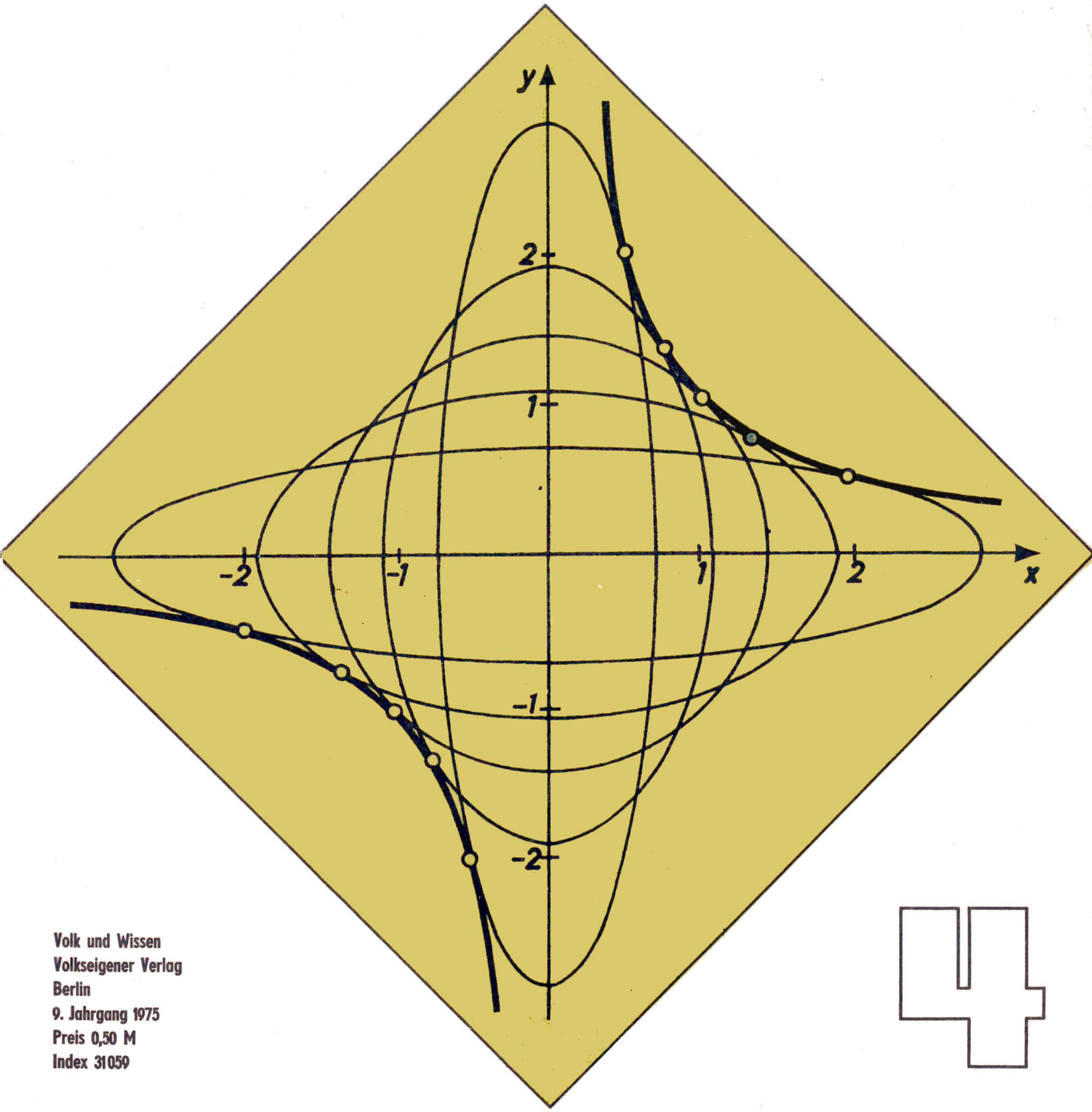
Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
9. Jahrgang 1975
Preis 0,50 M
Index 31059

4

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: F. Schröter, Leipzig (S. 81); Lengren, Berlin (S. 83); D. Fink, TH „Otto von Guericke", Magdeburg (S. 84); L. Otto, Leipzig, aus: Neues Leben 4/73 (S. 84); J. Lehmann, Leipzig (Innenteil, Seite VIII)
Typographie: H. Tracksdorf

Satz: Staatsdruckerei der Deutschen Demokratischen Republik
Rollenoffsetdruck: GG Interdruck, Leipzig
Redaktionsschluß: 16. Mai 1975

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Rekursionsformeln als spezielle Operatorgleichungen

Im vorhergehenden Heft wurde der für die moderne Analysis und ihre Anwendungen in der Praxis fundamentale Begriff des linearen Operators eingeführt. Jetzt wollen wir zeigen, wie man diesen Begriff bei der Formulierung und Lösung von Gleichungen vorteilhaft verwenden kann. Der Einfachheit halber beschränken wir uns dabei auf sogenannte rekursive Gleichungen oder Rekursionsformeln, die sich völlig elementar behandeln lassen, und beginnen mit einigen Beispielen für solche Formeln.

Beispiel 1: Der Sage nach wünschte sich der Erfinder des Schachspiels von seinem König als Belohnung so viele Weizenkörner, wie man auf dem letzten Feld des Schachbretts erhält, wenn man auf das erste Feld ein Korn legt und bei jedem weiteren Feld die Zahl der Körner verdoppelt. Bei den ersten zehn Feldern ergeben sich hierbei die Zahlen 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512.
Bezeichnen wir die Zahl der Körner auf dem n-ten Feld mit x_n, so lautet das Bildungsgesetz dieser Zahlen für $n=2, 3, \ldots, 64$
$x_n=2x_{n-1}$, $x_1=1$.
Der König hielt den Wunsch für sehr bescheiden, ob das stimmt, werden wir noch sehen.

Beispiel 2: Im Jahre 1202 stellte der italienische Mathematiker Leonardo Fibonacci die Aufgabe, die Zahl der Kaninchen am Ende eines Jahres zu berechnen, die sich unter folgenden Bedingungen vermehren: Zunächst sei ein erwachsenes Paar vorhanden. Jedes erwachsene Paar möge in jedem Monat genau ein weiteres Paar zur Welt bringen, und jedes neugeborene Paar sei in zwei Monaten erwachsen. Das Bildungsgesetz für die Zahl x_n der am Ende des n-ten Monats vorhandenen Kaninchenpaare lautet offenbar
$x_n=x_{n-1}+x_{n-2}$, $x_1=2$, $x_2=3$
für $n=3, 4, \ldots, 12$. Für $n=3$ folgt $x_3=3+2=5$, für $n=4$ folgt $x_4=5+3=8$ und für $x_5, x_6, \ldots, x_{12}$ finden wir analog
13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377.

Beispiel 3: Die positive Lösung der Gleichung $x=\dfrac{x+2}{x+1}$ ist, wie man leicht nachrechnet (Klasse 8), die Zahl $\sqrt{2}$. Dieser Lösung entspricht geometrisch der Schnittpunkt der Geraden $y=x$ mit der Hyperbel $y=(x+2)/(x+1)$. Die der vorhergehenden Gleichung nachgebildete Rechenvorschrift
$x_n=\dfrac{x_{n-1}+2}{x_{n-1}+1}$
liefert, wenn man beispielsweise von $x_1=1$ ausgeht, für $n=2, 3, 4, \ldots$ Werte, die sich der Schnittstelle $\sqrt{2}$ immer mehr annähern (Bild 1). Die ersten fünf dieser Werte lauten
$\frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}$,
und man kann sie als rationale Näherungswerte für die Irrationalzahl $\sqrt{2}$ verwenden.

▲1▲ Die Zahlen u_n und v_n seien durch $u_1=v_1=1$ und $u_n=u_{n-1}+2v_{n-1}$, $v_n=u_{n-1}+v_{n-1}$ für $n=2, 3, 4, \ldots$ definiert. Man zeige:
a) im Beispiel 3 gilt $x_n=u_n/v_n$,
b) diese Zahlen erfüllen für $n=3, 4, 5, \ldots$ auch die Gleichungen
$u_n=2u_{n-1}+u_{n-2}$, $v_n=2v_{n-1}+v_{n-2}$,
c) für alle natürlichen Zahlen n gilt
$u_n^2-2v_n^2=(-1)^n$.

Beispiel 4: Die Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses ist ein Maß für die Sicherheit des Eintretens dieses Ereignisses. Dieses Maß kann Werte zwischen 0 und 1 annehmen, wobei man dem unmöglichen Ereignis die Wahrscheinlichkeit 0 und dem sicheren Ereignis die Wahrscheinlichkeit 1 zuschreibt. Ein bekanntes Beispiel für einen zufälligen Prozeß ist die Brownsche Molekularbewegung (Klasse 11), die man auch als Irrfahrt eines Teilchens bezeichnet. Wir betrachten eine Irrfahrt unter folgenden Bedingungen: Ein Teilchen möge sich zufällig auf den ganzzahligen Punkten $n=0, 1, 2, \ldots, N$ einer Geraden bewegen, wobei es von einem Punkt n mit $0<n<N$ zu den benachbarten Punkten $n-1$ bzw. $n+1$ jeweils mit der Wahrscheinlichkeit 1/2 übergeht, bis es bei einem der Endpunkte 0 bzw. N angekommen ist (Bild 2). Es sei x_n die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Teilchen, vom Punkt n ausgehend, nach endlich vielen Schritten den Punkt 0 erreicht. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung lehrt, daß dann für $0<n<N$ die Beziehung
$x_n=\frac{1}{2}(x_{n-1}+x_{n-1})$ besteht.
Die vorhergehenden Bemerkungen führen leicht zu den Randwerten $x_0=1$, $x_N=0$ (Beweis!), die Lösung dieses Problems wird weiter unten angegeben.

▲2▲ Man zeige, daß die vorhergehende Gleichung auf die Normalform
$x_n=2x_{n+1}-x_{n-2}$
mit $2\leqq n\leqq N$ gebracht werden kann.

Beispiel 5: Mit den Bezeichnungen des vorhergehenden Heftes betrachten wir die in Bild 3 angedeutete Übertragungsreihe, bei der zwei benachbarte Signale durch
$x_n=\mathbf{A}_n x_{n-1}$ verknüpft
sind und wir daher rekursiv für $n=1, 2, 3$
$x_1=\mathbf{A}_1x_0$, $x_2=\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1x_0$, $x_3=\mathbf{A}_3\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1x_0$
usw. erhalten. Bei Verwendung standardisierter Bauelemente kommt dem Fall besondere Bedeutung zu, daß die Übertragungsreihe sich aus gleichen Teilsystemen zusammensetzt und somit die Übertragungsfaktoren
$\mathbf{A}_1=\mathbf{A}_2=\mathbf{A}_3=\ldots=\mathbf{A}$
nicht von n abhängen. Dann vereinfachen sich unsere Ergebnisse unter Benutzung der Potenzschreibweise zu
$x_1=\mathbf{A}x_0$, $x_2=\mathbf{A}^2x_0$, $x_3=\mathbf{A}^3x_0$,
und es gilt allgemein $x_n=\mathbf{A}^nx_0$,
was sich leicht durch vollständige Induktion (Klasse 11) beweisen läßt. Ein Beispiel für eine solche Übertragungsreihe ist die Übertragung einer Fernsehsendung mit Hilfe von n Zwischenstationen, wobei n während einer Intervisionssendung etwa die Größenordnung 50 hat.

Rekursionsformeln: Die vorhergehenden Beispiele, die sich leicht durch zahlreiche weitere ergänzen ließen, besitzen folgende Gemeinsamkeiten. In jedem Fall ist eine Folge $x_1, x_2, x_3, \ldots$, d. h. eine Funktion x_n der ganzzahligen Veränderlichen n gesucht (bei der in der Regel nur die Werte mit $n\geqq 0$ interessieren). Den Wert dieser Funktion an einer festen Stelle n kann man aber auf Grund des Bildungsgesetzes erst dann berechnen, wenn man den Wert an der vorhergehenden Stelle $n-1$ (Beispiele 1, 3, 5) oder sogar an den beiden vorhergehenden Stellen $n-1$, $n-2$ (Beispiel 2, Aufgaben 1b. 2) kennt. Solche Bildungsgesetze heißen *Rekursionsformeln*. Im folgenden befassen wir uns eingehender mit den Rekursionsformeln *erster Ordnung* vom Typ
$x_n=ax_{n-1}$, $a\neq 0$
und denjenigen *zweiter Ordnung*
$x_n=ax_{n-1}+bx_{n-2}$, $b\neq 0$. ...
Im Beispiel 5 haben wir x_n nicht nur rekursiv durch x_{n-1}, sondern auch unmittelbar durch x_0 ausgedrückt. Dieses Ergebnis halten wir zunächst nach Spezialisierung auf Verstärker $\mathbf{A}=a$ mit einer beliebigen Zahl $a\neq 0$ fest.

Satz 1: Genügt x_n für beliebige natürliche Zahlen n der Rekursionsformel $x_n=ax_{n-1}$, so besitzt x_n die Darstellung $x_n=a^nx_0$.
Umgekehrt ist jede Funktion dieser Form mit beliebigem x_0 eine Lösung der Rekursionsformel. Für Leser, die mit den Begriffen des Beispiels 5 nicht so vertraut sind, sei noch ein direkter Beweis dieses Satzes angeführt.

Beweis der ersten Teilbehauptung: Im Fall $a=1$ lautet unsere Rekursionsformel $x_n = x_{n-1}$, und es ist unmittelbar klar, daß x_n gar nicht von n abhängt, also $x_n = x_o$ ist. Wegen $1^n = 1$ gilt dann die im Satz angegebene Darstellung für x_n. Der allgemeine Fall läßt sich auf den soeben erledigten Spezialfall zurückführen, indem man die Hilfsfunktion $y_n = a^{-n}x_n$ einführt. Für diese gilt nämlich

$y_n = a^{-n}x_n = a^{-n+1}x_{n-1} = y_{n-1}$, so daß

$y_n = y_o = x_o$ ist und daher $x_n = a^n x_o$.

Beweis der zweiten Teilbehauptung:

Ist $x_n = a^n x_o$ mit einer beliebigen Zahl x_o, so ist $x_{n-1} = a^{n-1}x_o$ und

$ax_{n-1} = a^n x_o = x_n$, was zu beweisen war.

Wie man sofort sieht, läßt sich die Lösung $x_n = a^n x_o$ der Rekursionsformel von Satz 1 auch in der Form $x_n = a^{n-1}x_1$ schreiben (Beweis!). Hieraus geht hervor, daß das gesuchte Ergebnis des Beispiels 1 die unvorstellbar große Zahl $x_{64} = 2^{63} > 9 \cdot 10^{18}$ ist.

Die dort geforderte Belohnung übersteigt bei weitem alle Weizenvorräte, sogar die der heutigen Welt.

Um jetzt unsere Kenntnisse aus dem vorhergehenden Heft anzuwenden und zu vertiefen, fassen wir die Rekursionsformeln auf als

Operatorgleichungen: Wie wir wissen, ist ein *Operator* nichts anderes als eine eindeutige Abbildung $x \to \mathbf{A}x$, bei der die Elemente des Definitions- und des Bildbereiches Funktionen sind. Für unsere Zwecke genügt es, diese Funktionen $x = x(t)$ nur an ganzzahligen Argumentstellen $t = n$ zu betrachten, wobei wir $x(n) = x_n$ schreiben (Bild 4). Dann hat speziell der *Verschiebungsoperator* $\mathbf{V}$ die Eigenschaften

$\mathbf{V}x_n = x_{n-1}$, $\mathbf{V}^2 x_n = x_{n-2}$.

Unsere Rekursionsformeln

$x_n - ax_{n-1} = 0$, $x_n - ax_{n-1} - bx_{n-2} = 0$,

bei denen wir alle Glieder auf die linke Seite gebracht haben, lauten damit

$(1 - a\mathbf{V})x_n = 0$ bzw. $(1 - a\mathbf{V} - b\mathbf{V}^2)x_n = 0$,

und Satz 1 läßt sich folgendermaßen formulieren,

Satz 1': Die Gleichung erster Ordnung $(1 - a\mathbf{V})x_n = 0$

besitzt genau die Lösungen $x_n = a^n x_o$.

Zur Verallgemeinerung dieses Satzes betrachten wir jetzt die beiden Operatoren $\mathbf{A} = 1 - \alpha\mathbf{V}$, $\mathbf{B} = 1 - \beta\mathbf{V}$ mit gewissen Zahlen α, $\beta \neq 0$ und die Gleichungen

$\mathbf{A}y_n = 0$, $\mathbf{B}z_n = 0$.

Nach Satz 1' besitzen sie die Lösungen

$y_n = \alpha^n y_o$, $z_n = \beta^n z_o$.

Satz 2: Die Gleichung zweiter Ordnung $\mathbf{AB}x_n = 0$ besitzt

für beliebige Zahlen y_o, z_o die Lösung

$x_n = y_n + z_n$.

Beweis: Da die auftretenden Operatoren *linear* sind und somit auf eine Summe gliedweise angewandt werden können, gilt wegen $\mathbf{B}z_n = 0$ und $\mathbf{A}0 = 0$

$\mathbf{AB}x_n = \mathbf{AB}(y_n + z_n) = \mathbf{AB}y_n + \mathbf{AB}z_n = \mathbf{AB}y_n$.

Andererseits folgt durch Ausmultiplikation $\mathbf{AB} = 1 - (\alpha + \beta)\mathbf{V} + \alpha\beta\mathbf{V}^2 = \mathbf{BA}$, so daß $\mathbf{A}$ mit $\mathbf{B}$ *vertauschbar* ist und wir wie behauptet

$\mathbf{AB}x_n = \mathbf{AB}y_n = \mathbf{BA}y_n = \mathbf{B}0 = 0$ erhalten.

Setzen wir jetzt $a = \alpha + \beta$, $b = -\alpha\beta$, so sehen wir, daß Satz 2 uns für die Rekursionsformel $x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}$ folgende Lösung liefert: $x_n = \alpha^n y_o + \beta^n z_o$.

▲3▲ Man zeige (Klasse 9): Sind umgekehrt a, b vorgegeben mit $a^2 + 4b \geqq 0$, so bleibt die letzte Lösungsaussage erhalten, wenn α und β die Nullstellen der quadratischen Gleichung $\lambda^2 - a\lambda - b = 0$ sind, also beispielsweise

$$\alpha = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + 4b}), \quad \beta = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 + 4b}).$$

Im Fall $a^2 + 4b = 0$ ist $\alpha = \beta = a/2$, und die durch Satz 2 ermittelte Lösung kann zu $x_n = (a/2)^n x_o$ zusammengefaßt werden. Wie der folgende Satz zeigt, gibt es aber noch weitere Lösungen.

Satz 3: Die Gleichung zweiter Ordnung $(1 - \alpha\mathbf{V})^2 x_n = 0$ besitzt

für beliebige Zahlen x_o, y_o die Lösung

$x_n = \alpha^n(x_o + ny_o)$.

Beweis: Wegen der Linearität des Operators $\mathbf{A} = 1 - \alpha\mathbf{V}$ und der bereits bekannten Tatsache, daß $\alpha^n x_o$ eine Lösung ist, gilt

$\mathbf{A}^2 x_n = y_o \mathbf{A}^2 \alpha^n n$. Wegen

$\mathbf{A}\alpha^n n = \alpha^n n - \alpha^n(n-1) = \alpha^n$ ist weiterhin

$\mathbf{A}^2 \alpha^n n = \mathbf{A}\alpha^n = 0$

und damit auch

$\mathbf{A}^2 x_n = 0$, was zu beweisen war.

▲4▲ Man zeige mit Hilfe des Spezialfalls $\alpha = 1$ von Satz 3, daß die Rekursionsformel der Aufgabe 2 unter den Bedingungen $x_o = 1$, $x_N = 0$ des Beispiels 4 die Lösung $x_n = 1 - n/N$ besitzt (Bild 5).

Anfangswertprobleme: Aus der Gestalt der Rekursionsformel $x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}$ ist ersichtlich, daß man die Werte x_n der Lösung für $n = 2, 3, 4, \ldots$ schrittweise berechnen kann, wenn die *Anfangswerte* x_o und x_1 vorgegeben sind. Wie im Fall von Satz 1 läßt sich dieses *Anfangswertproblem* aber auch geschlossen lösen.

Satz 4: Im Fall $a^2 + 4b > 0$ ist

$x_n = \alpha^n y_o + \beta^n z_o$

mit den Zahlen α und β aus Aufgabe 3 und

$$y_o = \frac{x_1 - \beta x_o}{\sqrt{a^2 + 4b}}, \quad z_o = \frac{\alpha x_o - x_1}{\sqrt{a^2 + 4b}}$$

die Lösung des Anfangswertproblems.

Beweis: Nach Satz 2 wissen wir bereits, daß x_n eine Lösung der Rekursionsformel ist. Da diese Lösung eindeutig durch die Anfangswerte bestimmt ist, braucht nur noch für $n = 0$ und $n = 1$

$x_o = y_o + z_o$, $x_1 = \alpha y_o + \beta z_o$

gezeigt zu werden. Wegen $\alpha - \beta = \sqrt{a^2 + 4b}$ folgt dies aber unmittelbar durch Einsetzen der Ausdrücke für y_o, z_o.

Nach diesen Vorbereitungen kann man jetzt alle noch nicht behandelten Rekursionsformeln aus unseren vorhergehenden Beispielen auflösen.

▲5▲ Man zeige, daß die Zahlenfolge von Fibonacci aus Beispiel 2 die geschlossene Darstellung

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right)$$

besitzt, wobei von den Anfangswerten $x_o = 1$, $x_1 = 2$ auszugehen ist. Trotz der auftretenden Wurzel sind die x_n natürliche Zahlen!

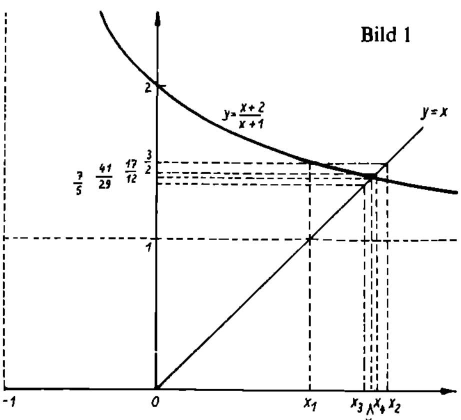


Bild 1

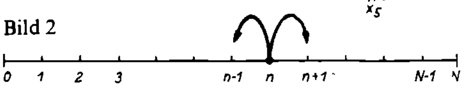


Bild 2

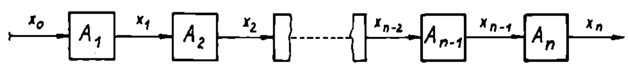


Bild 3

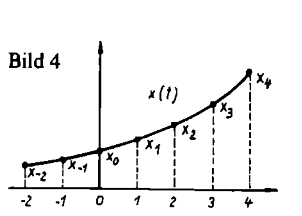


Bild 4

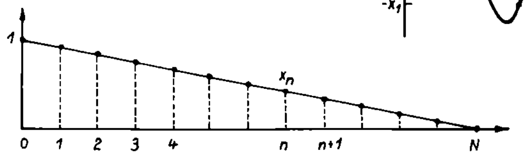


Bild 5

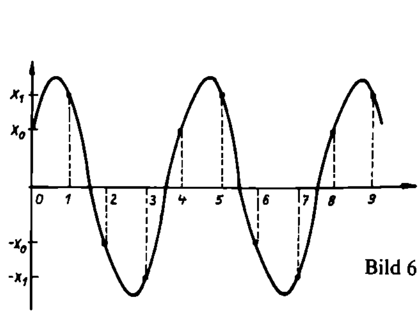


Bild 6

▲6▲ Man zeige: Die Lösungen der Rekursionsformeln aus Aufgabe 1b lauten unter den Anfangsbedingungen $u_0 = u_1 = 1$ bzw. $v_0 = 0$, $v_1 = 1$

$$u_n = \frac{1}{2}((1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n),$$

$$v_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}((1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n).$$

Nach Aufgabe 1a ist damit auch die Lösung x_n der Rekursionsformel aus Beispiel 3 bekannt. Nach Aufgabe 1c läßt sich weiterhin der Fehler zwischen x_n^2 und 2 bzw. zwischen x_n und $\sqrt{2}$ angeben, denn aus

$u_n^2 - 2v_n^2 = (-1)^n$

folgt nach Division durch v_n^2

$x_n^2 - 2 = (-1)^n / v_n^2$

und nach weiteren Zwischenrechnungen

$x_n - \sqrt{2} = (-1)^n / (1+\sqrt{2})^n v_n$.

Beispielsweise erhalten wir hieraus für $n = 6$ die Abschätzung $0 < 99/70 - \sqrt{2} < 10^{-4}$.

Die Rekursionsformel der Aufgabe 2 genügt nicht den Voraussetzungen von Satz 4, doch läßt sich dieser Fall ganz analog erledigen.

▲7▲ Man zeige: Das Anfangswertproblem für die Rekursionsformel

$x_n = 2\alpha x_{n-1} - \alpha^2 x_{n-2}$

mit $\alpha \neq 0$ besitzt die Lösung

$$x_n = \alpha^n \left((1-n)x_0 + \frac{n}{\alpha} x_1 \right).$$

Periodische Lösungen: Es bleibt noch der Fall $a^2 + 4b < 0$ zu untersuchen, wobei wir uns jedoch auf den Spezialfall $a = 0$, $b = -c^2$ mit $c > 0$ beschränken, d. h. auf die Gleichung $x_n + c^2 x_{n-2} = 0$.

Behandeln wir die Fälle gerader und ungerader n getrennt, so finden wir mit den Überlegungen des Beweises von Satz 1

$x_{2n} = (-c^2)^n x_0$, $x_{2n+1} = (-c^2)^n x_1$.

Dieses Ergebnis läßt sich mit Hilfe trigonometrischer Funktionen (Klasse 10) folgendermaßen zusammenfassen,

$x_n = c^n \left(x_0 \cos \frac{\pi n}{2} + \frac{x_1}{c} \sin \frac{\pi n}{2} \right)$. Im Fall $c = 1$ hat x_n die *Periode* 4 (Bild 6).

▲8▲ Man zeige: Das Anfangswertproblem für die Rekursionsformel

$x_n = \sqrt{2} x_{n-1} - x_{n-2}$ besitzt die Lösung

$$x_n = x_0 \cos \frac{\pi n}{4} + (x_1 \sqrt{2} - x_0) \sin \frac{\pi n}{4}.$$

Lothar Berg

Literatur:

Berg, L., Lineare Systeme und ihre Beschreibung durch Operatoren, ALPHA 1975, Heft 3.

Gnedenko, B. W., und A. J. Chintschin, Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Schülerbücherei Bd. 10, Berlin 1973.

Markuschewitsch, A. I., Rekursive Folgen, Math. Schülerbücherei Bd. 25, Berlin 1973.

Worobjow, N. N., Die Fibonaccischen Zahlen, Math. Schülerbücherei Bd. 19, Berlin 1971.

Eine Aufgabe von Prof. Dr. sc. Benno Klotzek

Pädagogische Hochschule „Karl Liebknecht"
Sektion Mathematik/Physik
Lehrstuhl Geometrie

▲1384▲ a) In der Ebene ϵ seien eine Gerade g und Punkte P, Q mit $P, Q \notin g$ gegeben. Kann ein Punkt $R \in g$ so gewählt werden, daß $l(\overline{PR}) + l(\overline{QR})$ möglichst klein wird?

Anleitung: Wir unterscheiden die Fälle, daß P, Q in verschiedenen bzw. nicht in verschiedenen Halbebenen bezüglich g liegen. Im zweiten Fall spiegle man etwa P an g.

b) Im Innern eines Winkels mit den Schenkeln p, q liege ein Punkt R. Unter welchen Bedingungen für den Winkel lassen sich Punkte $P \in p$ und $Q \in q$ finden, für die die Summe $l(\overline{PQ}) + l(\overline{QR}) + l(\overline{RP})$ möglichst klein wird?

Tagung
der Mathematischen Gesellschaft der DDR

Vom 12. bis 14. Mai 1975 war die Pädagogische Hochschule „Karl Liebknecht", Potsdam, der Gastgeber der 3. Tagung der Fachsektion „Unterricht und Ausbildung". Über 400 Wissenschaftler und Lehrer hatten umfassend Gelegenheit, sich über fachliche wie methodische Fragen des Mathematikunterrichts und der außerunterrichtlichen Arbeit auszutauschen.

Themen aus dem Arbeitsprogramm: Zu einigen aktuellen Problemen des Mathematikunterrichts in den Oberschulen der DDR – Zu einigen Erscheinungsformen imperialistischer Schulpolitik und Pädagogik im Bereich der mathematischen Bildung in kapitalistischen Staaten – Grundfragen der Topologie – Gründung einer Fachsektion „Geschichte und Philosophie der Mathematik" – Probleme des fakultativen Unterrichts – Beweise mit Hilfe des Bewegungsbegriffs – Gedanken zum mathematischen Definieren – Zur Theorie der geometrischen Konstruktion – Über Winkelfunktionen – Grundzüge der universellen Algebra.

Zahlreiche Beiträge wurden der Redaktion *alpha* übergeben bzw. zugesagt (im Rahmen einer umfassenden Aussprache über die außerunterrichtliche Arbeit).

Eine Aufgabe von Dr. Hans-Joachim Döring

Martin-Luther-Universität Halle/Wittenberg
Sektion Wirtschaftswissenschaften

▲1385▲ Zur Herstellung von drei Erzeugnissen benötigt ein Industriebetrieb zwei verschiedene Rohstoffe (R_1, R_2). Um eine Einheit des ersten Erzeugnisses herzustellen, braucht man drei Einheiten des Rohstoffes R_1 und sieben Einheiten des Rohstoffes R_2, für eine Einheit des zweiten Erzeugnisses sechs Einheiten von R_1 und fünf Einheiten von R_2, für eine Einheit des dritten Erzeugnisses acht Einheiten von R_1 und vier Einheiten von R_2. Vom Rohstoff R_1 stehen pro Zeiteinheit 640 Einheiten und vom Rohstoff R_2 490 Einheiten zur Verfügung.

Problem: Wieviel Einheiten sind von den einzelnen Erzeugnissen herzustellen, damit der gesamte Rohstoffvorrat verbraucht wird?

Anleitung: a) Definieren Sie die Variablen in geeigneter Weise!

b) Stellen Sie das Gleichungssystem auf!

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Gleichungssystems!

d) Bestimmen Sie eine spezielle ganzzahlige Lösung, indem Sie für die beliebig wählbare Variable bestimmte Werte einsetzen!

(Da es sich um Produktionszahlen handelt, kommen nur nichtnegative Werte als zulässige Lösung in Frage.)

Kurzbiographie: geb. 1931 in Ober-Bielau, Kreis Görlitz; Vater: Lehrer. Besuch der Oberschule von 1943 bis 1951. 1951 Abitur an der *Ehrenberg-Oberschule* Delitzsch. 1951 bis 1952 Fachlehrerhelfer für Mathematik an der Zentralschule Krostitz; 1952 bis 1955 Direktstudium an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Pädagogische Fakultät, Mathematik und Physik; 1955 bis 1968 Fachlehrer und Direktor an polytechnischen und erweiterten Oberschulen der Stadt Halle; 1957 bis 1963 Fernstudium an der Pädagogischen Hochschule Potsdam, Nat. Fak., Fach Mathematik. Seit 1968 wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Sektion Wirtschaftswissenschaften der *Martin-Luther-Universität.* Studienaufenthalte 1972 *Ökonomische Hochschule Bratislava,* 1973 *Ökonomische Fakultät Subotica* der Universität Novi Sad. 1971 Facultas docendi für Fachgebiet: „Mathematische Grundlagen der Operationsforschung". 1973 Promotion zum Dr. oec.; wissenschaftlicher Oberassistent; *Vorlesung:* „Mathematik für Ökonomen".

Wir bestimmen den Radius der Erde

„... und dann die dritte Querstraße links!“

Dem griechischen Philosophen und Mathematiker *Pythagoras* (6. Jh. v. u. Z.) wird die Einsicht zugeschrieben, daß die Erde eine Kugel sei. Im dritten Jahrhundert v. u. Z. bestimmte *Eratosthenes* (von ihm stammt das „Sieb des Eratosthenes“ zur sukzessiven Bestimmung der Primzahlen) die Größe des Erdradius zu etwa 5900 km. Er wußte, daß Syene, das heutige Assuan, südlich von Alexandria liegt, und daß zur Sommersonnenwende mittags die Sonnenstrahlen in Syene senkrecht auf die Erdoberfläche einfallen. Deshalb maß er die Entfernung Syene-Alexandria sowie den höchsten Sonnenstand $h = 83°$ am Tag der Sommersonnenwende in Alexandria, um aus beiden Messungen den Erdradius $r_{\oplus}$ zu berechnen:

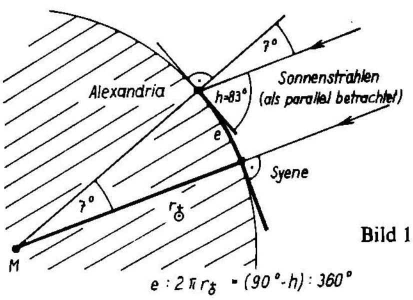


Bild 1

Ein Blick in die Tabelle „Astronomische Konstanten und Einheiten“ unseres Tafelwerkes lehrt uns, daß der von *Eratosthenes* ermittelte Wert eine für damalige Bedingungen recht gute Näherung darstellt. Denn in der zitierten Tabelle ist der Radius einer mit der Erde volumengleichen Kugel zu

(I) $r_{\oplus} = 6371\ \text{km}$

angegeben. Heute wissen wir, daß unsere Erde nur genähert als Kugel aufgefaßt werden kann. Infolge der durch die Rotation der Erde um ihre durch Nord- und Südpol verlaufende Achse auftretenden Zentrifugalkräfte ist unsere Erde abgeplattet: Der Abstand Pol-Erdmittelpunkt (6 357 km) ist um 21 km kleiner als der Abstand Äquator–Erdmittelpunkt (6378 km). Daß die Erdoberfläche nicht eben, sondern gekrümmt ist, erkennt jeder, der an der Küste das Herankommen eines Dampfers beobachtet: Zuerst sieht man nur die höchsten Aufbauten des Schiffes, dann wird das Deck des Schiffes sichtbar und schließlich auch der Rumpf des Schiffes.

