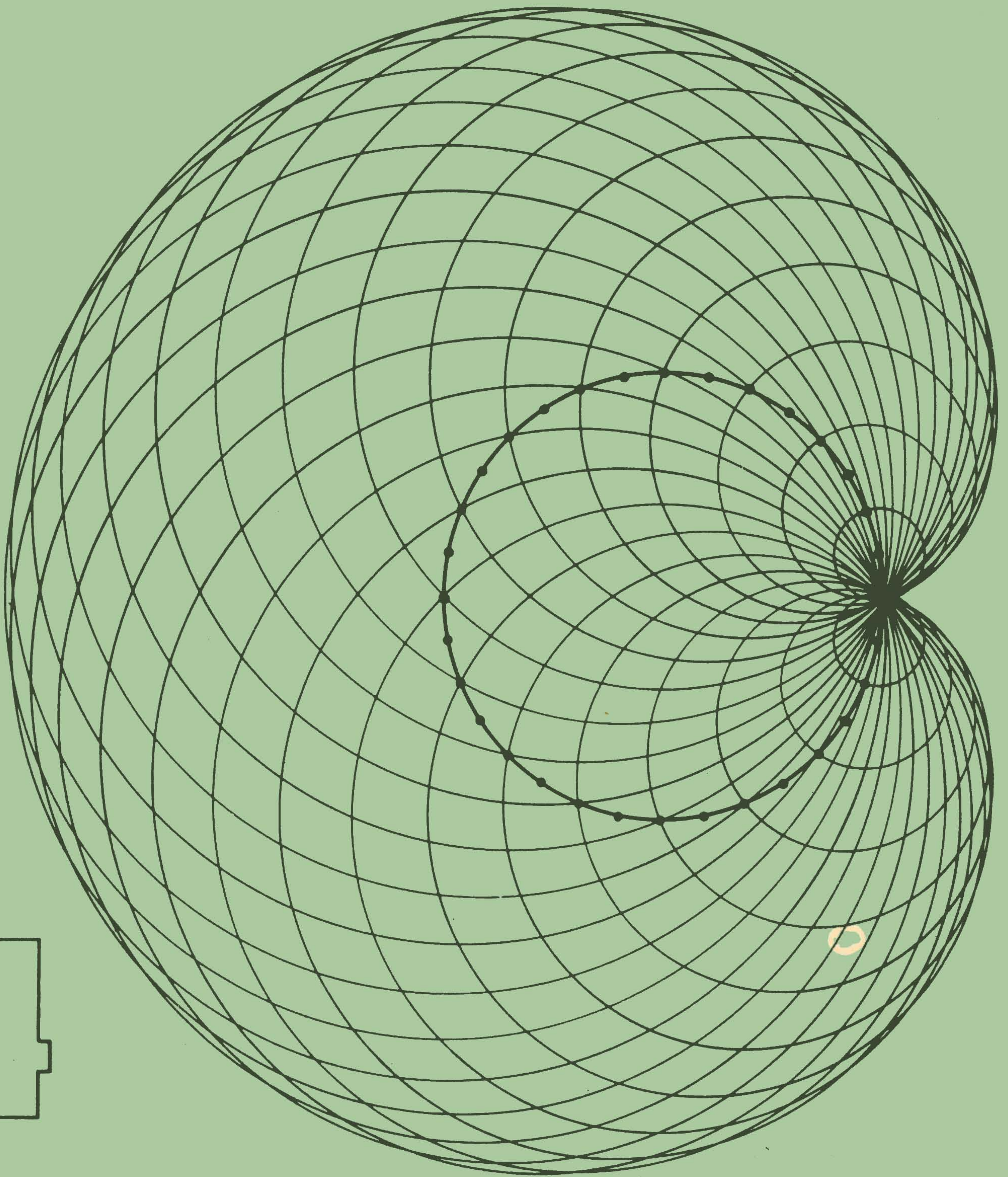


Mathematische
Schülerzeitschrift

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
18. Jahrgang 1984
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

alpha



4

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Frey (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstudienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stöye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (Ltg. Dr. C.-P. Helmholtz)

Redaktion:

OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags: Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

1086 Berlin, Krausenstraße 50, PSF Nr. 1213
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545
des Presseamtes beim Vorsitzenden des
Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Viktor Kubal, Prag (S. 77); Jahreswegweiser durch alte und neue Kunst, Aufbau-Verlag Berlin (S. 77); Briefmarke: Dr. P. Schreiber, Greifswald (S. 78); Red. „Freie Welt“, Berlin (S. 78); E. Staginnus, Berlin (S. 81)

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Titelblatt: Nach einer Vorlage aus *The Australian Mathematics Teacher* (10/83), Queensland, von W. Fahr, Berlin



Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig, Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit,
III/18/97
AN (EDV) 128

Redaktionsschluß: 26. April 1984

Auslieferungstermin: 20. August 1984



Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

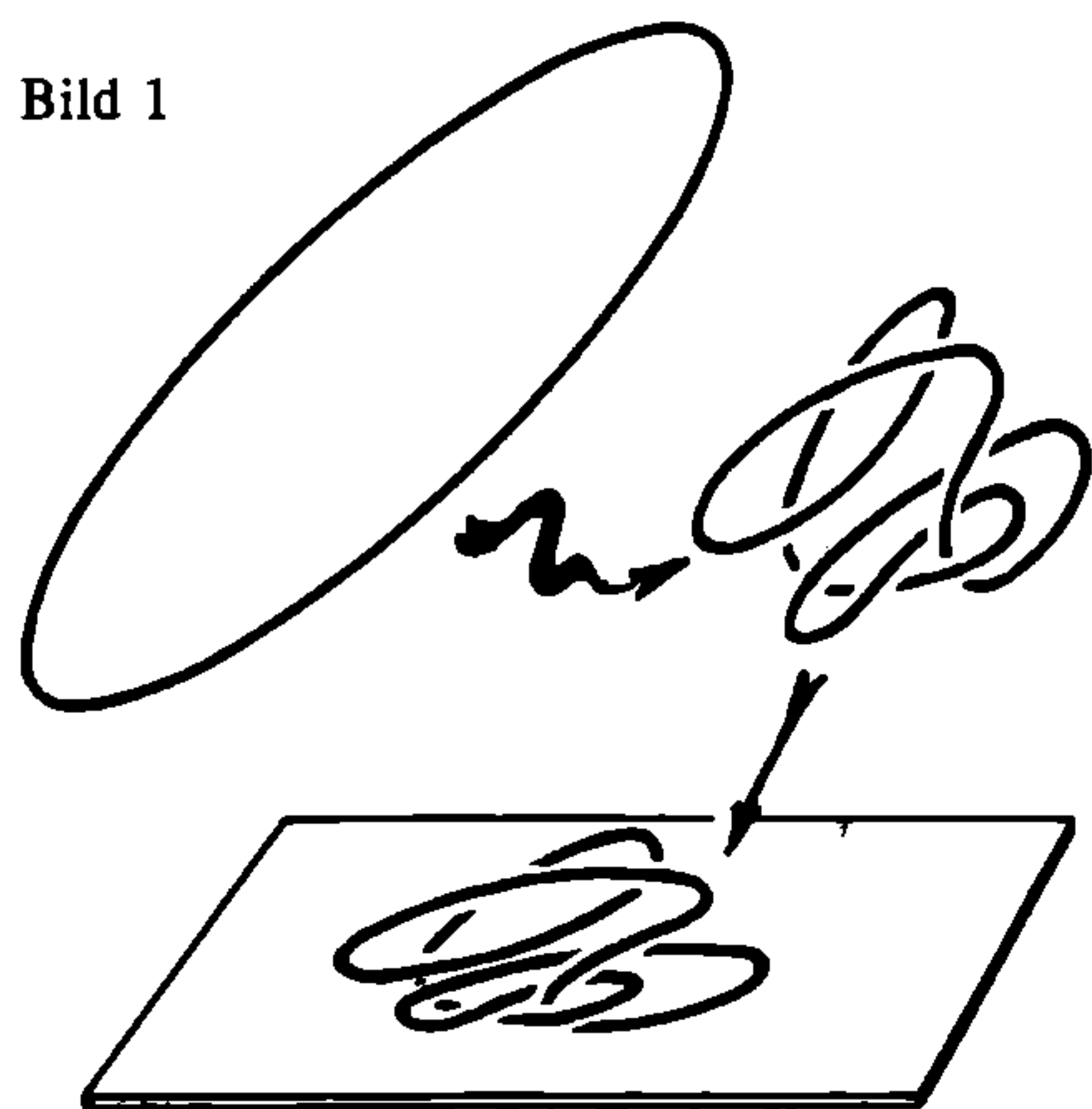
- 73 Das Entwirren von Figuren in der Ebene [8]¹⁾
Prof. Dr. S. W. Matwejew, Lomonossow-Universität Moskau
Beitrag aus Quant 4/83
- 75 Eine Aufgabe von Prof. Dr. Włodzimierz Krysicki [8]
Mathematisches Institut der Technischen Universität Łódź
- 76 Verkehrszeichen und Verkehrsleiteinrichtungen aus der Sicht der Darstellenden Geometrie [6]
Dr. E. Schröder, Sektion Mathematik der Technischen Universität Dresden
- 78 Zum 1200. Geburtstag Muhammad ibn Musa al-Hwarizmi [8]
Dr. A. Volodarskij, Institut der Geschichte der Naturw. und Technik der Akad. der Wi. der UdSSR / Mathematikfachlehrer A. Halameisär, beide Moskau
- 79 *alpha*-Sprachecke [7]
H. Begander/Dr. C. P. Helmholtz/J. Lehmann, alle Leipzig
- 80 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht
speziell für Kl. 5/6
Axialsymmetrie [5]
Dr. E. Quaisser/Dr. H.-J. Sprengel, Sektion Mathematik der Pädagogischen Hochschule Karl Liebknecht, Potsdam
- 81 Historische Aufgabe: Weizenkörner auf einem Schachbrett [5]
Dr. H. Pieper, Zentralinstitut für Astrophysik d. Akademie der Wissenschaften der DDR
- 82 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt [5]
Klaus-Peter berichtet aus seinem Mathematikzirkel, Teil 4 und Schluß
Dr. P. Göthner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig
- 84 Ein Spiel: Die fixe 7 [5]
Dipl.-Lehrer Ch. Werge, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig
- 84 Es hat Spaß gemacht – Preisträger des Schachwettbewerbs 1983 (6/83) [5]
H. Rüdiger, Schichtleiter im Werk für Fernsehelektronik Berlin
- 85 Prof. Dr. Massera am Telefon aus Montevideo [5]
W. Israel, ADN Berlin
- 86 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig/OL H. Pätzold, Waren/Müritz
- 88 XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR [5]
Lösungen der Kreisolympiade (Klassenstufen 9/10)
- 90 XXIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR [5]
Aufgaben der Schulolympiade (1. Stufe)
- 92 Lösungen [5]
- IV. U.-Seite: Fingerspiele aus einem japanischen Unterhaltungsbuch [5]
Internationale Buchausstellung (IBA) 1983

¹⁾ bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Das Entwirren von Figuren in der Ebene

Wir stellen aus dünnem Draht ein Kreismodell her. Dieses verbiegen wir dann im Raum so, daß es eine kompliziertere Form annimmt. Das Drahtknäuel werfen wir auf die (ebene) Tischplatte und drücken es fest an (Bild 1).

Bild 1



Kann man die so erhaltene Drahtfigur wieder zu einem Kreis entwirren, ohne sie aus der Ebene herauszunehmen?

Um dieses Problem mathematisch bearbeiten zu können, nehmen wir an, daß die Dicke des Drahtes Null sei. Damit erreichen wir, daß in den Punkten, in denen ein Teil der Figur über einen anderen hinweggeht (in den *Doppelpunkten*) auch der obere Teil in der Ebene liegt. Der Draht sei sehr biegsam, dennoch sollen seiner Biegsamkeit Grenzen gesetzt sein: Der Krümmungsradius eines bogenförmigen Stücks darf nicht Null werden, sonst bricht der Draht. Insbesondere sei das Zusammenziehen einer Schleife (Bild 2) verboten.

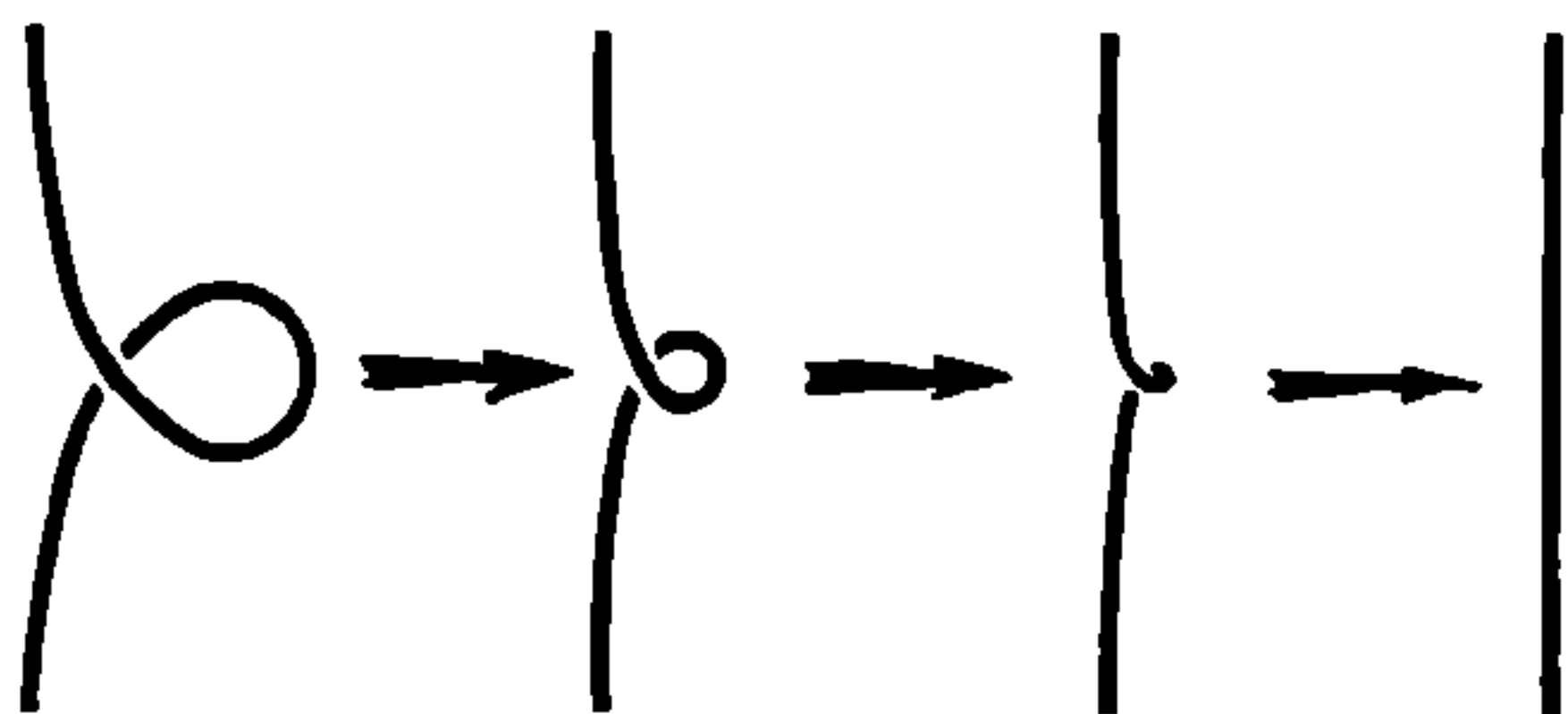
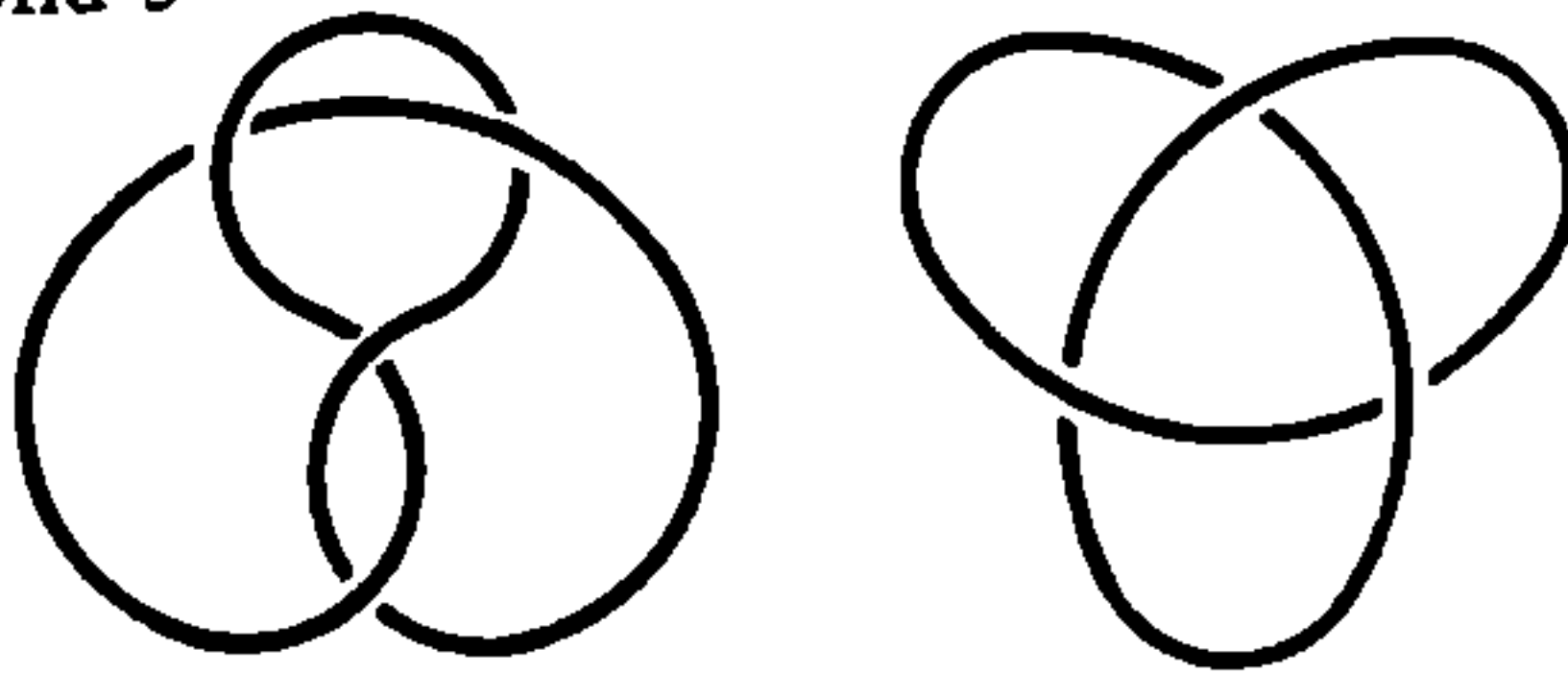


Bild 2

Es ist klar, daß unsere Figur *im Raum* immer entwirrt werden kann, denn wir sind ja von einem Kreis ausgegangen. Diesen kann man wiederherstellen, indem man die vorgenommenen Verbiegungen in umgekehrter Reihenfolge ausführt. Indem wir von einem Kreis ausgegangen sind, haben wir alle mit Knoten zusammenhängenden

Schwierigkeiten umgangen. Wären wir von einer verknoteten Figur wie im Bild 3 ausgegangen, würde uns das Entwirren und Wiederherstellen eines Kreises weder in der Ebene noch im Raum gelingen.

Bild 3



Kehren wir zu unserem Problem zurück.

Wir experimentieren und überlegen

Durch Probieren mit Draht (oder auch mit Bindfaden) merkt ihr leicht, daß die Figur aus Bild 1 entwirrt werden kann. Den entsprechenden Prozeß zeigt Bild 4.

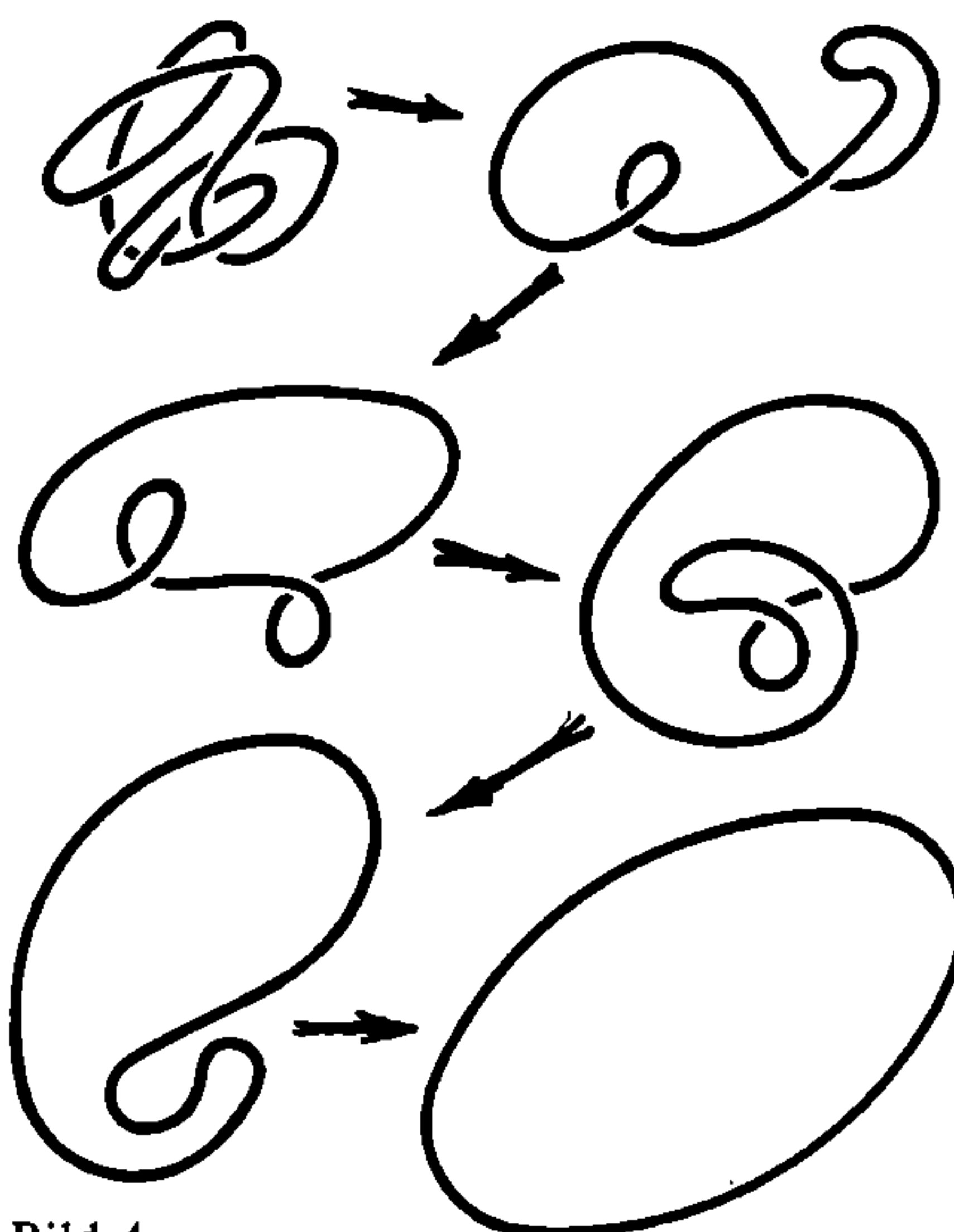


Bild 4

▲ 1 ▲ Versucht, die Figuren a bis f aus Bild 5 zu entwirren! Sicher könntet ihr die Figuren b, e und f entwirren. Der Mißerfolg bei den Figuren a, c und d läßt vermuten, daß es auch nicht entwirrbare Figuren gibt. Doch wie *beweist* man, daß *niemand* diese Figuren entwirren kann?

Im Prozeß des Entwirrens einer gegebenen Figur wird diese schrittweise in andere Figuren überführt. Dabei bleiben manche Eigenschaften dieser Figur erhalten, andere ändern sich. Man ordnet nun jeder (überhaupt möglichen) Figur aufgrund gewisser ihrer Eigenschaften eine Zahl zu. Ändert

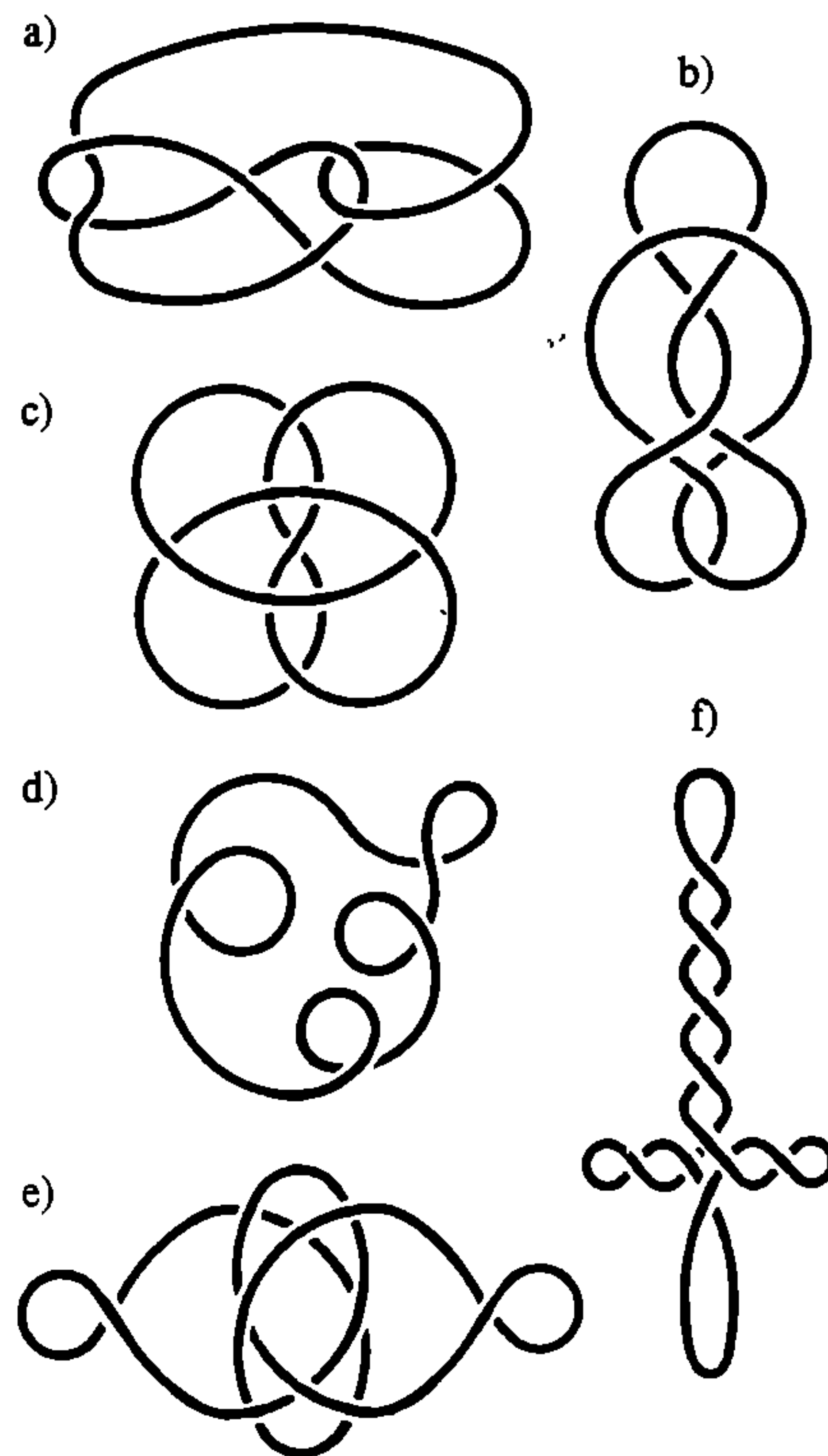


Bild 5

sich während eines beliebigen Entwirrungsprozesses diese Zahl beim Übergang von einer Figur zur nächsten jeweils nicht, so ist sie eine *Invariante*. Man bestimmt nun für die Ausgangsfigur und die angestrebte Endfigur (Kreis) die Werte solch einer Invariante und vergleicht sie. Sind die beiden Werte voneinander verschieden, so ist eine Entwirrung nicht möglich, denn die Invariante darf ihren Wert in solch einem Prozeß ja nicht ändern!

Dieses Verfahren benutzen Mathematiker oft, um die Unmöglichkeit einer Konstruktion bzw. eines Prozesses, bei dem Objekte in andere überführt werden sollen, nachzuweisen. So können wir von zwei Dreiecken mit den Flächeninhalten $A_1 = 25 \text{ cm}^2$ und $A_2 = 15 \text{ cm}^2$ sofort sagen, daß sie nicht durch eine Bewegung ineinander übergeführt werden können (d. h., nicht kongruent sind), denn der Flächeninhalt ist eine Invariante der Bewegungen. (Allerdings kann aus dem Übereinstimmen der Flächeninhalte zweier Dreiecke nicht auf ihre Kongruenz geschlossen werden.)

Versuchen wir nun, jeder unserer *Drahtfiguren* eine gewisse Zahl zuzuordnen. Das erste, was uns einfällt, ist die Anzahl der Doppelpunkte der Figur. Aber das ist keine Invariante, wie z. B. im Bild 4 erkennbar ist. Wenn man dieses Bild jedoch aufmerksam betrachtet, stellt man fest, daß Doppelpunkte *paarweise* erscheinen und verschwinden. Das bringt uns auf eine Idee: Ist die Anzahl der Doppelpunkte gerade (bzw. ungerade), so bleibt sie dies während des gesamten Prozesses, d. h., *der Rest bei Division der Anzahl der Doppelpunkte durch 2* ist eine *Invariante* des Entwirrungsprozesses!

Daraus folgt z. B., daß die Figur 5a nicht entwirrt werden kann (7 Doppelpunkte – ungerade Zahl – Rest 1; Kreis: 0 Doppel-

punkte – gerade Zahl – Rest 0; $1 \neq 0$). Figur 5d hat 4 Doppelpunkte, d. h., bei ihr hat die Invariante den Wert 0 – wie auch beim Kreis. Heißt das, daß sie entwirrt, d. h. in einen Kreis übergeführt werden kann? Nein! Denn darüber, ob das Nullsein der Invariante auch *hinreichend* für die Entwirrbarkeit der Figur ist, wissen wir überhaupt nichts. Die Frage nach der Entwirrbarkeit der Figur 5d bleibt vorläufig offen.

Unsere Überlegungen zeigen, daß es für die Lösung des eingangs gestellten Problems sinnvoll ist, weitere Invarianten des Entwirrungsprozesses zu suchen. Das wollen wir jetzt tun.

Die Invariante V

Es sei eine der oben beschriebenen Figuren in der Ebene gegeben, z. B. die im Bild 6. Wir wählen auf ihr einen beliebigen Punkt A , von dem aus wir (in einer der beiden möglichen Richtungen) die Figur durchlaufen. Dabei denken wir uns in jedem durchlaufenen Punkt einen Pfeil in der jeweiligen Laufrichtung angebracht. (Dieser Pfeil liegt jeweils auf der *Tangente* an die Figur im entsprechenden Punkt. Anschaulich können wir uns vorstellen, daß wir mit einem Auto die Figur abfahren. Unsere Richtungspfeile zeigen dann jeweils in Leuchtrichtung der Scheinwerfer.) Beim Durchlaufen der Figur ändern diese Pfeile dauernd ihre Richtung. Um dies besser verfolgen zu können, legen wir noch einen Punkt 0 in der Ebene fest und denken uns an diesem Punkt einen weiteren Pfeil drehbar angebracht. Beim Durchlaufen der Figur soll sich dieser Pfeil so um 0 drehen, daß er stets parallel zum jeweiligen Richtungspfeil ist.

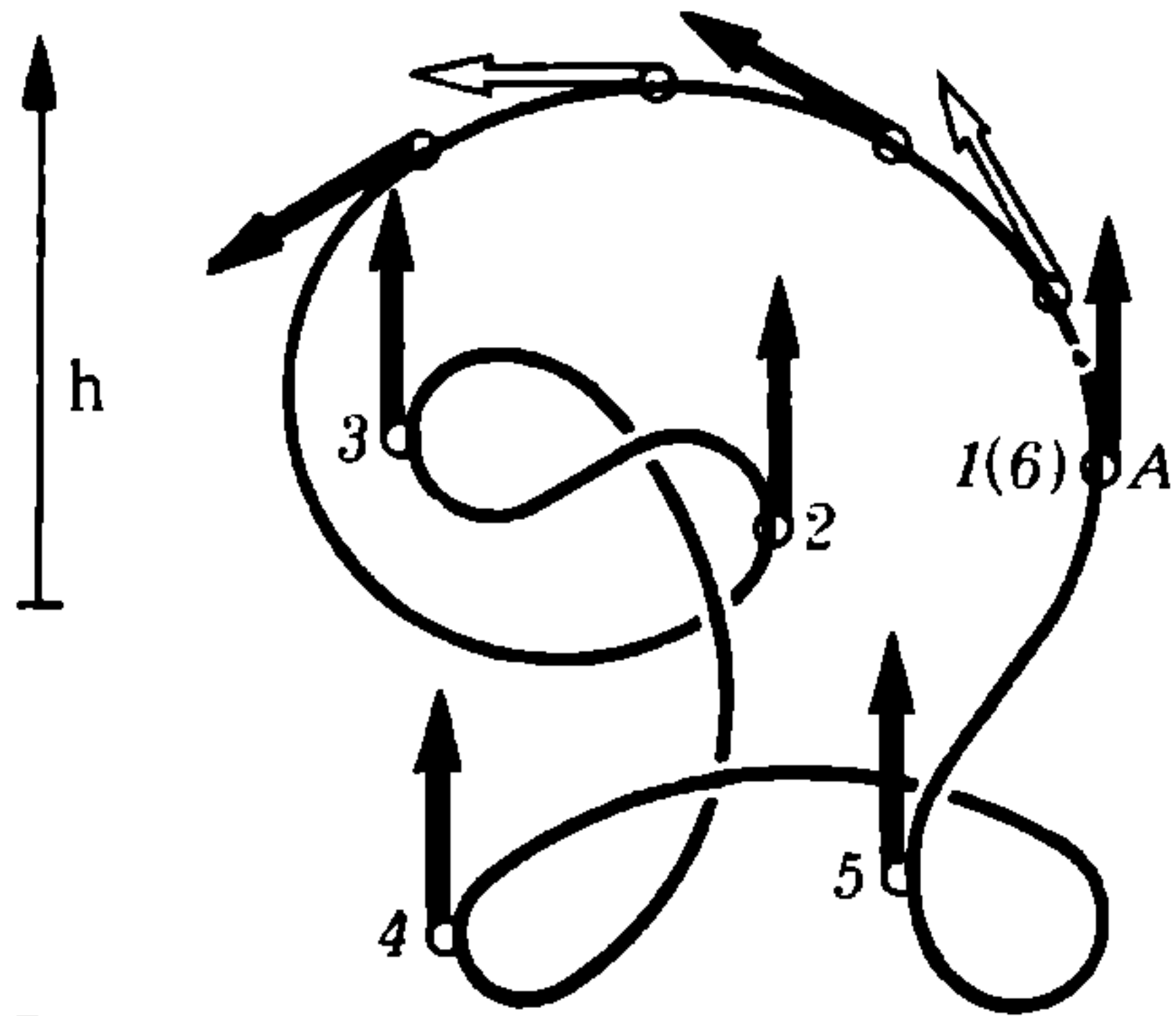
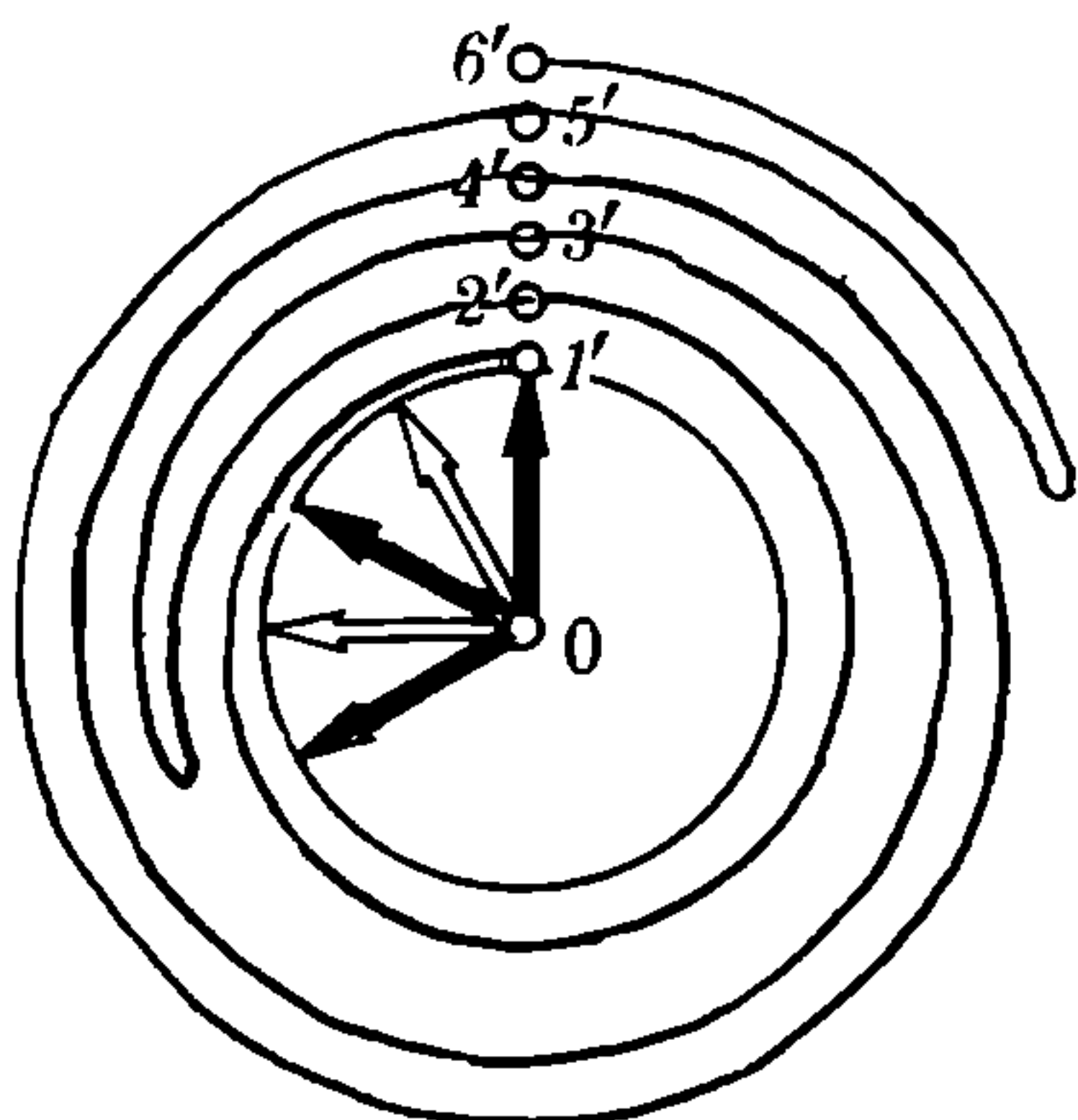


Bild 6



Da im Moment der Vollendung des Durchlaufs der Figur und der Rückkehr zum Punkt A der sich drehende Pfeil wieder seine Ausgangslage einnimmt, ist die Gesamtzahl seiner Umdrehungen eine ganze Zahl. Dabei werden seine Drehungen entsprechend dem Drehsinn positiv (entgegen dem Uhrzeiger) bzw. negativ (im Uhrzeigersinn) gerechnet.

Im unteren Teil von Bild 6 ist der Weg der Spitze des sich um 0 drehenden Pfeils dargestellt. (Der Anschaulichkeit halber wurden die Kreisbögen versetzt gezeichnet; eigentlich spielt sich alles auf demselben Kreis ab, und die Punkte 1' bis 6' fallen zusammen.) Der Pfeil vollzieht (-1) Umdrehungen: Von 1' zu 2' eine Umdrehung, von 2' zu 3' und von 5' zu 6' werden die Umdrehungen nicht vollendet, von 3' zu 4' und von 4' zu 5' wird je eine Umdrehung im negativen Sinn ausgeführt.

Die angekündigte Invariante V ist der absolute Betrag der Gesamtzahl der Umdrehungen des Pfeils um den Punkt 0. Sie hängt offensichtlich nicht von der Wahl des Ausgangspunktes A ab, auch nicht vom gewählten Durchlaufsinne, da bei seiner Änderung die Gesamtzahl der Umdrehungen nur das Vorzeichen wechselt.

Für die Figur im Bild 6 ist $V = 1$.

Wir deuten hier nur an, wie man beweisen könnte, daß V tatsächlich eine Invariante des Entwirrungsprozesses ist. In solch einem Prozeß ändert sich die Lage der in den Punkten angebrachten Richtungspfeile fließend, ohne Sprünge. Deshalb muß sich auch V stetig ändern. Aber für V kommen nur ganze Zahlen in Frage, zwischen denen nur sprunghafte Änderungen möglich sind. Deshalb bleibt V beim Entwirren einer Figur unveränderlich, ist also eine Invariante.

Jetzt können wir uns wieder mit Figur 5d beschäftigen. Für sie ist $V = 3$, deshalb kann sie nicht zum Kreis ($V = 1$) entwirrt werden.

▲ 2 ▲ Weist nach, daß für Figur 5d $V = 3$ ist!

Bei der Bearbeitung des Auftrages ▲ 2 ▲ habt ihr sicher bemerkt, daß das Zählen der Umdrehungen des Pfeils um den Punkt 0 nicht sehr bequem ist; leicht unterläuft ein Fehler. Aber man kann V auch leichter bestimmen.

Dafür wählen wir eine feste Richtung in der Ebene, z. B. im Bild 6 den Strahl h , und stellen alle Punkte fest, in denen der Richtungspfeil in diese festgelegte Richtung zeigt. Wenn ein kleines Stück der Figur, das solch einen Punkt enthält, links von diesem Punkt liegt, so schreiben wir $+1$ an diesen Punkt. Liegt es rechts, so notieren wir -1 . (Falls die Figur in jeder noch so kleinen Umgebung des betreffenden Punktes zu beiden Seiten des Richtungspfeils verläuft, schreiben wir keine Zahl auf.)

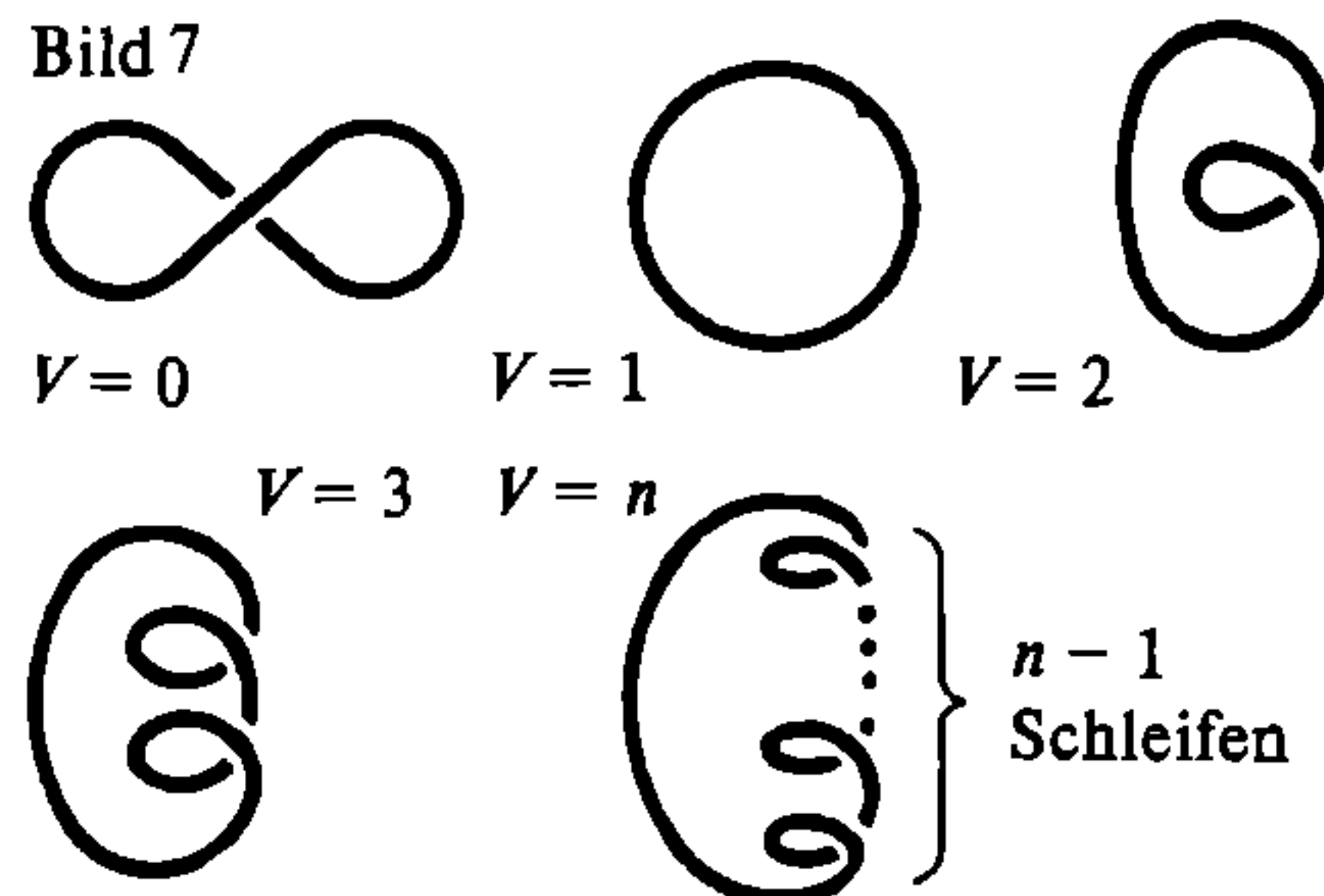
Dann ist die Invariante V gleich dem absoluten Betrag der Summe der aufgeschriebenen Zahlen. Zum Beispiel wird den Punkten 1 und 2 im Bild 6 jeweils $+1$ zugeordnet, den

Punkten 3, 4 und 5 jeweils -1 . Damit wird

$$V = |1 + 1 - 1 - 1 - 1| = |-1| = 1.$$

Im Bild 7 ist für jede nichtnegative Zahl n eine Figur mit $V = n$ abgebildet. Wir erinnern uns daran, daß eine Figur, die entwirrt werden soll, dieselbe Variante V haben muß, wie ein Kreis, nämlich $V = 1$.

