Mathematische Schülerzeitschrift

alpha

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
21. Jahrgang 1987
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

3

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold

Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086
Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig 7027
Redaktion:
OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)
Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstudienrat J. Lehmann, VLdV (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Dr. rer. nat. W. Schmidt (Greifswald); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. rer. nat. W. Schulz (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch, VLdV (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der *Karl-Marx-Universität* Leipzig (Ltg. Dr. C.-P. Helmholz)
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Briefmarken v. E. Quaisser/H.-J. Sprengel, Potsdam (S. 54/55); Eigenfoto Lehmann/Liebau, Leipzig (III. U.-Seite)
Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach Vorlagen aus dem Buch: Korger: *Schrift und Schreiben*, VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1982
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 9. Februar 1987
Auslieferungstermin: 5. Juni 1987

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

49 Wie ähnlich können sich Brüder sein? [9][1])
Ein Brief mit einer kombinatorischen Fragestellung
Dr. P. Göthner, Sektion Mathematik der *Karl-Marx-Universität* Leipzig

52 Der Vierquadrate-Satz, Teil 1 [9]
Dr. H. Pieper, Zentralinstitut für Astrophysik der Akademie der Wissenschaften der DDR

53 Sprachecke [8]
H. Begander/Dr. C.-P. Helmholz/J. Lehmann (alle Leipzig)

54 Symmetrie im Raum, Teil 2 [6]
Dr. E. Quaisser/Dr. H.-J. Sprengel, Päd. Hochschule *Karl Liebknecht*, Potsdam

55 Eine Aufgabe von René Descartes aus dem Jahre 1637 [9]
mitgeteilt von Dr. J. Buhrow, *E.-M.-Arndt-Universität* Greifswald

56 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht
speziell für Klassen 3 bis 6
Kryptarithmetik
Oberstudienrat Dr. R. Lüders, Berlin

57 Anordnung von Schachfiguren [5]
H. Rüdiger, Schichtleiter im Werk für Fernsehelektronik Berlin

58 XXVI. Olympiade *Junger Mathematiker* der DDR [7]
Aufgaben der Bezirksolympiade

60 Ein Besuch in der Knobelwerkstatt [5]
Das VIII. Turn- und Sportfest der DDR
Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der *Karl-Marx-Universität* Leipzig

62 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt
Mini-BASIC für *alpha*-Leser, Teil 5 [6]
Dr. L. Flade/Dr. M. Pruzina, Sektion Mathematik der *Martin-Luther-Universität* Halle

63 Unterhaltungsmathematik aus der äthiopischen mathematischen Schülerzeitschrift *Hisbab* [5]
Zusammenstellung: Dr. Ch. Bandt, Greifswald/J. Lehmann, Leipzig/Dr. W. Moldenhauer, Erfurt

64 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig

66 *alpha*-Sonderwettbewerb
Aufgaben aus Büchern des Teubner-Verlages, Leipzig [7]
J. Lehmann, Leipzig/J. Weiß, Lektor für Mathematik im BSB B. G. Teubner-Verlag, Leipzig

68 Lösungen [5]

72 Alte Vorlesungsmitschrift entdeckt [9]
Dr. F. König, Sektion Mathematik der *Karl-Marx-Universität* Leipzig

III. *U.-Seite:* Knifflige Glückwünsche [5]
Susanne Noßke, Borna; LVZ Leipzig

IV. *U.-Seite:* Symmetrische Figuren [6]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig

[1]) bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben geeignet ab der angegebenen Klassenstufe

Wie ähnlich können sich Brüder sein?

Ein Brief mit einer kombinatorischen Fragestellung

Vor einiger Zeit erhielt ich folgendes Schreiben:

Sehr geehrter Herr G.
Bei der Bearbeitung einer genetischen Aufgabe stehe ich vor einem Problem. Es besteht darin, daß zwei Brüder in $k = 0; \ldots;$ 2m Chromosomen übereinstimmen können. Für Brüder, bei denen unterstellt wird, daß sie beispielsweise in 9 Chromosomen identisch sind, gibt es – 23 Chromosomenpaare vorausgesetzt – $\binom{46}{9}$ Möglichkeiten der Kombination von Chromosomen. Dabei können $r = 0; 1; 2;$ 3 oder 4 Chromosomenpaare enthalten sein. Wie häufig treten bei vorgegebenen 2m und k die Kombinationen für $r = 0, r = 1, \ldots, r = \frac{k}{2}$ auf?
Sicher werden Sie mir helfen können.
Mit bestem Dank W. K.
Sektion Tierproduktion – Veterinärmedizin

Erläutern wir zunächst die *biologische Fragestellung*:
In den Chromosomen liegen die gesamten erblichen Eigenschaften, über die ein Lebewesen verfügen wird. Die Chromosomenstruktur und die Umwelt sind also die beiden dominierenden Faktoren, welche die Entwicklung eines Lebewesens bestimmen. Der Kern jeder Zelle enthält beim Menschen 23 Paare von je zwei Chromosomen. Bei der Befruchtung schließen sich Chromosomen der Eizelle mit Chromosomen der Samenzelle zu 23 neuen Paaren zusammen. Die Ähnlichkeit zwischen Brüdern und auch zwischen deren Nachkommen wird auch von der Zahl der übereinstimmenden Chromosomenpaare bestimmt.
Formulieren wir nun ein *mathematisches Problem*, welches es gestattet, auch die biologische Fragestellung zu beantworten.
Wir gehen aus von einer Menge
$M = \{x_1; \ldots; x_m; y_1; \ldots; y_m\}$
von $n = 2 \cdot m$ Elementen. Jedes der Elemente x_i kann mit dem Element y_i zu einem *Chromosomenpaar* $(x_i; y_i)$ zusammengefaßt werden. Daß zwei Brüder in k Chromosomen identisch sind, ist gleichbedeutend mit einer Auswahl von k Elementen aus der Menge M. Unter diesen k Elementen können nun auch *Chromosomenpaare* auftreten. Unsere Aufgabe ist es, zu ermitteln, wie oft bei einer Auswahl von k Elementen aus M genau r Paare der Form $(x_i; y_i)$ auftreten. Diese zu ermittelnde Anzahl A_r^k ist also von drei vorgegebenen natürlichen Zahlen, nämlich n (der Zahl der Elemente von M), k (der Zahl der aus M ausgewählten Elemente) und r (der Zahl der dabei auftretenden *Chromosomenpaare*) abhängig.
Zunächst erkennt man: Es geht um ein spezielles Problem der *Auswahl* von Elementen aus einer endlichen Menge, also um eine Fragestellung der *Kombinatorik*.
Wenden wir uns zunächst dem naheliegenden Gedanken zu, der bereits zur Lösung des Problems führen könnte, nämlich in geeigneter mathematischer Literatur nachzuschlagen. Schreiben wir einige Beziehungen, die im Zusammenhang zur Auswahlproblematik stehen, heraus:
Wir finden z. B. eine Formel zur Berechnung der Anzahl der voneinander verschiedenen Möglichkeiten, aus einer Menge von n Elementen k Elemente auszuwählen – jede solche Auswahlmöglichkeit heißt *Kombination:*

$$C_k^n = \frac{n(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k-1)\cdot k} \quad (1)$$

Aus der Menge $\{a; b; c\}$ kann man also genau $C_2^3 = \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2} = 3$ voneinander verschiedene Zweiermengen, nämlich $\{a; b\}$; $\{a; c\}$ und $\{b; c\}$, auswählen. Wir entdecken weiter, daß (1) auch kürzer geschrieben werden kann, wenn man $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ benutzt und (zusätzlich) $0! = 1$ festlegt. Dann ergibt sich aus (1) durch Erweitern mit $(n-k)!$

$$C_k^n = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \quad (2)$$

Für (2) schreibt man auch kurz

$$C_k^n = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{k} \quad (3)$$

Dabei ist das Symbol $\binom{n}{k}$ für $n \geqq k$ durch (3) definiert, für $n < k$ soll $\binom{n}{k} = 0$ gelten.
Der Ausdruck $\binom{n}{k}$ heißt *Binomialkoeffizient*, er tritt nämlich bei der Berechnung der Potenz eines Binoms auf:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}a^0 b^n \quad (4)$$

Diese Beziehung ist uns zumindest für $n = 2$ und $n = 3$ nicht unbekannt.
Die Formel

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad (5)$$

die unmittelbar aus (3) folgt, garantiert, daß die Summe in (4) bezüglich der Koeffizienten symmetrisch aufgebaut ist, wie dies ja auch im *Pascalschen Dreieck* deutlich wird.
Eine Formel, die unmittelbar zur Lösung unseres Problems beiträgt, suchen wir jedoch vergeblich. Also stürzen wir uns in das Abenteuer, selbst eine solche herzuleiten. Wir gehen dabei so vor, wie man es meist in solchen Fällen tut: Zunächst untersuchen wir eine Reihe einfacher Beispiele, um eine Vermutung zur Berechnung der gesuchten Anzahl A_r^k aufzustellen. Und dann werden wir versuchen, unsere Vermutung zu beweisen.
Sei $n = 2m = 4$; d. h., es liegen 2 mal 2 *Chromosomen* $x_1; x_2; y_1; y_2$ vor. Dabei soll $(x_i; y_i)$ ein Paar übereinstimmender Chromosomen bilden. Wählt man von den 4 Elementen aus der Menge $M = \{x_1; x_2; y_1; y_2\}$ nur eines aus – es gibt dabei $\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!3!} = 4$ Möglichkeiten – so kann natürlich kein Paar übereinstimmender Elemente vorkommen.
Also ergibt sich für $n = 4$ und $k = 1$:
Ist $r = 0$, d. h., es existiert kein Paar übereinstimmender Elemente, so gibt es 4 Möglichkeiten; A_0^4.
Ist $r \geqq 1$, d. h., es existiert mindestens ein Paar übereinstimmender Elemente, so gibt es keine Auswahlmöglichkeit;
$A_1^4 = A_2^4 = 0$.
Wählen wir aus M zwei Elemente aus, so ergeben sich
$C_2^4 = \frac{4!}{2!2!} = 6$ Auswahlmöglichkeiten:
$x_1; x_2 \quad x_1; y_1 \quad x_2; y_1 \quad x_2; y_2$
$x_1; y_2 \quad y_1; y_2$.
Wir erhalten für $r = 0$ (es tritt kein Paar auf): $A_0^4 = 4$,
für $r = 1$ (es tritt genau ein Paar auf): $A_1^4 = 2$,
für $r > 1$ (es treten mindestens zwei Paare auf): $A_r^4 = 0$.
Wir wählen $k = 3$. Es ergeben sich 4 Kombinationen. Wir erhalten
$A_0^4 = 0$, $A_1^4 = 4$ und $A_2^4 = 0$.
Man überprüfe dies!
Schließlich erhalten wir für $k = 4$ nur die Auswahlmöglichkeit $x_1x_2y_1y_2$, in der zwei Paare auftreten.
Die gewonnenen Ergebnisse werden in Tabelle 1 zusammengestellt (Seite 50).

Wir deuten die 1. Spalte:
Wenn kein Element aus M ausgewählt wird, so können weder 0 noch 1 noch 2 noch mehr als 2 Paare auftreten. Der Fall $k = 0$ kann also künftig ausgeschlossen werden. Wir streichen die 1. Spalte.
Wir deuten die 2. Zeile:
Ein Paar x_iy_i kann erst dann vorkommen, wenn wenigstens 2 Elemente aus der Menge M ausgewählt werden.
Wir deuten die 4. Zeile:
Wenn man nur die 4 Elemente $x_1x_2y_1y_2$ zur Verfügung hat, so können nie mehr als 2 Paare auftreten.
Wir haben aus der Untersuchung dieser ersten Beispiele schon einiges gelernt, was

Tabelle 1

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$r=0$	0	4	4	0	0
$r=1$	0	0	2	4	0
$r=2$	0	0	0	0	1
$r>2$	0	0	0	0	0

man mühelos auf den „allgemeinen Fall" übertragen kann: $A_r^n \neq 0$ kann nur dann auftreten, wenn $r \leqq \frac{k}{2}$ gilt, denn unter k ausgewählten Elementen können nicht mehr als $\frac{k}{2}$ Paare sein.

In dem Teil der Tabelle, der unterhalb der von links oben nach rechts unten verlaufenden Diagonalen liegt, müssen also folgerichtig nur Nullen auftreten.

Offenbar gilt auch stets $C_k^n \geqq A_r^n$ (Warum?)

Berechnet man (mit Hilfe von (2)) einen beliebigen der 5 Werte C_k^4 $(0 \leqq k \leqq 4)$, so erkennt man, daß die Summe der Elemente in der k-ten Spalte gerade C_k^4 beträgt. Auch diese Erkenntnis können wir verallgemeinern: Die Summe der Fälle des Auftretens von genau $0; 1; \ldots; \frac{k}{2}$ Paaren muß mit C_k^n übereinstimmen, denn jede Kombination liefert genau eine Zahl vorkommender Paare.

Ehe wir uns an die Lösung des allgemeinen Problems heranwagen, untersuchen wir weitere Beispiele:

Die Werte A_r^6 sind in Tabelle 2 zusammengestellt.

Wir erläutern die 3. Spalte:

Es gibt $C_3^6 = 20$ voneinander verschiedene Möglichkeiten, aus der Menge $\{x_1; x_2; x_3; y_1; y_2; y_3\}$ genau 3 Elemente auszuwählen. Offensichtlich kann bei keiner dieser Möglichkeiten der Fall eintreten, daß 2 oder mehr als 2 Paare vorkommen, also ist $A_{\frac{3}{2}}^6 = 0$ und $A_3^6 = 0$.

Unter den 20 Auswahlmöglichkeiten treten folgende zwei Fälle auf:

1. Die Kombination enthält nur Elemente aus der Teilmenge der x_i oder nur Elemente aus der Teilmenge der y_i.
2. Die Kombination enthält ein Element aus der Teilmenge der x_i und zwei Elemente aus der Teilmenge der y_i oder umgekehrt.

Beim *Fall 1* treten $2 \cdot C_3^3 = 2$ Kombinationen auf, in denen kein Paar vorkommen kann, also ist $A_0^3 = 2$.

Beim *Fall 2* beschränken wir uns auf die Untersuchung der Kombinationen der Form $x_i y_j y_k$, für die Kombinationen $x_i x_j y_k$ gelten analoge Überlegungen.

Nur in den Kombinationen $x_1y_2y_3$; $x_2y_1y_3$ und $x_3y_1y_2$ tritt kein Paar auf. Damit haben wir gefunden:

$A_0^6 = 2 + 3 + 3 = 8$.

Da in den anderen Auswahlmöglichkeiten der Form $x_i y_j y_k$ nicht mehr als ein Paar auftreten kann, ergibt sich:

$A_1^6 = 20 - 8 = 12$.

Um die Ergebnisse der 4. Spalte der Tabelle 2 überprüfen zu können, benutzen wir zusätzlich die folgende Übersicht (Tabelle 3), in ihrer *Eingangszeile* ist der mögliche Charakter der Kombinationen von vier Elementen aus der Menge $\{x_1; x_2; x_3; y_1; y_2; y_3\}$ dargestellt:

Im Feld I_0 muß die Zahl 0 stehen, da x_i zu einem der y_j bzw. y_i zu einem der x_j gehören muß. Es tritt also mindestens ein Paar auf, d. h., die Anzahl der Fälle, in denen kein Paar auftritt, ist Null.

Auch im Feld II_0 muß die Zahl 0 auftreten, denn für die vier Indizes i; j; k; l stehen nur 1; 2 und 3 zur Verfügung. Ist nämlich $i \neq k$ und $i \neq l$, so muß wegen $j \neq i$ entweder $j = k$ oder $j = l$ gelten. Da A_0^4 die Summe der in I_0 und II_0 eingetragenen Zahlen ist, haben wir $A_0^4 = 0$ gefunden.

Offenbar kann in $x_iy_1y_2y_3$ (bzw. $y_ix_1x_2x_3$) nicht mehr als ein Paar auftreten. Also tritt in jeder dieser Kombinationen genau ein Paar auf. Es gibt dabei soviel Möglichkeiten, wie man Elemente für x_i (bzw. y_i) finden kann, also $2 \cdot 3 = 6$ (Feld I_1).

Untersuchen wir nun den Fall II_1:

Es gibt $C_2^3 = 3$ Möglichkeiten, aus der Menge der Elemente $y_1; y_2; y_3$ genau zwei Elemente auszuwählen. Zu jeder von ihnen existieren $C_1^2 = 2$ Möglichkeiten, den Index i von x_i so festzulegen, daß entweder $i = k$ oder $i = l$ gilt. Für die Wahl von j gibt es dann noch genau eine Möglichkeit, so daß $j \neq k$ und $j \neq l$ gilt. Damit muß in Feld II_1 die Zahl

$C_1^1 \cdot C_1^2 \cdot C_2^3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

eingetragen werden. Für A_1^6 ergibt sich aus I_1 und II_1 somit $6 + 6 = 12$.

Schließlich wenden wir uns noch den Feldern I_2 und II_2 zu. Offensichtlich können im Fall I_2 nicht zwei Paare auftreten.

Im Fall II_2 existieren zunächst C_2^3 Möglichkeiten, die Elemente x_ix_j festzulegen, offenbar treten aber nur dann zwei Paare auf, wenn $k = i$ und $l = j$ gilt. Dies bedeutet, daß im Feld II_2 die Zahl

$C_2^3 \cdot C_2^2 = 3 \cdot 1 = 3$ einzutragen ist.

Aus I_2 und II_2 folgt $A_2^6 = 0 + 3 = 3$.

Damit haben wir unsere Übersicht abgearbeitet, die Ergebnisse stimmen mit denen der Spalte 4 in Tabelle 2 überein.

Wir sind nun hinreichend gerüstet, das Problem in seiner allgemeinen Form lösen zu können. Bei der Ermittlung einer *Formel* zur Berechnung von A_r^n wollen wir so vorgehen, wie dies bei der Behandlung der letzten Beispiele angedeutet wurde.

Wir betrachten zunächst den Fall, daß k eine gerade Zahl ist:

In der Tabelle 4 sind in der *Eingangszeile* alle möglichen *Typen* der Kombinationen von k Elementen aus der Menge $\{x_1; \ldots; x_m; y_1; \ldots; y_m\}$ angegeben.

Dabei ist $n = 2m$, $k \leqq 2m$ und $r \leqq \frac{k}{2}$.

Wir begründen die in der 1. Zeile eingetragenen Ergebnisse für $r = 0$ (Zahl der Fälle, in denen kein Paar auftritt):

I_0: Da in den Kombinationen entweder nur Elemente x_i oder nur Elemente y_i auftreten, gibt es so viele Fälle, in denen kein Paar $(x_i; y_i)$ auftritt, wie es möglich ist, aus m Elementen x_i (bzw. y_i) k Elemente auszuwählen, also $2 \cdot C_k^m$ Kombinationen.

II_0: Es gibt C_{k-1}^m Möglichkeiten, aus der Menge $\{x_1; \ldots; x_m\}$ $k - 1$ Elemente auszuwählen. Nun muß y_j so festgelegt werden, daß es zu keinem der Elemente $x_{i_1} \ldots x_{i_{k-1}}$ einer Auswahl gehört. Dabei hat man $C_1^{m-(k-1)} = m - (k - 1)$ Möglichkeiten. Da für den zweitgenannten Auswahltyp $x_j(y_{i_1} \ldots y_{i_{k-1}})$ analoge Überlegungen gel-

Tabelle 2

	$C_1^6 = 6$	$C_2^6 = 15$	$C_3^6 = 20$	$C_4^6 = 15$	$C_5^6 = 6$	$C_6^6 = 1$
A_0^6	6	12	8	0	0	0
A_1^6	0	3	12	12	0	0
A_2^6	0	0	0	3	6	0
A_3^6	0	0	0	0	0	1

Tabelle 3

	$x_iy_1y_2y_3$; $y_ix_1x_2x_3$	$x_ix_jy_ky_l$ $\quad i \neq j$; $k \neq l$	
$r=0$	I_0	II_0	$A_0^6 = 0 + 0$
$r=1$	I_1	II_1	$A_1^6 = 6 + 6$
$r=2$	I_2	II_2	$A_2^6 = 0 + 3$

Tabelle 4

	$x_{i_1}\dots x_{i_k}$ bzw. $y_{i_1}\dots y_{i_k}$	$y_j x_{i_1}\dots x_{i_{k-1}}$ bzw. $x_j y_{i_1}\dots y_{i_{k-1}}$	$y_{j_1}y_{j_2}x_{i_1}\dots x_{i_{k-2}}$ bzw. $x_{j_1}x_{j_2}y_{i_1}\dots y_{i_{k-2}}$	$y_{j_1}y_{j_2}y_{j_3}x_{i_1}\dots x_{i_{k-3}}$ bzw. $x_{j_1}x_{j_2}x_{j_3}y_{i_1}\dots y_{i_{k-3}}$	$y_{j_1}\dots y_{j_s}x_{i_1}\dots x_{i_{k-s}}$ bzw. $x_{j_1}\dots x_{j_s}y_{i_1}\dots y_{i_{k-s}}$	$y_{j_1}\dots y_{j_{\frac{k}{2}}}x_{i_1}\dots x_{i_{\frac{k}{2}}}$ bzw. $x_{j_1}\dots x_{j_{\frac{k}{2}}}y_{i_1}\dots y_{i_{\frac{k}{2}}}$	
	I_0	II_0	III_0	IV_0	S_0	V_0	
$r=0$	$2\cdot C_k^m$	$2\cdot C_1^{m-(k-1)}\cdot C_{k-1}^m$	$2\cdot C_2^{m-(k-2)}\cdot C_{k-2}^m$	$2\cdot C_3^{m-(k-3)}\cdot C_{k-3}^m$	$2\cdot C_s^{m-(k-s)}\cdot C_{k-s}^m$	$C_{\frac{k}{2}}^{m-\frac{k}{2}}\cdot C_{\frac{k}{2}}^m$	$A_0^{2m}=$
	I_1	II_1	III_1	IV_1	S_1	V_1	
$r=1$	0	$2\cdot C_1^{m-(k-1)}\cdot C_{k-1}^m$	$2\cdot C_1^{m-(k-2)}C_1^{k2}\cdot C_{k-2}^m$	$2\cdot C_1^{m-(k-3)}\cdot C_1^{k-3}\cdot C_{k-3}^m$ …	$2\cdot C_1^{m-(k-s)}\cdot C_1^{k-s}\cdot C_{k-s}^m$ …	$C_{\frac{k}{2}-1}^{m-\frac{k}{2}}C_1^{\frac{k}{2}}\cdot C_{\frac{k}{2}}^m$	$A_1^{2m}=$
	I_2	II_2	III_2	IV_2	S_2	V_2	
$r=2$	0	0	$2\cdot C_2^{k-2}\cdot C_{k-2}^m$	$2\cdot C_1^{m-(k-3)}\cdot C_2^{k-3}C_{k-3}^m$	$2\cdot C_{s-2}^{m-(k-s)}\cdot C_2^{k-s}\cdot C_{k-s}^m$ …	$C_{\frac{k}{2}-2}^{m-\frac{k}{2}}\cdot C_2^{\frac{k}{2}}\cdot C_{\frac{k}{2}}^m$	$A_2^{2m}=$
…	0	0	0	…	… …	… …	

ten, erhält man $2\cdot C_1^{m-(k-1)}\cdot C_{k-1}^m$ Fälle, in welchem kein Paar auftritt.

III_0: Es gibt C_{k-2}^m Möglichkeiten, aus der Menge $\{x_1;\dots;x_m\}$ genau $k-2$ Elemente auszuwählen. Eine solche Auswahl ist z. B. $x_1;\dots;x_{k-2}$. Damit kein Paar auftritt, müssen die Elemente y_{i_1} und y_{i_2} aus der Menge $\{y_{k-1};y_k;\dots;y_m\}$ gewählt werden.

Dabei existieren $C_2^{m-(k-2)}$ Möglichkeiten. Also erhält man $2\cdot C_2^{m-(k-2)}\cdot C_{k-2}^m$ Fälle, in denen kein Paar auftritt.

IV_0: Man überlege sich selbst, warum bei diesem „Auswahltyp" genau $2\cdot C_3^{m-(k-3)}\cdot C_{k-3}^m$ Kombinationen existieren, in denen kein Paar $(x_i;y_i)$ vorkommt.

V_0: Zunächst existieren $C_{\frac{k}{2}}^m$ Möglichkeiten der Auswahl der Elemente $x_{i_1}\dots x_{i_{\frac{k}{2}}}$. Die Zuordnung der $\frac{k}{2}$ Elemente y_j muß nun so erfolgen, daß kein Paar auftritt, dazu hat man $C_{\frac{k}{2}}^{m-\frac{k}{2}}$ Möglichkeiten.

Um A_0^n zu charakterisieren, müssen die in Zeile 1 eingetragenen Werte addiert werden., Wir wollen uns jedoch vorher noch vergewissern, daß die zwischen IV_0 und V_0 auftretenden Summanden den gleichen Aufbau wie die unter II_0; III_0; IV_0 genannten besitzen:

S_0: Wir ermitteln die Zahl der Kombinationen der Form

$x_{i_1}\dots x_{i_s}(y_{j_1}\dots y_{j_{k-s}})$, in denen kein Paar $(x_i;y_i)$ auftritt.

Aus den Elementen y_j wählt man $k-s$ Elemente aus, dafür gibt es C_{k-s}^m Möglichkeiten. In jeder dieser Kombinationen müssen die Elemente x_i so gewählt werden, daß keines dieser s Elemente mit einem der $k-s$ Elemente y_j ein Paar bildet; die Elemente x_i muß man also stets aus einer $m-(k-s)$ elementigen Teilmenge von $\{x_1\dots x_m\}$ auswählen. Es gibt $C_s^{m-(k-s)}$ derartige Kombinationen. Unter Berücksichtigung analoger Überlegungen für den Auswahltyp

$y_{j_1}\dots y_{j_s}(x_{i_1}\dots x_{i_{k-s}})$ folgt:

In $2\cdot C_s^{m-(k-s)}\cdot C_{k-s}^m$ Fällen tritt kein Paar auf.

Dieser Ausdruck ordnet sich also in die bisher gewonnenen Ergebnisse ein.

