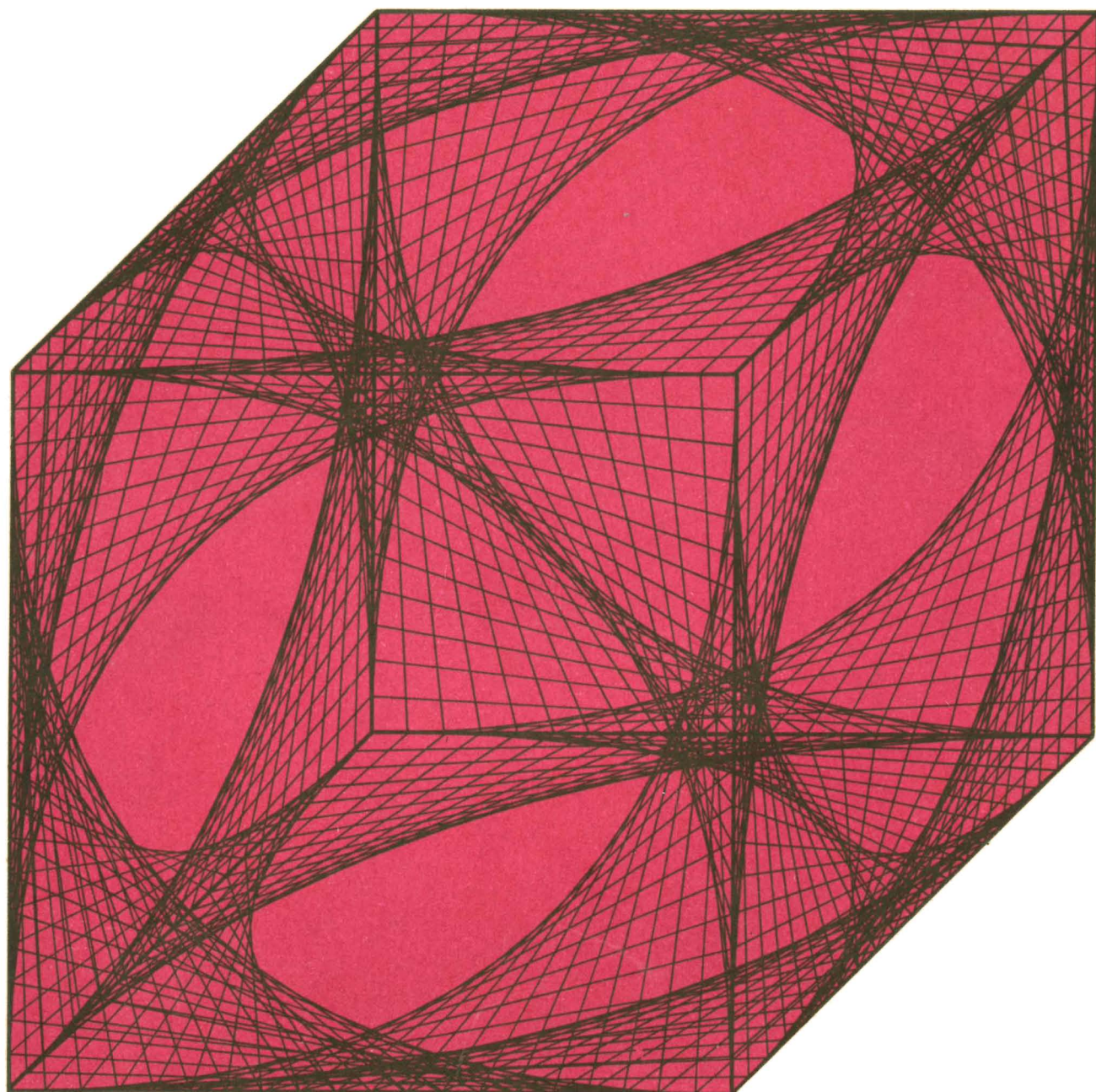


**Mathematische
Schülerzeitschrift**

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
9. Jahrgang 1975
Preis 1,50 M
Sonderpreis für die DDR: 0,50 M
Index 31059

2

Redaktionskollegium:

Prof. Dr.-Ing. habil. G. Clemens (Leipzig);
Prof. Dr. habil. Lilli Görke (Berlin); Dozent
Dr. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dr. habil.
E. Hameister (Magdeburg); K. Hofmann
(Berlin); Dozent Dr. R. Hofmann (Leipzig);
Prof. Dr. H. Karl (Potsdam); Nationalpreis-
träger H. Kästner (Leipzig); Oberlehrer K.
Krüger, Verdienter Lehrer des Volkes (Bad
Doberan); Studienrat J. Lehmann, Verdien-
ter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer
Dozent Dr. H. Lohse (Leipzig); National-
preisträger Oberstudienrat Dr. R. Lüders
(Berlin); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/
Müritz); Prof. Dr. habil. U. Pirl (Berlin);
Dozent Dr. E. Schröder (Dresden); Ober-
studienrat G. Schulze (Herzberg/Elster);
Oberlehrer Dr. H. Schulze (Leipzig); Dr. W.
Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof.
Dr. habil. W. Walsch (Halle);

Redaktion:

StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des
Presseamtes beim Vorsitzenden des Minister-
rates der Deutschen Demokratischen Repu-
blik.
Postscheckkonto: Berlin 132626 Erschei-
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft
1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M,
im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Son-
derpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buch-
handel und der Deutschen Post entgegen-
genommen.

Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik
und Westberlin erfolgt über den Buchhandel;
für das sozialistische Ausland über das
jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für
alle übrigen Länder über: Buchexport Volks-
eigener Außenhandelsbetrieb der DDR
701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: H. Möller, Mittweida – Eigenfoto
(S. 27); ADN (S. 30); J. Lehmann, Leipzig
(S. 31); Tran hun Minh, z. Z. Leipzig (S. 42);
Vignetten IV. U-Seite: H. Teske, Leipzig;
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Satz: Staatsdruckerei der Deutschen
Demokratischen Republik

Rollenoffsetdruck: GG Interdruck, Leipzig

Redaktionsschluß: 27. Januar 1975

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 25 **Mathematik und Sprachwissenschaft [8]***
Dipl.-Math. H. Küstner, Akademie der Wissenschaften der DDR, Berlin
- 27 **Es ist die 11. Karte [8]**
Ein altes Kartenkunststück mathematisch beleuchtet
Mathematikfachlehrer Hildegard Möller, Mittweida
- 28 **Wir bauen Polyeder [6]**
Herstellung von Polyedern aus allen Teilflächen eines Quadrates
W. Zehrer, Leiter der Kreisvolkshochschule Reichenbach i. V.
- 30 **Mathe in der Mokotowska [8]**
Wissenschaftler der RGW-Länder in Warschau
Dr. Ch. Heermann, Karl-Marx-Universität Leipzig
(aus Wochenpost 48/74)
- 31 **Eine Aufgabe von**
Prof. Dr. sc. math. István Fenyő [10]
Technische Universität Budapest
- 32 **In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]**
StR J. Lehmann, VLdV, Leipzig/OL H. Pätzold, Waren/Müritz
- 34 **aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht [5]**
Notwendig oder hinreichend – das ist hier die Frage
speziell für Klasse 5/6
Dr. L. Flade, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität
Halle-Wittenberg
- 35 **Leser schreiben an *alpha* [5]**
- 36 **Rund um das Schachbrett [5]**
alpha-Wandzeitung
Zusammenstellung: StR J. Lehmann, VLdV, Leipzig
- 38 **Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]**
Autorenkollektiv
- 40 **XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR [7]**
Aufgaben der Bezirksolympiade
Zentrales Komitee der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR
- 43 **Lösungen [5]**
- 47 **Kleines Mathematik-Sprachlexikon, Teil 2 [7]**
Zusammenstellung: StR J. Lehmann, VLdV, Leipzig
- III. Umschlagseite: Weggefährte Buch
- IV. Umschlagseite: Volksbildung in der DDR
Bilanz in Zahlen und Fakten
Zusammenstellung: StR J. Lehmann, VLdV, Leipzig

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Mathematik und Sprachwissen- schaft

Es gibt heute immer mehr Wissenschaften, in denen man mathematische Methoden als Hilfsmittel zur Forschung benutzt. Auch in der Sprachwissenschaft geschieht dies seit einigen Jahrzehnten.

Man kann dabei im großen und ganzen zwei Richtungen unterscheiden: In der einen werden *statistische* Gesetzmäßigkeiten der Sprache untersucht (z. B. Häufigkeiten von Wörtern), in der anderen bemüht man sich, die *Strukturen* darzustellen, die sprachlichen Äußerungen innewohnen.

Die erste Richtung heißt *Sprachstatistik*. Mit ihr wollen wir uns hier nicht beschäftigen. Wer an ihr Interesse hat, dem kann ich empfehlen, sich in einer geeigneten Bibliothek das Buch „Einführung in die Sprachstatistik“ von Charles Muller auszuleihen. (Erschienen im Akademie-Verlag, Berlin 1972.) Wir wollen uns jetzt ein wenig in der zweiten Richtung umsehen. Sie wird meist *mathematische Linguistik* genannt, obwohl diese Bezeichnung eigentlich die Sprachstatistik mit einschließt.

Zuvor ein paar Bemerkungen über unsere Sprache.

Alle sprachlichen Äußerungen sind strukturiert, d. h. nach gewissen Regeln aufgebaut. Während wir sprechen oder schreiben, wenden wir diese Regeln an, ohne uns jedesmal über sie Gedanken zu machen. Mit großer Geschwindigkeit läuft im Gehirn ein komplizierter Prozeß ab, der zum Beispiel bewirkt, daß wir für das Subjekt eines Satzes die Nominativform wählen, daß wir also sagen

Die kleinen Kinder spielen im Zimmer. (1)
aber nicht

Den kleinen Kindern spielen im Zimmer.

Auch wenn wir Gesprochenes hören oder Geschriebenes lesen, wenden wir Regeln des Satzbaus an. Wenn uns jemand sagt:

Dem Vater gibt das Kind ein Buch,

so erkennen wir an der Wahl der Kasus – *Kind* im Nominativ, *Vater* im Dativ –, wer der Geber und wer der Empfänger des Buches ist.

Über die Struktur von Sätzen erfahren wir einiges in den Grammatikstunden des Deutschunterrichts. Wir lernen z. B. die

Satzglieder unterscheiden. Unser Beispielsatz (1) hat folgende Satzglieder:

Subjekt: *die kleinen Kinder.*

Prädikat: *spielen.*

Lokalbestimmung: *im Zimmer.*

Zwischen diesen Satzgliedern bestehen viele Beziehungen, z. B. diese:

(2) Das Subjekt steht im Plural, deshalb muß auch das Verb, aus dem hier das Prädikat besteht, im Plural stehen.

(3) Die Lokalbestimmung zu *spielen* kann nur einen Ort, nicht eine Richtung angeben. Daher heißt es *im Zimmer* (Dativ) und nicht *ins Zimmer* (Akkusativ).

Zwischen den drei Wörtern, die das Subjekt bilden, gibt es u. a. folgende Beziehungen:

(4) Der Artikel *die* und das Adjektiv *kleinen* richten sich in Kasus (Fall), Numerus (Zahl) und Genus (Geschlecht) nach dem Substantiv, auf das sie sich beziehen *Kinder*.

(5) Das Adjektiv *kleinen* wird außerdem vom davor stehenden Artikel beeinflusst: Wäre er nicht vorhanden, so müßte es *kleine* heißen.

Bisher haben wir von der Struktur der Sätze nur die formale Seite betrachtet, nämlich die *grammatische* Struktur. Ein Satz hat aber nicht nur eine bestimmte Form, sondern auch einen *Inhalt*. Dieser besitzt ebenfalls eine Struktur, auf die wir hier aber nicht näher eingehen wollen. Sie steht mit der grammatischen Struktur in engem Zusammenhang.

Für die Wissenschaftler, die in der mathematischen Linguistik tätig sind, besteht gegenwärtig eine sehr wichtige Aufgabe darin, eine mathematische Beschreibung der grammatischen Struktur von Sätzen zu finden. Diese Aufgabe soll nun kurz erläutert werden.

Zunächst wollen wir einiges über ihren Zweck sagen. Es wäre sehr nützlich, wenn man ein Programm zur automatischen grammatischen Analyse von Sätzen hätte, ein Programm, mit dessen Hilfe für jeden beliebigen Satz einer Sprache durch einen Elektronenrechner eine Beschreibung der grammatischen Struktur ermittelt werden kann. Dies wäre ein wichtiger Schritt zu mehreren Zielen, die von großer praktischer Bedeutung sind, wie z. B. der automatischen Sprachübersetzung und der automatischen Sammlung von Fakten über irgendein Wissensgebiet.

Um aber ein automatisches Verfahren zur grammatischen Analyse aufzustellen, muß man erst die Grammatik „mathematisieren“. Das heißt, man muß das, was über die Struktur von Sätzen zu sagen ist, so präzise, einheitlich und vollständig darstellen, wie es in der Mathematik üblich ist. Wie das geschieht, soll jetzt ein wenig geschildert werden.

Eines muß gleich gesagt werden: Es wird hier nicht von Zahlen und Berechnungsverfahren die Rede sein. Die hauptsächlich ma-

thematischen Werkzeuge, die wir für unsere Aufgabe brauchen, sind Mengen, Relationen und algebraische Strukturen. Man kann es auch so ausdrücken: Es werden keine Quantitäten, sondern Qualitäten untersucht; in der Grammatik will man nicht die Länge oder die Häufigkeit eines Wortes wissen (dies wären quantitative Merkmale), sondern man will z. B. wissen, ob das Wort ein Verb, Adjektiv usw. ist.

Wenden wir uns nun wieder der grammatischen Struktur von Sätzen zu. Anstatt zu sagen, ein Satz hat eine bestimmte Struktur, kann man auch sagen: Zwischen seinen Teilen bestehen bestimmte Beziehungen. Für unseren Beispielsatz (1) haben wir einige angegeben ((2) bis (5)). Indem wir solche Beziehungen kennenlernen, lernen wir unsere Sprache besser verstehen und gebrauchen. Die Grammatik hilft uns dabei.

Wir sind keine Computer, sondern lebendige Wesen. Wir erfassen, wenn wir einen Satz hören; so viele Beziehungen gleichzeitig, wie sie kein Computer erfassen kann. Und für solchen lebendigen Umgang mit der Sprache ist die Grammatik gemacht, die wir in der Schule lernen. Gerade weil sie *nicht* mit mathematischer Strenge formuliert ist, ist sie für uns leichter verständlich. Wie sieht nun eine Grammatik aus, mit der nicht Menschen, sondern Computer arbeiten sollen?

Im Zentralinstitut für Sprachwissenschaft an der Akademie der Wissenschaften der DDR ist eine Gruppe von Mathematikern und Sprachwissenschaftlern dabei, eine solche Grammatik für die deutsche Sprache in allen Einzelheiten auszuarbeiten.

Der wichtigste Grundbegriff, von dem wir ausgehen, ist der Begriff *Abhängigkeitsbaum*. Ein Abhängigkeitsbaum ist ein spezieller Graph. (Wer die Definition des Graphen nachlesen möchte, schlage in „alpha“, Heft 4/72 und 6/72ff. nach.)

Definition: Ein Graph G heißt genau dann *Abhängigkeitsbaum*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(B_1) Die Kanten von G sind gerichtet.

(B_2) Es gibt genau einen Knotenpunkt S von G , in dem keine Kante ihren Anfang nimmt. (S heißt *Spitze* von G .)

(B_3) In jedem Knotenpunkt K von G mit $K \neq S$ beginnt genau eine Kante.

(B_4) Von jedem Knotenpunkt führt ein Weg zur Spitze, wobei jede Kante des Weges entsprechend ihrer Richtung durchlaufen wird.

Bild 1 zeigt zwei Beispiele für Abhängigkeitsbäume. In Bild 2 seht ihr gerichtete Graphen, die keine Abhängigkeitsbäume sind:

Beim ersten ist B_2 verletzt, er hat zwei Spitzen. Beim zweiten ist B_3 verletzt, B_2 und B_4 aber sind erfüllt. Beim dritten sind alle Bedingungen außer B_4 erfüllt; die Kante zwischen A und B ist „falsch“ gerichtet.

▲ **Aufgabe** ▲ Man beweise, daß jeder Abhängigkeitsbaum ein *Baum* ist, d. h., daß er zusammenhängend ist und keinen Kreis enthält. Jedem Satz der deutschen Sprache wird nun nach bestimmten Regeln ein Abhängigkeitsbaum zugeordnet. Zum Beispielsatz (1) gehört der in Bild 3 dargestellte Baum.

Die kleinen Kinder spielen im Zimmer.

Den Wörtern des Satzes entsprechen umkehrbar eindeutig Knotenpunkte des Abhängigkeitsbaumes. Verläuft eine gerichtete Kante von einem Knotenpunkt K_1 nach einem Knotenpunkt K_2 , so bedeutet das, daß zwischen den entsprechenden beiden Wörtern eine grammatische Beziehung besteht oder, wie wir sagen, eine *Abhängigkeit*. Umgekehrt wird aber nicht jede Abhängigkeit zwischen Wörtern durch eine Kante zwischen den entsprechenden Knotenpunkten dargestellt. Zum Beispiel besteht im Satz (1) eine Abhängigkeit zwischen *die* und *kleinen*. Wir haben sie vorhin unter (5) erläutert. Sie wird nicht durch eine Kante dargestellt, denn sonst sähe der Graph so aus wie im Bild 4.

Dieser Graph ist offensichtlich kein Baum mehr, also erst recht kein Abhängigkeitsbaum. Auf Abhängigkeitsbäume als Strukturbeschreibungen wollen wir aber nicht verzichten, da sie viele Vorteile bieten. Würden wir Graphen mit Kreisen zulassen, so wäre unser Vorhaben, die automatische Analyse von Sätzen, sehr viel schwerer zu lösen. Wir stattdessen deshalb die Abhängigkeitsbäume mit zusätzlichen Informationen aus, jedoch so, daß die Baumstruktur erhalten bleibt. Jedem Knotenpunkt eines Abhängigkeitsbaumes wird eine *Merkmalkombination* (MK) zugeordnet. Das ist eine Liste, die nach einem

für alle Knotenpunkte einheitlichen Schema in fünf Teile gegliedert ist. In jedem der fünf Teile stehen an festen Plätzen bestimmte Angaben über das Wort, dem der betreffende Knotenpunkt zugeordnet ist. Zum Beispiel gibt es im ersten Teil jeder MK unter anderem die Plätze „Kasus“ (Fall), „Numerus“ (Zahl), „Person“, „Tempus“ (Zeit). S. Tabelle 1

Nehmen wir aus unserem Beispielsatz (1) die Wörter *Kinder* und *spielen*. An den eben genannten Plätzen in der MK müßten folgende Eintragungen stehen:

Kinder S. Tabelle 2

spielen S. Tabelle 3

Erläuterung: Pl=Plural, Präs=Präsens. Der Stern bedeutet, daß das betreffende Merkmal für das jeweilige Wort keine Bedeutung hat: Bei Substantiven ist es sinnlos, zu sagen, sie stehen im Präsens oder im Perfekt. Bei Verben dagegen unterscheidet man keine Kasus (Fälle), wohl aber Tempora (Zeiten). Erinnern wir uns nun an die Beziehung, die unter (2) genannt wurde: Wenn das Subjekt im Plural steht, so muß auch das Verb des Prädikats im Plural stehen. Für unser Schema der Merkmalkombinationen bedeutet das: Im Abhängigkeitsbaum zu Satz (1) (vgl. Bild 3) muß die MK für *spielen* an der Stelle „Numerus“ die gleiche Eintragung haben wie die MK für *Kinder*.

Die Beziehung (5), also die Beeinflussung des Adjektivs *kleinen* durch den Artikel *die*, läßt sich nun ebenfalls ausdrücken durch gewisse Eintragungen in den MK der beiden Wörter.

Außer den Merkmalkombinationen enthalten die Abhängigkeitsbäume noch andere

Zusatzinformationen, die aber ebenfalls **exakt** festgelegt sind.

Durch alle diese Angaben werden die Abhängigkeitsbäume zu einem Beschreibungsmittel, das sehr anpassungsfähig und doch streng formal ist. Es wird sowohl den Erfordernissen der Sprache als auch der Mathematik gerecht.

Damit Ihr keinen falschen Eindruck gewinnt, muß noch folgendes gesagt werden: In diesem Artikel haben wir über Abhängigkeitsbäume nur anhand einiger ausgewählter Begriffe und Beispiele gesprochen. So wie die Spitze des Eisberges, die aus dem Meer aufragt, nur ein kleiner Teil des Eisberges ist, so ist das, was hier dargestellt wurde, nur der Anfang einer umfangreichen mathematischen Theorie. In ihr wird u. a. ausgesagt und bewiesen,

- welche Zusammenhänge zwischen den Merkmalkombinationen und den anderen Zusatzinformationen bestehen,
- warum sich mit den Abhängigkeitsbäumen und den Zusatzinformationen alle grammatischen Erscheinungen, die man braucht, beschreiben lassen,
- wie bei der automatischen Satzanalyse zu einem gegebenen Satz der Abhängigkeitsbaum konstruiert wird.

Wir haben hier keinen Platz, die Resultate zu erläutern, sondern müssen uns mit den Grundbegriffen begnügen, die wir schon dargestellt haben.

Ich hoffe, Ihr konntet trotzdem einen Eindruck davon gewinnen, daß sich auch über die Sprache, diese lebendige und vielgestaltige Erscheinung, mit Hilfe der Mathematik nützliche Erkenntnisse gewinnen lassen.

H. Küstner

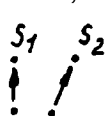
Bild 1a)



b)



Bild 2a)



b)



c)



Tabelle 1

Teil 1					Teile 2 bis 5
Kasus		Num.	Pers.	Tempus	

Tabelle 2

Teil 1					Teile 2 bis 5
Kasus		Num.	Pers.	Tempus	
1		Pl	3	*	

Tabelle 3

Teil 1					Teile 2 bis 5
Kasus		Num.	Pers.	Tempus	
*		Pl	3	Präs	

Bild 3

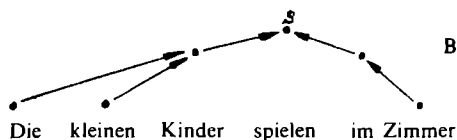
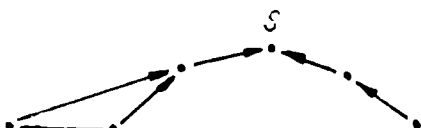


Bild 4



Es ist die 11. Karte

Ein altes Kartenkunststück
mathematisch beleuchtet



21 gemischte Karten werden der Reihe nach offen vor dem Mitspieler auf drei Stöße verteilt. Dabei hat dieser still für sich eine Karte zu merken. Er gibt den Stoß an, in welchem sich die gemerkte Karte befindet. Beim Aufnehmen der Karten wird dieser Stoß in die Mitte zwischen den beiden unbezeichneten Stößen genommen.

Die Karten werden zum 2. Mal wie oben ausgelegt. Der Mitspieler gibt wieder den Stoß an, in dem sich die Karte befindet. Die Karten werden wie oben aufgenommen und der Vorgang wird noch einmal wiederholt. Nun befindet sich die gemerkte Karte genau in der Mitte der 21 Karten. Sie ist also die 11. Karte.

Durch Rechnung läßt sich der Sachverhalt bestätigen. Der Mitspieler habe sich die c -te Karte gemerkt. c kann jeden Wert von 1 bis 21 haben.

Beim 1. Auslegen liegen $s_1 = \left\lfloor \frac{c-1}{3} \right\rfloor$ Karten unter der gewählten Karte. $\left\lfloor \frac{c-1}{3} \right\rfloor$ bedeutet

das größte Ganze von $\frac{c-1}{3}$, z. B. für $c=17$ ist es 5.

Beim 1. Aufnehmen kommt die Karte an die $(7+s_1+1)$ -te Stelle von unten. Legt man die Karten, mit der untersten anfangend, aus, so liegen beim 2. Auslegen unter der Karte $s_2 = \left\lfloor \frac{7+s_1}{3} \right\rfloor$ Karten.

Beim 2. Aufnehmen ist die Karte an die $(7+s_2+1)$ -te Stelle gekommen.

