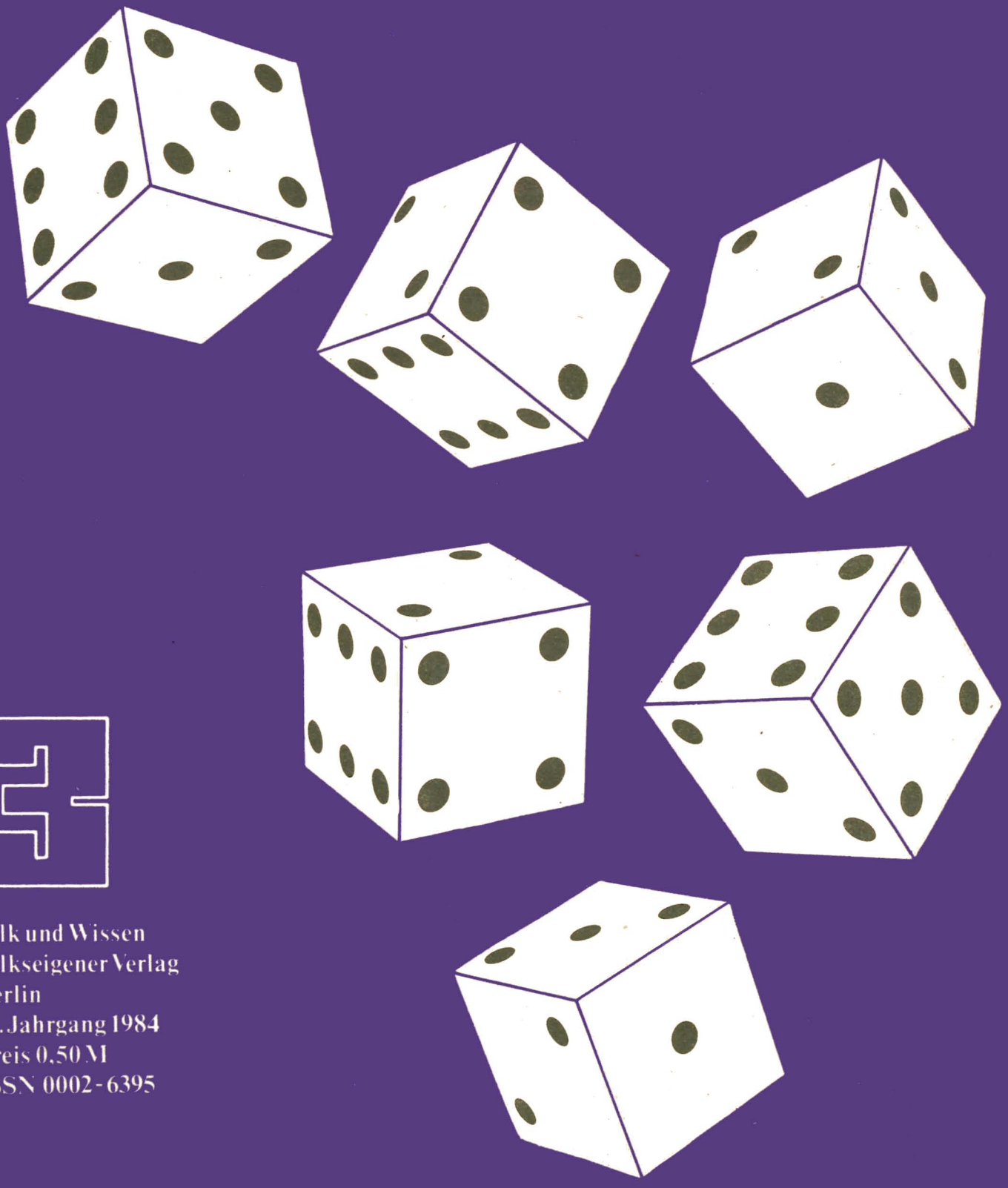
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
18. Jahrgang 1984
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstudienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (Ltg. Dr. C.-P. Helmholz)
Redaktion:
OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags: Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1086 Berlin, Krausenstraße 50, PSF Nr. 1213
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Zentralbild Berlin (S. 51); U. Bause, Berlin (S. 51); aus: Füles, Budapest; E. Staginnus, Berlin (S. 56); H. Parschau, Berlin (S. 59); H. Bartnig, Berlin (S. 65); J. Lehmann (Leipzig) (S. 66/68); aus: Quant, Moskau (S. 68); aus: Functio, math. Schülerzeitschrift, Helsinki (S. 71)
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig
Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach einer Vorlage von: *The Australian Mathematics Teacher* 3/83

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit, III/18/97
AN (EDV) 128
Redaktionsschluß: 1. März 1984
Erscheinungstermin: 25. Juni 1984

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

49 Der Satz des Jahrhunderts – Die Fermatsche Vermutung und der Satz von Mordell-Faltings [10][1])
Dr. H. Pieper, Zentralinstitut für Astrophysik der Akademie der Wissenschaften der DDR

51 Fakten und Zahlen zum Schuljahr 1983/84 [5]
aus: *Elternhaus und Schule*, Berlin

52 Raten und Knobeln [5]
Auswahl von Aufgaben aus *Leipziger Volkszeitung*

53 Ferien mit der bunten Welt der Mathematik – Ergebnisse jahrelanger intensiver sowie jüngster Forschungsarbeit dargelegt [7]
stud. math. Jens Awe, Karl-Marx-Universität Leipzig

54 XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR [7]
Aufgaben der Bezirksolympiade

56 Mathematik und Schach [7]
H. Rüdiger, Schichtleiter im Werk für Fernsehelektronik Berlin

57 Allerlei Gestrecktes [6]
Prof. Dr. W. Walsch, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle

58 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt [5]
Klaus-Peter berichtet aus seinem Mathematikzirkel, Teil 3
Dr. P. Göthner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig

60 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht
Speziell für Klasse 5/6
mathematicus
Wir festigen unsere Grundkenntnisse, Teil 2 [6]
Aufgabenmaterial aus dem Kreis Löbau

60 Eine Aufgabe von Prof. Dr. Miguel de Guzmán [8]
Mathematische Fakultät der Universität Madrid

61 alpha-Ferienmagazin [4]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig

65 alpha – aktuell [5]

66 Illebener Skizzen – Auf den Spuren eines alten unterhaltsamen Rechenbuches [5]
J. Lehmann, Leipzig

68 alpha-Sprachecke [7]
H. Begander/Dr. C.-P. Helmholz/J. Lehmann

69 XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR [5]
Lösungen zu den Aufgaben der Kreisolympiade

71 Lösungen [5]

71 Anders Celsius und die lappländische Gradmessung [7]
Dr. P. Schreiber, Sektion Mathematik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

72 Die Mathematik im Spiegel der Philatelie [7]
V. Großmann/Dr. P. Schreiber, Sektion Mathematik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

IV. *U.-Seite*: Wir falten lustige Figuren [5]
aus: Werken und Formen, Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

[1]) bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Der Satz des Jahrhunderts

Die Fermatsche Vermutung und der Satz von Mordell-Faltings

In der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts formulierte *Pierre de Fermat* auf dem Rand einer Seite einer Buchausgabe der „Arithmetik" des Diophant die Vermutung, daß die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für jede natürliche Zahl $n > 2$ keine Lösung mit von Null verschiedenen ganzen Zahlen x, y, z besitzt.

Ist m irgendein Teiler des Exponenten n und die *Fermatsche Vermutung* für den Exponenten m bewiesen, so gilt sie auch für n. (Ist nämlich $n = mf$, so ist

$$x^n + y^n = z^n$$

in der Form

$$(x^f)^m + (y^f)^m = (z^f)^m$$

aufschreibbar.)

Da jede natürliche Zahl $n \geqq 3$ durch 4 oder durch eine ungerade Primzahl teilbar ist, genügt es, die *Fermatsche Vermutung* für die Exponenten $n = 4$ und $n = p$ (ungerade Primzahl) zu beweisen. Die Aussage für den Exponenten $n = 4$ ist der *Satz von der Nichtexistenz von rechtwinkligen Dreiecken, deren Seiten ganzzahlige Quadrate sind.* (Er wurde zuerst von Fermat bewiesen.)

Man kann sich somit auf die Untersuchung der Gleichung

$$x^p + y^p = z^p \qquad (1)$$

beschränken. (Hier sei der Exponent p eine ungerade Primzahl.) Drei von Null verschiedene ganze Zahlen a, b, c, die der Gleichung (1) mit $x = a, y = b, z = c$ genügen, heißen *Fermatsches Zahlentripel* (zum Exponenten p).

Haben zwei Zahlen eines Fermatschen Tripels einen gemeinsamen Teiler t, so teilt t wegen $a^p + b^p = c^p$ auch die dritte Zahl. Wenn es überhaupt Fermatsche Zahlentripel gibt, so genügt es, solche zu suchen, bei denen die Zahlen a, b, c paarweise teilerfremd sind. (Gibt es solche Zahlentripel nicht, dann gibt es überhaupt keine Fermatschen Tripel.) Dann ist auch ta, tb, tc (mit einer ganzen Zahl t) ein Fermatsches Tripel. Zum Nachweis, daß es für einen speziellen Primzahlexponenten p keine Fermatschen Zahlentripel gibt, genügt es, die folgenden zwei Aussagen zu beweisen.

a) Erster Fall der Fermatschen Vermutung: Es gibt keine Fermatschen Zahlentripel (a, b, c), so daß die Zahlen a, b, c nicht durch p teilbar sind.

b) Zweiter Fall der Fermatschen Vermutung: Es gibt keine Fermatschen Zahlentripel, so daß eine (und dann nur eine) der Zahlen a, b, c durch p teilbar ist.

Für die kleinste ungerade Primzahl $p = 3$ hat *Euler* die Unlösbarkeit von (1) in ganzen Zahlen bewiesen. (Siehe die Artikel: „Leonhard Euler und die Fermatsche Vermutung" in *alpha* Heft 2/82, „Eulers Beweis für die Unmöglichkeit von $x^3 + y^3 = z^3$ in natürlichen Zahlen" in *alpha* Heft 3/83.)

Der französische Mathematiker *Legendre* hat Eulers Beweis in sein 1798 erschienenes Zahlentheorie-Lehrbuch aufgenommen. Legendre bewies 1823 die Unlösbarkeit von (1) in ganzen Zahlen für $p = 5$. Daß $x^{14} + y^{14} = z^{14}$ nicht in ganzen Zahlen lösbar ist, zeigte 1832 *Dirichlet.* Die Unmöglichkeit von (1) für $p = 7$ fand dann 1839 *Lamé.* Von *Kummer* wurde um 1850 schließlich das sehr weittragende Ergebnis gefunden, daß die Fermatsche Vermutung für alle sog. *regulären Primzahlen* als Exponenten richtig ist, daß somit die Gleichung (1) für alle ungeraden Primzahlen $p < 100$ keine ganzzahligen Lösungen hat. Er bekam für seinen Lösungsbeitrag eine an sich für die vollständige Erledigung des Fermatschen Problems 1849 von der Pariser Akademie gestiftete Goldmedaille.

1883 setzte auch die Belgische Akademie der Wissenschaften einen Preis für die Lösung aus. Der Privatgelehrte *Wolfskehl* (1856 bis 1906) stellte der *Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften* aus seinem Privatvermögen 100000 Mark als Preis für die vollständige Lösung des Problems zur Verfügung (1908 veröffentlicht).

Bis 1908 konnte durch *Dickson* der erste Fall der Fermatschen Vermutung für alle ungeraden Primexponenten $p < 7000$ erledigt werden. Ein hervorragendes Ergebnis erzielte 1909 *Wieferich.* (Er erhielt 100 Mark vom Wolfskehl-Preis.) Er zeigte, daß der erste Fall der Fermatschen Vermutung für alle Primzahlen p mit

$$2^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$$

richtig ist. (Mittels Rechenautomaten konnte bis 1971 nachgewiesen werden, daß es unter den ungeraden Primzahlen $p < 3 \cdot 10^9$ nur zwei Zahlen (1093 und 3571) gibt, die der Kongruenz $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$ genügen.)

Frobenius und *Mirimanoff* bewiesen später, daß der erste Fall der Fermatschen Vermutung auch für alle Primzahlen p mit

$$3^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$$

richtig ist. (Hierzu gehören auch die Primzahlen 1093 und 3571.) Jetzt schien es wahrscheinlich, daß die Zahlen 2 und 3 durch andere Primzahlen $q(\neq p)$ ersetzt werden können. Tatsächlich konnte man die Richtigkeit des ersten Falles der Fermatschen Vermutung für alle p mit

$$q^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$$

beweisen, wobei $q(\neq p)$ eine Primzahl ist, für die $q \leqq 43$ gilt *(Vandiver, Frobenius, Pollaczek, Morishima, Rosser).*

Mittels Rechenautomaten konnte bereits 1941 (vermöge dieser Bedingungen) nachgewiesen werden, daß der erste Fall der Fermatschen Vermutung für alle Primzahlen, die kleiner als 253747889 sind, richtig ist. 1948 erkannte *N. G. Gunderson* die Richtigkeit sogar für Primzahlexponenten $< 57 \cdot 10^9$. Es sind aber auch größere Primzahlen bekannt, für die der erste Fall der Fermatschen Vermutung richtig ist, z. B. für $p = 2^{86243} - 1$; diese Zahl scheint gegenwärtig die größte bekannte Primzahl überhaupt zu sein.

Im Jahre 1954 gab *Vandiver* ein Kriterium für die Richtigkeit des zweiten Falles der Fermatschen Vermutung an. Mittels Rechenautomaten konnte nun nachgewiesen werden, daß der zweite Fall der Fermatschen Vermutung für alle Primzahlen, die kleiner als 5500 sind, richtig ist. Ebenfalls mittels Computer konnte 1976 *Samuel S. Wagstaff* die Richtigkeit (beider Fälle) der Fermatschen Vermutung für Primzahlexponenten $p < 125000$ zeigen.

Die Fermatsche Vermutung konnte bisher nicht vollständig bewiesen werden. Man weiß noch nicht einmal, ob sie für unendlich viele Primzahlexponenten richtig ist. Die Vermutung gehört immer noch zu den bekanntesten ungelösten Problemen der Mathematik.

L. Kronecker schrieb in seinen „Vorlesungen über Zahlentheorie" über die Fermatsche Vermutung, daß sich mit diesem Satz die Mathematiker vielleicht mehr beschäftigt haben als mit irgendeinem anderen, und daß wohl keiner, abgesehen etwa von der Quadratur des Kreises, zu so vielen falschen und irrtümlichen Deduktionen Veranlassung gegeben hat. Es finden sich immer wieder Mathematiker, aber auch Laien, die versuchen, die Vermutung zu beweisen. Es gibt jedoch auch Mathematiker, die sich fragen, ob es überhaupt ein „vernünftiges" Problem ist. Lohnt es sich überhaupt, daran zu arbeiten?

Einmal erscheint es recht aussichtslos, die Lösung zu finden. Zum anderen kann man, selbst wenn ein Beweis gelungen

Prof. L. J. Mordell (Foto v. Faltings S. 59)

ist, immer wieder neue Gleichungen betrachten, beispielsweise $x^p + 2y^p = z^p$, $x^p + 1001y^p = z^p$, ..., und nach ganzzahligen Lösungen fragen. In der Tat, welchen Sinn hätte es, gerade das Fermatsche Problem zu lösen?

Ein offenbar vernünftigeres Problem ergibt sich so: Man kann für die Fermatsche Gleichung auch

$$\left(\frac{x}{z}\right)^p + \left(\frac{y}{z}\right)^p = 1$$

schreiben. Man fragt dann nach Lösungen der Gleichung

$$t^p + u^p = 1 \qquad (2)$$

in rationalen Zahlen t, u.

Betrachtet man nun allgemeiner ein Polynom $f(t, u)$ in zwei Unbestimmten [z. B. $f_1(t, u) = t^p + u^p - 1$, $f_2(t, u) = u^2 - t^3 - t^2$], so definiert die Gleichung $f(t, u) = 0$ eine Kurve in der Ebene. Man kann fragen, ob es auf der Kurve Punkte mit rationalen Koordinaten (kurz: rationale Punkte) oder sogar mit ganzzahligen Koordinaten gibt. Die Antwort ist auch hier nicht leicht.

Es gibt eine Invariante, die man gewissen (algebraischen, glatten) Kurven zuordnen kann; sie wird als ihr Geschlecht bezeichnet.

Geraden und Kegelschnitte (Parabeln, Ellipsen, Hyperbeln) haben das Geschlecht 0. Auf Kurven vom Geschlecht 0 kann es keine, endlich viele oder unendlich viele rationale Punkte geben.

Als Beispiel sei der Kreis

$$t^2 + u^2 = 1 \qquad (3)$$

mit dem Radius 1 betrachtet [sein Mittelpunkt ist der Koordinatenursprung $t, u) = (0, 0)$]. Man kann beweisen: Alle rationalen Punkte auf diesem Kreis werden gegeben durch

$$\left(\frac{g^2 - h^2}{g^2 + h^2}, \frac{2gh}{g^2 + h^2}\right)$$

oder

$$\left(\frac{2gh}{g^2 + h^2}, \frac{g^2 - h^2}{g^2 + h^2}\right),$$

worin g und h beliebige ganze Zahlen sind. Es handelt sich also um unendlich viele rationale Punkte.

Hieraus ergeben sich unschwer auch die ganzzahligen Lösungen (x, y, z) der Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad (4)$$

Alle teilerfremden Lösungstripel von (4) werden gegeben durch

$$(g^2 - h^2, 2gh, g^2 + h^2)$$

oder

$$(2gh, g^2 - h^2, g^2 + h^2),$$

sofern g und h teilerfremde ganze Zahlen sind, von denen die eine gerade, die andere ungerade zu wählen ist. Ein beliebiges Lösungstripel von (4) hat die Form (ta, tb, tc), worin (a, b, c) ein teilerfremdes Lösungstripel von (4) und t eine beliebige ganze Zahl ist.

Kurven vom Geschlecht 1 heißen elliptische Kurven. Gleichungen der Form

$$u^2 - t^3 - at^2 - bt - c = 0$$

(mit rationalen Koeffizienten a, b, c derart, daß die Gleichung $t^3 + at^2 + bt + c = 0$ drei verschiedene Nullstellen besitzt) definieren solche Kurven.

Als Beispiele seien die durch die Gleichungen

$$u^2 = t^3 + k \qquad (5)$$

definierten Kurven angegeben, worin $k \neq 0$ eine beliebige ganze (in jeder solchen Gleichung festgewählte) Zahl bezeichnet.

Die Kurve (mit $k = 1$)

$$u^2 = t^3 + 1$$

hat nur drei rationale Punkte (t, u), nämlich $(-1, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(2, \pm 3)$ (L. Euler).

Die Gleichung (mit $k = -1$)

$$u^2 = t^3 - 1$$

hat weder in ganzen noch in rationalen Zahlen $t, u\ (\neq 0)$ Lösungen.

Der englische Zahlentheoretiker *L. J. Mordell* (1888 bis 1972) bewies 1922, daß für jede ganze Zahl $k \neq 0$ die Gleichung (5) höchstens endlich viele ganzzahlige Lösungen besitzt. So hat die Gleichung (5) beispielsweise für $k = -3, -5, 7, 11, 13$ überhaupt keine ganzzahligen Lösungen. Sie besitzt für $k = -2$ die beiden ganzzahligen Lösungen $t = 3$, $u = \pm 5$ (was schon Fermat ausgesprochen hat; bewiesen hat es *T. Pépin* 1875).

Die Gleichung

$$u^2 = t^3 + 2$$

hat keine anderen ganzzahligen Lösungen, außer $t = -1$, $u = -1$ (*A. Brauer*, 1926).

Die Gleichung

$$u^2 = t^3 + 17$$

besitzt genau 16 ganzzahlige Lösungen: $(t, u) = (-2, \pm 3), (-1, \pm 4), (2, \pm 5), (4, \pm 9), (8, \pm 23), (43, \pm 282), (52, \pm 375), 5234, \pm 378661)$ (*T. Nagell*, 1930). Die Gleichung

$$u^2 = t^3 + 11$$

hat zwar keine ganzzahligen Lösungen, jedoch gibt es rationalzahlige Lösungen, z. B.

$$\left(\frac{19}{8}\right)^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^3 + 11.$$

Die Identität

$$\left(\frac{27t^6 - 36u^2t^3 + 8u^4}{8u^3}\right)^2 - \left(\frac{9t^4 - 8u^2t}{4u^2}\right)^3 = u^2 - t^3 = k$$

zeigt: Jede Lösung der Gleichung $u^2 = t^3 + k$ in rationalen Zahlen $u \neq 0$, $t \neq 0$ liefert eine weitere Lösung. Falls die Kurve $u^2 = t^3 + k$ für $k \neq 1, -3^32^4$ einen rationalen Punkt besitzt, so hat sie sogar unendlich viele rationale Punkte (*R. Fueter*, 1930).

Auf Kurven vom Geschlecht 1 brauchen keine rationalen Punkte zu liegen. Hat man jedoch einen rationalen Punkt auf einer elliptischen Kurve, so kann man die Tangente an diesem Punkt zeichnen und zeigen, daß der Schnittpunkt der Tangente mit der Kurve wieder ein rationaler Punkt ist. Es gibt Fälle, in denen man so unendlich viele rationale Punkte findet.

C. L. Siegel (1896 bis 1981) bewies 1929, daß auf Kurven vom Geschlecht ≥ 1 nur endlich viele Punkte liegen, deren Koordinaten beide ganzzahlig sind.

L. J. Mordell, der „König der diophantischen Gleichungen", sprach im Jahre 1922 die Vermutung aus, daß auf einer Kurve mit einem Geschlecht, das größer als 1 ist, sogar höchstens endlich viele rationale Punkte liegen. Viele Mathematiker, darunter in der Welt führende Gelehrte, versuchten seitdem, diese *Mordellsche Vermutung* zu bestätigen. Im Frühjahr 1983 gelang es dem jungen Mathematiker *Gerd Faltings* (geb. 1955), die Vermutung Mordells zu beweisen. Er ist ein Schüler von Professor *Nastold* in Münster, promovierte 1978, studierte dann ein Jahr an der Harvard University, habilitierte sich 1981 und wurde mit 27 Jahren Mathematikprofessor in Wuppertal. Sein Arbeitsgebiet ist die Algebraische Geometrie, jenes Teilgebiet der Mathematik, das aus der Theorie der algebraischen Kurven und Flächen und der mehrdimensionalen Geometrie entstanden ist.

Die Arbeiten der *Moskauer Schule der Algebraischen Geometrie (I. R. Schafarewitsch, A. N. Parschin, S. Arakelow, J. G. Zarchin)* bilden das Fundament für Faltings Beweis der Mordellschen Vermutung. Sie lieferten die entscheidenden Ideen und Methoden. Ohne die Abhandlungen von Parschin (von 1968), Arakelow (von 1971 und 1974), sowie Zarchin (von 1974) wäre dieser Beweis nicht möglich gewesen. Eine weitere wichtige Idee scheint Faltings auch dem französischen Mathematiker *P. Deligne* zu verdanken. 60 Jahre hat der von Mordell ausgesprochene Satz (ein bekannter Mathematiker nannte ihn kürzlich den „Satz des Jahrhunderts") allen Beweisen getrotzt. Nun konnte G. Faltings den Beweis auf Grund der in den letzten Jahrzehnten in der Algebraischen Geometrie entwickelten Methoden erbringen.

Auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß in Warschau im August 1983 hat P. Deligne einen Sondervortrag über Faltings' Ergebnisse gehalten. Auf der Tagung „Arithmetik auf Mannigfaltigkeiten" im Oktober 1983 in Greifswald hat Parschin darüber vorgetragen.

Beispiele für Kurven mit einem Geschlecht, das größer als 1 ist, sind die „Fermatschen Kurven"

$$t^p - u^p - 1 = 0 \qquad (6)$$

für $p > 3$.

