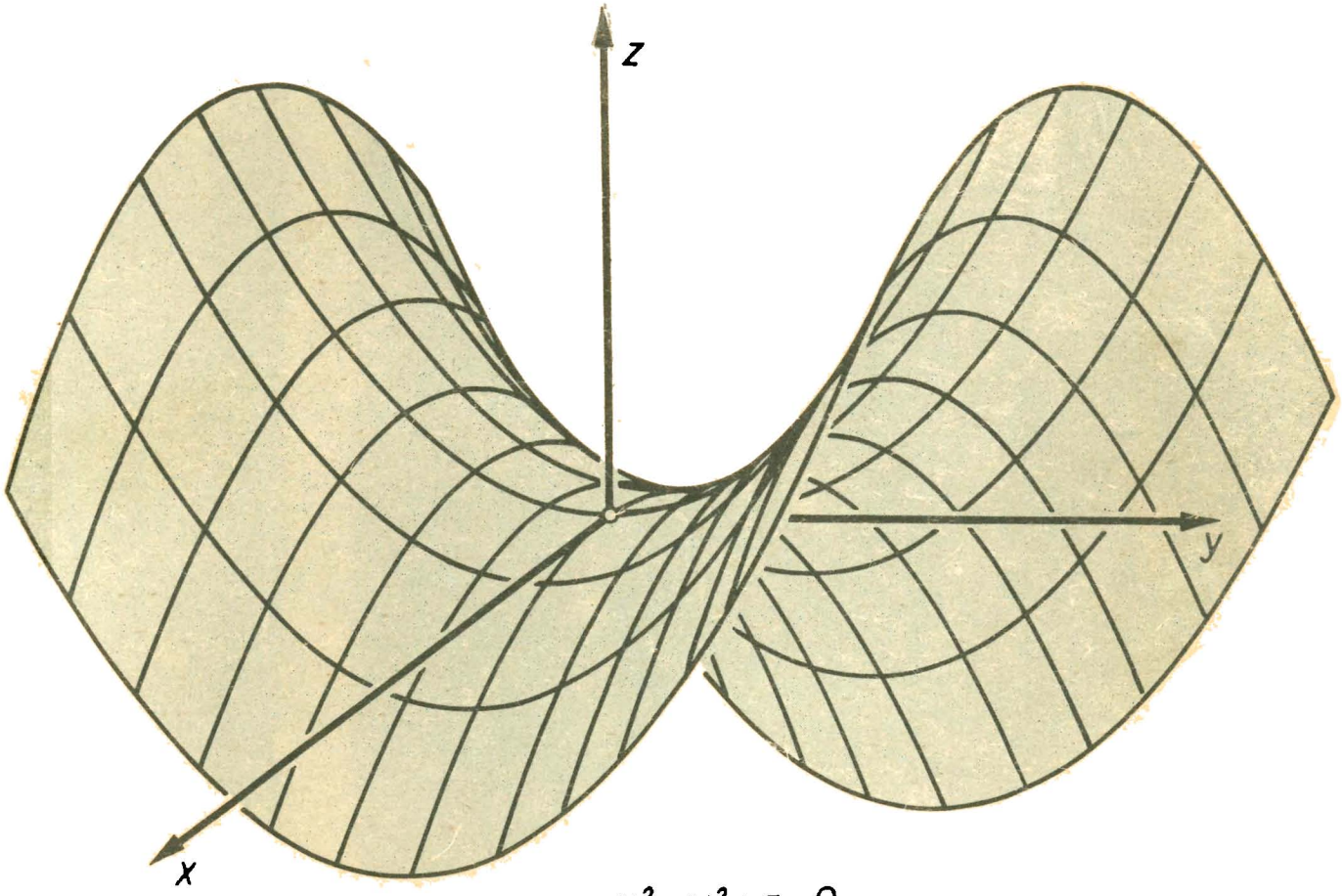
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



$x^2 - y^2 + z = 0$

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
7. Jahrgang 1973
Preis 1,– M
Sonderpreis für die DDR: 0,50 M
Index 31 059

4

Redaktionskollegium:
Prof. Dr.-Ing. habil. G. Clemens (Leipzig); Prof. Dr. habil. Lilli Görke (Berlin); Dozent Dr. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dr. habil. E. Hameister (Magdeburg); K. Hofmann (Berlin); Dr. R. Hofmann (Leipzig); Prof. Dr. H. Karl (Potsdam); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Oberlehrer K. Krüger, Verdienter Lehrer des Volkes (Bad Doberan); Studienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Dozent Dr. H. Lohse (Leipzig); Nationalpreisträger Oberstudienrat Dr. R. Lüders (Berlin); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Prof. Dr. habil. U. Pirl (Berlin); Dozent Dr. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Oberlehrer H. Schulze (Leipzig); W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); W. Unze (Leipzig); Prof. Dr. habil. W. Walsch (Halle);

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430 Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und -Import GmbH, DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Alle Vignetten an den Anfängen der Artikel wurden unserer tschechoslowakischen mathematischen Schülerzeitschrift *rozhledy*, Praha, entnommen; H. Pelka, Leipzig (S. 81); Archiv *alpha* (S. 89);
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 31. Mai 1973

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

73 Mathematik und Physik (7)*
E. Mittmann, EOS Spremberg/Fachberater für Physik

74 Eine Aufgabe von Prof. Dr. E. W. Trost (10)
Technikum Winterthur (Zürich)

75 Eine interessante, aber schwierige Aufgabe (9)
Nationalpreisträger Oberstudienrat Dr. R. Lüders,
Institut für Lehrerweiterbildung, Berlin-Köpenick

76 Ein Verfahren zur Abspaltung linearer und quadratischer Polynome (9)
Oberstudienrat Dr. H. Butzke, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität Berlin

78 Gitterpunkte Teil 2 (10)
Matthias Günther, EOS Helmholtz (Kl. 11), Leipzig

79 Wissenschaftler schreiben über *alpha*

80 *alpha*-Wettbewerb-Physik (7)
U. Walta, Sektion Physik der Pädagogischen Hochschule *Lieselotte Herrmann*, Güstrow

81 Berufsbild: Diplomlehrer für Physik (9)
Dr. M. Wurlitzer, Sektion Physik der Karl-Marx-Universität Leipzig

81 *Junge Physiker* in Aktion (7)
Bericht über die II. Physikolympiade des Bezirkes Leipzig

82 Herstellung eines Rechenstabes (7)
Oberingenieur A. Ewert, Berlin

84 Unser Buchtip: Schiffe und Schiffahrt von morgen (5)
Studienrat J. Lehmann, V. L. d. V., Leipzig

85 aufgepaßt–nachgedacht–mitgemacht (5)
Aufgaben speziell für Klassenstufe 5 bis 7
Studienrat Th. Scholl, Ministerium für Volksbildung Berlin

86 XIII. Olympiade *Junger Mathematiker* der DDR
Aufgaben der Schulolympiade (5)

88 Aus der Graphentheorie Teil 4 (8)
Dipl.-Math. W. Voß, Technische Hochschule Ilmenau

90 In freien Stunden, *alpha*-heiter (5)
Studienrat J. Lehmann, V. L. d. V., Leipzig/Oberlehrer H. Pätzold, Waren/Müritz

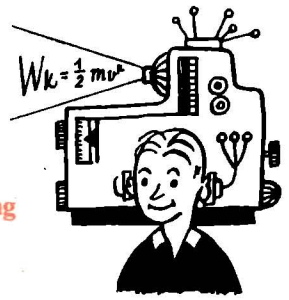
92 Lösungen (5)

III./IV. Umschlagseite: Arbeitspläne Mathematik (7)
für die außerunterrichtliche Arbeit der Klassen 7/8 (Vorschlag)
K. D. Klöpfel/Dr. W. Rautenberg, Sektion Mathematik
der Humboldt-Universität Berlin

Beilage S. I bis VIII: XII. Olympiade *Junger Mathematiker* der DDR (5)
Aufgaben der DDR-Olympiade
Lösungen zu den Aufgaben der Kreis- und Bezirksolympiade

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Mathematik und Physik



Mathematisches Wissen und Können — eine Voraussetzung zur physikalischen Erkenntnisfindung

Die Mathematik spielt in unserem Leben eine immer größer werdende Rolle. Es gibt kaum einen wissenschaftlichen oder gesellschaftlichen Bereich, der ohne Mathematik bestehen kann. Immer stärker dringen mathematische Methoden und Verfahren in andere Wissenschaften ein. Besonders die Physik – hier ist die mathematische Betrachtungsweise schon Tradition, weil von Beginn des physikalischen Forschens an üblich und notwendig – ist ohne Mathematik nicht denkbar.

Mathematik soll kein Selbstzweck sein. Natürlich ist es reizvoll, logische Operationen mit formalen mathematischen Symbolen durchzuführen. Doch dabei sollen wir vor allem die Kenntnisse und Fertigkeiten erwerben, die wir benötigen, um unsere Umwelt verstehen und beherrschen zu können.

In der Physik werden physikalische Erscheinungen und Vorgänge durch mathematische Symbole beschrieben. Die physikalische Erkenntnis ist im allgemeinen erst durch die mathematische Fassung vollständig, weil sich die physikalischen Erscheinungen mathematisch in ihrem Wesen tiefer und vollständiger und in sehr kurzer und damit übersichtlicher Form erfassen lassen.

Doch die Interpretation mathematisch gefaßter physikalischer Ergebnisse ist nicht immer einfach und muß erst erlernt werden. Viele Schüler glauben, daß die Ableitung physikalischer Formeln nur das Ziel verfolgt, später mit ihrer Hilfe physikalische Aufgaben lösen zu können. Das ist eine sehr einseitige Betrachtungsweise der mathematischen Durchdringung der Physik. Hinter den Formeln verbergen sich ganz exakte Aussagen über die Natur; physikalische Erscheinungen und Prozesse werden dadurch viel genauer als durch Worte beschrieben.

Wir wollen das an einigen Beispielen zeigen:

1. Das *Newtonsche Grundgesetz der Mechanik* lautet:

$$F = m \cdot a$$

Kraft ist gleich dem Produkt aus Masse und Beschleunigung.

1.1. Gilt $F=0$, d. h. wirkt auf einen Körper der Masse m keine Kraft ein, so gilt

$m \cdot a = 0$. Wegen $m \neq 0$ ergibt sich $a=0$.

Die Beschleunigung ist 0, d. h. die Geschwindigkeit verändert sich nicht; der Körper bleibt in Ruhe oder in geradliniger, gleichförmiger Bewegung, wenn auf ihn keine Kraft einwirkt. Das bekannte Trägheitsgesetz ist also ohne Mühe durch einfache logische Operationen mit mathematischen Symbolen aus dem Newtonschen Grundgesetz ableitbar.

1.2. Wird die auf einen Körper einwirkende Kraft verdoppelt, so ergibt sich nicht nur die oft benutzte qualitative Aussage, daß dann die Beschleunigung a auch größer werde, sondern aus dem Grundgesetz folgt, daß dann auch a verdoppelt wird. Kraft und Beschleunigung verändern sich proportional.

$F \sim a$ mit m=konst.

Dabei ist die Zusatzbedingung m=konst. zu beachten, wie das folgende Beispiel zeigen soll.

2. Das *Ohmsche Gesetz* besagt: $U \sim I$

Wenn die Spannung U verdoppelt wird, verdoppelt sich auch die Stromstärke I; verdreifacht man die Spannung, muß sich auch die Stromstärke verdreifachen usw.

Aufgabe 1: Ein Experiment mit einer Lampe aus dem Elektrik-Schülerübungsgerät ergab folgende Meßwerte:

Nr.	U (in V)	I (in A)
1	2	0,10
2	4	
3	6	

Ergänzt die Tabelle, indem ihr überlegt, welche Stromstärkewerte zu erwarten sind, wenn $U \sim I$ gilt. Die in Wirklichkeit gemessenen Werte sind der unteren Tabelle zu entnehmen:

Nr.	U (in V)	I (in A)
1	2	0,10
2	4	0,16
3	6	0,21

Das Ergebnis entspricht nicht der Erwartung. Die Stromstärke wird mit wachsender Spannung zwar auch größer, doch verändern sich beide Größen nicht proportional. Die Ursache für den Widerspruch zwischen Voraussage und Ergebnis ist darin zu suchen, daß bei der Vorüberlegung gegen ein mathematisches Gesetz verstoßen wurde:

$U \sim I$ gilt nur, wenn R=konst. gilt.

Das bedeutet, daß alle den Widerstand beeinflussenden Faktoren konstant bleiben. Bei unserem Versuch ändert sich aber mit wachsender Stromstärke die Temperatur der Heizwendel der Lampe, der Widerstand wird damit größer. Die Stromstärke muß also hinter den vorausgesagten Werten zurückbleiben.

Führen wir den gleichen Versuch mit dem Bauelement Konstantandraht des SEG Elektrik durch, erhalten wir die erwartenden Werte, da der Widerstand des Konstantandrahtes fast temperaturunabhängig ist.

Nr.	U (in V)	I (in A)
1	2	0,12
2	4	0,23
3	6	0,35

Eine Verdopplung der Spannung zieht also auch eine Verdopplung der Stromstärke nach sich.

3. Im Gleichstromkreis berechnet man die Leistung mit Hilfe der Formeln

$$P = U \cdot I \qquad \text{bzw. wegen} \quad (1)$$

$$U = I \cdot R$$

$$P = I^2 \cdot R \qquad (2)$$

Aufgabe 2: Beantworte folgende Frage:
In einem Stromkreis mit einem Festwiderstand aus Konstantandraht wird die Stromstärke verdoppelt. Wird die Leistung P

a) auch verdoppelt wegen $P \sim I$ aus Formel (1)

b) vervierfacht wegen $P \sim I^2$ aus Formel (2)?

Es sei noch darauf hingewiesen, daß diese Überlegungen bei der Übertragung von Elektroenergie eine große Rolle spielen. Da die Leistungsverluste vom Quadrat der Stromstärke abhängen, muß bei konstanter übertragener Leistung die Stromstärke recht klein gehalten werden, die Spannung wird entsprechend hoch transformiert. Wird die Stromstärke auf die Hälfte herabgesetzt, gehen die Übertragungsverluste auf den vierten Teil zurück.

4. Die *allgemeine Zustandsgleichung idealer Gase* lautet: $\frac{p \cdot V}{T} = \frac{p_0 \cdot V_0}{T_0} = \text{konst.}$

Ohne experimentelle Untersuchungen können durch rein mathematische Überlegungen aus der Zustandsgleichung physikalische Schlußfolgerungen gezogen werden, die in der Praxis eine große Rolle spielen.
Wir untersuchen zuerst den Quotienten

$$\frac{a \cdot b}{c} = \text{konst.}$$

gebildet aus den formalen Symbolen a, b und c!

a) Aus $a = \text{konst.}$ folgt $\frac{b}{c} = \text{konst.}$ oder $b \sim c$

b) Aus $b = \text{konst.}$ folgt $\frac{a}{c} = \text{konst.}$ oder $a \sim c$

c) Aus $c = \text{konst.}$ folgt $ab = \text{konst.}$ oder $a \sim \frac{1}{b}$

Aufgabe 3: Übertrage diese Überlegungen formal auf die allgemeine Zustandsgleichung! Ergänze dazu folgende Tabelle:

Bedingung	Name der Zustandsänderung	Gesetz	Proportionalität	Anwendungsbeispiel
$p = \text{konst.}$	isobar	$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$	$V \sim T$	Gasthermometer
$V = \text{konst.}$				
$T = \text{konst.}$				

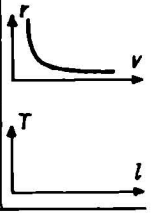
5. Viele physikalischen Formeln entsprechen den im Mathematikunterricht behandelten Funktionen, sie haben nur ein spezielles, ein physikalisches Gewand. Die Kenntnisse aus der Funktionslehre kann man bei ihrer Behandlung und grafischen Darstellung anwenden. *Beispiele:*

1. Das *Boylesche Gesetz* lautet: $p \cdot V = \text{konst.}$ mit $T = \text{konst.}$

2. Für die *Schwingungsdauer T des Fadenpendels* gilt

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Aufgabe 4: Ergänzt folgende Tabelle!

Formel	Abhäng. Größen	formale math. Funktion	Def. Bereich	Gültigkeitsbereich	grafische Darstellung
$pV = \text{konst.}$	$p = f(v)$	$y = \frac{c}{x}$	$V > 0$	$T = \text{konst.}$ ideales Gas	
$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$					

Das l-T-Diagramm der Pendelschwingung kann leicht durch experimentelle Bestimmung einiger Wertepaare von $T = f(l)$ überprüft werden.

Das war nur ein kleiner Ausschnitt, der die starke mathematische Durchdringung der Physik zeigen Mathematisches Wissen und Können sind Voraussetzungen zur Erfassung physikalischer Probleme. Wir sollen uns an der Schönheit und Strenge mathematischer Betrachtungen und Ableitungen erfreuen, doch dabei nicht vergessen, daß wir sie vor allem deshalb betreiben, weil sie uns die Hilfsmittel zur besseren Erkenntnis der Natur und unserer gesamten Umwelt liefern sollen.

E. Mittmann

Eine Aufgabe von Prof. Dr. E. W. Trost

Professor am Technikum Winterthur (Zürich)
Redakteur der „Elemente der Mathematik", Basel

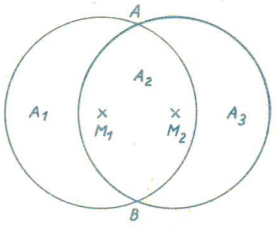
▲1083▲ Eine Parabel (Parameter p) bewegt sich in einem rechten Winkel (Scheitel S) so, daß sie stets beide Schenkel berührt. B sei einer der Berührungspunkte. Man bestimme das Minimum der Strecke $\overline{SB}$. (Die Aufgabe kann ohne Differentialrechnung gelöst werden, indem man sie auf die Bestimmung des Maximums eines kubischen Polynoms zurückführt.)

Eine interessante, aber schwierige Aufgabe

Unser Leser, Herr *Schulz*, Fachlehrer für Mathematik in Rotta, Kr. Bitterfeld, sendet uns die folgende geometrische Aufgabe, die insofern recht interessant ist, als sie zu einer transzendenten Gleichung führt, deren Lösung nur mit Näherungsmethoden möglich ist:

Aufgabe:

Zwei Kreise k_1 und k_2 mit dem gleichen Radius $r = 5$ cm und den Mittelpunkten M_1, M_2 mögen sich in zwei Punkten A und B so schneiden, daß die dabei entstehenden von Kreisbögen dieser Kreise begrenzten Flächenstücke A_1, A_2, A_3 den gleichen Flächeninhalt haben (vgl. die Abb. 1).



Es ist der Abstand $\overline{M_1M_2}$ der Mittelpunkte der beiden Kreise k_1, k_2 zu berechnen.

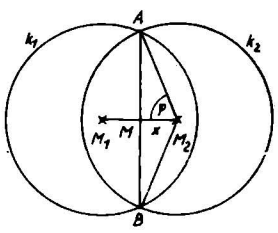
Lösung:

Wir bezeichnen den Mittelpunkt der Strecke $\overline{M_1M_2}$, der gleichzeitig der Schnittpunkt der aufeinander senkrecht stehenden Geraden M_1M_2 und AB ist, mit M und setzen $\overline{MM_2} = x$, $\sphericalangle MM_2A = \varphi$ (vgl. Abb. 2).

Dann gilt $\overline{M_2A} = r$ und

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \text{ also } x = r\cos\varphi,$$

$$\sin\varphi = \frac{\overline{MA}}{r}, \text{ also } \overline{MA} = r\sin\varphi.$$



Ferner bezeichnen wir den Flächeninhalt des durch die Radien $\overline{M_2A}$ und $\overline{M_2B}$ sowie durch den im Innern des Kreises k_1 liegenden Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$ des Kreises k_2 begrenzten Kreissektors mit S_1 und den Flächeninhalt des Dreiecks ABM_2 mit D_1. Dann gilt:

$$S_1 : r^2\pi = 2\varphi : 2\pi, \text{ also } S_1 = r^2\varphi;$$

$$D_1 = \overline{MA} \cdot x = r \cdot \sin\varphi \cdot r\cos\varphi =$$

$$= r^2 \sin\varphi \cos\varphi = \frac{r^2}{2} \sin 2\varphi.$$

Daraus folgt, daß der Flächeninhalt des zu dem Sektor S_1 gehörenden Kreissegments gleich

$$S_1 - D_1 = r^2\varphi - \frac{r^2}{2}\sin 2\varphi =$$

$$= r^2\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)$$

ist; daher gilt für den Flächeninhalt des mittleren Flächenstücks

$$A_2 = 2r^2\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right).$$ Ferner gilt

$$A_1 = A_3 = \pi r^2 - A_2$$

Daraus folgt wegen $A_1 = A_2 = A_3$

$$\pi r^2 - A_2 = A_2, \; 2A_2 = \pi r^2,$$

$$4r^2\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right) = \pi r^2,$$

$$\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi - \frac{\pi}{4} = 0.$$

Aus dieser Gleichung läßt sich φ berechnen und daher auch wegen $\overline{M_1M_2} = 2r\cos\varphi$ der gesuchte Abstand $\overline{M_1M_2}$.

Da in dieser Gleichung aber sowohl φ als auch $\sin 2\varphi$ vorkommt, ist die Berechnung mit den bekannten Methoden der Gleichungslehre nicht möglich. Es handelt sich nämlich um eine sogenannte transzendente Gleichung, da die Variable φ sowohl linear als auch als Funktionswert der Sinusfunktion auftritt.

Wir müssen daher eine Näherungsmethode anwenden, mit deren Hilfe wir φ mit einer beliebigen Genauigkeit bestimmen können. Wir beachten, daß φ im Bogenmaß einzusetzen ist und setzen

$$f(\varphi) = \varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi - \frac{\pi}{4}.$$ Wir erhalten

$$f(0) = -\frac{\pi}{4} = -0{,}7854,$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = f(1{,}0472) = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\sin 60° - \frac{\pi}{4} =$$

$$= -0{,}1712,$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(1{,}5708) = \frac{\pi}{2} - 0 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} =$$

$$= 0{,}7854.$$

Der gesuchte Wert von φ liegt also zwischen 1,0472 und 1,5708.

Wir interpolieren und erhalten den besseren Näherungswert

$$\varphi_1 = 1{,}047 + 0{,}524 \cdot \frac{0{,}171}{0{,}957} =$$

$$= 1{,}047 + 0{,}094 = 1{,}141.$$ Wir erhalten

$$f(1{,}141) = 1{,}141 - \frac{1}{2}\sin 2{,}282 - 0{,}785 =$$

$$= -0{,}023.$$

Dieser Wert ist noch etwas zu klein; wir interpolieren noch einmal und erhalten den besseren Näherungswert

$$\varphi_2 = 1{,}141 + 0{,}094 \cdot \frac{0{,}023}{0{,}194} =$$

$$= 1{,}141 + 0{,}011 = 1{,}152.$$

Wir erhalten

$$f(1{,}152) = -0{,}005.$$

Wir interpolieren noch einmal und erhalten

$$\varphi_3 = 1{,}155 \triangleq 66{,}2° \text{ mit } f(\varphi) = 0{,}000.$$

Damit haben wir einen Näherungswert für φ erhalten, dessen Genauigkeit für die praktische Rechnung ausreicht. Wir erhalten weiter den gesuchten Abstand der Mittelpunkte der beiden Kreise

$$\overline{M_1M_2} = 2r \cdot \cos 66{,}2° = 2r \cdot 0{,}4035 =$$

$$= 0{,}807r = 0{,}807 \cdot 5 \text{ cm}$$

$$= 4{,}035 \text{ cm}.$$

Wir bemerken noch, daß die Funktion $f(\varphi)$ in dem Intervall $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$ nur eine Nullstelle hat; die gestellte Aufgabe hat also genau eine Lösung. Das ergibt sich auch aus der Anschauung, weil beim Auseinanderrücken der Mittelpunkte der Flächeninhalt von A_2 kleiner und der von A_1 bzw. A_3 größer wird; das Umgekehrte ist der Fall, wenn die Mittelpunkte zusammenrücken.

Übrigens können wir uns durch Auflegen eines quadratischen Rasters und Auszählen bzw. Abschätzen der Quadrate in Abb. 2 davon überzeugen, daß tatsächlich die Flächeninhalte der drei Flächenstücke gleich sind.

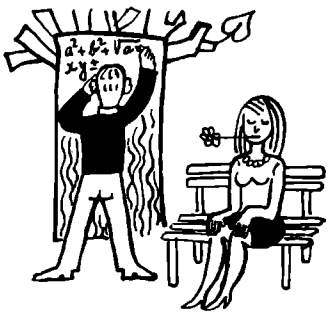
Zum Schluß bemerken wir noch, daß wir, wie in der angewandten Mathematik üblich, bei den obigen Rechnungen Gleichheitszeichen gesetzt haben, obwohl wegen der Rundungen (auf vier bzw. drei Stellen nach dem Komma) die Zahlenwerte jeweils nur angenähert gleich sind. *R. Lüders*

Vorbildlicher Kreisklub

Seit Jahren betreut unser *alpha*-Leser und Mitarbeiter *Reinhard Schulz* aus Rotta, Kreis Gräfenhainichen, an seiner Oberschule eine Arbeitsgemeinschaft Mathematik. Durch die regelmäßige Teilnahme am Wettbewerb der Zeitschrift *alpha* und durch eine rege Aktivität beim Lösen komplizierter Aufgaben erzielten seine Schüler bei Kreisolympiaden sehr bald vorbildliche Leistungen. Deshalb beauftragte ihn der Kreisschulrat im März 1972 mit der Bildung des Kreisklubs zur Förderung aller talentierten Schüler der 5. bis 8. Klassen.

Den 120 *Jungen Mathematikern*, die in drei Stützpunkten des Kreisgebietes wöchentlich bzw. 14täglich zusammentreten, stellt Kollege *Schulz* neben dem laufenden *alpha*-Wettbewerb unter anderem geometrische Probleme zur Lösung. Besonderen Anklang finden beispielsweise solche Aufgaben, in denen die Kongruenz oder die Gleichheit von Flächen zu beweisen ist. In dieser Richtung liegt auch das auf Seite 75 dargelegte Problem, das in der Arbeitsgemeinschaft aufgeworfen wurde, jedoch mit den Mitteln der Schulmathematik in den Klassen 5 bis 8 noch nicht lösbar ist. *Redaktion alpha*

Ein Verfahren zur Abspaltung linearer und quadratischer Polynome



Läßt sich von einem Polynom $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$, dessen Koeffizienten $a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ gegebene ganze Zahlen sind, ein Linearfaktor $x-t_0$ abspalten, t_0 ganzzahlig, so erhält man $(x-t_0)(x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\ldots+b_0)=$
$=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$.
Hierbei ist $t_0b_0=a_0$. Es gilt also $t_0 \mid a_0$ (t_0 teilt a_0) und $(x-t_0) \mid f(x)$ für jede ganze Zahl x.
Setzt man also in $f(x)$ für x eine bestimmte ganze Zahl m ein, dann muß, falls die Abspaltung eines Linearfaktors $x-t_0$ möglich ist, neben $t_0 \mid a_0$ gelten:
$(m-t_0) \mid f(m)$, d. h. es muß die Gleichung $m-t_0=t_m$ für einen gewissen Teiler t_m von $f(m)$ und ein gewisses t_0 erfüllt sein.
Hieraus folgt die Bedingung $(L_m)\ t_mt_0=m$ für die Abspaltung eines Linearfaktors $x-t_0$ von $f(x)$.
Unter den Teilern t_0 von a_0 kommen mithin nur diejenigen in Frage, zu denen es einen Teiler t_m von $f(m)$ gibt, so daß durch (t_m, t_0) die Bedingung (L_m) erfüllt ist. Dadurch wird i. a. die Anzahl der in Frage kommenden t_0 bereits eingeschränkt und man kann unter diesen eine „2. Auslese" treffen, indem man eine weitere ganze Zahl $m' \neq m$ wählt und nach denjenigen t_0 sucht, die – mit geeigneten Teilern $t_{m'}$ von $f(m')$ – auch noch der Bedingung $(L_{m'})\colon t_{m'}+t_0=m'$ genügen. Damit kann man sukzessive zu wenigen möglichen Teilern t_0 von a_0 gelangen. Ob sich nun mit einem dieser t_0 tatsächlich ein Linearfaktor abspalten läßt, kann nur durch Überprüfen, ob $(x-t_0) \mid f(x)$ bzw. ob $f(t_0)=0$, entschieden werden.

Beispiel: $f(x)=x^7-13x^6-34x^5+61x^4-14x^3-32x^2+267x-180$
a) $m=1 \quad f(1)=56$
$(L_1) \quad t_1+t_0=1$
$t_0/180$, also $t_0=\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6, \pm9, \pm10, \pm12, \pm15, \pm18, \pm20, \pm30, \pm36, \pm45, \pm60, \pm90, \pm180$.
$t_1/56$, also $t_1=\pm1, \pm2, \pm4, \pm7, \pm8, \pm14, \pm28, \pm56$.
Die Bedingung (L_1) wird nur von den folgenden geordneten Zahlenpaaren erfüllt:
$(t_1, t_0)=(+2, -1), (-1, +2), (-2, +3), (+4, -3), (-4, +5), (+7, -6), (-8, +9), (-14, +15)$.
Es sind also nur noch die folgenden 8 Teiler zu überprüfen:
$t_0=-1, +2, +3, -3, +5, -6, +9, +15$.
b) $m=-1 \quad f(-1)=-384$
$(L_{-1}) \quad t_{-1}+t_0=-1$
$t_{-1} \mid -384$, also $t_{-1}=\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm16$ usw.
Weitere Teiler kommen wegen der Bedingung (L_{-1}) nicht in Frage. Die Bedingung (L_{-1}) wird von den geordneten Zahlenpaaren $(t_{-1}, t_0)=(-3, +2), (-4, +3), (+2, -3), (-6, +5), (-16, +15)$ erfüllt.
Es bleiben folgende 5 Teiler zu überprüfen:
$t_0=+2, \pm3, +5, +15$.
c) $m=+2 \quad f(2)=-702$
$(L_2) \quad t_2+t_0=2$
$t_2 \mid -702$, also $t_2=\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm9, \pm13$ usw.

Die Bedingung (L_2) wird von den geordneten Zahlenpaaren $(t_2, t_0)=(-1, +3), (-3, +5), (-13, +15)$ erfüllt. Die Zahl der möglichen Teiler sind nur noch $t_0=+3, +5, +15$.
d) $m=-2 \quad f(-2)=374$
$(L_{-2}) \quad t_{-2}+t_0=-2$
Wegen der geringen Anzahl von möglichen Teilern t_0 empfiehlt es sich, auf Grund der Bedingung (L_{-2}) zu überprüfen, ob $-5, -7$ oder -17 Teiler von 374 sind. Nur $t_{-2}=-17$ teilt 374. Das geordnete Zahlenpaar $(t_{-2}, t_0)=(-17, +15)$ erfüllt als einziges die Bedingung (L_{-2}).
Es ist nun zu prüfen, ob $f(15)=0$ bzw. ob $x-15$ ein Teiler von $f(x)$ ist.
Die Division mit Rest von $f(x)$ durch $(x-15)$ ergibt die Zerlegung
$x^7-13x^6-34x^5+61x^4-14x^3-32x^2+267x-180=(x-15)(x^6+2x^5-4x^4+x^3+x^2-17x+12)$
Wie das Verfahren erkennen läßt, ist eine weitere Abspaltung eines Linearfaktors nicht möglich.
Hat ein Polynom $g(x)$ rationale Koeffizienten, so läßt es sich stets in der Form $g(x)=\frac{1}{v}f(x)$ schreiben, wobei $f(x)$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten ist; man braucht dazu für v nur ein gemeinsames Vielfaches der Nenner aller (rationalen) Koeffizienten von $g(x)$ zu nehmen. Einen Linearfaktor von $g(x)$ abspalten heißt demzufolge einen solchen von $f(x)$ abspalten. Dieses Problem wurde bereits behandelt für den Fall, daß der Koeffizient der höchsten Potenz gleich 1 ist.
Im allgemeinen Fall fragt man nach der Möglichkeit, einen Linearfaktor t_nx-t_0 vom Polynom $f(x)=a_nx^n+\ldots+a_0$ abzuspalten:
$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$
$=(t_nx-t_0)(b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1x+b_0)$;
$|a_n|>0$.
Hierbei ist $t_0b_0=a_0$ und $t_nb_{n-1}=a_n$.
Also gilt: $t_0 \mid a_0$, $t_n \mid a_n$, $(t_nx-t_0) \mid f(x)$. Setzt man wieder für x eine bestimmte ganze Zahl m ein und bezeichnet die Teiler von $f(m)$ mit t_m, so muß für ein gewisses t_0 und für ein gewisses t_m die Gleichung $t_nm-t_0=t_m$ *erfüllt sein.*

Hieraus folgt die Bedingung
$(L_m^{(n)}) \quad t_m+t_0=t_nm;\ t_m/f(m),\ t_0/a_0,\ t_n/a_n$.
Läßt man t_n der Reihe nach die Teiler von a_n durchlaufen, so kann für jedes einzelne t_n das oben angegebene Verfahren benutzt werden.
Es gilt:
Wenn t_nx-t_0 bzw. t_nx+t_0 teilt $f(x)$,
so auch $-t_nx+t_0$ bzw. $-t_nx-t_0$ teilt $f(x)$.
Es brauchen also nur die positiven Teiler t_n von a_n untersucht zu werden.

Beispiel:
$f(x)=3x^6-8x^5+5x^4+6x^3+5x^2+14x-65$.
Wegen $t_n \mid a_n$, d. h. hier $t_n \mid 3$ kommen nur die beiden Linearfaktoren $x-t_0$ und $3x-t_0$ als Teiler von $f(x)$ in Frage:
1. Fall: $t_n=1 \quad (L_m^1) \quad t_m+t_0=m$
2. Fall: $t_n=3 \quad (L_m^1) \quad t_m+t_0=3m$
Zum 1. Fall:
a) $m=1 \quad f(1)=-40$
$(L_1^1) \quad t_1+t_0=1$
$t_1=\pm1, \pm2, \pm4, \pm5, \pm8, \pm10, \pm20, \pm40$
$t_0=\pm1, \pm5, \pm13, \pm65$
Die Bedingung (L_1^1) wird nur von den beiden Paaren erfüllt:
$(t_1, t_0)=(+2, -1), (-4, +5)$
b) $m=-1 \quad f(-1)=-64$
$(L_{-1}^1) \quad t_{-1}+t_0=-1$
$t_{-1}=\pm1, \pm2, \pm4, \pm8, \pm16, \pm32, \pm64$.
Wegen $f(-1)=-64$ bleibt nur $t_0=+5$ zu überprüfen. Da hierzu kein Teiler t_{-1} existiert, so daß Bedingung (L_{-1}^1) erfüllt ist, kann kein Linearfaktor $x-t_0$ abgespalten werden.

Zum 2. Fall:

a) $m=1 \quad f(1)=-40$

$(L_1^3) \quad t_1+t_0=3$

t_1, t_0 wie unter a) zum 1. Fall.