Beim 3. Auslegen liegen unter der Karte $s_3 = \left\lfloor \frac{7+s_2}{3} \right\rfloor$ Karten. Beim 3. Aufnehmen

ist sie nun an der $(7+s_3+1=11)$ -ten Stelle. Das ist auch der Fall. Für

$c = 1, 2, 3/4, 5, 6/7, 8, 9/10, 11, 12/13, 14, 15/16, 17, 18/19, 20, 21$ ist

$s_1 = 0 / 1 / 2 / 3 / 4 / 5 / 6$

$s_2 = 2 / 3 / 4$

$s_3 = 3$

also $7+s_3+1=11$.

Dieser Scherz, d. h. die Möglichkeit, durch eine endliche Anzahl solcher Umlegungen eine Karte in die Mitte des Spiels zu bekommen, beruht keineswegs auf einer besonderen „Heiligkeit“ der Zahlen 3 und 7. Es genügt an-

zunehmen, daß ein Kartenspiel $a \cdot b$ Karten habe, worin a und b ungerade Zahlen sind. Es befindet sich dann in der Mitte, also an der Stelle $\frac{a \cdot b + 1}{2}$ wirklich eine Karte.

Beim Zusammennehmen kommen unter bzw. über den bezeichneten Stoß $\frac{a-1}{2}$ Stöße zu b Karten. Die Karten werden nämlich in a Stößen zu b Karten ausgelegt.

Es soll nun untersucht werden, welche Beziehung zwischen a und b bestehen muß, damit die Aufgabe nach dem n -ten Schritt gelöst ist. Es soll beim Auslegen wieder mit der untersten Karte begonnen werden.

Es befinden sich unter der c -ten Karte beim 1. Auslegen $s_1 = \left\lfloor \frac{c-1}{a} \right\rfloor$ Karten,

beim 2. Auslegen $s_2 = \left\lfloor \frac{\left(\frac{a-1}{2} \cdot b + s_1\right)}{a} \right\rfloor$ K.,

beim n . Auslegen $s_n = \left\lfloor \frac{\frac{a-1}{2} \cdot b + s_{n-1}}{a} \right\rfloor$ K.

Soll beim n -ten Aufnehmen die Karte in der Mitte des Spiels sein, so muß sie beim n -ten Auslegen in der Mitte ihres Stoßes liegen.

Unter ihr müssen also $\frac{b-1}{2}$ Karten liegen.

$$s_n = \left\lfloor \frac{\frac{a-1}{2} \cdot b + s_{n-1}}{a} \right\rfloor = \frac{b-1}{2},$$

Hieraus läßt sich die größte Zahl b in Abhängigkeit von a bestimmen, für die die Aufgabe in n Schritten gelöst ist.

Der kleinste Wert für s_{n-1} ergibt sich aus der Gleichung

$$\frac{b-1}{2} = \left\lfloor \frac{\frac{a-1}{2} \cdot b + s_{n-1}}{a} \right\rfloor; s_{n-1, \min} = \frac{b-a}{2}.$$

Den größten Wert für s_{n-1} errechnet man aus der Gleichung

$$\frac{b+1}{2} = \left\lfloor \frac{\frac{a-1}{2} \cdot b + s_{n-1} + 1}{a} \right\rfloor; s_{n-1, \max} = \frac{b+a-2}{2}.$$

Das sind a aufeinanderfolgende Werte.

Der kleinste Wert für s_{n-2} ergibt sich aus der Gleichung

$$\frac{b-a}{2} = \left\lfloor \frac{\frac{a-1}{2} \cdot b + s_{n-2}}{a} \right\rfloor = \frac{\frac{a-1}{2} \cdot b + s_{n-2, \min}}{a};$$

$$s_{n-2, \min} = \frac{b-a^2}{2}.$$

Den größten Wert für s_{n-2} ergibt die Gleichung

$$\frac{b+a}{2} = \left\lfloor \frac{\frac{a-1}{2} \cdot b + s_{n-2, \max}}{a} \right\rfloor = \frac{\frac{a-1}{2} \cdot b + s_{n-2, \max} + 1}{a}; s_{n-2, \max} = \frac{b+a^2-2}{2}.$$

Das sind im ganzen a^2 Werte.

Es sei $s_{n-m, \min} = \frac{b-a^m}{2}$ und

$s_{n-m, \max} = \frac{b+a^m-2}{2}$. Dann ist

$s_{n-(m+1), \min} = \frac{b-a^{m+1}}{2}$ aus der Gleichung

$$\frac{b-a^m}{2} = \frac{\frac{a-1}{2} \cdot b + s_{n-(m+1), \min}}{a} \text{ und}$$

$s_{n-(m+1), \max} = \frac{b+a^{m+1}-2}{2}$ aus der Gleichung

$$\frac{b+a^m}{2} = \frac{\frac{a-1}{2} \cdot b + s_{n-(m+1), \max} + 1}{a}.$$

Das sind a^{m+1} Werte, die von $s_{n-(m+1)}$ angenommen werden.

Schließlich sind $s_{1, \min} = \frac{b-a^{n-1}}{2}$ bis

$s_{1, \max} = \frac{b+a^{n-1}-2}{2}$ a^{n-1} Werte.

Ist die Aufgabe gelöst, so muß die Anzahl der s_1 -Werte $b=a^{n-1}$

sein, da $\left\lfloor \frac{c-1}{a} \right\rfloor$ b Werte annimmt.

$$s_{1, \min} = \frac{b-a^{n-1}}{2} = 0; s_{1, \max} = \frac{b+a^{n-1}-2}{2}$$

$= b-1$. Es ergibt sich:

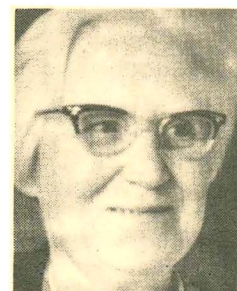
Für $b=a^0=1$ ist die Aufgabe in einem Schritt gelöst; für $b=a^0+2$ bis a^1 ist die Aufgabe in zwei Schritten gelöst; für $b=a^1+2$ bis a^2 ist die Aufgabe in drei Schritten gelöst usw.

Für $b=a^m+2$ bis a^{m+1} ist die Aufgabe in $m+2$ Schritten gelöst.

Ist $b=c_m a^m + c_{m-1} a^{m-1} + \dots + c_0$, so ist die Aufgabe in $n=m+2$ Schritten gelöst.

Für unser Beispiel $a=3$, $b=7$, $c_1=2$, $c_0=1$, $m=1$ ist die Aufgabe in $n=3$ Schritten gelöst.

Hildegund Möller, Mittweida



Wir bauen Polyeder

Herstellung von Polyedern aus allen Teilflächen eines Quadrates

Aufgabenstellung:

Ein Quadrat mit der Seitenlänge a ist so in n -Ecke aufzuteilen, daß sich aus *genau allen Teilflächen* ein Polyeder zusammensetzen läßt. Jedes n -Eck bildet eine Begrenzungsfläche des Polyeders.

$$A_0 = a^2$$

- Versuche, möglichst viele Polyeder mit den genannten Eigenschaften zu finden!
- Stelle jedes Polyeder im Grund-Aufrißverfahren und im Schrägriß dar!
- Leite für jedes Polyeder die Volumenformel in Abhängigkeit von a her! $V=f(a)$
- Stelle Modelle her!

1. Ein Quader mit quadratischer Grundfläche

Kanten des Körpers: $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}$

$$\text{Volumen des Körpers: } V=f(a)=\frac{a^3}{16}$$

2. Ein Dreikantprisma

Zur Konstruktion der Teilflächen ist die Kathete des gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks $\overline{HJ}=x$ zu berechnen.

Wegen $\overline{HG}=\overline{JF}$ gilt:

$$x\sqrt{2}=a-x$$

$$x(\sqrt{2}+1)=a$$

$$x=\frac{a}{\sqrt{2}+1}=a(\sqrt{2}-1)$$

Mit $a\sqrt{2}-a$ ist die Konstruktion der Teilflächen leicht ausführbar. Berechnung des Volumens aus:

$$V=\frac{\overline{HJ} \cdot \overline{JG}}{2} \cdot \overline{JF}$$

$$\overline{HJ}=\overline{JG}=x=a(\sqrt{2}-1)$$

$$\overline{JF}=\overline{HG}=x\sqrt{2}=a(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}$$

$$V=f(a)=\frac{a^2(\sqrt{2}-1)^2}{2} \cdot a(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}$$

$$V=f(a)=\frac{a^3}{2}(10-7\sqrt{2})$$

3. Ein Tetraeder

Verbindet man die Halbierungspunkte zweier anliegenden Seiten und diese mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt des Quadrats, so erhält man das Netz eines Tetraeders.

Die Werte zur Berechnung der Grundfläche lassen sich unschwer aus der Skizze herleiten. Die Höhe h ist zu berechnen.

Winkel $E''D''C''$ ist die Projektion des Winkels $EDC=90^\circ$. Weil Schenkel $\overline{CD}$ parallel zur Reißebene, folgt Winkel $E''D''C''=90^\circ$.

Kombination von Höhen- und Kathetensatz ergibt für h :

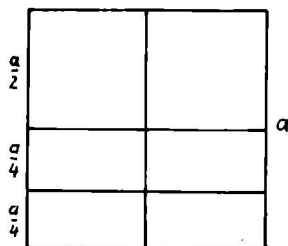
$$h=\frac{a}{c}\sqrt{c^2-a^2}$$

$$\text{mit } a=a, c=\frac{3}{4}a\sqrt{2}.$$

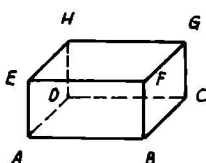
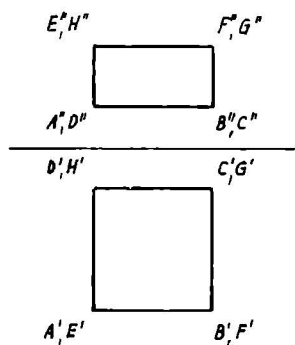
Daraus ergibt sich $h=\frac{a}{3}$

Berechnung des Volumens:

$$V=\frac{1}{3}Ag \cdot h$$



Zu 1.



$$V=f(a)=\frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{3}{4} a \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{3}$$

$$V=f(a)=\frac{a^3}{24}$$

4. Ein Oktaeder aus 8 gleichschenklighrechtwinkligen Dreiecken.

Zur Konstruktion des Grund-Aufrißbildes und weiteren Berechnung des Volumens wird zunächst der Winkel β'' berechnet.

$\angle AEJ=90^\circ$, $\angle A''E''J''=90^\circ$, weil $\overline{AE}$ parallel zur Reißebene.

So gilt im $\triangle A''B''E''$

$$\frac{\frac{a}{2}}{\sin \beta''} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{2}}{\sin \alpha''} \quad \alpha'' + \beta'' + 90^\circ + \beta'' = 180^\circ$$

$$\frac{1}{\sin \beta''} = \frac{\sqrt{2}}{\sin (90-2\beta'')} = \frac{\sqrt{2}}{\cos 2\beta''}$$

$$\cos 2\beta'' = \sqrt{2} \sin \beta''$$

$$1 - 2\sin^2 \beta'' = \sqrt{2} \sin \beta''$$

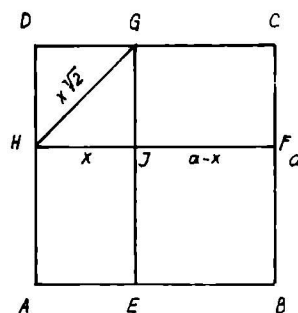
$$0 = 2\sin^2 \beta'' + \sqrt{2} \sin \beta'' - 1$$

$$\sin \beta''_{1,2} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2+8}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{4}(1 \mp \sqrt{5})$$

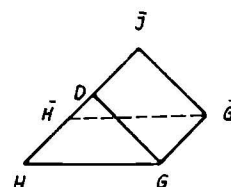
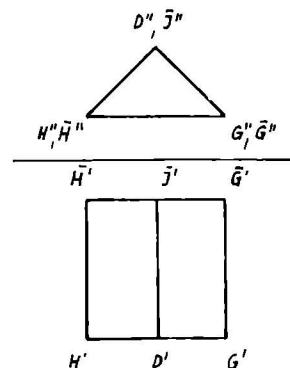
$$\sin \beta'' = -\frac{\sqrt{2}}{4}(1 - \sqrt{5}) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{5} - 1)$$

$$\sin \beta''_2 \text{ entfällt.}$$

$$\beta'' = 25,9^\circ, 2\beta'' = 51,8^\circ, \alpha'' = 38,2^\circ$$



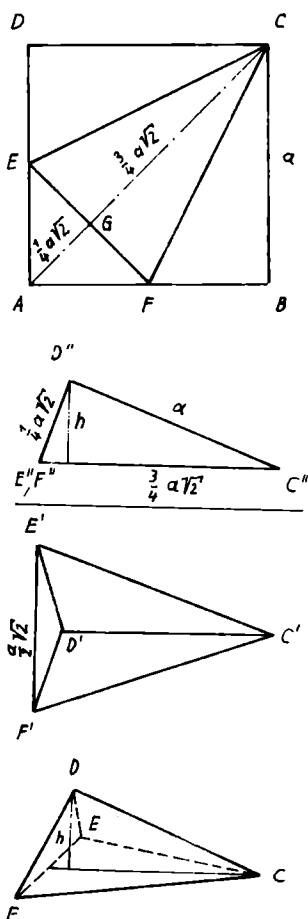
Zu 2.



Zur Volumenberechnung zerlegt man das Tetraeder in 2 kongruente Pyramiden mit gemeinsamer drachenviereckförmiger Grundfläche $AJBF$ und wendet die trigonometrische Dreiecksformel an.

$$\begin{aligned}
 A_G &= 2 \left(\frac{1}{2} \right) \overline{AF} \cdot \overline{FB} \cdot \sin(90^\circ + \beta'') = \\
 &= \frac{a}{2} \sqrt{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos \beta'' = \frac{a^2}{4} \sqrt{2} \cos \beta'' \\
 \cos \beta'' &= \sqrt{1 - \left[\frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{5} - 1) \right]^2} = \\
 &= \sqrt{1 - \frac{1}{8} (6 - 2\sqrt{5})} = \sqrt{1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{5}} = \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sqrt{5}} \\
 A_G &= \frac{a^2}{4} \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sqrt{5}} = \frac{a^2}{8} \sqrt{2(1 + \sqrt{5})} \\
 V &= 2 \left(\frac{1}{3} A_G \cdot h \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^2}{8} \sqrt{2(1 + \sqrt{5})} \cdot h = \\
 &= \frac{a^2}{12} \sqrt{2(1 + \sqrt{5})} \cdot h \\
 h &= \frac{a}{2} \sqrt{2} \sin \beta'' = \frac{a}{2} \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{5} - 1) = \\
 &= \frac{a}{4} (\sqrt{5} - 1) \\
 V &= f(a) = \frac{a^2}{12} \sqrt{2(1 + \sqrt{5})} \cdot \frac{a}{4} (\sqrt{5} - 1) \\
 V &= f(a) = \frac{a^3}{24} \sqrt{2(\sqrt{5} - 1)}
 \end{aligned}$$

Zu 3.



5. Ein Zwölfflächner aus 8 kongruenten

gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecken und 4 Rechtecken, von denen je 2 kongruent sind.

Hinweise zur Konstruktion:

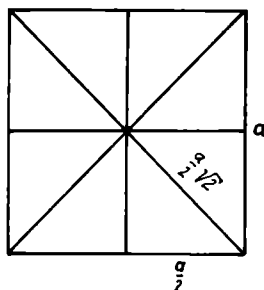
a auf $\overline{OQ}$ abtragen ergibt N. Parallelen durch N zu $\overline{RQ}$ ergeben, L, K und zu $\overline{PK}$ ergeben T. Mittelsenkrechten auf $\overline{LN}$ und $\overline{LO}$ ergeben W, V, J, M, Y, X.

Mittelsenkrechte auf $\overline{RQ}$ ergibt Z, U.

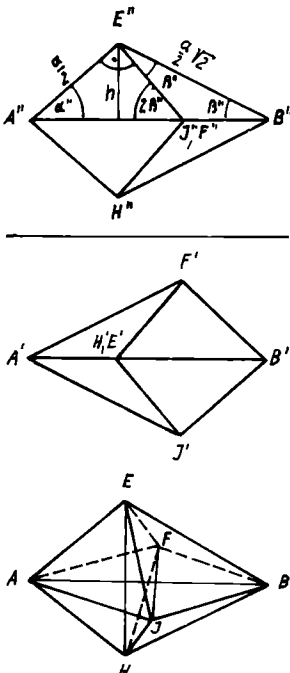
Der Körper wird von einem vierseitigen Prisma gebildet, dem an die Grund- und Deckfläche je eine vierseitige Pyramide angesetzt ist. Die beiden Pyramiden stellen zu dem unter „4. Oktaeder“ behandelten ähnliche Körper das.

Die Berechnung des Volumens kann daher mit den bereits hergeleiteten Formeln erfolgen, nur ist jetzt für $a \frac{a}{2} \sqrt{2}$ zu setzen. Ebenso gilt das für die Grundfläche des Prismas.

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \frac{\left(\frac{a}{2} \sqrt{2} \right)^3}{24} \sqrt{2(\sqrt{5} - 1)} = \frac{a^3}{48} \sqrt{\sqrt{5} - 1} \\
 V_{Pr} &= A_G \cdot h = \frac{\left(\frac{a}{2} \sqrt{2} \right)^2}{8} \cdot h
 \end{aligned}$$



Zu 4.



$$\sqrt{2(1 + \sqrt{5})} \cdot \frac{a}{2} (2 - \sqrt{2})$$

$$= \frac{a^3}{32} \sqrt{2(1 + \sqrt{5})} (2 - \sqrt{2})$$

$$= \frac{a^3}{16} \sqrt{(1 + \sqrt{5})(3 - 2\sqrt{2})}$$

$$V_{ges} = V_1 + V_{Pr} = \frac{a^3}{48} \sqrt{\sqrt{5} - 1} + \frac{a^3}{16}$$

$$\sqrt{(1 + \sqrt{5})(3 - 2\sqrt{2})}$$

$$V_{ges} = \frac{a^3}{48} \left[\sqrt{\sqrt{5} - 1} + 3 \sqrt{(1 + \sqrt{5})(3 - 2\sqrt{2})} \right]$$

6. Ein konkaver 30-Flächner

Die Oberfläche des Körpers besteht aus

6 Quadraten mit der Seitenlänge $\frac{1}{6}a$ und

24 Rechtecken mit den Seitenlängen $\frac{1}{6}a, \frac{5}{24}a$.

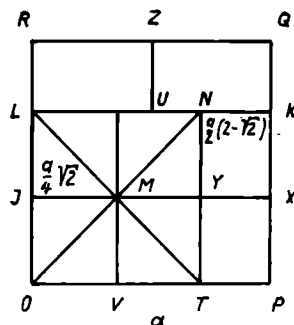
Das Volumen des Körpers ist zusammengesetzt aus:

6 Quatern, Kantenlängen $\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{5a}{24}$

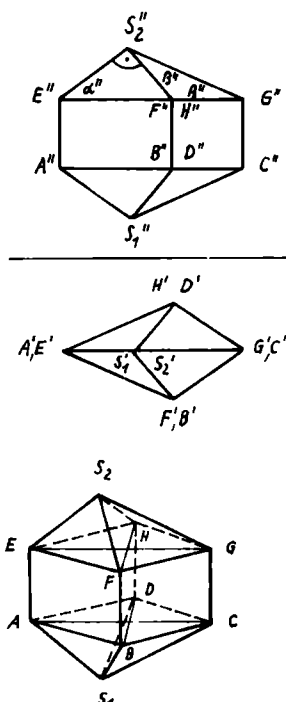
1 Würfel, Kantenlänge $\frac{a}{6}$

Berechnung des Volumens

$$V = f(a) = 6 \left(\frac{a}{6} \right)^2 \cdot \frac{5a}{24} + \left(\frac{a}{6} \right)^3 \quad V = f(a) = \frac{17}{432} a^3$$



Zu 5.



Die Beschäftigung mit diesem Beitrag führt schließlich auf die Frage nach der Existenz weiterer solcher Körper und ob ihre Anzahl bestimmbar ist.

Die Antwort fällt überraschend aus und sei als Behauptung vorweggenommen:

Es existieren n -Flächner, deren Begrenzungsflächen zu einem Quadrat zusammengesetzt werden können mit 4, 5, 6, ... n -Flächen.

$n \geq 4$

Beweis: Die Existenz des 4-, 5- und 6-Flächners ist bewiesen. Bei jedem dieser Körper läßt sich eine Dreikant-Pyramide so abtrennen, daß diese an den Schnittkanten nach innen so angesetzt wird, so daß diese nicht den Kreis durchstößt.

So entstehen aus dem 4- ein 7-Flächner, aus dem 5- ein 8-Flächner und aus dem 6- ein 9-Flächner.

Nun kann die nach innen angesetzte Pyramide weiter unterteilt werden. Es entstehen Stümpfe und die Spitze, die an den Schnittkanten nach innen, nach außen, ... angesetzt werden. Dabei wird die vorgegebene Oberfläche nicht verändert, die Anzahl der Begrenzungsflächen nimmt jedoch bei jeder Knickung um drei zu. So entstehen folgende Mengen:

Aus 4-Flächnern: $M_1 = (4 + 3n) \cdot F_l$
 $= 4-, 7-, 10-, 13-, \dots$ Flächner

Aus 5-Flächnern: $M_2 = (5 + 3n) \cdot F_l$
 $= 5-, 8-, 11-, 14-, \dots$ Flächner

Aus 6-Flächnern: $M_3 = (6 + 3n) \cdot F_l$
 $= 6-, 9-, 12-, 15-, \dots$ Flächner

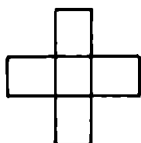
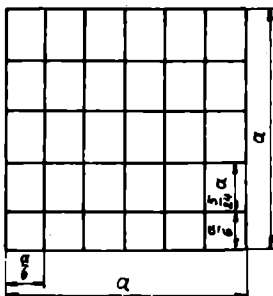
Die Vereinigungsmenge

$M_1 \cup M_2 \cup M_3$

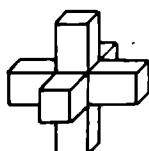
$= 4-, 5-, 6-, 7-, \dots n$ -Flächner, q. e. d. Auf weitere interessante Polyeder dieser Art sei hingewiesen. So existiert u. a. ein konvexer Zehnflächner, ein sog. Antiprisma.

W. Zehrer

Zu 6.



Grundrißbild
 $\cong$ Aufrißbild



Mathe in der Mokotowska

Wissenschaftler der RGW-Länder in Warschau



In den zwanziger Jahren war das „Schottische Café“ im polnischen Lwow häufig Zeuge mathematischer Diskussionen, wie wir in *alpha* 1/74 berichteten. Initiator war der polnische Mathematiker *Stefan Banach*.

Vom Schottencafé ins Schloß

Knapp fünfzig Jahre später trafen sich im Dezember 1971 in Moskau Vertreter der Akademien der Wissenschaften sozialistischer Länder und beschlossen ein Grundsatzabkommen über die künftige multilaterale Zusammenarbeit in der Forschung. Die Mathematiker schritten als erste zur Realisierung dieser Abmachungen: Schon einen Monat später, im Januar 1972, trafen sich Wissenschaftler Bulgariens, der ČSSR, der DDR, Rumäniens, Ungarns und der UdSSR mit ihren polnischen Gastgebern in Warschau und gründeten das „Internationale Zentrum für Mathematik“. Sitz dieser Einrichtung wurde das entsprechende *Institut der Polnischen Akademie der Wissenschaften*, ein ehemaliges Schloß in der Mokotowskastraße. Zum ersten Direktor wurde Prof. Dr. *Olech* berufen, und als das damals jüngste Kind der sozialistischen Wissenschaftskooperation aus der Taufe gehoben wurde, gab es einhellige Zustimmung für den Namen „Stefan Banach“. Die Namensgebung war eine doppelte Verbeugung vor einem bedeutenden Gelehrten: vor einem glänzenden Mathematiker und vor einem Mann, der es verstanden hatte, den mathematischen Meinungsstreit in einer bis dahin noch nicht gekannten Form zu organisieren – im kleinen Kreise, frei und offen.

Angewandte Mathematik – Theoretische Mathematik

Wer war *Stefan Banach*? Was ist Funktionalanalysis, ein Gebiet, auf dem er Weltruhm erreichte?

In der Tatsache, daß nur wenige Menschen diese Frage ohne Zögern beantworten können, liegt das bedauerliche Geschick einer Wissenschaft, die unserer Welt von heute mehr gibt, als diese Welt sich träumen läßt.