Da nach dem Satz von Mordell-Faltings auf einer Kurve mit einem Geschlecht, das größer als 1 ist, höchstens endlich viele rationale Punkte liegen, sind für die Gleichung (6) höchstens endlich viele rationale Lösungen möglich. *Dies bedeutet, daß die Gleichung (1) höchstens endlich viele teilerfremde ganzzahlige Lösungen besitzen kann.* Dieses direkt zu beweisen, war den Zahlentheoretikern bis heute nicht gelungen. Wir haben hier ein neues Beispiel für eine (vom Mathematiker *G. Pólya* beschriebene) paradoxe Erfahrung beim Lösen mathematischer Probleme. Der Beweis der stärkeren Aussage (hier: der Satz von Mordell-Faltings) erweist sich (zwar als schwer, jedoch) als leichter als der Beweis der schwächeren Aussage (hier: die Aussage für den Sonderfall der Fermatschen Kurven).

Man kann hoffen, nun auch einmal beweisen zu können, daß (1) überhaupt keine teilerfremden ganzzahligen Lösungen besitzt (Fermatsche Vermutung).

H. Pieper

Fakten und Zahlen zum Schuljahr 1983/84

8 Milliarden Mark stellt unser Staat jährlich für das Volksbildungswesen zur Verfügung, das sind 4 Prozent des Nationaleinkommens. Der Grundmittelwert einer zweizügigen Oberschule beträgt 4,7 Millionen Mark. Zur Bewirtschaftung und Unterhaltung einer Schule werden jährlich 170000 Mark benötigt. Im Sommer 1983 wurden für die örtliche Feriengestaltung 60 Millionen Mark und jährlich werden für die Schülerbeförderung 140 Millionen Mark staatliche Mittel aufgewendet.

Schüler
Mit Beginn dieses Schuljahres betrug die Zahl der Schüler in der DDR 2,1 Millionen, davon sind 202000 Schulanfänger.

Schulen
Gegenwärtig gibt es 5865 allgemeinbildende polytechnische Oberschulen, und zwar 5156 zehnklassige Oberschulen, 220 erweiterte Oberschulen, 489 Sonderschulen.

Pädagogen
An den Schulen sind 171400 Lehrer und Erzieher tätig. Am 1. September 1983 nahmen 10200 Absolventen von Pädagogischen Hochschulen, Universitäten, Instituten für Lehrerbildung und Pädagogischen Schulen ihre Tätigkeit in Einrichtungen der Volksbildung auf: 4400 Diplom-Lehrer, 3350 Lehrer für untere Klassen und Pionierleiter, 2450 Kindergärtnerinnen.

Schulhort
In der DDR bestehen 5418 Schulhorte mit 25332 Hortgruppen, in denen 33500 Erzieher rund 563500 Kinder der Klassen 1 bis 4 betreuen.
Das sind mehr als 80 Prozent aller Schüler der Klassen 1 bis 4.
In den einzelnen Klassenstufen zeigt sich folgendes Bild der Teilnahme:
1. Klasse – 90,2 Prozent
2. Klasse – 87,9 Prozent
3. Klasse – 81,8 Prozent
4. Klasse – 64,3 Prozent.
Es können alle Kinder der genannten Klassen, deren Eltern es wünschen, einen Schulhort besuchen. Zur planmäßigen Sicherung der inhaltlichen Arbeit wurden von 1972 bis 1980 insgesamt mehr als 200 Millionen Mark aus dem Staatshaushalt bereitgestellt. Dadurch konnten die Ausstattungen und das Mobiliar der Horte wesentlich verbessert werden. Neben Möbeln wurden von diesem Geld anteilmäßig Gebrauchsgegenstände, wie Eßgeschirr, Eßbestecke, Gardinen, Handtücher, Tischdecken, Schlafdecken u. a., angeschafft. Gleichzeitig wurde mehr Spielzeug und Beschäftigungsmaterial bereitgestellt.
Zur Ergänzung des Vorhandenen stehen jedem Hort je angemeldetem Kind jährlich folgende Mittel zur Verfügung:

– für Spielzeug und Beschäftigungsmaterial	15,– M
– für Haushaltsgegenstände	6,– M
– zur Entwicklung des geistig-kulturellen Lebens	2,– M
– für Getränke	4,– M
– für die wohnliche Ausgestaltung	2,– M

Schulbücher
Vom volkseigenen Verlag Volk und Wissen wurden für das Schuljahr 1983/84 498 verschiedene Lehrbücher für Schüler der Ober- und Sonderschulen der DDR mit einer Gesamtzahl von mehr als 25 Millionen Exemplaren herausgegeben. Die Verkaufspreise für die obligatorischen Schulbücher betragen:

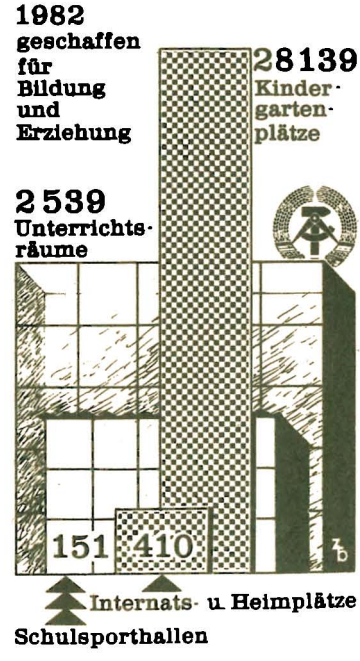
Klassen	Anzahl der Bücher	Gesamtpreis
1 bis 3	23	27,30 M
4 bis 6	29	61,75 M
7 bis 10	60	113,30 M
	112 Bücher	202,35 M
11 und 12	17 Bücher	61,60 M

(Diese Angaben berücksichtigen nicht die Bücher für Sonderschulen und bestimmte Unterrichtsmaterialien.)
12 Millionen Bücher sind Freiexemplare, die der Staat mit 19,5 Millionen Mark finanziert.
44 Schulbücher sind Neuerscheinungen.

Kindergarten
Seit dem Beginn dieses Schuljahres gibt es über 12560 Kindergärten. In ihnen werden 957000 Kinder von 54400 Erzieherinnen und weiteren 26700 pädagogischen Kräften betreut.
Damit wurde die Aufgabenstellung des X. Parteitages der SED erfüllt, für alle Kinder, deren Eltern es wünschen, einen Kindergartenplatz zur Verfügung zu stellen.

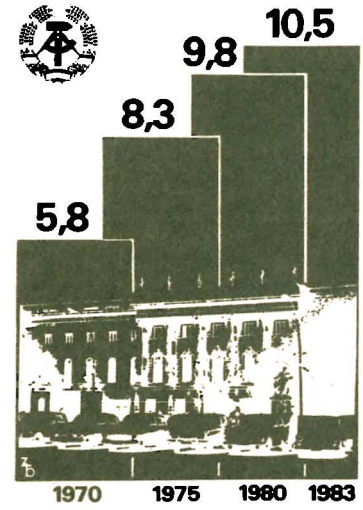
Außerunterrichtliche Tätigkeit
Im Schuljahr 1982/83 haben mehr als 1,4 Millionen Schüler der Klassen 1 bis 10 an etwa 110000 Arbeitsgemeinschaften (ohne Rahmenprogramm) teilgenommen. 60000 Schüler waren in 5000 Arbeitsgemeinschaften auf gesellschaftswissenschaftlichem Gebiet tätig:
250000 Kinder und Jugendliche knobelten, forschten und experimentierten in 22000 naturwissenschaftlich-technischen Arbeitsgemeinschaften; 577000 Schüler betätigten sich kulturell und künstlerisch in 38000 Arbeitsgemeinschaften.
Für die Freizeitbetätigung der Kinder und Jugendlichen gibt es in der DDR 418 außerschulische Einrichtungen (davon 142 Pionierhäuser und 192 Stationen junger Naturforscher und Techniker), in denen rund 2530 Pädagogen mitarbeiten.

Volksbildung



Ausgaben des Staatshaushaltes für das Bildungswesen

in Milliarden Mark



Raten und Knobeln

Auswahl von Aufgaben aus Wochenendbeilagen der Leipziger Volkszeitung (1983/84)

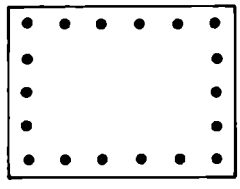
Faktoren gesucht

Das Produkt aus einer ein- und einer zweistelligen natürlichen Zahl bestehe nur aus Ziffern „7". Ermittelt die Faktoren des Produkts!

$P = a \cdot b$

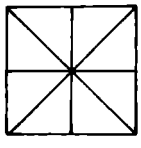
Gerechte Teilung

Zerlegt das abgebildete Rechteck durch drei Geraden derart in sechs Teilstücke, daß sich in jedem Teil genau drei Punkte befinden! Versucht, mindestens vier verschiedene Möglichkeiten einer solchen Zerlegung zu finden!



Richtig gezählt

Wie viele Dreiecke und wie viele konvexe Vierecke sind in der abgebildeten Figur enthalten?



Zwei besondere Zahlen

In den abgebildeten Wortgleichungen ist jeder der Buchstaben durch eine der Ziffern von 0 bis 9 derart zu ersetzen, daß sich richtig gelöste Multiplikationsaufgaben ergeben. Gleiche Buchstaben sind dabei durch die gleiche Ziffer und unterschiedliche Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.

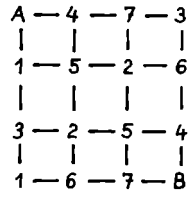
E G A L · L = L A G E
M E T A · K = A T E M

Hölzchenspiele mit Hokuspokus

Aus 4 mach Sieben, aus 3 mach Neun!
Das mußt' des Sportlers Herz erfreun.
Und nun nimm 21 her!
Du wirst es sehn, es macht sich:
Es werden Neunzehnhundertdreiundachtzig.
Sodann betrachte 102 und subtrahiere 80!
Nimmst du sie her, so werden es erneut Neunzehnhundertdreiundachtzig!

Richtiger Weg

Findet einen Weg von A nach B derart, daß die Summe der dabei überquerten Zahlen 50 beträgt! Dabei darf eine Zahl höchstens einmal überquert werden.



Hölzchenspiel

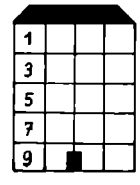
In der Figur sind a) neun Hölzchen und b) zehn Hölzchen so umzulegen, daß sich ein Quadrat mit neun gleich großen Teilquadraten ergibt.

Ein Hausfest mit Tombola

Bei einem Hausfest führen die 20 in einem fünfstöckigem Haus wohnenden Familien eine Tombola durch. Jede Familie zieht aus dem Losbehälter, der 20 Zettel mit den Nummern von 1 bis 20 enthält, ein Los und gewinnt dementsprechend. Hinterher stellt man fest, daß die Losnummern in folgender eigenartiger Weise gezogen worden waren:

1. Auf jeder Etage ergab sich die gleiche Summe der gezogenen Losnummern.
2. Eine auf einer Etage weiter rechts wohnende Familie hatte stets eine höhere Losnummer als ihre linke Nachbarfamilie (von vorn gesehen).

Die von den im Haus links wohnenden Familien gezogenen Nummern sind bereits eingetragen. Ermittelt die (noch fehlenden) Losnummern, die von den einzelnen Familien gezogen worden sind, und tragt diese in die Hausfigur ein!



Kurz überlegen – schnell antworten

Versucht, die folgenden Fragen in möglichst kurzer Zeit richtig zu beantworten:

1. Können 5 Schüler je eine Zensur derart erhalten, daß das Produkt dieser 5 Zensuren 11 beträgt?
2. Wie groß ist der Unterschied zwischen 0,999 und 0,1000?
3. Welchen Wert hat der Ausdruck $5(5 + 5)(5 \cdot 5 - 5)$?
4. Ein Patient bekommt 5 Tabletten. Jede Viertelstunde muß er eine nehmen. Wie lange reichen die Tabletten?
5. Kann man aus zwei Einsen und einem Zeichen eine Zahl bilden, die gleich $\frac{11}{10}$ ist?

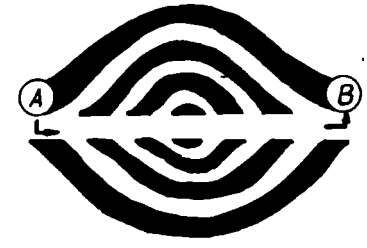
Zerlegung gesucht

Zerlegt das abgebildete Rechteck so in 4 Quadrate und 2 Rechtecke, daß sich in jedem dieser 6 Vierecke die gleiche Zahlensumme ergibt!

23	1	24	2	7	18
3	22	13	14	17	8
21	4	11	12	5	6
15	10	16	9	20	19

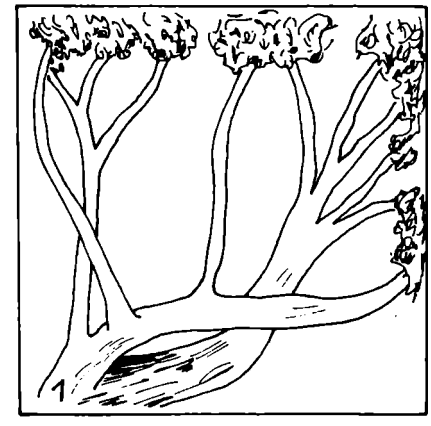
Eine Bootsfahrt, die ist lustig...

Eine Familie verbringt ihren Urlaub in einer wasserreichen Gegend. Zum „Urlaubsgepäck" gehört auch ein Boot. An einem Tage möchte sich die Familie mit ihrem Boot auf der Fahrt vom Dorf A zum Dorf B die dazwischenliegende Flußverzweigung anschauen.
Welche Fahrtroute muß die Familie wählen, damit sie jeden Arm der Flußverzweigung nur genau einmal zu durchfahren braucht (wobei die Fahrtroute sich jedoch kreuzen darf)?



Eine alte Linde

Das Bild zeigt eine alte Linde, welche durch ihren eigenartigen Wuchs die Kinder geradezu zum Klettern verleitet. Welche und wie viele verschiedene direkte Klettertouren (die teilstreckenweise zusammenfallen können) zu den Wipfeln des Baumes kann sich ein gewandtes Kind – ausgehend vom Punkt „1" – aussuchen? Vorausgesetzt wird natürlich, daß die Äste das Gewicht des Kindes verkraften.



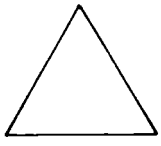
Magisches Quadrat

Setzt in die leeren Felder des Quadrats reelle Zahlen derart ein, daß sich in den Zeilen und Spalten Gleichungen ergeben! Wie viele verschiedene solcher Eintragungen sind möglich?

5	—	2	+		=	
—	■	+	■	—	■	+
	+	15	—	2	=	
+	■	—	■	+	■	—
	—		—	4	—	4
=	■	=	■	=	■	=
17	+		—		=	20

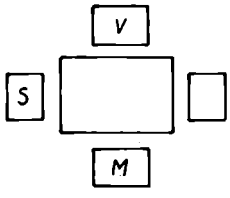
Dreiecks-Zerlegung

Zerlegt das abgebildete gleichseitige Dreieck durch 10 Geraden in 20 Dreiecke, und zwar in 12 gleichseitige und 8 rechtwinklige Dreiecke, die jeweils untereinander kongruent sind!



Wie man sich setzt...

Eine dreiköpfige Familie (Vater, Mutter und Sohn) kommt in eine Gaststätte und möchte an einem freien Tisch mit 4 Stühlen Platz nehmen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es für die Familie, sich in unterschiedlicher Anordnung an den Tisch zu setzen?



Zahl gesucht

Jens dividiert die beiden Zahlen 49 und 65 durch dieselbe natürliche Zahl *n*. Im ersten Fall erhält er den Rest 4 und im zweiten Fall den Rest 2.
Durch welche Zahl *n* hat er dividiert?

Autor: Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig

Ferien mit der bunten Welt der Mathematik

Spezialistenlager in Grünheide für Junge Mathematiker

Schon seit Jahren haben die besten *Jungen Mathematiker* aus der Mathematischen Schülergesellschaft des Bezirkes Leipzig in den Ferien ein besonderes Reiseziel: das Zentrale Pionierlager *W. Majakowski* im vogtländischen Grünheide, in dem für sie ein Spezialistenlager organisiert wird. Im vergangenen Jahr sorgten neben erfahrenen Mitarbeitern auch Studenten der Studienrichtung Mathematik/Physik aus dem zweiten Studienjahr der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität dafür, daß sich die Schüler aktiv von den Anstrengungen des lernreichen Schuljahres erholen konnten. Diese Arbeit gehört zu ihrem FDJ-Jugendobjekt *Studenten arbeiten mit Schülern*. Als Gruppenleiter waren Lehrerstudenten des ersten Studienjahres eingesetzt, die im Spezialistenlager ihr Ferienpraktikum absolvierten.

Die Mathematische Schülergesellschaft gibt es seit 1974. Mitglied kann jeder Schüler werden, der überdurchschnittliche Leistungen im Fach Mathematik und gute in allen anderen Fächern nachweisen kann, außerdem aktiv in der Pionierorganisation bzw. der FDJ mitarbeitet. Wer Mitglied der Gesellschaft werden will, muß zunächst eine Kandidatenzeit durchlaufen. Die Arbeit in den einzelnen Zirkeln ist so organisiert, daß sich die Schüler alle 14 Tage zu ihren Veranstaltungen treffen und sich unter Anleitung von Mitarbeitern der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität und hervorragenden Studenten mit mathematischen Problemen auseinandersetzen, die über das gewöhnliche Unterrichtsniveau hinausgehen.

Ein besonderer Höhepunkt ist eben das alljährliche Spezialistenlager. Täglich treffen sich die Schüler zweieinhalb Stunden in ihren Zirkeln. Die meisten werden von Leitern betreut, die selbst aus den Reihen der Mathematischen Schülergesellschaft hervorgegangen sind. Ergänzt und bereichert wird die Zirkelarbeit durch zahlreiche von Wissenschaftlern gehaltenen Vorträge über die Welt der Mathematik. Den Abschluß bildet die Mathematikolympiade, bei der die *Jungen Mathematiker* unter Beweis stellen, daß sie sich im Spezialistenlager gründlich mit ihrem *Schokoladenfach* beschäftigt haben.

Als Gäste eines Zentralen Pionierlagers stehen die *Jungen Mathematiker* natürlich nicht abseits vom offiziellen Lagerprogramm. Im vergangenen Jahr beteiligten sich die Pioniere und FDJ-Mitglieder unter anderem an der Ferienexpedition *Meine Heimat DDR*.

Alle Schüler kamen gut erholt und mit vertieften mathematischen Kenntnissen nach Hause; das ist Lob für die Verantwortlichen und Ansporn. Denn das nächste Spezialistenlager kommt bestimmt. ...

Jens Awe

Ergebnisse jahrelanger intensiver sowie jüngster Forschungsarbeit dargelegt

Mathematikstudenten aus der ganzen DDR haben schöpferische Potenzen eindrucksvoll nachgewiesen

Vom 4. bis 6. 10. 1983 fand an der Karl-Marx-Universität Leipzig die IV. *Zentrale Wissenschaftliche Studentenkonferenz Mathematik* statt. Die Teilnehmer, etwa 200 Studenten und 35 Hochschullehrer, kamen aus 18 Einrichtungen unserer Republik. Veranstalter waren der Wissenschaftliche Beirat für Mathematik, der Zentralrat der FDJ und die Mathematische Gesellschaft der DDR.

Mehr als 100 Mathematikstudenten, Studenten der Fachrichtung Diplomlehrer für Mathematik sowie Forschungsstudenten bewarben sich um die Möglichkeit, während der Konferenztage die Ergebnisse ihrer oft monate- und jahrelangen intensiven Forschungsarbeit darzulegen. Das Spektrum des Angebots reichte dabei von Praktikums-, Jahres- und Diplomarbeiten bis hin zu Dissertationen. 56 der eingereichten Arbeiten wurden von einer Jury, die aus Wissenschaftlern mathematischer Sektionen bestand, ausgewählt, und die Verfasser erhielten am zweiten Konferenztag die Möglichkeit, in einem halbstündigen Vortrag die Grundgedanken ihrer Arbeit darzulegen. Zu diesem Zweck wurden sieben Arbeitskreise gebildet.

Daß die intensive wissenschaftliche Tätigkeit der Studenten gesellschaftlich eine hohe Anerkennung findet, zeigt die Tatsache, daß während der Abschlußveranstaltung eine ganze Reihe von Auszeichnungen vorgenommen werden konnte. So erhielt z. B. *Dietmar Cieslik* von der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald für seine Dissertation, in der er sich mit Anordnungsproblemen bei elektronischen Schaltungen auseinandersetzt, eine Reise in die Sowjetunion. Der großen Bedeutung seiner Diplomarbeit für die Werkstoffprüfung entsprechend, ehrte die Jury *Clemens Schlechte* von der Sektion Mathematik der TU Dresden mit einer Geldprämie. Erwähnenswert ist, daß diese Arbeit bis zum Patent entwickelt wurde. Die bisher aufgeführten Beispiele sind natürlich längst nicht alle erwähnenswerten Arbeiten.

Selbstverständlich wurde auch für die Freizeitgestaltung der Konferenzteilnehmer gesorgt. Den Abschluß des ersten Tages bildeten zahlreiche Diskussionsrunden im Leipziger FDJ-, Jugend- und Studentenzentrum, der *Moritzbastei*. Dabei hatten die Studenten ausreichend Gelegenheit zur Anknüpfung persönlicher Kontakte, wobei natürlich auch ein reger mathematischer Gedankenaustausch stattfand. Am Abend des 5. Oktobers traf man sich zu verschiedenen Foren, in denen Themen wie „Begabtenförderung im Studium“ oder „Trends in der Anwendung der Mathematik“ im Mittelpunkt standen.

Die Vorbereitung dieser Studentenkonferenz lag weitestgehend in den Händen der Studenten selbst. Besonders zu erwähnen ist dabei, daß auch Studenten von Mathematiksektionen anderer Universitäten Mitglieder des Vorbereitungskomitees waren. Insgesamt kann festgestellt werden, daß die IV. Zentrale Wissenschaftliche Studentenkonferenz Mathematik die in sie gesetzten Erwartungen vollständig erfüllt hat. Alle Teilnehmer nahmen zahlreiche Anregungen und Hinweise mit nach Hause, die für eine noch effektivere wissenschaftliche Arbeit im neuen Studienjahr genutzt werden können. Auch im Jahr 1984, dem 35. Jahr des Bestehens unserer Republik, wollen die Studenten ein gewachsenes Leistungsvermögen unter Beweis stellen.

Jens Awe, Lehrerstudent Mathematik/Physik, 3. Studienjahr

XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Bezirksolympiade (4./5. 2. 84)

Olympiadeklasse 7

230731 Fünf Mädchen, die alle älter als 10 Jahre sind und am gleichen Tag Geburtstag haben, von denen aber keine zwei gleichaltrig sind, werden an ihrem Geburtstag nach ihrem Alter gefragt. Jedes Mädchen antwortet wahrheitsgemäß:
(1) Anja: „Ich bin 5 Jahre jünger als Elke."
(2) Birgit: „Ich bin jünger als Carmen, aber älter als Dorit."
(3) Carmen: „Ich bin 14 Jahre alt."
(4) Dorit: „Ich bin weder das jüngste noch das älteste von uns fünf Mädchen."
(5) Elke: „Birgit und Carmen sind beide jünger als ich."
Untersuche, ob aus diesen Angaben eindeutig ermittelt werden kann, wie alt jedes dieser Mädchen ist! Ist dies der Fall, dann gib für jedes der Mädchen das Alter an!

230732 Beweise, daß jedes Viereck $ABCD$, in dem die Innenwinkel $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCD$ und $\sphericalangle CDA$ die Größen 2α, 3α bzw. 4α haben (wo α die Größe des Innenwinkels $\sphericalangle DAB$ bezeichnet), ein Trapez ist!

