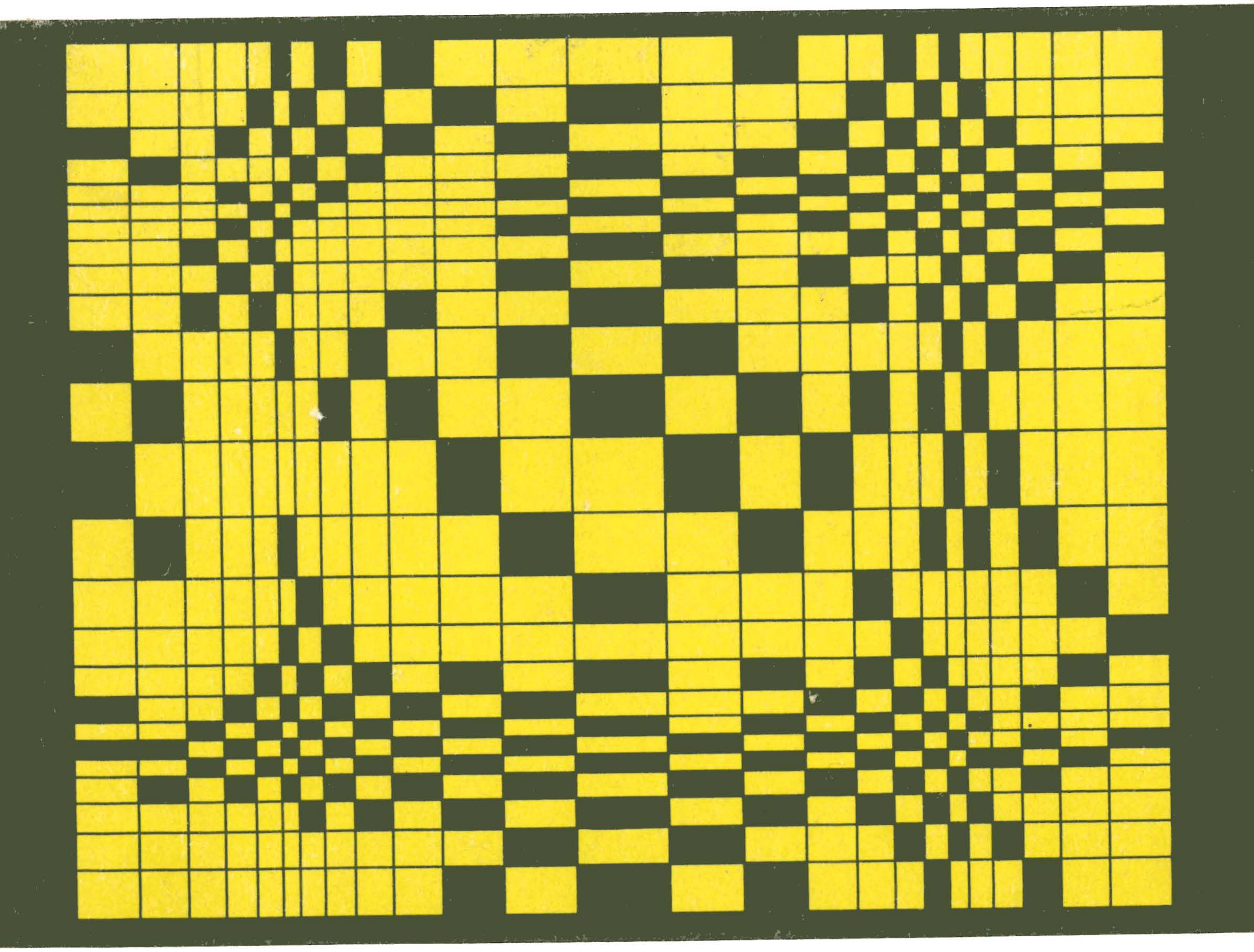
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



1

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
9. Jahrgang 1975
Preis 1,50 M
Sonderpreis für die DDR: 0,50 M
Index 31059

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: H.J. Sprengel, Potsdam (S. 3); J. Lehmann, Leipzig (S. 3, 4, 5); *Vignetten:* K. Mozolewski, Warschau (S. 6); H. Gabbert, LVZ, (S. 10, 13); A. Nekrassow, Moskau (S. 10); NBI 27/69 (S. 12); W. Schubert, Berlin (S. 12); H. Jankofsky, Berlin (S. 12); M. Vorbeck, Berlin (S. 12); M. Bofinger, Berlin (S. 12, 13); E. Eichholz, Berlin (S. 12); K. Vonderwerth, Berlin (S. 13); G. Hilliger, Berlin (S. 13)
Typographie: H. Tracksdorf

Satz: Staatsdruckerei der Deutschen Demokratischen Republik
Rollenoffsetdruck: GG Interdruck, Leipzig
Redaktionsschluß: 27. November 1974

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung und der wissenschaftlich-technische Fortschritt

Die Menschheit befindet sich jetzt in einer Phase ihrer Entwicklung, in der wissenschaftliche Erfolge sehr schnell praktische Anwendung finden, und die Bedürfnisse der Praxis drängen die Wissenschaft, sich neuen Problemen zuzuwenden, neue Forschungsmethoden zu entwickeln. Die Wissenschaft unserer Tage ist untrennbar mit dem täglichen Leben der Gesellschaft verbunden, und von ihr hängt im bedeutenden Maße der weitere gesellschaftliche Fortschritt ab. Ein charakteristischer Zug unserer Zeit ist es ferner, daß mathematische Methoden weite praktische Anwendungen erhalten haben und zu einem der wesentlichen Hilfsmittel des wissenschaftlichen, technischen und ökonomischen Fortschritts geworden sind. Dabei erwarb die mathematische Wissenschaft von den zufälligen Erscheinungen eine besondere Rolle. Es stellte sich klar heraus, daß die Ideen und Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie unentbehrlich sind, um bestimmte physikalische und chemische Theorien aufzustellen, gewisse technische Systeme zu berechnen und medizinische Diagnosen zu stellen, Experimente zu planen und die Daten zu verarbeiten, die sich dabei ergeben. Die Ideen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik wurden in unseren Tagen zu fundamentalen Begriffen der Wissenschaft und Praxis. Über die Ursache dafür und über gewisse allgemeine Fragen der Wahrscheinlichkeitstheorie geht es im vorliegenden Artikel.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung entwickelte sich unter dem Einfluß der beharrlichen Forderungen der Praxis, in der unvermeidliche zufällige Meßfehler auftreten, und auch in Verbindung mit Aufgaben der Demographie und Versicherungen. Das Anfangsstadium der Wahrscheinlichkeitstheorie ist mit den Namen bedeutender Wissenschaftler verbunden: B. Pascal, P. Fermat, C. Huygens, J. Bernoulli u. a. Sie entstand aus dem Streben, die Natur der Dinge zu verstehen und neue Naturgesetze zu finden, und zugleich ein Mittel in die Hand zu bekommen, um das Verhalten von wichtigen Naturerscheinungen und technischen Prozessen vorauszuberechnen. Experimente erhielten in jener Zeit eine entscheidende Bedeutung, und daher spielte die Notwendigkeit, eine Theorie der Meßfehler zu schaffen, eine besondere Rolle. Die ersten Schritte in dieser Richtung wurden von dem großen italienischen Wissenschaftler Galileo Galilei schon im 16.–17. Jahrhundert getan; aber die Entwicklung der Theorie, die bis auf unsere Tage bedeutsam ist, geht auf ein anderes Genie zurück, nämlich den deutschen Gelehrten Karl Gauß.

Im 17. und 18. Jahrhundert richteten die Wissenschaftler wesentlich ihre Aufmerksamkeit auf das Studium der zufälligen Ereignisse und ihrer Wahrscheinlichkeiten; dagegen standen im 19. Jahrhundert die Eigenschaften von Zufallsgrößen im Mittelpunkt des Interesses auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung. In dieser Periode sind wohl die meisten Erfolge in der Wahrscheinlichkeitstheorie mit den Namen französischer und russischer Wissenschaftler verbunden, z. B. mit P. Laplace, S. Poisson, P. L. Tschebyschev, A. M. Ljapunov und A. A. Markov. Es verdient dabei erwähnt zu werden, daß während des ganzen vergangenen Jahrhunderts fundamentale mathematische Resultate erhalten wurden, obwohl die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung ungenau waren und strenge Definitionen fehlten.

Im ersten Viertel unseres Jahrhunderts, zeigte sich mit völliger Klarheit, daß der Begriff Wahrscheinlichkeit ein Grundbegriff der modernen Physik ist und es ohne ihn nicht möglich war, weitere physikalische Gesetze zu formulieren. So entstand die Notwendigkeit, die Wahrscheinlichkeitstheorie logisch aufzubauen. Ohne dies wäre das bedeutende Gebäude der statistischen und Quantenphysik ständigem Angriff ausgesetzt. Außerdem hatte man in dieser Zeit endgültig die fundamentale Rolle der Wahrscheinlichkeitstheorie für die Biologie und Ingenieurwissenschaften, für die Organisation der Produktion und für eine Anzahl anderer Gebiete der Praxis (z. B. der Theorie und Praxis der Nachrichtenverbindungen, Fragen des Transports, der Ökonomie usw.) verstanden. So entstand ein echtes Bedürfnis nach logischer Vervollkommnung der Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie. Dies wurde auch deutlich in dem berühmten Vortrage von D. Hilbert auf dem internationalen Mathematikerkongreß in Paris, in dem er 23 Probleme von fundamentaler Bedeutung aufstellte. Unter der Nummer 6 in dieser Liste stand die Ausarbeitung des axiomatischen Aufbaus der Wahrscheinlichkeitstheorie. Dieses Problem wurde von dem sowjetischen Mathematiker A. N. Kolmogorov auf der Grundlage der Mengentheorie gelöst. Das von ihm vorgeschlagene Axiomensystem ist in der ganzen Welt anerkannt. Auf der Grundlage der Ideen A. N. Kolmogorovs erhielten alle Begriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie einen klaren Sinn.

Aber nicht nur die Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie war die Aufgabe der Wissenschaft des 20. Jahrhunderts. Aktuelle Fragen der Physik, Biologie und anderer naturwissenschaftlicher Gebiete und auch der Technik und Ökonomie forderten mit voller Stimme den Aufbau eines Begriffs, der das Wesen vieler realer Erscheinungen widerspiegelt. Es besteht darin, daß sie sich zeitlich verändern und daß ihre Charakteristiken in jedem Zeitpunkt nicht durch die vorhergehende Entwicklung eindeutig bestimmt sind, sondern vom Zufall abhängen. So entstand ein Begriff, der gegenwärtig eine fundamentale Rolle in Wissenschaft und Praxis spielt – der Begriff des zufälligen (oder stochastischen) Prozesses. Mit diesem Begriff sind nicht nur Erfolge der Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematik im ganzen verbunden, sondern durch ihn ist die Naturwissenschaft unmittelbar mit der Praxis verbunden.

Betrachten wir jetzt einige Beispiele praktischer Situationen, die uns hinführen in die Welt der zufälligen Ereignisse, der Zufallsgrößen und der Zufallsprozesse, d. h. zu den Grundbegriffen der Wissenschaft vom Zufall, nämlich der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die Beispiele machen zugleich die Breite und Wichtigkeit der Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie sichtbar und lassen ihre Bedeutung für den wissenschaftlich-technischen Fortschritt erkennen.

Telefonverbindungen gehören zu einem unerläßlichen Bestandteil unseres täglichen Lebens. Würde man der modernen Menschheit die Möglichkeit zu telefonieren entziehen, so hätte das eine völlige Desorganisation des Lebens der Gesellschaft zur Folge. Werfen wir einen Blick auf Telefonverbindungen von der technischen oder ökonomischen Seite, die uns hier interessiert. Wählen wir irgendein Zeitintervall, etwa von 10 Uhr bis 10.10 Uhr. Wieviel Anrufe von Teilnehmern gehen in dieser Zeitspanne beim Fernamt ein? Wieviel Absagen erhalten die Teilnehmer von ihm, weil die Leitungen besetzt sind oder die Vermittlungen nicht besetzt sind? Diese Fragen sind nicht unnütz, da sie eng mit der Qualität der Telefonverbindungen verbunden sind. Auf diese Fragen zu antworten ist schwierig, weil niemandem bekannt ist, wieviel Teilnehmer in diesem Zeitintervall das Fernamt in Anspruch nehmen. Vielleicht beträgt die Anzahl der Anrufe 0, 1, 2, 3, usw., aber mehr wissen wir nicht über sie. Uns ist aber auch nicht bekannt, wie lange ein begonnenes Gespräch dauern wird. Bekanntlich wird zuweilen eine Telefonverbindung nur für ganz kurze Mitteilungen hergestellt, etwa „ich komme“. Aber man kennt auch den Fall, in dem ein Telefonapparat durch ein ununterbrochenes Gespräch von 10, 15, 20 und mehr Minuten besetzt ist. Die Länge des Gesprächs im voraus festzusetzen ist nicht möglich, sie ist zufällig. Folglich ist auch die Anzahl der besetzten Leitungen in der Zentrale zufällig. Sie verändert sich auf zufällige Weise in der Zeit und kann als Beispiel für einen zufälligen Prozeß angesehen werden. Wie wir aus dem eben Gesagten ersehen, führt uns schon die oberflächliche Betrachtung der Naturerscheinungen, denen man bei der Analyse der Arbeit von Telefonzentralen begegnet, dazu, zufällige Prozesse zu betrachten. In einem gegebenen Zeitintervall I können in der Zentrale $k = 0, 1, 2, \ldots$ Anrufe eingehen. Ereignisse der Gestalt „k Anrufe in I“ heißen zufällig. Dagegen nennt man die Anzahl der wirklich in I eintreffenden Anrufe eine Zufallsgröße. Sie ist eine Zufallsgröße, die nur ganze, nichtnegative Werte annehmen kann. Die Dauer eines Gespräches ist auch eine Zufallsgröße, aber sie kann einen beliebigen nichtnegativen, auch irrationalen Wert annehmen.

Betrachten wir jetzt ein physikalisches Beispiel. Wir beschäftigen uns mit der Erforschung der Radioaktivität einiger Stoffe. Uns interessiert die Energiemenge, die aus einem bestimmten Präparat in einem gegebenen Zeitintervall t austritt. Bekanntlich ist die Zahl der Atome, die in t zerfallen, zufällig; sie nimmt einen der Werte 0, 1, 2, ... an. Wir haben es abermals mit Zufallsgrößen zu tun, nämlich mit der Zahl der zerfallenden Atome und der dabei frei werdenden Energie. Für die Messung der Zahl der zerfallenden Atome gibt es besondere Geräte, z. B. den weithin bekannten Geiger-Müller-Zähler. Aber jetzt fragen wir uns: Gibt es absolut genaue Aussagen dieser Zähler? Um diese Frage zu beantworten, erinnern wir uns an den Aufbau eines solchen Gerätes. Jedes Teilchen, das in den Zähler einfällt, ruft in ihm eine Entladung hervor. Der Zähler bleibt unempfindlich für neue Teilchen bis die nächste Aufladung beendet ist. Somit ist der Zähler ein nicht völlig genaues Gerät. Also entsteht die Frage: Wieviel Teilchen registriert der Zähler in einem vorgeschriebenen Zeitintervall nicht? Offensichtlich ist auch diese Zahl zufällig. Von neuem begegnen wir hier der Notwendigkeit, die Begriffe und Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung heranzuziehen, die sich jetzt nicht auf technische, sondern physikalische Erscheinungen beziehen. Und das Heranziehen der Ideen der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Physik ist keine Ausnahme, sondern eine Regel. Darüber hinaus kam die moderne Physik zu der Schlußfolgerung, daß alle physikalischen Gesetzmäßigkeiten wahrscheinlichkeitstheoretischen Charakter tragen und daß man wahrscheinlichkeitstheoretische Ideen und Begriffe benötigt, um sie zu formulieren. In der Physik zieht man es aber gewöhnlich vor; von statistischen Gesetzmäßigkeiten zu sprechen. Nicht ohne Grund schließt ein so hervorragender Physiker wie Max Born sein neuestes Buch mit den Worten: „Wir wissen, wie vergeblich die klassische Physik kämpfte und sich bemühte, immer neue quantitative Beobachtungen mit vorgefaßten Ideen über die Kausalität in Übereinstimmung zu bringen ... und wie sie gegen das Eindringen des Zufalls einen aussichtslosen Krieg führte. Heute ist die Rangordnung der Ideen umgekehrt: der Zufall wurde zu einem Grundbegriff“.

Etwas später schreibt er: „... Ich glaube, daß der Begriff Zufälligkeit wichtiger ist als der der Kausalität. Übrigens kann man in jedem konkreten Fall über die Beziehung Ursache–Wirkung nur urteilen, wenn man die Gesetze des Zufalls auf die Beobachtungen anwendet.“

Aber vielleicht findet man eine solche Situation nur in der Physik, die so eng mit der Mathematik verbunden ist, daß man schwer unterscheiden kann, wo die Physik beginnt und die Mathematik endet? Verliert vielleicht der Begriff der Zufälligkeit seine Bedeutung in der Medizin, die lange und stolz ihre Unabhängigkeit von der Mathematik aufrechterhalten hat? Wie sich erweist, verhalten sich die Dinge nicht so; und die wahrscheinlichkeitstheoretischen Ideen dringen in die Medizin ein und erhalten eine ernsthafte Bedeutung in Fragen der Diagnostik, Differentialdiagnostik, bei der Auswahl von Symptomkomplexen für die verschiedenen Erkrankungen usw. Wir wollen hier nur auf eine Frage der Organisation des Gesundheitsschutzes eingehen; hier wird offensichtlich, daß man mit den Hauptfragen auf diesem Gebiet nicht fertig wird ohne wahrscheinlichkeitstheoretische Methoden zu nutzen. Wir betrachten die Arbeitsorganisation einer Klinik, die einen bestimmten Bezirk einer großen Stadt betreut. Wieviel Ärzte und Sanitätswagen sind nötig, damit die Patienten mit akuten Erkrankungen nicht länger als eine im voraus gegebene Frist warten müssen, ehe ein Arzt bei ihnen eintrifft? Bei der Antwort auf diese Frage stoßen wir auf eine Reihe von Schwierigkeiten, und zwar: Zunächst, wieviel Forderungen wird es geben und wie verteilen sie sich auf die Zeit einer Schicht? Niemand kann dies voraussagen, weil die Zahl der Forderungen und die Augenblicke ihres Eintreffens zufällig sind. Überdies hängt die Zeit, die der Arzt an einem Krankenbett verbringt, auch vom Zufall ab. Zufällig ist auch die Zeit, die der Arzt aufwenden muß, um von der Klinik zur Wohnung des Kranken zu gelangen. Aber hierin ist der Einfluß des Zufalls nicht erschöpft. Wir weisen nur auf eine weitere Möglichkeit hin. Es wird von Zeit zu Zeit vorkommen, daß der Anruf eines Kranken an ein besetztes Telefon der Klinik gerät. Dadurch wird natürlich die Wartezeit dieses Patienten bis zum Eintreffen des Arztes vergrößert.

Wir verweilen nur noch bei einer Frage. In den letzten Jahren entstand in Verbindung mit der Vergrößerung der Rolle der technischen Systeme und mit der Konstruktion von modernen Flugzeugen, Nachrichtenübermittlungssystemen, Elektrizitätswerken, landwirtschaftlichen Maschinen und medizinischen Apparaturen eine neue Forschungsrichtung, die die Bezeichnung Zuverlässigkeitstheorie erhielt. In dieser Theorie befaßt man sich u. a. mit Maßnahmen, die die Zeit erhöhen, in der die Maschinen störungsfrei arbeiten. Besondere Bedeutung für die Praxis haben zwei Aufgaben, die man bis jetzt nicht als gelöst ansehen kann. Eine von ihnen besteht in der Prognose von Versagern, die andere in der Ausarbeitung von Methoden zur Beschleunigung von Versuchen. Der Sinn der ersten Aufgabe besteht darin, ein System von Kriterien auszuarbeiten, nach denen man im voraus beurteilen kann, ob sich bei einer technischen Anlage während der Arbeit ein gefährlicher Zustand herausbildet, der geeignet ist, das plötzliche Versagen der ganzen Anlage herbeizuführen. Die zweite Aufgabe beruht darauf, daß technische Geräte bei gewöhnlichen Belastungen in der Lage sind, mehrere Jahre einwandfrei zu arbeiten. Versuche zur Prüfung der Qualität solcher Geräte kann man oft nur über kürzere Zeiträume, Monate oder Wochen, erstrecken. Wie kann man bei verhältnismäßig kurzen Versuchen darüber urteilen, wie sich eine große Zahl von Geräten im Verlaufe normaler Arbeitszeiten verhalten wird?

Fortsetzung auf Seite 24

Eine Aufgabe von Prof. Dr. sc.
Boris Gnedenko

Lomonossow-Universität Moskau
Mitgl. der Akademie der Wissenschaften der Ukrainischen SSR

▲1351▲ Gesucht sind alle Werte des reellen Parameters α, für die die Ungleichung

$$\alpha \cdot 9^x + 4(\alpha - 1)3^x + \alpha > 1$$

für alle x besteht.

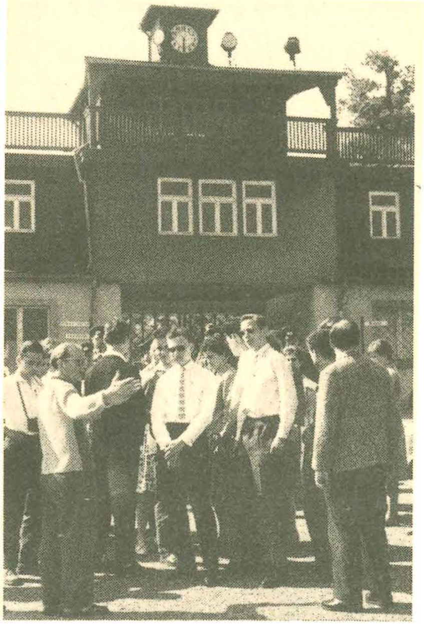
Junge Mathematiker ehren die Opfer des Faschismus

Die Teilnehmer der XVI. *Internationalen Mathematikolympiade* (Erfurt/Berlin 1974) beim Besuch der *Mahn- und Gedenkstätte Buchenwald*

Standhaftigkeit, Kampfgeist und Tatkraft der Millionen aufrechter Antifaschisten seien uns Vorbild in dem Kampf, den wir führen zur Erhaltung und Sicherung des Friedens auf der Welt.

In den Konzentrationslagern, den grauenhaftesten Stätten der Massenvernichtung wurden von den Nazis über 11 Millionen Menschen, Angehörige fast aller europäischen Länder, vergast, erschlagen oder zu Tode gequält.

Auschwitz, Dachau, Maidanek, Mauthausen, Buchenwald, Ravensbrück, Sachsenhausen sind nur einige der vielen KZ-Lager, die in Deutschland und in den von den Nazis okkupierten Ländern Europas errichtet wurden. Für immer werden diese Stätten Anklage erheben gegen die Unmenschlichkeit des Faschismus. Wir gedenken gleichzeitig derer, die im Kampf für die Befreiung des deutschen Volkes ihr Leben ließen.



Teilnehmer der ersten *Olympiade Junger Mathematiker der DDR* (DDR-Stufe 1962) beim Besuch der *Mahn- und Gedenkstätte Buchenwald*

Teilnehmer der VII. *Internationalen Mathematikolympiade* (Berlin 1965) besuchen das sowjetische Ehrenmal in Berlin-Treptow

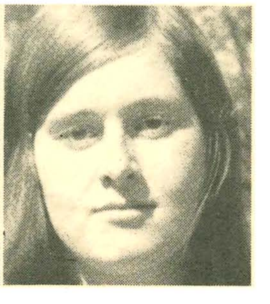
Mädchen meistern Mathematik

Im *Internationalen Jahr für die Frau:* *alpha* stellt die 17 Teilnehmerinnen der XVI. *Olympiade Junger Mathematiker* der DDR (DDR-Ausscheid) vor.



