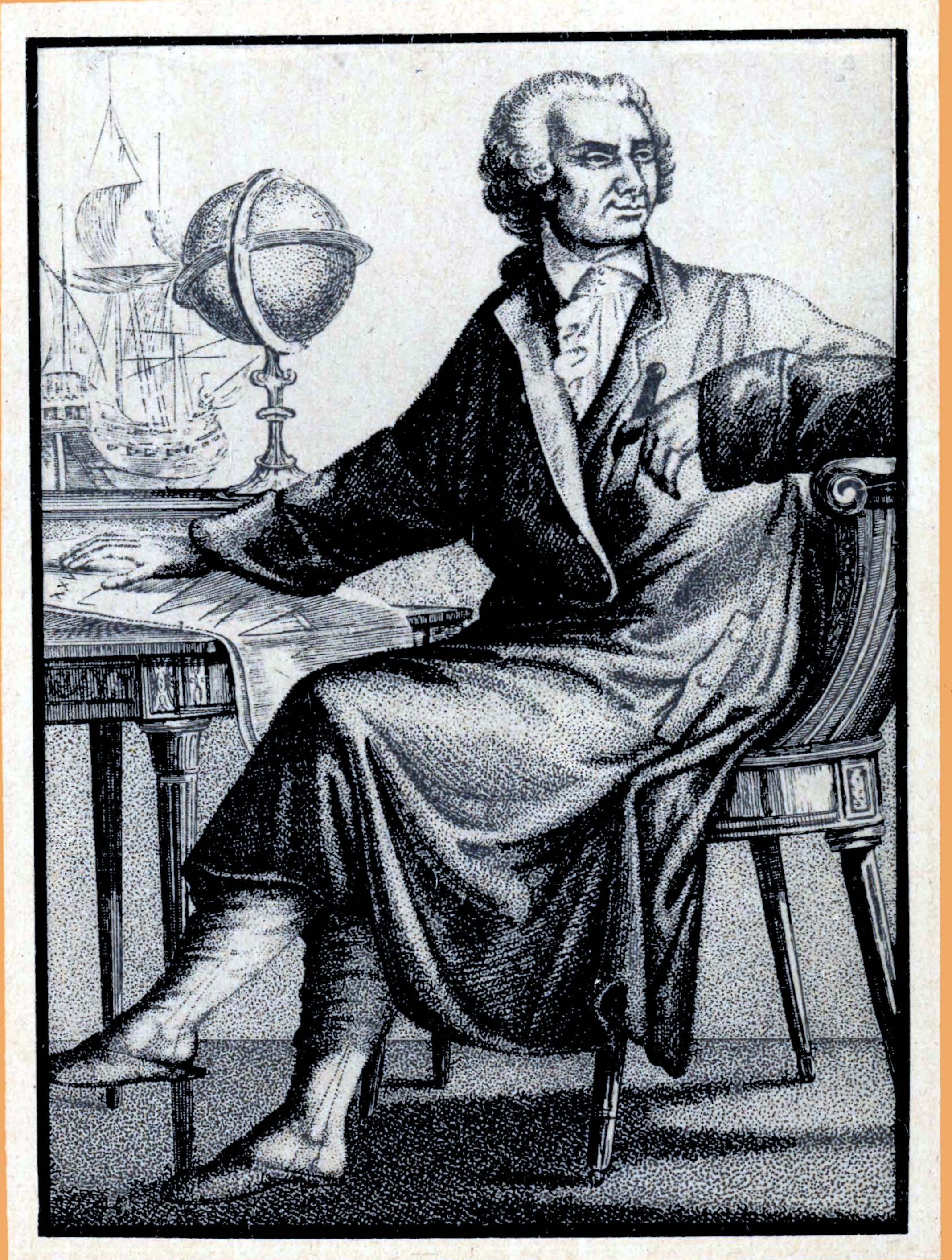
Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
17. Jahrgang 1983
Preis 0,50 M
Index 31 059

LEONHARD EULER

1707 BIS 1783



2

Redaktion:
OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1086 Berlin, Krausenstraße 50, PSF Nr. 1213
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Wir danken Prof. Dr. K.-R. Biermann, Berlin, A. Halameisär, Moskau und Dr. R. Thiele, Leipzig, für die Bereitstellung von z. T. sehr wertvollen Fotos für diese Sonderausgabe anläßlich des 200. Todestages von L. Euler. Die z. T. kostbaren Briefmarken stellte Dr. P. Schreiber, Greifswald, zur Verfügung.
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig
Titelbild: W. Fahr nach einer Vorlage von unserer sowj. Schwesternzeitschrift *Quant*

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
AN (EDV) 128-ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 20. Dezember 1982
Erscheinungstermin: 21. April 1983

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Zum 200. Todestag Leonhard Eulers

Bild 1
Gedenktafel am Haus Behrenstr. 21/22 in Berlin

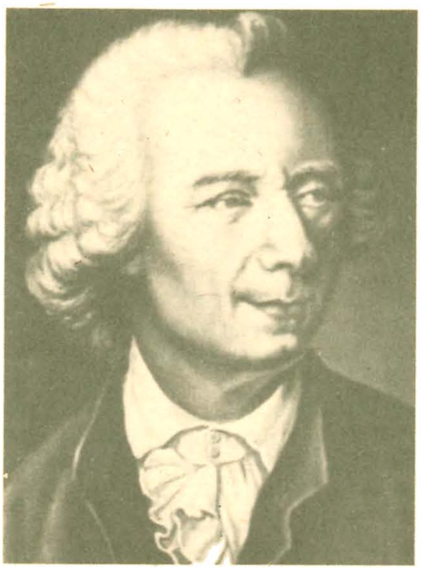


Bild 2
Leonhard Euler (nach einem Stich von Christian Mechel 1783)

Am 18. September 1983 jährt sich zum 200. Male der Todestag Leonhard Eulers, des, zeitlich gesehen, wohl größten Mathematikers seit Archimedes, Newton und Leibniz. Sein Name lebt in rund 50 nach ihm benannten Formeln, Gleichungen, Sätzen, Zahlen und anderen mathematischen Bezeichnungen fort. Wenn Alexander von Humboldt vor rund 160 Jahren, fast vier Jahrzehnte nach Eulers Tod, keine bessere Empfehlung für den jungen genialen Mathematiker Dirichlet an Gauß zu geben vermochte als die, daß sich jener „auf den besten Eulerschen Wegen" bewege, so ist in nicht geringerem Grade auch heute noch der Name Leonhard Euler lebendig. Er ist zu einem aus der Mathematik wie aus der geistigen Kultur überhaupt nicht wegzudenkenden Begriff geworden. Sein Wirken spielt zudem in der Geschichte der Begegnung der deutschen und der russischen Wissenschaft eine herausragende Rolle; mit seinem Namen ist die freundschaftliche Zusammenarbeit von Mathematikern der DDR und der UdSSR verknüpft. Als 1957 seines 250. Geburtstages gedacht wurde, gaben die Akademie der Wissenschaften der DDR und der UdSSR zwei koordinierte Festschriften mit einem gemeinsamen Serientitel heraus; die Gedenkfeiern in Berlin und Leningrad erfolgten in gegenseitiger Abstimmung und unter wechselseitiger Beteiligung; zahlreiche Belege, wie gemeinsame Editionen u. a. Veröffentlichungen, zeugen vom Zusammenwirken von Mathematikhistorikern der DDR und der UdSSR bei der Pflege des Eulerschen Erbes. Das Gedenken an Eulers 200. Todestag wird diese engen Beziehungen erneut manifestieren.

Der am 15. 4. 1707 in Basel in der Schweiz geborene Euler erkannte frühzeitig seine Bestimmung: Dem Fortschritt der Mathematik und ihrer Anwendung zu dienen. Ursprünglich dazu ausersehen, den Beruf seines Vaters, das heißt den eines Geistlichen, zu ergreifen, wandte er sich unter dem Eindruck, den die Vorlesungen Johann (I.) Bernoullis auf ihn machten, der Mathematik zu. Da Euler in der Heimat keine ihm gemäße Stellung finden konnte, ein Los, das er mit manchen talentierten Landsleuten teilte, ging er 1727 an die Petersburger Akademie der Wissenschaften, die, kürzlich gegründet, vielen jungen begabten Gelehrten aus Mittel- und Westeuropa Schaffensmöglichkeiten bot. In Petersburg wirkte Euler bis 1741 und später von 1766 bis zu seinem Tode im Jahre 1783, also insgesamt über 30 Jahre. In der ersten Petersburger Periode entstanden diejenigen Arbeiten Eulers, die seinen Namen bald in der Welt bekannt und dann berühmt werden ließen. Während seines zweiten Petersburger Aufenthaltes schuf Euler die reifen Alterswerke, die noch fast 80 Jahre lang nach seinem Ableben die Petersburger Akademie-Veröffentlichungen zieren sollten. Zwischen 1741 und 1766 liegt Eulers Tätigkeit an der Berliner Akademie der Wissenschaften, seit 1744 als Direktor der mathematischen Klasse und später zeitweise als amtierender Präsident, wenn ihn auch der Preußenkönig nie als solchen bestätigte. Es waren dies Jahre erfolgreichsten Schaffens; Euler wurde zum mathematischen Lehrmeister Europas.

Bild 3
Der bekannte sowjetische Mathematiker V. I. Smirnov im Gespräch mit Mitgliedern der DDR-Delegation zu Eulers 250. Geburtstag am 15. 4. 1957 im Turm des Akademiegebäudes in Leningrad, Eulers ehemaliger Wirkungsstätte.
Vordere Reihe von links: Akademiker Smirnov; der Verfasser; Prof. H. Grell, Berlin; Prof. O.-H. Keller, Halle. Hintere Reihe von links: Dr. G. K. Michajlov, Moskau; Direktor V. L. Čenakal, Leningrad

Daß Euler Petersburg verließ, um einem Rufe des Königs Friedrich II. von Preußen nach Berlin zu folgen, hatte seine Ursachen in der unsicheren Lage während der Thronwirren in Rußland und in dem Leiter der Petersburger akademischen Kanzlei. In Berlin fühlte sich Euler zunächst sehr wohl. Des Königs Hoffnung, der Berliner Akademie durch die Mitgliedschaft und Mitarbeit berühmter Gelehrter Glanz und Geltung zu verleihen, die auf ihn selbst zurückstrahlen sollten, wurde von Euler völlig erfüllt. Er widmete seine ganze Kraft der Akademie. Nicht nur auf wissenschaftlichem, sondern auch auf wissenschaftsorganisatorischem und administrativem Gebiete war der auf der Höhe seiner Jahre stehende, im Geist seines Zeitalters der Aufklärung wirkende Euler ohne Unterlaß erfolgreich tätig. Aber im Laufe der Jahre traten eine Reihe von sich mehr und mehr verstärkenden Unzuträglichkeiten ein, die schließlich zu Eulers Rückkehr nach Petersburg führten.

Es würde zu weit gehen, wollten wir an dieser Stelle alle beabsichtigten und unbeabsichtigten Kränkungen und Verstimmungen aufführen, die Eulers Weggang bewirkten. Begnügen wir uns mit der Feststellung, daß Euler, der in diesen Jahren profilierteste Vertreter einer Wissenschaft, die Friedrich immer fremd geblieben ist, alles andere als ein amüsanter und unterhaltsamer Plauderer war, wie sie der König in Gestalt der Franzosen, die damals an der Berliner Akademie dominierten, schätzte. Euler hat übrigens beinahe ohne Unterbrechung die Verbindung zur Akademie in Petersburg von Berlin aus aufrechterhalten: Er korrespondierte mit M. W. Lomonossow, dem „Vater der russischen Wissenschaft", junge russische Gelehrte wurden in seinem Berliner Heim aufgenommen (Euler beherrschte übrigens die russische Sprache), er veröffentlichte während seiner Berliner Zeit in den Abhandlungen der Petersburger fast die gleiche Anzahl Arbeiten wie in den Schriften der Berliner Akademie. Nach seiner Rückkehr nach Petersburg, wo ihm von der Zarin Katharina II. glänzende materielle Bedingungen geboten wurden, traf Euler ein schreckliches Unglück. War er 1735 bereits auf einem Auge erblindet, so verlor er nun das Augenlicht nahezu völlig. Seine wissenschaftliche Produktivität wurde dadurch nicht beeinträchtigt. Diktierend schuf er weiterhin Arbeit nach Arbeit. Allein durch seine der Pariser Akademie eingereichten Preisschriften gewann Euler im Laufe der Zeit rund 30000 Livres (in heutiger Kaufkraft an die 300000 Mark). Am 18. September 1783 starb er, ohne daß ihn ein längeres Leiden gequält hätte.

Bild 4
Nach der Einweihung einer Gedenktafel an Eulers Wohnung in Leningrad an seinem 250. Geburtstag (15. 4. 1957):
(von rechts) Prof. Euler, UdSSR; Prof. Kurt Schröder, Berlin; Hauptingenieur Euler, UdSSR; der Verfasser

Bei Leonhard Eulers Tod lebten noch drei seiner Söhne: Johann Albrecht, der, wenn auch in geringerem Umfange, die mathematische Begabung seines Vaters geerbt hatte, Mitglied der Berliner Akademie und seit 1769 Beständiger Sekretär der Petersburger Akademie der Wissenschaften, Karl, ein Arzt und Mitglied der Petersburger Akademie, und Christoph, der sich dem Militärdienst gewidmet hatte und den Rang eines russischen Generals erreichte. Noch heute gibt es Nachfahren Eulers in der Sowjetunion, in denen die mathematische Begabung ihres Ahnen fortlebt.

Man rühmte an Euler einen ausgeglichenen und heiteren Charakter. Ausgesprochener Familiensinn, ökonomisches Denken und natürliches Benehmen waren ihm eigen. Wie viele bedeutende Mathematiker war auch Euler ein großer Freund der Musik. Eine riesige Arbeitskraft, ein erstaunliches Gedächtnis, eine phänomenale Konzentrationsfähigkeit und ein beispielloser Ideenreichtum zeichneten Euler aus.

Euler bereicherte die mathematischen Wissenschaften, begründete ganze Disziplinen, stieß in unerforschtes Neuland vor und wirkte durch seine Lehrbücher, in seinen Schülern und Nachfolgern fort. Eulers Größe ist letzten Endes in der entscheidenden Bedeutung der Mathematik für die exakten Naturwissenschaften, für die Technik und die Wirtschaft, für die Nutzbarmachung der Natur für menschliche Zwecke begründet. Erwähnt sei das Ergebnis der Realisierung von Vorschlägen Eulers für den Bau einer Wasserturbine: Ihr Wirkungsgrad bleibt um keine 10% hinter dem einer modernen Turbine zurück. Indem Euler in der Mathematik hervorragende Entdeckungen machte, schuf er Voraussetzungen für den Fortschritt der Menschheit. Er fertigte nicht nur das mathematische Werkzeug, mit dem die großen Naturforscher, Techniker und Mathematiker des vorigen Jahrhunderts operierten, es ständig vervollkommnend und erweiternd, an Strenge der Beweisführung die genialen Induktionen Eulers bald übertreffend, seine epische Breite durch konzentrierte Kürze ersetzend, sondern fühlte sich selbst stets zu den Anwendungen der Mathematik hingezogen. Er gab der Praxis Impulse und empfing wieder von ihr Anregungen. Gauß, der wohl hervorragendste deutsche Mathematiker, charakterisierte 1847 diese Wechselwirkung, indem er sagte, Euler habe in der Beschäftigung mit Problemen der reinen Mathematik „eine Erholung von und eine Stärkung zu anderen der unmittelbaren praktischen Anwendung näher liegenden Arbeiten" gefunden.

Der führende sowjetische Mathematikhistoriker A. P. Juškevič, der bedeutendste Eulerforscher unserer Tage, hat eine Klassifizierung der Arbeiten Eulers vorgenommen, die dies Bild ergibt:

40% der Studien Eulers liegen auf den Gebieten der Algebra, Zahlentheorie und Analysis, 18% sind der Geometrie gewidmet, 28% befassen sich mit Mechanik und Physik, 11% beziehen sich auf astronomische Fragestellungen. Der Rest verteilt sich auf die Ballistik, die Kartographie, das Schiffs- und das Bauwesen, auf Musiktheorie, Theologie und Philosophie. Sogar landwirtschaftlichen Fragen wandte Euler seine Aufmerksamkeit zu. Zahlreiche Gutachten zeugen von Eulers Beschäftigung mit technischen Aufgaben.

Leonhard Euler war ein beispiellos fruchtbarer Gelehrter. In seinem Heimatland werden seit 1911 seine gesamten, französisch, lateinisch und deutsch abgefaßten Werke sowie seine Briefe unter dem Titel „Leonhardi Euleri Opera Omnia" herausgegeben. Die Ausgabe ist auf rund 85 Bände im Lexikonformat mit etwa 40000 Druckseiten veranschlagt. Die Edition der Werke geht ihrem Ende zu, während die der Briefe noch einige Jahre in Anspruch nehmen wird.

Diese Ausgabe, die die Schweizerische Naturforschende Gesellschaft durch ihre Euler-Kommission für ihren großen Landsmann unter internationaler Beteiligung veranstaltet, ist ein literarisches Denkmal, würdig der Bedeutung des Genies Leonhard Eulers für die mathematischen Wissenschaften, deren Nutzen dieser einst so charakterisierte: „Die gesamte Mathematik befaßt sich aber mit dem Aufsuchen unbekannter Größen. Zu diesem Zwecke zeigt sie uns die Methoden oder gleichsam die Wege, die zur Wahrheit führen; sie macht die verborgensten Wahrheiten ausfindig und setzt sie ins richtige Licht. So schärft sie einerseits unsere Denkkraft, bereichert aber auch andererseits unsere Kenntnisse. Beides sind Ziele, die gewiß der größten Mühe wert sind. Die Wahrheit ist an sich eine Kostbarkeit; da mehrere Wahrheiten, unter sich verknüpft, höhere Zusammenhänge ergeben, ist jede von Nutzen, selbst wenn dieser zuerst nicht ersichtlich ist." *K.-R. Biermann*

Eine wenig bekannte Aufgabe von Leonhard Euler

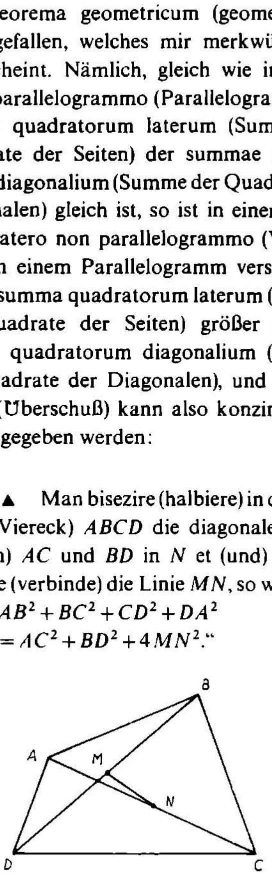
Februar 1748

Euler schrieb im Februar 1748 aus Berlin an seinen Freund Goldbach in Petersburg folgende Zeilen: „Ich bin neulich auf nachfolgendes theorema geometricum (geometrischer Satz) gefallen, welches mir merkwürdig zu sein scheint. Nämlich, gleich wie in einem jeden parallelogrammo (Parallelogramm) die summa quadratorum laterum (Summe der Quadrate der Seiten) der summae quadratorum diagonalium (Summe der Quadrate der Diagonalen) gleich ist, so ist in einem jeden quadrilatero non parallelogrammo (Viereck, das von einem Parallelogramm verschieden ist) die summa quadratorum laterum (Summe der Quadrate der Seiten) größer als die summa quadratorum diagonalium (Summe der Quadrate der Diagonalen), und der excessus (Überschuß) kann also konzinne (genau) angegeben werden:

▲2321▲ Man bisezire (halbiere) in dem trapezio (Viereck) $ABCD$ die diagonales (Diagonalen) AC und BD in N et (und) M und jungiere (verbinde) die Linie MN, so wird sein

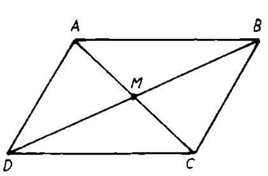
$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2 = AC^2+BD^2+4MN^2.“$$

Bild 1



Euler verallgemeinert mit diesem Satz das für Parallelogramme bekannte Ergebnis. Für Parallelogramme fällt M mit N zusammen, so daß der letzte Summand auf der rechten Seite der Gleichung gleich null ist. Für beliebige Vierecke wird er im allgemeinen größer als null sein.

Bild 2



Für Parallelogramme gilt
$2AB^2+2BC^2=AC^2+BD^2$

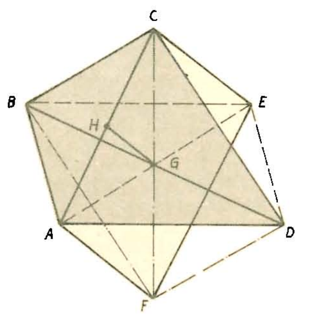
Goldbach fand einen Beweis für die von Euler gestellte Aufgabe, der uns aber nicht erhalten ist. Im Juni 1748 teilte Euler seinen eigenen Beweis Goldbach mit, und dieser Brief Eulers ist erhalten. Die entsprechende Stelle lautet so:

Lösung: „Sit propositum trapezium $ABCD$ cum diagoniis AC, BD; compleatur primo parallelogrammum $ABED$, cujus diagonales AE, BD se in G bisecabunt. Tum ducta CE compleatur parall. $ACEF$ cum diag. CF, ductisque BF, DF erit quoque $BCDF$ parall. Jam cum in omni parallelogrammo summa quadr. diag. = summae quadr. laterum ex ▭ $ACEF$ erit $AE^2+CF^2=2AC^2+2CE^2$, ex ▭ $BCDE$ erit $BD^2+CF^2=2BC^2+2CD^2$, ergo $2AC^2+2CE^2-AE^2=2BC^2+2CD^2-BD^2=CF^2$. Porro ▭ $ABED$ dat $AE^2+BD^2=2AB^2+2AD^2$, quae aequatio ad priorem addita dat

$$2AC^2+2CE^2+BD^2 = 2AB^2+2BC^2+2CD^2+2AD^2-BD^2$$

$$AC^2+CE^2+BD^2 = AB^2+BC^2+CD^2+AD^2.$$

Bild 3



At quia AE uti et BD bisecta est in G, bisectur quoque AC in H, et ducta GH erit parallela ipsi CE ejusque semissi aequalis, ita ut sit $CE^2=4GH^2$ quo substitutio erit

$$AB^2+BC^2+CD^2+AD^2 = AC^2+BD^2+4GH^2. \text{ Q.E.D.}$$

Nun folgt die Übersetzung des lateinischen Textes. Es war damals üblich, daß Gelehrte untereinander lateinisch korrespondierten. Wie die Aufgabenstellung zeigt, waren selbst deutsch abgefaßte Briefe mit den lateinischen Fachwörtern durchsetzt. „Es sei ein Viereck $ABCD$ mit den Diagonalen AC, BD gegeben; es werde zuerst zum Parallelogramm $ABED$ ergänzt, so daß sich dessen Diagonalen AE, BD in G halbieren. Danach ergänze man CE zum Parallelogramm $ACEF$ mit der Diagonalen CF, nachdem BF, DF ergänzt wurden, ergibt sich das Parallelogramm $BCDF$. Da jetzt in jedem Parallelogramm die Summe der Quadrate der Diagonalen = Summe der Quadrate der Seiten ist, ergibt sich aus

▭ $ACEV$

$$AE^2+CF^2=2AC^2+2CE^2,$$

aus ▭ $BCDF$

$$BD^2+CF^2=2BC^2+2CD^2,$$

also $2AC^2+2CE^2-AE^2$
$=2BC^2+2CD^2-BD^2=CF^2.$

Danach ergibt ▭ $ABED$

$$AE^2+BD^2=2AB^2+2AD^2,$$

diese Gleichung zur ersten addiert ergibt

$$2AC^2+2CE^2+BD^2 = 2AB^2+2BC^2+2CD^2+2AD^2-BD^2$$

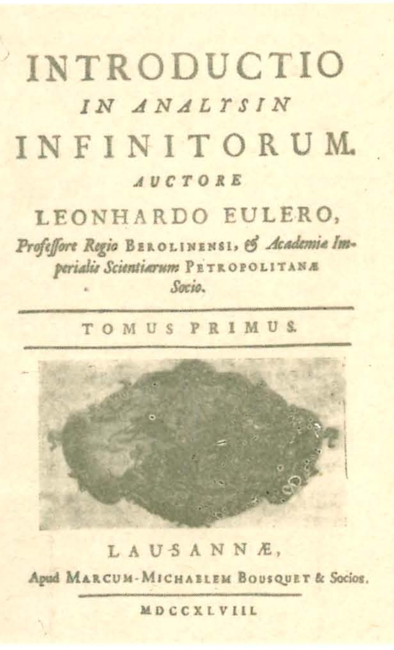
$$AC^2+CE^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+AD^2.$$

Aber weil AE sowie auch BD in G halbiert ist, so wurde auch AC in H halbiert, und dabei ist die Strecke GH parallel zu CE sowie halb so groß, so daß $CE^2=4GH^2$ ist, was durch Ersetzen zu

$AB^2+BC^2+CD^2+AD^2$
$=AC^2+BD^2+4GH^2$ wird, w.z.b.w.“

(Zur Übersetzung ist anzumerken, daß das Wort trapezium im Sinn von allgemeines Viereck benutzt wird, was sich manchmal in dem heutigen Trapezoid für allgemeines Viereck wiederfindet. Diese Begriffsbestimmung geht auf Euklids Elemente zurück.)