230733 Konstruiere ein Dreieck ABC aus $c = 6$ cm, $h_c = 4{,}5$ cm und $s_c = 5$ cm! Dabei sei c die Länge der Seite AB, h_c die Länge der auf AB senkrechten Höhe und s_c die Länge der Seitenhalbierenden von AB.
Beschreibe deine Konstruktion! Leite deine Konstruktionsbeschreibung aus den Bedingungen der Aufgabenstellung her! Beweise, daß ein Dreieck ABC, wenn es nach deiner Beschreibung konstruiert wird, die verlangten Eigenschaften hat! (Eine Diskussion der Ausführbarkeit und Eindeutigkeit der Konstruktionsschritte wird nicht gefordert.)

230734 Von einer Zahl wird folgendes gefordert:
Wenn man die Zahl halbiert,
vom Ergebnis dann 1 subtrahiert,
vom dabei erhaltenen Ergebnis
ein Drittel bildet,
von diesem Drittel wieder 1 subtrahiert,
vom nun entstandenen Ergebnis
ein Viertel bildet
und vom diesem Viertel nochmals 1
subtrahiert,
so erhält man 1.
Gib jede Zahl an, die diese Forderung erfüllt! Beweise dazu, daß jede Zahl, die die Forderung erfüllt, von dir angegeben wurde und daß jede von dir angegebene Zahl die Forderung erfüllt!

230735 Roland rechnet eine Divisionsaufgabe. Er stellt fest: Der Dividend beträgt 60% des Quotienten, der Divisor beträgt 75% des Quotienten.
Beweise, daß man aus Rolands Feststellungen eindeutig ermitteln kann, wie der Quotient der Divisionsaufgabe lautet! Gib diesen Quotienten an!

230736 Von einem Dreieck ABC wird folgendes vorausgesetzt: Der Innenwinkel $\sphericalangle ABC$ ist größer als 90°.
Ist D der Fußpunkt des von C auf die Gerade durch A und B gefällten Lotes, so gilt $2 \cdot \overline{BD} = \overline{AB} = \overline{BC}$.
Beweise, daß durch diese Voraussetzungen die Größen der Innenwinkel des Dreiecks ABC eindeutig bestimmt sind! Ermittle diese Winkelgrößen!

Olympiadeklasse 8

230831 Ein vollständig gefülltes Wasserbecken besitzt einen großen und einen kleinen Abflußhahn. Öffnet man nur den großen Hahn, so läuft das Becken in genau einer Stunde aus; öffnet man nur den kleinen Hahn, so ist das Becken in genau drei Stunden leer.
Nach welcher Zeit ist das Becken leer, wenn beide Hähne gleichzeitig geöffnet sind? Vorausgesetzt wird für jeden der beiden Hähne, daß aus ihm jeweils in gleich langen Zeiten gleich große Wassermengen entströmen.

230832 Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit gegebener Seitenlänge a. Der Mittelpunkt der Seite AD sei E. Auf der Strecke CE sei F derjenige Punkt, für den $\overline{CF} : \overline{FE} = 1 : 2$ gilt.
a) Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen die Flächeninhalte der Dreiecke BCF und AEF einander gleich sind!
b) Ermittle den Flächeninhalt des Dreiecks ABF in Abhängigkeit von a!

230833 Konstruiere ein Dreieck ABC aus $b = 7$ cm, $\varrho = 2$ cm und $\gamma = 80°$! Dabei sei b die Länge der Seite AC, ϱ der Radius des Inkreises des Dreiecks ABC, und γ sei die Größe des Innenwinkels $\sphericalangle ACB$.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

230834 Ermittle die Anzahl aller derjenigen natürlichen Zahlen von 1 bis 1984, die durch 5, aber nicht durch 7 und nicht durch 11 teilbar sind!

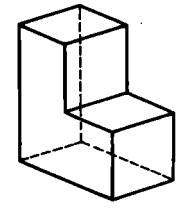
230835 a) Zu einem gegebenen Kreis K werde dasjenige Quadrat Q betrachtet, das den gleichen Umfang wie K hat. Ist der Flächeninhalt von Q größer, gleich oder kleiner als der Flächeninhalt von K? Wieviel Prozent des Flächeninhaltes von K beträgt der Flächeninhalt von Q?
b) Zu einem gegebenen Kreis k werde dasjenige Quadrat q betrachtet, das den gleichen Flächeninhalt wie k hat. Ist der Umfang von q größer, gleich oder kleiner als der Umfang von k? Wieviel Prozent des Umfanges von k beträgt der Umfang von q?
Für π kann der auf 4 Dezimalen genaue Näherungswert $\pi \approx 3{,}1416$ verwendet werden. Die gesuchten Prozentsätze sind auf eine Dezimale nach dem Komma genau anzugeben.

230836 Über fünf Punkte A, B, C, D, M wird folgendes vorausgesetzt:
M ist der Mittelpunkt der Strecke AB;
die Punkte A, C, D, B liegen in dieser Reihenfolge auf einem Halbkreis über AB;
es gilt $AB \parallel CD$;
die Strecke MC schneidet die Strecke AD in einem Punkt E, für den $\overline{AC} = \overline{EC}$ gilt.
Beweise, daß durch diese Voraussetzungen die Größe des Winkels $\sphericalangle ACM$ eindeutig bestimmt ist! Ermittle diese Winkelgröße!

Olympiadeklasse 9

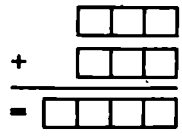
230931 Man ermittle alle Tripel $(x; y; z)$ natürlicher Zahlen mit folgenden Eigenschaften:
(1) x, y und z sind Primzahlen.
(2) Jede Ziffer aus den Zifferndarstellungen von x, y und z (im dekadischen Zahlensystem) stellt eine Primzahl dar.
(3) Es gilt $x < y$.
(4) Es gilt $x + y = z$.

230932 Im Bild ist ein Körper K skizziert. Er besteht aus drei Würfeln der Kantenlänge 1 cm, die in der angegebenen Anordnung fest zusammengefügt sind.
Aus genügend vielen Körpern dieser Gestalt K soll ein (vollständig ausgefüllter) Würfel W (Kantenlänge n Zentimeter) zusammengesetzt werden.
Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen $n > 0$, für die das möglich ist!



230933 In dem untenstehenden Schema soll in jedes Kästchen genau eine der zehn Ziffern (des dekadischen Zahlensystems) so eingetragen werden, daß jede der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 einmal vorkommt und daß eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht.
Beweisen Sie, daß es nicht möglich ist, durch eine solche Eintragung auch noch die zusätzliche Forderung zu erfüllen, daß

bei der Ausführung der Addition genau zwei Überträge auftreten!



230934 Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, für die

$$-5 \leqq \frac{4x-3}{2x+1} < 6 \text{ gilt!}$$

230935 In einem Dreieck ABC schneide eine Parallele zu AB, über deren Lage sonst nichts vorausgesetzt werden soll, die Seite AC in einem Punkt A_1 zwischen A und C, und sie schneide die Seite BC in B_1. Ferner sei P auf AB ein Punkt zwischen A und B, über dessen Lage sonst ebenfalls nichts vorausgesetzt werden soll. Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC sei F_0, der Flächeninhalt des Dreiecks A_1B_1C sei F_1. Ermitteln Sie den Flächeninhalt F des Vierecks A_1PB_1C in Abhängigkeit von F_0 und F_1!

230936 Drei Schüler X, Y, Z diskutieren über die Möglichkeiten, ein gleichseitiges Dreieck D in drei flächengleiche Dreiecke D_1, D_2, D_3 zu zerlegen.
X behauptet: Es gibt genau drei verschiedene derartige Zerlegungen.
Y behauptet: Es gibt genau vier verschiedene derartige Zerlegungen.
Z behauptet: Es gibt mehr als vier verschiedene derartige Zerlegungen.
Welcher der drei Schüler hat recht?
Zwei Zerlegungen von D (einmal in D_1, D_2, D_3, ein zweites Mal in D_1', D_2', D_3') werden dabei genau dann als verschieden bezeichnet, wenn es keine Reihenfolge der Bezeichnungen D_1', D_2', D_3' gibt, für die $D_1 \cong D_1'$, $D_2 \cong D_2'$, $D_3 \cong D_3'$ gilt.

Olympiadeklasse 10

231031 Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare $(g; r)$ aus einer ganzen Zahl g und einer reellen Zahl r, für die

$$\frac{r}{r^2 - 6r + 10} = g \text{ gilt!}$$

231032 Von einem Dreieck ABC und einem Punkt D auf der Seite AC wird vorausgesetzt, daß $\overline{\sphericalangle BAC} = \overline{\sphericalangle CBD} = 45°$ und $\overline{\sphericalangle ABD} = \frac{1}{3}\overline{\sphericalangle BAC}$ gilt.

Beweisen Sie, daß dann $\overline{AD} = \frac{1}{3}\overline{AC}$ gilt!

231033 Beweisen Sie die folgende Aussage!
Wenn man die Menge aller natürlichen Zahlen so in zwei Mengen A und B einteilt, daß jede natürliche Zahl in genau einer dieser beiden Mengen enthalten ist, dann gibt es eine natürliche Zahl d so, daß in einer der beiden Mengen A, B drei Zahlen der Form a, $a + d$, $a + 2d$ enthalten sind (man könnte auch sagen, daß (mindestens) eine der beiden Mengen A, B eine arithmetische Folge der Länge 3 enthält).

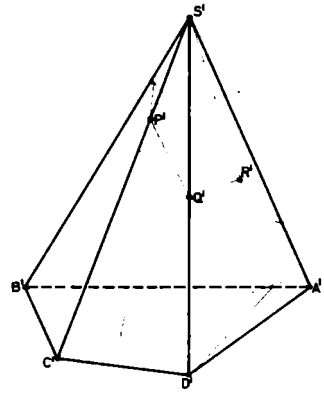
231034 Jürgen überlegt: Im Jahre 1983 begann die 23. OJM. Für mich persönlich wird es der 5. Start sein.
Unter Verwendung dieser Zahlen bildet Jürgen die Gleichung

$$1983 + 23 \cdot x^2 = 5 \cdot y^2. \quad (1)$$

Gibt es ganze Zahlen x und y, für die diese Gleichung (1) gilt?

231035 Ulrike, Vera und Waltraud wollen je ein Rechteck $ABCD$ und dazu einen inneren Punkt P der Strecke CD, einen inneren Punkt Q der Strecke BC sowie noch einen inneren Punkt R der Strecke CD zeichnen.
Ulrike stellt sich die Aufgabe, zu erreichen, daß für den Flächeninhalt F_1 des Dreiecks ABP und den Flächeninhalt F_2 des Dreiecks AQR die Ungleichung $F_1 < F_2$ gilt; Vera will $F_1 = F_2$ und Waltraud $F_1 > F_2$ erreichen.
Untersuchen Sie für jedes der drei Mädchen, ob es sich eine lösbare oder eine unlösbare Aufgabe gestellt hat!

231036 Das Arbeitsblatt zeigt das Bild $A'B'C'D'S'$ einer Pyramide $ABCDS$ in schräger Parallelprojektion sowie das Bild P' eines auf der Kante CS liegenden Punktes P, das Bild Q' eines auf der Kante DS liegenden Punktes Q und das Bild R' eines auf der Fläche ABS liegenden Punktes R.
Konstruieren Sie das Bild der Schnittfigur, die beim Schnitt der Pyramide $ABCDS$ mit der Ebene durch P, Q, R entsteht! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion! Eine Begründung und Diskussion wird nicht gefordert!



Olympiadeklasse 11/12

231231 In einem Dreieck ABC sei M der Mittelpunkt der Seite AB. Eine Gerade durch M verlaufe so, daß sie AC in einem Punkt D und die Verlängerung von BC über C hinaus in einem Punkt E schneidet und daß dabei die Dreiecke AMD und CED den gleichen Flächeninhalt haben.
Beweisen Sie, daß durch diese Voraussetzungen das Verhältnis $\overline{AD} : \overline{DC}$ eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie dieses Verhältnis!

231232 Die Kantenlängen eines beliebigen Quaders seien a, b, c, und die Länge seiner Raumdiagonale sei d.
Man beweise, daß dann stets die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$(ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2 \geqq abcd \cdot \sqrt{3}. \quad (1)$$

Ferner ermittle man alle diejenigen Quader, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

Von den folgenden Aufgaben 231233A und 231233B ist genau eine auszuwählen und zu lösen.

231233A Man untersuche, ob es eine Folge $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$
a) von positiven rationalen Zahlen a_i,
b) von positiven ganzen Zahlen a_i
mit den folgenden Eigenschaften (1), (2) gibt:
(1) Nicht alle Glieder der Folge sind einander gleich.
(2) Für alle $n \geqq 2$ gilt

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}} \right);$$

d. h. a_n ist das harmonische Mittel von a_{n-1} und a_{n+1}.
Falls eine solche Folge im Falle a) bzw. im Falle b) existiert, so ist das zu beweisen.

231233B Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel: 20 Karten, von denen jede mit genau einer der Zahlen 1, 2, 3, ..., 20 beschriftet ist (wobei jede dieser Zahlen vorkommt), liegen aufgedeckt, so daß die Zahlen zu sehen sind, auf dem Tisch. Von diesen Karten hat A in Gedanken zwei ausgewählt, ohne daß B weiß, um welche Karten es sich handelt.
B versucht nun, diese beiden Karten wie folgt zu ermitteln: Als ersten „Zug" nimmt B zwei beliebig von ihm ausgewählte Karten, und A sagt ihm, wie viele von diesen beiden Karten richtig sind (0, 1 oder 2 Karten). Dann legt B diese Karten wieder aufgedeckt zurück.
Waren es noch nicht die beiden richtigen Karten, so nimmt B beim zweiten Zug wieder zwei beliebig von ihm gewählte Karten, und A sagt ihm, wie viele davon richtig sind; B legt dann diese Karten wieder zurück. Dieses Verfahren wird so lange mit dem 3., 4., ... Zug fortgesetzt, bis B in einem dieser Züge die beiden richtigen Karten genommen hat. B hat gewonnen, wenn er spätestens mit dem 12. Zug die beiden richtigen Karten nimmt.
Bei einer Durchführung dieses Spieles beginnt B das Spiel mit der folgenden Strategie: Er nimmt
im 1. Zug die Karten 1, 2 und,
falls dies noch nicht die beiden
richtigen Karten sind,
im 2. Zug die Karten 3, 4 sowie,
in entsprechender Weise fortgesetzt, ...
falls in keinem der bisherigen Züge die beiden richtigen Karten (gleichzeitig in ein und demselben Zug) vorkamen, im 9. Zug die Karten (17, 18).
a) Man gebe zu dieser von B begonnenen Strategie eine Fortsetzungsstrategie für die weiteren Züge an, mit deren Hilfe B den Gewinn erzwingen kann.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß B bei der angegebenen Strategie sogar spätestens mit dem 11. Zug die beiden richtigen Karten nimmt?

231234 Man ermittle alle diejenigen Paare (x, y) reeller Zahlen mit

$0 \leqq x < 2\pi$
und $0 \leqq y < 2\pi$,
die das Gleichungssystem

$$3 \cdot \sin x \cdot \cos y = \cos x \cdot \sin y \quad (1)$$
$$\sin^2 x + \sin^2 y = 1 \quad (2)$$

erfüllen.

231235 Man ermittle alle Paare (a, b) von Primzahlen a und b, für die $3a^2 + a = b^2 + b$ gilt.

231236 Es sei $\sphericalangle P_0SQ$ ein Winkel von beliebig, aber fest vorgegebener Größe $\alpha < 180°$. Ein vom Punkt P_0 ausgehender, ins Innere des Winkels gerichteter Lichtstrahl werde jedesmal, wenn er auf einen Schenkel des Winkels trifft, nach dem Reflexionsgesetz zurückgeworfen. Die Punkte, in denen der Lichtstrahl dabei auf die Schenkel des Winkels trifft, seien fortlaufend mit $P_1, P_2, P_3, \ldots$ bezeichnet (soweit solche Punkte existieren). Die Größe des Winkels, den zu Beginn der von P_0 ausgehende Lichtstrahl mit der von P_0 nach S führenden Halbgeraden bildet, sei φ_0 genannt ($0° < \varphi_0 < 180°$).

Beim Experimentieren mit derartigen Winkelspiegeln kann man fragen, ob es zu gegebenem φ_0 endlich oder unendlich viele Punkte $P_1, P_2, P_3, \ldots$ gibt, ob es zu jedem φ_0 unter den Punkten $P_1, P_2, P_3, \ldots$ einen Punkt P_k derart gibt, daß $\overline{SP}_k \leqq \overline{SP}_i$ für alle $i = 1, 2, 3, \ldots$ gilt und durch wie viele Möglichkeiten ... der Richtungswahl φ_0 es (je nach der Vorgabe von α) erreichbar ist, daß der Lichtstrahl eine auf seinem Weg dem Punkt S nächstgelegene Teilstrecke $P_{m-1}P_m$ mit der Eigenschaft $\overline{SP}_{m-1} = \overline{SP}_m$ durchläuft, so daß also das Wegstück $P_0 \ldots P_{m-1}$ symmetrisch liegt zum Wegstück $P_m \ldots P_{2m-1}$ bezüglich der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle P_0SQ$. Diese Frage wird durch folgende Teilaufgaben genauer erfaßt:

I. Man beweise die folgenden Aussagen (A) und (B) bei beliebig, aber fest vorgegebenem α:

(A) Für jedes φ_0 gibt es genau eine natürliche Zahl n so, daß Punkte $P_0, P_1, \ldots, P_n$ existieren, während der von P_n ausgehende Lichtstrahl nicht mehr den anderen Schenkel des Winkels $\sphericalangle P_0SQ$ erreicht.

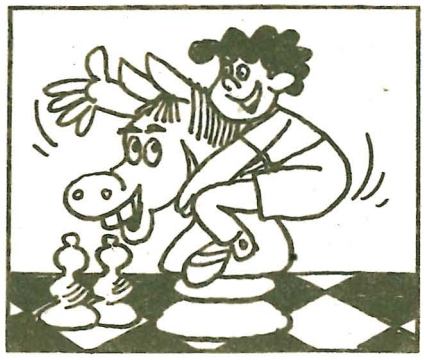
(B) Für jedes φ_0 gibt es genau eine natürliche Zahl $m \geqq 1$ so, daß $P_0, P_1, \ldots, P_{m-1}$ existieren und (falls $m \geqq 2$ ist) für $k = 1, \ldots, m-1$ die Ungleichung $\overline{SP}_k < \overline{SP}_{k-1}$ erfüllen, daß dagegen entweder kein Punkt P_m mehr existiert oder $\overline{SP}_m \geqq \overline{SP}_{m-1}$ sowie (falls $m < n$ ist) für $k = m+1, \ldots, n$ sogar $\overline{SP}_k > \overline{SP}_{k-1}$ gilt.

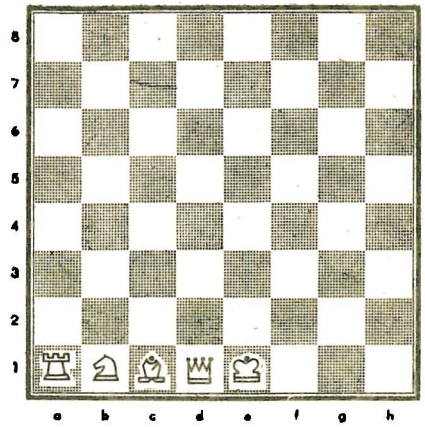
II. Man ermittle alle diejenigen am Anfang vorzugebenden Werte α, zu denen es

(C) genau einen, (D) genau zwei, (E) genau n Werte φ_0 mit der Eigenschaft gibt, daß für die in (B) gefundene Zahl m (ein Punkt P_m existiert und) die Gleichung $\overline{SP}_m = \overline{SP}_{m-1}$ gilt. In (E) sei dabei $n > 2$ eine gegebene natürliche Zahl.

Zitiert

Der erlebte Widerspruch wirkt so stark, daß man nicht anders kann, als sich zu engagieren. ***Hans Hiebsch***





Es gibt eine Vielzahl von Elementen im königlichen Spiel, die mathematisch Interessantes zu bieten haben. Allgemein bekannt ist dabei die Anekdote von der Entstehung des Schachspiels.

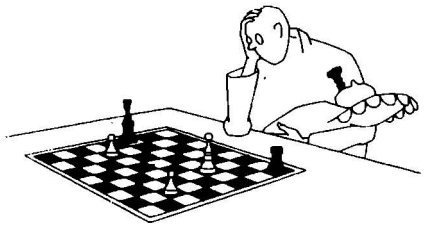
Ein morgenländischer Weiser, von seinem König mit der Erfindung eines Zeitvertreibs beauftragt, erfand das Schachspiel. Um eine Belohnung gefragt, bat er um ein Weizenkorn für das erste der 64 Felder, alsdann aber für jedes weitere um die verdoppelte Anzahl Körner vom vorigen Feld. Der König ließ die kleine, scherzhafte Arbeit lachend beginnen, aber bald waren seine Kornkammern leer und er zornig, denn so viele Weizenkörner konnten niemals herbeigeschafft werden. Die genaue Anzahl lautet:

18446744073709551615 oder, mathematisch gefaßt, die geometrische Reihe $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63} = 2^{64} - 1$.

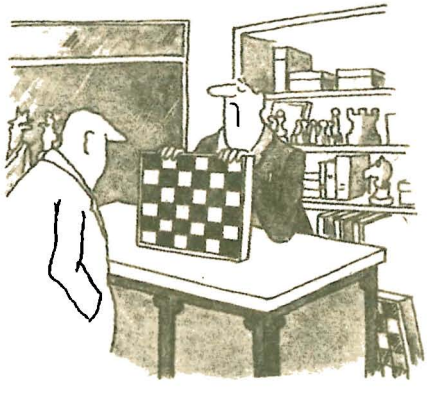
In unserer heutigen Aufgabe wollen wir uns mit Kombinatorik beschäftigen. Man stelle auf die Felder a1 bis e1 folgende fünf weiße Figuren – König, Dame, Turm, Läufer und Springer. Aber keine Figur darf, wie in dem angegebenen Diagramm, dabei auf dem Feld stehen, auf welches sie in der Partieanfangsstellung gehört! Zwei mögliche Beispiele seien genannt:

Sa1, Tb1, Dc1, Kd1, Le1 und Ka1, Lb1, Sc1, Td1, De1. Wie viele verschiedene Anordnungen dieser Art sind möglich?

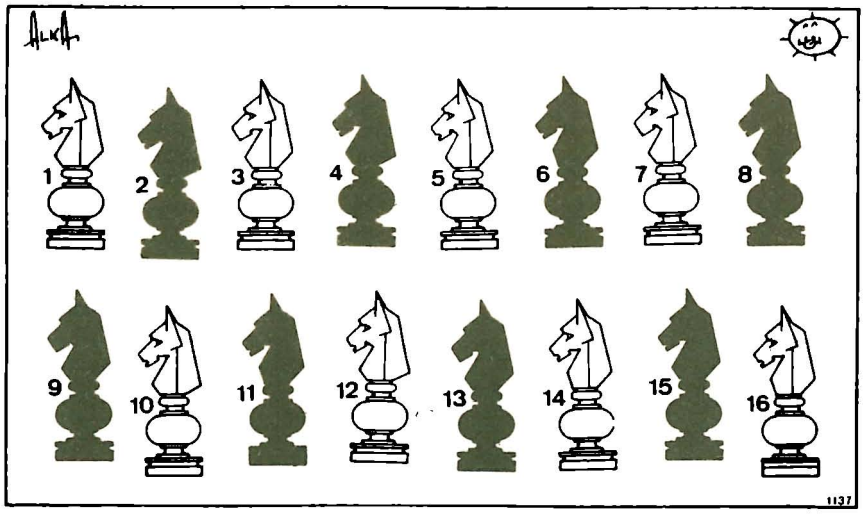
H. Rüdiger



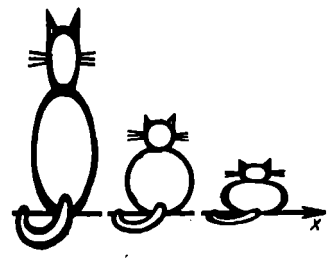
„Wenn Sie dafür nicht soviel anlegen wollen, habe ich hier noch ein besonders preisgünstiges Sonderangebot."