Die Bedingung erfüllen die Zahlenpaare

$(t_1, t_0)=(+4, -1), (-2, +5), (+8, -5)$

$(-10, +13)$

$m=-1$ ergibt für t_0 keine weitere Einschränkung.

b) $m=2 \quad f(2)=47$

$(L_2^3) \quad t_2+t_0=6$

$t_2=\pm 1, \pm 47.$

Nur $(t_2, t_0)=(+1, +5)$ erfüllt die Bedingung (L_2^3). Die Division mit Rest von $f(x)$ durch $(3x-5)$ führt auf die Zerlegung

$3x^6-8x^5+5x^4+6x^3+5x^2+14x-65$

$=(3x-5)(x^5-x^4+2x^2+5x+13)$

Die Abspaltung eines weiteren Linearfaktors ist nicht möglich. Wir wenden uns nun der etwas schwierigen Frage nach der Abspaltbarkeit eines quadratischen Polynomes vom Polynom $f(x)$ zu. Für das Polynom sei folgende Zerlegung möglich:

$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=$

$=(x^2+b_1x+b_0)(x^{n-2}+\ldots+c_1x+c_0).$

Es wird zunächst wieder $a_n=1$ vorausgesetzt und ferner, daß alle auftretenden Koeffizienten ganzzahlig sind. Für x werden bestimmte ganze Zahlen m und r eingesetzt $(m, r+0)$. Dann gilt:

$t_m=g(m)=m^2+b_1m+b_0$ mit

$b_0=t_0, t_0 \mid a_0, t_m \mid f(m)$

$t_r=g(r)=r^2+b_1r+b_0$ mit

$b_0=t_0, t_0 \mid a_0, t_r \mid f(r).$

Multipliziert man die erste Gleichung mit r und die zweite mit m, so ergibt sich

$$rt_m=rm^2+b_1rm+rb_0$$
$$mt_r=r^2m+b_1rm+mb_0$$

Subtraktion bzw. Addition beider Gleichungen ergibt die Bedingungen

$rt_m-mt_r=rm^2-r^2m+(r-m)b_0$ bzw.

$rt_m+mt_r=rm^2+r^2m+2rmb_1+(r+m)b_0$

Setzt man $r=1$ und $m=-1$, so erhält man die Bedingungen

$(Q_{t_0}) \quad t_{-1}+t_1=2+2t_0$ mit $b_0=t_0$

$$t_{-1}-t_1=-2b_1, \text{ also } b_1=\frac{t_1-t_{-1}}{2}$$

Beispiel:

$f(x)=x^8+5x^7+10x^6+6x^5-8x^4-5x^3+$

$+3x^2+9x+15$

$m=1 \quad f(1)=36$ und $m=-1 \quad f(-1)=6$

$t_0 = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$

$t_1 = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 36$

$t_{-1}=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Es ergeben sich die Bedingungen (Q_{t_0}) wie folgt:

$(Q_1) \quad t_1+t_{-1}=4 \quad (Q_5) \quad t_1+t_{-1}=12$

$(Q_{-1}) \quad t_1+t_{-1}=0 \quad (Q_{-5}) \quad t_1+t_{-1}=-8$

$(Q_3) \quad t_1+t_{-1}=8 \quad (Q_{15}) \quad t_1+t_{-1}=32$

$(Q_{-3}) \quad t_1+t_{-1}=-4 \quad (Q_{-15}) \quad t_1+t_{-1}=-28$

Folgende Zahlenpaare erfüllen die Bedingungen $(Q_1)(t_1, t_{-1})$

$=(+1, +3)$ mit $b_1=-1,$

$(+2, +2)$ mit $b_1=0$

$=(-2, +6)$ mit $b_1=-4,$

$(+3, +1)$ mit $b_1=1$

$=(+6, -2)$ mit $b_1=4$

$(Q_{-1})(t_1, t_{-1})$

$=(+1, -1)$ mit $b_1=1,$

$(-1, +1)$ mit $b_1=-1,$

$=(+2, -2)$ mit $b_1=2,$

$(-2, +2)$ mit $b_1=-2,$

$=(+3, -3)$ mit $b_1=3,$

$(-3, +3)$ mit $b_1=-3,$

$=(+6, -6)$ mit $b_1=6,$

$(-6, +6)$ mit $b_1=-6$

$(Q_3)(t_1, t_{-1})$

$(+2, +6)$ mit $b_1=-2,$

$(+6, +2)$ mit $b_1=2,$

$=(+9, -1)$ mit $b_1=5$

$(Q_{-3})(t_1, t_{-1})$

$=(-1, -3)$ mit $b_1=1,$

$(-2, -2)$ mit $b_1=0,$

$=(+2, -6)$ mit $b_1=4,$

$(-3, -1)$ mit $b_1=-1$

$=(-6, +2)$ mit $b_1=-4,$

$(Q_5)(t_1, t_{-1})$

$=(+6, +6)$ mit $b_1=0,$

$(+9, +3)$ mit $b_1=3$

$=(+18, -6)$ mit $b_1=12$

$(Q_{-5})(t_1, t_{-1})=$

$=(-2, -6)$ mit $b_1=2,$

$(-6, -2)$ mit $b_1=-2$

$=(-9, +1)$ mit $b_1=-5$

$(Q_{15})(t_1, t_{-1})$ entfällt

$(Q_{-15})(t_1, t_{-1})$ entfällt.

Wegen der oben für $f(x)$ vorausgesetzten Zerlegung ist

$a_1=c_1t_0+b_1c_0$ mit $c_0=\frac{a_0}{t_0}$ also

$$a_1=c_1t_0+\frac{b_1a_0}{t_0}$$

Deshalb ist $c_1=\frac{a_1}{t_0}-\frac{b_1a_0}{t_0^2}$.

Folglich muß für die Zerlegung des gegebenen $f(x)$ die Bedingung

(*) $\quad c_1=\frac{9}{t_0}-\frac{15b_1}{t_0^2}$ mit c_1 ganzzahlig

erfüllt sein.

Die Bedingung (*) ist außer für alle unter (Q_1) und (Q_{-1}) angegebenen Zahlen t_0 und b_1 nur für die Zahlen

$t_0=-3$ und $b_1=0$, $t_0=5$ und $b_1=3$, $t_0=-5$ und $b_1=2$

erfüllt. Von den nachstehenden 16 Polynomen ist deshalb zu ermitteln, ob sie Teiler von $f(x)$ sind. Ist dies der Fall, so müssen, wenn man in ihnen für x bestimmte ganze Zahlen m einsetzt, die sich ergebenden Zahlen t_m Teiler der zugehörigen Zahl $f(m)$ sein. Zur besseren Übersicht wird jedem der in Frage kommenden Polynome die sich durch Einsetzen von m ergebende Zahl mit einem Pfeil zugeordnet.

$m=-3 \quad f(-3)=960=2^6\cdot 3\cdot 5$

$x^2-x+1 \rightarrow 13 \quad x^2-2x-1 \rightarrow 14$

$x^2+1 \rightarrow \underline{10} \quad x^2+3x-1 \rightarrow \underline{-1}$

$x^2-4x+1 \rightarrow 22 \quad x^2-3x-1 \rightarrow \underline{17}$

$x^2+x+1 \rightarrow 7 \quad x^2+6x-1 \rightarrow \underline{-10}$

$x^2+4x+1 \rightarrow \underline{-2} \quad x^2-6x-1 \rightarrow 26$

$x^2+x-1 \rightarrow \underline{5} \quad x^2-3 \rightarrow \underline{6}$

$x^2-x-1 \rightarrow 11 \quad x^2+3x+5 \rightarrow \underline{5}$

$x^2+2x-1 \rightarrow \underline{2} \quad x^2+2x-5 \rightarrow \underline{-2}$

Da nur die unterstrichenen Zahlen Teiler von 960 sind, bleiben nur noch die folgenden 9 Polynome zu überprüfen.

$m=3 \quad f(3)=25\,530=2\cdot 3\cdot 5\cdot 23\cdot 37$

$x^2+1 \rightarrow \underline{10} \quad x^2+3x-1 \rightarrow 17$

$x^2+4x+1 \rightarrow \underline{22} \quad x^2+6x-1 \rightarrow 26$

$x^2+x-1 \rightarrow 11 \quad x^2-3 \rightarrow 6$

$x^2+2x-1 \rightarrow 14 \quad x^2+3x+5 \rightarrow 23$

$x^2+2x-5 \rightarrow \underline{10}$

Da nur die unterstrichenen Zahlen Teiler von 25 530 sind, bleiben nur noch die folgenden 4 Polynome zu überprüfen:

$m=-5 \quad f(-5)=133\,170=2\cdot 3\cdot 5\cdot 4439$

$x^2+1 \rightarrow 26 \quad x^2+3x+5 \rightarrow \underline{15}$

$x^2-3 \rightarrow 22 \quad x^2+2x-5 \rightarrow \underline{10}$

Da weder 13 noch 11 Teiler von 4439 sind, ist nur zu untersuchen ob $x^2+3x+5 \mid f(x)$ und ob $x^2+2x-5 \mid f(x)$.

Die Division mit Rest von $f(x)$ durch x^2+3x+5 ergibt die Zerlegung

$x^8+5x^7+10x^6+6x^5-8x^4-5x^3+3x^2+$

$9x+15=(x^2+3x+5)(x^6+2x^5-x^4-x^3+3)$

x^2+2x-5 kann nicht ein weiterer Teiler sein, da $-5+3$.

Die Ausdehnung des Verfahrens auf den Bereich der rationalen Zahlen erfolgt durch Übergang zu dem abspaltbaren quadratischen Faktor $t_nx^2+b_1x+t_0$ mit $t_n \mid a_n$, $|a_n|>1$, a_n Koeffizient der höchsten Potenz von x, die nicht verschwindet, und zu den Bedingungen $(Q_{t_0}^{(n)}) \quad t_{-1}+t_1=2t_n+2t_0$

$$b_1=\frac{t_1-t_{-1}}{2}$$

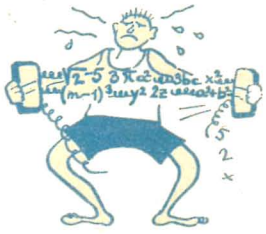
Hierdurch muß, wie bei der Abspaltung von Linearfaktoren bereits gezeigt ist, zusätzlich eine Fallunterscheidung entsprechend der Anzahl aller Teiler t_n von a_n aufgenommen werden. Wegen der sich daraus ergebenden hohen Anzahl von Rechenschritten wird das Verfahren sehr umständlich. Sein Vorteil ist allerdings darin zu sehen, daß auch hier der abzuarbeitende Algorithmus mit elementarsten Mitteln erfolgt. *H. Butzke*

Es ist bekannt,
daß die Kenntnis der Menschen
die Bezeichnung Wissenschaft in
Abhängigkeit davon verdienen,
welche Rolle in diesen Kenntnissen
die Zahl spricht. Emile Borel

Eine Wissenschaft ist erst dann als
entwickelt anzusehen, wenn sie
dahin gelangt ist, sich der
Mathematik bedienen zu können.
Karl Marx (Überliefert von P. Lafargue)

Die Natur ist ein Buch,
das in der Sprache der Mathematik
geschrieben ist. Galileo Galilei

Gitterpunkte Teil 2



Aufgabe 3: Zeige die linke Ungleichung von (9)!

Nach Umformung von (9) erhalten wir:

(10) $(1-\lambda)^2 \leqq \frac{T(a,b)}{F(a,b)} \leqq (1+\lambda)^2$ für alle reellen a, b mit $a \geqq b \geqq 8$.

Nun ist bekannt:

(11) $\lim\limits_{b\to\infty} (1\pm\lambda)^2 = 1$

Zu beachten ist, daß mit $b\to\infty$ auch $a\to\infty$ wegen $a \geqq b$.

Für diesen Sachverhalt schreiben wir:

(12) $\lim\limits_{\substack{b\to\infty \\ a\to\infty}} \frac{T(a,b)}{F(a,b)} = 1$

Aufgabe 4: Es seien p und q zueinander teilerfremde positive ungerade Zahlen. Beweise:

$$\sum\left[\frac{p}{q}x\right] + \sum\left[\frac{q}{p}y\right] = \left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{q-1}{2}\right)$$

$0 < x < \frac{q}{2}, x \in Z \quad 0 < y < \frac{p}{2}, y \in Z$

Anleitung: Deute beide Seiten der Gleichung als Anzahl der Gitterpunkte im Bereich

$0 < x < \frac{q}{2}, \quad 0 < y < \frac{p}{2}$!

Aufgabe 5: Es sei $T(n)$ die Anzahl der Gitterpunkte des Bereichs $0 < x$, $0 < y$, $xy \leqq n$ mit $n > 0$. Zeige

$$T(n) = 2\sum_{K=1}^{[\sqrt{n}]}\left[\frac{n}{x}\right] - [\sqrt{n}]^2 = \sum_{K=1}^{[n]}\left[\frac{n}{x}\right]$$

Aufgabe 6: Zeige! Es existieren Punkte P im zweidimensionalen Raum mit der Eigenschaft, daß sich zu jeder natürlichen Zahl n ein Kreis um P finden läßt, in dem genau n Gitterpunkte liegen.

Anleitung: $P\left(\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right)$ ist einer der gesuchten Punkte.

Aufgabe 7: Ein Punkt P, dessen beide Koordinaten rationale Zahlen sind, erfüllt die Bedingungen der Aufgabe 6 nicht.

2. Wir werden uns jetzt mit einem Satz über beliebige Gitter beschäftigen. Dazu sind einige Hilfssätze nötig. Es sei $\mathfrak{G}$ ein Vektor- und $\Gamma\{O, \mathfrak{G}\}$ das daraus entstehende Punktgitter.

Hilfssatz 1: Ist $\overrightarrow{OP} = \mathfrak{G}$, $P \neq O$ so existiert genau ein Vektor $\overrightarrow{OP} = \mathfrak{G}$ mit $-\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}$.

Aufgabe 8: Beweise Hilfssatz 1.

Hilfssatz 2: Es sei $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ eine Basis des Vektorgitters $\mathfrak{G}$. n_1, m_1, n_2, m_2 seien beliebige ganze Zahlen mit $n_1m_2 - m_1n_2 = 1$. Dann bilden die Vektoren $\mathfrak{a}' = n_1\mathfrak{a} + m_1\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}' = n_2\mathfrak{a} + m_2\mathfrak{b}$ wieder eine Basis des Gitters.

Beweis: Durch eine einfache Rechnung bestätigt man:

$$\mathfrak{a} = \frac{m_2}{n_1m_2 - n_2m_1}\mathfrak{a}' - \frac{m_1}{n_1m_2 - n_2m_1}\mathfrak{b}' = m_2\mathfrak{a}' - m_1\mathfrak{b}'$$

$$\mathfrak{b} = \frac{n_1}{n_1m_2 - n_2m_1}\mathfrak{b}' - \frac{n_2}{n_1m_2 - n_2m_1}\mathfrak{a}' = n_1\mathfrak{b}' - n_2\mathfrak{a}'.$$

Daraus ersieht man, daß jede ganzzahlige Linearkombination von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ auch eine ganzzahlige Linearkombination von $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ ist. Umgekehrt ist sofort klar, daß jede ganzzahlige Linearkombination von $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ auch eine ganzzahlige Linearkombination von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ist. $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ bilden also eine Basis des Gitters. Wir benutzen diesen Hilfssatz zur Konstruktion einer Basis von $\mathfrak{G}$. Dazu sei $P_1 \in \Gamma$, $P_1 \neq O$ so gewählt, daß P_1 einen minimalen Abstand von O hat, d. h. $\overline{OP_1} \leqq \overline{OP}$ für alle Punkte $P \in \Gamma$ mit $P \neq O$. Ferner sei:

$\Gamma' = \Gamma \setminus \{P \in \Gamma \mid \overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OP_1}, \lambda \in Z, \lambda \neq O\}$. $P_2 \neq O$ sei nun ein Punkt aus Γ', der einen minimalen Abstand von O hat, d. h. $\overline{OP_2} \leqq \overline{OP}$ für alle $P \in \Gamma'$ mit $P \neq O$. Wegen Hilfssatz 1 können $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$ so gewählt werden, daß $\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2} \geqq 0$ ist.

Hilfssatz 3: $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$ bilden eine Basis von $\mathfrak{G}$.

Aufgabe 9: Beweise Hilfssatz 3! Anleitung: Setze $\overrightarrow{OP_1} = n_1\mathfrak{a} + m_1\mathfrak{b}$, $\overrightarrow{OP_2} = n_2\mathfrak{a} + m_2\mathfrak{b}$. Überlege, welche Werte n_1, m_1, n_2, m_2 annehmen können und wende Hilfssatz 2 an!

Hilfssatz 4: Es gilt dann:
$|\overrightarrow{OP_1}| \leqq |\overrightarrow{OP_2}| \leqq |\overrightarrow{P_1P_2}| \leqq |n\overrightarrow{OP_1} + m\overrightarrow{OP_2}|$ für alle ganzen n, m und $n, m \neq 0$.

Beweis: Die beiden ersten Aussagen dieser fortlaufenden Ungleichung gelten laut Konstruktion von P_1 und P_2. Den Beweis für die Gültigkeit des letzten Ungleichheitszeichens führen wir indirekt, d. h. wir nehmen an, es existiert ein Gitterpunkt P_3 mit $\overrightarrow{OP_3} = n\overrightarrow{OP_1} + m\overrightarrow{OP_2}$, $n \neq 0$, $m \neq 0$ und $|\overrightarrow{OP_3}| < |\overrightarrow{P_1P_2}| = |\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}|$. Wir erhalten damit:
$|n\overrightarrow{OP_1} + m\overrightarrow{OP_2}|^2 < |\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}|^2$

Daraus folgt:
$(n^2-1)\overrightarrow{OP_1}^2 + (m^2-1)\overrightarrow{OP_2}^2 < -2(mn+1)\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2}$. Nun ist:
$|\overrightarrow{OP_1}| \leqq |\overrightarrow{P_1P_2}| = (\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1})^2$
$\Rightarrow \overrightarrow{OP_2}^2 \geqq 2\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2}$
$|\overrightarrow{OP_2}| \leqq |\overrightarrow{P_1P_2}| = (\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1})^2$
$\Rightarrow \overrightarrow{OP_1}^2 \geqq 2\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2}$. Damit erhalten wir:
$\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2}(n^2+m^2-2)$
$< -(mn+1)\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2}$.

Ist $\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2} = 0$, so stellt diese Gleichung einen Widerspruch dar. Für $\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2} = 0$, so stellt diese Gleichung einen Widerspruch dar. Für $\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2} > 0$ folgt:

$$1 > m^2 + n^2 + nm \geqq |nm|.$$

(Letzteres folgt nach dem Satz über das arithmetische und geometrische Mittel.) Wegen $n, m \neq 0$ und $n, m \in Z$ stellt diese Ungleichung auch einen Widerspruch dar. Unsere Annahme war also falsch, d. h. Hilfssatz 4 ist richtig. Kommen wir nun zu unserem Satz

Satz: Gegeben sei ein Punktgitter $\Gamma\{O, \mathfrak{G}\}$. Bekannt sei die Funktion $T(r)$, die zu jedem r die Anzahl der Gitterpunkte angibt, die im Kreis um O mit dem Radius r liegen. Dann läßt sich das Punktgitter bis auf eine Drehung um O und eine Spiegelung an einer Geraden durch O eindeutig konstruieren.

Beweis: Es sei $r = r_0$, die erste Unstetigkeitsstelle von $T(r)$, d. h. das kleinste $r \geqq 0$ für das $T(r) \neq 1$ ist. Es sei $T(r) = m + 1$. Nach Hilfssatz 1 ist m gerade, denn $O \in \Gamma$ und mit jedem Punkt $P \in \Gamma (P \neq O)$ ist auch sein bezüglich O symmetrischer Punkt $\bar{P} \in \Gamma$.

1. Fall: $m \geqq 6$

Auf dem Kreis um O mit dem Radius r_0 liegen mindestens 6 Gitterpunkte, aus denen man nach der obigen Festlegung P_1 und P_2 auswählen kann. Ferner gibt es unter diesen m Punkten mindestens einen Gitterpunkt P_3 mit $\overrightarrow{OP_3} = n\overrightarrow{OP_1} + m\overrightarrow{OP_2}$ und $n \neq 0$, $m \neq 0$, ganzzahlig. Wegen $|\overrightarrow{OP_3}| = r_0$ folgt aus Hilfssatz 4 $r_0 = |\overrightarrow{P_1P_2}|$. Das Gitter besitzt also Basisvektoren, die ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge r_0 aufspannen. Dadurch ist es bis auf Drehung und Spiegelung festgelegt.

2. Fall: $m = 4$

Auf dem Kreis um O mit dem Radius r_0 liegen 4 Gitterpunkte, unter denen wir P_1, P_2 gemäß obiger Festlegung auswählen können. Es sei jetzt für alle reellen $r \geqq 0$:

$$T_1(r) = T(r) - 4\left[\frac{r}{r_0}\right] - 1.$$

$T_1(r)$ gibt offenbar die Anzahl der Gitterpunkte P im Kreis um O mit dem Radius r an, für die gilt: $\overrightarrow{OP} = n\overrightarrow{OP_1} + m\overrightarrow{OP_2}$ mit $n \neq 0$, $m \neq 0$, ganzzahlig. r_1 sei das kleinste positive r, für das $T_1(r) \neq 0$ ist. Nach Hilfssatz 4 folgt: $r_1 = |\overrightarrow{P_1P_2}|$. Damit ist aus der Kenntnis der Funktion $T(r)$ das Dreieck OP_1P_2 bis auf Drehung und Spiegelung festgelegt.

3. Fall: $m = 2$

Auf dem Kreis um O mit dem Radius r_0 liegen zwei diametral gegenüberliegende Gitterpunkte. Einer davon kann als P_1 gewählt

werden. Wir bilden jetzt für alle reellen $r \geqq 0$:

$$T_1(r) = T(r) - 2\left[\frac{r}{r_0}\right] - 1.$$

$T_1(r)$ gibt offenbar die Anzahl der Gitterpunkte P im Kreis um O mit dem Radius r an, für die gilt:

(*) $\quad \overrightarrow{OP} \neq n\overrightarrow{OP_1}$ für alle ganzen n.

Es sei r_1 das kleinste $r > 0$, für das $T_1(r_1) = k \neq 0$ ist. Auf dem Kreis um O mit dem Radius r_1 liegen k Gitterpunkte P, für die (*) gilt, unter denen P_2 gemäß obiger Festlegung ausgewählt werden kann. Ist $k \geqq 4$, schließt man wie oben:

$|\overrightarrow{P_1P_2}| = r_1$. Sei nun $k = 2$. So bilden wir für alle reellen $r \geqq 0$:

$$T_2(r) = T_1(r) - 2\left[\frac{r}{r_1}\right].$$

Ist r_2 das kleinste positive r mit $T_2(r_2) \neq 0$, so folgt wieder $|\overrightarrow{P_1P_2}| = r_2$. Dadurch ist das Dreieck OP_1P_2 aus der Kenntnis der Funktion $T(r)$ bis auf Drehung und Spiegelung festgelegt. Wir haben damit unseren Satz vollständig bewiesen.

Aufgabe 10: Es sei r_0 das kleinste $r > 0$ für das $T(r) \neq 1$ ist und $T(r_0) = m + 1$. Zeige: $m \leqq 6$.

Zum Abschluß noch einige Aufgaben, die allgemeinere Aussagen betreffen, als wir sie bisher betrachtet haben:

Für die Aufgaben 11 bis 14 sei ein Punktgitter $\Gamma\{O, \mathfrak{G}\}$ gegeben, das eine Basis $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ hat, für die gilt: $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0$ ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ stehen senkrecht aufeinander) und $|\mathfrak{a}| = |\mathfrak{b}| = 1$.

Aufgabe 11: n und $m \geqq 4$ seien gegebene natürliche Zahlen. Zeige: Es existieren unendlich viele, verschiedene konvexe m-Ecke mit dem Flächeninhalt n, in denen (das „in" wird wie in 1.1. erläutert gebraucht) genau n Gitterpunkte liegen.

Aufgabe 12: n sei eine gegebene natürliche Zahl. Zeige: Es gibt mindestens ein gleichschenkliges Dreieck, in dem genau n Gitterpunkte liegen und das den Flächeninhalt n hat.

Aufgabe 13: Zeige: Zu jedem natürlichen n gibt es ein gleichseitiges Dreieck, in dem genau n Gitterpunkte liegen.

Aufgabe 14: Gegeben sei ein konvexes n-Eck $P_1P_2 \ldots P_n$. Für $\overline{P_1P} \geqq \overline{P_iP_j}$ für alle $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Weiter seien P_1P_K und ein Vektor $\mathfrak{a}$ parallel. T sei die Anzahl der Gitterpunkte, die in dem n-Eck liegen und F der Flächeninhalt des n-Ecks.

a) Zeige: $F - 2([\overline{P_1P_K}] + 1) \leqq T \leqq F + 2([\overline{P_1P_K}] + 1)$

b) Betrachtet werden nun alle zum ursprünglichen n-Eck ähnliche n-Ecke $\overline{P_1}, \overline{P_2}, \ldots, \overline{P_n}$. $\overline{P_1}\overline{P_K}$ sei stets zu $\mathfrak{a}$ parallel.

Zeige: $\lim_{\overline{P_1}\overline{P_K} \to \infty} \frac{T}{F} = 1$

M. Günther

Wissenschaftler schreiben über alpha

Prof. Dr. Dr.-Ing. V. Lewin

Lenin-Pädagogisches Institut Moskau

Mathematische Zeitschriften für die Jugend gibt es jetzt in vielen Ländern, da man fast überall bestrebt ist, mathematische Begabungen zu finden und auszubilden.

Die *alpha* der DDR ist ein gutes Beispiel dafür, wie man solche Zeitschriften gestalten soll. Nicht zu einfach, nicht zu anspruchsvoll, bietet *alpha* für alle Interessenten etwas zum Nachdenken. Angemessene Informationen aus der Wissenschaft und dem Leben, amüsante Bemerkungen, Aufgaben zum Lösen – daß muß, glaube ich, der *alpha* eine Menge von Freunden eingebracht haben. Was man der *alpha* noch wünschen kann: größeren Umfang, mehr Aufgaben, immer neue Freunde und Leser aus der Jugend.

Dr. Istvan Reiman

Technische Universität Budapest

Seit Jahren bin ich ein Leser der *alpha*. Besonderes Interesse haben wir Ungarn an den Aufgaben der Zeitschrift. Sie helfen, die Mathematikolympiaden gut vorbereiten. Zahlreiche Artikel sind methodisch sehr gut und helfen Lehrern und Schülern bei der außerunterrichtlichen Arbeit.

Prof. A. F. van Tooren

Redakteur der niederländischen Schülerzeitschrift „Pythagoras"

In jedem *alpha*-Heft sind zahlreiche Aufgaben in reicher Variation vorhanden, so daß jeder Schüler etwas Passendes für sich findet. Ich erachte auch die regelmäßig erscheinenden historischen Beiträge als wertvoll. Das Redaktionskollegium ist offenbar bestrebt, mit jedem Heft die engen Wechselbeziehungen zwischen Mathematik und Leben aufzuzeigen. Der Leser wird angeregt mitzuarbeiten (und das nicht nur an den gestellten Aufgaben). *alpha* bietet ein gutes Gleichgewicht zwischen ernst und heiter.

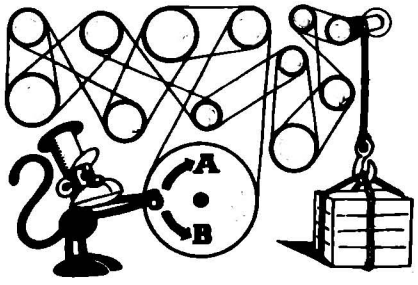
Prof. Wolfgang Ratzinger

Musisch-pädagogisches Bundesrealgymnasium, Linz, Österreich

Seit dem Jahre 1970 werden in Österreich Mathematische Olympiaden durchgeführt, an denen sich alle Schüler bis zum Abitur beteiligen können (ca. 18 Jahre) ...

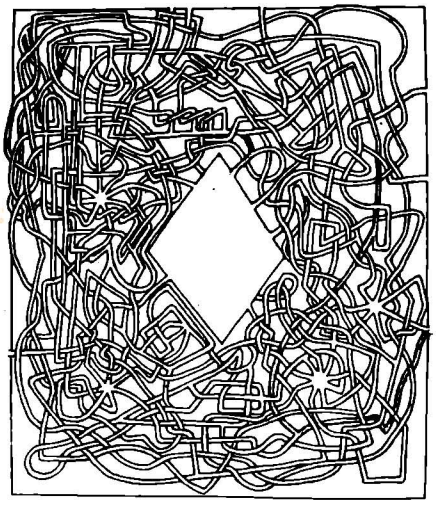
Durch diese Wettbewerbe ist unter den Schülern ein großes Interesse an Denksportaufgaben und mathematischen Problemen, die in netten Beispielen verpackt sind, entstanden. Genau diese Wünsche erfüllt die Mathematische Schülerzeitschrift *alpha*, die sich in unserem Lande aus diesem Grunde einer zunehmenden Beliebtheit erfreut.

Ich verwende diese Zeitschrift sehr gern in den Vorbereitungskursen für die Österreichischen Mathematikolympiaden. Dabei schätze ich sehr, daß in dieser Zeitschrift die Schüler ab Klassenstufe 5 angesprochen werden, so daß jeder Leser Beispiele für seinen Geschmack findet. Zur Entspannung bieten die Beispiele aus *alpha* heiter immer wieder Grund zum Schmunzeln, so doch die Schüler erkennen, daß die Mathematik auch sehr unterhaltsam sein kann.



Nach welcher Richtung muß das Rad in Bewegung gesetzt werden, damit die Kiste gehoben wird, nach A oder B?

aus NBI 4/73 Lösung auf S. 96



Labyrinth

Ein Labyrinth, von Prof. *Lewis Coroll* (Oxford) in seinen Jugendjahren entworfen: Die Aufgabe besteht darin, den Ausweg aus dem Mittelfeld zu finden. Die Wege führen über- und untereinander hinweg, werden an manchen Stellen jedoch durch einen Querstrich blockiert.

alpha -Wettbewerb Physik

Letzter Einsendetermin: 1. Oktober 1973

Liebe *alpha*-Leser!
In diesem Heft findet Ihr genau wie im Vorjahr Wettbewerbsaufgaben zur Physik. An der Lösung der Probleme kann sich jeder beteiligen. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. (*Richtlinie:* Schuljahr 1972/73) Schüler der Klassenstufe 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit P 10/12 ■ gekennzeichnet sind. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm mal 297 mm). Am Kopf der Lösung müssen stehen: Name, Vorname, Adresse der Schule und Name des Physiklehrers, der ihn im Schuljahr 1972/73 unterrichtete. Die besten Lösungen werden von der Redaktion prämiert. Die Namen der aktivsten Teilnehmer werden veröffentlicht. Jeder Einsender erhält eine Antwortkarte, die für den *alpha*-Wettbewerb 1973/74 gewertet wird. Die Lösungen sind einzusenden an:

Redaktion alpha
7027 Leipzig
Postfach 14

Kennwort auf Briefumschlag: Physik-Wettbewerb 1973.

P 6 ■ 1085 Eine Schraubenfeder wird von einer Kraft F = 20 p um 5 cm gedehnt.
a) Wie groß ist die gesamte Längenänderung zweier hintereinander gehängter Federn dieser Art, wenn an die untere ein Wägestück mit dem Gewicht G = 28 p gehängt wird?
b) Um wieviel verlängert sich jede Feder, wenn beide nebeneinander befestigt werden und das Wägestück so darangehängt wird, daß sein Gewicht sich gleichmäßig auf beide Federn verteilt?

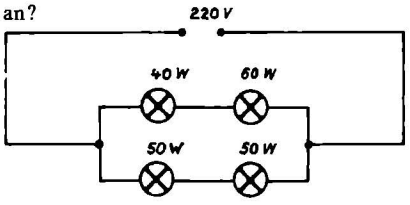
P 6 ■ 1086 Ein Schiff legt stromabwärts in 4 Stunden einen Weg von 120 km zurück. Für den Rückweg braucht es zwei Stunden mehr.
a) Mit welcher Geschwindigkeit fließt der Fluß?
b) Wie groß wäre die Geschwindigkeit des Schiffes in stehendem Wasser?

P 7 ■ 1087 In einer Schüssel mit Wasser der Temperatur 0 °C schwimmt ein Stück Eis, von dem ein Zehntel seines Volumens aus dem Wasser herausragt.
Wie ändert sich der Wasserstand in der Schüssel, wenn das Eis schmilzt?

P 7 ■ 1088 Wie groß ist die Arbeit, die man beim Dehnen einer Schraubenfeder um 12 cm verrichtet, wenn man für eine Verlängerung um 10 cm eine Kraft von 2 kp aufwenden muß!

P 8 ■ 1089 Mit Hilfe einer elektrischen Kochplatte von 500 W Leistung wird Wasser erwärmt und unter normalem Luftdruck zum Verdampfen gebracht.
a) Welche Wärmemenge gibt die Kochplatte in einer Minute ab?
b) Bei einer Anfangstemperatur des Wassers von 10 °C kann man beobachten, daß das Sieden nach einem Siebentel der Gesamtzeit vom Beginn des Erwärmens bis zum völligen Verdampfen des Wassers einsetzt. Wie groß ist danach die Verdampfungswärme des Wassers?

P 8 ■ 1090 Die vier Glühlampen in der Schaltskizze haben die angegebene Nennleistung und eine Nennspannung von 110 V. Die an den Stromkreis angelegte Spannung beträgt 220 V.
a) Wie groß ist die Gesamtstromstärke?
b) Welche Spannung liegt an jeder Lampe an?



P 9 ■ 1091 An den Enden eines über eine feste Rolle gelegten Fadens hängt je ein aus Magnesium bestehender Kegel mit der Grundfläche $A = 8\ cm^2$ und der Höhe $h = 12$ cm. Die Wichte beträgt $1{,}7\ p \cdot cm^{-3}$. Ein Kegel hängt mit der Spitze nach oben, der andere mit der Spitze nach unten. Man hält zunächst den Faden fest und taucht beide Kegel bis zur halben Höhe in Wasser. Dann läßt man los. Welche Gleichgewichtslage stellt sich ein?

P 9 ■ 1092 Ein Auto mit der Masse 1,5 t fährt über eine konvex gewölbte Brücke mit dem Krümmungsradius $R = 50$ m. Mit welcher Kraft drückt das Fahrzeug in der Mitte auf die Brücke, wenn es mit einer Geschwindigkeit von 80 km/h darüberfährt?

P 10/12 ■ 1093 Auf eine elastische Platte fallen zwei Stahlkugeln, die erste aus der Höhe $h_1 = 44$ cm, die zweite aus der Höhe $h_2 = 11$ cm. Die Zeitdifferenz zwischen dem Loslassen beider Kugeln beträgt t_0. Nach einer bestimmten Zeit fallen sowohl Richtung als auch Betrag der Geschwindigkeiten beider Kugeln zusammen. Man bestimme alle Zeiten t_0, für die das eintreten kann und den Zeitraum, in welchem jeweils die Geschwindigkeiten beider Kugeln gleich sind. Die Kugeln stoßen sich während der Bewegung nicht.

P 10/12 ■ 1094 Ein Pendel, dessen Schwingungsdauer 0,5 s beträgt, wird auf einem Wagen befestigt, der eine geneigte Ebene mit dem Neigungswinkel 45^0 hinabfährt und sich dann auf einer waagerechten Ebene weiterbewegt.
a) Wie groß ist die Schwingungsdauer beim Hinunterrollen?
b) Wie groß ist die Schwingungsdauer während der waagerechten Bewegung.