Für die alpha-Leser aufbereitet von
Dr. R. Thiele



INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio Berolinensi, & Academiæ Imperialis Scientiarum Petropolitanæ Socio.
TOMUS PRIMUS.
LAUSANNÆ,
Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios.
MDCCXLVIII.

Titelseite der „Introductio in analysin infinitorum“ (Einführung in die Analysis des Unendlichen) aus dem Jahre 1748. Euler stellt an die Spitze des Buches den Begriff der Funktion, der ein zentraler Begriff der Analysis ist. Euler schreibt, die Aufgabe der mathematischen Analysis sei die Untersuchung veränderlicher Größen und ihrer Funktionen.

Leonhard Euler und die Fermatsche Vermutung

Eine ungelöste Aufgabe

In einer Zeit, als in den islamischen Ländern bereits ein Niedergang der mathematischen Forschung einsetzte, verfaßte der aus Syrien gebürtige, später in Persien lebende und dort der Sekte der Schiiten angehörende Behā ad-Dīn (1547 bis 1622) eine Abhandlung, die er „Essenz der Rechenkunst" nannte. Die Rechenkunst wäre eine Wissenschaft, welche die Auffindung unbekannter Zahlen vermöge eigentümlicher Kenntnisse lehre, und ihr Objekt wäre die Zahl. Der Verfasser hatte den Stoff zu seinem Werk aus älteren Büchern gezogen. Seine Schrift ist „gewissermaßen der letzte Blick, den ein Scheidender auf den Glanz früherer Jahre zurückwirft, um davon dem Gedächtnis noch zu erhalten, was sich retten läßt". (Dies schrieb der Mathematikhistoriker Georg H. F. Nesselmann (1811 bis 1881), der 1843 Behā ad-Dīn's „Essenz der Rechenkunst" arabisch und in deutscher Übersetzung herausgab. Es sei erwähnt, daß Alexander von Humboldt (1769 bis 1859) diese Ausgabe 1846 bei seinen umfangreichen Studien zum „Kosmos" gebrauchte.)

Das kleine Werk erfreute sich in Vorderasien und Indien einer großen Popularität. Bis ins 19. Jahrhundert wurde es dort als Schulbuch über Algebra verwendet.

Am Schluß seiner Abhandlung führt Behā ad-Dīn sieben Aufgaben an, deren Lösung islamischen Gelehrten bis zu jener Zeit nicht gelungen war:

„Es sind den Gelehrten, welche in dieser Disciplin fest sind, Aufgaben begegnet, auf deren Auflösung sie ihr Nachdenken gerichtet, und auf deren Aufsuchung sie ihre Augen gewandt haben; sie haben sich an die Aufhebung ihres Schleiers mit allen Kunstgriffen gemacht, und um die Enthüllung ihres Vorhanges durch jedes Mittel bemüht; aber sie konnten keinen Weg dahin entdecken und fanden zu ihnen keinen Wegweiser und keinen Führer. Diese sind seit alter Zeit als unauflösbar übrig, sich empörend gegen alle Genies bis zu dieser Frist. Die Gelehrten von Fach haben einige von ihnen in ihren Schriften erwähnt, und in ihren Sammlungen einen Theil derselben vorgelegt, um darzuthun, welche abschreckende Schwierigkeiten diese Wissenschaft umfaßt, und um diejenigen, welche absolute Ausführbarkeit in Sachen des Calculs sich anmaßen, zum Schweigen zu bringen, um die Rechner zu warnen, daß sie sich nicht um die Auflösung bemühen, wenn etwas dieser Art ihnen vorgelegt wird, und um die mit glänzenden Fähigkeiten Begabten zu ihrer Auflösung und Enthüllung anzuspornen. Auch ich führe in dieser Abhandlung sieben von ihnen als Muster auf, um den Spuren Jener zu folgen und in ihre Fußstapfen zu treten."

Das vierte Beispiel lautet:

„Eine Kubikzahl soll in zwei Teile geteilt werden, die auch Kubikzahlen sind."

Probieren ohne Ende?

Betrachten wir die ersten zwölf Kubikzahlen: 1, 8, 27, 64, 125, 343, 512, 729, 1000, 1331, 1728. Man kann leicht durch Probieren feststellen, daß keine dieser Zahlen die Summe zweier anderer Kubikzahlen ist. Ließe sich beispielsweise 1728 als Summe zweier Kubikzahlen schreiben, so kämen dafür höchstens 729 und 1000 oder 512 und 1331 bzw. 343 und 1331 in Frage, aber deren Summe ist 1729, 1853 bzw. 1674, also größer bzw. kleiner als 1728. Also ist $1728 = 12^3$ wirklich nicht Summe zweier Kubikzahlen. So könnte man die Kubikzahlen weiter untersuchen. Da es aber zu jeder gegebenen Kubikzahl k^3 eine größere $(k+1)^3$ gibt, käme man selbst mit einem Computer nie zu einem Ende, es sei denn, man findet drei Kubikzahlen a^3, b^3, c^3 mit $a^3 + b^3 = c^3$.

Die Vermutung, daß es unmöglich ist, die Gleichung

$$z^3 = x^3 + y^3$$

in natürlichen Zahlen x, y, z zu lösen, ist alt. Den Versuch, diese Vermutung wirklich zu *beweisen*, sollen schon vor über 1000 Jahren islamische Mathematiker gemacht haben.

Die Fermatsche Vermutung

Im August 1659 formulierte Pierre de Fermat (1601 bis 1665) in einem Brief an seinen Freund Pierre de Carcavy (1600 bis 1684) den Satz, daß die Gleichung $x^3 + y^3 = z^3$ in natürlichen Zahlen unlösbar ist.

Fermat, den man „einen Pionier der neuen Mathematik" nennt, wurde von den Zeitgenossen als unübertroffener Meister der Zahlentheorie angesehen und gilt als der bedeutendste Zahlentheoretiker vor Leonhard Euler (1707 bis 1783). Seine zahlentheoretischen Kenntnisse sind das Resultat mehrjähriger fortgesetzter Studien der 1621 erschienenen von Claude Gaspar de Bachet de Méziriac (1581 bis 1639) bearbeiteten griechisch-lateinischen Ausgabe der „Arithmetik" des Diophant von Alexandria (um 250 u. Z.). Seine neuartigen zahlentheoretischen Fragestellungen, Beweismethoden und Einzelergebnisse formulierte Fermat vorwiegend in Briefen, aber auch als Randnoten der in seinem Besitz befindlichen Bücher. Die Anmerkungen zur „Arithmetik" wurden 1670 in der von Fermats Sohn herausgegebenen Diophantausgabe abgedruckt.

In der um 1637 geschriebenen Randglosse Fermats zur Aufgabe II.8 des Diophant, eine gegebene Quadratzahl in die Summe zweier Quadratzahlen zu zerlegen, wird erstmalig die Behauptung ausgesprochen, daß die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für jede natürliche Zahl $n > 2$ keine Lösung mit von Null verschiedenen ganzen Zahlen x, y, z besitzt (Fermatsche Vermutung). Fermat hätte einen wahrhaft wunderbaren Beweis entdeckt; der Rand wäre nur zu schmal, um ihn darauf aufzuschreiben.

Die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$

Für die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ mit $n = 2$ kannte man schon im Altertum Lösungen (x, y, z) in natürlichen Zahlen x, y, z; z. B. (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (20, 21, 29). Diophant machte in seiner „Arithmetik" oft von der Lösung $(p^2 - q^2, 2pq, p^2 + q^2)$ Gebrauch. In der Tat, es gilt

$$(p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2 = (p^2 + q^2)^2.$$

Die Erkenntnis, daß alle Lösungen der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ in natürlichen, teilerfremden Zahlen x, y, z notwendig von der Form $(p^2 - q^2, 2pq, p^2 + q^2)$ mit natürlichen, teilerfremden Zahlen p, q $(p > q)$ sind, soll erstmalig in einer anonymen arabischen Quelle im 10. Jahrhundert erwähnt worden sein.

Für den Beweis dieser Aussage sei verwiesen auf:

A. O. Gelfond: Die Auflösung von Gleichungen in ganzen Zahlen (Diophantische Gleichungen). VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Mathematische Schülerbücherei Band 22. (§3.)

H. Pieper: Die komplexen Zahlen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Mathematische Schülerbücherei Band 110. (9. Kapitel.)

Die der quadratischen Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ so ähnliche kubische Diophantische Gleichung $x^3 + y^3 = z^3$ konnte trotz angestrengter Bemühungen zunächst nicht bewältigt werden, bis schließlich Euler in seiner „Vollständigen Anleitung zur Algebra" (St. Peters-

burg 1770) – gestützt auf Sätze über die Form x^2+3y^2 aus dem Jahre 1763 – die Unmöglichkeit der Lösung in ganzen Zahlen beweisen konnte. C. F. Gauß (1777 bis 1855) gab später einen anderen Beweis.
Der Fall $n=4$ wurde schon von Fermat bewiesen.

Euler als Zahlentheoretiker

Die meisten der zahlentheoretischen Studien Eulers wurzeln in den Untersuchungen von Fermat und Diophant.
Die erste zahlentheoretische Abhandlung legte der 25jährige Euler 1732 der Petersburger Akademie vor. Hierin widerlegte er die Behauptung Fermats, alle Zahlen der Form $2^{2^k}+1$ seien Primzahlen. Mit dieser Aussage hatte sich Euler auf Anregung von Christian Goldbach (1690 bis 1764) schon seit 1729 beschäftigt. Goldbach, ein vielseitiger Gelehrter mit großem mathematischem Verständnis und Ideenreichtum, war der erste ständige Sekretär der 1725 gegründeten Petersburger Akademie der Wissenschaften. Euler war 1727 nach Petersburg gekommen. (Er ist 1741 nach Berlin übergesiedelt und 1766 nach Petersburg zurückgekehrt.) Das Zusammensein Goldbachs mit Euler dauerte nur wenige Jahre, da Goldbach seinen Wohnsitz nach Moskau verlegte. Der nun einsetzende Briefwechsel, vorzugsweise über mathematische Fragen, wurde für beide Gelehrte von größter Bedeutung. Euler empfing von Goldbach viele Anregungen. Beide stimmten darin überein (wie Goldbach in einem Brief an Euler formulierte), daß „es nicht für undienlich zu halten sei, daß man auch diejenigen propositiones [Sätze] anmerke, welche sehr probabiles [wahrscheinlich] sind, ohngeachtet es an einer wirklichen Demonstration [Beweis] fehlet".
In einer im Jahre 1738 verfaßten Abhandlung bewies Euler die Fermatsche Vermutung für $n=4$. (Es sei auf das oben angegebene Buch von A. O. Gelfond verwiesen.)
Mitte des 19. Jahrhunderts wurde ein 1844 im Nachlaß Eulers aufgefundenes Manuskript zur Zahlentheorie publiziert. Diese 16 Kapitel über Zahlentheorie stellen höchstwahrscheinlich den Versuch eines Lehrbuches über den Gegenstand dar, das aber unvollendet geblieben ist. Euler hat das Manuskript in den Jahren 1748 bis 1750 verfaßt, also in jenen Jahren, in denen Euler andere große Lehrbücher (zur Analysis) schrieb. Wahrscheinlich hatte Euler die Abfassung eines Lehrbuches über Zahlentheorie als verfrüht erkannt und ließ das Manuskript liegen. Eine zusammenfassende Theorie dieser Disziplin gab es damals überhaupt noch nicht. (Diese hätte erst von ihm geschaffen werden müssen.) Erst mußten in Spezialarbeiten die fehlenden Beweise für zahlreiche zahlentheoretische Vermutungen erbracht werden.
Eulers Arbeiten zur Zahlentheorie umfassen in der Werkausgabe allein 4 umfangreiche Bände!
In einem Brief an Goldbach vom 4. August 1753 befindet sich der erste Hinweis, daß es Euler gelungen war, die Fermatsche Vermutung auch für $n=3$ zu beweisen:
„Bei Fermat findet sich noch ein sehr schönes theorema, dessen Demonstration [Beweis] er sagt, gefunden zu haben. Nämlich bei Anlaß der Diophantaeschen Aufgabe, zwei quadrata zu finden, deren Summ ein Quadrat ist, sagt er, daß es unmöglich sei, zwei cubos [Kubikzahlen] zu finden, deren Summ ein Kubus sei, und zwei biquadrata, deren Summ ein biquadratum [$a^4+b^4=c^4$], und generaliter [allgemein], daß diese Formul $a^n+b^n=c^n$ allzeit unmöglich sei, wann $n>2$. Ich habe nun wohl Demonstrationen gefunden, daß $a^3+b^3\neq c^3$ und $a^4+b^4\neq c^4$, wo $\neq$ unmöglich gleich bedeutet. Aber die Demonstrationen für diese zwei casus [Fälle] sind so voneinander unterschieden, daß ich keine Möglichkeit sehe, daraus eine allgemeine Demonstration für $a^n+b^n\neq c^n$ si [wenn] $n>2$ herzuleiten."
Im Brief an Goldbach vom 17. Mai 1755 schreibt er noch einmal darüber:
„Ew. Hochwohlgeb. ist der Beweis bekannt, daß $a^4\pm b^4\neq p^4$. Neulich bin ich auch mit dem Beweis zustande gekommen, daß $a^3\pm b^3\neq p^3$; weiter kann ich aber auch nicht kommen."
Ein 1759 gefundener Beweis findet sich – allerdings nur im Vorübergehen und unter Verweis auf eine frühere, wahrscheinlich nicht publizierte Mitteilung – in einer 1763 in der Schriftenreihe „Novi commentarii" der Petersburger Akademie gedruckten Abhandlung. Einige Jahre später (1770) bewies Euler den Satz ausführlich am Ende des 2. Teiles seiner „Vollständigen Anleitung zur Algebra".

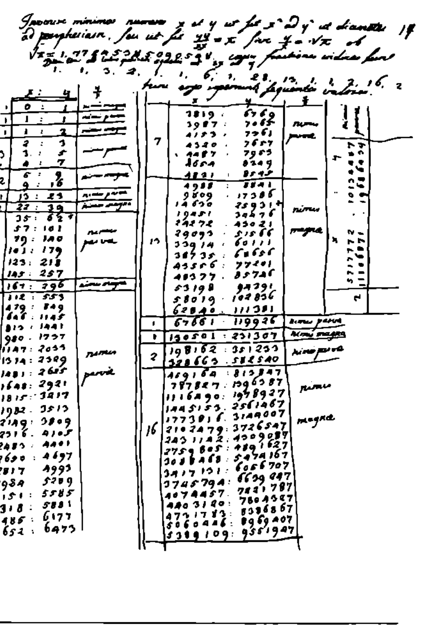
Die Beweismethode

Es sollen hier nur einige allgemeine Bemerkungen zu der von Euler verwendeten Beweismethode gemacht werden.
Es handelt sich um einen indirekten Beweis. Es wird angenommen, daß es eine Lösung der Gleichung $x^3+y^3=z^3$ in natürlichen Zahlen $x=a$, $y=b$, $z=c$ gibt, und dann gezeigt, daß man mit dieser Annahme zu einer Aussage kommt, die falsch ist. Dies bedeutet, daß auch die Annahme falsch gewesen sein muß, also die Gleichung in Wahrheit gar nicht in natürlichen Zahlen lösbar ist. Genau das sollte bewiesen werden.
Dieser indirekte Beweis wird mit einer Methode geführt, die Fermat „Methode des unendlichen Abstiegs" (französisch: la descente infinie) nannte. Die Überlegung ist einfach.
Es sei $A(k)$ eine Aussage für eine natürliche Zahl k. ($A(k)$ kann z. B. die folgende Aussage sein: „Die Kubikzahl k^3 läßt sich als Summe zweier Kubikzahlen schreiben.") Es wird gezeigt, daß aus der Richtigkeit von $A(k)$ für irgendeine natürliche Zahl k die Richtigkeit von $A(l)$ für eine gewisse kleinere natürliche Zahl l folgt. (Auch eine gewisse Kubikzahl l^3 mit $l<k$ läßt sich als Summe zweier Kubikzahlen darstellen.) Dieser „Abstieg" von k auf l kann beliebig oft fortgesetzt werden: Aus der Richtigkeit von $A(l)$ folgt die Richtigkeit von $A(m)$ für eine gewisse kleinere natürliche Zahl $m<l$, usw. Das ist aber unmöglich, da es eine kleinste natürliche Zahl gibt. $A(k)$ muß also falsch sein, für alle k. Der Grundgedanke der Methode des unendlichen Abstiegs war schon in der von Jaques Lefèbre (1455 bis 1536) 1496 und 1514 edierten Ausgabe der „Arithmetica" des um 1260 lebenden Gelehrten Jordanus Nemorarius ausgesprochen. Die Beweismethode ist sogar in der Antike benutzt worden, um zu beweisen, daß bei dem goldenen Schnitt die Maßzahlen der Teilstrecken nicht rationale Zahlen sein können.
Fermat hat die „descente infinie" wiederentdeckt und mit dieser Methode zahlreiche zahlentheoretische Probleme in Angriff genommen. In Euler fand Fermat den großen Fortsetzer.
Für Eulers Beweis der Unmöglichkeit der Lösung der Gleichung $x^3+y^3=z^3$ in natürlichen Zahlen sei auf das folgende alpha-Heft 3/83 verwiesen, wo er in der Originalform aus seiner „Vollständigen Anleitung zur Algebra" wiedergegeben wird.

H. Pieper

Schriftprobe Eulers:

Berechnung von $\sqrt{\pi}$ aus der Kettenbruchentwicklung (undatierte Notiz)



Briefmarken zum Thema Euler

Basel, im 4. Jh. von den Römern gegründet, Universitätsstadt seit 1460, war im 15. und 16. Jahrhundert ein bedeutendes Zentrum der Reformation und des Humanismus. Hier wurde *Leonhard Euler* am 15. 4. 1707 geboren, hier studierte er ab 1720. Am 5. 4. 1727 verließ er seine Vaterstadt für immer. Die Schweizer Briefmarke (1) aus dem Jahre 1960 zeigt das *Spalentor* in Basel.

Die Schweizer Gedenkmarke (2) zum 250. Geburtstag Eulers ist ebenso wie die aus gleichem Anlaß erschienenen Marken (3) der DDR und (4) der Sowjetunion nach einem Bildnis Eulers von E. Handmann gestaltet, das etwa zwischen 1753 und 1756 entstand. Auf der sowjetischen Marke ist das Porträt übrigens seitenverkehrt wiedergegeben. Links davon sieht man das Gebäude der Kunstkammer in Petersburg, das erste Domizil der Petersburger Akademie. Die rechte Seite symbolisiert Eulers Leistungen in der Astronomie und Kartographie (vgl. hierzu den Artikel auf Seite 32/34). Am linken Rand der Schweizer Marke liest man die Eulersche Formel

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi.$$

Der in dieser Formel mittels komplexer Zahlen ausgedrückte Zusammenhang zwischen der Exponentialfunktion und trigonometrischen Funktionen hat in der Folge nicht wenig zur schließlichen Anerkennung der komplexen Zahlen beigetragen.

In der zehn Werte umfassenden DDR-Serie zum 250. Geburtstag der Berliner Akademie (1700 als Brandenburgische Sozietät der Wissenschaften gegründet, heute Akademie der Wissenschaften der DDR) war der 1-Pf-Wert (5) nach dem von J. d'Arbès gemalten Altersbildnis Eulers gestaltet. Euler wirkte von 1741 bis 1766 an der Berliner Akademie. Zu Jubiläen der Petersburger Akademie, aus der die Akademie der Wissenschaften der UdSSR hervorging und an der Euler von 1727 bis 1741 sowie von 1766 bis zu seinem Tode 1783 insgesamt rund 31 Jahre arbeitete, gab es in der Sowjetunion Gedenkmarken zum 220. Jahrestag der Gründung (1945) und zum 250. Jahrestag (1974). Letztgenannte Marke (6)

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

zeigt wiederum den Turm der Petersburger Kunstkammer sowie Globus und Zirkel als Symbol für die besonders gepflegten Wissenschaften Geographie und Mathematik. Auf der Marke (7) von 1945 sieht man das spätere Leningrader Hauptgebäude der Akademie. (Der Hauptsitz der Akademie wurde jedoch 1934 nach Moskau verlegt.) Außerdem zeigt die Marke ein kleines Porträt von Michail Wassiljewitsch Lomonossow (1711 bis 1765), womit wir bei berühmten Zeitgenossen Eulers angelangt sind, die in mehr oder weniger direkten Beziehungen zu Euler standen.

Lomonossow, auf dessen Initiative 1755 die heute nach ihm benannte Moskauer Universität gegründet wurde, war der erste russische Universalgelehrte von europäischem Rang und das erste russische Mitglied der Petersburger Akademie, der er seit 1745, also gerade während Eulers Berliner Jahren, angehörte. Mit Euler, dessen Kontakte nach Petersburg auch in dieser Zeit sehr intensiv waren, verband ihn jedoch ein freundschaftlicher Briefwechsel. Neben anderen Lomonossow-Marken (u. a. auch in Rumänien 1961) erschien in der Sowjetunion die Marke (8) zum 250. Geburtstag.

Mit Johann Andreas Segner (1704 bis 1777), Mediziner, Physiker, Mathematiker und Astronom an den Universitäten Jena, Göttingen und Halle, begegnet uns auf der ungarischen Marke (9) aus dem Jahre 1974 ein weiterer fleißiger Briefpartner Eulers. Diese Freundschaft währte über 25 Jahre, und Euler wurde durch die Erfindung des Segnerschen Wasserrades zu einigen auch heute noch bemerkenswerten Abhandlungen über Turbinen angeregt. (Das Segnersche Wasserrad, auf dem Nebenfeld der Marke dargestellt, entspricht etwa dem Prinzip heute gebräuchlicher Rasensprenger.)

Die bedeutendsten Mathematiker unter den Zeitgenossen Eulers waren Jean le Rond d'Alembert (1717 bis 1783) in Paris und Joseph Louis Lagrange (1736 bis 1813), Nachfolger Eulers an der Berliner Akademie, jedoch ab 1787 ebenfalls wieder in Paris, die wir auf den französischen Marken (10) und (11) aus dem Jahre 1959 bzw. 1958 sehen. Während jedoch Euler zu Lagrange ein recht gutes Verhältnis hatte, waren sowohl die weltanschaulichen Positionen als auch die Auffassungen von wesentlichen Begriffen der Mathematik, die d'Alembert, einer der Herausgeber der Encyklopédie, vertrat, von denen Eulers allzu verschieden, um – bei aller gegenseitigen Achtung – einen engeren geistigen Kontakt zu ermöglichen.

Aus einer 1913 im zaristischen Rußland erschienenen Serie entnahmen wir Katharina II. (12), die als deutsche Prinzessin mit Peter III. verheiratet, 1762 durch Beseitigung ihres Gatten zur Alleinherrschaft gelangte und diese bis zu ihrem Tode 1796 ausübte. Unter ihrer Regierung fand Euler bei seiner Rückkehr 1766 nach Petersburg wesentlich bessere Arbeits- und Lebensbedingungen als während seines durch häufigen Thronwechsel und politische Wirren gekennzeichneten ersten Petersburger Aufenthaltes.

Wir beschließen unsere kleine Briefmarkengalerie mit Voltaire (eigentlich Francois Marie Arouet, 1695 bis 1778), dem berühmten französischen streitbaren Aufklärer, Philosophen und Schriftsteller, der wie kaum ein anderer das geistige Klima des 18. Jh. geprägt hat. (Diese wertvolle Marke stellte Prof. Dr. H. Wußing, Leipzig, freundlicherweise zur Verfügung.) Von 1750 bis 1753 lebte Voltaire am Hofe Friedrichs II., wo er 1753 in den berühmten Akademieskandal um Maupertuis, Koenig und das Prinzip der kleinsten Wirkung mit literarischen Mitteln eingriff. Ein paar Tropfen seines ätzenden Spottes fielen dabei verdientermaßen auch auf Euler, der hier aus religiösen und anderen persönlichen Gründen die falsche Partei ergriffen hatte. Die Voltairemarke (13) erschien 1949.