Bild 7

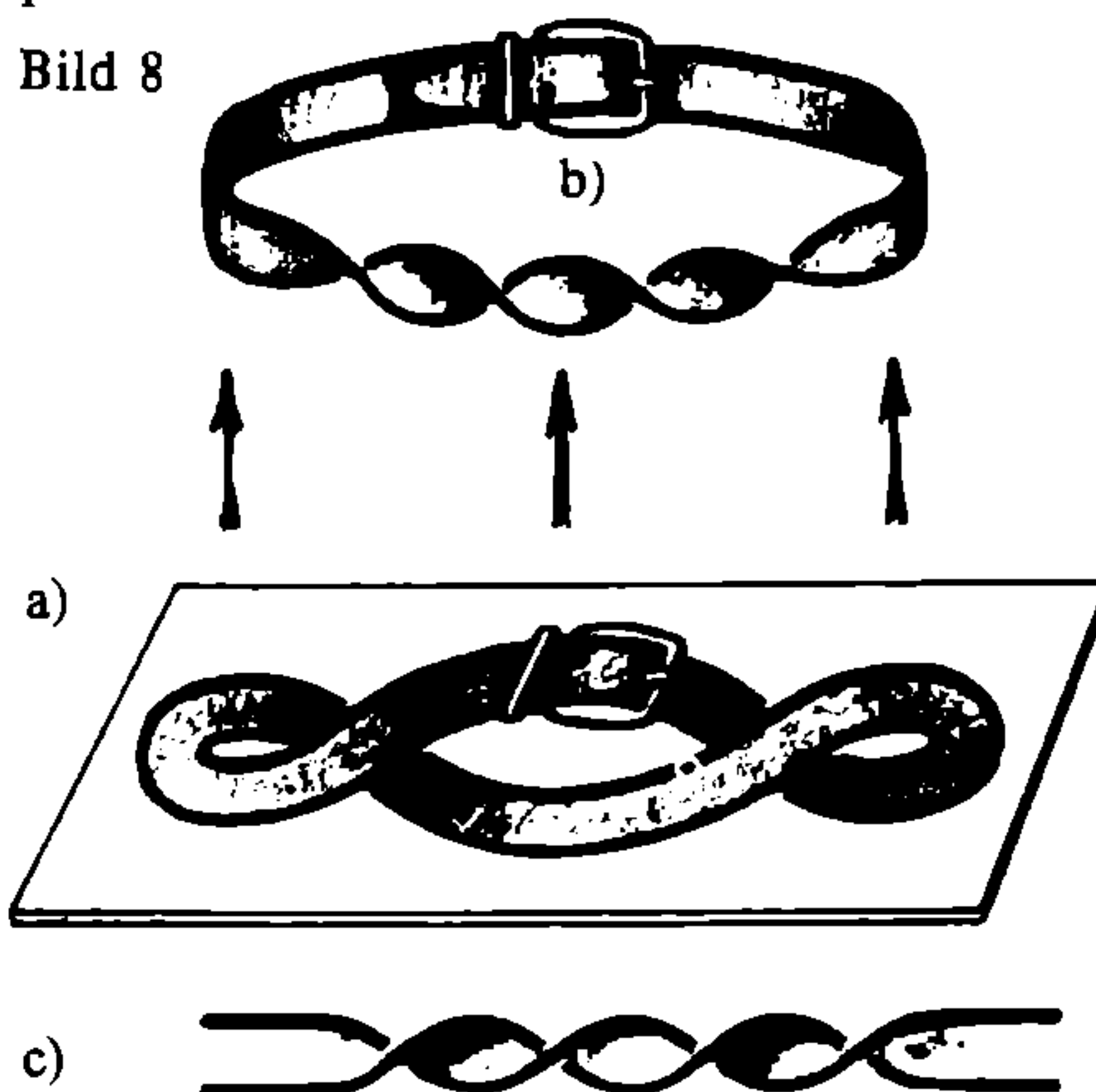


Die Invariante R

$V = 1$ ist eine notwendige Bedingung dafür, daß eine Figur entwirrt werden kann. Ist diese Bedingung aber auch *hinreichend*?

Ich glaubte zunächst, daß die letzte Frage positiv zu beantworten sei. Jedoch überzeugten mich erfolglose Versuche mit meinem Gürtel, der wie im Bild 8a auf dem Tisch lag, vom Gegenteil. Dabei machte ich aber eine wichtige Beobachtung: Der vom Tisch hochgehobene Gürtel war doppelt verdreht!

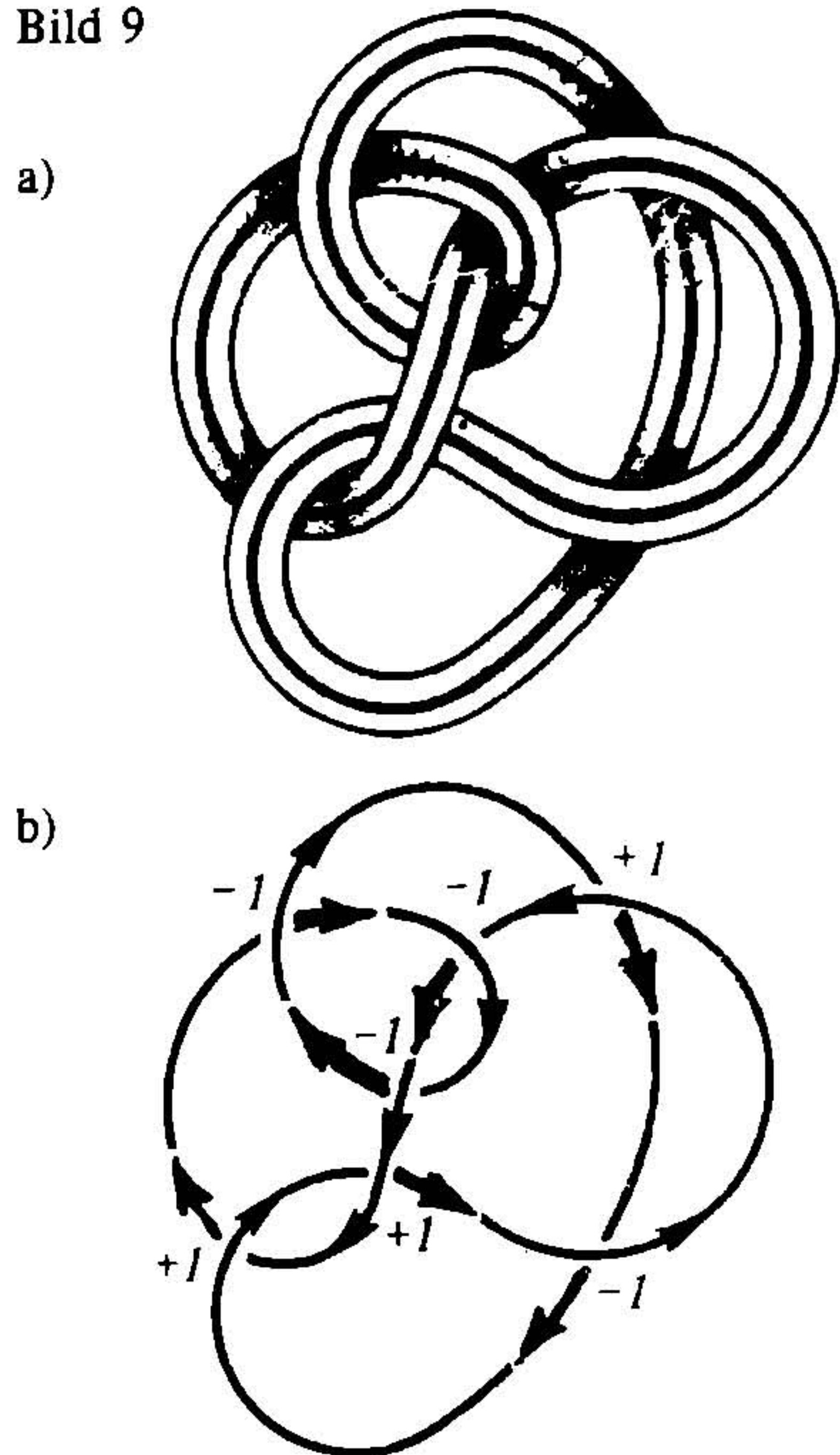
Bild 8



Wir ersetzen die Figur durch ein Band, das so in der Ebene liegt, daß die Figur mit seiner Mittellinie zusammenfällt (Bild 9a).

Wenn wir die Figur im Raum entwirren (indem wir sie in die Ausgangslage vor dem Werfen auf die Ebene zurückbringen), erhalten wir ein verdrehtes Band. Die Anzahl der Verdrehungen bezeichnen wir mit R . Das ist eine zweite Invariante, deren Nullsein notwendig ist für die Entwirrbarkeit der Figur in der Ebene. Die Anzahl der Verdrehungen wird dabei mit dem Vorzeichen „+“ versehen, wenn das Verdrehen wie im Bild 8b geschieht, und mit dem Vorzeichen „-“, wenn das Band so wie in 8c verdreht ist. (Denkt an den Unterschied zwischen Rechts- und Linksgewinde!) R ist tatsächlich eine Invariante, denn das Entwirren einer Figur läßt sich als Entwirren des zugehörigen Bandes in der Ebene auffassen, und die Anzahl der Verdrehungen des Bandes bleibt nicht nur bei seiner Entwirrung in der Ebene, sondern auch bei belie-

Bild 9



biger Deformation im Raum unverändert.

Für das *praktische* Bestimmen von R geben wir (ohne Beweis) ein einfaches Verfahren an: Wir wählen auf der Figur einen Durchlaufssinn. An jeden Doppelpunkt schreiben wir die Zahl $+1$, wenn in ihm der untere Richtungspfeil gegenüber dem oberen nach links zeigt, andernfalls schreiben wir -1 . Die Invariante R ist die Summe dieser Zahlen.

Zum Beispiel hat die Figur im Bild 9b 3 positive und 4 negative Doppelpunkte, deshalb ist $R = -1$. Diese Figur läßt sich in der Ebene nicht entwirren, denn für jeden Kreis ist $R = 0$.

Notwendige und hinreichende Bedingungen

Wir haben erkannt, daß $V = 1$ und $R = 0$ notwendige Bedingungen dafür sind, daß eine Figur entwirrt werden kann, so daß ein Kreis entsteht. Sind diese Bedingungen *zusammen* auch hinreichend? M. a. W., kann man aus $V = 1$ und $R = 0$ auf die Entwirrbarkeit der Figur, die auf eingangs beschriebene Art entstand, schließen?

Die Antwort gibt der folgende Satz, auf dessen recht interessanten, aber auch umfangreichen Beweis wir hier aus Platzgründen verzichten müssen.

Satz: Für die Entwirrbarkeit einer Figur, die durch Werfen eines im Raum deformierten Kreises auf eine Ebene entstand, in dieser Ebene ist es notwendig und hinreichend, daß ihre Invarianten V und R die Werte $V = 1$ und $R = 0$ annehmen.

Dieser Satz löst das am Anfang des Artikels aufgeworfene Problem vollständig. Die in ihm formulierte notwendige und hinreichende Bedingung ist für eine gegebene Figur schnell zu überprüfen.

▲ 3 ▲ Wendet den Satz auf die Figuren a bis d im Bild 10 an!

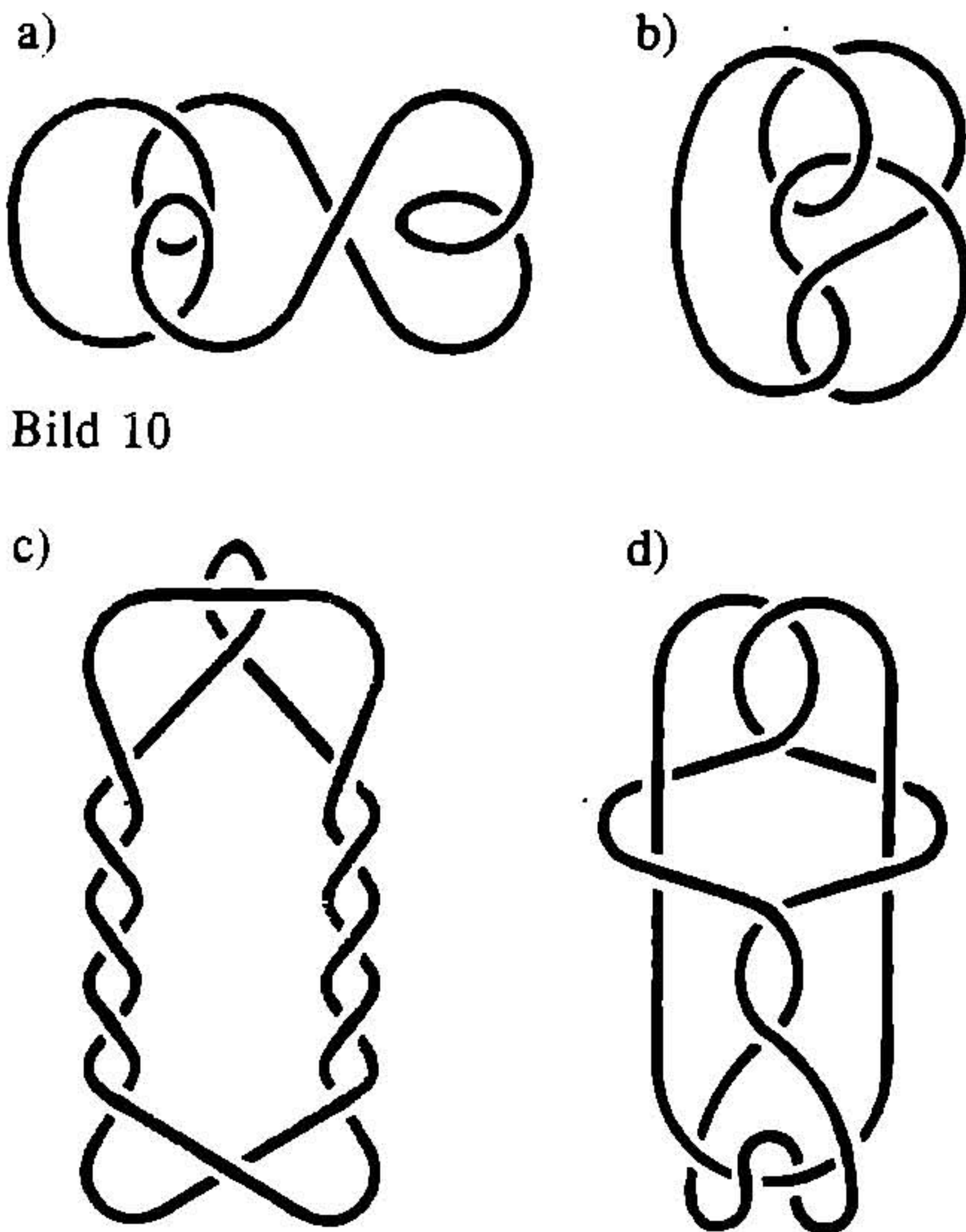


Bild 10

▲ 4 ▲ Zeichnet für jedes Paar ganzer Zahlen m, n ($m \geq 0$) mit ungerader Summe eine Figur mit $V = m$ und $R = n$! Weshalb gibt es keine Figur mit $V = 1$ und $R = 1$?

▲ 5 ▲ Beweist, daß eine beliebige Figur auf einer Kugel entweder in einen Kreis oder in eine „Acht“ überführt werden kann!

S. W. Matwejew als Autor /
C. P. Helmholtz, Leipzig, als Übersetzer
und Bearbeiter

Ein Blick ins Jahr 1953

Kurz nach der Gründung der DDR wurden zur Überprüfung des Leistungsstandes der Schüler in den Klassen 5, 6, 7, 8 und 9 sogenannte Kontrollarbeiten (vor den Winterferien) geschrieben. Wir geben für die Klassenstufen 5 den Inhalt eines Aufgabenzettels original wieder:

Klasse 5

1. Berechne $4895 \cdot 236$.
2. Berechne: $(254 - 38 + 4 \cdot 63) : 18$.
3. Im Jahre 1952 verbrauchte in der DDR jede Person im Durchschnitt 23 kg Zucker. Eine Kleinstadt hatte 19526 Einwohner. Wieviel kg Zucker wurden demnach in diesem Ort benötigt?
4. In einer Schule wurden von den Schülern folgende Beträge gespart: 1. Woche: 25,40 DM; 2. Woche: 35,80 DM; 3. Woche: 46,90 DM; 4. Woche: 48,70 DM. Wieviel DM wurden durchschnittlich in einer Woche gespart?
5. Zeichne einen Winkel von 48° . Verdopple diesen Winkel mit dem Zirkel!
6. Berechne $127806 : 537$; überprüfe das Ergebnis durch Probe!
O. Schulze

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Włodzimierz Kryszicki

Mathematisches Institut
der Technischen Universität Łódź

▲ 2463 ▲ Für welche Werte des Parameters m hat die Gleichung $x^2 - mx + 1 = 0$

eine Doppellösung? Wie lautet diese? Diese Aufgabe wurde dem MSB-Band 119 entnommen.

Keine Angst vor x und y

Unter diesem Titel erscheint im Teubner-Verlag, Leipzig, der 119. Band der „Mathematischen Schülerbücherei“. Der Autor Prof. Dr. W. Kryszicki besuchte 1981 den 1. Mathematikerkongreß der DDR, und damals wurden die Einzelheiten zur Übersetzung seines Buches besprochen. Der Übersetzer Dr. H. Schwarz, Berlin, und der Bearbeiter Doz. Dr. R. Hofmann, Leipzig, stellten die deutsche Fassung rechtzeitig vor dem Internationalen Mathematikerkongreß in Warschau fertig, so daß im August des vergangenen Jahres letzte Absprachen mit dem Autor getroffen werden konnten. Untenstehender Gruß an alle *alpha*-Leser stammt aus jenen Tagen.



Viele Grüße
an alle
alpha-Leser
W. Kryszicki

Kurzbiographie

Prof. Dr. Włodzimierz Kryszicki wurde 1905 in Warschau geboren. Von 1923 bis 1928 studierte er Mathematik an der Universität Warschau. Seit 1945 ist er als wissenschaftlicher Mitarbeiter und Hochschullehrer am Mathematischen Institut der Technischen Universität Łódź tätig. Seine Arbeitsgebiete sind vor allem Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. Neben Büchern in polnischer, russischer und englischer Sprache erschienen von ihm:

Höhere Mathematik in Aufgaben, Teil 1
Teubner-Verlag 1967

Zählen und Rechnen einst und jetzt
Teubner-Verlag 1968

Höhere Mathematik in Aufgaben, Teil 2
Teubner-Verlag 1971

Verkehrszeichen und Verkehrsleiteinrichtungen aus der Sicht der Darstellenden Geometrie

Verkehrszeichen und Verkehrsleiteinrichtungen haben mit den symbolischen Zeichen der Mathematik eine Gemeinsamkeit. In beiden Bereichen verwendet man eine sinnfällige Symbolik und Darstellungsweise für die zu fordernden Operationsschritte und Verhaltensnormen.

Im ersten Fall soll dadurch ein reaktions-schnelles Verhalten im Straßenverkehr sichergestellt werden, ohne den Verkehrsteilnehmer dabei mit einem schwer erlernbaren Wissen zu belasten. Im zweiten Fall bewirkt die Sinnfälligkeit der Symbolik ein Entgegenkommen beim Lernprozeß und eine Erleichterung des Abstraktionsprozesses im Umgang mit mathematischen Symbolen und Operationszeichen. Man denke hierbei etwa an die von Leibniz eingeführte Symbolik für das Differenzieren und Integrieren einer Funktion. Wir wollen nun einige Verkehrszeichen und Verkehrsleiteinrichtungen im Hinblick auf die *Darstellende Geometrie* unter die Lupe nehmen. Hierzu versetzen wir uns in die Rolle eines PKW-Fahrers, der sein Verhalten und seine Fahrweise auf diese Leiteinrichtungen einzustellen hat.

Der obere Teil des Verkehrszeichens (Bild 1) zeigt mir an, daß ich mich auf einer Hauptstraße befinde. Das untere Zusatzzeichen informiert mich darüber, wie die Hauptstraße über den vor mir liegenden Verkehrsknotenpunkt hinwegführt. Biege ich auf der Kreuzung nach links ab, so bleibe ich weiterhin auf der Hauptstraße mit den entsprechenden Rechten für die Vorfahrt. Wenn ich jedoch an der Kreuzung geradeaus fahre oder nach rechts abbiege, verlasse ich die Hauptstraße, sofern diese Verkehrssituation nicht durch ein weiteres Schild hinter der Kreuzung aufgehoben wird.

Das unter dem Hinweiszeichen für Hauptstraße in Bild 1 angebrachte Zusatzzeichen gibt mir also Auskunft darüber, in welcher Rechtslage ich mich nach Überqueren der Kreuzung in einer der drei möglichen Richtungen befinde. Im Unterbewußtsein klappt der Verkehrsteilnehmer das Zusatzzeichen um seine obere waagerechte Kante so um, daß das Bild nach oben zeigt. Damit erhält er den Grundriß der Kreuzung in richtiger Orientierung, aus welchem sich die Lagen von Haupt- und Nebenstraßen leicht entnehmen lassen. Diese Umsetzung des Straßengrundrisses in seine räumliche Bezogenheit mit den daraus ableitbaren

Vorfahrtsrechten muß sich beim Kraftfahrer im Bruchteil einer Sekunde vollziehen.

In Bild 2 signalisiert mir das obere Vorschrittszeichen (rot berandetes gleichseitiges Dreieck mit einer Ecke nach unten zeigend) „Vorfahrt auf der Hauptstraße beachten“. Das untere Zusatzzeichen informiert mich darüber, daß ich – auf einer Nebenstraße kommend – an einer Kreuzung angelangt bin, die von einer Hauptstraße in einem Rechtwinkelzug durchsetzt wird. Wegen der Vorfahrt auf der Hauptstraße muß ich den von links kommenden und den entgegenkommenden Verkehr beachten. Da an dieser Kreuzung von rechts eine Nebenstraße einmündet, ist auch den von rechts kommenden Fahrzeugen die Vorfahrt einzuräumen. Das Zusatzzeichen vermittelt bei Anfahrt an eine Kreuzung den Überblick über die Vorfahrt bezüglich aller an der Kreuzung einmündenden Straßen. Man verzichtet auf das Zusatzzeichen, wenn die Straßenkreuzung von der Hauptstraße eindeutig geradlinig durchlaufen wird.

Unerlässlich notwendig sind Zusatzzeichen an Hinweiszeichen für Hauptstraßen in den Fällen, wo komplizierte Straßenknotenpunkte zu schwer überschaubaren Situationen bezüglich des Vorfahrtsrechtes führen können. In Bild 3 findet sich ein solches Zusatzzeichen, dessen Aussage der Kraftfahrer zur Sicherung eines zügigen Verkehrsablaufes in Bruchteilen einer Sekunde lesen und erfassen muß.

Auch auf Warnzeichen finden sich Grobdarstellungen des Grundrisses einer vor dem Fahrer liegenden Straßenführung; z. B. beiderseitige Fahrbahneinengung in Bild 4 und rechtsseitige Einengung der Fahrbahn in Bild 5. Unter den Vorschrittszeichen (weiß auf blauem Grund) zeichnen sich jene durch besondere Sinnfälligkeit aus, welche eine Vergrößerung (Bild 6) oder Verringerung (Bild 7) der Zahl der Fahrspuren symbolisieren. Häufig erfordert die Verringerung der Anzahl von Fahrspuren ein umsichtiges Verhalten und eine Reduzierung der Fahrgeschwindigkeit. Vor Einfahrt in nicht-durchführende Straßen will uns das Hinweiszeichen für »Sackgasse« bewahren (Bild 8). Hier ist die durch einen roten Querbalken versperrte Straße auf blauem Grund im Grundriß dargestellt.

Häufig ergibt sich im Großstadtverkehr die

Situation, daß ein Fahrer mit seinem Fahrzeug an einer Kreuzung links abbiegen möchte, was ihm jedoch durch ein Vorschrittszeichen entsprechend Bild 9 verwehrt wird. Ein solches Verbot für Abbiegen nach links findet sich vielfach an belebten Straßenkreuzungen, weil Linksabbieger den zügigen Verkehrsablauf stark behindern könnten.

An Kreuzungen dieser Art ist dann ein weiteres Vorschrittszeichen angebracht, dessen Aussage manchem Anfänger Schwierigkeiten bereitet. Auf diesem Vorschrittszeichen (Bild 10) ist der Grundriß der Kreuzung und des dazu benachbarten Straßennetzes wiedergegeben. Ferner ist die für „Linksabbieger“ vorgeschriebene Fahrtroute als ein schwarzer Linienzug eingetragen. Durch einen Pfeil erhält der Linienzug eine Orientierung. Mittels der durch dreimaliges Rechtsabbiegen auszuführenden Volte wird erreicht, daß der „Linksabbieger“ die Kreuzung zweimal in Geradeausfahrt überquert, um so an sein Ziel zu gelangen. Dieses Beispiel verdeutlicht besonders gut, welche Hilfe uns solide Grundkenntnisse in der *Darstellenden Geometrie* beim Lesen von Verkehrszeichen bieten können.

Auch Hinweiszeichen sind in der Weise angelegt, daß man durch Umklappen der Schilder um die obere waagerechte Kante mit dem Bild nach oben zu einem ähnlichen und ähnlich gelegenen Lageplan gelangt, der ein schnelles Auffinden des richtigen Weges sichert (Bild 11, 12, 13).

Der unbefangene Leser wird nun meinen, daß auch alle Orientierungstafeln für Reisende z. B. an Ausgängen von Bahnhöfen oder Bushaltepunkten in der gleichen Weise ausgerichtet sind. Gemäß dieser Erwartung hätte der Reisende die Orientierungstafel in Gedanken um eine waagerechte Bildkante so umzulegen, daß der Stadtplan nach oben zeigt, um eine einfache Ähnlichkeitsbeziehung zwischen dem Bild und der objektiven Realität herstellen zu können. Leider erfüllen die vor Bahnhöfen aufgestellten Orientierungstafeln diese Erwartungen nur in den seltensten Fällen. In der Regel sind sie so aufgestellt, daß im Bild der Nordpfeil nach oben weist. Vom Reisenden wäre daher zu fordern, daß er einen Kompaß bei sich führt, um sich nach diesen Orientierungstafeln in einer fremden Stadt zurechtzufinden. Da man Reisen in der Regel ohne Kompaß anzutreten pflegt, müßten solche Orientierungstafeln an Bahnhöfen etwas freundenfreundlicher angelegt werden.

Mit den bisher betrachteten Verkehrszeichen erschöpfen sich keineswegs die Vergleichsmöglichkeiten mit Abbildungsverfahren der Darstellenden Geometrie. Unter den Warnzeichen finden sich Wiedergaben von jenen Objekten durch Seitenrisse, mit denen wir bei grober Unaufmerksamkeit möglicherweise kollidieren können. Von den in ein gleichseitiges Dreieck mit roter Umrandung eingefassten Seitenrissen einer elektrischen Straßenbahn (Bild 14) oder einer Dampflokomotive (Bild 15) geht zweifellos eine suggestive Wirkung aus, die



Bild 1



Bild 2



Bild 3



Bild 4



Bild 5



Bild 6



Bild 7



Bild 8



Bild 9

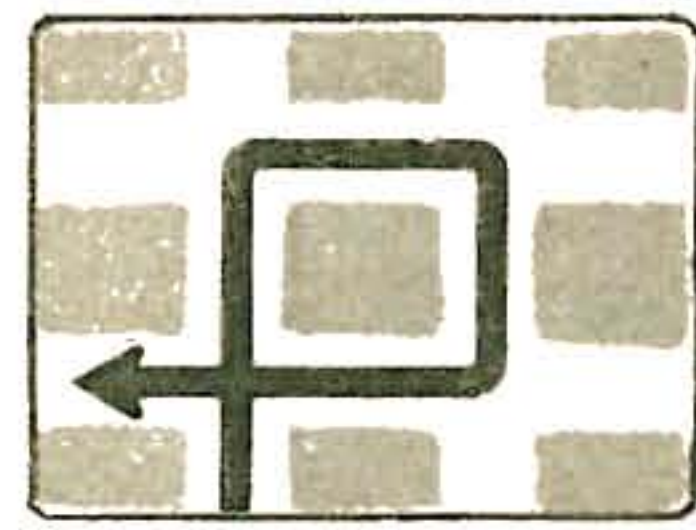


Bild 10



Bild 11

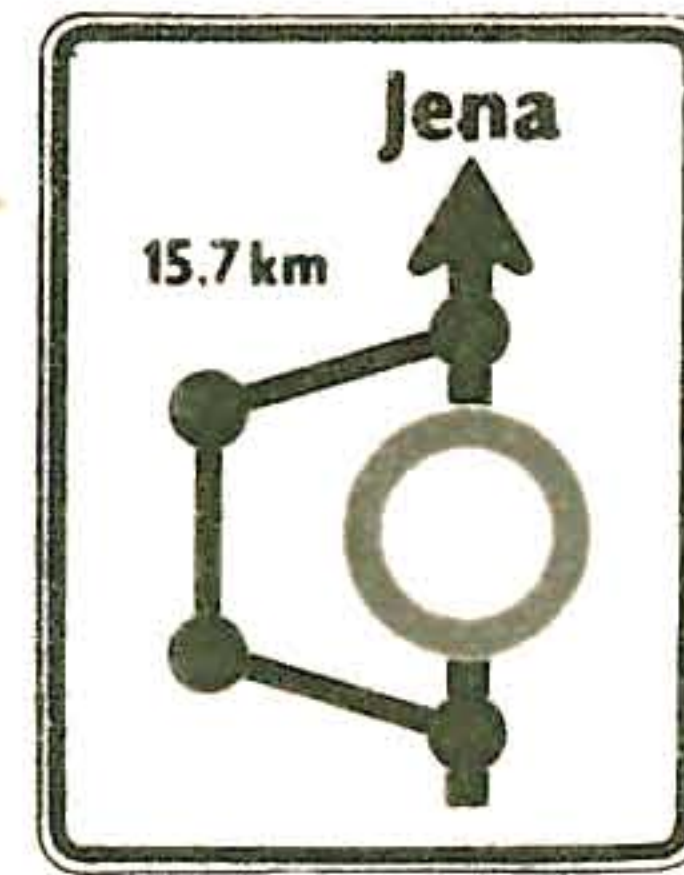


Bild 12

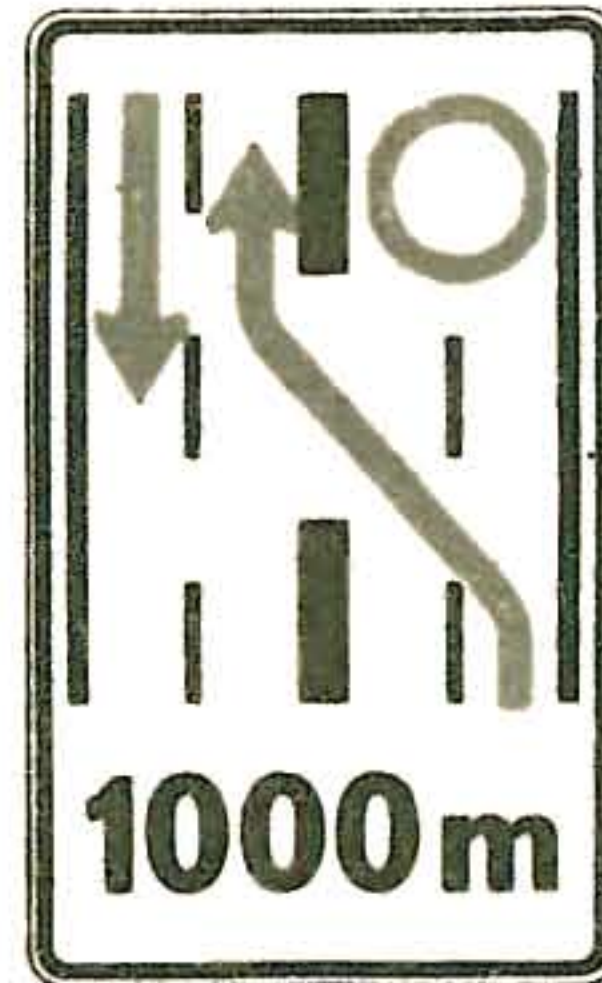


Bild 13



Bild 14



Bild 15



Bild 16



Bild 17



Bild 18



Bild 19



Bild 20



Bild 21



Bild 22

zu vorsichtiger Fahrweise animiert. Vorschriftenzeichen für das Parken von PKW unter teilweiser Verwendung des Gehweges lassen sich als Aufriß- oder Seitenrißdarstellungen von PKW interpretieren (Bild 16 und 17). Die Bilder dieser Warn- und Vorschriftenzeichen sind unter dem Sammelbegriff „Normalprojektion“ einzuordnen.

Die Hinweiszeichen für Hotel, Motel und Krankenhaus (Bild 18 und 19) enthalten die bildliche Wiedergabe eines Bettes. Die Längsseite des Bettes liegt parallel zur Bildebene. Die Fuß- und Kopfseite des Bettes erscheinen als Schrägbild, wobei in der Tiefe keine Verkürzungen auftreten. Somit stellt die Abbildung des Bettes eine schiefe Parallelprojektion dar. Durch Parallelprojektion eines räumlichen Objektes auf eine Bildebene entsteht ein axonometrisches Bild. In dem hier betrachteten Fall liegen zwei ausgezeichnete Kanten des Bettes (Längskante und senkrechte Kante) parallel zur Bildebene. Damit liegt der Sonderfall einer frontallaxonometrischen Abbildung vor.

Schließlich bieten uns die Verkehrszeichen auch zentralperspektive Bilder von räumlichen Objekten. Mit Bild 20 wird dem Kraftfahrer ein Fußgängerüberweg signalisiert. Der Weg führt quer über die Fahrbahn. Die „Zebra-Streifen“ sind Tiefenlinien des zentralperspektiven Bildes. Sie

schneiden sich in dem Hauptpunkt der Abbildung, welcher oberhalb des Kopfes des Fußgängers liegt. Der Horizont des Bildes entspricht dann der Waagerechten durch den Hauptpunkt. Ein solcher Bildeindruck entsteht etwa für den Fahrer eines LKW beim Blick aus der Fahrerkabine. Auch Anfang und Ende einer Autobahn werden durch ein zentralperspektives Bild der Autobahn vermittelt (Bild 21 bzw. 22). Der rote Schrägstrich in Bild 22 ist im Sinne einer Negation zu verstehen. So wird auch das Ende einer Hauptstraße durch einen schwarzen Schrägstrich über das Hinweiszeichen für Hauptstraße symbolisiert. Mittels einer genaueren Betrachtung der Verkehrszeichen und Verkehrsleiteinrichtungen konnten wir uns davon überzeugen,

daß im Verkehrswesen Abbildungsverfahren der Darstellenden Geometrie sehr wirkungsvoll zum Einsatz gelangen. Ferner können wir aus obigen Darlegungen folgern, daß ein gut entwickeltes räumliches Seh- und Vorstellungsvermögen zur Erhöhung der Sicherheit für uns als aktive Verkehrsteilnehmer und auch für unsere Mitmenschen beiträgt.

E. Schröder



Zum 1200. Geburtstag Muhammad ibn Musa al-Hwarizmi



Auf Empfehlung der UNESCO wurde 1983 in vielen Ländern der Welt der 1200. Geburtstag des führenden Universalgelehrten Muhammad ibn Musa al-Hwarizmi begangen.

Die Festveranstaltung der sowjetischen wissenschaftlichen Öffentlichkeit fand aus diesem Anlaß in Moskau, im Säulensaal des Hauses der Gewerkschaften statt. Dieser Saal ist einer der Festsäle, in denen offizielle Feiern und Empfänge stattfinden. Die Jubiläumsveranstaltung wurde vom Vizepräsidenten der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, Akademikmitglied P. N. Fedoseev, eröffnet. Anschließend setzten die Teilnehmer der Konferenz ihre Arbeit in Taschkent sowie Urgentsch, der heutigen Hauptstadt des Gebietes Choreszm in der Usbekischen Sozialistischen Sowjetrepublik, fort. Die Konferenz vereinte Wissenschaftshistoriker und Vertreter anderer wissenschaftlicher Disziplinen aus der DDR, der ČSSR, Ungarn, Österreich, der BRD, Belgien, den Niederlanden und den USA sowie sowjetische Wissenschaftler aus Moskau, Leningrad, Kiew, Taschkent, Duschanbe, Baku und anderen wissenschaftlichen Zentren.

Es sind nur wenige biographische Angaben über al-Hwarizmi erhalten. Gewöhnlicher-

weise nimmt man an, daß er 783 geboren worden ist und um 850 verstarb. Sein Geburtsort liegt in Choreszm, einem großen Gebiet Mittelasien, durch das der Amudarja fließt, der im Aralsee mündet. Heute gehört es zur Usbekischen Republik (der nordwestliche Teil) und zur Turkmenischen Sowjetrepublik (der nördliche Teil). Auf dem Territorium Choreszmiens sind Überreste eines gewaltigen, alten Bewässerungssystems gefunden worden und Ruinen zahlreicher Festungen, Paläste und anderer Bauten. Ihre Ausmaße und ihre Bauweise nötigen uns auch noch heute Bewunderung ab.

Seine Ausbildung erhielt al-Hwarizmi bei sich in der Heimat. Bald erreichte sein wissenschaftlicher Ruf ein solches Niveau, daß er bereits im Alter von etwa 30 Jahren nach Merw (heute in der Turkmenischen Republik), dem Zentrum der arabischen Gouverneure für ganz Mittelasien, berufen wurde. Nach wenigen Jahren lud man ihn nach Bagdad ein, der Hauptstadt des Abbasidenkalifats. Dort wurde er das Haupt des „Hauses der Weisheit“, dem grundlegenden wissenschaftlichen Zentrum der Länder des Islam, an dem es ein astronomisches Observatorium und eine reiche Handschriftenbibliothek gab.

Viele seiner Werke zur Arithmetik, Algebra, Geometrie, Trigonometrie, Astronomie, Geodäsie, Geographie und Geschichte wurden uns überliefert. Erhalten sind auch seine Schriften über die Konstruktion astronomischer Beobachtungsgeräte: Astrolabien, Quadranten und Sonnenuhren. Er war in der Tat ein vielseitiger Gelehrter, ein Enzyklopädist.

Besonders wertvoll ist al-Hwarizmis Beitrag zur Entwicklung der Mathematik. Überaus interessant ist sein arithmetisches Traktat „Buch über die indische Rechnung“, in dem er das damals in Indien übliche Rechensystem beschreibt – das dezimale Positionssystem, das jetzt in der ganzen Welt benutzt wird. Das Verdienst al-Hwarizmis besteht darin, daß er als erster dieses Zahlensystem in arabischer Sprache beschrieb, es sehr ausführlich darlegte und anhand zahlreicher Beispiele erläuterte. Wegen der großen wissenschaftlichen und didaktischen Leistungen wurde gerade dieser Text in der Mitte des 12. Jh. ins Lateinische übersetzt, wodurch es einem weiten Kreis von Gelehrten im christlichen Mittel- und Westeuropa bekannt wurde.

Die lateinische Übersetzung beginnt mit den Worten „Dixit Algorizmi“, was bedeutet: „Al-Hwarizmi sagte“. Mitunter schrieb man den Namen des Gelehrten auf lateinisch auch Algorismus oder Algorithmus.

Dieses arithmetische Lehrbuch erlangte im katholischen Europa bald Popularität und der Name seines Verfassers wurde auf andere Dinge übertragen. Die mittelalterlichen Mathematiker begannen, das ganze „indische“ System der Zahlenschreibung „Algorismus“ oder „Algorithmus“ zu nennen, d. h., das dezimale Positionssystem. Der Begriff „Algorithmus“ ging in den ewigen Bestand der Mathematik ein und wurde zu einem der wichtigsten Termini der modernen Mathematik.

Al-Hwarizmi benutzte als erster in der arabischsprachigen Literatur einen festen Begriff für den Sinus eines Winkels. In seinen Arbeiten sind Sinus-, Tangens- und Kotangensstabellen enthalten. Er gibt Klassifikationen von Kurven an und beschäftigt sich mit dem Unendlichen.

Selbst das Wort „Algebra“ entstand aus der Bezeichnung seines Werkes zur Lösung von Gleichungen.

Das arabische Äquivalent ist „al-dschabr“. Es bezeichnete die Operation, mit der die Glieder einer Gleichung so umgruppiert wurden, daß zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens nur noch Glieder mit gleichem, i. a. positivem, Vorzeichen übrigblieben.

Jeder Schüler heute weiß, wie eine quadratische Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ zu lösen ist. Hierbei sind a , b , c gegebene Zahlen. Eine beliebige davon kann positiv, negativ oder sogar gleich Null sein.

Aber in der Zeit al-Hwarizmis benutzte man negative Zahlen nicht („Zahlen, die kleiner als nichts sind“).¹⁾

In den „Mathematischen Schriften“ al-

Muhammad ibn Musa al-Hwarizmi, gezeichnet von dem arab. Arzt Malik Nabiew (1982)



Hwarizmi, die 1983 in Taschkent in russischer Sprache herausgegeben worden sind, werden solche Gleichungen wie $x^2 + 5x = 6$ und $x^2 + 6 = 5x$ einzeln betrachtet. Für jede von ihnen gibt al-Hwarizmi eine „eigene“ Lösungsmethode an. Dabei wird die negative Wurzel einer Gleichung überhaupt nicht beachtet. Für die erste der beiden Gleichungen führt al-Hwarizmi nur die Wurzel $x = 1$ an (die Lösung $x = -6$ galt in dieser Zeit als „unmöglich“²⁾). Zwei Lösungen konnte es bei jenen Fällen geben, in denen sie beide positiv waren. Das ist ein Beispiel aus der Abhandlung al-Hwarizmi, das sich in der Folgezeit in vielen arabischen und lateinischen Texten findet.

„Ein Quadrat und die Zahl einundzwanzig sind gleich zehn Wurzeln“, sagt al-Hwarizmi.

In moderner Form bedeutet das:

$$x^2 + 21 = 10x.$$

„Teile die Zahl der Wurzeln, es ergibt fünf“, weist der Autor an. „Multipliziere diese Zahl mit sich selbst, das ergibt fünfundzwanzig. Subtrahiere davon einundzwanzig, es bleiben vier. Ziehe daraus die Wurzel. Das sind zwei. Ziehe diese von der Hälfte der Zahl der Wurzeln ab, d. h. von fünf, dann bleiben drei. Das ist eine Wurzel des Quadrats, die gesucht wurde. Ihr Quadrat ist neun. Man kann die Wurzel auch zur Hälfte der Zahl der Wurzeln addieren und man erhält sieben. Das ist ebenfalls eine Wurzel des Quadrats, die gesucht wurde. Ihr Quadrat ist neunundvierzig.“

In moderner Bezeichnungsweise läßt sich das alles bedeutend kürzer aufschreiben:

$$x^2 - 10x + 21 = 0;$$

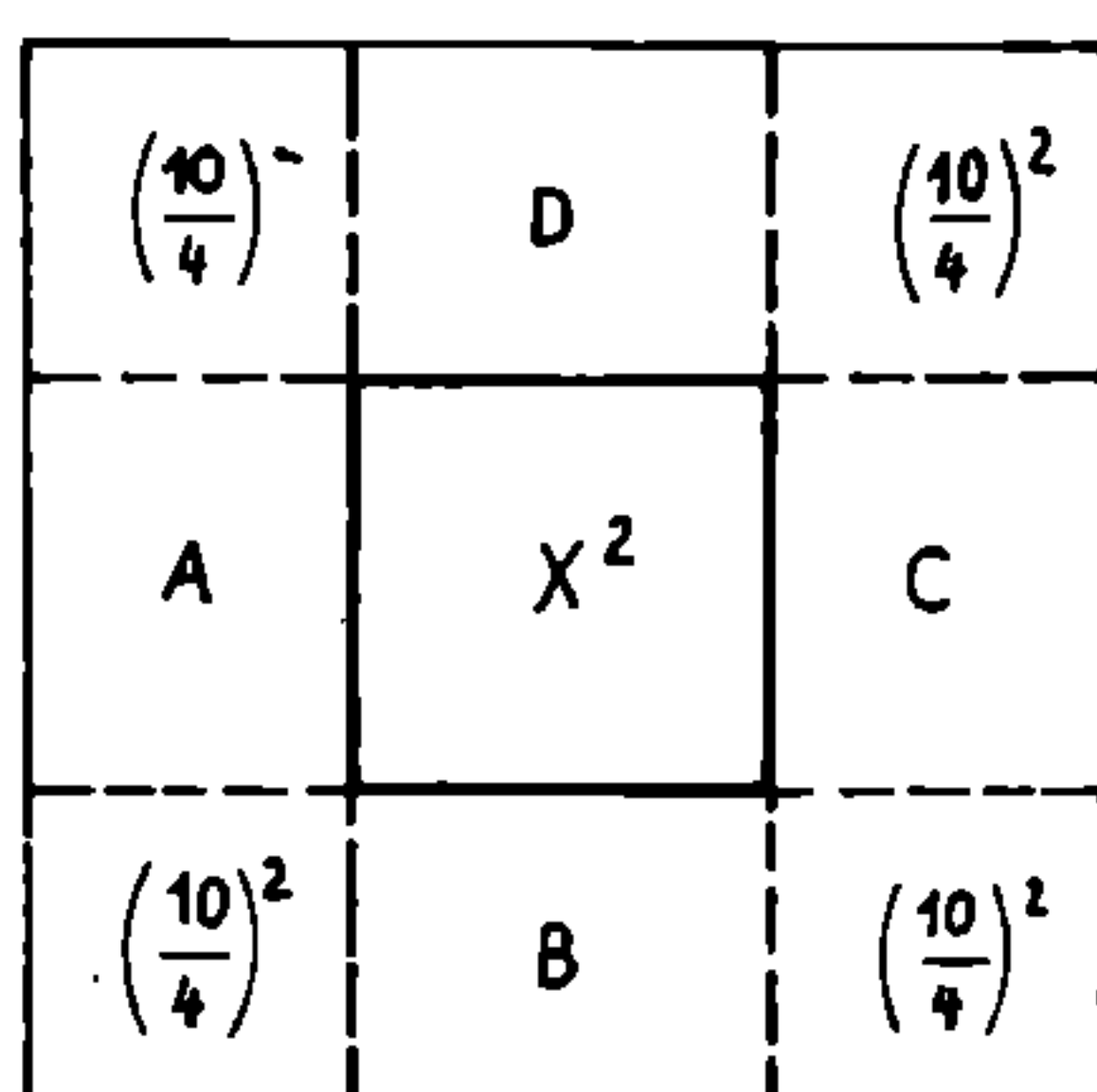
$$x = \frac{10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21} = 5 \pm \sqrt{25 - 21} = 5 \pm 2;$$

$$x_1 = 3; \quad x_2 = 7.$$

Al-Hwarizmi führt „in geometrischer Sprache“ auch den Beweis für die Richtigkeit der Lösung.

Sei beispielsweise die Gleichung $x^2 + 10x = 39$ zu lösen, sagt al-Hwarizmi (seine Erklärungen werden jetzt in moderner Form angeführt).

