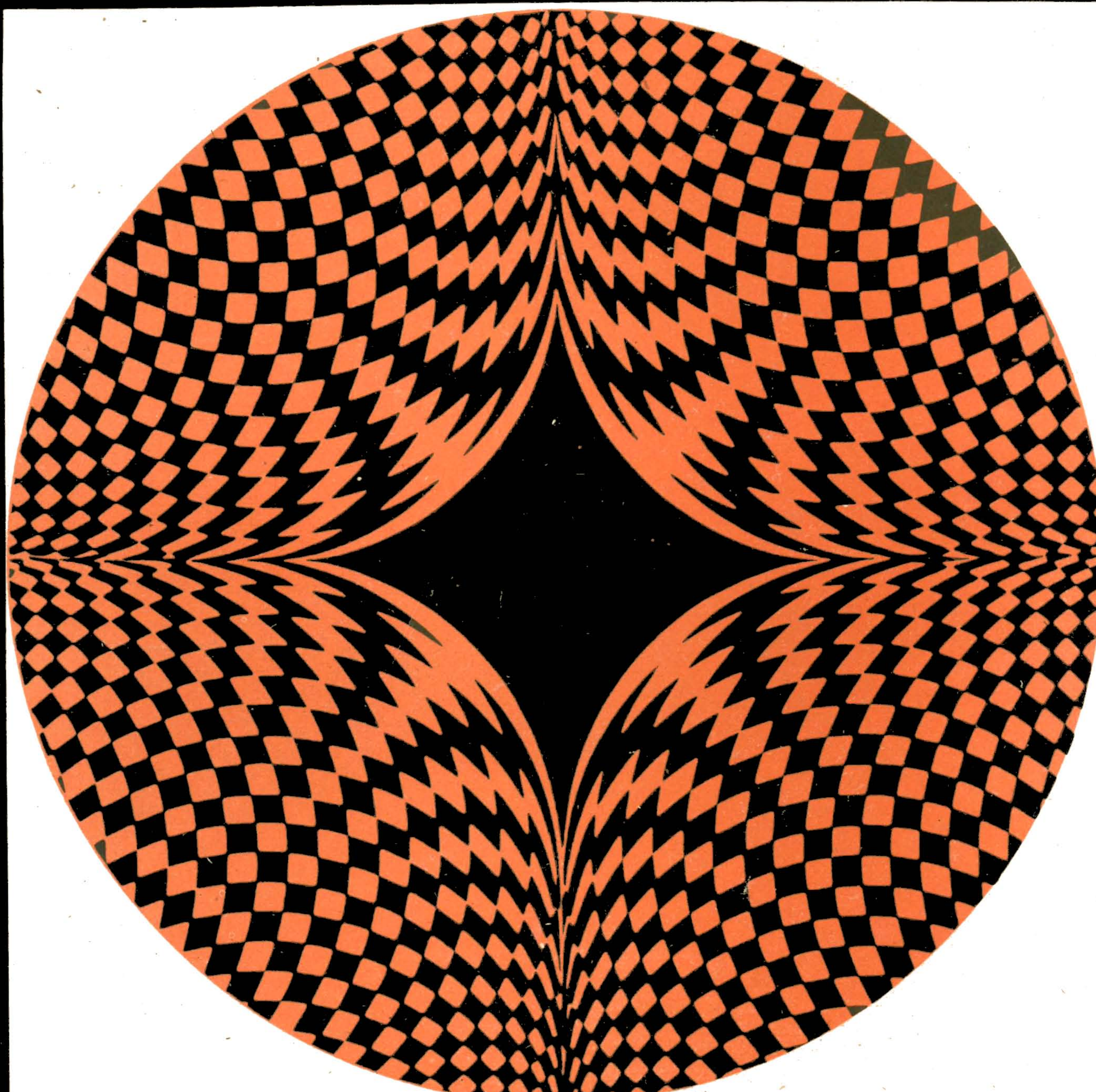
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



1

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
10. Jahrgang 1976
Preis 0,50 M
Index 31059

Redaktionskollegium:
Prof. Dr.-Ing. habil. G. Clemens (Leipzig); Prof. Dr. habil. Lilli Görke (Berlin); Dozent Dr. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dr. habil. E. Hameister (Magdeburg); K. Hofmann (Berlin); Dozent Dr. R. Hofmann (Leipzig); Prof. Dr. H. Karl (Potsdam); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Oberlehrer K. Krüger, Verdienter Lehrer des Volkes (Bad Doberan); Studienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Dozent Dr. H. Lohse (Leipzig); Nationalpreisträger Oberstudienrat Dr. R. Lüders (Berlin); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Prof. Dr. habil. U. Pirl (Berlin); Dozent Dr. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Oberlehrer Dr. H. Schulze (Leipzig); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. habil. W. Walsch (Halle);

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.

Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: K. H. Giersch, Wochenpost 33/74; W. Günzel, Wochenpost 38/74; G. Simerow, aus *Balkanfeuer*, Eulenspiegelverlag (S. 1/3); W. Heiden, Stralsund (S. 5 und 12); R. Ratschew, Sofia (S. 8); Z. Lengren, Warszawa (S. 10); aus Eulenspiegel 35/75 (S. 14);
Vignetten: K.-H. Guckuck, Leipzig (S. 14/15)
Typographie: H. Tracksdorf

Gesamtherstellung: GG Interdruck, Leipzig
Redaktionsschluß: 14. November 1975

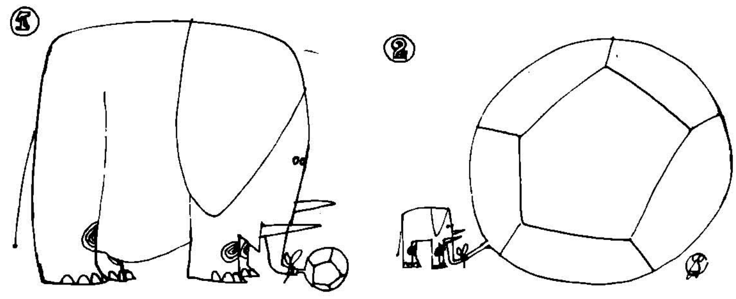
alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* *bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet*

Mathematik und Biologie



Sicher wird mancher Leser bei dieser Überschrift stutzen und sich fragen, welche Beziehungen denn wohl zwischen Mathematik und Biologie bestehen können. Jedem ist aus dem Unterricht die enge Verbindung zwischen Mathematik und Physik bekannt, denn physikalische Gesetzmäßigkeiten werden häufig mit Hilfe von Formeln dargestellt. Dagegen trifft man mathematische Formulierungen im Biologieunterricht kaum an. Es wäre aber verfehlt, daraus schließen zu wollen, daß zwischen Biologie und Mathematik keine Beziehungen bestehen.

Das Leben vollzieht sich in räumlichen und zeitlichen Beziehungen. Eine Pflanze oder ein Tier bildet einen geometrisch beschreibbaren und meßbaren Körper, der ein Element der mannigfaltigen Beziehungen seiner Umwelt bildet und einer bestimmten Ordnung in ihr folgt. Von einer Pflanzen- oder Tierart kommen also bestimmte Mengen in einem Lebensraum vor, die wir beschreiben und zählen. Das dabei gewonnene Zahlenverhältnis ermöglicht uns Aussagen über die Eigenart des Lebensraumes, z. B. über die Zusammensetzung des Bodens, die vorherrschenden Lichtverhältnisse oder die vorhandene Feuchtigkeit. Mathematisch erfaßte Wechselbeziehungen von Organismen in ihrer Umwelt ermöglichen, das Wesentliche beim Weglassen des Unwesentlichen zu gewinnen, also zu abstrahieren. Auf diesem Wege erkennen wir gesetzmäßige Zusammenhänge. Erkannte Gesetzmäßigkeiten ermöglichen uns, die Wechselbeziehungen der Organismen so zu beeinflussen, daß beispielsweise unsere Kulturpflanzen gleichmäßig hohe Erträge bringen und damit unsere Ernährung sichern.

Die Pflanzen und Tiere stehen jedoch nicht nur ihrer Umwelt gegenüber in mathematisch erfaßbaren Beziehungen, auch ihr Bau weist diese auf. So haben wir im 5. und 6. Schuljahr Familien der Samenpflanzen kennengelernt, deren Blütenbau durch das zahlenmäßige Verhältnis seiner Elemente gekennzeichnet ist. Alle Kreuzblütengewächse besitzen z. B. 4 Kelchblätter (K), 4 Kronenblätter (C), 6 Staubblätter (A) und 2 zu einem Stempel verwachsene Fruchtblätter (G). Diese Elemente erscheinen stets in einer bestimmten räumlichen Anordnung, die wir als Blütengrundriß (Blütendiagramm) bei Abstraktion der Farbe, Form, Größe, des Geruchs und anderer Merkmale wiedergeben, die für die betreffende Art charakteristisch sind. Aus diesem Diagramm können wir die Blütenformel, also das rein mathematische Verhältnis, ableiten: K4 – C4 – A2 + 4 – G(2). Die Zahl in der Klammer bedeutet in ein Wort übersetzt: verwachsen; die Trennung der Zahl 6 in 2 + 4 heißt: die Staubblätter sind in zwei Kreisen in der angegebenen Menge angeordnet. Von allen Familien der Samenpflanzen lassen sich diese Blütenformeln als mathematische Verallgemeinerungen aufstellen. Sie helfen uns, die Arten den Pflanzenfamilien rasch zuzuordnen und zu bestimmen.

▲1▲ Deute die Blütenformeln:
a) K(5) – C(5) – A 4 – G(2)
b) K(5) – C 5 – A(9) + 1 – G 1!

Erkunde mit Hilfe des Biologielehrbuches für die 5. Klasse (S. 131 und 129) und für die 6. Klasse (S. 7), um welche Pflanzenfamilien es sich dabei handelt!

Die Pflanzen- und Tierarten haben mannigfaltige Eigenschaften in Bau und Funktion, die heute von der *numerischen Taxonomie*, der Lehre von der Ordnung der Organismen in ihre natürlichen Verwandtschaftsgruppen, mit Hilfe elektronischer Rechenmaschinen genutzt werden und zu neuen Erkenntnissen führen.

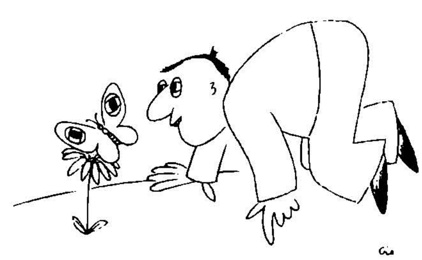
Bisher haben wir verhältnismäßig unveränderliche Merkmale der Organismen mathematisch betrachtet. Wir wissen jedoch, daß die Lebewesen ständigen Veränderungen unterworfen sind. Sie nehmen Stoffe und Energie aus ihrer Umwelt auf, verwerten diese und geben Stoffwechselreste sowie Energie in umgewandelter Form wieder an ihre Umwelt ab. Das Verhältnis der Stoffaufnahme und -abgabe läßt sich mathematisch genauer erfassen. So wissen wir, daß bei der Veratmung eines mol Traubenzucker ($C_6H_{12}O_6$) 6 mol Kohlendioxyd (CO_2) entstehen. Dieses Verhältnis der genannten Gase läßt sich in den Volumina messen. Als Atmungsquotient (respiratorischer Quotient) $RQ = \frac{CO_2}{O_2}$ erlaubt es Aussagen über den Stoffwechsel der Organismen und seine Intensität.

▲2▲ Bei normaler Veratmung von Kohlenhydrat ($C_6H_{12}O_6$) ist der RQ 1.
Berechne, wie groß der RQ bei der Veratmung einer in Fetten häufig vorkommenden Fettsäure, der Stearinsäure, ist, bei der 26 mol O_2 verbraucht und 18 mol CO_2 gebildet werden!

Der Sauerstoff wird im Blute der Wirbeltiere vor allem durch die roten Blutkörperchen transportiert. Ihr Volumen und damit ihre Oberfläche, die zueinander in einem mathematischen Verhältnis stehen, sind bei den einzelnen Klassen – Fische, Lurche, Reptilien, Vögel, Säuger – unterschiedlich gestaltet. Die dadurch bestimmte Menge in einem Kubikmillimeter (mm^3) Blut beträgt beim Menschen durchschnittlich 4,5 Millionen.

Alle biologischen Prozesse beziehen physikalische und chemische Erscheinungen ein. Sie verlaufen unter bestimmten Bedingungen wie Druck und Temperatur, der Veränderung von Stoffen und deren Beschleunigung durch Enzyme, aber auch von Eigenschaften, die für das jeweilige Individuum kennzeichnend sind. Dieses Abweichen im Verhalten verschiedener Organismen vom statistischen errechneten Normwert bezeichnen wir als *biologische Variabilität*. Es genügen deshalb bei Untersuchungen nicht Einzelwerte. Sie können zufällig sein und zu Irrtümern führen. Um Fehlurteile in vorgegebenen Grenzen zu halten, werden als mathematische Mittel die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die mathematische Statistik eingesetzt.

Die meisten Vorgänge und Gesetzmäßigkeiten im biologischen Bereich sind zufälliger Natur, und daraus erklärt sich die Bedeutung



der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Mathematischen Statistik für die Biologie. Es werden in der Biologie aber auch andere mathematische Disziplinen, wie z. B. Graphentheorie, Differentialgleichungen u. a. benötigt. Seit Beginn dieses Jahrhunderts gab es starke Wechselbeziehungen vor allem zwischen Mathematischer Statistik und biologischen Disziplinen im weitesten Sinne (Landwirtschaft, Medizin, Pharmazie, Mikrobiologie, Genetik), die schon im ersten Jahrzehnt dieses Jahrhunderts zur Herausbildung einer neuen Fachrichtung, der *Biometrie*, führten. Zur Biometrie gehören vor allem die den Fragestellungen der Biologie angepaßten Verfahren der Mathematischen Statistik, während man zur *Biomathematik* auch alle anderen mathematischen Methoden rechnet, die in der Biologie besondere Bedeutung erlangt haben.

Die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der *Biostatistik* hat zur Erkenntnis wesentlicher Zusammenhänge in der Vererbungslehre (Genetik) geführt. Das Doppelschrauben-Modell der Anordnung der Nukleotide in der DNS (Desoxyribonuklein-Säure) ist nicht zuletzt das Ergebnis der komplizierten mathematischen Berechnungen seiner Entdecker, der Engländer *Crick* und *Watson* (vergleiche Biologielehrbuch Klasse 10!).

Am Beispiel der Tierzucht soll die Bedeutung der Wahrscheinlichkeitsrechnung bei Anwendung der Mendelschen Gesetze gezeigt werden. Es empfiehlt sich für Schüler der 10. bzw. 12. Klasse, dazu im Biologielehrbuch für Klasse 10 (Volk und Wissen, Berlin 1971) die Abschnitte *Von den Erbanlagen zur Merkmalausbildung* und *Neukombination von Erbanlagen* (Seiten 32 bis 39) nochmals zu lesen.

Besamungsbullen sind als Vatertiere in unserer sozialistischen Landwirtschaft sehr wertvoll. Mit oft mehreren tausend Nachkommen bestimmen sie die Leistungen in der Tierproduktion wesentlich. Deshalb richten Bullen großen Schaden an, wenn sie Träger von Erbkrankheiten sind. Oft werden diese durch unterschiedliche Zustandsformen der Erbanlagen (Gene) gekennzeichnet. Wenn diese am gleichen Ort von gleichen (homologen) Kernschleifen (Chromosomen) getragen werden, heißen sie Allele. Allele mit krankhafter Merkmalsausbildung sind meist in mischerbigen Zellen von Allelen mit normaler Merkmalsausbildung überdeckt. Sie sind rezessiv. Das bedeutet, daß die Krankheit nur auftritt, wenn an einem Genort mit den möglichen Allelen A und a beide Allele vom Typ a sind.

„Mal sehen, was ich für dich finden kann."

Tabelle 1:
Gesundheitszustand eines Rindes in Abhängigkeit vom Genotyp

Genotyp	A A	Aa	aa
Gesundheitszustand	gesund	gesund	krank

Um möglichst zu vermeiden, daß Träger des Allels a zur Besamung von Kühen eingesetzt werden, führt man eine Untersuchung (Test) durch, die mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung geplant werden kann.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses (etwa des Würfelns einer 4) ist eine Zahl zwischen 0 und 1 für die (u. a.) folgende Rechenregeln gelten:

Sind A und B zwei Ereignisse, die sich ausschließen (d. h. nicht beide gleichzeitig eintreten), so gilt

$$P(A \text{ oder } B) = P(A) + P(B) \quad (1)$$

Sind A und B zwei Ereignisse, so gilt

$$P(\text{sowohl } A \text{ als auch } B) = P(A/B) \cdot P(B) \quad (2)$$

Hierbei lesen wir P(X) als Wahrscheinlichkeit von X (des Ereignisses X) und verstehen unter A oder B, daß entweder A oder B oder auch A und B gleichzeitig auftreten und unter A/B das Auftreten von A unter der Bedingung, daß B erfüllt ist. Führt man einen Versuch mit endlich vielen (n) möglichen Ergebnissen durch, die alle gleiche Wahrscheinlichkeit haben und von denen x Ergebnisse das Ereignis A ergeben, so kann man P(A) durch $\frac{x}{n}$ berechnen.

Sind z. B. bei einem Würfel die Zahlen 1, ..., 6 gleichwahrscheinlich, und ist A das Ereignis *gerade Zahl wird geworfen*, so ist $n=6$, $x=3$ und die Wahrscheinlichkeit für das Würfeln einer geraden Zahl gleich $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Ähnlich erhält man für das Würfeln einer 4 die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$. Setzen wir für A das Würfeln einer 4, für B das Würfeln einer geraden Zahl, so ist

$$P(A/B) = \frac{1}{3},$$

da es unter den 3 geraden Zahlen des Würfels eine 4 gibt.

Wir sagen, die Ereignisse A und B seien unabhängig, wenn $P(A/B) = P(A)$ gilt. Dann hat (2) die Form

$$P(\text{sowohl } A \text{ als auch } B) = P(A)\, P(B). \quad (3)$$

Es ist für unsere Untersuchung zu fordern, daß nur solche Bullen in die Besamungsstation aufgenommen werden, die höchstens mit der Wahrscheinlichkeit 0,001 Träger des Allels a sind.

(Diesen Wert kann man so interpretieren, daß im Mittel jeder tausendste Bulle zu unrecht als Besamungsbulle eingesetzt [also Träger von a] ist.)

Zunächst soll erklärt werden, wieso ein Bulle vom Genotyp A a – also ein *gesunder* Bulle – kranke Nachkommen haben kann. Bei der Meiose (Reifeteilung) erzeugt ein solcher Bulle mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ Gameten mit dem Allel A und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ Gameten mit dem Allel a. Auch eine gesunde Kuh vom Genotyp A a erzeugt mit diesen Wahrscheinlichkeiten Gameten mit dem A- bzw. a-Allel.

Tabelle 2: Bulle A a

		A ♂	a ♂
Kuh A a	A ♀	A A	A a
	a ♀	a A	a a

Genotypen der Nachkommen von Bullen und Kühen des Genotyps A a

Nun ist es bei der Befruchtung rein zufällig, welche weibliche Gamete sich mit welcher männlichen Gamete vereinigt, d. h. alle möglichen Kombinationen sind nach (3) gleichwahrscheinlich $\left(=\frac{1}{4}\right)$.

$$P(A♀\ A♂) = P(A♀) \cdot P(A♂) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(A♀\ a♂) = \frac{1}{4}$$

$$P(a♀\ A♂) = \frac{1}{4}$$

$$P(a♀\ a♀) = \frac{1}{4}$$

so daß etwa ein Viertel aller Nachkommen gesunder A a-Bullen und A a-Kühe kranke Tiere (a a) sind.

Ein möglicher Test für das Vorhandensein von a ist der folgende:

Man paart den gesunden Bullen, dessen Genotyp unbekannt ist (A A oder A a) an n kranke Kühe vom Genotyp a a an. Ist der Bulle vom Genotyp A A, so gibt es keine Nachkommen vom Genotyp a a

Tabelle 3: Bulle A A

		A	A
Kuh a a	a	a A	a A
	a	a A	a A

Genotypen der Nachkommen von Bullen vom Genotyp A A und Kühen vom Genotyp a a

denn alle Nachkommen sind vom Genotyp A a.

Ist ein Bulle vom Genotyp A a, so treten

Tabelle 4: Bulle A a

		A	a
Kuh a a	a	a A	a a
	a	a A	a a

Genotypen der Nachkommen von Bullen vom Genotyp A a und Kühen vom Genotyp a a

nach Tabelle 4 mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ Nachkommen vom Genotyp a a auf. Wir können also mit Sicherheit folgende Aussage machen:: Ist der Nachkomme aus der Paarung eines Bullen mit einer Kuh vom Genotyp a a, so trägt der Bulle das unerwünschte Allel und wird nicht in die Besamungsstation aufgenommen. Ist der Nachkomme gesund, so kann der Bulle den Genotyp A A oder A a haben.

Tabelle 5 enthält die möglichen Schlußfolgerungen. Wir ersehen aus der Tabelle, daß eine sichere Aussage nur möglich ist, wenn Nachkommen vom Genotyp a a auftreten.

Tabelle 5: Schlußfolgerungen bei Anpaarung eines gesunden (A A oder A a) Bullen an kranke Kühe anhand des Gesundheitszustandes (gesund = A A oder A a, krank = a a) der Nachkommen

Anzahl der Nachkommen	Gesundheitszustand der Nachkommen	Schlußfolgerung
1	gesund	Bulle hat den Genotyp A A mit Wahrscheinlichkeit 0,5
	krank	Bulle hat den Genotyp A a
2	alle gesund	Bulle hat den Genotyp A A mit Wahrscheinlichkeit 0,75
	wenigstens einer krank	Bulle hat den Genotyp A a
3	alle gesund	Bulle hat den Genotyp A A mit Wahrscheinlichkeit 0,875
	wenigstens einer krank	Bulle hat den Genotyp A a
4	alle gesund	Bulle hat den Genotyp A A mit Wahrscheinlichkeit 0,9375
	wenigstens einer krank	Bulle hat den Genotyp A a

Dann ist der Bulle mit Sicherheit Träger des unerwünschten Allels a und kommt nicht für die Besamung in Frage. Ist ein Nachkomme gesund, so kann der Bulle das Allel a besitzen oder auch nicht. Betrachten wir Nachkommen von 2 (unverwandten) Kühen und des zu testenden Bullen, so sind die Ereignisse T_{1g} *erster Nachkomme ist gesund* und T_{2g} *zweiter Nachkomme ist gesund* voneinander unabhängig, und es gilt wegen $P(T_{1g}/T_{2g}) = P(T_{1g})$ nach (3) für die Wahrscheinlichkeit, daß beide Nachkommen gesund sind
$P(\text{sowohl } T_{1g} \text{ als auch } T_{2g}) = P(T_{1g}) \cdot P(T_{2g})$.
Für n Nachkommen gilt allgemeiner

$$P(\text{sowohl } T_{1g} \text{ als auch } T_{2g}, \ldots, \text{ als auch } T_{ng}) = P(T_{1g}) \cdot P(T_{2g}) \ldots \cdot P(T_{ng}) \quad (4)$$

Wir stellen eine Hypothese (wissenschaftlich begründete [s. o.] Annahme) auf, wir nennen sie Nullhypothese H_0. Sie lautet:

H_0 Der Bulle hat den Genotyp A A

Die Gegen- oder Alternativhypothese H_A lautet:

H_A Der Bulle hat den Genotyp A a

Nun ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der i-te Nachkomme gesund ist (T_{ig}), falls H_0 richtig ist

$$P(T_{ig}/H_0) = 1$$

da bei Gültigkeit von H_0 alle Nachkommen vom Typ A a (also gesund) sind. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der i-te Nachkomme gesund ist, falls H_A richtig ist, ist

$$P(T_{ig}/H_A) = \frac{1}{2} \text{ für jedes } i \ (i = 1, \ldots, n).$$

Folglich ist nach (4)

$$P(\text{alle Nachkommen sind gesund}/H_A) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Wir vereinbaren folgende Entscheidungsregel: Anhand der Nachkommen von n Paarungen des zu testenden Bullen an Kühe vom Genotyp a a entscheiden wir uns für die Annahme von H_0, falls alle n Nachkommen gesund sind. Wir entscheiden uns für H_A, falls wenigstens ein Nachkomme krank ist. Wenn wir uns für H_A entscheiden, so ist die Entscheidung sicher immer richtig. Eine Entscheidung für H_0 dagegen kann falsch sein, der Bulle kann vom Genotyp A a sein, ohne daß ein Nachkomme vom Genotyp a a auftritt. Die Aussage „*H_0 ist richtig*" ist also nur mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit wahr, die wir mit $1-\alpha$ bezeichnen. α heißt Irrtumswahrscheinlichkeit oder Risiko der Entscheidung. Wir wollen nun errechnen, wie groß α in Abhängigkeit von n ist, und angeben, wie groß n mindestens sein muß, damit α den weiter oben vorgegebenen Wert 0,001 nicht überschreitet.