Daß die Mathematik allseitig unser Leben durchdringt, wird oft gesagt. Meist stehen dabei sehr realistische, handgreifliche Beispiele vor Augen: ihr Mitwirken bei der Konstruktion von Maschinen und Bauwerken, bei der Optimierung industrieller Fertigungsprogramme, in der volkswirtschaftlichen Planung, in der Statistik aller Schattierungen. Die mathematischen Verfahren sind hier bereits verhältnismäßig hoch entwickelt, das Hilfsmittel „Computertechnik“ geht mit Ausklang dieses Jahrzehnts seiner „vierten Generation“ entgegen.

Die mathematischen Methoden reichen aber wesentlich weiter. Mit ihrer Hilfe lassen sich Prozesse in unserer Umwelt und in der Technik beschreiben – verkürzt, überschaubarer, immer vollständiger und konkreter, als es Worte vermögen. Die Bemühungen reichen von einem Standardmodell der Hochatmosphäre bis zur mathematischen Darstellung ozeanischer Prozesse oder der Erdbodenmechanismen. Da haben aber auch estnische Wissenschaftler ein Modell des lebenden Waldes erarbeitet, und Studenten der Universität Greifswald senkten auf gleiche Weise die Materialverluste bei der Benzolvordestillation (ein Exponat der 5. Zentralen Leistungsschau in Leipzig). In der Moldauischen SSR wurde die Zuckerrüben-ernte „mathematisiert“: Nutzeffekt jährlich 3 Millionen Rubel.

Damit ist es bereits gesagt, daß – so Professor *Olech* – „es die Mathematik nicht nur vermag, Probleme der Wirklichkeit zu beschreiben, sondern daß sie sie auch lösen kann“.

All das ist *angewandte Mathematik*. Mit ihr wird auch der Außenstehende konfrontiert. Er spürt Wirkungen.

Die angewandte Mathematik benötigt jedoch ihr Handwerkszeug. Das sind nicht die Computer, sie stellen nur ein Sekundär-Hilfsmittel dar; auch nicht das Vokabular oder die Symbolik von den Zeichen der vier Grundrechenarten über „kleiner“, „größer“ und „identisch“ bis zum verwirrenden Wald der Differentiale, Integrale, Matrizen, Determinanten, Vektoren und Operatoren. Es sind vielmehr die Gesetze, die diese mathematischen Elemente miteinander verknüpfen, damit sie in der Anwendung die Wirklichkeit wahrheitsgetreu widerspiegeln. Sie zu finden und weiterzuentwickeln ist Aufgabe der *theoretischen Mathematik*. Von den Wissenschaftlern, den „Theoretikern“, hören wir sehr wenig. Ihre Arbeit erfordert einen derartig hohen Grad an Abstraktion und Spezialisierung, daß sich der Nutzen ihrer „Produkte“ nicht in die Sprache des Alltags übersetzen läßt. Trotzdem bleibt eine Tatsache bestehen: *Der Nutzen der angewandten Mathematik ist um so höher, je größer der Vorlauf der theoretischen Mathematik ist.*

Integrierte Integrale

Diese fundamentale Erkenntnis wird immer stärker zum Leitmotiv der Wissenschaftspolitik in den sozialistischen Staaten. Sie äußert sich in der tiefgreifenden Mathematisierung im Bildungswesen von der Oberschule bis zur Universität, in der Liebe und Freude junger Menschen zum Fach, bei den Mathematik-Olympiaden, deren Aufgabenstellungen nur staunende Bewunderung entlocken können. Der virtuosen Handhabung dieses Instruments „theoretische Mathematik“ verdankt z. B. die sowjetische Wissenschaft zu einem guten Teil ihre Spitzenstellung in der Welt.

Der Anstoß zur Gründung des Internationalen Zentrums in Warschau kam von der *Polnischen Akademie der Wissenschaften*; alle anderen Beteiligten waren schnell zur Mitarbeit entschlossen. Da ein Tisch, eine Tafel, Papier und Bleistift sowie eine gutbestückte Bibliothek die wichtigsten Arbeitsmittel des theoretischen Mathematikers darstellen, waren in diesem Fall auch keine langfristigen Mittel-Planungen erforderlich, um zur Tat zu schreiten. So sind bis heute bereits drei Spezialisierungskurse von je einem Semester Dauer absolviert, zu denen sowohl Spezialisten als auch Nachwuchswissenschaftler eingeladen wurden. Im ersten Semester standen die *Theorie der Modelle, spezielle Zahlenfolgen und Anwendungsfragen der mathematischen Logik* auf der Tagesordnung, in den beiden folgenden die *Theorie der Optimalen Steuerung*, d. h., technische und ökonomische Systeme so zu gestalten, daß ein vorgegebenes Ziel mit minimalem Aufwand erreicht wird.

Die Arbeit vollzieht sich in Vorlesungen und

Kolloquien, daneben aber werden auch Gespräche und Diskussionen im kleineren Kreise bevorzugt. Die jungen Nachwuchswissenschaftler können ihre Probleme vortragen und mit allen beraten. Die persönlichen Kontakte tragen dazu bei, eine Überspezialisierung und Abgrenzung zu vermeiden, das gegenseitige Verständnis zu erleichtern im Interesse der Integration, im Sinne des Mannes, der dem Schloß in der Mokotowska seinen Namen gab.

Ch. Heermann,

gekürzt aus „Wochenpost“ 48/74

Prof. Dr. Klötzler berichtet

Der voranstehende informative Beitrag von Ch. Heermann über das Banachzentrum in Warschau veranlaßt mich, aus meiner eigenen Erfahrung heraus die große wissenschaftliche Bedeutung dieser internationalen mathematischen Weiterbildungs- und Forschungsstätte nochmals hervorzuheben. Neben weiteren Fachkollegen aus der DDR hatte ich Gelegenheit, 1973/74 mehrwöchig als Lektor und natürlich auch als Hörer am zweiten Lehrprogramm „Theorie optimaler Prozesse“ in Warschau und zum Abschlusssymposium in Zakopane aktiv mitwirken zu können. Dabei zeigte ich insbesondere einige Aspekte auf, die sich heute aus der Weiterentwicklung der Variationsrechnung (vgl. alpha 1/74) für die optimale Prozeßsteuerung ergeben. Die dort gepflegte intensive Zusammenarbeit der Lehrgangsteilnehmer hat zu dauerhaften persönlichen und wissenschaftlichen Kontakten beteiligter Einrichtungen der sozialistischen Länder geführt und nicht zuletzt zu einer hohen internationalen Anerkennung der mathematischen Forschung in der DDR.



Kurzbiographie

Prof. Dr. sc. nat. R. Klötzler, geb. 1931 in Chemnitz; Vater: Posthelfer, Mutter: Hausfrau; 1937 bis 1945 Besuch der Grundschule, 1945 bis 1949 Besuch der Oberschule, Abitur; 1949 bis 1953 Mathematikstudium an der KMU Leipzig, Diplom; 1954 bis 1956 planmäßige Aspirantur an der KMU, Promotion; 1956 bis 1959 Assistent am Forschungsinstitut für reine Mathematik der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Mitarbeit am „Mathematischen Wörterbuch“; 1963 bis 1965 Professor mit Lehrauftrag für Mathematik und Darstellende Geometrie an der Hochschule für Bauwesen Leipzig;

Eine Aufgabe von Prof. Dr. sc. math. István Fenyő

Lehrstuhl für Mathematik an der Fakultät
für Elektronik
der Technischen Universität Budapest

▲1352▲ Es sei zu beweisen: Falls das Quadrat einer natürlichen Zahl x als Summe von zwei Quadratzahlen darstellbar ist (d. h., es existieren zwei natürliche Zahlen, deren Quadratsumme x^2 ist), dann gibt es zwei natürliche Zahlen a und b derart, daß

$$x = a + b + \sqrt{2ab} \quad (*)$$

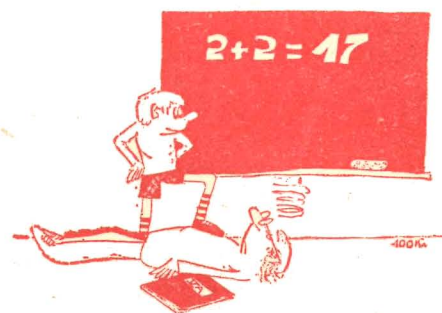
gilt. Auch die Umkehrung ist richtig: Sind a und b natürliche Zahlen, für welche $\sqrt{2ab}$ eine natürliche Zahl ist, so ist das Quadrat der unter (*) definierten Zahl als Summe von zwei Quadratzahlen darstellbar.

Kurzbiographie:

geb. 1917 in Budapest, Abitur, Mathematik/Physikstudium an der Universität Budapest, anschließend Lehrer dieser Fächer an einem Gymnasium (entspricht unserer EOS), Aufnahme des Chemiestudiums mit Abschluß Dipl.-Chemiker, Arbeit (bis Ende des 2. Weltkrieges) als Diplomchemiker in verschiedenen Betrieben. Prof. F. promovierte 1945 und habilitierte 1950 an der TU Budapest. Nach Einführung der neuen wissenschaftlichen Grade erwarb er den Grad „Kandidat der Math. Wissenschaften“ (Dr. sci. math.). Er ist seit 1945 an der TU Budapest tätig, von 1960 an als ord. Prof., 1962/63 Gastprofessur in Rom, anschließend Studienaufenthalte in Paris und der BRD, 1964/66 Gastprofessur in Rostock. Einladungen zu Vorlesungen an Universitäten und Hochschulen in der DDR, UdSSR, SR Rumänien, VR Polen, ČSSR, SFR Jugoslawien, Italien, Holland, Frankreich, BRD, Großbritannien, Finnland, Schweden, USA, Kanada. Prof. F. ist Mitglied mehrerer wissenschaftlicher Gesellschaften.

1965 bis 1971 Professor mit vollem Lehrauftrag, seit 1969 ordentlicher Professor an der MLU Halle-Wittenberg und 1968 bis 1971 Direktor deren Sektion Mathematik; 1971 Gastprofessor in Jyväskylä (Finnland); 1972 Umberufung an die KMU Leipzig – Fachgebiet Analysis und Mathematische Methoden der Operationsforschung; 1973 Lektor im Banachzentrum Warschau; seit 1969 Mitglied des Vorstandes der Mathematischen Gesellschaft der DDR und seit 1971 Stellvertreter des Vorsitzenden.

In freien Stunden **alpha** heiter



Ohne Worte
G. Nauczycielski, Warschau

Wir wägen

An einer symmetrischen Tafelwaage sind beide Tafeln zum Auflegen von „Gewichten“ zugelassen. An den bereitzustellenden „Gewichtssatz“ werden folgende Forderungen gestellt:

1. Die Feststellung der Masse eines Gegenstandes soll auf das Gramm genau möglich sein.

2. Es sollen Massen bis zu 1000 g wägbare sein.

3. Die Anzahl der „Gewichte“ soll minimal sein.

Man zeige, daß ein aus sieben „Gewichten“ bestehender Satz Wägungen bis zu 1093 g unter den oben gestellten Nebenbedingungen erlaubt.

Man zeige, daß für die bereitzustellenden „Gewichte“ P_k das Bildungsgesetz $P_k = 3^k$ ($k=0, 1, 2, 3, 4, \dots$) besteht.

Erläuterung: „Gewicht“ ist eine Bezeichnung für Wägestücke oder Massenstücke zur Bestimmung von Massen mit der Waage.

Doz. Dr. E. Schröder, TU Dresden

Die Primzahl

Die Buchstaben sind so durch Ziffern von 1 bis 9 zu ersetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

PRIMZAHL · L · P = P P P P P P P P
PRIMZAHL · L · R = R R R R R R R R
PRIMZAHL · L · I = I I I I I I I I
PRIMZAHL · L · M = M M M M M M M M
PRIMZAHL · L · Z = Z Z Z Z Z Z Z Z
PRIMZAHL · L · A = A A A A A A A A
PRIMZAHL · L · H = H H H H H H H H
PRIMZAHL · L · L = L L L L L L L L

OL Ing. K. Koch, Schmalkalden

Kryptarithmetik

$$\begin{array}{r} a b c - d a e = f f \\ : \quad + \quad + \\ b c \cdot b a = b g e \\ \hline d b + d c b = d f d \end{array}$$

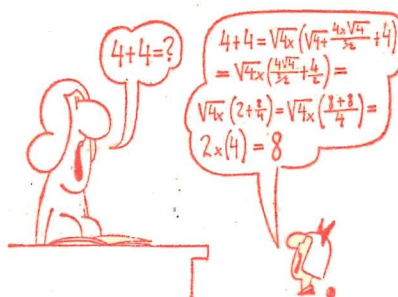
($0 < d$); ($b < 3$)

Schüler Th. Weiß, Weimar

Geometrie in der Praxis

Freundliche Kreuzung: Ein Durchlaßvermögen von 250 000 Autos in 24 Stunden wird ein Autoknotenpunkt bei Moskau haben, der sich durch den Bau einer neuen Straße Moskau–Riga ergibt.

„Turbine“ heißt das Projekt, nach dem die Autos über die Auf- und Abfahrten strömen werden wie Wasser über eine Turbine. Soweit der Verkehr geregelt werden muß, übernehmen Fernsehkameras in Verbindung mit einem elektronischen Rechner diese Aufgabe. Die Vorbereitungsarbeiten für den Bau haben bereits begonnen.



Ohne Worte

G. Nauczycielski, Warschau

Silbenrätsel

a – a – abs – ar – bi – ble – chi – chung – des – drei – drei – durch – e – eck – glei – he – hen – hö – hö – le – les – me – mes – ment – nom – ri – ri – se – sech – ser – sub – sto – satz – te – tion – trak – und – va – zehn – zis – zwei – ßig

1. Teil des Kreises; 2. Grundbestandteil; 3. Mathematiker aus Hellas (287 bis 212 v. u. Z.); 4. Satz über Flächenbeziehungen im rechtwinkligen Dreieck; 5. Teil der Algebra; 6. zweigliedriger Ausdruck ($a+b$ oder $a-b$); 7. Teil des Koordinatensystems; 8. Zahl; 9. Teil des Dreiecks; 10. griech. Philosoph (384 bis 322 v. u. Z.); 11. Fläche; 12. Rechenoperation; 13. Zahl; 14. Veränderliche

Der 3. Buchstabe jedes Wortes (von oben nach unten gelesen) ergibt ein Unterrichtsmittel für das Fach Mathematik.

Schülerin A. Broschmann, Berlin

Viermal die gleiche Ziffer

Wie kann man die Zahl 89 durch vier gleiche Ziffern darstellen?

Schülerin Uta Eimecke, Domersleben (Kl. 7)

Legespiel

Schneide je vier rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke aus Pappe mit folgender Kathete aus:

- a) 7 cm b) 3 cm.

Schneide weiterhin vier kongruente Dreiecke mit den Seiten 3 cm, 4 cm und 5 cm aus! Lege alle zwölf Dreiecke zu einem Rechteck zusammen!

Irmgard Träger, Wilhelm-Pieck-OS Döbeln

Mathematische Begriffe gesucht

In jeder Zeile soll ein mathematischer Begriff zusammengesetzt werden. Dabei sollen alle in den Ausgangswörtern vorkommenden Buchstaben (unabhängig von ihrer Reihenfolge) benutzt werden. Die Anfangsbuchstaben der gefundenen Wörter ergeben den Namen eines indischen Mathematikers, der ein im Mittelalter berühmt gewordenes Lehrbuch der Mathematik veröffentlichte.

- | | | |
|-------------|--------|------|
| 1. BREIT | LUCH | |
| 2. LIEDER | HABEN | |
| 3. DREI | ADEN | |
| 4. BECKEN | EIS | |
| 5. EHRE | KISSEN | |
| 6. TEIL | FRAU | FASS |
| 7. BART | SCHNEE | |
| 8. SCHERZEN | KAUZ | |

Versuche, diese Wörter zu finden!

Falls du nicht weiterkommst, kannst du die folgenden Erklärungen zu Hilfe nehmen:

1. Teil eines Ganzen
2. Linie, die etwas in zwei gleiche Teile zerlegt
3. Grundrechenart
4. spezielles Viereck
5. Verbindungsstrecke zweier Punkte eines Kreises
6. Grundbegriff aus der darstellenden Geometrie
7. Rechenhilfsmittel
8. Teil eines Koordinatensystems

OStR K.-H. Lehmann, V. L. d. V., Berlin

Logischer Schluß

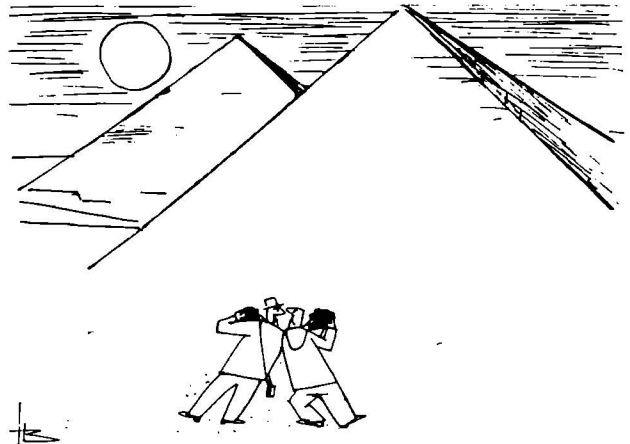
Das Tafelbild war sauber und übersichtlich. Die bisherige Erarbeitung der Vertauschbarkeit der Summanden verlief logisch. Nun galt es nur noch, die Gesetzmäßigkeit zu formulieren. Antworten schwirrten durch den Raum: „Man kann sie umwechseln.“ – „Es kommt nicht auf die Reihenfolge an.“

Niemand spricht das erlösende Wort und bringt die gewünschte Formulierung für die immer verzweifelter blickende Kollegin. Da meldet sich Norbert. Er hat schon oft geholfen, warum nicht auch jetzt?

„Na, Norbert!“

„Man kann es auch bleibenlassen – das Ergebnis ist das gleiche.“

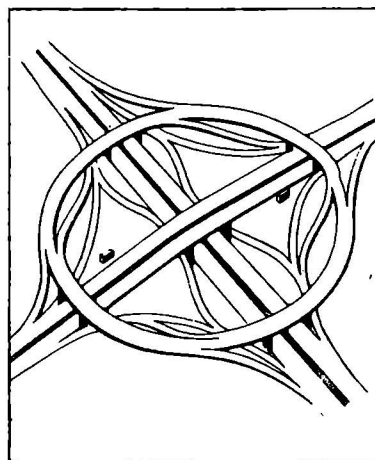
*Aufgeschrieben von Horst Schneider
(aus DLZ 3/75)*



Henry Büttner

Freundliche Kreuzung

Ein Durchlaßvermögen von 250 000 Autos in 24 Stunden wird ein Autobahnknotenpunkt bei Moskau haben, der sich durch den Bau einer neuen Straße Moskau-Riga ergibt.



„Turbine“ heißt das Projekt, nach dem die Autos über die Auf- und Abfahrten strömen werden, wie Wasser über eine Turbine. Soweit der Verkehr geregelt werden muß, übernehmen Fernsehkameras in Verbindung mit einem elektronischen Rechner diese Aufgabe. Die Vorbereitungsarbeiten für den Bau haben bereits begonnen.



Notwendig oder hinreichend — das ist hier die Frage

Frank hatte sich schon lange eine Eisenbahn gewünscht. Nun endlich war es soweit. Auf seinem Geburtstagstisch lagen Schienen, Weichen, ein Transformator und eine E-Lok mit vier Wagen. Auch ein Bahnhofsgelände war dabei. Gleich nach der Schule lud Frank seinen Freund Michael zu einem Bastelnachmittag ein. Immer wieder wurden die Schienen und Weichen neu zusammengesetzt. So entstanden u. a. folgende Schienenführungen (siehe Bild 1, 2, 3).

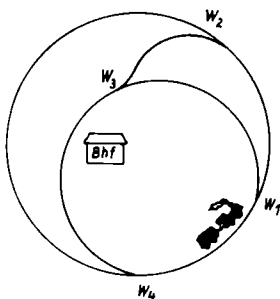


Bild 1

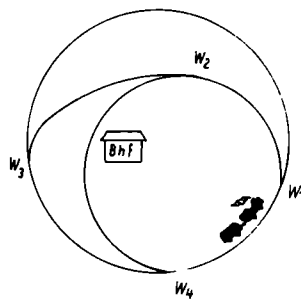


Bild 2

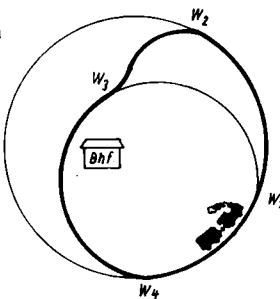


Bild 1a

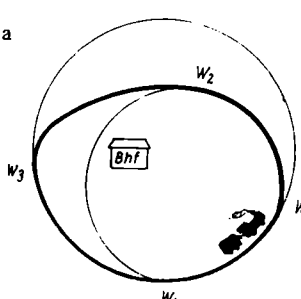


Bild 2a

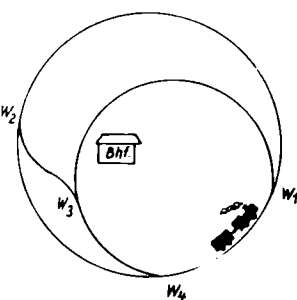


Bild 3

Frank regelte die Geschwindigkeit des Zuges am Transformator und war verantwortlich für die Stellung der Weiche (W_1). Michael bediente indessen alle anderen Weichen. Während des Spiels konnte man nun beobachten, welchen Einfluß die Stellung der Weiche (W_1) auf die Bahnhofsdurchfahrt des Zuges hatte.

Betrachten wir zunächst Bild 1.

Die Stellung der Weiche (W_1) nach links (bezüglich der vorgegebenen Fahrtrichtung des Zuges) ist ganz sicher *hinreichend* dafür, daß der Zug den Bahnhof passiert, d. h., es ist nicht möglich, daß die Weiche (W_1) nach links gestellt ist und der Zug nicht den Bahnhof passiert. Einen solchen Zusammenhang kann man auch in einem Satz mit der Wendung „wenn-, so“ ausdrücken:

a) *Wenn* die Weiche (W_1) nach links gestellt ist, *so* passiert der Zug den Bahnhof.

Gleichbedeutend mit dem Satz a) ist der Satz:

b) *Immer wenn* die Weiche (W_1) nach links gestellt ist, *so* passiert der Zug den Bahnhof.

Überlegen wir einmal, ob die Stellung der Weiche (W_1) nach links auch *notwendig* für eine Bahnhofsdurchfahrt des Zuges ist. Das ist sicher nicht der Fall, denn auch bei einer

nach rechts geleitet wird. Dann kommt der Zug ganz sicher *nicht* am Bahnhof vorbei. Ist die Weiche (W_1) nach *links* gestellt und wird der Zug bei Weiche (W_2) nach links geleitet, *so passiert* er den Bahnhof. Wenn aber die Weiche (W_1) nach *rechts* gestellt ist, kommt der Zug sicher *nicht* am Bahnhof vorbei. Die Stellung der Weiche (W_1) nach links ist also *notwendig* dafür, daß der Zug den Bahnhof passiert. Es ist somit nicht möglich, daß der Zug den Bahnhof passiert und die Weiche (W_1) nicht nach links gestellt ist, d. h.:

c) *Nur wenn* die Weiche (W_1) nach links gestellt ist, passiert der Zug den Bahnhof.

Anders ausgedrückt:

d) Der Zug passiert *nur dann* den Bahnhof, wenn die Weiche (W_1) nach links gestellt ist.

Gleichbedeutend damit ist der Satz:

e) *Immer, wenn* der Zug den Bahnhof passiert, *so* ist die Weiche (W_1) nach links gestellt. (Gemeint ist: Die Weiche (W_1) ist nach links gestellt, wenn sie vom Zug befahren wird.)

Aus dem Mathematikunterricht ist uns bekannt, daß mit der Wendung „wenn-, so“ *Voraussetzung* und *Behauptung* eines Satzes verknüpft werden können. (Voraussetzungen sind solche Teile des Satzes, deren Erfülltsein die Gültigkeit des übrigen Satzteils (der Behauptung) nach sich zieht.)

● Überlegt einmal, welches jeweils die Voraussetzung und welches jeweils die Behauptung in den Sätzen c), d), e) ist! Sicher habt Ihr bemerkt, daß in den Sätzen c), d), e) jeweils die Voraussetzungen übereinstimmen.

Die Voraussetzung lautet: Der Zug passiert den Bahnhof. Die Behauptung aller drei Sätze heißt dann:

Die Weiche (W_1) ist nach links gestellt.