P. Schreiber

In einer Banknoten-Serie der Schweiz wurde 1979 als letzter auch der 10-Franken-Schein in Umlauf gebracht. Er ist dem Mathematiker und Physiker Leonhard Euler gewidmet.

Das Hauptmotiv der Vorderseite ist ein Bild Eulers. Links daneben erkennt man eine Zeichnung des idealen „Zahl-Profils" eines Zahnrades – eine von Eulers Entdeckungen. Den Hintergrund bilden Diagramme (Euler-Diagramme), die Euler zur Darstellung logischer Schlüsse verwendete.

Die drei Motive der Rückseite sollen an Eulers Beiträge zur Hydrodynamik, Optik und Astronomie erinnern.

Im einzelnen handelt es sich

a) um eine von Euler entworfene Wasserturbine, die allerdings erst lange nach seinem Tode technisch realisiert werden konnte;

b) um das Schema eines Strahlenganges durch ein System von Linsen;

c) um eine Darstellung unseres Sonnen-Systems in Zusammenhang mit Eulers Mondtheorie, die es erlaubte, verbesserte Tafeln der Mondbewegung (wichtig für die Schiffahrt) herzustellen.

Die Tatsache, daß Euler bei der Vergabe der sechs Wertstufen (10 sF bis 1000 sF) mit dem niedrigsten Wert bedacht wurde, mag bewirken, daß der Mathematiker unter den auserwählten Geistesgrößen die weiteste Verbreitung findet.

Dr. Stark, Aachen

Euler und die Kartographie

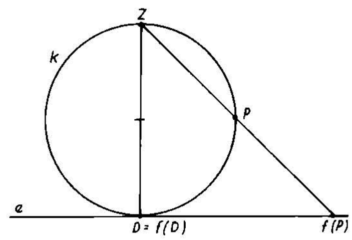
Landkarten, vor allem solchen, die größere Teile der Erdoberfläche abbilden, liegen heute selbstverständlich stets mathematisch exakt definierte Abbildungen der als kugelförmig angenommenen Erdoberfläche in die Kartenebene zugrunde. (In speziellen Zusammenhängen wird sogar die geringe Abweichung der Erde von der Kugelgestalt berücksichtigt.) Betrachtet man dagegen alte Landkarten, die sich gerade heute wegen ihres kulturhistorischen und dekorativen Wertes einer rasch wachsenden Beliebtheit erfreuen, so sieht man sofort, daß diese Karten nicht nur die eigentlichen geographischen Sachverhalte recht phantasievoll und ungenau behandeln, sondern daß ihnen häufig keine exakten Gradnetzentwürfe zugrunde liegen. Da Euler in der Entwicklung der geometrischen Aspekte der Kartographie eine gewisse Rolle gespielt hat, wollen wir diese Entwicklung hier in großen Zügen skizzieren und Eulers Leistung in den historischen Zusammenhang einordnen.

Die Kugelgestalt der Erde galt schon im antiken Griechenland als gesichert, und der alexandrinische Mathematiker Eratosthenes (~ 276 bis ~ 195 v. u. Z.) hatte durch ein scharfsinniges Experiment sogar den Erdradius annähernd richtig bestimmt. Den Griechen war auch spätestens seit Hipparch (~ 190 bis 125 v. u. Z.) eine interessante, heute als stereographische Projektion bezeichnete Abbildung der Kugeloberfläche in die Ebene bekannt, die die folgenden beiden, den griechischen Mathematikern ebenfalls bekannten Eigenschaften aufweist:

1. *Die stereographische Projektion ist kreisverwandt, d. h., alle Kreise der Kugeloberfläche werden in Kreise bzw. in Ausnahmefällen in Geraden der Bildebene überführt, und umgekehrt ist jeder Kreis und jede Gerade der Bildebene Bild eines Kreises der Kugeloberfläche.*
2. *Die stereographische Projektion ist winkeltreu, d. h., je zwei Kurven (insbesondere Kreise) der Kugeloberfläche schneiden sich unter dem gleichen Winkel wie die entsprechenden Bildkurven in der Bildebene.*

(Die Definition der stereographischen Projektion ist in Bild 1 dargestellt.) Merkwürdigerweise scheinen die Griechen die stereographische Projektion nur für Himmelskarten benutzt zu haben. Klaudios Ptolemaios (~ 85 bis ~ 160 u. Z.), der als Vollender sowohl der antiken Astronomie als auch der antiken Geographie gilt, bewies ihre oben genannten Eigenschaften in der Abhandlung *Planispaerium*, für seine bis ins späte Mittelalter immer wieder kopierte Weltkarte jedoch verwendete er sie nicht. Vielleicht war er sich der Ungenauigkeit der damals verfügbaren geographischen Informationen zu bewußt. Es würde durchaus dem Geist der Griechen entsprochen haben, eine so reine Sache wie die Mathematik nicht mit der von so vielen Unregelmäßigkeiten und Zufälligkeiten beherrschten irdischen Geographie zu vermengen.

Bild 1



Als Projektionszentrum dient bei der stereographischen Projektion ein beliebiger Punkt Z der abzubildenden Kugeloberfläche K, als Bildebene e die Tangentialebene an K im zu Z diametralen Punkt D der Kugel. Jedem von Z verschiedenen Punkt P von K wird der Schnittpunkt der Geraden PZ mit der Bildebene e als Bildpunkt $f(Z)$ zugeordnet. Nur Z selbst hat keinen Bildpunkt. Genau die Kreise der Kugeloberfläche, die durch Z verlaufen, werden in Geraden von e abgebildet. Warum?

Aus Platzgründen müssen wir die vielen gewichtigen Beiträge der islamischen Gelehrten des 9. bis 15. Jh. zur Geographie, Kartographie und Vermessungskunde hier übergehen, zumal sie (im Gegensatz zu den astronomischen und mathematischen Leistungen der orientalischen Welt) die europäische Entwicklung nicht wesentlich beeinflußt haben. Da während des europäischen Mittelalters sogar die Kugelgestalt der Erde wieder bezweifelt oder gar geleugnet wurde, waren in dieser von der christlichen Kirche bestimmten Zeit irgendwelche Fortschritte in Richtung

Die Berliner Akademie gab Kalender und Landkarten heraus, um durch die damit verbundenen Einnahmen die Finanzlage der Akademie zu verbessern. 1760 erschien ein von Leonhard Euler im Auftrage der Akademie herausgegebener „Geographischer Atlas“ aus 44 Landkarten. Unser Bild zeigt eine Erdhalbkugel mit eingezeichneter Deklination der Magnetnadel. Euler hebt im Begleittext hervor, daß eine ähnliche Karte in keinem anderen Atlas zu finden sei.

mathematischer Behandlung der Kartographie nicht zu erwarten. Das mit den großen geographischen Entdeckungen einsetzende Zeitalter der Hochseeschiffahrt belebte jedoch das Interesse an exakten Positionsbestimmungen und genauen Karten außerordentlich. Man kann sagen, daß die Bedürfnisse der Navigation und der mit der Festigung feudalabsolutistischer Nationalstaaten aufblühenden Landesvermessung vom Beginn des 16. bis zum Ende des 18. Jh. eine der wesentlichsten Triebkräfte für die Entwicklung von Astronomie und Mathematik bildeten.

Ein erster Fortschritt wurde durch die Einführung der Mercator-Projektion für Seekarten erzielt, die dadurch ausgezeichnet ist, daß sie alle loxodromen Kurven der Kugel- (bzw. Erd-)oberfläche in Geraden der Kartenebene überführt. Dabei versteht man unter einer loxodromen Kurve eine solche, die alle Längen- (und damit auch alle Breiten-) kreise unter einem festen konstanten Winkel schneidet, die folglich einem Schiffsweg konstanten Kurses entspricht. Die Mercatorprojektion ist nach dem flämischen Geographen Gerhard Mercator (eigentlich: Kremer, 1512 bis 1594) benannt, der sie 1569 zur Darstellung einer Weltkarte anwandte.

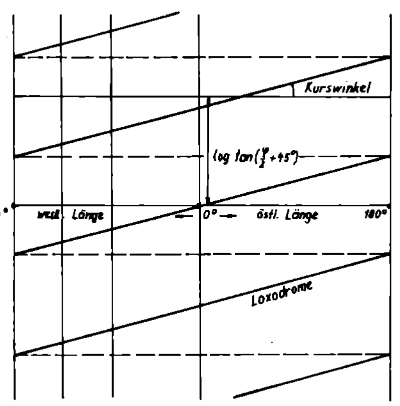


Bild 2

Bild des zur Breite φ gehörigen Breitenkreises

Äquator

Bilder von Meridianen

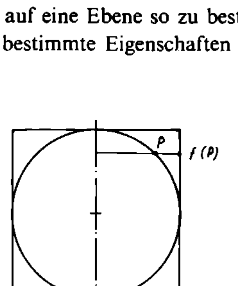
Mercator-Entwurf, im Prinzip nach oben und unten unbegrenzt. Jede Loxodrome wird als unendliche Folge paralleler Strecken zwischen den die Karte begrenzenden Bildern des 180°-Meridians abgebildet. Auf der Kugel nähert sie sich beiden Polen in einer unbegrenzten Spirale. Ausnahmen bilden nur die zu den Kurswinkeln 0° (Breitenkreise) und 90° (Meridiane) gehörigen Loxodromen.

Das Prinzip wie auch die Begriffe loxodromer Kurs und orthodromer (d. h. dem kürzesten Weg entsprechender) Kurs sind jedoch schon vorher von dem portugiesischen Mathematiker Pedro Nuñez (1502 bis 1578) eingeführt worden, der übrigens auch die nach ihm als Nonius (latinisierte Form von Nuñez) benannte Ablesevorrichtung erfand. Sowohl Nonius als auch Mercator konnten das sich stetig ändernde Verhältnis der Breitengrade zu den konstant abgebildeten Längengraden, das den „Mercatoreffekt" hervorruft, nur näherungsweise empirisch bestimmen. Um es exakt formelmäßig zu beherrschen, muß man eine Differentialgleichung lösen. Diese Aufgabe löste, ebenfalls mit noch nicht durchgebildeten Methoden, 1599 der englische Mathematiker und Kartograph Edward Wright (~ 1558 bis 1615).

Seit der ersten europäischen Gradmessung durch den Franzosen Jean Fernel im Jahre 1525 wurden wiederholt großangelegte Vermessungen zur immer genaueren Bestimmung des Erdradius und schließlich auch des Abplattungsfaktors durchgeführt, an denen namhafte Mathematiker wie W. Snellius (1591 bis 1626), G. D. Cassini (1625 bis 1712), P. de Maupertuis (1698 bis 1759) und A. C. Clairaut (1713 bis 1756) unmittelbar mitwirkten. Die Verbesserung der Methoden zur geographischen Ortsbestimmung, teils durch astronomische Beobachtungen, teils durch Triangulation im Gelände, vor allem aber die genauere Bestimmung der geographischen Länge mittels der Differenz der Ortszeiten durch die von dem britischen Uhrmacher J. Harrison (1693 bis 1776) zu hoher Präzision entwickelten Chronometer, gestatteten nun erstmals die Herstellung wirklich genauer, an Gradnetzen orientierter Landkarten.

Eine eigentlich mathematische Behandlung des Problems, Abbildungen der Kugeloberfläche auf eine Ebene so zu bestimmen, daß dabei bestimmte Eigenschaften wie Winkel-

Bild 3



Beispiel einer flächentreuen kartographischen Abbildung:
Lamberts flächentreuer Zylinder-Entwurf. Als Karte dient der Mantel des umbeschriebenen Zylinders.

treue, Flächentreue o. ä. erfüllt sind, tritt erst in den *Anmerkungen und Zusätzen zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten* (1772) von J. H. Lambert (1728 bis 1777) auf. Lambert charakterisierte solche Eigenschaften der kartographischen Abbildungen durch Differentialgleichungen, für die er allerdings noch keine allgemein wirksamen Lösungsmethoden angeben konnte. Dafür bereicherte er in dieser kleinen Schrift die Kartographie um eine ganze Palette spezieller Abbildungsverfahren, die bis heute zum eisernen Bestand der praktischen Kartographie gehören. So taucht der Name Lambert in jedem Atlas dort auf, wo die für die einzelnen Karten verwendeten Projektionen genannt werden. Weitere Stationen der nun einsetzenden Entwicklung sind durch die Namen von L. Euler (1707 bis 1783), J.-L. Lagrange (1736 bis 1813) und C. F. Gauß (1777 bis 1855) markiert. Lagrange gab 1779 die allgemeinste Lösung der von Lambert aufgestellten Differentialgleichungen an und verallgemeinerte das Problem auf die winkeltreue Abbildung beliebiger Rotationsflächen in die Ebene. Bei Gauß schließlich schlägt das konkrete Problem der kartographischen Abbildung in eine neue Qualität um: Es werden allgemeine Prinzipien für die Abbildung beliebiger gekrümmter Flächen in die Ebene untersucht, und die innere Geometrie solcher Flächen (d. h. diejenige Geometrie, die auf dem innerhalb der Flächen gemessenen kürzesten Weg zwischen zweien ihrer Punkte beruht) wurde aus der Taufe gehoben. Gauß war aber zu sehr angewandter Mathematiker, um die so gewonnenen tiefliegenden Erkenntnisse nicht wieder in der höheren Geodäsie anzuwenden, jenem Zweig der Vermessungskunde, dessen Ziel die genaue Vermessung der höchst unregelmäßigen tatsächlichen Gestalt des Erdkörpers ist.

Wenden wir uns nun Euler zu. Seit dem Aufschwung des Russischen Reiches unter Peter I. (1672 bis 1725) gehörte die genaue Erkundung und kartographische Erfassung des riesigen Territoriums zu den besonders geförderten staatlichen Aufgaben, woran jedoch zwei voneinander unabhängige und sich gegenseitig die Zuständigkeit bestreitende Instanzen arbeiteten: der Senat unter Iwan Kirilow (1689 bis 1737), dessen *Atlas des Allrussischen Reiches* schon 1734 erschien (als „Koordinatensystem" war hier kurioserweise das weitverzweigte System der russischen Wasserläufe benutzt worden) und das Geographische Departement der Petersburger Akademie unter der Leitung des französischen Kartographen J. N. Delisle (oder de l'Isle, 1688 bis 1768), der von 1726 bis 1747 in Petersburg wirkte. 1735 gewann er Euler als Mitarbeiter, der sich zuvor schon an den Vorbereitungen für die große Nordrussische oder Kamtschatka-Expedition (1733 bis 1743) zur Erkundung der russisch-sibirischen Nordküste beteiligt hatte. 1737 verfaßten beide gemeinsam die erste auf wissenschaftlichen

Grundlagen beruhende General-Instruktion für die russischen Geodäten, um den Zulauf zuverlässiger und nach einheitlichen Methoden gewonnener Detailkarten zu sichern. Der Verarbeitung dieser Karten gab Euler selbst die Schuld am Verlust der Sehkraft seines rechten Auges 1738 (nicht 1735, wie auf Grund einer falschen Information durch den Mitarbeiter Eulers, N. Fuß, meist zu lesen ist). In diesen Jahren soll Euler fast täglich viele Stunden im Büro des Geographischen Departements gearbeitet haben. 1740 verfaßte Euler einen *Vorschlag zur Verfertigung einer General-Charte von dem Russischen Reiche.* In dem 1745 von der Akademie endlich herausgegebenen *Atlas des Russischen Reiches* waren jedoch trotz vieler Verbesserungen gegenüber seinem Vorgänger weder der Vorschlag Eulers noch die Ergebnisse der Kamtschatka-Expedition berücksichtigt worden. Euler selbst weilte ja zu dieser Zeit bereits seit vier Jahren in Berlin.

Erst viel später, nämlich 1777, sind in den Abhandlungen der Petersburger Akademie die drei klassischen Abhandlungen Eulers über Kartenprojektionen gedruckt worden. Die beiden ersten:

Über die Abbildung einer Kugelfläche in einer Ebene und *Über die Darstellung einer Kugelfläche auf einer Karte* sind rein mathematischen Inhalts. Euler beweist hier zum ersten Mal die anschaulich einleuchtende Tatsache, daß eine längentreue Abbildung der Kugeloberfläche (oder auch nur eines beliebig kleinen Teils von ihr) in die Ebene nicht möglich ist, auf Grund der vorangestellten Charakterisierung solcher Abbildungen durch Differentialgleichungen. Ebenfalls aus diesen Gleichungen entwickelt er die Spezialfälle der winkeltreuen und der flächentreuen Abbildung und gibt Lösungsmethoden für diese Fälle an. Die dritte Abhandlung beschäftigte sich nachträglich mit der Frage, wie man die frei wählbaren Bestimmungsstücke der für die Gesamtkarte des Russischen Reiches gewählten Projektion hätte bestimmen müssen, um die Abweichungen überall so gering wie möglich zu halten. Es ist dies ein interessantes frühes Beispiel einer ganz aus dem üblichen Rahmen fallenden Optimierungsaufgabe.

Eulers Abhandlungen lösten, da in lateinischer Sprache geschrieben und in den Petersburger Akademieabhandlungen schwer zugänglich, keine große historische Wirkung aus. Man kann jedoch annehmen, daß sie Lagrange bekannt waren, der in mehreren Richtungen über Eulers Resultate hinausgelangte. Um 1900 wurden die Abhandlungen über Kartenprojektion von Lambert, Euler, Lagrange und Gauß von A. Wangerin in deutscher Sprache in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften herausgegeben.

P. Schreiber

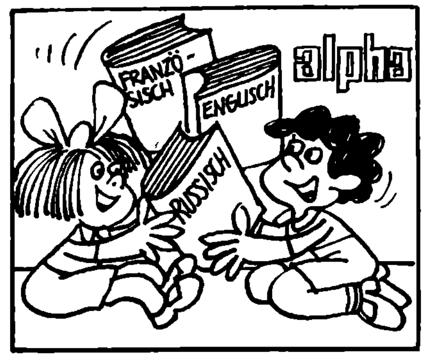
Ein Maultier und ein Esel

Im Jahre 1770 erschien in St. Petersburg (dem heutigen Leningrad) Leonhard Eulers *Vollständige Anleitung zur Algebra* (in zwei Teilen), ein später in viele Sprachen übersetztes Lehrbuch der Algebra für Anfänger, für Liebhaber, eine „Anleitung zum Genuß der Eigenschaften der Zahlen". Das Buch zeichnet sich durch eine außerordentliche Klarheit aus. Der erblindete Euler hatte es seinem Diener, einem Schneidergesellen, der nur geringe mathematische Kenntnisse besaß, diktiert. Euler vermochte den Text so einfach vorzutragen, daß sein Diener den teilweise recht schwierigen Stoff verarbeiten und manche Rechnungen selbständig ausführen konnte. Das weit verbreitete Buch ist sogar in *Reclams Universalbibliothek* erschienen. Jeder mathematisch interessierte Schüler sollte gleich jenem Schneidergesellen selbst einmal Probleme daraus unter Eulers Anleitung durchdenken! Im 1. Abschnitt des 2. Teils von Eulers Buch befindet sich unter Nr. 50 die folgende Aufgabe:

Ma 8 ▪2339 „Ein Maulesel und ein Esel tragen jeder etliche Pud. (Das damals in Rußland übliche Gewicht Pud beträgt 20 kg.) Der Esel beschwert sich über seine Last und sagt zum Maulesel, wenn du mir ein Pud von deiner Last gäbest, so hätte ich zweimal soviel als du. Darauf antwortete der Maulesel, wenn du mir ein Pud von deiner Last gäbest, so hätte ich dreimal soviel als du. Wieviel Pud hat jeder getragen?"

Eine ähnliche Aufgabe kommt schon in einer Sammlung griechischer Epigramme (4. oder 6. Jh. u. Z.) als sogenanntes *Euklidisches Problem* vor. Beispiele von Aufgaben, in welchen verlangt wird, durch gegenseitiges Abgeben an einander ein gewisses Verhältnis herzustellen, sind im übrigen zahlreich überliefert.

H. Pieper



▲1▲ В 1982 году квадрат возраста Матлеба совпал с числом, образованным первыми тремя цифрами его года рождения. В каком году родился Матлеб?

▲2▲ В 1982 году 1 января и 31 декабря были одним и тем же днем недели. А будет ли так в этом году? И вообще, когда 1 января будет тем же днем недели, что и 31 декабря?

▲3▲ Mark, Paul and Boris are married to Anne, Mary and Susan, not necessarily respectively. Each couple has a pet and the pets are a cat, a guineapig and a pony. Use the following information to match up the husbands, wives and pets:

Paul's and Anne's pets were fighting.
Mary's husband's name has four letters.
Susan went round to feed Mark's pet when he was away.
Mark never goes to town.
Boris's pet is either the cat or the pony.
Susan's pet is not the cat.
The cat's male owner took him to the vet in town.
The guineapig hides when Anne visits its house.
Mary's pet sleeps in a shoe box.

▲4▲ Un journal comporte 36 pages et tire à 600000 exemplaires par jour. Chaque page est un rectangle dont les dimensions sont 50 cm et 33 cm. Autour de chaque page existe une marge non imprimée de largeur égale à 2 cm.

a) Quelle est l'aire de la surface imprimée?
b) Quelle est l'aire du papier nécessaire au tirage quotidien du journal?

▲5▲ La longueur d'un fil téléphonique qui relie deux localités est égale à 72,8 km. Quand la température s'élève de 1 degré, chaque mètre de ce fil s'allonge de 18 μm. Calculer, en centimètres, l'allongement de ce fil quand la température passe de 12° à 36°.

Zusammenstellung: H. Begander, Dr. C. P. Helmholz, J. Lehmann (alle Leipzig)

ARBEITS-GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Euler-Wettbewerb in Köthen

An einem Nachmittag im April 1982 war der große Hörsaal unserer Hochschule, in dem sonst künftige Mathematik- und Chemielehrer aufmerksam den Vorlesungen der Hochschullehrer und Wissenschaftler folgen, ganz den *Jungen Mathematikern* aus Stadt und Kreis Köthen vorbehalten. Anläßlich der 275. Wiederkehr des Geburtstages von *Leonhard Euler* gestalteten Studenten des 3. Studienjahres einen besonderen Höhepunkt, den „Euler-Wettbewerb". 126 Schüler aus den Klassenstufen 5 bis 10 rangen in einer Klausur um Höchstleistungen. In jeder Klassenstufe waren jeweils drei Aufgaben zu lösen, die erste Aufgabe knüpfte an den Schulstoff an, die zweite hatte Beweischarakter, und die dritte war eine historische Aufgabe, die von *Leonhard Euler* stammt. Nach der Klausur wurden die Lösungen sofort von Studenten korrigiert. Während der Korrektur hielten zwei Studentinnen einen interessanten Vortrag über Leben und Werk Eulers. In der anschließenden Siegerehrung konnten die erfolgreichsten *Jungen Mathematiker* stolz die Urkunden mit ihrer Plazierung und kleine Geschenke in Empfang nehmen. Eine Wandzeitung erinnert in unserem Hause an diesen für Studenten und Schüler erlebnisreichen Nachmittag.

Vielleicht wollt ihr an eurer Schule einmal etwas Ähnliches versuchen? Am 18.9.1983 jährt sich zum 200. Male der Todestag von Leonhard Euler. Pionierleiter, AG-Leiter und Mathematiklehrer werden euch gewiß dabei helfen.

Hier sind vier Aufgaben aus unserem Euler-Wettbewerb. Sie sind Eulers „Algebra" entnommen.

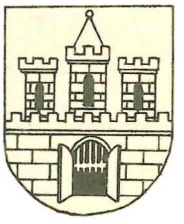
▲1▲ Siehe *alpha*-Wettbewerb, Aufgabe Ma 7 ■2336.

▲2▲ Das Königsberger Brückenproblem: Siehe *alpha*-heiter (S. 38)! Zusatzfrage: Ist das Problem lösbar, wenn Brücke 8 gebaut wird?

▲3▲ Die Zahl 25 ist so in zwei Summanden zu zerlegen, daß der größte Summand 48mal so groß ist wie der zweite.

▲4▲ Ein Amtsmann kauft Pferde und Ochsen für insgesamt 1770 Taler. Er zahlt für ein Pferd 31 Taler, für einen Ochsen aber 21 Taler.
Wieviel Pferde und wieviel Ochsen sind es gewesen? Hat diese Aufgabe mehrere Lösungen?