Wir stellen ein Quadrat mit der Seite x dar, d. h. mit der Fläche x^2 . An die Verlängerung seiner Seiten setzen wir Quadrate mit Seiten, die gleich der Hälfte der Hälfte „der Zahl der Wurzel“ sind, d. h. mit Seiten $\frac{10}{4}$ (siehe Bild 1). Wir erhalten auch vier Rechtecke mit Seiten x und $\frac{10}{4}$, d. h.



Rechtecke A, B, C, D in Zeichnung 1. Im Ergebnis dessen erhalten wir ein neues großes Quadrat, dessen Fläche gleich der Summe der Fläche aller Figuren ist:

$$x^2 + 4 \cdot \frac{10}{4}x + 4 \cdot \left(\frac{10}{4}\right)^2 = x^2 + 10x + 25.$$

Aber weil laut Voraussetzung $x^2 + 10x = 39$ ist, so finden wir, nachdem wir die ersten beiden Summanden gleich 39 gesetzt haben, daß die Fläche des neuen großen Quadrates gleich $39 + 25 = 64$ und die Seite gleich 8 sind. Entsprechend der Konstruktion ist letztere auch gleich $x + 2 \cdot \frac{10}{4}$, d. h. $x + 2 \cdot \frac{10}{4} = 8$.

Daraus folgt $x = 3$.

Al-Hwarizmi drückt die Lösungsvorschrift für alle sechs Formen quadratischer Gleichungen (jetzt würden wir sagen, daß sich diese „Formen“ durch die Vorzeichen der Koeffizienten a , b und c unterscheiden) wörtlich und anschaulich aus, d. h., er zeigt dem Leser geometrisch ihre Richtigkeit.

Viele Aufgaben aus dem Buch von al-Hwarizmi gehören zur Vermögensteilung, z. B. laut Testamenten. Die folgende ist eine solche Aufgabe.

„Du teilst einen Dirham³⁾ zwischen irgendwelchen Leuten, jeder von ihnen erhält einen gewissen Teil. Dann wird ihnen (ein) Mann hinzugefügt und du sollst erneut einen Dirham zwischen ihnen teilen, wobei jeder ein Sechstel Dirham weniger als beim ersten Mal erhält.“

Wenn man die ursprüngliche Zahl der Leute, nach der in der Aufgabe gefragt wird, mit x bezeichnet, so läßt sich die Aussage der Aufgabe in folgender Form aufschreiben:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{6}.$$

Als Lösung der Aufgabe erhält al-Hwarizmi, daß der erste Dirham zwischen zwei Leuten und der zweite zwischen drei Leuten geteilt worden ist.

Die Wissenschaftler des arabisch-islamischen Mittelalters leisteten einen bemerkenswerten Beitrag zur Entwicklung wissenschaftlicher Vorstellungen über die uns umgebende Welt, darunter auch über Gesetze der Mathematik. Die Bekanntschaft mit den mathematischen Arbeiten al-Hwarizmi, einem der führenden arabischen Universalgelehrten, hilft die Geschichte der Entwicklung unserer mathematischen Kenntnisse besser zu verstehen.

A. Halameisār/A. I. Volodarskij

Übersetzt und bearbeitet:

Dr. Sonja Brentjes, Leipzig

¹⁾ Das betrifft nicht die Mathematik in Indien und China in dieser Zeit.

²⁾ Negative Lösungen von Gleichungen wurden in der chinesischen Algebra nicht grundsätzlich ausgeschlossen.

³⁾ Dirham ist eine alte arabische Geldeinheit.

Die Briefmarke (siehe Überschrift) wurde anlässlich der Feier des 1200. Geburtstages von Muhammad ibn Musa al-Hwarizmi in der UdSSR herausgegeben.



▲ 1 ▲ Prove that $n^2 + n + 1$ is a multiple of 19 for infinitely many values of n .

▲ 2 ▲ Un camion transporte 60 cartons contenant des bouteilles d'huile. La masse du chargement est de 1320 kg. Sachant que chaque bouteille d'huile a une masse de 1,4 kg (verre compris) et que la masse de chaque carton vide est de 1 kg, calcule:

- le nombre de bouteilles d'huile transportées,
- le nombre de bouteilles par carton

▲ 3 ▲ Все десять цифр от 0 до 9 разместите в кружочках с таким расчетом, чтобы два примера на умножение были верными.

$$\begin{array}{r} \bigcirc \quad \bigcirc \\ \times \quad \bigcirc \\ \hline \bigcirc \quad \bigcirc \end{array} \quad \begin{array}{r} \bigcirc \quad \bigcirc \\ \times \quad \bigcirc \\ \hline \bigcirc \quad \bigcirc \end{array}$$

Eine harte Nuß

$P_0, \dots, P_{n-1}$ sei ein regelmäßiges n -Eck, $n \geq 3$, mit dem Mittelpunkt M , das in der Ebene ε liegt. $X \in \varepsilon$ sei beliebig gewählt; $X_0, \dots, X_{n-1}$ bezeichne die Projektion von X auf $g(MP_0), \dots, g(MP_{n-1})$. Zeige, daß

$$\sum_{i=0}^{n-1} \overrightarrow{MX_i} = \frac{n}{2} \cdot \overrightarrow{MX}!$$

Dr. H. Englisch, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig, ehem. erfolgreicher IMO-Teilnehmer

Wo steckt der Fehler?

Die Gleichung:

$$\frac{x+5}{x-7} - 5 = \frac{4x-40}{13-x}$$

löst jemand folgendermaßen:

$$\frac{x+5-5(x-7)}{x-7} = \frac{4x-40}{13-x}$$

hieraus:

$$\frac{-(4x-40)}{-(7-x)} = \frac{4x-40}{13-x}$$

also: $13-x = 7-x$ und deshalb: $13 = 7$.

Was wurde falsch gemacht?

aus: Lietzmann, Wo steckt der Fehler? BSB BG Teubner, mitgeteilt und mit Lösung versehen von Ing. A. Körner, Leipzig

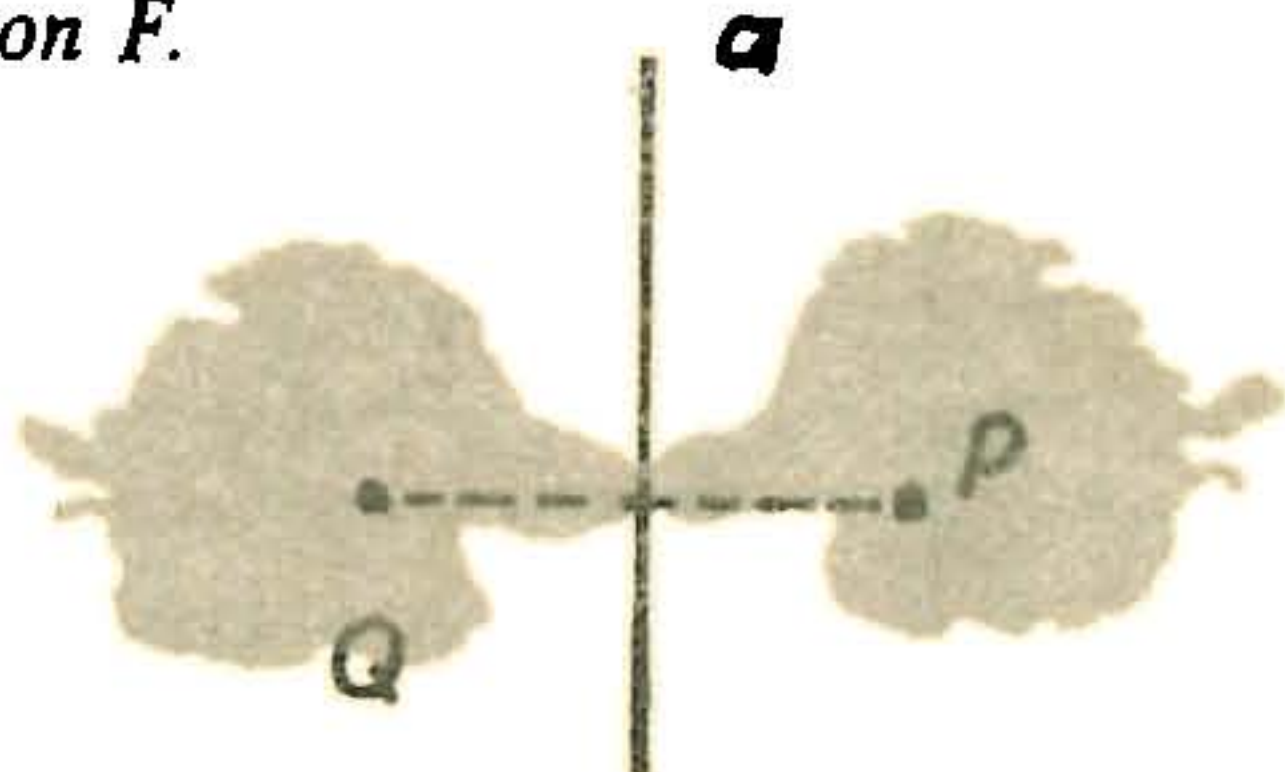


Axialsymmetrie

Hier und in einigen folgenden Beiträgen wollen wir uns mit Symmetrie beschäftigen.

Wir versehen ein Blatt Papier mit Tinten- oder Farbflecken und falten es anschließend (Bild 1). Dabei können recht lustige Figuren entstehen. Für sie ist offensichtlich folgende Eigenschaft charakteristisch: Zu jedem Punkt P der Figur F , der nicht auf der Faltnisse a liegt, gibt es einen Punkt Q von F so, daß a die Mittelsenkrechte von PQ ist. Liegt eine solche Eigenschaft vor, so nennt man die Figur F *symmetrisch bezüglich der Geraden a* und a eine *Symmetrieachse* von F .

Bild 1



Vergleichen wir diese Eigenschaft mit der Erklärung der *Spiegelung an einer Geraden a* , wie sie in der 5. Klasse gegeben wird (vgl. Lehrbuch Kl. 5 (1983), S. 152), so erkennen wir leicht, daß sie gleichwertig zu folgender Eigenschaft ist: Die Figur F geht bei der Spiegelung an der Geraden a in sich über.

Für die Spiegelung an der Geraden a werden wir im folgenden kurz σ_a schreiben; und R^a soll das Bild von R bei der Spiegelung an a bezeichnen. Übrigens erscheint die russische Bezeichnung „симметрия относительно прямой a “ für „Spiegelung an der Geraden a “ aus unserer obigen Sicht recht treffend.

Bild 2



Axialsymmetrische Figuren begegnen uns ständig, in der Natur, im technischen Bereich und in der Kunst. Das Abbild des Schmetterlings „Schwalbenschwanz“ (Bild 2) besitzt genau eine Symmetrieachse. Die meisten Tiere zeigen eine derartige symmetrische Körperform; und dies ist uns so selbstverständlich, daß uns Abwei-

chungen davon – wie bei der Flunder – besonders auffällig erscheinen. Da sich diese symmetrischen Formen als Ergebnis einer langen Entwicklung herausgebildet haben, sind sie offenbar optimal unter den gegebenen Umweltbedingungen.

Zweckmäßigkeit (und insbesondere Stabilität) ist der Grund für Symmetrie in sehr vielen technischen Konstruktionen. (Siehe z. B. Draufsicht eines Flugzeuges; Bild 3.) Die Axialsymmetrie hat für uns auch einen ästhetischen Reiz; in vielen Kunstwerken können wir sie herausfinden. Das Bild 4 zeigt ein Bürgerhaus (von 1536) in Görlitz; und Bild 5 ist das Stadtwappen von Cottbus. Die Vignette zeigt den „Vitruv-Mann“ von Leonardo da Vinci. – Eine Figur F kann mehrere Symmetrieachsen besitzen.



Bild 3



Bild 5

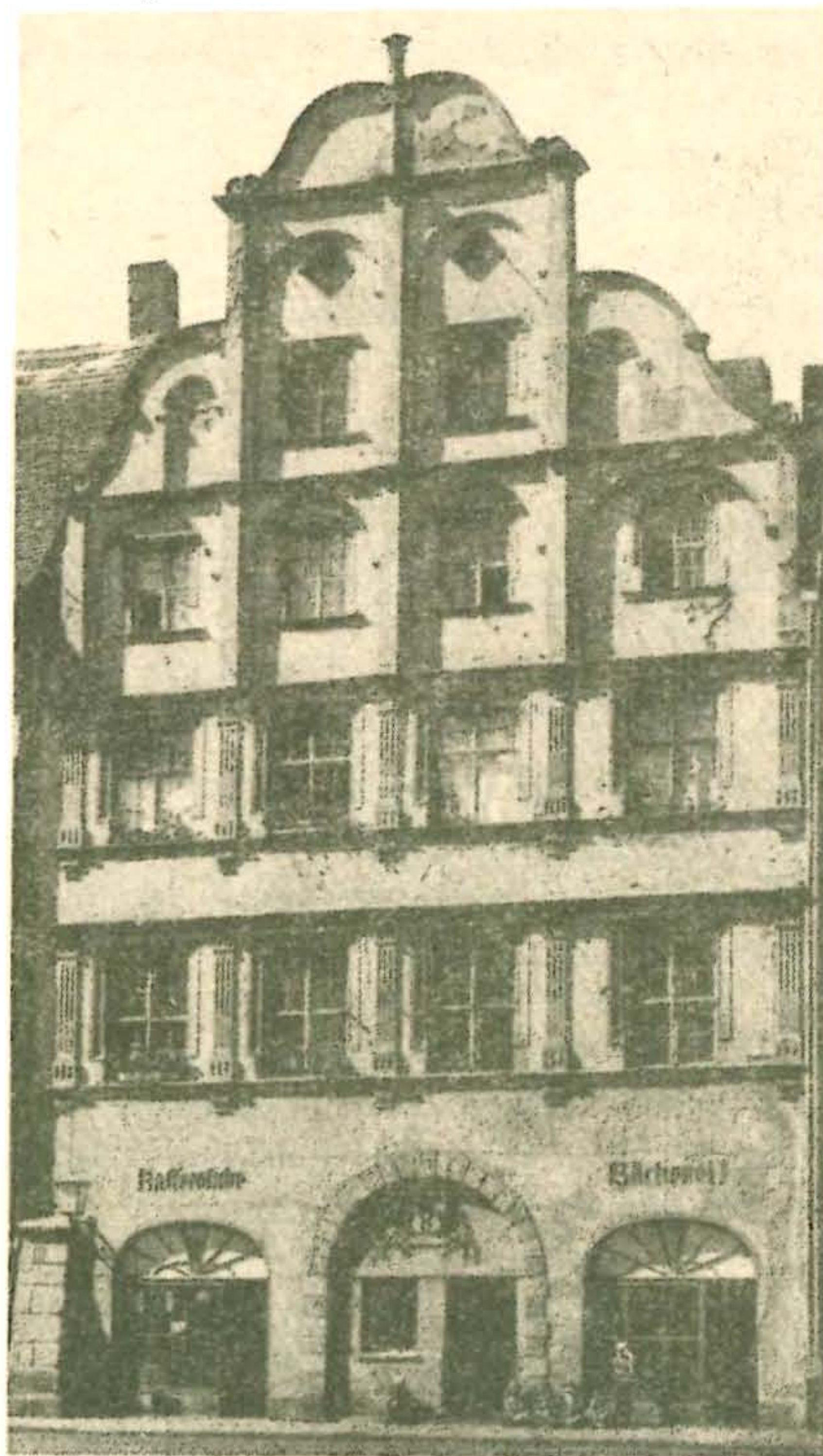
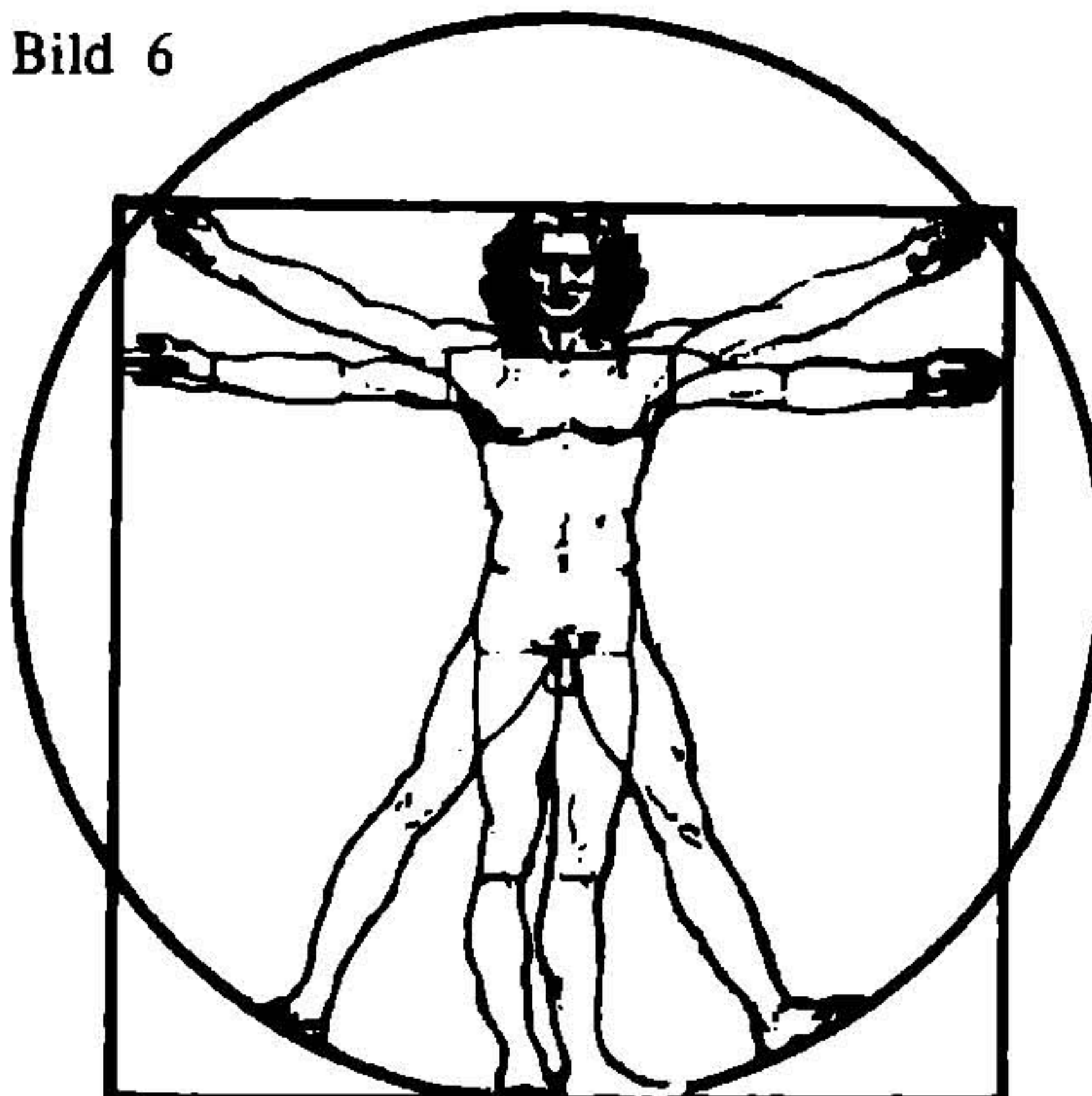


Bild 4

Bild 6

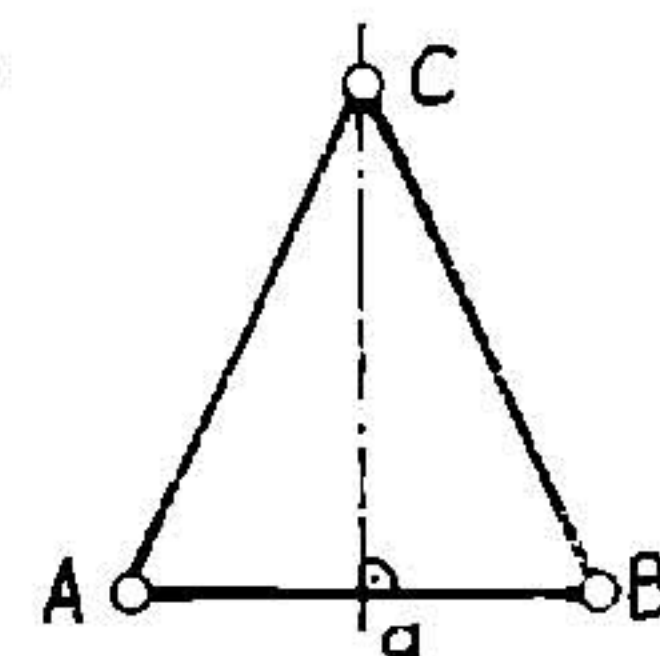


Aufgaben

▲ 1 ▲ Man bestimme alle Symmetrieachsen eines gleichseitigen Dreiecks ABC !

Lösung: Im gleichseitigen Dreieck A geht die Mittelsenkrechte jeder Seite durch die jeweils gegenüberliegende Ecke und ist damit Symmetrieachse (Bild 7). – Ist umgekehrt a eine Symmetrieachse des gleichseitigen Dreiecks ABC , dann können nicht gleichzeitig alle drei Eckpunkte auf a liegen; wir können annehmen, daß die Ecke A nicht auf der Achse a liegt. Dann muß das Bild A^a die Ecke B oder C sein, etwa B . Nun muß C auf a liegen, sonst ergäbe C^a eine zusätzliche vierte Ecke. Also ist die Gerade a eine Mittelsenkrechte einer Dreiecksseite.

Bild 7



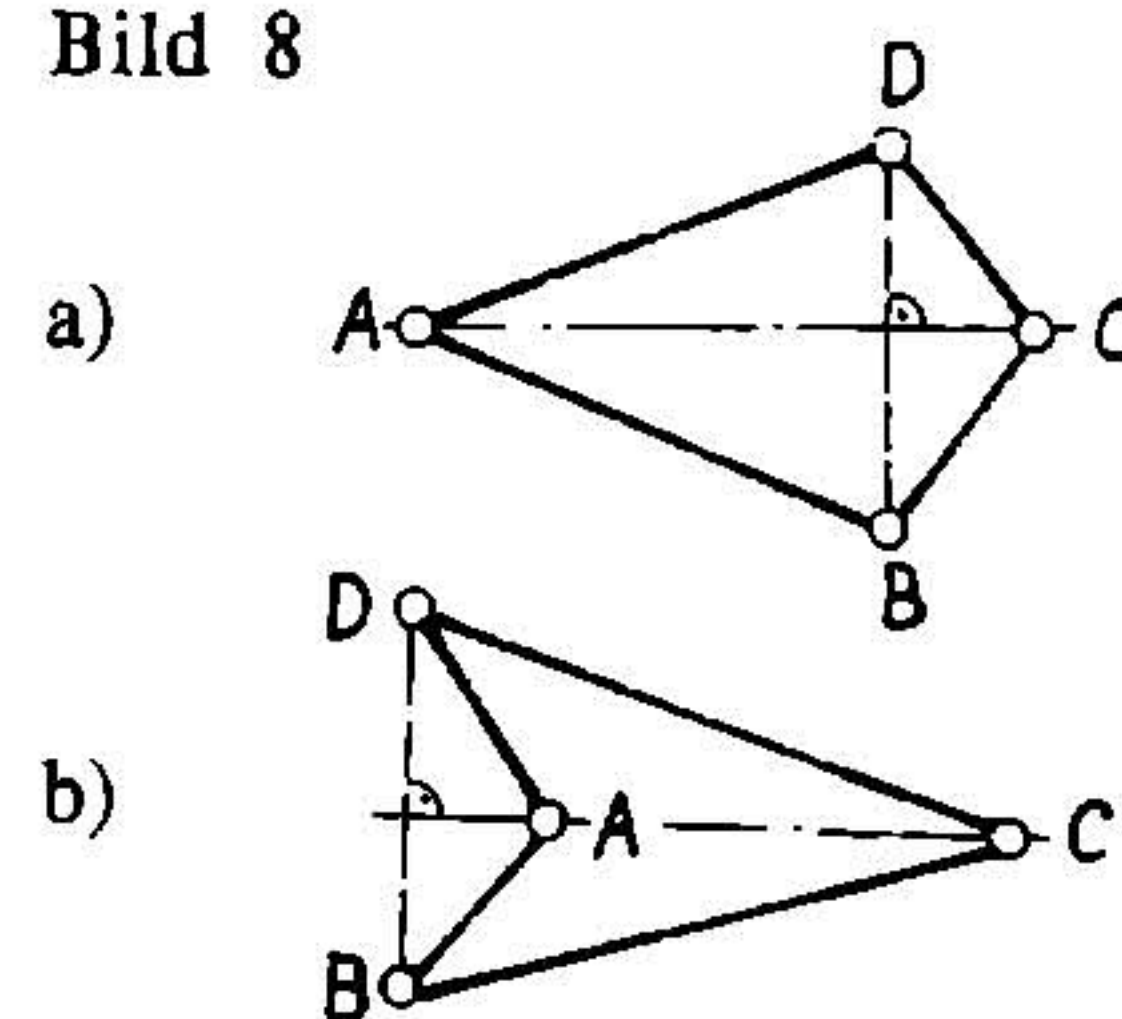
Damit gibt es im gleichseitigen Dreieck genau drei Symmetrieachsen.

▲ 2 ▲ Wie viele Symmetrieachsen besitzt ein regelmäßiges n -Eck ($n > 3$)?

Von Interesse ist das Symmetrieverhalten von speziellen Vierecken. Bekannt ist das Drachenviereck. Es ist dadurch definiert, daß es zwei Paare gleich langer benachbarter Seiten besitzt. (Vgl. *Kleine Enzyklopädie Mathematik*.)

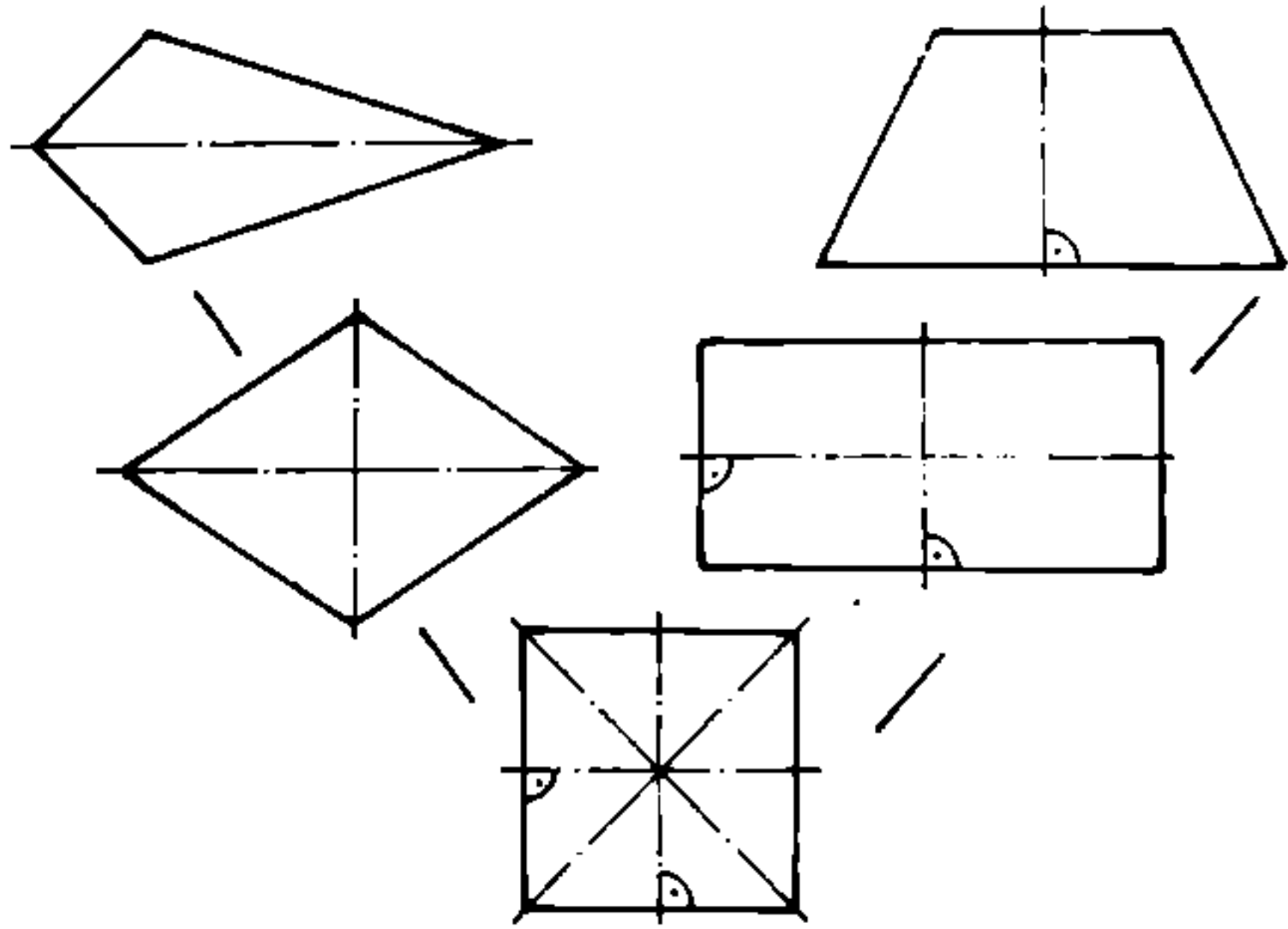
▲ 3 ▲ Man zeige: Ein Viereck ist ein Drache genau dann, wenn (wenigstens) eine seiner Diagonalen Symmetrieachse ist!

Bild 8



Lösung: Ist $ABCD$ ein Viereck, das bezüglich der Diagonalen AC symmetrisch ist, dann sind BDA und BDC gleichschenklige Dreiecke und damit $ABCD$ ein Drache (Bild 8a) und b)). – Umgekehrt folgt aus der Gleichschenkligkeit der Dreiecke BDA und BDC , daß die Mittelsenkrechte von BD Symmetrieachse der beiden Dreiecke ist und damit durch A und C geht. Damit ist die Diagonale AC Symmetrieachse des Vierecks.

▲ 4 ▲ Man gebe mit Axialsymmetrie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein Viereck $ABCD$ ein Rhombus bzw. ein Giebel (oder gleichschenkliges Trapez) bzw. ein Rechteck bzw. ein Quadrat ist! Die folgende Übersicht veranschaulicht die Ergebnisse der Aufgabe ▲ 4 ▲:

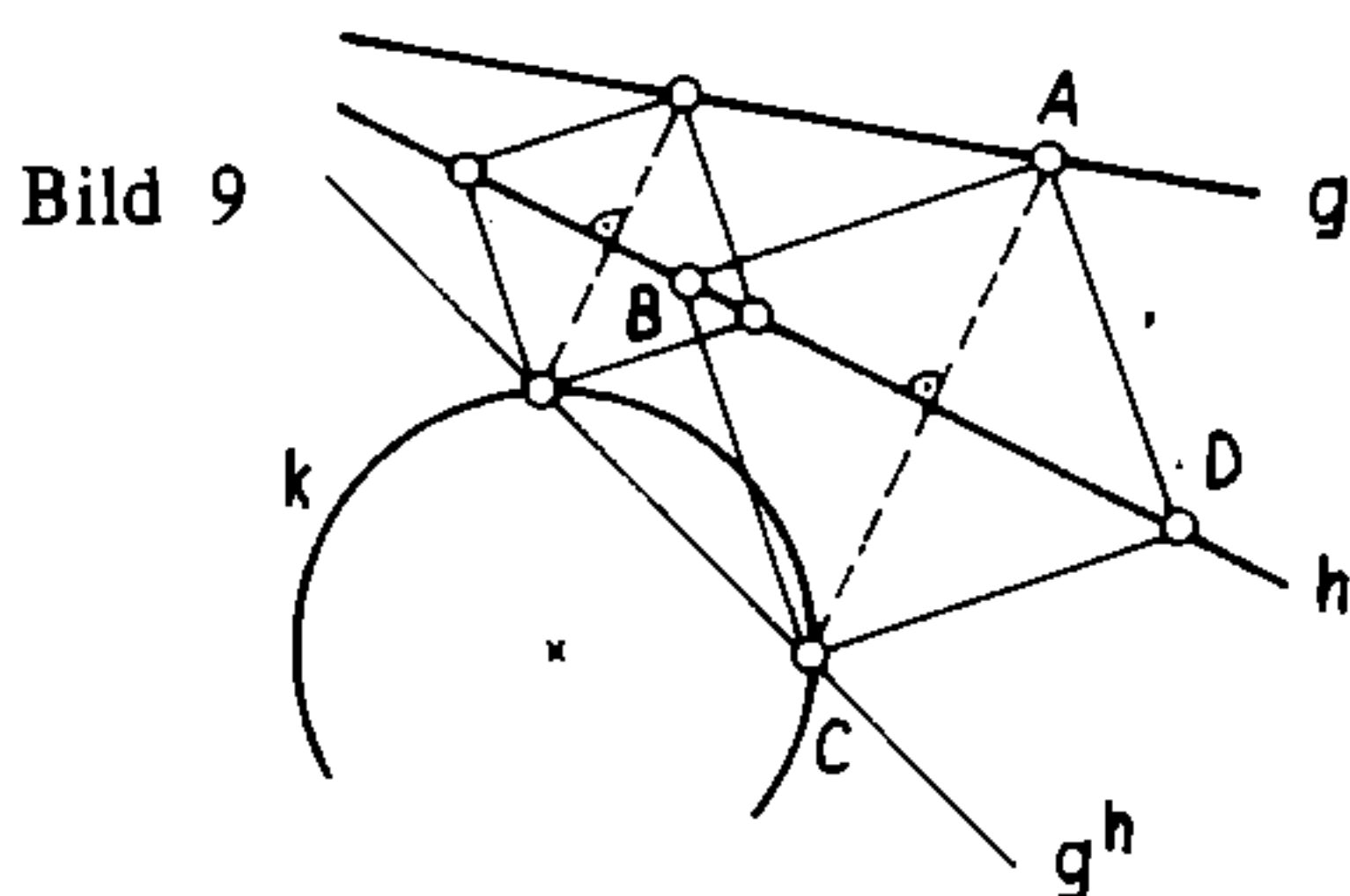


▲ 5 ▲ Warum gibt es keine weiteren axial-symmetrischen Vierecke als die hier genannten?

Für die Lösung einer Konstruktionsaufgabe kann es von Vorteil sein, wenn man erkennt, daß die gewünschte Figur Axial-symmetrie besitzt. Dafür ein Beispiel.

▲ 6 ▲ Gegeben seien zwei Geraden g und h sowie ein Kreis k . Man konstruiere ein Quadrat $ABCD$ derart, daß $A \in g$ und $B, D \in h$ sowie $C \in k$ gilt.

Lösung: Es sei $ABCD$ eine Lösung. Dann ist die vorgegebene Gerade h Symmetrieachse von $ABCD$. Also ist C sowohl Punkt des Kreises k als auch des Bildes g^h der Geraden g .



Die Aufgabe besitzt genau zwei, eine bzw. keine Lösung, wenn die Gerade g^h den Kreis schneidet, berührt bzw. meidet und wenn außerdem der Schnittpunkt von g und g^h (falls er existiert) nicht auf dem Kreis k liegt (Bild 9). – Für den Fall, daß sich g und h auf k schneiden, ist nun die Lösung auch klar.

▲ 7 ▲ Man erfinde selbst solche Konstruktionsaufgaben wie die Aufgabe ▲ 6 ▲!

Die Ergebnisse in den Aufgaben 1 und 2 lehren uns, daß wir aus der Existenz von zwei und mehr Symmetrieachsen einer Figur nicht auf die Existenz unendlich vieler Symmetrieachsen dieser Figur schließen dürfen. Man kann jedoch zeigen:

▲ 8 ▲ Besitzt eine Figur zwei zueinander parallele Symmetrieachsen, dann hat sie unendlich viele.

Zunächst wollen wir nach Beispielen für derartige Figuren suchen. Einfache Beispiele sind ein Streifen (Bild 10) oder der Graph der Sinus-Funktion (Bild 11). Suche weitere!

Sind a_1 und a_2 zwei zueinander parallele Symmetrieachsen einer Figur F , dann wird

Bild 10

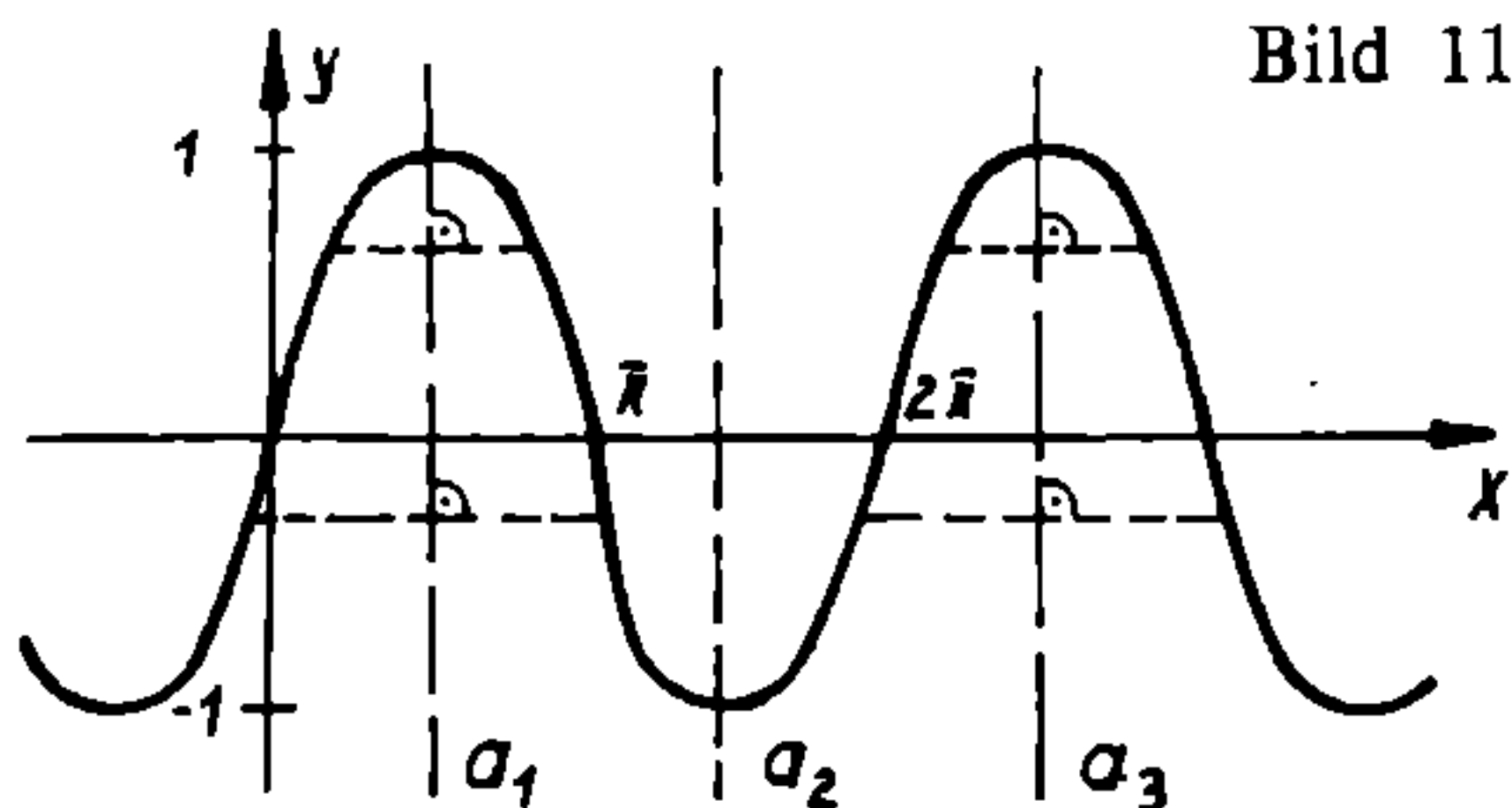
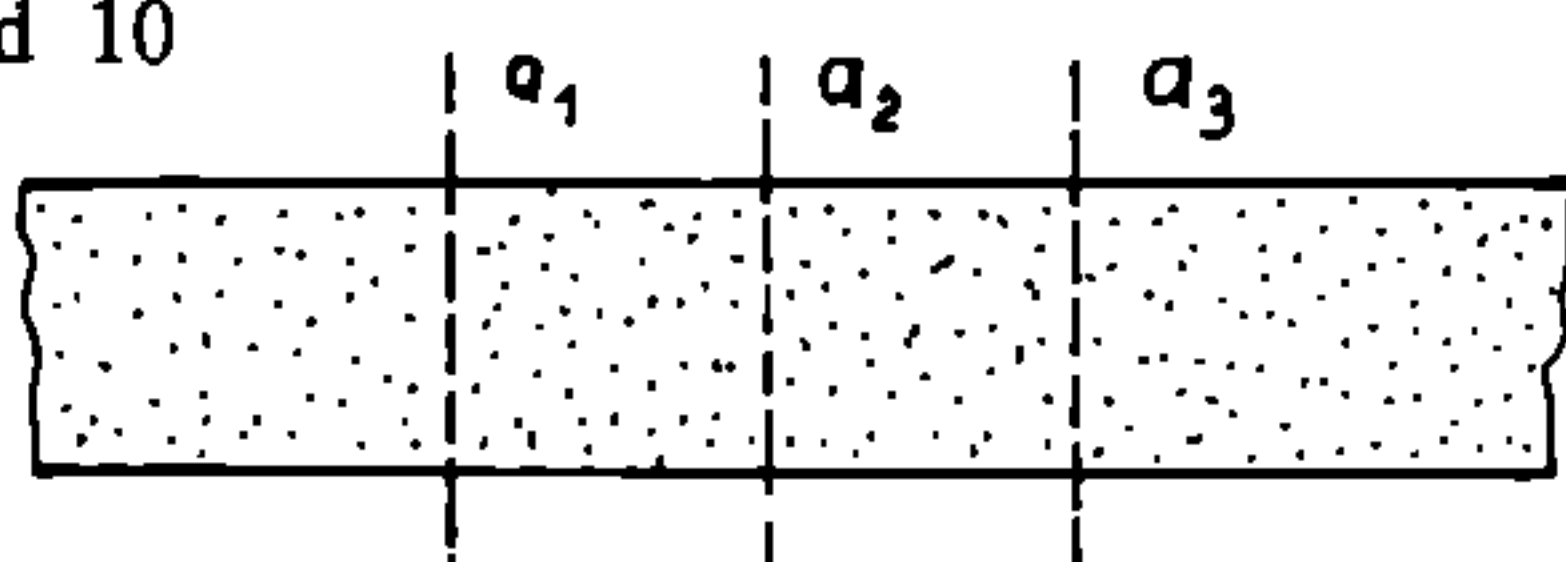


Bild 11

F sowohl bei der Spiegelung an a_1 als auch bei der Spiegelung an a_2 auf sich abgebildet. Ferner geht die zu a_1 symmetrische Figur F bei der Spiegelung an a_2 in eine Figur F^2 über, die zu dem Bild a_3 von a_1 bei σ_{a_2} symmetrisch sein muß. Wegen $F^2 = F$ ist also die Figur F auch zu der Geraden a_3 symmetrisch, siehe Bild 10 und 11. (Übrigens gilt dieser Schluß offenbar auch, wenn wir anstelle der Geradenspiegelung σ_{a_2} irgendeine Bewegung genommen hätten, die F auf sich abbildet.)

Nach der geschilderten Weise kann nun mit a_2 und a_3 eine Achse a_4 gefunden werden usw.

Der Nachweis, daß jede auf diese Weise gefundene Symmetrieachse tatsächlich zu den bisherigen verschieden ist, macht einige Mühe und ist günstig mit der Methode der vollständigen Induktion zu führen.

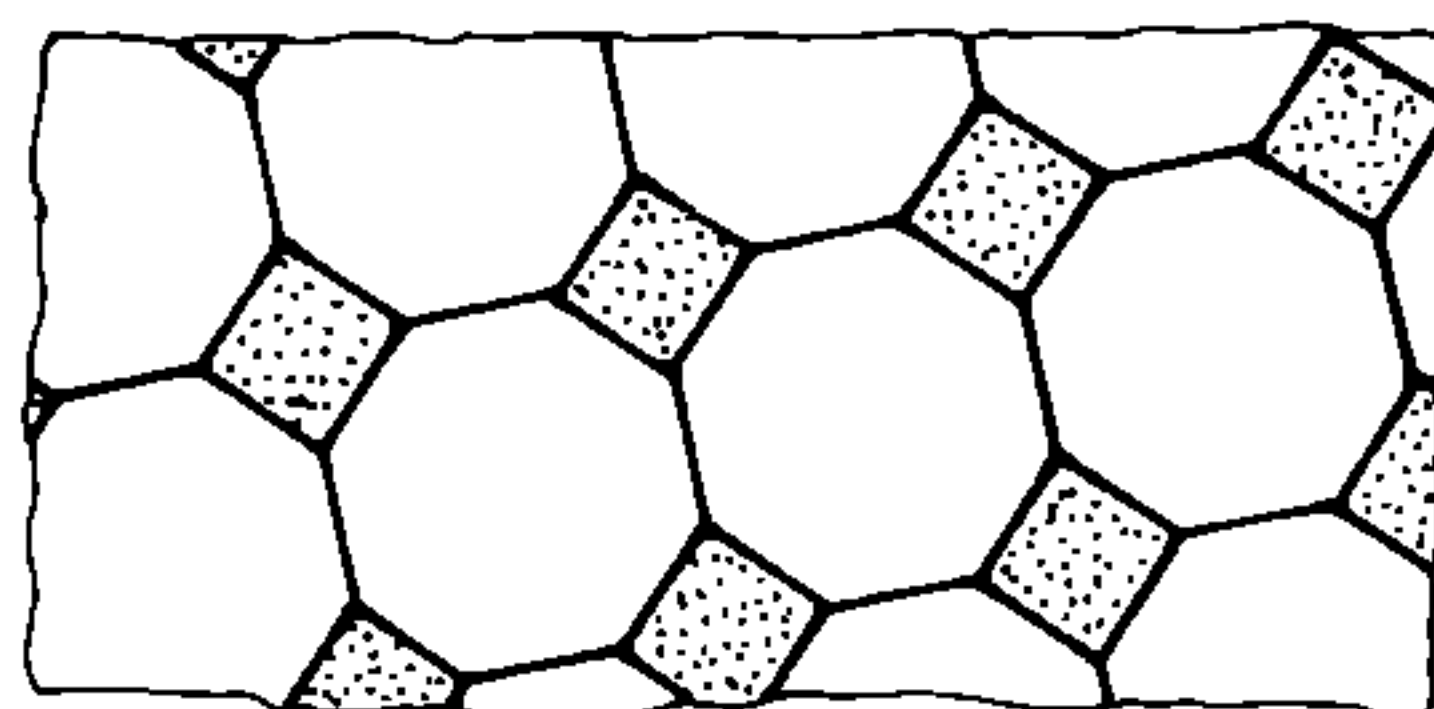
Eine Lösung eines Problems kann mitunter auch durch Herstellen einer symmetrischen Figur gefunden werden, wie folgendes Beispiel zeigt:

Wir wollen als bekannt voraussetzen, daß der Kreis diejenige Figur ist, die bei gegebenem Umfang den größten Flächeninhalt hat. Nach der Sage durfte Dido sich ein Stück Land an der Küste Afrikas kaufen, das nicht größer sein durfte als das, was man mit einer Ochsenhaut umspannen kann. Dido zerschnitt die Ochsenhaut in schmale Streifen, aus denen sie eine Schnur machte, um damit möglichst viel Land abzugrenzen. Wie mußte sie die Abgrenzung des Landes vornehmen, wenn wir annehmen, daß die Begrenzung K durch das Meer geradlinig war? Spiegeln wir die abgegrenzte Figur an K , so müßte sich im günstigsten Fall (siehe unsere Voraussetzung!) ein Kreis ergeben. Also mußte Dido (um Karthago zu gründen) einen Halbkreis abgrenzen!