● Bestimmt nun in folgenden Sätzen jeweils die Voraussetzung!

- Nur wenn eine Zahl a durch 5 teilbar ist, so ist sie auch durch 10 teilbar.
- Wenn eine natürliche Zahl n durch 10 teilbar ist, so ist sie auch durch 5 teilbar.
- Ein Dreieck ABC ist nur dann gleichseitig, wenn es spitzwinklig ist.
- Nur wenn ein Rhombus einen rechten Winkel hat, ist er ein Quadrat.
- Eine Zahl ist nur dann durch 6 teilbar, wenn sie durch 3 teilbar ist.

● Setzt jeweils in die Leerstellen folgender Sätze das Wort „notwendig“ bzw. „hinreichend“ so ein, daß wahre Aussagen entstehen!

- Die Teilbarkeit einer Zahl durch 4 ist ... dafür, daß die Zahl durch 8 teilbar ist.
- Die Teilbarkeit einer Zahl durch 8 ist ... dafür, daß die Zahl durch 2^2 teilbar ist.
- Die Eigenschaft eines Dreiecks, spitzwinklig zu sein, ist ... dafür, daß das Dreieck gleichseitig ist.
- $a < 2$ und $b < 15$ ist ... für $a + b < 17$.
- $a \cdot b = 0$ ist ... für $a = 0$ und $b = 0$.
- $a > 3^3$ und $7 < l < 10$ ist ... für $s \cdot l > 3^4$.

Stellung der Weiche (W_1) nach rechts besteht bei entsprechender Einstellung der anderen Weichen die Möglichkeit, daß der Zug den Bahnhof passiert (siehe Bild 1a). Wenden wir uns den Schienensträngen des Bildes 2 zu:

Die Stellung der Weiche (W_1) nach links ist jetzt *nicht hinreichend* dafür, daß der Zug den Bahnhof passiert (siehe Bild 2a). Es kann nämlich sein, daß der Zug bei Weiche (W_1) zwar nach *links*, bei der Weiche (W_2) aber

Wenden wir uns jetzt dem Bild 3 zu und überlegen abermals, ob die Stellung der Weiche (W_1) nach links hinreichend oder notwendig für eine Bahnhofsdurchfahrt des Zuges ist.

Sicher ist die Stellung der Weiche (W_1) nach links hinreichend dafür, daß der Zug den Bahnhof passiert, d. h., der Satz „Wenn die Weiche (W_1) nach links gestellt ist, dann passiert der Zug den Bahnhof“ ist wahr.

Ist die Stellung der Weiche (W_1) nach links auch eine notwendige Bedingung für die Bahnhofsdurchfahrt des Zuges?

Natürlich, denn es gilt:

„Nur wenn die Weiche (W_1) nach links gestellt ist, passiert der Zug den Bahnhof“ oder anders ausgedrückt

„Wenn der Zug den Bahnhof passiert, so ist die Weiche (W_1) nach links gestellt“.

In Bild 3 ist die Stellung der Weiche (W_1) nach links also hinreichend und gleichzeitig notwendig für eine Bahnhofsdurchfahrt des Zuges.

Einen solchen Zusammenhang kann man mit der Wendung „dann und nur dann, wenn“ bzw. „genau dann, wenn“ ausdrücken: Der Zug passiert *dann und nur dann* den Bahnhof, wenn die Weiche (W_1) nach links gestellt ist.

Der Zug passiert *genau dann* den Bahnhof, wenn die Weiche (W_1) nach links gestellt ist.

Um zu entscheiden, ob ein Satz der Form „A genau dann, wenn B“ bzw. „A dann und nur dann, wenn B“ wahr ist, muß man nachweisen, daß A sowohl eine hinreichende als auch eine notwendige Bedingung für B ist. Ist A keine hinreichende oder keine notwendige Bedingung für B, so ist der entsprechende „genau dann, wenn“-Satz bzw. „dann und nur dann, wenn“-Satz falsch.

● Stelle fest, welche der angegebenen Sätze falsch sind!

- Genau dann, wenn ein Dreieck gleichseitig ist, ist es auch gleichschenkelig.
- Eine Zahl ist dann und nur dann durch 3^2 teilbar, wenn die Quersumme dieser Zahl durch $4^2 - 5$ teilbar ist.
- $x < 2^2$ ist notwendig und hinreichend für $2x < 2^3$.
- Die Diagonalen stehen dann und nur dann senkrecht in einem Viereck ABCD, wenn das Viereck ein Drachenviereck ist.
- Zwei Parallelogramme besitzen genau dann einen gleichen Flächeninhalt, wenn sie in ihren Höhen und Grundseiten übereinstimmen.

Bei Betrachtung der Schienenstränge, Weichenstellungen und Zugdurchfahrten konnten wir uns mit wichtigen mathematischen Redeweisen vertraut machen. Wir lernten die Worte „hinreichend“ und „notwendig“ kennen und wissen nun, welche Zusammenhänge man mit ihnen beschreiben kann.



Leser schreiben an alpha

■ ... Der Wettbewerb hat uns Spaß gemacht und viele Anregungen gegeben. Unsere AG hatte nie Langeweile, sondern immer alle Hände voll zu tun ...

AG Mathematik, OS Kuhfelde

■ ... „alpha ist einfach Klasse!“ Vor allem regt alpha zum Nachdenken, Knobeln und Mitmachen an, was ich an ihr besonders schätze. Ich habe nicht viel Zeit für Nebenbeschäftigungen, aber trotzdem versuche ich, die Aufgaben des Wettbewerbs zu lösen und freue mich dann natürlich doppelt, wenn ich eine Antwortkarte mit dem Prädikat „gut“ erhalte ...

Sylvia Schwenke, Dohna

■ ... Obwohl ich kein Schüler mehr bin, habe nämlich inzwischen meine Facharbeiterprüfung als Wirtschaftskaufmann (Statistik) mit gutem Erfolg abgelegt, werde ich trotzdem die alpha weiterhin lesen und mich auch am Wettbewerb beteiligen. Übrigens, in Wirtschaftsmathematik habe ich die Note „sehr gut“ erhalten. Das langjährige Studium der alpha ist an diesem Erfolg nicht unbeteiligt. ...

Sybille Koch, Schmalkalden

■ ... Das Lösen der interessanten Aufgaben hat mir großen Spaß gemacht. Ich habe viel dabei gelernt. Durch diese Beschäftigung, die ich im kommenden Schuljahr fortsetzen werde, fülle ich manche freie Stunde sinnvoll aus. ...

Henri Koch, Arnstadt

■ ... Inzwischen habe ich die 12. Klasse beendet und bin seit November in der NVA. Anschließend möchte ich in Jena Physik studieren. Zum Zeichen, daß ich trotzdem noch Anhänger der alpha bin, sende ich einige neue Aufgaben für den Wettbewerb. Das

Entwerfen von Aufgaben bereitet mir sehr viel Freude. Ich möchte dieses Hobby auch in Zukunft beibehalten, um in Form zu bleiben. Herwig Gratias, Sömmerda. z. Z. NVA

■ ... Mir hat der Wettbewerb für den Unterricht sehr geholfen. Ich konnte meine Mathe-Zensur im zweiten Halbjahr auf Note 1 verbessern. ...

Sylvia Rosochatius, Hermsdorf

■ ... Besonders gefällt mir auch, daß in letzter Zeit auch Wettbewerbe in Physik und Chemie durchgeführt werden. ...

Lutz Hübschmann, Raschau

■ ... *Mein Vorschlag:* Man sollte die inneren beiden Seiten so gestalten, daß sie unmittelbar zur Veröffentlichung an einer Wandzeitung geeignet sind. ...

Gerhard Hornbogen, Weimar

■ ... Von Eurer Zeitschrift kann man einfach nur begeistert sein. Es ist nur schade, daß ich erst so spät mit alpha in Kontakt kam.

Michael Vowe, Therwil (Schweiz)

■ ... *Meine Frage:* ... Wer korrigiert die vielen Lösungen? ...

Astrid Lehmann, Rostock

Unsere Antwort:

Die Zusammenstellung und Bearbeitung aller Aufgaben des Wettbewerbs liegt seit Gründung der Zeitschrift in den bewährten Händen von NPT OSr Dr. R. Lüders und StR Th. Scholl, beide Berlin; die jährlich über 50 000 eingehenden Lösungen korrigieren StR J. Lehmann, VLV, Leipzig, und OSr G. Schulze, Herzberg; die Auswertung des Wettbewerbs (Sept./Okt. jedes Jahres) wird von der Redaktionsmitarbeiterin R. Schubert und StR J. Lehmann vorgenommen (Bearbeitung von ca. 4 000 Urkunden und 300 Päckchen mit Buchpreisen usw.).

Beim genauen Lesen ist Euch sicher das Wort „nur“ aufgefallen. Welche große Wirkung dieses kleine Wort besitzt, wollen wir uns nochmals an folgendem Beispiel verdeutlichen:

(1) Wenn das Viereck ABCD ein Drachenviereck ist, stehen seine Diagonalen senkrecht aufeinander.

(2) Nur wenn das Viereck ABCD ein Drachenviereck ist, stehen seine Diagonalen senkrecht aufeinander.

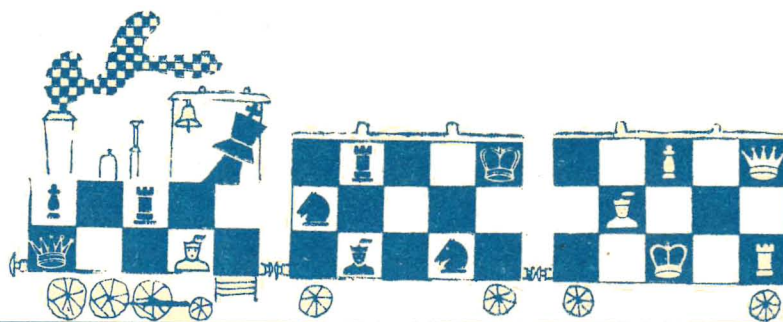
Die Sätze (1) und (2) unterscheiden sich lediglich durch das Wort „nur“. Aber gerade das Hinzufügen von „nur“ zu Satz (1) bewirkt, daß eine ganz andere Aussage entsteht. Der Satz (1) ist wahr, der Satz (2) dagegen falsch. (Der Satz (2) ist die Umkehrung von Satz (1).)

● Stellt nun zum Abschluß fest, welche der folgenden Aussagen falsch sind!

- Hat ein Viereck ABCD mindestens einen rechten Winkel, so ist es ein Quadrat.
- Ein Viereck ABCD ist nur dann ein Quadrat, wenn es mindestens einen rechten Winkel hat.
- Nur flächengleiche Figuren sind zueinander kongruent.
- Wenn Figuren zueinander kongruent sind, so sind sie flächengleich.
- Nur zueinander kongruente Figuren sind flächengleich.
- Für alle natürlichen Zahlen a, b gilt: Wenn $a = b$, so ist $a^b = b^a$.
- Für natürliche Zahlen gilt: Nur wenn $a = b$ ist, so ist auch $a^b = b^a$.

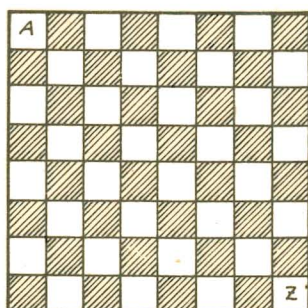
L. Flade

Rund um das Schachbrett



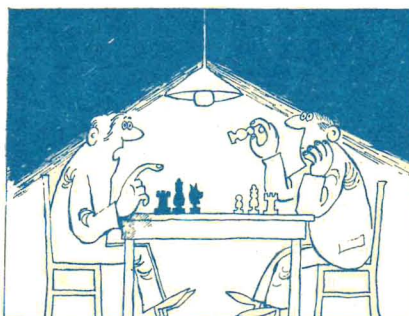
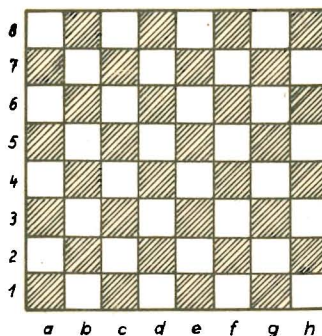
Der König

Wieviel Könige sind mindestens nötig, um alle Felder eines Schachbretts zu beherrschen. Es wird dabei angenommen, daß das Standfeld eines Königs auch als beherrscht gelten soll.



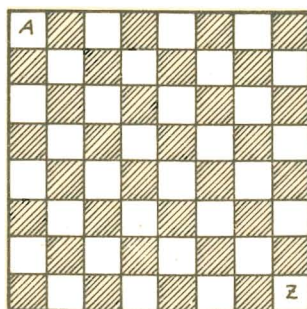
Damen auf dem Schachbrett

- Auf ein Schachbrett sind vier Damesteine so zu stellen, daß sie alle nichtbesetzten Felder mit Ausnahme von $a1$, $a2$, $b1$, $b2$ decken.
- Auf das Brett sind fünf Damesteine so aufzustellen, daß sie alle nichtbesetzten Felder decken.
- Wieviel Züge kann man auf einem leeren Schachbrett mit einem Damestein ausführen? (Der Damestein kann sich bei jedem Zug beliebig weit vor oder zurück, parallel zu den Seiten des Brettes oder zu den beiden Diagonalen des Brettes bewegen.)



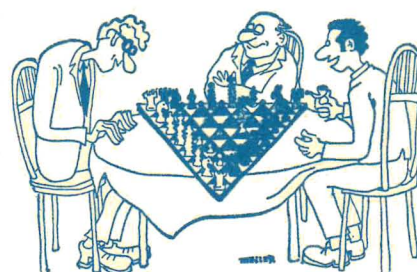
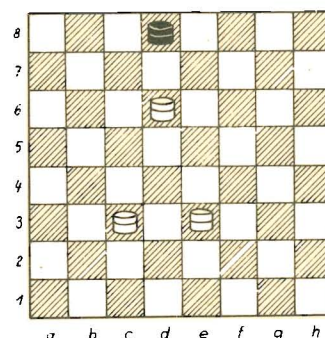
Von A bis Z

- Stelle in die obere linke Ecke A des Schachbretts einen Stein. Er soll senkrecht oder waagerecht (nicht diagonal) zum gegenüberliegenden Eckfeld (Z) ziehen und dabei jedes Feld einmal durchlaufen.
- Setze auf das mit A gekennzeichnete Feld einen Läufer. Er soll so auf das mit Z bezeichnete Feld gezogen werden und zwar so, daß dabei alle weißen (also keine schwarzen) Felder des Brettes berührt werden. Die Kreuzung von Zuglinien ist gestattet. Kein Weg darf zweimal beschritten werden.



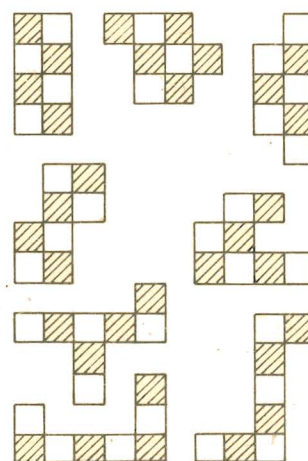
Das Petrow-Dreieck

Das Bild zeigt das sogenannte *Petrow-Dreieck* (beim Damespiel). Es soll uns gleich als Aufgabe dienen: Schwarz zieht und – verliert. Wie?



Das zersprungene Schachbrett

Man versuche, möglichst rasch, die acht Einzelteile zu einem Schachbrett zusammenzusetzen. Wer ist der Schnellste?

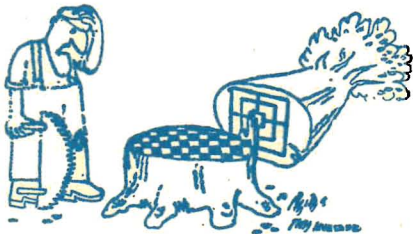
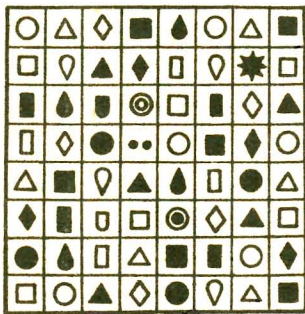




Kommt ihr jetzt endlich zum Essen – oder ...?

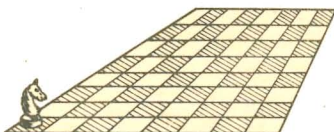
Magisches Quadrat

Welche beiden gleichartigen Symbolpaare liegen am dichtesten beieinander?



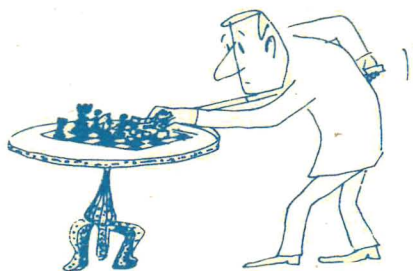
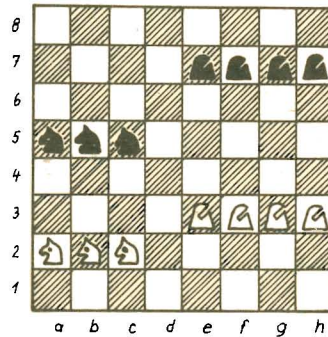
Er kommt niemals zum Ziel

Jemand bemüht sich, den Springer auf dem Schachbrett von der linken unteren Ecke (Feld a1) nach der rechten oberen Ecke (Feld h8) zu bringen, wobei der Springer jedes Feld einmal berühren sollte. Beweist, daß die Aufgabe unlösbar ist!



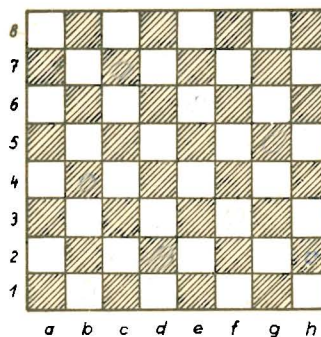
Rössel und Läufer

Die schwarzen und weißen Rössel sowie Läufer sollen die Plätze tauschen, und zwar in elf bzw. achtzehn Zügen! Wer schafft's zuerst?

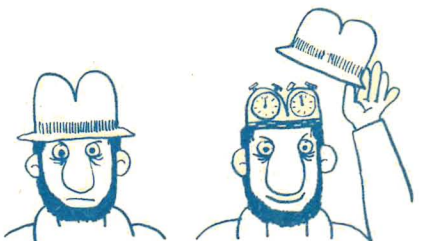
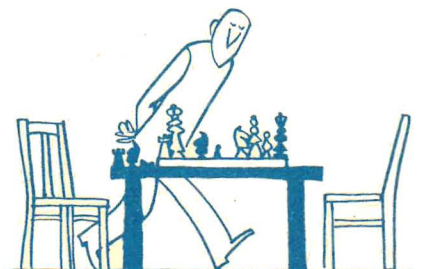
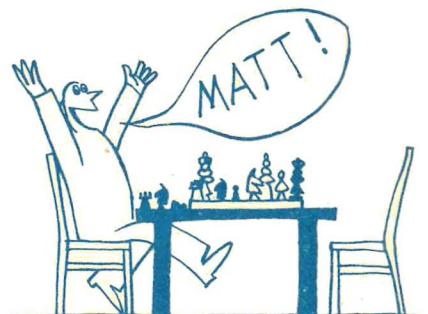
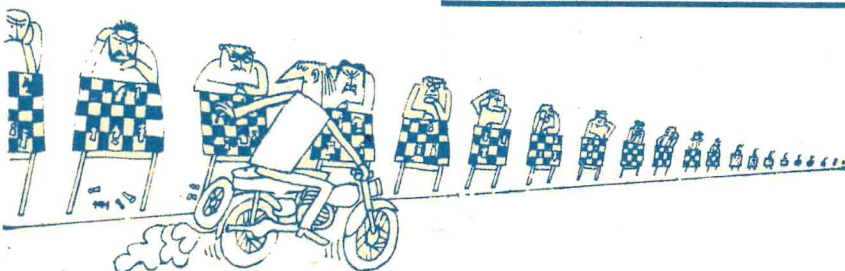


Acht-Königinnen-Problem

Es sind acht Königinnen so auf dem Schachbrett aufzustellen, daß keine von einer anderen geschlagen werden kann.
oder: 8 Münzen sollen auf dem Schachbrett verteilt werden, daß auf jeder Reihe, Spalte und Diagonalen nur eine liegt.



alpha-Wandzeitung



Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 23. Juni 1975



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!). Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha

7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend nummeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für die 7. Klasse geeignet). Aufgaben mit W* versehen gelten auch als Wettbewerbsaufgaben. Sie haben einen hohen Schwierigkeitsgrad.

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit W 10/12 oder W*10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Experten korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlusssatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1974/75 läuft von Heft 5/74 bis Heft 2/75. Zwischen dem 1. und 10. September 1975 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/74 bis 2/75 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/75 veröffentlicht. Wer mindestens 7 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/74 bis 2/75) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1974/75 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind, und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

5▲1353 Inge sammelt ausländische Ansichtskarten. Sie besitzt bereits 120 Ansichtskarten aus vier verschiedenen Ländern. Davon stammen 24 Ansichtskarten aus Finnland und dreimal soviel aus der Sowjetunion. Die Anzahl der Ansichtskarten aus der ČSSR ist gleich dem vierten Teil der Anzahl der Ansichtskarten aus der Sowjetunion. Die restlichen Ansichtskarten stammen aus der Volksrepublik Bulgarien. Wieviel Ansichtskarten aus jedem dieser vier Länder besitzt Inge?

Anne Schmückling, Bischofferode

5▲1354 Um ein Grundstück wurde vor Jahren ein Zaun mit 32 gleichartigen Zaunfeldern zu je 22 Latten gezogen. Der reparaturbedürftige Zaun soll ausbeessert werden. Einige Zaunfelder haben überhaupt keine Latten mehr. Ebenso viele Zaunfelder besitzen noch alle Latten. Bei den restlichen Zaunfeldern ist jeweils noch genau die Hälfte der Latten vorhanden. Wieviel Latten sind insgesamt zu erneuern?

Mathematikfachlehrer G. Friedel, Choren

W 5■1355 Drei Stoffballen der Farben rot, grün und weiß enthalten zusammen Stoffbahnen mit einer Gesamtlänge von 3,250 km. Der rote Stoff ist um 200 m länger als der grüne, der weiße um 150 m kürzer als der rote. Wie lang sind die Bahnen des roten, grünen und weißen Stoffes?

Ramona Flügel, Wiederstedt, Kl. 7

W 5■1356 Eine natürliche Zahl $n \geq 2$ heißt Primzahl genau dann, wenn sie nur durch n und durch 1 teilbar ist. Es sind alle natürlichen Zahlen k zu ermitteln, die kleiner als 10 sind und folgende Bedingung erfüllen: Multipliziert man eine solche Zahl k mit 5 und subtrahiert vom erhaltenen Produkt 2, so erhält man als Differenz eine Primzahl.

Mathematikfachlehrer K.-H. Gentzsch, Altenburg

W 5*1357 Welche und wie viele ein-, zwei- und dreistellige Ziffern lassen sich aus den

Grundziffern 1, 2 und 3 bilden, wenn sich diese Grundziffern wiederholen dürfen?

Es ist die Summe aller Zahlen zu bestimmen, die den ermittelten Ziffern entsprechen.

Mathematikfachlehrer K.-H. Gentzsch, Altenburg

W 5*1358 In einer 5. Klasse fiel die letzte Klassenarbeit im Fach Mathematik wie folgt aus:

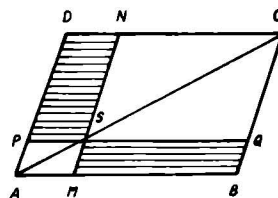
- a) Der sechste Teil der Anzahl der Schüler dieser Klasse erhielt die Note 1.
- b) Die Noten 2 und 3 erhielten zusammen 16 Schüler.
- c) Die Anzahl der Schüler, die die Note 4 erhielten, war doppelt so groß wie die Anzahl der Schüler, die die Note 5 erhielten.
- d) Die Anzahl der Schüler, die die Note 3 erhielten, war größer als die Anzahl der Schüler, die die Note 5 erhielten, aber kleiner als die Anzahl der Schüler, die die Note 4 erhielten.
- e) Die Anzahl der Schüler, die die Note 1 erhielten, war verschieden von der Anzahl der Schüler, die die Note 3 erhielten. Wie viele der 30 Schüler dieser Klasse erhielten die Noten 1, 2, 3, 4 und 5?