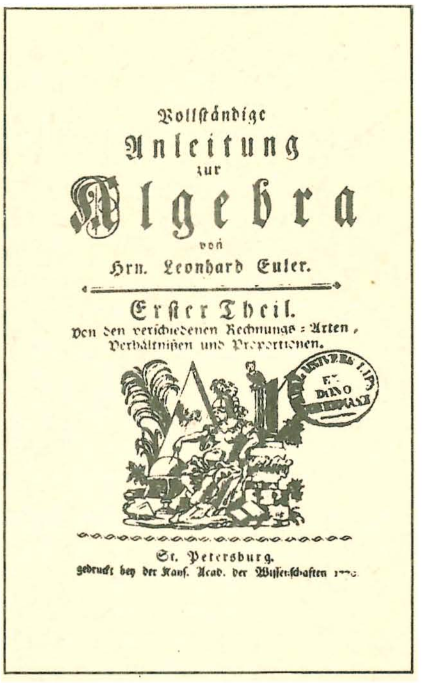
Mathe-AGs in Köthen



Seit 1976 wird an der Pädagogischen Hochschule *Wolfgang Ratke* Köthen eine zielgerichtete außerunterrichtliche Förderung begabter Schüler in Mathematik betrieben. Schrittweise wurden Arbeitsgemeinschaften *Junge Mathematiker* ab Klassenstufe 6 gebildet. Zur Zeit bestehen an unserer Einrichtung je eine Arbeitsgemeinschaft in den Klassenstufen 5 bis 8. Die Teilnehmer dieser Arbeitsgemeinschaften kommen aus Stadt und Kreis Köthen. Sie wurden aus den erfolgreichsten Teilnehmern der Kreisolympiaden ermittelt. Alle 14 Tage kommen die *Jungen Mathematiker* zu den AG-Nachmittagen in die Räume der Hochschule. Hier werden sie von Studenten des 2. und 3. Studienjahres betreut. In den Nachmittagen werden Trainingsaufgaben mit dem Niveau der Kreisolympiaden gelöst und auch Kurse zu ausgewählten Kapiteln der Mathematik durchgeführt. Dabei ist uns die *alpha* eine wertvolle Hilfe. Besondere Höhepunkte gestalten wir zur Halbzeit zwischen den Kreisolympiaden im Frühjahr. Hier finden mathematische Kreiswettbewerbe statt, in denen die *Jungen Mathematiker* ihre Kräfte messen. Foren mit Wissenschaftlern unserer Hochschule und der Besuch der Rechenstation stehen dabei auf dem Programm. Mit den ehemaligen Teilnehmern der Arbeitsgemeinschaften, die inzwischen in den oberen Klassen der POS und EOS sind, haben wir in Korrespondenzzirkeln Kontakt. Hier erhalten die interessierten Schüler monatlich Aufgaben zugeschickt. Sie schicken die Lösungen zu uns ein und erhalten die Lösungen korrigiert zurück. Der Rektor der Hochschule hat den FDJ-Studenten die Förderung begabter Schüler als Jugendobjekt übertragen.

Den *alpha*-Lesern überreichen wir drei Aufgaben und wünschen viel Erfolg beim Knobeln!

K. Meier



Vollständige
Anleitung
zur
Algebra
von
Hrn. Leonhard Euler.
Erster Theil.
Von den verschiedenen Rechnungs-Arten, Verhältnissen und Proportionen.

St. Petersburg.
gedruckt bey der Kays. Acad. der Wissenschaften

▲1▲ Von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen multiplizieren wir die erste mit der zweiten und die zweite mit der dritten. Beweise, daß dann die Summe der beiden Produkte gleich dem doppelten Quadrat der zweiten Zahl ist!

▲2▲ Zaunmaterial mit einer Länge von 400 m soll verwendet werden, um ein rechteckiges Stück Land einzuzäunen, das an einer Seite an eine lange Mauer grenzt. Dabei soll das Stück Land möglichst groß sein.
Bestimme die Lage der beiden Eckpfosten des Zauns, und bestimme den Flächeninhalt des Rechtecks!

▲3▲ In einem Kaufhaus kann man mit einer Rolltreppe von einer Etage zur anderen fahren. Die Rolltreppe bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit. Steht ein Kunde auf der sich bewegenden Rolltreppe still, so benötigt er bis zur nächsten Etage genau 30 s. Bei stehender Rolltreppe durchläuft der Kunde die gleiche Strecke in 90 s.
In welcher Zeit würde er bei sich bewegender Rolltreppe die gleiche Strecke zurücklegen, wenn er selbst auch in Fahrtrichtung geht?

Junge Mathematiker bei der Klausur am Ende des ersten Lehrgangs der Mathematischen Schülergesellschaft (MSG) der Universität Greifswald (siehe Heft 1/83).

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

L. Euler · Basrelief von M. Pawlow, 1777

Letzter Einsendetermin: 12. Juni 1983

Vor 200 Jahren, am 18. September 1783, starb in St. Petersburg der große Mathematiker *Leonhard Euler*. Dieser aus Basel stammende Gelehrte, ein Schüler Johann Bernoullis, entwickelte sich im Verlaufe seines schaffensreichen Lebens zum bedeutendsten Mathematiker des 18. Jahrhunderts. Ihm verdanken wir die nahezu unglaubliche Anzahl von mehr als 860 Originalabhandlungen und eine große Anzahl pädagogisch hervorragender zusammenfassender Darstellungen von Gebieten der Mathematik und ihren Anwendungsbereichen.
In Würdigung *Leonhard Eulers* stellen wir unseren *alpha*-Lesern Aufgaben aus dessen Buch „Vollständige Anleitung zur Algebra" vor. Der Originaltext einiger dieser Aufgaben wurde leicht verändert, um sie lesbarer bzw. verständlicher zu machen. Wir wünschen viel Spaß beim Lösen der Aufgaben.

Mathematik

Ma 5 ▪2322 Ein Vater hinterläßt seinen drei Söhnen ein Vermögen von 1600 Talern. Nach seinem Testament soll der älteste Sohn 200 Taler mehr erhalten als der zweite, dieser aber 100 Taler mehr als der dritte. Wieviel Taler erhält jeder der drei Söhne?

Ma 5 ▪2323 Die Zahl 32 ist in zwei Summanden zu zerlegen. Dabei soll die Summe aus dem sechsten Teil des kleineren Summanden und dem fünften Teil des größeren Summanden 6 ergeben.

Ma 5 ▪2324 Gesucht ist eine Zahl, die folgende Bedingung erfüllt: Multipliziert man diese Zahl mit 5, so ist das Produkt um soviel kleiner als 40, wie diese Zahl selbst kleiner als 12 ist.

Ma 5 ▪2325 Suche zwei natürliche Zahlen, deren Summe 15 und deren Differenz 7 beträgt!

Ma 5 ▪2326 Zerlege 7 derart in zwei Summanden, daß der eine um 3 größer ist als der andere!

Ma 5 ▪2327 Die Zahl 25 ist in zwei Summanden zu zerlegen. Der eine Summand soll ein Vielfaches von 2, der andere ein Vielfaches von 3 sein. Es sind alle Lösungen anzugeben.

Ma 6 ▪2328 Zerlege 48 so in neun Summanden, daß immer einer um $\frac{1}{2}$ größer ist als der vorhergehende!

Ma 6 ▪2329 Suche eine Zahl, die so beschaffen ist, daß, wenn man zu ihr ihre Hälfte addiert, so viel über 60 herauskommt, als die Zahl selbst unter 65 ist!

Ma 6 ▪2330 Ein Maurer verdient täglich 10 Groschen. Wieviel Taler zu 24 Groschen erhalten 12 Maurer, die 50 Tage lang gearbeitet haben?

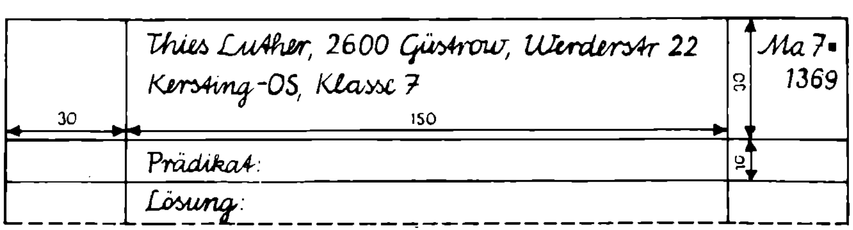
Ma 6 ▪2331 Zerlege 25 so in zwei Summanden, daß der eine 49mal so groß ist wie der andere!

Ma 6 ▪2332 Es wird eine Zahl gesucht, deren Hälfte mit ihrem Drittel multipliziert 24 ergibt.

Ma 7 ▪2333 Es wird die kleinste natürliche Zahl gesucht, die bei Division durch 11 den Rest 3, bei Division durch 19 den Rest 5 läßt.

Ma 7 ▪2334 Insgesamt 20 Männer und Frauen besuchten ein Gasthaus. Jeder Mann gibt 8 Groschen, jede Frau 7 Groschen aus, und die ganze Zeche beläuft sich auf 6 Taler. Wieviel Männer bzw. wieviel Frauen sind es gewesen? (1 Taler wurde damals mit 24 Groschen berechnet.)

Ma 7 ▪2335 Ich habe einige Ellen Tuch gekauft und für 5 Ellen 7 Taler bezahlt, davon wieder 7 Ellen für 11 Taler verkauft und dabei 100 Taler gewonnen. Wieviel Ellen Tuch sind es gewesen?



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1982/83 läuft von Heft 5/1982 bis Heft 2/1983. Zwischen dem 1. und 10. September 1983 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/82 bis 2/83 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.
Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/83 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/82 bis 2/83) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1982/83 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

Ma 7 ▪2336 Zwei Bäuerinnen haben zusammen 100 Eier. Die erste sagt: „Wenn ich die Anzahl meiner Eier immer zu 8 Stück abzähle, so bleiben 7 übrig." Die zweite sagt: „Wenn ich die Anzahl meiner Eier immer zu 10 Stück abzähle, so bleiben mir auch 7 übrig." Wie viele Eier hat jede der beiden Bäuerinnen?

Ma 8 ▪2337 Jemand hat zwei silberne Becher nebst einem Deckel dazu. Der erste Becher wiegt 12 Lot. Legt man den Deckel darauf, so wiegt er zweimal soviel wie der andere Becher. Legt man aber den Deckel auf den anderen Becher, so wiegt dieser dreimal soviel wie der erste. Wieviel Lot wiegt der zweite Becher, wieviel der Deckel?

Ma 8 ▪2338 Ein Wechsler hat zweierlei Münzen. Von der ersten Sorte gelten 10 Stück, von der zweiten Sorte 20 Stück einen Taler. Jemand verlangt 17 Münzen für einen Taler. Wieviel Münzen jeder Sorte bekommt er?

Ma 8 ▪2339 Text siehe: *Historische Aufgabe*, S. 34!

Ma 8 ▪2340 Ein Vater hinterläßt seinen vier Söhnen eine Erbschaft, die sie wie folgt unter sich aufteilen: Der erste Sohn nimmt 3000 Taler weniger als die Hälfte der Erbschaft. Der zweite nimmt 1000 Taler weniger als $\frac{1}{3}$ der Erbschaft. Der dritte nimmt $\frac{1}{4}$ der ganzen Erbschaft. Der vierte nimmt 600 Taler und $\frac{1}{5}$ der Erbschaft. Wie groß war die Erbschaft, und wieviel Taler hat jeder Sohn bekommen?

Ma 9 ▪2341 Eine Bäuerin vertauschte Käse gegen Hühner. Sie gibt je zwei Käse für je drei Hühner. Die Hühner legen Eier; jedes $\frac{1}{3}$ soviel wie es Hühner sind. Mit den Eiern geht sie auf den Markt. Sie gibt je neun Eier für soviel Pfennig, wie ein Huhn Eier gelegt hat. Der Erlös beträgt 72 Pfennig. Wieviel Käse hat die Bäuerin gegen Hühner eingetauscht?

Ma 9 ▪2342 Jemand kauft eine gewisse Anzahl Tücher, das erste für 2 Taler, das zweite für 4 Taler, das dritte für 6 Taler, immer 2 Taler mehr für das folgende. Er bezahlt für alle Tücher 110 Taler. Wieviel Tücher sind es gewesen?

Ma 9 ▪2343 Insgesamt 20 Männer und Frauen sind in einem Gasthaus. Die Männer geben zusammen 24 Gulden, die Frauen geben zusammen ebenfalls 24 Gulden aus. Es stellt sich heraus, daß jeder der Männer einen Gulden mehr als jede der Frauen hat zahlen müssen. Wieviel Männer bzw. Frauen waren es?

Ma 9 ▪2344 Gesucht sind die drei kleinsten aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen mit folgender Eigenschaft: Die Summe ihrer Kubikzahlen ergibt eine weitere Kubikzahl.

Ma 10/12 ▪2345 Jemand kauft ein Pferd für einige Taler. Er verkauft es wieder für 119 Taler und gewinnt daran soviel Prozent, wie das Pferd anfangs gekostet hat. Wie teuer wurde das Pferd eingekauft?

Ma 10/12 ▪2346 Zwei Personen haben zusammen 29 Rubel Schulden. Nun hat zwar jeder Geld, doch nicht soviel, daß er diese gemeinsamen Schulden allein bezahlen könnte. Darum sagt der erste zum anderen: „Gibst du mir $\frac{2}{3}$ deines Geldes, so könnte ich die Schulden sogleich allein bezahlen." Der andere antwortete:
„Gibst du mir $\frac{3}{4}$ deines Geldes, so kann ich die Schulden allein bezahlen." Wieviel Geld hat jeder gehabt?

Ma 10/12 ▪2347 Drei Personen betreiben miteinander ein Glücksspiel. Im ersten Spiel verliert der erste an jeden der beiden anderen soviel Geld, wie jeder der zwei anderen Geld bei sich hat.
Im zweiten Spiel verliert der zweite an den ersten und dritten soviel Geld, wie jeder nunmehr hat. Im dritten Spiel verliert der dritte an den ersten und zweiten soviel Geld, wie jeder bis dahin hat. Nach Beendigung der drei Spiele hat jeder von ihnen 24 Gulden. Wieviel Gulden hat jeder anfangs gehabt?

Ma 10/12 ▪2348 Man suche zwei positive reelle Zahlen, deren Summe, deren Produkt und deren Differenz ihrer Quadrate einander gleich sind.

Physik

In alten Büchern geblättert
Physikaufgaben aus den 20er Jahren

Ph 6 ▪136 In früheren Jahren zeigten sich in kleinen Städten Schnelläufer, die eine gewisse Strecke abliefen und für diese Leistung bei den Bewohnern Geld sammelten. Eines Tages lief ein solcher Läufer 43,2 km, und zwar $3\,\frac{\text{m}}{\text{sek}}\left(3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$. Wie lange brauchte er für diesen Schnellauf? Wieviel Sprungschritte hatte er machen müssen, wenn er in der Sekunde 3 Sprünge machte?

Ph 7 ▪137 Wenn auf einem Ozeandampfer die Geschwindigkeit vermehrt werden soll, muß die Leistung der Dampfmaschine erhöht werden. Nun aber wächst erfahrungsgemäß die Leistung proportional der dritten Potenz der Geschwindigkeit. Wie hoch muß die Leistung erhöht werden, wenn die entsprechenden Meßapparate bei 15 Knoten Stundengeschwindigkeit 2700 PS zeigen und wenn die Geschwindigkeit auf 20 Knoten erhöht werden soll?

Ph 8 ▪138 Nach Angabe des römischen Baumeisters Vitruv um 100 n. Chr. wog die Krone des Königs Hiero, in heutigem Gewichtsmaß ausgedrückt, 10 kg (kp) und verlor, in Wasser gewogen 0,625 kg (kp). Aus wieviel Gold und Silber bestand sie, wenn außer diesen Metallen kein anderer Stoff in der Krone war und das Gold im Wasser $\frac{1}{19}$, das Silber $\frac{1}{10}$ seines Gewichts verliert?

Ph 9 ▪139 Regnault hat festgestellt, daß sich der Rauminhalt, den $1\,\text{cm}^3$ Quecksilber von 0° (°C) nach der Erwärmung auf $t°$ (°C) einnimmt, nach der Formel

$$0{,}00000003\,t^2 + 0{,}0002\,t + 1$$

berechnen lasse. Wie hoch muß die Temperatur werden, um den Rauminhalt auf $1{,}01\,\text{cm}^3$ zu bringen?

Ph 10/12 ▪140 Wie groß ist der Steigungswinkel einer Schraubenlinie, wenn $h = 15$ mm und $r = 6{,}2$ mm ist? Wie lang ist die Schraubenbahn bei einer Windung?

Chemie

Ch 7 ▪109 Die Hochöfen des Hüttenkombinats Magnitogorsk produzieren nach Rekonstruktion am Ende der siebziger Jahre pro Jahr etwa 14,8 Mill. t Roheisen. Der Transport des Roheisens erfolgt in Eisenbahnwaggons mit einem Fassungsvermögen von 20 t und einer Länge von 8 m.

a) Wieviel Tonnen Roteisenstein mit einem Eisen(III)-oxidgehalt von 56% müssen jährlich verarbeitet werden?
b) Wieviel Eisenbahnwaggons sind für den Transport notwendig?
c) Welche Länge ergeben alle Eisenbahnwaggons zusammen?

Ch 8 ▪110 Zur Herstellung von 100 kg Natriumsulfat mit einem Reinheitsgrad von 97% verwendet man 81,7 kg Natriumchlorid und 74,5 kg Schwefelsäure. Berechne a) mengenmäßig und b) prozentmäßig den Unterschied zwischen den verschiedenen Mengen an Ausgangsstoffen gegenüber den stöchiometrischen Mengen!

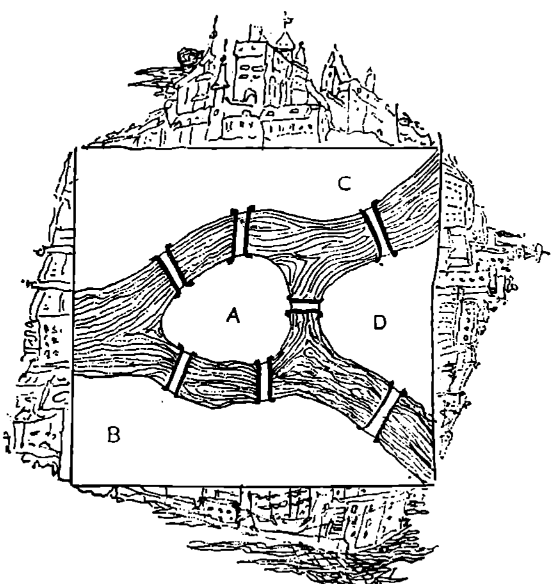
Ch 9 ▪111 Im VEB Stickstoffwerk Piesteritz wird Harnstoff durch Synthese von Ammoniak und Kohlendioxid hergestellt. Wieviel Kubikmeter der beiden Ausgangsstoffe müssen zur Reaktion gebracht werden (Normzustand), damit 150 kg Harnstoff mit einem Reinheitsgrad von 95% entstehen?

Ch 10/12 ▪112 Beim starken Erhitzen von 1 kg eines Gemisches aus Kalziumkarbonat und Magnesiumkarbonat bleibt ein Rückstand von 514 g. Wieviel Prozent der beiden Karbonate sind im Gemisch enthalten?

In freien Stunden · alpha-heiter

Das Königsberger Brückenproblem

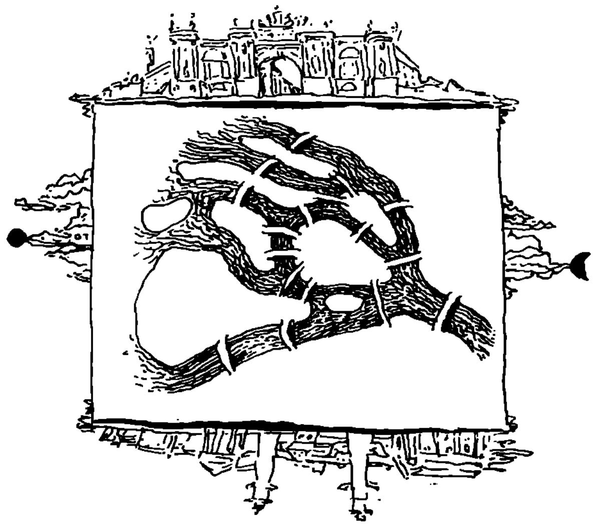
Euler schreibt: „Zu Königsberg in Preußen ist eine Insel *A*, genannt *Der Kneiphof*, und der Fluß, der sie umfließt, teilt sich in zwei Arme, wie das aus dem Bild ersichtlich ist. Über die Arme dieses Flusses führen sieben Brücken *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* und *g*. Nun wurde gefragt, ob jemand seinen Spaziergang so einrichten könne, daß er jede dieser Brücken einmal und nicht mehr als einmal überschreitet... Hieraus bildete ich mir folgendes höchst allgemeines Problem: Wie auch die Gestalt des Flusses und seine Verteilung der Arme sowie die Anzahl der Brücken ist, zu finden, ob es möglich sei, jede Brücke genau einmal zu überschreiten oder nicht."



Titelvignette: Gruppenbild Petersburger Akademiemitglieder der math./phys. Klasse, die feierlich eine Eulerbüste auf ein Postament stellen (Schattenriß, 1784).

Die Leningrader Brücken

Im Mathematiksaal des *Hauses der unterhaltsamen Wissenschaft* finden wir ein interessantes Bild. Die Aufgabe besteht darin, über 17 Brücken, die das abgebildete Territorium der Stadt Leningrad miteinander verbinden, nur einmal zu gehen.



Das Problem der vertauschten Briefe

Euler löste ein von Nikolaus Bernoulli gestelltes Problem unabhängig von diesem, das in einer alltäglichen Interpretation (Auslegung) das Problem der vertauschten Briefe betrifft.

Jemand schreibt n Briefe und auf n Umschläge die zugehörigen Adressen. Auf wie viele Arten kann er die Briefe sämtlich in falsche Umschläge stecken?

Die Lösung lautet:

$$n!\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

Löse das Problem mit $n=4$!

Euler an Goldbach

Euler stellte Goldbach 1751 die folgende Aufgabe:

Auf wie viele Arten läßt sich ein konvexes n-Eck durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen?

Zunächst sieht das Problem recht einfach aus, aber mit der Eckenzahl steigt die Schwierigkeit zunehmend an, so daß Euler merkt: „Die Induktion (lat. Hinführung) aber, so ich gebraucht, war ziemlich mühsam."

Die gesuchte Zahl ist

$$\frac{2\cdot 6\cdot 10\cdot\ldots\cdot(4n-10)}{(n-1)!}$$

Arbeite mit $n=9$!

Streit

Eine merkwürdige Geschichte ereignete sich zur Zeit von Eulers Aufenthalt in Berlin. Euler war mit seinem Nachbarn in Streit darüber geraten, wer einen beide Grundstücke trennenden Graben zuschütten solle. Beide Kontrahenten vertraten ihre Ansicht mit großer Hartnäckigkeit, so daß die Sache gerichtlich entschieden werden mußte, was die erheblichen Kosten von 100 Talern verursachte. Die Kosten für das Zuschütten des Grabens hätten etwa 5 Taler betragen.

Schwieriges Problem

Euler schrieb 1749 an Goldbach, daß neulich in den „Braunschweiger Anzeigen" die Frage:
„Wieviel Kapital von 1000 Rth. in 640 Jahren zu 5 pro cento (Prozent), Zins auf Zins gerechnet, betragen werde?"
aufgegeben worden sei und der Auftraggeber verlange, die Antwort in einer halben Stunde zu finden. Euler „hat aber dieselbe wohl eine ganze Stunde gekostet; und ich sehe nicht, wie die Arbeit verkürzt werden könne."
Euler gesteht offen, daß die Auflösung des übersichtlichen Gleichungssystems

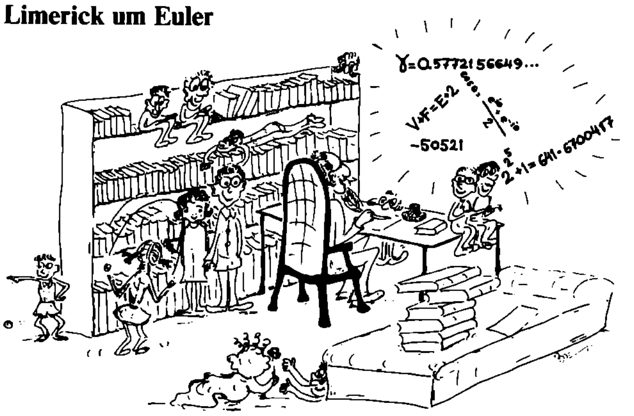
$$\begin{aligned} x+y+z &= u^2 \\ xy+xz+yz &= v^2 \\ xyz &= w^2 \end{aligned}$$

in ganzen Zahlen ihn bald zur Verzweiflung brachte, so viel Mühe habe die Lösung gekostet. Es erstaunt daher auch nicht, daß die kleinsten ganzzahligen Lösungen folgende sind:

$$\begin{aligned} x &= 1\,633\,780\,814\,400, \\ y &= 252\,782\,198\,228, \\ z &= 3\,474\,741\,058\,973. \end{aligned}$$

Später hat Euler noch weitaus schwierigere dieser Art bewältigt.