Nun müssen wir rechnen. Wir benötigen dazu lediglich die Beziehungen (1) bis (5) und Kenntnisse aus der Bruchrechnung.

$$A_0^n = A_0^{2m} = 2\cdot C_0^{m-k}\cdot C_k^m + 2\cdot C_1^{m-(k-1)}\cdot C_{k-1}^m + 2\cdot C_2^{m-(k-2)}\cdot C_{k-2}^m + 2\cdot C_3^{m-(k-3)}\cdot C_{k-3}^m + \dots + 2\cdot C_s^{m-(k-s)}\cdot C_{k-s}^m + \dots + C_{\frac{k}{2}}^{m-\frac{k}{2}}\cdot C_{\frac{k}{2}}^m \quad (6)$$

Die Summe (6) schreiben wir mit Hilfe der Beziehungen (1) und (2) um:

$$A_0^{2m} = \frac{2\cdot m!}{k!\cdot(m-k)!} + \frac{2\cdot(m-(k-1))!\cdot m!}{1!\cdot(m-k)!\cdot(k-1)!\cdot(m-(k-1))} + \frac{2\cdot(m-(k-2))!\cdot m!}{2!\cdot(m-k)!\cdot(k-2)!\cdot(m-(k-2))!} + \frac{2\cdot(m-(k-3))!\cdot m!}{3!\cdot(m-k)!\cdot(k-3)!\cdot(m-(k-3))!} + \dots + \frac{2\cdot(m-(k-s))!\cdot m!}{s!\cdot(m-k)!\cdot(k-s)!\cdot(m-(k-s))!} + \dots + \frac{\left(m-\frac{k}{2}\right)!\cdot m!}{\frac{k}{2}!\cdot(m-k)!\cdot\frac{k}{2}!\cdot\left(m-\frac{k}{2}\right)!}$$

Zunächst sieht man sofort, daß sich alle Brüche (mit Ausnahme des ersten) kürzen lassen. Mit etwas Geschick läßt sich der Faktor $\frac{2m!}{k!(m-k)!}$ ausklammern; dazu muß man allerdings den 2. Bruch mit k, den 3. Bruch mit $k(k-1)$ und schließlich den letzten Bruch mit $k(k-1)\cdot\dots\cdot\left(\frac{k}{2}+1\right)$ erweitern. Man erhält:

$$A_0^{2m} = \frac{2m!}{(m-k)!\cdot k!}\cdot\left(1+\frac{k}{1!}+\frac{k(k-1)}{2!}+\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}+\dots+\frac{k(k-1)\cdot\dots\cdot(k-(s-1))!}{s!}+\dots+\frac{1}{2}\frac{k(k-1)\dots\left(k-\left(\frac{k}{2}-1\right)\right)}{k!}\right)$$

Dieser Ausdruck läßt sich unter Nutzung von (3) günstig umformen:

$$A_0^{2m} = 2\binom{m}{k}\left(\binom{k}{0}+\binom{k}{1}+\binom{k}{2}+\binom{k}{3}+\dots+\binom{k}{s}+\dots+\frac{1}{2}\cdot\binom{k}{\frac{k}{2}}\right).$$

Erinnern wir uns an die Beziehung (4), setzen dabei $a=b=1$ und nutzen (5), so erhält man überraschend

$$A_0^{2m} = 2\cdot\binom{m}{k}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2^k \quad \text{bzw.}$$

$$A_0^{2m} = \binom{m}{k}\cdot 2^k \quad (7)$$

Wir müßten nun Zeile 2 der Tabelle 4 abarbeiten. Der interessierte Leser kann dies einmal tun.

Behandelt man die Summe

$$A_1^{2m} = 2C_1^{k-1}C_{k-1}^m + 2C_1^{m-(k-2)}C_1^{k-2}C_{k-2}^m + \dots + 2C_2^{m-(k-s)}C_1^{k-s}C_{k-s}^m + \dots + C_{\frac{k}{2}-1}^{n-\frac{k}{2}}C_1^{\frac{k}{2}}C_{\frac{k}{2}}^m$$

wie oben, so erhält man

$$A_1^{2m} = \binom{k-1}{1}\cdot\binom{m}{k-1}\cdot 2^{k-2} \quad (8)$$

Für $r=2$ ergibt sich

$$A_2^{2m} = \binom{k-2}{2}\cdot\binom{m}{k-r}\cdot 2^{k-4} \quad (9)$$

Überlegt man sich, daß man $A_0^{2m} = \binom{m}{k}\cdot 2^k$ wegen $\binom{k}{0}=1$ auch in der Form $A_0^{2m} = \binom{k}{0}\cdot\binom{m}{k-0}\cdot 2^{k-2\cdot 0}$ schreiben kann, so läßt sich dieses Ergebnis gut einordnen und man vermutet, daß allgemein gilt:

$$A_r^{2m} = \binom{k-r}{r}\cdot\binom{m}{k-r}\cdot 2^{k-2r} \quad (10)$$

Fortsetzung auf Seite 67

Der Vier-Quadrate-Satz

Teil 1

Aus Anlaß des 250. Geburtstages von Joseph Louis Lagrange (1736 bis 1813)

Der 25. Januar 1986 war der 250. Jahrestag der Geburt von Joseph Louis Lagrange (1736 bis 1813), der neben Leonhard Euler (1707 bis 1783) zu den berühmtesten Mathematikern des 18. Jahrhunderts gehört.

Durch mathematisch-astronomische Schriften des englischen Astronomen Edmund Halley (1656 bis 1742) war der junge Lagrange mit der Mathematik in Berührung gekommen, die ihn dann sein Leben lang fesseln sollte. Seine erste wissenschaftliche Arbeit erschien 1754. Bereits mit 19 Jahren war er Professor an der Artillerie-Schule seiner Geburtsstadt Turin (Oberitalien). Zusammen mit anderen jungen Wissenschaftlern gründete er dort eine wissenschaftliche Gesellschaft, aus der die Turiner Akademie hervorging. Auf Empfehlung Eulers und Jean d'Alemberts (1717 bis 1783) wurde ihm vom preußischen König Friedrich II. (1712 bis 1786) die Stelle eines Direktors der mathematischen Klasse der Berliner Akademie der Wissenschaften angeboten. Lagrange nahm das Angebot an. Euler siedelte 1766 nach Petersburg über; der 30jährige Lagrange wurde sein Nachfolger in Berlin. Als Mathematiker waren an der Berliner Akademie damals außerdem Johann Heinrich Lambert (1728 bis 1777) als Mitglied der physikalischen Klasse, Johann (III) Bernoulli (1744 bis 1807) als Direktor der Berliner Sternwarte und Jean de Castillon (1708 bis 1791), der 1787 Nachfolger Lagranges im Amt des Direktors der mathematischen Klasse wurde, tätig.

Im Alter von 51 Jahren siedelte Lagrange nach Paris über, wo er an der Akademie wirkte. Von der Revolutionsregierung wurde er in das Komitee berufen, welches das Münzwesen neu ordnen und das metrische System einführen sollte. Ende 1795 wurde er Direktor der physikalisch-mathematischen Klasse des Institut National (das an die Stelle der 1793 geschlossenen Académie des sciences getreten war). Mehrere Jahre unterrichtete Lagrange an der 1794 gegründeten Pariser Polytechnischen Schule.

Die Gebiete, in welchen die Wissenschaft Lagrange bedeutende Fortschritte zu verdanken hat, sind: Mathematik (Analysis, Algebra, Zahlentheorie u. a.), Mechanik und Astronomie.

Der Zahlentheoretiker Edmund Landau (1877 bis 1938) schrieb im Jahre 1913 anläßlich des 100. Todestages von Lagrange:

Zu den bedeutendsten Leistungen Lagranges gehört der Beweis des Satzes, daß jede positive ganze Zahl als Summe von vier Quadraten dargestellt werden kann, also als Summe von höchstens vier positiven Quadraten.

Über diesen Satz soll im folgenden sachlich und historisch berichtet werden.

Zwei-Quadrate- und Drei-Quadrate-Sätze

Eine ungerade Primzahl p läßt sich genau dann in die Summe zweier Quadratzahlen zerlegen, wenn sie die Form $p = 4k + 1$ hat. Sind zwei ungerade Primzahlen jeweils die Summe zweier Quadratzahlen

$h_1 = a^2 + b^2$

(z. B. a ungerade, b gerade),

$h_2 = c^2 + d^2$

(z. B. c ungerade, d gerade), so ist auch

$h_1 h_2 = (ad + bc)^2 + (ab - bd)^2$

(worin $ac - bd$ ungerade, also $\neq 0$, ist) die Summe zweier Quadratzahlen.

Hieraus folgt der

Satz 1:

Eine natürliche Zahl h ist genau dann die Summe zweier Quadratzahlen $h = a^2 + b^2$, wenn gilt:

(1) Entweder enthält h keine Primfaktoren der Form $4k + 3$ oder Primzahlen der Form $4k + 3$ kommen in gerader Potenz in der Primzahlzerlegung von h vor.

(2) Die gerade Primzahl 2 tritt in ungerader Potenz in der Primzahlzerlegung von h auf oder h enthält wenigstens einen Primfaktor der Form $4k + 1$.

Beispiele: $8 = 2^3 = 2^2 + 2^2$,

$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 9^2 + 3^2$, $111 = 3 \cdot 37$ ist nicht Summe zweier Quadratzahlen,

$21^2 = 441 = 3^2 \cdot 7^2$ ist nicht Summe zweier Quadratzahlen,

$882 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 = 21^2 + 21^2$.

Der folgende Satz gibt eine Übersicht über die natürlichen Zahlen, die als Summe von höchstens drei Quadratzahlen darstellbar sind. Eine Quadratzahl läßt bei der Division durch 8 den Rest 0 oder den Rest 1 oder den Rest 4. Die Summe höchstens dreier Quadratzahlen läßt daher bei der Division durch 8 niemals den Rest 7, d. h., sie kann nicht von der Form $8k + 7$ sein.

Allgemein gilt der

Satz 2:

Eine natürliche Zahl ist genau dann als Summe von höchstens drei Quadratzahlen darstellbar, wenn sie nicht die Form $4^l(8k + 7)$ ($l \geq 0$, $k \geq 0$ ganze Zahlen) hat.

Aus diesem Satz folgt nun leicht, daß sich jede natürliche Zahl (ohne Ausnahme) als Summe von höchstens vier Quadratzahlen darstellen läßt.

Vier-Quadrate-Sätze

Satz 3 (Vier-Quadrate-Satz A):

Jede natürliche Zahl ist als Summe von höchstens vier Quadratzahlen darstellbar.

Aufgabe 1: Zeige, daß Satz 3 aus Satz 2 folgt!

Daß es Zahlen gibt, die keine Quadratsummendarstellung mit weniger als vier Quadratzahlen besitzen, folgt aus dem Satz 2.

Beispiele: $7 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$,

$15 = 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$,

$124 = 4(8 \cdot 3 + 7) = 11^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$

$= 9^2 + 5^2 + 3^2 + 2^2$.

Es gibt aber auch Zahlen, die als Summe von höchstens drei Quadratzahlen, jedoch nicht als Summe von vier Quadratzahlen darstellbar sind, z. B.

$1 = 1^2$, $3 = 1^2 + 1^2 + 1^2$,

$5 = 2^2 + 1^2$, $9 = 3^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2$,

$11 = 3^2 + 1^2 + 1^2$, $17 = 4^2 + 1^2$,

$29 = 5^2 + 2^2 = 4^2 + 3^2 + 2^2$,

$41 = 5^2 + 4^2 = 6^2 + 2^2 + 1^2$.

Satz 4:

Die natürlichen Zahlen

$1, 3, 5, 9, 11, 17, 29, 41, 4^k \cdot 2$,

$4^k \cdot 6$, $4^k \cdot 14$ (worin $k = 0, 1, 2, \ldots$)

sind nicht als Summe von vier Quadratzahlen darstellbar. Alle anderen natürlichen Zahlen sind als Summe von vier Quadratzahlen darstellbar. Insbesondere ist also jede ungerade Zahl >41 als Summe von genau vier Quadratzahlen darstellbar.

Die Zahlen 3, 9, 11, 17, 29, 41 und

$4^k \cdot 6 = (2^k)^2 + (2^k)^2 + (2^{k+1})^2$,

$4^k \cdot 14 = (2^k)^2 + (2^{k+1})^2 + (2^k \cdot 3)^2$

(für $k = 0, 1, 2, \ldots$) sind jeweils Summen dreier Quadratzahlen. Es gilt

Satz 5:

Alle natürlichen Zahlen, außer 1, 5, $4^k \cdot 2$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) sind als Summe von drei oder vier Quadratzahlen darstellbar.

Die Zahlen

$5 = 1^2 + 2^2$, $2 = 1^2 + 1^2$, $2^3 = 2^2 + 2^2$,

$2^5 = 4^2 \cdot 2 = 4^2 + 4^2$,

$2^{2k+1} = 4^k \cdot 2 = (2^k)^2 + (2^k)^2$

lassen nur die Darstellung als Summe zweier Quadratzahlen zu.

Aus dem Vier-Quadrate-Satz A folgt leicht der Satz 6.

Aufgabe 2: Wie?

Satz 6: (Vier-Quadrate-Satz B)

Jede gebrochene Zahl ist Summe von vier Quadraten gebrochener Zahlen.

Und als Spezialfall

Satz 7: (Vier-Quadrate-Satz C)

Jede natürliche Zahl ist Summe von vier Quadraten gebrochener Zahlen.

Diophant

Dieser Vier-Quadrate-Satz C wurde schon vom griechischen Gelehrten Diophant in seinem Werk *Arithmetische Probleme* – allerdings stillschweigend – benutzt.

Diophant soll – wahrscheinlich im 1. Jahrhundert – in Alexandrien gelebt haben, vielleicht betrieb er im dortigen Museion – einem Forschungsinstitut mit umfangreicher Bibliothek – mathematische, eventuell auch astronomische Forschungen. Von seinen Schriften kennt man – fragmentarisch – zwei: eine *Arithmetische Probleme* betitelte Sammlung von algebraischen und zahlentheoretischen Aufgaben mit Lösungen und eine Abhandlung über Polygonzahlen. Von den 13 Kapiteln der *Arithmetischen Probleme* sind zehn erhalten: sechs in griechischen Handschriften (Kapitel I bis III und wahrscheinlich VIII bis X) und vier in arabischer Übersetzung (Kapitel IV bis VII).

Zu den Aufgaben, bei deren Lösung der Vier-Quadrate-Satz C vorausgesetzt wird, gehört die folgende (Kapitel VIII, Aufg. 29):

Es sind vier Quadrate (r^2, s^2, t^2, u^2, wobei r, s, t, u Brüche oder natürliche Zahlen sein sollen)

zu finden, so daß ihre Summe $(r^2 + s^2 + t^2 + u^2)$ *zu der Summe ihrer Wurzeln* $(r + s + t + u)$ *addiert eine gegebene Zahl (a) gibt:*

$r^2 + s^2 + t^2 + u^2 + r + s + t + u = a.$ (1)

Die Lösungsmethode erklärt Diophant am Zahlenbeispiel $a = 12$:

Die gegebene Zahl sei $a = 12$. Stets kommt, wenn man zu der Summe eines Quadrats und seiner Wurzel $\frac{1}{4}$ addiert, ein Quadrat heraus, $(x^2 + x + \frac{1}{4}$ ist stets ein Quadrat), dessen Wurzel, wenn man $\frac{1}{2}$ davon subtrahiert, die Wurzel des ursprünglichen Quadrats gibt

$\left(x^2 + x + \frac{1}{4} = y^2,\ y - \frac{1}{2} = x;\right.$

nämlich $\left.\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4}\right).$

Nun muß die Summe der vier gesuchten Quadrate, wenn man die Summe ihrer Wurzeln addiert, die gegebene Zahl $(a =)12$ $(r^2 + s^2 + t^2 + u^2 + r + s + t + u = a = 12)$ ergeben.

Addiert man noch die vier Viertel, so erhält man vier Quadrate, deren Summe 13 ist:

$$\left(r^2 + r + \frac{1}{4}\right) + \left(s^2 + s + \frac{1}{4}\right) + \left(t^2 + t + \frac{1}{4}\right) + \left(u^2 + u + \frac{1}{4}\right)$$
$$= \left(r + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 = a + 1 = 13.$$

Man muß also $a + 1 = 13$ in vier Quadrate zerlegen (allgemein nach dem Vier-Quadrate-Satz C möglich!), und wenn man dann von der Wurzel jeder derselben $\frac{1}{2}$ subtrahiert, so erhält man die Wurzeln der vier gesuchten Quadrate. Die Zahl 13 besteht aber aus den beiden Quadraten 2^2 und 3^2; jedes von diesen läßt sich wieder in zwei Quadrate zerlegen, nämlich

$\frac{64}{25}$ und $\frac{36}{25}$, $\frac{144}{25}$ und $\frac{81}{25}$:

$$13 = \left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{9}{5}\right)^2.$$

Wenn man die Wurzel eines jeden Quadrats nimmt, nämlich $\frac{8}{5}, \frac{6}{5}, \frac{12}{5}, \frac{9}{5}$, und von jeder $\frac{1}{2}$ subtrahiert, so erhält man die Wurzeln der gesuchten Quadrate:

$\frac{11}{10}, \frac{7}{10}, \frac{19}{10}, \frac{13}{10}$; die Quadrate selbst also sind $\frac{121}{100}, \frac{49}{100}, \frac{361}{100}, \frac{169}{100}$.

Allgemein hat man $a + 1$ (nach dem Vier-Quadrate-Satz C) in vier Quadrate zu zerlegen:

$a + 1 = k^2 + l^2 + m^2 + n^2.$

Dann gilt mit

$r = k - \frac{1}{2},\quad s = l - \frac{1}{2},\quad t = m - \frac{1}{2},$

$u = n - \frac{1}{2}$ in der Tat

$r^2 + s^2 + t^2 + u^2 + r + s + t + u = a.$

Im Jahre 1621 publizierte Claude G. Bachet de Méziriac (1581 bis 1638), Mathematiker und Philosoph in Paris, die sechs griechisch überlieferten Kapitel der Diophantischen *Arithmetischen Probleme* in griechischem Original und mit einer lateinischen Übersetzung. Zu den Aufgaben Diophants gab er ausführliche Erläuterungen. In der Anmerkung zu der Aufgabe VIII, 29 (bei Bachet IV, 31) bemerkte er, daß Diophant hier und in einigen weiteren Aufgaben den Vier-Quadrate-Satz C vorausgesetzt habe. Bachet vermutete die Richtigkeit des Vier-Quadrate-Satzes A. Er hätte ihn für alle natürlichen Zahlen bis 325 geprüft. Für die Zahlen bis zu 120 (nicht ganz vollständig) gab er Vier-Quadrate-Zerlegungen an.

Bachets Landsmann Pierre de Fermat (1601 bis 1665), Jurist, Königlicher Rat am Parlament von Toulouse, befaßte sich aus Liebhaberei mit mathematischen Studien. (Heute gilt er als Begründer der modernen Zahlentheorie.)

Gewissenhaft studierte Fermat die griechisch-lateinische Ausgabe des Diophant von Bachet. Auf freien Stellen und am Rande notierte er zahlreiche Ergänzungen, unter denen sich tiefsinnige zahlentheoretische Sätze und Vermutungen befinden. Nach Fermats Tod gab sein Sohn Samuel die Bachetsche Diophantausgabe zusammen mit den Randbemerkungen seines Vaters neu heraus (1670).

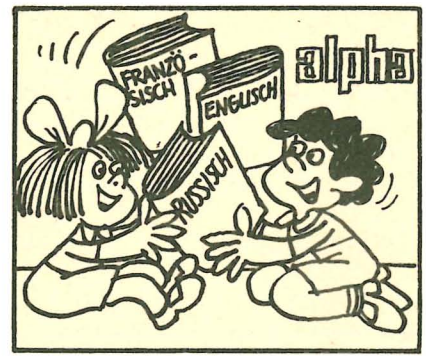
Bachets Kommentar zur Aufgabe VIII, 29 (Bachet: IV, 31) veranlaßte Fermat zu folgender Anmerkung: *Ich habe sogar den schönen und ganz allgemeinen Satz entdeckt, daß jede Zahl entweder eine Dreieckzahl oder die Summe von zwei oder drei Dreieckzahlen; entweder eine Quadratzahl oder die Summe von zwei oder drei oder vier Quadratzahlen; entweder eine Fünfeckzahl oder die Summe von zwei oder drei oder vier oder fünf Fünfeckzahlen ist, und daß weiter derselbe allgemeine und wunderbare Satz für Sechseckzahlen, Siebeneckzahlen, überhaupt beliebige Polygonalzahlen gilt. Den Beweis desselben, der aus vielen mannigfaltigen und ganz verborgenen Geheimnissen der Zahlen hergenommen wird, kann ich hier nicht beifügen. Ich habe nämlich vor, ein besonderes Werk diesem Gegenstande zu widmen und die Arithmetik in diesem Teil über die alten und bekannten Grenzen hinaus in wunderbarer Weise zu erweitern.*

Fermat hat sein Vorhaben leider nicht verwirklicht. Den Vier-Quadrate-Satz A sprach Fermat auch in Briefen aus, erstmals im Herbst 1636 an Mersenne. Hierin betonte Fermat ebenfalls stets, daß er einen Beweis für diesen Satz hätte, und forderte überdies verschiedene Mathematiker auf, ihn auch zu beweisen.

Es folgt ein Teil 2. *H. Pieper*

Joseph Louis Lagrange

1736, 25. Januar, Geburt in Turin
1736 bis 1766, in Turin (Artillerie-Schule, Turiner Akademie)
1766 bis 1787, in Berlin (Akademie der Wissenschaften)
1787 bis 1813, in Paris (Akademie, École normale, École polytechnique)
1813, 10. April, Tod in Paris

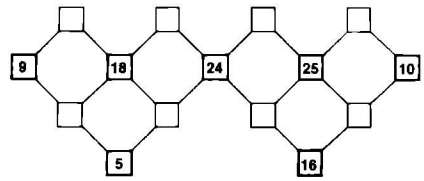


▲1▲ A water plant in a fish pond has $\frac{5}{6}$ of its length out of the water, $\frac{1}{12}$ in mud and 2 feet in water.

What is the total length of the plant?

Aus: Mathematical Pie, Großbritannien

▲2▲ Les nombres déjà inscrits représentent la somme des chiffres à situer dans les carrés qui leur sont directement reliés. Ces chiffres, tous différents, sont compris entre 1 et 9.

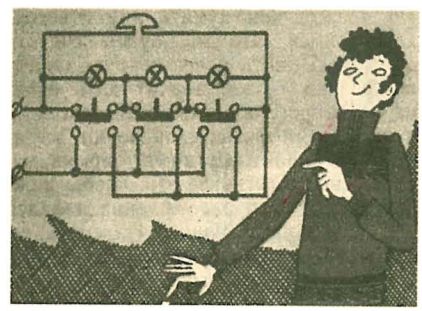


A vous de les placer!

Aus: MAXIMATH

▲3▲ Возможен ли треугольник со сторонами $a = 7$ см и $b = 2$ см, если известно, что высота, опущенная на третью сторону этого треугольника, является средним геометрическим двух других высот?

▲4▲ На рисунке изображена электрическая цепь со звонком, тремя лампочками и тремя кнопками, каждая из которых в свободном состоянии соединяет одну пару контактов, а в нажатом – другую. Цепь включена в сеть. Как она будет работать при нажатии на одну из кнопок?



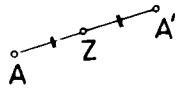
Aus: Quant, Moskau

Symmetrie im Raum

Teil 2

Wir hatten uns in einem ersten Beitrag (Heft 2/87) mit Symmetrien im Raum beschäftigt, denen Spiegelungen an einer Ebene oder Spiegelung an einer Geraden zu Grunde liegt. Zu den Symmetrien, die auf Spiegelungen beruhen, gehört im Raum noch die *Zentralsymmetrie*.
Ein Punkt Z heißt ein *Symmetriezentrum der Figur F*, wenn bei der *Spiegelung an* Z die Figur auf sich abgebildet wird. Dabei ist wie in der ebenen Geometrie das Bild A' eines Punktes $A \neq Z$ dadurch ausgezeichnet, daß Z der Mittelpunkt von $\overline{AA'}$ ist (Bild 1).

Bild 1

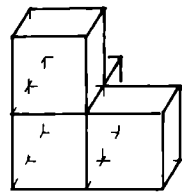


Aufgaben

▲1▲ Zeige, daß das regelmäßige Tetraeder *kein* Symmetriezentrum besitzt!

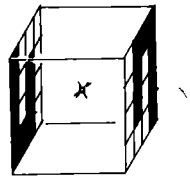
▲2▲ Der Raum läßt sich mit kongruenten Würfeln in der Weise wie im Bild 2 lückenlos füllen. Beschreibe alle Symmetriezentren einer derartigen Raumparkettierung!

Bild 2



▲3▲ Nenne (und beschreibe) eine Figur, die zwar ein Symmetriezentrum, aber weder eine Symmetrieebene noch eine Symmetrieachse besitzt!

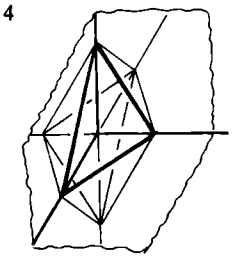
Bild 3



Wenn wir die Seitenflächen eines Würfels so bemalen, daß die Zentralsymmetrie des Würfels auch dafür besteht (etwa in der einfachen Weise mit einem Mosaik wie im Bild 3), so erkennen wir einen *wesentlichen Unterschied zur Zentralsymmetrie in der ebenen Geometrie:* Entsprechende Teile haben eine entgegengesetzte Orientierung und lassen sich deshalb durch keine eigentliche (physikalische) Bewegung ineinander überführen. Wenn wir also zwei rechtsläufige und kongruente Schrauben mit den Köpfen aneinanderfügen, so ist die Gesamtfigur aus diesem Grunde *nicht* zentralsymmetrisch.
Mit der Aussage in der folgenden Aufgabe wird auf einen bemerkenswerten Zusammenhang zwischen Symmetrieebenen und Symmetriezentrum einer Figur aufmerksam gemacht:

▲4▲ Hat eine Figur *drei paarweise aufeinander senkrecht stehende Symmetrieebenen, so ist ihr gemeinsamer Punkt ein Symmetriezentrum.*
Eine einfache Veranschaulichung dieses Sachverhalts bietet z. B. der Würfel, der Quader oder die (Erd-)Kugel mit den Breitenkreisen und den Meridianen.
Wenn man an einer Quaderecke die drei dort zusammentreffende Seitenflächen von innen mit einem spiegelnden Belag versieht, entsteht ein sogenannter *Dreikantspiegel*. (Derartige Spiegelsysteme findet man u. a. beim Rückstrahler!) In eine solche räumliche Ecke können wir ein spitzwinkliges Dreieck aus farbigem Glas oder einfach aus drei Holzstäbchen zusammengesetzt legen (Bild 4).

