wegen $8 \cdot 4 = 32$ und $8 \cdot 5 = 40$ kann $*15$ nur 415 und somit $3 \cdot 20$ nur 3320 sein. Die vollständige Lösung lautet deshalb

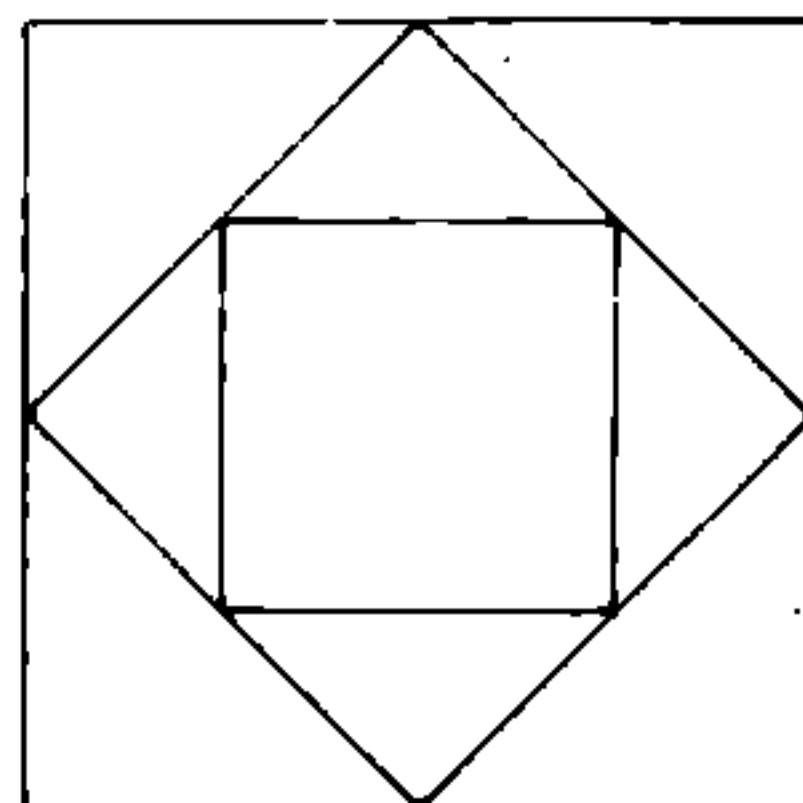
$$\begin{array}{r} 415 \cdot 382 \\ \hline 830 \\ 3320 \\ 1245 \\ \hline 158530 \end{array}$$

Ma 5 ■ 2354 Das kleinere Gefäß ist auch dann um 50 g schwerer als das größere, wenn man in das kleinere Gefäß nur 200 g Zucker, in das größere keinen Zucker füllt. Aus

$200 \text{ g} - 50 \text{ g} = 150 \text{ g}$ folgt, daß das kleinere Gefäß leer 150 g, das größere leer 300 g wiegt.

Ma 5 ■ 2355 a) Zeichnet man 3 Quadrate, so erhält man $4 \cdot (3 - 1) = 8$ Dreiecke.

b) Zeichnet man n Quadrate, so erhält man $4 \cdot (n - 1)$ Dreiecke. Nun gilt $4 \cdot (n - 1) = 176$, also $n - 1 = 44$ und somit $n = 45$. Es sind also 45 Quadrate gezeichnet worden.



Ma 6 ■ 2356 Es sind sechs Möglichkeiten zu untersuchen:

$$1 \cdot 2 \cdot 12 = 24 \text{ und } 1 + 2 + 12 = 15$$

(keine Primzahl),

$$1 \cdot 3 \cdot 8 = 24 \text{ und } 1 + 3 + 8 = 12$$

(keine Primzahl),

$$1 \cdot 4 \cdot 6 = 24 \text{ und } 1 + 4 + 6 = 11$$

(Primzahl),

$$2 \cdot 2 \cdot 6 = 24 \text{ und } 2 + 2 + 6 = 10$$

(keine Primzahl),

$$2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \text{ und } 2 + 3 + 4 = 9$$

(keine Primzahl).

Da nur die Summe 11 Primzahl ist, sind Inas Geschwister 1, 4 und 6 Jahre alt.

Ma 6 ■ 2357 Es sei n die Anzahl der Stühle, die unbesetzt blieben; dann ist $12 \cdot n$ gleich der Anzahl aller vorhandenen Stühle. Nun gilt $2 \cdot 90 < 12 \cdot n < 2 \cdot 100$, $180 < 12 \cdot n < 200$, $15 < n < 16 \frac{2}{3}$, also $n = 16$. Es waren $12 \cdot n$,

also $12 \cdot 16 = 192$ Stühle vorhanden. Deshalb

$$\text{waren } \frac{11}{12} \cdot 192 = 176 \text{ Teilnehmer zum Kongreß angereist.}$$

Ma 6 ■ 2358 24 ist die kleinste von Null verschiedene Zahl, die die 3, 6 und 8 als Teiler hat. Die nächstgrößere ist 48. Nach der Aufgabenstellung waren 24 Schüler an der Leistungskontrolle beteiligt.

$$\text{Aus } \frac{1}{8} \cdot 24 = 3, \frac{1}{3} \cdot 24 = 8 \text{ und } \frac{1}{6} \cdot 24 = 4 \text{ folgt,}$$

daß 15 Schüler genau eine, genau zwei oder genau vier Aufgaben nicht gelöst haben. Genau ein Schüler gab die Arbeit fehlerlos ab; also haben genau acht Schüler jeweils genau eine Aufgabe richtig gelöst.

Ma 6 ■ 2359 Wir rechnen

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{2}{5} + \frac{1}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}; 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5};$$

angenommen, Otto hat von seiner Mutter x Mark zum Einkaufen erhalten; dann gilt $\frac{1}{5}x = 10$, also $x = 50$. Otto hat von seiner Mutter 50 M zum Einkaufen erhalten.

Ma 6 ■ 2360 Das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen 11, 12, 13 und 14 lautet

12012. Wegen $11 - 1 = 12 - 2 = 13 - 3 = 14 - 4 = 10$ ist $12012 - 10 = 12002$ die gesuchte Zahl.

Es gilt

$$11 \cdot 1091 + 1 = 12002,$$

$$12 \cdot 1000 + 2 = 12002,$$

$$13 \cdot 923 + 3 = 12002,$$

$$14 \cdot 857 + 4 = 12002.$$

Ma 7 ■ 2361 Aus $b = \frac{1}{2}(a + c)$ und $5(a + b + c) = abc$ folgt durch Einsetzen

$$5 \cdot \left[a + \frac{1}{2}(a + c) + c \right] = \frac{1}{2} \cdot ac(a + c),$$

$$10 \left(\frac{3}{2}a + \frac{3}{2}c \right) = ac(a + c),$$

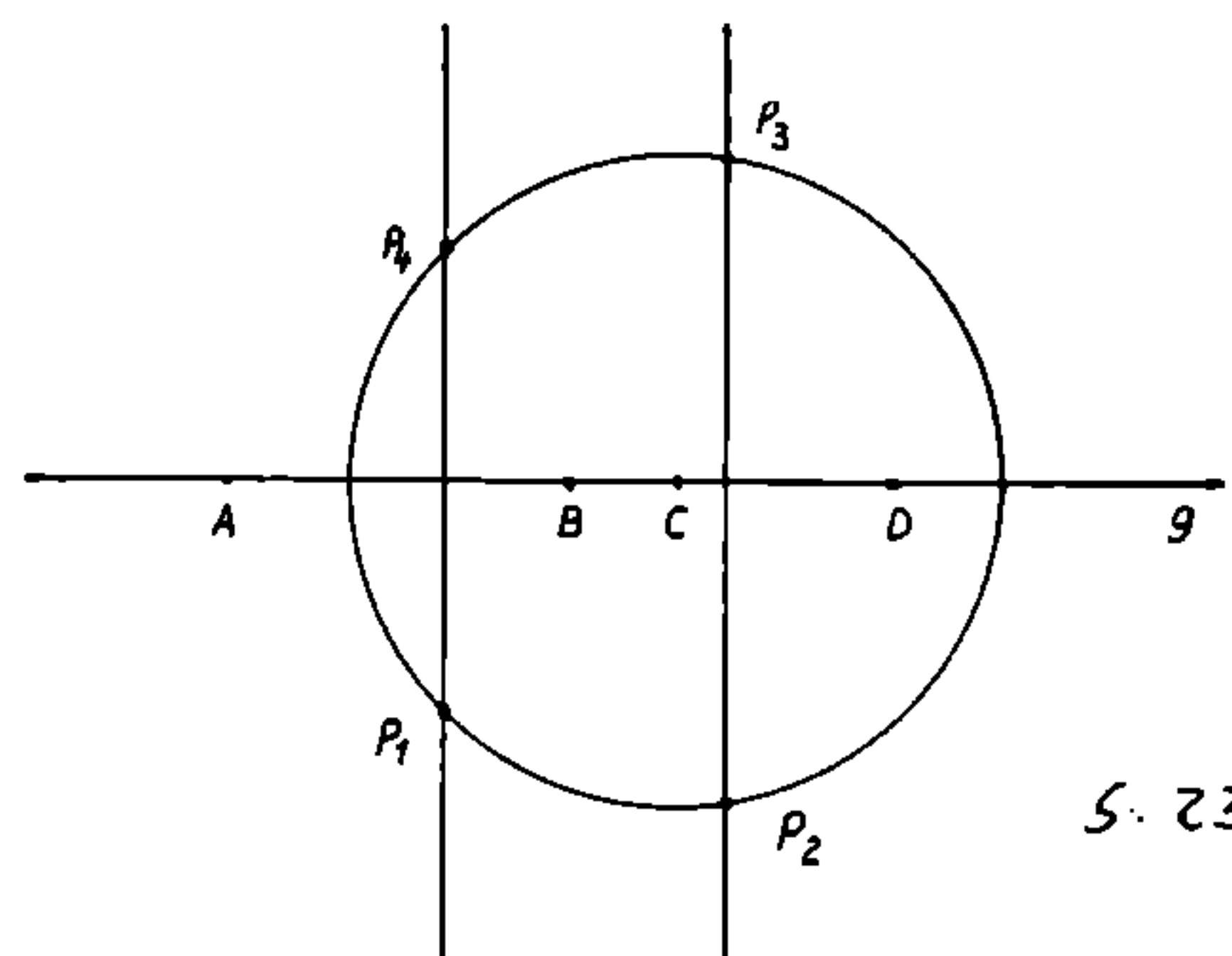
$$15a + 15c = ac(a + c),$$

$$15(a + c) = ac(a + c),$$

$$ac = 15.$$

Wegen $ac = 1 \cdot 15 = 3 \cdot 5$ und wegen $a < c$ gilt $a = 1$ und $c = 15$ und somit $b = 8$ oder $a = 3$ und $c = 5$ und somit $b = 4$. Es existieren genau zwei Lösungen; sie lauten $a_1 = 1, b_1 = 8, c_1 = 15$ und $a_2 = 3, b_2 = 4, c_2 = 5$.