Limerick um Euler



Leonhard Euler var produktiv man
sjuhundra skrifter han utgav minsann!
Men han syssla på natten
ej enbart med matten
för tretton ungar skaffade han.

Sinngemäße Übersetzung:

L. Euler war fleißig, man merke:
Schrieb 700 mathematische Werke;
denn zur Nacht galt sein Fleiß
nicht nur Trank und Speis'.
So hatt' er für 13 die Stärke.

Text: Bengt Klefsjö; Bild: Andrejs Dunkels; aus: Elemente, Uppsala

Schweizer Käse

Eulers Schaffenskraft war zeit seines Lebens enorm. Seine Ideen hätten ausgereicht, um mehrere Institute mit Arbeit zu versorgen. So ist es kein Wunder, daß man mit dem Druck seiner Arbeiten einfach nicht nachkam. Noch Jahrzehnte nach seinem Tode konnte man unveröffentlichte Manuskripte Eulers publizieren, was Euler prophezeit hatte. Ein Lehrbuch der höheren Mathematik war von Euler 1763 druckfertig gemacht worden, aber nach mehreren Jahren noch nicht erschienen. Das hatte sich herumgesprochen, bis zu einem in der Schweiz lebenden wohlhabenden Kürschner, der ein begeisterter Amateur-Mathematiker war. Er bat Euler um die Erlaubnis, ihn in Berlin besuchen zu dürfen, um das Manuskript für sich abzuschreiben. Euler gewährte ihm diese Bitte gern. Als Dank sandte der wieder in die Schweiz zurückgekehrte Kürschner Euler ein Paket Schweizer Käse.

Griechische magische Quadrate

Euler befaßte sich auch mit magischen Quadraten, von denen gegen Ende des 18. Jh. eine neue Art große Beachtung fand, die sogenannten *griechischen Quadrate.* Hierzu eine Aufgabe aus dem Buch *Wunder der Rechenkunst* von J. Ch. Schäfer (Weimar, 1832):
Zauberquadrat von 16 Feldern:

Wie werden die sechszehn Zahlen von 1 bis 16 so in das obige Qudrat vertheilt, daß, wenn man die Zahlen addirt, welche in den vier Veldern in einer und derselben Reihe stehen, die Summe immer 34 beträgt?

Im Jahre 1750 . . .

Wie alt waren im Jahre 1750 Bach, Voltaire, Euler und Lomonossow? Die ersten drei zählten damals zusammen 164 Jahre, während die letzten drei 138 Jahre insgesamt aufwiesen. Bach, Voltaire und Lomonossow waren zusammen 160 Jahre alt; Bach, Euler und Lomonossow hingegen 147 Jahre.

Über den Rösselsprung von Euler

Euler war ein guter Schachspieler. In Berlin, das Euler als sehr schachfreudig kennzeichnete, hat er bei einem Juden das Spiel erlernt, und er sagt: „Ich habe ... es so weit gebracht, daß ich ihm (dem Lehrer) die meisten Partien abgewinne."

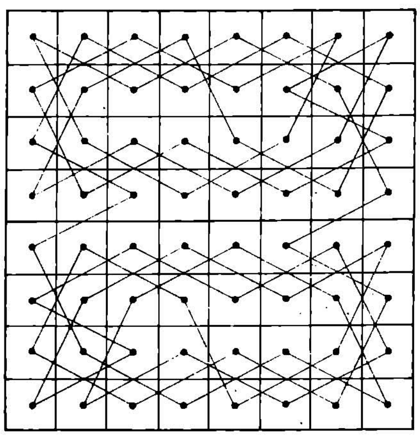
Wie wir einem Brief aus dem Jahre 1751 entnehmen können, bedauerte er die wegen einer Affaire notwendige plötzliche Abreise des Schachmeisters Philidor aus Potsdam, „sonst würde ich wohl Gelegenheit gefunden haben, mit ihm zu sprechen". Philidors Bauernführung („Der Bauer ist die Seele des Schachs") hat die Spielweise im Schach stark beeinflußt. Euler besaß 1751 bereits Philidors 1749 in London erschienenes Buch „Analyse des Schachspiels".

In den Memoires der Berliner Akademie von 1759 findet sich eine 22seitige Abhandlung über den Rösselsprung:

„Eines Tages befand ich mich in einer Gesellschaft, als bei Gelegenheit des Schachspiels jemand die Frage aufwarf, mit einem Springer bei gegebenem Anfangsfeld alle Felder des Schachbretts der Reihe nach, jedes nur einmal zu passieren... Diejenigen, die die Aufgabe für ziemlich leicht hielten, machten mehrere nutzlose Versuche, ohne zum Ziel zu gelangen. Hierauf gab derjenige, der die Frage aufgeworfen hatte, eine Route so an, daß eine vollständige Lösung entstand. Die Menge der Felder ließ indessen nicht zu, die gewählte Route dem Gedächtnis einzuprägen, und erst nach mehreren Versuchen gelang es mir, eine der Aufgabe genügende Route zu finden, sie galt auch nur für ein bestimmtes Anfangsfeld."

Vermutlich ist die Rösselsprungaufgabe so alt wie das Schachspiel selbst, aber erst Euler gab ihr, wenn auch nicht eine Theorie, so doch ein praktikables Lösungsverfahren. Er geht dabei zunächst aufs Geratewohl voran, bis der Rösselsprung sich nicht weiter ausführen läßt. Dann wird der Rösselsprung in zwei Teile zerlegt sowie auf neue Art miteinander wieder verbunden, so daß alle früheren Felder wieder besetzt sind, aber ein neuer Endpunkt zustande kommt, von dem möglicherweise eines der freien Felder erreichbar ist. Die geschickten Zerlegungen Eulers in den Beispielen machen es glaubhaft, daß man stets zum Ziel kommen könne, bewiesen wird es nicht. Jean Paul schreibt im Hesperus: „Gegen den Eulerschen Rösselsprung der Ratten zog er nur mit einem Schlägel zu Felde", woraus zumindest hervorgeht, daß auch Euler den Rösselsprung populär gemacht hatte. Das Bild zeigt einen in sich geschlossenen Rösselsprung Eulers, der zweiteilig genannt wird, da er zuerst auf der einen und dann auf der anderen Hälfte des Bretts ausgeführt wird. Von dieser Art gibt es übrigens 31 054 144 Lösungen, wie die Mathematiker katalogisierend ermittelt haben.

Euler untersuchte auch rechteckige und andersartige Bretter in bezug auf den Rösselsprung. Er zeigte z. B., daß es auf Brettern vom Format 3 × 5 keine Rösselsprünge gibt, auf dem Format 3 × 7 sind keine geschlossenen Rösselsprünge möglich.



Zweiteiliger geschlossener Rösselsprung von Euler

Unser Schachexperte, Herr H. Rüdiger, Grünheide, schreibt zum *Rösselsprung:*

Ein Rösselsprung setzt sich aus mehreren Springerzügen zusammen. Die Anzahl der möglichen geschlossenen (der Rösselsprung führt zum Ausgangspunkt wieder zurück) und offenen Rösselsprünge ist sehr groß, und die Methoden, einen solchen aufzubauen, sind mannigfaltig. Am bekanntesten ist der Rösselsprung als Rätsel, bei dem die auf die Felder eines Schachbrettes oder einer beliebigen Figur in der Gangart des Springers verteilten Silben, Wörter oder Buchstaben eines Gedichts oder Sinnspruchs zusammengesetzt sind.

Bild 1 zeigt uns einen offenen Rösselsprung auf dem Schachbrett, der auf dem Feld d8 oder e8 beginnt und dementsprechend auf e8 bzw. d8 endet. In seiner grafischen Darstellung läßt sich mit etwas Phantasie eine Blumenblüte erkennen!

Für die Blume wird eine Vase gesucht! Versuche mittels einem geschlossenen Rösselsprung, der auf dem Feld a1 des Schachbrettes beginnt und endet, eine phantasievolle Vase darzustellen! Nutze dazu das leere Diagramm (Bild 2)!

Als Hilfe seien einige Punkte des gesuchten Rösselsprungs vorgegeben:

Im 3. Zug wird das Feld b7, im 8. – e7, im 14. – e3, im 22. – f4, im 29. – h1, im 37. – d7, im 45. – f3 und im 52. – h4 berührt.

Anmerkung:

Kein Feld des Brettes darf zweimal durch den Rösselsprung berührt werden!

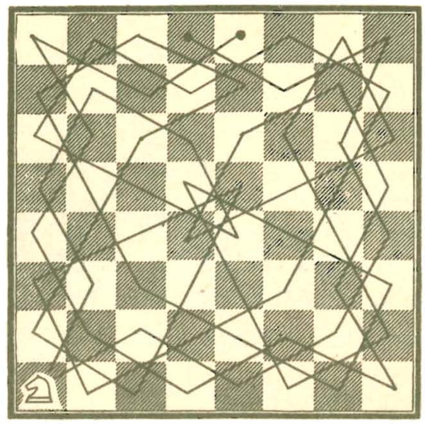


Bild 1

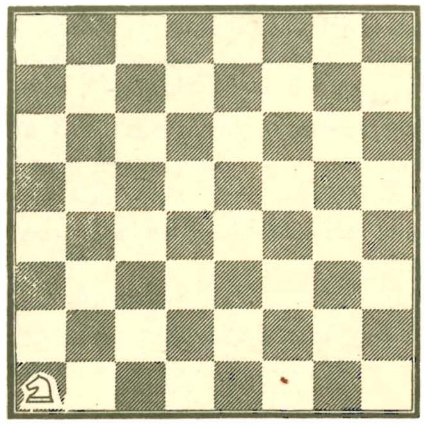
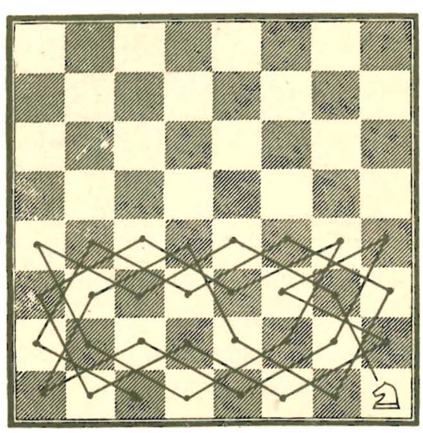


Bild 2

Bild 3

Ein offener Rösselsprung von Euler auf dem halben Schachbrett.



Die Eulersche Polyederformel und einiges mehr

Es war einmal vor 777 Jahren, da lebten hinter den 7 Bergen, den 7 Flüssen und den 7 Wäldern nicht 7, sondern 5 Einsiedler. Und weil sie so zänkisch waren, liebten sie es nicht, auf ihren Spaziergängen (einander) zu begegnen. Doch eines Tages wurden sie es müde, in ihren Häusern zu sitzen, und sie begannen, sich gegenseitig Besuche abzustatten. So willkommen dies auch war, wollten sie sich trotzdem unterwegs nicht begegnen. Und so stellte sich für sie die Frage:

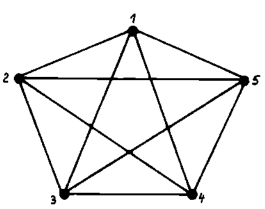
Ist es möglich, daß wir zwischen je zwei unserer Häuser einen Weg anlegen, ohne daß diese Wege sich kreuzen?

Wir wollen uns im folgenden diesem und anderen Problemen zuwenden, die alle durch eine Gemeinsamkeit verbunden sind: Zu ihrer Lösung nutzen wir die

Eulersche Polyederformel

Dazu benötigen wir aber einige Begriffe aus der Graphentheorie: Zeichnen wir auf ein Blatt Papier 5 Punkte, die die Häuser der Einsiedler bezeichnen sollen, und verbinden wir jedes Paar von Punkten durch eine Linie (den Weg), so erhalten wir das Bild 1.

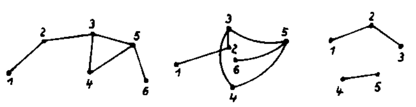
Bild 1



Eine solche Abbildung nennen wir einen *Graph.* Wir erhalten einen Graph, indem wir einige Punkte zeichnen und gewisse Paare von ihnen (nicht notwendig alle) durch Linien verbinden. Die zuerst gezeichneten Punkte nennen wir Knoten, die Verbindungslinien heißen Kanten. Dabei spielt es keine Rolle, auf welche Weise Knoten und Kanten gezeichnet werden. Wichtig ist nur, welche Knotenpaare verbunden sind. Bild 2 zeigt 3 Graphen.

Dabei ist der Graph 2a) der gleiche wie der Graph 2b).

Bild 2a b) c)



Wir betrachten nur „zusammenhängende" Graphen, d. h. solche, die es gestatten, von einem beliebigen Knoten ausgehend entlang der Kanten zu jedem anderen Knoten zu gelangen. Der Graph 2a) ist zusammenhängend, 2c) nicht.

Das Problem der zänkischen Nachbarn besteht also in der Frage, ob man den in Bild 1 dargestellten Graphen auch so zeichnen kann, daß sich keine Kanten schneiden. Einen zusammenhängenden Graphen, für den das möglich ist, nennen wir „eben". Der Graph 2b) ist eben, weil er wie in 2a) gezeichnet werden kann. Ist es aber auch der in Bild 1 dargestellte „Graph der zänkischen Nachbarn"? Das zu überprüfen ist nicht einfach, und wir müssen uns ein starkes Hilfsmittel bereitstellen, das uns die Lösung erleichtert: Sei e die Knotenzahl, k die Zahl der Kanten und $(f-1)$ die Zahl der bei der „ebenen" Darstellung eingeschlossenen Flächen. (Zählen wir die „äußere" Fläche mit, so ist f die Flächenzahl.) Zum Beispiel ist in Bild 2a: $e=6, f=2, k=6$.

Für ebene Graphen gilt dann die nach *Leonhard Euler* benannte Formel,

die Eulersche Polyederformel: $e+f=k+2$.

Auf den Beweis wollen wir hier verzichten. Er wird in einem späteren Beitrag geführt. Eine unterhaltsame Version davon kann man in dem Buch der mathem. Schülerbücherei (MSB Nr. 102) finden: E. Hodi: *Mathematisches Mosaik.* Urania-Verlag Leipzig (S. 200/201).

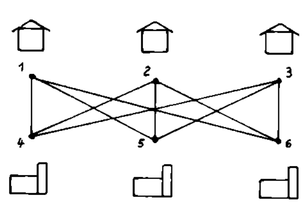
Das Problem der zänkischen Nachbarn

Kommen wir zur Lösung des eingangs geschilderten Problems, d. h. zur Frage, ob der in Bild 1 dargestellte Graph eben ist. Nehmen wir an, das wäre so und wir hätten eine solche Skizze gefunden, in der sich keine Kanten schneiden. Dann wollen wir uns jedes Flächenstück (auch das „äußere") als ein Land vorstellen und die Kanten als Ländergrenzen. Die Zahl der Grenzen ist $k=10$, die der Länder $f=k+2-e=10+2-5=7$. Jedes Land stellt nun an jeder seiner Grenzen genau einen Posten auf. Die Gesamtzahl der Posten sei p. Weil an jeder Grenze von jeder Seite genau ein Posten steht, ist dann $p=2k=20$. Andererseits hat aber jedes Land mindestens 3 Grenzen, weil es zwischen zwei Häusern der Einsiedler immer genau einen direkten Weg gibt. Folglich ist $p \geqq 3f=21$.

Aus dem so erhaltenen Widerspruch können wir schließen, daß die Annahme, der Graph sei eben, falsch ist. Es ist also nicht möglich, die Wege so anzulegen, daß sie sich nicht schneiden.

Ein ähnliches Problem, dessen Lösung jeder selbst finden kann, ist das folgende:

Bild 3



Drei Häuser sollen jeweils direkte Zuleitungen zum Gaswerk, Wasserwerk und zum Kraftwerk erhalten (Bild 3). Die Frage ist, ob das möglich ist, ohne daß irgendwelche Leitungen sich im Bilde kreuzen, ob also der Graph eben ist.

Löst dieses Problem unter Zuhilfenahme ähnlicher Überlegungen wie beim „Problem der zänkischen Nachbarn"!

Weitere Aufgaben

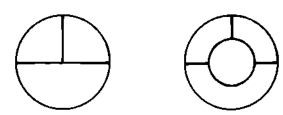
Es gibt viele ähnliche Probleme, die sich mit Hilfe der Eulerschen Polyederformel lösen lassen. Aus der Beschäftigung mit Problemen der Färbung politischer Landkarten entstand z. B. die Frage:

Kann es eine Landkarte geben, auf der 5 Länder paarweise aneinandergrenzen?

(Gefordert ist dabei eine gemeinsame Grenze von einer Länge größer als Null, um die Frage nicht trivial lösbar zu machen.)

Für 3 bzw. 4 Länder kann man solche Karten leicht angeben (Bild 4), für 5 stößt man auf Schwierigkeiten.

Bild 4



Löst dieses Problem unter Zuhilfenahme der *Eulerschen Polyederformel!* Verwendet dazu folgende Überlegungen: Angenommen, die geforderte Karte ist gezeichnet. Dann kann man in jedem Land die Hauptstadt einzeichnen und jegliche 2 Hauptstädte über die gemeinsame Grenze durch eine Eisenbahnlinie verbinden. Der erhaltene Graph ist eben.

Und noch eine Aufgabe wollen wir stellen:

n Geraden mögen in der Ebene so liegen, daß keine zwei von ihnen parallel sind und keine 3 sich in einem Punkt schneiden. In wieviel Teilflächen zerlegen diese Geraden die Ebene?

Hinweis: Schneidet ausreichend weit „draußen" mit einem Kreis ab, und studiert den erhaltenen ebenen Graphen! Er hat eine Fläche mehr (nämlich die „äußere" Fläche) als die zerlegte Ebene.

Regelmäßige Körper

Sicher habt ihr schon bemerkt, daß wir ständig von einer Polyederformel, aber nie von einem Polyeder (Körper, dessen Oberfläche aus Ebenenstücken besteht) sprachen. Das soll sich nun ändern. Wir beschränken uns dabei auf konvexe Polyeder, d. h. solche, bei denen mit 2 Punkten auch stets die Verbindungsstrecke zum Polyeder gehört.

Stellen wir uns vor, ein konvexes Polyeder wäre aus Gummituch hergestellt. Wir schneiden eine Seitenfläche heraus und spannen den Rest auf die Ebene. So erhalten wir einen ebenen Graphen. Das herausgeschnittene Stück geht dabei in die „äußere" Fläche über, die Ecken in Knoten, die Kanten in Kanten des Graphen usw. Hat das Polyeder e Ecken, f Flächen und k Kanten, so gilt folglich $e+f=k+2$. Diese Formel gilt für jedes konvexe Polyeder.

Wir wollen im folgenden nur die sogenannten *regelmäßigen Körper* (auch *platonische Körper* genannt) betrachten. Das sind konvexe

Polyeder höchster Regelmäßigkeit: Alle Seitenflächen sind paarweise kongruente regelmäßige Vielecke. Ein Beispiel hierfür ist der Würfel mit 6 paarweise kongruenten regelmäßigen Vierecken (Quadraten) als Seitenflächen.

Aber welche regelmäßigen Körper gibt es noch? Wir wollen versuchen, sie alle zu finden.

Dazu betrachten wir eine fixierte Ecke des Körpers. Um diese Ecke „falzbar" zu machen, können 3, 4 oder 5 gleichseitige Dreiecke, 3 Quadrate oder 3 regelmäßige Fünfecke an der Ecke anliegen. Andere Möglichkeiten gibt es nicht.

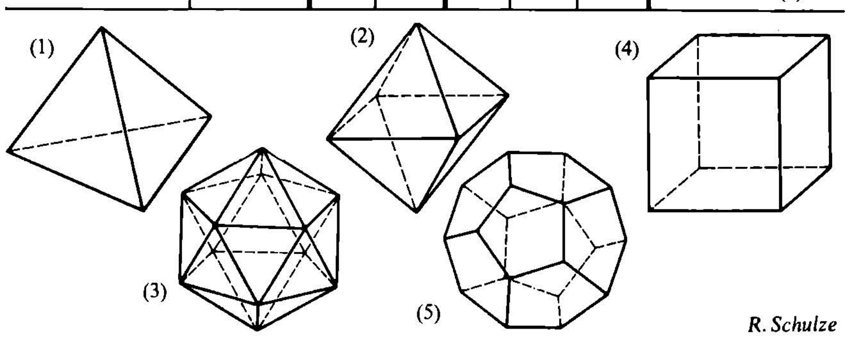
Nehmen wir also zunächst einmal an, daß an jeder Ecke 3 gleichseitige Dreiecke anliegen. Würden wir nun schlußfolgern, daß es dreimal soviel Seitenflächen wie Ecken gibt ($f=3e$), so hätten wir jede Fläche dreimal gezählt (nämlich von jeder ihrer Ecken aus). Es ist also $f=\frac{3}{3}e=e$. Da von jeder Ecke 3 Kanten ausgehen und wir diese nur doppelt zählen, ermitteln wir weiter: $k=\frac{3}{2}e$. Aus $e+f=k+2$ bzw. $e+e=\frac{3}{2}e+2$ ergibt sich $e=4$ und folglich $f=4$, $k=6$.

Der Körper mit 4 gleichseitigen Dreiecken als Seitenflächen ist das Tetraeder, uns allen vertraut durch die Kondensmilchverpackungen.

Analog können wir nun in den anderen Fällen vorgehen. Bei 4 gleichseitigen Dreiecken pro Ecke ist $f=\frac{4}{3}e$, $k=\frac{4}{2}e=2e$, und aus der Polyederformel ermitteln wir $e=6$, $f=8$, $k=12$ (Oktaeder).

In der Tabelle sind die Ergebnisse für alle regelmäßigen Körper zusammengefaßt:

Seitenflächen	Seitenfl. pro Ecke	$f=$	$k=$	e	f	k	Name
Dreiecke	3	$\frac{3}{3}e$	$\frac{3}{2}e$	4	4	6	Tetraeder (1)
	4	$\frac{4}{3}e$	$\frac{4}{2}e$	6	8	12	Oktaeder (2)
	5	$\frac{5}{3}e$	$\frac{5}{2}e$	12	20	30	Ikosaeder (3)
Vierecke	3	$\frac{3}{4}e$	$\frac{3}{2}e$	8	6	12	Hexaeder (Würfel) (4)
Fünfecke	3	$\frac{3}{5}e$	$\frac{3}{2}e$	20	12	30	Pentagondodekaeder (5)



R. Schulze

Leseprobe

R. THIELE

Leonhard Euler

Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner, Band 56

102 Seiten mit 33 Abbildungen
Bestell-Nr. 666045 0 *Preis: 9,60 M*
BSB B. G. Teubner
Verlagsgesellschaft Leipzig

Aus dem Inhalt (Auszug):
Euler und seine Zeit - die Aufklärung – Basel (Herkunft und Kindheit, Lehrjahre, erste Schritte in der Wissenschaft) – Petersburg (Akademie der Wissenschaften in P., auf dem Wege zum Ruhm, erste Meisterwerke) – Berlin (Berufung an die Akademie, Tragweite der Mechanik, eines der schönsten mathematischen Werke: Die Variationsrechnung, bahnbrechende Resultate, Beiträge zur Analysis, Zerwürfnis mit Friedrich II.) – Petersburg (Rückkehr nach P., ein erblindetes Genie, jeder Mensch ist sterblich) – Der Mann und sein Werk – Chronologie

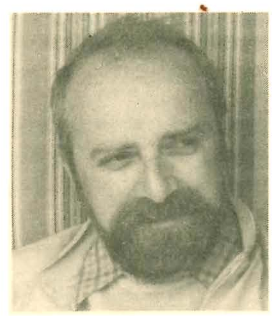
... Die Untersuchungen über *die Reste, die Potenzen beim Dividieren lassen*, bilden eine wichtige Leistung der Mathematik zur Zeit Eulers. Hier sind bereits die Keime der Gruppentheorie enthalten. Das Zahlenrechnen tritt in den Hintergrund zugunsten strukturellen Denkens, was Mathematiker gern als „Eleganz" bezeichnen. Euler hat maßgeblich hierzu beigetragen. Wir geben als Leseprobe einen Satz nebst Eulers Kommentar:

„Wenn p Primzahl und a eine nicht durch p teilbare Zahl ist, dann läßt sich kein Term der geometrischen Folge

$$1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ a^6 \text{ usw.}$$

durch p teilen.