U. Walta

Berufsbild: Diplomlehrer für Physik

Die Physik vermag sicherlich wie nur wenige Wissenschaftszweige, Menschen aller Altersgruppen unmittelbar zu fesseln. So kann das Miterleben von eindrucksvoll gestalteten Experimenten, z. B. im Physikunterricht, eine unauslöschliche Erinnerung hinterlassen und in anschaulicher Weise zur Bereicherung des persönlichen Wissens beitragen. Diese Praxisbezogenheit gehört zu den wichtigsten und freilich auch schönsten und interessantesten Aspekten des Physikunterrichts, aber auch der Physik als Wissenschaft. Wir leben gegenwärtig in einer Epoche, wo physikalische Forschungsergebnisse besonders rasch die Entwicklung der Technik beeinflussen. So tauchen in den letzten Jahren immer neue Bauelemente auf, die eine Verwirklichung von elektronischen Aufgaben ermöglichen, die zuvor unlösbar schienen. Die ungeheuer vielseitige Verflechtung der Physik mit fast allen modernen Industriezweigen unserer sozialistischen Wirtschaft und mit anderen Wissenschaftsbereichen (Elektronik, Automatisierung, Datenverarbeitung, Militärtechnik, Energiewirtschaft, Astrophysik, Philosophie, um nur einige zu nennen) zeigt, welche große Aufgabe darin besteht, die Jugend mit einem soliden physikalischen Grundwissen als eine wichtige Voraussetzung für die schöpferische Meisterung der Technik als Facharbeiter, Ingenieur oder Wissenschaftler auszurüsten.
Der weitere Aufbau des Sozialismus erfordert den Einsatz von hochqualifizierten Fach-

lehrern für Physik an unseren Schulen, die diese Aufgabe wahrnehmen. Neben seinen pädagogischen Fähigkeiten muß der Physiklehrer die Entwicklung seines Wissenschaftsgebietes überblicken. Auf Grund seiner soliden Ausbildung an einer Hochschule oder Universität ist er in der Lage, sein Wissen und Können selbständig von Jahr zu Jahr zu vervollkommnen, so daß er seinen Unterricht am neuesten Stand der Wissenschaft orientieren kann. Ein junger Physiklehrer, der im Jahre 1980 seine Berufspraxis beginnt, wird im allgemeinen noch im Jahr 2010 unterrichten, ein Zeitraum, in dem sich das Wissen der Menschheit um ein vielfaches vermehrt haben wird. Der Anteil, den der Physiklehrer auf seinem Gebiet indirekt daran zu leisten hat, kann nicht hoch genug eingeschätzt werden. Alle bedeutenden Forscher bekamen ihr Grundwissen von Lehrern vermittelt, die meist rechtzeitig die Fähigkeiten ihrer Schüler erkannten und förderten. In seinem Leben wird ein Lehrer sehr viele Schüler unterrichten. Mit Sicherheit werden sich hochbegabte Schüler darunter befinden, die in der Lage sein werden, Überdurchschnittliches für unseren Staat zu leisten. Diese Talente rechtzeitig herauszufinden und zu fördern, ist eine besondere Aufgabe des Lehrers, wenn auch seine Hauptaufgabe darin besteht, die überwiegende Mehrheit der Schüler zu befähigen, die physikalischen Zusammenhänge in der Natur zu erkennen und schöpferisch anzuwenden.

Die Tatsache, daß die Physik eine experimentelle Wissenschaft ist, gibt dem Physiklehrer die Möglichkeit, seinen Unterricht interessant und abwechslungsreich zu gestalten, aber auch die Schüler zu kritischer Beobachtung zu erziehen.

Vier Jahre umfaßt das Studium des Diplomlehrers. Es wird mit der Lehrberechtigung für den Fachunterricht in zwei Fächern, Physik und Mathematik, an der allgemeinbildenden Oberschule abgeschlossen. Außer in den beiden Unterrichtsfächern erfolgt die Ausbildung in Marxismus-Leninismus, Pädagogik/Psychologie, Methodik und Sport. Die ersten beiden Studienjahre (Phase des Grundstudiums) dienen zur Sicherung eines breiten Grundlagenwissens, in denen sich der Student die Fähigkeiten aneignet, sich selbständig in eine spezielle Problematik einzu- (Phase das Fachstudiums) ist neben der Einbeziehung des Studenten in die selbständige wissenschaftliche Forschungsarbeit der unmittelbaren Vorbereitung auf den Unterricht gewidmet.

In dieser Zeit wird der Student durch fachmethodische Lehrveranstaltungen, in die u. a. auch Hospitationen und Lehrproben einbezogen sind, in die selbständige Unterrichtsgestaltung eingeführt. Nach erfolgreicher Absolvierung des Fachstudiums ist der Student in der Lage, einen wissenschaftlich einwandfreien Unterricht in den Fächern Physik und Mathematik zu erteilen.

M. Wurlitzer

Übersicht über die Ausbildung von Diplomlehrern für Physik

a) im Fach Physik

	Studienjahr	Fächer		
Grund-studium	1 2	Physik-Grundausbildung	laborpraktische Grundausbildung	
Fach-studium	3	Theoretische Physik	Spezial-ausbildung	phys. Schul-Experimente
	4		Diplomarbeit	Geschichte der Physik

Physik-Grundausbildung: Mechanik, Wärmelehre, elektromagnetische Erscheinungen, Physik der Atomhülle und des Atomkerns

b) in den anderen Fächern

	Studienjahr	Fächer					
Grund-studium	1 2	Mathematik	Marxism.-Leninism.	Erzieh. wissen-schaftl. Kurs	Sport	Fremd-spr.	Sprech-erz.
Fach-studium	3 4						

Erziehungswissenschaftlicher Kurs: Grundkurs, Pädagogik, Psychologie, Methodiken der beiden Unterrichtsfächer

Junge Physiker in Aktion

An der II. Physikolympiade des Bezirkes Leipzig nahmen 170 Schüler teil. In einer vierstündigen Klausur mußten je vier Aufgaben von den Teilnehmern aus den Klassenstufen 8 bis 12 gelöst werden. Gastgeber waren die Sektion Physik, die Bezirkssektion der Physikalischen Gesellschaft und die Abteilung Volksbildung des Rates des Bezirkes.

Prof. Dr. Uhlmann sagte zur Begrüßung, daß diese Wettbewerbe – genau wie in Mathematik – zu einer echten Tradition werden mögen. Er legte den jungen Physikern dar, daß nur der gute Erfolge in diesem für unsere gesellschaftliche Entwicklung so wichtigem Fach, sei es in der Schule wie im Studium erzielen kann, wer eine echte Verbindung zwischen Theorie und Praxis in Physik, aber auch zu anderen Fächern – insbesondere zur Mathematik – und dem Leben schafft. Er betrachtete diese Olympiade als einen wertvollen Beitrag zu den X. Weltfestspielen. Assistenten und Studenten der Sektion Physik korrigierten und bewerteten die Lösungen. Im Rahmen der Siegerehrung wurde der achte, einer der schon traditionellen Experimentalvorträgen mit dem Thema: „Schwingungen und Wellen" gehalten.

Aus jedem Schuljahr bieten wir je eine praxisbezogene Aufgabe:

Klassenstufe 8

Ein Motorradfahrer fährt mit konstanter Geschwindigkeit senkrecht auf eine Mauer zu. Im Abstand D von der Mauer gibt er ein kurzes Hupsignal. Das reflektierte Signal empfängt er, nachdem er $\frac{1}{9}$ der Strecke D zurückgelegt hat.

Wie groß ist die Geschwindigkeit des Motorradfahrers, wenn die Schallgeschwindigkeit $v_s = 340 \frac{m}{s}$ ist?

Klassenstufe 9/10

Eine elektrische Heizplatte hat zwei Stromkreise. Schaltet man nur den ersten ein, dann siedet eine Wassermenge in 15 Minuten. Schaltet man den anderen ein, dann siedet die Menge in 30 Minuten.

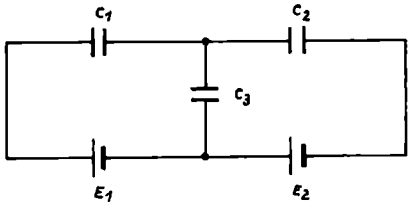
Es ist zu berechnen, in welcher Zeit das Wasser zum Sieden gebracht wird, wenn

a) beide Stromkreise parallel,

b) beide Stromkreise in Reihe eingeschaltet sind.

Klassenstufe 11/12

In der angegebenen Schaltung haben die 3 Kondensatoren die Kapazitäten C_1, C_2 und C_3 und die Spannungsquellen E_1 und E_2.



Die Ladung auf jedem einzelnen Kondensator ist zu berechnen! (Die K. können als ideal betrachtet werden.)

J. Lehmann

Herstellung eines Rechenstabes

Geschichtlich

Im Laufe von 350 Jahren hat unser Rechenstab einige Male seine Form gewechselt. Während es sich anfangs lediglich um eine Platte (Gunter-Table) handelte, auf der die einzige Teilung als logarithmische Grundteilung aufgetragen war, entwickelte *Oughtred* 1633 zwei Stäbe mit gleicher Teilung, die er aneinander verschob, um das Anfügen des zweiten Faktors einer Multiplikationsaufgabe mit dem Zirkel zu vermeiden. Eine weitere Verbesserung erfolgte im Jahre 1654 durch *Robert Bissacker*, bei der die zweite Teilung als Zunge in einem Holzkörper glitt. Diese *Kastenform* hat lange Zeit, bis in unsere Tage hinein, bestanden und wird auch jetzt noch, wenn auch seltener, bei einfachen Stäben angewandt.

Ein praktischer Vorschlag kam bereits 1648 von dem englischen Landmesser und Mathematiklehrer *Seth Partridge*, der zum ersten Mal drei Holzstreifen verwendete, bei denen die beiden äußeren durch Messingstreifen verbunden und der dritte zwischen ihnen verschiebbar angeordnet war. Es hat allerdings verhältnismäßig lange Zeit gedauert, bis sich diese Form, die Zweiseiten- oder Duplexform, allgemein durchsetzen konnte. Nach dem zweiten Weltkrieg gab man den Rechenstäben, wenn auch zunächst noch zögernd, überwiegend die Zweiseitenform. Damit wurde Platz gewonnen. Man konnte jetzt die zahlreicher gewordenen Teilungen bei höher entwickelten Rechenstäben auf beiden Seiten unterbringen. Das Ablesen von Winkelangaben in Fenstern oder Ausschnitten entfiel. Man gewann einen vergleichenden Überblick über die gesamte Winkelteilung.

Vorteile der Zweiseitenform bei der Produktion

Im Grunde genommen besteht ein moderner Rechenstab aus drei Streifen, von denen die äußeren beiden durch Stege zusammengehalten werden. Dabei hat jeder europäische Herstellbetrieb sein eigenes Verfahren. Während der eine die Verbindung auf beiden Seiten durch Nieten vornimmt, verwendet sie ein anderer nur auf der einen Seite. Die andere erhält Schrauben in Langlöchern, um die einwandfreie Gängigkeit beliebig korrigieren zu können. In letzter Zeit ist man dazu übergegangen, die Stege mit den Stabkörperleisten durch Kleben fest zu verbinden. Das Bearbeiten der früheren *Kastenform* durch Fräsen, Einlegen federnder Verbindungen usw. fällt bei der Zweiseitenform weg; hier federn die Stabkörperleisten selbst leicht gegen die Zunge und halten sie in ihrer jeweiligen Stellung fest.

Das Material

Für die früheren Stäbe in *Kastenform* wurde zunächst Buchsbaum-, später Birnbaum- oder Mahagoniholz verwendet. Damit sich diese bei längerem Gebrauch nicht verziehen, mußte das Material bis zu zehn Jahren lagern. Später konnte man die Ablagerungszeit durch Schnelltrockenverfahren verkürzen. Jetzt werden die Zweiseitenstäbe allgemein aus weißem Thermoplast hergestellt. Das Material in Form von Platten wird zunächst in Streifen von bestimmter Länge geschnitten. Bevor drei von ihnen zu einem Rechenstab zusammengestellt werden können, müssen die Streifen noch planparallel bearbeitet und *geprägt* werden.

Prägen und Räumen

Geprägt, also eingepreßt, werden alle Zahlen als spätere Wertangaben für die Teilstriche, weiterhin Rechenmarken, die Teilungsbenennungen auf der linken Stabseite und die mathematischen Kurzzeichen rechts. Geprägt wird mit Prägeleisten aus Messing. Auf ihnen sind Zahlen und Buchstaben vorher spiegelbildlich und positiv, also erhaben, graviert worden. Je nach dem Stabtyp werden die Leisten zu einer Prägeplatte zusammengestellt, die schließlich am Oberteil einer Prägepresse befestigt wird. Auf dem Prägetisch darunter befindet sich die Aufnahmevorrichtung für die Rechenstableisten. Das Einpressen der Zeichen kann mit Hand- oder Motorantrieb erfolgen.

Die äußeren, die Stabkörperleisten, müssen jetzt noch mit Nuten und die Zunge, die später zwischen ihnen gleiten soll, mit Federn versehen werden. Diese spanabhebende Arbeit wird auf Räummaschinen vorgenommen. In ihnen erhalten die Plaststreifen durch Vorbeiführen an einer Reihe scharfer Zähne ihr Profil, werden *profiliert*. Jetzt können die drei Leisten, die zunächst noch eine Überlänge haben, zusammengefügt und an den Enden durch provisorische Stege verklebt oder durch Verschweißen an den Trennfugen fest miteinander verbunden werden. Damit ist der Stab für das präzise Gravieren der Teilstriche, für die *Teilung*, vorbereitet.

Die Teilung

In der ersten Zeit wurde jeder Stab einzeln geteilt. Man spannte ihn in eine Vorrichtung, die mit einer Meßmaschine fest verbunden war. Mit dem Mikroskop suchte man die vorher errechneten Entfernungen vom Teilungsbeginn bis zu den einzelnen Teilstrichen auf und führte an diesen Stellen einen gewicht- oder federbelasteten Stahlstichel zugleich über Stabkörper und Zunge, beispielsweise dort, wo sich die C- und D-Teilung später befinden sollen. Dabei mußte genau auf die verschiedenen Strichlängen geachtet werden. Es versteht sich von selbst, daß diese Methode sehr zeitaufwendig war. Man ging dazu über, mehrere Stäbe gleichzeitig zu teilen. Der Gedanke war keineswegs neuartig. Der Franzose *Etienne Lenoire* baute bereits um 1800 eine Teilmaschine nach Entwürfen von *Jamarde* und *Collardean*. Mit dieser Maschine konnte er gleichzeitig acht Stäbe von 25 cm Teilungslänge bearbeiten.

Um die Produktion zu steigern, gingen die beiden Betriebe der DDR (VEB Meß- und Zeichengerätebau Bad Liebenwerda und KG Meissner (jetzt VEB Mantissa) in Klotzsche bei Dresden) dazu über, Einrichtungen zu verwenden, die die gleichzeitige Teilung einer noch größeren Anzahl von Rechenstäben zuließen; zunächst waren es 30, später 50.

Auf der ebenen Metallfläche einer Teilmaschine werden jetzt 50 vorbereitete Rechenstäbe fest aufgespannt. Ein fahrbares Gestell trägt über den Stäben je einen Stichel, der, um den notwendigen Schnittdruck zu erzeugen, gewichtbelastet ist. In der ersten Zeit wurde, wie bei der Einzelteilung, die Strichentfernung vom Teilungsbeginn mit Meßmaschine und Mikroskop ermittelt. Das Verschieben des Wagens, die Begrenzung der Schnittlänge bei vollen, verkürzten Fünfer- oder bei kurzen Strichen durch einstellbare Anschläge und das Senken der Stichel wurden mit der Hand vorgenommen. Dabei können sich Fehler allerdings fünfzigfach auswirken.

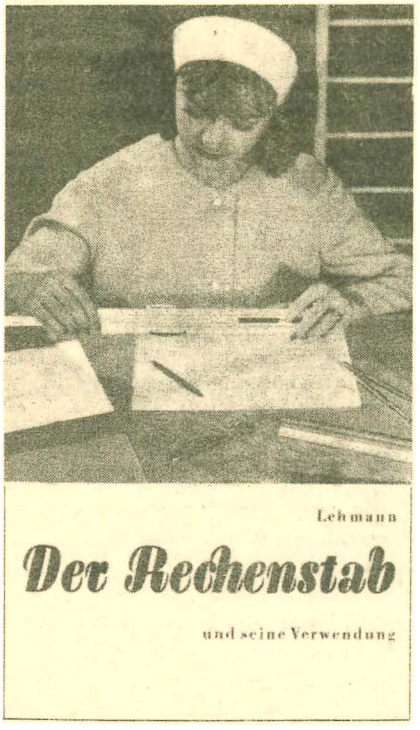
In letzter Zeit hat nun auch die photoelektrische Steuerung ihre Mitwirkung bei der Rechenstabteilung angemeldet. Der Abstand der Teilstriche und ihre Länge werden auf einem Glasnormal oder einer ähnlichen Einrichtung von Photozellen abgetastet, die das Verschieben des Wagens bis zum nächsten Teilstrich, das Auslösen der neuerdings pneu-

matisch belasteten Stichel und die Auswahl des richtigen Anschlages für die Strichlänge bewirken.
Die Einführung der photoelektrischen Steuerung stellt einen wesentlichen Fortschritt dar. Nicht nur, daß Arbeitskraft eingespart wird, auch das Teilen selbst geht zügiger vonstatten. Eine Arbeitskraft ist nur noch nötig, wenn das Normal für eine Stabart mit anderer Teilungsanordnung angebracht und die Anschläge dafür neu eingerichtet werden müssen.

Abschließende Arbeiten

Die vorläufigen Stege werden durch die endgültigen ersetzt. Dabei werden auch die überlangen Teile, die für die Bearbeitung notwendig waren, gekürzt.
Die vertieft liegenden Zahlen, Zeichen und Teilstriche erhalten Farbe. Nach erfolgter Beseitigung von Farbresten usw. werden die Stäbe noch mit einem farblosen Überzug versehen.
Zum Einstellen einer Aufgabe und zum Ablesen des Ergebnisses dient bekanntlich der Läufer. In neuerer Zeit verwendet man dazu nicht mehr Glas im Metallrähmchen, sondern randlose Freiblickläufer, die man mit Ablesestrichen versieht. In der DDR werden Rechenstäbe vom VEB Kombinat Zentronik, Betriebsteil Meß- und Zeichengerätebau Bad Liebenwerda, und vom VEB Mantissa in Klotzsche bei Dresden gefertigt. Die in diesen Betrieben hergestellten Rechenstäbe entsprechen den schulischen und technisch-mathematischen Erfordernissen.

A. Ewert



Physik-Bücher

aus dem Urania-Verlag

Hans Backe
Physik selbst erlebt
Reihe: Das kannst auch du!
4., erweiterte Auflage, 352 Seiten, 250 zweifarbige Zeichnungen, 16 Schwarzweißtafeln, Halbgewebe 14,80 M
Bestell-Nr.: 653 170 4

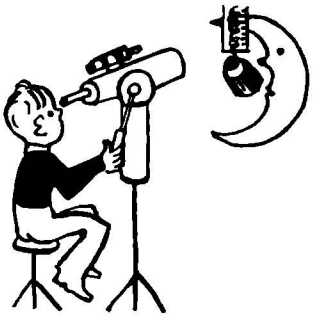
Helmut Lindner
Das Bild der Modernen Physik
1. Auflage, 336 Seiten, 300 mehrfarbige Zeichnungen, Ganzgewebe 15,– M
Erscheint: IV/73;
Bestell-Nr.: 653 260 0

Walter Conrad
Streifzüge durch die Elektrotechnik
Reihe: Bausteine des Wissens
2. Auflage. 296 Seiten, 302 zweifarbige Zeichnungen, Ganzgewebe 12,– M
Bestell-Nr.: 653 061 3

Walter Conrad
Streifzüge durch die Halbleitertechnik
Reihe: Bausteine des Wissens
2. Auflage, 205 Seiten, 200 zweifarbige Zeichnungen, 24 Schwarzweißtafeln, Ganzgewebe 12,– M
Bestell-Nr. 653 123 7

Freyer · Gaebler · Möckel
Gut gedacht ist halb gelöst
2. Auflage, 224 Seiten, 266 Illustrationen, Ganzgewebe 12,– M
ES: 19 B 1 Bestell-Nr.: 653 195 8
Titel z. Z. vergriffen

Kowal · Uspenki · Jasnow
Der Weltraum für uns
Raumfahrt im Dienste des Menschen
1. Auflage, etwa 220 Seiten, 16 Schwarzweißtafeln, 2 Tabellen, etwa 30 Zeichnungen, Pappbd. cell. 8,80 M
Bestell-Nr.: 653 280 3 Erscheint III/73



Werner Hirte
1000 Dinge selbst gebaut
Reihe: Das kannst auch du!
7. Auflage, 416 Seiten, 313 zweifarbige Zeichnungen, Halbgewebe 15,80 M
Bestell-Nr.: 653 105 0

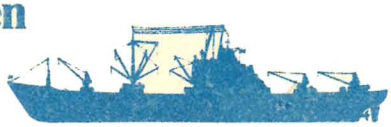
Ernst Herbert Krause
Zwischen Urstoff und Plasmafalle
1. Auflage, 272 Seiten, 48 Schwarzweißtafeln, 95 Zeichnungen, Ganzgewebe 12,80 M
Bestell-Nr.: 6 531 050

Die Mathematik ist ein besonders geeignetes Werkzeug zur Behandlung abstakter Begriffe jeder Art und ihrer Anwendung sei keine Grenzen gesetzt. Aus diesem Grund muß auch ein Buch über die moderne Physik, wenn es nicht bloß rein beschreibend für experimentelle Arbeiten ist, im wesentlichen mathematisch sein.

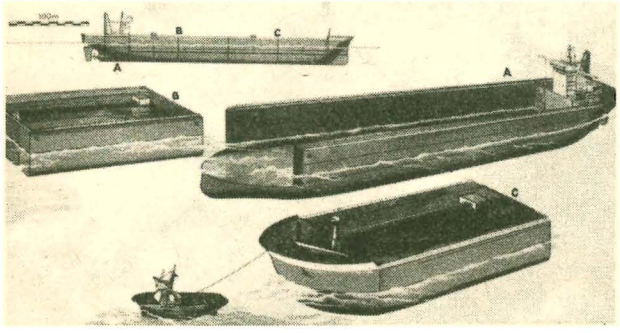
P. A. M. Dirac (Quantum mechanies 1930)

Unser Buchtip Vorschlag für eine Wandzeitung

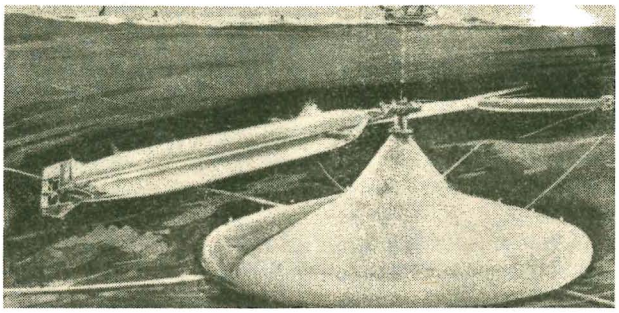
Schiffe und Schiffahrt von morgen



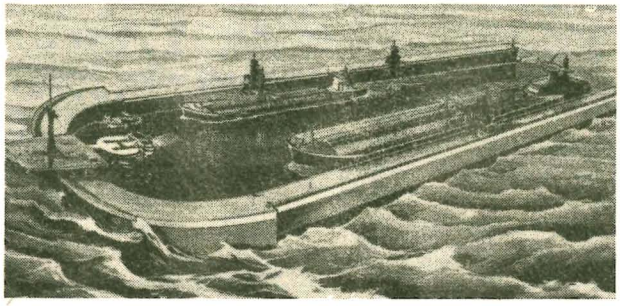
In diesem großzügig gestalteten Buch wird der Versuch unternommen, die Frage nach der Zukunft der Schiffe und der Schiffahrt zu beantworten. Vier Wissenschaftler untersuchen den heutigen Stand, die zu erwartenden Transportaufgaben, die zahlreichen bekanntgewordenen Zukunftsprojekte und stellen eigene Ideen vor. In anschaulicher Form geben sie dem Leser eine Fülle von Einzelinformationen, 30 Fotos und über 170 eindrucksvolle, größtenteils mehrfarbige Graphiken veranschaulichen den Text zu einem populärwissenschaftlichen Werk für Junge Physiker, Techniker und Mathematiker (Preis ca. 25,— M).



In der Horizontalen teilbarer Tanker
A Antriebs- und Dockteil, *B* ausschwimmbarer Mitteltankteil, *C* ausschwimmbarer Vordertankteil
Das Schiff besteht aus drei Teilen: dem Antriebsteil und Dockteil, dem ausschwimmbaren Mittelteil und dem ausschwimmbaren Vordertankteil.
Bei der Fahrt im tiefen Wasser sind alle Teile fest miteinander verbunden. Das Schiff ist dann von einem normalen Tanker kaum zu unterscheiden. Ist die Flachwassergrenze erreicht, werden Ballast-Wassertanks im Dockteil *A* geflutet, so daß die Teile *B* und *C* ausgeschwommen werden können. Anschließend werden die Ballast-Wassertanks wieder gelenzt, und der ebenfalls Öl transportierende Dockteil *A* schwimmt relativ weit auf. Die Teile *B* und *C* und der Dockteil *A* haben nun nur noch etwa 60% des Tiefgangs wie vor dem Trennen.
Eine mögliche Lösung des Problems, wie relativ flache Häfen von Schiffen mit großem Tiefgang angelaufen werden können.



Beladung von Unterwassertanker aus dem Sammeltank von Ölgewinnungsstellen auf dem Meeresboden.
Das von unterseeischen Ölgewinnungsstellen stammende Öl fließt durch Pipelines in einen Plastik-Sammeltank, dessen Spitze von einem Spezialschiff gehalten wird. Eine Abzapfvorrichtung über dem Sammeltank dient dazu, Unterwassertanker mit Öl zu beladen.
Eine mögliche Lösung des Problems, wie Erdöl aus Gewinnungsstellen am Meeresboden abtransportiert werden kann.



Schwimmende Betoninsel zum Verladen von Erdöl aus Förderstätten im Schelfgebiet: Dieses Bauwerk aus Leichtbeton ist an seiner geschlossenen Seite verankert, so daß es sich mit der Wind- und Seegangrichtung drehen kann. Das U-förmige Becken bietet damit einen ruhigen Liegeplatz für Tankleichterverbände (Kombination aus Ladeteil und abkoppelbarem Antriebsteil), die die Ladung in die Tanks der Insel pumpen, so daß die Insel als Pufferlager dient, die entweder von Großtankern geleert wird oder selbst zur nahegelegenen Küste geschleppt werden kann.
Eine Möglichkeit zur Lösung des Problems, auf welche Weise Erdöl abtransportiert werden kann, das unter Wasser im Schelfgebiet gefördert wird.

Weitere Neuerscheinungen des Verlag Die Technik

N. Wass: **radio — fernsehen — fono**
Reihe: Elektrizität in Heim und Haushalt
200 Seiten, 223 Abb., 19 Tafeln, etwa 9,50 M
Wir werden über das DDR-Angebot an elektrischen Heimgeräten informiert und hilft bei der richtigen Wahl eines Plattenspielers, Rundfunk-, Fernseh- oder Tonbandgerät. Der Leser kann sich mit den unterschiedlichen Eigenschaften und Leistungen dieser Geräte vertraut machen.

Petrowitsch: **Signale aus dem All**
156 Seiten, 54 Abb., 9,80 M

Bomke/Scheplitz: **Wir mikroskopieren**
190 Seiten, 144 Abb., 7 Tafeln, etwa 9,50 M
Dieses Buch vermittelt die Grundkenntnisse am Mikroskop und gibt einen Einblick in die einfachen Bezeichnungen und Begriffe der Optik. Präpariergeräte und Herstellung von Präparaten runden die Thematik ab.

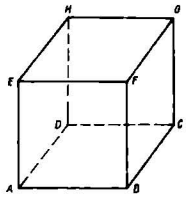
XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Olympiadeklasse 10

1. a) Zeigen Sie, daß es eine größte Zahl m gibt, für die die folgende Aussage richtig ist: Es gibt ein konvexes Vieleck, unter dessen Innenwinkel genau m spitze sind.
b) Ermitteln Sie diese größte Zahl m!
c) Untersuchen Sie, ob es (mit dieser Zahl m) für jede natürliche Zahl $n \geq 3$ ein konvexes n-Eck gibt, unter dessen Innenwinkeln genau m spitze sind!

2. Ein Würfel $ABCDEFGH$ (siehe Abb.) sei durch ebene Schnitte durch die Punkte A, F, H; B, E, G; C, F, H; D, E, G; E, B, D; F, A, C; G, B, D und H, A, C in Teilkörper zerlegt.



a) Ermitteln Sie die Anzahl dieser Teilkörper!
b) Geben Sie das Volumen jedes dieser Teilkörper als Funktion der Kantenlänge a des Würfels an!

3A. a) Man beweise, daß jedes konvexe Drachenviereck einen Inkreis hat.
b) Man beweise, daß jedes konvexe Drachenviereck $ABCD$ mit $\overline{AB}=\overline{AD}=x$, $\overline{CB}=\overline{CD}=y$ und $AB \perp CB$ einen Umkreis hat.
c) Man beweise: Sind M und U die Mittelpunkte, ϱ bzw. r die Radien des In- bzw. Umkreises eines unter b) beschriebenen Drachenvierecks, so gilt

$$\overline{MU}^2 = r^2 + \varrho^2 - \varrho\sqrt{\varrho^2 + 4r^2}.$$

3B. Dirk und Jens spielen ein Spiel mit den folgenden Regeln: Es werden genau 7 Hölzchen hingelegt. Abwechselnd machen die Spieler jeweils einen „Zug". Ein „Zug" besteht aus dem Wegnehmen von einem, zwei oder drei Hölzchen. Dabei darf keiner der Spieler den gleichen Zug zweimal hintereinander ausführen. Wer das letzte Hölzchen wegnimmt, hat gewonnen. Das Spiel endet unentschieden, wenn zwar noch Hölzchen vorhanden sind, der am Zug befindliche Spieler aber keinen Zug nach den Spielregeln ausführen kann.
Kann bei diesem Spiel einer der beiden Spieler, bei jeder Spielmöglichkeit des anderen, den Gewinn erzwingen?

4. In einer Ebene mit den rechtwinkligen kartesischen Koordinaten (x, y) sei k der Graph der Funktion mit der Gleichung $y = \frac{1}{4}x^2$ und g der Graph der Funktion mit der Gleichung $y = -1$. Der Definitionsbereich beider Funktionen sei die Menge aller reellen Zahlen x.
Man beweise, daß k die Menge aller derjenigen Punkte der x-y-Ebene ist, die von der Geraden g denselben Abstand haben wie von dem Punkt $F(0; 1)$.

5. Geben Sie alle g-adischen Zahlensysteme an, in denen die folgende Aufgabe wenigstens eine Lösung hat, und ermitteln Sie für diese Zahlensysteme alle Lösungen der Aufgabe: Welche im g-adischen Zahlensystem zweistellige Zahl hat die Eigenschaft, daß sich erstens durch Vertauschen der beiden Ziffern wieder eine *g-adisch*-zweistellige Zahl ergibt, und daß man zweitens bei deren Subtraktion von der ersten Zahl, die im gleichen Zahlensystem in der Gestalt 12 (zweistellig) zu schreibende Zahl erhält?

6. Zwei Karawanen brachen gleichzeitig von einer Oase A auf und marschierten auf demselben Wege über B und C nach D. Die erste Karawane marschierte jeweils 3 Tage hintereinander und legte dann einen Ruhetag ein, die zweite Karawane dagegen marschierte jeweils 2 Tage hintereinander und legte dann 2 Ruhetage ein. Beide Karawanen brachen an Marschtagen zur gleichen Zeit auf und waren jeweils die gleiche Anzahl von Stunden unterwegs. Sie erreichten die Ziele B, C, D jeweils am Ende dieser Stunden eines Marschtages. Während ihrer Marschtage behielt jede der Karawanen stets dieselbe Geschwindigkeit bei.
Die erste Karawane brauchte für den Weg von A nach C einschließlich der Ruhetage doppelt soviel und für den Weg von A nach D dreimal soviel Tage wie für den Weg von A nach B einschließlich der Ruhetage.
Beide Karawanen trafen am Ende eines Marschtages gleichzeitig in B ein.
Ermitteln Sie, ob die Karawanen auch gleichzeitig in D eintrafen! Wenn nicht, dann stellen Sie fest, welche der beiden Karawanen zuerst in D anlangte!

Olympiadeklasse 11/12

1. Man untersuche, ob unter allen Paaren (a, b) positiver reeller Zahlen solche existieren, für die

$$f(a,b) = \frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{a^4} - \frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

einen kleinsten Wert annimmt. Wenn ja, dann ist dieser kleinste Wert anzugeben.

2. Es sind alle Paare (x, y) ganzer Zahlen anzugeben, für die die Gleichung
$x(x+1)(x+7)(x+8) = y^2$
erfüllt ist.

3. Ermitteln Sie die größte Anzahl von paarweise verschiedenen Gebieten, in die die Oberfläche einer Kugel durch n auf dieser Oberfläche gezeichnete Kreise zerlegt werden kann!

4. Es seien P_1 und P_2 zwei Punkte im Raum mit den rechtwinkligen kartesischen Koordinaten (3; 4; 0) bzw. (10; 8; 4). Es ist zu untersuchen, ob es zwei Punkte P_3 und P_4 mit ganzrationalen Koordinaten gibt, so daß das Viereck $P_1P_2P_3P_4$ ein Quadrat ist. Wenn ja, dann sind alle Möglichkeiten für P_3 und P_4 anzugeben.

5. Jemand schrieb auf die 6 Flächen eines Würfels je eine reelle Zahl, wobei sich unter diesen 6 Zahlen die Zahlen 0 und 1 befanden. Danach ersetzte er jede dieser 6 Zahlen durch das arithmetische Mittel der 4 Zahlen, die zuvor auf den 4 benachbarten Flächen gestanden hatte. (Dabei merkte er sich jede alte, zu ersetzende Zahl auch, nachdem sie ersetzt war, so lange, wie sie noch zur Mittelbildung für die Zahlen ihrer Nachbarflächen herangezogen werden mußte.)
Mit den 6 so entstandenen neuen Zahlen wiederholte er diese Operation. Insgesamt führte er sie fünfundzwanzigmal durch. Zum Schluß stellte er fest, daß er auf jeder Fläche wieder die gleiche Zahl wie zu Beginn stehen hatte.
Konnte er dieses Ergebnis bei richtiger Rechnung erhalten?

6A. Man zeige, daß der Term $\frac{(14+\cos x)\sin x}{9+6\cos x}$ im Intervall $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ eine gute Näherung für den Term x darstellt, indem bewiesen wird, daß für alle x in dem angegebenen Intervall der Betrag der Differenz beider Terme kleiner als 10^{-4} ist.
Anmerkung:
Es gilt $\pi = 3{,}14159 + \delta$ mit $0 < \delta < 10^{-5}$
und $\sqrt{2} = 1{,}41421 + \varepsilon$ mit $0 < \varepsilon < 10^{-5}$.