Ordne die acht Originalfiguren jeweils ihren Schattenbildern zu!



Allerlei Gestrecktes



Wir kennen aus dem Mathematikunterricht die *zentrische Streckung*. Wenn ein Streckungszentrum Z und ein Streckungsfaktor $k \neq 0$ vorgegeben sind, dann wird durch die damit festgelegte zentrische Streckung jedem Punkt der Ebene genau ein Bildpunkt zugeordnet.
Dabei kann man feststellen:
(1) Das Bild einer Geraden ist wieder eine Gerade.
(2) Parallele Geraden haben parallele Bilder.
(3) Das Bild einer Strecke ist k-mal so lang wie die Strecke selbst.
(4) Das Bild eines Winkels ist so groß wie der Winkel selbst.

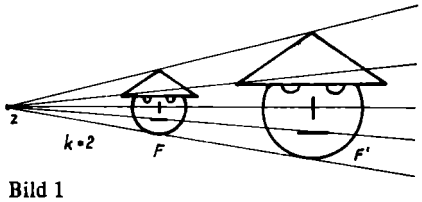


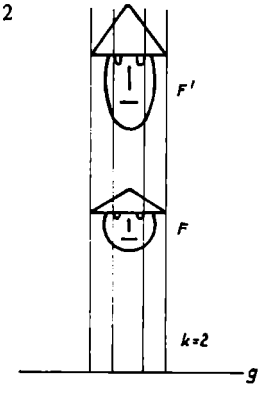
Bild 1

Im Bild 1 ist eine Figur F und ihr Bild F' bei der zentrischen Streckung $(Z; k = 2)$ dargestellt.
Nun wollen wir einmal untersuchen, welche Bilder der Figur F bei *anderen* Arten von Streckungen zugeordnet werden.

1. Als erstes betrachten wir *Streckungen in nur einer Richtung*. Sie können festgelegt werden, indem man eine bestimmte Gerade g vorgibt und einen Streckungsfaktor $k > 0$. Das Bild eines Punktes P, der nicht auf g liegt, wird dann wie folgt konstruiert:
a) Man zeichnet durch P eine Senkrechte zu g. Sie werde mit h bezeichnet, ihr Schnittpunkt mit g sei Q.
b) Auf h trägt man von Q aus in Richtung P das k-fache der Strecke $\overline{QP}$ ab und erhält so als Endpunkt das Bild P' von P. Die Punkte von g werden auf sich selbst abgebildet.

Im Bild 2 ist die Figur F und ihr Bild F' bei einer Streckung in nur einer Richtung dargestellt (Streckung von g aus mit dem Faktor $k = 2$).
Welche Eigenschaften hat diese Strekkung?
Wir können aus dem Bild erkennen:
(1) Das Bild einer Geraden ist wieder eine Gerade.
(2) Parallele Geraden haben parallele Bilder.

Bild 2



(3) Das Bild einer Strecke ist so lang wie die Strecke selbst oder länger, aber höchstens k-mal so lang.
(4) Das Bild eines Winkels hat im allgemeinen nicht die Größe des Winkels selbst.
(Auf Beweise wollen wir verzichten.)

2. Wir untersuchen jetzt, was man durch *Nacheinanderausführen zweier Streckungen in zueinander senkrechten Richtungen* (mit gleichem Streckungsfaktor k) erhält.

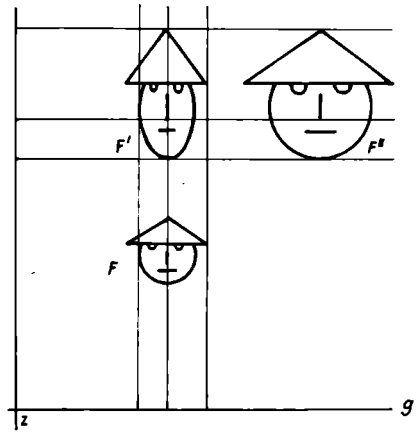


Bild 3

Im Bild 3 ist die Figur F zunächst von g aus und danach von h aus mit dem Faktor $k = 2$ gestreckt.
Was stellen wir fest?
Das Bild läßt erkennen, daß die Nacheinanderausführung der beiden Streckungen zu demselben Resultat führt wie eine *zentrische Streckung*, bei der als Streckungszentrum der Schnittpunkt von g und h und als Streckungsfaktor ebenfalls $k = 2$ gewählt wird.

3. Als letztes betrachten wir eine *zentrische Streckung mit veränderlichem Streckungsfaktor*. Dabei legen wir fest, daß zu jedem Punkt P als Streckungsfaktor der Zahlenwert der Streckenlänge von $\overline{ZP}$ gehört. Der Faktor k hängt also davon ab, wie weit P vom Streckungszentrum entfernt ist. Wenn P drei Längeneinheiten von Z entfernt liegt, dann ist der Streckungsfaktor für P gleich 3, beträgt die Entfernung eine halbe Längeneinheit, dann ist er $\frac{1}{2}$, usw. Die Konstruktion des Bildpunktes erfolgt ansonsten wie bei der üblichen zentrischen Streckung.

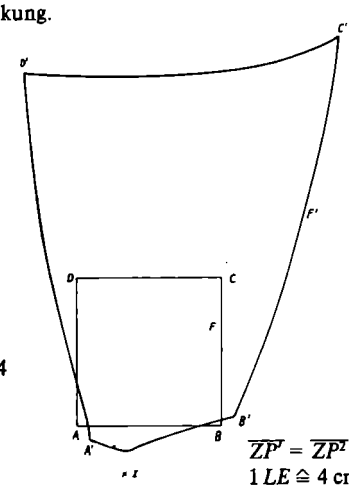
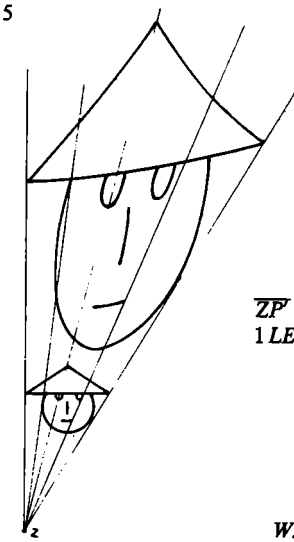


Bild 4

$\overline{ZP'} = \overline{ZP^1}$
$1\,LE \triangleq 4$ cm

Wir wählen zunächst einmal ein Quadrat als Originalfigur und konstruieren die Bildfigur. Das Bild 4 zeigt das Ergebnis. Wie man erkennt, ist das Bild einer Strecke (bzw. einer Geraden) im allgemeinen *keine* Strecke (bzw. Gerade) mehr, die ursprüngliche Figur wird ungleichmäßig verzerrt. Wendet man eine derartige Streckung auf die Figur F aus den Bildern 1 bis 3 an, so kann das Ergebnis wie in Bild 5 aussehen. (Die Form der Bildfigur hängt dabei sehr von der Lage des Streckungszentrums Z in bezug auf F ab.)

Bild 5



$\overline{ZP'} = \overline{ZP^1}$
$1\,LE \triangleq 2$ cm

W. Walsch

ARBEITS-
GEMEINSCHAFTEN
IM BLICKPUNKT

Klaus-Peter berichtet aus seinem Mathematikzirkel

Teil 3: Holgers große Enttäuschung

Fräulein Steinmann, unsere Zirkelleiterin, hat einen Vater, und dieser Vater besitzt einen Garten. Es ist ein wunderschöner parkähnlicher Garten, von dem man einen herrlichen Blick über das Tal des Flusses hat, welcher im Osten unser kleines Städtchen G tangiert. Wir kannten den Garten sehr genau, denn Fräulein Steinmann hatte die Mädchen und Jungen ihres Zirkels schon zweimal dorthin eingeladen; wir wußten sogar, wie Eis und Kuchen in diesem Garten schmecken.

Alle fanden sich pünktlich zum Zirkelnachmittag ein, am pünktlichsten war Holger; er trabte durch das Gartentor, gerade als die Rathausuhr zur vollen Stunde schlug.

Ob er denn noch schnell seinen Tip im Zahlenlotto abgegeben hätte, fragte ihn Fräulein Steinmann schmunzelnd, und da wußten wir, daß heute das Lotto-Problem gelöst werden sollte.

Wir saßen an einem großen runden Gartentisch unter dem Nußbaum und diskutierten. Zunächst wurden wir uns darüber einig, daß das Tippen von 5 Zahlen aus einer Menge von 90 Zahlen kein *Anordnungsproblem* war. Unsere Kenntnisse über Permutationen und die Formel $P_n = n!$, mit welcher wir die Anzahl der Anordnungsmöglichkeiten von n Elementen berechnen konnten (vgl. *alpha* Heft 2/84, S. 34), nützten uns also wenig.

„Heute hat Holger sicher die richtigen fünf Zahlen ausgewählt", meinte Fräulein Steinmann und lächelte, doch Holger, der schon lange auf die Lösung des Lotto-Problems wartete, runzelte die Stirn und blinzelte mißtrauisch in die Sonne. Doch uns interessierte Holgers heutiger Tipschein nicht, das Jagdfieber hatte uns wieder einmal gepackt: „Ausgewählt", das war eine Spur. Doch sehr „heiß" war sie noch nicht. Wir dachten nach.

Es vergingen fünf Minuten, doch keiner hatte eine Idee.

Wieder half Fräulein Steinmann: „Wir spielen einmal ‚1 aus 90'."

Kein Problem: Es gibt 90 Möglichkeiten, genau eine Zahl aus 90 Zahlen auszuwählen.

$C_{90}^1 = 90$ schrieb Fräulein Steinmann an die kleine Tafel, welche sie dem Nußbaum um den Hals gehangen hatte, und sagte: „Es gibt 90 Möglichkeiten, von 90 Elementen genau ein Element auszuwählen. Jede solche Auswahl heißt eine *Kombination*."

Dann schrieb sie C_{90}^{90} an die Tafel.

Frank, der die wenigsten Schwierigkeiten hatte, eine neue Symbolik zu verstehen, sagte: „Eins! – Es gibt genau eine Möglichkeit, aus einer Menge von 90 Elementen genau 90 Elemente auszuwählen."

Das verstanden wir auch, nur die gewissenhafte Utta wollte diese 90 Elemente aufschreiben.

Doch Fräulein Steinmann ließ uns zunächst einmal üben:

$C_{16}^{16} = 1$, denn es gibt genau eine Möglichkeit, von 16 Elementen genau 16 auszuwählen.

$C_{25}^1 = 25$, denn es gibt genau 25 Möglichkeiten, von 25 Elementen genau eines auszuwählen.

$C_{25}^{24} = 25$, es gibt genau 25 Möglichkeiten, aus 25 Elementen genau 24 auszuwählen, denn dies ist gleichbedeutend damit, von den 25 Elementen genau jenes eine auszuwählen, welches man dann wegläßt. Also gilt $C_{25}^1 = C_{25}^{25-1}$, und mit derselben Überlegung kann man offenbar sofort $C_n^k = C_n^{n-k}$ gewinnen, denn jeder Auswahl von k Elementen aus einer Gesamtheit von n Elementen entspricht als „Restmenge" eine Auswahl von $(n - k)$ Elementen aus diesen n Elementen, und auf diese Weise erhält man auch alle Möglichkeiten.

$C_k^k = 1$, denn es gibt genau eine Möglichkeit, von k Elementen genau k auszuwählen.

$C_r^1 = r$, denn es gibt genau r Möglichkeiten, aus r Elementen genau eines auszuwählen.

Damit wußten wir zwar schon allerhand, doch wie man zweckmäßig beim Lotto einen Tipschein ausfüllen könnte, wußten wir noch immer nicht. Fräulein Steinmann indes verstand es vortrefflich, uns Schritt für Schritt der Lösung des Problems näherzubringen, sie schlug vor, einmal „2 aus 5" zu spielen.

Nun war Utta in ihrem Element; in kurzer Zeit hatte sie alle Auswahlmöglichkeiten von 2 Elementen aus der Menge der fünf Buchstaben a, b, c, d und e aufgeschrieben:

a b a d b c b e c e
a c a e b d c d d e

Fräulein Steinmann bestätigte, daß Utta keine Kombination vergessen hatte, und lobte sie, da sie sogar „lexikographisch" vorgegangen wäre. Erst stutzten wir, doch dann verstanden wir den Sinn dieser Bezeichnungsweise: Utta hatte die 10 Kombinationen in der gleichen Reihenfolge aufgeschrieben, in der diese „Wörter aus zwei Buchstaben" in einem Lexikon stehen würden.

Jens durfte an die Tafel schreiben:

$C_5^2 = 10$.

Oliver, der lieber kombinierte als probierte, meinte: „Jeder der 5 Buchstaben kann mit jedem der vier übrigen zu einer Auswahl von 2 Elementen zusammengefaßt werden. Wählt man zum Beispiel d aus, so kann dieses Element mit a, b, c und e kombiniert werden. Deshalb müßte es $5 \cdot 4 = 20$ solcher Kombinationen geben."

Das leuchtete uns zunächst ein, doch Utta hatte nur 10 Kombinationen gefunden. Nun war guter Rat teuer.

Wieder ließ uns Fräulein Steinmann grübeln. Man hörte nichts als ein leichtes Säuseln des Windes und ein leises Knistern der Gedanken. Schließlich unterbrach Gunter, der bald auf Uttas Kombinationen, bald auf Olivers nachdenkliches Gesicht geschaut hatte, unsere Überlegungen: „Man zählt ja alles doppelt." Und – von Fräulein Steinmann aufgefordert – erläuterte er: „Zum Beispiel erhält man die Kombination a d sowohl, wenn man a auswählt und d als eines der restlichen Elemente auffaßt, als auch, wenn man d auswählt und a als eines der übrigen Elemente dazunimmt." Oliver nickte zustimmend: „Wir haben also 20 noch durch 2 zu teilen." Nun stimmten unsere Überlegungen mit Uttas Auswahl überein. Wir spürten sogar, daß wir damit die Lösung eines allgemeineren Problems gefunden hatten, denn Fräulein Steinmann gab uns den Impuls, nun „2 aus n" zu spielen.

Frank argumentierte: „Zunächst wähle ich eine beliebige Zahl aus der Menge der n Zahlen aus. Dafür gibt es n Möglichkeiten. Jedes dieser ausgewählten Elemente kann mit einem der $n - 1$ übrigen Elemente zu einer Kombination von 2 Elementen zusammengefaßt werden. Bei $n \cdot (n - 1)$ Auswahlmöglichkeiten ist jede doppelt gezählt. Also gibt es $C_n^2 = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ Kombinationen."

Fräulein Steinmann freute sich sehr über diese gute Begründung, lobte Frank und sagte, wir sollten gut aufpassen, nun käme das schwierigste Problem.

Natürlich paßten wir gut auf, doch eine Formel für die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten von k Elementen aus einer Menge von n Elementen zu finden, trauten wir uns doch nicht zu.

Corinna meinte, es müsse $k \leqq n$ sein. Das war zwar nicht falsch, denn man kann nicht mehr Elemente auswählen, als man zur Verfügung hat, doch weiter half uns diese Erkenntnis auch nicht. Doch nun zeigte sich wieder einmal, daß Fräulein Steinmann nicht nur kluge Fragen stellen konnte, sondern daß sie auch hervorragend verstand, uns schwierige Zusammenhänge zu erklären.

„Von den n Elementen 1; 2; 3; 4; ...; n sollen k Elemente ausgewählt werden. Wir beginnen zunächst damit, ein Element auszuwählen. Wir wissen schon, daß es $C_n^1 = n$ solcher Kombinationen gibt. Jede dieser Auswahlmöglichkeiten nennt man eine Kombination *1. Klasse*, weil genau ein Element ausgewählt wird.

Zu *jeder* dieser Kombinationen wollen wir nun ein zweites Element hinzufügen; dies ist $(n - 1)$-mal möglich, wobei jede Kombination doppelt gezählt wird. Also gibt es $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ Kombinationen zweiter Klasse von n Elementen. Bis hierher hatten uns Franks Überlegungen bereits geführt.

Nun fügen wir zu jeder dieser Kombinationen ein drittes Element aus der Menge der jeweils übrigen $n-2$ Elementen hinzu. Also erhalten wir $\frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot(n-2)$ Kombinationen, wobei wir jede *dreifach* gezählt haben, denn es kann z. B. die Kombination der Zahlen 1; 2; 3 auf folgende Weise entstanden sein:
Dem Paar 1; 2 wird 3 als drittes Element hinzugefügt, oder
dem Paar 1; 3 wird 2 als drittes Element hinzugefügt, oder
dem Paar 2; 3 wird 1 als drittes Element hinzugefügt.

Also gilt $C_n^3=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{2\cdot 3}$."

„Wenn man im Nenner noch den Faktor 1 hinzufügt, sieht die Formel noch schöner aus", sagte Jens, und er durfte $C_n^3=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ an die Tafel schreiben.

„Nun geht es eigentlich auf die gleiche Art weiter", meinte Gunter, der das Prinzip, wie man von einer Auswahl von $k-1$ Elementen zu einer solchen aus k Elementen kommt, bereits erfaßt hatte. Fräulein Steinmann bestätigte dies und fuhr fort:
„Nehmen wir einmal an, wir hätten – in der angegebenen Weise fortfahrend – herausbekommen, daß es

$C_n^{k-1}=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot[n-(k-2)]\,1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k-1)$ (*)

Möglichkeiten gibt, aus unserer Menge von n Elementen genau $k-1$ Elemente auszuwählen. Aus *jeder* solchen Kombination $(k-1)$-ter Klasse kann man eine Auswahl von k Elementen erhalten, indem man eines der $n-(k-1)$ noch nicht benutzten Elemente hinzufügt. Nun wird zunächst allerdings wieder jede solche Kombination k-ter Klasse k-fach gezählt, denn zum Beispiel in der Kombination 1; 2; 3; ...; k kann jedes Element das zu den übrigen $k-1$ Elementen ‚hinzugefügte' sein.

Also ist $C_n^k=C_n^{k-1}\cdot\frac{n-(k-1)}{k}$, und berücksichtigt man die oben genannte Beziehung (*), so erhält man

$$C_n^k=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot[n-(k-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}."$$

Da stand sie nun an der Tafel, die Formel, welche das Lotto-Problem lösen sollte. Wir starrten sie mißtrauisch an und schwiegen. Auch die Sonne schien nun nicht mehr ganz so hell zu scheinen wie vorher.

Fräulein Steinmann machte uns Mut: „Wer die Erarbeitung der Formel $C_n^2=\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}$ verstanden hat, dem fallen sicher auch die weiterführenden Überlegungen nicht schwer."

Wir ahnten, daß sie recht hatte. Doch wir schwiegen weiter, und Fräulein Steinmann schwieg instinktiv mit. Das war das beste, was sie tun konnte, denn erst zaghaft, doch bald immer drängender trugen wir unsere Gedanken vor:
Daß man für $n=5$ und $k=2$ die schon bekannte Formel $C_5^2=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}$ erhält! Daß die Punkte ... in der Formel nichts anderes als „usw." bedeuten! Daß man sich die Formel gut merken könne, da im Zähler und im Nenner gleich viel Faktoren, nämlich k stehen! Daß man sie noch vereinfachen kann, wenn man im Nenner für das Produkt den Ausdruck $k!$ schreibt! Daß wir die Formel nun doch einmal anwenden wollten!

Diesen letzten Gedanken griff Fräulein Steinmann auf und meinte:
„Nun rechnet einmal aus, wieviel voneinander verschiedene Tipscheine es beim Spiel ‚5 aus 90' gibt."

Die Formel $C_{90}^5=\frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$ war schnell hingeschrieben. Nur gut, daß Oliver seinen Taschenrechner bei sich hatte: $C_{90}^5=43\,949\,268$.

Nun diskutierten wir Holgers Gewinnchancen. Alle Tipscheine auszufüllen, lohnt sich sicher nicht, man müßte ja fast 22 Millionen Mark als Einsatz bezahlen.

Holger war enttäuscht. Er hatte gehofft, als „Mathematiker" einen kleinen Vorteil gegenüber allen anderen Lotto-Freunden zu haben. „Hier spielt der Zufall die entscheidende Rolle", tröstete ihn Fräulein Steinmann und versprach, uns später noch mehr über die „Wahrscheinlichkeit des Eintreffens eines bestimmten Ereignisses" zu erzählen. Immerhin sahen wir aber schon ein, daß alle Kombinationen der 5 Zahlen gleichberechtigt waren, daß also die Zahlen 1 2 3 4 und 5 mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewinnen wie jede andere Kombination von 5 Zahlen.

Fräulein Steinmann gab uns einen Zettel, auf dem einige Probleme standen, und bat uns, bis zum nächsten Zirkel darüber nachzudenken:

12 Kinder veranstalten in einem Ferienlager ein Schachturnier. Jeder spielte gegen jeden, und jede Partie dauerte im Durchschnitt 40 Minuten. Wie lange dauerte das Turnier?

8 Gruppenleiter des Ferienlagers beteiligten sich abends an einem Skatturnier. Dabei sollen alle möglichen Zusammensetzungen von jeweils drei Spielern drei Spiele austragen. Wie oft mußten die Karten gemischt werden?

Gruppenleiter Heinz fragt, wieviel voneinander verschiedene „Spiele" er bei 32 Karten überhaupt bekommen kann, wenn er 10 Karten erhält und die Verteilung der restlichen Karten unberücksichtigt bleibt.

Fünf Kinder möchten Fotos von sich haben. Neben den Einzelbildern und dem Gruppenfoto mit allen fünf Kindern möchte jeder auch alle Bilder mit je zwei verschiedenen Kindern, alle mit je drei verschiedenen Kindern und alle mit je vier verschiedenen Kindern haben. Wieviel Abzüge muß der Fotozirkel anfertigen?

Nach Abschluß des Ferienlagers verabschiedeten sich die 14 Kinder einer Gruppe voneinander, und jeder gab jedem die Hand. Wie oft wurden die Hände geschüttelt?

Ersetze die im folgenden „Zahlendreieck" auftretenden Symbole durch die entsprechenden Zahlen:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & C_1^1 & & & \\
 & & 1 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\
 & 1 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\
1 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

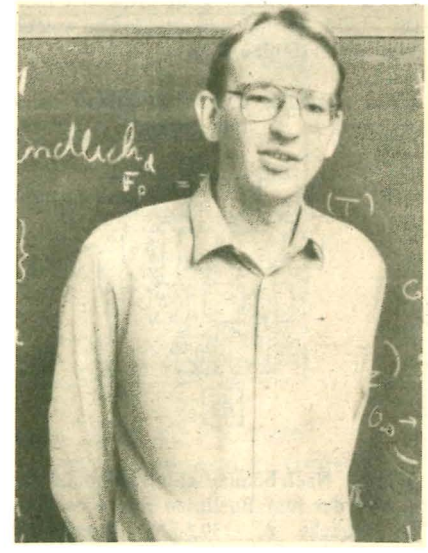
Hast du dieses Zahlendreieck schon in einem anderen Zusammenhang kennengelernt? (vgl. auch *alpha* Heft 4/82, Bendukidse, Das Pascalsche Dreieck)
Nutzt man eine bekannte Eigenschaft dieses Zahlendreiecks aus, kann man es – etwa mit der nächsten Zeile – fortsetzen, ohne die Werte für C_5^k über unsere Formel zu berechnen. Welche Beziehung über Kombinationen läßt sich daraus schlußfolgern?
Etwas schwieriger ist die Frage nach der Summe aller in einer Zeile, etwa der n-ten Zeile des Zahlendreiecks stehenden Zahlen:

$$1+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=$$

Schon wollten wir uns an die Probleme heranwagen, da kam Fräulein Steinmann, die uns unbemerkt verlassen hatte, mit einem großen Teller Kuchen und einem Krug Apfelsaft an unseren Tisch unter dem Nußbaum, worauf wir einmütig beschlossen, das Lösen der Aufgaben auf einen späteren Zeitpunkt zu vertagen. *P. Göthner*

Zahlreiche *alpha*-Leser, unter ihnen auch Fräulein Steinmann, haben in Klaus-Peters Bericht im Heft 1/83 auf den Seiten 16 und 17 einen Rechenfehler entdeckt. Es muß richtig heißen:
$P_6=6\cdot P_5=720$; $P_7=7\cdot P_6=5040$;
$P_8=8\cdot P_7=40\,320$; $P_9=9\cdot P_8=362\,880$.