Ma 7 ■ 2362 Man zeichnet zunächst die Gerade g mit den Punkten A, B, C, D . Die Punkte P_i liegen auf der Mittelsenkrechten zur Strecke $\overline{AC}$ oder auf der Mittelsenkrechten zur Strecke $\overline{BD}$. Da die Punkte P_i von C einen Abstand von 3 cm haben müssen, liegen sie außerdem auf dem Kreis um C mit der Radiuslänge 3 cm. Die Schnittpunkte P_1, P_2, P_3, P_4 dieses Kreises mit der Mittelsenkrechten zu $\overline{AC}$ oder $\overline{BD}$ erfüllen die geforderten Bedingungen.



Ma 7 ■ 2363 Das Quadrat habe die Seitenlänge c ; dann gilt $4c = 2 \cdot (a + b)$,

$$c = \frac{a + b}{2} \text{ und somit } A_Q = c^2 = \frac{1}{4} \cdot (a + b)^2.$$

Ma 7 ■ 2364 Die zu ermittelnde dreistellige natürliche Zahl läßt sich darstellen durch $(100a + 10b + a) = 101a + 10b$. Ihre Quersumme lautet $2a + b$.

Nun gilt

$$101a + 10b + 2a + b = 500,$$

$$103a + 11b = 500,$$

$$103a = 515 - 15 - 11b,$$

$$a = 5 - \frac{15 + 11b}{103}.$$

Nur $b = 8$ und somit $a = 4$ erfüllt unter den einschränkenden Bedingungen diese Gleichung. Die gesuchte Zahl lautet 484, und es gilt $484 + 16 = 500$.

Ma 8 ■ 2365 1) Angenommen, n ist eine gerade Zahl. Dann ist n^2 gerade und damit auch $n^2(5+n^2)$.
 2) Angenommen, n ist eine ungerade Zahl, dann ist auch n^2 ungerade. $5+n^2$ ist dann eine gerade Zahl und somit auch $n^2(5+n^2)$, w.z.b.w.

Ma 8 ■ 2366 Nach Aufgabenstellung gilt

$$(1) \quad a^2 + b^2 = 176,5$$

$$(2) \quad a^2 - b^2 = 136.$$

Durch Umformung erhalten wir

$$(2') \quad a^2 = 136 + b^2. \text{ Das setzen wir in (1) ein und erhalten}$$

$$(1') \quad 136 + 2b^2 = 176,5;$$

$$b^2 = 20,25.$$

Daraus folgt $a^2 = 156,25$ und weiter

$$a_{1,2} = \pm 12,5 \text{ und } b_{1,2} = \pm 4,5.$$

Die folgenden geordneten Zahlenpaare erfüllen die geforderten Bedingungen:

$$1. (12,5; 4,5) \quad 2. (12,5; -4,5)$$

$$3. (-12,5; 4,5) \quad 4. (-12,5; -4,5).$$

Ma 8 ■ 2367 Es lassen sich 720 verschiedene sechstellige natürliche Zahlen unter den genannten Bedingungen bilden.

Mit zwei Ziffern kann man 2 verschiedene zweistellige Zahlen bilden, z. B. 13 und 31. Nimmt man eine dritte Ziffer hinzu, so lassen sich 6 verschiedene dreistellige Zahlen bilden, z. B. 134, 314, 143, 341, 413, 431. Hat man vier verschiedene Ziffern und will damit vierstellige Zahlen bilden, so kann man sich denken, daß die vierte Ziffer bei den dreistelligen Zahlen jeweils an der 1., 2., 3. oder 4. Stelle stehen kann. Somit ergeben sich $4 \cdot 6 = 24$ vierstellige Zahlen. Auf ähnliche Weise gelangt man zu $5 \cdot 24 = 120$ fünfstelligen und zu $6 \cdot 120 = 720$ sechstelligen Zahlen. Keine einzige der 720 Zahlen ist durch 3 und auch keine ist durch 9 teilbar. Wir brauchen nur die Quersumme $1+3+4+5+7+9=29$ zu betrachten, die ja bei jeder der Zahlen die gleiche ist. 29 ist weder durch 3 noch durch 9 teilbar, folglich kann auch keine der so gebildeten Zahlen diese Bedingungen erfüllen.

$$\text{Ma 8} \blacksquare 2368 \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$$

$$\beta_1 + \beta_2 = \beta$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$$

Die Dreiecke ABM , BCM und CAM sind gleichschenkelig, weil $\overline{AM}$, $\overline{BM}$ und $\overline{CM}$ Radien des Umkreises sind. Folglich gilt

$$\alpha_1 = \beta_2; \beta_1 = \gamma_2 \text{ und } \gamma_1 = \alpha_2.$$

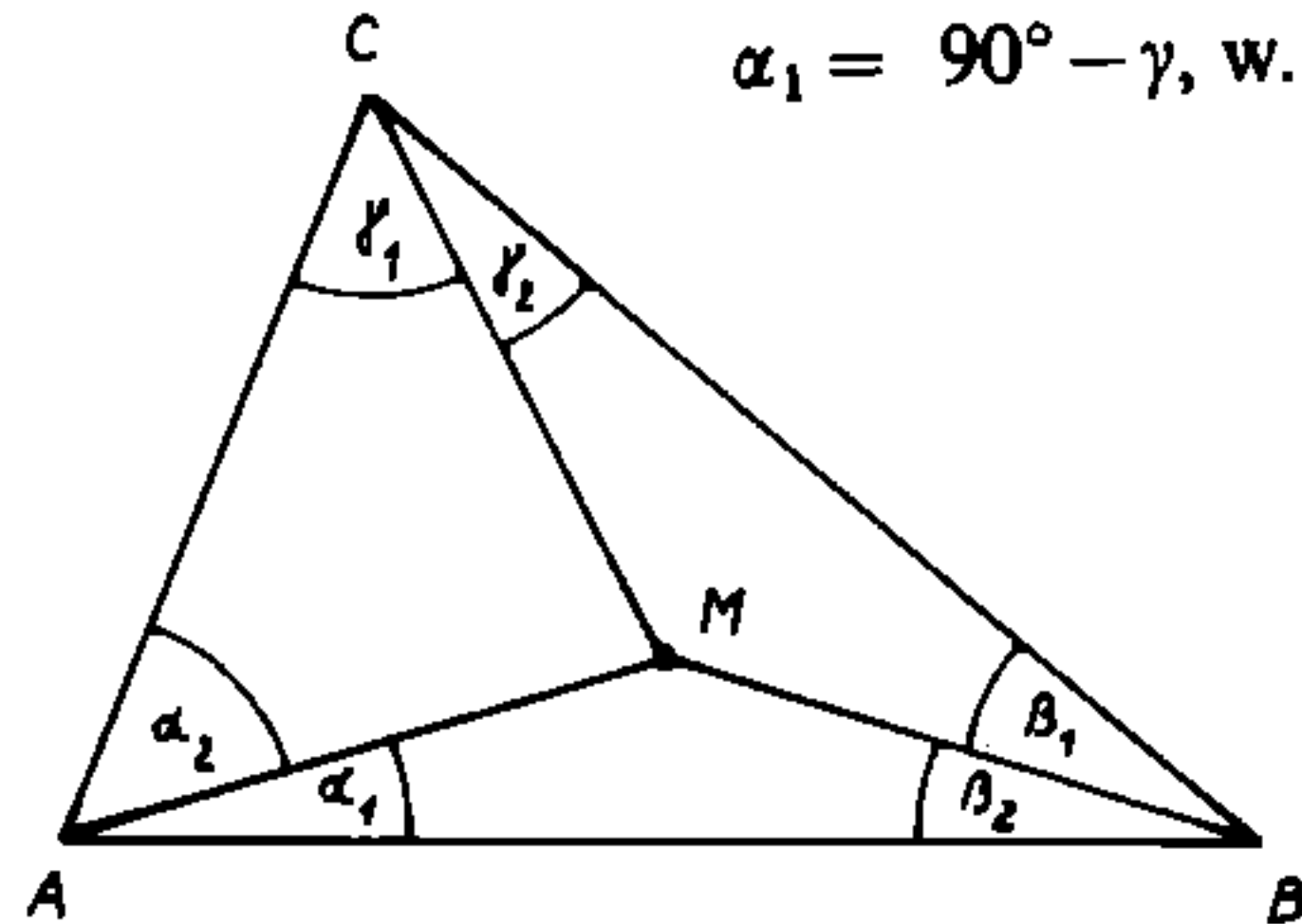
Weiter gilt nach dem Satz über die Innenwinkelgrößen im Dreieck

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma = 180^\circ.$$

$$\text{Daraus folgt } 2\alpha_1 + 2\gamma = 180^\circ;$$

$$\alpha_1 + \gamma = 90^\circ;$$

$$\alpha_1 = 90^\circ - \gamma, \text{ w. z. b. w.}$$



Ma 9 ■ 2369 Nach Aufgabenstellung soll gelten

$$315 = a^2 - b^2 \text{ bzw. } 315 = (a+b)(a-b).$$

Wir setzen (1) $a+b=p$ und

$$(2) \quad a-b=q.$$

Dadurch erhalten wir

$$(1') \quad a = \frac{p+q}{2},$$

$$(2') \quad b = \frac{p-q}{2} \text{ und}$$

$$(3) \quad 315 = pq.$$

Wir stellen nun in einer Tabelle alle Möglichkeiten der Zerlegung von 315 in ein Produkt aus zwei Faktoren zusammen und können dann mit Hilfe der Gleichungen (1') und (2') die den Variablen a und b und damit auch a^2 und b^2 zuzuordnenden Zahlen berechnen. Wie die Tabelle zeigt, gibt es insgesamt sechs Möglichkeiten, die Zahl 315 in die Differenz zweier Quadratzahlen zu zerlegen:

p	q	a	b	a^2	b^2
315	1	158	157	24964	24649
105	3	54	51	2916	2601
63	5	34	29	1156	841
45	7	26	19	676	361
35	9	22	13	484	169
21	15	18	3	324	9

Ma 9 ■ 2370 Jede achtstellige Zahl der angegebenen Darstellungsform läßt sich in die Summe $10000 \cdot \overline{abcd} + \overline{abcd}$ zerlegen und damit in der Form $10001 \cdot \overline{abcd}$ darstellen.