Bezirk	Neubrandenburg	Neubrandenburg	Potsdam
Name	**Sybille Stolzenburg**	**Ute Kuffner**	**Rita Wernsdorf**
Schule	EOS Richard Wossidlo Waren, Kl. 10	EOS „Artur Becker“ Strasburg, Kl. 10	EOS Helmholtz Potsdam, Kl. 11
Beruf des Vaters	Reichsbahn-ingenieur	Lehrer	Dipl.-Wirtschaftler
Tätigkeit des Vaters	Produktions-mechaniker	Lehrer	Sekretär für Sozialpolitik
Beruf der Mutter	Angestellte	Erzieherin	Sekretärin
Tätigkeit der Mutter	Schwangerenberatung	Erzieherin	Sekretärin
Berufswunsch	Chemie	Medizin	Mathematik
Bes. Interessen	Reiten	Sport	Musik
Ges. Funktion	Förderzirkel Mathematik	FDJ-Gruppen-sekretär	Gruppenleitungs-mitglied, Mitglied des Klubaktivs (BKJM)
Auszeichnungen	Abzeichen für gutes Wissen	Abzeichen für gutes Wissen	Lessing-Med. in Silber, Herder-Med. in Silber und Gold
Erfolge in Bez.-Olympiade	72 1. Preis 74 1. Preis	71 1. Pr., 73 3. Pr. 74 1. Preis, 73 Teiln. DDR	72/74 gute Plätze 73 Teiln. DDR
Förderung in Mathematik	Kreisklub Bezirksklub	Kreisklub Bezirksklub	Bezirksklub Korrespondenz-zirkel (DDR)



Bezirk	Dresden	Halle	Karl-Marx-Stadt	Karl-Marx-Stadt
Name	**Almute Mende**	**Kerstin Bachmann**	**Ulrike Glaser**	**Barbara Kilias**
Schule	Pestalozzi-OS Riesa, Kl. 10	A.-H.-Francke EOS, Halle, Kl. 10	Diesterweg OS Karl-Marx-Stadt, Kl. 10	BBS Spinnerei-maschinenbau, Kl. 10
Beruf des Vaters	Dipl.-Physiker	Mathematiker (Prof.)	Lehrer	—
Tätigkeit des Vaters	Fachschuldozent	Hochschullehrer	Lehrer	—
Beruf der Mutter	Berufsschullehrer	Lehrerin	Lehrer	Dipl.-Ing.
Tätigkeit der Mutter	Hausfrau	Invaliden-rentnerin	Lehrer	Abt.-Ltr. für Kader u. Bildung
Berufswunsch	Mathematik	Mathematik	Mathematik	Dipl.-Ing. Maschb.
Bes. Interessen	Musik	Musik, Ru, Zei	Sport, Musik	Musik
Ges. Funktion	Mitgl. der FDJ-Leitung d. Klasse	Funkt. f. Agit. u. Prop.	Schriftführer der FDJ-Gruppe	Kulturobmann
Auszeichnungen	Abz. f. gutes Wissen (Silber), Für hohe L.z. E. d. DDR	mehrere Auszg.	Abzeichen für gutes Wissen (Silber)	Herder-Med. in Bronze, Abz. für gutes Wissen (Bronze, Silber)
Erfolge in Bez.-Olympiade	74 2. Preis	72 1. Preis 73 1. Preis 74 3. Preis	74 1. Preis	74 1. Preis
Förderung in Mathematik	AG Mathematik	Selbststudium	Mathe Zirkel i. Pionierhaus KMSt. Korrespondenzzirkel	Korrespondenz-zirkel

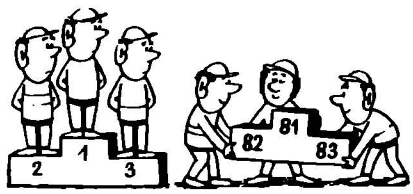
    

Potsdam **Petra Beck** Spezial-EOS Kleinmachnow, Kl. 10	Schwerin **Ilona Drews** EOS Ludwigslust Kl. 9	Schwerin **Ute Lehmann** EOS J. Brinckmann Güstrow, Kl. 10	Suhl **Bärbel Hamm** EOS Artur Becker Suhl, Kl. 11	Cottbus **Sabine Anders** A.-Becker-OS Cottbus, Kl. 10
Dipl.-Lebensmittelchemiker	Lehrer	Ing. für Wasserwirtschaft	Lehrer	Elektriker
Abteilungsleiter	Lehrer	Bereichsingenieur	Päd. Mitarbeiter	Prüffeldleiter
med.-techn. Assistentin	Sekretärin	Reisebürokaufmann	Lehrer	—
Hausfrau	Schulsachbearbeiter	Zweigstellenleiter Reisebüro	Lehrer	pflegerische Hilfskraft
Medizin Bio, Ch, Zeichn. Mitgl. der GOL Mitgl. des Klubaktivs	Mathematik Ph, Rezitation Mitgl. der Lernkommission	— Bio, Ch Mitgl. des Agitationsstabes	Dipl.-Lehrer Ma./Ph. Musik FDJ-Klassengruppenltg., Pioniergruppenleiter	Mathematik Musik Lehrverantwortlicher
		Abzeichen f. gutes Wissen	Abz. f. gutes Wissen (Silber), Abz. f. hohe Leistg. DDR	Abzeichen für gutes Wissen (Silber)
72/74 gute Plätze	73 2. Preis 74 3. Preis	72 2. Pr., 73 2. Pr. 74 3. Preis 73 Teiln. DDR	72 1. Preis 73 3. Preis 74 1. Preis	72 2. Preis 73 2. Preis 74 1. Preis
Kreisklub Bezirksklub	Kreisklub Bezirksklub	Kreisklub Bezirksklub	Schul-AG, Spezialistenlager Math. d. Bez.	Kreisklub Bezirksklub

Rostock **Margit Birnbaum** F.-L. Jahn EOS Greifswald, Kl. 10	Rostock **Angela Rohrbeck** EOS Franzburg Kl. 12	Gera **Heidrun Wabnitz** Spezialschule VEB Carl Zeiss Jena, Kl. 12	Magdeburg **Adriane Ulrich** EOS Wanzleben Kl. 11	Magdeburg **Astrid Kammel** EOS J. Pestalozzi Havelberg, Kl. 10
Dipl.-Biologe	Lehrer	Dipl.-Landwirt	Finanzwirtschaftler	Ing. f. Lebensmittelindustrie
Parteisekretär	Lehrer	Fachlehrer	Ltr. Abt. Rechnungswesen	Werkleiter
Dipl.-Biologe	Lehrer	Sekretärin	Sparkassenangestellte	Industriekaufmann
med.-techn. Assistentin	Lehrer	Sekretärin	Sparkassenangestellte	Planungsleiter
Mathematik Seminargr. Theat. Verantwortl. f. Lernzirkel	Mathematik Theater, Lyrik Lernfunktionär der Klasse	Dipl.-Physiker Ph, Sport, Fremdspr. FDJ-Ltg. (BKJM) stellv. Klassengruppenleiter	Mathematik Literatur, Musik FDJ-Sekretär der Klasse	Mathematik Handball, Musik stellv. GOL-Sekretär
Abzeichen für gutes Wissen (Bronze)	Abzeichen für gutes Wissen (Gold), Herder-Med. in Bronze	Herder-Med. in Silber, Abz. für gutes Wissen (Gold)	Abzeichen für gutes Wissen (Silber)	Herder-Med., Abz. für gutes Wissen (Silber)
72 2. Preis 73 2. Preis 74 1. Preis	72 2. Pr., 73 2. Pr. 74 1. Preis 72/73 Teiln. DDR	72 1. Pr., 73 4. Pr. 74 3. Preis Teiln. DDR 72/73	71 1. Pr., 72 3. Pr. 74 2. Preis Teiln. 72/73 DDR	72 2. Preis 73 1. Preis 74 1. Preis
Kreisklub Bezirksklub	Bezirkslager Mathematik	AG Mathematik Korrespondenzzirkel (BKJM)	Bezirksklub	Schul-AG Bezirksklub

Wer löst mit?
alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 30. April 1975

aus: „Polen" 5/68, Kazimierz Mozolewski

▲5▲1321 Der 1,35 m breite und 3,45 m lange Fußboden des Badezimmers einer Wohnung soll mit quadratischen Fliesen ausgelegt werden, die eine Seitenlänge von 15 cm besitzen und 6 mm stark sind. Es sollen alle dafür benötigten Fliesen übereinander gestapelt werden. Wie hoch wird dieser Stapel?

Mathematikfachlehrer K.-H. Gentzsch, Altenburg

▲5▲1322 In einer Schule sollen in allen Klassenräumen sämtliche Stühle erneuert werden. Dazu wurden 540 Stühle bestellt. Durch eine Teillieferung konnten in fünf Klassenräumen mit je 28 Sitzplätzen und in fünf Klassenräumen mit je 30 Sitzplätzen die Stühle bereits ausgewechselt werden. Es bleiben nur noch Klassenräume mit je 25 Sitzplätzen übrig. Wieviel Klassenräume mit je 25 Sitzplätzen gibt es an dieser Schule?

Sch.

W 5 ■ 1323 In einem volkseigenen Betrieb kämpfen 27 Brigaden um den Titel „Kollektiv der sozialistischen Arbeit". Das sind 11 Brigaden mehr als der vierte Teil der Anzahl aller Brigaden dieses Betriebes. Wieviel Brigaden arbeiten in diesem Betrieb?

W 5 ■ 1324 Von Zimmern eines Studentenwohnheimes sind neun als 4-Bett-Zimmer und drei mehr als 2-Bett-Zimmer eingerichtet. Die restlichen Räume sind 6-Bett-Zimmer. Wieviel Zimmer mit je 6 Betten gibt es in diesem Studentenwohnheim, wenn es insgesamt über 126 Betten verfügt? *Sch.*

W 5*1325 Zu unserer Hortgruppe gehören drei Pioniere mit den Familiennamen Hofmann, Hoschke und Meisel. Ihre Vornamen lauten Dirk, Andrea bzw. Mario. Sie sind entweder neun oder zehn Jahre alt, und sie besuchen die Klasse 4a bzw. 4b. Wie heißen diese drei Pioniere mit Vor- und Familiennamen, wie alt ist jeder von ihnen und welche Klasse wird von ihnen besucht? Von ihnen ist uns folgendes bekannt:

a) Die Pioniere mit dem Vornamen Dirk und dem Familiennamen Hofmann sind Schüler verschiedener Klassen.
b) Dirk ist genau so alt wie der Pionier mit dem Familiennamen Hoschke.
c) Andrea und der Pionier mit dem Familiennamen Hofmann, der der jüngste von den dreien ist, gehen in dieselbe Klasse.
d) Das Mädchen besucht die Klasse 4b.

Hortgruppe 4a/4b, 5. Oberschule Zittau

W 5*1326 Die Summe zweier natürlicher Zahlen beträgt 145. Eine dieser beiden Zahlen wird durch eine Ziffer dargestellt, die auf die Grundziffer 2 endet. Streicht man diese Grundziffer 2, so erhält man die Ziffer, durch die die zweite Zahl dargestellt wird. Wie lauten die beiden natürlichen Zahlen?

Mathematikfachlehrer K.-H. Gentzsch, Altenburg

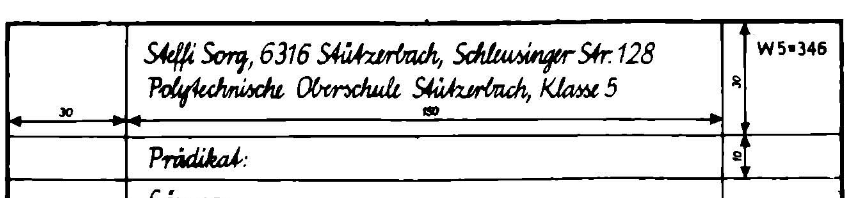
▲6▲1327 Es sind alle natürlichen Zahlen n mit $1000 \leqq n \leqq 9999$ zu ermitteln, die folgende Eigenschaften besitzen:

a) Die Ziffern dieser Zahlen beginnen und enden mit der gleichen Grundziffer.
b) Die Zahl, die der zweiten Grundziffer entspricht, ist dreimal so groß wie die Zahl, die der ersten Grundziffer entspricht.
c) Die Zahl, die der dritten Grundziffer entspricht, ist um 5 kleiner als die Zahl, die der zweiten Grundziffer entspricht.

Ute Möllhoff, Piesau

▲6▲1328 Kann die Summe von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen eine Primzahl sein? *Sch.*

W 6 ■ 1329 Wieviel Grad beträgt die Summe der Innenwinkel eines konvexen Vielecks (n-Ecks)? *Sch.*



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für die 7. Klasse geeignet). Aufgaben mit W* versehen gelten auch als Wettbewerbsaufgaben. Sie haben einen hohen Schwierigkeitsgrad.
4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit W ■ 10/12 oder W*10/12 gekennzeichnet sind.
5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Experten korrigiert.
6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".
7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1974/75 läuft von Heft 5/74 bis Heft 2/75. Zwischen dem 1. und 10. September 1975 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/74 bis 2/75 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/75 veröffentlicht. Wer mindestens 7 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/74 bis 2/75) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1974/75 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück).

Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind, und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

W 6 ■ 1330 Im Kreis Seelow nehmen 126 Lehrerinnen und Lehrer an der Weiterbildung teil. Die Hälfte der Anzahl der Lehrer ist gleich dem fünften Teil der Anzahl der Lehrerinnen. Wieviel Lehrerinnen und wieviel Lehrer beteiligen sich an der Weiterbildung? *Helmut Engelmann, Sachsendorf*

W 6*1331 Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC, dessen Hypotenuse $\overline{AB}$ doppelt so lang ist wie die Kathete $\overline{AC}$. Die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle BAC$ schneide die Gerade BC im Punkt D, die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle ADB$ schneide die Gerade AB im Punkte E. Es ist nachzuweisen, daß das Dreieck AEC gleichseitig ist. *Sch.*

W 6*1332. Konstruiere ein Dreieck ABC mit dem Winkel $\sphericalangle ABC=\beta=50°$, in welchem der Abstand des Schnittpunktes H seiner Höhe n von der Geraden AB $m=3$ cm, von der Geraden BC $n=2$ cm beträgt! Begründe die Konstruktion! *Sch.*

▲7▲1333 Es ist der Rauminhalt eines Spielwürfels von 18 mm Kantenlänge zu berechnen, dessen halbkugelförmige Augen einen Durchmesser von 2 mm besitzen. (Volumen einer Kugel: $V=\frac{4}{3}\pi r^3$)

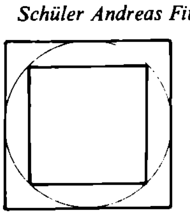
Klaus Göthling, Thaldorf

▲7▲1334 Eine Holzfällerbrigade stellte in drei Tagen 184 m^3 Holz bereit. Dabei wurde von der Brigade der Tagesplan am ersten Tag mit 14 m^3 übererfüllt. Am zweiten Tag lag die Brigade mit 2 m^3 unter der Planaufgabe. Am dritten Tag stellte sie 16 m^3 über den Plan bereit. Wieviel Kubikmeter Holz mußte die Brigade täglich nach dem Plan bereitstellen?

W 7 ■ 1335 Zeichne ein Parallelogramm $ABCD$ mit $\overline{AB}>\overline{BC}$! Konstruiere auf $\overline{AB}$ einen inneren Punkt E, auf $\overline{BC}$ einen inneren Punkt F, auf $\overline{CD}$ einen inneren Punkt G und auf $\overline{DA}$ einen inneren Punkt H so, daß $\overline{AE}=\overline{BF}=\overline{CG}=\overline{DH}=m<\overline{BC}$ gilt! Weise nach, daß das Viereck $EFGH$ ein Parallelogramm ist! *Sch.*

W 7 ■ 1336 Das Touristenschiff MS „Spree" verfügt über 29 Kabinen mit zwei, drei oder vier Betten und kann 86 Fahrgäste aufnehmen. Ein Fahrgast behauptet, daß es 11 oder 13 Dreibettkabinen gebe. Weise nach, daß diese Behauptung falsch ist!

Schüler Andreas Fittke, Berlin, Kl. 7



W 7*1337 Die abgebildete Figur stellt einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r dar, dem ein Quadrat einbeschrieben und ein weiteres Quadrat umbeschrieben wurde. Jemand behauptet, daß

a) die Maßzahl des Flächeninhalts des Kreises gleich dem arithmetischen Mittel aus den Maßzahlen der Flächeninhalte der beiden Quadrate ist,

b) die Maßzahl des Umfangs des Kreises gleich dem arithmetischen Mittel aus den Maßzahlen der Umfänge der beiden Quadrate ist. Es ist zu überprüfen, ob diese Behauptungen zutreffen!

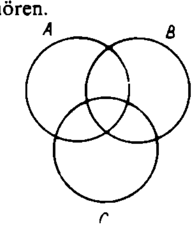
Mathematikfachlehrer Werner König, Berlingerode

W 7*1338 Gegeben seien die folgenden Mengen von natürlichen Zahlen:

$M_1=\{1;10\}$, $M_2=\{1;9\}$,
$M_3=\{6;\ 7\}$, $M_4=\{2;8\}$,
$M_5=\{1;\ 5\}$, $C=\{1;3;4;5;9\}$.

Ferner seien A und B zwei Mengen, die nur die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 oder 10 als Elemente enthalten können, mit folgenden Eigenschaften:

a) Zur Menge M_1 gehören genau diejenigen Elemente, die der Menge A und der Menge B angehören.



b) Zur Menge M_2 gehören genau diejenigen Elemente, die der Menge B und der Menge C angehören.

c) Zur Menge M_3 gehören nur diejenigen Elemente der Menge A, die weder der Menge B noch der Menge C angehören.

d) Zur Menge M_4 gehören diejenigen Elemente der Menge B, die weder der Menge A noch der Menge C angehören.

e) Zur Menge M_5 gehören genau diejenigen Elemente, die der Menge A und der Menge C angehören.

f) Alle Elemente der Mengen M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 sind mindestens einer der Mengen A, B oder C enthalten.

Es sind alle Elemente der Menge A sowie alle Elemente der Menge B anzugeben und in das abgebildete Diagramm einzutragen. *Sch.*

W 8 ■ 1339 Bei den Bahnradsport-Weltmeisterschaften 1974 in Montreal wurde *Eduard Rapp* (UdSSR) im 1000-m-Zeitfahren Weltmeister. Er legte die Strecke von 1000 m in 1 min 7,61 s zurück. Den zweiten Platz belegte *Ferrucio Ferro* (Italien) mit 1 min 7,66 s.

a) Man berechne die durchschnittlichen Geschwindigkeiten (in $m \cdot s^{-1}$ und in $km \cdot h^{-1}$), die die beiden Fahrer auf der Bahn erzielten.

b) Wieviel Meter betrug der Vorsprung, den *Rapp* bei der Fahrt durch das Ziel vor *Ferro* hatte? (Dabei soll eine konstante Geschwindigkeit vorausgesetzt werden; eine etwaige Erhöhung der Geschwindigkeit beim Endspurt wird also nicht berücksichtigt.) *L.*

W 8 ■ 1340 Es ist zu untersuchen, ob es ein gleichseitiges Dreieck gibt, bei dem die Maßzahl des Flächeninhalts gleich der Maßzahl des Umfangs ist.

Wenn ja, sind die Maßzahlen der Höhe und der Seitenlänge eines solchen gleichseitigen Dreiecks zu ermitteln.

Matthias Rogall, Dresden

W 8*1341 In einem gleichschenkligen Dreieck sei die Basis ebenso lang wie die Winkelhalbierende eines der Basiswinkel. Wie groß ist der Winkel an der Spitze dieses gleichschenkligen Dreiecks?

H.-J. Schmidt, stud. math., Greifswald

W 8*1342 Es seien a und b zwei gerade natürliche Zahlen mit $a \geqq b$. Man beweise, daß dann stets wenigstens eine der drei Zahlen $a+b$ $\quad a-b$ $\quad ab$
durch 6 teilbar ist. *Sch.*

W 9 ■ 1343 Jemand stellte bei vier aufeinanderfolgenden ungeraden natürlichen Zahlen fest, daß das Produkt aus der zweiten und dritten Zahl um 8 größer als das Produkt aus der ersten und vierten Zahl ist. Um welche Zahlen handelte es sich? *Sch.*

W 9 ■ 1344 Ein gerades Prisma habe eine quadratische Grundfläche mit der Maßzahl a der Seitenlänge, die Länge seiner Höhe habe die Maßzahl h, wobei a und h von Null verschiedene natürliche Zahlen sind. Man gebe alle Möglichkeiten für die Maßzahlen a und h an, so daß die Maßzahl des Volumens dieses Prismas gleich der Maßzahl seiner Oberfläche ist. *Volker Zillmann, Dresden*

W 9*1345 Es seien n eine von Null verschiedene natürliche Zahl und N die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis $2n$:

$N=\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$.

Ferner sei M eine Menge von $n+1$ natürlichen Zahlen, die aus der Menge N ausgewählt wurden. Man beweise, daß es dann in der Menge M stets zwei Zahlen gibt, von denen die eine durch die andere teilbar ist.

Steffen Thiel, OS Schulzendorf, Kl. 8

W 9*1346 Es sei ABC ein Dreieck, dessen Seitenlängen $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$ gegeben sind.

a) Man ermittle die Länge der von dem Punkt C ausgehenden Höhe $h=\overline{CD}$ und den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

b) Man berechne diese Größen, wenn $a=12$ cm, $b=10$ cm, $c=8$ cm.

Harald Friesel, Clara-Zetkin-OS Hohenstein-Ernstthal, Kl. 10

W 10/12 ■ 1347 Die Rohstahlproduktion (in Mill. t) der Sowjetunion entwickelte sich im Vergleich zu derjenigen der USA wie folgt:

folgt:	UdSSR	USA
1955	45,3	106,2
1965	91,0	119,3

Infolge des hohen Wachstumstempos der Produktion in der UdSSR war daher bereits im Jahre 1965 zu erwarten, daß die UdSSR die USA in der Rohstahlproduktion überholen wird.
In welchem Jahr war damit zu rechnen, wenn man auch für die Jahre nach 1965 jeweils den gleichen jährlichen Steigerungsfaktor wie im Zeitraum von 1955 bis 1965 annimmt?
Anleitung zur Lösung: Man erhält den jährlichen Steigerungsfaktor q aus der Formel

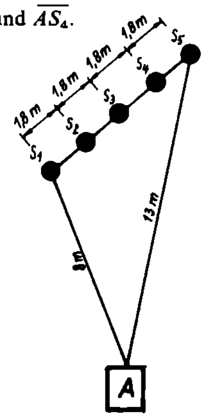
$$A_1 \cdot q^{10} = A_2, \qquad (1)$$

wobei A_1 die Produktion im Jahre 1955 und A_2 die Produktion im Jahre 1965 ist. Sind q bzw. r die jährlichen Steigerungsfaktoren für die UdSSR bzw. die USA und x die Anzahl der Jahre, die von 1965 bis zum Zeitpunkt des Überholens vergehen, so gilt

$$91{,}0 \cdot q^x = 119{,}3 \cdot r^x. \quad (2)$$

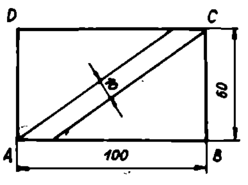
L.