Prof. Dr. Gerd Faltings, siehe unseren Beitrag Seite 49/50.



mathematicus

Aufgaben zur Wiederholung
von Grundkenntnissen, Teil 2

▲16▲ Ergänze! Gleiche Symbole bedeuten stets gleiche Zahlen.

$\frac{3}{4}$ von 80 = □

$\frac{1}{5}$ von □ = ○

$\frac{5}{6}$ von ○ = △

$\frac{4}{5}$ von △ = ▷

$\frac{1}{4}$ von ▷ = 2.

▲17▲ Rechne!

1.	$\frac{4}{5}$						
2.			$\frac{3}{4}$				
3.		$\cdot\frac{3}{4}$		−0,2	0	:0,1	
4.							8

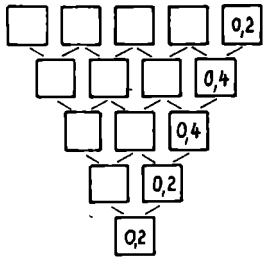
▲18▲ Ergänze die Tabelle, wenn gilt:

$\frac{1}{2} \cdot a - b = 0$

a	0,8	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{5}$	1
b			0		

▲19▲ Das arithmetische Mittel der Zahlen 13, 15, 18 und a heißt 17. Für welche natürlichen Zahlen steht a?

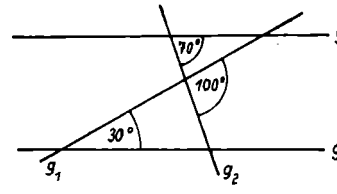
▲20▲ Ergänze die freien Felder, wenn paarweise zu multiplizieren ist!



▲21▲ Nach Schichtschluß rechneten die Fahrer der fünf Buslinien ihre Einnahme ab. Strecke A: 337,55 M, Strecke B: 407,05 M, Strecke C: 278,90 M, Strecke D: 501,10 M und Strecke E: 377,– M.
a) Wie hoch war die Gesamteinnahme?
b) Welcher Betrag fehlt an 2000,– M?
c) Welche Summe wurde durchschnittlich auf jeder Strecke eingenommen?

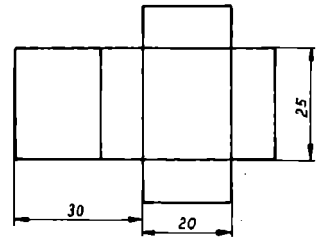
▲22▲ Die Schüler einer 6. Klasse legten bei einer Wanderung insgesamt 54 km zurück. Am ersten Tag schafften sie ein Drittel der Gesamtstrecke. Von der verbleibenden Strecke bewältigten sie am zweiten Tag vier Neuntel. Wieviel Kilometer wanderten die Kinder jeden Tag? Verwende eine Tabelle!

▲23▲ Beweise, daß g_3 parallel zu g_4 verläuft!

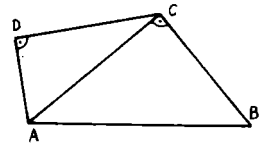


▲24▲ Berechne den Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$, wenn gilt:
(1) $\overline{AB} = 4{,}0$ cm
(2) $\overline{BC} = 8{,}0$ cm
(3) $\sphericalangle ABC = 45°$.

▲25▲ Welches Volumen hat der Quader, dessen Netz abgebildet ist?



▲26▲ Konstruiere ein Quadrat $ABCD$ mit der Diagonalenlänge $d = 6{,}0$ cm!
Spiegle dieses Quadrat an einer Geraden, die mit dem Quadrat nur den Punkt B gemeinsam hat!



▲27▲ Addiere zeilen- und spaltenweise!

$\frac{1}{2}$	0,3	
0,2	$\frac{1}{10}$	

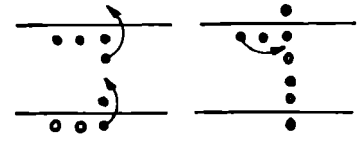
Multipliziere zeilen- und spaltenweise!

0,4	1,2	
2,5	0,8	

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Miguel de Guzmán

Mathematische Fakultät der Universität Madrid

▲2453▲ Wir betrachten ein Schachbrett, das sich nach allen Seiten beliebig weit erstreckt und durch eine Gerade in eine obere und eine untere Hälfte geteilt wird. In die Felder werden Spielsteine gesetzt, die wie beim Steckhalma gezogen werden:
Ein Stein kann einen direkt benachbarten Stein in waagerechter oder senkrechter Richtung (nicht diagonal) überspringen, wobei der übersprungene Stein vom Brett genommen wird.



Wir stellen jetzt eine Anzahl von Steinen im unteren Teil des Brettes auf und versuchen, durch eine Reihe von Sprüngen so weit wie möglich in den oberen Teil zu gelangen. Das Bild zeigt, daß man mit vier Steinen bis in die zweite Reihe des oberen Teils kommt.
Wieviel Steine sind erforderlich – und wie müssen sie plaziert werden –, um die dritte, vierte bzw. fünfte Reihe zu erreichen? Kann man überhaupt beliebig weit nach oben kommen? Man versuche zunächst, die Aufgabe experimentell zu lösen.

Dividiere zeilen- und spaltenweise!

$\frac{5}{6}$	2	
$\frac{3}{4}$	1,2	

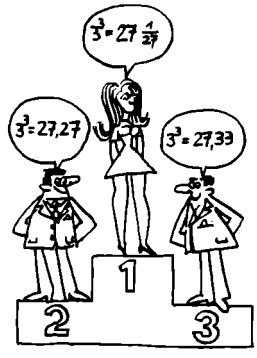
▲28▲ Für die gebrochenen Zahlen a, b und c gilt
(1) $3 \cdot a = 2$
(2) $a \cdot b = 0{,}\overline{66}$
(3) $b + c = 1$
Ermittle a, b und c!

▲29▲ Löse die Ungleichung!

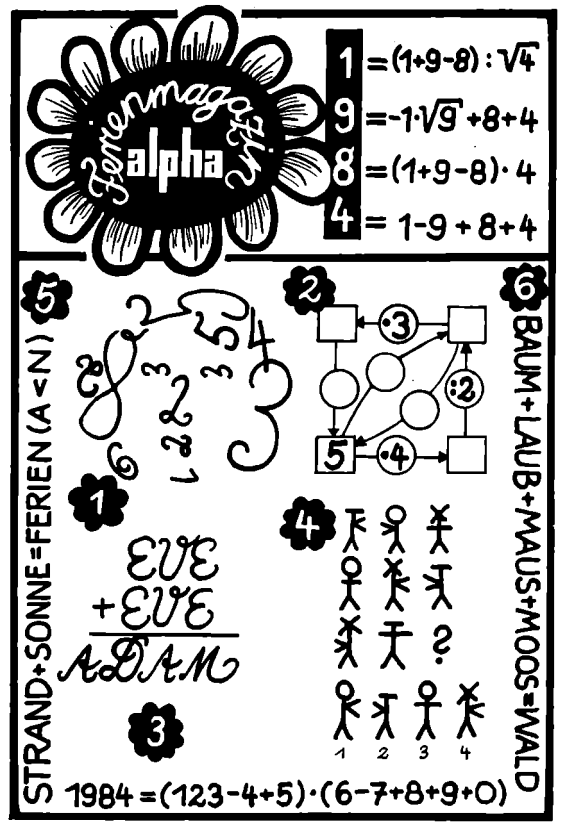
$2^3 = x > 5$ $\quad 3(x+1) < 11$

$3^3 - x > 25$ $\quad x : 0{,}5 \quad < 1$

Diese Aufgaben entnahmen wir einem Heft des Kreises Löbau, zusammengestellt von den Fachberatern Mathematik des Kreises.



Die lustigen Logeleien und Vignetten stammen aus der Feder von: H. Teske, Leipzig; Fun in Math., Ontario; M. Richter, Berlin; Füles, Budapest; Mathe-LVZ, Leipzig; J. Lehmann, Leipzig; Yvonne Heistermann, Bernburg; T. Merten, Stralsund; P. Matursko, Praha; B. Henninger, Berlin; H. Schrade, Berlin; Troll, Berlin; L. Otto, Leipzig; Dr. R. Mildner, Leipzig; H. Büttner, Berlin; W. Aschmanow, Moskau; W. Schubert, Berlin;
Idee: J. Lehmann, Leipzig



Lösungen

S. 1: Das Alter des Lagerleiters ist 44 Jahre.

656	757	858
+ 656	+ 757	+ 858
1312	1514	1716

Nr. 1 gehört an Stelle des Fragezeichens.

581273	3042
+ 59774	+1043
641047	+2046
	+2886
	9017

S. 2: Blumengebinde Nr. 2 ist das gesuchte Spiegelbild.

S. 3: Die Lösung sei dem Leser selbst überlassen.

S. 4: Die Abb. b und d zeigen die richtigen Ansichten.

S. 5: Die Profile 6 und 15 sind gleich.

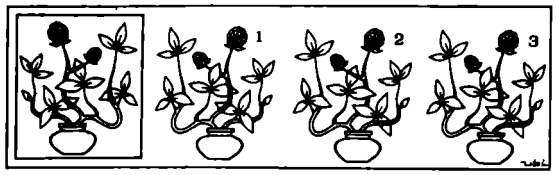
S. 6: $35 + 10 + 7 = 52$; $75 - 25 + 0 = 50$; $(12 + 1) \cdot (0 : 19) = 0$; $(1 \cdot 0) \cdot 1 = 0$; $42 : 42 = 1$; $(25 - 15) \cdot 2 = 20$; $(8 - 6) : 2 = 1$; $56 - 17 + 1 = 40$.

S. 7: 3 und 4 werden glatt, 1 und 2 verknoten sich.

S. 8: $20 \cdot 4 : 8 = 10$; $16 + 18 - 10 = 24$; $12 + 6 + 14 = 32$. $9 + 11 - 8 = 12$; $2 \cdot 3 + 4 = 10$; $(7 + 7) \cdot 2 = 28$.

S. 9: Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Leine wie gefordert aufzuspannen. Drei davon wären:

Welche Unterschiede fallen dir ins Auge? Mindestens 22 Veränderungen sind zu finden.



Welches der drei Blumengebinde ist dem Spiegelbild (links) zuzuordnen?

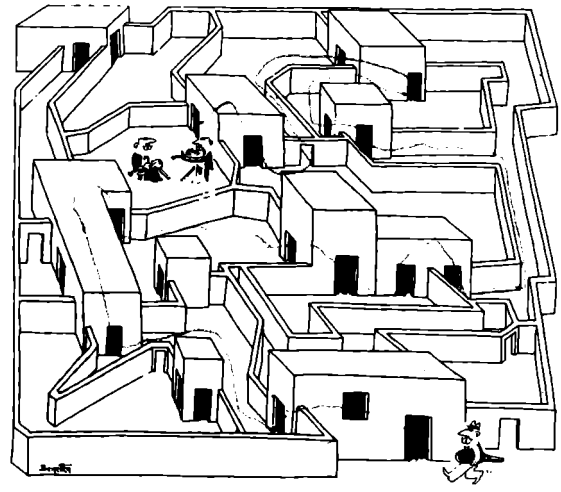
„Laß liegen! Das ist nicht mehr bei uns!“

2

a) 1 – 2 – 5 – 1 – 4 – 5 – 8 – 7 – 8 – 11 – 7 – 10 – 11 – 12 – 8 – 9 – 5 – 6 – 2 – 3 – 6 – 9 – 12;
b) 1 – 2 – 3 – 6 – 2 – 5 – 1 – 4 – 5 – 6 – 9 – 5 – 8 – 4 – 7 – 8 – 9 – 12 – 8 – 11 – 7 – 10 – 11 – 12;
c) 1 – 2 – 3 – 6 – 9 – 12 – 11 – 10 – 7 – 4 – 1 – 5 – 4 – 8 – 7 – 11 – 8 – 5 – 2 – 6 – 5 – 9 – 8 – 12.

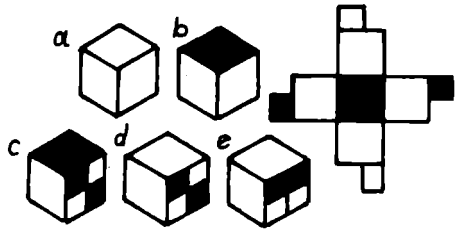
S. 10: Die Dame mit dem spitzen Hütchen ist die Gesuchte.

S. 11: Es sind 32 Dreiecke und 10 Quadrate.



Wie kommt der Musiker zu seinen beiden wartenden Kollegen vom Trio *Harmonie*?

15



Das Bild zeigt unter a bis e von fünf Würfeln je ein Schrägbild.
Das Bild rechts zeigt ein Netz, aus dem ein Würfel hergestellt werden kann, wenn die Seiten mit den gefärbten Flächen nach außen kommen sollen.

4

- „Wie geht dein neues Auto?“ – „Es geht nicht, es fährt.“ – „Na gut, wie fährt es?“ – „Es geht!“
- „Herr Ober, was ist das – Reh- oder Hirschbraten?“
„Können Sie denn das nicht unterscheiden, mein Herr?“ – „Nein.“
„Dann kann es Ihnen doch egal sein!“
- Olaf kommt verärgert nach Hause.
„Was ist denn, mein Sohn?“ fragt die Mutter.
„Alles Schwindel in der Schule“, sagt Olaf. „An der Klassentür steht groß 1. Klasse, und drinnen ist nicht ein Stuhl gepolstert…“
- Kurerfolg: „Klappt es denn mit dem Abnehmen, seitdem Du die Kalorien zählst?“ – „Mit dem Abnehmen nicht, aber mit dem Rechnen geht's besser!“
- „Hast Du Brüder?“
„Ja, einen.“
„Komisch“, sagte Helmut, „Deine Schwester sagte mir neulich, sie hätte zwei!“

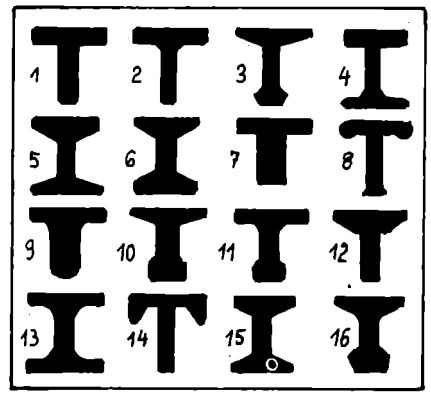
13

● Müller war zu schnell mit dem Wagen gefahren und verunglückt. „Wären Sie fünf Minuten später eingeliefert worden, wär's zu spät gewesen, Herr Müller", bemerkte der visitierende Arzt einige Tage später. „Himmel, Himmel", flüsterte Müller erbleichend, „da hab ich aber Glück gehabt, daß ich so schnell gefahren bin."

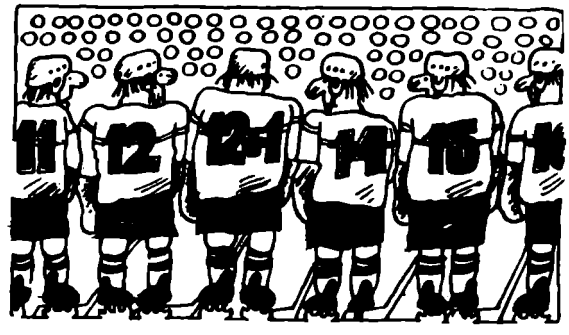
● Auf Reisen. „Haben wir uns nicht schon einmal in Budapest getroffen?" – „Nein, ich bin noch nie in Budapest gewesen." – „Ich auch nicht, da werden das wohl zwei ganz andere gewesen sein."

● Hut ab vor der neuen Technik – so schnell wie ein Computer kann heute keiner mehr einen Fehler machen.

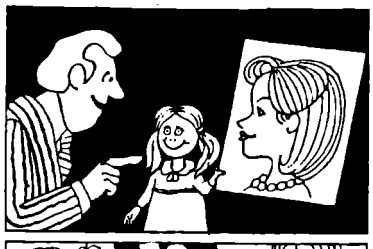
12



Welche zwei Profile sind genau gleich?

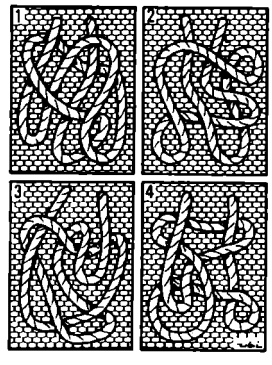


5

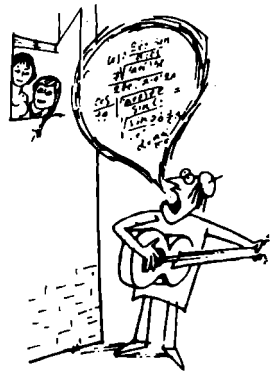


Suchbild: Findest du die auf dem Bild abgebildete Dame im Strom der Passanten wieder?

10



Zwei der verschlungenen Seile werden glatt, zwei verknoten sich, wenn man an den beiden Enden zieht. Welche?



7

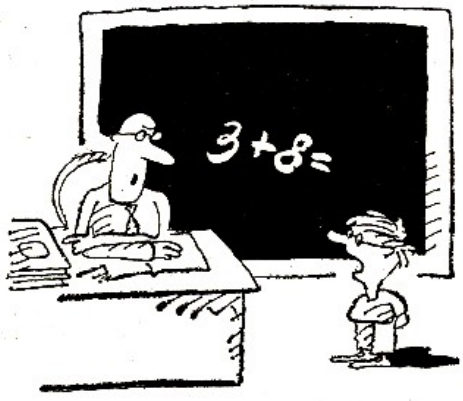
35 □ 10 □ 7 = 52 | 42 □ 42 = 1

75 □ 25 □ 0 = 50 | (25 □ 15) □ 2 = 20

(12 □ 1) □ (0 □ 19) = 0 | (8 □ 6) □ 2 = 1

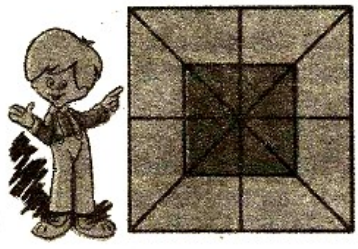
(1 □ 0) □ 1 = 0 | 56 □ 17 □ 1 = 40

Setze für □ jeweils ein Rechenzeichen so ein, daß richtig gelöste Aufgaben entstehen!

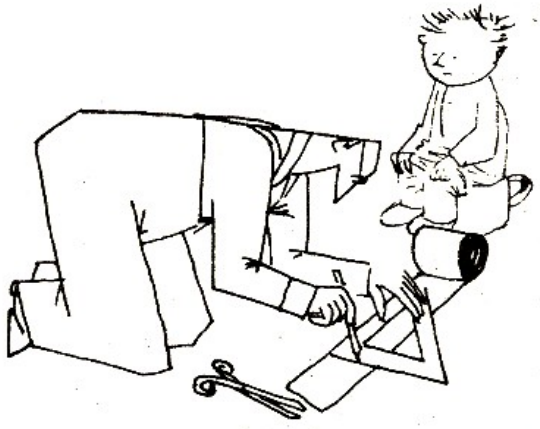


„Wenn Sie mir versprechen, daß ich mal so etwas wie eine I(ntelligenz)-Rente bekomme, schreibe ich die richtige Lösung hin!“

6



Wieviel Dreiecke und wieviel Quadrate findest du auf dem Bild?



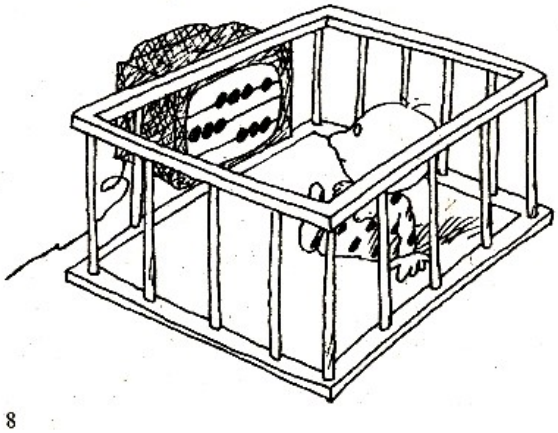
11

20	·		:		=10
+	■	·	■	+	■
	+		−		=24
:	■	:	■	−	■
=	+	=	+	=	=32
3	■	12	■	4	■

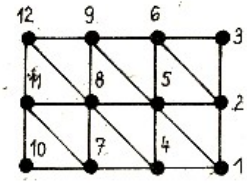
4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18

9	+		−		=	
·		−		+		+
	·		+	4	=	
+		+		−		+
	+	7	·		=	
=		=		=		=
25	+		+		=	50

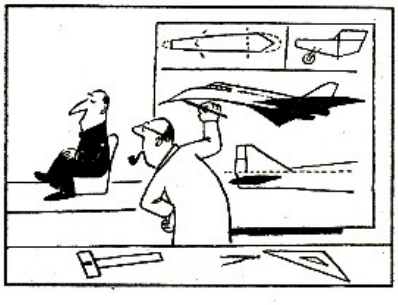
In die Felder sind Zahlen so einzusetzen, daß richtig gelöste Aufgaben entstehen. (Es ist in der vorgegebenen Reihenfolge zu rechnen.)



8



Frau Mildner hat große Wäsche, und sie möchte ihre Wäscheleine zwischen den 12 Pfählen in der abgebildeten Weise ziehen. Wie könnte sie ihre Leine – ausgehend vom Pfahl 1 und endend am Pfahl 12 – so ziehen, daß die Leine zwischen zwei beliebigen Pfählen niemals doppelt oder mehrfach, sondern jeweils nur einfach gespannt ist? Finde mindestens drei verschiedene Möglichkeiten, die Leine in der geforderten Weise aufzuspannen!



9

alpha aktuell

Wie entstehen die Ziffern der Personenkennzahl?

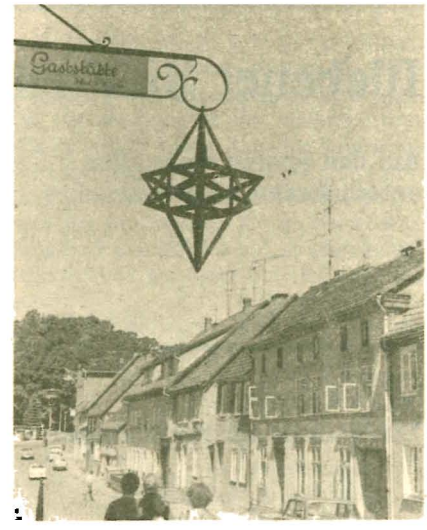
Die ersten sechs Ziffern setzen sich aus dem Geburtsdatum des Personalausweisinhabers zusammen. Die siebente Stelle gilt für das Geschlecht (für die Geburtenjahre 1900 bis 1999 männlich = 4, weiblich = 5). Die Ziffer 8 bis 11 ist eine Unterscheidungszahl, die gewährleistet, daß die Personenkennzahlen täglich in ausreichender Anzahl vergeben werden können, ohne daß eine Wiederholung erfolgt. Die Ziffer 12 stellt eine Prüfziffer dar, die es jederzeit ermöglicht, die Richtigkeit der Personenkennzahl zu überprüfen. Jede Personenkennzahl gibt es nur einmal.