Die Primfaktorenzerlegung der Zahl 10001 lautet $73 \cdot 137$. Diese beiden Zahlen gehen in jeder achtstelligen Zahl $\overline{abcdabcd}$ auf; sie entsprechen den Primzahlen p_5 und p_6 unserer Aufgabenstellung.

$$\text{Es gilt dann weiter } p_5 + p_6 = 73 + 137 = 210.$$

Nach Aufgabenstellung müßte dann 210 das Produkt von vier aufeinanderfolgenden Primzahlen sein, d. h., es gilt:

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 = 210$$

$$\text{und somit } 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210.$$

Die gesuchten Primzahlen sind:

$$p_1 = 2; p_2 = 3; p_3 = 5; p_4 = 7; p_5 = 73; p_6 = 137.$$

Ma 9 ■ 2371 Mit Ilka sind es 25 Personen.

Wenn jeder jedem die Hand gibt (nur sich selbst nicht), dann sind es zunächst $25 \cdot 24$ Händedrucke. Wenn die Person A der Person B die Hand gibt, dann ist das der gleiche Händedruck wie der, wenn Person B der Person A die Hand gibt. Nun sind es also $\frac{25 \cdot 24}{2} = 300$ Händedrucke. Da sich die gemeinsam ankommenden Familien nicht untereinander begrüßen, ist folgendes abzuziehen:

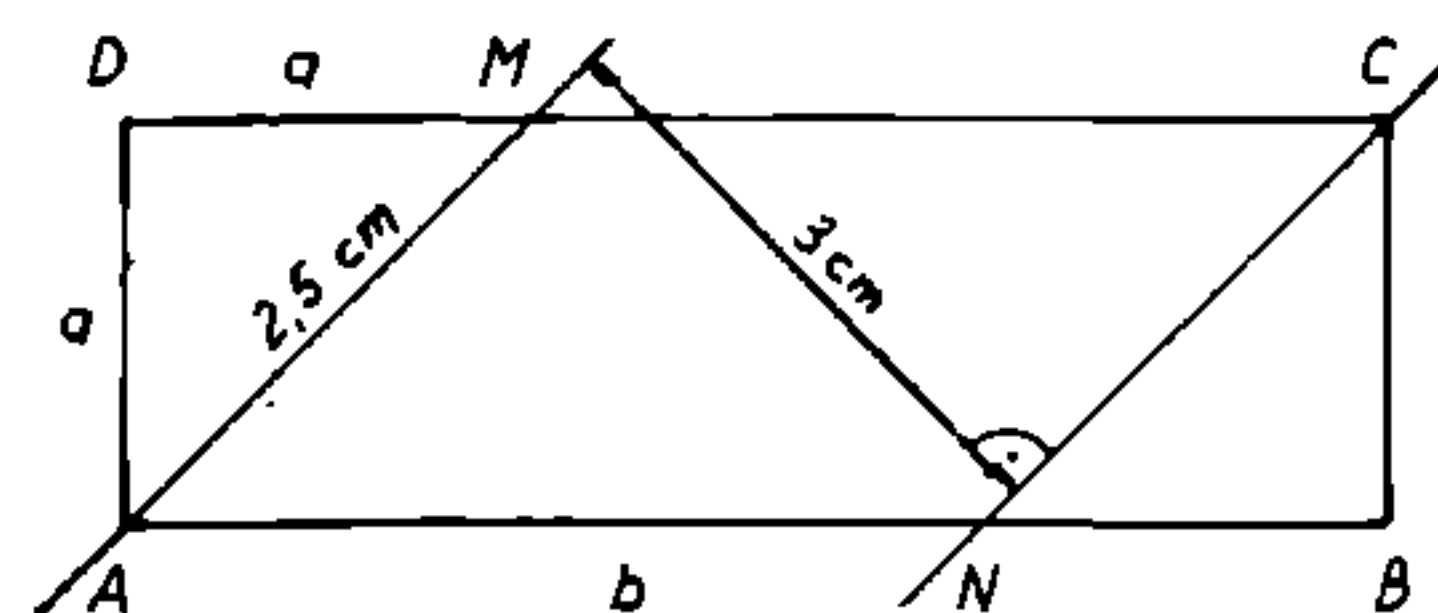
$$\text{Für die fünfköpfige Familie } \frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \text{ Händedrucke, für die vierköpfige Familie } \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

Händedrucke und für jedes der drei Ehepaare genau einen, also zusammen 3 Händedrucke.

Insgesamt sind also 281 Händedrucke gegeben worden.

Ma 9 ■ 2372 Skizze nicht maßstäblich!

(a bzw. b sind Symbole für Länge bzw. Breite des Rechtecks $ABCD$!)



Die beiden Geraden zerlegen das Rechteck $ABCD$ in die zwei gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecke AMD und NBC und in das Parallelogramm $ANCM$.

Für den Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ gilt

$$A_{ABCD} = 2 \cdot A_{AMD} + A_{ANCM},$$

$$A_{ABCD} = 2 \cdot \frac{a^2}{2} + 2,5 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm},$$

$$A_{ABCD} = a^2 + 7,5 \text{ cm}^2.$$

Im rechtwinkligen Dreieck AMD gilt nach dem Satz des Pythagoras $2a^2 = 2,5^2 \text{ cm}^2$; $a^2 = 3,125 \text{ cm}^2$; $a \approx 1,8 \text{ cm}$.

Nun ist

$$A_{ABCD} = 3,125 \text{ cm}^2 + 7,5 \text{ cm}^2;$$

$$A_{ABCD} = 10,625 \text{ cm}^2$$

$$\text{und damit } b \approx \frac{10,625 \text{ cm}^2}{1,8 \text{ cm}}; b \approx 6 \text{ cm}.$$

Das Rechteck $ABCD$ ist etwa 6 cm lang und 1,8 cm breit. (Streckensymbole sind hier als Längensymbole aufzufassen!)

Ma 10/12 ■ 2373 Wir stellen alle Zahlen der Gleichung in einem m -adischen Positionssystem dar und lösen die Gleichung nach m auf:

$$4m + 2 + 2m^2 + 4m + 2 = (m+6)^2,$$

$$2m^2 + 8m + 4 = m^2 + 12m + 36,$$

$$m^2 - 4m - 32 = 0,$$

$$m_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+32}$$

$$m_1 = 8,$$

$$m_2 = -4.$$

Da die Basis eines Positionssystems nicht negativ ist, entfällt m_2 . Damit stellt die gegebene Gleichung nur im Achtersystem eine wahre Aussage dar.

$$\text{Probe: } 4 \cdot 8 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 + 2 \cdot 1$$

$$= (1 \cdot 8 + 6 \cdot 1)^2,$$

$$32 + 2 + 128 + 32 + 2 = 14^2,$$

$$196 = 196.$$

Die Gleichung ist nun wie folgt darstellbar:

$$(42)_8 + (242)_8 = (16)_8^2.$$

Vorbildliche Hilfe

Unser Dank gilt den Verlagen, die Bücher im Werte von 2000 M für die fleißigsten Wettbewerbsteilnehmer zur Verfügung stellten: BSB B. G. Teubner, Leipzig; VEB Fachbuchverlag, Leipzig; Der Kinderbuchverlag, Berlin; Militärverlag der DDR, Berlin; transpress VEB Verlag für Verkehrswesen, Berlin; Sportverlag, Berlin; VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin; Volkseigener Verlag Volk und Wissen, Berlin; Urania-Verlag, Leipzig; Leipziger Volkszeitung.

Auf den Spuren von Mathematikern



Leibniz-Denkmal in Leipzig

Die Leipziger Stadtsilhouette wird durch das weithin sichtbare 140 m hohe Universitäts-hochhaus mitgeprägt. In der Nähe dieser Höhendominante des Stadtzentrums, direkt vor dem sich anschließenden neuen Hörsaalgebäude der Karl-Marx-Universität, befindet sich ein Denkmal für Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 bis 1716), „Leipzigs größten Sohn“. Das Standbild wurde „erfunden und modelliert von E. J. Hähnel in Dresden 1881 bis 83“, „in Erz gegossen von Ch. Lenz in Nürnberg 1883“, errichtet 1883 (vor 100 Jahren), neu aufgestellt 1978.

Leibniz, der fast das gesamte Wissen seiner Zeit beherrschte, gilt als „der letzte Universalgelehrte“: Philosoph, Mathematiker, Physiker, Techniker, Jurist, Geschichts- und Sprachforscher, politischer Schriftsteller. Am 1. 7. 1646 in Leipzig geboren, besuchte er in den Jahren 1753 bis 1761 die Nikolai-Schule, die älteste Leipziger Stadtschule. Mit 15 Jahren bezog er die Universität seiner Vaterstadt, um Philosophie und Jurisprudenz zu studieren. 1666 verließ er Leipzig. Im Jahre 1700 bewirkte er übrigens in Berlin die Gründung der Akademie der Wissenschaften.