Ich habe mir vorgenommen, die Reste, welche bei der Division der Terme dieser geometrischen Reihe durch p entstehen, aufmerksam zu betrachten. Zunächst sind diese einzelnen Reste, wie sich aus der Natur des Divisionsverfahrens ergibt, kleiner als p; kein Rest wird aber $=0$ sein, weil kein Term durch p teilbar ist. Wenn im Verlauf der Untersuchungen Reste vorkommen, die größer als p sind, so weiß man aus der Arithmetik, wie man sie zu reduzieren hat. So ist der Rest $p+r$ gleichbedeutend mit dem Rest r, und allgemein führt der Rest $np+r$ zurück auf den Rest r, wenn r größer ist als p, so führt man diesen Rest zurück auf $r-p$ oder $r-2p$ oder $r-3p$ usw., bis man zu einer Zahl kommt, die kleiner als p ist. Daher sollen alle Reste $r \pm np$ als ein und derselbe Rest r angesehen werden. Genau zu reden sind alle Reste positive Zahlen kleiner als p, trotzdem ist es aber bequem, negative Reste zu betrachten; wenn r ein Rest ist kleiner als p, so wird auch $r-p$, was eine negative Zahl ist, Rest sein, so daß also der positive Rest r gleichbedeutend mit dem negativen Rest $r-p$ ist."



Kurzbiographie

Rüdiger Thiele, geboren 1943 in Polepp (jetzt Polepy, ČSSR). 1957 bis 1961 Besuch der O.-v.-Guericke-OS Magdeburg, Studium der Mathematik mit Zweitfach Physik 1962 bis 1967 an der *Martin-Luther-Universität* Halle-Wittenberg, Promotion 1975 über ein Thema der Variationsrechnung, 1967 bis 1973 Mitarbeiter der Sektion Mathematik der Universität Halle, Leiter von mathematischen Schülerarbeitsgemeinschaften, langjähriger Vorsitzender des Klubs *Junger Mathematiker* des Saalkreises, gegenwärtig Verlagslektor im S. Hirzel-Verlag, Leipzig. Neben zahlreichen Beiträgen für die *alpha* veröffentlichte er: *Mathematische Beweise* (MSB-Band), Biographie *Leonhard Euler* und das Spielebuch *Die gefesselte Zeit* (erscheint Ende 1983).

C. F. Gauß über L. Euler

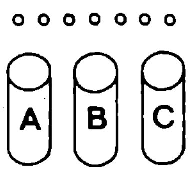
„Das Studium der Werke Eulers bleibt die beste Schule in den verschiedenen Gebieten der Mathematik und kann durch nichts anderes ersetzt werden."

XXII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Kreisolympiade

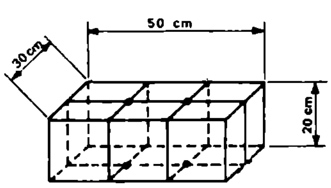
Olympiadeklasse 5

220521 Sieben Kugeln sind so auf drei Becher A, B und C zu verteilen, daß im Becher C nicht weniger Kugeln als im Becher B und im Becher B nicht weniger als im Becher A liegen. Es dürfen auch Becher leer bleiben.



Gib alle verschiedenen Möglichkeiten einer solchen Verteilung an!

220522 Das Bild zeigt ein 50 cm langes, 30 cm breites und 20 cm hohes verschnürtes Paket. Die Schnur wurde möglichst sparsam verwendet, also von Knoten zu Knoten überall nur einfach gelegt. Zum Verknoten wurden noch zusätzlich 10 cm Schnur gebraucht.



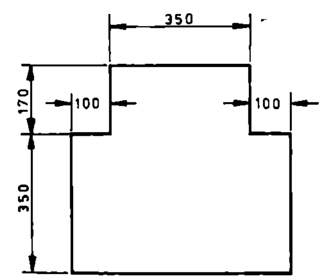
Wieviel Zentimeter Schnur wurden daher zum Verschnüren dieses Paketes insgesamt verwendet?

220523 Über die 650 Schüler einer Schule liegen folgende Angaben vor: 500 Schüler sind Mitglied einer Sport-Arbeitsgemeinschaft. 400 Schüler sind Mitglied einer anderen Arbeitsgemeinschaft. 100 Schüler sind nicht Mitglied einer Arbeitsgemeinschaft. Aus diesen Angaben soll ermittelt werden, wieviel der 650 Schüler sowohl Mitglied einer Sport-Arbeitsgemeinschaft als auch Mitglied einer anderen Arbeitsgemeinschaft sind. Erkläre, wie man diese Anzahl finden kann!

220524 Ein Schüler kauft 5 gleiche Hefte und 7 gleiche Bleistifte, wofür er insgesamt 3,80 M bezahlt.
Wie teuer ist ein derartiges Heft und wie teuer ein derartiger Bleistift, wenn ein Bleistift doppelt soviel kostet wie ein Heft?

Olympiadeklasse 6

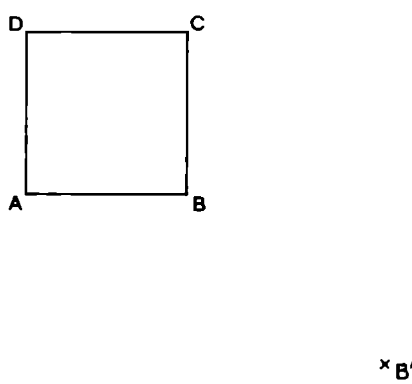
220621 Das Bild zeigt den Grundriß eines Zimmers. Alle Maße sind in Zentimeter angegeben. Das Zimmer ist 280 cm hoch. In diesem Zimmer ist ein alter Tapetenbelag von den Wänden und von der Decke zu entfernen. Danach sind Wände und Decke mit Makulatur zu streichen und zu tapezieren.



Errechne für diese Arbeiten mit Hilfe der folgenden Tabelle die insgesamt erforderlichen Lohnkosten! Dabei ist jede Wand vollständig zu berücksichtigen, auch wenn Fenster und Türen vorhanden sind. (Es wird also angenommen, daß sich die Einsparung an Fläche wieder durch den komplizierten Arbeitsaufwand ausgleicht.) Das Ergebnis ist auf vollen Markbetrag zu runden.

Leistung	Lohnkosten pro m²
Alte Tapezierung entfernen	28 Pf
Makulatur streichen	26 Pf
Wandtapezierung	83 Pf
Deckentapezierung	112 Pf

220622 Der Punkt B' auf dem Arbeitsblatt sei das Bild von B bei der Spiegelung an einer Geraden g. Arbeitsblatt



Konstruiere diese Gerade g und die Bilder A', C', D' der Punkte A, C, D bei der Spiegelung an g! Eine Beschreibung und Begründung der Konstruktion wird nicht verlangt.

220623 Die Zahl 32 soll in eine Summe aus vier natürlichen Zahlen zerlegt werden, von denen folgende Eigenschaft gefordert wird: Wenn man zum ersten Summanden 3 addiert, vom zweiten 3 subtrahiert, den dritten mit 3 multipliziert und den vierten durch 3 dividiert, dann sind die vier Ergebnisse, die man erhält, alle gleich groß.
Nenne vier derartige Summanden! Überprüfe, daß sie alle Forderungen erfüllen! Beweise, daß die Forderungen durch keine anderen Summanden erfüllt werden können!

220624 An fünf voneinander und von 0 verschiedene natürliche Zahlen a, b, c, d, e werden folgende acht Forderungen gestellt:

(1) a ist ein [ganzzahliges] Vielfaches von e,
(2) b ist ein Teiler von c,
(3) c ist ein [ganzzahliges] Vielfaches von e,
(4) d ist ein Teiler von e,
(5) a ist ein [ganzzahliges] Vielfaches von b,
(6) b ist ein Teiler von d,
(7) c ist ein [ganzzahliges] Vielfaches von a,
(8) a ist ein [ganzzahliges] Vielfaches von d.

Untersuche, ob diese acht Forderungen erfüllbar sind und ob sich aus ihnen die Anordnung der fünf Zahlen ihrer Größe nach ergibt! Wenn dies der Fall ist, so nenne diese Anordnung; beginne dabei mit der größten der fünf Zahlen!

Olympiadeklasse 7

220721 Ermittle alle geraden natürlichen Zahlen z mit folgenden Eigenschaften:
(1) Die Zahl z ist fünfstellig, keine ihrer fünf Ziffern ist eine 0.
(2) Die aus den ersten drei Ziffern von z in dieser Reihenfolge gebildete dreistellige Zahl ist eine Quadratzahl.
(3) Die aus den letzten drei Ziffern von z in dieser Reihenfolge gebildete dreistellige Zahl ist eine Kubikzahl.
(Hinweis: Ist a eine natürliche Zahl, so heißt a^2 ihre Quadratzahl und a^3 ihre Kubikzahl.)

220722 In einer Diskussion über Dreiecke ABC wird für diese vorausgesetzt:

(1) Es gilt $\overline{AC} = \overline{BC}$.
(2) Die Halbierende des Winkels $\sphericalangle BAC$ steht senkrecht auf BC.

In dieser Diskussion behauptet Ursel: „Dann muß das Dreieck ABC rechtwinklig sein." Vera behauptet: „Nein, dann muß es gleichseitig sein." Werner behauptet: „Nein, dann braucht das Dreieck ABC weder rechtwinklig noch gleichseitig zu sein."
Untersuche für jede dieser drei Behauptungen, ob sie wahr oder falsch ist!

220723 Auf einer Kreislinie k seien vier Punkte A, B, C, D so gelegen, daß $ABCD$ ein Rechteck ist. Der Radius des Kreises k sei r genannt, die Mittelpunkte der Strecken AB, BC, CD und DA seien in dieser Reihenfolge mit E, F, G bzw. H bezeichnet.
Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen der Umfang des Vierecks $EFGH$ stets $4r$ betragen muß!

220724 Für drei natürliche Zahlen a, b, c werden die folgenden Eigenschaften (1) und (2) gefordert:
(1) Es gilt $a<b<c$.
(2) Wenn a, b, c die Maßzahlen der in Zentimeter gemessenen Kantenlängen eines Quaders sind, so hat der Quader das Volumen $270\,cm^3$, und die Summe der Längen aller zwölf Kanten des Quaders beträgt 80 cm.
Untersuche, ob es natürliche Zahlen gibt, die diese Forderungen erfüllen, und ob diese Zahlen durch die Forderungen (1) und (2) eindeutig bestimmt sind! Ist dies der Fall, so nenne diese Zahlen!

Olympiadeklasse 8

220821 Vor zwei Jahren unterhielten sich Anke, Birgit und Christine über ihre Reiseziele in den Sommerferien 1981 und 1982. In jedem Jahr wollte eine von ihnen an die Ostsee fahren, die andere in die Sächsische Schweiz und die dritte in den Thüringer Wald. Für beide Jahre wurden folgende Aussagen gemacht:
(1) Anke fährt an die Ostsee.
(2) Christine fährt in den Thüringer Wald, oder Anke fährt in die Sächsische Schweiz.
Später stellte sich heraus: Für das Jahr 1981 ist Aussage (1) wahr und Aussage (2) falsch; für das Jahr 1982 ist Aussage (1) falsch und Aussage (2) wahr.
Untersuche a) für das Jahr 1981,
b) für das Jahr 1982,
für welche der drei Schülerinnen sich damit das Reiseziel eindeutig ermitteln läßt und für welche nicht! Nenne alle dabei eindeutig zu ermittelnden Reiseziele!
Hinweis: Eine Aussage der Form „A oder B" ist genau dann falsch, wenn sowohl A als auch B falsche Aussagen sind.

220822 In einer Umfrage beantworteten 50 Pioniere einer Schule die folgenden Fragen auf einer Fragenliste:

	Ja	Nein
(A) Hast du in diesem Sommer an einem Betriebsferienlager teilgenommen?	O	O
(B) Hast du in diesem Sommer an der Feriengestaltung der Schule teilgenommen?	O	O
(C) Warst du in diesem Sommer mit deinen Eltern verreist?	O	O

Anschließend wurden die Antworten mehrfach ausgezählt. In einer ersten Zählung wurde bei allen Fragenlisten nur auf die Frage (A) geachtet. Diese hatten genau 20 Pioniere mit *Ja* beantwortet. Dann wurde in einer zweiten Zählung bei allen 50 Listen nur auf Frage (B) geachtet, usw., wie in der folgenden Tabelle angegeben:

Zählung Nr.	Gezählte Antworten	Erhaltene Anzahl
1	(A) Ja	20
2	(B) Ja	25
3	(C) Ja	30
4	(A) Ja und (B) Ja	8
5	(B) Ja und (C) Ja	12
6	(A) Ja und (C) Ja	10
7	(A) Ja und (B) Ja und (C) Ja	3

Aus diesen Zählungsergebnissen soll die Anzahl derjenigen Pioniere ermittelt werden, die
a) an keiner der drei Arten der Feriengestaltung teilnahmen,
b) an genau einer dieser Arten teilnahmen,
c) an einem Betriebsferienlager, aber nicht an der Feriengestaltung der Schule teilnahmen,
d) mindestens eine der Möglichkeiten nutzten, an einem Betriebsferienlager teilzunehmen oder mit den Eltern zu verreisen. Trage die gesuchten Antworten in folgende Tabelle ein! Nenne die Rechnungen oder Überlegungen, mit denen du deine Antworten begründest!

Aufgabe	Gesuchte Antworten	Erhaltene Anzahl
a)	Keinmal Ja	
b)	Genau einmal Ja	
c)	(A) Ja und (B) Nein	
d)	(A) Ja oder (C) Ja oder beides	

220823 Beweise die folgende Aussage!
Wenn F der Flächeninhalt, u der Umfang und ϱ der Inkreisradius eines Dreiecks sind, dann gilt $\varrho=\frac{2F}{u}$.

220824 Von einem Parallelogramm werden die folgenden Eigenschaften (1) und (2) gefordert:
(1) Der Umfang des Parallelogramms beträgt 36 cm.
(2) Die Halbierende des Winkels $\sphericalangle BAD$ schneidet die Verlängerung der Seite BC über C hinaus in einem Punkt E, für den $\overline{CE}=3$ cm gilt.
Beweise, daß die Seitenlängen $a=\overline{AB}$, $b=\overline{BC}$ des Parallelogramms durch die Forderungen (1), (2) eindeutig bestimmt sind! Ermittle diese Seitenlängen!

Olympiadeklasse 9

220921 Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, die den folgenden Bedingungen (1) und (2) genügen:
(1) $n-9$ ist eine Primzahl.
(2) n^2-1 ist durch 10 teilbar.

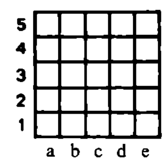
220922 Beweisen Sie folgende Aussage!
Wenn x, y und z von 0 verschiedene natürliche Zahlen sind, dann sind

$$a=\frac{(x+y\sqrt{z})^2+(x-y\sqrt{z})^2}{2},$$
$$b=\frac{(x+y\sqrt{z})^2-(x-y\sqrt{z})^2}{2},$$
$$c=a^2-(x^2-y^2z)^2$$

natürliche Zahlen, und b ist ein Teiler von c.

220923 Von einem Quadrat $ABCD$ und vier Punkten P, Q, R, S wird folgendes vorausgesetzt:
(1) P liegt auf der Strecke AB zwischen A und B,
(2) Q liegt auf der Strecke BC zwischen B und C,
(3) R liegt auf der Strecke CD zwischen C und D,
(4) S liegt auf der Strecke DA zwischen D und A,
(5) es gilt $PR \perp QS$.
Untersuchen Sie, ob für jede Lage der Punkte, bei der die Voraussetzungen (1) bis (5) erfüllt sind, stets dieselbe der drei Aussagen $\overline{PR}<\overline{QS}$, $\overline{PR}=\overline{QS}$, $\overline{PR}>\overline{QS}$ gilt! Wenn das der Fall ist, nennen Sie diese Aussage!

220924 Das Bild zeigt ein Quadrat, das in 25 zueinander kongruente quadratische Felder $a1$, $a2$, $a3$, $a4$, ..., $e1$, $e2$, $e3$, $e4$, $e5$, zerlegt ist. Von diesen Feldern sollen genau fünf so durch Schwarzfärbung markiert werden, daß in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen genau ein markiertes Feld auftritt.



Ermitteln Sie alle voneinander verschiedenen Markierungen, die diese Bedingungen erfüllen! Dabei gelten zwei Markierungen genau dann als nicht verschieden, wenn sie auseinander durch eine Drehung, eine Spiegelung oder mehrere solcher Abbildungen hervorgehen.

Olympiadeklasse 10

221021 Man ermittle alle diejenigen Paare $(x;y)$ ganzer Zahlen, die die Gleichung $2x^3+xy-7=0$ erfüllen!

221022 Es seien 64 paarweise verschiedene Zahlen beliebig gewählt und dann so auf die Felder eines Schachbretts verteilt, daß in jedem Feld genau eine dieser Zahlen steht. Für jede derartige Zahlenverteilung werden nun folgende Definitionen gegeben:
1. Man suche zunächst in jeder (waagerechten) Zeile des Schachbretts die größte Zahl auf. Unter den so aufgesuchten acht Zahlen werde die kleinste mit a bezeichnet.
2. Man suche zunächst in jeder (senkrechten) Spalte des Schachbretts die kleinste Zahl auf.

Unter den so aufgesuchten acht Zahlen werde die größte mit b bezeichnet.
Axel behauptet über die so definierten Zahlen a und b: „Wenn $a \neq b$ ist, dann muß sogar stets $a > b$ gelten.“ Untersuchen Sie, ob dies zutrifft oder nicht!

221023 Von einem rechtwinkligen Dreieck wird gefordert:
(1) Der Umfang des Dreiecks beträgt 132 cm.
(2) Die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den drei Seiten des Dreiecks beträgt $6050\,\text{cm}^2$.
Beweisen Sie, daß es rechtwinklige Dreiecke gibt, die die Forderungen (1) und (2) erfüllen, und daß die Längen der Dreieckseiten durch diese Forderungen eindeutig bestimmt sind. Geben Sie diese Seitenlängen an!

221024 Es sei $ABCDEF$ ein regelmäßiges Sechseck, sein Flächeninhalt F_1. Mit F_2 sei der Flächeninhalt des (gleichseitigen) Dreiecks ACE und mit F_3 der Flächeninhalt des (gleichseitigen) Dreiecks $M_1M_2M_3$ bezeichnet, wobei M_1, M_2, M_3 in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seiten AB, CD bzw. EF seien.
Berechnen Sie das Verhältnis $F_1 : F_2 : F_3$!
(Das Verhältnis soll durch drei möglichst kleine natürliche Zahlen ausgedrückt werden.)

Olympiadeklassen 11/12

221221 Man ermittle alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, die das Gleichungssystem

$$x(y+z) = 5 \quad (1)$$
$$y(x+z) = 8 \quad (2)$$
$$z(x+y) = 9 \quad (3)$$

erfüllen!

221222 Man untersuche, ob es unter allen Dreiecken, bei denen für die Seitenlängen a, b, c die Beziehungen

$$a \leqq 1\,\text{cm} \leqq b \leqq 2\,\text{cm} \leqq c \leqq 3\,\text{cm} \quad (1)$$

gelten, ein Dreieck mit größtmöglichem Flächeninhalt gibt. Ist das der Fall, so ermittle man diesen Flächeninhalt.

221223 Man beweise:
Sind a und b von Null verschiedene natürliche Zahlen, d ihr größter gemeinsamer Teiler und v ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches, so gilt

$$a + b \leqq d + v. \quad (1)$$

Man untersuche, für welches a, b in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

221224 Es sei $n \neq 0$ eine natürliche Zahl. Auf einer Kreislinie seien $2n$ paarweise verschiedene Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$ gegeben. Gesucht wird die Anzahl A_n aller verschiedenen Möglichkeiten, eine Menge von n Sehnen so zu zeichnen, daß folgende Forderungen erfüllt sind:
Jede Sehne verbindet einen der Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$ mit einem anderen dieser Punkte, und keine zwei dieser Sehnen haben im Innern oder auf dem Rand des Kreises einen gemeinsamen Punkt. Zwei Möglichkeiten gelten genau dann als verschieden, wenn es mindestens ein Punktepaar P_i, P_j gibt, das bei der einen der beiden Möglichkeiten durch eine Sehne verbunden ist, bei der anderen Möglichkeit dagegen nicht.
a) Ermitteln Sie die Anzahl A_3, indem Sie zu sechs Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_6$ mehrere verschiedene Möglichkeiten für drei Sehnen angeben und nachweisen, daß damit alle verschiedenen Möglichkeiten der geforderten Art erfaßt sind!
b) Ermitteln Sie eine Formel, mit der man für beliebiges $n \geqq 2$ die Anzahl A_n aus den Anzahlen $A_1, \ldots, A_{n-1}$ berechnen kann!
c) Ermitteln Sie die Anzahl A_5!

Die Lösungen zu den Aufgaben der Olympiadeklassen 5 bis 10 veröffentlichen wir im Innenteil des Heftes 3/83, d. Red.

„Im Jahre 1783 verloren wir Herrn Leonhard Euler ...“

Abel Burja (1752 bis 1816) war ein Pfarrer und Mathematiklehrer, der 1785 ein Buch in Berlin mit dem Titel „Observations d'un voyageur...“ (Beobachtungen eines Reisenden...) erscheinen ließ. Burja hatte 1783 auch Euler in Petersburg besucht und darüber einen Bericht gegeben, der auch Eulers letzte Stunde einschließt:
„Ich sah ihn an seinem vorletzten Lebenstag fröhlich, freundlich, wie immer: er beklagte sich nur über Schwindel. Er sagte auch, wenn er über seine Lage nachdenke, scheine es ihm seit kurzem, daß er fremd in seiner Familie sei und sich selbst nicht kenne.
Am folgenden Tag nach dem Mittagessen unterhielt er sich mit den Herren Lexell und Fuß über verschiedene mathematische, physikalische und astronomische Gegenstände, insbesondere über den neuen Planeten und über Luftballons, über die man damals gerade zu sprechen begann. (Gemeint ist der Planet Uranus, der 1771 entdeckt worden war, sowie die im Juni 1773 erfolgreich gestartete erste Montgolfière.)
Gegen 5 Uhr abends ging er zu seinem Enkel, begann mit ihm zu scherzen, rauchte auf dem Sofa sitzend Tabak. Plötzlich entfiel ihm seine Pfeife. Er rief laut: „Meine Pfeife!“ und bückte sich, um sie aufzuheben, danach stand er auf, ohne die Pfeife, schlug mit seinen Händen an die Stirn und sagte: „Ich sterbe.“ Nach diesen Worten sagte er nichts mehr und befand sich bis 11 Uhr abends im Zustand der Agonie, als er verschied.
Aber am gleichen Tage morgens hatte er seinem Enkel, von dem ich gerade sprach, noch Mathematikunterricht gegeben. Er schloß einige von ihm begonnene Berechnungen über Luftballons ab und schrieb sie auf, wie gewöhnlich, mit Kreide in großen Buchstaben auf zwei Schiefertafeln – denn das war alles, was er bei seinem schwachen Sehvermögen, das er besaß, noch tun konnte.“

Lösungen

Lösungen zu: Für den Sprachfreund

▲1▲ Im Jahre 1982 war das Quadrat der Zahl, die Matlebs Alter angab, gleich der Zahl, die aus den ersten drei Ziffern seines Geburtsjahres gebildet wird. In welchem Jahr wurde Matleb geboren?
Lösung: Die einzige in Frage kommende Quadratzahl ist 196, also war 1982 Matleb 14 Jahre alt; er wurde 1968 geboren.

▲2▲ Im Jahre 1982 fielen der 1. Januar und der 31. Dezember auf genau denselben Wochentag. Ist das in diesem Jahr auch so? Überhaupt: Wann fällt der 1. Januar auf denselben Wochentag wie der 31. Dezember?
Lösung: Außer in Schaltjahren ist das immer so, denn es ist $365 = 7 \cdot 52 + 1$.

▲3▲ Mark, Paul und Boris sind mit Anne, Mary und Susan verheiratet, nicht notwendigerweise in dieser Reihenfolge. Jedes Paar hat ein Lieblingstier, und die Lieblingstiere sind eine Katze, ein Meerschweinchen und ein Pony. Benutze die folgenden Angaben, um die Zusammengehörigkeit von Ehemännern, Ehefrauen und Lieblingstieren festzustellen!
Pauls und Annes Lieblingstiere kämpften miteinander. Der Name von Marys Ehemann hat vier Buchstaben. Susan ging hinüber, um Marks Lieblingstier zu füttern, wenn er fort war. Mark geht niemals in die Stadt. Boris' Lieblingstier ist entweder die Katze oder das Pony. Susans Lieblingstier ist nicht die Katze. Der männliche Besitzer der Katze brachte diese zum Tierarzt in die Stadt. Das Meerschweinchen versteckt sich, wenn Anne zu Besuch kommt. Marys Lieblingstier schläft in einem Schuhkarton.
Lösung: Mark und Mary haben das Meerschweinchen. Paul und Susan haben das Pony. Boris und Anne haben die Katze.