Während auf dem Festland durch die unre-

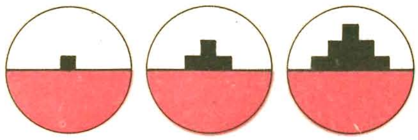


Bild 2

gelmäßige Gestalt der Erdoberfläche bei Beschränken auf kleinere Entfernungen die Kugelgestalt der Erdoberfläche nicht zu erkennen ist, ist dies bei einer nicht durch Wellen bewegten Wasseroberfläche relativ kleiner Ausdehnung möglich.

Die eben beschriebene Erscheinung kann ein Schülerkollektiv, das an einem großen Binnensee unserer Republik wohnt bzw. dort seinen Urlaub verbringt, benutzen, um bei Windstille den Erdradius zu bestimmen: Senkrecht über einem Punkt P des Seeufers wird in der Höhe h ein Gegenstand G befestigt. Ein Beobachter sticht vom Punkt P des Ufers aus mit einem Boot in See. Er entfernt sich soweit vom Punkt P, bis der aufgestellte Gegenstand infolge des Untertauchens unter den Horizont gerade nicht mehr gesehen werden kann. Dies geschehe, wenn das Boot den Punkt B erreicht, oder mit anderen Worten, wenn sich die Augen des Beobachters im Punkt A (in der Höhe h senkrecht über B) befinden. Um bei der Auswertung unseres Versuches einfacher rechnen zu können, haben wir angenommen, daß die Höhe der Augen des Beobachters über der Wasseroberfläche ebenso groß ist wie die Höhe des Gegenstandes G über dem Wasserspiegel:

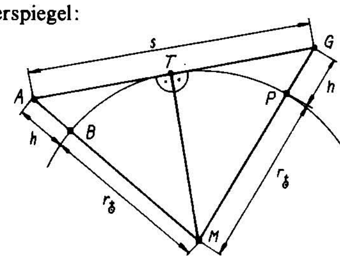


Bild 3

Die Dreiecke AMT und MGT sind kongruent, denn sie haben die Seite $MT = r_{\oplus}$ gemeinsam, ihre Winkel bei T sind rechte und ihre Seiten AM und MG haben die Länge $r_{\oplus} + h$. Wird die gradlinige Entfernung $\overline{AG}$ mit s bezeichnet, so gilt also insbesondere $\overline{AT} = \overline{TG} = \frac{s}{2}$. Nach dem *Lehrsatz des Pythagoras*, angewandt auf $\triangle AMT$, gilt

$$\overline{AM}^2 = \overline{AT}^2 + \overline{MT}^2, \text{ d. h.}$$

$$(r_{\oplus} + h)^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + r_{\oplus}^2 .$$

Hieraus folgt unter Benutzung einer binomischen Formel

$$r_{\oplus}^2 + 2r_{\oplus} h + h^2 = \frac{s^2}{4} + r_{\oplus}^2 .$$

Durch Subtraktion von $r_{\oplus}{}^2$ von beiden Seiten dieser Gleichung ergibt sich

(II) $2r_{\oplus} h + h^2 = \frac{s^2}{4}$

Wir nehmen an, daß die Höhe der Augen des Beobachters und des Gegenstandes G über dem Wasserspiegel bei unserem Versuch jeweils zu

(III) $h = 1{,}50\ \text{m}$ gewählt werden.

Zunächst soll die Gleichung (II) benutzt werden, um mittels des unserem Tafelwerk entnommenen Wertes des Erdradius die Entfernung s zu berechnen, in der bei unserem Versuch der Gegenstand G für den Beobachter gerade unter den Horizont taucht. Deshalb stellen wir die Gleichung (II) zunächst nach s um:

(IV) $s = 2\sqrt{2r_{\oplus} h + h^2}$

Weiterhin setzen wir in Gleichung (IV) die gemäß (I) und (III) bekannten Werte ein und berechnen s:

$$s \approx 2\sqrt{19{,}1\ \text{km}^2} \approx 8{,}74\ \text{km}$$

Unter Beachtung der „Faustregel“ für das Rechnen mit Näherungswerten erkennen wir beim Berechnen des Radikanden $19{,}1\ \text{km}^2$, daß s statt nach der Formel (IV) nach der einfacheren Näherungsformel $s \approx 2\sqrt{2r_{\oplus} h}$ berechnet werden darf.

Unsere Rechnung lehrt: Der See, auf dem wir unser Experiment mit $h = 1{,}50$ m durchführen wollen, muß vom geeignet gewählten Punkt P aus in einer Richtung eine Ausdehnung von etwa 10 km besitzen.

Um andererseits mittels der durch den beschriebenen Versuch erhaltenen Meßwerte den Erdradius selbst zu berechnen, muß die Formel (II) nach $r_{\oplus}$ umgestellt werden und in die so erhaltenen Formel (V) müssen die für s und h ermittelten Werte eingesetzt werden:

(V) $r_{\oplus} = \frac{s^2}{8h} - \frac{h}{2}$

Wer die Berechnung ausführt, bemerkt analog zu oben, daß bei der Formel (V) der Subtrahend $\frac{h}{2}$ offenbar vernachlässigt werden darf:

(VI) $r_{\oplus} \approx \frac{s^2}{8h}$

Eine Schülergruppe möge bei der Durchführung dieses Experimentes für die Höhe h und die kritische Entfernung s die Meßwerte $\bar{h} = 1{,}50$ m und $\bar{s} = 8{,}6$ km ermitteln. Durch Einsetzen dieser Näherungswerte $\bar{h}$ und $\bar{s}$ in die Näherungsformel (VI) wird ein Näherungswert $\overline{r_{\oplus}}$ für den Erdradius $r_{\oplus}$ erhalten:

(VII) $\overline{r_{\oplus}} = \frac{\bar{s}^2}{8\bar{h}} = \frac{(8{,}6\ \text{km})^2}{8 \cdot 1{,}50\ \text{m}} \approx 6163\ \text{km}$

Wie stark weicht $\bar{r}_\delta$ von dem durch die Formel (V) bestimmten „wahren" Wert des Erdradius ab? Da wir bei diesem Versuch die wahren Werte h und s nicht kennen, können wir mittels Formel (V) auch r_δ nicht berechnen. r_δ läßt sich jedoch nach oben und nach unten abschätzen, sofern die Schülergruppe bei der Durchführung des Versuches auch Fehlerschranken für die Meßwerte $\bar{h}$ und $\bar{s}$ bestimmt. Ohne zunächst auf die Durchführung des Versuches näher einzugehen, seien als vollständige Versuchsdaten angegeben:

(VIII) $\bar{h} = 1{,}50\,m; \quad |\bar{h} - h| \leqq 0{,}04\,m$

(IX) $\bar{s} = 8{,}6\,km; \quad |\bar{s} - s| \leqq 0{,}2\,km$

Laut (VIII) und (IX) genügen die wahren Werte h und s den Ungleichungen:

$1{,}46\,m = 1{,}50\,m - 0{,}04\,m \leqq h \leqq 1{,}50\,m + 0{,}04\,m = 1{,}54\,m$

$8{,}4\,km = 8{,}6\,km - 0{,}2\,km \leqq s \leqq 8{,}6\,km + 0{,}2\,km = 8{,}8\,km$

Mit $h \geqq 1{,}46$ m und $s \leqq 8{,}8$ km folgt aus (V)

$$r_\delta \leqq \frac{(8{,}8\,km)^2}{8 \cdot 1{,}46\,m} - \frac{1{,}46\,m}{2} < \frac{77{,}44\,km^2}{11{,}68\,m} < \frac{77\,440\,km}{11{,}6}.$$

Wegen $77\,440\,km : 11{,}6 < 6\,700\,km$ gilt also

(X) $r_\delta < 6\,700\,km$

Andererseits folgt mit $h \leqq 1{,}54$ m und $s \geqq 8{,}4$ km aus (V)

$$r_\delta \geqq \frac{(8{,}4\,km)^2}{8 \cdot 1{,}54\,m} - \frac{1{,}54\,m}{2} = \frac{70{,}56\,km^2}{12{,}32\,m} - \frac{1{,}54\,m}{2}.$$

Wegen $70\,560\,km : 12{,}32 > 5\,720\,km$ gilt ebenfalls

(XI) $r_\delta > 5\,700$ km. (X) und (XI) zusammen bilden das Versuchsergebnis:

$$5\,700\,km < r_\delta < 6\,700\,km$$

Wählen wir nunmehr statt (VII) als neuen Näherungswert des Erdradius das arithmetische Mittel der beiden gefundenen Schranken

$$\bar{\bar{r}}_\delta = \frac{5\,700\,km + 6\,700\,km}{2} = 6\,200\,km,$$

so ist durch diesen Versuch der Erdradius mit einem absoluten Fehler $\bar{\bar{r}}_\delta - r_\delta$ bestimmt worden, der der Ungleichung $|\bar{\bar{r}}_\delta - r_\delta| < 500\,km$ genügt.

An diesem Versuchsergebnis und der eingangs gemachten Mitteilung über die Abplattung der Erde lesen wir ab: Auch wenn wir unseren Versuch unter gleichen Bedingungen an Orten verschiedener geographischer Breite durchführen, können wir wegen der Größe des absoluten Fehlers an den mit unseren Versuchsmitteln erhaltenen Ergebnissen nicht die Abplattung der Erde erkennen.

Nunmehr sollen einige Bemerkungen zur Durchführung dieses Versuches angeführt werden:

Der bei unserem Versuch zu wählende Gegenstand G muß so beschaffen sein, daß er vom Auge des Beobachters aus allen Entfernungen, die nicht größer als die kritische Entfernung $s \approx 8{,}74$ km sind, noch mit Sicherheit gesehen werden kann. Insbesondere muß gelten: Befindet sich das Boot im kritischen Punkt B (siehe Bild 3), so muß der Beobachter durch Höhersteigen im Boot, d. h., nach Vergrößern seiner Augenhöhe, den am Ufer aufgestellten Gegenstand G wieder sicher sehen können.

Um den Durchmesser d des Gegenstandes G, den wir als kreisförmig annehmen wollen, unter den zu stellenden Forderungen bezüglich der Sehweite und wegen der begrenzten Leistungsfähigkeit des menschlichen Auges gegenüber $h = 1{,}50$ m vertretbar klein zu halten, wird vorgeschlagen, als Gegenstand G die Scheinwerferscheibe einer lichtstarken Stablampe zu wählen, deren Lichtkegel vom Punkt G nach dem Punkt A (siehe Bild 3) gerichtet ist. Dabei ist der Versuch in dunkler Nacht mit guter Bodensicht durchzuführen. Das Auge des Beobachters ist noch mit einem Fernglas zu bewaffnen.

Durch die Ausdehnung des Gegenstandes G sowie durch die des Fernglasobjektivs ist die Größe h nur mit einer angebbaren Genauigkeit bestimmbar.

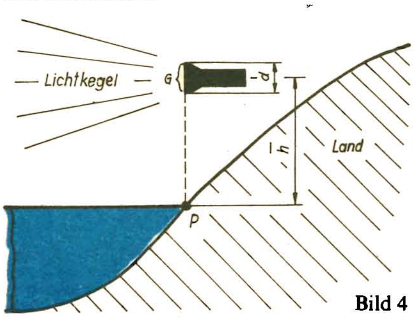


Bild 4

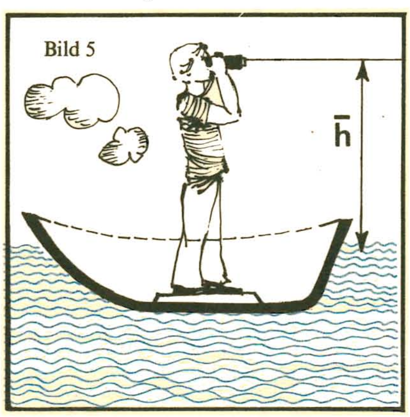
Falls die Scheinwerferscheibe der Stablampe einen Durchmesser $d \leqq 8$ cm besitzt, kann beim Justieren der Stablampe gemäß Bild 4 angenommen werden, daß $\overline{PG}$ der Ungleichung

(XII) $1{,}46\,m \leqq \overline{PG} \leqq 1{,}54\,m$ genügt.

Wird andererseits vom Beobachter ein 10×50-Fernglas benutzt, so kann, da die Zahl 50 die Maßzahl des in Millimeter gemessenen Objektivdurchmessers ist, für $\overline{BA}$ ebenfalls die Ungleichung

(XIII) $1{,}46\,m \leqq \overline{BA} \leqq 1{,}54\,m$

als gültig angenommen werden. Hier ist durch die vorsichtige Wahl der Schranken mit berücksichtigt worden, daß sich vom Boot aus die Länge $\overline{BA}$ ungenauer ermitteln läßt als die Länge $\overline{PG}$ am Ufer.



(XII) und (XIII) garantieren zusammen die Gültigkeit von (VIII). Ein Weg zur Bestimmung der Entfernung $s = \overline{AG}$ (siehe Bild 3) sei aufgezeigt: Mittels einer Wanderkarte großen Maßstabes wird als Punkt P ein auf der Wanderkarte eindeutig festgelegter Punkt am Ufer des Sees gewählt. Um auch den kritischen Punkt B auf der Wanderkarte festlegen zu können, werden zwei weitere möglichst nahe bei B gelegene auf der Karte eindeutig festlegbare Punkte Q und R so gewählt, daß der Winkel QBR in grober Näherung ein rechter Winkel ist. Durch Anpeilen der Punkte Q und R von B aus mittels Marschkompaß werden die Richtungen festgelegt, in denen Q bzw. R von B aus erscheinen (gegebenenfalls müssen auch die Punkte Q und R durch Lampen markiert werden).

Bild 6 läßt erkennen, wie ausgehend von den auf der Karte markierten Punkten Q und R mittels der gemessenen Richtungswinkel der Punkt B auf der Karte festgelegt wird. Danach ist die Strecke $\overline{PB}$ auf der Karte auszumessen und gemäß Kartenmaßstab umzurechnen.

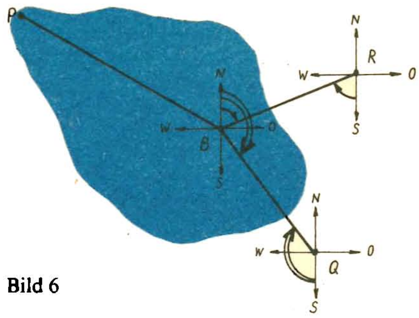


Bild 6

Der so für s ermittelte Wert ist ebenfalls nur ein Näherungswert. Dies ist u. a. auch deshalb der Fall, weil es unmöglich ist, auch nur einen Teil einer Kugeloberfläche (Erdoberfläche) längentreu auf einen Teil der Ebene (Karte) abzubilden.

Abschließend lösen wir die folgenden Aufgaben selbständig:

▲1▲ Einer Arbeitsgemeinschaft, die gemäß dem Vorgehen in diesem Beitrag den Erdradius bestimmen will, steht zum Versuch nur ein See mit der maximalen geradlinigen Ausdehnung 2,5 km zur Verfügung. Wie groß darf h höchstens gewählt werden?

▲2▲ In welcher geradlinigen Entfernung kann ein Beobachter am Meeresstrand, dessen Augen sich 1,60 m über dem Meeresspiegel befinden, bei ruhiger See ein Schiff frühestens erkennen, dessen Aufbauten 6,5 m aus dem Wasser ragen?

▲3▲ (ab Klasse 9) Ein Beobachter, dessen Augen sich in der Höhe h_1 über dem Meeresspiegel befinden, sieht ein von ihm wegfahrendes Schiff in der Entfernung s bei unbewegter See unter den Horizont tauchen. Die Aufbauten dieses Schiffes ragen bis zur Höhe h_2 aus dem Wasser. Gib die Formel an, nach der aus s, h_1 und h_2 der Erdradius r_δ zu berechnen ist!

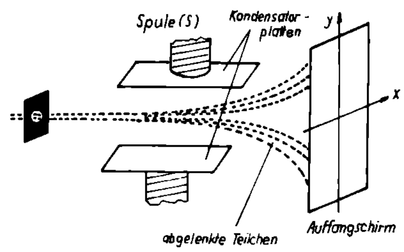
W. Träger

Wie wägt man ein Atom?

Noch kurz vor der Jahrhundertwende glaubte man, daß die Physik in sich als Forschungsgebiet im wesentlichen abgeschlossen sei und wohl kaum noch grundlegende Neuentdeckungen hinzukommen würden.
Doch spätestens 1896, mit der Entdeckung der natürlichen Radioaktivität, begann eine Entwicklung, die die Physik von Grundauf neu gestalten sollte.
Lenard war es, der 1903 Streuversuche mit Elektronen an Atomen durchführte und zu dem überraschenden Schluß kam, daß das Atom sich nicht als massive Kugel darstellen läßt, sondern im wesentlichen aus einem Kern mit einer dazugehörigen Hülle besteht.
Lenard konnte bereits an Hand der Streuversuche aussagen, daß der Radius des Kerns in der Größenordnung von 10^{-12} cm und der des gesamten Atoms bei 10^{-8} cm liegt. Der Zwischenraum sollte „leer" sein.
Lenards Schlußfolgerungen konnten 1911 durch *Rutherford* bestätigt werden. Ergebnisse von Streuversuchen mit α-Teilchen ergaben, daß der Kern des Atoms positiv geladen und in ihm nahezu die gesamte Masse des Atoms konzentriert ist. Der Kern müßte demnach, da das Atom insgesamt neutral ist, von einer negativen Elektronenhülle umgeben sein, welche die positive Ladung des Kerns nach außen kompensiert.
Rutherfords experimentell gewonnene Erkenntnisse faßte 1913 *Bohr* in einer Theorie zusammen *(Bohrsches Atommodell)*. Seit jener Zeit hat sich unser Wissen über den Aufbau des Atoms gewaltig erweitert. Das Bohrsche Atommodell mit seinen Elektronenbahnen um den positiven Kern konnte in der folgenden Zeit wiederum nur im beschränkten Maße eine Erklärung für gewisse atom- und kernphysikalische Erscheinungen geben. Unsere heutigen Vorstellungen über den Aufbau des Atoms lassen sich kaum noch auf ein bildhaftes Modell zurückführen. Komplizierte mathematische Gleichungen sind an die Stelle anschaulicher Vorstellungen getreten, Mathematik und Physik zu einer untrennbaren Einheit verwachsen. Viele physikalische Probleme konnten anfangs nicht geklärt werden, weil die mathematische Fragestellung erst gelöst werden mußte. Das trifft gerade in der Atom- und Kernphysik auch heute noch zu.

Eine der wichtigsten Größen des Atoms ist seine Masse. Sie ist der Messung unmittelbar zugänglich und erregte deshalb schon beizeiten das Interesse der Physiker. Bereits 1907 stellte man bei Untersuchungen an radioaktiven Elementen fest, daß es wohl Elemente mit gleicher Ordnungszahl (= Anzahl der Protonen im Kern), aber mit verschiedenem Atomgewicht geben müsse.
Diese Erscheinung ist nur so zu deuten, daß die betreffenden Atome gleiche Protonenzahl, aber eine unterschiedliche Neutronenzahl haben. Man nennt solche Atome *Isotope*. Inzwischen sind mehr als 1000 künstlich hergestellte und in der Natur vorkommende Isotope bekannt.

Wie wird nun eigentlich ein Atom gewogen?
Die klassische Methode zur Bestimmung der Masse wurde von *J. J. Thomson* 1910 entwickelt. Da die späteren verbesserten Methoden im Prinzip ähnlich arbeiten, soll *Thomsons* sogenannte *Parabelmethode* ausführlicher beschrieben werden.
Die zu untersuchenden Atome werden ionisiert, d. h., elektrisch „aufgeladen", indem aus der Elektronenhülle z. B. ein oder mehrere Elektronen entfernt werden. Das somit positiv geladene Ion kann sowohl in einem magnetischen als auch elektrischen Feld entsprechend abgelenkt werden. Die Ionen werden durch das homogene elektrische Feld eines Plattenkondensators beschleunigt.



Es wirkt dabei die Kraft $F = e \cdot E$ auf die Ionen, wobei E die Feldstärke des angelegten Feldes und e die Ladung des Ions ist. Die Beschleunigung a, die das Ion im elektrischen Feld erhält, errechnet sich aus $F = a \cdot m$. Daraus folgt

$$a = \frac{e \cdot E}{m} \quad (m = \text{Masse des Ions}) \qquad (1)$$

Als nächstes müssen wir die Ablenkung in y-Richtung bestimmen (siehe Bild). Aus der Weggleichung einer beschleunigten Bewegung

$$s = \frac{a}{2} t^2$$

ergibt sich in unserem Fall $y = \frac{a}{2} t^2$. (2)

(Beschleunigung erfolgt nur im Plattenkondensator!)

Aus (1) und (2) folgt $y = \frac{e \cdot E}{2m} \cdot t^2$. (3)

Die Ablenkung in y-Richtung erfolgt in der Zeit t, wenn das Ion den Plattenkondensator der Länge l durchläuft. Aus der Geschwindigkeit $v = \frac{l}{t}$, die es in diesem Stück hat, läßt sich t bestimmen. (3) erhält damit die Form

$$y = \frac{e \cdot E \cdot l}{2mv^2}. \qquad (4)$$

Wir errechnen jetzt die Ablenkung in x-Richtung.
Dem elektrischen Feld überlagerte *Thomson* ein magnetisches Feld, welches von den Spulen (S) erzeugt wird, so daß die elektrischen und magnetischen Feldlinien parallel verlaufen. Im Magnetfeld wirkt die sogenannte *Lorentz*-Kraft:

$$F = e \cdot H \cdot v \text{ auf das Ion} \qquad (5)$$

(H = Feldstärke des magn. Feldes).
Diese Kraft versucht das Ion auf eine Kreisbahn zu zwingen. Den Radius dieser Kreisbahn erhält man, wenn die Lorenz-Kraft mit der Zentrifugal-Kraft

$$F = \frac{m \cdot v^2}{r} \text{ gleichgesetzt wird: } r = \frac{m \cdot v}{e \cdot H} \qquad (6)$$

Die Ablenkung durch das Magnetfeld erfolgt in x-Richtung. Wir verfahren analog wie bei (2):

$$x = \frac{a}{2} t^2 = \frac{al^2}{2v^2},$$

die Beschleunigung ist $a = \frac{v^2}{r}$.

Dann erhalten wir für $x = \frac{l^2}{2r}$ (7)

(6) in (7) eingesetzt, ergibt schließlich

$$x = \frac{l^2 e \cdot H}{2 \cdot m \cdot v} \qquad (8)$$

Diese Gleichung quadriert, nach v^2 umgestellt und in (4) eingesetzt, bringt uns das Endresultat

$$y = \frac{2Em}{l^2 e H^2} \cdot x^2. \qquad (9)$$

Das ist aber eine Parabelgleichung. Die (etwas langatmige) Herleitung sollte verdeutlichen, mit welch relativ einfachen physikalischen und mathematischen Mitteln das Problem der Massenbestimmung von Ionen gelöst werden konnte. Im physikalischen Experiment müßten z. B. auf einer Fotoplatte in der x-y-Ebene Spuren von Ionen zu finden sein, die Parabeläste bilden. Tatsächlich konnte *Thomson* dies 1910 mit seinem Massenspektrographen, wie die Anordnung genannt wird, beobachten. Da die in der Gleichung (9) stehenden Größen y, x, l, E und H direkt und e durch andere Versuche gemessen werden können, läßt sich dadurch die Masse der Ionen errechnen. Addiert man zu dieser Ionenmasse noch die Masse der durch den Ionisationsprozeß entfernten Elektronen, ergibt sich das absolute Atomgewicht. (*Übrigens:* von unserem Körpergewicht rund 20 g abgezogen, ergibt das Gewicht aller Atomkerne des Körpers. So leicht sind Elektronen!)
Wir müssen nochmals auf die Gleichung (9) zurückkommen. Ionen unterschiedlicher Masse ergeben auf der Fotoplatte auch unterschiedliche Parabeläste. Das führt schließlich zur Bestimmung der Masse der Isotope.

Thomson selbst konnte mit seiner Methode eine Reihe von Isotopen entdecken.
Der *Thomsonsche Massenspektrograph* arbeitete noch ziemlich ungenau, jedoch wurde das Prinzip der Ablenkung von Ionen im magnetischen und elektrischen Feld bei den Weiterentwicklungen beibehalten. Wesentliche Erkenntnisse der Atom- und Kernphysik sind der Massenspektroskopie zu verdanken. Aus der Fülle von Anwendungen und neuen Erkenntnissen sollen nur einige herausgegriffen werden, die besonders deutlich zeigen, inwieweit die Physik auch andere Gebiete der Naturwissenschaft beeinflußt. Die neuen Erkenntnisse beruhen vor allem auch auf genauen Kenntnissen der physikalischen Eigenschaften von Isotopen, wie eben gerade der Masse.
Aston konnte z. B. 1920 mit einer verbesserten massenspektroskopischen Methode feststellen, daß die Gesamtmasse eines Ions kleiner ist als die Summe der Masse der einzelnen Teilchen. Mathematisch scheint diese Tatsache völliger Unsinn zu sein, denn stelle dir bitte vor, du wiegst einen Apfel zu 60 g und einen zweiten mit 55 g. Zusammen würden die Äpfel nicht 115, sondern 112 g wiegen. – Ein nicht vorstellbares Ergebnis. – Die Masseneinbuße (der sogenannte Massendefekt) beruht bei den Atomen auf der Tatsache, daß ein Teil der Masse der Kernteilchen in Bindungsenergie „umgewandelt" wird. Gerade die Erkenntnis, daß Masse in Energie und Energie in Masse umgewandelt werden kann (besser müßte es heißen, daß Masse und Energie äquivalent sind), hat die Physik des 20. Jahrhunderts grundlegend revolutioniert, z. B. basiert die Gewinnung von Kernenergie auf dieser Tatsache.
Große Bedeutung in Naturwissenschaft und Technik haben die Isotope erlangt. Die massenspektroskopische Untersuchung von Meteoriten hat z. B. ergeben, daß die Isotopenzusammensetzung von Eisen, Tellur und anderen Elementen die gleiche wie auf der Erde ist. Die prozentuale Zusammensetzung eines Isotopengemisches läßt somit den Schluß zu, daß das Sonnensystem chemisch etwa gleich aufgebaut ist.
Eine andere Möglichkeit der Anwendung für die Massenspektroskopie fand sich in der Geologie. Durch radioaktiven Zerfall von in der Natur vorkommenden Elementen kommt es zu einer starken Variation der Isotopenzusammensetzung, da die einzelnen Isotope eines Elements meist verschiedene Zerfallszeiten (Halbwertszeiten) haben. Zerfällt z. B. Rhenium in einem Gestein in das Isotop ^{187}Os (Osmium, 187 gibt die Anzahl von Protonen und Neutronen im Kern an), so wird sich bei der massenspektrographischen Untersuchung dieses Isotop mengenmäßig bestimmen lassen. Aus der Kenntnis der Halbwertszeit von Rhenium ($5 \cdot 10^{10}$ Jahre) und der vorgefundenen Menge von Osmium läßt sich auf das Alter des Gesteins schließen. Mit Hilfe der Isotopenhäufigkeitsuntersuchungen an irdischem Blei konnte man auf ähnliche Weise das Alter der Erde auf rund 4,54 Milliarden Jahre bestimmen.
Eine besonders genaue Meßmethode mit einem Kohlenstoffisotop soll zum Schluß genannt werden. Neben dem Kohlenstoffisotop ^{12}C existiert in der Natur auch noch das ^{13}C- und das ^{14}C-Isotop (Kohlenstoff hat 6 Protonen, die Isotope 6, 7 oder 8 Neutronen im Kern). Das Kohlenstoff-14-Isotop wird bei der Reaktion der durch die kosmische Höhenstrahlung entstandenen Neutronen mit Stickstoff-14 in der Atmosphäre ständig neu gebildet. Aus dem Kohlendioxyd der Luft kann es durch Fotosynthese zum organisch gebundenen Kohlenstoff werden. Von 1 g aus Pflanzenmaterial aus dem 19. Jahrhundert gewonnenem Kohlenstoff zerfallen 14 Atome pro Minute (Halbwertszeit von ^{14}C – 5730 Jahre). Mit den besten Meßmethoden können noch Kohlenstoffisotope nachgewiesen werden, die vor 40000 Jahren entstanden sind. Damit läßt sich der Zeitpunkt der Entstehung von Pflanzenmaterial sehr lange und ziemlich genau zurückverfolgen. Es konnten z. B. umfangreiche neue Erkenntnisse über den zeitlichen Verlauf von Eiszeiten und über das chronologische Einordnen von Kulturepochen anhand von Grabfunden gewonnen werden.

H.-D. Jähnig

Die Schülerakademie Leipzig

Auf der Grundlage von Verträgen zwischen dem *Rat der Stadt Leipzig* und wissenschaftlichen Einrichtungen Leipzigs entstand nach dem Vorbild seiner Partnerstadt Kiew die *Schülerakademie Leipzig*. In ihr vermitteln Wissenschaftler verschiedenster Gebiete den Jugendlichen neueste wissenschaftliche Erkenntnisse und leisten damit einen Beitrag zur sinnvollen, anspruchsvollen Freizeitgestaltung und zur Berufsvorbereitung.

Die *Schülerakademie Leipzig* stellt sich die Aufgabe
– ihre Mitglieder, leistungsstarke und gesellschaftlich aktive Schüler der Klassen 9 bis 12, mit Problemen der modernen Wissenschaftsentwicklung vertraut zu machen.
– ihren Mitgliedern Aufgaben und Ziele der sozialistischen Integration am Forschungsgegenstand einzelner Institutionen (Akademie der Wissenschaften der DDR und Karl-Marx-Universität Leipzig) aufzuzeigen,
– ihnen Methoden des wissenschaftlichen Arbeitens zu erklären,
– Möglichkeiten zu schaffen, sie an Teilaufgaben von Vorhaben dieser Institutionen zu beteiligen,
– sie im Geiste der Weltanschauung und Moral der Arbeiterklasse zu erziehen.
Durch Vorträge (Vorlesungen), Experimentalzirkel, Besichtigungen, Exkursionen, Kolloquien und Seminare werden den Mitgliedern, die von den Direktoren und der GOL der FDJ ihrer Oberschule für die Mitgliedschaft in der *Schülerakademie Leipzig* vorgeschlagen wurden und für die diese Mitgliedschaft als FDJ-Auftrag gewertet wird, aktuellste Probleme der Natur- und Gesellschaftswissenschaften vermittelt.
Die Mitglieder erhalten beispielsweise den Auftrag, durch Vorträge, Dia-Ton-Reihen und Wandzeitungen die gewonnenen Erkenntnisse ihren Mitschülern weiterzuvermitteln. Dazu können sie u. a. die aufgezeichneten Vorträge (Tonbänder) und andere Materialien ausleihen. Die Resonanz der Schüler bezüglich dieser Einrichtung ist groß. Innerhalb eines Jahres erhöhte sich die Zahl ihrer Mitglieder von 140 auf über 900. Auch die Wissenschaftler äußern, daß es ihnen Freude bereitet, den aufgeschlossenen, interessierten Jugendlichen ihr Wissen zu vermitteln.

H.-D. Sauer

Aus dem Programm des Schuljahres 1974/75, Bereich Naturwissenschaften:
Geographische Landschaftsforschung und ihr Beitrag zur sozialistischen Landeskultur – Wie alt ist unsere Erde? – Gegenwärtige Vorstellungen über die Entstehung fossiler Brennstoffe – Einsteins Relativitätstheorie – Regulation des Stoffwechsels der Zelle – Entwicklungsprobleme industrieller Ballungsgebiete in der DDR – Die Rolle des Messens zur Erkennung der objektiven Umwelt – Energiereiche Strahlung zur Herstellung neuer Werkstoffe – Wozu ist theoretische Durchdringung der Forschung nötig? – Chemie im Haushalt – Waschmittel – Industrieabwässer-Nutzung und -Reinigung – Verunreinigung der Luft – Chemie und Landwirtschaft – Mikrobielle Synthese von Zitronensäure – Mikroorganismen in der Industrie – Nahrung der Zukunft – Anwendung der Rechentechnik bei der Führung chemisch-technischer Prozesse – Was kann man als Schüler von der Relativitätstheorie verstehen? – Laser – ihre Anwendung und Zukunft – Wie man den atomaren Aufbau der Kristalle aus Röntgenstrahlinterferenzen ermittelt – Experimentalzirkel in der Akademie der Wissenschaften der DDR
Exkursionen: Das Zentralinstitut für Isotopen- und Strahlenforschung der Akademie der Wissenschaften der DDR – Welche Natursteine sind an Leipziger Bauwerken verwendet worden? – Was ist das für ein Gestein? – Das Geophysikalische Observatorium Collm – Der Botanische Garten der Karl-Marx-Universität.

Spieglein, Spieglein an der Wand...

Geometrische Optik, speziell für Klasse 5/6

Sicherlich hast du dich schon einmal vor einem Spiegel bewegt und dabei das merkwürdige Verhalten deines Spiegelbildes betrachtet. Um den Sachverhalt genau durchdenken zu können, wollen wir uns eine konkrete Situation vorstellen:

Wir nehmen an, du kämmst dir vor dem Spiegel deine Haare und willst dir gerade links deinen Scheitel neu ziehen (Bild 1).