Leibniz hat sich lebenslang aus innerem Antrieb mit mathematischen Gedankengängen befaßt. Zu ernsthafter Vertiefung in die Mathematik und zur Begegnung mit führenden Mathematikern seiner Zeit kam es während seines Aufenthalts in Paris (1672 bis 1676). Im Spätherbst 1675 erhielt Leibniz bei seiner Beschäftigung mit infinitesimalen Fragen seine Form der Differential- und Integralrechnung (Calculus). (Unabhängig von Leibniz begründete auch Newton die Infinitesimalrechnung.)

Leibniz konstruierte die erste mechanische Rechenmaschine mit Staffelwalzen.

So wie in Leipzig wird es auch in anderen Orten unserer Republik ein Denkmal oder eine Gedenktafel, einen Grabstein, einen Namen für eine Straße oder einen Platz, einen Namen für eine Schule, ein Institut oder einen Hörsaal, vielleicht auch ein Bild in einem Museum geben, das an einen Mathematiker vergangener Zeiten erinnert.

Gibt es nicht in Annaberg-Buchholz eine Büste, die einen berühmten Rechenmeister zeigt? Führt nicht eine Straße in Potsdam zum Telegrafenberg, die nach einem bedeutenden Physiker (der auch Mathematiker war) bezeichnet ist? Ist auf einem Friedhof in Berlin-Köpenick nicht das Grabmal für einen 1807 in Köpenick bei Berlin verstorbenen Mathematiker und Astronomen aus einer berühmten aus Basel stammenden Mathematiker-Familie zu finden?

Mitarbeiter gesucht

Liebe *Junge Mathematiker*!

Gibt es nicht auch in Eurem Heimatgebiet solche oder andere „Spuren“ von Mathematikern? (Bedenkt dabei bitte: Auch Physiker und Astronomen sind oft in Lehre und Forschung auf dem Gebiet der Mathematik tätig gewesen!)

Schreibt uns bitte darüber!

Unsere Adresse:

Mathematische Schülerzeitschrift *alpha*

Kennwort: Auf den Spuren von

Mathematikern

7027 Leipzig, Postfach 14

J. Lehmann/H. Pieper

In einem Wirtshause

Die Rechenbücher des deutschen Rechenmeisters Adam Ries wurden lange Zeit hindurch dem Rechenunterricht vieler Schulen zugrunde gelegt. Sie waren nicht in der damals üblichen lateinischen Fachsprache, sondern in deutscher Sprache und überdies allgemeinverständlich geschrieben. Ries stellte darin viele elementare Aufgaben und gab Regeln zu deren Lösung an. In „Adam Risen Rechenbuch auff Linien und Ziphren in allerley Handthierung“ befinden sich zwei sogenannte „Zechenaufgaben“. Mehrere Gruppen von Personen geben in einem Wirtshause insgesamt eine bestimmte Summe von Geld aus, wobei jede Person einer Gruppe jeweils die gleiche Summe, jedoch Personen unterschiedlicher Gruppen verschiedene Summen für ihre Zeche zu zahlen haben. Gefragt wird nach der Anzahl der Personen jeder Gruppe.

Die erste Aufgabe lautet: „Item 21 Personen, Männer und Frauen, haben vertroncken 81 d. Ein Mann sol geben 5 d und eine Frau 3 d. Nun frag ich wie viel jeglicher in sonderheit gewesen seind.“

Die zweite Aufgabe hat auch Leonhard Euler (mit anderen Zahlen als Ries) wie folgt gestellt:

„30 Personen, Männer, Frauen und Kinder, geben in einem Wirtshause 50 Taler aus, und zwar zahlt ein Mann 3 Taler, eine Frau 2 Taler und ein Kind 1 Taler. Wieviel Männer, Frauen und Kinder sind es gewesen?“

Die Zechenaufgaben gehen auf schon im 5. Jahrhundert in China in anderer Einkleidung formulierte Probleme zurück, die über die Inder und die Mathematiker der arabischen Kalifate später nach Europa gelangten. Euler hat sie in seiner *Vollständigen Anleitung zur Algebra* (vgl. *alpha*, Heft 1/1983), 2. Teil, 2. Abschnitt, 2. Kapitel, übersichtlich behandelt.

H. Pieper

Unser Buchtip

WuBing, Hans

Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik

Studienbücherei, Math. f. Lehrer, Bd. 13

365 S., 72 Abb., 1 Tab. Preis: 17,80 M

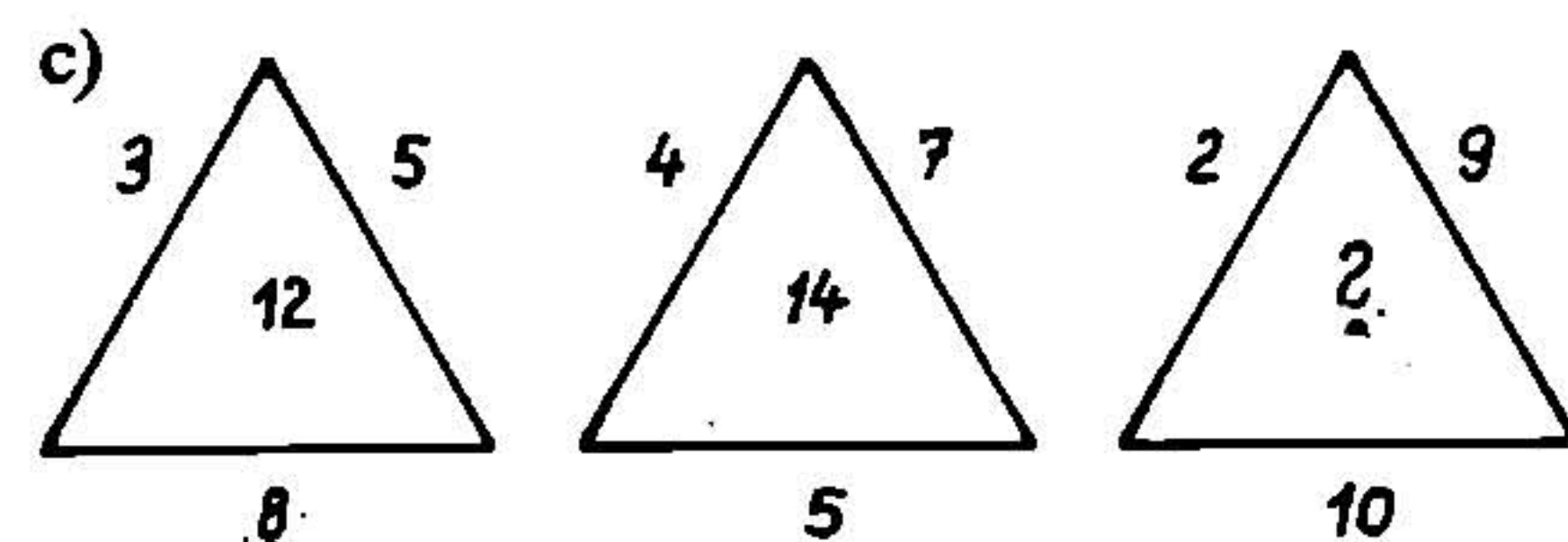
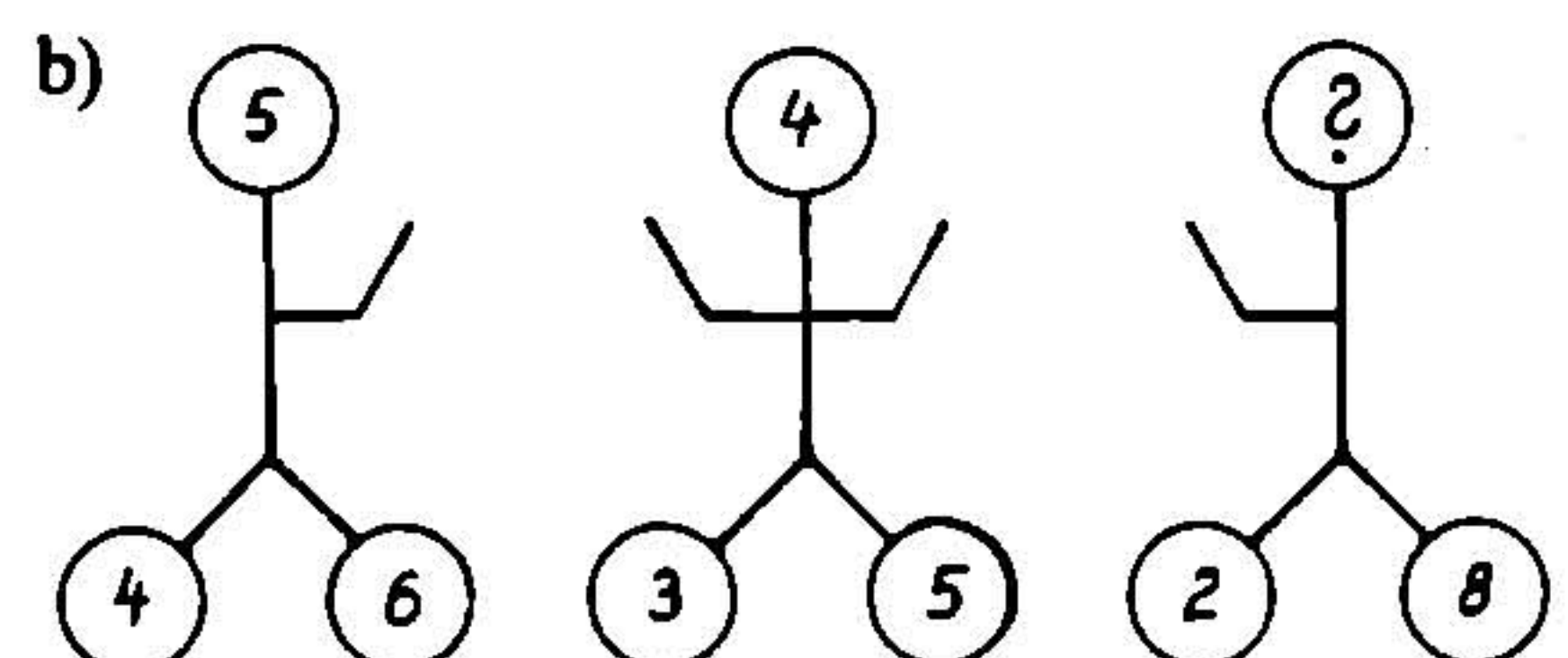
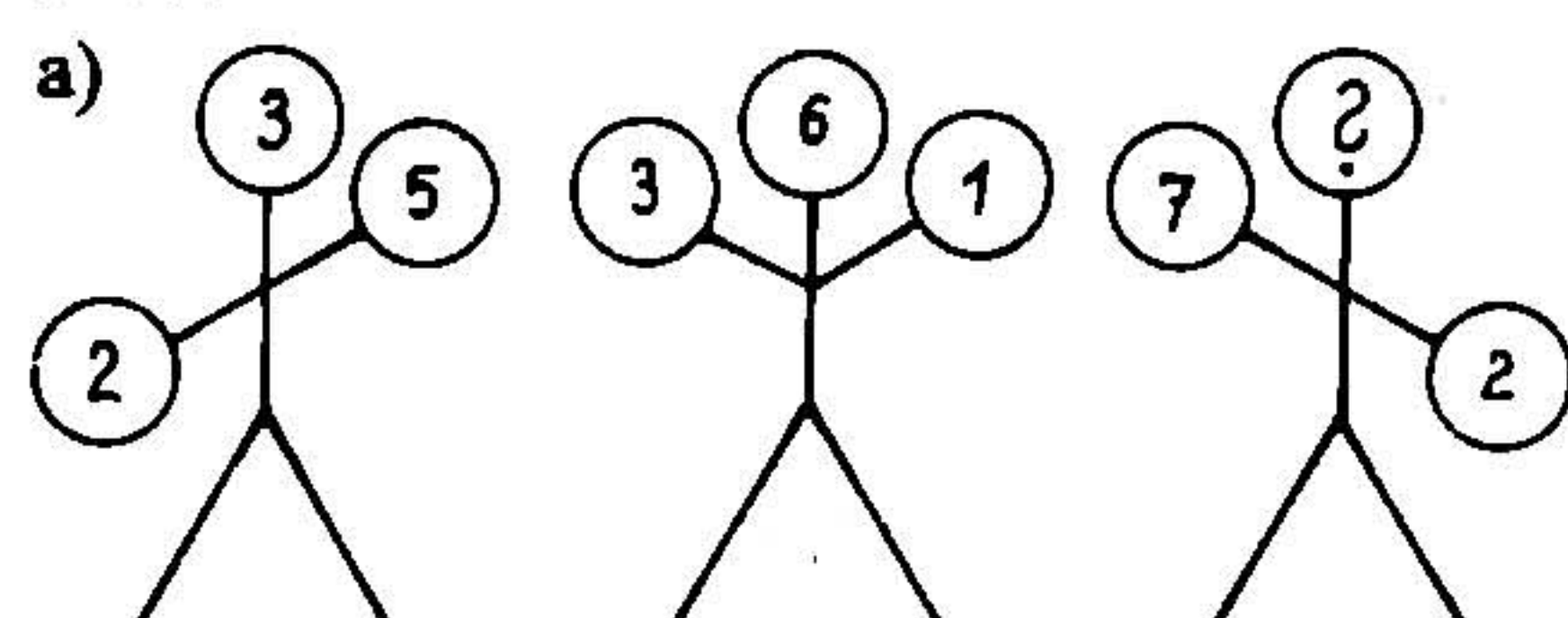
Bestell-Nr. 570 608 2