Zum Schluß empfehlen wir noch folgende Aufgabe:

▲ 9 ▲ Man beschreibe alle Symmetrieachsen der in Bild 12 gegebenen Parkettierung, die aus regelmäßigen 4- und 8-Ecken gleicher Seitenlänge besteht!

Bild 12



Das nächste Mal beschäftigen wir uns mit der Zentralsymmetrie.

E. Quaisser/H.-J. Sprengel

Weizenkörner auf einem Schachbrett

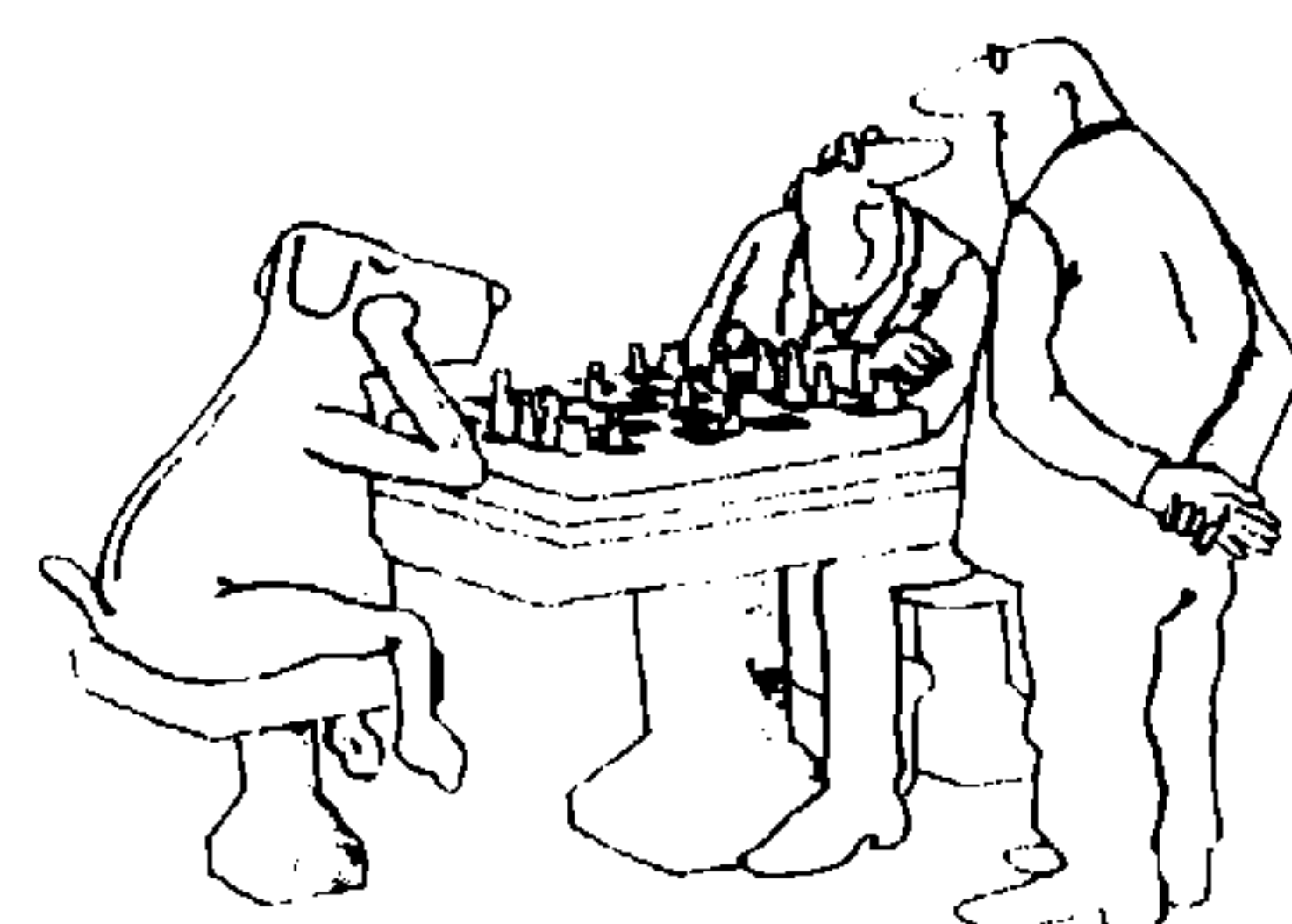
Das Schachspiel ist wahrscheinlich in Indien erfunden worden. Über die Perser lernten auch die Völker der arabischen Kalifate das Spiel kennen. Der Historiker *al-Ja'qūbī*, der dort im 9. Jahrhundert lebte, berichtete über die Erfindung des Schachspiels. Nach seinem Bericht erbat sich der Erfinder des Schachspiels von der Tochter des Königs *Balhait* als Geschenk die Menge aller Weizenkörner, die sich ergibt, wenn man auf das erste Feld des Schachbretts ein Korn, auf das zweite zwei, auf das dritte vier und so auf jedes folgende die doppelte Anzahl der Körner legt, die das vorhergehende Feld enthält.

In der von *al-Ja'qūbī* überlieferten Anekdote heißt es weiter:

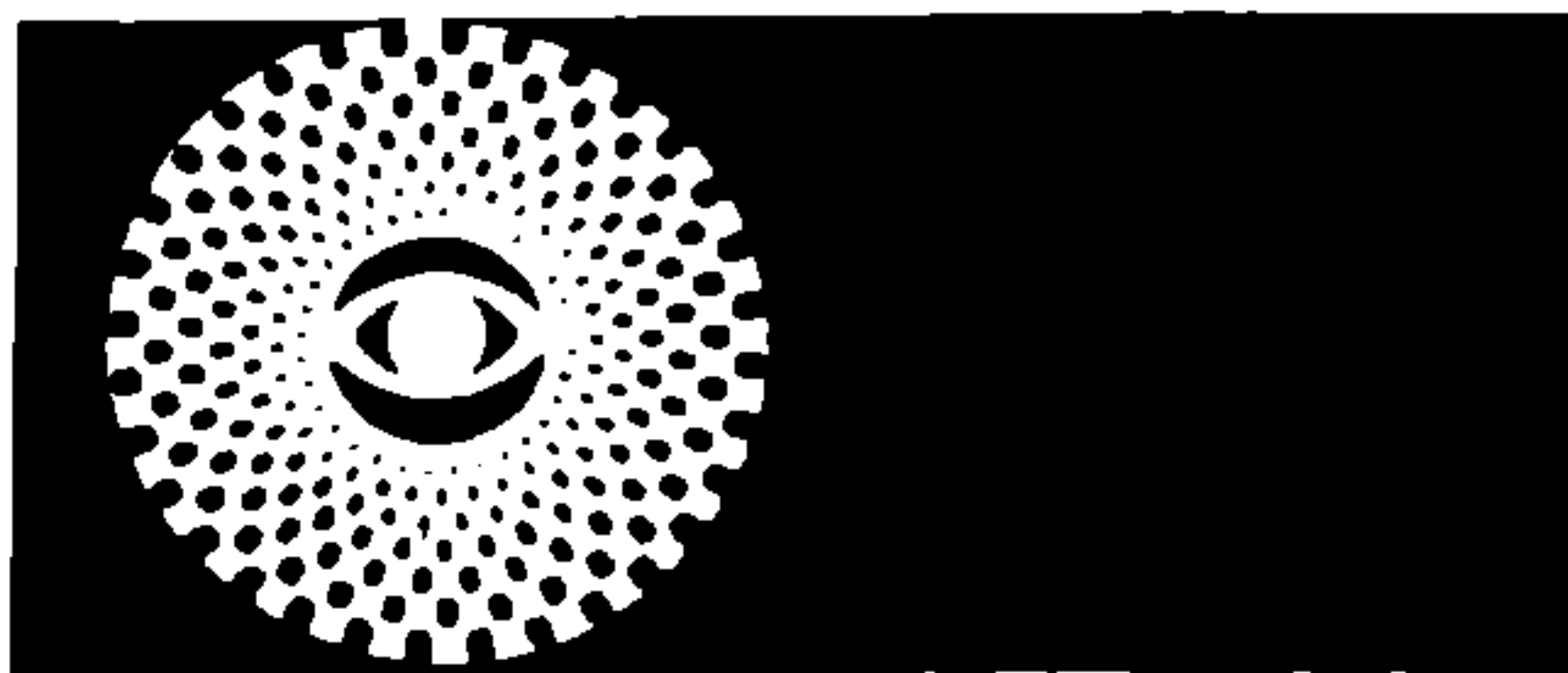
„Da sagt sie: Und wieviel ist der Betrag hiervon? Hierauf befahl sie, daß der Weizen herbeigebracht werde. Und es genügt nichts dafür, bis die Getreidevorräte des Landes erschöpft waren; dann wurde das Getreide in Geld umgewertet, bis der Schatz erschöpft war. Da dies nun viel war, sagte er: Ich brauche das nicht, mir genügt eine geringe Menge von irdischem Gut. Dann fragte sie ihn nach der Zahl der Körner, die er verlangt hatte.“ Wie groß war die Zahl?

Es sei erwähnt, daß diese Aufgabe später auch bei anderen Gelehrten der arabischen Kalifate gestellt wurde. Im Jahre 1202 formulierte *Leonardo Fibonacci* in seinem *Liber abaci* (vgl. *alpha*, Heft 6/1982, S. 134) die Aufgabe, ohne die Anekdote zu nennen. Der Mathematiklehrer am Jesuitenkolleg in Rom, *Christoph Clavius* (1573 bis 1612), berechnete nicht nur die Anzahl der Getreidekörner, sondern auch noch die Anzahl von Schiffen, die benötigt würden, um das Getreide bzw. das Geld zu transportieren, ferner auch den Anteil der Erdkugel, den das Getreide ausfüllen würde.

H. Pieper



„Nein, nein, nicht was Sie denken! Der tut natürlich bloß so...“



ARBEITS- GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Klaus Peter berichtet aus seinem Mathematikzirkel

Teil 4 und Schluß

**Warum es möglich ist,
mit zwei Zeichen das Märchen
vom Schneewittchen aufzuschreiben**

Schon lange vor Beginn des Mathematikzirkels redeten wir uns die Köpfe heiß; jeder von uns hatte an den Aufgaben, die uns Fräulein Steinmann gestellt hatte, herumgeknobelt, doch nicht alle hatten Lösungen gefunden. So merkten wir zunächst gar nicht, daß unsere Zirkelleiterin in der Tür stand und sich offensichtlich über unseren Eifer freute. Doch dann bat sie uns, noch etwas Geduld zu haben, und lenkte unsere Gedanken auf ein neues Problem, indem sie uns fragte, was wir über das Morse wüßten.

„Man kann sich damit verständigen“, meinte Corinna.

„Man drückt auf Tasten eines Morseapparates“, ergänzte Holger, der sich mehr für die technische Seite des Problems interessierte. „Man kann ein kurzes oder ein langes Zeichen geben“, wußte Utta zu berichten.

Hier griff Fräulein Steinmann ein: „Man hat also zwei Zeichen, nämlich $\cdot$, das ‚kurze‘ Zeichen, und $-$, das ‚lange‘ Zeichen. Aber wie verständigt man sich nun damit?“

Jens konnte uns helfen: „Jedem Buchstaben entspricht eine Folge von Morsezeichen, z. B. wird s durch $\cdot \cdot \cdot$ und o durch $- - -$ ausgedrückt. Mit den Buchstaben kann man dann Wörter bilden.“

„Ob denn zwei Zeichen für alle 26 Buchstaben des Alphabets ausreichen?“ Fräulein Steinmann wollte es genau wissen. Wir erkannten: Wenn jeder Buchstabe ein individuelles Zeichen bekommen soll, braucht man natürlich für 26 Buchstaben genau 26 Zeichen, wie es in unserem Alphabet der Fall ist. Läßt man hingegen die *mehrfache* Verwendung von Grundzeichen zu, kommt man sicher mit weniger als 26 Grundzeichen aus. Im Prinzip genügte sogar ein Zeichen, z. B. „+“: + bedeutet A, ++ bedeutet B, +++ bedeutet C usw., 26 aufeinanderfolgende „+“ schließlich bedeuten den Buchstaben Z. Den Vorteil der Verwendung nur eines Zeichens erkauft

man sich allerdings mit sehr großen Wortlängen (außerdem muß man besonders genau auf die Abstände der Zeichen achten: + + + bedeutet AB, + + + bedeutet BA).

Suchen wir einen „Mittelweg“! Wie lang wird die zur Charakterisierung jedes der 26 Buchstaben notwendige Zeichenfolge höchstens sein, wenn zwei Grundzeichen, etwa $\cdot$ und $-$ wie beim Morse, zur Verfügung stehen? Aus diesen Grundzeichen kann ich bauen:

2 Zeichenfolgen der „Länge“ 1: $\cdot$ $-$

4 Zeichenfolgen der „Länge“ 2:

$\cdot \cdot$ $\cdot -$ $- \cdot$ $- -$

8 Zeichenfolgen der „Länge“ 3:

$\cdot \cdot \cdot$ $\cdot \cdot -$ $\cdot - \cdot$ $\cdot - -$ $- \cdot \cdot$ $- \cdot -$ $- \cdot \cdot$ $- - \cdot$

16 Zeichenfolgen der „Länge“ 4:

$\cdot \cdot \cdot \cdot$ $\cdot \cdot \cdot -$ $\cdot \cdot - \cdot$ $\cdot \cdot - -$ $\cdot - \cdot \cdot$ $\cdot - \cdot -$ $\cdot - - \cdot$ $\cdot - - -$

$- \cdot \cdot \cdot$ $- \cdot \cdot -$ $- \cdot - \cdot$ $- \cdot - -$ $- - \cdot \cdot$ $- - \cdot -$ $- - \cdot \cdot$ $- - - \cdot$

$- - - -$

Daraus folgt: Mit Zeichenfolgen aus zwei Grundzeichen von höchstens der Länge 3 kann das 26-buchstabige Alphabet noch nicht ausgedrückt werden, denn $2 + 4 + 8 = 14 < 26$; hingegen kommen wir mit höchstens vierelementigen Zeichenfolgen aus: $2 + 4 + 8 + 16 = 30 > 26$. Beim Morsealphabet muß man also damit rechnen, daß es auch Buchstaben gibt, die mit einer vierelementigen Folge der Grundzeichen $\cdot$ oder $-$ ausgedrückt werden.

Nun sollen wir weiter überlegen: „Reichen bei drei Grundzeichen, etwa $\cdot$ und $-$ und $+$, bereits alle höchstens dreielementigen Zeichenfolgen für das Alphabet aus? Wie viele Grundzeichen würde man wohl mindestens brauchen, um bereits mit zweielementigen Zeichenfolgen auszukommen?“

Wir gingen sogleich ans Probieren, aber unser Fräulein Steinmann, die ja bekanntlich sehr für systematisches Herangehen ist, unterbrach unsere „Zeichenversuche“ mit der Frage: „Können wir nicht gleich ausrechnen, wie viele verschiedene k -elementige Zeichenfolgen man aus n Grundzeichen bauen kann? Denkt an unser „Abzählverfahren“ zur Ermittlung aller Permutationen von n Elementen!“

Kerstin, die einen scharfen Blick hat, „sah“ den Weg als erste:

„An erster Stelle der Zeichenfolge kann jedes der n Grundzeichen stehen, an zweiter Stelle ebenfalls jedes der n Grundzeichen usw., an letzter (k -ter) Stelle wieder jedes der n Grundzeichen. Das liefert n^k verschiedene Möglichkeiten.“ Solches gefiel natürlich unserem Fräulein Steinmann, und sie ergänzte: „Man nennt jede solche k -elementige Zeichenfolge aus n Grundzeichen eine *Variation der k -ten Klasse mit Wiederholung aus n Elementen* und schreibt für ihre Anzahl V_n^k . Es ist also $V_n^k = n^k$.“

Nun konnten wir die oben gestellten Fragen ohne Mühe beantworten: Hat man drei Grundzeichen, so kann man mit ihnen 3^1 einelementige, 3^2 zweielementige und 3^3 dreielementige Zeichenfolgen bilden, insgesamt also $3 + 9 + 27 = 39$ verschiedene Zeichenfolgen höchstens der Länge 3. Diese reichen in der Tat für das Alphabet aus. Die andere Frage läßt man sich nun in

der Form $n^1 + n^2 \geq 26$ formulieren, und die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft ist $n = 5$.

„Mit $\cdot$ und $-$ kann man also auch alle möglichen Wörter basteln“, meinte Gunter, und Corinna fügte hinzu: „Mit diesen beiden Zeichen kann man sogar das Märchen vom Schneewittchen aufschreiben.“

Wir lachten und gaben ihr recht; Fräulein Steinmann begann jedoch, ein ganz anderes Märchen zu erzählen: „Es war einmal ein junger Bursche namens Hans, der wollte sein ganzes Leben lang umsonst mit der Straßenbahn fahren. Also sammelte er aus den Papierkörben an den Haltestellen ‚abgefahrene‘ Fahrscheine. Dies sind Schnipsel, die dadurch entwertet werden, daß null, eins oder zwei ... oder elf oder zwölf Löcher hineingestanzt werden.“

Besitzt man nun *alle möglichen* Fahrscheine, so kann man bei einer Kontrolle immer einen gültigen Fahrschein vorlegen, sagte sich der schlaue Hans, doch da er nicht gut rechnen konnte und nicht wußte, wann er mit seinem Suchen aufhören konnte, sammelte er unentwegt weiter. Er suchte und suchte und wenn er nicht gestorben ist, so ...“

Wir wußten zwar sofort, daß wir die Anzahl aller möglichen Lochungen ausrechnen sollten, doch das Finden des Ansatzes fiel uns nicht leicht.

Fräulein Steinmann half: „Unsere Ausgangsmenge besteht aus den beiden Elementen *Loch* und *Nichtloch*.“

„Und daraus müssen wir 12-elementige Zeichenfolgen bauen“, platzte Oliver heraus. Damit hatten wir die Lösung gefunden: Es gibt $V_2^{12} = 2^{12} = 4096$ Möglichkeiten, Fahrscheine in der angegebenen Weise zu lochen.

„Der arme Hans“, sagte Utta, die sich den suchenden Burschen genau vorstellen konnte, „dabei kostet das Straßenbahnfahren nur wenige Pfennige.“

Fräulein Steinmann nannte uns noch eine weitere Anwendung des Variationsproblems: „In der Blindenschrift hat man für jeden Buchstaben ein Feld von 2 mal 3 Punkten, die entweder erhaben oder überhaupt nicht in Papier gedrückt werden können. Also ist die Anzahl der Grundzeichen gleich 2 („erhabener“ oder „flacher“ Punkt), die „Wortlängen“ jeweils genau 6, und man kann $V_2^6 = 2^6 = 64$ verschiedene Zeichen (Buchstaben, Satzzeichen, Ziffern) schreiben.“

Nun diskutierten wir die Lösungswege der in den vergangenen Zirkelnachmittagen gestellten Aufgaben:

Kerstin durfte uns erklären, warum es $7! = 5040$ verschiedene Möglichkeiten gibt, aus den Buchstaben ihres Namens Wörter zu bilden. Mike erläuterte die nächste Aufgabe: „Wenn jede der Ziffern 1 2 3 4 5 *genau einmal* genutzt werden darf, so kann man $5! = 120$ voneinander verschiedene fünfstelligen Zahlen bilden. Wenn jede der Ziffern *höchstens zweimal* auftreten darf, kann man weit mehr fünfstelligen Zahlen bilden; es gibt dabei folgende Fälle:

1. Jede Ziffer tritt genau einmal auf; man erhält $5! = 120$ Permutationen.

2. Genau eine der fünf Ziffern tritt genau zweimal auf, z.B. 1 1 2 3 4. Dann muß eine der fünf Ziffern wegfallen. Damit kann man $\frac{5!}{2!} = 60$ fünfstellige Zahlen bilden.

Da nun aber jede der vier restlichen Ziffern wegfallen kann und jede der fünf Ziffern zweimal auftreten kann, gibt es $4 \cdot 5 \cdot 60$ fünfstellige Zahlen der genannten Art.

3. Schließlich kommen noch diejenigen fünfstelligen Zahlen hinzu, in denen genau zwei Ziffern genau zweimal auftreten. So kann man z.B. aus den Ziffern 1 1 2 2 3 genau $\frac{5!}{2!2!} = 30$ fünfstellige Zahlen bilden.

Zu den Paaren 1;1 und 2;2 hätte aber auch die Ziffer 4 oder 5 treten können. Damit erhöht sich die Anzahl der zu bildenden Zahlen auf $3 \cdot 30 = 90$. Nun muß man noch berücksichtigen, daß es $C_3^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}$ Möglichkeiten gibt,² aus einer Menge von 5 Elementen zwei Elemente zur ‚Paarbildung‘ auszuwählen, so daß man für diesen Fall $10 \cdot 90 = 900$ fünfstellige Zahlen erhält.

Also gibt es $120 + 780 + 900 = 1800$ Möglichkeiten, aus den Ziffern 1 2 3 4 5 fünfstellige Zahlen zu bilden, wobei jede Ziffer höchstens zweimal auftreten darf.

Diese Aufgabe hatten wir nicht alle richtig gerechnet.

Oliver durfte erklären, warum die Ziffer 4 genau $5! = 120$ mal an erster Stelle steht, wenn man alle Permutationen der Ziffern 1 2 3 4 5 und 6 bildet. Natürlich steht die Ziffer 1 auch genau so oft an sechster Stelle. Sehr schnell verstanden wir auch, warum die Ziffer 2 genau 240mal an letzter oder vorletzter Stelle steht.

Nun erklärte uns Oliver noch, daß bei den $6! = 720$ Anordnungen der sechs Ziffern die Ziffern 1 und 2 genau 60mal nebeneinanderstehen. Und das ging so:

Die beiden Ziffern können an 5 verschiedenen Stellen nebeneinander stehen (vgl. Bild 1), vergl. *alpha* 2/84, S. 35. In jedem dieser Fälle kann die 1 vor der 2 oder die 2 vor der 1 stehen, und dies geschieht so oft, wie man die restlichen Elemente miteinander vertauschen kann. Damit stehen die beiden Ziffern $5 \cdot 2 \cdot 3! = 60$ mal nebeneinander.

„Aufgabe 5 geht so ähnlich“, fuhr der eifrige Oliver fort. „Es gibt $\frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$ von-

Bild 1 

einander verschiedene Permutationen der Elemente $a a a a b b b$. Die drei Elemente $b b b$ können an 6 verschiedenen Stellen nebeneinander stehen. Also stehen diese Elemente bei 50 Permutationen nicht nebeneinander.“

Holger hatte die 4. Aufgabe, das „Radfahrproblem“ gelöst. Er ließ die 6 Kinder ‚der Reihe nach‘ antreten und ordnete ihnen die 6 Fahrräder zu. Dies wäre auf $6!$ verschiedene Arten möglich, wenn unter ihnen nicht drei gleiche Räder gewesen wä-

ren. Also müßten $\frac{6!}{3!} = \frac{720}{6} = 120$ Radrennen ausgetragen werden, wenn alle Möglichkeiten der Verteilung der Räder ausprobiert werden sollten. Da hatten sich die sechs Kinder im Ferienlager sicher zu viel vorgenommen.

Die letzte Aufgabe hatte niemand gelöst, obwohl Fräulein Steinmann meinte, sie sei gar nicht so schwierig:

Wenn man auf dem kürzesten Weg von A nach C will, so muß man sich längs der in Bild 2 eingezeichneten Streckenabschnitte bewegen, und 7 dieser Abschnitte nutzen. Allerdings führen nicht alle 7! Anordnungsmöglichkeiten dieser Abschnitt von A nach C. Will man von einem kürzesten Weg, etwa $b_1 a_1 a_2 b_2 b_3 a_3 b_4$, zu einem anderen übergehen, so ist dies nur möglich, wenn man einen der Abschnitte b mit einem der Abschnitte a vertauscht, so erhält man z.B. den Weg $b_1 a_1 b_2 a_2 b_3 a_3 b_4$. Dagegen bewirkt eine Vertauschung der Elemente $a_1 a_2 a_3$ bzw. $b_1 b_2 b_3 b_4$ untereinander keinen Übergang zu einem Weg von A nach C. Also gibt es $\frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$ mögliche Wege von A nach C.

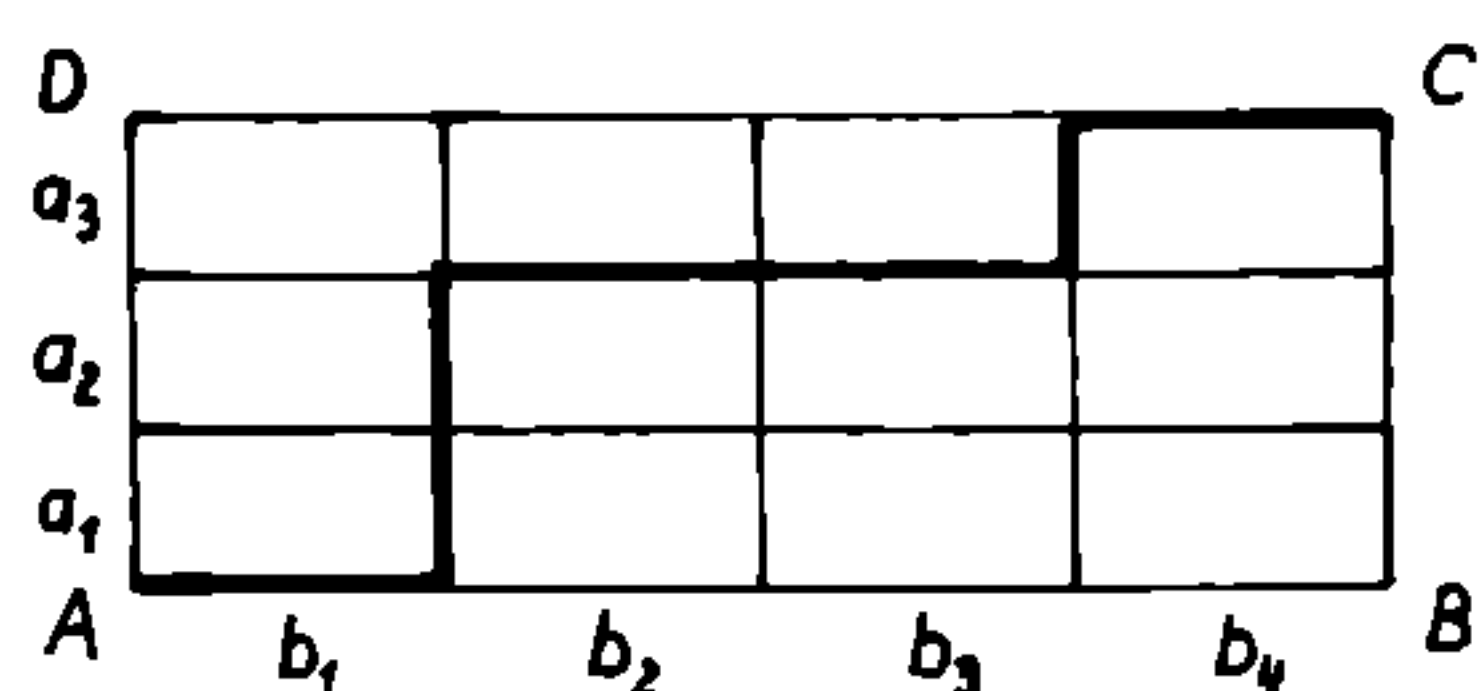


Bild 2

Das müsse sie sich noch einmal überlegen, meinte Utta, die versucht hatte, alle möglichen Wege mit Buntstiften einzuzichnen, an der Unübersichtlichkeit ihrer Darstellung jedoch gescheitert war.

Schließlich hatte uns Fräulein Steinmann noch die Ergebnisse der im letzten Zirkel gestellten Aufgaben gegeben (vergleiche *alpha*, Heft 3/84):

- Wenn 12 Kinder ein Schachturnier (jeder gegen jeden) austragen wollen, sind $C_{12}^2 = 66$ Spiele erforderlich. Bei einer durchschnittlichen Spieldauer von 40 Minuten dauerte das Turnier 44 Stunden, wenn alle Partien *nacheinander* ausgetragen würden.

- Die 8 Gruppenleiter können $C_8^3 = 56$ Skatrunden zusammenstellen. Da in jeder Runde drei Spiele gespielt werden sollen, müssen 168mal die Karten gemischt werden.

- Gruppenleiter Heinz kann

$$C_{32}^{10} = \frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot \dots \cdot 23}{10!}$$

verschiedenartige Kartenzusammenstellungen in die Hand bekommen.

- Ein Kind möchte $C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 + C_3^4 + C_3^5 = 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31$ Fotos haben. Der Fotozirkel muß also 155 Bilder anfertigen.

- Wenn sich die 14 Kinder voneinander verabschieden, schütteln sie sich $C_{14}^2 = 91$ mal die Hände.

- Das gesuchte Zahlendreieck besitzt den folgenden Aufbau.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 2 & 1 & \\ & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \end{array}$$

Man kann jedes Element als Summe der beiden darüberstehenden Zahlen erhalten.

Die Summe aller in der n -ten Zeile dieses Zahlendreiecks stehenden Zahlen ist gleich 2^{n-1} . Wir sehen sofort für die erste Zeile: $1 = 2^{1-1} = 2^0$, für die zweite Zeile $1 + 1 = 2 = 2^1$, für die dritte Zeile $1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$, für die vierte Zeile $1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$. Daß diese Gesetzmäßigkeit niemals unterbrochen wird, daß also die Summe S_n aller Elemente der n -ten Zeile gleich 2^{n-1} ist, sehen wir durch den allgemeinen Beweis, daß sie sich von jeder Zeile auf die nachfolgende Zeile „vererbt“ (und da sie auch anfänglich gilt, ist sie demzufolge stets richtig): Dazu benutzen wir das oben erkannte Bildungsgesetz für die Elemente der n -ten Zeile: $C_n^1 = 1 + C_{n-1}^0$; $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ ($n > 1$, $1 < k < n - 1$). Nun formen wir die Summe S_n der in der n -ten Zeile stehenden Elemente um.

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n \\ &= 1 + (1 + C_{n-1}^0) + (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1) \\ &\quad + (C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \dots) \\ &\quad + (C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1}) + C_n^n \\ &= 2 + 2C_{n-1}^0 + 2C_{n-1}^1 + 2C_{n-1}^2 + \dots \\ &\quad + 2C_{n-1}^{n-2} + (C_{n-1}^{n-1} + C_n^n) \\ &= 2 + 2C_{n-1}^0 + 2C_{n-1}^1 + 2C_{n-1}^2 + \dots \\ &\quad + 2C_{n-1}^{n-2} + 2C_{n-1}^{n-1} \\ &\quad (\text{denn } C_n^n = C_{n-1}^{n-1} = 1) \\ &= 2(1 + C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 \\ &\quad + C_{n-1}^3 + \dots + C_{n-1}^{n-2} \\ &\quad + C_{n-1}^{n-1}) \\ S_n &= 2S_{n-1}. \end{aligned}$$

Hat also die $(n-1)$ te Zeile unseres Dreiecks die behauptete Eigenschaft $S_{n-1} = 2^{n-2}$, so hat sie die folgende, die n -te Zeile:

$S_n = 2S_{n-1} = 2 \cdot 2^{n-2} = 2^{n-1}$. Da sie in den ersten Zeilen erfüllt ist (wie wir nachrechneten) und sich von Zeile zu Zeile „weiter vererbt“ (wie gezeigt wurde), gilt sie allgemein.

Fräulein Steinmann wertete unseren Aufgabenwettbewerb aus und lobte unseren Fleiß. Dann verabschiedete sie sich ganz besonders herzlich von uns, denn dies war unser letzter Mathematikzirkel vor den Sommerferien gewesen. Doch einige von uns zwinkerten Fräulein Steinmann zu, wir wußten, daß wir sie in nicht allzuferner Zeit im Sommerlager für *Junge Mathematiker* wiedersehen würden.

P. Göthner

Ein jeder Mensch begreift und behält dasjenige im Gedächtnis viel leichter, wovon er den Grund und Ursprung deutlich ein- sieht; und weiss sich auch dasselbe bei allen vorkommenden Fällen weit besser zu Nutz zu machen.

Aus dem Vorbericht zu Eulers Einleitung zur Rechenkunst

Ein Spiel Die fixe 7

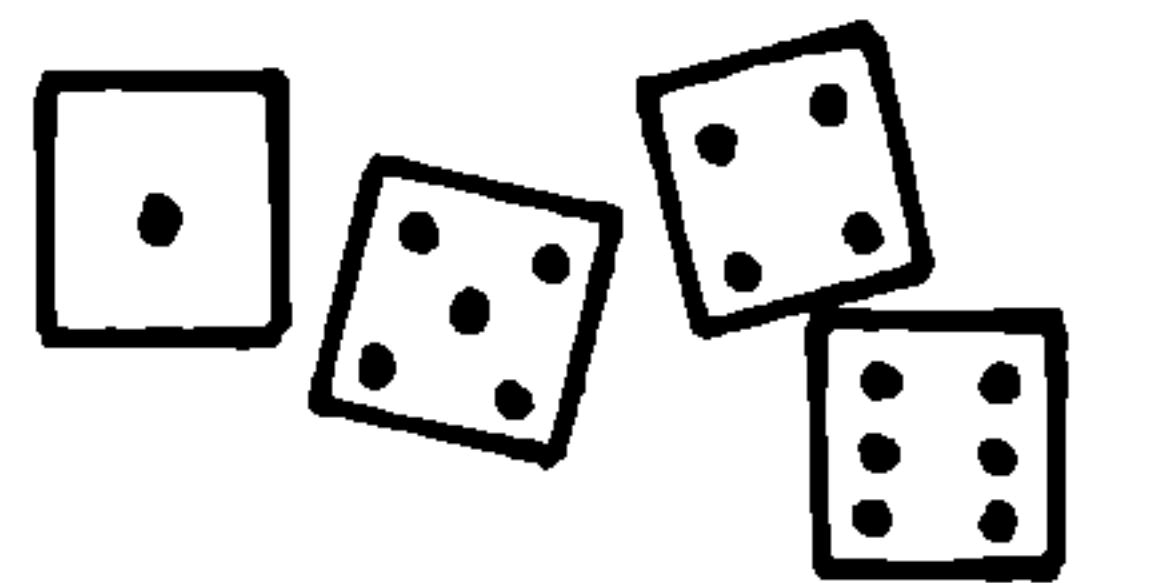
Wir spielen mit vier Würfeln. Folgende Möglichkeiten erzielen einen Gewinn:

- (1) Die Augenzahl von 2, 3 oder vier Würfeln addiert sich zu 7, 14 oder 21.
- (2) Je zwei Würfel zeigen mit ihren Augen Zehner- und Einerstelle einer durch sieben teilbaren Zahl.

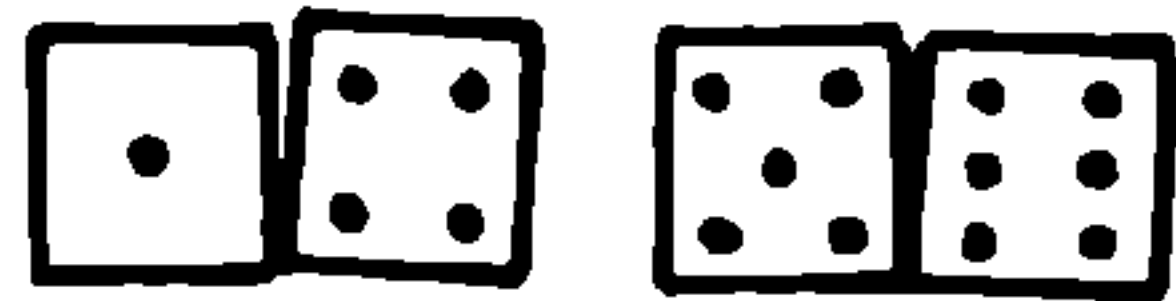
Die gewürfelten Zahlen dividieren wir durch sieben und erhalten so die Wertung.

Gewinnende Würfel bleiben stehen (fix bedeutet fest), mit den übrigen darf weitergewürfelt werden. Haben alle vier Würfel einen Gewinn erzielt, darf beliebig oft in gleicher Weise fortgesetzt werden, jedoch löscht der erste vollständig wertungslose Wurf alle gerade erzielten Punkte. Erst ab sieben Punkte wird ein Ergebnis notiert.

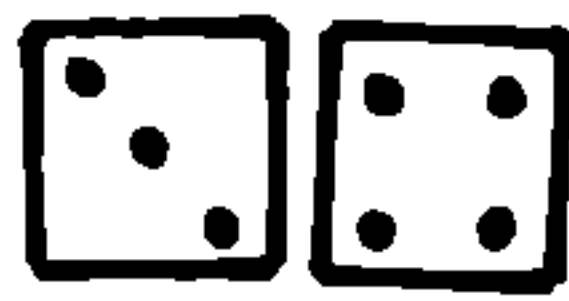
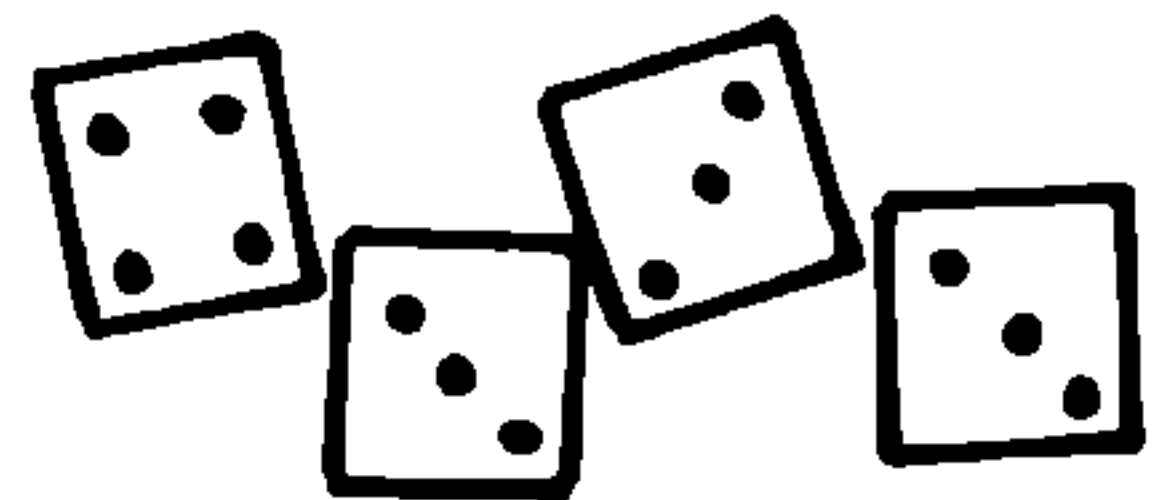
1. Beispiel:



Wertung



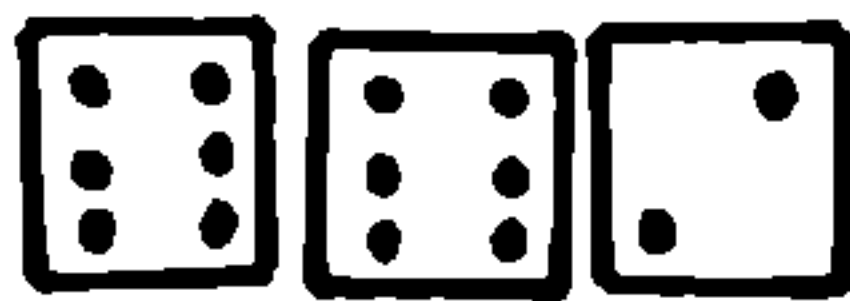
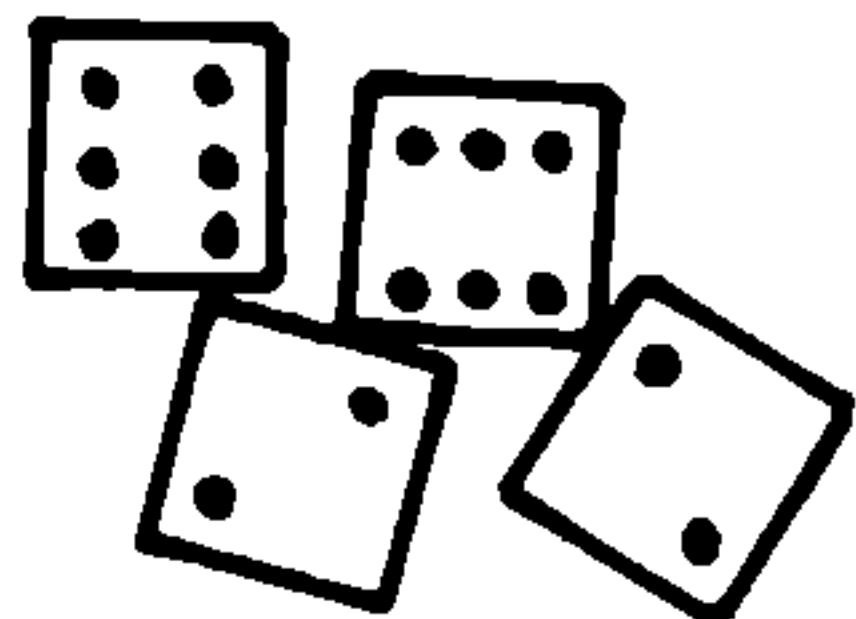
$14 = 2 \cdot 7$ $56 = 8 \cdot 7$ 10 Punkte
(Fortsetzung mit vier Würfeln möglich)



$3 + 4 = 1 \cdot 7$ 1 Punkt
(Fortsetzung mit zwei Würfeln möglich)



$35 = 5 \cdot 7$ 5 Punkte
(Fortsetzung wieder mit vier Würfeln möglich)



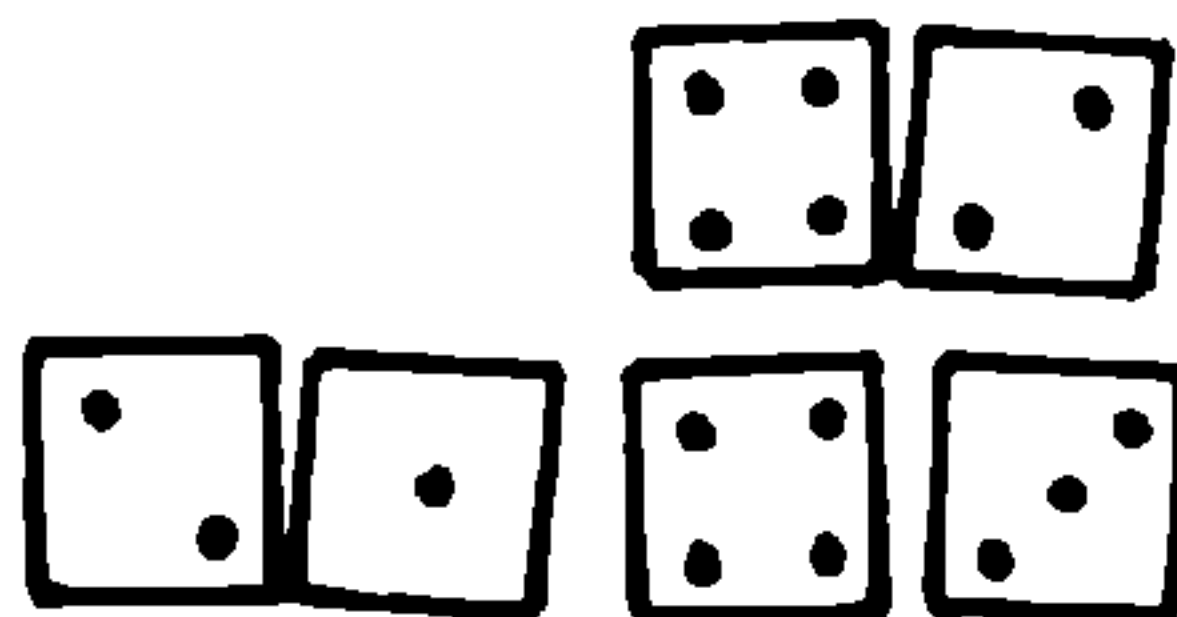
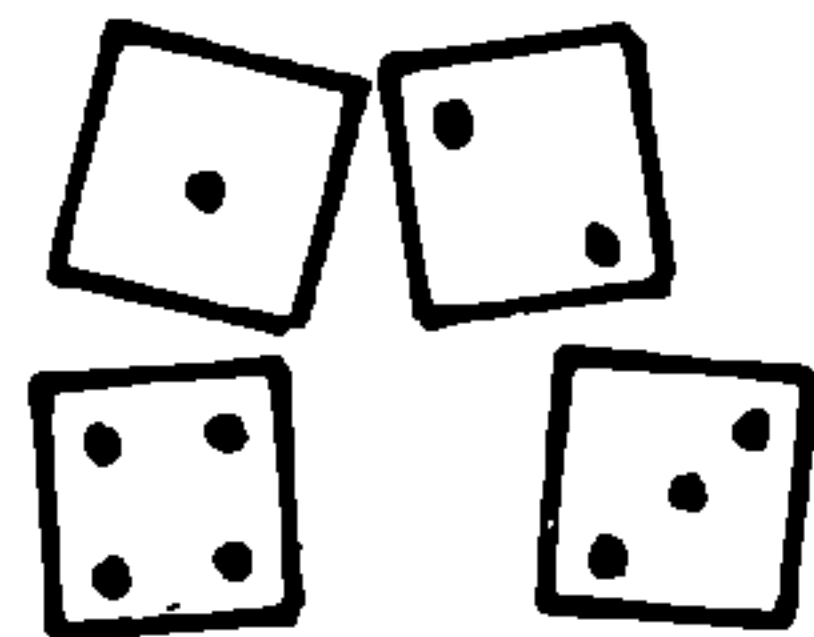
$$6 + 6 + 2 = 2 \cdot 7$$

2 Punkte
18 Punkte

(Eine Fortsetzung wäre nur mit einem Würfel möglich, was keinen gültigen Wurf erlaubt.)

2. Beispiel:

Die größte Wertung ist oft nicht die günstigste.