Bild 4



▲5▲ Welche Gesamtfigur entsteht daraus am Dreikantspiegel?
Lösung: Im Schrägriß (Bild 4) läßt sich jede beliebige Abfolge von Spiegelungen leicht verfolgen und konstruktiv nachvollziehen. Aus den 3 Ecken des Dreiecks entstehen nur 3 weitere Bildpunkte. Die Gesamtfigur wird zu einem (nicht notwendig regelmäßigen) *Oktaeder*. Entsprechend der Aussage in der Aufgabe 4 ist diese Figur *zentralsymmetrisch*.
Analog zur ebenen Geometrie gibt es im Raum ebenfalls Drehsymmetrie; anstelle der Drehungen um einen Punkt (siehe *alpha* Heft 4/1985) treten Drehungen um eine Gerade. Eine Gerade a heißt eine *Drehsymmetrieachse vom Grade n, $n \geq 2$* (oder eine *n-zählige Symmetrieachse*) *der Figur F*, wenn es zusammen mit der identischen Abbildung (!) n Drehungen um a gibt, bei denen F auf sich abgebildet wird. Ist a eine Drehsymmetrieachse vom Grade n und n geradzahlig, so ist a offenbar auch eine (einfache) Symmetrieachse.

▲6▲ Man bestimme alle Drehsymmetrieachsen und ihre Zähligkeit bei einem regelmäßigen Tetraeder!
Lösung: Wir hatten bereits in der Aufgabe 4 im ersten Teil des Beitrags (*alpha* 2/87) alle Symmetrieachsen des regelmäßigen Tetraeders ermittelt; es sind die drei Verbindungsgeraden der Mitten jeweils gegenüberliegender Tetraederkanten (Bild 5a). Sie sind offensichtlich nur 2-zählig. Fällen wir das Lot von einer Tetraederecke auf die gegenüberliegende Seitenfläche, so können wir um diese Gerade (zusammen mit der identischen Abbildung) genau drei Drehungen ausführen, die den Körper in sich überführen (Bild 5b). Auf diese Weise haben wir vier 3-zählige Drehsymmetrieachsen aufgezeigt. Dies sind alle 3-zähligen. Und höherzählige kann es nicht geben, da nicht mehr als drei Tetraederecken in einer gemeinsamen Ebene liegen.

Bild 5a

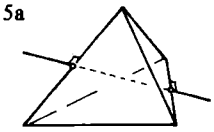
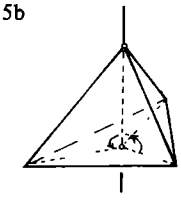


Bild 5b



Es gibt eine wesentliche Beziehung zwischen Symmetrieebenen und Drehsymmetrieachsen.

▲7▲ Hat eine Figur *zwei Symmetrieebenen*, die *sich schneiden, so* ist die *Schnittgerade* eine *Drehsymmetrieachse*.
Das Ergebnis der Aufgabe 6 läßt sich nun nochmals mit Hilfe der Kenntnis der Symmetrieebenen eines regelmäßigen Tetraeders (Aufgabe 1 im ersten Teil des Beitrages) gewinnen. (Man beachte dabei jedoch, daß *für* die *Existenz einer Drehsymmetrieachse* die *Existenz von Symmetrieebenen nicht notwendig ist*!)

▲8▲ Nenne ein Beispiel für eine Figur, die eine n-zählige Drehsymmetrieachse mit $n \geq 3$, aber keine Symmetrieebene besitzt!

▲9▲ Besitzt das Vorderrad deines Fahrrades eine Drehsymmetrie?
Gib gegebenenfalls die Achse und den Grad der Drehsymmetrie an!

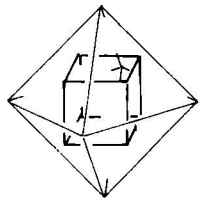
▲10▲ Viele Formen von Blüten und Früchten, von Mineralien (Bild 6), von Kunstgegenständen (Bild 7) sowie von rotierenden Teilen an Maschinen besitzen Drehsymmetrie.
Suche (weitere) Beispiele!

Bild 6

Bild 7

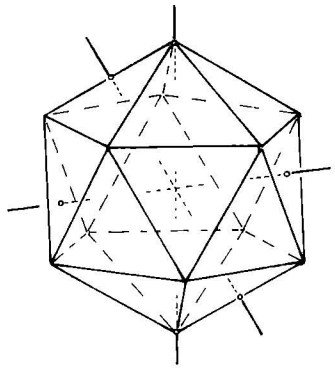
▲11▲ Bestimme alle Drehsymmetrieachsen und ihre jeweilige Zähligkeit beim Würfel!
Für das regelmäßige Oktaeder ergeben sich die gleichen Resultate. Warum? Der enge Zusammenhang wird sichtbar, wenn man die Mitten der Seitenflächen des regelmäßigen Oktaeders betrachtet (Bild 8); sie bilden einen Würfel!

Bild 8



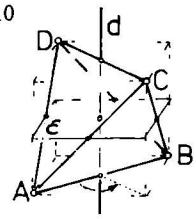
Die beiden konvexen regelmäßigen Polyeder, die es neben Tetraeder, Würfel und Oktaeder noch gibt, nämlich das *regelmäßige Ikosaeder* (Bild 9) und *Dodekaeder*, stehen in entsprechender Beziehung. Beim regelmäßigen Ikosaeder gibt es sechs 5-zählige, 10 3-zählige und 15 2-zählige Drehsymmetrieachsen (Bild 9).

Bild 9



▲12▲ Begründe, daß der Fernsehfußball die gleichen Drehsymmetrien besitzt wie das regelmäßige Ikosaeder!
Für eine vollständige Übersicht über mögliche Symmetrien im Raum bilden die Symmetrien der regelmäßigen Polyeder eine grundlegende Rolle.
Unter einer *Symmetrieabbildung einer Figur* wird eine *Bewegung* verstanden, die diese Figur in sich überführt.
Zum Abschluß geben wir eine *Übersicht über alle Symmetrieabbildungen eines regelmäßigen Tetraeders*. Da bei jeder derartigen Abbildungen Ecken in Ecken übergehen müssen, kann es höchstens so viele geben, wie es $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ Möglichkeiten gibt. Wir zeigen nun, daß es auch 24 Symmetrieabbildungen gibt.
Viele sind uns bereits bekannt: die identische Abbildung, sechs Spiegelungen an Ebenen (Symmetrieebenen), drei Spiegelungen an Geraden (Symmetrieachsen) und acht Drehungen an Geraden (jeweils zwei nichtidentische und voneinander verschiedene Drehungen an den vier 3-zähligen Drehsymmetrieachsen). Daneben gibt es nun noch sogenannte *Drehspiegelungen*.

Bild 10



Dies sind Bewegungen, die sich aus einer Drehung um eine Gerade d und einer anschließenden Spiegelung an einer zu d senkrechten Ebene ε zusammensetzen. Im Bild 10 erkennt man, daß eine Drehung um die Gerade d durch die Mitten von $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ mit 90° und einer anschließenden Spiegelung an der zu d senkrechten Ebene ε, die durch die Mitten von $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ und $\overline{BD}$ geht, tatsächlich den Körper auf sich abbildet; die Punkte A, B, C, D gehen dabei in C, D, B, A über. Bei gleicher Achse d und Ebene ε ist noch eine weitere Drehspiegelung möglich, die A, B, C, D in D, C, A, B überführt. Auf diese Weise erkennen wir $3 \cdot 2 = 6$ *Drehspiegelungen als Symmetrieabbildungen des regelmäßigen Tetraeders*. Mehr kann es bereits nicht mehr geben, da unsere bisherige Auflistung schon 24 Bewegungen ergibt.

E. Quaisser/H.-J. Sprengel

Aus der Geschichte der Schiffahrt

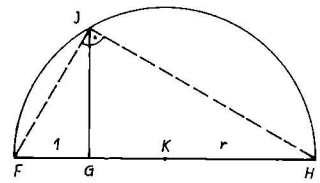
1886 wurde erstmals ein speziell als Tanker gebautes Schiff in Dienst gestellt. Dieser Tanker (mit dem Namen „Glückauf") konnte 20 000 Barrel Öl aufnehmen, 1 Barrel entspricht 158,987 l.
Wie lang ist ein Zylinder mit einem Bodenflächenradius von 3 m, der gerade die Ölmenge des Tankers „Glückauf" faßt? Benutze den Schulrechner SR 1!

Mitgeteilt von Dr. W. Schmidt, Greifswald

Eine Aufgabe von René Descartes aus dem Jahre 1637

Und ich werde mich nicht scheuen, diese der Arithmetik entnommenen Ausdrücke in die Geometrie einzuführen, um mich dadurch verständlicher zu machen ...

▲2805▲ Soll endlich aus (der Strecke) GH die Quadratwurzel gezogen werden, so füge ich zu GH in gradliniger Fortsetzung die Einheit FG hinzu, und beschreibe, nachdem ich FH im Punkte K in zwei gleiche Teile geteilt, um K als Mittelpunkt den Kreis FIH, errichte dann in G unter rechtem Winkel zu FH eine gerade Linie bis nach I, so ist GI die gesuchte Wurzel.
Beweise diese Konstruktion!



Gegeben: $\overline{GH}$, $FG = 1$;
gesucht: $GI = \sqrt{GH}$, $\sphericalangle FIH = 90°$
(Buchstaben original wie bei Descartes, nur das Dreieck fehlt.)

Computer rechnete 37 Stunden an π

Tokio (JW): *Der japanische Mathematiker Professor Yasumasa Kanada hat die Zahl π mit einem Computer bis auf 133 554 Millionen Stellen hinter dem Komma errechnet. Er ist überzeugt, daß er sich damit einen Eintrag im Guiness-Buch der Rekorde verdient hat. Der Computer rechnete schließlich 37 Stunden lang und druckte das Ergebnis auf 20 000 Blättern Papier aus.* Es dürfte jedoch kaum von Nutzen sein, derart viele Stellen der Zahl π zu kennen. Aber es ist interessant zu wissen, daß man beliebig viele Stellen berechnen kann, wenn man genügend Zeit und einen leistungsfähigen Computer besitzt. Uns genügt die Genauigkeit des Schulrechners SR 1, der für π den Wert 3,141 592 7 anzeigt und mit 3,141 592 65 rechnet. Man bestätige die SR 1-Werte!

Mitgeteilt von Dr. W. Schmidt, Greifswald

Kryptarithmetik

Die folgenden Aufgaben aus der *Kryptarithmetik* sind zum größten Teil aus dem Entwurf des neuen Lehrbuches der Mathematik für die 3. Klasse, das im Schuljahr 1987/88 eingeführt wird, ausgewählt worden, z.T. aber auch aus dem neuen sowjetischen Lehrbuch für die 4. Klasse (Moskau 1986). Soweit die Lösungen nicht ohne weiteres ersichtlich sind, werden systematische Lösungen mit Hilfe von Gleichungen bzw. Fallunterscheidungen gegeben.
Diese Lösungen sind aber für Schüler der mittleren und oberen Klassen sowie für Lehrer zur Orientierung bestimmt. Schüler der unteren Klassen können die Aufgaben durch mehr oder weniger systematisches Probieren lösen. Das gelingt ihnen, weil die schwierigeren Aufgaben viele Lösungen haben und von den Schülern nur eine Lösung verlangt wird.
Bei den Kryptogrammen ist zu beachten, daß jeweils gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu belegen sind und daß am Anfang einer Zahl niemals die Ziffer 0 steht.

▲1▲ Setze für □ die Rechenzeichen + oder · !
a) 0□1□2□3□4□5 = 120
b) 0□1□2□3□4□5 = 121

▲2▲ Setze in die Leerstellen +, · und Klammern ein!
1□2□3□4□5 = 100

▲3▲ Setze für die Leerstellen die Rechenzeichen + oder − ein! (Dezimale Schreibweise ist erlaubt, z.B. 12 oder 56.)
1□2□3□4□5□6□7□8□9 = 100

▲4▲ Die Ziffern 1, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9 sind in die Leerstellen so einzutragen, daß man die Summe 100 erhält.
□□ + □□ + □□ + □□ = 100

▲5▲ Die acht Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 und 9 sind so in die Leerstellen einzusetzen, daß man die Summe 10 000 erhält.

$$\begin{array}{r} \square\square\square\square\square \\ +\ \square\square\square\square \\ \hline 1\,0\,0\,0\,0 \end{array}$$

▲6▲ Fülle die Leerstellen mit Ziffern so aus, daß man als Differenz 1 erhält!

$$\begin{array}{r} \square\square\square \\ -\ \square\square\square \\ \hline 1 \end{array}$$

▲7▲ $\begin{array}{r} \square 21 \cdot 4 \\ \hline 1684 \end{array}$

▲8▲ $\begin{array}{r} \square\square 1 \cdot 3 \\ \hline 186\square \end{array}$

▲9▲ $\begin{array}{r} 41\square \cdot 4 \\ \hline 1\square 4\square \end{array}$

▲10▲ $69\square : \square = 2\square 1$

▲11▲ $1\square 25 : 5 = 32\square$

▲12▲

$$\begin{array}{r} A + A = B \\ + \quad \cdot \quad - \\ A \cdot A = B \\ \hline B - B = 0 \end{array}$$

▲13▲

$$\begin{array}{r} A\,A\,A \cdot A = B\,B\,B \\ - \qquad\qquad - \\ C\,C\,C \cdot A = D\,D\,D \\ \hline F\,F\,F \cdot A = 3\,3\,3 \end{array}$$

▲14▲

$$\begin{array}{r} E\,I\,N\,S \\ +\,E\,I\,N\,S \\ \hline Z\,W\,E\,I \end{array}$$

▲15▲

$$\begin{array}{r} V\,I\,E\,R \\ +\,V\,I\,E\,R \\ \hline A\,C\,H\,T \end{array}$$

▲16▲

$$\begin{array}{r} E\,I\,N \cdot A \\ \hline I\,S\,T\,A \end{array}$$

▲17▲ Ersetze die Buchstaben durch Ziffern! (Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern.)

a	6A8 : 2 = 32A
b	E25 : E = 105
c	B6B4 : 4 = C5C

Lösungen

▲1▲ a) Da 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15, also zu klein ist, muß man außer dem Rechenzeichen + noch das Rechenzeichen · benutzen. Nun ist
1 · 2 · 3 · 4 · 5 = 120. Es fehlt die Zahl 0, die man noch addieren kann:
0 + 1 · 2 · 3 · 4 · 5 = 120.
b) Diese Summe ist um 1 größer, also muß man noch 1 addieren. Nun ist auch
2 · 3 · 4 · 5 = 120. Man erhält
0 + 1 + 2 · 3 · 4 · 5 = 121.

▲2▲ 1 · (2 + 3) · 4 · 5 = 100

▲3▲ 1 + 2 + 3 − 4 + 5 + 6 + 78 + 9 = 100

▲4▲ An den Zehnerstellen der Summanden müssen möglichst kleine Zahlen stehen, damit die Summe 100 nicht überschritten wird. Nun ist
1 + 1 + 2 + 3 = 7 und 6 + 7 + 8 + 9 = 30; man erhält also eine Lösung:
16 + 17 + 28 + 39 = 100. Man erhält weitere Lösungen, wenn man die Zahlen an den Einer- und Zehnerstellen beliebig vertauscht. Insgesamt sind es
$\frac{4!}{2} \cdot 4! = 12 \cdot 24 = 288$ Lösungen.

▲5▲ Da die Summe 10 000 beträgt, müssen an der letzten Stelle die Zahlen die Summe 10 ergeben und an den anderen Stellen die Summe 9 (wegen des Übertrages).
Also stehen an der letzten Stelle die Zahlen 1 und 9, an den übrigen Stellen die Zahlen 2 und 7 bzw. 3 und 6 bzw. 4 und 5.
So erhalten wir eine Lösung
2341 + 7659 = 10 000
Nun hat man drei Möglichkeiten, eines der Paare an die erste Stelle zu setzen, dann zwei für die zweite Stelle und eine für die verbleibenden Stellen. Außerdem können an jeder Stelle die Zahlen vertauscht werden. Es gibt also 3 · 2 · 2 = 12 Lösungen.

▲6▲ 1000 − 999 = 1

▲7▲ Bezeichnet man den 1. Faktor mit x, so gilt
$x \cdot 4 = 1684$, also $x = \frac{1684}{4} = 421$.

▲8▲ Setzt man anstelle der Leerstellen die Variablen x, y, z, so gilt
$(100x + 10y + 1) \cdot 3 = 1860 + z$,
$30(10x + y) + 3 = 1860 + z$,
also ist $z = 3$ und
$30(10x + y) = 1860$,
$10x + y = \frac{1860}{30} = 62$.
Der erste Faktor ist also gleich 621.

▲9▲ $(410 + x) \cdot 4 = 1040 + 100y + z$,
$1640 + 4x = 1040 + 100y + z$,
$600 + 4x = 100y + z$.
Also ist $x = 0$, 1 oder 2,
weil für $x \geqq 3$ $z > 10$ wird.
Man erhält drei Lösungen:
bei $x = 0$ wird $410 \cdot 4 = 1640$,
$x = 1$ $411 \cdot 4 = 1644$,
$x = 2$ $412 \cdot 4 = 1648$.

▲10▲ $(690 + x) : y = 201 + 10z$,
$690 + x = (201 + 10z)y$,
$690 + x = 200y + y + 10yz$.
Also ist $x = y$ und
$690 = 200y + 10yz = 10y(20 + z)$.
Daher ist $y = 3$; denn für $y < 3$ wird die rechte Seite zu klein, für $y > 3$ zu groß.
Daraus folgt $z = 3$ und $693 : 3 = 231$.

▲11▲ $(1025 + 100x) : 5 = 320 + z$,
$1025 + 100x = (320 + z) \cdot 5 = 1600 + 5z$.
Diese Gleichung ist nur für $z = 5$ erfüllt.
Daher ist
$100x = 1600 + 25 - 1025 = 600$,
$x = 6$ und $1625 : 5 = 325$.

▲12▲ Ist $A = 1$, so ist $A + A = 1 + 1 = 2 = B$ und $A \cdot A = 1 \cdot 1 = 1 = B$,
das ist ein Widerspruch.
Ist $A = 2$, so ist $A + A = 2 + 2 = 4$
und $A \cdot A = 2 \cdot 2 = 4$, d.h. $B = 4$.
Ferner ist $B - B = 4 - 4 = 0$.
Es sind also alle Gleichungen in den Zeilen und Spalten richtig.
$2 + 2 = 4$; $2 \cdot 2 = 4$; $4 - 4 = 0$.
(Für $A \geqq 3$ ergibt sich stets ein Widerspruch; denn dann ist $A + A < A \cdot A$.)

▲13▲ Wegen $333 = 111 \cdot 3$ kann *FFF* nur 111, da dreistellig, und $A = 3$ sein.
Dann ist $AAA \cdot A = 333 \cdot 3 = 999$,
also $B = 9$.
Es ist $AAA - CCC = FFF$, also $A - C = F$,
d.h., $3 - C = 1$, $C = 2$.

Wegen $CCC \cdot A = DDD$ ist $222 \cdot 3 = 666$, also $D = 6$.
Dann ist $BBB - DDD = 999 - 666 = 333$. Also sind alle Gleichungen in den Zeilen und Spalten richtig. Man erhält das Schema:

$$\begin{array}{c} 333 \cdot 3 = 999 \\ - \quad\quad - \\ \hline 222 \cdot 3 = 666 \\ \hline 111 \cdot 3 = 333 \end{array}$$

▲14▲ Es fällt zunächst auf, daß, wenn man $10N + S = x$ setzt und $x < 50$ ist, $(10N + S) + (10N + S) = 10E + I = 2x$ und $(10E + I) + (10E + I) = 10Z + W = 2x + 2x = 4x$ ist.
Dabei gilt $4x < 100$, also $x < 25$.
Für $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ergeben sich Widersprüche, da dann in dem Schema für verschiedene Buchstaben gleiche Ziffern auftreten.
Für $x = 7, 8, 9$,
d. h. $2x = 14, 16, 18$, $4x = 28, 32, 36$
erhält man die folgenden Lösungen:

1. Lösung	2. Lösung	3. Lösung
1407	1608	1809
+1407	+1608	+1809
2814	3216	3618

Ferner treten außer für $x = 14, 17, 18, 19$ Widersprüche auf, und man erhält die weiteren Lösungen:

4. Lösung	5. Lösung	6. Lösung
2814	3417	3618
+2814	+3417	+3618
5628	6834	7236

7. Lösung

3819
+3819
7638

Für $50 \leqq x < 100$ ist $x < 75$, und so gibt es noch die folgenden Lösungen:

8. Lösung	9. Lösung	10. Lösung
1457	1859	2864
+1457	+1859	+2864
2914	3718	5728

11. Lösung

4271
+4271
8542

▲15▲ Da diese Aufgabe viele Lösungen hat, wollen wir noch die Einschränkung machen:
Man ermittle diejenigen Lösungen, bei denen die Summe
a) möglichst klein,
b) möglichst groß ist.
Es ist $V = 1, 2, 3$ oder 4, da $V \neq 0$ und $A \leqq 9$ ist.
a) $V = 1$ und $A = 2$ sind die kleinstmöglichen Werte von V und A und ergeben daher die kleinsten Summanden und die kleinste Summe. Dann ist mindestens $I = 3$, $E = 4$, $R = 5$,
also $T = 0$, $H = 9$, $C = 6$.
($I = 0$ führt nicht zum Ziel, denn $0 + 0 = 0$, an der zweiten Stelle der Summe steht also 0 oder mit einem Übertrag 1, beide Zahlen sind schon besetzt.) Damit haben wir die Lösung mit der kleinsten Summe erhalten:

$$1345 + 1345 = 2690.$$

b) V ist höchstens gleich 4. Ist $V = 4$ und $A = 9$, so kann höchstens $I = 8$ sein. $E = 7$ würde zu $C = 7$ führen, ein Widerspruch wegen $E \neq C$. Dagegen erhält man für $E = 6$ und $R = 5$ die Lösung mit der größten Summe.

$$4865 + 4865 = 9730$$

($R = 7$ würde wieder zu einem Widerspruch führen, da $7 + 7 = 14$ und die 4 bereits besetzt ist.)

▲16▲ $(100E + 10I + N)A = 1000I + 100S + 10T + A$, wobei die Variablen natürliche Zahlen mit
$A \geqq 2$, $E \geqq 1$, $I \geqq 1$, $N \geqq 1$, $S \geqq 0$, $T \geqq 0$,
und sämtlich kleiner oder gleich 9 sind.
Da NA auf die Ziffer A endet, ist wegen $N \neq 0$
$A = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ oder 9,
$N = 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$,
oder 6, 6, 3, 7, 9.
Für $A = 2$ und $N = 1$ erhält man keine Lösung. Für $A = 3$ und $N = 1$ erhält man die Lösungen
$821 \cdot 3 = 2463$; $921 \cdot 3 = 2763$.
Für $A = 4$ und $N = 1$ erhält man die Lösungen $521 \cdot 4 = 2084$; $931 \cdot 4 = 3724$.
Außerdem erhält man für $A > 4$ bzw. $N > 1$ noch die folgenden Lösungen, wobei nur die Faktoren angegeben sind:
$841 \cdot 5$; $941 \cdot 5$; $541 \cdot 8$; $651 \cdot 8$;
$431 \cdot 9$; $541 \cdot 9$; $761 \cdot 9$; $516 \cdot 2$;
$526 \cdot 4$; $726 \cdot 4$; $213 \cdot 5$; $843 \cdot 5$;
$943 \cdot 5$; $217 \cdot 5$; $427 \cdot 5$; $637 \cdot 5$,
also insgesamt 20 Lösungen.

▲17▲ a)
$(600 + 10A + 8) : 2 = 320 + A$
$608 + 10A = 640 + 2A$, $8A = 32$, $A = 4$,
also $648 : 2 = 324$.
b) $(100E + 25) : E = 105$,
$100E + 25 = 105E$, $5E = 25$, $E = 5$,
also $525 : 5 = 105$.
c) $(1000B + 600 + 10B + 4) : 4 = 100C + 50 + C$,
$1010B + 604 = 400C + 200 + 4C$,
$1010B = 404C - 404 = 404(C - 1)$,

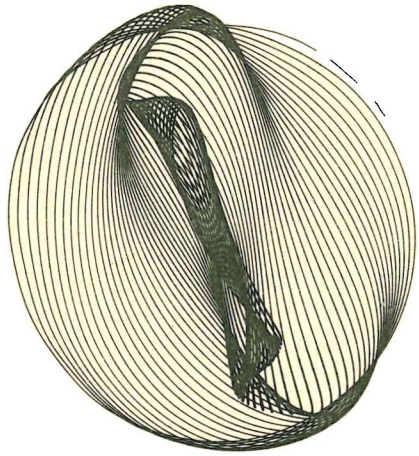
$$B = \frac{4 \cdot 101(C-1)}{101 \cdot 10} = \frac{4(C-1)}{10}$$

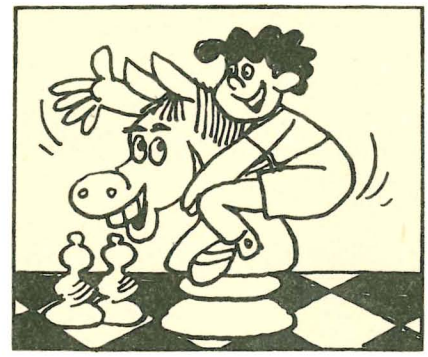
Da $B \neq 0$ ganzzahlig und 4 durch 2 teilbar ist, ist $C - 1 \neq 0$ durch 5 teilbar. Wegen $2 \leqq C \leqq 9$ ist das nur für $C - 1 = 5$, also $C = 6$ der Fall.