W 10/12 ■ 1348 Bei der XIII. Weltmeisterschaft 1974 im Turnierangeln belegte die erst 17jährige *Andrea Eichorn* (DDR) in der Disziplin *Fliege Skish* den ersten Platz. Bei dieser Disziplin hat der Angler von einem Standort A aus zehn Würfe in vorgeschriebener Reihenfolge in fünf Platikschalen auszuführen, deren Mittelpunkte mit S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 bezeichnet seien (vgl. die Abb.). Bekannt sind die Abstände $\overline{AS_1} = a = 8$ m, $\overline{AS_5} = b = 13$ m, $\overline{S_1S_2} = \overline{S_2S_3} = \overline{S_3S_4} = \overline{S_4S_5} = 1{,}8$ m. Man berechne die Abstände $\overline{AS_2}$, $\overline{AS_3}$ und $\overline{AS_4}$. *L.*



W 10/12*1349 Durch ein rechteckiges Grundstück $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = 100$ m und $\overline{BC} = 60$ m soll ein 10 m breiter Weg angelegt werden, der, wie in der Abbildung gezeigt wird, von A nach C verläuft. Wie groß ist der Flächeninhalt des von dem Weg eingenommenen Teils des Grundstücks?

Mathematikfachl. Reinhard Schulz, Rotta



W 10/12*1350 Es sei x eine reelle Zahl, die größer als 1 ist.

a) Wie kann man den Ausdruck

$$z = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{15}$$

so umformen, daß bei der Berechnung von z nicht mehr als fünfmal multipliziert oder dividiert werden muß?
(Die Anzahl der auszuführenden Additionen und Subtraktionen ist dabei nicht vorgeschrieben; die Gesamtzahl der Multiplikationen und Divisionen darf jedoch nicht größer als 5 sein. Ferner ist zu beachten, daß z. B. die Berechnung der Potenz $x^2 = x \cdot x$ eine Multiplikation erfordert, und die Berechnung der Potenz $x^4 = x^2 \cdot x^2$ eine weitere Multiplikation.)
b) Man untersuche, ob man den obigen Ausdruck auch so umformen kann, daß bei der Berechnung von z nicht mehr als fünfmal multipliziert (und überhaupt nicht dividiert) werden muß, wobei wieder die Anzahl der auszuführenden Additionen und Subtraktionen nicht vorgeschrieben ist.
Bemerkung: Die Aufgabe b) ist schwieriger; ihre Lösung wird bei der Einsendung für den Wettbewerb nicht verlangt.

W. Burmeister, Dresden

Übung macht den Meister

Um allen Absolventen der 10. Klasse unserer Oberschulen, die die Absicht haben, das Studium an einer Ingenieur- bzw. Fachschule der DDR aufzunehmen, einen Einblick in die Anforderungen in Mathematik zu geben, veröffentlichen wir eine Auswahl von Aufgaben, die der Vorbereitung auf das Studium dienen. Aus diesen Aufgaben geht hervor, daß der Lehrstoff der Klassen 6 bis 10 sicher beherrscht und daß das erworbene Wissen anwendungsbereit sein muß.

▲1▲ Addieren Sie: $\frac{3}{28} - \frac{5}{8} + \frac{17}{21} - \frac{5}{6} + 1$

▲2▲ Berechnen Sie: $\frac{6}{35} \cdot 7$; $\frac{6}{35} : 3$; $18 : \frac{6}{35}$

▲3▲ Berechnen Sie mit Rechenstab:
$\frac{34{,}7 \cdot 0{,}684}{250}$; $\sqrt{17 \cdot 3{,}8}$

▲4▲ Berechnen Sie:
$(-5) + (-3) - (-4)$; $-\frac{+abx}{-ax}$;
$\frac{-0{,}3a^2b}{-0{,}12ab}$;
$(3a+2b)(4a-2b) + (3a+4b)(3a-4b) - (a-3b)^2$

▲5▲ Berechnen Sie durch Partialdivision:
$(21n^3 - 34n^2v + 25v^3) : (7n + 5v)$

▲6▲ Kürzen Sie:
a) $\frac{ab+a}{ab-a}$ b) $\frac{3n-3}{5-5n}$ c) $\frac{a^2+ab}{a^2-b^2}$

▲7▲ Bringen Sie den Bruch $\frac{a-2}{a+2}$ *auf den* Nenner $a^2 - 4$

▲8▲ Ermitteln Sie das kgV von:
a) $3a^2b^4$, $4a^3c$, $12b^5c^3$
b) $x^2 - 1$, $x^2 - x$, $x - x^2$

▲9▲ Berechnen Sie:
$\frac{2u+1}{2u+2} - \frac{3u-1}{3u-3} + \frac{14u+2}{12u^2-12}$

▲10▲ Vereinfachen Sie:
a) $x^{3m-6} \cdot 3x^{n-3m+2} \cdot 5x^{2-n}$
b) $\left(\frac{u^3v^5}{x^4y^6}\right)^9 : \left(\frac{u^3v^5}{x^2y^6}\right)^9$
c) $\sqrt[3]{125x^6}$; $\sqrt{(ab)^2}$;
$2\sqrt{8} + 9\sqrt{18} - 5\sqrt{72}$
d) $\sqrt[5]{\sqrt[6]{32}}$
e) $\frac{\sqrt[5]{u^2v} \cdot \sqrt[3]{uv^4}}{\sqrt[15]{u^{11}v^8}}$

▲11▲ Berechnen Sie logarithmisch:
$\sqrt[5]{0{,}0004}$; $\sqrt[4]{\frac{0{,}0673 \cdot 6{,}42^3}{12{,}35^2}}$

▲12▲ Lösen Sie:
a) $\frac{4x-7}{6x+18} + \frac{11}{45} = \frac{7x+2}{10x+30}$
b) $\sqrt{x+1} - 7 = 0$
c) $4 : 3 = (63 - x) : x$
d) $7x - 3y = 13$
$3y = 25 - 45x$
e) $x + 2y + 3z = 32$
$2x + y + 3z = 31$
$3x + 2y + 2 = 28$
f) $(x+5)^2 + (x-2)^2 + (x-7)(x+7) = 11x + 30$
g) $4x - 3\sqrt{7x-6} = 6$

▲13▲ Für welche Werte von x gelten die Ungleichungen:
$2x - 4 > 5 - x$ $\quad 3x + 10 > 7x - 10$?

▲14▲ Welche von den Punkten $P_1(0; 4)$, $P_2(-2; 12)$ und $P_3(6; 16)$ liegen auf den Kurven mit den Gleichungen
a) $y = 2x + 4$ b) $y = x^2 - 2x + 4$
c) $y = \sqrt{14x + 172}$?

▲15▲ Bestimmen Sie die folgenden Funktionswerte:
a) sin 15,3° b) tan 52,6°
c) cot 8,7° d) sin 212,3°
e) tan 322,6° f) cot 200,3°

▲16▲ Bestimmen Sie die beiden Winkel, die zwischen 0° und 360° liegen:
a) $\sin\alpha = 0{,}1736$ b) $\cos\alpha = 0{,}5721$
c) $\cos\alpha = -0{,}9291$ d) $\cot\alpha = -6{,}17$

▲17▲ Berechnen Sie im folgenden rechtwinkligen Dreieck die fehlenden Stücke:
$c = 20$ cm, $\alpha = 65°$

▲18▲ Berechnen Sie im folgenden allgemeinen Dreieck die fehlenden Stücke sowie den Flächeninhalt:
$b = 42$ cm, $c = 35$ cm, $\alpha = 130°$

Der „Dirichletsche Schubfachschluß“

Wir möchten unsere *alpha*-Leser mit einem Beweisverfahren bekannt machen, das unter dem Namen „Dirichletscher Schubfachschluß“ bekannt ist und nach dem deutschen Mathematiker *Dirichlet* (sprich: diriklé) (1805 bis 1859) benannt wurde. Der Schubfachschluß ist unmittelbar einleuchtend, er lautet:

„Wenn $n+1$ Gegenstände auf n Schubladen verteilt sind, dann müssen sich in wenigstens einer Schublade mindestens zwei Gegenstände befinden“. In diesem Satz wird nichts darüber ausgesagt, auf welche Weise die $n+1$ Gegenstände auf n Schubladen verteilt wurden, das heißt, es könnten auch Schubladen leer geblieben sein. Wurde in jede der n Schubladen genau je ein Gegenstand gelegt, dann verbleibt noch genau ein Gegenstand, der in eine der n Schubladen zu legen ist. Diese Schublade enthält dann genau zwei Gegenstände. Blieben bei der Verteilung einige Schubladen leer, so kann es Schubladen geben, die sogar mehr als zwei Gegenstände enthalten, also wenigstens zwei Gegenstände.

Wir wollen den „Dirichletschen Schubfachschluß“ etwas abstrakter formulieren: „Besitzt jedes von $n+1$ Objekten eine von n Eigenschaften, so haben mindestens zwei der Objekte die gleiche Eigenschaft“. Wir wollen nun gemeinsam einige Aufgaben lösen, deren Lösungsweg auf dem „Dirichletschen Schubfachschluß“ beruht.

1. Aufgabe: Es ist zu beweisen, daß man unter 18 beliebig gewählten natürlichen Zahlen stets zwei finden kann, deren Differenz durch 17 *ohne Rest* teilbar ist!

Lösung: Bei der Teilung einer beliebigen natürlichen Zahl durch 17 können die Reste 0, 1, 2, 3, ..., 15, 16 auftreten, das heißt, es gibt insgesamt 17 voneinander verschiedene Reste. Da aber 18 Zahlen vorhanden sind, müssen wenigstens zwei von ihnen bei der Teilung durch 17 den gleichen Rest haben. Die Differenz dieser beiden Zahlen ist dann durch 17 teilbar, denn aus $z_1=17k+r$ und $z_2=17i+r$ folgt $z_1-z_2=17(k-i)$.

2. Aufgabe: Es ist zu beweisen, daß man unter 100 beliebig gewählten natürlichen Zahlen stets solche Zahlen finden kann, deren Summe durch 100 *restlos* teilbar ist!

Lösung: Es seien $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{99}, a_{100}$ die beliebig gewählten natürlichen Zahlen. Mit ihnen lassen sich folgende 100 Summen bilden:

$s_1=a_1;\ s_2=a_1+a_2;\ s_3=a_1+a_2+a_3;\ldots;$
$_{100}=a_1+a_2+\ldots+a_{100}.$

Bei der Division der Summen $s_1, s_2, \ldots, s_{100}$ durch 100 können nur die Reste 0, 1, 2, 3, ..., 99 auftreten. Unter den Resten der Summen kommt entweder 0 vor, oder es gibt wenigstens zwei Summen mit gleichem Rest. Im ersten Fall ist s_i durch 100 teilbar, also auch $a_1+a_2+\ldots+a_i$. Im zweiten Fall gilt

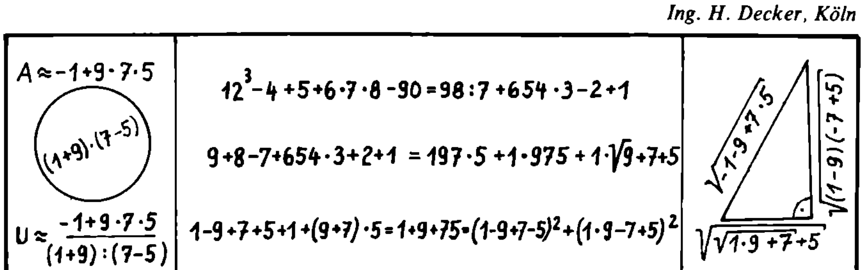
$$s_k=100x+r$$
$$s_j=100y+r \text{ und damit}$$
$$s_k-s_j=100(x-y).$$

Ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit können wir $k>j$ annehmen. Deshalb gilt weiter

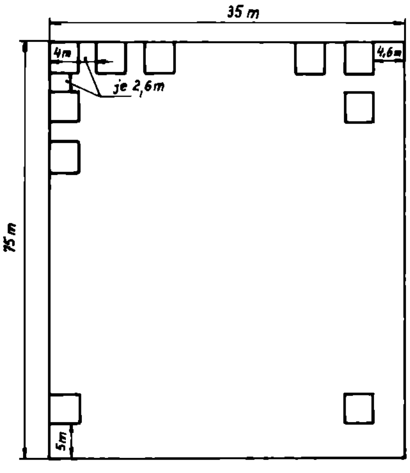
$$(a_1+a_2+\ldots+a_j+a_{j+1}+\ldots+a_k)-$$
$$-(a_1+a_2+\ldots+a_j) \quad =100(x-y),$$
$$a_{j+1}+a_{j+2}+\ldots+a_k \quad =100(x-y).$$

3. Aufgabe: Auf einem rechteckigen Zeltplatz, der 75 m lang und 35 m breit ist, stehen ungeordnet 52 Fünfeckzelte, die eine maximale Breite von 2,6 m besitzen. Ist es möglich, für ein weiteres Zelt einen freien Platz zu finden, der die Form eines Quadrates mit der Seitenlänge von 4 m hat?

Ing. H. Decker, Köln



Lösung: Wir denken uns den Zeltplatz (wie aus der Zeichnung ersichtlich) mit Quadraten von 4 m Seitenlänge bedeckt, wobei zwischen benachbarten Quadraten jeweils ein Streifen von 2,6 m Breite frei gelassen wird.



Angenommen, es lassen sich m Quadrate an der Längsseite und n Quadrate an der Breitseite des Zeltplatzes in der gewünschten Weise anordnen. Dann gilt

$4m+2{,}6(m-1)\leq 75$ und $4n+2{,}6(n-1)\leq 35$, also $m\leq 11$ und $n\leq 5$.

Der Zeltplatz kann demnach mit maximal $11\cdot 5=55$ Quadraten bedeckt werden. Da auf dem Zeltplatz nur 52 Zelte stehen, ist mindestens noch für 3 Zelte je eine quadratische Fläche von 4 m Seitenlänge frei.

Warum haben wir in unseren Überlegungen zwischen benachbarten Quadraten jeweils einen 2,6 m breiten Streifen frei gelassen? Würde man die Quadrate ohne Zwischenstreifen aneinander reihen, so könnte es vorkommen, daß ein Zelt zwei, drei oder gar vier Quadrate teilweise überdeckt. Durch die Trennstreifen ist gewährleistet, daß jedem Zelt genau ein Quadrat zugeordnet wird. Nur dadurch ist der Schubfachschluß anwendbar.

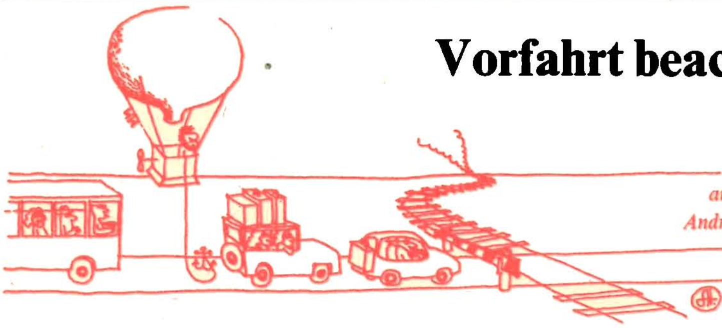
Der Leser beachte folgenden Unterschied zwischen den beiden ersten Aufgaben einerseits und der 3. Aufgabe andererseits. Während es bei der 1. und 2. Aufgabe auf eine zweifache Belegung eines Schubfaches ankommt, ist in der 3. Aufgabe gerade die Existenz wenigstens eines leeren Schubfaches nachzuweisen. Zum Abschluß eine Aufgabe, die der interessierte Leser selbständig lösen möge, und deren Lösung in einem späteren Heft veröffentlicht wird.

4. Aufgabe: Man zeige, daß es in der unendlichen Zahlenfolge $7, 7^2, 7^3, \ldots, 7^n, \ldots$ der Potenzen von 7

a) wenigstens eine Potenz gibt, die auf die Ziffern 001 endet,

b) unendlich viele Potenzen mit der genannten Eigenschaft gibt!

G. Hesse/Th Scholl



Vorfahrt beachten!
Teil 2

aus: FW 16/73
Andrej Nekrassow

Um die folgenden Aufgaben lösen zu können, benutzen wir die folgenden beiden Tabellen:

Tabelle I: Bremsweg s_B in m

v in $\frac{km}{h}$	$\frac{m}{s}$	a in $\frac{m}{s^2}$: 1	1,3	2	2,5	2,9	3,9	4,7	5	5,4	5,9	6,4
10	2,78	3,9	3,0	1,9	1,6	1,3	1,0	0,8	0,8	00,7	0,7	0,6
20	5,56	15	12	7,7	6,2	5,3	4,0	3,3	3,1	2,9	2,6	2,4
30	8,33	35	27	17	14	12	8,9	7,4	6,9	6,4	5,9	5,4
40	11,1	62	47	31	25	21	16	13	12	11	10	9,6
50	13,9	97	74	48	39	33	25	21	19	18	16	15
60	16,7	140	110	69	56	48	36	30	28	26	24	22
70	19,4	190	140	94	76	65	48	40	38	35	32	29
80	22,2	250	190	120	99	85	62	52	49	46	42	39
90	25	310	240	160	120	110	80	66	62	58	53	49
100	27,8	390	300	190	150	130	99	82	77	72	65	60

Tabelle II: Maximal mögliche Bremsverzögerungen a_{max} in $\frac{m}{s^2}$

Luftreifen auf Straßenbelag	Straßenzustand trocken	naß sauber	schmierig	festgefahr. Schneed.	Eisdecke
Beton	6,4	5,4	2,9	1,3	1,0
Kopfsteinpflaster Schwarzdecke	5,9	3,9	2,9	1,3	1,0
Kleinpflaster (Granit)	5,4	2,9	2,0	1,3	1,0
Kleinpflaster (Basalt)	4,7	2,5	2,0	1,3	1,0

Nun können wir die im Heft 5/74 erworbenen Kenntnisse anwenden:

▲1▲ Wie lang ist mindestens der Bremsweg eines Kraftfahrzeuges aus der Geschwindigkeit $50\frac{km}{h}$

a) auf trockener Betonstraße und

b) auf Betonstraße mit festgefahrener Schneedecke?

Vergleiche die beiden Bremswege miteinander!

▲2▲ Warum ist es nicht sinnvoll, Kraftfahrzeuge mit einer Betriebsbremse auszustatten, die größere Bremsverzögerungen als $6{,}4\frac{m}{s^2}$ bewirken könnte?

▲3▲ a) Ermittle mittels Längenmaß und Uhr mit Sekundenzeiger durch einen Versuch deine normale Geschwindigkeit in $\frac{m}{s}$!

b) Du willst die abgebildete 6,50 m breite Straße überqueren, um vom Punkt A zum Punkt B zu gelangen.

Wieviel Zeit würdest du hierzu benötigen, wenn du dies verkehrswidrig auf dem geradlinigen Weg von A nach B tun würdest? Welche Zeit würdest du dich dabei auf der Straße befinden? Wieviel Zeit benötigst du, wenn du den Verkehrsvorschriften (§ 33 StVO) entsprechend erst geradlinig von A nach C und dann weiter von C nach B läufst? Wieviel Zeit befindest du dich jetzt nur auf der Straße (Bild 1)

Löse diese Aufgabe mittels einer maßstäblichen Zeichnung, der du die benötigten Weglängen entnimmst und benutze weiterhin das Ergebnis der Aufgabe a)!

▲4▲ Du willst die gleiche trockene Straße mit Schwarzdecke nochmals vorschriftsgemäß vom Punkt P zum Punkt Q überqueren. (Bild 2) Welchen Abstand s muß zu Beginn des Überquerens ein Fahrzeug F mindestens noch von deinem Weg haben, wenn folgende Bedingungen gelten:

Das Fahrzeug F fährt mit der Geschwindigkeit $v = 50\frac{km}{h}$ (zulässige Höchstgeschwindigkeit in geschlossenen Ortschaften mit gelbem Ortsschild). Das Fahrzeug kann mit der Bremsverzögerung $a = 5\frac{m}{s^2}$ abgebremst werden. Das Fahrzeug soll in dem Moment, in dem du den Punkt Q erreichst, von deinem Wege noch einen Abstand besitzen, der mindestens gleich dem Bremsweg des Fahrzeuges ist.

Bei Aufgabe 4 ließen wir den Reaktionsweg unberücksichtigt, weil der Fahrer den Fußgänger rechtzeitig sieht und deshalb mit einer Komplikation rechnet.

Wenn zwei Fahrzeuge hintereinander mit gleicher konstanter Geschwindigkeit fahren, so muß das nachfolgende Fahrzeug einen Sicherheitsabstand s_S zum Vorausfahrenden einhalten. Als Sicherheitszeit t_S soll die Zeit bezeichnet werden, um die das zweite Fahrzeug eine bestimmte Stelle der Straße später passiert als das erste. Laut Formel gilt:

$$Vs_S = v \cdot t_S$$

Als Faustregel gilt: Bei normalgriffiger Straße ist die Sicherheitszeit $t_S = \frac{1}{1000}$ h einzuhalten! Bei dieser Sicherheitszeit wäre z. B. bei der Fahrgeschwindigkeit $v = 85\frac{km}{h}$ der Sicherheitsabstand gleich

$$s_S = 85\frac{km}{h} \cdot \frac{1}{1000} h = 85 \cdot \frac{1000 \text{ m}}{h} \cdot \frac{1}{1000} h = 85 \text{ m}.$$

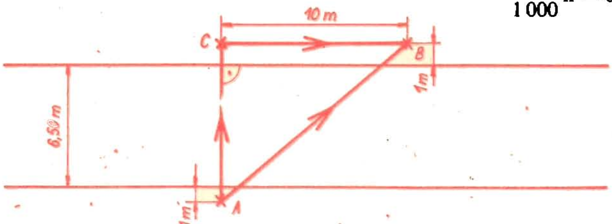


Bild 1

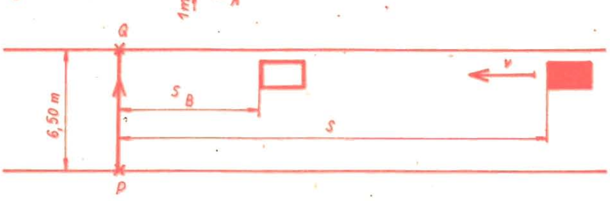


Bild 2

Bei dieser Faustregel gibt der Tachometerausschlag die Maßzahl des Sicherheitsabstandes in Meter an.

▲5▲ Prüfe, in welchen Fällen bei Fahren auf trockenen Straßen das nachfolgende Fahrzeug, das bei entsprechenden Fahrbahnverhältnissen mit der maximalen Bremsverzögerung $5{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ abgebremst werden kann, noch rechtzeitig zum Halten gebracht werden kann, wenn es den der Sicherheitszeit $t_S = \frac{1}{1000}\,\text{h}$ entsprechenden Sicherheitsabstand einhält, wenn das vorausfahrende Fahrzeug wegen eines Frontalzusammenstoßes (Auffahrunfall) plötzlich auf der Stelle liegen bleibt und wenn der Fahrer des zweiten Fahrzeuges mit der Reaktionszeit $t_R = 1\,\text{s}$ reagiert! (Bild 3)

Beim Fahren auf nicht normalgriffigen Straßen muß der Sicherheitsabstand zum Teil sehr erheblich vergrößert werden! Fußgänger sollten bei ungünstigen Witterungsverhältnissen beim Betreten der Straße berücksichtigen, daß dann nicht nur die Bremswege der Fahrzeuge länger sind, sondern daß jedes Bremsen eines Fahrzeuges eine zusätzliche Gefahrenquelle darstellt!

In geschlossenen Ortschaften (mit gelbem Ortsschild) beträgt im allgemeinen die zulässige Höchstgeschwindigkeit $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Doch wie die folgende Aufgabe zeigt, würde es dem § 1 StVO (... Jeder Teilnehmer am öffentlichen Straßenverkehr hat sich so zu verhalten, daß Personen oder Sachwerte nicht gefährdet oder geschädigt werden können ...) widersprechen, an eine Kreuzung mit begrenzter Sicht mit dieser Geschwindigkeit heranzufahren.