VEB Deutscher Verlag d. Wissensch. Berlin

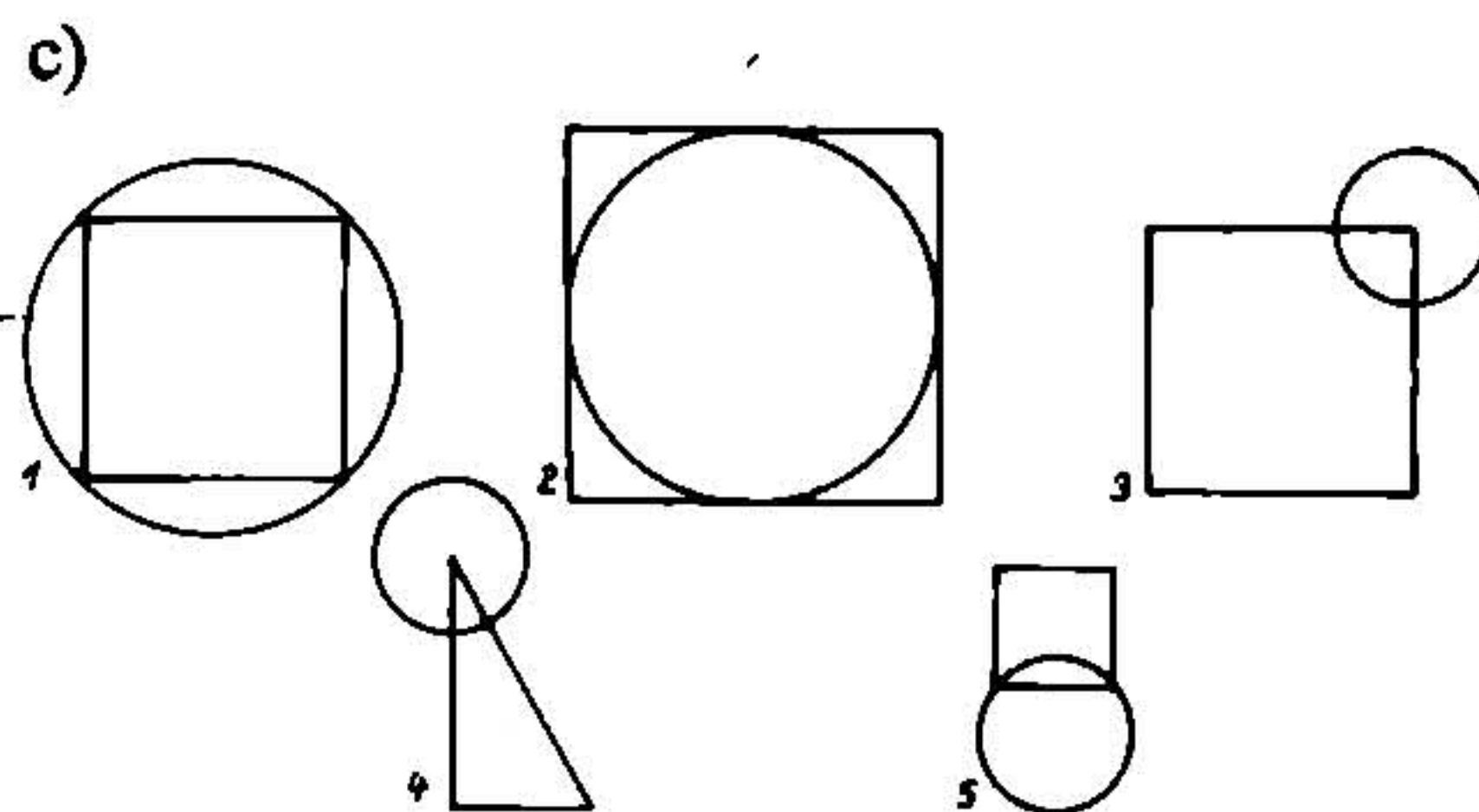
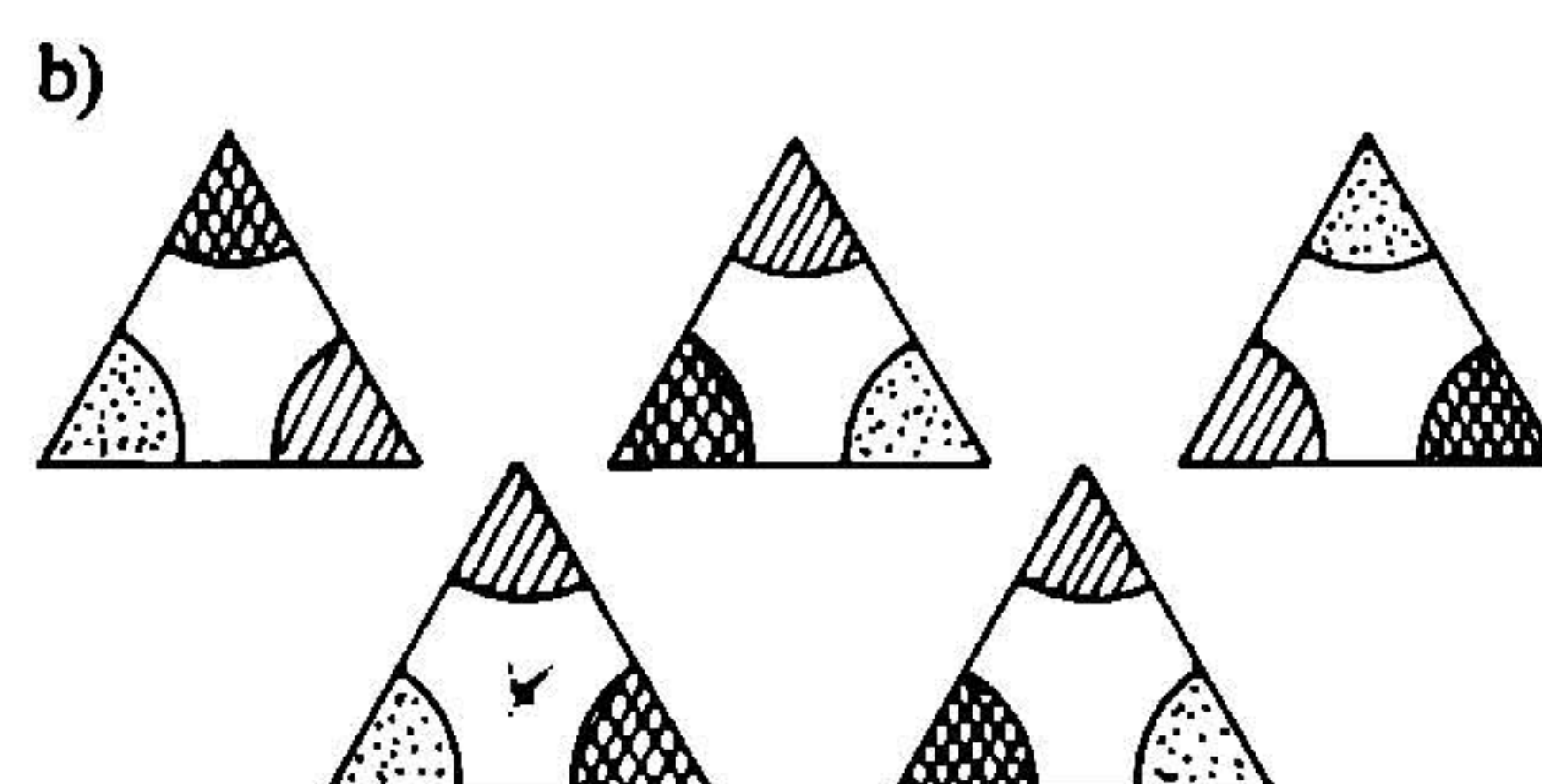
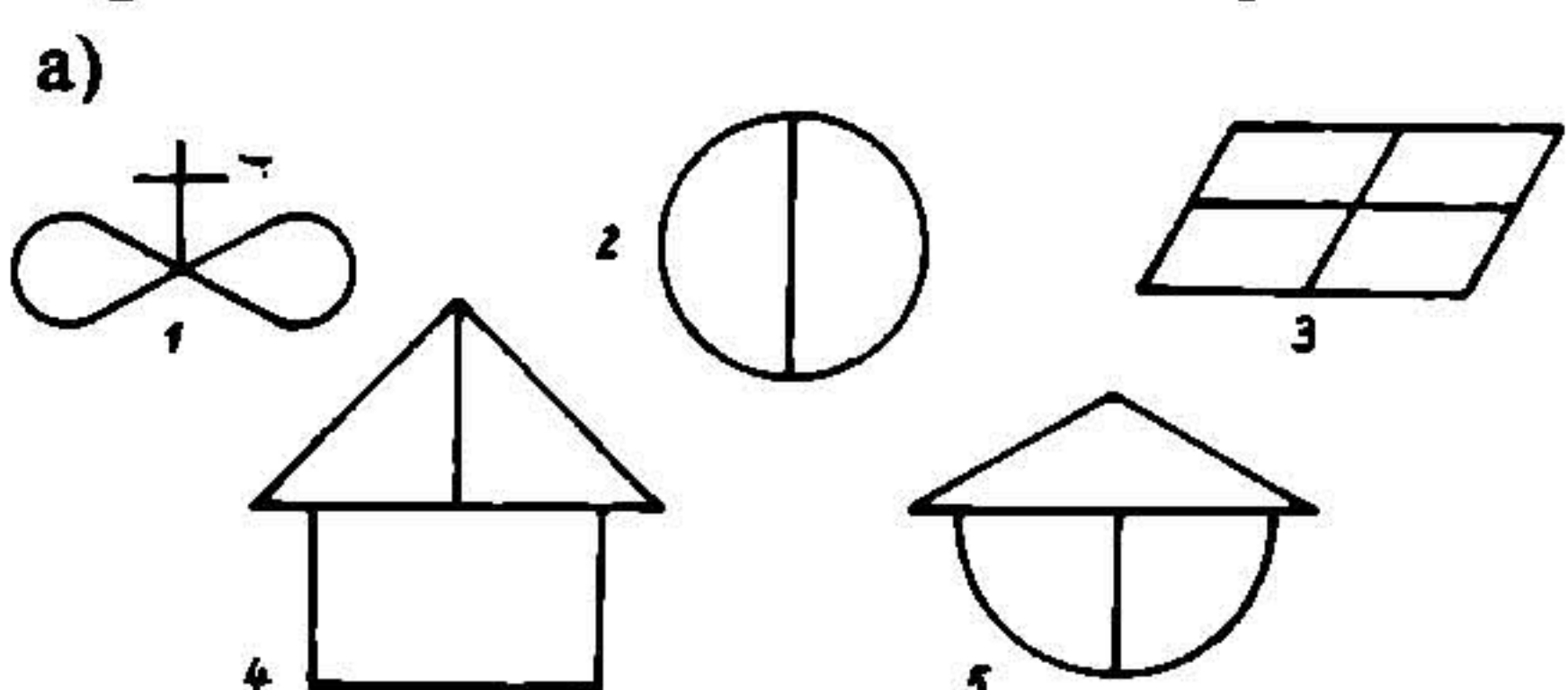
Mathematik-Mosaik