Dann ist $B = \frac{4 \cdot 5}{10} = 2$,

und man erhält $2624 : 4 = 656$. *R. Lüders*

Computergrafik



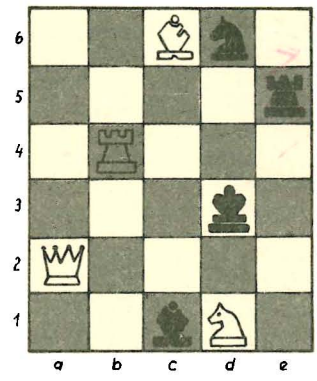


Anordnung von Schachfiguren

Wie groß die Vielfalt der möglichen Probleme bei der Anordnung von Schachfiguren auf dem Schachbrett ist, davon war in *alpha* schon mehrmals zu lesen. Die sechs unterschiedlich ziehenden Figurentypen und verschiedene Anordnungskriterien bieten einen großen Bereich von zu untersuchenden Fragen an.
Auch der bekannte englische Schachproblemkomponist *Thomas Rayner Dawson* (1889 bis 1951) befaßte sich mit Aufgaben dieser Art. Folgende Aufgabe von ihm wurde zuerst in *London Evening Standard* 1930 veröffentlicht:
Auf einem verkleinerten Schachbrett mit 5×6 Feldern sollen folgende acht Figuren so angeordnet werden, daß keine Figur eine andere deckt oder bedroht. Wie viele verschiedene Anordnungen sind möglich?

♚ ♕ ♖ ♖ ♗ ♘ ♙ ♘

Das abgebildete Diagramm zeigt eine Lösungsmöglichkeit.



Neues aus dem Sportverlag

I. Lindner
Faszinierendes Schach
284 Seiten, Preis: 15,50 M
291 Diagramme
Bestell-Nr. 671 639 9

A. Mazukewitsch
Verflixte Fehler
500 lehrreiche Minipartien
233 Seiten, Preis: 15,80 M
Bestell-Nr. 671 642 6

XXVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Bezirksolympiade

7./8. Februar 1987

Olympiadeklasse 7

260731 Herr Anders fuhr mit seinem Pkw auf der Autobahn mit einer Geschwindigkeit von $100\frac{\text{km}}{\text{h}}$ an einer Tankstelle (A) vorbei. Nach einer weiteren Fahrstrecke von 175 km mußte Herr Anders den Benzinhahn auf Reserve stellen. Da die nächste Tankstelle (B) von dieser Stelle aus auf der Autobahn noch 45 km entfernt liegt, verringerte Herr Anders seine Geschwindigkeit auf $60\frac{\text{km}}{\text{h}}$, um weniger Benzin zu verbrauchen.
Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit legte Herr Anders die Strecke zwischen A und B zurück?
(Der kurze Bremsweg, auf dem die Geschwindigkeit von $100\frac{\text{km}}{\text{h}}$ auf $60\frac{\text{km}}{\text{h}}$ herabgesetzt wurde, soll in der Rechnung nicht berücksichtigt werden, da er die gesuchte Durchschnittsgeschwindigkeit nur unwesentlich beeinflußt.)

260732 Über die Feriengäste in einem Ferienheim ist folgendes bekannt:
Die Anzahl der Mädchen ist gleich der Hälfte der Anzahl derjenigen Feriengäste, die keine Mädchen sind.
Die Anzahl der Jungen ist gleich einem Drittel der Anzahl derjenigen Feriengäste, die keine Jungen sind.
Die Anzahl der Frauen ist gleich einem Viertel der Anzahl derjenigen Feriengäste, die keine Frauen sind.
Außer diesen Mädchen, Jungen und Frauen sind in diesem Ferienheim als Feriengäste noch genau 26 Männer.
Untersuche, ob sich aus diesen Angaben eindeutig die Anzahlen der Mädchen, Jungen und Frauen ergeben! Wenn dies der Fall ist, gib diese Anzahlen an!

260733 Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck; sein Umkreis k habe den Mittelpunkt M. Der Strahl aus A durch M schneide k in D, der Strahl aus B durch M schneide k in E, der Strahl aus C durch M schneide k in F.
Ermittle das Verhältnis der Flächeninhalte des Sechsecks $AFBDCE$ und des Dreiecks ABC!

260734 Ermittle alle diejenigen Paare $(m; n)$ natürlicher Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllen!
(1) m und n sind dreistellige Zahlen.
(2) Es gilt $m - n = 889$.
(3) Für die Quersummen $Q(m)$ und $Q(n)$ von m bzw. n gilt $Q(m) - Q(n) = 25$.

260735 Bekanntlich haben in jedem gleichseitigen Dreieck die drei Seitenhalbierenden, die zugleich auch die drei Winkelhalbierenden und die drei Höhen sind, einen gemeinsamen Schnittpunkt.
Gibt es Dreiecke ABC, die nicht gleichseitig sind und bei denen wenigstens die Seitenhalbierende von BC, die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ABC$ und die zur Seite AB senkrechte Höhe einen gemeinsamen Schnittpunkt haben? Wenn es solche Dreiecke gibt, so konstruiere ein derartiges Dreieck und beschreibe deine Konstruktion! Eine Begründung wird nicht verlangt.

260736 Es sei $ABCDEFGH$ ein Würfel mit $AE \parallel BF \parallel CG \parallel DH$; dabei sei $EFGH$ eine Seitenfläche des Würfels; der Schnittpunkt ihrer Diagonalen EG und FH sei S.
a) Beweise, daß der Winkel $\sphericalangle ESA$ kein rechter Winkel ist!
b) Beweise, daß der Winkel $\sphericalangle DSE$ ein rechter Winkel ist!

Olympiadeklasse 8

260831 Gegen Ende eines Kinderfestes kommen fünf Mädchen zur Solidaritätstombola und wollen Lose kaufen. Der Pionierleiter zählt die vorrätigen Lose und sagt dann: „Der Vorrat reicht dafür, daß jede von euch, eine nach der anderen, jeweils genau die Hälfte der gerade noch vorhandenen Lose und ein halbes Los dazu kauft. Dann bleibt kein Los übrig."
(I) Weise nach, daß es als Vorrat an Losen *höchstens* ein Anzahl geben kann, bei der die Aussagen des Pionierleiters zutreffen!
(II) Weise nach, daß für *diese* Anzahl die Aussagen des Pionierleiters zutreffen! Wie viele Lose kann jedes der fünf Mädchen nach diesen Aussagen kaufen?

260832 Ermittle alle diejenigen Paare $(p; q)$ von Primzahlen, die die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen!
(1) Die Differenz $q - p$ ist größer als 0 und kleiner als 10.
(2) Die Summe $p + q$ ist das Quadrat einer natürlichen Zahl n.
(3) Addiert man zu dieser Zahl n die Summe von p und q, so erhält man 42.

260833 Gegeben seien ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $r = 5$ cm sowie eine Gerade g, die von M den Abstand $d = 6$ cm hat. Zu konstruieren sind alle diejenigen Punkte P, die die folgenden Bedingungen a) und b) erfüllen:
a) Der Punkt P liegt auf der Geraden g.
b) Die von P an k gelegten Tangenten bilden miteinander einen rechten Winkel.
Beschreibe eine Konstruktion! Fertige eine Konstruktionszeichnung an! Beweise die beiden folgenden Sätze (I) und (II)!
(I) Wenn ein Punkt P die Bedingungen a) und b) erfüllt, dann läßt er sich nach der angegebenen Beschreibung konstruieren.
(II) Wenn ein Punkt P nach der angegebenen Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt er die Bedingungen a) und b).

260834 In einer Ebene seien 100 verschiedene Punkte so gelegen, daß folgende Voraussetzungen erfüllt sind:
(1) Es gibt genau eine Gerade, auf der mehr als zwei der 100 Punkte liegen.
(2) Auf dieser Geraden liegen genau drei der 100 Punkte.
Ermittle unter diesen Voraussetzungen die Anzahl derjenigen Geraden, die durch mehr als einen der 100 Punkte gehen!

260835 Beweise folgende Sätze:
(I) Wenn ABC ein Dreieck mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ ist, dann ist die Seitenhalbierende von AB zugleich auch Winkelhalbierende von $\sphericalangle ABC$.
(II) Wenn in einem Dreieck ABC die Seitenhalbierende von AB zugleich auch Winkelhalbierende von $\sphericalangle ABC$ ist, dann gilt $\overline{AC} = \overline{BC}$.

260836 Es sei $ABCD$ eine dreiseitige Pyramide, die die Bedingung erfüllt, daß die vier Dreiecke ABC, ABD, ACD und BCD sämtlich einander umfangsgleich sind.
Untersuche, ob durch diese Bedingung und durch die Längen

$$\overline{AD} = p,\ \overline{BD} = q,\ \overline{CD} = r$$

die Längen $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ und $\overline{AB} = c$ eindeutig bestimmt sind! Wenn dies der Fall ist, gib diese Längen a, b, c in Abhängigkeit von p, q, r an!

Olympiadeklasse 9

260931 Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare $(a; b)$ natürlicher Zahlen, für die die Gleichung

$$2(a + b) = ab$$ gilt!

260932 In einer Ebene e sei ein Dreieck ABC fest vorgegeben. Die Mittelpunkte der Dreiecksseiten BC, CA, AB seien U, V bzw. W in dieser Reihenfolge.
Weiter sei P ein beliebiger Punkt der Ebene e. Spiegelt man P sowohl an U, V als auch an W, so erhält man die Bildpunkte P_U, P_V bzw. P_W.
(Unter dem Bildpunkt P_S von P bei der Spiegelung an einem Punkt S versteht man denjenigen Punkt, für den gilt, daß S der Mittelpunkt der Strecke PP_S ist. Falls $P = S$ ist, ist $P_S = P$.)
Beweisen Sie, daß der Flächeninhalt des Dreiecks $P_UP_VP_W$ unabhängig von der Lage des Punktes P ist, und vergleichen Sie diesen Flächeninhalt mit dem des Dreiecks ABC!

260933 Wenn eine reelle Zahl a gegeben

ist, so werde jeder reellen Zahl x eine Zahl y, nämlich

$$y = \frac{x^3 + x^2 + ax + 1}{x^2 + 1}$$

zugeordnet.

(A) Ermitteln Sie, wenn $a = -3$ gegeben ist, zwei ganze Zahlen x, deren zugeordnete Zahlen y ebenfalls ganze Zahlen sind!

(B) Ermitteln Sie eine reelle Zahl a, für die die folgende Aussage (*) gilt!

(*) Wenn die Zahl a gegeben ist, so gibt es unendlich viele ganze Zahlen x, deren jeweils zugeordnete Zahlen y ebenfalls ganze Zahlen sind.

(C) Untersuchen Sie, ob es außer der in (B) ermittelten Zahl a noch eine andere reelle Zahl a gibt, für die die Aussage (*) gilt!

260934 Beweisen Sie folgenden Satz:

Wenn a und b zwei von 0 verschiedene natürliche Zahlen sind, die nicht beide Quadratzahlen sind und für die $\frac{a}{b}$ ein so weit wie möglich gekürzter Bruch ist, dann ist $\sqrt{\frac{a}{b}}$ eine irrationale Zahl.

260935 Von einem Viereck $ABCD$ werde vorausgesetzt:

(1) $ABCD$ ist ein Trapez mit $AB \parallel CD$.

(2) Es gilt $\overline{AB} > \overline{CD}$.

(3) Die Summe der Größen der Innenwinkel $\sphericalangle BAD$ und $\sphericalangle ABC$ beträgt 90°.

Der Mittelpunkt von AB sei M, der Mittelpunkt von CD sei N.

Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen stets

$$\overline{MN} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{AB} - \overline{CD})$$

gilt!

260936 a) Ein regelmäßiges Tetraeder $ABCD$ soll durch eine Ebene e, die durch den Punkt A geht, in zwei Tetraeder T_1, T_2 zerlegt werden.

Skizzieren Sie eine derartige Zerlegung, z. B. in Kavalierperspektive, und beschreiben Sie, welche Lage e in bezug auf die drei Punkte B, C, D bei derartigen Zerlegungen haben muß!

b) Beweisen Sie, daß es unter den in a) genannten Ebenen genau drei gibt, bei denen T_1 volumengleich zu T_2 wird!

Olympiadeklasse 10

261031 Von einer natürlichen Zahl x sollen folgende Bedingungen erfüllt werden:

(1) Im Zweiersystem geschrieben hat x genau sieben Stellen.

(2) Schreibt man x im Dreiersystem, so tritt keine Ziffer mehr als zweimal auf.

(3) Im Fünfersystem geschrieben hat x genau vier Stellen.

Beweisen Sie, daß es genau eine natürliche Zahl x gibt, die diese Bedingungen erfüllt, und geben Sie diese Zahl an!

261032 Bei einem Dominospiel mit den Zahlen 0, 1, ..., 6 ist jeder Spielstein in zwei Hälften eingeteilt, jede Hälfte trägt eine der Zahlen. In einem Dominospiel kommen alle Kombinationen von je zwei der Zahlen 0, 1, ..., 6 je genau einmal vor (und zwar auch diejenigen, bei denen auf den beiden Hälften eines Steins dieselbe Zahl steht). Insgesamt besteht hiernach ein Dominospiel aus genau 28 Steinen.

Eine „Kette" entsteht, wenn man mehrere Steine in einer Folge so nebeneinanderlegt, daß benachbarte Hälften nebeneinanderliegender Steine stets einander gleiche Zahlen tragen (Domino-Spielregel). Eine Kette heißt „geschlossen", wenn auch die beiden Seitenhälften an den beiden freien Enden der Kette einander gleiche Zahlen tragen.

a) Ermitteln Sie die kleinste Anzahl $k > 1$ von verschiedenen Steinen eines Dominospiels, die eine geschlossene Kette bilden können!

b) Aus einem Dominospiel sollen geschlossene Ketten aus je k verschiedenen Steinen gebildet werden (k sei die in a) genannte Zahl). Dabei soll jeder Stein des Dominospiels in höchstens einer dieser Ketten verwendet werden.

Ermitteln Sie die größte Anzahl g von Ketten, die so zustandekommen können!

c) Ermitteln Sie die Anzahl aller verschiedenen geschlossenen Ketten aus je k verschiedenen Steinen, die sich überhaupt bilden lassen! (Es darf also jeder Stein des Dominospiels in beliebig vielen dieser Ketten auftreten.) Dabei gelten zwei geschlossene Ketten genau dann als gleich, wenn sie bei geeigneter Wahl eines Anfangssteins und einer Durchlaufungsrichtung gleichlautende Zahlenfolgen zeigen. Beispielsweise gelten die beiden Ketten

(2,4), (4,5), (5,5), (5,1), (1,2)

und (5,4), (4,2), (2,1), (1,5), (5,5)

als einander gleich.

261033 Über eine Gerade h und drei Punkte S, A, B auf h wird vorausgesetzt, daß A zwischen S und B liegt. Ferner wird über eine Gerade $g \neq h$ vorausgesetzt, daß sie h in S schneidet. Gesucht sind alle diejenigen Punkte P, die die folgenden Bedingungen a) und b) erfüllen:

a) Der Punkt P liegt auf g.

b) Der Innenwinkel $\sphericalangle SBP$ im Dreieck SBP hat dieselbe Größe wie einer der Winkel, den AP mit g bildet.

(I) Beweisen Sie folgende Aussage:

Wenn ein Punkt P die Bedingungen a), b) erfüllt, dann kann er (aus voraussetzungsgemäß gegebenen h, g, S, A, B) durch eine Konstruktion erhalten werden.

(II) Beschreiben Sie eine Konstruktion, für die die Aussage in (I) zutrifft!

(III) Beweisen Sie folgende Aussage:

Wenn ein Punkt P nach der Beschreibung (II) konstruiert wird, dann erfüllt er die Bedingungen a), b).

261034 Ermitteln Sie unter allen denjenigen Werten, die

$$z = x^2 + y^2 + 2x - 22 \quad (1)$$

für ganzzahlige x und y annehmen kann, den kleinsten Wert z, der eine natürliche Zahl ist!

Geben Sie alle diejenigen Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen an, bei denen sich in (1) dieser Wert z ergibt!

261035 Beweisen Sie folgende Aussage:

Wenn n eine natürliche Zahl mit $1 \leqq n \leqq 5$ ist, so gilt: Wird eine Kugel von n Ebenen geschnitten, so entstehen auf der Kugeloberfläche höchstens 22 Teilflächen.

261036 Beweisen Sie, daß für jede reelle Zahl $x > 1$ die Ungleichungen

$$\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2}\right) < \frac{1}{\sqrt[3]{x}} < \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$$

gelten!

Olympiadeklassen 11/12

261231 Man ermittle alle diejenigen Tripel $(x; y; z)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$x + y - z = 1 \quad (1)$$

$$x^2 - y^2 + z^2 = 1 \quad (2)$$

$$-x^3 + y^3 + z^3 = -1 \quad (3)$$

261232 Im Raum seien zwei windschiefe Geraden g_1 und g_2 gegeben. Ferner seien d_1 und d_2 zwei gegebene Streckenlängen.

Beweisen Sie die folgende Aussage:

Wie man auch auf g_1 Punkte P_1, P_2 mit $\overline{P_1P_2} = d_1$ und auf g_2 Punkte Q_1, Q_2 mit $\overline{Q_1Q_2} = d_2$ wählt, stets ergibt sich für das Volumen des Tetraeders mit den Eckpunkten P_1, P_2, Q_1, Q_2 ein und derselbe Wert.

Von den nachstehenden Aufgaben 261233A und 261233B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

261233A Man untersuche, ob es vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gibt, die die folgende Eigenschaft haben: Jede dieser vier Zahlen läßt sich so in zwei positive ganzzahlige Summanden x und y zerlegen, daß sie jeweils ein Teiler von $x \cdot y$ ist.

261233B Man beweise, daß in jedem Dreieck ABC für die Seitenlängen $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$, $c = \overline{AB}$, die Größen α, β, γ der Innenwinkel $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$ sowie für den Inkreisradius ϱ und den Flächeninhalt F die Ungleichung

$$\frac{1}{a}\cos^2\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{b}\cos^2\frac{\beta}{2} + \frac{1}{c}\cos^2\frac{\gamma}{2} \geqq \frac{27\varrho}{8F} \quad (1)$$

gilt. Man gebe alle diejenigen Dreiecke an, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

261234 Beweisen Sie: Für jedes Sehnenviereck $ABCD$, dessen Diagonale BD durch den Mittelpunkt N der Diagonalen AC verläuft, gilt die folgende Gleichung (1).

$$2 \cdot \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2. \quad (1)$$

261235 Zwei Personen, A und B, spielen mit n in einer Geraden angebrachten Lampen ($n > 3$) das folgende Spiel:

Zum Spielbeginn sind alle Lampen ausgeschaltet. Eine ganze Zahl k mit $1 < k < n - 1$ wird vereinbart. Dann verläuft das Spiel so, daß die Spieler, mit A beginnend, abwechselnd am Zug sind: Jeder Spieler schaltet, wenn er am Zug ist, nach eigener Wahl eine Anzahl nebeneinanderliegender Lampen ein, mindestens eine und höchstens k. Gewonnen hat derjenige Spieler, der die letzte der n Lampen einschaltet.

Man beweise, daß der Spieler A für jedes $n > 3$ und jedes k mit $1 < k < n - 1$ durch

eine geeignete Vorgehensweise (Strategie) den Gewinn erzwingen kann.

261236 Es sei (x_n) diejenige Folge reeller Zahlen, für die

$$x_1 = \sqrt{3} \quad (1)$$

und $$x_{n+1} = \sqrt{9x_n^2 + 11x_n + 3} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \quad (2)$$

gilt. Für jede reelle Zahl $a \neq 0$ sei ferner (y_n) die durch

$$y_n = \frac{x_n}{a^n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \quad (3)$$

definierte Zahlenfolge.

Man ermittle alle diejenigen $a \neq 0$, für die die Folge (y_n) konvergent ist.

Eine harte Nuß

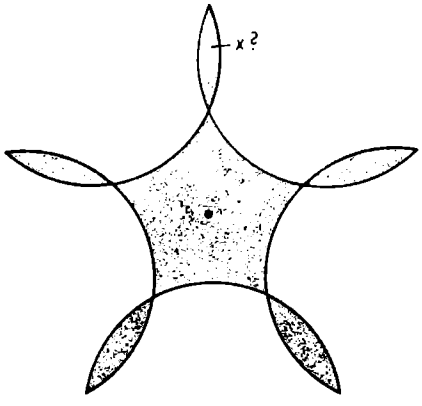
a) Eine vierstellige Zahl und die (ebenfalls vierstellige Zahl) Zahl, die entsteht, wenn man die Ziffern in umgekehrter Reihenfolge schreibt, sind beide durch 78 teilbar. Wie heißen diese Zahlen?

b) Gesucht sind alle dreistelligen Zahlen, die aus geraden Ziffern bestehen und teilbar durch das Produkt ihrer Ziffern sind.

c) Eine dreistellige Zahl mit verschiedenen Ziffern ist gleich einem Fünftel der Zahl, die man erhält, wenn man die Summe aus den dreistelligen Zahlen bildet, die durch Umstellung der Ziffern der Ausgangszahl entstehen. Wie heißt die Zahl?

Aus: Matematika v škole, Moskau; mitgeteilt von Dr. J. Riehl, Egeln

Unterhaltsame Kreisfigur



Prof. A. Sawin, Mitarbeiter der sowjetischen Schülerzeitschrift *Quant*, grüßt alle *alpha*-Leser, wünscht alles Gute für 1987 und stellt folgende Aufgabe (ohne Worte!). Wir interpretieren: In der Kreisfigur ist x zu berechnen, d. h., es ist für x eine allgemeine Formel zur Berechnung des Bogenstückes zu finden. Wir erwarten eure Vorschläge!

Ein Besuch in der Knobelwerkstatt

Teil 8: Das VIII. Turn- und Sportfest der DDR

Liebe Freunde! Wie bereits in Teil 5 unserer Serie (*alpha* 6/85) angekündigt, soll unser heutiger Beitrag dem VIII. Turn- und Sportfest der DDR gewidmet sein, das zusammen mit der XI. Kinder- und Jugendspartakiade der DDR vom 27. Juli bis 2. August 1987 in Leipzig stattfinden wird. Damit wollen wir den Eigenbau von Knobelaufgaben unter dem Blickwinkel eines gesellschaftlichen Höhepunktes demonstrieren (vgl. dazu den Text von Teil 5 in *alpha* 6/85!).

Das VIII. Turn- und Sportfest der DDR *(s. Aufg. 1)* wird in der Tat sicher wieder ein besonderer Höhepunkt im Leben unserer Republik sein. Als Nationalfest der Körperkultur und des Sports wird es auf eindrucksvolle Weise demonstrieren, daß das humanistische Anliegen, Körperkultur und Sport zur Sache des ganzen Volkes, vor allem seiner Jugend zu machen, in unserer sozialistischen Gesellschaft zielstrebig verwirklicht wird. So vereinigte der DTSB der DDR im Jahre 1983 annähernd 3,3 Millionen Mitglieder, und etwa 700 000 Bürger waren ehrenamtlich und unentgeltlich als Übungsleiter, Kampf- oder Schiedsrichter oder als gewählte Sportfunktionäre tätig. Und im Jahre 1982 erfüllten etwa 3 Millionen Bürger unseres Landes die Bedingungen des Sportabzeichens „Bereit zur Arbeit und zur Verteidigung der Heimat". Diese Breite des Sports macht solch hervorragende sportliche Leistungen, wie sie unsere Sportler national und international vollbringen und wie sie gewiß in Leipzig wieder zu sehen sein werden, natürlich erst möglich. Sicher hat auch manch einer von euch das Glück, als sportlich Bester in Leipzig dabei zu sein. Die Turn- und Sportfeste der DDR basieren auf einer etwa hundertjährigen Tradition vor allem der Arbeitersportbewegung. Sie begannen in unserer Republik 1954 neu und wurden dann in zeitlich unregelmäßiger Folge weiter fortgesetzt.

Die Gastgeberstadt Leipzig ist wahrlich eine Stadt des Sports: Der Massen- und Leistungssport in Leipzig kann beachtliche Erfolge aufweisen *(s. Aufg. 2a)*. Diese waren auch hier vor allem durch eine kontinuierliche Breitenarbeit im Sport möglich *(s. Aufg. 2b)*. Auch wurden seit der Gründung der DDR in Leipzig viele neue Sportstätten geschaffen, von denen das Sportforum – ein ganzer Komplex von Stadien und Sporthallen mit dem Zentralstadion als Herzstück – die größte ist *(s. Aufg. 2c)*. Ebenso entstanden in der Stadt eine Reihe von Volksschwimmhallen *(s. Aufg. 2d)*. Einen großen Anteil an der Entwicklung des Sports in Leipzig und darüber hinaus hat natürlich die Deutsche Hochschule für Körperkultur (DHfK), das Zentrum der sozialistischen deutschen Sportwissenschaft sowie der Aus- und Weiterbildung der Kader *(s. Aufg. 2e)*. Leipzig besitzt auch als einzige Stadt ein Sportmuseum. Und welcher Fußballfreund kennt ihn nicht, den 1. FC Lokomotive Leipzig, der im vergangenen Jahr den FDGB-Pokal errang *(s. Aufgaben 3 und 4)*.

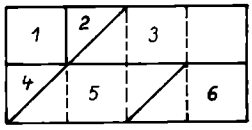
Das inhaltliche Programm des VIII. Turn- und Sportfestes der DDR hält wieder viele Attraktionen bereit, so u. a. die stets beeindruckende und von tausenden Sportlern und Trainern mit viel Liebe und Fleiß vorbereitete Sportschau des DTSB der DDR *(s. Aufg. 5)*, internationale und volkssportliche Wettkämpfe, kulturelle und andere sportliche Großveranstaltungen, und nicht zuletzt die Wettkämpfe der XI. Kinder- und Jugendspartakiade der DDR als Höhepunkt der Spartakiadebewegung in unserem Land, die getragen wird vom DTSB der DDR, den Organen der Volksbildung, der FDJ sowie der Pionierorganisation „Ernst Thälmann". Erfüllt von der olympischen Idee des friedlichen Wettstreits messen hier die besten Nachwuchssportler unserer Republik ihre Kräfte. Bewältigt wird hierbei annähernd das olympische Programm *(s. Aufgaben 6, 7 und 8)*, aber dies in der Hälfte der Zeit und durch die Einteilung nach Altersklassen etwa dreifach erweitert. Die Durchführung der Spartakiadewettkämpfe sowie insgesamt des VIII. Turn- und Sportfestes der DDR ist eine bewunderungswürdige Leistung seiner Organisatoren und nur durch die Mithilfe zehntausender sportbegeisterter Helfer möglich. Wünschen wir dem VIII. Turn- und Sportfest und der XI. Kinder- und Jugendspartakiade der DDR einen erfolgreichen Verlauf! Und so beenden wir unsere achtteilige Beitragsserie heute mit einem dreifachen „Sport frei!".