6 Punkte

4 Punkte

Die zweite Kombination gestattet die Fortsetzung mit allen vier Würfeln.

Wer die Spielregeln verstanden und das Spiel probiert hat, versuche sich an folgenden Aufgaben:

▲ 1 ▲ Ermittle den höchsten und den vollständig gültigen niedrigsten Wurf bei vier verschiedenen Würfelaugen!

▲ 2 ▲ Wieviel Möglichkeiten von zwei Würfelaugen gewinnen? Ermittle daraus die Chancen für eine erfolgreiche Fortsetzung mit zwei Würfeln!

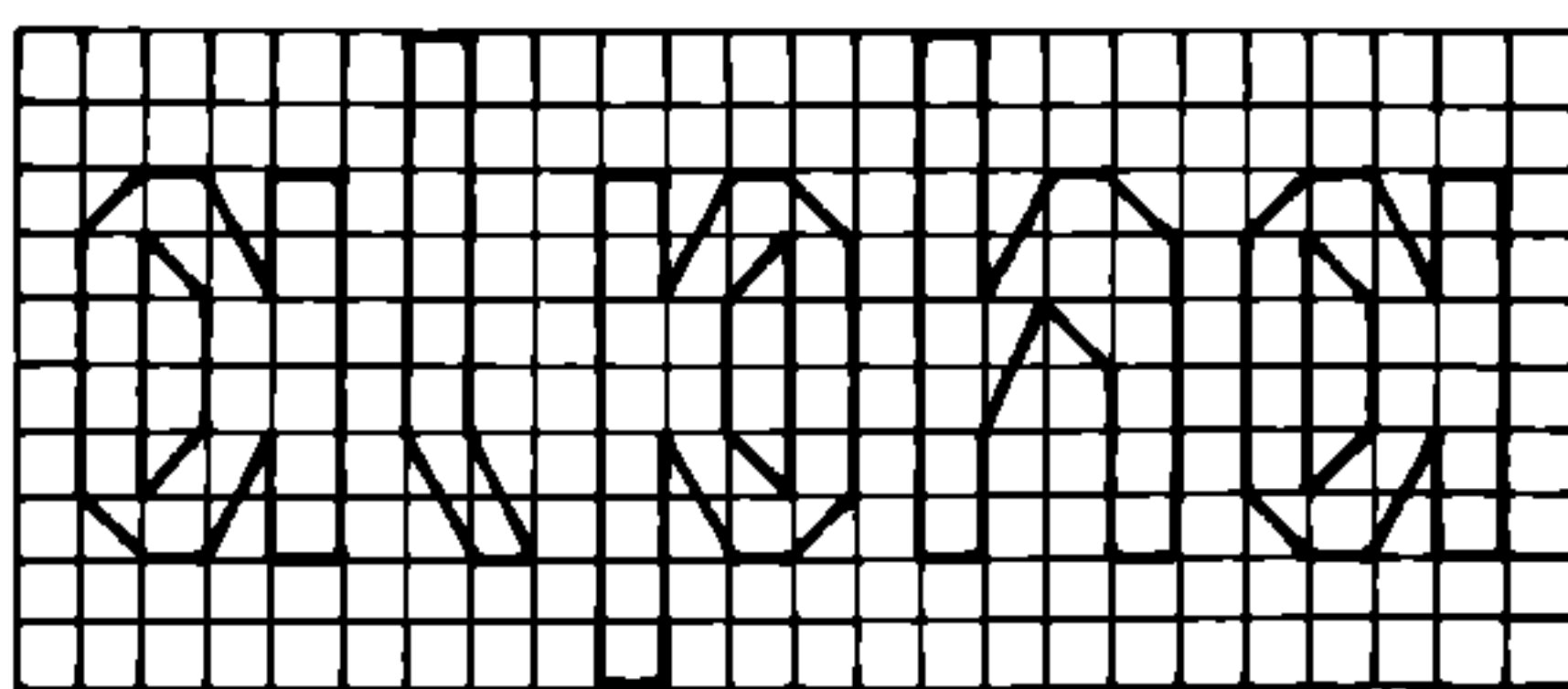
▲ 3 ▲ Wie groß ist die Chance, mit vier Würfeln genau fünf Punkte zu erzielen, ohne daß eine andere Wertung möglich ist?

▲ 4 ▲ Lege sinnvolle Spielregeln für ein ganz ähnliches Spiel, z. B. „Die fixe 6“ fest!

Ch. Werge

Flächenhaftes

Welche Gesamtfläche nehmen die Buchstaben ein?
(1 FE = Fläche eines Kästchens)



Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik
der Karl-Marx-Universität Leipzig

Es hat Spaß gemacht

Die Lösungen und die Gewinner
der alpha-Schachknochelei
aus Heft 6/1983

„Mir haben diese 8 Schachaufgaben sehr viel Spaß gemacht“ (Markus Schwenker, Magdeburg). Nicht nur dir, Markus, sondern auch vielen anderen *alpha*-Lesern hat diese Schachknochelei Freude bereitet! Insgesamt lagen uns 639 Einsendungen vor, die aufmerksam gelesen, ausgewertet und teilweise beantwortet wurden!

Wir danken allen herzlich für ihre Teilnahme! Als jüngste Teilnehmer konnten wir Marcel Krüger (Ludwigslust/7 Jahre) und Alexander Rüstau (Falkensee/8 Jahre) begrüßen. Die Ehrlichkeit vom Alexander (ihm half der Vati) und anderen jüngeren Lesern, denen entweder der Vater, der Opa oder der Bruder halfen, ist zu loben. Martin Bochmann (Dresden/83 Jahre) und Curt Kiel (Jena/82 Jahre) waren die ältesten Teilnehmer. Gefreut haben wir uns auch über die Teilnahme der *AG Schach* der PH Senftenberg und der *AG Schach* der Magnus-Poser-OS Lehesten, und daß Hartmut Gläser (Halle) und Veit Braun (Berlin) die Aufgaben als Lehrstoff in ihren *AG Schach* verwendet haben. Von den 639 Einsendern fanden 367 die richtigen Züge zum Matt. Hier die Lösungen im einzelnen:

▲ 1 ▲ 1. D:h6+ g:h6 2. Le5 matt.
(Zuerst 1. Le5 ergibt kein Matt im 2. Zug, da sich Schwarz z. B. mit T:f7+ oder Sg8 gegen die Mattdrohung 2. D:h6 verteidigen kann.)

▲ 2 ▲ 1. Dc7+ S:c7 2. Sb6 matt.

▲ 3 ▲ 1. Sg6+ Kg8 2. Dg7+ T:g7 3. Sh6 matt.

▲ 4 ▲ 1. Kg4 f5+ 2. Kg5 f4 3. g:f4 matt.

(Einige Leser fielen leider auf die Zugfolge 1. g7 Kf5 2. g8D Ke5 3. De6 matt herein. Jedoch nach 1. g7 zieht Schwarz f5 und nach 2. g8D Kf6. Danach ist ein Matt im 3. Zug nicht mehr möglich!)

▲ 5 ▲ 1. Sc7+ S:c7 2. Dd8+ K:d8 3. Lg5++ Ke8 4. Td8 matt.

(Mehrfach wurden hier fehlerhaft die Züge 1. Dd8+ K:d8 2. Lg5+ Ke8 3. Sc7+ S:c7 4. Td8 matt als Lösung angegeben. Schwarz kann sich jedoch auf 2. Lg5+ mit f6 oder Lf6 oder Sf6 besser verteidigen, weil kein Doppelschach vorliegt. Dadurch erreicht Weiß kein Matt im 4. Zug!)

▲ 6 ▲ 1. Dh1 Ta6+/Ta5/Ta4/Ta3/Ta2 /T:a1/Tc8/Td8/Te8/Tf8/Tg8+/T:h8 2. T:a6/T:a5/T:a4/T:a3/T:a2/D:a1/T:c8 /T:d8/T:e8/T:f8/T:g8/D:h8 matt.

(Bei diesem Zweizüger von Theodore Herlin, „Deutsche Schachzeitung“ 1852, wurde von vielen Lösern die Notwendigkeit der Aufrechterhaltung der Fesselung des schwarzen Bauern neben der gleichzeitigen Deckung der beiden weißen Türme nicht erkannt. So gab es zahlreiche Fehllösungen wie 1. De8, 1. Da4, 1. Dd4 oder 1. De5. Diese Damenzüge scheitern allesamt an 1. ... Ta6+!)

▲7▲ 1. Dd7+ L:d7 2. Sd6++ Kd8
3. Sf7+ Kc8 4. Te8+ L:e8 5. Td8
matt.

(Falsch war die Zugfolge 1. Dd7+ L:d7 2. Sd6++ Kd8 3. Te8+(?) L:e8 4. Sf7++, denn hier spielt Schwarz nicht 4. ... Kc8, sondern Ke7!)

▲8▲ 1. Dh1 K:b8/Lb6 zieht beliebig 2. Dh8/T:g3 matt.

(Der Reiz dieses Zweizügers, der von M. Velimirovic, 2. Preis im Myllyniemi-Jubiläumsturnier 1980, stammt, besteht in den fünf Verführungen

1. Dc1/De1/Df1/Tc3/T:g3?, die an den schwarzen Verteidigungen 1. ... Lc5/Le3/Lf2/L:a5/Lg1! jeweils scheitern. Auch bei dieser Aufgabe gab es zahlreiche Fehllösungen; zumeist durch 1. T:g3, doch nach 1. ... Lg1 gibt es kein Matt im 2. Zug!)

Unter den Teilnehmern, die alle Aufgaben richtig gelöst hatten, wurden folgende Gewinner ermittelt:

Robert Menzel (Dresden); Yvonne Gläbel (Plauen); Veit Eska (Bad Sülze).

Die weiteren drei Buchpreise wurden unter allen Teilnehmern, die zumindest eine Aufgabe richtig gelöst hatten, ausgelost: Christina Werner (Bötzow); Ralf-Peter Mayer (Wolfen); Haike Schmiediche (Brielow).

Allen Gewinnern unseren herzlichen Glückwunsch!

Aus der Vielzahl der Einsender, die alle Aufgaben richtig lösten, möchten wir noch einige nennen, deren Lösungen vorbildlich waren: Ines Andratschke (Berlin); Johannes Böhmer (Görlitz); Lorenz Fischer (Schwerin); Rudolf Freund (Stockerau/Österreich); Holger Fröbe (Dessau); Sylke German (W.-P.-Stadt Guben); Thomas Harnisch (Neuzelle); Fritz Hoffmann (Weißenfels); Steffen Hoffmann (Potsdam); Gerd Reichling (Bellheim/BRD); Falk Sempert (Dresden); Uffz. Steffen Tarnick (Pragsdorf); Frank Walther (Berlin) und Ralf Wjatschke (Rostock).

„Mir hat diese Ausschreibung außerordentlich Spaß gemacht, und ich würde mich freuen, wenn ihr so etwas demnächst in dieser oder ähnlicher Form bringen würdet“ (Olaf Steffan, Reichenbach). So wie Olaf äußerten auch andere Leser den Wunsch nach einem erneuten Wettbewerb.

Die Redaktion *alpha* erfüllt ihn! Im Heft 6/1984 erscheint wiederum eine Schachknobelei, wozu wir schon jetzt alle *alpha*-Leser recht herzlich einladen!

J. Lehmann/H. Rüdiger

Prof. Dr. Massera am Telefon aus Montevideo

Ein Freund von Prof. Massera, der uruguayische Journalist W. Israel, ADN Berlin, schreibt an die *alpha*-Leser:

Ich hatte das große Glück, kurz nach der Freilassung Professor Masseras mit ihm zu sprechen, zwar nicht persönlich in Montevideo, sondern telefonisch aus der Redaktion der *Jungen Welt* in Berlin. Ehrlich gesagt, es war ein bewegender Augenblick, als ich die mir so bekannte Stimme des erprobten Kämpfers hörte. Meine Freude kann ich euch kaum schildern, aber Massera stieß einen Schrei der Überraschung und Freude aus, als er hörte, wer mit ihm sprach und daß ich seine Aussagen für die Zeitung der Jugend der DDR haben wollte. „Kein Problem, spare dir die Vorrede, ich bin den Jugendlichen der FDJ und natürlich auch den Bürgern des sozialistischen

Die Natur hat uns das Schachbrett gegeben ...; sie hat uns die Steine geschnitten ...; nun ist es an uns, Züge zu tun, von denen wir uns Gewinn versprechen.

Johann Wolfgang von Goethe



Der König zappelt im Mattnetz

Richard Nacke, Dresden, 75 Jahre

deutschen Staates zu Dank verpflichtet“, waren seine herzlichen Worte. Dann schilderte er, wie er während seiner langen Haft im Militärgefängnis von *Libertad* zusammen mit anderen Genossen öfter an die Jugend seines Landes denken mußte. „Wie wird sie durch die schweren Jahre des Faschismus kommen? Was wird an reaktionärem Gedankengut hängenbleiben, da wir ja nicht legal arbeiten können?“ waren einige Fragen, die uns Sorgen machten. Denn, abgeschlossen von der Außenwelt, wußten wir ja nichts oder sehr wenig von dem was im Lande geschah.

Man müßte Dichter sein und nicht Mathematiker, um beschreiben zu können, was ich in den drei Tagen nach meiner Freilassung besonders im Zusammenhang mit den erwähnten Problemen der Jugendlichen erleben konnte.“

„Meine Wohnung ist von morgens bis abends voll von Freunden und Genossen. Es sind so viele, daß sie auf dem Korridor warten müssen, bis einige Leute gehen und sie dann Platz finden. Das was ich dir für die Jugendzeitung der DDR sagen will, ist, daß die Mehrzahl der Besucher junge Menschen sind. Einige kannte ich als kleine Kinder, andere waren etwas größer, denn du mußt bedenken, daß ja mehr als zehn Jahre vergangen sind, seit die Diktatur errichtet worden ist“, sagte Massera.

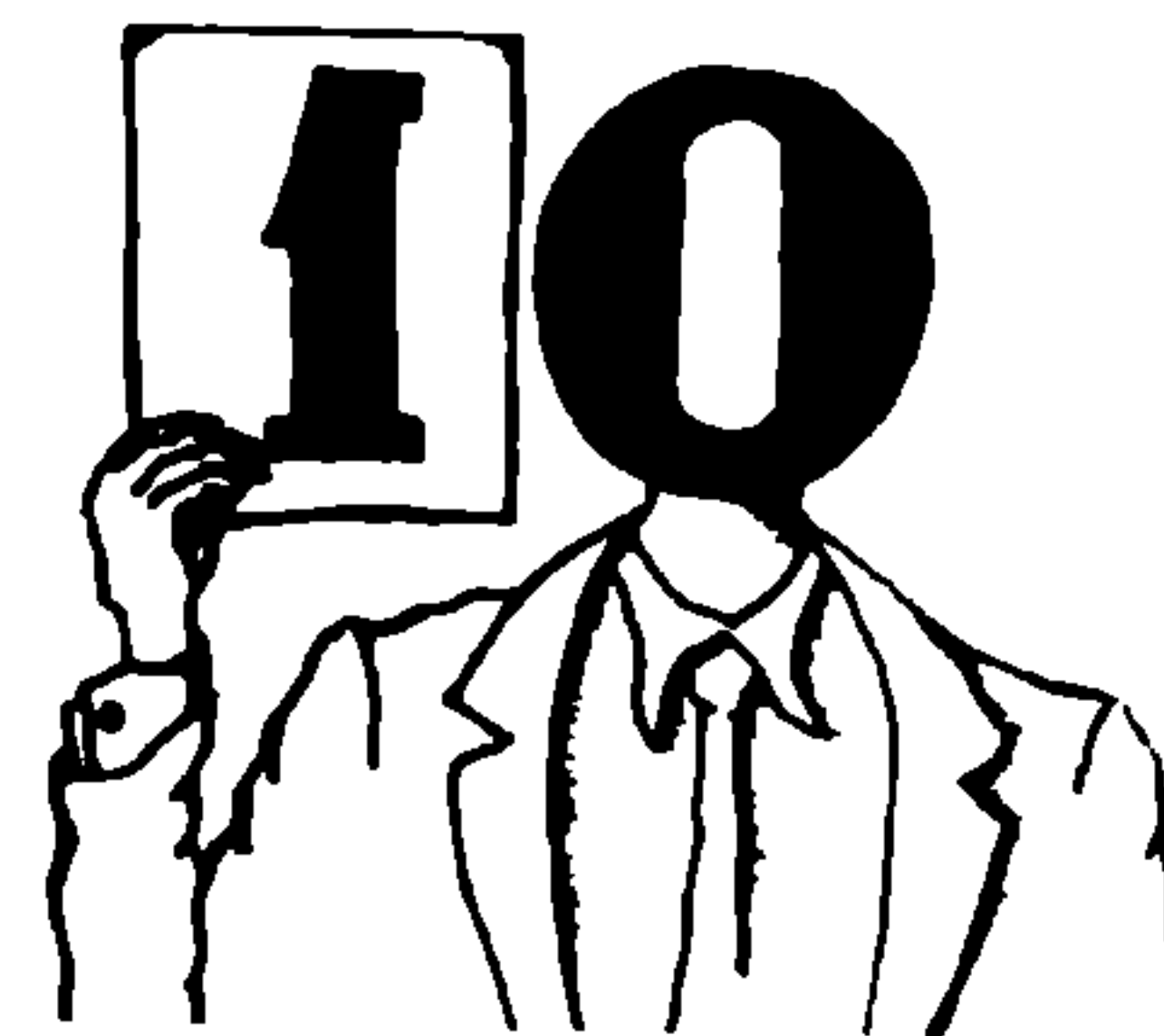
„Aber welche prächtige Jugend haben wir. Alle Befürchtungen haben sich als unberechtigt erwiesen. Ich war erstaunt, wie tief doch unsere Ideale Wurzeln geschlagen haben, wie die jungen Menschen sich nicht von den faschistischen Parolen blenden ließen. Sie stehen zur Demokratie, kämpfen in den Betrieben und in den Studentenbewegungen für ihre Rechte. Ich weiß nicht, ob du verstehen kannst, wie mir zu Mute war, nach so langer Zeit mit Jungen und Mädchen, die eine solche politische Reife haben, zu sprechen. Und mit welcher Natürlichkeit sie von den Aktionen, die noch zur völligen Erlangung der demokratischen Rechte notwendig sind, sprechen. Das wollte ich dir sagen, denn du hast mir von den Aktionen der Studenten der Humboldt-Universität zu Berlin berichtet, die anlässlich der Verleihung der Ehrendoktorwürde ein Meeting für meine Freilassung abhielten.

Ich möchte besonders den Studenten danken, für alles, was sie getan haben, damit ich jetzt frei bin. Sie sollen wissen, daß die Jugend unseres Volkes, so wie ich es dir beschrieb, ihren Mann steht und daß das in sie gesetzte Vertrauen vollauf gerechtfertigt ist. Du weißt, ich bin als Professor und Mathematiker immer im Kontakt mit der Jugend gewesen. Ohne sie könnte ich mir mein Leben überhaupt nicht vorstellen. Deshalb freut es mich, daß du gerade dieses Gespräch für die Zeitung der FDJ führst.“

Ich erzählte Massera auch von der Schülerzeitschrift *alpha*, die über ihn berichtete. Er versprach mir, wenn er in die DDR kommt, mit *alpha*-Lesern ein Forum durchzuführen.

W. Israel

In freien Stunden · alpha-heiter



aus: Freie Welt, Bulkin, Moskau

Zahlenquadrat

Setze einstellige Zahlen so ein, daß sowohl waage-
recht als auch senkrecht richtig gelöste Aufgaben
entstehen.

Matematicki List, Beograd

	—		+		= 8		+		—		= 2
+		×		:		×		+		+	
	×	2	+		= 7		×	8	—		= 6
×		+		+		—		:		—	
	×		—		= 4		×		:		= 3
= 8		= 7		= 2		= 3		= 2		= 3	

Gewichtsprobleme

Satz: Jeder Mensch hat sein Idealgewicht.

Beweis: Sei G das tatsächliche Gewicht einer Person,
 g das zugehörige Idealgewicht. Häufig gilt anschei-
nend $G = g + \ddot{u}$ mit $\ddot{u}$ für Übergewicht.

Wir formen äquivalent um:

$$\begin{aligned}
 G &= g + \ddot{u} \\
 G(G - g) &= (g + \ddot{u})(G - g) \\
 G^2 - Gg &= gG + \ddot{u}G - g^2 - \ddot{u}g \\
 G^2 - Gg - \ddot{u}G &= gG - g^2 - \ddot{u}g \\
 G(G - g - \ddot{u}) &= g(G - g - \ddot{u}) \\
 G &= g \text{ w. z. b. w.}
 \end{aligned}$$

D. Pohlmann, Elmshorn, nach the mathematics teacher

Überraschende Vereinfachungen

Es gibt Terme, die sich auf ungewöhnliche Weise
vereinfachen lassen. Für wen sind beispielsweise
nachfolgende Vereinfachungen von Wurzeln nicht
überraschend?

$$\begin{aligned}
 \sqrt[2]{5 \frac{5}{24}} &= 5 \sqrt[2]{\frac{5}{24}}; & \sqrt[3]{3 \frac{3}{26}} &= 3 \sqrt[3]{\frac{3}{26}}; \\
 \sqrt[4]{2 \frac{2}{15}} &= 2 \sqrt[4]{\frac{2}{15}}; & \sqrt[5]{2 \frac{2}{31}} &= 2 \sqrt[5]{\frac{2}{31}}.
 \end{aligned}$$

a) Bestimme alle einstelligen natürlichen Zahlen a
und b , für die nachfolgende Wurzelgleichungen zu
wahren Aussagen werden!

$$(I) \quad \sqrt[a]{a + \frac{a}{b}} = a \sqrt[a]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0)$$

$$(II) \quad \sqrt[a]{b + \frac{b}{a^b}} = b \sqrt[a]{\frac{b}{a^b}} \quad (a \neq 0).$$

Es gibt unendlich viele Wurzelausdrücke, die sich
so wie die oben gezeigten Beispiele vereinfachen
lassen.

Betrachte diese Beispiele und die Ergebnisse der
1. Aufgabe aufmerksam!

b) Stelle eine Vermutung auf über die Struktur von
Wurzelausdrücken, die sich so überraschend verein-
fachen lassen!

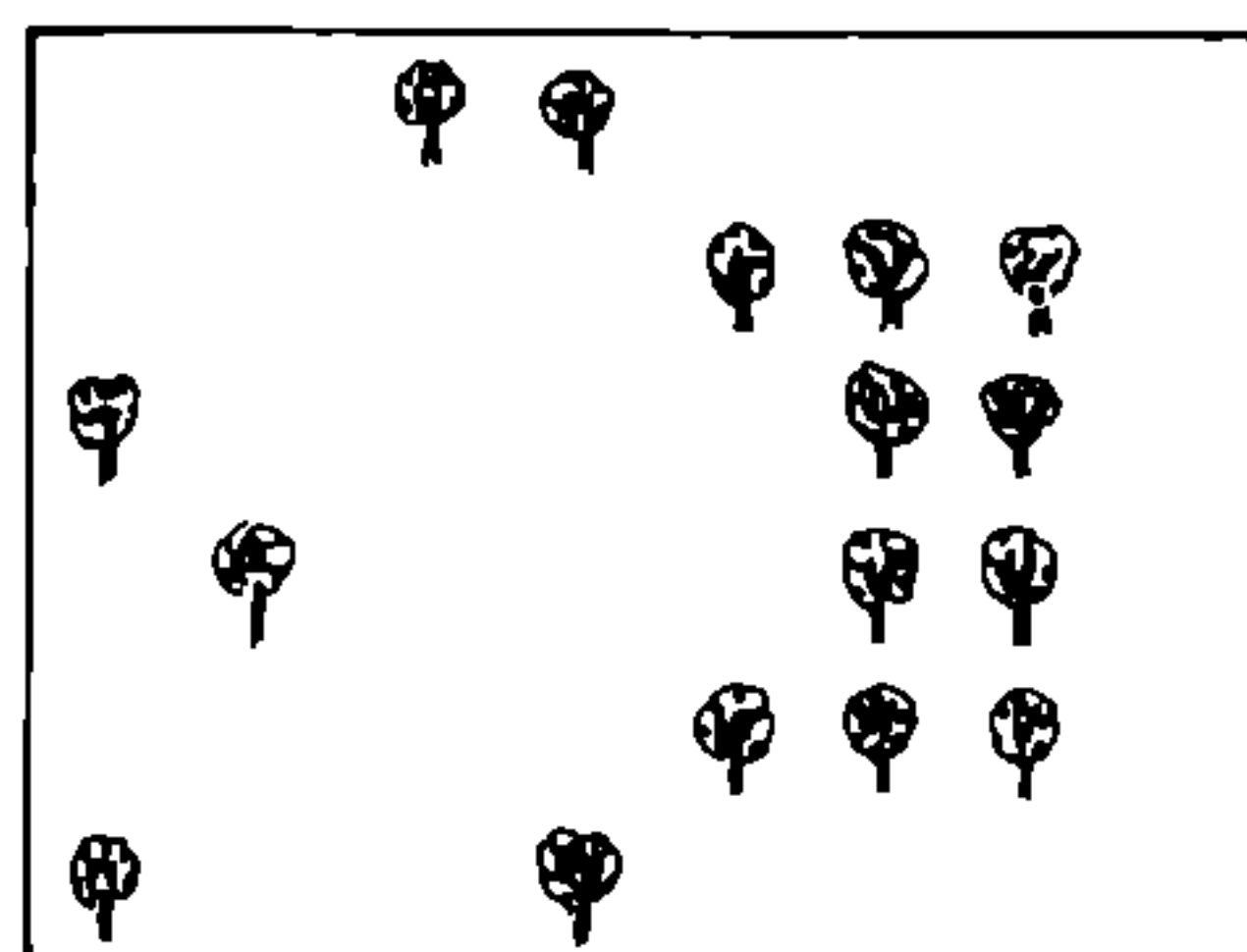
Beweise die Richtigkeit dieser Vermutung!

OL Ing. K. Koch, Schmalkalden

Zerlegungsproblem

In dem Bild befinden sich 16 Bäume. Das darge-
stellte Grundstück ist so in 8 kongruente Teile zu
zerlegen, daß jeder Teil zwei Bäume enthält.

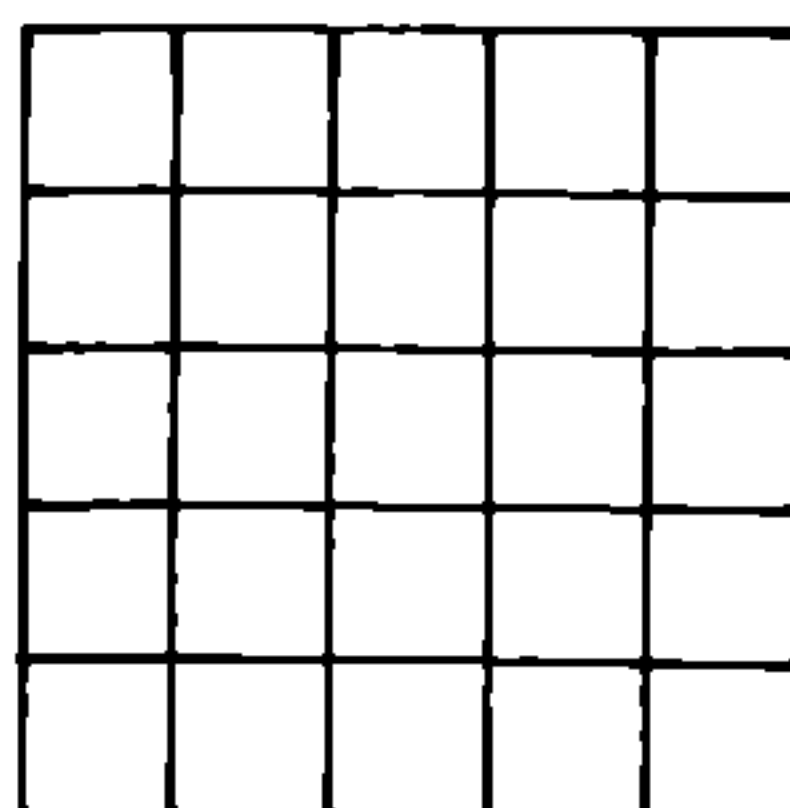
aus: Pogled, Sofia



Magische Primzahlzwillinge

Bilde alle Primzahlzwillinge unter 100! Unter Ver-
wendung aller dieser Primzahlen ist ein Quadrat so
auszufüllen, daß sich in allen Waagerechten, in den
äußeren beiden Senkrechten, im Mittelquadrat so-
wie bei Addition der Primzahlen in den Eckfeldern
die gleiche Summe ergibt. Wie heißt diese Summe
und wie viele Möglichkeiten gibt es insgesamt,
diese Zahl zu ermitteln?

Mathematikfachlehrer A. Schall,
OS Pegau



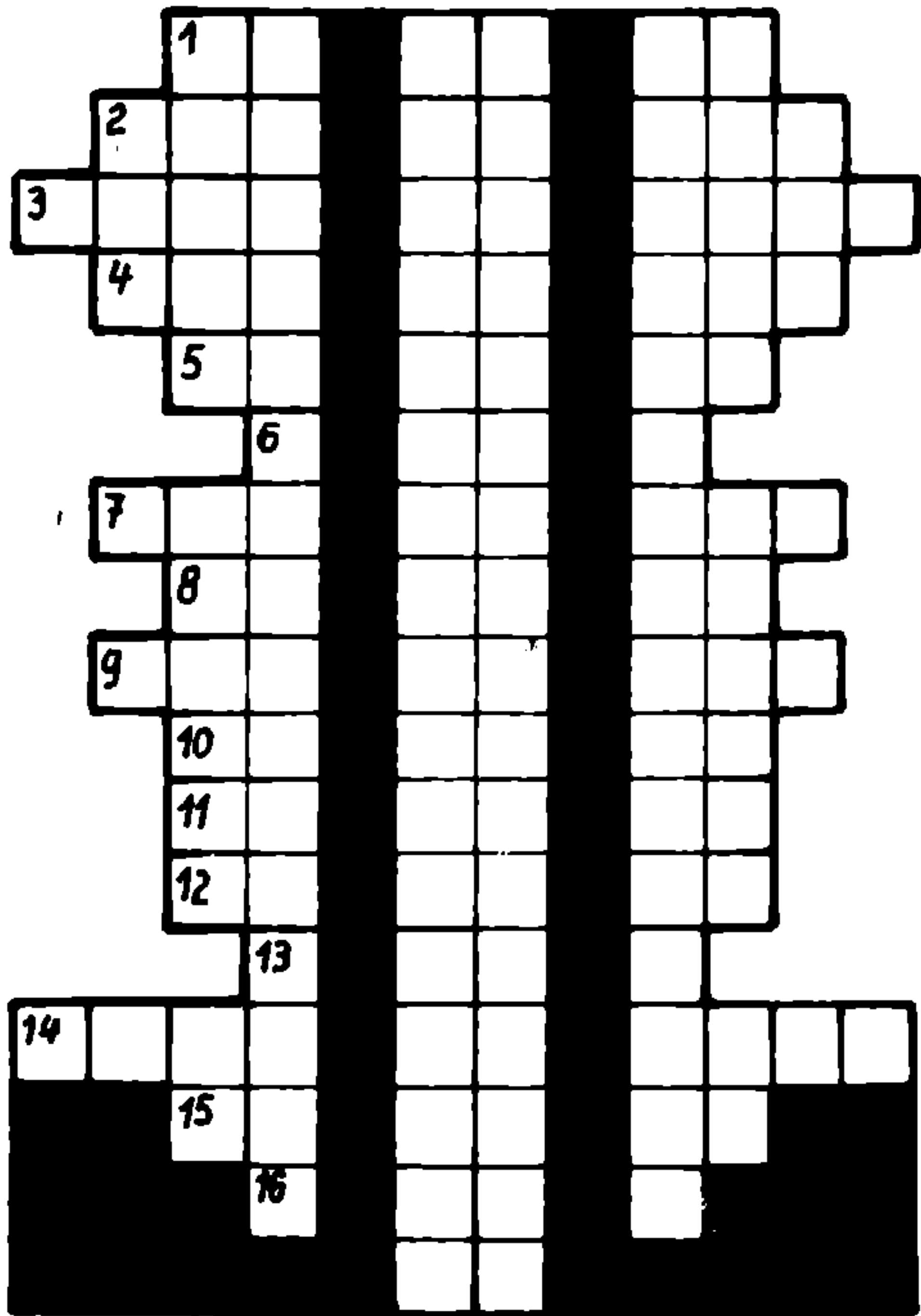
Doppelt

Nimm eine beliebige dreistellige Zahl! Multipli-
ziere sie mit 11 und das Produkt mit 91! Das Ergeb-
nis ist überraschend. Wie kann man diese Bezie-
hung nachweisen?

Scholastic Math. Magazine

Siebzehn plus zwei

In die Zeilen der Rätselfigur sind 17 Begriffe einzutragen, die folgende Bedeutung haben: 1. mathematisch: zurücklaufend, 2. einen Kode entschlüsseln, 3. verhältnisgleich, 4. wellenoptische Erscheinung, 5. methodisches Vorgehen bei mathematischen Beweisen, 6. Begriff aus der Wirtschaftsmathematik, 7. Teilnehmergruppe eines Landes zur IMO, 8. zeichnerische Darstellung eines funktionalen Zusammenhangs, 9. Begriff aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung, 10. Erdbeben, dessen Entstehungsherd unter dem Meeresboden liegt, 11. eindeutige Abbildung, 12. Ergebnis eines Meßvorganges, 13. Insel im Mittelmeer, 14. maschinenlesbarer Datenträger, 15. Sternforscher, 16. Grundelement der Geometrie, 17. Oberflächenform des Mondes.



Bei richtiger Eintragung der Begriffe ergeben sich in den schattierten Spalten: a) ein Grundbegriff aus der analytischen Geometrie, b) eine Dreieckstransversale.

Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig

Lustige Logelei

$$\begin{aligned} m + n + p + q + m &= 38 & (1) \\ 2mq &= p & (2) \\ n : q &= 3 : 2 & (3) \\ q &= 8m^3 & (4) \end{aligned}$$

Ordnet man den Lösungen für m ; n ; p ; q ; den jeweiligen Buchstaben des Alphabets zu (a bis z mit 1 bis 26 beziffert) und setzt sie in der Folge laut Gleichung (1) ein, ergibt sich als Lösung das, was der Löser entweder vor sich liegen oder in der Hand hat! (Nur ganzzahlige, positive Lösungswerte!!)

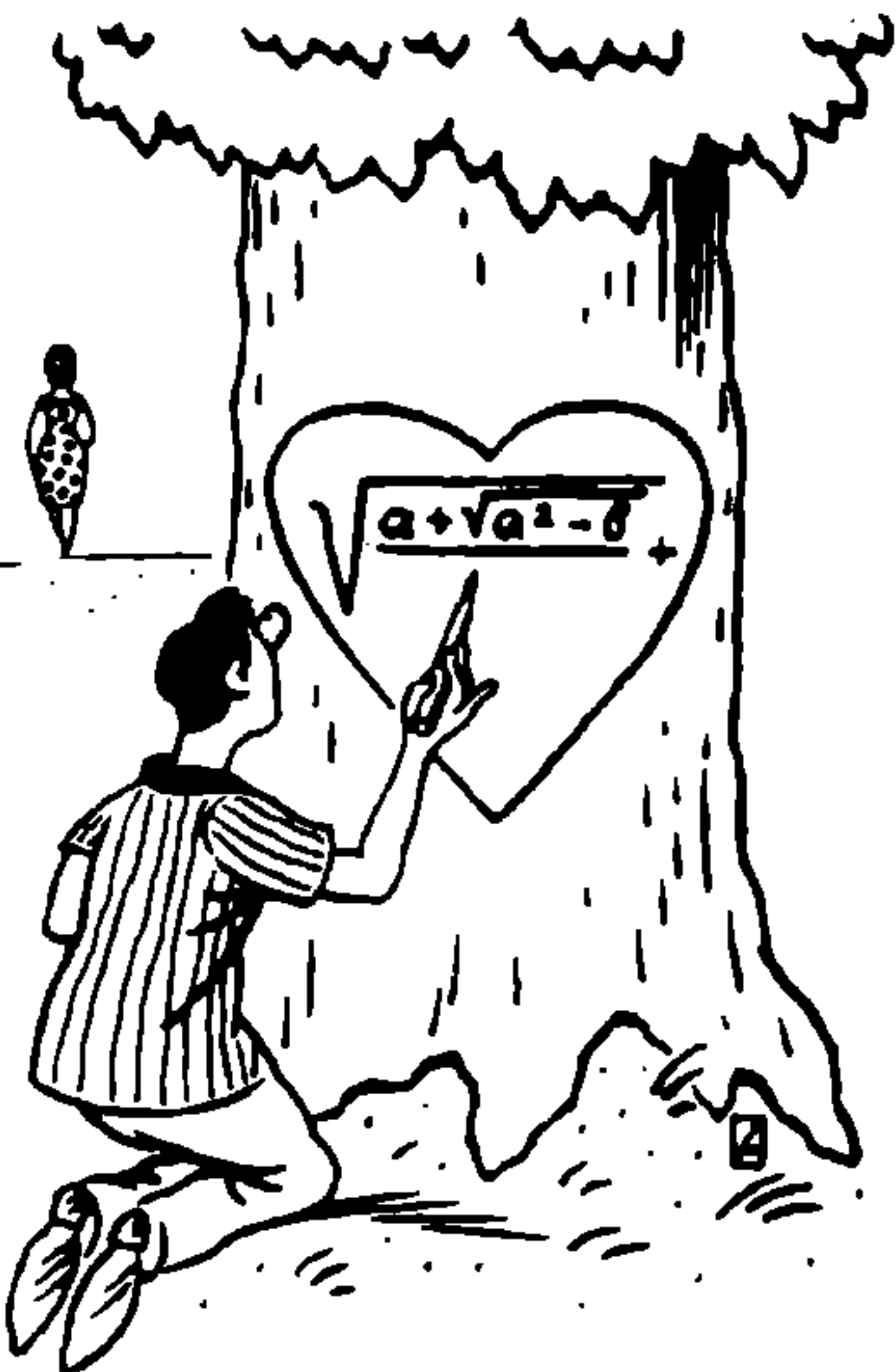
Ing. A. Körner, Leipzig

Spiel mit Zahlen

$$\begin{aligned} 98 + 7 \cdot 6 + 5 - 43 - 2 \cdot 1 &= 100 \\ 9 - 8 \cdot 7 \cdot 6 - 5 + 432 \cdot 1 &= 100 \\ \cdot &= 100 \\ \cdot &= 100 \end{aligned}$$

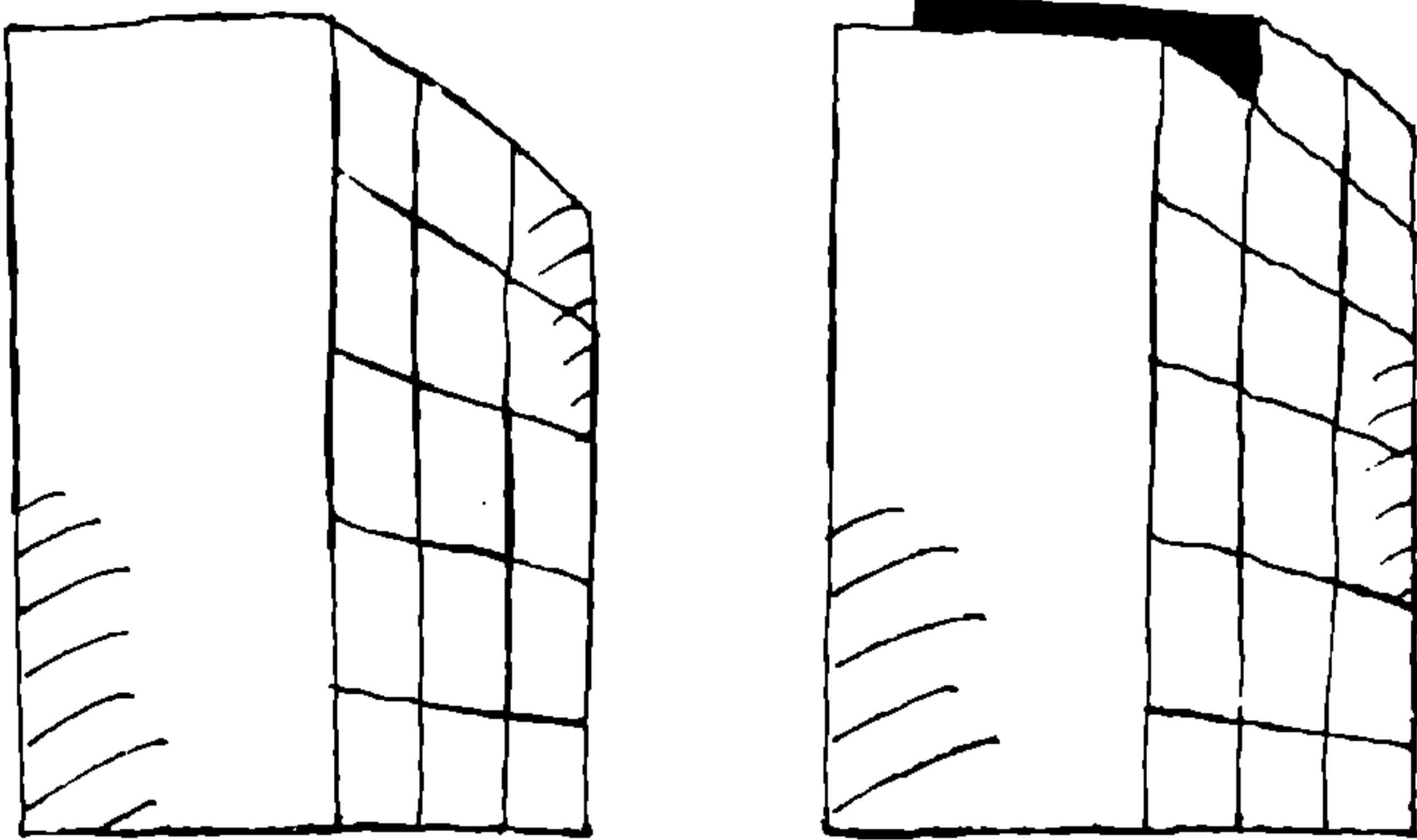
Suche selbst weitere Beispiele!
Matematicki List, Beograd

Geständnis

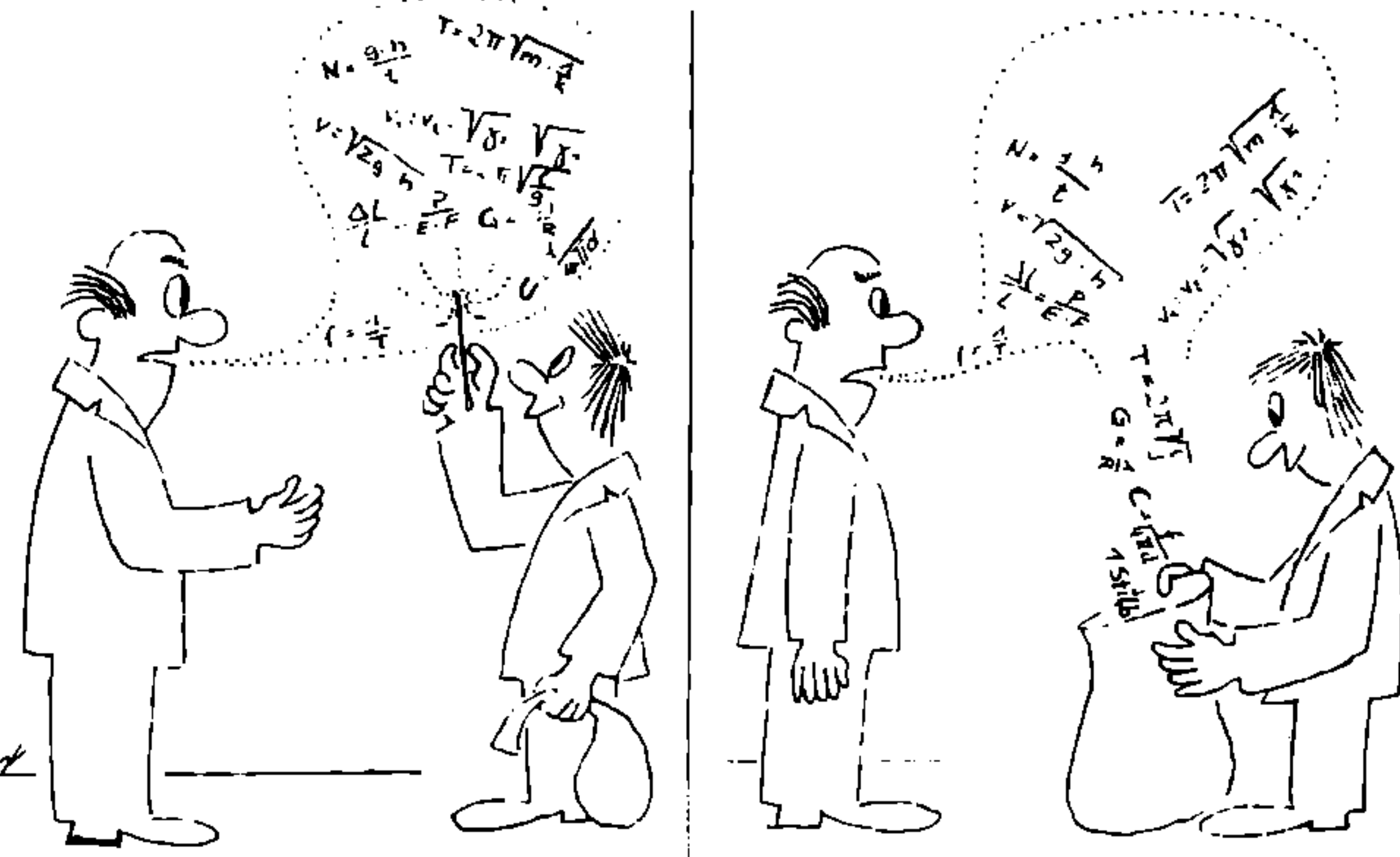


aus: „Sowjetunion“, A. Orechow

Neues von der Architekturszene:



Modell 5/081 (links), Experimentalbau (rechts)
aus: Eulenspiegel, Berlin

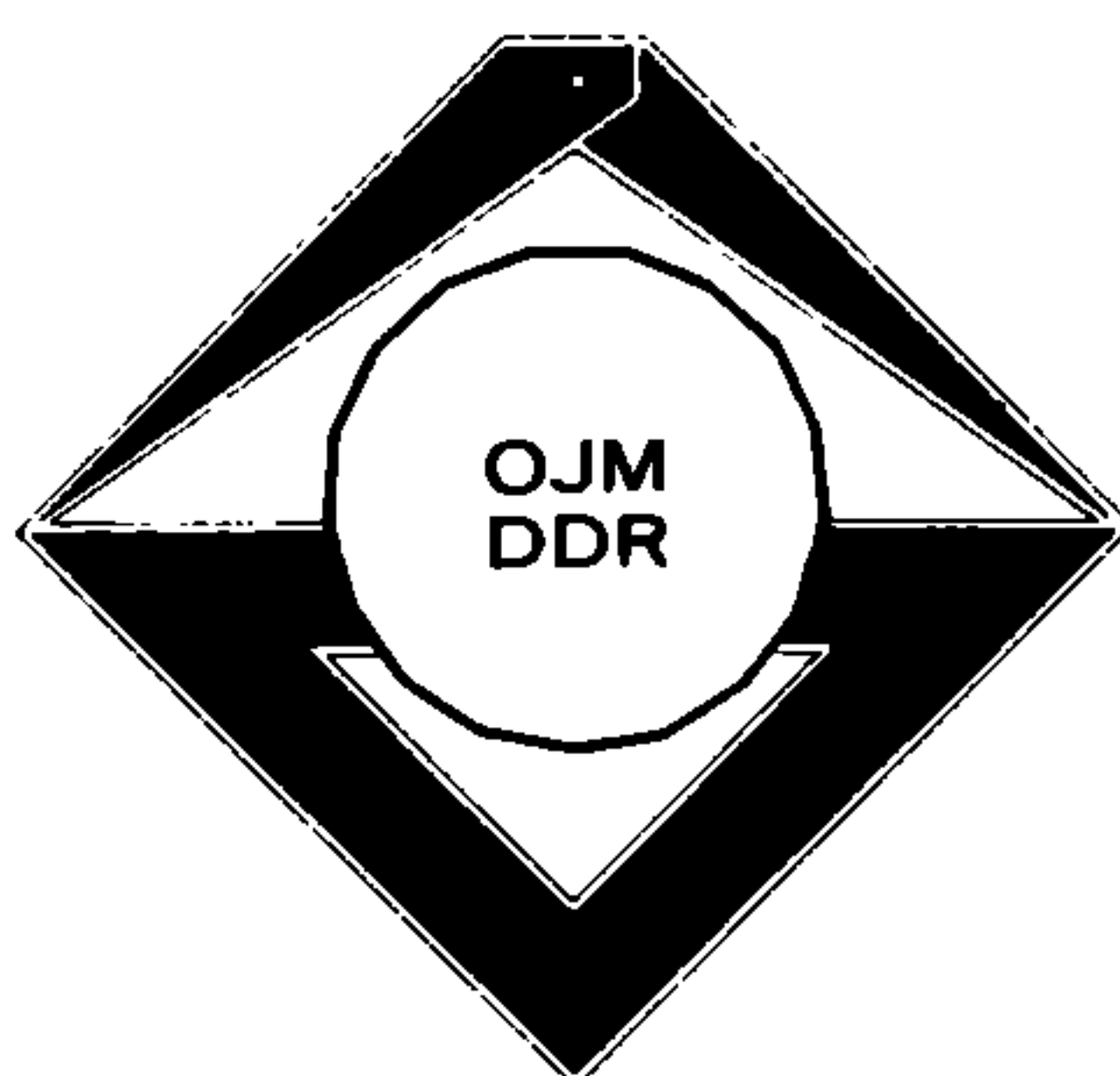


aus: Sammlerexpress, W. Löpke

XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen der Kreisolympiade

Klassenstufen 9 und 10



Olympiadeklasse 9

230921 Sind a und b die Ziffern einer zweistelligen Zahl x , so gilt

$$1 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9 \quad (1)$$

und $x = 10a + b$.