Unser sowjetischer Auslandskorrespondent sandte uns aus Kiew eine mathematische Wandzeitung, Format A0. Sie enthält – beidseitig mehrfarbig bedruckt, 55 unterhaltsame Knebeleien. Sie wurde in hoher Auflage für Oberschulen gedruckt, insbesondere für die außerschulische Tätigkeit. Für unsere *alpha*-Leser haben wir eine Palette interessanter Probleme zusammengestellt.

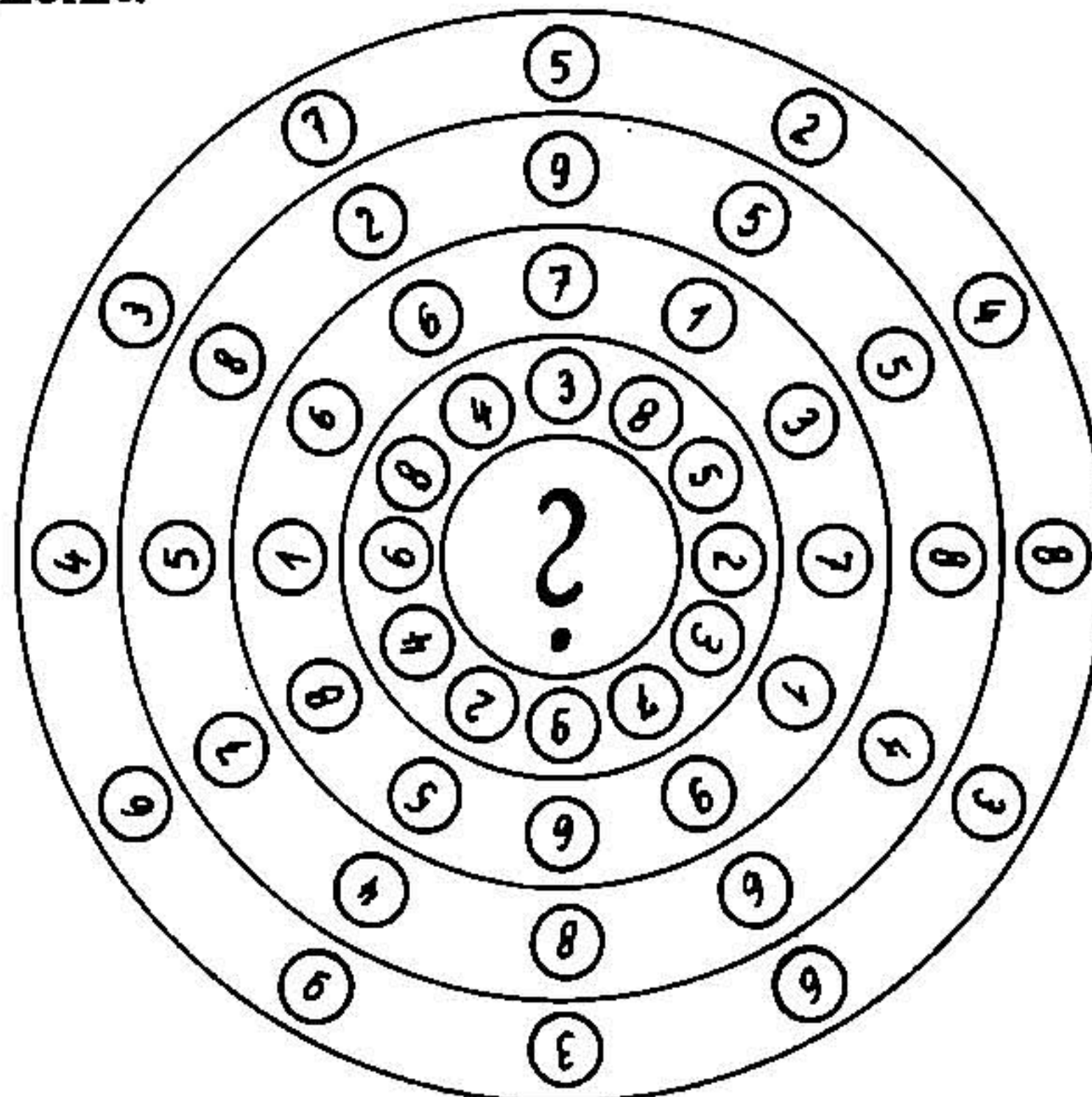
▲1▲ Es ist eine Gesetzmäßigkeit zu finden, nach der die nachfolgenden Figuren aufgebaut sind.



▲2▲ Es ist diejenige Figur zu finden, die logischerweise nicht in das Schema paßt.