R. Mildner

Knobel-Wandzeitung

Sportfest-Legespiel

▲1▲ Zerschneidet ein rechteckiges Stück Karton, das doppelt so lang wie breit ist, in die abgebildeten 6 (dick umrandeten) Teile, und legt jeweils mit diesen 6 Teilen jede Ziffer bzw. jeden Buchstaben des Ausdrucks VIII. TURN- UND SPORTFEST DER DDR, LEIPZIG zusammen, wobei ihr euch die (stilisierten) Ziffern bzw. Buchstaben (als Legefiguren) selbst ausdenken sollt! Findet bei gleichen Legefiguren verschiedene Zusammenlegungen!



Leipzig – Stadt des Sports

▲2▲ a) Leipziger Sportler erkämpften von 1956 bis 1980 allein bei den olympischen Sommerspielen insgesamt 80 Medaillen. Davon waren 26,25% Gold-, 46,25% Silber- und 27,50% Bronzemedaillen. Wieviel Medaillen von jeder Art erkämpften sie?

b) Im DTSB der DDR waren 1980 (rund) 65 000 Leipziger Bürger organisiert. Im Jahre 1951 waren es nur 31 000. Wieviel Prozent der Leipziger Einwohner waren 1980 im DTSB organisiert (Einwohnerzahl Leipzigs: 570 000) und um wieviel Prozent (gegenüber 1951) war der Anteil Leipziger DTSB-Mitglieder bis zum Jahre 1980 gestiegen?

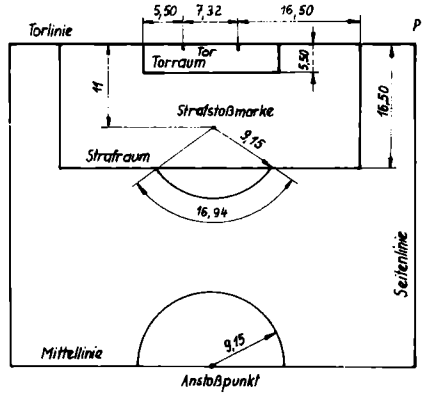
c) Das 1956 eingeweihte Leipziger Zentralstadion, das über 100 000 Sitzplätze verfügt, entstand in einer Bauzeit von nur 17 Monaten unter Mithilfe von 180 218 Leipziger Bürgern, die 735 992 Aufbaustunden geleistet haben. Wieviel Aufbaustunden wurden von jedem dieser aktiven Bürger durchschnittlich geleistet?

d) Nach einem Beschluß des Rates der Stadt Leipzig wurden ab Anfang 1968 in den einzelnen Stadtbezirken Volksschwimmhallen gebaut. 1981 gab es im Stadtgebiet 9 solche Schwimmhallen, deren Becken alle die gleichen Maße haben: Sie sind 25 m lang und 12,5 m breit, und die normale Wassertiefe beträgt 1,8 m. Wieviel Kubikmeter Wasser befinden sich in einem solchen normalgefüllten Schwimmbecken?

e) An der im Jahre 1950 gegründeten *Deutschen Hochschule für Körperkultur* (DHfK) in Leipzig ist bis zum Jahre 1981 die Zahl der Studenten (Direkt- und Fernstudenten) von 80 auf 2000, und die Zahl der Lehrkräfte von 13 auf 430 gestiegen. Auf das Wievielfache war die Zahl der Studenten bzw. Lehrkräfte angestiegen?

Auf dem Fußballplatz

▲3▲ Das Bild zeigt eine Hälfte eines 100 m × 60 m-Fußball-Großfeldes. Es soll nun das abgebildete (dick gezeichnete) Liniennetz so durchlaufen werden, daß man jede Linie des Netzes genau zweimal durchschreitet. Welche Wegroute – etwa ausgehend vom Punkt *P* und dort wieder endend – könnte man dazu wählen und welche Wegstrecke legt man dabei zurück?



Fußball-Kryptogramme

▲4▲

1	FUSS + BALL = CLUB	2	FUSS + BALL = PLATZ	3	FUSS + BALL = LEDER
4	FUSS + BALL = SCHUH	5	FUSS + BALL = WELT	6	FUSS + BALL = STOSS
7	FUSS + BALL = SPIEL	8	FUSS + BALL = TORE	9	FUSS + BALL = POKAL
10	FUSS + BALL = PAUSE	11	FUSS + BALL = BRAUT	12	FUSS + BALL = SPASS

Von den abgebildeten Kryptogrammen sind einige (mehrdeutig) lösbar. Welche sind es? Gebt in diesen Fällen mindestens je zwei Lösungen an! Die übrigen Kryptogramme sind nicht lösbar. Gebt dafür eine Begründung!

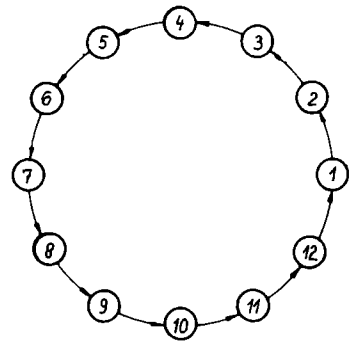
Lauftraining

▲5▲ Eine Trainingsgruppe von 12 Sportlern führt zur Erwärmung eine Laufübung im Kreis durch. Der Trainer gibt folgende Anweisungen:

a) Jeder laufe hinter seinem zweitnächsten Vordermann!

b) Jeder laufe hinter seinem drittnächsten Vordermann!

c) Jeder laufe hinter seinem fünftnächsten Vordermann!



Welche Lauffiguren entstehen nach Ausführung einer jeden Anweisung (Ausgangsstellung sei stets der Anfangskreis)?

Olympische Sportdisziplinen

▲6▲ Jeder der folgenden Namen stellt – natürlich in permutierter Form – eine olympische Sportdisziplin dar. Um welche Sportdisziplinen handelt es sich?

1. BEN HEGEWICHT
2. BEN OX
3. ELLA BRAWSS
4. ELLA BYLLOV
5. ERNA FLEUHUD
6. ERNI TE
7. HORST SPANGBUCH
8. INGE WURPST
9. MARTHA LOFUNA
10. RENATO SPRUNNK
11. RUDI SPRENG
12. SUSEN STOLEGK
13. SUSI WEKFREND
14. WERNER FESPE
15. WERNER HEMMAF

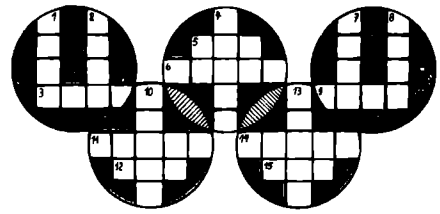
Buchstaben-Springreiten

▲7▲ In die fünf dickumrandeten Teilfiguren wurden in der Gangart eines Springers beim Schachspiel vier olympische Sportdisziplinen sowie das Teilgebiet des Sports, dem diese Disziplinen angehören, eingetragen. Welche sind es?

				E	E	A	C				
				T	H	L	I				
				L	T	I	T				
E	N	M	E	S	H	K	F	U	N	M	A
A	R	R	E	E	F	E	L	O	U	A	O
W	M	E	P	N	W	E	H	U	H	L	A
F	H	E	R	R	E	A	R	N	R	F	T

Im Zeichen Olympias

▲8▲ Gesucht sind die Nachnamen der Goldmedaillen-Gewinner bei den Olympischen Sommerspielen 1980 in Moskau in den angegebenen Sportdisziplinen (in Klammern die Siegerwerte):

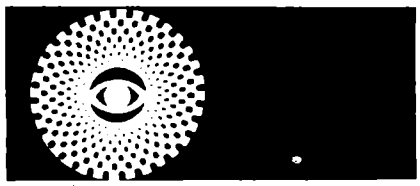


Waagerecht:

3. Einer-Kajak der Männer, 1000 m (3 : 48,77 min);
5. Turnen der Frauen, Boden (19,875 Punkte);
6. 800 m-Lauf der Männer (1 : 45,4 min);
9. 400 m Hürden Männer (48,70 s);
11. Judo, Halbschwergewicht;
12. Olympische Schnellfeuerpistole (596 Ringe);
14. Freie KK-Büchse, liegend (599 Ringe);
15. 1500 m-Lauf der Männer (3 : 38,4 min).

Senkrecht:

1. 400 m-Lauf der Frauen (48,88 s);
2. Diskuswerfen der Frauen (69,96 m);
4. Schwimmen der Frauen, 400 m Freistil (4 : 08,76 min);
7. Ringen, Schwergewicht;
8. Boxen, Federgewicht;
10. Speerwerfen der Frauen (68,40 m);
13. Schwimmen der Männer, 100 m Rücken (56,53 s).



ARBEITS-GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Mini-BASIC für alpha-Leser, Teil 5

„Sperren" werden gebraucht
Aufgabenbeispiel 6

Erstelle ein BASIC-Programm, das von einer natürlichen Zahl die Quersumme ermittelt!

Bei der Lösung der Aufgabe besteht das Hauptproblem darin, von einer natürlichen Zahl n die einzelnen Ziffern „abzutrennen". Dabei hilft uns die INT-Funktion.

Von der natürlichen Zahl n ermittelt man $n_1 = [n : 10]$.

Nun erhält man die Einer E wie folgt:

$E = n - n_1 \cdot 10$.

Von der natürlichen Zahl n_1 ermittelt man $n_2 = [n_1 : 10]$.

Für die Zehner Z gilt dann:

$Z = n_1 - n_2 \cdot 10$.

Von der natürlichen Zahl n_2 ermittelt man $n_3 = [n_2 : 10]$.

Nun gilt für die Hunderter H:

$H = n_2 - n_3 \cdot 10$ usw. bis

$n_i = 0$ ist $(i \in \{1, 2, 3, \ldots\})$.

Um nun die Quersumme Q von n zu ermitteln, ist lediglich noch die Summe aus E, Z, H usw. zu bilden. Mit Hilfe eines Struktogramms läßt sich das Vorgehen übersichtlich beschreiben.

Eingabe:	Natürliche Zahl N
Quersumme	$Q \leftarrow 0$
Wiederhole	$G \leftarrow [N : 10]$
	$A \leftarrow N - G \cdot 10$
	$Q \leftarrow Q + A$
	$N \leftarrow G$
bis	$N = 0$
Ausgabe:	Quersumme Q

▲30▲ Arbeite die im Struktogramm dargestellte Vorschrift für $N = 125$ ab!

Im angegebenen Struktogramm findet man eine Wiederholung mit nachgestellter Abbruchbedingung.

Ein entsprechendes BASIC-Programm hat nun folgendes Aussehen:

Programm 8

```
10 INPUT N
20 LET Q = 0
30     LET G = INT (N/10)
40     LET A = N-G*10
50     LET Q = Q + A
60     LET N = G
70 IF NOT(N = 0) THEN 30
80 PRINT Q
90 END
```

Aufgabenbeispiel 7

Arbeite das Programm „Quersumme" mit folgenden Eingabedaten ab!

a) 17,34 b) −123

Wenn man das Programm formal für N = 17.34 abarbeitet, gelangt man zwar zum Resultat 8.34, aber das ist nicht korrekt.

Für N = −123 gibt es gar keine Lösung, da bei negativen Eingangsdaten der Algorithmus nicht abbricht.

[Der Computer würde in diesem Fall nach einiger Zeit mit einer Fehlermeldung „OV" (numerical overflow = engl.: Zahlenüberlauf) reagieren.]

Um solche Eingabewerte vom Computer abweisen zu lassen, bauen wir in das BASIC-Programm „Sperren" so ein, daß

a) negative Zahlen, b) Zahlen, die nicht ganzzahlig sind, als unzulässige Eingangsdaten zurückgewiesen werden.

Nach Eingabe von N ist dies mit Hilfe der IF-THEN-Anweisung zu realisieren:

```
11 IF N < 0 THEN PRINT „UNZULAESSIGE EINGABE!"; GOTO 10
12 IF N < > INT(N) THEN PRINT „UNZULAESSIGE EINGABE!": GOTO 10
```

Die beiden Bedingungen könnte man auch zu einer zusammenfassen:

```
11 IF N < 0 OR N < > INT(N) THEN PRINT „UNZULAESSIGE EINGABE!": GOTO 10
```

(or = engl.: oder)

In einer IF-THEN-Anweisung können nach dem „IF" mehrere Bedingungen durch logische Operatoren wie AND, NOT, OR verknüpft sein.

BASIC-Symbol	Bedeutung
NOT	nicht (Negation)
AND	und (Konjunktion)
OR	oder (Alternative)

IF [Bedingung 1] AND [Bedingung 2]
THEN [Anweisung]

Die Anweisung wird ausgeführt, wenn beide Bedingungen erfüllt sind, sonst nicht.

IF [Bedingung 1] OR [Bedingung 2]
THEN [Anweisung]

Die Anweisung wird ausgeführt, wenn mindestens eine Bedingung erfüllt ist, sonst nicht.

Tippt man das veränderte Programm „Quersumme" z.B. in den KC 85/1 ein und wählt als Eingabewert die Zahl 123456789, so erhält man als Quersumme die Zahl 37. Das ist aber offensichtlich falsch, da die Quersumme von 123456789 die Zahl 45 ist. Dieser Fehler liegt nun daran, daß der KC 85/1 Ergebnisse nur mit maximal 6 Ziffern anzeigt und auch intern nur mit höchstens 8 Ziffern arbeitet. Bei Zahlen mit mehr Ziffern wird automatisch gerundet, und wie beim Taschenrechner werden zur Anzeige abgetrennte Zehnerpotenzen genutzt.

▲31▲ Verändere das Programm „Quersumme" so, daß auch Zahlen, die größer als 999999 sind, als unzulässige Eingangsdaten abgewiesen werden.

▲32▲ Welche Sperren sind im Programm 6 notwendig, um eine Computerreaktion auf unzulässige Eingabewerte zu programmieren?

▲33▲ Sind folgende Bedingungen geeignet, um im Programm 6 die unzulässigen Eingabewerte für A abzuweisen?

a) A < > 0 OR A < > 1

b) A < > 0 AND A < > 1

▲34▲ Computer arbeiten intern ausschließlich mit Dualzahlen.

Das sind Zahlen, die nur aus Ziffern 0 und 1 bestehen und deren Stellenwerte Potenzen von 2 sind.

Zum Beispiel Dualzahl $101001 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 = 41$

a) Entwickle ein BASIC-Programm so, daß eine einzugebende (natürliche) Dualzahl in eine Dezimalzahl umgerechnet wird.

b) Überprüfe, ob das Programm für alle denkbaren Eingabewerte richtige Ergebnisse liefert!

Füge ggf. geeignete Anweisungen ein, so daß unzulässige Eingabewerte abgewiesen werden! *L. Flade / M. Pruzina*

Lösungen

▲31▲ IF N > 999999 THEN PRINT „UNZULAESSIGE EINGABE": GOTO 10

▲32▲ Für A sind „Sperren" notwendig. Alle Werte, außer 0 und 1, sind abzuweisen.

```
85 IF NOT (A = 0 OR A = 1) THEN PRINT „FALSCHE EINGABE!!": GOTO 80
```

▲33▲ a) Falsch, weil diese Bedingung für jedes A erfüllt ist.

b) Richtig, weil die Konjunktion nur falsch wird, wenn A = 0 bzw. 1 ist.

▲34▲ Eine Möglichkeit:

a)

```
 10 CLS
 20 PRINT „UMWANDLUNG VON DUAL- IN DEZIMALZAHLEN"
 30 PRINT „- - - - - - - - - - - - - -"
 40 PRINT
 50 INPUT „GIB EINE DUALZAHL EIN:"; B
 60 PRINT: LET S = 1 : LET D = 0
 70     LET Q = INT(B/10) : LET G = B - 10 * Q
 80     LET P = G * S : LET D = D + P
 90     LET S = 2 * S : LET B = Q
100 IF B < > 0 THEN 70
110 PRINT „DEZIMALZAHL .....";
    D
120 END
```

Fortsetzung auf S. 67

Unterhaltungsmathematik aus der äthiopischen mathematischen Schülerzeitschrift Hisbab

Sieben Laibe Brot

▲1▲ Drei Reisende trafen sich und saßen zum Essen zusammen. Einer der Reisenden brachte drei Laibe Brot mit und der zweite vier Laibe. Nachdem die sieben Laibe zu gleichen Teilen unter den drei aufgeteilt und verzehrt worden sind, brachte der dritte Reisende sieben Fünf-Cent-Stücke und sagte: „Bitte, teilt diese Münzen zwischen euch gerecht auf!"
Wieviel Geld müßte jeder der ersten zwei Reisenden erhalten?

Küken

▲2▲ Wenn einhundert Küken in 100 Tagen 100 Scheffel Getreide fressen, wieviel Scheffel fressen 10 Küken in 10 Tagen?

Lebensalter gesucht

▲3▲ *Tesfaye:* Siehst du diese drei Personen da drüben? Das Produkt ihrer Lebensjahre ist 2450, und die Summe ihrer Lebensjahre ergibt genau zweimal dein Alter. Wie alt sind sie?
Fassil: Du hast mir keine ausreichende Angaben gemacht!
Tesfaye: Tut mir leid. Das Produkt der Lebensjahre der beiden Jüngeren ist höher als das Alter des Ältesten.
Fassil: In diesem Falle sind sie ...

Im Aware-Sportklub

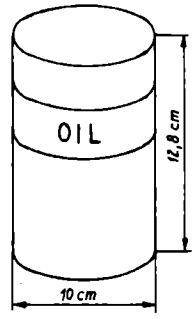
▲4▲ Der Aware-Sportklub hat 100 Mitglieder; 90 spielen Fußball, 80 spielen Basketball, und 70 spielen Volleyball. Einige Mitglieder betreiben keine dieser Sportarten, aber die Anzahl der Mitglieder, die alle drei Sportarten betreiben, ist 19mal so groß wie die Anzahl der nichtspielenden Mitglieder. Es gibt einige Fußballer, die keine der anderen Sportarten betreiben, aber die Basketball- und Volleyballspieler betreiben alle zumindest zwei Sportarten.
Wie viele Mitglieder spielen nur Fußball?

Die Film-Maus

▲5▲ In einem Science-Fiction-Film wird eine 5 cm lange Maus verwendet. Dafür muß eine große Maus ähnlich der kleinen angefertigt werden, die in jeder Dimension 100mal so groß ist.
a) Wievielmal so groß ist das Volumen der großen Maus, verglichen mit der kleinen Maus?
b) Wenn die kleine Maus eine Masse von 30 g hat, wieviel beträgt dann die Masse der großen Maus?
c) Wenn die Querschnittsfläche der Beine der kleinen Maus 1 cm^2 beträgt, wie groß ist dann die Querschnittsfläche der Beine der großen Maus?

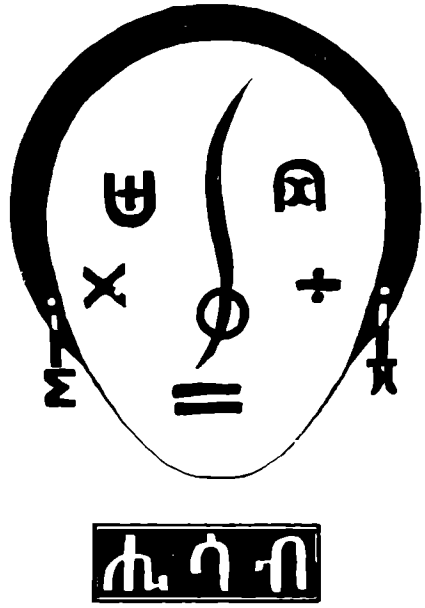
Autoöl in Dosen

▲6▲ Ein Liter Autoöl wird in Dosen (Ausmaße siehe Bild) verkauft. Ein großer Behälter von der gleichen Form wie die Öldose faßt einen Kiloliter.
Welche Ausmaße hat dieser?



Im Tunnel

▲7▲ Ein Güterzug von 1 km Länge fährt durch einen Tunnel, der ebenfalls 1 km lang ist. Wenn der Zug mit einer Geschwindigkeit von $15\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt, wie lange braucht er, um den Tunnel zu durchfahren?



Praktische Geometrie

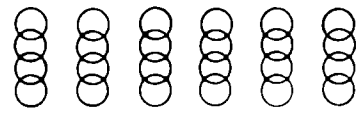
▲8▲ Ein Quadrat von 10 cm Seitenlänge soll in ein regelmäßiges Achteck verwandelt werden, indem man vier Ecken abschneidet. Wo müssen die Ecken abgeschnitten werden?

Kryptarithmetik

▲9▲ Die Zahl $273a49b5$ ist durch 9 und 11 teilbar.
Ermittle die Werte von a und b!

Der Kostenvoranschlag

▲10▲ Du hast 6 Kettenteile, jeder besteht aus 4 Gliedern. Die Kosten für das Öffnen eines Gliedes betragen 10 Cent. Die Kosten für das Zusammenschweißen der Schnittflächen betragen 25 Cent.
Ermittle die geringsten Kosten für das Zusammenfügen der 6 Teile zu einer Kette!



Der Knochen des Riesen

▲11▲ Erkläre, warum ein 6 m großer Riese Knochen $3\sqrt{3}$ mal so dick wie ein 2 m großer Mensch benötigt, um die entsprechende Masse auf die gleiche Weise zu tragen!

Der fehlende Cent

▲12▲ Sara ging täglich auf den Markt mit 30 Äpfeln, die sie zum Preis von 1 Cent für 2 Stück verkaufte. Wenn sie alle Äpfel verkaufte, brachte sie 15 Cent nach Hause. Ihre Freundin Hadas ging auch täglich auf den Markt mit 30 Äpfeln, von denen sie 3 Stück für 1 Cent verkaufte. Wenn sie alle verkaufte, brachte sie 20 Cent nach Hause. Eines Tages war Hadas krank. Deshalb bot Sara ihr an, ihre Äpfel zusammen mit ihren eigenen zu verkaufen. Sie verkaufte die gemischten Äpfel zu 5 Stück für 2 Cent. Als sie am Abend mit Hadas abrechnete, stellte sie mit Überraschung fest, daß sie nur 24 Cent anstelle der erwarteten 25 Cent eingenommen hatte.
Auf welche Weise hatte Sara den fehlenden Cent verloren?

Wir danken Dr. Christoph Bandt (ehem. IMO-Teilnehmer und Förderer der Arbeit der *alpha*) von der Sektion Mathematik der E.-M.-Arndt-Universität Greifswald für die Bereitstellung des Materials für diesen Beitrag. Während seiner Tätigkeit als Gastdozent an der Universität Addis Abeba hatte er engen Kontakt mit der mathematischen Schülerzeitschrift Hisbab.
Wir grüßen die Mitarbeiter dieser Zeitschrift, mit der wir seit vielen Jahren zusammenarbeiten, aufs herzlichste.
Redaktion alpha

In freien Stunden · alpha-heiter

Rolli, aus technikus, Berlin

Eine Aufgabe von Jules Verne

In dem Buch *Fünf Wochen im Ballon* finden wir folgendes Problem:
„Dieser Gelehrte (Kakburu, ein Statistiker) gab ... folgende Aufgabe zu lösen: Wenn die Zahl der von dem Doktor auf seinen Reisen um die Welt zurückgelegten Meilen gegeben ist, einen wieviel weiteren Weg hat dann – in Anbetracht des größeren Radius – sein Kopf zurückgelegt als seine Füße? Und weiter: Wenn die Zahl der von den Füßen und dem Kopf des Doktors hinter sich gebrachten Meilen bekannt ist, möge er daraus seine Körpergröße bis auf den Zentimeter genau berechnen."

Mitgeteilt von Dipl.-Math. D. Bauke, Gera

Mathematische Knobelei

Im Schaufenster liegen rote, blaue, gelbe und weiße Bälle.
Silke sagt: Rote und blaue sind es genau 5.
Thomas sagt: Blaue und gelbe sind es genau 8.
Annett sagt: Blaue sind am wenigsten da.
Daniel sagt: Weiße sind am meisten da.
Uta sagt: Genau 19 Bälle liegen im Schaufenster.
Wieviel weiße Bälle liegen im Schaufenster?

Aus einem Neubrandenburger Freizeitheft, für Schüler, Autor StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Teilung von Figuren

Wir widmen uns diesmal Rätseln, bei denen außer Zahlen ebene geometrische Figuren beteiligt sind.
a) Das Rechteck ist in zwei kongruente Teilflächen derart zu zerlegen, daß die in jeder Teilfläche enthaltenen Zahlen die gleiche Summe ergeben.
b) Diese magische Figur ist in sechs kongruente Teilflächen derart zu zerlegen, daß die in jeder Teilfläche enthaltenen Zahlen ebenfalls die gleiche Summe ergeben.

Aus: „rhozledy", Prag, übersetzt und mitgeteilt von O. Langer, Döbeln

a)

1		7	8				
		9		2			
	10				3		
		6					
					11		
		12				5	4

b)

		6		
	12		1	7
		3	10	
			9	4
	5		2	11
			8	

Spiel mit dem Taschenrechner

Berechne jede der folgenden vier Zahlen a, b, c und d!

$$a = 5 \cdot 7 \cdot 1061; \qquad b = \frac{5162 \cdot 15}{2};$$

$$c = \frac{263 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 15}{5}; \qquad d = \frac{256\,895}{5}.$$

	Zahl					Begriff				
a										
b										
c										
d										

Wenn du die jeweilige Ergebniszahl in der Anzeige stehen hast und den Rechner dann um 180° drehst, so kannst du jeweils einen Begriff lesen. Welche Begriffe sind es? Die Mittelbuchstaben dieser Begriffe ergeben (v. o. n. u.) den Namen eines Flusses im Harz.