In Tabelle 6 ist $\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ in Abhängigkeit von n angegeben.

Tabelle 6: Wahrscheinlichkeit α für die fälschliche Einstufung eines anhand von n Anpaarungen getesteten Bullen als Besamungsbullen in Abhängigkeit von n

n	α	n	α
1	0,500000	7	0,007812
2	0,250000	8	0,003906
3	0,125000	9	$1{,}953 \cdot 10^{-3}$
4	0,062500	10	$9{,}77 \cdot 10^{-4}$
5	0,031250	15	$3{,}05 \cdot 10^{-5}$
6	0,015625	20	$9{,}54 \cdot 10^{-7}$

Aus Tabelle 6 ersieht man, daß der Wert $\alpha = 0{,}001$ zum ersten Mal für $n = 10$ unterschritten wird, so daß man mindestens 10 Nachkommen für den Test benötigt, um das Risiko unter 0,001 zu halten.

An einigen Beispielen wurden die Beziehungen von Biologie und Mathematik nachgewiesen. Verständlicherweise geben sie nur einen Einblick in die Möglichkeiten, mittels der Mathematik Gesetzmäßigkeiten des Lebens zu erfassen und für die planmäßige, verantwortungsbewußte Veränderung von Lebensprozessen zum Wohle des Menschen anzuwenden. Spezialgebiete der Biomathematik wie statistische Genetik, Bevölkerungsstatistik, Analyse von Wachstums- und Entwicklungsprozessen sowie Bevölkerungsmathematik sollen ihrer großen Bedeutung wegen noch erwähnt werden. Abschließend sei noch auf die Kybernetik als Querschnittswissenschaft von den Reglungs- und Steuerungsvorgängen hingewiesen, weil auch sie über die Mathematik zu tieferen Erkenntnissen des Biologischen führt.

D. Rasch/G. Fehling

Eine Aufgabe von Prof. Dr. habil. Hans Bock

Sektion Mathematik
Karl-Marx-Universität Leipzig

▲1460▲ Ein Oktaeder, dessen Begrenzungsflächen gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge s sind, wird von einer Ebene geschnitten.

a) Bei welcher Lage der Ebene bezüglich des Oktaeders ergibt sich als Schnittfigur ein regelmäßiges Sechseck?

b) Wie groß ist im Falle des regelmäßigen Sechseckes als Schnittfigur das Volumen derjenigen Pyramide, die entsteht, wenn ein Eckpunkt des Oktaeders mit allen Eckpunkten der Schnittfigur verbunden wird?

Ein mutiger Geistesriese der jungen Bourgeoisie

Zum 325. Todestag des Philosophen und Mathematikers

René Descartes

René Descartes (31. 3. 1596 bis 11. 2. 1650), dessen 326. Todestag die fortschrittliche Menschheit in diesen Tagen begeht, wirkte in einer Zeit gesellschaftlicher Bewegungen, die nach den Worten Friedrich Engels „Riesen brauchte und Riesen zeugte. Riesen an Denkkraft, Leidenschaft und Charakter, an Vielseitigkeit und Gelehrsamkeit..., die die moderne Herrschaft der Bourgeoisie begründeten".

Seine Arbeiten als Mathematiker, die die „variable Größe" und damit „die Dialektik und damit die Bewegung" in der Mathematik einführten, kennzeichnet Engels als einen „Wendepunkt in der Mathematik". Sie hatten einen nachhaltigen und bestimmenden Einfluß auf die Entwicklung der Mathematik, der Naturwissenschaften, insbesondere auf die der Physik und nicht zuletzt auf die Herausbildung eines materialistischen Weltbildes. Descartes unternahm den kühnen Versuch, alle damals bekannten Naturerscheinungen durch die mechanische Bewegung zu erklären und ein Weltbild zu entwerfen, welches Makro- wie Mikrokosmos in sich vereinigt und nichts enthielt außer der sich bewegenden Materie. Er verallgemeinerte eine Vielfalt von Beobachtungen und gelangte vielfach zu einer richtigen Erklärung physikalischer, chemischer und physiologischer Erscheinungen. Seine materialistischen Grundthesen von der Materialität und Unendlichkeit der Welt, der unendlichen Teilbarkeit materieller Erscheinungen, der Unzerstörbarkeit von Materie und Bewegung, die Leugnung von Kräften, die außerhalb der Materie stehen (mit Ausnahme Gottes), haben die Entwicklung der Naturwissenschaft und des Materialismus gewaltig beeinflußt und nicht zuletzt die geistige Entwicklung Europas.

Die cartesische Physik wurde zur gleichen Zeit entwickelt wie die Dynamik *Galileis* (1564 bis 1642), aber unter anderen historischen Bedingungen. Descartes war Zeuge des Entstehens „Königlicher Manufakturen" in Frankreich, die zur Stärkung der Macht der Krone in Unterstützung der Geistlichkeit führten, die aber andererseits die Unzufriedenheit der um ihre ökonomische Macht kämpfenden jungen Bourgeoisie schürten. Letztere war ökonomisch zu schwach, den Kampf um die politische Macht zu beginnen. Der Dreißigjährige Krieg führte *Descartes* als Offiziersfreiwilligen verschiedener europäischer Feldherren nach Deutschland, und die Suche nach wissenschaftlichen Arbeitsbedingungen brachte ihn schließlich in das hochentwickelte Holland. Hier schrieb er den größten Teil seiner Werke, die sich gegen die kirchlich-scholastische feudale Weltanschauung richteten.

Descartes forderte eine Philosophie, die der Praxis diene und die Herrschaft des Menschen über die Naturkräfte zu festigen imstande sei. An Stelle jener „spekulativen Philosophie", schrieb er, „wie man sie in den Schulen lehrt, eine praktische zu finden, die uns die Kraft und die Wirkung des Feuers, des Wassers, der Luft, der Gestirne, des Himmelsgewölbes und aller übrigen Körper, die uns umgeben, so genau kennen lehrt, wie wir die verschiedenen Tätigkeiten unserer Handwerker kennen, so daß wir sie in derselben Weise zu allen Zwecken, wozu sie geeignet sind, verwenden und uns auf diese Weise gleichsam zu Meistern und Besitzern der Natur machen können" (*Descartes*). Eine Philosophie zu fordern, die der bewußten Veränderung bestehender Verhältnisse dient, eine Philosophie, die den Glauben durch wissenschaftliche Erkenntnisse verdrängt, eine Philosophie, die das Verneigen vor kirchlichen Dogmen und ihren Autoritäten durch den logischen Beweis verbannt, ist eine „Waffe" in den Händen der Bourgeoisie, die sie gegen den Absolutismus und die Kirche zum Erreichen ihrer ökonomischen und zur Verwirklichung ihrer politischen Macht gebraucht. Damit zog *Descartes* den Haß der katholischen Kirchenmänner auf sich.

Seine materialistischen Grundthesen erschütterten die Grundpfeiler der mittelalterlichen, feudalen Weltanschauung. Dem theologischen Dogmatismus und der religiösen Offenbarung setzte *Descartes* die Kraft des menschlichen Geistes entgegen. Er wandte sich an den gesunden Sinn „einfacher Menschen" und schrieb sein Werk „Abhandlung über die Methode" in der Sprache seines Volkes. Die Wut des Klerus und die Verurteilung *Galileis* im Jahre 1633 zwangen *Descartes*, seine Werke anonym zu veröffentlichen. Sein Werk „Traktat über das Licht" konnte erst 1664, 14 Jahre nach seinem Tode, erscheinen. Der unerbittliche Widerstand der protestantischen Theologen erzwang schließlich das Verbot der Lehre *Descartes* an den Universitäten Utrecht und Leyden. 1650 starb *René Descartes* als einer der Größten unter den Materialisten.

Prof. Dr. habil. Karl-Heinz Kannegießer
(aus: Leipziger Volkszeitung vom 8. 2. 75)

Lebensdaten zu René Descartes

1596 31. März, *René Descartes* Geburt als drittes Kind des Juristen *Joaquim Descartes* in Haye bei Tours
1604 bis 1612 Besuch des Jesuitencollegs La Fleche
1614 bis 1616 Studium in Poitiers, *Descartes* erwirbt das Baccalaureat und Lizenziat der Rechte an der Fakultät zu Poitiers
1618 Erbe eines kleinen Gutes Le Perron im Poitou. Freiwilliger Eintritt in die Armee *Moritz v. Nassau* in Holland
1618 bis 1648 Dreißigjähriger Krieg
1619 Entdeckung des *Eulerschen Polyedersatzes* $e+f=n+2$
1620 Freiwillig in der Armee des Herzogs von Bayern, Teilnahme an der Schlacht am Weißen Berge
1622 bis 1625 Reisen, unter anderem nach Italien
1626 bis 1628 Aufenthalt in Paris, Freundschaft mit *M. Mersenne* und *G. de Balzac*
1628 Emigration nach Holland
1631 Besuch in England
1632 Gründung der Amsterdamer Akademie. Bekanntschaft mit *C. Huygens*
1637 „Discours de la méthode..." erscheint
1638 Streit mit *Fermat* über die Tangentenmethode
1646 *Roberval* bezichtigt *Descartes* des Plagiats
1649 *Descartes* folgt einer Einladung nach Schweden
1650 Tod am 11. Februar
1659 bis 1661 Zweite lateinische Ausgabe der „Geometrie" erscheint
1663 *Descartes* Schriften kommen auf den Index

alpha-Buchtip

Biographien bedeutender Mathematiker

Eine Sammlung von Biographien.
Herausgegeben von *W. Arnold*
und Prof. Dr. sc. *H. Wußing*
536 Seiten, 340 Abb., Halbleinen,
Preis 22,– M
Bestell-Nr.: 706 107 0
Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

Das Buch umfaßt eine Sammlung von 41 Biographien bedeutender Mathematiker von der Antike bis zum Ende des 19. Jahrhunderts. Für das 20. Jahrhundert wird ein Ausblick angefügt. Zur Erläuterung der gesellschaftlichen und ökonomischen Verhältnisse, in denen die Mathematiker lebten, werden für die verschiedenen Epochen Überblicksdarstellungen angegeben. Die Auswahl der Persönlichkeiten, die in diesem Buch vorgestellt werden, wurde von den Herausgebern unter dem Aspekt vorgenommen, daß wichtige Schritte in der Entwicklung erfaßt werden, daß die Schulmathematik berücksichtigt wird und daß möglichst viele Kulturzentren erwähnt werden.
In dem obengenannten Buch finden wir auch einen Beitrag (9 Seiten) über *René Descartes* (Autor: *W. Arnold*, Abteilungsleiter für Mathematik und Naturwissenschaften im VEB Verlag der Wissenschaften, Berlin). Wir geben die Lebensdaten von *R. Descartes* wieder (aus diesem Buch S. 175/176). Siehe Seite 4.

Das ist einer der 100 Teilnehmer des 7. Wettbewerbs Stralsund/Insel Rügen. 50 der erfolgreichsten *Jungen Mathematiker* aus allen Teilen der Insel waren am Sonntag, 12. 10. 1975, nach Stralsund gereist, um in einer zweistündigen Klausur mit den besten *Jungen Mathematikern* Stralsunds ihre Kräfte zu messen. Die Schüler kamen aus Vitte (Hiddensee), Binz, Saßnitz, Bergen, Göhren, Putbus, Garz, Dranske, Sellin. Im März 1976 wird Bergen Gastgeber des 8. Wettbewerbs, im Mai Hiddensee (9. Wettbewerb) sein.

Übung macht den Meister

Gleichungen aus aller Welt
Alle reellen Zahlen x, y bzw. z sind gesucht!

Ungarische Volksrepublik

$$\frac{1}{5}\left\{\frac{1}{5}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}x-5\right)-5\right]-5\right\}-5=0$$

Volksrepublik Polen

$$5x(x+m)-(x-m)(x-2m)=(4x+m)(x+m)$$

ČSSR

$$\frac{3}{4}(x+1)-\frac{2}{3}(2x-1)=2-\frac{5}{6}(x+1)$$

Volksrepublik Bulgarien

$$\frac{19-5x}{4-2x}-\frac{20-14x}{6-3x}=5$$

Island

$$1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}=\frac{1}{x}$$

DDR

$$(p+qx)^2+(px-q)^2=2(p^2x^2+q^2)$$

UdSSR

$$\sqrt{(2x+3)\sqrt{(2x+3)\sqrt{(2x+3)\sqrt{2x+3}}}}=\sqrt{(6-x)\sqrt{(6-x)\sqrt{(6-x)\sqrt{6-x}}}}$$

Republik Österreich

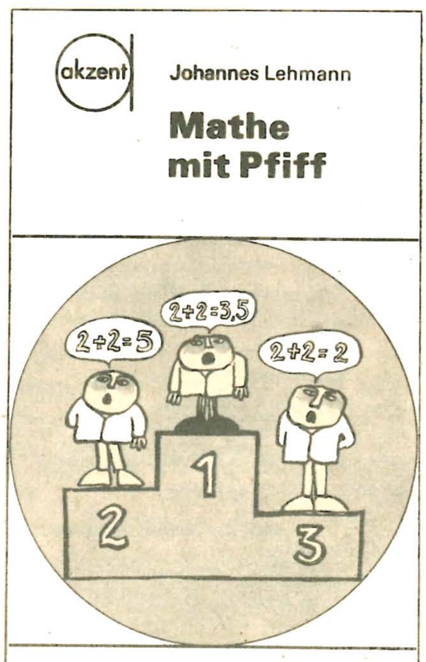
$$4^{\sqrt{x+1}}=64\cdot 2^{\sqrt{x+1}}$$

Sozialistische Republik Rumänien

I $x^2+xy+y^2=13$
II $x+y=4$

Großbritannien

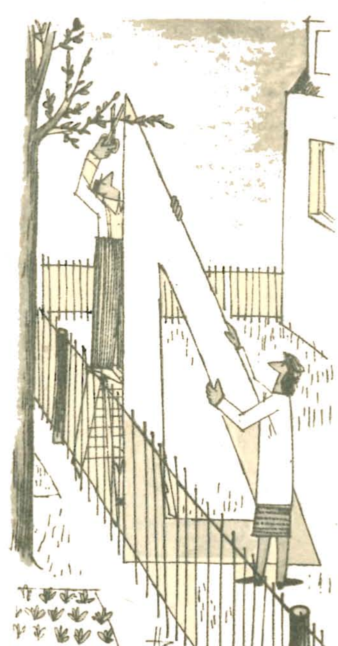
I $3x-6y+z=15$
II $x+5y+3z=-9$
III $2x-y+4z=4$



Ein Buch aus der akzent-Reihe
138 S., zahlreiche lustige Vignetten,
Vierfarbendruck, Best.-Nr. 653 364 6
Preis 4,50 M
Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin

Dieses Taschenbuch ist eine Sammlung von teilweise sehr unterhaltsamen und reizvollen Aufgaben aus allen Gebieten der elementaren Mathematik. Es will insbesondere den jugendlichen Leser zur Beschäftigung mit der Mathematik anregen, indem es Übungs- sowie Denksportaufgaben stellt und die dazugehörenden ausführlichen Lösungswege angibt. Das Taschenbuch zeigt, daß Mathematik nicht trocken sein muß, sondern auch Spaß und Freude bereiten kann.

Aus dem Inhalt:
Überall natürliche Zahlen · Gebrochene Zahlen · Teilbar oder nicht teilbar? · Überall Variable · Gleichungen und Ungleichungen in Theorie und Praxis · Logik/Kombinatorik · Aus alten Mathematikbüchern · Gesucht x, gesucht A · Rund um den Kreis · Geometrie · Magische Quadrate · Würfeleien · Kryptarithmetik · Rätsel und Spiele · umfassende Lösungen



Über die wichtigste Eigenschaft der reellen Zahlen

Teil 2 – Anwendungen

Für unsere weiteren Betrachtungen setzen wir voraus, daß in der Menge der reellen Zahlen eine Ordnungsrelation festgelegt ist (vgl. Lehrbuch Klasse 9, S. 22).

Zunächst eine Vorbemerkung: Es sei $a = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ eine beliebige nichtnegative reelle Zahl. Brechen wir den unendlichen Dezimalbruch $a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ nach der n-ten Stelle (n eine beliebige natürliche Zahl) ab, so erhalten wir $a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ als rationalen Näherungswert von a mit

$$a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \leq a.$$

Erhöhen wir bei diesem Näherungswert die letzte Stelle um 1, so erhalten wir

$a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n + \frac{1}{10^n}$ als rationalen Näherungswert von a mit

$$a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n + \frac{1}{10^n} > a.$$

Summe und Produkt reeller Zahlen

$a = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ und $b = b_0, b_1 b_2 b_3 \ldots$ seien beliebige reelle Zahlen. Da jede dieser Zahlen unendlich viele Stellen nach dem Komma hat, ist hier das für endliche Dezimalbrüche bekannte Verfahren für die Addition nicht anwendbar.[5]

Wir bilden deshalb die folgenden Mengen:

$M_1 = \{x_1 + x_2 \mid x_1, x_2$ rational und $x_1 \leq a$ und $x_2 \leq b\}$

$M_2 = \{y_1 + y_2 \mid y_1, y_2$ rational und $a \leq y_1$ und $b \leq y_2\}$.

M.a.W.: M_1 enthält Summen rationaler Zahlen x_1 und x_2. Dabei sind x_1 bzw. x_2 zu kleine Näherungswerte der reellen Zahlen a bzw. b. Dagegen enthält M_2 Summen von zu großen Näherungswerten von a und b.

Die Mengen M_1 und M_2 haben ebenfalls die Eigenschaften (a) bis (c) (vergl. Teil 1, Heft 6/75). Wir führen hier den Nachweis von (c) für den Fall, daß a und b *nichtnegative* reelle Zahlen sind.

Es seien also $a = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ und $b = b_0, b_1 b_2 b_3 \ldots$ beliebige *nichtnegative* reelle Zahlen und n eine beliebige natürliche Zahl. Wir betrachten die rationalen Zahlen

$$x_1 = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n a_{n+1}$$

und

$$x_2 = b_0, b_1 b_2 b_3 \ldots b_n b_{n+1}.$$ Dann gilt

$$x_1 \leq a < x_1 + \frac{1}{10^{n+1}}$$

und

$$x_2 \leq b < x_2 + \frac{1}{10^{n+1}}.$$ Folglich ist

$$x_1 + x_2 \in M_1, x_1 + \frac{1}{10^{n+1}} + x_2 + \frac{1}{10^{n+1}} \in M_2$$

und

$$\left(x_1 + \frac{1}{10^{n+1}} + x_2 + \frac{1}{10^{n+1}}\right) - (x_1 + x_2) = \frac{2}{10^{n+1}} < \frac{1}{10^n}.$$

Damit ist gezeigt, daß für die Mengen M_1 und M_2 die Eigenschaft (c) gilt, falls a und b nichtnegative reelle Zahlen sind.

Aufgabe 6:

Weise nach, daß die Eigenschaft (c) für die Mengen M_1 und M_2 auch gilt, wenn

(a) eine der Zahlen a und b nichtnegativ, die andere negativ ist

(b) a und b negativ sind.

Nach Satz 1 gibt es genau eine reelle Zahl, die zwischen beiden Mengen liegt. Diese Zahl definieren wir als die Summe der reellen Zahlen a und b.

Beispiel 4: Es sei

$a = 6{,}1020010002000010000002\ldots$ und

$b = 1{,}1234567891011121314 15\ldots$.

Es ist

$6 \leq a < 7$; $6{,}1 \leq a < 6{,}2$; $6{,}10 \leq a < 6{,}11$; $6{,}102 \leq a < 6{,}103$; ...

$1 \leq b < 2$; $1{,}1 \leq b < 1{,}2$; $1{,}12 \leq b < 1{,}13$; $1{,}123 \leq b < 1{,}124$; ...

Zu M_1 gehören beispielsweise die Zahlen $6+1$; $6{,}1+1{,}1$; $6{,}10+1{,}12$ und $6{,}102+1{,}123$. Zu M_2 gehören z. B. die Zahlen $7+2$; $6{,}2+1{,}2$; $6{,}11+1{,}13$ und $6{,}103+1{,}124$.

Die Elemente der Mengen M_1 und M_2 liefern Näherungswerte für die Summe $a+b$. Beispielsweise ist

$$6{,}10 + 1{,}12 \leq a+b < 6{,}11 + 1{,}13$$

bzw. $$7{,}22 \leq a+b < 7{,}24.$$

7,22 ist ein Näherungswert von $a+b$. Die Abweichung dieses Näherungswertes von $a+b$ ist kleiner als 0,02.

Analog ist wegen

$6{,}102 + 1{,}123 = 7{,}225 \leq a+b$

$a+b < 7{,}227 = 6{,}103 + 1{,}124$

auch 7,225 ein Näherungswert von $a+b$ mit einer Abweichung, die kleiner als 0,002 ist.

Aufgabe 7:

Bestimme einen Näherungswert von $a+b$, der um weniger als 0,00002 von $a+b$ abweicht!

In gleicher Weise wie die Summe kann auch das Produkt reeller Zahlen definiert werden. Gegeben seien die reellen Zahlen a und b. Wir wollen hier nur den Fall betrachten, daß a und b positiv sind. Wieder bilden wir Mengen M_1 und M_2, und zwar:

$M_1 = \{x_1 \cdot x_2 \mid x_1, x_2$ positiv und rational und $x_1 \leq a, x_2 \leq b\}$

$M_2 = \{y_1 \cdot y_2 \mid y_1, y_2$ rational und $y_1 \geq a$ und $y_2 \geq b\}$.

Auch dieses Mengenpaar hat die Eigenschaften (a) bis (c). Folglich gibt es genau eine reelle Zahl, die zwischen beiden Mengen liegt. Diese Zahl heißt das Produkt der Zahlen a und b. Das Produkt $a \cdot b$ kann ebenfalls durch Elemente aus M_1 und M_2 angenähert werden.

Beispiel 5: Wählen wir a und b wie im Beispiel 4, so gilt beispielsweise

$$6{,}10 \cdot 1{,}12 \leq a \cdot b < 6{,}11 \cdot 1{,}13$$

bzw. $$6{,}8320 \leq a \cdot b < 6{,}9043.$$

Demnach ist 6,8320 ein Näherungswert von $a \cdot b$ mit einer Abweichung, die kleiner als 0,0723 ist.

Aufgabe 8:

Bestimme einen Näherungswert von $a \cdot b$ mit einer Abweichung, die kleiner als 0,01 ist!

Quadratwurzeln reeller Zahlen

In der 9. Klasse habt ihr die Definition der n-ten Wurzel einer nichtnegativen reellen Zahl kennengelernt, nachdem zuvor folgender Satz ohne Beweis mitgeteilt wurde (vgl. Lehrbuch Klasse 9, S. 25):

Ist a eine nichtnegative reelle Zahl und n eine natürliche Zahl mit $n \geq 1$, so existiert stets genau eine nichtnegative reelle Zahl b mit $b^n = a$.

Wir wollen hier diesen Satz für den Spezialfall $n = 2$ beweisen. Es sei a eine beliebige positive reelle Zahl.[6]

Satz 2:

Es gibt genau eine positive reelle Zahl x mit $x^2 = a$. Diese positive reelle Zahl x wird die Quadratwurzel von a genannt; man schreibt $x = \sqrt{a}$.

Den Satz 2 können wir in zwei Teilaussagen zerlegen:

1. Es gibt mindestens eine positive reelle Zahl x mit $x^2 = a$ (Existenz).

[5] Soll z. B. die Summe der Zahlen 3,10459 und 0,78400 berechnet werden, so beginnt man das Verfahren der Addition mit der am weitesten rechts stehenden Stelle. Reelle Zahlen haben im allgemeinen jedoch unendlich viele Stellen nach dem Komma, so daß es keine am weitesten rechts stehende Stelle gibt.