Höchste Primzahl

Zwei hoch 21 701 minus 1, die höchste bislang bekannte Primzahl, ist von zwei 18jährigen amerikanischen Studenten, *Laura Nickel* und *Curt Noll*, von der Universität von Kalifornien in Hayward gefunden worden. Die bislang höchste der nach dem griechischen Mathematiker Euklid unendlichen Reihe der nur durch eins und sich selbst teilbaren Primzahlen umfaßt 6553 Ziffern.

Die beiden jungen amerikanischen Mathematiker hatten zur Lösung ihrer schwierigen Aufgabe, die jetzt Aufnahme in das Guiness-Verzeichnis der Rekorde finden dürfte, allein fünf Computerprogramme entwickelt. Laura Nickel und Curt Noll haben bereits angekündigt, sie würden ein neues Programm zur Steigerung des Primzahlenrekordes erstellen.

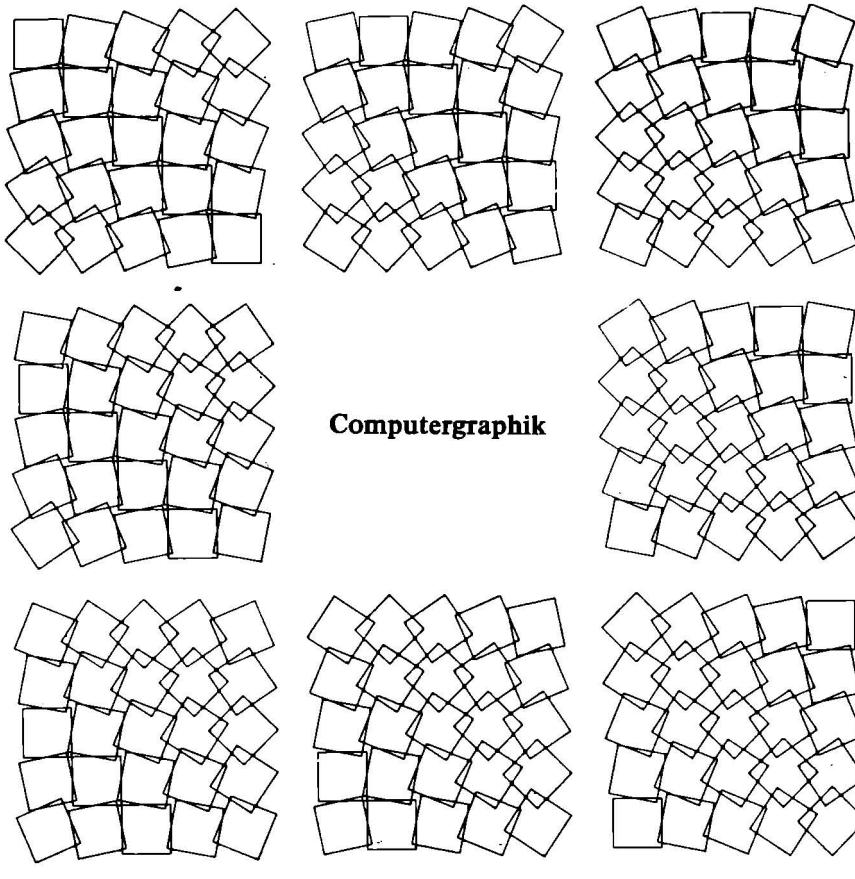
Der franz. Math.-Prof. *P. Deligne* hielt auf dem Mathematikerkongreß in Warschau (1983) einen Sondervortrag über Faltings' Forschungsergebnisse (s. S. 49/50).



Augen auf, Mathematik ist überall! In Burg Stargard (Bez. Neubrandenburg) entdeckte unser Redaktionsmitglied, Dr. *P. Schreiber* (Universität Greifswald) dieses Wirtshausbild in Form eines Sternpolyeders.

AdW verlieh Namen Leonhard Euler

Berlin, 6. 11. 83. Der Name *Leonhard Euler* wurde der mathematischen Schülergesellschaft bei der Sektion Mathematik der Humboldt-Universität Berlin auf einem Festakt in Berlin verliehen. Damit würdigt die Akademie der Wissenschaften der DDR das nunmehr 13jährige Wirken dieser Gesellschaft, die sich die außerunterrichtliche mathematische Tätigkeit zur Aufgabe gemacht hat.



Computergraphik

Eine harte Nuß

▲ 2454 ▲ Bei einem Schiffsunglück wurden fünf Matrosen auf eine einsame Insel verschlagen und warteten dort auf Rettung. Um eine Beschäftigung zu haben, sammelten sie Nüsse. Nachdem die Matrosen einen großen Berg von Nüssen zusammengetragen hatten – es waren etwa 30000 Nüsse – beschlossen sie, keine Nüsse mehr zu sammeln und die vorhandenen Nüsse am Tage ihrer Rettung gerecht zu verteilen. In der folgenden Nacht erwachte einer der Matrosen – die anderen schliefen fest –, und er nahm sich entgegen dieser Absprache ein Fünftel; bei der Teilung blieb eine Nuß übrig, die weggeworfen wurde. In der folgenden Nacht erwachte ein anderer Matrose, nahm sich ebenfalls ein Fünftel; auch dabei war eine Nuß übrig und wurde weggeworfen. Analog ging es in der 3., 4. und 5. Nacht zu. Danach erfolgte die Rettung, und die fünf Matrosen teilten die nun noch vorhandenen Nüsse gerecht auf. Auch dabei blieb eine Nuß übrig, die weggeworfen wurde. Wie viele Nüsse waren am Anfang vorhanden?

Dr. rer. nat. Dr. paed. Gert Maibaum, Technische Universität Dresden

Illebener Skizzen

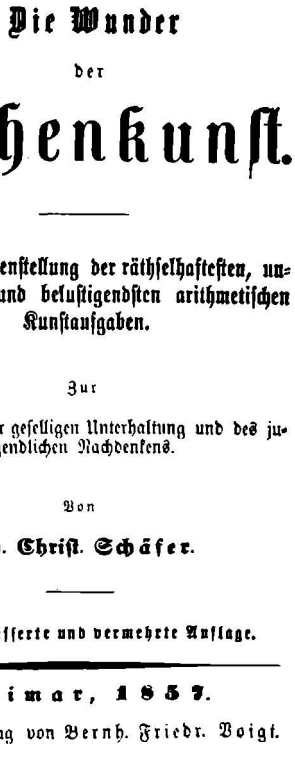
Auf den Spuren eines alten unterhaltsamen Rechenbuches

Joh. Christ. Schäfer:

Die Wunder der Rechenkunst

Eine Zusammenstellung der rätselhaftesten, unglaublichsten und belustigendsten arithmetischen Kunstaufgaben

192 Seiten, 60 Abb., Pappband
Bestell-Nr.: 707 745 1 · Preis: 8,80 M



Die Wunder
der
Rechenkunst.

Eine Zusammenstellung der räthselhaftesten, unglaublichsten und beluſtigendſten arithmetiſchen Kunſtaufgaben.

Zur
Beförderung der geſelligen Unterhaltung und des jugendlichen Nachdenkens.

Von
Joh. Chriſt. Schäfer.

Achte, verbeſſerte und vermehrte Auflage.

Weimar, 1857.

Druck und Verlag von Bernh. Friedr. Voigt.

Dieser Titel ist ein Nachdruck der 8. Auflage des 1857 erschienenen Buches *Die Wunder der Rechenkunst.* Es enthält 153 Aufgaben aus den verschiedensten Gebieten der Unterhaltungsmathematik, insbesondere der Arithmetik. Die Aufgaben regen zu logischem Denken an, wecken und entwickeln die Fähigkeiten zum Kombinieren und geben Möglichkeiten zum Festigen der Grundkenntnisse im Fach Mathematik. *Alle* Aufgaben enthalten Antworten (Lösungen), die original wiedergegeben werden. In einem Anhang sind Erläuterungen enthalten, die – soweit erforderlich – deutlich machen, welche sachlichen Bezüge zwischen bestimmten Einheiten, Begriffen, Fakten usw. von heute zu damals bestehen. *Interessentenkreis:* Lehrer, Schüler, Leiter und Teilnehmer von Arbeitsgemeinschaften, an Unterhaltungsmathematik Interessierte. Ende 1983 wurde dieser Titel mit den oben angegebenen Informationen ausgeliefert und bereichert die mathematische Literatur, die zu einer sinnvollen, interessanten und abwechslungsreichen Freizeitgestaltung für jung und alt beitragen will, aber auch zahlreiche Impulse für den Unterricht gibt. Kurz gesagt: Er hilft der „Pflicht" wie der „Kür" im Fach Mathematik gleichermaßen in vielfältiger Weise.

Herausgeber dieses historischen Rechenbuches ist der Chefredakteur der *alpha.* Er lädt seine Leser zu einer Plauderei über dessen Entstehung ein.

Lieber Leser!

Am 13. Dezember 1945 wurde ich vom Rat der Messestadt Leipzig als *Neulehrer* eingestellt. Lehrpläne gab's damals nicht. Die ersten Lehrbücher, welche wir 1946 in die Hand bekamen, steckten noch in den Anfangsgründen unserer demokratischen Entwicklung.

Fünf Aufgaben habe ich aus unserem damaligen Rechenbuch herausgegriffen, Herausgeber: *Verlag Volk und Wissen, Verlagsgesellschaft m.b.H. Berlin/Leipzig:*

▲1▲ In einem Wintermonat brennen in einem Dorfwirtshaus am Abend und in der Nacht 8 Lampen, und zwar $6\frac{1}{4}$ Std. lang. Eine Lampe verbraucht pro Stunde 7 ccm Petroleum. Wieviel Petroleum haben im Monat alle zusammen verbraucht, und wieviel kostete das Petroleum? (1 l kostet 29 Pf.)

▲2▲ 8 Mann mähen am ersten Tag 5 ha Sommergetreide; wieviel ha bringen in derselben Zeit 20 Mann fertig?

▲3▲ Eine Handschuhfabrik verpackt in einer Kiste Handschuhe von der 1. Sorte $5\frac{1}{2}$ Dtzd., von der 2. Sorte $7\frac{3}{4}$ Dtzd., von der 3. Sorte $9\frac{5}{6}$ Dtzd. Wieviel Dtzd. und Stück sind das im ganzen?

▲4▲ Ein Kaufmann hat für 1754 M Waren verkauft und davon den 6. Teil verdient. Wie groß war sein Verdienst?

▲5▲ Ein Mann raucht an einem Tag 4 Zigarren. Wieviel sind das
a) in einer Woche, b) in einem Jahr, c) in 30 Jahren?

Auf der Suche nach geeigneterem zusätzlichem Aufgabenmaterial halfen mir meine Schüler, ihre Eltern, unser damaliger Patenbetrieb (Garten- und Landschaftsgestaltung Leipzig SO). In einem Antiquariat erwarb ich zudem einen Stoß alter Rechenbücher aus der Zeit vor 1933. Unter anderem kaufte ich den oben genannten Titel zu einem sehr hohen Preis, nämlich für mein Neulehrermonatsgehalt von 190 Mark. (Das konnte ich, da ich zu gleicher Zeit von der damaligen *Sowjetischen Militäradministration* eine Prämie in Höhe von 250 Mark erhielt.) Die Aufgaben aus diesem Unterhaltungsbuch fanden bei den Schülern großen Anklang. So wurde das vergilbte Werk aus dem Jahre 1857 neben den anderen Büchern ein treuer Begleiter im Unterricht, in mancher Vertretungsstunde und ab 1957 – damals gründete ich den *alpha*-Club an der 29. Grundschule in Leipzig – auch für eine aktive außerunterrichtliche Arbeit. Als ich dann Chefredakteur der *alpha* war, gestaltete ich im Heft 3/80 eine 4. Umschlagseite mit 13 Perlen aus den *Wundern der Rechenkunst.* Die zahlreichen anerkennenden Zuschriften veranlaßten das Redaktionskollegium, in noch stärkerem Maße historische Beiträge in die *alpha* einzubauen. Meinem Verlagsdirektor schlug ich vor, das unterhaltsame Buch in seiner Gesamtheit herauszugeben und fand Zustimmung. Zunächst wurden zwei Varianten diskutiert:

Variante 1: Die Veröffentlichung des Buches als Faksimile – Druck mit angefügten Lösungen aus heutiger Sicht. Sie wurde verworfen, weil einerseits eine Reihe von Aufgaben nicht interessant waren und andererseits das Schriftbild für viele Menschen unserer Zeit schwer lesbar wäre.

Variante 2: Von den 194 vorliegenden Aufgaben wurden 153 als geeignet befunden und zur Veröffentlichung vorgesehen. Den Satz übernahm die Druckerei *Neues Deutschland.* Sie besitzt die um die Jahrhundertwende gebräuchliche sog. *Digi-Fraktur* und *Bodoni-Antiqua.* Zu 92 Aufgaben wurden Lösungen aus heutiger Sicht als Anhang hinzugefügt. In geduldiger Kleinarbeit entstand dann das Buch mit einem Umfang von 192 Seiten.

Natürlich war ich als Herausgeber interessiert, mehr über den Autor zu erfahren, als in dem Vorwort der mir vorliegenden 8. Auflage zu lesen war. Zweimal zwei Tage weilte ich in der Gemeinde Illeben, wenige Kilometer von Bad Langensalza entfernt. Dank sei denen gesagt, die mir in dieser Gemeinde halfen, Näheres über J. Ch. Schäfer und seine Zeit zusammenzutragen:

Ende des 18. Jahrhunderts lebte der Gutsverwalter Sebastian Andreas Schäfer, geboren am 29. 12. 1763 daselbst, als Schultheiß in Hohenbergen, einem kleinen Dorf

in der Nähe von Mühlhausen. Seine beiden Söhne, August Sebastian (geb. 1801) und Johannes Christoph (geb. 1802) gingen ihrem Vater in Hof und Feld tüchtig zur Hand. Der Vater erwarb sich durch fleißiges Selbststudium veterinärmedizinischer Literatur gute Kenntnisse in der Tierpflege. Manchem Quacksalber wurde eine Lehre erteilt, indem er seine Gemeindemitglieder bei der Pflege der gesunden, besonders aber der kranken Tiere beriet und praktische Hilfe gab. Als seine Söhne ins „heiratsfähige" Alter kamen, schrieben sie das von ihrem Vater geschaffene 300seitige *Doktorbuch* ab als Anleitung für die eigene Tierpflege, als sog. *Haus- und Hülfsbuch.*

Die mathematische Bildung im Rahmen der damaligen dörflichen Einklassenschule war nach Meinung des Vaters nicht ausreichend, um im Leben gut seinen Mann zu stehen. Kurz entschlossen schrieb er seinen beiden Söhnen ein spezielles Rechenbuch, das ihnen – neben dem Unterricht bei dem überlasteten Dorfschulmeister – gute Grundkenntnisse in Arithmetik und Geometrie vermittelte.

Aus einer Eintragung in der Illebener Chronik erfahren wir, daß der ältere der beiden Brüder, August Sebastian, eine wohlhabende Bauerntochter in Illeben heiratete. J. Ch. Schäfer und seine Eltern zogen gemeinsam mit den Neuvermählten auf den 50 ha großen Bauernhof, den die Braut als *Aussteuer* von ihren Eltern in Illeben erhalten hatte. Bereits nach zweijähriger Ehe starb der Bruder. J. Ch. Schäfer übernahm den Hof und heiratete ein Jahr später die Frau seines Bruders. Im Dorfregister wird der junge Bauer als „angesehener Einwohner und Einspänner" geführt. Da er sehr rege war, sei es auf dem Hofe, als Jägermeister oder als tierärztlicher Berater, wurde er mit 34 Jahren zu einem der vier Gemeindevertreter (Ortsmann) ernannt, um den neugewählten Bürgermeister (bis dahin gab es keinen) bei seiner Amtstätigkeit zu unterstützen. Mit Hilfe des für die Gemeinde zuständigen Tierarztes schrieb er – unter Verwendung der Unterlagen seines Vaters – sein erstes Buch:

Homöopathische Tierheilkunde –
Ein ganz eigenthümlich eingerichtetes
und schnell Rath gebendes Hülfsbuch
für jeden Viehbesitzer.

Im Familienkreis und zu Volksfesten gab er aus seiner in Form einer Aufgabensammlung (z. T. mit seinem Bruder) zusammengestellten Heft unterhaltsame mathematische Probleme zum besten und regte seine Umgebung zum Knobeln an. Seine Zuhörer bedrängten ihn, diese lose Zusammenstellung zu einem Buch zusammenzufassen. Ein Weimarer Verlag brachte 1831 die erste Auflage heraus. Das Buch wurde so beliebt, daß bis 1857 acht Auflagen entstanden, stets neu bearbeitet, auf Grund zahlreicher Hinweise der Leser erweitert. Folgten in den ersten Auflagen den Aufgaben sofort die Lösungen, so wurde später beides getrennt. An einem Beispiel wollen wir Aufgabe und Lösung original wiedergeben:

63. Ein eigener Fall

Jemand hatte in einem Stall
Ein Heerdchen Schafe, ein eigener Fall
Fand, wie Du sehn wirst, statt dabei. –
Nahm er davon die Hälft' und drei
Und wenn er den Rest sich 8fach dachte
Oder zu ihnen noch 7 brachte,
So bekommt er stets dieselbe Zahl,
Wieviel Schafe hat er wohl im Stall?

Antwort: 8 Stück

Auflösung: Nach den Bedingungen der Aufgabe ist der 8fache Rest so groß, als der einfache Rest und 7; wird von den beiden Theilen einmal der einfache Rest hinweggenommen, so ergiebt sich, daß der 7fache Rest soviel als 7 beträgt. Stellt man sich nun die Aufgabe und sagt: der 7fache Rest beträgt 7, wie viel beträgt der einfache Rest, so ergiebt sich 1 zum Facit. Es wurde nun erst die Hälfte und 3 vom Heerdchen hinweggenommen, worauf die gefundene 1 als Rest bleibt, und so folgt, daß die Zahl sämmtlicher Schafe 1 und 3 = 4 und diese doppelt genommen, solche 8 sein muß.

Die *Lösung aus heutiger Sicht* ist im Anhang zu diesem Titel zu finden.

Sie lautet:

Angenommen, im Stall befanden sich x Schafe; dann gilt

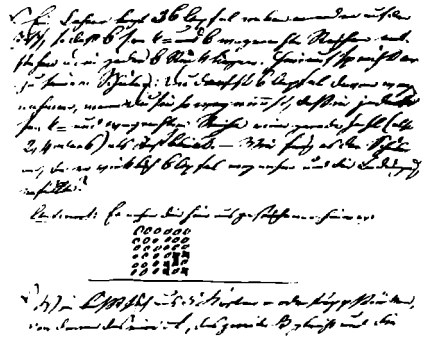
$$\left[x-\left(\frac{x}{2}+3\right)\right]\cdot 8 = x-\left(\frac{x}{2}+3\right)+7,$$

$$\left(\frac{x}{2}-3\right)\cdot 8 = \frac{x}{2}-3+7,$$

$$4x-24 = \frac{x}{2}+4,$$

$$\frac{7x}{2} = 28, \text{ also } x = 8.$$

Im Stall befanden sich 8 Schafe.



Das Bild zeigt eine Aufgabe aus dem Tagebuch J. Ch. Schäfers. Wir finden sie wieder, stark bearbeitet, in seinem Buch als Nr. 144.

144 Künſtliche Wegnahme.

Ein Vater legte 36 Nüſſe in ein Quadrat nachſtehender Geſtalt auf den Tiſch und ſagte zu ſeinem Sohne: „Kannſt Du 6 Stück ſo wegnehmen, daß in jeder wag- und ſenkrechten Reihe eine gerade Anzahl Nüſſe liegen bleiben, ſo ſollen Dir die 6 Nüſſe geſchenkt ſein." Der Sohn nahm hierauf auch wirklich auf die ausbedungene Weiſe 6 Stück davon: welche waren es wohl?

Lage der Nüſſe?

0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0

Das Buch ist ganz im Stile der zeitgenössischen Rechenmeister geschrieben. Beim Studium der Aufgaben konnte ich feststellen, daß der Autor bei den Mathematikern des Altertums einige Anleihen aufgenommen hat. Eines hat er erreicht: Im Familien- und Freundeskreis und bei seinen Lesern hat er Interesse für mathematische Probleme geweckt und zu „geistesbeschäftigender und geselliger Unterhaltung" angeregt.

In handschriftlichen Unterlagen, die sich im Besitz der Nachfahren J. Ch. Schäfers befinden, fand ich neben 68 Anekdoten und einigen Rechenaufgaben aus dem bäuerlichen Alltagsleben (insbes. Landvermessung und Forstwirtschaft) auch eine Reihe unterhaltsamer Aufgaben, bisher unveröffentlicht. An einigen möge sich der *alpha*-Leser bewähren:

▲6▲ Robert bot einst sein Obst drei Leuten feil,
Ein günstiges Geschick wurde ihm dabei zu theil.
Sie kauften der Früchte ganze Zahl.
Such, Leser, diese jetzt einmal.

A. nimmt des ganzen Vorraths Hälfte hin und achte, und geht davon mit frohem Sinn.
B. kaufte nach A. die Hälfte und zwei und holt dazu als dann noch drei.
C., der den Vorrath noch zahlreich findet,
Nimmt auch die Hälfte und verbindet
Zwölf Stück damit, bezahlt auch sie
Und Robert war frei von aller Müh,

Die Zahl besteht aus mehr als zehn mal zehn.
Doch still, Du wirst sie selbst gefunden sehn.
Berechne Du nun auch den Geldbestand, den Robert, das Stück einen Dreier fand!

▲7▲ Ein Mann brachte eines Tages Nüsse mit nach Hause, die er unter seine Frau und 5 Kinder folgendermaßen verteilte. Die Mutter erhielt 20 Nüsse mehr als jedes Kind und 20 Nüsse weniger als die Kinder zusammen. Wieviel Nüsse sind verteilt worden, und wieviel hat die Mutter erhalten?

▲8▲ Man soll 32 Nüsse so in 2 Teile teilen, daß, wenn man den größeren Teil durch 5 und den kleineren durch 6 dividiert, beide Quotienten zusammen 6 ausmachen.

▲9▲ Ein Goldschmied sagte von einer silbernen Schale, wenn sie möge noch einmal so viel, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{6}$ soviel wiegen als sie wiegt und noch 12 Lot dazu, so möge sie ebenso viel über 100 Lot, als sie jetzt darunter wiegt, wiegen. Wie schwer war die Schale?

▲10▲ Wie lassen sich 5 aufeinanderfolgende Zahlen, die ein anderer denkt, errathen?

▲11▲ Wie können die 9 Einerzahlen mit oder ohne Null so untereinandergestellt werden, daß sie (jede nur einmal zu schreiben) zusammen die Summe 100 geben?

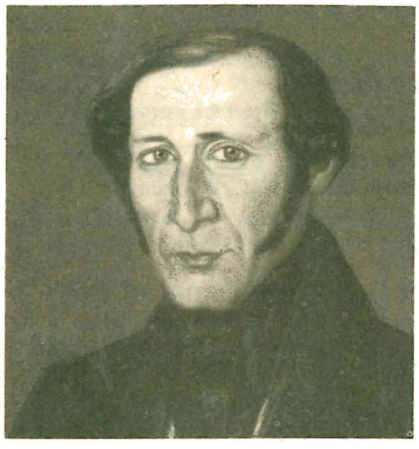
Und zum Abschluß eine Aufgabe original aus der 1. Auflage:

▲12▲

29. Der Apfelverkäufer.

Karl versuchte einst als Obsthändler sein Heil,
Und bot seine Aepfel in drei Häusern feil;
Er hatte dabei das unverhoffte Glück,
Daß er nicht einen Apfel brachte zurück,
Und schnell verkaufte der Früchte ganze Zahl.
Such' Leser mir dieselbe jetzt einmal,
Berechne auch dabei und gieb es an,
Wie viele Stücke wohl kaufte jeder Mann.