▲4▲ Eine Zeitung umfaßt 36 Seiten und hat eine tägliche Auflage von 600000 Exemplaren. Jede Seite ist ein Rechteck, dessen Ausmaße 50 cm und 33 cm betragen. Um jede Seite gibt es einen unbedruckten Rand von 2 cm Breite.
a) Wie groß ist die bedruckte Fläche?
b) Wie groß ist die Fläche des Papiers, das für die tägliche Auflage der Zeitung notwendig ist?

Lösung: a) Die bedruckte Fläche beträgt $0{,}46\,\mathrm{m} \cdot 0{,}29\,\mathrm{m} \cdot 36 \cdot 600000 = 2881440\,\mathrm{m}^2$.
b) Die benötigte Fläche des Papiers beträgt $0{,}5\,\mathrm{m} \cdot 0{,}33\,\mathrm{m} \cdot 36 \cdot 600000 = 3564000\,\mathrm{m}^2$.

▲5▲ Die Länge eines Telefonkabels, das zwei Orte verbindet, ist gleich 72,8 km. Wenn die Temperatur um 1 Grad steigt, verlängert sich jeder Meter dieses Kabels um 18 μm. Berechne die Ausdehnung dieses Kabels in cm, wenn die Temperatur von 12° auf 36° steigt!
Lösung: Bei 1 K Temperaturunterschied beträgt die Ausdehnung des Kabels $72800 \cdot 0{,}000018\,\mathrm{m} \approx 1{,}31\,\mathrm{m}$. Bei $36\,°\mathrm{C} - 12\,°\mathrm{C} = 24\,\mathrm{K}$ Temperaturunterschied beträgt die Ausdehnung $1{,}31\,\mathrm{m} \cdot 24 = 31{,}44\,\mathrm{m} = 3144\,\mathrm{cm}$.

•

Lösungen zu:
Mathe-AGs im Kreis Köthen

▲1▲ Vor.: a, b, c sind natürliche Zahlen mit $a = b - 1$
$c = b + 1$
Beh.: $ab + bc = 2b^2$
Bew.: $ab + bc = b(a + c) = b(b - 1 + b + 1)$
$ab + bc = b \cdot 2b = 2b^2$, w. z. b. w.

▲2▲ Hat die der Mauer parallele Rechteckseite die Länge a und haben die beiden übrigen Begrenzungen die Länge b, so gilt
$$a + 2b = 400 \qquad (1)$$
und für den Flächeninhalt
$$A = a \cdot b. \qquad (2)$$
Ersetzt man a in (2) durch (1), so erhält man
$$A = (400 - 2b) \cdot b \qquad (3)$$
$$A = -2b^2 + 400b.$$
Das Bild der Funktion $A = f(b)$ ist in einem rechtwinkligen b-A-Koordinatensystem eine nach „unten" geöffnete Parabel. Sie schneidet die Abszissen-(b-) Achse in
$$b_1 = 0 \text{ und } b_2 = 200; \qquad (4)$$
denn für
$A = 0$ gilt wegen (3)
$0 = (400 - 2b) \cdot b$
mit den in (4) angegebenen Lösungen.
Den größten Flächeninhalt gibt die Ordinate A_s des Scheitels der Parabel an. Für die dazugehörige Abszisse b_s gilt wegen der Symmetrieeigenschaften der Parabel
$$b_s = \frac{b_1 + b_2}{2} = \frac{200 + 0}{2} = 100.$$
Die Eckpfähle müssen in einem Abstand von 100 m von der Mauer und wegen (1) 200 m voneinander entfernt stehen. Der größtmögliche Flächeninhalt beträgt demnach $20000\,\mathrm{m}^2$ wegen
$$A = (400 - 2 \cdot 100) \cdot 100 = 20000.$$

▲3.1▲ Die Geschwindigkeit des Kunden sei v_2, die der Rolltreppe v_1. Auf der fahrenden Rolltreppe bewegte sich der Kunde mit der Geschwindigkeit v_3, für die gilt:
$$v_3 = v_1 + v_2.$$
Der Weg von einer Etage zur anderen sei s. Da alle Bewegungen als gleichförmig angesehen werden, gilt wegen $v = \frac{s}{t}$
$$\frac{s}{t_3} = \frac{s}{t_1} + \frac{s}{t_2}$$
$$\frac{1}{t_3} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}, \text{ und man erhält}$$
$$t_3 = \frac{t_1 \cdot t_2}{t_1 + t_2}.$$
Einsetzen liefert $t_3 = \dfrac{30\,\mathrm{s} \cdot 90\,\mathrm{s}}{120}$
$$t_3 = 22{,}5\,\mathrm{s}.$$
Bei fahrender Rolltreppe benötigt der Kunde 22,5 s.

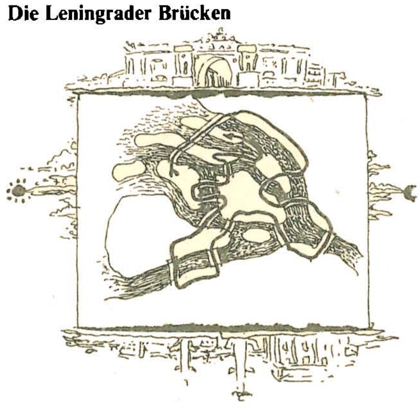
▲3.2.▲ Zum gleichen Ergebnis kann man aber viel leichter kommen, wenn man eine einfache Überlegung anstellt:
Wir denken uns eine Rolltreppe, die ohne anzuhalten, durch mehrere Etagen fährt. In der Zeit von 90 s, die der (laufende) Kunde bis zur ersten Etage benötigt, könnte der (stehende) Kunde auf der (gedachten) Rolltreppe die dritte Etage erreichen, das bedeutet, daß in 90 s zusammen vier Etagen erreicht werden. Für eine Etage benötigt man dann 90 s : 4 = 22,5 s.

Lösungen zu: ·
In freien Stunden · alpha-heiter

Das Königsberger Brückenproblem

Es ist nicht möglich, jede Brücke genau einmal zu überschreiten. (Bei 8 Brücken wäre es möglich.)

Die Leningrader Brücken



Das Problem der vertauschten Briefe

Für $n = 4$ auf 9 Arten.

Euler an Goldbach

Für $n = 9$ ist die gesuchte Anzahl 9.

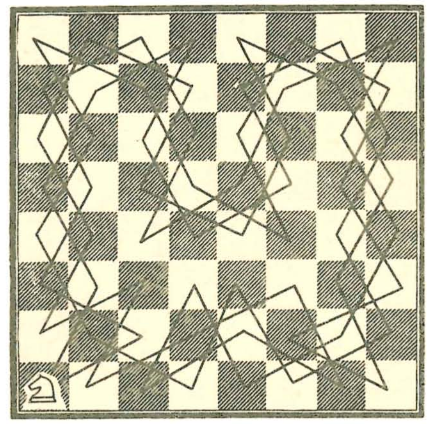
Griechische magische Quadrate

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Im Jahre 1750 ...

Jede der vier Personen wird in den vier Altersangaben 164, 138, 160 und 147 genau dreimal berücksichtigt. Damit erscheint in der Summe $164 + 138 + 160 + 147 = 609$ jedes gesuchte Alter genau dreimal. Mithin ist die Zahl 609 das Dreifache der Summe der Alter aller vier gesuchten Personen. Die gesuchten Personen waren 1750 also zusammen 203 Jahre alt. Bach, Voltaire und Euler waren 1750 insgesamt 164 Jahre alt, womit Lomonossow $203 - 164 = 39$ Jahre alt war. Entsprechend folgt für Bach, Euler und Voltaire $203 - 138 = 65$, $203 - 160 = 43$ und $203 - 147 = 56$. Die Lebensdaten der vier Personen lauten übrigens: Bach 1685 bis 1750; Voltaire 1694 bis 1778; Lomonossow 1711 bis 1765; Euler 1707 bis 1783.

Lösung zu:
Der Springer wird zum Rössel



Lösung zu:
Die historische Mathematikaufgabe, Heft 1/82

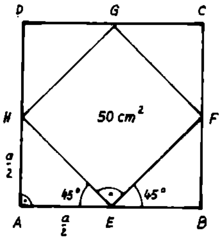
Das Lebensalter Diophants

Die Formulierung der Aufgabe ist nicht eindeutig. Die Angabe über den Tod des Sohnes erlaubt zwei Deutungen. (Im folgenden bezeichne x das unbekannte Lebensalter Diophants.)
1) Er starb, als er die Hälfte des Lebensalters Diophants erreicht hatte, als er also $\frac{x}{2}$ Jahre alt war.
2) Er starb, als er gerade halb so alt wie der Vater war. Da der Vater noch 4 weitere Jahre lebte, war er $x - 4$ Jahre alt, der Sohn somit $\frac{x-4}{2}$ Jahre alt.
Hieraus ergeben sich die folgenden zwei Lösungen:
1) Das Gedicht führt auf die Gleichung
$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x \text{ oder}$$
(Multiplikation mit 84)
$$14x + 7x + 12x + 420 + 42x + 336 = 84,$$
also $9x = 756$, $x = 84$. Auf die Kindheit fielen 14 Jahre, Diophant bekam mit 21 Jahren einen Bart, mit 33 Jahren eine Frau, mit 38 Jahren einen Sohn. Dieser starb mit 42 Jahren (als der Vater 80 war); Diophant starb mit 84 Jahren.
2) Es ergibt sich die Gleichung
$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{x-4}{2} + 4 = x \text{ oder}$$
$$14x + 7x + 12x + 420 + 42x - 168 + 336 = 84x,$$
also $9x = 588$, $x = 65\frac{1}{3}$.
Auf die Kindheit fielen $10\frac{8}{9}$ Jahre. Nach

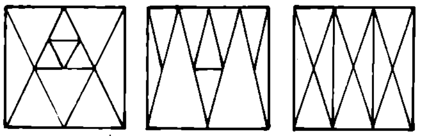
$5\frac{4}{9}$ Jahren (also mit $16\frac{1}{3}$ Jahren) bekam er einen Bart, nach $9\frac{1}{3}$ Jahren (also mit $25\frac{2}{3}$ Jahren) heiratete er, nach 5 Jahren (also mit $30\frac{2}{3}$ Jahren) wurde Diophant Vater eines Sohnes. Dieser starb mit $30\frac{2}{3}$ Jahren, als der Vater $61\frac{1}{3}$ Jahre alt war. Nach 4 Jahren (mit $65\frac{1}{3}$ Jahren) starb Diophant.

Lösungen zu:
alpha-Wettbewerb des Heftes 5/82
(Fortsetzung)

Ma 7 ▪2251



Ma 7 ▪2252



a) b) c)

Ma 8 ▪2253 Angenommen, Schwester A hat x Jungen und y Mädchen, dann hat Schwester B auch y Mädchen, aber $2x$ Jungen. Da beide zusammen 7 Kinder haben, gilt $3x+2y=7$. Diese Gleichung hat nur für $y=2$ eine für unser Problem sinnvolle Lösung. Es folgt dann $x=1$.
Schwester A hat 3 Kinder, und zwar 2 Mädchen und 1 Jungen; Schwester B hat 4 Kinder, und zwar 2 Mädchen und 2 Jungen.

Ma 8 ▪2254 Es seien a, b, c, d die vier Grundziffern der Jahreszahl. Dann gilt für die Bedingung der Aufgabe

$$a+10b+c+d=10a+b+10c+d,$$
$$9b=9a+9c,$$
$$b=a+c.$$

Da nun $c \neq 0$ (wegen der Bedingung, daß $\overline{cd}$ eine zweistellige natürliche Zahl ist) gilt, kann die geforderte Bedingung erst für $b=3$, $c=1$, $a=2$ und $d=0$ wieder erfüllt werden.
Das heißt, nach 321 Jahren, im Jahre 2310, gilt dann zum ersten Mal wieder obige Gleichung.

Ma 8 ▪2255 Es seien a, b, c die Längen der Seiten eines beliebigen Dreiecks, dann gilt nach der Dreiecksungleichung ohne Einschränkung der Allgemeinheit

$$a<b+c.$$

Nach dem Monotoniegesetz der Addition bezüglich der Kleiner-Relation folgt

$$a+a<a+b+c \text{ bzw.}$$
$$2a<a+b+c,$$
$$a<\frac{1}{2}(a+b+c) \text{ bzw.}$$
$$a<\frac{1}{2}u, \text{ w.z.b.w.}$$

Ma 8 ▪2256 Die Länge der Quadratseite sei mit a bezeichnet. Dann ist die Länge des Durchmessers d_1 des Umkreises $d_1=a\cdot\sqrt{2}$ und die Länge des Durchmessers d_2 des Inkreises $d_2=a$. Nun gilt für den Flächeninhalt des Umkreises

$$A_U=\frac{\pi}{4}\cdot d_1^2$$
$$=\frac{\pi}{4}\cdot(a\sqrt{2})^2$$
$$=\frac{\pi}{4}\cdot a^2\cdot 2.$$

Für den Flächeninhalt des Inkreises gilt

$$A_I=\frac{\pi}{4}\cdot d_2^2$$
$$=\frac{\pi}{4}\cdot a^2.$$

Es folgt sofort die Behauptung.

Ma 9 ▪2257 Aus (1) folgt $y^2=(x+20)^2$. Das setzt man in (2) ein und erhält

$$(x+20)^2+x^2=1882,$$
$$x^2+40x+400+x^2=1882,$$
$$2x^2+40x+400=1882,$$
$$x^2+20x-741=0,$$
$$x_{1,2}=-10\pm\sqrt{841},$$
$$x_{1,2}=-10\pm 29.$$

Es folgt $x_1=19$ und $y_1=39$ oder $x_2=-39$ und $y_2=-19$.
Es gibt also genau zwei ganzzahlige Lösungen, und die Lösungsmenge ist $L=\{[19;39],[-39;-19]\}$.

Ma 9 ▪2258 Die beiden Zahlen seien mit x bzw. y bezeichnet, und es gelte $x>y$. Nach der Aufgabenstellung folgt nun

$$x+y+x-y+xy+\frac{x}{y}=243,$$
$$2x+xy+\frac{x}{y}=243,$$
$$2xy+xy^2+x=243y,$$
$$x(2y+y^2+1)=243y,$$
$$x(y+1)^2=243y,$$
$$x=\frac{243y}{(y+1)^2}.$$

Da x eine natürliche Zahl ist, muß $(y+1)^2$ ein Teiler von $243=3^5$ sein, nämlich 3^2 oder 3^4. Daraus folgt $y=2$ oder $y=8$.
Wenn $y=2$, so ist $x=\frac{243\cdot 2}{9}$ bzw. $x=54$; wenn $y=8$, so ist $x=\frac{243\cdot 8}{81}$ bzw. $x=24$.
Die gesuchten Zahlen sind 24 und 8 oder 54 und 2.

$$24+8+24-8+24\cdot 8+\frac{24}{8}=243,$$
$$48+192+3=243,$$
$$243=243;$$
$$54+2+54-2+54\cdot 2+\frac{54}{2}=243,$$
$$108+108+27=243,$$
$$243=243.$$

Ma 9 ▪2259 Durch Zerlegung erhält man

$$(a-b)(a+b)(a^2+b^2)=5p.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorenzerlegung gilt dies nur für

$$a-b=1 \quad (1),$$
$$a+b=5 \quad (2),$$
und $$a^2+b^2=p \quad (3).$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt

$$a=3$$
und $$b=2.$$

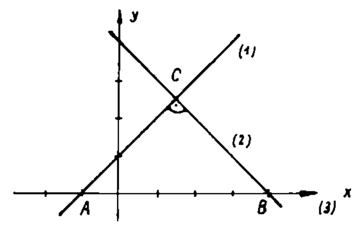
Setzt man das in die Gleichung (3) ein, so erhält man

$$p=13.$$

Da 13 tatsächlich Primzahl ist, ist 13 auch die einzige Primzahl, die den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Ma 9 ▪2260 Wegen der Anstiege 1 bzw. -1 sind die Größen der Winkel $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle ABC$ jeweils 45°; $\sphericalangle ACB$ hat demzufolge die Größe 90°. Das Dreieck ABC ist also gleichschenklig-rechtwinklig. Wir bezeichnen die Länge von $\overline{AC}\cong\overline{CB}$ mit a. Für den Flächeninhalt A des Dreiecks ABC gilt dann $A=\frac{a^2}{2}$. Nach dem Satz des Pythagoras gilt weiter:

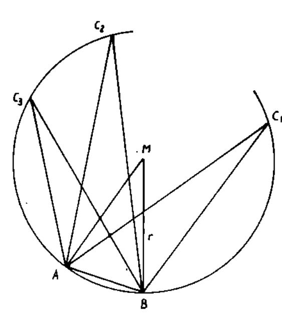
$$a^2+a^2=(5\,\text{cm})^2$$
$$2a^2=25\,\text{cm}^2$$
$$\frac{a^2}{2}=6{,}25\,\text{cm}^2.$$



Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC beträgt $6{,}25\,\text{cm}^2$.

Ma 10/12 ▪2261 Das Dreieck ABM ist gleichschenklig ($\overline{AM}$ und $\overline{BM}$ sind Radien des Umkreises). Nun gilt für die Größe des Winkels $\sphericalangle MAB\cong\sphericalangle ABM$ jeweils 72,5°.
Nach dem Sinussatz gilt im Dreieck ABM

$$\frac{r}{\sin 72{,}5^\circ}=\frac{\overline{AB}}{\sin 35^\circ} \text{ bzw.}$$
$$r=\frac{\overline{AB}\cdot\sin 72{,}5^\circ}{\sin 35^\circ}=\frac{3\cdot\sin 72{,}5^\circ}{\sin 35^\circ}\,\text{cm}\approx 5\,\text{cm}.$$



Der Umkreisradius des Dreiecks ABC ist fast 5 cm lang. Es gibt beliebig viele Dreiecke ABC_1, ABC_2, ABC_3, ..., die diese Bedingungen erfüllen.

Ma 10/12 ■2262 Es seien x, y bzw. z die Längen der Strecken $\overline{GP}$, $\overline{HK}$ bzw. $\overline{PD}$. Wegen $\overline{GP} \cong \overline{AH}$ und $\overline{PD} \cong \overline{KB}$ gilt $x+y+z=c$. Nun verhalten sich die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke wie die Quadrate entsprechender Seitenlängen. Darum gilt

$$\frac{A_1}{A}=\frac{x^2}{c^2}, \text{ also } x=c\cdot\frac{\sqrt{A_1}}{\sqrt{A}},$$

$$\frac{A_2}{A}=\frac{z^2}{c^2}, \text{ also } z=c\cdot\frac{\sqrt{A_2}}{\sqrt{A}},$$

$$\frac{A_3}{A}=\frac{y^2}{c^2}, \text{ also } y=c\cdot\frac{\sqrt{A_3}}{\sqrt{A}}.$$

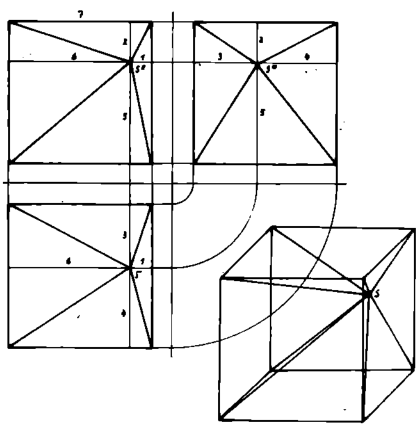
Daraus folgt weiter

$$c\cdot\frac{\sqrt{A_1}}{\sqrt{A}}+c\cdot\frac{\sqrt{A_2}}{\sqrt{A}}+c\cdot\frac{\sqrt{A_3}}{\sqrt{A}}=c, \text{ also}$$

$$\sqrt{A_1}+\sqrt{A_2}+\sqrt{A_3}=\sqrt{A}.$$

Ma 10/12 ■2263 Als Grundflächen der Pyramiden wählen wir die sechs Quadratflächen des Würfels. Damit hat jede Pyramide eine gleich große Grundfläche. Da für das Volumen einer Pyramide $V=\frac{1}{3}G\cdot h$ gilt, stehen die Volumina dieser Pyramiden im gleichen Verhältnis zueinander wie die entsprechenden Höhen. Weil die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis 6 gleich 21 ist, müssen die einzelnen Pyramidenvolumina gleich dem 1-, 2-, 3-, 4-, 5- bzw. 6fachen des durch 21 dividierten Würfelvolumens sein. Auf jeder Lineardimension entfallen somit $21:3=7$ Einheiten. Das ist dann der Fall, wenn sich die Höhen jeweils gegenüberliegender Pyramiden wie 1 : 6, 2 : 5 bzw. 3 : 4 verhalten.
Die gemeinsame Spitze aller sechs Pyramiden ist daher der Punkt, der von den Quadratflächen des Würfels den Abstand $h_n=n\cdot\frac{a}{7}$ mit $n=1, 2, \ldots, 6$ hat.

Ma 10/12 ■2264



Ph 6 ■121 Geg.: Die Kanten des Quaders mit $a=2{,}5$ cm, $b=4$ cm, $c=9{,}5$ cm, die Masse $m=256$ g
Ges.: die Dichte ϱ

Man rechnet mit der Gleichung $\varrho=\frac{m}{V}$. Für das Volumen V setzt man $V=a\cdot b\cdot c$, also

$$\varrho=\frac{m}{a\cdot b\cdot c}.$$

Dann ist $\varrho=\frac{256\,\text{g}}{2{,}5\,\text{cm}\cdot 4\,\text{cm}\cdot 9{,}5\,\text{cm}}$,

$$\varrho\approx 2{,}7\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}.$$

Der quaderförmige Körper besteht aus Aluminium.

Ph 7 ■122 Geg.: $h=1{,}50$ m, $G=25$ kp, $\mu=0{,}35$ Ges.: l

Nach der Gleichung für die geneigte Ebene gilt $F\cdot l=G\cdot h$ mit $F=\mu\cdot G$,

$$l=\frac{G\cdot h}{\mu\cdot G},$$

$$l=\frac{h}{\mu},$$

$$l=\frac{1{,}50\,\text{m}}{0{,}35},$$

$$l=4{,}28\,\text{m}.$$

Das Brett muß eine Länge von 4,28 m haben.

Ph 8 ■123 Geg.: $p_1=760$ Torr, $p_2=745$ Torr, $T_1=273$ K, $T_2=300$ K, $\varrho_1=0{,}00129\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ Ges.: ϱ_2

Nach der Zustandsgleichung der Gase gilt

$$\frac{p_1\cdot V_1}{T_1}=\frac{p_2\cdot V_2}{T_2}.$$

Da $V_1=\frac{m}{\varrho_1}$ und $V_2=\frac{m}{\varrho_2}$ ist, gilt

$$\frac{p_1}{T_1\cdot\varrho_1}=\frac{p_2}{T_2\cdot\varrho_2},$$

$$\varrho_2=\frac{p_2\cdot T_1\cdot\varrho_1}{p_1\cdot T_2},$$

$$\varrho_2=\frac{745\,\text{Torr}\cdot 273\,\text{K}\cdot 0{,}00129\,\text{g}}{760\,\text{Torr}\cdot 300\,\text{K}\;\text{cm}^3},$$

$$\varrho_2=0{,}00115\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}.$$

Die Dichte der Luft beträgt $0{,}00115\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

Ph 9 ■124
Geg.: $D=8{,}0$ mm, $d=0{,}078$ mm, $h=20$ mm, $\Delta\vartheta=50$ K, $\beta=18{,}0\cdot 10^{-6}\,\text{K}^{-1}$
Ges.: l

1. Das Quecksilbervolumen V_0 bei $\vartheta_0=0\,^\circ$C

$$V_0=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3+\frac{d^2\pi}{4}\cdot h$$

$$V_0=\frac{\pi}{12}(2D^3+3d^2h) \qquad (1)$$

2. Das Quecksilbervolumen V_1 bei $\vartheta_1=50\,^\circ$C

$$V_1=\frac{\pi}{12}(2D^3+3d^2h_1) \qquad (2)$$

bzw. $V_1=V_0(1+\beta\cdot\Delta\vartheta)$ (3)

3. Der Abstand l der 50-°C-Marke von der 0-°C-Marke

$$l=h_1-h \qquad (4)$$

Mit (1) in (3) folgt

$$V_1=\frac{\pi}{12}(2D^3+3d^2h)(1+\beta\cdot\Delta\vartheta). \qquad (5)$$

Mit (2) und (5) folgt

$$(2D^3+3d^2h_1)=(2D^3+3d^2h)(1+\beta\cdot\Delta\vartheta)$$

und hieraus

$$h_1-h=\beta\cdot\Delta\vartheta\left(\frac{2D^3+3d^2h}{3d^2}\right).$$

Mit (4) folgt weiter

$$l=\beta\cdot\Delta\vartheta\left(\frac{2D^3}{3d^2}+h\right),$$

$$l=18{,}0\cdot 10^{-6}\,\text{K}^{-1}\cdot 50\,\text{K}\left(\frac{2\cdot 8{,}0^3\,\text{mm}^3}{3\cdot 0{,}078^2\,\text{mm}^2}+20\,\text{mm}\right),$$

$$l=50{,}5\,\text{mm}.$$

Der Skalenabstand beträgt 50,5 mm.