▲6▲ Die Abbildung stellt die Kreuzung zweier gleichrangiger Straßen dar, die von 2 m breiten Bürgersteigen begrenzt sind, an die sich ihrerseits wieder die Sicht behindernde Häuserblöcke H anschließen. Aus den Straßen A und B wollen zwei Motorradfahrer F_A und F_B, die wir zur Vereinfachung zusammen mit ihren Maschinen als punktförmig betrachten, mit gleicher Geschwindigkeit die Kreuzung in gerader Richtung passieren. Sie fahren beide in 1 m Abstand von der Bordsteinkante. Bei unverändertem Weiterfahren würden sie gerade im Punkt P zusammenstoßen. (Bild 4)

Mit welchen der in Tabelle I angegebenen Geschwindigkeiten dürfen beide nur fahren, damit der Fahrer F_A, der gemäß § 13 StVO keine Vorfahrt hat, sein Fahrzeug vom Moment des Erkennens der Gefahr an noch vor Erreichen des Punktes Q zum Stehen bringen kann? Dabei sollen $t_R = 1$ s und $a = 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ (Für Betriebs- und Handbremse sind für Krafträder je $3\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ erreichbare Bremsverzögerung vorgeschrieben.) angenommen werden.

Laut Aufgabe 2 wissen wir, daß auch Fehler beim Überholen in hohem Maße zu Verkehrsunfällen führen. Als Überholen wird das Vorbeifahren eines schnelleren Fahrzeuges an einem sich in gleicher Richtung bewegenden langsameren bezeichnet.

▲7▲ Ein PKW F_1, der mit der Geschwindigkeit $v_1 = 90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt, überholt einen PKW F_2, der mit der Geschwindigkeit $v_2 = 70\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt. Der Überholvorgang, d. h. der Spurwechsel, beginnt, wenn F_1 sich F_2 auf den seiner Geschwindigkeit und der Sicherheitszeit $t_S = 1$ s entsprechenden Sicherheitsabstand s_{S_1} genähert hat. Der Überholvorgang ist beendet, d. h., F_1 fährt wieder längs des rechten Fahrbahnrandes, wenn F_1 sich um s_{S_2}, den der Geschwindigkeit v_2 und $t_s = \frac{1}{1000}\,\text{h}$ entsprechenden Sicherheitsabstand, vor dem Fahrzeug F_2 befindet. Für alle Fahrzeuge soll die Bremsverzögerung $a = 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ zur Anwendung kommen und alle Fahrzeuge sollen die Länge $l = 4$ m haben. (Bild 5)

a) Welche Zeit dauert der Überholvorgang? *Anleitung:* Beachte, daß während dieser Zeit F_1 mit der Geschwindigkeit $v_1 - v_2$ die Strecke $s_{S_1} + s_{S_2} + l$ mehr als F_2 zurücklegen muß!

b) Wie lang ist die Überholstrecke, d. h., welchen Weg legt F_1 während des Überholvorganges zurück?

c) Während des Überholens benutze F_1 auch die linke Fahrbahnseite. Am Ende des Überholvorganges muß ein mit der Geschwindigkeit $v_3 = 90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ entgegenkommendes Fahrzeug F_3 von F_1 mindestens noch den Abstand $s_{S_1} + s_{S_3}$ haben. Bis zu welcher Entfernung von F_1 aus muß zu Beginn des Überholvorganges die Fahrbahn einzusehen und frei von entgegenkommenden Fahrzeugen sein?

▲8▲ Ein PKW mit der Masse $m = 1000$ kg prallt mit der Geschwindigkeit $v = 50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ gegen ein festes Hindernis. Dabei wird die Bugpartie um $s = 0{,}5$ m zusammengeschoben.

Berechne nach der Formel $\frac{m}{2}v^2 = Fs$ die Kraft F, die während des Auffahrunfalles auf den PKW einwirkt!

Vergleiche diese Kraft mit der Stemmleistung eines Weltklassegewichthebers! *W. Träger*

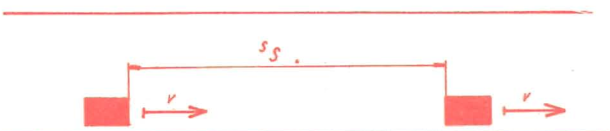


Bild 3

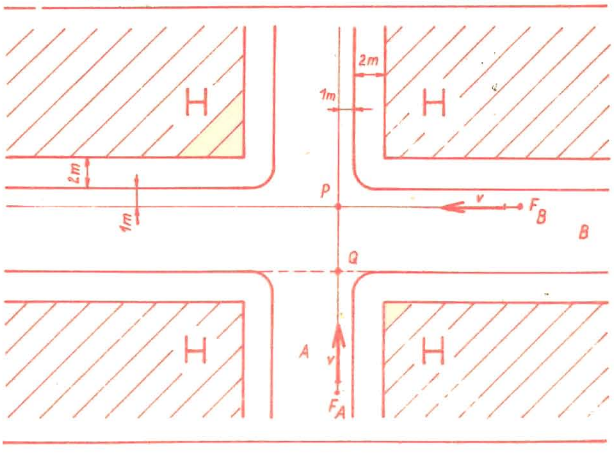


Bild 4

Bild 5

„Meine Güte, sechzig schafft der doch nie!"

aus: LVZ, 1. 6. 74

Helmut Gabbert

Was sonst noch passierte

Statistiker haben festgestellt, daß ein Fiaker anno 1900 durch die Pariser Straßen mit einer Stundengeschwindigkeit von 9 km fuhr. Leichter für sie war es allerdings, die Durchschnittsgeschwindigkeit eines Autos im heutigen Paris zu ermitteln: Es erreicht in den Nachmittagsstunden nicht mehr als 7 km/h.

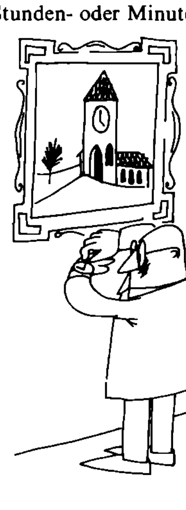
aus: ND, 6. 7. 69

Jetzt schlägt's 13! oder: Rund um die Uhr

▲1▲ „Wie spät ist es?" wurde Marie-Luise gefragt.
Der *Junge Mathematiker* antwortete scherzhaft: „Bis zum Ende des Tages bleiben zweimal zwei Fünftel von dem, was seit seinem Beginn bereits verflossen ist."
Wie spät war es in diesem Augenblick?

„Und warum funktioniert sie nicht mehr?"
„Tja – es sieht so aus, als wäre Sand hineingekommen!"

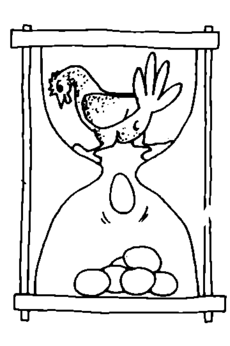
▲2▲ a) Wie oft stehen Stunden- und Minutenzeiger einer Uhr innerhalb von 12 Stunden übereinander?
b) Wie oft steht in der gleichen Zeit der (Zentral-) Sekunden-Zeiger einer Uhr über dem Stunden- oder Minutenzeiger?



▲3▲ Der Minutenzeiger einer Uhr ist 2 cm lang, der Stundenzeiger 1,5 cm.
Wievielmal so groß ist die Geschwindigkeit der Spitze des Minutenzeigers im Vergleich zur Geschwindigkeit der Spitze des Stundenzeigers?

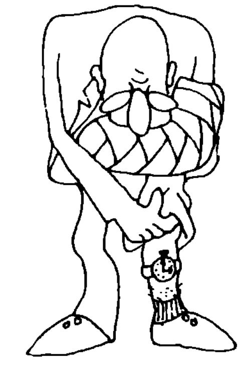
„Wie spät ist es jetzt, Adalbert?" –
„In zehn Minuten elf Uhr." –
„Ja – in zehn Minuten! Aber wie spät ist es jetzt?"

▲4▲ Heinz bekommt jeden Morgen zum Frühstück drei Scheiben Röstbrot. Da der Röstvorgang im Brotröster für eine Seite jeweils 30 Sekunden dauert, gleichzeitig aber zwei Brotscheiben eingelegt werden können, ergibt sich für das Rösten eine Gesamtzeit von zwei Minuten. Dabei ist der Brotröster allerdings nicht voll ausgelastet.
Heinz überlegt, wie er den Röstvorgang beschleunigen kann, ohne jedoch dabei die für eine Seite erforderliche Zeit zu verkürzen.
Was hat Heinz gemacht, und wie lange dauert jetzt die Röstzeit für drei Brotscheiben?

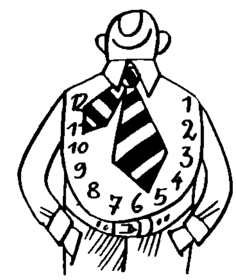


Eieruhr

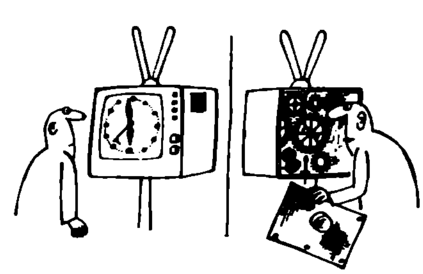
▲5▲ Um 5 Uhr schlägt eine Turmuhr 5 mal. Das dauert 5 Sekunden.
Um 10 Uhr schlägt dieselbe Uhr 10 mal.
Wieviel Sekunden dauert das?



▲6▲ Wievielmal in 24 Stunden bilden der große und der kleine Zeiger einer Uhr einen rechten Winkel?

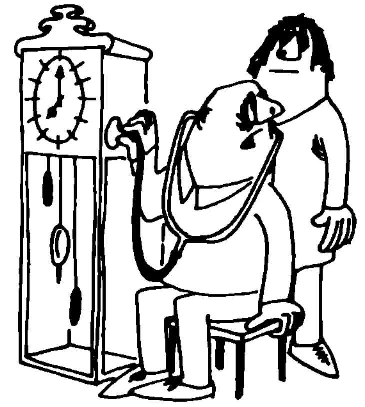


▲7▲ Jürgen und seine jüngere Schwester Elke haben den gleichen Schulweg. Elke braucht vom Elternhaus bis zum Schultor genau 30 Minuten, Jürgen genau 20 Minuten.
An einem Tage ging Elke genau 5 Minuten vor Jürgen aus dem Haus.
Nach wieviel Minuten holte Jürgen seine Schwester ein?
(Es sei angenommen, daß jeder von beiden mit gleichbleibender Geschwindigkeit ging.)



▲8▲ Petra spielt mit Werner eine Partie Schach. Als sie fertig sind, fragt Werner: „Wie lange haben wir eigentlich gespielt?"
Petra antwortet: „Ich weiß es nicht, aber ich habe aus dem Fenster gesehen und gezählt, daß die Straßenbahn genau zehnmal in dieser Zeit an unserem Hause in Stadtrichtung vorbeifuhr. Die erste Bahn kam, als wir mit dem Spiel anfingen, und die zehnte, als wir gerade fertig waren."
Wie lange haben Petra und Werner gespielt, wenn die Bahn alle 20 Minuten fährt?

▲9▲ Die Mitglieder der Arbeitsgemeinschaft *Junge Naturforscher* haben sich für eine Wanderung verabredet, mit dem Treffpunkt Bahnhof, 10 Minuten vor Abgang des Zuges um 7.00 Uhr.
Leider gehen die Uhren von Gerd und Heinz falsch. Gerd richtet sich nach seiner Uhr, von der er annimmt, daß sie 20 Minuten vorgeht. In Wirklichkeit geht sie jedoch 10 Minuten nach. Heinz glaubt, daß seine Uhr 10 Minuten nachgeht. In Wirklichkeit geht sie aber 5 Minuten vor.
Wann treffen beide am Bahnhof ein?

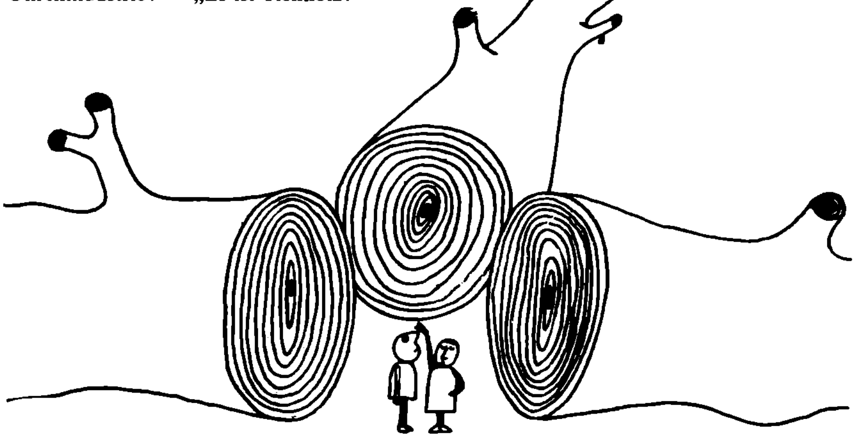


„Du hast recht, sie steht.“

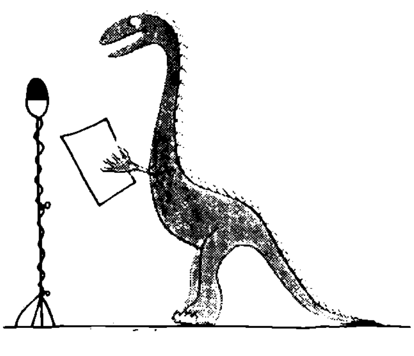
▲10▲ Welchen Weg legen in 24 Stunden zurück:
a) Die Spitze des Minutenzeigers einer Taschenuhr (Länge des Zeigers 4 mm),
b) die Spitze des Minutenzeigers einer Wanduhr (Länge des Zeigers 9,5 cm),
c) die Spitze des Minutenzeigers einer Turmuhr (Länge des Zeigers 2,25 m).

▲11▲ „Genau eine Million zweihundertneuntausendsechshundert Sekunden dauert es, bis wir uns wieder treffen“, sagt Walter, der gern mit großen Zahlen rechnet, zu Rolf, als sie sich am 10. Mai um 12.00 Uhr verabschieden.
Wann treffen die beiden wieder zusammen?

„Und warum liefern Sie ausschließlich an die Uhrenindustrie?“ – „Es ist Tickholz!“

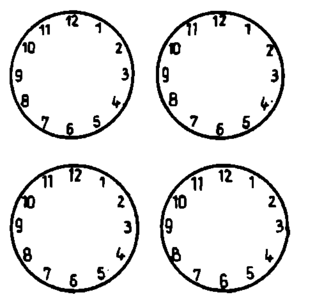


▲12▲ Auf der Westminster-Abbey in London befindet sich eine Turmuhr mit einem besonderen Schlagwerk. Zum Viertel jeder Stunde ertönt es viermal, zum Halb achtmal und zum Dreiviertel zwölfmal.
Jede volle Stunde sind 16 Schläge und zusätzlich so viele Schläge zu hören, wie es die Tageszeit gerade angibt. Zum Beispiel sind es um 6 (bzw. 18) Uhr 16 + 6 = 22 Schläge. Wie viele Schläge kann man an dieser Turmuhr innerhalb von 12 Stunden zählen?

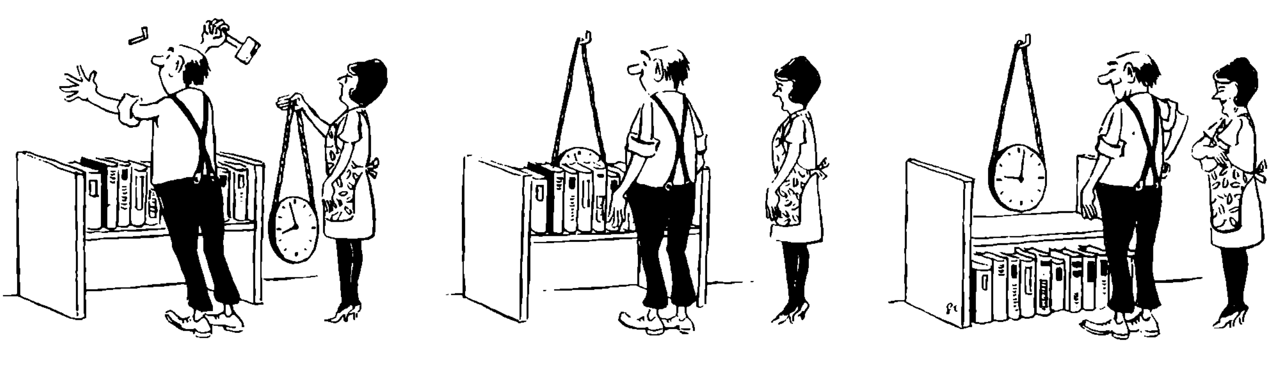


„... Zum Abschluß die genaue Urzeit...“

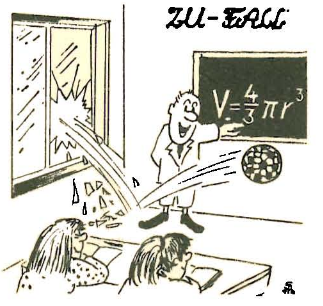
▲13▲ Auf der Abbildung sind wie auf dem Zifferblatt einer Uhr die Zahlen 1 bis 12 abgebildet.
Untersuche, ob sich diese vier Kreisscheiben durch Einzeichnen von Linien (z. B. Geraden), die keine der Ziffern treffen, so in Teilstücke zerlegen lassen, daß die Summe der auf jedem Teilstück derselben Kreisscheibe liegenden Zahl jeweils untereinander gleich sind!
Dabei ist die erste Kreisscheibe in 2 Teile, die zweite in 3 Teile, die dritte in 4 Teile und die vierte in 6 Teile zu zerlegen.



alpha-Wandzeitung



In freien Stunden alpha heiter



aus: DLZ 44/74; G. Sprengel, Dessau

Wortpaare gesucht

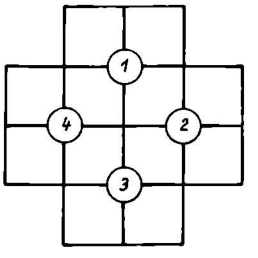
Es sind 11 Paare von Wörtern zu bilden, von denen das jeweils erste mit der gleichen Silbe endet, mit der das zweite beginnt.
Die Anfangsbuchstaben der gemeinsamen Silben ergeben hintereinander gelesen eine beliebte Seite einer beliebten Zeitschrift.

1. Zeichengerät – Teilgebiet der Mathematik
2. Vorsilbe bei Einheiten (tausend) – Name eines Symbols, das beim Auflösen einer Gleichung nach dem Exponenten gebraucht wird
3. Teil eines Winkels und einer Parabel – Oberbegriff zu Linie und Fläche
4. besondere Linie im Dreieck – griechischer Mathematiker (um 100 v. u. Z.)
5. Einheit der Fläche – griechischer Mathematiker (+ 212 v. u. Z.)
6. Ergebnis der Aufgabe 3 : 2 – Fläche, durch deren Rotation eine Halbkugel entsteht
7. besondere Linie im Trapez – Bestandteil einer Menge
8. italienischer Mathematiker und Physiker (1564 bis 1642) – platonischer Körper (Zwanzigflächner)
9. Einheit der Zeit – dreiseitige Pyramide
10. Bestandteil einer Subtraktionsaufgabe – abschließendes Resultat einer Aufgabe
11. gegenseitige Lage der Schenkel eines Winkels von 90° – besonderes Viereck

Und wer's nicht schafft, dem seien die Silben gegeben: al – ar – bra – chi – der – der – des – e – e – e – eck – ein – ein – end – er – halb – he – hekt – hö – i – ki – ko – kreis – le – le – li – li – li – lo – me – men – ment – mi – mi – mit – mus – ne – ni – nis – nu – nu – punkt – recht – rith – ron – sa – schei – senk – te – tel – tel – tra.
(Dabei ist die jeweils gemeinsame Silbe nur einmal aufgeführt.) *OStR K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin*

Kombinatorik am Wabenrätsel

In jedes der zwölf quadratischen Felder dieser Figur ist derart ein Buchstabe einzusetzen, daß beim Lesen in zyklischer Reihenfolge der in den vier Feldern, die an einen Kreis anstoßen, stehenden Buchstaben sich die Wortbilder „Satz", „Stab", „Term" und „zehn" ergeben.
Gib eine Lösung an, und zeige, daß diese Aufgabe genau acht Lösungen hat! *Mathematikfachlehrer W. Träger, Döbeln*



Legespiel mit Dreiecken

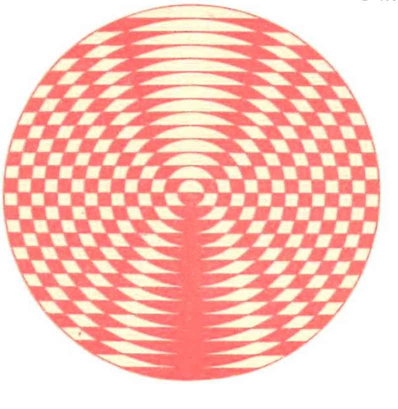
Konstruiere vier Dreiecke mit folgenden Seiten auf Pappe!

1. Dreieck: 1 cm, 13 cm, 13 cm
2. Dreieck: 5 cm, 7 cm, 8 cm
3. Dreieck: 7 cm, 10 cm, 13 cm
4. Dreieck: 7 cm, 13 cm, 15 cm

Schneide danach diese Dreiecke aus, und lege sie zu einem Parallelogramm aneinander!
Mathematikfachlehrer W. Träger, Döbeln

Dynamische Schönheit

To obtain the above design draw a series of concentric circles with radii r, $2r$, $3r$, ..., nr, and a series of parallel tangents terminating on the circumference of the largest circle. *H. Baravalle, scripta matematica, University New York*



Kryptarithmetik

Setze für alle auftretenden Figuren Ziffern ein! Gleiche Figuren bedeuten gleiche Ziffern.

Carola Ribbe, Kreisarbeitsgemeinschaft Aschersleben

$$\begin{array}{ccccccc}
abb & - & c & = & abd \\
: & & + & & - \\
ce & \cdot & fc & = & agh \\
\hline
fa & + & fg & = & cb
\end{array}$$

Ein Würfelspiel

Es war bei einem Würfelspiel,
ein Würfel in das Wasser fiel.
Der Würfel stand – ja kann das sein? –
wie eine Gans auf einem Bein.
Das Wasser bis zum Schwerpunkt ging
und somit sein Gewicht auffing.
Ein Spieler hat ihn dann gerettet,
des Würfels Mantel hingebettet.
Da sah er – es war sonnenklar –
daß noch die Hälfte trocken war.
Er teilt' mit sehnurgeradem Schnitt
und nahm die trockene Hälfte mit.
Nun frag' ich, ob sich das verträgt.
Wie war der Mantel hingelegt?

Verlangt wird eine Zeichnung des Würfelnetzes mit Angabe des Schnittes und ein Schrägbild des halben Würfels.

Dr. W. Bennewitz, Radebeul

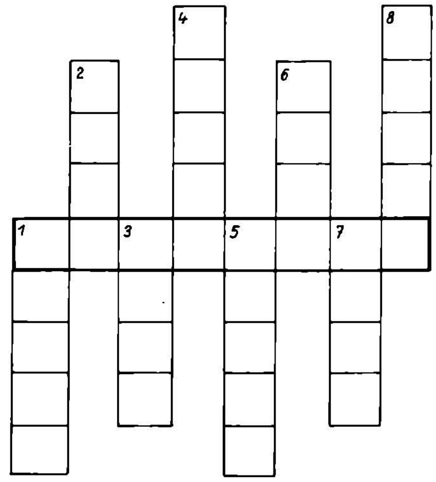
Man sollte ...

Es sind mathematische Begriffe so einzusetzen, daß vollständige Sätze entstehen. Die Anfangsbuchstaben dieser Begriffe nennen einen geometrischen Körper.