Du fängst am Hinterkopf an und ziehst den Kamm nach vorn. Was macht dein Spiegelbild? Dein Spiegelbild scheint sich rechts den Scheitel zu ziehen. Dabei bewegt es ebenfalls den Kamm zur Stirn hin.

Dein Freund steht schräg hinter dir und beobachtet euch beide, dich und dein Spiegelbild. Von seinem Standpunkt aus ziehen beide den Scheitel links, aber während der Kamm bei dir von deinem Freund weggezogen wird, nähert sich ihm der Kamm in deinem Spiegelbild. Von seinem Standpunkt aus erscheint der Richtungssinn (vorn und hinten) der Kammbewegung vertauscht.

Die Entscheidung über links oder rechts, vorn oder hinten fällt also unterschiedlich aus, je nachdem ob ein außenstehender Beobachter urteilt oder ob man das Spiegelbild selbst sprechen läßt:

Bei einer Aussage über ein Spiegelbild muß der Standpunkt des Beobachters angegeben werden.

Bild 1: Du und dein Spiegelbild

Zur exakten Charakterisierung des Bildes am Planspiegel wollen wir ein Experiment durchführen:

Wir stellen einen Spiegel senkrecht auf den Tisch. Davor legen wir einen Würfel, dessen Seitenflächen zur besseren Unterscheidung mit verschiedenfarbigem Papier beklebt sind. Wir betrachten den Würfel und sein Spiegelbild. Wir bewegen den Würfel nach links, dann nach rechts.

- Von deinem Standpunkt aus bewegt sich sein Spiegelbild ebenfalls zuerst nach links, dann nach rechts.

Wir bewegen den Würfel zum Spiegel hin, vom Spiegel weg.

- Sein Spiegelbild bewegt sich ebenfalls zum Spiegel hin, vom Spiegel weg.
- Gegenstand und Spiegelbild bewegen sich in gleicher Weise.

Nun vergleichen wir die Lage entsprechender Ecken, Kanten und Flächen von Gegenstand und Bild miteinander (Bild 2).

Punkt A' liegt Punkt A gegenüber, Punkt B' liegt Punkt B gegenüber, Punkt C' liegt Punkt C gegenüber usw.

Wie verhält es sich mit den Kanten? Wir fahren einmal mit dem Finger die Kante EH von E nach H entlang und vergleichen die Fingerbewegung am Gegenstand mit der im Spiegelbild.

- Wir erkennen: Die dem Spiegel zulaufenden Kanten haben im Spiegelbild entgegengesetzten Richtungssinn.

Wie verhält es sich mit den Flächen? Die dem Spiegel nächste Fläche des Würfels ist auch im Spiegelbild die dem Spiegel nächste Fläche.

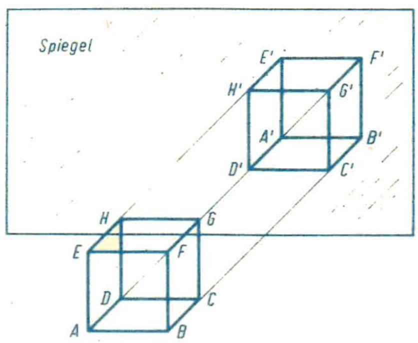


Bild 2: Gegenstand und Bild in schräger Parallelprojektion

Im Mathematikunterricht der Klasse 5 hattest du ähnliche Betrachtungen, nämlich die Spiegelung von Punkten, Strecken und Figuren an der Geraden, der Symmetriegeraden, durchgeführt und den Lehrsatz erarbeitet:

„Durch Spiegelung an einer Geraden können wir einer Figur (dem Original) das Spiegelbild dieser Figur zuordnen. Original und Spiegelbild liegen bezüglich der Symmetrieachse symmetrisch zueinander. Entsprechende Strecken sind gleich lang, und entsprechende Winkel sind gleich groß, entsprechende Punkte haben gleichen Abstand von der Symmetrieachse."

Jetzt soll ein Körper an einer Ebene, der Symmetrieebene, gespiegelt werden. Du sollst also deine Kenntnisse aus der Planimetrie in die Stereometrie übertragen.

Du wirst vermuten, daß der Gegenstand und das Spiegelbild ebenfalls symmetrisch zur Symmetrieebene, dem Spiegel, liegen. Dazu mußt du noch beweisen, daß der Gegenstand und sein Spiegelbild gleichgroß sind und daß das Spiegelbild von der Symmetrieebene die gleiche Entfernung wie der Gegenstand hat. Schaust du dir deinen Würfel und sein Spiegelbild kritisch an, so scheint das Bild kleiner als der Gegenstand zu sein. Besonders deutlich wird der Größenunterschied bei großen Gegenstandsweiten. Die Ursache für diese Erscheinung ist in der Perspektive zu suchen (Bild 3).

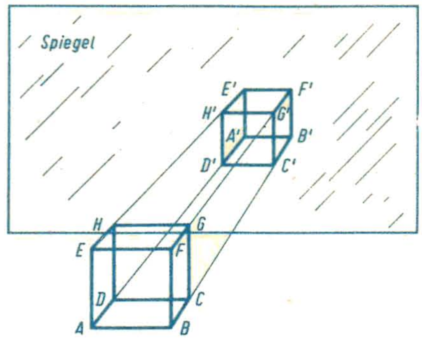


Bild 3: Gegenstand und Bild in Zentralprojektion

Im Experiment muß diese perspektivische Verkleinerung des Bildes berücksichtigt werden. Man darf nicht direkt den Gegenstand mit dem Bild vergleichen, sondern muß über eine Bezugsgröße, einen zweiten gleichbeschaffenen Gegenstand, schließen. Dazu machst du einen weiteren Versuch (Bild 4):

Auf deinem Lineal befestigst du in der Mitte mit Knete senkrecht ein Diaglas oder eine etwa gleichgroße Glasscheibe. Du nimmst dir zwei Kerzen oder zwei Halmapuppen, die eine soll dein Gegenstand sein, die andere soll der Lagekontrolle des Spiegelbildes dienen. Du stellst die eine Kerze bzw. Puppe in Abständen von 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm vor dem Diaglas auf. Du schaust von der gleichen Seite in den Spiegel, und dort, wo sich das Spiegelbild zu befinden scheint, stellst du die Kontrollkerze oder -puppe hin. Du vergleichst einmal die zusammengehörigen Gegenstandsweiten und Bildweiten miteinander und zum anderen die jeweilige Größe des Spiegelbildes mit der Größe der Kontrollkerze bzw. -puppe. Du wirst zu folgenden Erkenntnissen kommen:

- Bildweite und Gegenstandsweite sind gleich.
- Gegenstand und Bild sind gleich groß.

Nun kannst du den Satz formulieren: Durch Spiegelung eines Gegenstandes an einem Planspiegel (Symmetrieebene) erhalten wir ein zum Original symmetrisch gelegenes Spiegelbild dieses Gegenstandes. Das Spiegelbild ist genau so groß wie der Gegenstand. Entsprechende Punkte haben den gleichen Abstand von der Symmetrieebene.

Wenn du also einen Gegenstand im Spiegelbild fotografieren willst, mußt du zur Entfernung Fotoapparat – Spiegel noch die Entfernung Gegenstand – Spiegel hinzu addieren, um ein scharfes Bild des Spiegelbildes zu erhalten.

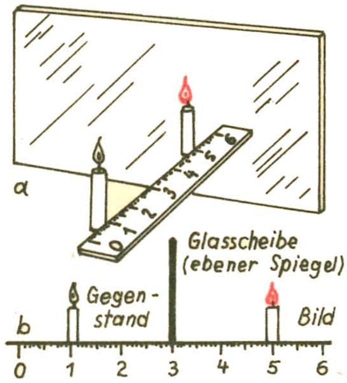


Bild 4: Ermittlung der Lage und der Größe des Spiegelbildes

Trotz vieler Übereinstimmung der planimetrischen und der stereometrischen Gegebenheit wird dir sicherlich auch ein prägnanter Unterschied zwischen beiden aufgefallen sein. Während nämlich ebene Figuren durch Umklappen um die Faltgerade, die Symmetrieachse, zur Deckung gebracht werden können (Durchgang durch die dritte Dimension), können bei Körpern Original und Spiegelbild durch Bewegung nicht in identische Lage gebracht werden.

- Die rechte Hand vor dem Spiegel erscheint im Spiegelbild als linke Hand. Es gelingt dir nicht, beide Hände zur Deckung zu bekommen.

Wie erklärt sich nun die Entstehung der Spiegelschrift?

Schreibe einmal vor dem Spiegel deinen Namen in der Luft! Du kannst die Schriftzüge ohne weiteres auch im Spiegel richtig lesen. Bei einem undurchsichtigen Blatt, z. B. der Zeitung, aber erscheint die Schrift „spiegelbildlich“. Was ist geschehen? (Bild 5)

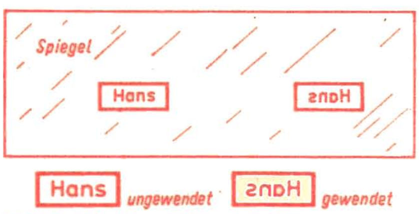


Bild 5: Schrift auf Klarsichtfolie vor dem Spiegel

Schreibe deinen Namen auf ein Stück undurchsichtiges Papier! Um es vor den Spiegel halten zu können, mußt du es wenden. Die Spiegelschrift sieht genau so aus, wie ein Abdruck auf Löschpapier. Durch das Wenden ist die Schrift zur Spiegelschrift geworden!

Nun schreibst du deinen Namen auf Klarsichtfolie. Da diese durchsichtig ist, brauchst du sie nicht zu wenden. Jetzt kannst du deine Schrift ohne weiteres auch im Spiegel richtig lesen.

Ursula Manthei

A. KAUFFELD

Otto von Guericke

Schriftenreihe: Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner

In der Broschüre wird zunächst ein ausgezeichneter Überblick über das private Leben und über die berufliche Tätigkeit des Ratsherrn, Ingenieurs und Diplomaten Otto von Guericke gegeben. Man erfährt, daß Guericke 50 Jahre im Dienste seiner Vaterstadt Magdeburg tätig war, die letzten 30 Jahre davon als Bürgermeister. In seine Amtszeit fiel der 30jährige Krieg, und zu seinen Aufgaben gehörte der Wiederaufbau seiner zerstörten Vaterstadt.

Erst im Alter von 50 Jahren begann Guericke mit seinen physikalischen Untersuchungen und führte diese neben seiner anstrengenden beruflichen Arbeit aus. Nach etwa 10 Jahren schloß er seine wissenschaftlichen Arbeiten mit der Veröffentlichung eines siebenbändigen Werkes ab.

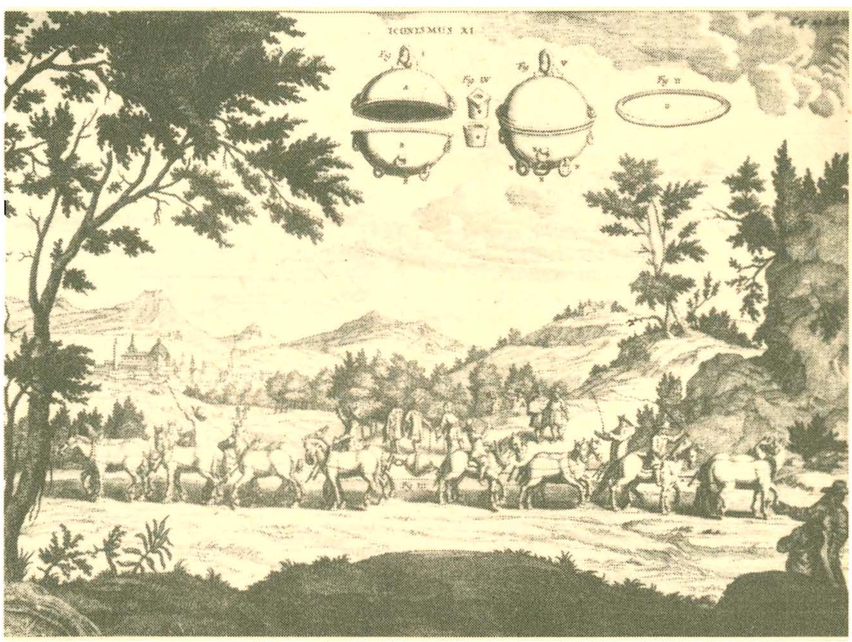
In weiten Kreisen ist Guericke oft nur als Erfinder der Luftpumpe und besonders durch seine eindrucksvollen Versuche mit den Magdeburger Halbkugeln (s. Abb.) bekannt geworden. Der Verfasser des Buches stellt fest, daß diese Demonstrationsexperimente nur abschließende Glieder einer planmäßigen und umfassenden Untersuchung zur Erforschung der Luft bzw. des gasförmigen Zustandes der Körper waren. Darüber hinaus beschäftigte sich Guericke aber auch mit dem Problemkreis Schwere und Kraft sowie mit anderen damals besonders aktuellen physikalischen Erscheinungen.

Das Buch unterrichtet auch über den philosophischen Standpunkt Guerickes, der im Grunde materialistisch war, und über seine Forschungsmethoden eingehend und verständlich.

Auf den von ihm erforschten Gebieten hat Guericke in seiner Zeit und mit den Mitteln seiner Zeit Erkenntnisse gewonnen, die über das Niveau seiner Zeit hinausführten, und deren ganze Bedeutung erst sehr viel später voll erfaßt werden konnte.

Es ist sehr aufschlußreich zu erfahren, welche Rolle das Experiment und besonders das eigene Experimentieren als Mittel der Erkenntnisgewinnung bei Guericke gespielt haben und daß Guericke neben Galilei u. a. durch den Einsatz des Experiments als Frage an die Natur wesentlich zur Überwindung der Scholastik und der Dogmen der aristotelischen Lehre beigetragen hat. Er war somit einer der Pioniere der modernen naturwissenschaftlichen Forschungsmethode.

Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 2. Aufl. 1974,
111 Seiten, 6 Abbildungen, Preis 5,60 M



XV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

1. Stufe (Schulolympiade)

Abgabetermin (beim Mathematiklehrer): 10. Oktober 1975

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften wohlbekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.
Die Lösungen und Punktbewertungstabellen werden ab 10. Oktober 1975 veröffentlicht.

Olympiadeklasse 5

1. Im Jahre 1974 erzielten 187 Schiffe der DDR-Handelsflotte eine Transportleistung von insgesamt 10800000 t.
Berechne zur Veranschaulichung dieser Leistung, welche Länge ein Güterzug bei gleicher Transportleistung haben müßte! Dabei sei angenommen, daß dieser Zug aus Güterwagen mit einer Tragfähigkeit von je 25 t besteht und daß jeder dieser Wagen (einschließlich der Koppelvorrichtung) eine Länge von 12 m besitzt.
Wieviel Güterzüge zu je 60 dieser Güterwagen hätten 1974 täglich fahren müssen, um die gleiche Transportleistung zu erzielen (das Jahr sei zu 360 Tagen gerechnet)?

2. Ermittle alle positiven geraden Zahlen u, p, g, die folgende Ungleichungen erfüllen:
a) $42 > 5u > 19$
b) $11 < (3p+3) < 22$
c) $23 > (3g-3) \geqq 3$ und für die $(3g-3)$ eine natürliche Zahl ist!
Gib die Lösungsmenge so an, daß die geraden Zahlen, die jeweils die betreffende Ungleichheit erfüllen, der Größe nach geordnet sind!
Beginne stets mit der kleinsten!

3. Eine Gruppe von Pionieren unternahm eine Radwanderung. Sie starteten innerhalb eines Ortes und erreichten nach 800 m Fahrt den Ortsausgang. Nachdem sie danach das Fünffache dieser Strecke zurückgelegt hatten, rasteten sie. Nach weiteren 14 km machten sie Mittagspause. Die Reststrecke bis zu ihrem Fahrtziel betrug 2,5 km weniger als die bisher zurückgelegte Strecke.
Ermittle die Gesamtlänge der Strecke vom Start bis zum Fahrtziel!

4. An einem Waldlauf beteiligten sich insgesamt 81 Personen. Von den teilnehmenden Erwachsenen (18 Jahre oder älter) war die Anzahl der Männer doppelt so groß wie die der Frauen. Die Anzahl der teilnehmenden Kinder und Jugendlichen (unter 18 Jahren) betrug die Hälfte der Anzahl der teilnehmenden Erwachsenen. Dabei waren es halb soviel Kinder (unter 16 Jahren) wie Jugendliche (16 Jahre oder älter, aber unter 18 Jahre).
Gib die Anzahlen der teilnehmenden erwachsenen Männer, Frauen sowie der teilnehmenden Kinder und Jugendlichen an!

Olympiadeklasse 6

1. Die Volksrepublik Polen lieferte vom 6. Dezember 1974 (erster Liefertag) bis zum 18. Dezember 1974 (letzter Liefertag) eine Gesamtmenge von 132000 t Steinkohle und 24000 t Koks auf dem Wasserwege in die Hauptstadt der DDR. Die Lieferung erfolgte auf Schleppkähnen mit einem Fassungsvermögen von je 600 t.
Wieviel dieser Kahnladungen trafen im angegebenen Zeitraum durchschnittlich an jedem Tag in Berlin ein (wobei Sonntage als Liefertage mitgerechnet seien)?

2. In dem abgebildeten Kryptogramm sind in die Kästchen statt der Buchstaben Ziffern so einzusetzen, daß alle fünf angegebenen Aufgaben richtig gelöst sind.
Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten. Als Lösung genügt nicht, wie bei solchen „Zahlenrätseln“ sonst üblich, die Angabe von gesuchten Zahlen. Es muß nachgewiesen werden, daß die angegebenen Zahlen alle gestellten Forderungen erfüllen und daß sie die einzigen Zahlen sind, die das tun.

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{a} & \cdot & \boxed{a} & = & \boxed{b} \\ - & & & & - \\ \boxed{c} & \cdot & \boxed{a} & = & \boxed{d} \\ \hline \boxed{e} & \cdot & \boxed{a} & = & \boxed{a} \end{array}$$

3. Im Jahre 1770 gab der Schweizer Mathematiker *Leonard Euler* ein Lehrbuch der Algebra heraus, das mehr als 100 Jahre lang zu den meistgelesenen Algebrabüchern gehörte. Eine Aufgabe aus diesem Lehrbuch lautet:
Die Zahl 25 ist so in zwei Summanden zu zerlegen, daß der größere der beiden Summanden 49 mal so groß ist wie der andere.
Untersuche, ob eine solche Zerlegung möglich ist, und ermittle, wenn dies der Fall ist, die beiden dabei auftretenden Summanden!

4. Eine Pioniergruppe sammelt Altpapier. Bei der Abrechnung stellte sich heraus, daß das Sammelergebnis der letzten beiden Tage ein Viertel der insgesamt erreichten Menge betrug, und zwar waren am letzten Tag 27 kg gesammelt worden und am vorletzten Tag 6 kg weniger als am letzten Tag.
Wieviel Kilogramm betrug die insgesamt gesammelte Menge Altpapier?

Olympiadeklasse 7

1. Zwei Mathematiker unterhalten sich über ihre unterschiedlichen Telefonnummern. Dabei stellte sich folgendes heraus:
(1) Jede der beiden Telefonnummern ist eine dreistellige Primzahl.
(2) Jede einzelne Ziffer in den beiden Telefonnummern stellt, als einstellige Zahl aufgefaßt, ebenfalls eine Primzahl dar.
(3) Die Ziffern, die in den beiden Telefonnummern jeweils an der Zehnerstelle stehen, stimmen miteinander überein. Die Ziffer der Hunderterstelle der einen Telefonnummer ist die Ziffer der Einerstelle der anderen und umgekehrt.
Ermittle die Telefonnummern, und begründe das Ergebnis, ohne dabei eine Primzahlentabelle als Beweismittel zu verwenden!

2. Zwei Gefäße, A bzw. B genannt, haben zusammen ein Fassungsvermögen von genau 8 Litern. Auf beide Gefäße ist eine bestimmte Wassermenge W so verteilt, daß A zur Hälfte und B ganz gefüllt ist. Gießt man nun soviel Wasser aus B in A, daß A ganz gefüllt ist, so ist B noch zu einem Sechstel gefüllt. Gefragt wird
a) nach dem Fassungsvermögen von jedem der Gefäße A und B,
b) nach der Wassermenge W.
Ermittle alle in a) und b) erfragten Angaben, die die genannten Eigenschaften haben!

3. Gegeben seien zwei Geraden g_1 und g_2, die einander in genau einem Punkt S schneiden.
Um S als Mittelpunkt sei ein Kreis geschlagen, er schneide g_1 in A und B sowie g_2 in C und D.
Beweise, daß die Strecken AC und BD gleich lang und parallel sind, daß also $\overline{AC} = \overline{BD}$ und $AC \parallel BD$ gilt!

4. In der Ebene ε seien 50 verschiedene Punkte so gelegen, daß keine Gerade existiert, die drei dieser 50 Punkte enthält.
Jeder dieser 50 Punkte soll nun mit jedem anderen durch eine Strecke verbunden werden.

a) Ermittle die Anzahl der Verbindungsstrecken!
b) Angenommen, die 50 Punkte seien die Eckpunkte eines konvexen 50-Ecks. Ermittle die Anzahl der Diagonalen des 50-Ecks!

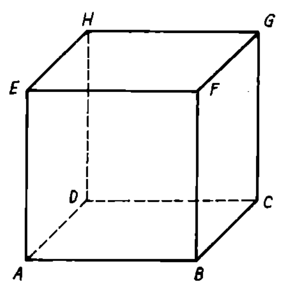
Olympiadeklasse 8

1. Peter kam vom Einkaufen zurück. Er kaufte in genau 4 Geschäften ein und hatte dafür genau 35 M zur Verfügung. Davon bringt er der Mutter genau 2 M wieder und berichtet: „Im Gemüseladen habe ich 4 M und noch etwas, jedenfalls mehr als 10 Pf. bezahlt.
Im Schreibwarengeschäft habe ich mehr als im Gemüseladen bezahlen müssen, es war eine gerade Zahl von Pfennigen und kein 5-Pfennig-Stück dabei. Beim Bäcker war es dann mehr als im Gemüseladen und Schreibwarengeschäft zusammen, aber diese Geldsumme war ungerade, und im Konsum schließlich bezahlte ich mehr als in den drei anderen Geschäften zusammen."
Welche Geldbeträge bezahlte Peter in den vier genannten Geschäften?

2. a) Ermittle alle geordneten Paare (a, b) natürlicher Zahlen, für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
(1) $a<4$. (2) $a-b>0$. (3) $a+b>2$.
b) Beweise, daß es keine geordneten Paare (a, b) ganzer Zahlen mit den Eigenschaften (1), (2), (3) gibt, bei denen $a<0$ oder $b<0$ ist!

3. Man beweise: Wenn in einem Dreieck ABC für die Größen β, γ der Winkel $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$ und für einen Punkt D auf der Seite BC der Winkel $\sphericalangle BDA$ die Größe $90^\circ+\frac{\gamma}{2}-\frac{\beta}{2}$ hat, so liegt D auf der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle BAC$.

4. Gegeben sei ein Würfel $ABCDEFGH$ mit der Kantenlänge 5 cm.



Dieser Würfel ist in senkrechter Zweitafelprojektion abzubilden. Dabei wird gefordert, daß die Raumdiagonale AG sowohl parallel zur Grundrißtafel als auch parallel zur Aufrißtafel liegt. Im übrigen kann, wenn diese Forderung erfüllt wird, die Lage des Würfels im Raum beliebig gewählt werden. Alle Eckpunkte sind entsprechend des Bildes zu benennen.
Beschreibe und begründe die Konstruktion einer derartigen Zweitafelprojektion des Würfels!
Hinweis: Es empfiehlt sich, eine günstige Lage der vier Punkte A, E, G, C zu wählen.

Olympiadeklasse 9

1. Ermitteln Sie alle im dekadischen Zahlensystem geschriebenen vierstelligen natürlichen Zahlen, die gleichzeitig folgende Bedingungen erfüllen:
(1) Die Zahl wird mit vier Ziffern geschrieben, die, einzeln für sich gelesen, vier unmittelbar aufeinanderfolgende Zahlen bezeichnen. An die Reihenfolge dieser Ziffern werden hier keine Anforderungen gestellt.
(2) Die Zahl ist durch 99 teilbar.

2. In
$$\begin{array}{r} \text{H A U S} \\ +\text{H A U S} \\ \hline \text{S T A D T} \end{array}$$
sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern eingesetzt werden.
Geben Sie alle Lösungen dafür an!

3. Gegeben seien zwei verschiedene zueinander parallele Geraden g und h. Außerhalb des von ihnen eingeschlossenen Streifens seien ferner zwei voneinander verschiedene Punkte A und B so gegeben, daß auch kein Punkt der Strecke AB in diesem Streifen liegt und daß der Abstand von A zu g kleiner ist, als der Abstand von A zu h. Für jeden Punkt P auf h bezeichne A' bzw. B' den Schnittpunkt von g mit PA bzw. PB.
Konstruieren Sie alle diejenigen Punkte P auf h, für die mit diesen Bezeichnungen $\overline{A'P}=\overline{B'P}$ gilt!
Begründen Sie die Konstruktion; diskutieren Sie, ob alle Punkte P mit der genannten Eigenschaft erhalten werden können und wie viele solcher Punkte es je nach der Lage der gegebenen g, h, A, B geben kann!

4. Als Herr T. am 30. 12. 1973 seinen Geburtstag beging, sagte er zu seiner Frau: „Jetzt bin ich genau 8mal so alt wie unser Sohn, wenn ich als Altersangabe jeweils nur die vollen (vollendeten) Lebensjahre rechne."
Darauf entgegnete seine Frau: „Im Jahre 1974 wird der Fall eintreten, daß du 5mal so alt bist wie unser Sohn, wenn auch ich nur die vollen Lebensjahre berücksichtige."
Untersuchen Sie, ob es genau ein Datum gibt, für das – als Geburtsdatum des Sohnes – alle diese Angaben zutreffen!
Ist das der Fall, so geben sie das genaue Geburtsdatum des Sohnes an (Tag, Monat, Jahr)!

Olympiadeklasse 10

1. Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen $n \geqq 1$ jeweils mit folgender Eigenschaft:
a) Die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n ist eine zweistellige Zahl, deren beide Ziffern gleich sind.
b) Die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n ist eine dreistellige Zahl, deren drei Ziffern einander gleich sind.

Hinweis: In der Zahlentafel ist eine Gleichung zur Berechnung der Summe natürlicher Zahlen zu finden.

2. Von einem rechtwinkligen Dreieck seien die Länge c der Hypotenuse und die Länge r des Inkreisradius bekannt.
Ermitteln Sie den Umfang des Dreiecks!

3. Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, den Wert für das Verhältnis $a:b$ zweier positiver reeller Zahlen a und b mit $a<b$ so zu wählen, daß folgendes gilt:
Das geometrische Mittel $\sqrt{ab}$ dieser Zahlen beträgt $60\,\%$ ihres arithmetischen Mittels!

4. In
$$\begin{array}{r} \text{H A U S} \\ +\text{H A U S} \\ +\text{H A U S} \\ \hline \text{S T A D T} \end{array}$$
sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern eingesetzt werden.
Geben Sie alle Lösungen an!

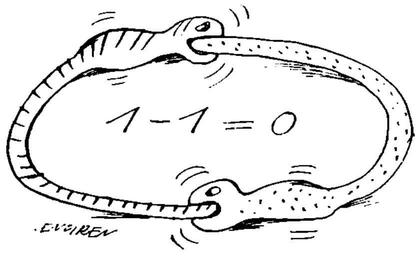
Olympiadeklasse 11/12

1. An einer Schule wird häufig Tischtennis gespielt. Man zeige, daß es stets unter sechs beliebigen Schülern dieser Schule entweder drei gibt, die bereits jeder gegen jeden gespielt haben, oder drei gibt, zwischen denen noch kein Spiel ausgetragen worden ist.

2. Man beweise, daß es zu drei beliebig ausgewählten Punkten einer Kugeloberfläche stets eine Halbkugel gibt, auf der diese drei Punkte liegen.
Bemerkung: Eine Halbkugel (-fläche) werde stets einschließlich ihrer Randlinie verstanden.

3. Man ermittle alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, für die
$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}=\frac{7}{12}, \qquad (1)$$
$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}=\frac{8}{15}, \qquad (2)$$
$$\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z}=\frac{9}{20} \text{ gilt.} \qquad (3)$$

4. Es sei M die Menge aller derjenigen siebenstelligen Zahlen (im dekadischen Positionssystem), in denen jede der sieben Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 einmal auftritt.
Man beweise, daß keine der Zahlen aus M durch eine andere Zahl aus M teilbar ist.



In freien Stunden alpha heiter

Wieso Spickzettel, Herr Horn?

Detlev Fink, Student an der TH Magdeburg

Spiel mit Dominosteinen

Die Dominosteine

0	1	2	3	4	5
6	6	6	6	6	6

können so zu einem Rechteck gelegt werden, daß in keiner Zeile und in keiner Spalte eine Zahl doppelt vorkommt.

Eine mögliche Anordnung der Steine ist diese

0	2	1
1	3	2
2	0	3
3	1	0

Beteiligt man auch die Steine

0	1	2	3
4	4	4	4

am Spiel, ist das Rechteck besonders einfach zu legen, so daß in keiner Zeile und in keiner Spalte eine Zahl doppelt vorkommt.

Etwas schwieriger wird es wieder, wenn auch noch die Steine

0	1	2	3	4
5	5	5	5	5

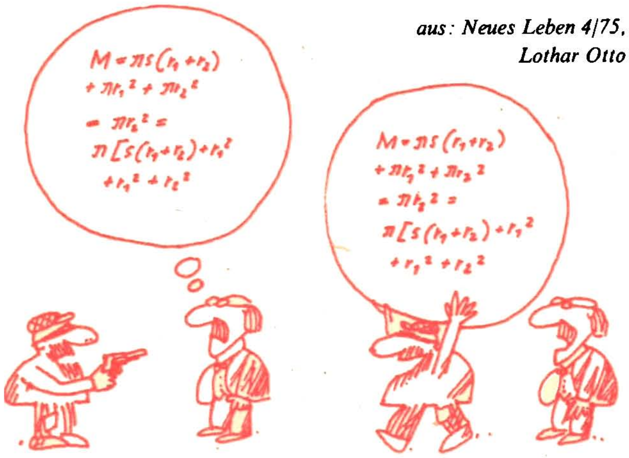
dazukommen und die 15 Steine zu einem Rechteck gelegt werden, wobei die gleiche Vorschrift (wie oben) gelten soll.

Zum Schluß sollen noch folgende Steine am Spiel teilnehmen, und auch jetzt soll die gleiche Vorschrift gelten, daß in keiner Zeile und in keiner Spalte gleiche Zahlen mehrfach vorkommen.

0	0	0	1	2	3
1	2	3	2	3	3

Wer bereits bei den ersten 10 Steinen mit den Ziffern von 0 bis 4 eine zweckmäßige Methode gefunden hat, dem wird die letzte Aufgabe keine großen Schwierigkeiten machen.

Heinz Krzikalle, Jacobsdorf



aus: Neues Leben 4/75, Lothar Otto

Dreistellige Telefonnummern

Johannes wohnt in einer Kleinstadt, wo man bloß dreistellige Telefonnummern benutzt. Einmal fragte er seine Mitschülerin Monika: „Kannst du mir deine Telefonnummer nennen?" Sie antwortete: „Die erste Grundziffer heißt acht, die anderen zwei sind ungerade. Kannst du's erraten?"
Wieviel solche Nummern gibt es in der Stadt?

Mathematikfachlehrer A. Halameisär, Moskau

Vierstellige Autonummern

Frank erzählt:
Die vierziffrige Autonummer meines Mathe-Lehrers ist sehr leicht zu merken. Sie ist symmetrisch und die Quersumme ist so groß wie die vordere zweiziffrige Zahl.
Ralph meint:
Die Autonummer (vierziffrige) meines Vaters ist auch bemerkenswert. Die hintere zweiziffrige Zahl kann nicht größer sein, und sie ist beinahe das Fünffache der vorderen zweiziffrigen Zahl.

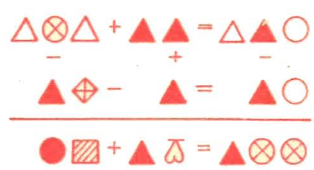
Mathematikfachlehrer W. Zehrer, Netzschkau

Kryptarithmetik

$$\begin{array}{r} \text{EINS} \\ +\text{EINS} \\ \hline \text{PAAR} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{PAAR} \\ +\text{PAAR} \\ \hline \text{VIER} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{VIER} \\ +\text{VIER} \\ \hline \text{ACHT} \end{array}$$

Die Buchstaben sollen so durch Ziffern ersetzt werden, daß die Addition zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten. Untersuche, wieviel Lösungen die Aufgabe hat!