[6] Für $a = 0$ ist der Satz trivial, denn es ist $0^2 = 0$ und $a^2 \neq 0$ für jede reelle Zahl $a \neq 0$.

2. Es gibt höchstens eine positive reelle Zahl x mit $x^2 = a$ (Eindeutigkeit).

Die Eindeutigkeit können wir wie folgt beweisen:

Angenommen, es gibt wenigstens *zwei* positive reelle Zahlen x_1, x_2 mit $x_1^2 = x_2^2 = a$. Wegen $x_1 \neq x_2$ gilt $x_1 < x_2$ oder $x_2 < x_1$. Daraus folgt aber sofort $x_1^2 < x_2^2$ oder $x_2^2 < x_1^2$ im Widerspruch zu $x_1^2 = x_2^2 = a$.[7]

Beim Beweis der Existenz machen wir von Satz 1 Gebrauch.

Wir betrachten hier die folgenden Mengen:

$M_1 = \{x \mid x \text{ positiv reell und } x^2 \leq a\}$

$M_2 = \{y \mid y \text{ positiv reell und } y^2 \geq a\}$.

Dieses Mengenpaar hat wiederum die Eigenschaften (*a*) bis (*c*).

Zu (*a*): Ist $a \leq 1$, so liegt wegen $a^2 \leq a$ die Zahl a in M_1.

Ist $a > 1$, so liegt die Zahl 1 in M_1.

In jedem Fall ist M_1 nicht leer.

Wegen $(a+1)^2 > a$ für jede reelle Zahl a liegt $a+1$ in M_2. Also ist auch M_2 nicht leer.

Zu (*b*): Für jedes $x \in M_1$ und jedes $y \in M_2$ gilt $x \leq y$.

Gäbe es nämlich Zahlen x in M_1 und y in M_2 mit $x > y$, so wäre $x^2 > y^2$ im Widerspruch zu $x^2 \leq a \leq y^2$.

Zu (*c*): Der Nachweis dieser Eigenschaft wird wie im Beispiel 3 geführt.

Nach Satz 1 gibt es genau eine Zahl s, die zwischen den Mengen M_1 und M_2 liegt. Wir wollen nun zeigen, daß diese Zahl s die geforderte Eigenschaft hat, daß nämlich $s^2 = a$ gilt.

Diesen Nachweis führen wir indirekt. Wir nehmen also an, es sei $s^2 \neq a$. Dann ist entweder $s^2 < a$ oder $s^2 > a$.

1. Fall: $s^2 < a$.

Dann gibt es eine natürliche Zahl n mit[8]

$$s^2 + \frac{1}{10^n} < a.$$

Wir können nun zeigen, daß es eine Zahl t mit $t > s$ und $t^2 < a$ gibt, also eine Zahl t aus M_1, die größer als s ist.

Wie finden wir eine solche Zahl t?

Wir probieren, ob eine der Zahlen $t = s + \frac{1}{10^m}$ (m eine natürliche Zahl) bei geeigneter Wahl von m die Bedingungen $t > s$ und $t^2 < a$ erfüllt.

Offensichtlich ist jede der Zahlen $s + \frac{1}{10^m}$ größer als s. Wie steht es mit der Bedingung $t^2 = \left(s + \frac{1}{10^m}\right)^2 < a$? Es ist

$$t^2 = \left(s + \frac{1}{10^m}\right)^2 = s^2 + 2s \cdot \frac{1}{10^m} + \frac{1}{10^{2m}}.$$

Wegen $\frac{1}{10^{2m}} < \frac{1}{10^m} (m > 0)$ gilt

$$t^2 < s^2 + \frac{2s}{10^m} + \frac{1}{10^m} = s^2 + \frac{2s+1}{10^m}.$$

Damit die rechte Seite der Ungleichung kleiner als a wird, wählen wir m so groß, daß

$$\frac{2s+1}{10^m} < \frac{1}{10^n} \text{ gilt.}$$

Für die Zahl n gilt aber (s. o.) $s^2 + \frac{1}{10^n} < a$.

Folglich ist

$$t^2 < s^2 + \frac{2s+1}{10^m} < s^2 + \frac{1}{10^n} < a.$$

Wegen $t^2 < a$ ist $t \in M_1$. Ferner ist $t > s$ im Widerspruch dazu, daß s zwischen M_1 und M_2 liegt.

2. Fall: $s^2 > a$

Dieser Fall kann analog zum Fall 1 zum Widerspruch geführt werden. Damit haben wir den Satz 2 bewiesen. Die zwischen den Mengen M_1 und M_2 liegende Zahl s ist die Quadratwurzel von a. Die Elemente der Mengen M_1, M_2 sind Näherungswerte für die Zahl $\sqrt{a}$, denn für jedes $x \in M_1$ und jedes $y \in M_2$ gilt

$$x \leq \sqrt{a} \leq y.$$

Beispiel 6: Es sei $a = 5$. Dann sind die Zahlen 2; 2,2; 2,23 und 2,236 aus M_1 und die Zahlen 3; 2,3; 2,24 und 2,237 aus M_2, und es gilt

$$2 \leq \sqrt{5} \leq 3$$
$$2{,}2 \leq \sqrt{5} \leq 2{,}3$$
$$2{,}23 \leq \sqrt{5} \leq 2{,}24$$
$$2{,}236 \leq \sqrt{5} \leq 2{,}237.$$

Die Zahl 2,236 ist ein Näherungswert von $\sqrt{5}$, der um weniger als 0,001 von $\sqrt{5}$ abweicht.

Aufgabe 9:

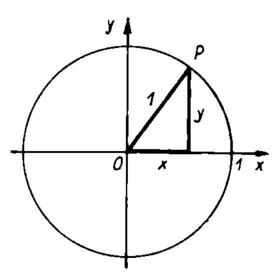
Berechne einen Näherungswert für $\sqrt{7}$ mit einer Abweichung, die kleiner als 0,001 ist!

Flächeninhalt einer Kreisfläche

Die Figur 4 zeigt einen Kreis mit dem Radius 1, dessen Mittelpunkt im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems liegt. Die Koordinaten x und y der Kreispunkte genügen der Gleichung

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Wir wollen nun diejenige Punktmenge betrachten, die aus allen und nur den Punkten $(x; y)$ besteht, für die $x^2 + y^2 \leq 1$ gilt.



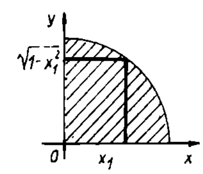
Figur 4

Eine solche Punktmenge nennen wir bekanntlich eine Kreisfläche.

Was versteht man unter dem Flächeninhalt dieser Kreisfläche?

Um diese Frage zu beantworten, wenden wir uns zunächst dem Viertelkreis zu, der im I. Quadranten liegt. Wir betrachten also die Punktmenge (vgl. Fig. 5)

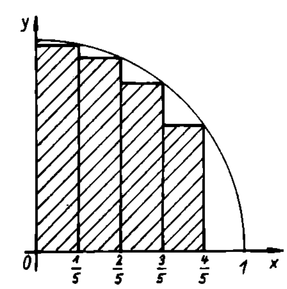
$K = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$.



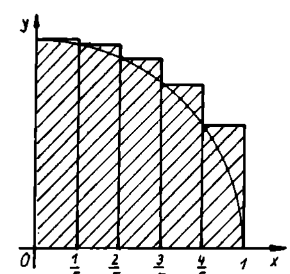
Figur 5

Nun gehen wir davon aus, daß wir den Flächeninhalt von Rechteckflächen berechnen können, nämlich als Produkt von Länge und Breite des betreffenden Rechtecks.

Sei n eine beliebige natürliche Zahl, $n > 1$. Durch Parallelen zur y-Achse an den Stellen $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}$ und durch Parallelen zur x-Achse erhalten wir einmal nebeneinanderliegende Rechteckflächen, die ganz in der Punktmenge K enthalten sind (vgl. Fig. 6) und zum anderen Rechteckflächen, die zusammengenommen die Punktmenge K enthalten (vgl. Fig. 7).



Figur 6



Figur 7

Im ersten Fall erhalten wir $n-1$ Rechtecke. Die Summe der Inhalte dieser $n-1$ Rechteckflächen nennen wir $U(n)$. Für jede natürliche Zahl n $(n > 1)$ gibt es eine Zahl $U(n)$. Die Menge aller Zahlen $U(n)$ nennen wir M_1.

Im zweiten Fall erhalten wir n Rechtecke. Die Summe der Inhalte dieser n Rechteckflächen nennen wir $O(n)$. Für jede natürliche Zahl $n (n > 1)$ gibt es eine Zahl $O(n)$. Die Menge aller Zahlen $O(n)$ nennen wir M_2. (Fortsetzung in Heft 2/76)

H. Lemke/W. Stoye

[7] Wir verwenden dabei, daß < eine Ordnungsrelation in der Menge der reellen Zahlen ist und daß für die Multiplikation reeller Zahlen das Monotoniegesetz gilt.

[8] Sind $a = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ und $b = b_0, b_1 b_2 b_3 \ldots$ nichtnegative reelle Zahlen mit $a < b$, so existiert eine natürliche Zahl k mit $a_k < b_k$ und $a_m = b_m$ für alle $m < k$. Ferner gibt es eine natürliche Zahl n mit $n > k$ und $a_n < 9$. Für diese Zahl n gilt dann $a + \frac{1}{10^n} < b$.

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 6. Mai 1976

Ma 5 ▪1461 Gegeben sei eine zweistellige natürliche Zahl, deren erste Ziffer doppelt so groß ist wie deren zweite. Multipliziert man diese Zahl mit 13, so ist das erhaltene Produkt um 522 größer als diejenige Zahl, die aus der gegebenen Zahl durch Vertauschen der Ziffern hervorgeht. Um welche Zahl handelt es sich? *Andreas Fittke, Berlin*

Ma 5 ▪1462 Das Produkt zweier natürlicher Zahlen betrage 5394. Die Summe aus diesen Zahlen sei gleich 149. Um welche Zahlen handelt es sich? *Andreas Fittke, Berlin*

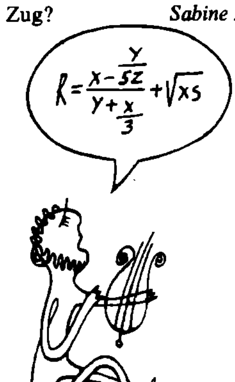
Ma 5 ▪1463 Eine durch 2 teilbare zweistellige natürliche Zahl n_1 habe die Quersumme 9, und ihre zweite Grundziffer sei doppelt so groß wie ihre erste. Eine weitere durch 2 teilbare natürliche Zahl n_2 habe die Quersumme 7. Die Differenz aus n_1 und n_2 ergebe eine Zahl, die größer ist als n_2. Welche Zahlen n_1 und n_2 erfüllen die gestellten Bedingungen? *Matthias Rogall, Dresden*

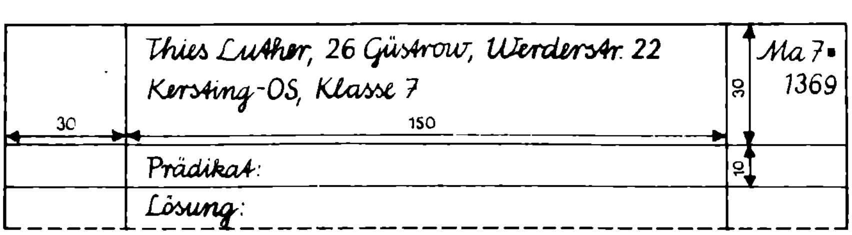
Ma 5 ▪1464 Acht Spielwürfel mit den Augenzahlen von 1 bis 6 seien zu einem Würfel mit doppelter Kantenlänge zusammengesetzt. Für den Betrachter dieses Würfels seien genau drei in einer Ecke zusammenstoßende Seitenflächen sichtbar. Es soll die Summe der sichtbaren Augenzahlen der Spielwürfel dieser drei Seitenflächen ermittelt werden. Zwischen welchen Augenzahlen muß diese Summe liegen? *K.-H. Breitmoser, Neubrandenburg*

Ma 5 ▪1465 Genau vier Mitglieder einer Arbeitsgemeinschaft heißen mit Familiennamen Schulze, genau drei Krause, genau zwei Müller und genau zwei Paetow. Genau drei Mitglieder dieser AG haben den Vornamen Hans, genau drei den Vornamen Fritz und genau vier den Vornamen Günter. Der Leiter dieser Arbeitsgemeinschaft hat den Vornamen Ernst; sein Stellvertreter heißt Hans Paetow. Keine zwei Mitglieder dieser AG haben gleiche Vor- und Familiennamen. Wie heißen die zehn Mitglieder dieser Arbeitsgemeinschaft mit ihrem vollen Namen? *Oberlehrer Karl Becker, Lübtheen*

Ma 5 ▪1466 Im *VEB Kabelwerk Meißen* werden gegenwärtig insgesamt 527 Lehrlinge als Facharbeiter ausgebildet, und zwar 168 Lehrlinge aus der DDR und halb so viel Lehrlinge aus der VR Polen. Aus der Ungarischen VR kommen dreimal so viel Lehrlinge wie aus der VR Polen. Die restlichen Lehrlinge kommen aus der VR Bulgarien. Wieviel Lehrlinge aus den genannten Volksdemokratien werden im VEB Kabelwerk z. Z. ausgebildet? *Schülerin Monika Ramsch, Meißen*

Ma 6 ▪1467 Zwei Personenzüge fuhren in entgegengesetzter Richtung aneinander vorbei. Der erste Zug hatte eine mittlere Geschwindigkeit von $45\frac{\text{km}}{\text{h}}$, der zweite von $36\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ein Fahrgast aus dem zweiten Zug stoppte mit seiner Armbanduhr die Vorbeifahrt dieser Züge. Er stellte fest, daß der erste Zug dafür 6 s benötigte. Wie lang war der erste Zug? *Sabine Köcher, Zittau*





Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm 197 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Mitarbeiter korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1975/76 läuft von Heft 5/75 bis Heft 2/76. Zwischen dem 1. und 10. September 1976 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/75 bis 2/76 erworbenen Karten *geschlossen* an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.
Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/76 veröffentlicht. Wer mindestens 8 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/75 bis 2/76) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1975/76 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird. Redaktion *alpha*

Ma 6 ■1468 Nachdem ein Fahrgast in einem D-Zug die Hälfte seines Reiseweges bereits zurückgelegt hatte, schlief er ein. Als er erwachte, hatte er bis zum Reiseziel noch die Hälfte der Bahnstrecke zurückzulegen, während der er geschlafen hatte.
Welchen Teil der gesamten Reisestrecke war der Fahrgast schlafend gefahren?

Sabine Köcher, Zittau

Ma 6 ■1469 Ein Radfahrer fuhr vom Orte A nach dem Orte B. Nachdem er zwei Drittel des Weges zurückgelegt hatte, zwang ihn eine Reifenpanne, den restlichen Weg zu Fuß zurückzulegen. Dafür benötigte er zweimal so viel Zeit wie für die Fahrt mit dem Fahrrad. Wieviel mal so groß war die Geschwindigkeit während des Radfahrens wie die während des Fußmarsches? *Sabine Köcher, Zittau*

Ma 6 ■1470 Vier Schüler Ernst, Franz, Karl und Martin, deren Familiennamen (in anderer Reihenfolge) Altmann, Müller, Neubert und Tröger lauten, trafen sich auf einer Geburtstagsfeier. Jeder von ihnen brachte für das Geburtstagskind genau ein Geschenk mit. Wir wissen:
a) Martin hatte Blumen, Altmann einen Kugelschreiber, Müller ein Buch und Karl eine Schachtel Konfekt mitgebracht.
b) Als erster verabschiedete sich im Verlaufe des Abends Martin, als zweiter Neubert, danach Ernst und zuletzt Müller. Wie heißen diese Schüler mit Vor- und Nachnamen?

Sch.

Ma 6 ■1471 Zeichne eine Parallelogramm $ABCD$ mit $\overline{AB} > \overline{BC}$ und $\sphericalangle BAD < 90°$. Konstruiere einen inneren Punkt P von $\overline{AB}$ so, daß $\sphericalangle APD = \sphericalangle CPD$ gilt! *Sch.*

Ph 6 ■1472 Eisberge bedeuten für die Seefahrt Gefahrenstellen. Von einem Schiff wird ein Eisberg gesichtet, von dem das Volumen des aus dem Wasser herausragenden Teiles mit $2000\,\text{m}^3$ geschätzt wird. Berechne das (angenäherte) Volumen des gesamten Eisberges, wenn die Dichte des Meerwassers $1{,}03\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ und die Dichte des Eises $0{,}9\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ beträgt! *L. L.*

Ma 7 ■1473 Es ist ein Dreieck ABC aus der Länge der Seite $\overline{AB} = c = 6$ cm, der Länge der Seitenhalbierenden $\overline{CD} = s_c = 8$ cm und der Größe des Innenwinkels $\sphericalangle ACB = \gamma = 40°$ zu konstruieren.
Die Konstruktion ist zu beschreiben.

Ma 7 ■1474 Olaf borgt sich von seinem Freund Peter 0,45 M. Dieser aus 12 Münzen bestehende Geldbetrag setzt sich aus 1-Pfennig-, 5-Pfennig- und 10-Pfennigstücken zusammen. Wieviel Münzen jeder Sorte hat Olaf von Peter erhalten? *Dipl.-Lehrer für Mathematik M. Linde, Damme*

Ma 7 ■1475 Vier Schüler, und zwar Gerd, Hans, Ingo und Kurt, sind entweder Abonnent der mathematischen Schülerzeitschrift „alpha" oder der Zeitschrift „technikus". Von ihnen wissen wir:
a) Genau zwei dieser Schüler, nämlich Gerd und der 10jährige beziehen „alpha", Hans hingegen nicht.
b) Hans, der 11jährige und der 13jährige besuchten Kurt im Krankenhaus.
c) Genau zwei Schüler, nämlich Ingo und der 8jährige beziehen die Zeitschrift „technikus", der 11jährige hingegen nicht.
Wie alt ist jeder dieser vier Schüler, und welche Zeitschrift bezieht jeder von ihnen im Abonnement? *Sch.*

Ma 7 ■1476 Sechs Schüler halfen bei der Obsternte; sie erhielten Anerkennungsprämien entsprechend ihren Leistungen. Jeder von ihnen übergab die Hälfte des erhaltenen Geldbetrages dem Solidaritätskonto. Über diese Schüler ist folgendes bekannt:
a) Keiner von ihnen spendete weniger als 6 Mark und keiner mehr als 12 Mark.
b) Konrad spendete mehr als Peter.
c) Hans spendete mehr als Georg, Georg mehr als Peter, Peter mehr als Inge.
d) Frank spendete mehr als Hans und Hans mehr als Konrad.
e) Hans spendete 2 Mark weniger als Frank, Peter 2 Mark mehr als Inge.
f) Alle spendeten volle Markbeträge.
Wieviel Geld erhielt jeder dieser Schüler für das Obstpflücken?

Schüler Thomas Weiß, Weimar

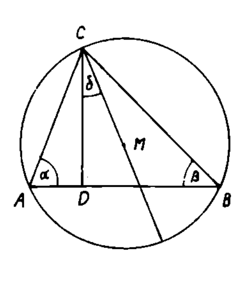
Ph 7 ■1477 Der Moskauer Sportstudent *Wladimir Bure* ist mit 51,36 Sekunden für 100 Meter Freistil der schnellste Mann Europas. Vom Weltrekord des Amerikaners *Mark Spitz* trennen ihn 14 Hundertstelsekunden. *Wladimir* wünscht, die Differenz ausgleichen zu können. Wie groß ist diese (in cm)? *L. L.*

Ch 7 ■1478 Salpetersäure mit einem Gehalt von 24,8% (Massenprozent) hat bei 20 °C die Dichte von $1{,}145\frac{\text{g}}{\text{ml}}$.
a) Welche Masse haben 55 l?
b) Wieviel Liter sind 55 kg dieser Säure?

Dipl.-Chem. G. Brandes, Magdeburg

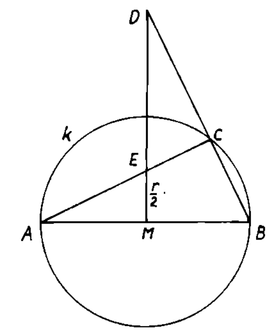
Ma 8 ■1479 Es sei $\Delta\, ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck mit den Winkelgrößen $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$ und $\alpha > \beta$. Dann liegt der Mittelpunkt M des Umkreises dieses Dreiecks im Innern des Dreiecks. Ferner sei D der Fußpunkt der von C ausgehenden Höhe. Man beweise, daß, wenn man $\sphericalangle MCD = \delta$ setzt, $\delta = \alpha - \beta$ gilt.

Herwig Gratias, stud. phys., Sömmerda



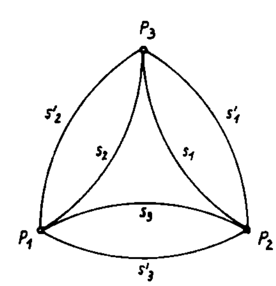
Ma 8 ■1480 Es sei $\overline{AB}$ Durchmesser eines Kreises k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r. In M sei auf AB die Senkrechte errichtet; E sei ein Punkt dieser Senkrechten, der von M den Abstand $\overline{EM} = \frac{r}{2}$ hat. Ferner seien C der zweite Schnittpunkt von AE mit dem Kreis k und D der Schnittpunkt der Geraden ME und BC. Man berechne den Flächeninhalt A des Dreiecks MBD.

Oberlehrer H. Pätzold, VH Waren/Müritz



Ma 8 ■1481 Zur Speicherung von Wärmeenergie ist in Karl-Marx-Stadt eine der größten Anlagen Europas seit drei Jahren in Betrieb. Diese Anlage besteht aus 27 Behältern, die die Form eines geraden Kreiszylinders mit einem Durchmesser von 3,4 m und einer Höhe von 17 m haben. In den Behältern ist Wasser gespeichert, das unter Druck steht und eine Temperatur von 80 °C bis 160 °C, also eine mittlere Temperatur von 120 °C besitzt. Man berechne
a) das Volumen eines solchen Behälters,
b) die in allen 27 Behältern gespeicherte Wärmeenergie in Kalorien (cal), wobei zu beachten ist, daß 1 g Wasser bei einer Temperaturdifferenz von 1 grd gegenüber der Außentemperatur eine Wärmeenergie von 1 cal besitzt, und eine Außentemperatur von 20 °C angenommen wird. *L.*

Ma 8 ■1482 Von drei Ortschaften P_1, P_2, P_3 sei jede mit jeder anderen durch zwei Wege verbunden, also die Ortschaften P_1 und P_2 durch die Wege s_3 und s'_3, die Ortschaften P_2 und P_3 durch die Wege s_1 und s'_1, die Ortschaften P_3 und P_1 durch die Wege s_2 und s'_2.



Diese sechs Wege kreuzen einander nicht.
Ein rüstiger Wanderer will von P_3 aus eine Wanderung unternehmen, bei der er jeden der sechs Wege genau einmal begeht. Wie viele verschiedene Varianten für einen solchen Wanderweg gibt es?

(Dabei gelten zwei Varianten bereits als verschieden, wenn die Reihenfolge, in der die Wege begangen werden, verschieden ist.)

Dr. G. Hesse, Radebeul

Ph 8 ■1483 Welches Höchstgewicht darf ein zweiachsiger Güterwagen haben, wenn der zulässige Druck auf die Eisenbahnschiene $100 \frac{\text{kg}}{\text{cm}}$ beträgt und die Berührungsfläche eines Rades mit der Schiene $5\ \text{cm}^2$ groß ist?

E. Eichler

Ch 8 ■1484 Bei der Ablieferung von Getreide an den VEB Getreidewirtschaft werden 14% Wassergehalt zugrunde gelegt. Eine LPG lieferte zunächst 3,720 t und später 3,800 t ab. Laborproben ergaben 16% Wassergehalt bei der ersten und 12,5% Wassergehalt bei der zweiten Lieferung. Wieviel Tonnen Getreide wurden der LPG angerechnet?