Ph 10/12 ■125

Geg.: $g=9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $\frac{3}{4}$ der Fallstrecke in 1 s

Ges.: s, t

Die gesamte Fallstrecke ist nach der Gleichung für den freien Fall

$$s=\frac{g}{2}t^2. \qquad (1)$$

Der Körper legt dann ein Viertel des Weges in $(t-1)$ Sekunden zurück, also

$$\frac{s}{4}=\frac{g}{2}(t-1)^2,$$

$$s=2g(t-1)^2. \qquad (2)$$

(1) in (2) eingesetzt, ergibt

$$\frac{g}{2}\cdot t^2=2g(t-1)^2.$$

Diese Gleichung ist nach t aufzulösen, also

$$t^2=4(t^2-2t+1),$$

$$0=3t^2-8t+4=t^2-\frac{8}{3}t+\frac{4}{3},$$

$$t_{1,2}=\frac{8}{6}\pm\sqrt{\frac{64}{36}-\frac{48}{36}},$$

$$t_{1,2}=\frac{4}{3}\pm\frac{2}{3}.$$

Die zweite Lösung entfällt, deshalb gilt $t=2$. $t=2$ in (1) eingesetzt, ergibt dann schließlich

$$s=\frac{9{,}81\,\text{m}}{2\,\text{s}^2}\cdot 2^2\,\text{s}^2,$$

$$s=19{,}6\,\text{m}.$$

Der Körper fällt aus einer Höhe von 19,6 m und fällt insgesamt 2 Sekunden.

Ch 7 ■97
1 min ≙ 30 l Luft
x min ≙ 1560000000 l Luft

$$x=\frac{1\,\text{min}\cdot 1560000000\,l}{30\,l}$$

$$x=52000000\,\text{min}$$

1 Tag ≙ 1440 min
x ≙ 52000000 min

$$x=\frac{52000000\,\text{min}\cdot 1\,\text{Tag}}{1440\,\text{min}}$$

$$x=36111\,\text{Tage}$$

Ein Mensch könnte etwa 36111 Tage oder 99 Jahre leben.

Ch 8 ■98 a) Das Kalksteinmehl enthält 45,4 kg Kalziumoxid. b) 60,0 kg des Kalziumhydroxides haben den gleichen Kalziumoxidgehalt wie das Kalksteinmehl.

Ch 9 ■99 5200 ml Leitungswasser enthalten 0,572 g Kalziumoxid.

Ch 10/12 ■100 50,7% des Wassers werden nicht gebunden.

Abzeichen in Gold

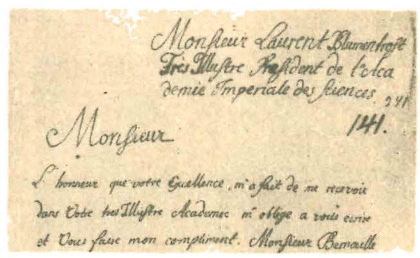
Für dreijährige Teilnahme

Doris Leipe, Wolfgang und Ralf Beukert, Urte Clemens, Beatrice List, alle Altenburg; Heike Döbler, Arnstadt; Beate Maaz, Aue; Annegret Schädlich, Auerbach; Geertje Maeß, Hella Gössel, beide Bad Doberan; Solveig van der Velde, Ines Wagner, Regina Suchert, alle Bad Gottleuba; Andrea Müller, Christiane Böttger, beide Bad Salzungen; Olaf Schmidt, Bad Liebenstein; Holm Graeßner, Bandelstorf; Claudia Görne, Bauda; Simone und Dirk Beier, Bautzen; Ulrich Zülicke, Bergwitz; Ines Tappe, Thorsten Brandt, Robert Rhode, Henry Baetke, Cornelia Graun, Yvonne Selke, Wiebke Metzgen; Matthias Tittel, Jörg Stephan, Aline Jung, Birgit Schulz, Clemens Thielecke, Uwe Semmelmann, Frank Steudel, Fatma Kärsten, Tobias Trommer, Andrea Nesnau, Stefan Rödel, alle Berlin; Thomas Franke, Heiko Prehl, André Lorenz, André Schieck, Jens Richter, alle Bernsbach; Matthias Röder, Karen Berg, Oliver Roy, Heiko und Kerstin Schmidt, alle Berlin; Eberhard Balzer, Bernburg; Hendrik Robbel, Bestensee; Martina Sternickel, Bernterode; Holger Wukasch, Bischofswerda; Andrea Hirschfeld, Astrid Reinhardt, beide Bleicherode; Frank-Jürgen Schwerin, Grit Giering, beide Blumberg; Steffi Müller, Bleicherode; Karin Sankat, Kirsten Hoffmann, beide Boizenburg; Petra Hunger, Brand-Erbisdorf; Andreas Bötticher, Breitenworbis; Iris Riedel, Uwe Reum, Klaus Asmus, alle Breitungen; Peter Sitz, Calau; Kerstin Kuhnert, Christgrün; Iris Freitag, Matthias Jurke, Rolf Roßius, alle Cottbus; Michael Enig, Crimmitschau; Sylvi Fache, Culitzsch; Andreas Donaubauer, Dahlen; Michael Ludwig, Yvonne Wagner, Matthias Ludwig, alle Dahme; Britta Böttcher, Damsdorf; Manuela Perlwitz, Dellien; Harald Röhrig, Beate Klöppner, Christiane Nolte, alle Dingelstädt; Silke Zenker, Katrin Horn, Coren Balling, Ines Schulze, alle Döllingen; Kerst Griesbach, Dorfchemnitz; Dieter Schurig, Marko Schröder, Angela Michael, Bernd Miethig, Michael Rühling, Robert Elschner, Yvonne Sachse, Beate Winkler, alle Dresden; Heike Odechnal, Ebersbach; Simone Kruse, Eberswalde; Thomas Haase, Eilenburg; Matthias Voigt, Thomas Robscheit, Birgit Burkhardt, Ralf Burkhardt, Jürgen Rennert, alle Eisenach; Olaf Krause, Eisenhüttenstadt; Jörg Simon, Engelsdorf; Astrid Mönch, Martin Synold, beide Erfurt; Thomas Nicklisch, Falkenberg; Peter Wenschuh, Falkenstein; Heike Storandt, Daniela Pilgrim, Cornelia Heymel, Silvio Bachmann, Christine Weyrauch, alle Fambach; Michael Scheibe, Ferdinandshof; Olaf Gleim, Finkenberg; Ute Berthold, Finsterwalde; Jan Simon, Floh; Ines Lehmann, Ute Frank, beide Forst; Ulf Winkler, Frankenberg; Alexander Schackow, Frankfurt (Oder); André Kempe, Jörg Schneider, Dorothee Heidrich, alle Freiberg; Udo und Frank Schulte, Freienbessingen; Wilfried Sitte, Thomas Brahmann, beide Freital; Iris Ebert, Gertitzsch; Holger Graß, Gnoien; Susanne Löffler, Wolfgang Schmidt, beide Görlitz; Uwe Knaust, Gossa; Bernd Müller, Sabine Wahrenberg, beide Gotha; Torsten Galley, Golßen; Rainer Sels, Stefan Kasparek, beide Gräfenhainichen; Sebastian Schmidt, Thomas Bahls, Andreas Funk, Ulf Gebhardt, Volker Pohlers, Kirsten Meincke, Völker Bölter, Karsten Seliger, Ralf Kramer, beide Greiz; Ragna Siol, Maik Thiele, Susann Buchheim, alle Grimma; Silke Maulhardt, Großbodungen; Frank Grützmacher, Gr. Godems; Heiko Fischer, Großweitzschen; Roger und Torsten Franz, Jörg Blaurock, beide Guben; Katharina Millies, Regine Mallwitz, Jürgen Porath, Andreas Marold, alle Güstrow; Susanne Dimsat, Greußen; Michael Bolz, Hagenow; Elisabeth Thomas, Beate Thomas, Andrea Fiedler, Ute Wolf, alle Halle; Jörg Langwald, Andrea Krüger, Christina Schmerling, Antje Hüttig, Beate Kaczmarek, Beatrice Weniger, Beatrix Flemming, alle Halle-Neustadt; Thomas Stiehler, Hainichen; Ralf Schlenker, Harst; Ilka Hartmann, Hartmannsdorf; Steffi Oligmüller, Haynrode; Mathias Schädlich, Mandy Probst, Simone Pötzsch, Heike Reichelt, alle Hammerbrücke; Detlef Jahn, Hecklingen; Mirko Müller, Hermannsdorf; Jan Simon, Hohleborn; Heidi Konarski, Hohenbucka; Erik Frenzel, Horka; Dörte Conert, Hosena; Silvio Fiedler, Hoyerswerda; Silke Umbreit, Ilmenau; Andrea Klam, Susanne Mahrholz, Kerstin Risch, alle Ilsenburg; Ines Wagenknecht, Ivenack; Steffi Gebauer, Jena; Daniela Schulz, Kakerbeck; Gesine Festag, Kamsdorf; Jana Wetzig, Silke Rendelmann, beide Kahla; Jens Weber, Annette Maier, Ingo Neubert, Michael Tix, Gert Reifarth, Sigurd, Jens und Anke Ullrich, Andreas Richter, Ulrich Weinhold, Grit Lohse, Birgit Lindner, Anett Beutner, Jaqueline Lindner, Udo Weiße, Michael und Jürgen Hoppe, Volker Liebert, alle Karl-Marx-Stadt; Jochen Schlegel, Kaulsdorf; Sabine Kertz, Klietz; Cornelia Bauch, Ute Studzinski, beide Kietz; Katy Penzler, Diana Niebergall, Annette Chlouba, Bianca Roitzsch, Britta Hofer, Heike Schneider, Lutz Arnold, Sabine Albrecht, Andreas Wenzel, Kai-Uwe August, Annett Urbainczyk, Beate Wohlfarth, Antje Schmidt, Heike Silchmüller, alle Kieselbach; Bernd Radunz, Jens-Uwe Steiniger, beide Kleinmachnow; Frank Adolf, Kl. Schwiesow; Susan Hoffmann, Klingenthal; Torsten Schütze, Klettenberg; Sylva Stein, Köthen; Stefan Heinig, Kohren-Sahlis; Frank Schauer, Kottengrün; Simone und Annette Kauert, Silke Winzek, Kathleen Hentrich, alle Langenweddingen; Ralf Ehrling, Langewiesen; Frank Helbig, Langenleuba-Ndr.; Agnes Ulrich, Lasan; Camillo Grune, Lauchhammer; Martin Böhm-Schweizer, Lauscha; Christine Stöber, Udo Woitek, beide Leinefelde; Michael Weber, Wolfgang Städter, Frank Elbsässer, Torsten Tok, Frank Heyde, alle Leipzig; Kathleen Peschel, Lichtenberg; Silvia Kühne, Limlingerode; Ulrike Seefeldner, Linz (Österreich); Konsultationsgruppe Math. 5 der Pestalozzi-OS, Löbau; Kerstin Müller, Jens Söll, Stefan Schmidt, Jörg Zimmermann, Frank Schönbach, André Gaertner, Ralf Rogel, Heiko Fröhlich, Jens Grunert, alle Lössau; Peter Gerlach, Lübs; Ute Korell, Lützen; Ulrich Härtel, Uwe Mohrenweiser, Peter Zienicke, Thomas und Geza Pap, Claudia Popien, Carsten Behling, alle Magdeburg; Angelika Schlegel, Mahlsdorf; Bettina Fröhlich, Manschnow; Lutz Päßler, Marienberg; Falk Nicol, Meiningen; Silke Häbold, Christian Kunze, beide Meißen; Uwe Latz, Meyenburg; Eiko Knorre, Micheln; Sören Wolf, Milkau; Klaus Walther, Mittelherwigsdorf; Uwe Pioch, Mittelschmalkalden; Silvia Krech, Mittelstille; Frank-Thorsten Bölter, Michael Weber, beide Mühlhausen; Katrin Bernhardt, Janett Eckart, beide Naundorf; Heike Förster, Naunhof; Andreas Suchanow, Elvira Korölus, beide Neubrandenburg; Undine Henker, Annett Stöber, Kerstin Günther, alle Neukirch; Susanne Lind, Neuhaus; Marco Walther, Neundorf; Ilka Bublitz, Andrea Hinzmann, Ruth Fiedler, Ulf Woike, Sabine Füllgraf, alle Neustadt; Kathrin Massanek, Neusornzig; Ines Lojak, Ute Riedelsdorf, Roland Marquardt, alle Neustrelitz; Uwe Glotz, Niesky; Petra Winter, Nünchritz; Torsten Endter, Andre Hoffmann, Anja Horn, Sandra Niedlich, alle Oberschönau; Michael Herrmann, Oberlichtenau; Nico Kümmling, Oberwiesenthal; Hennig Hetzer, Oettersdorf; Silke Stieber, Olbersdorf; Esther Hädlich, Oranienbaum; Thomas Glöckner, Dirk Jahn, Jaen Hankel, Horst Böhm, Steffen Weber, Annett Schmidt, alle Osternienburg; Claudia Nosek, Packisch; Kay Loitz, Dirk Prieß, Cornelia Brüß, Diana Schlüter, Michael Taeschner, alle Parchim; Steffen Scheithauer, Parey; Thomas Lieberwirth, Perleberg; Heiko Kühn, Susanne Schreckenbach, beide Potsdam; Antje und Thomas Reichel, Pirna; Ingolf Teutsch, Plessa; Dorit Grulke, Andrea Calmon, beide Pritzwalk; Wolfgang Schneider, Radeberg; Katharina und Karl-Martin Eichhorn, Andreas Jöstel, alle Radebeul; Steffen Korb, Raschau; Jana Preuß, Nils Grotrian, Tom Werner, Regina Koch, Carina Dieckelmann, Ines Oldenburg, Birka Radloff, Jan Werner, Christoph Jahnke, alle Ribnitz; Lutz Marschner, Riesa; Ute Gubick, Beate Walter, beide Röbel; Kerstin Gülden, Roitzsch; Niels Hansen, Jörg Schäfer, Michael Gräber, Rüdiger Lohff, Urte Hendrych, Anne und Heiner Ruser, Oliver Eidam, Ines Andrews, Sonja Brühe, Thomas Nühse, Annette Kersten, Elke Haferkorn, Kjiell Drews, alle Rostock; Antje Forner, Ellen Höse, beide Rotta; Thomas Fröhlich, Rudolstadt; Barbara Thiel, Steffen Klaus, Gesine Schlink, Ronny Jira, Anja Bergner, alle Sangerhausen; Ronny Henschke, Schierke; Astrid Grulke, Schernberg; Knut Pfefferkorn, Schkopau; Steffen Christ, Schmalkalden; Sirko Schönherr, Schmölln; Achim Kröber, Schönbach; Steffen Stanek, Schöneiche; Jens Gläßer, Schönfels; Frank Scharrer, Schöpsdrehe; Kristin Straubel, Toralf Tiedtke, Simone Drewitz, alle Schorssow; Jörn Brückner, Schwarzenberg; Peter Schumann, Schwarze Pumpe; Joachim Krumnow, Schwedt; Grit Hesse, Anett Hermann, beide Sebnitz; Roland Drendel, Senftenberg; Christiane May, Siebenleben; Ute Hornawsky, Silbach; Klara Töpfer, Jochen Wetzel, beide Sömmerda; Ramona Dörre, Gabriele Hellmund, Bert Liebmann, alle Sondershausen; Godmar Back, Sonneberg; Frank Schnelle, Stendal; Bernhard Mikeska, Springe (BRD); Thomas Kaiser, Stralsund; Wolfram Meyerhöfer, Astrid Milbradt, beide Strasburg; Uli Walther, Stützerbach; Tim Häfner, Andreas König, Beate König, Andrea Kurz, Kati Recknagel, Anja Reumschüssel, Anja Usbeck, Kathrin Wahl, Isabell Wiegandt, Jutta Huhn, Anja Häfner, Kerstin Reumschüssel, Olaf Bahner, Thomas Bahner, Mario Döll, Heiko Reumschüssel, Diana Kirchner, Andrea Reumschüssel, Steffi Recknagel, Mario Recknagel, Uwe Holland-Merten, Andreas König, Karin Reinhardt, alle Steinbach-Hallenberg; Uta Linz, Suhl; Gerald Schumann, Teichwolframsdorf, Fred Völz, Teltow; Holger Wittner, Marita Schulz, beide Teterow; Wolfgang Vogel, Thalheim; Burkhardt Bachmann, Thamsbrück; Cornelia Matthä, Beate Heiß, beide Tiefenort; Silke Rosin, Diana Schulz, beide Töplitz; Lothar Matzker, Torno; André Uhrlaß, Treben; Steffi Heusing, Silke Winges, Silke Jung, Jens Schwarzer, Mario Winges, Heiko Müller, Ralf Koch, Silke Storch, Claudia Peter, alle Trusetal; Christine Otto, Dörte Schmidt, Torsten Menzel, alle Ueckermünde; Jörg Mey, Beate Müller, Dirk Buchmann, Manuela Lorenz, alle Unterbreizbach; Ulrike Dost, Katrin Hürdler, Petra Tiersch, Christine Demny, Marion Herbig, Christine Hermes, Regina Leineweber, Doreen Siebert, Maja Rasch, Antje Wieland, Evely Pelzetter, alle Vacha; Kathrin Lindner, Jana Kirmse, Doreen Koch, alle Vitzenburg; Thomas Vandahl, Völkerhausen; Frank Goth, Waltersdorf; Andreas Heidtmann, Anke Dittmar, Andrea Schmidt, alle Waren; Holger Nobach, Warnemünde; Uwe Pillart, Waschow; Johannes Thäter, Uta Langer, Monika Rössler, Volker Lehmann, alle Weimar; Heike Eggert, Tino Albrecht, Udo Lehmann, Jana Engelmann, Beate Rumpelt, Britta Nowack, Alexander Benz, Isabel Ackermann, alle Weißwasser; Holger Post, Wiebendorf; Lutz Grothe, Andreas Dörin, alle Wiederitzsch; Dorothee Farner, Wildberg; Andrea Maas, Wilhelmsburg; Bert Winkler, Wilkau-Haßlau; Mario Kuhn, Wintzingerode; Ute Süß, Wippra; Karin Junk, Peter Eggert, Heike Hinz, alle Wismar; Mathias Schwenck, Wittenburg; Jörg Szurlies, Wittenberg; Ronald Reschke, Wittstock; Detlef Schiemann, Wittenburg; Carl Grosch, Wolferstedt; Sigrun Gardebrecht, Sabine Wehrig, Ulf Alpen, alle Wolgast; Maren Zech, Zahna; Adrian Hackenberger, Zedlitz; Antje Schneider, Zeitz; Angelika Weyh, Steffi Remsthaler, Matthias Schmeiß, Ute Barthelmes, alle Zella-Mehlis; Holger Radünz, Zerbst; Karsten Schwanke, Ziesar; Uwe Schulz, Birgit Gawlik, Annegret Elsner, Kerstin Donix, Christine Thomas, alle Zittau; Katrin Neum, Katrin Scheffel, Marco Möbius, alle Zschornewitz; Falk Steinbach, Zwickau; Michael Herrmann, Oberlichtenau; Steffen Weber, Osternienburg.

Leonhard Euler – Chronologie

1707 Leonhard Euler in Basel geboren (15. April).
1708 Umzug der Familie nach Riehen bei Basel.
1713 Nachdem Euler zunächst bei seinem Vater Unterricht erhalten hatte, besucht er die Lateinschule in Basel.
1720 Euler immatrikuliert sich an der Universität in Basel (20. Oktober).
1723 Studium der Theologie, danach der Mathematik bei Johann Bernoulli.
1724 Euler erhält die Magisterwürde.
1725 Erste wissenschaftliche Arbeit.
1726 Die Versuche Eulers scheitern, in Basel eine Professur zu erhalten.
1727 Abreise aus Basel (5. April) und Ankunft in St. Petersburg (24. Mai).
1731 Nach anfänglichen Schwierigkeiten, die durch den Tod der Zarin Katharina II. entstanden waren, wird Euler Professor für Physik an der Akademie in Petersburg. Eine bereits 1731 geschriebene Musiktheorie erscheint erst 1739.
1733 Euler wird als Nachfolger Daniel Bernoullis Professor für Mathematik an der Petersburger Akademie.
1734 Euler heiratet (17. Januar, nach dem alten Kalenderstil am 27. 12. 1732) Katharina Gsell. Sohn Johann Albrecht geboren.
1736 Eulers „Mechanik" erscheint. In ihr wird erstmals die Mechanik mit der neuen Analysis behandelt.
1738 Euler verliert als Folge einer Infektion das rechte Auge.
1740 bis 1742 1. Schlesischer Krieg.
1740 Sohn Karl geboren.
1741 Euler verläßt Petersburg (19. Juni), da die Machtkämpfe im Zarenreich seine Zukunft unsicher erscheinen lassen. Ankunft in Berlin (25. Juli). Tochter Helene geboren.
1743 Sohn Christoph geboren.
1744 bis 1745 2. Schlesischer Krieg.
1744 Die Bücher über Himmelsmechanik und Variationsrechnung erscheinen.
1746 Nachdem sich durch die Schlesischen Kriege die Neugründung der Akademie immer wieder verzögert hatte, wird Euler Direktor der mathematischen Klasse der Berliner Akademie.
1748 „Einführung in die Analysis des Unendlichen" erscheint.
1749 Ein von der Petersburger Akademie in Auftrag gegebenes Buch über Schiffbau wird veröffentlicht.
1750 In einer Arbeit veröffentlicht Euler den Impulsänderungssatz.
1751 Die erste Mondtheorie wird publiziert.
1753 Wichtige hydrodynamische Arbeiten von Euler verfaßt, u. a. auch über Turbinenbau.
1755 Die 1748 geschriebene Differentialrechnung erscheint.
1756 bis 1763 Siebenjähriger Krieg (3. Schlesischer Krieg).
1758 Euler findet die später nach ihm benannten Kreiselgleichungen.
1765 Euler veröffentlicht ein weiteres Mechanikbuch.
1766 Übersiedlung nach Petersburg (1. Juni bis 17. Juli) infolge eines Zerwürfnisses mit Friedrich II. Sehschwäche.
1768 „Briefe an eine deutsche Prinzessin" erscheinen. Dieses Buch war einer der größten Buchhandelserfolge des 18. Jahrhunderts und ist bis heute eines der besten populärwissenschaftlichen Bücher. Die 1763 beendete Integralrechnung erscheint.
1770 „Vollständige Anleitung zur Algebra" veröffentlicht.
1771 Staroperation mißlungen, Eulers Wohnhaus abgebrannt.
1772 Die zweite Mondtheorie wird publiziert.
1773 Eulers Frau gestorben. N. Fuß kommt aus Basel nach Petersburg, um dem blinden Euler bei seiner wissenschaftlichen Arbeit zu helfen.
1775 Drehimpulssatz von Euler gefunden. Jetzt lassen sich alle Aufgaben der klassischen Mechanik mathematisch behandeln.
1776 Wiederverheiratung Eulers mit Salome Gsell.
1783 Euler gestorben (18. September).
1911 Der erste Band der „Gesammelten Werke" Eulers erscheint im Teubner-Verlag. Das monumentale Werk wird in diesem Jahrhundert vollendet werden. Zur Zeit sind 71 Bände erschienen.

Leningrad. Blick über die Newa auf die Wassili-Insel. Am linken Bildrand ist die Kunstkammer zu sehen, der Arbeitsplatz Eulers bei seinem zweiten Petersburger Aufenthalt. Bei beiden Petersburger Aufenthalten befand sich Eulers Wohnung auf der Wassili-Insel.


Monsieur Laurent Blumentrost
Très Illustre President de l'Aca
demie Imperiale des Sciences
141.
Monsieur
L'honneur que votre Excellence m'a fait de me recevoir
dans Votre tres Illustre Academie m'oblige a vous ecrire
et Vous faire mon compliment. Monsieur Bernoulli

Beginn des Bewerbungsschreibens Eulers an den Präsidenten der Petersburger Akademie aus dem Jahre 1726.

Zusammenstellung: R. Thiele

Basel. Blick auf die mittlere Rheinbrücke aus unseren Tagen. Das erste Haus von links am Ufer ist die alte Universität. Dahinter befindet sich die Taufkirche Eulers. Diese Kirche gibt den wohl sichersten Hinweis auf die Lage des unbekannten Geburtshauses von Euler: es muß in der Nähe der Kirche sein. Weil dort aber fast keine Häuser aus der Zeit vor 1707 vorhanden sind, dürfte Eulers Geburtshaus nicht mehr stehen.