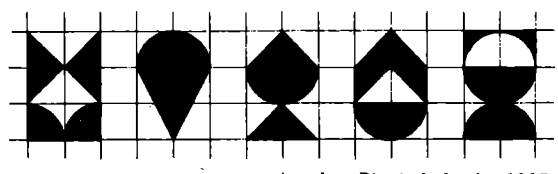
Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig

Fröhliche Mathematik

a) Anke und Birgit wiegen zusammen 55 kg. Stehen Anke und Christa auf der Waage, so zeigt sie 58 kg an; bei Birgit und Christa zusammen sind es sogar noch 7 kg mehr.
Wieviel kg wiegt Christa?

b) In einem Quiz wurden 20 Fragen gestellt. Für jede richtige Antwort wurden 5 Punkte vergeben, für jede falsche Antwort wurden 8 Punkte abgezogen. Mirko hatte zum Schluß 48 Punkte. Wieviel Fragen hat er richtig beantwortet?

c) Welches der fünf schwarzen zusammenhängenden Flächenstücke hat den größten Flächeninhalt?



Aus dem Pionierkalender 1987, Autor: Dr. M. Rehm, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität Berlin

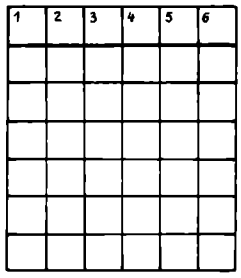
Füllrätsel

In die senkrechten Spalten des Füllrätsels sind sechs Wörter mit je sieben Buchstaben von oben nach unten einzutragen, die folgendes bedeuten:

1. Ein Kegelschnitt,
2. Kreis, auf dem die Eckpunkte eines Dreiecks liegen,
3. Kugelkappe,
4. Deutscher Mathematiker (1646 bis 1716),
5. Kreis, der jede Dreiecksseite in einem Punkt berührt,
6. Zahl, durch die geteilt wird.

Die oberste Zeile ergibt dann den Namen eines berühmten Mathematikers.

Oberstudienrat Th. Scholl, Berlin



Zwei Kryptogramme

a)

	Z	W	E	I
+	D	R	E	I
	F	Ü	N	F

	H	A	H	N
+	H	U	H	N
	K	Ü	K	E	N

Die Buchstaben sollen durch Ziffern so ersetzt werden, daß eine richtig gelöste Aufgabe entsteht. Für gleiche Buchstaben sollen in der jeweiligen Aufgabe gleiche, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern eingesetzt werden. (Es gibt mehrere Lösungen.)

Diplomlandwirt H. Boettcher, Weimar

Zum Scherzen aufgelegt

Aus den Silben

a – ab – ba – ex – gen – in – ke – kreis – lö – lu – men – nent – re – po – pro – sis – stand – sun – symp – te – to – vo – zi

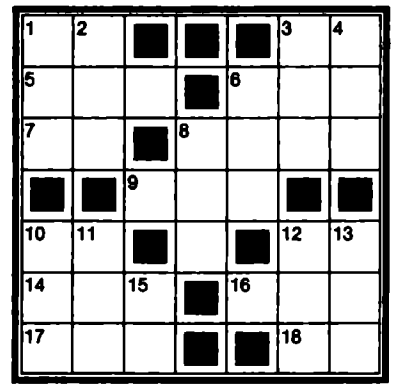
sind acht mathematische Begriffe zu bilden, deren Anfangsbuchstaben von oben nach unten gelesen den Namen für die „Vokabeln der mathematischen Sprache" ergeben.

1. Es füllt einen Körper aus.
2. Er geht auf Distanz.
3. Es steht Kopf.
4. Er hat eine innige Berührung.
5. Sie ist ein Ziel, das nicht erreicht wird.
6. Sie strebt nicht nach oben.
7. Wer sie gefunden hat, der freut sich.
8. Er ist ein Hochgestellter.

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

Kreuzzahlrätsel

Bestimme den Wert des Parameters n, und ergänze dann das Zahlenrätsel! (w bedeutet waagerecht und s senkrecht)



Waagerecht:

1. $4n - (7\text{w} : 2)$
3. $6n$
5. $2n^2 + 10n$
6. $9\text{w} - 8n$
7. $2\text{s} : n$
8. $16\text{w} \cdot n$
9. $7 \cdot 12\text{w}$
10. $2 \cdot 1\text{w}$
12. $5\text{w} : 12$
14. $3n + 8\text{s}$
16. $3n^2$
17. $8n$
18. $16\text{w} - 1\text{s}$

Senkrecht:

1. $5\text{w} - 2n$
2. $(18\text{w} - 12\text{w}) \cdot 10$
3. $8\text{s} + 15\text{s} + 3n$
4. $12\text{s} + 6n + 16\text{w}$
6. $11n + (7\text{w} : 2)$
8. $13\text{s} - 2\text{s} - 12\text{w}$
10. $5n^2 + 2n$
11. $12\text{s} + 9\text{w} - 6\text{w}$
12. $9\text{w} + n + 7\text{w}$
13. $14\text{w} + 2\text{s}$
15. $9 \cdot (3\text{w} : 13)$

Aus: Maximath, Belgien

Aus der Aufgabensammlung einer AG

Ersetze die Sternchen so durch Operationszeichen, daß alle Zahlen von 1 bis 9 dargestellt werden.

$1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 = n.$

Beispiel:

$1 \cdot 2 - 3 + 4 - 5 + 6 + 7 + 8 - 9 = 10$

mitgeteilt vom Mathematikfachlehrer V. Pöschel, Haus der JP Bruno Kühn, Gotha

Fünf Sinnsprüche

a) Der Turm zieht in 16 Zügen über alle Felder. Er erfaßt dabei zwei Sinnsprüche; welche?

b) Die Dame zieht in 14 Zügen über das gesamte Feld. Sie erfaßt drei Sinnsprüche; welche?

a)

Ü	T	R	E	D	R	U	N
C	I	E	D	A	U	E	R
H	D	F	U	A	T	A	H
T	U	T	G	L	Ü	C	K
I	G	D	N	U	H	C	I
G	H	H	I	L	F	R	E
E	C	S	N	E	M	R	E
E	D	E	L	S	E	I	D

b)

N	A	G	B	L	A	N	S
P	G	W	E	H	O	CH	T
R	T	I	E	W	W	E	S
E	I	T	H	E	O	N	I
I	S	N	R	E	G	N	G
S	E	F	R	I	S	CH	N
F	L	E	I	S	S	K	A
A	L	L	E	R	A	N	F

alpha-Sonderwettbewerb

Aufgaben aus Büchern des Teubner-Verlages, Leipzig

LEIPZIG

Letzter Einsendetermin: 17. Dezember 1987

Zur Entwicklung der gesamten außerunterrichtlichen Arbeit auf mathematischem Gebiet ist 1963 von den einschlägigen Verlagen mit Unterstützung durch die Mathematische Gesellschaft der DDR mit der Herausgabe einer Mathematischen Schülerbibliothek zu beginnen, hieß es im *Mathematikbeschluß* vom 17. Dezember 1962.

Heute, ein Vierteljahrhundert später, liegen bereits mehr als 125 Bände der *Mathematischen Schülerbücherei* (MSB) vor, und sechs Verlage beteiligten sich an dieser erfolgreichen Buchreihe (vgl. dazu auch *alpha* 20 (1986) 2, S. 42 bis 43).

Der BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, im Februar 1986 als erster Verlag mit der Ehrenmedaille der *Mathematischen Gesellschaft der DDR* ausgezeichnet, ruft alle *alpha*-Leser zum Lösen von fünf ausgewählten Aufgaben aus MSB-Bänden auf. Außerdem werden die Einsender gebeten, auf ihrer Zuschrift an die *alpha*-Redaktion zu vermerken, welche der bei Teubner erschienenen MSB-Bände sie selbst besitzen.

Doch zunächst wollen wir in drei aus dem Russischen übersetzten Büchern der *Mathematischen Schülerbücherei* lesen:

● Kommen wir wieder auf die für das vorliegende Buch wesentliche *Boolesche Algebra* zurück. Wir stellen die Frage, wie man die Mengen, welche die Elemente dieser Algebra sind, darstellen kann.

Es ist klar, daß die einfachste Art der Darstellung einer Menge die sogenannte *direkte* oder *Abzählmethode* ist, bei der alle Elemente der betrachteten Menge aufgezeigt werden. So kann man von der *Menge der Schüler: Peter, Klaus, Horst und Monika* sprechen, von der *Menge der Zahlen: 1, 2, 3, 4, 5* oder von der *Menge der vier Grundrechenarten der Arithmetik: Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division*. In der Mathematik ist es üblich, bei der Angabe aller Elemente irgendeiner Menge diese in geschweifte Klammern einzuschließen. So kann man schreiben

$A = \{\text{Peter, Klaus, Horst, Monika}\}$,
$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
$C = \{+, -, \times, :\}$

(in der letzten Schreibweise symbolisieren die Zeichen der Grundrechenarten diese selbst).

Eine solche Methode der Darstellung einer Menge erweist sich jedoch in dem Falle als sehr unbequem, wenn die Elemente der Menge sehr zahlreich sind. Sie ist völlig unbrauchbar für die Darstellung *unendlicher* Mengen (wir können eben nicht unendlich viele Elemente der Menge aufzählen!).

Leseprobe aus dem MSB-Band Nr. 83:
I. M. Jaglom, Ungewöhnliche Algebra.
1976 (95 S., 45 Abb., 5,50 M,
Bestell-Nr. 665 789 2)

● In der elementaren Algebra wird zusammen mit den reellen Zahlen auch das umfangreichere System der komplexen Zahlen betrachtet. Der Grund, der dazu zwingt, die komplexen Zahlen zu betrachten, ist mit der Lösung quadratischer Gleichungen verbunden. Er besteht darin, daß man einige quadratische Gleichungen, zum Beispiel

$$x^2 + 1 = 0, \qquad (1)$$

nicht lösen kann, wenn man sich nur auf die reellen Zahlen beschränkt (denn es existiert keine solche reelle Zahl a, so daß a^2 gleich -1 ist).

Die Geschichte der komplexen Zahlen beginnt mit dem 16. Jahrhundert. Die italienischen Mathematiker *Girolamo Cardano* und *Raffaele Bombelli* führten beim Lösen quadratischer Gleichungen das Symbol $\sqrt{-1}$, die formale Lösung der Gleichung (1), aber auch den Ausdruck $b\sqrt{-1}$, die formale Lösung der Gleichung

$$x^2 + b^2 = 0,$$

ein. Ausdrücke der noch allgemeineren Form $a + b\sqrt{-1}$ kann man dann als formale Lösung der Gleichung

$$(x - a)^2 + b^2 = 0 \qquad (2)$$

betrachten.

Später wurden die Ausdrücke $a + b\sqrt{-1}$ als *imaginäre* und danach als *komplexe* Zahlen bezeichnet und $a + bi$ geschrieben.

Leseprobe aus dem MSB-Band Nr. 95:
I. L. Kantor/A. S. Solodownikow,
Hyperkomplexe Zahlen.
1978 (156 S., 18 Abb., 9,00 M,
Bestell-Nr. 665 871 3)

● Die Forschungsergebnisse *Lobatschewskis* wurden von der Mehrheit seiner Zeitgenossen nicht verstanden. Deshalb beurteilten sie seine geometrischen Arbeiten sowohl in Rußland als auch im Ausland negativ. Die Ideen des russischen Gelehrten waren zu kühn und einschneidend, sie stimmten nicht mit den damals in der Wissenschaft herrschenden Ansichten überein. Erst nach dem Tode fanden seine Arbeiten allgemeine Anerkennung. *Lobatschewski* war jedoch durch die Kritik nicht von der Richtigkeit seiner Überlegungen und Schlußfolgerungen abzubringen, sondern setzte beharrlich die Untersuchung des von ihm geschaffenen geometrischen Systems fort. Er veröffentlichte eine Reihe von Arbeiten, die mit Fragen der nichteuklidischen Geometrie verbunden waren. Die letzte Arbeit, die er kurz vor seinem Tode beendete, mußte, da er erblindet war, nach seinem Diktat geschrieben werden.

Die wissenschaftliche Arbeit *Lobatschewskis* blieb nicht auf geometrische Untersuchungen beschränkt, sondern wir verdanken ihm auch einige grundlegende Arbeiten zur Algebra und Analysis. Das von ihm gefundene Verfahren zur angenäherten Lösung algebraischer Gleichungen ist sehr originell und leicht anwendbar.

Leseprobe aus dem MSB-Band Nr. 96:
A. S. Smogorschewski,
Lobatschewskische Geometrie.
1978 (75 S., 43 Abb., 6,00 M,
Bestell-Nr. 665 842 2).

Wettbewerbs-Aufgaben

▲1▲ Besuchern, die das Lektorat Mathematik des Teubner-Verlages in Leipzig besuchen, wird erklärt: Wenn Sie zwei Stufen auf einmal genommen hätten, dann wäre eine Stufe übrig geblieben. Wenn Sie drei bzw. vier Stufen auf einmal nehmen, dann bleiben zwei bzw. drei Stufen am Ende übrig. Wenn Sie jedoch fünf Stufen auf einmal nehmen können, dann kommen Sie genau oben an. Insgesamt sind es nicht mehr als 50 Stufen.

Man gebe die Zahl der Stufen an!

Die Aufgabe ist dem MSB-Band Nr. 99 entnommen:
R. Thiele, Mathematische Beweise.
1979, 5. Aufl. 1988 (176 S., 68 Abb.,
8,60 M, Bestell-Nr. 665 919 3)

▲2▲ Drei Geraden G_1, G_2, G_3 einer Ebene werden durch folgende Gleichungen beschrieben:

$(G_1)\ x + 2y = 4$, $(G_2)\ x - 2y = 0$,
$(G_3)\ 3x - 2y = 4$.

Man ermittle $G_1 \cap G_2 \cap G_3$!

Die Aufgabe ist dem MSB-Band Nr. 107 entnommen:
H. Kästner/P. Göthner,
Algebra – aller Anfang ist leicht.
1983, 3. Aufl. 1987 (155 S., 30 Abb.,
8,40 M, Bestell-Nr. 666 138 1)

▲3▲ Es sind Gleichungen mit den Wurzeln a) 3 und 7, b) -6 und 2, c) -10 und -1 zu bestimmen!

Die Aufgabe ist dem MSB-Band Nr. 119 entnommen:
W. Krysicki, Keine Angst vor x und y.
Übers. a. d. Poln.
1984, 2. Aufl. 1987 (108 S., 19 Abb.,
6,50 M, Bestell-Nr. 666 186 7)

▲4▲ Man suche zwei Zahlen, die so beschaffen sind, daß, wenn ihre Summe zu ihrem Produkt addiert wird, 79 herauskommt!

Die Aufgabe ist dem MSB-Band Nr. 125 entnommen:

M. Deweß/G. Deweß, Summa summarum. Kostproben unterhaltsamer Mathematik.
1986, 2. Aufl. 1987 (92 S., 78 Abb., 15,00 M, Bestell-Nr. 666 317 6)

▲5▲ Ein Würfel werde von allen denjenigen Ebenen geschnitten, die durch die Mittelpunkte der drei jeweils von einem Eckpunkt ausgehenden Kanten verlaufen. Dabei entsteht ein Restkörper.
a) Ermitteln Sie die Anzahl aller Eckpunkte und die Anzahl aller Kanten des Restkörpers!
b) Nennen Sie die Form und die Anzahl aller Teilflächen der Oberfläche des Restkörpers!

Die Aufgabe ist dem 1987 erscheinenden MSB-Band Nr. 130 entnommen:
J. Lehmann, Mathematik – von der Pflicht zur Kür

Teilnahmebedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an:

Redaktion alpha
Postfach 14
Leipzig
7027

3. *alpha*-Leser, die selbst einige der im Teubner-Verlag erschienenen MSB-Bände besitzen, werden gebeten, diese Titel unter ihrer Lösung der Aufgaben zu nennen.
4. Letzter Einsendetermin ist der 17. Dezember 1987.
5. Unter den Einsendern werden Buchpreise aus der Produktion des Teubner-Verlages ausgelost.
alpha wird darüber berichten.

J. Lehmann/J. Weiß

Einige weitere Bände
der Mathematischen Schülerbücherei

H. Belkner, Determinanten.
1968, 4. Aufl. 1987 (MSB Nr. 33, 96 S., 8 Abb., 4,80 M, Bestell-Nr. 665 100 1)

H. Belkner, Matrizen.
1970, 4. Aufl. 1986 (MSB Nr. 48, 96 S., 4,30 M, Bestell-Nr. 665 552 0)

I. M. Gelfand/E. G. Glagolewa/A. A. Kirillow, Die Koordinatenmethode.
1968 (MSB Nr. 41, 75 S., 36 Abb., 3,40 M, Bestell-Nr. 665 107 9)

I. M. Gelfand/E. G. Glagolewa/E. E. Schnol, Funktionen und ihre graphische Darstellung.
1971, 2. Aufl. 1974 (MSB Nr. 58, 127 S., 132 Abb., 9 Taf., 7,00 M, Bestell-Nr. 665 600 5)

M. Hasse, Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik.
1965, 9. Aufl. 1987 (MSB Nr. 2, 86 S., 7 Abb., 3,30 M, Bestell-Nr. 665 084 2)

L. D. Kudrjavzev, Gedanken über moderne Mathematik und ihr Studium.
1983 (MSB Nr. 112, 140 S., 7,00 M, Bestell-Nr. 666 077 6)

A. Kufner, Raum und Entfernung.
1981 (MSB Nr. 104, 90 S., 31 Abb., 6,00 M, Bestell-Nr. 666 028 2)

M. Miller, Gelöste und ungelöste mathematische Probleme.
1973, 5. Aufl. 1986 (MSB Nr. 73, 96 S., 7 Abb., 5,70 M, Bestell-Nr. 665 673 4)

M. Miller, Rechenvorteile.
1963, 8. Aufl. 1987 (MSB Nr. 14, 95 S., 1 Abb., 3,75 M, Bestell-Nr. 665 065 8)

P. Schreiber, Die Mathematik und ihre Geschichte im Spiegel der Philatelie.
1980 (MSB Nr. 68, 101 S., 16 farb. Taf., 9,80 M, Bestell-Nr. 665 984 7)

E. Schröder, Mathematik im Reich der Töne.
1982, 3. Aufl. 1988 (MSB Nr. 106, 111 S., 61 Abb., 7,00 M, Bestell-Nr. 666 078 4)

J. Sedláček, Einführung in die Graphentheorie.
1968, 2. Aufl. 1972 (MSB Nr. 40, 171 S., 73 Abb., 6,40 M, Bestell-Nr. 665 105 2)

Fortsetzung von Seite 51

Wir überprüfen unsere Vermutung durch die Untersuchung von Spezialfällen:
Die bereits gewonnenen Ergebnisse

$A_0^4 = 4;\ A_1^4 = 2;\ A_2^4 = 1;$

$A_2^6 = 0;\ A_3^6 = 0;\ A_1^6 = 12$

erhält man durch Einsetzen spezieller Werte für m, k und r in (10) erneut, so ist z. B.

$$A_1^6 = \binom{4-1}{1} \cdot \binom{3}{4-1} \cdot 2^{4-2} = 12 .$$

Wäre $r > \frac{k}{2}$, so ist $k - r < r$ und $\binom{k-r}{r} = 0$. Dies bedeutet, daß bei einer solchen Auswahl von k Elementen aus $\{x_1; \ldots; x_m; y_1; \ldots; y_m\}$ in keinem Fall r Paare auftreten können.
Die Bestätigung unserer Vermutung (10) macht uns Mut. Wie man weiß, genügt jedoch die Untersuchung von Einzelbeispielen – und seien es noch so viele – als Nachweis für die Richtigkeit einer Vermutung nicht.
Wir verallgemeinern unsere bisherigen Überlegungen und untersuchen die Frage, in wieviel Kombinationen von k Elementen der Menge
$M = \{x_1; \ldots; x_m; y_1; \ldots; y_m\}$ genau r Paare auftreten.
Zunächst ist klar: Solange weniger als r Elemente x_i (bzw. y_i) in einer Kombination auftreten, können nicht r Paare $(x_i; y_i)$ vorkommen. Wir betrachten nun sofort den *allgemeinen Auswahltyp* der Form

$y_{i_1}; \ldots; y_{i_{r+s}}; x_{j_1}; \ldots; x_{j_{k-(r+s)}}$.

Für die Auswahl der $k - (r + s)$ Elemente x_i aus der Menge $\{x_1; \ldots; x_m\}$ gibt es $C_{k-(r+s)}^m$ Möglichkeiten. Eine solche sei $x_1; \ldots; x_{k-(r+s)}$. Die r für die Paarbildung geeigneten Elemente y müssen aus der Menge $\{y_1; \ldots; y_{k-(r+s)}\}$ gewählt werden, es gibt $C_r^{k-(r+s)}$ solcher Kombinationen. Die restlichen s Elemente y dürfen nun in keinem Fall zu den gewählten x_j gehören (denn sonst treten mehr als r Paare auf), sie müssen also aus der Menge $\{y_{k-(r+1)}; \ldots; y_m\}$ stammen. Es gibt genau $C_s^{m-(k-(r+s))}$ solcher Auswahlmöglichkeiten. Also hat man – wieder unter Berücksichtigung der Analogie bei der Wahl der y_i und der x_j – gefunden:
Bezüglich des gewählten Auswahltyps ergeben sich genau

$2 \cdot C_s^{m-(k-(r+s))} \cdot C_r^{k-(r+s)} \cdot C_{k-(r+s)}^m$

Kombinationen, in denen genau r Paare auftreten.
Die Umformung der Summe erfolgt wie in dem bereits durchgerechneten Fall (6) und man erhält in der Tat

$$A_k^n = A_r^{2m} \binom{k-r}{r} \cdot \binom{m}{k-r} \cdot 2^{k-2r}.$$

Der mutige Leser möge die Rechnung ausführen!
Die Formel (10) gilt nun auch für ungerades k. Dann hätte in Tabelle 4 der *Auswahltyp* in der letzten Spalte die Form

$y_{j_1}; \ldots; y_{j_{\frac{k-1}{2}}}; x_{i_1}; \ldots; x_{i_{\frac{k+1}{2}}}$ bzw.

$x_{j_1}; \ldots; x_{j_{\frac{k-1}{2}}}; y_{i_1}; \ldots; y_{i_{\frac{k+1}{2}}}$.

Alle unsere Überlegungen lassen sich auf den Fall, daß k ungerade ist, übertragen.
Mein Antwortbrief an Herrn K. war relativ kurz; er enthielt im wesentlichen die gewonnene Formel. Dem interessierten *alpha*-Leser würde dies sicher nicht genügen; deshalb haben wir gemeinsam die Gedanken nachvollzogen, die zur Entstehung der gewünschten Formel führten.

P. Göthner

Fortsetzung von Seite 62

b) Unzulässige Eingabewerte für das angegebene Programm sind:
- Negative Zahlen.
- Alle Zahlen, die nicht ganzzahlig sind.
- Die einzugebenden Zahlen dürfen nur die Ziffern Ø und 1 haben.

```
51 IF B<Ø OR B<>INT(B) THEN
   „UNZULAESSIGE EINGABE!“:
   GOTO 4Ø
71 IF G>1 THEN PRINT „KEINE
   DUALZAHL!“: GOTO 4Ø
```

Außerdem muß man beachten, daß unser Computer Zahlen mit mehr als 6 Ziffern in Zahlen mit abgetrennten Zehnerpotenzen umwandelt.

```
52 IF B>111111 THEN PRINT „ZAHL
   ZU GROSS!“: GOTO 4Ø
```

Lösungen

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ Von einer Wasserpflanze in einem Fischteich befinden sich $\frac{5}{6}$ ihrer Länge außerhalb des Wassers, $\frac{1}{12}$ im Schlamm und 2 feet im Wasser.
Wie groß ist die gesamte Länge der Pflanze?

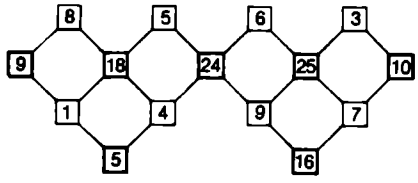
Lösung: Die gesamte Länge der Pflanze sei x feet.

$x = \frac{1}{12}x + 2 + \frac{5}{6}x$; $x = 24$.

Die Pflanze ist 24 feet lang.

▲2▲ Die bereits eingetragenen Zahlen stellen die Summe von Ziffern dar, die sich in den Vierecken, die direkt mit ihnen verbunden sind, befinden. Diese Ziffern, alle verschieden, haben einen Wert von 1 bis 9. Setzen Sie diese entsprechend ein!

Lösung:



▲3▲ Gibt es ein Dreieck mit den Seiten $a = 7$ cm und $b = 2$ cm, bei dem die Länge der Höhe auf seiner dritten Seite gleich dem geometrischen Mittel der Längen der beiden anderen Höhen ist?

Lösung: Angenommen, es gibt solch ein Dreieck.
Sein Flächeninhalt sei A. Dann gilt

$h_a = \frac{2A}{a}$, $h_b = \frac{2A}{b}$ und $h_c = \frac{2A}{c}$.

Setzt man dies in die geforderte Beziehung $h_c = \sqrt{h_a h_b}$ ein, so erhält man $\frac{2A}{c} = \sqrt{\frac{2A \cdot 2A}{ab}}$, und daraus $c = \sqrt{ab}$. Im vorliegenden Fall ist $c = \sqrt{7 \cdot 2}$ cm $= \sqrt{14}$ cm. Nach der Dreiecksungleichung muß $c > a - b$ sein. Es ist aber $\sqrt{14} < 7 - 2 = 5$. Folglich kann es kein derartiges Dreieck geben.

▲4▲ Auf dem Bild ist ein elektrischer Stromkreis mit einer Klingel, drei Lämpchen und drei Tastschaltern, von denen jeder im unbetätigten Zustand das eine Kontaktpaar verbindet und im betätigten Zustand das andere, dargestellt. Der Stromkreis ist ans Netz angeschlossen. Was geschieht beim Betätigen eines der Tastschalter?

Lösung: Die Klingel ertönt, und das Lämpchen über dem betätigten Schalter leuchtet auf.