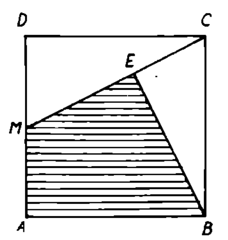
(*Anleitung*: Man berechne die abgelieferte Trockenmasse und ergänze so, daß 14% Wassergehalt angenommen werden können; Rechenstabgenauigkeit genügt.) *Mathematik-Fachlehrer B. Herrmann, Alt-Töplitz*

Ma 9 ■1485 Es ist die Lösungsmenge der Ungleichung

$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2>(x+3)^2+(x+4)^2+(x+5)^2$

im Bereich der reellen Zahlen zu ermitteln. *L.*

Ma 9 ■1486 Es sei $ABCD$ ein Quadrat, dessen Seitenlänge a gegeben ist. M sei der Mittelpunkt der Seite $\overline{AD}$. Von B sei das Lot auf die Verbindungsstrecke $\overline{MC}$ gefällt; der Fußpunkt dieses Lotes sei mit E bezeichnet.



Man berechne den Flächeninhalt des (schraffiert gezeichneten) Vierecks $ABEM$.

Oberlehrer H. Pätzold, VH Waren/Müritz

Ma 9 ■1487 Es sind alle positiven reellen Zahlen x zu ermitteln, für die die Gleichung $x^{x^{1976}}=1976$ erfüllt ist. *A. D. Osmanow, Demurlo, Georgische SSR, UdSSR*

Ma 9 ■1488 Es sind alle Tripel (x, y, z) von nicht negativen reellen Zahlen x, y, z zu ermitteln, für die das Gleichungssystem

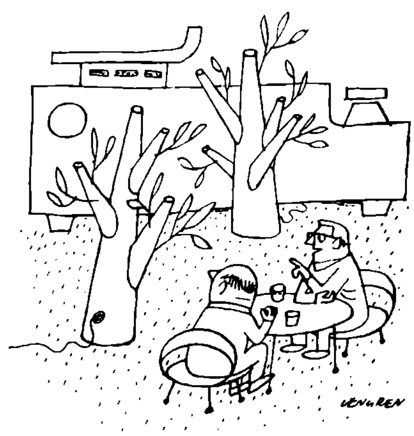
$$x^2+xy+y^2=xyz, \qquad (1)$$
$$x^2+xz+z^2=xyz, \qquad (2)$$
$$y^2+yz+z^2=xyz \qquad (3)$$

erfüllt ist. *Frank Müller, stud. phys., Erfurt*

Ph 9 ■1489 Ein massiver unregelmäßiger Körper aus Blei erscheint einem Schüler zu leicht. Um festzustellen, ob sich im Inneren des Körpers ein Hohlraum befindet, wägt er zunächst den Körper und stellt ein Gewicht von 285 p fest. Im Meßzylinder, der mit 40 ml Wasser gefüllt ist, steigt der Wasserspiegel nach Eintauchen des Körpers bis zum Teilstrich 67 ml. Besitzt der Körper einen Hohlraum? Wenn ja, wie groß ist der Hohlraum?

(Blei $\gamma=11{,}4\ \text{p}\cdot\text{cm}^{-3}$) *L. L.*

Ch 9 ■1490 In der Luft (Idealluft) sind die Edelgase mit 0,03% vertreten. Wie groß müßte man den Durchmesser des Kreises wählen, wenn man in einem Kreisdiagramm die Beteiligung der Edelgase als Kreissektor mit einer Bogenlänge von 2 mm darstellen wollte? *Oberlehrer Ing. H. Pelka, Leipzig*



„Die Bäume sind aus Polyester mit verschiedenfarbiger Innenbeleuchtung."

Ma 10/12 ■1491 Jemand soll die Nullstellen der Funktion f mit

$$f(x)=\sqrt{x-5}-\frac{3}{\sqrt{x-5}}-\sqrt{x-2},$$

die für alle reellen Zahlen x mit $x>5$ definiert ist, ermitteln und rechnet wie folgt:

Aus $\sqrt{x-5}-\frac{3}{\sqrt{x-5}}-\sqrt{x-2}=0$ (1)

folgt $x-5-3=\sqrt{(x-2)(x-5)}$ (2)

und hieraus

$$x-8=\sqrt{x^2-7x+10}, \qquad (3)$$

also
$$(x-8)^2=x^2-7x+10 \qquad (4)$$
$$x^2-16x+64=x^2-7x+10, \qquad (5)$$
$$9x=54, \qquad (6)$$
$$x=6. \qquad (7)$$

Also schließt er, daß $x=6$ eine Nullstelle der Funktion f sei. Nun gilt aber

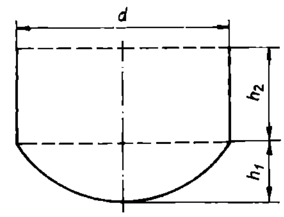
$$f(6)=\sqrt{1}-\frac{3}{\sqrt{1}}-\sqrt{4}=1-3-2=-4<0,$$

also ist $x=6$ nicht Nullstelle der Funktion f.

a) Wo steckt der Fehler der obigen Schlußweise?

b) Es ist zu beweisen, daß die Funktion f in ihrem Definitionsbereich keine Nullstelle hat. *L.*

Ma 10/12 ■1492 Der im Schnitt abgebildete offene Blechbehälter, der aus einer Kugelkappe mit der Höhe h_1 und dem Durchmesser d sowie einem aufgesetzten Zylindermantel mit der Höhe h_2 und dem Durchmesser d besteht, soll durch Tiefziehen aus einer Blechscheibe hergestellt werden.



a) Es ist der Durchmesser D dieser Blechscheibe als Funktion von d, h_1, h_2 darzustellen.

b) Es ist der Durchmesser D für den Fall zu berechnen, daß

$d=230$ mm, $h_1=70$ mm, $h_2=110$ mm ist.

Hinweis zur Lösung: Der Flächeninhalt der Blechscheibe, aus der der Behälter durch Tiefziehen hergestellt wird, ist gleich dem Oberflächeninhalt des offenen Blechbehälters, also gleich der Summe des Flächeninhalts der Kugelkappe und des Flächeninhalts des Zylindermantels. *L.*

Ma 10/12 ■1493 Man ermittle alle Tripel (x, y, z) von natürlichen Zahlen x, y, z, die von Null verschieden und paarweise teilerfremd sind und für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$x^2+y^2=z^2, \qquad (1)$$
$$x+y<50, \qquad (2)$$

x ist durch 7 teilbar. (3)

Schüler Eckhard Liebscher, Ilmenau

Ma 10/12 ■1494 Es sind alle reellen Lösungen der Gleichung

$12x^4-11x^3-146x^2-11x+12=0$

zu ermitteln. *Fachlehrer f. Mathematik H. Kampe, Neuseddin*

Ph 10/12 ■1495 Ein zylindrischer Gießkübel von 80 cm Höhe und 90 cm Durchmesser ist 70 cm hoch mit flüssigem Stahl gefüllt. Um wieviel Grad muß der Gießkübel geneigt werden, damit der Stahl ausfließen kann?

L. L.

„Ich arbeite gerade an der Theorie der fallenden Körper."

Ch 10/12 ■1496 0,5240 g einer eisenhaltigen Legierung wurden im Analysengang gelöst, das Eisen wurde als Hydroxid gefällt und durch Glühen in Eisen(III)oxid überführt. Nach dem Glühen lagen 0,1649 g Eisen(III)-oxid vor. Wieviel % Fe waren in der Legierung vorhanden? *H. Pelka, Leipzig*

Leser fragen – alpha antwortet

Unser Leser *Roland Fiedler*, EOS Gotthold Ephraim Lessing, 12. Klasse, Hoyerswerda, stellt uns die folgende Aufgabe:

Man beweise, daß die Ungleichung

$$m^n > n^m \tag{1}$$

für alle positiven ganzen Zahlen m und n mit $2 < m < n$ erfüllt ist.

Beweis: a) Wir beweisen zunächst, daß die obige Ungleichung (1) für zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, die größer als 2 sind, erfüllt ist, daß also

$$m^{m+1} > (m+1)^m \tag{2}$$

für alle natürlichen Zahlen m mit $m \geqq 3$ gilt.

Nach dem Binomischen Satz ist

$$(m+1)^m = m^m + m \cdot m^{m-1} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot m^{m-2} + \ldots + m \cdot \frac{m-1}{1} \ldots \frac{m-k+1}{k} \cdot m^{m-k} + \ldots + m \cdot m + 1.$$

Ferner gilt wegen $m \geqq 3$ für $k = 2, 3, \ldots, m-2$,

$$m \cdot \frac{m-1}{2} \ldots \frac{m-k+1}{k} \cdot m^{m-k} < m^k \cdot m^{m-k} = m^m$$

und $m^2 + 1 < m^2(m-1) + m^2 = m^3 \leqq m^m$,

also $(m+1)^m < m^m \cdot m = m^{m+1}$,

womit die Ungleichung (2) bewiesen ist.

b) Aus (2) folgt

$$m^{\frac{1}{m}} > (m+1)^{\frac{1}{m+1}}. \tag{3}$$

Setzt man $n = m + k$, wobei k eine positive ganze Zahl ist, so folgt zunächst aus (3)

$$m^{\frac{1}{m}} > (m+1)^{\frac{1}{m+1}} > (m+2)^{\frac{1}{m+2}} > \ldots > (m+k)^{\frac{1}{m+k}} = n^{\frac{1}{n}},$$

also $m^{\frac{1}{m}} > n^{\frac{1}{n}}$, $m^n > n^m$,

womit die Ungleichung (1) für $3 \leqq m < n$ bewiesen ist.

alpha-Wettbewerb

Vorbildliche Hilfe

● Unser Dank gilt den Verlagen, die Bücher im Werte von 2000,– M für die fleißigsten Wettbewerbsteilnehmer zur Verfügung stellten: BSB B. G. Teubner, Leipzig; Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig, Leipzig; VEB Fachbuchverlag, Leipzig; Der Kinderbuchverlag, Berlin; Militärverlag der DDR, Berlin, transpress VEB Verlag für Verkehrswesen, Berlin; Die Wirtschaft, Berlin; VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin; VEB Verlag Die Technik, Berlin; Volkseigener Verlag Volk und Wissen, Berlin; Urania Verlag, Leipzig; Polnisches Informationszentrum, Leipzig.

Gedanken über die Arbeit eines Mathematikers in der Praxis

Im folgenden sollen einige Gedanken zur Tätigkeit eines Mathematikers in der Praxis, insbesondere in der Industrie, geäußert werden. Ich möchte den Betrachtungen eine These voranstellen:

In der Praxis hört die Mathematik auf, eine selbständige Wissenschaft zu sein. Sie kann hier nur über andere Disziplinen, in erster Linie Ökonomie, Technologie und technische Wissenschaften wirken und so ihren Nutzen unter Beweis stellen.

Anders ausgedrückt heißt das: Die Mathematik hat sich an der Praxis zu orientieren, sie hat sich auf die Praxis einzustellen, sie ist hier eben nur Hilfswissenschaft.

Daß sie in der Praxis dann allerdings eine sehr wirksame Hilfe sein kann, wird damit natürlich keineswegs eingeschränkt. Aus der genannten These sollte man eine Reihe von Schlußfolgerungen ziehen, auf die nicht früh genug während der Ausbildung eines Mathematikers hingewiesen werden kann, um manche spätere Enttäuschung von vornherein zu vermeiden.

1. Der Mathematiker darf nicht erwarten, daß ihm die Aufgaben mathematisch formuliert übergeben werden. Vielmehr besteht eine seiner wesentlichen Aufgaben darin, in Zusammenarbeit – oder manchmal auch heftigem Meinungsstreit – mit Vertretern anderer Disziplinen den mathematischen Kern einer Problematik erst herauszuschälen, um danach zu einem mathematischen Modell zu gelangen.

2. Der Mathematiker muß fähig und willens zu einer disziplinierten Zusammenarbeit mit Kollegen anderer Fachrichtungen sein. Er muß deshalb nicht nur über fundierte mathematische Kenntnisse verfügen, sondern auch auf naturwissenschaftlichen, technischen und gesellschaftlichen Gebieten gewisse Grundlagen mitbringen.

3. Das Tempo und die Dynamik unserer Entwicklung und die damit verbundene Vielfalt der in der Praxis anstehenden Probleme verlangt eine große Disponibilität des Absolventen. Er muß sich daher auch während seiner späteren Tätigkeit intensiv weiterbilden, wobei meist die nichtmathematischen Gebiete den Hauptteil ausmachen werden.

4. Der Mathematiker muß sich für eine Aufgabe solange verantwortlich fühlen, bis die Lösung und Einführung in die Praxis vollzogen ist oder – und das kann manchmal leider auch passieren – bis er erkennt, daß sich seine Vorstellungen nicht verwirklichen lassen. Damit werden von ihm große Zähigkeit, Ausdauer, Risikofreudigkeit, Überzeugungskraft und vor allem auch die Fähigkeit verlangt, seine Ergebnisse für Nichtmathematiker darzustellen, ja vielfach sogar für den Arbeiter am Aggregat oder an der Maschine.

5. Es ist eine oft übersehene Tatsache, daß ein beträchtlicher Teil der Kenntnisse und Fertigkeiten eines Mathematikers in der Praxis auf Erfahrungen beruht, die man während des Studiums nur in sehr geringem Maße vermitteln kann. So wird er etwa im Laufe seiner praktischen Tätigkeit erkennen, welche Faktoren vernachlässigbar sind, er wird Erfahrungen über die effektivsten mathematischen Methoden sammeln, und er wird schließlich auch einsehen, daß es letztlich auf den praktischen Nutzen ankommt (und kaum auf die Eleganz mathematischer Beweisführungen, so unangenehm das vielleicht auch in manchen Ohren klingen mag).

Im Zusammenhang mit diesen Schlußfolgerungen dürfte es in erster Linie darauf ankommen, die entsprechende Einstellung zum späteren Einsatz anzuerziehen. Der präzisierte Studienplan enthält viele Möglichkeiten hierzu. Insbesondere das Praktikum hat dabei eine wichtige Rolle zu spielen, aber auch in Lehrveranstaltungen, FDJ-Versammlungen oder Diskussionsrunden mit Praktikern können die angeschnittenen Fragen den Studenten in geeigneter Weise nahegebracht werden. In die gleiche Richtung weist auch die oft hervorgehobene Tatsache, daß nicht alle in der Praxis bedeutsamen mathematischen Aussagen und Ergebnisse während des Studiums behandelt werden können. Eine gute mathematische Ausbildung befähigt den Absolventen – wenn er nur den Willen dazu mitbringt. Ich habe während meines Studiums vor über zwanzig Jahren außer einer Vorlesung über *Praktische Analysis* nur Vorlesungen über Gebiete der *Reinen Mathematik* gehört, konnte mich aber bei meiner späteren Tätigkeit in Leuna sehr schnell in die erforderlichen Gebiete einarbeiten, aber – und das glaube ich heute mit gutem Gewissen sagen zu können – ich hatte die notwendige Einstellung dazu.

J. Piehler

(Vortrag, gehalten auf der Arbeitskonferenz „Mathematik und ihre Wirksamkeit in der sozialistischen Praxis". *Veranstalter*: Wissenschl. Beirat beim Min. für das Hoch- und Fachschulwesen der DDR und Vorstand der Math. Gesellschaft der DDR, 28./30. 11. 1974)

Mathematischer Wettbewerb 1975 Stralsund/Bergen

alpha-Wandzeitung

Der Chefredakteur *alpha* im Gespräch mit den Initiatoren der *Mathematischen Wettbewerbe* Insel Rügen/Stadtkreis Stralsund: *W. Brand* und *W. Perlberg*, Fachberater in Stralsund-Stadt, *Lilly Behrends*, Direktorin des Hauses der JP Stralsund, *Gerti Holz*, Fachberater für Unterstufe, Stralsund-Stadt, *G. Ladda*, Fachberater in Bergen (v. l. n. r.). Die Wettbewerbe finden jährlich zweimal statt. Neben der Mannschaftswertung (pro Klassenstufe) gibt es jeweils noch Urkunden für sehr gute Einzelleistungen der Teilnehmer.

Aufgaben des Vergleichs-Wettbewerbs

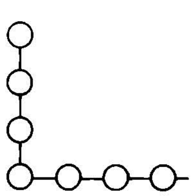
Klassenstufe 3

▲1▲ Du hast die Zahlen 24, 8 und 7. Bilde mit den ersten beiden Zahlen eine Aufgabe! Mit dem Ergebnis dieser Aufgabe und der Zahl 7 bilde die nächste Aufgabe! Das Ergebnis soll 21 sein!

$24 \square 8 = a \qquad a \square 7 = 21$

▲2▲ Für welche Zahlen x gilt: $49 > 8 \cdot x > 31$?

▲3▲ Trage die Zahlen von 3 bis 9 so in die Kreisflächen ein, daß die Summe auf jeder Geraden 23 ist!



▲4▲ Multipliziere eine Zahl a mit 7! Subtrahierst du vom Ergebnis 5, so erhältst du 37. Welche Zahl mußt du für a einsetzen?

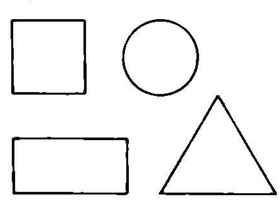
▲5▲ Uwe sammelt ausländische Ansichtskarten. Er hat bereits 64. Davon erhielt er von seinem Freund aus der Sowjetunion 36 Karten, aus der VR Polen hat er den vierten Teil der Karten, aus der SU und aus der ČSSR die restlichen.

a) Wieviel Karten hat Uwe aus der ČSSR?

b) Vergleiche die Anzahl der Karten, und stelle eine Ungleichung auf!

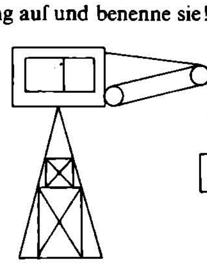
c) Aus welchem Land hat Uwe die meisten Karten?

▲6▲ a) Schreibe die Namen dieser Figuren auf!



b) Bei welchen Figuren verlaufen die gegenüberliegenden Seiten parallel zueinander?

c) Suche je eine dieser vier Figuren in der Abbildung auf und benenne sie!



Klassenstufe 4

▲1▲ Löse folgende Ungleichung: $16883 - a > 16878$!

a) Schreibe die Lösungen für a geordnet auf! (Beginne mit der kleinsten Zahl!)

b) Bilde mit den geordneten Ziffern in umgekehrter Reihenfolge eine Zahl!

c) Berechne die Hälfte dieser Zahl!

▲2▲ Wie alt ist Peter?

Er sagt scherzhaft: „Meine Mutter ist 12 Jahre älter als unsere Republik im vorigen Jahr (gemeint ist 1974) wurde. Sie ist doppelt so alt wie mein Bruder und ich zusammen. Ich bin 3 Jahre jünger als mein Bruder."

▲3▲ Frank sammelt Briefmarken aus drei sozialistischen Ländern. Er hat 250 Marken aus der VR Polen. Viermal soviel hat er aus der Sowjetunion. Der Rest kommt aus der ČSSR. Beim Zählen seiner Marken stellte er fest, daß er 1772 Briefmarken besitzt.

a) Wieviel Briefmarken hat Frank aus der ČSSR?

b) Aus welchem Land hat er die meisten Briefmarken?

▲4▲ Für eine Fahrt zwischen Betonwerk und Baustelle benötigt der LKW 38 Minuten. Das Entladen dauert 16 Minuten.

Um welche Uhrzeit beginnt der LKW seine 2. Fahrt im Betonwerk, wenn die erste Fahrt um 7.16 Uhr begann und das Beladen im Betonwerk 13 Minuten dauert? (Hin- und Rückfahrt sind eine Fahrt!)

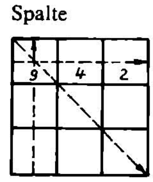
▲5▲ Welche Lage können ein Kreis und eine Gerade zueinander haben?

a) Zeichne alle Lagemöglichkeiten!

b) Wieviel Schnittpunkte kann es zwischen Kreis und Gerade geben?

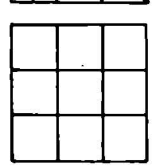
▲6▲ Schreibe die Zahlen von 1 bis 9 so in die freien Kästchen, daß jede Zahl nur einmal vorkommt, daß die Summe in jeder Spalte, in jeder Diagonalen und in jeder Zeile 15 beträgt!

Spalte



Zeile
z. B. $9+4+2=15$

Diagonale



Beachte!
Übertrage das Quadrat auf Deinen Zettel!
Eine Lösung genügt!

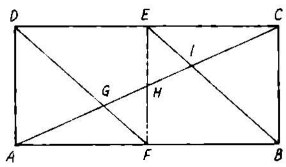
Klassenstufe 5

▲1▲ Bei dieser Multiplikationsaufgabe sind einige Ziffern unleserlich. Sie sollen ergänzt werden. Beschreibe, wie du die Ziffern gefunden hast!

$$\begin{array}{r} 4xx \cdot x2x \\ \hline x3xx \\ x12 \\ xx4x \\ \hline xxxxx8 \\ \hline\hline \end{array}$$

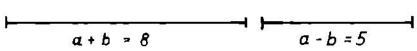
▲2▲ Nach der Kreisolympiade *Junger Mathematiker* wurde ein Pionier gefragt, wieviel Punkte er bekommen habe.
Scherzhaft sagte er: „Wenn man zu der Zahl meiner Punkte 10 hinzufügt und die Summe verdoppelt, so fehlen mir noch 10 Punkte an 100."
a) Wieviel Punkte erzielte der Thälmann-Pionier?
b) Wie hast du das Ergebnis gefunden?

▲3▲ Wieviel Dreiecke sind in der Figur enthalten?
Schreibe alle Dreiecke auf (z. B. ABC)!



Klassenstufe 6

▲1▲ Gegeben sind zwei Strecken.
Die eine ist gleich der Summe zweier Strecken, die andere ist gleich ihrer Differenz.

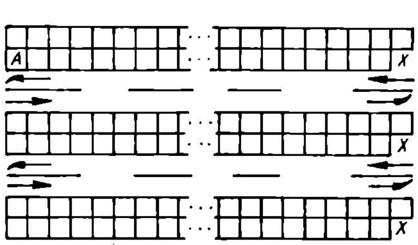


Wie lang sind die Strecken a und b?
Beschreibe, wie du die Lösung gefunden hast!

▲2▲ Sechs Pioniere Axel, Bernd, Claudia, Doris, Erika und Felix nahmen am Leistungsvergleich der *Mathematikklubs* der Kreise Rügen und Stralsund teil. Sie errreichten eine Gesamtpunktzahl von 136 Punkten. Über diese Schüler ist folgendes bekannt:
1. Doris erreichte die höchste Punktzahl und übertraf ihren Mannschaftskameraden Felix um 5 Punkte.
2. Erika und Bernd kamen nicht aus dem gleichen Kreise.
3. Axel und Claudia besuchen den gleichen Mathematikklub.
4. Claudia erreichte bei der XIV. Kreisolympiade in Stralsund 36 Punkte.
5. Axel und Erika belegten für ihre Kreise bei der Bezirksspartakiade im Weitsprung jeweils den 4. Platz.
6. Claudia erreichte 21 Punkte.
7. Erika und Felix wohnen in einem Ort und organisierten im vergangenen Schuljahr drei Altstoffsammlungen.

Aus welchen Kreisen kommen diese sechs Pioniere?

▲3▲ Die beiden *Jungen Mathematiker* Peter und Klaus unterhalten sich über die Anzahl der Parktaschen auf einem großen Parkplatz, der etwa folgendes Aussehen hat:

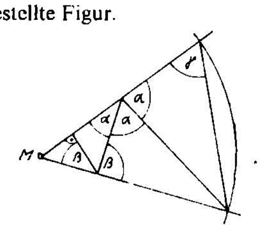


Erklärungen:
A Parktasche für je ein Auto
x 10 m hoher Lichtmast
... hier liegen noch weitere paarweise angeordnete Parktaschen zwischen

Die beiden Schüler können, da der Parkplatz mit Autos besetzt ist, die Anzahl der Parktaschen nicht zählen. Peter meint, die Form des Parkplatzes zu kennen und behauptet, daß genau 370 Parktaschen vorhanden sind. Klaus ist mit dieser Zahl nicht zufrieden. Was meinst du zu Peters Behauptung?

Klassenstufe 7

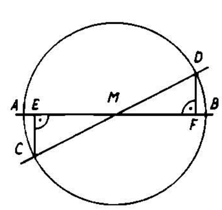
▲1▲ Gegeben sei die in der Abbildung dargestellte Figur.