Rita Hellmann, Großschönau, Kl. 7

6▲1359 Es sind alle natürlichen Zahlen zwischen 100 und 200 zu bestimmen, die durch 7 teilbar sind und deren Quersumme 11 beträgt.

Alois Weninger, Knittelfeld (Österreich)

6▲1360 Die abgebildete Figur stellt ein Parallelogramm ABCD dar. Durch einen



Steffi Sorg, 6316 Stützerbach, Schleusinger Str. 128 Polytechnische Oberschule Stützerbach, Klasse 5		W 5=346
Prädikat:		
Lösung:		

inneren Punkt S der Diagonale $\overline{AC}$ wurden die Parallele zur Geraden AB und die Parallele zur Geraden BC gezeichnet. Es ist nachzuweisen, daß die Flächeninhalte der Vierecke $MBQS$ und $PSND$ gleich sind. Sch.

W 6 ■ 1361 Zeichne ein Dreieck ABC aus den Stücken $\overline{AB} = c = 5$ cm, $\overline{BC} = a = 6$ cm und $\overline{AC} = b = 4$ cm! Dem Dreieck ABC ist ein Rhombus $DEFG$ so einzubeschreiben, daß D auf AB , E auf BC , G auf AC liegt und die Punkte F und C zusammenfallen. Die Konstruktion des Rhombus ist zu begründen. Sch.

W 6 ■ 1362 Eine Mathematikarbeit hatte in einer 6. Klasse folgendes Ergebnis: Ein Neuntel der Schüler erhielt die Note 1, ein Drittel die Note 3. Von den restlichen Schülern erhielten zwei Fünftel die Note 2 und die Hälfte die Note 4. Die Note 5 erhielten genau zwei Schüler. Wieviel Schüler haben diese Mathematikarbeit mitgeschrieben? Wieviel Schüler entfallen auf die einzelnen Noten? Alois Weninger, Knittelfeld (Österreich)

W 6*1363 Alfred sagt: „Das Lebensalter meiner Schwester Berta (in ganzen Zahlen) ist doppelt so groß wie die Summe aus den Lebensaltern meiner Schwestern Christa und Dorit. Ich bin der Älteste und doppelt so alt wie mein Bruder Ernst. Dorit ist die Jüngste. Addiert man das jeweilige Alter von uns Geschwistern, so erhält man als Summe 33. Unsere Geburtsjahre liegen sämtlich wenigstens um 2 Jahre auseinander.“ Wie alt ist jedes dieser Geschwister? Burkhard Maeß, Bad Doberan

W 6*1364 Eine durchgeführte Altstoffsammlung brachte folgendes Ergebnis:

- Die Schüler der 7. Klasse sammelten 20 kg Altstoffe mehr als die Schüler der 5. Klasse.
- Das Sammelergebnis der Schüler der 10. Klasse lag um 20 kg über dem doppelten Sammelergebnis der 5. Klasse.
- Die Schüler der 8. Klasse erreichten drei Viertel des Sammelergebnisses der Schüler der 10. Klasse.
- Das Sammelergebnis der Schüler der 9. Klasse war gleich dem arithmetischen Mittel aus den Sammelergebnissen der Klassen 8 und 10.
- Die Schüler der 6. und 7. Klasse erzielten gleiche Sammelergebnisse.

Wieviel Kilogramm Altstoffe wurden von den Schülern der einzelnen Klassen gesammelt, wenn insgesamt 1759 kg aufgebracht wurden? Dirk Dalisada, 36. OS Rostock

7 ▲ 1365 Das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen beträgt 32 760. Wie heißen diese vier Zahlen? Andreas Fittke, Berlin

7 ▲ 1366 Jemand errechnet 35^2 auf folgende Weise: Er multipliziert die der Anzahl der Zehner

entsprechende natürliche Zahl 3 mit ihrem Nachfolger 4 und erhält das Produkt $3 \cdot 4 = 12$. Dann multipliziert er dieses Produkt mit 100 und erhält $12 \cdot 100 = 1200$. Nun bildet er das Quadrat aus der Anzahl der Einer, also $5^2 = 25$. Schließlich werden beide Teilergebnisse addiert, also $1200 + 25 = 1225$.

Es ist zu untersuchen, ob dieses Verfahren für die Berechnung des Quadrats aller zweistelligen natürlichen Zahlen gilt, die auf die Ziffer 5 enden!

Alois Weninger, Knittelfeld (Österreich)

W 7 ■ 1367 Auf einer Familienfeier waren ein Drittel weniger Frauen als Männer anwesend. Nachdem sich sechs Ehepaare verabschiedet hatten, verblieben noch dreimal so viele Männer als Frauen im Festkreise. Wieviel Männer und Frauen waren ursprünglich anwesend? Sch.

W 7 ■ 1368 Zeichne ein Rechteck $ABCD$ mit $\overline{AB} = a = 8$ cm und $\overline{BC} = b = 5$ cm! Konstruiere die vier Winkelhalbierenden der Innenwinkel dieses Rechtecks und bezeichne ihre Schnittpunkte mit E , F , G und H ! Berechne den Flächeninhalt des Vierecks $EFGH$! Sch.

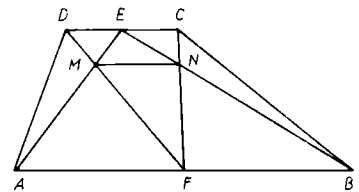
W 7*1369 Welche Oberfläche besitzt ein Spielwürfel von 15 mm Kantenlänge, dessen halbkugelförmige Augen einen Durchmesser von 2 mm haben? Klaus Göhling, Thaldorf

W 7*1370 Ein Fußgänger und ein Radfahrer brechen zum gleichen Zeitpunkt in A auf, um nach B zu gelangen. Der Fußgänger marschiert mit einer konstanten Geschwindigkeit von $5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, der Radfahrer fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von $15 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Nachdem der Radfahrer die Hälfte des Weges zurückgelegt hatte, mußte er auf Grund einer Umleitung vom direkten Weg abweichen, während der Fußgänger den direkten Weg fortsetzen konnte. Beide erreichten B zum gleichen Zeitpunkt. Hätte der Radfahrer keinen Umweg gehabt, so wäre er zwei Stunden früher als der Fußgänger in B angekommen. Wie groß ist die Entfernung, die der Radfahrer von der Abzweigung bis zum Ort B zurücklegen mußte? Andreas Fittke, Berlin

W 8 ■ 1371 An einem internationalen Ferienlager nehmen 70 Freunde teil, von denen jeder außer seiner Muttersprache genau eine der Fremdsprachen Russisch, Deutsch, Englisch, Französisch, Polnisch und Arabisch beherrscht. Man beweise, daß es dann wenigstens eine Fremdsprache gibt, die von mindestens 12 Teilnehmern dieses Ferienlagers beherrscht wird. L.

W 8 ■ 1372 Es sei $ABCD$ ein Trapez mit den parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, wobei die Länge der Seite $\overline{AB}$ dreimal so groß wie die Länge der Seite $\overline{CD}$ ist (vgl. das Bild). Die Mitte F der Seite $\overline{AB}$ sei mit den Punkten C und D , die Mitte E der Seite $\overline{CD}$ mit den

Punkten A und B verbunden. Die Geraden AE und DF schneiden sich in dem Punkt M ; die Geraden BE und CF schneiden sich in dem Punkt N . Man berechne die Länge der Strecke $\overline{MN}$ wenn die Länge der Seite $\overline{AB} = a$ gegeben ist. Sch.



W 8*1373 Der Expresszug „Aurora“ von Moskau nach Leningrad fährt um 13.43 Uhr in Moskau ab, hält nur in Bologoje (331 km von Moskau entfernt) von 16.11 bis 16.19 Uhr und trifft in Leningrad (650 km von Moskau entfernt) um 18.42 Uhr ein.

a) Man berechne die mittlere Geschwindigkeit (in $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$) dieses Expresszuges auf der Strecke Moskau–Bologoje und auf der Strecke Bologoje–Leningrad.

b) Wann und in welcher Entfernung von Moskau begegnet dieser Zug dem Gegenzug, der um 13.00 Uhr in Leningrad abfährt, von 15.48 bis 15.58 Uhr in Bologoje hält und um 18.53 Uhr in Moskau eintrifft?

(Die Aufgabe b) kann rechnerisch oder graphisch gelöst werden. Ferner kann bei der Lösung eine jeweils konstante Geschwindigkeit angenommen werden.) L.

W 8*1374 Es sei $ABCD$ ein Rechteck mit den Seitenlängen $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$. Ferner sei E der Fußpunkt des von dem Eckpunkt A auf die Diagonale $\overline{BD}$ gefällten Lotes.

a) Man berechne die Länge der Strecke $\overline{AE}$ aus den gegebenen Seitenlängen a , b des Rechtecks.

b) Man gebe ein Zahlenbeispiel an, bei dem a , b und $\overline{AE}$ ganzzahlige Werte haben.

Roland Schlesinger, Saßnitz, POS III, Kl. 8

W 9 ■ 1375 Man beweise, daß die Summe von vier Potenzen, deren Basis jeweils gleich 2 ist und deren Exponenten vier aufeinanderfolgende von Null verschiedene natürliche Zahlen sind, stets durch 30 teilbar ist.

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

W 9 ■ 1376 Man beweise, daß für alle natürlichen Zahlen n mit $n > 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

gilt.

Peter Surján, Budapest, UVR

W 9*1377 In dem Schema

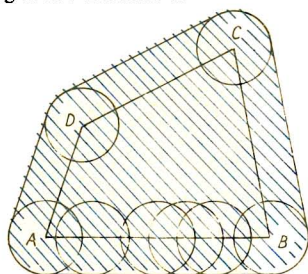
```
*****
*****
***
***
***
***
```

ist für die Sternchen jeweils eine der Grundziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 einzusetzen, so

daß eine richtig gelöste Divisionsaufgabe entsteht. Dabei darf aber am Anfang einer der drei- oder mehrstelligen Zahlen des Schemas niemals die Grundziffer 0 stehen.

Anleitung zur Lösung: Man bezeichne den neunstelligen Dividenten mit x , den dreistelligen Divisor mit y und den sechststelligen Quotienten mit z , wobei an der zweiten, dritten und fünften Stelle von z jeweils die Grundziffer 0 und an der siebenten Stelle die Grundziffer 9 steht. Dann stelle man Ungleichungen für y und danach für z auf. L.

W 9*1378 Es sei $ABCD$ ein ebenes konvexes Viereck mit dem Flächeninhalt A_0 und dem Umfang u_0 . Um jeden Punkt der Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ (einschließlich der Punkte A , B , C , D) seien Kreise mit dem gleichen Radius r geschlagen (vgl. das Bild in dem nur einige dieser Kreise gezeichnet sind). Es sei nun G das im Bild schraffierte Gebiet, das aus der Vereinigungsmenge der Mengen aller inneren und Randpunkte dieser Kreise sowie der Menge aller inneren und Randpunkte des Vierecks $ABCD$ besteht. Man berechne den Flächeninhalt und den Umfang dieses Gebietes G . T.



W 10/12 ■ 1379 Eine positive reelle Zahl a soll so in zwei Summanden zerlegt werden, daß die Summe der dritten Potenzen dieser Summanden möglichst klein, also ein Minimum, wird. Man stelle fest, ob es eine solche Zerlegung gibt und gebe bejahendenfalls die beiden Summanden an.

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

W 10/12 ■ 1380 Einem Winkel von der Größe α mit $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ seien zwei Kreise k_1 und k_2 so eingeschrieben, daß diese beiden Kreise einander von außen berühren und jeder der Kreise die Schenkel des Winkels berührt. Dabei sei k_1 der kleinere der beiden Kreise.

a) Es soll das Verhältnis $\lambda = \frac{r_2}{r_1}$ der Radien der beiden Kreise als Funktion von α dargestellt werden.

b) Es ist dieses Verhältnis λ für die Fälle $\alpha = 60^\circ$ und $\alpha = 90^\circ$ zu berechnen.

Michael Marczinek, Berlin

W 10/12*1381 Es sind alle reellen Lösungen der Gleichung

$$\left(\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}}\right)^{x-4} + \left(\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}}\right)^{x-4} = 2x$$

zu ermitteln. A. D. Osmanow, Demurlo, Georgische SSR, UdSSR

XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Bezirksolympiade

(7./8. Februar 1975)



Klassenstufe 7

1. Fritz, Hans, Ulrich und Werner sind Schüler verschiedener Klassenstufen, und zwar der Klassen 5, 6, 7 und 8.

Sie gingen Pilze sammeln.

Folgendes ist bekannt:

(1) Der Schüler der Klasse 5 und außer ihm noch Ulrich fanden je 8 Steinpilze, der Schüler der Klasse 7 fand keinen einzigen Steinpilz.

(2) Fritz, Hans und außer ihnen der Schüler der 6. Klasse fanden viele Rotkappen.

(3) Drei Schüler, nämlich der Schüler der Klasse 8, der Schüler der Klasse 7 und Hans lachten über den vierten Schüler, nämlich Werner, der einen Fliegenpilz mitgebracht hatte. Wer von den vier Schülern ist Schüler der Klasse 5, wer der 6, wer der 7 und wer der 8?

2. **Beweis:** Unter je vier beliebigen natürlichen Zahlen gibt es mindestens zwei, deren Differenz durch 3 teilbar ist.

W 10/12*1382 Es seien k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und $\overline{MA}$, $\overline{MB}$ zwei aufeinander senkrecht stehende Radien dieses Kreises; es gilt also $\overline{MA} = \overline{MB} = r$. An den Kreis k soll eine Tangente konstruiert werden, die die von M ausgehenden Strahlen $\overline{MA}$ und $\overline{MB}$ in den Punkten C und D schneidet. Wie muß der Berührungspunkt dieser Tangente gewählt werden, damit die Länge der Strecke $\overline{CD}$ möglichst klein wird? Wie lang ist in diesem Fall die Strecke $\overline{CD}$? L.

W 10/12 ■ 1383 Man ermittle alle reellen Zahlen x , für die die beiden Gleichungen

$$3x^4 + 13x^3 + 20x^2 + 17x + 7 = 0 \quad (1)$$

$$\text{und } 3x^4 + x^3 - 8x^2 + 11x - 7 = 0 \quad (2)$$

erfüllt sind. Manfred Freitag, Schwarzheide

Bemerkung: Diese Aufgabe hat eine große Ähnlichkeit mit der Aufgabe 1278 (vgl. alpha, Heft 5, 1974, S. 103). Sie unterscheidet sich von der Aufgabe 1278 nur dadurch, daß in der Gleichung (2) der zweite Summand $+x^3$ (und nicht $-x^3$) lautet. Während aber das Gleichungssystem der Aufgabe 1278 keine Lösung hatte, hat das Gleichungssystem der hier gestellten Aufgabe genau eine reelle Lösung.

3. Konstruiere ein Dreieck ABC aus $b - c = 3$ cm, $\alpha = 55^\circ$ und $\beta = 85^\circ$!

Dabei seien b bzw. c die Längen der Seiten AC bzw. AB , α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$ und β die des Winkels $\sphericalangle ABC$.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

4. In einem VEB wurde eine bestimmte Art von Werkstücken zuerst in der Abteilung A_1 und danach in der Abteilung A_2 bearbeitet. Dabei konnte zunächst in der einen Abteilung täglich dieselbe Anzahl von Werkstücken bearbeitet werden wie in der anderen.

Mit Hilfe von Rationalisierungsmaßnahmen in beiden Abteilungen konnten die 53 Arbeiter der Abteilung A_1 ihre Produktion auf 159% und die 62 Arbeiter der Abteilung A_2 ihre Produktion auf 124% erhöhen. Da aber aus den angegebenen Gründen der Produktionsausstoß in beiden Abteilungen gleich groß sein mußte, entschlossen sich hinreichend viele Arbeiter der einen Abteilung dazu, in der anderen Abteilung zu arbeiten. Welche Anzahl von Arbeitern aus welcher der beiden Abteilungen nahm ihre Arbeit in der anderen Abteilung auf, wenn erreicht wurde, daß der Produktionsausstoß in beiden Abteilungen danach wieder gleich groß war?

Auf wieviel Prozent der Produktionsmenge vor den Rationalisierungsmaßnahmen war damit insgesamt der Produktionsausstoß gestiegen?

Bemerkungen: Es sei angenommen, daß der Produktionsausstoß beider Abteilungen jeweils der Zahl der Arbeiter proportional ist.

5. Der Umfang eines Dreiecks mit den Seitenlängen a , b , c beträgt 34 cm. Weiterhin gilt $a : b = 3 : 8$ und $b : c = 4 : 3$. Ermittle die Seitenlängen!

6. Claudia erzählt ihrer Freundin Sabine, sie habe ein Dreieck ABC gezeichnet, in dem die Höhe auf BC genau durch den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von AB und der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle ABC$ geht. Sabine behauptet, allein aus diesen Angaben

könne man, ohne die Zeichnung zu sehen, eindeutig die Größe des Winkels $\angle ABC$ ermitteln.

Untersuche, ob Sabines Behauptung richtig ist! Wenn dies der Fall ist, ermittle die Größe von $\angle ABC$!

Klassenstufe 8

1. Um Peters Fähigkeiten im Knobeln zu erproben, werden ihm an einem Zirkelnachmittag über fünf Schüler sieben Aussagen mitgeteilt, unter denen, wie ihm ebenfalls gesagt wird, genau eine falsch ist. Er soll diese falsche Aussage herausfinden und außerdem die Schüler dem Alter nach ordnen.

Die Aussagen lauten:

- (1) Anton ist älter als Elvira.
- (2) Berta ist jünger als Christine.
- (3) Dieter ist jünger als Anton.
- (4) Elvira ist älter als Christine.
- (5) Anton ist jünger als Christine.
- (6) Elvira ist älter als Dieter.
- (7) Christine ist jünger als Dieter.

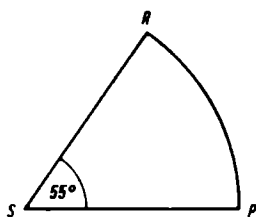
Ermittle die falsche Aussage, und ordne die Schüler dem Alter nach! Beginne mit dem jüngsten!

2. Von zwei Primzahlen wird folgendes gefordert:

- a) Ihre Summe ist eine Primzahl.
- b) Multipliziert man diese Summe mit dem Produkt der zuerst genannten beiden Primzahlen, so erhält man eine durch 10 teilbare Zahl.

Man gebe alle Primzahlen an, die diese Forderungen erfüllen.

3. Gegeben sei ein Kreissektor mit dem Radius $\overline{SP} = \overline{SR} = 8,5$ cm und dem Zentriwinkel $\angle PSR$ der Größe 55° (siehe Bild).



Konstruiere einen Kreis k , der dem gegebenen Sektor einbeschrieben ist, d. h. der die Strecken SP , SR und den Bogen PR so berührt, daß k innerhalb der Fläche des PR enthaltenden Kreises liegt!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

4. Achim, Bernd, Christian und Detlef waren die vier Teilnehmer der Endrunde eines Schachturniers. Es hatte jeder gegen jeden genau zweimal zu spielen. Für jede gewonnene Partie wurden 1 Punkt, für jede unentschiedene ein halber Punkt, für jede verlorene 0 Punkte vergeben.

Ein Wandzeitungsartikel über dieses Turnier enthält folgende Angaben:

Bernd und Christian erzielten zusammen

genau einen Punkt mehr als Achim und Detlef zusammen. Christian und Detlef erzielten zusammen genau 7 Punkte. Achim und Christian konnten zusammen genau 5 Punkte weniger erreichen als Bernd und Detlef zusammen.

Es wird gefragt, wie viele Punkte jeder der vier Teilnehmer erhielt.

Ermittle auf diese Fragen alle Antworten, die den genannten Angaben entsprechen!

5. Beweise folgenden Satz:

Verbindet man die Mittelpunkte der Diagonalen eines Trapezes, so erhält man eine (evtl. zu einem Punkt ausgeartete) Strecke, deren Länge halb so groß ist wie die Differenz der Längen der beiden parallelen Seiten.

6. Gegeben seien drei Zahlen p, p_1, p_2 mit $0 < p_1 < p < p_2 < 100$.

Aus einer geeigneten Menge x kg einer p_1 -prozentigen Lösung eines Stoffes (d. h. einer Lösung, die $p_1\%$ dieses Stoffes und den Rest Wasser enthält) und einer geeigneten Menge y kg einer p_2 -prozentigen Lösung des gleichen Stoffes soll durch Zusammen gießen eine p -prozentige Lösung hergestellt werden.

a) Ermittle das hierzu erforderliche Mischungsverhältnis, d. h. die Zahl $x:y$, zunächst speziell für die Werte $p_1 = 25, p_2 = 60$ und $p = 35$!

b) Stelle dann eine für beliebige Werte von p_1, p_2 und p gültige Formel für das Mischungsverhältnis auf!

Anmerkung: Die angegebenen Prozentsätze beziehen sich auf die Masse, sind also nicht als Volumenprozent anzusehen.

Klassenstufe 9

1. Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl x (wobei x nicht unbedingt einstellig sein soll), die folgende Eigenschaften hat: Die Zahl $83 \cdot x$ (das Produkt aus 83 und x) hat als Darstellung die Ziffernfolge 3×8 (d. h. vor die Ziffer oder Ziffernfolge der Zahl x ist eine 3, hinter die so gebildete Ziffernfolge eine 8 zu setzen).

2. Man gebe alle geordneten Quadrupel (a_1, a_2, a_3, a_4) aus vier unmittelbar aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen a_1, a_2, a_3, a_4 mit $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ an, die folgender Bedingung genügen:

Die Summe der dritten Potenz der ersten beiden Zahlen des Quadrupels ist gleich der Differenz der dritten Potenz der letzten und vorletzten Zahl des Quadrupels.

3. Von einem beliebigen Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ seien die Längen $a = \overline{AB}$, $c = \overline{CD}$ seiner Paralleelseiten sowie der Abstand h der diese Paralleelseiten enthaltenden Geraden gegeben. Der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD sei S .

Man berechne aus den gegebenen Längen

a, c, h die Flächeninhalte F_1, F_2, F_3, F_4 der Dreiecke ABS, BCS, CDS bzw. ADS .

4. Man beweise, daß für beliebige reelle Zahlen x, y, z die folgende Beziehung gilt:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz.$$

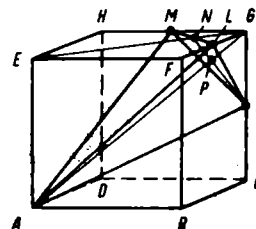
Ferner gebe man für x, y, z Bedingungen an, die gleichwertig damit sind, daß in der genannten Beziehung das Gleichheitszeichen gilt.

5. Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C . Auf dem Umkreis k des Dreiecks liege auf dem Kreisbogen $\widehat{AB}$, der C nicht enthält, ein von A und B verschiedener Punkt P . Symmetrisch zu P bezüglich der Geraden durch A und C bzw. der durch B und C mögen die Punkte P_1 und P_2 liegen.

a) Man beweise, daß C auf der Geraden g durch P_1 und P_2 liegt.

b) Man beweise, daß g genau dann die Tangente im Punkt C an den Umkreis k ist, wenn $CP \perp AB$ gilt.

6. In einem Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H (siehe Bild) und der Kantenlänge a seien K, L, M die Mittelpunkte der Seiten CG, FG bzw. HG .



Man ermittle das Volumen der Pyramide mit den Eckpunkten A, K, L, M .

Klassenstufe 10

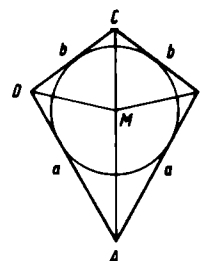
$$\begin{array}{r} \text{A R Z T} \\ + \text{A R Z T} \\ \hline \text{Ä R Z T E} \end{array}$$

sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen für die gleichen Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern eingesetzt werden.

Geben Sie alle Lösungen dafür an! (A und Ä gelten als verschiedene Buchstaben.)

2. Beweisen Sie folgenden Satz:

Ist $ABCD$ ein (konvexes) Drachenviereck mit



$\overline{AB} = \overline{AD} = a$, $\overline{BC} = \overline{DC} = b$ und dem Inkreis-
mittelpunkt M , dann gilt

$$\frac{a}{b} = \frac{\overline{AM} \cdot \overline{BM}}{\overline{CM} \cdot \overline{DM}}$$

3. Gegeben sei eine positive reelle Zahl a ,
für die $a \neq 1$ gilt. Man ermittle alle reellen
Zahlen x , die die Gleichung
 $x^{\log a^x} = a^2 x$ erfüllen.