6B. In der Ebene seien zwei außerhalb voneinander gelegene, sich nicht berührende Kreisflächen K_1 und K_2 sowie ein außerhalb beider Kreise gelegener Punkt A gegeben. Gesucht ist ein gleichseitiges Dreieck ABC so, daß B auf dem Rand von K_1 und C auf dem Rand von K_2 liegen.

a) Man begründe und beschreibe eine Konstruktion solcher Dreiecke.

b) Man ermittle die größte Zahl, die als Anzahl der gesuchten Dreiecke $\triangle ABC$ in denjenigen Fällen auftreten kann, in denen es nicht unendlich viele solche Dreiecke gibt.

Lösungen

Kreisolympiade

Die Lösungen zu Klasse 5 und 6 – siehe Heft 6/73.

Klassenstufe 7

1. (I) Angenommen, zwei Zahlen x und y haben die geforderten Eigenschaften. Dann gilt:

(1) $x+y=15390$,

(2) $z=u$.

Nach (1) und weil x einstellig ist, hat y als vorletzte Ziffer 8 und als letzte Ziffer nicht 0. Wegen (2) ist z durch 4 teilbar. Nach den Teilbarkeitsregeln für die Zahl 4 stellen daher die letzten beiden Ziffern von z, das sind auch die von y, eine durch 4 teilbare Zahl dar. Somit endet y auf 84 oder 88. Daher kann nur $x=6$ oder $x=2$ sein.

Wäre $x=2$, so wäre $y=15388$, und man erhielte $z=215388$ sowie $u=153882$ im Widerspruch zu $4\cdot 153882=615528\neq 215388$.

Daher können nur $x=6$ und $y=15384$ die geforderten Eigenschaften haben.

(II) In der Tat erfüllen diese beiden Zahlen (1), und man erhält mit ihnen ferner $z=615384$ sowie $u=153846$, so daß wegen $4\cdot 153846=615\ 384$ auch (2) erfüllt ist. Somit gibt es genau die Möglichkeit $x=6$, $y=15384$, die Bedingungen (1) und (2) zu erfüllen.

2. In dem Viereck $ABCD$ sei E der gemeinsame Mittelpunkt der beiden Diagonalen AC und BD. Dann gilt nach Voraussetzung:

$\overline{AE}=\overline{EC}$ sowie $\overline{BE}=\overline{ED}$

Nun gilt weiter: $\sphericalangle AEB\cong\sphericalangle DEC$ als Scheitelwinkel und ebenso $\sphericalangle AED\cong\sphericalangle BEC$. Daraus folgt:

$$\left.\begin{array}{l}\triangle AEB=\triangle DEC\\ \triangle AED=\triangle BEC\end{array}\right\}\ (\text{s, w, s})$$

Folglich gilt:

$\sphericalangle EAB\cong\sphericalangle ECD$ (1) sowie

$\sphericalangle EAD\cong\sphericalangle ECB$ (2).

Aus (1) folgt: $AB\parallel DC$, Umkehrung des Satzes über Wechselwinkel an geschnittenen Parellelen.

Aus (2) folgt: $AD\parallel BC$,

d. h. $ABCD$ ist ein Parallelogramm, w. z. b. w.

3. Das in Jahren angegebene Alter der vier Spieler sei der Reihe nach mit a, b, c, d bezeichnet. Nun gilt laut Aufgabe:

(1) $a+b+c+d=100$.

(2) $a+b=c+d$.

(3) $c>d$. *)

Aus (1) und (2) folgt

(6) $a+b=c+d=50$

Wäre nun $a=c$ oder $a=d$ oder $b=c$ oder $b=d$, so folgte daraus wegen (2) $b=d$ bzw. $b=c$ bzw. $a=d$ bzw. $a=c$ im Widerspruch zu (4).

Hiernach und wegen (3) folgt aus (4) und (6), daß $a=b=25$ sein muß.

Wegen (6) und (3) gilt ferner $c>50-c$, also $c>25$, und daher $d=50-c<25$.

Somit ist Christoph der älteste und Detlef der jüngste der vier Spieler. Wegen (5) gilt daher $c-d=4$, woraus zusammen mit (6) dann $c=27$ und $d=23$ folgt.

Also ist Christoph 27 Jahre alt, Arnold und Bruno sind je 25 Jahre alt und Detlef ist 23 Jahre alt.

*) Andere Fortsetzung

Wegen (2), (3) und (4) gilt $a=b$.

Wäre nämlich in jedem der Paare (Arnold; Bruno) bzw. (Christoph; Detlef) je einer der beiden Gleichaltrigen, dann müßten auch die beiden anderen gleichaltrig sein, was (4) widerspricht.

Da somit Christoph älter als Detlef ist, beide zusammen aber genau so alt wie die beiden gleichaltrigen Arnold und Bruno zusammen sind, ist Christoph der älteste und...

4. (I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, wie es nach der Aufgabenstellung konstruiert werden soll. Der Fußpunkt der von C auf die Gerade durch A und B gefällten Höhe sei D. Dann gilt für das Dreieck $\triangle BCD$ wegen $\beta<90°$:

$\sphericalangle DBC=\beta$, $\sphericalangle BDC=90°$ und $\overline{CD}=h_c$.

Punkt A liegt

1. auf dem Strahl s aus B durch D und

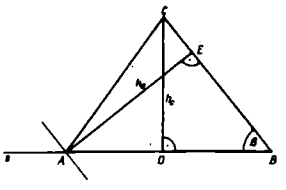
2. auf einer Parallelen zu BC im Abstand h_a, und zwar auf derselben Seite von BC wie D liegenden, weil A auf dem Strahl s liegt.

(II) Daraus folgt, daß ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Wir konstruieren das Dreieck $\triangle BCD$ aus den Winkeln $\sphericalangle DBC$, $\sphericalangle BDC$ und der Seite CD, deren Größen β, 90°bzw. h_c sind.

(2) Wir zeichnen den Strahl s aus B durch D.

(3) Wir ziehen im Abstand h_a die Parallele zu BC, die auf der gleichen Seite von BC liegt wie D. Schneidet sie den Strahl s, so sei dieser Schnittpunkt A genannt.



(III) Beweis, daß jedes auf diese Weise konstruierte Dreieck $\triangle ABC$ tatsächlich allen Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Nach Konstruktion hat der Winkel $\sphericalangle ABC$ dieselbe Größe wie der Winkel $\sphericalangle$DBC, und dieser hat die Größe β, ferner ist $\overline{CD}=h_c$, und die Strecke CD steht senkrecht auf AB. Schließlich hat nach Konstruktion der Punkt A von BC den Abstand h_a.

(IV) Wegen $\beta<90°$ ist der Konstruktionsschritt (1) nach dem Kriterium (sww) bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Ferner sind nach Ausführung von (1) die Schritte (2) und (3) eindeutig ausführbar, und da BC nicht parallel BD ist, existiert dann auch eindeutig der Schnittpunkt A, wobei man bei verschiedenen Ausführungen von (1) zu kongruenten Dreiecken $\triangle ABC$ gelangt.

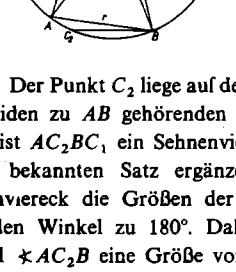
Das Dreieck $\triangle ABC$ ist mithin durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Klassenstufe 8

1. Erwin kann nicht an erster Stelle stehen, weil sonst im Widerspruch zu (4) wegen (2) Gerd Zweitgrößter sein müßte. Wegen (1) und (2) kann Erwin aber auch nicht an zweiter, dritter oder vierter Stelle stehen. Da er wegen (2) auch nicht an sechster oder siebenter Stelle stehen kann, steht er an fünfter Stelle, und wegen (2) ist dann Gerd Sechster und Bernd Siebenter. Die Plätze 1 bis 3 können somit nur Axel, Frank und Conrad eingenommen haben, und zwar wegen (3) Frank nur an erster oder zweiter Stelle. Würde Frank an erster Stelle stehen, so müßte Axel im Widerspruch zu (4) Zweitgrößter sein. Also steht Frank an zweiter, Axel an dritter und daher Conrad an erster Stelle. Die Reihenfolge der sieben Jungen lautet mithin: Conrad, Frank, Axel, Dieter, Erwin, Gerd, Bernd.

2. Laut Aufgabe ist das Dreieck $\triangle ABM$ gleichseitig mit $\overline{AB}=\overline{AM}=r$. Wir unterscheiden nun bezüglich der Lage des Punktes C zwei Fälle:

Fall 1: Der Punkt C_1 liege auf dem größeren der beiden zu AB gehörenden Kreisbögen. Dann ist $\sphericalangle AC_1B$ Peripheriewinkel zum Zentriwinkel $\sphericalangle AMB$. Da dieser als Innenwinkel im gleichseitigen Dreieck $\triangle ABM$ eine Größe von 60° hat, hat $\sphericalangle AC_1B$ eine Größe von 30°.

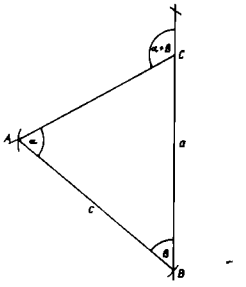


Fall 2: Der Punkt C_2 liege auf dem kleineren der beiden zu AB gehörenden Kreisbögen. Dann ist AC_2BC_1 ein Sehnenviereck. Nach einem bekannten Satz ergänzen sich im Sehnenviereck die Größen der gegenüberliegenden Winkel zu 180°. Daher hat der Winkel $\sphericalangle AC_2B$ eine Größe von $180°-30°=150°$.

3. a) Unter allen 1972stelligen Zahlen hat diejenige die größte erste Quersumme, die aus 1972 Ziffern 9 besteht. Diese größte erste Quersumme beträgt somit $9 \cdot 1972 = 17748$.
Da hiernach die erste Quersumme einer 1972stelligen Zahl nicht größer als 17748 sein kann, erhält man die größte zweite Quersumme als größte aller Quersummen der Zahlen von 10 bis 17748 und folglich als Quersumme der Zahl 9999, d. i. 36.
[Denn jede natürliche Zahl x mit $10 \leqq x < 9999$ hat höchstens vier Ziffern, aber nicht vier Ziffern 9, also hat x stets eine Quersumme < 36; jede natürliche Zahl y mit
$9999 < y \leqq 17748$
aber hat genau fünf Ziffern, und zwar als erste eine 1, als zweite eine Ziffer < 8 und daher ebenfalls eine Quersumme < 36.]
Da hiernach die zweite Quersumme einer 1972stelligen Zahl nicht größer als 36 sein kann, erhält man die größte dritte Quersumme als größte aller Quersummen der Zahlen von 1 bis 36 und folglich als Quersumme der Zahl 29, d. i. 11.
b) Unter allen Zahlen von 10 bis 36 ist 29 die einzige mit der Quersumme 11. Unter allen Zahlen mit der Quersumme 29 findet man wegen $\frac{29}{9} = 3\frac{2}{9}$ die kleinste, indem man eine Zahl mit den letzten drei Ziffern 9 so bildet, daß die aus den vorangehenden Ziffern bestehende Zahl die kleinste mit der Quersumme 2 ist. Diese Zahl ist offenbar 2999.
Mit entsprechender Begründung findet man wegen $\frac{2999}{9} = 333\frac{2}{9}$ die kleinste 1972stellige Zahl A mit der Quersumme 2999, indem man eine Zahl mit den letzten 333 Ziffern 9 so bildet, daß die aus den vorangehenden $1972 - 333 = 1639$ Ziffern bestehende Zahl die kleinste 1639stellige mit der Quersumme 2 ist. So ergibt sich die Zahl

$$A = \underbrace{10\ldots0}_{1637}\ \underbrace{9\ldots9}_{333},$$

die der Reihe nach aus einer Ziffer 1, 1637 Ziffern 0, einer Ziffer 1 und 333 Ziffern 9 besteht.
Ist nun g irgend eine von der kleinsten Zahl 2999 verschiedene, also größere Zahl mit der Quersumme 29 und hat eine 1972stellige Zahl n die Zahl g als Quersumme, so gilt:
Wegen $\frac{g}{9} = \frac{3000}{9} = 333\frac{3}{9}$ hat die kleinste 1972stellige Zahl B mit der Quersumme g als ihre letzten 333 Ziffern je eine 9 und unter den davor stehenden 1639 Ziffern mindestens eine Ziffer $\geqq 2$. Folglich ist $B > A$ und demnach erst recht $n > A$. Damit ist A als kleinste unter allen 1972stelligen Zahlen nachgewiesen, die die dritte Quersumme 11 besitzen.
4. (I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Dann ist durch die Außenwinkel bei C, deren jeder nach dem Außenwinkelsatz die Größe $\alpha + \beta$ hat, auch die Größe des Innenwinkels $\sphericalangle ACB$ (als Nebenwinkel des Außenwinkels) bestimmt (es läßt sich auch der Winkelsummensatz benutzen). Seine Größe beträgt $180° - 120° = 60°$.
Die ihm gegenüberliegende Seite ist länger als die andere gegebene Seite.
(II) Daraus ergibt sich, daß ein Dreieck $\triangle ABC$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
Das Dreieck $\triangle ABC$ wird aus $\overline{\sphericalangle ACB} = 60°$, $\overline{BC} = a = 6{,}5$ cm, $\overline{AB} = c = 7{,}5$ cm als Dreieck aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite (ssw) konstruiert.



(III) Beweis, daß jedes nach (II) konstruierte Dreieck $\triangle ABC$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht:
Nach dem Außenwinkelsatz gilt

$$\alpha + \beta = 180° - \overline{\sphericalangle ACB} = 120°$$

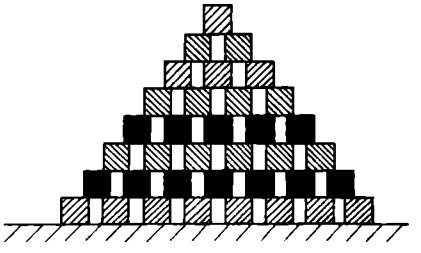
und nach Konstruktion
$\overline{AB} = c = 7{,}5$ cm sowie $\overline{BC} = a = 6{,}5$ cm.
(IV) Die in (II) angegebene Konstruktion ist bekanntlich bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Daher ist durch die gegebenen Stücke wegen $c > a$ das Dreieck $\triangle ABC$ bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Klassenstufe 9

1. Ist n die mittlere der drei natürlichen Zahlen, so lauten sie $(n-1)$, n, $(n+1)$. Die Summe ihrer Kuben ist die Zahl
$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3$
$+ n^3 + 3n^2 + 3n + 1$
$= 3n^3 + 6n = 3(n^3 + 2n)$, und diese
Zahl ist durch 3 teilbar, w. z. b. w.

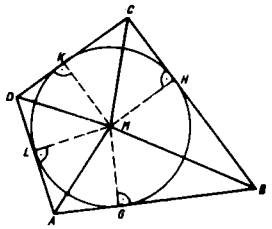
2. Der genannte Quotient ist genau dann negativ, wenn entweder
$8 - 3x > 0$ und $7x - 2 < 0$ (Fall 1) oder
$8 - 3x < 0$ und $7x - 2 > 0$ (Fall 2) ist.
Trifft Fall 1 für ein x zu, so folgt aus
$8 - 3x > 0$ sowie aus $7x - 2 < 0$
$3x < 8$, also $7x < 2$, also
$x < \frac{8}{3}$ $x < \frac{2}{7}$.
Wegen $\frac{2}{7} < \frac{8}{3}$ folgt also $x < \frac{2}{7}$.
Trifft Fall 2 für ein x zu, so folgt entsprechend aus
$8 - 3x < 0$ sowie aus $7x - 2 > 0$
$3x > 8$, also $7x > 2$, also
$x > \frac{8}{3}$ $x > \frac{2}{7}$.
Wegen $\frac{8}{3} > \frac{2}{7}$ folgt also $x > \frac{8}{3}$.
Tatsächlich ist für $x < \frac{2}{7}$ erst recht $x < \frac{8}{3}$ und daher $7x - 2 < 0$ und $8 - 3x > 0$, so daß Fall 1 zutrifft.
Tatsächlich ist für $x > \frac{8}{3}$ erst recht $x > \frac{2}{7}$ und daher $8 - 3x < 0$ und $7x - 2 > 0$, so daß Fall 2 zutrifft. Mithin ist der genannte Quotient genau für diejenigen reellen Zahlen x negativ, für die $x < \frac{2}{7}$ oder $x > \frac{8}{3}$ gilt.

3. Es sei n die Anzahl der Reihen. Dann ist die Anzahl s aller verwendeten Büchsen wegen (1) und (2) gleich der Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n, also gilt:
$s = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n$.
Wegen (3) und (4) muß diese Summe durch 3 teilbar sein. Weiter gilt wegen (3), (5) und (6) $n \geqq 3$. Für $n = 3$ ist $s = 6$. Da es in diesem Fall genau 3 Reihen gibt, ist wegen (5), (6) und (3) die Bedingung (4) nicht erfüllbar.
Für $n = 4$ ist $s = 10$, also nicht durch 3 teilbar.
Für $n = 5$ ist $s = 15$. Wegen (4) müßten also von jeder Sorte genau 5 Büchsen verwendet werden. Da wegen (1) und (2) in diesem Falle die unterste Reihe 5 Büchsen enthält, müßten die übrigen beiden Sorten so auf die restlichen 4 Reihen verteilt werden, daß jeweils 5 Büchsen der beiden Sorten verwandt werden. Andererseits müßten wegen (6) die Sorten von Reihe zu Reihe wechseln. Nun enthalten die Reihen aber der Reihe nach die Anzahlen 4, 3, 2, 1, und es ist $4 + 2 \neq 3 + 1$. Daher lassen sich auch für $n = 5$ die Bedingungen (1) bis (6) nicht gleichzeitig erfüllen.
Für $n = 6$ ist $s = 21$. Wegen (4) müßten mithin von jeder Sorte genau 7 Büchsen verwendet werden. Da wegen (1) und (2) in diesem Falle die unterste Reihe 6 Büchsen enthält, müßte die siebente Büchse der für die unterste Reihe verwendeten Sorte in der obersten Reihe stehen. Die restlichen Reihen mit 2, 3, 4 bzw. 5 Büchsen wären dann mit den restlichen beiden Büchsensorten zu besetzen, und zwar wegen (6) abwechselnd. Wegen $2 + 4 \neq 3 + 5$ ist dann aber (4) nicht erfüllt.
Für $n = 7$ ist $s = 28$, also nicht durch 3 teilbar.
Für $n = 8$ ist $s = 36$. Stellt man die erste Sorte Büchsen in die Reihen mit 1, 3 bzw. 8 Büchsen, die zweite Sorte in die Reihen mit 2, 4 bzw. 6 Büchsen und die dritte Sorte in die Reihen mit 5 bzw. 7 Büchsen, dann wurden wegen $1 + 3 + 8 = 2 + 4 + 6 = 5 + 7 = 12$ von jeder Sorte gleich viel verwendet und auch die Bedingungen (1), (2), (3), (5) und (6) wurden eingehalten. Daher ist $n = 8$ die kleinste Anzahl von Reihen, mit der (1) bis (6) erfüllbar sind, und somit $s = 36$ die gesuchte kleinste Anzahl von Büchsen.



Die (vom Schüler nicht verlangte) Abb. veranschaulicht die Lösung.

4. Der Mittelpunkt des Inkreises sei M, die Berührungspunkte dieses Kreises mit den Seiten AB, BC, CD, DA seien der Reihe nach G, H, K, L. Nun gilt:
$\overline{MG}=\overline{MH}=\overline{MK}=\overline{ML}=r$ und $MG\perp AB$, $MH\perp BC$, $MK\perp CD$, $ML\perp DA$.



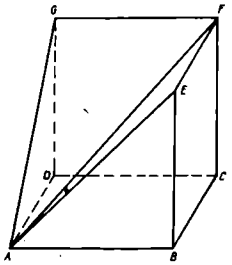
Der gesuchte Flächeninhalt F ist gleich der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle ABM$, $\triangle BCM$, $\triangle CDM$, $\triangle DAM$.
Da diese Dreiecke sämtlich die Höhenlänge r haben und die Summe der Längen der zugehörigen Grundseiten AB, BC, CD, DA gleich dem Umfang u ist, gilt mithin:

$$F=\frac{1}{2}u\cdot r.$$

Klassenstufe 10

1. Da z_1 und z_2 aus den gleichen Ziffern bestehen, haben sie auch die gleiche Quersumme q. Daher lassen beide Zahlen bei Division durch 9 den gleichen Rest $r (0\leqq r<9)$.
Mithin gilt:
$z_1=9n+r$ sowie $z_2=9m+r$ (n, m natürliche Zahlen).
Daraus folgt $|z_1-z_2|=9|n-m|$, d. h. $|z_1-z_2|$ ist durch 9 teilbar.

2. a)



b) Den Körper kann man sich entstanden denken, indem man aus einem Würfel mit der Kantenlänge a einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche (Seitenlänge a) und der zugehörigen Höhe der Länge a herausschneidet. Daher gilt für das Volumen V dieses Körpers

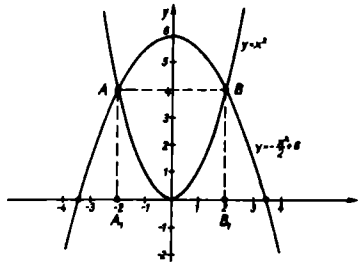
$$V=a^3-\frac{1}{3}a^2\cdot a=\frac{2}{3}a^3.$$

3. (I) Da A und B auf der ersten Parabel liegen, müssen ihre Koordinaten die Gleichung $y=x^2$ erfüllen. Da beide Parabeln symmetrisch zur y-Achse liegen, müssen A und B symmetrisch zu dieser Achse liegen; B sei der im ersten Quadrant gelegene unter diesen beiden Punkten. Weiter müssen auch A_1 und B_1 symmetrisch zur y-Achse liegen, d. h. der Ursprung des Koordinatensystems ist der Mittelpunkt der Strecke A_1B_1. Da ferner nach Voraussetzung $\overline{A_1B_1}=\overline{BB_1}$ ist, gilt für die Koordinaten $x_1; y_1$ des Punktes B folgende Beziehung:

$$y_1=2_{x1}.$$ Aus dem

Gleichungssystem (1) $y_1=x_1^2$ (2) $y_1=2x_1$ erhält man $x_1=2$ und $y_1=4$.
(Die zweite Lösung des Gleichungssystems, $x_1=0$ und $y_1=0$ entfällt, da auf der Symmetrieachse der zweiten Parabel kein Punkt außer dem Scheitelpunkt liegen kann.)
Also gilt B (2; 4) und damit $A(-2; 4)$.
(II) Da die zweite Parabel den Scheitelpunkt S (0; 6) hat, lautet ihre Funktionsgleichung $y=ax^2+6$, mit einer geeigneten reellen Zahl a.
Diese Gleichung muß durch die Koordinaten von B erfüllt werden. Daher erhält man $4=4a+6$ und daraus $a=-\frac{1}{2}$. Die zweite Parabel ist mithin der Graph der Funktion, deren Gleichung $y=-\frac{1}{2}x^2+6$ lautet.
(III) Ihre Nullstellen erhält man daher aus der Gleichung $-\frac{1}{2}x^2+6=0$.
Sie lauten $x_{01}=\sqrt{12}$ und $x_{02}=-\sqrt{12}$.
Die gesuchten Schnittpunkte der zweiten Parabel mit der x-Achse haben demnach die Koordinaten

$(\sqrt{12}; 0)$ und $(-\sqrt{12}; 0)$.



4. a) Angenommen, es gäbe ein derartiges rechtwinkliges Dreieck $\triangle ABC$ und es seien die Maßzahlen der Längen
der p zugeordneten Kathete mit a
der q zugeordneten Kathete mit b und
der Höhe mit h bezeichnet.
Nun unterscheiden wir folgende beiden Fälle:
Fall 1: Die eine der zu ermittelnden Wurzeln wird durch h, die andere durch a oder b dargestellt.
Fall 2: Die eine der zu ermittelnden Wurzeln wird durch a, die andere durch b dargestellt.
Im Fall 1 gilt: $h^2=p\cdot q=12$ sowie
$a^2=p(p+q)=133$.
Daraus erhält man durch Subtraktion $p^2=121$, also $p=11$, da $p>0$ gilt.
Mithin gilt $q=\frac{12}{11}$, und man erhält tatsächlich
$h^2=12$ $a^2=133$, also $h=\sqrt{12}$ und $a=\sqrt{133}$.
Im Fall 2 gilt: (wenn o. B. d. A. $a>b$ angenommen wird)
$a^2=p(p+q)=133$ sowie $b^2=q(p+q)=12$.
Durch Addition erhält man daraus
$(p+q)^2=a^2+b^2=145$, folglich ist $p+q$ keine rationale Zahl.
Also gibt es im Fall 2 kein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.
b) Hier gilt im Fall 1:
$h^2=p\cdot q=11$ sowie
$a^2=p(p+q)=133$.
Daraus erhält man durch Subtraktion $p^2=122$, folglich ist p nicht rational.
Also gibt es im Fall 1 kein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.
Im Fall 2 gilt:
(1) $a^2=p(p+q)=133$ sowie
$b^2=q(p+q)=11$.
Daraus erhält man durch Addition $(p+q)^2=144$, also wegen $p, q>0$ $p+q=12$ bzw. $q=12-p$. Durch Einsetzen in (1) ergibt sich $12p=133$, also $p=\frac{133}{12}$ und mithin $q=\frac{11}{12}$.
Tatsächlich erhält man in diesem Falle $a^2=133$, also $a=\sqrt{133}$, sowie $b^2=11$, also $b=\sqrt{11}$, wie es verlangt war.

Bezirksolympiade

Klassenstufe 7

1. Mit den Buchstaben M, S, K und den Buchstabengruppen MS, MK, SK, MSK seien die Anzahlen derjenigen Schüler bezeichnet, die an den entsprechenden Arbeitsgemeinschaften (M: math.-natw., S: Sport-AG, K: Künstler-AG) teilnehmen, aber nicht an den übrigen. Mit N sei die Anzahl derjenigen Schüler bezeichnet, die an keiner der Arbeitsgemeinschaften teilnehmen.
Dann folgt:

$$\begin{aligned}
&(0)\quad N+M+S+K+MS+MK+SK+MSK &&=500,\\
&(1)\quad S+MS+SK+MSK &&=250,\\
&(2)\quad K+MK+MSK &&=125,\\
&(3)\quad M+MS+MK+MSK &&=225,\\
&(4)\quad SK+MSK &&=25,\\
&(5)\quad MS+MSK &&=75,\\
&(6)\quad MK+MSK &&=25,\\
&(7)\quad MSK &&=5.
\end{aligned}$$

Wegen (7) und (4) bzw. (5) bzw. (6) ist

$$\begin{aligned}
&(8)\quad SK=20,\\
&(9)\quad MS=70,\\
&(10)\quad MK=20.
\end{aligned}$$

Wegen (0), (7), (8), (9), (10), (11), (12), (13) ist

$$\begin{aligned}
&(11)\quad S=155,\\
&(12)\quad K=80,\\
&(13)\quad M=130.
\end{aligned}$$

$$(14)\quad N=20.$$

Die in a) gesuchte Anzahl ist $S+K+M$; wegen (11), (12), (13) beträgt sie 365. Die in b) gesuchte Anzahl ist N; wegen (14) beträgt sie 20.

2. Die kleinste der 51 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen sei j. Dann gilt $1\leqq j$, und

die aufeinanderfolgenden Zahlen lauten (1) $j, j+1, j+2, \ldots, j+49, j+50$. Nun gilt laut Aufgabe $j+50 \leqq 100$, also $1 \leqq j \leqq 50$. Folglich gehört $j+j=2j$ auch zu den in (1) aufgezählten 51 aufeinanderfolgenden Zahlen, w. z. b. w.

3. (I) Angenommen, $ABCDE$ sei ein Fünfeck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Dann ist $\triangle BCE$ gleichseitig, also gilt $\sphericalangle CBE = 60°$. Ferner liegen A und C nicht auf derselben Seite der Geraden durch die Punkte B und E, da $ABCDE$ konvex ist. Daher gilt: $\sphericalangle ABE = \sphericalangle ABC - \sphericalangle CBE = 95° - 60° = 35°$.

(II) Daher erfüllt ein Fünfeck $ABCDE$ nur dann die Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

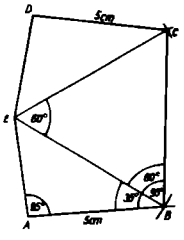
(α) Wir konstruieren ein Dreieck $\triangle ABE$ aus $\overline{AB} = 5$ cm, $\sphericalangle EAB = 95°$ und $\sphericalangle ABE = 35°$.

(β) Wir schlagen die Kreise um B und E mit dem Radius $\overline{BE}$. Schneiden sie sich in einem Punkt, der nicht auf derselben Seite der Geraden durch B und E wie A liegt, so sei dieser C genannt.

(γ) Wir schlagen den Kreis um C mit dem Radius 5 cm und den Kreis um E mit dem Radius $\overline{AE}$. Schneiden sie sich in einem nicht auf derselben Seite der Geraden durch C und E wie B liegenden Punkt, so sei dieser D genannt.

(III) Beweis, daß jedes so konstruierte Fünfeck $ABCDE$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Nach Konstruktion ist $\overline{AB} = \overline{CD} = 5$ cm, $\overline{BC} = \overline{CE} = \overline{BE}$, $\overline{AE} = \overline{DE}$, also sind (1), (3), (4) erfüllt. Ferner ist $\sphericalangle EAB = 95°$, $\sphericalangle ABE = 35°$, und, da $\triangle BCE$ gleichseitig ist, $\sphericalangle CBE = \sphericalangle BCE = \sphericalangle BEC = 60°$.



Da A und C auf verschiedenen Seiten der Geraden durch B und E liegen, gilt $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABE + \sphericalangle CBE = 35° + 60° = 95°$, also ist auch (2) erfüllt, und es gilt $\sphericalangle AEB = 180° - 95° - 35° = 50°$. Weiterhin ist $\triangle DCE \cong \triangle ABE$ (s, s, s), also $\sphericalangle EDC = 95°$, $\sphericalangle DCE = 35°$ und $\sphericalangle DEC = 50°$. Da ferner B und D auf verschiedenen Seiten der Geraden durch C und E liegen, gilt $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BCE + \sphericalangle DCE = 60° + 35° = 95°$.

Schließlich gilt $\sphericalangle AED = \sphericalangle AEB + \sphericalangle BEC + \sphericalangle DEC = 50° + 60° + 50° = 160°$.

Also hat $ABCDE$ an allen fünf Ecken Innenwinkel, deren jeder kleiner als 180° ist, ist somit konvex.

(IV) Konstruktionsschritt (α) ist wegen $95° + 35° < 180°$ nach dem Kriterium wsw bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Ebenso ist Konstruktionsschritt (β) aus bekannten Gründen eindeutig ausführbar, d. h. es existiert genau ein solcher Schnittpunkt C. Schließlich ist auch Konstruktionsschritt (γ) aus bekannten Gründen eindeutig ausführbar. Das Fünfeck $ABCDE$ ist somit durch die Bedingungen (1) bis (4) bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

4. Offensichtlich gilt $p = 1$ und $g = 0$.

Da in der zweiten und in der dritten Zeile je eine vierstellige Zahl steht, gilt $d \neq 1$ und $c \neq 1$.

Das Produkt $b \cdot d$ endet ebenso wie das Produkt $b \cdot c$ mit 1. Es sind nun genau die folgenden drei Fälle möglich:

1. Fall: Es sei $b = 9$, $c = d = 9$.

Daraus folgt $b \cdot d = 81$. Wegen $g = 0$ muß das Produkt $a \cdot d$, also $a \cdot 9$, mit der Ziffer 2 enden, (denn $2 + 8 = 10$). Das ist aber genau für $a = 8$ der Fall. Der erste Faktor heißt somit 189, der zweite 99.

Tatsächlich führt die Rechnung $189 \cdot 99$ zu einem Tafelbild, das der Aufgabenstellung entspricht.

2. Fall: Es sei $b = 7$, $c = d = 3$.

Da der erste Faktor kleiner als 200 ist, ist sein Dreifaches kleiner als 600, also eine dreistellige Zahl, was im Widerspruch zur zweiten Zeile steht. Dieser Fall führt somit zu keiner Lösung.

3. Fall: Es sei $b = 3$, $c = d = 7$.

Daraus folgt $b \cdot d = 21$. Das Produkt $a \cdot d$, also $a \cdot 7$, muß dann mit der Ziffer 8 enden (denn $2 + 8 = 10$). Das ist genau für $a = 4$ der Fall. Als erster Faktor ergibt sich damit 143, der zweite lautet 77. Tatsächlich führt die Rechnung $143 \cdot 77$ zu einem Tafelbild, das der Aufgabenstellung entspricht. Das Multiplikationsschema hat somit genau zwei, und zwar die beiden folgenden Realisierungen:

$189 \cdot 99$	$143 \cdot 77$
1701	1001
1701	1001
18711	11011

Gerd hatte also recht, Bernd dagegen nicht.

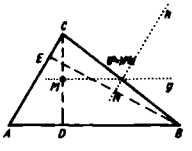
5. Es sei x eine beliebige rationale Zahl, für die $0 \leqq x \leqq 1$ gilt. Dann gilt $x + |x-1| = x + 1 - x = 1$, also ist die gegebene Gleichung erfüllt. Daher erfüllen alle rationalen Zahlen x, für die $0 \leqq x \leqq 1$ gilt, diese Gleichung.

Angenommen, es gäbe eine rationale Zahl $x > 1$, die die Gleichung $x + |x-1| = 1$ erfüllt. Dann wäre $1 = x + |x-1| = x + x - 1$ und somit $2x = 2$, also $x = 1$, im Widerspruch zu $x > 1$. Also gibt es keine rationale Zahl $x > 1$, die die gegebene Gleichung erfüllt.

Daher erfüllen genau alle diejenigen nicht negativen rationalen Zahlen x, für die $(0 \leqq) x \leqq 1$ gilt, die gegebene Gleichung.

6. Die zwei im Satz genannten Höhen seien o. B. d. A. die zu AB und AC gehörenden. Ihre Fußpunkte seien D bzw. E, ihre Mittelpunkte M bzw. N.

Die genannten Parallelen, g parallel zu AB durch M bzw. h parallel zu AC durch N, sind nicht parallel zueinander (da AB nicht zu AC parallel ist), sie schneiden sich daher in genau einem Punkte. Nun schneidet g den Strahl aus B durch C (da M und C auf derselben Seite der Geraden durch A und B liegen) in einem Punkt P. Ist F der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$, so haben die Dreiecke $\triangle ABM$ und $\triangle ABP$ jeweils den Flächeninhalt $\frac{1}{2}F$; denn diese drei Dreiecke stimmen in der Seite AB überein, und die zugehörige Höhe hat im ersten Dreieck die Länge $\overline{CD}$, in den beiden anderen Dreiecken jeweils die Länge $\overline{MD} = \frac{1}{2}\overline{CD}$. Da nun die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ABP$ in der zur Seite BC bzw. zur Seite BP gehörenden Höhe übereinstimmen, folgt unter Berücksichtigung der Aussagen über ihren Flächeninhalt $\overline{BP} = \frac{1}{2}\overline{BC}$. Also schneidet g die Strecke BC in ihrem Mittelpunkt M_a. Analog beweist man, daß auch h die Strecke BC in M_a schneidet. Daher ist M_a ein gemeinsamer Punkt von g und h, folglich ihr Schnittpunkt, und da M_a auf BC liegt, ist hiermit die Behauptung bewiesen.