Man sollte $\frac{12}{24}, \frac{6}{9}, \frac{32}{64}$ ...						
Die Brüche $\frac{999}{998}, \frac{27}{5}, \frac{9}{8}$, sind ...						
Die nat. Zahlen 9314, 198, 24 sind ...						
$\frac{3}{4}$ gehört zur Klasse der ... Brüche.						
12 + 8 = 30. Diese ... ist falsch, denn 12 + 8 = 20						

Schüler G. Schwarze, Schwarzheide (Kl. 7)

Kreuzworträtsel



Alle Wörter sind senkrecht einzutragen.

1. Französischer Mathematiker
2. Ein Werk von Euklid
3. Dreidimensionale Ausdehnung
4. Vorsatz bei gesetzlichen Einheiten (der hundertste Teil der Einheit)
5. Name einer Stadt, die in der Antike ein wissenschaftliches Zentrum war
6. „Methode“ von *Eratosthenes* zur Bestimmung von Primzahlen
7. Name eines Mathematikers, der in der Antike die verlorengegangenen „Elemente“ zusammenstellte
8. Linie am Kreis

Die stark umrandeten Felder ergeben einen mathematischen Begriff, den alle Schüler bereits in der 1. Klasse verwenden.

Mathematikfachlehrer K.-H. Gentzsch, Altenburg

W. P. Rosanzew

alpha-Wettbewerb

Abzeichen in Gold

Für siebenjährige Teilnahme

Annegret Kirsten, Leuna; **Ute Winkler,** Teltow; **Ralph Lehmann,** Petershagen; **Kerstin Bachmann,** Halle; **Christoph Scheurer,** Glauchau-Gesau; **Lutz Püffeld,** Hennigsdorf; **Uwe Lewandorski,** Leipzig; **Peter Linhart,** Waldheim; **Henrik Frank,** Greifswald; **Karin Fischer,** Dresden; **Eckhard Schadow,** Oranienburg; **Christina Feige,** Mühlhausen; **Dagmar Rißmann,** Dresden

Für sechsjährige Teilnahme

Kirsten Helbig, Frankfurt; **Guido Blosfeld,** Halle; **Detlef Poppe,** Mühlhausen; **Karl-Heinz Hering,** Erfurt; **Andreas Schlosser,** Zwickau; **Regina Hildenbrandt,** Stützerbach; **Wolfgang Kögler,** Wiesenburg; **Hans-Peter Tams,** Ribnitz-D.; **Gerlinde Koch,** Schmalkalden; **Regina Rau,** Schneeberg; **Bernd Hanke,** Großschweidnitz; **Reiner Lindemann,** Cottbus; **Marina Schulz,** Görlitz; **Martin Ermrich,** Elbingerode; **Michael Schnelle,** Calau; **Bärbel Rahnefeld,** Karl-Marx-Stadt; **Sibylle Rohrbeck,** Franzburg; **Brigitte Hildenbrandt,** Stützerbach; **Ullrich Bittner,** Greifswald; **Wolfgang Herrmann,** Elterlein; **Roswitha Leyh,** Eisenach; **Rüdiger Blach,** Calau; **Astrid Rösel,** Zittau

Für fünfjährige Teilnahme

Angelika Müller, Greifswald; **Hermann Tenor,** Dessau; **Rainer Gutsche,** Herzberg; **Andreas Näther,** Mittweida; **Heiner Schulz,** Strausberg; **Falk Bachmann,** Halle; **Ilona Drews,** Wöbbelin; **Olaf Richter,** Pirna; **Lars Luther,** Güstrow; **Jens-Uwe Richter,** Kemtau; **Hiltrud Manske,** Steinbach-Hallenberg; **Birgit Krötenheerdt,** Halle; **Bernd Redlich,** Wernburg; **Birgit Kühnstedt,** Erfurt; **Dirk Sprengel,** Potsdam; **Ulf Hutschenreiter,** Dresden; **Kerstin Müller,** Brandis; **Ralf Weber,** Bischofswerda; **Horst Kohlschmidt,** Dresden; **Irene Hanske,** Putzkau; **Ulrike Bandemer,** Freiberg; **Frank Richter,** Herzberg; **Sven-Thorsten Freitag,** Zwickau; **Angela Bagola,** Spremberg; **Wilfried Carl,** Halle; **Ulli Riedel,** Flöha; **Thomas Rehm,** Bernau; **Birgit Weiß,** Bernau; **Michael Huhn,** Teterow; **Jens Walther,** Bennsdorf; **Jörg Päßler,** Marienberg; **Manfred Seidler,** Cottbus; **Arndt Petzold,** Karl-Marx-Stadt; **Astrid Binder,** Halle; **Gisbert Schultz,** Dessau, **Manfred Zmeck,** Rüdnitz; **Birgit Lorenz,** Pirna; **Gerd Reif,** Silbach; **Werner Wehr,** Dingelstädt; **Wolfram Ulrici,** Leipzig; **Andreas Neubert,** Schwarzenberg; **Bettina Zimmermann,** Schmalkalden; **Heike Anders,** Dahlewitz; **Bernd Derlich,** Teterow; **Beate Brandtner,** Schildau; **Heidrun Weichler,** Schmalkalden; **Torsten Waldeck,** Karl-Marx-Stadt; **Lutz Dopheide,** Leipzig; **Stephan Fleischmann,** Zella-Mehlis; **Holger Jurack,** Burkau; **Jörg Schubert,** Pfaffroda; **Falk Bahner, Hans-Jürgen Kiehm, Sabine Kämpf, Elke Genath, Gabriele Reumschüssel,** alle Steinberg-Hallenberg

Für vierjährige Teilnahme

Marid Helbig, Frankfurt; **Frank Schulze,** Himmelsberg; **Uwe Szyszka,** Brohm; **Jan Müller,** Berlin; **Thies Luther,** Güstrow; **Ulv Krabisch,** Leipzig; **Lew Dimenstein,** Leningrad (UdSSR); **Rainer Seifert,** Pinnau; **Manuela Lehmert,** Worbis; **Sabine Schröder,** Bernau; **Thomas Maiwald,** Olbersdorf; **Volker Lerche,** Schmalkalden; **Uwe Heiber,** Ilmenau; **Jörg Wachsmann, Astrid Surber, Silke Zimmermann, Elke Halecker,** alle Clingen; **Andreas Illing,** Gersdorf; **Bernd Kreußler,** Leipzig; **Volker Ludley,** Bergwitz; **Gudrun Drews,** Wöbbelin; **Elke Witt,** Uthausen; **Uwe Rieckert,** Cottbus; **Kornelia Poike,** Neukirch; **Lutz Thorwarth,** Schmalkalden; **Ingo Fietze,** Cottbus; **Meinhard Mende,** Lunzenau; **Gundula Hanke,** Frankenheim; **Heiko Tennert,** Döbeln; **Karl Krause,** Mansfeld (Rentner); **Reinhold Müller,** Leipzig; **Jürgen Sommerschuh,** Bischofswerda; **Frank Burghardt,** Frankfurt; **Ingolf Buttig,** Großharthau; **Frank Müller;** Cottbus; **Jörg Brüstel,** Ziegelheim; **Wolfgang Huschmann,** Oelsnitz; **Elke Seidel,** Dresden; **Sylvana Kühn,** Gräfenhain; **Sigrun Below,** Seelow; Klaus Schulze, Brandis; Silvia König, Forst; Thomas Fuchs, Fambach; Ulrike Zinke, Lützen; Birgit Schönfelder, Schwedt; Uwe Beck, Falkensee; Wolfgang Baier, Pfaffendorf; Birgit Genz, Anklam; Bernd Grünler, Zeulenroda; Borwin Wegener, Berlin; Matthias Heinevetter, Heiligenstadt; Norbert Siedow, Neuruppin; Carla Bergd, Dittersdorf; Thomas Fiedler, Greifswald; Annette Schulze, Döbeln; Gerhild Hanke, Frankenheim; Ralf Hörtling, Berlin; Christine Hense, Potsdam; Berthold Wettengel, Oelsnitz; Bernhard Tschada, Sondershausen; Regina Kupfer, Dresden; Andreas Fischer, Radebeul; Carola Fechtner, Neubrandenburg; Volker Fritzsche, Radebeul; Andreas Wenzel, Dorfchemnitz; Cornelia Linz, Cottbus; Thomas Jarosch, Berlin; Siegfried Sonnenschein, Wittenberge; Heidi Günther, Sohland; Birgit Graizarek, Erfurt; Jens Schönfelder, Schwedt; Reinhard Koeppe, Loburg; Uta Stopp, Dresden; Rita Rempel, Cottbus; Karla Eberlein, Niederfrauendorf; Volker Manusch, Dittersbach; Arno Feuerherdt, Brandenburg; Uwe Prochno, Berlin; Thomas Jakob, Gera; Uwe Krüger, Greifswald; Susanne Schmidt, Schmalkalden; Ulrich Palmer, Neuburg; Petra Scharf, Döbeln; Volker Lippoldt, Leipzig; Klaus Schlegel, Dresden; Uwe Bormann, Magdeburg; Carola Zimmermann, Döbeln; Kirsten Liebmann, Karl-Marx-Stadt; Isolde Kehr, Gospenroda; Jens Erb, Glauchau-Gesau; Joachim Ernst, Döbeln; Frank Aßmus, Oranienburg; Siegmar Reckenbeil, Fambach; Monika Kurch, Cottbus; Cornelia Güntzel, Cottbus; Gabriele Schröter, Ilmenau; Holger Harz, Weimar; Elke Zießler, Erfurt; Dagmar Schüppel, Karl-Marx-Stadt; Jürgen Scheller, Cottbus; Karsten König, Zeuthen; Ulf Meißner, Herzberg; Heidi Hendzlik, Guben; Wolfgang Seeber, Gehren; Sigrun Herbst, Halberstadt; Peter Hahn, Nauendorf; Elke Fiedler, Dresden; Herbert Pranner, Stützerbach; Roland Kaschner, Lauchhammer; Hans Peter Delius, Halle; Stefan Kaiser, Niederschmalkalden; Wulf Henze, Milow; Wolfgang Henkel, Erfurt; Doris Jeschner, Eisleben; Wolfgang Flänig, Dresden; Uwe König, Bautzen; Sabine Pohl, Jena; Astrid Richter, Zerpenschleuse; Frank Mulsow, Parchim; Heinz-Peter Müller, Bischofferode; Helga Schuster, Cottbus; Silvia Glatzel, Güstrow; Marianne Prignitz, Güstrow; Lothar Eimecke, Fermerswalde; Cornelia Drechsler, Karl-Marx-Stadt; Rita Klingl, Schleusingerneundorf; Rainer Hecht, Döbeln; Gerald Nahrstedt, Neuenhofe; Steffen Gündel, Gersdorf; Thomas Brückner, Stefan Petzl, Steffen Richter, Steffen Kley, Volkmar Fichtner, alle Karl-Marx-Stadt; Heike Kuschel, Rotta; Christina Schneider, Harald Berger, Monika Künstler, Simone Sauer, Angela Lange, Regina Schwarz, Anke Tutschke, Dagmar Hentsche, Ingolf Wiedermann, alle Burkau; Hubert Steinmetz, Eva Marx, Sabine Range, alle Clingen; Sybille Baumgart, Löderburg; Karin Kusche, Kerstin Menz, Bettina Hoffmann, Martina Henkel, Kerstin Müller, Margit Mangold, Ursula Thomas, Jens Schmidt, Edith Franke, Ingeburg Pfannschmidt, Waldemar Olk, Gabi Huhn, Steffi Faßler, Bettina Zimmermann, Marina Wahl, Brigitte Holland-Moritz, Carola Voigt, Jens König, Angela Gotthelf, Karin Holland-Cunz, Steffi Holland-Merten, Martina Wahl, Armin Endter, alle Steinbach-Hallenberg; Ursula Garnitz, Zeuthen; Kathrin Benedix, Döbeln; Andreas Fischer, Lobetal; Bianca Herrmann, Zahna.

Für dreijährige Teilnahme

Andreas Kasparek, Gräfenhainichen; **Dittmar Kurtz,** Friedrichsrode; **Iris Schulz,** Rotta; **Andrea Nießen,** Berlin; **Wolfgang Taubert,** Meiningen; **Martin Blümlinger,** Linz (Österreich); **Stefan Krötenheerdt,** Halle; **Ulf Ritschel,** Booßen; **Eckhard Liebscher,** Ilmenau; **Rüdiger Schultz,** Bergen; **Thomas Luschtinetz,** Stralsund; **Audrey Hoffmann,** Berlin; **Andreas Fittke,** Berlin; **Arnhild Lorenz,** Görlitz; **Petra Henkel,** Alt-Töplitz; **Carola Totzauer,** Güstrow; **Heinz Ernst,** Linz (Österreich); **Andreas Mempel, Uwe Lumm,** beide Clingen; **Sabine Schoof,** Neuenhofe; **Gerald Werner,** Meiningen; **Thomas Kaatz,** Gräfenhainichen; **Cornelia Thiel,** Güstrow; **Ute Busch,** Lobenstein; **Bernd Bräutigam,** Bernsbach; **Michael Reissig,** Halle; **Jens-Peter Mönch,** Berlin; **Clemens Jaunich,** Cottbus; **Gunter Gerbeth,** Greiz; **Lothar Gruber,** Linz

(Östereich); **Karin Schmidt,** Bernsbach; **Volker Barop,** Torgau; **Michael Marczinek,** Berlin; **Viktor Chaschtschansk,** Dzerschinsk (UdSSR); **Klaus Hering,** Halle; **Axel Müller,** Oberlungwitz; **Stefan Kasper,** Leipzig; **Michael Kaufmann,** Linz (Österreich); **Dagmar Lorenz,** Görlitz; **Cornelia Thannhausser,** Linz (Österreich); **Hans-Reinhard Berger,** Hohenstein-E.; **Franz Sander,** Görlsdorf; **Gerhard Neumüller,** Linz (Österreich); Manfred Häußler, Jörg Keitel, Frank Billert, Gudrun Bertram, alle Clingen; Matthias Fritzsche, Stolpen; Berthold Möbius, Dresden; Monika Schöbe, Rotta; Angela Gebhardt, Bernsbach; Birgit Rosenberger, Suhl; Ralf Buschko, Berlin; Brigitte Urban, Strausberg; Dieter Kratsch, Göhren; Frank Ringel, Alt-Töplitz; Jörg Kunzmann, Bernsbach; Horst Lange, Olbersdorf; Claudia Riemer, Ponickau; Jürgen Gäbel, Stolpen; Michael Minx, Berlin; Andreas Bernert, Grünbach; Elke Gräfe, Oberlichtenau; Christine und Mathias Kuhnt, Zug; Karsta 'ahl, Uwe Trautvetter, beide Neuenhofe; Andreas Goldhahn, Bernsbach; Dietmar Wendlik, Cottbus; Kunt Oertel, Zschornewitz; Falk Pankau, Wildpark; Uwe Reimann, Görlitz; Lutz Teichler, Rennersdorf; Ines Kircheis, Bernsbach; Beate Weisheit, Fambach; Pamela Teubner, Leipzig; Michael Wünsche, Stolpen; Wulf Dettmer, Dresden; Harry Scholich, Berlin; Ralf Lübs, Schönbeck; Petra Mittelstedt, Halle; Holger Büchler, Feldberg; Ilona Wünsche, Rodewitz; Manuela Ufer, Stolpen; Steffen Krebs, Radebeul; Katrin Richter, Wittenberg; Marlies Kolbatz, Groß-Quassow; Rolf Weidlich, Bernsbach; Sabine Jahn, Reuden; Andreas Helmke, Brandenburg; Uta Gutsche, Herzberg; Michael Sack, Leipzig; Irmhild Bittner, Greifswald; Irmtraud Karnetzke, Wilhelmsburg; Bettina Büchel, Ute Grünbeck, Christina Wurst, Klaus Pabst, Birgit Herdmann, Bernd Linß, Heidi Pabst, Heiko Rosenbusch, alle Springstille; Klaus Rehm, Bernau; Volker Schulz, Nauen; Heidrun Leisker, Böhla; Sabine Seyfried, Cottbus; Peter Röhl, Cottbus; Uta Weidauer, Bernsbach; Jörg Kaiser, Cottbus; Hardy Eich, Glasin; Lutz Hoffmann, Güstrow; Ingrid Strickfaden, Annaburg; Werner Gundlach, Schwarz; Ulrich Berger, Flöha; Jens Stahlberg, Zwickau; Petra Stuhr, Güstrow; Gerold Bruntsch, Gröbern; Thomas Friebus, Magdeburg; Andreas Brand, Leinefelde; Erika Krüger, Sangerhausen; Ralf Henze, Arnstadt; Andreas Kopf, Berlin; Gerald Hauck, Erfurt; Ute Lehmann, Güstrow; Christian Kolliwer, Berlin; Kerstin Utke, Stralsund; Marlies Gräser, Werlitzsch; Antje Lorenz, Alt-Töplitz; Jörg Gabriel, Freist; Karl-Heinz Jünger, Dresden; Uta Müller, Mittelherwigsdorf; Rainer Michael, Berlin; Thomas Hoffmann, Apolda; Sibylle Strempel, Petersdorf; Kai Schmidt, Leipzig; Uwe Klaus, Eilenburg; Karin Kramer, Görlitz; Beate Rost, Neuendorf; Manfred Zimmer, Volkstedt; Dagmar Pohle, Mühlberg; Gabriele Hoffmann, Berlin; Roland Löffler, Weida; Andrea Weigel, Bernsbach; Steffen Döring, Olbersdorf; Thomas Richter, Schwerin; Hendrik Glaßmann, Karl-Marx-Stadt; Thomas Berg, Berlin; Petra Herzog, Wolgast; Marita Figas, Berlin; Frank Hasse, Warbelow; Marina Krause, Golm; Ralf Vogt, Werder; Martina Knospe, Görlitz; Jörg Schmelnig, Berlin; Petra Straube, Schernberg; Bengt und Sylke Nölting, Greifswald; Manuela Boy, Hoyerswerda; Kornelia Rasch, Zeitz; Petra Beck; Potsdam; Birgit Päschel, Magdeburg; Frank Tischer, Spremberg; Angelika Anspichler, Gr. Molzahn; Michael Groth, Cottbus; Karlemann Timm, Schwerin; Wolfgang Blachnik, Lübbenau; Reiner Gaulke, Krien; Monika Kössel, Fambach; Axel Schurath, Gnoien; Steffen Nies, Leipzig; Frank Wilde, Berlin; Claudia Naumann, Görlitz; Bernd Stiehler, Bernsbach; Astrid Bärenklau, Ruhla; Frank Kressin, Güstrow; Lutz Schuffenhauer, Bernsbach; Winfried Glöde, Neubrandenburg; Julius, Karl und Friedrich Heymann, Berlin; Kerstin Otto, Alt-Töplitz; Uwe Hösel, Lobenstein; Petra Maeder, Berlin; Lutz Wübbenhorst, Magdeburg; Jan-Joachim Rückmann, Berlin; Marina Lehmann, Söllichau; Thomas Wegner, Pirna; Ingrid Escher, Bernsbach; Gerhard Heger Bärenstein; Erhard Pfeil, Greiz; Rainer Grünert, Dresden; Wolfram Ortweiler, Apolda; Kerstin Grüger, Halle; Ilona Flögel, Berlin; Michael Schilling, Berlin; Kerstin Brückner, Karl-Marx-Stadt; Hartmut Simmchen, Zittau; Wiete Schirmer, Karl-Marx-Stadt; Tanja Hellak, Eisenhüttenstadt; Birgit Haeske, Görlitz; Uwe Börner, Brand-Erbisdorf; Ulrike Ketelhut, Gotha; Martin Winkler, Berlin; Knut Ullmann, Bernsbach; Rolf Kuhn, Wintringerode; Detlef Kohn, Weimar; Betty Schönherr, Großröhrsdorf; Frank Pfeiffer, Warbelow; Claudia Kubo, Daubitz: Jürgen Schmidt, Meiningen; Frank Mosler, Weimar; Wolfgang Patzer, Erfurt; Uwe Gätzschmann, Cottbus; Ralph Scharf, Döbeln; Marina Badorrek, Sondershausen; Hendrike Meyer, Carmen Hildebrandt, Kerstin Tamm, alle Schmalkalden; Matthias Breitbarth, Mühlhausen; Birgit Mann, Berlin; Michael Schalle, Drognitz; Ilona Nolte, Kirchgandern; Elke Köhler, Staßfurt; Cornelia Berger, Döbeln; Klaus Harms, Bobzin; Andrej Jendrusch, Glienicke; Horst Krätzschmar, Gröditz; Christine Gutschmidt, Friedland; Axel Kühne, Blankenfelde; Volker Dabow, Naundorf; Jens Börner, Berlin; Gerd Helmert, Karl-Marx-Stadt; Uwe Stöhr, Bernsbach; Dieter Hornawsky, Silbach; Barbara Schneider, Stützerbach; Gernot Beske, Janow; Michael Schuster, Leipzig; Bert Carlsen, Titschendorf; Thomas Göpfert, Karl-Marx-Stadt; Ingo Lenz, Hagenow; Sabine Block, Großenhain; Andrea Schröder, Zeitz; Ramona Grobleben, Dresden; Bärbel Otto, Pirna; Ines Appelt, Eisenhüttenstadt; Günther Bartholmé, Triebs; Barbara Lutter, Güstrow; Silke Schmiedtke, Golm; Jörg Vollrath, Karl-Marx-Stadt; Christian Heymann, Karl-Marx-Stadt; Walter Rempel, Sonneberg; Olaf Hetze, Adorf; Marita Rentsch, Dresden; Lothar Demelius, Ilmenau; Siegbert Scharf, Dresden; Thomas Jeske, Berlin; Bernd Schäfer, Gotha; Norbert Samland, Teterow; Matthias Ott, Sonneberg; Petra Krohn, Reinberg; Elke Henkel, Berlin; Gudrun Fuchs, Neukloster; Petra Gothe, Cottbus; Claudia Bom, Breitenbach; Karsten Beldekow, Krien; Bernhard Krempelt, Cottbus; Marion Werner, Rietschen; Ramona Ulbricht, Hermsdorf; Thomas Richter, Neuhausen; Frank Nachtigall, Eberswalde; Andrea Hadlich, Zwickau; Iris Ostwald, Grimmen; Harald Geick, Suckow; Claudia Endtricht, Görlitz; Bärbel Hamm, Suhl; Matthias Weber, Meiningen; Andreas Neumann, Berlin; Helmut Jacob, Jena; Kerstin Hinrichs, Allerstedt; Rita Heinevetter, Großbodungen; Roland. Zabel, Wettin; Holger Wegner, Pirna; Björn Noack, Lübbenau; Klaus Grützmann, Samtens; Christina Seidel, Bernterode; Ines Spyrka, Bergen; Marion Unverricht, Dresden; Kerstin Käckenmeister, Wildberg; Manuela Krahnefeld, Zörbig; Sabine Pfützner, Seeligstadt; Manfred Goldenbogen, Stralsund; Hartmut Fäller, Bucha; Ronald Hartung, Tissa; Susanne Schlegel, Großbodungen; Rolf Krämer, Petra Franz, Jörg Busch, Hans Busch, Marina Morgenstern, alle Lobenstein; Gunter Krause, Lutz Schade, Uwe Fischer, Marlies Gerlach, Christine Kretzschmar, Iris Seeberg, Lutz Fuchs, alle Hainichen; Norbert Ziegler, Ilona Winkler, beide Cunnersdorf; Rolf Schmid, Schlegel; Bettina Billig, Jana Riedel, Andrea Tippner, Barbara Jander, Angela Hartewig, Sabine Schmidt, Ute Selle, Ralph Meichsner, Heike Richter, Leonore Weise, Ronald Müller, alle Karl-Marx-Stadt; Doris Güldenzopf, Himmelsberg; Jörg Kuß, Heike Gericke, Evelyn Hönicke, Kerstin Töpfer, alle Reuden; Achmed Kuschel, Klaus-Dieter Holzwig, Bernd Saxenberger, Harry Schröter, alle Rotta; Andreas Erler, Hellendorf; Martina Albrecht, Klenz; Elke Ahrendt, Remlin; Isolde Fail, Cornelia Wiede, beide Jördenstorf; Rita Kellermann, Remlin; Ramona Barz, Schlieben; Jörg Hentschel, Siedenlangenbeck; Rüdiger Tanzke, Sigrid Eve, Petra Prondzinski, Andreas Erben, Bettina Voigt, Cordula Schmidt, Hardo Burkhardt, Hans-Joachim Berger, alle Löderburg; Barbara Zeiß, Frank Häfner, Marina Nothnagel, Kerstin Scheerschmidt, Stefan Usbeck, Jens Willnig, Stefan Meingst, Andreas Günnel, Christine Ciesla, Barbara Hössel, Regina Kusche, Evelyne Recknagel, Kerstin Schubert, Petra Thomzik, Monika Kaufmann, Harald Bauroth,

Fortsetzung S. 22.