Vom ganzen Vorrath nimmt ein Viertheil erst heraus
Und funfzehn noch der Mann im ersten Haus.
Im zweiten ist das Glück ihm wieder günstig,
Man kaufte da vom Rest ein Drittheil und noch zwanzig.
Mit den Uebrigen geht er sodann in's dritte Haus
Und bietet sie daselbst zum Verkaufe aus;
Der Mann, der den Vorrath noch zu groß findet,
Nimmt erst die Hälfte. — Doch damit verbindet
Er noch dreißig Stücke. — Carl freute sich sehr,
Denn sein Korb war nun geworden ganz leer.



J. Ch. Schäfer im Alter von 46 Jahren

Illeben gestern:

Der Illebener Chronik ist zu entnehmen, daß das in flache Hügel eingebettete Bauerndorf bereits seit dem Jahre 1120 besteht und viele unruhige Zeiten, nicht ohne großen Schaden, durchgemacht hat. Zur Zeit des J. Ch. Schäfer litt die Gemeinde an großer Armut. Der leicht lehmige Ackerboden war nicht sehr ergiebig. Heftige Gewitter, oft von großen Regengüssen begleitet, vernichteten mehrfach die Ernte. Der kleine, durchs Dorf plätschernde Herzbach wurde dann zum reißenden Fluß und richtete großen Schaden an einem erheblichen Teil der 100 Anwesen an. Durch fahrlässigen Umgang mit Feuer brachen große Brände aus. Trockenheit und Mäusefraß taten ihr übriges. Bettler und *im Dorf streunende Knaben* aus nah und fern wiesen auf die große Not dieser Zeit hin. Allein im Jahre 1854 verließen 20 Personen ihr Hab und Gut. Sie wanderten nach Amerika aus. Um das Elend zu mildern, wurden Notleidende in den freistehenden Anwesen untergebracht, aus der Gemeindekasse mit Geldmitteln unterstützt. Kurzum: Es gab große soziale Unterschiede in der Gemeinde. J. Ch. Schäfer gehörte zu den Wohlhabenden und konnte es sich leisten, literarisch tätig zu sein. Er starb, mitten herausgerissen aus einem schaffensreichen Leben, am 22. 11. 1854 im Alter von 52 Jahren, 1 Monat und 30 Tagen an einem Herzversagen.

Illeben heute:

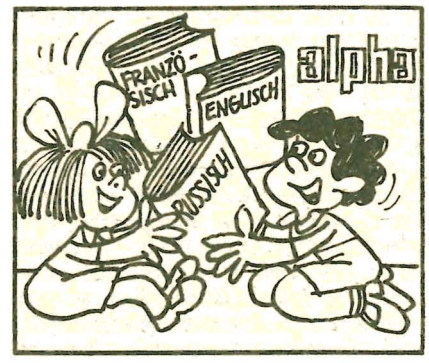
Die Gemeinde, etwa 4 km von Bad Langensalza entfernt, zählt 320 Einwohner. Entsprechend ihrer landwirtschaftlichen Struktur sind 60% davon LPG-Mitglieder. (Die anderen arbeiten in Bad Langensalza.) Hauptproduktionszweig in der Genossenschaft ist der Zuckerrübenanbau. Der Zusammenschluß mehrerer landwirtschaftlicher Produktionsgenossenschaften ermöglichte auch den Aufbau einer Rinder- und Schweinemast sowie einer modernen Milchviehanlage. Ein Nachfahre von J. Ch. Schäfer ist einer der beiden Melkermeister der LPG.

Am Ort besteht eine Oberschule, in der Schüler der 4. bis 8. Klasse unterrichtet werden. Sie kommen aus den drei Orten des Gemeindeverbandes. Im sozialistischen Wettbewerb „Schöner unsere Städte und Gemeinden – Mach mit!" sind die Bürger sehr bemüht, durch Werterhaltungsmaßnahmen und Pflege der Grünanlagen das Ortsbild zu verschönern.

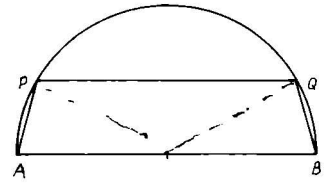
Für mich, den Herausgeber, war es nicht nur eine Freude, den Inhalt der *Wunder der Rechenkunst* für die zahlreichen interessierten Leser aufzubereiten, sondern es machte ebensoviel Spaß, den historischen Gegebenheiten nachzuspüren.

J. Lehmann

Blick auf den Bauernhof des J. Ch. Schäfer



▲1▲ In the trapezoid inscribed in the semicircle shown below, $AB = 4$ and $AP = BQ = 1$. Find the length of $\overline{PQ}$.



▲2▲ Prove that there are no positive integers x and y for which

$$\sqrt{1978} = \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

▲3▲ La longueur d'un fil téléphonique qui relie deux localités est égale à 72,8 km. Quand la température s'élève de 1 degré, chaque mètre de ce fil s'allonge de 18 μm. Calculer, en centimètres, l'allongement de ce fil quand la température passe de 12° à 36°.

▲4▲ Девочка подошла к переходу через улицу в тот момент, когда загорелся желтый свет, и загляделась на работу светофора. По своим часам она заметила, что красный свет горит в полтора раза меньше времени, чем зеленый, а желтый – в четыре раза меньше, чем красный. После того, как в восемнадцатый раз горел желтый свет, зажегся зеленый, и девочка, простояв 17 минут, стала переходить улицу. Сколько времени горит желтый свет?

XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen zu Aufgaben der Kreisolympiade, Teil 1

Olympiadeklasse 5

230521 Lösungen sind z. B.:

$2 = 3 - 33 : 33 \qquad = 3 + 3 - 3 - 3 : 3$

$3 = 3 + 3 + 3 - 3 - 3 = 3 + 33 - 33$

$4 = 3 + 33 : 33 \qquad = 3 + 3 : 3 + 3 - 3$

$5 = 3 + 3 : 3 + 3 : 3 \quad = 3 \cdot 3 - 3 : 3 - 3$

$6 = (3 \cdot 3 + 3 \cdot 3) : 3 \quad = 3 \cdot 3 \cdot 3 : 3 - 3$

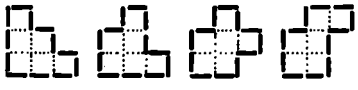
$8 = 3 + 3 + 3 - 3 : 3 \quad = (33 - 3 \cdot 3) : 3$

$9 = 3 + 3 + 3 + 3 - 3 = (33 + 3) : 3 - 3$

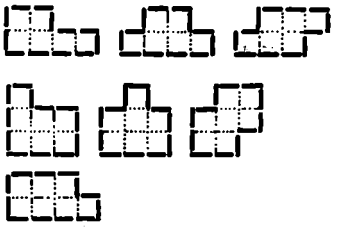
$10 = 3 + 3 + 3 + 3 : 3 \quad = 33 : 3 - 3 : 3$

230522 Einige mögliche Lösungen zeigt das Bild:

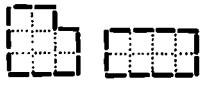
a)



b)



c)



d)

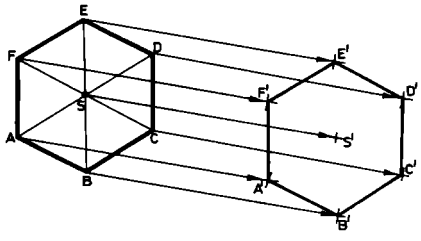
230523 Wenn Peter in 10 Minuten 3 km zurücklegt, dann legt er in 100 Minuten zehnmal soviel zurück, also 30 km.

Wenn Hans für 2 km 10 Minuten braucht, dann benötigt er für 30 km fünfzehnmal soviel, also 150 Minuten.

Wenn Karl für 2,5 km 10 Minuten braucht, dann benötigt er für 5 km 20 Minuten, also für 30 km 120 Minuten.

Wegen $150 - 100 = 50$ kam Hans mithin 50 Minuten später als Peter in Halle an. Wegen $120 - 100 = 20$ kam Karl 20 Minuten später als Peter in Halle an.

230524



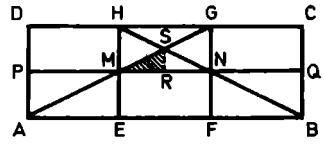
Olympiadeklasse 6

230621 a) Wegen $2200 \cdot 25 : 4 = 13750$, $600 \cdot 24 : 2 = 7200$, $800 \cdot 12 \cdot 1 = 9600$ und $13750 + 7200 + 9600 = 30550$ sollen insgesamt 30550 Liter Milch ausgeliefert werden.

b) Wegen $30550 : 9000 = 3$ Rest 3550 waren für den Abtransport der 30550 Liter Milch vier Tankwagen ausreichend, aber nicht weniger. Also ist 4 die gesuchte kleinstmögliche Anzahl.

230622 Wegen $48 : 3 = 16$ beträgt der Flächeninhalt jedes der drei Quadrate genau 16 Flächeneinheiten. Die Gerade durch M und N schneide die Strecke AD in P und die Strecke BC in Q.

Dem Bild ist dann zu entnehmen:



Da M der Mittelpunkt von EH und N der Mittelpunkt von FG ist, ist $MNGH$ ein Rechteck, das halb so groß ist wie das Quadrat $EFGH$. Sein Flächeninhalt beträgt daher 8 Flächeneinheiten. Ganz entsprechend werden auch die anderen beiden Quadrate durch die Gerade durch P und Q jeweils in zwei Rechtecke mit je 8 Flächeneinheiten Inhalt zerlegt.

a) Die Diagonalen MG und NH zerlegen das Rechteck $MNGH$ in vier inhaltsgleiche Teildreiecke. Jedes von ihnen, und folglich auch das Dreieck SGH, hat einen Inhalt von 2 Flächeneinheiten.

b) Der Flächeninhalt des Dreiecks ABS ist gleich der Summe der Flächeninhalte der (untereinander gleich großen) Dreiecke AEM und FBN, des Rechtecks $EFNM$ sowie des Dreiecks MNS. Die Dreiecke AEM und FBN sind jeweils halb so groß wie das Rechteck $EFMN$, ihr Inhalt beträgt daher jeweils 4 Flächeneinheiten. Wegen $2 \cdot 4 + 8 + 2 = 18$ beträgt daher der Flächeninhalt des Dreiecks ABS 18 Flächeneinheiten.

c) Der Flächeninhalt des Vierecks $ASHD$ ist gleich der Summe der Flächeninhalte des Dreiecks AMP, des Rechtecks $PMHD$ und des Dreiecks MSH. Wegen $4 + 8 + 2 = 14$ beträgt der Flächeninhalt des Vierecks $ASHD$ 14 Flächeneinheiten.

230623 Wegen (1) heißt Hausmann weder Christian noch Bernd. Wegen (2) heißt er auch nicht Alfred. Daraus folgt:

(3) Hausmann hat den Vornamen Detlef.

Wegen (2) heißt Giebler weder Alfred noch Bernd und wegen (3) auch nicht Detlef. Daraus folgt:

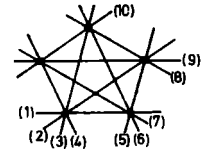
(4) Giebler hat den Vornamen Christian.

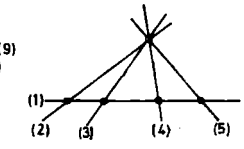
Wegen (1) heißt Erdbach weder Christian noch Bernd und wegen (3) auch nicht Detlef. Daraus folgt:

(5) Erdbach hat den Vornamen Alfred.

Wegen (3), (4) und (5) bleibt für Freimuth nur der Vorname Bernd. Die zusammengehörenden Namen sind mithin: Alfred Erdbach, Bernd Freimuth, Christian Giebler und Detlef Hausmann.

230624 a) Folgende Beispiele zeigen, daß alle drei Aussagen wahr sind:



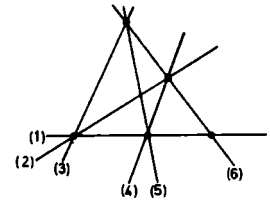


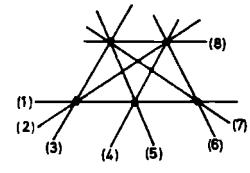
10 Verbindungsgeraden

5 Verbindungsgeraden

1 Verbindungsgerade

b) Folgende beiden Beispiele zeigen, daß die fünf Punkte auch so liegen können, daß es genau 6 bzw. genau 8 verschiedene Verbindungsgeraden gibt:





Olympiadeklasse 7

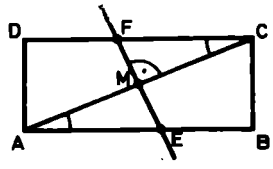
230721 Wenn der Weg bis zum Rathaus genau $\frac{1}{4}$ des Gesamtweges und der Weg bis zum Bahnhof genau $\frac{1}{3}$ des Gesamtweges ist, dann ist der Weg vom Rathaus bis zum Bahnhof $\left(\text{wegen } \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}\right)$ genau $\frac{1}{12}$ des Gesamtweges.

Wenn der Weg bis zum Bahnhof genau $\frac{1}{3}$ des Gesamtweges ist, dann ist der Weg vom Bahnhof bis zur Schule genau $\frac{2}{3}$ $\left(\text{oder } \frac{8}{12}\right)$ des Gesamtweges.

Da Uwe für $\frac{1}{12}$ des Gesamtweges genau 2 Minuten benötigte, benötigte er für $\frac{8}{12}$

des Gesamtweges genau 16 Minuten. Da Uwe um 7.32 Uhr am Bahnhof war, trifft er folglich um 7.48 Uhr in der Schule ein.

230722 Es gilt:
(1) $\overline{AM} = \overline{MC}$;
denn M ist laut Voraussetzung der Mittelpunkt der Strecke AC.
(2) $\sphericalangle FMC = \sphericalangle AME = 90°$;
denn die Gerade durch F und E ist laut Voraussetzung die Mittelsenkrechte der Strecke AC und steht somit senkrecht auf AC.
(3) $AB \parallel CD$;
da $ABCD$ laut Voraussetzung ein Rechteck ist.
(4) $\sphericalangle MAE = \sphericalangle MCF$;
da diese Winkel Wechselwinkel sind, die wegen (3) an geschnittenen Parallelen liegen.
Aus (1), (2) und (4) folgt nach dem Kongruenzsatz wsw, daß die Dreiecke AEM und CEM kongruent sind, w.z.b.w.



230723 I. Bezeichne man mit b, g bzw. r einen blauen, gelben bzw. roten Würfel, dann zeigen folgende Beispiele, daß es Reihen mit 7 Würfeln gibt, die alle gestellten Bedingungen erfüllen:

b, g, b, r, g, r, b;
b, g, r, b, r, g, b;
b, g, r, g, b, r, b;

II. Ist $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_8, \ldots$ eine Reihe von 8 oder mehr Würfeln, so kommen darin die 7 Farbfolgen

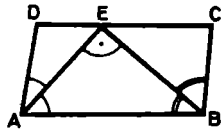
$(w_1, w_2); (w_2, w_3); \ldots (w_7, w_8)$

vor. Zu den drei verschiedenen Farben b, g, r gibt es aber nur die folgenden 6 verschiedenen Farbfolgen

(b, g); (b, r); (g, b);
(g, r); (r, b); (r, g).

Daraus folgt, daß bei einer Reihe von 8 oder mehr Würfeln (ohne benachbarte gleichfarbige Würfel) mindestens eine Farbfolge doppelt auftreten müßte, was der gestellten Bedingung widerspricht.
Aus I und II folgt, daß 7 die größtmögliche Anzahl der Würfel in einer Reihe der verlangten Art ist.

230724 Das Dreieck ABE und das Parallelogramm $ABCD$ stimmen in der Seite AB und in der zugehörigen Höhe überein. Deshalb ist der Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$ doppelt so groß wie der des Dreiecks ABE.



Da im Parallelogramm die Summe der Größen benachbarter Winkel 180° beträgt, ist die Summe der Winkel $\sphericalangle EAB$ und $\sphericalangle ABE$ gleich 90°, das Dreieck ABE ist also rechtwinklig mit E als Scheitel des rechten Winkels. Folglich beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks ABE wegen $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5 = 17{,}5$ mithin 17,5 cm² und der des Parallelogramms $ABCD$ daher 35 cm².

Olympiadeklasse 8

230821 Für die ersten beiden Stellen von z kommen wegen (1) nur die Quadratzahlen 16, 25, 36, 49, 64, 81 in Frage. Von diesen entfallen wegen (3) die Zahlen 25 und 49, da es keine zweistelligen Quadratzahlen mit der Anfangsziffer 5 bzw. 9 gibt. Geht man von den verbliebenen Zahlen 16, 36, 64 bzw. 81 aus, dann können bei z an der dritten Stelle wegen (3) nur die Ziffern 4, 4, 9 bzw. 6 und an der vierten Stelle wegen (2) nur die Ziffern 6, 6, 4 bzw. 1 stehen. Folglich können nur die vier Zahlen 1646, 3646, 6494 und 8161 alle geforderten Eigenschaften haben.
Sie haben diese Eigenschaften, da (für die ersten beiden Ziffern sowie ebenfalls für die erste und vierte Ziffer) 16, 36, 64, 81 und (für die zweite und dritte Ziffer) 64, 64, 49 und 16 sämtlich Quadratzahlen sind.

230822 Bezeichnet man die Anzahl der Brigaden mit x, so sind in jeder Brigade $(x + 2)$ Schüler, und der Klasse gehören $x(x + 2)$ Schüler an.
Hätte man eine Brigade weniger gebildet, wären es $(x - 1)$ Brigaden mit je $(x + 4)$ Schülern gewesen. Daraus ergibt sich die Schülerzahl zu $(x - 1)(x + 4)$.
Folglich gilt

$$x(x + 2) = (x - 1)(x + 4)$$
$$x^2 + 2x = x^2 + 3x - 4,$$
$$x = 4.$$

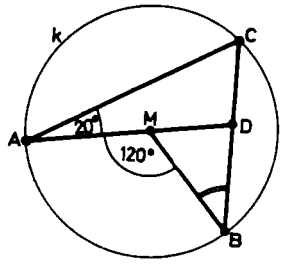
Es wurden mithin 4 Brigaden zu je 6 Schülern gebildet. Daher befinden sich insgesamt 24 Schüler in dieser Klasse.

230823 Nach dem Satz über Peripheriewinkel und Zentriwinkel gilt:
$\sphericalangle BCA = 120° : 2 = 60°$.
D sei der Schnittpunkt der Geraden durch A und M mit der Sehne BC. Dann gilt auf Grund des Außenwinkelsatzes für das Dreieck ADC:

$$\sphericalangle ADB = 20° + 60° = 80°. \quad (1)$$

Ferner ist $\sphericalangle BMD$ Nebenwinkel zu $\sphericalangle AMB$, und somit gilt:

$$\sphericalangle BMD = 180° - 120° = 60°. \quad (2)$$



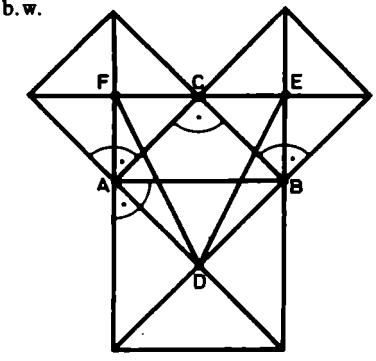
Aus (1) und (2) folgt nach dem Satz über die Summe der Innenwinkel im Dreieck, angewandt auf das Dreieck DMB:

$$\sphericalangle DBM (= \sphericalangle CBM) = 180° - (60° + 80°) = 40°.$$

Folglich gilt für den gesuchten Winkel

$$\sphericalangle CBM = 40°.$$

230824 Wegen $\sphericalangle BCE = \sphericalangle ACF = 45°$ und $\sphericalangle ACB = 90°$ ist $\sphericalangle ECF = 180°$, also liegt C auf EF. Wegen $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAF = 45°$, also $\sphericalangle BAF = 90°$ und da in den Quadraten über AC und BC die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, also $\sphericalangle AFC = \sphericalangle CEB = 90°$ gilt, ist $ABEF$ ein Rechteck, somit gilt $AB \parallel EF$ und $\overline{AB} = \overline{EF}$.
Das Viereck $ADBC$ ist ein Quadrat, da es sich aus den beiden kongruenten rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecken ABC und ABD zusammensetzt. Es ist den Quadraten über AC bzw. BC kongruent. Sein Flächeninhalt ist $A_Q = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{CD}$; denn je eine Hälfte von CD ist in den Dreiecken ABC bzw. ABD die zu AB gehörende Höhe. Die Diagonale CD des Quadrats $ADBC$ steht auf AB und folglich auch auf FE senkrecht. Daher hat das Dreieck DEF den Flächeninhalt $\frac{1}{2} \overline{FE} \cdot \overline{CD} = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{CD} = A_Q$, w.z.b.w.



Oder:
Nach Voraussetzung gilt:

$$\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = r. \quad (1)$$

Daraus folgt, daß das Dreieck AMC gleichschenklig ist, $\sphericalangle MAC$ und $\sphericalangle ACM$ sind Basiswinkel dieses Dreiecks. Aus dem Satz über Basiswinkel und aus der Voraussetzung folgt:

$$\sphericalangle MAC = \sphericalangle ACM = 20°.$$

Nach dem Innenwinkelsatz erhält man

$$\sphericalangle CMA = 180° - 2 \cdot 20° = 140°. \quad (2)$$

Aus (2) und der Voraussetzung folgt

$$\sphericalangle BMC = 360° - 120° - 140° = 100°. \quad (3)$$

Aus (1) folgt weiter, daß das Dreieck MBC gleichschenklig ist.
Für die Größe des Basiswinkels $\sphericalangle CBM$ gilt demnach wegen (3)

$$\sphericalangle CBM = \frac{180° - 100°}{2} = 40°.$$

(Fortsetzung in Heft 4/1984)

Zitiert

Sein und Wirken sind zwei untereinander so eng verbundene Begriffe, daß wir sie häufig mit einerlei Wort bezeichnen.

B. Bolzano

Talent haben manche, aber wenn's zur Sache kommt, zählt nur, ob man was draus macht. *Eva Strittmatter*

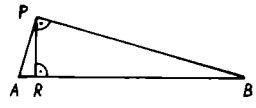
Lösungen

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ In einem Trapez, das einem Halbkreis wie im Bild einbeschrieben ist, beträgt $\overline{AB} = 4$ und $\overline{AP} = \overline{BQ} = 1$. Bestimme die Länge von $\overline{PQ}$!

Lösung: PR steht senkrecht auf AB, dann ist $\triangle ARP \sim \triangle APB$. Deshalb ist $\overline{AR} : \overline{AP} = \overline{AP} : \overline{AB}$ und $\overline{AR} = \frac{1}{4}$. Demzufolge ist durch die Symmetrie der Dreiecke

$$\overline{PQ} = \overline{AB} - 2 \cdot \overline{AR} = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}.$$



▲2▲ Beweise, daß es keine positiven ganzen Zahlen x und y gibt, für die gilt $\sqrt{1978} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$!

Lösung: Wenn es solche positiven ganzen Zahlen x und y gäbe, dann wäre $\sqrt{x} = \sqrt{1978} - \sqrt{y}$ oder $x = 1978 - 2\sqrt{1978y} + y$. Demzufolge muß $1978y$ ein vollkommenes Quadrat sein. Da jedoch in der Primzahlzerlegung von $1978 = 2^1 \cdot 23^1 \cdot 43^1$ jeder der Primfaktoren mit dem Exponenten 1 erscheint, muß y ein Vielfaches von $2 \cdot 23 \cdot 43$ sein, d. h., $y \geq 1978$. Das ist aber unmöglich.

▲3▲ Die Länge eines Telefonkabels, das zwei Orte verbindet, ist gleich 72,8 km. Wenn die Temperatur um 1 Grad steigt, verlängert sich jeder Meter dieses Kabels um 18 μm. Berechne die Ausdehnung dieses Kabels in cm, wenn die Temperatur von 12° auf 36° steigt!