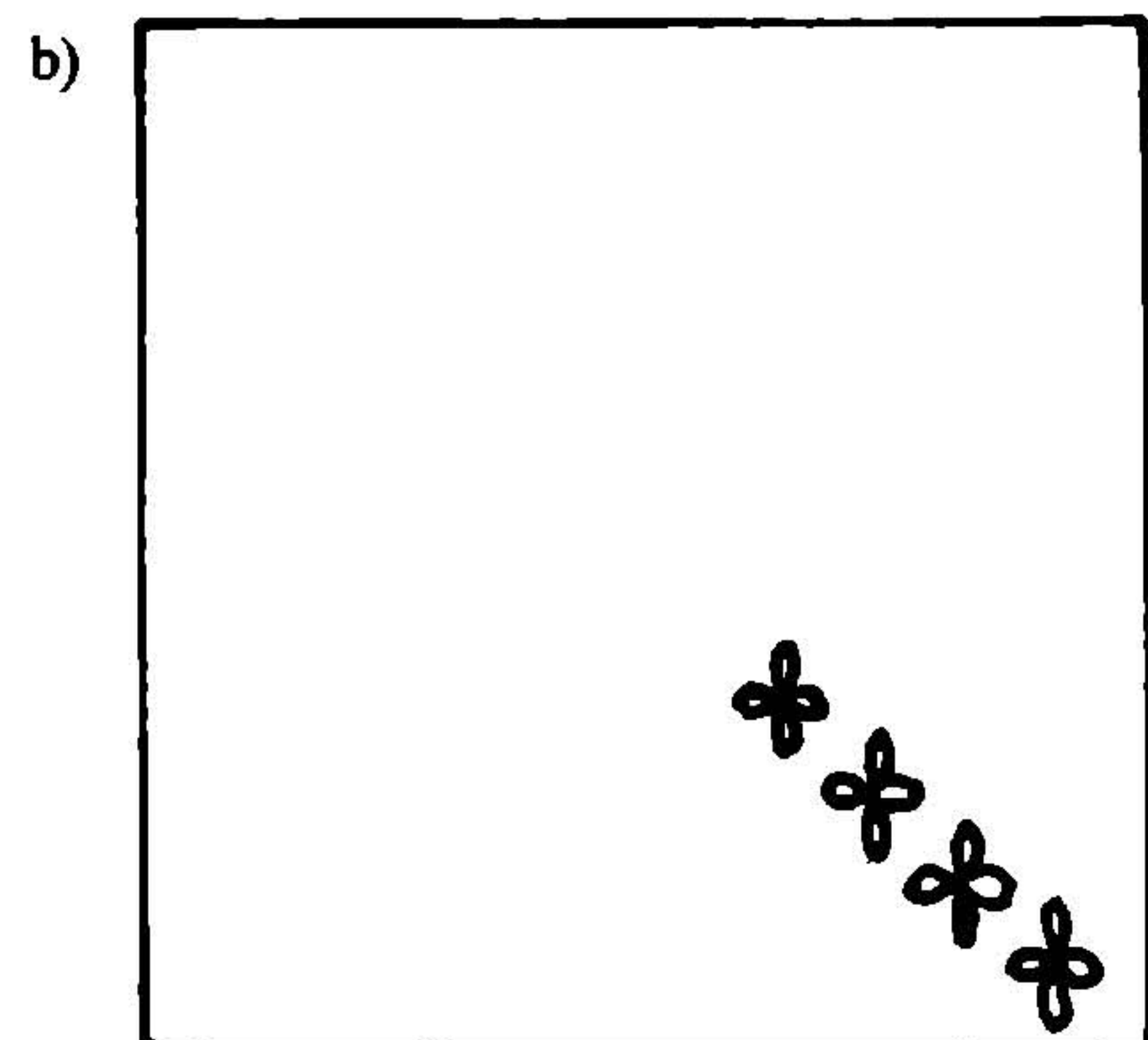
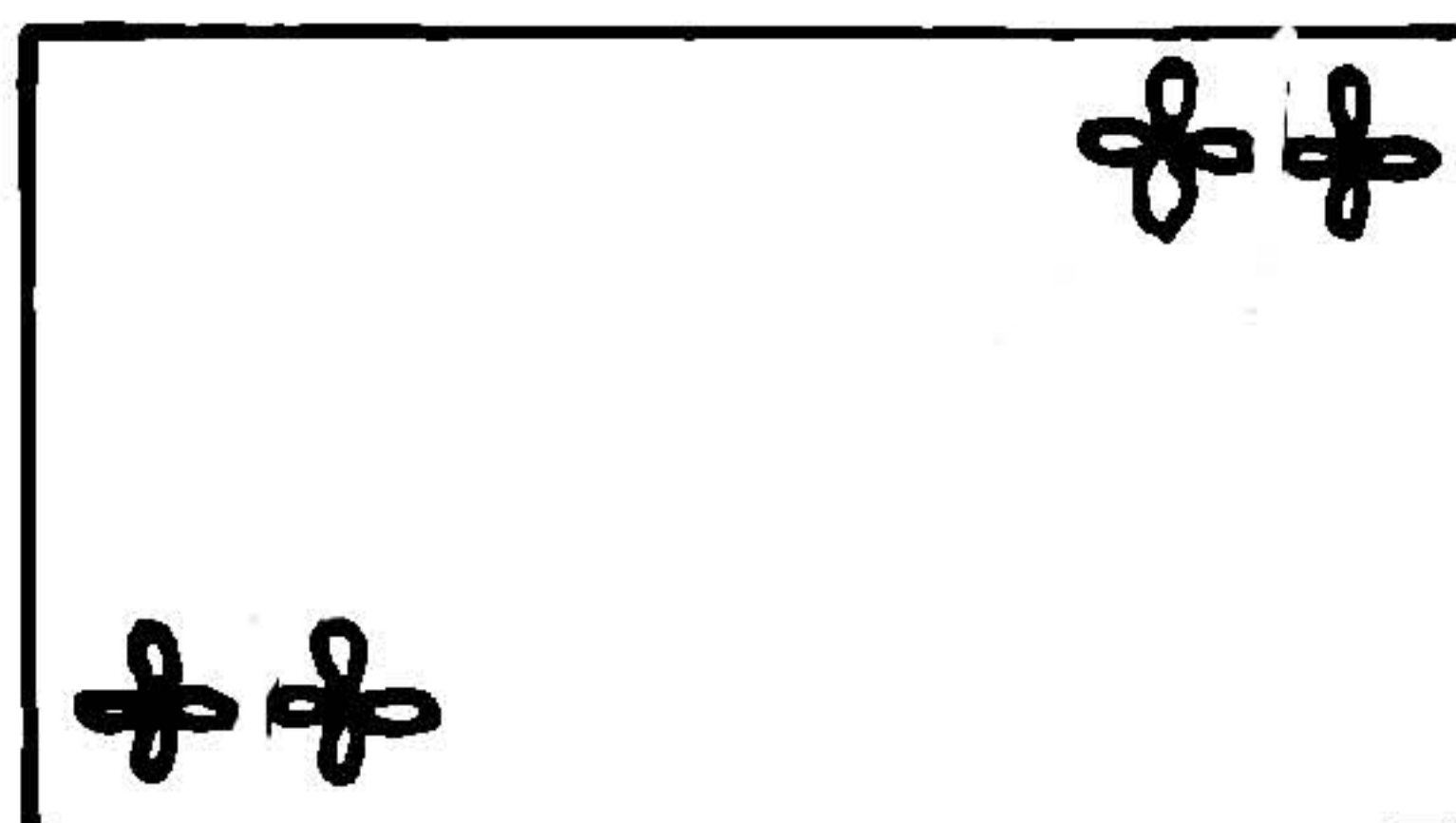
▲3▲ Es sind die Ringe solange zu drehen, bis in allen Radien die gleiche Summe erscheint.



▲4▲ Ersetze die Sternchen (*) durch +-Zeichen oder —Zeichen, so daß richtig gelöste Aufgaben entstehen!

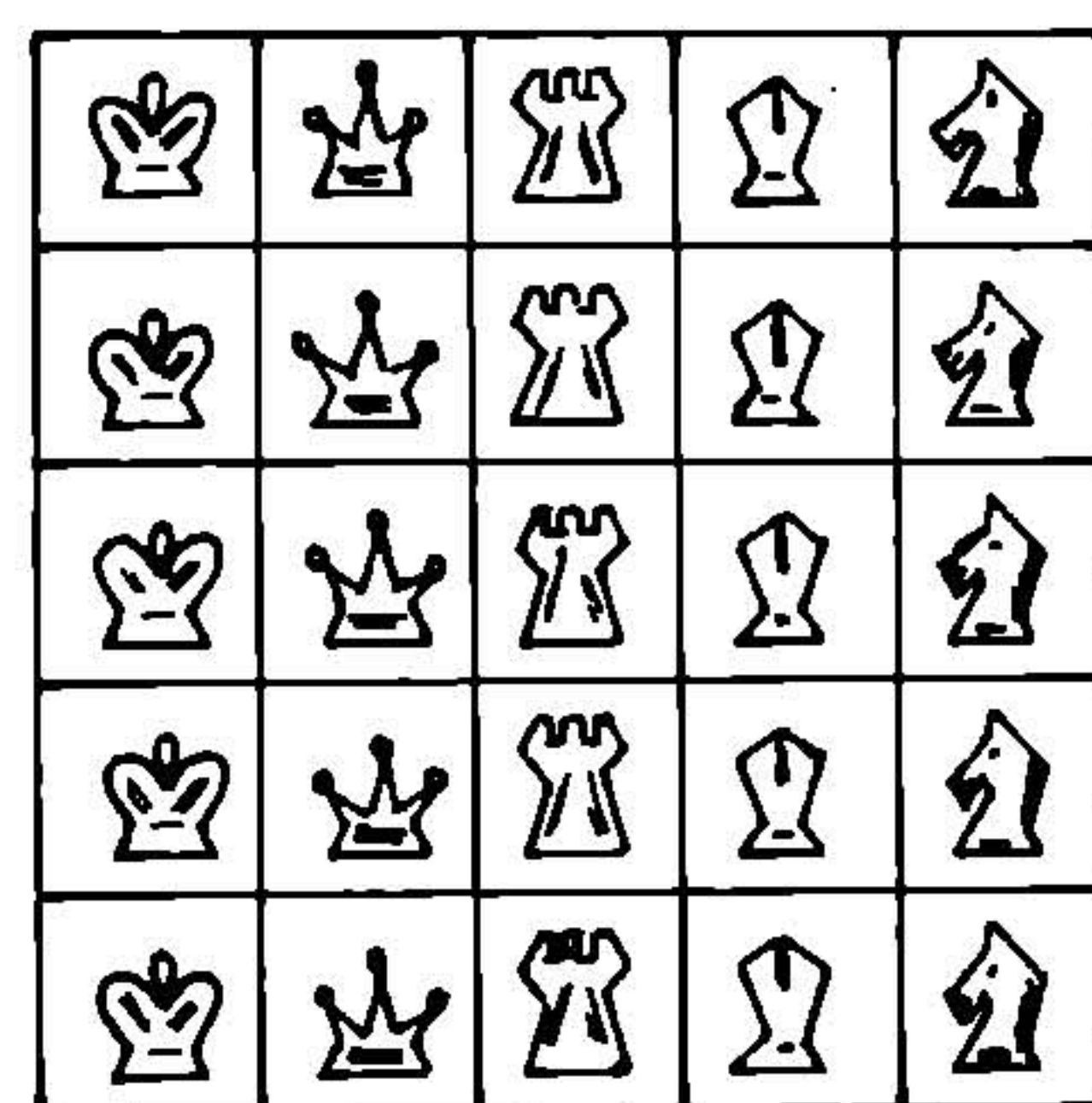
$$\begin{aligned} 2 * 6 * 3 * 4 * 5 * 8 &= 12 \\ 9 * 8 * 1 * 3 * 5 * 2 &= 12 \\ 8 * 6 * 1 * 7 * 9 * 5 &= 12 \\ 3 * 2 * 1 * 4 * 5 * 3 &= 12 \\ 7 * 9 * 8 * 4 * 3 * 5 &= 12 \end{aligned}$$