Klassenstufe 8

1. Im folgenden seien die Namen der auf den Tipzetteln vermerkten drei Wettkampfteilnehmer mit A, B, C abgekürzt und die Platzverteilung durch die Reihenfolge dieser drei Buchstaben angegeben. Da A, B und C

1. Möglichkeit der Tipverteilung

Platzvert.	$A\,B\,C$	$A\,C\,B$	$C\,A\,B$	$C\,B\,A$
BAC 5 mal	0+0+5	0+0+0	0+5+0	0+0+0
BCA 4 mal	0+0+0	0+4+0	0+0+0	0+0+4
CAB 3 mal	0+0+0	0+0+3	3+3+3	3+0+0
Summe	5	7	14	7

2. Möglichkeit der Tipverteilung

Platzvert.	$A\,B\,C$	$A\,C\,B$	$C\,A\,B$	$C\,B\,A$
BAC 5 mal	0+0+5	0+0+0	0+5+0	0+0+0
BCA 3 mal	0+0+0	0+3+0	0+0+0	0+0+3
CAB 4 mal	0+0+0	0+0+4	4+4+4	4+0+0
Summe	5	7	17	7

die ersten drei Plätze belegten und B nicht Erster wurde, kommen nur die folgenden Platzverteilungen in Frage:

(1) ABC, (2) ACB, (3) CAB, (4) CBA.

Nun läßt sich in einer Tabelle angeben, wieviel Punkte in den Fällen (1) bis (4) bei jeder der laut Aufgabenstellung möglichen Tipverteilungen hätten vergeben werden können.

Wie die Tabelle zeigt, wird die Gesamtpunktzahl 17 genau dann erreicht, wenn Claudia den Wettbewerb gewann, Annekatrin den zweiten und Bernd den dritten Platz erreichte sowie der Tip BCA genau 3 mal abgegeben wurde.

2. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: Die bei der Division der Zahlen a, b, c durch 3 auftretenden Reste sind paarweise verschieden. Es lassen o. B. d. A. die Zahl a den Rest 0, die Zahl b den Rest 1 und die Zahl c den Rest 2. Dann lassen sich a, b, c in folgender Form schreiben:

$$\left.\begin{aligned} a &= 3m \\ b &= 3n+1 \\ c &= 3s+2 \end{aligned}\right\}$$ mit natürlichen Zahlen m, n, s. Nun gilt:

$$\begin{aligned} a+b+c &= 3m+3n+1+3s+2 \\ &= 3(m+n+s)+3 \\ &= 3(m+n+s+1), \text{ d. h.} \end{aligned}$$

$3 \mid a+b+c$.

Fall 2: Es gibt unter den Zahlen a, b, c mindestens zwei Zahlen, die bei Division durch 3 den gleichen Rest r lassen. Das seien o. B. d. A. die Zahlen a und b. Dann lassen sich diese Zahlen in folgender Form schreiben:

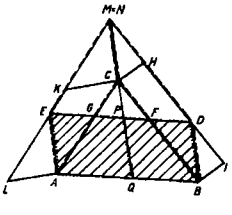
$$\left.\begin{aligned} a &= 3m+r \\ b &= 3n+r \end{aligned}\right\}$$ mit natürlichen Zahlen m, n, r wobei $0 \leqq r \leqq 2$ gilt. Nun gilt:

$$\begin{aligned} a-b &= 3m+r-(3n+r) \\ &= 3(m-n), \text{ d. h.} \end{aligned}$$

$3 \mid a-b$.

3. Falls benötigt, werden die Parallelogramme $BIHC$ und $CKLA$ wie folgt in flächeninhaltsgleiche Parallelogramme verwandelt:

Man zieht durch C die Parallele zu den parallelen Parallelogrammseiten BD und EA. Ihre Schnittpunkte mit ED bzw. AB seien P bzw. Q genannt. Die Gerade durch K und L schneide die genannte Parallele durch C in einem Punkte M, die Gerade durch I und H schneide sie in einem Punkte N.



Dann sind $ACME$ und $CBDN$ ebenfalls Parallelogramme und es gilt $\overline{EA} = \overline{MC}$ sowie $\overline{BD} = \overline{NC}$, woraus wegen $\overline{EA} = \overline{BD}$ folgt, daß $M = N$ ist. Als Parallelogramme mit gleicher Grundseite und gleicher zugehöriger Höhe sind nun folgende Parallelogramme paarweise inhaltsgleich:

einerseits $ACKL$, $ACME$ und $AQPE$,

andererseits $BIHC$, $BDMC$ und $BDPQ$.

Da der Flächeninhalt des Parallelogramms $ABDE$ gleich der Summe der Flächeninhalte der Parallelogramme $AQPE$ und $BDPQ$ ist, ist er mithin auch gleich der Summe der Flächeninhalte der Parallelogramme $ACKL$ und $BIHC$, w. z. b. w.

4. Für jede Lage des Punktes P_1 auf dem von ihm durchlaufenen Halbkreisbogen ist P_2 so gelegen, daß $\sphericalangle \overline{AMP_2} = \frac{1}{4} \sphericalangle \overline{AMP_1} < \frac{1}{4} \cdot 180° = 45°$ gilt. Umgekehrt nimmt die Größe des $\sphericalangle AMP_2$ während der beschriebenen Bewegung alle Werte zwischen 0° und 45° an, jeden zu genau einem Zeitpunkt. Sind Q_1 bzw. Q_2 die Fußpunkte der von P_1 bzw. P_2 auf AB gefällten Lote, so haben die Dreiecke $\triangle ABP_1$ und $\triangle ABP_2$ genau dann gleichen Flächeninhalt, wenn

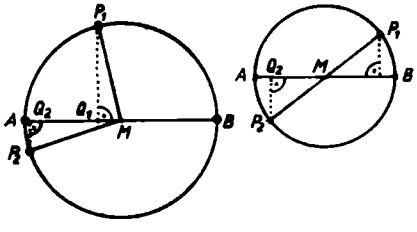
(1) $\overline{P_1Q_1} = \overline{P_2Q_2}$ gilt.

Im Fall $\sphericalangle \overline{AMP_1} < 90°$ ist $\sphericalangle \overline{Q_2MP_2} = \sphericalangle \overline{AMP_2} = \frac{1}{4} \sphericalangle \overline{AMP_1} < \sphericalangle \overline{AMP_1} = \sphericalangle \overline{Q_1MP_1}$ und daher $\overline{P_2Q_2} < \overline{P_1Q_1}$. Im Fall $\sphericalangle \overline{AMP_1} = 90°$ ist $\sphericalangle \overline{Q_2MP_2} = \sphericalangle \overline{AMP_2} = \frac{1}{4} \sphericalangle \overline{AMP_1} < 90°$ und daher ebenfalls $\overline{P_2Q_2} < (\overline{MP_2} = \overline{MP_1} =) \overline{P_1Q_1}$.

Also kann (1) in den Fällen $\sphericalangle \overline{AMP_1} \leqq 90°$ nicht erfüllt werden.

Im Fall $\sphericalangle \overline{AMP_1} > 90°$ ist die Bedingung (1) genau dann erfüllt, wenn (2) $\sphericalangle \overline{BMP_1} = \sphericalangle \overline{Q_1MP_1} = \sphericalangle \overline{Q_2MP_2} = \sphericalangle \overline{AMP_2}$ gilt; denn aus (1) folgt (2) vermittels des Kongruenzsatzes (ssw), aus (2) folgt (1) vermittels (sww). Nun ist (2) gleichwertig mit $180° - 4 \cdot \sphericalangle \overline{AMP_2} = \sphericalangle \overline{AMP_2}$ und dies mit $\sphericalangle \overline{AMP_2} = 36°$.

Daher gibt es genau einen Zeitpunkt mit der geforderten Eigenschaft, nämlich denjenigen, an dem der Winkel $\sphericalangle AMP_2$ die Größe 36° hat.



5. (I) Angenommen, $ABCD$ sei ein Quadrat, das den Bedingungen der Aufgabe genügt. Ferner sei A' ein Punkt auf MP. Es sei weiter Q der Fußpunkt des Lotes l von M auf BC. Dann ist $\triangle MBQ = \triangle MCQ$ (ssw), also ist l die Mittelsenkrechte von BC und daher auch die von AD. Somit gilt $\overline{MA} = \overline{MD}$. Die Parallele durch A' zu AB schneide den Strahl aus M durch R in einem Punkt, *der* D' genannt sei. Die Parallelen durch B' zu BC und durch D' zu DC mögen sich im Punkt C' schneiden. Dann ist $A'B'C'D'$ ein Viereck, das aus $ABCD$ durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum M hervorgegangen ist, also ein Quadrat, für das wegen $\overline{MA} = \overline{MD}$ auch $\overline{MA'} = \overline{MD'}$ gilt.

Da das Quadrat $ABCD$ nicht auf derselben Seite von AD liegt wie M, so liegt das Quadrat $A'B'C'D'$ nicht auf derselben Seite von $A'D'$ wie M.

(II) Daraus ergibt sich, daß ein Quadrat $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man wählt auf MP einen beliebigen Punkt A'.

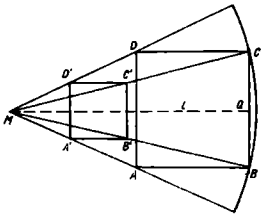
(2) Man schlägt den Kreis um M mit $\overline{MA'}$. Schneidet er den Strahl aus M durch R in einem Punkt, so sei dieser D' genannt.

(3) Man errichtet über $A'D'$ das Quadrat $A'B'C'D'$, das nicht auf derselben Seite von $A'D'$ liegt wie M.

(4) Man zeichnet die von M ausgehenden Strahlen durch B' bzw. C'. Schneiden sie den Bogen $\overset{\frown}{PR}$, so seien diese Schnittpunkte B bzw. C genannt.

(5) Man zeichnet die Parallele zu $B'A'$ durch B. Schneidet sie PM in einem Punkt, so sei dieser A genannt.

(6) Man zeichnet die Parallele zu $C'A'$ durch C. Schneidet sie RM in einem Punkt, so sei dieser D genannt.



(III) Beweis, daß jedes so konstruierbare Quadrat $ABCD$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Laut Konstruktion ist die Mittelsenkrechte l von $A'D'$ auch die von $B'C'$; wegen $\overline{MA'} = \overline{MD'}$ geht sie durch M, ist also auch Winkelhalbierende von $\sphericalangle B'MC'$. Schneidet sie BC in Q, so ist daher $\triangle MBQ \cong \triangle MCQ$ (sws), also l auch senkrecht auf BC und folglich $BC \parallel B'C'$. Hiernach und nach der weiteren Konstruktion ist $ABCD$ durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum M aus $A'B'C'D'$ hervorgegangen. Daher ist ABCD ebenfalls ein Quadrat, und seine Punkte liegen so, wie es in der Aufgabe verlangt wurde.

6. Angenommen, zu einer positiven rationalen Zahl a gebe es eine natürliche Zahl x, für die

$$\text{(1)} \quad \frac{25}{2}x - a = \frac{5}{8}x + 142 \text{ gilt.}$$

Dann gilt auch

$$100x - 8a = 5x + 1136 \text{ bzw.}$$

$$95x = 1136 + 8a, \text{ also}$$

$$\text{(2)} \quad x = \frac{1136+8a}{95}.$$

Daher gibt es zu einer positiven rationalen Zahl a nur dann eine natürliche Zahl x mit der Eigenschaft (1), wenn $1136 + 8a$ durch 95 teilbar ist, wobei $8a > 0$ gilt. Da 1136 bei

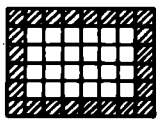
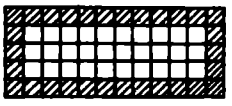
Division durch 95 den Rest 91 läßt, erhält man die kleinste Zahl a für $8a=4$, sie lautet also $a=\frac{1}{2}$. Für sie ergibt sich nach (2) $x=12$, also eine natürliche Zahl. Umgekehrt erfüllt $x=12$ zusammen mit $a=\frac{1}{2}$ auch (1), wie man durch Einsetzen bestätigt. Also gibt es ein kleinstes a mit den geforderten Eigenschaften, und x nimmt hierfür den Wert 12 an.

Klassenstufe 9

1. Es gilt $n^6-n^2=n^2\cdot(n^4-1)$
$=n^2\cdot(n^2+1)\cdot(n^2-1)$.
Von den drei aufeinanderfolgenden Zahlen n^2-1, n^2, n^2+1 ist mindestens eine gerade. Ist n durch 5 teilbar, so ist n^2 durch 5 teilbar. Ist n nicht durch 5 teilbar, so läßt n bei Division durch 5 einen der Reste 1, 2, 3, 4. Dann läßt n^2 bei Division durch 5 bzw. den Rest 1, 4, 4, 1.
Läßt n^2 bei Division durch 5 den Rest 1, so ist n^2-1 durch 5 teilbar.
Läßt n^2 bei Division durch 5 den Rest 4, so ist n^2+1 durch 5 teilbar.
In jedem Falle ist daher $n^6-n^2=$
$=(n^2-1)\cdot n^2\cdot(n^2+1)$ durch 2 und durch 5 und folglich, da 2 und 5 teilerfremd sind, auch durch 10 teilbar.
Bemerkung: n^6-n^2 ist für jedes ganze n sogar durch 60 teilbar.

2. Angenommen, eine Rechteckfläche, in der jede Zeile aus a und jede Spalte aus b Quadratflächen besteht, erfülle die Bedingungen der Aufgabe. Dann ist $a\geqq 3$ und $b\geqq 3$, da sonst keine weißen Quadratflächen aufträten, und die Anzahl der roten Quadratflächen beträgt $2a+2b-4$, die Anzahl der weißen Quadratflächen beträgt $(a-2)\cdot(b-2)=$
$=ab-2a-2b+4$.
Somit gilt $2a+2b-4=ab-2a-2b+4$, also (1) $a(b-4)=4b-8$.
Wäre $b=3$, so folgte $-a=4$; wäre $b=4$, so folgte $0=8$, was beides einen Widerspruch darstellt. Also gilt $b>4$, d. h. (2) $b-4>0$.
Wegen (1) ist $4b-8=4(b-4)+8$ durch $b-4$ teilbar und daher auch (3) 8 durch $b-4$ teilbar.
Nach (2), (3) kann $b-4$ nur eine der Zahlen 1, 2, 4, 8 sein. Hieraus und aus (1) ergeben sich für das Paar (a, b) nur die Möglichkeiten

a	b
12	5
8	6
6	8
5	12

Wie die Abb. zeigt, erfüllen in der Tat diese Paare die Bedingungen der Aufgabe (Fall 1 und 4 bzw. Fall 2 und 3 gehen durch Vertauschung der Zeilen mit den Spalten auseinander hervor).
Der vorstehende Lösungsweg untersucht, wann sich aus (1) eine natürliche Zahl a ergibt. Einfacher wird die Darstellung bei folgendem 2. Lösungsweg:
Die (durch positive ganze a, b, zu erfüllende) Bedingung ist äquivalent mit $ab-4a-4b+8$
$=0$ und dies mit (*) $(a-4)(b-4)=8$.
Also hat man alle ganzzahligen Faktorenzerlegungen(*) von 8 zu prüfen, ob für sie a und b positiv (ganzzahlig) sind. Ist nun eine der Zahlen $(a-4)$, $(b-4)$ ein Faktor (-8) oder (-4), so hat die betreffende Zahl a bzw. b den Wert (-4) oder (0).
Daher lösen genau die Zerlegungen $8=8\cdot 1$
$=4\cdot 2=2\cdot 4=1\cdot 8$ und somit genau die oben angegebenen Paare (a, b) die Aufgabe.

3. Die vier Raumdiagonalen eines Würfels schneiden sich in einem Punkt. Er sei mit M bezeichnet. Mit M als Spitze und je einer Würfelfläche als Grundfläche gibt es genau 6 vierseitige Pyramiden, die den Würfelkörper vollständig ausfüllen. Diese Pyramiden sind untereinander kongruent.
Jede der vier Seitenflächen jeder Pyramide ist in genau einer der 6 in der Aufgabe genannten Schnittebenen enthalten, d. h. daß jede Pyramide nur noch von zwei der gegebenen Ebenen geschnitten werden kann. Dies wird sie in der Tat, nämlich von denjenigen beiden Schnittebenen, die auf der Grundfläche der Pyramide senkrecht stehen und deren (Flächen-)Diagonalen enthalten. Sie zerlegen die Pyramide in vier untereinander volumengleiche (sogar kongruente) Teilkörper. Der Würfel wird daher in 24 Teilkörper zerlegt.
Alle Teilkörper sind untereinander volumengleich. Das Volumen jedes dieser Teilkörper beträgt daher $\frac{a^3}{24}$.

4. Mit den üblichen Bezeichnungen s für die Weglänge, v für die Geschwindigkeit und t für die aufgewandte Zeit gilt $s=v\cdot t$ bzw. $t=\frac{s}{v}$. Wird nun die von A aufgewandte Zeit mit t_A und die von B aufgewandte Zeit mit t_B bezeichnet, dann gilt einerseits für A:

$t_A=t_1+t_2$ mit $t_1=\frac{s}{2\cdot 4}=\frac{s}{8}$ und $t_2=\frac{s}{2\cdot 5}=\frac{s}{10}$,

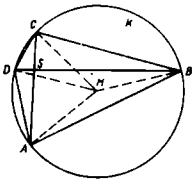
also $t_A=\frac{9}{40}s$,

$s_B=s_1+s_2$ mit $s_1=\frac{t_B}{2}\cdot 4$ und $s_2=\frac{t_B}{2}\cdot 5$, also

$s=\frac{t_B}{2}\cdot 9$ bzw. $t_B=\frac{2}{9}s$.

Wegen $9\cdot 9>2\cdot 40$ gilt nun $t_A>t_B$, d. h. B war eher am Ziel als A.
2. Lösungsweg: Man kann sich die Gesamtstrecke in 9 gleichlange Teilstrecken geteilt denken.
Dann ging A genau $4\frac{1}{2}$ dieser Teilstrecken mit 4 km/h, den Rest mit 5 km/h. B dagegen ging genau 4 dieser Teilstrecken mit 4 km/h, die restlichen 5 Teilstrecken mit 5 km/h; denn bei dieser Aufteilung sind die aufgewandten Zeiten für die beiden Geschwindigkeiten gleichlang (und, da sie bei jeder anderen Aufteilung anders ausfallen, auch nur bei dieser). Daher kam B zuerst am Ziel an.
Oder noch einfacher (ohne Rechnung):
Wäre die Teilstrecke s, die B mit 5 km/h durchläuft, eine Hälfte der Gesamtstrecke oder weniger, so benötigte B für s weniger Zeit als für die andere, langsamer durchlaufene und mindestens ebenso lange Teilstrecke. Dies widerspricht der Aufgabenstellung. Also war die mit 5 km/h durchlaufene Teilstrecke für B länger als die für A. Folglich kam B zuerst am Ziel an.

5. Der Mittelpunkt von k sei M, der Schnittpunkt der Diagonalen sei S. Nach Voraussetzung gilt: $\overline{\sphericalangle AMB}+\overline{\sphericalangle CMD}=\overline{\sphericalangle BMC}+$
$+\overline{\sphericalangle DMA}$, also da die Summe beider Seiten dieser Gleichung 360° beträgt, $\overline{\sphericalangle AMB}+$
$+\overline{\sphericalangle CMD}=180°$.
Nach dem Satz über Zentriwinkel und Peripheriewinkel gilt daher:
$\overline{\sphericalangle SCB}+\overline{\sphericalangle CBS}=\overline{\sphericalangle ACB}+\overline{\sphericalangle CBD}=$
$=\frac{1}{2}\overline{\sphericalangle AMB}+\frac{1}{2}\overline{\sphericalangle CMD}=90°$.
Mithin gilt nach dem Winkelsummensatz, angewandt auf das Dreieck $\triangle BSC$: $\overline{\sphericalangle BSC}$
$=180°-(\overline{\sphericalangle SCB}+\overline{\sphericalangle CBS})=90°$, also
$AC\perp BD$, w. z. b. w.



6. a) Wegen $3808=2^5\cdot 7\cdot 17$ sind alle Qua-
16. Ferner sind alle ungeraden natürlichen Zahlen, die Teiler von 3808 sind, 1, 7, 17 und $7\cdot 17=119$. Daraus folgt:
Eine natürliche Zahl n kommt genau dann als zweite Zahl in einem der zu betrachtenden dratzahlen, die Teiler von 3808 sind, 1, 4 und Tripel (k, n, m) vor, wenn sie eine der Zahlen (1) 1, 2, 4 ist.
Eine natürliche Zahl m kommt genau dann als dritte Zahl in einem Tripel (k, n, m) vor, wenn $2m+1$ eine der Zahlen 1, 7, 17, 119 ist, d. h. genau dann, wenn m eine der Zahlen (2) 0, 3, 8, 59 ist.
Für jedes Paar (n, m) mit n aus (1) und m aus (2) gibt es genau eine natürliche Zahl k, so daß (k, n, m) eines der zu betrachtenden Tripel ist, nämlich (3) $k=\frac{3808}{n^2(2m+1)}$.
Da es genau 12 verschiedene Paare (n, m) mit n aus (1) und m aus (2) gibt und die hiermit entstehenden Tripel (k, n, m) erst recht verschieden sind, beträgt deren Anzahl somit ebenfalls 12.
b) Es gilt stets $knm\geqq 0$. Der Wert $knm=0$ wird nach (1), (2), (3) genau dann angenommen, wenn $m=0$ ist. Er ist somit für alle

betrachteten Tripel der kleinste Wert und wird genau für die Tripel mit $m=0$, n aus (1) und k aus (3), d. h. genau für (3808, 1, 0); (952, 2, 0); (238, 4, 0) angenommen.

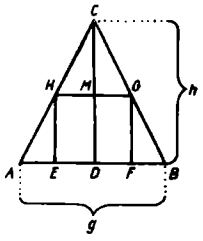
Klassenstufe 10

1. Sind D und M die Mittelpunkte von AB bzw. HG, dann gilt:
mit $\overline{EF}=a$ nach dem Strahlensatz $\overline{AB}:\overline{HG}=\overline{CD}:\overline{CM}$, also
$g:a=h:(h-a)$, $ah=gh-ag$,

$$a=\frac{g\cdot h}{g+h} \qquad (1).$$

Angenommen nun, $h:g$ sei ein solches Verhältnis, wie es in der Aufgabe verlangt wird. Dann ist $\frac{1}{2}gh$ der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$ und a^2 der des Quadrates $EFGH$, also gilt

$$\frac{1}{2}gh:a^2=9:4 \text{ und daher } 2gh-9a^2=0 \qquad (2).$$



Setzt man (1) in (2) ein, so erhält man

$$2gh=\frac{9g^2h^2}{(g+h)^2}=0,$$

$2(g^2+2gh+h^2)-9gh=0$, also die Gleichung (3)

$h^2-\frac{5}{2}gh+g^2=0$, die genau die Lösungen

$$h_{1;2}=\frac{5}{4}g\pm\sqrt{\frac{25}{16}g^2-g^2}, \text{ d. h.}$$

$h_1=2g$ und $h_2=\frac{1}{2}g$ hat.

Also können höchstens die Verhältnisse $h:g=2:1$ und $h:g=1:2$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Umgekehrt gilt: Man kann den folgenden Nachweis auch dadurch erbringen, daß man die bisherigen Schlüsse umkehrt.

Aus $h_1=2g$ folgt wegen (1) $a_1=\frac{2}{3}g$.

Ebenso folgt aus

$h_2=\frac{1}{2}g$ wegen (1) $a_2=\frac{1}{3}g$.

Daher ergibt sich in den genannten Fällen:

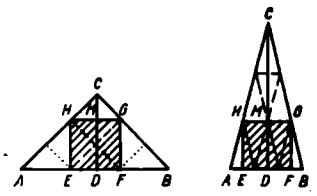
$$\frac{1}{2}gh:a^2=\frac{1}{2}g\cdot 2g:\left(\frac{2}{3}g\right)^2=$$

$$=g^2:\frac{4}{9}g^2=9:4 \text{ bzw.}$$

$$\frac{1}{2}gh:a^2=\frac{1}{2}g\cdot\frac{1}{2}g:\left(\frac{1}{3}g\right)^2=$$

$$=\frac{1}{4}g^2:\frac{1}{9}g^2=9:4, \text{ wie es gefordert}$$

war. Es gibt mithin genau zwei Verhältnisse $h:g$, für die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind, nämlich $h:g=1:2$ und $h:g=2:1$.



2. Die Ebene ε durch A, B, C' geht auch durch D'; denn $ABC'D'$ ist ein Parallelogramm. Jede Strecke PR mit P auf AB und R auf $C'D'$ liegt in ε. Die Ebene η durch D, A, B' geht auch durch C'; denn $DAB'C'$ ist ein Parallelogramm. Jede Strecke ST mit S auf AD und T auf $B'C'$ liegt in η. Die Punkte A und C' gehören ε und η an, B dagegen ε und nicht η, also haben ε und η genau die Gerade durch A und C' gemeinsam. Ist nun ein Punkt X Schnittpunkt von PR und ST, so liegt X im Parallelepiped, in ε und in η, also im Durchschnitt dieser drei Mengen, d. h. auf der Strecke AC'. Liegt umgekehrt ein Punkt X auf AC', d. h. auf der gemeinsamen Diagonalen der Parallelogramme $ABC'D'$ und $DAB'C'$, so schneiden z. B. die Parallelen durch X zu AD' bzw. AB' die Strecken AB und $C'D'$ bzw. AD und $B'C'$ in Punkten P, R bzw. S, T, so daß X als Schnittpunkt von PR und ST auftritt. Daher ist die gesuchte Menge die Strecke AC'.

3. Jede natürliche Zahl $z\geqq 5$ ist von einer der Formen $6m-1$, $6m$, $6m+1$, $6m+2$, $6m+3$, $6m+4$ mit natürlichem $m\geqq 1$. Da $6m$, $6m+2$, $6m+4$ durch 2 teilbar und (wegen $z\geqq 5$) größer als 2 sind, und da $6m+3$ durch 3 teilbar und größer als 3 ist, folgt: Jede Primzahl $p\geqq 5$ ist von einer der Formen $6m-1$, $6m+1$ ($m\geqq 1$). Numeriert man alle diese Zahlen auf dieselbe Weise wie die Primzahlen $p\geqq 5$ der Größe nach und bezeichnet dabei die mit der Nummer n versehene Zahl mit f_n, dagegen die Primzahl mit der Nummer n mit p_n, so gilt also

(1) $p_n\geqq f_n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$.

Die Zahlen f_n ergeben sich nun, indem man der Reihe nach für jedes $m=1, 2, 3$ ... erst $6m-1$ und dann $6m+1$ bildet. Die Nummern n kann man ebenso dadurch erhalten, daß man der Reihe nach für jedes $m=1, 2, 3, \ldots$ erst $2m-1$ und dann $2m$ bildet.

Da aber für $m=1, 2, 3, \ldots$ stets

$6m-1>3(2m-1)$ und $6m+1>3\cdot 2m$

gelten, ergibt sich

(2) $f_n>3n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$.

Aus (1) und (2) folgt $p_n>3n$ für alle $n=1, 2, 3, \ldots$, w. z. b. w.

4. Es seien t bzw. t' die Maßzahlen der in Stunden gemessenen Zeiten für das fahrplanmäßige bzw. für das tatsächliche Durchfahren der Strecke s, ferner seien v bzw. v' die Maßzahlen der in km/h gemessenen fahrplanmäßigen bzw. tatsächlichen Durchschnittsgeschwindigkeit. Dann gilt

(1) $t\cdot v=20$ und (2) $t'\cdot v'=20$, ferner

(3) $t'=t-\frac{1}{15}$ und (4) $v'=v+10$.

Aus (3) und (1) folgt $t'=\frac{20}{v}-\frac{1}{15}$; setzt man dies in (4) und in (2) ein, so ergibt sich

$\left(\frac{20}{v}-\frac{1}{15}\right)\cdot(v+10)=20$, also $(3000-v)\cdot(v+10)=300v$

(5) $v^2+10v-3000=0$. Diese Gleichung hat genau die Lösungen

$V_{1,2}=-5\pm 3025$, d. h. $v_1=50$, $v_2=-60$.

Wegen $v0$ betrug daher die fahrplanmäßige Durchschnittsgeschwindigkeit 50 km/h.

5. Nach den Logarithmengesetzen läßt sich die linke Seite der Gleichung wie folgt umformen:

$$lg\left(1-\frac{1}{25^2}\right)+\ldots+lg\left(1-\frac{1}{100^2}\right)=$$

$$=lg\left[\left(1-\frac{1}{25^2}\right)\left(1-\frac{1}{26^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{100^2}\right)\right].$$

Nach Verwendung einer binomischen Formel ist die linke Seite der zu beweisenden Gleichung, also gleich

$$lg\left[\left(1-\frac{1}{25^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{100^2}\right)\right]=$$

$$=lg\left[\frac{(25-1)(25+1)}{25^2}\cdot\frac{(26-1)(26+1)}{26^2}\cdot\right.$$

$$\left.\ldots\cdot\frac{(100-1)(100+1)}{100^2}\right]$$

$$lg=\left[\frac{24\cdot 26\cdot 25\cdot 27\cdot 26\cdot 28\cdot 27\cdot 29\cdot}{25^2\cdot 26^2\cdot 27^2\cdot 28^2\cdot}\right.$$

$$\left.\frac{\ldots\cdot 96\cdot 98\cdot 97\cdot 99\cdot 98\cdot 100\cdot 99\cdot 101}{\ldots\cdot 98^2\cdot 99^2\cdot 100^2}\right]$$

$$lg=\left[\frac{24\cdot 25\cdot 26^2\cdot 27^2\cdot}{25^2\cdot 26^2\cdot 27^2\cdot}\right.$$

$$\left.\frac{\ldots\cdot 98^2\cdot 99^2\cdot 100\cdot 101}{\ldots\cdot 97^2\cdot 98^2\cdot 99^2\cdot 100^2}\right]=$$

$$=lg\left(\frac{24\cdot 101}{25\cdot 100}\right)=lg\frac{606}{625}, \text{ w. z. b. w.}$$

6. Es sei $\triangle ABC$ ein gleichschenkliges Dreieck mit $\overline{AC}=\overline{BC}$ und $\sphericalangle ACB=36°$. Dann gilt $\sphericalangle BAC=\sphericalangle ABC$ und nach dem Winkelsummensatz $\sphericalangle BAC+\sphericalangle ABC=144°$, also $\sphericalangle BAC=72°$. Die Halbierende des Winkels $\sphericalangle ABC$ schneide AC in D. Dann gilt $\sphericalangle ABD=36°$, und nach dem Winkelsummensatz, angewandt auf $\triangle ABD$: $\sphericalangle ADB=72°$. Folglich sind die Dreiecke $\triangle ADB$ und $\triangle BCD$ gleichschenklig, und es gilt $\overline{AD}<\overline{AB}=\overline{BD}=\overline{DC}$.

Ferner gilt nach dem Hauptähnlichkeitssatz:

$\triangle ADB\approx\triangle ABC$

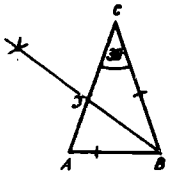
und daher

$\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{AB}:\overline{AC}$,

also

$\overline{AD}:\overline{DC}=\overline{DC}:\overline{AC}$,

w. z. b. w.



Die Lösungen zur Kreisolympiade, Klassenstufe 5/6, sowie zur DDR-Olympiade, Klasse 10, werden in *alpha*, Heft 5/73 veröffentlicht, die Lösungen zu Klassenstufe 11/12 (DDR-Olympiade) in Heft 12/73 der Zeitschrift *Mathematik in der Schule*.

Klasse 5

▲1▲ Axel meint zu Bernd: „Sowohl unser Garten als auch euer Garten haben beide die Form eines Rechtecks. Obwohl unser Garten einen größeren Flächeninhalt als euer Garten besitzt, benötigen wir weniger Zaunmaterial zum Einzäunen als ihr." Kann Axel mit dieser Feststellung recht haben, wenn beide Zäune von der gleichen Art sind? Die Antwort ist zu begründen!

▲2▲ Es sei $m-n$ die Differenz zweier voneinander verschiedener natürlicher Zahlen m und n. Wie verändert sich diese Differenz, wenn

a) der Minuend vergrößert wird und der Subtrahend unverändert bleibt?

b) der Minuend verkleinert wird und der Subtrahend unverändert bleibt?

c) sowohl der Minuend als auch der Subtrahend um die gleiche natürliche Zahl vergrößert werden?

d) sowohl der Minuend als auch der Subtrahend um die gleiche natürliche Zahl verkleinert werden?

e) der Minuend um eine natürliche Zahl a und der Subtrahend um eine natürliche Zahl b vergrößert werden und $a>b$ gilt?

▲3▲ Es seien x und y natürliche Zahlen. Ersetze in den folgenden sechs Beispielen jeweils das Sternchen durch eines der Zeichen $>$, $<$ oder $=$ so, daß wahre Aussagen entstehen.

a) Wenn $x>8$, so $x+3*10$.

b) Wenn $60\cdot x=50\cdot y$, so $x * y$.

c) Wenn $5\cdot x>10$ und $y>x$, so $y * 3$.

d) Wenn $x>y$, so $y+2 * x+5$.

e) Wenn $x>y$, so $60-x * 75-y$.

f) Wenn $y<5$, so $3\cdot y * 17$.

▲4▲ Es seien a, b und c natürliche Zahlen, die die Ungleichung $5+a<b+c$ erfüllen, und es sei $c<5$. Weise nach, daß dann auch $a<b$ gilt!

▲5▲ Die Quersumme einer zweistelligen natürlichen Zahl betrage 12. Vertauscht man die beiden Grundziffern dieser Zahl miteinander, so ist die neu entstandene Zahl mehr als doppelt so groß wie die ursprüngliche. Wie viele Lösungen besitzt die Aufgabe?

Klasse 6

▲6▲ Heinz hat mittwochs im 14tägigen Rhythmus Pioniernachmittag. Er geht regelmäßig jeden Sonntag und jeden Mittwoch, an dem nicht der Pioniernachmittag stattfindet, ins Kino. Heinz fuhr mit seiner Klasse in ein fünftägiges Winterferienlager (einschließlich An- und Abreisetag); wir wissen nicht, an welchem Wochentag er abgefahren ist.

a) Wieviel Tage vergehen mindestens, bis Heinz wieder ins Kino gehen kann?

b) Wieviel Tage vergehen höchstens (vom Anreisetag an gerechnet), an denen Heinz nicht ins Kino gehen kann?

▲7▲ Es seien x, y und z gebrochene Zahlen, die die Ungleichung $x+y>\frac{z}{3}$ erfüllen, und es sei $x>y$. Weise nach, daß dann stets $x>\frac{z}{6}$ gilt!

▲8▲ Ist P ein innerer Punkt eines Dreiecks ABC, so gilt stets $\overline{AB}+\overline{AC}>\overline{PB}+\overline{PC}$. Diese Behauptung ist zu beweisen!