Lösungen zu: Symmetrie im Raum, Teil 2

▲2▲ Symmetriezentren sind die Mitten der Würfel, der Würfelseitenflächen, der Würfelkanten sowie die Würfelecken selbst.

▲3▲ Zum Beispiel ein Spat (oder Parallelepiped; dies ist eine zum Parallelogramm analoge Figur im Raum).

▲9▲ Die Radachse ist Drehsymmetrieachse vom Grad 9 (beim 28er Rad: 36 Speichen, und jede 4. Speiche hat die gleiche Lage).

▲11▲ Drei 4zählige, vier 3zählige und sechs 2zählige.

▲12▲ Durch geeignetes Abschneiden der Ecken am Ikosaeder erhält man die *Ekken* des Fernsehfußballs.

Lösung zu: Eine Aufgabe von René Descartes

Der Beweis folgt aus dem Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck: GI ist die Höhe im Dreieck FHI, deren Quadrat ist dem Produkt der Höhenabschnitte FG und GH gleich, da aber $FG = 1$, ist GI die Wurzel aus GH.

Lösung zu: Anordnung von Schachfiguren

Kb1, Da4, Tc3, Td5, Lb6, Le2, Se1, Se6.
Kb6, Da3, Tc4, Td5, Lb1, Le1, Se2, Se6.
Kc4, Db6, Ta3, Td2, Le4, Le5, Sc1, Se1.
Ke5, Dc6, Tb4, Td1, La2, Le3, Sa3, Se2.
Ke3, Db2, Ta4, Tc4, Ld1, Ld6, Se1, Se6.
Mit der schon gegebenen Lösungsmöglichkeit ergeben sich sechs grundsätzlich verschiedene Anordnungen, welche jeweils um 180° gedreht, sechs weitere Lösungen ermöglichen. Insgesamt lassen sich somit 12 verschiedene Anordnungen darstellen.

Lösungen zu: In freien Stunden · alpha-heiter

Eine Aufgabe von Jules Verne
Erdradius: R; Körpergröße: x;
Wegstrecke der Füße: m;
Wegstrecke des Kopfes: M.
Die zurückgelegten Wegstrecken sind proportional zu den Radien über die gleichen Zentriwinkel, daher gilt:

$m : R = M : (R + x)$.

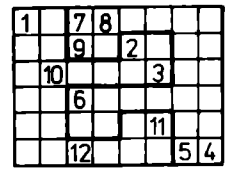
Das Umstellen der Proportion liefert für die erste Frage:

$M = m\left(1 + \frac{x}{R}\right)$ und für

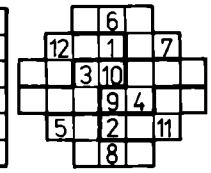
die zweite Frage: $x = R \cdot \left(\frac{M}{m} - 1\right)$.

Mathematische Knobelei
Es liegen 8 weiße Bälle im Schaufenster.

Teilung von Figuren
a)



b)



Spiel mit dem Taschenrechner
Die Begriffe lauten:
SEILE, SILBE, SOSSE, GLEIS.
Der Fluß im Harz heißt ILSE.

Fröhliche Mathematik
a) Christa wiegt 34 kg.
(Anke 24 kg, Birgit 31 kg)
b) 16 Antworten waren richtig.
c) Keines, denn alle fünf schwarzen zusammenhängenden Flächenstücke haben den gleichen Flächeninhalt.

Füllrätsel

1 E	2 U	3 K	4 L	5 I	6 D
L	M	A	E	N	I
L	K	L	I	K	V
I	R	O	B	R	I
P	E	T	N	E	S
S	I	T	I	I	O
E	S	E	Z	S	R

Zwei Kryptogramme
a) z. B.

	7654	1728
	+1254	+4328
	8908	6056

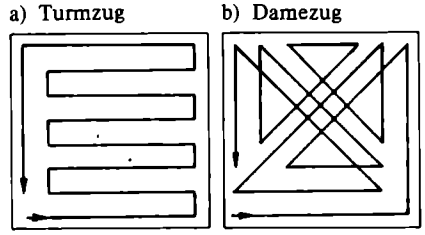
b)

	7870	7270
	+ 7270	+ 7870
	15140	15140

Zum Scherzen aufgelegt
1. Volumen; 2. Abstand; 3. Reziproke; 4. Inkreis; 5. Asymptote; 6. Basis; 7. Lösungen; 8. Exponent – *Variable*

Kreuzzahlrätsel
$n = 13; 42 \ldots 78; 468 \cdot 169; 20 \cdot 6591;$
$\ldots 273 \ldots; 84 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 9; 715 \cdot 507; 104 \ldots 65.$

Fünf Sinnsprüche
a) Turmzug b) Damezug



zu a) Edel sei der Mensch, hilfreich und gut. Glück hat auf die Dauer nur der Tüchtige.
zu b) Aller Anfang ist schwer. Frisch gewagt ist halb gewonnen. Ohne Fleiß kein Preis.

Aus der Aufgabensammlung einer AG
$1 \cdot 2 \cdot 3 + 4 - 5 + 6 + 7 - 8 - 9 = 1$
$1 \cdot 2 + 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 - 9 = 2$

$1+2+3-4+5+6+7-8-9=3$
$1\cdot 2+3-4+5+6-7+8-9=4$
$1+2-3+4+5+6-7+8-9=5$
$1\cdot 2+3-4+5+6-7-8+9=6$
$1+2+3-4+5+6-7-8+9=7$
$1\cdot 2+3-4+5-6+7-8+9=8$
$1+2+3+4-5-6-7+8+9=9$

Lösungen zu:
Knifflige Glückwünsche

▲1▲

a) BLPOO

b) BLOOP

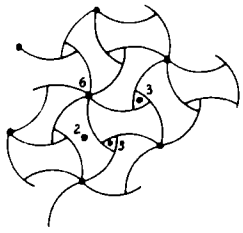
c) OOPHO

d) OOOHP

▲2▲ Aus (2) und (4) folgt $H=L+2A$. Aus (1) oder (5), die offenbar dieselbe Gleichung verkörpern, folgt $H=L+P-A$, woraus sich $P=3A$ ergibt. Nun ergeben sich (2) $L=\frac{2A}{(3A-2)}$ und aus (3) $L=\frac{4A}{(3A\cdot A-1)}$, woraus man durch Gleichsetzen einer kubischen Gleichung in A erhält, welche die Lösungen $A=0$ (entfällt) und $A=1$ (zweifach) hat. Also ist $A=1$, womit $L=2$, $P=3$ und $H=4$ folgen.

Lösungen zu:
Symmetrische Figuren

a), b) Bild 1: $n=6$ und damit zentralsymmetrisch, keine Symmetrieachse; B2: $n=7$, weder axial- noch zentralsymmetrisch; B3: $n=5$, weder axial- noch zentralsymmetrisch; B4: $n=3$, weder axial- noch zentralsymmetrisch; B5: weder dreh-, axial- noch zentralsymmetrisch; B6: $n=3$, weder axial- noch zentralsymmetrisch; B7: $n=10$ und damit zentralsymmetrisch. c) Hinsichtlich der Parkettierung mit dem Muster aus dem Bild 1 gibt es noch Drehsymmetriezentren vom Grad 3 und vom Grad 2. (Siehe Wiedergabe mit Ergänzungen!)



Lösung zu: Eine Aufgabe
von Prof. Dr. Treder, Heft 1/87

▲2804▲ Relativ zum festen Ufer bewegt sich der Schwimmer stromabwärts mit der Geschwindigkeit $u+v$ und stromaufwärts mit der Geschwindigkeit $u-v$. Folglich braucht er für die Strecke s hin und zurück die Zeit

$t=\frac{s}{u+v}+\frac{s}{u-v}$. Die Formel gilt nur für $u>v$; im Grenzfall $u=v$ kommt der Schwimmer relativ zum Ufer stromaufwärts nicht von der Stelle.

Lösungen zu:
Wir lösen Zahlenrätsel, Heft 2/87

▲1▲
$$\begin{array}{rcl} 105 & - & 80 = 25 \\ : & + & + \\ 21 & \times & 3 = 63 \\ \hline 5 & + & 83 = 88 \end{array}$$

▲2▲
$$\begin{array}{rcl} 703 & - & 54 = 649 \\ : & - & - \\ 19 & \cdot & 31 = 589 \\ \hline 37 & + & 23 = 60 \end{array}$$

▲3▲
$$\begin{array}{rcl} 952 & - & 445 = 507 \\ : & - & - \\ 34 & \cdot & 167 = 201 \\ \hline 28 & + & 278 = 306 \end{array}$$

▲4▲
$$\begin{array}{rr} 607\,841 & 607\,841 \\ +\ 412\,359 & -412\,359 \\ \hline 1\,020\,200 & 195\,482 \end{array}$$

Lösungswort: R e g u l a t i o n
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Lösungen zu:
Anordnung von Schachfiguren
Heft 2/87

Da1, Dc3, Dd4, De5, Dg7.
Da1, Dc3, De5, Df6, Dg7.
Db1, Dd3, De4, Df5, Dh7.
Dd2, Dd3, Dd4, Dd5, Dd8.
De2, De3, De4, De5, De8.
Diese 5 Grundlösungen können jeweils dreimal um je 90 Grad gedreht werden, wodurch sich $5\times 4=20$ verschiedene Lösungen ergeben.

Dd6, De4, Df5, Dg7, Sc1.
Diese Stellung einschließlich den daraus resultierenden Spiegelungen ist die bisher einzig bekannte Position, in der jedes der 64 Felder entweder besetzt oder beherrscht wird. Sie wurde 1908 von J. Wallis in der Zeitschrift *The Strand Magazine* zuerst veröffentlicht.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb
Heft 5/86, Fortsetzung

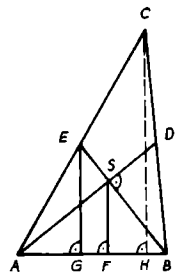
Ma 10/12 ■ 2718 Es sei D der Mittelpunkt von $\overline{BC}$, E der Mittelpunkt von $\overline{AC}$. Dann gilt $AD\perp BE$, $\overline{AD}=24$ cm und $\overline{BE}=18$ cm, also $\overline{AS}=\frac{2}{3}\cdot\overline{AD}=16$ cm,

$\overline{BS}=\frac{2}{3}\cdot\overline{BE}=12$ cm.

Nach dem Strahlensatz gilt
$\overline{SF}:\overline{EG}=12:18=2:3$,
$\overline{EG}:\overline{CH}=1:2$, also $\overline{CH}=3\cdot\overline{SF}$.
Im rechtwinkligen Dreieck ABS gilt nach dem Satz des Pythagoras
$\overline{AB}=\sqrt{256+144}$ cm $=20$ cm.
Ferner gilt
$\overline{BF}\cdot\overline{AB}=\overline{BS}^2$, also
$\overline{BF}=\frac{144}{20}$ cm $=7{,}2$ cm, aber auch
$\overline{FS}^2=\overline{AF}\cdot\overline{BF}=12{,}8\cdot 7{,}2$ cm^2,
$\overline{FS}=9{,}6$ cm, und somit $\overline{CH}=28{,}8$ cm.
Für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC erhalten wir

$A_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{CH}$

$=\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 28{,}8$ cm$^2=288$ cm^2.



Ma 10/12 ■ 2719 Wir betrachten die ersten 20 der 39 Zahlen. Unter diesen gibt es sicher zwei auf Null endende Zahlen, eine endet nicht auf 90; diese sei n.
Die Quersummen der Zahlen n, $n+1$, $n+2$, ..., $n+9$, ..., $n+19$ sind paarweise verschieden, d. h., eine dieser Zahlen hat eine durch 11 teilbare Quersumme. Die Zahlen 999 980 und 1 000 019 bilden ein gewünschtes Beispiel.

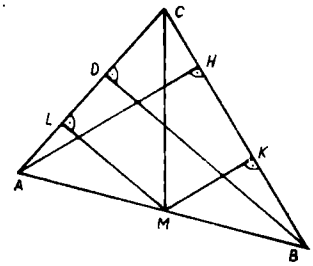
Ma 10/12 ■ 2720
Es sei $\overline{AH}=\overline{CM}$ und $\overline{AH}\cong\overline{BD}$.
Wegen $\triangle ABH\sim\triangle MBK$ gilt
$\overline{AH}:\overline{MK}=\overline{AB}:\overline{MB}=2:1$, also

$\overline{MK}=\frac{1}{2}\cdot\overline{AH}=\frac{1}{2}\cdot\overline{CM}$.

Das Dreieck CMK ist rechtwinklig und das Verhältnis einer Kathete zur Hypotenuse beträgt 1:2, d. h., Winkel MCK hat die Größe 30°. Analog dazu gilt

$\overline{LM}=\frac{1}{2}\cdot\overline{BD}\leqq\frac{1}{2}\cdot\overline{AH}=\frac{1}{2}\cdot\overline{CM}$.

Folglich hat der Winkel ACM die Größe 30° oder er ist kleiner als 30°. Zusammen gilt für die Größe γ des Winkels ACB $\leqq 60°$.



Lösungen zum alpha-Wettbewerb
Heft 6/86

Ma 5 ■ 2722 Aus (1) folgt: Dieter hat nicht den Familiennamen Müller. Aus (2) folgt: Weder Heiko noch Susanne haben den Familiennamen Müller. Folglich hat Bärbel den Familiennamen Müller. Aus (3) folgt: Heiko hat nicht den Familiennamen Meier. Aus (2) folgt: Heiko hat nicht den Familiennamen Lehmann. Folglich hat Heiko den Familiennamen Schulze. Aus (2) folgt: Susanne hat nicht den Familiennamen Lehmann. Folglich hat Susanne den Familiennamen Meier. Somit hat Dieter den Familiennamen Lehmann.

Ma 5 ■ 2723 74 kg − 34 kg = 40 kg; Alfons und Bernd lieferten zusammen 40 kg Altpapier ab. Angenommen, auf Bernd ent-

fallen x kg Altpapier; dann entfallen auf Alfons $3 \cdot x$ kg Altpapier. Deshalb gilt
$x + 3x = 40$, $4x = 40$, $x = 10$.
Bernd sammelte 10 kg, Alfons 30 kg, Claus 18 kg und Dieter 16 kg Altpapier.

Ma 5 ■ 2724 205 M − 25 M = 180 M;
180 M : 2 = 90 M; 90 M + 25 M = 115 M;
Kurt hat 90 M, Peter 115 M gespart.

Ma 5 ■ 2725
Aus $a + b = 70$ cm und $b = a + 10$ cm
folgt $2a + 10$ cm $= 70$ cm, $2a = 60$ cm,
$a = 30$ cm, $b = 40$ cm, also
$A = a \cdot b = 30 \cdot 40$ cm$^2 = 1200$ cm^2.

Ma 5 ■ 2726
10,00 M − 0,04 M = 9,96 M;
9,96 M − 1,56 M = 8,40 M;
8,40 M : 2 = 4,20 M;
4,20 M + 1,56 M = 5,76 M;
4,20 M = 12 · 0,35 M;
5,76 M = 12 · 0,48 M.
Peter kaufte 12 Flaschen Limonade und 12 Flaschen Bier.

Ma 5 ■ 2727 Im günstigsten Fall erwischt Herr A für die ersten drei Türen jeweils auf Anhieb den passenden Schlüssel. In diesem Fall wären nur 3 Schlüsselproben erforderlich, da der vierte Schlüssel mit Sicherheit zur vierten Tür paßt. Im ungünstigsten Fall passen zur 1. Tür nicht der 1., 2., 3. Schlüssel, dann paßt der 4. Schlüssel (3 Proben); passen zur 2. Tür nicht der 1., 2. Schlüssel, dann paßt der 3. Schlüssel (2 Proben); paßt zur 3. Tür nicht der 1. Schlüssel, dann paßt der zweite Schlüssel (1 Probe). Im ungünstigsten Fall sind also 6 Schlüsselproben zu machen.

Ma 6 ■ 2728 Für die Anzahl der weißen und blauen Bälle gibt es folgende Möglichkeiten:

weiße	blaue	restliche Bälle
1	3	20
2	6	16
3	9	12
4	12	8
5	15	4

Da es doppelt soviel rote wie gelbe Bälle sind, muß die Anzahl der restlichen Bälle durch 3 teilbar sein. Das trifft nur für die Zahl 12 zu. Deshalb sind es 3 weiße, 9 blaue, 8 rote und 4 gelbe Bälle.

Ma 6 ■ 2729 Aus $10a + b = 5 \cdot (a + b)$
folgt $10a + b = 5a + 5b$, $5a = 4b$.
Wegen $1 \leqq a \leqq 9$ und $0 \leqq b \leqq 9$
gilt $a = 4$ und $b = 5$.
Die Zahl heißt 45.

Ma 6 ■ 2730 Aus $A_R = a \cdot b$ und
$A_V = a \cdot b - \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{b}{2} - \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{a}{2}$
$= ab - \frac{ab}{2} = \frac{ab}{2}$ folgt $A_V = 2 \cdot A_R$;
d. h., der Flächeninhalt des Vierecks *BFDE* ist halb so groß wie der des Rechtecks *ABCD*.

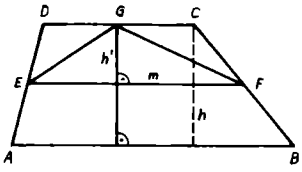
Ma 6 ■ 2731 Wegen $2n + (2n + 2)$
$+ (2n + 4) + (2n + 6) + (2n + 8)$
$= 10n + 20 = 10 \cdot (n + 2)$
ist diese Summe ein Vielfaches von 10, also durch 10 teilbar.

Ma 6 ■ 2732 Der Sohn ist siebenmal so alt wie der Enkel; denn eine Woche hat 7 Tage. Der Großvater ist zwölfmal so alt wie der Enkel; denn ein Jahr hat 12 Monate. Deshalb gilt $x + 7x + 12x = 100$, $20x = 100$, $x = 5$. Der Enkel ist 5, der Sohn 35, der Großvater 60 Jahre alt.

Ma 7 ■ 2733 Angenommen, in dem Ferienheim gibt es x Zwei-, also $(52 - x)$ Vierbettzimmer; dann gilt
$2x + 4 \cdot (52 - x) = 144$,
$2x + 208 - 4x = 144$, $2x = 64$, $x = 32$.
In diesem Ferienheim gibt es 32 Zwei- und 20 Vierbettzimmer.

Ma 7 ■ 2734 Angenommen, vor dem Aus- bzw. Einsteigen an der Haltestelle befanden sich im ersten Wagen n Fahrgäste; dann befanden sich im zweiten Wagen $(n + 3)$ Fahrgäste und im dritten Wagen $(n + 5)$ Fahrgäste. Nach dem Aus- bzw. Einsteigen an der Haltestelle befanden sich im ersten Wagen $\frac{1}{2} \cdot n$ Fahrgäste, im zweiten Wagen $(n - 3)$ Fahrgäste und im dritten Wagen $(n + 8)$ Fahrgäste. Das sind insgesamt $\left(\frac{5}{2} \cdot n + 5\right)$ Fahrgäste.
Nun gilt $\frac{5}{2} \cdot n + 5 = 60$, $\frac{5}{2} \cdot n = 55$,
also $n = 22$.
Vor dem Aus- bzw. Einsteigen an der Haltestelle befanden sich im ersten Wagen 22, im zweiten Wagen 25, im dritten Wagen 27 Fahrgäste.

Ma 7 ■ 2735 Für den Flächeninhalt des Dreiecks *EFG* gilt
$A_1 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot h'$, für den Flächeninhalt des Trapezes gilt $A_2 = m \cdot h$. Wegen $h = 2 \cdot h'$ gilt darum $A_2 = 2 \cdot m \cdot h'$.
Daraus folgt
$A_1 : A_2 = 1 : 4$, also $A_1 = \frac{1}{4} \cdot A_2$.
Der Flächeninhalt des Dreiecks *EFG* beträgt 25 % des Flächeninhalts des Trapezes *ABCD*.

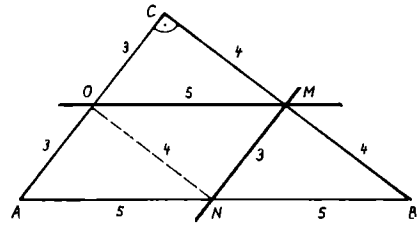


Ma 7 ■ 2736 Angenommen, es waren im ganzen n Nüsse. Dann sollten $(n - 5)$ Nüsse zu gleichen Teilen unter den vier Brüdern aufgeteilt werden. Jeder sollte somit $\frac{1}{4} \cdot (n - 5)$ Nüsse erhalten. Davon sollte der Freund
$4 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{4} \cdot (n - 5) = \frac{1}{10} \cdot (n - 5)$
Nüsse erhalten. Nun gilt
$\frac{n}{5} = \frac{n - 5}{10} + 5$, $2n = n - 5 + 50$, $n = 45$.
Es waren im ganzen 45 Nüsse.

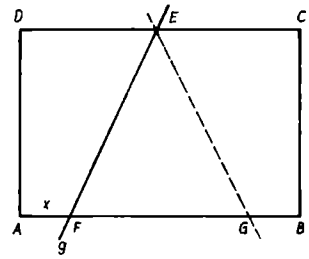
Ma 8 ■ 2737 Angenommen, B(2) wäre wahr. Dann wären A(1) und A(2) falsch. Also ist B(1) wahr. Daraus folgt, daß C(1) falsch, also C(2) wahr ist.
Wenn A(2) wahr wäre, müßte die letzte Grundziffer von n eine 0 oder 5 sein. Das ist wegen C(2) bzw. B(1) nicht möglich. Es folgt: A(1) ist wahr.
Man gelangt durch systematische Überlegungen zu der Erkenntnis, daß die einzige Zahl n, die alle Bedingungen erfüllt, die Zahl 378 ist.

Ma 8 ■ 2738
Es gilt $a < b$, also $a + x = b$.
Aus $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ folgt durch Einsetzen
$\frac{a}{a + x} + \frac{a + x}{a} = \frac{a^2 + (a + x)^2}{a(a + x)}$
$= \frac{a^2 + a^2 + 2ax + x^2}{a(a + x)} = \frac{2a^2 + 2ax + x^2}{a(a + x)}$
$= \frac{2a(a + x) + x^2}{a(a + x)} = 2 + \frac{x^2}{a(a + x)} > 2$.

Ma 8 ■ 2739 Nach einem bekannten Satz gehen die Parallelen durch den Mittelpunkt einer Dreieckseite zu den anderen Dreieckseiten auch durch die Mittelpunkte der anderen Dreieckseiten. Die dabei entstandenen Strecken sind jeweils halb so lang wie die zu ihnen parallelen Dreieckseiten.
Es entstehen also vier kongruente Dreiecke mit jeweils 3 cm, 5 cm und 4 cm langen Seiten. Da diese Dreiecke rechtwinklig sind (pythagoräische Zahlen), beträgt der Flächeninhalt eines dieser Dreiecke $A = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ cm^2; der Flächeninhalt des Parallelogramms beträgt demzufolge 12 cm^2. Der Umfang des entstandenen Parallelogramms beträgt $2 \cdot (3 + 5)$ cm $= 16$ cm.
Skizze nicht maßgerecht!



Ma 8 ■ 2740 $\overline{AF}$ habe die Länge x, also $\overline{FB}$ die Länge $(60 - x)$; dann gilt
$2 \cdot \frac{30 + x}{2} \cdot 40 = \frac{30 + (60 - x)}{2} \cdot 40$,
$40(30 + x) = 20(90 - x)$,
$2(30 + x) = 90 - x$,
$60 + 2x = 90 - x$, $3x = 30$, $x = 10$.
Der Schnittpunkt F der Geraden g mit $\overline{AB}$ ist 10 m von A entfernt.



Ma 9 ■ 2741 Es seien a und $a + 1$ die beiden aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen.

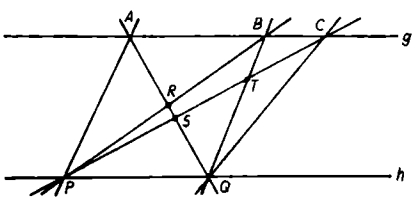
Dann gilt nach Aufgabenstellung:
$a^2 + (a+1)^2 - a(a+1) = a(a+1) + 1$.
Wir formen äquivalent um und erhalten
$a^2 + a^2 + 2a + 1 - a^2 - a = a^2 + a + 1$
bzw. $a^2 + a + 1 = a^2 + a + 1$.
Da wir nur äquivalent umgeformt haben, ist die Aussage bewiesen.

Ma 9 ■ 2742 Es sei x der Preis für einen Apfel in Denare und y der Preis für eine Birne in Denare, dann gilt
(1) $9x - y = 13$ und
(2) $-x + 15y = 6$.
Wir multiplizieren die Gleichung (2) mit 9 und erhalten
(1) $9x - y = 13$
(2)′ $-9x + 135y = 54$ +
(3) $134y = 67$
$y = 0{,}5$ in (1):
(1)′ $9x = 13{,}5$, $x = 1{,}5$.
Ein Apfel kostet 1,5 Denare, eine Birne 0,5 Denare. Die Probe bestätigt die Richtigkeit der Lösung.

Ma 9 ■ 2743 Es seien a und b die Maßzahlen der Längen der Katheten und c die Maßzahl der Länge der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks.
Aus $a^2 + b^2 + c^2 = 2450$ und $a^2 + b^2 = c^2$ folgt $2c^2 = 2450$, $c^2 = 1225$, $c = 35$.
Aus $a + b + c = 84$ und $c = 35$ folgt $a + b = 49$, $b = 49 - a$.
Aus $a^2 + b^2 = 1225$ und $b = 49 - a$ folgt
durch Einsetzen $a^2 + (49 - a)^2 = 1225$,
$a_1 = 28$, $a_2 = 21$.
Die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks sind 21 cm, 28 cm und 35 cm lang.