4. Es seien a, b gegebene positive reelle Zah-
len, und es sei f die für alle natürlichen Zah-
len n durch die Gleichung

$$f(n) = a^n + b^n + (a+b)^n$$

definierte Funktion. Beweisen Sie, daß dann
 $(f(2))^2 = 2 \cdot f(4)$ gilt!

5. Man gebe alle natürlichen Zahlen n mit
 $n < 40$ an, für die die Zahl

$$n^2 + 6n - 187$$

ohne Rest durch 19 teilbar ist.

6. Gegeben sei ein Parallelogramm $OPQR$.
Gesucht sind alle Punkte X auf der Verlän-
gerung von OP über P hinaus, die folgende
Eigenschaft haben: Schneidet die Parallele
durch O zu XR die Verlängerung von OR
über R hinaus in Y , so gilt $PY \parallel XQ$.

Man untersuche, ob derartige Punkte X
existieren. Ist dies der Fall, so beschreibe und
begründe man eine Konstruktion aller der-
artigen Punkte und untersuche, ob es nur
einen solchen Punkt X gibt.

Klassenstufe 11/12

1. In die 64 Felder eines Schachbretts sind
die Zahlen 1, 2, ..., 64 so eingetragen, daß in
der ersten waagerechten Reihe von links nach
rechts die Zahlen 1, 2, ..., 8 in der zweiten
waagerechten Reihe von links nach rechts die
Zahlen 9, 10, ..., 16 usw. in dieser Reihen-
folge stehen. Jemand soll nun acht Türme
so auf Felder des Schachbretts stellen, daß
keine zwei von ihnen einander schlagen
können. Danach soll er die Summe S der
Zahlen bilden, die auf den von den Türmen
besetzten Feldern stehen.

Es sind alle dabei möglichen Werte von S
anzugeben.

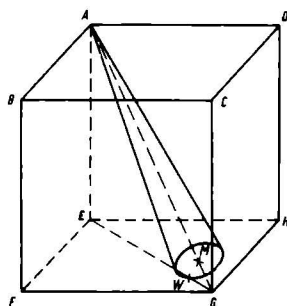
Anmerkung: Zwei Türme können einander
genau dann schlagen, wenn sie auf einer ge-
meinsamen waagerechten oder senkrechten
Felderreihe stehen.

2. Gegeben sei eine rationale Zahl c . Ferner
sei M die Menge aller derjenigen Paare (a, b)
aus rationalen Zahlen a, b , für die $a + b = c$
gilt.

Beweise, daß unter allen Produkten $a \cdot b$
mit $(a, b) \in M$ dasjenige am größten ist, das
aus dem Paar (a, b) mit $a = b$ gebildet wurde!

3. Im Innern eines Würfels $ABCDEFGH$ mit
den Seitenflächen $ABCD$, $ABFE$, $BCGF$,
 $CDHG$, $DAEH$, $EFGH$ und mit der Kanten-
länge a befindet sich ein gerader Kreiskegel-
körper mit den folgenden Eigenschaften:

- Seine Spitze fällt mit dem Eckpunkt A
des Würfels zusammen.
- Seine Achse liegt auf der Raumdiagonalen
 AG des Würfels.
- Seine Grundfläche hat mit einer der drei
Seitenflächen des Würfels, auf denen G liegt,
genau einen Punkt gemeinsam.



Man beweise:

Ist α die Größe des Winkels zwischen einer
Seitenlinie und der Achse und r der Radius
der Grundfläche des Kegelskörpers, so gilt

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{\cot \alpha + \sqrt{2}}$$

4. Es ist zu untersuchen, ob es eine Funktion
 $y = \log_a(bx + c)$ mit a, b, c reell; $a > 1$
gibt, deren Graph in einem x, y -Koordinaten-
system durch die Punkte $(2; 2)$, $(-1; 0)$ und
 $(0; 1)$ verläuft.

Man gebe, falls es eine solche Funktion gibt,
alle reellen geordneten Zahlentripel (a, b, c)
an, für die das zutrifft.

5. Es seien in der Ebene fünf Punkte $F, G, H, I,$
 K gegeben, von denen keine drei auf derselben
Geraden liegen.

Man begründe und beschreibe die Konstruk-
tion eines Fünfecks $ABCDE$ für das $F, G, H, I,$
 K in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der
Seiten AB, BC, CD, DE, EA des Fünfecks
sind.

Man untersuche, ob ein solches Fünfeck
 $ABCDE$ durch die gegebenen Punkte $F, G,$
 H, I, K eindeutig bestimmt ist. Dabei wird
nicht vorgeschrieben, daß das Fünfeck
 $ABCDE$ konvex, nicht konvex oder über-
schlagen ist; es soll auch zugelassen sein,
daß Ecken miteinander zusammenfallen oder
Seiten teilweise ineinander oder in der Ver-
längerung voneinander liegen.

6. A. Ein in einem industriellen Prozeß ein-
gebauter Meßkomplex M übermittelt an
eine Übertragungseinheit A_1 genau eines
der beiden Signale S_1 oder S_2 , das dann von
 A_1 zu einer Übertragungseinheit A_2 , von A_2
zu einer Übertragungseinheit A_3 und von A_3
zu einem Elektronenrechner R übermittelt
wird. Jede Übertragungseinheit A_i ($i = 1, 2, 3$)
kann genau die Signale S_1 oder S_2 übermit-
teln. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß A_i
statt des jeweils empfangenen Signals gerade
das andere weitervermittelt, betrage 0,01.

Es sei nun bekannt, daß am Ende eines sol-
chen Ablaufes durch A_3 in den Rechner R
das Signal S_1 übertragen wurde.

Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit
dafür, daß M zu Beginn dieses Ablaufes an
 A_1 ebenfalls S_1 übermittelt hatte?

Hinweis: Wenn sich unter Voraussetzungen V
in einer großen Anzahl n von Fällen insge-
samt g solche befinden, bei denen ein Ereig-
nis E eintritt bzw. eingetreten ist, so heißt die

Zahl $p = \frac{g}{n}$ die Wahrscheinlichkeit für das
Eintreten (bzw. Eintretensein) von E unter
den Voraussetzungen V . Zur Lösung können
außerdem folgende Sätze verwendet werden:
Das Additionsgesetz der Wahrscheinlich-
keitsrechnung für unabhängige Ereignisse:
Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß von zwei
einander ausschließenden Ereignissen E_1 und
 E_2 eins von beiden eintritt, ist gleich der
Summe $p_1 + p_2$ der Wahrscheinlichkeit p_1
für das Eintreten von E_1 und der Wahr-
scheinlichkeit p_2 für das Eintreten von E_2 .

Das Multiplikationsgesetz der Wahrschein-
lichkeitsrechnung:

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Ereig-
nis E und ein Ereignis F eintreten, ist gleich
dem Produkt $p \cdot q$ der Wahrscheinlichkeit p
für das Eintreten von E und der Wahrschein-
lichkeit q dafür, daß unter der Vorausset-
zung von E das Ereignis F eintritt.

6. B. Es seien p eine von Null verschiedene
reelle Zahl und f eine für alle reellen Zahlen x
definierte Funktion mit der Eigenschaft

$$f(x+p) = \frac{f(x)}{3f(x)-1} \quad (1)$$

für alle reellen x .

a) Man beweise, daß jede derartige Funktion
 f (sofern es solche gibt) periodisch ist, d. h.,
daß es zu ihr eine von Null verschiedene
reelle Zahl q gibt, so daß

$$f(x+q) = f(x) \text{ für alle reellen } x \quad (2)$$

gilt.

b) Man gebe für einen speziellen Wert von p
eine solche nicht konstante Funktion f kon-
kret an.

Hinweis: Man kann insbesondere unter-
suchen, ob eine Funktion vom Typ

$$f(x) = \frac{a+b \sin^2 x}{c+d \sin^2 x}$$

Konstanten a, b, c, d für alle reellen x defi-
niert ist, die Eigenschaft (1) hat und nicht
konstant ist.

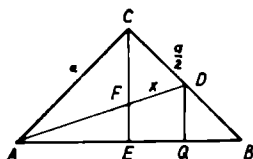
Sowjetische Schüler und vietnamesische Stu-
denten der Univ. Leipzig nahmen an der
Bez.-Oly. teil.



Lösungen



Abbildung zur Lösung W 8*1275



Lösungen zu: Übung macht den Meister
Heft 1/75

1. $\frac{11}{24}$ 2. $1\frac{1}{5}$; $\frac{2}{35}$; 105 3. 0,095; 8,03

4. 2; b ; $-\frac{5}{2}a$; $20a^2 - 8ab - 29b^2$

5. $(21n^3 - 34n^2v + 25v^3) : (7n + 5v)$
 $= 3n^2 - 7nv + 5v^2$

$$\frac{(21n^3 + 15n^2v) - (49n^2v + 25v^3)}{-(-49n^2v + 35nv^2)}$$

$$\frac{25v^3 + 35nv^2}{-(25v^3 + 35nv^2)}$$

6. a) $\frac{ab+a}{ab-a} = \frac{a(b+1)}{a(b-1)} = \frac{b+1}{b-1}$

b) $\frac{3n-3}{5-5n} = \frac{3(n-1)}{-5(n-1)} = -\frac{3}{5}$

c) $\frac{a^2+ab}{a^2-b^2} = \frac{a(a+b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{a}{a-b}$

7. $\frac{a-2}{a+2} = \frac{(a-2)(a-2)}{(a+2)(a-2)} = \frac{(a-2)^2}{a^2-4}$

8. a) $12a^3b^5c^3$

b) $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$, $x^2 - x = x(x-1)$,
 $x - x^2 = -x(x-1)$
 kgV: $-x(x+1)(x-1)$

9. $\frac{2u+1}{2u+2} - \frac{3u-1}{3u-3} + \frac{14u+2}{12u^2-12}$
 $= \frac{2u+1}{2(u+1)} - \frac{3u-1}{3(u-1)} + \frac{1(7u+1)}{6(u+1)(u-1)}$
 $= \frac{3(u-1)(2u+1) - 2(u+1)(3u-1) + 7u+1}{6(u+1)(u-1)}$
 $= \frac{0}{6(u+1)(u-1)} = 0$

10. a) $15x^{-2} = \frac{15}{x^2}$; b) $\left(\frac{v^4}{x^2}\right)^9$

c) $5x^2$; ab ;
 $2\sqrt{8} + 9\sqrt{18} - 5\sqrt{72} = 4\sqrt{2} + 27\sqrt{2} - 30\sqrt{2}$
 $= \sqrt{2}$

d) $6\sqrt{2}$ e) v

11. 0,20913; 0,5856

12. a) $\frac{4x-7}{6x+18} + \frac{11}{45} = \frac{7x+2}{10x+30}$
 $\frac{4x-7}{6(x+3)} + \frac{11}{45} = \frac{7x+2}{10(x+3)}$ HN: $90(x+3)$

15. $15(4x-7) + 22(x+3) = 9(7x+2)$
 $x=3$

b) $\sqrt{x+1} - 7 = 0$
 $\sqrt{x+1} = 7$

$x+1=49$

$x=48$

c) $x=27$; d) $x=4$; $y=5$;

e) $x=4$, $y=5$, $z=6$;

f) $x_1=5$, $x_2=-\frac{10}{3}$

g) $4x - 3\sqrt{7x-6} = 6$
 $4x-6 = 3\sqrt{7x-6}$
 $(4x-6)^2 = 9(7x-6)$
 $x=6$

13. $x > 3$; $x < 5$

14. a) P_1 ; P_3 b) P_1 ; P_2 c) P_2 ; P_3

15. a) 0,2639 b) 1,308 c) 6,54

d) -0,5344 e) -0,7646 f) 2,703

16. a) 10° ; 170° b) $55,1^\circ$; $304,9^\circ$

c) $158,3^\circ$; $201,7^\circ$ d) $170,8^\circ$; $350,8^\circ$

17. $a=18,12$ cm; $b=8,45$ cm; $\beta=25^\circ$

18. $a=69,8$ cm; $\beta=27,4^\circ$; $\gamma=22,6^\circ$;

$A=563$ cm²

Lösungen zu: Rund um die Uhr Heft 1/75

▲ 1▲ Der Tag hat 24 Stunden, d. s. 1440 Minuten. Zweimal zwei Fünftel sind vier Fünftel, die schon seit Beginn des Tages verfließen sind.

Wenn x die Anzahl der seit Tagesanfang (null Uhr) verfließen Minuten ist, so ergibt:

$$x + \frac{4}{5}x = 1440$$

bzw. $x = 800$.

Es sind also 800 Minuten seit Tagesbeginn verfließen. Es ist 13.20 Uhr.

▲ 2▲ a) 11 mal stehen die Zeiger in 12 Stunden übereinander.

b) In einer Stunde wird der Minutenzeiger vom Sekundenzeiger 59 mal überholt, innerhalb von 12 Stunden auch der Stundenzeiger $(60 \cdot 12 - 1)$ mal:

$12(60-1) + 12 \cdot 60 - 1 = 1427$, d. h. 1427 mal steht der Sekundenzeiger über dem Minutenzeiger oder dem Stundenzeiger innerhalb von 12 Stunden.

▲ 3▲ Die Geschwindigkeit des Minutenzeigers sei v_1 , die des Stundenzeigers v_2 ; dann gilt:

$$v_1 = \frac{s_1}{t_1} = \frac{2\pi r_1}{t_1} = \frac{2\pi \cdot 2}{1} = 4\pi;$$

$$v_2 = \frac{s_2}{t_2} = \frac{2\pi r_2}{t_2} = \frac{2\pi \cdot 1,5}{12} = \frac{1}{4}\pi;$$

$$v_1 : v_2 = (4\pi) : \left(\frac{1}{4}\pi\right) = 16 : 1.$$

Die Geschwindigkeit der Spitze des Minutenzeigers ist 16 mal so groß wie die der Spitze des Sekundenzeigers.

▲ 4▲ Heinz legt zwei Scheiben Brot in den Brotröster. Nach 30 Sekunden dreht er die erste Scheibe um, nimmt die zweite heraus und legt an ihre Stelle die dritte Scheibe. Nach weiteren 30 Sekunden ist die erste Scheibe von beiden Seiten geröstet und kann herausgenommen werden.

Nun wird die bereits einseitig geröstete zweite Scheibe wieder eingelegt und die dritte Scheibe umgedreht. Bis zu Beendigung des Röstvorgangs für diese Scheiben werden nun nochmals 30 Sekunden benötigt. Die Gesamtzeit des Röstvorgangs für die drei Brotscheiben beträgt somit nur noch 90 Sekunden bzw. $1\frac{1}{2}$ Minuten.

▲ 5▲ Der 1. Schlag beginnt mit 0 Sekunden, d. h. die Zwischenräume zwischen den Schlägen betragen 5 Sekunden. Daraus folgt:

$5:4 = 1\frac{1}{4}$, d. h. zwischen jedem Schlag der

Uhr liegen $1\frac{1}{4}$ Sekunden. Um 10 Uhr gibt

es 9 Zwischenräume zwischen den Schlägen

bzw. $9 \cdot 1\frac{1}{4} = 11\frac{1}{4}$, d. h. um 10 Uhr dauert das Schlagen $11\frac{1}{4}$ Sekunden.

▲ 6▲ $(12-1) \cdot 2 = 22$ mal im Laufe eines Umlaufs des großen Zeigers auf dem Zifferblatt, d. h., in 24 Stunden bilden die beiden Uhrzeiger 44 mal einen rechten Winkel.

▲ 7▲ Für die Hälfte des Schulweges brauchen bei konstanter Geschwindigkeit Jürgen genau 10 Minuten und Elke genau 15 Minuten. Da Elke genau 5 Minuten Vorsprung hat, holt Jürgen sie in genau 10 Minuten ein oder: $\frac{x}{20} = \frac{x}{30} + \frac{5}{30}$; $x = 10$

▲ 8▲ Petra und Werner spielten 180 Minuten, d. s. 3 Stunden.

▲ 9▲ Heinz ist eine Viertelstunde vor der Zeit, Gerd dagegen 30 Minuten später am Bahnhof.

▲ 10▲ Zu allen Berechnungen verwenden wir die Formel zur Berechnung des Kreisumfangs $u = 2\pi r$ und $\pi = 3,14$.

a) $2 \cdot 4 \text{ mm} \cdot 3,14 = 25,12 \text{ mm}$ in der Minute, $25,12 \text{ mm} \cdot 60 \cdot 24 = 36172,8 \text{ mm} \approx 36 \text{ m}$ in 24 Stunden.

▲ 11▲ $1209600 \text{ s} = 20160 \text{ min} = 336 \text{ h} = 14$ Tage. Das Treffen findet am 24. Mai um 12.00 Uhr statt.

▲ 12▲ Viertelschläge:

$$\frac{1}{4} \frac{2}{4} \frac{3}{4} \frac{4}{4}$$

$4+8+12+16 = 40$ Schläge in 1 Stunde bzw. 480 Schläge in 12 Stunden.

Stundenschläge: $(1+2+3+\dots+12) = 78$ Schläge. $480+78 = 558$ Schläge in 12 Stunden. Oder eine andere Lösung.

$$(41+42+43+\dots+52) = 93 \cdot 6 = 558 \text{ Schläge.}$$

▲ 13▲ Die Summe der auf jeder Kreisscheibe aufgetragenen Zahlen beträgt jeweils 78. Die Kreisscheibe läßt sich daher höchstens dann in die laut Aufgabe geforderten Teile zerlegen, wenn die verlangte Teilanzahl (also 2; 3; 4; 6) ein Teiler von 78 ist.

Das gilt für 2; 3 und 6, für 4 dagegen nicht. Daher lassen sich höchstens die erste, die zweite und die vierte Kreisscheibe in der

geforderten Weise zerlegen. Eine Zerlegung in 4 derartige Teile (Kreisscheibe 3) ist nicht möglich. Wie wir sehen, können die genannten Kreisscheiben tatsächlich der Aufgabe entsprechend geteilt werden. Dabei beachten wir, daß für die Zahlen 1, 2, ..., 12 gilt:

$$1 + 12 = 2 + 11 = 3 + 10 = 4 + 9 = 5 + 8 = 6 + 7 = 13$$

Lösungen zum alpha-Wettbewerb Heft 6/74

▲ 5▲1289 Wir rechnen $10,00 \text{ M} - 2,54 \text{ M} - 0,60 \text{ M} = 6,86 \text{ M}$. Kerstin bezahlte für Fleisch und Wurst zusammen 6,86 M. und Wurst zusammen 6,86 M.

▲ 5▲1290 Aus $70 \cdot 15 = 1050$ und $55 \cdot 20 = 1100$ und $1050 + 1100 = 2150$ folgt, daß die Einnahmen 2150 Pf, also 21,50 M betrugen. Für den Kauf der Heckenschere fehlten noch 70 Pf.

W 5▲1291 Aus $463,35 - 174,55 = 288,80$ folgt, daß der Preis für die Stores 288,80 M beträgt. Aus $8 \cdot 36,10 = 288,80$ folgt, daß 8 M Stores gekauft wurden.

W 5▲1292 Aus $(200 : 4) \cdot 3 = 150$ folgt, daß der Zirkus über 150 Sitzplätze verfügt.

a) Aus $(200 \cdot 150) : 4 = 7500$ folgt, daß während der Saison insgesamt 7500 Programmzettel verkauft wurden.

b) Aus $(200 \cdot 150) : 2 = 15000$ und $30 \cdot 15000 = 450000$ folgt, daß aus der Tierschau 450000 Pf, also 4500 M eingenommen wurden.

W 5*1293 Wegen $E + E = U$ muß U eine gerade Zahl sein. Wegen $U + U = 10T + R$ bzw. $U + U = 10T + R - 1$ gilt $T = 1$ und $U \geq 5$, also $U = 6$ oder $U = 8$.

Wenn $U = 6$, so $E = 3$ oder $E = 8$. Für $E = 3$ gilt $W = 2$ und $R = 2$. Das führt zu einem Widerspruch, denn es muß $W \neq R$ sein.

Für $E = 8$ erhalten wir $1 + W + T = E$, also $1 + W + 1 = 8$ und somit $W = 6$. Das führt ebenfalls zum Widerspruch; es muß $W \neq U$ sein.

Wenn $U = 8$, so $E = 4$ oder $E = 9$. Für $E = 4$ erhalten wir $W + T = E$, also $W + 1 = 4$ und somit $W = 3$. Wegen $T = 1$ folgt aus $U + U = 10T + R$ schließlich $R = 6$ und wir erhalten die richtig gelöste Additionsaufgabe

$$\begin{array}{r} 834 \\ + 814 \\ \hline 1648. \end{array}$$

Für $E = 9$ erhalten wir $1 + W + T = E$, also $1 + W + 1 = 9$ und somit $W = 7$. Aus $U + U = 10T + R$ folgt wegen $T = 1$ somit $R = 6$, und wir erhalten eine zweite Lösung, nämlich

$$\begin{array}{r} 879 \\ + 819 \\ \hline 1698. \end{array}$$

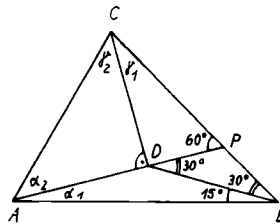
Diese Aufgabe hat also zwei Lösungen.

W 5*1294 Wegen $19 = 15 + 4$ und $74 = 14 + 60$ und $4 + 60 = 64$ müssen zu jeder der zehn Summen (waagrecht, senkrecht, diagonal) jeweils 64 addiert werden. Wir geben nachstehend eine mögliche Lösung.

64			
		4	60
	60		4
	4	60	

80	3	2	13
5	10	15	68
9	66	7	16
4	19	74	1

▲ 6▲1295 Wir zeichnen durch C eine Senkrechte zur Geraden AP und bezeichnen deren Fußpunkt mit D , und wir verbinden B mit D .



Aus $\delta = 60^\circ$ und $\angle CDP = 90^\circ$ folgt $\angle DCP = \gamma_1 = 30^\circ$ und somit $2 \cdot DP = CP$. Wegen $2 \cdot BP = CP$ gilt $BP = DP$, d. h., Dreieck DBP ist gleichschenkelig, und es gilt $\angle PBD = \angle PDB = 30^\circ$. Wegen $\angle PCD = \angle PBD$ ist auch das Dreieck BCD gleichschenkelig, und es gilt $BD = CD$. Aus $\angle ABD = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$ und $\angle DAB = \delta - \beta = 15^\circ$ folgt, daß das Dreieck ABD ebenfalls gleichschenkelig ist und somit $AD = BD$ gilt. Aus $AD = BD$ und $BD = CD$ folgt $AD = CD$. Deshalb gilt $\alpha_2 = \gamma_2$. Wegen $\alpha_2 + \gamma_2 = 90^\circ$ gilt somit $\gamma_2 = 45^\circ$, also $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = 75^\circ$.

▲ 6▲1296 Es sei x die Anzahl der Knobelaufgaben; dann waren $(x + 5)$ Gleichungen und $(x - 2)$ Geometriaufgaben zu lösen. Daher gilt

$$\begin{aligned} x + (x + 5) + (x - 2) &= 30, \\ 3x + 3 &= 30, \\ 3x &= 27, \\ x &= 9. \end{aligned}$$

Die Teilnehmer dieser Arbeitsgemeinschaft hatten 9 Knobelaufgaben, 7 Geometriaufgaben und 14 Gleichungen zu lösen.

W 6▲1297 Der erste Faktor sei n . Dann lautet der zweite Faktor $\frac{n+4}{2} + 2 = \frac{n+4}{2}$. Für

$$\text{den dritten Faktor gilt somit } \frac{n+4}{4} + 2 = \frac{n+12}{4}.$$

Nun gilt $n \cdot \frac{n+4}{2} \cdot \frac{n+12}{4} = 1120$. Für $n > 0$

ist der Faktor $\frac{n+12}{4}$ genau dann eine von Null verschiedene natürliche Zahl, wenn $n = 4, 8, 12, 16, 20, \dots$ gilt. Wir stellen eine Tabelle auf.

n	$\frac{n+4}{2}$	$\frac{n+12}{4}$	p
4	4	4	64
8	6	5	240
12	8	6	576
16	10	7	1120
20	12	8	1920

Für $n > 20$ wird $p > 1920$. Daher sind nur für $n = 16$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Die drei Zahlen lauten somit 16, 10 und 7, und es gilt $16 \cdot 10 \cdot 7 = 1120$.