▲9▲ Gerd wollte gegen Ende des Schuljahres seinen Zensurendurchschnitt abschätzen. Er konnte mit der Note 1 in genau sechs Fächern, mit der Note 3 in genau drei Fächern rechnen. Die Noten in den übrigen drei Fächern waren noch ungewiß, aber es war mit Sicherheit nur mit den Noten 2 oder 3 zu rechnen. Wie müssen sie ausfallen, damit der Zensurendurchschnitt besser als 2 wird?

▲10▲ Martin und Norbert liefen um die Wette. Martin lief mit einer konstanten Geschwindigkeit von $5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Nach 30 Sekunden hatte er gegenüber Norbert einen Vorsprung erreicht, der mindestens 15 m beträgt. Wie groß kann die (konstante) Geschwindigkeit von Norbert höchstens sein?

Mathematik und Sport

Klasse 7

▲11▲ Nach den Wettkampfbestimmungen muß beim Hochsprung die Sprunglatte aus Holz sein und ihr Querschnitt die Form eines gleichseitigen Dreiecks haben. Wie schwer ist eine 3,80 m lange Sprunglatte, wenn eine Querschnittskante 3 cm lang ist? (Wichte für Holz $\gamma=0{,}5\ \mathrm{p}\cdot\mathrm{cm}^{-3}$).

▲12▲ Vor einem Marathonlauf wurden für die Plazierung der drei Favoriten H., J. und W. zwei Prognosen aufgestellt.

a) W. wird den ersten, H. den zweiten und J. den dritten Platz belegen.

b) W. wird Dritter, H. Sieger und J. Zweiter sein.

Nach der Zielankunft stellte sich heraus, daß die drei Favoriten tatsächlich die ersten drei Plätze belegten, aber keine der beiden abgegebenen Prognosen stimmte. In beiden Voraussagen traf nicht einmal eine der drei genannten Platzziffern zu. Wer belegte den ersten, zweiten und dritten Platz?

▲13▲ In einer Mannschaft erhielt eine Turnerin am Stufenbarren von zehn erreichbaren Punkten $\frac{7}{8}$. Eine andere erhielt 104% dieser Wertung, während die dritte Wettkämpferin für ihre Übung $\frac{4}{5}$ der Punktzahl der höheren der ersten beiden Wertungen erhielt. Die übrigen beiden Turnerinnen standen punktgleich und erhielten zusammen 60% der Gesamtpunktzahl der ersten drei Turnerinnen. Wieviel Punkte erkämpfte jede Turnerin? Welche Gesamtwertung erzielte die Mannschaft?

▲14▲ Christoph Höhne (DDR) gewann 1968 die Goldmedaille im 50-km-Gehen. Er benötigte für diese Strecke 4:20:13,6 Stunden. Welcher Geschwindigkeit entspricht diese Rekordleistung

a) in $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, b) in $\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$?

▲15▲ Eine Sprungbahn soll ohne Neigung, also ohne Gefälle verlaufen. Die Wettkampfbestimmungen besagen, daß die höchstzulässige Neigung längs der Sprungbahn 1:1000 betragen darf. Wieviel Zentimeter Höhenunterschied sind das auf einer Bahn von 100 m Länge?

Th. Scholl

XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

1. Stufe (Schulolympiade)

Letzter Abgabetermin: 16. Oktober 1973 (beim Mathematiklehrer)

Olympiadeklasse 5

1. a) Ermittle die größte Anzahl von Schnittpunkten, die 6 voneinander verschiedene gleichgroße Kreise insgesamt miteinander haben können! Dabei sind als Schnittpunkte jeweils die Schnittpunkte zweier Kreise zu verstehen.
b) Zeichne ein Beispiel, bei dem 6 Kreise die unter a) ermittelte größte Anzahl von Schnittpunkten miteinander haben und die Kreismittelpunkte überdies alle auf einer und derselben Geraden liegen! Wähle als Radius $r=3$ cm und numeriere die Schnittpunkte!

2. Karl soll einen Würfel der Kantenlänge 4 cm aus Knetmasse, ohne ihn zu verformen, so zerteilen, daß am Ende nur Würfel von je 1 cm Kantenlänge entstehen.
a) Ermittle die Anzahl der Würfel (der geforderten Art), die auf diese Weise entstehen!
b) Stelle fest, wieviel Schnitte Karl dabei insgesamt ausführen muß, wenn ein Schnitt niemals mehr als einen der vorher vorhandenen Körper zerteilen darf, d. h. wenn das Schneiden „im Paket" nicht gestattet ist!

3. Das Dreifache der Summe der Zahlen 38 947 und 12 711 soll durch das Sechsfache der Differenz der Zahlen 9127 und 8004 dividiert werden. Wie lautet der Quotient?

4. Aus einer Schulklasse arbeiten einige Thälmann-Pioniere im Klub der internationalen Freundschaft mit. Auf die Frage, wer von ihnen im Dolmetscherbüro dieses Klubs mitarbeitet, melden sich 7. Dann wird gefragt, wer im Länderzirkel des Klubs mitarbeitet; hierauf melden sich 6. Ebenso wird festgestellt, daß 5 der Pioniere im Zirkel junger Korrespondenten des Klubs tätig sind. Andere als diese drei Zirkel gibt es in diesem Klub nicht. Als Nächstes wird die Frage gestellt, wer gleichzeitig mindestens im Dolmetscherbüro und im Länderzirkel mitarbeitet; diesmal melden sich 4 der Pioniere. Ebenso ermittelt man, daß 3 von ihnen gleichzeitig mindestens im Dolmetscherbüro und im Zirkel junger Korrespondenten tätig sind und 2 von den Pionieren gleichzeitig mindestens zum Länderzirkel und zum Zirkel junger Korrespondenten gehören. Genau einer der Pioniere der genannten Schulklasse gehört allen drei Zirkeln an. Ermittle die Anzahl aller derjenigen Pioniere dieser Klasse, die im Klub der internationalen Freundschaft mitarbeiten!
(Sämtliche Zahlenangaben gelten als genau)

Olympiadeklasse 6

1. Eine Strecke von 7 m Länge soll so in vier Teile geteilt werden, daß die zweite Teilstrecke 40 cm länger als die erste, die dritte 40 cm länger als die zweite und die vierte 40 cm länger als die dritte ist.
Untersuche, ob eine solche Einteilung möglich ist, und gib, wenn dies der Fall ist, die Längen jeder der vier Teilstrecken an!

2. Für die „Galerie der Freundschaft" ist ein rechteckiges Bild mit den Seitenlängen 18 cm und 12 cm durch einen rechteckigen Rahmen von 3 cm Breite aus Zeichenkarton eingerahmt worden.
Ermittle den Flächeninhalt dieses Rahmens!

3. In die leeren Felder des abgebildeten Quadrats sind Zahlen so einzutragen, daß die eingetragenen Zahlen, von links nach rechts gelesen und auch von oben nach unten gelesen, immer größer werden und daß dabei für jede Zeile und für jede Spalte folgendes gilt: Alle Differenzen, die man in dieser Zeile bzw. in dieser Spalte zwischen zwei unmittelbar neben- bzw. untereinanderstehenden Zahlen bilden kann, haben einen für diese Zeile bzw. Spalte einheitlichen Wert. (Dabei heiße „Differenz": rechte Zahl minus linke Zahl" bzw. „untere Zahl minus obere Zahl".)
Gib ferner für jede Zeile und für jede Spalte die für sie charakteristische Differenz an!

2					
	8				
	11	16			

4. Jörg und Claudia streiten sich darüber, ob es unter den natürlichen Zahlen von 0 bis 1 000 mehr solche gibt, bei deren dekadischer Darstellung (mindestens) eine 5 vorkommt, als solche, bei denen das nicht der Fall ist.
Stelle fest, wie die richtige Antwort auf diese Frage lautet!

Olympiadeklasse 7

1. Gib sämtliche Teiler der Zahl 111 111 an!

2. Beweise den folgenden Satz:
Ist $ABCD$ ein Rhombus und sind E, F, G, H in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DA, so ist das Viereck $EFGH$ ein Rechteck.

3. Der Umfang u eines gleichschenkligen Dreiecks soll 24 cm betragen; eine der Seiten dieses Dreiecks soll $2\frac{1}{2}$mal so lang sein wie eine andere seiner Seiten.
Untersuche, ob es eine Möglichkeit gibt, die Seitenlängen eines Dreiecks so anzugeben, daß diese Bedingungen erfüllt sind!
Untersuche, ob es genau eine solche Möglichkeit gibt! Wenn dies der Fall ist, so ermittle die zugehörigen Seitenlängen!

4. An einer Kreisolympiade *Junger Mathematiker* nahmen in der Olympiadeklasse 7 Anneliese, Bertram, Christiane, Detlev, Erich und Franziska teil. Genau zwei von ihnen erhielten Preise. Auf die Frage, welche beiden Teilnehmer das waren, wurden folgende fünf Antworten gegeben:
(1) Anneliese und Christiane
(2) Bertram und Franziska
(3) Anneliese und Franziska
(4) Bertram und Erich
(5) Anneliese und Detlev.
Wie sich später herausstellte, waren in genau einer Antwort beide Namen falsch angegeben, während in jeder der übrigen vier Antworten genau ein Name richtig angegeben war.
Wie heißen die beiden Preisträger?

Olympiadeklasse 8

1. Man ermittle alle Möglichkeiten, eine vierstellige ungerade (natürliche) Zahl z so anzugeben, daß sie folgende Eigenschaften hat:
(1) Die Zahl z hat vier verschiedene Ziffern.
(2) Das Produkt aus der zweiten und der dritten Ziffer von z ist 21mal so groß wie das Produkt aus der ersten und der vierten Ziffer.
(3) Die kleinste der Ziffern von z steht an erster, die größte an zweiter Stelle.

2. In $** \cdot 9* = ***$
ist jedes Sternchen so durch eine der Ziffern 0 bis 9 zu ersetzen, daß eine richtige Gleichung entsteht. Ermittle sämtliche Lösungen dieser Aufgabe!

3. Beim mathematischen Wettbewerb der Schülerzeitschrift „alpha" erhielten drei

Schüler einer Schule Preise. Auf die Frage nach ihren Vornamen wurden folgende sieben Antworten gegeben:

(1) Christian, Uwe, Iris
(2) Eva, Elke, Uwe
(3) Roland, Marion, Bernd
(4) Iris, Heike, Uwe
(5) Roland, Heike, Bernd
(6) Eva, Marion, Christian
(7) Christian, Eva, Elke.

Es stellte sich heraus, daß in genau einer der Antworten alle drei Vornamen richtig, in genau zwei Antworten genau zwei Vornamen falsch und in genau drei Antworten alle drei Vornamen falsch angegeben wurden.
Ermittle die Vornamen der drei Schüler, die einen Preis erhielten!

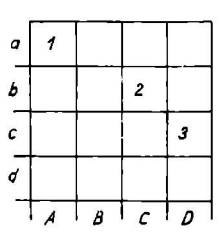
4. In einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ und $\overline{AB} > \overline{CD}$ seien $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = c$ und der Abstand h der Parallelseiten gegeben. Die Diagonalen AC bzw. BD schneiden die Mittelparallele FE des Trapezes in H bzw. G. Ermittle den Flächeninhalt A_T des Trapezes $ABGH$!

Olympiadeklasse 9

1. Zwei in gleicher Höhe über den Erdboden liegende Punkte A und B befinden sich in gleichem Abstand und auf derselben Seite von einer geradlinig verlaufenden hohen Wand. Die Strecke AB ist 51 m lang. Ein in A erzeugter Schall trifft in B auf direktem Wege um genau $\frac{1}{10}$ s früher ein als auf dem Wege über die Reflexion an der Wand. Man ermittle den Abstand jedes der beiden Punkte A und B von der Wand, wobei angenommen sei, daß der Schall in jeder Sekunde genau 340 m zurücklegt.

2. Jemand will aus einer Mischung, die zu 99% aus Wasser besteht, eine neue Mischung mit einem Wasseranteil von 98% dadurch herstellen, daß er aus der ursprünglichen Mischung Wasser entzieht.
Man ermittle, wieviel Prozent der in der ursprünglichen Mischung enthaltenen Wassermenge er ihr zu diesem Zweck insgesamt entziehen muß.

3. In das abgebildete Quadrat sollen die Zahlen 1, 2, 3 und 4 so eingetragen werden, daß in jeder Zeile, in jeder Spalte und in



jeder der beiden Diagonalen jede der vier Zahlen genau einmal vorkommt. An drei Stellen sind bereits Zahlen eingetragen und sollen unverändert stehenbleiben.
Man untersuche, ob eine solche Eintragung möglich ist und ob nur eine einzige Eintragungsmöglichkeit existiert. Ist dies der Fall, so führe man die Eintragung durch.
(Hinweis: Zur Beschreibung des Lösungsweges sind die am Rand des Quadrats eingetragenen Buchstaben zu benutzen. Beispiel: Im Feld bC ist bereits die Zahl 2 eingetragen.)

4. Unter $n!$ (gelesen n-Fakultät) versteht man das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n; d. h. es gilt
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-3) \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$.
Man ermittle für $n = 1000$ die Anzahl der Nullen, auf die die Zahl $n!$ endet (Endnullen).

Olympiadeklasse 10

1. Ermitteln Sie alle Mengen $\{a, b, c\}$ aus rationalen Zahlen a, b, c mit der Eigenschaft, daß $\left\{\frac{10}{3}; -\frac{5}{12}; \frac{9}{4}\right\}$ die Menge der Summen aus je zwei Zahlen von $\{a, b, c\}$ ist!

2. Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm und M der Schnittpunkt seiner Diagonalen. Ferner seien S_1, S_2, S_3, S_4 die Schwerpunkte der Dreiecke ABM, BCM, CDM, DAM.
Man beweise, daß dann $S_1S_2S_3S_4$ ein Parallelogramm ist.

3. Jemand möchte als Rechenaufgabe stellen, aus der Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis zu einer angegebenen natürlichen Zahl n genau eine angegebene natürliche Zahl x wegzulassen und die übrigen $n-1$ Zahlen zu addieren. Er möchte die Zahlen n und x so angeben, daß als Ergebnis dieser Rechenaufgabe die Summe 448 entsteht.
Man ermittle alle Möglichkeiten, x und n in dieser Weise anzugeben.

4. Jens und Dirk spielen das folgende Spiel: Sie wählen abwechselnd für je einen Koeffizienten einer durch $f(x) = ax^2 + bx + c$ zu definierenden Funktion f reelle Zahlen $a \neq 0$, b, c in dieser Reihenfolge. Jens beginnt. Liegen nach erfolgter Wahl von a, b, c die Schnittpunkte des Graphen der Funktion f mit der x-Achse symmetrisch zum Koordinatenursprung, so hat Dirk gewonnen, liegen sie unsymmetrisch, Jens. Das Spiel endet genau dann unentschieden, wenn f keine Nullstellen hat.
Es ist zu untersuchen, ob es sich bei diesem Spiel um ein „ungerechtes Spiel" handelt. Als ein ungerechtes Spiel wird ein Spiel bezeichnet, bei dem einer der Spieler bei allen Spielmöglichkeiten des anderen den Gewinn erzwingen kann.

Olympiadeklasse 11/12

1. Es sei $\mathfrak{M}$ die Menge aller natürlichen Zahlen von 1 bis 10 000 000 000. Man untersuche, ob die Anzahl derjenigen Zahlen (aus $\mathfrak{M}$), bei deren dekadischer Darstellung die Ziffer 5 vorkommt, größer, gleich oder kleiner ist als die Anzahl derjenigen Zahlen aus $\mathfrak{M}$, bei deren dekadischer Darstellung keine 5 auftritt.

2. Aus einem geraden Kreiskegelstumpf soll ein Kegelkörper herausgeschnitten werden, dessen Spitze der Mittelpunkt der (größeren) Grundfläche des Kegelstumpfs ist und dessen Grundfläche mit der Deckfläche des Kegelstumpfes zusammenfällt.
Man ermittle diejenigen Werte des Verhältnisses des Radius der Grund- zum Radius der Deckfläche des Kegelstumpfes, für die das Volumen des entstehenden Restkörpers sechsmal so groß ist wie das des ausgeschnittenen Kegelkörpers.

3. Es seien a und n natürliche Zahlen mit $a \geq 2$ und $n \geq 2$. Man beweise: Die Menge $\mathfrak{M} = \{a, a^2, \ldots, a^n\}$ ist nicht die Vereinigung zweier solcher elementefremder nichtleerer Mengen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$, für die die Summe der in $\mathfrak{M}_1$ enthaltenen Zahlen gleich der Summe der in $\mathfrak{M}_2$ enthaltenen Zahlen ist.

4. Gegeben seien k reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (k natürliche Zahl, $k \geq 1$), für die
$$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k \quad (1)$$
und $$a_1 + a_2 + \ldots + a_k = 1 \quad (2)$$ gilt.
Man beweise, daß dann für alle natürlichen Zahlen n mit $0 < n \leq k$ die Ungleichung
$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leq \frac{1}{k}$$ erfüllt ist.

Preisträger — Aufgabe 1000

Zu der Aufgabe 1000 gingen 1057 Lösungen ein.
Preisträger wurden:
Kathlen Schönfelder, 133 Schwedt (Kl. 5); Olaf Mittmann, 759 Spremberg (Kl. 5); Angelika Müller, 22 Greifswald (Kl. 6); Eva Gerstner, 806 Dresden (Kl. 7); Uwe Ohm, 1601 Töpchin (Kl. 8); Barbara Wolf, 437 Köthen (Kl. 8); Kerstin Miertschink, 7701 Torno (Kl. 9); Andreas Näther, 925 Mittweida (Kl. 10); Karl Krause, 4274 Mansfeld (71 Jahre)

Aus der Graphentheorie

Teil 4 und Schluß

Solospiele

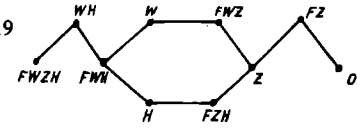
Beim Solospiel handelt es sich darum, von einem gegebenen Zustand (Position) ausgehend durch eine endliche Folge von Schritten (Zügen) einen gegebenen Zustand (oder einen von mehreren gegebenen Zuständen) herbeizuführen, wobei die Schritte frei aus einer gegebenen Menge von Schritten (welche die Spielregeln ausmacht) gewählt werden können.

Das erste Beispiel soll sich mit der ältesten und bekanntesten Aufgabe befassen, die zu den Problemen der „erschwerten Überfahrten" gehört:

Ein Fährmann soll mit seinem Boot einen Wolf, eine Ziege und Heu über den Fluß setzen. Sein Boot ist so klein, daß er nur einen der Passagiere bzw. das Heu aufnehmen kann. Aus verständlichen Gründen dürfen weder der Wolf und die Ziege zusammen – ohne Aufsicht des Fährmanns – am Ufer zurückbleiben, noch die Ziege mit dem Heu.

Der Aufgabe entspricht der Graphe des Bildes 19.

Bild 19



In Bild 19 kennzeichnet der Knotenpunkt *WH* beispielsweise den Zustand, in dem sich der Wolf mit dem Heu auf dem diesseitigen Ufer befindet, während der Fährmann die Ziege übersetzt und der Knotenpunkt *FZH* den Zustand, in dem der Fährmann mit der Ziege und dem Heu diesseits ist, der Wolf hingegen am anderen Ufer steht. Knotenpunkt 0 besagt: Alle sind jenseits des Flusses. Zwei Knotenpunkte sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn die ihnen entsprechenden Zustände (ohne Verletzung der angegebenen Bedingungen) durch eine Überfahrt ineinander übergeführt werden können.

Der Fährmann muß den Fluß mindestens siebenmal überqueren. Die beiden Lösungsmöglichkeiten könnt ihr leicht aus Bild 19 entnehmen.

Im zweiten Beispiel wollen wir uns einer „Umfüllaufgabe" widmen.

Von drei Gefäßen faßt das erste 4 l und ist mit Wasser gefüllt, das zweite Gefäß faßt 3 l, das dritte 1 l. Die beiden letzten Gefäße sind leer. Durch Umfüllungen soll – ohne Maßzylinder! – erreicht werden, daß die beiden ersten Gefäße je 2 l enthalten.

Das Tripel $\{x, y, z\}$ soll den Zustand kennzeichnen, bei dem im 1. Gefäß x Liter, im 2. y Liter und im 3. Gefäß z Liter enthalten sind.

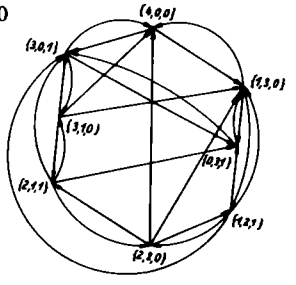
Die folgenden Tripel geben alle Möglichkeiten der Verteilung der Flüssigkeit (in ganzen Litern) auf die 3 Gefäße an.

$\{4, 0, 0\}$ $\{0, 3, 1\}$ $\{2, 2, 0\}$
$\{3, 0, 1\}$ $\{3, 1, 0\}$ $\{2, 1, 1\}$
$\{1, 3, 0\}$ $\{1, 2, 1\}$

Den Tripeln ordnen wir Knotenpunkte zu. Vom Knotenpunkt $\{x_1, y_1, z_1\}$ zum Knotenpunkt $\{x_2, y_2, z_2\}$ soll genau dann ein Bogen (gerichtete Kante) führen, wenn der Zustand $\{x_1, y_1, z_1\}$ durch einmaliges Umgießen in den Zustand $\{x_2, y_2, z_2\}$ übergeht. Wir erhalten den Graphen des Bildes 20. In ihm haben wir einen Weg zu suchen, der den Knotenpunkt $\{4, 0, 0\}$ mit dem Knotenpunkt $\{2, 2, 0\}$ verbindet und nur „gleichgerichtete" Bögen enthält. Zwei solche Wege sind im Bild 20 hervorgehoben.

Bemerkung: Diese Umfüllaufgabe war – wie ihr sicher bemerkt habt – besonders einfach geartet – um so durchsichtiger konnte an ihr das Prinzip erläutert werden, das zur Lösung dieses Aufgabentyps angewandt wird.

Bild 20



Die Bedeutung der Graphentheorie liegt nun keinesfalls etwa in dem Wert, den sie für die Unterhaltungsmathematik besitzt, wennschon sie aus dieser besonders zu Anfang ihrer systematischen Entwicklung Impulse erhalten hat.

Es gibt heute kaum eine Wissenschaft, in der nicht graphentheoretische Methoden – oder doch zumindest Begriffe der Graphentheorie zur Interpretation gewisser Sachverhalte – benutzt würden.

Die Anwendungen liegen entweder an der Oberfläche – sofern es sich um bloße Interpretation mittels graphentheoretischer Begriffe handelt – oder aber sie reichen so tief, daß uns augenblicklich noch die Voraussetzungen für eine nähere Betrachtung fehlen. Vielleicht können wir uns in einem späteren Beitrag mit einigen solcher Anwendungen befassen.

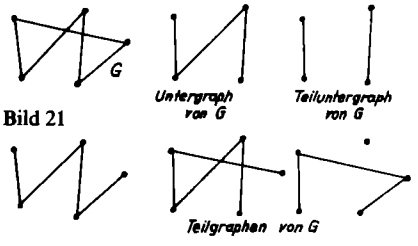
Der vorliegende Beitrag aber soll nicht beendet werden, ehe wir uns noch mit einem Problem befaßt haben, das für die Volkswirtschaft große Bedeutung hat – und für dessen Behandlung wir uns alle Voraussetzungen geschaffen haben.

Zunächst haben wir noch einige Definitionen anzuführen. Definition 12: Ein Untergraph des Graphen $G = [X, U]$ ist ein Graph, dessen Knotenpunktmenge A eine Teilmenge von X ist, und der genau alle diejenigen Kanten von U enthält, die in G die Knotenpunkte von A verbinden.

Definition 13: Ein *Teilgraph* von G ist ein Graph, der aus allen Knotenpunkten von X und aus den Kanten einer Teilmenge V von U besteht.

Definition 14: Ein *Teil-Untergraph* ist ein Teilgraph eines Untergraphen. (Bild 21)

Bild 21



Definition 15: Einen zusammenhängenden Graphen, der keinen Kreis enthält, nennt man *Baum*. (Bild 22)

Bild 22

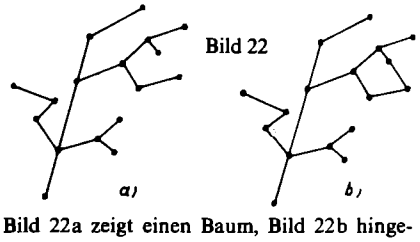
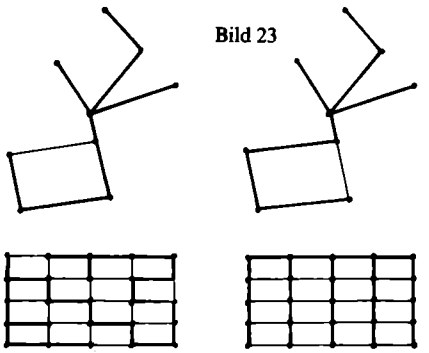


Bild 22a zeigt einen Baum, Bild 22b hingegen nicht. Der Graph des Bildes 3b beispielsweise ist ebenfalls ein Baum.

Bild 23



Definition 16: Ein Teilgraph eines Graphen G, der ein Baum ist, heißt *Gerüst* von G. (Bild 23) Für die beiden in Bild 23 dargestellten Graphen wurden je zwei Gerüste ausgezeichnet. Sicher findet ihr leicht weitere!

Danach könnt ihr euch bei der Behandlung der Aufgabe 12 entspannen, ehe wir zum „Endspurt" schreiten.

▲15▲ Suche einen Graphen G, der zwei Gerüste hat, die keine gemeinsame Kante besitzen!

Wir wollen das folgende Problem betrachten: n Ortschaften A_i $(i=1, \ldots, n)$ sollen durch ein Telephonnetz N verbunden werden, das folgende Eigenschaften hat:

A) Über das Netz kann man von jeder Ortschaft aus jede andere erreichen.

B) Verzweigungspunkte gibt es – aus Gründen der Betriebssicherheit – nur in den Orten selbst.

C) N soll von allen Telephonnetzen, die die Bedingungen A) und B) erfüllen, dasjenige sein, das zu seinem Bau die geringsten Kosten verursacht.

Das Gelände, innerhalb dessen die Ortschaften liegen, mag überall von gleicher Beschaffenheit sein, d. h. wir sind gerechtfertigt, die wesentlichen Voraussetzungen V und W zu machen.

V) Beim Bau eines jeden A) erfüllenden Telephonnetzes sind die Kosten pro Meter konstant oder mit anderen Worten: Die Kosten zur Schaffung eines Netzstückes der Länge 1 sind stets der Länge 1 proportional, wobei der Proportionalitätsfaktor stets den gleichen Wert hat.

W) Wir können jede Stadt mit jeder anderen durch ein gradliniges Netzstück verbinden.

Unter den Voraussetzungen V) und W) können wir die Eigenschaft C so formulieren:

C') Unter allen Netzen, die die Bedingungen A und B erfüllen, ist dasjenige zu finden, dessen Gesamtlänge am kürzesten ist. Wir wollen hier ein etwas allgemeineres Problem behandeln, was uns dann unter anderem ermöglichen wird, das gesuchte Telephonnetz zu konstruieren. Dabei folgen wir der von *H. Sachs* in dem Buch „Einführung in die Theorie der endlichen Graphen, I" (Leipzig 1970) gegebene Darstellung.

Gegeben sei ein schlichter zusammenhängender Graph G mit n Knotenpunkten, in dem jeder Kante k eine beliebige reelle Zahl $1\,(k)$ als „Länge" zugeordnet ist. Gesucht sind die „Minimalgerüste", das sind diejenigen Gerüste H von G, deren „Gesamtlänge"

$$1\,(H)=\sum_{k\in H} 1\,(k) \text{ minimal ausfällt.}$$

Das Problem wird durch Satz 5 gelöst.

Satz 5: Sind die Längen der Kanten von G paarweise verschieden, so besitzt G genau ein Minimalgerüst. Dieses findet man mittels des folgenden Algorithmus: Man konstruiere eine endliche Folge von in G enthaltenen Bäumen $H_1, H_2, \ldots, H_n$; H_1 bestehe aus einem einzigen beliebigen Knotenpunkt von G; $H_{\nu+1}(1 \leqq \leqq n-1)$ entstehe aus H_ν auf folgende Weise: $k_{\nu+1}$ sei die kürzeste unter denjenigen Kanten von G, die mit H_ν genau einen Knotenpunkt gemeinsam haben; man füge $k_{\nu+1}$ sowie deren noch freien Endpunkte zu H_ν hinzu. Dann gilt: H_n ist das gesuchte Minimalgerüst.

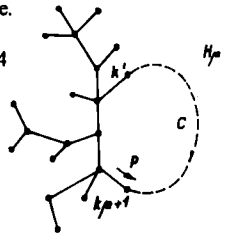
Beweis: H_1 ist ein Baum (bestehend aus einem isolierten Knotenpunkt). Unter Voraussetzung, daß H_ν ein Baum mit ν Knotenpunkten ist, ist zu zeigen, daß $H_{\nu+1}$ ein Baum mit $\nu+1$ Knotenpunkten ist. Angenommen $H_{\nu+1}$ wäre ein Baum, dann enthielte er einen Kreis, der beim „Anbau" der Kante $k_{\nu+1}$ an H_ν entstanden sein müßte. Dann hätte $k_{\nu+1}$ aber beide Endpunkte mit Knotenpunkten von H_ν gemeinsam – im Widerspruch zu der vom Algorithmus vorgeschriebenen Eigenschaft von $k_{\nu+1}$, mit H_ν genau einen Knotenpunkt gemeinsam zu haben. – Nach dem vorgeschriebenen Algorithmus geht der „Anbau" der Kante $k_{\nu+1}$ an H_ν mit der Hinzunahme genau eines Knotenpunktes einher. $H_{\nu+1}$ enthält also $\nu+1$ Knotenpunkte.

Daraus folgt, daß H_n ein Baum ist, der alle KP von G enthält; H_n ist also ein Gerüst von G.

Wir zeigen nun, daß jedes von H_n verschiedene Gerüst von G eine Gesamtlänge hat, die größer ist als die von H_n. H_n ist dann also das gesuchte Minimalgerüst. Es sei H ein beliebiges Gerüst von G, welches von H_n verschieden ist. Da $H_1 \subset H$, aber $H_n \not\subset H$, gibt es einen Index $\mu(1 \leqq \mu \leqq n)$, so daß $H\mu \subset H$, während $H_{\mu+1} \not\subset H$. Dann gehört die Kante $k_{\mu+1}$ nicht zu H; wird sie zu H hinzugefügt, so entsteht genau ein Kreis C. Da $H_{\mu+1}$ keinen Kreis enthält, gibt es in C mindestens eine Kante k, welche nicht zu $H_{\mu+1}$ und damit auch nicht zu H_μ gehört. Unter diesen Kanten k findet man auch eine Kante k', die mit einem Knotenpunkt von H_μ inzidiert (siehe Bild 24) andernfalls könnte man, wenn man den Kreis C im Knotenpunkt P beginnend in Pfeilrichtung durchläuft, niemals wieder zum Knotenpunkt P zurückkehren. Es können nicht beide Endpunkte von k' zu H_μ gehören, weil H keinen Kreis enthält. k' inzidiert also mit genau einem Knotenpunkt von H_μ und hat folglich eine größere Länge als $k_{\mu+1}$. Wird k' gelöscht, so entsteht ein neues Gerüst $H'=H+k_{\mu+1}-k'$, welches eine geringere Gesamtlänge als H hat; also ist H kein Minimalgerüst. Da es unter den endlich vielen Gerüsten von G gewiß eines kleinster Gesamtlänge gibt, schließen wir, daß es genau ein Minimalgerüst gibt und daß dieses mit H_n identisch ist.

Zusatz: Enthält G mehrere Kanten gleicher Länge, so findet man die Minimalgerüste auf folgende Weise: Man wende den Algorithmus an, wobei man jedoch unter denjenigen Kanten von G, die mit genau einem Knotenpunkt eines schon konstruierten Baumes H_ν inzidieren, jeweils eine der kürzesten willkürlich auswähle und zu H_ν hinzufüge: So erhält man stets ein Minimalgerüst, und indem man die Auswahl der jeweils hinzuzufügenden Kante auf jede zulässige Weise vornimmt, bekommt man auch alle Minimalgerüste.

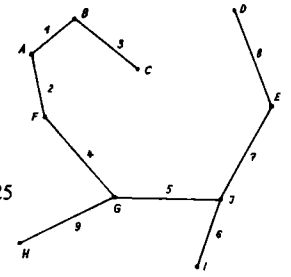
Bild 24



Auf den Beweis des Zusatzes wollen wir hier nicht näher eingehen.

Wir sehen uns abschließend die Konstruktion des Minimalgerüstes an einem Beispiel an (Bild 25). Dabei wollen wir speziell das Problem des billigsten Telefonnetzes behandeln und annehmen, daß die oben formulierten Voraussetzungen V und W erfüllt seien.

Bild 25



Wir gehen vom Knotenpunkt A aus und erhalten in den Schritten 1 bis 9:

1. H_1 – besteht nur aus A
2. $H_2=H_1\cup(A, B)$
3. $H_3=H_2\cup(A, F)$
4. $H_4=H_3\cup(B, C)$
5. $H_5=H_4\cup(F, G)$
6. $H_6=H_5\cup(G, J)$
7. $H_7=H_6\cup(J, I)$
8. $H_8=H_7\cup(J, E)$
9. $H_9=H_8\cup(G, H)$

In Bild 25 tragen die Kanten des Graphen G die Nummer des Schrittes, bei dem sie „angebaut" wurden. G ist das gesuchte Minimalgerüst.

$H_{\mu+1}=H_\mu\cup(X, Y)$ ist der Baum, der aus H_μ entsteht, wenn wir zu H_μ die Kante (X, Y) sowie denjenigen ihrer Knotenpunkte, der nicht Knotenpunkt von H_μ ist, hinzufügen.

Achtung — alpha-Wettbewerb!

Zwischen dem 1. und 10. September 1973 sind alle (richtigen) Antwortkarten geschlossen an die Redaktion, 7027 Leipzig Postfach 14 einzusenden. Wer zwei (oder mehr) Urkunden einsendet, dazu die Karten des Jahres 1972/73, erhält das alpha-Abzeichen in Gold und sein Name wird veröffentlicht. Bitte alle Einsendungen (und evtl. Rückantwortbriefe) richtig frankieren! Geschwister senden ihre Unterlagen getrennt ein.

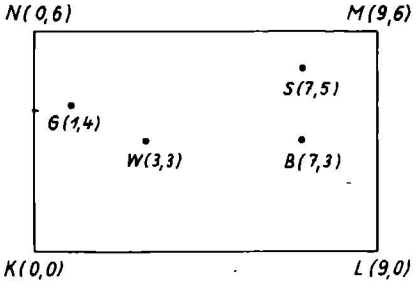
Red. alpha

In freien Stunden alpha heiter

V. Renčin, Praha

Billiardspiel

Den meisten Lesern ist sicher das Billiardspiel in irgendeiner Form bekannt. In einigen Gaststätten stehen die kleinen Loch-Billiard-Tische, die oft von zahlreichen Spielern und Zuschauern umlagert sind. Meine ägyptischen Kollegen und ich (Mathematikfachlehrer H. Büchel, ehem. Mitarbeiter im Min. f. Erziehung der Arabischen Republik Ägypten, d. Red.) spielten hier in Kairo einmal in der Woche an einem großen Billiard, das an den Ecken und in den Mitten der langen Rechteckseiten Löcher und Netze hat, um die Kugeln aufzunehmen. Es bestehen natürlich bestimmte Regeln. Die Spieltechnik wird von mathematischen und physikalischen Gesetzen beherrscht. Diese Tatsache und die mit dem Spiel verbundene Freude über gelungene und mißglückte Aktionen machen es uns zu einer schönen Freizeitbeschäftigung.