Wie groß sind die Winkel α, β und γ?
Begründe deine Entscheidungen!
(Die Figur ist nur eine Skizze, nicht maßstabgerecht!)

▲2▲ Gegeben seien zwei natürliche Zahlen a und b ($a > 1$; $b > 1$). Untersuche, ob es Gesetzmäßigkeiten zwischen dem k.g.V., g.g.T. und der Summe, Differenz, Produkt und Quotient dieser natürlichen Zahlen gibt!

▲3▲ Durch den Mittelpunkt M eines Kreises verlaufen zwei Geraden, die in M miteinander einen spitzen Winkel bilden.
Sie schneiden den Kreis in den Punkten A und B bzw. C und D. Von C und D sind die Lote auf die durch A und B verlaufende Gerade gefällt. Die Fußpunkte der Lote seien E und F. (Skizze!)
Beweise, daß die Dreiecke MEC und MFD kongruent sind!



Statut

des Klubs Junger Mathematiker
Haus der Jungen Pioniere Stralsund

Die Erziehung der sozialistischen Schülerpersönlichkeit steht im Mittelpunkt unserer Bildungs- und Erziehungsarbeit. Leiten lassen wir uns dabei von den Grundgedanken des Pionier- und FDJ-Statuts sowie den Pionier- und FDJ-Aufträgen.

1. Aufgaben des Klubs

Die Aufgaben des Klubs bestehen darin,
– die Förderung mathematisch befähigter Pioniere und FDJ-Mitglieder in Zirkeln und Spezialistenlagern und in anderen Formen der Tätigkeit zu gewährleisten,
– die Mitglieder zur selbständigen Arbeit mit mathematischen Schülerzeitschriften und mathematischer Literatur zu befähigen,
– die Vorbereitung, Durchführung und Auswertung der Olympiade *Junger Mathematiker* und anderer mathematischer Wettbewerbe in den Schulen zu unterstützen!
– viele Schüler für die Arbeit mit der Schülerzeitschrift *alpha* und für die Teilnahme an deren Aufgabenwettbewerben zu gewinnen,
– mathematische Probleme in Wissenswettbewerben und Feriengestaltungen einzubeziehen,
– die Öffentlichkeit, insbesondere die Eltern der Mitglieder des Klubs, für die Erreichung der Ziele des Mathematikklubs zu interessieren.

2. Rechte der Mitglieder

Die Mitglieder haben das Recht,
– bei guten Leistungen und gutem gesellschaftlichen Verhalten zu Mathematikolympiaden delegiert zu werden,
– bei hervorragenden Leistungen bei der Bezirksolympiade in den Bezirksklub delegiert zu werden,
– an allen Veranstaltungen des Klubs teilzunehmen,
– die Arbeitsmittel des Klubs zu benutzen,
– Vorschläge zur Gestaltung der Klubarbeit zu unterbreiten.

3. Pflichten der Mitglieder

Die Mitgliedschaft setzt sehr gute mathematische und gesellschaftliche Leistungen, erfolgreiche Teilnahme an den Olympiaden und die volle Anerkennung des Status voraus.
Die Mitglieder haben die Pflicht,
– nach höchsten mathematischen Leistungen zu streben,
– regelmäßig an der Zirkelarbeit und den sonstigen Veranstaltungen teilzunehmen,
– mit ihrem erworbenen Wissen ihre Mitschüler zu unterstützen,
– das mathematische Interesse in ihrem Klassenkollektiv, insbesondere für die jährliche Schulolympiade, zu fördern,
– die Arbeitsmittel und das andere gesellschaftliche Eigentum des Klubs sorgfältig und schonend zu behandeln,
– bei Delegierung an Wettbewerben aktiv teilzunehmen,
– regelmäßig an den Klubnachmittagen teilzunehmen, bei mehrmaligem Fehlen erfolgt der Ausschluß,
– die erfolgreichsten Pioniere und FDJ-Mitglieder werden zum Schuljahresende ausgezeichnet.

Stralsund, Oktober 1971

XV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Kreisolympiade (19. 11. 1975)

Olympiadeklasse 5

1. Die Werktätigen des *Flachglaskombinates Torgau* beschlossen, im Jahre 1975 als Beitrag zum Wohnungsbauprogramm $135000\,m^2$ Flachglas über den Plan hinaus zu produzieren. Diese Glasmenge reicht für 4500 Neubauwohnungen eines bestimmten Typs aus. Ermittle den Bedarf an Flachglas (in Quadratmetern), der nach diesen Angaben für 1000 Neubauwohnungen dieses Typs zugrunde gelegt wurde.

2. Bei den folgenden fünf Gleichungen sind für die Buchstaben x, y, z, u, v natürliche Zahlen so einzusetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Zahlen.

(1) $x = y : 40$,
(2) $z = 4 \cdot u$,
(3) $u = 280 : 7$,
(4) $160 = v + 40$,
(5) $y = z + v$.

3. Als eine Pioniergruppe über ihre in den letzten Jahren durchgeführten Ferienreisen berichtete, stellte sich folgendes heraus:
(1) Genau 13 Mitglieder dieser Gruppe waren schon einmal an der Ostsee.
(2) Genau 15 Pioniere waren schon einmal im Harz.
(3) Genau 6 Pioniere waren schon einmal sowohl an der Ostsee als auch im Harz.
(4) Genau 4 Pioniere waren bisher weder an der Ostsee noch im Harz.
Ermittle die Anzahl aller Pioniere, die dieser Gruppe angehören!

4. Gegeben sei eine Gerade g und auf ihr ein Punkt A. Konstruiere auf dieser Geraden g vier weitere Punkte B, C, D, E, die in dieser Reihenfolge auf derselben von A ausgehenden Halbgeraden liegen und für die folgendes zutrifft:
(1) Die Strecke $\overline{AB}$ ist 2,5 cm lang.
(2) Die Strecke $\overline{BC}$ ist um 0,3 dm länger als als die Strecke $\overline{AB}$.
(3) Die Strecke $\overline{CE}$ ist genauso lang wie die Summe der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$.
(4) Die Strecke $\overline{DE}$ ist um 50 mm kürzer als die Strecke $\overline{CE}$!
Beschreibe die Konstruktion, und ermittle die Länge der Strecke $\overline{AD}$ (in cm)!

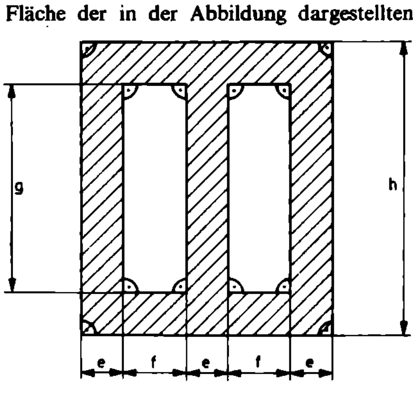
Olympiadeklasse 6

1. Ein sowjetischer Hubschrauber vom Typ Mi-10 kann eine Nutzlast von 15000 kp befördern. Bei einem Transport von Sperrgut mit drei Hubschraubern dieses Typs wurde der erste Hubschrauber zu $\frac{1}{3}$, der zweite zu $\frac{7}{8}$ und der dritte zu $\frac{3}{5}$ seiner Tragfähigkeit ausgelastet. Ermittle das Gesamtgewicht des in diesem Transport von den drei Hubschraubern beförderten Sperrgutes!

2. Das Wohnschiff „Kuhle Wampe", das im Berliner Stadtbezirk Köpenick ständig vor Anker liegt, beherbergt FDGB-Urlaubsgäste. Aus einem Prospekt ist ersichtlich, daß es insgesamt für 41 Urlauber Plätze bietet und daß diese Plätze sich in Zweibett- und Dreibett-Kabinen aufteilen.
Ermittle alle Möglichkeiten für die Aufteilung der Plätze, die sich mit diesen Angaben vereinbaren lassen!

3. Zeichne einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M und einem Durchmesser von 6,4 cm! Trage in diesen Kreis zwei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser ein, und bezeichne ihre auf k liegenden vier Endpunkte der Reihe nach entgegen dem Uhrzeigersinn mit A, B, C, D! Die Gerade durch B und C sei g, die Gerade durch C und D sei h.
Spiegele den Kreis k an g, und nenne den Mittelpunkt des gespiegelten Kreises M_1!
Spiegele den Kreis k an h, und nenne den Mittelpunkt des gespiegelten Kreises M_2!
Als Lösung gilt die ausgeführte Konstruktion ohne Beschreibung.

4. Berechne den Inhalt A der schraffierten Fläche der in der Abbildung dargestellten Figur (die Maße sind der Abb. zu entnehmen).



a) für $e = 10$ mm, $f = 15$ mm, $g = 50$ mm, $h = 70$ mm,
b) allgemein, indem du eine Formel für A herleitest, in der nur die Variablen e, f, g, h auftreten!

Olympiadeklasse 7

1. a) Ein Stück Land habe die Form eines Rechtecks, dessen eine Seitenlänge die andere um 75 m übertrifft und dessen Umfang insgesamt 650 m beträgt.
Ermittle die Seitenlängen und den Flächeninhalt (in Hektar) dieses Landstücks!
b) Auf der ganzen Fläche des genannten Landstücks sollen Obstbäume derart gepflanzt werden, daß die Bäume in jeweils zu den Rechteckseiten parallelen Reihen stehen, also nicht etwa „auf Lücke" gesetzt sind, und der Abstand von Baum zu nächststehendem Baum und der von einer Randseite zum nächststehenden Baum jeweils 5 m beträgt.
Ermittle die genaue Anzahl von Bäumen, die unter den angegebenen Bedingungen gepflanzt werden können!

2. Das Ehepaar Winkler hat genau drei Kinder. Am 1. Januar 1975 war das älteste Kind doppelt so alt wie das zweite und dieses wiederum doppelt so alt wie das jüngste Kind. Die Mutter war doppelt so alt wie ihre drei Kinder zusammen. Der Vater war so alt wie die Mutter und das jüngste Kind zusammen. Alle fünf Familienmitglieder waren zusammen so alt wie der eine Großvater, und dieser war 64 Jahre alt, als das älteste Kind geboren wurde. Wie alt war jede der genannten Personen am 1. Januar 1975?
(Alle Altersangaben sind in vollen Lebensjahren zu verstehen.)

3. In einem spitzwinkligen Dreieck ABC sei CD die Höhe auf AB und CE die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ACB$. Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets

$$\overline{\sphericalangle DCE} = \frac{1}{2} \cdot \left| \overline{\sphericalangle ABC} - \overline{\sphericalangle CAB} \right| \text{ gilt!}$$

4. Konstruiere ein Dreieck ABC aus
$b = 6$ cm, $h_b = 5$ cm, $c = 7$ cm!
Dabei sei b die Länge der Seite AC, c die der Seite AB und h_b die der auf der Geraden durch A und C senkrechten Höhe. Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Olympiadeklasse 8

1. Die Wägung eines mit Wasser gefüllten Gefäßes ergab eine Gesamtmasse (Gefäß- und Wassermasse) von 2000 g. Gießt man 20% des Wassers ab, so verringert sich diese gewogene Gesamtmasse auf 88%.
Berechne die Masse des leeren Gefäßes!

2. Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen $n \geq 1$, für die unter den sechs Zahlen

$n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, $n+5$, $n+6$ ein Paar gefunden werden kann, in dem die erste Zahl des Paares ein echter Teiler der zweiten Zahl des Paares ist!
Nenne (für jedes solche n) alle derartigen Paare!

3. Es sei k ein Kreis mit dem Radius r und dem Mittelpunkt M. Ferner sei AB eine Sehne von k, die nicht Durchmesser von k ist. Auf dem Strahl aus A durch B sei C der Punkt außerhalb AB, für den $\overline{BC}=r$ gilt. Der Strahl aus C durch M schneide k in dem außerhalb CM gelegenen Punkt D.
Beweise, daß dann $\overline{\sphericalangle AMD}=3\cdot\overline{\sphericalangle ACM}$ gilt!
4. Gegeben seien zwei parallele Geraden g_1 und g_2 mit dem Abstand a und außerdem ein Punkt P in beliebiger Lage zwischen g_1 und g_2.
Konstruiere einen Kreis k, der g_1 und g_2 berührt und durch p geht! Beschreibe und begründe deine Konstruktion!
Stelle fest, ob durch die Aufgabenstellung ein Kreis eindeutig bestimmt ist!

Olympiadeklasse 9

1. Klaus hat bei einer Hausaufgabe 4^2-3^2 auszurechnen. Ihm fällt dabei auf, daß das Ergebnis 7 gleich der Summe der beiden benutzten Zahlen 4 und 3 ist. Als er seine Entdeckung an den Zahlen 10 und 11 überprüft, stellt er fest, daß auch hier $11^2-10^2=21=11+10$ ist.
Ermitteln Sie alle Paare (a, b) natürlicher Zahlen mit $a>b$, für die die (positive) Differenz der Quadrate der beiden Zahlen gleich der Summe beider Zahlen ist!

2. In das abgebildete Quadrat sollen die Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5 so eingetragen werden, daß in jeder Zeile und Spalte und in den beiden Diagonalen jede der Ziffern von 1 bis 5 genau einmal vertreten ist. Die bereits eingetragenen Ziffern sollen dabei nicht verändert werden.

	A	B	C	D	E
a	1	2	3		
b					
c				5	
d					4
e					

a) Geben Sie eine den Bedingungen entsprechende Eintragung an!
b) Untersuchen Sie, ob voneinander verschiedene den Bedingungen entsprechende Eintragungen möglich sind, und ermitteln Sie, wenn dies zutrifft, alle derartigen Eintragungen!
(Die Buchstaben an den Rändern des Quadrates sollen die Beschreibungen des Lösungsweges erleichtern. So steht z. B. im Feld cD bereits die Ziffer 5, Kurzschreibweise cD:5.)

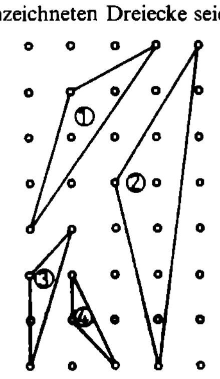
3. Gegeben seien die Seitenlänge a eines Quadrates $ABCD$ sowie eine Länge m, für die $m\leqq a$ gilt. Es sei M derjenige Punkt auf der Seite CD, für den $\overline{MD}=m$ gilt.
Gesucht ist ein Punkt N auf der Seite AD so, daß sich der Flächeninhalt des Dreiecks NMD zu dem des Quadrates $ABCD$ wie $1:7$ verhält. Man ermittle alle diejenigen Werte von m, für die ein solcher Punkt N auf AD existiert, und hierzu jeweils die Länge der Strecke $\overline{DN}$.

4. Bei der Lösung der Aufgabe, ein Dreieck ABC aus $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$ und $\overline{\sphericalangle BAC}=\alpha$ zu konstruieren, seien zwei zueinander nicht kongruente Dreiecke ABC_1 und ABC_2 entstanden, die den Bedingungen genügen.
Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen die Größe des Winkels $\sphericalangle AC_1B$, wenn außerdem bekannt ist, daß er viermal so groß ist wie der Winkel $\sphericalangle AC_2B$!

Olympiadeklasse 10

1. Vor dem Beginn eines Pferderennens fachsimpeln Zuschauer über den möglichen Einlauf der drei Favoriten A, B und C.
Zuschauer
(1): „A oder C gewinnt."
(2): „Wenn A Zweiter wird, gewinnt B."
(3): „Wenn A Dritter wird, dann gewinnt C nicht."
(4): „A oder B wird Zweiter."
Nach dem Einlauf stellte sich heraus, daß die drei Favoriten A, B, C tatsächlich die ersten drei Plätze belegten und daß alle vier Aussagen wahr waren.
Wie lautete der Einlauf?
2. Hubert hat drei Kästchen, deren jedes eine Anzahl von Kugeln enthält. Er legt aus dem ersten Kästchen in jedes der beiden anderen so viele Kugeln hinein, wie jeweils schon darin sind. Dann legt er aus dem zweiten Kästchen in jedes der beiden anderen so viele Kugeln, wie nun zur Zeit jeweils darin sind. Schließlich legt er aus dem dritten Kästchen in jedes der beiden anderen so viele Kugeln, wie nun zur Zeit jeweils darin sind. Danach stellt er fest, daß in jedem der Kästchen genau 64 Kugeln sind.
Ermitteln Sie die Anzahl der Kugeln, die jedes der Kästchen ursprünglich enthielt!

3. Die Eckpunkte der mit 1, 2, 3 und 4 gekennzeichneten Dreiecke seien sämtlich Gitterpunkte eines quadratischen Netzes (siehe Bild).



Ermitteln Sie von diesen vier Dreiecken alle, die untereinander ähnlich sind!

4. Für positive reelle Zahlen a und b gelte
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2. \qquad (*)$$
Es ist zu beweisen, daß dann für diese Zahlen $a+b\geqq 2$ (**) gilt.
Ferner sind alle positiven reellen Zahlenpaare (a, b) zu ermitteln, für die (*) gilt und für die in (**) das Gleichheitszeichen gilt.

Olympiadeklasse 11/12

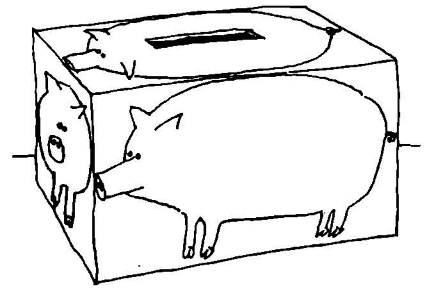
1. a) Man untersuche, ob es natürliche Zahlen n derart gibt, daß in der nach dem binomischen Lehrsatz gebildeten Entwicklung
$$(a+b)^n=c_0a^n+c_1a^{n-1}b+c_2a^{n-2}b^2+\ldots+c_nb^n \qquad (*)$$
die Koeffizienten c_0, c_1, c_2 die Summe $c_0+c_1+c_2=79$ haben. Gibt es solche Zahlen n, so ermittle man sie.
b) Man untersuche, ob es natürliche Zahlen n derart gibt, daß aus (*) durch die Ersetzung $a=x^2$, $b=\frac{1}{x}$ eine Entwicklung
$$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n=c_0x^{k_0}+c_1x^{k_2}+\ldots+c_nx^{k_n}$$
entsteht, in der einer der Exponenten den Wert $k_i=0$ hat, d. h., in der ein von x freies Glied vorkommt. Gibt es solche Zahlen, so ermittle man sie.
c) Man ermittle alle natürlichen Zahlen n, die sowohl die in a) als auch die in b) angegebenen Bedingungen erfüllen.

2. Gegeben sei eine Pyramide, deren Grundfläche ein Rechteck mit dem Flächeninhalt Q ist. Zwei der Seitenflächen stehen senkrecht auf der Grundfläche; die zwei restlichen schließen mit der Grundfläche Winkel der Größe α bzw. β ein.
Man ermittle das Volumen der Pyramide in Abhängigkeit von Q, α und β.

3. Die Forschungsabteilungen zweier volkseigener Betriebe sollen zu einer gemeinsamen Beratung genau je sechs Mitarbeiter delegieren. An der Beratung sollen insgesamt 6 Mathematiker und 6 Ingenieure teilnehmen. In der Forschungsabteilung des einen Betriebes arbeiten 5 Mathematiker und 7 Ingenieure, in der des anderen 7 Mathematiker und 5 Ingenieure.
Man ermittle die Anzahl aller möglichen personellen Zusammensetzungen der Beratung unter den angegebenen Bedingungen.

4. Man ermittle alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, für die das Gleichungssystem
(1) $x+y+z=a$
(2) $x^2+y^2+z^2=a^2$
(3) $x^3+y^3+z^3=a^3$
erfüllt ist, wobei a eine reelle Zahl ist.

In freien Stunden alpha heiter



Wie lautet die richtige Antwort?

Zwei *Junge Mathematiker* unterhalten sich.

A_1: „Das, was du nicht verloren hast, besitzt du das noch?"

B_1: „Ja, das, was ich nicht verloren habe, besitze ich selbstverständlich noch!"

A_2: „Hast du 10000 M verloren?"

B_2: „Nein!"

A_3: „Also, dann besitzt du die nicht verlorenen 10000 M noch und bist sicher bereit, mir 1000 M für ein paar Tage zu leihen?"

B_3: „Du hast mich mit deiner Frage ganz schön reingelegt. In Zukunft werde ich mir meine Antworten besser überlegen!"

Wie müßte die richtige Antwort auf die anfangs von A gestellte Frage lauten?

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

Städtewettkampf

Bei einem Wettkampf zwischen den drei Städten S, T und U erreichten die elf Teilnehmer folgende Punkte:

Teiln. A	910 Punkte	Teiln. G	100 Punkte
„ B	480 „	„ H	40 „
„ C	426 „	„ I	36 „
„ D	408 „	„ K	22 „
„ E	320 „	„ L	10 „
„ F	238 „		

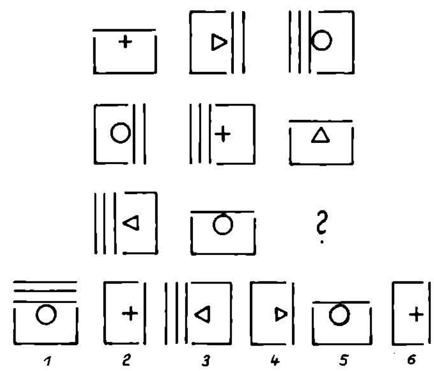
Es stellt sich heraus, daß die Teilnehmer der Stadt S die doppelte Anzahl von Punkten erreicht haben wie die der Stadt T. Aus der Stadt U kommt nu rein Teilnehmer.

Aus welchen der drei Städte S, T und U kommen die 11 Wettkämpfer?

Ing. H. Decker, Köln

Welche Figur?

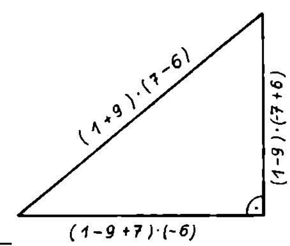
Eine der sechs numerierten Figuren ist in das freie Feld mit dem Fragezeichen einzusetzen, und zwar so, daß die in der Anordnung der nicht numerierten Figuren verborgene Gesetzmäßigkeit nicht verletzt wird.



Welche Figur ist die richtige?

aus: NBI 23/74

Das Jahr 1976



$1^{9-7+6} = 1$

$1^9+7-6 = 2$

$\sqrt{1+9-7+6} = 3$

$-1\cdot 9+7+6 = 4$

$1-9+7+6 = 5$

$\sqrt{(-1\cdot 9+7+6)(1+9-7+6)} = 6$

$1^{9-7}+6 = 7$

$\sqrt{(1+9)\cdot 7-6} = 8$

$1+9-7+6 = 9$

$(1+9)(7-6) = 10$

$19\cdot(7+6)(1-9)(-7+6) = 1976$

Flächeninhalt: $A = 1\cdot\sqrt{9+7}\cdot 6\ FE$

Umfang: $U = 1\cdot\sqrt{9+7}\cdot 6\ LE$

Mathematikfachlehrer H. Biastoch, Gorden

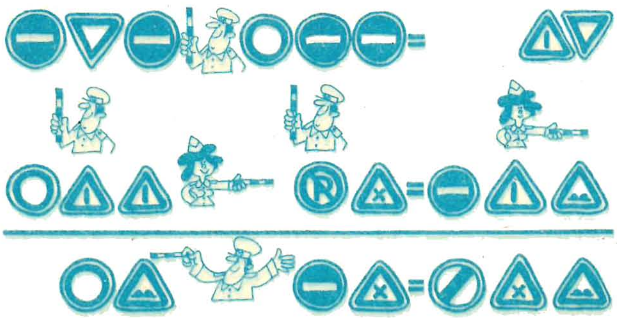
Gezeichnet nach einer Idee von Marion Schlottig, Cottbus

Zahlwörter

1-stand	6-erlei
2-ge	7-schläfer
3-st	8-bar
4-tel	9-auge
5-kampf	10-ender

Verkehrsbereich

Gleiche Verkehrszeichen bedeuten gleiche Ziffern, und gleiche Haltungen des Verkehrsreglers sollen gleiche Grundrechenoperationen (+, –, ·, :) bedeuten. Entsprechendes gilt bei Verschiedenheit der Zeichen. Ersetze so, daß alle sechs Aufgaben richtig gelöst sind!