Durch Vertauschen der Ziffern entsteht daraus

$$y = 10b + a.$$

Die Summe

$$x + y = 11a + 11b = 11(a + b)$$

ist genau dann eine Quadratzahl, wenn der Primfaktor 11 und weitere Primfaktoren jeweils in gerader Anzahl in $a + b$ enthalten sind. Wegen (1), also $1 \leq a + b \leq 18$, kann $a + b$ außer dem Primfaktor 11 keinen weiteren Primfaktor enthalten. Also ist $x + y$ genau dann eine Quadratzahl, wenn

$$a + b = 11$$

gilt. Das trifft unter den Bedingungen (1) genau für die Wertepaare $(a; b)$ der folgenden Tabelle zu. Daher haben genau die hierzu angegebenen Zahlen x die verlangte Eigenschaft.

a	2	3	4	5	6	7	8	9
b	9	8	7	6	5	4	3	2
x	29	38	47	56	65	74	83	92

230922 Es gilt $\angle BAC = \angle DCA$ und $\angle ABD = \angle CDB$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen.

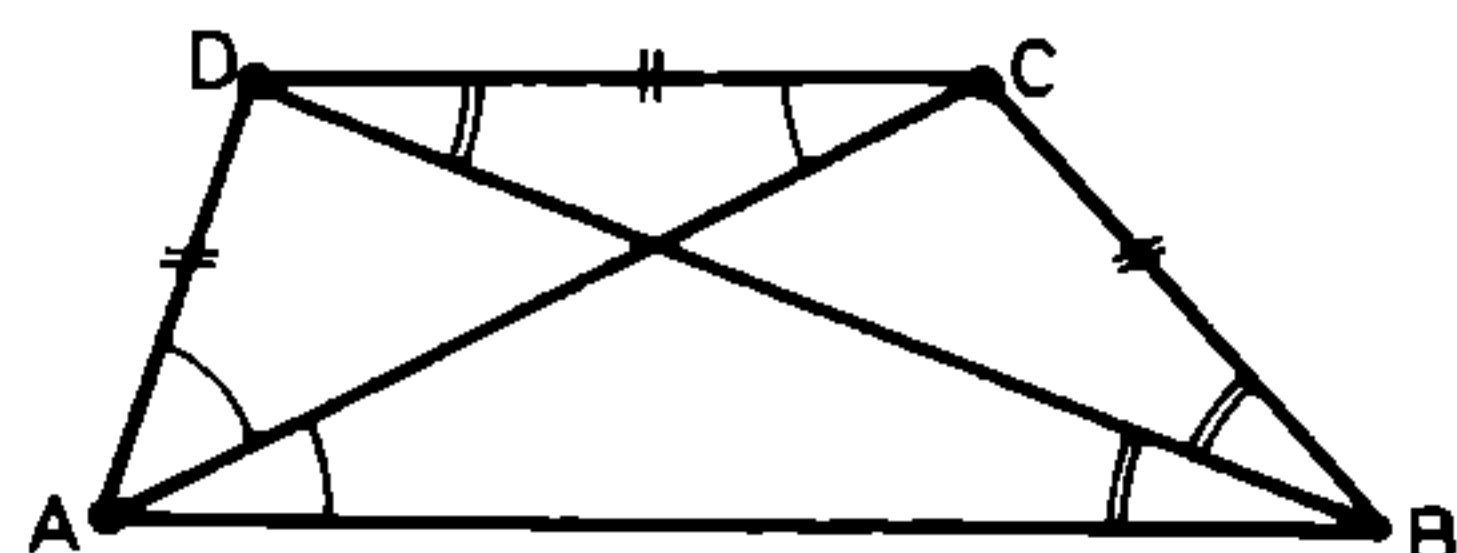
Aus (4) und (1) folgt daher:

$$\angle DAC = \angle DCA \quad (5)$$

bzw. $\angle DBC = \angle CDB$.

Aus (5) folgt:

$$\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{CB}. \quad (6)$$



Wegen (2) ist $ABCD$ kein Parallelogramm, nach (6) daher ein gleichschenkliges Trapez. Seine stumpfen Innenwinkel liegen wegen (2) bei D und C , also gilt

$$\angle ADC = \angle DCB = 110^\circ. \quad (7)$$

Die Innenwinkel bei A und B ergänzen (7) jeweils zu 180° , d. h., es gilt

$$\angle DAB = \angle ABC = 70^\circ \quad (8)$$

Mit (7) und (8) sind alle verlangten Winkelgrößen ermittelt.

230923 I. Wenn eine Eintragung die geforderten Eigenschaften hat, so folgt:

(1) Die vorderste Ziffer der gesuchten

Summe kann, da die 0 dafür nicht zugelassen ist, nur die 1 sein; denn die Summe zweier dreistelliger Zahlen ist kleiner als 2000. Die 9 kann in der Summe nicht auftreten, weil die Summe zweier einstelliger Zahlen unter den gegebenen Bedingungen nicht 19 werden kann, während andererseits sowohl bei der Addition in der Einer- als auch bei der in der Zehner- und der in der Hunderterstelle ein Übertrag, also ein Additionsergebnis ≥ 10 gefordert ist.

Die 9 kann in den Summanden nicht als Zehner oder Hunderter auftreten, weil dann unter Berücksichtigung des Übertrags (der nur 1 sein kann) die Zehner- bzw. Hunderterziffer des anderen Summanden wieder in der Summe auftreten würde.

(2) Daraus folgt, daß die 9 in einem der Summanden als Einer stehen muß, o.B.d.A. stehe sie also im ersten Summanden.

(3) Die 0 darf in keinem Summanden vorkommen, da sonst kein Übertrag auftreten würde. Als Zwischenergebnis halten wir fest: Im zweiten Summanden kann als Einer nicht stehen

0 wegen (3),

1 wegen (1),

9 wegen (2),

2; denn sonst erhält man

in der Summe eine 1.

Wegen (2) und (3) kann die Summe nicht auf 0 enden.

(4) Damit im Zehner oder Hunderter der Summe eine 0 auftritt, müssen zwei Ziffern (bei der Addition der Zehner- oder der Hunderterspalten) als Summe 9 ergeben. Damit verbleiben höchstens die folgenden Möglichkeiten:

Die in der letzten Spalte angegebenen Zahlen ergeben sich jeweils aus den einzigen Möglichkeiten, die drei verbliebenen Ziffern so zu kombinieren, daß die Summe von zweien um 9 größer ist als die dritte. (In den Fällen * und ** gibt es keine solchen Möglichkeiten.)

Einer des zweiten Summanden	Einer in der Summe	restliche Ziffern	mögliche Summe 9 aus zwei Summanden	mögliche dritte Zeile des Schemas
3	2	0, 4, 5, 6, 7, 8	4+5	1062 oder 1602
4	3	0, 2, 5, 6, 7, 8	2+7	1053 oder 1503
5	4	0, 2, 3, 6, 7, 8	2+7 oder 3+6	*
6	5	0, 2, 3, 4, 7, 8	2+7	1035 oder 1305
7	6	0, 2, 3, 4, 5, 8	4+5	1026 oder 1206
8	7	0, 2, 3, 4, 5, 6	4+5 oder 3+6	**

Damit ist gezeigt, daß nur die acht in der letzten Spalte der Tabelle angegebenen Zahlen als dritte Zeile (Summe) auftreten können.

II. Sie können (unter Einhaltung aller Bedingungen der Aufgabenstellung) auftreten, wie z. B. die folgenden Eintragungen zeigen:

749	479	829	289
+ 853	+ 583	+ 674	+ 764
1602	1062	1503	1053
429	249	349	439
+ 876	+ 786	+ 857	+ 587
1305	1035	1206	1026

Somit gibt es genau die acht in der letzten Spalte angegebenen Ergebnisse.

230924 Indirekter Beweis:

Angenommen, $\sqrt{p}$ wäre eine rationale Zahl. Dann gäbe es natürliche Zahlen m und n mit $\sqrt{p} = \frac{m}{n}$. Dabei könnte erreicht

werden, daß m und n teilerfremd sind. Daraus würde $pn^2 = m^2$ folgen, die Primzahl p müßte also m teilen, d. h., es würde $m = px$ mit einer natürlichen Zahl x gelten.

Daraus ergäbe sich $pn^2 = p^2 \cdot x^2$, also $n^2 = p \cdot x^2$, und daher müßte p auch n teilen, im Widerspruch zur Teilerfremdheit von n und m . Also war die Annahme, daß $\sqrt{p}$ rational ist, falsch, d. h., $\sqrt{p}$ ist keine rationale Zahl.

Olympiadeklasse 10

231021 I. Wenn eine Aufstellung von 5 Damen die Forderung erfüllt, daß keine Dame auf einem Feld steht, das von einer anderen erreicht werden kann, so folgt zunächst, daß in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine Dame stehen muß. Ferner kann bei der Aufstellung nur eine der beiden Möglichkeiten (1), (2) zutreffen:

(1) Auf dem Feld c3 steht eine Dame.

In Zeile 1 muß dann eine Dame entweder auf b1 oder auf d1 stehen. Durch eventuelle Spiegelung kann erreicht werden, daß auf b1 eine Dame steht. Aus dem Bild ist dann ersichtlich, daß drei weitere Damen nur noch auf a4, d5 und e2 stehen können.

5	.	.	.	.	.
4	.	.	.	.	.
3	.	.	.	.	.
2	.	.	.	.	.
1	.	.	.	.	.
	a	b	c	d	e

(2) Auf dem Feld c3 steht keine Dame.

Stünde dann in keinem der Felder

b1, d1, a2, a4, b5, d5, e2, e4 (*)

5	•	•	•		
4	•	•			•
3		•	•	•	•
2	•	•	•		
1	•		•	•	•
	a	b	c	d	e

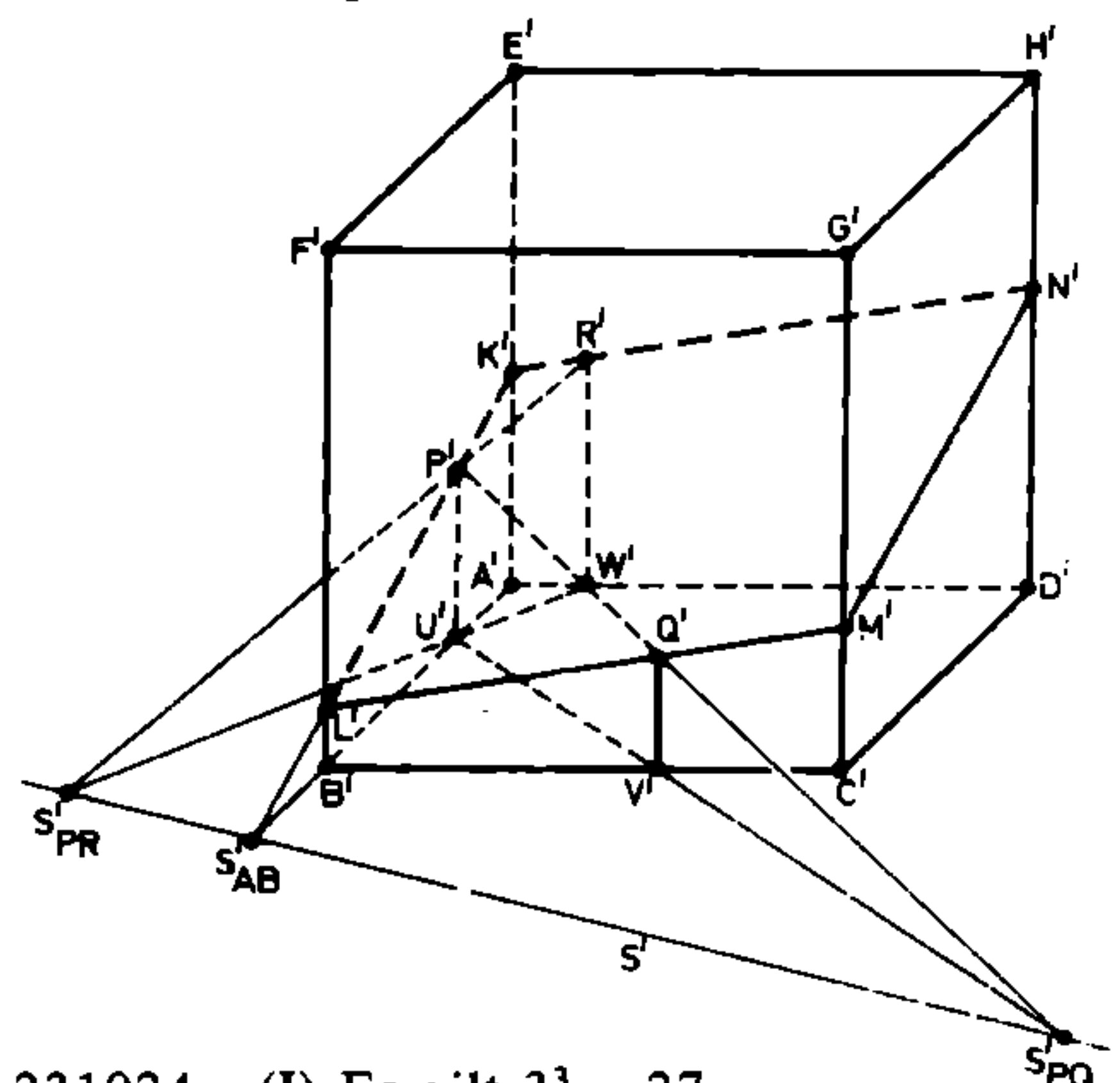
Diese Gleichung lautet für die ganzzahli-

g	$r^2 = \frac{3-g}{3g}$
1	$r^2 = \frac{2}{3}$
2	$r^2 = \frac{1}{6}$
3	$r^2 = 0$

ligt:	g	r	$3r^2 + 1$	$\frac{3}{3r^2 + 1}$
	1	$\pm \sqrt{\frac{2}{3}}$	$2 + 1$	$\frac{3}{3}$
	2	$\pm \sqrt{\frac{1}{6}}$	$\frac{1}{2} + 1$	$\frac{3}{\frac{3}{2}}$
	3	0	$0 + 1$	$\frac{3}{1}$

Ebenso folgt: Man konstruiere

Dann ist das Viereck $K'L'M'N'$ das Bild der Schnittfigur $KLMN$.



Auf die Lösungen zu den Olympiadeklassen 11/12 wird aus Platzgründen verzichtet.

XXIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

1. Stufe (Schulolympiade)

Abgabetermin beim Mathematiklehrer: Ende September 1984



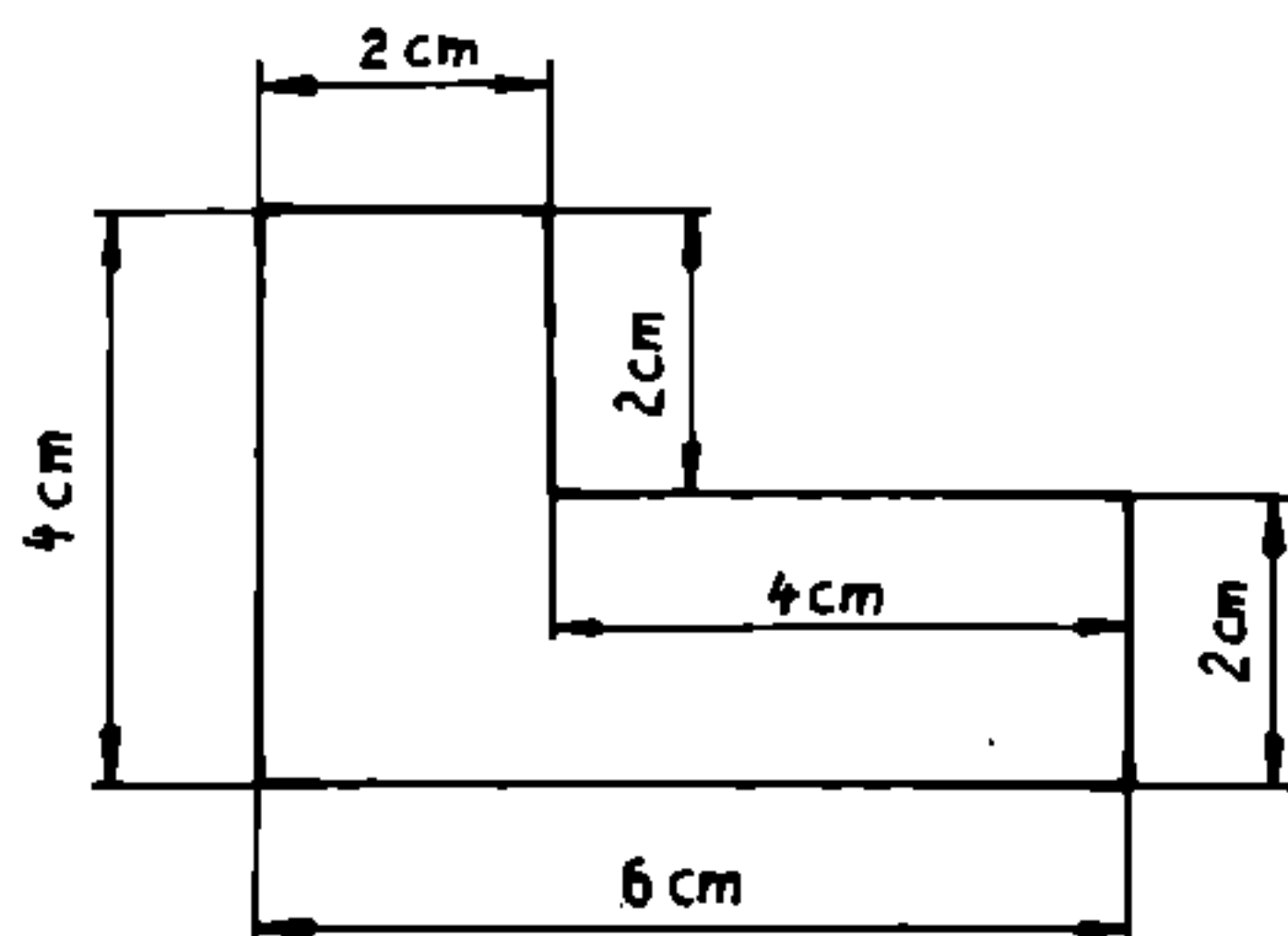
Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen. Die Lösungen werden ab Oktober 1984 veröffentlicht.

Hinweis: Unter den Aufgaben der 1. Stufe befinden sich auch solche (in der Regel ist es die 4. Aufgabe), die aus mehreren Teilaufgaben von steigendem Schwierigkeitsgrad bestehen. Dabei ist Teil a) meist recht einfach zu lösen und gibt in der Regel Hilfe für die Lösung der anderen Teilaufgaben. Die Lösung der letzten Teilaufgabe stellt bewußt hohe Anforderungen. Diese Teilaufgabe ist vorwiegend für die leistungsstärksten Schüler gedacht. Es wird empfohlen, über diese anspruchsvollen Aufgaben in Klassen und Arbeitsgemeinschaften zu diskutieren.

Anmerkung: $\sphericalangle ABC$ bezeichnet im folgenden die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$. Ferner bezeichnet AB die Strecke mit den Endpunkten A und B , während $\overline{AB}$ die Länge der Strecke AB bedeutet.

Olympiadeklasse 5

240511 Aus Flächenstücken wie im Bild kann man eine Quadratfläche zusammensetzen, deren Seitenlänge 8 cm beträgt. Wie viele solcher Flächenstücke sind hierzu erforderlich? Weise die Richtigkeit deiner Antwort durch eine Zeichnung nach!

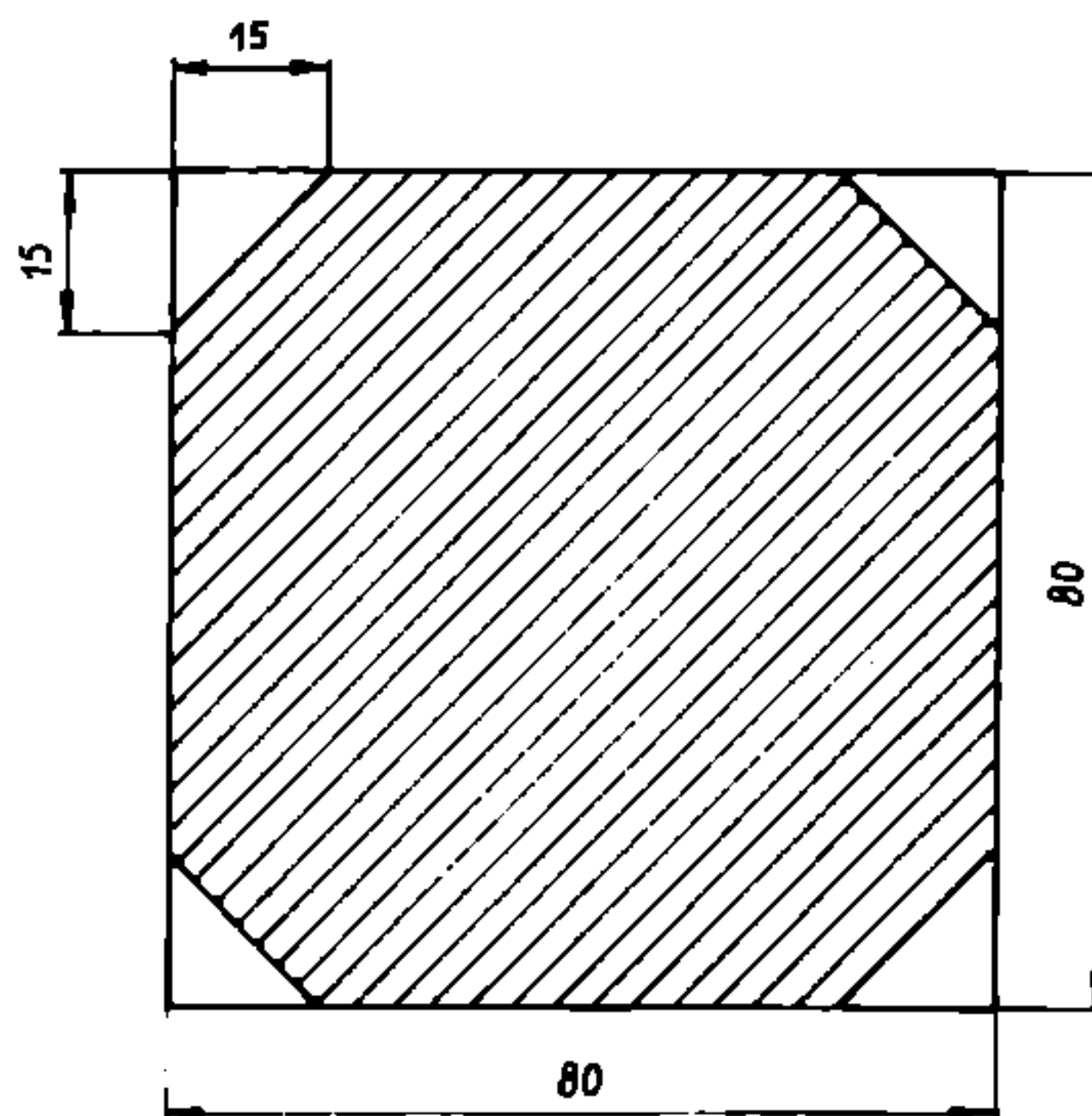


240512 Roland löste eine Divisionsaufgabe. Er erhielt als Ergebnis den Quotienten 36. Roland machte die Probe, indem er den Divisor mit diesem Quotienten multiplizierte. Dabei las er versehentlich im Divisor statt einer Ziffer 7 eine 1 und erhielt als Ergebnis dieser Multiplikation nicht

den gegebenen Dividenden, sondern die Zahl 756.

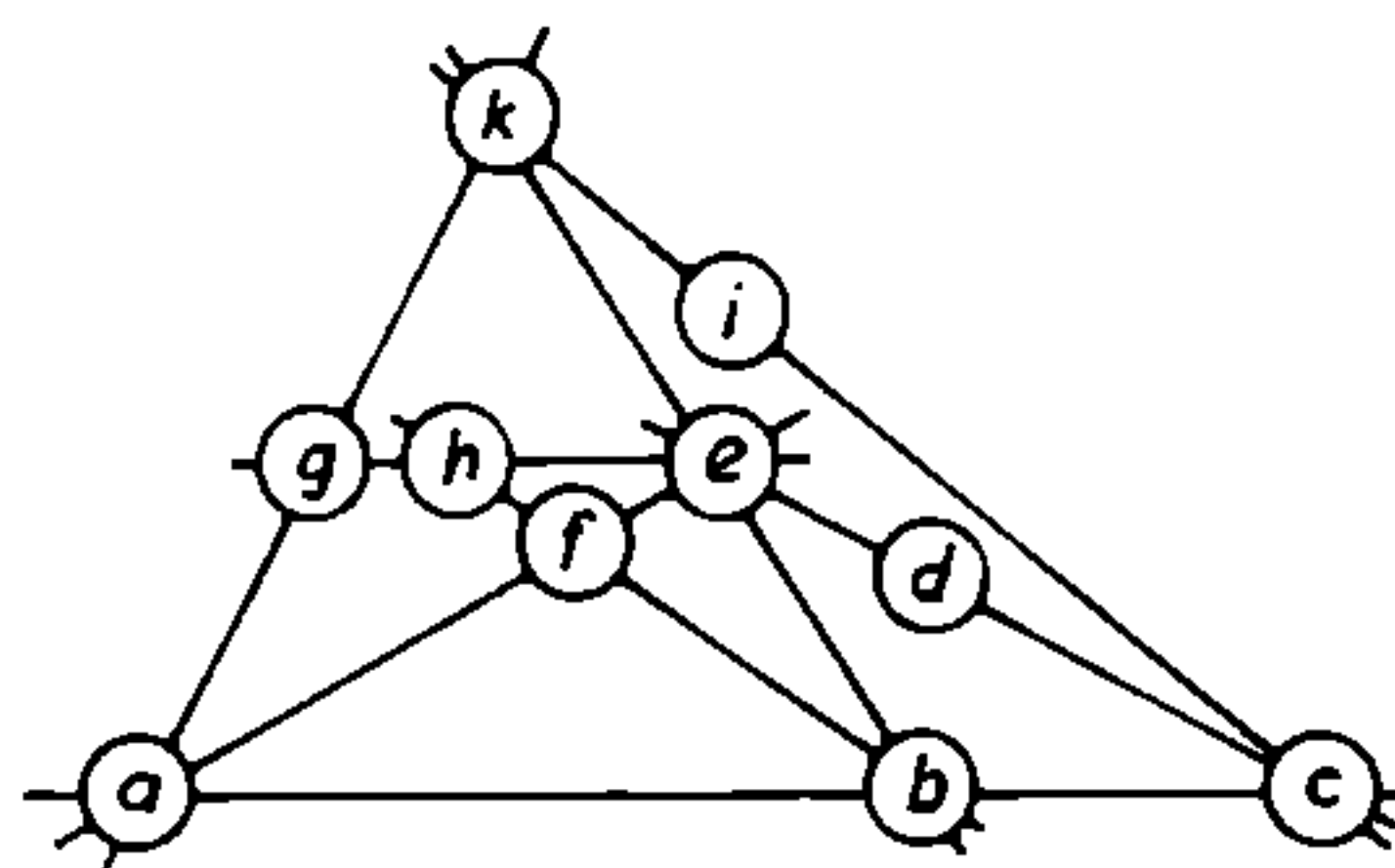
Wie hieß die Divisionsaufgabe, die Roland lösen sollte?

240513 Die schraffierte Fläche im Bild entsteht aus einem Quadrat, von dem vier gleichgroße Dreiecke abgeschnitten werden. Berechne aus den in Millimeter angegebenen Maßen den Flächeninhalt der schraffierten Fläche in Quadratzentimeter!



240514 In die Felder des Bildes soll für jeden Buchstaben eine der Zahlen von 1 bis 10 eingetragen werden. Jede dieser Zahlen soll genau einmal vorkommen. Auf jeder eingezeichneten Geraden soll die Summe der Zahlen 15 betragen; es soll also gelten:

$$\begin{aligned} a + b + c &= a + f + e = a + g + k \\ &= b + d = b + e + k = b + f + h \\ &= c + d + e = c + i + k = e + h + g \\ &= e + i = 15. \end{aligned}$$



a) Gib eine solche Eintragung an, bei der zusätzlich festgelegt wird, daß $e = 5$ und $k = 2$ ist!

b) Gib eine weitere von a) verschiedene Eintragung an, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt! (Für e und k dürfen auch andere als die in a) eingesetzten Zahlen verwendet werden.)

c) Beweise, daß es keine Eintragung gibt, bei der alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind und außerdem $e = 10$ gilt!

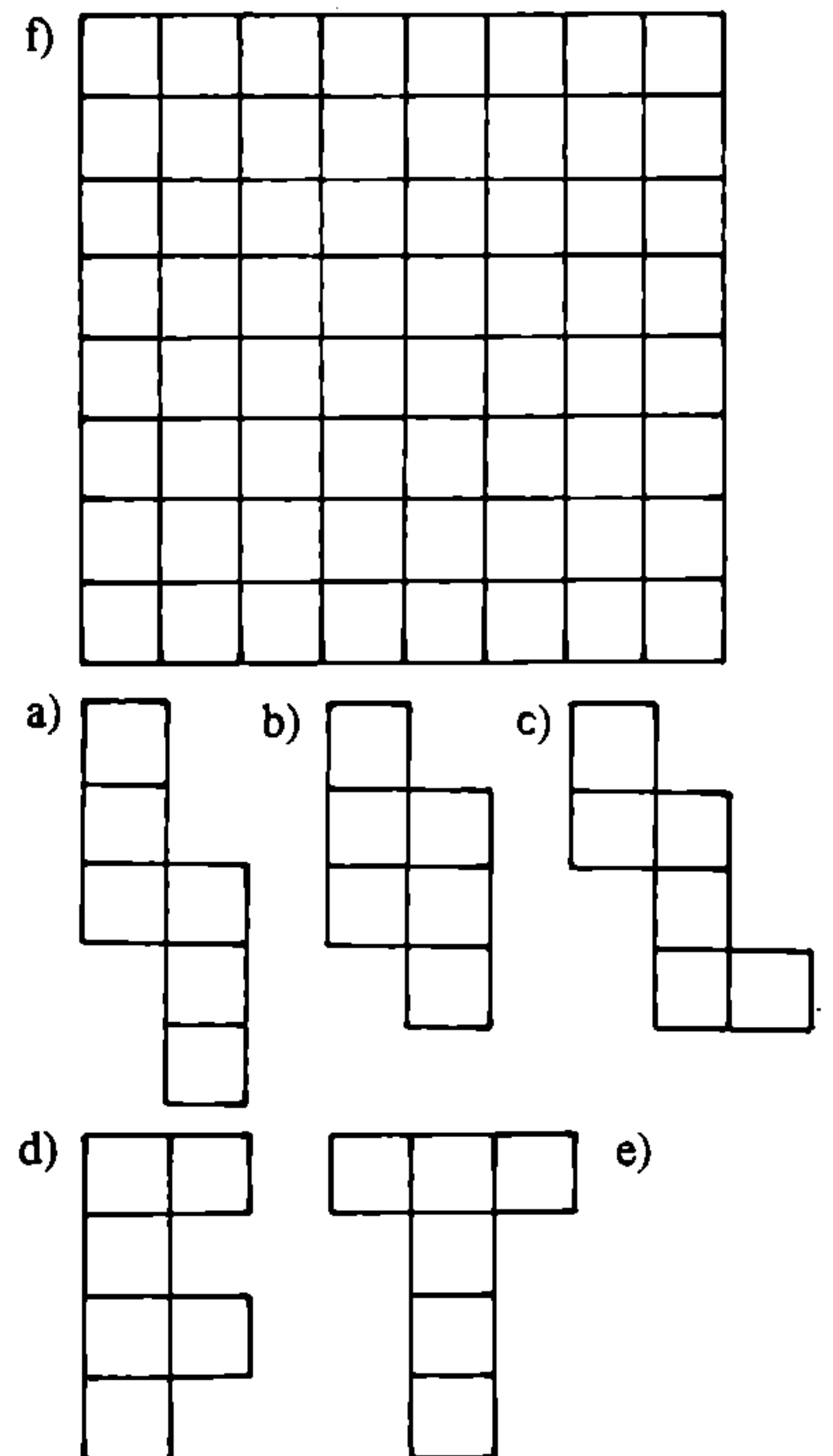
Olympiadeklasse 6

240611 Zum Pioniergeburtstag sollen die tüchtigsten Altstoffsammler ausgezeichnet werden. Hierzu will die Pionierleiterin Bücher zu je 6 M und zu je 4 M kaufen, von jeder Sorte mindestens eines, andere Sorten aber nicht. Insgesamt will sie 30 M für diese Bücher ausgeben.

Gib alle Möglichkeiten an, welche Anzahlen von Büchern der beiden Sorten gewählt werden können, um diesen Bedingungen zu entsprechen!

240612 Michael zeichnet fünf verschiedene Bilder: Bild a) bis e). Er behauptet, daß es Körpernetze von Würfeln seien.

(1) Gib alle diejenigen unter den Bildern a) bis e) an, für die Michaels Behauptung wahr ist! (Eine Begründung wird nicht verlangt.)



(2) Zeige, daß es möglich ist, aus einem quadratischen Gitternetz von 8 cm Seitenlänge, wie es Bild f) darstellt, neun Würfelnetze der in Aufgabe (1) gefundenen Art auszuschneiden! Es soll erlaubt sein, die Würfelnetze unverändert oder umgeklappt (spiegelbildlich) zu erhalten. Jedes in (1) gefundene Würfelnetz soll mindestens einmal vorkommen. Die Seitenlänge der einzelnen Quadrate in (1) soll dieselbe sein wie in (2), also 1 cm.

Zeichne derartige neun Würfelnetze in ein Gitternetz ein!

Wie viele Felder des Gitternetzes werden dabei nicht benötigt?

240613 Wenn man einen Würfel auf einen Tisch stellt, so daß er nirgends seitlich über die Tischplatte hinausragt, so sind von seinen sechs Flächen genau fünf sichtbar. Ebenso kann man einen kleineren Würfel so auf einen größeren stellen, daß von den sechs Flächen des kleineren Würfels genau fünf sichtbar sind, während die sechste vollständig auf dem größeren Würfel aufliegt, ohne seitlich über ihn hinaus-

zuragen. In dieser Art sollen drei Würfel mit den Kantenlängen $a_1 = 20$ cm, $a_2 = 10$ cm, $a_3 = 4$ cm der Größe nach so übereinander gestellt werden, daß der größte Würfel zuunterst auf der Tischplatte steht.

Wie groß ist dann die Summe der Flächeninhalte aller sichtbaren Flächenteile der drei Würfel?

240614 Rita multipliziert eine Zahl z mit 9 und erhält als Ergebnis 111 111 111.

a) Um welche Zahl z handelt es sich?

b) Ermittle eine Zahl x , die folgende Eigenschaft besitzt!

Wenn man x mit der in a) ermittelten Zahl z multipliziert, dann erhält man als Produkt eine Zahl, die mit lauter Ziffern 8 (in normaler Schreibweise des Zehnersystems) geschrieben wird.

c) Gibt es außer der in b) ermittelten Zahl x noch weitere Zahlen, die ebenfalls diese Eigenschaft besitzen?

Wenn dies der Fall ist, so ermittle eine weitere solche Zahl!

Olympiadeklasse 7

240711 Über die Jungen einer Schulklasse ist folgendes bekannt:

Jeder Junge dieser Klasse gehört mindestens einer der drei Arbeitsgemeinschaften „Foto“, „Junge Mathematiker“, „Turnen“ an. Ferner gelten folgende Aussagen:

(1) Genau sechs Jungen der Klasse sind Mitglieder der AG „Foto“.

(2) Genau fünf Jungen der Klasse sind Mitglieder der AG „Junge Mathematiker“.

(3) Genau fünf Jungen der Klasse sind Mitglieder der AG „Turnen“.

Weiterhin gelten über die Jungen dieser Klasse auch die folgenden Aussagen:

(4) Genau drei der Jungen gehören sowohl zur AG „Foto“ als auch zur AG „Junge Mathematiker“.

(5) Genau ein Junge gehört sowohl zur AG „Foto“ als auch zur AG „Turnen“.

(6) Genau drei der Jungen gehören sowohl zur AG „Junge Mathematiker“ als auch zur AG „Turnen“.

Schließlich gilt auch die Aussage:

(7) Genau einer der Jungen dieser Klasse nimmt an allen drei Arbeitsgemeinschaften teil.

(Dagegen ist zu beachten, daß in (1) bis (6) nichts darüber ausgesagt wird, ob die betreffenden Jungen außer den jeweils genannten Arbeitsgemeinschaften noch weiteren Arbeitsgemeinschaften angehören.)

Untersuche, ob durch diese Angaben die Anzahl aller Jungen dieser Klasse eindeutig bestimmt ist! Ist dies der Fall, dann gib die Anzahl an!

240712 Peter und Klaus würfeln mit drei Würfeln. Sie notieren nach jedem Wurf die drei erhaltenen Augenzahlen a , b , c in der Darstellung (a, b, c) , wobei sie diese drei Zahlen so angeordnet haben, daß $a \geq b \geq c$ gilt. Sie bezeichnen zwei Würfe genau dann als voneinander „verschieden“, wenn bei dieser Schreibweise mindestens ein

Unterschied zwischen den beiden Darstellungen auftritt.

(1) Welches ist die kleinste Summe und welches ist die größte Summe der drei Augenzahlen, die bei einem Wurf auftreten kann?

(2) Beim Spiel fragt Peter: „Wieviel verschiedene Würfe gibt es insgesamt, bei denen als Summe der Augenzahlen der Wert 12 auftritt?“ Beantworte diese Frage!

(3) Klaus überlegt: „Wieviel verschiedene Würfe gibt es insgesamt, bei denen wenigstens einer der Würfel die Augenzahl 6 aufweist?“ Ermittle auch diese Anzahl!

(4) Nach genau 50 Würfen beenden die beiden Schüler ihr Würfelspiel. Sie fragen sich, ob dabei alle möglichen verschiedenen Würfe vorgekommen sein können. Beantworte diese Frage und beweise deine Antwort!

240713 In einem Ferienlager wird ein Tischtennisturnier geplant, das folgendermaßen ablaufen soll:

Die 36 Teilnehmer tragen zunächst Vorrundenspiele in sechs Gruppen zu je sechs Spielern aus, und zwar spielt von solchen sechs Spielern jeder gegen jeden genau einmal.

Die jeweils beiden Erstplatzierten einer jeden Gruppe gelangen in die Zwischenrunde. Diese 12 Teilnehmer der Zwischenrunde werden neu in zwei Gruppen zu je sechs Spielern eingeteilt, und dann spielt in der Zwischenrunde wieder von solchen sechs Spielern jeder gegen jeden.

Die jeweils beiden Erstplatzierten jeder dieser zwei Gruppen gelangen in die Endrunde. Diese vier Teilnehmer der Endrunde ermitteln durch Spiele jeder gegen jeden die Medaillengewinner. Das Turnier soll um 8.30 Uhr beginnen. Zwischen Vorrundenspielen und Zwischenrunde soll eine Pause von einer Stunde eingeplant werden; nach Abschluß der Zwischenrunde wird nochmals eine Pause von 15 Minuten eingeplant, und zwischen dem Abschluß der Endrunde und der Siegerehrung ist wiederum eine Pause von 15 Minuten vorgesehen.

Wann kann man unter diesen Bedingungen die Siegerehrung frühestens ansetzen, wenn für jedes Spiel (einschließlich der notwendigen Spielerwechsel) 15 Minuten geplant werden und wenn genau sechs Tischtennisplatten zur Verfügung stehen?

Zeige durch eine Aufstellung der Spiele, die jeweils gleichzeitig stattfinden sollen, daß der von dir angegebene Zeitpunkt der Siegerehrung eingehalten werden kann.

240714 a) Über die Maßzahlen der in Zentimeter gemessenen Seitenlängen eines Dreiecks wird vorausgesetzt:

(1) Diese Maßzahlen sind drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.

(2) Der Umfang des Dreiecks ist um 25 cm länger als die kürzeste Dreiecksseite. Ermittle aus diesen Voraussetzungen die drei Seitenlängen!

b) Löse die Aufgabe, wenn die Voraussetzung (2) durch die folgende Voraussetzung (2') ersetzt wird!

(2') Es sei n eine vorgegebene natürliche

Zahl. Der Umfang des Dreiecks ist um n Zentimeter länger als die kürzeste Dreiecksseite.

Die gesuchten drei Seitenlängen sind mit Hilfe von n ausgedrückt anzugeben.

c) Untersuche, welche natürlichen Zahlen n in (2') vorgegeben sind, damit in b) eine lösbare Aufgabe entsteht!

Olympiadeklasse 8

240811 An einer Schule wird in den Klassen 5 bis 10 eine Altstoffsammlung durchgeführt. Bei der anschließenden Auswertung für einen Wettbewerb zwischen den Klassenstufen wird folgendes festgestellt:

Die Schüler der Klassenstufe 9 sammelten Altstoffe im Wert von 42 M; ebensoviel sammelten die Schüler der Klassenstufe 10. Die Klassenstufe 8 erbrachte doppelt so viel wie die Klassen 9 und 10 zusammengekommen. Die Schüler der Klassenstufe 5 erreichten 21% des Gesamtergebnisses der Schule; die Klassenstufe 6 lieferte 30% des Gesamtergebnisses der Schule, und die Klassenstufe 7 erreichte 2% des Gesamtergebnisses der Schule weniger als die Klassenstufe 6.

Welchen Betrag hat nach diesen Feststellungen das Gesamtergebnis der Schule?

240812 Cathrin stellt ihren Mitschülern in der Arbeitsgemeinschaft „Mathematik“ folgende Knobelaufgabe:

Eine Flasche und ein Glas wiegen zusammen so viel wie ein Krug. Die Flasche wiegt allein so viel wie das Glas zusammen mit einem Teller, während drei solcher Teller zusammen so viel wie zwei solcher Krüge wiegen.

Wieviel solcher Gläser wiegen zusammen so viel wie die Flasche?

240813 Gesucht ist eine Zerlegung der Zahl 500 in vier Summanden, wobei folgende Bedingungen gefordert werden:

(1) Alle vier Summanden sind natürliche Zahlen.

(2) Wenn man zum ersten Summanden 4 addiert, so ergibt sich dasselbe Ergebnis, wie wenn man vom zweiten Summanden 4 subtrahiert. Ebenfalls dasselbe Ergebnis entsteht, wenn man den dritten Summanden mit 4 multipliziert, und auch dann, wenn man den vierten Summanden durch 4 dividiert.

Untersuche, ob es nur eine solche Zerlegung gibt! Ist dies der Fall, so ermittle sie und bestätige, daß sie die Eigenschaften (1), (2) hat!

240814 Aus drei kongruenten gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecken mit gegebener Schenkellänge a läßt sich ein Trapez zusammensetzen.