Das Rechteck $KLMN$ veranschauliche den Tisch, die Ecken haben die folgenden Koordinaten: $K(0, 0)$, $L(9, 0)$, $M(9, 6)$, $N(0, 6)$. Eine schwarze Kugel liegt in $S(7, 5)$, eine blaue Kugel in $B(7, 3)$, eine grüne Kugel in $G(1, 4)$, eine weiße Kugel in $W(3, 3)$ und eine rote Kugel direkt an der Öffnung $M(9, 6)$. Die Spielregel verlangt, daß die weiße Kugel so gestoßen wird, daß sie die rote Kugel in das Netz bringt, ohne vordem eine andersfarbige Kugel zu berühren.

a) Zeige, daß die rote Kugel nicht direkt von der weißen getroffen werden kann.

b) Zeige, daß es nicht möglich ist, die weiße Kugel an eine Bande (Rand des Tisches) zu spielen (mit dem Ziel, die rote Kugel zu treffen), ohne daß eine andersfarbige Kugel getroffen wird.

c) Bestimme den Weg der weißen Kugel bei einem Zwei-Banden-Spiel, damit sie die rote Kugel ins Netz stößt.

In der Aufgabe werde vorausgesetzt, daß die Kugel an der Bande dem Reflexionsgesetz gehorcht.

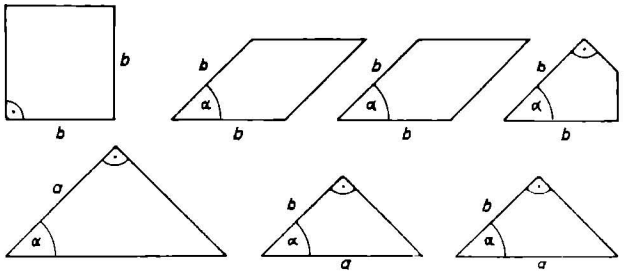
Anmerkung: Für Schüler der höheren Klassen könnten Methoden der analytischen Geometrie eingesetzt werden. Da aber die Kugeln nicht punktförmige Massen sind, sondern einen beträchtlichen Durchmesser besitzen, ist eine konstruktive Lösung der Aufgabe ohne weiteres ausreichend und kann damit auch von jüngeren Schülern gefunden werden. Vor allem der Teil c) ist recht reizvoll.

Auf zahlreiche Lösungsvorschläge freuen sich die Redaktion *alpha* und der Einsender.

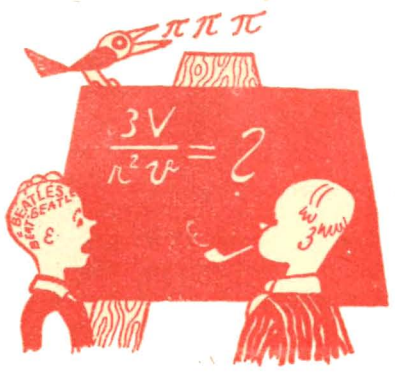
Mathematikfachlehrer H. Büchel, EOS Zella-Mehlis

Legespiel Euklid

Die sieben Plastiksteine (mit $\alpha=45°$) sind zu einem Rechteck zusammenzustellen. Es gibt zwei nichtkongruente Typen.



Aus „Praxis der Mathematik", 8/68, Köln



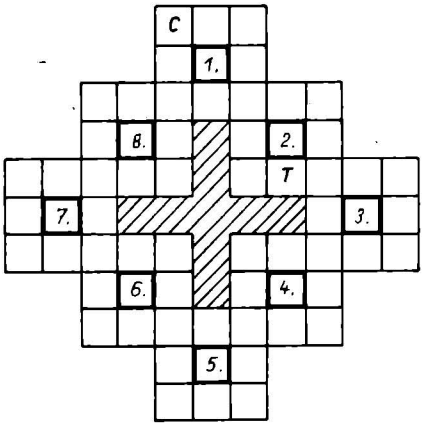
Zum Copernicus-Jahr

$$\begin{array}{rcl} RAO + POS & = & JJEP \\ \hline CNP : N & = & JSN \\ \hline COP + ERN & = & JCUS \end{array}$$

Ing. H. Decker, Köln

Wabenrätsel

In die weißen Felder sind so Buchstaben einzusetzen, daß die rundherum um eine Ziffer stehenden Buchstaben bei geeigneter Wahl des Anfangsfeldes und des Drehsinns die Wortbilder mathematischer Begriffe der folgenden Bedeutung ergeben:

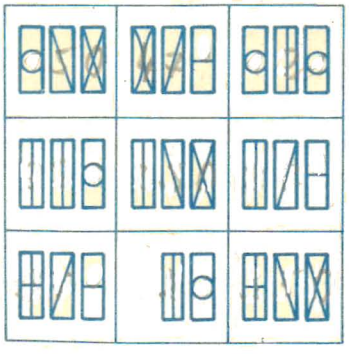


1. eine der Angaben, die eine Gerade festlegen
2. Grundrechenoperation
3. Ergebnis einer bestimmten Rechenoperation
4. eine der beiden Zahlen, die eine Potenz bestimmen
5. eine der Angaben, die einen Winkel festlegen
6. Grundrechenoperation
7. eine der beiden Zahlen, die eine Wurzeloperation bestimmen
8. natürliche Zahl mit genau zwei Teilern

Fachlehrerin Irmgard Träger, Döbeln

Magisches Zahlenquadrat

In diesem verschlüsselten magischen Zahlenquadrat bedeuten gleiche Symbole gleiche Grundziffern und verschiedene Symbole verschiedene Grundziffern.



Entschlüßle dieses magische Zahlenquadrat, in dessen Zeilen, Spalten und Diagonalen jeweils natürliche Zahlen stehen, deren Summe 750 ist!

Mathematikfachlehrer W. Träger, Schloßberg-OS, Döbeln

Silbenrätsel

1. Äußere Begrenzung einer Fläche
2. Halbmesser
3. Beiderseitig begrenztes Stück einer Geraden
4. Griechischer Mathematiker
5. Spezielles Viereck
6. Kreis, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ist
7. Winkelfunktion
8. Lehrsatz aus der Ähnlichkeitslehre
9. Zahlwort
10. Freihandzeichnung
11. Eingliedriger Ausdruck
12. Begriff aus der Mengenlehre
13. Längste Seite des rechtwinkligen Dreiecks
14. Fachausdruck für unentwickelt, unaufgelöst
15. eine Bewegung
16. Ergebnis der Subtraktion
17. Griechischer Buchstabe
18. Grundrechenart
19. Festlegung eines Begriffs

Aus den folgenden Silben sind Wörter der obenstehenden Bedeutung zu bilden. Die zweiten Buchstaben ergeben von oben nach unten gelesen eine alljährlichen schulischen Höhepunkt.

ad - ben - de - di - di - dif - e - eck - fe - fi - fang -gam - ge - gens - hy - im - ke - kreis - le - len - les - lung - ma - ment - mo - ni - nom - nu - on - on - pli - po - ra - recht - renz - satz - se - sie - skiz - spie - strah - strek - tan - te - tha - ti - ti - um - um - us - ze - zit

Oberlehrer Annelies Helwes, OS Burkhardtsdorf

Anekdote

P. A. M. Dirac war es gewöhnt, sich immer klar und deutlich auszudrücken. Nach Ende eines Vortrages fragte er: „Gibt es noch Fragen?" Ein Zuhörer meldete sich: „Ich habe die Herleitung dieser Formel nicht verstanden!" Darauf *Dirac*: „Das ist keine Frage, sondern eine Feststellung. Gibt es noch Fragen?"

Geburt der Potenzwurzel-Lyrik

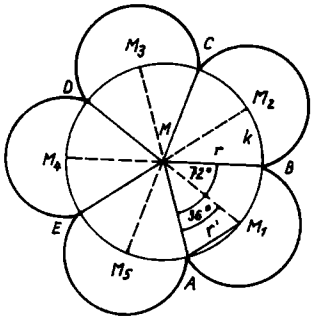
In der Mathestunde
trat ein Integral auf mich zu
und sprach:
Worauf wartest du?
Mach ein Gedicht aus mir ...

Sabine Kühn (16 Jahre), Lyrikclub „Heinrich Heine", Berlin

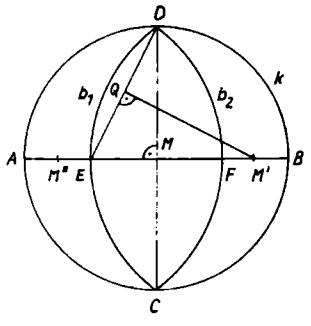
Lösungen

Lösungen zu: Über das Symbol der X. Weltfestspiele

5▲1077▲ Wir zeichnen einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $r=4$ cm. Auf dem Kreis k sollen fünf Punkte (gemeinsame Endpunkte zweier benachbarter kongruenter Kreisbögen) liegen; diese Punkte legen auf dem bereits gezeichneten Kreis k weitere fünf kongruente Kreisbögen fest, die sämtlich den gleichen Mittelpunktswinkel $360°:5=72°$ besitzen. Wir legen deshalb auf dem Kreis k einen Punkt A fest und verbinden ihn mit M. In M tragen wir an $\overline{MA}$ einen Winkel von 72° an, dessen freier Schenkel den Kreis k im Punkt B schneidet. In M tragen wir an $\overline{MB}$ wiederum einen Winkel von 72° an, dessen freier Schenkel k in C schneidet und so fort. Die so erhaltenen fünf kongruente Mittelpunktswinkel sind mit dem Winkelmesser zu halbieren. Die Schnittpunkte dieser Winkelhalbierenden schneiden den Kreis k in den Punkten M_1, M_2, M_3, M_4 und M_5, den Mittelpunkten der noch zu konstruierenden fünf Kreisbögen, für die $r'=\overline{AM_1}$ der gemeinsame Radius ist.

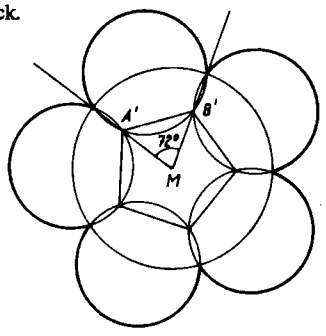


6▲1078▲ Wir zeichnen einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Durchmesser $\overline{AB}=d=7$ cm. Durch M zeichnen wir einen



zweiten Durchmesser $\overline{CD}$, der senkrecht auf $\overline{AB}$ steht. Wir halbieren $\overline{AM}$ und $\overline{MB}$; die Mittelpunkte dieser Strecken seien E und F. Aus Symmetriegründen liegt der Mittelpunkt M' des zum Kreisbogen b_1 gehörenden Kreises auf $\overline{AB}$, zum anderen auf der Mittelsenkrechten der Sehne $\overline{DE}$. Der Mittelpunkt M'' des zum Kreisbogen b_2 gehörenden Kreises liegt dann symmetrisch zu M' bezüglich der Geraden CD als Symmetrieachse.

7▲1079▲ Die Konstruktion der Figur ist aus der Lösung zur 1. Aufgabe ersichtlich. Daraus folgt aber auch, daß sich die Figur bei Drehung um M um einen Winkel von 72° im mathematisch positiven (oder negativen) Sinn auf sich selbst abbildet. Folglich sind die Seiten des entstandenen Fünfecks $A'B'C'D'E'$ und seine Innenwinkel kongruent. Es handelt sich also um ein regelmäßiges Fünfeck.



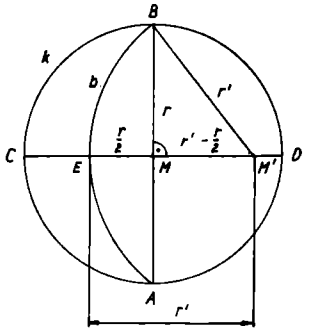
8▲1080▲ Es seien $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ zwei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser des Kreises k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r, und es sei E die Mitte von $\overline{CM}$. Bezeichnen wir den zum Bogen b gehörenden Kreis mit k', seinen Mittelpunkt mit M' und seinen Radius mit r', dann gilt, wie aus der Zeichnung ersichtlich wird,

$$(r')^2 = r^2+\left(r'-\frac{r}{2}\right)^2,$$

$$(r')^2 = r^2+(r')^2-r\cdot r'+\frac{r^2}{4},\quad rr' = \frac{5}{4}r^2,$$

$r' = \frac{5}{4}r$. Folglich erhalten wir

$$\overline{MM'}=\frac{5}{4}r-\frac{1}{2}r=\frac{3}{4}r.$$

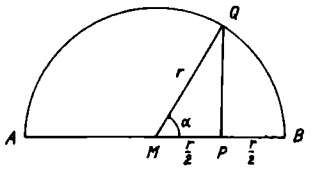


Der Abstand des Mittelpunktes des dargestellten Kreises vom Mittelpunkt des zu einem der Kreisbögen gehörenden Kreises beträgt somit $\frac{3}{4}r$ bzw. $\frac{3}{8}d$, wobei d der Durchmesser des gegebenen Kreises ist.

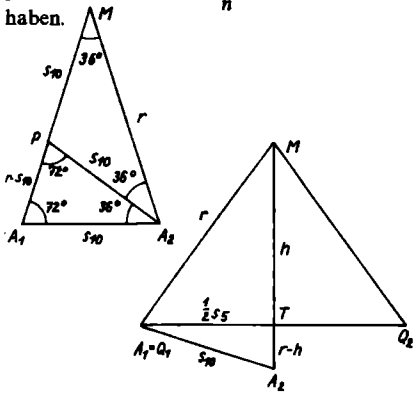
9▲1081▲ Aus der Abbildung wird folgendes ersichtlich:

$$\cos\alpha=\frac{r}{2}:r=\frac{1}{2},\quad \alpha=60°.$$

Die Ebene, die den Längenkreis enthält, bildet mit der Ebene, die den dargestellten Kreis enthält, einen Winkel von 60°.



10/12▲1082▲ Jedes regelmäßige n-Eck läßt sich durch die Radien r vom Mittelpunkt M des Umkreises nach den n Ecken in n kongruente gleichschenklige Dreiecke zerlegen, die den Winkel $\frac{360°}{n}$ an der Spitze M haben.



Es sei Dreieck A_1A_2M mit den Seiten $\overline{A_1A_2}=s_{10}$, $\overline{A_1M}=\overline{A_2M}=r$ und dem Winkel $\sphericalangle A_1MA_2=36°$ eines der zehn kongruenten gleichschenkligen Dreiecke, in die sich ein regelmäßiges Zehn-Eck zerlegen läßt. Die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle A_1A_2M$ schneide die Seite $\overline{A_1M}$ im Punkt P. Dann gelten folgende Winkelbeziehungen:

$$\sphericalangle A_2A_1M = \sphericalangle A_1A_2M=\frac{1}{2}(180°-36°)=72°,$$

$\sphericalangle A_1A_2P=\sphericalangle PA_2M=36°$, $\sphericalangle A_1PA_2 = 180°-(72°+36°)=72°$.

Aus $\sphericalangle A_2A_1P=\sphericalangle A_1PA_2$ folgt nun $\overline{A_1A_2}=\overline{PA_2}=s_{10}$. Aus $\sphericalangle PMA_2=\sphericalangle PA_2M$ folgt $\overline{PM}=\overline{PA_2}=s_{10}$, und es gilt somit $\overline{A_1P}=r-s_{10}$. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle A_1A_2M$ und $\triangle A_1A_2P$ folgt dann

$(r-s_{10}):s_{10}=s_{10}:r$ bzw.

$s_{10}^2+r\cdot s_{10}-r^2=0$.

Die Lösung $s_{10}=\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$ erfüllt diese quadratische Gleichung und genügt dem geometrischen Sachverhalt.

Wie aus der Abbildung ersichtlich wird, gilt zwischen der Seite s_5 eines regelmäßigen Fünfecks und der Seite s_{10} eines regelmäßigen Zehnecks folgende Beziehung:

$$\frac{1}{4}s_5^2+(r-h)^2=s_{10}^2.$$

Wegen $h^2=r^2-\frac{1}{4}s_5^2$ erhalten wir durch Einsetzen dann

$\frac{1}{4}s_5^2+\left(r-\frac{1}{2}\sqrt{4r^2-s_5^2}\right)^2=s_{10}^2$ bzw.

$\frac{1}{4}s_5^2+\left(r-\frac{1}{2}\sqrt{4r^2-s_5^2}\right)^2=\frac{r^2}{4}(\sqrt{5}-1)^2$.

Durch Umformen gewinnen wir daraus

$s_5=\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

W 8 * 950 Zunächst stellen wir fest, daß für $a=0, b=0$ die Zahl $z=a^3+b^3=0$ nicht Primzahl ist. Auch für $a=0$, $b=1$ sowie für $a=1$, $b=0$ ist die Zahl $z=a^3+b^3=1$ nicht Primzahl.

Dagegen erhalten wir für $a=1$, $b=1$

$$z=a^3+b^3=1+1=2.$$

In diesem Fall ist also z eine Primzahl.

Nun nehmen wir an, daß mindestens eine der Zahlen a, b größer als 1 ist. Ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit können wir annehmen, daß $a>1$ ist. Wäre nun $b=0$, so wäre

$$z=a^3+b^3=a^3,$$

d. h., die Zahl z wäre nicht Primzahl, da sie sich in drei Faktoren ($z=a\cdot a\cdot a$) zerlegen läßt, die sämtlich größer als 1 sind. Ist aber $b\geqq 1$, so ist $a+b>1$ und $ab>1$. Wir erhalten jetzt die folgende Faktorenzerlegung:

$z=a^3+b^3=a^3+a^2b-a^2b-ab^2+ab^2+b^3$,

$z=a^2(a+b)-ab(a+b)+b^2(a+b)$,

$z=(a^2-ab+b^2)(a+b)$.

$z=(a^2-ab+b^2)(a+b)$.

Für den ersten Faktor in dieser Faktorenzerlegung gilt nun

$a^2-ab+b^2=a^2-2ab+b^2+ab$

$=(a-b)^2+ab\geqq 2$;

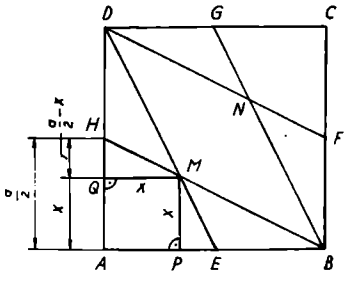
denn $(a-b)^2\geqq 0$ und $ab\geqq 2$.

Für den zweiten Faktor gilt $a+b\geqq 2$. Also sind beide Faktoren größer als 1, d. h. die Zahl z ist in diesem Fall nicht Primzahl.

Damit haben wir bewiesen, daß nur für $a=1$, $b=1$ die Zahl $z=a^3+b^3$ eine Primzahl ist.

9▲951 Die abgebildete Figur ist axialsymmetrisch bezüglich der Symmetrieachsen AC und BD. Daraus folgt $\overline{DM}=\overline{MB}=\overline{BN}=\overline{ND}$, d. h. das Viereck $BNDM$ ist ein Rhombus. Fällen wir jeweils von M das Lot auf $\overline{AB}$ und auf $\overline{AD}$ und bezeichnen wir die Fußpunkte der Lote mit P und Q, so gilt $\overline{MP}=\overline{MQ}=x$, d. h. das Viereck $APMQ$ ist ein Quadrat. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle QMH$ und $\triangle HAB$ folgt $\left(\frac{a}{2}-x\right):x=\frac{a}{2}:a$, also $x=\frac{a}{3}$. Für den Flächeninhalt des Rhombus $BNDM$ gilt somit

$A_R=A_{ABCD}-2\cdot A_{AED}-2\cdot A_{EBM}$,



$A_R=a^2-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{6}a^2=\frac{1}{3}a^2$ und wegen $a=6$cm gilt $A_R=12\,\text{cm}^2$.

Lösungen zu: aufgepaßt, nachgedacht, mitgemacht (Heft 4/73)

Klasse 5

▲1▲ Axel kann mit seiner Feststellung recht haben. Das folgende Beispiel verdeutlicht dies. Der erste Garten habe die Seitenlängen 16 m und 20 m, der zweite Garten habe die Seitenlängen 10 m und 30 m. Dann gilt

$A_1=16\cdot 20\,\text{m}^2=320\,\text{m}^2$,

$u_1=2\cdot(16+20)\text{m}=72\,\text{m}$;

$A_2=10\cdot 30\,\text{m}^2=300\,\text{m}^2$, $u_2=2\cdot(10+30)\text{m}=80\,\text{m}$.

In diesem Falle gilt also $A_1>A_2$, aber $u_1<u_2$.

▲2▲

a) $(m+a)-a>m-n$, also wird die Differenz größer.

b) $(m-a)-a<m-n$, also wird die Differenz kleiner.

c) $(m+a)-(n+a)=m-n$, also bleibt die Differenz konstant.

d) $(m-a)-(n-a)=m-n$, also bleibt die Differenz konstant.

e) $(m+a)-(n+b)>m-n$ für $a>b$, also wird die Differenz größer.

▲3▲

a) Wenn $x>8$, so $x+3>11$, also gewiß $x+3>10$.

b) Wenn $60\cdot x=50\cdot y$, so $x=5\cdot k$ und $y=6\cdot k$, wobei k eine natürliche Zahl ist; also gilt $x<y$.

c) Wenn $5x>10$, so $x>2$; wegen $y>x$ gilt dann $y>3$.

d) Wegen $x>y$ gilt $x=y+k$, wobei k eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist. Nun ist $y+2<y+k+5$, also auch $y+2<x+5$.

e) Wegen $x>y$ gilt $x=y+k$, wobei k eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist. Nun gilt $60-(y+k)<75-y$, also auch $60-x<75-y$.

f) Wenn $y<5$, so $3y<15$, also gewiß auch $3y<17$.

▲4▲ Wegen $c<5$, gilt $5+a<b+c<b+5$, also $5+a<b+5$, d. h. $a<b$.

▲5▲ Es sei z_1 eine zweistellige natürliche Zahl, deren Quersumme 12 beträgt, und es sei z_2 die durch Vertauschen der Grundziffern entstandenen Zahl. Die folgende Tabelle enthält alle möglichen Fälle:

z_1	93	84	75	66	57	48	39
z_2	39	48	57	66	75	84	93

Nur für die Zahl $z_1=39$ gilt $z_2>2\cdot z_1$ bzw. $93>2\cdot 39$. Die Aufgabe besitzt somit genau eine Lösung, nämlich $z_1=39$.

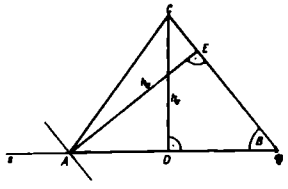
Klasse 6

▲6▲a) Der günstigste Fall tritt ein, wenn das Winterferienlager von Dienstag bis Sonnabend stattfindet. Dann vergeht nur ein Tag, bis Heinz wieder ins Kino gehen kann, da der nächste Tag ein Sonntag ist.

b) Der ungünstigste Fall tritt ein, wenn das Winterferienlager von Mittwoch bis Sonntag stattfindet. Am darauffolgenden Mittwoch könnte Pioniernachmittag sein. Dann müßte Heinz sieben Tage bis zum nächsten Kinobesuch am darauffolgenden Sonntag warten.

▲7▲ Wegen $x>y$ und $x+y>\frac{z}{3}$ gilt sicher $x+x>\frac{z}{3}$ bzw. $2x>\frac{z}{3}$ und damit auch $x>\frac{z}{6}$.

▲8▲ Da der Punkt P ein innerer Punkt des abgebildeten Dreiecks ABC ist, schneidet die Parallele zu BC durch P jede der Dreiecksseiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ jeweils in genau einem inneren Punkt dieser Strecken. Diese Schnittpunkte seien E und F. Für den Umfang des Dreiecks BCP gilt dann $u_1=\overline{BC}+\overline{PB}+\overline{PC}$. Für den Umfang des Trapezes $BCFE$ gilt $u_2=\overline{BC}+\overline{CF}+\overline{FP}+\overline{BE}+\overline{EP}$.



Für den Umfang des Dreiecks ABC gilt $u_3=\overline{BC}+\overline{AE}+\overline{AF}+\overline{BE}+\overline{CF}$. Wegen $\overline{PC}<\overline{CF}+\overline{FP}$ und $\overline{PB}<\overline{BE}+\overline{EP}$ gilt somit $u_1<u_2$. Wegen $\overline{AE}+\overline{AF}>\overline{EP}+\overline{FP}$ gilt ferner $u_2<u_3$, also auch $u_1<u_3$. Daraus folgt $\overline{BC}+\overline{AB}+\overline{AC}>\overline{BC}+\overline{PB}+\overline{PC}$, also auch

$\overline{AB}+\overline{AC}>\overline{PB}+\overline{PC}$.

▲9▲ Wegen $6\cdot 1+3\cdot 3=15$ und $24-15=9$ muß die Summe aus den Noten der übrigen drei Fächer kleiner als 9 sein, damit der Zensurendurchschnitt besser als 2 wird; denn $24:12=2$, aber $23:12<2$. Es seien a, b und c die Noten dieser drei Fächer. Dann gibt es folgende Möglichkeiten:

a	b	c
2	3	3
3	2	3
3	3	2

Diese Noten müssen mindestens erreicht werden, um einen Zensurendurchschnitt besser als 2 zu erhalten.

▲10▲ Nach 30 s hatte Martin $s=v\cdot t=\frac{5}{8}\,\text{m}\cdot 30\,\text{s}=150\,\text{m}$ zurückgelegt. Norbert hingegen hatte in dieser Zeit höchstens 135 m geschafft. Seine Geschwindigkeit kann daher höchstens $\frac{135}{30}\frac{\text{m}}{\text{s}}=4{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}}$ betragen.

W 9*991 Aus $a^2+b^2+c^2=1$ folgt $(a^2+b^2+c^2)^2=1$, also

$a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2=1$,

$a^4+b^4+c^4+a^2(b^2+c^2)+b^2(a^2+c^2)+c^2(a^2+b^2)=1$. Nun folgt aus (3)

$a+b+c=0$

$a+b=-c$,

$(a+b)^2=c^2$,

$a^2+b^2+2ab=c^2$,

$a^2+b^2=c^2-2ab$. Analog folgt (4)

$$b^2+c^2=a^2-2bc, \quad (5)$$
$$a^2+c^2=b^2-2ac. \quad (6)$$

Daher folgt aus (4), (5), (6) durch Einsetzen in (3)

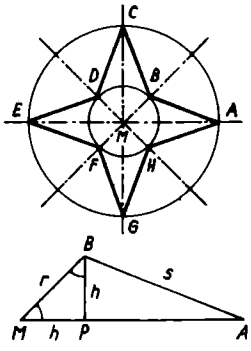
$a^4+b^4+c^4+a^2(a^2-2bc)+b^2(b^2-2ac)$
$+c^2(c^2-2ab)=1,$
$a^4+b^4+c^4+a^4+b^4+c^4-2a^2bc-2ab^2c-$
$-2abc^2=1,$
$2(a^4+b^4+c^4)-2abc(a+b+c)=1.$

Wegen $a+b+c=0$ folgt hieraus weiter

$$2(a^4+b^4+c^4)=1,$$
$$z=a^4+b^4+c^4=\frac{1}{2}.$$

W 9*992 a) Da das Stern-Achteck symmetrisch ist und MA, MB, MC, MD Symmetrie-Achsen sind, sind die Dreiecke MAB, MBC, MCD, MDE usw. einander kongruent, und ihre bei M liegenden Winkel sind jeweils gleich 45°. Der Flächeninhalt A des Stern-Achtecks ist daher achtmal so groß wie der Flächeninhalt A_1 des Dreiecks MAB (siehe Bild 1). Um nun diesen Flächeninhalt zu berechnen, ermitteln wir zunächst die Länge h der Höhe $\overline{BP}$ in dem Dreieck MAB (siehe Bild 2). Wegen $\sphericalangle BMP=45°$ gilt auch $\sphericalangle PBM=45°$ und daher $\overline{MP}=\overline{BP}=h$. Wir erhalten also nach dem Satz des Pythagoras

$$h^2+h^2=r^2,$$
$$2h^2=r^2,$$
$$h=\frac{r}{2}\sqrt{2}.$$



Wegen $\overline{MA}=R$ ist daher der Flächeninhalt des Dreiecks MAB gleich

$$A_1=\frac{1}{2}Rh=\frac{Rr}{4}\sqrt{2},$$

also der Flächeninhalt des Stern-Achtecks gleich

$$A=8A_1=2Rr\sqrt{2}.$$

b) In dem rechtwinkligen Dreieck BPA gilt nach dem Satz des Pythagoras wegen $\overline{PA}=R-h$ für die Seite $s=\overline{AB}$ des Stern-Achtecks

$$s^2=(R-h)^2+h^2=R^2+2h^2-2hR.$$

Wegen $2h^2=r^2$ und $h=\frac{r}{2}\sqrt{2}$ folgt hieraus

$$s^2=R+r^2-Rr\sqrt{2},$$
$$s=\sqrt{R^2+r^2-Rr\sqrt{2}}.$$

c) Für $R=r$ wird aus der sternförmigen Figur $ABCDEFGH$ ein regelmäßiges Achteck, da dann alle Eckpunkte auf einem Kreis um M mit dem Radius r liegen und die Strahlen MA und MB, MB und MC usw. miteinander einen Winkel von 45° bilden. Der Flächeninhalt des regelmäßigen Achtecks mit dem Umkreisradius r beträgt daher

$$A=2r^2\sqrt{2}$$

und die Seitenlänge

$$s=\sqrt{2r^2-r^2\sqrt{2}}=r\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

in Übereinstimmung mit den in dem Tafelwerk, 7.–12. Klasse, S. 53, angegebenen Formeln.

10/12▲993 Es seien x und y zwei natürliche Zahlen, für die die Gleichung

$$2^x=y!+304 \quad (1)$$

erfüllt ist. Dann gilt $2^x>304$. Wegen $2^8=256$ und $2^9=512$ gilt also $x\geqq 9$. (2)

Wegen $304=2^4\cdot 19$ folgt daher aus (1)

$$2^x=y!+2^4\cdot 19,$$
$$y!=2^4(2^{x-4}-19).$$

Wegen (2) ist dabei $x-4\geqq 5$; also ist $y!$ durch 2^4, aber nicht durch 2^5 teilbar.

Nun sind $0!=1$, $1!=1$, $2!=2$, $3!=2\cdot 3$, $4!=2^3\cdot 3$, $5!=2^3\cdot 3\cdot 5$ nicht durch 2^4 teilbar. Dagegen sind $6!=2^4\cdot 3^2\cdot 5$ und $7!=2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$ durch 2^4, aber nicht durch 2^5 teilbar, während $y!$ für $y>7$ durch 2^5 teilbar ist.

Für $y=6$ erhalten wir

$$y!+304=720+304=1024=2^{10} \quad (3)$$

für $y=7$ erhalten wir

$y!+304=5040+304=5344=2^5\cdot 167$,

in diesem Fall ist also $y!$ nicht gleich einer Potenz von 2. Wegen (3) ist daher die Gleichung (1), wenn x und y natürliche Zahlen sind, nur für $x=10$ und $y=6$ erfüllt. Daher ist das geordnete Paar (10, 6) die einzige Lösung, die die gestellten Bedingungen erfüllt.

10/12▲994 Für alle positiven ganzen Zahlen n und a gilt, da das arithmetische Mittel zweier verschiedener nicht negativer reellen Zahlen stets größer als ihr geometrisches Mittel ist,

$$Z=\sqrt[n]{a+2}+\sqrt[n]{a-1}>2\cdot\sqrt{\sqrt[n]{a+2}\cdot\sqrt[n]{a-1}}$$
$$=2\sqrt[2n]{(a+2)(a-1)},$$

$$Z>2\cdot 2\sqrt[n]{a^2+a-2}.$$

Nun müssen wir die folgenden beiden Fälle unterscheiden:

1. Fall: $a\geqq 2$

Dann gilt $a^2+a-2\geqq a^2$,

also $Z>2\cdot\sqrt[2n]{a^2}=2\cdot\sqrt[n]{a}$.

2. Fall: $a=1$

Dann gilt

$$Z=\sqrt[n]{a+2}+\sqrt[n]{a-1}=\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{1}$$
$$=\sqrt[n]{3}+1>2=2\cdot\sqrt[n]{a}.$$

In den beiden Fällen gilt also $Z=\sqrt[n]{a+2}+\sqrt[n]{a-1}>2\cdot\sqrt[n]{a}$. Daraus folgt $\sqrt[n]{a+2}-\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{a-1}$, w.z.b.w.

W 10/12■995 a) Wir erhalten

$$\frac{10\cdot 10^9}{144{,}5\cdot 10^6}=\frac{100\,000}{1\,445}\approx 69{,}2.$$

Bei jährlich gleichbleibender Förderung würden also die Vorkommen noch für 69,2 Jahre reichen.

b) Es seien

a = 144,5 die Erdölförderung des Jahres 1969 (in Mill. t),

q = 1,07 der jährliche Wachstumsfaktor der Erdölförderung

n = die Anzahl der Jahre, in denen noch gefördert werden kann,

c = 10000 die Erdölvorkommen (in Mill. t).

Dann gilt

$$aq+aq^2+\ldots+aq^n=c,$$
$$aq\frac{q^n-1}{q-1}=c,$$
$$q^n-1=\frac{c(q-1)}{aq},$$
$$q^n=\frac{c(q-1)}{aq}+1.$$

Setzen wir für c, q und a die obigen Werte ein, so erhalten wir

$$1{,}07^n=\frac{10\,000\cdot 0{,}07}{144{,}5\cdot 1{,}07}+1=4{,}53+1=5{,}53.$$

Durch Logarithmieren erhalten wir hieraus

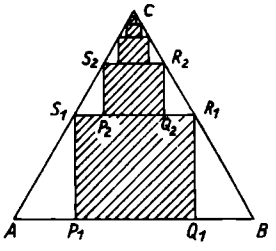
$$n\cdot\lg 1{,}07=\lg 5{,}53$$
$$n=\frac{\lg 5{,}53}{\lg 1{,}07}=\frac{0{,}7427}{0{,}0294}=25{,}3.$$

In diesem Falle reichen also die Erdölvorkommen nur noch für 25,3 Jahre.

W 10/12■996 Es seien $P_1Q_1R_1S_1$ das erste Rechteck, $P_2Q_2R_2S_2$ das zweite Rechteck der Folge usw. (vgl. die Abb.). Dann gilt nach Voraussetzung

$$\overline{P_1Q_1}=\overline{R_1S_1}=\frac{a}{2},\ \overline{P_2Q_2}=\overline{R_2S_2}=\frac{a}{4}\ \text{usw.}$$

Nun denken wir uns das Dreieck ABC in eine Folge von gleichschenkligen Trapezen ABR_1S_1, $S_1R_1R_2S_2$ usw. zerlegt.