Kryptarithmetik

Die Buchstaben sind so durch Ziffern von 1 bis 9 zu ersetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

$$\mathrm{PPPPPPPPP} \cdot \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{E}} = \mathrm{P} \cdot \mathrm{PRODUKTE}$$

$$\mathrm{RRRRRRRRR} \cdot \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{E}} = \mathrm{R} \cdot \mathrm{PRODUKTE}$$

$$\mathrm{OOOOOOOOO} \cdot \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{E}} = \mathrm{O} \cdot \mathrm{PRODUKTE}$$

$$\mathrm{DDDDDDDDD} \cdot \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{E}} = \mathrm{D} \cdot \mathrm{PRODUKTE}$$

$$\mathrm{UUUUUUUUU} \cdot \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{E}} = \mathrm{U} \cdot \mathrm{PRODUKTE}$$

$$\mathrm{KKKKKKKKK} \cdot \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{E}} = \mathrm{K} \cdot \mathrm{PRODUKTE}$$

$$\mathrm{TTTTTTTTT} \cdot \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{E}} = \mathrm{T} \cdot \mathrm{PRODUKTE}$$

$$\mathrm{EEEEEEEEE} \cdot \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{E}} = \mathrm{E} \cdot \mathrm{PRODUKTE}$$

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

Silbenrätsel

ar – be – ben – bi – can – chi – des – e – ein – hek – kel – kör – me – me – ne – ne – nom – ons – per – pez – ro – stein – sym – ta – tar – tor – ti – tra – trie – win

1. Fremdwort für Rotationskörper
2. Grundbegriff der Geometrie
3. Begründer der Mengenlehre
4. Flächenmaß
5. Schöpfer der Relativitätstheorie
6. Winkel mit einem gemeinsamen Schenkel und Scheitel
7. Lagebeziehung von Figuren zu einer Geraden
8. Viereck mit zwei parallelen Gegenseiten
9. Mathematiker des Altertums
10. Polynom

Die ersten Buchstaben der 10 gefundenen Wörter ergeben ein Rechenhilfsmittel.

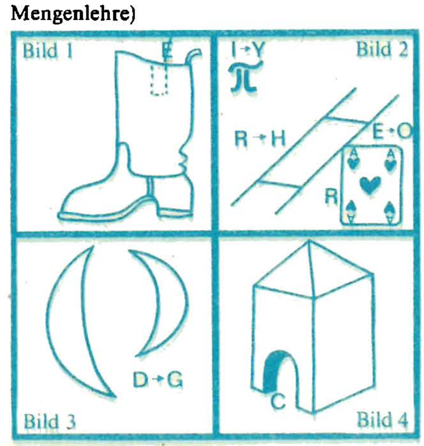
Mathematikfachlehrer Eva Haude, Greifswald

Berühmte Mathematiker

In den folgenden Bildern sind die Namen einiger bedeutender Mathematiker versteckt. Ihr findet sie, wenn ihr die dargestellten Begriffe erratet und die dazu gegebenen Anweisungen beachtet.

Es soll bedeuten:

⋮	Der vierte Buchstabe ist zu streichen!
$I \rightarrow Y$	Anstelle des Buchstabens *I* setzt den Buchstaben *Y*!
Bild 1	deutscher Mathematiker (1487 bis 1567)
Bild 2	griechischer Mathematiker (im 6. Jahrhundert v. u. Z.)
Bild 3	französischer Mathematiker (1746 bis 1818) (Begründer der wissenschaftlichen Darstellenden Geometrie)
Bild 4	deutscher Mathematiker (1845 bis 1918) (Begründer der Mengenlehre)



OStR K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin

Immer wieder Eckensteher!

Etwas mehr Haltung, bitte!

Ein bißchen kantig, aber sonst ganz nett!

alpha-Wettbewerb Abzeichen in Gold

Für achtjährige Teilnahme

Kerstin Bachmann, Halle; **Ralph Lehmann,** Petershagen; **Jörg Hutschenreiter,** Dresden; **Annegret Kirsten,** Leuna; **Lutz Püffeld,** Hennigsdorf; **Christina Feige,** Mühlhausen; **Christoph Scheurer,** Glauchau; **Henrik Frank,** Greifswald; **Uwe Lewandovski,** Leipzig; **Karin Fischer,** Dresden; **Eckhard Schadow,** Oranienburg

Für siebenjährige Teilnahme

Astrid Rösel, Zittau; **Gerlinde Koch,** Schmalkalden; **Guido Blosfeld,** Halle; **Kirsten Helbig,** Frankfurt; **Detlef Poppe,** Mühlhausen; **Andreas Schlosser,** Zwickau; **Ute und Ines Greiner,** Wurzen; **Brigitte Hildenbrandt,** Stützerbach; **Wolfgang Herrmann,** Grünhain; **Martin Ermrich,** Elbingerode; **Hans-Peter Tams,** Ribnitz-Damgarten; **Michael Schnelle,** Calau; **Roswitha Leyh,** Eisenach

Für sechsjährige Teilnahme

Marid Helbig, Frankfurt; **Hermann Tenor,** Dessau; **Angelika Müller,** Greifswald; **Lars Luther,** Güstrow; **Dirk Sprengel,** Potsdam; **Falk Bachmann,** Halle; **Ulf Hutschenreiter,** Dresden; **Hiltrud Manske,** Steinbach-Hallenberg; **Ullrich Riedel,** Flöha; **Bernd Redlich,** Wernburg; **Ulrike Bandemer,** Freiberg; **Olaf Richter,** Pirna; **Horst Kohlschmidt,** Dresden; **Ralf Weber,** Bischofswerda; Andreas Neubert, Schwarzenberg; Hellfried Schumacher, Ahlbeck; Peter Herrlich, Radebeul; Manfred Zmeck, Rüdnitz; Rainer Gutsche, Herzberg; Stephan Fleischmann, Zella-Mehlis; Angela Bagola, Spremberg; Jens-Uwe Richter, Kemtau; Arndt Petzold, Torsten Waldeck, beide Karl-Marx-Stadt; Birgit Weiß, Bernau; Wilfried Carl, Halle; Ilona Drews, Wöbbelin; Birgit Krötenheerdt, Halle; Birgit Kühnstedt, Erfurt; Holger Jurack, Burkau; Falk Bahner, Betina Zimmermann, beide Steinbach-Hallenberg

Für fünfjährige Teilnahme

Elke Halecker, Astrid Surber, Jörg Wachsmann, Silke Zimmermann, alle Clingen; **Andreas Illing,** Gersdorf; **Volker Lerche,** Schmalkalden; **Ulv Krabisch,** Leipzig; **Lew Dimenstein,** Leningrad (UdSSR); **Thies Luther,** Güstrow; **Jan Müller,** Berlin; **Frank Schulze,** Himmelsberg; **Uwe Rieckert,** Cottbus; **Bernd Kreußler,** Leipzig; **Thomas Maiwald,** Olbersdorf; **Karl Krause,** Mansfeld (Rentner); **Wolfgang Huschmann,** Oelsnitz; **Uwe Heiber,** Ilmenau; **Jürgen Sommerschuh,** Bischofswerda; **Christine Hense,** Potsdam; Ursula Garnitz, Zeuthen; Jörg Brüstel, Ziegelheim; Kornelia Poike, Neukirch; Ingo Fietze, Cottbus; Matthias Heinevetter, Heiligenstadt; Gudrun Drews, Wöbbelin; Borwin Wegener, Berlin; Wolfgang Baier, Görlitz; Arno Feuerherdt, Brandenburg; Uwe Beck, Falkensee; Ingolf Buttig, Großharthau; Isolde Kehr, Gospenroda; Frank Aßmus, Oranienburg; Carola Zimmermann, Döbeln; Wulf Henze, Milow; Kirsten Liebmann, Karl-Marx-Stadt; Rita Rempel, Cottbus; Gabriele Schröter, Ilmenau; Thomas Jakob, Gera; Silvia König, Forst; Frank Mulsow, Parchim; Andreas Fischer, Lobetal; Meinhard Mende, Munzenau; Ulrike Zinke, Lützen; Berthold Wettengel, Oelsnitz; Birgit Graizarek, Wickersdorf; Kerstin Utke, Stralsund; Bernhard Tschada, Sondershausen; Heiko Tennert, Döbeln; Klaus Schlegel, Dresden; Volker Fritzsche, Radebeul; Gundula Hanke, Frankenheim; Bianca Herrmann, Zahna; Helfried Schmidt, Dresden; Rainer Seifert, Pinnau; Elke Seidel, Dresden; Volker Manusch, Dittersbach; Andreas Wenzel, Dorfchemnitz; Sigrun Below, Seelow; Thomas Jarosch, Berlin; Petra Scharf, Kathrin Benedix, beide Döbeln; Carola Fechtner, Neubrandenburg; Heidi Günther, Sohland; Rita Klingl, Schleusingerneundorf; Uwe Prochno, Berlin; Andreas Hochhaus, Mühlhausen; Edda Günther, Ronneburg; Michael Lätsch, Reichenbach; Roland Kaschner, Lauchhammer; Annette Schulze, Joachim Ernst, beide Döbeln; Stefan Kaiser, Niederschmalkalden; Silvia Glatzel, Riesa; Karla Eberlein, Niederfrauendorf; Holger Harz, Weimar; Wolfram Flämig, Dresden; Wolfgang Seeber, Gehren; Andreas Fischer, Radebeul; Sabine Pohl, Jena; Dagmar Schüppel, Karl-Marx-Stadt; Cornelia Linz, Cottbus; Doris Jeschner, Eisleben; Heinz-Peter Müller, Bischofferode; Regina Kupfer, Rohrbach; Uwe Bormann, Magdeburg; Elke Fiedler, Dresden; Sybille Baumgart, Löderburg; Monika Künstler, Simone Sauer, Regina Schwarz, Ingolf Wiedermann, Dagmar Hentsche, Anke Tutschke, Angela Lange, Christine Schneider, Harald Berger, alle Burkau; Karin Kusche, Betina Hoffmann, Margit Mangold, Ursula Thomas, Angela Recknagel, alle Steinbach-Hallenberg; Thomas Fuchs, Fambach

Für vierjährige Teilnahme

Sabine Schoof, Neuenhofe; **Uwe Lumm, Frank Billert, Gudrun Bertram, Karin Berndt,** alle Clingen; **Sylvia Kohlmetz,** Zaatzke; **Andreas Kasparek,** Gräfenhainichen; **Andreas Fittke,** Berlin; **Carola Totzauer, Cornelia Thiel,** beide Güstrow; **Gerald Werner,** Meiningen; **Michael Minx,** Berlin; **Stefan Krötenheerdt,** Halle; **Wolfgang Taubert,** Meiningen; **Ulf Ritschel,** Booßen; **Andrea Nießen,** Berlin; **Birgit Rosenberger,** Suhl; **Eckhard Liebscher,** Ilmenau; **Stefan Kasper,** Leipzig; **Arnhild Lorenz,** Görlitz; **Cornelia Thannhausser** Linz (Österreich); Petra Beck, Potsdam; Jürgen Sägenschnitter, Cottbus; Sylke Nölting, Greifswald; Claudia Kummer, Leipzig; Heinz Ernst, Linz (Österreich); Dagmar Lorenz, Görlitz; Bernd Bräutigam, Bernsbach; Petra Maeder, Berlin; Rüdiger Schultz, Bergen; Kurt Oertel, Zschornewitz; Axel Müller, Oberlungwitz; Roland Henze, Arnstadt; Bengt Nölting, Greifswald; Peter Schmidt, Magdeburg; Manfred Zimmer, Volkstedt; Hardy Eich, Glasin; Gudrun Fuchs, Neukloster; Ilona Wünsche, Rodewitz; Jörg Kaiser, Cottbus; Michael Sack, Leipzig; Hartmut Simmchen, Zittau; Audrey Hoffmann, Berlin; Frank Orzschig, Wilkau-Haßlau; Angela Gebhardt, Bernsbach; Uta Gutsche, Herzberg; Petra Stuhr, Heide Kasdorf, beide Güstrow; Peter Röhl; Cottbus; Frank Hasse, Warbelow; Andreas Lochner, Meißen; Elke Gräfe, Oberlichtenau; Clemens Jaunich, Cottbus; Christine und Matthias Kuhnt, Zug; Horst Lange, Olbersdorf; Christian Kolliwer, Jörg Schmeling, beide Berlin; Gerald Hauck, Erfurt; Tanja Hellak, Eisenhüttenstadt; Andreas Bernert, Zwickau; Dagmar Pohle, Elsterwerda; Lothar Gruber, Linz (Österreich); Detlef Kohn, Weimar; Betty Schönherr, Großröhrsdorf; Volker Schulz, Nauen; Klaus Hering, Halle-Neustadt; Katrin Richter, Wittenberg; Uwe Finke, Magdeburg; Rainer Grünert, Dresden; Uwe Klaus, Leipzig; Roland Löffler, Weida; Evelin Ebert, Zschokken; Andrej Jendrusch, Glienicke; Falk Pankau, Wildpark; Matthias Breitbarth, Mühlhausen; Thomas Göpfert, Karl-Marx-Stadt; Manfred Goldenbogen, Stralsund; Astrid Bärenklau, Ruhla; Thomas Luschtinetz, Stralsund; Michael Schalle, Drognitz; Frank Pfeiffer, Warbelow; Ralph Scharf, Döbeln; Hendrik Glaßmann, Karl-Marx-Stadt; Winfried Glöde, Neubrandenburg; Marita Fügas, Berlin; Uwe Börner, Brand-Erbisdorf; Uta Weidauer, Bernsbach, Erika Krüger, Sangerhausen; Matthias Ohm, Ahlbeck; Claudia Endtricht, Görlitz; Axel Schurath, Gnoien; Michael Fukarek, Greifswald; Wolfgang Patzer, Erfurt; Dieter Hornawsky, Silbach; Steffen Döring, Olbersdorf; Lutz Hoffmann, Güstrow; Klaus Harms, Bobzin; Wolfgang Blachnik, Lübbenau; Karin Kramer, Martina Knospe, beide Görlitz; Jens Löwe, Bahratal; Sigrid Meibuhr, Wodarf; Rüdiger Tanzke, Andreas Erben, Hans-Joachim Berger, Hardo Burkhardt, alle Löderburg; Jana Riedel, Ute Selle, Angela Hartewig, Leonore Weise, Bettina Billig, alle Karl-Marx-Stadt; Irmhild Bittner, Greifswald; Ute Busch, Lobenstein; Hartmut Hacker, Breesen; Iris Seeberg, Marlies Gerlach, Gunter Krause, Lutz Schade, Uwe Fischer, Lutz Fuchs, Christine Kretzschmar, alle Hainichen; Rolf Schmid, Kratzmühle; Norbert Ziegler, Ilona Winkler, beide Cunnersdorf; Frank Ringel, Petra Henkel, beide Alt-Töplitz; Jens Scheerschmidt, Oberschönau; Uwe Trautvetter, Neuenhofe; Jörg Keitel, Clingen; Manfred Häußler, Westgreußen; Iris Schulz, Sabine Jahn, Monika Schöbe, alle Rotta; Thomas Kaatz, Gräfenhainichen; Barbara Hössel, Kerstin Schubert, Petra Thomzik, Stefan Meingast, Petro Göbel, Heidi Huhn, Rainer Usbeck, Marina Heil, alle Steinbach-Hallenberg; Karola Volk, Fambach; Sabine Peter, Schmalkalden; Ute Grünbeck, Birgit Herdmann, Christina Wurst, Bernd Linß, Klaus Pabst, Heiko Rosenbusch, alle Mittelstille

Für dreijährige Teilnahme

Christine Spiegelberg, Berlin; **Dirk Herrmann,** Alt-Töplitz; **Barbara Höpfner,** Wolgast; **Henri Hoffmann,** Oberschönau; **Uwe Wiegel,** Neuenhofe; **Torsten Busch, Steffen Apel,** beide Klausdorf; **Christiane Bloch,** Zaatzke; **Michael Thränhardt,** Oranienbaum; **Carola Senft, Uta Richter,** beide Wingerode; **Gerald Manske,** Steinbach-Hallenberg; **Barbara Gehb,** Fambach; **Haiko Müller,** Schmalkalden; **Matthias Bernstein,** Wernshausen; **Bernadette Domaschke,** Seifhennersdorf; **Andrea Hönemann,** Stützerbach; **Volkmar Türke,** Auerbach; **Holger Bensch,** Berlin; **Ute Schilling,** Hoyerswerda; **Aldo und Jörg Bojarski,** Saßnitz; **Astrid und Wolfhart Umlauft,** Freital; **Gudrun Billig,** Coswig; **Roland Schlesinger,** Saßnitz; **Reinhard Pohl,** Dresden; **Ralf Becker,** Wolmirstedt; **Thomas Sroka, Hubertus Mund,** beide Sondershausen; **Michael Weicker,** Mügeln; **Friedemann Vetter,** Bukkow; **Klaus Schenk,** Hoyerswerda; **Andreas Bachmann,** Dresden; **Sabine Lützkendorf,** Erfurt; **Andrea Herrmann,** Hammerunterwiesenthal; **Torsten Löwe,** Schleiz; **Michael Schubert, Torsten Musiol,** beide Güstrow; **Wilfried Röhnert,** Radebeul; Jürgen Hüttner, Kottengrün; Kordula Becker, Moskau (UdSSR); Helmut Bernstein, Freiberg; Dietmar Richter, Halberstadt; Hans-Dietrich Schwabe, Sondershausen; Andreas Gude, Berlin; Armin Hoell, Ribnitz; Annette Schulz, Cottbus; Andreas Matthus, Rostock; Jens Negwer, Grimma; Annette Lasar, Erfurt; Holger Heydrich, Grimma; Werner Jeroch, Dresden; Sylvia Schmidt, Buchholz; Thomas Apel, Reichenbach; Petra Hansch, Klausdorf; Martin Menge, Bernburg; Peter Pörs, Berlin; Thomas Kruppa, Eilenburg; Ellen Krüger, Katrin Wahn, beide Uebigau; Jens Siemoneit, Grimmen; Andreas Schlegel, Dresden; Adrian Schubert, Luga; Dieter Bahlmann, Friedrichsgrün; Holger Kreil, Mittelbach; Ulrike Otto, Ilmenau; Frank Kratsch, Göhren; Dirk Markgraf, Bischofferode; Holger Hentze, Leipzig; Rita Hellmann, Großschönau; Steffen Hanisch, Dresden; Sylvia Zipf, Waldheim; Armin Körner, Leipzig; Eva Kertész, Kecskemét (Ungarische VR); Michael Schott, Gräfenthal; Roger Labahn, Anklam; Michael Zwicke, Riesa; Ralf Kretschmer, Dresden; Lutz Gründel, Dessau; Sabine Einert, Pockau; Steffen Roch, Annaberg; Jürgen Lehmann, Weimar; Rainer Bauer, Mittweida; Christiane Jordan, Kietz; Angela Mäder, Plottendorf; Anke Bartsch, Rostock; Valeska Heymann, Berlin; Jürgen Rolle, Schlegel; Carola Berger, Grimma; Holm Dettmer, Dresden; Ronald Rösch, Karl-Marx-Stadt; Thomas Reuscher, Stralsund; Gert Mielke, Rolofshagen; Ute Scharkowski, Zepernick; Ruth Klingbeil, Salow; Katrin Rurainsky, Bad Langensalza; Jürgen Krahl, Plauen; Monika Schulz, Berlin; Christine Kindt, Wendisch-Priborn; Ulf Günther, Ronneburg; André Wortha, Pleetz; Gunter Reißig, Weimar; Christian Wolf, Greifswald; Regina Kreul, Zittau; Michael Zschiesche, Leipzig; Uwe Horn, Bad Frankenhausen; Bertram Utzelmann, Grünhain; Annekatrin Elsner, Ponickau; Sylvia Kunze, Weißenfels; Antje Matthesius, Ratzdorf; Susanne Jähnisch, Wellmitz; Achim Bastian, Ribnitz; Andrea Puchert, Eichicht; Frank Regensburger, Dresden; Andreas Feige, Mühlhausen; Michael Apitz, Dresden; Günter Mosel, Gülze; Irmtraud Schröder, Kl. Schwarzlosen; Frank Janke, Falkenberg; Klaus-Peter Schröder, Rostock; Bernd Henke, Schwarzheide; Manuel Richter, Wilthen; Dagmar Klatte, Görlitz; Günter Carlsen, Titschendorf; Roland Fiebig, Halle; Almute Mende, Riesa; Uwe Hanisch, Dresden; Beate Lehrmann, Walbeck; Ramona Zschau, Grimma; Bettina Schade, Waren; Elke Barth, Arnsnesta; Uli Meier, Weißenfels; Karin Willner, Gerstungen; Mario Hoffmann, Kirchberg; Jörg Hlouschek, Treben; Holger Schnabel, Wismar; Steffen Wandslebe, Hoyerswerda; Sylvia Wende, Leinefelde; Thomas Purcz, Leipzig; Mario Schmidt, Bischofferode; Heidelore Stallbohm, Eldena; Armin Wappler, Königswalde; Andreas Philipp, Rochlitz; Gerald Görmer, Berlin; Birgit Boldt, Ludwigslust; Bernd Heinemann, Strausberg; Diether Pickel, Meyenburg; Holger Hoppe, Stendal; Christina Busch, Niendorf; Hartger Hohmann, Lübtheen; Dietmar Tkazyk, Bornitz; Peter Möller, Bad Doberan; Diethard Spieß, Bad Langensalza; Holger Milnik, Jördenstorf; Hans-Christoph Vogel, Hoyerswerda; Angelika Engelhardt, Viernau; Marlies Kolberg, Stahnsdorf; Christine Stüber, Alsleben; Hans-Joachim Babetzke, Lübtheen; Heike Keller, Cossebaude; Heike Rabsahl, Iris Lange, beide Fockendorf; Beate Kuhle, Gr. Schwarzlosen; Heike Waldert, Gotha; Michael Winks, Berlin; Karsten Wallroth, Eisenach; Kurt Wiechmann, Glasin; Harald Schlesinger, Saßnitz; Reinhardt Rascher, Karl-Marx-Stadt; Peter Brauer, Gnoien; Katrin Pech, Waren; Michael Beck, Blankenfelde; Annette Pötschke, Bautzen; Wolfgang Fukarek, Greifswald; Frank Wegner, Rostock; Beatrix Seeboth, Gernrode; Birgit Klunk, Neukloster; Jens Helbig, Hohenstein-Ernstthal; Ines Quast, Lübbendorf; Ines Gustmann, Coswig; Thomas Pahl, Prenzlau; Burkhard Schult, Ludwigsfelde; Renate Gramsch, Großenhain; Uwe Räffler, Bischofferode; Eckhard Unger, Boizenburg; Kerstin Wucherpfennig, Halle-Neustadt; Ralf Böttger, Hoyerswerda; Steffen Heinrich, Zittau; Gunar Kloss, Merseburg; Ina Greiner-Petter, Malchin; Brigitta Kern, Hirschfelde; Helmut Heiland, Niederorschel; Detlef Neubauer, Berlin; Asmund Hohmann, Lübtheen; Pia und Petra Hellmuth, Dresden; Ina Freber, Meißen; Christian Gürlich, Ketzin; Susann Freyer, Müllrose; Katrin Römer, Karl-Marx-Stadt; Andreas Richter, Weißwasser; Burkhard Rahr, Groß-Naundorf; Ute Sonnenburg, Hennigsdorf; Martina Jentsch, Cossebaude; Angela Krüger, Wellmitz; Michael Kirchner, Sondershausen; Karen Angrick, Neukloster; Klaus Badenschier, Wittenberge; Sybille Lieb, Lüttewitz; Kerstin Nörenberg, Berlin; Peter Wiehe, Bischofferode; Kerstin Klingbeil, Oberlungwitz; Elke Klein, Lüderitz; Ralf Griese, Groß Wüstenfelde; Veit-Thomas Meyen, Grimmen; Matthias Dietsch, Holger Mehle, beide Fockendorf; Thomas Guffler, Eisenach; Bernd Hübner, Oybin; Steffen Wendt, Haida; Achim Troll, Oberlungwitz; Peter Rosenbohm, Ribnitz; Michael Feudel, Bischofferode; Olaf Wender, Mühlhausen; Claudia Ziehm, Berlin; Jörg Hinrichs, Sellin; Heike Manthey, Ribnitz; Cornelia Otto, Raguhn; Torsten Reetz, Mellensee; Bernhard und Birgit-Cornelia Maaz, Jena; Hartmut Alwardt, Ziddorf; Reinhard Frank, Hirschberg; Dagmar Laux, Leipzig; Marina Mittag, Dresden; Wolfgang Kirschnick, Schwerin; Thomas Köhler, Oederan; Klaus und Dieter Löbe, Osternienburg; Bernhard Wilde, Dresden; Carmen Henze, Pratau; Beate Küchler, Pirna; Constanze Weisbrod, Halle; Hansjörg Himmel, Leipzig; Thomas Müller, Krems (Österreich); Petra Hampel, Leutersdorf; Torsten Flade, Beiersfeld; Walter Tiedtke, Schorssow; Gert Trinks, Dresden; Uwe Hartig, Riesa; Hans Wagner, Werdau; Holger Pfeifer, Dresden; Steffen Gollmer, Berlin; Hilmar Müller, Blüthen; Andreas Pietsch, Zella-Mehlis; Holger und Heike Stehfest, Havelberg; Andreas Seifert, Hohenstein-Ernstthal; Ines Krebs, Oschersleben; Joachim Liers, Leipzig; Christine Günther, Storkau; Irmgard Friese, Breitenworbis; Barbara Kempt, Karl-Marx-Stadt; Katrin Schuft, Hennigsdorf; Martin Gland, Halle-Neustadt; Matthias Kutschick, Kleinopitz; Heidrun Müller, Leipzig; Burkhard Götz, Cottbus; Andrea Boy, Hoyerswerda; Thomas Weiß, Weimar; Steffen Trapp, Meißen; Volkmar Schreiber, Krien; Sabine Vosahlo, Jena; Udo Fechner, Spremberg; Gisela Mann, Leipzig; Lutz Wenert, Hartau; Uwe Sobotta, Magdeburg; Dieter Schwerwinski, Rostock; Hans-Martin Kühn, Gramzow; Cornelia Schmidt, Kolochau; Bernd Haase, Wünschendorf; Roland Schreiber, Krien; Lutz Dietrich, Hohenstein-Ernstthal; Ulrich Kammer, Pirna; Michael Monse, Olbersdorf; Maike Kuschfeldt, Menteroda; Ulrike Casper, Merzdorf; Jens Kühnert, Heinrichsort; Torsten Ueberdick, Halle; Kerstin Hasse, Warbelow; Mathias Dierl, Gersdorf; Lothar Pohl, Falkenhagen; Andreas Massanek, Neusornzig; Hans-Eckehard Wilde, Dresden; Irina Leven, Greifswald; Heidemarie Engert, Plottendorf; Wolfgang Nickel, Leipzig; Olaf