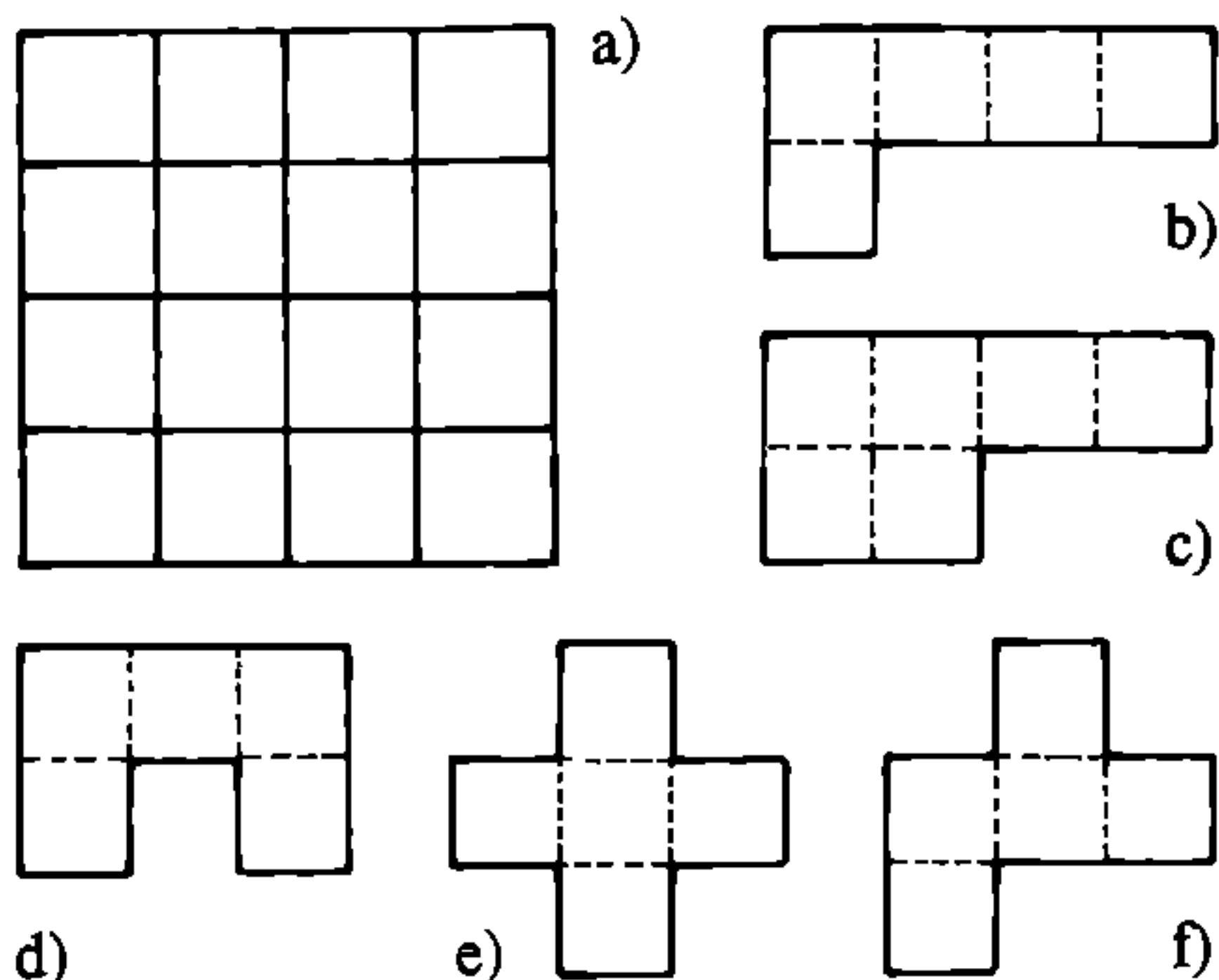
a) Zeichne ein solches Trapez!

b) Ein derartiges Trapez läßt sich in vier untereinander kongruente Trapeze zerlegen. Zeichne eine solche Zerlegung!

c) Ermittle die Länge der Paralleelseiten, die Länge der Höhe und den Flächeninhalt eines dieser Teiltrapeze in Abhängigkeit von a !

Olympiadeklasse 9

240911 a) Ein quadratisches Feld aus 25 Einheitsquadraten (Bild a) soll so zerlegt werden, daß jedes Teilstück zu einer der (aus jeweils fünf Einheitsquadraten bestehenden) Figuren in Bild b bis f kongruent ist und daß dabei auch jede dieser Figuren mindestens einmal vorkommt. Geben Sie eine derartige Zerlegung an!



b) Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen $n > 0$, für die eine solche Zerlegung eines $n \times n$ -Feldes möglich ist!

240912 Beweisen Sie, daß die Zahl 91 nicht als Produkt von fünf verschiedenen ganzen Zahlen dargestellt werden kann!

240913 Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei A . Der Fußpunkt des Lotes von A auf BC sei D . Beweisen Sie, daß dann stets $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AC} \cdot \overline{AD}$ gilt!

240914 Drei Schüler diskutieren, welche Beziehung zwischen den Zahlen 1 und

$\frac{2}{x-10}$ für reelle Zahlen $x \neq 10$ gilt. Sie stellen fest: Für $x = 11$ ist $\frac{2}{x-10} = 2$, also

$1 < \frac{2}{x-10}$; für $x = 12$ ist $1 = \frac{2}{x-10}$; für $x = 13$ ist $1 > \frac{2}{x-10}$. Anschließend be-

hauptet Marion: Die Gleichung $1 = \frac{2}{x-10}$ gilt genau für $x = 12$.

Norbert behauptet: Die Ungleichung $1 < \frac{2}{x-10}$ gilt genau für alle $x < 12$. Petra

behauptet: Die Ungleichung $1 > \frac{2}{x-10}$ gilt genau für alle $x > 12$.

Untersuchen Sie für jede dieser drei Behauptungen, ob sie wahr oder falsch ist!

Olympiadeklasse 10

241011 Zwei natürliche Zahlen, die zwischen 10 und 20 liegen, lassen sich „im Kopf“ nach folgendem Verfahren relativ schnell und sicher multiplizieren:

Man addiere zur ersten Zahl die Einerziffer der zweiten Zahl, hänge an die erhaltene Summe eine Ziffer 0 an und addiere zu der nun erhaltenen Zahl das Produkt der Einerziffern der beiden gegebenen Zahlen.

Um beispielsweise nach dieser Regel $16 \cdot 12$ zu berechnen, addiert man 2 zu 16, erhält 18, hängt eine 0 an und addiert zu

der nun erhaltenen Zahl 180 das Produkt $6 \cdot 2$, also 12. Es ergibt sich 192, in der Tat die gesuchte Zahl $16 \cdot 12$.

Beweisen Sie, daß dieses Verfahren für alle natürlichen Zahlen zwischen 10 und 20 zum richtigen Ergebnis führt!

241012 In einem Dreieck ABC mit spitzen Innenwinkeln bei A und B sei das Lot von C auf AB gefällt. Sein Fußpunkt sei D . Für ihn gelte

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{BC} \cdot \overline{CD}.$$

Ermitteln Sie aus dieser Voraussetzung die Größe des Innenwinkels $\angle ACB$!

241013 Ermitteln Sie alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen x, y, z , für die die folgenden Gleichungen (1) und (2) gelten!

$$x(y+z) = 0. \quad (1)$$

$$y(x+z) = 0. \quad (2)$$

241014 Gegeben seien ein beliebiges Rechteck $ABCD$ und zwei auf der Seite AD liegende beliebige Punkte X und Y mit $X \neq A$, $Y \neq A$ und $X \neq Y$.

Konstruieren Sie alle diejenigen Kreise k , die die durch A und B gehende Gerade g berühren und durch die Punkte X und Y gehen! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion! Beweisen Sie, daß jeder Kreis k mit den geforderten Eigenschaften nach dieser Beschreibung konstruiert werden kann und daß jeder nach dieser Beschreibung konstruierte Kreis k die geforderten Eigenschaften hat!

Wie viele solcher Kreise k gibt es (jeweils zu gegebenen $ABCD$, X und Y)?

Olympiadeklassen 11/12

241211 Ist ABC ein rechtwinkliges Dreieck und k sein Umkreis, so bezeichne F_1 den Flächeninhalt des Dreiecks sowie F_2 die Differenz zwischen dem Flächeninhalt des Umkreises und F_1 . Man ermittle unter allen Werten, die das Verhältnis $F_2 : F_1$ unter diesen Voraussetzungen annehmen kann, den kleinsten ganzzahligen Wert.

241212 Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, y mit $x \neq 0$ und $y \neq 0$, die das Gleichungssystem

$$x^2y - \frac{6}{xy} = 13,$$

$$xy + x^2y = 6 \quad \text{erfüllen.}$$

241213 Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x , für die

$$2x-3, 5x-14 \quad \text{und} \quad \frac{2x-3}{5x-14}$$

ganze Zahlen sind.

241214 Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel:

Jeder der beiden Spieler erhält neun Karten, auf denen die Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 verzeichnet sind, jede dieser Zahlen auf genau einer Karte (des betreffenden Spielers).

A beginnt und legt eine seiner Karten auf den Tisch; dann legt B eine seiner Karten auf den Tisch, dann wieder A und dann B usw. Es wird jeweils die Summe der auf dem Tisch liegenden Zahlen festgestellt. Das Spiel ist beendet, wenn eine Summe

Lösungen



Lösungen zur Sprachecke

▲ 1 ▲ Beweise, daß $n^2 + n + 1$ ein Vielfaches von 19 für unendlich viele Werte von n ist!

Lösung: Beachte, daß $n^2 + n + 1 = (n+8) \cdot (n-7) - 3 \cdot 19$ ist!

Deshalb ist $n^2 + n + 1$ nur dann ein Vielfaches von 19, wenn es $n+8$ oder $n-7$ ebenfalls ist. Angenommen $n = 19k - 8$ und $n = 19k + 7$ mit $k = 0, 1, 2, \dots$, dann erhalten wir zwei unendliche Folgen der Vielfachen von 19.

Zum Beispiel $k = 0$, dann ist $n = 7$.

$$n^2 + n + 1 = 49 + 7 + 1 = 57 = 19 \cdot 3.$$

▲ 2 ▲ Ein Lastwagen transportiert 60 Kartons mit Ölfaschen. Die Masse der Ladung beträgt 1320 kg. Jede Ölfflasche hat eine Masse von 1,4 kg (einschließlich Glas), und die Masse jedes leeren Kartons beträgt 1 kg. Berechne

a) die Anzahl der transportierten Ölfaschen,

b) die Anzahl der Flaschen in jedem Karton!

Lösung: a) Die Anzahl der Ölfaschen sei x , dann gilt die Gleichung

$$1320 = 60 + 1,4x, \\ x = 900.$$

Die Anzahl der transportierten Ölfaschen beträgt 900.

b) $900 : 60 = 15$.

In jedem Karton befinden sich 15 Flaschen.

▲ 3 ▲ Setzt alle zehn Grundziffern von 0 bis 9 so in die Kreise ein, daß zwei richtig gerechnete Multiplikationsaufgaben entstehen!

$$\begin{array}{r} \text{Lösung:} \quad 15 \quad 29 \\ \times 4 \quad \times 3 \\ \hline 60 \quad 87 \end{array}$$

Lösung zu:

Wo steckt der Fehler?

Der Fehler liegt darin, daß die Gleichung nicht nach der Unbekannten x aufgelöst wurde!

erreicht wird, die größer als 99 ist. Verloren hat derjenige Spieler, durch dessen Karte diese Summe erreicht wurde; der andere Spieler hat gewonnen.

Man untersuche, ob es eine Strategie gibt, durch die bei jeder möglichen Reihenfolge der von A gespielten Karten der Spieler B den Gewinn erzwingen kann. Falls das zutrifft, gebe man eine solche Strategie an.

Richtig muß wie folgt gerechnet werden:

$$\frac{x+5-5(x-7)}{x-7} = \frac{4x-40}{13-x}$$

hieraus:

$$\frac{40-4x}{x-7} = \frac{4x-40}{13-x} \quad (a)$$

und weiter:

$$(40-4x)(13-x) = (x-7)(4x-40)$$

hieraus:

$$520 - 92x = 280 - 68x$$

$$\text{und: } 24x = 240 \quad \text{also: } x = 10!$$

In die Ausgangsgleichung eingesetzt folgt:

$$\frac{15}{3} - 5 = 0; \quad \frac{15}{3} = 5!$$

Setzt man den Wert $x = 10$ in Gleichung (a) ein, ergibt sich in beiden Quotienten im Zähler jeweils Null! Die Gleichung (a) lautet dann $0 = 0$. Das ist sicher richtig. Wenn man dann *über Kreuz multipliziert*, folgt:

$$0 \cdot (13 - x) = 0 \cdot (x - 7),$$

was ebenfalls noch richtig ist.

Der falsche Ausdruck $13 - x = 7 - x$ ergibt sich dann, wenn man beiderseits (verbotenerweise) durch Null dividiert, wobei vorher auf der rechten Seite noch (-1) vor die Klammer gezogen wird.

Lösung zu:

Die historische Mathematikaufgabe – Weizenkörner auf einem Schachbrett

Bezeichnet w_k die Anzahl der Weizenkörner auf dem k ten Feld, so gilt:

$$w_1 = 1, w_2 = 2, w_3 = 4 = 2^2, w_4 = 8 = 2^3,$$

$$w_5 = 16 = 2^4, w_6 = 32 = 2^5, w_7 = 64 = 2^6,$$

$$w_8 = 128 = 2^7, w_9 = 256 = 2^8,$$

$$w_{10} = 512 = 2^9,$$

$$w_{11} = 1024 = 2^{10}, \text{ usw., } w_{64} = 2^{63}.$$

Die gesuchte Anzahl ist

$$s = w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_{64} \\ = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{63}.$$

$$\text{Offenbar ist } 2s = 2 + 2^2 + \dots + 2^{63} + 2^{64}.$$

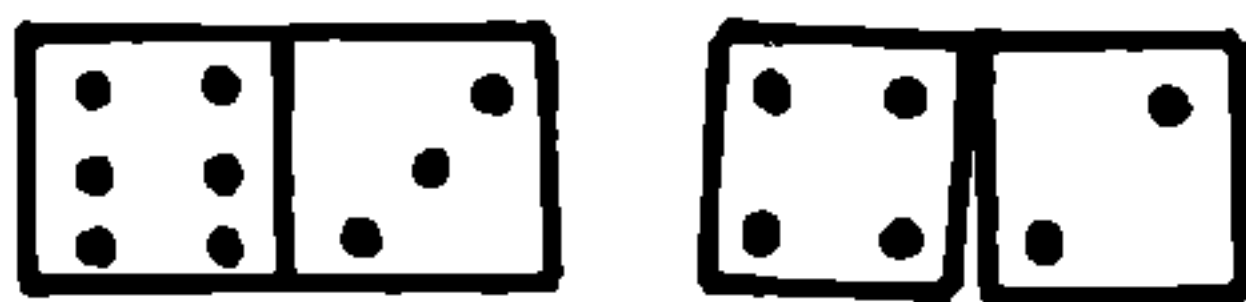
Hieraus folgt

$$s = 2s - s = 2^{64} - 1.$$

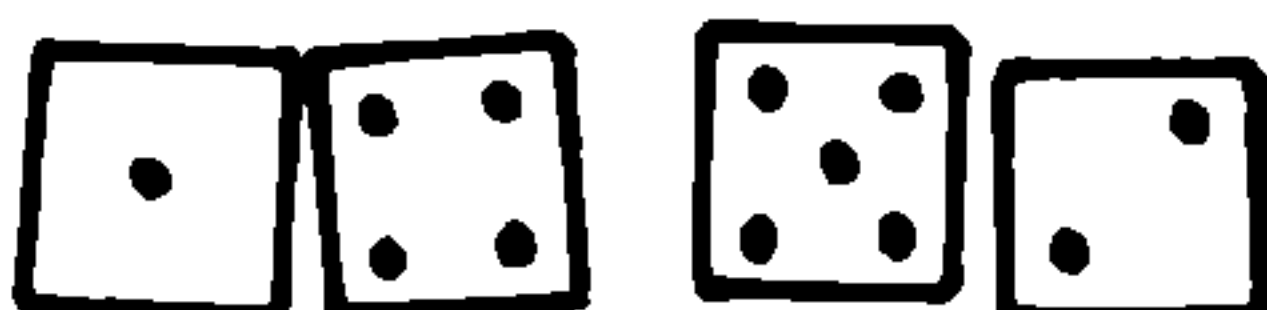
$$= 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

Lösungen zu: Die fixe 7

▲ 1 ▲ 15 Punkte:



3 Punkte:



▲ 2 ▲ Notiert man alle Möglichkeiten von (1, 1) bis (6, 6) in einer Tabelle und markiert die gewinnenden, so findet man 17 von 36. Damit ist die Chance bei fast jedem zweiten Wurf gegeben.

▲ 3 ▲ Da mit (1, 4/2, 1) auch sechs Punkte gewonnen werden können (4, 2/...), kommen nur (3, 5/...) und (5, 3/...) in Betracht. Das sind zwei von 36 Möglichkeiten (siehe Tabelle von Aufgabe 2).

Zu diesen zwei dürfen nur solche Augen kommen, die mit 5 oder 3 oder beiden keine andere Wertung erlauben. Das sind nur (.../5, 5). Zwei von 36 und davon nur einer von 36 gewinnen genau 5 Punkte,

also $2 \cdot 1 = 2$ von $36 \cdot 36 = 1296$ Würfeln, d. h. im Durchschnitt jeder 648. Wurf.

Lösung zu: Flächenhaftes

Bei geometrischer Betrachtungsweise erhält man durch Abzählen der Kästchen (und vollkommen ohne Rechnung) die folgenden Buchstabenflächen (in FE):

$$\begin{array}{ccccc} a & l & p & h & a \\ 18 & 8 & 20 & 18 & 18 \end{array}$$

Also beträgt die Gesamtfläche der 5 Buchstaben 82 FE.

Lösungen zu:

In freien Stunden · alpha-heiter

Zahlenquadrat

$$6 - 1 + 3 = 8; \quad 2 \cdot 2 + 3 = 7;$$

$$1 \cdot 5 - 1 = 4$$

$$7 + 4 - 9 = 2; \quad 1 \cdot 8 - 2 = 6;$$

$$4 \cdot 6 : 8 = 3.$$

Gewichtsprobleme

Dieser Trugschluß beruht (wie viele ähnliche) darauf, daß an einer Stelle der Gleichungen eine unerlaubte Division durch Null erfolgt. Im vorliegenden Beispiel ist das in der vorletzten Zeile der Fall. Auf Grund der Ausgangsgleichung ist hier $(G - g - \ddot{u}) = 0!!!$

Überraschende Vereinfachungen

a) Durch äquivalente Umformung der Gleichung

$$\sqrt[n]{a + \frac{a}{b}} = a \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0)$$

erhält man

$$b = a^n - 1.$$

Wegen $b \neq 0$ und a, b einstellige natürliche Zahlen, besitzt die Gleichung $b = a^n - 1$ genau eine Lösung, nämlich

$$a = 2, \quad b = 3.$$

Die Proben bestätigen die Richtigkeit der Lösung.

$$\text{Probe I: } \sqrt[2]{2 + \frac{2}{3}} = 2 \cdot \sqrt[2]{\frac{2}{3}}$$

$$2 \cdot \sqrt[2]{\frac{2}{3}} = 2 \cdot \sqrt[2]{\frac{2}{3}}$$

$$\text{Probe II: } \sqrt[2]{3 + \frac{3}{2^3}} = 3 \cdot \sqrt[2]{\frac{3}{2^3}}$$

$$3 \cdot \sqrt[2]{\frac{3}{8}} = 3 \cdot \sqrt[2]{\frac{3}{8}}$$

b) Vermutung:

$$\sqrt[n]{z + \frac{z}{z^n - 1}} = z \sqrt[n]{\frac{z}{z^n - 1}}; \quad (n, z, \text{ natürliche Zahlen}) \quad z^n \neq 1$$

Beweis: Der Term $\sqrt[n]{z + \frac{z}{z^n - 1}}$ wird umgeformt:

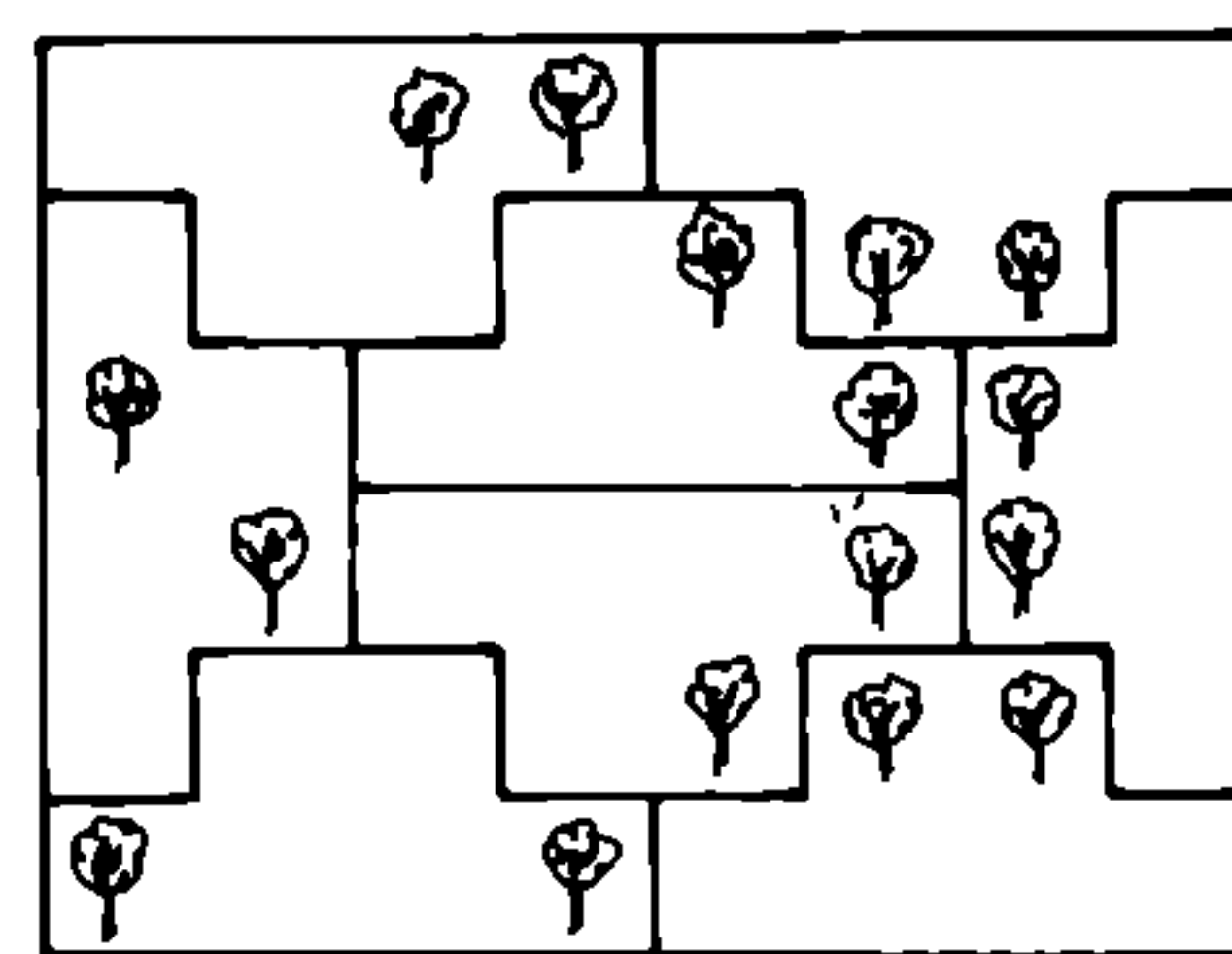
$$\sqrt[n]{z + \frac{z}{z^n - 1}} = \sqrt[n]{\frac{z(z^n - 1) + z}{z^n - 1}}$$

$$= \sqrt[n]{\frac{z^{n+1}}{z^n - 1}}$$

$$= \sqrt[n]{\frac{z^n \cdot z}{z^n - 1}}$$

$$= z \sqrt[n]{\frac{z}{z^n - 1}} \quad \text{w. z. b. w.}$$

Zerlegungsproblem



Magische Primzahlzwillinge

Primzahlzwillinge [3, 5]; [5, 7]; [11, 13]; [17, 19]; [29, 31]; [41, 43]; [59, 61]; [71, 73]. Bestimmen der Summe: Addition der Primzahlen ergibt 488, Division durch 4 ergibt 122. Die Zeilen- bzw. Spaltensumme beträgt daher 122. Aufschreiben möglicher Kombinationen:

71	73	71	71
31	41	43	29
11	5	5	17
+ 7	+ 3	+ 3	+ 5
122	122	122	122
61	61	59	59
29	43	41	31
19	11	17	19
+ 13	+ 7	+ 5	+ 13
122	122	122	122

Durch Aneinanderreihung identischer Summanden und deren „räumliche“ (beliebige) Anordnung lassen sich alle Primzahlen bis auf 5, 17, 29 und 71 (Mittelquadrat) eindeutig auf die äußeren Felder verteilen.

Es gibt 10 Möglichkeiten, um auf die gesuchte Summe 122 zu kommen.

73	11	7	31
3	29	71	19
41	17	5	59
5	61	43	13

Doppelt

Für jede 3stellige Zahl gilt

$$100a + 10b + c$$

mit $0 < a \leq 9$ und $0 \leq b, c \leq 9$.

Mit $11 \cdot 91 = 1001$ multipliziert, ergibt sich

$$\begin{aligned} & 1001(100a + 10b + c) \\ &= 100\,100a + 10\,010b + 1001c \\ &= (100\,000a + 10\,000b + 1000c) \\ &\quad + (100a + 10b + c), \quad \text{w. z. b. w.} \end{aligned}$$

Siebzehn plus zwei

1. rekursiv, 2. dekodieren, 3. proportional, 4. Refraktion, 5. indirekt, 6. Bilanz, 7. Mannschaft, 8. Diagramm, 9. Verteilung, 10. Seebeben, 11. Funktion, 12. Messwert, 13. Zypern, 14. Lochstreifen, 15. Astronom, 16. Gerade, 17. Mare, a. Koordinatensystem, b. Seitenhalbierende.

Lustige Logelei

$$\text{Aus (3): } q = \frac{2}{3}n$$

mit (4) und vorige in (2) folgt:

$$p = 2m \cdot \frac{2}{3}n = \frac{4}{3}mn$$

$$\text{in (1) folgt: } 2m + n + \frac{4}{3}mn + \frac{2}{3}n = 38$$

mit $n = 12m^3$ folgt:

$$2m + 12m^3 + \frac{48}{3}m^4 + \frac{24}{3}m^3 = 38$$

$$2m + 20m^3 + 16m^4 = 38 \text{ bzw.}$$

$$m + 10m^3 + 8m^4 = 19.$$

Aus (5) folgt die triviale Lösung $m = 1$.

Damit: $n = 12$; $p = 16$; $q = 8$;

die entsprechenden Buchstaben des Alphabets sind:

$m = a$; $n = l$; $p = p$; $q = h$,

also: $m + n + p + q + m = \text{alpha}$.

Spiel mit Zahlen

Weitere Beispiele:

$$9 \cdot 8 + 7 - 65 + 43 \cdot 2 \cdot 1 = 100$$

$$98 - 7 - 6 + 54 : 3 - 2 - 1 = 100$$

$$9 + 87 \cdot 6 - 5 \cdot 43 \cdot 2 - 1 = 100$$

$$98 : 7 + 6 + 54 \cdot 3 : 2 - 1 = 100$$

$$9 \cdot 8 + 76 - 54 + 3 + 2 + 1 = 100$$

$$98 \cdot 7 : 6 + 5 \cdot 4 : 3 - 21 = 100$$

$$9 - 8 + 76 + 54 - 32 + 1 = 100$$

$$98 - 7 + 6 - 54 : 3 + 21 = 100$$

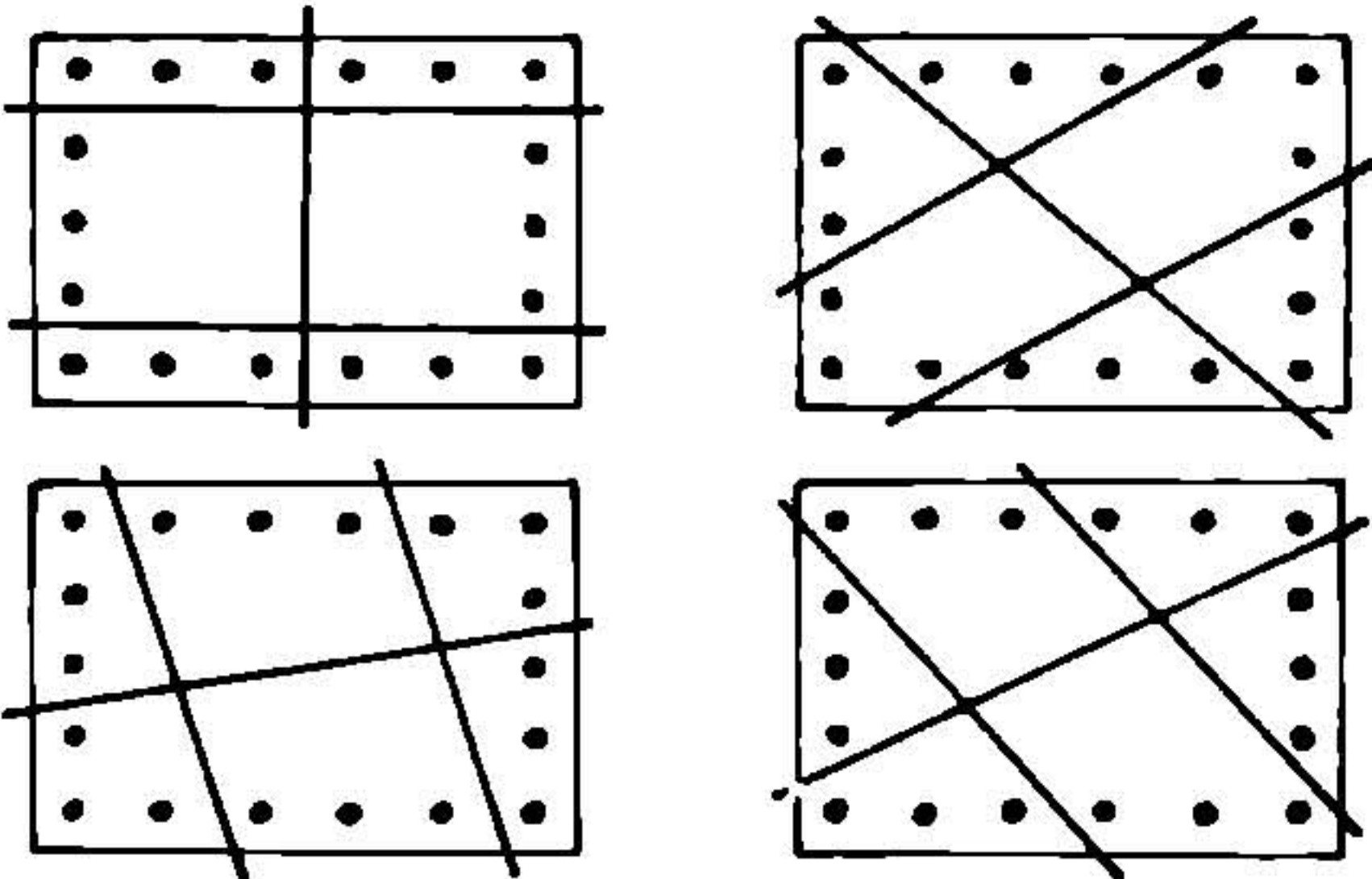
$$98 - 76 + 54 + 3 + 21 = 100$$

Lösungen zu: Knobeln und Raten Heft 3/84

Faktoren gesucht

Das Produkt aus einer ein- und einer zweistelligen natürlichen Zahl muß zwei- oder dreistellig sein, also kommen als Produkt nur 777 und 77 in Frage. 777 scheidet aus, da nur die Zerlegungen (mit 2 Faktoren) $777 = 1 \cdot 777 = 3 \cdot 259 = 7 \cdot 111 = 21 \cdot 37$ möglich sind (bis auf Vertauschung der Faktoren). 77 dagegen ist zerlegbar in $77 = 1 \cdot 77 = 7 \cdot 11$ (bis auf Vertauschung der Faktoren). Es gibt damit zwei Lösungsmöglichkeiten: Die gesuchten Faktoren lauten 1 und 77 oder 7 und 11.

Gerechte Teilung



Richtig gezählt

Die Figur enthält 16 Dreiecke:

4 Dreiecke der Form (1, 3, 7),

4 Dreiecke der Form (1, 3, 5) und

8 Dreiecke der Form (1, 2, 5).

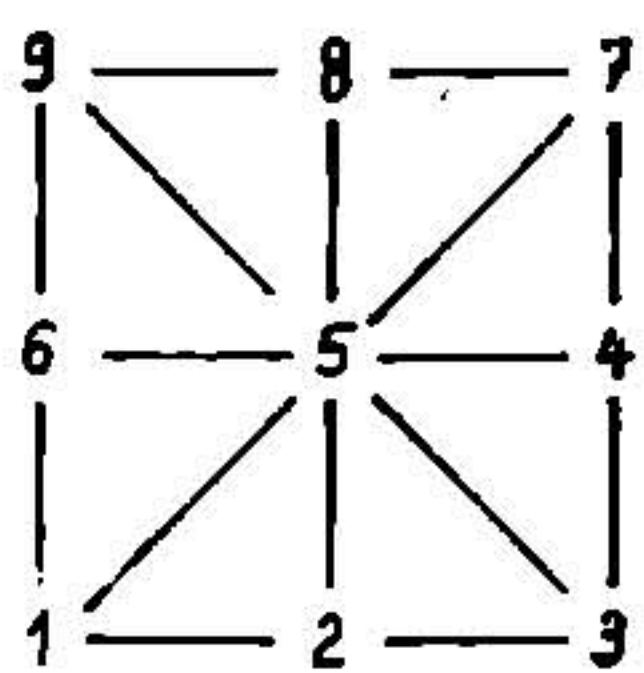
Die Figur enthält weiterhin 17 Vierecke:

1 Quadrat der Form (1, 3, 7, 9),

4 Quadrate der Form (1, 2, 5, 6),

4 Rechtecke der Form (1, 3, 4, 6) und

8 Trapeze der Form (1, 3, 5, 6).

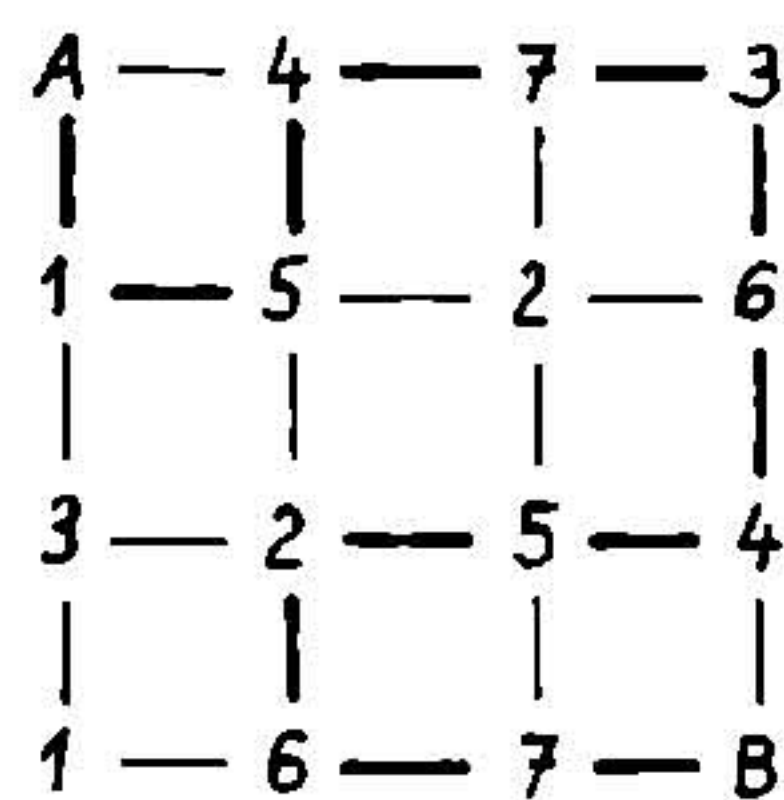


Zwei besondere Zahlen

In der ersten Wortgleichung kommen für L, wie man leicht schließt, die Ziffern von

0 bis 8 nicht in Frage; es bleibt $L = 9$. Daraus folgt $E = 1$. Für G schließt man die Ziffern von 1 bis 9 aus; es bleibt $G = 0$. Damit folgt $A = 8$. In der zweiten Wortgleichung, in der $A = 8$ und $E = 1$ nun bekannt sind, schließt man für K die Ziffern von 0 bis 3 und von 5 bis 9 aus; es bleibt $K = 4$. Damit ergeben sich $M = 2$ und $T = 7$. Es gehen also über: $EGAL \cdot L = LAGE$ in $1089 \cdot 9 = 9801$ und $META \cdot K = ATEM$ in $2178 \cdot 4 = 8712$. (1089 und 2178 sind deshalb „zwei besondere Zahlen“, weil sie die einzigen vierstelligen natürlichen Zahlen sind, die sich bei Multiplikation mit einer geeigneten einstelligen Zahl – 9 bzw. 4 – in der Reihenfolge ihrer Ziffern umkehren.)

Richtiger Weg



Hokuspokus mit Hölzchen

Aus 4 Streichhölzern: $\vee \parallel$

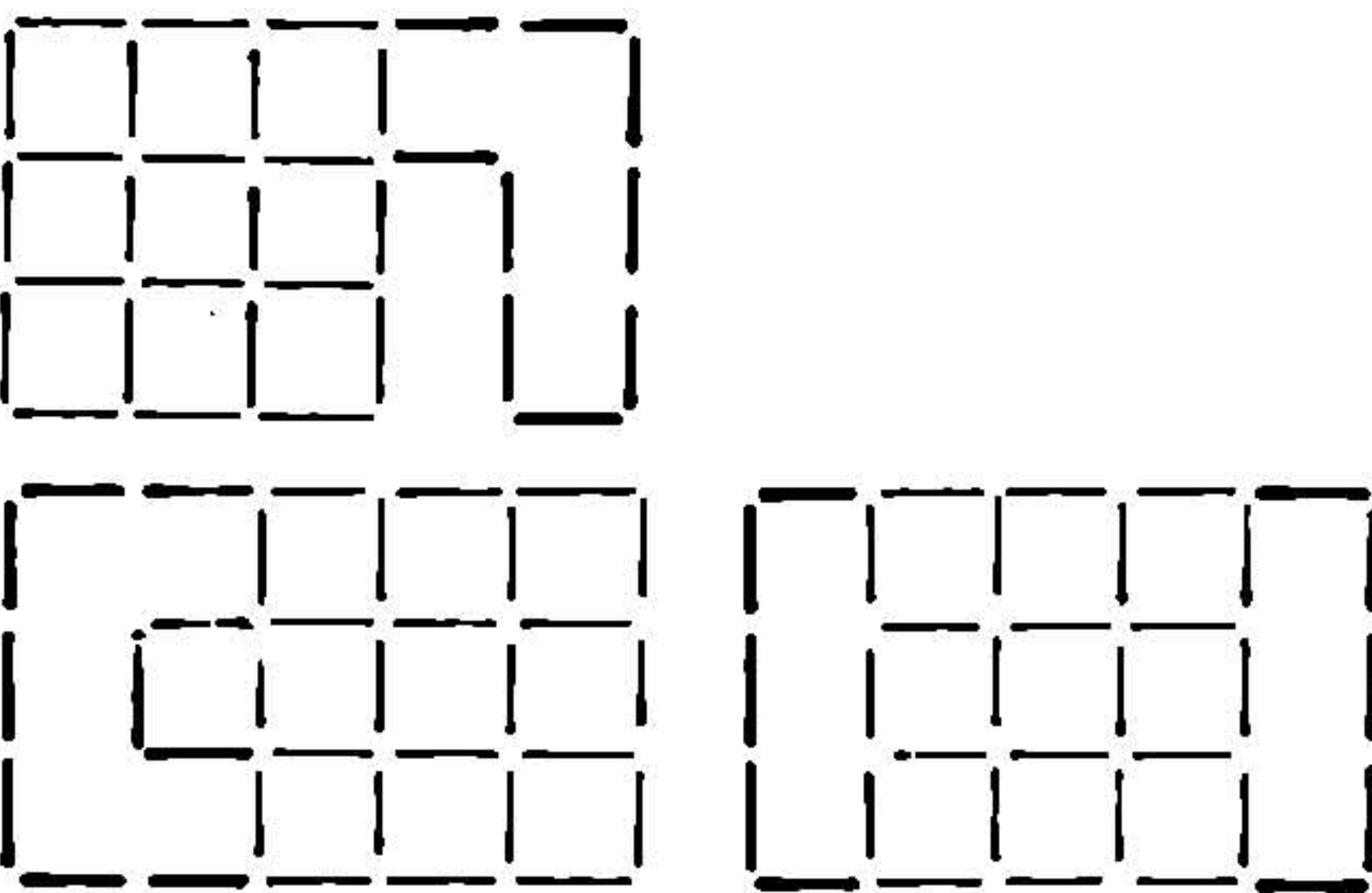
Aus 3 Streichhölzern: $\mid \times$

Aus 21 Streichhölzern: 1983

Aus 22 Streichhölzern:

MCM LXXXII

Hölzchenspiel



Ein Hausfest mit Tombola

Die Summe aller Losnummern von 1 bis 20 beträgt 210, folglich muß die Summe für eine Etage $210 : 5 = 42$ betragen. Addiert man die beiden kleinsten Nummern (1 und 2) zu den beiden größten (19 und 20), so erhält man gerade 42. Verfährt man mit den übrigen Nummern genauso ($3 + 4 + 17 + 18$, $5 + 6 + 15 + 16$, $7 + 8 + 13 + 14$, $9 + 10 + 11 + 12$), so ergibt sich auch jedesmal die Summe 42. Jetzt muß man nur noch, um Bedingung 2 zu erfüllen, die für die jeweilige Etage in Frage kommenden Nummern der Größe nach eintragen.

1	2	19	20
3	4	17	18
5	6	15	16
7	8	13	14
9	10	11	12

Zerlegung gesucht

23	1	24	2	7	18
3	22	13	14	17	8
21	4	11	12	5	6
15	10	16	9	20	19

Kurz überlegen – schnell antworten

1. Nein. 11 ist eine Primzahl.

2. $0,999 - 0,1 = 0,899$.

3. 1000.

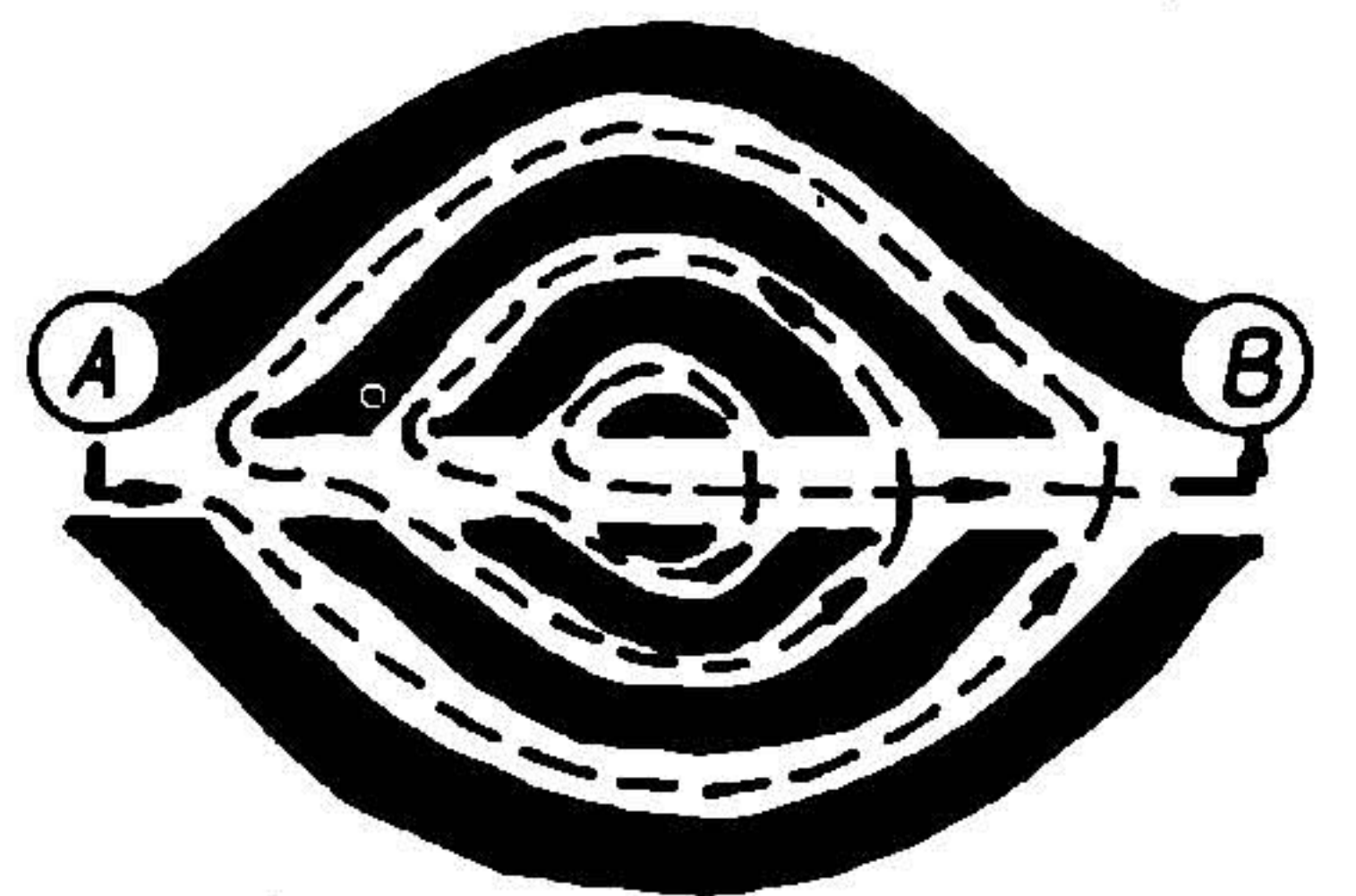
4. 1 Stunde

(4 Zwischenräume zu je $\frac{1}{4}$ Stunde).