Der Flächeninhalt des ersten Trapezes, dessen Höhe wir mit h_1 bezeichnen, ist gleich

$$F_1=\frac{1}{2}\left(a+\frac{a}{2}\right)h_1=\frac{3}{4}ah_1.$$

Dagegen ist der Flächeninhalt des ersten Rechtecks $P_1Q_1R_1S_1$ gleich

$$F_1'=\frac{a}{2}h_1=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}ah_1=\frac{2}{3}F_1.$$

Analog erhalten wir für den Flächeninhalt des zweiten Rechtecks

$$F_2'=\frac{2}{3}F_2,$$

wobei F_2 der Flächeninhalt des zweiten Trapezes der Folge ist. Für jedes Rechteck der Folge gilt nun, daß sein Flächeninhalt gleich $\frac{2}{3}$ des Flächeninhalts des ihm umbeschriebenen Trapezes ist. Daher ist die Summe der Flächeninhalte F' aller Rechtecke gleich $\frac{2}{3}$ der Summe aller Trapeze, also gleich $\frac{2}{3}$ des Flächeninhalts F des

Dreiecks ABC. Wir erhalten daher für den Flächeninhalt der treppenförmigen Figur

$$F' = \frac{2}{3}F = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{a^2}{6}\sqrt{3}.$$

*W*10/12 * 997 1. Es sei $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$.
Dann folgt aus (1) und (2)

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n,$$
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1.$$

Das ist aber ein Widerspruch wegen $n \geqq 2$.
2. Es sei $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = -1$.
Dann folgt aus (1) und (2)

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -n$$
$$-(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \begin{cases} 1, \text{ falls } n \text{ gerade} \\ -1, \text{ falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Auch hier erhalten wir wegen $-n \leqq -2$ einen Widerspruch.
Im Falle $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ hat also das Gleichungssystem keine Lösung.
3. Es seien nicht alle a_i einander gleich. Dann ist mindestens eines der a_i gleich 1 und mindestens eines der a_i gleich -1.
Wir können jetzt o.B.d.A. die a_i so numerieren, daß
$a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 1$ und $a_{k+1} = a_{k+2} = \ldots = a_n = -1$ ist, wobei $0 < k < n$ gilt.
3.1. Nun sei $n-k$, d. h. die Anzahl der a_i, die gleich -1 sind, gerade. Dann folgt aus (1) und (2)

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k) + (x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_n) = k + (n-k) = 2k - n, \quad (3)$$
$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k) - (x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_n) = 1. \quad (4)$$

Hieraus folgt durch Addition

$$2(x_1 + x_2 + \ldots + x_k) = 2k - n + 1,$$
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = k - \frac{n-1}{2}.$$

Das Gleichungssystem (1), (2) hat also *keine* ganzzahligen Lösungen, wenn n eine *gerade* Zahl ist. Dann ist nämlich $\frac{n-1}{2}$ nicht ganzzahlig, also können nicht alle x_i ganzzahlig sein. Ist aber n eine *ungerade* Zahl, so ist $\frac{n-1}{2}$ ganzzahlig, und wir können auch eine ganzzahlige Lösung angeben. Wir setzen nämlich

$$x_1 = k - \frac{n-1}{2},$$
$$x_2 = x_3 = \ldots = x_{n-1} = 0,$$
$$x_n = k - \frac{n+1}{2} \text{ und erhalten}$$

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k) + (x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_n) = k - \frac{n-1}{2} + k - \frac{n+1}{2} = 2k - n,$$
$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k) - (x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_n) = k - \frac{n-1}{2} - k + \frac{n+1}{2} = 1,$$

d. h. die Gleichungen (3) und (4) und damit auch die Gleichungen (1) und (2) sind erfüllt.
3.2. Ist nun $n-k$, d. h. die Anzahl der a_i, die gleich -1 sind, *ungerade*, so erhalten wir wieder die Gleichungen (3) und (4'), wobei aber auf der rechten Seite von (4') die Zahl -1 steht.
Weiter erhalten wir analog wie oben

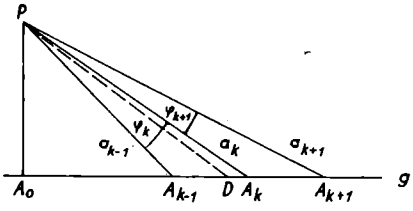
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = k - \frac{n+1}{2}.$$

Auch in diesem Falle hat das Gleichungssystem (1), (2) *keine* ganzzahligen Lösungen, wenn n *gerade* ist.
Ist aber n *ungerade*, so hat das Gleichungssystem (1), (2) ganzzahlige Lösungen, z. B.

$$x_1 = k - \frac{n+1}{2},$$
$$x_2 = x_3 = \ldots = x_{n-1} = 0,$$
$$x_n = k - \frac{n-1}{2}.$$

Dann sind nämlich die Gleichungen (3), (4') und damit auch die Gleichungen (1), (2) erfüllt. Damit haben wir die Behauptung der Aufgabe bewiesen.

W 10/12 * 998 Zum Beweis der Behauptung genügt es zu zeigen, daß für zwei beliebige aufeinanderfolgende Winkel φ_k und φ_{k+1} ($k = 1, 2, \ldots, n-1$) stets $\varphi_k > \varphi_{k+1}$ gilt. Nun sei $a_{k-1} = \overline{PA_{k-1}}$, $a_{k+1} = \overline{PA_{k+1}}$ (vgl. die Abb.).



In dem Dreieck $PA_{k-1}A_{k+1}$ ist der Winkel $\sphericalangle PA_{k-1}A_{k+1}$ stumpf und der Winkel $\sphericalangle A_{k-1}A_{k+1}P$ spitz; daher gilt

$$a_{k+1} > a_{k-1}, \text{ also } \frac{a_{k-1}}{a_{k+1}} < 1,$$

weil in jedem Dreieck dem größeren von zwei Winkeln die größere Seite gegenüberliegt.
Ist nun $\overline{PD}$ Winkelhalbierende in diesem Dreieck, so gilt, weil nach einem bekannten Satz der Geometrie eine Winkelhalbierende die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt,

$$\frac{\overline{A_{k-1}D}}{\overline{DA_{k+1}}} = \frac{a_{k-1}}{a_{k+1}} < 1.$$

Da A_k Mittelpunkt der Strecke $\overline{A_{k-1}A_{k+1}}$ ist, liegt also D innerhalb der Strecke $\overline{A_{k-1}A_k}$. Daher liegt auch $\overline{PD}$ innerhalb des Dreiecks $PA_{k-1}A_k$, und es gilt $\varphi_k > \varphi_{k+1}$, w.z.b.w.
Bemerkung: Mit Hilfe der Trigonometrie kann man die Behauptung noch schneller beweisen. Da die Dreiecke $PA_{k-1}A_k$ und PA_kA_{k+1} in der Länge der Grundlinie und der Höhe übereinstimmen, sind ihre Flächeninhalte gleich, und es gilt

$$\frac{1}{2}a_{k-1}a_k \sin\varphi_k = \frac{1}{2}a_k a_{k+1} \sin\varphi_{k+1},$$

also $$\sin\varphi_k = \frac{a_{k+1}}{a_{k-1}} \sin\varphi_{k+1}.$$

Hieraus folgt wegen $\frac{a_{k+1}}{a_{k-1}} > 1$ (vgl. Abs. 1 der Lösung)
$\sin\varphi_k > \sin\varphi_{k+1}$, also $\varphi_k > \varphi_{k+1}$, w.z.b.w.

5▲1003 Wir zerlegen 64 in ein Produkt von drei Faktoren, die sämtlich natürliche Zahlen sind, und ermitteln die zugehörigen Oberflächen $A_0 = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$. Die folgende Tabelle enthält alle möglichen Fälle.

a	b	c	A_0
1	1	64	258
1	2	32	196
1	4	16	168
1	8	8	160
2	2	16	136
2	4	8	112
4	4	4	96

Der Quader, der die Form eines Würfels besitzt, hat die kleinste Oberfläche.

5▲1004 Aus 0,23 M + 0,20 M + 4 · 0,08 M = 0,75 M und 4 · 0,75 M = 3,00 M folgt, daß Karin genau 3,00 M bei sich hatte. Nach dem Einkauf besaß Karin noch 3,00 M − 0,75 M − 0,44 M = 1,81 M.

W 5 ■ 1005 Wir zeichnen die Gerade AB; ihr Schnittpunkt mit g sei Q, und wir verbinden Q mit A'. Dann zeichnen wir die Gerade BA', ihr Schnittpunkt mit g sei P. Die nun zu zeichnende Gerade AP schneidet die Gerade QA' in B', dem Bildpunkt von B.

W 5 ■ 1006 Die erste Verkaufsstelle erhielt 1 200 : 3 = 400 Schachteln Pralinen. Die zweite Verkaufsstelle erhielt (1 200 − 400) : 4 = 200 Schachteln. Die dritte und vierte Verkaufsstelle erhielten je (1 200 − 600) : 2 = 300 Schachteln Pralinen.
Die ausgelieferte Menge wog 1 200 · 125 g = 150 000 g = 150 kg.

W 5 * 1007 Da keine Ziffer mehr als zweimal vorkommen darf, entfallen 12, 13, 14, ..., 19 als erste zwei Ziffern. In diesen Fällen wären nämlich die zugehörigen Quotienten 2, 3, 4, ..., 9 und diese Ziffern würden dreimal, also mehr als zweimal vorkommen. Aus dem gleichen Grunde entfallen 24 und 39 als erste zwei Ziffern. Die Zahl, die der zweiten Ziffer entspricht, ist Vielfaches der Zahl, die der ersten Ziffer entspricht. Deshalb verbleiben noch folgende Möglichkeiten:
26 326, 28 428, 36 236, 48 248.
Wegen 26 362 − 26 326 = 36 > 30, 28 482 − 28 428 = 54 > 30, 48 284 − 48 248 = 36 > 30 verbleibt als einzige Lösung 36 236; denn es gilt 36 263 − 36 236 = 27 und 20 < 27 < 30.
Vor Antritt der Fahrt lautete der Tachometerstand 36 236. Der Lehrer hat 27 km zurückgelegt.

W 5 * 1008 Wir fertigen uns eine Tabelle an. Es sei a das Lebensalter von Axel, b das von Bernd und d das von Dieter.

$a+b$	a	b	$a+3=d$	$b-9=d$
22	1	21	4	12
22	2	20	5	11
22	3	19	6	10
22	4	18	7	9
22	5	17	8	8
22	6	16	9	7
..	.	..	.	.
22	14	10	17	1

Nur für $a=5$ und $b=17$ ist $a+3=b-9$. Axel ist 5, Bernd 17 und Dieter 8 Jahre alt.

6▲1009 Die Grundziffern der Zehnerstelle der zu ermittelnden dreistelligen Zahlen könnten 2, 3, 5 oder 7 lauten. Da 4 und 9 teilerfremd sind und $4 \cdot 9 = 36$ ist, sind natürliche Zahlen durch 36 teilbar, wenn sie durch 4 und durch 9 teilbar sind.
Bei Verwendung der Grundziffer 2 könnten unter Beachtung der Teilbarkeit durch 4 die beiden letzten Ziffern 20, 24 oder 28 lauten. Unter Beachtung der Teilbarkeit durch 9 erhalten wir schließlich 720, 324 und 828.
Bei Verwendung der Grundziffer 3 erhalten wir bei analogem Vorgehen zunächst 32, 36, danach 432 und 936. Auf die gleiche Weise ermitteln wir die restlichen Zahlen mit der geforderten Eigenschaft: 252, 756, 972, 576.

6▲1010 Spiegeln wir das Rechteck $ABCD$ an der Geraden AB als Symmetrieachse und sei C' Bildpunkt von C, dann gilt $\overline{BC} = \overline{BC'} = a$, also $\overline{CC'} = 2a$. Ferner gilt $\overline{AC} = \overline{AC'} = 2a$. Das Dreieck $AC'C$ ist somit gleichseitig, also auch gleichwinklig. Der Winkel $\sphericalangle CAC'$ beträgt demnach 60°. Die Symmetrieachse AB halbiert diesen Winkel, also Winkel $\sphericalangle CAB = 30°$.

W 6 ■ 1011 Nach Voraussetzung gilt $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$ und damit $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCA = \sphericalangle CAB = 60°$. Der Außenwinkel $\sphericalangle CBD$ des Dreiecks ABC beträgt somit 120°. Aus $\overline{BC} = \overline{BD}$ folgt $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BDC = \frac{1}{2}$ (180° − 120°) = 30° und somit $\sphericalangle ACD = 60° + 30° = 90°$, das heißt $AC \perp CD$.

W 6 ■ 1012 Eine Kugel der Sorte A möge a Gramm, eine der Sorte B möge b Gramm usw. wiegen. Dann gilt:
a) $a = 2b$ und $b = 3c$ und $c = 5d$;
daraus folgt
$a = 2b$ und $2b = 6c$ und $6c = 30d$,
also $a = 30d$.
30 Kugeln der Sorte D halten einer Kugel der Sorte A das Gleichgewicht.
b) Aus $c = 5d$ folgt $4c = 20d$. Aus $20d + 5c$ folgt durch Einsetzen $4c + 5c = 9c$. Aus $b = 3c$ folgt $3b = 9c$, also $20d + 5c = 3b$. 3 Kugeln der Sorte B halten 20 Kugeln der Sorte D und 5 Kugeln der Sorte C das Gleichgewicht.

W 6 * 1013 Aus $\alpha = 70°$ und $\beta = 80°$ folgt Winkel $\sphericalangle ACB = \gamma = 30°$, da die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks 180° beträgt. Ferner gilt $2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 180°$, also $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 90°$. Aus $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha = 70°$ und $\alpha_3 = 90° - (\alpha_1 + \alpha_2)$ folgt $\alpha_3 = 90° - 70° = 20°$. Somit gilt $\alpha_2 = \gamma - \alpha_3 = 30° - 20° = 10°$, $\alpha_1 = \alpha - \alpha_2 = 70° - 10° = 60°$.

W 6 * 1014 Wir legen auf g_1 einen Punkt B fest und schlagen um B mit dem Radius $\overline{BD} = 6{,}0$ cm einen Kreis, der g_2 wegen $\overline{BD} > h$ in den Punkten D und D' schneidet. Ein weiterer Kreis um B mit $\overline{BC} = 4{,}5$ cm als Radius schneidet wegen $\overline{BC} > h$ die Gerade g_2 in den Punkten C_1 und C_2. Der Kreis um D mit dem Radius $\overline{AD} = 3{,}8$ cm schneidet g_1 wegen $\overline{AD} > h$ in den Punkten A_1 und A_2. Es sind auf diese Weise vier paarweise nicht kongruente Trapeze A_1BC_1D, A_1BC_2D, A_2BC_1D oder A_2BC_2D entstanden, die sich durch die nicht flächengleichen Dreiecke $\triangle A_1A_2D$ und $\triangle BC_1C_2$ unterscheiden. Schlägt man um D' einen weiteren Kreis mit dem Radius $\overline{AD}$, so schneidet dieser g_1 in den Punkten A_3 und A_4. Jedes der so entstehenden weiteren Trapeze ist aber einem der bereits konstruierten Trapeze kongruent, wovon man sich leicht überzeugen kann. Es gibt also genau vier Lösungen.

7▲1015 Aus Winkel $\sphericalangle ECF = 45°$ und Winkel $\sphericalangle CEF = 90°$ folgt $\sphericalangle EFC = 45°$; also gilt auch $\overline{CE} = \overline{EF}$. Da die Gerade FB senkrecht auf dem Radius $\overline{AB}$ des Kreises k steht, ist die Gerade FB ebenfalls Tangente an den Kreis k. Folglich gilt für die Tangentenabschnitte $\overline{EF} = \overline{FB}$. Deshalb gilt auch $\overline{CE} = \overline{EF} = \overline{FB}$.

7▲1016 Wir spiegeln A an s_1, B an s_2 als Symmetrieachse. Es sei A' Bildpunkt von A, B' Bildpunkt von B. Die Verbindungsgerade $A'B'$ schneide s_1 in P und s_2 in Q. Der Streckenzug $\overline{APQB}$ gibt den Verlauf des zu konstruierenden Lichtstrahles an.
Auf Grund der Symmetrieverhältnisse gilt $\varphi_1 = \varphi_2$; ferner gilt $\varphi_2 = \varphi_3$ (Scheitelwinkel) und somit auch $\varphi_1 = \varphi_3$. Es sei h das in P auf s_1 errichtete Einfallslot des Lichtstrahls. Dann gilt $\alpha_1 = 90° - \varphi_1$ und $\alpha_2 = 90° - \varphi_3 = 90° - \varphi_1$, also gilt für Ein- und Ausfallwinkel $\alpha_1 = \alpha_2$. Analoge Überlegungen über die Reflexion in Q führen zu entsprechenden Ergebnissen.

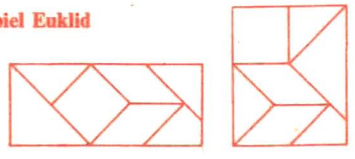
W 7 ■ 1017 Angenommen Aussage R_1 sei wahr, d. h. Mannschaft C belegte den zweiten Platz. Dann muß Aussage S_1 falsch und somit Aussage S_2 wahr sein. Das steht im Widerspruch zur Annahme. Deshalb ist Aussage R_1 falsch und Aussage R_2 wahr, d. h. den dritten Platz belegte Mannschaft D.
Daraus folgt, daß Aussage T_2 falsch und somit Aussage T_1 wahr ist. Den zweiten Platz belegte Mannschaft A. Daraus folgt weiter, daß Aussage S_2 falsch und somit Aussage S_1 wahr ist; den ersten Platz belegte Mannschaft C. Den vierten Platz belegte deshalb Mannschaft B.

Lösung von Seite 79

Das Rad muß in Richtung A in Bewegung gesetzt werden.

Lösungen zu alpha-heiter 4/73

Legespiel Euklid

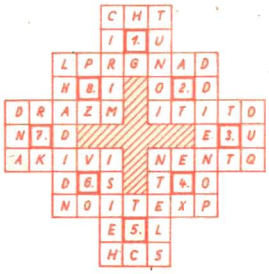


Zum Copernicus-Jahr

In der mittleren Summe ist $I = 1$ und $E = 9$. Dann kann in der mittleren Reihe N nur 2 sein, denn $N = 3$ ergäbe für S den Wert 9, der jedoch bereits belegt ist. P ist daher 4 und $C = 3$. Die übrigen Werte lassen sich nun leicht bestimmen.

$$\begin{array}{rcl} 708 + 486 & = & 1\,194 \\ - \quad\; \cdot & & + \\ 324 : \quad 2 & = & 162 \\ \hline 384 + 972 & = & 1\,356 \end{array}$$

Wabenrätsel



Magisches Zahlenquadrat

Laut Einerstelle der Hauptdiagonale muß $3 \cdot \boxtimes = 0 + k \cdot 10$ mit $k \in \{0; 1; 2\}$ gelten. Hieraus folgt $\boxtimes = 0$.
Laut Zehnerstelle der Hauptdiagonale muß nunmehr weiterhin $3 \cdot \boxtimes = 5 + k \cdot 10$ mit $k \in \{0; 1; 2\}$ gelten. Hieraus folgt $k = 1$ und $\boxtimes = 5$.
Gemäß mittlerer Zeile muß $3 \cdot \square \cdot 100 + (\square\square + 50 + \square\square) = 750$ gelten. Hiernach muß $\square\square + 50 + \square\square$ zunächst ein ungerades Vielfaches von 50 sein, für das nunmehr weiterhin $50 \leqq \square\square + 50 + \square\square \leqq 250$ gelten muß. Damit ergibt sich die Abschätzung $400 \leqq 3 \cdot \square \cdot 100 \leqq 700$. Mithin muß $\square = 2$ gelten. Gemäß Einerstelle der mittleren Spalte muß $\square + \square = 10$ gelten. Damit ergibt sich laut Zehnerstelle der mittleren Spalte $\boxtimes = 7$ und laut Hunderterstelle dieser Spalte $\boxtimes = 4$.
Gemäß Hunderterstelle der ersten Zeile ergibt sich nunmehr $\square = 1$ und damit folgt aus $\square + \square = 10$ weiterhin $\square = 9$. Gemäß Hunderterstelle der letzten Zeile muß nunmehr $\square = 3$ gelten.
Die Lösung lautet:

150	479	121
221	250	279
379	21	350

Silbenrätsel

Umfang, Radius, Strecke, Thales, Rechteck, Umkreis, Tangens, Strahlensatz, Sieben, Skizze, Monom, Element, Hypotenuse, implizit, Spiegelung, Differenz, Gamma, Addition, Definition – Mathematikolympiade.

Arbeitspläne Mathematik

für die außerunterrichtliche Tätigkeit der Klassen 7/8

In Nummer 4/72 der Zeitschrift *alpha* wurde ein Vorschlag der außerunterrichtlichen Tätigkeit in Mathematik für die Klassenstufen 5/6 vorgelegt. Wir erweitern nunmehr diesen Vorschlag auf die Klassenstufen 7/8. Nachfolgend angegebene Stoffgebiete und Stoffinhalte bauen organisch auf den bereits dargelegten Stoffgebieten und Stoffinhalten für die Klassenstufen 5/6 auf. Es ist deshalb notwendig, zu sichern, daß die Schüler die wesentlichen Inhalte des Vorschlages für die Klassenstufen 5/6 beherrschen. Das betrifft insbesondere die Stoffgebiete:

Logik, Mengenlehre, Algebra, Zahlentheorie, Analysis und Geometrie (Anwendung mengentheoretischer Grundlagen).

Bei unseren Vorschlägen ist stets zu beachten, daß es uns nicht auf eine Definition zahlreicher abstrakter Begriffe ankommt, sondern daß die Begriffsbildung stets am Ende einer sorgfältigen aus Beispielen und Übungen bestehenden Vorbereitung erfolgt. Nicht alle Begriffe können explizit definiert werden (z. B. der Begriff Strategie), es geht aber stets darum, inhaltliche Vorstellungen zu entwickeln.

In diesem Vorschlag für die Klassenstufen 7/8 werden neben einigen vollkommen neuen Stoffinhalten auch eine Reihe von bekannten Stoffinhalten aus dem Mathematikunterricht angeboten. Das ist einerseits notwendig, um den allgemeinen Zusammenhang zu wahren; andererseits kommt es gerade darauf an, diese Stoffinhalte zu vertiefen, zu ergänzen und mit den neuen Stoffinhalten zu verbinden. Das ist vor allem in Hinsicht auf eine systematische Vorbereitung auf die Mathematik-Olympiaden notwendig.

Bei der Auswahl der Lehrstoffe wurde versucht, die Beziehungen zwischen den einzelnen Stoffgebieten herauszuarbeiten. Dabei standen nicht die Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Stoffgebieten im Vordergrund; es kam vielmehr darauf an, die Sachverhalte (auch an Beispielen) von verschiedenen Seiten – z. B. mengentheoretisch, logisch, algebraisch und zahlentheoretisch – zu betrachten. In Klassenstufe 7 steht in diesem Sinne der Äquivalenzbegriff im Mittelpunkt, in Klassenstufe 8 sind es die Begriffe Abbildung und Gruppe.

In Zusammenhang mit unseren Vorschlägen sei darauf hingewiesen, daß Ungleichungen zunehmend an Bedeutung auch in den Mathematik-Olympiaden gewinnen.

K. D. Klöpfel/W. Rautenberg

Klassenstufe 7

1. Logik

1. Aussageformen und deren Komposition, Vorrangdefinition zur Klammereinsparung
2. Erfüllbare, nichterfüllbare und allgemeingültige Ausdrücke
3. Semantische Äquivalenz (von Aussageformen)
4. Logische Interpretation der Begriffe „notwendig" und „hinreichend", Zusammenhang zur Implikation

2. Mengenlehre

1. Kreuzmenge, zweistellige Relationen
Reflexivität Symmetrie und Transitivität bei zweistelligen Relationen
2. Ordnungsrelationen
Geordnete und teilweise geordnete Mengen, ev. Anwendung der Ergebnisse auf die Potenzmenge
3. Äquivalenzrelationen
Äquivalenzklassen, endliche Zahlen als Klasseneinteilung der endlichen Mengen nach ihrem Umfang, Extensionalität der semantischen Äquivalenz von Ausdrücken (z. B. daß äquivalente Ausdrücke gleiche Mengen beschreiben)

3. Algebra

1. *Äquivalenz von Termen* (Wertverlaufsgleichheit)
Äquivalentes Umformen einfacher, insbesondere arithmetischer Terme (z. B. $a(b+c)$ ist äquivalent $ab+ac$), Vorrangregeln zur Klammereinsparung
2. *Gleichungen*
Darstellung der Äquivalenz von Termen in Form von Gleichungen, Äquivalenz von Gleichungen, lineare Gleichungen mit einer zu bestimmenden Variablen
3. *Strukturerweiterungen algebraischer Strukturen* – Beispiele: Erweitern natürlicher Zahlen auf gebrochene Zahlen, Erweitern der positiven Zahlen auf rationale Zahlen, Besonders hervorzuheben ist die Äquivalenzklassenbildung bei Strukturerweiterungen, z. B. gebrochene Zahlen als Klassen von Brüchen, rationale Zahlen als Klassen von Zahlenpaaren

4. Zahlentheorie

1. Zahlenkongruenzen, Restklassen als Äquivalenzklassen (mengentheoretische Auffassung)
Grundrechenarten mit Restklassen, Repräsentantenauswahl, primitive Restklassen, äquivalentes Umformen von Kongruenzen, z. B. $a \equiv b \bmod c \Rightarrow at \equiv bt \bmod c$ mit $t \in \Gamma$
2. Diskussion der Kongruenz $ax \equiv \bmod c$, wobei x zu bestimmen ist; Unterschied zu Gleichungen deutlich herausarbeiten

5. Analysis

1. Spezielle Ungleichungen, z. B.
$|a \pm b| \leqq |a| + |b|$,
$x + \frac{1}{x} \geqq 2$ u. a.
2. Äquivalentes Umformen von Ungleichungen bei Anwendung der vier Grundrechenarten und des Potenzierens; Problem der Umkehrbarkeit (z. B. $a^2 < b^2 \to a < b$?)
3. Einfache lineare Ungleichung mit und ohne Absolutbetrag, z. B.
$|x-3| < |x-2|$, oder
$|x-2| - 2x = 5$
Fallunterscheidung bei Auflösen des Betragszeichens
4. Spezielle Anwendungen des Betragszeichens z. B. beim Bestimmen des Maximums zweier Zahlen a, b

$$\max(a, b) = \frac{|a+b| + |a-b|}{2}$$

6. Geometrie

1. Grundlagen

a) Inzidenzgeometrie
Inzidenzbeziehungen (liegt in, geht durch, verbinden, schneiden), Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen, Parallelitätsrelation

b) Kreis
Sehnen-, Tangentenvierecke, Beziehungen zwischen Kreis und Dreieck (Umkreis, Inkreis, Ankreis), Spiegelung am Kreis

2. Konstruktionen

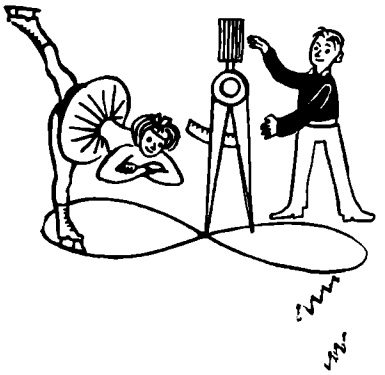
a) Kreis: Tangentenkonstruktionen (von Punkt an Kreis, gemeinsame Tangenten zweier Kreise), Dreieckskonstruktionen unter Verwendung der Sätze über den Kreis (z. B. c, h_a, h_b gegeb. oder α, γ, c gegeben)

b) Flächenverwandlung (z. B. Fünfeck unter Beibehaltung eines Punktes in ein flächengleiches Dreieck)

c) Einwandfreie Konstruktionsbeschreibungen mit Konstruktion, Beschreibung, Begründung und Determination aufstellen

3. Berechnungen

Kreisberechnungen (Bogen, Fläche, Segment, Umfang, zusammengesetzte Figuren) Arbeiten mit Winkel im Bogenmaß



7. Wahrscheinlichkeitsrechnung

1. Ereignis, abhängige und unabhängige Ereignisse (Erläuterung an zahlreichen Beispielen) Beziehungen zu Mengenzerlegungen (Nur endliche Mengen betrachten).
2. Häufigkeit von Ereignissen
3. Berechnung von Urnenbeispielen, Lottoaufgaben

8. Kybernetik

1. Addition und Subtraktion von Dualzahlen und logische Schaltungen
2. Realisation dieser Rechenarten in Elektronischen Datenverarbeitungsanlagen

Klassenstufe 8

1. Logik

1. Aussagenlogische Identitäten (insbesondere: de Morgansche Regeln, Kontraposition, ev. Kettenschluß)
2. Schlußregeln, systematische Darlegung Einsetzungsregeln, Abtrennungsregeln, Kontrapositionsregel, Regel der Fallunterscheidung; Anwendung auf die formale Darstellung gebräuchlicher Schlußweisen
3. Direkter und indirekter Beweis

2. Mengenlehre

1. Abbildungen, Darstellung als zweistellige Relationen, Beispiele, z. B. Permutationen als Abbildungen endl. Mengen auf sich, Funktionsbegriff, Begriffe: auf, in, von, aus bei Abbildungen; Spezielle Abbildungen (z. B. Identität, inverse Abbildung)
2. Komposition von Abbildungen, Gruppeneigenschaften Anwendungen auf Geometrie (Bewegungen, Projektion)
3. Kardinalzahlenbegriff, natürliche Zahlen als Kardinalzahlen, Begriffe abzählbar und überabzählbar

3. Algebra

1. Operationen als dreistellige Relationen; Klassifizierung von Operationen: assoziative, kommutative
2. Gruppen als einfache algebraische Strukturen; Untergruppen Gruppenordnung, Isomorphie; Abelsche und Zyklische Gruppen, Interpretationen an Permutationsgruppen; Isomorphie zwischen endlichen Gruppen und Untergruppen von Permutationsgruppen
3. Einbettung algebraischer Strukturen in andere algebraische Strukturen – Beispiele natürliche Zahlen und rationale Zahlen
4. Arbeiten mit Variablen, Anwenden beim Lösen nichtlinearer Gleichungen, die auf lineare führen.

4. Zahlentheorie

1. Additive Gruppen der Kongruenzen, multiplikative Gruppen der Kongruenzen nach Primzahlmodul
2. Lineare Diophantische Gleichungen, Lösungen mit Hilfe von Kongruenzen;
3. Zahlentheoretische Untersuchungen unter Verwendung des Positionssystems z. B. bei Teilbarkeitsregeln für 7, 9, 11

5. Analysis

1. Funktionen, spezielle Eigenschaften: Monotonie, Nullstellen, Darstellung in Koordinaten, Parallelverschiebung und Spiegelung von Funktionen, Substitutionen
2. Lineare und stückweise lineare Funktionen, Deutung der Konstanten in Geradengleichung, Schnittpunkte linearer Funktionen, zueinander orthogonale lineare Funktionen
3. Folgen, Bildungsgesetze von Folgen erkennen, als Funktionen darstellen; Begriffe überall dicht, Satz von oberer Grenze
4. Ungleichungen mit zwei Variablen, Anwendung des Funktionsbegriffs bei Lösung, z. B. $x+y<10$ bedeutet Zerlegung der Ebene in zwei Halbebenen mit der Trennungsgeraden $y=10-x$

6. Geometrie

1. Grundlagen

a) Bewegungen als Abbildungen, Gruppeneigenschaften (In Verbindung mit Verschiebungen einführen des Vektorbegriffes möglich – unter Bezugnahme auf den Physikunterricht).
b) Innere und äußere Teilung von Strecken, Doppelverhältnis, Goldener Schnitt
c) Sehnensatz, Sekanten-Tangentensatz am Kreis (Anwendung auf geometr. Beweise)
d) Ähnlichkeit und lineare Funktionen (Proportionen, neue Deutung der Konstanten in linearen Funktionen)

2. Konstruktionen

a) Konstruktionen in beschränkter Ebene Lot fällen, Senkrechte errichten, Strecken und Winkel halbieren, Parallelen konstruieren (z. B. zu gegebenen Gerade, Punkt nicht auf der der Ebene, sondern als Schnittpunkt – außerhalb der Ebene liegend – zweier gegebener Geraden), Punkt mit anderen verbinden, der nicht auf der Ebene liegt
b) Konstruktionen von Vielecken, insbesondere Dreiecken aus beliebigen Stücken und Teilungsverhältnissen, regelmäßige Zehnecke und Fünfecke

3. Berechnungen

a) Berechnungen mit Hilfe des Pythagoräischen Lehrsatzes
b) Spezielle Teilungsverhältnisse am Dreieck, z. B. Teilung der Seiten durch Winkelhalbierende, Höhen, Teilung der Winkelhalbierenden, Seitenhalbierenden untereinander

7. Wahrscheinlichkeitsrechnung

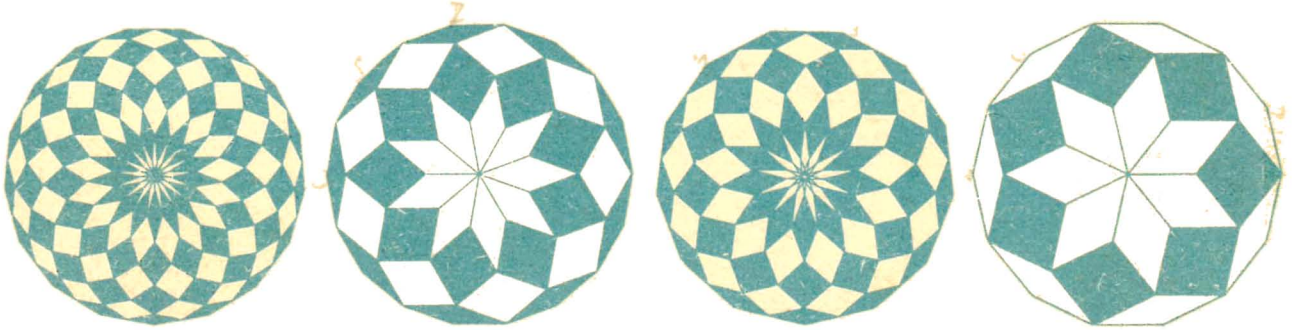
1. Ereignisse, Elementarereignisse, zusammengesetzte Ereignisse als Mengen von Elementarereignissen (Anzahl der Elementarereignisse als endlich vorausgesetzt), Vergleich zu Mengen, Vereinigung und Durchschnitt von Ereignissen
2. Wahrscheinlichkeit, klassischer Begriff (Anzahl der günstigen zu Anzahl der möglichen Ereignisse), Grundeigenschaften, Beispiele einfacher diskreter Verteilungen, Urnenbeispiele, Spiele (Gewinnchancen)

8. Spieltheorie

1. Spiele, Mathematische Definition eines Spieles, endliche Spiele, Begriffe Regel, Zug, Spiel, Strategie, Gewinn, Verlust
2. Zwei-Personen-Nullsummenspiele, Matrixdarstellung, Sattelpunkte, anschauliche Erläuterung des Minimaxtheorems, Existenz von Sattelpunkten

9. Kybernetik

1. Aufbau einer EDVA (Blockschaltbild), Bestandteile der ersten Peripherie
2. Arbeitsweise einer EDVA – Grobschema: Befehl. Programm, Zusammenhang zwischen Speicher, Rechenwerk und Leitwerk

---

Mit Zirkel und Zeichendreieck