Gutschker, Kolkwitz; Katrin Wagner, Röbel; Steffen Kühling, Zwenkau; Sylvia Schimanski, Gademow; Katrin Göbel, Potsdam; Sylvia Haltenhof, Ammern; Thomas Badstüber, Gersdorf; Stefan Zimmermann, Matthias Marx, Klepzig; Frank Naumann, Karl-Marx-Stadt; Frank Thienert, Berlin; Carmen Schwebmeyer, Ahlbeck; Frank Geyer, Wallhausen; Maria Gonsior, Finsterwalde; Ingo Lohde, Schönfeld; Cornelia Eickert, Gielow; Kerstin Würtenberger, Volker Helmert, beide Karl-Marx-Stadt; Jürgen Richter, Pfaffroda; Kerstin Schmelzer, Hettstedt; Silke Kornisch, Böhlitz-Ehrenberg; Christina Schröter, Ilmenau; Torsten Saro, Stahnsdorf; Andreas König, Zella-Mehlis; Sigrid Ehrenpfordt, Finsterwalde; Ina Daberkow, Demmin; Ulrike Heldner, Choren; Anke Bushert, Grimmen; Kerstin Kaiser, Altenburg; Norbert Münsch, Radegast; Heidrun Wallner, Bergen; Ronald Märkisch, Bürgel; Uta Lohse, Bautzen; Olaf Müller, Bischofferode; Claudia Müller, Eisenach; Ramona Müller, Spremberg; Ute Heidel, Engelsdorf; Gabriele Müller, Worbis; Anne-Kathrin Küttner, Krien; Birgit Arnhold, Radebeul; Sylvia Zehe, Wittenberge; Gudrun Kaiser, Hohen-Demzin; Norbert Behnke, Greußen; Frank Macher, Bahratal; Frank Bräuer, Hellendorf; Steffi Förtsch, Reitzengeschwenda; Birgit Oelschlegel, Arndt Gläßer, beide Altenbeuthen; Cornelia Klaffke, Bernd Ehrling, beide Löderburg; Bärbel Ifland, Brehme; Regina Klingebiel, Beate Sander, beide Ecklingerode; Andreas Kohlstedt, Andreas Kaiser, beide Leinefelde; Ralf Briesemeister, Siegfried Müller, beide Sachsendorf; Uta Schaarschmidt, Fürstenwalde; Frank Pätz, Ulrike Alme, Bernd Krantz, Andrea Gottschling, Hans-Jürgen Weber, Michael Kämmer, Lutz Burkhardt, Marion Gössinger, Elke Naumann, Karin Krauß, Gabriele Michel, Ralf Weidermann, Andrea Preiß, Rolf Busch, Klaus-Peter Wintzler, alle Lobenstein; Veronika Anhalt, Effelder; Annette Fahrig, Elke Birkefeld, beide Niederorschel; Birgit Vorbau, Anita Seromin, Andrea Jost, Wolfgang Warm, alle Altentreptow; René Misterek, Helmersdorf; Gabriele Reimann, Karin Rasche, Sulyka Adam, Carmen Bardoux, alle Stolpen; Angela Schlegel, Sabine Klotzsche, beide Wolgast; Ines Pahl, Dagmar Krümmling, beide Neuenhofe; Stefan Borchardt, Worbis; Andreas Mempel, Clingen; Frauke Apel, Susanne Burda, Detlef Dumjahn, Susanne Thomas, alle Klausdorf; Rüdiger Teltow, Rehagen; Ines Krüger, Jürgen Hack, Ferdinand Mohr, Sabine Sperling, Bernd Wagner, Bernd Schulz, Wolf-Dieter Wegner, Reiner Wagner, alle Zaatzke; Birgit Baldauf, Zschornewitz; Eberhard Förster, Söllichau; Viola Forner, Sabine Büttner, Susanne Lorenz, Andrea Ratz, Martina Schröter, alle Rotta; Monika Glosse, Angelika Rode, Cordula Görge, Martina Wehling, alle Wingerode; Bernd Endter, Christine Döll, Ralf-Peter Burkhardt, Sabine Holland-Nell, Heidrun Päckert, Katrin Döll, Erek Sänger, Heike Sauer, Cornelia Horn, Petra Koch, Reinhold Beckmann, Sabine Henkel, Kerstin Usbeck, Beate Wurschi, Anette Recknagel, Hartmut Gießler, Frank Hoffmann, Hans-Georg König, Claudia Holland, Birgit Heidenreich, Thomas Recknagel, alle Steinbach-Hallenberg; Anke Ilgen, Monika Müller, Klaus Ullrich, alle Fambach; Katrin Bauer, Heike Geruschke, Uwe Schleicher, Falk Oelschläger, Antje Tischer, Frank Schaft, Andreas Mäder, Peter Heide, Petra Weichler, Constanze Prause, Anette Seidel, Peter Gaudian, alle Schmalkalden; Lutz Storch, Lothar Bühner, beide Breitungen; Eberhard Georgy, Erfurt

Lösungen

Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 5/75

Ma 5 ▪1387 Angenommen, Katja habe x Stück Kuchen zu 25 Pf, y zu 35 Pf und z zu 70 Pf gekauft. Wir fertigen eine Tabelle an.

x	y	z	$25\cdot x$	$35\cdot y$	$70\cdot z$	$25\cdot x+35\cdot y+70\cdot z$
2	3	4	50	105	280	435
2	4	3	50	140	210	400
3	2	4	75	70	280	425
3	4	2	75	140	140	355
4	2	3	100	70	210	380
4	3	2	100	105	140	345

Nur für $x=4$, $y=2$, $z=3$ wird die Gleichung $25\cdot x+35\cdot y+70\cdot z=380$ erfüllt. Katja hat somit 4 Stück Butterkuchen, 2 Stück Pflaumenkuchen und 3 Törtchen gekauft, und es gilt $4\cdot 25$ Pf $+2\cdot 35$ Pf $+3\cdot 70$ Pf $=380$ Pf $=3{,}80$ M.

Ma 5 ▪1388 Das Quadrat $ABCD$ besitzt eine Seitenlänge von $108\text{ cm}:4=27\text{ cm}$; sein Flächeninhalt beträgt $27\cdot 27\text{ cm}^2=729\text{ cm}^2$. Aus $729\text{ cm}^2-648\text{ cm}^2=81\text{ cm}^2$ folgt wegen $9\cdot 9\text{ cm}^2=81\text{ cm}^2$, daß das Quadrat $EFGH$ eine Seitenlänge von 9 cm und somit einen Umfang von $4\cdot 9\text{ cm}=36\text{ cm}$ besitzt.

Ma 5 ▪1389 Aus $267\text{ m}=26700\text{ cm}$, $2\cdot 52\text{ cm}=104\text{ cm}$ und $26700\text{ cm}-104\text{ cm}=26596\text{ cm}$ folgt, daß für die Wimpel 26596 cm Schnur zur Verfügung steht. Für den letzten aufzuziehenden Wimpel braucht der Abstand von 4 cm nicht berücksichtigt zu werden, also $26596\text{ cm}-15\text{ cm}=26581\text{ cm}$. Aus $15\text{ cm}+4\text{ cm}=19\text{ cm}$ und $26581:19=1399$ folgt, daß auf die Schnur $(1+1399)$ Wimpel, also 1400 Wimpel gezogen waren. Wegen $1400:10=140$ waren es 140 rote Wimpel. Wegen $1400:7=200$ waren es 200 blaue Wimpel. Wegen $3\cdot 140=420$ waren es 420 gelbe Wimpel. Aus $1400-(140+200+420)=640$ folgt, daß die Wimpelkette 640 weiße Wimpel enthielt.

Ma 5 ▪1390 Aus $126:6=21$ folgt, daß täglich 21 Seiten des Manuskripts abzuschreiben waren. Ein Drittel von 6 Arbeitstagen sind 2 Arbeitstage. Die Maschinenschreiberin schaffte bei dieser Arbeitsaufteilung $2\cdot(21+7)+4\cdot(21-7)=56+56=112$ Seiten. Wegen $112<126$ hat sie den Arbeitsauftrag nicht termingerecht erfüllt.

Ma 5 ▪1391 Angenommen, Karin besitzt gegenwärtig n Briefmarken; dann besitzt Peter gegenwärtig $3\cdot n$ Briefmarken. Nun gilt

$$3\cdot n-130=n-10,$$
$$3\cdot n-n=130-10,$$
$$2\cdot n=120,$$
$$n=60.$$

Karin hat 60, Peter 180 Briefmarken gesammelt.

Ma 5 ▪1392 Aus $100-96=4$ folgt, daß der Sohn 4 Jahre alt ist. Aus $41-4=37$ folgt, daß der Vater 37 Jahre alt ist. Aus $96-37=59$ folgt, daß der Großvater 59 Jahre alt ist.

Ma 6 ▪1393 Für die von den Sportlern der DDR für alle erkämpften Plätze vergebene Punktzahl gilt $5p_1+6p_2+2p_4+2p_5+p_6=76$. Angenommen, es gelte $p_6=1$, $p_5=2$, $p_4=3$, $p_3=4$, $p_2=5$, $p_1=6$; dann erhält man $5\cdot 6+6\cdot 5+2\cdot 3+2\cdot 2+1=71$ Punkte, also 5 Punkte weniger als 76 Punkte. Da der erste Summand in der obigen Summe gleich $5p_1$ ist und da $p_1>p_2$ gilt, können diese 5 Punkte nur in den Punktzahlen der 1. Plätze enthalten sein. Somit gilt $p_1=7$, und wir erhalten $5\cdot 7+6\cdot 5+2\cdot 3+2\cdot 2+1=76$ Punkte.

Ma 6 ▪1394 Angenommen, Jörg habe den n-ten Platz errungen; dann gilt

$$[(n+5):10+3]\cdot 5=n+10,$$
$$(n+5):2+15=n+10,$$
$$(n+5)+30=2\cdot n+20,$$
$$n+35=2\cdot n+20,$$
$$n=15.$$

Jörg hat somit den 15. Platz erreicht.

Ma 6 ▪1395 Es sei x die gesuchte Zahl; dann ist $x-1$ durch die paarweise einander teilerfremden Zahlen 2, 3, 5, 7 und 11 teilbar. Daher ist $x-1=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11=2310$, also $x=2311$. Die kleinste der zu ermittelnden Zahlen lautet somit 2311.

Ma 6 ▪1396 Die Länge der Marschstrecke von A nach B betrage x km. Dann gilt $\left(\frac{x}{3}-1\right)+5=\frac{3x}{5}$, $\frac{3}{5}\cdot x-\frac{1}{3}\cdot x=4$, $\frac{4}{15}\cdot x=4$, $x=15$.

Bis zum zweiten Kontrollpunkt waren $\frac{3}{5} \cdot 15\,km = 9\,km$ zurückgelegt worden. Nun gilt $15\,km - 9\,km = 6\,km$ und $6\,km : 2 = 3\,km$. Folglich war der dritte Kontrollpunkt 3 km vom Ziel entfernt.

Ma 6 ■1397 Wir spiegeln den Punkt B des bei C rechtwinkligen Dreiecks ABC an der Geraden AC als Symmetrieachse; sein Bildpunkt sei B'. Auf Grund der Symmetrieeigenschaften gilt
$\sphericalangle ABC = \sphericalangle AB'C = 60°$ und $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'AC = 30°$, also $\sphericalangle BAB' = 60°$.
Das Dreieck ABB' ist somit gleichwinklig, also auch gleichseitig. Wegen $\overline{BC} = \overline{B'C} = a$, also $\overline{BB'} = 2a$ und $\overline{AB} = \overline{BB'} = c$ gilt $c = 2 \cdot a$.

Ph 6 ■1398
Gegeben: $v = 1198{,}8 \frac{km}{h}$ Gesucht: s

$$t = 5\frac{1}{3}\,s = \frac{16}{3 \cdot 3600}\,h$$

Lösung:

$$s = v \cdot t$$
$$s = \frac{1198{,}8\,km \cdot 16\,h}{h \cdot 3 \cdot 3600}$$
$$s = 1{,}776\,km$$

Das Gewitter ist 1,776 km entfernt.

Ma 7 ■1399 Angenommen, Uwe habe x Hefte zu 8 Pf und y Hefte zu 15 Pf das Stück gekauft, dann gilt

$$8x + 15y = 131,$$
$$8x = 128 - 8y - 7y + 3,$$
$$x = 16 - y - \frac{7y-3}{8}.$$

Nur für $y = 5$ ist $\frac{7y-3}{8}$ ganzzahlig und x eine positive ganze Zahl. Wir erhalten

$$x = 16 - 5 - \frac{7 \cdot 5 - 3}{8} = 11 - 4 = 7.$$

Uwe kaufte 7 Hefte zu 8 Pf und 5 Hefte zu 15 Pf das Stück, und es gilt $7 \cdot 8\,Pf + 5 \cdot 15\,Pf = 56\,Pf + 75\,Pf = 131\,Pf = 1{,}31\,M$.

Ma 7 ■1400 Es sei n die Anzahl der Schüler dieser Klasse; dann gilt

$$\frac{n+1}{3} = \frac{n-10}{2},$$
$$2(n+1) = 3(n-10),$$
$$2n + 2 = 3n - 30,$$
$$n = 32.$$

Zu dieser Klasse gehören 32 Schüler; es sind $\frac{n+1}{3} = \frac{32+1}{3} = 11$ Mädchen und somit 21 Jungen.

Ma 7 ■1401 Von jeder Ecke eines n-Ecks lassen sich $(n-3)$ Diagonalen, von allen n Ecken somit $n(n-3)$ Diagonalen ziehen. Dabei wurden alle Diagonalen doppelt gezeichnet, denn z. B. die Diagonale $\overline{P_iP_j}$ ist identisch der Diagonalen $\overline{P_jP_i}$. Für die Anzahl der Diagonalen eines konvexen n-Ecks gilt somit $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-3)$. Nun gilt

$$\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-3) = 35,$$
$$n \cdot (n-3) = 70,$$
$$n \cdot (n-3) = 2 \cdot 5 \cdot 7,$$
$$n \cdot (n-3) = 10 \cdot 7, \text{ also}$$
$$n = 10.$$

Ein konvexes 10-Eck besitzt genau 35 Diagonalen.

Ma 7 ■1402 Angenommen, es waren x Äpfel im Korb vorhanden.
Achim erhielt $\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)$ Äpfel; danach verblieben im Korb $\left(x - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{x-1}{2}$ Äpfel. Bruno erhielt $\left(\frac{x-1}{2} : 2 + \frac{1}{2}\right)$ Äpfel, also $\frac{x+1}{4}$ Äpfel.
Analog dazu gilt:
Claus erhielt $\frac{x+1}{8}$ Äpfel, Dieter erhielt $\frac{x+1}{16}$ Äpfel und Ernst erhielt $\frac{x+1}{32}$ Äpfel. Nun gilt aber $\frac{x+1}{32} = 1$, $x + 1 = 32$, also $x = 31$. Im Korb befanden sich 31 Äpfel. Achim erhielt $\frac{x+1}{2} = \frac{31+1}{2} = 16$ Äpfel, Bruno erhielt 8, Claus 4, Dieter 2 und Ernst 1 Apfel.

Ph 7 ■1403
Gegeben: $m = 4{,}2\,kg = 4200\,g$ Gesucht: ϱ
$V = 21\,dm^3 = 21000\,cm^3$
Lösung:

$$\varrho = \frac{m}{V}$$
$$\varrho = \frac{4200\,g}{21000\,cm^3}$$
$$\varrho = 0{,}2 \frac{g}{cm^3}$$

Der Stoff Kork hat die Dichte $0{,}2 \frac{g}{cm^3}$.

Ch 7 ■1404 Ballon Säure: 100 kg
Ballon leer: 13,8 kg
Masse der Säure: 82,6 kg.

Ma 8 ■1405 Angenommen, es gibt eine solche Darstellung; dann gilt

$$\frac{9}{91} = \frac{x}{7} - \frac{x}{13},$$

wobei x und y natürliche Zahlen mit $0 < x < 7$ und $0 < y < 13$ sind.
Wegen $91 = 7 \cdot 13$ gilt daher

$$13x - 7y = 9,$$
$$7y = 13x - 9,$$
$$y = \frac{13x-9}{7}.$$

Wir erhalten für $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

x	$13x$	$13x-9$
1	13	4
2	26	17
3	39	30
4	52	43
5	65	56
6	78	69

Von den in der dritten Spalte angegebenen Zahlen ist nur die Zahl 56 durch 7 teilbar. Wir erhalten also nur für $x = 5$ einen ganzzahligen Wert für y, und zwar

$$y = \frac{13x-9}{7} = \frac{56}{7} = 8.$$

Die gesuchte Darstellung lautet also

$$\frac{9}{91} = \frac{5}{7} - \frac{8}{13}.$$

Die Probe bestätigt die Richtigkeit der Lösung; denn es gilt

$$\frac{5}{7} - \frac{8}{13} = \frac{65}{91} - \frac{56}{91} = \frac{9}{91}.$$

Ma 8 ■1406 a) Wir bezeichnen die Größe des ersten der drei Winkel des Dreiecks ABC mit $3x$. Dann ist $4x$ die Größe des zweiten Winkels, da sich beide Winkelgrößen wie 3 : 4 verhalten, und $11x$ die Größe des dritten Winkels, da sich die Größen des zweiten und des dritten Winkels wie 4 : 11 verhalten. Da die Winkelsumme des Dreiecks ABC gleich 180° ist, erhalten wir die Gleichung

$$3x + 4x + 11x = 180°,$$
$$18x = 180°,$$
$$x = 10°.$$

Das Dreieck ABC hat also die Winkelgrößen $3x = 30°$, $4x = 40°$, $11x = 110°$, d. s. zusammen 180°.
b) Bezeichnen wir die Größe des ersten Winkels mit x, so sind die Größen der beiden anderen Winkel gleich $10x$ bzw. $100x$.
Wir erhalten daher

$$x + 10x + 100x = 180°,$$
$$111x = 180°,$$
$$x = \frac{180°}{111} \approx 1{,}62162°.$$

Es gibt also ein solches Dreieck, und zwar ein Dreieck mit den Winkelgrößen
$x \approx 1{,}6°$, $10x \approx 16{,}2°$, $100x \approx 162{,}2°$,
wobei jeweils auf eine Stelle nach dem Komma gerundet worden ist.

Ma 8 ■1407 Es sei x eine positive reelle Zahl, für die die Gleichung

$$\frac{a+x}{1+\frac{ax}{c^2}} = c \text{ erfüllt ist.} \qquad (1)$$

Dann gilt wegen $1 + \frac{ax}{c^2} > 0$ und $c < 0$

$$\frac{(a+x)c^2}{c^2+ax} = c,$$
$$(a+x)c = c^2 + ax,$$
$$ac + cx = c^2 + ax,$$
$$x(a-c) = c(a-c).$$

Hieraus folgt wegen $a < c$, also $a - c \neq 0$

$$x = c.$$

Die Gleichung (1) kann daher höchstens für $x = c$ erfüllt sein; tatsächlich ist sie aber auch für $x = c$ erfüllt; denn es gilt

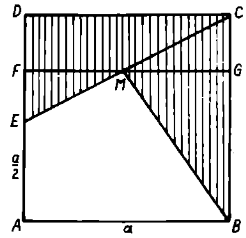
$$\frac{a+x}{1+\frac{ax}{c^2}} = \frac{a+c}{1+\frac{ac}{c^2}} = \frac{(a+c)c}{c+a} = c.$$

Ma 8 ■1408 Es sei $ABCD$ das gegebene Quadrat mit der Seitenlänge a. Dann gilt, da E der Mittelpunkt der Seite $\overline{DA}$ ist,

$$\overline{DE} = \overline{EA} = \frac{a}{2}.$$

Ferner gilt $\overline{EM} = \overline{MC}$ (vgl. das Bild).
Nun möge die Parallele durch M zu CD die Seite $\overline{DA}$ in F und die Seite $\overline{BC}$ in G schnei-

den. Wegen $\overline{EM}=\overline{MC}$, $\sphericalangle EMF=\sphericalangle CMG$ und $\sphericalangle MFE=\sphericalangle MGC=90°$ gilt (nach dem Kongruenzsatz *sww*) $\Delta\, MFE \cong \Delta\, MGC$.



Daraus folgt $\overline{FM}=\overline{MG}$ und wegen $\overline{FM}+\overline{MG}=\overline{FG}=\overline{CD}=a$

$$\overline{MG}=\frac{a}{2}.$$

Daher ist der Flächeninhalt des Dreiecks BCM wegen $\overline{BC}=a$ und $\overline{MG}=\frac{a}{2}$ gleich

$$A_1=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{a}{2}=\frac{a^2}{4}.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks CDE ist wegen $\overline{CD}=a$ und $\overline{DE}=\frac{a}{2}$ gleich

$$A_2=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{a}{2}=\frac{a^2}{4}.$$

Daher beträgt der Flächeninhalt des Fünfecks $EMBCD$

$$A_3=a_1+A_2=\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{2}.$$

Da der Flächeninhalt des Quadrats $ABCD$ a^2 ist, gilt für den Flächeninhalt des Vierecks $ABME$

$$A_4=a^2-\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{2},$$

woraus $A_3=A_4$ folgt, d. h., die Flächeninhalte des weiß gefärbten Vierecks $ABME$ und des grau gefärbten Fünfecks $EMBCD$ sind einander gleich, obwohl es zunächst scheint, als ob der Flächeninhalt des Vierecks größer sei.