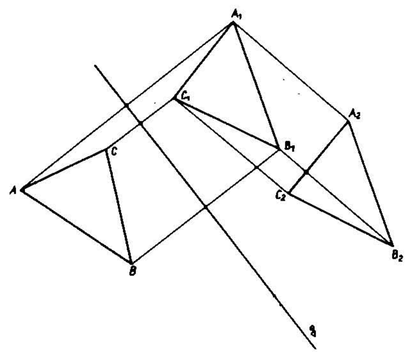
Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

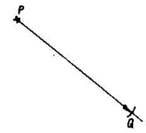


Schülerin Monika Damisch, Gera

XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen

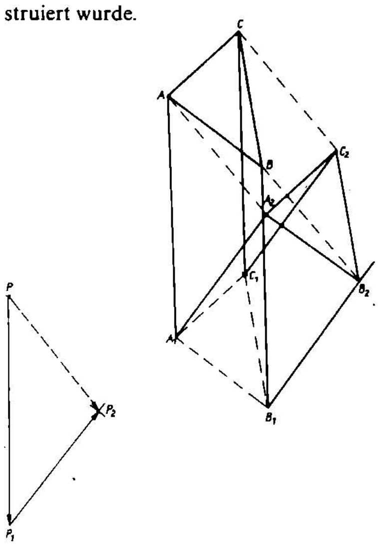




Kreisolympiade

Klassenstufe 5

1. Als Lösung gilt jede (einwandfreie) Zeichnung, in der (1. Lösungsweg) für mindestens einen der Punkte A, B, C sein Bild A_1, B_1 bzw. C_1 bei der Verschiebung $\overrightarrow{PP_1}$ und dann gleichsinnig parallel und gleichlang zu $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$ bzw. $\overrightarrow{C_1C_2}$ der gesuchte Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P_1P_2}$ oder (2. Lösungsweg) gleichsinnig parallel und gleichlang zu einem der Verschiebungspfeile $\overrightarrow{AA_2}$, $\overrightarrow{BB_2}$ bzw. $\overrightarrow{CC_2}$ der Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP_2}$ und dann durch Verbindung von P_1 mit P_2 der gesuchte Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P_1P_2}$ konstruiert wurde.



2. Anita und Peter bezahlten für die 4 Flaschen Brause wegen $4 \cdot 15 = 60$ insgesamt 60 Pfennig mehr, als sie für 4 Flaschen Selters bezahlt hätten. Für diese 60 Pfennig hätten sie genau $7 - 4 = 3$ Flaschen Selterswasser kaufen können. Wegen $60 : 3 = 20$ kostete mithin jede Flasche Selterswasser 20 Pfennig, und folglich jede Flasche Brause 35 Pfennig. Wegen $4 \cdot 35 = 7 \cdot 20 = 140$ kosteten die 4 Flaschen Brause 1,40 Mark.

3. Laut Aufgabe legte der Zug, während Uwe schlief, eine Strecke zurück, die doppelt so lang wie 25 km war, also 50 km betrug. Vom Zeitpunkt des Einschlafens an bis zum Reiseziel mußte wegen $50 + 25 = 75$ Uwe folglich 75 km fahren. Das war laut Aufgabe die Hälfte der Länge seiner Reisestrecke. Daher war diese Reisestrecke 150 km lang.

4. Laut Aufgabe wurden wegen $14 \cdot 6 = 84$ in diesem Turnier insgesamt 84 Spiele ausgetragen. Diese Anzahl setzt sich additiv zusammen aus der Anzahl der Spiele, die die Mädchen gegeneinander durchführten, und der Anzahl der Spiele, an denen die Jungen beteiligt waren.
Bei n Spielern, von denen jeder gegen jeden $(n-1)$ der anderen Spieler genau zwei Spiele austrägt, beträgt die Anzahl aller Spiele $n(n-1)$. Damit läßt sich folgende Tabelle aufstellen:

Anzahl der Spieler	Anzahl der Spiele	Ergänzung zu 84
2	2	82
3	6	78
4	12	72
5	20	64
6	30	54
7	42	42
8	56	28
9	72	12
$\geqq 10$	$\geqq 90$	–

Da laut Aufgabe 84 Spiele insgesamt durchgeführt wurden, kann die Anzahl der teilnehmenden Jungen bzw. die der Mädchen nicht größer als 9 gewesen sein. Als Summanden können nur die in der Tabelle ermittelten Zahlen auftreten, und zwar müssen es genau zwei Summanden der Form $n(n-1)$ sein, deren Summe 84 beträgt. Das ist, wie ein Vergleich der Zahlen der zweiten und dritten Spalte der Tabelle zeigt, nur für $42 + 42 = 84$ und $12 + 72 = 84$ möglich. Da die Anzahl der teilnehmenden Jungen größer war als die der Mädchen, kann die gesuchte Lösung nur lauten:
Es nahmen 4 Mädchen und 9 Jungen an dem in der Aufgabe erwähnten Turnier teil.

Klassenstufe 6

1. Als Lösung gilt jede (einwandfreie) Zeichnung, in der für mindestens einen der Punkte A_1, B_1 bzw. C_1 bei der Spiegelung an g und dann gleichsinnig parallel und gleichlang zu $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$ bzw. $\overrightarrow{C_1C_2}$ der gesuchte Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PQ}$ konstruiert wurde.

2. Wenn es eine Zahl z der genannten Art gibt, so gilt für sie und die Zahl z':
(1) $z' = 198 + z$ sowie
(2) $z + z' = 13\,776$.
Aus (1) und (2) folgt:
$$z + 198 + z = 13\,776, \text{ woraus man}$$
$$2z = 13\,776 - 198 = 13\,578,$$
also $z = 6\,789$ erhält.
Also kann nur diese Zahl die genannten Eigenschaften haben. In der Tat treffen nun Klaus' Aussagen für diese Zahl und $z' = 6\,789 + 198 = 6\,987$ zu, da z' aus z dadurch gewonnen werden kann, daß in z die Ziffern 7 und 9 miteinander vertauscht werden.
Daher hat genau die Zahl $z = 6\,789$ die von Klaus genannten Eigenschaften.

3. Angenommen, in Aussage (1) wäre Brigittes Plazierung richtig angegeben, dann wären die Plätze von Anita in (2) und Dana in (3) falsch angegeben, und demnach müßte Christa den dritten und zugleich den vierten Platz belegt haben, was nicht möglich ist. Folglich ist in (1) die Plazierung von Anita richtig und die von Brigitte falsch angegeben. Daraus folgt, daß in (3) der Platz Christas falsch und der Danas richtig angegeben wurde. Mithin belegte Anita den ersten, Dana den zweiten, Christa den dritten und Brigitte den vierten Platz.

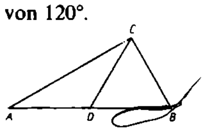
4. Der erste Radfahrer war um 8.00 Uhr genau zwei Stunden gefahren und hatte dabei eine Strecke von 28 km zurückgelegt. Von diesem Zeitpunkt an legte der zweite Radfahrer in jeder Stunde genau 7 km mehr zurück als der erste. Da sie sich genau am Mittelpunkt der Strecke von A nach B trafen, geschah das wegen $28 : 7 = 4$ genau 4 Stunden nach Abfahrt des zweiten Radfahrers, also um 12.00 Uhr.
Bis zu diesem Zeitpunkt hatte wegen $6 \cdot 14 = 84$ bzw. $4 \cdot 21 = 84$ jeder von beiden genau 84 km zurückgelegt. Die Länge der Strecke von A nach B beträgt wegen $2 \cdot 84 = 168$ mithin 168 km.

Klassenstufe 7

1. Aus (6), (3) und (2) folgt, daß weder die Schülerin Müller noch die Schülerin Richter am besten abschnitt. Folglich lautet der Zuname der erfolgreichsten Schülerin Naumann. Wegen (4) lautet ihr Vorname nicht Angelika und wegen (1) sowie (5) auch nicht Beate. Folglich heißt sie Christine. Die erfolgreichste der drei Schülerinnen heißt Christine Naumann.

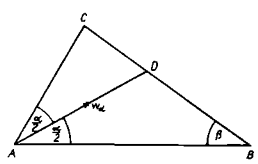
2. Wegen (1) ist das Dreieck ABC gleichseitig. Jeder seiner Innenwinkel ist mithin $60°$ groß.

Aus (1) folgt ferner, da D der Mittelpunkt von AB ist, $\overline{AD}$ $(=\overline{DB})=\overline{CD}$. Also ist $\triangle ADC$ gleichschenklig. Als Nebenwinkel des Winkels $\sphericalangle BDC$ hat der Winkel $\sphericalangle ADC$ eine Größe von $120°$.



Folglich hat der Winkel $\sphericalangle ACD$ als einer der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck ADC eine Größe von $30°$. Da die Größe des Winkels $\sphericalangle ACB$ gleich der Summe der Größen der Winkel $\sphericalangle BCD$ und $\sphericalangle ACD$ ist, beträgt diese $60°+30°=90°$, das Dreieck ABC ist also rechtwinklig, w. z. b. w.

3. (I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, wie es laut Aufgabenstellung konstruiert werden soll. AD sei die Winkelhalbierende von $\sphericalangle BAC$, wobei D auf BC liegt. Dann sind von dem Teildreieck ABD die Stücke $\overline{AD}=w_\alpha$, $\overline{\sphericalangle BAD}=\frac{\alpha}{2}$ und $\overline{\sphericalangle ABD}=\beta$ bekannt. Punkt C liegt erstens auf dem freien Schenkel des in A an AB nach derselben Seite der Geraden durch A und B wie D angetragenen Winkels der Größe α und zweitens auf dem Strahl aus B durch D.



Daraus folgt, daß ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(II) (1) Wir konstruieren das Dreieck ABD aus $\overline{AD}=5{,}5$ cm, $\overline{\sphericalangle BAD}=30°$ und $\overline{\sphericalangle ABD}=35°$.

(2) Wir tragen in A an AB einen Winkel der Größe $60°$ nach derselben Seite der Geraden durch A und B an, auf der D liegt.

(3) Wir zeichnen den Strahl aus B durch D. Schneidet er den freien Schenkel des in (2) konstruierten Winkels, so sei dieser Schnittpunkt C genannt.

(III) Jedes so konstruierte Dreieck ABC entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Nach Konstruktion hat der Winkel $\sphericalangle BAC$ die Größe $60°$. Ebenso hat nach Konstruktion der Winkel $\sphericalangle ABC$ die Größe $35°$. Schließlich ist nach Konstruktion AD Halbierende des Winkels $\sphericalangle BAC$ und hat die Länge 5,5 cm.

(IV) Konstruktionsschritt (1) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Ebenso sind die Konstruktionsschritte (2) und (3) eindeutig ausführbar. Da sowohl $\sphericalangle BAC$ als auch $\sphericalangle ABD$ spitze Winkel sind, gibt es genau einen Schnittpunkt C. Mithin ist $\triangle ABC$ durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

4. Angenommen, die Angaben treffen zu, wenn das Buch x Seiten hat. Von ihnen las Fritz am ersten Tag $\frac{x}{12}$ Seiten, an den folgenden 4 Tagen zusammen $4\cdot\frac{x}{8}$ Seiten, das sind zusammen $\frac{7}{12}x$ Seiten. Für den letzten Tag verblieben daher noch $\frac{5}{12}x$ Seiten. Das waren laut Aufgabe 20 Seiten weniger als $\frac{7}{12}x$ Seiten. Daraus folgt $\frac{2}{12}x=20$ und somit $x=6\cdot 20=120$.

Somit können nur für die Antwort, das Buch habe 120 Seiten, die Angaben von Fritz zutreffen. In der Tat treffen sie hierfür zu; denn hat das Buch 120 Seiten, so las Fritz am ersten Tag 10 Seiten, an den folgenden 4 Tagen je 15 Seiten, bis dahin also zusammen 70 Seiten; und liest er noch (20 Seiten weniger), d. h. 50 Seiten, so ergibt sich genau die Seitenzahl des Buches, 120 Seiten.

Klassenstufe 8

1. Die Anzahl aller von den Schülern der Stadt B bei dieser Kreisspartakiade errungenen Goldmedaillen sei g, die der Silbermedaillen s und die der Bronzemedaillen b.

Dann gilt laut Aufgabe:

$$g+s+b=42, \qquad (1)$$

$$s=\frac{63}{3}=21, \qquad (2)$$

$$10<b<12. \qquad (3)$$

Daraus folgt, da b ganzzahlig ist, $b=11$ und somit wegen (1) und (2) $g=42-21-11=10$.

Die Schüler der Stadt B errangen 10 Gold-, 21 Silber- und 11 Bronzemedaillen.

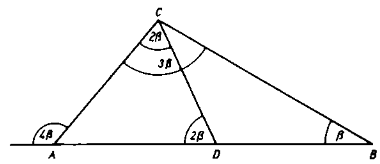
2. Angenommen, A habe die in der Aufgabe genannte Strecke in t Stunden zurückgelegt. Dann benötigte B für dieselbe Strecke $(t+2)$ Stunden. Daher gilt $56t=40\,(t+2)$, woraus man $t=5$ erhält.

A legte mithin die Strecke mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $56\frac{\text{km}}{\text{h}}$ in 5 Stunden zurück. Die Strecke war daher 280 km lang. Wegen $280:35=8$ würde D für diese Strecke bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $35\frac{\text{km}}{\text{h}}$ genau 8 Stunden brauchen. Da C erst 4 Stunden später als D abfahren soll, müßte er die gesamte Strecke in genau 4 Stunden zurücklegen, wenn er gleichzeitig mit D am Ziel eintreffen will. Wegen $280:4=70$ müßte er dabei eine Durchschnittsgeschwindigkeit von $70\frac{\text{km}}{\text{h}}$ einhalten.

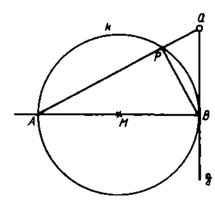
3. Es sei $\overline{\sphericalangle ABC}=\beta$. Dann hat der Außenwinkel bei A laut Aufgabe die Größe 4β. Nach dem Satz über den Außenwinkel am Dreieck beträgt die Größe des Winkels $\sphericalangle ACB$ somit 3β, also gilt $\overline{\sphericalangle ACB}>\overline{\sphericalangle ABC}$. Daraus folgt, da im Dreieck dem größeren von zwei Winkeln jeweils die längere Seite gegenüberliegt, $\overline{AB}>\overline{AC}$. Daher gibt es auf AB einen Punkt D, für den $\overline{AD}=\overline{AC}$ gilt. Mithin sind A, D, C die Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks. Daraus und aus dem Außenwinkelsatz folgt

$$\overline{\sphericalangle ADC}=\overline{\sphericalangle ACD}=2\beta.$$

Schließlich erhält man für jeden Punkt D der genannten Art $\overline{\sphericalangle DCB}=\overline{\sphericalangle ACB}-\overline{\sphericalangle ACD}=3\beta-2\beta=\beta=\overline{\sphericalangle DBC}$, also ist $\triangle CDB$ gleichschenklig mit $\overline{DB}=\overline{DC}$, w. z. b. w.



4. (I) Angenommen, k sei ein Kreis, wie er laut Aufgabenstellung konstruiert werden soll. Sein Mittelpunkt sei M. Dann ist nach dem Satz des Thales $\sphericalangle APB$ ein rechter Winkel und als sein Nebenwinkel $\sphericalangle BPQ$ ebenfalls ein rechter Winkel. Folglich liegt P erstens auf dem Halbkreis über BQ und zweitens auf dem Kreis um Q mit dem Radius $\overline{PQ}$. Punkt A liegt erstens auf dem Strahl aus Q durch P und zweitens auf der Senkrechten zu BQ durch B.



Daraus folgt, daß ein Kreis nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(II) (1) Wir zeichnen die Strecke BQ der Länge 6 cm.

(2) Wir schlagen über BQ einen Halbkreis.

(3) Wir schlagen um Q mit dem Radius der Länge 3 cm einen Kreis. Schneidet er den in (2) gezeichneten Halbkreis in einem Punkt, so sei dieser P genannt.

(4) Wir errichten in B die Senkrechte zu g.

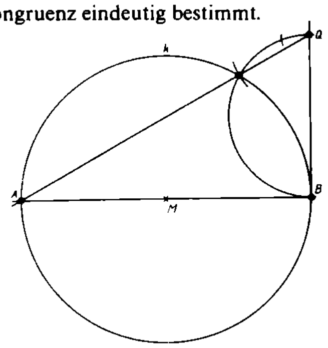
(5) Wir zeichnen den Strahl aus Q durch P. Schneidet er die in (4) konstruierte Senkrechte, so sei der Schnittpunkt A genannt.

(6) Wir zeichnen den Kreis k mit dem Durchmesser AB.

(III) Jeder so konstruierte Kreis k entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Nach Konstruktion gilt $\overline{BQ}=6$ cm und $\overline{PQ}=3$ cm. Der Kreis k berührt die Gerade g laut Konstruktion in B, da $AB \perp g$ ist. Ferner liegt laut Konstruktion P auf AQ (und zwar ist $P \neq A$). Wegen $BP \perp PQ$ (nach dem Satz von Thales) und damit $BP \perp AP$ liegt P nach der Umkehrung des Satzes des Thales auf dem Kreis k mit dem Durchmesser AB sowie laut Konstruktion auf AQ.

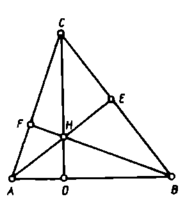
(IV) Konstruktionsschritt (1) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Ebenso ist (2) bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. (3) liefert bei den gegebenen Längen für BQ und PQ genau einen Schnittpunkt P. (4) ist eindeutig ausführbar, ebenso (5), und es gibt, da der in (5) konstruierte Strahl einen spitzen Winkel mit dem Strahl aus Q durch B bildet, genau einen Schnittpunkt A des in (5) konstruierten Strahles mit der in (4) konstruierten Senkrechten. Schließlich ist auch (6) eindeutig ausführbar. Der Kreis k ist durch die gegebenen Stücke mithin bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.



Klassenstufe 9

1. Für jeden Spieltag in der Zeit dieser Halbserie sei n die Anzahl derjenigen Mannschaften der Oberliga, die nach diesem Spieltag mindestens ein Spiel ausgetragen haben. Für jede dieser n Mannschaften ist die Zahl der ausgetragenen Spiele höchstens $n-1$, da jede höchstens gegen jede der $n-1$ anderen Mannschaften genau ein Spiel ausgetragen haben kann. Nun gibt es unter den natürlichen Zahlen von 1 bis $n-1$ keine n paarweise verschiedenen. Daher stimmen mindestens zwei dieser Zahle überein, w. z. b. w.

2. Da das Dreieck ABC spitzwinklig ist, liegen D, E und F auf den Dreieckseiten, und H liegt im Innern des Dreiecks. Nach dem Hauptähnlichkeitssatz sind die Dreiecke AEH und BDH ähnlich, da sie in den Scheitelwinkeln bei H und in den rechten Winkeln



bei E bzw. D übereinstimmen. Folglich gilt:

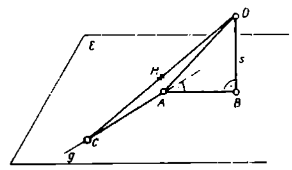
$$\overline{AH} : \overline{HE} = \overline{BH} : \overline{HD} \text{ und damit}$$
$$\overline{AH} \cdot \overline{HD} = \overline{BH} \cdot \overline{HE}.$$

Analog ergibt sich, daß auch

$$\overline{BH} \cdot \overline{HE} = \overline{CH} \cdot \overline{HF} \text{ gilt.}$$

3. Hat eine ganze Zahl z ein ganzzahliges Vielfaches von 588 als dritte Potenz, so gibt es eine ganze Zahl a mit $z^3 = 588a = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot a$. Daraus folgt, daß z^3 und folglich auch z durch jede der Primzahlen 2, 3, 7 teilbar ist; hiernach gibt es eine ganze Zahl x, mit der z von der Form $z = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot x$ ist. Hat umgekehrt z diese Form, so ist $z^3 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot x^3$ ein ganzzahliges Vielfaches von 588. Daher hat eine ganze Zahl genau dann ein ganzzahliges Vielfaches von 588 als dritte Potenz, wenn sie ein ganzzahliges Vielfaches von $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$ ist. Unter allen positiven ganzzahligen Vielfachen von 42 ist 42 die kleinste und somit die gesuchte Zahl.

4. a) Der Mittelpunkt von CD sei M. Aus $s \perp \epsilon$ folgt $BD \perp BC$ sowie $BD \perp AC$; hiernach und wegen $AB \perp AC$ ist die Ebene durch A, B, C senkrecht zu AC, demnach ist $AD \perp AC$. Also gilt $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CAD = 90°$. Nach der Umkehrung des Satzes des Thales liegt daher jeder der Punkte A und B auf einem Kreis um M mit dem Durchmesser CD. Folglich liegen die Punkte A, B, C und D auf der Kugel um M mit dem Durchmesser CD.



b) Nach dem Lehrsatz des Pythagoras erhält man aus $\overline{CA} = a\sqrt{2}$ und $\overline{AB} = a$ für CB die Länge $\overline{CB} = a\sqrt{3}$ und daraus sowie aus $\overline{BD} = a\sqrt{3}$ für die Länge des Durchmessers der Kugel $\overline{CD} = a\sqrt{6}$. Der Radius der Kugel beträgt in diesem Falle also $\frac{a}{2}\sqrt{6}$.

Klassenstufe 10

1. Die Zahl z_1 ist vierstellig, da sonst wegen $z_1 > z_2$ die Summe $z_1 + z_2 < 2000$ wäre. Bezeichnet man die erste der benutzten Ziffern mit a und die zweite mit b, so gilt $a = 1$ oder $a = 2$. Die Zahl z_1 hat hiermit die Form $abab$, z_2 ist entweder
(1) vierstellig, dann hat sie die Form $abab$ oder (2) dreistellig, dann hat sie die Form aba oder (3) zweistellig, dann hat sie die Form ab oder (4) einstellig, dann hat sie die Form a.
Im Falle (1) und (3) stehen an den Einerstellen beider Zahlen gleiche Ziffern, folglich wäre ihre Summe eine gerade Zahl, im Widerspruch dazu, daß 2555 ungerade ist.
Im Falle (4) wäre $a = 2$, was auf $b = 3$ führen würde. Da aber $2323 + 2 = 2325 \neq 2555$ ist, ist auch dieser Fall nicht möglich.
Im Falle (2) muß $a = 2$ sein. Daraus erhält man $b = 3$. Tatsächlich erfüllen diese Angaben alle Bedingungen der Aufgabe; denn es ist $2323 + 232 = 2555$.
Die beiden Ziffern lauten 2 und 3, und es ist $z_1 = 2323$ und $z_2 = 232$.

2. Angenommen, (x, y, z) sei ein Tripel mit den verlangten Eigenschaften.
Aus (1) und (2) folgt dann (4) $x > y > z$.
Nach (3) gilt $x = a^2$, $y = b^2$, $z = c^2$, wobei a, b, c natürliche Zahlen sind.
Aus (4) folgt dann (5) $a > b > c$.
Wegen (1) und (2) gilt schließlich
$a^2 - b^2 = 96$ sowie $b^2 - c^2 = 96$ und damit $(a+b)(a-b) = (b+c)(b-c) = 96$.
Hieraus ergibt sich unter Berücksichtigung von (4), daß höchstens die folgenden Möglichkeiten bestehen:

	$a+b$	96	48	32	24	16	12
bzw.	$b+c$						
	$a-b$	1	2	3	4	6	8
bzw.	$b-c$						

Hiervon scheiden die Fälle mit ungeraden $(a+b)+(a-b) = 2a$ aus, und in den übrigen Fällen folgt

	(a, b)	(25, 23)	(14, 10)	(11, 5)	(10, 2)
bzw.	(a, c)				

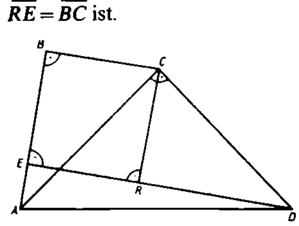
Die einzige Zahl, die sowohl erste als auch zweite Zahl in je einem dieser Paare ist, ist 10. Damit verbleibt nur die Möglichkeit $a = 14$, $b = 10$, $c = 2$.
Das führt auf $x = 196$, $y = 100$, $z = 4$.
Umgekehrt hat das Tripel (x, y, z) aus diesen Zahlen die verlangten Eigenschaften; denn es ist $196 - 100 = 100 - 4 = 96$.
Das Tripel (196, 100, 4) ist daher die einzige Lösung der Aufgabe.

3. Wegen $\sphericalangle AED = 90°$ und $\sphericalangle ACD = 90°$ liegen E und C nach der Umkehrung des Lehrsatzes des Thales auf dem Kreis mit dem Durchmesser AD. Daher ist nach dem Peripheriewinkelsatz $\sphericalangle CDE$ entweder gleich $\sphericalangle CAE$ $(< 90°)$ oder gleich $180° - \sphericalangle CAE$ $(> 90°)$.
Der zweite Fall kann nicht eintreten, weil mit B auch AB und insbesondere E als Punkt *von* AB auf der anderen Seite der Geraden durch A und C liegt wie D und daher $\sphericalangle ECD > 90°$, also $\sphericalangle CDE < 90°$ ausfällt.
Es sei jetzt R der Punkt auf DE, für den

$$\overline{DR} = \overline{AB} \qquad (1)$$

gilt (wegen $\overline{AB} < \overline{AC} = \overline{DC} < \overline{DE}$ existiert tatsächlich genau ein solcher Punkt R).
Dann ist $\triangle DRC \cong \triangle ABC$ (nach sws).
Folglich ist $\sphericalangle DRC = 90°$ und somit $\sphericalangle ERC = 90°$. Daher ist $BERC$ ein Rechteck, so daß

$$\overline{RE} = \overline{BC} \text{ ist.} \qquad (2)$$

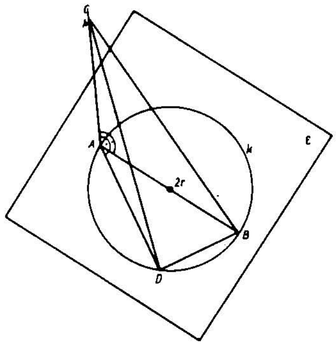


Aus (1) und (2) folgt (da R auf DE liegt) durch Addition die zu beweisende Behauptung.

4. a) Nach dem Satz des Thales ist das Dreieck ABD rechtwinklig mit D als Scheitel des rechten Winkels. Daher gilt:
$\overline{AD} = \sqrt{4r^2 - x^2}$ und somit für das Volumen der Pyramide

$$V = \frac{1}{6} xh \sqrt{4r^2 - x^2}.$$

b) Wegen $AC \perp \varepsilon$ ist $AC \perp BD$, ferner gilt $AD \perp BD$. Daher steht die Ebene durch A, C, D senkrecht auf BD, woraus die Behauptung $CD \perp BD$ folgt.



Anderer Beweis für b):
Nach Voraussetzung ist $AC \perp AD$. Daher gilt nach dem Lehrsatz des Pythagoras

$$\overline{CD}^2 = 4r^2 - x^2 + h^2$$

und wegen $AC \perp AB$

$$\overline{BC}^2 = 4r^2 + h^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2$$

Daher ist nach der Umkehrung des Lehrsatzes von Pythagoras $\sphericalangle CDB$ ein rechter Winkel, *w. z. b. w.*

Bezirksolympiade

Klassenstufe 7

1. Es gibt verschiedene Lösungswege:
Verlangt werden (zur Vergabe der vollen Punktzahl) sollte eine Begründung mindestens folgenden Umfangs:
Wegen (1) ist Ulrich nicht Schüler der Klasse 7, wegen (3) sind Hans und Werner nicht Schüler der Klasse 7. Also ist Fritz der Schüler der Klasse 7. Von den restlichen Schülern gehören wegen (3) Hans und Werner nicht der Klasse 8 an. Also ist Ulrich Schüler der Klasse 8. Von den nun noch verbleibenden zwei Schülern ist Hans wegen (2) nicht Schüler der Klasse 6. Also gehört Werner der Klasse 6 an, und folglich ist Hans der Schüler der Klasse 5.

2. Für jede natürliche Zahl gilt:
Bei ihrer Division durch 3 tritt als Rest einer der Werte 0, 1, 2 auf. Unter diesen Werten befinden sich keine vier verschiedenen. Daher gibt es unter je vier beliebigen natürlichen Zahlen zwei, die bei Division durch 3 denselben Rest lassen. Ist r dieser Rest, so sind diese beiden Zahlen von der Form $3p + r$ und $3q + r$ mit natürlichen Zahlen p, q. Ihre Differenz ist demnach $(3p + r) - (3q + r) = 3(p - q)$, also durch 3 teilbar.

3. (I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Dann ist $b > c$. Daher gibt es einen Punkt D auf AC, für den $\overline{AD} = c$, also $\overline{DC} = b - c$ gilt.
Sodann ist nach dem Winkelsummensatz

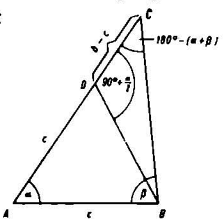
$$\overline{\sphericalangle DCB} = \overline{\sphericalangle ACB} = 180° - (\alpha + \beta).$$

Ferner ist $\triangle ABD$ gleichschenklig mit $\overline{AB} = \overline{AD} = c$, also gilt

$$\overline{\sphericalangle ABD} = \overline{\sphericalangle ADB}.$$

Wegen $\overline{\sphericalangle ABD} + \overline{\sphericalangle ADB} + \alpha = 180°$ folgt hieraus $\overline{\sphericalangle ABD} = \overline{\sphericalangle ADB} = \frac{1}{2}(180° - \alpha)$. Daher gilt $\overline{\sphericalangle CDB} = 180° - \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° + \frac{\alpha}{2}$.

Punkt A liegt erstens auf dem Strahl aus C durch D und zweitens auf dem freien Schenkel des in B an CB nach der Seite der Geraden durch B und C, auf der D liegt, angetragenen Winkels der Größe β.
Daraus folgt, daß ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe genügt, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
(II) (1) Man konstruiert ein Dreieck BDC, in dem die Seite DC die Länge $b - c$, der Winkel $\sphericalangle CDB$ die Größe $90° + \frac{\alpha}{2}$ und der Winkel $\sphericalangle DCB$ die Größe $180° - (\alpha + \beta)$ haben.
(2) Man zeichnet den Strahl aus C durch D.
(3) Man trägt in B an BC nach der Seite der Geraden durch B und C, auf der D liegt, einen Winkel der Größe β an.
(4) Schneidet sein freier Schenkel den in (2) gezeichneten Strahl in einem Punkt außerhalb von CD, so sei dieser A genannt.
(III) Beweis, daß jedes so konstruierte Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe entspricht:



Nach Konstruktion hat $\sphericalangle ABC$ die verlangte Größe β. Ferner hat $\sphericalangle BAC$ nach dem Winkelsummensatz und nach Konstruktion die Größe
$180° - \overline{\sphericalangle ABC} - \overline{\sphericalangle DCB} = 180° - \beta - (180° - \alpha - \beta) = \alpha$.
Weiterhin ist nach Konstruktion

$$\overline{\sphericalangle ADB} = 180° - \overline{\sphericalangle CDB} = 180° - (90° + \frac{\alpha}{2}) = 90° - \frac{\alpha}{2} \text{ und somit}$$

$$\overline{\sphericalangle ABD} = 180° - \overline{\sphericalangle BAD} - \overline{\sphericalangle ADB} = 180° - \alpha - (90° - \frac{\alpha}{2}) = 90° - \frac{\alpha}{2} = \overline{\sphericalangle ADB}.$$

Also ist $\triangle ABD$ gleichschenklig mit $\overline{AB} = \overline{AD}$, und somit gilt auch, wie verlangt, $\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{AC} - \overline{AD} = \overline{CD} = b - c$.
(IV) Konstruktionsschritt (1) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar, da für die gegebenen Größen α, β die Beziehung $180° - \alpha - \beta > 0$ und $(90° + \frac{\alpha}{2}) + (180° - \alpha - \beta) < 180°$ gelten.
Danach sind die Konstruktionsschritte (2) und (3) eindeutig ausführbar und wegen $(180° - \alpha - \beta) + \beta < 180°$ und $90° + \frac{\alpha}{2} > \alpha$ auch Konstruktionsschritt (4). Durch die gegebenen Stücke ist ein Dreieck mithin bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

4. In A_1 produzierte nach Durchführung der Rationalisierung jeder der 53 Arbeiter $\frac{1{,}59}{53}$ und in A_2 jeder der 62 Arbeiter $\frac{1{,}24}{62}$ des Produktionsausstoßes seiner Abteilung vor den Rationalisierungsmaßnahmen. Da in A_1 die Produktion auf eine größere Menge gewachsen war als in A_2, mußten Arbeiter von A_1 nach A_2 überwechseln. Ihre Anzahl sei x. Danach betrug in A_1 die Produktion $\frac{1{,}59}{53}(53 - x)$ der früheren Produktion, in A_2 aber $\frac{1{,}24}{62}(62 + x)$. Da diese beiden Produktionsausstöße gleich waren, gilt

$$\frac{159}{53}(53 - x) = \frac{124}{62}(62 + x), \text{ d. h.}$$

$$3(53 - x) = 2(62 + x), \text{ also}$$

$$159 - 3x = 124 + 2x \text{ und damit}$$

$$35 = 5x$$

$$x = 7.$$

Es wechselten somit 7 Arbeiter von A_1 nach A_2 über. Der neue Produktionsausstoß in jeder Abteilung betrug dann

$$\frac{1{,}59}{53} \cdot 46 \left(= \frac{1{,}24}{62} \cdot 69\right) = 1{,}38,$$

d. h., er stieg auf 138 % des früheren Produktionsausstoßes.

5. Es gilt

$$a : b = 3 : 8$$

$$b : c = 8 : 6 \text{ (Erweiterung von } 4 : 3 \text{ mit 2), daraus folgt}$$

$$a : b : c = 3 : 8 : 6,$$

d. h., a, b und c sind der Reihe nach das 3-, 8-, bzw. 6fache ein und derselben Länge.
Wegen $3 + 8 + 6 = 17$ und wegen des gegebenen Umfangs von 34 cm beträgt diese Länge 2 cm.
Die gesuchten Seitenlängen betragen daher $a = 6$ cm, $b = 16$ cm, $c = 12$ cm.
Weitere Lösungsmöglichkeit:
Gegeben: $a : b = 3 : 8$

$$b : c = 4 : 3$$

$$a + b + c = 34 \text{ cm}$$

daraus folgt

$$b = \frac{8}{3} a$$

$$c = \frac{3}{4} b = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{3} a = 2a$$

$$a + \frac{8}{3} a + 2a = 34 \text{ cm}$$

$$\frac{17}{3} a = 34 \text{ cm}$$

$a = 6$ cm, $b = 16$ cm, $c = 12$ cm.