W 6▲1298 Die Großmutter verzehrte

$$2 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{12} \text{ der Torte. Wir rechnen } \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{5}{48} + \frac{1}{6} + \frac{3}{16} + \frac{1}{12} = \frac{6 + 12 + 5 + 8 + 9 + 4}{48} = \frac{44}{48} = \frac{11}{12}$$

und $\frac{24}{24} - \frac{11}{12} = \frac{1}{2}$. Somit blieben zwei der eingeteilten Stückchen Torte übrig.

W 6*1299 Die erste Zahl dieser geordneten Paare sei $10a + b$ mit $a \neq 0$; dann lautet die zweite Zahl $10b + a$, d. h., es muß also auch $b \neq 0$ sein. Für die Summe beider Zahlen gilt $s = (10a + b) + (10b + a) = 11(a + b)$.

Bei Division durch 5 läßt $11(a + b)$ nur dann den Rest 3, wenn $a + b = 3$ oder $a + b = 13$ oder $a + b = 8$ oder $a + b = 18$ gilt. Die geordneten Zahlenpaare lauten demnach (12; 21), (17; 71), (26; 62), (35; 53), (49; 94), (58; 85), (67; 76).

W 6*1300 Jeder Innenwinkel des regelmäßigen Fünfecks $ABCDE$ beträgt $(5 \cdot 180^\circ - 360^\circ) : 5 = 108^\circ$. Deshalb gilt $\angle CDF = \angle DCF = 72^\circ$, da jeder dieser beiden Winkel Nebenwinkel zu einem Fünfeckswinkel ist. Wegen $\angle CDF = \angle DCF$ ist das Dreieck DCF gleichschenkelig, und es gilt $CF = DF$ und $\angle CFD = 180^\circ - 2 \cdot 72^\circ = 36^\circ$. Aus $CD = ED$ folgt $\angle DEC = \angle DCE = (180^\circ - 108^\circ) : 2 = 36^\circ$. Wegen $\angle FEC = \angle EFC$ gilt schließlich $EC = FC$. Aus $DF = FC$ und $EC = FC$ folgt $EC = DF$. Die Strecke EC ist genau so lang wie die Strecke DF .

▲ 7▲1301 Auf Grund der Aufgabenstellung gilt $5 \cdot (n - 1) + 2 = 4 \cdot n + 1$, $5n - 5 + 2 = 4n + 1$, $n = 4$.

Es sind somit 4 Kartons vorhanden.

Weiterhin gilt

$$m = 5 \cdot (n - 1) + 2 = 5 \cdot 3 + 2 = 17.$$

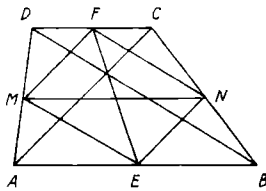
Somit sind 17 Gegenstände zu verpacken.

▲ 7▲1302 Es sei M die Mitte von AD und N die Mitte von BD , dann ist das Viereck $ENFM$ ein Parallelogramm, denn es gilt $ME \parallel BD \parallel FN$ bzw. $EN \parallel AC \parallel MF$.

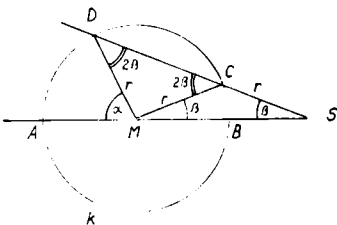
Weiterhin gilt $ME = FN = \frac{f}{2} = 5,5 \text{ cm}$ und $EN = MF = \frac{e}{2} = 3,5 \text{ cm}$. Schließlich gilt noch

$MN \parallel AB \parallel CD$. Wir konstruieren zunächst das Teildreieck ENF aus $EN = 3,5 \text{ cm}$, $FN = 5,5 \text{ cm}$ und $\angle ENF = 5,5^\circ$. Danach schlagen wir um E einen Kreis mit FN als Radius und um F einen Kreis mit EN als Radius; die Kreise schneiden sich im Punkte M . Durch die Punkte E und F ziehen wir je eine Parallele zur Geraden MN . Nun schlagen wir um E mit $\frac{a}{2} = 5,25 \text{ cm}$ einen Kreis, der die durch E zu MN gezogene Parallele in den Punkten A und B schneidet. Die Gerade AM

schneidet die durch F zu $\overline{MN}$ gezogene Parallele in D . Die Gerade BN schneidet diese Parallele in C .



W 7 ■ 1303 Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden nicht-anliegenden Innenwinkel. Wegen $\overline{CM} = \overline{CS} = r$ gilt $\angle CSM = \angle CMS = \beta$ und somit auch $\angle MCD = 2\beta$. Wegen $\overline{CM} = \overline{DM} = r$ gilt ferner $\angle MDC = \angle MCD = 2\beta$ und somit $\alpha = 2\beta + \beta = 3\beta$.



W 7 ■ 1304 Nach Voraussetzung gilt $\angle ACB = 60^\circ$. Die Symmetrieachse CM_1 halbiert den Winkel $\angle ACB$, folglich gilt $\angle BCR = 30^\circ$.

In einem rechtwinkligen Dreieck, das einen Innenwinkel von 30° hat, ist die diesem Winkel gegenüberliegende Kathete halb so lang wie die Hypotenuse.

Deshalb gilt $\overline{CM}_1 = 2r_1$ und $\overline{CM}_2 = 2r_2$. Wegen $\overline{M}_1M_2 = r_1 + r_2$ gilt schließlich $\overline{CM}_1 = \overline{CM}_2 + \overline{M}_1M_2$.

$$\begin{aligned} 2r_1 &= 2r_2 + (r_1 + r_2), \\ r_1 &= 3r_2. \end{aligned}$$

W 7*1305 Nach Konstruktion gilt $\overline{BE} = \overline{BC} = \overline{AD} = b$, $\overline{DF} = \overline{CD} = \overline{AB} = a$. Aus $\overline{BC} = \overline{BE}$ folgt $\angle BCE = \angle BEC = \varphi$, also $\angle EBC = 180^\circ - 2\varphi$. Wegen $\angle ABC = \angle BCE$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen) gilt somit $\angle ABE = \varphi + (180^\circ - 2\varphi) = 180^\circ - \varphi$. Ferner gilt $\angle ABC = \angle DCF = \varphi$ als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen. Aus $\overline{DC} = \overline{DF} = a$ folgt $\angle DCF = \angle DFC = \varphi$, also $\angle CDF = 180^\circ - 2\varphi$. Aus den Parallelogrammeigenschaften folgt $\angle ABC = \angle ADC = \varphi$. Somit gilt $\angle ADF = \varphi + (180^\circ - 2\varphi) = 180^\circ - \varphi$. Aus den bisherigen Überlegungen folgt $\triangle ABE \cong \triangle FDA$. Aus der Kongruenz dieser Dreiecke folgt $\overline{AE} = \overline{AF}$. Das Dreieck AEF ist somit gleichschenkelig.

W 7*1306 a) Es sei $a = b = c = d = e = 1$. Wegen $5 \neq 1$ wird die gegebene Gleichung nicht erfüllt.

b) Es seien $a = b = c = d = 1$ und $e \neq 1$. Dann gilt $4 + e = e$. Es gibt keine natürliche Zahl e , die diese Gleichung erfüllt.

c) Es seien $a = b = c = 1$, $d \neq 1$ und $d \leq e < 10$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} 3 + d + e &= d \cdot e, \\ d + 3 &= de - e, \\ d + 3 &= e(d - 1), \\ e &= \frac{d + 3}{d - 1} = 1 + \frac{4}{d - 1}. \end{aligned}$$

Nur für $d = 2$ bzw. $d = 3$ erhält man natürliche Zahlen $e = 5$ bzw. $e = 3$, die die gestellten Bedingungen erfüllen.

d) Es seien $a = b = 1$, $c = 2$ und $2 \leq d \leq e < 10$. Dann gilt $4 + d + e = 2de$. Wegen $d \leq e < 10$ erhält man daraus $22 \geq 2de$, also $d \cdot e \leq 11$. Nur die geordneten Zahlenpaare $(2; 2)$, $(2; 3)$, $(2; 4)$, $(2; 5)$ und $(3; 3)$ erfüllen diese Ungleichung. Nun gilt $1 + 1 + 2 + 2 + 2 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Alle übrigen Zahlenpaare $(d; e)$ erfüllen nicht die Gleichung $a + b + c + d + e = abcde$.

Deshalb gilt nur $d = 2$ und $e = 2$.

e) Es seien $a = b = 1$, $c = 3$ und $3 \leq d \leq e < 10$. Dann gilt $5 + d + e = 3de$. Wegen $d \leq e < 10$ erhalten wir daraus $23 \geq 3de$, also $de \leq \frac{23}{3} < 8$.

Es gibt keine natürlichen Zahlen d und e , die gleich oder größer als 3 sind und die diese Ungleichung erfüllen. Damit gibt es auch keine weitere Lösung für $c > 3$. Die Aufgabe besitzt somit genau drei Lösungen; sie lauten

$$\begin{aligned} a_1 = b_1 = c_1 = 1, d_1 = 2, e_1 = 5; \\ a_2 = b_2 = c_2 = 1, d_2 = e_2 = 3; \\ a_3 = b_3 = 1, c_3 = d_3 = e_3 = 2. \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned} 1 + 1 + 1 + 2 + 5 &= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 = 10, \\ 1 + 1 + 1 + 3 + 3 &= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 = 9, \\ 1 + 1 + 2 + 2 + 2 &= 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8. \end{aligned}$$

▲ 8 ▲ 1307 a) Ist x die Maßzahl (in cm) des Durchmessers des Drahtes, so gilt, da die Länge des Drahtes gleich 100 000 cm und seine Masse gleich 1 g ist,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} x^2 \cdot 100\,000 \cdot 8,92 &= 1, \\ \frac{\pi}{4} x^2 &= \frac{1}{100\,000 \cdot 8,92} = \frac{10^{-6}}{0,892} = 1,121 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^2 \\ x &\approx 1,2 \cdot 10^{-3}. \text{ Der Durchmesser des Drahtes ist also gleich rund} \end{aligned}$$

$$0,0012 \text{ cm} = 0,012 \text{ mm} = 12 \mu\text{m}.$$

b) Da die Länge des Drahtes 1000 m beträgt und sein Querschnitt $112,1 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^2$, ist der elektrische Widerstand gleich

$$\begin{aligned} R &= \frac{0,016 \cdot 1000 \cdot 10^6}{112,1} \Omega = 0,143 \cdot 10^6 \Omega \\ &= 0,143 \text{ M}\Omega. \end{aligned}$$

W 8 ■ 1308 Es sei x die Anzahl der Bakterien, die jeweils entnommen wurden. Dabei darf x höchstens so groß sein, daß auch bei der 4. Entnahme noch x Bakterien entnommen werden können. Nun verbleibt nach der 1. Entnahme, da 3000 Bakterien vorhanden sind und x entnommen werden, der Rest $r_1 = 3000 - x$.

Nach der 2. Entnahme verbleibt, da inzwischen sich die Anzahl verdoppelt hat, der Rest

$$r_2 = 2(3000 - x) - x = 6000 - 3x.$$

Nach der 3. Entnahme verbleibt der Rest

$$r_3 = 2(6000 - 3x) - x = 12000 - 7x$$

und nach der 4. Entnahme

$$r_4 = 2(12000 - 7x) - x = 24000 - 15x.$$

Dabei gilt

$$24000 - 15x \geq 0,$$

$$\begin{aligned} \text{also} \quad 15x &\leq 24000, \\ x &\leq 1600. \end{aligned}$$

Daher können bei jeder Entnahme höchstens 1600 Bakterien entnommen werden.

W 8 ■ 1309 Es sei $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$; dann gilt

$$\overline{AE} = \frac{b}{2}. \text{ Ferner sei } G \text{ der Fußpunkt des von } F \text{ auf } \overline{AB} \text{ gefällten Lotes (Abb. folgt in Heft 3/75). Ferner sei } \overline{AG} = x; \text{ dann gilt } \overline{GB} = a - x.$$

Aus den Strahlensätzen folgt nun

$$y : \frac{b}{2} = (a - x) : a, \quad y = \frac{b(a - x)}{2a}; \quad (1)$$

$$y : b = x : a, \quad y = \frac{bx}{a}. \quad (2)$$

Aus (1) und (2) erhält man durch Gleichsetzung

$$\begin{aligned} \frac{bx}{a} &= \frac{b(a - x)}{2a}, \text{ also } 2x = a - x, \quad 3x = a, \\ x &= \frac{a}{3}. \text{ Daraus folgt wegen (2)} \end{aligned} \quad (3)$$

$$y = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{3} = \frac{b}{3}. \quad (4)$$

Für die Flächeninhalte A_1 , A_2 , A_3 und A_4 der Dreiecke AFE , ABF , BCF und des Vierecks $FCDE$ erhält man daher

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot x = \frac{ab}{12}, \\ A_2 &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot y = \frac{ab}{6} = \frac{2ab}{12}, \\ A_3 &= \frac{1}{2} \cdot b \cdot (a - x) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{2}{3}a = \frac{4ab}{12}, \\ A_4 &= ab - (A_1 + A_2 + A_3) = ab - ab \cdot \frac{1 + 2 + 4}{12} \\ &= \frac{5ab}{12}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich das gesuchte Verhältnis der Flächeninhalte

$$A_1 : A_2 : A_3 : A_4 = 1 : 2 : 4 : 5.$$

W 8*1310 Es sei $(x; y)$ ein geordnetes Paar natürlicher Zahlen x und y , für die die Gleichung $x^2 + y - 37 = 0$ erfüllt ist.

Dann gilt, da y eine natürliche Zahl ist,

$$y = 37 - x^2 \geq 0,$$

also $x^2 \leq 37$.

Daher kann die natürliche Zahl x nur die Werte 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 annehmen, und wir erhalten

$$y = 37, 36, 33, 28, 21, 12, 1,$$

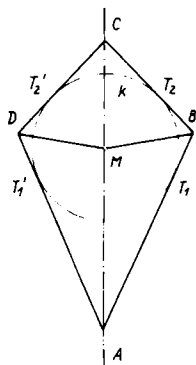
also die geordneten Paare

$$(0; 37), (1; 36), (2; 33), (3; 28), (4; 21), (5; 12), (6; 1).$$

Andererseits sind, wie die Probe zeigt, diese geordneten Paare aber auch sämtlich Lösungen der gegebenen Gleichung.

W 8*1311 a) Es sei $ABCD$ ein beliebiges Drachenviereck, wobei wir o. B. d. A. annehmen können, daß die Gerade AC Symmetrieachse ist (vgl. die Abb.). Diese Symmetrieachse halbiert die Winkel $\angle DAB$ und

★BCD. Die Winkelhalbierende des Winkels ★ABC möge die Symmetrieachse AC in dem Punkt M schneiden. Dann ist M der Mittelpunkt des Kreises k, der die Seite AB in T₁ und die Seite BC in T₂ berührt.



Bei der Spiegelung an der Symmetrieachse AC werden nun die Punkte A, C und M auf sich selbst abgebildet, und auch der Kreis k mit dem Mittelpunkt M wird auf sich selbst abgebildet. Da ferner der Punkt B auf den Punkt D abgebildet wird, werden die Gerade AB auf die Gerade AD und die Gerade CB auf die Gerade CD abgebildet. Daher berühren die Geraden AD und CD den Kreis k in den Punkten T₁' bzw. T₂', die Bildpunkte von T₁ bzw. T₂ sind.

Das Viereck ABCD ist also ein Tangentenviereck, womit bewiesen ist, daß die Aussage (1) wahr ist.

b) Die Negation der Aussage (1) lautet:

Nicht jedes Drachenviereck ist ein Tangentenviereck. (2)

Man kann das auch wie folgt formulieren:

Es gibt (mindestens) ein Drachenviereck, das nicht Tangentenviereck ist. (3)

Da die Aussage (1) wahr ist, ist ihre Negation, also die Aussage (3), falsch.

c) Man kann die Aussage (1) auch als Implikation formulieren:

Für alle konvexen Vierecke ABCD gilt: Wenn ABCD ein Drachenviereck ist, so ist es ein Tangentenviereck.

W 9 ■ 1312 Angenommen, es gäbe zwei natürliche Zahlen x und y, für die die Gleichung $x^2 - 5y + 8 = 0$ (1)

erfüllt ist. Dann gilt

$$-5y = -x^2 - 8,$$

$$y = \frac{x^2 + 8}{5},$$

$$y = 1 + \frac{x^2 + 3}{5}. \quad (2)$$

Da y eine natürliche Zahl ist, ist $x^2 + 3$ durch 5 teilbar, d. h. x^2 kann nur auf die Grundziffern 2 oder 7 enden.

Nun endet aber das Quadrat einer einstelligen natürlichen Zahl niemals auf diese Grundziffern; denn die Quadrate von 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 enden auf die Grundziffern 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, also niemals auf 2 oder 7. Wegen $(10a + b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2$

$$= 10(10a^2 + 2ab) + b^2$$

enden aber auch die Quadrate mehrstelliger natürlicher Zahlen niemals auf 2 oder 7.

Unsere Annahme, daß die Gleichung (1) eine Lösung in natürlichen Zahlen hat, führt also zu einem Widerspruch. Es gibt daher kein geordnetes Paar (x; y) natürlicher Zahlen, so daß die Gleichung (1) erfüllt ist.

W 9 ■ 1313 a) Die bebaute Fläche beträgt

$$F = 10,48 \cdot 7,74 \text{ m}^2 = 81,12 \text{ m}^2.$$

b) Der geometrische Körper, der dem umbauten Raum des Hauses entspricht, ist ein gerades Prisma, dessen Grundfläche als Seitenansicht in der Abbildung dargestellt ist und dessen Höhe 10,48 m beträgt.

Die Seitenansicht besteht aus einem Rechteck mit den Seitenlängen 7,74 m und 5,32 m mit einem aufgesetzten gleichschenkligen Dreieck, dessen halbe Basis gleich $\frac{1}{2} \cdot 7,74 \text{ m} = 3,87 \text{ m}$ ist und dessen Höhe gleich $3,87 \cdot 1,12 \text{ m} = 4,33 \text{ m}$ ist. Der Flächeninhalt dieser Figur ist daher gleich

$$A = (7,74 \cdot 5,32 + 3,87 \cdot 4,33) \text{ m}^2 = 57,9 \text{ m}^2.$$

Daraus ergibt sich der Rauminhalt $V = 57,9 \cdot 10,48 \text{ m}^3 = 606,8 \text{ m}^3$.

$$V = 57,9 \cdot 10,48 \text{ m}^3 = 606,8 \text{ m}^3.$$

Der umbaute Raum beträgt also rund 607 m³.

W 9*1314 Für n=0 erhält man $z = 1 + 57 \cdot 1 = 58 = 2 \cdot 29$, z ist also in diesem Falle durch 29 teilbar.

Nun sei n ≥ 1. Wegen

$$448 = 15 \cdot 29 + 13 \text{ gilt dann}$$

$$448^n = (15 \cdot 29 + 13)^n = 29a + 13^n,$$

wobei a eine natürliche Zahl ist. Denn multipliziert man die Faktoren 15 · 29 + 13 miteinander, so entsteht eine Summe, bei der alle Summanden Vielfache von 29 sind mit Ausnahme des letzten Summanden, der gleich 13ⁿ ist. Ferner erhält man

$$332^n = (11 \cdot 29 + 13)^n = 29b + 13^n,$$

wobei b eine natürliche Zahl ist. Daraus folgt $z = 29a + 13^n + 57(29b + 13^n)$, $z = 29(a + 57b) + 13^n(1 + 57)$, $z = 29(a + 57b) + 13^n \cdot 58$, $z = 29(a + 57b + 2 \cdot 13^n)$.

Damit wurde bewiesen, daß die Zahl z durch 29 teilbar ist. Bemerkung: Wer mit Zahlenkongruenzen rechnen kann, kommt noch schneller zum Ziel. Aus

$$448 \equiv 13 \pmod{29}$$

und $332 \equiv 13 \pmod{29}$ folgt nämlich

$$z = 448^n + 57 \cdot 332^n \equiv 13^n + 57 \cdot 13^n,$$

$$z \equiv 58 \cdot 13^n \equiv 0 \pmod{29},$$

$$\text{da } 58 = 2 \cdot 29 \equiv 0 \pmod{29}.$$

z ist also durch 29 teilbar.

W 9*1315 Es seien M der gemeinsame Mittelpunkt der Kreise K und k, D der Punkt, in dem der Kreis k den durch die Punkte A und B gehenden Kreisbogen berührt,

E der Mittelpunkt der Strecke AB,

F der Mittelpunkt des durch die Punkte A und B gehenden Kreisbogens (Abb. folgt in Heft 3/75).

Dann gilt ★MAE = 30°, da die Winkelhalbierenden des gleichseitigen Dreiecks ABC

durch den Punkt M gehen. Man kann also das rechtwinklige Dreieck MAE zu einem gleichseitigen Dreieck mit der Höhe AE ergänzen. Daher gilt

$$\overline{AM} = R, \overline{ME} = \frac{R}{2}, \overline{AE} = \frac{R}{2} \sqrt{3}.$$

Bezeichnet man den Radius des durch die Punkte A, B gehenden Kreisbogens mit x, so gilt $\overline{FA} = \overline{FD} = x$,

$$\overline{FE} = \sqrt{x^2 - \left(\frac{R}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{x^2 - \frac{3}{4}R^2},$$

$$\overline{MD} = r, \overline{DE} = \frac{R}{2} - r,$$

also wegen $\overline{FE} + \overline{DE} = \overline{FD}$

$$\sqrt{x^2 - \frac{3}{4}R^2} + \frac{R}{2} - r = x,$$

$$\sqrt{x^2 - \frac{3}{4}R^2} = x + r - \frac{R}{2}.$$

Durch Quadrieren erhält man hieraus

$$x^2 - \frac{3}{4}R^2 = x^2 + 2rx + r^2 - Rx - rR + \frac{R^2}{4},$$

$$Rx - 2rx = R^2 + r^2 - rR,$$

$$x(R - 2r) = R^2 + r^2 - rR.$$

Wegen $\frac{R}{2} > r$ gilt $R - 2r > 0$.

Daher kann man durch $R - 2r$ dividieren und erhält den Radius der drei Kreisbogen

$$x = \frac{R^2 + r^2 - rR}{R - 2r}.$$

W 10/12 ■ 1316 Wir versuchen zunächst, das Polynom

$$f(x) = x^{11} - 4x^9 + x^8 - 4x^6 - x^5 + 4x^3 - x^2 + 4 \quad (1)$$

in Faktoren zu zerlegen. Das ist möglich; denn wir können jeweils zwei aufeinander folgende Summanden zusammenfassen und erhalten

$$f(x) = (x^{11} - 4x^9) + (x^8 - 4x^6) - (x^5 - 4x^3) - (x^2 - 4).$$

Nun können wir x⁹, x⁶ bzw. x³ ausklammern und erhalten weiter

$$f(x) = x^9(x^2 - 4) + x^6(x^2 - 4) - x^3(x^2 - 4) - (x^2 - 4),$$

$$f(x) = (x^2 - 4)[x^9 + x^6 - x^3 - 1],$$

$$f(x) = (x^2 - 4)[x^6(x^3 + 1) - (x^3 + 1)],$$

$$f(x) = (x^2 - 4)(x^3 + 1)(x^6 - 1),$$

$$f(x) = (x + 2)(x - 2)(x^3 + 1)^2(x^3 - 1). \quad (2)$$

Daher hat die Gleichung f(x) = 0 die folgenden reellen Lösungen:

$$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = -2, \quad (3)$$

weil in diesen Fällen jeweils einer der Faktoren in (2) gleich Null ist. Nun gilt

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1) \text{ und}$$

$$x^2 - x + 1 = \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4}$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0; \text{ daher ist}$$

$$x^3 + 1 = 0 \text{ nur für } x = -1. \text{ Ferner}$$

gilt $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ und

$$x^2 + x + 1 = \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4}$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0; \text{ daher ist}$$

$$x^3 - 1 = 0 \text{ nur für } x = 1.$$

Daher hat die Gleichung $f(x)=0$ und damit auch die gegebene Gleichung außer den in (3) angegebenen Lösungen

$x_1=1, x_2=-1, x_3=2, x_4=-2$
keine weiteren reellen Lösungen.

W 10/12 ■ 1317 1. Wegen $s = \frac{15+13+14}{2}$ cm

= 21 cm ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC gleich

$$A = \sqrt{21 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 7} \text{ cm}^2 = 3 \cdot 4 \cdot 7 \text{ cm}^2 = 84 \text{ cm}^2.$$

2. Wegen $\frac{c \cdot h_c}{2} = A$ gilt $h_c = \frac{84 \cdot 2}{14}$ cm = 12 cm.

3. Aus $\overline{AF} = \sqrt{b^2 - h_c^2}$ (vgl. die Abb.) folgt
 $\overline{AF} = \sqrt{13^2 - 12^2}$ cm = 5 cm,
 $\overline{FB} = c - \overline{AF} = 9$ cm.