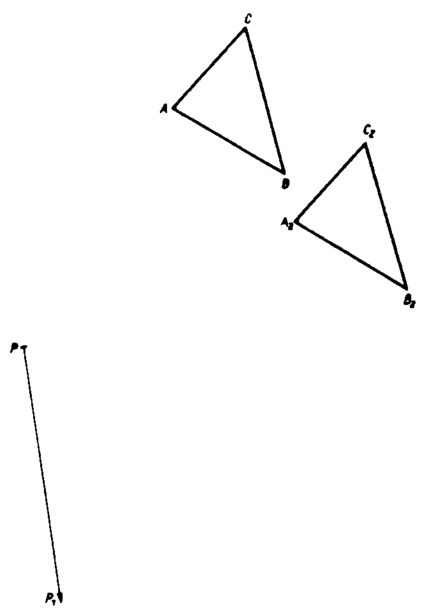
XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Kreisolympiade

(20. 11. 1974)

Olympiadeklasse 5

1. Auf dem beiliegenden Arbeitsblatt sind ein Dreieck ABC, ein Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP_1}$ sowie ein Dreieck $A_2B_2C_2$ abgebildet. Das Dreieck $A_2B_2C_2$ ist dadurch entstanden, daß auf das Dreieck ABC zuerst die Verschiebung $\overrightarrow{PP_1}$ und dann eine zweite Verschiebung angewendet wurde.



Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel, Lineal und Zeichendreieck denjenigen Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P_1P_2}$, der diese zweite Verschiebung angibt!
Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.

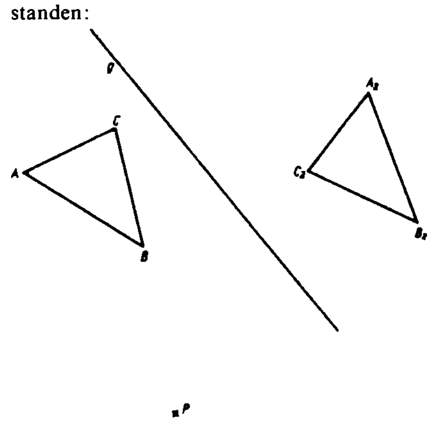
2. Anita und Peter sollten für ihre Gruppe aus dem Konsum 7 Flaschen Selterswasser holen. Sie hatten eine Geldsumme bei sich, die genau hierfür gereicht hätte. Sie konnten aber nur Brause bekommen, von der jede Flasche 15 Pfennige mehr kostete als eine Flasche Selterswasser. Für ihr gesamtes Geld erhielten sie nunmehr 4 Flaschen Brause.
Ermittle den Preis für eine Flasche Selterswasser und den Preis für eine Flasche Brause. Wieviel kosteten die 4 Flaschen Brause?

3. Uwe fuhr mit einem Sonderzug ins Ferienlager. Als der Zug genau die Hälfte seiner Reisestrecke zurückgelegt hatte, schlief Uwe ein und erwachte erst, als der Zug noch eine Strecke von genau 25 km bis zum Reiseziel zurückzulegen hatte. Diese Strecke war halb so lang wie die Strecke, die der Zug zurückgelegt hatte, während Uwe schlief.
Wieviel Kilometer betrug Uwes Reisestrecke?

4. Schülerinnen und Schüler einer Klasse 5 trugen ein 14tägiges Schachturnier aus. Dabei wurden an jedem der 14 Tage genau 6 Spiele ausgetragen. Die Anzahl der teilnehmenden Jungen war größer als die der teilnehmenden Mädchen. Jedes Mädchen spielte gegen jedes andere Mädchen und jeder Junge gegen jeden anderen Jungen genau zweimal. Keines der Mädchen spielte gegen einen Jungen. Ermittle die Anzahl der Mädchen und die der Jungen, die an diesem Turnier teilnahmen!

Olympiadeklasse 6

1. Auf dem beiliegenden Arbeitsblatt sind ein Dreieck ABC und ein Dreieck $A_2B_2C_2$, ein Punkt P sowie eine Gerade g abgebildet. Das Dreieck $A_2B_2C_2$ ist aus dem Dreieck ABC durch folgende Konstruktionen entstanden:



Zunächst wurde $\triangle ABC$ an g gespiegelt, wobei ein Dreieck $A_1B_1C_1$ ebtstand.
Danach wurde auf $\triangle A_1B_1C_1$ eine solche Verschiebung angewendet, daß $\triangle A_2B_2C_2$ als Bild des Dreiecks $A_1B_1C_1$ entstand.
Konstruiere unter Verwendung von Zirkel, Lineal und Zeichendreieck den Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PQ}$ dieser auf $\triangle A_1B_1C_1$ anzuwendenden Verschiebung.
Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.

2. Klaus behauptet, eine von ihm aufgeschriebene natürliche Zahl a habe folgende Eigenschaften:
(1) Vertauscht man zwei geeignete Ziffern von z miteinander, so ist die auf diese Weise entstehende Zahl z' um 198 größer als z.
(2) Die Summe aus z und z' beträgt 13 776.
Stelle fest, ob es genau eine Zahl z mit den von Klaus genannten Eigenschaften gibt! Wenn dies der Fall ist, so ermittle diese Zahl!

3. Anita, Brigitte, Christa und Dana trugen untereinander einen Wettkampf aus. Auf die Frage, wer den ersten, zweiten, dritten bzw. vierten Platz belegte, wurden folgende drei Aussagen gemacht:
(1) Anita siegte, Brigitte belegte den zweiten Platz.
(2) Anita belegte den zweiten Platz, Christa den dritten.
(3) Dana belegte den zweiten, Christa den vierten Platz. Wie sich herausstellte, wurde in jeder der drei Aussagen (1), (2), (3) eine Plazierung richtig und eine falsch angegeben.
Wer belegte den ersten, zweiten, dritten bzw. vierten Platz?

4. Ein Radfahrer fuhr mit gleichbleibendei Geschwindigkeit auf einer Straße von A nach B. Er startete in A um 6.00 Uhr und legte in jeder Stunde 14 km zurück. Ein zweiter Radfahrer fuhr auf derselben Straße mit gleichbleibender Geschwindigkeit von B nach A. Er startete am selben Tag um 8.00 Uhr in B und legte in jeder Stunde 21 km zurück.
Beide Radfahrer begegneten sich genau am Mittelpunkt der Strecke von A nach B.
Um wieviel Uhr begegneten sie sich? Wie lang ist die Strecke von A nach B?

Olympiadeklasse 7

1. Drei Schülerinnen mit den Vornamen Angelika, Beate und Christine und den Zunamen Müller, Naumann und Richter beteiligten sich am *alpha*-Wettbewerb.
Folgendes ist über sie bekannt:
(1) Die Schülerin Naumann nahm zum ersten Mal teil.
(2) Die Schülerin Richter erhielt eine schlechtere Bewertung als mindestens eine der anderen Schülerinnen.
(3) Die Schülerin Müller benutzte nur liniertes Papier.
(4) Angelika erzielte das schlechteste Ergebnis.
(5) Beate hatte bereits im Vorjahr das *alpha*-Abzeichen erhalten.
(6) Die erfolgreichste der drei Schülerinnen verwendete nur unliniertes Papier.
Ermittle den Vor- und Zunamen der erfolgreichsten der drei Schülerinnen!

2. Beweise folgende Aussage:
Wenn ein Dreieck ABC die Eigenschaft hat,

daß für den Mittelpunkt D der Seite AB die Gleichung
(1) $\overline{DB} = \overline{BC} = \overline{CD}$ gilt, so ist das Dreieck rechtwinklig.

3. Konstruiere ein Dreieck ABC aus $\alpha = 60°$, $\beta = 35°$ und $w_\alpha = 5{,}5$ cm. Dabei seien α bzw. β die Größen der Winkel $\sphericalangle BAC$ bzw. $\sphericalangle ABC$ und w_α die Länge der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle BAC$.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck eindeutig bestimmt ist!

4. Fritz hat von seinem Freund Max für 6 Tage ein Buch geliehen. Zu seinem Freund Paul, der das Buch nach ihm leihen möchte, sagt er am Morgen des 6. Tages: „Am ersten Tag las ich den 12. Teil des Buches, an den folgenden 4 Tagen jeweils ein Achtel, und heute muß ich noch, wenn ich das ganze Buch lesen will, 20 Seiten weniger lesen, als ich in den vergangenen Tagen zusammen gelesen habe.
Wieviel Seiten hat das Buch insgesamt?"
Untersuche, welche Möglichkeiten es für Paul gibt, auf diese Frage so zu antworten, daß alle Angaben von Fritz zutreffen!

Olympiadeklasse 8

1. Bei einer Kreisspartakiade wurden für die Teilnehmer insgesamt 61 Goldmedaillen, 63 Silbermedaillen und 60 Bronzemedaillen vergeben. Die Mannschaften der Schulen der Stadt B erkämpften dabei zusammen 42 dieser Medaillen. Sie erhielten genau ein Drittel aller Silbermedaillen, mehr als ein Sechstel, jedoch weniger als ein Fünftel aller Bronzemedaillen und einige Goldmedaillen.
Ermittle die Anzahl aller Gold-, Silber- und Bronzemedaillen, die von den Schülern der Stadt B bei diesem Wettkampf errungen wurden!

2. Vier Lastkraftwagen A, B, C und D befahren dieselbe Strecke. Fährt A mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $56\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und B mit $40\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, so benötigt A genau 2 Stunden weniger als B für diese Strecke.
Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit müßte C fahren, wenn D genau 4 Stunden eher als C abfahren, durchschnittlich mit $35\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fahren und gleichzeitig mit C am gemeinsamen Ziel ankommen soll?

3. Gegeben sei ein Dreieck ABC, das folgender Bedingung genügt:
Die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$ beträgt ein Viertel der Größe des Außenwinkels bei A.
a) Stelle fest, ob es auf AB einen Punkt D gibt, für den $\overline{AD} = \overline{AC}$ gilt!
b) Beweise, daß für jeden derartigen Punkt $\overline{DB} = \overline{DC}$ gilt!

4. Konstruiere einen Kreis k, der folgende Eigenschaft hat:
Ist AB ein Durchmesser von k, g die Tangente an k in B und liegt ein Punkt Q so auf g, daß $\overline{BQ} = 6$ cm gilt, so schneidet k die Strecke AQ in einem Punkt P, für den $\overline{PQ} = 3$ cm gilt.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein derartiger Kreis k bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist.

Olympiadeklasse 9

1. An einer Fußballmeisterschaft der DDR beteiligen sich 14 Mannschaften der Oberliga. In der ersten Halbserie spielen je zwei dieser Mannschaften genau einmal gegeneinander.
Es ist zu beweisen, daß es in der Zeit dieser Halbserie nach jedem Spieltag zwei Mannschaften der Oberliga gibt, die die gleiche Anzahl von Spielen ausgetragen haben.

2. Es sei $\triangle ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck, H sei der Schnittpunkt seiner Höhen und D, E, F deren Fußpunkte, wobei D auf BC, E auf CA und F auf AB liegen mögen.
Man beweise, daß dann $\overline{AH} \cdot \overline{HD} = \overline{BH} \cdot \overline{HE} = \overline{CH} \cdot \overline{HF}$ gilt!

3. Es ist die kleinste positive ganze Zahl z zu ermitteln, deren dritte Potenz ein ganzzahliges Vielfaches von 588 ist.

4. AB sei eine in der Ebene ε gegebene Strecke der Länge a. In ε sei g die Gerade durch A, die senkrecht zu AB ist. In B sei die Senkrechte s auf die Ebene ε errichtet. Schließlich seien C ein von A verschiedener Punkt auf g und D ein von B verschiedener Punkt auf s.
a) Man beweise, daß es eine Kugel gibt, die durch die Punkte A, B, C und D geht.
b) Man berechne den Radius einer solchen Kugel für den Fall, daß $\overline{CA} = a\sqrt{2}$ und $\overline{BD} = a\sqrt{3}$ gilt.

Olympiadeklasse 10

1. Klaus überprüft während der Ferien seine Vokabelkenntnisse in Russisch. Als er unter den 2555 Wörtern, die er im Laufe der Zeit sorgfältig in sein Vokabelheft eingetragen hat, die Anzahl z_1 derjenigen Wörter ermittelt, die er noch beherrscht, und danach die Anzahl z_2 der übrigen Wörter, stellt er beim Aufschreiben dieser beiden Zahlen fest, daß $z_1 > z_2$ ist und daß er beim Aufschreiben genau zwei Ziffern verwendet hat, und zwar immer abwechselnd, wobei die an erster Stelle stehende Ziffer bei beiden Zahlen dieselbe ist.
Man ermittle z_1 und z_2.

2. Geben Sie alle (geordneten) Tripel (x, y, z) an, die die folgenden Bedingungen erfüllen:
(1) $x - y = 96$,
(2) $y - z = 96$,
(3) x, y und z sind Quadrate natürlicher Zahlen.

3. Es sei $\triangle ADC$ ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck mit C als Scheitelpunkt des rechten Winkels. Über AC sei nach außen ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit B als Scheitelpunkt des rechten Winkels so gelegen, daß der Fußpunkt E des Lotes von D auf die Gerade durch A, B zwischen A und B liegt.
Man beweise, daß dann $\overline{DE} = \overline{AB} + \overline{BC}$ gilt.

4. Gegeben seien positive Streckenlängen h, r, x mit $x < 2r$. Es bezeichne ε eine Ebene und k einen in ε gelegenen Kreis mit einem Durchmesser AB der Länge $2r$. Auf der Senkrechten zu ε durch A sei C ein Punkt mit $\overline{AC} = h$. Auf k sei D ein Punkt mit $\overline{BD} = x$.
a) Man berechne das Volumen V der Pyramide mit den Eckpunkten C, D, A, B.
b) Man beweise, daß $BD \perp CD$ gilt.

Olympiadeklasse 11/12

1. Es sei $\{x_n\}$ $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ diejenige Zahlenfolge, für die

$$x_0 = 1 \text{ und } x_n = \frac{x_{n-1}}{x_{n-1} + 1}$$

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$ gilt.
Man gebe die Glieder x_1, $_2$ und x_3 dieser Zahlenfolge an. Man gebe einen Term $f(n)$ mit der Eigenschaft

$$f(n) = x_n \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots) \text{ an.} \quad (1)$$

2. Gegeben sei eine rechteckige Tabelle mit drei Zeilen und vier Spalten, also mit 12 Feldern. In einem dieser Felder stehe die Zahl 0.
Man untersuche, ob es eine Möglichkeit gibt, alle übrigen Felder mit Hilfe der natürlichen Zahlen von 0 bis 9 derart auszufüllen, daß
(1) jede in der Tabelle vorkommende Zahl dort höchstens zweimal auftritt,
(2) die Summen der Zahlen in jeder der drei Zeilen gleichgroß sind,
(3) die Summen der Zahlen in jeder der vier Spalten gleichgroß sind, wobei diese (somit viermal auftretende) Summe größer als 15 ist.

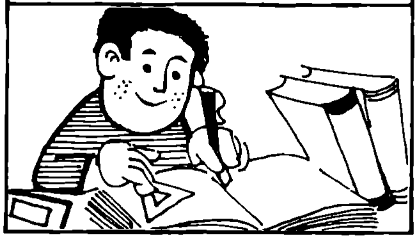
3. Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck und E der Schnittpunkt seiner Diagonalen AC und BD. Die Seite DA sei nicht parallel zur Seite BC, so daß sich die diese Seiten enthaltenden Geraden in einem Punkt F schneiden. Die Gerade g halbiere den Winkel $\sphericalangle BEA$ und die Gerade h den Winkel $\sphericalangle AFB$.
Man beweise, daß dann $g \parallel h$ ist.

4. Es sind alle reellen Zahlen a anzugeben, für die das Gleichungssystem

$$x + y + z = 0, \quad (1)$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad (2)$$
$$x^4 + y^4 + z^4 = a \quad (3)$$

1. keine reellen Lösungen (x, y, z)
2. genau eine reelle Lösung,
3. mehr als eine reelle Lösung hat.

Lösungen



Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 5/74

▲5▲1252 Angenommen, es seien x Kinder anwesend; dann waren $(x+15)$ Erwachsene, also $(2x+15)$ Personen anwesend. Nun gilt $2x+15=23$, $2x=8$, $x=4$. Demnach gehörten zu dieser Gesellschaft 4 Kinder und 19 Erwachsene. Unter den Erwachsenen seien y Frauen, also $(y+5)$ Männer, dann gilt $2y+5=19$, $2y=14$, $y=7$. Demnach setzten sich die Erwachsenen aus 7 Frauen und 12 Männern zusammen.

▲5▲1253 Das Aquarium besitzt ein Fassungsvermögen von $48\cdot 25\cdot 22\ \text{cm}^3 = 26\,400\ \text{cm}^3$. Das eingefüllte Wasser besitzt einen Rauminhalt von $48\cdot 25\cdot 17\ \text{cm}^3 = 20\,400\ \text{cm}^3$. Der Ziegelstein würde $30\cdot 20\cdot 10\ \text{cm}^3 = 6\,000\ \text{cm}^3$ Wasser verdrängen.
Aus $20\,400\ \text{cm}^3 + 6\,000\ \text{cm}^3 = 26\,400\ \text{cm}^3$ folgt, daß das Aquarium nach dem Eintauchen des Ziegelsteines die vorhandene Wassermenge gerade noch fassen kann, also bis zum Rand gefüllt ist.

W 5 ■ 1254 Wir rechnen $100-4=96$, $90-18=72$. Die Zahl 96 besitzt folgende Teiler, die größer als 18 sind: 24, 32, 48, 96. Die Zahl 72 besitzt folgende Teiler, die größer als 18 sind: 24, 36, 72.
Die Zahlen 96 und 72 haben den gemeinsamen Teiler 24. Der gesuchte Divisor lautet somit 24, und es gilt
$100=4\cdot 24+4$ bzw. $90=3\cdot 24+18$.

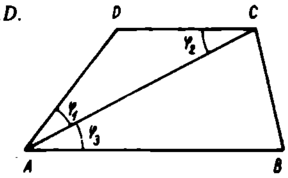
W 5 ■ 1255 Angenommen, es befinden sich x Gläser mit Birnen im Regal; dann sind dort noch $3\cdot x$ Gläser mit Pflaumen und $2\cdot 3\cdot x=6\cdot x$ Gläser mit Kirschen. Insgesamt befinden sich im Regal $x+3x+6x=10x$ Gläser mit Obst. Nun gilt $40<10x<60$, also $4<x<6$. Nur $x=5$ erfüllt diese Ungleichungen. Im Regal befinden sich demnach 5 Gläser mit Birnen, 15 Gläser mit Pflaumen und 30 Gläser mit Kirschen.

W 5*1256 Das Alter der vier Schüler Alfred, Benno, Detlev und Egon (in ganzen Zahlen) sei in dieser Reihenfolge mit a, b, d, e bezeichnet; das Alter der Schüler Ampler, Baumbach, Dürer, Erbe sei in dieser Reihenfolge mit A, B, D, E bezeichnet.
Aus a) folgt: $a<e<b$. (1)
Aus b) folgt: $a<d<b$. (2)
Aus c) folgt: $E<D<A$. (3)
Aus d) folgt: $D<B<b$. (4)
Aus (1) und (2) folgt: Alfred ist der jüngste, Benno der älteste.
Aus (3) und (4) folgt: Erbe ist der jüngste, Dürer der zweitjüngste, Benno muß den Nachnamen Ampler haben. Folglich heißt ein weiterer Schüler Alfred Erbe.
Aus e) folgt: Ein Schüler heißt Detlev Dürer. Der vierte Schüler heißt somit Egon Baumbach.
Hieraus ergeben sich die Ungleichungen $a<d<e<b$ und $E<D<B<A$. Dem Alter nach geordnet, mit dem jüngsten beginnend, heißen die vier Schüler Alfred Erbe, Detlev Dürer, Egon Baumbach, Benno Ampler.

W 5*1257 Dieser Klasse mögen x Schüler angehören. Dann belaufen sich die Ausgaben auf $(80\cdot x+150)$ Pf bzw. $(90\cdot x-150)$ Pf.
Deshalb gilt $90x-150=80x+150$,
$$10x=300,$$
$$x=30.$$
Der Klasse gehören 30 Schüler an.
Aus $80\cdot 30\ \text{Pf}+150\ \text{Pf}=2\,550\ \text{Pf}=25{,}50\ \text{M}$ bzw. $90\cdot 30\ \text{Pf}-150\ \text{Pf}=2\,550\ \text{Pf}=25{,}50\ \text{M}$ folgt, daß für die Ausschmückung des Klassenraumes 25,50 M ausgegeben wurden.

▲6▲1258 Angenommen nach x Stunden sei die Arbeit gemeinsam geschafft. In einer Stunde schafft Peter den vierten, Klaus den sechsten und Gerda den dritten Teil der zu verrichtenden Arbeit.
Für x Stunden gilt dann
$$\frac{1}{4}\cdot x+\frac{1}{6}\cdot x+\frac{1}{3}\cdot x = 1,$$
$$\frac{3}{12}\cdot x+\frac{1}{12}\cdot x+\frac{4}{12}\cdot x=1,$$
$$\frac{9}{12}\cdot x=1,$$
$$x=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}.$$
Der Schulgarten würde bei gemeinsamer Arbeit nach $\frac{4}{3}$ Stunden, also nach 1 Stunde und 20 Minuten gejätet sein.

▲6▲1259 Es seien $\sphericalangle DAC=\varphi_1$, $\sphericalangle DCA=\varphi_2$ und $\sphericalangle BAC=\varphi_3$. Aus $\overline{AD}=\overline{CD}$ folgt $\varphi_1=\varphi_2$. Da die Winkel φ_2 znd φ_3 Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind, gilt ferner $\varphi_2=\varphi_3$ und somit auch $\varphi_1=\varphi_3$, d. h., die Diagonale $\overline{AC}$ halbiert den Winkel $\sphericalangle BAD$.



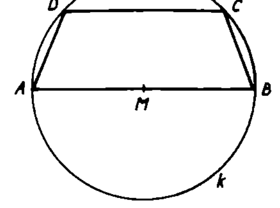
W 6 ■ 1260 Für einen Pfennig würde man $\frac{278}{145}$ g Waschpulver, für 200 Pf würde man $\frac{278\cdot 200}{145}$ g, also rund 383 g dieses Waschpulvers erhalten.

W 6 ■ 1261 Aus $\frac{1}{2}+\frac{1}{14}=\frac{4}{7}$ und $1-\frac{4}{7}=\frac{3}{7}$ und $12:\frac{3}{7}=28$ folgt, daß dieser Klasse 28 Schüler angehören.
Oder mit Hilfe einer Gleichung:
Es sei x die Anzahl der Schüler dieser Klasse, dann gilt
$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{14}x+12=x,$$
$$\frac{4}{7}x+12=x,$$
$$12=\frac{3}{7}x,$$
$$x=28.$$

W 6*1262 Aus der Bemerkung des Schülers mit dem Familiennamen Dachs folgt: Einer der vier Freunde heißt Dieter Fuchs.
Aus dem Aufgabentext geht hervor, daß es sich bei den Schülern Bär, Frank und Dachs um drei verschiedene Personen handelt. Deshalb können weder der Schüler Bär noch der Schüler Dachs den Vornamen Frank haben. Folglich heißt ein weiterer dieser Schüler Frank Löwe.
Es verbleiben nunmehr die Vornamen Bernd und Lutz sowie die Familiennamen Bär und Dachs.
Aus der Aussage des Schülers Bär folgt:
Die anderen Freunde heißen Bernd Dachs und Lutz Bär.