Ph 8 ▪1409

Gegeben: $F=60\,\text{kp}$ Gesucht: p

$A=150\,\text{cm}^2$

Lösung:

$$p=\frac{F}{A}$$

$$p=\frac{60\,\text{kp}}{150\,\text{cm}^2}$$

$$p=0{,}4\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$$

Der Druck eines stehenden Menschen auf den Fußboden beträgt $0{,}4\frac{\text{kp}}{\text{cm}^3}$.

b) Gegeben:

$F=60\,\text{kp}$ Gesucht: p

$A=200\,\text{cm}\cdot 10\,\text{cm}=2000\,\text{cm}^2$

Lösung:

$$p=\frac{F}{A}$$

$$p=\frac{60\,\text{kp}}{2000\,\text{cm}^2}$$

$$\underline{\underline{p=0{,}03\frac{\text{kpp}}{\text{cm}^2}}}$$

Der Druck auf die Schneedecke beträgt $0{,}03\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$.

c) Das Verhältnis beträgt

$$0{,}4\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}:0{,}03\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}=40:3.$$

Ch 8 ▪1410 Mischungsformel:

$$n=\frac{m(a-p)}{(p-b)}\quad\left|\begin{array}{ll} m=1000 & b=0\\ a=25 & p=10\end{array}\right.$$

$$n=\frac{1000(25-10)}{10}=1\,500$$

Es sind also 1 500 g Wasser mit 1 000 g 25%iger Salzsäure zu mischen, um 10%ige Salzsäure zu erhalten.

Ma 9 ▪1411 a) Für alle reellen Zahlen a und b gilt, da das Quadrat einer reellen Zahl niemals negativ ist,

$$(a-b)^2\geqq 0, \tag{1}$$

also

$$a^2-2ab+b^2\geqq 0, \tag{2}$$

$$a^2-ab+b^2\geqq ab. \tag{3}$$

Wir unterscheiden nunmehr die folgenden Fälle:

1. $a>0$ und $b>0$ oder $a<0$ und $b<0$.
Dann ist $ab>0$, also wegen (3)
$$a^2-ab+b^2\geqq ab>0.$$
2. $a>0$ und $b<0$ oder $a<0$ und $b>0$.
Dann ist $a^2>0$, $b^2>0$, $ab<0$, also $-ab>0$, also $a^2-ab+b^2>0$.
3. $a=0$ und $b\neq 0$.
Dann ist $a^2=0$, $ab=0$, $b^2>0$, also
$$a^2-ab+b^2=b^2>0.$$
4. $a\neq 0$ und $b=0$.
Dann ist $a^2>0$, $ab=0$, $b^2=0$, also
$$a^2-ab+b^2=a^2>0.$$
5. $a=b=0$.
Dann ist $a^2-ab+b^2=0$.

In allen Fällen ist also die Ungleichung

$a^2-ab+b^2\geqq 0$ erfüllt, w.z.b.w.

b) Nur im 5. Fall, also wenn $a=b=0$, gilt das Gleichheitszeichen.

Ma 9 ▪1412 Es seien

a die Seitenlänge der quadratischen Grundfläche,

h die Länge der Höhe,

h' die Länge der Seitenhöhe, d. h. der Höhe jedes der vier gleichschenkligen Dreiecke, die die Seitenflächen bilden. Dann gilt

$$h'^2=h^2+\frac{a^2}{4}. \tag{1}$$

Ferner gitl für die Summe der Flächeninhalte der vier Seitenflächen

$$M=4\cdot\frac{1}{2}\cdot ah'=2ah'\ 0960\,\text{cm}^2 \tag{2}$$

$$A_0=a^2+M=a^2+960\,\text{cm}^2=1\,536\,\text{cm}^2, \tag{3}$$

also

$$a^2=576\,\text{cm}^2,\ \text{d. h. } a=24\,\text{cm}. \tag{4}$$

Aus (4) und (2) folgt

$$h'=\frac{960}{2\cdot 24}\,\text{cm}=20\,\text{cm},$$

also wegen (1)

$$h^2=h'^2-\frac{a^2}{4}=\left(400-\frac{24^2}{4}\right)\text{cm}^2=256\,\text{cm}^2,$$

$$h\ =16\,\text{cm}. \tag{5}$$

Wegen (4) und (5) ist das Volumen der Pyramide gleich

$$V=\frac{1}{3}a^2h=\frac{1}{3}\cdot 576\cdot 16\,\text{cm}^3=3072\,\text{cm}^3.$$

Ma 9 ▪1413 Es seien $n, n+1, n+2, n+3$ vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Dann gilt

$$\begin{aligned} &n(n+1)(n+2)(n+3)+1\\ &=[n(n+3)]\,[(n+1)(n+2)]+1\\ &=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1\\ &=(n^2+3n)(n^2+3n)+2(n^2+3n)+1\\ &=(n^2+3n+1)^2.\end{aligned}$$

Damit wurde bewiesen, daß das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, vermehrt um 1, stets gleich einer Quadratzahl, nämlich gleich dem Quadrat der natürlichen Zahl n^2+3n+1 ist.

Ma 9 ▪1414 a) Die Punkte D, B, F, H sind Eckpunkte eines Rechtecks, weil sie in einer Ebene liegen und $DB\perp BF$, $BF\perp FH$, $FH\perp HD$, $HD\perp DB$ gilt (siehe Bild 1). Ferner ist M der Mittelpunkt der Seite DB und K der Schnittpunkt der Diagonale $\overline{DF}$ dieses Rechtecks mit der Verbindungsstrecke $\overline{HM}$.

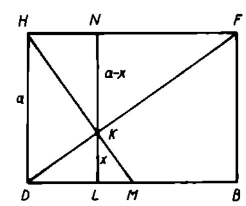


Bild 1

Dabei gilt $\overline{BF}=\overline{HD}=a$ und $\overline{DB}=\overline{FH}=a\sqrt{2}$, weil $\overline{DB}$ eine Diagonale des Quadrates $ABCD$ mit der Seitenlänge a ist. Daher ist

$$\overline{DM}=\frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

Es sei nun $\overline{KL}=x$ die Länge der von K ausgehenden Höhe in dem Dreieck KDM und $\overline{KN}=a-x$ die Länge der von K ausgehenden Höhe in dem Dreieck KFH. Aus der Ähnlichkeit dieser beiden Dreiecke folgt nun, daß die Längen ihrer Höhen x bzw. $a-x$ sich wie die entsprechenden Grundseitenlängen $\overline{DM}=\frac{a}{2}\sqrt{2}$ und $\overline{FH}=\sqrt{2}$ verhalten; es gilt

also $\dfrac{x}{a-x}=\dfrac{\frac{a}{2}\sqrt{2}}{a\sqrt{2}},\ \dfrac{x}{a-x}=\dfrac{1}{2},$

also $2x=a-x,$

$3x=a,$

$$x=\frac{a}{3}\ \text{und}\ a-x=\frac{2}{3}a.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks KDM ist also gleich $A_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{a}{3}=\frac{a^2}{12}\sqrt{2},$

und der Flächeninhalt des Dreiecks KFH ist gleich $A_2=\frac{1}{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}a=\frac{a^2}{3}\sqrt{2}.$

b) Da die durch das Rechteck $DBFH$ bestimmte Ebene auf der Ebene des Quadrats $ABCD$ senkrecht steht, steht auch die Höhe $\overline{KL}$ des Dreiecks DMK senkrecht auf jeder Geraden der Ebene $ABCD$, also auch auf der

Geraden LC. Daher ist das Dreieck KLC rechtwinklig, und wir können die gesuchte Länge der Strecke $\overline{KC}$ aus $\overline{KL}$ und $\overline{LC}$ berechnen (siehe Bild 2).

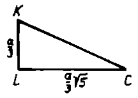


Bild 2

Um die Länge von $\overline{LC}$ zu ermitteln, berechnen wir zunächst $\overline{LM}$.
Wir erhalten (siehe Bild 1)

$$\frac{\overline{KM}}{\overline{KH}}=\frac{x}{a-x}=\frac{\frac{1}{3}a}{\frac{2}{3}a}=\frac{1}{2}, \text{ also}$$

$2\cdot\overline{KM}=\overline{KH}$. Wegen

$$\overline{KM}+\overline{KH}=\overline{HM}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{3}{2}a^2}=\frac{a}{2}\sqrt{6} \text{ folgt hieraus}$$
$$3\cdot\overline{KM}=\frac{a}{2}\sqrt{6},\quad \overline{KM}=\frac{a}{6}\sqrt{6}.$$

Also wird (siehe Bild 1)

$$\overline{LM}=\sqrt{\left(\frac{a}{6}\sqrt{6}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2}{6}-\frac{a^2}{9}}$$
$$=\sqrt{\frac{2a^2}{36}}=\frac{a}{6}\sqrt{2}.$$

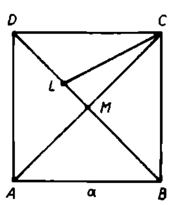


Bild 3

Nun liegt L auf der Diagonale $\overline{DB}$ des Quadrats $ABCD$ (siehe Bild 3).
Da in dem rechtwinkligen Dreieck LMC $\overline{MC}=\frac{a}{2}\sqrt{2}$ ist, gilt

$$\overline{LC}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{a}{6}\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{2a^2}{36}}$$
$$=\sqrt{\frac{5a^2}{9}}=\frac{a}{3}\sqrt{5}.$$

Da $\overline{KC}$ die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks KLC ist (siehe Bild 2), gilt

$$\overline{KC}=\sqrt{\left(\frac{a}{3}\sqrt{5}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{5a^2}{9}+\frac{a^2}{9}}=\frac{a}{3}\sqrt{6}.$$

Der Punkt K hat also von dem Eckpunkt C des Würfels den Abstand $\frac{a}{3}\sqrt{6}$.

Ph 9 ▪1415 Gegeben:

$P_{zu}=20\,\text{kW}=20000\,\text{W}$ Gesucht: η
$F=60\,\text{kp}=(60\cdot 9{,}81)N$
$h=20\,\text{m}$
$t=\ 4\,\text{s}$

Lösung:

$$\eta=\frac{P_{nutz}}{P_{zu}}\qquad P_{nutz}=\frac{F\cdot h}{t}$$
$$\eta=\frac{2943\,\text{W}}{20000\,\text{W}}\qquad P_{nutz}=\frac{(60\cdot 9{,}81)N\cdot 20\,\text{m}}{4\,\text{s}}$$
$$=2\,943\,\text{W}$$

$\eta=0{,}1472$

Der Wirkungsgrad der Anlage beträgt 14,72%.

Ch 9 ▪1416 Die Reaktionsfolge ergibt sich nach folgendem Schema:

$CaSO_4\cdot 2H_2O\rightarrow SO_3\rightarrow H_2SO_4$

$M_{CaSO_4}\cdot 2H_2O : M_{H_2SO_4}=100:0{,}96x$

$$x=\frac{98{,}08\cdot 100}{172{,}17\cdot 0{,}96}=59{,}34\text{ t } 96\%\text{ige Schwefelsäure}$$

Ma 10/12 ▪1417 Es sei x eine reelle Zahl, für die die Ungleichung

$$\left|\frac{2x-9}{x+1}\right|\leqq 1 \text{ erfüllt ist.} \qquad (1)$$

Dann gilt $x+1\neq 0$, also $x\neq -1$.
Ferner gilt

$$|2x\ 99|\leqq|x+1|. \qquad (2)$$

Wir unterscheiden nun die folgenden drei Fälle:

1. Fall: $x\geqq\frac{9}{2}$.

Dann gilt $2x-9\geqq 0$, also $|2x\ 99|=2x-9$.
Ferner gilt $x+1\geqq 0$, also $|x+1|=x+1$.
In diesem Fall folgt also aus (2)

$$2x-9\leqq x+1, \qquad (3)$$
$$x\leqq 10.$$

Daher ist für $\frac{9}{2}\leqq x\leqq 10$ die Ungleichung (3) und damit auch die Ungleichung (1) erfüllt.

2. Fall: $-1<x<\frac{9}{2}$.

Dann gilt $2x-9<0$, also $|2x-9|=-2x+9$.
Ferner gilt $x+1>0$, also $|x+1|=x+1$.
In diesem Fall folgt also aus (2)

$$-2x+9\leqq x+1, \qquad (4)$$
$$3x\leqq -8$$
$$x\geqq\frac{8}{3}.$$

Daher ist für $\frac{8}{3}\leqq x<\frac{9}{2}$ die Ungleichung (4) uad damit die Ungleichuug (1) erfüllt.

3. Fall: $x<-1$.

Dann gilt $2x-9<0$, also $|2x-9|=-2x+9$.
Ferner gilt $x+1<0$, also $|x+1|=-x-1$.
In diesem Fall folgt also aus (2)

$$-2x+9\leqq -x-1, \qquad (5)$$
$$-x\leqq -10, \text{ d. h. } x\geqq 10.$$

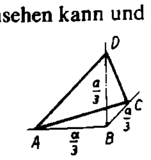
Die Ungleichung (5) und damit die Ungleichung (1) ist also in diesem Falle wegen $x<-1$ nicht erfüllt.

Zusammenfassung: Die Ungleichung (1) ist für alle reelle Zahlen x mit $\frac{8}{3}\leqq x\leqq 10$ und nur für diese erfüllt.

Ma 10/12 ▪1418 Es sei a die Kantenlänge des Würfels; dann ist sein Volumen gleich

$$V_1=a^3.$$

Jeder der acht abgeschnittenen Teilkörper stellt eine Pyramide $ABCD$ dar (siehe Bild), als deren Grundfläche man das rechtwinklige Dreieck ABC mit den Kathetenlängen $\frac{a}{3}$ und $\frac{a}{3}$ ansehen kann und deren Höhe die Länge $\frac{a}{3}$



hat. Das Volumen dieser Pyramide ist gleich

$$V_2=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3}=\frac{a^3}{162}.$$

Das Volumen des Restkörpers ist also gleich

$$V_0=a^3-\frac{8\cdot a^3}{162}=\frac{77}{81}a^3.$$

Das Volumen des Restkörpers verhält sich daher zu dem Volumen des Würfels wie

$$V_0:V_1=77:81.$$

Ma 10/12 ▪1419 a) Wegen $h=10\,\text{m}$, $d_1=0{,}3\,\text{m}$, $d_2=0{,}2\,\text{m}$, $d=0{,}25\,\text{m}$, $\pi\approx 3{,}1416$ erhält man

$$V=\frac{\pi\cdot 10}{12}\,(0{,}3^2+0{,}3\cdot 0{,}2+0{,}2^2)\,\text{m}^3=\frac{\pi\cdot 10}{12}\cdot 0{,}19\,\text{m}^3\approx 0{,}4974\,\text{m}^3$$
$$V'=\frac{\pi\cdot 10}{4}\cdot 0{,}25^2\,\text{m}^3\approx 0{,}4909\,\text{m}^3$$

b) Der Betrag des absoluten Fehlers ist also gleich $|V-V'|=0{,}0065\,\text{m}^3$ und der Betrag des prozentualen Fehlers gleich

$$\left|\frac{V-V'}{V}\right|\cdot 100\%=\frac{0{,}0065}{0{,}4974}\cdot 100\%\approx 1{,}3\%$$

Der prozentuale Fehler ist also sehr gering, er beträgt nur rd. 1%.

c) Es gilt

$$V-V'=\frac{\pi h}{12}(d+\delta)^2+(d+\delta)(d-\delta)+(d-\delta)^2-\frac{\pi h}{4}d^2$$
$$=\frac{\pi h}{12}(d^2+2d\delta+\delta^2+d^2-\delta^2+d^2-2d\delta+\delta^2-3d^2),$$
$$V-V'=\frac{\pi h}{12}\delta^2. \text{ Ferner gilt}$$
$$\frac{V-V'}{V'}=\frac{\pi h}{12}\delta^2:\frac{\pi h}{4}d^2=\frac{1}{3}\left(\frac{\delta}{d}\right)^2.$$

Im Falle a) gilt

$$\frac{\delta}{d}=\frac{0{,}05}{0{,}25}=\frac{1}{5}, \text{ also}$$
$$\frac{V-V'}{V}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{25}\approx 0{,}013,$$

d. s. 1,3% in guter Übereinstimmung mit dem Wert unter b), obwohl hier zur Vereinfachung nicht durch V, sondern durch V' dividiert wurde.

Ma 10/12 ▪1420 Wir bezeichnen mit I_1 das Intervall $0<x<\frac{\pi}{2}$ und mit I_2 das Intervall $\frac{\pi}{2}<x<\pi$. (1)

Nun gilt für alle x der Intervalle I_1 und I_2

$$f(x)=\frac{\sqrt{(1-\sin x)^2}-\sqrt{(1+\sin x)^2}}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cdot\frac{\sqrt{(1-\cos x)^2}-\sqrt{(1+\cos x)^2}}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$$

Wegen (1) gilt stets
$1-\sin x>0$, $1+\sin x>0$, $1-\cos x>0$, $1+\cos x>0$, also

$$\sqrt{(1-\sin x)^2}=1-\sin x,$$
$$\sqrt{(1+\sin x)^2}=1+\sin x \text{ usw.}$$

Ferner gilt im Intervall I_1 $\sqrt{1-\sin^2 x}=\cos x$, da $\cos x>0$, und im Intervall I_2 $\sqrt{1-\sin^2 x}=-\cos x$, da $\cos x<0$.

In beiden Intervallen gilt also

$$\sqrt{1-\sin^2 x} = |\cos x| \text{ und ferner}$$
$$\sqrt{1-\cos^2 x} = \sin x.$$

Daher folgt aus (2)

$$f(x) = \frac{(1-\sin x)-(1+\sin x)}{|\cos x|} \cdot \frac{(1-\cos x)-(1+\cos x)}{\sin x}$$

$$f(x) = \frac{2\sin x \cdot 2\cos x}{|\cos x| \cdot \sin x}$$

und hieraus wegen $\sin x \neq 0$

$$f(x) = 4 \cdot \frac{\cos x}{|\cos x|}. \qquad (3)$$

Nun gilt im Intervall I_1 $\cos x > 0$ und $|\cos x| > 0$, also

$$\frac{\cos x}{|\cos x|} = 1,$$

dagegen im Intervall I_2 $\cos x < 0$ und $|\cos x| > 0$, also

$$\frac{\cos x}{|\cos x|} = -1.$$

Wegen (3) gilt daher für alle x im Intervall I_1 $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

$$f(x) = 4$$

und für alle x im Intervall I_2 $\left(\frac{\pi}{2} < x\pi\right)$

$$f(x) = -4.$$

Lösungen zu alpha-heiter

Wie lautet die richtige Antwort?

Mögliche Antwort: „Etwas, was ich nicht verloren habe, besitze ich noch; vorausgesetzt, daß ich es überhaupt besessen habe!"

Städtewettkampf

Die Gesamtpunktzahl der Teilnehmer A bis L ist 2990. Ferner muß die der Teilnehmer von Stadt S und T durch 3 teilbar sein. Sehen wir uns die einzelnen Zahlen auf ihre Teilbarkeit durch 3 an, so stellen wir fest:

a) B, C, D, I sind ohne Rest teilbar (Restklasse $\bar{0}$)

b) A, F, G, H, K, L haben jeweils den Rest 1 (Restklasse $\bar{1}$)

c) E hat den Rest 2 (Restklasse $\bar{2}$).

Da die Summe von b) ebenfalls ohne Rest teilbar ist, muß E mit 320 Punkten aus der Stadt U kommen.

Die Punktezahl der übrigen Teilnehmer ist dann 2670, die sich mit 1780 auf S und mit 890 auf T verteilen. Teilnehmer A mit 910 Punkten muß also zur Mannschaft von S gehören.

Es bleiben dann noch zu untersuchen

von S 870 Punkte (Restklasse $\bar{0}$),

von T 890 Punkte (Restklasse $\bar{2}$).

1\. Annahme: Die 870 Punkte setzen sich nur aus Teilnehmern mit der Restklasse 0 zusammen. Von diesen Punktwerten 480, 426, 408, 36 ergeben nur die drei letzten die Summe 870.

2\. Annahme: Die Untersuchung, ob sich die Summe 870 auch unter Verwendung von drei Werten der Restklasse 1 und dann die Summe 890 mit den übrigen zwei Werten Restklasse 1 bilden lassen, ergibt keine Lösung.

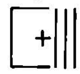
Es kommen somit die

Teilnehmer A, C, D, I aus Stadt S

Teilnehmer B, F, G, H, K, L aus Stadt T

Teilnehmer E aus Stadt U.

Welche Figur?



Verkehrsreich

202	−	122	=	80
−		−		+
188	+	96	=	284
14	·	26	=	364

Kryptarithmetik

P = 1; R = 2; O = 3; D = 4; U = 5; K = 6; T = 7; E = 9

Silbenrätsel

Rotationskörper, Ebene, Cantor, Hektar, Einstein, Nebenwinkel, Symmetrie, Trapez, Archimedes, Binom – RECHENSTAB

Berühmte Mathematiker

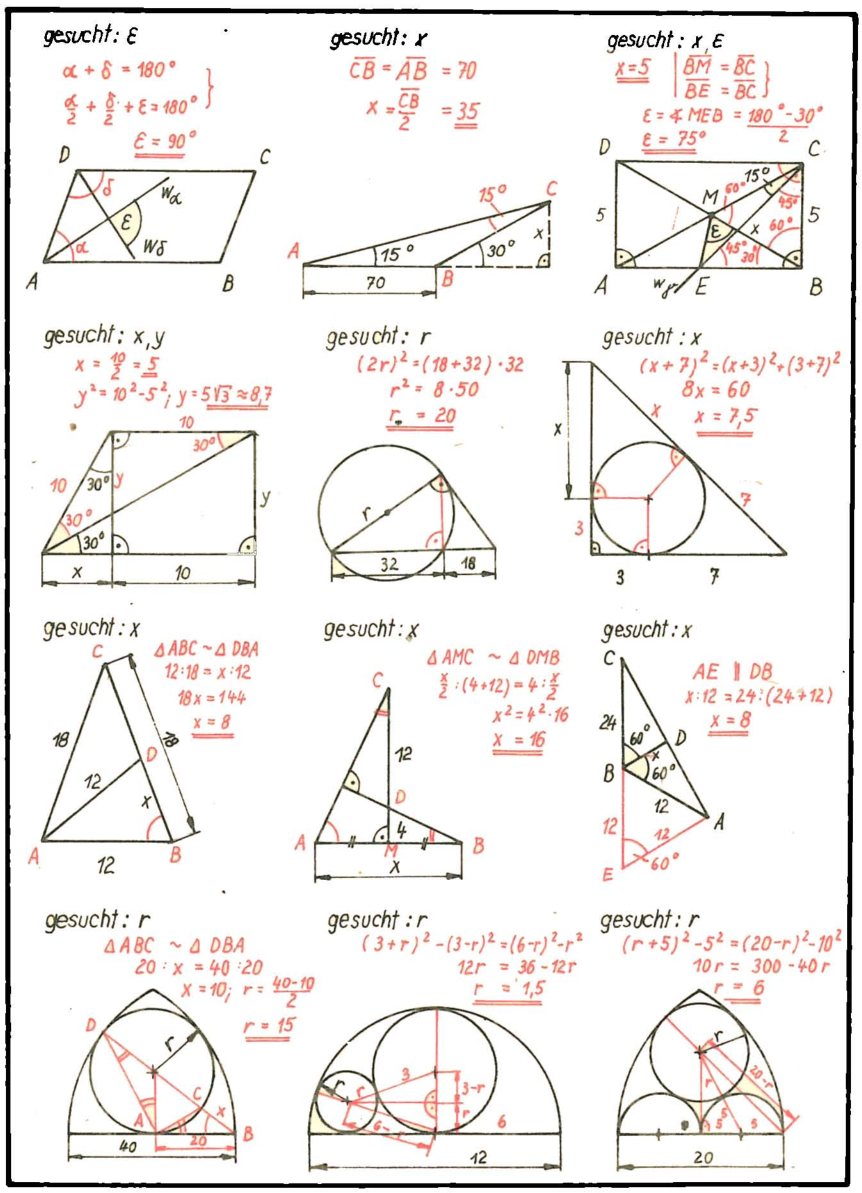
1\. Michael Stifel; 2. Pythagoras; 3. Gaspard Monge; 4. Georg Cantor

Lösungen zu „Mathematik und Biologie",

▲1▲ a) Lippenblütengewächse, b) Schmetterlingsblütengewächse

▲2▲ $RQ = \frac{18}{26} = 0{,}69$

Lösungen zu: Gut gedacht ist halb gelöst, Heft 6/75



1967 bis 1975

Hinweis:

Aus Platzgründen veröffentlichen wir in Heft 1/77 die vollständigen Inhaltsverzeichnisse der Jahrgänge 1975 und 1976; d. Red.