▲5▲ Jede der beiden Figuren ist in vier kongruente (deckungsgleiche) Teile zu zerlegen. In jedem der Teile muß sich eine Blume befinden.

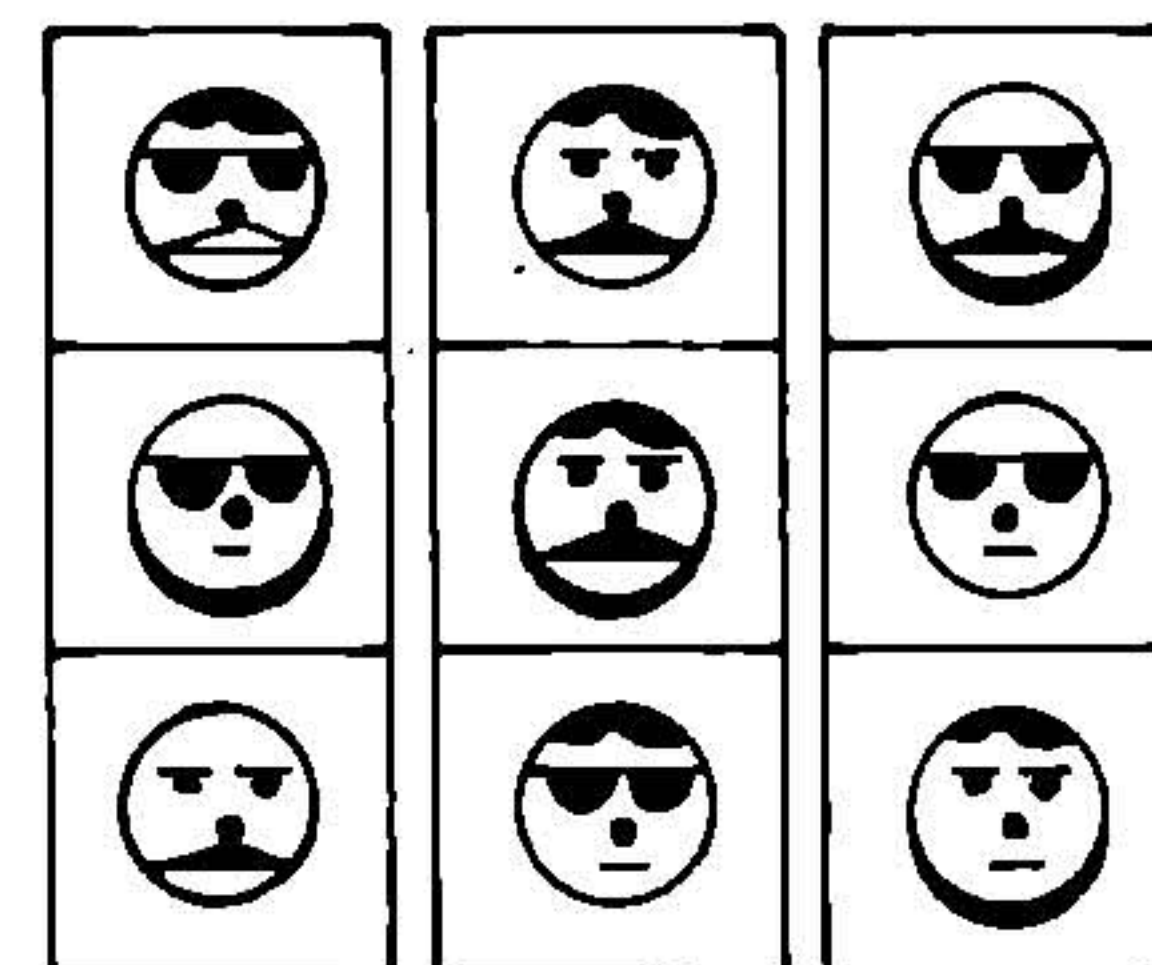
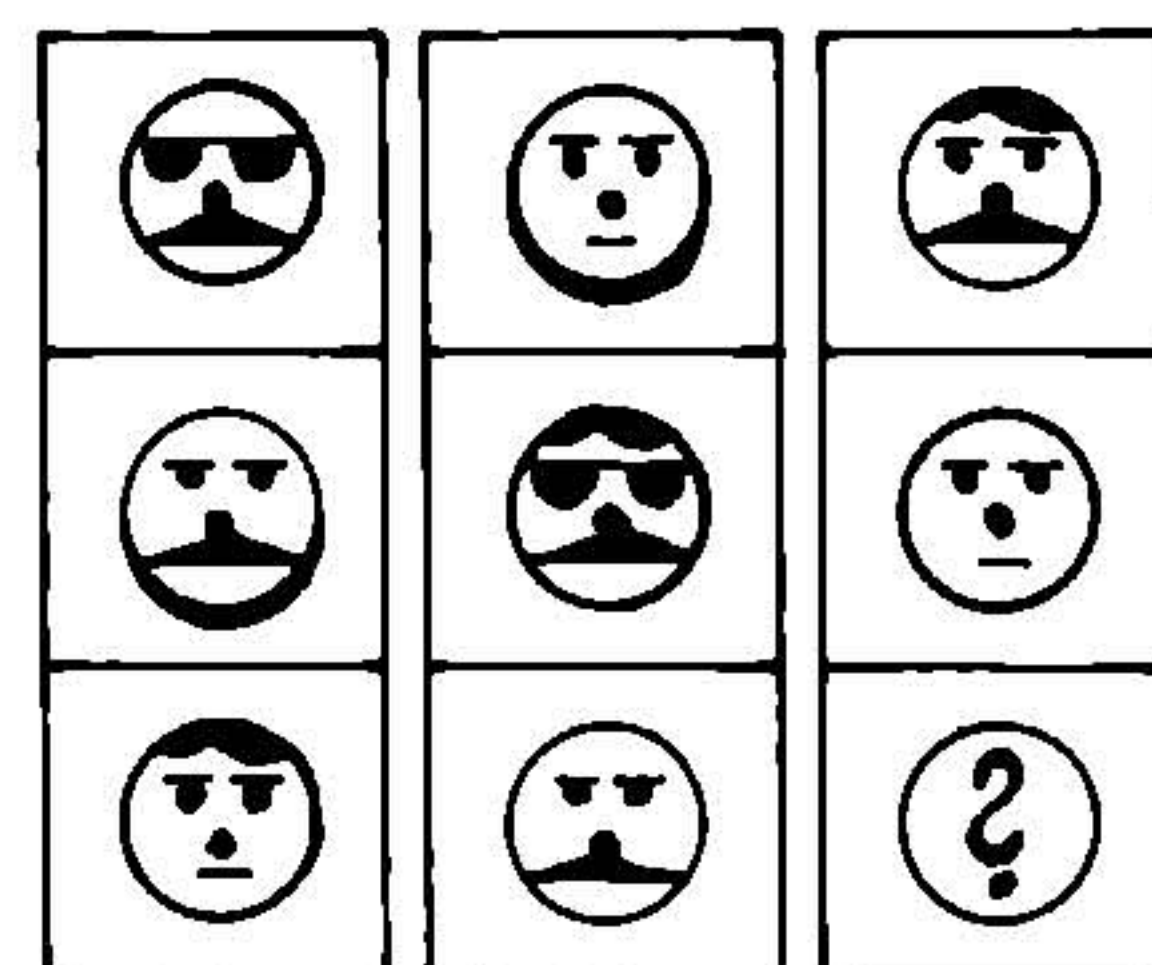


▲6▲ Euler stellte fest, daß es in einem 6×6 -Quadrat nicht möglich ist, die Figuren – in unserem Falle Schachfiguren – so aufzustellen, daß sich in jeder Waagerechten und jeder Senkrechten nur jeweils eine Figur befindet.

In einem 5×5 -Quadrat (ebenfalls in einem 3×3 - und 4×4 -Quadrat) ist das möglich. Finde die Lösung!



▲7▲ Welche der Figuren 1 bis 9 gehört logischerweise an Stelle des Fragezeichens?



▲8▲ Wie viele Katzen müssen logischerweise an Stelle des Fragezeichens sitzen, damit sie das Gleichgewicht mit dem Knaben herstellen?