Lösung: Bei 1 K Temperaturunterschied beträgt die Ausdehnung des Kabels $72\,800 \cdot 0{,}000018\ \text{m} \approx 1{,}31\ \text{m}$. Bei $36\,°\text{C} - 12\,°\text{C} = 24\ \text{K}$ Temperaturunterschied beträgt die Ausdehnung $1{,}31\ \text{m} \cdot 24 = 31{,}44\ \text{m} = 3144\ \text{cm}$.

▲4▲ Ein Mädchen kam in dem Moment zur Straßenkreuzung, als das gelbe Licht aufleuchtete, und es wurde (beim Warten) von der Arbeit der Verkehrsampel fasziniert. Mit Hilfe seiner Uhr bemerkt es, daß das rote Licht eine anderthalb mal kürzere Zeit brennt als das grüne und das gelbe 4mal kürzer als das rote. Dann, als zum 18. Mal das gelbe Licht brannte und in Grün überging, ging das Mädchen, das 17 Minuten gestanden hatte, über die Straße. Wie lange brannte jeweils das gelbe Licht?

Lösung: In der Zeit vom 1. bis zum 18. Mal „Gelb" gab die Ampel 9mal „Rot" und 8mal „Grün".

Wenn das gelbe Licht x Sekunden brennt, so gilt $18 \cdot x + 9 \cdot 4x + 8 \cdot 6x = 1020$, also $x = 10$.

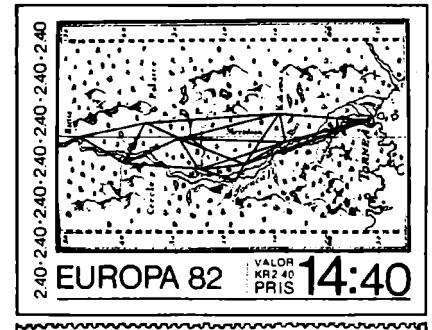
Das gelbe Licht brennt 10 Sekunden.

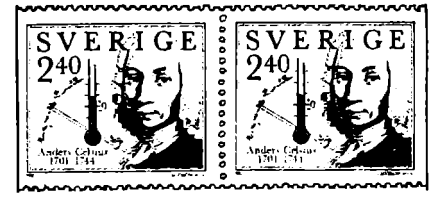
Anders Celsius und die lappländische Gradmessung

Der Name des schwedischen Astronomen und Mathematikers Anders Celsius (1701 bis 1744) ist heute hauptsächlich noch durch die 1742 von ihm vorgeschlagene Temperaturskala bekannt. (Bei ihm lag allerdings der Schmelzpunkt des Eises bei 100° und der Siedepunkt des Wassers bei 0°. Erst sein Amtsnachfolger M. Strömer kehrte 1750 die Skala um.) Celsius, der 1730 Professor für Astronomie an der Universität in Uppsala und 1741/42 zusätzlich Direktor der dort durch seine Initiative eingerichteten ersten schwedischen Sternwarte wurde, ist seinen Zeitgenossen vor allem als Teilnehmer des lappländischen Teils der beiden spektakulären Gradmessungsexpeditionen bekannt geworden, durch die 1736/37 die Abplattung der Erde nachgewiesen und damit gleichzeitig im Streit zwischen den Anhängern von Descartes und Newton die Entscheidung zugunsten der Newtonschen Gravitationstheorie gegen die Descartessche Wirbeltheorie gefällt wurde. (Aus der Gravitationstheorie folgt theoretisch die Erdabplattung, aus der Wirbeltheorie hingegen die Form eines verlängerten Rotationsellipsoids, ähnlich einem Ei.) Eine der beiden Expeditionen, die von der französischen Akademie ausgesandt wurden, vermaß die Länge eines Meridiangrades im heutigen Peru in Äquatornähe. Ihr gehörten u. a. die namhaften Wissenschaftler Ch.-M. de Lacondamine und P. Bouguer an. Eine heute sehr seltene, aus 8 Briefmarken bestehende Briefmarkenserie Ekuadors würdigte 1936 den 200. Jahrestag dieses Ereignisses. Der anderen Expedition, die zur gleichen Zeit die Länge des Meridiangrades zwischen Torneå (heute Tornio) an der Nordküste des Bottnischen Meerbusens und dem Dorf Pello vermaß, gehörten außer dem landeskundigen Celsius u. a. der Mathematiker A. C. Clairaut und als Expeditionsleiter P. de Maupertuis an, dem der Ruhm dieser Expedition zur Berufung als Präsident der Berliner Akademie durch Friedrich II. verhalf.

Das Hauptverdienst gehört jedoch nach heutiger Einschätzung Celsius, der nicht nur die gesamte Vorbereitung und Organisation der Expedition in den Händen hatte, sondern sie auch durch ein eigenes Programm von Messungen des Erdmagnetismus bereicherte und sich mit theoretischen Arbeiten an der folgenden Auseinandersetzung mit den Anhängern der Descartesschen Physik beteiligte. Diese wollten ihre Theorie u. a. durch Zweifel an der Genauigkeit der durchgeführten Messungen retten. Wie die abgebildete Karte zeigt, wurde die Vermessung durch Triangulation durchgeführt. Dabei werden, ausgehend von einer sehr genau gemessenen Basisstrecke, im folgenden nur noch Winkel im vorher festgelegten Dreiecksnetz gemessen und die Entfernungen durch trigonometrische Rechnung bestimmt. Wie groß der Aufwand der praktischen Realisierung eines solchen Projektes in kaum besiedeltem, unwegsamem Gelände unter widrigen klimatischen Bedingungen ist, zeigt die Bereitstellung einer ganzen Schwadron schwedischer Soldaten für die Gradmessung. Eine Gradmessung durch Triangulation war erstmals 1617 von dem niederländischen Mathematiker Snellius durchgeführt worden. Heute können geodätische Messungen von Satelliten aus mittels Laser erfolgen, die eine Genauigkeit im Zentimeterbereich liefern.

P. Schreiber





Mathematik und Philatelie

Rund vier Jahre nach dem Erscheinen des Büchleins *Die Mathematik und ihre Geschichte im Spiegel der Philatelie* von P. Schreiber (vgl. *alpha* 1981, Heft 3) veröffentlichen wir einen ersten Nachtrag mathematisch interessanter Briefmarken zur in diesem Buch enthaltenen Liste. Die weiterhin zahlreich erschienenen bzw. bekanntgewordenen Marken, die Kunstwerke von Dürer oder Leonardo da Vinci reproduzieren, werden im folgenden nicht mit angegeben.

Land	Jahr	Li.-Nr.	Motiv – Ausgabeanlaß (Stand August 1983)
DDR	1981	2394	Richard Dedekind (vgl. *alpha* 6/1981)
	1983	2566	robotron Mikrorechner (Frühjahrsmesse)
		2582–87	Sand- u. Sonnenuhren aus dem Math.-Phys. Salon Dresden
		2609	Programmierte Effektivität durch Mikroelektronik (Herbstmesse)
		2611	L. Euler (200. Todestag)
Andorra	1980	306	Napoleon (vgl. *alpha* 4/1981)
Bulgarien	1980	2988	EDV-Anlage ESTEL
	1981	3025	25 Jahre Dubna
		3028	Lochstreifen
		3066	100 Jahre Staatl. Verwaltung für Statistik (Lochstreifen)
BRD	1979	907–09	Einstein; Otto Hahn; Max v. Laue – Physiker
	1980	938	Leibniz
	1981	976	Europ. Patentamt München (math. Symbole)
		978–81	Histor. Instrumente (Borda-Kreis, Spiegelteleskop, Binokularmikroskop, Quadrant)
	1982	1043	400 Jahre Gregorianischer Kalender
Frankreich	1944	630	Claude Chappe (1763 bis 1805), Erfinder des opt. Telegrafen
	1949	874	Voltaire (wirkungsreiche Randfigur in d. Gesch. d. Math., vgl. *alpha* 2/1983)
		876	G. Buffon (1707 bis 1788), sein „Nadelproblem", Beginn d. geometr. Wahrscheinlichkeitstheorie
	1951	915	Napoleon
	1958	1185	J. Leverrier (1813 bis 1877), fand rechn. 1846 den später von Galle beobachteten Planeten Neptun
		1195	Jean Cavaillès (1903 bis 1944), Mathematiker, Angehör. d. franz. Widerstandsbewegung
	1963	1423	Tiefseetauchboot „Archimede"
	1969	1681	Napoleon (200. Geburtstag)
	1981	2248	integrierter Schaltkreis
		2258	Mikroprozessoren (Elektronikmesse)
Griechenl.	1980	1461–62	Aristarch von Samos (vgl. *alpha* 1/1982)
	1983	1566	Archimedes
Großbrit.	1979	853	Alice im Wunderland (der Verfasser Lewis Carroll [eigentl. C. L. Dodgson], Prof. f. Mathem.
	1982	980–81	Informationstechnik (u. a. Computer u. Bildschirmgerät)
Italien	1956	1080–81	Weltkugel in Anaglyphen(Raumbild-)darstellung
	1972	1487	Leon Battista Alberti (1404 bis 1472)
	1979	1749	Einstein
		1759	Francesco Severi (1879 bis 1961), Mathematiker. Spezialgebiet: algebraische Geometrie
	1982	1905	automatische Postsortierung
	1983	0000	Galilei, Archimedes
Jugoslawien	1979	1911	Milutin Milankovič (1879 bis 1958), Mathematiker, Astronom u. Geophysiker
Monaco	1979	1400	Einstein
Niederlande	1978	1130	rechnendes Mädchen an Schultafel
Norwegen	1983	902	Abel-Denkmal in Oslo
Österreich	1979	1607	150 Jahre Statist. Zentralamt (Bevölkerungsbaum, vgl. *alpha* 1/1983)
		1628	August Musger (1868 bis 1929), Prof. für angewandte Mathematik
	1981	1677	L. Boltzmann (vgl. *alpha* 4/1982)
		1680	10. Internat. Mathematikerkongreß Innsbruck (Escherwürfel, vgl. *alpha* 4/1982)
	1982	1720	10 Jahre Internat. Institut f. angewandte Systemanalyse / Geodätentag
Polen	1979	2685	Satellit *Mikolaj Kopernik*
	1982	2861–64	St. Zaremba, W. Sierpiński, Z. Janiszewski, St. Banach (vgl. *alpha* 5/1983)
Portugal	1981	1567–68	Volkszählung, Lochkartenmotiv
Rumänien	1981	3852	XV. Internat. Kongreß f. Wissenschaftsgeschichte in Bukarest
San Marino	1982	1309–11	Archimedes, Copernicus, Newton
		1317–18	Hippokrates, Galilei
	1983	1330–31	Volta, Torricelli
		1333	Pythagoras
Schweden	1981	1178	Einstein
	1982	1191	A. Celsius (vgl. *alpha* 6/1983)
		1185–87	perspektivisch widerspruchsvolle Figuren (vgl. *alpha* 4/1982)
		1217–21	symbol. Darst. math.-phys. Theorien von Bohr, Schrödinger, de Broglie, Dirac u. Heisenberg
Schweiz	1980	1176	astronomische Uhr (etwa 1530)
		1197	XVI. Internat. Kongreß der Vermessungsingenieure (Theodolit, Meßlatte)
	1983	1283	Globusuhr von Bürgi
ČSSR	1957	1031–34	250 Jahre Polytechn. Schule Prag, insbes. F. J. Gerstner (1756 bis 1832), R. Skuherský (1828 bis 1863) – Mathematiker
	1977	2401	Alice im Wunderland (Illustration) / Burundi 1977 382 Alice i. W.
	1980	2591	Volkszählung
	1981	2612/2616	J. Hronec/B. Bolzano (vgl. *alpha* 5/1981)
	1982	2691	30 Jahre Akad. d. Wissensch. d. ČSSR
Türkei	1980	2435–36	Avicenna (Ibn Sina, 1000. Geburtstag).
	1981	2478–79	5. Europ. Physikerkongreß
	1983		Ulug Beg (1394 bis 1449), bedeut. mittelasiat. Astronom u. Mathematiker
Ungarn	1966	2228	10 Jahre Dubna
	1980	3449	Kepler (mit Nebenfeld)
	1982	3553/3555	Ziolkowski/Weltmeisterschaft im Rubik-Würfel-Drehen

Land	Jahr	Li.-Nr.	Motiv – Ausgabeanlaß
UdSSR	1979	4923	60 Jahre Nachrichtentruppen d. Streitkräfte d. UdSSR (Lochstreifen)
	1980	5013	Avicenna
		5048–49	Forschungsschiff *O. Ju. Schmidt*, Forschungsschiff *M. Keldysch*
	1981	5068	M. W. Keldysch (vgl. *alpha* 2/1982)
		5125	XXVI. Parteitag – Lochstreifen
		5151	M. A. Lawrentjew (1900 bis 1980), Mathematiker
	1983		al-Choresni (~780 bis ~850), islam. Mathematiker
Vatikan	1982	846–48	400 Jahre Gregorianischer Kalender
Westberlin	1981	639–42	histor. Instrumente (Theodolit, Äquatorial, Mikroskop, Sextant)
Ägypten	1980		Dr. Ali Mousharafa (1898 bis 1950), erster namhafter ägypt. Mathematiker d. Neuzeit
Äquat.-Guin.	1978	Bl. 284	Ziolkowski u. Koroljow
Australien	1974	578	wiss. Ausbildung – Ausgleichskurve durch Meßdaten
Benin	1980	669–70	Kepler, Copernicus (50 Jahre Pluto-Entdeck.)
		723–24	Kepler
Brasilien	1974	1437–40	Möbius-Band; 1975 1477 Möbius-Band
	1978	1642	automat. Postsortierung
Burma	1976	263	Rechenbrett
	1981	3 Werte	Kepler
VR China	1979	1502	Einstein
Cook-Ins.	1980		Kepler (mit Jules Verne)
Ekuador	1936	341–49	200. Jahrestag der südamerikan. Gradmessung (vgl. *alpha* 6/1983)
Franz.-Polyn.	1969	100	Napoleon
Gabun	1981		200 Jahre Uranus-Entdeckung (F. W. Herschel)
Guayana	1982	6 Werte	metrisches System
Guinea-Biss.	1977	84	Einstein
	1979	186	Math.-Unterricht
	1981		Galilei
Iran	1977	1880	integrierte Schaltung
	1979	1969	Gyath-al-Din Jamshid Kashami, Astronom u. Mathematiker (550. Todestag)
	1980	1984	al-Biruni, al-Farabi, Avicenna
Japan	1980	1456	10. Internat. Tagung f. Kartographie
		1459	Kongreß d. Internat. Vereinig. f. Informationstechnik (integrierte Schaltung)
Jemen (JAR)	1978	1399	EDV-Anlage
		Bl. 174	
Kanada	1971	488	100 Jahre Volkszählung (Lochstreifen u. Magnetbandtrommeln)
Kolumbien	1949	540	Julio Garavito Armero (1865 bis 1920), Mathematiker
	1968	1056	Kongreß f. elektron. Datenverarbeitung
Komoren	1975	226–27	Copernicus
	1976	286–87	Copernicus; Einstein
	1977	329	Russell
	1977	330	Planck, Einstein u. a.
	1979	485–90	Galilei, Kepler, Copernicus, Huygens, Herschel, Leverrier
		Bl.199–205	
	1980	588	Kepler, Copernicus
VR Kongo	1979	697	Einstein
	1980	735	Claude Chappe (vgl. Frankreich)
KDVR	1980	2007	Kepler
	1981		Copernicus
	1982		Gemälde *Akademie von Athen* v. Rembrandt
Kuba	1981	2774/2825	Verne, Ziolkowski, Koroljow/Napoleon in Ägypten (vgl. *alpha* 4/1981)
Laos	1981	532	Math.-Unterricht
Libanon	1948		Avicenna
Mali	1978	661	Einstein (Aufdruck auf 469)
	1980	748–49	Kepler, Copernicus
Moçambique	1982		Lochstreifen
Mongol. VR	1980	Bl. 68	Kepler
Neukaled.	1974	563	Lissajous-Figur (Überlagerung zweier senkrechter Schwingungen)
Nikaragua	1980	2146–53	Einstein
Papua u. Neuguinea	1967	107	Vermessungswesen
		108	Zirkel im Bauwesen
Saudi-Arab.	1977		Ptolemäus
Sierra Leone	1983		Raffaels Gemälde *Akademie des Platon*
St. Lucia	1980	Bl. 22	Einstein
Togo	1979	1325–30	Einstein
	1981		Copernicus
USA	1973	1129	integrierte Schaltung
	1980	1435	Benjamin Banneker (vgl. *alpha* 2/1981)
Venezuela	1978	2112	Lochstreifen
Vietnam	1979	1077–78	Einstein
Zaïre	1980	6 Werte + Block	Einstein
Zentralafr.Rep.	1979	612	Einstein

V. Großmann/P. Schreiber

Wir falten lustige Figuren

Der Teufel

Ausgangsform: Ein Quadrat aus Schreib- oder Zeichenpapier 20 cm × 20 cm.

Anfertigung: Wir falten das Quadrat im Mittelbruch zu einem Rechteck (Bild 2). Die halbe Länge des so entstandenen Rechtecks wird zum anderen Mittelbruch nach innen gelegt (Bild 3). Die zwei oben liegenden Spitzen falten wir nach unten (Bild 4), drehen das Ganze um und wiederholen den letzten Faltvorgang (Bild 5). Wir erhalten ein quadratisches Faltpäckchen (Bild 6).

Es sind vier dreieckförmige „Flügel", die eine gemeinsame Mittelachse haben. Das linke Dreieck brechen wir zweimal so, daß die äußeren Seitenkanten an die Mitte zu liegen kommen, und falten mit Hilfe der zwei eben entstandenen Faltlinien eine Spitze heraus (Bild 7). Mit den drei anderen „Flügeln" verfahren wir ebenso, wie es Bild 8 zeigt. Von den beiden scharfen Spitzen des entstandenen Körpers ist eine durch die Faltvorgänge offengeblieben (Bild 9). Wenn wir in die offene Seite hineinblasen und dabei die zwei unteren Dreieckspitzen mit den Fingern festhalten, entfaltet sich der Teufel., Beim Blasen müssen wir nötigenfalls mit den Fingern nachhelfen, damit die „Hörner" nicht in den Brüchen hängenbleiben. Man kann an der anderen geschlossenen Spitze die gespaltene „Zunge" etwas herausholen und nach unten umkippen. Eine entsprechende Bemalung (große Augen, rote Zunge) erhöht den Reiz dieser Faltarbeit.

Der Vogel

Ausgangsform: Quadrat in der Größe von 25 cm × 25 cm (Bild 1a).

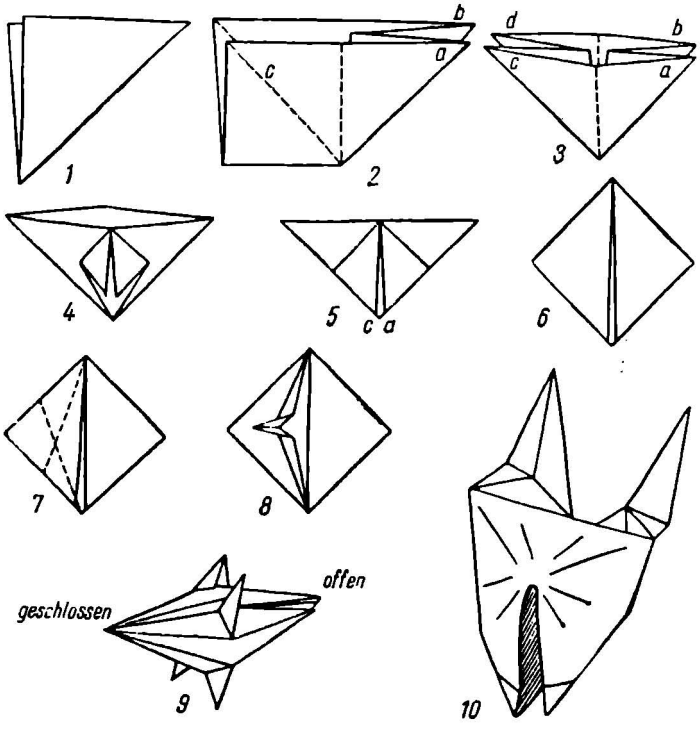
Anfertigung: Nach dem Bild wird das Quadrat gefaltet; nach dem Öffnen zeigt es waagerechte und senkrechte Linien, die aus den Faltbrüchen entstanden sind. Nun wird von allen vier Ecken aus an den Diagonalen entlang in Tütenform weitergefaltet und wieder geöffnet, so daß noch mehr Faltlinien zu sehen sind. Das so vorgefaltete Blatt sieht dann nach dem Wiederöffnen wie Bild 1f aus. Wichtig ist nun das Vertrautmachen mit Bild 1e. Diese durch die Faltung entstandenen stumpfen Dreiecke werden angehoben, weiter aufgestellt und nach innen gedrückt (Bild 1f). Die ursprünglichen Ecken treffen sich bei diesem Vorgang als neu entstandene untere Drachenspitzen. Bedingung ist, daß alle Brüche scharf ausgefalzt werden. Wir drücken das Ganze so weit zusammen, bis wir vier zusammenhängende, flach zusammengedrückte Drachenformen erhalten (Bild 2g). Der obere und der untere Drachen sind sichtbar. Die zwei dazwischenliegenden sind rechts und links je in der Mitte in der Längsrichtung gefaltet und zusammengedrückt (Bild 2h). Nun werden von den sichtbaren beiden Drachen die losen, langen Dreiecke über die oberen, zusammenhängenden rechtwinkligen Dreiecke gestülpt. Die oberen Hälften sind geschlossen, die unteren gespalten (Bild 2i und k). Die Zeichnung zeigt nun den weiteren Arbeitsablauf. Das eine lose Viertel wird nach oben und nach innen eingedrückt, wie weit, das zeigt die Zeichnung. Es wird zum Hals und Kopf gefaltet. Der Kopf wird wieder nach unten und innen gedrückt und gefaltet (Bild 3a). Das gezeichnete Auge im Kopf macht die Form deutlicher. Der Schwanz wird ebenso gebildet, nur nach der entgegengesetzten Seite, auch seitlich nach oben, dann nach innen. Jetzt falten wir die beiden immer noch nach oben stehenden Drachenspitzen; je zwei Drittel nach unten, und zwar schräg nach vorn, und die Flügel sind gebildet. Unser Vogel ist fertig (Bild 3c). Wenn man jetzt mit der linken Hand den Vogel vorn unter den Flügeln mit zwei Fingern festhält und hinten am Schwanz leicht hin und her zieht, dann schlagen die Flügel auf und ab.

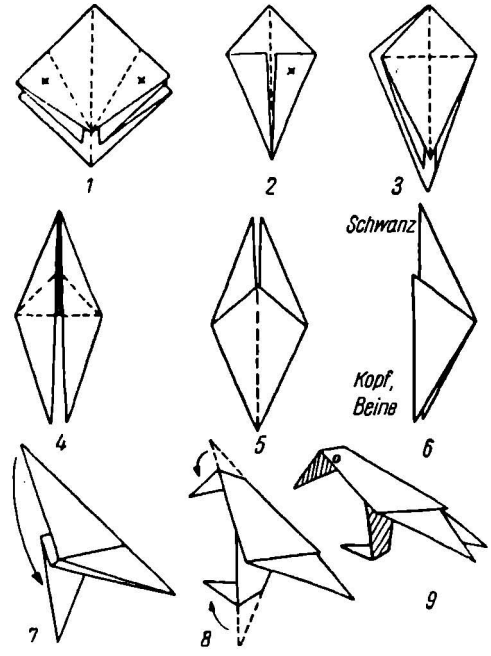
Diese beiden Faltfiguren entnahmen wir dem Buch:

Werken und Formen,

Verlag Volk und Wissen,
Volkseigener Verlag, Berlin 1960.

Viel Erfolg und Freude beim Knobeln!





ISSN 002-6395 · alpha · Berlin · 18 (1984) 3 · Seiten 49 bis 72