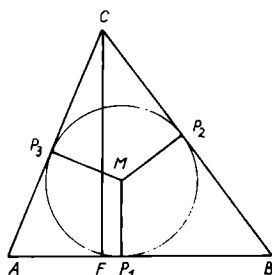
4. Aus $q \cdot s = A$ folgt $q = \frac{A}{s} = \frac{84}{21}$ cm = 4 cm.

5. Es gilt

$$\overline{AP_1} = \overline{AP_3} = s - a = 6 \text{ cm},$$

$$\overline{BP_1} = \overline{BP_2} = s - b = 8 \text{ cm},$$

$$\overline{CP_2} = \overline{CP_3} = s - c = 7 \text{ cm}.$$



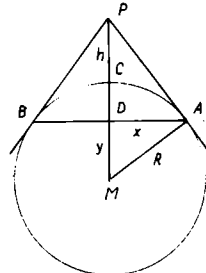
W 10/12*1318 a) Es seien

$R = 6370$ km der Radius der Erdkugel und daher auch der Radius des Schnittkreises mit dem Mittelpunkt M,

$h = 270$ km der Abstand des Punktes P der Umlaufbahn von der Erdoberfläche und daher auch von dem Punkt C des Schnittkreises,

A und B die Berührungspunkte der von P an den Schnittkreis gelegten Tangenten,

D der Fußpunkt des von A auf MP gefällten Lotes (vgl. die Abb.).



Ferner sei $\overline{AD} = x$ und $\overline{MD} = y$.

Dann gilt $\overline{MA} = \overline{MC} = R$ und $\overline{MP} = R + h$, und das Dreieck PMA ist rechtwinklig, weil der Radius MA auf der Tangente PA senkrecht steht. Daher gilt nach dem Kathetensatz

$$R^2 = y(R + h),$$

$$y = \frac{R^2}{R + h}. \text{ Ferner gilt}$$

$$\begin{aligned} x^2 &= R^2 - y^2 = R^2 - \frac{R^4}{(R + h)^2} \\ &= \frac{R^2(R^2 + 2hR + h^2 - R^2)}{(R + h)^2}, \\ x^2 &= \frac{R^2h(2R + h)}{(R + h)^2}, \\ x &= \frac{R}{R + h} \sqrt{2Rh + h^2}. \end{aligned}$$

Setzt man die Werte $R = 6370$ km und $h = 270$ km ein, so erhält man

$$x = \frac{6370}{6640} \sqrt{270 \cdot 13010} \text{ km} = 1798 \text{ km} \approx 1800 \text{ km}.$$

Die Höhe der Kugelzone beträgt also rund 3600 km, da $\overline{AB} = 2x$.

b) Der Oberflächeninhalt der Kugelzone ist gleich $A_1 = 2\pi R x = 4\pi R x$.

Der Oberflächeninhalt der Erdkugel beträgt $A_0 = 4\pi R^2$.

Daraus folgt

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{4\pi R x}{4\pi R^2} = \frac{x}{R} \approx \frac{1800}{6370} \approx 0,283.$$

Man kann also bei einem vollen Umlauf rund 28% der Erdoberfläche von der Station Salut 3 aus überblicken.

W 10/12*1319 Es sei x eine reelle Lösung der Gleichung

$$\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x \quad (1)$$

Dann gilt $x = 0$, da die Wurzel aus einer reellen Zahl niemals negativ ist. Ferner gilt

Kleines Mathematik-Sprachlexikon Teil 2

Rechnen mit gebrochenen Zahlen

Действия над дробями
Operating with fractions
Calcul des fractions

$$\frac{ar}{br} = \frac{a}{b}$$

ar durch br gleich ab-tel.¹

ar over br equals a over b.¹

ar sur br égale a sur b.¹

¹ Man kürze den gegebenen Bruch durch r

¹ Сократить данную дробь на r

¹ Cancel r out of the given fraction

¹ Simplifiez la fraction donnée par r.

Regel: Man kürzt einen Bruch, indem man Zähler und Nenner durch den größten gemeinsamen Teiler dividiert.

Дробь сокращается путём деления числителя и знаменателя на их наибольший общий делитель.

To reduce a fraction to its lowest terms, divide the numerator and the denominator by their highest common factor (or: measure or: divisor).

Pour simplifier une fraction, on divise le numérateur et le dénominateur par le plus grand diviseur commun.

$$\frac{ar}{br} = \frac{a}{b}$$

ab-tel gleich ar durch br.

a делённое на b равно ar делённое на br.

a over b equals ar over br.

a sur b égale ar sur br.

Regel: Man erweitert einen Bruch, indem man Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert.

Дробь превращается путём умножения числителя и знаменателя на одно и то же число.

To reduce a fraction to higher terms, multiply the numerator and the denominator by the same number.

Pour amplifier une fraction, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le même nombre.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

ab-tel plus oder minus cd-tel ist gleich dem Quotienten aus ad plus oder minus bc und bd.

Дробь a на b плюс или минус дробь c на d равно дроби ad плюс или минус bc делённое на bd.

a over b, this fraction followed by plus or minus c over d equals ad plus or minus bc, this sum or difference over bd.

a sur b, cette fraction plus ou moins c sur d, égale ad plus ou moins bc, cette somme ou différence sur bd.

Regel: Man bildet die Summe (bzw. Differenz) zweier ungleichnamiger Brüche, indem man sie gleichnamig macht – die Brüche haben dann den Hauptnenner – und die Zähler zusammenfaßt.

Чтобы найти сумму (или разность) двух дробей надо привести их к общему знаменателю, произвести сложение (или вычитание) числителей и подписать общий знаменатель.

To find the sum (the difference resp.) of two unlike fractions, change them to like fractions (fractions having their least common denominator) and combine the numerators.

Pour faire la somme (respectivement la différence) de deux fractions n'ayant pas le même dénominateur, on fait d'abord la réduction au même dénominateur – en ce cas les fractions ont le dénominateur commun – et ensuite on réunit les numérateurs.

(Oder auch: Pour additionner ou soustraire deux fractions n'ayant pas ...)

$$\begin{aligned} &(\sqrt{a-x} - \sqrt{a+x})^2 = x^2, \\ \text{also } &a - \sqrt{a+x} = x^2, \\ &a - x^2 = \sqrt{a+x}, \\ &(a-x^2)^2 = a+x, \\ &(a-x^2)^2 - a - x = 0. \end{aligned} \quad (2) \quad (3) \quad (4)$$

Diese Gleichung 4. Grades können wir lösen, indem wir die linke Seite in Faktoren zerlegen. Wir erhalten nämlich

$$(a-x^2)^2 - (a-x^2) + \frac{1}{4} - x^2 - x - \frac{1}{4} = 0,$$

$$\left(a-x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0;$$

hieraus folgt nach der sogenannten 3. Binomischen Formel

$$\left(a-x^2 - \frac{1}{2} - x - \frac{1}{2}\right)\left(a-x^2 - \frac{1}{2} + x + \frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$(a-x^2-x-1)(a-x^2+x)=0. \quad (5)$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn

$$1. a-x^2-x-1=0 \text{ oder} \quad (6)$$

$$2. a-x^2+x=0. \quad (7)$$

1. In diesem Fall gilt

$$x^2+x+1-a=0, \text{ also}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - 1 + a} = \frac{-1 + \sqrt{4a-3}}{2}. \quad (8)$$

Wegen $x \geq 0$ erfüllt die zweite Lösung dieser quadratischen Gleichung nicht die Gleichung (1).

Wegen (1) gilt nun $a - \sqrt{a+x} \geq 0$, also

$$\sqrt{a+x} \leq a, \text{ wegen } x \geq 0 \text{ also } \sqrt{a} \leq a, \text{ d. h. } a \geq 1.$$

Die Gleichung (1) kann daher nur für $a \geq 1$ eine reelle Lösung haben.

Es sei jetzt $a \geq 1$; dann ist x_1 eine reelle Zahl,

und für x_1 sind die Gleichungen (8), (6), (5) und (4) erfüllt. Ferner gilt

$$\begin{aligned} a-x_1^2 &= a - \left(\frac{-1 + \sqrt{4a-3}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1 + \sqrt{4a-3}}{2} > 0. \end{aligned}$$

Lösungen zu alpha-heiter

Wir wägen

$$P_0 = 1 \text{ g}, P_1 = 3 \text{ g}, P_2 = 9 \text{ g}, P_3 = 27 \text{ g}, P_4 = 81 \text{ g}, \\ P_5 = 243 \text{ g}, P_6 = 729 \text{ g}.$$

Die Primzahl

$$P = 1; R = 2; I = 3; M = 4; Z = 5; A = 6; \\ H = 7; L = 9.$$

Kryptarithmetik

Da $0 < d, b < 3$, muß $b=1$ und $d=2$ sein (letzte Zeile, $db + dc = dfd$). Aus der ersten Zeile geht nun hervor, daß $a=3$ (1 und 2 schon vergeben, 3stellige Zahl mit Hunderter 2+2stellige Zahl kann im Höchstfall 398 ergeben (299+99)).

Damit muß $c=5$ sein (mittlere Spalte $2+3=5$), f muß dann 7 sein, denn $21+251=272$. e muß jetzt 8 ($315-238=77$) und g muß 9 sein ($77+195=272$).

$$\begin{array}{r} 315 - 238 = 77 \\ : \quad + \quad + \\ \hline 15 \cdot 13 = 195 \\ \hline 21 + 251 = 272 \end{array}$$

Silbenrätsel

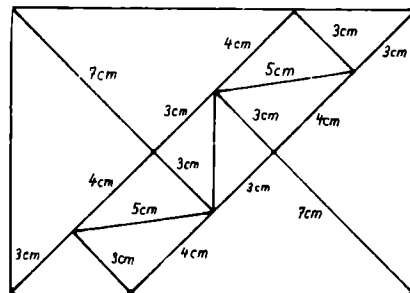
1. Durchmesser, 2. Element, 3. Archimedes, 4. Höhensatz, 5. Gleichung, 6. Binom, 7. Abszisse, 8. Sechzehn, 9. Höhe, 10. Aristoteles, 11. Dreieck, 12. Subtraktion, 13. Zweidreiebig, 14. Variable – Rechenschieber

Viermal die gleiche Ziffer

$$89 = 88 + \frac{8}{8}$$

Legespiel

Eine mögliche Lösung stellt die folgende Figur dar:



Mathematische Begriffe gesucht

1. Bruchteil, 2. Halbierende, 3. Addieren, 4. Siebeneck, 5. Kreissehne, 6. Aufrißtafel, 7. Rechenstab, 8. Achsenkreuz – BHASKARA

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

ab -tel mal cd -tel gleich ac durch bd .

Дробь a на b умноженная на дробь c на d равно дроби ac на bd .

a over b , this fraction multiplied by c over d equals ac over bd .

a sur b , cette fraction multipliée par c sur d , égale ac sur bd .

Regel: Man bildet das Produkt zweier Brüche, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.

Чтобы найти произведение двух дробей надо умножить числитель на числитель и знаменатель на знаменатель.

To find the product of two fractions, multiply the numerators together and the denominators together.

Pour faire le produit de deux fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

(Oder auch: Pour multiplier une fraction par une fraction, on ...)

$$\frac{5}{6} : \frac{1}{2} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3} \quad \frac{5}{6} : \frac{1}{2} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$$

$$\frac{5}{6} : \frac{1}{2} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3} \quad \frac{5}{6} : \frac{1}{2} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$$

Fünf Sechstel durch ein halb gleich fünf Drittel gleich ein zwei Drittel.

Пять шестых делённое на одну вторую равно пяти третьим или равно одной целой и двум третьим.

Five sixths divided by one (or: a) half equals five thirds equals one and two thirds.

Cinq sixièmes divisés par un demi égalent cinq tiers égalent un et deux tiers.

Regel: Man bildet den Quotienten zweier Brüche, indem man den Dividenten mit dem Kehrwert des Divisors multipliziert. Чтобы найти частное двух дробей надо умножить делимое на обратное значение делителя.

To find the quotient of two fractions, multiply the dividend by the inverted divisor. Pour faire le quotient de deux fractions, on multiplie la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.

(Oder auch: Pour diviser une fraction par une fraction, on ...)

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

ab -tel durch cd -tel gleich ad durch bc .

Дробь a на b делённая на дробь c на d равно дроби ad на bc .

a over b , this fraction divided by c over d equals ad over bc .

a sur b , cette fraction divisée par c sur d , égale ad sur bc .

Regel: Man verwandelt einen unechten Bruch in eine gemischte Zahl, indem man ihn in die Summe aus einer ganzen Zahl und einem echten Bruch aufspaltet:

$$\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{3}.$$

Неправильная дробь превращается в смешанное число путём расщепления его на сумму целого числа и правильной дроби:

$$\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{3}.$$

To convert an improper fractions into a mixed number, break it up into the sum of an integer and a proper fraction:

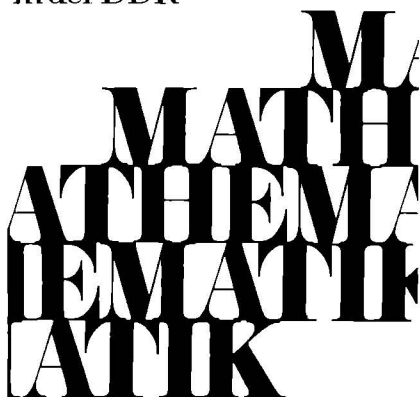
$$\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{3}.$$

Pour transformer une expression fractionnaire en un nombre fractionnaire, on extrait les entiers de l'expression, ainsi on obtient un nombre entier suivi d'une fraction ordinaire:

$$\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{3}.$$



Entwicklung der Mathematik in der DDR



1974, etwa 750 Seiten, 25 Abb.,
16,7 cm × 24 cm,
Leinen etwa 75,- M
VEB Deutscher Verlag
der Wissenschaften, Berlin

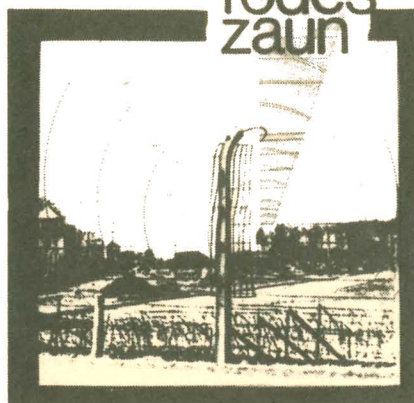
Dieser Sammelband wurde von einem Kollektiv von 60 Autoren gestaltet.

Insbesondere soll deutlich gemacht werden, welchen Platz die Arbeiten der Mathematiker der DDR einnehmen. Erarbeitet wurde dieses Werk von den auf ihren Gebieten führenden Wissenschaftlern, und außer den bei den einzelnen Beiträgen genannten haben zahlreiche andere Mathematiker am Entstehen des Festbandes mitgewirkt.

Ein ausführliches Vorwort vermittelt einen Eindruck von der hohen Wertschätzung, die die Wissenschaft und Forschung in der DDR erfahren, seit die ersten Schritte zur Förderung von Wissenschaft und Bildung in unserem von Faschismus und Krieg zerstörten Land getan wurden, und geht darüber hinaus kurz auf Gebiete ein, denen kein besonderer Beitrag gewidmet ist, wie z. B. die Schulmathematik und die mathematisch-historische Forschungsarbeit. Ein Artikel berichtet über die Aktivitäten der Mathematischen Gesellschaft der DDR.

Hartung

Signale
durch
den
Todes-
zaun



Bau, Einsatz und Tarnung illegaler Rundfunkempfänger und -sender im Konzentrationslager Buchenwald

Ein Buch für unsere mathematisch/naturwissenschaftlich/technisch interessierten Leser

Seiten: 207, Abbildungen: 67

Einband: Leinen mit Schutzumschlag

Preis: 9,50 M

VEB Verlag Technik, Berlin

Inhalt: Brücken in die Freiheit – Selbstgebaute illegale Rundfunkempfänger – Das verwandelte Vorsatzgerät – Geheimnisse der Kellerwerkstatt – Der russisch sprechende Schuhfetteimer – Signale nach draußen – Selbstgebaute illegale Sender – Erste Sendeveruche – Unterm Dach der Kinohalle – Ein Entschluß wird gefaßt – Der Blitzableiter als Sendeantenne...

Dokumentation

Der Arm des Führers – Angepeilter Sendempfang – ... wird mit dem Tode bestraft – Eine Stätte des Grauens, aber auch der Solidarität – Zeittafel – Das Audion-Vorsatzgerät als illegaler Kurzwellenempfänger – Die Elektrikerkommandos – Die NKFD, echte nationale Alternative – Der Akku-Empfänger – Der Eimer-Empfänger – Mit Gesetzeskraft gegen „Schwarzsender“ – Schwierigkeiten und Gefahren – Der Meßgenerator als erster illegaler Kurzwellensender – Das Prinzipschaltbild gibt Auskunft – Wertetafel der wichtigsten Bauteile – Deckname Dora – Konstruktive Details – Sendeveruche

Leseprobe

Zehn Ampere...

Sie werkten ohne Verschnauf, nur hin und wieder fiel ein Wort, ein leiser Zuruf. Enger als eng war es in der kleinen Kabine. Manchmal stießen sie mit den Schultern zusammen,

mit den Köpfen. Hinzu kam, daß sich der drei eine fieberhafte Spannung bemächtigte.

Zehn Ampere...

Um die Sendeanlage betriebsbereit zu machen, mußte ein Stück der Asbestverkleidung der Kabinenwand entfernt, der Gegentaktenverstärker aus seinem Versteck genommen, aufgebaut und angeschlossen werden. Im Verstärkerblock der Kinoapparatur, in dem die Steuerstufe untergebracht war, mußte die Netzstromversorgung angelegt und überprüft werden. Für die Röhrenheizung waren die Akkumulatoren bereitzustellen und zu schalten. Der Umformer mußte betriebsklar gemacht werden.

Zehn Ampere...

Neununddreißig, eine halbe Stunde vor der Zeit, konnte Gwidon Damazyn den Sender bei Leerlauf einschalten, um ihn dann bei Dauertontastung nach Maximum der Leistungswerte induktiv an den Antenneneingang anzukoppeln.

Fertig, alles klar!

Einer von Gwidons Gefährten bekreuzigte sich.

Damazyn riß an dem Seil, das mit den Klappen des Lüftungsschachtes verbunden war: Luft, Luft! Die sendebereiten Geräte strahlten Wärme aus, es war eine infernalische Hitze in der engen Kabine. Die Männer, zu denen als vierter noch der sowjetische Armeefunker gekommen war, lehnten an der Kabinenwand oder hockten auf den Klappbrettern, die zu anderer Zeit den beiden Filmvorführern als provisorische Sitze dienten.

Die Männer atmeten schwer, der eine glaubte das Herz des anderen wummern zu hören. Die kleine Lampe über ihren Köpfen verzerrte die angespannten Mienen ihrer aschfahlen, ausgezehnten Gesichter, in denen die Backenknochen scharf hervortraten. Dunkel und unheimlich gähnte unter ihnen die Leere des Kinosaaes. Die Stille vervielfachte jedes Geräusch in der engen Kabine und machte das harmlose Brummen der Sendeanlage zum Dröhnen.

Endlich: Leise schürfende Schritte auf der Stiege, die steil aufwärts führte.

Otto Roths Atem rasselte, keuchend schob sich der Hüne in die Himmelfahrtsgondel. Sein Gesicht war ernst, widernatürlich ernst. „Das Lager...“, keuchte er, „soll alles evakuiert werden. Heute noch. Befehl des Kommandanten.“

„Njet. Machen wir eigene Befehle“, flüsterte Leonow, der Armeefunker. „Sprechen wird Stimme von Buchenwald, charascho?“

„Fangen wir an!“ sagte Otto Roth.

Damazyns Hände wirbelten hoch, hastig, fähig, erregt. Vielleicht ein wenig zu erregt. Mit gekonnten Griffen schalteten sie das Gerät, dann legte sich die Rechte auf die Taste. Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger umgriffen den Tasterknopf, begannen ihn niederzudrücken in kurzen und langen Intervallen. Dadidaditt, Pause. Dadaditta.

Volksbildung in der DDR

Bilanz in Zahlen und Fakten



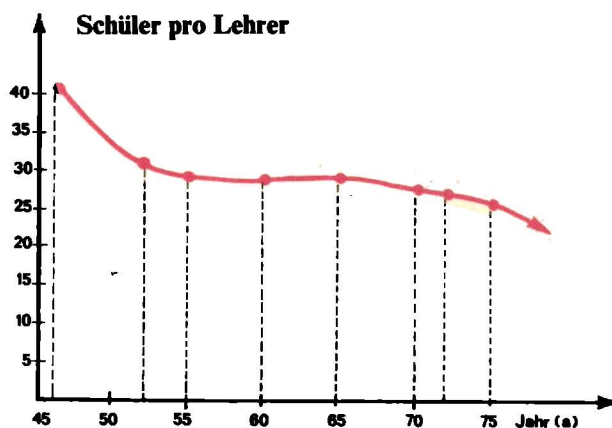
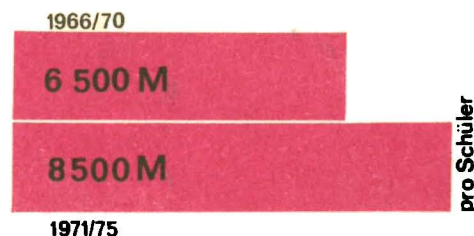
„Die Schule muß der jungen Generation in einem wissenschaftlichen und parteilichen Unterricht hohe Allgemeinbildung vermitteln und eine hohe Wirksamkeit der sozialistischen Erziehung erreichen. Sie soll die Jugend auf das Leben und die Arbeit in der sozialistischen Gesellschaft vorbereiten.“

VIII. Parteitag der SED

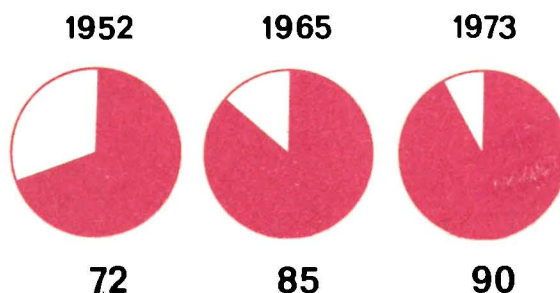
In der DDR hat jeder Bürger das Recht auf Bildung. Das sozialistische Bildungswesen ist eine der größten Errungenschaften unseres Staates und von großer Bedeutung für die Heranbildung allseitig entwickelter Persönlichkeiten.

Mit der Schulreform 1945 wurde der Grundstein für eine demokratische Entwicklung des Schulwesens gelegt. Es entstand ein organisch gegliedertes Schulsystem mit einer 8jährigen Grundschulpflicht. Besondere Aufmerksamkeit galt der Ausbildung von Lehrern und den Landschulen. 1945 gab es in den Dörfern 4114 einklassige Schulen, 1949 waren es noch 668. Die letzte Einklassenschule wurde 1959 aufgelöst. Seit 1959 wird die 10jährige Schulpflicht an den allgemeinbildenden polytechnischen Oberschulen schrittweise verwirklicht. Das Gesetz über das einheitliche sozialistische Bildungssystem aus dem Jahre 1965 leitete eine neue Periode ein. Es umfaßt alle Bildungsstufen vom Kindergarten über die allgemeinbildende polytechnische Oberschule bis zur Hochschule und Erwachsenenqualifizierung. Das Ziel, bis 1975 etwa 90 Prozent der Schüler der allgemeinbildenden Schulen, die die 8. Klasse mit Erfolg beendet haben, in die 9. Klasse aufzunehmen, wurde bereits 1973 insgesamt erreicht.

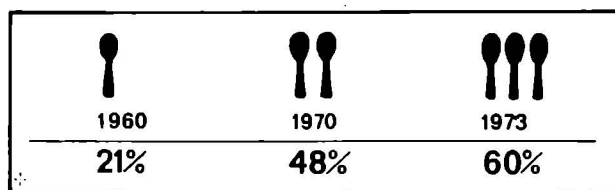
Pro-Kopf-Ausgaben für das Bildungswesen



Anteil der Schüler, die in die 9. Klasse aufgenommen wurden (in Prozent)



Teilnehmer an der Schulspeisung



Unterrichtsräume an allgemeinbildenden Schulen