6. Sei S der genannte Schnittpunkt, E der Mittelpunkt der Seite AB und F Fußpunkt der Höhe auf BC.

Weil die Gerade durch B und S den Winkel $\sphericalangle ABC$ halbiert, gilt dann

$$\sphericalangle FBS \cong \sphericalangle SBA \qquad (1)$$

Da S außerdem auf der Mittelsenkrechten von AB liegt, sind A, B, S die Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks mit $\overline{AS}=\overline{BS}$, und deshalb ist

$$\sphericalangle SAB \cong \sphericalangle SBA \qquad (2)$$

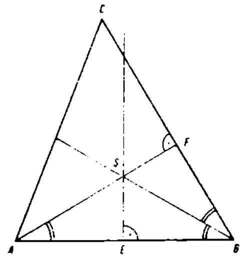
Aus (1) und (2) folgt:

$$\sphericalangle FBS \cong \sphericalangle SAB \cong \sphericalangle SBA \qquad (3)$$

Weiter sind A, B, F die Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks. Die Summe der Größe der in (3) genannten untereinander gleich großen Winkel beträgt somit nach dem Winkelsummensatz 90°.

Jeder von ihnen hat daher die Größe 30°.

Sabines Behauptung ist also richtig. Die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$ beträgt 60°.



Klassenstufe 8

1. Das Alter eines jeden Schülers sei mit dem Anfangsbuchstaben seines Vornamens bezeichnet.

Angenommen, (5) wäre wahr. Dann folgte erstens, daß (1) und (4) nicht beide wahr sein könnten; zweitens folgte auch, daß (7) und (3) nicht beide wahr sein könnten. Es gäbe also unter den Aussagen (1) bis (7) mehr als eine falsche. Damit ist die Annahme, (5) wäre wahr, widerlegt; d. h. (5) ist die falsche Aussage, und (1), (2), (3), (4), (6) und (7) sind wahr. Aus (2) folgt $B<C$, aus (7) folgt $C<D$, aus (6) folgt $D<E$, aus (1) folgt $E<A$. Die verlangte Reihenfolge der Schüler lautet mithin: Berta, Christine, Dieter, Elvira, Anton.

2. Angenommen, zwei Primzahlen P_1, $_2$ haben die verlangten Eigenschaften. Eine der Primzahlen P_1 und P_2 muß wegen (*a*) 2 sein, da die Summe ungerade Primzahlen stets größer als 2 und durch 2 teilbar ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $P_1=2$. Wegen b) gibt es eine natürliche Zahl n, so daß $\quad (2+P_2)\cdot 2P_2 = 10\cdot n$,

also $\quad (2+P_2)P_2 \;=\; 5\cdot n$ ist.

Wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung einer natürlichen Zahl in Primfaktoren gilt entweder $2+P_2=5$, d. h. $P_2=3$ oder $P_2=5$.

Also erfüllen höchstens die Primzahlen (2; 3) und (2; 5) die Bedingungen.

In der Tat haben sie die verlangten Eigenschaften; denn ihre Summen P_1+P_2 sind 5 bzw. 7, jeweils also eine Primzahl. Die Produkte $(P_1+P_2)P_1P_2$ sind 30 bzw. 70, jeweils also durch 10 teilbar.

3. (I) Angenommen, k sei ein Kreis, der den Bedingungen der Aufgabe genügt. A sei sein Berührungspunkt mit SP, B der mit SR und C der mit dem Bogen $\widehat{PR}$. Der Mittelpunkt M des Kreises k liegt dann auf dem Strahl s aus S durch C; ferner ist $\triangle SAM \cong \triangle SBM$ wegen $\overline{SM}=\overline{SM}$, $\overline{MA}=\overline{MB}$ (Radius von k) und $\overline{\sphericalangle MAS} = \overline{\sphericalangle MBS} = 90°$.

Daher ist $\overline{\sphericalangle MSA} = \overline{\sphericalangle MSB}$, so daß s den Winkel $\sphericalangle PSR$ halbiert. Wegen $\overline{MA}=\overline{MC}$ ist weiter $\triangle ACM$ gleichschenklig und somit $\overline{\sphericalangle ACM} = \overline{\sphericalangle CAM} = \frac{1}{2}\,\overline{\sphericalangle AMS}$, letzteres nach dem Außenwinkelsatz, der hier anwendbar ist, weil wegen der vorausgesetzten Berührung von innen M zwischen S und C liegt. Sind jetzt M' ein beliebiger von S verschiedener Punkt auf s, A' der Fußpunkt des Lotes von M' auf die Gerade durch S und P und C' der Schnittpunkt von s mit dem Kreis um M' mit dem Radius $\overline{M'A'}$, so ist $\overline{\sphericalangle A'M'S} = \overline{\sphericalangle AMS}$, weil $\triangle AMS \sim \triangle A'M'S$ ist. Es gilt nämlich $\overline{\sphericalangle ASM} = \overline{\sphericalangle A'SM'}$ und $\overline{\sphericalangle SAM} = \overline{\sphericalangle SA'M'} = 90°$.

Daher genügt ein Kreis k nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(II) (1) Man konstruiert die Halbierende des Winkels $\sphericalangle PSR$, in dessen Innerem der Bogen $\widehat{PR}$ verläuft. Ihr Schnittpunkt mit dem Bogen $\widehat{PR}$ sei C.

(2) Man wählt einen beliebigen Punkt M' auf SC. Von M' fällt man das Lot $M'A'$ auf SP.

(3) Man schlägt um M' den Kreis k' mit dem Radius $\overline{M'A'}$. Der Schnittpunkt von k' mit der Verlängerung von SM' über M' hinaus sei C'.

(4) Man zeichnet die Parallele zu $A'C'$ durch C. Ihr Schnittpunkt mit SP sei A.

(5) Man errichtet auf SP in A die Senkrechte. Ihr Schnittpunkt mit SC sei M.

(6) Man schlägt den Kreis k um M mit dem Radius $\overline{MA}$.

(III) Jeder so konstruierte Kreis k genügt den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Da gemäß (5) $\overline{\sphericalangle MAS}=90°$ ist und gemäß (4) A auf SP liegt, berührt k die Strecke SP, und zwar in A. Aus Symmetriegründen berührt daher k auch die Strecke SR. Wegen $CA \parallel C'A'$ (nach (4)) gilt $\overline{\sphericalangle SCA} = \overline{\sphericalangle SC'A'}$ und wegen $MA \parallel M'A'$ (nach (2) und (5)) und, da M auf SC liegt (nach (5)),

$$\overline{\sphericalangle CMA} = \overline{\sphericalangle C'M'A'}.$$

Daher gilt $\triangle CMA \sim \triangle C'M'A'$, und wegen $\overline{M'A'}=\overline{M'C'}$ ist $\overline{MA}=\overline{MC}$. Daher berührt k den Bogen $\widehat{PR}$ in C, dem gemeinsamen Punkt von k, $\widehat{PR}$ und der Zentralen durch M und S.

(IV) Die Konstruktionen in (II) sind alle (eindeutig) ausführbar. Das ist für (1), (3) und (6) bekannt und ergibt sich für (2), (4) und (5) folgendermaßen:

(2): Für den Fußpunkt A' des Lotes von M' auf die Gerade durch S und P gilt $\overline{SA'}<\overline{SM'}<\overline{SC}=\overline{SP}$, also liegt A' auf SP wegen $\overline{\sphericalangle CSP}<90°$.

(4): Weil M' auf SC' liegt, gilt $\overline{SA'}<\overline{SC'}$ und folglich nach dem Strahlensatz für den Schnittpunkt A mit der Geraden durch S und P

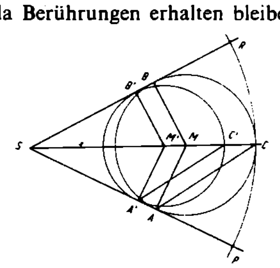
$\overline{SA}<\overline{SC}=\overline{SP}$, also liegt wegen $\overline{\sphericalangle CSP}<90°$ der Punkt A auf SP.

(5): Für den Schnittpunkt M mit der Geraden, durch S und C gilt nach dem Strahlensatz und weil M' auf SC' liegt,

$\overline{SM}=\dfrac{\overline{SM'}}{\overline{SC'}}\cdot\overline{SC}<\overline{SC}$, woraus, weil A auf SP liegt und $\overline{\sphericalangle CSP}<90°$ ist, folgt, daß M auf SC liegt.

Bemerkungen: Zu dieser Konstruktion führt auch folgende Überlegung: Einerseits hat – nach Konstruktion von M', A', C' wie in (I) bzw. (II) (1) bis (3) – die Figur aus k' und dem Zentriwinkel $\sphericalangle PSR$ gehörenden Bogen des Kreises aus S durch C' die geforderten Berührungseigenschaften (mit diesem Bogen statt $\widehat{PR}$).

Andererseits muß diese Figur durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum S in die Figur um den gesuchten Kreis und den Bogen PR übergehen, da bei zentrischen Streckungen Kreise in Kreise übergehen, Geraden durch das Zentrum in sich selbst, und da Berührungen erhalten bleiben.



4. Es wurden genau 2 Spiele der folgenden Zusammenstellung gespielt: AB, AC, AD, BC, CD. Daher wurden insgesamt 12 Partien gespielt und mithin 12 Punkte vergeben.

Wenn nun bei einer Punkteverteilung, die den Angaben entspricht, Achim, Bernd, Christian und Detlef in dieser Reihenfolge a, b, c, d Punkte erzielten, so gilt:

$$a+d+1=b+c. \qquad (1)$$
$$c+d=7 \qquad (2)$$
$$b+d=a+c+5. \qquad (3)$$

Weil 12 Punkte insgesamt vergeben wurden, d. h. $a+b+c+d=12$ gilt, kann man aus dem entstandenen Gleichungssystem von 4 Gleichungen der Reihe nach die Unbekannten zu eliminieren und dann der Reihe nach zu ermitteln versuchen.

So folgt z. B. aus (1)

$$a+d=5{,}5. \qquad (4)$$
und $$b+c=6{,}5. \qquad (5)$$

Analog schließt man aus (3)

auf $$b+d=8{,}5 \qquad (6)$$
und $$a+c=3{,}5. \qquad (7)$$

Außerdem folgt aus (2)

$a+b=5.$ (8)

Durch Addition erhält man aus (7) und (8)

$2a+b+c=8{,}5$ und daraus sowie aus (5) $2a+6{,}5=8{,}5$, also $a=1$.

Damit ergibt sich aus (4) $d=4{,}5$.

aus (6) $b=4$

und aus (7) $c=2{,}5$.

Daher kann nur die Antwort. Achim erhielt 1 Punkt, Bernd 4 Punkte. Christian 2,5 Punkte und Detlef 4,5 Punkte, den Angaben entsprechen.

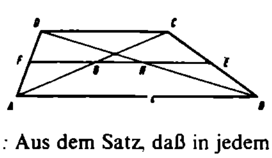
In der Tat erfüllt diese Antwort alle Bedingungen der Aufgabe. Denn wie die folgende Tabelle zeigt, gibt es Beispiele für eine Verteilung der Partieausgänge, bei der die in der Antwort genannte Punkteverteilung entsteht. Ferner erhielten bei ihr Bernd und Christian zusammen 6,5 Punkte, also genau einen Punkt mehr als die 5,5 Punkte von Achim und Detlef. Weiterhin erhielten Christian und Detlef zusammen genau 7 Punkte. Schließlich erreichten Achim und Christian zusammen 3,5 Punkte, also genau 5 Punkte weniger als die 8,5 Punkte von Bernd und Detlef.

	A	B	C	D	
A	X	1	0	0	1
B	1	X	2	1	4
C	2	0	X	0,5	2,5
D	2	1	1,5	X	4,5

In jedem Feld steht die Anzahl der Punkte, die der in der jeweiligen Zeile stehende Spieler beim Spiel gegen den in der entsprechenden Spalte stehenden Spieler erzielte.

5. Es seien A, B, C und D Eckpunkte des Trapezes, und es sei $AB \parallel CD$. Weiterhin seien E der Mittelpunkt der Seite BC, F der Mittelpunkt der Seite AD sowie G der Mittelpunkt der Diagonalen AC und H der Mittelpunkt der Diagonalen BD. Dann liegen nach der Umkehrung eines Teiles des Strahlensatzes und dem Satz über die Mittelparallele im Trapez $ABCD$ die Punkte G und H auf FE. Man wähle die Bezeichnung so, daß $\overline{AB} \geq \overline{CD}$ ist.

Behauptung: $\overline{GH}=\frac{1}{2}(\overline{AB}-\overline{CD})$.



Beweis: Aus dem Satz, daß in jedem Dreieck die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte zweier Seiten parallel zur dritten verläuft und halb so lang wie diese ist, oder nach der Umkehrung eines Teiles des Strahlensatzes folgt $\overline{FH}=\frac{1}{2}\overline{AB}$ (1)

sowie $\overline{FG}=\frac{1}{2}\overline{CD}$. Aus (1) und (2) folgt (2)

$\overline{FH}-\overline{FG}=\frac{1}{2}(\overline{AB}-\overline{CD})=\overline{GH}$. w. z. b. w.

6. a) In x kg der 25prozentigen Lösung befinden sich $\frac{25x}{100}$ kg des gelösten Stoffes, in y kg der 60prozentigen Lösung entsprechend $\frac{60y}{100}$ kg.

Somit hat $x:y$ genau dann den gesuchten Wert, wenn sich in den durch Zusammengießen erhaltenen $(x+y)$ kg genau $\frac{35(x+y)}{100}$ kg des gelösten Stoffes befinden, d. h. genau dann, wenn $\frac{25x}{100}+\frac{60y}{100}=\frac{35(x+y)}{100}$ gilt. Dies ist der Reihe nach äquivalent mit

$$25x+60y=35x+35y.$$
$$25y=10x,$$
$$\frac{5}{2}=\frac{x}{y}.$$

Das gesuchte Mischungsverhältnis beträgt somit 5 : 2.

b) Mit analoger Begründung wie in a) hat $x:y$ genau dann den gesuchten Wert, wenn

$$\frac{p_1}{100}x+\frac{p_2}{100}y=\frac{p}{100}\cdot(x+y) \text{ gilt.}$$

Dies ist der Reihe nach äquivalent mit

$$p_1x+p_2y=px+py,$$
$$(p_2-p)\,y=(p-p_1)x,$$
$$\frac{p_2-p}{p-p_1}=\frac{x}{y}.$$

Das gesuchte Mischungsverhältnis lautet:

$$\frac{p_2-p}{p-p_1}.$$

Klassenstufe 9

1. Genau dann ist x die gesuchte Zahl, wenn x die kleinste natürliche Zahl ist, zu der eine natürliche Zahl $n \geq 2$ mit $83x=3\cdot 10^n+10x+8$ oder, äquivalent hierzu, mit $73x=3\cdot 10^n+8$ existiert.

Untersucht man die Zahlen 308, 3008, 30008, 300008, 3000008 der Reihe nach auf Teilbarkeit durch 73, so ergibt sich, daß von ihnen nur die Zahl $3000008=73\cdot 41096$ teilbar ist. Daher ist $x=41096$ die gesuchte Zahl, und es gilt

$$83\cdot 41\,096=3410968.$$

2. Genau dann ist (a_1, a_2, a_3, a_4) ein derartiges Quadrupel, wenn es eine ganze Zahl n mit $a_1=n$, $a_2=n+1$, $a_3=n+2$, $a_4=n+3$ gibt, für die

$$n^3+(n+1)^3=(n+3)^3-(n+2)^3 \quad (1)$$

gilt. Gleichung (1) ist äquivalent mit $n^3+n^3+3n^2+3n+1=n^3+9n^2+27n+27-(n^3+6n^2+12n+8)$

und dies mit $n^3-6n=9$, d. h. mit

$$n(n^2-6)=9. \quad (2)$$

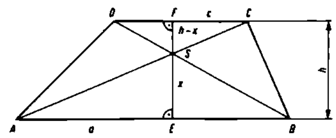
Da für ganzzahliges n die beiden Faktoren des linken Terms der Gleichung (2) ganze Zahlen sind, kann (2) nur erfüllt sein, wenn n eine der Zahlen $1, -1, 3, -3, 9, -9$ ist.

Wie die folgende Tabelle zeigt, erfüllt von diesen Zahlen genau die Zahl $n=3$ die Gleichung (2) und damit die Gleichung (1).

n	n^2	(n^2-6)	$n\cdot(n^2-6)$
1	1	−5	−5
−1	1	−5	5
3	9	3	9
−3	9	3	−9
9	81	75	675
−9	84	75	−675

Damit erfüllt das Quadrupel (3, 4, 5, 6) als einziges alle Bedingungen der Aufgabe.

3. Es seien E der Fußpunkt des Lotes von S auf die Gerade durch A und B sowie F der des Lotes von S auf die Gerade durch C und D. Dann gilt $\overline{EF}=h$. Setzt man $\overline{ES}=x$, so folgt $\overline{FS}=h-x$.



Nun gilt nach einem Teil des Strahlensatzes: $x:(h-x)=\overline{SA}:\overline{SC}=a:c$, also $cx=ah-ax$, woraus man

$x=\frac{ah}{a+c}$ (1) sowie $h-x=\frac{ch}{a+c}$ (2) erhält.

Folglich gilt:

$F_1=\frac{1}{2}ax=\frac{a^2h}{2(a+c)}$ sowie $F_3=\frac{1}{2}c(h-x)=\frac{c^2h}{2(a+c)}$.

Die Dreiecke ABC und ABD haben den gleichen Flächeninhalt, da sie in einer Seite und der zugehörigen Höhenlänge übereinstimmen. Für ihren Flächeninhalt F gilt: $F=\frac{1}{2}a\cdot h$. Hiernach gilt für die Flächeninhalte F_2 bzw. F_4:

$$F_2=F_4=F-F_1=\frac{1}{2}ah-\frac{a^2h}{2(a+c)}$$
$$=\frac{a^2h+ahc-a^2h}{2(a+c)}=\frac{ahc}{2(a+c)}.$$

4. Wegen $(x-y)^2 \geq 0$ gilt $x^2+y^2 \geq 2xy$, wobei Gleichheit genau für $x=y$ gilt, und entsprechend $x^2+z^2 \geq 2xz$, wobei Gleichheit genau für $x=z$ gilt, sowie

$y^2+z^2 \geq 2yz$, wobei Gleichheit genau für $y=z$ gilt. Durch Addition und Division mit 2 folgt:

Es gilt stets

$x^2+y^2+z^2 \geq xy+xz+yz$, und darin das Gleichheitszeichen genau dann, wenn

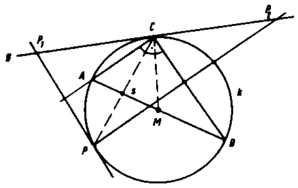
$x=y=z$ gilt.

5. a) Es gilt $\sphericalangle ACP_1 \cong \sphericalangle ACP$ und $\sphericalangle BCP_2 \cong \sphericalangle BCP$, da der jeweils zuerst genannte Winkel Bild des anderen Winkels bei einer Spiegelung an der Geraden durch A und C bzw. an der durch B und C ist. Da die Winkel $\sphericalangle ACP$ und $\sphericalangle BCP$ zusammen einen rechten Winkel ergeben, bilden alle vier genannten Winkel zusammen einen gestreckten.

Also gilt $\sphericalangle P_1CP_2=180°$, d. h., C liegt auf der Geraden g durch P_1 und P_2.

b) Aus a) folgt: Genau dann ist g die Tangente t in C an k, wenn P_1 auf t liegt. Dies ist genau

dann der Fall, wenn P auf dem Spiegelbild s von t bei Spiegelung an der Geraden durch A und C liegt. Somit ist b) bewiesen, wenn man nachweist, daß $s \perp AB$ gilt. Dies kann folgendermaßen geschehen:
Der Winkel, den t mit AC bildet, ergänzt den Winkel $\sphericalangle BAC$ zu 90° (denn ist M der Mittelpunkt von AB, also von k, so ergänzt der Winkel zwischen t und AC den Winkel $\sphericalangle ACM$ zu 90°, und da $\triangle ACM$ gleichschenklig ist, gilt $\sphericalangle ACM = \sphericalangle BAC$). Also ergänzt auch der Winkel, der s mit AC bildet, $\sphericalangle BAC$ zu 90°. Daher gilt $s \perp AB$.



6. Die Grundfläche der betrachteten Pyramide ist die des gleichseitigen Dreiecks KLM. Es hat die Seitenlänge $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ (Pythagoras). Folglich beträgt sein Flächeninhalt (laut Tafel) $\frac{a^2}{8}\sqrt{3}$. Es sei N der Mittelpunkt von LM. Dann liegen die Punkte K, N so auf dem Rechteck $ACGE$, wie es die Abb. zeigt; und zwar ist $\overline{GK} = \frac{a}{2}$ und $\overline{GN} = \frac{a}{4}\sqrt{2}$ (als halbe Länge der Hypotenuse des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks MGL mit $\overline{GM} = \overline{GL} = \frac{a}{2}$). Daraus folgt:

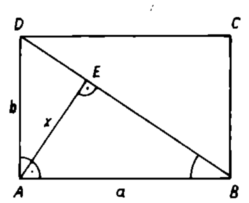
$$\overline{NK} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8}} = \frac{a}{4}\sqrt{6}$$

und weiter (da $\triangle GPK \sim \triangle NGK$ ist)

$$\overline{GP} : \overline{GN} = \overline{NG} : \overline{NK},$$

also $\quad \overline{GP} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4}\sqrt{2} : \frac{a}{4}\sqrt{6} = \frac{a}{6}\sqrt{3},$

also $\quad \overline{AP} = \overline{AG} - \overline{GP} = \frac{5}{6}a\sqrt{3}.$



Weiter gilt wegen $\overline{GN} : \overline{GK} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \overline{GC} : \overline{CA}$ $\triangle ACG \sim \triangle KGN$ und daher $\triangle ACG \sim \triangle GPK$, so daß für den Schnittpunkt P von AG mit NK $\sphericalangle GPK = \sphericalangle ACG = 90°$ ausfällt.
Aus Symmetriegründen gilt auch $\sphericalangle GPL = 90°$.
Daher steht GP auf der Ebene durch L, M, N senkrecht, so daß AP Höhe der Pyramide $AKLM$ ist.
Mithin erhält man für das Volumen V der Pyramide mit den Eckpunkten A, K, L, M den Wert

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6}a\sqrt{3} \cdot \frac{a^2}{8}\sqrt{3} = \frac{5}{48}a^3.$$

Klassenstufe 10

1. Angenommen, es gibt eine Lösung, dann muß $\ddot{A} = 1$ sein, da die fünfstellige Summe zweier vierstelliger Zahlen kleiner als 20000 ist.
Sei die aus den drei Ziffern R, Z und T gebildete (möglicherweise mit 0 beginnende) dreistellige Zahl mit x bezeichnet, so muß gelten:
$2(1000A + x) = 10000 + 10x + E$, also
$2000A + 2x - 10000 - 10x = E$ und damit
$8(250A - 1250 - x) = E$, also $8 \mid E$.
Da E eine einstellige natürliche Zahl ist, kommen nur $E=0$ oder $E=8$ in Frage.
Für $E=0$ folgt sofort

$$250A - 1250 = x,$$

also $\quad 10(25A - 125) = x$
und somit $10 \mid x$.
Das aber ist nur möglich für $T=0$, was auf den Widerspruch $T=E$ führen würde.
Also ist eine Lösung nur möglich für $E=8$.
In diesem Falle erhält man

$$250A - 1250 - x = 1$$

$$250(A-5) = x + 1$$

$$A = 5 + \frac{x+1}{250}$$

Da A eine einstellige natürliche Zahl ist, folgt, daß der Quotient $\frac{x+1}{250} (>0)$ eine natürliche Zahl kleiner als 5 sein muß.
Ist er 1, 2, 3 bzw. 4 so ergibt sich jeweils
$x = 249$,
$x = 499$,
$x = 749$ bzw. $x = 999$.
Da nach den Bedingungen der Aufgabe x aus drei verschiedenen Ziffern bestehen muß, kommen höchstens 749 und 249 in Frage. Für $x = 749$ erhält man $A = 8$, was im Widerspruch zu $E = 8$ steht. Für $x = 249$ erhält man $A = 6$. Die somit als einzige verbliebene Möglichkeit
$A = 1$, $E = 8$, $R = 2$, $Z = 4$, $T = 9$, $A = 6$
erfüllt alle Bedingungen der Aufgabe, da diese Ziffern sämtlich verschieden sind und da

$$\begin{array}{r} 6249 \\ +\ 6249 \\ \hline 12498 \end{array}$$

gilt.

Hinweis: Sollte die Lösung durch systematisches Probieren gefunden worden sein, so ist nur dann volle Punktzahl zu geben, wenn die Lösung mit ausreichendem Text versehen ist. Insbesondere muß nachgewiesen worden sein, daß es genau eine Lösung gibt.

2. Wegen $\overline{AB} = \overline{AD}$ und $\overline{BC} = \overline{DC}$ ist $ABCD$ symmetrisch zu AC, so daß $\overline{BM} = \overline{DM}$ ausfällt.
Daher ist die zu beweisende Behauptung mit $\frac{a}{b} = \frac{\overline{AM}}{\overline{CM}}$ äquivalent.
Bezeichnen nun r den Inkreisradius und im Dreieck ABC h die Länge der Höhe auf die Gerade durch A und C sowie $I\,(\triangle XYZ)$ den Flächeninhalt des Dreiecks XYZ, so gilt

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{2}ar}{\frac{1}{2}br} = \frac{I\,(\triangle AMB)}{I\,(\triangle CMB)} = \frac{\frac{1}{2}h \cdot \overline{AM}}{\frac{1}{2}h \cdot \overline{CM}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{CM}},$$

w. z. b. w.

(Fortsetzung siehe Heft 5/75.)

XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

(DDR-Olympiade)

Aufgaben der Olympiadeklasse 11/12

1. Man beweise, daß für alle reellen Zahlen a, b, c, d mit

$$0 < a \leq b \leq c \leq d$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d} \text{ ist.} \qquad (1)$$

Man gebe notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, daß in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

2. Von einem Dreieck seien die Innenwinkel gemessen worden. Die Summe der dabei (als Näherungswerte der wahren Innenwinkelgrößen) erhaltenen Meßwerte u, v, w sei $180° + \delta$ mit $\delta \neq 0°$. Durch drei Korrekturwerte x, y, z sollen die Meßwerte so verändert werden, daß die Summe der dann entstehenden Werte $u+x$, $v+y$, $w+z$ gleich 180° ist.
Es ist zu beweisen, daß für alle unter diesen Bedingungen möglichen Korrekturwerte x, y, z der Wert $S = x^2 + y^2 + z^2$ genau dann am kleinsten ist, wenn $x = y = z = -\frac{\delta}{3}$ *gilt.*

3. In einem Mathematikzirkel, in dem Eigenschaften von Funktionen f bei Kehrwertbildung untersucht werden, vermutet ein Zirkelteilnehmer, allgemein gelte für Funktionen f, die in einem Intervall J definiert sind und nur positive Funktionswerte haben, der folgende Satz:
(A) Ist f in J streng konkav so ist $\frac{1}{f}$ in J streng konvex. Ein anderer Zirkelteilnehmer meint, es gelte auch der folgende Satz:
(B) Ist f in J streng konvex, so ist $\frac{1}{f}$ in J streng konkav. Man untersuche jeden dieser Sätze auf seine Richtigkeit.
Hinweise:
1) Genau dann heißt $f(x)$ in J streng $\begin{Bmatrix}\text{konvex}\\ \text{konkav}\end{Bmatrix}$, wenn für je drei Zahlen x_1,

x^*, x_2 aus J mit $x_1 < x^* < x_2$ der auf der von den Punkten $(x_1; f(x_1))$ $(x_2; f(x_2))$ begrenzten Sehne gelegene Punkt dessen Abszisse x^* ist, eine Ordinate hat, die $\begin{Bmatrix}\text{größer}\\ \text{kleiner}\end{Bmatrix}$ als $f(x^*)$ ist.

2) Mit $\frac{1}{f}$ ist die durch die Festsetzung

$g(x) = \frac{1}{f(x)}$ für alle Zahlen x des Intervalls J definierte Funktion g bezeichnet.

4. Man ermittle alle Paare $(x; y)$ reeller Zahlen x und y, für die die Gleichungen

$$24x^2 - 25xy - 73x + 25y - 35 = 0 \qquad (1) \text{ und}$$
$$x^2 - y^2 - 2x - 2y - 7 = 0 \text{ gelten.} \qquad (2)$$

5. Ist P ein Punkt im Innern eines regelmäßigen Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$, so seien die Abstände, die P von den vier Seitenflächen des Tetraeders hat, mit x_1, x_2, x_3, x_4 bezeichnet. Mit h sei der Abstand bezeichnet, den A_4 von der Fläche des Dreiecks $A_1A_2A_3$ hat.

a) Man beweise, daß es genau einen Punkt P^* im Innern von $A_1A_2A_3A_4$ gibt, für den alle vier Abstände x_1, x_2, x_3, x_4 den Wert $\frac{h}{4}$ haben.

b) Man beweise, daß für alle Punkte P im Innern des Tetraeders das Produkt $x_1x_2x_3x_4$ genau dann seinen größten Wert annimmt, wenn P mit dem in a) genannten Punkt P^+ zusammenfällt.

Von den nachstehenden Aufgaben 6A und 6B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

6A. Es sei n eine natürliche Zahl mit $n \geqq 2$. Jemand schreibt n Briefe, von denen jeder für genau einen unter n verschiedenen Adressanten vorgesehen ist, und steckt in jeden von n Umschlägen genau einen dieser Briefe, ohne vorher die Adressen auf die Umschläge zu schreiben. Da er nun nicht mehr weiß, in welchem Umschlag sich welcher Brief befindet, schreibt er willkürlich die n Adressen auf die n Umschläge (auf jeden Umschlag genau eine Adresse).

Man beweise: Die Wahrscheinlichkeit q_n dafür, daß bei keinem der Adressaten der an ihn gerichtete Umschlag den für ihn vorgesehenen Brief enthält, hat den Wert

$$q_n = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2!} + (-1)^3 \cdot \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}.$$

Hinweis: Man bezeichne jede überhaupt mögliche Verteilung der Briefe an die Adressaten (jeder Brief an genau einen der Adressaten) als einen „möglichen Fall". Unter diesen bezeichne man jede Verteilung, bei der für keinen Adressaten der an ihn gerichtete Umschlag den für ihn vorgesehenen Brief enthält, als einen „günstigen Fall". Die Anzahl aller möglichen Fälle sei a_n genannt, die Anzahl aller „günstigen Fälle" g_n. Dann ist die genannte Wahrscheinlichkeit q_n definiert als

$$q_n = \frac{g_n}{a_n}.$$

6B. In der Ebene sei der „Abstand" zwischen zwei Punkten wie folgt definiert: Sind P_1 und P_2 zwei beliebige Punkte, die in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Koordinaten $(x_1; y_1)$ bzw. $(x_2; y_2)$ haben (x_1, x_2, y_1, y_2 seien reelle Zahlen), so sei ihr „Abstand"

$$d(P_1; P_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}.$$

Man ermittle die Menge M aller Punkte der Ebene, die bezüglich des so definierten Abstandes von den Punkten $A\ (0; 2)$ und $B\ (1; 4)$ gleichweit entfernt sind.

Preisträger stellen Aufgaben

Harry Reimann: Es seien $m \geqq 3$, $n \geqq 1$ und $k \geqq 1$ natürliche Zahlen. Im Raum seien n verschiedene m-Ecke gegeben, die paarweise genau einen Eckpunkt gemeinsam haben. Jeder der Eckpunkte der n m-Ecke sei der gemeinsame Eckpunkt von genau k m-Ecken. Es ist zu zeigen, daß dann stets $k \leqq m$ gelten muß.

Ralph Lehmann: In der Ebene seien ein Kreis vom Radius 1 sowie n beliebige Punkte P_1, P_2, ..., P_n gegeben.

a) Man zeige, daß auf der Peripherie des Kreises ein Punkt P mit $\overline{PP_1} + \ldots + \overline{PP_n} \geqq n$ existiert.

b) Man zeige, daß auf dem Rand eines beliebigen dem Kreis umbeschriebenen Dreiecks ein Punkt Q mit $\overline{QP_1} + \ldots + \overline{QP_n} \geqq 2n$ existiert.

Uwe Schäfer: Gegeben sei ein Kreis k mit dem Radius r und dem Mittelpunkt M sowie ein Punkt A mit $A \in k$. Auf der Tangente t durch den Punkt A sei ein Punkt B mit $\overline{AB} = a$ gegeben. Man konstruiere auf der Parallele p zu t durch M einen Punkt C, der nicht innerhalb des Kreises k liegt, mit folgender Eigenschaft: Wenn die Gerade AC den Kreis k in einem zweiten Punkt $D \neq A$ schneidet, so gilt $\overline{AB} = \overline{CD}$.

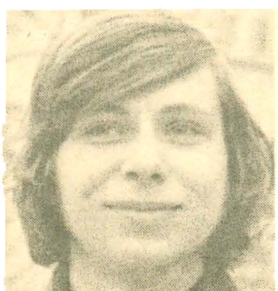
Thomas Maiwald: Es sind alle reellen Zahlen x zu ermitteln, für die die Gleichung

$$x^4 - \frac{13}{2}x^3 + 12x^2 - \frac{13}{2}x + 1 = 0$$

erfüllt ist.