W 6*1263 Es sei a das im Jahre 1974 von Herrn Anton Amsel und b das von seiner Schwester Berta erreichte Lebensalter.
Dann gilt $74-a=b$,
$$8+b=a.$$
Dieses Gleichungssystem besitzt die Lösung $a=41$, $b=33$.
Herr Anton Amsel wurde 1933 geboren und ist 41 Jahre alt. Seine Schwester Berta wurde 1941 geboren und ist 33 Jahre alt.

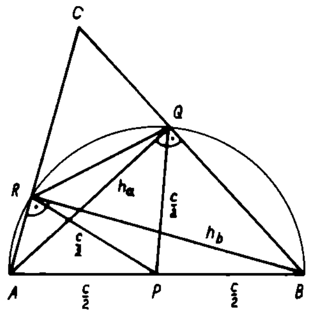
▲7▲1264 In jedem Viereck beträgt die Summe der Innenwinkel 360°. Sind drei der Winkel rechte, so ist auch der vierte ein rechter, d. h., das Viereck ist ein Rechteck. Im Rechteck sind die Diagonalen gleich lang und sie halbieren einander. Folglich läßt sich um den Schnittpunkt der Diagonalen ein Kreis beschreiben, der durch die vier Eckpunkte des Rechtecks geht, d. h., das Rechteck ist ein Sehnenviereck. Die gegebene Aussage ist somit wahr.



Die Umkehrung der gegebenen Aussage lautet: „Jedes Sehnenviereck hat drei rechte Winkel."

Diese Aussage ist falsch, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt:
Einem Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Durchmesser $\overline{AB}$ wurde eine Sehne $\overline{CD}$ so eingezeichnet, daß $AB \parallel CD$ gilt. Wegen $\overline{CD} < \overline{AB}$ ist das Sehnenviereck $ABCD$ kein Rechteck, und es besitzt folglich nicht drei Innenwinkel, die rechte Winkel sind.

▲7▲1265 Wir konstruieren über $\overline{AB}$ als Durchmesser den Thaleskreis, der P zum Mittelpunkt hat und den Radius $\frac{c}{2}$ besitzt. Da die Winkel $\sphericalangle ARB$ und $\sphericalangle BQA$ beides rechte Winkel sind, deren Schenkel durch A und B gehen, liegen deren Scheitel R und Q beide auf dem gezeichneten Thaleskreis, und es gilt $\overline{PA} = \overline{PR} = \overline{PQ} = \overline{PB} = \frac{c}{2}$. Das Dreieck PQR ist somit gleichschenklig.



W 7 ■ 1266 Wir stützen uns auf folgenden bekannten Satz: „Werden von einem Punkt außerhalb eines Kreises die beiden Tangenten an den Kreis gelegt, dann sind die Abschnitte der Tangenten von diesem Punkt bis zu den Berührungspunkten gleich lang." Wegen $\overline{CP_1} = \overline{CQ_1}$ und $\overline{CP_2} = \overline{CQ_2}$ gilt $\overline{P_1P_2} = \overline{Q_1Q_2}$. Wegen $\overline{BP_1} = \overline{BR} = \overline{BP_2}$ gilt $\overline{BP_2} = \frac{1}{2} \cdot \overline{P_1P_2} = \frac{1}{2} \cdot \overline{Q_1Q_2}$. Wegen $\overline{AQ_1} = \overline{AR} = \overline{AQ_2}$ gilt $\overline{AQ_2} = \frac{1}{2} \cdot \overline{Q_1Q_2}$ und folglich auch $\overline{AC} = \overline{BC}$.

W 7 ■ 1267 Die Anzahlen der hergestellten Figuren, Teller, Schüsseln und Vasen seien in dieser Reihenfolge mit f, t, s und v bezeichnet. Dann gilt

$$f + t + s + v = 120, \quad (1)$$
$$6 \cdot t = 120, \quad (2)$$
$$f + t = s + v, \quad (3)$$
$$10 + s = v. \quad (4)$$

Aus (2) folgt $t = \frac{120}{6} = 20$.
Aus (1) und (3) folgt

$$(f+t) + (f+t) = 120,$$
$$2 \cdot (f+t) = 120,$$
$$f + t = 60,$$
$$f + 20 = 60,$$
$$f = 40.$$

Aus (4) erhalten wir durch Einsetzen wegen $s + v = f + t = 60$ schließlich $10 + s = 60 - s$, also $2s = 50$ und somit $s = 25$ und $v = 35$. Von den Zirkelteilnehmern wurden 40 Figuren, 20 Teller, 25 Schüsseln und 35 Vasen hergestellt.

W 7*1268 Für die gesuchten vierstelligen natürlichen Zahlen gilt

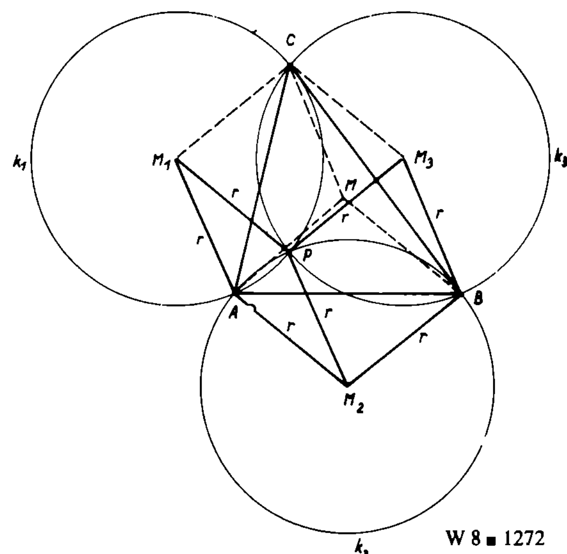
$$1000a + 100b + 10c + d = 19k \text{ und}$$
$$1000a + 100b + 10c + d = a + b + c + d + 4653.$$

Durch Gleichsetzen erhalten wir daraus $a + b + c + d + 4653 = 19k$; dabei ist k eine natürliche Zahl. Wegen $1 \leqq a \leqq 9$ und $0 \leqq b, c, d \leqq 9$ gilt ferner

$$1 \leqq a + b + c + d \leqq 36, \text{ also}$$
$$4654 \leqq 19k \leqq 4689.$$

Nur die Zahlen $k = 245$ und $k = 246$ erfüllen die Ungleichungen. Wegen $19 \cdot 245 = 4655$ und $4653 + 20 = 4673 \neq 4655$ entfällt $k = 245$ als Lösung.
Die Aufgabe besitzt genau eine Lösung; es gilt $k = 246$ und $19 \cdot 246 = 4674$ sowie $4653 + 21 = 4674$. Die einzige vierstellige natürliche Zahl, die die gestellten Bedingungen erfüllt, lautet daher 4674.

W 7*1269 Wegen $\overline{AM_1} = \overline{AM_2} = \overline{PM_1} = \overline{PM_2} = r$ und $\overline{BM_2} = \overline{BM_3} = \overline{PM_2} = \overline{PM_3} = r$ sind die Vierecke AM_2PM_1 und BM_3PM_2 Rhomben, und es gilt $AM_1 \| PM_2 \| BM_3$. Die Kreise um A und C mit dem Radius r mögen sich in M schneiden. Dann ist auch Viereck $AMCM_1$ ein Rhombus, und es gilt $AM_1 \| MC$ und somit auch $BM_3 \| MC$. Demnach ist auch das Viereck $CMBM_3$ ein Rhombus. Wegen $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = r$ hat der Umkreis des Dreiecks ABC den Radius r.



▲8▲1270 Wenn die Summe zweier natürlicher Zahlen gleich einer geraden Zahl ist, so sind entweder beide Zahlen gerade oder beide Zahlen ungerade. Wir unterscheiden daher zwei Fälle:
a) Die beiden natürlichen Zahlen seien gerade Zahlen, wir bezeichnen sie mit $2m$ bzw. $2n$. Dann gilt
$(2m)^2 - (2n)^2 = 4m^2 - 4n^2 = 4(m^2 - n^2)$,
d. h., die Differenz der Quadrate der beiden Zahlen ist durch 4 teilbar.
b) Die beiden natürlichen Zahlen seien ungerade Zahlen, wir bezeichnen sie mit $2m + 1$ bzw. $2n + 1$. Dann gilt

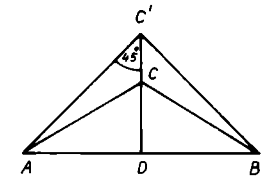
$$(2m+1)^2 - (2n+1)^2$$
$$= 4m^2 + 4m + 1 - 4n^2 - 4n - 1$$
$$= 4(m^2 + m - n^2 - n),$$

d. h., auch in diesem Falle ist die Differenz der Quadrate der beiden Zahlen durch 4 teilbar, w. z. b. w.

▲8▲1271 Es sei ABC ein stumpfwinkliges, gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $\overline{AB} = 10$ cm und $\sphericalangle BCA > 90°$. CD sei die von dem Punkt C ausgehende Höhe dieses Dreiecks (vgl. die Abb.). Ferner sei ABC' ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $\overline{AB}$, dessen Spitze C' auf derselben Seite der Geraden AB wie der Punkt C liegt.
Dann gilt $\sphericalangle DC'A = 45°$ und $\sphericalangle DCA > 45°$; also ist C ein innerer Punkt der Strecke $\overline{C'D}$, und es gilt $\overline{AD} < \overline{AC} < \overline{AC'}$.
Aus dem Satz des Pythagoras folgt wegen $\overline{AD} = \overline{C'D} = 5$ cm $\overline{AC'}^2 = (5^2 + 5^2)\,\text{cm}^2 = 50\,\text{cm}^2$, also $\overline{AC'} = \sqrt{50}$ cm.
Wegen $\overline{AD} = 5$ cm folgt daher

$5\,\text{cm} < \overline{AC} < \sqrt{50}$ cm und hieraus wegen $7 < \sqrt{50} < 8$, weil $\overline{AC}$ ganzzahlig ist,

$5\,\text{cm} < \overline{AC} \leqq 7$ cm. Daher kann $\overline{AC}$ nur gleich 6 cm oder 7 cm sein.
Es gibt daher genau zwei stumpfwinklige, gleichschenklige Dreiecke, die den gestellten Bedingungen entsprechen, nämlich Dreiecke, deren Schenkel die Längen 6 cm bzw. 7 cm haben.



W 8 ■ 1272 Da zu Beginn der Durchfahrt die Lokomotive die Tunneleinfahrt passiert und am Ende der Durchfahrt (wenn der letzte Wagen die Tunnelausfahrt passiert) die Lokomotive sich bereits 80 m von der Tunnelausfahrt entfernt befindet, legt der Zug während der Durchfahrtszeit t eine Entfernung von
$s = 134\,\text{m} + 80\,\text{m} = 214\,\text{m} = 0{,}214\,\text{km}$ zurück.
Nun gilt für die Durchfahrtszeit t (in h) $t = \frac{s}{v}$, wobei $s = 0{,}214$ km und $v = 40\,\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ ist. Man erhält daher

$$t = \frac{s}{v} = \frac{0{,}214}{40}\,\text{h} = \frac{0{,}214 \cdot 90}{3600}\,\text{h} = 19{,}26\,\text{s}.$$

Die Durchfahrtszeit beträgt daher rund 19 s.

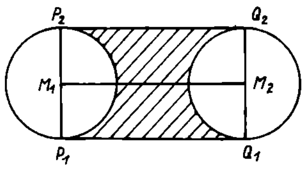
W 8 ■ 1273 Es seien M_1, M_2 die Mittelpunkte der Kreisscheiben, r ihr Radius, $\overline{P_1P_2}$ und $\overline{Q_1Q_2}$ je ein auf $\overline{M_1M_2}$ senkrecht stehender Durchmesser der Kreise (vgl. die Abb.). Dann ist das Viereck $P_1Q_1Q_2P_2$ ein Rechteck, das wegen

$$\overline{P_1Q_1}=\overline{M_1M_2}=\pi r,\ \overline{Q_1Q_2}=2r$$

den Flächeninhalt $A_1=\pi r\cdot 2r=2\pi r^2$ hat.
Den Flächeninhalt des schraffierten, durch die Strecken $\overline{P_1Q_2}$, $\overline{P_2Q_2}$ und die Halbkreise zwischen P_1, P_2 bzw. Q_1, Q_2 begrenzten Flächenstücks erhält man daher, indem man von A_1 den Flächeninhalt zweier Halbkreisscheiben vom Radius r subtrahiert:

$$A_2=A_1-2\cdot\frac{\pi}{2}r^2=2\pi r^2-\pi r^2=\pi r^2$$

Er ist also genau gleich dem Flächeninhalt πr^2 einer der Kreisscheiben.



W 8*1274 Es sei $\frac{s}{2}$ die Länge der ersten Halbstrecke, dann ist $\frac{s}{2}$ auch die Länge der zweiten Halbstrecke. Das Fahrzeug legt die erste Halbstrecke in der Zeit $\frac{s}{2v_1}$ und die zweite Halbstrecke in der Zeit $\frac{s}{2v_2}$ zurück, also die Gesamtstrecke in der Zeit

$$v_0=\frac{s}{t_0}=\frac{s\cdot 2v_1v_2}{s\cdot(v_1+v_2)}=\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}.$$

Andererseits beträgt das arithmetische Mittel der beiden Geschwindigkeiten

$$\bar{v}=\frac{v_1+v_2}{2}.$$

Man erhält daher die Differenz

$$\bar{v}-v_0=\frac{v_1+v_2}{2}-\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}=\frac{(v_1+v_2)^2-4v_1v_2}{2(v_1+v_2)}=$$

$$=\frac{v_1^2+2v_1v_2+v_2^2-4v_1v_2}{2(v_1+v_2)},$$

$$\bar{v}-v_0=\frac{v_1^2-2v_1v_2+v_2^2}{2(v_1+v_2)}=\frac{(v_1-v_2)^2}{2(v_1+v_2)}>0.$$

Daraus folgt

$$\bar{v}-v_0>0,\text{ also } v_0<\bar{v},$$

d. h., die Durchschnittsgeschwindigkeit v_0 für die gesamte Strecke ist stets kleiner als das arithmetische Mittel $\bar{v}$ der beiden Geschwindigkeiten.

W 8*1275 Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$\overline{AB}^2=a^2+a^2=2a^2,\text{ also }\overline{AB}=a\sqrt{2},$$

$$\overline{AE}=\overline{EB}=\frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

Ferner gilt wegen $\overline{CD}=\frac{a}{2}$

$$\overline{AD}^2=a^2+\frac{a^2}{4}=\frac{5}{4}a^2,\quad \overline{AD}=\frac{a}{2}\sqrt{5}.$$

Ist nun Q der Fußpunkt des von D auf AB gefällten Lotes, so gilt $DQ \parallel CE$, also nach dem Strahlensatz

$$\overline{EQ}:\overline{QB}=\frac{a}{2}:\frac{a}{2}=1:1,\quad\text{und}$$

$$\overline{DQ}:\overline{CE}=1:2,$$

$$\text{d. h. } \overline{DQ}=\overline{QB}=\overline{EQ}=\frac{a}{4}\sqrt{2}.$$

Bezeichnen wir die gesuchte Länge der Strecke $\overline{FD}$ mit x, so gilt nach dem Strahlensatz ferner

$$x:\overline{AD}=\overline{EQ}:\overline{AQ},$$

$$x=\frac{\overline{AD}\cdot\overline{EQ}}{\overline{AQ}}=\frac{\frac{a}{2}\sqrt{5}\cdot\frac{a}{4}\sqrt{2}}{\frac{3}{4}a\sqrt{2}}=\frac{a}{6}\sqrt{5}.$$

▲9▲1276 Es sei a eine positive reelle Zahl, für die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind. Dann gilt für alle natürlichen Zahlen n

$$a^n+a^n=a^{n+1},\qquad(1)$$

also

$$2a^n=a^n\cdot a.\qquad(2)$$

Dividiert man beide Seiten dieser Gleichung durch a^n, was wegen $a\neq 0$ zulässig ist, so erhält man $a=2$.
Also kann es höchstens eine reelle Zahl a, nämlich $a=2$, geben, so daß die Gleichung (1) für alle natürlichen Zahlen n erfüllt ist. Andererseits gilt aber für $a=2$ und für alle natürlichen Zahlen n (einschließlich $n=0$)

$$2^n+2^n=2\cdot 2^n=2^{n+1},$$

also ist auch die Gleichung (1) für $a=2$ stets erfüllt. Damit wurde gezeigt, daß es genau eine positive reelle Zahl a, nämlich $a=2$ gibt, für die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind.

▲9▲1277 Es sei (x, y, z) eine Lösung des Gleichungssystems (1), (2), wobei x, y, z natürliche Zahlen sind. Dann gilt $x\neq 0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$, weil sonst die Gleichung (1) nicht erfüllt wäre. Ferner gilt wegen $384=2^7\cdot 3$ und $1152=2^7\cdot 9$

$$xy^2z^3=2^7\cdot 3,\qquad(3)$$

$$x^2y^3z=2^7\cdot 9.\qquad(4)$$

Aus (3) erhält man durch Quadrieren

$$x^2y^4z^6=2^{14}\cdot 9,\qquad(5)$$

also aus (5) und (4) durch Division

$$yz^5=2^7.\qquad(6)$$

Da y und z natürliche Zahlen sind, kann z nur gleich 1 oder 2 sein.
a) Es sei $z=1$. Dann ist $y=2^7=128$ und wegen (1)

$$x=\frac{384}{y^2\cdot z^3}=\frac{384}{128^2},$$

also nicht gleich einer natürlichen Zahl, so daß dieser Fall ausscheidet.
b) Es sei $z=2$. Dann ist $y=\frac{128}{2^5}=4$, also wegen (1)

$$x=\frac{384}{4^2\cdot 2^3}=\frac{384}{128}=3.$$

Das gegebene Gleichungssystem kann also höchstens die Lösung

$$x=3,\ y=4,\ z=2$$

haben. Die Probe bestätigt, daß das tatsächlich eine Lösung des Gleichungssystems (1), (2) ist; denn wir erhalten

$$xy^2z^3=3\cdot 4^2\cdot 2^3=384,$$

$$x^2y^3z=3^2\cdot 4^3\cdot 2=1152.$$

Abzeichen in Gold

Fortsetzung von Seite 17

Petro Göbel, Rainer Jorzik, Heidi Huhn, Andreas Möller, Reiner Usbeck, Bernd Marr, Antje König, Angela Recknagel, Carola Recknagel, alle Steinbach-Hallenberg; Heiko Marr, Pia Marr, Jens Scheerschmidt, Hendrik Büchel, alle Oberschönau; Sabine Peter, Schmalkalden; Heidi Storch, Breitungen; Marlene Ilgen, Fambach; Ullrich Scherf, Eisenach; Jürgen Sägenschnitter, Cottbus

Vorbildliche Hilfe

● Unser Dank gilt den Verlagen, die Bücher im Werte von 3000,– M für die fleißigsten Wettbewerbsteilnehmer zur Verfügung stellten: BSB B. G. Teubner, Leipzig; Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig, Leipzig; VEB Fachbuchverlag, Leipzig; Der Kinderbuchverlag Berlin; Militärverlag der DDR, Berlin; transpress VEB Verlag für Verkehrswesen, Berlin; Verlag Die Wirtschaft, Berlin; Der Sportverlag, Berlin; VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin; VEB Verlag Die Technik, Berlin; Volkseigener Verlag Volk und Wissen, Berlin; Uraniaverlag, Leipzig; Polnisches Informationszentrum, Leipzig.

W 9 ■ 1279 Die Punkte A, B und G bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $\overline{AG}$, weil die Kante $\overline{AB}$ auf der Seitenfläche $BCGF$ und damit auch auf der Geraden $\overline{BG}$ senkrecht steht (vgl. Abb. 1). Daher ist der Abstand des Punktes B von der Raumdiagonale $\overline{AG}$ gleich der Länge der Höhe $\overline{BQ}=h$ dieses rechtwinkligen Dreiecks. Nun gilt $\overline{AB}=a$, $\overline{BG}=a\sqrt{2}$ (da $\overline{BG}$ Diagonale des Quadrats $BCGF$ ist), also nach dem Satz des Pythagoras (vgl. Abb. 2)

$$\overline{AG}^2=a^2+(a\sqrt{2})^2=3a^2,\ \overline{AG}=a\sqrt{3}.$$

Bild 1

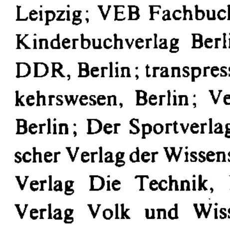
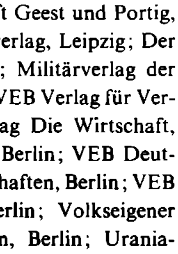


Bild 2



Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABQ und ABG folgt ferner

$$h:a=a\sqrt{2}:a\sqrt{3},$$

$$h=a\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{a}{3}\sqrt{6}.$$

Der Abstand des Eckpunktes B von der Raumdiagonale $\overline{AG}$ ist daher wegen $a=6$ cm gleich $h=\frac{a}{3}\sqrt{6}=2\sqrt{6}\text{ cm}\approx 4{,}90\text{ cm}$.

W 9*1280 Es ist zu beweisen, daß nicht $z=n^2$ gilt, wobei n eine natürliche Zahl ist. Wir führen den Beweis indirekt. Angenommen, es gelte $z=n^2$. Wenn nun z durch 3 teilbar ist, dann ist auch n^2 durch 3 teilbar. Daraus folgt aber, daß auch n durch 3 teilbar ist (weil 3 eine Primzahl ist). Wegen $z=n\cdot n$ folgt weiter, daß z durch 9 teilbar ist. Wie wir sehen werden, ist z durch 3, aber nicht durch 9 teilbar, was zu einem Widerspruch führt.

Durch Umformungen erhalten wir nämlich

$$z=5^7\cdot 7^5+1=(5\cdot 7)^5\cdot 5^2+1$$
$$=35^5\cdot 25+1.$$

Nun gilt (vgl. Tafelwerk, 7.–12. Klasse, S. 57)

$$35^5=(36-1)^5=36^5-5\cdot 36^4$$
$$+10\cdot 36^3-10\cdot 36^2+5\cdot 36-1,$$
$$35^5=a-1,$$

wobei a eine natürliche Zahl ist, die durch 36, also auch durch 9 teilbar ist.

Wir erhalten daher

$$z=(a-1)\cdot 25+1=25a-25+1$$
$$=25a-24.$$

Nun ist $25a$ durch 9 teilbar. weil a durch 9 teilbar ist; 24 hingegen ist zwar durch 3, aber nicht durch 9 teilbar. Also ist auch z durch 3, aber nicht durch 9 teilbar.

Damit ist bewiesen, daß z nicht gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

Bemerkung: Wer mit Zahlenkongruenzen rechnen kann, kommt noch schneller zum Ziel. Man erhält nämlich

$$5^2=25\equiv 7 \pmod 9,$$
$$5^3\equiv 5\cdot 7\equiv 8 \pmod 9,$$
$$5^4\equiv 8\cdot 5\equiv 4 \pmod 9,$$
$$5^7\equiv 8\cdot 4\equiv 5 \pmod 9).$$
$$7^2=49\equiv 4 \pmod 9,$$
$$7^4\equiv 4\cdot 4\equiv 7 \pmod 9,$$
$$7^5\equiv 7\cdot 7\equiv 4 \pmod 9).$$

Daher gilt $z=5^7\cdot 7^5+1\equiv 5\cdot 4+1\equiv 21\equiv 3$ (mod 9), d. h., z ist durch 3, aber nicht durch 9 teilbar, woraus wie oben folgt, daß z nicht eine Quadratzahl ist.