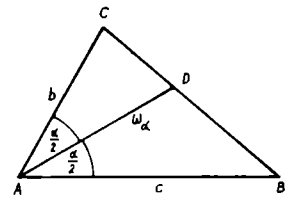
Ma 9 ■ 2744
Man kann folgende Tabelle aufstellen:

Anzahl der Punkte auf g	Anzahl der entstehenden Schnittpunkte
1	$0 = \frac{1 \cdot 0}{2}$
2	$1 = \frac{2 \cdot 1}{2}$
3	$3 = \frac{3 \cdot 2}{2}$
4	$6 = \frac{4 \cdot 3}{2}$
5	$10 = \frac{5 \cdot 4}{2}$
⋮	⋮
n	$\frac{n(n-1)}{2}$
7	$21 = \frac{7 \cdot 6}{2}$
14	$91 = \frac{14 \cdot 13}{2}$



Ma 10/12 ■ 2745 Die natürliche Zahl z läßt sich wie folgt darstellen:
$z = 7 \cdot 10^x + n \quad (x \in N;\ n \in N)$.
Nach Aufgabenstellung soll gelten $7 \cdot 10^x + n = 5(10n + 7)$.
Wir formen äquivalent um und erhalten
$7 \cdot 10^x = 49n + 35$; $n = \frac{7 \cdot 10^x - 35}{49}$.
$x = 5$ ist die kleinste natürliche Zahl, für die n eine natürliche Zahl wird; es ist dann
$n = \frac{700\,000 - 35}{49}$; $n = 14\,285$.
Nun können wir z berechnen:
$z = 7 \cdot 10^5 + 14\,285$; $z = 714\,285$.
z' ist dann 142 857, und
es gilt $142\,857 \cdot 5 = 714\,285$,
d. h. $z = 5 \cdot z'$.

Ma 10/12 ■ 2746 Skizze:

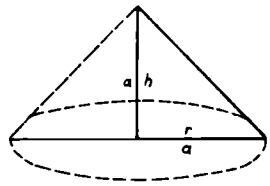


Es gilt $A_{ABD} + A_{ADC} = A_{ABC}$, also
$\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \cdot w_\alpha \cdot c + \frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \cdot w_\alpha \cdot b = \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot b \cdot c$.
Wir formen äquivalent um und erhalten
$\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \cdot w_\alpha(b + c) = \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot b \cdot c$,
$\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \cdot w_\alpha(b + c) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot b \cdot c$
$\left| : \frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \left(\sin\frac{\alpha}{2} \neq 0\right)\right.$
$w_\alpha \cdot (b + c) = 2 \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot b \cdot c$,
$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{w_\alpha \cdot (b + c)}{2 \cdot b \cdot c}$.

Ma 10/12 ■ 2747 Nach Voraussetzung gilt
$a \cdot b \cdot c = a \cdot b \cdot h \cdot 4$, also $c = 4h$.
Dabei ist c die Länge der Hypotenuse, h die Länge der Höhe zur Hypotenuse.
Aus $\sin\alpha = \frac{h}{b} = \frac{c}{4b} = \frac{a}{c}$ folgt $c^2 = 4ab$.
Nach dem Satz des Pythagoras gilt
$a^2 + b^2 = 4ab$, $a^2 - 4ab + b^2 = 0$.
Daraus folgt weiter $a_1 = b(2 + \sqrt{3})$
und $a_2 = b(2 - \sqrt{3})$.
Somit gilt $\tan\alpha_1 = a_1 : b = 2 + \sqrt{3}$
und $\tan\alpha_2 = a_2 : b = 2 - \sqrt{3}$,
also $\alpha_1 = 75°$ und $\beta_1 = 15°$ bzw.
$\alpha_2 = 15°$ und $\beta_2 = 75°$.

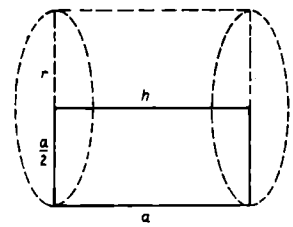
Ma 10/12 ■ 2748

a) Flächeninhalt des Dreiecks: $A = \frac{1}{2}a^2$



Länge einer Kathete: a;
Rotationskörper K_1: gerader Kreiskegel mit $r = a$ und $h = a$;
Das Volumen V_1 beträgt: $V_1 = \frac{1}{3}\pi a^3$;
Vergleich: $V_1 : V_2 = \frac{\pi a^3 \cdot 4}{3\pi \cdot a^3}$; $V_1 : V_2 = 4 : 3$.
Das konstante Verhältnis ist $\frac{4}{3}$.

b) Flächeninhalt des Rechtecks:
$A = a \cdot \frac{1}{2} \cdot a = \frac{1}{2}a^2$;
Länge der Seiten: a bzw. $\frac{1}{2}a$;
Rotationskörper K_2: gerader Kreiszylinder mit $r = \frac{1}{2}a$ und $h = a$;
Volumen V_2: $V_2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 \cdot \pi a$; $V_2 = \frac{1}{4}\pi a^3$



Lösungen zum alpha-Wettbewerb
Heft 1/87

Ma 5 ■ 2750 Aus (2) folgt: Herr Schmidt ist Arzt von Beruf. Aus (3) und (4) folgt: Herr Schmidt wohnt weder in Weimar noch in Eberswalde. Folglich wohnt Herr Schmidt in Suhl. Aus (4) folgt: Herr Siewert wohnt nicht in Eberswalde, also in Weimar. Aus (3) folgt: Herr Siewert ist Dreher von Beruf. Deshalb wohnt Herr Müller in Eberswalde und ist Bäcker von Beruf.

Ma 5 ■ 2751 Der Kraftstoffvorrat der Tankstelle beträgt
$64 \cdot 2400\,\text{l} = 153\,600\,\text{l}$.
Nun gilt $153\,600 : 1600 = 96$.
Der Vorrat würde 96 Tage reichen, wenn täglich nur 1600 Liter verkauft werden.

Ma 5 ■ 2752 Angenommen, Ingrid ist n Jahre alt, Barbara also $2n$ Jahre, der Vater $7n$ Jahre, die Mutter $6n$ Jahre alt. Das sind zusammen $16n$ Jahre. Nun gilt $16 \cdot n = 96$, also $n = 6$. Ingrid ist 6, Barbara 12, die Mutter 36, der Vater 42 Jahre alt.

Ma 5 ■ 2753 a) Der halbe Umfang des Rechtecks beträgt
120 cm : 2 = 60 cm. Deshalb ist eine Seite 20 cm, die andere 40 cm lang.
b) In das Rechteck lassen sich in einer Reihe 5 Plättchen hochkant und darüber noch 3 Plättchen breitkant, insgesamt also 8 Plättchen legen.

Ma 5 ■ 2754
Wegen 32 Pf + 40 Pf = 72 Pf, also
$4 \cdot 8$ Pf + $8 \cdot 5$ Pf = 72 Pf
gehören zu dieser Wandergruppe
4 + 8 = 12 Schüler.

Ma 5 ■ 2755 Angenommen, mit dem Bus fahren x Kinder, also $2x$ Frauen und somit $4x$ Männer; das sind zusammen
$x + 2x + 4x = 7x$ Personen. Nun gilt
$7x = 42$, also $x = 6$.
Mit dem Bus fahren 6 Kinder, 12 Frauen und 24 Männer.

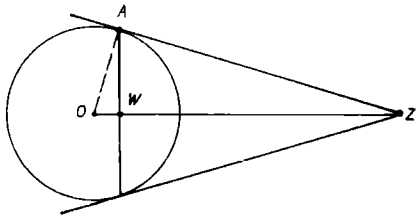
Fortsetzung in Heft 4/87, d. Red.

Alte Vorlesungsmitschrift entdeckt!

In der Bibliothek der Sektion Mathematik der *Karl-Marx-Universität* in Leipzig habe ich vor wenigen Jahren eine Mitschrift einer Vorlesung des bedeutenden Mathematikers *Felix Klein*[1]) gefunden, die einer seiner Assistenten angefertigt hat. Sie ist überschrieben: *Funktionentheorie in geometrischer Behandlungsweise*.

Felix Klein hielt diese interessante Vorlesung in den Jahren 1880/81 an der Leipziger Universität.[2]) In geometrisch-anschaulicher Form und sehr einprägsam werden darin Dinge behandelt, die auf dem Bereich der komplexen Zahlen aufbauen. Eine sehr wichtige und grundlegende Eigenschaft ist hierbei die sogenannte *Transformation durch reziproke Radien*. Zwei Punkte der Ebene, die durch diese Transformation einander zugeordnet sind, nennt man auch *konjugierte Punkte*. Darunter versteht man die Abbildung von Punkten der Ebene aufeinander, die spiegelbildlich bezüglich der Peripherie des Einheitskreises liegen. Die beiden einander zugeordneten Punkte z und w liegen dabei (siehe Bild 1) auf einem vom Kreismittelpunkt 0 (Koordinatenursprung) ausgehenden Strahl und es gilt:

Bild 1



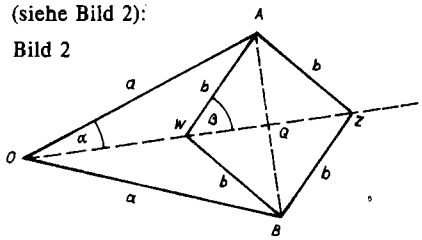
$\overline{0w} = \frac{1}{\overline{0z}}$ oder eben $\overline{0w}\,\overline{0z} = 1$. Sind der Kreis und der Punkt vorgegeben, so konstruiert man das zu z gehörige w auf der Geraden durch 0 und z wie folgt: Man lege von z aus die beiden möglichen Tangenten an den Kreis. Die Gerade durch die beiden Berührungspunkte (genannt *Polare zu z*) schneidet die Gerade durch 0 und z in w.

Aufgabe 1

Beweise, daß $\overline{0w}\,\overline{0z} = 1$!

In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts war an den Hochschulen und Universitäten die Herstellung und Benutzung mathematischer Modelle sehr verbreitet. Beispielsweise konstruierte im Jahre 1864 der Techniker und Mathematiker *Peaucellier* eine Apparatur, die es in gewissen Grenzen gestattet, die konjugierten Punkte mechanisch zu bestimmen. Man nannte dieses Gerät den *Inversor von Peaucellier*. In Kleins Vorlesung ist er etwa so beschrieben (siehe Bild 2):

Bild 2



„Um einen festen Punkt 0 sind die beiden gleichlangen Arme $\overline{0A}$ und $\overline{0B}$ drehbar. In A und B sind mittels Scharnieren je zwei neue gleichlange Stäbe befestigt, die wiederum in w und z mit Scharnieren verbunden sind. Bewegt man jetzt $\overline{0A}$ *und* $\overline{0B}$ um 0, so sind w und z immer zwei konjugierte Punkte."

w und z liegen tatsächlich stets spiegelbildlich bezüglich der Peripherie eines Kreises mit dem Mittelpunkt 0. Allerdings ist dieser Kreis nur dann der Einheitskreis, wenn die Differenz $a^2 - b^2$ gleich 1 ist.

Aufgabe 2

Man zeige, daß auch bezüglich Bild 2 gilt $\overline{0w}\,\overline{0z} = a^2 - b^2 (= 1)$!

(Hinweis: Drücke $\overline{0w}$ *und* $\overline{0z}$ mittels Winkelfunktionen aus und benutze einen entsprechenden Ausdruck für $\overline{AQ}$! Ferner braucht man noch die bekannte Beziehung $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.)

Nachfolgend noch zwei Aufgaben, die inhaltlich eng mit der 1880/81 gehaltenen Vorlesung von Felix Klein *Funktionentheorie in geometrischer Behandlungsweise* stehen. (Siehe Band 7 der Reihe „TEUBNER-Archiv zur Mathematik".) Gegenstand der Aufgabe 3 ist die *logarithmische Spirale*. Diese Kurve war ein grundlegendes Beispiel einer gemeinsamen wissenschaftlichen Arbeit der Mathematiker *Felix Klein* (1849 bis 1925) und *Sophus Lie* (1842 bis 1899), die sie in den siebziger Jahren des 19. Jahrhunderts schrieben. Für beide war es inhaltlich ein entscheidender Ausgangspunkt für ihre bedeutendsten mathematischen Leistungen.

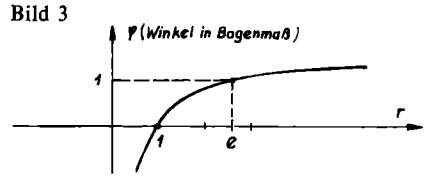
Aufgabe 3

Für eine feste (konstante) reelle Zahl k wird durch die Gleichung

$$\varphi = k \cdot \log_e r$$

($e = 2{,}718\ldots$) eine sogenannte logarithmische Spirale definiert. Wir zeichnen einmal für $k = 1$ die zur Gleichung gehörige Kurve in ein r, φ-Koordinatensystem und erhalten (Bild 3). Warum wohl heißt die Kurve *Spirale*, obwohl die oben abgebildete Kurve nicht spiralförmig aussieht?

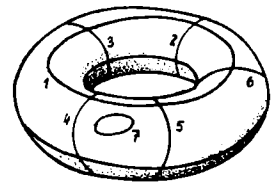
Bild 3



Aufgabe 4

Wir betrachten auf gekrümmten Flächen im Raum geschlossene Kurven ohne Doppelpunkt. Dabei soll nicht zwischen Kurven unterschieden werden, die man durch Verschiebung und Verzerrung (ohne die Kurve zu zerreißen) ineinander überführen kann (zur Deckung bringen kann). So ist z. B. auf der Torusfläche (Bild 4) zwischen den Kurven 2 bis 6 nicht zu unterscheiden.

Bild 4



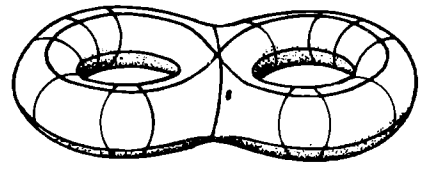
Wohl aber ist 7 oder auch 1 eine andere geschlossene Kurve. Von besonderer Bedeutung sind dabei diejenigen Kurven, die man auf der Fläche nicht auf einen Punkt zusammenziehen kann. Dies ist etwa bei Kurve 1 und bei Kurve 2 der Fall, Kurve 7 hingegen läßt sich auf einen Punkt zusammenziehen. Und beim Torus gibt es in der Tat nur zwei solcher Kurven.

Wieviel solche geschlossene Kurven, die man nicht auf einen Punkt zusammenziehen kann, existieren

a) auf der Kugel;

b) auf der Brezel (Bild 5)?

Bild 5



Überprüfe insbesondere das die Brezel umschlingende Band 8! *F. König*

Immer weigere ich mich, irgend etwas deswegen für wahr zu halten, weil Sachverständige es lehren oder auch, weil alle es annehmen. Jede Erkenntnis muß ich mir selbst erarbeiten. Alles muß ich neu durchdenken, von Grund auf, ohne Vorurteile.

Albert Einstein

[1]) Ausführliches zu Leben und Werk von Felix Klein findest du in dem Buch *Felix Klein* von R. Tobies und F. König, das als Band 50 der Reihe *Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner* beim Teubner-Verlag Leipzig erschienen ist.

[2]) Diese Vorlesung wird in Buchform als Band 7 der Reihe *TEUBNER-ARCHIV zur Mathematik* beim Teubner-Verlag Leipzig voraussichtlich 1987 erscheinen.

Knifflige Glückwünsche

Anfang 1987 war die *alpha* 20 Jahre alt, ihr Chefredakteur erreichte das 65. Lebensjahr (11. 1.). Zahlreiche Freunde haben diese beiden Geburtstage zum Anlaß genommen, an gemeinsame Wege und Ziele zu erinnern, und ihre guten Wünsche auf vielerlei Art zum Ausdruck gebracht. Die Freude darüber verbindet, verpflichtet und regt zum Nachdenken an.
Auf diesem Wege sei allen herzlicher Dank gesagt.

Drei originelle Glückwünsche sollen die 54 000 *alpha*-Leser zum Knobeln anregen.

▲1▲ Die aus Hölzchen gelegte ALPHA-Figur ist durch Umlegen von a) 4 Hölzchen, b) 5 Hölzchen, c) 6 Hölzchen und d) 7 Hölzchen so abzuändern, daß jeweils 7 kongruente Quadrate entstehen.

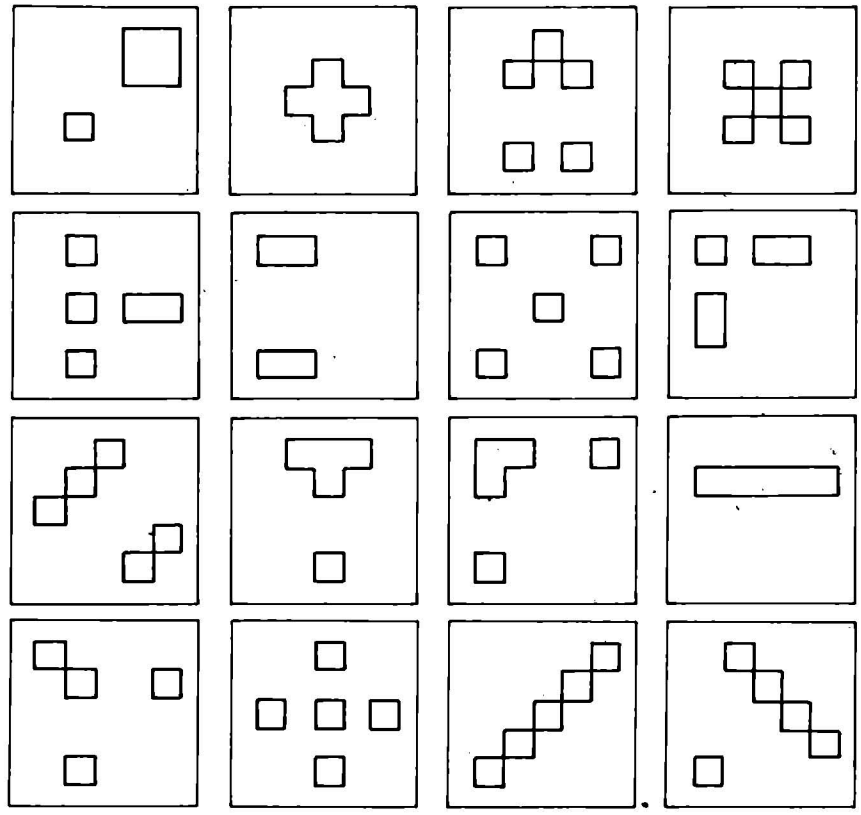
▲2▲ Ermittle alle nichttrivialen Lösungen des abgebildeten ALPHA-Gleichungssystems, d. h., bestimme alle Zahlen A, L, P und H (alle ungleich Null), die das Gleichungssystem erfüllen!

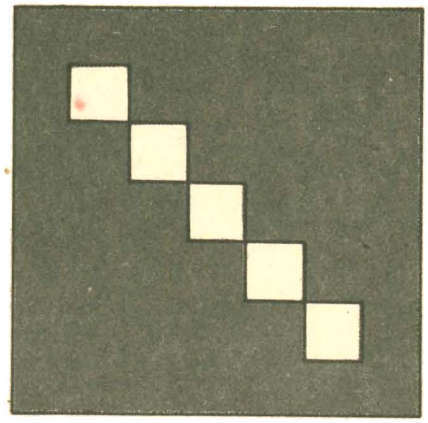
(1) $A + L + P - H - A = A$
(2) $A + L \cdot P - H - A = L$
(3) $A \cdot L \cdot P - H + A = P$
(4) $A + L \cdot P - H + A = H$
(5) $A - L - P + H + A = A$

Glückwunsch aus der „Leipziger Volkszeitung", Autor: Dr. R. Mildner, Karl-Marx-Universität Leipzig

▲3▲ Zum 65. Geburtstag des Chefredakteurs der *alpha* sandte die langjährige Leserin, Frau *Susanne Noßke* aus Borna, ein magisches Geburtstagsquadrat:

7	14	18	21	5
16	25	2	9	13
4	8	11	20	22
15	17	24	3	6
23	1	10	12	19





Finde mit Hilfe von 16 Schablonen (sie sind stark verkleinert wiedergegeben) die 120 verschiedenen Zusammenstellungen von 5 Zahlen, deren Summe jeweils 65 beträgt!

Am 1. März 1987 übergab Oberstudienrat J. Lehmann, seit 13. Dezember 1945 im Schuldienst, seit 20 Jahren Chefredakteur der *alpha*, sein Amt an die Leipziger Dipl.-Lehrerin Gabriele Liebau (im Bild rechts). J. Lehmann wird weiterhin im Redaktionskollegium mitarbeiten und sicher seine reichen Erfahrungen auch als Rentner (11. 1. 1987) in Schrift und Wort noch viele Jahre weitergeben. Sein besonderer Dank gilt dem Redaktionskollegium und der umsichtigen Redaktionssekretärin Rosemarie Schubert (im Bild links), die 15 Jahre lang fleißig wirkte, insbesondere bei der Erstellung der oft nicht einfachen Manuskripte, dem umfangreichen Briefwechsel und bei der technischen Bewältigung der umfassenden organisatorisch-technischen Arbeiten für den *alpha*-Wettbewerb. Wir wünschen der Nachfolgerin für ihre neue Tätigkeit viel Freude und Erfolg.

Symmetrische Figuren

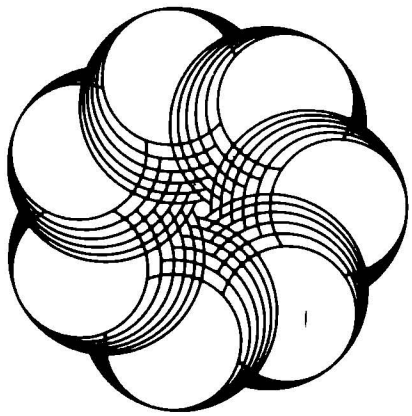


Bild 2

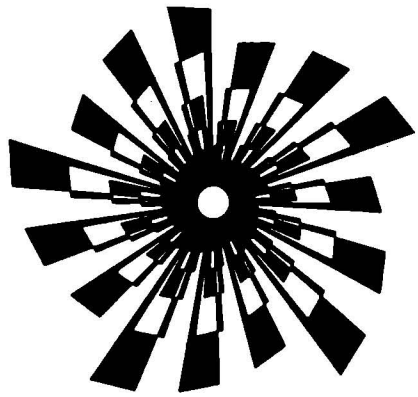


Bild 3

Eine Figur heißt drehsymmetrisch bezüglich eines Punktes M, wenn es Drehungen um M gibt, die die Figur auf sich abbilden. Gibt es einschließlich der identischen n derartige Drehungen um M, so heißt n der Grad der Drehsymmetrie (bezüglich M) (siehe auch *alpha* 4/85).

a) Bestimme den jeweiligen Grad der Drehsymmetrie!

b) Welche Figuren besitzen Symmetrieachsen?

c) Man kann sich das Muster im Bild 1 zu einer unbegrenzt fortgesetzten Parkettierung der Ebene vorstellen. Treten dann noch andere Drehsymmetriezentren mit möglicherweise sogar anderen Drehsymmetriepunkt auf?

Bild 1

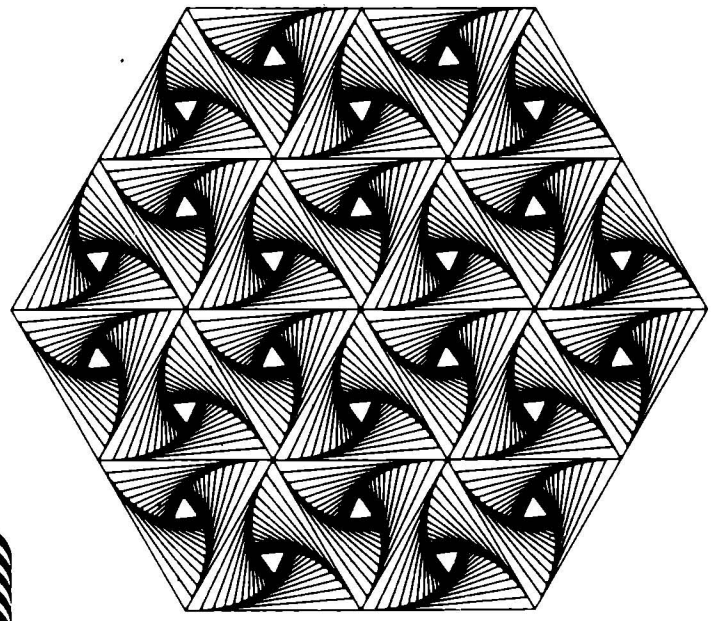


Bild 4

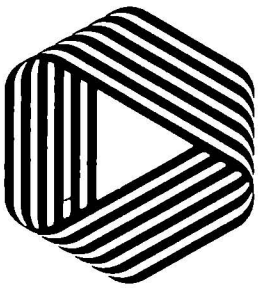


Bild 5

Bild 6

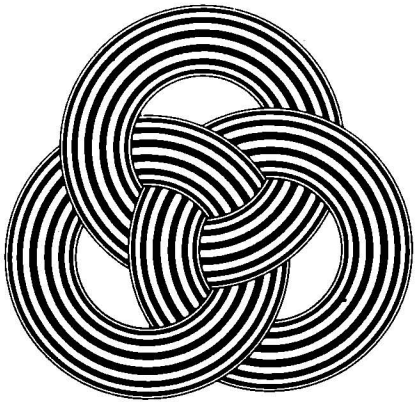


Bild 7

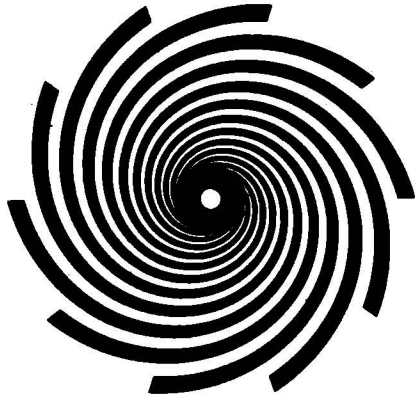
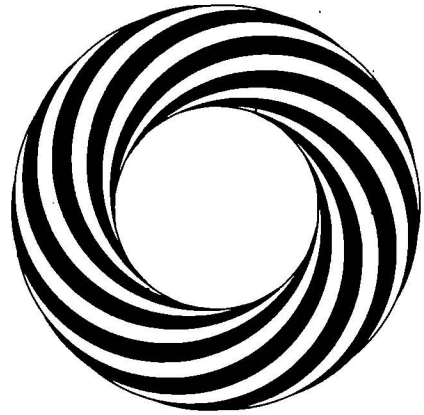


Bild 8



ISSN 002-6395 · alpha · Berlin · 21 (1987) 3 · Seiten 49 bis 72