Preisträger der XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Einen ersten Preis erhielten:



obere Reihe, von links:
Kl. 10: Uwe Schäfer, EOs „Dr. Th. Neubauer", Cottbus (aus Kl. 9);
Kl. 10: Werner Hoffmann, EOS Mühlhausen;
Kl. 10: Thomas Maiwald, EOS Zittau (aus Kl. 9);
mittlere Reihe, von links:
Kl. 12: Harry Reimann, EOS „Heinrich Hertz", Berlin;
Kl. 12: Ralph Lehmann, EOS „Diesterweg", Strausberg;
Kl. 12: Bernd Zaddach, Spezialkl. der Humboldt-Univ.;
links:
Kl. 12: Helmut Roßmann, EOS „Friedrich Engels", Neubr.

Beruf gesucht

Erik Tet 5501 Hamma	Tim Meckt 2841 Haar	Thea Tim 8601 Merka	Thea Eik 2421 Tramm

Fachlehrer Dieter Knape, Jessen

Vor-, Nach- und Beinamen

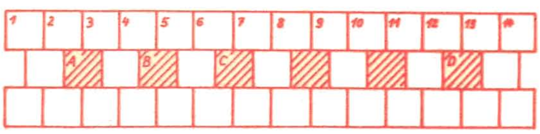
Im folgenden sind die Vor-, Nach- oder Beinamen von berühmten Mathematikern und Physikern genannt, dazu die zugehörigen Lebensdaten. Es sind die jeweils fehlenden Namen (also zum Vor- der Nachname usw.) zu finden; die Anfangsbuchstaben der zu erratenden Namen ergeben den Namen eines berühmten Mathematikers, der von 1601 bis 1655 lebte.
Giuseppe (1858 bis 1932), Newton (1643 bis 1727), Albert (1879 bis 1955), Dedekind (1831 bis 1916), Johannes (1436 bis 1476), Noether (1882 bis 1935), René (1596 bis 1650), Galois (1811 bis 1832), Jean Baptiste Joseph de (1768 bis 1830), Cartan (1869 bis 1951), Bernhard (1826 bis 1866), Planck (1858 bis 1947), Niels Henrik (1802 bis 1829), von Milet (um 624 bis 547 v. u. Z.).

Dipl.-Math. Ch. Pollmer, z. Z. NVA

Silbenrätsel

Aus den Silben
bel - ber - de - ein - ent - ep - funk - ge - gen - gramm - heits - ka - ko - kreis - kreis - län - li - lon - me - mil - nus - on - pa - quo - ra - si - sym - tan - te - ter - ti - trie - ur - wahr - wert

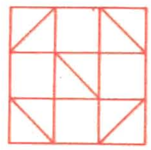
sind 14 dreisilbige Wörter nachstehender Bedeutung zu bilden und in die Figur einzutragen. Dabei haben je zwei Wörter eine gemeinsame Mittelsilbe, die unter den angegebenen Silben jeweils nur einmal aufgeführt ist. Aus den Anfangsbuchstaben dieser Mittelsilben erhält man einen in Klasse 9 eingeführten mathematischen Begriff, wenn man in die mit ***A, B, C*** und ***D*** gekennzeichneten Felder noch je einen der Vokale *a, i, o* und *u* einfügt.



Die Wörter bedeuten:
1. Einheit der Masse
2. Durchmesser eines Geschosses
3. Gerade, die eine Kurve berührt
4. Teil eines Koordinatensystems auf der Erdkugel
5. Graph einer quadratischen Funktion
6. unbegrenzte gerade Linie
7. eindeutige Abbildung
8. Ergebnis einer Division
9. Kreis mit dem Radius $r=1$
10. Merkmal einer Aussage
11. bei der Spiegelung entstehende geometrische Verwandtschaft
12. Gerät zur Eichung von Längen (aufbewahrt in Paris)
13. eine Winkelfunktion
14. griechischer Buchstabe

Oberstudienrat K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin

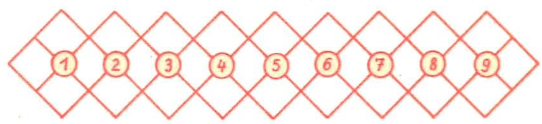
In einem Zug



Die Figur soll ohne abzusetzen nachgezeichnet werden. Dabei darf keine Verbindung zweier Punkte zweimal benutzt werden; auch dürfen sich keine Schnittpunkte mit schon benutzten Verbindungsstrecken ergeben.

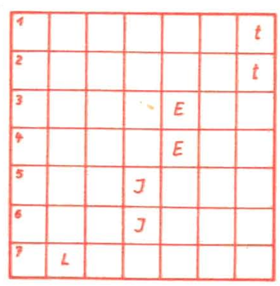
Oberlehrer Dipl.-Mathematiklehrer K. Becker, Lübtheen

Mathematische Begriffe



Die Buchstaben von 9 der 12 mathematischen Begriffe Bild, Term, neun, Wert, Ecke, wahr, Zahl, zwei, plus, Satz, Stab und zehn sind so in das folgende Schema einzusetzen, daß in jedem Feld ein Buchstabe steht und daß in den vier Feldern um einen mit Nummern versehenen Kreis beim Lesen in zyklischer Reihenfolge jeweils das Wortbild eines der 9 gewählten mathematischen Begriffe steht.

Mathematikfachlehrer W. Träger, Döbeln



Kreuzworträtsel

Ergänze das folgende Schema! Die Buchstaben in den Feldern 1 bis 7 ergeben einen Ausruf des bekannten Mathematikers *Archimedes*.
Waagerecht: 1. bekannter Mathematiker (1862 bis 1943); 2. Begriff aus der Mengenlehre; 3. gleichmäßig gekrümmte Linie (existiert für jedes Dreieck); 4. englischer Friedensnobelpreisträger, Mathematiker; 5. Kegelschnitt; 6. Winkelfunktion; 7. Teilgebiet der Mathematik

Mathematikfachlehrer M. Linde, Damme

Der Abakus

1. Der Abakus als Urahn vieler Generationen von Rechengeräten

Im Heft 4/1972 unserer Zeitschrift ist die „счёты ученические“ beschrieben worden. Sie ist als „Russische Rechenmaschine“ in der Rechentechnik schon seit 1812 bekannt. Noch heute gibt es nahe Verwandte von ihr, der chinesische Suan-phan und der japanische Soro-ban. Sie sind in Ostasien im Gebrauch und werden dort in Schule und Wirtschaft verwendet.

Gehen wir zurück bis auf die kulturelle Frühzeit der Völker, so treffen wir auf den Urahn dieser drei Rechengeräte. Es ist der Abakus, das Rechenbrett. Er war eine Stein-, Metall- oder Holztafel, auf der in Spalten zwischen eingeritzten Linien Rechensteine als Ziffernsymbole eingesetzt wurden. Dieser Abakus hat sich in mancherlei Abwandlungen der Gestalt und Handhabung bis in unsere Zeit erhalten.

Wir wollen nicht jede Station des Entwicklungsweges dieser frühen Rechentechnik untersuchen, sondern uns nur mit den beiden bekanntesten Vertretern des klassischen Rechenbretts, dem griechischen und dem römischen Abakus, befassen. Im wesentlichen sollen die Grundelemente des Aufbaus der einzelnen Geräte und die Regeln ihrer Handhabung gezeigt werden. Es wird in der uns vertrauten Art von rechts nach links gerechnet, und zwar meist nach dem Dezimalsystem. Jede Spalte entspricht einer Zehnerstelle und die Symbole darin, seien es nun Steinchen oder andere Dinge, einer Einheit. Neu wird die sogenannte „Fünferbündelung“ sein. Das ist das Zusammenfassen von je 5 Einheiten zu einer besonderen Einheit unter einem eigenen Symbol oder in einer eigenen Spalte.

2. Der „Griechische Abakus“, auch „Salaminische Tafel“ genannt

Er ist das Musterbeispiel eines klassischen Abakus. Seinen anderen Namen hat er von der griechischen Insel Salamis, wo 1846 ein Exemplar aufgefunden wurde. Dies ist eine Marmortafel, 1,50 m mal 0,75 m groß, also von der Größe einer Tischplatte. Wahrscheinlich wurde er auch mit einem Fuß als Rechentisch benutzt.

Denkt man sich nun als Rechner an der unteren Längsseite stehend, dann fallen in jeder Hälfte eine Gruppe von senkrechten, parallelen Linien auf, die in den Marmor eingeritzt sind. Links sind 10, rechts 4 Spalten gebildet, in die die Rechensteine als Ziffernsymbole eingesetzt wurden. Dann sind noch unten, links und oben Zeilen von griechischen Schriftzeichen. Es sind Buchstaben, die Zahlen und Münzwerte darstellen, ein Beweis dafür, daß die Tafel für geschäftliche Zwecke geschaffen wurde (Bild 1). Diese Zeichen sind entweder Gedächtnishilfen gewesen wie die Gebührentabellen auf unseren Postanweisungen, oder man hat an ihnen zur Erleichterung der Rechnung die Steine dafür abgezählt bereitgehalten.

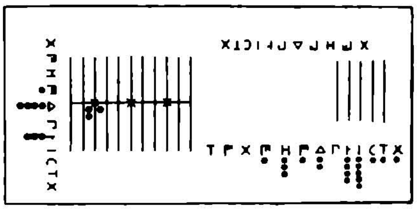
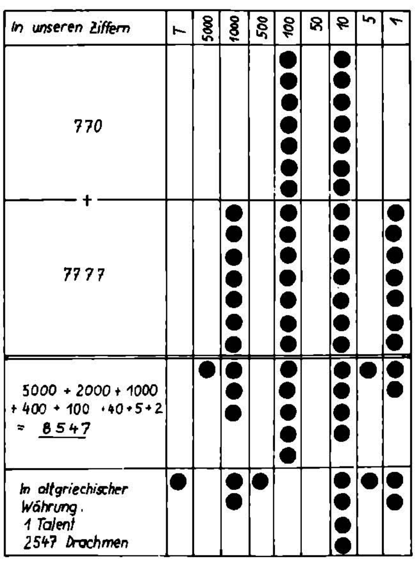


Bild 1

Die linken, längeren Spalten waren für die Münzwerte, deren Einheit die Drachme, ein Silberstück, war. Von der ersten Spalte rechts beginnend, haben wir nach links: 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000, 5000 Drachmen und 1 Talent, das 6000 Drachmen galt, für die es aber kein Münzstück gab. Die Reihenfolge der Spalten war nicht rein dekadisch, also in Zehnerpotenzen, sondern dazwischen lag jeweils deren Fünffaches (Bild 2).

Die rechten, kürzeren Spalten waren für das Kleingeld, die Kupfermünzen, die Bruchteile der Drachme waren, bestimmt. 1 Obolos $= \frac{1}{6}$ Drachme, $\frac{1}{2}$ Obolos $= \frac{1}{12}$ Drachme, $\frac{1}{4}$ Obolos $= \frac{1}{24}$ Drachme und 1 Chalkos $= \frac{1}{8}$ Obolos $= \frac{1}{48}$ Drachme.

Bild 2



Die Rechenregeln lernt man am besten beim Lösen von Aufgaben. Rechenbrett sei ein Bogen Papier, den man mit 9 Spalten versieht (Bild 2). An den Kopf jeder Spalte setzt man die Zahlenwerte wie angegeben. Als Rechensteine dienen Mühle- oder Damesteine.

Wir wollen die Aufgabe lösen: 770 + 7777.

Man setzt erst – noch ohne Berücksichtigung der 5er-Spalten – die Steine für beide Zahlen nacheinander ein. Dann entsteht folgende Lage: In einer Einer-Spalte 7 Steine, in der 10er-Spalte 14 Steine, in der 100er-Spalte 14 Steine und in der 1000er-Spalte 7 Steine. Nun kommt die Vereinfachung durch Umsetzen der Steine.

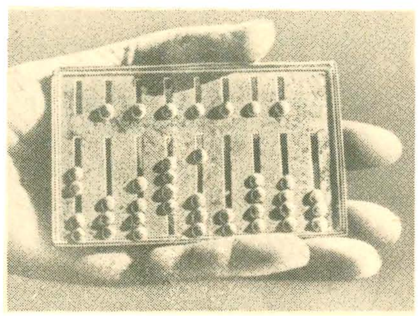
In der Einer-Spalte nehmen wir von den 7 Steinen 5 weg und setzen dafür einen Stein in die 5er-Spalte, 2 Steine bleiben in der Einer-Spalte. In der Zehner-Spalte nehmen wir 10 Steine weg und setzen dafür einen Stein in die 100er-Spalte. In der 10er-Spalte sind es dann noch 4 Steine. Nun kommen von den 15 Steinen (14 + 1) in der 100er-Spalte 10 weg, dafür ein Stein in die 1000-Spalte und statt der restlichen 5 Steine ein Stein in die 500er-Spalte. Jetzt sind 8 Steine in der 1000er-Spalte. Davon 6 Steine weg und ein Stein in die Talent-Spalte, bleiben 2 Steine in der 1000er-Spalte. Das Resultat ist: 1 Talent 2547 Drachmen.

Bei der an sich einfachen Rechnung ist größte Aufmerksamkeit nötig. Die „Salaminische Tafel“ war bis um das 4. Jh. v.u.Z. in Gebrauch. Dann kam mehr und mehr das schriftliche Rechnen auf.

3. Der „Römische Handabakus“, der Taschenrechner der Antike

Auch die Römer benutzten den griechischen Abakus. Aber für den Gebrauch in Schule, Haushalt und kleinen Geschäften haben sie ein kleines handliches Gerät erfunden, den „Römischen Handabakus“. Im Bild 3 sieht man eine kleine Bronzetafel, nur 9 cm mal 12,5 cm groß, also knapp Postkartenformat. Im Bau und Handhabung bestehen Ähnlichkeiten mit der „Salaminischen Tafel“. Er ist aber schon eine Weiterentwicklung des alten Abakus, zwar noch keine Rechenmaschine, aber schon ein mechanisches Gerät. In die Bronzeplatte sind zwei Reihen Schlitze eingeschnitten, in denen sich verschiebbare

Bild 3



Knöpfchen befinden. Dieser Abakus war wieder zunächst für Geschäfte bestimmt; denn er ist für Geldrechnung eingerichtet.
In der unteren Reihe der längeren Schlitze beginnt die Reihenfolge und damit der Stellenwert im Dezimalsystem vom 3. Schlitz rechts mit der Einheit der römischen Währung 1 As. Dann folgen nach links 10 As, 100 As usw. bis zu 1 Million As. Die Fünferbündelung wird hier durch die kürzeren oberen Schlitze ersetzt. Unten sind 4 Knöpfchen, oben ist nur 1 Knopf, der das Fünffache der unteren Einheit gilt mit Ausnahme des ersten Schlitzes von rechts, bei dem ein Knopf das Sechsfache zählt. Man kann so in jeder Dezimale Ziffern bis zu 9 Einheiten (4+5) darstellen.
Die Knöpfchen zählen nur, wenn sie zur Mitte hingezogen sind. In der Randstellung sind sie stumm. Die beiden Schlitze ganz rechts unten sind wieder für das Kleingeld bestimmt. Die zweite Spalte von rechts gilt eine Uncia $=\frac{1}{12}$ *As* und hat als einzige 5 Knöpfchen. Die erste Spalte gilt abschnittsweise für $\frac{1}{2}$ U. $=\frac{1}{24}$ As, $\frac{1}{4}$ U. $=\frac{1}{48}$ As und $\frac{1}{3}$ U. $=\frac{1}{36}$ As.
Zwischen den oberen und unteren Schlitzreihen sind die Zeichen für die Stellenwerte in altrömischen Symbolen angebracht (Bild 4). Zur Erläuterung stehen unsere heutigen arabischen Ziffern darunter in Klammer.

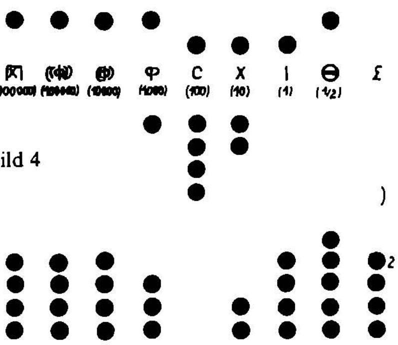
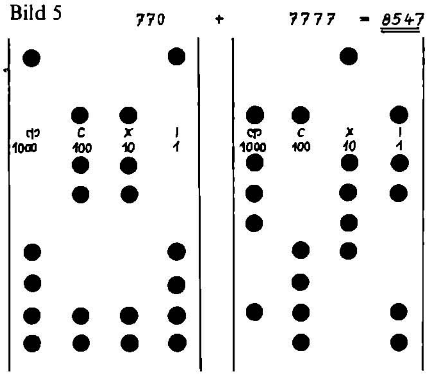


Bild 4

Um das Rechnen auf einem wirklichen Abakus zu üben, basteln wir dazu ein Modell. Man nimmt am besten starken Karteikarton im Format A5 (14,8 cm mal 21 cm) und macht dazu erst eine Vorzeichnung auf Millimeterpapier. Das erspart unnötige Arbeit mit Zirkel und Maßstab. Die 8 oberen Schlitze werden 3 cm, die 9 unteren 6 cm lang. Die Abstände zwischen den einzelnen Schlitzen und den beiden Schlitzreihen betragen je 3 cm. Die Zeichnung wird auf den Karton geheftet und durchgepaust. Man kann auch durch die Zeichnung hindurch die Schlitze mit einem scharfen Messer einschneiden. Dann werden am zweckmäßigsten Briefverschlußklammern als Knöpfchen in der nötigen Anzahl (45 Stück) durch die Schlitze gesteckt. Um ein gegenseitiges Behindern beim Verschieben zu vermeiden, dürfen die Stiele nicht länger als 1 cm sein. Zwischen die beiden Schlitzreihen wird ein Streifen mit den entsprechenden Zahlenzeichen geklebt.
Nun rechnen wir die gleiche Aufgabe wie vorhin: 770+7 777.
Verliert dabei nicht die Geduld! Sagt nicht: „Das kann man doch schneller auf dem Papier rechnen!" Das konnten die Römer eben nicht, genauso wenig wie die Griechen. Mit den römischen Zahlen war das sehr schwierig. Also nochmal: Konzentrierte Aufmerksamkeit und genaues Kopfrechnen!
Jetzt zur Aufgabe. Wir legen das Schema (Bild 4) daneben. Für die Zahl 770 bleibt der Einer-Schlitz leer. Dann schieben wir im 10er-Schlitz 2 untere Knöpfe zur Mitte, ebenfalls den oberen Knopf. Dasselbe erfolgt im 100er-Schlitz. Nun nehmen wir die Zahl 7 777 dazu. Im Einer-Schlitz unten 2 Knöpfe zur Mitte, den oberen ebenfalls. Im 10er-Schlitz soll nun die Zahl 140 erscheinen (70+70). Also unten 4 Knöpfe zur Mitte.

Bild 5


Für die restlichen 100 kommt 1 unterer Knopf im 100er-Schlitz zur Mitte. Im 100er-Schlitz soll jetzt 1 500 ausgedrückt werden (100+700+700). Es kommen also der obere Knopf zur Mitte, die 4 Knöpfe unten wieder in Ruhestellung und im 1 000er-Schlitz 1 Knopf unten zur Mitte. Schließlich muß im 1 000er-Schlitz 8 000 erscheinen (1 000+7 000). So kommen noch 2 Knöpfe unten zur Mitte, im ganzen also 3, und der obere Knopf auch zur Mitte. Dann haben wir das Resultat 8 547. Bei dieser ersten Aufgabe werden am besten außer dem Schema noch Papier und ein Stift benutzt. Für alle Phasen der Rechnung läßt sich diese Aufgabe nicht skizzieren. Im Bild 5 sind deshalb nur die Zahl 770 und das Endresultat dargestellt. Die Zwischenrechnungen müssen im Kopf oder auf dem Papier gemacht werden. Weitere Aufgaben können selbst ausgedacht werden.

M. Detlefsen

Literaturhinweis:
Wer sich weiter mit der Mathematik des Altertums beschäftigen möchte, dem sei das Lehrbuch von Prof. H. Wußing empfohlen: Mathematik der Antike, Verlag B. G. Teubner, Leipzig, 1964.

15 Jahre Mathe+LVZ

● 15 Jahre Mathe-Olympiaden in Leipzig. – Am 13. Juni 1960 ging die erste *Olympiade Junger Mathematiker* zu Ende. Ein Kollektiv von Mathematiklehrern wählte aus über 200 interessierten Schülern die Besten aus, überreichte Urkunden und gab damit den Startschuß für eine intensive Förderung der Jugend.

● 15 Jahre aktive Unterstützung der außerunterrichtlichen Arbeit im Fach Mathematik durch die *Leipziger Volkszeitung*. In ununterbrochener Folge gab die LVZ jeweils zu Ehren des Geburtstages der Pionierorganisation „Ernst Thälmann" am 13. Dezember die nunmehr zur Tradition gewordene „Mathe-LVZ" heraus (Gesamtauflage 1 000 000): Mit Zirkel und Rechenstab – Mathe · international – Mathe-Olympiaden (I) – Mathe · heiter – Mathe · Rechenvorteile – Mathe · unterhaltsam – Mathe und Sport – Mathe · Astronautik und Aeronautik – Mathe und Bauwesen – Mathe und Verkehrserziehung – Mathe und Fachunterricht – Mathe · Olympiaden (II) – Mathe · modern
Die neue Mathe-LVZ (13. 12. 1975) lautet: Geometrie · (k) ein Stiefkind.

● Seit 12 Jahren erscheint monatlich auf der Jugendseite der LVZ eine Aufgabe unter dem Motto: *Mathe-Quiz*. Weit über 100 000 Einsendungen zeugen vom Interesse vor allem junger Leser für die Mathematik.

● Jedes Jahr sind rund 2 000 Pioniere und Jugendfreunde Gäste der „Wissensstraße Mathematik" zum Pressefest der LVZ. Sie werden vom *alpha*-Club der 29. OS Leipzig (*Leitung:* StR J. Lehmann, VLdV, Chefred. der *alpha*) betreut.
Zu unseren beiden *alpha*-Wandzeitungen (Seite 88/89):
In diesem Jahr werden (wie in jedem Jahr) Arbeitsblätter (gestaffelt nach Klassenstufen 1 bis 8/10) ausgegeben: An Tischen haben die interessierten Schüler die Möglichkeit zum Rechnen, d. h. ihr Wissen und Können zu erproben. Die Mitglieder des *alpha*-Clubs korrigieren die Arbeitsblätter (Format A3). Bei gutem bzw. sehr gutem Abschneiden wird die Urkunde (siehe Abb.) ausgefüllt und dem Teilnehmer überreicht. Außerdem stellt die LVZ jedes Jahr Preise zur Verfügung. Punktspiegel für Klasse 5: Aufgabe 1: 3 Punkte, 2/2 P., 3/2 P., 4/4 P., 5/2 P., 6/3 P., 7/2 P., 8/2 P.; 20 bis 18 P. – sehr gut, 17 bis 13 P. – gut. (Jedes Jahr werden Arbeitsblätter mit neuem Inhalt bereitgestellt.)

alpha-Wandzeitung für Klasse 4

(1) 917 Pioniere wurden beim Pioniertreffen in vier Schulen untergebracht. Die erste Schule nahm 305, die zweite Schule 186 und die dritte Schule nahm 202 Pioniere auf.

In der vierten Schule wurden [   ] Pioniere untergebracht.

(2) Knut will die Zahl der Fenster errechnen, die auf einer Seite des Hochhauses zu sehen sind. In 14 Stockwerken sind es jeweils 9 Fenster. Im Erdgeschoß beträgt die Zahl der Fenster nur den dritten Teil, weil dort Türen sind.

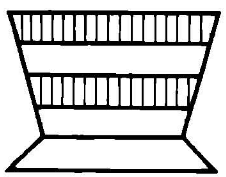
Das Hochhaus hat [   ] Fenster an einer Seite.

(3) Welche Zahlen mußt du für a, b und c einsetzen?

$34 + a = 40$
$40 : 10 = b$
$b \cdot a = c$
$c : (a-b) + 44 = 56$

(4) Wieviel Trapeze findest du in dieser Figur?

[   ] Trapeze



(5) Lieber Koch, sag uns doch,
wieviel Faschingspfannkuchen
sind mit Senf gefüllt?
Darauf meint er:
"Zählt zur Zahl der senfgefüllten neun hinzu,
nehmt mal neun -
so sind es neun mehr als
neunundneunzig."
Gleich habt ihr es heraus.

Es sind [   ] senfgefüllte Pfannkuchen.

(6) Setze die Zahlen 1,2,2,3,3,4,5,5,6,7,8,8 so in die Felder ein, daß die Summe jeder Zeile gleich 18 ist!

7			1
6			4

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	zus.
richtig:									
falsch:									

Name   Vorname   Klasse   Schule

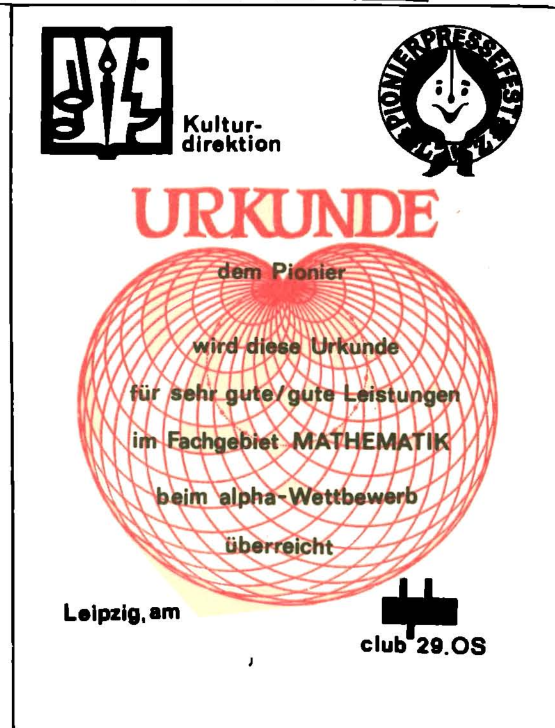
(7) Welche Zahlen kannst du für die Buchstaben im Quadrat einsetzen, wenn folgendes bekannt ist:
J ist die Hälfte von K,
K ist die Summe von L + 9,
L ist die Differenz zwischen 11 und 14,
die Summe von N und M ist 25.

J		K
	L	
M		N

14		

(8) Für welche natürlichen Zahlen x gilt, daß

$49 > 8 \cdot x > 31$



alpha-Wandzeitung für Klasse 5

(1) Drei Pioniergruppen sammelten insgesamt 700 kg Altstoffe. Die erste Gruppe sammelte 130 kg, die zweite das Doppelte der ersten. Wieviel kg sammelte die dritte Gruppe?

Die dritte Gruppe sammelte [kg] Altstoffe.

(2) Ersetze die geometrischen Figuren durch Ziffern! (Gleiche Figuren bedeuten gleiche Ziffern.)

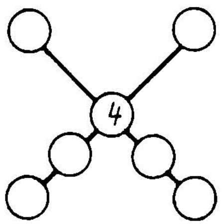
$\square + \square = \triangle$

$\square \cdot \square = \triangle$

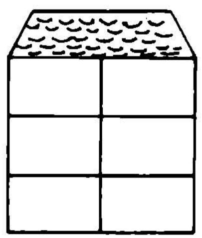
$\triangle - \triangle = \bigcirc$

	+		=	
	·		=	
	−		=	

(3) Trage die Zahlen 3, 5, 6, 7, 8, 9 so in die Kreisflächen ein, daß die Summe auf jeder Geraden 23 beträgt!



(4) In diesem Haus wohnen Jens, Peter, Inge, Horst, Elke und Uwe. Inge wohnt links neben Uwe. Jens wohnt rechts neben Horst. Inge wohnt höher als Horst. Uwe wohnt tiefer als Peter. Peter und Inge wohnen auf verschiedenen Seiten. Wo wohnt jeder einzelne?



(5) Auf dem Rasen sitzt eine Taube. Durch ein Geräusch wird sie aufgeschreckt. Sie erhebt sich in die Lüfte. Bei jedem Flügelschlag steigt sie um 60 cm in die Höhe. Bis zum neuen Flügelschlag sinkt sie um 30 cm. Wieviel Flügelschläge sind nötig, um eine Höhe von 12 m zu erreichen?

Es sind [Flügelschläge] nötig, um eine Höhe von 12 m zu erreichen.

(6) Welche Zahl bedeutet jeder Buchstabe, wenn folgendes bekannt ist:

$P = R : 40$ $\qquad R = M + A$

$M = A \cdot 3$ $\qquad A = 280 : 7$

$P + R + I + M + A = 350$

P	R	I	M	A

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	zus.
richtig:									
falsch:									

Name Vorname Klasse Schule

(7) Welche geraden Zahlen n erfüllen die Ungleichungen?

$11 < 3n + 3 < 22$ [ ]

$17 < n : 3 < 21$ [ ]

(8) Ordne! Schreibe die kleinste Menge zuerst!

6 t	75 dt	8200 kg	60 000 g

Lösungen

Lösungen zu „Lineare Systeme und ihre Beschreibung durch Operatoren" Heft 3/75

1. $(\mathbf{A}(\mathbf{BC}))x = \mathbf{A}(\mathbf{BC}x) = \mathbf{A}(\mathbf{B}(\mathbf{C}x))$,
$((\mathbf{AB})\mathbf{C}x)) = (\mathbf{AB})(\mathbf{C}x) = \mathbf{A}(\mathbf{B}(\mathbf{C}x))$.

2. Das kommutative und assoziative Gesetz gelten für die Operatoraddition, da diese Gesetze für die gewöhnliche Addition gelten und sich unmittelbar übertragen. Die Klammern sind überflüssig, da das Ergebnis von der Art der Zusammenfassung unabhängig ist.

3. $\mathbf{A}(a_1x_1 + a_2x_2) =$ (da additiv) $\mathbf{A}(a_1x_1) + \mathbf{A}(a_2x_2) = a_1\mathbf{A}x_1 + a_2\mathbf{A}(x_2)$ da homogen).
Umgekehrt folgt aus der Definitionsgleichung für die Linearität im Fall $a_1 = a_2 = 1$, daß **A** additiv ist, und im Fall $a_2 = 0$, daß **A** homogen ist.

4. $\mathbf{AB}(a_1x_1 + a_2x_2) = \mathbf{A}(a_1\mathbf{B}x_1 + a_2\mathbf{B}x_2) = a_1\mathbf{AB}x_1 + a_2\mathbf{AB}_2$.
$(\mathbf{A}+\mathbf{B})(a_1x_1 + a_2x_2) = \mathbf{A}(a_1x_1 + a_2x_2) + \mathbf{B}(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1\mathbf{A}x_1 + a_2\mathbf{A}x_2 + a_1\mathbf{B}x_1 + a_2\mathbf{B}x_2 = a_1(\mathbf{A}x_1 + \mathbf{B}x_1) + a_2(\mathbf{A}x_2 + \mathbf{B}x_2) = a_1(\mathbf{A}+\mathbf{B})x_1 + a_2(\mathbf{A}+\mathbf{B})x_2$.

5. $\mathbf{A} = (1+2\mathbf{V})(1+3\mathbf{V})$. $\mathbf{B} = 1 + \mathbf{V}(5+6\mathbf{V})$.
$\mathbf{A} = \mathbf{B} = 1 + 5\mathbf{V} + 6\mathbf{V}^2$.

6. $\mathbf{A}x + \mathbf{AB}f = f$ oder auch $\mathbf{A}x = (1 - \mathbf{AB})f$.

7. $\mathbf{A}t = (1 + a_1 + a_2)t - (a_1 + 2a_2)$ und
$\mathbf{A}t \equiv 0$ für $a_1 = -2$, $a_2 = 1$.

8. $\mathbf{A}z' = (z^2 + a_1z + a_2)z'^{-2}$ und $Az' \equiv 0$
für $z = \frac{1}{2}(-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2})$
sowie für $z = \frac{1}{2}(-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2})$.

Lösungen zu „Kombinatorische Probleme beim Aufstellen einer Fußballmannschaft" Heft 1/75

▲1▲ Für die Wahl des Torwarts besteht genau eine Möglichkeit. Für das Aufstellen der Verteidigerreihe gibt es 24 Möglichkeiten: Denn zunächst gibt es vier Möglichkeiten für die Wahl des Verteidigers mit der Rückennummer 2, nämlich $(B, 2)$, $(C, 2)$, $(D, 2)$ und $(E, 2)$. In jedem dieser 4 Fälle gibt es drei Möglichkeiten für die Wahl des Verteidigers mit der Rückennummer 3. In jeder der damit gegebenen $4 \cdot 3$ Möglichkeiten bestehen wiederum 2 Möglichkeiten für die Wahl des Verteidigers mit der Rückennummer 4. Damit bestehen $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ Möglichkeiten für das Aufstellen der Verteidigerreihe.
Für die Wahl des Läufers mit der Rückennummer 5 gibt es 6 Möglichkeiten. In jedem dieser 6 Fälle gibt es 5 Möglichkeiten für die Wahl des Läufers mit der Rückennummer 6. In jeder dieser $6 \cdot 5 = 30$ Möglichkeiten gibt es 4 Möglichkeiten für die Wahl des Läufers mit der Rückennummer 7. In jedem dieser $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ Fälle gibt es 3 Möglichkeiten für die Wahl des Läufers mit der Rückennummer 8. Für das Aufstellen der Läuferreihe gibt es also $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ Möglichkeiten.
Da der Stürmer N nur die Rückennummer 11 tragen darf, gibt es für die Wahl des Stürmers mit der Rückennummer 9 zwei Möglichkeiten. In beiden Fällen gibt es für die Wahl des Stürmers mit der Rückennummer 10 nur eine Möglichkeit. Für das Aufstellen der Stürmerreihe gibt es also $2 \cdot 1 = 2$ Möglichkeiten. Da das Aufstellen der vier Spielerreihen (Torwart-Verteidigerreihe-Läuferreihe-Stürmerreihe) voneinander unabhängig ist, gibt es $1 \cdot 24 \cdot 360 \cdot 2 = 17\,280$ Möglichkeiten für das Aufstellen der Fußballmannschaft.