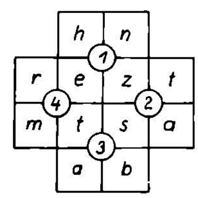
Lösungen zu alpha-heiter 1/75

Wortpaare gesucht

1. Lineal – Algebra; 2. Kilo – Logarithmus; 3. Scheitelpunkt – Punktmenge; 4. Höhe – Heron; 5. Hektar – Archimedes; 6. eineinhalb – Halbkreis; 7. Mittellinie – Element; 8. Galilei – Ikosaeder; 9. Minute – Tetraeder; 10. senkrecht – Rechteck – alpha heiter

Kombinatorik am Wabenrätsel

Da die Buchstaben h und n des Wortes „zehn“ nur in diesem Wort vorkommen, müssen diese beiden Buchstaben in den Außenfeldern eines Zyklus stehen. Da es vier Zyklen mit je zwei Außenfeldern gibt, kann das Wort „zehn“ auf acht verschiedene Weisen eingesetzt werden. Da der Buchstabe z außer in „zehn“ nur noch in „Satz“ vorkommt, müssen die Buchstaben von „Satz“ in den Zyklus eingetragen werden, in dem bereits das z von „zehn“ steht. Das Wort „Satz“ kann auf zweifache Weise eingetragen werden: entweder trägt das neu besetzte Innenfeld den Buchstaben t oder s. Da der Buchstabe e außer in „zehn“ nur noch in „Term“ vorkommt, muß in den Zyklus, in dem bereits das e von „*zehn*“ steht, das Wort „Term“ eingetragen werden. Das Wort „Term“ kann wiederum auf zwei Weisen eingetragen werden: entweder trägt das jetzt neu besetzte Innenfeld den Buchstaben t oder r. Da in den noch nicht vollbesetzten Zyklus nur das Wort „Stab“ einzutragen ist und da in diesem Wort der Buchstabe r nicht vorkommt, durfte das Wort „Term“ nur so eingetragen werden, daß von ihm die Buchstaben e und t in den Innenfeldern stehen. Da schließlich in „Stab“ der Buchstabe t nur einmal vorkommt, muß das Wort „Satz“ so eingetragen worden sein, daß von ihm in den Innenfeldern die Buchstaben z und s stehen. Das Wort „Stab“ läßt sich noch auf genau eine Weise eintragen. Da jede der acht Möglichkeiten des Eintragens von „zehn“ sich zu genau einer Lösung fortsetzen läßt, gibt es genau acht Lösungen. Eine Lösung ist:



Kleines Mathematik-Sprachlexikon Teil 1

Fundamentale Relationszeichen

$=$ (ist) gleich
$=$ рáвен, равнá, равнó, равны́ или: равня́ется......
$=$ (is) equal to *or:* equals
$=$ (est) égal à

$p=q$ p (ist) gleich q
$p=q$ p равнó q или: p равня́ется q
$p=q$ p equals q *or:* p (is) equal to q
$p=q$ p égale q *ou:* p (est) égal à q

$=$ wie (in Verhältnisgleichungen)
$=$ как (в пропóрциях)
$=$ as (in proportions)
$=$ comme

$p:q=s:t$ p (verhält sich) zu q wie s zu t
$p:q=s:t$ p отнóсится к q как s отнóсится к t
$p:q::s:t$ p (is) to q as s (is) to t
$p:q::s:t$ rapport de p sur q égale s sur t

$<$ (ist) kleiner als
$<$ мéньше
$<$ (is) less than
$<$ inférieur à

$>$ (ist) größer als
$>$ бóльше
$>$ (is) greater than
$>$ supérieur à

$\leqq$ (ist) höchstens gleich *od.:* (ist) kleiner oder gleich
$\leqq$ мéньше или равнó (или: не превосхóдит)
$\leqq$ (is) not greater than *or:* (is) less than *or* equal to
$\leqq$ pas supérieur à *ou:* inférieur à ou égal à

$\neq$ (ist) nicht gleich *od.:* (ist) ungleich
$\neq$ неравнó
$\neq$ (is) not equal to *or:* does not equal
$\neq$ différent de

$\approx$ (ist) angenähert gleich *od.:* (ist) nahezu gleich
$\approx$ приближённо равнó
$\approx, \doteq$ (is) approximately equal to
$\doteq, \simeq$
$\cong$ *or:* approximately equals
$\approx$ égal environ à

Fundamentale Symbole und Ausdrücke aus der Mengenlehre

$a\in M$ a ist Element von M
a являéтся элемéнтом мнóжества M
a is an element of M
a appartient à M

$b\notin M$ b ist nicht Element von M
b не являéтся элемéнтом мнóжества M
b is not an element of M
b n'appartient pas à M

$M=\{2, 4, 6\}$
M ist die Menge mit den Elementen 2. 4. 6
M являéтся мнóжеством, содержáщим элемéнты 2, 4, 6
M is the set with the elements 2, 4, 6
M est l'ensemble contenant les éléments deux, quatre, six

$M=\varnothing$
M ist eine leere Menge
M являéтся пусты́м мнóжеством
M is an empty set (*or*: a null set)
M est ensemble vide (nul)

$A\subseteq B$
A ist Untermenge (*od.*: Teilmenge) von B
A являéтся подмнóжеством от B
A is a subset of B
A inclus dans B

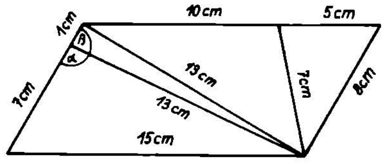
$A\subset B$
A ist echte Untermenge von B
A являéтся прáвильным подмнóжеством от B
A is a proper subset of B
A inclus dans B

Legespiel mit Dreiecken

Nach dem Kosinussatz gilt für die beiden in obiger Zeichnung markierten Winkel:

$$\cos\alpha = \frac{-225+49+169}{2\cdot 7\cdot 13} = -\frac{1}{26};$$

$$\cos\beta = \frac{-169+169+1}{2\cdot 1\cdot 13} = \frac{1}{26}$$

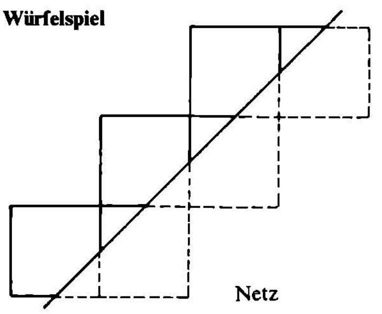


Hieraus folgt $\alpha+\beta=180°$. Also lassen sich die Dreiecke mit den Seiten 1 cm, 13 cm und 13 cm, sowie 7 cm, 13 cm und 15 cm zu einem Dreieck mit den Seiten 8 cm, 13 cm und 15 cm aneinanderlegen. Die beiden anderen gegebenen Dreiecke lassen sich ebenfalls zu einem Dreieck mit den Seiten 8 cm, 13 cm und 15 cm aneinanderlegen. Die beiden so erhaltenen kongruenten Dreiecke lassen sich auf dreifache Weise wiederum zu einem Parallelogramm aneinanderlegen.

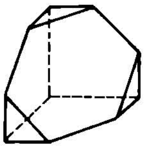
Kryptarithmetik

$$\begin{array}{rcrcr} 377 & - & 2 & = & 375 \\ : & & + & & - \\ 29 & \cdot & 12 & = & 348 \\ \hline 13 & + & 14 & = & 27 \end{array}$$

Ein Würfelspiel



Netz



Schrägbild

Man sollte...

kürzen, unecht, gerade, echten, Lösung – KUGEL

Kreuzworträtsel

1. Vieta, 2. Data, 3. Raum,
4. Zenti, 5. Athen, 6. Sieb,
7. Leon, 8. Sehne – VARIABLE

Fortsetzung von Seite 2

Zu diesem Zweck nimmt man seine Zuflucht zu verschärften Versuchsbedingungen, bei denen das Gerät bei erhöhter Geschwindigkeit, Temperatur oder elektrischer Spannung arbeitet. Auch hier muß man mit zufälligen Streuungen der Eigenschaften der Materialien rechnen; so ist auch die Lebensdauer technischer Geräte eine zufällige Größe, denn sie werden unter verschiedenen Bedingungen und aus wechselnden Materialien hergestellt. Dies rührt in besonderem Maße von dem molekularen Aufbau der Stoffe und von den beträchtlichen Schwankungen der Bedingungen her, unter denen die Materialien bearbeitet werden, ferner von lokalen Veränderungen der Wechselwirkungen zwischen den Molekülen. Daher ist die Wahrscheinlichkeitsrechnung die Grundlage für Theorie und Praxis der Zuverlässigkeit.

Ich habe bis jetzt darüber gesprochen, warum für die moderne Entwicklung der Wissenschaft und Praxis die Wahrscheinlichkeitsrechnung wichtig ist, warum sie ein Fundament ist für den Fortschritt in Wissenschaft, Technik und Produktion. Indessen habe ich nichts gesagt über wahrscheinlichkeitstheoretische Begriffe wie zufällige Ereignisse und ihre Wahrscheinlichkeit, zufällige Größen und ihre Verteilungsfunktionen, zufällige Prozesse und über zufällige Felder und über ihre mathematischen Charakteristiken. Ohne sie ist die ganze vorangegangene Betrachtung unvollständig und unzureichend. Jedoch erfordert die Darlegung dieser Begriffe eine spezielle Erörterung.

B. Gnedenko

$A \cup B$
die Vereinigungsmenge von A und B
сýмма (или: объединéние) мнóжества A и B
the union of A and B
A union B

$A \times B$
das Mengenprodukt (*od.*: die Kreuzmenge) von A und B
Декáртово произведéние мнóжества A и B
the Cartesian product (*or*: the cross product set) of A and B
intersection des ensembles A et B
(*ou*: produit cartésien ou produit extérieur)

$A \sim B$
A und B sind gleichmächtig
(A kann auf B eindeutig abgebildet werden)
A и B являются эквивалéнтными (A мóжет быть изображенó на B взаúмно — однознáчно)
A and B are equivalent to each other
(A can be mapped on B biuniquely)
A et B sont de même puissance

Operationszeichen

Addition – сложéние – addition – addition
a_1, a_2 Summanden – слагáемые – addends – nombres à ajouter

s Summe – сýмма – sum – somme
$+$ plus – плюс – plus – plus
Beispiel:
$a_1+a_2=as$
a eins plus a zwei gleich s
a одúн плюс a два равнó s
a one plus a two is equal to s
a un plus a deux égale s

Subtraktion – вычитáние – subtraction – soustraction
L Minuend – уменьшáемое – minuend – minuende –
l Subtrahend – вычитáемое – subtrahend – nombre à soustraire
d Differenz – рáзность – difference – différence – minus – мúнус – minus – moins
Beispiel:
$L-l=d$
Groß-Lminus Klein-l gleich d
эль большóе мúнус эль мáлое равнó дэ
capital Lminus small l is equal to d
majuscule L moins minuscule l égale d

Multiplikation – умножéние – multiplication – multiplication
$\cdot$, $\times$ mal – $\times$, $\cdot$, X умнóжить на или: умнóженное на · multiplied by or: times – $\times$, $\cdot$ fois
a, b Faktoren – сомнóжители – factors – facteurs

c Produkt – произведéние – product – produit
Beispiel:
$a\cdot b=ab=c$
a mal b gleich c (*od.*: ab gleich c)
$a\times b=a\cdot b=ab=c$
a умнóженное на b равнó c
или: a умнóжить на b равня́ется c
a times b is equal to c
or: a multiplied by b is *equal to* c
or: ab is equal to c
$a\cdot b=ab=c$
a fois b égale c (*ou*: a multiplié par b égale c)

Division – делéние – division – division
a Dividend – делúмое или: числúтель – dividend or: numerator – dividende ou: numérateur
b Divisor od.: Nenner – делúтель или: знаменáтель – divisor *or*: denominator – diviseur ou: dénominateur
c Quotient – чáстное — quotient – quotient
$\frac{a}{b}$ Bruch – дробь — fraction – fraction –
:, –, / geteilt durch *od.*: durch
:, — делúть на или: делённое на
÷, :, –, / divided by *or*: over
:, –, / divisé par *ou*: sur
Beispiel hierzu in Teil 2, α 2/75

1967 bis 1974

Nomographie: 2/70, 3/70, 4/70, 5/70 Nomogramme ersetzen oder kontrollieren unsere Berechnungen (W. Träger)

Olympiaden – Olympiadeaufgaben: 1/67 VIII. IMO 1966 (J. Lehmann) ● 1/67 Wir lösen eine Aufgabe der VIII. IMO (H. Bausch) ● 1/67 bis 6/67 VI. OJM der DDR ● 2/67 Mathematischer Leistungsvergleich Praha–Neubrandenburg (J. Lehmann) ● 3/67 Mathematischer Mannschaftswettbewerb (M. Mäthner/G. Schulze) ● 3/67 Mathematische Wettbewerbe in England ● 4/67 Mathematikolympiaden in Bulgarien (S. Bodurow) ● 5/67 Mathematikolympiaden in der UdSSR, Allunionsolympiade Tbilissi 1967 (J. Petrakow) ● 5/67 Eine vorbildliche Jahresarbeit (R. Höppner) ● 6/67 IX. IMO 1967 (H. Bausch) ● 1/68 bis 6/68, 2/69 VII. OJM der DDR ● 1/68 18. Mathematischer Jahreswettbewerb USA 1967 ● 5/58, 6/68 X. IMO 1968 (H. Bausch/W. Burmeister) ● 6/68 Allunions-Fernolympiade (R. Lüders/J. Lehmann) ● 1/69 bis 3/69, 6/69, 2/70 VIII. OJM der DDR ● 3/69 Concursul de matematica (SR Rumänien) ● 5/69, 1/70, XI. IMO 1969 (H. Bausch/J. Lehmann) ● 5/69 Fernolympiade Mathematik, UdSSR 1968 (G. Ulbricht) ● 1/70 bis 4/70 IX. OJM der DDR ● 2/70 Mathematikolympiaden in der ČSSR (O. Langer/St. Horák) ● 3/70 Mathematische Schülerwettstreite in Ungarn (I. Reimann/M. Walter) ● 4/70 Mathematische Wettbewerbe in Schweden ● 5/70 XII. IMO 1970 (H. Bausch/J. Lehmann) ● 1/71 bis 4/71 X. OJM der DDR ● 2/71 10 Jahre Olympiade Junger Mathematiker der DDR ● 2/71 Mathematikolympiaden in der MVR ● 2/71 Österreichische Mathematikolympiade ● 5/71 Concursul de matematica (SR Rumänien) ● 5/71 XIII. IMO 1971 (J. Lehmann) ● 1/72 bis 5/72 XI. OJM der DDR ● 1/72 FDGB-Urlauber-Olympiade 1972 (W. Träger) ● 3/72 Mathematikolympiaden in der VR Polen (S. Straszewicz) ● 3/72 Rückblick auf die XIII. IMO (Red.) ● 3/72 Mathematikolympiade in der Republik Kuba (L. J. Davidson) ● 5/72 XIV. IMO 1972 (J. Lehmann) ● 1/73 bis 5/73 XII. OJM der DDR ● Mathematikolympiaden in den Niederlanden (A. v. Tooren) ● 4/73 II. Physikolympiade des Bezirkes Leipzig ● 5/73 XV. IMO 1973 (J. Lehmann) ● 1/74 bis 6/74 XIII. OJM der DDR ● 3/74 Mathematikolympiaden in der DDR (H. Bausch/W. Engel/H. Titze) ● 2/74 Aufgaben aus Olympiaden der SR Rumänien (C. Ottescu) ● 5/74 XVI. IMO 1974 (J. Lehmann) ● 5/74 Mathematikolympiaden in der DRV (Hoang Chung) ● 6/74 7th Tanzanian Mathematics Contest (H. Bartel)

Planimetrie: 1/68, 2/68, 3/68 Nichts Einfacheres als ein Quadrat (H. Wiesemann) ● 5/68 Was ist ein Viereck? (L. Görke) ● 6/68, 1/69, 3/69, 5/69, 6/72 Mit Zirkel und Zeichendreieck (J. Lehmann) ● 1/69 Spieglein, Spieglein an der Wand (W. Träger) ● 3/69 Mit Bleistift und Lineal (E. Schröder) ● 3/69 Bange machen gilt nicht! Modell eines geom. Extremwertproblems (Th. Scholl) ● 5/69 Übe sinnvoll – überall! Anleitung zur Arbeit am Dreieck (G. Pietzsch) ● 6/69 Kleine geometrische Exkursion (Th. Scholl) ● 2/70 Wie löst man eine Konstruktionsaufgabe? (H. Titze) ● 3/70, 4/70 Ornamente (R. Bittner) ● 2/72 Arbeitsblatt Geometrie (H. Herzog) ● 3/72 Die Ellipse als Normalprojektion des Kreises (E. Schröder) ● 3/73 Spiegelung am Kreis (Ch. Meinel) ● 4/73 Eine interessante, aber schwierige Aufgabe (R. Lüders) ● 3/74 Der goldene Schnitt und die Zahl τ (Ch. Meinel) ● 6/74 Über das Falten einer Landkarte (H. F. Lumon)

Stereometrie: 1/69 Fernsehfußball – reguläre Polyeder (E. Schröder) ● 2/69 Der Eulersche Polyedersatz (H. Günther) ● 5/71, 2/74, 4/74 Durch die Welt der Tetraeder (G. Geise) ● 1/74 Wir bauen eine Unruhe mit regelmäßigen Polyedern (B. Krötenheerdt) ● 4/74, 5/74 Stereographische Projektion (E. Schröder) ● 6/74 Wie kann man sich Punkte im vierdimensionalen Raum vorstellen? (J. Churgin)

Unterhaltung: 3/68, 4/68 Wir lösen ein Zahlenrätsel (Th. Scholl) ● 3/68, 4/68, 5/68 Eine Knobelgeschichte 1., 2., 3. Teil (W. Träger) ● 3/69 An welchem Wochentag wurde ich geboren? (W. Unze) ● 4/69 Wir stellen ein Zahlenrätsel auf (W. Träger) ● 1/71 Wir spielen mit optimaler Strategie (W. Träger) ● 3/71 Wirklichkeit und Täuschung (J. Sedláček) ● 1/72 Kryptarithmetik (J. Lehmann/R. Lüders) ● 2/72 Ein mathematisches Kreuzworträtsel (Ch. Riehl) ● 3/72, 3/74 Mathe-Quiz im Ferienlager (J. Lehmann/W. Träger) ● 3/73 *alpha*-Spiel-Magazin (J. Lehmann) ● 6/73 Mit Zirkel, Pinsel und Schere (J. Lehmann)

Verbindung zur Praxis: 3/67 Schwankt der Fernsehturm? (W. Zill) ● 3/67 Der Berliner Fernsehturm (W. Zill) ● 4/67 Auf den Spuren *Roald Amundsens* (S. Meier) ● 5/67 Erfahrungsaustausch mit sowj. Wissenschaftlern (Bratsk) (H. Werner) ● 1/69 Messegold für Präzisionsreißzeuge (A. Hanisch) ● 2/69 *Staatlicher Mathematisch-Physikalischer Salon* Dresden-Zwinger (H. Grötzsch) ● 3/69 Mathematische Modelle aus der DDR (W. Glaß) ● 4/69 Multicurve (E. Schröder) ● 4/69 Aus der VAR berichtet ● 6/69 Mathematik und Musik (Ch. Lange) ● 6/69 Rund um das Schachbrett (K. Kannenberg) ● 1/69 bis 6/70 Einführung in die Elektronische Datenverarbeitung (J. Frormann) 4/71 Waffen aus Suhl (E. Hoffmann) ● 6/71, 1/72 Wie schnell fliegt ein Überschallflugzeug? (W. Träger) ● 3/72 Fluidkompaß *Sport 3* (Red.) ● 4/72 Die Rechenmaschine – ein Souvenir aus der Sowjetunion (A. Mertens) ● 6/72, 2/73 Mathematik im Reich der Töne (E. Schröder) ● 2/73 Über die Bedeutung der Mathematik für den Markscheider (H. Meixner) ● 2/73 Gut gedacht ist halb gelöst (J. Lehmann/W. Unze) ● 3/73 Mit Karte und Kompaß (J. Lehmann) ● 4/73 Herstellung eines Rechenstabes (A. Ewert) 5/73, 6/73 Millionen auf der Bleistiftspitze (A. Halameisär) ● 4/73 Mathematik und Physik (E. Mittmann) ● 1/74 Ist eine Landkarte eine mathematisch genau verkleinerte Abbildung eines Teils der Erdoberfläche? (K. Sandner) ● 1/74 Mathematik und Chemie H. Pichler; ● 2/74 Aufgaben für Freunde der Friedensfahrt und des Fußballs (W. Träger) ● 3/74, 4/74 Mathematik in der Gesellschaftsprognostik (B. Noack) ● 3/74 Wir bestimmen die Koordinaten unseres Heimatortes (Schülerkollektiv) ● 2/74 Kann man „etwas an niemanden verteilen“? (L. Stammler ● 4/74 Mathematik und Chemie (H. Pelka) ● 4/74 Vom Jakobstab zum Sextanten (J. Lehmann) ● 5/74 Vorfahrt beachten! (W. Träger)

Zahlenbereiche: 5/68 Übe sinnvoll – Anleitung zum Rechnen mit gebrochenen Zahlen (G. Pietzsch) ● 1/72 Über zwei Operationen mit Zahlen (K. Tschimow) ● 1/73 Einige Fragen und Aufgaben ungewohnter Art (G. Pietzsch) ● 5/73 Primzahlen (A. D. Bendukidse) ● 5/74 Wir arbeiten mit Primfaktorzerlegungen (W. Träger)

Zahlenfolgen: 6/67 Einige Aufgaben über Folgen aus den Schriften des Altertums (A. A. Kolosow) ● 3/68, 4/68, 5/68, 6/68 Elementare Zahlenfolgen (H. Lohse)

Zahlentheorie: 3/69, 4/69, 5/69, 1/70, 2/70 Rechnen mit Resten (G. Lorenz) ● 5/70 Freitag der 13. (T. Bailey/G. Hofmann) ● 4/71 Die Teilbarkeit durch 7 (E. Naumann) ● 2/72, 3/72 Die Arithmetik der Binomialkoeffizienten (D. B. Fuchs) ● 3/73 Gitterpunkte (M. Günther) ● 4/74 Teilbarkeitsbeziehungen (K. Becker)

Zirkel (Arbeitsgemeinschaften): 5/67 Mathematischer Wettbewerb (W. Werner) ● 5/68 Was verbirgt sich hinter: MBZ 8? (G. Horn) ● 3/69 Ein Zirkelnachmittag über „18. Mathem. Jahreswettbewerb der USA“ (W. Träger) ● 2/72 Über eine mathematisch-physikalische Schule in Kiew (L. A. Kaloujnine) 4/73, 4/74 Arbeitspläne Mathematik (Kl. 7/10) (D. Klöpfel/M. Rehm) ● 4/72 Über unsere Arbeit mit der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha* (AG Math. Lübtheen) ● 4/72 Mathematik frei Haus (Korrespondenzzirkel) (R. Bergmann) ● 5/72 Mathematikern über die Schulter geschaut (H. Bode) ● 3/73 Ein Mathematikzentrum in Aktion (W. Henker) ● 5/73 Mathematik im Moskauer *Pionierpalast auf den Leninbergen* (V. Trostnikow) ● 1/74 Inhalt einer Übung des Mathematikzirkels des Moskauer Palastes der Pioniere und Schüler (V. Trostnikow) ● 5/74 *K. Bachmann* berichtet aus dem Leben einer AG