5. Ja. 1,1.

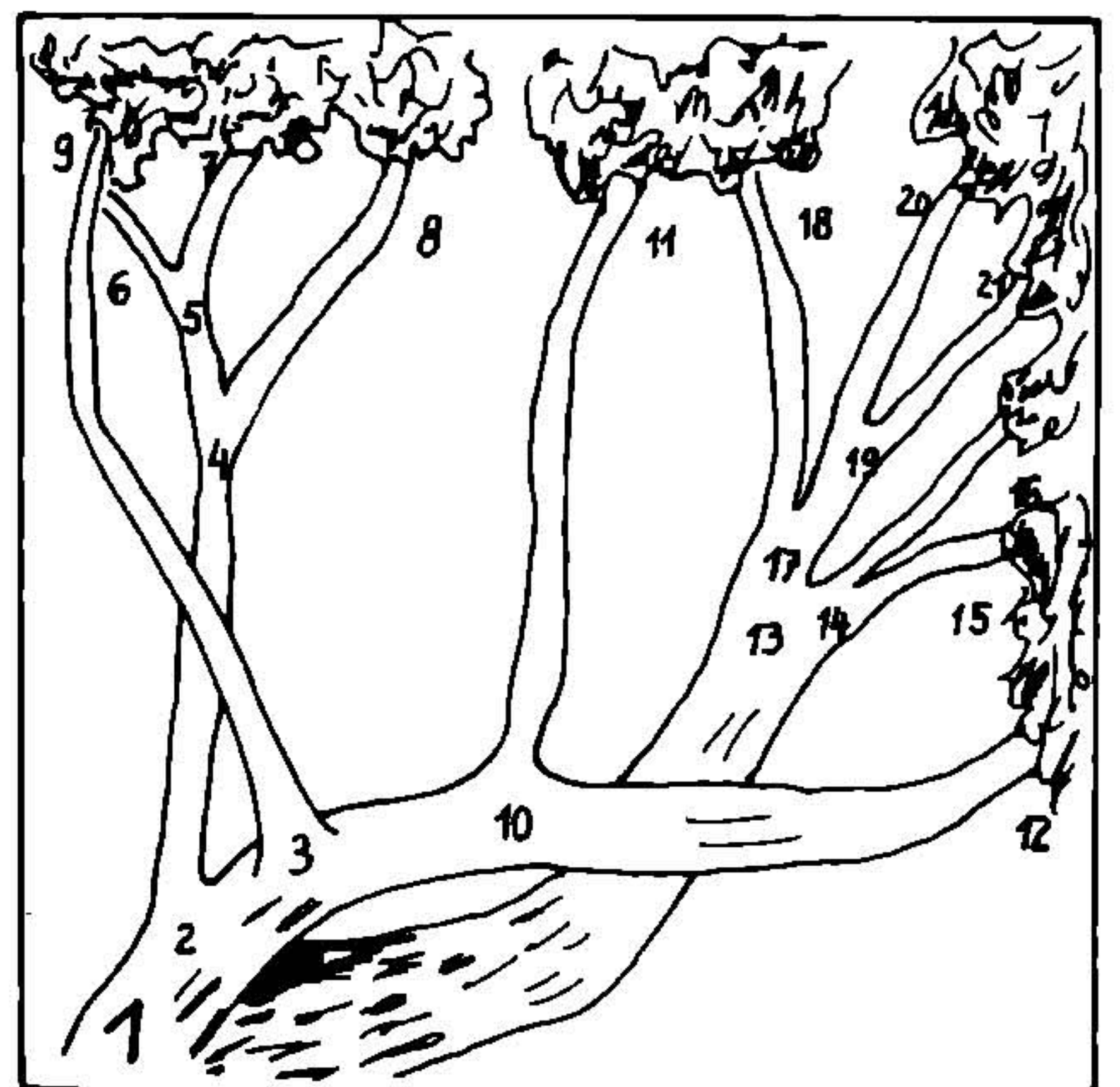
Eine Bootsfahrt, die ist lustig...

Die Figur zeigt eine mögliche Fahrtroute: (Das Boot könnte natürlich auch zuerst nach links abbiegen und die Fahrtroute dann symmetrisch – Symmetrieachse: Hauptfluß – zur abgebildeten nehmen.)



Eine alte Linde

Es sind die folgenden 11 Kletterrouten möglich (s. Bild):



1-2-4-5-6, 1-2-4-5-7, 1-2-4-8, 1-3-9, 1-10-11, 1-10-12, 1-13-14-15, 1-13-14-16, 1-13-17-18, 1-13-17-19-20 und 1-13-17-19-21.

Magisches Quadrat

Das Quadrat mit den derartig vorgegebenen Zahlen hat folgende Eigenschaft: Setzt man in irgendeins der leeren Felder irgendeine reelle Zahl a , so ist die weitere Eintragung eindeutig bestimmt. Es gibt also so viele verschiedene Eintragungen, wie es reelle Zahlen gibt, und das sind überabzählbar unendlich viele.

Beginnt man z. B. in der 1. Zeile mit der reellen Zahl a , so erhält man durch schrittweises Ausfüllen:

$$\begin{array}{rclclcl} 5 & - & 2 & + & a & = & (a + 3) \\ - & & + & & - & & + \\ (8 - a) & + & 15 & - & 2 & = & (21 - a) \\ + & & - & & + & & - \\ (20 - a) & - & (12 - a) & - & 4 & = & 4 \\ = & & = & & = & & = \\ 17 & + & (5 + a) & - & (2 + a) & = & 20 \end{array}$$

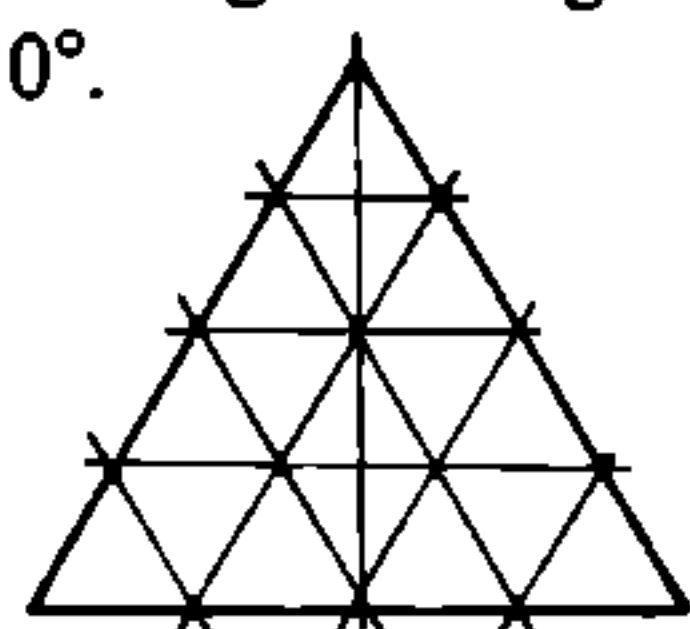
Beispielsweise ergeben sich für $a = 7$ bzw. $a = 1,5$:

$$\begin{array}{r} 5 - 2 + 7 = 10 \\ - + - + \\ 1 + 15 - 2 = 14 \\ + - + - \\ 13 - 5 - 4 = 4 \\ = = = = \\ 17 + 12 - 9 = 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 - 2 + 1,5 = 4,5 \\ - + - + \\ 6,5 + 15 - 2 = 19,5 \\ + - + - \\ 18,5 - 10,5 - 4 = 4 \\ = = = = \\ 17 + 6,5 - 3,5 = 20 \end{array}$$

Dreieckszerlegung

Die Zerlegung ist eindeutig bis auf Drehung der Figur um ganzzahlige Vielfache von 120° .



Wie man sich setzt...

Vater (V), Mutter (M) und Sohn (S) besetzen 3 Stühle, der vierte Stuhl bleibt frei. Auf diesen 3 Stühlen können sie in 6 verschiedenen Anordnungen sitzen: (V, M, S), (V, S, M), (M, V, S), (M, S, V), (S, V, M), (S, M, V). Nun kann aber jeder der vier Stühle einmal frei bleiben und die übrigen drei Stühle werden besetzt. Da es in jedem dieser vier Fälle 6 Plazierungsmöglichkeiten gibt, so gibt es für die Familie insgesamt $24 = 4 \cdot 6$ Möglichkeiten, sich in unterschiedlicher Anordnung an den Tisch zu setzen. (Es geht bei dieser Aufgabe um die Ermittlung der Anzahl der Variationen ohne Wiederholung von 4 Elementen zur Klasse 3.)

Zahl gesucht

Die gesuchte Zahl n muß gemeinsamer Teiler von $45 = 49 - 4$ und $63 = 65 - 2$ sein. Aus der Zerlegung $45 = 3^2 \cdot 5$ und $63 = 3^2 \cdot 7$ ergibt sich $n = 3^2 = 9$ (da $n = 3$ nicht in Frage kommt, denn n muß größer als der größte Rest sein).

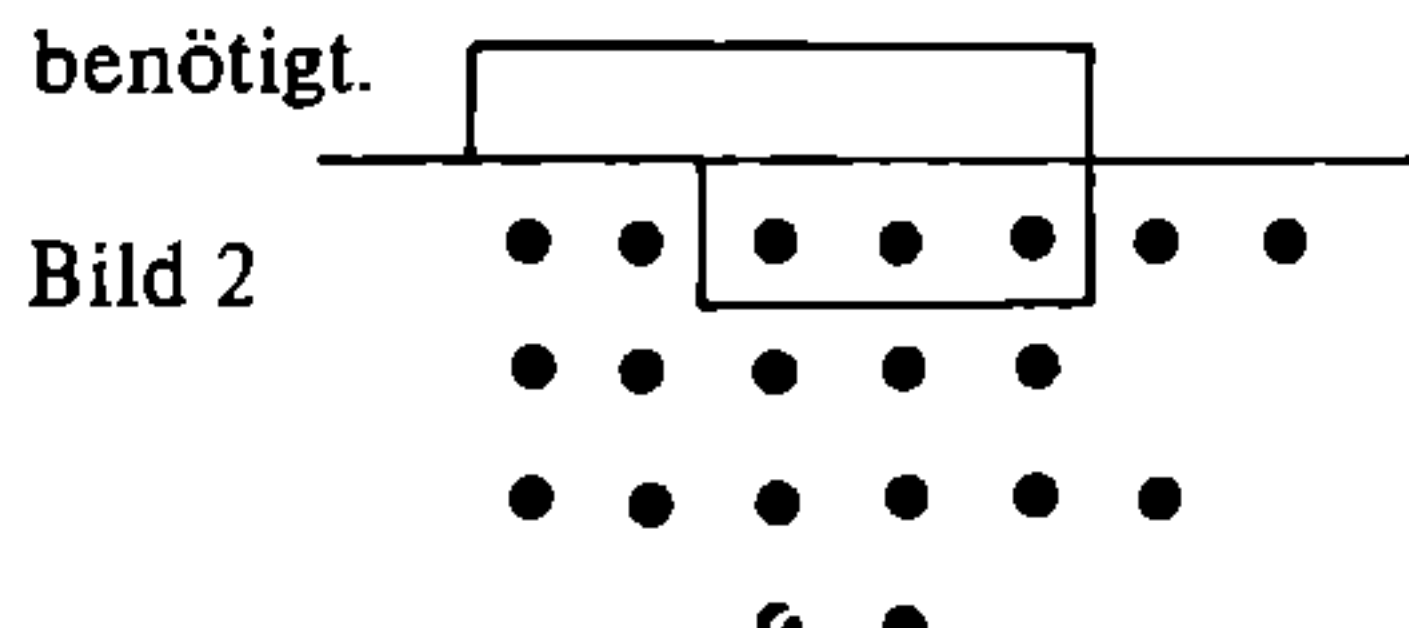
Lösung zu:

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Guzmán
Heft 2/84

▲ 2453 ▲ Um die dritte Reihe zu erreichen, braucht man $2^3 = 8$ Steine, die wie folgt angeordnet werden.



Man könnte nun annehmen, daß man mit $2^4 = 16$ Steinen in die vierte Reihe kommt. Das ist nicht der Fall. Es werden 20 Steine benötigt.



Die große Überraschung aber kommt erst: die fünfte Reihe kann man überhaupt nicht erreichen, wie groß man die Anzahl der Steine auch wählt.

Der exakte mathematische Beweis für

diese Tatsache ist nicht einfach, er benutzt einen interessanten „Trick“. Wir nehmen an, daß ein Feld der fünften Reihe erreicht werden kann, und schreiben in dieses Feld die Zahl 1. Allen anderen Feldern werden nun ebenfalls Zahlen x, x^2, x^3 usw. zugeordnet, wie im Bild angegeben. x soll dabei die positive Zahl sein, die die Gleichung $x^2 + x = 1$ erfüllt (d. h. $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ bzw. $x \approx 0,62$).

Bild 3

$$\begin{array}{ccccccc} & & \times & & \times & & \times \\ & \times^2 & \times & \boxed{1} & \times & \times^2 & \times \\ & \times^3 & \times^2 & \times & \times^2 & \times^3 & \times^4 \\ & \times^4 & \times^3 & \times^2 & \times^3 & \times^4 & \times^5 \\ & \times^5 & \times^4 & \times^3 & \times^4 & \times^5 & \times^6 \\ & \times^6 & \times^5 & \times^4 & \times^5 & \times^6 & \times^7 \\ \hline & \times^7 & \times^6 & \times^5 & \times^6 & \times^7 & \times^8 \\ & \times^8 & \times^7 & \times^6 & \times^7 & \times^8 & \times^9 \end{array}$$

Wie wir gleich sehen werden, hat diese Zuordnung von Zahlen einen besonderen Zweck. Wir stellen eine Anzahl von Steinen auf das Brett und ermitteln die Summe aller Zahlen von den Feldern, auf denen diese Steine stehen. Diese Summe sei s . Wir führen nun einen Zug aus und ermitteln wieder die Summe, die wir diesmal s_1 nennen. Die wichtige Eigenschaft ist, daß sich die Summe nicht vergrößert haben kann: $s_1 \leq s$. Da der Zug, den wir gemacht haben, zwei benachbarte Felder betrifft, müssen wir, um s_1 zu bekommen, zwei Summanden x^k und x^{k+1} entweder durch x^{k-1} oder durch x^{k+2} ersetzen. Im ersten Fall bleibt die Summe gleich:

$$x^k + x^{k+1} = x^{k-1}$$

wegen der Definition von x , also $s_1 = s$. Man sieht leicht, daß dieser Fall eintritt, wenn der ausgeführte Zug dem mit 1 gekennzeichneten Feld näherkommt. Im zweiten Fall ist offensichtlich $s_1 < s$.

Wir können nun eine Reihe von Zügen durchführen und die entsprechenden Summen mit $s_1, s_2, \dots, s_n$ bezeichnen. Es ist $s_n = s$, und wenn bei der letzten Stellung das mit 1 bezeichnete Feld erreicht ist, ist $s_n \geq 1$. Dann müßte auch $s \geq 1$ sein.

Wir zeigen nun, daß dies nicht möglich ist, wenn am Anfang alle Steine in der unteren Hälfte des Brettes stehen. Wir zeigen nämlich, daß die Summe der Zahlen in allen (unendlich vielen) Feldern der unteren Hälfte gerade 1 ergibt. Dazu brauchen wir eine Formel für eine unendliche Summe:

$$1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x},$$

z. B. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2.$

Diese Formel gilt für $0 < x < 1$, mit x^k multipliziert ergibt sie

$$x^k + x^{k+1} + x^{k+2} + \dots = \frac{x^k}{1-x}.$$

Wenn wir nun die Spalten der unteren Hälfte des Brettes aufsummieren, erhalten wir

$$\begin{aligned} & \frac{x^5}{1-x} + 2 \cdot \frac{x^6}{1-x} + 2 \cdot \frac{x^7}{1-x} + \dots \\ &= \frac{x^5}{1-x} \cdot (1 + 2) \cdot (x + x^2 + \dots) \end{aligned}$$

$$= x^3 \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{x}{1-x}\right) = x^3 + 2x^2 + x + x^2 = 1,$$

wobei die Gleichung

$$x^2 = 1 - x \text{ bzw. } x^3 + x^2 = x$$

ausgenutzt wurde.

Obwohl man nicht in jedem Fall so einfach mit unendlichen Summen umgehen kann, zeigt dies Beispiel doch die Vorteile dieser Reihen. Da jedem Feld eine positive Zahl zugeordnet war, ist s bei endlich vielen Spielsteinen im unteren Teil immer kleiner als 1. Das beendet den Beweis. Mit dieser Methode kann man auch zeigen, daß die angegebenen Werte 8 und 16 für die dritte und vierte Reihe tatsächlich die Mindestzahlen sind.

Lösung zu: Eine harte Nuß

Heft 1/84

Angenommen, x und y seien ganze Zahlen, die der Gleichung

$$2\sqrt{x} + \sqrt{2y} = \sqrt{32} \quad (1)$$

genügen, so muß für diese offenbar $x \geq 0$ und $y \geq 0$ gelten.

Aus (1) erhält man durch Quadrieren von $\sqrt{2y} = \sqrt{32} - 2\sqrt{x}$:

$$y = 16 - 2\sqrt{32x} + 2x \quad (2)$$

$$\text{bzw. } 2\sqrt{32x} = 16 + 2x - y. \quad (3)$$

Nach (3) muß $2\sqrt{32x}$ eine ganze Zahl sein, d. h. es gilt $2\sqrt{32x} = a$, a ganz und $a \geq 0$, woraus man durch Quadrieren erhält:

$$2x = \left(\frac{a}{8}\right)^2. \quad (4)$$

Nach (4) ergibt sich aus der Ganzzahligkeit von x , daß a ein ganzzahliges Vielfaches von 8 sein muß, also $a = 8b$, b ganz und $b \geq 0$. Damit geht (4) über in

$$2x = b^2. \quad (5)$$

Nach (5) ist b^2 eine gerade Zahl, folglich muß auch b gerade sein, d. h. $b = 2c$, c ganz und $c \geq 0$, woraus nach (5) folgt:

$$x = 2c^2. \quad (6)$$

Nun gilt aber für $x > 8$ stets $2\sqrt{x} > 2\sqrt{8} = \sqrt{32}$, also muß wegen (1) $0 \leq x \leq 8$ gelten, woraus man mit (6) erhält:

$$0 \leq c \leq 2. \quad (7)$$

Es kann also c nur die Werte 0, 1 oder 2 annehmen. Mit (6) und (2) ergibt sich jetzt die folgende Tabelle:

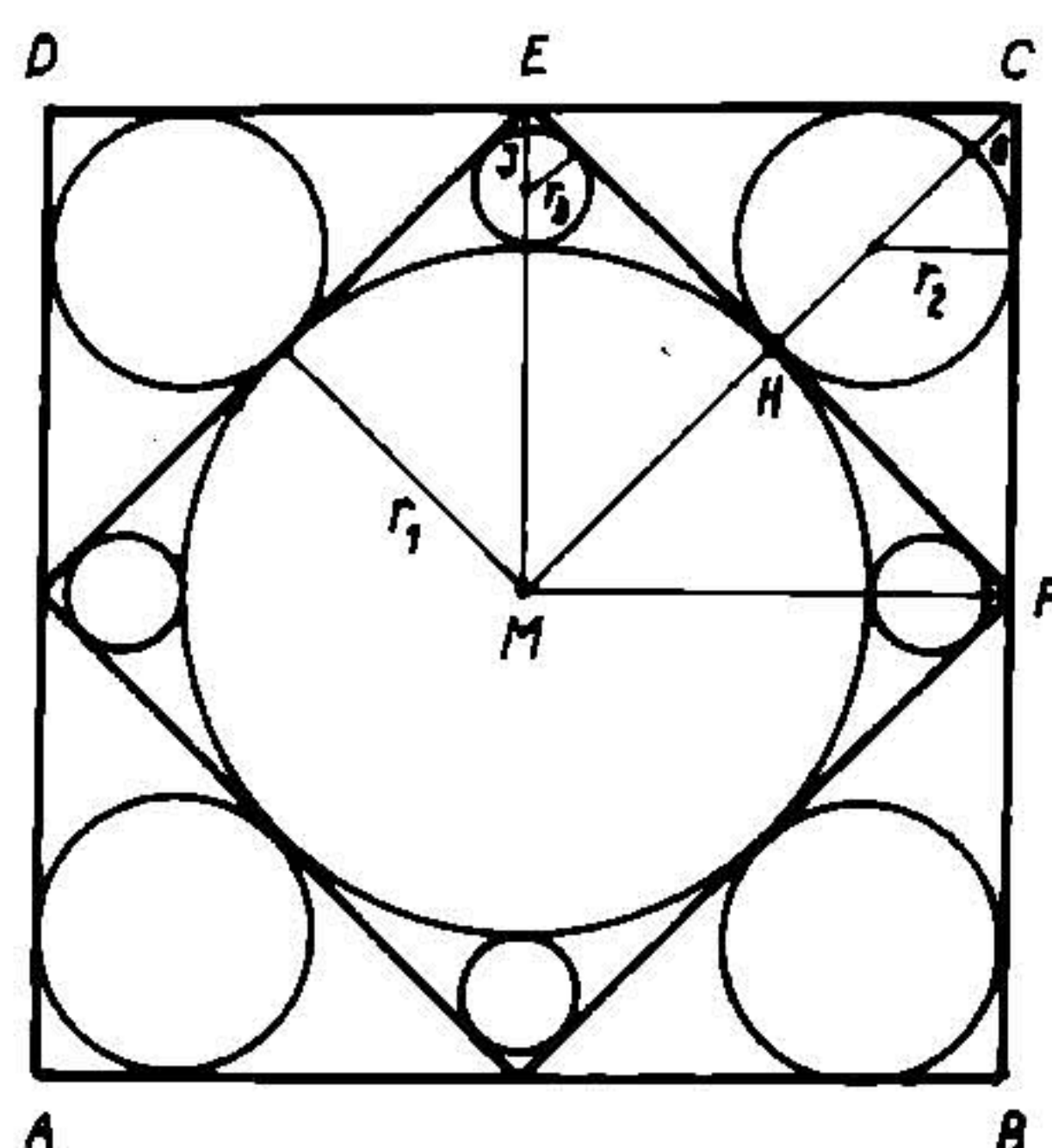
c	0	1	2
x	0	2	8
y	16	4	0

Man überzeugt sich leicht davon, daß jedes der Paare (0, 16), (2, 4) und (8, 0) auch wirklich die Gleichung (1) erfüllt. Für die Lösungsmenge L der Gleichung (1) gilt also $L = \{(0, 16), (2, 4), (8, 0)\}$.

Lösungen zu: Eine harte Nuß

Heft 2/84

Wir bezeichnen den Mittelkreis der Figur mit K_1 , einen jeden der 4 (offenbar untereinander kongruenten) Eckkreise des Quadrats $ABCD$ mit K_2 und einen jeden der 4 (offenbar untereinander kongruenten) Eckkreise des eingeschriebenen Quadrats mit K_3 . Bezeichnen wir die Radien der drei Kreise entsprechend mit r_1, r_2 bzw. r_3 und



ihre Flächeninhalte mit A_1 , A_2 bzw. A_3 , so gilt für die Summe A der Flächeninhalte aller im Quadrat $ABCD$ liegenden Kreise

$$A = A_1 + 4A_2 + 4A_3,$$

und wegen $A_i = \pi r_i^2$ ($i = 1, 2, 3$) gilt:

$$A = \pi(r_1^2 + 4r_2^2 + 4r_3^2). \quad (1)$$

a) Wir berechnen den Radius r_1 von K_1 :

Im Dreieck EFC gilt wegen $\overline{EC} = \overline{FC} = \frac{a}{2}$

nach dem Satz des Pythagoras $\overline{EF}^2 = \frac{a^2}{2}$,

also ist $\overline{EF} = \frac{a}{2} \sqrt{2}$. Offenbar gilt $r_1 = \frac{\overline{EF}}{2}$

und damit $r_1 = \frac{a}{4} \sqrt{2} \approx 0,35a$. (2)

b) Wir berechnen den Radius r_2 von K_2 :

Offenbar gilt nach dem Strahlensatz $r_2 : \overline{MF} = (r_2 + \overline{GC}) : \overline{MC}$. Wegen $\overline{MF} = \frac{a}{2}$

und $\overline{MC} = \frac{a}{2} \sqrt{2}$ ergibt sich

$$\overline{GC} = (\sqrt{2} - 1)r_2. \quad (3)$$

Andererseits gilt $\overline{MC} = r_1 + 2r_2 + \overline{GC}$, wor-

aus wegen $\overline{MC} = \frac{a}{2} \sqrt{2}$ folgt:

$$\overline{GC} = \frac{a}{4} \sqrt{2} - 2r_2. \quad (4)$$

Durch Gleichsetzen von (3) und (4) erhält man

$$r_2 = \frac{a}{4} (2 - \sqrt{2}) \approx 0,15a. \quad (5)$$

c) Wir berechnen den Radius r_3 von K_3 nach demselben Prinzip wie bei b): Wir schließen der Reihe nach auf:

$$\frac{r_3 : \overline{MH}}{\overline{ME}} = \frac{(r_3 + \overline{IE}) : \overline{ME}}{\overline{ME}}, \quad \overline{IE} = (\sqrt{2} - 1)r_3,$$

$\overline{ME} = r_1 + 2r_3 + \overline{IE}$,
 $\overline{IE} = \frac{a}{4} (2 - \sqrt{2}) - 2r_3$, und schließlich ergibt sich:

$$r_3 = \frac{a}{4} (3\sqrt{2} - 4) \approx 0,06a. \quad (6)$$

d) Setzt man (2), (5) und (6) in (1) ein, so ergibt sich

$$A = \frac{\pi}{8} (81 - 56\sqrt{2}) a^2 \approx 0,71a^2.$$

Lösung zu: Eine harte Nuß

Heft 3/84

▲ 2454 ▲ A = Anzahl der am Anfang vorhandenen Nüsse, $\approx 30\,000$

a = Anzahl der Nüsse, die jeder der fünf Matrosen bei der letzten Teilung erhält.

Es gilt

$$\frac{4}{5} \left[\frac{4}{5} \left(\frac{4}{5} \left\{ \frac{4}{5} \left[\frac{4}{5} (A - 1) - 1 \right] - 1 \right\} - 1 \right) - 1 \right] = 5a + 1, \text{ d. h.}$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^5 (A - 1) - \left(\frac{4}{5}\right)^4 - \left(\frac{4}{5}\right)^3 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^1 = 5a + 1, \text{ also}$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^5 (A - 1) - \sum_{k=0}^4 \left(\frac{4}{5}\right)^k = 5a.$$

$$\text{Mit } \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \text{ für } q = \frac{4}{5}$$

und $n = 4$ entsteht

$$\left(\frac{4}{5}\right)^5 (A - 1) - \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^5}{1 - \frac{4}{5}} = 5a,$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^5 (A - 1) + 5 \left(\frac{4}{5}\right)^5 = 5(a + 1),$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^5 (A + 4) = 5(a + 1), \quad \frac{A + 4}{5}$$

$$= \left(\frac{5}{4}\right)^5 (a + 1).$$

Also: A durch 5 mit Rest 1 teilbar $\Rightarrow$

$A + 4$ durch 5 ohne Rest teilbar $\frac{A + 4}{5}$

ganzzahlig $\Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^5 (a + 1)$ ganzzahlig $\Rightarrow$

$a + 1 = k \cdot 4^5$ (k natürliche Zahl) $\Rightarrow$

$$a = k \cdot 4^5 - 1.$$

Daraus:

$$\frac{A + 4}{5} = \left(\frac{5}{4}\right)^5 k \cdot 4^5 = k \cdot 5^5,$$

$$A = k \cdot 5^6 - 4 \quad (k \text{ natürliche Zahl}).$$

Wegen $A \approx 30\,000$ folgt $k = 2$

und damit $A = 31\,246$.

Lösung zu:

Mathematik und Schach

Heft 3/84

Bei den fünf Figuren wären $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5! = 120$ verschiedene Anordnungen möglich. Wegen der Übersicht sei der weiße König als *Themafigur* gewählt. Nach der Voraussetzung entfallen jene Anordnungen, wenn der König auf e1 steht, also $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4! = 24$.

Steht er auf d1 (c1, b1, a1), können noch drei andere Figuren ihr (verbotenes) Standfeld einnehmen, d. h., es werden noch einmal $1 \cdot 2 \cdot 3 = 3! = 6$ $6 \cdot 3 = 18$ Möglichkeiten der Anordnung ausgeschlossen. Da jedoch dabei 5 Wiederholungen auftreten, entfallen demnach 13. Das gleiche gilt auch, wenn der König auf c1, b1 oder a1 postiert wird. Somit ergibt sich:

$$120 - 24 - (4 \cdot 13) = 44.$$

Es sind 44 verschiedene Anordnungen der Figuren nach der gegebenen Voraussetzung möglich.

Schachfiguren-Quiz:

1-15, 3-13, 5-8, 7-9, 10-4,

12-2, 14-6, 16-11

Lösung zu:

Die historische Mathematikaufgabe

Heft 2/84

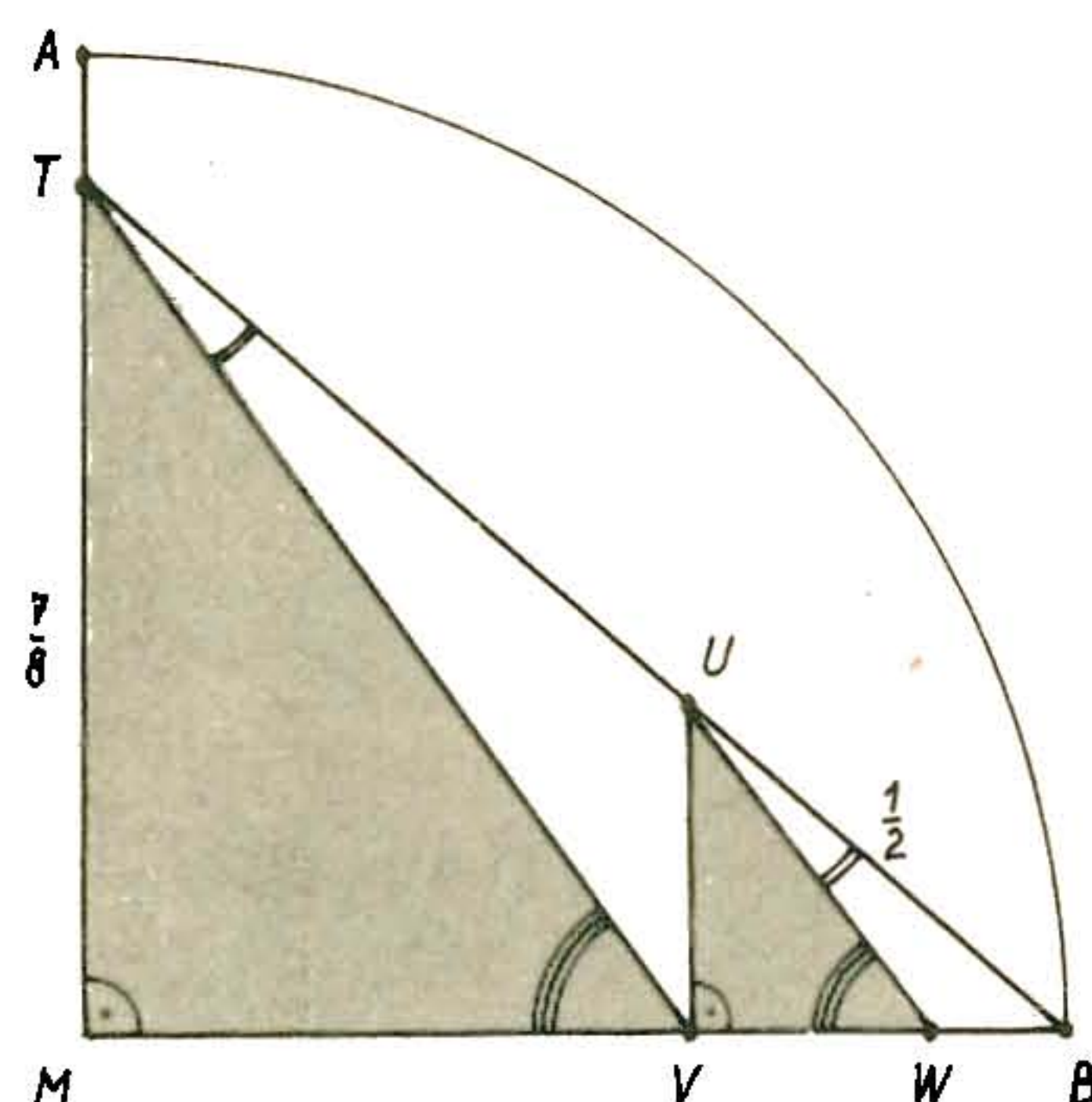
Der Bruch $\frac{355}{113}$ und die Zahl π .

Im rechtwinkligen Dreieck TBM (Bild) gilt nach dem Satz von Pythagoras

$$\overline{TB}^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^2 + 1 = \frac{113}{64}. \quad (1)$$

Im rechtwinkligen Dreieck UVB gilt nach dem Satz von Pythagoras

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \overline{UV}^2 + \overline{VB}^2. \quad (2)$$



Die beiden Dreiecke sind ähnlich;

also gilt $\overline{TM} : \overline{MB} = \overline{UV} : \overline{VB}$,

d. h. $\frac{7}{8} : 1 = \overline{UV} : \overline{VB}$, also

$$\overline{UV} = \frac{7}{8} \overline{VB}. \quad (3)$$

Aus (2) und (3) folgt (durch Einsetzen von

$\overline{UV} = \frac{7}{8} \overline{VB}$ in (2))

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{7}{8} \overline{VB}\right)^2 + \overline{VB}^2 = \left(\left(\frac{7}{8}\right)^2 + 1\right) \overline{VB}^2 = \frac{113}{64} \overline{VB}^2, \text{ d. h. } \overline{VB}^2 = \frac{16}{113}. \quad (4)$$

Die Dreiecke TVB und UBW sind ähnlich, also gilt $\overline{UB} : \overline{WB} = \overline{TB} : \overline{VB}$ oder

$$\overline{UB} \cdot \overline{VB} = \overline{TB} \cdot \overline{WB} \text{ oder}$$

$$\frac{\overline{UB}^2 \cdot \overline{VB}^2}{\overline{TB}^2} = \overline{WB}^2$$

Wegen $\overline{UB}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ (nach Konstruktion)

$\overline{VB}^2 = \frac{16}{113}$ (nach (4)), $\overline{TB}^2 = \frac{113}{64}$ (nach (1)) folgt

$$\overline{WB}^2 = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{16}{113}}{\frac{113}{64}} = \frac{4}{113} \cdot \frac{64}{113} = \frac{16}{113} \cdot \frac{16}{113} = \left(\frac{16}{113}\right)^2,$$

also (da $\overline{WB} > 0$) $\overline{WB} = \frac{16}{113}$.

Lösung zu:

Kein Königsweg nach Cambridge

Heft 1/84

(i) Man bezeichne mit m die eindeutig bestimmte Zahl, für welche

$$m^2 \leq n < (m + 1)^2 \quad (1)$$

gilt. Wir müssen nun die größte Zahl n finden, die $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m$ zum Teiler hat:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m \mid n \quad (2)$$

Dies ist erfüllt, wenn $n = 24$, weil dann $m = 4$ und $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Es werde nun angenommen, es gäbe eine Lösung von (2) mit $n > 24$.

Dann wäre

$$m \geq 5 \quad (3)$$

und wir schließen aus (2), daß insbesondere $m(m - 1)(m - 2)$ Teiler von n ist. So ist jedenfalls

$$n \geq m(m - 1)(m - 2) = m^3 - 3m^2 + 2m,$$

und unter Benutzung von (1)

$$(m+1)^2 > m^3 - 3m^2 + 2m,$$

$$\text{also } 4m^2 + 1 > m^3.$$

Weil $1 \leq m^2$, hätten wir

$$m^3 < 5m^2,$$

und daher $m < 5$, was (3) widerspricht.

Es folgt, daß 24 die größte Lösung war.

(ii) Es sei $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ eine beliebige Teilmenge von $1, 2, \dots, 2n$. Zu jeder positiven Zahl a können wir eindeutig die kleinste positive ganze Zahl t bestimmen derart, daß $a \cdot 2^t > n$,

und demnach

$$a \cdot 2^{t-1} \leq n;$$

oder anders ausgedrückt

$$n < a \cdot 2^t \leq 2n. \quad (4)$$

Wir wenden (4) auf jedes Element der Teilmenge an und bestimmen demgemäß die Exponenten $t_1, t_2, \dots, t_{n+1}$. So erhalten wir $n+1$ ganze Zahlen

$$a_1 2^{t_1}, a_2 2^{t_2}, \dots, a_{n+1} 2^{t_{n+1}}, \quad (5)$$

welche die Ungleichung

$$n < x \leq 2n$$

befriedigen. Es gibt in diesem Intervall aber nur n ganze Zahlen. Deshalb muß die Folge (5) mindestens zwei gleiche Zahlen enthalten, sagen wir

$$a_i 2^{t_i} = a_j 2^{t_j}$$

wo $t_i \geq t_j$. Also ist $\frac{a_j}{a_i} = 2^{t_i - t_j}$

nicht nur ganz, sondern sogar eine Potenz von 2.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 1/84

Ma 5 ■ 2407 $5284 \text{ s} = (88 \cdot 60 + 4) \text{ s}$
 $= 88 \text{ min } 4 \text{ s} = 1 \text{ h } 28 \text{ min } 4 \text{ s}; 87 \text{ min } 3 \text{ s}$
 $= 1 \text{ h } 27 \text{ min } 3 \text{ s}.$

1 h 27 min 3 s sind weniger als 1 h 27 min 34 s, erst recht weniger als 1 h 28 min 4 s.

Sportler C lief vor Sportler A, dieser vor Sportler B durchs Ziel.

Ma 5 ■ 2408 3,25 M sind 325 Pf. Wegen $10 \cdot 35 = 350$ und $350 > 325$ sind es weniger als 10 Briefmarken zu 35 Pf. Da 325 auf die Grundziffer 5 endet, könnten es 1, 3, 5, 7 oder 9 Marken zu 35 Pf sein. Nun gilt $325 - 1 \cdot 35 = 290$, $325 - 3 \cdot 35 = 220$, $325 - 5 \cdot 35 = 150$, $325 - 7 \cdot 35 = 80$, $325 - 9 \cdot 35 = 10$. Nur die Zahlen 220 und 80 sind durch 20 teilbar. Wegen $4 < 7$ entfällt die zweite Möglichkeit. Petra hat 11 Briefmarken zu 20 Pf und 3 zu 35 Pf gekauft.

Ma 5 ■ 2409 Die Quersumme 5 besitzen folgende zweistellige natürliche Zahlen: 14, 23, 32, 41, 50. Nun gilt

$$3 \cdot 14 - 1 = 41, \quad 3 \cdot 23 - 1 = 68,$$

$$3 \cdot 32 - 1 = 95, \quad 3 \cdot 41 - 1 = 122,$$

$$3 \cdot 50 - 1 = 149. \text{ Nur die Zahl 14 erfüllt die gestellten Bedingungen.}$$

Ma 5 ■ 2410 Angenommen, Wolfgang hat x Blei- und y Faserstifte; dann hat Stefan $2 \cdot x$ Blei- und $(y+3)$ Faserstifte. Nun gilt $x + 2 \cdot x = 9$, also $x = 3$; $y +$

$(y+3) = 21$, also $y = 9$. Angenommen, Stefan hat z Buntstifte; dann hat Wolfgang $4 \cdot z$ Buntstifte. Nun gilt $z + 4 \cdot z = 10$, also $z = 2$. Somit hat Wolfgang 3 Blei-, 9 Faser- und 8 Buntstifte; Stefan hat 6 Blei-, 12 Faser- und 2 Buntstifte.

Ma 5 ■ 2411 Da Klaus von jeder Sorte wenigstens eine Pose kauft, hat er mit Sicherheit zunächst einmal $0,75 \text{ M} + 1,00 \text{ M} + 0,60 \text{ M} + 0,32 \text{ M} = 2,67 \text{ M}$ ausgegeben. Ihm verbleiben noch $3,91 \text{ M} - 2,67 \text{ M} = 1,24 \text{ M}$. Kein Vielfaches von 75, 100 bzw. 60 endet auf die Grundziffer 4. Wegen $7 \cdot 32 = 224$ und $224 > 124$ gilt nur $2 \cdot 32 = 64$. Aus $1,24 \text{ M} - 0,64 \text{ M} = 0,60 \text{ M}$ folgt, daß Klaus eine Pose zu 75 Pf, eine zu 1,00 M, zwei zu 60 Pf und drei zu 32 Pf kaufte. Es gilt $1 \cdot 75 \text{ Pf} + 1 \cdot 100 \text{ Pf} + 2 \cdot 60 \text{ Pf} + 3 \cdot 32 \text{ Pf} = 391 \text{ Pf} = 3,91 \text{ M}$.

Ma 5 ■ 2412 $7 \cdot 6$ Achsen = 42 Achsen; $(236 - 42)$ Achsen = 194 Achsen. Es verbleiben 60 Waggons mit insgesamt 194 Achsen. Angenommen, es sind x Waggons mit 2 Achsen, also $(60 - x)$ Waggons mit 4 Achsen; dann gilt $2x + 4(60 - x) = 194$, $2x + 240 - 4x = 194$, $2x = 46$, $x = 23$.

Zu diesem Zug gehören 23 Waggons mit zwei Achsen und 37 Waggons mit vier Achsen.

Ma 6 ■ 2413 Es sei x eine einstellige natürliche Zahl; dann gilt

$$(10x + 6) + 9 = 6 \cdot 10 + x,$$

$$10x + 15 = 60 + x,$$

$$9x = 45, \text{ also } x = 5.$$

Die gesuchte Zahl lautet 5, und es gilt $56 + 9 = 65$.

Ma 6 ■ 2414 Aus (4) folgt: Herr Kaiser ist nicht Lehrer von Beruf. Aus (5) folgt: Herr Kaiser ist auch nicht Ingenieur. Folglich ist Herr Kaiser Schriftsteller.

Aus (1) folgt: Herr Meyer ist nicht Ingenieur. Folglich ist Herr Meyer von Beruf Lehrer. Somit ist Herr Müller Ingenieur. Aus (3) folgt: Herr Meyer, der Lehrer, wohnt in Leipzig. Aus (2) folgt: Herr Müller, der Ingenieur, wohnt in Berlin. Somit wohnt Herr Kaiser, der Schriftsteller, in Cottbus. Die Angabe (6) ist nicht erforderlich.

Ma 6 ■ 2415 5 h 30 min sind $5 \frac{1}{2} \text{ h}$;

5,30 h sind $5 \frac{3}{10} \text{ h}$; $5 \frac{1}{2} \text{ h} - 5 \frac{3}{10} \text{ h} = \frac{1}{5} \text{ h}$;

durch den Schreibfehler entsteht eine Differenz von $\frac{1}{5} \text{ h}$, also von 12 min.

Ma 6 ■ 2416 Aus $\frac{1}{4} < \frac{x}{17} < \frac{1}{3}$ folgt

$17 < 4x$ und $3x < 17$, also $x < 5 \frac{2}{3}$ und

$4 \frac{1}{4} < x$. Deshalb gilt $4 \frac{1}{4} < x < 5 \frac{2}{3}$, also

$x = 5$. Die gebrochene Zahl $\frac{5}{17}$ erfüllt die

Bedingung; es gilt $\frac{1}{4} < \frac{5}{17} < \frac{1}{3}$ bzw.

$$\frac{51}{204} < \frac{60}{204} < \frac{68}{204}.$$

Ma 6 ■ 2417 Aus a) folgt: Weder Heinz noch Peter wohnen in Magdeburg. Aus c) folgt: Klaus wohnt nicht in Magdeburg. Deshalb wohnt Manfred in Magdeburg. Aus e) folgt: Klaus wohnt nicht in Dresden. Aus d) folgt: Klaus wohnt nicht in Rostock.

Deshalb wohnt Klaus in Leipzig.

Aus b) folgt: Heinz wohnt nicht in Rostock. Deshalb wohnt Heinz in Dresden und somit Peter in Rostock.

Ma 7 ■ 2418 Das Quadrat habe die Seitenlänge a ; für den Flächeninhalt der dem Quadrat einbeschriebenen Figur gilt dann

$$A_F = a^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{8} \pi \cdot a^2 \right)$$

$$= a^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \cdot \frac{A_F}{A_Q} = \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \approx 0,57.$$

Der Flächeninhalt der dem Quadrat einbeschriebenen Figur beträgt rund 57% des Flächeninhalts des Quadrates.

Ma 7 ■ 2419 Es sei α die Größe des Winkels $\angle CAB$.

Aus $\angle AEH = \angle ADH = 90^\circ$ folgt

$$\angle DHE = \angle CHB = 180^\circ - \alpha.$$

Im Parallelogramm $HBFC$ gilt deshalb $\angle CFB = 180^\circ - \alpha$.

Im Viereck $ABFC$ ergänzen sich somit die gegenüberliegenden Winkel $\angle CAB$ und $\angle CFB$ zu 180° ; folglich ist dieses Viereck ein Sehnenviereck. Das heißt, der Punkt F liegt auf dem Umkreis k des Dreiecks ABC .

Ma 7 ■ 2420 Wegen $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM}$ sind die Dreiecke $\triangle ABM$, $\triangle BCM$, $\triangle CAM$ gleichschenkelig. Deshalb hat der Winkel $\angle ABM$ die Größe 40° und Winkel $\angle CBM$ die Größe 30° , also $\beta = 40^\circ + 30^\circ = 70^\circ$.

Jeder der beiden kongruenten Winkel $\angle MAC$ und $\angle MCA$ habe die Größe φ . Dann gilt $2 \cdot \varphi + 40^\circ + 70^\circ + 30^\circ = 180^\circ$, also $2 \cdot \varphi = 40^\circ$ und somit $\varphi = 20^\circ$. Daraus folgt weiter $\alpha = 40^\circ + 20^\circ = 60^\circ$ und $\gamma = 20^\circ + 30^\circ = 50^\circ$.

Ma 7 ■ 2421 Angenommen, die Gefäße A, B bzw. C fassen $a = 3 \text{ l}$, $b = 8 \text{ l}$ bzw. $c = 18 \text{ l}$. Dann gilt

$$c - 3a - b = (18 - 3 \cdot 3 - 8) \text{ l} = 1 \text{ l},$$

$$c - 2b = (18 - 2 \cdot 8) \text{ l} = 2 \text{ l},$$

$$a = 3 \text{ l},$$

$$c - 2a - b = (18 - 2 \cdot 3 - 8) \text{ l} = 4 \text{ l},$$

$$b - a = (8 - 3) \text{ l} = 5 \text{ l},$$

$$c - 4a = (18 - 4 \cdot 3) \text{ l} = 6 \text{ l},$$

$$c - a - b = (18 - 3 - 8) \text{ l} = 7 \text{ l},$$

$$b = 8 \text{ l},$$

$$c - 3a = (18 - 3 \cdot 3) \text{ l} = 9 \text{ l},$$

$$c - b = (18 - 8) \text{ l} = 10 \text{ l}.$$

Antwort auf eine Leserfrage

Im Auftrage der Klasse 5 der Franz-Mehring-OS, Berlin fragt André Schwarz:

Wieviel Lösungen werden jährlich zum alpha-Wettbewerb eingesandt? Wieviel Kilogramm Papier wären das?

alpha antwortet:

Im Jahr 1983/84 gingen zum alpha-Wettbewerb insgesamt 93 500 Lösungen ein. Man rechnet für jede Lösung ein A-4-Blatt mit den Maßen 210 mm mal 297 mm zu je 4,1 g und eine Wettbewerbskarte A-6 mit den Maßen 106 mm mal 148 mm zu je 2,6 g.

a) Berechne, wieviel Quadratmeter Papier für jedes Format notwendig sind!

b) Wieviel Kilogramm Papier werden insgesamt verwendet?

(Antwort siehe Heft 5/84)

Fingerspiele,
jap. Buch, ausgestellt
auf der IBA 1983
in Leipzig

親子であそぶ あやとり絵本

あやとりいとり

さいとう たま 採取・文

つじむら ますろう 絵

1 2 3