▲2▲ Für den Einsatz des Spielers A gibt es 3 Möglichkeiten.
1. Fall: A wird nicht eingesetzt. Dann gibt es $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ Möglichkeiten für das Aufstellen der Läuferreihe.
2. Fall: A wird auf Position 6 eingesetzt. Dann gibt es $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Möglichkeiten für das Aufstellen der Läuferreihe.
3. Fall: A wird auf Position 7 eingesetzt. Dann gibt es ebenfalls wie im 2. Fall 60 Möglichkeiten für das Aufstellen der Läuferreihe.
In allen drei möglichen Fällen gibt es, da alle Aufstellungen voneinander verschieden sind, insgesamt $120 + 60 + 60 = 240$ Möglichkeiten für das Aufstellen der Läuferreihe.

▲3▲ Für den Einsatz der Spieler A und B gibt es 6 Möglichkeiten:

1. Fall: $(A, 5), (B, 6)$	*4. Fall:* $(B, 5), (A, 6)$
2. Fall: $(A, 6), (B, 7)$	*5. Fall:* $(B, 6), (A, 7)$
3. Fall: $(A, 7), (B, 8)$	*6. Fall:* $(B, 7), (A, 8)$

In jedem dieser 6 Fälle gibt es für das Besetzen der übrigen Positionen der Läuferreihe jeweils $3 \cdot 2 = 6$ Möglichkeiten. Insgesamt gibt es also $6 \cdot 6 = 36$ Möglichkeiten für das Aufstellen der Läuferreihe.

▲4▲ Für das Aufstellen des Torwarts gibt es zwei Möglichkeiten. Für das Aufstellen der Verteidigerreihe $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Möglichkeiten. Die Möglichkeit für das Aufstellen der Läufer- und Stürmerreihe überblicken wir mit einer Fallunterscheidung:
1. *Fall:* Der Spieler M wird nicht eingesetzt. Dann gibt es für das Aufstellen der Läuferreihe $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Möglichkeiten, für das Aufstellen der Stürmerreihe $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Möglichkeiten. Im 1. Fall gibt es für das Aufstellen der Mannschaft
$2 \cdot 6 \cdot 24 \cdot 6 = 1\,728$ Möglichkeiten.
2. Fall: Der Spieler M wird als Läufer eingesetzt. Er kann entweder die Rückennummer 5, 6, 7 oder 8 tragen. Für seinen Einsatz gibt es vier Möglichkeiten. Bei jeder dieser vier Möglichkeiten gibt es $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ Möglichkeiten für das Besetzen der anderen Positionen der Läuferreihe. Es gibt also $4 \cdot 24 = 96$ Möglichkeiten für das Aufstellen der Läuferreihe. Für das Aufstellen der Stürmerreihe gibt es $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Möglichkeiten. Im 2. Fall gibt es $2 \cdot 6 \cdot 96 \cdot 6 = 6912$ Möglichkeiten für das Aufstellen der Mannschaft.
3. Fall: Der Spieler M wird als Stürmer eingesetzt. Für das Aufstellen der Läuferreihe gibt es $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Möglichkeiten. Der Stürmer M kann entweder die Rückennummern 9, 10 oder 11 tragen. Für seinen Einsatz gibt es also 3 Möglichkeiten. Für jede dieser Möglichkeiten gibt es für das Besetzen der beiden anderen Stürmerpositionen $3 \cdot 2 = 6$ Möglichkeiten. Es gibt also $3 \cdot 6 = 18$ Möglichkeiten für das Aufstellen der Stürmerreihe. Im 3. Fall gibt es $2 \cdot 6 \cdot 24 \cdot 18 = 5\,184$ Möglichkeiten für das Aufstellen der Mannschaft.
Insgesamt gibt es also $1\,728 + 6912 + 5\,184 = 13\,824$ Möglichkeiten für das Aufstellen der Mannschaft.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb Heft 2/75

5▲1353 Wir rechnen $3 \cdot 24 = 72$, $72 : 4 = 18$, $120 - (72 + 18 + 24) = 120 - 114 = 6$.
Inge besitzt 24 Ansichtskarten aus Finnland, 72 aus der Sowjetunion, 18 aus der ČSSR und 6 aus der Volksrepublik Bulgarien.

5▲1354 Angenommen a Zaunfelder haben keine Latten mehr und weitere b Zaunfelder besitzen noch alle Latten. Dann würden wegen $a = b$ die vorhandenen Latten der b Felder ausreichen, um alle $(a+b)$ Felder mit der halben Anzahl der erforderlichen Latten auszurüsten. Da in den restlichen c Feldern ebenfalls nur die Hälfte der Latten vorhanden ist, müssen wegen $a + b + c = 32$ somit $11 \cdot 32$ Latten, also 352 Latten, erneuert werden.

W 5 ■ 1355 Der rote Stoff sei x Meter lang; dann hat der grüne Stoff eine Länge von $(x - 200)$ Metern, und der weiße Stoff ist $(x - 150)$ Meter lang. Nun gilt

$$\begin{aligned} x + (x - 200) + (x - 150) &= 3250, \\ 3x - 350 &= 3250, \\ 3x &= 3600, \\ x &= 1200. \end{aligned}$$

Die Bahnen des roten, grünen und weißen Stoffes sind 1200 m, 1000 m und 1050 m lang.

W 5 ■ 1356 Wir lösen diese Aufgabe mit Hilfe einer Tabelle.

n	$5 \cdot n$	$5 \cdot n - 2$	
1	5	3	Primzahl
2	10	8	
3	15	13	Primzahl
4	20	18	
5	25	23	Primzahl
6	30	28	
7	35	33	
8	40	38	
9	45	43	Primzahl

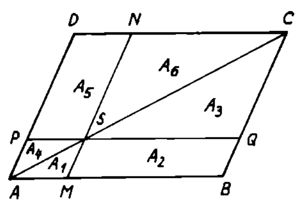
Nur die natürlichen Zahlen 1, 3, 5 und 9 erfüllen die Bedingung der Aufgabe.

W 5*1357 Zunächst lassen sich genau drei einstellige Ziffern 1, 2 und 3 bilden, und es gilt $s_1 = 1+2+3 = 6$. Ferner können folgende zweistellige Ziffern gebildet werden; 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33. Es gilt $s_2 = 11+12+13+$ $+21+\ldots+33 = 198$.
Schließlich lassen sich folgende dreistellige Ziffern bilden:
111, 112, 113, 121, 122, 123, 131, 132, 133, 211, 212, 213, 221, 222, 223, 231, 232, 233, 311, 312, 313, 321, 322, 323, 331, 332, 333.
Hiefür gilt $s_3 = 111+112+\ldots+333 = 5994$. Es lassen sich genau drei einstellige, neun zweistellige und 27 dreistellige Ziffern bilden, und es gilt $s = s_1+s_2+s_3 = 6+198+5994 =$ 6198.

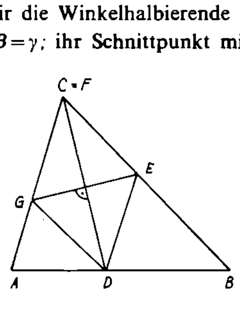
W 5*1358 Wir rechnen $30:6=5$; fünf Schüler erhielten die Note 1. $30-5-16=9$; neun Schüler erhielten die Noten 4 oder 5. Angenommen x Schüler erhielten die Note 5, dann erhielten $2 \cdot x$ Schüler die Note 4. Deshalb gilt $x+2\cdot x=9$, $3\cdot x=9$, $x=3$. Drei Schüler erhielten die Note 5, sechs Schüler die Note 4. Angenommen y Schüler erhielten die Note 3; dann gilt $3<y<6$, also $y=4$ oder $y=5$. Nach e) entfällt $y=5$. Somit erhielten 4 Schüler die Note 3 und 12 Schüler die Note 2.

6▲1359 Aus $100<n<200$ und $7 \mid n$ folgt $n = 105, 112, 119, 126, \ldots, 182, 189, 196$.
Von diesen Zahlen haben die Quersumme 11 genau zwei Zahlen, nämlich 119 und 182.

▲6▲1360 Aus $AB \parallel CD \parallel PQ$ und $AD \parallel BC \parallel MN$ folgt, daß die Vierecke $AMSP$ und $SQCN$ ebenfalls Parallelogramme sind. Jedes Parallelogramm wird durch eine seiner Diagonalen in zwei kongruente Dreiecke zerlegt. Deshalb gilt $A_1 = A_4$, $A_3 = A_6$ und $A_1+A_2+A_3 = A_4+A_5+A_6$. Durch Einsetzen erhalten wir $A_1+A_2+A_3 = A_1+A_5+A_3$. Daraus folgt $A_2 = A_5$, w. z. b. w..



W 6 ■ 1361 Die Diagonalen eines Rhombus halbieren seine Winkel. Nachdem das Dreieck ABC konstruiert worden ist, zeichnen wir die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle ACB = \gamma$; ihr Schnittpunkt mit AB sei D.



Nun zeichnen wir durch D die Parallele zu AC und die Parallele zu BC. Sie mögen BC in E bzw. AC in G schneiden. Das Viereck $DEFG$ ist dann der dem Dreieck ABC einzubeschreibende Rhombus.

W 6 ■ 1362 Es sei x die Anzahl der Schüler, welche die Mathematikarbeit mitgeschrieben haben.
Wegen $\frac{1}{9}+\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$ und $1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$ gilt

$$\frac{1}{9}x+\frac{1}{3}x+\frac{5}{9}\cdot\frac{2}{5}x+\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{2}x+2=x,$$
$$\frac{17}{18}x+2=x,$$
$$\frac{1}{18}x=2, \quad x=36.$$

Es haben 36 Schüler die Mathematikarbeit mitgeschrieben. $\frac{1}{9}\cdot 36=4$ Schüler erhielten die Note 1; $\frac{2}{9}\cdot 36=8$ Schüler erhielten die Note 2; $\frac{1}{3}\cdot 36=12$ Schüler erhielten die Note 3 und $\frac{5}{18}\cdot 36=10$ Schüler erhielten die Note 4.

W 6*1363 Es seien a, b, c, d, e jeweils das Lebensalter von Alfred, Berta, Christa, Dorit und Ernst; dann gilt

$$a+b+c+d+e=33 \quad (1)$$
$$b=2(c+d), \quad (2)$$
$$a=2e. \quad (3)$$

Wir multiplizieren Gleichung (1) mit 2 und erhalten

$$2a+2b+2(c+d)+2e=66.$$

Mit Hilfe von (2) und (3) gewinen wir daraus durch Einsetzen

$$2a+2b+b+a=66,$$
$$3a+3b=66,$$
$$a+b=22.$$

Aus (2) folgt: b ist eine gerade natürliche Zahl; aus (3) folgt: a ist eine gerade natürliche Zahl. Angenommen Dorit, die Jüngste, sei 1 Jahr alt; dann ist Christa wenigstens 3 Jahre alt. Deshalb gilt $b \geqq 2(1+3)=8$. Also ist $b=8$ oder $b=10$. Denn b ist eine gerade natürliche Zahl und kann nicht größer als 10 sein, weil sonst wegen $a+b=22$ a kleiner als b wäre. Für $b=8$ gilt $a=14$ und somit $e=7$. Das ist wegen $b \geqq e+2=9$ nicht möglich. Für $b=10$ gilt $a=12$ und somit $e=6$ und $c+d=5$. Wegen $c \geqq d+2$ gibt es genau eine Lösung, nämlich $d=1$ und $c=4$.
Dorit ist 1 Jahr, Christa 4 Jahre, Ernst 6 Jahre, Berta 10 Jahre und Alfred 12 Jahre alt.

W 6*1364 Angenommen, die Schüler der 5. Klasse haben x kg Altstoffe gesammelt. In der nachstehenden Tabelle sind die Sammelergebnisse von den Schülern der 5. bis 10. Klasse zusammengestellt:

Klasse	Sammelergebnis in kg	Altstoffe in kg
5	x	202
6	$x+20$	222
7	$x+20$	222
8	$1{,}5x+15$	318
9	$1{,}75x+17{,}5$	371
10	$2x+20$	424

$$8{,}25x+92{,}5 = 1759$$
$$8{,}25x = 1666{,}5$$
$$x = 166650:825$$
$$x = 202$$

▲7▲1365 Aus $10^4 = 10000 < 32760$ und $20^4 = 160000 > 32760$ folgt, daß die gesuchten Zahlen größer als 10, aber kleiner als 20 sein müssen. Da das Produkt 32760 auf die Ziffer 0 endet, also durch 5 teilbar ist, muß eine der gesuchten Zahlen ebenfalls durch 5 teilbar sein. Das trifft im angegebenen Intervall nur für die Zahl 15 zu. Wegen $15^4 = 50625$ > 32760 müssen die übrigen drei Zahlen sämtlich kleiner als 15 sein. Wegen $n(n+1)(n+2)(n+3) = 32760$ und $n+3=15$ gilt somit $n=12$.
Die gesuchten Zahlen lauten 12, 13, 14 und 15, und es gilt $12\cdot 13\cdot 14\cdot 15 = 32760$.

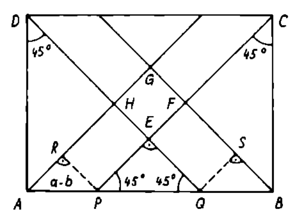
▲7▲1366 Die zweistelligen natürlichen Zahlen, die auf die Ziffer 5 enden, lassen sich in der Form $10n+5$ darstellen mit $n = 1, 2, 3, \ldots, 9$. Nun gilt $(10n+5)^2 = 100n^2+100n+25$ $= n(n+1)\cdot 100+5^2$.
Dieses Verfahren gilt somit für die Berechnung des Quadrats aller zweistelligen natürlichen Zahlen, die auf die Ziffer 5 enden.

W 7 ■ 1367 Angenommen, es waren x Männer anwesend; dann beteiligten sich $x-\frac{1}{3}x=\frac{2}{3}x$ Frauen an der Familienfeier.
Nun gilt

$$x-6=3\left(\frac{2}{3}x-6\right),$$
$$x-6=2x-18,$$
$$x=12.$$

Somit waren 12 Männer und 8 Frauen anwesend.

W 7 ■ 1368 Nach Konstruktion gilt $\sphericalangle BCP$ $=45°$. Wegen $\sphericalangle PBC = 90°$ gilt dann auch $\sphericalangle BPC = 45°$.
Daraus folgt $\overline{BC} = \overline{BP} = b$, also $\overline{AP} = a-b$.
Nach Konstruktion gilt $\sphericalangle ADQ = 45°$. Wegen $\sphericalangle QAD = 90°$ gilt dann auch $\sphericalangle AQD = 45°$.



Daraus folgt $\sphericalangle PEQ = 90°$ und somit auch $\sphericalangle HEF = \sphericalangle PEQ = 90°$ als Scheitelwinkel. Aus analogen Überlegungen folgt, daß sämtliche Innenwinkel des Vierecks $EFGH$ rechte Winkel sind. Wegen $\overline{AD} = \overline{AQ} = \overline{BC} = b$ gilt ferner $\overline{BQ} = a-b$. Fällen wir von P das Lot $\overline{PR}$ auf AH und von Q das Lot $\overline{QS}$ auf BF, dann folgt aus der Kongruenz der Dreiecke

$\triangle APR$ und $\triangle QBS$ schließlich $\overline{PR}=\overline{QS}$, d. h., das Viereck $EFGH$ ist ein Quadrat. Für den Flächeninhalt dieses Quadrates gilt

$$A_Q=\frac{1}{2}\cdot \overline{HF}\cdot \overline{EG}=\frac{1}{2}\cdot(a-b)\cdot(a-b)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot(a-b)^2,$$
$$A_Q=\frac{1}{2}\cdot(8-5)^2\,\text{cm}^2=4{,}5\,\text{cm}^2.$$

W 7*1369 Ein Spielwürfel besitzt insgesamt $1+2+3+4+5+6=21$ Augen. Nun gilt für die Oberfläche eines Würfels $A_1=6a^2$, für die Fläche eines Kreises $A_2=\frac{1}{4}\pi d^2$, für die Oberfläche einer Halbkugel $A_3=\frac{1}{2}\pi d^2$. Für die Oberfläche des Spielwürfels gilt somit

$$A_W=6a^2-21\cdot\frac{1}{4}\pi d^2+21\cdot\frac{1}{2}\pi d^2$$
$$=6a^2+\frac{21}{4}\pi d^2.$$

Für unser Zahlenbeispiel erhalten wir

$$A_W=\left(6\cdot 15^2+\frac{21}{4}\cdot\pi\cdot 2^2\right)\text{mm}^2\approx 1416\,\text{mm}^2.$$

W 7*1370 Es sei s die Maßzahl der Entfernung (in km) von A nach B; dann gilt wegen $t=\frac{s}{v}$ für unser Beispiel

$$\frac{s}{5}=\frac{s}{15}+2,\quad \frac{2s}{15}=2,\quad s=15,$$

d. h., die Orte A und B sind 15 km voneinander entfernt. Für das Durchfahren der halben Wegstrecke von 7,5 km benötigt der Radfahrer $\frac{1}{2}$ h. Für den Umweg benötigte er somit $2\frac{1}{2}$ h. Darum gilt $s_3=v_3\cdot t_3$

$15\frac{\text{km}}{\text{h}}\cdot\frac{5}{2}\text{h}=37{,}5$ km. Der Radfahrer hatte einen Umweg von 37,5 km zu bewältigen.

W 8 ▪ 1371 Wir führen den Beweis indirekt, nehmen also an, daß die in der Aufgabe aufgestellte Behauptung falsch ist. Dann wird keine der angegebenen Fremdsprachen von mindestens 12 Teilnehmern beherrscht. Also kann jede Fremdsprache nur von höchstens 11 Teilnehmern beherrscht werden. Da es sich um 6 Fremdsprachen handelt, wäre also die Anzahl n der Fremdsprachen, die insgesamt beherrscht werden,

$$n\leqq 6\cdot 11=66.$$

Das steht aber im Widerspruch zu der Voraussetzung, wonach jeder der 70 Teilnehmer genau eine Fremdsprache beherrscht, also die Anzahl der Fremdsprachen, die insgesamt beherrscht werden, gleich

$$n=70 \text{ ist.}$$

Daher ist die Annahme falsch, und die aufgestellte Behauptung ist richtig, d. h., es gibt wenigstens eine Fremdsprache, die von mindestens 12 Teilnehmern beherrscht wird, w. z. b. w..

W 8 ▪ 1372 Wegen $AB \parallel CD$ gilt nach den Strahlensätzen

$$\overline{DE}:\overline{AF}=\overline{EM}:\overline{AM}=1:3,$$
$$\overline{EC}:\overline{FB}=\overline{EN}:\overline{BN}=1:3,$$

also $CD \parallel MN$ und daher $AB \parallel MN$.
Daraus folgt weiter

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}}=\frac{\overline{EA}}{\overline{EM}}=\frac{\overline{EM}+\overline{AM}}{\overline{EM}}=1+\frac{\overline{AM}}{\overline{EM}}$$
$$=1+3=4,$$

also $\frac{\overline{MN}}{\overline{AB}}=\frac{1}{4},\quad \overline{MN}=\frac{1}{4}\overline{AB}=\frac{1}{4}a.$

Die Länge der Strecke $\overline{MN}$ ist also gleich $\frac{1}{4}a$.

W 8*1373 a) Der Expreßzug „Aurora" legt auf der Fahrt von Moskau nach Bologoje eine Strecke von 331 km in 2 h 28 min = 148 min zurück. Seine mittlere Geschwindigkeit beträgt daher auf dieser Strecke

$$v_1=\frac{331}{148}\text{km}\cdot\text{min}^{-1}=\frac{331\cdot 60}{148}\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$$
$$=134{,}2\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}.$$

Auf der Fahrt von Bologoje nach Leningrad legt er eine Strecke von 319 km in 2 h 23 min = 143 min zurück. Seine mittlere Geschwindigkeit beträgt daher auf dieser Strecke

$$v_2=\frac{319}{143}\text{km}\cdot\text{min}^{-1}=\frac{319\cdot 60}{143}\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$$
$$=133{,}8\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}.$$

b) Die beiden Züge mögen sich x min nach der Abfahrt des ersten Zuges von Moskau also um 13 h 43 min $+x$ min treffen. Dann hat der erste Zug eine Strecke von $x\cdot\frac{331}{148}$ km zurückgelegt, da er in 1 Minute $\frac{331}{148}$ km zurücklegt.

Der zweite Zug fährt um 15.58 Uhr von Bologoje ab, also 135 min später, als der erste Zug von Moskau abgefahren ist und noch vor dem Eintreffen des ersten Zuges in Bologoje. Bis zur Begegnung mit dem ersten Zug fährt er daher $(x-135)$ min und legt eine Strecke von $(x-135)\cdot\frac{331}{175}$ km zurück, weil er in 175 min 331 km, also in 1 min $\frac{331}{175}$ km zurücklegt. Da die Summe der von den beiden Zügen gefahrenen Strecke gleich 331 km ist, erhält man die Gleichung

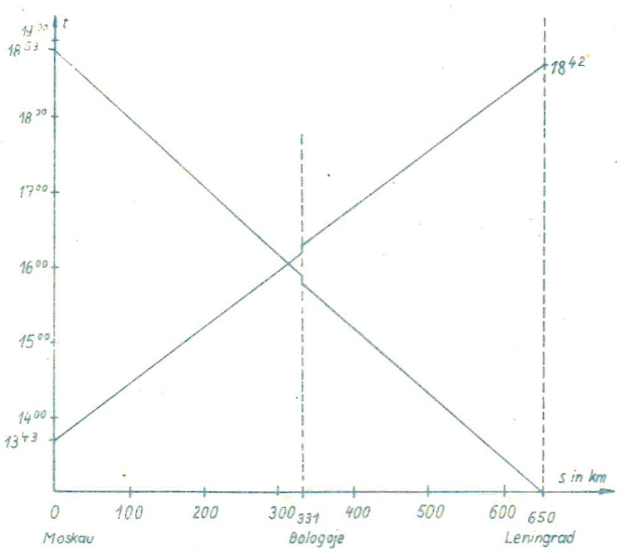
$$x\cdot\frac{331}{148}+(x-135)\cdot\frac{331}{175}=331, \text{ also}$$
$$x\cdot 175+(x-135)\cdot 148=148\cdot 175.$$

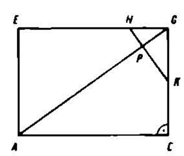
Daraus folgt

$$175x+148x-135\cdot 148=148\cdot 175,$$
$$323x=148\cdot 175+148\cdot 135,$$
$$323x=148\cdot 310,$$
$$x=\frac{148\cdot 310}{323}=142{,}0.$$

Der erste Zug begegnet also dem zweiten Zug 142 min, d. s. 2 h 22 min nach seiner Abfahrt von Moskau, also um 16.05 Uhr.
Er hat dabei eine Strecke von $142\cdot\frac{331}{148}$ km $=$ 317,6 km zurückgelegt. Die beiden Züge begegnen sich also in einer Entfernung von rund 318 km von Moskau.
Die Abbildung zeigt die graphische Lösung dieser Aufgabe. Auf der Abszissen-Achse sind, wie bei graphischen Eisenbahnfahrplänen üblich, die Entfernungen von Moskau abgetragen, auf der Ordinaten-Achse die Uhrzeiten. Der von links unten nach rechts oben verlaufende Streckenzug zeigt den Weg des ersten Zuges, der von rechts unten nach links oben verlaufende Streckenzug den Weg des zweiten Zuges. Beide Streckenzüge schneiden sich in einem Punkt, der der Entfernung 318 km (von Moskau) und der Uhrzeit 16.05 Uhr entspricht.
Die Abbildung zeigt den gesamten Abschnitt von Moskau bis Leningrad, damit die Fahrt der beiden Züge gut veranschaulicht wird. Für die graphische Lösung der Aufgabe hätte es auch genügt, nur den Abschnitt von Moskau bis Bologoje darzustellen, da die beiden Züge sich in diesem Abschnitt begegnen.

W 8*1374 a) Wir bezeichnen die gesuchte Länge der Strecke $\overline{AE}$ mit x (siehe Bild).





Nun gilt $\overline{AB}=a$, $\overline{AD}=\overline{BC}=b$ und nach dem Satz des Pythagoras $\overline{BD}=\sqrt{a^2+b^2}$.
Aus $\sphericalangle BEA=\sphericalangle DAB=90°$, $\sphericalangle ABE=\sphericalangle ABD$ folgt nun

$$\triangle ABE \sim \triangle ABD,$$

also $x:a=b:\sqrt{a^2+b^2}$,

$$x=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

b) Setzt man $a=4$ cm, $b=3$ cm, so wird
$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+9}\text{ cm}=\sqrt{25}\text{ cm}=5\text{ cm}$,

$$x=\frac{4\cdot 3}{5}\text{ cm}=2{,}4\text{ cm},$$

also noch nicht ganzzahlig. Da aber das 5-fache von 2,4 ganzzahlig ist, braucht man für a und b jeweils nur fünfmal so große Werte zu wählen, um auch einen ganzzahligen Wert für x zu erreichen. Man erhält nämlich für $a=20$ cm, $b=15$ cm

$$x=\frac{20\cdot 15}{\sqrt{20^2+15^2}}\text{ cm}=\frac{20\cdot 15}{\sqrt{625}}\text{ cm}$$
$$=\frac{20\cdot 15}{25}\text{ cm}=12\text{ cm, also einen}$$

ganzzahligen Wert, wie es verlangt wurde.

W 9 ■ 1375 Es seien $n, n+1, n+2, n+3$ mit $n>0$ vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen; dann ist die Summe der vier Potenzen entsprechend der Aufgabe gleich

$$s=2^n+2^{n+1}+2^{n+2}+2^{n+3}$$
$$=2^n(2^0+2^1+2^2+2^3)$$
$$=2^n(1+2+4+8)$$
$$=15\cdot 2^n \text{ mit } n\geq 1. \text{ Daraus folgt}$$
$$s=15\cdot 2\cdot 2^{n-1}=30\cdot 2^{n-1}$$

Nun ist 2^{n-1} wegen $n-1\geq 0$ eine natürliche Zahl, also ist die Summe s durch 30 teilbar, *w. z. b. w.*

W 9 ■ 1376 Für alle natürlichen Zahlen k mit $k>0$ gilt

$$k+1>k.$$

Durch Multiplikation auf beiden Seiten dieser Ungleichung mit der positiven Zahl $\frac{1}{k(k+1)}$ folgt $\frac{1}{k}>\frac{1}{k+1}$, also auch $\frac{1}{\sqrt{k}}>\frac{1}{\sqrt{k+1}}$
Setzt man der Reihe nach $k=1, 2, \ldots, n-1$, so erhält man die fortlaufende Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{1}}>\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{3}}>\ldots>\frac{1}{\sqrt{n-1}}>\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Daraus folgt insbesondere

$$\frac{1}{\sqrt{1}}>\frac{1}{\sqrt{n}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{n}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}>\frac{1}{\sqrt{n}},\ \ldots,$$

$\frac{1}{\sqrt{n-1}}>\frac{1}{\sqrt{n}}$. Für die Summe gilt daher

$$s=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n}}.$$
$$s>\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}=n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}.$$

Daher gilt $s>\sqrt{n}$. w. z. b. w.

W 9*1377 Aus $9y<1000$ folgt $y<\frac{1000}{9}=111\frac{1}{9}$, also $y\leq 111$ und hieraus wegen $y=\frac{x}{z}\geq\frac{100000000}{900909}>\frac{100000}{901}>110$ $y=111$.
Aus $z=\frac{x}{111}\geq\frac{100000000}{111}=900900\frac{100}{111}>900900$ und $z\leq 900909$ folgt, da an der letzten Stelle von z die Grundziffer 9 steht, $z=900909$,
also $x=yz=100000899$.
Die Divisionsaufgabe lautet daher

```
100000899 : 111 = 900909
999
 1008
  999
    999
    999
```

W 9*1378 Man zeichnet das Rechteck ABB_1A_1, das außerhalb des Vierecks $ABCD$ liegt, dessen eine Seite mit $\overline{AB}$ zusammenfällt und dessen Seiten $\overline{AA_1}$ und $\overline{BB_1}$ die Länge r haben. Ferner zeichnet man zu den anderen Viereckseiten die entsprechenden Rechtecke BCC_1B_2, CDD_1C_2 und DAA_2D_2.
Ferner zeichnet man um die Eckpunkte A, B, C, D Kreisbogen mit dem Radius r, die jeweils durch die Punkte A_1, A_2 bzw. B_1, B_2 bzw. C_1, C_2 bzw. D_1, D_2 begrenzt sind.
Dann ist das Gebiet G dasjenige Gebiet, das durch diese vier Kreisbogen sowie durch die vier Strecken $\overline{A_1B_1}$, $\overline{B_2C_1}$, $\overline{C_2D_1}$, $\overline{D_2A_2}$ begrenzt wird. Denn jeder Punkt des Gebietes G ist entweder ein Punkt des Vierecks $ABCD$ oder ein Punkt einer der vier Rechtecksflächen oder ein Punkt einer der vier zu den Kreisbogen gehörenden Kreissektoren und umgekehrt.
Bezeichnet man nun die Winkelgrößen des Vierecks mit α, β, γ, δ und die zu den vier Kreissektoren gehörenden Winkelgrößen mit α', β', γ', δ' so gilt, da die Winkel der Rechtecke bei A, B, C, D jeweils gleich 90° sind,

$$\alpha+\alpha'=\beta+\beta'=\gamma+\gamma'=\delta+\delta'=180°,$$

also wegen $\alpha+\beta+\gamma+\delta=360°$
auch $\alpha'+\beta'+\gamma'+\delta'=360°$.
Daraus folgt, daß die vier Kreissektoren sich so aneinander legen lassen, daß sie zusammen eine Kreisfläche mit dem Radius r bilden, daß also ihr Gesamtflächeninhalt gleich πr^2 und der Gesamtumfang der entsprechenden Kreisbogen gleich $2\pi r$ ist.
Ferner gilt
$\overline{A_1B_1}+\overline{B_2C_1}+\overline{C_2D_1}+\overline{D_2A_2}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}=u_0$. Daher ist die Summe der Flächeninhalte der vier Rechtecke gleich

$$r(\overline{A_1B_1}+\overline{B_2C_1}+\overline{C_2D_1}+\overline{D_2A_2})=ru_0.$$

Der Flächeninhalt des Gebietes G ist also gleich $A=A_0+\pi r^2+ru_0$;
der Umfang des Gebietes G ist gleich

$$u=u_0+2\pi r.$$

W 10/12 ■ 1379 Die positive reelle Zahl a sei in zwei Summanden x und y zerlegt. Dann gilt

$$x+y=a, \text{ also } y=a-x.$$

Setzt man nun $x=\frac{a}{2}+t$,
so wird $y=a-x=\frac{a}{2}-t$. Die Summe der dritten Potenzen von x und y ist dann

$$s=x^3+y^3=\left(\frac{a}{2}+t\right)^3+\left(\frac{a}{2}-t\right)^3,$$
$$s=\frac{a^3}{8}+3\cdot\frac{a^2}{4}\cdot t+3\cdot\frac{a}{2}\cdot t^2+t^3+\frac{a^3}{8}-3\cdot\frac{a^2}{4}\cdot t+3\cdot\frac{a}{2}\cdot t^2-t^3,$$
$$s=\frac{a^3}{4}+3\cdot a\cdot t^2.$$

Nun gilt $a>0$ und für alle reellen t
$t^2\geq 0$, also $3\cdot a\cdot t^2\geq 0$.
Daraus folgt
$s\geq\frac{a^3}{4}$ für alle reellen t und $s=\frac{a^3}{4}$ für $t=0$.
Damit ist bewiesen, daß die Summe s der dritten Potenzen der beiden Summanden einen kleinsten Wert besitzt, nämlich $\frac{a^3}{4}$.
Dieser Wert wird angenommen, wenn $t=0$, wenn also

$$x=\frac{a}{2}+0=\frac{a}{2} \text{ und } y=\frac{a}{2}-0=\frac{a}{2},$$

d. h., wenn beide Summanden gleich, und zwar gleich $\frac{a}{2}$ sind.

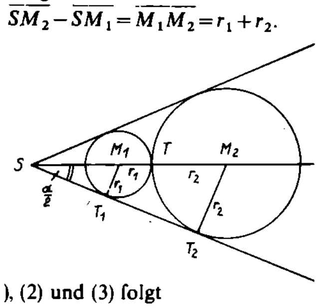
W 10/12 ■ 1380 a) Es seien M_1 und M_2 die Mittelpunkte der Kreise k_1 und k_2, T_1 und T_2 die Berührungspunkte dieser Kreise mit einem der Schenkel des gegebenen Winkels (siehe Bild). Dann liegen die Punkte M_1 und M_2 auf der Winkelhalbierenden dieses Winkels; es gilt also

$\sphericalangle M_1ST_1=\sphericalangle M_2ST_2=\frac{\alpha}{2}$. Ferner gilt
$\sphericalangle ST_1M_1=\sphericalangle ST_2M_2=90°$. Daraus folgt wegen $0<\alpha<180°$, d. h. $\sin\frac{\alpha}{2}>0$,

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{r_1}{\overline{SM_1}}, \text{ also } \overline{SM_1}=\frac{r_1}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \qquad (1)$$
$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{r_2}{\overline{SM_2}}, \text{ also } \overline{SM_2}=\frac{r_2}{\sin\frac{\alpha}{2}}. \qquad (2)$$

Da die Kreise k_1 und k_2 einander von außen berühren, gilt

$$\overline{SM_2}-\overline{SM_1}=\overline{M_1M_2}=r_1+r_2. \qquad (3)$$



Aus (1), (2) und (3) folgt

$$\frac{r_2}{\sin\frac{\alpha}{2}}-\frac{r_1}{\sin\frac{\alpha}{2}}=r_1+r_2,$$
$$r_2-r_1=r_1\sin\frac{\alpha}{2}+r_2\sin\frac{\alpha}{2},$$
$$r_2\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)=r_1\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

und hieraus wegen $\sin\frac{\alpha}{2}<1$

$$\lambda=\frac{r_2}{r_1}=\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}. \qquad (4)$$

b) Für $\alpha=60°$ gilt $\frac{\alpha}{2}=30°$, d. h. $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$, also $\lambda=\frac{r_2}{r_1}=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$. Für $\alpha=90°$ gilt $\frac{\alpha}{2}=45°$, d. h. $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, also $\lambda=\frac{r_2}{r_1}=\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$ $=3+2\sqrt{2}\approx 5{,}83$.

W 10/12*1381 Es sei x eine reelle Lösung der Gleichung

$$(\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}})^{x-4}+(\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}})^{x-4}=2x. \qquad (1)$$

Dann gilt $x\geqq 0$, weil die Summe auf der linken Seite von (1) nicht negativ ist, und sogar $x\geqq 1$, weil $x^2-1\geqq 0$.

Setzt man $z=\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}$, so gilt (2)

$z>0$ und daher wegen $x-\sqrt{x^2-1}>0$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}}\cdot\frac{\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}}=\frac{\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-(x^2-1)}}=\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}.$$

Die Gleichung (1) ist also genau dann erfüllt, wenn

$$z^{x-4}+\frac{1}{z^{x-4}}=2x,$$
$$z^{2x-8}-2x\cdot z^{x-4}+1=0,$$
$$(z^{x-4}-x)^2=x^2-1, \text{ d. h., wenn} \qquad (3)$$

a) $z^{x-4}-x=\sqrt{x^2-1}$ oder b) $z^{x-4}-x=-\sqrt{x^2-1}$. Im Falle a) gilt $z^{x-4}=x+\sqrt{x^2-1}$, also wegen (2)

$$z^{x-4}=z^2.$$

Da Potenzen mit gleicher Basis nur dann gleich sind, wenn die Basis gleich 1 ist oder wenn die Exponenten gleich sind, gilt also $z=1$ oder $x-4=2$.

Nun gilt $z=1$ genau dann, wenn $x+\sqrt{x^2-1}=1$, was wegen $x\geqq 1$ nur für $x=1$ möglich ist.

Damit haben wir die erste Lösung $x_1=1$ der Gleichung (1) erhalten; denn es gilt $(\sqrt{1-0})^{-3}+(\sqrt{1+0})^{-3}=1+1=2=2\cdot 1$. Ist aber $x-4=2$, so gilt $x=6$. Damit haben wir die zweite Lösung $x_2=6$ der Gleichung (1) erhalten; denn es gilt

$$(\sqrt{6-\sqrt{35}})^2+(\sqrt{6+\sqrt{35}})^2=6-\sqrt{35}+6+\sqrt{35}=2\cdot 6.$$

Im Falle b) gilt

$$z^{x-4}=x-\sqrt{x^2-1}=\frac{1}{z^2}=z^{-2}.$$

Das gilt wie im Falle a) nur, wenn $z=1$ oder $x-4=-2$. Da $z=1$ schon unter a) behandelt wurde, erhalten wir nur noch eine dritte Lösung aus $x-4=-2$, d. h. $x_3=2$; denn es gilt

$$(\sqrt{2-\sqrt{3}})^{-2}+(\sqrt{2+\sqrt{3}})^{-2}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}{4-3}=4=2\cdot 2.$$

Die Gleichung (1) hat also genau drei reelle Lösungen, nämlich

$$x_1=1,\ x_2=6,\ x_3=2.$$

W 10/12*1382 Ist T der Berührungspunkt der Tangente, so gilt $\overline{MT}=r$. Bezeichnet man zur Abkürzung $\overline{CT}=x$, $\overline{TD}=y$, so ergibt sich aus dem Höhensatz in dem rechtwinkligen Dreieck CMD die Gleichung

$$r^2=xy, \text{ also } y=\frac{r^2}{x}.$$

Bezeichnet man die Länge der Strecke $\overline{CD}$ mit $f(x)$, so gilt

$$f(x)=x+y=x+\frac{r^2}{x} \text{ mit } x>0.$$

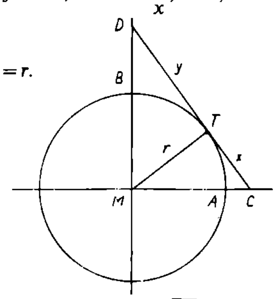
Um nun festzustellen, für welchen Wert von x ein Minimum von $f(x)$ angenommen wird, beachten wir, daß für alle positiven reellen Zahlen a und b gilt:

$$a+b=(\sqrt{a})^2-2\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2+2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+2\sqrt{ab}\geqq 2\sqrt{ab}.$$

Insbesondere gilt $a+b=2\sqrt{ab}$, wenn $\sqrt{a}=\sqrt{b}$, also wenn $a=b$. Daher gilt

$$f(x)=x+\frac{r^2}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{r^2}{x}}=2r$$

$fx=2r$, falls $x=\frac{r^2}{x}$, d. h., $x^2=r^2$, also $x=r$.



Die Länge der Strecke $\overline{CD}$ nimmt also den kleinsten Wert $2r$ an, wenn $x=y=r$, wenn also $\overline{TC}=\overline{TM}=r$ ist. Dann liegt T auf der Winkelhalbierenden des rechten Winkels $\sphericalangle BMA$.

W 10/12 ■ 1383 Angenommen, es sei x eine reelle Zahl, für die die Gleichungen (1) und (2) erfüllt sind. Dann erhält man, indem man (2) von (1) subtrahiert,

$$12x^3+28x^2+6x+14=0,$$

also $\quad 6x^3+14x^2+3x+7=0. \qquad (3)$

Andererseits erhält man aus (1) und (2) durch Addition

$$6x^4+14x^3+12x^2+28x=0,$$

also $x(6x^3+14x^2+12x+28)=0$ und, da $x=0$ nicht Lösung von (1) bzw. (2) ist, $\quad 6x^3+14x^2+12x+28=0. \qquad (4)$

Aus (4) und (3) erhält man weiter durch Subtraktion

$9x+21=0$, also $x=-\frac{21}{9}=-\frac{7}{3}$.

Wenn also das Gleichungssystem (1), (2) überhaupt eine Lösung hat, so kann es nur die Lösung $x=-\frac{7}{3}$ sein. Nun gilt für $x=-\frac{7}{3}$

$$3x^4+13x^3+20x^2+17x+7=\frac{2401}{27}-\frac{4459}{27}+\frac{980}{9}-\frac{119}{3}+7=0,$$
$$3x^4+x^3-8x^2+11x-7=\frac{2401}{27}-\frac{343}{27}-\frac{392}{9}-\frac{77}{3}-7=0,$$

d. h. die Gleichungen (1) und (2) sind erfüllt.

Lösungen zu „Rekursionsformeln als spezielle Operatorgleichungen“ (von S. 73)

1 a) Durch $x_n=\frac{u_n}{v_n}=\frac{u_{n-1}+2v_{n-1}}{u_{n-1}+v_{n-1}}=\frac{x_{n-1}+2}{x_{n-1}+1}$, $x_1=\frac{u_1}{v_1}=\frac{1}{1}=1$ ist x_n eindeutig bestimmt.

b) Elimination von v_{n-1} ergibt $u_n=u_{n-1}+2(v_n-u_{n-1})=-u_{n-1}+2v_n$. Ersetzung von n durch $n-1$ ergibt $u_{n-1}=-u_{n-2}+2v_{n-1}$, erneute Elimination von v_{n-1} ergibt $u_{n-1}=-u_{n-2}+(u_n-u_{n-1})$, also $u_n=2u_{n-1}+u_{n-2}$.

Die zweite Gleichung entsteht analog.

c) Durch Quadrieren entsteht $u_n^2=u_{n-1}^2+u_{n-1}v_{n-1}+4v_{n-1}^2$, $v_n^2=u_{n-1}^2+2u_{n-1}v_{n-1}+v_{n-1}^2$, durch Elimination des gemischten Gliedes $u_n^2-2v_n^2=-u_{n-1}^2+2v_{n-1}^2$, d. h. $y_n=-y_{n-1}$, $y_1=-1$ mit der Abkürzung $y_n=u_n^2-2v_n^2$. Nach Satz 1 folgt $y_n=(-1)^n$ (wegen $y_0=1$).

2. Auflösung nach x_{n+1} ergibt $x_{n+1}=2x_n-x_{n-1}$, jetzt n durch $n-1$ ersetzen.

3. Man setze $x_n=\alpha^n y_0+\beta^n z_0$ in $x_n-ax_{n-1}-bx_{n-2}$ ein, klammere $\alpha^{n-2}y_0$ bzw. $\beta^{n-2}z_0$ aus und benutze $\alpha^2-a\alpha-b=0$, $\beta^2-a\beta-b=0$.

4. Nach Satz 3 gilt $x_n=x_0+ny_0$. Für $n=0$ ist $x_0=1$, für $n=N$ folgt $1-Ny_0=0$, also $y_0=-\frac{1}{N}$.

5. Aus $\lambda^2-\lambda-1=0$ folgt $\alpha=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$, und aus Satz 4 folgt $y_0=\frac{2-\beta}{\sqrt{5}}=\frac{\alpha^2}{\sqrt{5}}$, $z_0=\frac{\alpha-2}{\sqrt{5}}=-\frac{\beta^2}{\sqrt{5}}$.

6. Aus $\lambda^2-2\lambda-1=0$ folgt $\alpha=1+\sqrt{2}$, $\beta=1-\sqrt{2}$, aus Satz 4 im ersten Fall $y_0=\frac{1-\beta}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$, $z_0=\frac{\alpha-1}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$ und im zweiten Fall $y_0=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $z_0=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

7. Nach Satz 3 ist $x_n=\alpha^n(x_0+ny_0)$, und für $n=1$ folgt aus $x_1=\alpha x_0+\alpha y_0$ sofort $y_0=\frac{x_1}{\alpha}-x_0$.

8. Wegen $\cos 0=1$, $\sin 0=0$ stimmt die Lösung für $n=0$ und wegen $\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ auch für $n=1$. Beim Einsetzen von $x_0\cos\frac{\pi n}{4}+x^*\sin\frac{\pi n}{4}$ (mit $x^*=x_1\sqrt{2}-x_0$) in $x_n-\sqrt{2}\,x_{n-1}+x_{n-2}$ heben sich unter Beachtung von $\cos(\varphi-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\varphi+\sin\varphi)$ und $\cos(\varphi-\frac{\pi}{2})=\sin\varphi$ sowie $\sin(\varphi-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\varphi-\cos\varphi)$ und $\sin(\varphi-\frac{\pi}{2})=-\cos\varphi$ alle Glieder weg.

Lösungen zu: alpha-heiter 4/75

Spiel mit Dominosteinen

Mögliche Anordnungen:

0	1	2	3	4
1	2	3	4	0
2	3	4	0	1
4	0	1	2	3

0	1	2	3 5
1	2	5	4 0
2	3	4	5 1
3	4	1	0 2
4	5	0	1 3
5	0	3	2 4

0	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	0
2	3	4	5	6	0	1
4	5	6	0	1	2	3
3	4	5	6	0	1	2
6	0	1	2	3	4	5

Dreistellige Telefonnummern

Die Nummer heißt 8—x—y. Es gibt 5 ungerade Grundziffern, und zwar: 1, 3, 5, 7, 9. Also für x kann man 5 verschiedene Grundziffern nennen und ebensoviel für y. Das kann man als eine Tabelle darstellen:

x \ y	1	3	5	7	9
1	11	13	15	17	19
3	31	33	35	37	39
5	51	53	55	57	59
7	71	73	75	77	79
9	91	93	95	97	99

Ergebnis: $5 \cdot 5 = 25$.

Vierstellige Autonummern

Die Autonummer lautet: 1881

Aufbau der Zahl: $a\ b\ b\ a$

Gleichung: $2(a+b) = 10a+b$ $\quad a=1$

$b = 8a$ $\quad b=8$

Die Lösung $a=b=0$ entfällt, da die Autonummer 0000 nicht existiert.

Die zweite Autonummer lautet: 2099.

Vor-, Nach- und Beinamen

Peano, Isaac, Einstein, Richard, Regiomontanus, Emmy, Descartes, Evariste, Fourier, Elie, Riemann, Max, Abel, Thales: Pierre de Fermat.

Kryptarithmetik

a)
$$\begin{array}{rrr} 3614 & 3941 & 4831 \\ +3614 & +3941 & +4831 \\ \hline 7228 & 7882 & 9662 \end{array}$$

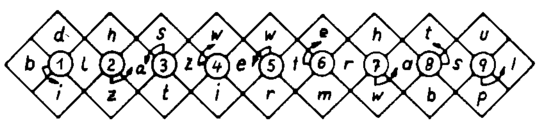
b)
$$\begin{array}{rrr} 1770 & 1880 & 2880 \\ +1770 & +1880 & +2880 \\ \hline 3540 & 3760 & 5760 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} 4660 & 4880 \\ +4660 & +4880 \\ \hline 9320 & 9760 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rr} 4513 & 4531 \\ +4513 & +4531 \\ \hline 9026 & 9062 \end{array}$$

Beruf gesucht – Mathematiker

Silbenrätsel – LOGARITHMUS



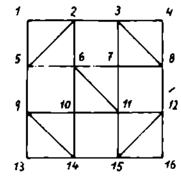
In einem Zug

Zur Angabe einer Lösung numerieren wir die Punkte von 1 bis 16. Um ohne abzusetzen die Figur nachzeichnen zu können, muß der Streckenzug im Punkt 6 beginnen und im Punkt 11 enden oder umgekehrt, da in diesen beiden Punkten jeweils eine ungerade Anzahl von Strecken aufeinandertreffen.

Eine der möglichen Lösungen ist

6, 2, 5, 1, 2, 3, 7, 6, 5, 9, 10, 6, 11, 10, 14, 9, 13, 14, 15, 11, 12, 15, 16, 12, 8, 3, 4, 8, 7, 11.

$$\begin{array}{ccccc} 101 & + & 22 & = & 123 \\ - & & + & & - \\ 25 & - & 2 & = & 23 \\ \hline 76 & + & 24 & = & 100 \end{array}$$



Mathematische Begriffe

Eine mögliche Lösung:

1 MIL	2 KA	3 TAN	4 LÄN	5 PA	6 GE	7 FUNK	8 QUO	9 EIN	10 WAHR	11 SYM	12 LIR	13 KO	14 EP
LI	O	GEN	A	RA	I	TI		HEITS		ME	LI	SI	
GRAMM	BER	TE	KREIS	BEL	DE	ON	ENT	KREIS	WERT	TRIE	TER	NUS	LON

Kreuzworträtsel

1. Hilbert
2. Element
3. Umkreis
4. Russell
5. Ellipse
6. Kosinus
7. Algebra

HEUREKA

Kleines Mathematik-Sprachlexikon Teil 4

Gleichungen ·

Уравнения · Equations · Equations

Beispiel zur Lösung einer Gleichung

Пример решения уравнений

Example for solving an equation

Exemple (modèle) pour solutionner une équation

(1) $\frac{7(x-2)}{3}+\frac{1}{5}=\frac{73}{15}$

(2) $35(x-2)+3=73$

(3) $35x-70+3=73$

$35x-67=73$

(4) $35x=140$

(5) $x=4$

(1) Multiplizieren Sie beide Seiten (jedes Glied) mit dem Hauptnenner!

Умножить обе части уравнения (каждый член) на общий знаменатель!

Multiply both sides (each term) by the least common denominator!

Multipliez les deux côtes (chaque terme) par le dénominateur commun!

(2) Lösen Sie die (runden) Klammern auf!

Раскрыть скобки!

Remove the parantheses!

Ouvrez les paranthèses!

(3) Addieren Sie 67 auf beiden Seiten!

Прибавить к обеим частям уравнения 67

Add 67 to both sides!

Additionnez (ajoutez) 67 aux deux côtés!

(4) Teilen Sie beide Seiten durch den Koeffizienten von x!

Разделить обе части уравнения на коэффициент при x

Divide both sides by the coefficient of x!

Divisez les deux côtés par le coefficient de x!

Diskutieren Sie das Ergebnis aus der Sicht der Mengenlehre!

Характеризуйте результат с точки зрения теории множеств!

Discuss the result from the standpoint of the thory of stees!

Discutez le résultat par le point de vue de la théorie des ensembles!

Im Variablenbereich X ist $x=4$ das einzige Element, das die gegebene Gleichung zu einer wahren Aussage macht. (Die Lösungsmenge S besteht aus einem einzigen Element: $S=\{4\}$.)

В области переменной X единственным элементом, который делает данное уравнение истинным, является $x=4$. (Множество корней состоит только из одного элемента: $S=\{4\}$.)

In the range X of variables, $x=4$ is the only element making the given equation a true statement. (The solution set S consists of only one element: $S=\{4\}$.)

Dans la zone X des variables, $x=4$ est le seul élément qui fait l'équation donnée à une vraie proposition. (L'ensemble S des solutions se compose d'un seul élément: $S=\{4\}$.)

Dreiecke

Треугольники · Triangles · Triangles

Schiefwinkliges Dreieck

Произвольный треугольник

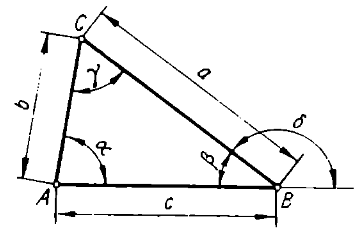
oblique or scalene triangle · triangle scalène

Seiten a, b, c · стороны a, b, c

sides · côtés

Innenwinkel α, β, γ · внутренние углы

interior angles · angles intérieurs



Außenwinkel δ · внешний угол

exterior angle · angle extérieur

Übung macht den Meister

Aufgaben aus Abschlußprüfungen der Oberschule

Textgleichungen

1968 Für die Bearbeitung von Werkstücken stehen zwei Drehmaschinen zur Verfügung. Die erste Maschine muß zur Bearbeitung 20 Minuten vorbereitet werden und stößt dann alle 14 Minuten ein Werkstück aus. Die zweite moderne Maschine muß 200 Minuten vorbereitet werden und stößt dann alle 2 Minuten ein Werkstück gleicher Art aus.
a) Wieviel Minuten werden bereits bei der Herstellung von 100 Werkstücken eingespart, wenn die modernere Maschine eingesetzt wird?
b) Bestimmen Sie diejenige Stückzahl, zu deren Herstellung beide Maschinen die gleiche Zeit benötigen!

1969 a) Konstruieren Sie ein gleichseitiges Dreieck mit beliebiger Seitenlänge a, und zeichnen Sie eine Höhe h ein!

b) Leiten Sie die Gleichung $h=\frac{a}{2}\sqrt{3}$ ohne Benutzung trigonometrischer Beziehungen her!

1970 Zwei Klassen planen eine Ferienwanderung.
Für gute Leistungen im polytechnischen Unterricht erhalten sie dazu von ihrem Patenbetrieb 360 M. Dieser Betrag soll entsprechend der Schüleranzahl auf beide Klassen aufgeteilt werden. In der einen Klasse sind 26, in der anderen 22 Schüler.
a) Berechnen Sie den Teilbetrag, den jede Klasse erhält!
b) Wieviel Prozent der Gesamtsumme erhält die Klasse mit 26 Schülern?

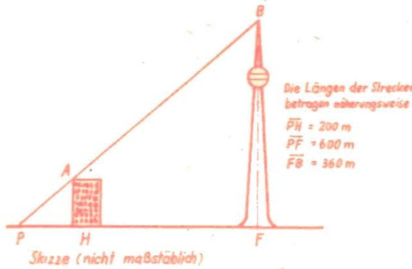
1971 Zur optimalen Auslastung des Transportraumes bei der Beförderung von Speisekartoffeln werden durch die Deutsche Reichsbahn Zielzüge eingesetzt. In einem solchen Zug laufen zwei Wagentypen mit einer Ladefähigkeit von 20 t bzw. 24 t Speisekartoffeln. Der Zug besteht aus 33 Waggons. Er befördert insgesamt 720 t Speisekartoffeln. Berechnen Sie, wieviel Waggons des jeweiligen Typs in diesem Zielzug eingesetzt sind!

1972 Das Produkt aus der Differenz zweier verschiedener Zahlen und einer dritten Zahl sei gleich x.

Geben Sie diesen mathematischen Sachverhalt in Form einer Gleichung mit Hilfe von Variablen an!

1973 Die Differenz zweier natürlicher Zahlen beträgt 6. Das Produkt dieser beiden Zahlen beträgt 216. Ermitteln Sie diese beiden natürlichen Zahlen!

1974 Im Stadtzentrum. Berlins erscheint von einem Punkt P aus der Fernsehturm hinter dem Hotel „Stadt Berlin" so, daß die Punkte P, A und B auf einer Geraden liegen.



a) Ermitteln Sie durch eine Zeichnung im Maßstab 1 : 10000 die Höhe $\overline{HA}$ des Hotels! Geben Sie das Ergebnis in Metern an!
b) Ermitteln Sie die Höhe des Hotels auch rechnerisch! Formulieren Sie einen Antwortsatz!

1975 Im Jahre 1973 wurden im Rahmen des Wohnungsbauprogramms in der DDR 80700 Neubauwohnungen geschaffen.
a) Davon wurden 60 % an Arbeiterfamilien vergeben. Wieviel Wohnungen waren das?
b) Im Jahre 1972 wurden 69500 Neubauwohnungen geschaffen. Berechnen Sie, um wieviel Prozent die Anzahl der 1973 gebauten Wohnungen höher lag als die der 1972 gebauten!

Rechtwinkliges Dreieck
Прямоугольный треугольник
right triangle · triangle rectangle

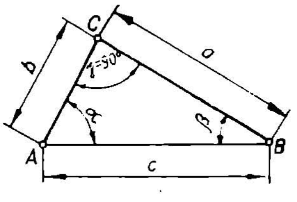
Katheten a, b · катеты a, b
legs or cathetuses · côtes

Hypotenuse c · гипотенуза c
hypotenuse c · hypoténuse c

spitze Winkel α, β · острые углы
acute angles · angles aigus

rechter Winkel γ · прямой угол γ
right angle · angle droit

pythagoreischer Lehrsatz: $a^2+b^2=c^2$ ·
теорема Пифагора $a^2+b^2=c^2$
Pythagorean theorem: $a^2+b^2=c^2$
théorème pythagoréen $a^2+b^2=c^2$



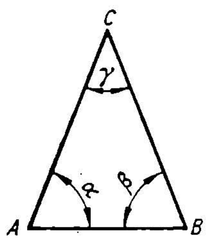
Gleichschenkliges Dreieck
Равнобедренный треугольник
isosceles triangle · triangle isocèle

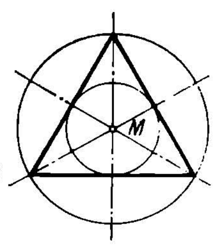
Basis AB · основание AB
base AB · base AB

Schenkel AC, BC
равные стороны AC, BC
lateral sides AC, BC · côtés AC, BC

Basiswinkel α, β · углы при основании α, β
base angles α, β · angles à la base α, β

Winkel an der Spitze γ · угол при вершине γ
vertex angle γ · angle au sommet γ



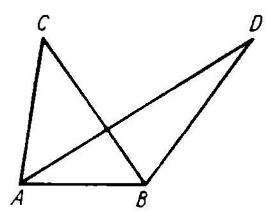


Gleichseitiges Dreieck mit drei Symmetrieachsen
Равносторонний треугольник с тремя осями симметрии
equilateral triangle with three axes of symmetry
triangle équilatéral avec trois axes de symétrie

M Mittelpunkt des In- und Umkreises; Schnittpunkt der Höhen, der Mittelsenkrechten sowie der Seiten- und Winkelhalbierenden

M центр вписанной окружности и описанной окружности; точка пересечения высот, срединных перпендикуляров, медиан и биссектрис углов
M incentre and circumcentre; intersection point of the altitudes, the mid-perpendiculars, the medians, and the bisectors of the angles
M centre de cercle inscrit et cercle circonscrit, point d'intersection des altitudes, des perpendiculaires au milieu, des médianes et des bissectrices

Dreieck ABC gleich Dreieck ABD
($\triangle ABC$ und $\triangle ABD$ sind flächengleich;
$\triangle ABC = \triangle ABD$)
Треугольник ABC равновелик треугольнику ABD ($\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ равновеликие; $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}$)
Triangle ABC equals triangle ABD
($\triangle ABC$ and $\triangle ABD$ are equal in area;
$\triangle ABC = \triangle ABD$)
Triangle
ABC égale triangle ABD.



BÜCHER MIT MATHE

aus dem Teubner-Verlag

J. KUCZERA
Heinrich Hertz
92 Seiten, 8 Abb., Preis: etwa 4,50 M

Heinrich Hertz als Entdecker der elektromagnetischen Wellen ist eine der markantesten Persönlichkeiten der Physikgeschichte.
Sein Leben und sein Werk sind angesichts der Rolle, die die elektromagnetischen Wellen in unserem täglichen Leben spielen, von allgemeinem Interesse.
Aus dem Inhalt: Elternhaus und Schule (1857 bis 1875) – Technisches Studium, Studienwechsel zur Naturwissenschaft (1875 bis 1878) – An der Berliner Universität und in Kiel (1878 bis 1885) – Die erfolgreiche Karlsruher Zeit (1885 bis 1889) – Entdeckung der Radiowellen – Letzte Lebensjahre in Bonn – Zur weltanschaulichen Position von H. Hertz

E. SCHMUTZER/W. SCHÜTZ
Galileo Galilei
152 Seiten, 8 Abb., Preis: 6,90 M

Galilei gehört zu den hervorragendsten Naturwissenschaftlern der Menschheitsgeschichte. Seine Leistung – erzwungen im Kampf gegen ideologische Gegner, gegen Böswilligkeit und Voreingenommenheit während einer Periode durchgreifender gesellschaftlicher Neuorientierung – ist zum Sinnbild der fortschrittlichen Haltung eines Wissenschaftlers und seines Einsatzes für eine dem Menschen helfende Verwendung naturwissenschaftlicher Erkenntnisse geworden.
Aus dem Inhalt: Kindheit und Jugendjahre (1564 bis 1588) – Galileis Wirken in Pisa, Padua und Florenz (1589 bis 1633) – Galileis ideologischer Konflikt mit der kirchlichen Obrigkeit – Galileis wissenschaftliches Vermächtnis in seinen beiden Hauptwerken – Ausblick auf die Newtonsche und Einsteinsche Physik

M. MILLER
Gelöste und ungelöste mathematische Aufgaben
96 Seiten, 7 Abb., Preis: 5,70 M

H. BELKNER
Reelle Vektorräume
174 Seiten, 49 Abb., Preis: 9,50 M

GELFAND/GLAGOLEWA/SCHNOL
Funktionen und ihre graphische Darstellung
127 Seiten, 132 Abb. u. 9 Tafeln, Preis 7,00 M

N. J. WILENKIN
Unterhaltsame Mengenlehre
184 Seiten, 82 Abb., Preis: 6,50 M

J. VYŠÍN
Methoden zur Lösung mathematischer Aufgaben
146 Seiten, 41 Abb., Preis 9,60 M

GELFAND/GLAGOLœWA/KIRILLOW
Die Koordinatenmethode
75 Seiten, 6 Abb., Preis 3,40 M

ZICH/KOLMAN
Unterhaltsame Logik
84 Seiten, 15 Abb., Preis 4,40 M

Eine Aufgabe aus dem BSB B. G. Teubner-Verlag

gestellt von

Dr. R. Thiele

Lektor für Mathematik

▲1386▲ A kennt das Produkt $p=mn$ und B die Summe $s=m+n$ zweier natürlicher Zahlen m und n mit $1<m\leqq n$. A weiß, daß B die Summe s kennt, und B weiß, daß A das Produkt p kennt.
Es ergibt sich folgender Dialog.
A_1: „Ich kenne die Summe s nicht."
B_1: „Das wußte ich. Ich gebe dir den Hinweis, daß die Summe s kleiner als 14 ist.".
A_2: „Ich wußte bereits, daß die Summe s kleiner als 14 ist. Jedoch kenne ich jetzt die Zahlen m und n."
B_2: „Damit kenne ich auch m und n!"
Wie lauten die natürlichen Zahlen m und n?

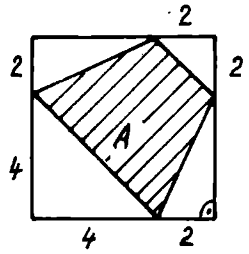
A. KOLMAN
Die vierte Dimension
Etwa 96 Seiten mit etwa 30 Abbildungen, kartoniert, etwa 5,95 M, erscheint voraussichtlich IV. Quartal 75

Aus der Geschichte des Verlages

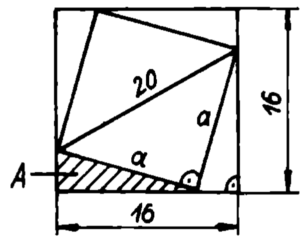
Der BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft stellt einen der ältesten Verlage in der DDR dar. Durch B. G. Teubners Kauf einer Setzerei und Druckerei wurde 1811 der Grundstock für die 1824 eröffnete und bald weithin bekannte Verlagsbuchhandlung gelegt.
Zunächst begann die verlegerische Tätigkeit mit griechischen und lateinischen Textausgaben, die noch nach 150 Jahren Bestandteil des Verlagsprogramms sind. Die Entwicklung der kapitalistischen Wirtschaft in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts und der damit verbundene Aufschwung der Naturwissenschaften führten zur Herausgabe mathematischer Werke. Der Anfang wurde 1849 gemacht. Bald schloß sich die Herausgabe der noch heute existierenden Zeitschrift „Mathematische Annalen" an, in der bereits die namhaftesten deutschen Mathematiker jener Zeit veröffentlichten. Um die Jahrhundertwende gehörte der Teubner Verlag zu den führenden Wissenschaftsverlagen der Welt, so daß z. B. die berühmten Mathematiker O. Hesse, J. Steiner, J. Plücker, H. Graßmann, H. Minkowski, B. Riemann, F. Klein, D. Hilbert und C. Carathéodory Autoren des Verlages waren.
Im Jahre 1911 wurde die Mathematische Bibliothek begründet, die später zur Mathematisch-Physikalischen Bibliothek erweitert wurde und in der bis 1964 etwa 100 Bände erschienen.
Der Beitrag des Teubner-Verlages zur Verwirklichung des „Mathematikbeschlusses" bestand in der Mitarbeit beim planmäßigen Aufbau und der zielstrebigen Entwicklung einer Mathematischen Schülerbücherei, deren erster Band im Teubner-Verlag erschien und deren vorliegende Bände seit über zehn Jahren verständliche Einführungen in die wichtigsten mathematischen Disziplinen bilden.

Gut gedacht ist halb gelöst

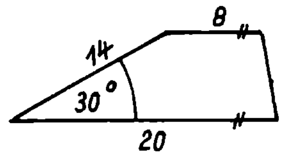
gesucht: A



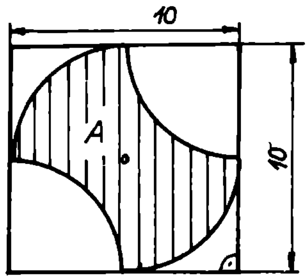
gesucht : A



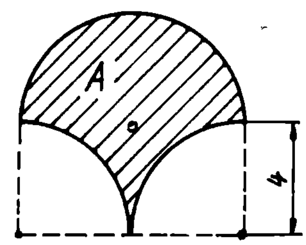
gesucht: A



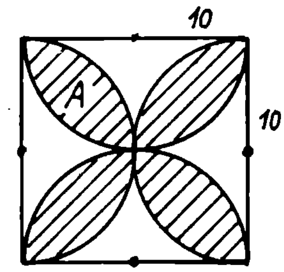
gesucht : A



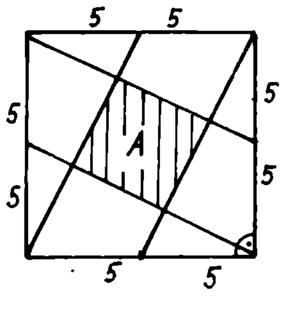
gesucht: A, U (Umfang)



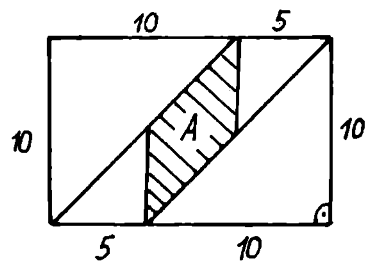
gesucht : A



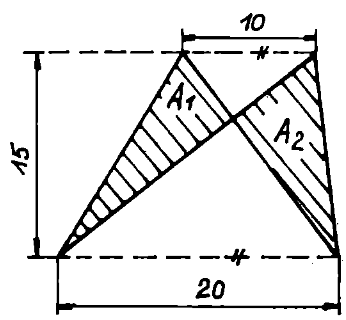
gesucht: A



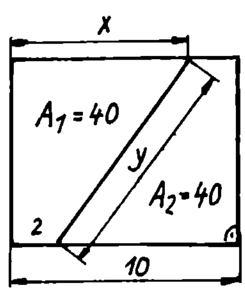
gesucht: A



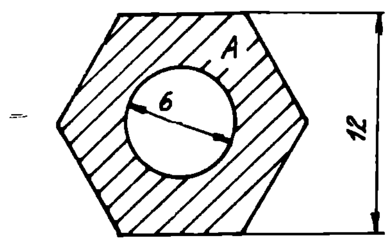
gesucht: A_1 , A_2



gesucht: x, y



gesucht: A



gesucht: A